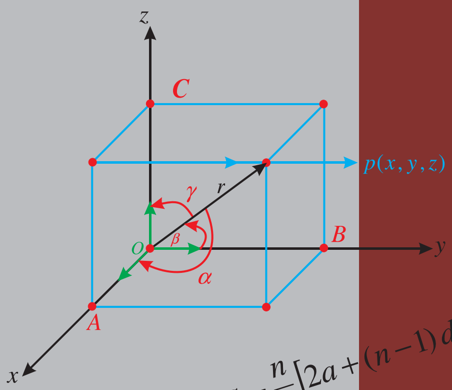
د پوهنې وزارت

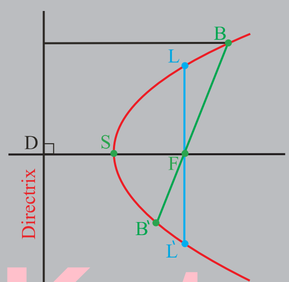
د تعلیمي نصاب د پراختیا، د ښوونکو د روزنې او د ساینس
د مرکز معینیت
د تعلیمي نصاب د پراختیا او درسي کتابونو د تالیف لوی ریاست

ریاضي ۱۱

ټولګی

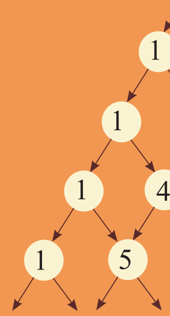


$$S=\frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$$



ریاضي ۱۱ ټولګی

د چاپ کال ۱۳۹



Ketabton.com

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پوهنې وزارت

د تعليمي نصاب د پراختيا، د ښوونکو د روزنې او

د ساينس د مرکز معينيت

د تعليمي نصاب د پراختيا او درسي کتابونو د تاليف

لوی رياست

رياضي ۱۱ ټولګی

د چاپ کال: ۱۳۹۰ هـ. ش.

ليکوالان:

- پوهنمل طلاباز حبيب زی د پوهنې وزارت د درسي کتابونو د تأليف د پروژې غړی
- مهربه ناصر د پوهنې وزارت د درسي کتابونو د تأليف د پروژې غړې
- پوهندوی خالقداد فيروزکوهي د پوهنې وزارت د درسي کتابونو د تأليف د پروژې غړی
- د مؤلف مرستيال محمد خالد ستوری(ځدراڼ) د تعليمي نصاب د پراختيا او درسي کتابونو د تأليف علمي غړی

ژباړونکي:

- سرمؤلف نظام الدين د تعليمي نصاب د پراختيا او درسي کتابونو د تأليف علمي غړی
- پوهنمل طلاباز حبيب زی د پوهنې وزارت د درسي کتابونو د تأليف د پروژې غړی
- د مؤلف مرستيال محمد خالد ستوری(ځدراڼ) د تعليمي نصاب د پراختيا او درسي کتابونو د تأليف علمي غړی
- مختار نويد د تعليمي نصاب د پراختيا او درسي کتابونو د تأليف علمي غړی

علمي او مسلکي ايډيټ:

- ډاکټر عطاء الله واحديار د پوهنې وزارت ستر سلاکار او د نشراتو رئيس.
- حبيب الله راحل د پوهنې وزارت سلاکار د تعليمي نصاب د پراختيا په لوی رياست کې.
- د مؤلف مرستيال محمد خالد ستوری(ځدراڼ) د تعليمي نصاب د پراختيا او درسي کتابونو د تأليف علمي غړی

د ژبې ايډيټ:

- محمد قدوس ذکوخيل

ديني، سياسي او کلتوري کميټه:

- مولوي عبدالوکيل د اسلامي تعليماتو علمي غړی.
- حبيب الله راحل د پوهنې وزارت سلاکار د تعليمي نصاب د پراختيا په لوی رياست کې.

د څارنې کميټه:

- دکتور اسدالله محقق د تعليمي نصاب د پراختيا، د ښوونکو د روزنې او د ساينس مرکز معين
- دکتور شېر علي ظريفي د تعليمي نصاب د پراختيا د پروژې مسؤول
- د سرمؤلف مرستيال عبدالظاهر ګلستاني د تعليمي نصاب د پراختيا او درسي کتابونو د تاليف لوی رئيس

طرح او ډيزاين:

وليد ((نويد)) نسيمي

(c) ketabton.com: The Digital Library

بسم الله الرحمن الرحیم

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

ملي سرود

دا وطن افغانستان دی ‏ دا عزت د هر افغان دی
کور د سولې کور د تورې ‏ هر بچی یې قهرمان دی
دا وطن د ټولو کور دی ‏ د بلوڅو د ازبکو
د پښتون او هزاره وو ‏ د ترکمنو د تاجکو
ورسره عرب، ګوجر دي ‏ پامیریان، نورستانیان
براهوي دي، قزلباش دي ‏ هم ایماق، هم پشه یان
دا هیواد به تل ځلیږي ‏ لکه لمر پر شنه آسمان
په سینه کې د آسیا به ‏ لکه زړه وي جاویدان
نوم د حق مودی رهبر ‏ وایو الله اکبر وایو الله اکبر

بسم الله الرحمن الرحیم

د پوهنې د وزیر پیغام

گرانو ښوونکو او زده کوونکو،

ښوونه او روزنه د هر هېواد د پراختیا او پرمختګ بنسټ جوړوي. تعلیمي نصاب د ښوونې او روزنې مهم توکی دی چې د معاصر علمي پرمختګ او ټولنې د اړتیاوو له مخې رامنځته کېږي. څرګنده ده چې علمي پرمختګ او ټولنیزې اړتیاوې تل د بدلون په حال کې وي. له دې امله لازمه ده چې تعلیمي نصاب هم علمي او رغنده انکشاف ومومي. البته نه ښایي چې تعلیمي نصاب د سیاسي بدلونونو او د اشخاصو د نظریو او هیلو تابع شي.

دا کتاب چې نن ستاسو په لاس کې دی، پر همدې ارزښتونو چمتو او ترتیب شوی دی. علمي ګټورې موضوعګانې پکې زیاتې شوې دي. د زده کړې په بهیر کې د زده کوونکو فعال ساتل د تدریسي پلان برخه ګرځېدلې ده.

هیله من یم دا کتاب له لارښوونو او تعلیمي پلان سره سم د فعالې زده کړې د میتودونو د کارولو له لارې تدریس شي او د زده کوونکو میندې او پلرونه هم د خپلو لوڼو او زامنو په باکیفیته ښوونه او روزنه کې پرله پسې ګډه مرسته وکړي چې د پوهنې د نظام هیلې ترسره شي او زده کوونکو او هېواد ته ښې بریاوې ور په برخه کړي.

پر دې ټکي پوره باور لرم چې زموږ ګران ښوونکي د تعلیمي نصاب په رغنده پلي کولو کې خپل مسؤولیت په ریښتوني توګه سرته رسوي.

د پوهنې وزارت تل زیار کاږي چې د پوهنې تعلیمي نصاب د اسلام د سپېڅلي دین له بنسټونو، د وطن دوستی د پاک حس په ساتلو او علمي معیارونو سره سم د ټولنې د څرګندو اړتیاوو له مخې پراختیا ومومي.

په دې ډګر کې د هېواد له ټولو علمي شخصیتونو، د ښوونې او روزنې له پوهانو او د زده کوونکو له میندو او پلرونو څخه هیله لرم چې د خپلو نظریو او رغنده وړاندیزونو له لارې زموږ له مؤلفانو سره د درسي کتابونو په لا ښه تألیف کې مرسته وکړي.

له ټولو هغو پوهانو څخه چې د دې کتاب په چمتو کولو او ترتیب کې یې مرسته کړې، له ملي او نړیوالو درنو مؤسسو، او نورو ملګرو هېوادونو څخه چې د نوي تعلیمي نصاب په چمتو کولو او تدوین او د درسي کتابونو په چاپ او وېش کې یې مرسته کړې ده، مننه او درناوی کوم.

ومن الله التوفیق

فاروق وردګ

د افغانستان د اسلامي جمهوریت د پوهنې وزیر

(c) ketabton.com: The Digital Library

لړليک

سرليک	مخونه
لومړی څپرکی مخروطي مقاطع	
مخروطي مقاطع	۳
بيضوي	۵
د بيضوي معادله	۹
د بيضوي معادله چې مرکز يې يو کيفي ټکی وي	۱۳
پارابولا	۱۷
د پارابولا معادله	۱۹
د هغې پارابولا معياري معادله چې راس يې يو اختياري ټکي وي	۲۳
هايپربولا	۲۷
د هايپربولا معادله	۲۹
د هغې هايپربولا معادله چې مرکز يې يو اختياري ټکی وي	۳۳
ديوې کرښې مو قعيت نظرمخروطي مقاطعو ته	۳۷
د څپرکي مهم ټکي	۴۱
د څپرکي پوښتنې	۴۴
دويم څپرکی مثلثات	
د ساين قانون	۴۹
د کوساين قانون	۵۵
د ټانجنټ قانون	۵۹
مثلثاتي مطابقتونه	٦۳
مثلثاتي معادلې	٦۹
دويمه درجه مثلثاتي معادلې	۷۵
د دوه مجهوله مثلثاتي معادلو يا سېستمونوحل	۷۹
د څپرکي مهم ټکي	۸۹
د څپرکي پوښتنې	۹۱

(c) ketabton.com: The Digital Library

دریم څپرکی فضايي هندسه

- اساسي مفاهيم او اکسيومونه ۹۵
- په درې بُعدي فضا کې کرښه او مستوي ۹۷
- په فضا کې موازي مستقيمونه ۱۰۱
- په فضا کې د دوو مستقيمو کرښو تر منځ زاويه ۱۰۳
- په فضا کې موازي مستقيمونه او موازي مستوي‌گانې ۱۰۵
- په فضا کې متعامدې مستقيمې کرښې او مستوي‌گانې ۱۰۷
- په فضا کې موازي مستوي‌گانې ۱۰۹
- د څپرکي مهم ټکي ۱۱۱
- د څپرکي پوښتنې ۱۱۳

څلورم څپرکی ترادفونه

- ترادفونه ۱۱۷
- حسابي ترادف ۱۱۹
- هندسي ترادف ۱۲۷
- د ترادفونو قسمي مجموعه ۱۳۳
- د حسابي ترادف د n لومړيو حدونو قسمي مجموعه ۱۳۷
- د يوه هندسي ترادف د n حدونو د جمعې حاصل ۱۴۱
- لايتناهي هندسي سلسلې ۱۴۳
- د څلورم څپرکي مهم ټکي ۱۴۷
- د څپرکي پوښتنې ۱۴۹

پنځم څپرکی لوگاريتم

- اکسپوننشيل تابع گانې ۱۵۳
- لوگاريتم ۱۵۷
- لوگاريتمي تابع گانې ۱۵۹
- معمولي لوگاريتم ۱۶۳
- د لوگاريتم قوانين ۱۶۷
- د لوگاريتم د قاعدې اړول په بله قاعده ۱۷۱
- کرکتيرستيک او مانتيس ۱۷۵
- د لوگاريتم جدول ۱۷۹
- انتي لوگاريتم ۱۸۳
- خطي انترپولېشن ۱۸۵
- د لوگاريتمي او اکسپوننشيل معادلو حل ۱۸۹
- درياضيکی عمليوپه سرته رسولوکې له لوگاريتم څخه کار اخيستنه ۱۹۳
- د څپرکي مهم ټکي ۱۹۷
- د څپرکي پوښتنې ۱۹۹

(c) ketabton.com: The Digital Library

شپږم څپرکی متریکسونه

- متریکسونه ۲۰۵
- د متریکسونو ډولونه ۲۰۹
- د متریکسونو جمع او تفریق ۲۱۳
- په متریکس کې د سکالر ضرب ۲۱۵
- د دوو متریکسونو ضرب ۲۱۷
- د یوه متریکس ترانسپوز متریکس ۲۲۱
- دیترمېنانت ۲۲۳
- د دیترمېنانت خاصیتونه ۲۲۷
- د 2×2 مرتبې متریکسونو ضربي معکوس ۲۲۹
- له معکوس متریکس څخه په کاراخېستنې د خطي معادلو د سیستم حل ۲۳۱
- د خطي معادلو د سیستم حل د کرامر په طریقه ۲۳۵
- د معادلو د سیستم حل د ګوس(Gouse) په طریقه ۲۳۹
- د شپږم څپرکي مهم ټکي ۲۴۳
- د څپرکي پوښتنې ۲۴۵

اووم څپرکی وکتورونه

- د وضیعه کمیتونو په قایم سیستم کې وکتورونه ۲۴۹
- د دوو ټکو ترمنځ واټن او منځنی ټکی ۲۵۱
- وکتورونه په سطح او فضا کې ۲۵۳
- په درې بعدي فضا کې د ټکي مختصات ۲۵۵
- د یوه وکتور د جهت زاویې او کوساینونه ۲۵۹
- د دوو وکتورونو د سکالري ضرب حاصل ۲۶۱
- د وکتوري ضرب حاصل ۲۶۵
- د څپرکي مهم ټکي ۲۷۵
- د څپرکي پوښتنې ۲۷۷

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

اتم څپرکی احصایه

- دبدلونو ضریب ۲۸۱
- په نورمال منحني کې پراګنده ګي(تېتوالی) ۲۸۳
- دنورمال توزیع دډول شاخصونه ۲۸۵
- څو متحوله ټولنې ۲۸۷
- د پراګنده ګي ګراف ۲۸۹
- پیوستون او دپیوستون ضریب ۲۹۱
- د خطي میلان معادله ۲۹۵
- د اتم څپرکي مهم ټکي ۲۹۹
- د څپرکي پوښتنې ۳۰۱

نهم څپرکی احتمالات

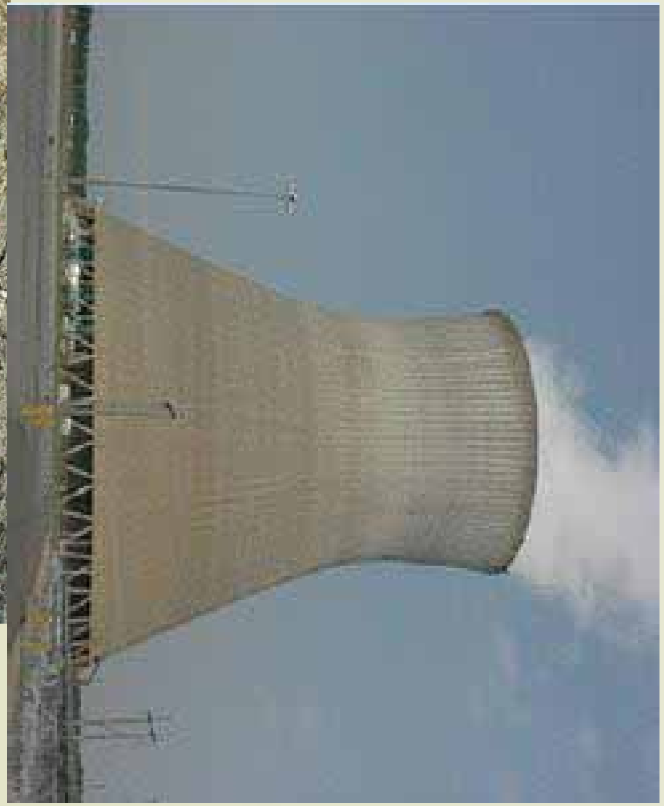
- پرموټېشن یا ترتیب ۳۰۵
- ترکیب یا کمبنیشن ۳۰۹
- ترکیب ۳۱۱
- تبدیل ۳۱۳
- د بینوم قضیه ۳۱۷
- دوه جمله یي احتمال ۳۱۹
- د څپرکي مهم ټکي ۳۲۳
- د څپرکي پوښتنې ۳۲۴

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی څپرکی

مخروطي مقاطع

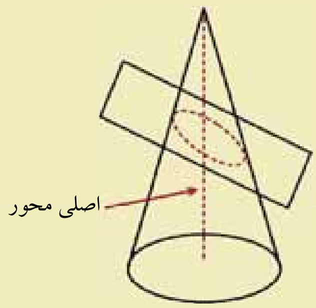
(c) ketabton.com: The Digital Library



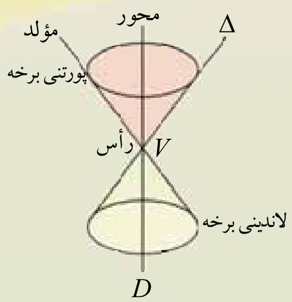
مخروطي مقاطع

sections of Conic

آيا ويلاى شئ چې د يوې مستوي او مخروط د تقاطع له ګډ فصل څخه څه ډول منحنۍ ګانې په لاس راځي.



د مخروطي مقاطعو تعريف



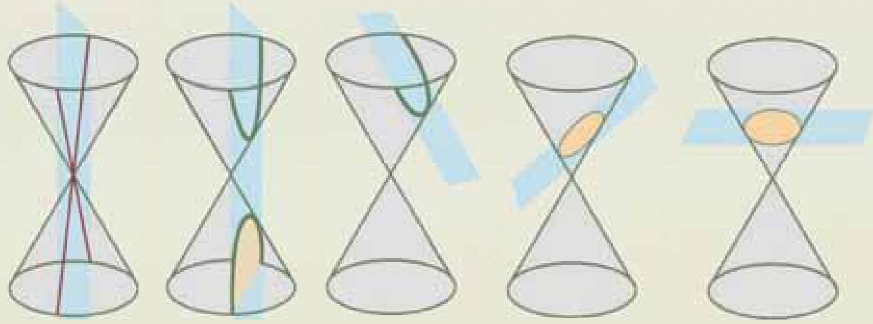
د Δ او D دوه مستقيم خطونه داسې په پام کې نيسو چې يو بل د V په ټکي کې قطع (پرې) کړي. که چيرې د D خط ثابت او د Δ خط د هغه په چاپيرو څرخيږي، له دې څرخولو څخه په فضاکې دوه شکلونه چې يو يې د V (ټکي) پورته او بل يې د V د ټکي کښته خواته جوړيږي. هر يو يې مخروط دی، لکه مخامخ شکل د D مستقيم خط د مخروط محور او د Δ مستقيم خط د هغه مولد دی. د يوې مستوي په واسطه د يوه مخروط قطع کول مختلف حالتونه لري چې مختلفې منحني ګانې منځ ته راځي چې مخروطي مقاطع بلل کيږي. په راتلونکې کې به هر يو په تفصيل سره ولوستل شي.

فعاليت

- يو مخروط د مستوي په واسطه داسې قطع کړئ چې مستوي د مخروط په اصلي محور بانديې عمود او يا له قاعدو سره موازي وي، ويلاى شئ، ګډ فصل يې څه ډول منحني ده؟
- يو مخروط د يوې مستوي په واسطه داسې قطع کړئ چې د مستوي او مخروط له اصلي محور سره يې زاويه قايمه نه وي (نسبت اصلي محور ته مايل)، ګډ فصل يې څه ډول منحني ده؟
- يو مخروط د يوې مستوي په واسطه داسې قطع کړئ چې مستوي د مخروط له مولد سره موازي وي، تقاطع يا ګډ فصل يې څه ډول منحني ده؟
- دوه مخروطه چې راسونه يې سر په سر (منطبق) او قاعدې يې موازي وي، د يوې متسوي په واسطه چې اصلي محور سره موازي وي قطع کړئ. ويلاى شئ چې له ګډ فصل څخه يې څه ډول منحني په لاس راځي؟
- يو مخروط د يوې مستوي په واسطه داسې قطع کړئ چې مستوي د مخروط اصلي محور په بر کې ولري، تقاطع يا ګډ فصل يې څه ډول هندسي شکل دی؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

له پورته فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راځي:



پایله:

- که چېرې مستوي یو مخروط داسې قطع کړي چې مستوي د مخروط په اصلي محور عمود او یا موازي له قاعدو سره وي، نوګډ فصل یې یوه دایره ده.
- که چېرې مستوي مخروط داسې قطع کړي چې مستوي اومخروط له اصلي محور سره یې زاویه قایمه نه وي، (مایل) لاس ته راغلي شکل الپس (Ellipse) یا بیضوي ده.
- که چېرې یوه مستوي یو مخروط داسې قطع کړي وي چې اصلي محور ته موازي او هغه په برکې ونه لري، نو په دې حالت کې د هغوی له ګډ فصل څخه پارابولا (Parabola) په لاس راځي.
- که چېرې یوې مستوي دوه سر په سر یا څوکه په څوکه مخروطونه چې اصلي محور ته موازي وي قطع کړې وي، له ګډ فصل څخه یې هایپربولا (Hyperbola) په لاس راځي.
- که چېرې یوه مستوي اصلي محور په برکې ولري، نوګډ فصل یې له دوو متقاطع کرښو څخه عبارت دی. چې هر یو یې په پورته شکلونو کې ښودل شوي دي.

پوښتنې

1- د پورتني شکل په پام کې نیولو سره، د مستوي او مخروط هغه متقاطع حالت رسم کړئ چې ګډ فصل یې یوه دایره او یا یو ټکی وي.

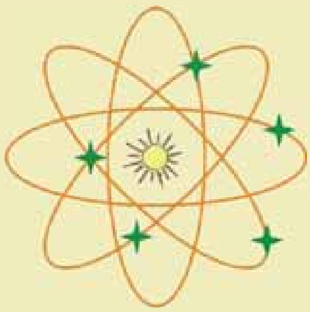
2- که چېرې یوه مستوي دوه څوکه په څوکه مخروطونه داسې قطع کړي چې د دواړو مخروطونو اصلي محورونه په برکې ولري، ګډ فصل یې څه ډول هندسي شکل دی؟

3- د یوې مستوي او مخروط ګډ فصل په کوم حالت کې یوه کرښه ده؟ په دې حالت کې شکل رسم کړئ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

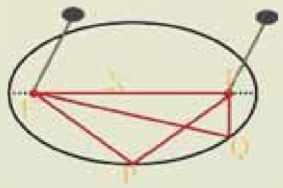
بیضــوي
Ellipse



د سیارو حرکت د لمر په شاوخوا یا شمسي نظام څه ډول منحني ګانې جوړوي؟

فعالیت

- د یوې سپینې کاغذې پاڼې پر مخ دوه ستنې په یوه معین او ثابت واټن سره د F او F′ په دوو ټکوکې وټومبئ.
- د یو تار خوکې چې اوږدوالی یې د $\overline{FF'} = 2c$ څخه زیات دي، په دواړو ستنو کې وتړئ، د لاندې شکل په پام کې نیولو سره یو پنسل د تار په غاړه د ستنو په شاوخوا وخرخوئ.



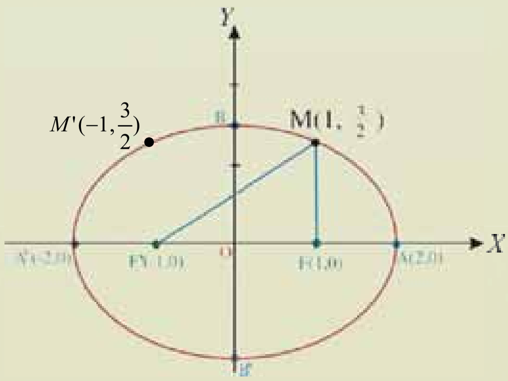
- هغه شکل چې د یوې بشپړې دورې په لاس راځي څه ډول منحني ده؟

له پورته فعالیت څخه لاندې پایله بیانولای شو:

پایله: هغه شکل چې ددوو ستنو تر منځ د معین او ثابت واټن په اندازه د تار په غاړه د پنسل له خرخولو څخه په لاس راځي، د الپس منحني بلل کیږي، د F او F′ ټکي د الپس د محراقونو په نامه یادیږي.

فعالیت

- په مخامخ شکل کې د F، F′، M، M′، A′ او A ټکو مختصات درکړل شوي، د دوو ټکو ترمنځ د فاصلې د پیداکولو فارمول څخه په کار اخیستنې د $|MF'|$، $|MF|$ او $|AA'|$ اوږدوالی پیدا کړی او بیا د $|AA'|$ او $|MF'| + |MF|$ اوږدوالی یو له بل سره پرتله کړئ.



- د $M'(-1,\frac{3}{2})$ ټکی د الپس په محیط باندې په نښه او همدارنګه د M′ ټکی هم په پام کې ونیسئ.
- وروسته د $|M F'| + |M F|$ او $|M' F| + |M' F'|$ قیمتونه یو له بله سره پرتله کړئ.

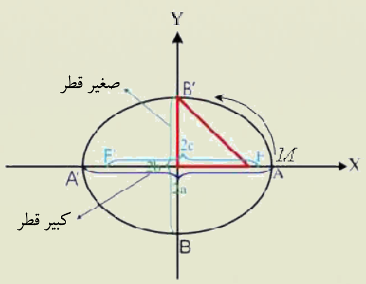
له پورتني فعالیت څخه لاندې تعریف بیانولای شو:

تعریف: په یوه مستوي کې د ټولو هغو ټکو هندسي محل چې له دوو ځای پر ځای ټکو څخه یې د فاصلو د جمعې حاصل تل مساوي یا ثابت اوږدوالی ولري، بیضوي بلل کیږي، مستقر ټکی چې په F او F′ توږو ښودل شوي، د الپس محراقونه او A', A د الپس راسونه چې $AA'=2a$ ثابت اوږدوالی دی.

$$|M' F| + |M' F'| = 2a \quad , \quad |M F| + |M F| = 2a$$

$$|M' F| + |M' F'| = |M F| + |M F'| = 2a$$

د الپس قطرونه او راسونه:



الپس بې شمېره قطرونه لري، لوی یې کبیر قطر یا اوږد قطر چې له محراقونو څخه تیریږي او بیضوي په دوو ټکو د A', A کې قطع کوي، د کبیر قطر یا Major axis په نامه او کوچنی قطر یې د FF′ د نیمایي په ټکي عمود دی چې د صغیر قطر یا Minor axis په نامه یادیږي. د A, A' او B, B' ټکی د الپس راسونه دي، کبیر قطر په A, A' چې اوږدوالی یې یعنې $AA'=2a$ او صغیر قطر په B, B' چې اوږدوالی یې $BB'=2b$ دی، ښودل کیږي.

یادداښت

که چېرې د M ټکی د صغیر قطر په راسونو یعنې په B یا B' باندې منطبق شي، په دې صورت کې له پورته شکل څخه لیکلای شو: $\overline{MF} = \overline{MF'}$

له بلې خوا پوهیږو چې:

$$|MF| + |MF'| = 2a$$

$$2\overline{MF} = 2a$$

$$\overline{MF} = a$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د محراقونو او قطرونو ترمنځ رابطه:

د محراقونو او قطرونو ترمنځ اړيکي د فيثاغورث د قضيې له مخې ليکلای شو:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

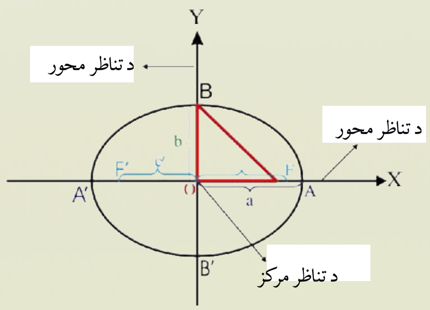
$$c^2 = a^2 - b^2$$

$$c = \pm\sqrt{a^2 - b^2}$$

د الپس تناظري مرکز او تناظري محور:

الپس دوه تناظري محورونه لري چې يو يې لوی محور د $A\ A'$ پر قطر باندې منطبق دی چې محراقي محور هم بلل کيږي او بل يې کوچنی تناظري محور چې د $B\ B'$ پر قطر باندې منطبق دی.

د دې دواړو محورونو د تقاطع ټکی د الپس تناظري مرکز بلل کيږي او په (O) سره ښودل کيږي.



$$\overline{OA} = \overline{OA'} = a$$

$$\overline{OB} = \overline{OB'} = b$$

$$\overline{OF} = \overline{OF'} = c$$

عن المرکزيت (**Eccentricity**): د يوې بيضوي شکل د عن المرکزيت په واسطه ټاکل کيږي عن المرکزيت د محراق او لوی محور له نسبت څخه عبارت دی، د بيضوي عن المرکزيت په e سره ښودل کيږي او د $e = \frac{c}{a}$ په شکل تعريف شوی دی.

$$e = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a}$$

پوهيږو چې په هره بيضوي کې $0 < c < a$ دی، نو $0 < e < 1$ کېږي. د بيضوي د عن المرکزيت او قطرونو ترمنځ داسې رابطه شته $e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$

زده‌کوونکي دې د قطرونو او محورونو ترمنځ د رابطې په کارونې سره نوموړې رابطه په لاس راوړي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

يادونه: كه چيرې د e قيمت صفر ته نژدې شي، محراقونه يې د مركز خوا ته نژدې كيږي. دلته بيضوي تقريباً دايروي شكل غوره كوي. كه چيرې e د 1 عدد ته نژدې شي، په دې صورت كې محراقونه د قطرونو د راسونو خواته نژدې كيږي چې يو اوږد شكل غوره كوي، د بيضوي په ډيرو مسايلو كې د عن المركزيت څخه كار اخيستل كيږي.

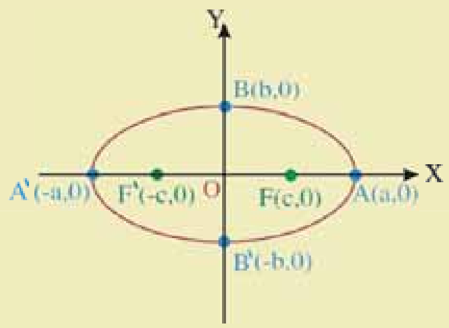
پوښتنې

1 – كه چيرې په بيضوي كې د كبير قطر او صغير قطر اوږدوالى يو له بل سره مساوي وي، څه ډول منحنى په لاس راځي؟

2 – كه چيرې د بيضوي عن المركزيت $\frac{2}{3}$ وي، په دې صورت كې د كبير قطر او صغير قطر نسبت پيدا كړئ.

د بیضوي معادله

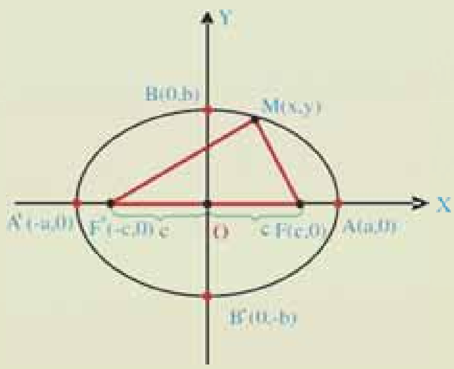
آیا د هغې بیضوي معادله چې مرکز یې د وضعیه کمیاتو په مبدا کې وي، پیدا کولای شئ؟



فعالیت

- داسې بیضوي رسم کړی چې مرکز یې د وضعیه کمیاتو په مبدا کې وي او محراقونه یې د x د محور په مخ وټاکئ.
- د $M(x, y)$ یو اختیاري ټکی، د بیضوي پر محیط باندې وټاکئ او هغه له محراقونو سره ونښلوئ.
- د بیضوي د تعریف رابطه نظر د M ټکی ته ولیکئ.
- د M او F د ټکو ترمنځ واټن او همدارنګه د M او F' د ټکو ترمنځ واټن پیدا کړئ او د دوو ټکو ترمنځ د فاصلې د پیداکولو له فارمول څخه په کار اخیستنې د بیضوي معادله په لاس راوړئ.

ثبوت لومړی حالت: موږ لرو:



$$|MF| + |MF'| = 2a$$

$$\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2} + \sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2} + \sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a$$

یا: $$\sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a - \sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

د دواړو خواوو له مربع کولو وروسته لیکو چې:

$$(x-c)^2+y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2+y^2} + (x+c)^2 + y^2$$

$$x^2-2cx+c^2+y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2+y^2} + x^2+2cx+c^2+y^2$$

$$x^2-2cx+c^2+y^2-4a^2-x^2-2cx-c^2-y^2 = -4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

$$-4cx-4a^2 = -4a\sqrt{(x+c)^2+y^2} \quad / \div(-4)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

یا $a^2+cx=a\sqrt{(x+c)^2+y^2}$

د پورته رابطې دواړه خواوې بیا مربع کوو او لیکو:

$$(a^2+cx)^2=(a\sqrt{(x+c)^2+y^2})^2$$
$$a^4+2a^2cx+c^2x^2=a^2[(x+c)^2+y^2]$$
$$a^4+2a^2cx+c^2x^2=a^2(x^2+2cx+c^2+y^2)$$
$$a^4+2a^2cx+c^2x^2=a^2x^2+2a^2cx+a^2c^2+a^2y^2$$
$$a^4+c^2x^2-a^2x^2-a^2c^2-a^2y^2=0$$
$$a^2x^2+a^2c^2+a^2y^2-c^2x^2-a^4=0$$
$$x^2(a^2-c^2)+a^2y^2=a^4-a^2c^2$$
$$x^2(a^2-c^2)+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$$

 څرنګه چې $a^2=b^2+c^2$ دي، نو $b^2=a^2-c^2$ کیږي، په دې صورت کې پورته معادله په لاندې توګه لیکو:

$$x^2b^2+a^2y^2=a^2b^2 \quad / \div a^2b^2$$
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad , \qquad a>b$$

پورتنۍ معادله د داسې بیضوي معادله را ښیي چې د محراقونو وضعیه کمیات یې $(C,0)$, $(-C,0)$ او د x پر محور باندې واقع دي.

ثبوت دویم حالت: که چیرې د بیضوي محراقونه د y په محور باندې وي، په دې صورت کې د بیضوي معادله عبارت ده له: $\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1$

زده کوونکي دې بیضوي رسم، د اوږد قطر، لنډ قطر او محراقونو مختصات دې ولیکي.

لومړی مثال: که چیرې د y پر محور باندې د بیضوي د اوږد قطر اوږدوالی یعنې $|AA'|=6$ او لنډ قطر اوږدوالی یعنې $|BB'|=4$ واحده وي، د بیضوي معادله پیدا کړئ.

حل:

$$|AA'|=2a=6$$
$$2a=6 \quad \Rightarrow \quad a=3$$
$$|BB'|=2b=4 \quad \Rightarrow \quad b=2$$

اوس د a او b قیمتونه په عمومي معادله کې ایږدو او معادله لیکو: $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم مثال: که چیرې د یوې بیضوي د اوږده قطر اوږدوالی $|AA'|=10$ او لنډ قطر اوږدوالی یې $|BB'|=8$ واحده وي، د بیضوي د اوږده او لنډ قطرونو د راسونو او محراقونو مختصات، محراقي فاصله، د عن‌المرکزیت قیمت پیدا او ګراف یې رسم کړئ.

حل: پوهېږو چې:

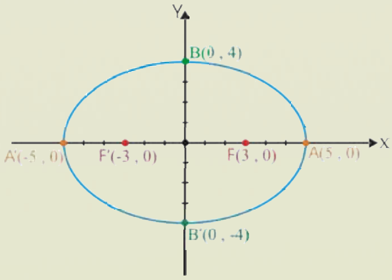
$$|AA'|=2a=10 \Rightarrow a=\pm5$$
$$|BB'|=2b=8 \Rightarrow b=\pm4$$

لیدل کیږي چې $a>b$ دی، نو اوږد قطر یې د x پر محور باندې پروت دی، د اوږده قطر د راسونو مختصات له $A(5,0)$ او $A'(-5,0)$ څخه عبارت دي.

د لنډ قطر د راسونو مختصات له: $B(0,4)$ او $B'(0,-4)$ څخه عبارت دي.

د محراقونو د مختصاتو د پیدا کولو لپاره د c قیمتونه پیدا کوو:

$$a^2=b^2+c^2$$
$$\Rightarrow (5)^2=(4)^2+c^2$$
$$c^2=a^2-b^2 \Rightarrow 5^2-4^2=25-16=9$$
$$c=\pm3$$



د محراقونو مختصات له $F(3,0)$ او $F'(-3,0)$ څخه عبارت دي.

عن‌المرکزیت: $e=\frac{c}{a}=\frac{3}{5}$ دی

دریم مثال: د داسې بیضوي ګراف رسم کړئ چې معادله یې $4x^2+y^2=16$ وي، د راسونو او محراقونو مختصات یې پیدا کړئ.

حل: د معادلې دواړه خواوې په 16 وېشو:

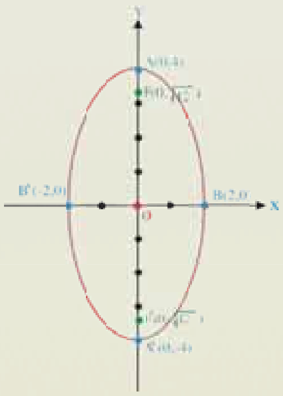
$$\frac{4x^2}{16}+\frac{y^2}{16}=\frac{16}{16}$$
$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}=1$$

د راسونو مختصات:

$$a^2=16 \Rightarrow a=\pm4 \Rightarrow A(0،4) ، A'(0 ، -4)$$
$$b^2=4 \Rightarrow b=\pm2 \Rightarrow B(2،0) ، B'(-2 ، 0)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د محراقونو مختصات:



$c^2 = a^2 - b^2$
$c^2 = (4)^2 - (2)^2$
$c^2 = 16 - 4 = 12 \Rightarrow c = \pm\sqrt{12}$
$F(0,\sqrt{12}),\ F'(0,-\sqrt{12})$

څلورم مثال: د بیضوي د محیط پر مخ د یوه ټکي مختصات $P(2,4)$ او د محراقونو مختصات یې له $F'(-3\sqrt{2},0), F(3\sqrt{2},0)$ څخه عبارت دي. د اوږده او لنډ قطر اوږدوالی یې پیدا کړئ.

حل: د بیضوي د تعریف له مخې لرو چې: $|PF| + |PF'| = 2a$

د PF او PF′ د فاصلو اوږدوالی پیدا کوو $|PF| = \sqrt{(2+3\sqrt{2})^2 + 4^2}$ او $|PF'| = \sqrt{(2-3\sqrt{2})^2 + 4^2}$

پورتني قیمتونه د تعریف په رابطه کې ایږدو:

$$\sqrt{(2+3\sqrt{2})^2 + 4^2} + \sqrt{(2-3\sqrt{2})^2 + 4^2} = 2a$$
$$\Rightarrow \sqrt{4+12\sqrt{2}+18+16} + \sqrt{4-12\sqrt{2}+18+16} = 2a$$
$$\Rightarrow \left(\sqrt{38+12\sqrt{2}} + \sqrt{38-12\sqrt{2}}\right)^2 = (2a)^2$$
$$38+12\sqrt{2} + 2\sqrt{(38+12\sqrt{2})(38-12\sqrt{2}} + 38 - 12\sqrt{2} = 4a^2$$
$$76 + 2\sqrt{1444-288} = 4a^2 \Rightarrow 76 + 2\cdot 34 = 4a^2$$
$$\Rightarrow 76+68 = 4a^2 \Rightarrow 144 = 4a^2 \;/\div 4$$
$$\Rightarrow 36 = a^2 \Rightarrow a = \pm 6$$
$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 36 = b^2 = 18 \Rightarrow b = \pm 3\sqrt{2}$$
$$2a = 2\cdot 6 = 12$$
$$2b = 2\cdot 3\sqrt{2} = 6\cdot\sqrt{2}$$

پوښتني

1 – لاندې معادلې په پام کې ونیسئ د اوږده قطر اوږدوالی د راسونو او محراقونو ترمنځ فاصله پیدا کړئ.

a) $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1$ b) $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$

2 – د هغې الپس معادله ولیکئ چې عن‌المرکزیت یې 0.8 وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د هغې بیضوي معادله چې مرکز یې یو اختیاري ټکی وي

ایا دداسې بیضوي معادله پیداکولای شو چې مرکز یې د وضعیه کمیاتو په مبدا کې نه وي؟

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

$$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$$

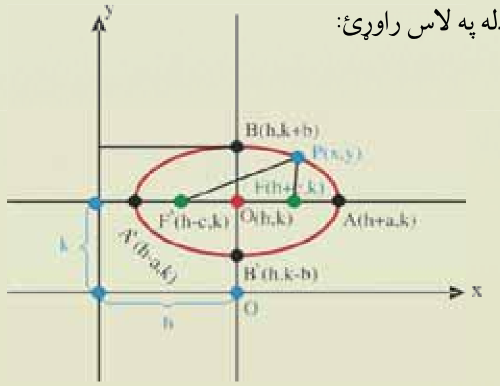
فعالیت

یوه بیضوي د وضعیه کمیاتو په سیستم کې رسم کړئ چې مرکز یې (h,k) او لوی قطر یې د x له محور سره موازي وي.

د $P(x,y)$ یو ټکی د بیضوي په محیط باندې په پام کې ونیسي او هغه له F او F' سره ونښلوئ.

د بیضوي د مرکز مختصات (h,k) په پام کې نیولو سره د محراقونو F او F'، راسونو A , A' او B, B' وضعیه کمیات په شکل کې وښیاست.

د دوو ټکو تر منځ د فاصلې د پیداکولو له فارمول څخه په کار اخیستنې او د بیضوي د تعریف د رابطې په کارونې سره معادله په لاس راوړئ:



$$|\overline{PF}|+|\overline{PF'}|=2a$$

$$|\overline{PF}|=\sqrt{[x-(h+c)]^2+(y-k)^2}$$

$$|\overline{PF'}|=\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2}$$

$$\sqrt{[x-(h+c)]^2+(y-k)^2}+\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2}=2a$$

یا:

$$\sqrt{[(x-h)-c]^2+(y-k)^2}=2a-\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2}$$

دواړه خواوې مربع او له اختصار وروسته لاندې رابطه په لاس راځي:

$$[x-(h+c)]^2+(y-k)^2=4a^2-4a\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2}+[(x-h)+c]^2+(y-k)^2$$

$$x^2-2x(h+c)+(h+c)^2=4a^2-4a\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2}+[(x-h)+c]^2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x^2-2hx-2cx+h^2+2hc+c^2=4a^2-4a\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2}+x^2-2hx+h^2+2cx-2hc+c^2$$
$$4hc-4cx=4(a^2-a\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2})$$
$$hc-cx=a^2-a\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2}$$
$$c(h-x)-a^2=-a\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2} \quad /\div(-1)$$
$$c(x-h)+a^2=a\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2}$$

دواړه خواوې مربع او ليکو:

$$c^2(h-x)^2+2ca^2(x-h)+a^4=a^2[\{x-(h+c)\}^2+(y-k)^2]$$
$$c^2(x-h)^2+2ca^2(x-h)+a^4=a^2[(x-h)+c]^2+a^2(y-k)^2$$
$$c^2(x-h)^2+2ca^2(x-h)+a^4=a^2(x-h)^2+2a^2c(x-h)+a^2c^2+a^2(y-k)^2$$
$$c^2(x-h)^2-a^2(x-h)^2-a^2(y-k)^2=a^2c^2-a^4$$
$$(x-h)^2(c^2-a^2)-a^2(y-k)^2=a^2(c^2-a^2)$$
$$-(x-h)^2(a^2-c^2)-a^2(y-k)^2=-a^2(a^2-c^2)$$

څرنگه چې په بيضوي کې $a^2-c^2=b^2$ کېږي، نو ليکلای شو:

$$-b^2(x-h)^2-a^2(y-k)^2=-a^2b^2 \quad / \div(-a^2b^2)$$
$$=\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

لومړی مثال: د يوې بيضوي د مرکز، محراقونو او اوږد قطر د انجامونو مختصات چې معادله يې $\frac{(x-6)^2}{36}+\frac{(y+4)^2}{16}=1$ ده، پيدا او گراف يې رسم کړئ.

حل: څرنگه چې نوموړې معادله عمومي شکل لري، له دې امله د مرکز مختصات يې $(6,-4)$ ده، لوی محور يې د x له محور سره موازي دی.

$$a^2=36\Rightarrow a=\pm6$$
$$b^2=16\Rightarrow b=\pm4$$
$$c=\pm\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{36-16}=\sqrt{20}=\pm2\sqrt{5}$$

د A او A′ مختصات عبارت دي له:

$$A(h+a\ ,\ k)=A(6+6،\ -4)=A(12،\ -4)$$
$$A'(h-a\ ,k)=A'(6-6،\ -4)=A'(0،\ -4)=A'(0،\ -4)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

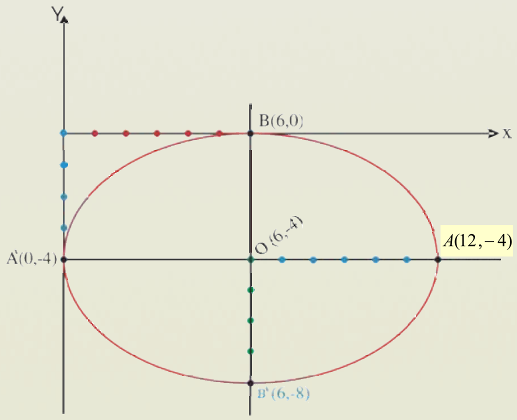
د B او B' مختصات عبارت دي له:

$B(h,k+b)=B(6,-4+4)=B(6,0)$

$B'(h,k-b)=B'(6,-4-4)=B'(6,-8)$

$F(h+c,k)=F(h+c,k)=(6+2\sqrt{5},-4)$

$F'(h-c,k)=F'(h-c,k)=(6-2\sqrt{5},-4)$



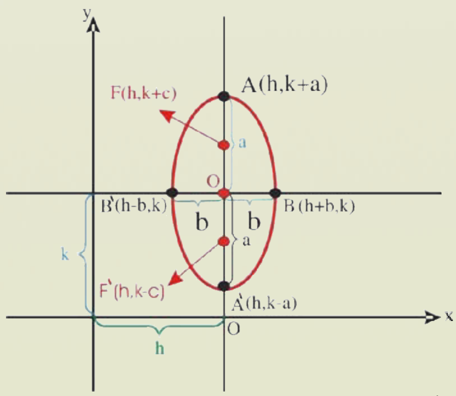
دویم حالت: که چېرې محراقي محور د y له محور سره موازي وي، په دې حالت کې معادله لاندې بڼه غوره کوي.

$$\frac{(y-k)^2}{a^2}+\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$$

$A(h\,,k+a)\,,\ A'(h,k-a)$

$B'(h-b\,,k)\,,\ B(h+b,k)$

$F'(h,k-c)\,,\ F(h\,,k+c)$



د محراقونو او راسونو مختصات دې زده کوونکو ته دنده ورکړل شي.

یادونه: د $Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ معادله هم د بیضوي عمومي معادله ده، په داسې حال کې چې $A\neq C$ او هم علامه وي، یعنې $C>0\ ,\ A>0$ یا $C<0\ ,\ A<0$

دویم مثال: د $16x^2+25y^2-64x+50y-311=0$ معادله د بیضوي د معیاري معادلې په ډول ولیکئ.

حل: د مربع له بشپړولو څخه په کار اخیستنې سره یې په معیاري ډول بدلوو .

$16x^2+25y^2-64x+50y=311$

$16(x^2-4x)+25(y^2+2y)=311$

$16(x^2-4x+4-4)+25(y^2+2y+1-1)=311$

$16[(x-2)^2-4]+25[(y+1)^2-1]=311$

$16(x-2)^2-64+25(y+1)^2-25=311$

$=16(x-2)^2+25(y+1)^2=311+64+25$

$16(x-2)^2+25(y+1)^2=400$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پورته معادلې دواړه خواوې په 400 وېشو: $\frac{(x-2)^2}{25}+\frac{(y+1)^2}{16}=1$

پورتنی معادله دداسې بیضوي معادله ده چې مرکز یې د $(2,-1)$ ټکی دی.

دریم مثال: د بیضوي لاندې معادله د معیاري معادلې په ډول ولیکئ.

$$x^2+9y^2+4x-18y-23=0$$

حل : لومړی معادله ترتیب بیا د مربع له بشپړولو څخه په کار اخیستنې سره هغه په معیاري شکل بدلوو:

$$x^2+4x+9(y^2-2y)-23=0$$

$$x^2+4x+(2)^2-(2)^2+9[y^2-2y+(1)^2-(1)^2]-23=0$$

$$\underbrace{x^2+4x+(2)^2}_{\text{کامله مربع}}-(2)^2+9\underbrace{\left[y^2-2y+(1)^2\right]}_{\text{کامله مربع}}-(1)^2-23=0$$

$$(x+2)^2-4+9(y-1)^2-9-23=0$$

$$(x+2)^2+9(y-1)^2-36=0$$

$$(x+2)^2+9(y-1)^2=36$$

د مساوات دواړه خواوې په 36 وېشو:

$$\frac{(x+2)^2}{36}+\frac{9(y-1)^2}{36}=\frac{36}{36}$$

$$\frac{(x+2)^2}{36}+\frac{(y-1)^2}{4}=1$$

پوښتنې

1. د بیضوي په لاندې معادلو کې د مرکز، محراقونو او راسونو مختصات پیدا کړئ.

$a)\quad \frac{(x+3)^2}{2}+\frac{(y-1)^2}{9}=1 \qquad b)\quad x^2+2y^2+4x-12y+20=0$

2. د داسې بیضوي معادله ولیکئ چې مرکز یې د $(0,2)$ ټکی، محراق یې د $(2,6)$ ټکی او د $(4,6)$ له ټکي څخه تیره شي.

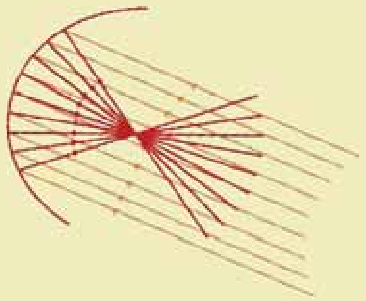
3. د بیضوي لاندې معادلې د معیاري معادلو په ډول ولیکئ، د مرکز، راسونو، محراقونو وضعیه کمیات او همدارنګه د اوږده قطر، لنډ قطر اوږدوالی، عن المرکزیت پیدا او ګرافونه یې رسم کړئ.

$a)\quad 9x^2+25y^2-36x-150y+36=0 \qquad b)\quad 16x^2+4y^2+96x-8y+84=0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

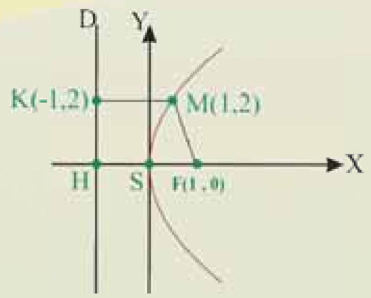
پارابـولا

Parabola



کـه چهـرې د لمـر وړانګـې پـه يـوې معقـرې عدسـيې ولـوېږي، انعکاسي(منعکسه) وړانګې يې له کوم ټکي څخه تيرېږي؟ دغه ټکی څه نوميږي او د عدسيې ګډ فصل له يوې متقاطع مستوي سره چې د عدسيې محور په برکې ولري. څه ډول منحني ده؟

فعاليت

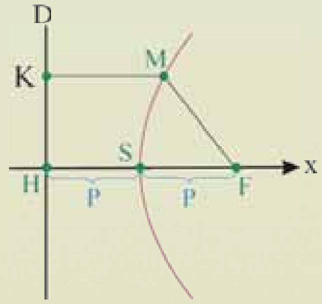


د فعاليت د سرته رسولو لپاره مخامخ شکل په پام کې ونيسئ په شکل کې د M، F او K ټکو مختصات درکړل شوي دي، د دوو ټکو ترمنځ د فاصلې د پيداکولو له فارمول څخه په کار اخيستنې سره د FM او KM هر يو اوږدوالی پيدا او يو له بل سره يې پرتله کړئ.

له پورته فعاليت څخه لاندې تعريف بيانولای شو:

تعريف: په يوه مستوي کې د ټولو هغو ټکو هندسي محل چې د يوه ثابت يا مستقر ټکي او يوه ثابت مستقيم خط څخه په مساوي فاصله کې پراته وي، پارابولا بلل کيږي. دغه ثابت يا مستقر ټکی د پارابولا محراق (F) او د D ثابت مستقيم خط ته د پارابولا موجه (Directrix) وايي $\overline{MF} = \overline{MK}$

هغه مستقيم خط چې د پارابولا له محراق او راس څخه تير او د موجه (D) پر مستقيم خط عمود وي، د پارابولا د محراقي يا تناظري محور په نامه يادېږي.

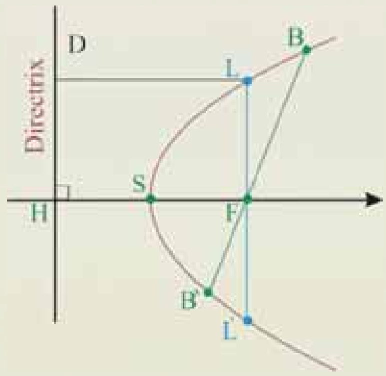


د تناظري محور او منحني ګډ ټکی د پارابولا راس او په S سره ښودل کيږي.

آيا ويلای شئ چې S د $\overline{FH}$ نيمايي ټکی دی، ولې؟

په پارابولا کې عن المرکزيت $(e = 1)$ دی ولې؟

(c) ketabton.com: The Digital Library



د پارابولا وترونه:

هغه مستقیم خط چې د پارابولا دوه ټکی سره ونښلوي، د پارابولا وتر بلل کیږي. په شکل کې $\overline{BB'}$ چې د پارابولا له محراق څخه تیر شوي دی، محراقي وتر دی او LL' چې د محراق په ټکي کې د تناظر پر محور باندې عمود دی عمودي وتر بلل کېږي.

پوښتنې

د پارابولا د محراقي وتر اوږدوالی د $\overline{FH}$ څو برابره دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پارابولا معادله

د هغې پارابولا د معادلې د پیداکولو لپاره چې راس یې د وضعیه کمیاتو په مبداکې وي، لاندې فعالیت په پام کې ونیسئ.

$$y^2 = 4px$$
$$x^2 = 4py$$

فعالیت

- د وضعیه کمیاتو قایم سیستم په پام کې ونیسئ او د y له محور سره د هادي موازي خط رسم کړئ.
- د پارابولا منحني داسې رسم کړئ چې راس یې د وضعیه کمیاتو په مبداکې وي.
- د x پر محور باندې محراق داسې وټاکئ چې فاصله یې له مبدا څخه د هادي خط له فاصلې سره مساوي وي.
- په منحني باندې د $M(x,y)$ ټکی وټاکئ، هغه له F سره ونښلوئ او د M له ټکي څخه یو عمود پر هادي(موجه خط) باندې رسم او د تقاطع ټکي ته یې K ووایاست.
- د F او K د ټکو مختصات ولیکئ.

اوس د دوو ټکو ترمنځ د فاصلې پیداکولو له فارمول څخه په کار اخیستنې سره د F, M او K, M ټکو ترمنځ فاصله پیداکړئ او بیا د پارابولا معادله د $|MF| = |MK|$ له رابطې څخه په لاس راوړئ.

ثبوت لومړی حالت: پوهیږو چې:

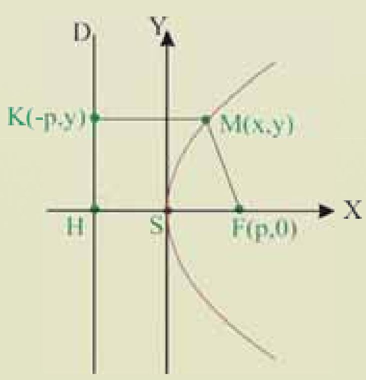
$$|MF| = \sqrt{(p-x)^2 + y^2}$$
$$|MK| = x + p$$

اوس د $|MF|$ او $|MK|$ قیمتونه د $|MF| = |MK|$ په رابطه کې ایږدو:

$$\sqrt{(p-x)^2 + y^2} = x + p$$

د پورته معادلې دواړه خواوې مربع کوو:

$$(\sqrt{y^2 + (p-x)^2})^2 = (x+p)^2$$
$$y^2 + (p-x)^2 = (x+p)^2$$
$$y^2 + p^2 - 2px + x^2 = x^2 + 2px + p^2$$
$$\Rightarrow y^2 = 4px$$

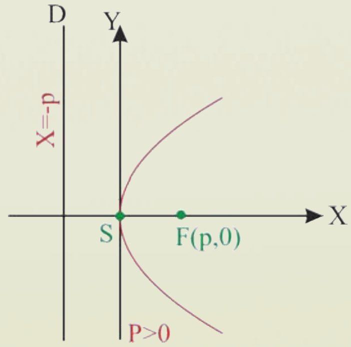


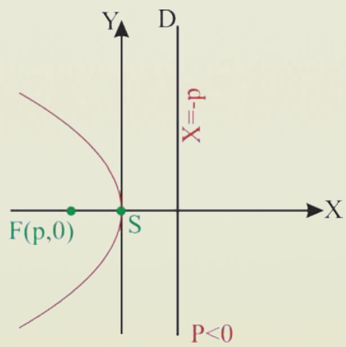
(c) ketabton.com: The Digital Library

وروستی رابطه دداسې پارابولا معادله راښيي چې راس يې د وضعيه کمياتو په مبداکې $F(p,0)$ د پارابولا محراق د x پر محور باندې پروت دی او موجه خط يې $x=-p$ دی.

که چيرې $p>0$ وي، د پارابولا خوله په افقي محور ښي خواته خلاصه ده.

که چيرې $p<0$ وي، د پارابولا خوله په افقي محور باندې کيڼې خواته خلاصه ده.



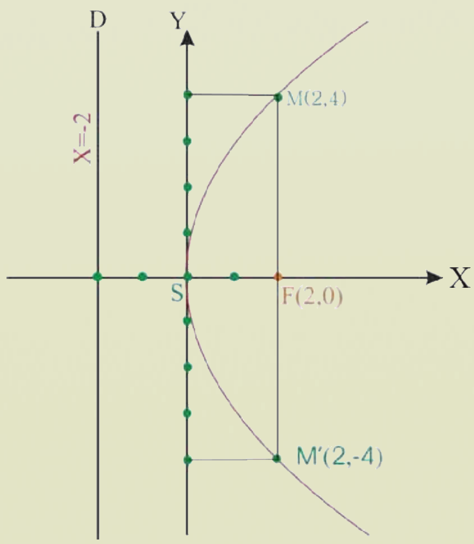


لومړی مثال: د داسې پارابولا معادله په لاس راوړئ چې د محراق مختصات يې $F(2,0)$، د هادي مستقيم خط معادله $x=-2$ سره وي او همدارنگه د عمودي وتر د انجامونو مختصات يې پيدا کړئ.

حل: د محراق مختصات چې د x په محور باندې دي، وبلاې شو $P=2>0$، له دې امله د پارابولا خوله ښي خواته خلاصه ده.

لرو چې: $y^2=4px$

اوس د $P=2$ قيمت په معادله کې ايږدو:



$$y^2=4\cdot 2x \quad \Rightarrow \quad y^2=8x$$

که چيرې د $x=2$ قيمت د $y^2=8x$ په معادله کې کېږدو، په دې صورت کې د پارابولا دوه ټکي چې د عمودي وتر انجامونه دي په لاس راځي، هغه عبارت دي له:

$$y^2=8\cdot 2 \quad \Rightarrow \quad y^2=16$$

$$y=\pm 4$$

$$M(2,4) \quad , \quad M'(2,-4)$$

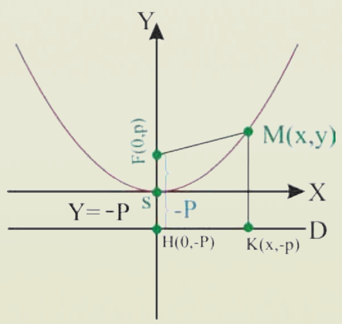
د پورته معلوماتو له مخې $y^2=8x$ پارابولا گراف رسم کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دويم حالت: که چيرې د پارابولا محراق (F) د y پر محور باندې پروت او د D مستقيم خط د x له محور سره موازي وي، د پارابولا معياري معادله پيدا کړئ.

حل: د پورته غوښتنې لپاره په پارابولا باندې يوټکی، لکه: $M(x,y)$ په پام کې نيسو، د پارابولا د تعريف له مخې ليکلای شو:

ثبوت:

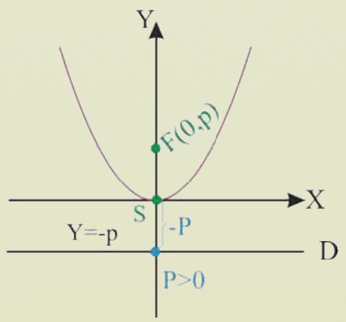


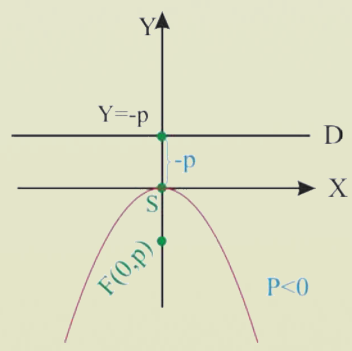
$$|\overline{MF}| = |MK|$$
$$|\overline{MF}| = \sqrt{(x-0)^2+(y-p)^2} = \sqrt{x^2+(y-p)^2}$$
$$|\overline{MK}| = \sqrt{(x-x)^2+[(y-(-p)]^2} = \sqrt{(y+p)^2}$$
$$\Rightarrow (\sqrt{x^2+(y-p)^2})^2 = (\sqrt{(y+p)})^2$$
$$\Rightarrow x^2+(y-p)^2 = (y+p)^2$$
$$\Rightarrow x^2+y^2-2py+p^2 = y^2+2py+p^2$$
$$\Rightarrow x^2 = 4py$$

پورته معادله دداسې پارابولا معادله ده چې راس يې د وضعيه کمياتو د سيستم په مبداکې او محراقي محور يې د y محور دی چې د محراق مختصات يې $F(0,p)$ او $y=-p$ يې د هادي مستقيم خط معادله ده.

که چيرې $p>0$ وي، د پارابولا خوله پورته خواته خلاصه ده.

که چيرې $p<0$ وي، د پارابولا خوله ښکته خواته خلاصه ده.





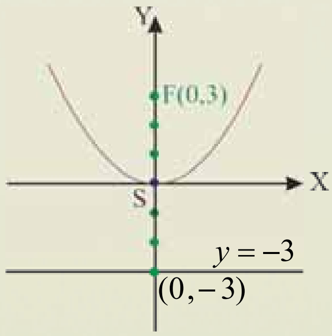
(c) ketabton.com: The Digital Library

دويم مثال: د $x^2 = 12y$ په معادله کې د پارابولا د راس، محراق مختصات، د هادي خط معادله پيدا اوګراف يې رسم کړی.

حل : **لومړي** د $x^2 = 4py$ په معادله کې د p قيمت په لاس راوړو.

$$4p = 12$$
$$p = 3$$

څرنګه چې $P = 3 > 0$ څخه دی، نو د پارابولا خوله پورته خواته خلاصه ده.



1 – د راس مختصات عبارت دي له: $\left.\begin{array}{l} x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \\ 3y = 0 \Rightarrow y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow S(0,0)$

2 – د محراق مختصات عبارت دي له : F (0, 3)

3 – د هادي خط معادله عبارت ده له: $y = -p \Rightarrow y = -3$

پوښتنې

1 – د $y^2 - 4x = 0$ او $x^2 = 2y$ معادلو کې د هرې پارابولا د راس وضعيه کميات او د هادي (موجه خط) معادلې پيدا اوګرافونه يې رسم کړئ.

2 – د لاندې قيمتونو له مخې د هرې پارابولا معادله پيدا کړئ.

$a)\ S(0,0)$ $\qquad F(0,5)$

$b)\ S(0,0)$ $\qquad F(-2,0)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

د هغې پارابولا معیاري معادله چې راس يې يو اختياري ټکي وي

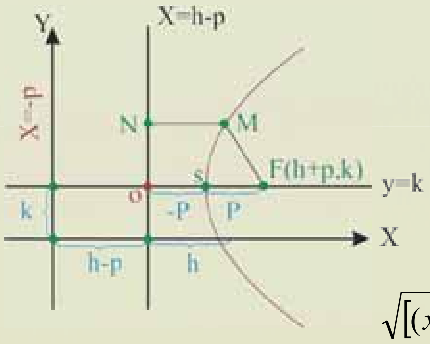
آيا د داسې پارابولا معادله پيدا کولای شوچې د راس مختصات يې د وضيعه کمياتو په مبداکې نه وي.

$$(y-k)^2 = 4p(x-h)$$
$$(x-h)^2 = 4p(y-k)$$

فعاليت

- يوه پارابولا د وضيعه کمياتو په سيستم کې رسم کړئ چې مرکز يې (h,k) او د تناظري محور يې د x له محور سره موازي وي.
- د پارابولا په منحني باندې د $M(x,y)$ ټکی وټاکئ او هغه له F سره ونښلوئ، بیاد M له ټکي څخه يو عمود خط پر ها دې خط(موجه) باندې رسم او هغه ته N ووایاست.

اوس د دووټکو ترمنځ د فاصلې څخه دپیداکولو په ګټې اخېستنې سره د F,M او N,M ټکو ترمنځ فاصله پیدا کړئ، بیا دهغې پارابولا معادله چې مرکز يې $S(h,k)$ ده، په لاس راوړئ.



ثبوت:څرنګه چې د F او M ټکو وضيعه کميات پيژنو او همدارنګه د N وضيعه کميات له $(h-p,y)$ څخه عبارت دی، د پارابولا د تعريف له مخې ليکو

$$|MF| = |MN|$$

د دوو ټکوتر منځ د فاصلې له مخې لرو:

$$\sqrt{[(x-(h+p)]^2+(y-k)^2} = \sqrt{[x-(h-p)]^2+(y-y)^2}$$

د واړه خو اوي مربع کوو او له اختصار وروسته ليکو:

$$[(x-(h+p)]^2+(y+k)^2 = [x-(h-p)]^2$$
$$\Rightarrow x^2-2(h+p)x+(h+p)^2+y^2-2ky+k^2 = x^2-2(h-p)x+(h-p)^2$$

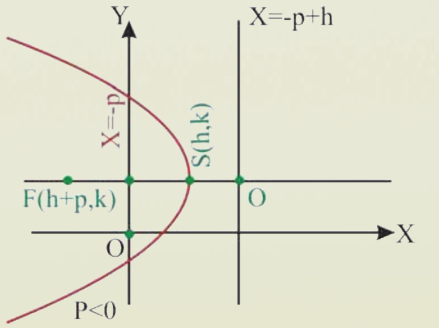
د پورته رابطې له پراختيا او ساده کولو وروسته په لاس راځي چې:

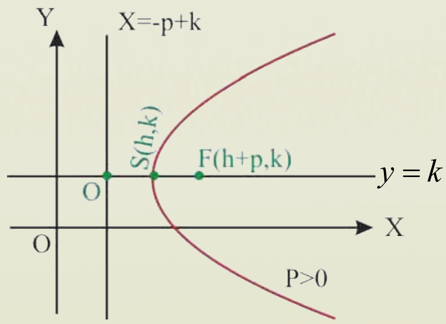
$$y^2-2ky+k^2 = 4px-4ph$$
$$(y-k)^2 = 4p(x-h)$$

پورتنی معادله د هغې پارابولا معادله ده، چې د راس وضعیه کمیات یې $S(h,k)$ محراق یې $F(h+p,k)$ او د موجه خط معادله یې $x=-p+h$ ، تناظري محور یې $y=k$ دی.

که چیرې $p>0$ وي، د پارابولا خوله ښي خواته خلاصه ده.

که چیرې $p<0$ وي، د پارابولا خوله چپې خواته خلاصه ده.





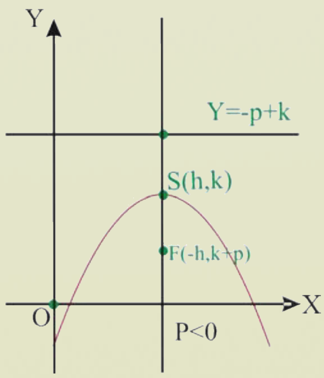
دویم حالت:د هغې پارابولا معادله چې تناظري محور یې د y له محور سره موازي وي، عبارت ده له: $(x-h)^2=4p(y-k)$

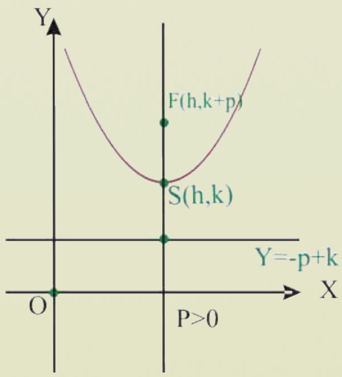
چې د پارابولا د راس مختصات $S(h,k)$ او د محراق مختصات یې $F(h,k+p)$ دي.

$y=k-p$ د پارابولا د هادي خط معادله او $x=-h$ تناظري محور دی.

که چیرې $p>0$ وي، د پارابولا خوله پورته خواته خلاصه ده.

که چیرې $p<0$ وي، د پارابولا خوله ښکته خواته خلاصه ده.





لومړی مثال: غواړو د $(x-1)^2=12(y-2)$ د پارابولا په معادله کې د راس مختصات، د محراق مختصات، د موجه خط معادله، تناظري محور او د عمودي وتر د انجامونو مختصات پیدا کړو.

حل: ښرنګه چې معادله د $(x-h)^2=4p(y-k)$ عمومي شکل لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو $k=2, h=1$ کيږي، په دې صورت کې د پارابولا دراس وضعيه کميات عبارت دي له: $S(1,2)$

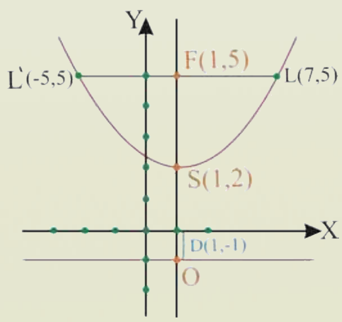
$$4p=12 \Rightarrow p=\frac{12}{4}=3$$

د محراق مختصات: $F(h,k+p)=F(1,2+3) \Rightarrow F(1,5)$

د موجه خط معادله $y=k-P \Rightarrow 2-3=-1$

د تناظر محور: $x=h \Rightarrow x=1$

د عمودي وتر دانجامونو د مختصاتو د پيداکولو لپاره د y قيمت چې په محراق کې لـرو پـه عمـومي معادلـه کې اېږدو يعنې $y=5$ دی.



$$(x-2)^2=12(5-2)$$
$$(x-1)^2=12\cdot 3 \Rightarrow (x-1)^2=36$$
$$(x-1)=\pm 6$$
$$x_1=6+1=7,\ x_2=-6+1=-5$$
$$L(7,5) \quad L'(-5,5)$$

دويم مثال: د $(y-4)^2=-6(x+3)$ معادله په پام کې ونيسی، د پارابولا دراس او محراق مختصات د موجه خط معادله، تناظري محور معادله، د عمودي وتر د انجامونو مختصات پيدا او گراف يې رسم کړئ.

حل: دراس مختصات: $k=4, h=-3 \Rightarrow S(-3,4)$

$$4P=-6 \Rightarrow P=-\frac{3}{2}$$

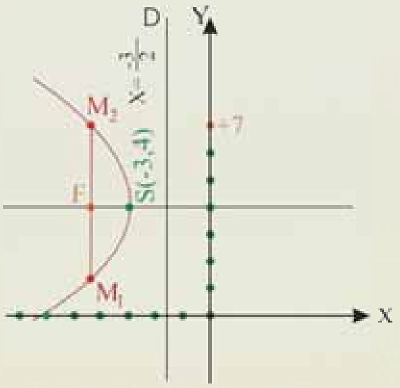
څرنگه چې $-\frac{3}{2}<0$ ده، نو د پارابولا خوله چپې خواته خلاصه ده.

د محراق مختصات: $F(h+p,k)=(-\frac{9}{2},4)$

موجه خط معادله عبارت ده له: $x=h-p \Rightarrow x=-\frac{3}{2}$

د تناظري محور معادله: $y=k \Rightarrow y=4$

د $x=-\frac{9}{2}$ قيمت په معادله کې اېږدو او د عمودي وتر د انجامونو مختصات په لاس راځي.



$(y-4)^2=-6(x+3)=-6(-\frac{9}{2}+3)$

$(y-4)^2=9 \Rightarrow y-4=\pm3$

$y_1=3+4=7$

$y_2=-3+4=1$

$M_2(-\frac{9}{2},7)\ ,\ M_1(-\frac{9}{2},1)$

یادونه: د $AX^2+CY^2+DX+EY+F=0$ د معادلې گراف یوه پارابولا ده، په داسې حال کې چې $C=0, A\neq0$ وي یا $C\neq0\ ,\ A=0$ وي).

پوښتنه: د $(x-h)^2=4p(y-k)$ معادله په پراختیایي ډول ولیکئ.

دریم مثال: د $y^2-2y+8x+25=0$ پارابولا معادله، د پارابولا د معیاري معادلې په ډول ولیکئ د راس، محراق مختصات، د مؤجه خط معادله او تناظري محور یې پیدا کړئ.

حل: په راکړل شوي معادله کې $A=0$ دی، نو نظر د y متحول ته یې، مربع بشپړوو.

$y^2-2y+(1)^2-(1)^2+8x+25=0$

$(y-1)^2+8x+24=0 \Rightarrow (y-1)^2+8(x+3)=0$

$\Rightarrow (y-1)^2=-8(x+3)$

په معادله کې لیدل کیږي: $4P=-8 \Rightarrow P=-2$

دراس مختصات: $k=1\ ,\ h=-3 \Rightarrow S(-3,1)$

$F(h+p,k)\Rightarrow F(-3-2,1)\Rightarrow F(-5,1)$ ، د موجه خط معادله $x=h-p \Rightarrow x=-3+2=-1$

تناظر محور عبارت له $y=1 \Rightarrow y=k$ څخه دی.

پوښتنې

1ـ د لاندې پارابولا معادله پیدا کړئ، په داسې حال کې چې:

$a)\ \ S(1,3), F(-1,3)$

2- د $(y-1)^2=12(x-4)$ په معادله کې د پارابولا دراس مختصات، د محراق مختصات، د موجه خط معادله او د تناظر محور پیدا او گراف یې رسم کړئ.

3- لاندې معادلې د پارابولا د معیاري معادلې په ډول ولیکئ او گراف یې رسم کړئ.

$a)\ \ y^2-6y+8x+41=0$ $\qquad$ $b)\ \ x^2-2x-6y-53=0$

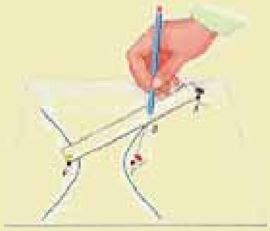
(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

هایپربولا

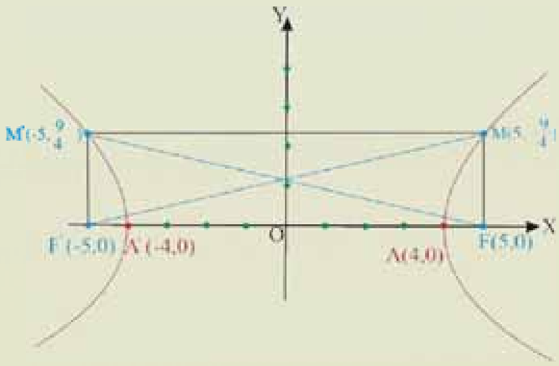
Hyperbola

په یوه مستوي کې د ټولو هغو ټکو هندسي محل چې د فاصلو تفاضل یې له دوو مستقروټکو څخه تل له یوه ثابت اوږدوالي سره مساوي وي، څه ډول یوه منحني کیدلای شي؟



فعالیت

- په لاندې شکل کې د A, M', M, F', F او A' ټکو مختصات درکړل شوي دي.
- د دوو ټکو ترمنځ د فاصلې دپیداکولو له فارمول څخه په کار اخېستنې سره د $|MF|, |MF'|$ او $|AA'|$ اوږدوالي پیدا کړئ.
- د $|MF|-|MF'|$ د تفریق حاصل په لاس راوړئ او د $|AA'|$ له اوږدوالي سره یې پرتله کړئ.
- پورتني فعالیت د M' ټکي لپاره تطبیق او پایله یې ولیکئ
- د $|MF|-|MF'|$ او $|M'F|-|M'F'|$ د تفریق حاصل یو له بل سره پرتله کړئ.



د پورتني فعالیت له سرته رسولو وروسته لاندې تعریف بیانولای شو:

تعریف: په یوه مستوي کې دهغه ټکو هندسي محل چې د فاصلو تفاضل یې لـه دوو ځای پر ځای ټکو څخه تل مساوي اوږ دوالی ولري، هایپربولا Hyperbola بلل کیږي.

دوه مستقر ټکي د هایپربولاد محراقونو په نامه یادیږي، په شکل کې F او F' د هایپربولا محراقونه M او M' د هایپربولا دوه اختیاري ټکي دي، په دې صورت کې لیکو:

$$|M'F|-|M'F'|=|MF|-|MF'|=|AA'|=2a$$

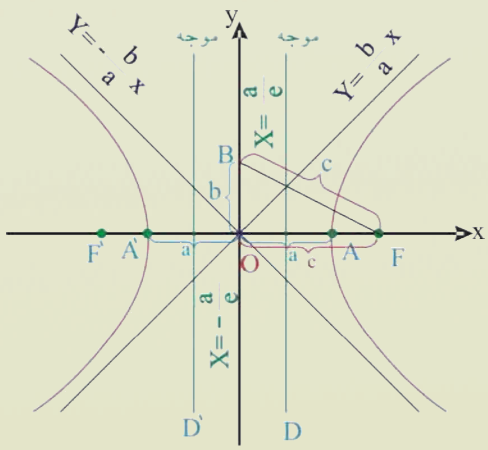
د FF' منځنی ټکی د هایپربولا مرکز دی، دمرکز او هر یوه راس ترمنځ فاصله، لکه بیضوی په هایپربولا کې هم $AA' = 2a$ او $FF' = 2c$ اوږدوالی لري.

د هایپربولا تناظري محورونه او راسونه:

د بیضوي په ډول هایپربولا هم دوه تناظري محورونه لري چې یوېې په FF' باندې منطبق او د هایپربولا له راسونو څخه تیرېږي. بل یې د FF' عمودي نیمایي کوونکی دی. د دې دواړو محورونو د تقاطع ټکی یا ځای، دهایپربولا مرکز بلل کیږي. هغه تناظري محور چې له FF' څخه تیرېږي، د متقاطع محور په نامه یادیږي، څکه چې هایپربولا د A او A' په دوو ټکو کې قطع کوي چې دې دوو ټکوته د هایپربولا راسونه وایې او اوږدوالي له $|AA'| = 2a$ څخه عبارت دی.

هغه خط چې د هایپربولا په مرکز کې په متقاطع محور باندې عمود دی او هایپربولا نه قطع کوي، خو د مرکز دواړو خواوته د B او B' دوه ټکي په پام کې نیسو چې $OB = OB' = b$ وي، دا دوه ټکي د هایپربولا غیر حقیقي راسونه بلل کیږي چې $|BB'| = 2b$ غیر حقیقي محور دی.

په یوه هایپربولا کې د b, a او c اوږدوالو ترمنځ داسې رابطه شته: $c^2 = a^2 + b^2$



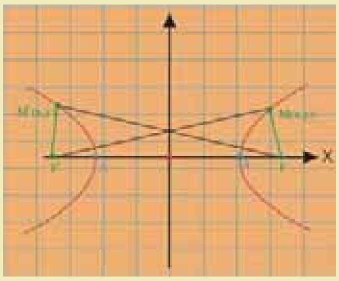
عن المرکزیت: څرنګه چې په هایپربولا کې $c > a$ دي، نو $e > 1$ کیږي. چې د c, b, a او عن المرکزیت ترمنځ د $e = \sqrt{1 + \frac{b2}{a2}}$ رابطه شته. زده کوونکي دې د $e = \frac{c}{a}$ له رابطې څخه په کار اخیستې سره نوموړې رابطه په لاس راوړي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

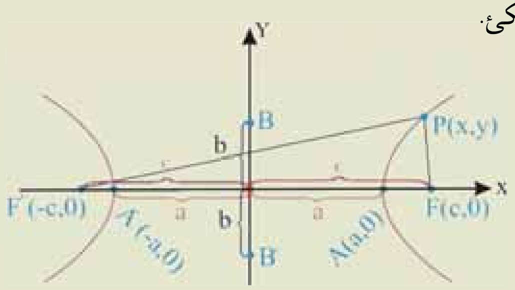
د هایپربولا معادله

آیا داسې یوه هایپربولا رسمولای شئ چې مرکز یې د وضعیه کمیاتو په مبدا کې وي؟



فعالیت

- داسې هایپربولا رسم کړئ چې مرکز یې د وضعیه کمیاتو په مبدا کې وي.
- د $P(x,y)$ ټکی په هایپربولا باندې وټاکئ او هغه د F او F' سره ونښلوئ
- د F, P او F' ټکو ترمنځ د هایپربولا د تعریف رابطه ولیکئ.
- د دوو ټکو ترمنځ د فاصلې د پیداکولو له فارمول څخه په کار اخېستنې سره د PF او PF' فاصلې پیداکړې او بیا د هغو تفاضل په لاس راوړئ.



د هایپربولا د تعریف له مخې لیکو: $|PF'|-|PF|=2a$

د دوو ټکو ترمنځ د فاصلې له فارمول څخه لیکلای شو.

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$$
$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a+\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

د مساوات د دواړو خواوله مربع او انکشاف څخه وروسته لرو:

$$x^2+2cx+c^2+y^2=4a^2+4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+x^2-2cx+c^2+y^2$$
$$\Rightarrow 4cx-4a^2=4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}\ /\div 4$$
$$\Rightarrow cx-a^2=a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

بیا هم د مساوات دواړه خواوې مربع او انکشاف ورکوو:

$$(cx-a^2)^2=a^2(x-c)^2+y^2$$
$$c^2x^2-2a^2cx+a^4=a^2(x^2-2cx+c^2+y^2)$$
$$c^2x^2-2a^2\not{c}x+a^4=a^2x^2-2\not{a}^2cx+a^2c^2+a^2y^2$$
$$\Rightarrow c^2x^2-a^2x^2-a^2y^2=a^2c^2-a^4\quad\Rightarrow (c^2-a^2)x^2-a^2y^2=a^2(c^2-a^2)$$

ځرنګه چې $c > a$ دی، نو $c^2 - a^2 > 0$ کیږي، له بلې خوا پوهیږو چې $c^2 - a^2 = b^2$ ده، نو په پورته افاده کې د $c^2 - a^2$ قیمت په ایښودلو سره لیکلای شو: $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$

د مساوات د واړه خواوې پر a^2b^2 باندې وېشو:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

پورتني معادله د داسې هایپربولا معادله ده چې مرکز یې د وضعیه کمیات په مبدأ او محراقونه یې په افقي محور پراته دي.

دویم حالت: که چیرې متقاطع محور یعنې AA' د y پر محور پروت وي، یعنې محراقونه په عمودي محور پراته وي، نو د هایپربولا معادله عبارت ده له:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

پوښتنه

پورته فارمول او همدارنګه د محراقونو او راسونو مختصات دې د شکل له مخې د زده کوونکو په واسط پیداشي.

د هایپربولا موجه خط:

که چیرې د هایپربولا محراقونه د x یا y په محورونو پراته وي، په دې صورت کې لیکلای شو چې:

$$e = \frac{c}{a} \Rightarrow e = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$$

له دې امله ویلای شو چې دا موجه خطونه په متقاطع محور باندې عمود دي چې د هغو فاصله د هایپربولا له مرکز څخه د $\frac{a}{e} \pm$ یا $\pm \frac{a^2}{c}$ څخه عبارت ده.

د هغې هایپربولا د ها دې خط معادلې چې محراقونه یې د y پر محور باندې پراته دي له $y = \pm \frac{a}{e}$ څخه عبارت دي.

او د هغې هایپربولا د ها دې خط معادلې چې محراقونه یې د x پر محور باندې پراته دي له $x = \pm \frac{a}{e}$ څخه عبارت دي.

د هایپربولا مجانبونه:

هغه مستقیم خطونه چې د هایپربولا له مرکز څخه تیر اوپه لایتناهي کې د هایپربولا له منحنې سره مماس وي. د هایپربولا مجانبونه بلل کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ هایپربولا معادله په پام کې نیسو:

$$a^2y^2=b^2x^2-a^2b^2$$
$$a^2y^2=b^2(x^2-a^2)$$
$$y^2=\frac{b^2}{a^2}(x^2-a^2)=\frac{b^2}{a^2}\left[x^2(1-\frac{a^2}{x^2})\right]$$
$$\Rightarrow y=\pm\frac{b}{a}x\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}$$

که چیرې په پورتني رابطه کې x لایتناهي ته نژدې شي د $\frac{a^2}{x^2}$ کسر د صفر خواته نژدې کیږئ په پایله کې $\left(1-\frac{a^2}{x^2}\right)$ د یوه عدد ته تقرب کوي، په دې صورت کې $y=\pm\frac{b}{a}x$ لاس ته راځي.

نو $y=\pm\frac{b}{a}x$ د هغو مجانبونو معادلې دي چې د هایپربولا محراقونه د x پر محور باندې پراته وي.

که چیرې محراقونه د y پر محور باندې پراته وي، د مجانبونو معادلې یې له $y=\pm\frac{a}{b}x$ څخه عبارت دي.

لومړي مثال: د هایپربولا د $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{4}=1$ په معادله کې د محراقونو مختصات، د راسونو مختصات، د موجه خطونو معادلې او د مجانبونو معادلې پیدا او په شکل کې وښایاست.

حل: درأسونو مختصات: $a^2=16\Rightarrow a=\pm4\Rightarrow A(4,0),A'(-4,0)$

د محراقونو مختصات: $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{16+4}=\sqrt{20}=\sqrt{4\cdot5}=\pm2\sqrt{5}$

$$\Rightarrow F(2\sqrt{5},0),F'(-2\sqrt{5},0)$$

د موجه خطونو معادلې: څرنګه چې محراقونه د x پر محور باندې پراته دي.

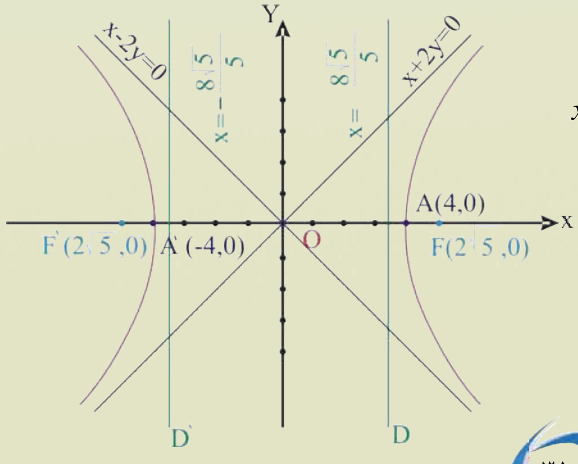
له دې امله:

$$x=\pm\frac{a}{e}=\frac{a^2}{c}=\frac{4^2}{2\sqrt{5}}=\frac{16}{2\sqrt{5}}=\frac{8}{\sqrt{5}}=\frac{8\sqrt{5}}{5}$$

$$y=\pm\frac{b}{a}x\quad\Rightarrow\quad y=\pm\frac{2}{4}x=\pm\frac{1}{2}x$$

$$2y=\pm x$$

یا: $x=\pm2y\quad\Rightarrow\quad x+2y=0,x-2y=0$



(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم مثال: وښیاست چې $\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{9}=1$, د هایپربولا یوه معادله ده، په نوموړي معادله کې د محراقونو، راسونو مختصات، د مجانبونو او موجه خطونو معادلې پیدا او ګراف یې رسم کړئ.

حل: پورتنی معادله د هایپربولا د معیاري معادلې شکل لري چې مرکز یې د وضعیه کمیاتو په مبدا کې او د y محور یې متقاطع محور دی چې محراقونه ور باندې پراته دي.

د راسونو مختصات: $A(0,2)\ ,\ A'(0,-2)$ $\qquad a^2=4\Rightarrow a=\pm 2$

$b^2=9\Rightarrow b=\pm 3$

د محراقونو مختصات: $c^2=a^2+b^2\Rightarrow c^2=4+9=13\Rightarrow c=\pm\sqrt{13}$

د مجانبونو معادلې: $F'(0,-\sqrt{13})\quad ,\quad F(0,\sqrt{13})$

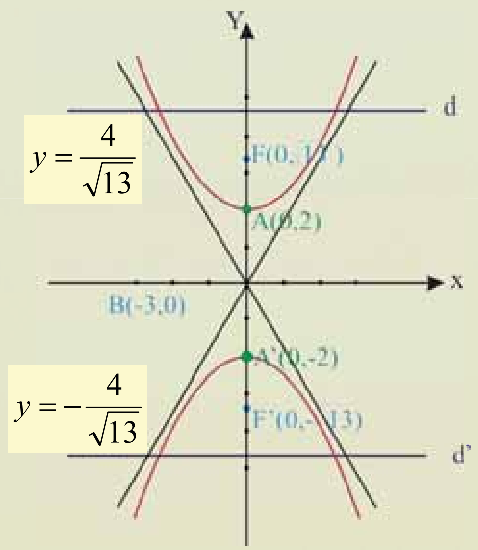
ځرنګه چې متقاطع محور د y پر محور باندې منطبق دی، نو د مجانبونو معادلې عبارت دي له:

$$y=\pm\frac{a}{b}x\ \Rightarrow\ y=\pm\frac{2}{3}x\ \Rightarrow\ 3y=\pm 2x$$

$$3y-2x=0\quad ,\quad 3y+2x=0$$

د موجه خط معادله: ځرنګه چې د هایپربولا راسونه د y پر محور باندې پراته دي، نو د موجه خطونو معادلې عبارت دي له:

$$y=\pm\frac{a}{e}=\pm\frac{a^2}{c}=\pm\frac{4}{\sqrt{13}}=\pm 1{,}1$$



پوښتنې

د $4x^2-y^2=16$ هایپربولا له معادلې څخه د محراقونو وضعیه کمیات، د راسونو وضعیه کمیات، د موجه خط معادلې او د مجانبونو معادلې په لاس راوړئ او په پای کې یې ګراف رسم کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د هغې هایپربولا معادله چې مرکز يې يو اختياري ټکی وي

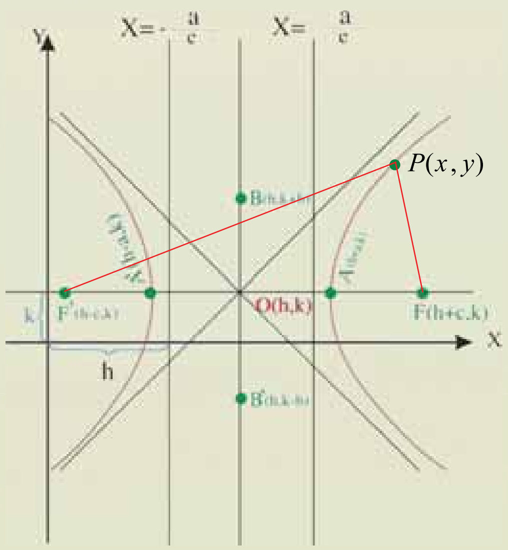
آيا د داسې هایپربولا معادله شته چې مرکز يې د وضعيه کمياتو په مبداکې نه وي؟

$$\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$$

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

فعاليت

- د وضعيه کمياتو په سيستم کې داسې هایپربولا رسم کړئ چې د مرکز مختصات يې (h,k) او متقاطع محور يې موازي د x له محور سره وي.
- په هایپربولا باندې د $p(x,y)$ يو ټکی په پام کې ونيسئ او هغه د F او F' سره ونښلوئ.
- د هایپربولا د معادلې په پام کې نيولو سره د (h,k) ټکي د محراقونو مختصات يعنې F او F'، د راسونو مختصات يعنې A, A', B او B' په شکل کې وښاياست.



د هایپربولا د تعريف له مخې ليکو:

$$|PF'|-|PF|=2a$$

د دووټکو تر منځ د فاصلې د پيداکولو له فارمول څخه په کار اخيستنې سره ليکلای شو:

$$\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2}-\sqrt{[x-(h+c)]^2+(y-k)^2}=2a$$

يا

$$\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2}=2a+\sqrt{[x-(h+c)]^2+(y-k)^2}$$

د پورتنې مساوات دواړه خواوې مربع کوو:

$$\left(\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2}\right)^2=\left(2a+\sqrt{[x-(h+c]^2+(y-k)^2}\right)^2$$

$$[x-(h-c)]^2+(y-k)^2=4a^2+4a\sqrt{[x-(h+c)]^2+(y-k)^2}+[x-(h+c)]^2+(y-k)^2$$

$$x^2-2x(h-c)+(h-c)^2=4a^2+4a\sqrt{[x-(h+c)]^2+(y-k)^2}+x^2-2x(h+c)+(h+c)^2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مشابه حدونو له جمعې او تفریق وروسته لیکلای شو: $cx-(ch+a^2)=a\sqrt{[x-(h+c)]^2+(y-k)^2}$

بیاهم د مساوات دواړه خواوې مربع کوو:

$$\{cx-(ch+a^2)\}^2=\left\{a\sqrt{\{x-(h+c)\}^2+(y-k)^2}\right\}^2$$

$$c^2x^2-2cx(ch+a^2)+(ch+a^2)^2=a^2[x-(h+c)]^2+(y-k)^2$$

د ضرب، او طاقتونو له ساده کولو وروسته مشابه حدونه جمع او تفریقوو او پورتني رابطه په لاندې ډول لیکو:

$$c^2x^2-a^2x^2+2c^2hx+a^2hx+c^2h^2-a^2h^2-a^2(y-k)^2=a^2c^2-a^4$$

$$x^2(c^2-a^2)-2hx(c^2-a^2)+h^2(a^2-c^2)-a^2(y-k)^2=a^2(c^2-a^2)$$

$$(c^2-a^2)(x^2-2hx+h^2)-a^2(y-k)^2=a^2(c^2-a^2)$$

$$(c^2-a^2)(x-h)^2-a^2(y-k)^2=a^2(c^2-a^2)$$

څرنګه چې $c^2-a^2=b^2$ دې، نو پورته رابطه په لاندې ډول لیکو: $b^2(x-h)^2-a^2(y-k)^2=a^2b^2$

دواړه خواوې په a^2b^2 ویشو:

$$\frac{b^2(x-h)^2}{a^2b^2}-\frac{a^2(y-k)^2}{a^2b^2}=\frac{a^2b^2}{a^2b^2}$$

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

د حقیقي راسونو مختصات: $A(h+a,k)\quad A'(h-a,k)$

د غیر حقیقي راسونو مختصات: $B(h,k+b)\quad B'(h,k-b)$

د محراقونو مختصات: $F(h+c,k)\ ,\ F'(h-c,k)$

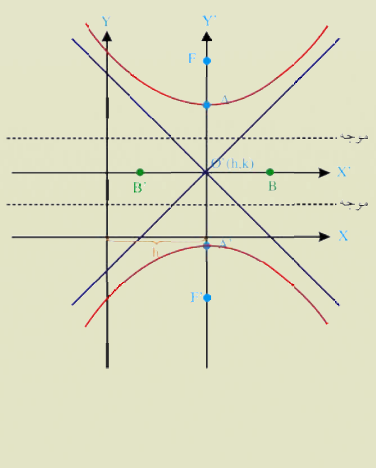
د مجانبونو معادلې: $y=\pm\frac{b}{a}(x-h)+k$

که چیرې د هایپربولا د مرکز مختصات (h,k) او متقاطع محور یې موازي د y له محور سره وي په دې صورت کې د هایپربولا معادله عبارت ده له: $\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$

زده کوونکي دې د مرکز مختصات، د محراقونو مختصات، د موجه خط معادله او د مجانبونو معادلې ولیکي؟

دویم حالت: که چیرې محراقونه د y له محور سره موازي پر متقاطع محور پراته وي، نو د هایپربولا معادله عبارت ده، له:

$\frac{(x-h)^2}{b^2}-\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$ د شکل له مخې د هایپربولا د رأسونو مختصات، محراقونو مختصات د مؤجه خطونو معادلې او د مجانبونو معادلې پیدا کړئ.



(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

يادونه: د هايپربولا غزول شوي معادله له $AX^2+BY^2+DX+EY+F=0$ څخه عبارت ده په داسې حال کې چې $A\neq B$ يا $A=B$ خو مختلف الاشاره وي.

څرنګه کولای شو، د هايپربولا غزول شوي معادله په لاس راوړو؟

لومړی مثال: د $9(x-3)^2-4(y+1)^2=144$ معادله په پام کې ونيسئ، د مرکز، د راسونو، محراقونو مختصات او همدارنګه د مجانبونو معادلې پيدا کړئ.

حل: راکړل شوي معادله په معياري ډول ليکو:

$$\frac{9(x-3)^2}{144}-\frac{4(y+1)^2}{144}=\frac{144}{144}$$

$$\frac{(x-3)^2}{16}-\frac{(y+1)^2}{36}=1$$

د مرکز مختصات: $k=-1, h=3$ يعني $(3,-1)$ دي

د راسونو مختصات: $a^2=16\Rightarrow a=\pm4$

$$A(h+a,k)=A(3+4,-1)=A(7,-1)$$

$$A'(h-a,k)=A'(3-4,-1)=A'(-1,-1)$$

او همدارنګه پوهېږو چې:

$$\begin{cases} b^2=36\Rightarrow b=\pm6 \\ B(h,k+b)=B(3,6-1)=B(3,5),\ B'(h,k-b)=B'(3,-6-1)=B'(3,-7) \end{cases}$$

د محراقونو مختصات: $F(h+c,k)=F(3+\sqrt{52},-1) \qquad F'(h-c,k)=F'(3-\sqrt{52},-1)$

پوهېږو چې په هايپربولا کې: $c^2=a^2+b^2\Rightarrow c^2=16+36=52\Rightarrow c=\pm\sqrt{52}$

که چيرې متقاطع محور د x له محور سره موازي وي، نو د مجانبونو معادلې عبارت دي له:

$$y-k=\pm\frac{b}{a}(x-h)\ \Rightarrow\ y=\pm\frac{6}{4}(x-3)-1=\pm\frac{3}{2}(x-3)-1$$

$$y=\pm\frac{3}{2}(x-3)-1\ \ /\cdot 2$$

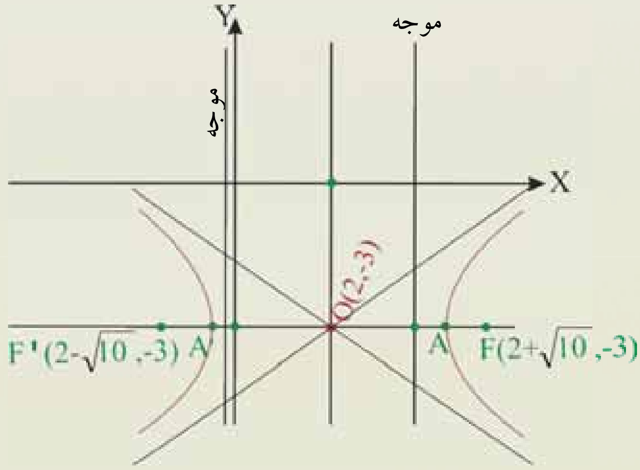
$$2y=\pm3(x-3)-2\ \Rightarrow\ 2y=3x-9-2\ \Rightarrow\ 2y-3x+11=0$$

$$2y=-3x+9-2\ \Rightarrow\ 2y+3x-7=0$$

دويم مثال: د $2x^2-8x-3y^2-18y-31=0$ معادله په پام کې ونيسئ.

د هايپربولا د مرکز مختصات د راسونو مختصات، د محراقونو مختصات او د موجه خطونو معادلې، د مجانبونو معادلې په لاس راوړئ.

حل:



$$2(x^2-4x)-3(y^2+6y)-31=0$$
$$2\left[(x-2)^2-4\right]-3\left[(y+3)^2-9\right]-31=0$$
$$2(x-2)^2-8-3(y+3)^2+27-31=0$$
$$2(x-2)^2-3(y+3)^2+27-39=0$$
$$2(x-2)^2-3(y+3)^2-12=0$$
$$2(x-2)^2-3(y+3)^2=12$$
$$\frac{2(x-2)^2}{12}-\frac{3(y+3)^2}{12}=\frac{12}{12}$$
$$\frac{(x-2)^2}{6}-\frac{(y+3)^2}{4}=1$$

پورتني معادله په معياري ډول واړول شوه، ليدل کيږي چې $h=2$ او $k=-3$ دی، د مرکز مختصات يې: $O(2,-3)$

له بلې خوا:

$$b^2=4\Rightarrow b=\pm2 \quad , \qquad a^2=6\Rightarrow a=\pm\sqrt{6}$$
$$c^2=a^2+b^2\Rightarrow \ c=\pm\sqrt{a^2+b^2}=\pm\sqrt{6+4}=\pm\sqrt{10}$$

د محراقونو مختصات: يې $F'(2-\sqrt{10},-3)$، $F(2+\sqrt{10},-3)$

د راسونو مختصات: $A'(2-\sqrt{6},-3)$، $A(2+\sqrt{6},-3)$

د موجه خطونو معادلې: $x-h=\pm\frac{a}{e}\Rightarrow x=\pm\frac{a}{e}+h=\pm\frac{6\sqrt{10}}{10}+2$

د مجانبونو معادلې: څرنګه چې متقاطع محور د x له محور سره موازي دی، نو ليکلای شو:

$$y-k=\pm\frac{b}{a}(x-h) \qquad y=\frac{2}{\sqrt{6}}(x-2)-3 \ \ /\cdot\sqrt{6}$$
$$y+3=\pm\frac{2}{\sqrt{6}}(x-2) \qquad \sqrt{6}y=2(x-2)-3\sqrt{6}$$
$$\sqrt{6}y=2x-4-3\sqrt{6} \Rightarrow \boxed{\sqrt{6}y-2x+4+3\sqrt{6}=0}$$
$$\sqrt{6}y=-2(x-2)-3\sqrt{6} \Rightarrow \boxed{\sqrt{6}y+2x-4+3\sqrt{6}=0}$$

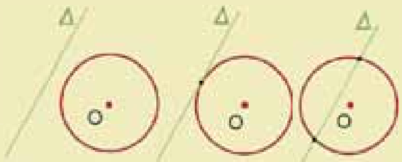
پوښتنې

د $9x^2-4y^2+54x+16y-79=0$ معادله د هايپربولا پر معياري معادلې باندې واړوئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دیوې کرښې موقعیت نظرمخروطي مقاطعو ته

یوه اختیاري کرښه، یوه دایره د امکان په صورت کې په څو ټکو کې قطع کولای شي؟



فعالیت

د O دایره او د Δ مستقیمه کرښه په پام کې و نیسئ:

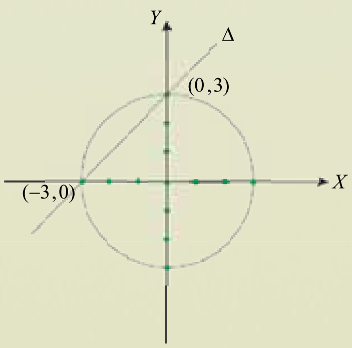
- یوه دایره او مستقیمه کرښه داسې رسم کړئ، چې یوازې یوګډ ټکي سره و لري.
- آیا کیدای شي چې یوه مستقیمه کرښه، یوه دایره له دو ټکو څخه په زیاتو ټکوکې قطع کړي؟
- که چیرې د یوې دایرې د مرکز او کرښې تر منځ واټن، د دایرې له شعاع یا ورانګې څخه لوی وي. دایره او کرښه څو ګډ ټکي لري؟

له پورتني فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راځي:

پایله: په یوه مستوي کې یوه اختیاري کرښه او یوه دایره امکان لري، یوازې یوه، دوه او یا هېڅ ګډ ټکي ونلري.

لومړی مثال: د $x^2 + y^2 = 9$ دایره او $y = x + 3$ مستقیمه کرښه رسم او موقعیت یې وښایاست.

حل: په شکل کې لیدل کېږي، چې پورتنۍ دایره او کرښه یو بل په $(0,3)$ او $(-3,0)$ دوو ټکو کې قطع کوي ددې پایلې د لاس راوړلو لپاره که چیرې د y قیمت د دایرې په معادله کې وضع کړو عین نتیجه په لاس راځي:



$$x^2 + y^2 = 9$$
$$y = x + 3 \quad \Rightarrow \quad x^2 + (x+3)^2 = 9$$
$$x^2 + x^2 + 6x + 9 = 9$$
$$\Rightarrow \quad 2x^2 + 6x = 0$$
$$x_1 = 0 \qquad , \qquad x_2 = -3$$

د x قیمتونه د $y = x + 3$ په معادله کې ایږدو او د y قیمت په لاس راځي.

$$y_1 = 0 + 3 \quad \Rightarrow \quad y_1 = 3$$
$$y_2 = -3 + 3 \quad \Rightarrow \quad y_2 = 0$$

د $(0,3)$ او $(-3,0)$ د دایرې او مستقیمې کرښې د تقاطع ټکي دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په دې ډول د پورتنیو قیمتونو په پام کې نیولو سره د $(0,3)$ او $(-3,0)$ مرتبې جوړې چې د د واړو معادلو د تقاطع ټکي دي په لاس راځي.

په عمومي ډول کله چې د مستقیمې کرښې له معادلې څخه د x یا y متحول حل او د مخروطي مقاطعو په معادله کې یې کېږدو، د حل لپاره یوه دویمه درجه معادله لاسته راځي چې حل یې د Δ په قیمت پورې اړه لري. دغه مسئله په لاندې ډول د څېړلو،او پام وړ، پایلې لري:

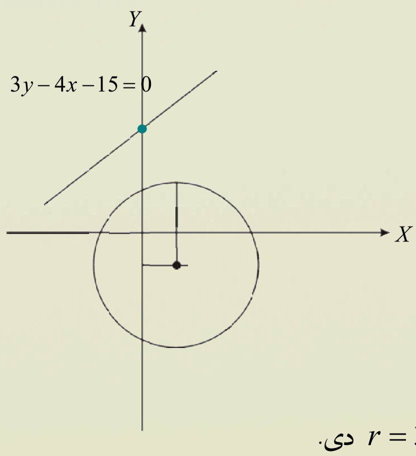
1- که چیرې $\Delta > 0$ وي، معادله دوه حلونه لري، نو په دې ډول کرښه او منحني یوبل په دوو ټکوکې قطع کوي.

2- که چیرې $\Delta = 0$ وي، معادله دوه مضاعف یا مساوي جذرونه لري او په دې ډول کرښه د مخروطي مقاطعو له منحني سره یوازې یو ګډ ټکی چې مماس بلل کېږي لري.

3- که چېرې $\Delta < 0$ وي، معادله حل نلري، په بل عبارت، کرښه او منحني یو بل نه قطع کوي.

دویم مثال: د $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$ دایره او $3y - 4x - 15 = 0$ کرښه په پام کې ونیسئ او موقعیتونه یې له یو بل سره و څیړئ.

حل: دپورتنیو معادلو د بدلولو لپاره چې معیاري حالت ته راوګرځول شي، په لاندې ډول ګام پورته کوو:



$$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$$
$$x^2 - 2x + (1)^2 - (1)^2 + y^2 + 4y + (2)^2 - (2)^2 - 4 = 0$$
$$(x-1)^2 + (y+2)^2 - 9 = 0$$
$$\Rightarrow \ (x-1)^2 + (y+2)^2 = 9 \qquad C(1,-2)$$

له پورتنی معادلې څخه پو هیږو چې د دایرې مرکز $C(1,-2)$ او شعاع یې $r = 3$ دی.

همدغه راز د مستقیمې کرښې لپاره لرو: $3y = 4x + 15 \Rightarrow y = \dfrac{4}{3}x + 5$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که چیرې له پورتني معادلې څخه د y قیمت د دایرې په معادله کې کیږدو او معادله حل کړو، نو لاندې پایله په لاس راځي.

$$(x-1)^2+(\frac{4}{3}x+5+2)^2=9$$

$$\Rightarrow x^2-2x+1+(\frac{4}{3}x+7)^2=9 \Rightarrow x^2-2x+1+\frac{16}{9}x^2+14\frac{4}{3}x+49-9=0$$

$$\Rightarrow 9\cdot\frac{25}{9}x^2-9\cdot\frac{50}{3}x+9\cdot 40=0$$

$$\Rightarrow 25x^2+150x+360=0$$

$$\Delta=b^2-4ac$$

$$\Delta=22500-36000=-13500 \quad , \quad \Delta<0$$

څرنګه چې $\Delta<0$ ده، کرښه او دایره ګډټکی نه لري.

دریم مثال : د $y=x-1$ د کرښې موقعیت د $y-x^2+1=0$ پارابولا ته وخیرئ.

حل: د پورتني مسئلې د څیړلو لپاره د y قیمت د پارابول په معادله کې وضع کوو، او بیاګام په ګام د معادلې حل په پام کې نیسو:

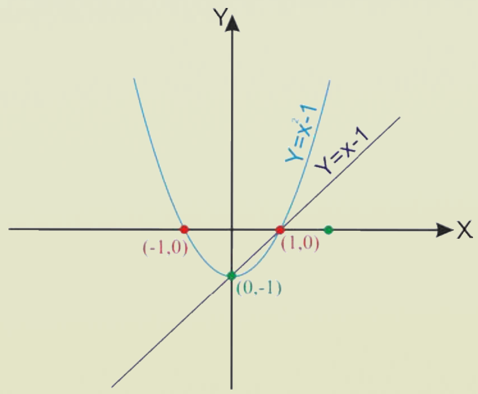
$$y=x-1$$

$$y-x^2+1=0 \Rightarrow (x-1)-x^2+1=0$$

$$\Rightarrow x-1-x^2+1=0 \Rightarrow x^2-x=0$$

$$\Delta=b^2-4ac \Rightarrow \Delta=(-1)-4(1)(0) \Rightarrow 1-0$$

$$\Rightarrow \Delta=1$$



څرنګه چې لیدل کیږي $\Delta=1>0$ څخه ده، نو موږ کرښه یعنې $y=x-1$ په لاندې ډول په لاس راځي او د $y-x^2+1=0$ پارابول یو بل په دوو ټکوکې قطع کوي چې د دې دویمې درجې معادلې حل

$$x^2-x=0$$

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{1\pm\sqrt{1}}{2}$$

$$x_1=1 \quad , \quad x_2=0$$

که چیرې په لاس راغلي قیمتونه د کرښې په معادله کې کیږدو،نو د نوموړې کرښې او پارابولا د قطع کولوټکي په لاس راځي، هغه عبارت دي له : $(0,-1)\,,(1,0)$

دغه ټکي په ګراف کې هم په ښکاره ډول لیدل کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

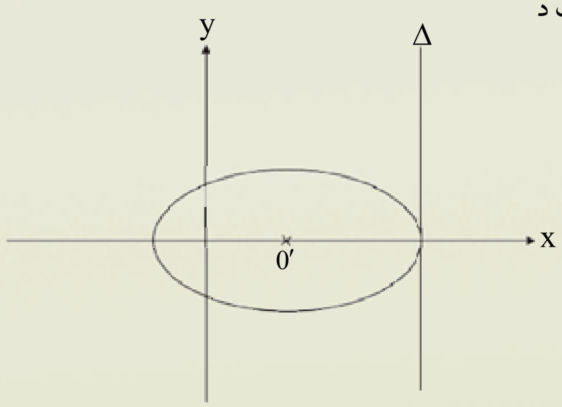
څلورم مثال: د $x=5$ د مستقيمې کرښې او $\frac{(x-2)^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ بيضوي موقعيتونه وڅيړئ.

حل: که چيرې د $x=5$ دمستقيمې کرښې قيمت د بيضوي په معادله کې کېنږدو، نو په لاس راځي:

$$\frac{(5-2)^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1 \Rightarrow \frac{9}{9}+\frac{y^2}{4}=1$$

$$\Rightarrow \frac{y^2}{4}=1-1 \Rightarrow y^2=0$$

څرنګه چې: $\Delta=b^2-4ac=0$



په دې ډول ويلای شو چې مستقيمه کرښه او بيضوي يو ګډ ټکی لري چې په شکل کې په ښکاره ډول ليدل کېږي.

يادونه: د مخروطي مقاطعو غزيدلی يا انکشاف ورکړل شوې، معادله په لاندې ډول ده:

$$A,B,D,E,F\in IR \quad ,Ax^2+By^2+Dx+Ey+F=0$$

د پورتنې معادلې د پيژندلو لپاره په ياد ولرئ چې:

1- که چيرې $A=B$ يو شان علامې ولري، يوه دايره ده.

2- که چيرې $A\neq B$ او يو شان علامې ولري، يو الپس دی.

3- که چيرې $A\neq B$ يا $A=B$ او مختلفې علامې ولري، هايپربولا ده.

4- که چيرې معادلې لاندې شکل ولري، ګراف يې يوه پارابولا ده.

$$Ay^2+By+Cx+D=0 \text{ او } Ax^2+Bx+Cy+D=0$$

پوښتنې

1- لاندې معادلې د هغوی د ګرافونو د منحنې له مخې و ټاکئ.

a) $y^2-2y+x+3=0$

b) $9x^2+9y^2=27$

c) $25x^2+16y^2=400$

d) $x^2-y^2=0$

e) $y^2+6y-x+2=0$

2- د $9x^2+4y^2=36$ الپس او $y=3$ مستقيم خط يو بل په څو ټکو کې قطع کوي؟

3- د $y=x$ خط او $x^2-2y^2=4$ هايپربول د تقاطع ټکې پيداکړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د څېړکي مهم ټکي

مخروطي مقاطع: د یوې مستوي او مخروط د تقاطع ګډ فصل عبارت ده له: دایرې، پارابول،هایپربولا، یو ټکی، بیضوي او یا دوه متقاطع کرښې.

بیضوي: په یوه مستوي کې د ټولو هغو ټکو هندسي محل چې له دوو مستقرو ټکو څخه یې د فاصلو د جمعې حاصل یې یو ثابت اوږدوالی وي، بیضوي بلل کیږي ، مستقر ټکي چې په F' او F تورو ښودل شوي، د بیضوي محراقونه او $AA' = 2a$ ثابت او ږدوالی دی

شمیره	معادلې	د مرکز وضیعه کمیات	د اوږده قطر انجامونه	دلنډ قطر انجامونه	محراقونه
1	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $a>b$	$(0,0)$	$(a,0),(-a,0)$ د x پر محور باندې دي	$(0,b),(0,-b)$ د y پر محور باندې دي	$(c,0),(-c,0)$ د x پر محور باندې دي
2	$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$ $a>b$	$(0,0)$	$(0,a),(0,-a)$ د y پر محور باندې دي	$(b,0),(-b,0)$ د x پر محور باندې دي	$(0,c),(0,-c)$ د y پر محور باندې دي
3	$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ $a>b$	(h,k)	$(h\pm a,k)$ قطر د x له محور سره موازي دي	$(h,k\pm b)$ قطر د y له محور سره موازي دي	$(h\pm c,k)$ د x پر محور باندې دی
4	$\frac{(y-k)^2}{a^2}+\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$ $a>b$	(h,k)	$(h,k\pm a)$ قطر د y له محور سره موازی دی	$(h\pm b,k)$ قطر د x له محور سره موازی دی	$(h,k\pm c)$ د y پر محور باندې دي

د بیضوي غزول شوي عمومي معادله عبارت ده له: $AX^2+CY^2+DX+EY+F=0$

په داسې حال کې چې $A>0$ او $C>0$ وي: (یعنې دواړه هم علامه وي.)

(c) ketabton.com: The Digital Library

$e=\frac{c}{a}$ دبیضوي دعن المرکز یت په نامه یادیږي.

پارابولا: په یوه مستوي کې د ټولو هغو ټکو هندسي محل چې د یوه ثابت یا مستقر ټکي او ثابت مستقیم خط څخه په مساوي فاصله کې پراته وي، پارابولا بلل کیږي، دغه ثابت یا مستقر ټکي ته د پاراپولا محراق (F) او ثابت مستقیم خط ته د پارابولا ها دي(موجه) وایي، معادله یې $y^2=4px$ ده

تناظري محور	د موجه خط معادله	د محراق مختصات	دراس وضعیه کمیات	د پارابولا معادلې	شمیره
$x=0$	$x=-p$	$F(P,0)$	$S(0,0)$	$y^2=4Px$	1
$y=0$	$y=-p$	$F(0,P)$	$S(0,0)$	$x^2=4Py$	2
$y=k$	$x=h-p$	$F(h+p,k)$	$S(h,k)$	$(y-k)^2=4P(x-h)$	3
$x=h$	$y=k-p$	$F(h,k+p)$	$S(h,k)$	$(x-h)^2=4P(y-k)$	4

د پارابولا غزول شوي معادله $Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ په داسې حال کې چې $A=0$ یا $C=0$ وي، نه دواړه.($C\neq 0, A=0$ یا $C=0, A\neq 0$ وي) په پارابولا کې $e=1$ دی.

هایپربولا: په یوه مستوي کې د هغو ټکو هندسي محل چې د فاصلو تفاضل یې له دوو ثابتو مستقرو ټکو څخه تل ثابت اوږدوالی ولري، هایپربولا بلل کیږي.

دوه ثابت مستقر ټکي د هایپربولا محراقونه دي، د دواړو محراقونو ترمنځ فاصله $2c$ ده.

د هایپربولا معادله $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ د هایپربولا محراقونه پر افقي محور پراته دي).

$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$ د هایپربولا محراقونه پر عمودي محور پراته دي).

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

محراقونه	غیر حقیقي رأسونه	د رأسونو وضعیه کمیات	د مرکز وضعیه کمیات	د هایپربولا معادلې
$F(c,0)$ $F'(-c,0)$ د x پر محور باندې	$(0,b),(0,-b)$ د y پر محور باندې	$(a,0),(-a,0)$ د x پر محور پراته دي	$S(0,0)$	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$
$F(0,\pm c)$ د y پر محور باندې	$(b,0),(-b,0)$ د x پر محور باندې	$(0,a),(0,-a)$ د y پر محور پراته دي	$S(0,0)$	$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$
$F(h\pm c,k)$	$B(h,k\pm b)$	$A(h\pm a,k)$	$S(h,k)$	$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$
$F(h,k\pm c)$	$B(h\pm b,k)$	$A(h,k\pm a)$	$S(h,k)$	$\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$

د مجانبونو معادلې	د موجه خطونو معادلې
$y=\pm\frac{b}{a}x$	$x=\pm\frac{a}{c}$
$y=\pm\frac{a}{b}x$	$y=\pm\frac{a}{c}$
$y-k=\pm\frac{b}{a}(x-h)$	$x=h\pm\frac{a}{c}$
$y-k=\pm\frac{a}{b}(x-h)$	$y=k\pm\frac{a}{c}$

هایپربولا عمومي غزول شوې معادله: $Ax^2+By^2+Dx+Ey+F=0$ څخه عبارت ده په داسې حال کې چې $A=B$ یا $A\neq B$، خو مختلف الاشاره وي، عن المرکزیت $e>1$ دی.

د څېرکي پوښتنې

هرې پوښتنې ته څلور ځوابه ورکړل شوي دي، سم ځواب په نښه او کرښه ترې تاو کړئ.

1- که چیرې یوه مستوي یو مخروط په مایل ډول قطع کړي، نو د مستوي او مخروط ګډ فصل عبارت دی له:

a) بیضوي b) دایره c) هایپربولا d) دوه متقاطع خطونه

2- د الپس محراقونه هغه ټکې دي چې د الپس له مرکز څخه:

a) برابر و اټن ولري b) مختلف و اټنونه لري

c) د اوږد قطر نیمايي واټن لري d) د لنډ قطر نیمايي ده.

3- که چیرې M د الپس یو ټکی F او F' محراقونه او $2a$ داوږده قطر اوږ دوالې وي، نو په دې صورت کې لرو چې:

a) $|MF|-|MF'|=2a$ b) $|MF|+|MF'|=a$

c) $|MF|+|MF'|=2a$ d) $|MF'|+|MF|=0$

4- د الپس عن المرکزیت له لاندې کومې یوې رابطې څخه په لاس راځي:

a): $e=\frac{a}{c}$ b): $e=\frac{c}{a}$ c): $e=\frac{b}{c}$ d): $e=\frac{c}{b}$

5- د لنډ قطر او محراقونو ترمنځ اړیکه عبارت ده له:

a) $a^2=b^2-e^2$ b) $a^2+b^2=c^2$

c) $a^2=b^2+e^2$ d) $a^2=b^2+c^2$

6- د $(y-k)^2=4p(x-h)$ په معادله کې $p>0$ سره وي، نو:

a) د پارابولا خوله پاس خواته خلاصه ده. b) دپارابولا خوله لاندې خواته خلاص ده

c) دپارابولا خوله ښي خواته خلاص ده d) دپارابولا خوله کیڼې خواته خلاص ده.

7- د $(x+1)^2=8(y-2)$ یو پارابولا معادله په پام کې ونیسئ. دمحراق وضعیه کمیات یې عبارت دي له:

a) $F(-1,-2)$ b) $F(-1,4)$ c) $F(-1,2)$ d) $F(-4,-1)$

8- که چیرې F او F' د هایپربولا محراقونه وي، د p ټکی په کوم شرط د هایپربولا د محیط یو ټکی کیدلای شي؟

a) $|PF|+|PF'|=2a$ b) $|PF|-|PF'|=a$

c) $|PF|-|PF'|=2a$ d) $|PF|-|PF'|=0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

9: د $y = x^2$ د پارابولا گراف متناظر دی نظر:

a) د y محور ته　　b) د x محور ته

c) د x او y محورونو ته　　c) د وضعیه کمیاتو مبدأ ته

10: په لاندې څوابونو کې کوم یو د هایپربولا عن المرکزیت ښیې؟

a) $e<1$　　b) $e=1$　　c) $e>1$　　d) $e=-1$

11: د $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ د بیضوي د اوږد قطر موقعیت:

a) د y پر محور باندې دی.　　b) د x پر محور باندې دی.

c) د x پر محور عمود دی.　　d) د y له محور سره موازي دی.

12: په یوه مستوي کې د ټولو هغو ټکو هندسي محل چې له یوه ثابت ټکی څخه مساوي فاصلې لري. د څه په نامه یادېږي؟

a) کره　　b) دایره　　c) پارابولا　　d) بیضوي

13: د $y^2=-4(x+2)$ پارابول دراس مختصات عبارت دي له:

a) $(2,4)$　　b) $(4,2)$　　c) $(2,0)$　　d) $(-2,0)$

14: د $4x^2+4y^2+8y+3=0$ معادله عبارت ده له:

a) دایرې　　b) بیضوي　　c) پارابولا　　d) هایپربولا

15: د $y=2x$ مستقیم خط د $\frac{(x-1)^2}{4}-(\frac{(y-2)^2}{9}=1$ هایپربولا په څو ټکو کې قطع کوي؟

16: د $2y=3x$ مستقیم خط د $2y^2-6y+5x-12=0$ منحني په څو ټکو کې قطع کوي؟

17 : لاندې معادلې په پام کې ونیسئ، لومړی هغه په معیاري ډول ولیکئ، بیا یې گرافونه رسم کړئ.

$a)\ x^2+4y^2=4$　　$b)\ 9x^2+2y^2=15$

$c)\ 16x^2-96x+9y^2+90y+225=0$　　$d)\ x^2+12x-120y+288=0$

18: د لاندې قیمتونو له مخې د هرې یوې بیضوي معادله پیدا کړئ:

a) $(0,0)$ مرکزي مختصه، $a=-2$ ، $e=0{,}75$ دي او لوی قطر یې د y پر محور باندې پروت دی.

b) $(0,0)$ مرکزي مختصه، $b=64$ $e=0{,}5$ دي او لوی قطر یې د x پر محور باندې پروت دی.

19: له لاندې معادلو څخه د بیضوي ټول اجزاوې پیدا کړئ.

a) $4(x-1)^2+y^2=4$　　b) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$

(c) ketabton.com: The Digital Library

20: د پارابولا لاندې معادلې لومړي په معياري شکل وليکئ او بيايې ګرافونه رسم کړئ.

a) $x^2 - 11y = 0$

b) $y^2 - 4y - 4x + 2 = 0$

21: د پارابولا لاندې هره يوه معادله په معياري ډول واړوئ:

a) $4x^2 - y^2 - 8y - 32 = 0$

b) $2y^2 + 4y - x^2 + 10x - 25 = 0$

22: د هغې هايپربولا معادله پيدا کړئ چې $(-4,0)$ او $(4,0)$ د راسونو مختصات او $y = \pm\frac{5}{4}x$ د مجانبونو معادلې وي.

23: د هغې هايپربولا معادله پيدا کړئ چې $(-1,3)$ ، $(1,3)$ د راسونو مختصات او محراقي اوږدوالی يې 4 واحده وي.

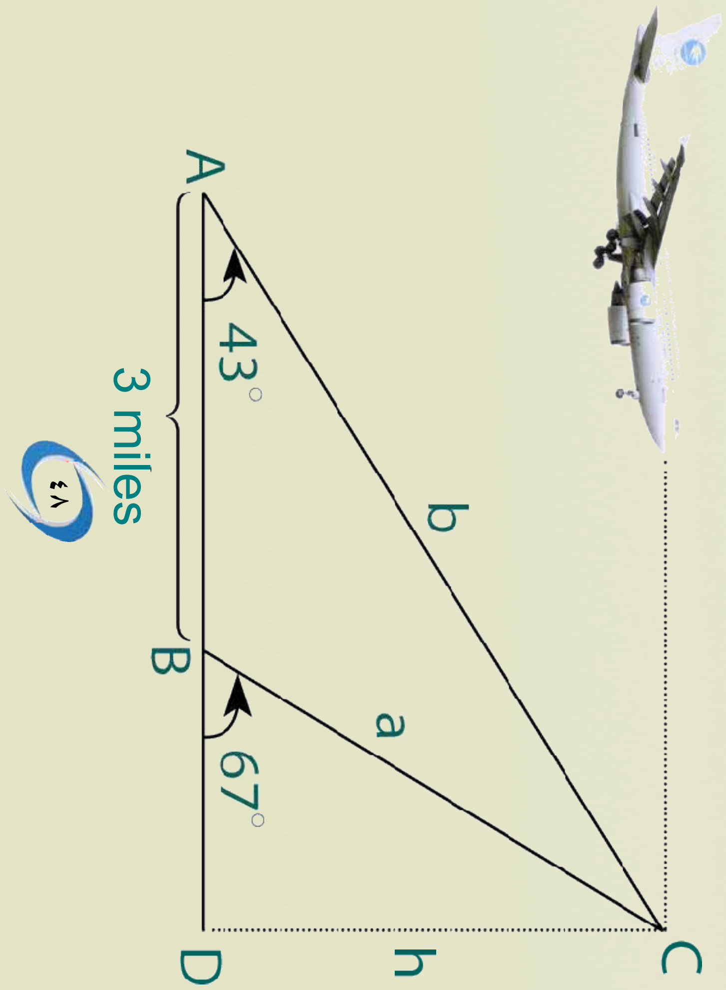
24: د $y = 2x$ مستقيم خط د $\frac{(x+1)^2}{4} - \frac{(y-2)^2}{9} = 1$ هايپربولا په څو ټکو کې قطع کوي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم څپرکی

مثلثات

(c) ketabton.com: The Digital Library

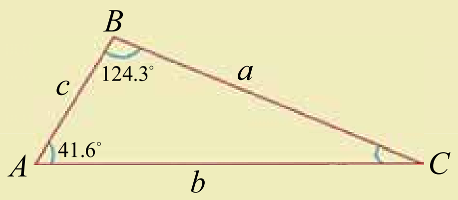


(c) ketabton.com: The Digital Library

د ساین قانون

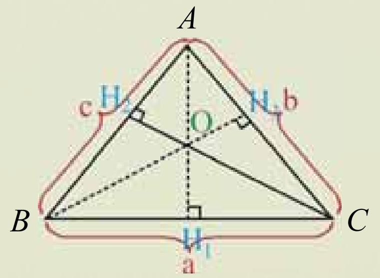
Law of sine

خرنګه کولای شو په مخامخ شکل کې د a د ضلعې او C زاویې اندازه پیدا کړو؟



فعالیت

- د ABC یو حادهالزاویه مثلث رسم او د ضلعو اوږدوالی یې وټاکئ.
- د مثلث له هر رأس څخه د هغې پرمخامخ ضلعې د $(\overline{AH_1}, \overline{BH_3}, \overline{CH_2})$ ارتفاعګانې رسم کړئ.
- د ABH_1 او BCH_1 په قایمالزاویه مثلثونو کې د $(\overline{AH_1})$ ارتفاع د $\sin B$ او $\sin C$ له جنسه پیدا او یو له بله سره یې پرتله کړئ.
- د ABH_3 او ACH_2 پــه قــایمالزاویــه مثلثونــو کــې د $(\overline{BH_3})$ ارتفاع د $\sin A$ او $\sin C$ له جنسه پیدا او یو لـه بله سره یې پرتله کړئ.



له پورتني فعالیت څخه لاندې ثبوت په لاس راوړای شو.

ثبوت:

د ACH_1 او BAH_1 په قایمالزاویه مثلثونو کې لرو چې:

$$\sin B = \frac{\overline{AH_1}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AH_1}}{c}$$

$$\overline{AH_1} = c\sin B \quad .... \quad (1)$$

$$\sin C = \frac{\overline{AH_1}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AH_1}}{b}$$

$$\overline{AH_1} = b\sin C \quad .... \quad (2)$$

د (1) او (2) اړیکو له پرتلې څخه لیکلی شو چې:

$$c\sin B = b\sin C \,/ \div bc$$

$$\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} \quad .... \quad \text{I}$$

په همدې ډول د ABH_3 او BCH_3 په قایم‌الزاویه مثلثونو کې لیکلی شو چې:

$$\sin A = \frac{\overline{BH_3}}{c} \Rightarrow \overline{BH_3} = c\sin A \;......... (3)$$

$$\sin C = \frac{\overline{BH_3}}{a} \Rightarrow \overline{BH_3} = a\sin C \;......... (4)$$

د (3) او (4) اړیکې له پرتلې څخه لرو چې: $c\sin A = a\sin C / \div ac$

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin C}{c} \;.......... II$$

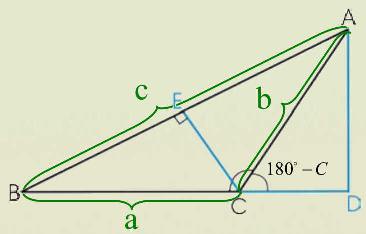
د I او II اړیکې له پرتلې څخه لیکلی شو چې: $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$

پایله: په هر $A\overset{\Delta}{B}C$ کې په داسې حال کې چې A, B, C زاویې او a, b, c د ضلعو اوږدوالې وي، لرو:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

پورتنۍ اړیکه(رابطه) په یوه مثلث کې د ساین د قانون(Law of sine) په نامه یادیږي.

د ساین د قضیې ثبوت په منفرج الزاویه مثلث کې:



د ABC په مثلث کې چې د C زاویه یې منفرجه ده په پام کې نیسو د $\overline{AD}$ او $\overline{CE}$ ارتفاع گانې رسموو.

د ADC په قایم الزاویه مثلث کې لرو: $\sin(180^\circ - C) = \frac{\overline{AD}}{b}$

د بلې خوا د متممو زاویو څخه پوهیږو چې: $\sin(180^\circ - C) = \sin C$

نو : $\sin C = \frac{\overline{AD}}{b} ......(I)$

همدارنگه د ADB له قایم الزاویه مثلث څخه لرو چې: $\sin B = \frac{\overline{AD}}{c} ......(2)$

اوس (1) او (2) رابطې خوا په خوا یو پربل وېشو:

نو : $\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$ ....(1) $\longrightarrow$ یا $\frac{\sin C}{\sin B} = \frac{c}{b}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

اوس د ACE په قايم الزاويه مثلث کې ليکلی شو:

$$\sin A = \frac{\overline{CE}}{b} \;.....(3)$$

د BEC په مثلث کې:

$$\sin B = \frac{\overline{CE}}{a} \;.....(4)$$

پورته 3 او 4 رابطې خوا په خوا يو پر بل وېشو او ليکو:

$$\frac{\sin A}{\sin B} = \frac{a}{b}$$

يا

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} \;......(5)$$

اوس د I او II رابطو له پرتلې څخه ليکلی شو چې:

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

فعاليت

- زده‌کوونکي دې، د ساين قانون په قايم‌الزاويه مثلث کې وڅېړي او ثبوت دې کړي.

لومړی مثال: که چېرې د ABC په مثلث کې د $B = 60^\circ$, $b = 9cm$ او $c = 6\sqrt{3}\,cm$ وي، د يوې ضلعې او دوو زاويو اندازې يې پيدا کړئ؟

حل: د ساين د قضيې يا قانون له مخې ليکلی شو چې:

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{9}{\sin 60^\circ} = \frac{6\sqrt{3}}{\sin C} \Rightarrow \sin C = \frac{6\sqrt{3}\cdot \sin 60^\circ}{9} = \frac{6\sqrt{3}\cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{9}$$

$$\sin C = \frac{3\cdot 3}{9} = \frac{\cancel{9}}{\cancel{9}} = 1 \Rightarrow \sin C = 1$$

خرنگه چې: $\sin 90^\circ = 1$ دی، نو: $C = 90^\circ$

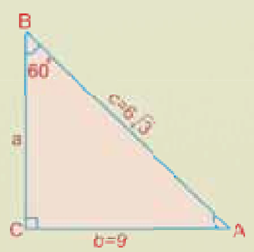
همدارنگه پوهېږو چې په يوه مثلث کې:

$$A + B + C = 180^\circ$$

$$A + 60^\circ + 90^\circ = 180^\circ$$

$$A = 180^\circ - 150^\circ$$

$$A = 30^\circ$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

د a ضلعي قیمت په لاندې ډول پیداکولی شو :

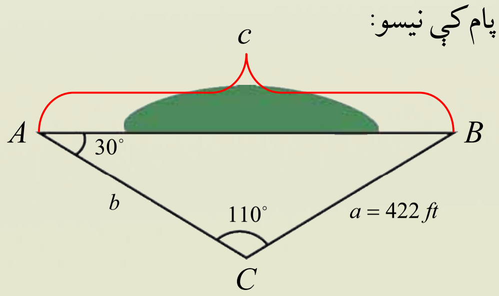
$$\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b} \Rightarrow a=\frac{\sin A\cdot b}{\sin B} \Rightarrow a=\frac{\sin 30^\circ\cdot 9}{\sin 60^\circ}$$

$$a=\frac{\frac{1}{2}\cdot 9}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow a=\frac{9}{\sqrt{3}}=\frac{9\cdot\sqrt{3}}{3}=3\sqrt{3}$$

$$a=3\sqrt{3}\,cm$$

دویم مثال: یو ساختماني انجینر غواړي چې د دوو ټکو تر منځ واټن چې په منځ کې یې یوه غونډۍ پرته ده پیداکړي.

حل: د ساین د قانون په کارولو سره $\sin A$ او $\sin C$ په پام کې نیسو:



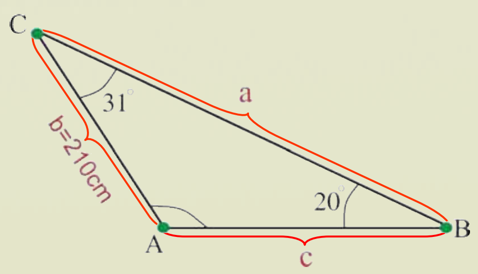
$$\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin C}{c}$$

$$c=\frac{a\cdot\sin C}{\sin A}=\frac{422\,ft\cdot\sin 110^\circ}{\sin 30^\circ}$$

څرنګه چې $\sin 110^\circ=0.9396$ او $\sin 30^\circ=0.5$ دی.

نو: $c=\frac{422\,ft\cdot 0.9396}{0.5} \Rightarrow c=793.0224\,ft$

دریم مثال: په مخامخ شکل کې د دوو زاویو او یوې ضلعې اندازه راکړل شوې ده، د یوې نامعلومې زاویې او دوو ضلعو اندازه پیداکړئ.



حل: پوهېږو چې د یوه مثلث د داخلي زاویو مجموعه 180° ده؛ نو نامعلومې زاویې یې داسې پیداکولی شو:

$$A=180^\circ-(31^\circ+20^\circ)=180^\circ-51^\circ$$

$$A=129^\circ$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د a دپیداکولو لپاره لاند تناسب په پام کې نیسو:

$$\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b} \Rightarrow \frac{\sin 129^\circ}{a}=\frac{\sin 20^\circ}{210}$$

$$a=\frac{\sin 129^\circ \cdot 210cm}{\sin 20^\circ}$$

څرنگه چې $\sin 20^\circ = 0.342$ او $\sin 129^\circ = 0.7771$ دي؛ نو:

$$a=\frac{0.7771\cdot 210}{0.342}=\frac{163.191}{0.342}=477.166cm$$

$$a=477.166cm$$

اوس د c ضلعې اوږدوالی د $\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c}$ له رابطې څخه پیدا کوو:

$$\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c} \Rightarrow \frac{\sin 20^\circ}{210}=\frac{\sin 31^\circ}{c}$$

$$c=\frac{210cm\cdot \sin 31^\circ}{\sin 20^\circ}$$

څرنگه چې $\sin 31^\circ = 0.5150$ او $\sin 20^\circ = 0.342$ دی د پورته قیمتونو په اېښودلو سره لیکلای شو چې:

$$c=\frac{0.5150\cdot 210}{0.342}=\frac{108.15}{0.342}=316.2$$

یادونه:

د ساین قانون هغه وخت کارولی شو چې:

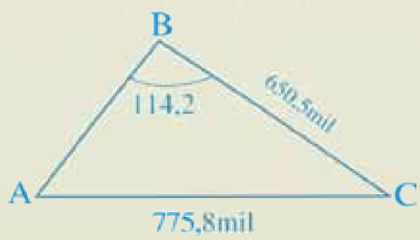
- دوې زاویې او دمنځ ضلع یې معلومه وي.(ASA)، A زاویه او S ضلع ښیې.
- دوه ضلعې او د منځ زاویه یې معلومه وي.(SAS)، S ضلع او A زاویه ښیې.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

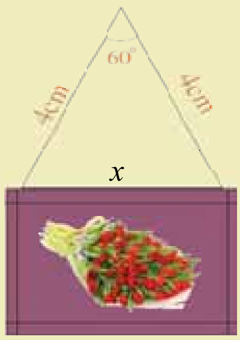
1. که چیرې د یوه مثلث د ضلعو اوږدوالی $a=8$, $b=5$ او $c=10$ واحده وي، د B د زاویې انـدازه پیدا کړئ.

2. لاندې شکل په پام کې ونیسئ د A او B د ښارونو ترمنځ واټن پیدا کړئ؟



(c) ketabton.com: The Digital Library

د کوساین قانون
Law of cosine



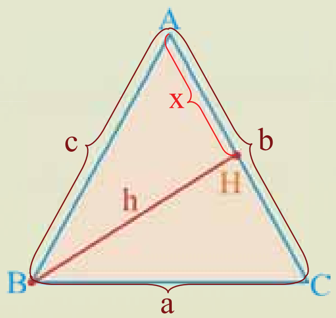
د یوه شکل چارت د مېخ په مرسته د دېوال پر مخ ځړول شوی دی، که چیرې د مېخ د دوو خواوو د تار اوږدوالی هر یو $4cm$ وي او د منځ زاویه یې 60° وي، د (x) د تار د دوو ټکو ترمنځ واټن د کوم قانون په مرسته پیداکولی شو؟

فعالیت

- د ABC کیفي مثلث رسم او د هر رأس مخامخ ضلعې په ترتیب سره په c, b, a وښایاست.
- د B له رأس څخه د $\overline{AC}$ پر ضلع ارتفاع رسم کړئ.
- په جوړ شوو قایم‌الزاویه مثلثونو کې د فیثاغورث قضیه تطبیق کړئ.
- په قایم‌الزاویه مثلثونو کې د $\overline{BH}$ او $\overline{HC}$ قیمتونه د B او C زاویو د cos له جنسه، په ترتیب سره پیدا او د فیثاغورث په رابطه کې یې وضع کړئ.
- ممکنه الجبري محاسبې ترسره او وروستی رابطه یې ولیکئ.

د پورتني فعالیت د سرته رسولو څخه وروسته داسې ثبوتوو:

ثبوت: د ABC په حاده‌الزاویه مثلث کې د $\overline{BH}$ ارتفاع رسموو



$$\overline{CH} = b - x \quad , \quad \overline{AH} = x \quad , \quad \overline{BH} = h$$

د BCH په قایم الزاویه مثلث کې لرو:

$$\overline{BC}^2 = \overline{CH}^2 + \overline{BH}^2$$

$$a^2 = (b-x)^2 + h^2 \quad .... \quad \text{I}$$

د AHB په قایم الزاویه مثلث کې د h اوږدوالي پیداکوو:

$$h^2 = c^2 - x^2 \quad .... \quad \text{II}$$

د I او II له اړیکو څخه لیکلی شو چې:

$$a^2 = (b-x)^2 + c^2 - x^2$$
$$a^2 = b^2 - 2bx + x^2 + c^2 - x^2$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bx$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د AHB په قایم‌الزاویه مثلث کې:

$$coA = \frac{x}{c} \Rightarrow x = c \cdot \cos A$$

په پورتنی اړیکه کې د x پر ځای $c \cdot \cos A$ قیمت ایږدو، نو:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \quad \text{یا} \quad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

پایله: په هر مثلث کې دا لاندې اړیکې سمې دي:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \quad \text{یا} \quad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \quad \text{یا} \quad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \quad \text{یا} \quad c^2 = b^2 + a^2 - 2ba\cos C$$

فعالیت

- په همدې مثلث کې دې دوې نورې اړیکې یعنې $\sin C$ او $\sin B$ زده‌کوونکي ثبوت کړي.

یادونه: د کوساین قانون هغه وخت کارولی شو چې:

- چې دوې ضلعې او د منځ زاویې یې معلومې وي. (SAS)، S ضلع او A زاویه ښیي.
- د مثلث درې ضلعې معلومې وي. (SSS)، S یوه ضلع ښیي .

د ساین او کوساین د قانون له کارولو څخه، د مثلث د عناصرو د پیداکولو لپاره له لاندې جدول څخه کار اخلو:

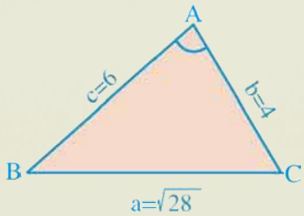
د یوه مثلث د عناصرو پیدا کول	
د کارولو فورمول	راکړل شوی معلومات
د کوساین او وروسته د ساین قانون	ضلع، ضلع، ضع (SSS)
د ساین قانون	SAA (زاویه، زاویه، ضلع)
د ساین قانون	ASA (زاویه، ضلع، زاویه)
د کوساین قانون وروسته د ساین	SAS (ضلع،زاویه، ضلع)
امکان نه لري	AAA (زاویه، زاویه، زاویه)

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی مثال: د ABC په مثلث کې د هغو دريو ضلعو اندازې په لاندې ډول راکړل شوي دي، د A زاويې اندازه وټاکئ.

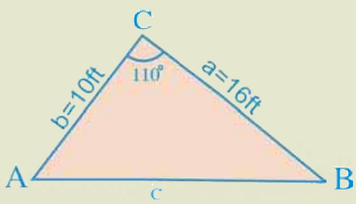
حل:



$$a=\sqrt{28}\quad,\quad b=4\quad,\quad c=6\quad,\quad A=?$$
$$a^2=b^2+c^2-2bc.\cos A$$
$$(\sqrt{28})^2=(4)^2+(6)^2-2\cdot 4\cdot 6\cos A$$
$$28=16+36-48\cos A \quad\Rightarrow\quad 28=52-48\cos A$$
$$48\cos A=52-28 \quad\Rightarrow\quad 48\cos A=24$$
$$\cos A=\frac{24}{48}=\frac{1}{2}$$
$$\boxed{A=60^\circ}$$

دويم مثال: د ABC په مثلث کې که چيرې دوې ضلعې يې هر يوه $a=16$, $b=10$ واحده او د منځ زاويه يې $C=110^\circ$ وي، د c ضلعې اوږدوالی پيدا کړئ.

حل:



$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$$
$$c^2=(16)^2+(10)^2-2(16)10\cos 110^\circ$$
$$c^2=256+100-320\cos 110^\circ$$
$$c^2=356-320\cos 110^\circ$$
$$c=\sqrt{356-320\cos 110^\circ}$$

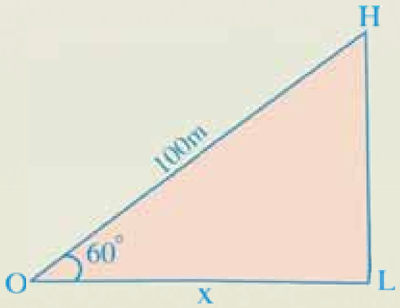
څرنګه چې : $\cos 110^\circ=0.342$ دی، نو:

$$c=\sqrt{356-320(0.342)} \quad\Rightarrow\quad c=\sqrt{356-109.44}$$
$$\boxed{c=15.70}$$

درېيم مثال: يو پتنګ(کاغذ پران) له $100m$ واټن تار سره په هوا کې دی، که تار د ځمکې له سطحې سره 60° زاويه جوړه کړې وي، له ځمکې څخه د پتنګ لوړوالی پيدا کړئ.

حل: د OHL په قايم‌الزاويه مثلث کې لرو، چې:

$$\cos 60^\circ=\frac{\overline{OL}}{\overline{OH}}=\frac{x}{100} \quad\Rightarrow\quad x=100\cdot\cos 60^\circ=100\cdot\frac{1}{2}=50m$$



د کوساین قانون له مخې لرو چې:

$$\overline{HL}^2 = \overline{OH}^2 + \overline{OL}^2 - 2\overline{OH}\cdot\overline{OL}\cdot\cos 60^\circ$$

$$\overline{HL}^2 = (100)^2 + (50)^2 - 2\cdot 100\cdot 50\cdot\frac{1}{2}$$

$$\overline{HL}^2 = 10000 + 2500 - 5000$$

$$\overline{HL}^2 = 7500m^2 \quad \Rightarrow \overline{HL} = \sqrt{7500}m = 50\sqrt{3}\,m$$

$$\overline{HL} = 86.6m$$

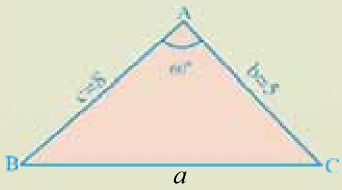
څلورم مثال: که چیرې د ABC په مثلث کې $b=5,\ c=8,\ A=60^\circ$ وي، د a او $\sin C$ اندازه پیدا کړئ.

حل: لومړی د کوساین د قضیې په کارلوسره د a ضلع او بیا $\sin C$ پیدا کوو.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \quad \Rightarrow \quad a^2 = 25 + 64 - 80\cdot\frac{1}{2} = 89 - 40$$

$$a^2 = 49 \quad \Rightarrow \quad a = 7$$

د ساین د قضیې له مخې لیکو چې:



$$\frac{\sin C}{c} = \frac{\sin A}{a}$$

$$\sin C = \frac{c\cdot\sin A}{a} = \frac{8\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{7}$$

$$\sin C = \frac{4\sqrt{3}}{7}$$

پوښتنې

1. که چیرې د ABC په مثلث کې $b=4ft,\ a=5ft$ او $A=45^\circ$ وي، د مثلث نامعلومې ضلعې او زاویې پیدا کړئ.

2. که چیرې په یوه مثلث کې $a=3cm$ او $b=9cm$ او د دوی ترمنځ زاویه 60° وي د c د ضلعې اوږدوالی پیدا کړئ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ټانجنټ قانون

Law of tangent

په هر مثلث کې د زاویو او ضلعو ترمنځ د tan له جنسه مخامخ اړیکه شتون لري.

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\tan\frac{A+B}{2}}{\tan\frac{A-B}{2}}$$

فعالیت

- د ساین قانون مساوي په D ولیکئ.
- د sin قانون هر دوه، نسبتونه یعنې $\frac{b}{\sin B}$ او $\frac{a}{\sin A}$ په جلا جلا ډول مساوي له D سره ولیکئ.
- پورته دوه نسبتونه د ضلعو د اوږدوالي له مخې ولیکئ.
- دوه پورتنۍ اړیکې لومړی جمع او بیا یې تفریق کړئ.
- لاسته راغلي اړیکې یو پر بل وویشئ.
- الجبري محاسبې ترسره او د پایلې فورمول ولیکئ.

پورته فعالیت په لاندې ډول ثبوتوو.

ثبوت: د ساین قانون په پام کې نیسو:

$$\frac{c}{\sin C}=\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=D$$

$$\frac{b}{\sin B}=D \Rightarrow b=D\sin B \quad , \quad \frac{a}{\sin A}=D \Rightarrow a=D\sin A$$

پورتنۍ اړیکې لومړی جمع او بیا تفریقوو:

$$a+b=D(\sin A+\sin B)$$
$$a-b=D(\sin A-\sin B)$$

پورتنۍ اړیکې یو پر بل وېشو:

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\sin A+\sin B}{\sin A-\sin B}=\frac{2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}{2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}}$$

$$\frac{a+b}{a-b}=\tan\frac{A+B}{2}\cdot\cot\frac{A-B}{2}$$

خرنگه چې $\frac{1}{\tan\frac{A-B}{2}} = \cot\frac{A-B}{2}$ دی.

نو په پایله کې لیکلی شو چې:

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\tan\frac{A+B}{2}}{\tan\frac{A-B}{2}}$$

فعالیت

- لاندې اړیکې پیدا کړئ.

$$\frac{b+c}{b-c} = \frac{\tan\frac{B+C}{2}}{\tan\frac{B-C}{2}} \quad , \quad \frac{c+a}{c-a} = \frac{\tan\frac{C+A}{2}}{\tan\frac{C-A}{2}}$$

- پورتنی اړیکې په یوه مثلث کې د ضلعې او زاویې ترمنځ اړیکې د tan اړیکه بلل کیږي.

لومړی مثال: د ABC په مثلث کې $\frac{b-c}{b+c} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ او $A = 90^\circ$ دی، د B او C زاویو اندازه پیدا کړئ.

حل: پوهیږو چې په هر مثلث کې:

$$A + B + C = 180^\circ$$

$$B + C = 180^\circ - 90^\circ$$

$$B + C = 90^\circ \;\Rightarrow\; \frac{B+C}{2} = 45^\circ$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{b-c}{b+c} = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ A = 90^\circ \\ B = ? \\ C = ? \end{array}\right\} \frac{b-c}{b+c} = \frac{\tan\frac{B-C}{2}}{\tan\frac{B+C}{2}} \;\Rightarrow\; \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\tan\frac{B-C}{2}}{\tan 45^\circ}$$

$$\tan\frac{B-C}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \tan 30^\circ \quad , \quad \tan\frac{B-C}{2} = \tan 30^\circ$$

$$\frac{B-C}{2} = 30^\circ \;\Rightarrow\; B - C = 60^\circ \;\;........\; \text{I}$$

$$A + B + C = 180^\circ$$

له بلې خوا په هر مثلث کې:

$$B + C = 180^\circ - A \;\Rightarrow\; B + C = 180^\circ - 90^\circ$$

$$B + C = 90^\circ \;\;.........\; \text{II}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له I او II اړیکو څخه لاندې پایله په لاس راځي:

د نوموړي سیستم له حلولو څخه وروسته د B قیمت په لاس راوړو:

$$B-C=60^\circ \quad .... \quad \text{I}$$
$$B+C=90^\circ \quad .... \quad \text{II}$$
$$2B=150^\circ$$
$$\boxed{B=75^\circ}$$

اوس د B قیمت په ایښودلو سره د C زاویه پیدا کوو:

$$B-C=60^\circ$$
$$75^\circ-C=60^\circ$$
$$-C=60^\circ-75^\circ$$
$$\boxed{C=15^\circ}$$

دویم مثال: که چیرې د ABC په یوه مثلث کې $c=432$, $B=42^\circ\ 30'$ او $a=925$ وي، د مثلث نورې اجزاوې پیدا کړئ.

حل:

$$A+B+C=180^\circ \Rightarrow A+C=180^\circ-B \Rightarrow A+C=180^\circ-42^\circ\ 30'$$
$$A+C=179^\circ\ 60'-42^\circ\ 30' \Rightarrow A+C=137^\circ\ 30' \ .... \ \text{I}$$
$$\frac{A+C}{2}=\frac{137^\circ\ 30'}{2} \Rightarrow \frac{A+C}{2}=\frac{136^\circ\ 90'}{2}=68^\circ\ 45'$$
$$\frac{\tan\frac{A+C}{2}}{\tan\frac{A-C}{2}}=\frac{a+c}{a-c}$$

اوس د زاویې او ضلعو قیمتونه په پورتنی اړیکه کې ایږدو، یعنې:

$$\frac{\tan 68^\circ\ 45'}{\tan\frac{A-C}{2}}=\frac{925+432}{925-432} \Rightarrow \frac{\tan 68^\circ\ 45'}{\tan\frac{A-C}{2}}=\frac{1357}{493}$$

یا:

$$1357\cdot\tan\frac{A-C}{2}=493\cdot\tan 68^\circ\ 45' \Rightarrow \tan\frac{A-C}{2}=\frac{493}{1357}\cdot\tan 68^\circ\ 45'$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له مثلثاتي جدول څخه پوهېږو چې $\tan 68^\circ\ 45' = 2.5714$ دی؛ نو:

$$\tan\frac{A-C}{2} = 0.9341 \quad\Rightarrow\quad \frac{A-C}{2} = 42^\circ\ 59'$$

$$\boxed{A-C = 85^\circ\ 58' \ \ldots\ldots\ \text{II}}$$

اوس د I او II اړیکو په پام کې نیولو سره لیکو:

$$A+C = 137^\circ\ 30' \ \ldots\ldots\ \text{I}$$

$$A-C = 85^\circ\ 58' \ \ldots\ldots\ \text{II}$$

$$2A = 222^\circ\ 88'$$

$$\boxed{A = 111^\circ\ 44'}$$

$$C = 137^\circ\ 30' - A \ \Rightarrow\ C = 137^\circ\ 30' - 111^\circ\ 44'$$

$$C = 136^\circ\ 90' - 111^\circ\ 44'$$

$$\boxed{C = 25^\circ\ 46'}$$

$$\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} \ \Rightarrow\ b = c\cdot\frac{\sin B}{\sin C}$$

$$b = \frac{432\sin 42^\circ\ 30'}{\sin 25^\circ\ 46'}$$

$$\sin 42^\circ\ 30' = 0.6756$$

$$\sin 25^\circ\ 46' = 0.4346$$

$$b = \frac{432}{0.4346}\cdot 0.6756 = 994.01\cdot 0.6756 = 671.5582cm$$

پوښتنې

د لاندې ورکړل شوو عناصرو له مخې د مثلث نامعلومې اجزاوې پیدا کړئ.

a) که چېرې $a = 35ft$, $B = 60^\circ$, $C = 75^\circ$ وي.

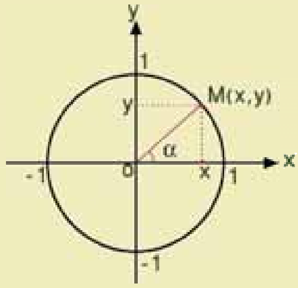
b) که چېرې $\alpha = 45^\circ$, $b = 37m$ او $\gamma = 75^\circ$ وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثلثاتي مطابقتونه

Trigonometry identities



پوهېږو چې $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ يو الجبري مطابقت دی، ځکه د a او b په ټولو قيمتونو سره د مساوات داوړه خواوې برابرېږي.

آيا $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ يو مثلثاتي مطابقت کېدلی شي؟

فعاليت

- په لاندې جدول کې د α د مختلفو قيمتونو لپاره د A او B افادو قيمتونه بشپړ کړئ.

α	$A = \dfrac{\cot\alpha}{\csc - 1}$	$B = \dfrac{\csc\alpha + 1}{\cot\alpha}$
0°		
30°		
45°		
60°		
90°		

- د جدول له بشپړولو څخه وروسته د A او B قيمتونه پرتله او اړيکه يې وليکئ.

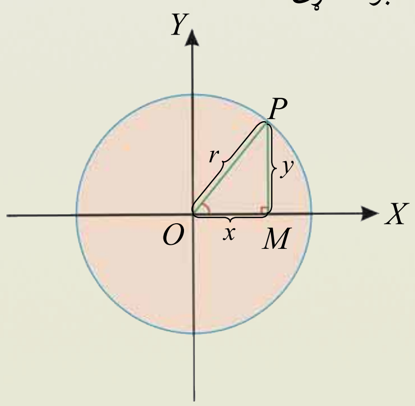
له پورتني فعاليت څخه لاندې تعريف لاسته راځي.

تعريف: هغه مثلثاتي مساوات چې د زاويې په ټولو قيمتونو سره ، د مساوات داوړه خواوې برابرې شي، مثلثاتي مطابقت بلل کېږي،لکه:

$$\frac{\cot\alpha}{\csc\alpha - 1} = \frac{\csc\alpha + 1}{\cot\alpha}$$

که α هر قيمت واخلي، د پورته مساوات دواړه خواوې مساوي کېږي.

د α د زاويې د هر قيمت لپاره د $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ مطابقت ثبوت کړئ.



ثبوت: د $C(O,r)$ په مثلثاتي دايره کې د OMP په قايم-الزاويه مثلث کې گورو او ليکلی شو چې:

$$\sin\alpha=\frac{y}{r} \quad \text{او} \quad \cos\alpha=\frac{x}{r}$$

له بلې خوا د فيثاغورث له قضيې څخه لرو:

$$y^2+x^2=r^2$$

د مساوات دواړه خواوې په r^2 ويشو:

$$\frac{x^2}{r^2}+\frac{y^2}{r^2}=\frac{r^2}{r^2} \qquad \text{يا} \qquad (\frac{x}{r})^2+(\frac{y}{r})^2=1$$

اوس د $\frac{y}{r}$ په ځای $\sin\alpha$ او $\frac{x}{r}$ په ځای $\cos\alpha$ ليکو.

نو ليکلی شو: $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ يا $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$

مثلثاتي اساسي اړيکې عبارت دي له:

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1 \quad , \quad 1+\tan^2\alpha=\sec^2\alpha \quad , \quad 1+\cot^2\alpha=\csc^2\alpha$$

د مثلثاتو فرعي اړيکې عبارت دي له:

$$\sec\alpha=\frac{1}{\cos\alpha} \quad , \quad \cos\alpha\cdot\sec\alpha=1$$

$$\csc\alpha=\frac{1}{\sin\alpha} \quad , \quad \sin\alpha\cdot\csc\alpha=1 \quad , \quad \cot\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$tag\,\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \quad , \quad \tan\alpha\cdot\cot\alpha=1 \quad , \quad \cot\alpha=\frac{1}{\tan\alpha}$$

اوس غواړو د $1+\tan^2\alpha=\sec^2\alpha$ اړيکه ثبوت کړو.

ثبوت: د فيثاغورث د قضيې په کارلو سره ليکو $x^2+y^2=r^2$

د مساوات دواړه خواوې په x^2 ويشو. $\frac{x^2}{x^2}+\frac{y^2}{x^2}=\frac{r^2}{x^2}\Rightarrow 1+(\frac{y}{x})^2+(\frac{r}{x})^2$

په نتيجه کې په پورته افاده کې د $\frac{r}{x}$ او $\frac{y}{x}$ د قيمتونو په ليکلو سره ليکو: $1+\tan^2\alpha=\sec^2\alpha$

(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیت

- **د مثلثاتي نسبتونو په کارولو سره ثبوت کړئ چې** : $1+\cot^2\alpha=\csc^2\alpha$

په عمومي توګه د مطابقتونو د حل یا ثبوت لپاره د مساوات له یوې خوا له افادې څخه د بلې خوا افاده لاسته راوړو، یعنې یوې خواته مختلفې عملیې لکه مربع کول، تجزیه، ضرب او نورې عملیې سرته رسوو، څو د بلې خوا افاده لاسته راشي، که چېرې په یوه الجبري افاده کې مثلثاتي نسبتونه یوه یا څو زاویې وي، مثلثاتي افاده بلل کېږي، د مثلثاتي اړیکو په واسطه مثلثاتي افادې ساده کولی شو.

د موضوع دلا ښه پوهېدو لپاره لاندې لاربښوونې او مثالونه په پام کې ونیسئ.

لومړی مثال: د $\dfrac{\sin\alpha\cos\alpha\cdot\tan\alpha\cot\alpha}{1-\sin^2\alpha}$ مثلثاتي افاده ساده کړئ.

حل:

$$\frac{\sin\alpha\ \cos\alpha\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}{\cos^2\alpha}=\frac{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{\cos^2\alpha}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\tan\alpha$$

دویم مثال: د $\sin^2\beta\cdot\cot^2\beta+\cos^2\beta\cdot\tan^2\beta+\tan^2\beta=1+\tan^2\beta$ مثلثاتي مطابقت ثبوت کړئ.

حل: په لاندې ډول افاده ساده کوو:

$$\sin^2\beta\cot^2\beta+\cos^2\beta\tan^2\beta+\tan^2\beta=\sin^2\beta\frac{\cos^2\beta}{\sin^2\beta}+\cos^2\beta\cdot\frac{\sin^2\beta}{\cos^2\beta}$$

$$+\tan^2\beta=\cos^2\beta+\sin^2\beta+\tan^2\beta=1+\tan^2\beta$$

دریم مثال: لاندې افاده د $\cos\beta$ له جنسه حساب کړئ.

$$(1-\sin^2\beta)\ \ (1+\sec^2\beta)=?$$

حل: $(1-\sin^2\beta)(1+\sec^2\beta)=\cos^2\beta(1+\dfrac{1}{\cos^2\beta})=\cos^2\beta(\dfrac{\cos^2\beta+1}{\cos^2\beta})=\cos^2\beta+1$

(c) ketabton.com: The Digital Library

خلورم مثال: ثبوت کړئ چې $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2+(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=2$

حل:د مطابقت دکيڼ اړخ قوسونو ته انکشاف ورکوو.

$$(\sin\alpha+\cos\alpha)^2+(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=2$$

$$\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha+\sin^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha=2$$

$$2\sin^2\alpha+2\cos^2\alpha=2(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)=2\cdot1=2$$

پنځم مثال: لاندې مطابقت ثبوت کړئ.

$$\frac{\sin A}{1+\cos A}+\frac{1+\cos A}{\sin A}=2\csc A$$

حل:

$$\frac{\sin A}{1+\cos A}+\frac{1+\cos A}{\sin A}=2\csc A$$

$$\frac{\sin^2 A+(1+\cos A)^2}{\sin A(1+\cos A)}=\frac{\sin^2 A+1+2\cos A+\cos^2 A}{\sin A(1+\cos A)}=\frac{\sin^2 A+\cos^2 A+1+2\cos A}{\sin A(1+\cos A)}$$

$$\frac{1+1+2\cos A}{\sin A(1+\cos A)}=\frac{2+2\cos A}{\sin A(1+\cos A)}=\frac{2(1+\cos A)}{\sin A(1+\cos A)}=2\cdot\frac{1}{\sin A}=2\csc A$$

شپږم مثال: وښاياست چې $\frac{1+\tan^2 A}{1+\cot^2 A}=\tan^2 A$

حل:

$$1+\tan^2 A=\sec^2 A$$

$$1+\cot^2 A=\csc^2 A$$

$$\frac{\sec^2 A}{\csc^2 A}=\tan^2 A \quad\Rightarrow\quad \frac{\frac{1}{\cos^2 A}}{\frac{1}{\sin^2 A}}=\frac{\sin^2 A}{\cos^2 A}=\tan^2 A$$

$$\tan^2 A=\tan^2 A$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

اووم مثال: لاندي مطابقت ثبوت کړئ.

$$(\sin\alpha+\cos\alpha)(\cot\alpha+\tan\alpha)=\frac{1}{\cos\alpha}+\frac{1}{\sin\alpha}$$

حل: دکيڼي خوا په افاده کې د $\cot\alpha$ او $\tan\alpha$ قيمتونه د $\sin\alpha$ او $\cos\alpha$ له جنسه ایږدو.

$$(\sin\alpha+\cos\alpha)\left(\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)$$

$$=(\sin\alpha+\cos\alpha)\left(\frac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}\right)=(\sin\alpha+\cos\alpha)\frac{1}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}$$

$$=\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}=\frac{1}{\cos\alpha}+\frac{1}{\sin\alpha}$$

$$(\sin\alpha+\cos\alpha)(\cot\alpha+\tan\alpha)=\frac{1}{\cos\alpha}+\frac{1}{\sin\alpha}$$

اتم مثال: د $\frac{\cos(x-y)}{\cos x\sin y}=\tan x+\cot y$ مطابقت ثبوت کړئ.

حل:

$$\frac{\cos(x-y)}{\cos x\sin y}=\frac{\cos x\cos y+\sin x\sin y}{\cos x\sin y}$$

$$=\frac{\cos x\cos y}{\cos x\sin y}+\frac{\sin x\sin y}{\cos x\sin y}\Rightarrow\frac{\cos y}{\sin y}+\frac{\sin x}{\cos x}$$

$$=\cot y+\tan x=\tan x+\cot y$$

نهم مثال: د $\sin^2\frac{x}{2}=\frac{\tan x-\sin x}{2\tan x}$ مطابقت ثبوت کړئ.

حل: پوهيږو چې $\sin^2\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{2}$ دی.

اوس د معادلې دواړه خواوې په $\frac{\tan x}{\tan x}$ کې ضربوو؛ نو:

$$\frac{1-\cos x}{2}=\frac{\tan x-\sin x}{2\tan x}$$

$$=\frac{\tan x}{\tan x}\cdot\frac{1-\cos x}{2}=\frac{\tan x-\tan x\cos x}{2\tan x}$$

$$=\frac{\tan x-\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)\cos x}{2\tan x}=\frac{\tan x-\sin x}{2\tan x}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لسم مثال: د $\dfrac{1+\sin x}{\cos x}+\dfrac{\cos x}{1+\sin x}=2\sec x$ مطابقت ثبوت کړئ.

حل:

$$\frac{1+\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{1+\sin x}=\frac{(1+\sin x)^2+\cos^2 x}{\cos x(1+\sin x)}$$
$$=\frac{1+2\sin x++\sin^2 x+\cos^2 x}{\cos x(1+\sin x)}$$
$$=\frac{1+2\sin x+1}{\cos x(1+\sin x)}=\frac{2+2\sin x}{\cos x(1+\sin x)}$$
$$=\frac{2(1+\sin x)}{\cos x(1+\sin x)}=\frac{2}{\cos x}=2\cdot\frac{1}{\cos x}$$
$$=2\sec x$$

پوښتنې

1. د مثلثاتو د اساسي اړیکو په پام کې نیولو سره د هرې پوښتنې معادل افاده پیدا کړئ.

$a)\ \dfrac{\sin 250^\circ}{\cos 250^\circ}$ $\quad b)\ \sqrt{\sec^2\beta-1}$ $\quad c)\ \dfrac{1}{\cos 80^\circ}$

2. هره افاده د $\sin\beta$ له جنسه پیدا کړئ.

$a)\ \cot\beta\cos\beta$, $\quad b)\ \cot^2\beta$

3. لاندې مطابقتونه ثبوت کړئ.

$a)\ \dfrac{\cos ec\alpha}{\cot an\alpha+\tan\alpha}=\cos\alpha$ $\quad b)\ \dfrac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}=\cos 2x$

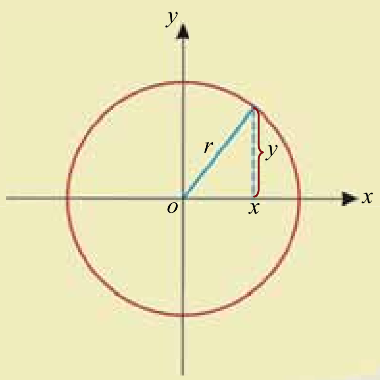
$c)\ \dfrac{\sin\alpha+\sin 2\alpha}{1+\cos\alpha+\cos 2\alpha}=tag\alpha$ $\quad d)\ \dfrac{\tan x-\cot x}{\tan+\cot x}=1-2\cos^2 x$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثلثاتي معادلې

Trigonometric equation



$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ يو مثلثاتي مطابقت دی،

آيا $\sin\alpha + \cos\alpha = 1$ يو مطابقت دی که يوه معادله؟

فعاليت

- پـه لانـدې جـدول کـې د $1 - 2\sin\beta = 0$ او $1 + tag^2\beta = \sec^2\beta$ د β د کومـو قيمتونـو لپـاره صحيح دي.

β	$1 - 2\sin\beta = 0$	$1 + \tan^2\beta = \sec^2\beta$
0°		
30°		
60°		
90°		

- د β د مختلفو قيمتونو لپاره د $1 + \tan^2\beta = \sec^2\beta$ او $1 - 2\sin\beta = 0$ ترمنځ څه ډول اړيکې شتون لري.

  _ آيا $1 + \tan^2\beta = \sec^2\beta$ يو مطابقت دی، که يوه معادله؟

  _ آيا $1 - 2\sin\beta = 0$ يو مطابقت دی، که يوه معادله؟

له پورتني فعاليت څخه لاندې تعريف په لاس راځي.

تعريف: هغه مثلثاتي مساوات چې د زاويې په ځينو قيمتونو سره د مساوات دواړه خواوې مساوي کېږي، مثلثاتي معادله بلل کېږي.

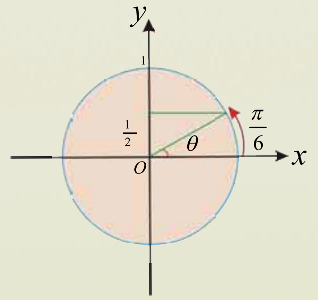
هر مثلثاتي مطابقت يوه معادله کيدلی شي، خو هره مثلثاتي معادله، مثلثاتي مطابقت نه شي کېدلای.

هره مثلثاتي معادله له لاندې څلورو حالتونو څخه په يو حالت باندې حلولای شو.

لومړی حالت: د $a\sin\alpha + b = 0$ معادله د پورتنی معادلې په حل کې د مناسب ځواب د پیدا کولو لپاره لاندې مثالونه په پام کې ونیسئ.

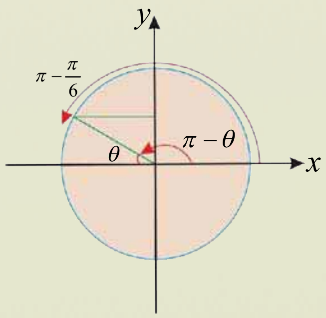
مثال: د $2\sin x - 1 = 0$ مثلثاتي معادلې د حل سټ پیدا کړئ.

حل: لومړی د $\sin x$ قیمت لاسته راوړو: $\sin x = \frac{1}{2}$ $\Leftarrow$ $2\sin x = 1$ $\Leftarrow$ $2\sin x - 1 = 0$



اوس د $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ په انټروال کې هغه زاویه پیدا کوو چې sin یې $\frac{1}{2}$ شي.

$$\sin x = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \sin x = \sin\frac{\pi}{6}$$



یوه مثلثاتي دایره په پام کې نیسو او هغه زاویې پیدا کوو چې sin یې $\frac{1}{2}$ وي.

$$x = \frac{\pi}{6}, 2\pi + \frac{\pi}{6}, 4\pi + \frac{\pi}{6}, \ldots, 2k\pi + \frac{\pi}{6}, \quad k \in z$$

په دویمه مثلثاتي دایره کې $(\pi - \theta)$ له رابطې څخه هغه زاویې پیداکوو چې sin یې $\frac{1}{2}$ وي.

$$x = \pi - \frac{\pi}{6}, 3\pi - \frac{\pi}{6}, 5\pi - \frac{\pi}{6}, \ldots, (2k+1)\pi - \frac{\pi}{6}, \quad k \in z$$

نو د $\sin x = \frac{1}{2}$ د معادلې حل په لاندې دوو سټونو کې دی.

$$A_1 = \left\{\frac{\pi}{6}, 2\pi + \frac{\pi}{6}, 4\pi + \frac{\pi}{6}, \ldots, 2k\pi + \frac{\pi}{6}, \quad k \in z\right\}$$

$$A_2 = \left\{\pi - \frac{\pi}{6}, 3\pi - \frac{\pi}{6}, 5\pi - \frac{\pi}{6}, \ldots, (2k+1)\pi - \frac{\pi}{6}, \quad k \in z\right\}$$

په عمومي ډول پورتني سټونه په لاندې ډول لیکلی شو:

$$A_1 \cup A_2 = A = \left\{x / x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \quad \wedge \quad x = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{6} \quad k \in Z\right\}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دويم مثال: د $2\sin x-3=0$ مثلثاتي معادلې د حل سټ پيدا کړئ.

حل: $2\sin x-3=0 \Rightarrow 2\sin x=3 \Rightarrow \sin x=\frac{3}{2}$

اوس د $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ په انټروال کې هغه زاويه پيدا کوو چې $\sin x=\frac{3}{2}$ شي، دا چې د هرې زاويې د $\sin$ -1 او $+1$ په منځ ($-1\le\sin x\le 1$) دی، نو هغه زاويه چې $\sin$ يې $\frac{3}{2}$ وي، وجود نه لري، نو په دې اساس معادله حل نه لري.

دويم حالت: $a\cos x+b=0$

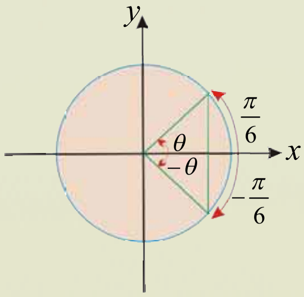
د پورتنی معادلې د حل مناسب ځواب د پيدا کولو لپاره لاندې مثالونو ته پام وکړئ.

لومړی مثال: د $2\cos x-\sqrt{3}=0$ مثلثاتي معادلې د حل سټ پيدا کړئ.

حل:له پورتنی معادلې څخه $\cos x$ لاسته راوړو:

$$2\cos x-\sqrt{3}=0 \Rightarrow 2\cos x=\sqrt{3} \Rightarrow \cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

اوس د $[0\ ,\ \pi]$ په انټروال کې هغه زاويه پيدا کوو يا لټوو چې $\cos$ يې $\frac{\sqrt{3}}{2}$ وي، هغه له $\frac{\pi}{6}$ څخه عبارت دی، نو ليکلی شو چې $\cos x=\cos\frac{\pi}{6}$.



اوس د مثلثاتي دايرې په پام کې نيولو سره ټولې هغه زاويې چې $\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ وي، پيدا کوو.

$$x=\frac{\pi}{6}\ ,\quad 2\pi+\frac{\pi}{6}\ ,\quad 4\pi+\frac{\pi}{6}\ldots$$

$$x=-\frac{\pi}{6}\ ,\ 2\pi-\frac{\pi}{6}\ ,\quad 4\pi-\frac{\pi}{6}$$

په عمومي توګه د پورتنيو حلونو سټ داسې ليکل کيږي: $x=2n\pi\pm\theta$

$$A=\left\{x/x=2k\pi+\frac{\pi}{6}\wedge x=2k\pi-\frac{\pi}{6}\ ,\ k\in z\right\}$$

په عمومي توګه د هرې θ زاويې لپاره ليکو: $A=\{x/x=2k\pi+\theta\ \wedge\ x=2k\pi-\theta\ ,\ k\in z\}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم مثال: د $2\cos x+\sqrt{2}=0$ معادله په $(0\ ,\ 2\pi)$ انټروال کې څوحلونه لري؟

حل: $\cos x=-\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftarrow 2\cos x=-\sqrt{2}$

له بلې خوا پوهېږو چې د $(0, 2\pi)$ په انټروال کې $\cos x=\cos\frac{3\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ کېږي.

له دې امله د معادلې حل $x=\frac{3\pi}{4}$ په لاس راځي.

د حل سټ يې مساوي دی له:

$$A=\left\{x / x=2k\pi+\frac{3\pi}{4}\ \wedge\ x=2k\pi-\frac{3\pi}{4}\ ,\ k\in z\right\}$$

ليدل کېږي چې معادله د $(0\ ,\ 2\pi)$ په انټروال کې دوه حلونه لري.

$$x=2k\pi+\frac{3\pi}{4}\xrightarrow{k=0}x_1=\frac{3\pi}{4}$$

$$x=2k\pi-\frac{3\pi}{4}\xrightarrow{k=1}x_2=\frac{5\pi}{4}$$

دريم حالت: $\tan x+b=0$

د عمومي حل د پيداکولو لپاره لاندې مثالونو ته ځير شئ.

مثال: $\tan x-\sqrt{3}=0$ حل کړئ.

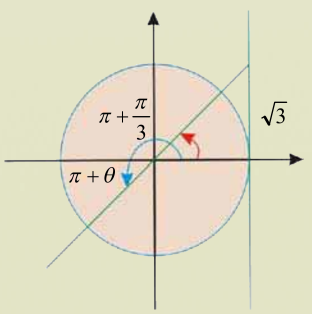
حل: له پورتنی تساوي څخه $\tan x$ په لاس راوړو: $\tan x=\sqrt{3}$

اوس د $(-\frac{\pi}{2}\ ,\ \frac{\pi}{2})$ په انټروال کې د x هغه زاويه لټوو چې $\tan x=\sqrt{3}$ وي او هغه زاويه له $\frac{\pi}{3}$ يا 60° څخه عبارت دی.

له دې امله پورتنی معادله د $\tan x=\tan\frac{\pi}{3}$ په صورت لاسته راځي، په مثلثاتي دايره کې وينو چې کومې زاويې له $\tan\frac{\pi}{3}$ سره مساوي دي.

$$x=\left\{\frac{\pi}{3}\ ,\ 2\pi+\frac{\pi}{3}\ ,\ 4\pi+\frac{\pi}{3},\ldots\right\}$$

$$x=\left\{\pi+\frac{\pi}{3}, 3\pi+\frac{\pi}{3}\ ,\ 5\pi+\frac{\pi}{3}\ ,\ldots\right\}$$



په عمومي ډول پورتنی ستونه داسې ليکلی شو چې: $A=\left\{x / x=k\pi+\frac{\pi}{3} \quad k\in Z\right\}$

يا په عمومي ډول د هرې θ زاويې لپاره لرو چې: $A=\{x / x=k\pi+\theta \ , \quad k\in Z\}$

دويم مثال: لاندې معادله حل کړی.

$$\tan x=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

حل:

$$\tan x=\tan\frac{\pi}{6} \quad \Rightarrow x=\frac{\pi}{6}$$

د معادلې د حل سټ $A=\left\{x / x=k\pi+\frac{\pi}{6} \quad k\in Z\right\}$

دريم مثال: د $\tan(2x-\frac{\pi}{4})=\tan(x+\frac{\pi}{3})$ د معادلې حلونه د $[0 \ , 2\pi]$ په انټروال کې لاسته راوړئ.

حل:

$$\tan(2x-\frac{\pi}{4})=\tan(x+\frac{\pi}{3}) \Rightarrow 2x-\frac{\pi}{4}=k\pi+(x+\frac{\pi}{3})$$

$$2x-x=k\pi+\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4} \Rightarrow x=k\pi+\frac{7\pi}{12}$$

د k پر ځای صحيح عددونه ليکو، تر څو زاويې چې د $[0 \ , 2\pi]$ په انټروال کې دي، لاسته راشي.

$$x=k\pi+\frac{7\pi}{12} \xrightarrow{k=0} x_1=\frac{7\pi}{12}$$

$$x=k\pi+\frac{7\pi}{12} \xrightarrow{k=1} x_2=\pi+\frac{7\pi}{12}=\frac{19\pi}{12}$$

څلورم حالت: د $\cot x+b=0$ معادله، د معادلې د عمومي حل لپاره لاندې مثالونو ته پام وکړئ.

لومړی مثال: د $\cot x-1=0$ معادله حل کړئ.

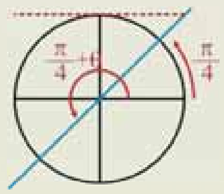
حل: له پورتنی معادلې څخه $\cot x$ پيداکوو: $\cot x-1=0 \quad \Rightarrow \cot x=1$

اوس د $[0,2\pi]$ په انټروال کې هغه زاويه ګورو چې cot يې $(+1)$ وي او هغه زاويه لـه $\frac{\pi}{4}$ يا 45° څخه عبارت ده :

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو:

$$\cot x=\cot\frac{\pi}{4} \Rightarrow x=\frac{\pi}{4}$$



$$x=\frac{\pi}{4},\ 2\pi+\frac{\pi}{4},\ 4\pi+\frac{\pi}{4},\ldots$$

$$x=\pi+\frac{\pi}{4},\ 3\pi+\frac{\pi}{4},\ 5\pi+\frac{\pi}{4},\ldots$$

نو د معادلې د حل سټ په لاندې ډول دی.

$$A_1=\left\{\frac{\pi}{4},\ 2\pi+\frac{\pi}{4},\ 4\pi+\frac{\pi}{4},\ldots\right\}$$

$$A_2=\left\{\pi+\frac{\pi}{4},\ 3\pi+\frac{\pi}{4},\ 5\pi+\frac{\pi}{4},\ldots\right\}$$

$$A=\left\{x / x=k\pi+\frac{\pi}{4},\ (2k+1)\pi+\frac{\pi}{4}\quad k\in Z\right\}$$

یا په عمومي ډول د هرې θ زاویې لپاره داسې لیکو:

$$A=\{x / x=k\pi+\theta\ \ k\in Z\}$$

دریم مثال: د $\cot 3x=\cot x$ معادله حل کړئ.

حل:

$$\cot 3x=\cot x \Rightarrow 3x=k\pi+x=3x-x=k\pi \Rightarrow 2x=k\pi \Rightarrow x=\frac{k\pi}{2},\ k\in Z$$

پوښتنې

د لاندې معادلو د عمومي حل ځوابونه پیدا کړئ.

$a)$ $3\cos x+5=0$

$b)$ $4\tan x+\cot x-5=0$

$c)$ $\tan x=\sqrt{3}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دويمه درجه مثلثاتي معادلې

په تېرو درسونو کې مو ساده مثلثاتي معادلې حل کړې دي اوس دويمه درجه مثلثاتي معادلې څېړو. د مثلثاتي معادلې عمومي شکل عبارت دی له: $a\sin^2 x + b\cos^2 x + c\sin x\cos x = d$ چې c, b, a او d ثابت عددونه دي.

$a\sin^2 x+b\cos^2 x+c\sin x\cos x=d$

لومړی مثال: د $6\sin^2 x - 5\sin x + 1 = 0$ معادله حل کړئ.

حل: په پورتنی معادله کې د $\sin x$ پر ځای y لیکو، او معادله داسې لیکلی شو:

$$6y^2 - 5y + 1 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac \quad \Rightarrow \quad \Delta = (-5)^2 - 4(6)(1)$$

$$\Delta = 25 - 24 \quad \Rightarrow \quad \Delta = 1$$

$$y_{1,2} = \frac{5 \pm 1}{12} \quad , \quad y_1 = \frac{5+1}{12} = \frac{6}{12} \quad , \quad y_1 = \frac{1}{2}$$

$$y_2 = \frac{5-1}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

$$\sin x = y_1 = \frac{1}{2}$$

$$\sin x = y_2 = \frac{1}{3}$$

په دې ډول هغه کوچنی زاویه چې $\sin$ يې $\frac{1}{2}$ وي، له $\frac{\pi}{6}$ څخه عبارت ده نو:

$$A = \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{6} \end{cases} \quad k \in Z$$

او یا لیکلی شو چې:

$$x = n\pi + (-1)^n \alpha \Rightarrow x = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{6} \qquad n = 0, 1, 2...$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

په همدې ډول د $\sin x = \frac{1}{3}$ لپاره ډېره کوچنۍ زاویه 0.33 ده او د مثلثاتي جدول له مخې د $\sin x = \frac{1}{3}$ لپاره $19^\circ\ 30'$ یا $\frac{13\pi}{120}$ دی.

$$A = \left\{ \begin{array}{ll} x = 2k\pi + \frac{13\pi}{120} & \\ x = (2k+1)\pi - \frac{13\pi}{120} & k \in Z \end{array} \right\}$$

دویم مثال: د $\cos 2x + \sin x = 0$ معادلې د حل سټ پیدا کړئ.

حل: پوهېږو چې $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ دی، نو لیکلی شو چې:

$$1 - 2\sin^2 x + \sin x = 0$$
$$2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$$

که چیرې په پورتنی معادلې کې د $\sin x$ په ځای y وضع کړو، نو لیکو:

$$2y^2 - y - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad (2y+1)(y-1) = 0$$
$$2y + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad 2y = -1 \quad \Rightarrow \quad y_1 = -\frac{1}{2}$$
$$y - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad y_2 = 1$$

د $\sin x = y$ د تعویض لپاره چې مو په پام کې نیولې دي، نو د لاسته راغلو قیمتونو لپاره لرو چې:

$$\sin x = y_1 = -\frac{1}{2}$$
$$\sin x = y_2 = 1$$

په دې ډول د $\sin x = -\frac{1}{2}$ لپاره هغه کوچنۍ زاویه چې sin یې $-\frac{1}{2}$ وي له $\frac{7\pi}{3}$ څخه عبارت ده.

بنا پر دې د حلونو سټ يې عبارت دی له:

$$A=\begin{cases}\sin x=1 \Rightarrow x=\dfrac{\pi}{2}\\ \sin x=-\dfrac{1}{2} \Rightarrow x=\dfrac{7\pi}{6}\end{cases}$$

$$A_1=\left\{\frac{\pi}{2}\ ,\ 2\pi+\frac{\pi}{2},\ 4\pi+\frac{\pi}{2},\ \ldots\right\}$$

$$A_2=\left\{2\pi+\frac{7\pi}{6},\ 4\pi+\frac{7\pi}{6}, 6\pi+\frac{7\pi}{6},\ \ldots\right\}$$

یا په عمومي ډول:

$$A=\left\{x=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{2}\quad ,\quad x=2n\pi+\frac{7\pi}{6}\ ,\ n=0,1,2,3\ \ldots\right\}$$

دریم مثال: د $2\sin^2 x-\sqrt{2}\sin x=0$ معادله حل کړئ.

حل:

$$\sin x(2\sin x-\sqrt{2})=0$$
$$\sin x=0 \quad\Rightarrow\quad x_1=0^\circ$$
$$2\sin x-\sqrt{2}=0$$
$$2\sin x=\sqrt{2}$$
$$\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}\quad\Rightarrow\quad x_2=\frac{\pi}{4}$$

د معادلې د حلونو سټ عبارت دی له:

$$A_1=\{0^\circ\ ,\ \pi\ ,\ 3\pi\ ,\ 5\pi\ ,\ \ldots\}$$
$$A_2=\{2\pi\ ,\ 4\pi\ ,\ \ldots\}$$

په عمومي توګه لیکلای شو:

$$x=n\pi+(-1)^n\theta$$

$$x=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{4}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

د لاندې معادلو د حل سټونه پیدا کړئ.

1- $\cos 2x + 1 = 2\sin^2 \frac{x}{2}$

2- $3\cos^2 x + 2\cos x - 5 = 0$

3- $\sin^2 x - (1-\sqrt{3})\sin x \cdot \cos x - \sqrt{3}\cos^2 x = 0$

د دوه مجهوله مثلثاتي معادلو یا سیستمونو حل

د الجبري معادلو سیستم مو حل کړ. آیا د مثلثاتي معادلو سیستم حلولای شئ؟

$$\begin{cases}\sin x \pm \sin y = a\\ x \pm y = \alpha\end{cases}$$

$$\begin{cases}\cos x \pm \cos y = a\\ x \pm y = \alpha\end{cases}$$

دغه معادلې په شپږو ګروپونو باندې وېشلی شو:

لومړی ګروپ: د دغه ګروپ معادلې په لاندې اتو سیستمونو کې راټولې شوې دي.

$$\begin{cases}\sin x \pm \sin y = a\\ x \pm y = \alpha\end{cases} \qquad \begin{cases}\cos x \pm \cos y = a\\ x \pm y = \alpha\end{cases}$$

څرنګه چې a معلوم عدد او α معلوم قوس یا زاویه ده، x او y مجهول قوسونه یا زاوېې دي.یو له دغو سیستمونو څخه حلوو:

$$\begin{cases}\sin x + \sin y = a \ldots \ \mathrm{I}\\ x + y = \alpha \ldots\ldots\ldots\ldots \ \mathrm{II}\end{cases}$$

د لومړی معادلې قیمت د ضرب د فورمولونو په کارولو سره لیکو، څکه چې د دوو ساینونو مجموعه ده.

په دې اساس:

$$\sin x + \sin y = a$$

$$\begin{cases}2\sin\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2} = a \ldots \ I\\ x + y = \alpha \ldots . II\end{cases}$$

اوس له II معادلې څخه د $x+y$ قیمت یعنې α د I په معادله کې اېږدو:

$$2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{x-y}{2} = a \ldots \ I$$

د I اړیکې دواړه خواوې په $2\sin\frac{\alpha}{2}$ باندې وېشو:

$$\cos\frac{x-y}{2} = \frac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$$

تبصره: د پورتني معادلې ښی لوری له $+1$ څخه لوی او له -1 څخه کوچنی نه دی، څکه چې د قوس یا زاوېې ساین دی. یا په بل عبارت مربع یې له یو څخه لوی نه دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$-1 \le \frac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}} \le 1$$

پورتنی غیرمساوات د $0 < \frac{a}{\sin\frac{\alpha}{2}} < 1$ ، په شکل لیکو بیا یې دواړه خواوې مربع کوو:

$$\frac{a^2}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}} \le 1$$

دواړه خواوې په $4\sin^2\frac{\alpha}{2} \ne 0$ کې ضربوو:

$$a^2 \le 4\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

$$a^2 - 4\sin^2\frac{\alpha}{2} \le 0$$

پورتنی اړیکه د سیستم د حل له شرط څخه عبارت ده.

لومړی مثال: د لاندې معادلو سیستم حل کړئ.

$$\begin{cases} \sin x + \sin y = 1 \\ x + y = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

حل: په پورتني سیستم کې $a = 1$ او $\alpha = \frac{\pi}{2}$ دی، وینو چې راکړل شوی شرط د سیستم د حل لپاره صدق کوي او که نه؟ $a^2 - 4\sin^2\frac{\alpha}{2} \le 0$

د a او α قیمتونه په پورتنی اړیکه کې ایږدو:

$$1 - 4\sin^2\frac{\frac{\pi}{2}}{2} \le 0 \Rightarrow 1 - 4\sin^2\frac{\pi}{4} \le 0 \Rightarrow 1 - 4(\sin\frac{\pi}{4})^2 \le 0$$

$$1 - 4(\frac{\sqrt{2}}{2})^2 \le 0 \Rightarrow 1 - 4\frac{2}{4} \le 0 \Rightarrow 1 - 2 \le 0 \Rightarrow -1 \le 0$$

لیدل کېږي چې سیستم د حل وړ دی، نو د تحویل د فورمولونو په مرسته د لومړي معادلې کیڼ لوری شکل ته تغییر ورکوو: $2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} = 1$

(c) ketabton.com: The Digital Library

خرنگه چې $x+y=\frac{\pi}{2}$ له دې امله $\frac{x+y}{2}=\frac{\pi}{4}$ کېږي؛نو:

$$2\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{x-y}{2}=1$$

$$2\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{x-y}{2}=1\Rightarrow\sqrt{2}\cos\frac{x-y}{2}=1$$

$$\cos\frac{x-y}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow\cos\frac{x-y}{2}=\cos\frac{\pi}{4}$$

$$\frac{x-y}{2}=\frac{\pi}{4}\Rightarrow x-y=\frac{\pi}{2}$$

$$\begin{cases}x-y=\frac{\pi}{2}\text{.........}\ I\\ x+y=\frac{\pi}{2}\text{........}\ II\end{cases}\Rightarrow 2x=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\Rightarrow 2x=\frac{2\pi}{2}\Rightarrow x=\frac{\pi}{2}$$

د x قیمت په I معادله کې اېږدو نو د y قیمت په لاس راځي:

$$\frac{\pi}{2}-y=\frac{\pi}{2}\Rightarrow y=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}$$

$$y=0$$

دویم ګروپ: ددغه ګروپ اړوند سیستمونه په لاندې ډول دي:

$$\begin{cases}x\pm y=\alpha\\ \sin x\cdot\cos y=a\end{cases}\quad\begin{cases}x\pm y=\alpha\\ \sin x\cdot\sin y=a\end{cases}\quad\begin{cases}x\pm y=\alpha\\ \cos x\cdot\cos y=a\end{cases}$$

خرنګه چې a معلوم عدد او α معلوم قوس یا زاویه ده. x او y مجهول قوسونه یا زاوېې دي.

د سیستم د حل شرط عبارت دی له: $-\cos^2\frac{\alpha}{2}\le a\le\sin^2\frac{\alpha}{2}$

دویم مثال: د لاندې معادلو سیستم حل کړې.

$$\begin{cases}x+y=\pi\\ \sin x\sin y=1\end{cases}$$

حل: په پورتنی سیستم کې $a=1$ ، $\alpha=\pi$ دی د دغو معادلو د حل د امکان شرط عبارت دی، له:

$$-\cos^2\frac{\alpha}{2}\le a\le\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

$$-\cos^2\frac{\alpha}{2}=-\cos\ \frac{\pi}{2}=0$$

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\sin^2\frac{\pi}{2}=1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

د سیستم د حل شرط ته په کتنې سره کولای شو ولیکو:

$$-\cos^2\frac{\pi}{2} \le a \le \sin^2\frac{\pi}{2}$$
$$0 \le a \le 1$$

د II معادلې کیڼ لوری د تحویل د فورمول په کارولو سره لاندې شکل ځانته غوره کوي:

$$2\sin x \sin y = \cos(x-y) - \cos(x+y)$$

څرنګه چې $\sin x \sin y = 1$ دی، بنا پر دې $\cos(x-y) - \cos(x+y) = 2$

له بلې خوا $x + y = \pi$ دی نو: $\cos(x-y) - \cos\pi = 2$

همدارنګه پوهیږو چې $\cos\pi = -1$ دی.

نو:

$$\cos(x-y) - (-1) = 2 \Rightarrow \cos(x-y) + 1 = 2$$
$$\Rightarrow \cos(x-y) = 2 - 1 \Rightarrow \cos(x-y) = 1$$
$$\cos(x-y) = \cos 0^\circ$$
$$x - y = 0 \Rightarrow x = y$$

د I له معادلې څخه د x قیمت پیداکوو:

$$x + y = \pi \Rightarrow x + x = \pi \Rightarrow 2x = \pi$$

$$x = \frac{\pi}{2} \quad , y = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \ x = y = n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{2}$$

دریم ګروپ: دغه ګروپ څلور لاندې سیستمونه تشکیلوي، چې عبارت دي له:

$$\begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \dfrac{\cos x}{\cos y} = a \end{cases} \qquad \begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \dfrac{\sin x}{\sin y} = a \end{cases}$$

چې α معلومه زاویه او a معلوم عدد دی. x او y مجهول قوسونه یا زاویې دي.

دریم مثال: لاندې مثلثاتي سیستم حل کړئ.

$$\begin{cases} x + y = \dfrac{\pi}{2} \\ \dfrac{\sin x}{\sin y} = \sqrt{3} \end{cases}$$

حل: لیدل کیږي چې دغه سیستم له دریم ګروپ سره مطابقت لري نو، په لاندې ډول کړنه کوو یعنې د سیستم دویمه معادله د تناسب د خواصو په پام کې نیولو سره داسې لیکو:

$$\frac{\sin x - \sin y}{\sin x + \sin y} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$$

د $\sin x - \sin y = 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$ او $\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$ قیمتونه په پورتني اړیکه کې اېږدو:

$$\frac{2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}}{2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$$

څرنگه چې $x+y=\frac{\pi}{2}$ دی، نو $\frac{x+y}{2}=\frac{\pi}{4}$ سره کېږي.

$$\cot\frac{\pi}{4}\tan\frac{x-y}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$$

له بلې خوا $\cot\frac{\pi}{4}=1$ دی نو معادله لاندې شکل ځانته غوره کوي:

$$\tan\frac{x-y}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$$

$$\tan 15^\circ = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$$

$$\tan\frac{x-y}{2} = \tan 15^\circ \quad \Rightarrow \quad \frac{x-y}{2} = 15^\circ$$

$$x-y = 30^\circ = \frac{\pi}{6}$$

د معادلو سستم حلوو:

$$\begin{cases} x+y=\frac{\pi}{2} \\ x-y=\frac{\pi}{6} \end{cases}$$

$$2x = \frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6} = \frac{4\pi}{6}$$

$$x = \frac{4\pi}{12} = \frac{\pi}{3}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

اوس د x قیمت په پورتنی یوه معادله کې ایږدو او د y قیمت په لاس راځي:

$$x-y=\frac{\pi}{6}\Rightarrow\frac{\pi}{3}-y=\frac{\pi}{6}$$
$$\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}=y\Rightarrow\frac{2\pi-\pi}{6}=y$$
$$y=\frac{\pi}{6}$$
$$x=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{3} \text{ او } y=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6}$$

خلورم گروپ: دغه گروپ اته لاندې سیستمونه تشکیلوي:

$$\begin{cases}x\pm y=\alpha\\ \tan x\pm\tan y=a\end{cases}\qquad\begin{cases}x\pm y=\alpha\\ \cot x\pm\cot y=a\end{cases}$$

څرنگه چې α معلومه زاویه او a معلوم عدد دی. x او y مجهول قوسونه یا زاویې دي.

د سیستم د حل شرط عبارت دی، له: $a^2-4+4a\cot\alpha\geq 0$

خلورم مثال: د لاندې معادلو سیستم حل کړئ.

$$\begin{cases}x-y=\frac{\pi}{3}\\ \tan x-\tan y=-2\sqrt{3}\end{cases}$$

حل: کولی شو لومړی معادله داسې ولیکو: $\tan(x-y)=\tan\frac{\pi}{3}$

له بلې خوا پوهیږو چې $\tan(x-y)=\dfrac{\tan x-\tan y}{1+\tan x\cdot\tan y}=\sqrt{3}$

د $\tan x-\tan y=-2\sqrt{3}$ قیمت په پاسنی معادله کې ایږدو: $\dfrac{-2\sqrt{3}}{1+\tan\cdot\tan y}=\sqrt{3}$

د مساوات دواړه خواوې په $\sqrt{3}$ باندې وېشو او لیکو.

یا: $\dfrac{-2}{1+\tan\cdot\tan y}=1 \Rightarrow 1+\tan x\cdot\tan y=-2$

یا: $\Rightarrow \tan x\cdot\tan y=-3$

نو: $\begin{cases}\tan x\cdot\tan y=-3\text{.............. I}\\ \tan x-\tan y=-2\sqrt{3}\text{....... II}\end{cases}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $\tan x$ قیمت له II معادلې څخه په لاس راوړو په I کې یې ابږدو:

$$\tan x = -2\sqrt{3} + \tan y$$
$$(-2\sqrt{3} + \tan y)\tan y = -3$$
$$\tan^2 y - 2\sqrt{3}\tan y + 3 = 0$$
$$(\tan y - \sqrt{3})^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \tan y - \sqrt{3} = 0 \quad \Rightarrow \quad \tan y = \sqrt{3}$$
$$y = \frac{\pi}{3}$$

هغه مثبت کوچنی قوس چې په دغه معادله کې صدق کوي، عبارت دی له: $y = \frac{\pi}{3}$

د y د قیمت په پام کې نیولو سره د I له معادلې څخه د x قیمت په لاس راوړو.

$$\tan x \cdot \tan y = -3$$
$$\tan x \cdot \sqrt{3} = -3 \quad \Rightarrow \quad \tan x = \frac{-3}{\sqrt{3}} = -\frac{3\sqrt{3}}{3} = -\sqrt{3}$$
$$x = 2\frac{\pi}{3}$$

پنځم ګروپ: دغه ګروپ لاندې دوه سیستمونه تشکیلوي:

$$\begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \tan x \cdot \tan y = a \end{cases}$$

د تېر په څېر بیاهم α معلومه زاویه او a معلوم عدد دی. x او y معلوم قوسونه یا زاویې دي.

دپورتني سیستم د حل شرط عبارت دی، له: $-1 \le \frac{1+a}{1-a}\cos\alpha \le 1$

پنځم مثال: د لاندې معادلو سیستم حل کړئ.

$$\begin{cases} x + y = 7\frac{\pi}{6} \\ \tan x \cdot \tan y = 0 \end{cases}$$

لیدل کېږي چې دغه سیستم په پنځم ګروپ پورې اړه لري او په لاندې ډول یې حلوو:

$$\tan x \tan y = \frac{\sin x \sin y}{\cos x \cos y}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $\sin x \sin y = \frac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)]$ او $\cos x \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x-y) + \cos(x+y)]$ قيمتونه په اړونده اړيکه کې ابږدو.

$$\tan x \tan y = \frac{\frac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)]}{\frac{1}{2}[\cos(x-y) + \cos(x+y)]}$$

د $x + y$ قيمت د سيستم له لومړی معادلې څخه په پورتنی اړيکه کې ابږدو:

$$\tan x \cdot \tan y = \frac{\cos(x-y) - \cos 7\frac{\pi}{6}}{\cos(x-y) + \cos 7\frac{\pi}{6}}$$

څرنگه چې $\tan x \cdot \tan y = 0$ سره راکړل شوی دی، نو ليکو:

$$\frac{\cos(x-y) - \cos 7\frac{\pi}{6}}{\cos(x-y) + \cos 7\frac{\pi}{6}} = 0$$

ددې لپاره چې کسر مساوي په صفر شي، نو بايد صورت يې له صفر سره برابر شي؛ يعنې:

$$\cos(x-y) - \cos 7\frac{\pi}{6} = 0$$

$$\cos 7\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos(x-y) + \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$$

$$\cos(x-y) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \quad x - y = \frac{5\pi}{6}$$

هغه کوچنی قوس چې په معادله کې صدق کوي، عبارت دی له:

نوموړی سيستم حلوو:

$$-\begin{cases} x - y = 5\frac{\pi}{6} \\ x + y = 7\frac{\pi}{6} \end{cases}$$

$$2x = \frac{5\pi}{6} + \frac{7\pi}{6} = \frac{12\pi}{6} = 2\pi \quad , \qquad x = \pi$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د x قیمت د I په معادله کې ایږدو او د y قیمت په لاس راځي:

$$x-y=5\frac{\pi}{6} \Rightarrow \pi-y=5\frac{\pi}{6} \quad , \quad -y=\frac{5\pi}{6}-\pi$$

$$y=\pi-\frac{5\pi}{6} \Rightarrow y=\frac{6\pi-5\pi}{6}=\frac{\pi}{6}$$

$$y=\frac{\pi}{6}$$

شپږم گروپ: په دغه گروپ کې لاندې سیستمونه شتون لري:

$$\begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \dfrac{\tan x}{\tan y} = a \end{cases}$$

د حل د امکان شرط عبارت دی، له: $-1 \le \dfrac{a-1}{a+1}\sin\alpha \le 1$

شپږم مثال:

$$\begin{cases} x-y=\dfrac{\pi}{2} \\ \dfrac{\tan x}{\tan y} = -3 \end{cases}$$

د تناسب د خواصو په پام کې نیولو سره لرو:

$$\frac{\tan x-\tan y}{\tan x+\tan y}=\frac{-3-1}{-3+1}=2$$

د مساوات په کیڼې خوا کې د صورت او مخرج قیمتونه د sin او cos له جنسه داسې ایږدو:

$$\frac{\dfrac{\sin(x-y)}{\cos x\cos y}}{\dfrac{\sin(x+y)}{\cos x\cos y}}=2 \Rightarrow \frac{\sin(x-y)}{\sin(x+y)}=2$$

$$2\sin(x+y)=\sin(x-y)$$

څرنگه چې $x-y=\dfrac{\pi}{2}$ دی، نو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$2\sin(x+y)=\sin\frac{\pi}{2}=1$$
$$\sin(x+y)=\frac{1}{2}$$

هغه کوچنی قوس چې په معادله کې صدق کوي، عبارت دی له: $\frac{\pi}{6}$ چې د معادلو لاندې سیستم جوړوو:

$$x+y=\frac{\pi}{6}$$
$$x-y=\frac{\pi}{2}$$

نوموړی سیستم حلوو:

$$\begin{cases} x+y=\frac{\pi}{6} \text{.....I} \\ x-y=\frac{\pi}{2} \text{.....II} \end{cases}$$

$$2x=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2} \Rightarrow 2x=\frac{\pi+3\pi}{6}=\frac{4\pi}{6}$$
$$x=\frac{4\pi}{12}=\frac{\pi}{3}$$

د x قیمت د I په معادله کې ایږدو او د y قیمت په لاس راځي:

$$x+y=\frac{\pi}{6} \Rightarrow \frac{\pi}{3}+y=\frac{\pi}{6} \Rightarrow y=\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}$$
$$y=\frac{\pi-2\pi}{6}=-\frac{\pi}{6}$$
$$y=-\frac{\pi}{6}$$

پوښتنې

د لاندې مثلثاتي معادلو سیستمونه حل او وواياست چې په کوم ګروپ پورې اړه لري؟

$a)\ \begin{cases} x+y=\frac{\pi}{4} \\ \tan x+\tan y=1 \end{cases}$ $b)\ \begin{cases} x-y=\frac{\pi}{3} \\ \frac{\sin x}{\cos x}=2 \end{cases}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د څپرکي مهم ټکي

د ساین قانون: د ABC په هر مثلث کې لاندې اړیکې شته:

$$\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c}$$

پورتنی اړیکه د ساین د قانون په نوم یادېږي.

د کوساین قانون: د ABC په هر مثلث کې چې دضلعو اوږدوالي یې b,a او c وي، د ضلعو او زاویو تر منځ لاندې اړیکې شته:

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$

$$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$$

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$$

د tan قانون: د ABC په هر مثلث کې د هغه د ضلعو او زاویو ترمنځ د tan له جنسه لاندې اړیکې شته:

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\tan\frac{A+B}{2}}{\tan\frac{A-B}{2}}\quad,\quad\frac{c+a}{c-a}=\frac{\tan\frac{C+A}{2}}{\tan\frac{C-A}{2}}\quad,\quad\frac{b+c}{b-c}=\frac{\tan\frac{B+C}{2}}{\tan\frac{B-C}{2}}$$

مثلثاتي مطابقت: هغه مثلثاتي مساوات چې د زاویې د ټولو قیمتونو لپاره د مساواتو دواړه خواوې مساوي شي، مثلثاتي مطابقت بلل کېږي.

مثلثاتي معادلې: هغه مساوات چې د زاویې په ځینو قیمتونو سره دواړه خواوې مساوي شي، معادله بلل کېږي.

د مثلثاتي معادلو سیستمونه

مثلثاتي معادلو سیستمونه په لاندې شپږو ګروپونو وېشل شوي دي:

لومړی ګروپ:

$$\begin{cases}\sin x\pm\sin y=a\\ x\pm y=\alpha\end{cases}\qquad\begin{cases}\cos x\pm\cos y=a\\ x\pm y=\alpha\end{cases}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم گروپ:

$$\begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \sin x \cdot \cos y = a \end{cases} \qquad \begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \sin x \cdot \sin y = a \end{cases} \qquad \begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \cos x \cdot \cos y = a \end{cases}$$

دریم گروپ:

$$\begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \dfrac{\sin x}{\sin y} = a \end{cases} \qquad \begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \dfrac{\cos x}{\cos y} = a \end{cases}$$

څلورم گروپ:

$$\begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \tan x \pm \tan y = a \end{cases} \qquad \begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \cot x \pm \cot y = a \end{cases}$$

پنځم گروپ:

$$\begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \tan x + \tan y = a \end{cases}$$

شپږم گروپ:

$$\begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \dfrac{\tan x}{\tan y} = a \end{cases}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

د څپرکي پوښتنې

لاندې پوښتنې په غور سره ولولئ، هرې يوې ته څلور ځوابونه ورکړل شوي دي، سم ځواب يې په نښه کړئ.

1. که چيرې $A = 20^\circ$, $b = 10$, $c = 7$ وي، د a د ضلعې اوږدوالی عبارت دی له:

$a)$ 16.4 $b)$ 16 $c)$ 15.9 $d)$ 16.8

2. که چيرې $a = 8$, $b = 5$ او $c = 10$ وي، د B زاويې اندازه عبارت ده له:

$a)$ 28° $b)$ 29° $c)$ 29.4° $d)$ 28.5°

3. که چيرې $A = 48^\circ$, $B = 22^\circ$ ، $a = 5$ وي د b اوږدوالی عبارت دی له:

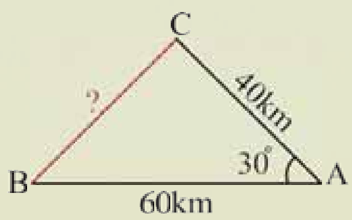
$a)$ 8 $b)$ 8.5 $c)$ 9 $d)$ -9.5

4. د $\sec x(\sec x - \cos x)$ مثلثاتي مطابقت مساوي دی له :

$a)$ $\tan x$ $b)$ $\dfrac{1}{\tan x}$ $c)$ $\cot x$ $d)$ $\tan^2 x$

لاندې پوښتنې حل کړئ.

1. که چيرې د $A = 30^\circ$, $c = 8$, $b = 5$ واحده وي، د a ضلع او $\sin C$ پيدا کړئ.
2. که په يوه مثلث کې $a = 8$, $b = 5$, $c = 10$ واحده وي، د B زاويې اندازه پيدا کړئ.
3. د ABC په مثلث کې که $\frac{c}{b} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ او $A = 30^\circ$ وي، د B او C زاويو اندازه پيدا کړئ.
4. دوې بېړۍ د A له ټکي څخه په دوو خواوو داسې په حرکت پيل کوي چې د منځ زاويه يې 30° ده، که له يوه ساعت څخه وروسته، لومړۍ بېړۍ $40\,km$ او دويمه بېړۍ $60\,km$ واټن وهلی وي، د دوو بېړيو ترمنځ واټن پيدا کړئ.



5. د $\cot^2 \beta$ او $\sin \beta$ او $\cos \beta$ له جنسه محاسبه کړئ.

6. لاندې مطابقتونه ساده کړئ.

$a)\ \dfrac{\sin 2A}{1+\cos 2A}=\tan A$ $\qquad b)\ \dfrac{1-\cos 2A}{1+\cos 2A}=\tan^2 A$

$c)\ \tan A+\cot A=2\csc 2A$ $\qquad d)\ \dfrac{1-\cos A+\cos B-\cos(A+B)}{1+\cos A-\cos B-\cos(A+B)}=\tan\dfrac{A}{2}\cdot\cot\dfrac{B}{2}$

$e)\ \dfrac{\cos A}{1-\sin A}=\tan(45+\dfrac{A}{2})$ $\qquad f)\ \cos\alpha\cos(60^\circ-\alpha)\cos(60^\circ+\alpha)=\dfrac{1}{4}\cos 3\alpha$

7. لاندې مثلثاتي معادلې حل کړئ.

$a)\ \cos^2 x+\cos^4 x=0$ $\qquad b)\ \tan^2 x-4\tan x+3=0$

$c)\ 4\cos\beta-2=0$ $\qquad d)\ \cos x-\sqrt{3}\sin x=1$

$e)\ \cos^2 x+3\sin x\cdot\cos x=-1$

8. آیا د $2\sin^2 x-\cos x=2\cos 2x+\sin x$ مساوات یو مطابقت دی او که معادله؟

9. لاندې افادې ساده کړئ.

$a)\ \dfrac{2\tan 15^\circ}{1-\tan^2 15^\circ}$ $\qquad b)\ 1-2\sin^2\alpha+\cos 2\alpha=?$

$c)\ \cos 4x+2\sin^2 2x$ $\qquad d)\ (\cos^2 x+2\sin x\cos x-\sin^2 x)^2$

10. د لاندې مثلثاتي معادلو سیستمونه لومړی تشخیص او بیا یې حل کړئ.

$a)\ \begin{cases}\tan x+\tan y=1\\ \cos x\cos y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$ $\qquad b)\ \begin{cases}\sin(x+y)=\cos(x-y)\\ \tan x-\tan y=1\end{cases}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دریم څپرکی

فضايي هندسه

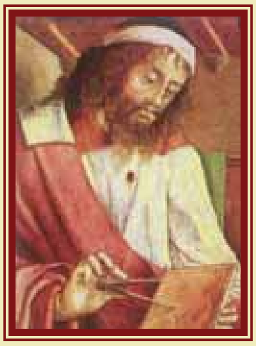
(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

اقلیدس د دوه اړخیزې (دوه‌بعدي) او درې اړخیزې (درې بعدي) هندسي بنسټ اېښودونکی دی.

اساسي مفاهیم او اکسیومونه

د اقلیدس د هندسي مفاهیمو څېړنې په دوو بعدونو کې د مسطحې هندسې په نامه یادېږي.
هغه هندسي مفاهیم، چې په درېو اړخونو(بعدونو) کې څېړل کېږي، فضايي هندسه نومېږي.



فعالیت

- د مفاهیمو په برخه کې لکه لومړنی اصطلاحات، دلیل، برهان او قضیو په هکله فکر وکړئ. خپل منځ کې خبرې او د موضوع په هکله بحث وکړئ.

له پورتني بیان او بحث څخه وروسته کولای شو، لاندې تعریف وکړو:

لومړني اصطلاحګاني Postulates: د هر علم په برخه کې د لومړنیو اصطلاحګانو څخه سترګې پټولای نشو د نورو علومو په ډول په هندسه کې هم هغه مفاهیم او مفکورې، چې پرته له کوم تعریف څخه منل کېږي لومړني اصطلاحات بلل کېږي. لکه: ټکی(نقطه)، کرښه(خط)، مستوي او فضا.

منطقي دلیل او برهان Logical Reason:برهان د ذهن هغه عمل ته ویل کېږي چې له یو لړ مخکینیو سمو وړاندیزونو او څېړنو څخه و روستنیو څېړنو ته رسېږي چې د هغې سموالی مخکې منل شوی وي. موږ هم کولای شو، هغه و منو.

قضیهTheorem : هغه ادعا چې د هغې سموالی او صحت یو لړ منطقي دلایلو ته اړتیا ولري، قضیه بلل کېږي.

ټکی(نقطه): موږ نقطه د یو ذهني مفهوم په ډول پېژنو او هغه د لومړني اصطلاح(تعریف شوې نه ده) په توګه منو.

مستقیم خط: کش شوی تار، دمیزڅنډه او د خط کش تېغه د مستقیم خط مفهوم او مطلب بیانوي. د مستقیم خط بېلېدونکي علامې دا دي چې د دوو راکړل شوو ټکو څخه یوازې او یوازې یوه مستقیمه کرښه تیرېدلای شي مستقیم خط د لومړني اصطلاح(تعریف شوی نه دی) په ډول منو.

باید فکر مو وي چې یو مستقیم خط دواړو خواوو ته تر لایتناهي پورې غزېدلای شي.

لومړی اصل: دوې ښکاره او ټاکلې نقطې یوازې او یوازې یو مستقیم خط څرګندوي.

دویم اصل: هر مستقیم خط لږ ترلږه دوې څرګندې نقطې لري چې په یو مستقیم خط باندې واقع دي، لږ تر لږه داسې درې نقطې شتون لري چې په یوه مستقیم خط باندې واقع نه وي.

دریم اصل: کولای شو په یوه مستقیم خط باندې د هرو دوو نقطو تر منځ یوه دریمه نقطه په لاس راوړو.

مستوي: د ولاړو اوبو سطح او د ټولګي تخته د مستوي مفهوم څرګندوي او مستوي د لومړني اصطلاح (تعریف شوې نه ده) په توګه منل کېږي.

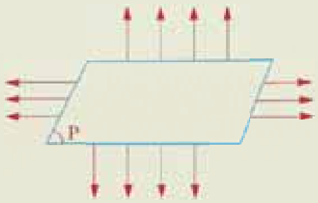
لومړی اصل: په هره مستوي کې لږ تر لږه درې نقطې شتون لري چې د یوه مستقیم خط په استقامت واقع نه وي.

دویم اصل: له هرو درېو نقطو څخه، چې د یوه مستقیم خط په استقامت پرتې نه وي، یوه مستوي تیرېږي.

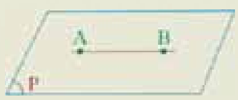
(c) ketabton.com: The Digital Library

دریم اصل: که چیرې د یوه مستقیم خط دوې نقطې په یوې مستوي کې وي، دا خط په مستوي کې دی.

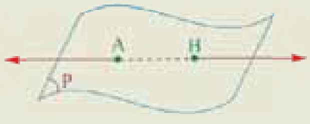
په مسطحه هندسه کې د مستوي رسمیدلوته اړتیا نشته، ځکه چې ټول شکلونه لکه دکاغذ مخ، د لرګي تخته، چې هر یو یې یوه مستوي څرګندوي رسمیږي، خو په فضایي هندسه کې د مستوي رسمولو ته اړتیا شته، ځکه چې په فضایي هندسه کې مستوي یوه نه، بلکې ډیرې دي. زیاتره په فضایي هندسه کې مستوي د متوازي الاضلاع، مستطیل او یا هوارې سطحې په واسطه ښودل کیږي او په یوه کونج کې یې یو توری لیکي.



نا محدوده مستوي



محدوده مستوي



مستوي نه ده

دا مستوي ګانې چې په تېرو شکلونو کې لیدل کیږي، په همدې پراخوالي نه دي، بلکې ترلایتناهي پورې امتداد لري. دا چې مستوي ګانې په پورته شکلونو کې لیدل کیږي هغه متوازي الاضلاع او مستطیل نه دي، بلکې د مستوي په یوې هوارې سطحې کې ښودل دي.

ټولې نښې چې په مسطحه هندسه او ریاضي کې استعمالیږي، په فضایي هندسه کې هم استعمالیږي.

هغه اکسیومونه، چې په مسطحې هندسې کې موجود دي، په فضایي هندسه کې هم له دې اکسیومونو څخه کار اخېستل کېږي.

سربیره په مسطحه هندسه په فضایي هندسه کې هم یو لړ ځانګړي اکسیومونه شته چې په لاندې ډول بیانیږي.

د مستوي لومړنی اکسیوم: هغه مستقیم خط چې د مستوي دوې مختلفې نقطې سره نښلوي په دې مستوي کې شامل دی.

د مستوي دویم اکسیوم: له هغو دریو نقطو څخه چې په یوه مستقیم خط واقع نه دي، یوازې او یوازې یوه مستوي تیریږي.

د متقاطع مستوي ګانو اکسیوم: که چیرې دوې مستوي ګانې یو ګډ ټکی ولري، متقاطع دي او په همدې ډول که چیرې یو ګډ مستقیم خط ولري، د غه متقاطع خط ته د دوې مستوي ګانو مشترک فصل وایي.

فضا: فضا هم د لومړني اصطلاح (تعریف شوې نه ده) په توګه پېژنو.

لومړی اصل: دلایتناهي نقطو مجموعې ته فضا وایي.

دویم اصل: لږتر لږه څلور داسې نقطې شته چې په یوه مستوي کې واقع نه دي.

پوښتنې

1. څرګنده کړئ چې ولې درې پښې لرونکی مېز د څلورو پښو لرونکی مېز په پرتله ټینګ دی؟
2. ولې نقطه، کرښه او مستوي لومړنی اصطلاح ګانې بولي؟
3. له دوو نقطو څخه څو مستوي ګانې تیریدلای شي چې دواړه نقطې په کې پرتې وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په درېِ بُعدي فضا کې کرښه او مستوي

په فضا کې دوه قلمونه، دوه کتابونه، یو کتاب او یو قلم کوم حالتونه لري؟

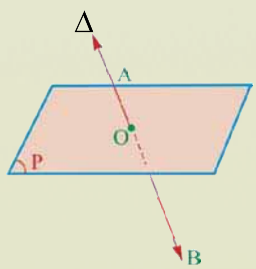
درېِ بُعدي فضا:

هغه فضا، چې موږ په کې ژوند کوو، درې بُعدي فضا ده. دا درې بُعدي فضا یوه له نه تعریف شوو لومړنیو مفهومونو څخه ده.

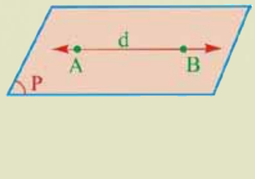
فضا دلایتناهي نقطو مجموعه ده، خط او مستوي هم په ترتیب سره یو بعد، دوه بعدونه لري چې هر یو د فضا د سټ یوه برخه(جزء) دی.

د یوې مستقیمې کرښې او یوې مستوي نسبي حالت: یوه مستقیمه کرښه او یوه مستوي لاندې درې حالتونه لري:

1. **که چیرې یو مستقیم خط او یوه مستوي یوه مشترکه نقطه ولري، دا خط او مستوي یو له بل سره متقاطع دي. دمثال په ډول په دې شکل کې د Δ مستقیمه کرښه د P مستوي د O په نقطه کې قطع کړې ده.**



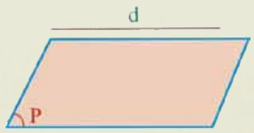
2. که چیرې یو مستقیم خط له یوې مستوي سره دوه او یا له دوو څخه زیاتې مشترکې نقطې ولري دا مستقیمه کرښه له مستوي سره منطبقه



(c) ketabton.com: The Digital Library

ده او یا داسې ویل کېږي چې مستقیمه کرښه په مستوي کې شامله ده،د مثال په ډول د d مستقیم د P په مستوي کې شامل دی.

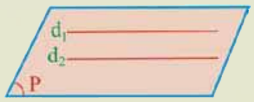
3. که چیرې یوه مستقیمه کرښه له یوې مستوي سره هیڅ ګډه نقطه و نه لري، دا مستقیم له مستوي سره موازي دي، مثلاً په لاندې شکل کې د d مستقیم خط له P مستوي سره موازي دی.



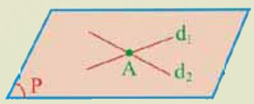
له یو بل سره د دوو مستقیمو کرښو نسبي حالت:

1- که چیرې دوه مستقیم خطونه په یوه مستوي کې شامل وي، نوموړي خطونه د همغې مستوي خطونه بلل کیږي، او یو له لاندینیو حالتونو(وضعیتونو)څخه لري.

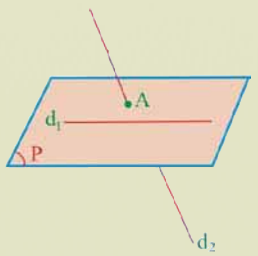
په یوې مستوي کې دوه خطونه هغه وخت موازي بلل کېږي چې هېڅ ګډټکی ونه لري.



2- په یوه مستوي کې دوه خطونه، چې یوه ګډه(مشترکه) نقط ولري، متقاطع خطونه بلل کیږي.



3- دوه مستقیم خطونه چې په یوه مستوي کې پراته نه وي او کومه مشترکه نقطه هم و نه لري، متنافر خطونه بلل کیږي؟

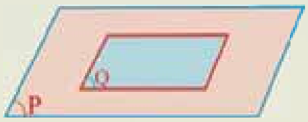


(c) ketabton.com: The Digital Library

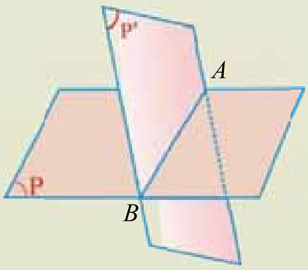
د دوو مستويګانو نسبي حالت:

په عمومي ډول دوې مستويګانې لاندې درې حالتونه لري.

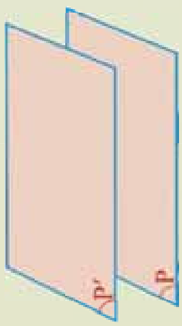
منطبق: که چیرې دوې مستويګانې لږ تر لږه درې مشترکې نقطې ولري چې د یو مستقیم خط په امتداد پرتې وي، یو پر بل منطبقې مستويګانې بلل کیږي، لکه په مخامخ شکل کې د P او Q دوې مستويګانې یو پر بل منطبقې دي.



متقاطع مستويګانې: که چیرې دوې مستويګانې یو ګډ مستقیم خط ولري متقاطع مستويګانې بللې کیږي. دغه د AB مشترك خط ته مشترك فصل هم وایي. لکه مخامخ شکل.



3- که چیرې دوه مستويګانې هیڅ کوم ګډ ټکی و نه لري، سره موازي دي، د مثال په توګه د P او P' مستويګانې.



فعالیت

- په فضاکې له یوې نقطې څخه څو مستقیم خطونه تیریږي؟
- له دوو نقطو څخه څو مستقیم خطونه تیریږي؟
- له یوې نقطې څخه څو مستوي ګانې تیریږي؟
- له دوو نقطو څخه څو مستوي ګانې تیریږي؟
- له دریو نقطو څخه څو مستوي ګانې تیریږي چې درې واړې نقطې پکې شاملې وي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

1- د R او T نقطې د P په مستوي کې پرتې دي، د کوم دليل له مخې د $\overline{RT}$ خط د P په مستوي کې پروت دی؟

2- که د Δ مستقيم خط د P په مستوي کې پروت نه وي، د Δ مسقيم خط به د P مستوي په څو نقطو کې قطع کړي؟

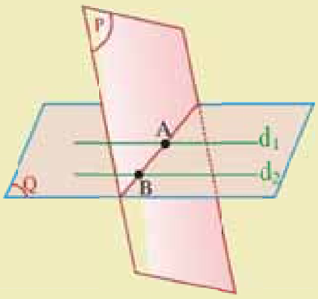
3- که چيرې د AB مستقيم خط او د P مستوي د M او K دوې ګډې نقطې ولري، د $\overline{AB}$ مستقيم خط د P په مستوي کې پروت دی؟

4- د B, A او C نقطې د P په مستوي کې واقع دي او هم د B, A او C نقطې د p' په مستوي کې پرتې دي، د P او p' مستوي ګانې يوه له بلې سره څه اړيکه لري؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

په فضا کې موازي مستقيم خطونه

آيا په فضا کې مستقيم خطونه موازي دي؟



تعريف:

دوه مستقيم خطونه چې په يوې مستوي کې پراته او ګډه نقطه و نه لري، موازي خطونه بلل کېږي.

د موازاتو ا کسيوم:له يوې خارجي نقطې څخه له يوې مستقيمې کرښې سره يوازې او يوازې يوه موازي مستقيمه کرښه رسمولای شو او بس.

فعاليت

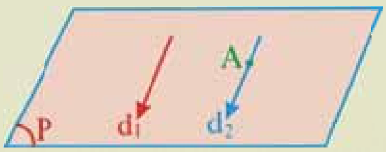
- د A ټکی د P مستوي او د d_1 مستقيم خط چې د A ټکی وربانديې پروت نه وي، په پام کې ونيسئ؟
- د A ټکی او د d_1 له مستقيم خط څخه څو مستويګانې تېريدلای شي؟ ولې؟

له پورتني فعاليت څخه د قضيې متن او ثبوت بيانوو.

قضيه: له يوې خارجي نقطې څخه له يوه مستقيم خط سره يوازې يو موازي مسقيم خط رسمولای شو او بس.

ثبوت: د A له نقطې او د d_1 له مستقيمې کرښې څخه يوازې يوه د P مستوي تيرېږي، ولې؟

اوس د P په مستوي کې د A له نقطې څخه يوازې د d_2 مستقيم خط د d_1 له مستقيم خط سره موازي رسمولای شو.



(پورتنی ثبوت په مسطحه هندسه کې لوستل شوی). نو پورتنی دعوا چې ټکی او خط په فضا کې وي، هم سموالی لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیت

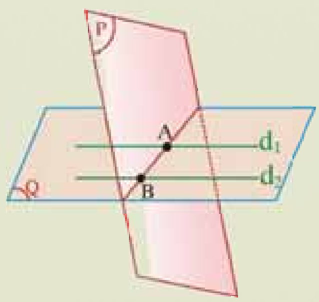
دوه د d_1 او d_2 موازي خطونه او یوه د A نقطه د P له مستوي څخه بهر (خارج) په پام کې ونیسئ.

- آیا د d_1 او d_2 مستقیم خطونه یوه بله مستوي ټاکلې شي؟
- که چیرې د P مستوي د Q مستوي د A په ټکي کې قطع کړي، آیا د P مستوي به د d_2 مستقیم خط هم قطع کړي؟
- آیا دوې مستوي‌ګانې یوه بله د یوه مستقیم خط په اوږدو کې قطع کوي، ولې؟

د پورتني فعالیت له سرته رسولو څخه وروسته د قضیې متن او ثبوت بیانوو.

قضیه: که دوه مستقیم خطونه موازي وي او مستوي یو له هغو څخه قطع کړي، بل یې هم قطع کوي.

ثبوت: د d_1 او d_2 یو له بل سره موازي مستقیمونه د Q په مستوي کې پراته دي.



که د P مستوي د d_1 مستقیم د A په نقطه کې قطع کړي، نوموړې مستوي د d_2 مستقیم هم د B په نقطه کې قطع کوي د تعریف له مخې د d_1 او d_2 موازي خطونه یوه د Q مستوي ټاکي، د P او Q مستوي-ګانې د A یوه مشترکه نقطه لري، که چیرې دوې مستوي‌ګانې یوه بله په یوه نقطه کې قطع کړي، نو ویلای شو چې هغوی یو بل د یوې مستقیمې کرښې په اوږدو کې قطع کوي، له دې امله د P او Q مستوي‌ګانې د d_2 مستقیمه کرښه د B په نقطې کې هم قطع کوي. څکه یو مستقیم خط چې په یوې مستوي کې له دوو موازي خطونو څخه یو قطع کړي، بل یې هم قطع کوي.

پوښتنې

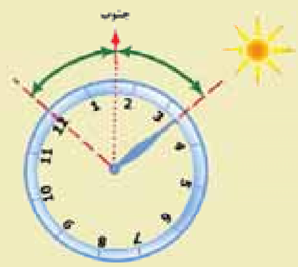
1- که چیرې دوه مستقیم خطونه له یوه دریم مستقیم خط سره موازي وي ثبوت کړئ چې دا مستقیم خطونه په خپل منځ کې هم موازي دي؟

2- که چیرې د E او F مستوي‌ګانې سره موازي او د L_1 مستقیم خط د E مستوي کې او د L_2 مستقیم خط د F په مستوي کې واقع وي آیا $L_2 // L_1$ دی؟

3- که د E او F مستوي ګانې سره متقاطع او د P مستوي هغوی دواړه قطع کړي، آیا د E او F ګډ فصل د E او P له مشترك فصل او د F او P له مشترك فصل سره موازي دی؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

په فضا کې د دوو مستقيمو کرښو تر منځ زاويه



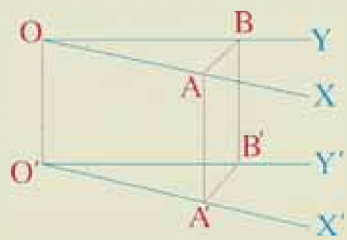
کـه چيـرې د يـوې زاويـې دورانـي لـورى د سـاعت د عقربې په مخالف لورى حرکـت وکـړي، زاويـه مثبت او که د ساعت د عقربې په همجهت(عـين لـورى) وي زاويه منفي ده.

فعاليت

- د XOY او $X'O'Y'$ زاويې داسې په پام کې ونيسئ چې ضلعې يې سره موازي او هم جهته وي.
- د $\overline{OX}$ او $\overline{O'X'}$ لـه ضـلعو څخـه د $\overline{OA}$ او $\overline{O'A'}$ دوه مـساوي قطعـه خطونـه او د $\overline{OY}$ او $\overline{O'Y'}$ لـه ضلعو څخه د $\overline{OB}$ او $\overline{O'B'}$ مساوي قطعه خطونه بيل کړئ.
- د $OAA'O'$ شکل، کوم هندسي شکل لـري، دليـل يـې ووايـاست، د OAB او $O'A'B'$ جـوړ شـوې مثلثونه له يو بل سره څه اړيکه لري؟

د پورتني فعاليت له مخې د قضيې متن او ثبوت په لاندې ډول بيانولى شو.

قضيه: په فضا کې دوې زاويې، چې دوه په دوه موازي او هم جهته ضلعې ولري، يوه له بلې سره مساوي دي.



ثبـوت: د XOY او $X'O'Y'$ زاويـې پـه پـام کـې نيـسو، داسـې چـې $\overline{OX}//\overline{O'X'}$ او $\overline{OY}//\overline{O'Y'}$ دي، يـو لورى(يوجهت) هم لري. پـه شـکل کـې د OX او $O'X'$ پـر خطونو د $\overline{OA}$ او $\overline{A'O'}$ قطعه خطونه سـره مـساوي مـوازي او هم جهته دي.

نو د $OAA'O'$ شکل يوه متوازي‌الاضلاع ده. لـه دې امله د $\overline{BB'}$ او $\overline{OO'}$ قطعـه خطونـه مـوازي، مـساوي او هم لوري(هم‌جهت) دي. نو $ABB'A'$ هم يوه متوازي‌الاضلاع ده او $\overline{AB}=\overline{A'B'}$ دى.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $O'A'B'$ او OAB مثلثونه انطباق منونکي دي. ځکه $\overline{A'B'} = \overline{AB}$, $\overline{A'O'} = \overline{OA}$ او $\overline{O'B'} = \overline{OB}$ دي

له دي امله $A\hat{O}B = A'\hat{O'}B'$ دي.

د قضيې پايله:

i) که په ترتيب سره د دوو زاويو ضلعې موازي او هم لوري وي، نومورې زاوېې يو له بل سره مساوي دي.

ii) که د دوو زاويو يوه، يوه ضلع موازي او هم جهته وي او د هغو يوه، يوه ضلع يې موازي او مختلف جهتونه(لوري) ولري، د دغو دواړو زاويو پراخوالي 180° دی.(ثبوت يې د زده‌کوونکو دنده ده).

د دوو متنافر و مستقيمو کرښو ترمنځ زاويه:

تعريف: په فضاکې د دوو متنافر و مستقيمونو ترمنځ زاويه له هغې زاويې څخه عبارت ده چې د يوې مستوي په يوه اختياري نقطه کې له هغو سره د دوو موازي مستقيمونو د رسمولو په واسطه حاصليږي

پوښتنې

1- که د دوو زاويو پراخوالی سره مساوي وي او د يوې زاويې يوه ضلع د بلې زاويې ضلعې سره موازي وي، آيا د هغو زاويو نورې ضلعې يو له بل سره موازي دي. ولې؟

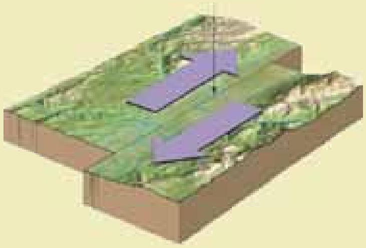
2- که د دوو زاويو ضلعې سره موازي وي، ثابت کړئ چې د دغو زاويو، ناصف‌الزاويې سره موازي او يا سره عمود دي.

3- د d_1, d_2 دوو متنافرو مستقيمونو ترمنځ زاويه پيدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

په فضا کې موازي مستقیمونه او موازي مستوي‌ګانې



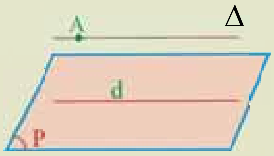
یوه مستقیمه کرښه هغه وخت له یوې مستوي سره موازي بلل کېږي چې هیڅ ګډ ټکی و نه لري.
مستوي ګانې په فضا کې هغه وخت سره موازي دي چې هیڅ ګډ ټکی و نه لري.

فعالیت

که چیرې د d مستقیم د P په مستوي کې پروت او د Δ مستقیمه کرښه د P د مستوي بهر او د d مسقیم سره موازي وي، آیا د Δ مستقیم د P له مستوي سره موازي کیدلای شي؟

- دوې د P او Q متقاطع مستوي‌ګانې او یو مستقیم خط له دغو مستوي ګانو څخه بهر د P او Q له مستوي‌ګانو سره موازي په پام کې ونیسئ.
- د d مستقیم(مشترک فصل) د Δ له مستقیم خط سره موازي کیدای شي؟
- له یوې ټاکلې نقطې څخه د d_1 او d_2 دوو مستقیمو کرښو سره څو موازي مستوي‌ګانې چې موازي نه وي رسمولای شو؟ د فعالیتونو د هرې برخې له تر سره کولو وروسته د قضیو متن او ثبوت په ترتیب بیانوو.

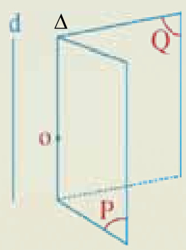
قضیه: که یو مستقیم خط د یوې مستوي له یوه خط سره موازي وي. نوموړی مستقیم خط له همدې مستوي سره موازي دی.



ثبوت:د d مسقیم خط چې د P په مستوي کې پروت او د Δ مستقیمه کرښه د p د مستوي بهر او د d له مستقیم سره موازي راکړل شوې، ثابتوو چې د Δ مستقیمه کرښه د p له مستوي سره موازي ده، که د p مستوي د Δ مستقیمه کرښه قطع کړي، د d مستقیمه کرښه چې د Δ له مستقیمې کرښې سره موازي ده هم قطع کوي. دا د فرضیې خلاف ده، ځکه د d مستقیمه کرښه د P په مستوي کې پرته ده، نو د p مستوي د Δ مستقیم قطع کولای نشي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

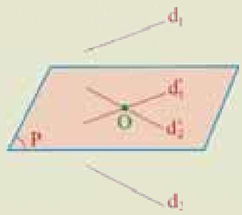
قضیه: که یوه مستقیمه کرښه له دوو متقاطع مستويګانو سره موازي وي، نوموړې مسقیمه کرښه د نوموړو مستويګانو له ګډ فصل سره موازي ده.



ثبوت: د P او Q دوې متقاطع مستويګانې په پام کې نیسو چې هره یوه يې د d له مستقیمې کرښې سره موازي ده، لکه مخامخ شکل.

که د P ، Q د مستويګانو د Δ په مشترک فصل باندې د O نقطه وټاکو او له هغې نقطې څخه د d له مستقیمې کرښې سره یو موازي رسم کړو، دا موازي د Δ په مستقیمې کرښې منطبق کېږي ځکه Δ یوازیني خط دی چې په دواړو مستويګانو یعنې په P او Q کې شامل دی.

قضیه: د (O) له یوې ټاکلې نقطې څخه د d_1 او d_2 مستقیم خطونه چې یو له بل سره موازي نه دي یوازې یوه موازي مستوي رسمولای شو او بس.

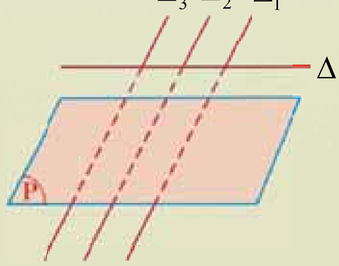


ثبوت: د (O) له نقطې څخه د d'_1 او d'_2 خطونه چې په پرتیب له d_1 او d_2 مسقیمونو سره موازي وي، رسموو د P مستوي چې د (O) له نقطې څخه تیرېږي او د d'_1 او d'_2 مستقیمې کرښې په خپل ځان کې لري له d_1 او d_2 سره موازي دي؟ ولې؟

که چیرې d_1 او d_2 یو له بل سره موازي وي، نو d'_1 او d'_2 یو پر بل منطبق کېږي.

پوښتنې

1- که چیرې د d_1 او d_2 مستقیم خطونه سره موازي وي، څو موازي مستويګانې له هغو سره رسمولای شئ؟

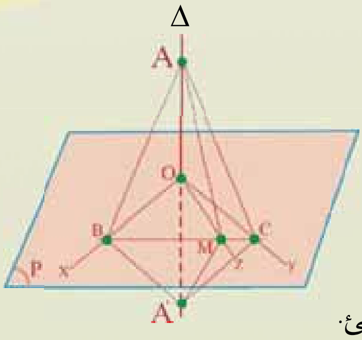


2- که چیرې د Δ_1 , Δ_2 او Δ_3 موازي خطونه د P مستوي او د Δ مستقیمې کرښې په واسطه په داسې حال کې چې د Δ مستقیمه کرښه د P له مستوي سره موازي ده قطع شي، ثبوت کړئ چې مخامخ قطع شوي قطعات یو له بل سره مساوي دي.

په فضا کې متعامدې مستقیمې کرښې او مستوي ګانې

که د Δ مستقیمه کرښه د P مستوي په (O) ټکي کې عمود وي، آیا هغه ټول مستقیم خطونه چې د (O) له نقطې څخه تیریږي، د Δ په مستقیمې کرښې باندې عمود دي؟

فعالیت



- مخامخ شکل په پام کې ونیسئ د $\overline{ox}$ او $\overline{oy}$ مستقیمونه د Δ په مستقیم د (O) په نقطه کې عمود رسم کړئ.
- د P په مستوي کې د OZ اختیاري مستقیمه کرښه په پام کې ونسیئ.
- د Δ له مستقیمې کرښې څخه د $\overline{OA}$ او $\overline{OA'}$ مساوي‌الفاصله قطعه خطونه جلا کړئ.

یو اختیاري قاطع داسې رسم کړئ چې د $\overline{OX}$ مستقیمه کرښه د B او $\overline{oy}$ مستقیمه کرښه د C او د $\overline{OZ}$ مستقیمه کرښه د M په نقطو کې قطع کړي. $\overline{OX}$ او $\overline{OY}$ له $\overline{AA'}$ سره څه اړیکه لري.

- د OZ مستقیمه کرښه د Δ پر مستقیمه کرښه عمود ده؟ ولې؟

د پورتني فعالیت له تر سره کولو وروسته د قضیې متن او ثبوت داسې بیانوو.

قضیه: که د Δ یوه مستقیمه کرښه پر هغو دوو مستقیمو کرښو چې دواړه د Δ مستقیمه کرښه د (O) په نقطه کې قطع کوي عمود وي، په هغو ټولو مستقیمو خطونو باندې چې په مستوي کې متقاطع دي او د (O) له نقطې څخه تیریږي، عمود ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ثبوت: دوې مستقيمې کرښې د $\overline{OX}$ او $\overline{OY}$ په پام کې نيسو، دا دوه مستقيمونه د Δ پر مستقيم چې د(O) له نقطې څخه تيريږي، عمود دي او د P مستوي جوړوي، د P په مستوي کې د OZ اختياري(کيفي) مستقيمه کرښه په پام کې نيسو، د Δ له مستقيمې کرښې څخه د $\overline{OA}$ او $\overline{OA'}$ دوه متساوي الفاصله قطعه خطونه جلاکوو.

او د P په مستوي کې يو قاطع رسموو چې $\overline{OX}$ د B او $\overline{OY}$ د C او oz مستقيم د M په نقطه کې قطع کړي.

$\overline{OX}$ او $\overline{OY}$ دواړه $\overline{AA'}$ منځنۍ عمودونه دي؛ نو

$$\overline{BA} = \overline{BA'}$$
$$\overline{CA} = \overline{CA'}$$

د ABC او $A'B'C'$ مثلثونه انطباق منونکی دي. د انطباق منلو د عمليې په وخت کې د C, B او M نقطې ثابتې پاتې کېږي او د A نقطه په A' او $\overline{MA}$ په $\overline{MA'}$ منطبق کيږي، نو ليکلی شو. $\overline{MA'} = \overline{MA}$

د $M\overset{\Delta}{A}A'$ مثلث متساوي الساقين دي او د $\overline{MO}$ منځنۍ(ميانه) په عين وخت کې د $\overline{AA'}$ منځنۍ عمود دی

په نتيجه کې د Δ مستقيمه کرښه د $\overline{OZ}$ پر مستقيمې کرښې باندې عمود دی.

فعاليت

- که د B او C نقطې د P او Q له ټکو څخه متساوي الفاصله وي، د BC مستقيمې کرښې هره نقطه له P او Q څخه متساوي‌الفاصله ده. اوس د X يوه اختياري(کيفي) نقطه د BC پر مستقيمه کرښه وټاکئ او ثابت کړئ چې X د P او Q څخه متساوي الفاصله دی.

پوښتنې

1- که چيرې د d_1 او d_2 خطونه يو له بل سره موازي وي، له هغو سره څو موازي مستويګانې رسمولای شئ؟

2- که د L خط د P پر مستوي عمود وي، آيا ټولې هغه مستويګانې چې د L خط په کې پروت دی د P په مستوي باندې عمود دی؟

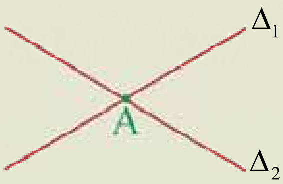
(c) ketabton.com: The Digital Library

په فضا کې موازي مستويګانې

دوې مستويګانې چې هيڅ مشترکه نقطه ونه لري، موازي مستويګانې بلل کېږي.

فعاليت

- د Δ_1 او Δ_2 مستقيم خطونه، چې د A په نقطه کې متقاطع دي، په پام کې ونسئ.
- له دې دوو مستقيمو خطونو او د A له نقطې څخه يوه مستوي تيرولى شو.
- له دې مستوي څخه بهر د d_1 او d_2 دوې مستقيمې کرښې چې په ترتيب سره د Δ_1 او Δ_2 سره موازي او يو بل د B په ټکي کې قطع کړي، رسم کړئ.

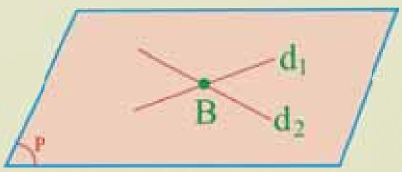


- هغه مستوي چې د Δ_1 او Δ_2 او د A له نقطې څخه جوړه شوې، له هغې مستوي سره چې د d_1 او d_2 مستقيمو کرښو او د B له ټکي څخه جوړه شوې ده، څه اړيکه لري؟

د پورتني فعاليت له تر سره کولو وروسته د قضيې متن او ثبوت بيانولى شو.

قضيه: که د يوې مستوي دوې متقاطع مستقيمې کرښې د بلې مستوي له متقاطع مستقيمو کرښو سره موازي وي، نوموړې مستويګانې سره موازي دي.

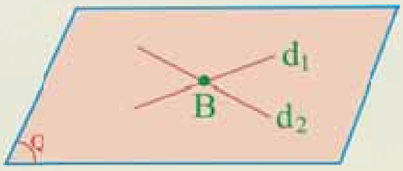
ثبوت: د Δ_1 او Δ_2 مستقيم خطونه د A په نقطه کې متقاطع دي او يوه د P مستوي جوړوي. د B له نقطې څخه(چې د P مستوي بهر ده) د d_1 او d_2 مستقيم خطونه له Δ_1 او Δ_2 سره موازي رسم شوي دي، چې d_1 او d_2 هم يوه د Q مستوي جوړوي، ثابتوو چې د P او Q مستويګانې سره موازي دي.

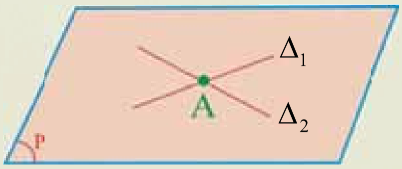


(c) ketabton.com: The Digital Library

ځرنګه چې d_1 او Δ_1 سره موازي دي، نو d_1 د P له مستوي سره هم موازي دي. همدارنګه d_2 له Δ_2 سره موازي دي نو d_2 هم د P له مستوي سره موازي دی. اوس که چیرې د P او Q مستویګانې یو بل سره قطع کړې، مشترك فصل یې هم په همدې وخت کې له d_1 او d_2 سره موازي کېږي، ولې؟

دا امکان نه لري، څکه چې د d_1 او d_2 مستقیم خطونه متقاطع دي، په نتیجه کې د P او Q مستویګانې یوه بله سره قطع کولای نشي، نو یو بل سره موازي دي.





پوښتنې

که چیرې د E او F مستویګانې سره موازي وي او د L_1 مستقیمه کرښه په E مستوي او د L_2 مستقیمه کرښه د F په مستوي کې پرتې وي، آیا $L_1 // L_2$ دی؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

د څپرکي مهم ټکي

1- دفضايي هندسې بنسټيز مفاهيم او اکسيومونه:

لومړنۍ اصطلاحګانې Postulates:

هغه مفاهيم او مفکورې، چې پرته له کوم تعريف څخه منل کيږي، لومړنې اصطلاحات بلل کيږي د مثال په توګه. ټکی(نقطه)، کرښه (خط)، مستوي او فضا.

دليل او برهان Logical Reason:

برهان د ذهن هغه عمل ته ويل کيږي چې له يو لړ مخکينيو سمو وړانديزونو او څيړونو څخه و روسته وروستيو څېړنو ته رسيږي او د هغې سموالی مخکې منل شوی وي، مونږ هم کولی شو، هغه و منو.

قضيه: Theorem

هغه ادعا چې د هغې سموالی او صحت يولړ منطقي دلايلو ته اړتيا ولري، قضيه بلل کيږي.

ټکی(نقطه): موږ نقطه د يو ذهني مفهوم په ډول پيژنو او هغه د لومړنۍ اصطلاح(تعريف شوې نه ده) په توګه منو.

مستقيم خط: کش شوی تار، د مېز څنډه او د خط کش تيغه د مستقيم خط مفهوم او مطلب بيانوي. مستقيم خط د لومړنۍ اصطلاح(تعريف شوی نه دی) په ډول منو.

د مستوي لومړی اکسيوم: هغه مستقيم خط چې د يوې مستوي دوې مختلفې نقطې سره ونښلوي، په همغه مستوي کې شامل دی.

د مستوي دويم اکسيوم: له هرو دريو نقطو څخه چې د يوه مستقيم خط په استقامت پرتې نه وي، يوه مستوي تيريږي.

د متقاطع مستويګانو اکسيوم: که چيرې دوه مستويګانې يو ګډ ټکی ولري، متقاطع دي او په همدې ډول که چيرې يو مسقيم خط ولري، دغه متقاطع خط ته د دوو مستويګانو مشترک فصل وايي.

فضا: فضا هم(تعريف شوې نه ده) لومړنۍ اصطلاح په توګه پيژنو.

لومړی اصل: فضا د لايتناهي نقطو مجموعه ده.

دويم اصل: لږتر لږه د فضا څلور داسې نقطې شته چې په يوه مستوي کې واقع نه دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په درې بُعده فضا کې خط او مستوي:

درې بعدي فضا: هغه فضا چې موږ په کې ژوند کوو درې بعدې فضا ده.

له یو بل سره په فضا کې د دوو مستقیمو خطونو نسبي حالت

موازي

منطبق

متقاطع

متنافر

د یوې مستقیمې کرښې او یوې مستوي نسبي حالت

متقاطع

منطبق

موازي

د دوو مستویگانو نسبي حالت

منطبق

متقاطع

عمود

په فضا کې موازي مستقیمونه:

دوې مستقیمې کرښې چې په یوې مستوي کې واقع او مشترکه نقطه ونه لري، موازي مستقیمونه بلل کیږي.

په فضا کې د دوو مستقیمونو تر منځ زاویه: په فضا کې دوې متوازي الاضلاع او هم جهته زاویې سره مساوي دي.

په فضا کې موازي مستقیمونه او مستوي: یو مستقیم خط له یوې مستوي سره هغه وخت موازي بلل کیږي، چې هیڅ مشترکه(ګډه)نقطه ونه لري.

په فضا کې متعامد مستقیمونه او مستویګانې:

که د Δ مستقیم د (O) په نقطه کې د P پر مستوي عمود وي، ټول هغه مستقیم خطونه چې د (O) له نقطې څخه تیریږي، د Δ پر مستقیمه کرښه باندې عمود دي؟

په فضا کې موازي مستوي‌ګانې: دوې مستویګانې، چې هیڅ ګډ ټکی ونه لري، موازي مستوي‌ګانې بلل کیږي.

د څېرکي پوښتنې

هرې پوښتنې ته څلور ځوابونه ورکړل شوي، سم ځواب یې پیدا او کړۍ ترې تاو کړئ.

1- د P مستوي د A او B نقطې مفروض دي. که د A او B د نقطو فاصله له p مستوي سره مساوي وي، د P مستوي په هر حال کې:

a _ د AB له خط سره موازي دی
b _ د AB خط یې له منځه تیریږي
c _ د AB خط عمودي ناصف دی
d _ د AB له خط سره موازي دي یا له AB څخه تیریږي

2- که د Δ خط د P د مستوي په ټولو خطونو عمود وي، نو:

a _ د Δ خط د مستوي پر ټولو خطونو عمود دی.
b _ د Δ خط یوازې د P مستوي پر دوو خطونو عمود دی.
c _ د Δ خط د P مستوي له بې شمېره خطونو سره موازي دی.
d _ د Δ خط یوازې د P مستوي له یوه خط سره موازي دی.

3- په دقیق ډول له لاندې کومو اجزاوو څخه یوه مستوي نه تیریږي له:

a _ هغو درې نقطو څخه چې پر یو مستقیم واقع دی.
b _ له دوو متقاطع خطونو څخه
c _ د یو خط او د هغې له خارجي نقطې څخه
d _ څلور متمایزې(مختلفې نقطې)

4- له لاندې ځوابونو څخه کوم یو یې هر وخت سم نه وي.

a _ که د Δ مستقیم خط د P له مستوي سره موازي وي او له هغه خط څخه یوه مستوي تېره کړو، دا مستوي د P له مستوي سره موازي دی.
b _ که د Δ او Δ' دوه خطونه د d له خط سره موازي وي، هغه وخت Δ او Δ' یو له بل سره موازي دي.
c _ که د Δ او Δ' دوه خطونه موازي وي او د P مستوي د Δ خط قطع کړي، د Δ' خط هم قطع کولای شي.
d _ که دوې مختلفې مستوي‌گانې په یوه نقطه کې شریکې وي، نو نوموړې مستوي‌گانې د یاد شوې ټکي په امتداد شریکې دي.

5- د Δ خط د P مستوي قطع کوي، خو د P پر مستوي عمود نه دی. دا خط د P د مستوي په څو خطونو باندې عمود دی؟

a) 0　　b) 1　　c) 2　　d) بې شمېره

(c) ketabton.com: The Digital Library

6- له لاندې ځوابونو څخه کوم يو يې هر وخت سم نه دي.

a _ که کوم خط د مستوي له خطونو سره موازي وي او متمايز وي، نوموړی خط د هغې له مستوي سره موازي دی.

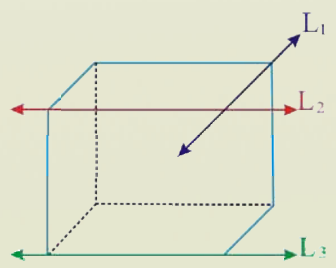
b _ که يو خط يو له متقاطع مستويګانو څخه قطع کړي، بله هم قطع کوي.

c _ که يو خط يوه له دوو موازي مستويګانو څخه قطع کړي، بله يې هم قطع کوي.

d _ که يوه مستوي يوه له دوو موازي مستويګانو څخه قطع کړي، بله يې هم قطع کوي.

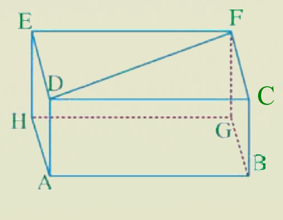
لاندې سوالونه حل کړئ:

1- که دوه مستقيم خطونه له يوې مستوي سره موازي وي، نوموړي خطونه خپل منځ کې عمود کيدای شي.



2- په لاندې مستطيل کې د L_1, L_2 او L_3 خطونو موقعيت نظر يو بل ته څرګند کړئ. د دې خطونو کومې جوړې متقاطع، کومې جوړې يې موازي او کومې جوړې متنافرې دي؟

3- که د P_1 او P_2 مستويګانې د P پر مستوي باندې عمود وي، د P_1 او P_2 مستويګانې په خپل منځ کې موازي دي؟



4- په مخامخ شکل کې هر څلور ضلعي يو مستطيل دی.

a _ د دوو مستويګانو نومونه واخلئ چې پر AD عمود وي او ووايئ ولې عمود دي؟

b _ د دريو قطعه خطونو، نومونه واخلئ چې پر $ABCD$ مستوي باندې عمود وي.

c _ د $E\hat{D}F$ زاويه قايمه ده.

d _ د $D\hat{F}C$ زاويه قايمه ده.

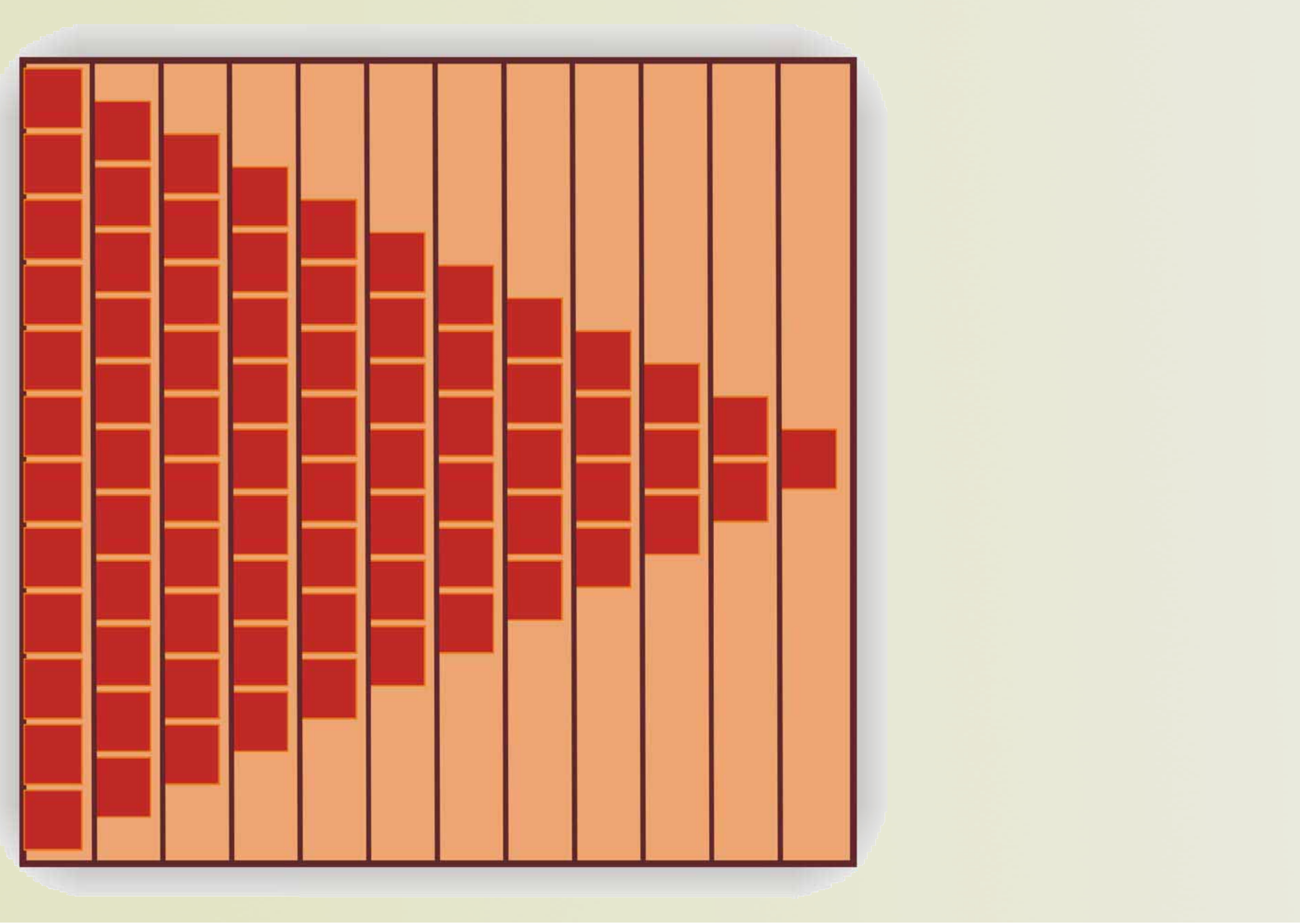
(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

څلورم څپرکی

ترادفونه او سلسلي

(c) ketabton.com: The Digital Library



(c) ketabton.com: The Digital Library

ترادفونه

Sequence

په مخامخ شکل کې څه ډول ترتیب وينئ.

هر ترتیب چې شتون لري، توضيح يې کړئ.

تعریف: د $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ عددونه د عددونو د ترادف په نامه يادېږي،
يا په بل عبارت ترادف له هغې تابع څخه عبارت دی چې د تعریف ناحيه يې طبيعي عددونه او د قيمتونو ناحيه يې حقيقي عددونه تشکيلوي. غير منظم(نامرتب) دعددونو ليکل يو ترادف نه دی.

له پورتنيو عددونوڅخه هر يو د نوموړي ترادف حدونه دی، a_1 يې لومړی حد او a_2 يې دويم حد او a_n دترادف $n-$ ام حد دی، ترادف په لنډ ډول داسې ليکي: $\{a_n\}_{n\in IN}$ په دې حالت کې a_n د ترادف $n-$ ام حد دی.

د جفتو عددونو ترادف	$2,4,6,8, \dots, 2n$
د طاقو عددونو ترادف	$1,3,5,7, \dots, 2n-1$
د 5 د مضرب عددونوترادف	$5,10,15,20, \dots, 5n$

معمولاً يو ترادف د يوه اختياري $n-$ ام حد په واسطه ټاکل او تعريفېږي؛ مثلاً:

$a_n = 2n \quad , \quad n = 1,2,3, \dots$

$b_n = 2n-1 \quad , \quad n = 1,2,3, \dots$

$c_n = 5n \quad , \quad n = 1,2,3, \dots$

فعاليت

- د $\{a_n\} = \{\frac{n+1}{n}\}$ ترادف په پر مختللي(انکشافي) شکل وليکئ.
- د $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ ترادف په پرمختللي(انکشافي) شکل وليکئ.

هغه ترادف چې د حدونو عددي قيمت يې په تدريجي ډول زياتېږي متزايد ترادف بلل کېږي، لکه د جفت، طاق او 5 مضرب عددونوترادفونه.

او هغه ترادف چې د حدونو عددي قيمت يې په تدريجي ډول کمېږي، متناقص ترادف بلل کېږي، لکه: د 5 مضرب عددونو معکوس ترادف $\frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \frac{1}{15}, \dots, \frac{1}{5n}$

لومړی مثال: د $a_n = n^2$ او $b_n = \frac{3}{n}$ ترادفونه متزاید دی، که متناقص؟

حل:

$$a_n = n^2 \quad , \quad n = 1,2,3,\ \dots \quad , \quad a_n = 1,4,9,16,25,36,\ \dots$$

$$b_n = \frac{3}{n} \quad , \quad n = 1,2,3,\ \dots \quad , \quad b_n = 3,\frac{3}{2},1,\frac{3}{4},\frac{3}{5},\ \dots$$

لیدل کېږي چې د a_n د ترادف د حدونو عددي او عددي قیمت په تدریجي ډول زیاتېږي، نو د a_n ترادف متزاید، همدارنگه لیدل کېږي چې د b_n د ترادف د حدونو عددي قیمت په تدریجي ډول کمېږي، نو د b_n ترادف یو متناقص ترادف دی.

یادونه: هغه ترادفونه چې دحدونوشمېر یې معلوم وي معین ترادفونه او هغه ترادفونه چې د حدونو شمېر یې معلوم نه وي، د غیر معینو ترادفونو په نامه یادیږي.

دویم مثال: که **د** یوه ترادف $a_n = \frac{n^2}{n+1}$ وروستې حد درکړل شوی وي، 5 لومړنی حدونه یې پیدا کړئ.

حل: د 5 لومړنیو حدونو د پیداکولو لپاره $n = 1,2,3,4,5$ قیمتونه ورکوو او په ترادف کې یې وضع کوو چې په دې ډول د ترادف 5 لومړني عناصر(حدونه) په لاس راځي.

$$a_n = \frac{n^2}{n+1}$$

$$n = 1 \quad , \quad a_1 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

$$n = 2 \quad , \quad a_2 = \frac{2^2}{2+1} = \frac{4}{3}$$

$$n = 3 \quad , \quad a_3 = \frac{3^2}{3+1} = \frac{9}{4}$$

$$n = 4 \quad , \quad a_4 = \frac{4^2}{4+1} = \frac{16}{5}$$

$$n = 5 \quad , \quad a_5 = \frac{5^2}{5+1} = \frac{25}{6}$$

پوښتنې

1- په لاندې ترادفونوکې $n-$ام حد وټاکئ؟

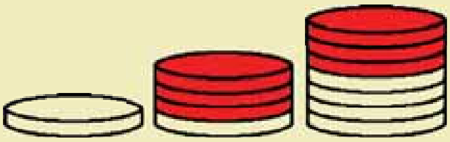
$$\left.\begin{array}{l} 1,3,5,7,\ \dots \\ \frac{1}{3},\frac{1}{6},\frac{1}{9}\ ,\ \dots \end{array}\right\}$$

2- که یو ترادف $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ راکړل شوی وي، 6 لومړني پرله پسې حدونه یې ولیکئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

حسابي ترادف

Arithmetic Sequences



که په یوه ترادف کې د دوو پرله پسې(متعاقبو) حدونو ترمنځ توپیر یو ثابت عدد وي ،ترادف په څه نوم یادېږي.

فعالیت

- مخامخ عددونه په پام کې ونیسئ $5,8,11,14,17,20$
- د لومړي او وریسي حدونو ترمنځ توپیر څو دی؟
- د پورتنیو عددونو ترتیب له څو حدونو څخه جوړ شوی دی؟
- له بېي څخه کېنې خوا ته د پورتنیو عددونو ترادف ولیکئ.

له پورتني فعالیت څخه لاندې پایله بیانېږي:

تعریف: که په یوه حسابي ترادف کې د دوو پرله پسې حدونو ترمنځ توپیر یو ثابت عدد وي، هغه د حسابي ترادف په نوم یادېږي.

دغه ثابت عدد له ګډ توپیر(Common deference's) څخه عبارت دی او په d سره ښودل کېږي که d یو مثبت عدد($d>0$) وي، ترادف متزاید او که d منفي($d<0$) وي، ترادف متناقص بلل کېږي، لکه په لاندې مثالونو کې:

$2,5,8,11,14,17,\ ...$

$$\left.\begin{array}{l} d=5-2=3 \\ d=8-5=3 \\ d=11-8=3 \end{array}\right\} \Rightarrow d=3>0$$

نو ترادف متزاید دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$4,0,-4,-8,-12,-16,-20,\ \ldots$$

$$\left.\begin{aligned} d&=0-4=-4\\ d&=-4-0=-4\\ d&=-8-(-4)=-4\\ d&=-12-(-8)=-4\\ d&=-16-(-12)=-4 \end{aligned}\right\} \Rightarrow d=-4<0$$

ترادف متناقص دی.

لومړی مثال: داسې یو ترادف ولیکئ چې لومړی حد یې $\frac{3}{2}$ او ګډ توپیر یې 2 وي.

حل: څرنګه چې لومړی حد یې $a_1=\frac{3}{2}$ او ګډ توپیر یې $d=2$ دی، نو:

$$a_1\ ,\ a_2\ ,\ a_3\ ,\ \ldots$$

$$a_2-a_1=d \ \Rightarrow\ a_2=a_1+d$$

$$a_3-a_2=d \ \Rightarrow\ a_3=a_2+d=(a_1+d)+d=a_1+2d$$

$$a_4-a_3=d \ \Rightarrow\ a_4=a_3+d=(a_1+2d)+d=a_1+3d$$

اوس د $a_1\ ,\ a_2\ ,\ a_3\ ,\ \ldots\ ,a_n$ قیمتونه په ترادف کې وضع کوو:

$$a_1\ ,(a_1+d)\ ,\ (a_1+2d)\ ,\ (a_1+3d),\ \ldots$$

$$\frac{3}{2},\ (\frac{3}{2}+2)\ ,\ (\frac{3}{2}+2+2)\ ,\ (\frac{3}{2}+2+2+2),\ \ldots$$

$$\frac{3}{2},\ \frac{7}{2}\ ,\ \frac{11}{2}\ ,\ \frac{15}{2},\ \ldots$$

دویم مثال: کوم یوله لاندې ترادفونو څخه حسابي ترادف دی.

$a)\ 1,\frac{3}{2},2,\frac{5}{2},3,\frac{7}{2},4,\ \ldots$

$b)\ 1,2,4,8,16,\ \ldots$

د a جزء حل: د حسابي ترادف د تعریف په پام کې نیولو سره د حدونو ګډ توپیر په لاس راوړو:

$$1,\frac{3}{2},2,\frac{5}{2},3,\frac{7}{2},4$$

$$d=\frac{3}{2}-1=\frac{1}{2}$$

$$d=2-\frac{3}{2}=\frac{1}{2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$d = 3 - \frac{5}{2} = \frac{1}{2}$$
$$d = \frac{7}{2} - 3 = \frac{1}{2}$$
$$d = 4 - \frac{7}{2} = \frac{1}{2}$$

لیدل کېږي چې د پورتني ترادف د ټولو حدونو تر منځ ګډ توپیر $\frac{1}{2}$ ثابت عدد دی، نو د حسابي ترادف د تعریف پر بنسټ ویلی شو چې نوموړی ترادف یو حسابي ترادف دی.

د b جزء حل:

$$1 \;,\; 2 \;,\; 4 \;,\; 8 \;,\; 16$$
$$d = 2 - 1 = 1$$
$$d = 4 - 2 = 2$$
$$d = 8 - 4 = 4$$
$$d = 16 - 8 = 8$$

لیدل کېږي چې د پورتني ترادف د ټولو عناصرو ترمنځ ګډ توپیر یو ثابت عدد نه دی، نو یاد شوی ترادف حسابي ترادف نه دی.

په یوه حسابي ترادف کې د n-ام حد ټاکل:

که چیرې د یوه حسابي ترادف $a_1, a_2, \ldots, a_n$ لومړی حد په a او ګډ توپیر یې d وي، د n-ام حد د پیداکولو لپاره له لاندې تحلیلي ثبوت څخه ګټه اخلو، ددې کار لپاره د $5, 7, 9, 11, \ldots$ ترادف په پام کې نیسو.

$$5, 7, 9, 11, \ldots$$
$$d = 7 - 5 = 2$$
$$a_1, a_2, a_3, \ldots$$
$$a_1, (a_1 + d), (a_1 + 2d), (a_1 + 3d), \ldots$$
$$5, 5 + 2, 5 + 2 \cdot 2, 5 + 2 \cdot 2 \cdot 2, \ldots$$
$$a_1 = 5,\; a_2 = 5 + 2 \cdot 2\;,\; a_3 = 5 + 2 \cdot 2 \cdot 2, \ldots$$

د پورتني مثال په پام کې نیولو سره په عمومي توګه کولای شو ولیکو چې:

$$a_1 = a_1$$
$$a_2 - a_1 = d \Rightarrow a_2 = a_1 + d$$
$$a_3 - a_2 = d \Rightarrow a_3 = a_2 + d = a_1 + d + d = a_1 + 2d$$
$$a_4 - a_3 = d \Rightarrow a_4 = a_3 + d = a_1 + 2d + d = a_1 + 3d$$
$$\vdots$$
$$a_n - a_{n-1} = d \Rightarrow a_n = a_{n-1} + d = a_1 + (n-1)d$$

لومړی حد	دویم حد	درېیم حد	څلورم حد		n - ام حد
a	$a+d$	$a+2d$	$a+3d$	....	$a+(n-1)d$
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$		$\downarrow$
a_1	a_2	a_3	a_4		a_n

په پایله کې په لاس راځي چې د a , d , n او a_n ترمنځ لاندې اړیکه شتون لري:

$$a_n = a + (n-1)d$$

لومړی مثال: د دغه ... , 12 , 5 , -2 حسابي ترادف 30 - ام حد پیدا کړئ.

حل:

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= -2 \\ d &= 5-(-2) = 7 \\ n &= 30 \\ a_{30} &= ? \end{aligned}\right\} \begin{aligned} a_n &= a+(n-1)d \\ a_{30} &= -2+(30-1)7 \\ a_{30} &= -2+29\cdot 7 \\ a_{30} &= -2+203 \Rightarrow a_{30} = 201 \end{aligned}$$

دویم مثال: دلاندې حسابي ترادف د حدونو شمېر په لاس راوړئ.

حل: پوهېږو چې:

$$35\ ,\ 40\ ,\ 45\ ,\ \ldots\ ,2000$$

$$\left.\begin{aligned} a &= 35 \\ d &= 40-35 = 5 \\ a_n &= 2000 \\ n &= ? \end{aligned}\right\} \begin{aligned} a_n &= a+(n-1)d \\ 2000 &= 35+5n-5 \\ 2000 &= 30+5n \\ 2000-30 &= 5n \\ 1970 &= 5n \Rightarrow n = 394 \end{aligned}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیت

- که چیرې په یوه حسابي ترادف کې $d=4, a_1=-11$ وي، a_2 او a_3 حدونه پیداکړئ.

د حسابي ترادف وسطي حد:

که د یوه حسابي ترادف درې پرله پسې حدونه د a_{n-1}, a_n, a_{n+1} ولرو، په داسې حال کې چې $n=2,3,4$ دي.

$$a_{n-1}+a_{n+1}=[a_1+(n-2)d]+[a_1+nd]$$
$$=[a_1+nd-2d]+[a_1+nd]=[a_1+nd-2d+a_1+nd]$$
$$a_{n-1}+a_{n+1}=[2a_1+2nd-2d]=2[a_1+(n-1)d]=2a_n$$
$$\Rightarrow\ 2a_n=a_{n-1}+a_{n+1}\quad\Rightarrow a_n=\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}$$

لومړی مثال: د 7 او 23 عددونو حسابي اوسط عبارت دی، له:

$$a_n=\frac{7+23}{2}=\frac{30}{2}=15$$

دویم مثال: د x عدد داسې وټاکئ چې د $\underbrace{2x+1}_{a_{n+1}},\underbrace{2x-4}_{a_n},\underbrace{3x+3}_{a_{n-1}}$ درې حده حسابي ترادف تشکیل کړي، ترادف یې ولیکئ.

$$a_n=\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}\quad\Rightarrow 2x-4=\frac{3x+3+2x+1}{2}=\frac{5x+4}{2}$$
$$4x-8=5x+4\quad\Rightarrow\ 4x-5x=4+8=12\quad\Rightarrow\ -x=12$$
$$x=-12$$

ترادف یې عبارت دی له: $2(-12)+1\ ,\quad 2(-12)-4\ ,\quad 3(-12)+3$

$$-24+1, -24-4, -36+3\ \Rightarrow\ -23, -28, -33, -38, -43, \ ....$$

یادونه

که د یوه حسابي ترادف $n-$ ام او $m-$ ام حدونه معلوم وي، یعنې:

$$a_n=a+(n-1)d\quad ....\ I$$
$$a_m=a+(m-1)d\quad ....\ II$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو د I له اړیکې څخه د II اړیکه کموو، په پایله کې کولای شو ګډ توپیر داسې په لاس راوړو

$d=\dfrac{a_n-a_m}{n-m}$ (ثبوت یې د زده‌کوونکو دنده ده) چې په یاد شوي فورمول کې d ګډ توپیر، a_n د ترادف $n-$ام حد، a_m د ترادف $m-$ام حد دی.

لومړی مثال: د یوه حسابي ترادف پنځم حد 27 او نهم حد یې 47 دی، ګډ توپیر او لومړی حد یې پیدا کړئ، په پای کې یې ترادف بشپړ کړئ.

$\square,\ \square,\ \square,\ \square,\ 27,\ \square,\ \square,\ \square,\ 47$

حل:

$$\left.\begin{array}{l} a_n=47\\ n=9\\ a_m=27\\ m=5\\ d=?\\ a=? \end{array}\right\} \begin{array}{l} d=\dfrac{a_n-a_m}{n-m}=\dfrac{47-27}{9-5}=\dfrac{20}{4}\\ d=5\\ a_n=a+(n-1)d \ \Rightarrow\ 47=a+(9-1)5=a+40\\ \Rightarrow\ 47-40=a \ \Rightarrow\ a=7 \end{array}$$

ترادف یې عبارت دی له: $7,12,17,22,27,32,37,42,47$

هارمونیکي ترادف: د $\{a_n\}$ یوه ترادف ته هغه وخت هارمونیکي ترادف وایي چې معکوس یې $b_n=\dfrac{1}{a_n}$ یو حسابي ترادف وي.

لومړی مثال: د $2,4,6,8,10,\ \ldots$ ترادف یو حسابي ترادف دی، ځکه چې $d=2$ دی، د دغه ترادف د حدونو معکوس یعنې $\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{6},\dfrac{1}{8},\dfrac{1}{10},\ldots$ یو هارمونیکي ترادف تشکیلوي.

دویم مثال: د طبیعي عددونو معکوس ترادف یو هارمونیکي ترادف دی.

$$1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\ \ldots\ ,\frac{1}{n}$$

$$\{a_n\}=\frac{1}{n}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دريم مثال : كه چيرې په يوه هارمونيکې ترادف کې $a_1 = \frac{1}{4}$ او $d = -3$ وي، هـارمونيکې تـرادف يـې پـه لاس راوړئ

حل:

$$\frac{1}{4}, (\frac{1}{4}-3), (\frac{1}{4}-3-3), (\frac{1}{4}-3-3-3), (\frac{1}{4}-3-3-3-3), \ldots$$

$$\frac{1}{4}, -\frac{11}{4}, -\frac{23}{4}, -\frac{35}{4}, -\frac{47}{4}, \ldots$$

آيا د طبيعي طاقو عددونو معکوس ترادف يو هارمونيکي ترادف دی، $n-$ ام حد يې وليکئ.

هـارمونيکي حـسابي اوسـط: کـه درې مسلسل عناصـر a_{n-1} ، a_n او a_{n+1} پـه داسې حـال کې چې $n = 2 , 3 , 4 \ldots$ دی، له يوه حسابي ترادف څخه وټاکل شي، څرنگه چې $\frac{1}{a_{n-1}}, \frac{1}{a_n}$ او $\frac{1}{a_{n+1}}$ د يوه هارمونيک ترادف حدونه دي لرو، چې:

$$\frac{1}{a_n} = \frac{\frac{1}{a_{n+1}} + \frac{1}{a_{n-1}}}{2} = \frac{\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{(a_{n+1})(a_{n-1})}}{2} = \frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{(a_{n+1})(a_{n-1})} \cdot \frac{1}{2} = \frac{a_{n+1}+a_{n-1}}{2a_{n+1} \cdot a_{n-1}}$$

$$a_n = \frac{2(a_{n-1})(a_{n+1})}{a_{n-1}+a_{n+1}}$$

په پايله کې پورتنی اړيکه چې هارمونيک حسابي اوسط ښيې، ليکلای شو:

$$\boxed{a_n = \frac{2(a_{n-1})(a_{n+1})}{a_{n-1}+a_{n+1}}}$$

مثال : د 2 او 8 عددونو هارمونيکې اوسط پيدا کړئ.

حل: له $a_n = \frac{2(a_{n-1})(a_{n+1})}{a_{n-1}+a_{n+1}}$ فارمول څخه په کار اخيستنې سره لرو چې:

$$a_n = \frac{2(2\cdot 8)}{2+8} = \frac{2\cdot 16}{10} = \frac{16}{5} = 3.2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

1- د مخامخ ترادف 35 -ام حد پیدا کړئ. $-2\ ,\ 5\ ,\ 12\ ,\ ...$

2- آیا $\frac{5}{4}, 1, \frac{3}{4}$ یو حسابي ترادف تشکیلوي؟ د پوښتنې د سموالی په صورت کې یې مشترک توپیر پیدا کړئ.

3- د $2\sqrt{2}$ او $16\sqrt{2}$ تر منځ حسابي اوسط په لاس راوړئ.

4- که $a_1 = -\frac{1}{2}$, $a_{10} = \frac{84}{2}$ وي د d قیمت په لاس راوړئ.

5- له لاندې ترادفونو څخه کوم یو حسابي ترادف نه دی.

$a)\ 2\ ,\ \frac{9}{4}\ ,\ \frac{5}{2}\ ,\ \frac{11}{4}, ...$

$b)\ 3\ ,6\ ,9\ ,12,\ ...$

(c) ketabton.com: The Digital Library

هندسي ترادف

Geometric Sequences

که د شطرنج د يوې تختې په لومړۍ خانه کې يوه دانه غنم او په دويمه خانه کې يې دوه دانې غنم په همدې ډول که په هره وروستۍ خانه کې په مخکنۍ خانې دوه برابره غنم کېښودل شي، نو د شطرنج د تختې په اخيره خانه کې(يوه د شطرنج تخته 64 خانې لري) به څو دانې غنم وي.

فعاليت

- د مخامخ ترادف عددونه په پام کې ونيسئ. $3\ ,\ 6\ ,\ 12\ ,\ 24\ ,\ 48, \ldots$
- د پورتني ترادف د عناصرو ترمنځ کومه اړيکه موجوده ده؟
- د پورتني ترادف د دوو پرله پسې حدونو ترمنځ نسبت پيدا او يو له بل سره يې پرتله کړئ.

له پورتني فعاليت څخه کولای شو لاندې پايله بيان کړو:

پايله

هغه ترادف چې د دوو پر له پسې حدونو ترمنځ نسبت يې يو ثابت عدد q وي، د هندسي ترادف په نامه يادېږي، يعنې:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q \Leftrightarrow a_{n+1} = a_n \cdot q \quad , \ n = 1, 2, 3, \ \ldots$$

$$a_{1+1} = a_1 \cdot q \quad \Rightarrow \quad a_2 = a_1 q$$

$$a_{2+1} = a_2 \cdot q = a_1 q \cdot q = a_1 q^2$$

$$a_{3+1} = a_3 \cdot q = a_1 q^2 \cdot q = a_1 q^3$$

دلته q ګډ نسبت او a_1 د ترادف لومړی حد دی.

هندسي ترادف هغه وخت پېژندل کېږي چې لومړی حد او ګډ نسبت يې معلوم وي.

لومړی مثال: د $\ldots, 6, 12, 24, 48, 96$ هندسي ترادف په پام کې ونیسئ، ګډ نسبت یې په لاس راوړی.

حل: هر حد يې په مخکيني حد باندي وېشو:

$$96 \quad 48 \quad 24 \quad 12 \quad 6$$

$$q=\frac{48}{96}=\frac{1}{2} \qquad q=\frac{24}{48}=\frac{1}{2} \qquad q=\frac{12}{24}=\frac{1}{2} \qquad q=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$$

فعالیت

- په یوه هندسي ترادف کې $a_1=2$ او $q=3$ دی، a_2 , a_3 او a_4 حدونه پیدا کړئ.

یادونه

$q>1$ لپاره ترادف متزاید دی.

$q<1$ لپاره ترادف متناقص دی.

$q=1$ لپاره ثابت ترادف په لاس راځي.

دویم مثال: د $\ldots, 100, 300, 900, 2700$ هندسي ترادف په پام کې ونیسئ لومړی حد او ګډ نسبت یې په لاس راوړئ او ووایاست چې پورتنی هندسي ترادف متزاید دی او که متناقص.

حل:

لومړی حد $= a = 2700$

ګډ نسبت $= q = \frac{900}{2700}=\frac{9}{27}=\frac{1}{3}$

په پورتني مثال کې $q=\frac{1}{3}<1$ دی، نو نوموړی ترادف متناقص دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په هندسي ترادف کې د n – ام حد پیدا کول:

که په یوه هندسي ترادف کې a لومړی حد، q ګډ نسبت او n د ترادف د حدونو شمېر وي،نو د n – ام حد پیدا کولو لپاره له لاندې تحلیلي ثبوت څخه کار اخلو.

که چیرې هندسي ترادف د .... $a_1, a_2, a_3, a_4,$ په پام کې ونیسو، نو په لاندې ډول کړنه کوو:

$$a_1 = a_1$$
$$q = \frac{a_2}{a_1} \Rightarrow a_2 = a_1 \cdot q$$
$$q = \frac{a_3}{a_2} \Rightarrow a_3 = a_2 \cdot q = a_1 q \cdot q = a_1 q^2$$
$$q = \frac{a_4}{a_3} \Rightarrow a_4 = a_3 \cdot q = a_1 q^2 \cdot q = a_1 q^3$$
$$\vdots$$
$$q = \frac{a_n}{a_{n-1}} \Rightarrow a_n = a_{n-1} \cdot q = (a_1 q^{n-2}) \cdot q = a_1 q^{n-1}$$

اوس د .... $a_1, a_2, a_3, a_4,$ په ترادف کې یې قیمتونه ږدو:

لومړی حد	دویم حد	دریم حد	څلورم حد		n - ام حد
a_1	a_2	a_3	a_3	, ... ,	a_n
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	, ... ,	$\downarrow$
a_1	$a_1 q$	$a_1 q^2$	$a_1 q^3$	, ... ,	$a_1 q^{n-1}$

یعنې په هندسي ترادف کې n – ام حد یا عمومي حد، د دغې اړیکې $a_n = a \cdot q^{n-1}$ په واسطه پیدا کېږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی مثال: د لاندې هندسي ترادف شپږم حد پيدا کړئ.

حل: $5\ ,\ -10, 20, -40,\ ....$

$$\left.\begin{array}{l} a=5 \\ q=\dfrac{-10}{5}=-2 \\ n=6 \\ a_6=? \end{array}\right\} \begin{array}{l} a_n=aq^{n-1} \\ a_6=5(-2)^{6-1} \\ a_6=5(-2)^5 \Rightarrow a_6=5(-32) \\ a_6=-160 \end{array}$$

دويم مثال: د .... , 2 , 4 , 8 هندسي ترادف دوولسم حد په لاس راوړئ.

حل:

$$\left.\begin{array}{l} n=12 \\ a=8 \\ q=\dfrac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a_n=aq^{n-1} \\ a_{12}=8(\dfrac{1}{2})^{12-1}=8(\dfrac{1}{2})^{11}=8\dfrac{1}{2^{11}} \\ a_{12}=\dfrac{8}{2^{11}}=\dfrac{2^3}{2^{11}}=2^{3-11}=2^{-8}=\dfrac{1}{2^8}=\dfrac{1}{256} \end{array}\right.$$

د هندسي ترادف وسطي حد:

که a, M, b د هندسي ترادف پر له پسې حدونه وي، د $M,\ a$ او M, b ترمنځ اړيکه پيدا کړئ.

$$\left.\begin{array}{l} q=\dfrac{M}{a} \\ q=\dfrac{b}{M} \end{array}\right\} q=q \Rightarrow \frac{M}{a}=\frac{b}{M} \Rightarrow M^2=a\cdot b$$

$$M=\sqrt{a\cdot b}$$

له پاسني فورمول څخه ويلی شو که چېرې a او b دوه مثبت حقيقي عددونه وي، نو د M حقيقي مثبت عدد ته د a او b هندسي اوسط(Geometric mean) وايي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دریم مثال: د 3 او 12 عددونو هندسي وسط پیداکړئ.

حل:

$$\left.\begin{array}{l} a=3 \\ b=12 \end{array}\right\} M=\sqrt{a\cdot b}=\sqrt{3\cdot 12}=\sqrt{36}=6$$

$$M=6$$

څلورم مثال: د 32, ? , ? , ? , 2 هندسي ترادف نا معلوم حدونه پیداکړئ.

حل:

$$\left.\begin{array}{l} a_1=2 \\ n=5 \\ a_5=32 \\ q=? \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} a_5=a\cdot q^{n-1} \quad \Rightarrow 32=2q^{5-1} \Rightarrow 32=2q^4 \\ q^4=\frac{32}{2}=16 \quad \Rightarrow q^4=16 \quad \Rightarrow q^4=2^4 \Rightarrow \boxed{q=2} \end{array}$$

$a_1=2$

$a_2=a_1\cdot q=2\cdot 2=4$

$a_3=a_2\cdot q=a_1q^2=2\cdot 2^2=8$

$a_4=a_3\cdot q=a_1\cdot q^3=2\cdot 2^3=16$

نو هندسي ترادف يې عبارت دی له: a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 یا $2,4,8,16,32$

فعالیت

- که په هندسي ترادف کې، a_n، n – ام حد، n د ترادف د حدونو شمېر او q ګډ نسبت وي، د q لپاره عمومي فورمول پیداکړئ.

لومړی مثال: x داسې وټاکئ چې له لاندې حدونو څخه يو هندسي ترادف جوړ شي.

$x-1 \;,\; x+3 \;,\; x+1$

$M=\sqrt{a\cdot b} \;\Rightarrow\; (x+3)=\sqrt{(x-1)(x+1)} \;\Rightarrow\; (x+3)^2=(x-1)(x+1)$

$x^2+6x+9=x^2-1 \Rightarrow 6x+10=0 \;,\; x=-\frac{10}{6}=-\frac{5}{3}$

$x=-\frac{5}{3}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

1- د هندسي ترادف 5 حدونه داسې وليکئ چې لومړی حد يې 5 او اخيري حد يې $\frac{5}{16}$ وي.

2- کوم يو له لاندې ترادفونو څخه هندسي ترادف دی.

$a)\ \frac{2}{3},\ -\frac{2}{3},\ \frac{2}{3},\ -\frac{2}{3},\ \ldots$

$b)\ -4, -2, 0, 2, 4,\ \ldots$

3- د $\ldots, \frac{5}{8}, \frac{5}{2}, 5$ هندسي ترادف دوولسم حد پيدا کړئ.

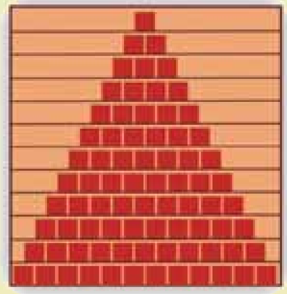
4- د $\sqrt{3}$, $\frac{\sqrt{3}}{4}$ هندسي وسط په لاس راوړي.

5- د $27, ?, ?, ?, \frac{1}{3}$ حدونو تر منځ درې هندسي وسطونه په لاس راوړئ.

د ترادفونو قسمي مجموعه

a - په لسم کتار کې د قوطيو شمېر څو دی؟

b - په الماری کې د ټولو قوطيو شمېر پيدا کړئ؟



فعاليت

- د ... $2, 4, 6, 8,$ ترادف په پام کې ونيسئ.
- د دويم او دريم حدونو د جمعې حاصل وليکئ.
- د لس لومړيو حدونو د جمعې حاصل پيدا کړئ.
- د n – ام حد د جمعې حاصل وليکئ.

له پورتني فعاليت څخه لاندې پايله بيانېږي:

څرنګه چې د لومړي n حدونو د جمعې حاصل مشکل دی چې ټول n حدونه يې وليکو، نو ځکه يې دوه يا درې لومړی حدونه ليکو او وروسته له دريو ټکو n – ام حد ليکو.

څرنګه چې يو ترادف د بې نهايت حدونو لرونکی دی، که د زياتو حدونو د جمعې حاصل، لکه: 100 , 1000 او داسې نورو حدونو په پام کې وي، نو د جمعې حاصل يې سرخوږي جوړوي.

په عمومي ډول د ترادف n لومړيو حدونو $a_1\ , a_2 , a_3\ , \ldots\ , a_n$ د جمعې حاصل په لاندې ډول ليکو:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

د اسانتيا او لنډيز لپاره په محاسبو کې د $\sum$ له سمبول څخه کار اخلي.

د $\sum$ پورتنی او ښکتنی نښې دا رابښيي چې i له 1 څخه تر n پورې ټول تام عددونه اخلي، i د انډکس په نامه يادېږي. د يوې مجموعې د انډکس لپاره هر حرف کارول کېږي، خو د i, n, k, j حروف ډېر معمول دي.

مثلاً: $\sum_{k=1}^{n} 2k = \sum_{i=1}^{n} 2i = \sum_{j=1}^{n} 2j = 2\cdot1 + 2\cdot2 + 2\cdot3 + \cdot\cdot\cdot + 2n$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی مثال: لاندې مجموع($\sum_{i=1}^{7}$) په غزيدلي شکل وليکئ.

حل: $\sum_{i=1}^{7}\frac{1}{i}=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}=\frac{1089}{420}$

دويم مثال: لاندې د جمعې حاصل د مجموعې ($\sum$) په شکل وليکئ.

$a)\ 1+3+5+7+\ \dots\ +(2n-1)$

$b)\ 1+4+9+\ \dots\ +n^2$

د a جزء حل:

$$1+3+5+7+\dots+(2n-1)=\sum_{i=1}^{n}(2i-1)$$

د b جزء حل:

$$1+4+9+\ \dots\ +n^2=\sum_{i=1}^{n}i^2$$

دريم مثال: لاندې مجموعه په پرمختللي(غزيدلي) شکل وليکئ.

$$\sum_{i=4}^{n}i(i+2)=?$$

حل:

$$\sum_{i=4}^{n}i(i+2)=4(4+2)+5(5+2)+6(6+2)+7(7+2)+\dots+n(n+2)$$
$$=4\cdot6+5\cdot7+6\cdot8+\dots+n(n+2)$$
$$=24+35+48+63+\dots+n(n+2)$$

څلورم مثال: د دغې مجموعې $\sum_{n=7}^{10}\frac{n+1}{n-1}$ حاصل په لاس راوړئ.

حل:

$$\sum_{n=7}^{10}\frac{n+1}{n-1}=\frac{7+1}{7-1}+\frac{8+1}{8-1}+\frac{9+1}{9-1}+\frac{10+1}{10-1}=\frac{8}{6}+\frac{9}{7}+\frac{10}{8}+\frac{11}{9}$$
$$=\frac{4032+3888+3780+3696}{3024}=\frac{15396}{3024}=\frac{5132}{108}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

تر اوسه مو یوازې د یوه ترادف د n حدونو د جمعې حاصل وڅېړل، که وغواړو د یوه ترادف $\{a_n\}_{n\in IN}$ د ټولو حدونو د جمعې حاصل پیدا کړو، په دې صورت کې لیکو:

$$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n+\ldots=\sum_{i=1}^{\infty}a_i$$

په دې حالت کې i ټول طبیعي عددونه اخېستلای شئ.

د $\sum_{i=1}^{\infty}a_i$ سلسله د بې نهایت سلسلې (Series) په نامه یادېږي.

د $a_1+a_2+a_3+\ldots$ عددونه د سلسلې حدونه او a_n د سلسلې $n-$ ام حد یا دسلسلې عمومي حد بلل کېږي.

څرنگه چې موږ نشو کولای، د عددونو بې نهایت شمېر جمع کړو، خویه ریاضي کې د ځینو قاعدو په کارولوسره کولای شو، یوې سلسلې ته دیوې مجموعې نسبت ورکړو، خو دلته غواړو د یوې سلسلې د n حدونو مجموعه پیدا کړو.

د یوې سلسلې د n لومړیو عناصرو مجموعه $\ldots+a_n+\ldots+a_1+a_2+a_3=\sum_{i=1}^{\infty}a_k$ د نومورې سلسلې د n حدونو د قسمي مجموعې په نامه یادېږي، که هغه په S_n وښیو، نو لرو: .

$$S_1=a_1$$
$$S_2=a_1+a_2$$
$$S_3=a_1+a_2+a_3$$
$$\vdots$$
$$S_n=a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n=\sum_{i=1}^{\infty}a_k$$

مثال: د $1+2+3+\ldots+n+\ldots$ سلسلې S_6 او S_8 حساب کړئ.

حل:

$$S_6=1+2+3+4+5+6=21$$
$$S_8=1+2+3+4+5+6+7+8=36$$

که $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ او $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ دوې سلسلې او c یو ثابت عدد وي لاندې، خاصیتونه د قسمي مجموعو لپاره سم دي:

$$\sum_{k=1}^{n} c = c + c + \ldots + c = nc$$

$$\sum_{k=1}^{n} ca_k = c\sum_{k=1}^{n} a_k$$

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$$

پوښتنې

1. لاندې مجموعې حساب کړئ.

a) $\sum_{i=1}^{6} \sqrt{i}$ b) $3\sum_{i=1}^{6} \frac{1}{i+1}$ c) $\sum_{k=1}^{3} (4k^2 - 3k)$

2. لاندې مجموعې د $\sum$ په شکل کې ولیکئ.

a) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{3}{4} + \ldots + \frac{19}{20}$

b) $1 + 4 + 9 + \ldots + n^2$

c) $1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2n-1)$

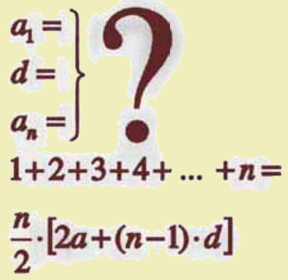
3. لاندې قسمي مجموعې په لاس راوړئ.

a) $\sum_{i=4}^{n} i(i+2)$ b) $\sum_{i=1}^{n} (3i-2)$ c) $\sum_{i=1}^{n} (2+5i)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د حسابي ترادف د n لومړيو حدونو قسمي مجموعه

که $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ يو حسابي ترادف وي، نو $a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n$ د يوې حسابي سلسلې قسمي مجموعه کيدلای شي؟



که چيرې ديوه حسابي ترادف د حدونو ترمنځ د جمعې نښه وي، هغې ته حسابي سلسله ويل کېږي. ياپه بل عبارت د يوه حسابي ترادف د جمعې حاصل ته حسابي سلسله وايي.

په يوه حسابي ترادف کې چې لومړی حد يې a ګډ فرق يې d او اخيري حد يې a_n وي، د حدونو جمعې لپاره عمومي فورمول داسې په لاس راوړو:

$$S = a+(a+d)+(a+2d)+(a+3d)+\ldots+(a_n-2d)+(a_n-d)+a_n \quad \ldots \text{ I}$$

$$S = a_n+(a_n-d)+(a_n-2d)+(a_n-3d)+\ldots+(a+2d)+(a+d)+a \quad \ldots \text{ II}$$

د I او II اړيکې خوا په خوا جمع کوو:

$$2S=\underbrace{(a+a_n)+(a+a_n)+(a+a_n)+(a+a_n)+\ldots+(a+a_n)+a+a_n}_{n \text{ خلې } n(a+a_n)}$$

$$2S=n(a+a_n) \quad \Rightarrow S=\frac{n}{2}(a+a_n)\ldots\text{I}$$

د I فورمول د حسابي سلسلې جمع راښيي چې لومړی حد، اخيري حد اود جملاتو شمېر يې معلوم وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی مثال: د حسابي سلسلې د جمعې حاصل په لاس راوړئ، داسې چې $a_n = 25, a = 4$ او د حدونو شمېر يې 8 وي.

حل:

$a = 4$

$a_n = 25 \qquad S = \frac{n}{2}(a + a_n)$

$n = 8 \qquad S = \frac{8}{2}(4 + 25) \Rightarrow S = 4(29) = 116$

که چيرې په يوه حسابي سلسله کې لومړی حد، د حدونو شمېر او ګډ توپير ورکړل شوی وي، د جمعې حاصل يې له لاندې اړيکې څخه په لاس راځي:

$$S = \frac{n}{2}(a + a_n)$$

$$a_n = a + (n-1)d$$

$$S = \frac{n}{2}[a + a + (n-1)d] \Rightarrow S = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d] \quad .... \text{III}$$

دويم مثال: د لاندې سلسلې د 201 حدونو د جمعې حاصل په لاس راوړئ:

$$7 + 11 + 15 + \ldots$$

حل:

$$\left.\begin{array}{l} a = 7 \\ d = 4 \\ n = 201 \\ S_{201} = ? \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} S = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d] \\ S_{201} = \frac{201}{2}[2 \cdot 7 + (201-1)4] \\ S_{201} = \frac{201}{2}(14 + 200 \cdot 4) \quad \Rightarrow \quad S_{201} = \frac{201}{2}(14 + 800) = \frac{201}{2} \cdot 814 \\ S_{201} = 81807 \end{array}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیت

- د طبیعي عددونو سلسله په پام کې ونیسئ لومړی حد، ګډ توپیر او n – ام حد یې ولیکئ وروسته د مسلسلو طبیعي عددونو د جمعې دحاصل عمومي فورمول په لاس راوړئ.

په یاد ولرئ: د طبیعي جفت پر له پسې عددونو د جمعې حاصل هم یوه حسابي سلسله ده چې فورمول یې په لاندې ډول په لاس راوړو: $2+4+6+8\ \ldots$

$$\left.\begin{array}{l} a=2 \\ d=2 \\ n=n \\ S_n=? \end{array}\right\} \begin{array}{l} S_n=\frac{n}{2}[2a+(n-1)d] \\ S_n=\frac{n}{2}[2\cdot 2+(n-1)2] \\ S_n=\frac{n}{2}[4+2n-2]=\frac{n}{2}(2+2n) \Rightarrow S_n=n(n+1) \end{array}$$

دریم مثال: د جفتو پر له پسې عددونو د سلسلې $(2+4+6+8+\ldots)$ د 200 حدونو د جمعې حاصل په لاس راوړئ.

حل:

$$\left.\begin{array}{l} n=200 \\ S_{200}=? \end{array}\right\} \begin{array}{l} S_n=n(n+1) \\ S_{200}=200(200+1) \Rightarrow S_{200}=200(201) \\ S_{200}=40200 \end{array}$$

فعالیت

- د طبیعي طاقو پرله پسې عددونو د حسابي سلسلې د جمعې حاصل فورمول پیدا کړئ.

او د طبیعي پرله پسې عددونو د جمعې حاصل د $S=\frac{n}{2}(n+1)$ فورمول په واسطه محاسبه کېږي(د پورته فورمولونو ثبوت د زده‌کوونکو دنده ده).

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

1. د لاندې حسابي ترادفونو لسم او n – ام حدونه پیدا او همدرانګه د نوموړو ترادفونو د لس حدونو د جمعې حاصل په لاس راوړئ.

$i)\ 2,0,-2,-4,\ \ldots$

$ii)\ 1,5,9,13,\ \ldots$

$iii)\ -2,-1,0,1,2,\ \ldots$

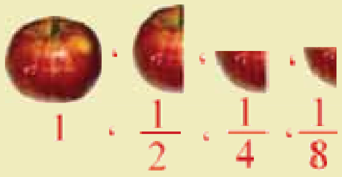
2. که یو ترادف د $\ldots\ ,2,5,8,11$ په ډول راکړل شوی وي. د لاندې مجموعو قیمتونه حساب کړئ.

$a)\ S_8$ $\qquad$ $b)\ S_{10}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د یوه هندسي ترادف د n حدونو د جمعې حاصل

که چیرې یوه مڼه نیمه او نیمه بیا نیمه او همداسې ادامه ورکړو یو هندسي ترادف په لاس راځي، له لومړۍ برخې نیولې، څو برخې سره جمع کړو چې د جمعې حاصل مساوي په 2 مڼو شي.



فعالیت

- یو هندسي ترادف چې لومړی جمله یې a_1 او د دوو پرله پسې جملو ترمنځ نسبت یې مساوي په q راکړل شوی وي، لاندې فعالیت سرته ورسوئ.
- د ترادف دویمه جمله څو ده؟
- که چیرې دویمه جمله په q کې ضرب شي، دضرب حاصل یې له دریمې جملې سره پرتله کړئ.
- د ترادف د n جملو د جمعې حاصل د فورمول پیداکولو لپاره څه وړاندیز لري؟

پایله:

په یوه هندسي ترادف کې هر راتلونکی حد د مخکیني حد له ضرب څخه په q کې، په لاس راځي. دا خبره د ټولو حدونو لپاره یوه باوري خبره ده، په دې ډول د یوه هندسي ترادف $\{a_n\}$ د n جملو د جمعې د حاصل $(S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n)$ قیمت عبارت دی، له: $q \neq 1$ ، $S_n = \dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}$

د پورتنی اړیکې ثبوت کولای شو په اسانی سره په لاس راوړو:

$$S_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + \ \ldots\ + a_1q^{n-1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ I$$

$$S_n \cdot q = a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + \ \ldots\ + a_1q^{n-1} + a_1q^n \quad \ldots\ldots\ldots \ II$$

له I اړیکې څخه د II اړیکه کموو:

$$S_n - S_n \cdot q = a_1 - a_1q^n = a_1(1-q^n)$$

$$S_n(1-q) = a_1(1-q^n)$$

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{(1-q)} \quad , \quad q \neq 1$$

پاسنی اړیکه هغه اړیکه ده، چې د هندسي ترادف د n جملو د جمعې حاصل په لاس راکوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی مثال: په یوه هندسي ترادف کې لومړی حد $a_1 = 2$ او ثابت نسبت $q = \frac{1}{2}$ دی.
د پاسني ترادف 5 لومړی متوالي حدونه او د لسو جملو د جمعې حاصل پیدا کړئ.

حل: پوهېږو چې $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ ده، نو:

$$\left.\begin{matrix} a_1 = 2 \\ q = \frac{1}{2} \\ S = ? \end{matrix}\right\} \quad \begin{matrix} a_1 = 2(\frac{1}{2})^0 = 2 \\ a_2 = 2(\frac{1}{2}) = 1 \\ a_3 = 2(\frac{1}{2})^{3-1} = 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \end{matrix} \qquad \begin{matrix} a_4 = 2(\frac{1}{2})^{4-1} \\ a_4 = 2(\frac{1}{8}) = \frac{1}{4} \\ a_5 = 2(\frac{1}{2})^4 = 2 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{8} \end{matrix}$$

$$S_n = a_1 \frac{(1-q^n)}{1-q} \Rightarrow S_{10} = 2 \cdot \frac{1-(\frac{1}{2})^{10}}{1-\frac{1}{2}} \Rightarrow S_{10} = 2\frac{1-\frac{1}{1024}}{\frac{2-1}{2}} = 2\frac{\frac{1024-1}{1024}}{\frac{1}{2}}$$

$$S_{10} = 2\frac{\frac{1023}{1024}}{\frac{1}{2}} = \frac{1023}{1024} \cdot \frac{4}{1} = \frac{4092}{1024} = 3.99609375$$

دویم مثال: د لاندې هندسي ترادف د څو جملو مجموعه 80 کېږي؟

$$2, 6, 18, \ldots$$

حل:

$$\left.\begin{matrix} a = 2 \\ q = \frac{6}{2} = 3 \\ n = ? \\ S = 80 \end{matrix}\right\} \quad \begin{matrix} S = \frac{a(q^n - 1)}{q-1} \\ 80 = \frac{2[(3)^n - 1]}{3-1} \\ 80 = (3)^n - 1 \Rightarrow 80 + 1 = (3)^n \\ 81 = 3^n \Rightarrow (3)^4 = 3^n \\ \Rightarrow n = 4 \end{matrix}$$

یعنې د پاسني هندسي ترادف د 4 جملو مجموعه 80 کېږي.

پوښتنې

1. په $\ldots, \frac{2}{9}, \frac{2}{3}, 2$ هندسي ترادف کې د 10 جملو د جمعې حاصل په لاس راوړئ.
2. د $384, \ldots, 3, 6, 12$ هندسي ترادف د حدونو شمېر او مجموعه پیدا کړئ.
3. په $\ldots, 4, 12, 36$ ترادف کې د څو جملو د جمعې حاصل 484 کېږي، د n – ام حد قیمت پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

لایتناهي هندسي سلسلې

که د ترادف جملو ته په غور پاملرنه وکړو، په اسانی لیدل کېږي چې ترادف، جمله په جمله کوچنی کېږي.
أیا هر هندسي ترادف یوه عدد ته نږدې کېږي؟

$$S_\infty = \frac{a}{1-q}\ ,\ |q|<1$$

که چیرې په یوه هندسي سلسله کې $|q| \geq 1$ او د حدونو شمېر يې معلوم نه وي، هغه د متباعدې سلسلې(Divergent series) په نامه يادېږي.

او که چیرې $|q| < 1$ وي، هغه د متقاربې سلسلې(Convergent series) په نامه يادېږي. د متقاربو او متباعدو سلسلو د جمعې حاصل د پیداکولو فورمول:

$$S = a\frac{1-q^n}{1-q} = a\frac{-(q^n-1)}{-(q-1)} = a(\frac{q^n-1}{q-1})$$

که سلسله متباعد $|q| \geq 1$ او د حدونو شمېر بې نهایت وي، یعنې $n \to \infty$ نو پوهېږو چې:

$$S_\infty = \frac{aq^\infty - a}{q-1} = \frac{aq^\infty - a}{q-1} = \frac{\infty - a}{q-1} = \infty \Rightarrow S_\infty = \infty$$

که سلسله متقارب ($|q|<1$) او د جملو شمېر بې نهایت وي، نو $q^n \to 0$ کوي.

$$S = a\cdot\frac{1-q^n}{1-q} \Rightarrow S_\infty = \frac{a-aq^n}{1-q} = \frac{a-a\cdot 0}{1-q} = \frac{a}{1-q}$$

یعنې که سلسله متقارب($|q|<1$) او د جملو شمېر يې بې نهایت وي، د نوموړې سلسلې د جمعې حاصل عبارت دی له: $S_\infty = \frac{a}{1-q}$

لومړی مثال: د $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots$ سلسلې د جمعې حاصل محاسبه کړئ.

حل: په دې سلسله کې $a=1$, $q=\frac{1}{2}$ دی، څرنګه چې $|q|=\left|\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}<1$ دی، نو سلسله متقارب ده:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots=\frac{a}{1-q}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{2}=2$$

دویم مثال: که په یوه هندسي سلسله کې $a_1=27$ او $q=\frac{1}{3}$ وي، د سلسلې دحدونو مجموعه په لاس راوړئ.

حل: پوهېږو چې $|q|=\left|\frac{1}{3}\right|=\frac{1}{3}<1$ دی، نو سلسله متقارب ده:

$$a_1+a_2+a_3+\ \ldots\ =\frac{a}{1-q}$$

$$27+9+3+1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\ldots=\frac{27}{1-\frac{1}{3}}=\frac{27}{\frac{3-1}{3}}=\frac{27}{\frac{2}{3}}$$

$$27\cdot\frac{3}{2}=\frac{81}{2}=40.5$$

دریم مثال: $0.6\overline{23}$ پیریودیک(متوالي) اعشاري کسر په عام کسر واړوئ.

حل: دا عدد کولای شو په لاندې ډول په هندسي ترادف واړوو.

$$0.6\overline{23}=0.6232323\ldots=0.6+0.023+0.00023+0.0000023+\ \ldots$$

$$=\frac{6}{10}+\frac{23}{1000}+\frac{23}{100000}+\frac{23}{10000000}+\ \ldots$$

$$=\frac{6}{10}+\frac{23}{1000}[1+\frac{1}{100}+(\frac{1}{10000})+\ \ldots\ ]$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په پاسنی سلسله کې $a=1$ او $|q|=\left|\frac{1}{100}\right|=\frac{1}{100}<1$ دی، نو سلسله متقاربه ده.

$$=\frac{6}{10}+\frac{23}{1000}[1+\frac{1}{100}+(\frac{1}{100})^2+\ldots]$$

$$=\frac{6}{10}+\frac{23}{1000}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{100}}=\frac{6}{10}+\frac{23}{1000}\cdot\frac{1}{\frac{99}{100}}$$

$$=\frac{6}{10}+\frac{23}{1000}\cdot\frac{100}{99}\Rightarrow 0.6\overline{23}=\frac{6}{10}+\frac{23}{990}=\frac{594+23}{990}=\frac{617}{990}\Rightarrow 0.6\overline{23}=\frac{617}{990}$$

څلورم مثال: د $0.\overline{3}$ متوالي اعشاري کسر د هندسي سلسلې په کارولو سره په عام کسر واړوئ.

حل: پوهېږو چې:

$$0.\overline{3}=0.3333\ldots=0.3+0.03+0.003+0.0003+\ldots$$

$$=\frac{3}{10}+\frac{3}{100}+\frac{3}{1000}+\frac{3}{10000}+\ldots$$

$$=\frac{3}{10}[1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+\ldots]$$

لیدل کېږي چې په پاسنی سلسله کې $a=1$ او $|q|=\left|\frac{1}{10}\right|=\frac{1}{10}<1$ دی، نو سلسله متقاربه ده.

$$0.\overline{3}=\frac{3}{10}\cdot\frac{a}{1-q}=\frac{3}{10}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{10}}$$

$$=\frac{3}{10}\cdot\frac{1}{\frac{10-1}{10}}=\frac{3}{10}\cdot\frac{1}{\frac{9}{10}}=\frac{3}{10}\cdot\frac{10}{9}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}\quad\Rightarrow\quad 0.\overline{3}=\frac{1}{3}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

1. لاندې هندسي مجموعې په لاس راوړئ.

$i)\ 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\ldots$, $ii)\ 5+1+\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\ldots$

2. لاندې اعشاري پيريوديک(متوالي) کسرونه په عام کسر واړوئ.

$a)\ 0.2\overline{4}$ $b)\ 0.\overline{5}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د څلورم څپرکي مهم ټکي

د ترادف تعریف: $a_1, a_2, a_3, \ \dots \ , a_n$ د عددونو د ترادف په نامه یادیږي.

پاسنی هر یوه عدد ته د ترادف حد یا جمله وایي، a_1 د ترادف لومړی حد او a_n د ترادف $n-$ام حد دی

یا په بل عبارت، ترادف له هغې تابع څخه عبارت دی چې د تعریف ناحیه یې طبیعي عددونه او د قیمتونو ناحیه یې حقیقي عددونه تشکیلوي.

حسابي ترادف: که په یوه ترادف کې د دوو پرله پسې حدونو ترمنځ ګډ توپیر یو ثابت عدد وي، نو نوموړی ترادف د حسابي ترادف په نامه یادیږي.

د حسابي ترادف وسطي حد: که درې پرله پسې حدونه a_{n+1}, a_n, a_{n-1} ولرو، نو: $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$

په حسابي ترادف کې د $n-$ام حد فورمول $a_n = a + (n-1)d$

هندسي ترادف: هغه ترادف چې د هغه د هر حد او مخکیني حد تر منځ نسبت یو ثابت عدد q وي، د هندسي ترادف په نامه یادیږي، په هندسي ترادف کې د $n-$ام حد فورمول: $a_n = aq^{n-1}$

د هندسي ترادف وسطي حد: که درې پرله پسې حدونه a_{n+1} , a_n , a_{n-1} په داسې حال کې چې $n = 2, 3, 4, \ \dots$ هندسي ترادف حدونه وي، نو د ترادف وسطي حد عبارت له: $a_n = \sqrt{(a_{n+1})(a_{n-1})}$

د ترادفونو قسمي مجموعه: $a_1 + a_2 + a_3 + \ \dots \ + a_n = \sum_{1=1}^{n} a_i$ د بې نهایت سلسلې (Series) په نامه یادیږي.

او د $\sum_{k=1}^{n} a_k = \ a_1 + a_2 + a_3 + \ \dots +$ د نوموړې $n-$ام سلسلې د جمعې قسمي حاصل دی.

د حسابي ترادف د n لومړیو حدونو قسمي حاصل جمع: $S = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$

د هندسي ترادف د n لومړیو جملو قسمي حاصل جمع: $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بې نهايت هندسي سلسلې: په يوه هندسي سلسله کې که $|q|<1$ وي، سلسله متقارب او د n جملو د جمعې حاصل يې د $\frac{a}{1-q}$ عدد ته نږدې کېږي او قيمت يې د دغه فورمول $\sum_{k=1}^{\infty} aq^{k-1} = \frac{a}{1-q}$ په واسطه محاسبه او لاسته راځي.

هغه هندسي سلسله چې په هغې کې $|q| \geq 1$ او د حدونو شمېر يې هم بې نهايت وي، سلسله متباعد او د n لومړيو جملو مجموعه يې هم بې نهايت ده، يعنې $S_n = \infty$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

د څپرکي پوښتنې

لاندې پوښتنې ولولئ، د هرې پوښتنې لپاره څلور ځوابونه ورکړل شوي دي، سم ځواب یې پیدا او له هغه څخه کرښه تاو کړئ.

1. د $2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \ldots$ ترادف n – ام حد کوم دی؟

$a)\ \frac{\sqrt{n}-1}{n}$ $b)\ \frac{\sqrt{n}+3}{n+2}$ $c)\ \frac{n}{n-1}$ $d)\ \frac{n+1}{n}$

2. که $a_n = \frac{3n-1}{2n-1}$ د ترادف n – ام حد وي، د دغه ترادف څووم حد $\frac{11}{7}$ دی؟

$a)\ 3$ $b)\ 4$ $c)\ 5$ $d)\ 6$

3. د $-9, -5, -1, 3, \ldots$ حسابي ترادف دوولسم حد عبارت دی، له:

$a)\ 35$ $b)\ 38$ $c)\ -35$ $d)\ -38$

4. د $0.1, 0.4, 0.7, 1, 1.3, \ldots$ حسابي ترادف ګډ توپیر عبارت دی، له:

$a)\ 0.3$ $b)\ 0.1$ $c)\ \frac{2}{3}$ $d)\ -\frac{2}{3}$

5. د $96, 48, 24, 12, 6, \ldots$ هندسي ترادف ګډ نسبت عبارت له:

$a)\ -\frac{1}{2}$ $b)\ \frac{1}{2}$ $c)\ \frac{2}{3}$ $d)\ -\frac{2}{3}$

6. د $5, \frac{5}{2}, \frac{5}{4}, \frac{5}{8}, \frac{5}{16}, \ldots$ هندسي ترادف لسم حد عبارت دی، له:

$a)\ \frac{3}{512}$ $b)\ \frac{5}{510}$ $c)\ -\frac{5}{512}$ $d)\ \frac{5}{512}$

7. د یوه هندسي ترادف د n جملو د جمعې حاصل فورمول عبارت دی، له:

$a)\ S_n = a\frac{1+q^n}{1-q}$ $b)\ S = a\frac{q^n-1}{q-1}$

$c)\ S = a\frac{1+q^n}{1+q}$ $d)$ هیڅ یو

8. په بې نهایت هندسي متقاربو سلسلو کې ګډ نسبت عبارت دی، له:

$a)\ q = 0$ $b)\ |q| > 1$ $c)\ |q| < 1$ $d)$ هییڅ یو

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاندې پوښتنې حل کړئ:

1. څو دوه رقمي طبيعي عددونه لرو چې د څلورو مضرب وي؟
2. د 21 او 31 ترمنځ په بېل بېل ډول درې حسابي وسطونه وليکئ. $21, \square, \square, \square, 31$
3. که ديوه حسابي ترادف د لومړی او وروستی جملې مجموعه ($a_1 + a_n = 24$) او د n لومړيو جملو مجموعه يې 3720 وي، د نوموړي ترادف د حدونو شمېر وټاکئ؟
4. د لاندې ترادف د 100 جملو د جمعې حاصل په لاس راوړئ.

$3, 5, 7, 9, 11, \ldots$

5. که د يوه هندسي ترادف دويمه جمله 6 او اوومه جمله يې 192 وي ،ګډ نسبت يې وټاکئ.
6. د يوه هندسي ترادف د 8 لومړيو جملو د جمعې قسمي حاصل 17 برابره ،د هغه د څلورو لومړيو جملو دی، د نوموړي ترادف ګډ نسبت حساب کړئ.
7. د لاندې سلسلې د جمعې قسمي حاصل په لاس راوړئ.

$0.1 + 0.01 + 0.001 + 0.0001 + \ldots$

8. د يوه ناپايه هندسي ترادف لومړی حد 9 او پنځم حد يې $\frac{1}{9}$ دی، د نوموړي ترادف د حدونو د جمعې حاصل پيدا کړئ.
9. د 3 او 96 عددونو تر منځ 4 هندسي وسطونه په بېل بېل ډول وليکئ.

$3, \square, \square, \square, \square, 96$

10. د $2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \ldots$ هندسي سلسلې د اته لومړيو حدونو د جمعې حاصل په لاس راوړئ.
11. که $a = 4$ او $d = 3$ وي، هارمونيکي ترادف د $n = 12$ لپاره په لاس راوړئ.
12. لاندې پيريوديک(متوالي) کسرونه په عامو کسرونو واړوئ.

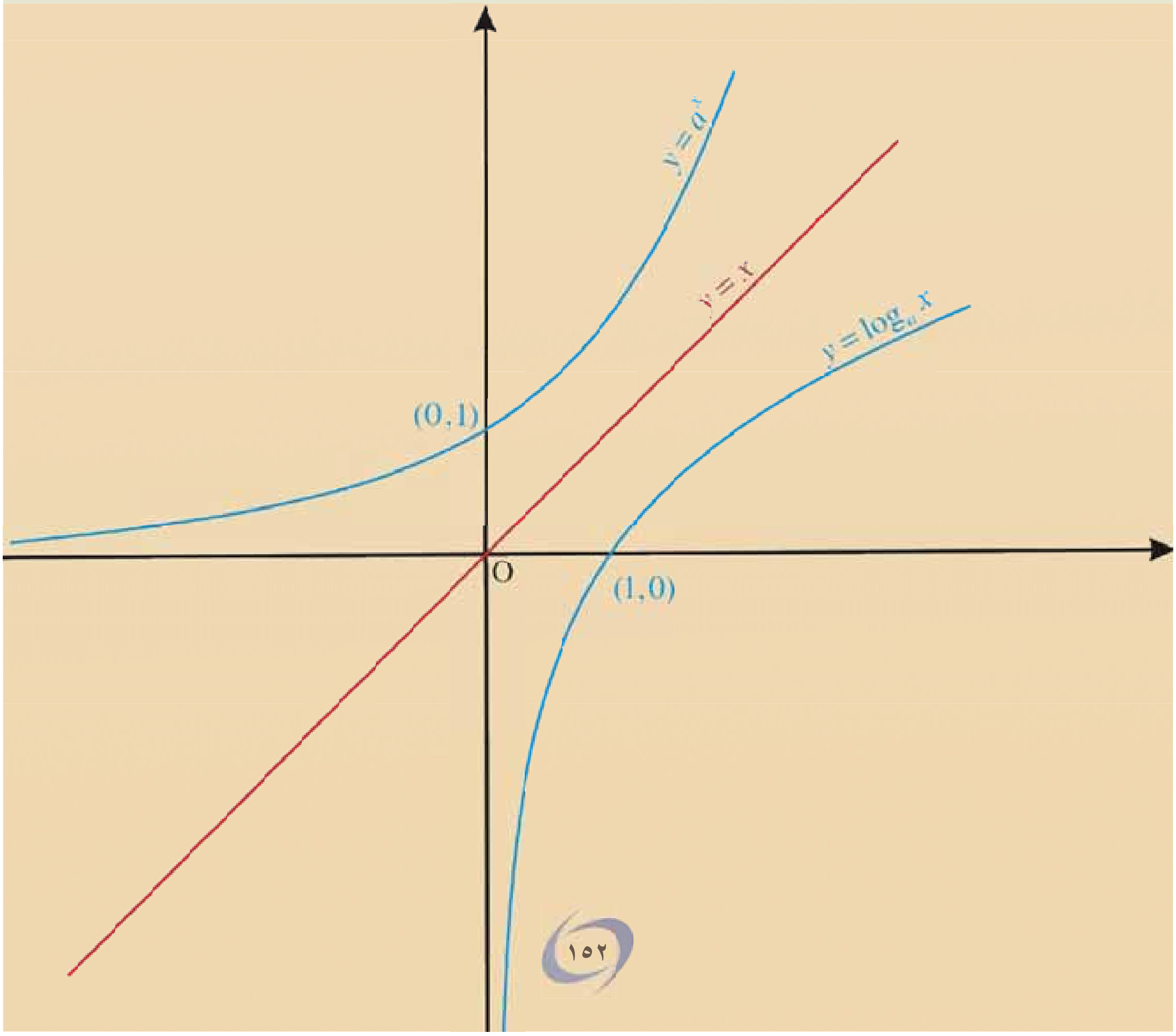
$a)\ 2.\overline{8}$ $\qquad$ $b)\ 3.\overline{57}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پنځم څپرکی

لوگاریتم

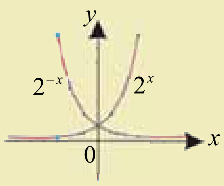
(c) ketabton.com: The Digital Library

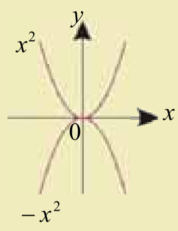


اکسپوننشیل تابع ګاني

Exponential function

پوهیږئ چې د $f(x)=x^2$ او $f(x)=-x^2$ تابع ګانو ګرافونه نظرد y محور ته یوله بل سره متناظر دي. آیا تراوسه مو د $f(x)=2^x$ او $f(x)=2^{-x}$ تابع ګانو د ګرافونو په هکله فکر کړی دی؟





تعریف

که چیرې a یو مثبت عدد او $a\neq 1$ وي، نو د $f(x)=a^x$ تابع ته د a په قاعده اکسپوننشیل تابع وایي.

$$a\in IR^+\setminus\{1\} \quad , \quad x\in IR \quad , \quad f: IR\rightarrow IR^+$$
$$f(x)=a^x$$

$f(x)=2^x$ او $f(x)=2^{-x}$ اکسپوننشیل تابع ګانې د 2 په قاعده دي.

فعالیت

- د $x\in Z$ مختلفو قیمتونو لپاره د $f(x)=2^x$ تابع ګراف رسم کړئ.
- د $f(x)=2^x$ تابع ګراف د y محور په کوم ټکي کې قطع کوي؟
- آیا د $f(x)=2^x$ تابع متزایده، متناقصه او که ثابته ده؟ ولې؟

د $f(x)=2^x$ او $f(x)=2^{-x}$ تابع ګانو ګرافونه دوضعیه کمیاتویه سیستم کې رسم او یوله بله سره یې پرتله کړئ.

- پورتنی فعالیت د $f(x)=(\frac{1}{2})^x$ تابع لپاره سرته ورسوئ.

له پورتني فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راځي.

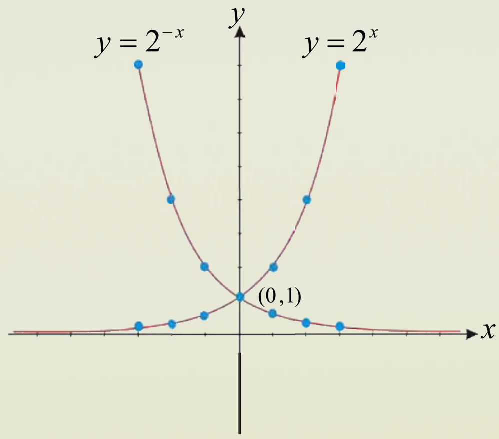
د $f(x)=2^x$ تابع قیمت د $x\in Z$ ټولو قیمتونو لپاره همیشه مثبت ده

د $y=2^x$ او $y=2^{-x}$ تابع ګانو ګرافونه نظر y محور ته متناظر دي، یعنې د $y=2^x$ تابع ګراف هر ټکی د $y=2^{-x}$ تابع ګراف له هر ټکي سره یوبه یو متناظر دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

که چیري په اکسپوننشیل تابع کې $a>1$ وي متزاید، که $a<1$ وي متناقص او که $a=1$ وي ثابته تابع ده.



د $y=2^{-x}$ تابع متزاید ده، ځکه چې $a=2>1$ دی.

د $y=2^{x}$ او $y=2^{-x}$ تابع ګانو ګرافونه رسموو.

د $y=2^{x}$ تابع ګراف

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8

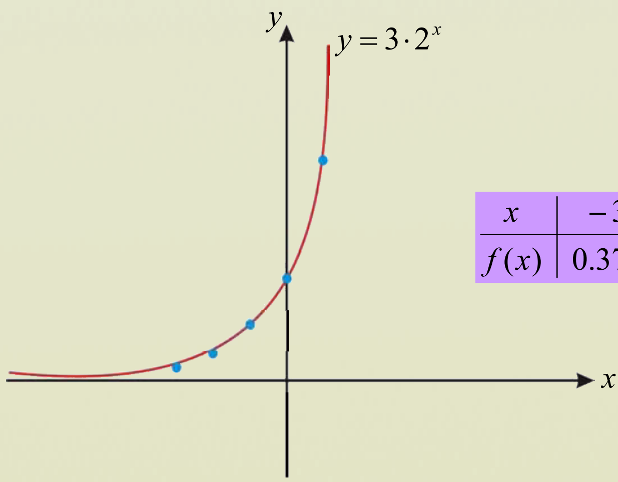
د $y=2^{-x}$ تابع ګراف

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

مثال: د $f(x)=3\cdot 2^{x}$ اکسپوننشیل تابع ګراف رسم کړئ

حل: د پایلې په پام کې نیولوسره پوهیږو چې د $f(x)=3\cdot 2^{x}$ اکسپوننشیل تابع قاعده $a=2$ ده، نو په دې اساس پورتنی اکسپوننشیل تابع متزایده ده ،ددې لپاره چې د پورتنی اکسپوننشیل تابع ګراف دقیق رسم کړو، نو د x متحول ته مختلف قیمتونه ورکوو د y قیمتونه پیدا او په یوه جدول کې یې لیکو، وروسته دغه ټکی (x او y) د قایمو مختصاتو په سیستم کې په نښه کوو.

چې له نښلولو وروسته یې ګراف رسم کېږي.



x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	0.375	0.750	1.5	3	6	12	24

(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیت

- د $f(x)=a^x$ اکسپوننشیل تابع په پام کې نیولو سره د x او y ټولو حقیقي عددونو لپاره ثبوت کړئ چې:

$$F(x+y)=f(x)\cdot f(y)$$

$$f(x-y)=\frac{f(x)}{f(y)}$$

$$f(a\cdot x)=(f(x))^a$$

د اکسپوننشیل تابع خاصیتونه: له تیرو معلوماتو څخه په‌ګټه اخیستنې سره د اکسپوننشیل تابع خواص په لاندې ډول بیانوو

1. د هرې اکسپوننشیل تابع د تعریف ناحیه ټول حقیقي عددونه او د قیمتونو ناحیه یې مثبت حقیقي عددونه دي.
2. هره اکسپوننشیل تابع یوپه یو (injective) ده یعنې د هر

$$x_1=x_2\Rightarrow f(x_1)=f(x_2)$$

$$x_1\neq x_2\Rightarrow f(x_1)\neq f(x_2)$$

4. هره اکسپوننشیل تابع د $a>1$ لپاره متزایده او د $a<1$ لپاره متناقصه ده.
5. د هرې اکسپوننشیل تابع ګراف د $(0,1)$ له ټکي څخه تیریږي.
6. د $f(x)=a^x$ او $g(x)=a^{-x}$ اکسپوننشیل تابع ګانو ګرافونه نظر y محورته متناظر پراته دي
7. هره اکسپوننشیل تابع معکوس لري چې معکوسه تابع یې $Log_a x$ دی او د $f(x)=a^x$ اکسپوننشیل تابع معکوس تابع $g(x)=a^{-x}$ دی.

پوښتنې

دلاندې اکسپوننشيل تابع ګانو ګرافونه په قايمو مختصاتوکې رسم کړئ.

$a)$ $f(x) = 2 \cdot 3^{x}$

$b)$ $f(x) = 2 \cdot 3^{-x}$

$c)$ $f(x) = (-2)^{x}$

$d)$ $f(x) = (-2)^{-x}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

لوګاریتم
Logarithm

آیا کولای شئ چې اکسپوننشیل تابع په بل ډول هم ولیکئ؟

$$y = a^x \Leftrightarrow \log_a y = x$$

فعالیت

لاندې جدول بشپړ کړئ

$y =$ درکړل شوي عددونه	0.0001	0.001	0.01	100	1000	10000
$a^x =$ طاقت لرونکي عددونه		10^{-3}				10^4
$x =$ توان	-4			2		

- د 10^{-3} طاقت لرونکی عدد قاعده او توان څو دي؟
- آیا دیوه عدد قاعده او توان د 1 عدد کیدلای شي؟
- آیا تاسو کولای شئ چې طاقت لرونکی عدد په بل ډول وښایاست؟

د پورتني جدول له بشپړولو وروسته لاندې تعریف کولای شو، بیان کړو.

تعریف: د طاقت لرونکي عدد یوې بیلې ښوونې ته لوګاریتم وایي، یا په بل عبارت د مجهول توان محاسبه د لوګاریتم په نامه یادیږي .

$$y = a^x \Leftrightarrow \log_a y = x$$

په پورتنی اړیکه کې a ته د لوګاریتم قاعده (Base) او y ته لوګاریتمي عدد وایي، د یوه طاقت لرونکی عدد توان له لوګاریتم څخه عبارت دی ،که د قاعدې په اندازه توان لوړشي، راکړل شوی عدد په لاس را کوي.

په تیر جدول کې د 10د قاعدو توانونه دراکړل شوو عددونو له لوګاریتم څخه عبارت دي.

د ساري په توګه: $\log_{10} 0.001 = \log_{10} 10^{-3} = -3$

هر مثبت عدد پرته له 1 څخه د لوګاریتم قاعده کیدای شي.

مثال: د لوګاریتم د تعریف په کارولو سره لاندې افادې په معادلو(طاقت لرونکو عددي) افادو واړوئ.

$a)\ \log_2 8 = 3$

$b)\ \log_{10} 1000 = 3$

حل:

$\log_2 8 = 3 \Leftrightarrow 8 = 2^3$

$\log_{10} 1000 = 3 \Leftrightarrow 1000 = 10^3$

پوښتنې

1. لاندې لوګاریتمي اړیکې د هغوی په اړوندو افادو واړوئ.

$a)\quad \log_{10} N = x$

$b)\quad \log_{\frac{1}{6}} 36 = -2$

$c)\quad \log_9 81 = 2$

$d)\quad \log_5 5 = 1$

2. لاندې افادې (طاقت لرونکی عددونه) د لوګاریتم په شکل ولیکی

$a)\quad 4^3 = 256$

$b)\quad 2^5 = 32$

$c)\quad 10^4 = 10000$

$d)\quad 10^{-1} = 10^y$

$e)\quad y = 2^x$

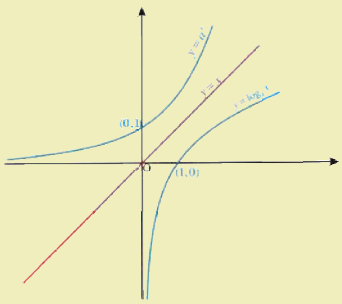
$f)\quad y = 3^x$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لوګاریتمي تابع ګانې

آیا ویلی شي چې کوم ډول تابع ګانې معکوسې تابعګانې لري؟

آیا ویلی شي هغه تابع ګانې چې معکوس لري، په قایمو مختصاتو کې نظر کوم مستقیم خط ته متناظرې دي.



تعریف: د اکسپوننشیل تابع معکوسه تابع د لوګاریتمي تابع په نامه یادیږي او هره اکسپوننشیل تابع لوګاریتمي تابع ده.

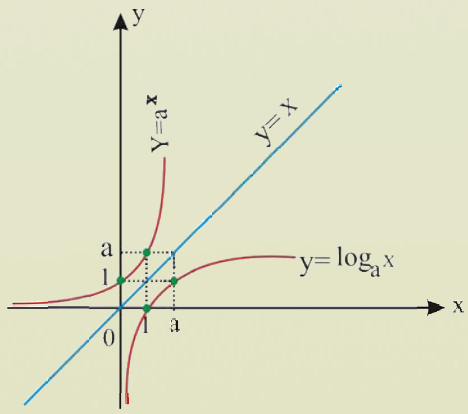
د یوې ($a \in IR^+$ او $a \neq 1$) اکسپوننشیل تابع، معکوسه تابع د a په قاعده، هغه لوګاریمي تابع ده چې د $\log_a x$ سره ښوول کیږي.

هره لوګاریتمي تابع، معکوسه تابع لري چې د $f(x) = a^x$ او $g(x) = \log_a x$ تابعګانې یو د بل معکوسې تابع-ګانې او ګرافونه یې د $y = x$ مستقیم ته متناظر دي.

$$y = a^x \Leftrightarrow \log_a y = x$$

$$f^{-1} : IR^+ \to IR, f^{-1}(x) = \log_a x, \ a \in IR^+ , \ a \neq 1$$

د $f(x) = a^x$ تابع ګراف د $x = 1$ لپاره لاندې شکل لري.



x	0		1		a		$+\infty$
$\log_a x$	$-\infty$	↗	0	↗	1	↗	$+\infty$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که چیرې $a > 1$ وي، نود $\forall x_1, x_2 \in IR$ لپاره لرو چې:

که $\log_a x_1 > \log_a x_2$ وي؛ نو $x_1 > x_2$ دی.

د $f(x) = a^x$ تابع ګراف د $x = 0$ لپاره $\log_a 1 = 0$ $a^0 = 1 \Leftrightarrow \log_a 1 = 0$

لومړی مثال: د $y = 3^x$ او $y = \log_3 x$ تابعګانو ګرافونه رسم کړئ.

حل: د $y = 3^x$ تابع په پام کې نیسو:

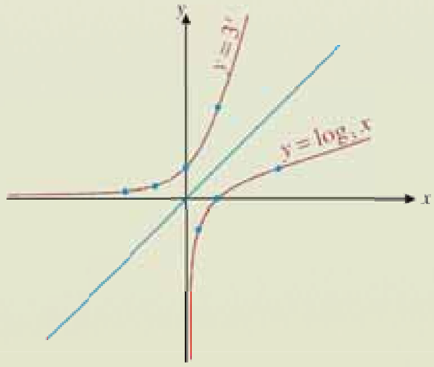
x	-2	-1	0	1	2
y	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9

اوس $y = \log_3 x$ تابع په پام کې نیسو:

$$\left.\begin{array}{l} x = 1 \\ y = \log_3 1 \end{array}\right\} (1,0) \qquad \left.\begin{array}{l} x = 3 \\ y = \log_3 3 \end{array}\right\} (3,1)$$

$$\left.\begin{array}{l} x = \frac{1}{3} \\ y = \log_3 \frac{1}{3} = y = \log_3 3^{-1} = -1 \end{array}\right\} (\frac{1}{3}, -1)$$

x	$\frac{1}{3}$	0	1	3
y	-1	1	0	1



فعالیت

د $y=2^x$ او $y = (\frac{1}{2})^x$ اکسپوننشیل تابعګانو ګراف په پام کې نیولو سره او د اکسپوننشیل تابعګانو د تعریف له مخې ددوی دا ړوندو معکوسو اکسپوننشیل تابعګانو قیمتونه د $x = 1, 2$ لپاره پیدا کړئ او نتیجه یې په عمومي ډول ولیکئ.

پایله: د هرې لوګاریتمي تابع لکه $y = \log_a x$ د یوې اختیاري قاعدې لپاره لرو.

$$\log_a 1 = 0 \ , \ \log_a a = 1 \ , \ a \in IR \ , a > 0 \ , a \neq 1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم مثال: که چیرې $f(x)=\log_3 x$ راکړل شوی وي نو $f(3)$, $f(9)$, $f(3^{-2})$, $f(1)$ په لاس راوړي.

حل: په راکړل شوي تابع کې د x پر ځای قیمتونه اېږدو.

$$f(x)=\log_3 x \Rightarrow f(3)=\log_3 3=1$$
$$f(x)=\log_3 x \Rightarrow f(9)=\log_3 9=\log_3 3^2=2\log_3 3=2\cdot 1=2$$
$$f(x)=\log_3 x \Rightarrow f(3^{-2})=\log_3 3^{-2}=-2\cdot\log_3 3=-2\cdot 1=-2$$
$$f(x)=\log_3 x \Rightarrow f(1)=\log_3 1=0$$

دریم مثال: که $\log_3 x=4$ وي، د x قیمت په لاس راوړئ.

حل: پورتنی لوګاریتم د طاقت په شکل لیکو $\log_3 x=4 \Leftrightarrow x=3^4 \Rightarrow x=81$

د تیرومعلوماتو په کارو لوسره د لوګاریتمي تابع خاصیت په لاندې ډول بیا نیرو.

د لوګاریتمي تابع خاصیتونه:

1. د لوګاریتمي تابع د قیمتونو ساحه د مثبتو عددونو ، له سټ څخه عبارت ده.
2. څرنګه چې $\log_a 1$ د هرې اختیاري قاعدې لپاره مساوي په صفر ده، نو په دې اساس لوګاریتمي تابع یوازې یو جذر $x_0=1$ لري چې په ترتیب سره د لوګاریتمي تابع ګراف په قایمو مختصاتوکې د $(1,0)$ له ټکي څخه تیریږي.
3. هره لوګاریتمي تابع یو په یو یا انجکتیف (injective) ده یعنې دهر $x_1 \neq x_2$ لپاره تـل $f(x_1)\neq f(x_2)$ دی.

د 2 په قاعده لوګاریتم:

د $f(x)=\log_2 x$ تابع قیمت د $x=16,\frac{1}{8}$ لپاره پیداکړئ.

حل: په راکړل شوی تابع کې د x پرځای قیمتونه وضع کوو چې په پایله کې د تابع قیمت په لاس راځي.

$$f(x)=\log_2 x \Rightarrow f(16)=\log_2 16=\log_2 2^4=4\cdot\log_2 2=4\cdot 1=4$$
$$f(x)=\log_2 x \Rightarrow f(\frac{1}{8})=\log_2(\frac{1}{8})=\log_2 2^{-3}=-3\log_2 2=-3\cdot 1=-3$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیت

- د $f(x)=\log_2 x$ تابع قیمت د $x=28,\sqrt{2}$ لپاره په لاس راوړئ.

پوښتنې

1. د $f(x)=\log_2 x$ تابع قیمتونه په $f(2), f(1), f(\frac{1}{32}), f(32)$ کې پیدا کړئ.
2. د $f(x)=\log_3 x$ تابع قیمتونه په $f(1)$ او $f(\frac{1}{81})$ کې په لاس راوړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

معمولي لوګاریتم *Common logarithm*

طبیعي لوګاریتم *Natural logarithm*

آیا یوازي 2 او 3 د لوګاریتم قاعدي دي او که نور عددونه هم د لوګاریتم قاعده کیدای شي ؟

$$\left.\begin{array}{l}\log_e N \\ \log_{10} 10^3\end{array}\right\} = ?$$

تعریف

ځرنګه چې ومو لیدل، هر مثبت عدد پرته له 1 څخه کیدای شي د لوګاریتم قاعده شي، خوبه عمل کې د 10 او e قاعدې معمول او په کار وړل کیږي.

1 - هغه لوګاریتم چې قاعده یې 10 وي، د معمولي لوګاریتم Common logarithm یـا اعـشاري (Briggs) لوګاریتم په نامه یادیږي چې د log په سمبول یې ښیي او په لاندې ډول ښودل کیږي.

$$f : IR^+ \longrightarrow IR\ ,\ f(x) = \log_{10} x = \log x$$

مثال: د $10^{-1}, 10^3, 10^2, 10^1$ او 10^0 عددونو لوګاریتمونه پیدا کړئ.

حل:

$$\log_{10} 10^0 x = \log 10^0 = y \Leftrightarrow 10^y = 1 \Rightarrow 10^y = 10^0 \Rightarrow y = 0$$

$$\log_{10} 10 = \log 10 = y \Leftrightarrow 10^y = 10^1 \Rightarrow y = 1$$

$$\log_{10} 10^2 = \log 10^2 = y \Leftrightarrow 10^y = 10^2 \Rightarrow y = 2$$

$$\log_{10} 10^3 = \log 10^3 = y \Leftrightarrow 10^y = 10^3 \Rightarrow y = 3$$

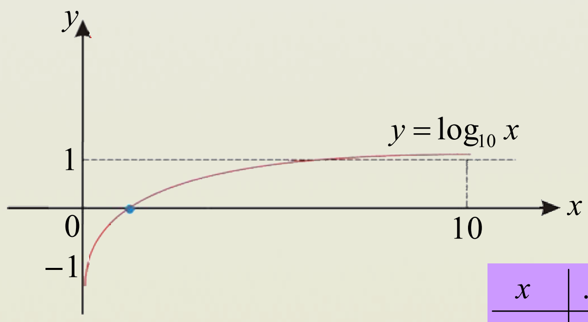
$$\log_{10} 10^{-1} = \log 10^{-1} = y \Leftrightarrow 10^y = 10^{-1} \Rightarrow y = -1$$

$$\vdots$$

$$n \in z\ ,\quad \log_{10} 10^n = \log 10^n = y \Leftrightarrow 10^y = 10^n \Rightarrow y = n$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د x د مختلفو قیمتونو له مخې یې ګراف رسموو



x	$...10^{-3}$	10^{-2}	10^{-1}	10^{0}	10^{1}	10^{2}	10^{3}
$\log x$	$...-3$	-2	-1	0	1	2	3

2 - هغه لوګاریتم چې قاعده یې e وي د طبیعي لوګاریتم(Natural logarithm) په نامه یادیږي او په ln سره ښوول کیږي، e یو ناطق عدد دی چې تقریبي قیمت یې عبارت دی له: $e = 2.718281828\cdots$ چې د $(1+\frac{1}{x})^x$ فورمول څخه هغه وخت چې x بې نهایت ته نږدې شي په لاس راځي د e قیمت پیداکول د لوړو ریاضیاتو کار دی. د e عدد د اویلر عدد په نامه یادیږي او $f(x) = e^x$ تابع د طبیعي اکسپوننشیل تابع په نوم یادیږي او داسې هم لیکي: $Exp(x) = e^x$

د $y = e^x$ تابع ګراف لکه $y = a^x$ تابع ګراف په څېر ده.

د $y = e^x$ په تابع کې x ته مختلف قیمتونه ورکوو:

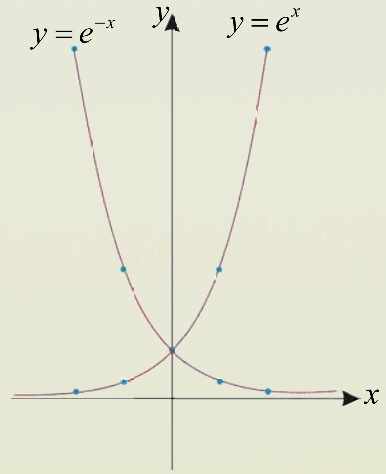
x	-2	-1	0	1	2
y	$\frac{1}{7.3}$	$\frac{1}{2.71}$	1	2.71	7.34

د $y = e^{-x}$ په تابع کې x ته بیلابیل قیمتونه ورکوو:

x	-2	-1	0	1	2
y	7.34	2.71	1	$\frac{1}{2.7}$	$\frac{1}{7.3}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پورتنيو تقريبي قيمتونو په پام کې نيولو سره د $y = e^x$ او $y = e^{-x}$ تابعګانو ګرافونه رسموو:



د طبيعي لوګاريتم مطالعه په لوړو رياضياتوکې لکه ساينس، انجنيري، تجارت او تخنيک کې زيات استعمال لري.

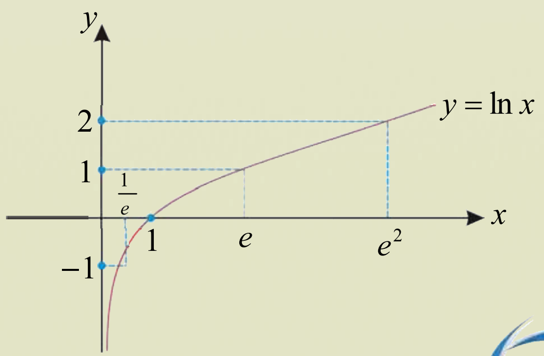
د طبيعي لوګاريتم د تابع $y = \ln x$ ګراف په لاندې ډول دی.

مثال: $\ln e^{-2}$, $\ln e^{-1}$ $\ln e^0$, $\ln e^3$, $\ln e^2$ او $\ln e^1$ پيدا کړئ.

حل: د تعريف په پام کې نيولو سره لرو چې: $y = \ln x = \log_e x$

$$\ln e^1 = y \Leftrightarrow e^y = e^1 \Rightarrow y = 1$$
$$\ln e^2 = y \Leftrightarrow e^y = e^2 \Rightarrow y = 2$$
$$\ln e^3 = y \Leftrightarrow e^y = e^3 \Rightarrow y = 3$$
$$\ln e^0 = y \Leftrightarrow e^y = e^0 \Rightarrow y = 0$$
$$\ln e^{-1} = y \Leftrightarrow e^y = e^{-1} \Rightarrow y = -1$$
$$\ln e^{-2} = y \Leftrightarrow e^y = e^{-2} \Rightarrow y = -2$$

د $y = \ln x$ تابع ګراف عبارت دی له:



(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیت

- د $y = \ln\frac{1}{e7}$ قیمت پیداکړی او د $\log 0.0001$ قیمت په لاس راوړئ.

پوښتنې

لاندې لوګاریتمونه حساب کړئ.

$a) \log_e e^8$

$b) \ln\frac{1}{e^{-3}}$

$c) \log 0.01$

$d) \log\frac{1}{10^{-2}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لوګاریتم قوانین

Low of logarithm

پوهیږي چې د عددونو طاقت خپل قوانین لري، آیا د عددونو لوګاریتم هم قوانین لري او که نه؟

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

$$\log(x \cdot y) = \log x + \log y$$

$$\log(\frac{x}{y}) = \log x - \log y$$

فعالیت

- د طاقت لرونکو عددونو د ضرب قوانین ولیکئ.
- د طاقت لرونکو عددونو د تقسیم قوانین ولیکئ.
- هر عدد د صفر او یاد یوه په توان مساوي په څودی؟

د طاقت قوانینو ته ورته لوګاریتم هم ځیني قوانین لري

لومړی قانون: د هر عدد لوګاریتم د لوګاریتم د تعریف په ساحه کې په خپله قاعده مساوي په یو دی؛ مثلاً:

$$a \in IR,\ a \neq 1, \log_a a = 1$$

ثبوت: پوهیږو چې $\forall a \in IR^+ \setminus \{1\},\ a^1 = a$ دي، نو $\log_a a = 1$

لومړی مثال: $\log_5 5 = 1 \Leftrightarrow 5^1 = 5$

دویم قانون: د 1 عدد لوګاریتم په هره اختیاري قاعده مساوي په صفر دی؛ مثلاً: $\forall a \in IR^+ \setminus \{1\}\ , a^0 = 1$ نو

$$\log_a 1 = 0$$

دویم مثال: $\log_{\sqrt{5}} 1 = 0 \Rightarrow (\sqrt{5})^0 = 1$

دریم قانون: د دوو یا څوعددونو د حاصل ضرب لوګاریتم د هغو د لوګاریتمونو له مجموع سره مساوي دی یعنې:

$$\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

ثبوت: که چیرې $x = a^p$ او $y = a^q$ ولرو

$$x = a^p \quad \ldots\ \text{I}$$

$$y = a^q \quad \ldots\ \text{II}$$

د I او II اړیکې خوا په خوا ضربوو: $I \cdot II \Rightarrow x \cdot y = a^p \cdot a^q = a^{p+q}$

د پورتنی اړیکي له دواړو خواوې لوګاریتم نیسو: $\log_a (x \cdot y) = p + q$

د p او q قیمتونو په ایښودلو سره لیکو: $\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$

لومړي مثال: د 50 عدد لوګاریتم په لاس راوړئ.

حل: $\log 50 = \log(5 \cdot 10) = \log 5 + \log 10 = \log 5 + 1$

دویم مثال: $\log_4 2 + \log_4 8 = ?$

حل:

$$\log_4 2 + \log_4 8 = \log_4 (2 \cdot 8) = \log_4 (4 \cdot 4)$$
$$= \log_4 4 + \log_4 4 = 1 + 1 = 2$$

فعالیت

- دلاندې غیر مساواتو سم والی، د مثال په واسطه وښایاست.

$$\log_a (x + y) \neq \log_a x + \log_a y$$
$$\log_a (x \cdot y) \neq \log_a x \cdot \log_a y$$

خلورم قانون:د دوو عددونو د تقسیم لوګاریتم د لوګاریتمونو له تفاضل سره مساوی دي، یعنې:

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

ثبوت:که چیرې $x = a^p$ او $y = a^q$ ولرو:

$$\left.\begin{aligned} x &= a^p \ldots\ldots\ldots\; I \\ y &= a^q \ldots\ldots\ldots\; II \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} \log_a x &= p \\ \log_a y &= q \end{aligned}$$

د I او II اړیکې خوا په خوا یو په بل ووېشو.

$$\frac{I}{II} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$$

د پورتنې اړیکې له اطراف څخه لوګاریتم نیسو: $\log_a \frac{x}{y} = p - q$

د p او q قیمتونو په ایښودلو سره لیکو: $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړي مثال: د $\log\frac{5}{2}$ محاسبه کړئ داسې چې $\log 2 = 0.3010,\ \log 5 = 0.6900$ وي.

حل: $\log\frac{5}{2} = \log 5 - \log 2 = 0.6900 - 0.3010 = 0.3980$

دویم مثال: $\log_y(10y^2x) - \log_y(2xy)$ حاصل په لاس راوړئ.

حل: څلورم قانون له ښي لوري څخه چپ لوري ته تطبیقوو.

$$\log_y(10y^2x) - \log_y(2xy) = \log_y\frac{10y^2x}{2xy}$$
$$= \log_y(5y) = \log_y y + \log_y 5$$
$$= \log_y 5 + 1$$

پنځم قانون: د یوه توان لرونکي عدد لوګاریتم مساوي دی د توان او د طاقت د قاعدې د لوګاریتم له حاصل ضرب سره یعنې که چیرې $(a^x)^n$ ولرو نو $\log_a x^n = n\log_a x$ دی.

$$\log_a x^n = \log_a(x\cdot x\cdot x\cdot\ \dots\ \cdot x)$$
$$\log_a x^n = \underbrace{\log_a x + \log_a x + \dots + \log_a x}_{\log_a x \text{ خلې } n}$$

په پایله کې $\log_a x^n = n\log_a x$

له پنځم قانون څخه په ګټې اخیستنې سره کولای شو ولیکو.

$$\log_a\sqrt[n]{x} = \log_a(x)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}\log_a x$$

لومړی مثال: $\log 625 = ?$

حل: $\log 625 = \log 5^4 = 4\log 5 = 4(0.6990) = 2.7960$

دویم مثال: دغه لوګاریتم $\log_3\sqrt[3]{9}$ پیدا کړئ؟

حل: $\log_3\sqrt[3]{9} = \log_3\sqrt[3]{3^2} = \log_3(3)^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}\log_3 3 = \frac{2}{3}\cdot 1 = \frac{2}{3}$

فعالیت

- لاندې لوګاریتمونه پیداکړئ.

$\log_3(0.12) = ?$ $\qquad \log_5\sqrt{8} = ?$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

1. لاندې ضربي افادې د جمعې د حاصل په شکل او دجمعې د حاصل افادې د حاصل ضرب په شکل ولیکئ او د امکان په صورت کې یې وروستی قیمت په لاس راوړئ.

a) $\log_4(5x^2) = ?$

b) $\log_{10}(10x^2y) = ?$

c) $\log_{10} 5 + \log_{10} 20 = ?$

d) $\log_{12} 36 + \log_{12} 4 = ?$

2. لاندې د خارج قسمت افادې په تفاضل او د تفاضل افادې په خارج قسمت واړوئ، د امکان په صورت کې وروستې ځواب په لاس راوړئ.

a) $\log_7 \dfrac{63}{49} = ?$

b) $\log \dfrac{125}{80} = ?$

c) $\log_a(x^2a) - \log_a x^2 = ?$

d) $\log_{10} 1000 - \log_{10} 100 = ?$

3. لاندې لوګاریتمونه حساب کړئ.

a) $\log_{10}(0.0001)$

b) $\log_2(8)^{-\frac{1}{3}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لوګاریتم د یوې قاعدې اړول په بله قاعده

که د یوه عدد لوګاریتم په یوه مشخصه قاعده راکړل شـوی وي، ځرنګه کولای شو، نوموړی عدد په بله قاعده واړوو.

$$\log_b m = \frac{\log_a m}{\log_a b}$$

شپږم قانون: په عین قاعده مساوي دی په د دوو عددو نو د تقسیم د حاصل لوګاریتم:

$$\frac{\log_a m}{\log_a b} = \log_b m$$

ثبوت: د $\log_b m = y$ ثبوت لپاره معادل شکل یې لیکو یعنې $m = b^y$ اوس له اطرافو څخه د a په قاعـده لوګاریتم نیسو:

$$\log_b m = \log_a b^y \Rightarrow \log_b m = y\log_a b$$

اوس د y قیمت په پورتني اړیکه کې اېږدو:

$$\log_a m = \log_b m \cdot \log_a b$$

د پورتنی اړیکې دواړه خواوې په $\log_a b$ ویشو:

$$\frac{\log_a m}{\log_a b} = \frac{\log_b m \cdot \log_a b}{\log_a b} = \log_b m \Rightarrow \frac{\log_a m}{\log_a b} = \log_b m$$

لومړی مثال: $\log_9 27$ محاسبه کړئ.

حل: له شپږم قانون څخه په کار اخیستنې سره لرو:

$$\log_9 27 = \frac{\log_3 27}{\log_3 9} = \frac{\log_3 (3)^3}{\log_3 (3)^2} = \frac{3\log_3 3}{2\log_3 3} = \frac{3\cdot 1}{2\cdot 1} = \frac{3}{2}$$

دویم مثال: $\log_3 75$ حساب کړی.

حل: بیا هم د شپږم قانون په کارولو سره لرو چې:

$$\log_3 75 = \frac{\log_5 75}{\log_5 3} = \frac{\log_5 (3\cdot 5^2)}{\log_5 3} = \frac{\log_5 3 + 2\log_5 5}{\log_5 3} = \frac{\log_5 3 + 2}{\log_5 3}$$

یادونه: د یوه عدد معکوس لوګاریتم مساوي دی، د هغه عدد له منفي لوګاریتم څخه چې هغه د کو لوګاریتم (co-logarithem) په نامه یاد یږي.

$$\log_a \frac{1}{M} = -\log_a M = co\log_a M$$

مثال: $\log_2 \frac{1}{32} = ?$

حل: $\log_2 \frac{1}{32} = \log_2 1 - \log_2 32 = \log_2 1 - \log_2 2^5 = 0 - 5\log_2 2 = -5\cdot 1 = -5$

اووم قانون: د یوه عدد معکوس لوګاریتم مساوي دی په: $\log_a M = \frac{1}{\log_M a}$

ثبوت: د ثبوت لپاره $\frac{1}{\log_M a} = x$ نیسو: $\frac{1}{\log_M a} = x \Rightarrow x\log_M a = 1 \Rightarrow \log_M a^x = 1$

د 1 عدد په ځای لیکلی شو چې $\log_M M = 1$

$$\log_M a^x = \log_M M \Rightarrow \log a^x = \log M \Rightarrow a^x = M$$

اوس د دواړو خواوو لوګاریتم نیسو یعنې $\log_a M = x$

په پورتنی اړیکه کې د x په ځای قیمت اېږدو: $\log_a M = x = \frac{1}{\log_M a}$

مثال $\log_{125}\sqrt{5} = ?$

حل: $\log_{125}\sqrt{5} = \log_{125}(5)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\log_{125} 5 = \frac{1}{2\log_5 125} = \frac{1}{2\log_5 5^3} = \frac{1}{6\log_5 5} = \frac{1}{6}$

فعالیت

لاندې لوګاریتمونه حساب کړئ.

$$\log_{64} 2 = ? \qquad \log_4 \sqrt{25^6} = ?$$

اتم قانون: دیوه عدد لوګاریتم په توان لرونکي قاعده مساوي دی په $\log_{a^n} x = \frac{1}{n}\log_a x$

ثبوت: د ثبوت لپاره $\log_a x = m$ نیسو او هغه داړوند طاقت په شکل لیکو:

$$\log_a x = m \Rightarrow x = a^m \Rightarrow x = (a^m)^{\frac{n}{n}} \Rightarrow x = (a^n)^{\frac{m}{n}}$$

د پورتنی رابطې د دواړو خواوو څخه لوګاریتم نیسو: $\log_{a^n} x = \frac{m}{n} \Rightarrow \log_{a^n} x = \frac{1}{n}\log_a x$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

اوس د m په ځای قیمت ایږدو:

$$\log_{a^n} x = \frac{1}{n}\log_a x$$

له پورتنې قانون څخه لاندې پایلې په لاس راځي

1) $\log_{a^n} x^m = \frac{m}{n}\log_a x$ 2) $\log_{\frac{1}{n}} \frac{1}{x} = \log_n x$ 3) $\log_{a^n} x^n = \log_a x$

لومړی مثال: $\log_{25} 125 = ?$

حل:

$$\log_{25} 125 = \log_{5^2} 5^3 = \frac{3}{2}\log_5 5 = \frac{3}{2}\cdot 1 = \frac{3}{2}$$

دویم مثال: $\log_{\frac{1}{\sqrt[3]{3}}} (27)^2 = ?$

حل:

$$\log_{\frac{1}{\sqrt[3]{3}}} (27)^2 = \log_{\frac{1}{(3)^{\frac{1}{3}}}} (3^3)^2 = \log_{3^{-\frac{1}{3}}} (3)^6 = \frac{6}{-\frac{1}{3}}\log_3 3 = \frac{6}{1}(\frac{3}{-1})\cdot 1 = -18$$

فعالیت

د پورتنیو خاصیتونو په کارولو سره لاندې لوگاریتمونه ساده کړئ.

a) مخامخ لوگاریتم په معکوس ډول ولیکئ. $\log_3 6 = ?$

b) $\log_8 \sqrt[3]{4} = ?$

د معمولي او طبیعي لو گاریتمونو ترمنځ اړیکه: د دغو دوو لوگاریتمونو(اعشاري او طبیعي) په پام کې نیولو سره یعنې د 10 او e عددونه د $\log_a x = \log_b x.\log_a b$ له اړیکې څخه په گټې اخیستنې چې b, a او x مثبت عددونه a او b د 1 خلاف دي:

که چیرې $a = e$ او $b = 10$ وضع شي، نو لرو چې:

$$\log_{10} x = \frac{\log_e x}{\log_e 10}$$

$$\log_e x = \log_{10} x \cdot \log_e 10$$

پوهیږو چې $\log_e x = \ln x$ دی، نو:

$$\ln x = \log_e 10 \cdot \log x$$

$$\ln x = 2.3026 \cdot \log x$$

که چیرې $b = e$ او $a = 10$ وضع شي، نو:

$$\log_e x = \frac{\log_{10} x}{\log_{10} e}$$

$$\log_{10} x = \log x = \log_e x \cdot \log_{10} e$$

$$\log x = \log_{10} e \cdot \ln x$$

څرنګه چې $\log_{10} e = 0.4343$ دی، نو لاندې اړیکه لرو:

$$\log x = 0.4343 \cdot \ln x$$

لومړی مثال: د $\ln 4.69$ قیمت په لاس راوړئ.

حل: پوهیږوچې:

$$\ln x = 2.3026 \cdot \log x$$

$$\ln 4.69 = 2.3026 \cdot \log 4.69$$

$$\ln 4.69 = 2.3026 \cdot 0.6712 = 1.5455$$

دویم مثال: د $\log 6.73$ قیمت پیداکړئ په داسې حال کې چې $\ln 6.73 = 1.9066$ وي.

حل: د تیرې اړیکې په کارولو سره لروچې:

$$\log x = 0.4343 \cdot \ln x$$

$$\log 6.73 = 0.4343 \cdot \ln 6.73$$

$$= 0.4343 \cdot 1.9066 = 0.8280$$

پوښتنې

لاندې لوګاریتمونه ساده کړئ.

a) $\log_{\frac{1}{3}} 3^{-4} = ?$ b) $\log_9 27 = ?$

c) $\log_8 4 = ?$ d) $\log_{121} 14641 = ?$

e) $\ln 672000$ f) $\ln 0.00927$

g) $\ln 672000$ h) $\ln 0.235$

(c) ketabton.com: The Digital Library

کرکټرستیک او مانتیس

Characteristic and Mantissa

پوهیږو چې:

$\log_{10} 1000 = 3 \ , \ \log_{10} 100 = 2 \ , \ \log_{10} 1 = 0$

دی. آیا دیوه عدد د ارقامو دشمیر او لوګاریتم ترمنځ کومه اړیکه شتون لري؟

$$\left.\begin{array}{l}\log 0.501\\ \log 5.01\\ \log 50.1\\ \log 501\end{array}\right\} = ?$$

تعریف

پوهیږو چې د x هر حقیقي مثبت عدد د $x = S\cdot 10^n$ په شکل لیکل کیدای شي، داسې چې $1 \le S < 10$ او n یو تام عدد وي.

که چیرې د x لوګاریتم غوښتل شوي وي، په لاندې ډول یې پیدا کولای شو.

$$\log x = \log(S\cdot 10^n) = \log S + \log 10^n = \log S + n\log 10 = \log S + n$$

د $\log S$ په هغه صورت کې چې $1 \le S < 10$ وي، S د x د لوګاریتم مانتیس یا اعشاري برخه او n چې یو تام عدد دی، د x د لوګاریتم مشخصه یا کرکټرستیک څخه عبارت دی. څرنګه چې $1 \le S < 10$ دي نو.

$$\log 1 \le \log S < \log 10$$
$$0 \le \log S < 1$$

له پورتني اړیکې څخه داپایله په لاس راځي چې دیوه عدد لوګاریتم د یو او صفر ترمنځ قرار لري.

فعالیت

- لاندې جدول بشپړ کړئ.

د عددونو توان لرونکی شکل	$20 = 10^{1.390}$	$10 = 10^1$	$7 = 10^{0.845}$	$4 = 10^{0.602}$	$1000 = 10^3$	$1 = 10^0$	$0.01 = 10^{-2}$	$0.001 = 10^{-3}$
د عددونو لوګاریتمي شکل	$\log_{10} 20$		$\log_{10} 7$			$\log_{10} 1$		$\log_{10} 0.001$
لوګاریتم		1		0.602	3		-2	-3

د هغو عددونو لوګاریتمونه چې د 0، 10، 100, 1000، 0.01 د 0.001 عددونو ترمنځ واقع دي، مساوي له څو سره دي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

- آیا هر څومره چې عدد لوی شي لوګاریتم یې هم لوئیږي؟
- له 1 څخه د کوچنیو عددونو د لوګاریتم علامه منفي ده، که مثبت؟

له پورتني فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راځي:

- که چیرې $1 \le x < 10$ سره وي، کرکټرستیک یې صفر دی.
- که چیرې $10 \le x < 100$ وي کرکټرستیک یې مساوي له 1 سره دی.
- که چیرې $100 \le x < 1000$ وي، نو کرکټرستیک یې 2 دی.

دیوه عدد په لوګاریتم کې صحیح برخه کرکټرستیک او اعشاري برخه یې مانتیس نومېږي.

هغه وخت چې عدد د عدد لیکنې په علمي طریقه ولیکل شي، د 10د عدد توان له کرکټرستیک څخه عبارت دی.

د عدد لیکنې علمي طریقه Scientific notation

کولای شو هر عدد د 10د توان په څیر ولیکو، لکه: د N عدد داسې لیکو $N = a \cdot 10^n$ چې په دې حالت کې $1 \le a < 10$ او n یو تام عدد دی

لومړی مثال: لاندې عددونه د عدد لیکنې په علمي طریقه ولیکئ.

$a)$ 2573 $b)$ 573216 $c)$ 0.0028

حل:

$a)$ $2573 = 2.373 \cdot 10^3$

$b)$ $573216 = 5.73216 \cdot 10^5$

$c)$ $0.0028 = \frac{28}{10000} = \frac{28}{10^4} = 28 \cdot 10^{-4} = 2.8 \cdot 10 \cdot 10^{-4} = 2.8 \cdot 10^{-3}$

قاعده: که چیرې دیوه عدد صحیح برخه چې د صفر خلاف وي، نود هغه عدد دلوګاریتم کرکټرستیک مساوي دی، د صحیح برخې د ارقامو په شمیر، منفي یو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم مثال: د $\log 526.9$ کرکټرستیک مساوي له څو سره دی؟

حل: د صحیح ارقامو شمیرله 3 سره برابر دی، نو کرکټرستیک یې $3-1=2$ دی.

او له یوه څخه د کوچنیو عددونو کرکټرستیک منفي علامه لري او قیمت یې د اعشاري د علامې دښي خوا د صفرونو له شمیر څخه، د یوه په اندازه زیات دی.

دریم مثال: د $\log 0.002$ کرکټرستیک مساوي په څو دی؟

حل:

$$\begin{aligned}\log 0.002 &= \log(2\cdot 10^{-3}) \\ &= \log 2 + \log 10^{-3} \\ &= \log 2 - 3\log 10 = \log 2 - 3\end{aligned}$$

نو کرکټرستیک یې -3 دی.

له تیرو دوو مثالونو څخه په کار اخیستنې سره کولای شو، د لاندې عددونو کرکټرستیک په لاس راوړو.

لوګاریتمونه		کرکټرستیک
$\log 89435$	$5-1$	4
$\log 56.784$	$2-1$	1
$\log 0.995$	$0-1$	-1
$\log 0.0789$	$-1-1$	-2

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

دلاندې لوګاریتمونو کرکټرسټیک په شفاهي ډول وواياست؟

$a)\ \log 0.9560$	$b)\ \log 956.0$
$d)\ \log 2345$	$e)\ \log 3.875$
$c)\ \log 9560$	$f)\ \log 0.0009560$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لوګاریتم جدول

څرنګه چې په تیرلوست کې مو ولوستل چې د یوه عدد لوګاریتم له دوو برخو (کرکټرستیک او مانتیس) څخه تشکیل شوی دی. د مانتیس د پیداکولو لپاره په څه ډول عمل کوئ.

$$\left.\begin{matrix}\log 0.501\\ \log 5.01\\ \log 50.1\\ \log 501\end{matrix}\right\}=?$$

د مانتیس د پیدا کولو طریقه:

پوهیږو چې هر لوګاریتمي عدد له دوو یعنې صحیح او اعشاري برخوڅخه جوړ شوی دی، څرنګه چې صحیح برخه یا مشخصه د خپل عدد د ارقامو له مخې او مانتیس یې د لوګاریتمي جدول له مخې چې مخکې ترتیب شوی، ټاکل کېږي، دغه جدول تر 7،څینې تر 5 او څینې یې تر 4 او 3 اعشاري خانو پورې ترتیب شوی چې د مانتیس د پیدا کولو لپاره ترې کار اخلي چې د اعشاري تامو عددونو د ارقامو د شمیر په پام کې نیولو سره جدولونه نومول شوی دي. لکه 7 رقمي جدولونه 5، رقمي جدولونه او داسې نور.

د یوه عدد د مانتیس د پیدا کولو لپاره د نوموړي عدد ارقام له چپ لوري څخه په پام کې نیول کېږي په دې ډول چې ښي لوری دیوه رقم په استثنا هغه د جدول په داسې ستون کې لټوو چې د ښي خواله رقم سره مطابقت ولري، نو هغه اعشاري عدد چې د سطر او ستون تقاطع وي، له مانتیس څخه عبارت دی.

مثال:

حل:

$$\log 765 = ?$$

$$\log 765 = \log(7.65\cdot 10^2)$$

$$= \log 7.65 + \log 10^2$$

$$= \log 7.65 + 2$$

کرکټرستیک ← 2، مانتیس ← $\log 7.65$

د 2 عدد د کرکټرستیک څخه عبارت دی او دمانتیس د پیداکولو لپاره یعنې $\log 7.65$ په 76 سطر او 5 - ام ستون کې ګورو چې د 8837 عدد سره مطابقت کوي یعنې د نوموړي عدد مانتیس 0.8837 دی چې په حقیقت کې د 765 عدد مانتیس دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
74										
75										
76	0.8808	0.8814	0.8820	0.8825	0.8831	0.8837	0.8842	0.8848	0.8854	0.8859
77										
78										
79										

$$\log 765 = \log 7.65 + 2 = 0.8837 + 2 = 2.8837$$

دویم مثال: $\log 70.9$ په لاس راوړی؟

حل:

$$\log 70.9 = \log(7.09 \cdot 10)$$
$$= \log 7.09 + \log 10^1$$
$$= \log 7.09 + 1$$

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	**8506**
⋮										
79										
⋮										

د 709 عدد د 9 ستون لاندې لیږو چې له 8506 عدد سره مطابقت کوي یعنې د 7.09 عدد مانتیس 0.8506 دی، په پایله کې یې لوګاریتم داسې حسابوو:

$$\log 70.9 = 0.8506 + 1 = 1.8506$$

دریم مثال: د 0.0247 لوګاریتم حاصل په لاس راوړئ.

حل:

$$\log 0.0247 = \log(2.47 \cdot 10^{-2})$$
$$= \log 2.47 + \log 10^{-2}$$
$$= \log 2.47 - 2$$

د 2.47 عدد په 24 – ام سطر او 7 – ام ستون لاندې لټوو چې له 3927 عدد سره مطابقت کوي يعنې د 2.47 عدد مانتيس عبارت دی له: 0.3927 په پايله کې د لوګاريتم حاصل داسې په لاس راوړو:

$$\log 0.0247 = \log 2.24 - 2 = 0.3927 - 2 = \bar{2}.3927$$

يادونه: څرنګه چې مانتيس هميشه مثبت دی، که کرکټرستيک منفي وي او وغواړو دواړه د يوه مثبت عدد په شکل وليکو، نو منفي علامه د کرکټرستيک له پاسه ليکو؛ مثلاً په پورتني مثال کې:

$$0.3927 - 2 = \bar{2}3927$$

فعاليت

- د لوګاريتم د جدول په پام کې نيولو سره 9280 عدد لوګاريتم حساب کړئ.

څلورم مثال: د لاندې جدول په پام کې نيولو سره د 15، 105، 900، $\frac{3}{4}$، 0.007 عددونو لوګاريتمونه پيدا کړئ.

عددونه	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
لوګاریتمونه	0.0000	0.30103	0.47712	0.60206	0.69897	0.77815	0.84570	0.90309	0.95424	1.0000

$$\log 15 = (3\cdot 5) = \log 3 + \log 5 = 0.47712 + 0.69897 = 1.17609$$

$$\log(105) = \log(5\cdot 3\cdot 7) = \log 5 + \log 3 + \log 7$$
$$= 0.69897 + 0.47712 + 0.84570$$
$$= 2.02079$$

$$\log(900) = \log(9\cdot 10^2) = \log 9 + \log 10^2$$
$$= 0.95424 + 2$$
$$= 2.95424$$

$$\log(\frac{3}{4}) = \log 3 - \log 4 = 0.47712 - 0.60206$$
$$= -0.12486$$

$$\log(0.007) = \log(7\cdot 10^{-3}) = \log 7 + \log 10^{-3} = \bar{3}.84570$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

1. دلاندې لوګاریتمونو کرکټرستیک په شفاهي ډول وواياست او مانتیس يې د جدول له مخې پیدا کړئ.

$a)$ $\log 222$ $b)$ $\log 0.921$

$c)$ $\log 928$ $d)$ $\log 527$

$e)$ $\log 0.024$ $f)$ $\log 2400$

$h)$ $\log 0.00024$ $j)$ $\log 24$

2. د لاندې لوګاریتمونو قیمتونه په لاس راوړئ.

$a)$ $\log(2.73)^3$ $b)$ $\log\sqrt[5]{0.0762}$

انتي لوګاريتم

Anti Logarithm

که چيرې د يوه عدد لوګاريتم راکړل شوي وي څرنګه کولای شو، عدد يې پيدا کړو؟

$$\log 481 = 2.6821$$
$$\log N = 1.6580$$
$$N = ?$$

تعريف: که چيرې $\log_a y = x$ وي، نو y د x د لوګاريتم انتي لوګاريتم بلل کېږي يعني $y = anti\log x$

مثلاً که چيرې $\log 34 = 1.5315$ وي، نود 1.5315 انتي لوګاريتم د 34 له عدد سره مساوي دی.

فعاليت

- که چيرې $\log N = 2.8779$ وي، نو د N عدد و ټاکئ.
- د نومورې عدد کرکټرسټيک پيدا کړئ.
- د مانتيس په جدول کې د 0.8779 عدد له کوم سطر او ستون سره مطابقت لري؟

له پورتني فعاليت څخه کولای شو لاندې پايله بيان کړو:

څرنګه چې د 2 عدد کرکټرسټيک دی، نو N يو درې رقمي عدد دی، مانتيس يې په جدول کې له 75 سطر او 5 ستون سره مطابقت لري، نود N عدد عبارت دی له: 755

لومړی مثال: $\log N = 2.9939$ د N عدد په لاس راوړئ.

حل: د نومورې لوګاريتم د مانتيس برخه يعنې 0.9939 د لوګاريتم په جدول کې پيدا کوو، ګورو چې په کوم سطر او ستون کې ځای لري. دغه د سطر او ستون عدد داسې ليکو چې د ستون عدد داړونده سطر ښي لوری ته قرار ولري چې عبارت دی له 9.86 څخه يعنې د 986 عدد مانتيس 0.9939 دی. په پورتني پوښتنه کې 2 د کرکټرسټيک په توګه راکړل شوی، نو د صحيح رقمونو شميرې 3 دی، چې مطلوب عدد عبارت دی له 986 يعنې: $N = 986$

$$\log 986 = 2.9939$$
$$anti\log 2.9939 = 986$$

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
9.5 9.6 9.7 9.8	0.9912	0.9917	0.9921	0.9926	0.9930	0.9934	0.9939 ↑	0.9943	0.9948	0.9952

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم مثال: که چیرې $\log N = 0.9791$ وي N په لاس راوړئ.

حل: دلته هم د 9791 عدد په جدول کې پیدا کوو، د سطر او ستون اړوند عددونه لکه د تیر په شان لیکو، څرنګه چې 953 مانتیس ښیي چې د مطلوب عدد 953 رقمونه دي څرنګه چې کرکټرستیک صفر دی، نو مطلوب عدد یعنې N یو صحیح رقم لري چې عبارت دی له:

$N = 9.53$

$\log 9.53 = 0.9791$

$anti\log 0.9791 = 9.53$

دریم مثال: $\log N = -3.0531$ دی، د N عدد پیدا کړئ.

په مثال کې لیدل کیږي چې کرکټرستیک او مانتیس دواړه منفي دي او په جدول کې منفي عدد وجود نه لري، ددې لپاره چې مانتیس مثبت شي، د 1 عدد له مانتیس سره جمع او له کرکټرستیک څخه یې کموو، په مساواتو کې تغیرنه راځي.

اوس کولای شو د مانتیس 0.9469 په مرسته د N عدد له جدول څخه پیدا کړو، چې عبارت دی له 886 .

کرکټرستیک ښیي چې د اعشاري د علامې او له چپې خوا څخه د لومړی 8 عدد تر منځ دري صفرونه ځای لري $N = 0.000885$ نو $anti\log -3.05531 = 0.000885$

څلورم مثال: دلاندې عددونو لوګاریتمونه محاسبه کړئ.

$a)$ 2 $b)$ 0.2 $c)$ 0.02 $d)$ 0.0002

حل:

$a)\ \log 2 = 0.3010$

$b)\ \log 0.2 = 0.3010 - 1 = \bar{1}.3010$

$c)\ \log 0.02 = 0.3010 - 2 = \bar{2}.3010$

$d)\ \log 0.0002 = 0.3010 - 4 = \bar{4}.3010$

له پورتني مثال څخه دا پایله په لاس راځي چې دیوه عدد د لوګاریتم مانتیس یوازې د رقمونو په ترتیب پورې اړه لري په پورتني مثال کې ټول عددونه یو شان مانتیس 0.3010 لري، ښي او یا چپ لوري ته د صفرونو زیاتول په مانتیس باندې کومه اغیزه نه لري.

پوښتنې

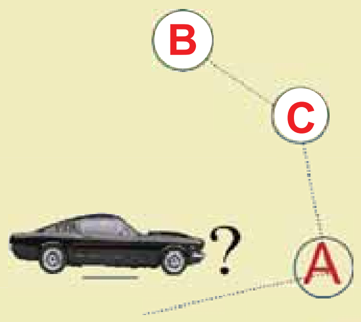
دلاندې هر یوه انتی لوګاریتم قیمت په لاس راوړئ.

$a)\ anti\log 4.9479$ $b)\ anti\log -5.0521$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

خطي انټرپولېشن
Linear Interpolation



يوګړندی موټر په متوسط سرعت په 30 دقيقو کې د A ښارته او يونيم ساعت وروسته په همدغه سرعت د B ښارته رسيږي، وواياست چې په همدې ثابت سرعت به نوموړی موټر د C ښار ته چې د A او B ښارونو تر منځ پروت دی، په څومره وخت کې ورسيږي.

فعاليت

- که چيرې $\log A = a$, $\log B = b$ راکړل شوي وي او $\log C = c$ وي، په داسې حال کې چې $A < C < B$ دی.
- $\log C$ د حقيقي عددونو په کومه فاصله کې ځای لري.
- په اټکل ووياست چې که (a,b) يوبل ته نژدې عددونه وي، نود C لوګاريتم چيرې پروت دی؟
- د a او b تر منځ قيمتونه د حسابي وسط له مخې په لاس راوړئ.

پايله: که چيرې ديوه نامعلوم قيمت د پيداکولو لپاره چې ددوو معلومو عددونو تر منځ پروت وي، د معلوموعددونو په مرسته نامعلوم عدد پيداکړو، په دې صورت کې نوموړې طريقه د خطي انټرپولېشن په نامه يادېږي.
که يو څلور رقمي عددلکه: 1.234 ولرو، نه شوکولای د هغه لوګاريتم له درې رقمي جدول څخه په لاس راوړو، نو د دې ډول عددونو لوګاريتم د خطي انټرپولېشن په واسطه پيداکولای شو.

لومړي مثال: د $\log 5.235$ قيمت په لاس راوړئ.

حل: ښکاره ده چې دنوموړي عدد لوګاريتم په جدول کې نشته، خو د 5.230 او 5.240 عددونو په منځ کې پراته دي چې لوګاريتمونه يې په جدول کې شته، او په لاندې ډول يې په لاس راوړو.

$$\log 5.230 = 0.7185$$
$$\log 5.240 = 0.7193$$

څرنګه چې $5.23 < 5.235 < 5.24$ دی، نو:

$$\log 5.230 < \log 5.235 < \log 5.240$$
$$0.7185 < \log 5.235 < 0.7193$$

که چيرې $x = \log 5.535$ په پام کې ونيسو ، نو په دې صورت کې ليکو چې: $0.7185 < x < 0.7193$

د عددونو د لوګاریتم او مانتیسو نو ترمنځ تو پیر په پام کې نیسو.

د عددونو توپیر	عددونه	لوګاریتمونه	د لوګاریتمونو توپیر
	5.240	0.7193	
0.010			0.0008
0.005	5.235	x	d
	5.230	0.7185	

د خطي انټرپولیشن په طریقه کې له دې څلورو عددونو څخه یو تناسب چې یو له بل سره متناسب دي جوړوو او نامعلوم قیمت پیدا کوو یعنې:

$$\frac{d}{0.0008}=\frac{0.005}{0.010}\Rightarrow d=\frac{0.005\cdot 0.0008}{0.010}\Rightarrow d=\frac{0.000004}{0.010}=0.0004$$

اوس د d قیمت د کوچني عددله مانتیس سره جمع کوو. چې حاصل یې د مطلوب عدد لوګاریتم دی.

$0.0004+0.7185=0.7189$

$\log 5.235=0.7189$

دویم مثال: د 0.0007957 عدد لوګاریتم پیدا کړئ.

حل: پوهېږو چې:

$$\begin{aligned}\log 0.0007957&=\log(7.957\cdot 10^{-4})\\&=\log 7.957+\log 10^{-4}\\&=\log 7.957-4\log 10\\&=\log 7.957-4\end{aligned}$$

د 7.957 عدد لوګاریتم په جدول کې نشته، لیدل کېږي چې کرکټرسټیک یې -4 دی، خو د 7.96 او 7.95 عددونو لوګاریتم په جدول کې شته.

$\log 7.960=0.9009$

$\log 7.950=0.9004$

څرنګه چې $7.950<7.957<7.960$ نو:

$\log 7.950<\log 7.957<\log 7.960$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $x = \log 7.957$ په پام کې نیولو سره، دخطي انټرپولیشن پواسطه یې لوګاریتم په لاس راوړو.

د عددونو توپیر	عددونه	لوګاریتمونه	د لوګاریتمونو توپیر
0.01	7.96	0.9009	0.0005
0.007	7.957	x	d
	7.950	0.9004	

$$\frac{d}{0.0005} = \frac{0.007}{0.01} \Rightarrow$$

$$d = 0.0005\frac{0.007}{0.01} = 0.00035 \approx 0.0004$$

اوس د d قیمت د کوچني عدد له مانتیس سره جمع کوو:

$$0.9004 + 0.0004 = 0.9008$$

په پای کې په لاس راځي چې:

$$\log 0.0007957 = 0.9008 + (-4) = \bar{4}.9008$$

دریم مثال: 4.5544 عدد انتي لوګاریتم پیدا کړئ.

حل: که چیرې $anti\log 4.5544 = x$ وضع شي، نو باید x پیداکړو، له پورتني اړیکې څخه داسې پایله په لاس راځي.

$$\log x = 4.5544 = 4 + 0.5544$$

$$\log x = \log(t \cdot 10^4) = \log t + 4$$

د 4.5544 عدد په جدول کې نشته، خو د 0.5539 او 0.5551 عددونه په جدول کې شته، انتي‌لوګاریتم یې پیداکوو، ددغه عددونو په مرسته د x قیمت د انټرپولیشن په طریقه پیداکوو، د عددونو تفاضل لکه په تیرو مثالونوکې په لاس راوړو او تناسب یې د تیرې په شان تشکیلوو.

د عددونو توپیر	عددونه	مانتیسونه	د مانتیسونو توپیر
0.01	3.59	0.5551	0.0012
d	t	0.5544	0.0005
	3.58	0.5539	

$$\frac{d}{0.01} = \frac{0.0005}{0.0012}$$

$$d = 0.01 \cdot \frac{0.0005}{0.0012} = \frac{0.000005}{0.0012} = 0.0041667$$

$$d = 0.0042$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

د t د قیمت پیداکولو لپاره د d قیمت له کوچني عدد سره جمع کوو.

$$t = 3.58 + d = 3.58 + 0.0042$$
$$= 3.5842$$
$$\log x = \log(3.5842 \cdot 10^4)$$
$$\log x = \log 35842$$

هغه وخت چې ددوو عددونو لوگاریتمونه سره مساوي وي، خپله عددونه په خپل منځ کې سره مساوي دي، نو:

$$x = 35842$$

پوښتنې

په لاندې اړیکو کې د x او z قیمتونه پیدا کړئ.

$a)$ $z = \log 0.001582$ $\qquad$ $b)$ $x = \log 6.289$

د لوګاریتمي او اکسپوننشیل معادلو حل

Exponential and logarithmic equations

آیا تر اوسه مود $5^x = 5^{\frac{1}{2}x-2}$ او $\log_2(x^2-1)=3$ معادلو د حل په اړه فکر کړی دی؟

د x په کومو قیمتونو پورتني مساوات سم دی؟

څرنګه کولای شو په دغه ډول معادلاتو کې د x مجهول قیمت وټاکو.

$$\log_2(x^2-1)=3$$

$$5^x = 5^{\frac{1}{2}x-2}$$

تعریف

هغه معادلې چې توانونه یې مجهول وي، د اکسپوننشیل معادلو په نامه یادیږي، د مجهول د پیداکولو لپاره که چیرې وکړای شو، د دواړو خواوو قاعدې سره مساوي کړو، نو د طاقت د قوانینو له مخې، چې قاعدې مساوي وي، نو توانونه یې هم یو له بل سره مساوي دي.

لومړی مثال: که $2^{x-1}=32$ وي، د x قیمت په لاس راوړئ.

حل: د مساواتو د دواړو خوا وو قاعدې سره مساوي کوو.

$$2^{x-1}=32 \Rightarrow 2^{x-1}=2^5 \Rightarrow x-1=5 \quad , \quad x=6$$

دویم مثال: د $8^{3x-1}=2^4$ اکسپوننشیل معادله حل او وازموئ.

حل:

$$8^{3x-1}=2^4$$
$$(2^3)^{3x-1}=2^{3(3x-1)}=2^4$$

څرنګه چې قاعدې یو له بل سره مساوی دي، نو توانونه یې هم مساوی دي؛ نو لیکو:

$$3(3x-1)=4$$
$$9x-3=4 \Rightarrow 9x=4+3$$
$$9x=7 \Rightarrow x=\frac{7}{9}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

آزموینه:

$$8^{3\frac{7}{9}-1} = 2^4$$

$$8^{\frac{7}{3}-1} = 2^4$$

$$8^{\frac{7-3}{3}} = 2^4 \Rightarrow 8^{\frac{4}{3}} = 2^4 \Rightarrow (2^3)^{\frac{4}{3}} = 2^4 \Rightarrow 2^4 = 2^4$$

فعالیت

- د $16^{x+1} = 64^{x-2}$ اکسپوننشیل معادله کې د x قیمت پیدا کړئ.

لوګاریتمي معادلې:

هغه لوګاریتمي افادې چې په هغوی کې متحول او یا مجهول شتون ولري، د لوګاریتمي معادلو په نامه یادیږي. له یوې لوګاریتمي معادلې څخه د مجهول قیمت پیدا کولو لپاره لومړی معادله د لوګاریتم د قوانینو له مخې ساده کوو، وروسته یې د الجبري قوانینو او یا له اکسپوننشیل معادلو څخه په کار اخیستنې سره د مجهول یا متحول قیمت په لاس راوړو.

لاندې مثالونه د لوګاریتمي معادلو بېلګې دي چې د مختلفو قوانینو له مخې د مجهول قیمت محاسبه شوی دی.

لومړی مثال: له لاندې لوګاریتمي معادلې څخه د x قیمت په لاس راوړئ.

حل:

$$\log_2(x^2-1) = 3$$

پورته لوګاریتمي شکل داسې لیکو :

$$x^2 - 1 = 2^3$$

$$x^2 = 1 + 8 = 9$$

$$x^2 = 9 \Rightarrow \sqrt{x^2} = \pm\sqrt{9} \quad , \quad x = \pm 3$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم مثال:په $\log_3(x+2) = 2\log_3 9$ لوګاریتمي معادله کې د x قیمت پیدا کړئ.

حل:

$$\log_3(x+2) = 2\log_3 9$$
$$\log_3(x+2) = \log_3 9^2$$

څرنګه چې د لوګاریتمونو قاعدې سره مساوي دي، نوعددونه هم یوله بل سره مساوي دي.

$$x+2 = 9^2 \Rightarrow x = 81-2$$
$$x = 79$$

دریم مثال: په $\log_{\sqrt{5}} x - \log_{\sqrt{5}} 3 - \log_{\sqrt{5}} 5 + \log_{\sqrt{5}} 4 = 0$ لوګاریتمي معادله کې د x قیمت په لاس راوړئ.

حل: د دوو عددونو د لوګاریتم د ضرب او وېش په کارولو سره پورتنی معادله په لاندې ډول لیکو :

$$\log_{\sqrt{5}} x = \log_{\sqrt{5}} 3 + \log_{\sqrt{5}} 5 - \log_{\sqrt{5}} 4 = \log_{\sqrt{5}} \frac{3\cdot 5}{4} = \log_{\sqrt{5}} \frac{15}{4} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{15}{4}$$

څلورم مثال: په $\log_3(3^{2x}+2) = x+1$ معادله کې د x قیمت محاسبه کړئ.

حل:

$$\log_3(3^{2x}+2) = x+1 \Rightarrow 3^{2x}+2 = 3^{x+1}$$
$$3^{2x} - 3^{x+1} + 2 = 0 \Rightarrow 3^{2x} - 3\cdot 3^x + 2 = 0$$
$$(3^x)^2 - 3\cdot 3^x + 2 = 0$$

که $3^x = t$ وضع کړو،نو:

$$t^2 - 3t + 2 = 0 \Rightarrow (t-1)(t-2) = 0$$
$$t_1 = 1 \quad , \quad t_2 = 2$$

$$3^x = t_1 = 1 \Rightarrow 3^x = 3^0 \Rightarrow x_1 = 0$$
$$3^x = t_2 = 2 \Rightarrow \log_3 2 = x \Rightarrow x_2 = \log_3 2$$

پنځم مثال:په لاندې لوګاریتمي معادله کې د x قیمت محاسبه کړئ.

$$\log(x^2+36) - 2\log(-x) = 1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل:

$$\log(x^2+36)-\log(-x)^2=1$$

$$\log\frac{x^2+36}{x^2}=\log 10 \Rightarrow \frac{x^2+36}{x^2}=10$$

$$x^2+36=10x^2 \Rightarrow 10x^2-x^2-36=0$$

$$9x^2=36 \Rightarrow x^2=4$$

$$x_{1,2}=\pm 2 \quad , \quad x_1=2 \quad , \quad x_2=-2$$

پوښتنې

په لاندې لوګاريتمي او اکسپوننشيل معادلوکې د x قيمت په لاس راوړئ.

$a)$ $(11)^{3x-1}=11$

$b)$ $7^{2x-1}=3^{x+3}$

$c)$ $\log\sqrt{x}+3=4$

$d)$ $\log_5\frac{x-1}{x-2}=2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دریاضیکی عملیوپه سرته رسولوکې له لوګاریتم څخه کار اخېستنه

آیا کولای شو د اعشاري عددونو عملیې لکه ضرب، تقسیم، توان او جذر د لوګاریتم په کارولو سره په اسانه سرته ورسوو.

$$\left.\begin{array}{l}\frac{28.8}{78.8}\\ 3.17\cdot 88.2\end{array}\right\} = ?$$

د ضرب حاصل پیدا کول د لوګاریتم په مرسته: کولای شو دوو یا څو عددونو د ضرب حاصل، د لوګاریتم د لاندې قانون له مخې پیدا کړو: $\log(M\cdot N)=\log M+\log N$

لومړی مثال: غواړو چې د $3.17\cdot 88.2$ عددونو د ضرب حاصل د لوګاریتم په مرسته پیدا کړو.

حل: د ضرب د قانون په اساس لیکلای شو:

$$\log(3.17\cdot 88.2)=\log 3.17+\log 88.2$$
$$=0.5011+1.9455=2.4466$$

لیدل کېږي چې د0.4466 مانتیس عدد په جدول کې نشته، خود 0.4456 او0.4472 مانتیسونو عددونه په جدول کې شته.

له جدول څخه لیدل کېږي چې:

$$anti\log 0.4456=2.79$$
$$anti\log 0.4472=2.80$$

	عددونه	مانتیسونه	
د عددونو توپیر 0.01	2.79	0.4456	د مانتیسونو توپیر 0.0016
d	t	0.4466	0.0006
	2.80	0.4472	

$$\frac{d}{0.01}=\frac{0.0006}{0.0016}\Rightarrow d=\frac{0.0006\cdot 0.01}{0.0016}=\frac{0.00006}{0.0016}$$
$$d=0.00375$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د d قیمت له کوچني عدد سره جمع کوو:

$$t = 2.79 + 0.00375 = 2.79375$$

$$\log x = \log(2.79375 \cdot 10^2) \Rightarrow x = 297.375$$

په داسې حال کې چې $anti\log 2.4466 = 297.375$ دی، نو: $3.17 \cdot 88.2 = 297.375$

آیا پوهیږی؟

ددوو یا څو عددونو د ضرب لپاره لومړی د لوګاریتم د جمعې حاصل پیداکوو ، وروسته یې انتي لوګاریتم په لاس راوړو چې دغه انتي لوګاریتم د نوموړو عددونو د ضرب حاصل تشکیلوي.

فعالیت

- د $74.2 \cdot 62$ د ضرب حاصل د لوګاریتم په واسطه پیداکړئ.

د خارج قسمت پیدا کول د لوګاریتم په مرسته:

کولای شو د لوګاریتم له څلورم قانون څخه په کار اخیستنې سره ، د دوو اعشاري عددونو دتقسیم حاصل په لاس راوړو یعنې: $\log\frac{M}{N} = \log M - \log N$

مثال: غواړو د $\frac{8750}{3.49}$ خارج قسمت د لوګاریتم پواسطه پیداکړو.

حل:

$$\log\frac{8750}{3.49} = \log 8750 - \log 3.49$$

د لوګاریتم له جدول څخه لروچې:

$$\log 8750 = 3.9420$$

$$\log 3.49 = 0.5428$$

$$\log 8750 - \log 3.49 = 3.9420 - 0.5428 = 3.3992$$

$$anti\log 3.3992 = 2507$$

$$\frac{8750}{3.49} = 2507$$

یادونه: ددوو عددونو د خارج قسمت د حاصل پیداکولو لپاره لومړی دمقسوم له لوګاریتم څخه د مقسوم علیه لوګاریتم کموو، وروسته ددغه تفاوت انتي لوګاریتم په لاس راوړو چی داد مطلوب خارج قسمت حاصل دی.

فعالیت

- د $\frac{374}{16.2}$ حاصل د لوګاریتم په مرسته په لاس راوړئ.

د لوګاریتم په واسطه د توان لرونکي عدد محاسبه:

د هغو توان لرونکوعددونومحاسبه چې توانونه يې تام اویاکسرونه وي، د لوګاریتم له پنځم قانون څخه کار اخلو یعني $\log M^n = n\log M$

مثال: غواړو چې د $(1.05)^6$ عدد محاسبه کړو.

حل:

$$\log(1.05)^6 = 6\log 1.05 = 6(0.0212)$$
$$= 0.1272$$

بناپردی $anti\log 0.1272 = 1.340$

په لنډ ډول ویلای شوچې: دیوه توان لرونکي عدد قیمت پیداکولو لپاره لومړی د عدد توان په لوګاریتم کې ضربوو، ددغه حاصل ضرب انتي لوګاریتم د توان لرونکي عدد قیمت دی.

فعالیت

- د $(694)^{\frac{2}{3}}$ عدد قیمت د لوګاریتم په واسطه پیداکړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

1. لاندې د ضرب حاصل د لوګاریتم په واسطه محاسبه کړئ.

$$0.097 \cdot 7.78 = ?$$

2. لاندې د تقسیم حاصل د لوګاریتم په واسطه حساب کړئ.

$a)\quad \frac{8}{737} = ?$ $\qquad b)\quad \frac{32.2}{25.1} = ?$

3. لاندې توان لرونکي عدد دلوګاریتم په واسطه محاسبه کړئ.

$$(964)^{\frac{2}{3}} = ?$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

د څپرکي مهم ټکي

اکسپوننشیل تابع: که a یو مثبت عدد او $a \neq 1$ وي، نو د $f(x) = a^x$ تابع اکسپوننشیل تابع د a په قاعده نومیږي.

د اکسپوننشیل تابع خاصیتونه:

- د اکسپوننشیل تابع د تعریف ناحیه حقیقي عددونه او دقیمتونو ناحیه یې مثبت حقیقي عددونه دي.
- د هر $x_1 \neq x_2$ لپاره $f(x_1) \neq f(x_2)$ دی.
- د اکسپوننشیل تابع گراف چې $a \neq 1$ وي، منحني یې د $(0،1)$ له ټکي څخه تیریږي.
- د اکسپوننشیل تابع گراف نظر y محور ته متناظر واقع دی.
- هره اکسپوننشیل تابع معکوس لري چې معکوس تابع یې $Log_a x$ دی.

لوگاریتمي تابع: $y = \log_a x$ چې د $y = a^x$ اکسپوننشیل تابع معکوس دی، د لوگاریتمي تابع په نامه یادیږي.

دلوگاریتمي تابع خواص

- دلوگاریتمي تابع د قیمتونو ساحه مثبت حقیقي عددونه تشکیلوي.
- د لوگاریتمي تابع گراف په قایمو مختصاتو کې د $(1،0)$ له ټکي څخه تیریږي.
- د هر $x_1 \neq x_2$ لپاره تابع $f(x_1) \neq f(x_2)$ دی.
- د قایمو مختصاتو په سیستم کې د هرې لوگاریتمې تابع $f(x) = \log_a x$ مجانب، د y محور دی.

د لوگاریتم قوانین:

- لومړی قانون $\log_a a = 1$
- دویم قانون $\log_a 1 = 0$
- دریم قانون $\log_a (x.y) = \log_a x + \log_a y$
- څلورم قانون $\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$
- پنځم قانون $\log_a x^n = n \log_a x$
- شپږم قانون $\log_a M = \dfrac{1}{\log_M a}$
- اووم قانون $\dfrac{\log_a M}{\log_a b} = \log_b M$
- اتم قانون $\log_{a^n} x = \dfrac{1}{n} \log_a x$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لوګاریتم ډولونه:

معمولي لوګاریتم هغه لوګاریتم چې قاعده يې 10 وي، معمولي لوګاریتم يا اعشاري (Brigys) لوګاریتم بلل کيږي چې د (log) په سمبول سره ښودل کيږي.

طبيعي لوګاریتم هغه لوګاریتم چې قاعده يې e وي، د طبيعي لوګاریتم پـه نامـه يـاديږي، چې طبيعي لوګاریتم د ln په سمبول ښودل کيږي يعنې $\log_e x = \ln x$

کرکټرستيک او مانتيس

کرکټرستيک که چيرې $\log x = n + \log S$ وي داسې چې $1 \le S < 10$ او n يو تام عدد دی n د مشخصې يا کرکټرستيک په نامه ياديږي چې د عدد د رقمونو له مخې ټاکل کيږي.

مانتيس: د $(\log S)$ اعشاري برخه د مانتيس په نامه ياديږي چې د جدول له مخې ټاکل کېږي، مانتيس يو مثبت عدد د صفر او يوه ترمنځ دی.

انتـي لوګـاريتم (antilogarithm): کـه $\log_a y = x$ وي، نـو y د x د لوګـاريتم انتـي لوګـاريتم دی يعنـې

$y = anti \log x$

خطي انټرپوليشن: که يو نامعلوم عدد ددوو معلومو عددونو په منځ کې واقع وي او د معلومو عددونو په مرسته نامعلوم عدد پيدا کړو، پدې صورت کې دا طريقه د خطي انټرپوليشن په نامه ياديږي.

اکسپوننشيل او لوګاريتمی معادلې

- **اکسپوننشيل معادلې** هغه معادلې چې په هغې کې د حدونو، توانونـه مجهـول وي، د اکسپوننـشيل معـادلې پـه نامـه ياديږي، د مجهول د پيدا کولو لپاره د طاقت له قوانينو څخه ګټه اخلو.
- **لوګاريتمي معادلې** هغه لوګاريتمي مساوات چې پـه هغـوی کې مجهـول موجـودوي، د لوګـاريتمي معـادلو پـه نامـه ياديږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د څپرکي پوښتنې

لاندې پوښتنې په غور ولولئ، د هرې پوښتنې لپاره څلور ځوابونه ورکړل شوي، سم ځواب يې پیدا اوله هغه څخه کړۍ تاو کړئ.

1. $\log_{\sqrt{2}}(\frac{1}{4})$ مساوي له څو سره دی؟

$a)\ 4$ $b)\ -4$ $c)\ 3$ $d)\ -3$

2. د $\log_b \sqrt[4]{81} = \frac{1}{4}$ اړیکه کې د b قیمت عبارت دی له:

$a)\ \frac{1}{4}$ $b)\ 81$ $c)\ \sqrt{81}$ $d)\ -4$

3. د $\log_3 81 - \log 0.01$ افادې قیمت په لاس راوړئ.

$a)\ 0$ $b)\ 4$ $c)\ 8$ $d)\ 9$

4. د x قیمت په $\log 81 - \log 2x = \log 3$ افاده کې مساوي له څو سره دی.

$a)\ 2$ $b)\ 3$ $c)\ 4$ $d)\ 5$

5. $\log_2 16 = ?$

$a)\ 4$ $b)\ 3$ $c)\ 5$ $d)\ -4$

6. $\log_{\frac{1}{5}} 125$

$a)\ 3$ $b)\ -3$ $c)\ 4$ $d)\ 5$

7. د $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}$ قیمت عبارت دی له :

$a)\ \frac{1}{2}$ $b)\ -\frac{1}{2}$ $c)\ 1$ $d)\ -1$

8. د x قیمت د $3^{x-1} = 9$ په معادله کې عبارت دی له :

$a)\ x=-3$ $b)\ x=9$ $c)\ x=-9$ $d)\ x=3$

9. د $\log 234.21$ مشخصه یاکرکټرستیک عبارت دی له:

$a)\ 0$ $b)\ 1$ $c)\ 2$ $d)\ 3$

10. د یوه عدد دلوګاریتم معکوس عبارت دی له:

$a)\ \log_a m = \frac{1}{\log_a m}$ $b)\ \log_a m = -\frac{1}{\log_a m}$ $c)\ \log_a m = \frac{1}{\log_m a}$ $d)$ هیڅ یو

1. په لاندې معادلوکې د x قیمت پیدا کړئ

$a)\ 3^x = 3^{3x+2}$ $b)\ 3^{2x} = 9^{4x-1}$

$c)\log_3(x+2) = 2\log_3 9$ $d)\ 16^{x+1} = 64^{x-2}b$

$e) 15^{2x-1} = 7^{x+1}$ $f)\ \log\sqrt{x+1} = 1 - \frac{1}{2}\log x$

$g)\log(4x-3) = 2 - \log 20$ $h)\ \log_5(x-1) - \log_5(x-2) = \log_5 2$

2- لاندې لوگاریتمي افادې د لوگاریتم د قوانینو په کارولو سره ساده کړئ.

$a)\log_8 3\sqrt{4} = ?$ $b)\log_3 \frac{1}{243} = ?$

$c)\log_{10}\sqrt[4]{100} = ?$ $d)\log(\frac{8}{\sqrt{128}}) = ?$ $e)\ \log_{10}\frac{\sqrt[3]{10}}{0.1} = ?$

3. لاندې لوگاریتمونه محاسبه کړئ.

$a)\quad \log_8\sqrt[3]{4} = ?$ $b)\quad \log_3\frac{1}{243} = ?$

$c)\quad \log_{10}\sqrt[4]{100} = ?$ $d)\quad \log_{10}\frac{\sqrt[3]{10}}{0.1} = ?$ $e)\quad \log\frac{8}{\sqrt{128}} = ?$

4. لاندې انتي لوگاریتمونه پیدا کړئ.

$a)\ 1.7300$ $b) 0.8954$ $c) 4.5682$ $d)\bar{2}.1987$

5. دلاندې هر عدد لوگاریتم حساب کړئ.

$a) 89500$ $b)\ 91$ $c) 3065.3$ $d)\log 0.002$

6. د لوگاریتم په مرسته لاندې حاصل ضرب پیدا کړئ.

$a)\quad 2.01\cdot 52.9$ $b)\quad (0.0062)(-34.8)$

7. د لاندې تقسیم حاصل د لوگاریتم په مرسته پیدا کړئ.

$a)\ 0.888 \div 256$ $b)\ 17.3 \div 7.47$

8. د لاندی توان لرونکو عددونو قیمتونه د لوگاریتم په مرسته پیدا کړئ.

$a)(7.42)^3$ $b)(-84.7)^2$ $c)\sqrt{418}$ $d)\sqrt{0.21}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لوګاریتم جدول چې مانتیس یې څلور اعشاري رقمونه لري

No.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.0	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374
1.1	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755
1.2	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106
1.3	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430
1.4	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732
1.5	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014
1.6	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279
1.7	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529
1.8	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765
1.9	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989
2.0	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201
2.1	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404
2.2	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598
2.3	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784
2.4	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962
2.5	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133
2.6	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298
2.7	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456
2.8	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609
2.9	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757
3.0	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900
3.1	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038
3.2	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172
3.3	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302
3.4	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428
3.5	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551
3.6	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670
3.7	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786
3.8	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899
3.9	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010
4.0	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117
4.1	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222
4.2	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325
4.3	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425
4.4	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522
4.5	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618
4.6	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712
4.7	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803
4.8	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893
4.9	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981
5.0	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067
5.1	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152
5.2	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235
5.3	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316
5.4	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396

(c) ketabton.com: The Digital Library

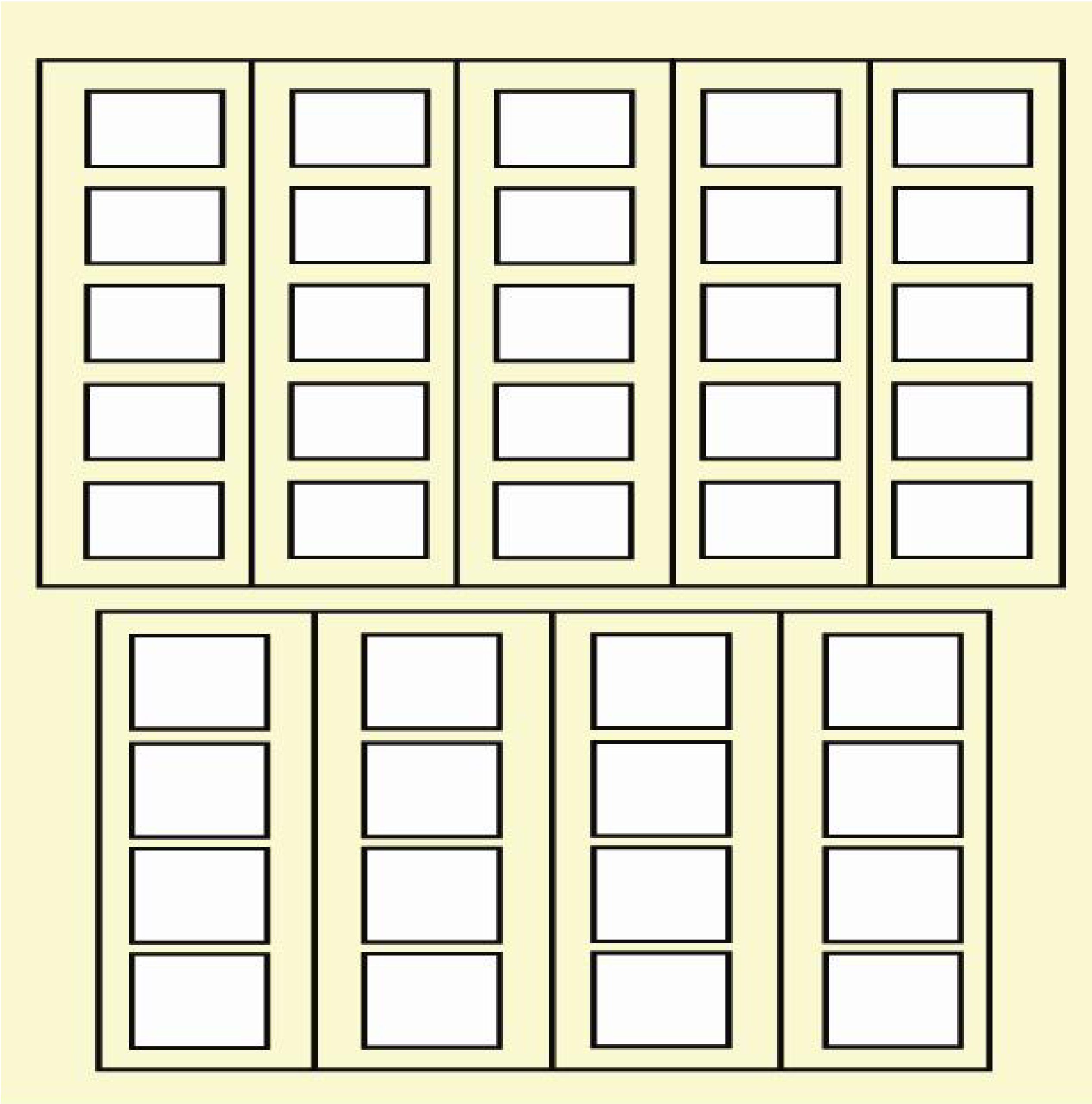
No.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5.5	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474
5.6	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551
5.7	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627
5.8	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701
5.9	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774
6.0	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846
6.1	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917
6.2	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987
6.3	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055
6.4	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122
6.5	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189
6.6	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254
6.7	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319
6.8	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382
6.9	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445
7.0	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506
7.1	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567
7.2	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627
7.3	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686
7.4	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745
7.5	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802
7.6	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859
7.7	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915
7.8	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971
7.9	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025
8.0	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079
8.1	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133
8.2	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186
8.3	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238
8.4	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289
8.5	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340
8.6	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390
8.7	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440
8.8	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489
8.9	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538
9.0	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586
9.1	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633
9.2	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680
9.3	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727
9.4	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773
9.5	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818
9.6	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863
9.7	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908
9.8	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952
9.9	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996

(c) ketabton.com: The Digital Library

شپږم څپرکی

مټریکسونه

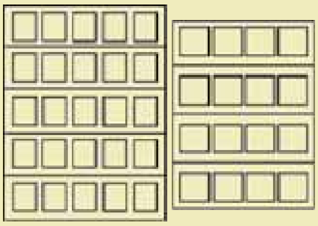
(c) ketabton.com: The Digital Library



(c) ketabton.com: The Digital Library

متریکسونه

Matrixes



د څو پوړيزې ودانۍ تصویر په پام کې نیسو، هره ودانۍ څو پوړه لري، په مخامخ شکل کې وینو چې د لویې ودانۍ د کړکیو شمېر $5 \cdot 5 = 25$ دی، د کوچنۍ ودانۍ د هر پوړ کړکۍ وشمېرئ.

فعا لیت

- د قایمو مختصاتو په سیستم کې د $M(x, y)$ ټکی وټاکئ.
- د M ټکی متناظر یعنې $M'(x', y')$ نظر x محور ته وټاکئ.
- د M او M' مختصاتو تر منځ اړیکې ولیکئ.
- پورتنۍ اړیکې د ضربیو-نو په څېر ولیکئ.
- د پورتني فعالیت ټول مراحل، د p او د هغه متناظر p'، نظر y محورته S او د هغه متناظر S' نظر د وضعیه کمیاتو مبدأ ته سرته ورسوئ.

د پورتني فعالیت له اجراء څخه وروسته لاندې پایله لیکلای شو:

$$\begin{cases} x = x' \\ -y = y' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1x + 0y = x' \\ 0x - 1y = y' \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \overset{M}{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}} = \overset{M'}{\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}}$$

په دې معنی چې د M ټکی د $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ په واسطه د M' په ټکي بدل او یا اوښتی دی.

پوهېږئ چې هر یود $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ او $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ د وضعیه کمیاتو په مستوي کې د یوه ټکي ستوني ښوونه ده.

او دغه جدول $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ یوه نوي وسیله ده چې د لومړي ځل لپاره تاسو له هغې سره مخامخ کېږئ.

په همدې ډول: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ، $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ او $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ هر يو د p', p او s', s دتړکوبدل شوي وسيله ده.

لاندې هرې يوې وسيلې ته (چې دتړکود بدلولو د بدليدو دنده په غاړه لري) متريکس وايي.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} , \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} , \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

تعريف: د شيانو، عددونو يا تورو ګېډئ چې په سطري او ستوني ډول، په يوه مستطيلي جدول کې ترتيب شي، د متريکس (Matrix) په نامه يادېږي.

د مستطيلي جدول هر عنصر د متريکس د عنصر په نامه يادېږي. لوی حروفونه د $A,B,C...$ متريکس ښيي او واړه حروفونه $a,b,c...$ د متريکس عناصر دي.

د عددونو هر يولاندی جدول يو متريکس په ګوته کوي.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -3 & 7 & 5 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

لومړی سطر، دويم سطر، دريم سطر

لومړی ستون، دويم ستون، دريم ستون

$$B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

لومړی سطر، دويم سطر، دريم سطر

$$C = \begin{pmatrix} 0 & \frac{4}{3} & 7 & -2 \end{pmatrix}$$

سطر

که چيرې a د يوه متريکس په $i-$ام سطر او $j-$ام ستون کې ځای ولري، هغه د a_{ij} په شکل ښوول کېږي چې i او j طبيعي عددونه دي، په ترتيب سره د سطر او ستون له شمېر څخه ښکارندويي کوي.

$$i = 1,2,3... \ , \ j = 1,2,3...$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \dots a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} \dots a_{mn} \end{pmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مټريکس مرتبه: که د A د مټريکس د سطرونو شمېر m او د ستونونو شمېر يې n وي، وايو چې د A مټريکس مرتبه د $m\times n$ څخه عبارت دی اوداسې ويل کېږي m په n کې مټريکس او ليکو $A=(a_{ij})_{m\times n}$ د هر مټريکس د سطرونو او ستونونو شمېر د همغه مټريکس مرتبه ښيي.

فعاليت

- د لاندې مټريکسونو مرتبه وټاکئ.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad D=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

پاملرنه وکړئ، هغه مټريکس چې يو سطر او يو ستون لري يعنې $A=(X)_{1\times 1}$، نو د A مټريکس د هغه له داخلي عدد سره مساوي دی. $A=(7)_{1\times 1}=7$

مثال: لاندې مټريکسونه د مستطيلي جدول په ډول وليکئ.

$a) \quad (a_{ij})_{2\times 2}=(i+j)_{2\times 2} \qquad\qquad b) \quad (a_{ij})_{3\times 2}=(i\cdot j)_{3\times 2}$

حل: د پورتني هر مثال د حل لپاره لومړی د مټريکس عمومي شکل ليکو، د a جزء د مټريکس عمومي شکل 2×2 کې يو مټريکس دی.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$a_{ij}=i+j$

$a_{11}=1+1=2 \ , \ a_{12}=1+2=3 \ , \ a_{21}=2+1=3 \ , \ a_{22}=2+2=4$

په پايله کې غوښتل شوی مټريکس عبارت دی له: $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

د b جزء): د b جزء د مټريکس عمومي شکل يو (3×2) کې مټريکس دی، يعنې 3 سطره او 2 ستونه لري.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

$a_{11}=1\cdot 1=1 \ , \ a_{21}=2\cdot 1=2 \ , \ a_{31}=3\cdot 1=3$

$a_{12}=1\cdot 2=2 \ , \ a_{22}=2\cdot 2=4 \ , \ a_{32}=3\cdot 2=6$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په پایله کې غوښتل شوی مټریکس عبارت دی له: $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\\ 3 & 6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{pmatrix}$

دوه، هم مرتبه مټریکسونه هغه وخت سره مساوي دي چې د هغوی هر عنصر یو په یو سره مساوي وي، مثلاً: $\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a & 2\\ b & 3\end{pmatrix}$ هغه وخت یوله بل سره مساوي دي چې $a=-1$ او $b=2$ وي، آیا $(1 \quad 2)$ او $\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}$ مټریکسونه یوله بل سره مساوي دي اوکه نه؟ ولې؟

پوښتنې

1. د لاندې مټریکسونو مرتبې ولیکئ.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ 2 & 5 & 6\\ 3 & 6 & 0\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\\ -1 & 0 & 4\end{pmatrix}$$

2. لاندې مټریکسونه د مستطیلي جدول په شکل ولیکئ.

a) $(a_{ij})_{3\times3} = (2i+3j)_{3\times3}$ b) $(a_{ij})_{2\times3} = (\frac{i}{j})_{2\times3}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د متریکسونو ډولونه

د متریکسونومخامخ شکلونه څو سطرونه اوڅوستونونه لري؟

آیاصفرونه دمتریکس عناصر کیدای شي؟

$$\begin{pmatrix}2\\3\\6\end{pmatrix} \quad (4\ \ 5\ \ 6) \quad \begin{pmatrix}0&0\\0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

1. **سطري متریکس**(Row Matrix)**:** هغه متریکس چې یوازې او یوازې یو سطر ولري، سطري متریکس یې بولي، مثلاً:

$$A=(4 \quad 5 \quad 9 \quad 0)_{1\times 4}$$

2. **ستوني متریکس** (Column Matrix)**:** هغه متریکس دی چې یوازې یو ستون ولري، د ستوني متریکس په نامه یادیږي، مثلاً:

$$A=\begin{pmatrix}5\\3\\-2\end{pmatrix}_{3\times 1}$$

3. **صفري متریکس**(Null matrix): هغه متریکس چې ټول عناصریې صفرونه وي، له صفري متریکس څخه عبارت دی او د $0_{m\times n}$ په شکل یې ښیي.

$$0_{2\times 4}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}_{2\times 4} \qquad 0_{3\times 2}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\\0&0\end{pmatrix}_{3\times 2}$$

4. **مربعي متریکس**(Square Matrix)**:** که چیرې په یوه متریکس کې د سطرونو شمېر د ستونونو له شمېرسره برابر $(m=n)$ شي، د مربعي متریکس په نامه یادیږي، مثلاً:

$$A=\begin{pmatrix}1&3&4\\5&7&9\\-1&0&2\end{pmatrix}_{3\times 3} \quad , \qquad m=n \ \Rightarrow\ 3=3$$

هر مربعي متریکس دوه قطرونه لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

هغه قطر چې عناصر يې $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ وي، اصلي قطر(Mean diagonal) او هغه قطر چې عناصر يې $a_{n1}, \dots, a_{1n}$ وي، فرعي قطر (Minor Diagonal) بلل کېږي.

اصلي قطر ـــ فرعي قطر

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

فرعي قطر ـــ اصلي قطر

فعالیت

- داسې متريکسونه وليکئ چې مرتبې يې 3×1 ، 1×4 وي، دا څه ډول متريکسونه دي؟

5. **قطري متريکس** (Diagonal Matrix)**:** هغه متريکس چې ټول عناصر يې پرته له اصلي قطر څخه صفرونه وي، د قطري متريکس په نامه يادېږي.

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}_{2\times 2} \quad ، \quad A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}_{3\times 3}$$

6. **سکالر متريکس** (Scalar Matrix)**:** هغه قطري متريکس چې د اصلي قطر عناصر يې سره مساوي وي، د سکالر متريکس په نامه يې يادوي، لکه:

$$A=\begin{pmatrix} K & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & K & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & K & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & K \end{pmatrix}_{m\times n}$$

7. **واحد متريکس** (Unite Matrix)**:** که چيرې په يو سکالر يا قطري متريکس کې د اصلي قطر ټول عناصر د (1) عدد وي، دغه ډول متريکس ته واحد متريکس وايي او په I_n سره ښوول کېږي.

$$I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad I_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad I_n=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\dots0 \\ 0 & 1 & 0\dots0 \\ 0 & 0 & 1\dots0 \\ \vdots & & \\ 0 & 0 & 0\dots1 \end{pmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیت

- یو د 3×3 مرتبې مېټریکس ولیکئ چې د اصلي قطر ښکته ټول عناصر یې صفرونه وي.
- په همدې ډول یو د 3×3 مرتبې مېټریکس ولیکئ چې د اصلي قطر پورتني عناصر یې ټول صفرونه وي.

له پورتني فعالیت څخه لاندې تعریف بیانېږي:

که چیرې په یوه مربعي مېټریکس کې د اصلي قطر پورتني او یا ښکتني ټول عناصر یې صفرونه وي، په دغه صورت کې مېټریکس د مثلثي مېټریکس (Triangular matrix) په نامه یادېږي.

که چیرې د اصلي قطر پورتني ټول عناصر صفرونه وي، د پورتني مثلثي مېټریکس (Upper triangular matrix) او که چېرې د اصلي قطر ښکتني ټول عناصر صفرونه وي، د ښکتني مثلثي مېټریکس (lower triangular matrix) په نامه یادېږي.

په لاندې مثالونو کې A یو پورتنی مثلثي مېټریکس او B ښکتنی مثلثي مېټریکس دی.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 4 & 0\\ 3 & 7 & 9\end{pmatrix}\quad , \quad B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 7 & 9\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}$$

متقابل (متضاد) مېټریکس:

که چیرې د A متقابل مېټریکس په $(-A)$ سره وښودل شي نو، دا هغه مېټریکس دی چې هر عنصر د A د متناظر عنصر متضاد دی. که چېرې $A=(a_{ij})_{m\times n}$ یو مېټریکس وي، نومتقابل(متضاد) مېټریکس یې $(-A)$ په لاندې ډول تعریفېږي:

$$A=(a_{ij})_{m\times n}\overset{\text{متقابل}}{\Rightarrow}-A=(-a_{ij})_{m\times n}$$

لکه په لاندې مثال کې:

$$A=\begin{pmatrix}2 & 4 & 5\\ -1 & 2 & 0\\ 2 & -3 & -4\end{pmatrix}\Rightarrow -A=\begin{pmatrix}-2 & -4 & -5\\ 1 & -2 & 0\\ -2 & 3 & 4\end{pmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

1. لاندې میټریکسونه په پام کې ونیسئ، مرتبې او اړوند نومونه یې وټاکئ:

a) $A=\begin{pmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ b) $B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ c) $C=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

d) $D=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ e) $E=\begin{pmatrix} 5 & -6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$ f) $F=\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$

g) $G=\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ h) $H=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مټریکسونو جمع او تفریق

Addition and subtraction of Matrix

په مخامخ مټریکسونو کې د هغوی د جمعې او تفریق په اړه د امکان په صورت کې څه ویلای شئ.

$$\left.\begin{array}{l} A+A= \\ A-A= \\ A+B= \\ A-B= \\ B+B= \\ B-B= \end{array}\right\} ?$$

1) **د مټریکسونو جمع:**

که چیرې $A=(a_{ij})_{m\times n}$ او $B=(b_{ij})_{m\times n}$ دوه مټریکسونه وي، نو $A+B=C$ عبارت له هغه مټریکس څخه دی چې د C_{ij} هر عنصر یې د a_{ij} او b_{ij} د جمعې له حاصل څخه لاس ته راغلی وي، یعنې د دوو مټریکسونو جمع کول یوازې هغه وخت امکان لري چې د دواړو مټریکسونو مرتبې سره مساوي وي. څرنګه چې C_{ij} د دوو حقیقي عددونو د جمعې حاصل دی، نو:

$$A_{m\times n}+B_{m\times n}=C_{m\times n}\Rightarrow(a_{ij})_{m\times n}+(b_{ij})_{m\times n}=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}=(C_{ij})_{m\times n}$$

مثال:

$$A=\begin{pmatrix}1&2\\-2&0\\1&7\end{pmatrix}_{3\times 2}\quad,\quad B=\begin{pmatrix}3&2\\1&2\\0&-4\end{pmatrix}_{3\times 2}$$

$$A+B=\begin{pmatrix}1&2\\-2&0\\1&7\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3&2\\1&2\\0&-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+3&2+2\\-2+1&0+2\\1+0&7+(-4)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&4\\-1&2\\1&3\end{pmatrix}=C_{3\times 2}$$

2. **د مټریکسونو تفریق:**

د جمعې عملیې ته ورته کولای شو، د دوو مټریکسونو تفاضل یا د تفریق حاصل په لاس راوړو. که $A=(a_{ij})_{m\times n}$ او $B=(b_{ij})_{m\times n}$ وي، نو د تفریق حاصل یې په لاندې ډول په لاس راوړای شو:

$$A_{m\times n}-B_{m\times n}=(a_{ij})_{m\times n}-(b_{ij})_{m\times n}=(a_{ij}-b_{ij})_{m\times n}=(c_{ij})_{m\times n}=C_{m\times n}$$

فعالیت

- که $A=\begin{pmatrix}2&-1\\3&1\end{pmatrix}$ او $B=\begin{pmatrix}-2&-1\\3&-4\end{pmatrix}$ وي، $A-B$ په لاس راوړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مېټریکسونو د جمعې او تفریق خاصیتونه:

1. د مېټریکسونو جمع کول دبدلون خاصیت لری، خو د مېټریکسونو تفریق د بدلون خاصیت نه لري، یعنې:

$A+B=B+A$

$A-B\neq B-A$

2. د مېټریکسونو جمع او تفریق اتحادی خاصیت لری. $(A\pm B)\pm C=A\pm(B\pm C)$

3. د عینیت عنصر (Identity Element) د مېټریکسونو په جمع کې صدق کوي ،خو د مېټریکسونو په تفریق کې صدق نه کوي. $A+0=0+A=A$

لومړی مثال: که $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&5&4\\6&0&1\end{pmatrix}$ او $B=\begin{pmatrix}11&1&5\\0&3&0\\2&5&6\end{pmatrix}$ راکړل شوی وي، نو $A-B$ په لاس راوړئ.

حل: څرنګه چې د دواړو مېټریکسونو مرتبه سره برابره (3×3) ده، نو کولای شو د تفریق حاصل یې په لاس راوړو.

$$A-B=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&5&4\\6&0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}11&1&5\\0&3&0\\2&5&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-11&2-1&3-5\\2&-0&5-3&4-0\\6&-2&0-5&1-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-10&1&-2\\2&2&4\\4&-5&-5\end{pmatrix}$$

فعالیت

- د یوه مثال په واسطه وښایاست چې $A-B\neq B-A$ دی.

دویم مثال: که چیرې $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\\0&6\end{pmatrix}$ او $B=\begin{pmatrix}3&1&3\\2&5&-1\end{pmatrix}$ وي، د امکان په صورت کې $A+B$ او $A-B$ په لاس راوړئ.

حل: لیدل کېږي چې د A او B مېټریکسونو مرتبې سره خلاف دی، له دې امله یې جمع او تفریق امکان نه لري، ځکه د A د مېټریکس مرتبه 3×2 او د B مېټریکس مرتبه 2×3 ده.

پوښتنې

لاندې مېټریکسونه د امکان تر حده جمع او تفریق کړئ:

a) $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&-1&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3&-1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}$

b) $A=\begin{pmatrix}2&2\\-1&-1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&2\\1&-1\end{pmatrix}$, c) $A=\begin{pmatrix}1&1\\2&0\\-1&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&3&4\\-1&0&1\end{pmatrix}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په مټریکس کې د سکالر ضرب

مورږ د مټریکسونو د جمعې او تفریق قاعده ولیدله، که $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ یو **مټریکس** او K یو سکالر وي، د هغوی د ضرب حاصل په اړه څه فکر کوئ.

$$K\cdot A=K\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{pmatrix}$$

فعالیت

- که $A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ یو **مټریکس** او k یو سکالر وي، د $K\cdot A$ حاصل په لاس راوړئ.

$$A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \quad , \quad KA=\begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

- د $B=\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ **مټریکس** په کوم عدد کې ضرب شي، تر څو یې د ضرب حاصل یو واحد مټریکس شي.

کولای شو د فعالیت له اجراء وروسته یې په لاندې ډول تعریف کړو.

تعریف: که $A=(a_{ij})_{m\times n}$ یو **مټریکس** او $K\in IR$ یو حقیقي عدد وی، نو د KA له **مټریکس** C څخه عبارت دی، داسې چې د C_{ij} هر عنصر د K د ضرب حاصل په a_{ij} کې دی.

$$C_{ij}=K(a_{ij})$$

لومړی مثال: که $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ او $K=2$ وي، د KA د ضرب حاصل پیدا کړئ.

حل:

$$KA=2\begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2\cdot 1 & 2\cdot 3 & 2\cdot 6 \\ 2\cdot 2 & 2\cdot 1 & 2\cdot 0 \\ 2\cdot 1 & 2\cdot 0 & 2(-1) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 6 & 12 \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په متریکس کې د سکالر ضرب خاصیتونه:

که چیرې A او B دواړه د یو شان مرتبې متریکسونه، α او β دوه حقیقي عددونه وي، نو:

$a)\ \alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$

$b)\ (\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$

$c)\ \alpha(\beta A)=(\alpha\beta)A=\beta(\alpha A)$

دویم مثال: که چیرې $A=\begin{pmatrix}3 & 6\\ -3 & 9\end{pmatrix}$, $\alpha=3$, $\beta=2$ راکړل شوي وي، وښایاست چې

$\alpha(\beta A)=(\alpha\beta)A=\beta(\alpha A)$

حل:

$$\alpha(\beta A)=3\left[2\begin{pmatrix}3 & 6\\ -3 & 9\end{pmatrix}\right]=3\begin{pmatrix}2\cdot3 & 2\cdot6\\ 2(-3) & 2\cdot9\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}6 & 12\\ -6 & 18\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}3\cdot6 & 3\cdot12\\ 3(-6) & 3\cdot18\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}18 & 36\\ -18 & 54\end{pmatrix}$$

$$(\alpha\beta)A=(3\cdot2)\begin{pmatrix}3 & 6\\ -3 & 9\end{pmatrix}=6\begin{pmatrix}3 & 6\\ -3 & 9\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}6\cdot3 & 6\cdot6\\ 6(-3) & 6\cdot9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}18 & 36\\ -18 & 54\end{pmatrix}$$

$$\beta(\alpha A)=2\left[3\begin{pmatrix}3 & 6\\ -3 & 9\end{pmatrix}\right]=2\begin{pmatrix}3\cdot3 & 3\cdot6\\ 3(-3) & 3\cdot9\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}9 & 18\\ -9 & 27\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}18 & 36\\ -18 & 54\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \alpha(\beta A)=(\alpha\beta)A=\beta(\alpha A)$$

پوښتنې

1. که چیرې $A=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $\alpha=2$ او $\beta=1$ راکړل شوي وي. په متریکس کې د سکالر ضرب درې خاصیتونه تطبیق کړئ؟

2. که $A=\begin{pmatrix}5 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ او $K=3$ وي، KA او $\frac{1}{K}A$ پیدا کړئ.

د دوو مېټريکسونو ضرب

Multiplication of two Matrixes

آياد دوو مېټريکسونو د ضرب لپاره کوم نظر ورکولای شئ؟
تاسو د دوو مېټريکسونو د جمعې لپاره پيداکړل چې $A+B=B+A$ دی، د مېټريکسونو د ضرب لپاره څه فکر کوئ؟

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}=?$$

تعريف

دوه مېټريکسونه د $A=(a_{ij})_{m\times n}$ او $B=(b_{ij})_{n\times p}$ په پام کې ونيسئ، د دې لپاره چې دا دواړه مېټريکسونه يو په بل کې ضرب شي، نو بايد د لومړي مېټريکس د ستونونو شمېر د دويم مېټريکس د سطرونو له شمېر سره برابر وي. د مېټريکسونو د ضرب حاصل بيا هم يو مېټريکس دی ،لکه: $C=(a_{ij})_{m\times p}$ چې د سطرونو شمېر يې د لومړي مېټريکس د سطرونو په اندازه او د ستونونو شمېر يې د دويم مېټريکس د ستونونو له شمېر سره برابر دی.

$$A_{m\times n}\cdot B_{n\times p}=C_{m\times p}$$

د دوو مېټريکسونو د ضرب لپاره په لاندې ډول کړنه کوو:

د لومړي مېټريکس لومړی سطر د دويم مېټريکس په ټولو ستونو کې په وار سره ضربوو او په همغه سطر کې يې ليکو، په دويمه مرحله کې بيا هم د لومړي مېټريکس دويم سطر د دويم مېټريکس په ټولو ستونونو کې په وار سره ضربوو او په همغه(دويم سطر) کې يې ليکو، دغه عمل ته تر هغه دوام ورکوو، ترڅو ټول سطرونه د لومړي مېټريکس په دويم مېټريکس کې ضرب شي، په دغه ډول د مېټريکسونو د ضرب حاصل محاسبه کېږي. دغه مطلب کولای شو په لاندې ډول وښيو.

$$(a_{ij})_{m\times n}\cdot(b_{ij})_{n\times p}=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}b_{ij}=(C_{ij})_{m\times p}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی مثال: که چیرې $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$ او $B=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ -1\end{pmatrix}$ راکړل شوي وي، نو $A\cdot B$ پیداکړئ.

حل: د دوو مېټريکسونو د ضرب له تعریف څخه پوهېږو:

(لومړی پراو، دویم پراو)

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\\ -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot1+2\cdot0+0\cdot(-1)\\ -1\cdot1+0\cdot0+1\cdot(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ -2\end{pmatrix}$$

دويم مثال: که چیرې $A=\begin{pmatrix}2 & 3 & -1\\ -2 & 1 & 2\end{pmatrix}$ او $B=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 0\\ -1 & 2\end{pmatrix}$ راکړل شوي وي، نو $A\cdot B$ حاصل په لاس راوړئ.

حل: بیا هم د مېټريکسونو د ضرب له تعریف څخه په کار اخيستنې لرو چې:

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}2 & 3 & -1\\ -2 & 1 & 2\end{pmatrix}_{2\times3}\cdot\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 0\\ -1 & 2\end{pmatrix}_{3\times2}$$

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}(2\ \ 3\ \ -1)\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix} & (2\ \ 3\ \ -1)\begin{pmatrix}3\\0\\2\end{pmatrix}\\ (-2\ \ 1\ \ 2)\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix} & (-2\ \ 1\ \ 2)\begin{pmatrix}3\\0\\2\end{pmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot1+3\cdot2+(-1)(-1) & 2\cdot3+3\cdot0+(-1)\cdot2\\ (-2)(1)+1\cdot2+2(-1) & -2(3)+1\cdot0+2\cdot2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2+6+1 & 6+0-2\\ -2+2-2 & -6+0+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9 & 4\\ -2 & -2\end{pmatrix}_{2\times2}$$

دريم مثال: $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 5 & 2\end{pmatrix}$ او $B=\begin{pmatrix}3 & 2 & 0\\ 6 & 1 & 7\end{pmatrix}$ وي $A\cdot B$ پیداکړئ.

حل :

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 5 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 2 & 0\\ 6 & 1 & 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot3+3\cdot6 & 1\cdot2+3\cdot1 & 1\cdot0+3\cdot7\\ 5\cdot3+2\cdot6 & 5\cdot2+2\cdot1 & 5\cdot0+2\cdot7\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}3+18 & 2+3 & 0+21\\ 15+12 & 10+2 & 0+14\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}21 & 5 & 21\\ 27 & 12 & 14\end{pmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیت

- که $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ او $B=\begin{pmatrix}4 & -2 & 0\\ 0 & 1 & -3\end{pmatrix}$ وي، د ضرب دحاصل دشتون پـه صـورت کې AB او BA پیدا او یو له بله سره یې پرتله کړئ.

څلورم مثال: که $C=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ او $D=\begin{pmatrix}-3 & 4\\ -4 & -3\end{pmatrix}$ وي، CD او DC پیدا او یو له بل سره یې پرتله کړئ.

حل:

$$CD=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3 & 4\\ -4 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2(-3)+(-1)(-4) & 2\cdot4+(-1)(-3)\\ 1(-3)+2(-4) & 1\cdot4+2(-3)\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-6+4 & 8+3\\ -3-8 & 4-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 11\\ -11 & -2\end{pmatrix}$$

$$DC=\begin{pmatrix}-3 & 4\\ -4 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\cdot2+4\cdot1 & (-3)(-1)+4\cdot2\\ -4\cdot2+1\cdot(-3) & -4(-1)+(-3)\cdot2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-6+4 & 3+8\\ -8-3 & 4-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 11\\ -11 & -2\end{pmatrix}$$

معلومېږي چې $CD=DC$ دی.

د مټریکس د ضرب خواص:

لومړی خاصیت: په عمومي ډول د دوو مټریکسونو په ضرب کې د بدلون خاصیت صدق نه کوي.

یعنې که A او B دوه مټریکسونه او AB او BA تعریف شي، نو: $AB \neq BA$

په ځانګړي حالت کې د $m\times m$ مرتبې مټریکسونه د تبدیلي خاصیت لري.

دویم خاصیت: د مټریکسونو د ضرب د ضرب اتحادي خاصیت لري. که چیرې B, A او C د $m\times n$ مرتبې مټریکسونه وي، نو $(AB)C=A(BC)$

دریم خاصیت: د مټریکسونو ضرب توزیعي خاصیت د جمعې او ضرب لپاره لري، نو لرو:

$a)$ $A(B+C)=AB+AC$

$b)$ $(A+B)C=AC+BC$

$c)$ $K(AB)=(KA)B=A(KB)\quad,\quad K\in IR$

$d)$ $IA=AI=A$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

د لاندې مېټريکسونو د ضرب حاصل په لاس راوړئ.

$a)\ \begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=?$

$b)\ \begin{pmatrix}-2 & 3\\ -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\ 4\end{pmatrix}=?$

$c)\ \begin{pmatrix}3 & -2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$

$d)\ \begin{pmatrix}2 & 3\\ 4 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3\\ 2\end{pmatrix}=?$

د یوه مټریکس ترانسپوز مټریکس

Transpose of Matrix

که په یو مټریکس کې سطرونه په ستونونو او ستونونه په سطرونو بدل شي نوي مټریکس چې په لاس راځي په څه نوم یادېږي.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -1 & 4\end{pmatrix}$$

$$A^T=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\\ 3 & 4\end{pmatrix}$$

فعالیت

- د $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 2 & 3 & 1\\ -1 & 0 & -2\end{pmatrix}$ مټریکس په پام کې ونیسئ، سطرونه ستونونوته او ستونونه سطرونو ته ولېږدوی، هغه نوی مټریکس چې په لاس راځي ویې لیکئ.
- که چیرې د یوه مټریکس د سطرونو او ستونونو ځایونه یوله بل سره بدل کړو(افقي لیکې په عمودي او عمودي په افقي واړوو)، هغه نوی مټریکس چې لاس ته راځي، آیا له لومړی مټریکس سره مساوي دي، نوی مټریکس په څه نوم یادېږي؟

له پورتني فعالیت څخه لاندې تعریف په لاس راځي.

تعریف: که چیرې د یوه مټریکس چې مرتبه یې $(m\times n)$ وي، سطر په ستون او ستون په سطر واړول شي، هغه نوی مټریکس چې په لاس راځي، له ترانسپوز(Transpose) مټریکس څخه عبارت دی، د A ترانسپوز مټریکس په A^T ښودل کېږي. د ترانسپوز مټریکس مرتبه $(n\times m)$ ده.

مثلاً: که چیرې $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -1 & 4\end{pmatrix}_{2\times 3}$ وي، نو ترانسپوز مټریکس یې عبارت دی له: $A^T=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\\ 3 & 4\end{pmatrix}_{3\times 2}$، که یو ترانسپوز مټریکس یعنې A^T له خپل ځان یعنې A سره مساوي شي، نو په دې صورت کې A مټریکس ته متناظر مټریکس (Symmetric Matrix) وایي.

مثلاً: $A=\begin{pmatrix}1 & 4 & 5\\ 4 & 2 & 3\\ 5 & 3 & 0\end{pmatrix}$ یو متناظر مټریکس دی، ځکه: $A^T=\begin{pmatrix}1 & 4 & 5\\ 4 & 2 & 3\\ 5 & 3 & 0\end{pmatrix} \Rightarrow A^T=A$

د متناظر مټریکس پېژندل: په متناظرو مټریکسونو کې عناصر نظر اصلي قطر ته متناظراو مساوي دي:

$$\begin{pmatrix}a & b & c\\ b & c & f\\ c & f & d\end{pmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ترانسپوز متریکس خواص:

لومړۍ خاصیت: د یوه ترانسپوز متریکس ترانسپوز له خپل لومړي متریکس سره مساوي دی.

$$(A^T)^T = A \Rightarrow \left[(a_{ij})^T\right]^T = (a_{ji})^T = (a_{ij}) = A$$

دویم خاصیت: د دوو یا څو ترانسپوز متریکسونو د جمعې او تفریق حاصل د دوی د هر یوه د جمعې او تفریق له ترانسپوز متریکسونو سره مساوي دی. $(A \pm B)^T = A^T \pm B^T$

او یا په عمومي ډول $(A \pm B \pm C \pm ...)^T = A^T \pm B^T \pm C^T \pm ...$

دریم خاصیت: $(AB)^T = B^T \cdot A^T$

څلورم خاصیت: $(\alpha A)^T = \alpha A^T \quad , \quad \alpha \in IR$

$(-A)^T = -A^T$

فعالیت

- که چیرې $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ او $B = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$ راکړل شوي وي، وښایاست چې:

$$(A-B)^T = A^T - B^T \quad , \quad (A+B)^T = A^T + B^T$$

مثال: د لاندې متریکسونو ترانسپوز متریکسونه په لاس راوړئ.

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}_{2\times3} \quad , \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 7 \\ 4 & 2 & 1 \\ 0 & -6 & 3 \end{pmatrix}_{3\times3}$$

حل:

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}_{2\times3} \Rightarrow B^T = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}_{3\times2}$$

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 7 \\ 4 & 2 & 1 \\ 0 & -6 & 3 \end{pmatrix}_{3\times3} \Rightarrow C^T = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 5 & 2 & -6 \\ 7 & 1 & 3 \end{pmatrix}_{3\times3}$$

پوښتنې

1. د A او B متریکسونه په پام کې ونیسئ، د هغوی ترانسپوز متریکسونه په لاس راوړئ.

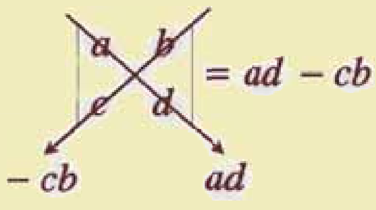
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}_{3\times3} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -2 \\ 4 & 5 & 3 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}_{3\times3}$$

2. په پورتنیو متریکسونو باندې د 3 عدد لپاره د ترانسپوز متریکس 4 خاصیتونه وښایاست.

دیترمېنانت

Determinant

پـه یـوه عـددي مثـال کـې یـو مربعي متـریکس داسـې وټاکئ چې د $ad-bc$ حاصل تفریق مساوي په صفر شي.



تعریف

که چیرې د A متریکس یوه حقیقي عدد ته نسبت ورکړل شي، د A د متریکس له دیترمېنانت څخه عبارت دی، د $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ د متریکس دیترمېنانت په $|A|$، det A او یا $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ په ډول ښوول کېږي.

پـه همـدې ډول کـه چیـرې د $n \times n$ مرتبـې یـو متـریکس چـې n سـطرونه او n سـتونونه ولـري، اړونـد دیترمېنانت یې له n درجې څخه دی. د $A=(a_{ij})_{n\times n}$ یو مربعـي متـریکس پـه پـام کـې نیـسو او د تعریـف سره سم لرو چې:

$$|A|=\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\dots a_{2n} \\ \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2}\dots a_{nn} \end{vmatrix}_{n x n}$$

د 2×2 مرتبې متریکسونو د دیترمېنانت محاسبه: د $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ متریکس دیترمېنانت په لاندې ډول تعریفوو.

$$|A|=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc$$

مثال: د $A=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$ متریکس دیترمېنانت حساب کړئ.

حل: $|A|=\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 2 \end{vmatrix}=3\cdot 2-7\cdot 4=6-28=-22$

فعالیت

- د $A=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$ متریکس دیترمېنانت محاسبه کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د 3×3 متریکسونو د دیترمینانت محاسبه: د $A_{3\times3}$ متریکس، دیترمینانت په پام کې نیسو:

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

حل: د $A_{3\times3}$ دیترمینانت د محاسبې لپاره لاندې ګامونه په پام کې نیسو:

لومړی پړاو: اول ستون او دریم سطر له منځه ورو(حذفوو)، د 2×2 مرتبې دیترمینانت محاسبه او د لومړي ستون او دریم سطر د تقاطع په عنصر کې یې ضربوو:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \Rightarrow (a_{12}\,a_{23}-a_{13}\,a_{22})a_{31}$$

دویم پړاو: دویم ستون او دریم سطر حذف، د 2×2 مرتبې دیترمینانت محاسبه او د دویم ستون او دریم سطر د تقاطع په عنصر کې یې ضربوو ، هېره دې نه وي چې د دیترمینانت د محاسبې لپاره علامې په متناوب ډول بدلون مومي:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \Rightarrow -(a_{11}\,a_{23}-a_{21}\,a_{13})a_{32}$$

دریم پړاو: دریم ستون او دریم سطر له منځه ورو(حذفوو)، د 2×2 مرتبې دیترمینانت محاسبه، د دریم سطر او دریم ستون د تقاطع په عنصر کې یې ضربوو:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \Rightarrow (a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})a_{33}$$

څلورم پړاو: د 1، 2 او 3 ټول پړاوونه سره جمع کوو، په دې ډول د A دیترمینانت مقدار په لاس راځي.

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=(a_{12}\,a_{23}-a_{13}\,a_{22})\,a_{31}-(a_{11}\,a_{23}-a_{21}\,a_{13})\,a_{32}+(a_{11}\,a_{22}-a_{12}\,a_{21})\,a_{33}$$

$$=a_{12}\,a_{23}\,a_{31}-a_{13}\,a_{22}\,a_{31}-a_{11}\,a_{23}\,a_{32}+a_{21}\,a_{13}\,a_{32}+a_{11}\,a_{22}\,a_{33}-a_{12}\,a_{21}\,a_{33}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: د لاندې ديترمينانت مقدار په لاس راوړئ.

$$B=\begin{vmatrix}2 & 6 & -3\\ 5 & 1 & 2\\ 4 & -1 & 7\end{vmatrix}$$

حل: له تېرو معلوماتو څخه کار اخلو:

$$\text{I)}\ \begin{vmatrix}2 & 6 & -3\\ 5 & 1 & 2\\ 4 & -1 & 7\end{vmatrix}=\big(6\cdot 2-1(-3)\big)\cdot 4=(12+3)\cdot 4=15\cdot 4=60$$

$$\text{II)}\ \begin{vmatrix}2 & 6 & 3\\ 5 & 1 & 2\\ 4 & -1 & 7\end{vmatrix}=-(2\cdot 2-5(-3))(-1)=4+15=19$$

$$\text{III)}\ \begin{vmatrix}2 & 6 & -3\\ 5 & 1 & 2\\ 4 & -1 & 7\end{vmatrix}=(2\cdot 1-5(6))\cdot 7=(2-30)\cdot 7=-28\cdot 7=-196$$

$$\text{I}+\text{II}+\text{III}=60+19-196=-117$$

فعاليت

- د $A=\begin{vmatrix}a & 0 & 3\\ -4 & 2 & 1\\ 1 & -1 & 0\end{vmatrix}$ له ديترمينانت څخه د a قيمت په لاس راوړئ.

دويمه طريقه: **د ساروس په طريقه د ديترمينانت محاسبه**: په دغه طريقه کې د ديترمينانت دوه لومړي ستونونه ښي لورې ته په لاندې ډول تکرار ليکو:

$$A=\left|\begin{matrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{matrix}\right|\begin{matrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{matrix}$$

فرعي قطرونه

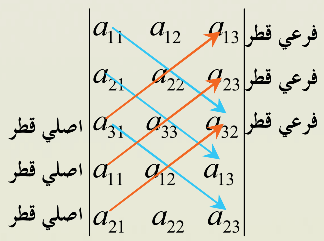
اصلي قطرونه

د اصلي قطر عناصر يوله بل سره ضرب او جمع کوو، په همدې ډول د فرعي قطر عناصر يوله بل سره ضربوو او وروسته يې جمع کوو، همدارنګه د اصلي قطرونو د عناصرو د حاصل ضرب له مجموع څخه، د فرعي قطرونو د عناصرو د حاصل ضرب مجموع کموو، په دې ډول د A د مټريکس ديترمينانت مقدار په لاس راځي:

$$|A|=(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32})-(a_{13}a_{22}a_{31}+a_{11}a_{23}a_{32}+a_{12}a_{21}a_{33})$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

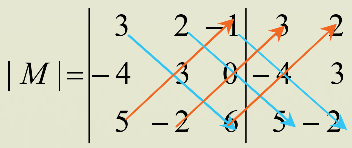
په دغه طریقه کې کولای شو د لومړی او دویم ستون د لېږد په ځای لومړی او دویم سطر د دیترمېنانت لاندینی برخې ته انتقال کړو او د تېر په ډول کړنه سرته رسوو.



دویم مثال: د لاندې دیترمېنانت قیمت د ساروس په طریقه په لاس راوړئ.

$$|M|=\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -4 & 3 & 0 \\ 5 & -2 & 6 \end{vmatrix}$$

حل:



$$=(3\cdot3\cdot6+2\cdot0\cdot5+(-1)(-4)(-2))-((-1)\cdot3\cdot5+3\cdot0(-2)+2(-4)\cdot6)$$
$$=(54+0-8)-(-15+0-48)=46+63=109$$

فعالیت

- لاندې د $|A|$ دیترمېنانت د ساروس په طریقه په لاس راوړئ، په داسې حال کې چې دوه لومړنې سطرونه د دیترمېنانت لاندې برخې ته ولېږدوئ او عملیه سرته ورسوئ.

$$|A|=\begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

پوښتنې

1. د لاندې دیترمېنانتونو مقدار په لنډ ډول محاسبه کړئ.

$a)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$, $b)\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}$, $c)\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 6 \end{vmatrix}$, $d)\begin{vmatrix} 0 & 4 & 2 \\ -5 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix}$

2. د لاندې دیترمېنانتونو مقدار د ساروس په طریقه په لاس راوړئ.

$a)\begin{vmatrix} 3 & 5 & 6 \\ -1 & 2 & 0 \\ -4 & 1 & 7 \end{vmatrix}$, $b)\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 5 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ډیټرمېنانټ خاصیتونه

که چیرې په یوه ډیټرمېنانټ کې د سطر ځای له ستون سره بدل شي، د ډیټرمېنانټ په قیمت کې تغیر راځي او که نه؟

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & 4 & 1\\ 5 & 3 & -1\end{vmatrix}$$

$$|B|=\begin{vmatrix}2 & 4 & 1\\ 1 & 0 & -1\\ 5 & 3 & -1\end{vmatrix}$$

فعالیت

- د $|A|=\begin{vmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 4\end{vmatrix}$ او $|A|=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 4\end{vmatrix}$ ډیټرمېنانټونه محاسبه کړئ.
- د $|A|=\begin{vmatrix}2 & 1 & 3\\ 4 & 2 & 6\\ 5 & 4 & 1\end{vmatrix}$ ډیټرمېنانټ په پام کې ونیسئ، ترانسپوز یې په لاس راوړئ، وروسته یې $|A^T|$ (ډیټرمېنانټ) محاسبه کړئ او وښایاست چې $|A|=|A^T|$.

له پورتني فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راځي.

که چیرې $A_{n\times n}$ یو میټریکس وي، د $|A|$ ډیټرمېنانټ لپاره لاندې خواص صدق کوي.

1. که د $A_{n\times n}$ میټریکس د یوه سطر او یا یوه ستون ټول عناصر صفرونه وي، نو د A ډیټرمېنانټ مساوي له صفر سره دی.

$$|A|=\begin{vmatrix}0 & a & b\\ 0 & c & d\\ 0 & e & f\end{vmatrix}=0\ ,\quad |A|=\begin{vmatrix}0 & 0 & 0\\ a & b & c\\ d & e & f\end{vmatrix}=0$$

2. که چیرې د $A_{n\times n}$ میټریکس دوه سطرونه یا دوه ستونونه سره مساوي وي، نو اړوند ډیټرمېنانټ یې مساوي له صفر سره دی.

$$A=\begin{pmatrix}a & b & c\\ a & b & c\\ d & e & f\end{pmatrix}\Rightarrow |A|=\begin{vmatrix}a & b & c\\ a & b & c\\ d & e & f\end{vmatrix}=0$$

3. که د $A_{n\times n}$ میټریکس د یوه سطر او یا یوه ستون عناصر د بل سطر او یا ستون د عناصرو ګډ فکتور وي، نو $|A|=0$ دی.

$$|A|=\begin{vmatrix}a & b & c\\ \lambda a & \lambda b & \lambda c\\ d & e & f\end{vmatrix}=\lambda\begin{vmatrix}a & b & c\\ a & b & c\\ d & e & f\end{vmatrix}=\lambda(0)=0$$

4. د A میټریکس ډیټرمېنانټ او A^T میټریکس ډیټرمېنانټ یو له بل سره مساوي دي، په همدې ډول ډیټرمېنانټ ځینې نور خاصیتونه یا ځانګړنې هم لري، لکه:

که چیرې په یوه دیترمېنانت کې د دوو سطرونو یا دوو ستونونو ځایونه یو له بل سره بدل شي، د دیترمېنانت اشاره بدلون مومي.

لومړی مثال: د $|A|=\begin{vmatrix}2 & -1 & 4\\ 1 & 2 & -2\\ 3 & 1 & 0\end{vmatrix}$ دېترمېنانت لومړي ستون له دویم ستون سره بدل کړئ او وروسته د دواړو دېترمېنانتونو قیمتونه سره پرتله کړئ.

حل:

$$A=\begin{vmatrix}2 & -1 & 4\\ 1 & 2 & -2\\ 3 & 1 & 0\end{vmatrix}\Rightarrow(0+6+4)-(24-4+0)=-10$$

$$B=\begin{vmatrix}-1 & 2 & 4\\ 2 & 1 & -2\\ 1 & 3 & 0\end{vmatrix}=(0+24-4)-(4+6+0)=20-10=10$$

لیدل کېږي چې د A په دیترمېنانت کې دویم ستون له لومړی ستون سره بدل شوی، په ورته ډول کولای شو،دوه سطرونه هم یوله بل سره بدل کړو،نوداسې پایله په لاس راځي: $|A|=-|B|$

که د K یو ثابت عدد په دیترمېنانت کې ضرب شي، دغه عدد یوازې په یوه سطر او یا یوه ستون کې په اختیاري ډول ضربېدلای شي. په همدې ډول کولای شو د یوه دیترمېنانت ګډعامل له یوه سطر او یا یوه ستون څخه ګډ عددوټاکوچې د دیترمېنانت ګډ فکتور بلل کېږي.

دویم مثال: د $|A|$ دیترمېنانت ګډ ضربي عامل پیدا کړئ.

$$A=\begin{vmatrix}16 & 3 & 22\\ 8 & 2 & 21\\ 20 & 1 & 25\end{vmatrix}$$

حل: لیدل کېږي چې د دیترمېنانت په لومړی ستون کې د 4 عدد ګډ ضربي عامل دی چې په حقیقت کې دا عدد د دیترمېنانت ګډ ضربي عامل دی.

$$|A|=\begin{vmatrix}16 & 3 & 22\\ 8 & 2 & 21\\ 20 & 1 & 25\end{vmatrix}=4\begin{vmatrix}4 & 3 & 22\\ 2 & 2 & 21\\ 5 & 1 & 25\end{vmatrix}$$

پوښتنې

د دېترمېنانت دخواصو په مرسته د لاندې دېرمېنانتونو قیمت په لاس راوړئ.

$$a)\begin{vmatrix}0 & 1 & 2\\ 0 & 3 & 4\\ 0 & 5 & 6\end{vmatrix}\qquad b)\begin{vmatrix}1 & 2 & 4\\ 7 & 9 & 11\\ 0 & 0 & 0\end{vmatrix}\qquad c)\begin{vmatrix}3 & 5 & 8\\ 0 & 4 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

د 2×2 مرتبي مېټريکسونو ضربي معکوس

Multiplication inverse of 2×2 *matrixes*

آیا د حقیقي عددونو ضرب قاعده مو په یاد ده؟

د a حقیقي عدد ضربي معکوس کوم عدد دی؟

په همدې ډول د ځینو مربعي مېټريکسونو لپاره هم دا خاصیت، د مېټريکسونو د خاصیتونو په پام کې نیولو سره شتون لري.

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

فعالیت

- د $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ مېټريکس په پام کې ونیسئ او دیترمینانت یې محاسبه کړئ.
- د $B=\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ مېټريکس د A له مېټريکس سره ضرب او پایله یې ولیکئ.

له پورتني فعالیت څخه لاندې پایله بیانولای شو:

تعریف: د $A=(a_{ij})_{n\times n}$ غیر صفري مربعي مېټريکس په پام کې نیسو، که چیرې د B مربعي مېټريکس داسې موجود وي، چې: $AB=BA=I$

په دې صورت کې د B مېټريکس د A د مېټريکس معکوس بلل کېږي او هغه په A^{-1} سره ښیي. له دې امله لیکلې شو چې: $AA^{-1}=A^{-1}A=I$

په یاد ولرئ: د A مربعي مېټريکس ته منفرد مېټريکس (Singular Matrix) ویل کېږي، کله چې $|A|=0$ وي او همدارنګه د A مربعي مېټريکس ته غیر منفرد مېټريکس (non singular matrix) ویل کېږي، که چیرې $|A|\neq 0$ وي.

له دې امله هغه وخت یو مېټريکس د معکوس مېټريکس لرونکی دی چې:

1. مېټريکس مربعي وي.
2. دیترمینانت یې د صفر خلاف وي.

لومړی مثال: وښایاست چې $A=\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -7 \end{pmatrix}$ ، $B=\begin{pmatrix} -7 & -3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ یو د بل معکوس دي.

حل:

$$A\cdot B=\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -7 & -3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} (-1)(-7)+3(-2) & (-1)(-3)+3(-1) \\ 2(-7)+(-7)(-2) & 2(-3)+-7(-1) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7-6 & 3-3 \\ -14+14 & -6+7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B\cdot A=\begin{pmatrix} -7 & -3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7-6 & -21+21 \\ 2-2 & -6+7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

لیدل کېږي چې: $AB=BA=I$ دی، نو A او B یو د بل معکوس دي.

الحاقي مټريکس(Ad joint of matrix): د 2×2 مرتبې الحاقي مټريکس د پيدا کولو لپاره د اصلي قطر د عناصرو ځايونه سره بدلوو او فرعي قطر د اشارې په بدلون سره ليکو، هغه نوی مټريکس چې لاس ته راځي، له الحاقي مټريکس (ad joint=adj) څخه عبارت دی، د مثال په ډول:

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow Adj\ A=\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$K=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow Adj\ K=\begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$$

هغه وخت يو مټريکس معکوس مټريکس لري چې ديټرمينانټ يې د صفر خلاف وي، يعنې $|A|\neq 0$ وي. البته د بحث موضوع 2×2 مرتبې مټريکس دی چې له لاندې فورمول څخه په لاس راځي.

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\ Adj\ A \qquad |A|\neq 0$$

لومړی مثال: که چېرې $A=\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ وي، معکوس مټريکس يې پيدا کړئ.

حل: $|A|=\begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}=-18+10=8\neq 0$

ليدل کېږي چې د A مټريکس ديټرمينانټ د صفر خلاف دی، نو د A مټريکس معکوس مټريکس لري.

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}Adj\ A=\frac{1}{-8}\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -5 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{6}{-8} & -\frac{2}{8} \\ \frac{-5}{-8} & \frac{-3}{-8} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{5}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}$$

ازموينه:

$$\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \frac{-3}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{5}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{9}{4}-\frac{5}{4} & \frac{3}{4}-\frac{3}{4} \\ -\frac{15}{4}+\frac{15}{4} & -\frac{5}{4}+\frac{9}{4} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=I$$

په عمومي ډول ويلی شو، د هر $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ مټريکس چې ديټرمينانټ يې د صفر خلاف يعنې $|A|\neq 0$ وي، معکوس لري چې له دې فورمول څخه په لاس راځي:

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

پوښتنې

1. د لاندې مټريکسونو څخه کوم يو مټريکس معکوس لري.

$a)\quad A=\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -10 & -2 \end{pmatrix}$ $\qquad b)\quad B=\begin{pmatrix} 5 & 19 \\ 4 & 15 \end{pmatrix}$

2. د لاندې مټريکسونو معکوس مټريکس په لاس راوړئ او وازموئ.

$1)\quad A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad 2)\quad B=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ $\qquad 3)\quad C=\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

له معکوس متریکس څخه په کاراخېستني د خطي معادلو د سیستم حل

آیا تر اوسه مو له معکوس متریکس څخه په ګټه اخېستنې د خطي معادلو د سیستم د حل په اړه فکر کړی دی؟

$$X = A^{-1} \cdot B$$

فعالیت

د خطي دوه مجهوله معادلو سیستم $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ په پام کې و نیسئ:

- د ضریبونو متریکس، د مجهولینو متریکس، د ضریبونو او مجهولینو متریکس ولیکئ.
- هر متریکس د معادلې په ډول ولیکئ.
- د لاس ته راغلي معادلې اطراف د ضریبونو د متریکس په معکوس کې ضرب کړئ.

له پورتني فعالیت څخه کولای شو لاندې پایله بیان کړو:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \quad , \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

څرنګه چې A د سیستم د چپ لورې د ضریبونو متریکس، B د ښي لورې د ثابتو عددونو ستوني متریکس او X د مجهولو عددونو ستوني متریکس دی، نو د A^{-1} په پام کې نیولو سره سیستم داسې حلیږي:

$$AX = B$$

$$A^{-1} \cdot AX = A^{-1} \cdot B \quad \Rightarrow (A^{-1} \cdot A)X = A^{-1} \cdot B$$

$$IX = A^{-1} \cdot B \quad \Rightarrow X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot B$$

لومړی مثال: له معکوس مټریکس څخه په کار اخېتسنې سره، د $\begin{cases} x+2y=5 \\ x+3y=7 \end{cases}$ خطي دوه مجهوله

سیستم حل کړئ.

حل: پوهېږو چې $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ $X=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ او $B=\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$ دی.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=3-2=1\neq 0$$

څرنګه چې د A مټریکس دیټرمېنانت د صفر خلاف دی، نو د A مټریکس معکوس لري او په لاندې

ډول يې په لاس راوړو:

$$Adj\ A=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{1}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X=A^{-1}B=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$X=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3\cdot 5-2\cdot 7 \\ -1\cdot 5+1\cdot 7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 15-14 \\ -5+7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\ ,\ x=1\quad ,\qquad y=2$$

دویم مثال: له معکوس مټریکس څخه په کار اخیستنې سره د دغه خطي معادلو $\begin{cases} 5x-2y=2 \\ 3x-\ y=3 \end{cases}$

سیستم حل کړئ.

حل: پوهېږو چې:

$$B=\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}\ ,\quad X=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\ ,\quad A=\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$|A|=\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}=-5+6=1\ \Rightarrow\ A\neq 0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لیدل کېږي چې $|A| \neq 0$ دی، نو A معکوس مټریکس لري.

$$AdjA = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} AdjA = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1}B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1\cdot 2+2\cdot 3 \\ -3\cdot 2+5\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+6 \\ -6+15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x = 4 \quad , \quad y = 9$$

دریم مثال: د x او y په کومو قمیتونوکې لاندې معادلې په یو وخت کې صدق کوي.

$$\begin{cases} 2x-3y=4 \\ 4x-6y=1 \end{cases}$$

د یاد شوی سیستم حل د سیستم د ضریبونو د مټریکسونو له تشکیل څخه په لاس راوړو:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \; , \; X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{vmatrix} = -12+12 = 0$$

څرنگه چې د A مټریکس دیترمینانت صفر دی، نو د A مټریکس معکوس نه لري، په پایله کې ویلای شو چې سیستم حل نه لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

له معکوس متریکس څخه په ګټه اخېستنې، د لاندې خطي معادلو سیستمونه حل کړئ.

$$a)\ \begin{cases} 2x - y = 1 \\ 5x - 2y = 2 \end{cases}$$

$$b)\ \begin{cases} 3p - 5q = 7 \\ 2p - 4q = 6 \end{cases}$$

$$c)\ \begin{cases} a + b = 11 \\ 4a - b = 9 \end{cases}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د خطي معادلو د سیستم حل د کرامر په طریقه

Crammer's rule

آیا کولای شو، د ضریبونو د متریکس د دیترمینانت او له مجهولینو یعنې د x, y, z سره د متناظرو متریکسونو د دیترمینانت په واسطه د خطي معادلو د سیستم حل پیدا کړو؟

$$x = \frac{|A_x|}{|A|}$$
$$y = \frac{|A_y|}{|A|}$$
$$z = \frac{|A_z|}{|A|}$$

د خطي درې مجهوله معادلو سیستم په پام کې نیسو او د ضریبونو متریکس یې په A سره ښیو:

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = d_1$$
$$a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = d_2$$
$$a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = d_3$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

کولای شو د x, y او z قیمتونه له لاندې اړیکو څخه په لاس راوړو، په داسې حال کې چې $|A| \neq 0$ وي.

$$X = \frac{|A_x|}{|A|} \quad , \quad y = \frac{|A_y|}{|A|} \quad , \quad z = \frac{|A_z|}{|A|}$$

په پورتنیو اړیکو کې $|A_x|$، $|A_y|$ او $|A_z|$ په ترتیب سره د x, y او z اړوند متناظرو متریکسونو دیترمینانتونه دي. د هغوی د محاسبې لپاره په لاندې ډول کړنه کوو، د سیستم زیات شوي متریکس لیکو:

$$\left(\begin{array}{ccc:c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & d_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & d_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & d_3 \end{array}\right)$$

د $|A_x|$ د محاسبې لپاره د لومړي ستون(د x ضریبونو) په ځای ثابت مقدارونه ستون(هغه ثابت مقدارونه چې د سیسټم ښي لوري ته پراته دی) ځای پر ځای کوو، د 3×3 مرتبې مټریکس دیترمېنانت په لاس راوړو او د $|A_y|$ د محاسبې لپاره د دویم ستون(د y ضریبونه) په ځای ثابت مقدارونه ستون(هغه ثابت مقدارونه چې د سیسټم ښي لوري ته پراته دي) ځای پر ځای کوو او د 3×3 مرتبې د مټریکس دیترمېنانت محاسبه کوو. او د $|A_z|$ د محاسبې لپاره دریم ستون(د z ضریبونو) په ځای ثابت مقدارونه ستون ځای په ځای کوو او د 3×3 مرتبې مټریکس دیترمېنانت قیمت په لاس راوړو.

فعالیت

- له پورتنیو معلوماتو څخه په ګټې اخېستنې سره $|A_x|$، $|A_y|$ او $|A_z|$ پیدا کړئ.

لومړی مثال: د $\begin{cases} x-3y=3 \\ 2x+y=2 \end{cases}$ سیسټم حل د کرامر په طریقه په لاس راوړئ.

حل: $A=\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=1-(-6)=1+6=7\neq 0$

څرنګه چې $|A|\neq 0$ دي؛ نو سیسټم حل لري.

اوس زیات شوی مټریکس لیکو:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$x=\frac{|A_x|}{|A|}=\frac{\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}{|A|}=\frac{3-(-6)}{7}=\frac{3+6}{7}=\frac{9}{7}$$

$$x=\frac{|A_y|}{|A|}=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}}{7}=\frac{2-6}{7}=-\frac{4}{7}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دويم مثال: لاندي دري مجهوله سيستم د کرامر په طريقه حل کړئ.

$$\begin{cases}3x-2y+2z=-4\\x+3y+z=5\\2x+2y-z=11\end{cases}$$

حل:

$$|A|=\begin{vmatrix}3&-2&2\\1&3&1\\2&2&-1\end{vmatrix}\begin{matrix}3&-2\\1&3\\2&2\end{matrix}=-9-4+4-12-6-2$$
$$=-21-8=-29\neq 0$$

څرنگه چې $|A|\neq 0$ دئ نو له دې امله سيستم حل لري.

$$|A_x|=\begin{vmatrix}-4&-2&2\\5&3&1\\11&2&-1\end{vmatrix}\begin{matrix}-4&-2\\5&3\\11&2\end{matrix}=12-22+20-(66-8+10)$$
$$=10-68=-58$$

$$X=\frac{|A_x|}{|A|}=\frac{-58}{-29}=2$$

$$|A_y|=\begin{vmatrix}3&-4&2\\1&5&1\\2&11&-1\end{vmatrix}\begin{matrix}3&-4\\1&5\\2&11\end{matrix}=-15-8+22-(20+33+4)$$
$$=-23+22-57=-58$$

$$y=\frac{|A_y|}{A}=\frac{-58}{-29}=2$$

$$|A_z|=\begin{vmatrix}3&-2&-4\\1&3&5\\2&2&11\end{vmatrix}\begin{matrix}3&-2\\1&3\\2&2\end{matrix}=99-20-8-(-24+30-22)$$
$$=71+16=87$$

$$z=\frac{|A_z|}{A}=\frac{87}{-29}=-3$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

میزان:

د x, y او z په لاس راغلي قیمتونه په اصلي سیستم کې وضع کوو:

$$3(2)-2(2)+2(-3)=6-4-6=-4 \quad \Rightarrow \quad -4=-4$$
$$2+3(2)-3=2+6-3=8-3=5 \quad \Rightarrow \quad 5=5$$
$$2(2)+2(2)-(-3)=4+4+3=11 \quad \Rightarrow \quad 11=11$$

پوښتنې

د لاندې معادلو سیستمونه حل کړئ.

$$a)\begin{cases} x+y+z=1 \\ x-y-z=2 \\ 2x+y-2z=1 \end{cases} \qquad b)\begin{cases} x+y-az=0 \\ ax+2y-z=0 \\ 2x+ay+2z=0 \end{cases}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

د معادلو د سیستم حل دگوس($Gouse$) په طریقه

آیاکولای شو له مټریکس څخه په کار اخېستنې سره د x, y او z مجهول قیمتونه پیداکړو.

$$\begin{cases} x+2y=5 \\ x+3y=7 \end{cases}$$

دگوس په طریقه د معادلو د سیستم د حل لپاره د ضریبونو مټریکس او ثابت قیمتونه لیکو وروسته په سطرونو او ستونونو، باندې لومړنی عملیې(جمع، تفریق، ضرب او تقسیم) سرته رسوو، یا سطرونه او ستونونه په یو سکالر کې ضربوو چې په پایله کې دوه مجهوله له منځه ځي او دریم مجهول محاسبه کېږي ، وروسته د نورو مجهولونو قیمت په لاس راوړو، د مټریکس سطرونه په $R_1, R_2, R_3, \ldots\ldots..$ ښیو:

لومړی مثال: لاندې د خطي معادلو سیستم دگوس په طریقه حل کړئ.

$$\begin{cases} x+2y=5 \\ x+3y=7 \end{cases}$$

حل:د ضریبونو مټریکس لیکو:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{لومړی سطر منفي دوم سطرتفریق حاصل په دویم سطر کې}]{R_1 - R_2 \to R_2} \left(\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{دویم سطر په(1-) کې ضرب بدلون په دویم سطر کې}]{R_2 \cdot (-1) \to R_2}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \Rightarrow y=2\,, \quad \begin{array}{l} x+2y=5 \\ x+2(2)=5 \Rightarrow x=5-4=x=1 \end{array}$$

پاملرنه: $R_1 - R_2 \to R_2$ په دې معنا چې له لومړي سطر څخه دویم سطر تفریق شوی او په دویم سطر کې بدلون لیکل شوی دی.

$R_2(-1) \to R_2$ داسې مفهوم لري چې دویم سطر په (-1) کې ضرب شوی او په دویم سطر کې لیکل شوی دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیت

- د خطي دوه مجهوله معادلو سیستم دگوس په طریقه حل کړئ.

$$\begin{cases} x+2y=-3 \\ 2x-y=4 \end{cases}$$

دویم مثال: د لاندې درې مجهوله معادلو سیستم د گوس په طریقه حل کړئ.

$$\begin{cases} 2x+3y-z=5 \\ 3x+y+2z=11 \\ 4x-2y+z=3 \end{cases}$$

حل: لومړی د سیستم د مجهولینودضریبونو او ثابتو عددونو مټریکس لیکو:

$$\begin{matrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{matrix}\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 11 \\ 4 & -2 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

په لومړي پړاو کې د x ضریب په دویم سطر کې له منځه وړو. داسې چې لومړی سطر په -3 کې ضرب د دویم سطر له دوه چند سره جمع او په دویم سطر کې یې لیکو:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 11 \\ 4 & -2 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{-3R_1+2R_2 \to R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -7 & 7 & 7 \\ 4 & -2 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

په دویم گام کې د x ضریب په دریم سطر کې له منځه وړو داسې چې لومړی سطر په -2 کې ضرب له دریم سطر سره جمع او په دریم سطر کې یې لیکو:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -7 & 7 & 7 \\ 4 & -2 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{-2R_1+R_3 \to R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -7 & 7 & 7 \\ 0 & -8 & 3 & -7 \end{array}\right)$$

په دریم پړاو کې د y ضریب له دریم سطر څخه حذفوو، داسې چې دویم سطر په -8 کې ضرب د دریم سطر له 7 چند سره جمع او په دویم سطر کې یې لیکو:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -7 & 7 & 7 \\ 0 & -8 & 3 & -7 \end{array}\right) \xrightarrow{-8R_2+7R_3 \to R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -7 & 7 & 7 \\ 0 & 0 & -35 & -105 \end{array}\right)$$

له دریم سطر څخه کولای شو، د z قیمت په لاس راوړو:

$$-35z = -105 \quad \Rightarrow \quad z = 3$$

د z قمیت په دویم سطر کې وضع او د y قیمت په لاس راوړو:

$$-7y + 7z = 7 \quad \Rightarrow \quad -7y + 21 = 7 \quad \Rightarrow \quad -7y = -14 \quad , \quad y = 2$$

په دریم پړاو کې د y او z قیمتونه په لومړي سطر کې اېږدو او x په لاس راځي.

$$2x + 3y - z = 5 \Rightarrow 2x + 3\cdot 2 - 3 = 5 \quad \Rightarrow \quad 2x + 3 = 5$$

$$2x = 5 - 3 = 2 \quad , \quad x = 1$$

د خطي معادلو د سیستم حل عبارت دی له: $(x, y, z) = (1,2,3)$

دریم مثال: د لاندې خطي معادلاتو سیستم دګوس په طریقه حل کړئ.

$$2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 18$$
$$4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 24$$
$$2x_1 + 7x_2 + 12x_3 = 40$$

حل:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & 18 \\ 4 & 5 & 6 & 24 \\ 2 & 7 & 12 & 40 \end{array}\right) \xrightarrow[-2R_1 + R_2 \to R_2]{\text{لومړی پړاو}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & 18 \\ 0 & -3 & -6 & -12 \\ 2 & 7 & 12 & 40 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[-R_1 + R_3 \to R_3]{\text{دویم پړاو}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & 18 \\ 0 & -3 & -6 & -12 \\ 0 & 3 & 6 & 22 \end{array}\right) \xrightarrow[R_2 + R_3 \to R_3]{\text{دریم پړاو}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & 18 \\ 0 & -3 & -6 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{array}\right)$$

لیدل کېږي چې په لاس راغلی متریکس کې د x_1, x_2 او x_3 ضریبونه په دریم سطر کې صفر دی، په داسې حال کې چې په یاد شوي سطر کې ثابت عدد 10 دی او دا غیر ممکن دی چې($x_1 = x_2 = x_3 = 0 = 10$) نو سیستم حل نه لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیت

د لاندې معادلو سیستم حل او میزان کړئ.

$$\begin{cases} x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

پاملرنه: که چیرې د خطي معادلو په سیستم کې یو له مجهولینو څخه موجود نه وي، د هغه ضریب صفر په پام کې نیسو، وروسته د خطي معادلو د ضریبونو او د ثابتو مقدارونو متریکس تشکیلوو:

پوښتنې

د لاندې خطي معادلو سیستمونه د ګوس په طریقه حل کړئ.

$$a)\ \begin{cases} 3x - y = -5 \\ x + 3y = 5 \end{cases} \qquad b)\ \begin{cases} 2x + 4y - 10z = -2 \\ 3x + 9y - 21z = 0 \\ x + 5y - 12z = 1 \end{cases} \qquad c)\ \begin{cases} 2x + 2y = 2 \\ x + 2y = 3 \\ -3y = -6 \end{cases}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د شپږم څپرکي مهم ټکي

د مټریکس تعریف: یوه ګڼېځ عددونه یا توري چې په سطري او ستوني ډول په یوه مستطیلي جدول کې ځای پر ځای شوې وي. د مټریکس(Matrix) په نامه یادېږي.

د مټریکسونو ډولونه:

- **سطري مټریکس**: هغه مټریکس چې یوازې یو سطر ولري.
- **ستوني مټریکس**: هغه مټریکس چې یوازې یو ستون ولري.
- **صفري مټریکس**: هغه مټریکس چې ټول عناصر یې صفرونه وي.
- **مربعي مټریکس**: هغه مټریکس چې د سطرونو او ستونونو شمېر یې سره برابر وي.
- **مساوي مټریکسونه**: دوه مټریکوسونه، هغه وخت سره مساوي دي چې ټول عناصر یې یو په یو سره برابر او مساوي وي.
- قطري مټریکس هغه مټریکس چې ټول عناصر یې پرته له اصلي قطر څخه صفرونه وي، قطر ي مټریکس بلل کېږي.
- **سکالر مټریکس**: هر قطري مټریکس چې د اصلي قطر عناصر یې سره برابر وي، سکالري مټریکس بلل کېږي.
- **واحد مټریکس**: په هر سکالري مټریکس کې که د اصلي قطر عناصر د 1 عدد وي، واحد مټریکس بلل کېږي.

په مټریکسونو باندې لومړني عملیات:

- **د مټریکسونو جمع او تفریق**: د مټریکسونو جمع او تفریق هغه وخت امکان لري چې:

$$A_{m\times n} \pm B_{m\times n} = (a_{ij})_{m\times n} \pm (b_{ij})_{m\times n} = (a_{ij} \pm b_{ij})_{m\times n} = (C_{ij})_{m\times n} = C_{m\times n}$$

د مټریکسونو د جمعې او تفریق خواص:

1) $A+B=B+A$ 2) $A-B \neq B-A$

3) $(A\pm B)\pm C = A\pm(B\pm C)$ 4) $A+0=0+A=A$

5) $A+(-A)=-A+A=0$

په مټریکس کې د سکالر ضربول: که $K \in IR$ او $A=(a_{ij})_{m\times n}$ وي، نو:

$$KA = K(a_{ij})_{m\times n} = (C_{ij})_{m\times n} = C_{m\times n}$$

په مټریکس کې د سکالر ضرب خواص:

a) $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$

b) $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$

c) $\alpha(\beta A)=(\alpha \beta)A=\beta(\alpha A)$

د دوو مټریکسونو ضرب: د دوو مټریکسونو ضرب هغه وخت ممکن دی چې د لومړي مټریکس د ستونونو شمېر، د دویم مټریکس د سطرونو له شمېر سره برابر وي، که $A=(a_{ij})_{m\times n}$ او $B=(b_{ij})_{n\times p}$ وي، نو:

$$A\cdot B=(a_{ij})_{m\times n} \cdot = (b_{ij})_{n\times p} = (C_{ij})_{m\times p} = C_{m\times p}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

یعني د دوو مېټريکسونو د ضرب حاصل هغه درېيم مېټريکس دی چې د سطرونو شمېر يې له لومړي مېټريکس سره او د ستونونو شمېر يې له دويم مېټريکس سره برابر وي.

د مېټريکسونو د ضرب خواص: که A او B دوه مېټريکسونه وي، نو:

1) $AB \neq BA$ 2) $(AB)C = A(BC)$

3) $A(B+C) = AB + AC$ 4) $I \cdot A = A \cdot I = A$

5) $K(AB) = (KA)B = A(KB)$

د يوه مېټريکس ترانسپوز مېټريکس: که د يوه $A_{m \times n}$ مېټريکس ستونونه په سطرونو او سطرونه په ستونونو بدل شي، هغه نوی مېټريکس چې لاسته راځي ،د ترانسپوز مېټريکس په نامه يادېږي. د A ترانسپوز مېټريکس په A^T سره ښيي.

مثلثي مېټريکس: که په يوه مېټريکس کې د اصلي قطر پورتني او يا ښکتني عناصر ټول صفرونه وي، نوموړی مېټريکس د مثلثي مېټريکس په نامه يادېږي.

متناظر مېټريکس: که د A يو مېټريکس له خپل ترانسپوز A^T مېټريکس سره برابر شي($A = A^T$) نو د A مېټريکس ته متناظر مېټريکس وايي.

ديترمېنانت: که د A مېټريکس يوه حقيقي عدد ته نسبت ورکړل شي، د A د مېټريکس له ديترمېنانت څخه عبارت دی، او د $|A|$ يا $\det A$ په شکل سره ښودل کېږي.

د ديترمېنانت خواص:

1. که د $A_{n \times n}$ مېټريکس د يوه سطر او يا ستون ټول عناصر صفرونه وي، نو ديترمېنانت يې صفر دی، يعنې:
$\det A = |A| = 0$
2. که د ديترمېنانت دوه سطرونه او يا دوه ستونونه سره برابر(مساوي) وي، نو ديترمېنانت يې صفر دی. $|A| = 0$
3. که $A_{n \times n}$ مېټريکس د يوه سطر يا ستون عناصر د بل سطر يا ستون د عناصرو مضرب وي، نو ديترمېنانت يې صفر دی. $|A| = 0$
4. د A مېټريکس او د A ترانسپوز مېټريکس ديترمېنانتونه سره مساوي وي، يعنې: $|A^T| = |A|$

د مېټريکسونو ضربي معکوس: د $A = (a_{ij})_{m \times n}$ مربعي مېټريکس په پام کې نيسو ،که چيرې د B مربعي مېټريکس داسې موجود وي چې $AB = BA = I$ ، په دې صورت کې د B مېټريکس د A د مېټريکس معکوس دی او د A د مېټريکس معکوس مېټريکس په A^{-1} سره ښيي: $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$

د خطي معادلو د سيستم حل:

- له معکوس مېټريکس څخه په ګټه اخېستنې د خطي معادلو د سيستم حل.
- د خطي معادلو د سيستم حل د کرامر په طريقه.
- دګوس په طريقه د خطي معادلو د سيستم حل.

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

د څپرکي پوښتنې

لاندې پوښتنو ته څلور ځوابونه ورکړل شوي دي، له سم ځواب څخه کړۍ تاو کړئ.

1. که $|A| = 3$ وي، نو $|A^{-1}|$ پیداکړئ.

$a)\ \frac{1}{3}$ $b)\ 9$ $c)\ \frac{1}{9}$ $d)\ 3$

2. که $A = \begin{pmatrix} 2m-3 & -1 \\ 1 & m \end{pmatrix}$ معکوس منونکی مټریکس وي، نو د m قیمت به څو وي؟

$a)\ m = 1, \frac{1}{2}$ $b)\ m \neq 1$ $c)\ m = 0$ $d)\ m \neq 1, \frac{1}{2}$

3. که $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ وي، د x هغه مټریکس په لاس راوړئ چې په دغه رابطه $Ax = A^{-1}$ کې صدق وکړي.

$a)\ \begin{pmatrix} 9 & 5 \\ 25 & 14 \end{pmatrix}$ $b)\ \begin{pmatrix} 9 & -5 \\ -25 & 14 \end{pmatrix}$

$c)\ \begin{pmatrix} 9 & 5 \\ -25 & -16 \end{pmatrix}$ $d)\ \begin{pmatrix} -9 & 5 \\ -25 & -12 \end{pmatrix}$

4. د $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ مټریکس لاندې د $y = 2x$ د خط بدلون منونکي خط پیداکړئ.

a) د y محور b) د x محور c) $y + 2x = 0$ d) $y = 0$

5. د x په کومو قیمتونو دغه دیترمینانت $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix}$ صفر دی؟

6. $a)\ x = 1,2$ $b)\ x = 3,1$ $c)\ x = \frac{1}{2},3$ $d)\ x = 3,2$

7. د $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$ دیترمینانت حاصل په لاس راوړئ.

$a)\ 29$ $b)\ 39$ $c)\ 19$ $d)\ 9$

لاندې پوښتنې حل کړئ.

1. که $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 4\end{pmatrix}$ او $B=\begin{pmatrix}-5 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}$ وي، لاندې محاسبې غوښتل شوې دي:

$a)\ 3A-2B$ $\qquad$ $b)\ -4A+3B$

2. فرض کړئ که $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ -1 & 0 & 3\end{pmatrix}$ او $B=\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & 3\\ 2 & -1\end{pmatrix}$ راکړل شوی وي، نو AB او BA محاسبه کړئ

او ووایاست چې $AB = BA$ دی.

3. لاندې میټریکسونه په پام کې ونیسي:

$$C=\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 0 & -1\end{pmatrix}\ ,\ B=\begin{pmatrix}3 & 4\\ -2 & 2\end{pmatrix}\ ,\ A=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

اشتراکي خاصیت، توزیعي خاصیت او د میټریکسونو ضرب د درو میټریکسونو لپاره وښایاست.

4. لاندې دیترمینانت په لنډ ډول محاسبه کړئ.

$$A=\begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\ 1 & 0 & 2\\ 2 & 1 & 1\end{vmatrix}$$

5. د لاندې میټریکس معکوس میټریکس د الحاق(ad joint) په طریقه پیدا کړئ.

$$M=\begin{pmatrix}2 & -5\\ 3 & -9\end{pmatrix}$$

6. د لاندې خطي معادلو سیستمونه د کرامر په طریقه حل کړئ.

$$a)\ \begin{cases}2x+y+z=6\\ x-2y+2z=10\\ 3x-y-z=4\end{cases}\qquad b)\ \begin{cases}x_1-2x_2=4\\ 2x_1+4x_2=5\end{cases}$$

7. د لاندې خطي معادلو سیستمونه د گوس په طریقه حل کړئ.

$$a)\ \begin{cases}2x-3y+3z=0\\ 3x+2y-5z=0\\ 5x-4y-2z=0\end{cases}\qquad b)\ \begin{cases}2x+3y-7=1\\ 2y+27=-2\end{cases}$$

8. د لاندې خطي معادلو سیستمونه د معکوس میټریکس په طریقه حل کړئ.

$$a)\ \begin{cases}3x+y+1=0\\ 4x+3y-2=0\end{cases}\qquad b)\ \begin{cases}x-y=2\\ x+2y=-1\end{cases}$$

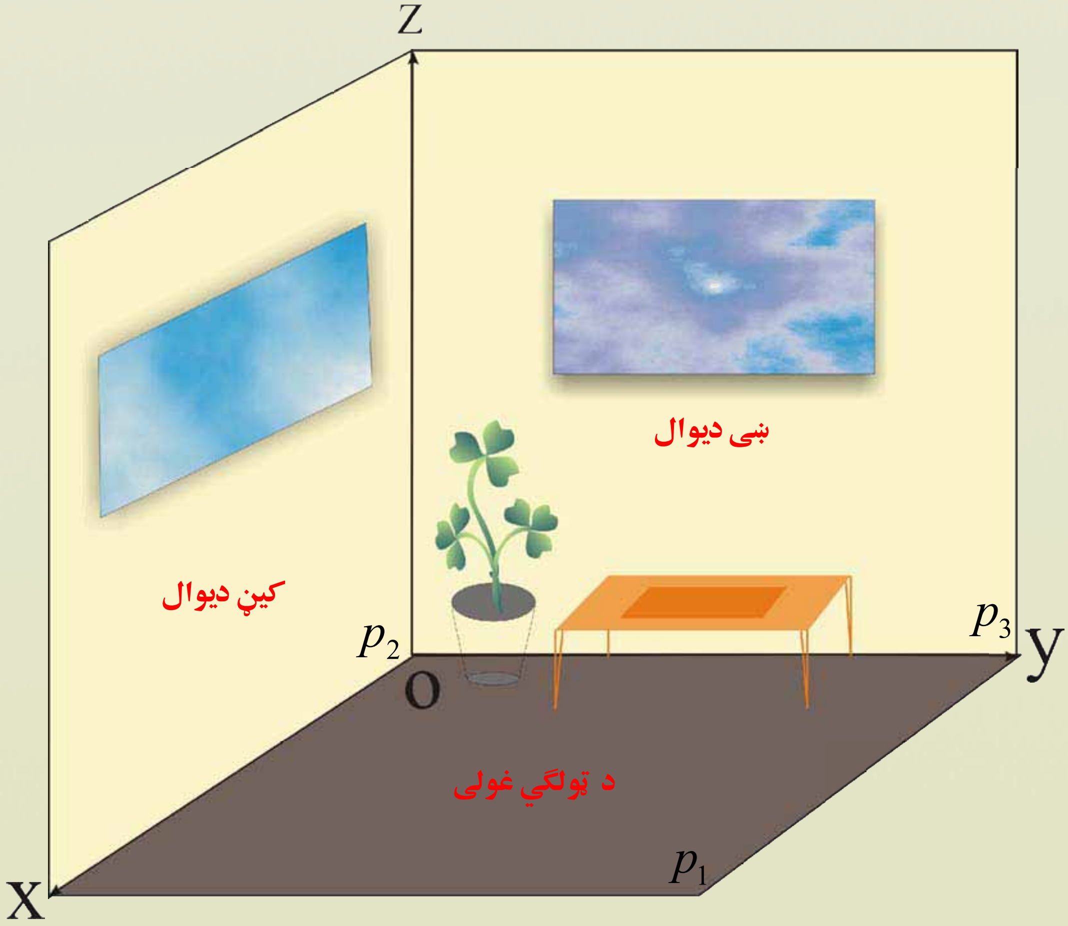
(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

اووم څپرکی

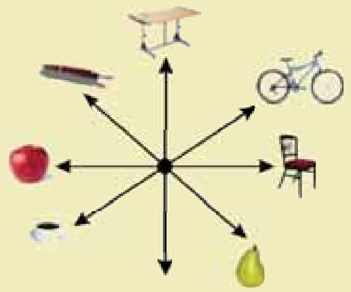
وکتورونه

(c) ketabton.com: The Digital Library



د وضیعه کمیتونو په قایم سیستم کې وکتورونه

له یوه ټاکلي ټکي څخه د هغې شاوخوا بېلابېلو پرتو شیانو ته لنډې لاره په نښه کړئ.



تعریف

جهت لرونکي قطعه خط ته وکتور وايي، یا په بل عبارت هغه کمیت چې هم مقدار لري او هم جهت لري؛ لکه قوه، فاصله، تعجیل او داسې نور. هر غشی د یو وکتور ممثل دی.

هغه وکتور چې مبداء یې د وضعیه کمیتونو د قایم سیستم په مبداء کې پروت وي، د شعاع وکتور (Position Vector) په نامه یادیږي.

فعالیت

- د وضعیه کمیاتو په قایم سیستم کې شعاع وکتور داسې رسم کړئ چې د پای ټکی یې د $B\ (5,5)$ مختصات ولري.
- د پورتنی راکړل شوي وکتور درې ممثل وکتورونه په راکړل شوو قایمو مخصاتو کې داسې رسم کړئ چې وکتور او شعاع وکتورونه یې توپیر سره ولري.
- یو بل وکتور رسم کړئ چې له پورتني وکتور سره مساوي او مخالف لوري او شعاع وکتور وي.

له پورتني فعالیت څخه لاندې پایله ترلاسه کیږي.

پایله: په یوه مستوي او په فضا کې هر ممثل وکتور د خپل شعاع وکتور په اندازه وي، نولرو چې:

1. د $\vec{a}$ او $\vec{b}$ دوه وکتورونه هغه وخت مساوي بلل کیږي، چې اوږدوالی یې مساوي، $(|\vec{a}|=|\vec{b}|)$ موازي او د یو جهت لرونکی وي.
2. که چیرې یو وکتور $\vec{AB}=0$ وي، په دې صورت کې د $\vec{AB}$ وکتور صفري وکتور (Zero Vector) بلل کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

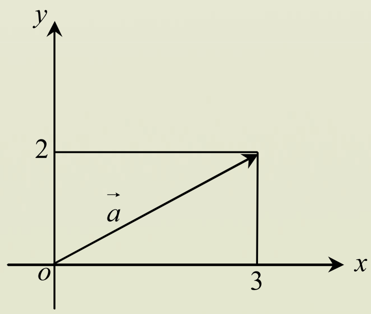
3. دوه وکتورونه هغه وخت مخالف یا منفي بلل کیږي چې اوږدوالی یې مساوي او جهت یې مخالف وي، د بیلګې په توګه:

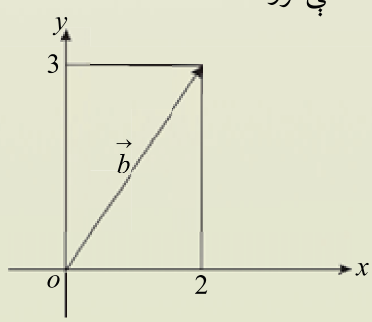
که $\vec{OA}=\vec{a}$ وي، نو $\vec{AO}=-\vec{a}$ دی، په داسې حال کې چې: $(|\vec{OA}|=|\vec{AO}|)$ وي.

تعریف: د وضعیه کمیتونو په قایم سیستم کې یو وکتور په ستوني شکل داسې ښوول کېږي $\vec{a}=\begin{pmatrix}a_x\\a_y\end{pmatrix}$ په داسې حال کې چې a_x د x پرمحور وضعیه کمیت او a_y د y پرمحور د $\vec{a}$ وکتور فاصله او ترتیب ښیي.

لومړی مثال: د وضعیه کمیتونو په قایم سیستم کې د $\vec{a}=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ او $\vec{b}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ وکتورونه وښایاست؟

حل: د پورتني تعریف له مخې لرو:





یادونه: د یو وکتور د ښوولو لپاره یوه مستوي په دې خاطر کارول کېږي، چې د قایم مختصاتو په سیستم کې د یو ټکي د ښودلو لپاره د مختصاتو په سیستم کې یوازې یو ځای شته، په داسې حال کې چې په مستوي کې د یو وکتور د ښودلو لپاره چې هماغه وکتور په مستوي کې ځای نیولی شي، بې نهایت ځایونه شته.

پوښتنې

1. د هغو وکتورونو لپاره چې په لومړي مثال کې ورکړل شوي دي، مطلوب دي:

a. د هر یوه وکتور درې ممثل وکتورونه رسم کړئ.

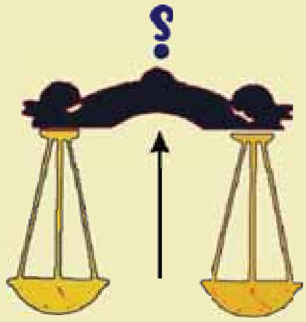
b. دواړه وکتورونه د شعاع وکتور په موقعیت کې رسم کړئ.

c. د هغوی مخالف وکتورونه کوم وکتورونه دي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دوو ټکو ترمنځ واټن او منځنی ټکی

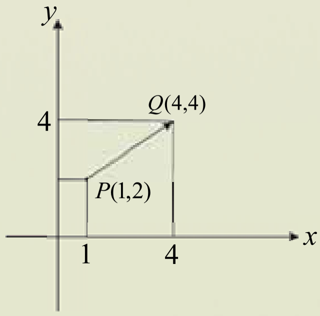
د تلې دوه یو شان او هم وزنه پلې په پام کې نیسو، چې د یو شاهین په دواړو خواوو کې تړل شوي دي. د تلې د شاهین په لاس کې نیولو لپاره کوم ټکی وټاکو چې په نیولو یې د تلې پلې تعادل غوره کړي؟



فعالیت

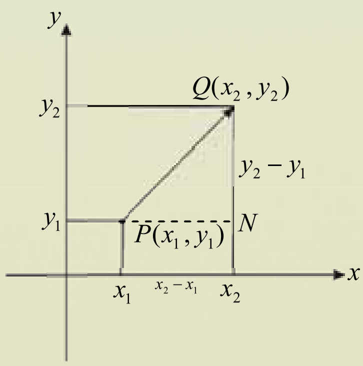
د وضعیه کمیاتو په قایم سیستم کې د لاندې شکل په څیر $P(1,2)$ او $Q(4,4)$ ټکې په پام کې ونیسئ:

- د $\vec{PQ}$ د وکتور اوږدوالی څومره دی؟
- آیا د $\vec{PQ}$ د وکتور د اوږدوالی یا د P او Q دوو ټکو ترمنځ د واټن لپاره فارمول ورکولای شئ؟
- د $\vec{PQ}$ د منځني ټکي وضعیه کمیتونه څومره دي؟
- آیا کولای شئ د دوو ټکو د واټن او د هغوی د منځني ټکي
- لپاره د فورمول په واسطه یو عمومي حالت څرګند کړئ؟



د پورتني فعالیت له پای څخه لاندې پایلې ته رسیږو:

پایله: د $\vec{a}=\vec{PQ}$ وکتور د هرو دوو اختیاري ټکو لپاره چې $P(x_1,y_1)$ مبداء او $Q(x_2,y_2)$ انجام دی په دې صورت کې وکتور په $\vec{a}=\begin{pmatrix}a_x\\a_y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_2-x_1\\y_2-y_1\end{pmatrix}$ سره ښیو، د $P\overset{\Delta}{Q}N$ قایم الزاویه مثلث په پام کې نیولو سره د $|\vec{a}|$ د وکتور اوږدوالی عبارت دی، له: $|\vec{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2}$



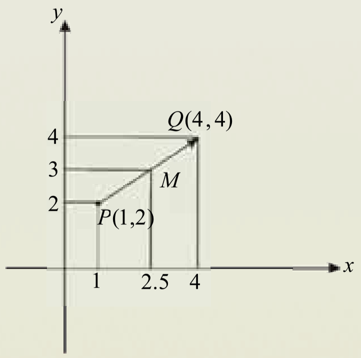
- د $\vec{PQ}$ منځنی ټکی عبارت دی، له:

$$M=\begin{pmatrix}x_m\\y_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{x_1+x_2}{2}\\\frac{y_1+y_2}{2}\end{pmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی مثال: د $P(1,2)$ او $Q(4,4)$ د دوو ټکو ترمنځ واټن او منځنی ټکی پیدا کړئ؟

حل: د منځني ټکي د فورمول په کارولو سره لرو:



$$M=\begin{pmatrix}x_m\\ y_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1+4}{2}\\ \frac{2+4}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{5}{2}\\ \frac{6}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2.5\\ 3\end{pmatrix}$$

نو د منځني ټکي وضعیه کمیت له $M=\begin{pmatrix}2.5\\ 3\end{pmatrix}$ څخه عبارت دی او د P او Q د دوو ټکو د واټن د پیداکولو لپاره د فیثاغورث د قضیې په پام کې نیولو سره لرو:

$$|\overrightarrow{PQ}|=\sqrt{a_x^{\,2}+a_x^{\,2}}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(4-1)^2+(4-2)^2}=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$$

دویم مثال: د $A(2,4)$ او $B(5,5)$ د ټکو ترمنځ واټن او منځنی ټکی پیدا کړئ.

حل: د منځني ټکي د فورمول په کارولو سره لرو:

$$M=\begin{pmatrix}x_m\\ y_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2+5}{2}\\ \frac{5+4}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{7}{2}\\ \frac{9}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3.5\\ 4.5\end{pmatrix}$$

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(5-2)^2+(5-4)^2}=\sqrt{9+1}=\sqrt{10}$$

پوښتنې

د لاندې ورکړ شوو ټکو ترمنځ واټن او منځني ټکي پیدا کړئ.

$i)\ B(2,7)\quad,\quad A(3,4)$

$ii)\ N(5,1)\quad,\quad M(1,5)$

$iii)\ Q(8,8)\quad,\quad P(1,8)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

وکتورونه په سطح او فضا کې

د تلسکوپ په واسطه د ستورو د تګلوري ليدل په فضا کې ځانګړې وکتورونه ښيي.

د يوې سطحې پرمخ د وکتورونو لپاره يوه بېلګه راوړلای شئ؟

فعاليت

د لاندې شکل له مخې د وضعيه کمياتو د قايم سيستم او د $IR^2 = \{(x,y) \ / \ x,y \in IR\}$ سټ په پام کې نيولو سره لاندې فعاليت سرته ورسوئ.

- د وضعيه کمياتو په سيستم کې د P يو ټکی چې وضعيه کميتونه يې (x,y) دی، په مستوي کې وټاکئ.
- د $\vec{u}$ يو شعاع وکتور چې وضعيه کميتونه يې $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ دي، د وضعيه کميتونو په سيستم کې وښيئ.
- په مستوي کې د P يو ټکی چې وضعيه کميتونه يې (x,y) دي، په مستوي کې له $\vec{u}$ يو وکتور سره څه توپير لري چې وضعيه کميتونه يې $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ وي؟
- د $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ او $\vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ دوه اختياري وکتورونه او $a \in IR$ يو سکالر لپاره په هندسي توګه د وضعيه کميتونو په قايم سيستم کې په جلا جلا ډول وښيئ، چې:

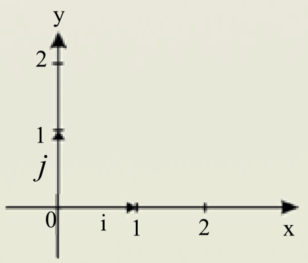
i) $\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \end{pmatrix}$ (د جمعي قاعده)

ii) $a \cdot \vec{u} = a\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax \\ ay \end{pmatrix}$ (دسکالري ضرب قاعده)

تعريف: د هغو ټولو مرتبو جوړو سټ چې د پورته قاعدې په څېر د جمعي او سکالري ضرب قاعدې پرې تطبيق وي، د IR^2 (مستوي) د وکتورونو فضا او يا په مستوي کې د وکتور په نامه يادېږي.

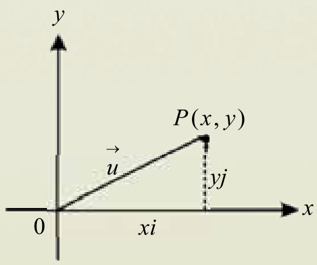
له پورتني فعاليت او تعريف څخه لاندې پايله لاسته راځي:

پایله: د دوو ځانګړو وکتورونو $\vec{i}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ او $\vec{j}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ په پام کې نیولو سره چې اوږدوالی یې یو واحد او $|\vec{i}|=|\vec{j}|$ دي. هر اختیاري وکتور $\vec{u}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ لپاره لرو:



$$\vec{u}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\y\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=x\vec{i}+y\vec{j}$$

$$\Rightarrow \vec{u}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=x\vec{i}+y\vec{j}$$



$\vec{i}$ او $\vec{j}$ واحد وکتورونه دي چې د x او y محورونو په امتداد پراته دي.

واحد وکتور(unit victor): هغه وکتور دی چې طول یې یو واحد او د مختصې د جهت د تزاید لپاره ترې کار اخلي.

لومړی مثال: که $\vec{u}=\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$ او $\vec{v}=\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$ وي، د لاندې وکتورونو قیمت پیدا کړئ.

(i): $\vec{u}+\vec{v}=?$ (ii): $4\vec{u}+2\vec{v}=?$ (iii): $\vec{u}-\vec{v}=?$

(iv): $\vec{u}-\vec{u}=?$ (v): $|\vec{u}|=?$

حل:

$$i)\quad \vec{u}+\vec{v}=\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+2\\-3+5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}=3\vec{i}+2\vec{j}$$

$$ii)\quad 4\vec{u}+2\vec{v}=4\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4+4\\-12+10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\-2\end{pmatrix}=8\vec{i}-2\vec{j}$$

$$iii)\quad \vec{u}-\vec{v}=\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-2\\-3-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-8\end{pmatrix}=-\vec{i}-8\vec{j}$$

$$iv)\quad \vec{u}-\vec{u}=\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=0$$

$$v)\quad |\vec{u}|=\sqrt{1^2+(-3)^2}=\sqrt{1+9}=\sqrt{10}$$

پوښتنه

1. که $\vec{u}=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ او $\vec{v}=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ وي، $\vec{u}+2\vec{v}$ ، $\vec{u}-2\vec{v}$ او $2\vec{u}+4\vec{v}$ پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په درې بعدي فضا کې د ټکي مختصات

که د ټولګي په فضا کې یو ټکی وټاکئ آیا داسې یوه د حل لاره شته چې د ټکي واټن نسبت د ټولګي غولی او مجاور دیوال ته وټاکو؟

تعریف

درې بُعدي IR^3 فضا د ټولو هغو مرتبو درې ګونو (x,y,z) څخه عبارت دی چې په لاندې ډول تعریفیږي:

$$IR^3 = IR \times IR \times IR = \{(x,y,z)/x,y,z \in IR\}$$

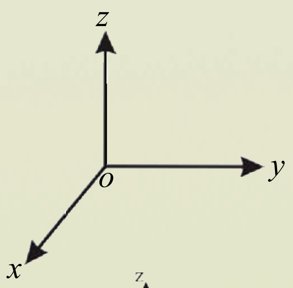
هغه درې مستویګانې p_3, p_2, p_1 چې دوه په دوه یو په بل عمود دي، د درې بُعدي فضا د مختصاتو مستویګانې بلل کیږي.

د دغو مستویګانو د دوه په دوه ګډ فصل درې قایمې زاویې جوړوي چې هغه د درې بُعدي فضا قایم مختصات بولي. د درې بعدي فضا قایم مختصات داسې نوموي چې که یو تن ودریږي، هغه محور چې د لیدونکي د تنې په لور دی، د z محور او هغه محور چې د لیدونکي د لید په لور دی د y محور او هغه محور چې د لیدونکو د ښي لاس په لور پروت دی، د x محور دی او د دغو درې واړو محورونو د تقاطع ټکی له O ټکي څخه عبارت دی . چې د قایمو مختصاتو مبداء ښیي.

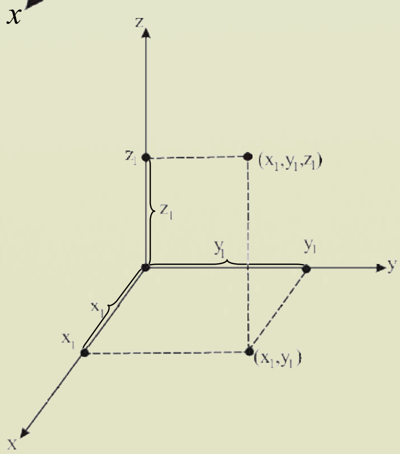
په درې بعدي فضا کې د یوه ټکي مختصات له هغه واټن څخه عبارت دی چې له درې واړو مستویګانو څخه یې لري.

د ټکي واټن د مختصاتو له مستویګانو څخه په $|x|$، $|y|$ او $|z|$ سره ښیي.

په درې بعدي فضا کې د یوه ټکي د ځای ټاکل:



د درې بعدي فضا په قایمو مختصاتو کې د $A(x_1,y_1,z_1)$ ټکي د ټاکلو لپاره د هرې مختصې په اړوند محور باندې د مختصې د علامې په پام کې نیولو سره فاصلې جلا کوو، لومړی د x له محور څخه موازي خط د y له محور سره رسموو، د تقاطع ټکی یې چې (x,y) دی، پیدا او وروسته له یاد شوي ټکي څخه یو بل خط موازي د z له محور سره رسموو، په پایله کې د تقاطع ټکی په لاس راځي چې په دې ترتیب د ټکي ټاکل په درې بعدي فضا کې بشپړیږي.



(c) ketabton.com: The Digital Library

یادونه: په درې بعدي فضا کې د x, y او z مختصو منفي جهتونه د نومورو محورونو له امتداد یافته څخه عبارت دی.

فعالیت

- د $A(2,4,3)$ او $B(-2,-3,3)$ ټکي د درې بعدي فضا قایم سیستم کې وښایاست.

په فضا کې د $P(x,y,z)$ یو ټکی چې د $\vec{OP}$ وکتور له $\vec{u}$ سره مساوي دی، د IR^2 د فضا په شان په درې بعدي په فضا یا IR^3 کې هم د جمعې او سکالري ضرب قاعدې د $\vec{u}$ او $\vec{v}$ دواړو وکتورونو لپاره او د a سکالر لپاره صورت نیسي:

$$\vec{u}+\vec{v}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+x'\\y+y'\\z+z'\end{pmatrix}$$ (د جمعې قاعده)

$$a\cdot\vec{u}=a\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ax\\ay\\az\end{pmatrix}$$ (د سکالري ضرب قاعده)

لومړی مثال: که $\vec{v}=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$ او $\vec{w}=\begin{pmatrix}-1\\4\\0\end{pmatrix}$ وي، $\vec{v}+\vec{w}$ ، $\vec{v}-\vec{w}$ ، $2\vec{w}$ او $|\vec{v}-2\vec{w}|$ پیدا کړئ.

حل: لرو چې:

$$i)\quad \vec{v}+\vec{w}=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\4\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-1\\1+4\\3+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\5\\3\end{pmatrix}$$

$$ii)\quad \vec{v}-\vec{w}=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1\\4\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+1\\1-4\\3-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-3\\3\end{pmatrix}$$

$$iii)\quad 2\vec{w}=2\begin{pmatrix}-1\\4\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\8\\0\end{pmatrix}$$

$$iv)\quad |\vec{v}-2\vec{w}|=\left|\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-2\\8\\0\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}2+2\\1-8\\3-0\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}4\\-7\\3\end{pmatrix}\right|=\sqrt{4^2+(-7)^2+3^2}$$

$$=\sqrt{16+49+9}=\sqrt{74}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

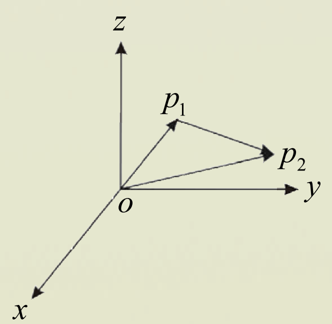
یادونه:

A- کیدای شي سطحې ته ورته درې واحد وکتورونه $\vec{i}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ ، $\vec{j}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ ، $\vec{k}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ چې:

$|\vec{i}|=|\vec{j}|=|\vec{k}|=1$ دي، په درې بعدي فضاکې په پام کې نیول شوی، د z, y, x محورونو په امتداد د واحد د وکتورونو په نامه یاد کړو. د جمعې د قاعدې په پام کې نیولو سره د $\vec{v}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ هر اختیاري وکتور د واحد وکتور په پام کې نیولو سره په لاندې توګه ښودلی شو:

$$\vec{v}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\y\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\z\end{pmatrix}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$$

B- **په فضاکې د دوو ټکو ترمنځ واټن**: که چېرې $\overrightarrow{OP_1}$ او $\overrightarrow{OP_2}$ د $P_1(x_1, y_1, z_1)$ او $P_2(x_2, y_2, z_2)$ د ټکو دوه شعاع وکتورونه وي، په دې توګه لرو:



$$\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{P_1P_2}=\overrightarrow{OP_2} \Rightarrow \overrightarrow{P_1P_2}=\overrightarrow{OP_2}-\overrightarrow{OP_1}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{p_1p_2}=\begin{pmatrix}x_2-x_1\\y_2-y_1\\z_2-z_1\end{pmatrix}$$

نو د P_1 او P_2 د ټکو ترمنځ د واټن د پیداکولو لپاره لرو:

$$\left|\overrightarrow{P_1P_2}\right|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

پورتنی فورمول د P_1 او P_2 ټکو ترمنځ واټن ښيي.

C- که په درې بُعدې فضاکې د یو ټکي واټن له مبدأ څخه مطلوب وي یعنې $(x_1, y_1, z_1)=(0,0,0)$ او $(x_2, y_2, z_2)=(x, y, z)$ وي؛ نو د ټکي واټن له مبدأ څخه د لاندې فورمول په واسطه پیداکولای شو:

$$\left|\overrightarrow{p_1p_2}\right|=\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2+(z-0)^2}=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم مثال: که $\vec{a}=(-5\ ,\ 4\ ,\ 5)$ وی؛ نو د نومړي شعاع وکتور طول څو دی؟

حل: د شعاع وکتور موقعیت ته په کتني څرنګه چې د شعاع وکتور مبدأ د وضعیه کمیاتو په مبدأکې پرته ده د C جز له فورمول څخه ګټه اخلو:

$$|\vec{a}|=\sqrt{x^2++y^2+z^2}=\sqrt{(-5)^2+4^2+5^2}=\sqrt{25+16+25}=\sqrt{66}$$

دریم مثال: که $\vec{u}=2\vec{i}+3\vec{j}+\vec{k}$ ، $\vec{v}=4\vec{i}+6\vec{j}+2\vec{k}$ او $\vec{w}=6\vec{i}-9\vec{j}-3\vec{k}$ راکړل شوی وي.

ومومئ $ii)\ |\vec{u}-\vec{v}-\vec{w}|=?$ $i)\ \vec{u}+2\vec{v}=?$

حل: لرو چې:

$$i)\ \vec{u}+2\vec{v}=2\vec{i}+3\vec{j}+\vec{k}+2(4\vec{i}+6\vec{j}+2\vec{k})$$
$$=2\vec{i}+3\vec{j}+\vec{k}+8\vec{i}+12\vec{j}+4\vec{k}=(10\vec{i}+15\vec{j}+5\vec{k})$$

$$ii)\ \left|(2-4-6)\vec{i}+(3-6-9)\vec{j}+(1-2+3)\vec{k}\right|=\left|-8\vec{i}-12\vec{j}+2\vec{k}\right|$$
$$=\sqrt{(-8)^2+(-12)^2+2^2}=\sqrt{64+144+4}$$
$$=\sqrt{212}$$

پوښتني

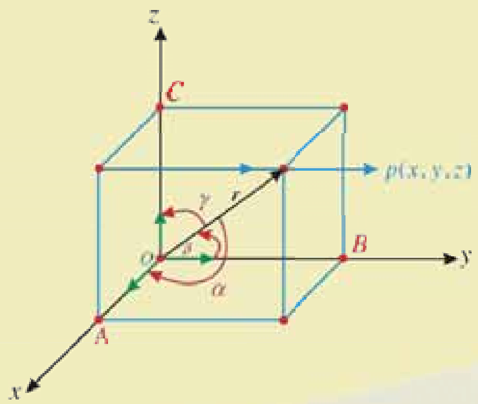
1. د $\vec{u}$ او $\vec{v}$ وکتورونو جهت ته واحد وکتور پیداکړئ.
2. په دریم مثال کې چې $\vec{u},\vec{v}$ او $\vec{w}$ وکتورونه راکړل شوي دي په پام کې ونیسئ او لاندې پوښتنو ته ځوابونه وموميځ.

$a)\ 2\vec{u}-6\vec{v}+4\vec{w}=?$ $b)\ |\vec{u}-\frac{1}{3}\vec{v}-2\vec{w}|=?$

3. $\vec{u}$ او $\vec{v},\vec{v}$ او $\vec{w},\vec{w}$ او $\vec{u}$ وکتورونو ترمنځ واټن پیداکړئ.
4. هغه وکتور واحدونه پیداکړئ چې د $\vec{v},\vec{u}$ او $\vec{w}$ وکتورونو په جهت پراته دي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

د یوه وکتور د جهت زاویې او کوساینونه



تعریف: که د $\vec{r}$ شعاع وکتور د قایمو مختصاتو له محورونو سره په ترتیب د α, β او γ زاویې جوړې کړي په دې صورت کې شکل ته په پام لیکلای شو:

$$\overrightarrow{OP} = \vec{r}$$
$$\overrightarrow{OA} = \vec{r}_x$$
$$\overrightarrow{OB} = \vec{r}_y$$
$$\overrightarrow{OC} = \vec{r}_z$$

کولای شو د $\vec{r}$ د وکتور د جهت کوساینونه په لاندې ډول ولیکو:

$$\cos\alpha = \frac{x}{r} \Rightarrow x = r\cos\alpha$$
$$\cos\beta = \frac{y}{r} \Rightarrow y = r\cos\beta$$
$$\cos\gamma = \frac{z}{r} \Rightarrow z = r\cos\gamma$$

د پورتنیو اړیکو چپ لوری مربع کوو او وروسته یې سره جمع کوو:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} + \frac{z^2}{r^2} = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{r^2}$$

پوهېږو چې $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ دی، نو:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{r^2}{r^2} = 1$$

فعالیت

که چېرې په یوه درې بعدي فضا کې $\vec{v} = \overrightarrow{OP} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ وکتور چې د صفر خلاف دی، ورکړ شوی وي، داسې چې د پورته شکل په شان α، β او γ په ترتیب سره د $\vec{v}$ وکتور زاویې او $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ واحد وکتورونه وي، په دې ډول لاندې فعالیت اجرا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

- آیا ویلاي شئ چې د α , β او γ زاویې په کومه اندازه تحول کوي؟
- آیا له پورتنیو زاویو څخه یوه یې منفي کیدای شي؟
- که چیرې له زاویو څخه یوه یې صفر شي، د وکتور د موقعیت په هکله څه ویلای شئ؟
- د $\vec{v}$ د وکتور جهت زاویو کوساین لپاره یوه ګډه اړیکه پیدا کړئ؟

له پورتني فعالیت څخه لاندې پایلې ته رسیږو:

پایله: که په فضا کې د $\vec{v}$ یو وکتور، چې صفر نه وي، یعنې $\vec{v}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$، راکړل شوی وي، نو د جهت د زاویو د کوساینونو ترمنځ لاندې اړیکې شته:

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$$

د پورتنۍ پایلې د ثبوت لپاره پوهیږو، چې:

$$\left|\vec{v}\right|=\left|\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right|=\left|x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}\right|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

له بلې خوا د جهت د واحد وکتور یا د $\vec{v}=\vec{OP}$ مسیر عبارت دی، له:

$$\frac{\vec{v}}{\left|\vec{v}\right|}=\begin{pmatrix}\frac{\vec{v}_x}{\left|\vec{v}\right|}\\ \frac{\vec{v}_y}{\left|\vec{v}\right|}\\ \frac{\vec{v}_z}{\left|\vec{v}\right|}\end{pmatrix}$$

پوښتنې

1. که $\vec{u}=\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$، $\vec{v}=3\vec{i}-2\vec{j}+2\vec{k}$ او $\vec{w}=5\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}$ وي، پیدا کړئ؟

$a)$ $\vec{u}+2\vec{v}+\vec{w}=?$ $\quad b)$ $v-3\vec{w}=?$ $\quad c)$ $\left|3\vec{v}+\vec{w}\right|=?$

2. د α اندازه داسې پیدا کړئ چې د $\alpha\,\vec{i}+(\alpha+1)\,\vec{j}+2\vec{k}$ وکتور اوږدوالی مساوي په 3 وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دوو وکتورونو د سکالري ضرب حاصل

د دوو وکتورونو د سکالر ضرب حاصل د انجینري او فزیک په زده کړه کې په کارېږي او د هغو ترمنځ زاویې په پام کې نیولو سره له یو سکالري کمیت سره مساوي دی، که چیرې:
$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\theta$ وي، نو $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$ ده، که نه؟

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\theta$$

تعریف

$\vec{u}$ او $\vec{v}$ دوه وکتورونه چې صفر نه وي په مستوي یا فضا کې په پام کې نیسو.
د $\vec{u}$ او $\vec{v}$ سکالري ضرب حاصل په $\vec{u}\cdot\vec{v}$ سره ښیو، چې حاصل یې عبارت دی، له: $\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cos\theta$
په داسې حال کې چې θ د $\vec{u}$ او $\vec{v}$ ترمنځ زاویه جوړه کړې او $(0\le\theta\le\pi)$ سره دي.

فعالیت

د وکتورونو د سکالري ضرب د حاصل په پام کې نیولو سره وښایاست، چې:

$i)$ $\vec{i}\cdot\vec{i}=1,\ \vec{j}\cdot\vec{j}=1,\ \vec{k}\cdot\vec{k}=1$

$ii)$ $\vec{i}\cdot\vec{j}=0,\ \vec{j}\cdot\vec{k}=0,\ \vec{k}\cdot\vec{i}=0$

$iii)$ $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$

$iv)$ که $\vec{u}$ او $\vec{v}$ د صفر خلاف او $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$ وي، نو وکتورونه یو پر بل عمود دي.

- د دوه $\vec{a}=a_1\vec{i}+b_1\vec{j}$ او $\vec{b}=a_2\vec{i}+b_2\vec{j}$ وکتورونو لپاره د $\vec{a}\cdot\vec{b}$ ضرب حاصل د $a_1a_2+b_1b_2$ له سکالري قیمت سره مساوي دی.
- په فضا کې د $\vec{a}\cdot\vec{b}$ د ضرب حاصل مطلوب یا غوښتل شوی په دې ډول چې $\vec{a}=a_1\vec{i}+b_1\vec{j}+c_1\vec{k}$ او $\vec{b}=a_2\vec{i}+b_2\vec{j}+c_2\vec{k}$ وي.

د وکتورونو د سکالري ضرب حاصل لپاره له پورتني فعالیت څخه لاندې پایله لاسته راځي.

پایله: که $\vec{u}$، $\vec{v}$ او $\vec{w}$ درې اختیاري وکتورونه او c یو حقیقي عدد وي، نو لرو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$i)\quad \vec{u}\cdot\vec{v}=0 \Rightarrow \vec{u}\perp\vec{v}$

$ii)\quad \vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$ (د ضرب تبادلوي خاصيت يا خانګړتيا).

$iii)\quad \vec{u}(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\,\vec{v}+\vec{u}\,\vec{w}$ (د ضرب توزيعي خاصيت په جمع).

$iv)\quad (c\cdot\vec{u})\,\vec{v}=c(\vec{u}\cdot\vec{v})$ در ضرب توزيعي خاصيت.

لومړی مثال: که $\vec{u}=a_1\vec{i}+b_1\vec{j}+c_1\vec{k}$ او $\vec{v}=a_2\vec{i}+b_2\vec{j}+c_2\vec{k}$ دوه وکتورونه د صفر خلاف وي، د سکالري ضرب حاصل يې پيدا کړئ.

حل: د تعريف له مخې لرو چې:

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=(a_1\vec{i}+b_1\vec{j}+c_1\vec{k})(a_2\vec{i}+b_2\vec{j}+c_2\vec{k})$$

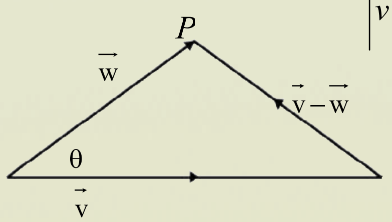
$$=a_1\cdot a_2(\vec{i}\cdot\vec{i})+a_1b_2\cdot(\vec{i}\cdot\vec{j})+a_1c_2(\vec{i}\cdot\vec{k})+b_1a_2(\vec{j}\cdot\vec{i})+b_1b_2(\vec{j}\cdot\vec{j})+b_1c_2(\vec{j}\cdot\vec{k})$$

$$+c_1\cdot a_2(\vec{k}\cdot\vec{i})+c_1b_2(\vec{k}\cdot\vec{j})+c_1c_2(\vec{k}\cdot\vec{k})=a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2$$

دويم مثال: که $\vec{v}=\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}$ او $\vec{w}=\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}$ د يو ې مستوي دوه وکتورونه وي، وښاياست چې:

$$\vec{v}\cdot\vec{w}=x_1x_2+y_1y_2$$

حل: د تعريف له مخې لرو: $|\vec{v}-\vec{w}|^2=|\vec{v}|^2+|\vec{w}|^2-2\vec{v}\cdot\vec{w}\cdot\cos\theta$



ځرنګه چې $\vec{v}=\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}$ ، $\vec{w}=\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}$ په پايله کې $\vec{v}-\vec{w}=\begin{pmatrix}x_1-x_2\\y_1-y_2\end{pmatrix}$ دي، نو د پورتني اړيکې څخه لرو:

$$|x_1-x_2|^2+|y_1-y_2|^2=|x_1^2+y_1^2|+|x_2^2+y_2^2|-2|\vec{v}|\cdot|\vec{w}|\cos\theta$$

$$\Rightarrow -2x_1x_2-2y_1y_2=-2|\vec{v}|\cdot|\vec{w}|\cos\theta/\div -2$$

$$\Rightarrow x_1x_2+y_1y_2=|\vec{w}|\cdot|\vec{v}|\cos\theta=\vec{v}\cdot\vec{w}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دریم مثال: که چېرې د $\vec{u}=\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$ او $\vec{v}=\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$ وکتورونه درکړ شوي وي، د سکالري ضرب حاصل یې پیدا کړئ.

حل: د فورمول په پام کې نیولو سره لرو:

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=(\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k})(\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k})=i^2+4j^2+k^2=1+4+1=6$$

څلورم مثال: وښایاست چې د $\vec{u}=2\vec{i}-4\vec{j}+5\vec{k}$ او $\vec{v}=4\vec{i}-3\vec{j}-4\vec{k}$ وکتورونه یو پر بل عمود دي.

حل: په دې هکله لرو:

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=(2\vec{i}-4\vec{j}+5\vec{k})(4\vec{i}-3\vec{j}-4\vec{k})=(2)(4)+(-4)(-3)+(5)(-4)$$

$$=8+12-20=0 \quad \Rightarrow \vec{u}\perp\vec{v}$$

څرنگه چې د وکتورونو د سکالري ضرب حاصل مساوي په صفر شو، نو وکتورونه یو پر بل عمود دي.

پنځم مثال: د α قیمت داسې پیدا کړئ چې د $2\vec{i}+\alpha\vec{j}+5\vec{k}$ او $3\vec{i}+\vec{j}+\alpha\vec{k}$ وکتورونه یو پر بل عمود وي.

حل: د $\vec{u}$ او $\vec{v}$ وکتورونو له عمود والي څخه دې پایلې ته رسېږو چې: $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$ دی، نو لرو:

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=(2\vec{i}+\alpha\vec{j}+5\vec{k})\,(3\vec{i}+\vec{j}+\alpha\vec{k})=0 \quad \Rightarrow \quad 6+\alpha+5\alpha=0 \;,\; \alpha=-1$$

شپږم مثال: وښایاست چې د $2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$ ، $\vec{i}-3\vec{j}-5\vec{k}$ او $3i-4j-4k$ وکتورونه د یو قایم الزاویه مثلث ضلعې دي.

حل: که $\overrightarrow{AB}=2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$ او $\overrightarrow{BC}=\vec{i}-3\vec{j}-5\vec{k}$ د مطلوب مثلث دوه ضلعې په پام کې ونیسو، نو دریمه ضلع یې د مثلث د وکتورونو د جمعې حاصل په پام کې نیولو سره چې د مثلث دریمه ضلع تاکې عبارت دی له:

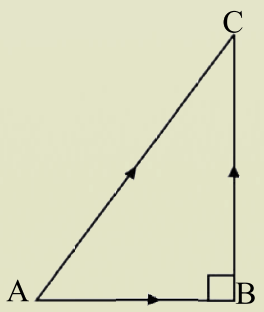
$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=(2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k})+(\vec{i}-3\vec{j}-5\vec{k})$$

(چې د مثلث له دریمې ضلعې څخه عبارت دی) $3\vec{i}-4\vec{j}-4\vec{k}$ اوس ښیو چې نوموړی مثلث قایم الزاویه دی، د دې لپاره د وکتوري ضرب حاصل $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=0$ وي.

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=(2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k})\,(\vec{i}-3\vec{j}-5\vec{k})$$

$$=(2)(1)+(-1)(-3)+(1)(-5)=2+3-5=0$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{BC}$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

1. وښایاست چې د $\vec{v}=a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k}$ د وکتور مرتسمونه د $\vec{k},\vec{j},\vec{i}$ واحد وکتورونو په امتداد په ترتیب سره له c,b,a سره مساوي دي.

2. وښایاست چې هر $\overset{\Delta}{ABC}$ کې لاندې اړیکې وجود لري:

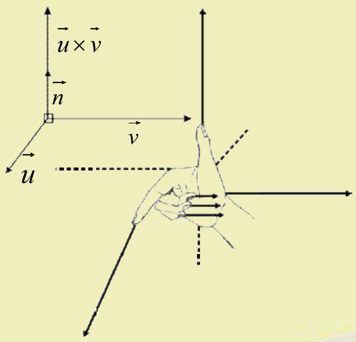
$i)\ a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos A \qquad ii)\ a=b\cdot\cos C+c\cdot\cos B$

3. ثبوت کړئ چې: $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د وکتوري ضرب حاصل

The cross Product



د راکړل شوي شکل له مخې د کوم لاس (ښي یا کیڼ) په واسطه د $\vec{v}\cdot\vec{u}$ او $\vec{u}\times\vec{v}$ وکتورونه داسې وښیو چې $\vec{u}$ د ورغوي په جهت، $\vec{v}$ د ځنګل په جهت او $\vec{u}\times\vec{v}$ د ښي لاس د غټې ګوتې په لور واقع شي؟

تعریف

د $\vec{u}$ او $\vec{v}$ دوه وکتورونه، چې صفر نه وي، په پام کې نیسو. د $\vec{u}$ او $\vec{v}$ دوو وکتورونو د وکتوري ضرب حاصل په $\vec{u}\times\vec{v}$ چې($\vec{u}$ کرس $\vec{v}$ لوستل کیږي) عبارت دی، له: یعنې د دوو وکتورونو وکتوري ضرب له هغه دریم وکتور څخه عبارت دی چې د دوی د مبدأ په ټکي عمود وي.

$$\vec{u}\times\vec{v}=(|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\sin\theta)\,\vec{n}$$

په داسې حال کې چې θ د $\vec{u}$ او $\vec{v}$ $(0\le\theta\le\pi)$ وکتورنو تر منځ زاویه او $\vec{n}$ د $\vec{u}$ او $\vec{v}$ د وکتورونو په واسطه جوړه شوې مستوي له عمود واحد وکتور څخه عبارت دی، د ښي لاس قاعدې په واسطه (Right hand rule) ښودل کیږي.

د دوو وکتورونو وکتوري ضرب

مخکې له دې چې د دوو وکتورنو وکتوري ضرب توضیح کړو، لازمه ده چې د وکتورونو خطي ترکیب، وکتوري فضا، د وکتورونو خطي خپلواکي(استقلال) په لنډ ډول تر څېړنې لاندې ونیسو.

1. **د وکتورونو خطي ترکیب**: د یوه سټ د وکتورونو د سکالري مضربونو مجموعه د همغه سټ د وکتورونو د خطي ترکیب په نامه یادېږي.

که $\vec{a}_n ,\ \dots ,\vec{a}_2 ,\vec{a}_1$ د یوه سټ وکتورونه او $\alpha_n \in IR ,\ \dots ,\alpha_2 ,\alpha_1$ سکالرونه وي، په دې صورت کې د $\vec{a}$ وکتور په داسې حال کې چې $\vec{a}=\alpha_1\vec{a}_1+\alpha_2\vec{a}_2+\dots+\alpha_n\vec{a}_n$ وي، $\vec{a}$ وکتور د $\vec{a}_n ,\ \dots ,\vec{a}_2 ,\vec{a}_1$ وکتورونو د خطي ترکیب په نامه یادېږي.

لومړی مثال: که $\vec{a}_1=2i+j-3k$ او $\vec{a}_2=i+2j+2k$ وکتورونه راکړل شوي وي، د هغوی خطي ترکیب په لاس راوړئ، په داسې حال کې چې $\alpha_1=5$ او $\alpha_2=2$ وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل:

$$\vec{a} = 5\vec{a}_1 + 2\vec{a}_2 = 5(2i + j - 3k) + 2(i + 2j + 2k)$$
$$= 10i + 5j - 15k + 2i + 4j + 4k$$
$$= 12i + 9j - 11k$$

د $\vec{a}$ وکتور د $\vec{a}_1$ او $\vec{a}_2$ وکتورونو د خطي ترکیب په نامه یادېږي.

دویم مثال: که $\vec{a}_1 = (2,3)$ او $\vec{a}_2 = (5,1)$ وکتورونه راکړل شوی وي، وښایاست چې د $\vec{a} = (6\ ,\ -5)$ وکتور د $\vec{a}_1$ او $\vec{a}_2$ وکتورونو خطي ترکیب دی.

حل: څرنګه چې $\alpha_1\ ,\ \alpha_2 \in IR$ سکالرونه دي، نو:

$$\vec{a} = (6\ ,-5) = \alpha_1(2\ ,\ 3) + \alpha_2(5\ ,1)$$
$$= (6\ ,-5) = (2\alpha_1\ ,3\alpha_1) + (5\alpha_2\ ,\ \alpha_2)$$
$$= (6\ ,-5) = (2\alpha_1 + 5\alpha_2\ \ ,3\alpha_1 + \alpha_2)$$
$$\Rightarrow \begin{cases} 2\alpha_1 + 5\alpha_2 = 6 \\ 3\alpha_1 + \alpha_2 \ \ = -5 \end{cases}$$

له پورتني سیستم څخه د α_1 او α_2 قیمتونه په لاس راوړو:

$$\begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix}\begin{cases} 2\alpha_1 + 5\alpha_2 = 6 \\ 3\alpha_1 + \alpha_2 = -5 \end{cases}$$
$$6\alpha_1 + 15\alpha_2 = 18$$
$$\underline{-6\alpha_1 \pm 2\alpha_2 = \mp 10}$$
$$13\alpha_2 = 28 \Rightarrow \alpha_2 = \frac{28}{13}$$
$$2\alpha_1 + 5\frac{28}{13} = 6$$
$$2\alpha_1 + \frac{140}{13} = 6 \Rightarrow 2\alpha_1 = 6 - \frac{140}{13} = \frac{78 - 140}{13}$$
$$2\alpha_1 = \frac{-62}{13} \Rightarrow \alpha_1 = -\frac{62}{26} = -\frac{31}{13}$$
$$\vec{a} = (6\ ,-5) = \alpha_1(2\ ,\ 3) + \alpha_2(5\ ,\ 1)$$
$$\vec{a} = (6\ ,-5) = -\frac{31}{13}(2\ ,\ 3) + \frac{28}{13}(5\ ,\ 1)$$

یعني که α_1 او α_2 قیمتونه په $\vec{a}_1$ او $\vec{a}_2$ وکتورنو کې ضرب شي، په پایله کې د $\vec{a}$ وکتور په لاس راځي، نو ومولیدل چې $\vec{a}_1$ او $\vec{a}_2$ وکتورونه د $\vec{a}$ د وکتور خطي ترکیب دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د طبعي واحد وکتورونو د خطي ترکیب په واسطه د یوه وکتور ښودل:

که په دوه بعدي، درې بعدي او بلاخره په n بعدي فضاکې شعاع وکتورونه راکړل شوي وي. کولای شو هغه د واحد وکتورونو د ضریبونو د مجموعې په شکل په لاندې ډول وښیو.

a) که دوه بعدي فضا وي $(x_1 , x_2) = (x_1 , 0) + (0 \ , \ x_2)$

نو: $= x_1(1 \ ,0) + x_2(0 \ ,1)$

که $e_2 = (0,1)$ او $e_1 = (1 \ ,0)$ وي.

نو: $(x_1 , x_2) = e_1 x_1 + e_2 x_2$

او په بل ډول يې هم لیکلای شو:

$$(x , y) = (x , 0) + (0 , y) = x(1 , 0) + y(0 \ ,1)$$
$$= xe_1 + ye_2 = xi + yj$$

b) که فضا درې بعدي وي، نو په لاندې ډول کړنه کوو:

$$(x_1 , x_2 , x_3) = (x , y , z) = (x_1 \ , 0 \ , 0) + (0 , x_2 \ , 0) + (0 \ , 0 \ , \ x_3)$$
$$= x_1(1 , 0 \ , 0) + x_2 \ (0 \ , 1 \ , 0) + x_3(0 , 0 \ , 1)$$

څرنګه چې $e_1 = (1,0,0)$ ، $e_2 = (0,1,0)$ او $e_3 = (0,0,1)$ په درې بُعدي فضاکې واحد وکتورونه دي، نو:

$$(x_1 , x_2 , x_3) = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$$
$$(x , y \ , z) = xi + yj + zk$$

c) په عمومي حالت کې که فضا n بعدي وي

$$(x_1 , x_2 , \ldots , x_n) = (x_1 \ , 0 , \ldots , \ 0) + (0 \ , x_2 \ , \ \ldots , \ 0) + \ldots + (0,0 ,\ldots, x_n)$$
$$= x_1(1 , 0 ,\ldots, 0) + x_2(0 , 1 ,\ldots, 0) + \ldots + x_n(0 \ , 0 ,\ldots, 1)$$
$$= x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_n e_n$$

په داسې حال کې چې $e_1 , e_2 , \ \ldots \ , e_n$ طبعي واحد وکتورونه دي.

د وکتورونو خطي خپلواکي: د $\vec{a}_1 , \vec{a}_2 , \ \ldots , \vec{a}_n$ وکتورونه په یوه وکتوري ساحه کې خطي خپلواکي(خطي استقلال) لري، که چیرې دغه خطي ترکیب $\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \ldots + \alpha_n \vec{a}_n = 0$ مساوي په صفر وي او همدارنګه $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$ وي.

فعالیت

که $S = \{(1 \ ,0 \ \ ,0) \ , (0 \ ,1 \ ,0) \ , (0 \ ,0 \ ,1)\}$ وي وښایاست چې S خطي خپلواکي لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

غیر خپلواک خطي وکتورونه: د $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ وکتورونه خطاً مربوط(خطي غیر خپلواک) یا خطي انحصار لري، که چیرې یوازې او یوازې $\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \ldots + \alpha_n\vec{a}_n = 0$ وي او کم ترکمه یو له ضریبونو د $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ څخه د صفر خلاف وي.

یادونه:

ددې لپاره چې د وکتورونو یو سټ په لاس راوړو چې خطي خپلواکي ولري، نو لاندې پړاوونه په پام کې نیسو:

لومړی پړاو: د وکتورونو ترکیب په لاس راوړو او له صفر وکتور سره یې مساوي نیسو.

دویم پړاو: د وکتورونو د جمعې عملیه سرته رسوو.

دریم پړاو: د معادلاتو سیستم تشکیلوو.

څلورم پړاو: د معادلاتو سیستم د سکالرونو لپاره حلوو،په هغه صورت کې چې ټول سکالرونه صفر شي نو وایو چې نوموړې وکتورونه خطي خپلواکي لري او که چیرې له ټولو سکالرو څخه کم ترکمه یو سکالر د صفر خلاف وي، نو وکتورونه خطي خپلواکي نه لري.

مثـــــال: د $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ وکتورونـــــه پــــه لانـــــدې ډول راکـــــړل شــــوې دي $\vec{a}_1 = (1,2,0)$, $\vec{a}_2 = (0,3,1)$, $\vec{a}_3 = (2,3,1)$ وښایاســت چــې $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ او $\vec{a}_3$ وکتورونـه خطـي خپلواکي لري او که نه؟

حل: د خطي خپلواکو وکتورونو له اړیکې څخه په ګټې اخیستنې کولای شو، ولیکو:

لومړی پړاو:

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3 = \alpha_1(1,2,0) + \alpha_2(0,3,1) + \alpha_3(2,3,1) = 0$$

دویم پړاو:

$$= (\alpha_1, 2\alpha_1, 0) + (0, 3\alpha_2, \alpha_2) + (2\alpha_3, 3\alpha_3, \alpha_3) = (0,0,0)$$
$$= (\alpha_1 + 0 + 2\alpha_3, 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 3\alpha_3, 0 + \alpha_2 + \alpha_3) = (0,0,0)$$

دریم پړاو:

$$\begin{cases} \alpha_1 + 0 + 2\alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0 \\ 0 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

څلورم پړاو: اوس د معادلاتو سیستم د α_1 ، α_2 او α_3 لپاره حلوو:

$$\alpha_2 = -\alpha_3$$
$$2\alpha_1 + 3(-\alpha_3) + 3\alpha_3 = 2\alpha_1 - 3\alpha_3 + 3\alpha_3 = 0 \Rightarrow 2\alpha_1 = 0 ,\ \alpha_1 = 0$$
$$\alpha_1 + 2\alpha_3 = 0$$
$$0 + 2\alpha_3 = 0 \ \Rightarrow \alpha_3 = 0$$
$$2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0$$
$$0 + 3\alpha_2 + 0 = 0 \ \Rightarrow 3\alpha_2 = 0 \quad , \quad \alpha_2 = 0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

خرنګه چې $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ دي، نو نوموړي وکتورونه خطي خپلواکي لري.

فعالیت

د تعریف له مخې د ښي لاس د قاعدې په واسطه د $\vec{u}\times\vec{v}$ او $\vec{v}\times\vec{u}$ مسیر او یا جهت په مخامخ شکل کې وښیې.

- وښایاست چې $\vec{i}\times\vec{i}=0$ او $\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}$ دی.
- د پورتنیو څېړنو له مخې د $\vec{j}\times\vec{j}$ ، $\vec{k}\times\vec{k}$ ، $\vec{j}\times\vec{k}$ او $\vec{k}\times\vec{i}$ وکتورونو د ضربونو حاصل په هکله څه ویلای شئ؟
- وښایاست چې: $\vec{u}\times\vec{v}=-\vec{v}\times\vec{u}$ او $\vec{u}\times\vec{u}=0$ دی.
- **په عمومي ډول ویلای شو چې د $\vec{i},\vec{j}$ او $\vec{k}$ وکتورونو د ضرب حاصل په دایروي ډول د لومړني او دویم وکتور د ضرب له حاصل څخه دریم وکتور، لکه د ورکړل شوي دایرې په څېر لاس ته راځي.**

له پورتني فعالیت څخه لاندې پایلې لاس ته راځي:

پایله: د $\vec{u}$ او $\vec{v}$ دوو وکتورونو (چې صفر نه وي). د وکتوري ضرب له حاصل څخه او د ښي لاس د قاعدې په کارولو سره لرو:

i) $\vec{u}\times\vec{u}=0$

ii) $\vec{u}\times\vec{v}=-\vec{v}\times\vec{u}$

iii) $\vec{u}\times(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\times\vec{v}+\vec{u}\times\vec{w}$

iv) $\vec{u}\times(k\vec{v})=(k\vec{u})\times\vec{v}=k\,(\vec{u}\times\vec{v})\ ,\quad k\in IR$

د وکتوري ضرب د حاصل د تعریف له مخې د پورته پایلې ثبوت دې زده‌کوونکو ته پرېښودل شي.

لومړی مثال: که چېرې $\vec{u}=a_1\vec{i}+b_1\vec{j}+c_1\vec{k}$ او $\vec{v}=a_2\vec{i}+b_2\vec{j}+c_2\vec{k}$ وکتورونه صفر نه وي، نو وښایاست چې:

$$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\end{vmatrix}=(b_1c_2-c_1b_2)\vec{i}-(a_1c_2-c_1a_2)\vec{j}+(a_1b_2-b_1a_2)\vec{k}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل: د تعریف په کارولو لرو، چې:

$$\vec{u}\times\vec{v}=(a_1\vec{i}+b_1\vec{j}+c_1\vec{k})\times(a_2\vec{i}+b_2\vec{j}+c_2\vec{k})$$
$$=a_1a_2(\vec{i}\times\vec{i})+a_1b_2(\vec{i}\times\vec{j})+a_1c_2(\vec{i}\times\vec{k})+b_1a_2(\vec{j}\times\vec{i})+b_1b_2(\vec{j}\times\vec{j})+b_1c_2(\vec{j}\times\vec{k})$$
$$+c_1a_2(\vec{k}\times\vec{i})+c_1b_2(\vec{k}\times\vec{j})+c_1c_2(\vec{k}\times k)$$

$$\left.\begin{array}{l}\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}\\ \vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j}\\ \vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k}\end{array}\right\}\quad,\quad\left.\begin{array}{l}\vec{j}\times\vec{k}=\vec{i}\\ \vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}\\ \vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i}\end{array}\right\}\quad,\quad\left.\begin{array}{l}\vec{i}\times\vec{i}=0\\ \vec{j}\times\vec{j}=0\\ \vec{k}\times\vec{k}=0\end{array}\right\}$$

$$=a_1b_2\cdot\vec{k}-a_1c_2\cdot\vec{j}-b_1a_2\cdot\vec{k}+b_1c_2\cdot\vec{i}+c_1a_2\,\vec{j}-c_1b_2\cdot\vec{i}$$
$$=(b_1c_2\cdot\vec{i}+c_1a_2\cdot\vec{j}+a_1b_2\cdot\vec{k})-(c_1b_2\cdot\vec{i}+a_1c_2\,\vec{j}+b_1a_2\cdot\vec{k}$$
$$=(b_1c_2-c_1b_2)\cdot\vec{i}+(c_1a_2-a_1c_2)\cdot\vec{j}+(a_1b_2-b_1a_2)\cdot\vec{k}$$
$$=(b_1c_2-c_1b_2)\cdot\vec{i}-(a_1c_2-c_1a_2)\cdot\vec{j}+(a_1b_2-b_1a_2)\cdot\vec{k}$$
$$\Rightarrow\quad\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\end{vmatrix}=(b_1c_2-c_1b_2)\cdot\vec{i}-(a_1c_2-c_1a_2)\cdot\vec{j}+(a_1b_2-b_1a_2)\cdot\vec{k}$$

دویم مثال: وښایاست چې د $\vec{a}=2\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$ او $\vec{b}=4\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$ لپاره د $\vec{a}\times\vec{b}$ حاصل له $(-\vec{i}+6\vec{j}+8\vec{k})$ سره مساوي دی.

حل: د لومړي مثال په کارولو سره پوهیږو، چې:

$$\vec{a}\times\vec{b}=(2\vec{i}+\vec{j}+\vec{k})\times(4\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k})=8(\vec{i}\times\vec{i})+4(\vec{i}\times\vec{j})-2(\vec{i}\times\vec{k})$$
$$+4(\vec{j}\times\vec{i})+2(\vec{j}\times\vec{j})-(\vec{j}\times\vec{k})+4(\vec{k}\times\vec{i})+2(\vec{k}\times\vec{j})-(\vec{k}\times\vec{k})$$
$$=0+4\vec{k}+2\vec{j}-4\vec{k}+0-\vec{i}+4\vec{j}-2\vec{i}-0=-3\vec{i}+6\vec{j}$$

د مخلوط ضرب حاصل(درې ګوني ضرب) Triple Product

تعریف: د دوو یا څو وکتورونو د ضرب لپاره څو امکانه شته چې هر یو یې په لاندې ډول تر څېړنې لاندې نیسو:

i) د $(\vec{a}\cdot\vec{b})\,\vec{c}$ دضرب حاصل.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پورتنیو $\vec{a}$ او $\vec{b}$ وکتورونو د ضرب حاصل چې په سکالري ډول ضرب شوی، یو سکالر دی. وروسته نوموړی سکالر د $\vec{c}$ په وکتور کې ضرب شوی چې له پایله یې وکتور په لاس راځي دغه وکتور له $\vec{c}$ د وکتور سره هم جهت دی.

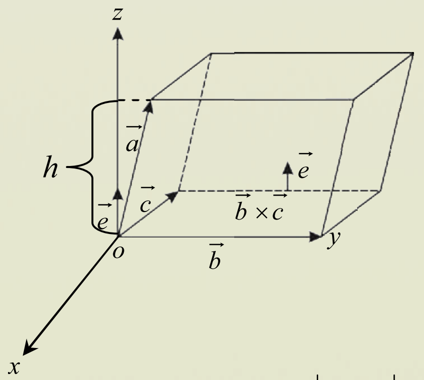
په پورتني ضرب کې لاندې قانون شته: $(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c} \neq (\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a} \neq (\vec{c}\cdot\vec{a})\vec{b}$

د $(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}$ وکتور جهت د $\vec{a}$ د وکتور هم جهت او د $(\vec{c}\cdot\vec{a})\vec{b}$ وکتور جهت د $\vec{b}$ د وکتور هم جهت دی.

i) $\vec{a}(\vec{b}\times\vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

ii) $\vec{a}(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}(\vec{c}\times\vec{a}) = \vec{c}(\vec{a}\times\vec{b})$

iii) $\vec{a}(\vec{a}\times\vec{b}) = 0$



iv) د $\vec{a}(\vec{b}\times\vec{c})$ اړیکه د هغه متوازي السطوح له حجم څخه عبارت دی چې a, b او c د متوازي‌السطوح اضلاع دی، څرنګه چې په شکل کې لیدل کیږي $|\vec{b}\times\vec{c}|$ د متوازي‌السطوح قاعده او h د متوازي‌السطوح جګوالی دی، نو له دې امله:

$$\text{د متوازي‌السطوح حجم} = v = |\vec{b}\times\vec{c}|(\vec{a}\cdot\vec{e}) = \vec{b}\,|\vec{a}\times\vec{c}|\,\vec{e}$$

$$v = \vec{b}(\vec{a}\times\vec{c}) = |\vec{b}\times\vec{c}|h$$

تطبیقاتي مسئلې:

1- که چیرې $\vec{b} = 2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$ او $\vec{a} = 4\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$ وکتورونه راکړل شوي وي، هغه وکتور مطلوب او غوښتل کیږي چې پر دواړو وکتورونو عمود وي، ایا دغه وکتور یوازنی وکتور دی، که څنګه؟ دلیل مو څه دی؟

حل: د ښي لاس د قاعدې په کارولو پوهیږو چې د $\vec{a}\times\vec{b}$ وکتور پر هغو وکتورونو عمود دی، نو لرو:

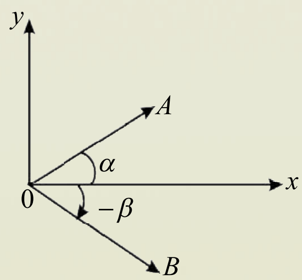
$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 7\vec{i} - 6\vec{j} - 10\vec{k}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو د $\vec{a}\times\vec{b}=7\vec{i}-6\vec{j}-10\vec{k}$ وکتور پر $\vec{a}$ او $\vec{b}$ وکتورونه یوازيني عمود وکتورونه دي، بلکې $\vec{b}\times\vec{a}$ وکتور هم د $\vec{a}$ او $\vec{b}$ په وکتورونو عمود دي، یعنې لرو:

$$\vec{b}\times\vec{a}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & -1 & 2\\ 4 & 3 & 1\end{vmatrix}=-7\vec{i}+6\vec{j}+10\vec{k}=-(7\vec{i}-6\vec{j}-10\vec{k})=-\vec{a}\times\vec{b}$$

2- ثبوت کړئ چې د α او β د هرې اختیاري زاویې لپاره $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin B$.



حل: که $\vec{OA}$ او $\vec{OB}$ دوه وکتورونه د x, y په مستوي کې داسې راکړل شوي دي چې د x له محور سره د α او β زاویې جوړې کړي، له شکل څخه پوهیږو: $\hat{AOB}=\alpha+\beta$

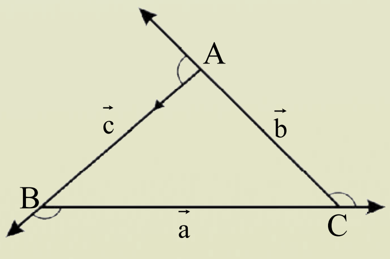
له بلې خوا پوهیږو چې $\vec{OA}=\cos\alpha\,\vec{i}+\sin\alpha\,\vec{j}$ او $\vec{OB}=\cos(-\beta)\,\vec{i}+\sin(-\beta)\,\vec{j}$ نو لرو:

$$\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}=(\cos\alpha\,\vec{i}+\sin\alpha\,\vec{j})\times(\cos\beta\,\vec{i}-\sin\beta\,\vec{j})=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \cos\alpha & \sin\alpha & 0\\ \cos\beta & -\sin\beta & 0\end{vmatrix}$$

$$=\vec{k}(-\sin\beta\cos\alpha-\sin\alpha\cos\beta)=-\vec{k}\sin(\alpha+\beta)$$

$$\Rightarrow\ \left|\vec{OA}\right|\times\left|\vec{OB}\right|=\left|-\vec{k}\right|\cdot\sin(\alpha+\beta)=\sin(\alpha+\beta)$$

3- په یوه کیفي مثلث کې وښیئ، چې: $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$



حل: فرضوو چې د لاندې شکل له مخې د $\vec{a}$، $\vec{b}$ او $\vec{c}$ وکتورونه د $\overline{BC}$، $\overline{CA}$ او $\overline{AB}$ د مثلث د ضلعو په امتداد راکړل شوي دي، نو لرو:

$$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0$$

$$\Rightarrow\ \vec{b}+\vec{c}=-\vec{a}\qquad\ldots\ldots\ldots\ (i)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که د مساوات دواړه خواوې په $\vec{c}$ وکتور کې وکتوري ضرب کړو، لاسته راځي، چې:

$$(\vec{b}+\vec{c})\times\vec{c}=-\vec{a}\times\vec{c}$$
$$(\vec{b}\times\vec{c})+(\vec{c}\times\vec{c})=-\vec{a}\times\vec{c}=\vec{c}\times\vec{a}$$
$$\vec{c}\times\vec{c}=0 \quad\Rightarrow\quad \vec{b}\times\vec{c}=\vec{c}\times\vec{a} \quad\Rightarrow\quad \left|\vec{b}\times\vec{c}\right|=\left|\vec{c}\times\vec{a}\right|$$

دپورتینو مساواتو د تعریف له مخې داسې لیکلای شو:

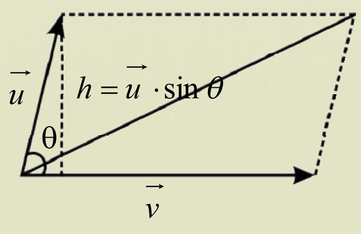
$$|\vec{b}|\,|\vec{c}|\sin A=|\vec{c}|\,|\vec{a}|\,\sin B$$
$$\Rightarrow\quad |\vec{b}|\,|\vec{c}|\,\sin A=|\vec{c}|\,|\vec{a}|\sin B \quad\Rightarrow\quad b\sin A=a\sin B\ /\div AB$$
$$\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin A}{a} \quad .... \ (ii) \quad \text{یا} \quad \frac{b}{\sin B}=\frac{a}{\sin A} \quad .... \ (ii)$$

د پورته په شان که چیرې د (i) د رابطې دواړه خواوې په $\vec{b}$ وکتور کې په وکتوري ډول ضرب شي، لاسته راځي چې:

$$(\vec{b}+\vec{c})\times\vec{b}=-\vec{a}\times\vec{b}=\vec{b}\times\vec{a}$$
$$(\vec{b}\times\vec{b})+(\vec{c}\times\vec{b})=\vec{b}\times\vec{a}$$
$$\vec{b}\times\vec{b}=0 \quad\Rightarrow\quad (\vec{c}\times\vec{b})=\vec{b}\times\vec{a}$$
$$|\vec{c}||\vec{b}|\sin A=|\vec{b}||\vec{a}|\sin C$$
$$c\sin A=a\sin C \quad /\div ac$$
$$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C} \quad ..... \ iii \qquad \text{یا} \qquad \frac{\sin A}{a}=\frac{\sin C}{c}$$

د (ii) او (iii) معادلو له پرتلې (مقایسې) څخه د ساین قضیه لاسته راځي: $\frac{a}{SinA}=\frac{b}{SinB}=\frac{c}{SinC}$

4- **د یوې متوازي الاضلاع مساحت**: د $\vec{u}$ او $\vec{v}$ دوه وکتورونه چې صفر نه وي، د دوی ترمنځ زاویه θ د لاندې شکل په څیر په پام کې نیسو. ګورو چې $\vec{u}$ او $\vec{v}$ د متوازي الاضلاع ضلعې دي چې د هغې د مساحت د پیداکولو لپاره کولای شو، ولیکو:



ارتفاع × قاعده = د متوازي الاضلاع مساحت

څرنګه چې: $|\vec{v}|$ = قاعده او $h=|\vec{u}|\sin\theta$ = ارتفاع ده

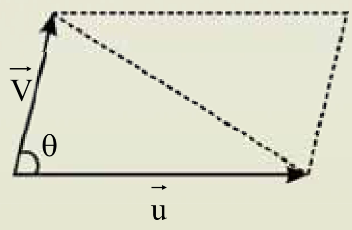
$|\vec{u}||\vec{v}|\sin\theta=|\vec{u}\times\vec{v}|$ = د متوازي الاضلاع مساحت

(c) ketabton.com: The Digital Library

یعني د یوې متوازي الاضلاع مساحت، د یوې متوازي الاضلاع د ضلعو د وکتوري ضرب له حاصل څخه عبارت دی چې د متوازي الاضلاع ضلعې هم دي.

پایله: څرنګه چې د یوه مثلث مساحت د متوازي الاضلاع مساحت نیمایي دی، نو د مثلث مساحت د لاندې شکل په پام کې نیولو سره عبارت دی، له:

د مثلث مساحت $= \frac{1}{2}$ (د متوازي الاضلاع مساحت) $= \frac{1}{2}|\vec{u}\times\vec{v}|$



پوښتنې

1. که $\vec{a}_1 = t^2 + t + 2$, $\vec{a}_2 = 2t^2 + t$ او $\vec{a}_3 = 3t^2 + 2t + 2$ وي وښایاست چې نومړي وکتورونه خطي خپلواکي لري؟
2. وښایاست چې $\vec{a} = 2i + 3j + 4k$ او $\vec{b} = 4i + 6j + 8k$ وکتورونه یو له بل سره کوم ډول خطي اړیکه لري؟
3. ثبوت کړئ چې $\vec{a}_1 = 2i$, $\vec{a}_2 = 5j$ او $\vec{a}_3 = 9k$ وکتورونه خطي خپلواکي لري.
4. د هغه مثلث مساحت پیدا کړئ چې راسونه یې د $A(1,-1,1)$ ، د $B(2,1,-1$ او $C(-1,1,2)$ وکتورونو په واسطه درکړل شوي وي. همدارنګه هغه واحد وکتور چې پر ABC مستوي عمود وي، مطلوب دي.
5. د هغه متوازي الاضلاع مساحت پیدا کړئ چې: د $P(0,0,0)$, $Q(-1,2,4)$ ، $R(2,-1,4)$ او $S(1,1,8)$ وکتورونو په واسطه ځانګړی شوي وي.
6. که $\vec{u} = 2i - j + k$ ، $\vec{v} = 4i + 2j - k$ سره وي، د لاندې وکتورونو د ضرب حاصل پیدا کړئ؟

i) $\vec{u}\times\vec{u}$ ii) $\vec{u}\times\vec{v}$ iii) $\vec{v}\times\vec{u}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

د څپرکي مهم ټکي

د وضعیه کمیتونو په قایم سیستم کې وکتورونه: هغه کمیتونه چې هم جهت اوهم مقدار ولري وکتور نومېږي. هغه وکتورونه چې اوږدوالی یې مساوي او عین جهت ولري، یو له بله سره د ممثلو وکتورونو په نامه یادیږي. هغه وکتور چې مبداء یې د وضعیه کمیتونو د قایم سیستم په مبداء کې پرته وي شعاع وکتور (Position Vector) بلل کیږي. یو وکتور په مستوي کې د $\vec{a}=\begin{pmatrix}a_x\\a_y\end{pmatrix}$ په څیر ښودل کیږي. چې a_x د x او a_y د y محور پرمخ له فاصلې او ترتیب څخه عبارت دی.

د دوو ټکو ترمنځ واټن او منځنی ټکی: که $P(x_1,y_1)$ وکتور مبداء او $Q(x_2,y_2)$ د پای ټکی د $\vec{a}=\vec{PQ}$ وکتور وي. په دې ډول $\vec{a}$ وکتور په $\vec{a}=\begin{pmatrix}a_x\\a_y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_2-x_1\\y_2-y_1\end{pmatrix}$ ښیو او د $P\hat{Q}N$ قایم الزاویه مثلث او $|\vec{a}|$ وکتور اوږدوالي له مخې لرو چې:

د P او Q ټکو ترمنځ واټن، $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{a_x^2+a_y^2}=|\vec{a}|=$ د $\vec{a}$ اوږدوالي د P او Q منځني ټکی $M=\begin{pmatrix}x_m\\y_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{x_1+x_2}{2}\\\frac{y_1+y_2}{2}\end{pmatrix}$ د $\vec{PQ}$ د منځني ټکي وضعیه کمیتونه یا مختصات دي.

واحد وکتور: هغه وکتور چې د راکړل شوی وکتور په عین جهت پروت او یو واحد اوږوالی ولري، د واحد وکتور په نامه یادیږي.

مثال: $\vec{i}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ او $\vec{j}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ په قایم سیستم کې د x او y د یوې مستوي د محورونو په جهت واحد وکتورونه دي، په داسې حال کې چې $\vec{i}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$، $\vec{j}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ او $\vec{k}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ په فضاکې د وضعیه کمیتونو په قایم سیستم کې د x، y او z محورونو په جهت واحد وکتورونه دي.

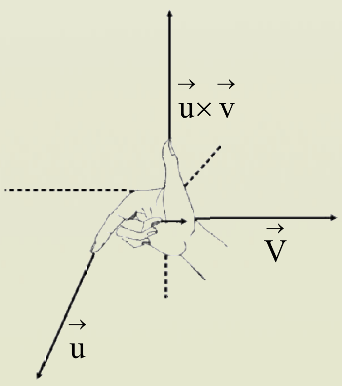
د وکتورونو سکالري ضرب: د $\vec{u}$ او $\vec{v}$ دوه وکتورونه، چې صفر نه وي، د سکالري ضرب حاصل یې په مستوي او فضاکې عبارت دی له: $\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\,|\vec{v}|\,Cos\theta$

په داسې حال کې چې θ د $\vec{u}$ او $\vec{v}$ ترمنځ زاویه ده. او د وکتوري ضرب حاصل یې یو وکتور دي چې د $\vec{u}\times\vec{v}$ په واسطه ښودل کیږي، عبارت دی، له: $\vec{u}\times\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|Sin\theta\cdot\vec{n}$

په داسې حال کې چې د $\vec{u}\times\vec{v}$ وکتور د $\vec{u}$ او $\vec{v}$ پر وکتورونو عمود دی او $\vec{u}$ او $\vec{v}$ وکتورونه سره د ښي لاس قاعدې په واسطه تړاکل کیږي.

د ښي لاس قاعده: که د شهادت گوته په قایم ډول کږه شي، لکه د لاندې شکل په شان، په دې صورت کې د شهادت گوته د $\vec{u}$ محور په جهت، د ځنګل په جهت د $\vec{v}$ محور او غټه گوته د $\vec{u}\times\vec{v}$ وکتور حاصل ضرب ښیي.

په فضا کې د دوو وکتورونو وکتوري ضرب:

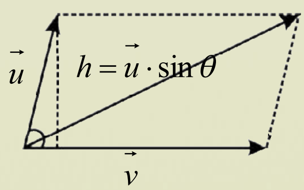


کـه $\vec{a}=a_1\vec{i}+b_1\vec{j}+c_1\vec{k}$ او $\vec{b}=a_2\vec{i}+b_2\vec{j}+c_2\vec{k}$ ورکړل شوی وي، په دې صورت کې وکتوري حاصل ضرب یعنې $\vec{a}\times\vec{b}$ عبارت دی له:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$=\vec{i}\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

مساحت او د وکتوري ضرب حاصل: د $\vec{a}$ او $\vec{b}$ دوه وکتورونه، چې صفر نه وي، د وکتوري ضرب قیمت یې د متوازي الاضلاع له مساحت څخه عبارت دی، چې د وکتورونو په واسطه په لاندې شکل کې تشکیلیږي.



$|\vec{u}\times\vec{v}|=$ د متوازي الاضلاع مساحت

(c) ketabton.com: The Digital Library

د څېرکي پوښتنې

1): که $\vec{a}=3\vec{i}-\vec{j}+5\vec{k}$ او $\vec{b}=4\vec{i}+3\vec{j}-2\vec{k}$ وي:

a): $\vec{a}\cdot\vec{b}$ b): $\vec{b}\cdot\vec{a}$ مطلوب دی

2): که چېرې د $P(2,3)$ او $Q(6,-2)$ ټکي د $\vec{op}$ او $\vec{OQ}$ شعاع وکتورونو پای وي، په دې صورت کې د P او Q په مستوي کې د $xi+yj$ په څیر ولیکئ.

3): که چیرې $A(1,-1)$ ، $B(2,0)$ ، $C(-1,3)$ او $D(-2,2)$ درکړل شوي وي، د $\vec{AB}$ او $\vec{CD}$ وکتورونو حاصل جمع مطلوب ده.

4): که چیرې $A(2,5)$ ، $B(-1,1)$ او $C(2,-6)$ درکړل شوي وي، مطلوب دی:

$i)\ \vec{AB}=?$ $ii)\ 2\vec{AB}-\vec{CB}=?$ $iii)\ 2\vec{CB}-2\vec{CA}=?$

5): که چېرې $\vec{u}=\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$ ، $\vec{v}=3\vec{i}-2\vec{j}+2\vec{k}$ او $\vec{w}=5\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}$ ورکړل شوی وي، مطلوب دی:

$i)\ \vec{u}+2\vec{v}+\vec{w}$ $ii)\ \vec{v}-3\vec{w}$ $iii)\ \left|3\vec{v}+\vec{w}\right|=?$

iv): د $\vec{u}$ ، $\vec{v}$ او $\vec{w}$ راکړل شوو وکتورنو په جهت واحد وکتورونه پیداکړئ

6): د $\vec{a}$ او $\vec{b}$ درکړل شوو وکتورونو لپاره سکالري ضرب حاصل د $\vec{a}\cdot\vec{b}$ ، $\vec{b}\cdot\vec{a}$ او وکتوري ضرب حاصل د $\vec{a}\times\vec{b}$ او $\vec{b}\times\vec{a}$ پیدا او دوه په دوه یې پرتله کړئ، که چیرې $\vec{a}$ او $\vec{b}$ په لاندې توګه وي:

$$i)\ \begin{cases}\vec{a}=2i+j-k\\ \vec{b}=i-j+k\end{cases}\qquad ii)\ \begin{cases}a=i+j\\ b=i-j\end{cases}$$

$$iii)\ \begin{cases}\vec{a}=3i-2j+k\\ \vec{b}=i+j\end{cases}\qquad iv)\ \begin{cases}\vec{a}=-4i+j-2k\\ \vec{b}=2i+j+k\end{cases}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

7): د هغو مثلثونو مساحت مطلوب دی چې راسونه يې د لاندې ټکو په واسطه ټاکل کيږي:

$i): \quad P(0,0,0), \quad Q(2,3,2), \quad R(-1,1,4)$

$ii): \quad P(1,-1,-1), \quad Q(2,0,-1), \quad R(0,2,1)$

8): د هغه متوازي الاضلاع مساحت مطلوب دی چې راسونه يې د لاندې ټکو په واسطه ټاکل شوي وي.

$i): \quad A(0,0,0), \quad B(1,2,3), \quad C(2,-1,1), \quad D(3,1,4)$

$ii): \quad A(1,2,-1), \quad B(4,2,-3), \quad C(6,-5,2), \quad D(-3.5,-4)$

$iii): \quad A(1,-1,1), \quad B(-1,2,2), \quad C(-3,4,-5), \quad D(-3,5,-4)$

9): کوم وکتورونه عمود او کوم موازي دي؟

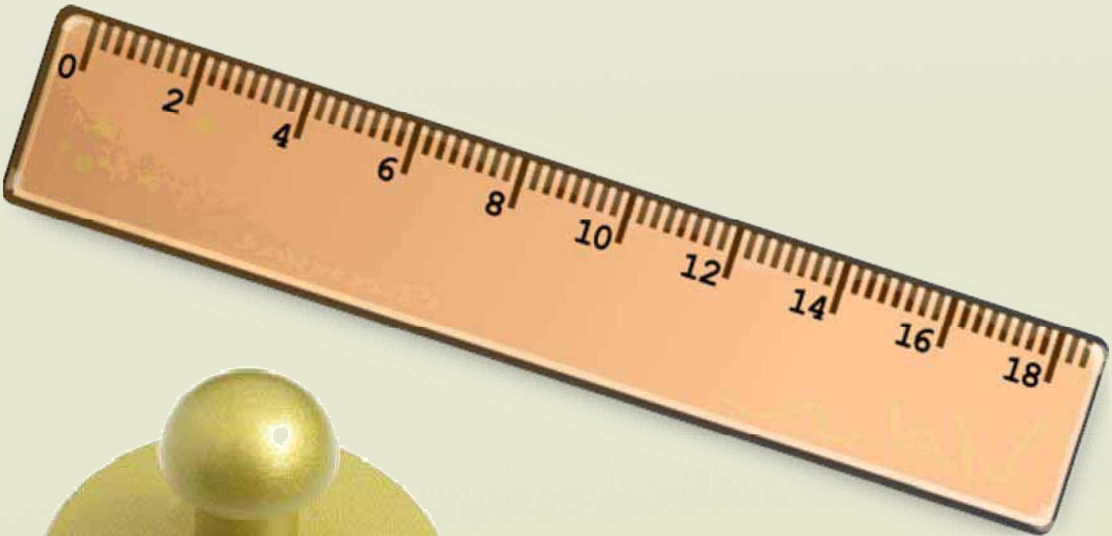
$i): \quad \vec{u} = 5i - j + k, \quad \vec{v} = j - 5k, \quad \vec{w} = -15i + 3j - 3k$

$ii): \quad \vec{u} = i + 2j - k\,, \quad \vec{v} = i + j + k, \quad \vec{w} = -\frac{\pi}{2}\vec{i} + \frac{\pi}{2}\vec{j}$

اتم څپرکی
احصائیه

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$\frac{\text{وزن}}{\text{ونه}} = \frac{150kg}{170cm} = ?$$

دبدلونونو ضریب

Coefficient Variations

که چیرې د یوي ټولنې پراګنده ګي په متر او د بلې ټولنې په کیلوګرام ښودل شوې وي. آیا فکر کولای شئ چې دغه دواړه پراګندګي په دواړو ټولنوکې د پرتلې وړ دي او که نه؟

$$\frac{150kg}{170cm}=?$$ = وزن / ونه

فعالیت

10 تنه زده کوونکي له خپل ټولګي څخه په تصادفي ډول وټاکئ؟

- د زده کونکو ونه او وزن تشخیص کړئ.
- د زده کوونکو د ونې او وزن واریانس او معیاري انحراف محاسبه کړئ.
- آیا فکر کولای شئ چې د دې دواړو متحولینو د پراګندګي د میزان پرتله د واریانس او معیاري انحراف له لارې امکان لري؟ ولې؟
- که چیرې معیاري انحراف په اوسط وویشل شي، نو د په لاس راغلي مقدار یا عدد واحد به څه وي؟
- د بدلونونو یا تغییراتو ضریب یا نسبي پراګنده ګي داسې کارونې لري، چې واریانس او معیاري انحراف هغه نه لري. یو له دغو کارونو څخه د دوو نا متجانسو ټولنو پرتله ده چې د یادولو وړ ده.

دبدلونونو یا تغییراتو ضریب چې په $C\cdot V$ ښودل کېږي عبارت له هغه خارج قسمت څخه دی، چې د معیاري انحراف پر اوسط مطلق بې واحده عدد دی په لاس راځي یعنې:

$$C\cdot V=\frac{S}{\bar{x}}$$ یا دبدلونونو یا تغییراتو ضریب = معیاري انحراف / اوسط

که د تغیراتو ضریب په 100 کې ضرب شي، د تحول ضریب په لاس راځي:

$$C\cdot V=100\cdot\frac{S}{\bar{x}}$$

- د بدلون ضریب یوازې د مثبتو ډېټاوو لپاره تعریف شوې وي.
- که چیرې ټوله ډېټا سره برابره وي، د بدلون ضریب مساوي په صفر دی.
- که ټوله ډېټا په یو مثبت عدد کې ضرب شي، د بدلون ضریب تغیر نه کوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

- که په ټوله ډېټا یو مثبت عدد ورزیات شي، د بدلون نوی ضریب چې په لاس راځي له لومړي ضریب څخه کوچنی دی.

لومړی مثال: د لاندې ډېټا د بدلون ضریب محاسبه کړئ:

$$\{1,3,5\}$$

حل: د فورمول له مخې لیکلای شو:

$$\overline{x}=\frac{\sum x_i}{n}=\frac{1+3+5}{3}=\frac{9}{3}=3$$

$$S^2=\frac{\sum(x_i-\overline{x})^2}{n}=\frac{(1-3)^2+(3-3)^2(5-3)^2}{3}=\frac{4+4}{3}=2.67$$

$$S=\sqrt{2.67}$$

$$C\cdot V=\frac{S}{\overline{x}}=\frac{\sqrt{2.67}}{3}=0.543$$

دویم مثال: د تصویري تلویزوني لامپونو یو تولیدونکی دوه ډوله لامپونه A او B تولیدوي، په داسې حال کې چې د A متوسط عمر مساوي په 1495 او د B متوسط عمر مساوي په 1875ساعته دی او معیاري انحرافونه یې په ترتیب سره 280 او 310 دي، تولیدوي.

د کوم یوه تصویر لامپ تصویر له پاسینو ډولونو څخه د نسبي پراګنده ګي(یا دبدلون ضریب) قیمت زیات دی؟

حل: د فورمول له مخې لرو چې:

$$C\cdot V_A=\frac{S_A}{\overline{x}_A}=\frac{280}{1495}\cdot 100=18.7\%$$ د A لامپونو د بدلون ضریب

$$C\cdot V_B=\frac{S_B}{\overline{x}_B}=\frac{310}{1875}\cdot 100=16.5\%$$ د B لامپونو د بدلون ضریب

څرنګه چې $C\cdot V_A>C\cdot V_B$ څخه دی، له دې کبله د A لامپ ډېره پراګند ه ګي لري، ولې ټېنګښت یې کم دی.

پوښتنې

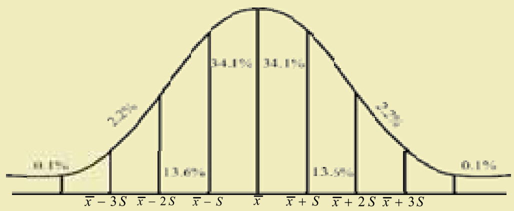
1. دلاندې ډېټا د بدلون یا تغیراتو ضریب حساب کړئ؟

$$1\quad 3\quad 4\quad 5\quad 6$$

2. که چیرې اوسط مساوي په 4 او معیاري انحراف مساوي په 6 وي، د بدلون یا تغییراتو ضریب څو دي؟
3. ستاسو د ټولګي د زده‌کوونکو د سن دبدلون ضریب 10 کاله وروسته څومره تغییر یا بدلون کوي؟ کمېږي او که ډېرېږي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

په نورمال منحني کې پراګنده‌ګي(تيتوالی)

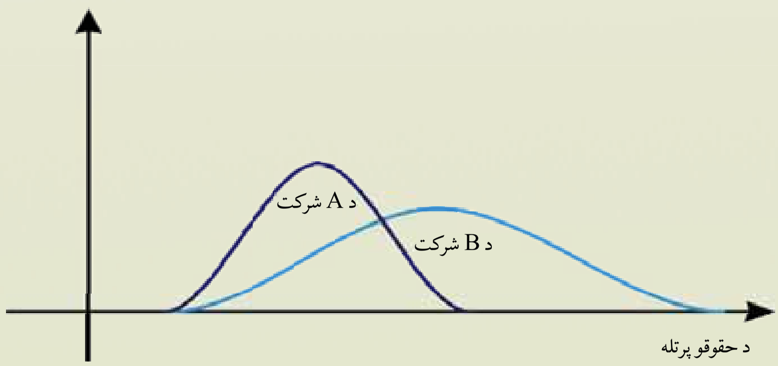


اوريدلي به مو وي چې وايي: يو ښه تصوير د زر کلميو ارزښت لري.

لاندې شکل ته وګورئ، د هغه په اړوند فکر او بحث وکړئ.

فعاليت

لاندې دوه ګرافونو د دوه A او B شرکتونو د حقوقو تأديه ښيي.



- کوم شرکت په اوسط ډول د حقوقو تاديه ډيره لري؟
- کوم شرکت د حقوقو د تأديې په ميزان کې خپلو کارمندانو ته لږه پراګنده‌ګي لري؟
- د دواړو شرکتونو د حقوقو تأديات سره پر تله کړئ.

لاندې ټکي د اوسط او معياري انحراف په نورمال منحني کې صدق کوي.

- که چيرې $\bar{x}$ اوسط او S معياري انحراف وي؛ نو 68% دپلټنې موارد د $(\bar{x}-S\ ,\ \bar{x}+S)$ په فاصله کې يعنې د اوسط په شا او خوا د معياري انحراف په فاصله کې ځای لري.
- 96% د پلټنې موارد د $(\bar{x}-2S\ ,\ \bar{x}+2S)$ په فاصله کې يعنې د اوسط په شاوخوا د دوه معياري انحرافونو په فاصله کې ځای لري .
- 99% د پلټنې موارد $(\bar{x}-3S\ ,\ \bar{x}+3S)$ په فاصله کې يعنې د اوسط په دواړو خواوو درې معياري انحرافونو په فاصله کې قرار لري.

- په یوه نورمال منحني کې له $2S$ څخه ډېر انحراف غیر عادي او له $3S$ څخه زیات انحراف زیات غیر عادي شمېرل کېږي.

هغه ډېټا چې د $3S$ په اندازه له اوسط څخه فاصله یا واټن ولري؛ نو باید د پراګنده ګي یا تیتې ډېټا په نامه وګڼل شي.

مثال: که د یوې مؤسسې د کارکوونکو د معاش اوسط 12500 افغانۍ او معیاري انحراف یې مساوي په 700 افغاني وي نو:

الف: له نورمال توزیع څخه د فیصدي په ګټه اخېستو، د ورکړل شوي معاش توزیع تشریح کړئ؟

ب: آیا ویلای شي چې د 1400 افغانیو معادل معاش یو غیر عادي معاش دي؟

د الف حل: لومړی د $\bar{x}\pm S$ ، $\bar{x}\pm 2S$ ، $\bar{x}\pm 3S$ قیمتونه په لاس راوړو.

فاصله د S له مخې	فاصله د افغانیو له مخې	فیصدي
$\bar{x}\pm S$	11800 – 13200	68%
$\bar{x}\pm 2S$	11100 – 13900	96%
$\bar{x}\pm 3S$	10400 – 14600	99.6 %

د ب حل: لومړي $\bar{x}-1400$ په لاس راوړئ چې مساوي په 1500 کېږي؛ یعنې 1400 افغانیو په اندازه 1500 افغانۍ له اوسط څخه ډېرې دي، که چېرې اوس دغه رقم په S ووېشو په لاس را ځي:

$$\frac{1500}{700}=2.1$$

په دې ډول د 1400 افغانیو معاش غیر عادي معاش دی، ځکه چې د 2S له اندازې څخه زیات او له $\bar{x}$ څخه پورته دی.

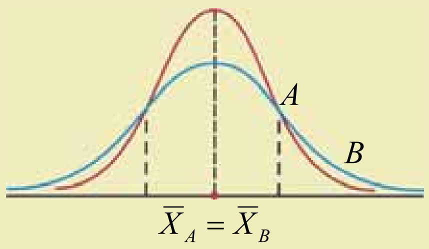
پوښتنه

که چیرې 62.28% فیصده مشاهدات د $(\bar{x}-S\,,\,\bar{x}+S)$ په فاصله کې پراته وي، آیا ویلای شئ، چې 95.45% او 99.73% مشاهدات په کومه فاصله کې قرار لري؟ انټروالونه له نورمالي منحني سره وښایاست؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

دنورمال توزیع دډول شاخصونه

د مرکزي پراګندګي دوه شاخصونه یو زیات شمېر د یوې احصایوي مجموعې اطلاعاتو ته په لنډ ډول انعکاس ورکوي. ددې لپاره چې د یوې احصایوي مجموعې اطلاعات، تناظر او د مثبت او منفي اشارو لرونکي وي؛ نو له کوم ډول منحني څخه باید ګټه واخلو.



فعالیت

- په یو ه نورماله توزیع کې وسط، اوسط او د موډ شاخصونه څه وخت سره مساوي دي؟
- که توزیع د اوسط په اطراف کې متناظره نه وي، د وسط اوسط او موډ د کمیتونو په اړه څه فکر کوي؟
- که چیرې یوه توزیع متناظر ه وي؛ نو د اوسط او وسط تفاضل څو ده؟
- که چیرې دواړه توزیع ګانې یو شان اوسط او تناظر ولري؛ نو د جګوالي او ټیټوالي له اړخه به څه وضعیت ولري؟

دتوزیع د ډول شاخصونه په دوو لاندې حالتونو څېړل کېږي:

1- **د خیمېدلو**(skewness)(**خمیده ګي**) **شاخص**: هغه توزیع چې د اوسط په دواړو خواوو متناظره نه وي، خمېدل نومېږي، چې په دوو لاندې ضریبونو ښودل کېږي.

الف: د خمېدلو ضریب: دا هغه شاخص دی چې د خمېدلو د میزان د ټاکلو لپاره کارول کېږي، چې په لاندې ډول تعریف شوی دی:

$$\alpha_3 = \frac{\frac{1}{n}\sum(x_i-\bar{x})^3}{S^3}$$

هغه عدد دی چې یوازې د پرتله کولو لپاره ترې کار اخیستل کېږي.

که $\alpha_3 = 0$ وي؛ نو توزیع متناظره ده.

که $\alpha_3 > 0$ وي؛ توزیع مثبت خمېدل (possitve skewness)لري، یعنې ښي لورې ته خمېده‌ګي لري.

او که $\alpha_3 < 0$ وي؛ توزیع منحني منفي خمېدل (negative skewness)لري یعنې کیڼ لورې ته خمېده‌ګي لري.

که چیرې د کثرت جدول موجود وي، خمېده‌ګي(عدم تناظر) یې د $\alpha_3 = \frac{\sum f_i(x_i-\bar{x})^3}{S^3}$ فورمول په واسطه پیداکېږي. چې f_i فریکونسي ښیي.

ب: د پیرسون د خمېدلو ضریب: د پیرسون ضریب په لاندې ډول تعریف شوی دی.

$$Sk_{(p)} = \frac{3(\bar{x}-med)}{S}$$

په مناظره توزیع کې د پیرسون د خلمیدلو ضریب مساوي په صفر دی. د پیرسون د خمېدلو د لو ضریب مثبت او منفي قیمتونه په ترتیب سره د توزیع د منحني مثبت یا منفي خمېدل ښیي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

2- **د پړسوب kurtosis شاخص**: د پړسوب شاخص ددې ښودونکی دی چې د توزیع یوه منحني څه وخت جګه او څه وخت ټیټوالي لري.

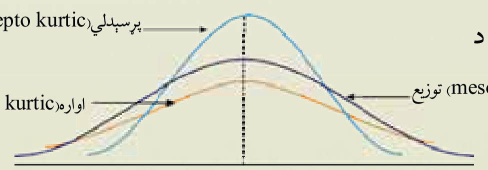
د پړسوب شاخص هغه معمولي شاخص دی چې د یوې منحني د پړسېدلو د اندازه کولو لپاره په کار اچول کېږي او په لاندې ډول تعریف شوی دی:

$$\alpha_4 = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^4}{S^4}$$

که د کثرت جدول په لاس کې ولرو، نو د پړسوب شاخص فورمول $\alpha_4 = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f_i(x_i-\bar{x})^4}{S^4}$ دی چې دلته f_i فریکونسي، x_i ډېټا او $\bar{x}$ د x_i اوسط او S معیاري انحراف دی.

د پړسوب شاخص د توزیع په ځای او پراګنده ګي پورې اړه نه لري. دغه شاخص د پرتله کیدو لپاره په کار لوېږي.

مثال: مخامخ شکل په پام کې ونیسئ د α_4 ضریب د درې ډوله خمېدلو او پړسوب ډولونه چې په شکل کې د هغوی توزیع ښودل شوې ده ښیي.



حل: د نورمالي توزیع د پړسوب د درجې او میزان د پرتله کېدو لپاره لکه یو ستندرډ په کار اچول کېږي.

د نورمالي توزیع لپاره د α_4 قیمت مساوي په 3 دی، په داسې حال کې چې که چیرې α_4 له 3 څخه زیاته وي نظر نورمال منحنی ته د منحني پړسوب زیات دی.

یا په بل عبارت یوه پړسیدلي توزیع چې څوکه لري او که چیرې α_4 له 3 لږ وي، نظر نورمالي منحني ته یې پړسوب کم دی چې د ملاستې یا اواري توزیع په نامه یادېږي.

پوښتني

د یوه ټولګي د زده‌کوونکو د احصایې د مضمون نمرې په لاندې ډول ورکړ شوي دي، د پیرسون د پړسوب ضریب حساب کړئ.

نمرې	د زده‌کوونکو شمېر
40-50	4
50-60	6
60-70	10
70-80	4
80-90	4
90-100	2

(c) ketabton.com: The Digital Library

څو متحوله ټولنې

که چیرې د خپل یوه ټولګیوال د ونې په اندازه وپوهېږئ، کولای شئ هغه ته په پام د هغه د وزن په اندازه پوه او په دې اړوند فکر وکړئ.

فعالیت

آیا په تېرو درسونو کې مو د اشخاصو د ونې او وزن په اړوند یو ځای مطالعه او څېړنه کړې ده.

- فکر کولای شئ چې د یوه سړي د ونې او وزن مقدار د یو متحول په توګه کولای شو چې ارائه کړو؟
- که وغواړو چې د یوه ټولګي د زده کوونکو د ونې او وزن مقدار یو ځای وڅېړو، نو دغه یوه ټولنه ده.
- دخپلو 10 تنو ټولګیوالو ونې او وزن اندازه کړئ.
- په لاس راغلې ډېټا د مرتبو جوړو په توګه ولیکئ.
- هغه ټکی چې د مرتبو جوړو په مرسته په مستوي کې ټاکل کېږي، څه ډول شکل لري؟د یوه خط په واسطه یې وصل کړئ.
- آیا ویلای شئ هغه ټکي چې په مستوي کې وصل شي، کوم شکل لري؟

له پاسني فعالیت څخه پوهېږو چې د بحث موضوع، دوه ډوله متحولین دي. تر اوسه مو په تېرو درسونو کې داسې ټولنې پلټلې چې ټولنو په هغوی کې یوازې یو متحول درلوده اوس غواړو داسې ټولنې ولټوو چې دوه او یا له هغو څخه زیات متحولین ولري، دکار دآسانې لپاره معمولاً د یو یا څو متحولینو تر منځ درياضيکي اړیکې په مرسته د قایمو مختصاتو په قایم سېستم کې جوړېږي.

په لومړي ګام کې په دې منظور د معادلو د جوړېدو لپاره لازم معلومات را ټول شي او په دویم ګام کې را ټول شوي معلومات د ارزښت لرونکو متحولینو په خبر په یوه مستوي کې راټول او په نښه کېږي، هغه شکل چې د دغو ټکو له وصلېدو څخه لاس ته راځي، مونږ ته یو ګراف را ښیي.

مثال: یو متخصص د غذايي رژیم یو ډول تأثیر په یو شمېر موږکانو څېړلی دی. په دې ډول یې د هر موږک لومړنی وزن اندازه کړی او بیا یې د عملیې په تطبیق پیل کړي چې په پای کې یې بیا د موږکانو وزن اندازه کړی چې لاندې ډېټا په لاس راغلې ده: $(2,4)$, $(3,5)$, $(1,7)$, $(2,3)$, $(1,8)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په دې ډول لومړی مختصه د موږك لومړنی او دویمه مختصه د موږك وزن دغذايي رژيم له تطبيق څخه وروسته ښيي.

- ډېټا په یوه سطري او ستوني جدول کې ترتیب کړئ؟
- که چیرې ډېټا د یوې ټولنې په څېر وګڼل شي، نو دغه ټولنه به څو متحولين ولري؟

حل: لاندې سطري جدول په پام کې نيسو:

د موږکانو شمير	1	2	3	4	5
د موږکانو لومړني وزن	1	2	1	3	2
د غذايي رژيم له تطبيق څخه وروسته د موږکانو وزن	8	3	7	5	4

لاندې ستوني جدول په پام کې نيسو.

د موږکانو شمير	د موږکانو لومړني وزن	د غذايي رژيم له تطبيق څخه وروسته د موږکانو وزن
1	1	8
2	2	3
3	1	7
4	3	5
5	2	4

پاسنی ډېټا یوه دوه متحوله ټولنه معرفي کوي.

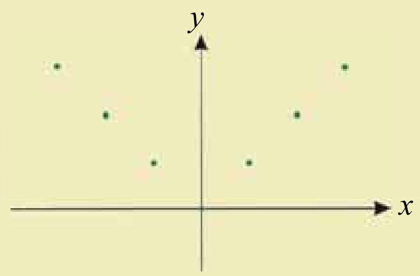
پوښتنه

د زراعتي محصولاتو دلوړوالي لپاره فکتورنه، لکه اوبه کود د کود ډول لمر او د خاورې ډول موثر ګڼل کېږي، آیا ویلی شئ چې په دغه ټولنه کې لږ تر لږه له څو ډوله متحولينو سره سروکار لرئ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پراګنده ګي ګراف

Scatter diagram



مخامخ شکل ته په پام ، هغه ټکي چې په مستوي کې په نښه شوي دي، د مرتبو جوړو په ډول ترتیب او ریاضیکي معادله یې ولیکئ:

فعالیت

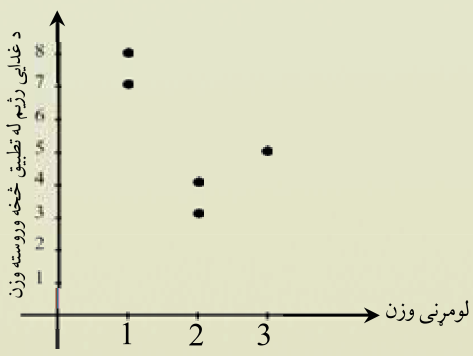
لاندې مرتبې جوړې ورکړل شوي دي:

$(1,2)$ $(2,3)$ $(3,4)$ $(4,5)$

- د ورکړل شوو مرتبو جوړو ګراف په دقیق ډول رسم کړئ.
- مشخص شوي ټکي سره ونښلوئ او ریاضیکي معادله یې پیدا کړئ.
- په لاندې ډول د دغې ډېټا د هر یوه، دویمه مختصه په لاندې ډول بدلوو.
- د هر ټکي لپاره یوه سکه پورته وغورځوئ، که شېر راغله په y یو واحد اضافه او که خط راغی له y څخه یو واحد کم کړئ، د په لاس راغلو ټکو یا تغییراتو ګراف رسم کړئ.
- دغه عملیه څو ځلې تکرار، خو دا ځل کله چې قیمتونه زیات یا کموي، بدلون مه ورکوئ په x او y پورې تړلې قیمتونه څنګه تغیر کوي؟

مثال: لاندې مرتبې جوړې چې پر موږکانو دغذایي رژیم تأثیراتو څخه مو په لاس راوړي دي، په پام کې ونیسئ: $(2,4)$ $(3,5)$ $(1,7)$ $(2,3)$ $(1,8)$

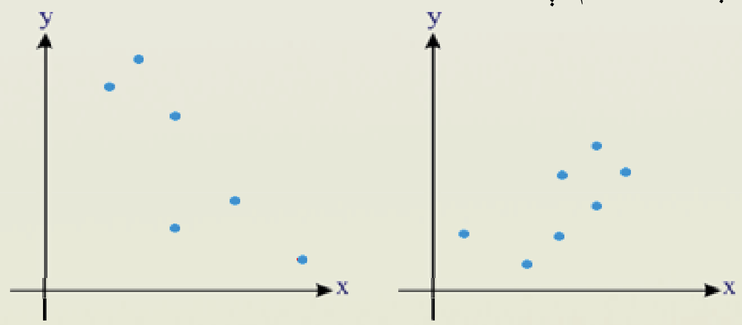
دغه مرتبې جوړې د مخامخ شکل په څېر په یوه مستوي کې ښودل شوي دي.



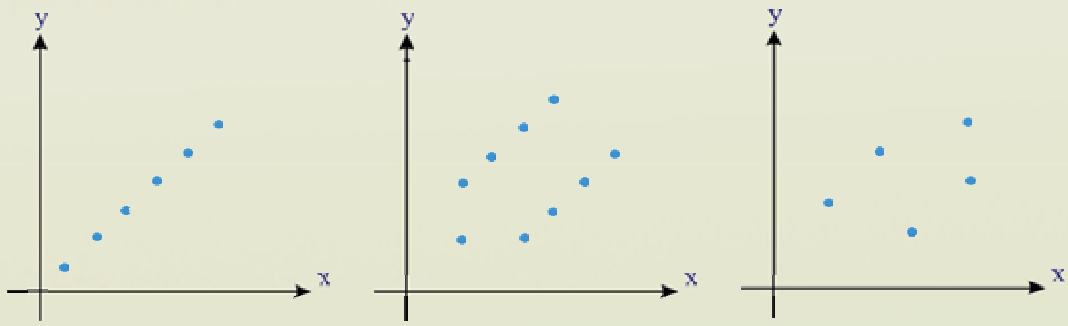
پاسنی ګراف چې د موږکانو وزن راښیي، د هغو پاشلو ټکو مجموعه په مستوي کې ده چې د اړونده ډېټا په اندازه کېدلو په یوه دوه متحوله ټولنه کې د مختصاتو په سیستم کې لاسته راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثلاً: لاندې ګرافونه په پام کې ونیسئ:



(ب)　　　(الف)



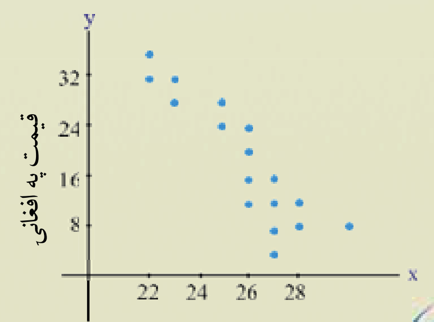
(هـ)　　　(د)　　　(ج)

د(الف) په ګراف کې لیدل کېږي چې که چیرې د x قیمتونه زیات شي؛ نو د y قیمتونه هم زیاتېږي، خو د (ب) په ګراف کې بر عکس د x د قیمتونو په زیاتوالي د y قیمتونه کمېږي.

د(ج) په ګراف کې د x په قیمت کې تغییرات هیڅ ډول اطلاع د y دبدلونونو په اړوند نه ورکوي ځکه د x قیمت په درلودلو سره په ډېر پام په دې ګراف کې د(الف) او (ب) ګرافونو په پرتله زیاته ده، د ( )په ګراف کې د y د قیمت حدس په ډېرې پاملرنې صورت مومي.

پوښتنې

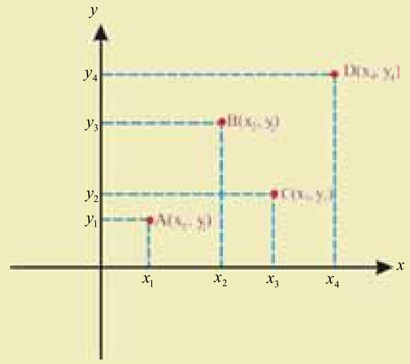
لاندې ګراف دیو شمیر تراکترونو عمر راښیي، آیا ددې دوو متحولینو تر منځ کومه اړیکه یا ارتباط وینې؟ توضیح یې کړئ.



(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

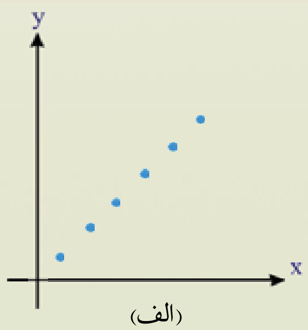
پیوستون او دپیوستون ضریب



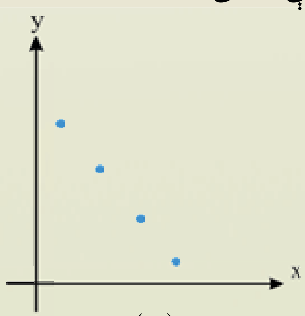
د A,B ,C او D ټکي لکه مخامخ شکل راکړل شوي دي، آیا شوني ده چې ټکي په یوه مستقیمه کرښه سره وصل شي، ولې؟

فعالیت

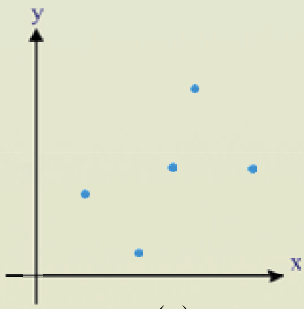
لاندې شکلونه په پام کې ونیسئ:



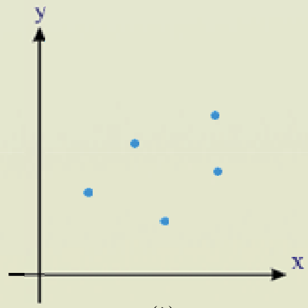
(الف)



(ب)



(ج)



(د)

- د (الف) او (ب) په شکلونو کې کولای شو چې د y متحول د هغې کرښې په مرسته چې له دغو ټکو تېرېږي وټاکو.
- د (الف) او (ب) په شکلونو کې د x او y تر مینځ څه ډول اړیکه ده؟
- آیا کولای شو چې د(ج) او(د) په شکلونو کې داسې یوه کرښه وټاکو چې ټول ټکي پرې پراته وي؟
- د(ج) او (د) په شکلونو کې د x او y ترمنځ اړیکې په څه ډول دي؟
- - د (الف) او (ب) د شکلونو اړیکې د(ج) او(د) د شکلونو له اړیکو سره پرتله او ووایئ چې د y د متحول خطا د x د متحول په مرسته په کوم شکل کې ډېره ده؟

له پاسني فعاليت څخه داسې پوهېږو چې که چيرې ټکي په مستوي کې يوې مستقيمې کرښې ته نږدې پراته وي؛ نو په دې صورت کې y د متحول خطا نظر x ته لږ ده او برعکس هر څومره چې ټکي له کرښې لرې پراته وي، نو په هم هغه اندازه د y خطا ډېره ده.

له دې کبله داسې معيار غواړو در وپېژنو چې د ټکو پيوستون مونږ ته اندازه کړي.

هغه فورمول چې د پيوستون د محاسبې لپاره ورکړ شوې ده، د پيوستون د ضريب په نامه ياد او په r سره ښودل کيږي چې عبارت دی له:

$$r=\frac{\frac{\text{د } x \text{ او } y \text{ د ضرب د حاصل مجموعه}}{n}-(\text{د } y \text{ گانو اوسط})(\text{د } x \text{ ونو اوسط})}{(\text{د } y \text{ گانو معياري انحراف})(\text{د } x \text{ ونو معياري انحراف})}=\frac{\frac{\sum xy}{n}-\bar{x}\,\bar{y}}{S_x\,S_y}$$

مثال: دموږکانو د لومړني وزن او غذايي رژيم څخه وروسته ډېټا لکه لاندې جدول په پام کې ونيسئ.

د موږکانو شميره	لومړني ورن X	له عمليې څخه وروسته وزن y	د x او y دضرب حاصل
1	1	8	8
2	2	3	6
3	1	7	7
4	3	5	15
5	2	4	8
	$\sum 9$	$\sum 27$	$\sum 44$

دلومړني او وروسته د غذايي رژيم د وزنونو تر منځ د پيوستون ضريب محاسبه کړئ.

حل: که چيرې x لومړني وزنونه او y د غذايي رژيم له تطبيق څخه وروسته وزنونه او $n=5$ د موږکانو شمېر په پام کې ونيسو، نو د x او y اوسطونه عبارت دي له:

$$\bar{x}=\frac{9}{5}=1.8 \qquad , \qquad \bar{y}=\frac{27}{5}=5.4$$

$$S_x^2=\text{د } x \text{ ونو واريانس}=\frac{(1-1.8)^2+(2-1.8)^2+(1-1.8)^2+(3-1.8)^2+(2-1.8)^2}{5}$$

$$=\frac{0.64+0.04+0.64+1.44+0.04}{5}=\frac{2.8}{5}=0.56$$

$$S_y^2=\text{د } y \text{ گانو واريانس}=\frac{(8-5.4)^2+(3-5.4)^2+(7-5.4)^2+(5-5.4)^2+(4-5.4)^2}{5}$$

$$=\frac{6.76+5.76+2.56+0.16+1.96}{5}=\frac{17.2}{5}=3.44$$

$$\frac{\text{د } x \text{ او } y \text{ گانو د ضرب د حاصل مجموعه}}{\text{د ډېټا شمېر}}=\frac{\sum x\cdot\sum y}{n}=\frac{(1\cdot 8)+(2\cdot 3)+(1\cdot 7)+(3\cdot 5)+(2\cdot 4)}{5}=\frac{44}{5}=8.8$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

په دې ډول په پایله کې د پیوستون ضریب په لاندې ډول لاس ته را ځي:

$$r = \text{د پیوستون ضریب} = \frac{8.8-(1.8)(5.4)}{\sqrt{0.56}\cdot\sqrt{3.44}} = \frac{-0.92}{1.36} = -0.67$$

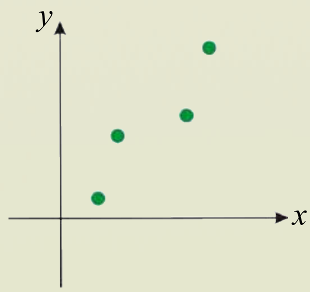
اوس داسې سوال را منځ ته کېږي چې د پیوستون د -0.67 ضریب د x او y ترمنځ د ډېر پیوستون ښودونکی ده او که نه؟ د دې سوال د ځواب د پیدا کېدو لپاره د پیوستون ضریب له لاندې مثالونو څخه په څو مرحلو کې پـه لاس راوړو:

مثال: لاندې جدولونه په پام کې و نیسئ:

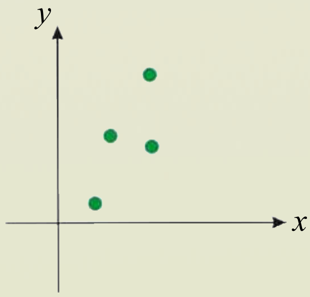
x	y
1	2.5
2	5.5
3	6.5
4	8.5

x	y
1	2
2	6
3	6
4	10

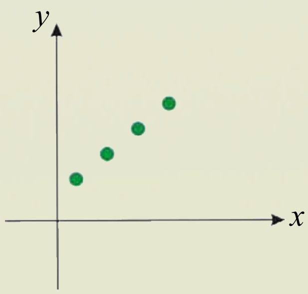
x	y
1	3
2	5
3	7
4	9



(ج)



(ب)



(الف)

د (الف) په شکل کې ټکي ټول په یوه کرښه پراته دي، نو په دې ډول د ټکو ترمنځ د پیوستون ضریب ډېر لوړ قیت لري.

د (ب) په شکل کې ټکي د یوې مستقیمې کرښې په شاخوا پراته دي، نو له دې کبله نظر د(الف) حالت تـه د ټکـو تر منځ د پیوستون ضریب لږ دی د (ج) په شکل کې څرنگه چې ټکي د مستقیمې کرښې د(ب) د حالت پـه انـدازه نږدې پراته دي، نو باید ضریب یې په دې حالت کې د(ب) له حالته زیات، خو د(الف) له حالته لږ دی، د دې خبرې د پخلي لپاره موضوع په لاندې ډول څیړو، د پیوستون ضریب د(الف) حالت لپاره:

$$\bar{x} = \frac{10}{4} = 2.5 \qquad \bar{y} = \frac{24}{4} = 6$$

$$\text{د } x \text{ ونو واریانس} = \frac{(-1.5)^2+(-0.5)^2+(0.5)^2+(1.5)^2}{4} = \frac{2.25+0.25+0.25+2.25}{4} = \frac{5}{4} = 1.25$$

$$\text{د } y \text{ گانو واریانس} = \frac{(-3)^2+(-1)^2+1^2+3^2}{4} = \frac{9+1+1+9}{4} = \frac{20}{4} = 5$$

$$\text{د } x \text{ او } y \text{ گانو دضرب حاصل} = (1\cdot3)+(2\cdot5)+(3\cdot7)+(9\cdot4) = 70$$

$$r = \text{دپیوستون ضریب} = \frac{\frac{70}{4}-(2.5)(6)}{\sqrt{1.25}\cdot\sqrt{5}} = \frac{17.5-15}{\sqrt{6.25}} = \frac{2.5}{2.5} = 1$$

د پیوستون ضریب د (ب) په حالت کې:

$\bar{x} = 2.5$, $\bar{y} = \frac{24}{4} = 6$

د x ونو واریانس $= 1.25$ ، د y ګانو واریانس $= \frac{16+0+0+16}{4} = 8$

د x او y ګانو د ضرب د حاصل مجموعه $= 2+12+18+40 = 72$

$$\text{د پیوستون ضریب} = \frac{\frac{72}{4}-(2.5)(6)}{\sqrt{1.25}\cdot\sqrt{8}} = \frac{3}{\sqrt{10}} = 0.9486$$

د (ج) په حالت کې د پیوستون ضریب: $\bar{y} = \frac{23}{4} = 5.75$, $\bar{x} = 2.5$

د x ونو واریانس $= 1.25$ ، د y ګانو واریانس $= 4.6875$

$$\frac{\text{د } x \text{ او } y \text{ ګانو د ضرب د حاصل مجموعه}}{4} = 16.75$$

$$\text{د پیوستون ضریب} = \frac{16.75-(2.5)(5.75)}{\sqrt{1.25}\sqrt{4.6875}} = \frac{2.375}{\sqrt{5.858}} = 0.9812$$

په یاد ولرئ چې په هغو شرایطو کې چې y لړ خطا و لري(د x او y مقدارونه خط ته نژدې پراته دي) که چیرې د پیوستون ضریبونه 1او -1 وي، x او y پر یوه مستقیمه کرښه پراته دي. غیر له هغه څخه د پیوستون ضریب د دغو دوو مقدارونو تر منځ پروت دی.

پوښتنې

1- لاندې ډېټا راکړل شوې ده.

x	1	2	3	4	5
y	4	3	2	1	0

د ډېټا دپیوستون ضریب محاسبه کړئ.

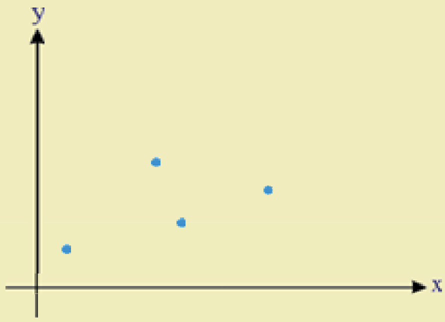
2- د خپلو ټولګیوالو د ونې او وزن تر منځ د پیوستون ضریب حساب کړئ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

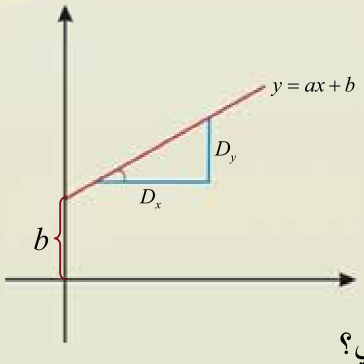
د خطي ميلان معادله

The linear regression equation



فرض کړئ چې يو پاشلي ګراف په لاندې ډول راکړل شـوی وي. يـوه مـستقيمه کرښـه چـې معادلـه يـې د $y = ax + b$ پـه ډول ورکـړل شـوې وي، پيـدا کـړئ چې ګراف يې ټولو ټکو ته نږدې فاصله يا واټن ولري.

فعاليت

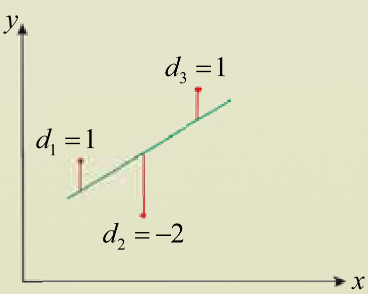


په مخامخ شکل کې يوه خطي تابع(لومړی درجه) چې ګراف يې مستقيمه کرښه ده، رسم شوې ده.

- د $y = ax + b$ خطي تابع کې a او b څه ډول مقدارونه دي؟
- د $y = ax + b$ په تابع کې د x او y متحولين په کوم نوم يادېږي؟
- د $y = ax + b$ مستقيمې کرښې ميل پيدا کړئ؟
- د $y = ax + b$ په معادله کې د y بدلون ، د يو واحد په اندازه په x کې و ټاکئ؟
- د $y = ax + b$ معادله کې که چيرې $a > 0$ وي؛ د تابع ګراف متزايد او که متناقص دی؟

همدغه راز که چيرې $a < 0$ سره وي، د تابع ګراف څه شکل لري؟

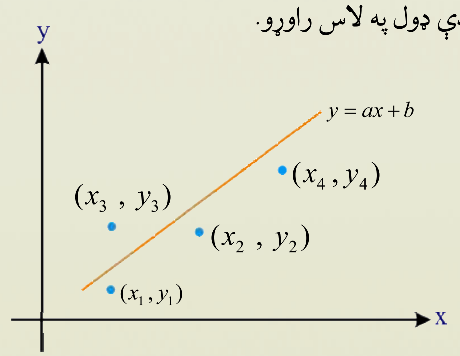
او که چيرې $a = 0$ وي، د تابع دګراف شکل و ټاکئ؟



مخامخ شکل په پام کې ونيسئ:

د فاصلو مجموع $d_1 + d_2 + d_3$ او $d_1^2 + d_2^2 + d_3^2$ محاسبه کړئ.

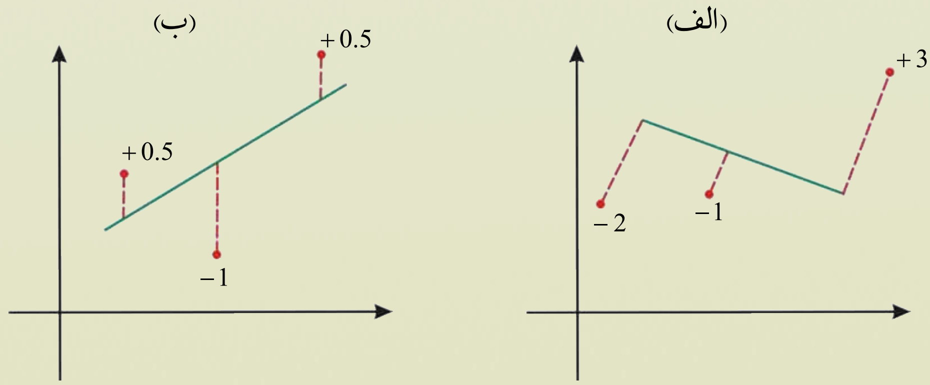
له پاسني فعاليت څخه پوهېږو چې د $y = ax + b$ معادله يوه خطي تابع ده چې د a ضريب ددې معادلې ميل جوړ وي او کله چې a مثبت وي، مستقيمه کرښه متزايد او که چيرې a منفي وي، نو کرښه متناقصه ده.
پاملرنه وکړئ چې که د (x, y) جوړه د $y = ax + b$ په معادله کې صدق وکړي، په دې صورت کې نوموړې ټکي د مستقيمې کرښې په ګراف پروت دی.
هر څومره چې د ټکو پاشل مستقيمې کرښې ته نژدې وي، نو د پيوستون ضريب به -1 او $+1$ ته ورنژدې وي، که چيرې د يوې مستقيمې کرښې معادله ولرو او پوه شو چې د پيوستون ضريب مناسب او کولای شو د y د متحول په مرسته متحول وټاکو او که چيرې مستقيمه کرښه ونلرو، کولای شو چې دغه کرښه په داسې يوه تګلاره چې د لږکيو(ميتود اصغري سازي)[1] مربعو په نامه يادېږي، په لاندې ډول په لاس راوړو.
فرض کوو چې د پاشلو ټکو ګراف(متفرقه دياګرام يا Scatrter diagram) په دې ډول راکړل شوی وي.



او غواړو داسې يوه کرښه چې معادله يې $y = ax + b$ وي، د ټکو له منځ څخه داسې تيره کړو چې ټولو ټکو ته نږدې وي. په دې تګلاره کې بايد په مناسب ډول د کرښې معادله داسې جوړه شي چې د عمودي انحرافونو د دويم توان مجموع له مستقيمې کرښې څخه لږ تر لږه اصغري وي، مخ کې له فورمول څخه لاندې مثال په پام کې نيسو:

x	1	5	9
y	6	5	7

لاندې شکلونه د دغې ډېټا لپاره رسموو او د کرښو خطاوې له مشاهدو څخه تشخيصوو.



[1] the method of least square -

(c) ketabton.com: The Digital Library

ښکاره ده چې رسم شوې کرښه د (ب) په حالت کې په مرتبو د(الف) له حالته ښه ده.

په دواړو حالتونو کې د کرښو د خطاګانو الجبري جمع صفر ده.

د (الف) حالت: $0 = 3 + (-1) + (-2)$ = د کرښې د خطاګانو الجبري جمع.

د (ب) حالت: $0 = 0.5 + (-1) + (0.5)$ = د کرښې د خطاګانو الجبري جمع.

څرنګه چې په دواړو حالتونو کې د جمعې حاصل مساوي په صفر ده، نو له دې کبله ویلای نشو چې کومه کرښه یوه مناسبه کرښه ده. ددې لپاره چې خطاوې مثبت او منفي یو بل له منځه یو نسي، نو هره کرښه وروسته له مربع کولو جمع کوو:

$$14 = (3)^2 + (-1)^2 + (-2)^2 =$$ د خطاګانو د دویم توان مجموع

$$1.5 = (0.5)^2 + (-1)^2 + (0.5)^2 =$$ د خطاګانو ددویم توان مجموع

له دې کبله د کرښې د خطاګانو د دویم توان مجموع څرنګه چې د(ب) په حالت کې نظر لـه(الـف) حالـت څخه یې قیمت لږ دی، نو ویلی شوچې:

مناسبه کرښه هغه ده چې د خطاګانو د مربعګانو مجموع یې له نورو کرښو کمه وي، دغه راز کرښو ته د ریګریشن کرښې وایي.

که چیرې د ریګریشن کرښې د مقدار او هغو مشاهداتو تر منځ د مقدارونو توپیرچې منځ ته راځي په $\bar{y}$ وښیو، په دې صورت کې د دویمو توانونو د مجموع د لا کوچني والي په خاطر په لاندې ډول عمل کوو:

$$= \sum (y-\bar{y})^2 = \sum [y-(ax+b)]^2$$ د خطاګانو ددویمو توانونو مجموع

$$= \sum (y-b-ax)^2$$

$$= (ax_1+b-y_1)^2 + (ax_2+b-y_2)^2 + ...$$

په دې حالت کې x او y ثابت، a او b متحولین دي.

پرته له دې مونږ هغه تګلاره چې د a او b د محاسبې او په لاس راوړلو لپاره په کار لویدلی، ورننو ځو، یوازې د هغوی د محاسبې خطا په پام کې نیسو:

$$b = \text{د پیوستون ضریب} \times \frac{\text{د } y \text{ معیاري انحراف}}{\text{د } x \text{ معیاري انحراف}}$$

د a او b د محاسبې دغه لاره چې د لږکیو مربعګانو تګلارې په نامه یادیږي.

پایله: د ریګریشن کرښه هغه وسیله ده چې د یو متحول د مقدار د وړاند وینې لپاره د بل متحول په حسابولو چې ورسره تړلې دی، د استفادې وړ ګرځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال:لاندې ډېټا په پام کې ونيسئ.

x	1	2	3	4	5
y	4	3	2	1	0

د y د ريګريشن کرښه نظر x ته په لاس راوړئ.

حل: څرنګه چې:

$$\bar{x}=\frac{\sum x_i}{n}=\frac{1+2+3+4+5}{5}=\frac{15}{5}=3$$

$$\bar{y}=\frac{\sum y_i}{n}=\frac{4+3+2+1+0}{5}=\frac{10}{5}=2$$

$$S_x^2=\frac{\sum (x_i-\bar{x})^2}{2}=\frac{4+1+0+1+4}{5}=\frac{10}{5}=2 \quad \Rightarrow S_x=\sqrt{2}$$

$$S_y^2=\frac{\sum (y_i-\bar{y})^2}{n}=\frac{4+1+0+1+4}{5}=\frac{10}{5} \quad \Rightarrow S_y=\sqrt{2}$$

$$\frac{\sum x\,y}{n}=\frac{4+6+6+4+0}{5}=\frac{20}{5}=4$$

$$r=\frac{\frac{1}{n}\sum xy-\bar{x}\cdot\bar{y}}{S_x\cdot S_y}=\frac{4-3\cdot 2}{\sqrt{2}\sqrt{2}}=\frac{-2}{2}=-1$$

له دې کبله:

$$b=\bar{y}-b\bar{x}=2-b\cdot 3$$

$$a=r\frac{S_y}{S_x}=-1\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=-1$$

$$b=\bar{y}-b\bar{x}=2-(-1)(3)=2+3=5$$

په دې ډول د ريګريشن معادله عبارت ده له: $y=ax+b=-x+5$

پوښتنه

که چېرې $y=2x+3$ د y د ريګريشن معادله نظر x ته او د x اوسط مساوي په 2 راکړل شـوي وي، د y اوسط څومره وي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

د بدلون ضریب: د بدلون ضریب د معیاري انحراف له اوسط څخه عبارت دی چې مطلق بې واحده عدد دی؛ لکه:

$$\text{د بدلون ضریب} = \frac{\text{معیاري انحراف}}{\text{اوسط}} \quad \text{یا} \quad C \cdot V = \frac{S}{\overline{x}}$$

دغه ضریب ډېر ځلې د فیصدي په ډول ښودل کېږي چې د تحول د ضریب په نامه یادېږي.

$$\text{د تحول ضریب} \quad C \cdot V = 100 \cdot \frac{S}{\overline{x}}$$

د بدلون ضریب د مثبتې ډېټا لپاره تعریفېږي، په یاد یې ولرئ که چیرې ډېټا سره مساوي وي، نو د پراګندګۍ ټول شاخصونه مساوي له صفر سره دي.

په نورمال منحني کې پراګنده‌ګي: نورمال منحني د احصایوي مجموعې یوه داسې توصیفي وسیله ده چې په نورمال منحني کې ډېټا په نورمال توزیع او کثرت منحني کې متناظر پراته دي؛ نو واریانس عمده نقش لري، په حقیقت کې د دوو پارامترو مشخص کیدل او معیاري انحراف په نورمال توزیع کې په عمومي ډول مشخص او د هر ډول شاخص د محاسبې زمینه برابره ده.

د نورمال توزیع شکل شاخصونه: د اوسط او معیاري انحراف په مرسته کولای شو د لید خرنګوالی د کږېدو(خمېدو) او پړسېدو(اوج) په ډول په ښه توګه څرګند او وړاندې کړو.

د کږېدلو شاخص د کږېدو او پیوستون ضریبونو په مرسته چې د اندازه کولو او اندازو د پرتله کولو لپاره پکارېږي په لاندې ډول لیکل کېږي:

$$\alpha_3 = \frac{\frac{1}{n}\sum(x_i - \overline{x})^3}{S^3} \quad , \quad \alpha_3 = \frac{\frac{1}{n}\sum f_i(x_i - \overline{x})^3}{S^3} \quad , \quad SK_{(p)} = \frac{3(\overline{x} - med)}{S}$$

د پړسېدو(جګېدلو) شاخص د پړسېدو د ضریب α_4 په مرسته اندازه او پرتله کېږي.

$$\alpha_4 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^4}{S^4} \quad , \quad \alpha_4 = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i - \overline{x})^4}{S^4}$$

څومتحوله ټولنې: په احصایوي څېړنو کې تر ټولو لویه موخه(هدف) وړاندوینه او د یو متحول ټاکل د بل متحول له مخې دی. کله چې د دوو شیانو ترمنځ اړیکې څېړل زموږ مقصد وي، په حقیقت کې هدف یوه دوه متحوله ټولنه ده؛ لکه د یو غاز د حجم او فشار ترمنځ اړیکه د صحت او حرکت د میزان ترمنځ اړیکه، د کرنې او د حاصل د مقدار ترمنځ اړیکه او یا هم د یوې دایرې د شعاع او مساحت ترمنځ اړیکه چې ټولې دغه راز اړیکې دوه متحوله ټولنې بیانوي. د آسانتیا لپاره معمولاً د دوه یا څو متحولینو ترمنځ اړیکه د ریاضي معادلو په مرسته وړاندې کوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پراګنده‌ګي ګراف: د پراګنده‌ګي ګراف د رسمولو لپاره ډېټا د مرتبو جوړو په شکل پـه یـوه مـستوي کې د قـایمو مختصاتو په سېستم کې ښوول کېږي. کیدای شي د ټکو او پراګنده‌ګي ګراف په مرسته درې ډوله اطلاعـات زمـوږ پـه اختیار کې راکړي.

الف: آیا داسې نمونه چې د څېړنو ترمنځ اړیکه ښیي، شته او که نه؟

ب: د یو ډول اړیکې د شتون په صورت کې دغه اړیکه خطي ده او که نه؟

ج: که چیرې اړیکه خطي وي، نو څه ډول اړیکه ده؟

پیوستون او د پیوستون ضریب: پیوستون د متحولینو ترمنځ د اړیکو د مېندلو درجه ده، کله کله دواړه متحـولین په یوه لوري بدلون کوي یعنې x او y دواړه په یوه کرښه لـوی او یـاهم کـوچني شـي، چې پیوسـتون یـې مـستقیمه کرښه ده. که چیرې د دوو متحولینو اندازه یو د بل پر خلاف بدلون وکړي یعنې که چیرې x لـوی شـي y کـوچنی کېږي. او یا هم برعکس صورت نیسي.

د پېژندنې ډېر ښه معیار د پیوستون شتون او نه شتون دی او حتا د خطي پیوسـتون ډول، جهـت او میـزان د پیوسـتون ضریب دی، چې د لاندې فورمول په واسطه ښوول کېږي:

$$r = \frac{\frac{1}{n}\sum xy - (\overline{x}\,\overline{y})}{S_x \cdot S_y}$$

په پورتنیو اړیکو کې $\sum xy$ د xونو او yګانو د ضرب د حاصـل مجمـوع، $\overline{x}$ د xونـو اوسـط او $\overline{y}$ د yګـانو اوسط دی، همداراز S_x د xونو معیاري انحراف او S_y د yګانو معیاري انحراف دی.

د ریګریشن کرښه: ریګریشن(تخمیني) د تابع د یوه متحول له قیمـت لاسـته راوړل او سـنجش څخـه عبـارت دی، چې د یو یا څو مستقلو متحولینو له ارزښت څخه په لاس راځي.

هغه معادله چې د متحولینو ترمنځ اړیکې افاده کوي، د ریګرېشن معادلې په نامه یادېږي.

کولای شو دغه معادله د ډېرو لږو مربعګانو د محاسبې په طریقـه حساب او همدارنګـه د a او b ضـریبونه د دغـې طریقې په مرسته په لاندې ډول په لاس راوړو:

$$a = \overline{y} - b\overline{x} \quad , \quad b = r\frac{S_y}{S_x}$$

چې S_y د y معیاري انحراف او S_x د x معیاري انحراف دی، په داسې حال کې چې r د پیوسـتون ضـریب، $\overline{x}$ د xونو اوسط او $\overline{y}$ د yګانو اوسط دی.

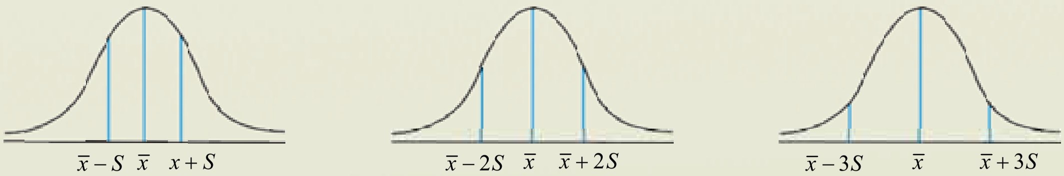
(c) ketabton.com: The Digital Library

د څپرکي پوښتنې

1-که چیرې په یوه ټولنه کې چې اوسط یې $\bar{x}=50$ او واریانس یې $S^2=64$ سره وي، د بدلون ضریب y چې له $y=2x+10$ رابطې سره سم بدلون مومي څو دی؟

2-که چیرې د هر زده کوونکی په نمرو کې 20% نمبرې ورزیاتې شي، نو د نمبرو د بدلون په ضریب څه اغیزه کوي؟

3- د هغو ټولنو فیصدي چې په لاندې درکړل شوو منحنې ګانو کې پرته ده، ولیکئ؟



4- لاندې اړیکو ته په پاملرنې ووایاست چې کومه یوه له دغو اړیکو څخه یو متحوله، دوه متحوله او درې متحوله اړیکې دي.

الف: ستاسو د ټولګیوالو د ونو اندازه؟

ب: د یو شي د عمومي مصرف او جنس ترمنځ اړیکه؟

ج: د یوې استوانې د حجم، جګوالي او د قاعدې د مساحت تر منځ اړیکې؟

5- د یو ټولګي د مصرف شوو ساعتونو د شمېر او د زده کوونکو د نمبرو تر منځ چې د 20% له مخې اخیستل شوي دي، د مرتبو جوړو په شکل په لاندې ډول دي:

(2,10) , (3,10) , (3,14) , (4,10) , (4,14)
(5,14) , (5,16) , (6,12) , (6,16) , (6,18)
(7,14) , (7,18) , (7,20) , (8,16) , (8,18)

د زده کونکو د مصرف شوو ساعتونو او نمبرو تر منځ د اړیکو له مخې ګراف رسم او خپلې پایلې وڅیړئ؟

6- مخامخ ډېټا په پام کې ونیسئ:

x	1	1	2	3
y	1	5	4	2

په ورکړ شوې ډېټا کې د پیوستون ضریب حساب کړئ؟

7- که چیرې د پیوستون ضریب صفر ته نژدې وي، نو خطا ډېره، که لږه ده؟

8- که چیرې د پیوستون ضریب د $+1$ او -1 عدد ته نژدې وي، نو د y د خطا په اړوند څه وایئ؟

9- د سروې له مخې چې د یوه ښوونځي په دو A او B ټولګیو کې شوې ده، لاندې عددونه د کیلوګرام په حساب د زده کوونکو د وزن لپاره راټول شوي دي:

A:	65	63	67	64	62	70	66	68	67	78	69	71
B:	68	66	68	65	69	66	68	65	71	67	68	70

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پاسنیو اعدادو په پام کې نیولو سره:

الف: د ډېټا د پراګندګۍ ګراف رسم کړئ؟

ب: د اړوندې مستقیمې کرښې معادله په لاس راوړئ a او b وټاکئ؟

ج: اړونده مستقیمه کرښه نظر د ریګرېشن معادلې ته رسم کړئ؟

10- که چیرې x او y سره بشپړ پیوستون او معکوس ولري، یعنې $S_x = S_y$، نو د y نسبت x ته د ریګرېشن خط کوم دی؟

1) $y=-\frac{1}{2}x+b$ 2) $y=\frac{1}{2}x+b$ 3) $y=x+b$ 4) $y=-x+b$

11- د 20 تنو زده کوونکو د ریاضي او فزیک د مضمون 20% د آزموینې پایلې چې په لاندې ډول ورکړ شوي، رسم کړئ؟

زده‌کوونکي	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
د ریاضي نمرې	18	8	12	18	16	6	10	6	16	10	12
د فزیک نمرې	16	10	8	18	14	10	10	6	10	14	10

زده‌کوونکي	12	13	14	15	16	17	18	19	20
د ریاضي نمرې	12	10	16	18	12	6	14	14	12
د فزیک نمرې	6	12	16	12	12	8	12	14	16

ـ د ریګریشن د کرښې معادله په لاس راوړئ؟

ـ آیا د دوو آزموینو د پایلو تر منځ اړیکې شتون لري؟

12- پر چنګښو د خوراک د مالګې د 5 او یو فیصده محلول اغیزې د یون پلازما پر میزان د هغوی په بدن کې په لاندې جدول کې ثبت شوي دي؟

د مالګې په محلول کې د پاتېکېدو وخت	50	40	30	20	10	5	0
د یون پلازما میزان(mm)	136	132	126	122	118	110	90

ـ په پاسنی جدول کې متحولین وڅېړئ؟

ـ په پورتنیو متحولینو کې کوم یو خپلواک او کوم یو ناخپلواک متحول دی؟

ـ یو داسې ګراف رسم کړئ چې د دواړو متحولینو ترمنځ اړیکه وښیي؟

ـ د دې ګراف په رسم کې خپلواک متحول په افقي محور وښایاست؟

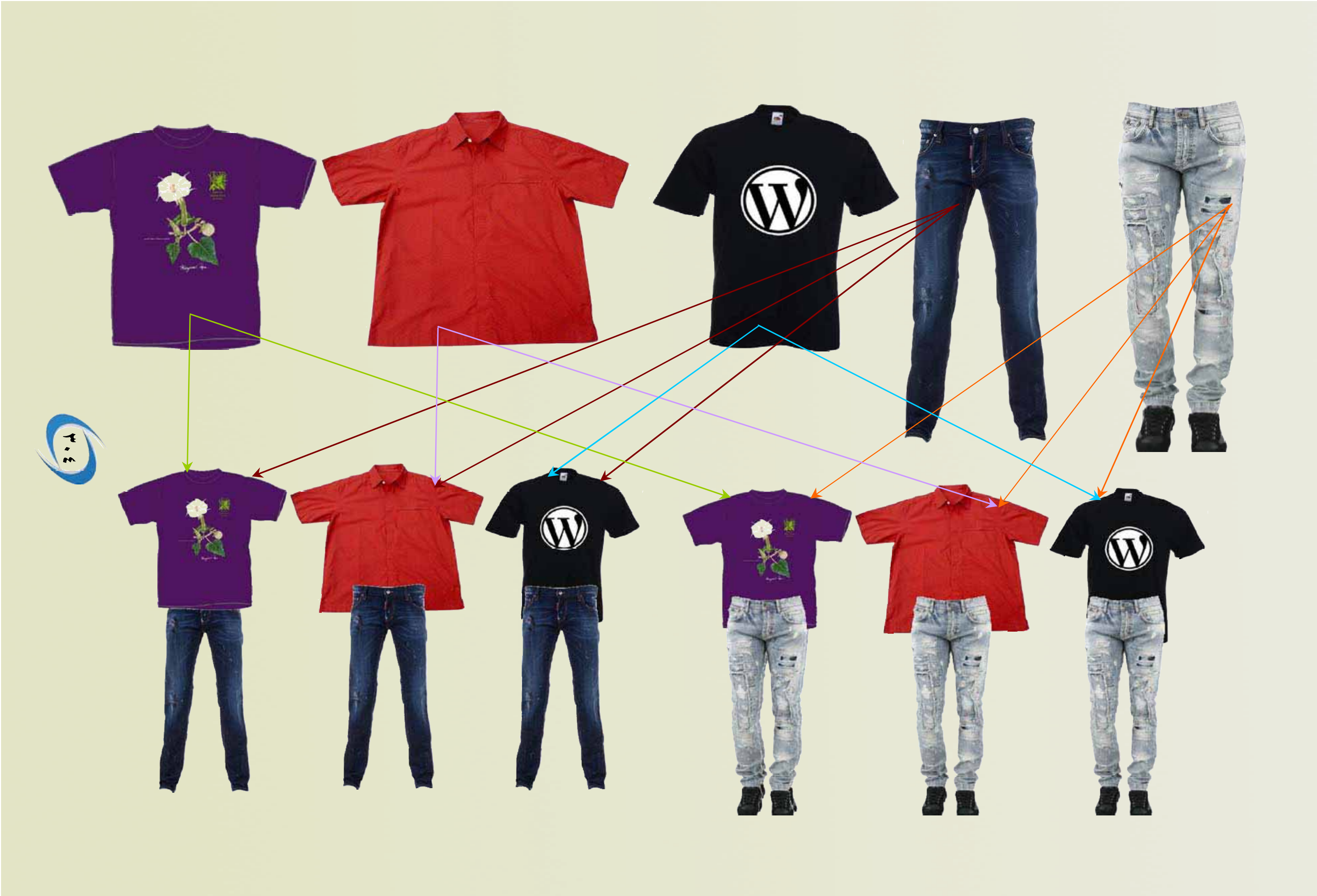
(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

نهم څپرکی

احتمالات

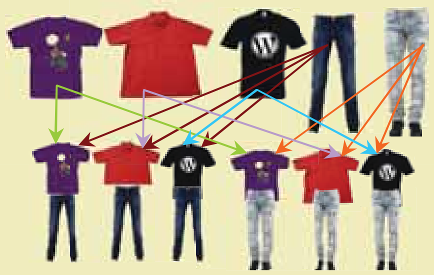
(c) ketabton.com: The Digital Library



پرموټېشن یا ترتیب

Permutation

که چېري درى بيلابيل کميسونه او دوه پطلونونه ولرو، په څو ډوله کولای شو هغه سره جوړه جوړه واغوندو؟



فعالیت

خپل درې تنه ملګري وآزمويئ چې په څو ډوله کولای شي په يو کتار کې و درېږي؟

- له درې يو رقمي اختياري عددونو څخه څو درې رقمي عددونه کولای شو جوړ کړو.
- له پورتنيو عددونو څخه چې پورته مو د درې رقمي عددونو د جوړولو لپاره ټاکلي دي څو درې رقمي عدونه جوړولاي شو، په دي شرط چې په عددکي رقم تکرار نه وی.
- د پاسني فعاليت د اول، دويم او دريم پاراګراف پايلې سره پرتله او ووايې چې څه اړيکی سره لري؟

له پاسني فعاليت څخه لاندي پايله په لاس راځي:

پایله

د n شيانو د ترتيب د شمېر ډولونه چې سره خوا په خوا راشي عبارت دي له:

- که تکرار مجاز نه وي مساوي په $n\cdot(n-1)\ \ldots\ 2\cdot 1$ سره دي.

- که تکرار مجاز وي مساوي په $\underbrace{n\cdot n\cdot\ \ldots\ \cdot n}_{n\ \text{ځلې}} = n^n$ سره دي.

تعریف: د يوه طبيعي عدد لپاره د $(1\cdot 2\cdot 3\cdot\ \ldots\ \cdot n)$ حاصل ضرب په لنډ ډول په $n!$ (n – فکتوريل) ښودل کيږي. او د تعريف له مخې $1!=1, 0!=1$ سره دي.

2: د n عنصرونو د ترتيب ډولونه چې د n غړو د پرموټېشن(Permutation) په نامه هم يادېږي په P_n سره ښودل کيږي.که چيرې تکرار په ترتيب کې ناشوني او يا مجازنه وي.

نو د پاسني تعريف په پام کې نيولو سره $P_n = n!$ سره کيږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

که چیرې په ترتیب تکرار شوني او یا مجاز وي، نو په دې صورت کې د ترتیب ډولونه او یا پرموټېشنونه په مجاز تکرار کې $P_n^{(k)}=\frac{n!}{k!}\ ,\ (k\le n)$

لومړی مثال:

(i) : د لاندې عددونو قیمت پیدا کړئ.

$3!, 8!, 5!$

(ii): د هر یو طبیعي عدد لپاره وښیئ چې $n!=n(n-1)!$ سره ده؟

حل (i):د تعریف له مخې لرو چې:

$$3!=1\cdot2\cdot3=6$$
$$5!=1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5=120$$
$$8!=1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8=40320$$

(ii) پوهېږو چې: $n!=1\cdot2\cdot3\cdot\ \dots\ \cdot n=(1\cdot2\cdot3\cdot\ \dots\ \cdot n-1)(n)=n(n-1)!$

دویم مثال: د آزموینې لپاره په یوسالون کې 16 زده کوونکي له بېلابېلو ټولګیو د سوېې آزموینې لپاره راغونډ شوې دي.

په څو ډوله کولای شو د 16 مېزونو تر شا په لیکه کښېنئ چې د هر یو د ځای تغییر د ناستې یو حالت وشمېرل شي.

حل: پوهېږو چې ځواب !16 دي چې تکرار پکې ناشونی دی. که چیرې تکرار مجاز وي، په دې صورت کې مسئله عبارت له ترتیب د n شیانو چې k عدده یې د مثال په ډول په تکراري ډول راښکاربږي، نو په دې صورت کې لرو چې: $P_n^k=\frac{n!}{k!}\ ,\ (k\le n)$

مثلاً په پاسني مثال کې، که چیرې 16 زده کوونکي وغواړي خپل ځایونه په خپلو لاسي بکسونو ونیسي او له دې څخه 4 تنه یو ډول لاسي بکسونه ولري، نو لرو چې:

$$P_{16}^{(4)}=\frac{16!}{(16-4)!}=\frac{16!}{12!}=13\cdot14\cdot15\cdot16=43680$$

که چیرې د دې مسئلې عمومي حالت په پام کې ونیسو، نو په دې صورت کې د $P_n^{(k_1,k_2,\ \dots\ ,k_n)}$ n ترتیبه یا پرموټېشنونه چې په هغه کې تکرار مجاز نه او په حقیقت کې، m ګروپه شیان چې هر یو یې په ترتیب سره د $k_1!, k_2!\cdot\ \dots\ \cdot k_n!$ په اندازه سره یو شان دي، لرو چې:

$$P_n^{(k_1,k_2,\ \dots\ ,k_n)}=\frac{n!}{k_1!\cdot k_2!\cdot k_3!\cdot\ \dots\ \cdot k_n!}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دریم مثال: له پنځه $(5,5,5,4,4)$ عددونو څخه په څو ډوله کولای شو، پنځه رقمي عددونه جوړ کړو.

حل: پوهېږو چې د فورمول له مخې د عددونو شمیر عبارت دي له: $P_3^{(2,3)} = \frac{5!}{2!.3!} = 10$

چې په خپله عددونه په لاندې ډول دي:

55544 , 55454 , 54554 , 45554 , 45545

45455 , 44555 , 54545 , 55445 , 54455

څلورم مثال: د سبا کاروان ټرانسپورټي شرکت د کابل جلال آباد په لین کې 5 لوی سروېسونه او د جلال آباد- کنړ په لاره 3 مېنې بسه لري. په څو ډوله کولای شو، د نوموړي ټرانسپورټ په سروېسونو او مېنې بسونو کې له کابله- کنړ ته سفر وکړو؟

حل:پوهېږو له کابله تر جلال آباد پورې د نوموړي شرکت له سروېسونو څخه یوازې 5 امکانه وجود لري، چې د هر یوه امکان په وړاندې 3 امکانه د مېنې بس د انتخاب چانس له جلال آباد څخه تر کنړه، د نوموړي شرکت وجود لري.

په دې ډول ټول امکانات مساي دي په: $5\times3=15$

پنځم مثال: د $8,7,2$ او 5 عددونو په مرسته څو درې رقمي عددونه(پرته له تکراره) جوړولای شو.

حل: دې خبرې ته په پاملرنې سره چې عددونه درې رقمي دي، نو درې خالي ځایونه لرو، چې په لاندې ډول د هغو ډکول په عددونو امکان لري:

د دریم رقم ځای	د دویم رقم ځای	د لومړي رقم ځای	
2	3	4	دامکاناتو ډولونه

پوهېږو چې د لومړي رقم د ځای د ډکولو لپاره 4 امکانه شتون لري، په دې ډول د دویم رقم د ځای د ډکولو لپاره 3 امکانه پاتې کېږي، ځکه چې له څلور عددونو څخه یو د لومړي رقم لپاره نیول شوی دی، او بلې خواته څرنګه چې تکرار مجاز نه دی، نو یوازې 3 امکانه د دویم رقم د ځای د ډکولو لپاره شته او د دریم رقم د ځای د ډکولو لپاره دوه امکانه شته چې ټول حالتونه عبارت دي له: $4\cdot3\cdot2 = 24$ او د فورمول له مخې لروچې: $p_4^{(3)} = \frac{4!}{(4-3)!} = 24$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

1. څو پنځه رقمي عددونه وجود لري چې لومړی رقم يې 2 او وروستی رقم يې مساوي په 4 وي، په عدد کې هيڅ رقم تکراري نه وي؟
2. په څو ډوله 10 نفره کولای شي، د يوه گردی ميز په شاوخوا کښيني چې له دې جملې څخه 2 تنه غواړي په هر حالت کې سره خوا په خوا کيني.
3. په څو ډوله کولای شئ 3 سره توپونه، 2 آسماني او څلور زيړ توپونه سره خوا په خوا په يو کتار کې کيږدو. (د هم رنگه تو پونو په کتار کې د هم رنگه توپونو ځای بدلول بل حالت نه شميرل کيږي.)

(c) ketabton.com: The Digital Library

ترکیب یا کمبینیشن

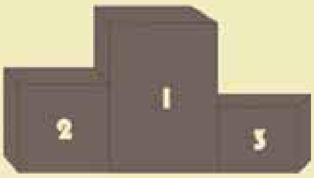
Combination

د 1 او 2 عددونو ترکیب څه دی؟

د 1 او 2 عددونو ترتیب کوم دی؟

ستا سو له نظره ترکیبونه او ترتیبونه څه سره توپیرلري؟

مخکي له دې چې لاندې فعالیت سرته ورسوو، لاندې تعریف چې په فعالیت کې به له هغه څخه کار واخلو په پام کې نیسو.



تعریف

د $\binom{n}{k}$ لیکدود چې n د k له پاسه ویل کېږي او په حقیقت کې د بینوم د ضریبونو په نامه یادېږي چې k د بینوم توان ښیي او په لاندې ډول دی:

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!} \quad , \quad 0\le k\le n \quad , \quad k \wedge n\in IN$$

فعالیت

د پاسني تعریف په پام کې نیولو سره، د بینوم د $(a+b)^2$ د دوه حدي په انکشاف کې د بینوم ضرایب چې مساوي په $\binom{2}{k}$ $k=0,1,2,$ سره دی، پرتله کړئ:

$$(a+b)^2=\square a^2+\square ab+\square b^2$$

- د بینوم ضریبونه چې په پاسني انکشاف کې، په چوکاټونو کې نیول شوي، د $\binom{2}{k}$ له $k=0,1,2$ قیمتونو سره پرتله کړئ؟
- خرنگه چې $\binom{2}{0}=\binom{2}{2}=1$ سره دي، ویلای شئ چې د هر $n\in IN$ لپاره $\binom{n}{n}$ او د $\binom{n}{0}$ قیمتونه هم سره برابر او مساوي په 1 دي؟
- د $(a+b)^n$ په انکشاف کې د بینوم د ضریب د دویم حد قیمت د $\binom{n}{k}$ له مخې حساب کړئ.
- د $\binom{4}{k}$ $k=0,1,2,3,4,$ قیمتونه د بینوم د انکشاف له کومو ضریبونو سره مساوي دی، ویې لیکئ؟

له پاسني فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راځي:

پایله: د هر n او k طبیعي عددونو لپاره، په داسې حال کې چې $0\le k\le n$ سره دی لرو:

(i) $\binom{n}{n}=1 \quad , \quad \binom{n}{0}=1$

(ii) $\binom{n+1}{r}=\binom{n}{r-1}+\binom{n}{r}$

(iii) له n شخه د r شیانو ترکیبونه عبارت د یو n عنصره سټ د غړو د ترکیب یا کمبینیشن د r له n شیانو شخه ده چې په C_r^n سره ښودل کېږي او قیمت یې عبارت دی له: $C_r^n=\binom{n}{r}=\frac{n!}{r!(n-r)!}$

لومړی مثال: په یوه ښوونځي کې د لسم 7 ټولګي شتون لري. د ښوونځي اداره غواړي چې لسم ټولګي له 7 تنو اول نمره ګانو، 4 تنه و ټاکي. په څو ډوله دغه انتخاب کیدلای شي؟

حل: لیدل کېږي چې له 7 تنو شخه د 4 تنو په ټاکنه کې هیڅ ډول برلاسي او ترتیب په پام کې نشته؛ یعنې دا چې، مهمه نه ده زده کوونکي د کوم ټولګي دي؛ نو دا ډول مسئله عبارت له ترکیب شخه ده چې له 7 تنو شخه 4 تنه و ټاکو؛ نو لرو چې: $C_4^7=\binom{7}{4}=\frac{7!}{4!(7-4)!}=\frac{7\cdot6\cdot5\cdot4!}{3!\cdot4!}=\frac{5\cdot6\cdot7}{6}=35$

دویم مثال: که له 7 تنو زده کوونکو 4 تنه د لسم ټولګي د زده کوونکو د اتحادیې د مشرتابه لپاره، داسې چې لومړی تن رئیس، دویم معاون، دریم منشي او څلورم تن د مالي مسؤول په توګه و ټاکل شي، په دې صورت کې لرو چې:

څرنګه چې لیدل کیږي په دې ټاکنه کې ترتیب مهم دی، ځکه چې د ABCD د انتخاب ترتیب په داسې حال کې چې A رئیس، B معاون، C منشي او D مالي مسؤول دی، په داسې حال کې چې د CABD په ترکیب کې C رئیس، A معاون، B منشي او D مالي مسؤول ګڼل کېږي.

دا ډول مسئله عبارت له ترتیب یا پرموټېشن شخه ده چې له 7تنو شخه د 4 تنو په ترتیب انتخاب دي؛ یعنې لرو چې: $P(7,4)=\frac{7!}{(7-4)!}=\frac{7!}{3!}=\frac{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3!}{3!}=120\cdot7=840$

پوښتنې

1- له اوو حرفونو شخه لکه A, B, C, D, E, F او G څو 4 حرفي کلمې، پرته له تکراري حرفه جوړولای شو؟

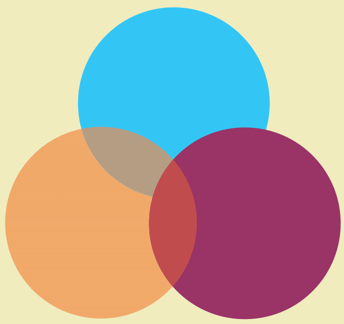
2- د والیبال په یوه لیګ کې، 7 ټیمونه ګډون لري. په څو ډوله ټیمونه کولای شي لومړی، دویم او دریم مقام لاس ته راوړي؟

3- له 4 نارینه وو او 6 میرمنو شخه 2 نارینه او 3 ښځې داسې ټاکو چې نارینه په کې یو رئیس او دویم یې مالي مسؤول وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

ترکیب
Combination



آیا پوهېږئ چې اصلي رنگونه کوم دي؟

د نارنجي او بنفش رنگ ترکیب کوم رنگ دی؟

ستاسو په نظر ژیړ رنگ د کومو رنگونو له ترکیبه جوړېږي؟

آسماني رنگ، بنفش رنگ، نارنجي رنگ.

فعالیت

د خپلو 5 تنو ټولگیوالو څخه 3 تنه په خو ډوله ټاکلی شئ؟

- موضوع په عملي توگه په ټولگي کې تجربه او حالتونه یې و شمېرئ؟
- که چیرې له 5 تنو زده‌کوونکو څخه 3 تنه داسې و ټاکل شي چې، لومړی کس سرگروپ، دویم د سرگروپ مرستیال او دریم تن منشي وي، د دریو تنو گروپ، د ټاکلو ټول ډولونه څو دي؟
- د پورتني فعالیت لومړی او وروستی جزء یو تربله څه توپیر لري؟
- آیا فکر کولای شئ د پاسنیو گروپونو د ټاکلو شمېر مساوي له کوم عدد سره دی؟

له پاسني فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راځي:

پایله: دلته د k په شمېر غړو یو گروپ له یو سټ څخه چې n غړي لري، په عمومي ډول په دوه ډوله صورت نیسي چې په یوه کې ترتیب په پام کې دی، خو په بل کې ترتیب مهم نه شمېرل کېږي، یوازې د هغوی ترکیب د پام وړ دی.

په دې ترتیب د یو ترکیب یا کمبینیشن چې k شیان له n بېلابېلو شیانو څخه مطلب دی، چې په لاندې تعریف کې بیانېږي.

تعریف: د k شیانو ترکیب له یوه n عنصره سټ څخه چې په C_k^n ښودل کېږي او عبارت له $\binom{n}{k}$ ترکیبي امکاناتو څخه دی چې د k په شمېر غړي یې پرته له ترتیب څخه ټاکل کېږي، عبارت دي له:

$$C_k^n = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad , \quad 0 \le k \le n$$

لومړی‌مثال: له 30 تنو څخه د 4 تنو ټاکل چې ترتیب په کې مهم نه دی، حساب کړئ؟

حل: پوهېږو چې مسئله عبارت له 30 تنو څخه د 4 تنو دی چې د فورمول له مخې په لانـدې ډول پـه لاس راځي:

$$C_4^{30}=\binom{30}{4}=\frac{30!}{4!(30-4)!}=\frac{30\cdot29\cdot28\cdot27\cdot26!}{26!\cdot4!}=27405$$

دویم مثال: له $A=\{1,2,3,4,5\}$ سټ څخه څو 3 عنصره فرعي سټونه په لاس راځي؟

حل: پوهېږو چې مسـئله په حقیقت کې له 5 غړو څخه د 3 غړو ټاکـل دي چې شـمیر یې پـه لانـدې ډول په لاس راځي:

$$C_3^5=\binom{5}{3}=\frac{5!}{3!(5-3)!}=\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}{1\cdot2\cdot1\cdot2\cdot3}=10$$

پوښتنې

1- که چیرې په یوه آزموینه کې له 10 پوښتنو څخه 7 پوښتنو ته ځواب مطلوب وي، پـه څـو ډولـه کـولای شو چې له 10 پوښتنو څخه 7 پوښتنې د حل لپاره وټاکو؟

2- په یوه مستوي کې پنځه ټکي چې په یوه کرښه پراته نه دي، په پام کې ونیسئ د دې ټکـو پـه نـښلولو سـره په څو ډوله مثلث جوړولای شو.

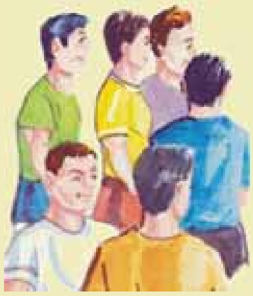
3- که چیرې $P(n,2)-C_2^n=36$ سره وي، د n قیمت پیدا کړئ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

تبدیل

Variation



په یوه المپیاکې له 10 ورزشي ټیمونو څخه په څو ډولونو د سرو زرو، سپینو زرو او برونزو مډالونه شتون لري؟

فعالیت

- د n بیلابیلو شیانو په پام کې نیولو سره د k په شمیر شیان ټاکو، د هغوی مجموعي شمېر څو دی؟
- که چیرې د k شیانو په ټاکلو کې ترتیب داسې وي، چې په هغوی کې لومړی، دویم، دریم او ... شتون ولري، ټول مجموعي حالات به څو وي؟
- د پاسنیو دوارو ډولونو ترمنځ توپیر په کومه اندازه ده؟

پایله: د هغو ترکیبونو شمېر چې د k غړو د پرله پسې ترتیب په انتخاب کې له n غړو څخه په پام کې وي، نو په دې صورت کې یې شمېر مساوي په $k!\cdot C_k^n$ سره کېږي.

دغه ترکیب د وریشن Variation یا تبدیل په نامه یاد او په V_k^n سره ښودل کېږي چې عبارت دی له:

$$V_k^n = k!\cdot C_k^n = k!\cdot\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!} \quad\Rightarrow\quad V_k^n = \frac{n!}{(n-k)!}$$

مثال: څو امکانه وجود لري چې په یوه انتخاباتي غونډه کې له 30 تنو ګډون کوونکو څخه 4 تنه د مشرتابه لپاره په داسې حال کې چې یو تن رئیس، یو لومړی مرستیال، یو دویم مرستیال او څلورم تن د منشي په توګه دنده ترسره کړي؟

حل: مسئله په حقیقت کې د 4 تنو تبدیل له 30 تنو څخه ده، چې د تعریف له مخې له لاندې فورمول څخه په لاس راځي:

$$V_4^{30} = \frac{30!}{(30-4)!} = \frac{30\cdot 27\cdot 29\cdot 28\cdot 26!}{26!} = 657520$$

پورتني حالات چې تر اوسه مو د ترتیبونو، ترکیبونو او تبدیلونو لپاره تر بحث لاندې و نیول په لاندې جدول کې را ټول شوي دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

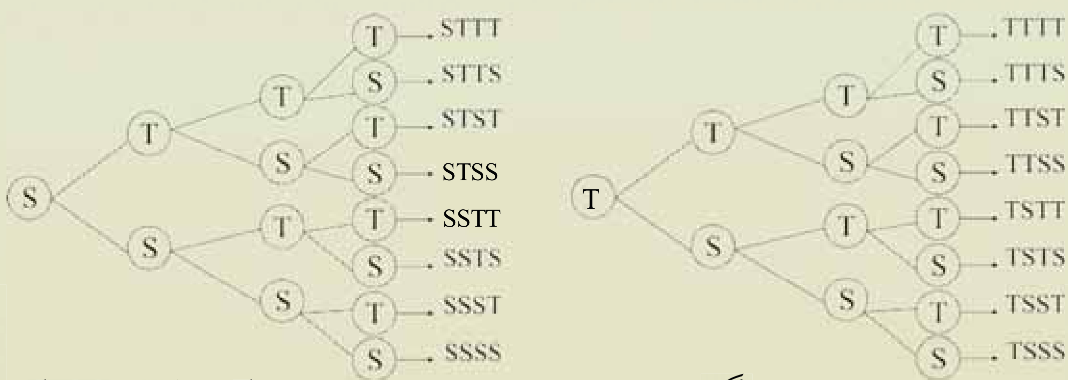
د ټاکنو ډول k غړي له n غړو څخه	د امکاناتو شمیر	
	پرته له تکراره $k \le n$	له تکرار سره $k \le n$
ترتیب یا پرموټېشن	$P(n,k) = n! \quad , \quad n = k$	$P(n,k) = \frac{n!}{k!}$
ترکیب یا کمبېنیشن	$C_k^n = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$	$C_k^n = \binom{n+k-1}{k}$
تبدیل یا وریشن	$V_k^n = k!\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!}$	$V_k^n = n^k$

پوښتنې

1- په یوه ورزشي سیالی کې د فوټبال 12 ټیمونه، په څو ډوله لومړی، دویم او دریم مقام ګټلی شي؟

2- د یوولسم ټولګي له 20 تنو زده‌کوونکو څخه په څو ډوله 2 تنه د ټولګي د استازي او د استازي د مشر مرستیال په توګه ټاکلی شو؟

مثال: د یوې سکې په اچولو سره چې د راتګ امکان یې، شیر یا خط ممکن دی او د هرې خوا د راتګ احتمال یې مساوي په $\frac{1}{2}$ دی، په پام کې ونیسئ، که چیرې سکه 2 ځلې، درې ځلې، شپږ ځلې، اته ځلې او یا 16 ځلې وغور ځوو، پوهېږو چې د هم چانسو لومړنیو پېښو په نمونه‌یي فضا کې په یوه ونه‌ییز ګراف کې لاندې حالت لرو: (شیر $= S$ او خط $= T$) دی.

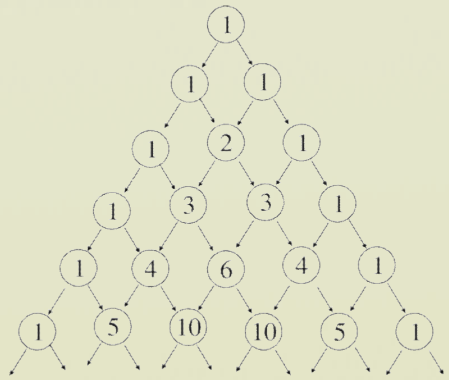


د پاسني مثال د شیر او خط د راتګ احتمال په یو، دوه، درې او څلور ځلې اچولو کې په لاندې جدول کې راټول شوي دي.

د سکې غورځول	هیڅ ځل		یو ځل		دوه ځله		دري ځله		څلورځله	
	خط	احتمال	خط	احتمال	خط	احتمال	خط	احتمال	خط	احتمال
د خط د راتګ شمیر	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{16}$
			1	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{2}{4}$	1	$\frac{3}{8}$	1	$\frac{4}{16}$
					2	$\frac{1}{4}$	2	$\frac{3}{8}$	2	$\frac{6}{16}$
							3	$\frac{1}{8}$	3	$\frac{4}{16}$
									4	$\frac{1}{16}$

که چیرې جدول ته په ځیر سره پاملرنه وکړئ، د هر وار د احتمال د کسرونو په صورت کې یو نظم وینو چې د بنیوم په انکشاف کې په ترتیب سره د حدونو ثابت غړي دي چې د لومړي ځل لپاره د پاسکال له خوا راوپیژندل شول او تر اوسه د هغه په نامه یادېږي.

دغه نظم مثلاً په مخامخ مثلث کې په یوه لیکه کې اعداد د کیڼې او ښي خوا د عددونو سره په پورته لیکه کې له جمعې لاس ته راغلي دي.



په دې ډول کولای شو چې مثلث ته تر بینهایت پورې دوام ورکړو، چې که چیرې هغوی د یو دوه جملهيي له انکشاف سره پرتله کړو، لکه د راکړل شوي پاسکال مثلث عددونه دي؛ مثلاً پاملرنه وکړئ چې د دوه

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله‌يي په انکشاف کې له هغو عددونو څخه مو حلقه تاو کړې ده د مثلث له اعدادو سره چې حلقه ترې تاوشوې ده یو شان ده:

$$(a+b)^0 = \textcircled{1}$$
$$(a+b)^1 = \textcircled{1}a + \textcircled{1}b$$
$$(a+b)^2 = \textcircled{1}a^2 + \textcircled{2}ab + \textcircled{1}b^2$$
$$(a+b)^3 = \textcircled{1}a^3 + \textcircled{3}a^2b + \textcircled{3}ab^2 + \textcircled{1}b^3$$
$$(a+b)^4 = \textcircled{1}a^4 + \textcircled{4}a^3b + \textcircled{6}a^2b^2 + \textcircled{4}ab^3 + \textcircled{1}b^3$$

$\textcircled{1}$

$\textcircled{1}\ \textcircled{2}\ \textcircled{1}$

$\textcircled{1}\ \textcircled{3}\ \textcircled{3}\ \textcircled{1}$

$\textcircled{1}\ \textcircled{4}\ \textcircled{6}\ \textcircled{4}\ \textcircled{1}$

چې دغه ضریبونه د $(a+b)^n$ په انکشاف کې n د k له پاسه د ضریبونو استعمال په لاندې ډول لیکلی‌شو:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$

د " $\sum$ " علامه د پاسنی مجموع لپاره استعمال شوې ده.

په دې ډول د خط راتللو احتمال په k– امه مرتبه کې عبارت دی له: $P(\text{خط راتگ}) = \dfrac{\binom{n}{k}}{2^n}$

پوښتنې

1. د فوټبال په یوه سیالی کې 12 ټیمونه ګډون لري، په څو ډوله کولای شو ګټونکي لومړی، دویم او دریم مقام ته وټاکو.
2. د یوولسم ټولګي له 20 تنو زده‌کوونکو څخه په څو ډوله دوه تنه، د ټولګي د استازې او د استازې د مرستیال په توګه وټاکو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

د بینوم قضیه

د پاسکال د مثلث له مخې د بینوم د انکشاف ضریبونه وټاکئ.

$$(a+b)^2 = \bigcirc a^2 + \bigcirc ab + \bigcirc b^2$$
$$(a+b)^3 = \bigcirc a^3 + \bigcirc a^2b + \bigcirc ab^2 + \bigcirc b^3$$
$$(a+b)^4 = \bigcirc a^4 + \bigcirc a^3b + \bigcirc a^2b^2 + \bigcirc ab^3 + \bigcirc b^4$$

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1

فعالیت

- په یوه ناڅاپي تجربه کې چې یوازې دوه ناڅاپي پېښې د A او $\overline{A}$ پېښېږي، یعنې د $\{A,\overline{A}\}$ نمونوي فضا لري. د A د پېښې احتمال عبارت دی له:
- که چیرې $P(A)=P$ د A د پېښې احتمال وي، د هغې د مکمله پېښې احتمال یعنې $\overline{A}$ څو دی $P(\overline{A})=?$
- د پورتنې تجربې له بیا بیا تکرار څخه که چیرې د A حادثې پېښېدو ته 1 او د نه پېښېدو حالت ته یې 0 ووایو لاندې جدول د تجربې د بیا بیا تکرار یعنې $n=2$ لپاره بشپړ کړئ.

د بینوم د ضریبونو ارایه	احتمال	ممکني پایلې	k
$\binom{2}{0}.p^0.(1-p)^2$	$(1-p)^2$		0
	$2p(1-p)$	10	1
$\binom{2}{2}p^2(1-p)^2$		11	2
$\sum\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}=?$	$(p+(1-p))^2$		

د بینوم د حدونو د انکشاف مجموع یعنې $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$ پیدا کړئ؟

له پورتنې فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راځي:

پایله: په یوه ناڅاپي تجربه کې چې د نمونې فضا غړي يې په مساوي احتمال په تجربه کې بيابيا د تکرار وړ وي، نو د تجربې په n ځله تکرارکې د بينوم د انکشاف k – ام حدکې لاندې احتمال لري:

$$\binom{n}{k}.p^k(1-p)^{n-k}$$

پورتنی بينوم په $B(n,p,k)$ ښودل کېږي، د برنولي د پرابلم د احتمال په نامه يادېږي او ليکو:

$B(n,p,k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$ سره کېږي.

مثال: له n تنو څخه د 10 تنو په شمېر په ناڅاپي ډول ټاکو، د k تنو انتخاب شوو خلکو له جملې څخه 2 تنه ټاکو، پيداکړئ د دې احتمال چې دواړه تنه په يوه ورځ زېږېدلي وي. $P(k\le n)=?$

حل: په دې ډول د Ω په نمونه‌يي فضاکې داسې فرضوو چې د هرې ورځې احتمال $\frac{1}{365}$ او د زېږېدنې ورځ د سوال وړ ده نه، د زېږېدنې کال.

په دې ډول Ω په نمونه‌يي فضاکې ټول امکانات له 365 ورځونه څخه د k شمېر لپاره عبارت دی له:

$|\Omega|=(365)^k$

په دې ډول اوس که چيرې د A ناڅاپي پېښه چې لږترلږه دوه تنه په يوه ورځ زېږېدلي وي، په ساده ډول داسې د محاسبې وړ ده، چې د A د حادثې مکمله په پام کې نيسو، په دې ډول $\overline{A}$ عبارت له هغې نا څاپي پېښې څخه ده چې k تنه په بېلابېلو ورځوکې زېږېدلي دي. په دې ډول $\overline{A}$ عبارت د k پرموټېشن له 365 څخه ده چې لرو: $P(\overline{A})=(365,k)=\frac{365!}{(365-k)!}$

په دې ډول: $P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{|\overline{A}|}{|\Omega|}=1-(365,k)=1-\frac{365!}{(365-k)!}\cdot\frac{1}{(365)^k}$

پوښتنې

وښيئ چې:

$(I)\quad \binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\cdots+(-1)^n\binom{n}{n}=0$

$(II)\quad \binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\cdots+\binom{n}{n}=2^n$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دوه جمله يي احتمال

آيا کولای شو چې د هرې نمونه‌يي فضا پايلې په دوه ناڅاپي پېښو چې له يو بل سره هيڅ ګډ عنصر نه‌لري، ترتيب کړو.

موضوع د سټ د تيوري له مخې په يوه اختياري نمونه‌يي فضا کې، دوه ناڅاپي پېښو ته چې اتحاد يې نمونه‌يي فضاوي په مثال کې يې تشريح کړې.

فعاليت

- د هغو تجربو څخه چې تر اوسه يې پېژنئ يا دونه وکړئ او يوه نمونه‌يي فضا د دوه اتفاقي يا ناڅاپي پېښو په ارايه چې ټوله نمونه‌يي فضا يې يوازې دوه غړي ولري.
- آيا هغه ناڅاپي تجربې چې نمونه‌يي فضاګانې يې له 2 څخه زيات غړي لري. کولای شو په داسې نمونه‌يي فضاګانو واړوو چې يوازې 2 غړي ولري؟ مثال راوړئ.
- په عمومي ډول څه ډول کولای شو چې يوه نمونه‌يي فضا چې ډير غړي لري، په يوه داسې نمونه‌يي فضا چې 2 غړي لري، واړوو؟
- که چيرې د دا ډول فضاګانو د يو غړي د پېښې احتمال p وي، د بلې پېښې د احتمال قيمت به څو وي؟
- که چيرې تجربه n ځلې سرته ورسوو، او د k په شمير له n ځلې($0 \le k \le n$) ورل او نور يې بايلودل وي، د k ځلې برياليتوب (P) په n ځلې تکرار کې پيدا کړئ؟

له پورتني فعاليت څخه لاندې پايله په لاس راځي:

پايله: د هرې ناڅاپي تجربې نمونه‌يي فضا کولای شو چې په داسې يوې نمونه‌وي فضا واړوو چې دوه غړي ولري.

– که چيرې د دا ډول نمونه‌وي فضا د يو غړي احتمال (P) وي، نو هرو مرو د بل حالت احتمال $1-p$ او بايلل دي.

– که چيرې دا ډول تجربې n ځلې تکرار شي، نو د k – ام ځلې ورل په n ځلې تکرار کې او د بايللو احتمال به $q = 1-p$ سره دي، يعنې لرو چې:

$$\text{k}، \text{– ام ځلې ورل په n ځلې تکرار کې} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad , \quad 0 \le k \le n$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی مثال: پاملرنه وکړئ چې که چیرې په یوه تجربه کې د ورلو احتمال $\frac{1}{2}$، د بایللو احتمال هم مساوي په $\frac{1}{2}$ سره وي، په دې ډول ناخاپي پیښو کې پورتنی اړیکه په لاندې ډول حسابېږي:

$$\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

$$\binom{n}{k}.(\frac{1}{2})^k.(1-\frac{1}{2})^{n-k}=\binom{n}{k}.\left(\frac{1}{2}\right)^k.\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}=\frac{\binom{n}{k}}{2^n}$$

پورتنی پایله د یوې تجربې په n ځله تکرار کې چې له هغې جملې څخه k ځلې یې ورل وي، یوې دوه عنصره نمونه‌یي فضا ته وځیږئ؟

دویم مثال: په یو 5 اولاده فامیل کې، د دې احتمال چې له اولادونو څخه 2 تنه هلکان او پاتې نجونې وي، څو دی؟

حل: که چیرې د اولادونو د هلك او نجلی زیږد برابر په پام کې ونیسو لرو چې:

څرنګه چې په دې مثال کې $p=\frac{1}{2}$ او $q=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ سره دی، نو لیکلای شو:

$$=\frac{\binom{5}{2}}{2^5}=\frac{10}{2^5}=\frac{5}{16}=0.3125=31.25\%$$ د دې احتمال چې دوه هلکان او درې نجونې وي.

دریم مثال: د رمل یوه دانه 6 ځلې غورځوو، د دې احتمال پیدا کړئ چې په 4 ځلې غورځېدو کې راغلي خالونه له دریو څخه لږ وي؟

حل: که چیرې له 3 څخه لږ راتلل حالت ورل په پام کې ونیسو؛ نو:

$$p=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}=0.3333=33.33\%$$

$$q=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}=0.6666=66.66\%$$

(د دې احتمال چې په 4 ځله غورځېدو کې له 6 ځلې څخه، خالونه له 3 څخه لږ وي)$=\binom{6}{4}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^4\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{20}{243}=0.0823=8.23\%$

(c) ketabton.com: The Digital Library

څلورم مثال: یوه فلزي سکه داسې جوړه شوې ده چې د خط راتلو احتمال یې مساوي په $\frac{1}{3}$ وي، که چیرې دغه سکه 4 ځلې وغورځول شي، د دې احتمال چې لږ تر لږه 3 ځلې شېر راشي، مطلوب دی.

حل: که چیرې د سکې د خط راتللو حالت ته ورل او احتمال یې p په پام کې ونیسو، نو د خط د نه راتللو یا شېر راتګ مساوي په $1-p$ سره دی؛ یعني: $1-p=\frac{1}{3}p$

له دې ځخه $p=\frac{3}{4}$ او $q=\frac{1}{4}$ په لاس راځي:

$$\left\langle \text{د دې احتمال چې په 4 ځله غورځېدوکې لږ تر لږه 3 ځله شېر راشي.} \right\rangle = \binom{4}{3}\cdot\underbrace{\left(\frac{1}{4}\right)^3}_{\text{3ځلې شېر}}\cdot\underbrace{\left(\frac{3}{4}\right)}_{\text{1 ځل خط}}+\binom{4}{4}\cdot\underbrace{\left(\frac{1}{4}\right)^4}_{\text{4 ځلې شېر}}=\frac{3}{64}+\frac{1}{256}=\frac{13}{256}$$

پنځم مثال: یوه نورماله سکه څو ځلې وغورځوو چې لږ تر لږه د خط راتلو احتمال یې له 0.99 ځخه ډېر وي؟

حل: داسې فرضوو چې سکه n ځلې غورځوو د دې احتمال چې لږتر لږه یو ځل سکه خط راشي مساوي ده په:

(د هر n ځلې شیر راتګ احتمال) $-1=$ دی، لږ تر لږه یو ځل خط راتلو احتمال

$$=1-\binom{n}{n}\cdot\frac{1}{2^n}=1-\frac{1}{2^n}$$

په دې ډول ددې شرط $1-\frac{1}{2^n}>0.99$ یا $\frac{1}{2^n}<0.01$ سره دی چې $2^n>100$ یا $n\geq 7$ سره کېږي.

په دې ډول باید سکه 7 ځلې وغورځوو چې لږتر لږه یو ځل خط راشي، احتمال به یې له 0.99 ځخه لوی وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

يوه سکه څو ځله غورځوو، د دې احتمال پيداکړي چې:

(i): په 4 ځله غورځيدو کې، 2 ځلې خط راشي.

(ii): په 6 ځله غورځيدلي، 3 ځلې خط راشي

(iii): په 8 ځله غور ځيدو کې، 4 ځلې خط راشي.

(iv): فکر وکړئ چې که سکه 2n ځلې وغورځول شي او n ځلې خط راشي، د n په ډېريدو، د p بدلون په څه ډول دي؟

د څېړکي مهم ټکي

فکتوريـــل: د هـر طبيعـي n عـدد لپـاره د $1\cdot2\cdot3\cdot \ldots \cdot n$ د ضـرب حاصـل پـه لنـډ ډول پـه n!(n فکتوريل) ښودل کېږي، د تعريف له مخې $0!=1$ سره دی.

پرموټېشن يا ترتيب: د n غړو ترتيب په p_n ښودل کېږي که چيرې:

- په ترتيب کې تکرار مجاز او ممکن نه وي: $P_n = n!$

خو که چيرې تکرار مجاز وي، د ترتيبونو شمېر مساوي په P_k^n سره ده او داسې معنا ورکوي چې k ځلې په n ځلې ترتيبونو کې تکرار وجود لري. چې د پورتني حالت په پام کې نيولو سره ټول حالتونه مساوي دي په:
$$P_k^n = \frac{n!}{k!} \quad , \quad k \le n$$

$\binom{n}{k}$ د $n,$ او k **له پاسه**: د $\binom{n}{k}$ د $n,$ او k له پاسه، د بينوم هغه ضريبونه دي چې k د بينوم د توان په ټاکلو سره، د ضريبونو لپاره داسې صورت نيسي:
$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \ ، \ n,k \in IN \ ، \ 0 \le k \le n$$

- له n شيانو څخه د r شيانو ترکيبونه په:
$$C_r^n = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} \quad ، \quad r \le n$$

وريشن يا تبديلونه: په ترتيبونو کې چې پر له پسې ترتيب د k انتخابي غړو له n غـړو څخه مطلوب وي، په نامه دي، n په k بديلونو ياد او ليکو:

$$V_k^n = k! \cdot C_k^n = k!\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

$$V_k^n = \frac{n!}{(n-k)!}$$

دبينوم قضيه: د $(a+b)^n$ دو جمله‌يي انکشاف عبارت دی له:
$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^k \cdot b^{n-k}$$

د يوې تجربې په n ځلې تکرار کې، چې هر حالت يې p او د $q=1-p$ احتمال لري.

د $k-$ام ځلې ورلـو يعنـې p لـه n ځلـې څخـه او نـور پـاتې حالتونـه چـې بـايلول ګڼـل کېږي؛ يعنـې $q=1-p$ سره دي او صورت نيسي:

$$\left\langle \begin{array}{c}\text{د k ځلې ورلو د احتمال قيمت د تجربې} \\ \text{د n ځلې په پای کې}\end{array} \right\rangle = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} \ ، \ 0 \le k \le n$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

د څپرکي پوښتنې

1- د لاندې عددونو سټ په پام کې ونیسئ:

$$S = \{0,1,2,3,4,5,6\}$$

(i): په څو ډوله کولای شو له پاسنیو عددونو څخه 3 رقمي عددونه جوړ کړو.

(ii): ټول 3 رقمي جفت عددونه به څو وي؟

2- په څو ډوله 6 تنه زده‌کوونکي په یوه کتار کې څنګ په څنګ دریدلي شي؟

3- په څو ډوله ابوبکر، زبیر، یاسر، هنزله او خبیب کولای شي، په یو کتار کې خوا په خوا د یو یادګاري تصویر د اخېستلو لپاره ودرېږي؟

4- په څو ډولونو کولای شو چې 9 تنه په درې 3 ګروپونو ووېشو؟

5- د پاسکال د مثلث له مخې د $(a+b)^7$ انکشاف په لاس راوړئ؟

Get more e-books from www.ketabton.com
Ketabton.com: The Digital Library