



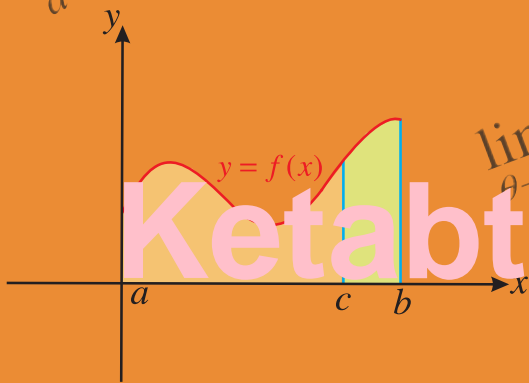
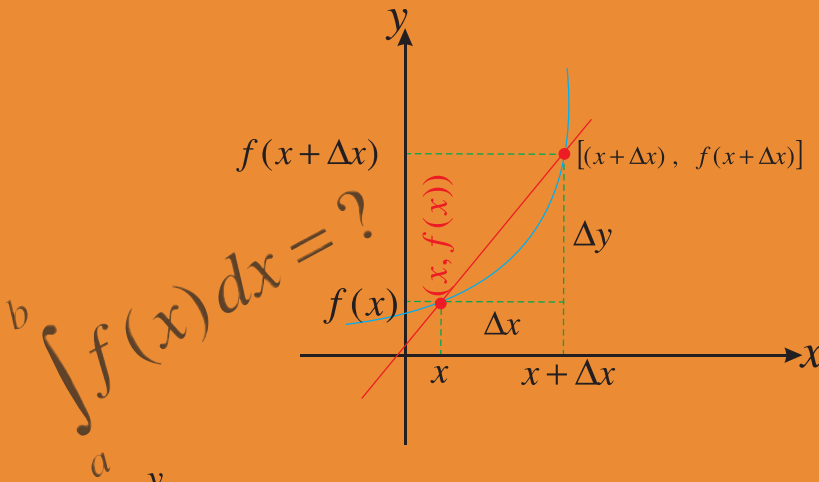
د پوهنې وزارت

د تعلیمي نصاب، د ښوونکو د روزنې او د ساینس د مرکز معینیت  
د تعلیمي نصاب د پراختیا او درسي کتابونو د تالیف لوی ریاست

# ریاضی ۱۲

ټولګی

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = ?$$

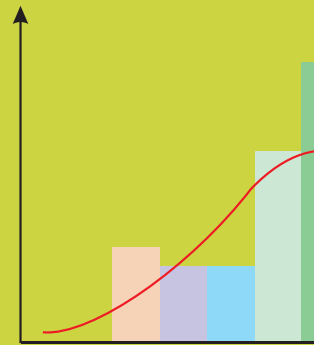


$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = ?$$

Ketabton.com

د چاپ کال: ۱۳۹۰

ریاضی ۱۲  
ټولګی





د پوهنې وزارت

د تعلیمې نصاب، د تیرونکو د روزنې او د ساینس د مرکز مهمیت  
د تعلیمې نصاب د پراختیا او درسي کتایونو د تالیف  
لوی ریاست

# ریاضی ۱۲

تولکشی

د چاپ کال: ۱۳۹۰ هـ. ش.



## ليکوالان:

- پوهنځی حمد الله شیرزی وردگ د پوهنې وزارت د درسي کتابونو د تالیف د پروژې غړی
- مؤلف مهناز توخي د تعلیمي نصاب د پراختیا او درسي کتابونو د تالیف علمي غړي
- پوهنمل طلاباز حبیب زی د پوهنې وزارت د درسي کتابونو د تالیف د پروژې غړی
- پوهندوی خالققاد فیروزکوهي د پوهنې وزارت د درسي کتابونو د تالیف د پروژې غړی
- سرمؤلف میر تقی الله د تعلیمي نصاب د پراختیا او درسي کتابونو د تالیف علمي غړی
- د مؤلف مرستیال محمد خالد ستوری(خدرار)، د تعلیمي نصاب د پراختیا او درسي کتابونو د تالیف علمي غړی

## علمي او مسلکي ایدیه پي:

- حبیب الله راحل د پوهنې وزارت سلاکار د تعلیمي نصاب د پراختیا په لوی ریاست کې.
- سرمؤلف نظام الدین د تعلیمي نصاب د پراختیا او درسي کتابونو د تالیف علمي غړی
- د مؤلف مرستیال رحیمه هدایت زی د تعلیمي نصاب د پراختیا او درسي کتابونو د تالیف علمي غړي

## د ژبې ایدیه پي:

- محمدمقروس ډگرخیل د تعلیمي نصاب د پراختیا او درسي کتابونو د تالیف علمي غړی

## دیني، سیاسي او کلتوري کمیټه:

- مولوي عبدالرحیل د اسلامي تعلیماتو علمي غړی.
- حبیب الله راحل د پوهنې وزارت سلاکار د تعلیمي نصاب د پراختیا په لوی ریاست کې.

## د څارنې کمیټه:

- ډکټور اسدالله محقق د تعلیمي نصاب د پراختیا، د ښوونکو د روزنې او د ساینس مرکز معین
- ډکټور شیر علي ظریفی د تعلیمي نصاب د پراختیا د پروژې مسؤول
- د سرمؤلف مرستیال عبدالظاهر گلستانی د تعلیمي نصاب د پراختیا او درسي کتابونو د تالیف لوی رئیس

## طرح او ډیزاین:

ولید (ډویل) نسیمي



بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ





## ملي سرود

دا وطن افغانستان دی      دا عزت د هر افغان دی

کور د سولې کور د توري      هر بچی یې قهرمان دی

دا وطن د ټولو کور دی      د بلوڅو د ازبکو

د پښتون او هزاره وو      د ترکمنو د تاجکو

ورسره عرب، گوجر دي      پامپریان، نورستانیان

براهوي دي، قزلباش دي      هم ایماق، هم پشه یان

دا هیواد به تل خلیري      لکه لمر پر شنه آسمان

په سینه کي د آسیا به      لکه زره وي جواویدان

نوم د حق مودی رهبر      وایو الله اکبر وایو الله اکبر

بسم الله الرحمن الرحيم

## د پوهني د وزير پينام گراو بڼوونکو او زده کوونکو،

بڼوونه او روزنه د هر هېواد د پراختيا او پرمختگ بنسټ جوړوي. تعليمي نصاب د بڼوونې او روزنې مهم توکی دی چې د معاصر علمي پرمختگ او ټولني د اړتياوو له مخې رامنځته کېږي. څرنگه ده چې علمي پرمختگ او ټولنيزې اړتياوې تل د بلون په حال کې وي. له دې امله لازمه ده چې تعليمي نصاب هم علمي او رضنده انگشاف ومومي. البته نه بنياني چې تعليمي نصاب د سياسي بدلونونو او د اشخاصو د نظرونو او هيلو تابع شي. دا کتاب چې نن ستاسو په لاس کې دی، پر همدې ارزښتونو چمتو او ترتيب شوی دی. علمي گټورې موضوعگانې پکې زياتې شوي دي. د زده کړې په بهير کې د زده کوونکو فعاله ساتل د تدرسي پلان برخه گرځيدلې ده. هيله من يم دا کتاب له لارښوونو او تعليمي پلان سره سم د فعالې زده کړې د ميتودونو د کارولو له لارې تدریس شي او د زده کوونکو ميندې او پلرونه هم د خپلو لوڼو او زامنو په باکفيته بڼوونه او روزنه کې پرله پسې گډه مرسته وکړي چې د پوهنې د نظام هيلې ترسره شي او زده کوونکو او هېواد ته ښې برناوې ور په برخه کړي. پر دې ټکي پوره باور لرم چې زموږ گران ښوونکي د تعليمي نصاب په رضنده پلي کولو کې خپل مسؤليت په رښتوني توگه سرته رسوي.

د پوهنې وزارت تل زيار کاږي چې د پوهنې تعليمي نصاب د اسلام د سپېڅلي دين له بنسټونو، د وطن دوستی د پاک حس په ساتلو او علمي معيارونو سره سم د ټولني د څرگندو اړتياوو له مخې پراختيا ومومي. په دې ډگر کې د هېواد له ټولو علمي شخصيتونو، د بڼوونې او روزنې له پوهانو او د زده کوونکو له ميندو او پلرونو څخه هيله لرم چې د خپلو نظرونو او رضنده وړاندیزونو له لارې زموږ له مؤلفانو سره د درسي کتابونو په لارښه تاليف کې مرسته وکړي.

له ټولو هغو پوهانو څخه چې د دې کتاب په چمتو کولو او ترتيب کې يې مرسته کړې، له ملي او نړيوالو درنو مؤسسو، او نورو ملگرو هېوادونو څخه چې د نوي تعليمي نصاب په چمتو کولو او تلمون او د درسي کتابونو په چاپ او وېش کې يې مرسته کړې ده، مننه او درناوی کوم.

ومن الله التوفيق

فاروق وردگ

د افغانستان د اسلامي جمهوريت د پوهنې وزير





## لو لیک

مخونه

۱-۴۰

سر لیک

### لومړۍ څپرکي لېمېټ

- د لېمېټ مفهوم
- د بڼې او کټې خوا لېمېټونه
- د لېمېټ خاصیتونه
- د نسبي تابعگانو لېمېټونه
- د  $\infty$  مهم شکل
- د  $00 - 00$  او  $0.00$  مهم شکلونه
- د  $0^0, 1^\infty, \infty^0$  مهم شکلونه
- د مثلثاتي تابعگانو لېمېټ
- د تابعگانو متعادلت
- د متعادلي تابعگانو خاصیتونه
- د څپرکي لنډيز او پوښتنې

۴۱-۸۲

### دویم څپرکي مشتقات

- د یوې تابع مشتق
- د مشتق هندسي تعبیر
- د مشتق قوانین
- د مرکبو تابعگانو مشتق
- د مثلثاتي تابعگانو مشتق
- ضمني مشتقات
- لوړې مرتبه مشتقات
- د څپرکي لنډيز او پوښتنې

۸۳-۱۳۲

### درېم څپرکي د مشتق د استعمال ځایونه

- د یوې تابع بحراني ټکی (اصطفي او اصغري)
- د انعکاف د ټکي ټاکل د دویم مشتق څخه په گټې اخیستې سره
- د منځنيگانو رسمول
- د توابعو د گرافونو محاسبه
- د هوموگرافیک تابعگانو گراف
- د درسي درجي یو مجهوله تابع گراف
- د رول قضیه
- د متوسط قیمت قضیه
- د لورینتال فاصله
- د بحراني ټکو تطبیق
- د څپرکي لنډيز او پوښتنې



مخونه  
۱۳۳-۱۷۲

### سرلیک خلورم خپرکی انټیګرال

- د ریمان مجموعه
- د انټیګرال مفهوم
- د غیر معین انټیګرال خواص
- معین انټیګرال
- د معین انټیګرال خواص
- د مشتق او انټیګرال اساسي قضیې
- په تعویضي طریقي سره انټیګرال نیونه
- قسمي انټیګرالونه
- د خپرکي لاملیز او پوښتي

۱۷۳-۱۹۸

### پنځم خپرکی د لوګاریتمی او اکسپوننشل تابعگانو مشتق او انټیګرال

- د لوګاریتمی او اکسپوننشل تابعگانو مشتق
- د معکوسو تابعگانو مشتق
- قسمي کسرونه
- د اکسپوننشل تابعگانو انټیګرالونه
- د لوګاریتمی تابعگانو انټیګرال
- د قسمي کسرونو په مرسته د انټیګرال محاسبه
- د خپرکي لاملیز او پوښتي

۱۹۹-۲۲۲

### شپږم خپرکی د انټیګرال تطبیقات

- د یوې منځي د محصور شوي سطحي د مساحت محاسبه
- د دوو محصور شورو منځي ګانو ترمنځ د مساحت محاسبه
- د دوراني جسمونو د حجم محاسبه
- د قوس د اوږدوالي محاسبه
- د خپرکي لاملیز او پوښتي

۲۲۳-۲۶۰

### اووم خپرکی احتماليه

- د احتمال د تابع توزیع
- د دوه جملېني توزیع او د برنولي آزمایښت
- د بواسن د احتمال توزیع
- د نورمال توزیع
- د نورهال توزیع منځني لاندې مساحت او د هغې ستندرد کول
- نمونه اخیست
- د نموني د اوسط توزیع
- د مرکزي لېسټ قضیه
- د نمونېني توزیع نسبت
- د خپرکي لاملیز او پوښتي

۲۶۱-۲۸۲

### اتم خپرکی احتمالات

- پریکړي او نښتي فضاکاڼي
- هم چانسې پیښتي
- د نښتو یا پیوسته فضاکاڼو احتمال
- مشروط احتمال
- د حاصل ضرب اصل
- د ناخپه پیښو استقلالیت
- د خپرکي لاملیز او پوښتي

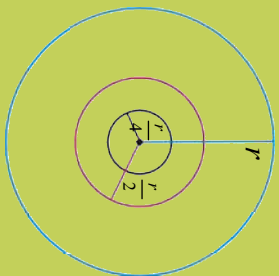




# لوہری چیرکی اہمیت







**د لمبیت مفهوم**  
 په یوه مستوی کې درې دایرې داسې رسم کړئ چې د  $O$  ټکي د دایرو متحد مرکز او شعاعگانې یې په ترتیب سره  $\frac{r}{2}$ ،  $\frac{r}{4}$  او  $r$  وي، دې عملیې ته نور څو ځلي دوام ورکولای شئ؟



**فعالیت**

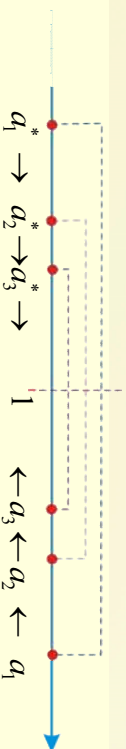
د  $a_n = (1 + \frac{1}{n})$  او  $a_n^* = (1 - \frac{1}{n})$  ترادفونه د  $n \in \mathbb{N}$  لپاره په پام کې ونیسئ او لاندې فعالیت ترسره کړئ:

- د عددونو په محور باندې د  $a_1$  او  $a_1^*$  موقعیت(ځای) ونیسئ.
- ویلای شئ، چې د  $a_2$  او  $a_2^*$  قیمتونه د  $[a_1^*, a_1]$  د فاصلې دننه یا داندې پراته دي.
- د  $a_1^*$ ،  $a_1$  او  $a_2^*$ ،  $a_2$  منځنۍ ټکي یو له بل سره پرتله کړئ.
- پورته پړاوونو ته په پاملرنې سره ویلای شئ، چې د  $a_3$  او  $a_3^*$  د ټکو موقعیت د عددونو پر محور په کوم ځای کې واقع دي.
- آیا ویلای شئ، چې د  $n$  د تر ټولو لویو قیمتونو په اخیستلو سره د  $a_n$  او  $a_n^*$  ریښونه کومو قیمتونو ته نږدی کېږي؟

له پورتنی فعالیت څخه لاندې پایله لیکلای شو:

**پایله:** لیدل کېږي، چې د  $a_n$  ترادف له ښي لوري څخه د  $1$  او د  $a_n^*$  ترادف له کین لوري څخه د  $1$  عدد ته د  $n$  په زیاتېدو سره نږدی کېږي، یعنې:

- د  $a_n$  ترادف کله چې  $n$  یې نهایت ته تقرب وکړي، مساوي په  $1$  سره کېږي او همدارنګه د  $a_n^*$  د ترادف  $n - 1$  حد که  $n$  یې نهایت ته نږدی شي هم مساوي له  $1$  سره کېږي.



د دې لپاره چې د لمبیت مفهوم مو ښه څرګند کړی وي، په لومړۍ پړاو کې هغه په څو ترادفونو کې د ګراف په پام کې نیولو سره تر څیړنې لاندې نیسو.



**مثال:** لاندې ورکړل شوي ردیفونه د  $n$  د تر ټولو لویو قیمتونو لپاره کوم قیمت ته تقرب کوي یا نږدی کېږي،

موضوع په گرافیکي ډول تشریح کړئ، په داسې حال کې چې:

$$a_n = \left(\frac{2n+3}{n}\right) \dots (i)$$

$$b_n = \left(\frac{n-1}{n}\right) \dots (ii)$$

$$c_n = (-1)^n \frac{1}{n} \dots (iii)$$

**حل:** پوهیږو چې د  $n$  د بېلابېلو قیمتونو لپاره گرافیکي ښودنه په لاندې ډول ده.

$$n \mid 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \rightarrow \infty$$

$$a_n \mid 5, \frac{7}{2}, 3, \frac{11}{4}, \frac{13}{5}, \frac{15}{6}, \frac{17}{7}, \rightarrow 2$$

$$n \mid 1, 2, 3, 4, 5, \rightarrow \infty$$

$$b_n \mid 0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \rightarrow 1$$



$$n \mid 1, 2, 3, 4, 5, \rightarrow \infty$$

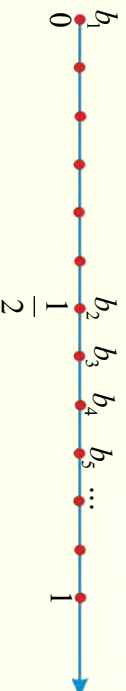
$$c_n \mid -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \rightarrow 0$$

له پورتنیو گرافونو څخه لیدل کېږي چې راکړل شوي ترادفونه د  $n$  د قیمتونو په زیاتېدو سره د ترادفونو قیمت یوه ټاکلې عدد ته نږدی کېږي، لکه د  $a_n$  ترادف د 2 عدد ته د  $b_n$  ترادف د 1 عدد ته او د  $c_n$  ترادف صفر ته تقرب کوي، چې ترادف ته د ډېرو لویو قیمتونو په ورکولو سره موضوع په آسانی سره روښانه کېږي.

د ترادف د قیمتونو له جدول څخه د لېمیت قیمت څرگندېږي، د لېمیت په شته والی کې ریډف یوه ټاکلې عدد ته نږدی کېږي. دغه ټاکلې عدد ته لېمیت (limit) وایي، چې په  $\lim$  سره ښودل کېږي.

ددې لپاره د  $b_n = \frac{n-1}{n}$  ترادف په پام کې نیسو، لرو چې:

$n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	...
$b_n$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{6}{7}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{9}{10}$	$\frac{10}{11}$	...



او بیا کله چې  $I$  .....  $\frac{1}{n}$  ، .....  $\frac{1}{3}$  ،  $\frac{1}{2}$  ، .....  $\frac{1}{n+1}$  ، .....  $\frac{5}{n}$  ،  $\frac{4}{4}$  ،  $\frac{3}{3}$  ،  $\frac{2}{2}$  او  $(III)$  .....  $2n$  ، ... ،  $6$  ،  $4$  ،  $2$  د عددونو ترادفونه په پام کې ونیسو، لیدل کېږي چې که  $n$  د بې نهایت لوري ته نږدی شي، نو د  $I$  ترادف صفر ته نږدی کېږي د  $II$  ترادف د  $(1)$  عدد ته نږدی کېږي د  $III$  ترادف د بې نهایت ( $\infty$ ) ته نږدی کېږي.

**د متحول تقرب:** ول کېږي چې د  $x$  متحول د  $a$  عدد ته تقرب کوي، په داسې حال کې چې  $x$  په اختیاري ډول د  $a$  عدد ته نږدی کېږي، یعنې د  $x$  او  $a$  ترمنځ تفاوت له هر کوچني عدد ( $\delta > 0$ ) څخه کوچني دی یا په لاندې ډول:

$$0 < \delta < |x - a| \rightarrow 0 \quad \text{یا} \quad x \rightarrow a \quad \text{یا} \quad \lim_{x \rightarrow a} x = a$$

له بڼې **لوري د متحول تقرب:** ( $x \rightarrow a^+$ ) که چېرې د  $x$  د قیمتونو یو متناقص ترادف موجود وي په داسې حال کې چې په تدریجي ډول د  $a$  اختیاري عدد ته نږدی شي.

$$x: a + 0.1, a + 0.01, a + 0.001, a + 0.0001, \dots \rightarrow a^+$$

له کینې **لوري د متحول تقرب:** ( $x \rightarrow a^-$ ) که چېرې د  $x$  د قیمتونو یو متزايد ترادف موجود وي په داسې حال کې چې  $x$  په تدریجي ډول د  $a$  اختیاري عدد ته نږدی شي.

$$x: a - 0.1, a - 0.01, a - 0.001, a - 0.0001, \dots \rightarrow a^-$$

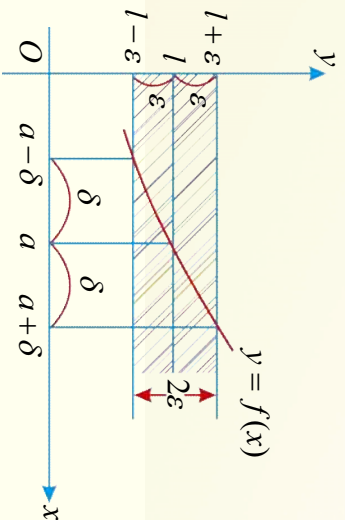
نو د  $x$  د متحول تقرب د  $a$  عدد ته معادل دی د  $x$  د متحول تقرب له بڼې لوري او د  $x$  د متحول تقرب له چپ لوري؛ یعنې:

$$x \rightarrow a \Leftrightarrow (x \rightarrow a^+, x \rightarrow a^-)$$

لومړی بېلگه: د  $x$  متحول د 9 عدد ته نږدی کړئ یا په بل عبارت د  $x \rightarrow 9$  مفهوم توضیح کړئ.  
حل:

$x: 9.1, 9.01, 9.001, 9.0001, \dots \rightarrow 9^+$   
 $x: 8.9, 8.99, 8.999, 8.9999, \dots \rightarrow 9^-$

**تعریف:** که چېرې د  $f(x)$  تابع په یوه غیر تړلي انټروال کې چې د  $a$  عدد په هغې کې ګډون لري کېدای شي چې تابع په  $a$  کې نه وي تعریف شوی. که چېرې د  $x$  متحول د  $a$  عدد ته نږدی شي نو د  $f(x)$  تابع د  $l$  عدد ته نږدی کېږي، نو ویل کېږي چې د  $f(x)$  تابع لېمیت عبارت له  $l$  څخه دی، کله چې د  $x$  متحول د  $a$  عدد ته نږدې وکړي نو داسې یې لیکو:  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$  یا  $f(x) \rightarrow l$   $x \rightarrow a$



$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \Leftrightarrow |x - a| \rightarrow 0 \Rightarrow |f(x) - l| \rightarrow 0$$



د  $f(x) = 2x$  تابع کې په ګرافیکي ډول وښیئ چې که  $x$  د (3) عدد ته نږدی شي  $f(x)$  له (6) سره مساوي کېږي.

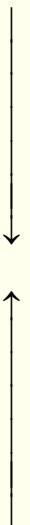


**د ښي او کښي خوا لېمېټونه**  
 مخامخ تصویرونه پاملرنه وکړئ ووايئ چې  
 مخامخ ونې ته له کورمو خواوو څخه نږدې کېدای شو.



په لاندې جدول کې د  $x \neq 1$  ،  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$  ته ځینې قیمتونه ورکول شوی.

$x$	0.98	0.99	0.999	?	1.001	1.01	1.02
$f(x)$	1.98	1.99	1.999	?	2.001	2.01	2.02



- د تابع گراف رسم کړئ.
- که  $x$  د (1) عدد ته نږدې شي، نو  $f(x)$  کوم عدد ته نږدې کېږي.  
 د پورتنۍ فعالیت څخه لاندې پایله لیکلای شو:

د ښي خوا لېمېټ: د  $f(x)$  تابع د  $a$  په عدد کې د ښي لوري  $l_1$  لېمېټ لري که چېرې د هر  $\varepsilon > 0$  لپاره یو کوچنی عدد  $\delta > 0$  موجود وي داسې چې که:  $f(x) \in (l_1 - \varepsilon, l_1 + \varepsilon) \Rightarrow x \in (a, a + \delta)$  یا

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l_1 \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = l_1$$

د کښي خوا لېمېټ: د  $f(x)$  تابع د  $a$  په عدد کې د کښي لوري  $l_2$  لېمېټ لري که چېرې د هر  $\varepsilon > 0$  لپاره د  $\delta > 0$  یو عدد پیدا شي داسې چې  $f(x) \in (l_2 - \varepsilon, l_2 + \varepsilon) \Rightarrow x \in (a - \delta, a)$  یا

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l_2 \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = l_2$$

د  $f(x)$  تابع هغه وخت چې  $a \rightarrow x$  ته نږدې شي د  $l$  لېمېټ لري، یعنې:  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$  په دې شرط چې:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = l = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$$

دويمه بېلگه. وښيي چې  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = 6$  سره دی.

حل: د ښي او کښي خوا لمبټونه تر څېړني لاندې نيسو:

$x$	3.5	3.1	3.01	3.001	...	$3^+$
$f(x)$	6.5	6.1	6.01	6.001	...	6

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = 6$$

$x$	2.5	2.9	2.99	2.999	...	$3^-$
$f(x)$	5.5	5.9	5.99	5.999	...	6

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = 6$$

ليدل کېږي چې د ښي خوا او کښي خوا لمبټونه سره مساوي دي، نو  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = 6$  دي.

**دويمه طريقه:** د لمبټ د تعريف په پام کې نيولو سره فرضوو چې د هر اختياري کوچني عدد  $\varepsilon$  لپاره يو  $\delta$

مشتون لري داسې چې:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

$$\begin{aligned} |x - 3| < \delta &\Rightarrow \left| \frac{x^2 - 9}{x - 3} - 6 \right| = \left| \frac{(x - 3)(x + 3)}{x - 3} - 6 \right| = |x + 3 - 6| = |x - 3| < \varepsilon \\ &\Rightarrow \varepsilon = \delta \end{aligned}$$

له پورتنۍ اړيکې څخه دا معلومېږي چې  $\varepsilon$  له  $\delta$  سره اړيکه لري، که  $\delta$  ته قيمت ورکړو  $\varepsilon$  قيمت اخلي او که  $\varepsilon$  ته قيمت ورکړو  $\delta$  قيمت اخلي، بنا پر دې هغه تعريف چې د لمبټ لپاره موجود دی سم دی او تابع لمبټ

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = 6 \quad \text{لري، يعني:}$$

**پوښتنه**

وښيي چې د  $f(x) = \frac{|x - 2|}{x - 2}$  تابع کله چې  $x \rightarrow 2$  لمبټ نه لري.





## د لېمیت خاصیتونه (Properties of Limit)

د مخالف مساوات د لېمیتونو دواړه خواوې کله چې

$x \rightarrow -1$  وکړي، سره مساوي دي او که نه؟

$$\lim_{x \rightarrow -1} (x^2 \pm x) = \lim_{x \rightarrow -1} x^2 \pm \lim_{x \rightarrow -1} x$$



### فعالیت

د دې فعالیت د سرته رسول لپاره لاندې پوښتنو ته ځوابونه پیدا کړئ:

- که  $x$  د  $2x + 2$  عدد ته نږدی شي، نو د  $f(x) = x + 2$  تابع لېمیت به څو وي؟
- که  $x \rightarrow 3$  ته تقرب وکړي، نو د  $g(x) = 2x$  تابع لېمیت پیدا کړئ.
- $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow 2} g(x)$  پیدا کړئ.
- $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow 2} g(x)$  پیدا کړئ.
- $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \div \lim_{x \rightarrow 2} g(x)$  پیدا کړئ.

له پورتنۍ فعالیت څخه لاندې پایلې لیکلای شو:

که  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$  او  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$  وي، نو:

- 1)  $\lim_{x \rightarrow a} Kf(x) = K \lim_{x \rightarrow a} f(x) = KA$
- 2)  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x) = A \pm B$
- 3)  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x) = A \cdot B$
- 4)  $\lim_{x \rightarrow a} \left[ \frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{A}{B}$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B \neq 0$
- 5)  $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)} = \sqrt[n]{A}$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \geq 0$

له پورتنیو خواصو څخه درې خاصیتونه بشپړتو او پایلې یې د زده کوونکو کورنۍ دننه ده.

بې نهایت کوچنی نابېکاني: د  $\varepsilon(x)$  تابع کله چې  $x \rightarrow a$  ته نږدی شي بې نهایت کوچنی بللې کېږي، که

چیرې  $\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0$  وي.



1- ددي لپاره چې  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$  سره شي، لازم او كافي ده چې د  $f(x)$  تابع د يوه ثابت عدد  $b$  او يوې بې نهايت كوچني تابع  $\varepsilon(x)$  كله چې  $a \rightarrow x$  د مجموعي په حيث وښودل شي، يعنې:

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= b + \varepsilon(x) \\ \lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) &= 0 \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$$

2- كه چېرې  $\varepsilon(x)$  ،  $a \rightarrow x$  ته نږدې شي، بې نهايت كوچنی تابع وي، خو صفر نه وي، نو  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{\varepsilon(x)} = \infty$  د بې نهايت كوچنی تابعگانو مجموعه بيا هم يوه بې نهايت كوچنی تابع ده.

3- د بې نهايت كوچنی تابعگانو د ضرب حاصل بيا هم يوه بې نهايت كوچنی تابع ده.

4- كه چېرې  $\varepsilon(x)$  يوه بې نهايت كوچنی تابع او  $u(x)$  داسې يوه تابع وي چې لمبیت بې صفر نه وي، نو د  $\frac{\varepsilon(x)}{u(x)} = v(x)$  تابع يوه بې نهايت كوچنی تابع ده.

مثال:

$$I \text{ د } \varepsilon(x) = x^2 - 9 = 0 \text{ تابع كله چې } 3 \rightarrow x, \text{ يوه بې نهايت كوچنی تابع ده ځكه چې:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 9) = 0$$

$$II \quad \varepsilon(x) = \frac{1}{2x} \text{ تابع كله چې } \infty \rightarrow x \text{ ته نږدې شي بې نهايت كوچنی تابع ده.}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \varepsilon(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2x} = 0$$

**مثالونه:** د تېرو خاصيتونو په مرسته لاندې سوالونه حل كړئ.

- 1)  $\lim_{x \rightarrow 2} (2x^2 - 1) = \lim_{x \rightarrow 2} 2x^2 - \lim_{x \rightarrow 2} 1 = 2 \lim_{x \rightarrow 2} x^2 - \lim_{x \rightarrow 2} 1 = 2 \cdot 2^2 - 1 = 7$
- 2)  $\lim_{x \rightarrow -3} (x-1)^2 = \lim_{x \rightarrow -3} (x-1) \cdot \lim_{x \rightarrow -3} (x-1) = (-4)(-4) = 16$
- 3)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x-3}{x+1} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} 4x - \lim_{x \rightarrow 0} 3}{\lim_{x \rightarrow 0} x + \lim_{x \rightarrow 0} 1} = \frac{0-3}{0+1} = -3$

د پورتنیو مثالونو له حل څخه د لمبیت يو خاصيت داسې بيان او ښوونو:

1. د څو تابعگانو د مجموعي لمبیت د نوموړو هرې تابع د لمبیتونو له مجموعي سره مساوي دي، يعنې: كه چېرې د  $f(x_1), f(x_2)$  تابعگانې وي، نو لرو چې:

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x_1) + f(x_2)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x_1) + \lim_{x \rightarrow a} f(x_2)$$

**ثبوت:** كه  $\lim_{x \rightarrow a} f(x_1) = b_1$  ،  $\lim_{x \rightarrow a} f(x_2) = b_2$

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x_1) \pm f(x_2)] = b_1 \pm b_2$$

$$\left. \begin{aligned} f(x_1) &= b_1 + \varepsilon_1 \quad \dots \dots I \\ f(x_2) &= b_2 + \varepsilon_2 \quad \dots \dots II \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(x_1) \pm f(x_2) = (b_1 + \varepsilon_1) \pm (b_2 + \varepsilon_2) = b_1 \pm b_2 + (\varepsilon_1 \pm \varepsilon_2)$$

خرزنگه چي  $(\varepsilon_1 \pm \varepsilon_2)$  د بي نهايت كوچنيو تابعگانو مجموعه او تفاضل ده او د بي نهايت كوچنيو تابعگانو مجموعه او تفاضل بياهم يوه بي نهايت كوچني تابع ده، نو:

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x_1) \pm f(x_2)] = b_1 \pm b_2 = \lim_{x \rightarrow a} f(x_1) \pm \lim_{x \rightarrow a} f(x_2)$$

2. د دو يا څو تابعگانو د ضرب د حاصل لمبیت د نوموړو تابعگانو د لمبیتونو د ضرب له حاصل سره مساوي دی:

**ثبوت:**

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} [f(x_1) \cdot f(x_2)] &= \lim_{x \rightarrow a} f(x_1) \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x_2) = b_1 \cdot b_2 \\ f(x_1) &= b_1 + \varepsilon_1 \\ f(x_2) &= b_2 + \varepsilon_2 \end{aligned} \Rightarrow f(x_1) \cdot f(x_2) = (b_1 + \varepsilon_1)(b_2 + \varepsilon_2)$$

$$f(x_1) \cdot f(x_2) = b_1 \cdot b_2 + b_1 \cdot \varepsilon_2 + \varepsilon_1 \cdot b_2 + \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2$$

خرزنگه چي  $\varepsilon_1$  او  $\varepsilon_2$  ډېر كوچني عددونه دي، نو د ضرب حاصل يې د  $b_1$  او  $b_2$  سره او همداشان په خپلو كې بي نهايت كوچني كېږي، نو:

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x_1) \cdot f(x_2)] = b_1 \cdot b_2 = \lim_{x \rightarrow a} f(x_1) \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x_2)$$

3. د دوو تابعگانو د نسبت لمبیت د هغو تابعگانو د لمبیتونو له نسبت څخه عبارت دی؛ لکه په لاندې ډول:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{b_1}{b_2}, \quad g(x) = b_2 \neq 0$$

**ثبوت:**

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= b_1 + \varepsilon_1 \\ g(x) &= b_2 + \varepsilon_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{b_1 + \varepsilon_1}{b_2 + \varepsilon_2}$$

د مساوات له دواړو خواوو څخه  $\frac{b_1}{b_2}$  تفریق کوو:

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{b_1}{b_2} &= \frac{b_1 + \varepsilon_1}{b_2 + \varepsilon_2} - \frac{b_1}{b_2} = \frac{b_2(b_1 + \varepsilon_1) - b_1(b_2 + \varepsilon_2)}{b_2(b_2 + \varepsilon_2)} \\ &= \frac{b_2 b_1 + b_2 \varepsilon_1 - b_1 b_2 - b_1 \varepsilon_2}{b_2(b_2 + \varepsilon_2)} = \frac{b_2 \varepsilon_1 - b_1 \varepsilon_2}{b_2(b_2 + \varepsilon_2)} \\ &\Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{b_2 \varepsilon_1 - b_1 \varepsilon_2}{b_2(b_2 + \varepsilon_2)} + \frac{b_1}{b_2} = \frac{b_2 \varepsilon_1 - b_1 \varepsilon_2 + b_1 b_2 + b_1 \varepsilon_2}{b_2(b_2 + \varepsilon_2)} \\ &= \frac{b_2(b_1 + \varepsilon_1)}{b_2(b_2 + \varepsilon_2)} = \frac{b_1 + \varepsilon_1}{b_2 + \varepsilon_2} \Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{b_1 + \varepsilon_1}{b_2 + \varepsilon_2} \end{aligned}$$

خرنگه چې  $\epsilon_1$  او  $\epsilon_2$  ډېرې کوچنۍ مثبت عددونه  $0 < \epsilon < 1$  دي، نو کله چې  $x \rightarrow a$  وکړي صفر کېږي او په پایله کې په لاس راځي، چې:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{b_1}{b_2}$$

د سانډویچ قضیه: که چېرې د  $f(x)$ ,  $g(x)$  او  $h(x)$  تابعگانې د هر  $x$  لپاره په یوه غیر تړلي انټروال کې چې د  $a$  عدد په کې شامل دی (ولو که  $a \neq x$ ) او  $g(x) \leq h(x) \leq f(x)$  شرط صدق وکړي په هغه صورت کې

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b \text{ وي، نو } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b = \lim_{x \rightarrow a} h(x) \text{ دی.}$$

**مثال:** که د  $u(x)$  تابع دغه خاصیت  $1 + \frac{x^2}{2} \leq u(x) \leq 1 - \frac{x^2}{4}$  ولري، نو  $\lim_{x \rightarrow 0} u(x)$  په لاس راوړئ.

**حل:** لیدل کېږي چې  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \frac{x^2}{2}) = 1 = \lim_{x \rightarrow 0} (1 - \frac{x^2}{4}) = 1$  نو د سانډویچ د قضیې په پام کې نیولو سره لرو چې:

$$\lim_{x \rightarrow 0} u(x) = 1$$

**قضیه:** که چېرې  $f(x)$  او  $g(x)$  داسې تابعگانې وي چې  $f(x) < g(x)$  نو د لمبیت د شتون په صورت کې بې لمبیت  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} g(x)$  سره دی.

**مثال:** د  $f(x) = \frac{15x+4}{5x+6}$  او  $g(x) = \frac{15x+4}{5x-6}$  تابعگانې په پام کې نیسو په واضح ډول معلومېږي چې

$f(x) < g(x)$  دی، د  $x > 1$  لپاره لرو:

**حل:**

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{15x-4}{5x+6} = \frac{15}{5} = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{15x+4}{5x-6} = \frac{15}{5} = 3$$



**پوښتني**

لاندي لمبیتونه د امکان په صورت کې پیدا کړئ.

- 1)  $\lim_{x \rightarrow 0} 6x^3 - 2x^2 + 5x + 3$
- 2)  $\lim_{x \rightarrow -1} x^7 - 2x - 5$
- 3)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(9x+2)^2 - 4}{x}$
- 4)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x^2 + 7x}{(2x-5)^2 - 9}$
- 5)  $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{x-2}$
- 6)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x}{x^2 - 4x + 1}$

## د نسبتې نابېگانو لېمېټونه

آيا پوهېږئ چې مځامخ اړيکې په څه نامه يادېږي؟

$$\frac{0}{\infty}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, 0 \cdot \infty$$



### فعاليت

- د  $x^2 - 1 = r$  تابع لېمېټ هغه وخت پيدا کړئ، چې  $x \rightarrow -2$  ته تقرب وکړي.
  - د  $r = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$  تابع لېمېټ هغه وخت پيدا کړئ، چې  $x \rightarrow 1$  ته تقرب وکړي.
  - د  $r = \frac{x^2 - 1}{x + 1}$  تابع لېمېټ هغه وخت پيدا کړئ، چې  $x \rightarrow \infty$  ته تقرب وکړي.
- له پورتنۍ فعاليت څخه لاندې پايله ليکلای شو:

### پايله

- د ځينو نابېگانو لېمېټ مستقيماً د قيمت په وضع کولو سره لاسته راځي.
  - د ځينو تابعگانو لېمېټ مبهم شکلونه لري؛ لکه  $\frac{\infty}{\infty}$ ,  $\frac{0}{0}$ ,  $\infty - \infty$ ,  $0 \cdot \infty$  ... چې د ابهام د له منځه وړلو څخه وروسته د تابع لېمېټ لاسته راځي، چې په لاندې ډول يې تر څېړنې لاندې نيسو:
- د-1 د  $\frac{0}{0}$  بڼه:



### فعاليت

- د  $f(x) = \frac{x-1}{x^2-1}$  تابع قيمت د  $x = -1$  په نقطه کې وڅېړئ.
  - د  $f(x)$  تابع لېمېټ کله چې  $x \rightarrow 1$  وي د ابهام کومه بڼه لري.
  - آيا د  $f(x)$  تابع په داسې ډول ساده کولای شو چې د  $x = 1$  لپاره يوه معين قيمت ولري؟
- د پورتنۍ فعاليت پايله داسې بيانو:
- که چېرې يوه تابع د  $\frac{0}{0}$  په شکل مبهمه بڼه ولري، د لېمېټ د پيدا کولو لپاره يې لومړۍ تابع د تجزيې په مرسته ساده کولو د ابهام عامل (څښتنه فکتور) له منځه وړو او بيا يې د لېمېټ قيمت په لاس راوړو.

مثال: لاندی لمیٹونہ پیدا کریں۔

$$1) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{x + 2} \quad , \quad 2) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 6x + 8}{x - 2} \quad ,$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt{x} - 4}{x - 16}$$

حل: لومری د لمیٹ بنہ ٹاکو:

$$1) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{x + 2} = \frac{(-2)^2 - 4}{-2 + 2} = \frac{0}{0}$$

خزنگہ چي پاسني لمیٹونہ د  $\frac{0}{0}$  بنہ لری، نو د تجزیي پہ مرستہ یي وروستہ له سادہ کولو خخه د لمیٹ قیمت په لاندی ډول په لاس راوړو:

لااندی ډول په لاس راوړو:

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x+2)} = \lim_{x \rightarrow -2} (x-2) = -2 - 2 = -4$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 6x + 8}{x - 2} = \frac{2^2 - 12 + 8}{2 - 2} = \frac{0}{0}$$

حل: یا هم لمیٹ د  $\frac{0}{0}$  مبهم شکل لری:

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x-4)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x-4) = 2 - 4 = -2$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt{x} - 4}{x - 16} = \frac{0}{0}$$

حل: لیال کبری چي نوموړی لمیٹ یا هم د  $\frac{0}{0}$  بنہ لری، نو د لمیٹ د لاسته راوړلو لپاره د کسر صورت او

مخارج د صورت په مزدوج کي ضربوو:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt{x} - 4}{x - 16} \cdot \frac{\sqrt{x} + 4}{\sqrt{x} + 4} &= \lim_{x \rightarrow 16} \frac{(x-16)}{(x-16)(\sqrt{x} + 4)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 16} \frac{1}{\sqrt{x} + 4} = \frac{1}{8} \end{aligned}$$



پوښتني

$$1) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3-x}{\sqrt{x+1}-2} = ? \quad 2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{5}{x^2+5} - 3}{x^2-1} = ?$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2} = ?$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{2x}{x^2+1} - \frac{4}{5}}{x-2} = ?$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+3} - \frac{1}{3}}{x} = ?$$

## II- د $\frac{\infty}{\infty}$ مهم شکل

آيا د مخرج تابع لميټ ټاکلی شی؟

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 3x + 8}{2x^2 - 2}$$



### فعالیت

- د  $f(x) = 2x^4 + x^3 - 4x - 1$  د تابع لميټ چې  $x \rightarrow \infty$  وڅېړئ.
- د  $g(x) = x^3 - 2x - 4$  د تابع لميټ چې  $x \rightarrow \infty$  وڅېړئ.
- د  $y = \frac{5}{x-2}$  د تابع لميټ چې  $x \rightarrow \infty$  وڅېړئ.
- د  $\frac{f(x)}{g(x)}$  د تابع لميټ هغه وخت په لاس راوړئ، چې  $x \rightarrow 0$  وکړي.
- د  $\frac{f(x)}{g(x)}$  د تابع لميټ هغه وخت په لاس راوړئ، چې  $x \rightarrow \infty$  وکړي.

له پاسني فعالیت څخه لاندې پايله په لاس راځي:

**پايله:** هغه توابع چې د  $\frac{\infty}{\infty}$  بڼه ولري د لميټ د پيدا کولو لپاره يې داسې کرښه کوو:

د تابع صورت او مخرج په هغه متحول، چې تر ټولو لوی توان ولري وپېشو، وروسته له ساده کولو څخه يې لميټ په لاس راځي.

**لومړی مثال:**  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{3x^2 - 2}$  پيدا کړئ.

**حل:** لومړی د لميټ بڼه ټاکو:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{3x^2 - 2} = \frac{\infty - 1}{\infty - 2} = \frac{\infty}{\infty}$$



خرنگه چې پوښتنه د  $\frac{\infty}{\infty}$  شکل لري، نو صورت او مخرچ په  $x^2$  باندې وپښو:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{3x^2 - 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2}{x^2} - \frac{1}{x^2}}{\frac{3x^2}{x^2} - \frac{2}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{2}{x^2}}{3 - \frac{2}{x^2}} = \frac{1 - 0}{3 - 0} = \frac{1}{3}$$

**دویم مثال:** د  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2}{x - 2}$  پیدا کړئ.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2}{x - 2} = \frac{\infty}{\infty}$$

**حل:**

خرنگه چې پوښتنه د  $\frac{\infty}{\infty}$  شکل لري، نو صورت او مخرچ د  $x$  له ټولو په لور توان وپښو:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2}{x} - \frac{2}{x}}{\frac{x}{x} - \frac{2}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{2}{x}}{1 - \frac{2}{x}} = \frac{1 - 0}{1 - 0} = \frac{1}{1} = \infty$$

**دویم مثال:**  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - 1}{x^2 - 2}$  پیدا کړئ.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - 1}{x^2 - 2} = \frac{\infty}{\infty}$$

**حل:**

خرنگه چې پوښتنه د  $\frac{\infty}{\infty}$  شکل لري، نو صورت او مخرچ د  $x$  له ټولو په لور توان وپښو:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - 1}{x^2 - 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x}{x} - \frac{1}{x}}{\frac{x^2}{x^2} - \frac{2}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{x}}{1 - \frac{2}{x^2}} = \frac{1 - 0}{1 - 0} = \frac{1}{1} = 0$$

**یادونه:** هغه تابعگانې چې د  $\frac{\infty}{\infty}$  بڼه ولري، پرته له دې چې عمليه پرې سرته ورسوو کولای شو، په لاندې

ډول د هغوی لېمیت په لاس راوړو:



د -1 لپاره د نوموړی کسر لېمیت عبارت دی له  $\frac{a_0}{b_0}$ .  
 حالتونه ممکن دي:

$$f(x) = \frac{a_0x^m + a_1x^{m-1} + \dots + a_m}{b_0x^n + b_1x^{n-1} + \dots + b_n}$$

- 1 د  $m = n$  لپاره د نوموړی کسر لېمیت عبارت دی له  $\frac{a_0}{b_0}$ .
- 2 د  $m < n$  لپاره د نوموړی کسر لېمیت عبارت له صفر څخه دی.
- 3 د  $m > n$  لپاره د نوموړی کسر لېمیت عبارت له  $\pm\infty$  څخه دی.

**څلورم مثال:** لاندې لېمیتونه پیدا کړئ.

1)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 + 6x^4 - x^3 + x - 1}{-x^4 + 2x^2 - 3}$

2)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{-8 + 6x^3 - x^2 + x}{5x^3 - x^4 + 6x - 1}$

3)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2}{x + 1}$

**حل:**

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 + 6x^4 - x^3 + x - 1}{-x^4 + 2x^2 - 3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^4}{-x^4} = -6$$

-1 څرنگه چې  $m = n$  دی، نو:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-8 + 6x^3 - x^2 + x}{5x^3 - x^4 + 6x - 1} = 0$$

-2 څرنگه چې  $m < n$  دی، نو د نوموړی تابع لېمیت صفر دی.

-3 څرنگه چې  $m > n$  دی، نو د نوموړي تابع لېمیت مساوي له  $\infty$  سره دی:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2}{x + 1} = \infty$$

**يادونه:** زده‌کونکي دې ورکړل شوي ځوابونه په کور کې د عمليې د سرته رسولو څخه وروسته په لاس راوړي.



لاندي لمپٽونه پيدا ڪري؟

1)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6}{x^2 - x}$

4)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + x^2 - x + 7}{x^3 - x + 5}$

2)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + x^2 + x + 6}{x^3 - 3x + 4}$

5)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2}{x + 1}$

3)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5 + x^2 - x + 9}{x^4 + x^2 - x + 5}$

### III- د $(\infty - \infty)$ او $(0 \cdot \infty)$ مبهم شکلونه

د مخامخ لمپټونو قيمتونو پيدا کړئ.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x^2 - 4} - \frac{x - 1}{x^2 - 4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 9) \cdot \frac{2x^3 - 4}{x - 3}$$



#### فعاليت

- د  $a + 1$  مزدوج وليکئ.
- د  $\sqrt{x - 1}$  مزدوج وليکئ.
- د  $f(x) = \sqrt{x} - \sqrt{x + 1}$  لمپټ پيدا کړئ، کله چې  $x \rightarrow \infty$  تقريب وکړي.
- د  $f(x) = (2x - 1)(x + 1)$  تابع لمپټ وټاکئ، کله چې  $x \rightarrow \infty$  تقريب وکړي.

له پورتنی فعالیت څخه پايله داسې بيانوو:

د هغو تابعگانو چې د  $(\infty - \infty)$  او  $(0 \cdot \infty)$  مبهم شکلونه ولري، د لمپټ د پيدا کولو لپاره يې د کسررونو له جمع کولو، ضرب او مزدوج څخه گټه اخلو او هغه داسې ساده کوو، ترڅو چې د  $\frac{0}{0}$  او يا  $\frac{\infty}{\infty}$  بڼه غوره کړي، وروسته يې لمپټ په لاس راوړو.

مثال: لاندي لمپټونه پيدا کړئ.

$$1) \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{9}{x-1} - \frac{8x+10}{x^2-1} \right) = ? \quad 2) \lim_{x \rightarrow 1} (x-1) \left( \frac{1}{x^2+2x-3} \right) = ?$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{9}{x-1} - \frac{8x+10}{x^2-1} \right) = \frac{9}{1-1} - \frac{8 \cdot 1 + 10}{1^2 - 1} = \frac{9}{0} - \frac{18}{0} = \infty - \infty$$

حل 1:

څرنگه چې نورې لمپټ د  $(\infty - \infty)$  بڼه لري نو ليکلای شو، چې:

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{9x + 9 - 8x - 10}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{x^2 - 1} = \frac{0}{0} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{(x - 1)(x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x + 1} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 1} (x-1) \left( \frac{1}{x^2 + 2x - 3} \right) = ?$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x-1) \left( \frac{1}{x^2 + 2x - 3} \right) = (1-1) \left( \frac{1}{1^2 + 2 - 3} \right) = 0 \cdot \frac{1}{3-3} = 0 \cdot \frac{1}{0} = 0 \cdot \infty$$

حل 2:

ليدل کيڙي چي نوموڙي لميٽ ڊ (0.∞) شڪل لري، نو:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2 + 2x - 3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(x-1)(x+3)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+3} = \frac{1}{4}$$

پوڀڻي



لاندي لميٽونه پيدا ڪري.

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x})$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1-x^2} \right)$$

$$3) \lim_{x \rightarrow \infty} (x^5 - 8x^3)$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 5} \left[ (x^2 - 25) \frac{1}{x-5} \right]$$

$$5) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+a} - \sqrt{x})$$

د  $0^0, \infty^0, 1^\infty$  شڪلونہ  
د مداخلت لمبیت مبهم شڪل وٺاڻي؟

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\frac{1}{x}} = ?$$



فعالیت

- د  $x^x = r$  تابع لمبیت په هغه صورت کي پيدا کړي چې  $0 \rightarrow x \rightarrow \infty$  وکړي.
- د  $(1+x)^{\frac{1}{x}} = r$  لمبیت بڼه په هغه صورت کي وٺاڻي چې  $x \rightarrow \infty$  وکړي.
- دکومي عملیې په مرسته کولای شو چې  $0^0, \infty^0, 1^\infty$  شڪلونہ په ضرب بدل شو.

د پورتنی فعالیت پایله داسي بيانو:

که چيري يوه تابع پورتنی مبهم شڪلونه ځانته غوره کړي هغه د طبيعي لوگارتم په مرسته د  $0.00$  شڪل ته د اولو

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x))^{g(x)} \Rightarrow \ln(\lim_{x \rightarrow a} f(x))^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} (\ln f(x))^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} [g(x) \ln f(x)]$$

ور دي، يعني:

يادونه:

1- که چيري  $\infty \rightarrow n$  وکړي د  $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$  ترادف  $e = 2.71828182$  عدد ته تقرب کوي.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$$

چي په لاندی جدول کي ښکاره بري:

$n$	$\frac{1}{n}$	$1 + \frac{1}{n}$	$(1 + \frac{1}{n})^n$
1	1	2	2
2	0.5	1.5	2.25
5	0.2	1.2	2.48832
10	0.1	1.1	2.59374246
100	0.01	1.01	2.704813829
1000	0.001	1.001	2.716923932
10000	0.0001	1.0001	2.718145926
100000	0.00001	1.00001	2.718268237
1000000	0.000001	1.000001	2.718280469
1000000000	$10^{-9}$	$1 + 10^{-9}$	2.718281828



نو  $e = 2.718281828$   $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e = 2.718281828$  ... عدده د Euler عدد وائي.

-II

$$1) \lim_{\alpha \rightarrow 0} (1 + \alpha)^\alpha = e$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{\alpha}{x})^{\beta x} = e^{\alpha \beta}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

**ثبوت:** پوهيرو جي څلور واره پوئيتي د  $1^\infty$  مبهم شڪلونه لري.

$$1) x = \frac{1}{\alpha} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{x}, \alpha \rightarrow 0 \Rightarrow x \rightarrow \infty \Rightarrow \lim_{\alpha \rightarrow 0} (1 + \alpha)^\alpha = \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{\alpha}{x})^{\beta x} = e^{\alpha \beta}$$

$$u = \frac{\alpha}{x} \Rightarrow x = \frac{\alpha}{u}, x \rightarrow \infty \Rightarrow u \rightarrow 0$$

$$\lim_{n \rightarrow 0} (1 + u)^{\frac{\alpha}{u}} = \lim_{n \rightarrow 0} \left[ (1 + u)^{\frac{1}{u}} \right]^{\alpha \beta}$$

$$x = \frac{1}{u} \rightarrow u = \frac{1}{x}, u \rightarrow 0 \Rightarrow x \rightarrow \infty$$

$$\lim_{n \rightarrow 0} \left[ (1 + u)^{\frac{1}{u}} \right]^{\alpha \beta} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ (1 + \frac{1}{x})^x \right]^{\alpha \beta} = e^{\alpha \beta}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{x} \ln(1+x) \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} \right]$$

$$\ln \left[ \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} \right], x = \frac{1}{u} \Rightarrow u = \frac{1}{x}, x \rightarrow 0 \Rightarrow u \rightarrow \infty$$

$$\ln \left[ \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} \right] = \ln \left[ \lim_{u \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{u})^u \right] = \ln e = 1$$

$$\begin{aligned}
 4) \quad y = e^x - 1 &\Rightarrow e^x = 1 + y \Rightarrow x = \ln(1 + y) \\
 &\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\ln(1 + y)} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\ln(1 + y)}{y}} = \frac{1}{\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + y)}{y}} \\
 &= \frac{1}{\lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{1}{1 + y}}} = \frac{1}{1}, \quad y = \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{1}{y}, \quad y \rightarrow 0 \Rightarrow x \rightarrow \infty \\
 &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{1}{\ln(1 + y)}} = \lim_{y \rightarrow 0} \ln(1 + y) \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)} = \frac{1}{\ln e} = \frac{1}{1} = 1
 \end{aligned}$$

د  $1^\infty$  مبهم شکل عمومي حالت: که چیري د اکسپوننشل تابع لېمیت يعني  $\lim_{x \rightarrow d} [u(x)]^{v(x)}$  د  $1^\infty$  مبهم شکل

ځانته غوره کړي په دې حالت کې  $\alpha = u - 1$  سره تعویضو، په نتیجه کې:

$$\lim_{x \rightarrow d} u^v = \lim_{x \rightarrow d} [1 + u - 1]^v = \lim_{x \rightarrow d} \left[ (1 + \alpha)^{\frac{v}{\alpha}} \right] = \lim_{x \rightarrow d} \left[ (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} \right]^{\lim_{x \rightarrow d} (v\alpha)}$$

خړنگه چې  $\alpha = u - 1$  دی که چیري  $1 \rightarrow u \rightarrow 0$  ته نږدی کړي په پایله کې:

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow d} [u(x)]^{v(x)} &= \left[ \lim_{\alpha \rightarrow 0} (1 + \alpha)^\alpha \right]^{\lim_{x \rightarrow d} [v(u-1)]} = e^{\lim_{x \rightarrow d} [v(u-1)]} = e^P \\
 \lim_{x \rightarrow d} [u(x)]^{v(x)} &= e^P, \quad P = \lim_{x \rightarrow d} [v(u-1)]
 \end{aligned}$$

لومړی مثال: د  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x$  لېمیت قیمت په لاس راوړئ.

حل: لومړی د لېمیت ښه ټاکو معلومېږي چې لېمیت د  $1^\infty$  مبهم شکل لري، نو له فورمول څخه کار اخلو:

$$u = 1 + \frac{2}{x}, \quad v = x$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x = e^P, \quad P = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[x \left(1 + \frac{2}{x} - 1\right)\right] = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x = e^2 = e^2$$

دویم مثال: د  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{x-5}{2}}$  قیمت محاسبه کړئ.

حل: لومړی د لېمیت ښه ټاکو  $= 1^\infty$ :  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{x-5}{2}} = 1^\infty$

خرنگه چي معلومېږي نوموړی لېمیت د  $1^\infty$  مبهم شکل لري نو له فورمول څخه کار اخلو:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x-5} = e^P$$

$$u = 1 + \frac{1}{x}, \quad v = \frac{x-5}{2}$$

$$P = \lim_{x \rightarrow \infty} [v(u-1)] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \frac{x-5}{2} \left(1 + \frac{1}{x} - 1\right) \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \frac{x-5}{2} \left(\frac{1}{x}\right) \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-5}{2x} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x-5}} = e^P = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$$

درېم مثال :  $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x}} = ?$

حل : د تېر په شان بيا هم لومړی د لېمیت بڼه ټاکو،  $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x}} = 1^\infty$

خرنگه چي معلومېږي لېمیت د  $1^\infty$  مبهم شکل لري د فورمول په مرسته يې محاسبه کوو:

$$u = \cos x, \quad v = \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x}} = e^P$$

$$P = \lim_{x \rightarrow 0} [v(u-1)] = \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{x} (\cos x - 1) \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos x - 1)(\cos x + 1)}{x(\cos x + 1)}$$

$$\frac{\cos^2 x + \cos x - \cos x - 1}{x(\cos x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - \sin^2 x - \cos^2 x}{x(\cos x + 1)}$$

$$= -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\cos x + 1} = -1 \cdot 0 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x}} = e^P = e^0 = 1$$



پوښتنې

لاڼدي لېمونه محاسبه کړئ.

1)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+2}$

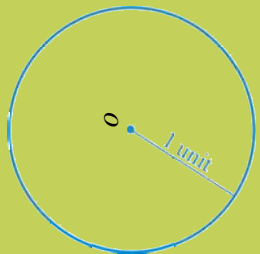
2)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\ln x}$

3)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{x+2}$

4)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2}$

5)  $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x)^{\frac{1}{x}}$





## د مثلثانو تابعگانو لمبیت

### Trigonometric functions limits

که د یوې دایرې شعاع یو واحد (1 unit) وي، نوموړي دایرې ته څه ډول دایره وايي.



### فعالیت

- دوضعیه کمیانو په سیستم کې د  $C(0, r)$  په مثلثاتي دایره کې د  $\theta$  مرکزي زاویه رسم کړئ.
- د  $C$  له بهرنۍ ټکي څخه په دایره باندې د  $OX$  پر محور د  $\overline{CA}$  مماس او  $\overline{MB}$  عمود رسم کړئ.
- د  $C$  ټکي د دایرې له مرکز سره وصل کړئ.
- د مرکزي زاوې د مقابل قوس د اندازه کولو واحد په گوته کړئ.

له پورتنۍ فعالیت څخه قضیه داسې بیان او ثبوتو:

**قضیه:** د یوې زاوې د سین او د هغې زاوې د نسبت لمبیت مساوي په (1) دی، کله چې زاوه صفر ته تقرب وکړي.

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$$

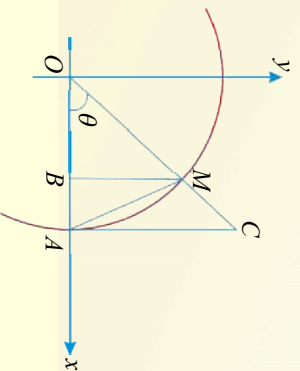
**ثبوت:** په لاندي شکل کې د  $MOA$  او  $COA$  د مثلثونو او  $OMA$  د قطاع مساحتونه په لاس راوړو:

$$\overline{BM} = \frac{1}{2} \cdot r \cdot \overline{BM} = \frac{1}{2} \cdot r \cdot \overline{OA} \cdot \overline{BM} = \frac{1}{2} \cdot \overline{OA} \cdot \overline{BM} \quad \text{مثلث مساحت}$$

$$d = \frac{1}{2} \theta r^2 \quad \text{قطاع } \widehat{OAM} \text{ مساحت}$$

د  $\theta$  د زاوې پر انځوالی باید په رادیان لاسته راوړو.

$$\overline{AC} \cdot \overline{OA} = \frac{1}{2} \cdot \overline{OA} \cdot \overline{AC} = \frac{1}{2} \cdot r \cdot \overline{AC} = \frac{\widehat{COA}}{2} \cdot r \quad \text{مساحت } \widehat{COA}$$



د  $MOA$  او  $COA$  مثلثونو مساحتونه د  $OMA$  د قطاع له مساحت سره پرتله کوو:

$$\frac{1}{2} r \overline{BM} < \frac{1}{2} \theta r^2 < \frac{\widehat{AC}}{2} \cdot r$$

د نامساواتو دواړه خواوې په  $\frac{2}{r^2}$  کې ضربوو:

$$\frac{BM}{r} < \theta < \frac{AC}{r} \Rightarrow \sin \theta < \tan \theta \Rightarrow 1 < \frac{\theta}{\sin \theta} < \frac{1}{\cos \theta}$$

$$\Rightarrow \cos \theta < \frac{\sin \theta}{\theta} < 1 \Rightarrow \lim_{\theta \rightarrow 0} \cos \theta \leq \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} \leq \lim_{\theta \rightarrow 0} 1$$

د ساندروېچ د قضیې پر بنسټ معلومېږي چې  $\lim_{\theta \rightarrow 0} \cos \theta = 1$  او همدارنگه  $\lim_{\theta \rightarrow 0} 1 = 1$  دی، نو

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$$

پوهېږو چې د هرې زاوې ساین د (1) او (-1) د عددونو تر منځ تحول کوي:

$$-1 \leq \sin \theta \leq 1$$

$$-\frac{1}{\theta} \leq \frac{\sin \theta}{\theta} \leq \frac{1}{\theta}$$

$$-\lim_{\theta \rightarrow \infty} \frac{1}{\theta} \leq \lim_{\theta \rightarrow \infty} \frac{\sin \theta}{\theta} \leq \lim_{\theta \rightarrow \infty} \frac{1}{\theta}$$

د ساندروېچ د قضیې پر اساس لیکلای شو چې:

$$\left. \begin{aligned} -\lim_{\theta \rightarrow \infty} \frac{1}{\theta} &= 0 \\ \lim_{\theta \rightarrow \infty} \frac{1}{\theta} &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{\theta \rightarrow \infty} \frac{\sin \theta}{\theta} = 0$$

په پایله کې ویلای شو چې د یوې زاوې ساین او د هغې زاوې د نسبت لېمیت مسووي په صفر دی هغه وخت چې زاوې یې نهایت ته نږدی شي.

**لومړی مثال:**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x}$  پیدا کړئ.

**حل:** که  $\alpha = 2x = \alpha$  نو  $2x = \frac{\alpha}{2}$  کېږي، څرنگه چې  $x \rightarrow 0$  کېږي دی، نو  $\alpha \rightarrow 0$  کوي، نو لیکلای شو:

$$\frac{\sin \alpha}{\alpha} = 2 \frac{\sin \alpha}{2}$$

له پورته مساواتو څخه لاس ته راځي:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow 2 \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 2 \cdot 1 = 2$$

دویم مثال :  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 \tan 2x}{7x}$  حل کریں۔

حل :

$$\begin{aligned} \frac{5 \tan 2x}{7x} &= \frac{5 \frac{\sin 2x}{\cos 2x}}{7x} = \frac{5 \cdot 2x \frac{\sin 2x}{2x}}{7x \cos 2x} = \frac{10 \frac{\sin 2x}{2x}}{7 \cos 2x} \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 \tan 2x}{7x} &= \frac{10 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x}}{7 \lim_{x \rightarrow 0} \cos 2x} = \frac{10}{7} \end{aligned}$$

دریم مثال :  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x}$  حل کریں۔

حل : پرمیرو جی  $1 - \cos 2x = 2 \sin^2 x$  سے دیکھیں۔

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 x}{x} \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 2 \cdot 1 \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

چلورم مثال :  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{\sin 5x}$  پیداکریں۔

حل :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{\sin 5x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin 3x}{\cos 3x}}{\sin 5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin 3x}{3x} \cdot \frac{3x}{\cos 3x}}{\frac{\sin 5x}{5x} \cdot \frac{5x}{\cos 3x}} = \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{1} = \frac{3}{5} \end{aligned}$$

پنجم مثال :  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 4x - \cos 6x}{x^2}$  پہ لاس راویں۔

حل : پرمیرو جی  $\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin \frac{4x + 6x}{2} \sin \frac{4x - 6x}{2}}{x^2} \\ = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin 5x \sin(-x)}{x^2} = -2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 \sin 5x}{5x} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{x} \end{aligned}$$

$$= 10 \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 10 \cdot 1 \cdot 1 = 10$$

کہ  $y = 5x$  سرہ وی، او  $x \rightarrow 0$  نو  $y \rightarrow 0$  کوی، نو:



پو پو پو

لائی لمیٹو نہ محاسبہ کریں۔

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x + \frac{\pi}{6})}{x + \frac{\pi}{6}}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \tan^2 x}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{\sin 3x}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \sin 5x \cos 3x$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(2x - 1)}{4x^2 - 1}$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{\cos 2x - \cos x} + 1$$

$$9) \lim_{x \rightarrow 1} (\cos^2 x + \sin^2 x)$$



## د تابعگانو متمادیت

### Continuity of functions

شکلونو ته پام وکړئ.

لومړی او دویم پلونه څه توپیر لري، خپل نظر بیان کړئ.

د تابعگانو گرافونه مختلف شکلونه لري، چې ځینې یې په یوه قلم پرته له دې چې د قلم څوکه له کاغذ څخه پورته شي رسمېږي، متصلې یا متمادې تابعگانې بلل کېږي او ځینې یې په یوه قلم نه شي رسمېدلای یعنې د رسم په وخت کې باید د قلم څوکه یو ځل یا څو ځلې د کاغذ څخه پورته شي، ځکه په یوه برخه کې یې گراف غوڅ وي، دغه ډول تابعگانې په نوموړې ټکي کې غیر متصلې یا غیر متمادې تابعگانې بلل کېږي.



• د  $f(x) = x^2 + 4x$  تابع گراف رسم کړئ.

• د  $f(x)$  د تابع لمبیت د  $x = 1$  په نقطه کې پیدا کړئ.

• د  $f(x)$  د تابع قیمت د  $x = 1$  په نقطه کې پیدا او وروسته داوړه اړیکې سره پرتله کړئ.  
له پاسني فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راځي:

**پایله:** د  $f(x) = r$  تابع د  $x = a$  په ټکي کې متمادې بلله کېږي، چې لاندې شرطونه په کې صدق وکړي.

1- د  $f(x)$  تابع د  $a$  په ټکي کې تعریف شوی وي.

2- راکړل شوي تابع د  $a$  په ټکي کې لمبیت ولري.

3- د  $f(a)$  قیمت باید د  $f(x)$  له لمبیت سره مساوي وي:  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

**لومړی مثال:** وینئې چې د  $x^2 + 2x - 1$  د  $f(x) = x^2 + 2x - 1$  تابع د  $x_0 = 2$  په ټکي کې ممتدای ده.

**حل:** څرنگه چې د تابع د تعریف ساحه ټول حقيقي عددونه دي، نو د ممتدایت له شرطونو څخه لیکلای شو:

$$\begin{aligned} 1) \quad 2 \in \text{Dom } f(x) &= \mathbb{R} \\ 2) \quad \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 2x - 1) &= 4 + 4 - 1 = 7 \\ 3) \quad f(2) &= 2^2 + 4 - 1 = 7 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) = 7$$

څرنگه چې د ممتدایت درې واړه شرطونه په کې حقیقت لري، بناه تابع ممتدای ده.

**دویم مثال:** د  $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$  د تابع ممتدایت د  $x_0 = -1$  په ټکي کې وڅیړئ.

**حل:** د  $f(x)$  د تابع د تعریف ساحه عبارت ده؛ له:  $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x-1}{x+1} = \frac{-3}{0} = \infty$$

او سره دی.

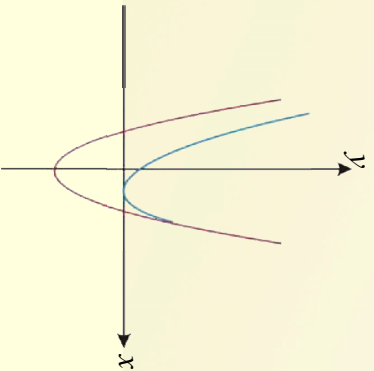
څرنگه چې لیدل کېږي  $-1$  د تابع د تعریف په ساحه کې شامل نه دی، بناه نوموړی تابع د  $-1$  په ټکي کې ممتدای نه ده.

**درېیم مثال:** د  $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 1 & ; x < 2 \\ x^2 - 3 & ; x \geq 2 \end{cases}$  د تابع ممتدایت د  $x = 2$  په ټکي کې وڅیړئ.

**حل:** لومړی د تابع د نښې او کینې خوا لیسو ته څیړو:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 - 3) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 - 2x + 1) = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$$

په پایله کې وپلای شو چې تابع په نوموړي ټکي کې ممتدای ده، لکه چې په شکل کې لیدل کېږي.



**خلورم مثال:** که  $f(x) = \begin{cases} 2x+1; & x \geq 1 \\ 1-x & ; x < 1 \end{cases}$  وي، نو د  $x = 1$  په ټکي کې د تابع متمادیت وڅیړئ.

**حل:**

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= 1 - x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= 2x + 1 = 3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$$

نو تابع په  $x = 1$  کې غیر متمادی ده.

**پایله:** که چیرې د  $g(x)$  تابع د  $x = a$  په ټکي کې  $f(x)$  په  $x = g(a)$  کې متمادی وي، نو  $f(g(x))$  به

$x = a$  کې هم متمادی ده، یعنی:

- 1)  $\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = f(\lim_{x \rightarrow a} g(x)) = f(g(a))$
- 2)  $\lim_{x \rightarrow a} (\lim_{x \rightarrow a} f(x))^\alpha = (\lim_{x \rightarrow a} f(x))^\alpha$  ,  $\alpha \in \mathbb{R}$
- 3)  $\lim_{x \rightarrow a} a^{f(x)} = a^{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}$
- 4)  $\lim_{x \rightarrow a} \log_a f(x) = \log_a (\lim_{x \rightarrow a} f(x))$
- 5)  $\lim_{x \rightarrow a} \sin f(x) = \sin(\lim_{x \rightarrow a} f(x))$

**پنځم مثال:** که  $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x + 3}$  وي او  $x \neq -3$  وي.

آیا د  $f(x)$  تابع د  $x = -3$  په ټکي کې متمادی ده؟

**حل:** څرنگه چې تابع د  $x = -3$  په نقطه کې نه ده تعریف شوی یا په بل عبارت د  $-3$  عدد د تابع د تعریف په ساحه کې نه دی شامل، نو له دې امله تابع د  $x = -3$  په ټکي کې متمادی نه ده.

**غیر متمادیت:** که چیرې د  $f(x)$  تابع په  $x = a$  کې یو له لاندې درې شرطونو څخه و نه لري وایو چې  $f$  په  $a$  کې غیر متمادی ده او  $a$  یې د انفصال ټکی دی. انفصال په درې ډوله دی.

**لومړی ډول:** د  $f$  تابع د  $a$  په ټکي کې د ښي او کین لوري لمبیتونه ولري خو مساوي نه وي.  
**دویم ډول:** کم تر کمه یو له دوو لمبیتونو (د ښي او کین لوري لمبیتونه) څخه موجود نه وي.  
**دریم ډول:** که چیرې تابع د  $a$  په ټکي کې لمبیت ولري خو د  $a$  د تعریف په ساحه کې شامل نه وي. (نو ازای یو خالي ټکی وي.)



پوڊيٽي

په ورڪر شوڊيو ٽڪو ڪي د تابع متماديت وڃيڻي.

$$a) f(x) = x^2 + 5(x-2)^7 ; x = 3 \quad b) f(x) = \frac{x+3}{(x^2+2x-5)} ; x = -1$$

$$c) h(x) = \frac{\sqrt{8-x^2}}{2x^2-5} ; x = -2 \quad d) f(x) = \frac{1}{(x-3)^3} ; x = 3$$

$$e) f(x) = |x-3| ; x = 3 \quad f) g(x) = \frac{|x|}{x} ; x = 0$$

$$g) f(x) = \begin{cases} \frac{x^3+x}{3} & ; x \neq 0 \\ 3 & ; x = 2 \end{cases} \quad h) f(x) = \frac{x^2-9}{x+3} ; x = 2$$



## د متمادي تابعگانو خاصیتونه

د مداخل مسالو ته په اړه سوچ وکړئ چې حقیقت لري او که نه؟

$$\begin{aligned}(f \pm g)(x) &= f(x) \pm g(x) \\ (f \cdot g)(x) &= f(x) \cdot g(x) \\ (f \div g)(x) &= f(x) \div g(x), \quad g(x) \neq 0\end{aligned}$$



### فعالیت

- که  $1 - x^2 = f(x)$  وي د تابع متمادیت وڅېړئ.
  - که  $g(x) = x + 3$  وي د تابع متمادیت وڅېړئ.
  - د  $f(x) + g(x)$  د تابعگانو متمادیت وڅېړئ.
- د پورتني فعالیت پایله داسې بیانو:

**پایله:** که د  $f(x)$  او  $g(x)$  تابعگانې د  $c = x$  په ټکي کې متمادي وي، نو له لاندې تابعگانو څخه یې

هره یوه په  $c = x$  یا یوه انټروال کې متمادي ده.

- |                     |                                   |
|---------------------|-----------------------------------|
| 1- د تابعگانو جمع   | $f(x) + g(x)$                     |
| 2- د تابعگانو تفریق | $f(x) - g(x)$                     |
| 3- د تابعگانو ضرب   | $f(x) \cdot g(x)$                 |
| 4- د تابعگانو تقسیم | $\frac{f(x)}{g(x)} ; g(x) \neq 0$ |

**لومړی بېلگه:** که  $f(x) = x^2 + 3$  او  $g(x) = x^2 + 3x - 2$  وي، نو:

- 1-  $f$  او  $g$  د  $x = 1$  په ټکي کې متمادي دي او که نه؟
- 2- وڅېړئ، چې:
- الف)  $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$  وي.

ب)  $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$  د  $x = 1$  په نقطه کې متمادی ده او که غیر متمادی.

حل: لومړی هره یوه تابع بېلابېله څېرو چې متمادی ده که نه؟

1)  $Df(x) = \mathbb{R}$

2)  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 3) = 4$

3)  $f(1) = (1^2 + 3) = 4$

نو د  $f$  تابع د  $x = 1$  په نقطه کې متمادی ده.

1)  $Dg(x) = \mathbb{R}$

2)  $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 3x - 2) = 1^2 + 3 \cdot 1 - 2 = 2$

3)  $g(1) = (1^2 + 3 \cdot 1 - 2) = 2$

په همدې شان د  $g$  تابع د  $x = 1$  په ټکي کې هم متمادی ده.

2- اوس د تابعگانو د جمعې او ضرب د حاصل متمادیت څېرو:

الف)

$$f(x) + g(x) = x^2 + 3 + x^2 + 3x - 2 = 2x^2 + 3x + 1$$

1)  $D(f(x) + g(x)) = \mathbb{R}$

2)  $\lim_{x \rightarrow 1} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow 1} (2x^2 + 3x + 1) = 6$

3)  $f(1) + g(1) = (1 + 3 + 1 + 3 - 2) = 6$

$$\lim_{x \rightarrow 1} [f(x) + g(x)] = f(1) + g(1) = 6$$

$$(f + g)(x) = x^2 + 3 + x^2 + 3x - 2 = 2x^2 + 3x + 1$$

1)  $D[(f + g)(x)] = \mathbb{R}$

2)  $\lim_{x \rightarrow 1} [(f + g)(x)] = \lim_{x \rightarrow 1} [2x^2 + 3x + 1] = 6$

3)  $(f + g)(1) = (2x^2 + 3x + 1)(1) = 6$

$$\lim_{x \rightarrow 1} [(f + g)(x)] = (f + g)(1) = 6$$

په پایله کې د متمادی تابعگانو د جمعې حاصل د  $x = 1$  په نقطه کې متمادی دی.

ب)

$$f(x) \cdot g(x) = (x^2 + 3)(x^2 + 3x - 2) = x^4 + 3x^3 + x^2 + 9x - 6$$

$$1) D(f \cdot g)(x) = IR$$

$$2) (f \cdot g)_{(1)} = 1^4 + 3 \cdot 1^3 + 1^2 + 9 \cdot 1 - 6 = 8$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 1} (f \cdot g)(x) = 8$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (f \cdot g)(x) = (f \cdot g)(1) = 8$$

په پايه کي د متمادي ناپهنگانو د ضرب حاصل د  $x = 1$  په نقطه کي متمادي ده.

**دويمه بېلگه.** که  $g(x) = 3x - 2$  او  $f(x) = x + 1$  وي، وڅېړئ، چې آيا  $f(x) \cdot g(x)$  د  $x = 2$

په نقطه کي متمادي ده؟

**حل:**

$$1) Dg(x) = IR$$

$$1) Df(x) = IR$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 3 \cdot 2 - 2 = 4$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 1) = 3$$

$$3) g(2) = 3 \cdot 2 - 2 = 4$$

$$3) f(2) = x + 1 = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = g(2) = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) = 3$$

$$f(x) \cdot g(x) = (x + 1)(3x - 2) = 3x^2 - 2x + 3x - 2 = 3x^2 + x - 2$$

$$D(f \cdot g)(x) = IR$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} [f(x) \cdot g(x)] = 3(4) + 2 - 2 = 12$$

$$(f \cdot g)(2) = 3(4) + 2 - 2 = 12$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} [f(x) \cdot g(x)] = (f \cdot g)(2) = 12$$

په پايه کي لاس ته راځي چې  $f(x) \cdot g(x)$  د  $x = 2$  په ټکي کي متمادي ده.



1- وٺينءَ چي لائيندي تابعدگائي په ورڪر شويو نقطو ڪي متمادي دي او ڪه نه؟

$$1) f(x) = x^3 - 2(x+1)^5 \quad ; \quad x = 2$$

$$2) g(x) = \frac{x^2 + 3}{(x^2 - x + 5)(x^2 + 2x)} \quad ; \quad x = -1$$

$$3) h(x) = \frac{x\sqrt{x+1}}{(x+2)^3} \quad ; \quad x = 4$$

2- تشریح ڪري، چي وٺي د  $f(x) = \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{2}}{x}$  تابع په  $x = 0$  ڪي غير متمادي ده.

## د څېړنې لنډيز

د متحول تقرب: وړل کېږي چې د  $x$  متحول د  $a$  عدد ته تقرب کوي، په داسې حال کې چې  $x$  په اختیاري ډول د  $a$  عدد ته نږدې کېږي، یعنې د  $x$  او  $a$  ترمنځ تفاوت له هر کوچني عدد ( $\delta > 0$ ) څخه کوچني دی یا په لاندې ډول:

$$\forall \delta > 0: |x - a| < \delta \quad \text{یا} \quad \lim_{x \rightarrow a} x = a \quad \text{یا} \quad x \rightarrow a \quad \text{یا} \quad |x - a| \rightarrow 0$$

له بڼې لوري د متحول تقرب: ( $x \rightarrow a^+$ ) که چېرې د  $x$  د قیمتونو یو متناقص تراډف موجود وي په داسې حال کې چې په تدریجي ډول د  $a$  اختیاري عدد ته نږدې شي.

$$x: a + 0.1, a + 0.01, a + 0.001, a + 0.0001, \dots \rightarrow a^+$$

له کیڼې لوري د متحول تقرب: ( $x \rightarrow a^-$ ) که چېرې د  $x$  د قیمتونو یو متزايد تراډف موجود وي په داسې حال کې چې  $x$  په تدریجي ډول د  $a$  اختیاري عدد ته نږدې شي.

$$x: a - 0.1, a - 0.01, a - 0.001, a - 0.0001, \dots \rightarrow a^-$$

نو د  $x$  د متحول تقرب د  $a$  عدد ته معادل دی د  $x$  د متحول تقرب له بڼې لوري او د  $x$  د متحول تقرب له چپ لوري؛ یعنې:

$$x \rightarrow a \Leftrightarrow (x \rightarrow a^+, x \rightarrow a^-)$$

تعریف: که چېرې د  $f(x)$  تابع په یوه غیر تړلي انټروال کې چې د  $a$  عدد په هغې کې شامل وي کیدای شي چې تابع په  $a$  کې نه وي تعریف شوی. که چېرې د  $x$  متحول د  $a$  عدد ته نږدې شي نو د  $f(x)$  تابع د  $l$  عدد ته نږدې کېږي، نو وړل کېږي چې د  $f(x)$  د تابع لښت عبارت له  $l$  څخه دی، کله چې د  $x$  متحول د  $a$  عدد ته تقرب وکړي نو داسې بې لیکو:  $l = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$  یا  $f(x) \rightarrow l$

د لښت ځانګړتیاوې: که  $f$  او  $g$  دوي تابعګانې وي،  $C, L$  او  $M$  حقیقي عددونه وي داسې چې

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L \quad \text{او} \quad \lim_{x \rightarrow c} g(x) = M, \quad \text{نو لاندې رابطې لیکلای شو:}$$

- 1)  $\lim_{x \rightarrow c} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow c} f(x) + \lim_{x \rightarrow c} g(x) = L + M$
- 2)  $\lim_{x \rightarrow c} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow c} f(x) - \lim_{x \rightarrow c} g(x) = L - M$
- 3)  $\lim_{x \rightarrow c} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow c} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow c} g(x) = L \cdot M$
- 4)  $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow c} f(x)}{\lim_{x \rightarrow c} g(x)} = \frac{L}{M}, \quad M \neq 0, \quad g(x) \neq 0$
- 5)  $\lim_{x \rightarrow c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow c} f(x)} = \sqrt[n]{L}$

بي نهايت کوچني تابعگاني: د  $x \rightarrow a$  ته نږدی شي بي نهايت کوچني بللي کېږي، که

$$\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0 \text{ وي.}$$

د سانډويچ قضيه، که چېرې د  $f(x)$ ,  $g(x)$  او  $h(x)$  تابعگاني د هر  $x$  لپاره په يوه غیر تړلي انټروال کې چې  $a$  عدد په کې شامل دی (ولو که  $x \neq a$ ) او  $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$  شرط صدق وکړي په هغه صورت کې چې

$$\lim_{x \rightarrow a} h(x) = b = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \text{ وي، نو } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = b \text{ دی.}$$

- که چېرې يوه تابع د  $\frac{0}{0}$  بڼه ولري، د لېمیت د پيدا کولو لپاره يې لومړی تابع د تجزيې په مرسته ساده کوو او بيا يې لېمیت په لاس راوړو.

$$\bullet \text{ د } f(x) \text{ د تابع د لېمیت د پيدا کولو لپاره چې } x \rightarrow \infty \text{ وکړي، عبارت}$$

$$f(x) = \frac{a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \dots + a_m}{b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \dots + b_n}$$

دی له:

$$1. \text{ د } m = n \text{ لپاره د نوموړي کسر لېمیت عبارت دی له } \frac{a_0}{b_0}$$

2. د  $m < n$  لپاره د نوموړي کسر لېمیت عبارت له صفر څخه دی.

3. د  $m > n$  لپاره د نوموړي کسر لېمیت عبارت دی له  $\pm \infty$

- د هغو تابعگانو چې  $(\infty - \infty)$  او  $(0 \cdot \infty)$  بڼه ولري د لېمیت د پيدا کولو لپاره يې د کسرونو د جمعې، ضرب او مزدوج څخه گټه اخلو، ترڅو د  $\frac{0}{0}$  يا  $\frac{\infty}{\infty}$  بڼه غوره کړي چې وروسته يې لېمیت په لاس راوړو.

• هغه تابعگانې چې د  $1^\infty$  شمېم ځکونه لري لسه دي فورمول څخه  $P = \lim_{x \rightarrow a} [u - 1]^v$  ،  $e^P = \lim_{x \rightarrow a} [u(x)]^{v(x)}$  يې د لېمیت د پيدا کولو لپاره کار اخلو.

- لاندې رابطه کله چې  $\theta \rightarrow 0$  وکړي هميشه سمه ده.

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$$

- د  $f(x) = v$  تابع د  $x = a$  په ټکي کې متمادي بلل کېږي، کله چې:

1.  $a$  د  $f(x)$  د تابع په دویمین کې شامل وي.

2. راکړ شوی تابع د  $a$  په نقطه کې لېمیت ولري.

$$3. \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

## د لومړي څپرکي پوښتني

لاندي پوښتنو ته څلور ځوابونه ورکړل شوي دي سم ځواب په ښه کړي.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x - \sin x}{x} - 1$$

- a) 2      b) -2      c) 1      d) 3

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 + x - 2} - 2$$

- a)  $-\frac{5}{3}$       b)  $\frac{5}{3}$       c) 0      d) 1

$$\lim_{x \rightarrow 1.4} (2x + 0.3) - 3$$

- a) 1      b) 3      c) 0      d) هيڅ يو

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\tan 2x} - 4$$

- a) 1      b) 0      c)  $\frac{3}{2}$       d)  $\frac{2}{3}$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - 4}{\sqrt{x} - 2} - 5$$

- a)  $2 + \sqrt{2}$       b) 2      c)  $\sqrt{2}$       d) 4

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{1 + \cos 2x} - 6$$

- a) 1      b)  $\frac{1}{2}$       c)  $\frac{1}{4}$       d) 4

-7 لاندي لښوونه پيدا کړي.

1)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x + 5}{2x^2 + 1}$

2)  $\lim_{x \rightarrow -1} \sqrt{3 + x}$

3)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6}{x^2 - 7}$

4)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + x^2 + x + 6}{x^3 - 3x + 4}$

5)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2}{x + 1}$

6)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + 5x - 18}{x^2 + 3x - 10}$

7)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x - 4}{x - \sqrt{3x - 2}}$

8)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 3x - 10}$

9)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\tan x}$

10)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x \cos x}$

$$11) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 3x - 10}{x^2 - x - 2}$$

$$13) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(a+x) + \sin(a-x)}{\tan(a+x) + \tan(a-x)}$$

$$15) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x \sin x - \tan x}{x^2 \sin x}$$

$$17) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin 2x \sin x + \sin^2 x}{x^2}$$

$$19) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin 3x \sin 2x}{x \tan 3x}$$

$$21) \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin 3(\pi + u)}{\sin 8(\pi + u)}$$

$$23) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - x + 3}{x^2 - 8x + 5}$$

$$25) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{9x^2 - x + 5}{\sqrt{9x^4 + 1}}$$

$$12) \lim_{x \rightarrow -2} \left( \frac{x+3}{x+2} + \frac{2}{x^2+2x} \right)$$

$$14) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{2x^2 - 1} - \frac{x^2}{2x + 2}$$

$$16) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 3x + \sin^2 x}{ax^2}$$

$$18) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin 2x}{x + \sin 3x}$$

$$20) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{\sqrt{x} - 2 \cdot \sqrt{x} + 2} + \frac{1}{\sqrt{x} + 2}$$

$$22) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x^2}{\sin \pi x}$$

$$24) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x + 4}{4x + \sqrt{x}}$$

$$26) \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1-x^2} \right)$$

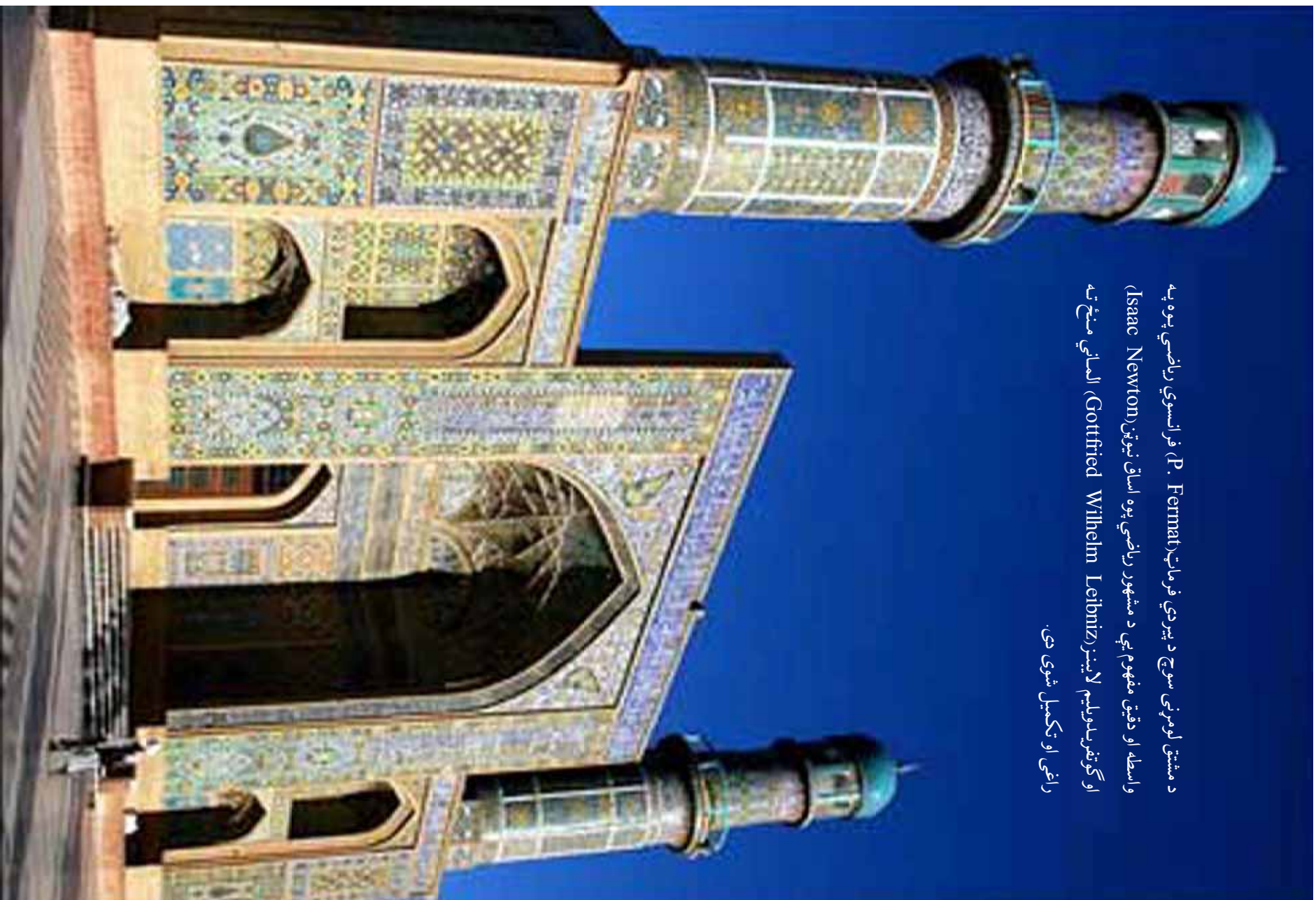




# دویم خیر کی مشق



د مښتنی لومړنی سوچ د پیردی فرماټ (P. Fermat) فرانسونی ریاضی پوه په واسطه او دقیق مفهوم یې د مشهور ریاضی پوه اساق نیوټن (Isaac Newton) او گوتفرید ویلهلم لایبنز (Gottfried Wilhelm Leibniz) المانی منځ ته راغی او تکمیل شوی دی.



## مشقات

### Derivatives

د  $-1 - x^2 = f(x)$  تابع په پام کې ونیسئ، د محامخ کسر لیمیټ پیدا کړئ.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = ?$$

### د یوه منحنی میل

- که د یوه مستقیم خط دوه ټکي  $A(x_1, y_1)$  او  $B(x_2, y_2)$  معلوم وي، نو د دې مستقیم خط میل له کومې رابطې څخه په لاس راځي.
- آیا د یوه مستقیم خط میل ثابت او مساوي دي؟ که په یوه ځانګړې ټکي پورې اړه لري؟
- آیا د مستقیم خط میل د هغې زاوې سره اړه لري، چې مستقیم خط ټپي د  $x$  د محور له مثبت لوري سره جوړوي؟
- آیا د مستقیم خط او منحنی میلونه یو شان پیدا کېږي؟

له پورتنیو پوښتنو څخه څرګندېږي چې د منحنی میل په اسانۍ سره نشو پيدا کولای ځکه چې منحنی خط په هر ټکي کې خپل مسیر ته بدلون ورکوي او په مختلفو ټکو کې بېلابېل میلونه لري، نو له دې کبله لومړی د یوه منحنی خط میل د هغه په یوه ټکي کې تعریفوو او بیا یې د محاسبې لپاره یو فورمول په لاس راوړو.

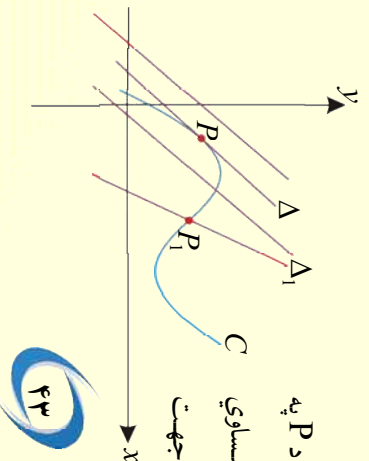


### فعالیت

- د وضعیو کمیانو په مستوي کې د  $C$  منحنی خط رسم او د  $P_1$  او  $P_2$  دوه پري وټاکئ.
- د  $P_1$  په ټکي کې د  $\Delta_1$  قاطع او د  $P_2$  په ټکي کې د  $\Delta_2$  مماس رسم کړئ.
- که د  $P_1$  ټکي د  $C$  په منحنی باندې داسې حرکت وکړي، چې د  $P$  ټکي ته نږدې شي، په پایله کې د  $\Delta_1$  مستقیم خط له  $\Delta_2$  مستقیم خط سره څه اړیکه پیدا کوي؟

د پورتنۍ فعالیت پایله داسې بیانوو:

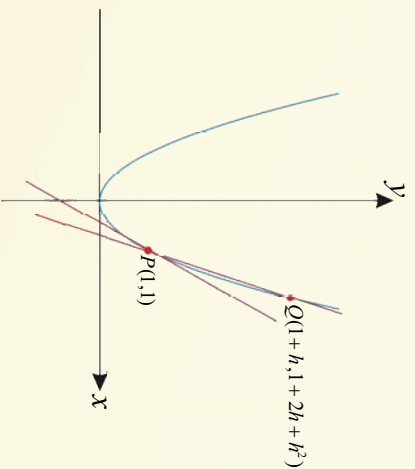
د  $\Delta$  د مستقیم خط میل چې د  $C$  له منحنی سره د  $P$  په نقطه کې مماس دی د هغې زاوې له  $(\tan)$  سره مساوي دی چې مستقیم خط ټپي د  $x$  د محور له مثبت جهت سره جوړوي.



**لومړی مثال:** د  $y = f(x) = x^2$  د منځني سره د مماس میل د  $P(1,1)$  په ټکي کې پیدا کړئ.

**حل:** څرنگه چې د منځني میل له مماس له میل سره د  $P$  په ټکي کې برابر دي، نو د دې مماس میل له هغې فورمول څخه چې د دې نقطې یې معلومي وي، نشو پیدا کولای، ځکه دلته یوازې د یوې نقطې مختصات ورکړل شوي دي. ولې کولای شو د دې مماس د میل تخمینی قیمت د هغه قاطع خط له میل څخه چې د  $P$  او  $Q$  له ټکو څخه تیرېږي، پیدا کړو، په هغه صورت کې چې د  $Q$  ټکي ته نږدې شي د  $PQ$  د مماس میل 2 ته تقریب کوي چې په لاندې جدول کې لیدل کېږي:

$x$	2	1.5	1.1	1.01	1.001
$y$	4	2.25	1.21	1.0201	1.002001
$m_{PQ} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$	3	2.5	2.1	2.01	2.001



په عمومي ډول هغه لومړی مختصه چې د  $P(1,1)$  ټکي ته نږدې ده په  $1+h$  بنودلای شو، چې  $h$  یو کوچنی مثبت یا منفي عدد دی، خو  $h \neq 0$  دی نو لیکلای شو:

$$f(1+h) = (1+h)^2 = 1+2h+h^2$$

نو دا  $(1+h, 1+2h+h^2)$  ټکی د منځني بړ مخ راکړل شوی پروت دی، نو په پایله کې هغه مستقیم خط چې له  $P(1,1)$  او  $Q(1+h, 1+2h+h^2)$  له ټکو څخه تیرېږي، میل یې عبارت دی له:

$$m_{PQ} \frac{(1+2h+h^2)-1}{(1+h)-1} = \frac{2h+h^2}{h} = 2+h$$

که چیرې په شکل کې  $h \rightarrow 0$  نو  $P \rightarrow Q$  کوي، قاطع خط د  $P(1,1)$  په نقطه کې مماس کېږي چې د همدې مماس میل ته د تابع مشتق وايي؛ یعنې:  $\overline{PQ} = \lim_{h \rightarrow 0} (2+h) = 2$



د لمبیت دا عملیه مور ته دا امکان په لاس راكوي چې د  $y = x^2$  د تابع د منځني ميل په يوه اختياري ټكي  $P(x, y)$  كې په لاس راوړو. كه د  $Q$  د ټكي اختياري مختصات  $[x+h, (x+h)^2]$  وي كه د  $PQ$  ميل ته  $m$  او د  $P$  په ټكي كې د مماس ميل په  $m_T$  سره ونيو لرو، چې:

$$m = \frac{(x+h)^2 - x^2}{x+h-x} = \frac{x^2 + 2hx + h^2 - x^2}{h} = \frac{2xh + h^2}{h} = 2x + h$$

$$m_T = \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h) = 2x$$

نو په عمومي بڼه ليكلای شو، كه چېرې  $[x, f(x)]$ ,  $P[x+h, f(x+h)]$ , د نوموړي منځني دوي اختياري نقطې وي، نو لاندې خارج قسمت چې د Newton د رابطې په نامه مشهور دی، ليكلای شو:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{x+h-x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

په حقيقت كې دا د هغه مستقيم خط ميل دی چې د  $P$  او  $Q$  له ټكو څخه تېرېږي. او د منځني ميل د هغې په هر اختياري ټكي كې عبارت دی له:

$$m_T = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

**دويم مثال:** د  $f(x) = x - x^2$  د منځني سره د مماس ميل د  $P(2,0)$  په ټكي كې پيدا كړئ.

**حل:** د Newton خارج قسمت تشكيل او د  $x = 2$  په ټكي كې د منځني ميل حسابو:

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= m_T = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2+h) - (2+h)^2 - 2 + 2^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2+h-4-4h-h^2-2+4}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h-4h-h^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(1-4-h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (-3-h) = -3 \end{aligned}$$

### منځني يا وسطي تعبير

كه يو جسم د يوه مستقيم خط پر مخ د حرکت په حال كې وي، طبيعي ده چې وهل شوی فاصله د زمان تابع ده يعنې  $S = f(t)$  او  $t_1$  او  $t_2$  دوو وختونو خارج قسمت  $\frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}$  د جسم د وسطي سرعت په نامه

يادېږي او سرعت د  $t_0$  په وخت كې عبارت له هغه حد يا لمبیت څخه دی چې لفظوي سرعت بلل

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} \text{ كېږي.}$$

د پورتنی رابطې لمبیت د  $t$  او  $t_0$  په وخت کې داسې لیکو:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{S - S_0}{t - t_0} = \frac{\Delta S}{\Delta t}$$

په پایله کې ورپلای شو چې د تابع او متحول د زیاتوالي خارج قسمت ته متوسط تغییر وایي، یعنې:

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{f(s_2) - f(s_1)}{t_2 - t_1}$$

**مثال:** د  $f(x) = x^2$  په تابع کې د  $f$  متوسط تغییرات د  $[2, 5]$  په انټروال کې پیدا کړئ.

**حل:** څرنگه چې  $x_1 = 2$  او  $x_2 = 5$  دی، نو د تعریف په مرسته لیکلای شو:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(5) - f(2)}{5 - 2} = \frac{5^2 - 2^2}{5 - 2} \\ \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{25 - 4}{5 - 2} = \frac{21}{3} = 7 \end{aligned}$$

## پوښتنې

1) د لاندې تابعگانو د  $x$  د متحول لپاره د یو  $\Delta x$  او  $\Delta y$  ترناید په پام کې نیولو سره  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  او میل یې په خوښتل

شوو ټکو کې پیدا کړئ.

1)  $\frac{\Delta y}{\Delta x} = ?$  ،  $f(x) = 2x^2 - 4$  ، (0)

2)  $\frac{\Delta y}{\Delta x} = ?$  ،  $f(x) = 2x - x^2$  ، (3)

3)  $\frac{\Delta y}{\Delta x} = ?$  ،  $f(x) = 3x^2 - 5x + 4$  ، (2, -1)

د 2) د  $f(t) = 5t^3 - 3t + 1$  د تابع متوسط تغییرات د  $[2, 4]$  په انټروال کې پیدا کړئ.

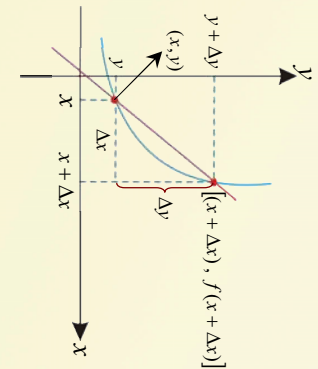
**د یوې تابع مشتق**  
مخامخ لېمیت څه را بڼسې آیا په بل ډول یې لیکلای شو؟

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$



**فعالیت**

- که چېرې د  $y = f(x)$  تابع د  $[a, b]$  په انټروال کې متمادی وي، که د  $x$  متحول د  $\Delta x$  په اندازه زیاتوالی پیدا کړئ آیا تابع ترزاید کوي په دې حالت کې، د متحول او تابع د زیاتوالي رابطه ولیکئ.
  - د تابع ترزاید د متحول پر ترزاید  $\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)$  داسې ولیکئ، چې په مساوات کې بدلون رانښيي.
  - که له دواړو خواوو څخه لېمیت ونیول شي، په هغه صورت کې چې  $\Delta x$  صفر ته تقرب وکړي، د دې حد یا لېمیت د څه په نامه یادېږي؟
- د پورتنۍ فعالیت پایله داسې بیانوو:



$$\begin{aligned} y &= f(x) \\ y + \Delta y &= f(x + \Delta x) \\ \Delta y &= f(x + \Delta x) - y \\ \Delta y &= f(x + \Delta x) - f(x) \quad / \quad \div \Delta x \\ \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \end{aligned}$$

**تعریف:** د تابع او د متحول د بدلون د لېمیت نسبت ته کله چې د متحول ترزاید صفر ته تقرب وکړي د تابع مشتق بلل کېږي؛ لکه:  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$  او هغه په  $f'(x)$  یا  $y'$ ،  $\frac{df}{dx}$ ،  $\frac{dy}{dx}$  ښودل کېږي.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx} = y' = f'(x)$$

**لومړی مثال:** که  $f(x) = 2x$  وي، د دې تابع مشتق پیدا کړئ.

حل : د مشتق د تعريف څخه په گټه اخيستنې سره ليکلای شو، چې :

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2(x + \Delta x) - 2x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x + 2\Delta x - 2x}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2\Delta x}{\Delta x} \Rightarrow f'(x) = 2$$

**دويم مثال :** د  $f(x) = x^3$  د تابع مشتق پيدا کړئ.

حل :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^3 - x^3}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^3 + 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - x^3}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(3x^2 + 3x(\Delta x) + (\Delta x)^2)}{\Delta x} = 3x^2 + 3x(0) + 0^2 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 \end{aligned}$$

**دريم مثال :** د  $x \geq 0$  ،  $f(x) = \sqrt{x}$  مشتق پيدا کړئ.

حل : مخکې له حل څخه  $0 \leq x$  حالت په پام کې نيسو :

الف : که  $0 < x$  وي؛ نو د مشتق د تعريف په مرسته لیکو :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x})(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})}{\Delta x(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})} \end{aligned}$$

صورت او مخخ د صورت په مزودج کې ضربوو :

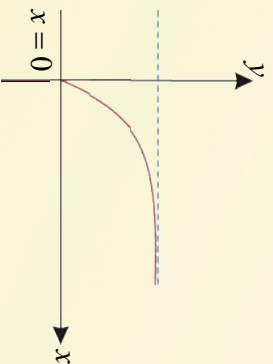
$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

ب : که  $x = 0$  شي نو  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}}$  موجود نه دی،

نو د  $y = \sqrt{x}$  تابع د  $x = 0$  په ټکي کې د اشتقاق وړ نه وي لکه چې په شکل کې ليدل کېږي؛ يعنې که  $x$  ډېر لوی شي، نو د

مماس ميل صفر ته نږدې کېږي او د  $x = 0$  په ټکي کې مماس ميل ډېر لوېږي، چې مماس په يوه عمود  $(\frac{1}{2\sqrt{x}})$

خط بدلېږي.



پوښتنې

ډلاندې توابعو مشتق د تعريف په مرسته پيدا کړئ.

1)  $f(x) = x - x^2$

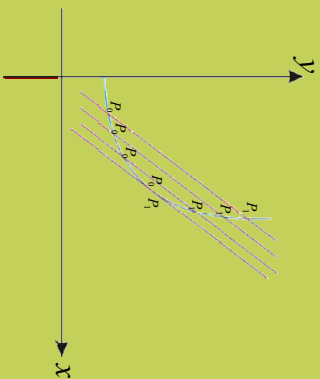
2)  $f(x) = -2x^2$

3)  $f(x) = 2x^2 + x$





**د مشتق هندسي تعبير**  
 په مخامخ شکل کې څه وینئ د هغه په اړه مناقشه وکړئ.



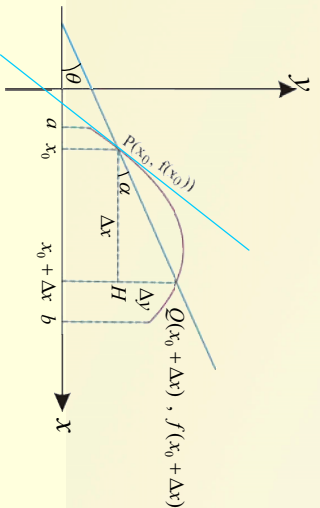
**فعالیت**

- د وضعيه کمياتو په مستوي کې د  $C$  منحنی يا د  $f(x)$  تابع داسې چې د  $[a, b]$  متناهي وي گراف رسم او د  $(x_0, f(x_0))$  او  $(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$  ټکي د منحنی پرمخ وټاکئ.
- د  $\Delta$  مستقيم خط داسې رسم کړئ، چې د منحنی د  $P$  او  $Q$  له ټکو څخه تېر شي.
- آیا ويلاى شئ چې د  $\Delta$  مستقيم خط د  $x$  د محور له مثبت جهت سره څه ډول زاويه جوړوي؟
- وولئ چې د  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  يا  $\frac{HQ}{HP}$  نسبت د څه په نامه يادېږي؟
- که د  $Q$  ټکي ته ډېر نږدې شي  $(\Delta x \rightarrow 0)$ ، نو د  $\Delta$  مستقيم خط په څه ډول کرښه بدلېږي په شکل کې يې وښئ.
- لمبت د  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  کله چې  $\Delta x \rightarrow 0$  وکړي، د  $P(x_0, f(x_0))$  په ټکي کې وڅېړئ.

د پورتنۍ فعاليت پايله داسې بيانوو:

د  $f(x)$  منحنی د تابع مشتق، د  $(x_0, f(x_0))$  د  $P(x_0, f(x_0))$  په ټکي کې د مماس له ميل سره برابر دی؛ يعنې:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y' = \tan \alpha = \tan \theta = m_{\Delta}$$



**تعريف:** د مماس ميل د منحنی د تماس په ټکي کې د تابع د مشتق څخه په هغه ټکي کې عبارت دی، يا په بل عبارت د هغې زاويې د ټانجنټ څخه عبارت دی چې د  $\Delta$  مستقيم خطي د  $x$  د محور له مثبت جهت سره جوړوي.

**لومړی مثال:** د هغه مماس میل او معادله چې د  $f(x) = 2x^3 - 1$  په منځني د  $A(1, 1)$  په ټکي کې رسمېږي پيدا کړئ.

**حل:** پوهېږو چې  $f'(x) = \tan \alpha = m$  دی، نو لیکلای شو؛ چې:

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^3 - 1 \\ f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2(x + \Delta x)^3 - 1 - (2x^3 - 1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2[x^3 + 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + (\Delta x)^3]}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x^3 + 6x^2\Delta x + 6x(\Delta x)^2 + 2(\Delta x)^3 - 1 - 2x^3 + 1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x[6x^2 + 6x\Delta x + 2(\Delta x)^2]}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [6x^2 + 6x(\Delta x) + (\Delta x)^2] = 6x^2 \end{aligned}$$

بناءً د مماس د ميل قيمت د  $A(1, 1)$  په ټکي کې مساوي دی په:  $6 = 6 \cdot 1^2 = 6x^2 = f'(x) = m$  نو د مماس معادله په لاندي ډول ده:

$$\begin{aligned} y - y_1 &= m(x - x_1) \\ y - 1 &= 6(x - 1) \Rightarrow y = 6x - 5 \end{aligned}$$

**دویم مثال:** د  $y = x^2 + 1$  د تابع د مماس ميل قيمت د  $x_0 = 2$  په ټکي کې په لاس راوړئ.

$$\begin{aligned} y' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x_0 + \Delta x)^2 + 1 - (x_0^2 + 1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x_0^2 + 2(\Delta x)x_0 + (\Delta x)^2 + 1 - x_0^2 - 1}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x_0 + (\Delta x)) = 2x_0 \\ m &= y' = 2x_0 = 2 \cdot 2 \\ y' &= m = 4 \end{aligned}$$

**درېم مثال:** د  $f(x) = x^2 = y$  تابع ورکړل شوي ده، غواړو د  $x = x_0$  په ټکي او په ځانگړي توگه د  $x = x_0 = 2$  په ټکي کې د تابع مشتق پيدا کړو:

$$\begin{array}{l} x = x_0 \\ \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \\ \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x} \\ \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x_0^2 + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x} \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x_0\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} \\ \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta x(2x_0 + \Delta x)}{\Delta x} \\ \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x \end{array} \right.$$

اوس د حد د لاس ته راوړلو له لارې لیکلای شو:  $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x_0 + \Delta x) = 2x_0$

خزنګه چې  $x_0 = 2$  دی، نو  $4 = 2 \cdot 2 = f'(2)$  یعنی د  $x_0 = 2$  په ټکي کې د  $f(x) = x^2$  د تابع لومړی مشتق له 4 سره برابر دی. دا په دې معنی چې د مستقیم خط میل د  $x_0 = 2$  په ټکي کې 4 دی.

**څلورم مثال:** د  $f(x) = x^3$  تابع مشتق پیدا کړئ.

**حل:**

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} & \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{3x_0^2 \Delta x + 3x_0(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3}{\Delta x} \\ \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{(x_0 + \Delta x)^3 - x_0^3}{\Delta x} & \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{\Delta x(3x_0^2 + 3x_0\Delta x + (\Delta x)^2)}{\Delta x} \\ \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{x_0^3 + 3x_0^2\Delta x + 3x_0(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - x_0^3}{\Delta x} & \frac{\Delta y}{\Delta x} &= 3x_0^2 + 3x_0\Delta x + (\Delta x)^2 \end{aligned}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (3x_0^2 + 3x_0\Delta x + (\Delta x)^2) = 3x_0^2$$

نو  $f'(x) = 3x_0^2$  د تابع مشتق د  $x_0$  په ټکي کې برابر دي له:

**پنځم مثال:** د  $x_0$  په ټکي کې د  $f(x) = \frac{1}{x}$  تابع مشتق پیدا کړئ.

**حل:**

د مساوات دواړه خواوې په  $\Delta x$  وپلټو:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} & \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{x_0 - x_0 - \Delta x}{x_0(x_0 + \Delta x)} \\ f(x_0) &= \frac{1}{x_0} & \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{-\Delta x}{x_0(x_0 + \Delta x)} \\ f(x_0) + \Delta y &= \frac{1}{x_0 + \Delta x} & \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{-\Delta x}{x_0(x_0 + \Delta x)} \\ \Delta y &= \frac{1}{x_0 + \Delta x} - f(x_0) & \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{-\Delta x}{\Delta x \cdot x_0(x_0 + \Delta x)} \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-1}{x_0(x_0 + \Delta x)} \\ \Delta y &= \frac{1}{x_0 + \Delta x} - \frac{1}{x_0} & \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-1}{x_0(x_0 + \Delta x)} \\ \Delta y &= \frac{x_0 - (x_0 + \Delta x)}{x_0(x_0 + \Delta x)} & f'(x_0) &= \frac{-1}{x_0(x_0 + 0)} = \frac{-1}{x_0^2} \end{aligned}$$

نو  $f'(x_0) = -\frac{1}{x_0^2}$  د  $x_0$  په ټکي کې د  $f(x)$  مشتق دی.

$$f'(x_0) = -\frac{1}{x_0^2}$$

د مشتق تابع جي  $-\frac{1}{x_0^2}$



1. په لاندِي پوڻينتو کي د تابعگانو مشتق پيدا کري.

1)  $f(x) = 5x^2 - 2$       2)  $f(x) = \frac{2}{x}$

2. په ورکړل شويو ٽڪور کي د لاندِي تابعگانو مشتق پيدا کري.

1)  $f(x) = 4x^2$  ،  $x_0 = \frac{1}{2}$

2)  $f(x) = 3x - 1$  ،  $x_0 = -1$

## د مشتق قوانین

آیا کولای شئ چې د محامخ تابع مشتق پرته د تولید له لارې په بله طریقه پیدا کړئ؟

$$f(x) = 2x^2$$

### 1- د یوه ثابت عدد مشتق :



#### فعالیت

د  $C = r$  تابع ( $C$  ثابت عدد) په پام کې ونیسئ.

- تابع ته د  $\Delta x$  په اندازه بدلون (تولید) ورکړئ، د تابع د تولید په اړه څه فکر کوئ؟
- د تابع او متحول د بدلون (تولید) نسبت تشکیل کړئ.

- د پورته مساواتو له دواړو خواوو لږمبت ونیسئ په هغه صورت کې چې  $\Delta x \rightarrow 0$  وکړئ.
- د پورتني فعالیت پایله داسې بیانوو:

د هرې ثابتې  $C = f(x)$  تابع مشتق له صفر سره مساوي دی، ځکه چې د هرې ثابتې تابع گراف یوه افقي کرښه ده چې میل یې صفر دی.

**ثبوت:**

$$\begin{array}{l} y = C \\ y + \Delta y = C \\ \Delta y = C - y \\ \Delta y = C - C \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{C - C}{\Delta x} \\ \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{0}{\Delta x} \\ y' = 0 \end{array} \right.$$

**مثال:** د  $f(x) = \pi^4$  او  $r = 100$  تابعگانو مشتق پیدا کړئ.

**حل:** څرنگه چې  $\pi^4$  او 100 ثابت عددونه دي؛ نو:

$$\begin{array}{l} f(x) = C \Rightarrow f'(x) = 0 \\ f(x) = \pi^4 \Rightarrow f'(x) = 0 \\ f(x) = 100 \Rightarrow f'(x) = 0 \end{array}$$

## 2- د یوې طاقت لرونکي تابع مشتق:



فعالیت

- د  $y = x^n$  تابع چې  $n \in \mathbb{R}$  او  $n \geq 1$  وي، په پام کې ونیسئ.
- متحول ته د  $\Delta x$  په اندازه تزايد ورکړئ، آیا تابع هم تزايد کوي که تزايد کوي په کومه اندازه اړیکه یې ولیکئ؟
  - د پورته اړیکې څخه د  $\Delta y$  قیمت پیدا کړئ، د متحول او تابع د تزايد نسبت تشکیل کړئ.
  - د پورته مساوات له اطرافو څخه په هغه صورت کې لېمټ ونیسئ چې  $0 \rightarrow \Delta x$  وکړي.

د پورته فعالیت پایله داسې ثبوتو:

که چېرې  $f(x) = x^n$  راکړل شوی وي، نو  $f'(x) = nx^{n-1}$  سره کېږي.

**ثبوت:**

$$\begin{aligned}
 y &= x^n \\
 y + \Delta y &= (x + \Delta x)^n \Rightarrow \Delta y = (x + \Delta x)^n - y \\
 \Delta y &= (x + \Delta x)^n - x^n \\
 \Delta y &= (x + \Delta x - x)[(x + \Delta x)^{n-1} + (x + \Delta x)^{n-2}x + (x + \Delta x)^{n-3}x^2 + \dots + x^{n-1}] \\
 \Delta y &= \Delta x[(x + \Delta x)^{n-1} + (x + \Delta x)^{n-2}x + (x + \Delta x)^{n-3}x^2 + \dots + x^{n-1}] \\
 \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x[(x + \Delta x)^{n-1} + (x + \Delta x)^{n-2}x + (x + \Delta x)^{n-3}x^2 + \dots + x^{n-1}]}{\Delta x} \\
 \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [(x + \Delta x)^{n-1} + (x + \Delta x)^{n-2}x + (x + \Delta x)^{n-3}x^2 + \dots + x^{n-1}] \\
 y' &= x^{n-1} + x^{n-1} + x^{n-1} + \dots + x^{n-1} \\
 &= \underbrace{x^{n-1}}_n \\
 y' &= nx^{n-1}
 \end{aligned}$$

**لومړی مثال:** د  $f(x) = x^5$  د تابع مشتق د  $x = \frac{1}{2}$  په ټکي کې ونانئ.

**حل:**

$$\begin{aligned}
 f(x) &= x^5 \Rightarrow f(x)' = 5x^{5-1} \Rightarrow f'(x) = 5x^4 \\
 f\left(\frac{1}{2}\right) &= 5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 5 \cdot \frac{1}{16} = \frac{5}{16}
 \end{aligned}$$



پوښتنې

د لاندې تابعگانو مشتق پیدا کړئ.

- 1)  $f(x) = x^{-2}$
- 2)  $x(t) = gt^2$
- 3)  $f(x) = x^8$
- 4)  $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$
- 5)  $f(x) = 10^{10}$



۵۴

### 3- د حاصل جمع مشتق:



#### فعالیت

د  $u$  او  $v$  مشتق منوونکي تابعگاني په پام کې ونیسئ.

- آیا د  $v = u + 1$  تابع د مشتق وړ ده؟
- د  $v = u + 1$  په تابع کې  $u(x)$  ته د  $\Delta u$  په اندازه او  $v(x)$  ته د  $\Delta v$  په اندازه تزايد وړکړئ، د  $v$  د تزايد په اړه څه فکر کوئ؟ دهغې اندازه ولیکئ.

- لومړی د تابع تزايد پیدا او بیا د رابطې دواړه خواوې په  $\Delta x$  وویشئ او وروسته یې لېمېټ په هغه صورت کې پیدا کړئ، چې  $0 \rightarrow \Delta x$  وکړي.

د پورته فعالیت پایله داسې ثبوتو:

**ثبوت:**

د یو حاصل جمع مشتق د حلونو د مستقلو د جمعې له حاصل سره مساوي ده:

$$\begin{aligned}y &= u + v \\y + \Delta y &= u + \Delta u + v + \Delta v \\ \Delta y &= u + \Delta u + v + \Delta v - y \\ \Delta y &= u + \Delta u + v + \Delta v - u - v \\ \Delta y &= \Delta u + \Delta v \\ \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{\Delta u + \Delta v}{\Delta x} \\ \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}\end{aligned}$$

څرنگه چې  $u' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}$  او  $v' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}$  دی، نو:

#### 4- د حاصل تفريق مشتق

که  $v = u - 1$  وي، نو  $v' = u' - 1$  دی. ثبوت یې د زده‌کوونکو کورنۍ دنله ده.

**لومړی مثال:** د  $1 + 2x = v$  د تابع مشتق پیدا کړئ.

**حل:** لیدل کېږي چې  $2x = u$  او  $1 = v$  دی، نو:

$$\begin{aligned}u' &= 1 \cdot 2x^{1-1} = 2x^0 \\ u' &= 2 \\ v' &= 0\end{aligned}$$



$$\text{بناؤ: } y' = 2 \Rightarrow y' = 2 + 0 \Rightarrow y' = (2x)^1 + (1)' \Rightarrow y' = u^1 + v^1$$

**دویم مثال:** د  $f(x) = 4x^2 - 3x + 5$  د تابع مشتق پیدا کریں.

**حل:** په دې تابع کې  $u = 4x^2$ ،  $v = 3x$  او  $w = 5$  دی چې  $u' = 8x$ ،  $v' = 3$  او  $w' = 0$  کېږي، نو:

$$y' = u' + v' + w'$$

$$y' = (4x^2)' - (3x)' + (5)'$$

$$y' = 8x - 3$$

**درېم مثال:** د لاندې تابعگانو مشتقونه پیدا کریں:

$$1) y = 12x - 7$$

$$2) f(x) = 9x^2 - 12x + 4$$

$$3) f(x) = 6x^3 - 2x^2 + 6x - 1$$

$$y' = (12x)' - (7)'$$

$$f'(x) = (9x^2)' - (12x)' + (4)'$$

$$f'(x) = (6x^3)' - (2x^2)' + (6x)' - (1)'$$

$$y' = 12$$

$$f'(x) = 18x - 12$$

$$f'(x) = 18x^2 - 4x + 6$$

## 5- د حاصل ضرب مشتق:



**فعالیت**

که د  $u$  او  $v$  توابع مشتق منونکي وي، نو  $u \cdot v$  هم مشتق منونکي دي، د  $y = u \cdot v$  تابع په پام کې ونیسئ.

په پورتنی تابع کې  $u$  ته  $\Delta u$  په اندازه تیزید ورکړئ او د تابع تیزید پیدا کړئ.

د  $\Delta y$  د تیزید له پیدا کولو وروسته د مساوات اطراف په  $\Delta x$  وویشئ.

- د پورتنی رابطې د دواړو خواوو څخه په هغه صورت کې لېسېت ونیسئ، چې  $0 \rightarrow \Delta x$  وکړي.
- له پورتنی فعالیت پایله داسې شونتو:

**ثبوت:**

$$y = u \cdot v$$

$$y + \Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v) \Rightarrow \Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v) - y$$

$$\Delta y = u \cdot v + u \cdot \Delta v + v \cdot \Delta u + \Delta u \cdot \Delta v - u \cdot v$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{u \cdot \Delta v + v \cdot \Delta u + \Delta u \cdot \Delta v}{\Delta x} = v \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x} + u \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta u \cdot \Delta v}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = v \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} + u \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u \cdot \Delta v}{\Delta x}$$

$$y' = v \cdot u' + u \cdot v' + 0 \cdot v'$$

$$y' = u'v + v'u$$



لومړی مثال: د  $y = x^3(x^2 - 3)$  د تابع مشتق پیدا کړئ؟

حل: پوهېږو، چې  $y = u \cdot v$  شکل لري چې په دې صورت کې  $y' = uv' + v'u$ .

$$\left. \begin{array}{l} u = x^3 \Rightarrow u' = 3x^2 \\ v = x^2 - 3 \Rightarrow v' = 2x \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} y' = u'v + v'u \\ y' = x^3(x^2 - 3) \\ y' = 3x^2(x^2 - 3) + 2x(x^3) \\ y' = 3x^4 - 9x^2 + 2x^4 = 5x^4 - 9x^2 \end{array}$$

دویم مثال: د  $y = (5x - 1)^2$  د تابع مشتق پیدا کړئ.

حل: د  $y$  تابع کولای شو د فکتورونو د ضرب په شکل داسې ولیکو:

$$\begin{aligned} y &= (5x - 1)^2 = (5x - 1)(5x - 1) \\ y' &= u'v + v'u \\ u &= 5x - 1 \Rightarrow u' = 5 \\ v &= 5x - 1 \Rightarrow v' = 5 \end{aligned} \Rightarrow \begin{array}{l} y' = 5(5x - 1) + 5(5x - 1) \\ y' = 25x - 5 + 25x - 5 = 50x - 10 \end{array}$$

6- د حاصل تقسیم مشتق:



فعالیت

که د  $u$  او  $v$  تابعګانې مشتق منونکی وي؛ نو  $\frac{u}{v}$  کله چې  $v \neq 0$  وي، هم مشتق منونکی ده، اوس د  $y = \frac{u}{v}$  تابع په پام کې ونیسئ.

- $u$  او  $v$  ته په ترتیب سره  $\Delta u$  او  $\Delta v$  په اندازه تریاید ورکړي او د  $y$  تابع تریاید پیدا کړئ.
- د مساوات دواړه خواوې په  $\Delta x$  وویشئ.
- د پورتنۍ رابطې له اطراف څخه په هغه صورت کې چې  $0 \rightarrow \Delta x$  وکړي، لېمیت ونیسئ.
- د پورتنۍ فعالیت پایله داسې شونتو:

ثبوت:

$$y = \frac{u}{v} \Rightarrow y + \Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} \Rightarrow \Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - y$$

$$\Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v} = \frac{uv + v \cdot \Delta u - uv - u \cdot v \Delta}{v(v + \Delta v)}$$

$$\Delta y = \frac{v \cdot \Delta u - u \cdot \Delta v}{v(v + \Delta v)}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{v \cdot \Delta u - u \cdot \Delta v}{v(v + \Delta v)} = \frac{v \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} - u \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v + \Delta v)}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{v \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} - u \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v + \Delta v)} \right) = \frac{v \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} - u \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}}{v \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (v + \Delta v)}$$

$$y' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

لومړی مثال: د  $y = \frac{2+3x}{1-2x}$  تابع مشتق پيدا کړئ.

حل: ليدل کېږي چې تابع د  $\frac{u}{v}$  بڼه لري چې مشتق يې عبارت دی له:

$$\left. \begin{aligned} y &= \frac{u}{v} & \Rightarrow y' &= \frac{u'v - v'u}{v^2} \\ u &= 2+3x & \Rightarrow u' &= 3 \\ v &= 1-2x & \Rightarrow v' &= -2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow y' = \frac{3(1-2x) - [-2(2+3x)]}{(1-2x)^2} = \frac{3-6x+4+6x}{(1-2x)^2} = \frac{7}{(1-2x)^2}$$

**يادونه:** که چېرې وغواړو چې د يوې تابع مشتق په يوه ټاکلي نقطه لکه په  $x_0$  کې پيدا کړو وروسته د تابع د مشتق څخه ټاکلی قسمت په هغه کې وضع کوو چې د تابع مشتق په هغه نقطه کې پيدا کړو، لکه:

**دویم مثال :** د  $f(y) = \frac{2y^2-3}{1-3y}$  د تابع مشتق د  $y = 0$  په ټکي کې پیدا کړئ:

**حل :** د تابع د حاصل تقسیم د مشتق څخه لرو:

$$\left. \begin{aligned} u &= 2y^2 - 3 \Rightarrow u' = 4y \\ v &= 1 - 3y \Rightarrow v' = -3 \end{aligned} \right\}$$

$$f'(y) = \frac{4y(1-3y) - [-3(2y^2-3)]}{(1-3y)^2} = \frac{4y - 12y^2 + 6y^2 - 9}{(1-3y)^2}$$

$$f'(y) = \frac{-6y^2 + 4y - 9}{(1-3y)^2}$$

$$f'(0) = \frac{-6(0)^2 + 4(0) - 9}{1 + 0}$$

$$f'(0) = -9$$

**درېیم مثال :** د  $f(t) = \frac{-3}{2t-1}$  د تابع مشتق پیدا کړئ.

**حل :** پوهیږو چې تابع د  $\frac{u}{v}$  بڼه لري نو د  $\frac{u}{v}$  له فورمول څخه په ګڼه اخیستې سره داسې عمل کوو:

$$\left. \begin{aligned} y &= \frac{u}{v} \Rightarrow y' = \frac{u'v - v'u}{v^2} \\ u &= -3 \Rightarrow u' = 0 \\ v &= 2t - 1 \Rightarrow v' = 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f'(t) = \frac{0 \cdot (2t-1) - 2(-3)}{(2t-1)^2} = \frac{6}{(2t-1)^2}$$



**پوښتنې**

د لاندې توابعو مشتق پیدا کړئ:

- 1)  $f(x) = \frac{3}{5}x(x-2)$
- 2)  $g(x) = (2x-3)(x-3)$
- 3)  $f(x) = (2x-1)^2$
- 4)  $f(t) = \frac{t^2}{1-2t}$
- 5)  $f(x) = \frac{1}{x^2-2}$
- 6)  $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$
- 7)  $f(x) = 3x^5 - 5x^2$
- 8)  $f(x) = 7x + 3$

## 7- د یوې مربع جذري تابع مشتق:



### فعالیت

- د  $y = \sqrt{x}$  تابع په پام کې ونیسئ.
- د  $y = \sqrt{x}$  تابع متحول ته د  $\Delta x$  په اندازه تزايد ورکړئ د تابع تزايد پیدا کړئ.
  - د لاس راغلي رابطې له دواړو خواوو څخه لمبمیت په هغه صورت کې ونیسئ، چې  $0 \rightarrow \Delta x$  وکړي.

د پورتنۍ فعالیت پایله داسې ثبتوئ:

**ثبوت:**

$$y = \sqrt{x} \Rightarrow y + \Delta y = \sqrt{x + \Delta x}$$

$$\Delta y = \sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}$$

د مساوات د ښې اړخ صورت او مخروج د صورت په مزوج کې ضربوو:

$$\Delta y = \frac{(\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x})(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{x + \Delta x - x}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{\Delta x}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} \Rightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

**لومړی مثال:** د  $f(x) = \sqrt{x}(x^2 - 1)$  د تابع مشتق پیدا کړئ.

**حل:** لیدل کېږي چې تابع د  $u \cdot v$  بڼه لري، نو:

$$\left. \begin{aligned} u &= \sqrt{x} \Rightarrow u' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ v &= x^2 - 1 \Rightarrow v' = 2x \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}}(x^2 - 1) + 2x \cdot \sqrt{x} \\ f'(x) &= \frac{x^2 - 1}{2\sqrt{x}} + 2x\sqrt{x} = \frac{x^2 - 1 + 4x(\sqrt{x})^2}{2\sqrt{x}} \\ &= \frac{x^2 - 1 + 4x^2}{2\sqrt{x}} = \frac{5x^2 - 1}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

## 8- د $\sqrt{u}$ تابع د جذري مربع مشتق



- که چیرې  $y$  د  $u$  او  $x$  د تابع او مشتق منونکي وي د  $y$  اړیکه  $u$  ته او  $x$  ته څه فکر کوئ.
- د  $u$  متحول ته د  $\Delta u$  په اندازه تزايد ورکړئ د  $y$  له تزايد په اړه څه فکر کوئ.
- د مساواتو له دواړو خواوو څخه لمبیت ونیسئ چې  $\Delta x \rightarrow 0$  وکړي.

$$y + \Delta y = \sqrt{u + \Delta u}$$

$$\Delta y = \sqrt{u + \Delta u} - \sqrt{u}$$

د مساوات د تېي اړخ صورت او مخچ د صورت په مزوج کې ضربوو:

$$\Delta y = \frac{(\sqrt{u + \Delta u} - \sqrt{u})(\sqrt{u + \Delta u} + \sqrt{u})}{\sqrt{u + \Delta u} + \sqrt{u}}$$

$$\Delta y = \frac{u + \Delta u - u}{\sqrt{u + \Delta u} + \sqrt{u}}$$

د مساوات دواړه خواوي په  $\Delta x$  وېشو او بیا د مساوات له دواړو خواوو څخه لمبیت نیسو چې  $\Delta x \rightarrow 0$  وکړي.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\sqrt{u + \Delta u} + \sqrt{u}}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\sqrt{u + \Delta u} + \sqrt{u}} \cdot \frac{1}{\Delta x} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0 \Rightarrow \Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\sqrt{u + \Delta u} + \sqrt{u}}$$

$$y' = \frac{u'}{\sqrt{u} + \sqrt{u}} = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

**د وېم مثال:** د  $h(x) = (x^2 + x)\sqrt{x}$  تابع مشتق پیدا کړئ.

**حل:** د  $y = u \cdot v$  او  $y = \sqrt{x}$  د فورمولونو له مشتق څخه په ګڼه اخیستې سره لرو:

$$\left. \begin{aligned} u &= x^2 + x \Rightarrow u' = 2x + 1 \\ v &= \sqrt{x} \Rightarrow v' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} h'(x) &= (2x + 1)\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}(x^2 + x) \\ h'(x) &= 2x\sqrt{x} + \sqrt{x} + \frac{x^2 + x}{2\sqrt{x}} \\ h'(x) &= \frac{4x^2 + 2x + x^2 + x}{2\sqrt{x}} = \frac{5x^2 + 3x}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

**دربم مثال :** د  $f(x) = (\sqrt[3]{x}-1)(x+3)$  د مشتق قیمت د  $x = 8$  په ټکي کې په لاس راوړئ.

**حل :** د  $u \cdot v = \sqrt[3]{u}$  او  $v = \sqrt[3]{u}$  د تابع د مشتق څخه په گټه اخیستې سره لیکلای شو :

$$u = \sqrt[3]{x} - 1 \Rightarrow u' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \quad \left\{ \begin{array}{l} f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}(x+3) + 1(\sqrt[3]{x}-1) \\ \Rightarrow f'(x) = \frac{x+3}{3\sqrt[3]{x^2}} + (\sqrt[3]{x}-1) \end{array} \right.$$

$$v = x + 3 \Rightarrow v' = 1$$

$$f'(8) = \frac{8+3}{3\sqrt[3]{8^2}} + \sqrt[3]{8} - 1 = \frac{11}{12} + 1 = \frac{23}{12}$$

اوس د تابع مشتق د  $x = 8$  نقطه کې پیدا کوو:



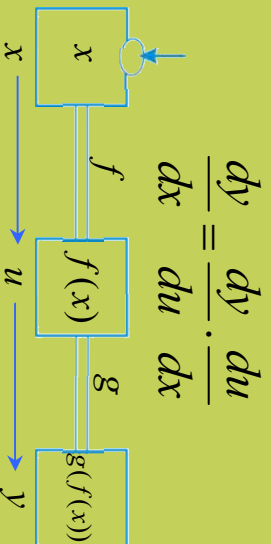
**پوښتني**

1- د لاندې توابعو مشتقونه پیدا کړئ.

$$f(x) = \frac{1}{x+1}, \quad v = 3x^{-3}, \quad f(x) = x^2 + 3$$

2- که  $3x - x^2 = f(x)$  او  $1 - \sqrt{x} = g(x)$  وي، د دې تابعگانو د جمعې، ضرب او تقسیم مشتقونه پیدا کړئ.  $[f+g)', (f \cdot g)', (f \div g)', g \neq 0]$

د مرکبو تابعگانو مشتق (زنځيري قاعده) Chain Rule  
 د مځماخ اړیکې او شکل په اړه خپل نظر بیان  
 کړئ.



فعالیت

- که چیرې  $Y = u$  او  $u = X$  تابع وي او د اشتقاق وړ وي.
- وړایاست چې  $Y$  د  $u$  او  $u$  له  $X$  سره څه اړیکه لري؟
  - آیا د  $\frac{\Delta u}{\Delta x} = \Delta y \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$  مساوات حقیقت لري؟
  - د پورتنی مساوات دواړې خواړې په  $\Delta x$  ویشئ.
  - که د بڼې اړخ د کسرونو د مخرونو ځایونه بدل شي، په پورتنی رابطه کې بدلون راځي؟
  - د پورتنی مساوات له اطراف څخه په هغه صورت کې لیمیت ونیسي چې  $0 \rightarrow \Delta x$  وکړي.
- د پورتنی فعالیت پایله داسې شتونو:
- د تابع، تابع مشتق ثبوت او پایله یې په لاندې ډول ده.

**ثبوت:**

$$\Delta y = \Delta y \cdot \frac{\Delta u}{\Delta u}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta u}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

خړنگه چې  $y' = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta u}$  او  $u' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}$  دی، نو:  $y'(x) = y'(u) \cdot u'(x)$

د دې زنځيري قاعدې پر بنسټ لاندې پایلې لیکلای شو:

1- که  $y = u^n$  وي؛ نو  $y' = nu^{n-1} \cdot u'$  کېږي.

$$2-2 \text{ گه } y = \sqrt[n]{u} = u^{1/n} \text{ روي؛ نو } y' = \frac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}} \text{ کيڙي.}$$

مثال: د لاندې تابعگانو مشتق پيدا کړئ.

- 1)  $y = (2x^2 - 1)^3$
- 2)  $y = \sqrt{1 - x^2}$
- 3)  $y = (x^2 - 3)^2 \cdot 2x^3$
- 4)  $y = \sqrt[3]{x^2 - 2x^3}$
- 5)  $y = (x^2 - 2)^{-3}$

حل: د زنجيري قاعدې په مرسته ليکلای شو؛ چې:

$$1) \left. \begin{aligned} y &= (2x^2 - 1)^3 \\ u &= 2x^2 - 1 \Rightarrow u' = 4x \\ y &= u^3 \Rightarrow y' = 3u^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} y'_{(x)} &= y'_{(u)} \cdot u'_{(x)} \\ y' &= 3(2x^2 - 1)^2 \cdot 4x = 3(4x^4 - 4x^2 + 1) \cdot 4x \\ &= (12x^4 - 12x^2 + 3) \cdot 4x = 48x^5 - 48x^3 + 12x \\ &= 12x(4x^4 - 4x^2 + 1) = 12x(2x^2 - 1)^2 \end{aligned} \right\}$$

$$2) \left. \begin{aligned} y &= \sqrt{1 - x^2} \\ u &= 1 - x^2 \Rightarrow u'_{(x)} = -2x \\ y &= \sqrt{u} \Rightarrow y' = \frac{u'}{2\sqrt{u}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} y' &= \frac{-2x}{2\sqrt{1 - x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} \end{aligned} \right\}$$

ليدل کيږي چې تابع د ضرب د حاصل ښه لري نو:

$$3) \left. \begin{aligned} y &= (x^2 - 3)^2 \cdot 2x^3 \\ u &= (x^2 - 3)^2 \\ u'_{(x)} &= 2(x^2 - 3)(2x) \\ v &= 2x^3 \Rightarrow v'_{(x)} = 6x^2 \end{aligned} \right\} \left. \begin{aligned} y' &= [(x^2 - 3)^2]' \cdot 2x^3 + [(2x^3)]' (x^2 - 3)^2 \\ y' &= [2(x^2 - 3) \cdot 2x] \cdot 2x^3 + 6x^2 (x^2 - 3)^2 \\ &= 8x^4 (x^2 - 3) + 6x^2 (x^2 - 3)^2 \\ &= 8x^6 - 24x^4 + 6x^2 (x^4 - 6x^2 + 9) \\ &= 8x^6 - 24x^4 + 6x^6 - 36x^4 + 54x^2 \\ &= 14x^6 - 60x^4 + 54x^2 \end{aligned} \right\}$$

$$4) \left. \begin{aligned} y &= \sqrt[4]{x^2 - 2x^3} \\ u &= x^2 - 2x^3 \\ u'_{(x)} &= 2x - 6x^2 \end{aligned} \right\} \left. \begin{aligned} y &= \sqrt[4]{u} \Rightarrow y' = \frac{u'}{4\sqrt[4]{u^{n-1}}} \\ y' &= \frac{2x - 6x^2}{4\sqrt[4]{(x^2 - 2x^3)^2}} \end{aligned} \right\}$$

$$5) \left. \begin{aligned} y &= (x^2 - 2)^{-3} \\ u &= x^2 - 2 \\ u'_{(x)} &= 2x \end{aligned} \right\} \left. \begin{aligned} y &= u^n \Rightarrow y' = nu^{n-1} \cdot u' \\ y' &= -3(x^2 - 2)^{-4} \cdot 2x = \frac{-6x}{(x^2 - 2)^4} \end{aligned} \right\}$$



### يادونه:

- I. که چيري د  $f$  تابع د  $(x_0)$  په ټکي کې مشتق ولري، نو  $f'(x_0)$  د هغه مماس ميل دی چې د  $(f(x_0), (x_0))$  په نقطه کې له منحنی يا د تابع له گراف سره رسمېږي.

مثال د:  $f(x) = x^3$  د تابع ميل د  $x_0 = 1$  په ټکي کې پيدا کړئ.

حل: خزنگه چې  $x_0 = 1$  دی؛ نو:  $f(x_0) = 1$  سره کپړي او  $P(1,1)$  چې د تماس ټکی دی، ميل يې عبارت دی، له:

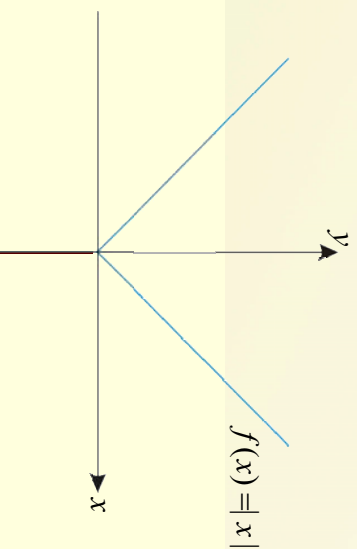
$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2 + x + 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + x + 1) = 3 \Rightarrow f'(1) = 3 \end{aligned}$$

II. که د  $f$  تابع د  $x = x_0$  په ټکي کې د مشتق وړ وي، نو دا تابع د  $x_0$  په ټکي کې پيوسته يا متعدي ده، خو برعکس يې ټکي نه ده، يعنې کېدای شي، يوه تابع په يوه ټکي کې متعدي يا پيوسته وي، ولې په هغه ټکي کې د مشتق وړ نه وي.

مثال د:  $f(x) = |x|$  د تابع مشتق د  $x = 0$  په ټکي کې پيدا کړئ.

حل: پوهېږو چې مشتق په حقيقت کې د نيوتن د نسبت د لمبیت محاسبه ده چې د نښې او کښې اړخ لمبیتونه يې په صفر کې سره وختېږل شي.

$$\begin{aligned} f'(0^+) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = 1 \\ f'(0^-) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = -1 \end{aligned}$$



ليبل کيڙي، ڇي  $f^-(0^-) \neq f^+(0^+)$  ڏي، نو تابع به  $x = 0$  کي د مشتق وړ نه ده، وٺي تابع د صفر په ٽڪي کي پيوسته يا متصادي ده.



### پوښتني

د لاندي توابعو مشتق پيدا ڪري.

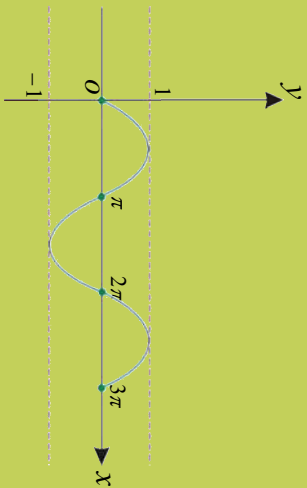
1)  $y = (x^2 + 2)^2$       2)  $f(x) = (x^3 - 4x^2 + 1)^{-4}$

3)  $y = (1 - 2x^3)^4$

4)  $h(z) = \sqrt{\frac{1-z}{1+z}}$

5)  $f(t) = \sqrt[3]{3t+1}$

6)  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2+x^2+x^3}}$



## د مثلثاتي تابعگانو مشتق

مخامخ گراف څه ډول تابع را نښي؟



### فعالیت

- مثلثاتي دایره او رادینان تعریف کړئ.
- آیا دا  $-1 \leq \sin x \leq 1$  اړیکه حقیقت لري او که نه؟
- د  $y = \sin x$  تابع په پام کې ونیسئ متحول د  $\Delta x$  په اندازه بدلون ورکړئ او د تابع بدلون په پام کې ونیسئ.
- د  $\sin(x + \Delta x) - \sin x$  مثلثاتي رابطې ته انکشاف ورکړئ؟

- وروسته د انکشاف له پورتنی رابطې څخه  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  نسبت جوړ او د مساوات له دواړو خواوو څخه په هغه صورت کې لښمبت ونیسئ، چې  $\Delta x \rightarrow 0$  وکړي.

له پورته فعالیت څخه پایله داسې شوېتوو:  
**د-1**  $y = \sin x$  تابع مشتق:

**ثبوت:**

$$y = \sin x$$

$$y + \Delta y = \sin(x + \Delta x)$$

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x$$

$$\Delta y = 2 \cos \frac{x + \Delta x + x}{2} \cdot \sin \frac{x + \Delta x - x}{2} = 2 \cos \frac{2x + \Delta x}{2} \cdot \sin \frac{\Delta x}{2}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \cdot 2 \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \sin \frac{\Delta x}{2} = 2 \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \sin \frac{2}{\Delta x} \frac{\Delta x}{2}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sin \frac{2}{\Delta x} \frac{\Delta x}{2} \Rightarrow y'(x) = \cos x \cdot 1$$

$$y' = \cos x$$

$$\boxed{y = \sin x \Rightarrow y' = \cos x}$$

که چتری  $f(x) = \sin u$  وي په داسې حال کې چې  $u$  د  $x$  تابع وي؛ نو لیکلای شو:

$$f(u) = \sin u \Rightarrow y' = u' \cos u$$

**لومړی مثال:** د  $f(x) = \sin 4x$  مشتق پیدا کړئ.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = \sin 4x \\ u = 4x \Rightarrow u' = 4 \\ f(x) = \sin u \Rightarrow y'_u = \cos u \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} f(x) = \sin u \Rightarrow f'(x) = u' \cos u \\ f(x) = \sin 4x \Rightarrow f'(x) = 4 \cos 4x \end{array} \right\}$$

**دویم مثال:** د  $f(x) = x^3 \cdot \csc x$  د تابع مشتق پیدا کړئ.

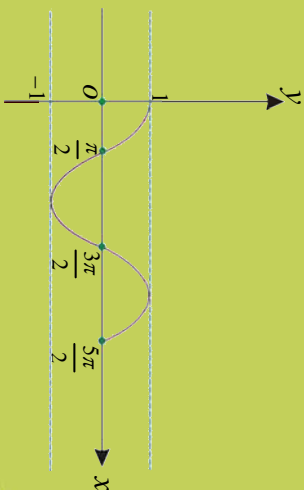
**حل:**

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = x^3 \cdot \csc x = x^3 \cdot \frac{1}{\sin x} \\ u = x^3 \Rightarrow u' = 3x^2 \\ v = \frac{1}{\sin x} \Rightarrow v' = \frac{-uv'}{v^2} = \frac{-\csc x}{\sin^2 x} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} f(x) = x^3 \cdot \csc x \\ f'(x) = 3x^2 \cdot \csc x + \frac{-\csc x}{\sin^2 x} \cdot x^3 \\ = 3x^2 \csc x - \cot x \cdot \csc x \cdot x^3 \\ = 3x^2 \csc x - x^3 \cot x \cdot \csc x \end{array} \right\}$$



د لاندې توابعو مشتق په لاس راوړئ:

- a)  $y = \sin 5x$                       b)  $y = \frac{\sin x}{1+x}$   
 c)  $y = \sqrt{1+\sin x}$



د  $y = \cos x$  تابع مشتق  
مخامخ گراف څه ډول تابع راښيي؟



فعالیت

- د  $y = \cos x$  په متحول ته  $\Delta x$  او تابع ته د  $\Delta y$  په اندازه تړايد وركړي.
- د  $\cos(x + \Delta x) - \cos x$  منځني رابطي ته انكشاف وركړي.
- د پورتنۍ انكشافې رابطې په مرسته د  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  نسبت تشكيل او له اطرافو څخه لږمېت ونيسي، چې  $\Delta x \rightarrow 0$  وکړي.

د پورتنۍ فعالیت پایله داسې ښوونو:

$$-2 \text{ د } y = \cos x \text{ تابع مشتق}$$

ثبوت:

$$y = \cos x$$

$$y + \Delta y = \cos(x + \Delta x)$$

$$\Delta y = \cos(x + \Delta x) - \cos x$$

$$\Delta y = -2 \sin \frac{x + \Delta x + x}{2} \cdot \sin \frac{x + \Delta x - x}{2}$$

$$\Delta y = -2 \sin \frac{2x + \Delta x}{2} \cdot \sin \frac{\Delta x}{2}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sin(x + \frac{\Delta x}{2}) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sin \frac{\Delta x}{2} = -\sin x \cdot 1$$

$$y = \cos x \Rightarrow y' = -\sin x$$

يا به لنڊو ڊول هغه ڊاسي ٿيڻو:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$$

$$(\cos x)' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} \cdot (-2 \sin x \cos x)$$

پوهپرو  $\sqrt{1 - \sin^2 x} = \cos x$  چي سره ڏي، نو:

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\cos x} \cdot (-2 \sin x \cdot \cos x)$$

$$\boxed{(\cos x)' = -\sin x}$$

ڪه ڇيري  $y = \cos u$  وي به ڊاسي، حال ڪي چي  $u$  ڊ  $x$  تابع وي؛ نو ليکائي ٿو:

$$\boxed{y = \cos u \Rightarrow y' = -u' \cdot \sin u}$$

لومړي مثال: ڊ لائڊي توابعو مشتق پيدا ڪري.

1)  $f(x) = \sin 2x = 2 \sin x \cos x$

2)  $f(x) = x - \sin x \cos x$

حل: پوهپرو چي  $y' = u' \cdot v + v' u$

1)  $f(x) = \sin 2x = 2 \sin x \cos x$

$$f'(x) = (2 \sin x)' \cos x + (\cos x)' \cdot 2 \sin x = 2 \cos^2 x - 2 \sin^2 x$$

$$f'(x) = 2(\cos^2 x - \sin^2 x) \Rightarrow y' = 2 \cos 2x$$

2)  $f(x) = x - \sin x \cos x$

$$f'(x) = (x)' - (\sin x \cdot \cos x)' = (x)' - [(\sin x)' \cdot \cos x + (\cos x)' \cdot \sin x]$$

$$f'(x) = (x)' - [\cos x \cos x + (-\sin x \sin x)] = 1 - \cos 2x$$



پوڻسٽي

ڊ لائڊي تابعگانو لومړي مشتق پيدا ڪري.

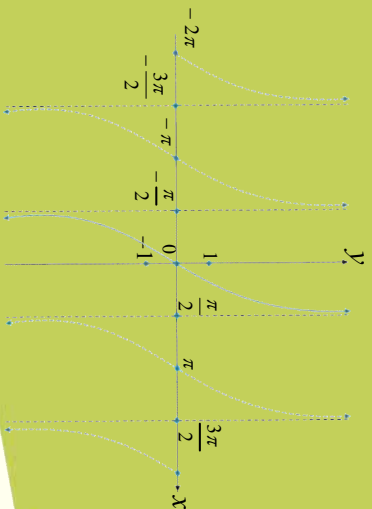
1)  $f(x) = (\sec 2x + \tan 2x)^2$

2)  $f(x) = \sin^2 x$

3)  $f(x) = \sec x$

4)  $f(x) = \csc x$

5)  $f(x) = \frac{5 \sin^2 2x}{3 \cos 5x}$



### د $y = \tan x$ تابع مشتق

مخامخ گراف څه ډول تابع راښيي.



### فعالیت

- د  $y = \tan x$  تابع د نسبت په شکل ولیکئ.
- د پورتني نسبت څخه مشتق ونیسئ؛ هغه له څه سره مساوي کېږي.
- له پورته فعالیت څخه پایله داسې شووتو:

3- د  $y = \tan x$  تابع مشتق:

ثبوت:

$$f(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(\sin x)' \cos x - (\cos x)' \sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos x \cos x - (-\sin x)(\sin x)}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} \end{aligned}$$

$$y = \tan x$$

$$y'_{(x)} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

پاتې فورمولونه زده کوونکو ته پریږدو.

لومړی مثال: د لاندې مثالني تابع مشتق پیدا کړئ.

حل: پوهیږو چې که  $y = u^n$  وي نو مشتق یې  $u^{n-1} \cdot u'$  سره دی، نو:

$$\left. \begin{aligned} u &= \tan^3 x \\ u' &= \sec^2 x \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} y &= \tan^3 x \\ y' &= 3 \tan^2 x \sec^2 x \end{aligned}$$



**دویم مثال :** د  $y = \sec x \cdot \cot x$  تابع مشتق پیدا کریں۔  
**حل :** خرنگہ چي تابع شکل د  $y = u \cdot v$  شکل لري، نو:

$$y = \sec x \cdot \cot x$$

$$u = \sec x \Rightarrow u' = \sec x \tan x$$

$$v = \cot x \Rightarrow v' = -\csc^2 x$$

د  $u, v, u'$  او  $v'$  قيمتونه د  $y' = u'v + u \cdot v'$  په فورول کي وضع کوو:

$$y' = \sec x \tan x \cdot \cot x + \sec x(-\csc^2 x)$$

$$= \sec x \tan x \frac{1}{\tan x} - \csc^2 x \sec x$$

$$= \sec x - \csc^2 x \sec x$$



**پوښتني**

د لاندې ټابهگانو مشتق پیدا کریں۔

a)  $y = \tan x \cot x$

b)  $y = (x^2 + x - 1) \tan^2 x$

c)  $y = \frac{1}{\tan x}$

d)  $y = \tan x \sec x - \cot x$

## ضمني مشتقات

مخامخ مساوات په عبارت سره وليکئ.

$$y' = -\frac{f'(x)}{f'(y)}$$



### فعاليت

- د  $4 - 2x^2 = y$  د تابع مشتق پيدا کړئ.
- د  $1 = xy^2 + y^2 f(x)$  د تابع مخو متحوله تابع ده؟ او گراف يې څه ډول شکل لري؟
- د پورتنی تابع مشتق پيدا کولای شئ.

د يوه منحنی خط معادله د وضعيه کيپلټو په سيستم کي عبارت له  $y = f(x)$  څخه ده، له دې ځايه  $0 = f(x) - y$  کېږي او  $f(x) - y$  يوه دوه متحوله تابع د  $x$  او  $y$  له جنسه ده، که  $f(x) - y = F(x, y)$  تابع په پام کې ونيسو، نو د دې منحنی معادله د  $F(x, y)$  شکل غوره کوي؛ د مثال په ډول:  $25 - y^2 + x^2 = F(x, y)$  وي، نو د  $0 = F(x, y)$  له معادلي څخه ليکلای شو، چې  $0 = 25 - y^2 + x^2$  يا  $25 = x^2 + y^2$  چې د دې دور بيلا بيلو توابعو معادلي  $y = \pm \sqrt{25 - x^2}$  دي. په عمومي ډول د  $0 = F(x, y)$  معادله کېدای شي چې د څو تابع گانو معادله د  $f(x) = y$  په بڼه وي، پاملرنه وکړئ.

د  $f(x) = y$  په تابع کې چې  $X$  او  $Y$  يو له بل څخه جلا وي، نو مشتق يې په آسانی پيدا کولای شو، ولې په ځينو رابطو کې  $Y$  له  $X$  سره يو ځای بيان شوی وي لکه په  $0 = 1 - y + xy^2$  چې د مشتق په نيولو کې که د  $X$  له جنسه مشتق نيسو، نو  $Y$  يو ثابت عدد فرضوو او که د  $Y$  له جنسه مشتق نيسو  $X$  ثابت فرضو لکه:

$$\begin{aligned} xy^2 - y + 1 &= 0 \\ (xy^2)' - (y)' + (1)' &= 0 \Rightarrow 1y^2 + x(2y'y) - y' = 0 \Rightarrow y^2 = -2xyy' + y' = y'(-2xy + 1) \\ y' &= \frac{y^2}{-2xy + 1} \end{aligned}$$

په عمومي حالاتو کې که ضمني رابطه د  $0 = f(x, y)$  په شکل تعريف شوی وي؛ نو  $y'(x)$  په لنډه ډول داسې محاسبه کېږي:

$$y'(x) = -\frac{f'_x(x)}{f'_y(y)} = -\frac{\text{د تابع مشتق نظر } x \text{ ته } y \text{ ثابت دی}}{\text{د تابع مشتق نظر } y \text{ ته } x \text{ ثابت دی}}$$

**لومړی مثال:** د  $y = \sin \frac{x}{y} + 1$  ضمني تابع مشتق د  $(\pi, 1)$  په ټکي کې پیدا کړئ.

**حل:** د  $y - \sin \frac{x}{y} - 1 = 0$  رابطه  $y - \sin \frac{x}{y}$  څخه  $f'_x(x) = \frac{f'_x}{f'_y}$  پیدا کوو.

$$y - \sin \frac{x}{y} - 1 = 0$$

$$f'_{(x)} = y'_x - \left(\sin \frac{x}{y}\right)'_x - (1)'_x$$

$$= 0 - \frac{1}{y} \cos \frac{x}{y} - 0 = -\frac{1}{y} \cos \frac{x}{y}$$

$$f'_{(y)} = y'_y - \left(\sin \frac{x}{y}\right)'_y - (1)'_y$$

$$= 1 - \frac{x}{y} \cos \frac{x}{y} - 0 = 1 - x \cdot \cos \frac{x}{y}$$

اوس په  $y'(x)$  رابطه کې د  $x$  او  $y$  قیمتونه وضع کوو چې د  $(\pi, 1)$  په لاس راځي.

$$\left. \begin{aligned} f'_{(x)} &= y'_x - \left(\sin \frac{x}{y}\right)'_x - (1)'_x \\ &= 0 - \frac{1}{y} \cos \frac{x}{y} - 0 = -\frac{1}{y} \cos \frac{x}{y} \\ f'_{(y)} &= y'_y - \left(\sin \frac{x}{y}\right)'_y - (1)'_y \\ &= 1 - \frac{x}{y} \cos \frac{x}{y} - 0 = 1 - x \cdot \cos \frac{x}{y} \end{aligned} \right\} \Rightarrow y'(x) = -\frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}} = -\frac{-\frac{1}{y} \cos \frac{x}{y}}{1 - x \cdot \cos \frac{x}{y}} = \frac{\frac{1}{y} \cos \frac{x}{y}}{1 - x \cdot \cos \frac{x}{y}}$$

$$y'_{(\pi,1)} = \frac{\frac{1}{\pi} \cos \frac{1}{\pi}}{1 + \pi \cos \pi} = \frac{-1}{1 - \pi}$$

**دویم مثال:** د  $3x + 2 = y^3 + 2y^2 + x^2$  رابطه ضمني مشتق پیدا کړئ.

**حل:**

$$x^2 y + 2y^3 = 3x + 2$$

$$x^2 y + 2y^3 - 3x - 2 = 0$$

$$f'_{(x)} = 2xy + 0 - 3 - 0 = 2xy - 3$$

$$f'_{(y)} = x^2 + 6y^2 - 0 - 2 = x^2 + 6y^2 - 2$$

$$f'_{(x)} = -\frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}} = -\frac{2xy - 3}{x^2 + 6y^2 - 2} = \frac{3 - 2xy}{x^2 + 6y^2 - 2}$$

**دویم مثال :**  $0 = y^6 - y - x^2$  د  $y^6$  ضمنی مشتق پیدا کریں۔

**حل :**

$$f'_{(x)} = -2x$$

$$f'_{(y)} = 6y^5 - 1$$

$$y'_{(x)} = -\frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}} = -\frac{-2x}{6y^5 - 1} = \frac{2x}{6y^5 - 1}$$

او یا بہ بلہ طریقہ:

$$y^6 - y - x^2 = 0$$

$$6y^5 y' - y' - 2x = 0$$

$$(6y^5 - 1)y' = 2x$$

$$y' = \frac{2x}{6y^5 - 1}$$

### د تابع دویم ضمنی مشتق

د ضمنی رابطی د دویم مرتبہ د مشتق د پیدا کولو لپاره د فورمول پہ مرستہ لومړی د ضمنی اړیکې لومړی مشتق پیدا کوو او بیا له دې رابطی څخه مشتق نیسو.

**لومړی مثال :** د  $1 = y^2 - x^2$  رابطی دویمه مرتبه مشتق  $y''_{(x)}$  پیدا کریں۔

**حل :**

$$x^2 - y^2 = 1$$

$$x^2 - y^2 - 1 = 0$$

$$f'_{(x)} = (x^2)'_x - (y^2)'_x - (1)'_x = 2x - 0 - 0 = 2x$$

$$f'_{(y)} = (x^2)'_y - (y^2)'_y - (1)'_y = 0 - 2y - 0 = -2y$$

$$y'_{(x)} = -\frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}} = -\frac{2x}{-2y} = \frac{x}{y}$$

او یا بہ بلہ طریقہ:

$$y'_{(x)} = -\frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}} = -\frac{(x^2)'_x - (y^2)'_x - (1)'_x}{(x^2)'_y - (y^2)'_y - (1)'_y} = -\frac{2x - 0 - 0}{0 - 2y - 0} = \frac{x}{y} \Rightarrow y'_{(x)} = \frac{x}{y}$$

اوس د  $y' = \frac{x}{y}$  له رابطی څخه مشتق نیسو  $y''_{(x)}$  :

$$y''_{(x)} = \frac{(x)'_y - y'_{(x)} \cdot x}{y^2} = \frac{y - y'_{(x)} \cdot x}{y^2} = \frac{y - \frac{x}{y} \cdot x}{y^2} = \frac{y^2 - x^2}{y^3} = \frac{-1}{y^3} \Rightarrow y''_{(x)} = -\frac{1}{y^3}$$

**دویم مثال:** د  $0 = 3 - y^2 + xy + x^2$  په معادله کې د  $Y$  مشتق نسبت  $X$  ته د  $(1, 1)$  په ټکی کې پیدا او بر منځني د مماس معادله یې ولیکي.

**حل:** څرنگه چې د  $(1, 1)$  ټکی په معادله کې صدق کوي نو نوموړی ټکی د منځني برونځ واقع دی؛ د  $y'(x)$  او بر پیدا کولو لپاره په ورکړ شوي معادلې کې لیکلای شو:

$$f'_{(x)} = 2x + y$$

$$f'_{(y)} = x + 2y$$

$$y'_{(x)} = -\frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}} = -\frac{2x + y}{x + 2y} \quad , \quad x + 2y \neq 0$$

$$y' = -\frac{2x + y}{x + 2y} = -\frac{2 + 1}{1 + 2} = -1$$

$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 1 = -(x - 1) \Rightarrow y = -x + 2$$

او یا په بله طریقه هم کولای شو د تابع ضمني مشتق په لاس راوړو:

$$x^2 + xy + y^2 - 3 = 0$$

$$2x + y + x \cdot y' + 2yy' = 0$$

$$2x + y + (x + 2y)y' = 0$$

$$(x + 2y)y' + 2x + y = 0$$

$$(x + 2y)y' = -2x - y$$

$$y' = \frac{-2x - y}{x + 2y}$$

**دویم مثال:** د  $x + 5y^3 = x^2y^3$  ضمني تابع مشتق پیدا کړئ.

**حل:**

$$x^2y^3 - 5y^3 - x = 0$$

$$f'_{(x)} = 2xy^3 - 0 - 1 = 2xy^3 - 1$$

$$f'_{(y)} = 3x^2y^2 - 15y^2 - 0$$

$$y'_{(x)} = -\frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}} = -\frac{2xy^3 - 1}{3x^2y^2 - 15y^2} = \frac{1 - 2xy^3}{3x^2y^2 - 15y^2}$$



**پوښتني**

- 1- د  $5 = x \sin y + y \cos x$  د رابطې ضمني مشتق پیدا کړئ.
- 2- د  $3 = y + xy^2 + x^3$  رابطې څخه ضمني مشتق ونیسئ.
- 3- د  $4y^2 + x^2 = 4x + 4y$  رابطې څخه ضمني مشتق ونیسئ.

$$f(x) = \sin x$$

$$f(x) = \cos x$$

**لومړي مرتبه (متوالي) مشتقات**  
 د مخامخ تابع درې ځلي مشتق ونیسئ؟  
 د مخامخ تابع پنځه ځلي مشتق ونیسئ؟



**فعالیت**

- د  $1 - 2x - 3x^3 - 2x^4$  تابع مشتق پیدا کړئ.
- د پورته تابع دویم مشتق پیدا کړئ.
- د پورتنی مشتق د تابع دریم ځل مشتق ونیسئ.
- د پورتنی تابع نور څو ځلي مشتق نیولی شو؟
- د پورتنی تابع څووم مشتق له صفر سره مساوي دی؟

د پورتنی فعالیت پایله داسې بیانوو:

که د  $f(x) = y$  مشتق منونکي وي، لومړی مرتبه مشتق یې په  $f'(x) = y'$ ، دویمه مرتبه مشتق یې په  $f''(x) = y''$  دریمه مرتبه مشتق یې په  $f'''(x) = y'''$  ... په کلي ټول  $n$ -م مرتبه مشتق د  $f(x)$  تابع په  $f^{(n)}(x) = y^{(n)}$  علامت نیوو.

**لومړی مثال:** د  $1 - 4x + 3x^2 - x^3 = f(x)$  تابع دریم مشتق په لاس راوړئ.  
**حل:**

$$y = x^3 - 3x^2 + 4x - 1$$

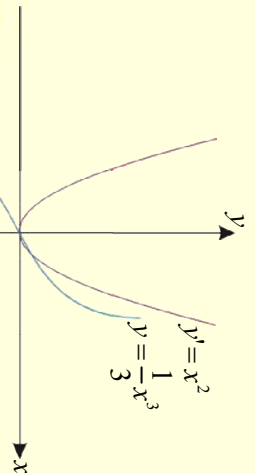
$$y' = 3x^2 - 6x + 4$$

$$y'' = 6x - 6$$

$$y''' = 6$$

**دویم مثال:** د  $3x^3 = y$  د تابع گراف او د هغې د لومړی مرتبې مشتق تابع گراف رسم کړئ.

**حل:**



$$y = \frac{1}{3}x^3$$

$$y' = \frac{3}{3}x^2 = x^2$$

$$y' = x^2$$



**دويم مثال:** که  $y = \sin x + \cos x$  وي، د  $y^2 + (y^{(9)})^2$  قيمت پيدا کړئ.

**حل:** لومړی د تابع نهمه مرتبه مشتق يا  $(y^{(9)})$  په لاس راوړو:

$$y = \sin x + \cos x$$

$$y^{(1)} = \cos x + (-\sin x) = \cos x - \sin x$$

$$y^{(2)} = -\sin x - (\cos x) = -\sin x - \cos x$$

$$y^{(3)} = -\cos x - (-\sin x) = \sin x - \cos x$$

⋮

$$y^{n(9)} = \cos x - \sin x$$

$$(y^{(9)})^2 + y^2 = (\cos x - \sin x)^2 + (\sin x + \cos x)^2$$

$$= \cos^2 x - 2 \sin x \cos x + \sin^2 x + 2 \sin x \cos x + \cos^2 x$$

$$= 2 \sin^2 x + 2 \cos^2 x = 2(\sin^2 x + \cos^2 x) = 2$$

**څلورم مثال:** د  $y = 2x^6 - 3x^5 - 2x^3 - 3x^2 - 1$  د تابع پنځه ځلي مشتق پيدا کړئ.

$$y = 2x^6 - 3x^5 - 2x^3 - 3x^2 - 1$$

$$y' = 12x^5 - 15x^4 - 6x^2 - 6x$$

$$y'' = 60x^4 - 60x^3 - 12x - 6$$

$$y''' = 240x^3 - 180x^2 - 12$$

$$y^{(4)} = 720x^2 - 360x$$

$$y^{(5)} = 1440x - 360$$

$$f_{n(x)} = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \dots + c_nx^n$$

**يادونه:** که چېرې  $n - m$  درجه يي څو جملې يي تابع  $c_n \neq 0$  راځي، نو به لاندې ډول په لاس راځي:

$$f_{n(x)} = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \dots + c_nx^n \quad c_n \neq 0$$

$$f'_{n(x)} = c_1 + 2c_2x + 3c_3x^2 + \dots + nc_nx^{n-1}$$

$$f''_{n(x)} = 2c_2 + 6c_3x + \dots + n(n-1)c_nx^{n-2}$$

$$f'''_{n(x)} = 6c_3 + 12c_4x + \dots + n(n-1)(n-2)c_nx^{n-3}$$

$$f^{n}_{n(x)} = n(n-1)(n-2)x \dots c_n = n!c_n$$

په عمومي ډول که  $k > n$  وي، نو:  $f^{k}_{n(x)} = 0$



د لاندې ټاکنو تر هغې مشتق پيدا کړئ چې د مشتق تابع له صفر سره مساوي شي.

1)  $y = 4x^4 - 3x^3 - 2x$

2)  $y = (5x - 2)^3$

3)  $y = a + b + c^2 - x - ax - bx - cx^3 - c^3x$

4)  $y = \sin x$



— که چېرې د  $P(x, f(x))$  او  $Q(x+h, f(x+h))$  ټکي د  $f(x)$  تابع دوه اختياري ټکي وي، نو لاندې اړيکه د Newton خارج قسمت په نامه يادېږي:

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{x + \Delta x - x}$$

د منځني ميل په يوه اختياري ټکي کې عبارت دی، له:

$$m_T = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

**د يوې تابع مشتق:** د تابع او متحول د تړايد، د نسبت لېمېټ کله چې  $\Delta x \rightarrow 0$  وکړو، د مشتق په نامه

يادېږي او په  $f'(x)$  ،  $\frac{dy}{dx}$  ښودل کېږي.

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

که چېرې د  $f(x)$  تابع د  $(x_0)$  په يوه ټکي کې د مشتق وړ وي، نو  $f'(x)$  د مماس ميل د منځني سره د  $(x_0, f(x_0))$  په ټکي کې دی.

که د  $f$  تابع د  $x = x_0$  په ټکي کې د مشتق وړ وي، نو دا تابع په  $x_0$  کې متمادي ده، خو ددې برعکس سمه نه ده؛ يعنې کېدای شي يوه تابع په يوه ټکي کې متمادي وي، ولې په هغه ټکي کې د مشتق وړ نه دی. د  $f(x)$  د تابع مشتق د  $C$  پر منځني  $(x_0, f(x_0))$  په ټکي کې د مماس له ميل سره برابر دی.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y' = \tan \alpha = \tan \theta$$

د تماس په ټکي کې د يوه منځني سره د مماس ميل د هغې تابع د مشتق په نوم يادېږي. که د يوې تابع مشتق ونيول شي، نو يوه تابع په لاس راځي چې دا د مشتق تابع بلل کېږي.

که د  $f$  تابع د  $(x_0 + r, x_0 - r)$  په فاصله کې  $(x = x_0)$  په شاوخوا کې تعريف شوی وي او د هغې لېمېټ موجود وي، په دې حالت کې کولای شو چې يو مماس خط د  $f(x)$  د تابع په منځني د  $x = x_0$  په ټکي کې

$$\text{رسم کړو، د دې مماس ميل عبارت دی له: } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

### مشتق قوانین:

- 1)  $f(x) = C \Rightarrow f'(x) = 0$
- 2)  $f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = n \cdot x^{n-1}$
- 3)  $f(x) = u \pm v \Rightarrow f'(x) = u' \pm v'$
- 4)  $f(x) = u \cdot v \Rightarrow f'(x) = u'v + v'u$
- 5)  $f(x) = \frac{u}{v}$  ,  $v \neq 0 \Rightarrow f'(x) = \frac{u'v - v'u}{v^2}$
- 6)  $f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
- 7)  $f(x) = \sqrt[n]{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{n'}{2\sqrt[n]{x}}$
- 8)  $f(x) = \sqrt[n]{u} \Rightarrow f'(x) = \frac{u'}{n \cdot \sqrt[n]{u^{n-1}}}$

د مرکبو توابعو مشتق:  $y'_{(x)} = y'_{(u)} \cdot u'_{(x)}$

د مثلثاتي تابع گانو مشتق:

- 1)  $y = \sin x \Rightarrow y' = \cos x$  ,  $y = \sin u \Rightarrow y' = u' \cos u$
  - 2)  $y = \cos x \Rightarrow y' = -\sin x$  ,  $y = \cos u \Rightarrow y' = -u' \sin u$
- که د  $y = f(x)$  تابع مشتق منونکی وي، په بشپړ ډول  $n$ -ام ځلي مشتق يې  $y^{(n)} = f^{(n)}(x)$ .

## د دویم څپرکي پوښتني

لاندي پوښتني ته څلور څوابونه درکل شوي دي، سم څواب په ښه کړۍ:

1-  $x - x^2 = f(x)$  منځني ميل د  $P(3, 0)$  په ټکي کي عبارت دی له:

a) 3                      b) -3                      c) 5                      d) -5

2- د  $f(x) = 2x^2$  په تابع کي د  $f$  متوسط بدلون د  $[4, 3]$  په انټروال کي عبارت دی له:

a) 18                      b) 14                      c) -14                      d) 32

3- د  $y = 2x^2 - 3x^{-1}$  تابع مشتق عبارت دی له:

a)  $y' = 4x^2 + 3$                       b)  $y' = 4x + \frac{1}{2}x$                       c)  $y' = 4x + \frac{3}{x^2}$                       d)  $y' = 4x$

4- د  $f(x) = \sqrt{x-1}$  د تابع مشتق عبارت دی له:

a) 0                      b)  $\frac{1}{2\sqrt{x-1}}$                       c)  $\frac{x-1}{2\sqrt{x}}$                       d)  $\frac{-1}{2\sqrt{x-1}}$

5- د  $f(x) = 2x^2 + x$  تابع د  $x = 1$  په ټکي کي د مماس خط معادله عبارت دی له:

a)  $y = 5x - 5$                       b)  $y = x - 3$                       c)  $y = 5$                       d)  $y = 5x$

6- د  $y = \frac{2x}{-x+4}$  د تابع مشتق عبارت دی له:

a)  $y' = -4x + 8$                       b)  $y' = -2$                       c)  $y' = \frac{4x+8}{(-x+4)}$                       d)  $y' = \frac{8}{(-x+4)^2}$

7- د  $y = (2-x^2)^3$  د تابع مشتق عبارت دی له:

a)  $y' = -6x^5 + 2x^3 - 24x$                       b)  $y' = 3(2-x^2)^2$                       c)  $y' = 3(-2x)^2$                       d) هېڅ يو

8- د  $y = \sin x$  د تابع مشتق عبارت دی له:

a)  $y' = \sin x$                       b)  $y' = \cos x$                       c)  $y' = -\sin x$                       d)  $y' = -\cos x$

9- د  $y = (1+x^4)^{\frac{-1}{5}}$  د تابع مشتق عبارت دی له:

a)  $y' = -\frac{4}{5}x^3(1+x^2)^{\frac{-6}{5}}$                       b)  $y' = -\frac{1}{5}(1+x^2)^{\frac{-6}{5}}$                       c)  $y' = -4x^3$                       d) هېڅ يو

10- د  $y = \frac{\cos}{1-\cos x}$  د تابع مشتق عبارت دی له:

a)  $y' = \frac{\sin x}{(1-\cos x)^2}$                       b)  $y' = \frac{-\sin x}{(1-\cos x)}$                       c)  $y' = \frac{-\sin x}{(1-\cos x)^2}$                       d) هېڅ يو

لاندي پوڻينتي مفصل حل ڪري.

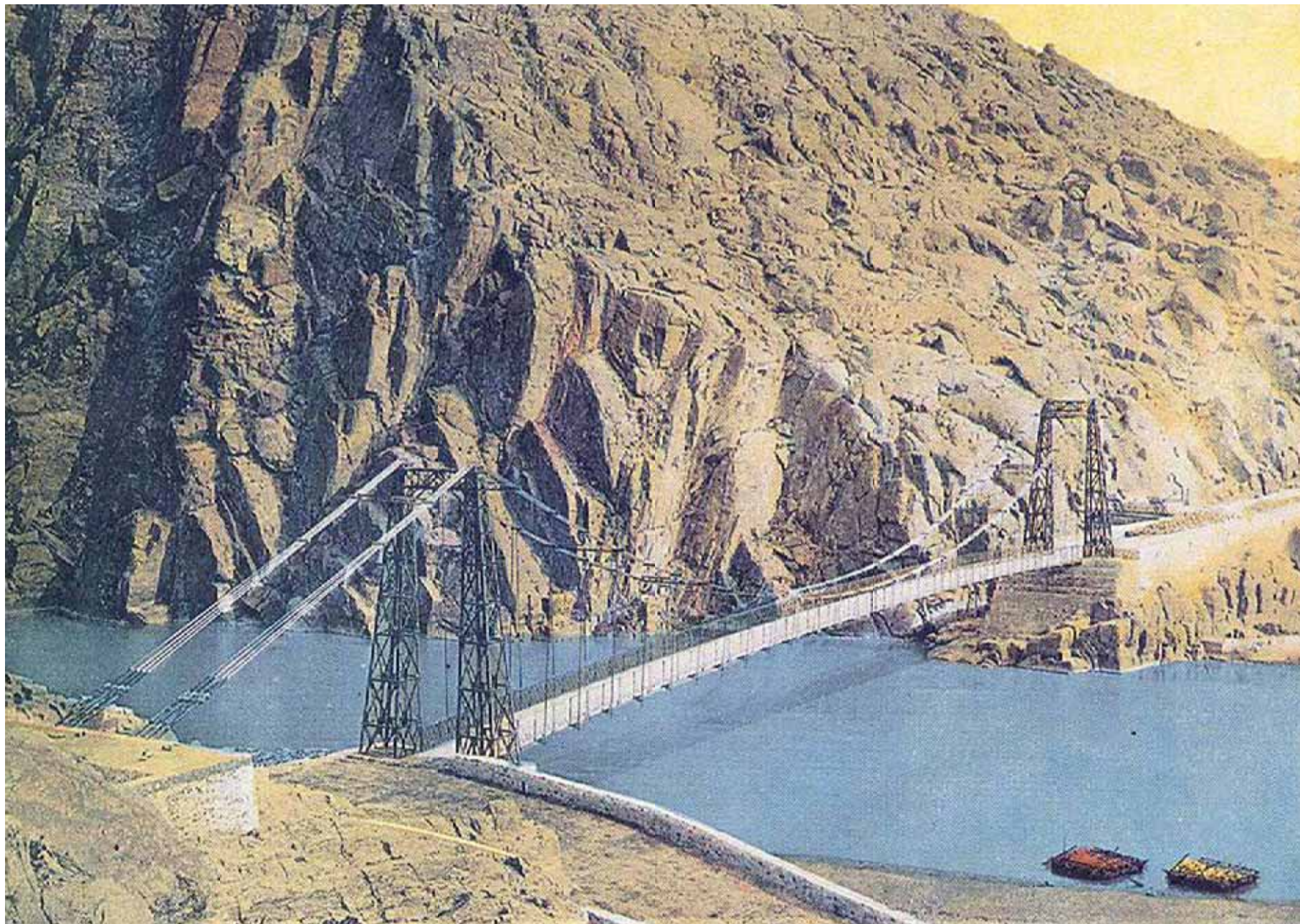
1. د  $f(x) = \frac{2 \tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$  د تابع مشتق پيدا ڪري؟
2. د  $f(x) = \frac{x + \sqrt{x - x^2}}{\sqrt{x} + \sqrt{1 - x}}$  د تابع مشتق پيدا ڪري؟
3. د  $f(x) = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1)$  د تابع مشتق پيدا ڪري.
4. د  $f(x) = (\sqrt[3]{x} - 1)(\sqrt{x} + 4)$  د تابع مشتق پيدا ڪري.
5. د  $f(x) = \sin x \cdot \cos x$  د تابع مشتق د  $\frac{\pi}{4}$  په ٽڪي کي پيدا ڪري.
6. د  $f(x) = \frac{(\sin x + \cos x)^2}{1 + \sin 2x}$  د تابع مشتق پيدا ڪري.
7. د  $y = \cos x$  د تابع ائمه مرتبه مشتق پيدا ڪري.
8. د  $x + \cos^2 x + \sin^2 y = \sin^2 x$  د تابع نهمه مرتبه مشتق پيدا ڪري.
9. د  $x^2 + xy + y^2 = 3$  د تابع ضمنی مشتق پيدا ڪري.

# دریم خپرکی

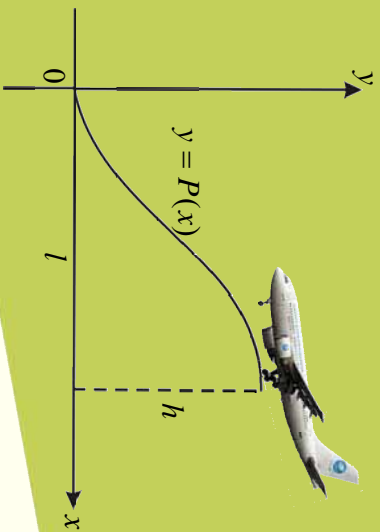
## د مشتق د استعمال خاږونه











**د مشتق د استعمال ځايونه**  
 د مخامخ شکل د ارتفاع په اړه خپل نظر بيان کړئ.

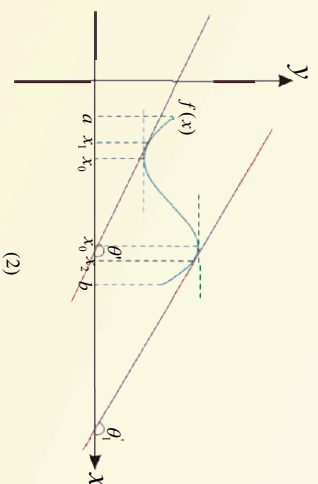
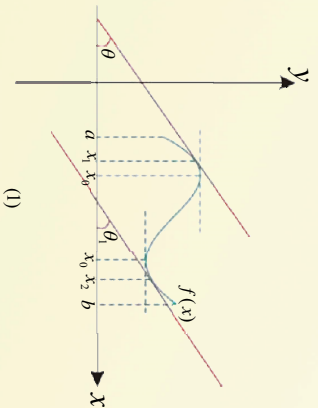
له مشتق څخه په ډيرو ځايونو کې لکه: (په فزيک کې د حرکت، سرعت او تعجيل اړوند معادلې د مشتق څخه په ګټه اخېستني سره حلېږي همدارنگه په کيميا کې هم، د تابع د تحولات، د ځينو ليميتونو په پيل کولو کې) کار اخيستل کېږي چې ځينې ځايونه يې دلته تر څېړنې لاندې نيسو.

**1- د يوي تابع تحولات:**



**فعاليت**

لاندې شکلونو ته پاملرنه وکړئ:



- مترادې او متناقصې توابع څه ډول توابع دي؟
- په (1) شکل د  $(a, b)$  په انټروال کې د  $x_0$ ،  $x_1$  او  $x_2$  په ټکو کې د رسم شويو مماسونو ميلونه د (2) شکل له مماسونو سره پرتله کړئ.
- په (1) او (2) شکلونو کې تر ټولو جگ ټکي او تر ټولو ټيټ ټکي په څه ډول وپېژنئ.



- په پورته شکلونو کې ونښي چې کومه تابع په کومه ساحه کې متزايد او په کومه ساحه کې تابع متناقصه ده؟
- په متزايد، متناقصه او ثابته تابع کې مشتق و څيرئ.

د پورته فعاليت پايله داسې بيانو:

- 1- که د  $f(x)$  تابع په  $[a, b]$  انټروال کې مسمادي او په  $(a, b)$  انټروال کې د مشتق وړ وي، نو که چيرې په ورکړل شوي انټروال کې  $f'(x) > 0$  وي، وئ، تابع په هغه انټروال کې متزايد بلل کېږي.
- 2- که چيرې د  $f(x)$  تابع په  $[a, b]$  انټروال کې مسمادي او د  $(a, b)$  په انټروال کې د مشتق وړ وي، که به ورکړ شوي انټروال کې  $f'(x) < 0$  وي، نو تابع په هغه فاصله کې متناقصه بلل کېږي.

**يادونه:** د تابع له تزايد څخه مطلب دا دی چې د  $x$  د متحول قيمت په زياتېدو سره د تابع قيمت زيات او د تابع د تناقص څخه مطلب دا دی چې د  $x$  د متحول د قيمت په زياتېدو سره د  $y$  يا تابع قيمت کم يا ثابت پاتې شي.

**لومړی مثال:** ونښئ چې د  $f(x) = x^3 + 3x + 1$  تابع گراف متزايد ده.

**حل:** څرنگه چې تابع کسري بڼه نه لري نو ټول حقيقي عدونه د تعريف ساحه کېدای شي او هم پوهېږو چې د تابع د تزايد شرط  $f'(x) > 0$  دی، نو لازمه ده چې د تابع مشتق تر مطالعې لاندې ونيسو:

$$f(x) = x^3 + 3x + 1$$

$$f'(x) = 3x^2 + 3$$

ليدل کېږي چې د مشتق لومړی حد تام مربع دی نو د  $x$  د ټولو قيمتونو لپاره هميشه مثبت دی. کله چې  $(+3)$  ورسره جمع شي بيا هم قيمت يې مثبت دی، نو د  $f'(x) > 0$  دی نو تابع متزايد ده.

**دويم مثال:** د  $f(x) = x^3 - 3x + 5$  تابع په کوم انټروال کې متناقصه ده؟

**حل:** څرنگه چې د  $f(x)$  تابع په هره انټروال کې مسمادي او د مشتق وړ ده، نو د متناقص تابع لپاره لرو  $f'(x) < 0$  دی، يعنې:

$$f'(x) = 3x^2 - 3 < 0$$

$$f'(x) = 0$$

$$3x^2 - 3 = 0$$

$$3x^2 = 3$$

$$x = \pm 1$$

ليدل ڪري چي د تابع مشتق د  $-1 < x < 1$  په انٽروال ڪي منفي دى نو تابع په همدي انٽروال ڪي (1, -1) متناقصه ده.

**درجيم مثال:** د  $f(x) = 5x - 4$  تابع تحولات وڃيرو.

**حل:** لومړي د تابع د تعريف ساحه پيدا او وروسته د تابع د تزايد شرط په ڪي څيرو:

$$D_f \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = 5x - 4$$

$$f'(x) = 5 > 0$$

څرنگه چي  $f'(x) > 0$  نو د ٽولو قيمتونو لپاره هميشه مثبت دى. نو تابع متزايد ده.

**څلورم مثال:** د  $y = x^2$  د تابع گراف ته څير شئ او وښيي چي ورکړل شوي تابع په کوم انٽروال ڪي متزايد او په کوم انٽروال ڪي متناقصه ده.

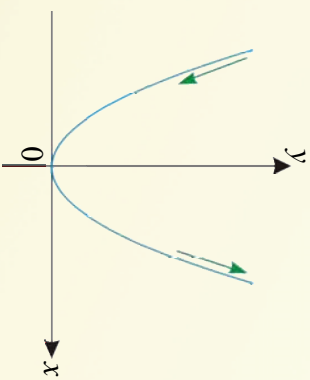
**حل:** پوهيرو چي که تابع متناقصه وي  $y' < 0$  او که تابع متزايد وي  $y' > 0$ ، نو ليکلاى شو چي:

$$y = x^2 \Rightarrow y' = 2x$$

$$x < 0 \Rightarrow 2x < 0 \Rightarrow y' < 0 \text{ د تناقص شرط}$$

$$x > 0 \Rightarrow 2x > 0 \Rightarrow y' > 0 \text{ د تزايد شرط}$$

$x$	$-\infty$	$-2$	$-1$	$0$	$1$	$2$	$+\infty$		
$y'$	$-$	$-$	$-$	$0$	$+$	$+$	$+$		
$y$	$+\infty$	$\searrow$	$4$	$\searrow$	$\downarrow$	$\nearrow$	$4$	$\nearrow$	$+\infty$



د تابع له گراف څخه ليدل ڪيري چي تابع د  $(-\infty, 0)$  په انٽروال ڪي متناقصه او د  $(0, +\infty)$  په انٽروال ڪي متزايد ده.

## پوڻيٽي



-1 د  $f(x) = ax + b$  تابع تحولات وٺي؟

-2 د  $y = \frac{-3}{4}x - 1$  تابع تحولات وٺي؟

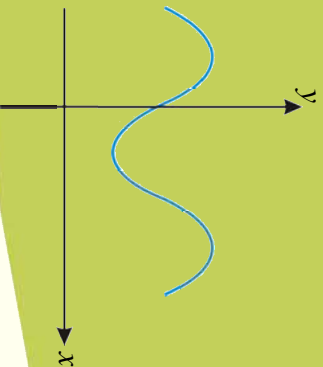
-3 وٺي جي د  $f(x) = 2x^2 + 3x + 1$  تابع د  $x = 1$  په نقطه کي مترابده ده؟

-4 د  $y = x^2 + 3x + 2$  تابع د تزايد انٽروال وٺاڪي؟



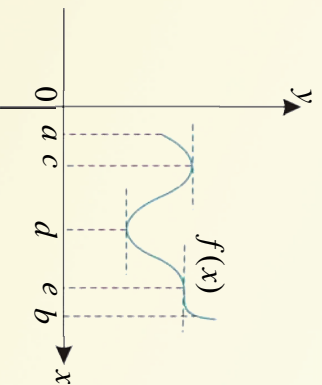
## د یوې تابع بحراني (Extreme) ټکي (اعظمي Maximum او اصغري Minimum)

په مخامخ شکل کې تر ټولو لوړ ټکی او تر ټولو ټیټ ټکی  
وښیئ او وولئ، چې دا ټکي د څه په نامه یادېږي؟



فعالیت

که په لاندیني شکل کې د  $f(x)$  تابع د  $(a, b)$  په انټروال کې د مشتق وړ وي.



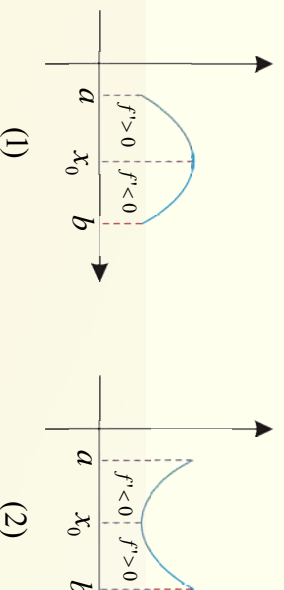
- د متحول د قیمت په زیاتوالي په کوم انټروال کې د تابع قیمت لوېږي.
- د متحول د قیمت په کموالي په کوم انټروال کې د تابع قیمت کمېږي.
- د تابع تحولات په  $(c, d)$  او  $(d, e)$  انټروال کې وځېږي.
- د  $f(x)$  د تابع مشتق په کومو ټکو کې له صفر سره مساوي دی.

د پورته فعالیت پایله داسې بیانوو:

د یوې تابع په گراف کې د  $x$  پر محور تر ټولو جگي نقطې ته اعظمي (maximum) او تر ټولو ټیټي نقطې ته د تابع اصغري (minimum) وایي، د  $x$  د هغو قیمتونو لپاره چې تابع اعظمي او یا اصغري قیمتونه اخلي د بحراني (Extreme) نقطو په نامه یادېږي.

### تعريف:

- 1- ثابت تابع: که چیري د بوي تابع لومړی مشتق همیشه له صفر سره مساوي وي تابع ته ثابت تابع ولي.
- 2- متزايد تابع: که چیري د بوي تابع لومړی مشتق د  $(a, b)$  په فاصله کې مثبت وي تابع به هغه فاصله کې متزايد بلل کېږي، يعني  $0 < y' >$  چې په لاندې شکلونو کې لیدل کېږي.
- 3- متناقص تابع: که چیري د بوي تابع لومړی مشتق د  $(a, b)$  په فاصله کې منفي وي يعني  $0 < y' <$  وي، تابع په هغه فاصله کې متناقصه بلل کېږي، چې په لاندې شکلونو کې لیدل کېږي.



- 1- اعظمي ټکی: که چیري د  $y = f(x)$  تابع د  $x_0$  په معین ټکي کې د تولید له حالت څخه د تناقص حالت ته بدل شي یا په بل عبارت د  $x_0$  په دې معین ټکي کې د مشتق اشاره له مثبت څخه منفي ته بدله شي د  $x_0$  په نقطه کې د تابع قیمت د اعظمي (maximum) په نامه یادېږي.
- 2- اصغري ټکی: که چیري د  $y = f(x)$  تابع د  $x_0$  په معین ټکي کې د تناقص له حالت څخه تولید حالت ته بدل شي یا په بل عبارت د  $x_0$  په دې معین ټکي کې د مشتق اشاره له منفي څخه مثبت ته بدله شي د  $x_0$  په نقطه کې د تابع قیمت د اصغري (minimum) په نامه یادېږي.
- 3- د انعطاف ټکی: که چیري مشتق خپله اشاره د  $x_0$  په یوه معین ټکي کې له مثبت څخه صفر ته او بیا مثبت ته یا له منفي څخه صفر او بیا منفي ته بدله کړي  $x_0$  د انعطاف د نقطې په نامه یادېږي.

لومړی مثال: د  $f(x) = x^3 - \frac{7}{2}x^2 + 2x$  راکړ شوی ده دا تابع خو د (Extreme) ټکی لري.

حل: د تابع لومړی مشتق پیدا کوو بیا هغه مساوي په صفر وضع کوو او د  $x$  قیمتونه په لاس راوړو.

$$f'(x) = 3x^2 - 7x + 2$$

$f'(x) = 0$	$x$	$-\infty$	$\frac{1}{3}$	$1$	$2$	$+\infty$
$3x - 1 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{3}$	$f'(x)$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$
$x - 2 = 0 \Rightarrow x_2 = 2$	$f(x)$	$-\infty$	$\frac{17}{54}$	$-2$	$-2$	$+\infty$
			Max		Min	

په پایله کې وینای شو چې اصلي تابع دریمه درجه ده نو د  $f(x)$  د تابع مشتق د  $(\frac{1}{3})$  او  $(2)$  په دوو نقطو

کې خپله علامه بدلوي، نو دوه بحراني (Extreme) ټکي لري.

دویم مثال: د  $f(x) = \frac{x+1}{x^2-2x}$  تابع موضعي Extreme ټکي یا نسبي ټکي مشخص کړی.

حل: لومړی د تابع مشتق په لاس راوړو، وروسته یې علامي ټاکو:

$$\text{لیدل کېږي چې تابع د } \frac{u}{v} = \frac{u'}{v'} \text{ شکل لري، نو } y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2-2x}$$

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x - (2x - 2)(x + 1)}{(x^2 - 2x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-x^2 - 2x + 2}{(x^2 - 2x)^2}$$

دیره کسر قیمت هغه وخت له صفر سره مساوي دی چې د تابع صورت مساوي له صفر سره وي.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -x^2 - 2x + 2 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 12$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2 + \sqrt{12}}{-2} = -2.73$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2 - \sqrt{12}}{-2} = 0.73$$

$x$	$-3$	$-2.73$	$-1$	$0.73$	$1$
$f'(x)$	$-$	$0$	$+$	$0$	$-$
$f(x)$	$\swarrow$	$\swarrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\swarrow$
		Min		Max	
	$-\frac{2}{15}$		$0$		$-2$

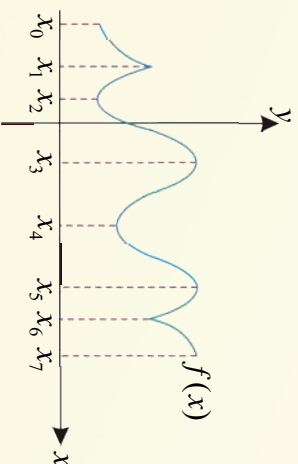
په جدول کې بېکارې چې  $f'$  د  $x_1$  او  $x_2$  دواړو خواوو ته خپله علامه بدلوي، نو تابع دوه د Extreme ټکي لري، يعنې تابع اعظمي او اصغر ټکي لري.

### اعظمي او اصغري مطلق ټکي

کيدای شي يوه تابع په يوه انټروال کې څو موضعي بحرائي ټکي ولري، خو په يوه ټاکلي انټروال کې تابع يوازې يوه مطلقه اعظمي او يوه مطلقه اصغري نقطه لري. په شکل کې يې وښئ؟



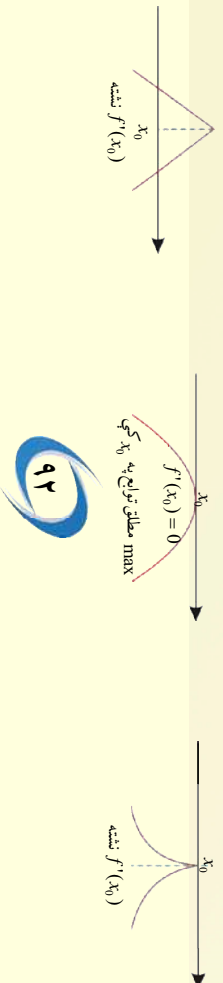
لاندي شکل ته څير شي:



- د  $f(x)$  په تابع کې اعظمي او اصغري ټکي وښئ.
- د  $f(x)$  تابع بحرائي ټکي په گوته کړئ.
- پورتنی تابع په ورکړل شوي انټروال کې څو موضعي بحرائي ټکي لري.
- پورتنی تابع په ورکړل شوي انټروال کې څو اصغري او اعظمي لري.

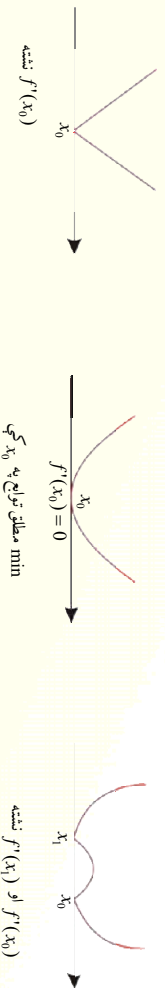
د پورته فعالیت پايله داسې بيانو:

**مطلق اعظمي Maximum:** په عمومي ډول د  $(x_0, f(x_0))$  ټکي مطلق اعظمي بلل کېږي، که چېرې د  $f(x)$  د تعريف په ساحه کې د هر  $x$  لپاره  $f(x) \leq f(x_0)$  وي، نو  $f(x_0)$  نه مطلق اعظمي وايي لاندي شکلونه وگورئ.





**مطلق اصغري Minimum:** په عمومي ډول د  $(x_0, f(x_0))$  نقطه مطلقه اصغري بلل کېږي، که چېرې د  $f$  د تعريف په ساحه کې د هر  $x$  لپاره  $f(x) \geq f(x_0)$  وي، نو په دې حالت کې  $f(x_0)$  ته مطلقه اصغري وايي، د  $x$  هغه قيمته چې د هغوی لپاره تابع يا اعظمي او يا اصغري قيمته اخلي د  $x$  دغه قيمته د Extreme په نامه يادېږي.



**لومړی مثال:** د  $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{1}{2}$  د تابع مطلق اصغری پیدا کړئ.

**حل:** د  $f(x)$  د تابع مشتق نيسو او د مشتق د تابع حلونه په لاس راوړو:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{1}{2}$$

$$f'(x) = x + 3$$

$$f'(x) = 0$$

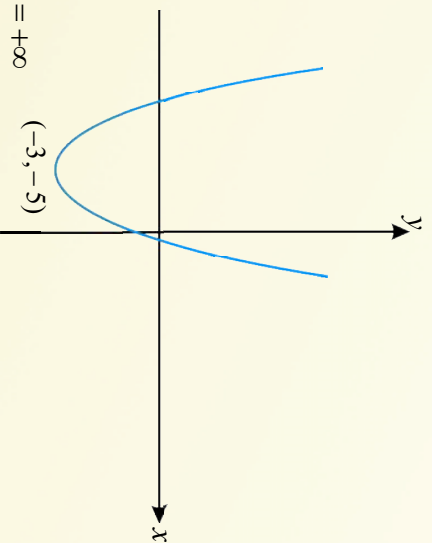
$$x + 3 = 0$$

$$x = -3$$

$$f(-3) = -5$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{1}{2} \right) = +\infty$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 + 3 \lim_{x \rightarrow \infty} x - \frac{1}{2} = +\infty$$



$x$	$-\infty$	$-4$	$-3$	$1$	$2$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$	$0$	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$
		$\frac{9}{2}$	$\frac{Min}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{15}{2}$	$+\infty$

په پايله کې د  $x = -3$  په ټکي کې چې د تابع قيمت  $(-5)$  دی او تابع په  $(-3, -5)$  ټکي کې مطلق اصغري لري.

**دویم مثال:** د  $f(x) = x^3 - 3x + 2$  تابع اعظمي او اصغري ټکي پیدا او رسم یې کړئ.  
**حل:** د اعظمي او اصغري ټکو د پیدا کولو لپاره لومړی د تابع لومړی مشتق پیدا او بیا د مشتق د تابع صفري ټکي په لاس راوړو.

$$f(x) = x^3 - 3x + 2$$

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

$$f'(x) = 0$$

$$3x^2 - 3 = 0$$

$$3x^2 = 3$$

$$x^2 = 1$$

$$x_1 = 1, \quad x_2 = -1$$

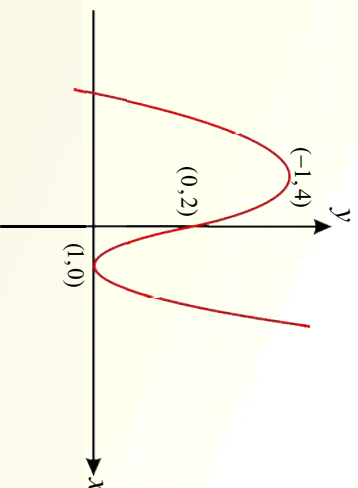
$$f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1 + 2 = 1 - 3 + 2 = 0$$

$$f(0) = 0 - 3 \cdot 0 + 2 = 2$$

$$f(2) = 2^3 - 3 \cdot 2 + 2 = 4$$

$$f(1) = 0, \quad f(0) = 2, \quad f(2) = 4$$

$$\text{Max } f(2) = 4 \quad \text{Min } f(1) = 0$$



$x$	$-\infty$	$-2$	$-1$	$0$	$1$	$2$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$+$	$0$	$-$	$-$	$0$	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$+\infty$
			<b>Max</b>		<b>Min</b>		
			6				

له جدولو څخه لیدل کېږي چې تابع د  $(-\infty, -1)$  او  $(1, +\infty)$  په انټروالونو کې مطلقه متزایده او  $(-1, 1)$  په انټروال کې متناقصه ده، نو د  $(1, 0)$  نقطه اصغري او د  $(-1, 4)$  نقطه اعظمي ده.

د یوې تابع د گراف رسمولو لپاره لاندې ټکي باید په پام کې ونیسو:

1. د تابع متعادیت او نامتعادیت مطالعه کړو.
2. د قیمو محور اړخو سره د گراف تقاطع.
3. د لومړي مشتق د اشارې مطالعه د تابع د تزاید او تناقص لپاره.
4. د تابع د اعظمي او اصغري ټکو لپاره د مشتق صفري ټکي پیدا کول.
5. د مجانبونو ټاکل.
6. د جدول ترتیبول او د هغوی په مرسته د گراف رسمول.

**دروم مثال:** د  $y = 2 + x - x^2$  تابع گراف رسم کوی؟

**حل:** لیدل کېږي چې تابع د متحول د ټولو قیمتونو لپاره معینه ده.

1- ددې تابع د تقاطع ټکی د  $x$  او  $y$  له محورونو سره پیدا کړو:

د  $y$  له محور سره د گراف تقاطع د ټکو د پیدا کولو لپاره په ورکړ شوي تابع کې  $x = 0$  وضع کړو:

$$x = 0 \quad y = 2 + 0 - 0 = 2$$

نو پورتنی گراف د  $y$  محور په  $(0, 2)$  نقطه کې قطع کوي.

د  $x$  د محور سره د گراف د پریکړي د ټکو د پیدا کولو لپاره  $y$  مساوي په صفر وضع کړو او د  $x$  قیمت پیدا کړو:

$$y = 0, \quad 2 + x - x^2 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 2}}{-2} = \frac{-1 \pm 3}{2}$$

$$x_1 = -1, \quad x_2 = 2$$

نو پورتنی گراف د  $x$  محور په  $(-1, 0)$  او  $(2, 0)$  نقطو کې قطع کوي.

2- د تابع اعظمي او اصغري ټکي پیدا کړو، ددې کار لپاره دتابع اول او دروم مشتق وڅیړو.

$$y = 2 + x - x^2$$

خړنگه چې د تابع په اعظمي او اصغري په نقطو کې د تابع لومړی مشتق صفر دی نو  $y' = 0$  سره وضع کړو:

$$y' = 1 - 2x$$

$$y' = 0, \quad 1 - 2x = 0$$

$$-2x = -1 \Rightarrow 2x = 1$$

$$x = \frac{1}{2}$$

تابع په  $x = \frac{1}{2}$  نقطه کې یو اعظمي یو یا اصغري قیمت لري، دهغې دپېژندنې له پاره دتابع دروم مشتق په  $x = \frac{1}{2}$

ټکو کې وڅیړو:  $y'' = -2 < 0$

خړنگه چې  $y''$  تل منفي دی نو په  $x = \frac{1}{2}$  کې هم منفي دی ځکه نو تابع په  $x = \frac{1}{2}$  ټکی کې یو اعظمي قیمت

لري خړنگه چې د  $x = \frac{1}{2}$  لپاره  $2 - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = 2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$  لري، نو د تابع اعظمي نقطه داده:  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

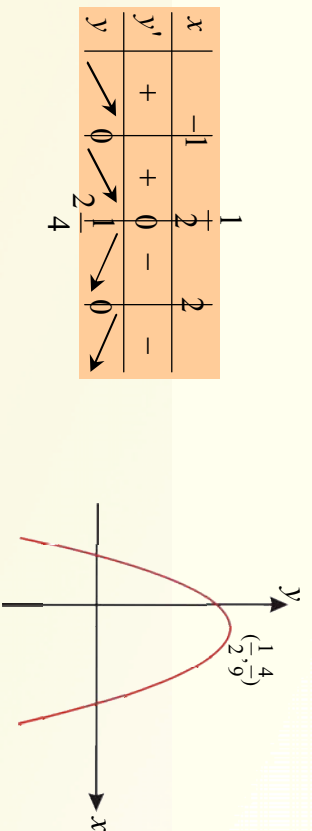
دانهختني دانهطاف نقطه نه لري ځکه چې دهر  $x$  لپاره  $0 < y''$  دی.

3- په  $\pm \infty$  کې دگراف څيرل:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y = \lim_{x \rightarrow \infty} (2 + x - x^2) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2 + x - x^2) = -\infty$$

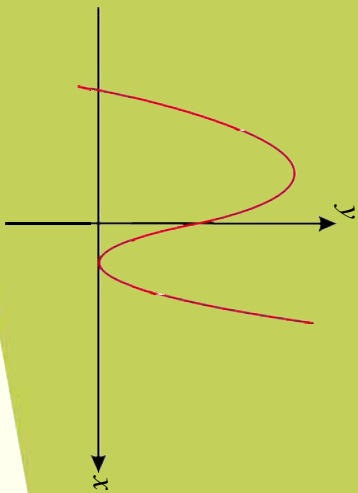
د زياتي روښانتيا لپاره لاندي جدول ترتيب شوی، او دتابع ټول بدلونونه په هغو کې په گوته کومو او وروسته نوموړی گراف رسموو.



## پوښتني

1- د لاندي توابعو موضعي Extreme و ټاکئ.

- a)  $f(x) = x^2 - 3x + 2$       b)  $f(x) = \frac{x+1}{x^2}$       c)  $y = 3x^2 - 4x + 1$
- د -2 د  $f(x) = 3x^3 - 4x^2$  مطلقه min پيدا کړئ.



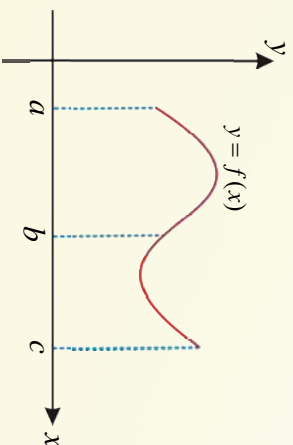
## د انعطاف د نقطې ټاکل

هغه ټکي چې د یوې تابع گراف په هغې کې خپل محدبیت، مقعریت ته او یا ددې پر عکس بدلوي د څه په نامه یادېږي؟ آیا په دې ټکي کې د دویم مشتق علامه او قیمت خپرلای شی؟

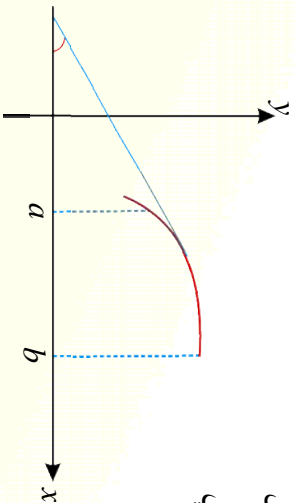


### فعالیت

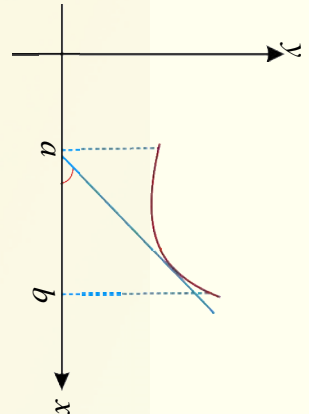
لاندينی شکل په پام کې ونیسئ.



- د  $y = f(x)$  د تابع منحنی د  $(a, b)$  په انټروال کې څه ډول منحنی بلل کېږي؟
  - د  $y = f(x)$  د تابع منحنی د  $(b, c)$  په انټروال کې څه ډول منحنی بلل کېږي؟
  - د  $(a, b)$  په انټروال کې په منحنی یو مماس رسم کوئ او له هغه مماس سره یې پرتله کوئ چې د  $(b, c)$  په انټروال کې په منحنی رسمېږي.
- د پورتنۍ فعالیت پایله داسې بیانوو:
1. د  $y = f(x)$  د تابع منحنی په یوه انټروال کې پرسیدلی یا محدب بلل کېږي، که چېرې په دې انټروال کې په منحنی مماس رسم شي، نو مماس د منحنی له پاسه یا پورته خواته پروت وي، په دې صورت کې د تابع دویم مشتق منفي  $< 0$  یا په لاس راځي.



په دې ډول که د  $y = f(x)$  د تابع دویم مشتق د انټروال په ټولو ټکو کې منفي وي، نو د تابع گراف یا منځني په دې انټروال کې محدب پاتې کېږي.



2. د  $y = f(x)$  د تابع منځني په یوه انټروال کې نوتې یا مقعره بلل کېږي، که چیرې په نوموړي انټروال کې په منځني مماس رسم شي، نو مماس د منځني نه لاندې یا ښکته خوا پروت وي، که د  $y = f(x)$  د تابع دویم مشتق د انټروال په ټولو ټکو کې مثبت  $> 0$  وي، منځني په دې انټروال کې مقعر بلل کېږي.

**تعریف:** هغه ټکي چې تابع له مقعريت څخه محابيت ته او يا ددې پر عکس په کې جهت بدلوي، د انعطاف (Inflection) نقطه بلل کېږي.

که د  $y = f(x)$  د تابع د  $x = x_0$  په ټکي کې چې د تابع دویم مشتق صفر شي ( $f''(x_0) = 0$ ) وي تابع د  $x = x_0$  په ټکي کې د انعطاف نقطه لري او ددې پر عکس تابع د انعطاف نقطه نه لري.

**لومړی مثال:** د  $f(x) = x^2 - 5x + 4$  د تابع گراف رسم محابيت او مقعريت يې وڅېړئ.

**حل:** تابع د متحول د ټولو قيمتونو لپاره معينه ده.

-1 د  $y$  له محور سره تقاطع

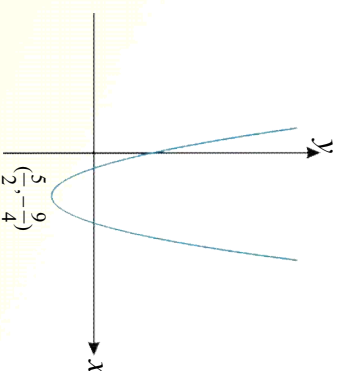
$$\left. \begin{array}{l} x=0 \\ y=4 \end{array} \right\} \Rightarrow (0,4)$$

-2 د  $x$  له محور سره تقاطع

$$\left. \begin{array}{l} y=0 \\ x^2 - 5x + 4 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x^2 - 5x + 4 = (x-4)(x-1) \Rightarrow x_1 = 4, \quad x_2 = 1$$

د  $x$  له محور سره د تقاطع ټکي  $(4, 0)$  او  $(1, 0)$  دي.

$x$	$-\infty$	$0$	$1$	$2$	$4$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$0$	$-$	$0$	$+$	$+$
$f''(x)$	$+\infty$	$4$	$0$	$9$	$0$	$+\infty$



د گراف، مقعریت او محدبیت د څیړلو لپاره د تابع دویم مشتق په لاس راوړو:

$$f(x) = x^3 - 5x^2 + 4x \Rightarrow f' = 2x - 5$$

$$f''(x) = 2 > 0$$

څرنگه چې  $0 < f''$  دی، نو په پایله کې ویلای شو چې منځني نښتي یا مقعر دی.

**دویم مثال:** هغه انټروالونه وټاکئ چې په هغې کې د  $y = x^3 + 9x^2 - 6x + 1$  تابع گراف محدب یا مقعر

وي.

**حل:**

$$y = x^3 + 9x^2 - 6x + 1$$

$$y' = 3x^2 + 18x - 6 \Rightarrow y'' = 6x + 18$$

$$y'' < 0 \Rightarrow 6x + 18 < 0$$

$$6x < -18 \Rightarrow x < -3$$

$$y'' > 0 \Rightarrow 6x + 18 > 0$$

$$6x \geq -18$$

$$x > -3$$

$x$	$-\infty$	$-3$	$+\infty$
$y''$	$-$	$0$	$+$
$y$	$\cap$		$\cup$

مقعر    انعطاف    محدب

څرنگه چې لیدل کېږي د تابع دویم مشتق په  $(-\infty, -3)$  انټروال کې منفي او د  $(-3, +\infty)$  انټروال کې مثبت دي نو دا ډول گراف په لومړي انټروال کې محدب او په دویم کې مقعر دی.



دروم مثال : د  $f(x) = x^5 - 5x^3$  د تابع د انعطاف ټکي وټاکي؟

حل:

$$f(x) = x^5 - 5x^3 \Rightarrow f'(x) = 5x^4 - 15x^2$$

$$f''(x) = 20x^3 - 30x$$

$$f''(x) = 0$$

$$20x^3 - 30x = 0$$

$$x(20x^2 - 30) = 0$$

$$x_1 = 0$$

$$20x^2 - 30 = 0$$

$$x^2 = \frac{3}{2} \Rightarrow x_2 = \sqrt{\frac{3}{2}}, \quad x_3 = -\sqrt{\frac{3}{2}}$$

ليدل کيږي چې په  $x = \sqrt{\frac{3}{2}}$  او  $x = 0$  ،  $x = -\sqrt{\frac{3}{2}}$  کې د تابع دويم مشتق صفر دی يا  $f'''(x) = 0$  علامه

بدلوي او په دې ټکو کې محاس رسيدلی شي، چې هغه ټکي د انعطاف ټکي دی .

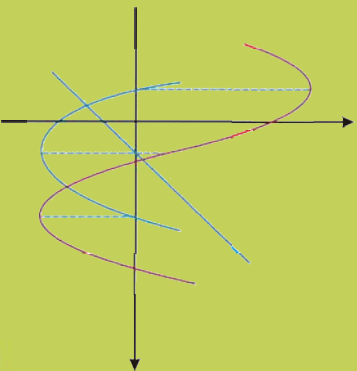
$x$	$-\infty$	$-\sqrt{\frac{3}{2}}$	$0$	$\sqrt{\frac{3}{2}}$	$+\infty$
$f'''(x)$	$-$	$0$	$+$	$0$	$-$
$f(x)$	$-\infty$	$\cap$	$-1.65 \cup$	$\cap$	$-6\sqrt{\frac{3}{2}} \cup$



1. د  $f(x) = x^2 - 4$  د تابع محليت او مقعریت وټاکي.

2. د  $f(x) = -2x^2 - 1$  د تابع د انعطاف نقطه وټاکي.

د منحنی گانو رسمول  
د دویمې درجې نابېگانو گراف  
د مخامخ شکل په اړه خپل نظر بیان کړئ.



- د  $f(x) = x + 1$  د تابع گراف د  $f(x) = -x + 1$  د تابع له گراف سره پرتله کړئ.
  - د  $y = ax^2 + bx + c$  د تابع د تعریف ساحه و ټاکئ، آیا دا تابع متمادي ده؟
  - د نوموړی تابع لومړی مشتق پیدا او د Maximum او Minimum ټکي او د تناظر محور يې وټاکئ.
  - د تابع لیمیټ په هغه صورت کې پیدا کړئ چې  $x \rightarrow \pm\infty$  وکړي.
  - له محورونو سره د تقاطع ټکي و ټاکئ.
  - د تحولونو جدول ترتیب او نوموړی منحنی رسم کړئ.
- د پورته فعالیت پایله داسې بیانوو:
- 1- د تابع د تعریف ساحه: لیدل کېږي چې تابع د متحول د ټولو قیمتونو لپاره ټاکلې ده، یعنې:

$$D_f \rightarrow (-\infty, +\infty)$$

نو تابع د خپل تعریف په ساحه کې متمادي ده.  
2- د تابع د بحراني ټکو او د تناظر محور ټاکل:

$$f'(x) = 2ax + b = 0$$

$$f'(x) = 0$$

$$2ax + b = 0$$

$$2ax = -b$$

$$x = \frac{-b}{2a}$$

د  $x = \frac{-b}{2a}$  قیمت په اصل تابع کې وضع کوو:

$$y = a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c = 0 \Rightarrow a \cdot \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{2a} + c = 0$$

$$y = \frac{b^2 - 2b^2 + 4ac}{4a} = \frac{-b^2 + 4ac}{4a} \Rightarrow \frac{4ac - b^2}{4a}$$

د  $\left(\frac{4ac - b^2}{4a}, -\frac{b}{2a}\right)$  ټکی بحراني يعني اعظمي يا اصغري دی.

الف: که  $a > 0$  وي، نو:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$   $\Rightarrow a > 0$

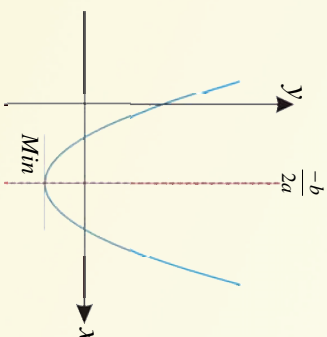
تابع په  $\left(\frac{-b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$  ټکي کې *Min* لري.

ب: که  $a < 0$  وي، نو:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \Rightarrow a < 0$

تابع په  $\left(\frac{-b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$  ټکي کې *Max* لري.

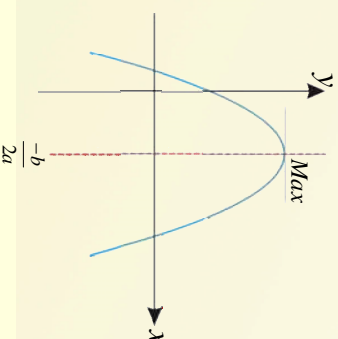
3- د گراف د رسمولو لپاره جدول ترتیب او گراف يې رسموو:

$a > 0$		
$x$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$y'$	-	+
$y$	$+\infty$	$-\infty$



خړنگه چې  $a > 0$  د منحنی خوله (جهت) پورته خواته او د  $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4}\right)$  اصغري نقطه ده.

$a < 0$		
$x$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$y'$	-	+
$y$	$+\infty$	$-\infty$



خړنگه چې  $a < 0$  د منحنی خوله (جهت) پورته خواته او د  $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4}\right)$  اعظمي نقطه ده.

لومړی مثال: د  $f(x) = x^2 - 4x + 3$  د تابع تحولات مطالعه او گراف يې رسم کړئ.  
حل:

1- د تابع د تعريف ساحه  $(-\infty, +\infty)$  تابع د ټولو حقيقي قيمتونو لپاره ټاکلې ده، نو تابع په دې انټروال کې متمادی ده.

2- د تابع د منحنی تقاطع د  $x$  له محور سره:

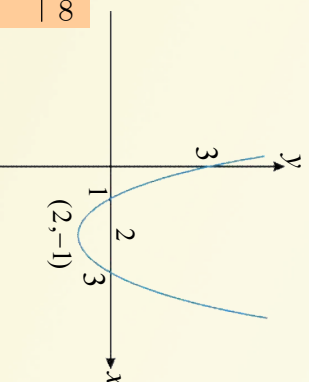
$$\left. \begin{aligned} y &= 0 \\ x^2 - 4x + 3 &= 0 \\ (x-1)(x-3) &= 0 \\ x-1 &= 0 \Rightarrow x=1 \\ x-3 &= 0 \Rightarrow x=3 \end{aligned} \right\} (1, 0), (3, 0)$$

3- د تابع د منحنی تقاطع د  $y$  له محور سره:

$$\left. \begin{aligned} x &= 0 \\ y &= 0 - 4 \cdot 0 + 3 \\ y &= 3 \end{aligned} \right\} (0, 3)$$

4- د تابع د extreme ټکو د پیدا کولو لپاره د لومړی مشتق صفرې ټکي پیدا او جدول يې ترتیبوو:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x - 4 = 0 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = 2 \\ f(2) &= 2^2 - 4 \cdot 2 + 3 = -1 \Rightarrow V(2, -1) \text{ min} \\ x \rightarrow \pm\infty &\Rightarrow f(x) \rightarrow \pm\infty \\ \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [x^2 - 4x + 3] = +\infty \end{aligned}$$



$x$	$-\infty$	$0$	$1$	$2$	$3$	$+\infty$
$y'$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$
$y$	$-\infty$	$\searrow$	$3$	$\searrow$	$0$	$\searrow$
				$\nearrow$	$-1$	$\nearrow$
					$0$	$\nearrow$
						$+\infty$

دویم مثال: د  $f(x) = -x^2 + 2x$  د تابع تحولات مطالعه او گراف يې رسم کړئ.

حل: لیدل کېږي چې تابع د ټولو قيمتونو لپاره تعريف شوی ده، نو:  
1- د تابع د تعريف ساحه عبارت دی له:  $(-\infty, +\infty)$  چې په دې ساحه کې تابع متمادی ده.

2- د تابع د منحنی د تقاطع ټکی د  $x$  له محور سره:

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ -x^2 + 2x &= 0 \\ x(-x + 2) &= 0 \\ x_1 &= 0 \\ -x + 2 &= 0 \\ x_2 &= 2 \end{aligned}$$

د تقاطع ټکی

$$(0, 0)$$

$$\begin{aligned} -x + 2 &= 0 \\ x_2 &= 2 \end{aligned}$$

$$(2, 0)$$

3- د تابع د منحنی تقاطع د  $y$  له محور سره:

$$\begin{aligned} x &= 0 \\ f(x) &= -x^2 + 2x \\ f(x) &= 0 + 2 \cdot 0 \\ f(x) &= 0 \end{aligned}$$

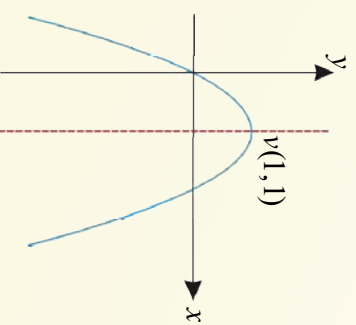
$$(0, 0)$$

4- د تابع د extreme نقطو د پیدا کولو لپاره د تابع لومړی مشتق پیدا کولو او جدول یې ترتیب او گراف یې

رسموو:

$$\begin{aligned} D_f &\rightarrow (-\infty, +\infty) \\ f(x) &= -x^2 + 2x \\ f'(x) &= -2x + 2 = 0 \\ -2x + 2 &= 0 \\ -2x &= -2 \\ x &= 1 \\ f(1) &= 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow V(1, 1)_{Max}$$

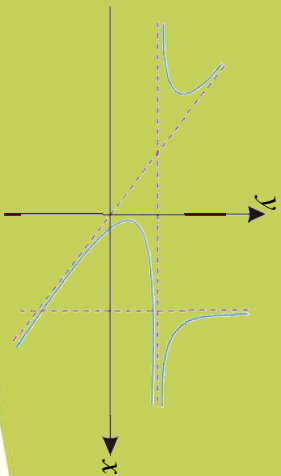


$x$	$-\infty$	$0$	$1$	$2$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$+$	$-$	$-$	$-$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$-\infty$

په جدول کې لیدل کېږي چې د مشتق علامه د مثبت څخه منفي ته او یا د تزاید حالت څخه تناقص ته شکل بدلوي نو تابع د  $(1, 1)$  په ټکي کې اعظمي ده.

## پوښتني

1. د  $f(x) = 2x^2 - x - 1$  د تابع گراف رسم کړئ.
2. د  $f(x) = x^2 - x - 2$  د تابع د گراف بدلونونه وڅېړئ او گراف یې رسم کړئ.



## د توابعو د گرافونو مجانبونه

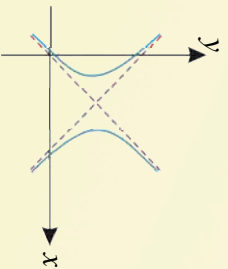
شکل ته پام وکړئ؛ ټکی کرښې د څخه په نامه یادېږي، نومونه یې واخلي.



- مجانبونه څه ډول کرښې دي؟
  - مجانبونه، منحنیگان په کومو ټکو کې قطع کوي؟
- د پورتني فعالیت پایله داسې بیانوو:

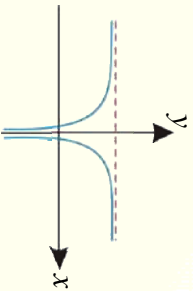
**مجانېونه:** هغه مستقیمې کرښې دي چې د منحنی لپاره د لارښود حیثیت لري او د منحنی کرښه غوڅه کوي، هغه تابعگانې چې د متحول د ځینو قیمتونو لپاره غیر متناهي وي مجانبونه لري او په درې ډوله دي.

- 1- **عمودي مجانب:**  $y = f(x)$  تابع هغه عمودي مجانب لري چې  $x \rightarrow \infty$  او  $x \rightarrow -\infty$  وکړي، یعنې  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$  شي یا په بل عبارت په کسري تابعگانو کې که چیرې د کسر مخرج مساوي په صفر شي نوموړی تابع بې نهایت خوا ته تقرب کوي، نو ددې ډول مجانب د پیدا کولو لپاره د کسر مخرج له صفر سره مساوي وضع کوو.



2- **مایل مجانب:** د  $y = f(x)$  کسري تابع کله چې د صورت او مخرج د تقسیم حاصل د یوه مستقیم خط په شکل  $(y = ax + b)$  لاسته راشي داسې چې  $a \neq 0$  وي په لاس راځي او دا هغه وخت امکان لري چې تابع د مایل مجانب لرونکی وي، یعنې د متحول د صورت درجه او د متحول د مخرج درجه له درې څخه لوړه وي.

په یاد ولری چې که یوه تابع د افقي مجانب لرونکي وي، مايل مجانب نه لري او برعکس که چیري مايل مجانب ولري افقي مجانب نه لري.



3- **افقي مجانب:** یوه تابع هغه وخت د افقي مجانب لرونکي ده، چې که  $x \rightarrow \infty$  وکړي د تابع قیمت یو ثابت مقدار شي او یا په بل عبارت یوه تابع هغه وخت د افقي مجانب لرونکي ده چې که  $x \rightarrow \infty$  وکړي، نو  $y \rightarrow c$  ته تقرب کوي، یعنې  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = c$  شي.

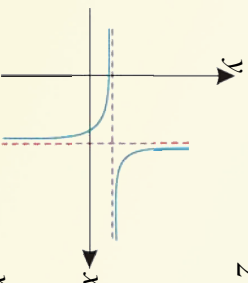
**لومړی مثال:** د  $f(x) = \frac{x+1}{2x-4}$  تابع عمودي مجانب پیدا کړئ.

**حل:** د عمودي مجانب د پیدا کولو لپاره د کسر مخرغ مساوي په صفر وضع کوو، لرو چې:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left( \frac{x+1}{2x-4} \right) = \frac{1}{2}$$

افقي مجانب عبارت دی له:  $y = \frac{1}{2}$

$x$	-1	0	+1
$y$	0	$-\frac{1}{4}$	-1



**دویم مثال:** د  $y = \frac{x^2+2x-1}{x}$  د تابع د منحنی مجانبونه وټاکئ.

**حل:**

1- مايل مجانب: ددې مجانب د پیدا کولو لپاره د تابع صورت د تابع پر مخرغ ویشو:

$$y = \frac{x^2+2x-1}{x} = x+2 - \frac{1}{x} \Rightarrow y = x+2$$

2- عمودي مجانب: د دې مجانب د پیدا کولو لپاره د تابع مخرغ مساوي په صفر وضع کوو:

$$y = \frac{x^2+2x-1}{x} \Rightarrow x = 0$$

3- افقي مجانب: څرنگه چې تابع مايل مجانب لري، نو افقي مجانب نه لري.



دريم مثال د  $f(x) = \frac{(x-3)(x+2)}{(x+1)(x-2)}$  تابع مجانبونه وټاکئ.

حل:

1- عمودي مجانب: د تابع مخرغ مساوي په صفر وضع کړو:

$$\begin{cases} (x+1)(x-2) = 0 \\ x+1 = 0 \\ x_1 = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} x-2 = 0 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

نو  $x = 2$  او  $x = -1$  د تابع عمودي مجانبونه دي.

2- افقي مجانب: د افقي مجانب د پيدا کولو لپاره د تابع لېمېټ په لاس راوړو:

$$y = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-3)(x+2)}{(x+1)(x-2)} = 1$$

نو  $y = 1$  د تابع افقي مجانب دی.

3- څرخنگه چې د تابع د صورت له وېش څخه پر مخرغ  $y = ax + b$  خطي معادله پيدانه شوه، نو تابع مايل مجانب نه لري.

د مجانبو د ټاکلو عمومي لاره:

که چيري د  $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$  په ناطقه تابع کې  $m$  او  $n$  په ترتيب سره د صورت او مخرغ درجي وي، نو:

الف: که  $m < n$  وي، نو د  $x$  محور افقي مجانب دی.

ب: که  $m = n$  وي، نو  $y = b$  افقي مجانب دی، داسې چې  $b$  د  $m$  او  $n$  د درجو د حدودو د ضريبونو نسبت دی.

ج: که چيري  $m > n$  وي، نو افقي مجانب نه لري، ولې د مايل مجانب احتمال نې شته.

د: که چيري  $m = n + 1$  وي، که د صورت درجه د يوه واحد په اندازه له مخرغ څخه لويه وي) تابع هرو مرو مايل مجانب لري، په دې حالت کې افقي مجانب نه لري.



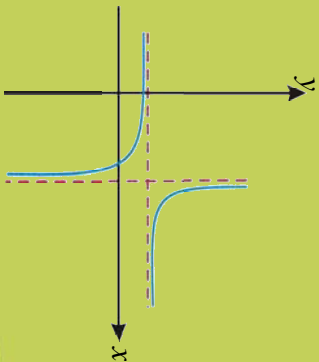
پوښتني

د لاندني توابعو مجانبونه وټاکي.

$$1) f(x) = \frac{3x-6}{x^2-x-2}$$

$$2) f(x) = \frac{-2x^2}{x^2+1}$$

$$3) f(x) = \frac{8}{x^2-4}$$



## د هوموگرافیک تابع گانو گراف

شکل ته پاملرنه وکړئ دا شکل د څه ډول تابع گراف دی؟ افقي او عمودي محانبونه يې وښیئ.



• هوموگرافیک تابع څه ډول تابع ده، په یوه مثال کې یې واضح کړئ.

• د  $y = \frac{1}{x}$  د تابع گراف رسم کړئ.

• د نوموړي تابع محانبونه لومړی پیدا او بیا یې رسم کړئ.

• د تابع د گراف تقاطع د  $x$  او  $y$  له محورونو سره پیدا کړئ.

د پورتني فعالیت پایله داسې بیانوو:

هغه تابعگانې چې د  $y = \frac{ax+b}{cx+d}$  شکل ولري، هوموگرافیک تابعگانې بلل کېږي، داسې چې  $c \neq 0$  وي. دا ډول توابع دوه محانبونه لري چې:

1- افقي محانب يې:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{ax}{cx} + \frac{b}{cx}}{\frac{d}{cx} + \frac{c}{cx}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a + \frac{b}{x}}{d + \frac{c}{x}} \Rightarrow y = \frac{a}{d}$$

2- عمودي(قیم) محانب يې:

$$cx + d = 0 \Rightarrow cx = -d \Rightarrow x = -\frac{d}{c}$$

لومړی مثال: د  $f(x) = \frac{2x-1}{x-3}$  د تابع بدلونونه وڅېړئ او گراف یې رسم کړئ.

حل:

$$x-3=0$$

$$x=3$$

1. خړنگه چې د تابع مخخ د  $x = 3$  په قیمت کې صفر کېږي نو تابع برته د  $x = 3$  څخه د منجول په ټولو قیمتونو کې معینه ده، یعنی د تابع د تعریف ساحه ټاکو:  $Dom = \mathbb{R} \setminus \{3\}$

2. د تابع د منحنی تقاطع د  $x$  له محور سره:

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = 0 \\ 2x - 1 = 0 \\ 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \end{array} \right\} \left( \frac{1}{2}, 0 \right)$$

3. د تابع د منحنی تقاطع د  $y$  له محور سره:

$$x = 0 \Rightarrow f(0) = \frac{2 \cdot 0 - 1}{0 - 3} = \frac{1}{3} \left\} \left( 0, \frac{1}{3} \right) \right.$$

4. د مجانبونو ټاکل:

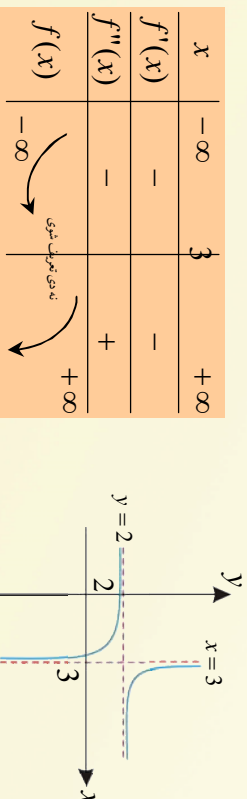
الف- افقي مجانب:  $y = 2$  ،  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x-1}{x-3} = 2$  یا  $\frac{a}{c} = \frac{2}{1} = 2$

ب- عمودي مجانب:  $x = 3$   $\Rightarrow x - 3 = 0$  یا  $d = \frac{-3}{1} = -3$

5. د تابع د extreme ټکي پیدا کولو او جدول یې ترتیب او گراف یې رسموو:

$$f'(x) = \frac{2(x-3) - (2x-1)}{(x-3)^2} = \frac{-5}{(x-3)^2} < 0$$

$$f''(x) = \frac{0 \cdot (x-3)^2 - (-5) \cdot 2(x-3)}{(x-3)^4} = \frac{10(x-3)}{(x-3)^4} = \frac{10}{(x-3)^3}$$



دویم مثال: د  $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$  د تابع د گراف بدلونونه وڅیړئ او گراف یې رسم کړئ.

حل:  $x = -1 \Rightarrow x + 1 = 0$

1- د تابع د تعریف ساحه  $D_f \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{-1\}$  یعنی تابع په  $x = -1$  ټکي کې تعریف شوي نه ده.

- 2- د تابع د منحنی تقاطع د  $x$  له محور سره:  $y = 0 \Rightarrow x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow (1, 0)$
- 3- د تابع د منحنی تقاطع د  $y$  له محور سره:  $x = 0 \Rightarrow y = \frac{0-1}{0+1} = -1 \Rightarrow y = -1 \Rightarrow (0, -1)$
- 4- د مجانبونو ټاکل:
- الف- عمودی مجانب:
- $x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$

ب- افقی مجانب:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x-1}{x+1} \Rightarrow f(x) = y = 1$$

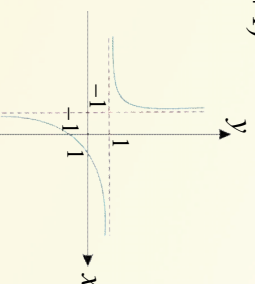
5- د تابع extreme نقطې پیدا کړو، جدول یې ترتیب او گراف یې رسمو:

$$f(x) = \frac{x-1}{x+1}$$

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (x+1) - 1 \cdot (x-1)}{(x+1)^2} = \frac{x+1-x+1}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2} > 0$$

$$f''(x) = \frac{0 \cdot (x+1)^2 - 2 \cdot 2(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{-4}{(x+1)^4} = \frac{-4}{(x+1)^3}$$

$x$	$-\infty$	$-1$	$+$
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$
$f''(x)$	$+$	$+$	$-$
$f(x)$	$1$	$1$	$1$



دریم مثال: غواړو د  $f(x) = \frac{2x-5}{x}$  تابع گراف رسم کړو.

حل:

- 1- د تابع د تعریف ساحه تر څېړنې لاندې نېسو لیدل کېږي چې تابع پرتله د  $x = 0$  څخه نوره دستحول د ټولو قیمتونو لپاره معیننه ده، یعنې:  $D_f \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$
- 2- د محورونو سره د تقاطع ټکي
- الف- د  $x$  له محور سره تقاطع:

$$f(x) = 0 \Rightarrow \frac{2x-5}{x} = 0$$

$$2x - 5 = 0$$

$$2x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{2} \Rightarrow (2.5, 0)$$



ب- د  $y$  له محور سره تقاطع: د  $x=0$  لپاره د  $f(x)$  تابع تعریف شوي نه ده، نو د  $y$  محور سره تقاطع نه لري.  
 3- **مجانوبه:**

الف- عمودي مجانب: څرنگه چې په مخروط کې يرازې  $x$  موجود دی، نو  $x=0$  يې عمودي مجانب دی چې د  $y$  محور کېږي.

ب- افقي مجانب:  $2 = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[ \frac{2x-5}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 2$  نو  $y=2$  د تابع افقي مجانب دی.

4- د بحراني ټکو پيدا کول: د بحراني ټکو پيدا کولو لپاره د تابع لومړی مشتق پيدا کوو

$$f(x) = \frac{2x-5}{x}$$

$$f'(x) = \frac{2 \cdot x - (2x-5)}{x^2} = \frac{2x-2x+5}{x^2}$$

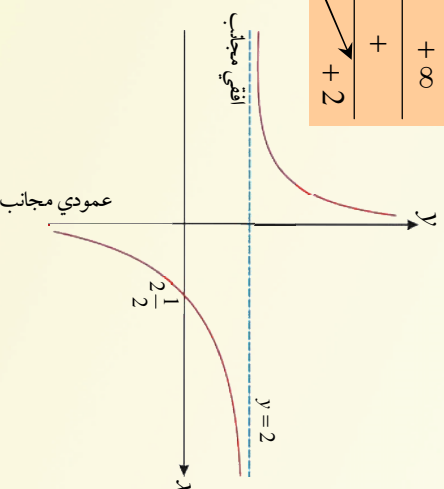
$$f'(x) = \frac{5}{x^2} > 0$$

څرنگه چې  $f'(x) > 0$  دی، نو تابع متزايد ده.

د گراف د رسمولو لپاره د تابع تحولات په جدول کې ترتيبوو:

$x$	$-\infty$	$2$	$5$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$2$	$\nearrow$	$+\infty$	$+\infty$

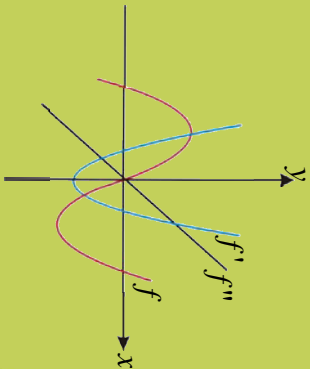
نه دی تعریف شوی



### پوښتني

- د  $f(x) = \frac{x-1}{x+3}$  تابع بدلونونه وڅېړئ او رسم يې کړئ.
- د  $f(x) = \frac{x}{x-4}$  تابع بدلونونه وڅېړئ او رسم يې کړئ.

**د دریمې درجې یو مجهول تابع گراف**  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$  ،  $a \neq 0$   
 مخامخ شکل د ځینو توابعو گرافونه رانښيي تاسې د هرې  
 تابع د گراف په هکله خپل نظر بیان کړئ.



**فعالیت**

- د  $d = ax^3 + bx^2 + cx + d$  تابع په اړه فکر وکړئ او ووايئ چې تابع څومه درجه تابع ده؟
  - د نوموړي تابع ضربونه او ثابت حد وليکئ.
  - د نوموړي تابع دویم مشتق پیدا کړئ.
- د پورته فعالیت پایله داسې بیانوو:

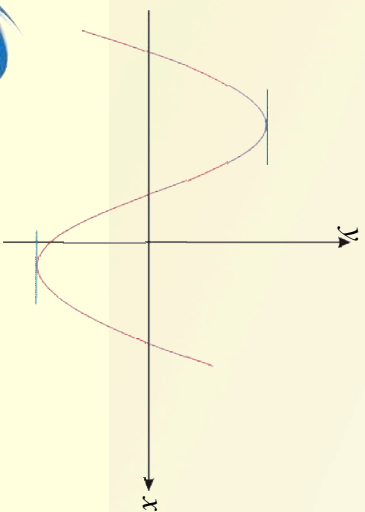
1.  $d = ax^3 + bx^2 + cx + d$  ، په دریمه درجه تابع کې چې  $a > 0$  وي داسې په پام کې نیسو که چیرې د تابع لومړی مشتق پیدا کړو دویمه درجه تابع په لاس راځي، نو د  $f'(x) = 0$  لپاره د دویمې درجې د معادلې حل په پام کې نیسو او  $\Delta$  یې مطالعه کوو که چیرې د معادلې  $\Delta$  له صفر څخه لوی ( $\Delta^2 > 0$ ) وي، نو معادله (د تابع مشتق) دوه حله لري، که چیرې  $a > 0$  وي منحنی له کین لوري څخه ښي لوري ته یوه نسبي اعظمي نقطه (Maximum) او یوه نسبي اصغري (Minimum) لري.

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$a > 0 \Rightarrow \Delta f' > 0$$

$x$	$-\infty$	$k_1$		$k_2$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$		$\searrow$	$+\infty$

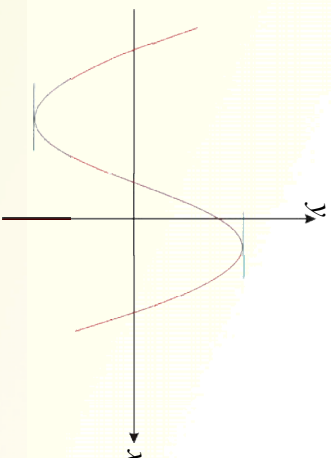




2. د  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  ، په تابع کې که  $a < 0$  ،  $f'(x) = 0$  او  $\Delta f'(x) > 0$  معادله دوه جذرونه لري، که چېرې  $\Delta f' > 0$  نو منحنی د کین لوري څخه ښی لوري ته یوه نسبي اصغری (Maximum) او یوه نسبي اعظمی (Minimum) نقطه لري.

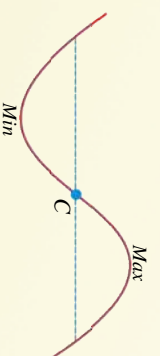
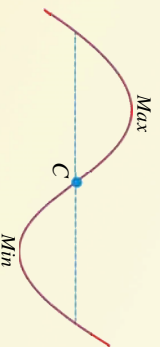
$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$   
 $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$   
 $a < 0 \Rightarrow \Delta f' > 0$

$x$	$x_1$	$x_2$
$f'(x)$	-	+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$



3. که د دریمې درجې تابع منحنی نسبي بحراني Extreme ولري، د Extreme ډکټو د منځني ټکي یاد انعطاف د نقطې مختصات يې:

$$I(x_c, y_c) = \left( \frac{x_{\max} + x_{\min}}{2}, \frac{y_{\max} + y_{\min}}{2} \right)$$



4. د دریمې درجې تابع د تناظر ټکي د تابع د انعطاف ټکي:

$$f'(x) = 0$$

$$3ax^2 + 2bx + c = 0$$

چې د تناظر ټکي يې وروسته د نوموړي معادلې د حل څخه د تناظر مرکز  $x = -\frac{b}{3a}$  په لاس راځي.

5. د  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  په تابع کې که  $a < 0$  وي او  $f'(x) = 0$  سره وضع شي او  $\Delta f'(x) = 0$  نو معادله یو یا دوه مساوي جذرونه لري په هغه صورت کې چې  $f'(x) \leq 0$  وي، نو په دې صورت تابع متناقصه ده او که چېرې  $f'(x) \geq 0$  وي نو په دې صورت کې تابع متزايد ده.



**لومړی مثال:** د  $f(x) = (x-1)(x+2)^2$  د تابع تحولات وڅېړئ او گراف یې رسم کړئ.

**حل:** لومړی د تابع Extreme ټکو مختصات په لاس راوړو، وروسته د لومړي مشتق په مرسته گورو چې تابع په کومه برخه کې متزايد او په کومه برخه کې متناقصه ده د محورونو سره د تقاطع ټکي پیدا کوو او د اعظمي او اصغري نقطو د تشخیص او د انعطاف نقطو د پیدا کولو لپاره د تابع دویم مشتق په کار وړوو د

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 4$$

تحولاتو جدول یې ترتیبوو او بیا یې گراف رسموو:

$$f'(x) = 3x^2 + 6x$$

$$3x^2 + 6x = 0$$

$$x(3x + 6) = 0$$

$$x_1 = 0, \quad 3x + 6 = 0 \Rightarrow x_2 = -2$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, \quad x_2 = -2$$

$$f(0) = 0^3 + 3 \cdot 0^2 - 4 = -4$$

$$f(-2) = (-2)^3 + 3(-2)^2 - 4$$

$$= -8 + 12 - 4 = 0$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow 6x + 6 = 0$$

$$6x = -6$$

$$x = -1$$

د انعطاف د نقطې د لاسته راوړلو لپاره  $x = -1$  په اصلي تابع کې وضع کوو چې د  $f(x)$  قیمت لاسته راځي:

$$f(-1) = (-1-1)(-1+2)^2 = -2$$

د انعطاف ټکی:  $I(-1, -2)$   
 د محورونو سره تقاطع:  
 الف- د  $x$  له محور سره تقاطع:

$$y = 0$$

$$(x-1)(x+2)^2 = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} x-1=0 \\ x=1 \end{array} \right\} \Rightarrow (x+2)^2 = 0$$

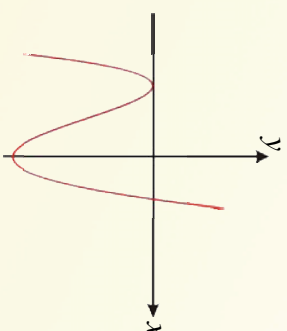
$$\left. \begin{array}{l} \Rightarrow x+2=0 \\ x_2 = -2 \end{array} \right\} \Rightarrow (1, 0), (-2, 0)$$

ب- د  $y$  له محور سره تقاطع:

$$x = 0$$

$$y = 0^3 + 3 \cdot 0^2 - 4 = -4 \Rightarrow (0, -4)$$

$x$	$-\infty$	$-2$	$-1$	$0$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$-$	$-$	$+$	$+$
$f''(x)$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$
		max		min	



**دویم مثال:** د  $f(x) = -x^3 + 3x^2$  تابع تحولات وڅیړئ او گراف رسم کړئ.

**حل:** د تابع لومړی مشتق پیدا کوو او وروسته یې صفرې نقطې ټاکو او د تابع اعظمې او اصغرې نقطې په لاس راوړو.

-1

$$f(x) = -x^3 + 3x^2$$

$$f'(x) = -3x^2 + 6x$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -3x^2 + 6x = 0 \Rightarrow x(-3x + 6) = 0$$

$$x_1 = 0, \quad -3x + 6 = 0 \Rightarrow -3x = -6 \Rightarrow x_2 = 2$$

اعظمي او اصغري ٽڪي عبارت دي له:

$$\left. \begin{array}{l} f(0) = -0^3 + 3 \cdot 0^2 = 0 \\ f(2) = -2^3 + 3 \cdot 2^2 = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow (0, 0), (2, 4)$$

2- د محورونو سره تقاطع:

الف- د  $x$  له محور سره تقاطع:

$$\left. \begin{array}{l} y=0 \\ -x^3 + 3x^2 = 0 \\ x^2(-x+3) = 0 \\ x_1 = 0, \quad -x+3 = 0 \\ \quad \quad \quad x_2 = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow (0, 0), (3, 0)$$

ب- د  $y$  له محور سره تقاطع:

$$\left. \begin{array}{l} x=0 \\ f(x) = -0^3 + 3 \cdot 0^2 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow (0, 0)$$

3- د انعطاف د نقطي د پيدا ڪولو لپاره  $f''(x)$  مطالعه ڪو:

$$f''(x) = -6x + 6 = 0$$

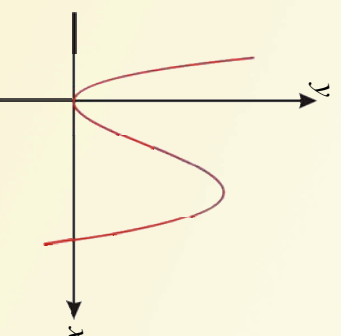
$$x = 1$$

$$f(x) = -x^3 + 3x^2$$

$$f(1) = 2 \Rightarrow I(1, 2)$$

4- اوس ٻي جدول ترتيبو او گراف ٻي رسمو:

$x$	$-\infty$	$0$	$1$	$2$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$0$	$+$	$+$	$-$
$f''(x)$	$+$	$+$	$0$	$-$	$-$
$f(x)$	$+\infty$	$0$	$\nearrow$	$2$	$\searrow$
		نسبي <i>Min</i>			نسبي <i>Max</i>



دريم مثال : د  $f(x) = x^3 - 3x^2 + x + 1$  د تابع د تناظر د مرکز مختصات پيدا کړئ.  
حل : پوهېږو چې د تناظر مرکز د  $x = \frac{-b}{3a}$  له رابطې څخه لاسته راځي، نو:

$$x = \frac{-b}{3a} = \frac{-(-3)}{3 \cdot 1} = 1 \Rightarrow f(1) = 1^3 - 3(1)^2 + 1 + 1 = 0$$

د تناظر د مرکز مختصات  $C(1, 0)$



1. د لاندې ناملگانو د تحولونو جدول ترتيب او گرافونه يې رسم کړئ.

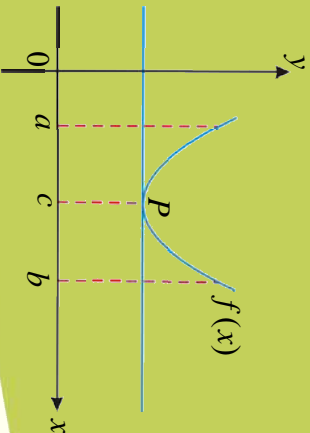
$$a) f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x + 1 \quad , \quad b) f(x) = -(x-1)^3$$

-2 د  $f(x) = -2x^2 + 6x - 3$  د تناظر د مرکز مختصات پيدا کړئ.

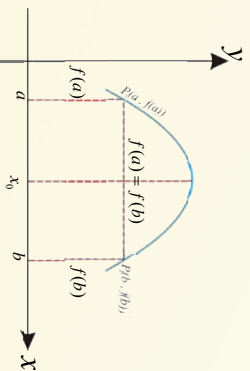
## د رول قضیه

### Rolle Theorem

په مخامخ شکل کې د  $f(x)$  تابع او د  $\Delta$  مستقیم خط یو له بل سره څه اړیکې لري او  $f'(c)$  له څه سره مساوي دی.



### فعالیت



- په مخامخ شکل کې د  $(a, b)$  په انټروال کې د  $f(x)$  په منحنی داسې ټکي شته چې له هغو څخه په منحنی داسې مماس رسم شي چې د  $x$  له محور سره موازي وي.
- د  $f(x)$  تابع په کوم انټروال کې متمادي او په کومه فاصله کې د مشتق وړ ده.
- که چېرې  $f(b) = f(a)$  وي، نو د  $x_0$  ټکي په  $(a, b)$  انټروال کې وختیږي. د پورتنی فعالیت څخه لاندې قضیه بیانولای شو:

**قضیه:** که چېرې د  $f(x)$  تابع د  $a \leq x \leq b$  په انټروال کې متمادي او د  $a < x < b$  په انټروال کې د مشتق وړ وي او  $f(b) = f(a)$  وي، نو لږ تر لږه د  $x_0$  یو ټکی په  $a < x < b$  انټروال کې شته چې د  $f'(x_0) = 0$  شي.

**ثبوت:** څرنگه چې د  $f(x)$  تابع په ورکړل شوی انټروال کې متمادي او د مشتق وړ ده، نو بحراني Extreme ټکی لري.

-1 که  $c = f(x)$  ثابت تابع وي، نو واضح ده چې  $f'(x) = 0$  ده.

2- که د  $f(x)$  تابع ثابت نه وي، او  $x_2, x_1 \in (a, b)$  او  $f(x_1) > 0$  وي، نو تابع په  $[a, b]$  کې يو Maximum قيمت لري چې  $f(x_0) \geq f(x_1) > 0$  شي او همدا راز که  $f(x_2) < 0$  وي، نو تابع يو اصغري Minimum قيمت لري.

خرنگه چې په Extreme نقطو کې د تابع مشتق صفر دی، نو  $f'(x_0) = 0$  کيږي.

**لومړی مثال:** د رول قضيه د  $f(x) = \cos x$  د تابع لپاره په  $(\pi, 5\pi) = [a, b]$  فاصله کې تطبيق کړئ.

**حل:** خرنگه چې  $f(\pi) = f(5\pi) = -1$  سره وي نو د  $f(x)$  تابع د هر  $x$  لپاره د مشتق وړ ده نو د  $(\pi, 5\pi)$  په انټروال کې متمادي او په  $(\pi, 5\pi)$  په انټروال کې مشتق منونکی ده چې د Rolle د قضيه مطابق په  $(\pi, 5\pi)$  کې لږ تر لږه يو  $x_0$  موجود دی چې د هغه قيمت لپاره  $0 = (\cos x)' = \sin x$  شي. خرنگه چې  $0 = \sin x = -\sin(\pi - x)$  نو بايد  $0 = \sin x = \sin(\pi - x)$  معادلې لږ تر لږه يو حل په  $(\pi, 5\pi)$  کې موجود وي.  $0 = \sin x \Rightarrow \sin x = 0$  دا معادله په  $(\pi, 5\pi)$  کې درې ځله  $2\pi, 3\pi, 4\pi$  قيمتونه اخيستلای شي.

**دویم مثال:** د رول قضيه د  $f(x) = \sqrt{1-x^2}$  تابع په  $[a, b] = [-1, 1]$  فاصله کې تطبيق کړئ.

**حل:** ليدل کيږي چې تابع د پيل او پای په ټکو کې د مشتق وړ نه ده، ولې د رول د قضيه د تطبيق وړ ده ځکه  $f(1) = f(-1) = 0$  دی  $f(0) = 1$  تابع په  $[-1, 1]$  کې متمادي ده او په  $[-1, 1]$  کې د  $x_0$  يو عدد شته چې  $0 = f'(x_0)$  شي او هغه  $x_0 = 0$  دی.

د  $y'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u}}$  فورمول څخه په گڼه اخيستی سره مشتق په لاس راوړو:

$$f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow f'(0) = \frac{0}{\sqrt{1-0^2}} = 0$$



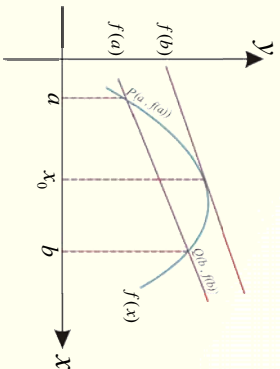
د متوسط قیمت قضیه (لاگر انقضیه):



فعالیت

مخامخ شکل په پام کې ونیسئ:

- د یوې مستقیمې کرنيې میل له کومې رابطې څخه په لاس راځي؟



- د  $\overline{PQ}$  د کرنيې میل د  $f(x)$  د تابع له مشتق سره څه اړیکه لري؟

له پورتنۍ فعالیت څخه قضیه داسې بیانوو:

**قضیه:** که چیرې  $f(x)$  د  $[a, b]$  په فاصله کې متمادي او د  $(a, b)$  په فاصله کې د مشتق وړ وي د

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a) \text{ چې: } c \text{ یو عدد شته دی داسې چې}$$

$$\text{یعنې: } f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \text{ دی.}$$

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot x \quad \text{ثبوت: یوه مرستندویه تابع په پام کې نیسو، لیدل کېږي چې}$$

$$g(a) = f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot a = \frac{f(a)b - f(b)a}{b - a} \quad \dots\dots\dots \text{I}$$

$$g(b) = f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot b = \frac{f(a)b - f(b)a}{b - a} \quad \dots\dots\dots \text{II}$$

نو  $g(a) = g(b)$  سره دی د رول د قضیې پر بنسټ سره د  $c$  عدد  $(a, b)$  انټروال کې شته دی چې نو  $g'(c) = 0$ :

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \Rightarrow g'(x) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0 \Rightarrow f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$\Rightarrow f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

مثال د:  $2x^3 - 8x + 1 = f(x)$  په تابع کې د متوسط قیمت قضیه په  $[1, 3] = [a, b]$  کې وڅیړئ.

حل: لیدل کېږي چې د  $f(x)$  تابع په  $[1, 3]$  کې متمادي او په  $(1, 3)$  کې د مشتق وړ ده، نو د متوسط قیمت له قضیې سره سم په  $(1, 3)$  کې یو  $x_0$  شته داسې چې:

$$f(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{36}{2} = 18$$

$$f'(x_0) = 6x^2 - 8 = 18 \Rightarrow x_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{26}{6}} \quad \text{د } C \text{ د پیدا کولو لپاره لرو:}$$

$$\text{څرنگه چې } x = \sqrt{\frac{26}{6}} \text{ په } (1, 3) \text{ کې گډون لري، نو } x_0 = \sqrt{\frac{13}{3}} \text{ دی.}$$

$$\text{او } x = -\sqrt{\frac{26}{6}} \text{ په } (1, 3) \text{ فاصله کې واقع نه ده، نو د قبول وړ نه ده.}$$

## پوښتنې

1- که چېرې د  $f(x) = \sqrt{x(4-1)}$  تابع د  $[0, 4]$  په انټروال کې راکړل شوي وي د  $x_0$  قیمت داسې پیدا کړئ چې د رول قضیه په پورتنۍ تابع کې صدق وکړي.

2- که د  $2x - \frac{1}{3}x^3 = f(x)$  تابع راکړل شوي وي د  $x_0$  قیمت د  $[0, 3]$  په فاصله کې داسې وټاکئ چې د رول قضیه په هغې کې صدق وکړي.

### 3- د هويټال قاعده (L'Hopital's Rule) مخامخ مساوات څه بيانوي؟

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$



#### فعاليت

- د  $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}$  د تابع لېمېټ په هغه صورت کې پيدا کړئ چې  $x \rightarrow 1$  ته تقرب وکړي.  
د پورتنۍ تابع د صورت او مخرچ مشتق پيدا او د تابع له لېمېټ سره يې پرتله کړئ.
- د  $f(x) = \frac{3x^4 - 3x^2 - 4x - 1}{2x^2 - 4x^3 + 2x^4}$  د تابع لېمېټ په هغه صورت کې پيدا کړئ چې  $x \rightarrow \infty$  ته تقرب وکړي.  
د پورتنۍ تابع د صورت او مخرچ مشتق پيدا او د تابع له لېمېټ سره يې پرتله کړئ.  
له پورتنۍ فعاليت څخه دا قاعده بيانو:

#### د هويټال قاعده:

که د  $f(x)$  او  $g(x)$  تابعگانې د  $(a, b)$  په انټروال کې تعريف او د مشتق وړ وي.  
که چېرې  $\frac{f(x)}{g(x)}$  د لېمېټ نسبت  $x \rightarrow a$  قيمت کې د  $\frac{0}{0}$  مبهم شکل او په  $x \rightarrow \infty$  کې د  $\frac{\infty}{\infty}$  شکل

وښيي په دې حالت کې د تابع د لېمېټ د پيدا کولو لپاره د  $\frac{f'(x)}{g'(x)}$  مشتق پيدا کوو او په هغه کې قيمتونه وضع کوو که بيا هم د تابع شکل مبهم وي مشتق نيولو ته ادامه ورکوو... تر څو د ابهام شکل ختم شي د مثال په ډول:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 + x - 10}{x^2 - 4} = \frac{2 \cdot 2^2 + 2 - 10}{2^2 - 4} = \frac{0}{0} = 0$$

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{4x + 1}{2x} = \frac{4 \cdot 2 + 1}{2 \cdot 2} = \frac{9}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2x+5)(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x+5}{x+2} = \frac{2 \cdot 2 + 5}{2 + 2} = \frac{9}{4}$$

يا

مثال : د لړپيښال له قاعدې څخه په گڼه اخيستي سره د لاندې توابعو لېمټونه پيدا کړئ.

1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \sin 2x}{x - \sin 2x}$

2)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^4 - 81}{x - 3}$

3)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 4x + 6}{7x^2 - 2x + 1}$

لومړۍ ځواب:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \sin 2x}{x - \sin 2x} = \frac{0 + \sin 2 \cdot 0}{0 - \sin 2 \cdot 0} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x + \sin 2x)'}{(x - \sin 2x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + 2 \cos 2x}{1 - 2 \cos 2x} = \frac{1 + 2}{1 - 2} = -3$$

دویم ځواب:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^4 - 81}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3^4 - 81}{3 - 3} = \frac{81 - 81}{3 - 3} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x^4 - 81)'}{(x - 3)'} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{4x^3}{1} = \frac{4 \cdot 3^3}{1} = 108$$

دریم ځواب:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 4x + 6}{7x^2 - 2x + 1} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(3x^2 - 4x + 6)'}{(7x^2 - 2x + 1)'} = \frac{6x - 4}{14x - 2} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(6x - 4)'}{(14x - 2)'} = \frac{6}{14} = \frac{3}{7}$$



پوښتني

د لړپيښال د قاعدې څخه په گڼه اخيستي سره لاندې لېمټونه پيدا کړئ.

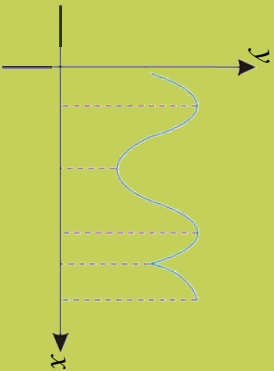
a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$

b)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5 - 1}{x^3 - 1}$

c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x^3}$

d)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5}{3x^3}$

**د بحراني ټکو تطبيق**  
 په مضافي شکل کې تر ټولو لوړ ټکی او تر ټولو ټيټ ټکی  
 وښيي او دا ټکی د څه په نامه يادېږي.



1- دوه عددونه پيدا کړئ چې مجموعه يې 20 او د ضرب حاصل يې لوی ممکن قيمت ولري.

**حل:** که لومړی عدد ته  $x$  وويل شي، نو دويم عدد  $20 - x$  دی او د ضرب حاصل يې د تابع په شکل داسې:  $f(x) = x(20 - x)$  ليکو، څرنگه چې د  $x$  عدد په  $[0, 20]$  انټروال کې تحول کوي، نو د تابع مطلق اعظمي قيمت په  $[0, 20]$  کې لټوو:

$$f(x) = 20x - x^2$$

$$f'(x) = 0$$

$$20 - 2x = 0$$

$$-2x = -20$$

$$x = 10$$

$$f(10) = 20 \cdot 10 - 10^2 = 200 - 100 = 100$$

$$f(0) = 20 \cdot 0 - 0^2 = 0$$

$$f(20) = 20 \cdot 20 - 20^2 = 400 - 400 = 0$$

ليدل کېږي چې  $(10, 100)$ ، د تابع اعظمي نقطه ده، نو مطلوب عددونه  $x_1 = 10$  او  $x_2 = 10$  چې د ضرب حاصل يې 100 دی.

2- د يوه خوځنده جسم د حرکت معادله د  $x = (t - 2)(t - 3)$  په بڼه راکړل شوې ده، د جسم متوسط سرعت د  $t_1 = 3$  او  $t_2 = 4$  د وخت په واکړه کې پيدا کړئ.  
**حل:** د منځني سرعت د تعريف په مرسته ليکلای شو چې:

$$\text{منځنی سرعت} = \frac{x_{(t_2)} - x_{(t_1)}}{t_2 - t_1} = \frac{x_{(4)} - x_{(3)}}{4 - 3} = \frac{2 - 0}{4 - 3} = 2$$

3- دکري د حجم او سطحي تر منځ منځني نسبت پيدا کړئ.

حل:

$$V(x) = \frac{4}{3}\pi x^3 \Rightarrow \frac{dV}{dx} = \frac{4}{3}\pi \cdot 3x^2 = 4\pi x^2$$

$$S(x) = 4\pi x^2 \Rightarrow \frac{dS}{dx} = 4\pi \cdot 2x = 8\pi x$$

$$\frac{dV}{ds} = \frac{4\pi x^2}{8\pi x} \Rightarrow \frac{dV}{ds} = \frac{1}{2}x$$

4- د سانتي گراد (C) او فارنهایت (F) د حرارت تر منځ  $(F - 32) \cdot \frac{5}{9} = C$  اړیکه شته، تاسې د (C) او (F) تر

منځ منځني نسبت وټاکئ.

حل: د منځني سرعت د تعريف  $(\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x})$  په مرسته ليکلاى شو:

$$\frac{\Delta C}{\Delta F} = \frac{C(F + \Delta F) - C(F)}{\Delta F} = \frac{\frac{5}{9}(F + \Delta F - 32) - \frac{5}{9}(F - 32)}{\Delta F} = \frac{5}{9}$$

5- يوه څمکه چې مستطلي شکل لري، محيط يې  $200m$  دی، کېدای شي اعظمي Maximum مساحت يې پيدا کړئ.

حل: په ورکړل شوي محيط سره کولای شو، ډېر مستطيلونه رسم کړو، ولي شرط دا دی چې هغه مستطيل زموږ مطلوب دی چې مساحت يې تر ټولو زيات وي، نو که د مستطيل اوږدوالی په  $x$  او سور يې په  $y$  وېښو، نو ليکلاى شو:

$$\text{محيط} = 2x + 2y = 200$$

$$\text{محيط} = x + y = 100 \Rightarrow y = 100 - x$$

$$\text{مساحت} = x \cdot y$$

$$S = x(100 - x) = 100x - x^2, \quad D_s = \mathbb{R}$$

$$x > 0, \quad y > 0 \Rightarrow 100 - x > 0 \Rightarrow x < 100$$

اوس د  $S = 100x - x^2$  په تابع کې  $0 < x < 100$  انټروال کې د تابع اعظمي مساحت داسې پيدا کوو:

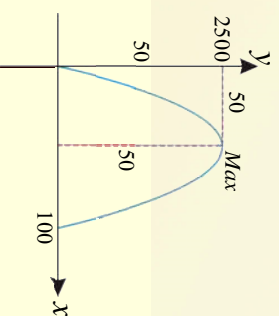
$$S' = 100 - 2x$$

$$S' = 0 \Rightarrow 100 - 2x = 0 \Rightarrow x = 50 \Rightarrow S_{(50)} = 2500$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} S(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} S(x) = 0$$

x	0	50	100
S'	+	0	-
S	↗	↖	↘
		2500	



په پایله کې له شکل څخه هم لیدل کېږي چې تر ټولو لوی مساحت هغه وخت لاسته راځي چې د مستطیل طول 50 واحد وي، نو مساحت 2500 واحد مربع کېږي.

6- که د دوو عددونو مجموعه 200 وي، هغه عددونه داسې وټاکئ چې د مربعانو مجموعه یې اصغری شي.

حل: که چېرې دا عددونه  $x$  او  $y$  وي، نو  $x + y = 200$  او که  $x$  ،  $T_{(x)}$  ،  $T_{(x)}$  فرض کړو، نو:

$$\begin{aligned} T_{(x)} &= x^2 + y^2 \\ &= x^2 + (200 - x)^2 \\ &= x^2 + x^2 - 400x + (200)^2 \\ &= 2x^2 - 400x + 40000 \end{aligned}$$

$$T'_{(x)} = 4x - 400$$

$$T'_{(x)} = 0$$

$$4x - 400 = 0$$

$$x = 100$$

په پایله کې ویلای شو چې د مربعانو تر ټولو کوچنی مجموعه عبارت دی له:  $T_{(100)} = 20000$

7- د  $A$  ټکی د  $y = \frac{2}{x}$  د منحنی له پاسه حرکت کوي، تر ټولو کوچنی انټروال د  $A$  د نقطې او د مختصاتو د مبدې ترمنځ لاسته راوړو.

حل: د  $y = \frac{2}{x}$  د تابع منحنی پر مخ د  $A$  د نقطې مختصات  $(x, \frac{2}{x})$  دي، نو:

$$\overline{OA} = \sqrt{x^2_{(A)} + y^2_{(A)}} = \sqrt{x^2 + \frac{4}{x^2}}$$

$$\overline{OA}^2 = x^2 + \frac{4}{x^2} = d^2 \Rightarrow d'_{(x)} = (x^2)' + (\frac{4}{x^2})' = 2x - \frac{8x}{x^4} = 2x - \frac{8}{x^3}$$

$$d'_{(x)} = \frac{2x^4 - 8}{x^3}$$

$$d'_{(x)} = 0$$

$$2x^4 = 8$$

$$x_1 = \sqrt{2} \quad , \quad x_2 = -\sqrt{2}$$

$$d_{\sqrt{2}} = (\sqrt{2})^2 + \frac{4}{(\sqrt{2})^2} = 2 + \frac{4}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

$$d_{-\sqrt{2}} = 4$$

په پایله کې تر ټولو کوچنی فاصله له مبدې څخه 2 واحد مربع ده.



8- یو مکعب مستطیل چې قاعده یې مربع ده، په پام کې نیسو، که د درېو وارو بعدونو مجموعه 24 وی، د مکعب تر ټولو لوی حجم پیدا کړئ.

حل: که د مکعب مستطیل د قاعدې ضلعي ته  $x$  او جگوالي ته یې  $y$  وویل شي، نو:

$$x + x + y = 24 \Rightarrow y = 24 - 2x$$

څرنگه چې  $0 \leq y \leq 12$ ، نو  $0 \leq x \leq 12$  کېږي او د مکعب مستطیل حجم عبارت دي له:

$$V = x^2 \cdot y \Rightarrow V = x^2(24 - 2x) = 24x^2 - 2x^3$$

$$V = 24x^2 - 2x^3$$

$$V'(x) = 48x - 6x^2$$

$$V'(x) = 0$$

$$48x - 6x^2 = 0$$

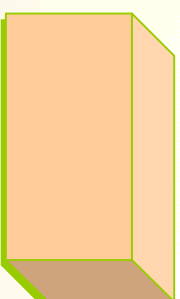
$$x(48 - 6x) = 0$$

$$x_1 = 0$$

$$48 - 6x = 0$$

$$-6x = -48$$

$$x = 8$$



$$V(0) = 24 \cdot 0^2 - 2 \cdot 0^3 = 0 - 0 = 0$$

$$V'(0) = 0$$

$$V(8) = 24 \cdot (8)^2 - 2 \cdot (8)^3 = 1536 - 1024 = 512$$

$$V(8) = 512$$

$$V(12) = 24 \cdot (12)^2 - 2 \cdot (12)^3 = 3456 - 3456 = 0$$

$$V(12) = 0$$

نو د مکعب مستطیل تر ټولو لوی حجم  $512 \text{ cm}^3$  دی.

## پوښتني

1-  $1 + x + x^2 + x^3 = y$  د تابع تحولات پیدا او منځني یې رسم کړئ.

2- دوه داسې عددونه پیدا کړئ چې د جمعي حاصل یې 20 او د ضرب حاصل یې تر ټولو لوی ممکن قیمت ولري.

3- که د اوسپني له یوې تختې څخه چې هره ضلعه یې  $1m$  طول لري یو سر خلاص بکس جوړېږي د هغه له څلورو کنجونو څخه څلور مساوي مربعگاني پرې کړئ او بیا هغه قاط کړئ کو چني مربعگاني په کومه اندازه پرې شي چې نوموړی بکس ممکن اعظمي حجم ولري.

4- د  $x^2 = y$  گراف ته ډیره نژدې نقطه له  $A(0, 3)$  نقطې سره پیدا کړئ.

## د څپرکي مهم ټکي

- د  $f(x)$  يوه تابع هغه وخت متزايدة بلل کېږي، چې د  $[a, b]$  په انټروال کې پيوسته او په  $(a, b)$  خلاص انټروال کې د مشتق وړ وي.
- د  $f(x)$  يوه تابع هغه وخت متناقصه بلل کېږي، چې د  $[a, b]$  په انټروال کې متصادي او په  $(a, b)$  خلاص انټروال کې د مشتق وړ وي.
- د تابع له تزايد څخه مطلب دا دی چې د  $x$  د متحول په زياتېدو سره د تابع قيمت زيات او د تابع له تناقص څخه مطلب دا دی چې د  $x$  د متحول په زياتېدو سره د تابع قيمت کم شي.
- په يوه تابع کې تر ټولو جگې نقطې ته موضعي اعظمي (Local Maximum) او تر ټولو ټيټې نقطې ته موضعي اصغري (Local Minimum) وايي، د  $x$  هغه قيمتونه چې د هغوی لپاره تابع يا اعظمي او يا اصغري قيمتونه اخلي د Extreme په نامه يادېږي.
- مطلق Maximum: د  $(x_0, f(x_0))$  نقطه مطلقه اعظمي بلل کېږي، که چېرې د  $f(x)$  د تعريف په ساحه کې د هر  $x$  لپاره  $f(x) \leq f(x_0)$  وي، نو  $(x_0, f(x_0))$  ته مطلقه اعظمي وايي.
- مطلق Minimum: د  $(x_0, f(x_0))$  نقطه مطلقه اصغري بلل کېږي، که چېرې  $f(x) \geq f(x_0)$  د تعريف په ساحه کې د هر  $x$  لپاره  $f(x) \geq f(x_0)$  وي، نو  $(x_0, f(x_0))$  ته مطلقه اصغري وايي.
- د  $f(x) = \gamma$  د تابع منحنی په يوه انټروال کې محذب بلل کېږي، که چېرې په دې انټروال کې په منحنی مماس رسم شي، نو مماس د منحنی پورته خوا ته پروت وي او د تابع دوم مشتق منفي په لاس راځي.
- د  $f(x) = \gamma$  د تابع منحنی په يوه انټروال کې مقعر بلل کېږي، که چېرې په نوموړي انټروال کې په منحنی مماس رسم شي، نو مماس د منحنی ښکته خوا پروت وي، او د تابع دوم مشتق مثبت په لاس راځي.
- هغه ټکي چې د تابع له مقعريت څخه محابيت ته او يا برعکس خپل لوری بدلوي، د انعطاف (Inflection) ټکي بلل کېږي.
- هغه نابېلگانې چې د  $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$  بڼه ولري، د هوموگرافیک نابېلگانو په نامه يادېږي، په دې شرط چې  $c \neq 0$  وي.

- که چیري د  $f(x)$  تابع د  $a \leq x \leq b$  په انټروال کي متمادي او د  $a < x < b$  په انټروال کي د مشتق وړ او  $f(b) = f(a)$  وي، نو لږترلږه د  $x_0$  یو ټکی په  $a < x < b$  په انټروال کي شته چي  $0 = f'(x_0)$  دی، دا قضیه د رول د قضیې په نامه یادېږي.

- که چیري  $f(x)$  په  $[a, b]$  فاصله کي متمادي او د  $(a, b)$  په خلاصه فاصله کي متمادي او د مشتق وړ وي د  $x_0$  یو عدد د  $a$  او  $b$  ترمنځ شته چي  $f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$  دی دا د متوسط قیمت قضیه بلل کېږي.

### د هویټال قاعده:

- که د  $f(x)$  او  $g(x)$  تابعگاني د  $(a, b)$  په انټروال کي تعریف وړ او د مشتق وړ وي.
- که چیري  $\frac{f(x)}{g(x)}$  د لېمیت نسبت کله چي  $a \rightarrow x$  د  $\frac{0}{0}$  مهم شکل او په هغه صورت کي چي  $x \rightarrow \infty$  کي د  $\frac{\infty}{\infty}$  شکل ونیسي په دې حالت کي د تابع د لېمیت د پیدا کولو لپاره د  $\frac{f'(x)}{g'(x)}$  مشتق پیدا کړو او په هغه کي قیمتونه وضع کړو که بیا هم د تابع شکل مهم وي مشتق نیولو ته دوام ورکړو... ترڅو د ابهام شکل ختم شي.

## د دریم څپر کې پوښتنې

لاندي پوښتنو ته څلور ځوابونه ورکړل شوي دي، سم ځواب په نښه کړئ:

1- که یوه تابع په  $[0, b]$  انټروال کې متمادی او د مشتق وړ وي، نو هغه وخت متراید ده چې :

a)  $f'(x) = 0$       b)  $f'(x) < 0$       c)  $f'(x) > 0$       d)  $f''(x) \geq 0$

2- په یوه تابع کې تر ټولو جگې نقطې ته:

a) Minimum      b) Inflection      c) Maximum      d) اوایي

3- د  $f(x) = \frac{x+1}{x^2+2x}$  په تابع کې د Extreme ټکي عبارت دی له:

a) دوه ټکي      b) یو ټکي      c) درې ټکي      d) نه لري

4- هغه ټکي چې تابع له مقعریت څخه محدبیت ته بدلوی:

a) هیڅ یو      b) اصغری ټکي دی      c) دانعطاف ټکي دی      d) داعظمي ټکي دی

5- د  $f(x) = ax^2 + bx + c$  د تابع د تعریف ساحه عبارت له:

a)  $(-\infty, +\infty)$       b)  $(-\infty, 0)$       c)  $(0, -\infty)$       d) هیڅ یو

6- د  $f(x) = \frac{2x-1}{x+2}$  تابع عمودی مجانب عبارت دی له:

a)  $x = 1$       b)  $x = 2$       c)  $x = -1$       d)  $x = -2$

7- د هوموگرافیک ټاک تابع عمودی مجانب عبارت دی له:

a)  $y = \frac{a}{c}$       b)  $x = -\frac{d}{c}$       c)  $y = \frac{c}{a}$       d)  $y = -\frac{c}{d}$

8- د  $g(x) = \frac{4x^2 - 6x}{x^2 - 4}$  تابع افقي مجانب عبارت دی له:

a) 4      b) 6      c) -6      d) -4

9- لاندي کومه الجبري اړیکه حقیقت لري:

a)  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$       b)  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f'(x)$       c)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$       d) هیڅ یو

لاندي پوڀڻي ڄواب ڪري:

1. د  $f(x) = x^2 - x$  د تابع د منجني ميل د  $P(3, 0)$  په ٽڪي ڪي پيدا ڪري.
2. د  $f(x) = -x^2$  په تابع ڪي د  $[3, 4]$  په انٽروال ڪي د منجني د بدلون ٽڪي پيدا ڪري.
3. د نيوتن د خارج قسمت په مرسته د لانڊيو تابعگانو مشتق پيدا ڪري.
  - 1)  $f(x) = 2x$
  - 2)  $f(x) = 3x^2 - 1$
  - 3)  $f(x) = \sqrt{2}x$
4. د لانڊيو تابعگانو په ورڪرل شو نقطو ڪي مشتق پيدا ڪري.
  - 1)  $f(x) = 2x - 1$  ،  $x_0 = -1$
  - 2)  $f(x) = x^2$  ،  $x_0 = 2$
5. د لانڊي تابعگانو د مشتق تابع پيدا ڪري.
  - 1)  $f(x) = 2x - 4x^2$
  - 2)  $f(x) = 3x^3 - 1$
  - 3)  $f(x) = \sqrt{2}x$
6. په ورڪرل شو ٽڪو ڪي د تابعگانو مشتق محاسبه ڪري.
  - 1)  $f(x) = 7x^2 - 3x$  ،  $x_0 = -1$
  - 2)  $f(x) = 6x^2 - 2x - 1$  ،  $x_0 = \frac{1}{2}$
7. د  $f(x) = 3x^5 - 4x^2 - 3x$  د تابع څلور ڇلي مشتق ونيسي او د هني گراف رسم ڪري.
8. د  $x^2y + 6y^3 = x - 3$  د لانڊي تابع ڇلي مشتق پيدا ڪري.
9. د لانڊي تابعگانو مشتق پيدا ڪري.
  - 1)  $f(x) = x^3 \sec x$
  - 2)  $f(x) = \sin(3x - 1)$
  - 3)  $f(x) = \cos^2 2x$
10. کوم مثبت عدد هي ڇي د خپل معڪوس سره جمع شي د جمعي حاصل يي تر ٿولو ڪو چئي شي؟
  - 1.1  $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$  د تابع گراف رسم ڪري.
  - 1.2  $f(x) = \frac{4x^2}{x^2 + 1}$  د تابع گراف رسم ڪري.
  - 1.3  $f(x) = \sin x$  د مثلثي تابع گراف رسم ڪري.
  - 1.4  $f(x) = \tan x$  د مثلثي تابع گراف رسم ڪري.

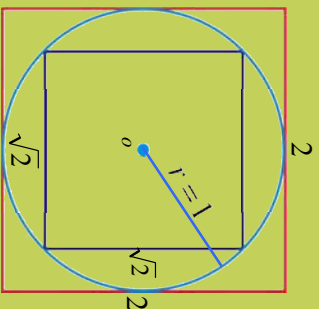
# خلوړم څپرکي انډیګرال











## د ریمان مجموعه

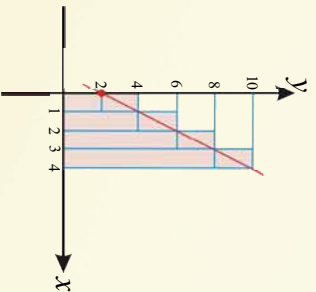
### Riemann's Sum

په مخامخ شکل کې که د دایرې شعاع یو واحد ده، د دایرې د محیطي او محیطي څلور ضلعي گانو مساحت حساب کړئ او وروایاست چې ددې دایرې مساحت له مخامخ څلور ضلعي گانو سره څه اړیکه لري؟



### فعالیت

- هغه مساحت چې د  $x$  د محور او  $2 + 2x$  د تابع د گراف په منځ کې د  $[0,4]$  په انټروال کې محصور شوی دی، خط خط کړئ.
- د  $2 + 2x = y$  تابع په گراف کې د څلورو لاندینو او پورتنیو مستطیلونو مساحتونه چې په شکل کې ښودل شوی دی پیدا کړئ.

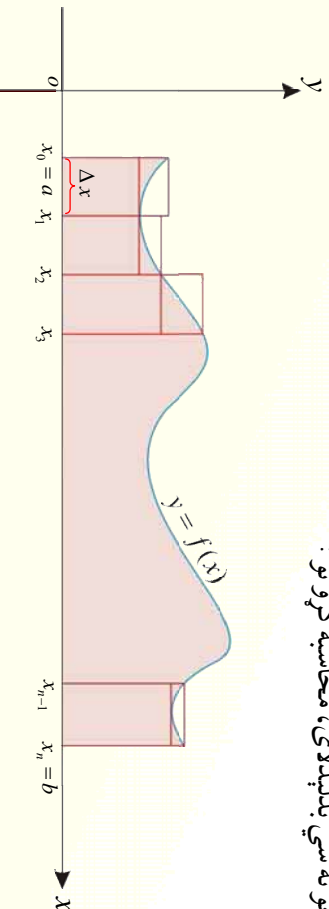


- د پورتنیو مستطیلونو د مساحت مجموعه، او د لاندینو مستطیلونو د مساحت مجموعه د تابع د گراف د لاندینو مساحت سره په ورکړ شوي واټن کې څه اړیکه لري؟
- د پورته په څېر فعالیت د اتو مساوي لاندینو مستطیلونو او د اتو مساوي پورتنیو مستطیلونو لپاره تکرار کړئ او پایله یې د گراف د لاندې مساحت سره په نوموړي واټن کې پرتله کړئ.
- که چېرې د پورتنیو مستطیلونو د مساحتونو مجموعه او لاندینو مستطیلونو<sup>1</sup> د جوړولو لپاره د تابع په گراف کې د فاصلې ویش زیات کړو د پورتنیو او لاندینو مستطیلونو د مساحتونو مجموعه کوم قیمت ته نږدې کېږي.

<sup>1</sup>- که چېرې د  $x$  په محور د فاصلو تقسیمات زیات کړو او یا که چېرې په یوه فاصله کې د مستطیلونو شمیر زیات شي په هم هغه اندازه د گراف لاندیني مساحت د دقیق په لاس راځي.

له پورتني فعالیت څخه لاندې تعريف لاسته راځي:

**تعريف:** فرضو چې د  $y = f(x)$  تابع د  $[a, b]$  په تړلي انټروال کې ممتدې او تعريف شوی وي که چېرې د ناحيې مساحت چې د  $x$  د محور او  $y = f(x)$  د تابع د گراف ترمنځ واقع دی چې په هندسي شکلونو نه شي بللېدلای، محاسبه کړو نو:



د  $[a, b]$  تړلي انټروال چې په  $n$  مستطیلونو وېشو، څرنگه چې د هر مستطیل عرض د  $(\Delta x = \frac{b-a}{n})$  رابطې څخه، په لاس راځي او د مستطیلونو طول عبارت دی تابع قیمت په هماغه نقطه کې دی. او د مستطیلونو د هر انټروال اوږدوالی د  $1, 2, 3, \dots, n$  لپاره په لاندې ډول دی:

$$x_0 = a, x_1 = a + \Delta x, x_2 = a + 2\Delta x, \dots, x_i = a + i\Delta x, \dots, x_n = b$$

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{i-1}, x_i], \dots, [x_{n-1}, x_n]$$

که په شکل کې د لاندینيو مستطیلونو مساحت په  $\Delta x f(x_{i-1})$  او د پورتنيو مستطیلونو مساحت په  $\Delta x f(x_i)$  وښودل شي، نو لرو چې:

$$\Delta x f(x_0) + \Delta x f(x_1) + \Delta x f(x_2) + \dots + \Delta x f(x_{n-1}) = \sum_{i=1}^n \Delta x f(x_{i-1})$$

$$\Delta x f(x_1) + \Delta x f(x_2) + \dots + \Delta x f(x_n) = \sum_{i=1}^n \Delta x f(x_i)$$

$$d = \Delta x f(x_1) + \Delta x f(x_2) + \dots + \Delta x f(x_n) = \sum_{i=1}^n \Delta x f(x_i)$$

که چېرې محصور شوی مساحت په  $A$  وښوئ نو:  $\sum_{i=1}^n \Delta x f(x_i) < A < \sum_{i=1}^n \Delta x f(x_{i-1})$  که چېرې د رابطې له اطراف څخه لیمېټ ونیسو نو لرو چې:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \Delta x f(x_{i-1}) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} A \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \Delta x f(x_i)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x = A$$

د ساندهو پوچ د قضیې پر بنسټ لیکلای شو؛ چې:

نو  $\sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x$  ته د ریمان مجموع او دې مجموعې لېمیت یعنی  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x$  ته د ریمان د

مجموعې لېمیت وایي.

**لومړی مثال:** د  $[0, 2]$  انټروال په څلور مساوي برخو ووېشي؛ د  $y = x^2 + 1$  منحنی، او  $x$  محور تر منځ مساحت پیدا کړئ.

**حل:** که چېرې  $[0, 2]$  انټروال په څلورو مساوي برخو ووېشو؛ نو د مستطیلونو عرض داسې په لاس راځي:

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{2-0}{4} = \frac{1}{2}$$

د دې مستطیلونو د هر انټروال اوږدوالی عبارت دی له:

$$x_0 = a = 0, \quad x_1 = a + \Delta x = \frac{1}{2}$$

$$x_2 = a + 2\Delta x = 1, \quad x_3 = a + 3\Delta x = \frac{3}{2}$$

$$x_4 = 2$$

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], [x_2, x_3], \dots, [x_{n-1}, x_n]$$

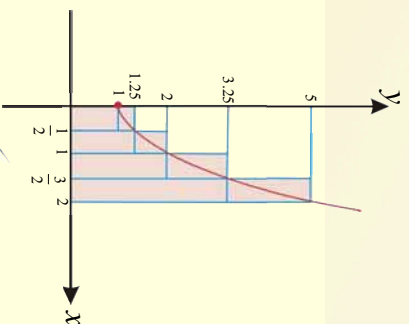
$$\left[0, \frac{1}{2}\right], \left[\frac{1}{2}, 1\right], \left[1, \frac{3}{2}\right], \left[\frac{3}{2}, 2\right]$$

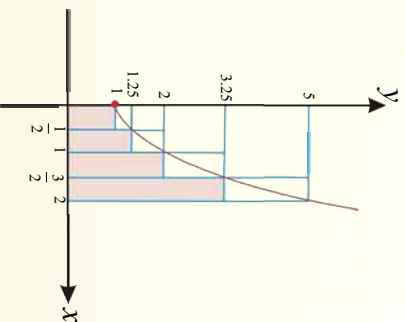
د تابع د گراف د رسمولو لپاره تابع ته قیمتونه اېږدو او د مستطیلونو طول لاس ته راځي:

$$f(x) = x^2 + 1, \quad f(0) = 1$$

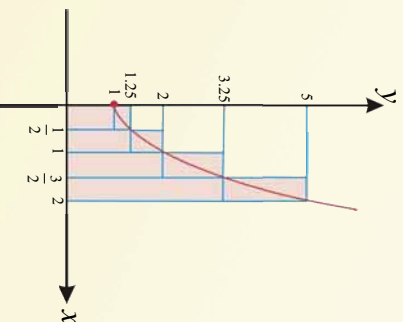
$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 1.25, \quad f(1) = 2$$

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = 3.25, \quad f(2) = 5$$





$$\text{دویم مجموعہ لاندیوں مستطیلوں د مساحتوں مجموعہ} = 1 \times \frac{1}{2} + 1.25 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{2} + 3.25 \times \frac{1}{2} = 3.75$$



$$\text{د پورے مستطیلوں د مساحتوں مجموعہ} = 1.25 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{2} + 3.25 \times \frac{1}{2} + 5 \times \frac{1}{2} = 5.75$$

$$3.75 < A < 5.75$$

**دویم مثال :** د  $f(x) = 1 + x$  تابع د ریمان مجموعی لمبیت پہ [1, 10] انٹروال کی پیدا کریں.

حل:

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{10-1}{n} = \frac{9}{n}$$

$$x_i = a + \Delta x i = 1 + \left[\frac{9}{n}\right] i, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \sum_{i=1}^n (1+x_i) \Delta x \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \Delta x \sum_{i=1}^n (1+x_i) \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \Delta x \sum_{i=1}^n 1 + \Delta x \sum_{i=1}^n x_i \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{9}{n} \sum_{i=1}^n 1 + \Delta x \sum_{i=1}^n (a + \Delta x i) \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{9}{n} \sum_{i=1}^n 1 + \frac{9}{n} \sum_{i=1}^n (1 + \frac{9}{n} i) \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{9}{n} \sum_{i=1}^n 1 + \frac{9}{n} \left( \sum_{i=1}^n 1 + \frac{9}{n} \sum_{i=1}^n i \right) \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{9}{n} \cdot n + \frac{9}{n} \cdot \frac{n(n+1)}{2} \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ 9 + \frac{9}{n} \left( n + \frac{9n^2 + 9n}{2n} \right) \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ 9 + \frac{9}{n} \left( \frac{2n^2 + 9n^2 + 9n}{2n} \right) \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ 9 + \frac{99n^2 + 81n}{2n^2} \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ 9 + \frac{99}{2n} + \frac{81}{2n} \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ 9 + \frac{99 + 81}{2n} \right] \\ &= 9 + \frac{99}{2} = 58.5 \end{aligned}$$

باید به یاد ورتو:

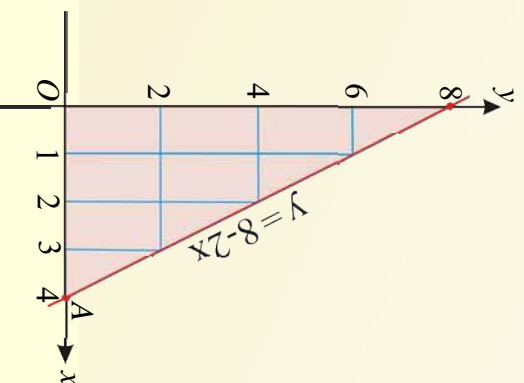
$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n c &= cn \\ \sum_{i=1}^n i &= \frac{n(n+1)}{2} \\ \sum_{i=1}^n i^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \end{aligned}$$

1. د  $[0,3]$  انټروال په بشپړو مساوي برخو له وېشلو څخه وروسته د  $y = 3x$  مستقیم خط او د  $x$  د محور تر منځ مساحت محاسبه کړئ.

2. د  $\Delta x = 0.5$  قیمت لپاره او د لاندې جدول د قیمتونو په پام کې نیولو سره گراف رسم، د لاندینو مستطیلونو د مساحتونو مجموعه او د پورتنیو مستطیلونو د مساحتونو مجموعه پیدا کړئ.

x	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3
y	14	20	26	32	38	44	50

3. د  $y = 8 - 2x$  تابع گراف د لاندې  $OA$  مثلث مساحت د  $[0, 4]$  په انټروال کې د ریمان د مجموعې د لېمیت څخه په ګڼه اخیستې سره پیدا کړئ.





## د انتیگرال مفهوم

### Concept of Integral

خرنگه چې پمهرپړۍ د شکلونو لاندیني او پورتنی مساحتونه د انتیگرال په واسطه محاسبه کېږي.

آیا کولای شو چې د مخامخ شکل پورتنی مساحت په لاس راوړو.

د هغې تابع انتیگرال چې مشتق یې معین وي او یا په بل عبارت د ریمان مجموعی لېمیت ته انتیگرال وایي (  $\int$  ) د انتیگرال علامه ده، د *sum* د کلیمې یا د ریمان د مجموعې د  $\Delta$  توري غزیدلی حالت دی،

لکه:  $\int f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x$  چې دلته  $f(x)$  تابع او  $dx$  د  $f(x)$  تابع د انتیگرال متحول نظر

$x$  ته دی.

انتیگرالونه عموماً په دوه ډوله دي. معین او غیر معین انتیگرالونه، هغه انتیگرالونه چې په ترتیب سره یې تر څېړنې لاندې نیسو:

### 1- غیر معین انتیگرال Indefinite Integral



فعالیت

- که د  $1 - 2x^2 = F(x)$  تابع وي له دې تابع څخه مشتق ونیسئ.
  - ددې تابع له مشتق څخه انتیگرال ونیسئ.
  - په لاس راغلی انتیگرال له لومړنۍ تابع سره برتله کړئ او وولئ چې  $(-1)$  په نوموړي تابع کې د څه په نامه یادېږي.
  - که په پورتنی تابع کې  $(-1)$  په  $C$  ونوموو د  $f(x)$  تابع له څه سره مساوي ده؟
  - پورتنۍ فعالیت د  $1 + x^6 = F(x)$  تابع لپاره تکرار کړئ او وولئ چې  $f(x)$  له څه سره مساوي ده. له پورتنی فعالیت څخه لاندې تعریف په لاس راځي:
- تعریف:** که چېرې د  $f(x)$  تابع د  $[a, b]$  په تړلی انټروال کې تعریف او  $F(x)$  یوه لومړنۍ تابع وي، د  $C + F(x)$  نابوگانو سټ په داسې حال کې چې  $C$  یو ثابت عدد وي د  $f(x)$  تابع غیر معین انتیگرال په نامه یادېږي او داسې لیکل کېږي:
- $$\int f(x) dx = F(x) + C$$



لومړی مثال:  $\int x dx$  پیدا کړئ.

حل:  $\int x dx = \frac{x^{1+1}}{1+1} + C = \frac{x^2}{2} + C$

دویم مثال:  $\int \frac{1}{\sqrt{x^3}} dx$  حساب کړئ.

حل:  $\int \frac{1}{\sqrt{x^3}} dx = \int x^{-\frac{3}{2}} dx = \frac{x^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1} + C = \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} + C = -2\sqrt{x} + C$

درېم مثال:  $\int x^{\frac{3}{2}} dx$  پیدا کړئ.

حل:  $\int x^{\frac{3}{2}} dx = \frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} + C = \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + C = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + C = \frac{2}{5}\sqrt{x^5} + C$



پوښتنې

لاندې اړیکو الریزه محاسبه کړئ:

a)  $\int \sqrt[3]{x^3} dx$

d)  $\int \frac{x^2}{\sqrt[4]{x^2}} dx$

b)  $\int \frac{1}{x^4} dx$

e)  $\int \sqrt[8]{x^4} \cdot x dx$

c)  $\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx$

$$\left. \begin{aligned} \int dx \\ \int [f(x) \pm g(x)] dx \\ \int [f(x) \cdot g(x)] dx \\ \int \frac{f(x)}{g(x)} dx, \quad g(x) \neq 0 \end{aligned} \right\} = ?$$

### Properties of indefinite integral

تاسې د لمبیت او مشتق خواص مخکې مطالعه کړي؟ آیا کیدای شي چې ورته خواص په غیر معین انټیگرال کې هم وي؟



فعالیت

د مشتقونو د خواصو څخه په کار اخیستنې د لاندې تابعگانو مشتق پیدا کړئ:

$$f(x) = 3x^4$$

$$f(x) = 2x^3 - \frac{1}{x^2}$$

$$f(x) = \sin x + \cos x$$

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

له پورتنۍ فعالیت څخه لاندې پایلې په لاس راوړو:

خړنگه چې د تابعگانو د مشتق د پیدا کولو لپاره له ځانگړو قوانینو څخه گټه اخیستل کېږي، غیر معین انټیگرالونه هم د داسې خواصو لرونکي دي چې هغه پرته له ثبوت څخه قبلوو:

$$-1 \text{ که یو ثابت عدد وي، نو لرو چې: } \int dx = x + C$$

مثال: د  $\int 5dx$  انټگرال پیدا کړئ.

$$\text{حل: } \int 5dx = 5 \int dx = 5x + C$$

$$-2 \text{ که چیرې } n \neq -1 \text{ وي، نو: } \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

مثال د:  $\int x^4 dx$  انتیگرال پیدا کری.

حل:  $\int x^4 dx = \frac{x^{4+1}}{4+1} + C = \frac{1}{5}x^5 + C$

3- کہ چیری  $a$  یو ثابت عدد او  $f(x)$  تابع وی، نو:

$$\int a f(x) dx = a \int f(x) dx$$

مثال د:  $\int 2x^2 dx$  انتیگرال محاسبه کری.

حل:  $\int 2x^2 dx = 2 \int x^2 dx = 2 \frac{x^3}{3} + C = \frac{2}{3}x^3 + C$

4- کہ چیری  $f(x)$  او  $g(x)$  دوی تابعگانی وی په دې صورت کې د تابعگانو د جمع او تفریق د حاصل انتیگرال مساوی دی په:

مثالونه:  
 $\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$

a)  $\int (2x^2 + 3) dx = \int 2x^2 dx + \int 3 dx = \frac{2x^3}{3} + 3x + C$

b)  $\int (8 - 2x) dx = 8 \int dx - 2 \int x dx = 8x - x^2 + C$

5- کہ چیری دتابعگانو ترادف تر انتیگرال لاندې وی، په دې صورت کې د دوی انتیگرال مساوی دی په: 0:

$$\int [f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)] dx = \int f_1(x) dx + \int f_2(x) dx + \dots + \int f_n(x) dx$$

مثال:

$$\begin{aligned} \int [x^3 - 6x^2 + 9x + 1] dx &= \int x^3 dx - \int 6x^2 dx + \int 9x dx + \int dx \\ &= \frac{x^4}{4} - \frac{6x^3}{3} + \frac{9x^2}{2} + x + C \end{aligned}$$

6- که  $f(x)$  او  $g(x)$  دوي تابعگانې وي، په دې حالت کې د تابعگانو د ضرب د حاصل انټيگرال مساوی نه دی د انټيگرالونو د ضرب له حاصل سره په جلا توګه، یعنې:

$$\int [f(x) \cdot g(x)] dx \neq \int f(x) dx \cdot \int g(x) dx$$

مثال: که چېرې  $f(x) = x + 1$  او  $g(x) = x - 2$  وي، نو:

**حل الف:** لومړی په تابع گانو د ضرب عملیه تطبیق کوو او وروسته یې انټيگرال په لاس راوړو:

$$\begin{aligned} \int [f(x) \cdot g(x)] dx &= \int [(x+1)(x-2)] dx = \int (x^2 - 2x + x - 2) dx \\ &= \int (x^2 - x - 2) dx \\ &= \int x^2 dx - \int x dx - \int 2 dx \\ &= \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x + C \end{aligned}$$

**حل ب:** اوس د هرې تابع انټيگرال بیل بیل محاسبه کوو او وروسته یې سره ضربوو په لاس راځي قیمتونه سره پرتله کوو.

$$\begin{aligned} \int f(x) dx \cdot \int g(x) dx &= \int (x+1) dx \cdot \int (x-2) dx = (\int x dx + \int dx) (\int x dx - \int 2 dx) \\ &= \left(\frac{x^2}{2} + x + C\right) \left(\frac{x^2}{2} - 2x + C\right) = \left(\frac{x^2}{2} + x\right) \left(\frac{x^2}{2} - 2x\right) + C \\ &\Rightarrow \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x + C \neq \left(\frac{x^2}{2} + x\right) (-2x) + C \end{aligned}$$

په پایله کې څرګنده شوه، چې نوموړی مساوات حقیقت نه لري.

7- که چېرې  $f(x)$  او  $g(x)$  دوه تابعگانې وي په دې صورت کې د دواړو د تقسیم د حاصل انټيگرال مساوی نه دی د هرې تابع د انټيگرال له حاصل تقسیم سره، یعنې:

$$\int \frac{f(x)}{g(x)} dx \neq \frac{\int f(x) dx}{\int g(x) dx}$$

مثال: که چېرې  $f(x) = x^2 + 2x$  او  $g(x) = x$  وي، نو لرو:

**د الف جزء حل:** لومړی د تابع گانو د تقسیم د حاصل انټيگرال په لاس راوړو.

$$\begin{aligned} \int [f(x) \cdot g(x)] dx &= \int [(x+1)(x-2)] dx = \int (x^2 - 2x + x - 2) dx \\ &= \int (x^2 - x - 2) dx \\ &= \int x^2 dx - \int x dx - \int 2 dx \\ &= \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x + C \end{aligned}$$

د ب جزه حل : اوس د صورت او مخخ د تابعگانو انتيگرالونه بيل بيل په لاس راوړو او وروسته يې سره پرتله کوو.

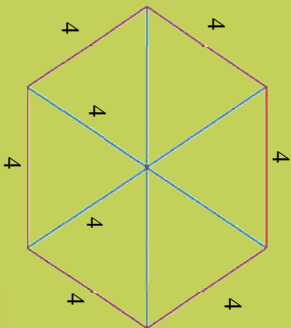
$$\begin{aligned}\int f(x) dx \cdot \int g(x) dx &= \int (x+1) dx \cdot \int (x-2) dx = \int x dx + \int dx)(\int x dx - \int 2 dx) \\ &= \left(\frac{x^2}{2} + x + C\right)\left(\frac{x^2}{2} - 2x + C\right) = \left(\frac{x^2}{2} + x\right)\left(\frac{x^2}{2} - 2x\right) + C \\ &\Rightarrow \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x + C \neq \left(\frac{x^2}{2} + x\right)\left(\frac{x^2}{2} - 2x\right) + C\end{aligned}$$

په پايله کې څرگنده شوه چې مساوات حقيقت نه لری.



د انتيگرال د خاصيتونو څخه په گڼه اخیستې سره لاندې انتيگرالونه محاسبه کړئ:

- a)  $\int -17 dx = ?$
- b)  $\int \frac{(1+x)^2}{1+x} dx = ?$
- c)  $\int 2x^4 dx = ?$
- d)  $\int \frac{1}{x^5} dx = ?$
- e)  $\int (2x^2 + 4x^3 - 5x + 9) dx = ?$
- f)  $\int (2x + 3)^6 dx = ?$
- g)  $\int \frac{x^3 + 2x^2}{x^2} dx = ?$
- h)  $\int (2 + x) dx = ?$



**معین انٹیگرال**  
**Definite Integral**  
 د شیر ضلعي ذئنه مثلثونو د مساحتونو مجموعه پیدا او د شیر ضلعي له مساحت سره ئي پرتله کری.



- د  $f(x) = 2x$  په انټروال کې د  $[2, 5]$  په انټروال کې د  $n = 5$  لپاره رسم کری او د گراف لاندینی مساحت پیدا کری
- په شکل کې د گراف لاندینی مساحت د کومو دوو عددونو ترمنځ پروت دی.

د پورتنی فعالیت پایله داسي بیانو:

**تعریف:** که چیرې د  $f(x)$  تابع په  $[a, b]$  انټروال کې ממادي وی نو د  $f(x)$  تابع د ریمان مجموعي لمبیت ته کله چې  $n$  بې نهایت ته نږدی شی او د فرعي انټروالونو  $(\Delta x)$  لوی اوزدوالی صفر ته نږدی شي، د  $f(x)$  تابع له  $x = a$  څخه تر  $x = b$  پورې د معین انټگرال په نوم یادېږي، یعنی:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x = \int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

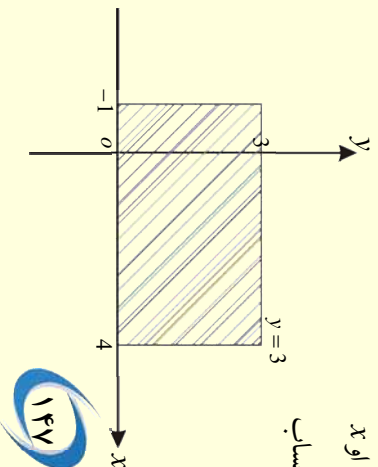
چې  $a$  ته د انټگرال لاندینی سرحد او  $b$  ته د انټگرال پورتنی سرحد وایي.

**لومړی مثال:** د  $\int_1^3 x^2 dx$  ټاکلي انټگرال قیمت پیدا کری.

**حل:** لومړی د  $F(x)$  لومړنی تابع پیدا کوو او بیا د مطلوب انټگرال قیمت ټاکو:

$$\int_1^3 x^2 dx = \left[ \frac{x^3}{3} \right]_1^3 = \frac{3^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{27-1}{3} = \frac{26}{3}$$

**دویم مثال:** هغه مساحت چې د  $y = 3$  خط او  $x$  محور ترمنځ په  $[-1, 4]$  انټروال کې محصور دی حساب کری.



حل: د  $\int_{-1}^4 3 dx$  معین انتگرال د یوه مستطیل مساحت راښيي چې په تیر شکل کې لیدل کېږي.

ددې مستطیل مساحت د مستطیل د عرض او طول د ضرب له حاصل سره مساوي دی.

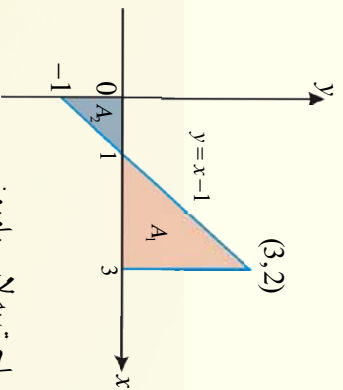
$$3 \cdot 5 = 15$$

د انتگرال څخه په ګټه اخیستې سره د مستطیل مساحت په لاندې ډول محاسبه کوو.

$$\int_{-1}^4 3 dx = [3x]_{-1}^4 = 3[4 - (-1)] = 15$$

**درېم مثال:** هغه مساحت چې د  $y = x - 1$  مستقیم خط او  $x$  محور ترمنځ په  $[0, 3]$  انټروال کې محصور دی په لاس راوړئ.

حل:



له شکل څخه په ګټه اخیستې سره لومړی د ښي خوا د لوی مثلث مساحت په لاس راوړو:

$$A_1 = \frac{1}{2}(2 \cdot 2) = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2$$

$$A_2 = \frac{1}{2}[1(-1)] = \frac{1}{2}(-1) = -\frac{1}{2}$$

د کوچني مثلث مساحت عبارت دی له:

$$A_1 + A_2 = 2 - \frac{1}{2} = 1.5$$

د  $A_1$  او  $A_2$  د مساحتونو مجموعه عبارت ده له:

$$\int_0^3 (x-1) dx = \left[ \frac{x^2}{2} - x \right]_0^3 = \left[ \frac{3^2}{2} - 3 \right] - 0 = \frac{9}{2} - 3 = 1.5$$

په پایله کې د نوموړي انتگرال قیمت عبارت دی له: 1.5



پوښتنې

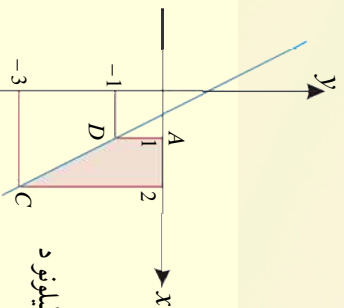
1. د مخامخ شکل څخه په کار اخیستې سره هغه مساحت چې د

$y = -2x + 1$  مستقیم خط او د  $x$  د محور ترمنځ محصور دی په لاس

راوړئ.

2. د  $f(x) = x^2$  تابع د لاندینيو مستطیلونو د مساحت مجموعه او پورتنيو مستطیلونو د

مساحت مجموعه په  $[0, 1]$  انټروال کې د  $n = 4$  پارو په لاس راوړئ.





$$\left. \begin{aligned} \int_a^b c \, dx \\ \int_a^b [f(x) \pm g(x)] \, dx \\ \int_a^b f(x) \, dx \end{aligned} \right\} = ?$$

## د معین انٹیگرال خواص

### Properties of definite integral

آیا کولای شو چې د غیر معین انٹیگرال د ځانګړونو څخه په ګڼه اخیستنې سره مخامخ اړیکې پوره کړو.



• د  $\sum_{i=1}^4 3^2$  مجموعه حساب کړئ.

• د  $\int_a^b x \, dx$  د انٹیگرال قیمت د  $[-1, 1]$  په انټروال کې پیدا کړئ.

• د  $\int_0^2 (1 + 3x) \, dx$  ټاکلی انٹیگرال محاسبه کړئ.

د پورتنۍ فعالیت پایله داسې بیانوو:

د ځینو انټیګرالونو محاسبه د قیمت په وضع کول سره امکان لري او ځینې یې امکان نه لري، دې ته اړتیا پیدا کېږي، ترڅو ټاکلې انټیګرال ثبوت کړو.

1. د ثابتې تابع انټیګرال د  $[a, b]$  په انټروال کې یعنې  $\int_a^b C \, dx$  عبارت دی، له:

$$\int_a^b C \, dx = C \int_a^b dx = C[x]_a^b = C(b-a)$$

**ثبوت:** د  $[a, b]$  انټروال په  $n$  مساوي برخو یعنې  $\Delta x_i = \frac{b-a}{n}$  ویشو او د هر  $x_i$  لپاره د  $i$ -ام انټروال

څخه لرو:  $i = 0, 1, 2, \dots, n$   $f(x_i) = C$

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x_i = \sum_{i=1}^n C \Delta x_i = C(\Delta x_1 + \Delta x_2 + \dots + \Delta x_n) = C\left(\frac{b-a}{n} + \frac{b-a}{n} + \dots + \frac{b-a}{n}\right) \\ &= C(b-a)\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n}\right) = C(b-a)\frac{n}{n} = C(b-a) \Rightarrow \int_a^b C \, dx = C(b-a) \end{aligned}$$

مثال:  $\int_3^4 dx$  ٺاڪي انٽيگراڻ حساب ڪري.

حل:  $\int_3^4 dx = [x]_3^4 = 4 - 3 = 1$

2. ڪهه  $d$   $f(x)$  تابع  $d$   $[a, b]$  په انٽروال ڪي انٽيگراڻ منهنڪي وي او يو ثابت حقيقي عدد وي، نو لرو ڇڏي:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

ثبوت: ڪهه چيري  $d$   $[a, b]$  انٽروال  $d$   $x_1, \dots, x_{n-1}$  به  $n$  مساوي برخو ووڀشو نو  $d$  ريمان  $d$  مجموعي او انٽيگراڻ  $d$  تعريف له مخي ليڪلائي شئو:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x = \int_a^b f(x) dx \\ &\Rightarrow \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx \end{aligned}$$

مثال:  $d$   $\int_{-2}^2 4 dx$  ٺاڪي انٽيگراڻ محاسبه ڪري.

حل:  $\int_{-2}^2 4 dx = 4 [x]_{-2}^2 = 4(2 - (-2)) = 4 \cdot 4 = 16$

3. ڪهه  $d$   $F(x)$  تابع يوه لومرنئي تابع  $d$   $f(x)$  او په  $[a, b]$  انٽروال ڪي متعادي وي، نو:

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

ثبوت:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x &= \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = -(-F(b) + F(a)) \\ &= -(F(a) - F(b)) = - \int_a^b f(x) dx \Rightarrow \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx \end{aligned}$$

مثال:  $d$   $\int_2^3 2x dx = - \int_3^2 2x dx$  انٽيگراڻ مساوات پيدا ڪري.

حل: لومړی د کین لوری انٹیگرال او وروسته د ښيي خوا انٹیگرال محاسبه کوو:

$$\int_2^3 2x dx = \left[ \frac{2x^2}{2} \right]_2^3 = \frac{2(3)^2}{2} - \frac{2(2)^2}{2} = \frac{2(9)}{2} - \frac{2(4)}{2} = \frac{18}{2} - \frac{8}{2} = \frac{18-8}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

$$\int_3^2 2x dx = \left[ \frac{2x^2}{2} \right]_3^2 = \frac{2(2)^2}{2} - \frac{2(3)^2}{2} = \frac{2(4)}{2} - \frac{2(9)}{2} = \frac{8}{2} - \frac{18}{2} = \frac{8-18}{2} = -\frac{10}{2} = -5$$

د لاسته راغلو قیمتونو په پام کې نیولو سره پایله په لاس راځي:

$$\int_2^3 2x dx = -\int_3^2 2x dx$$

4- که د  $f(x)$  تابع په  $[a, b]$  انټروال کې منځني وی په هغه صورت کې لرو، چې  $\int_a^a f(x) dx = 0$

ثبوت: څرنگه چې  $\Delta x = 0$  دی، نو:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x = \int_a^a f(x) dx = F(a) - F(a) = 0$$

$$\Rightarrow \int_a^a f(x) dx = 0$$

مثال: د  $\int_3^3 3x^2 dx$  انټیگرال محاسبه کړئ.

حل:  $0 = [3x^3]_3^3 = [x^3]_3^3 = [3^3 - 3^3] = 27 - 27 = 0$

5- که  $f(x)$  او  $g(x)$  تابعګانې په  $[a, b]$  انټروال کې انټیګرال منښکي وي، نو:

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$$

ثبوت:

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n [f(x_i) \pm g(x_i)] \Delta x$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x \pm \sum_{i=1}^n g(x_i) \Delta x \right]$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x \pm \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n g(x_i) \Delta x = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$$

مثالونه:

حل:

$$a) \int_0^1 (4+3x^2) dx = \int_0^1 4 dx + \int_0^1 3x^2 dx = 4 \int_0^1 dx + 3 \int_0^1 x^2 dx = 4[x]_0^1 + 3 \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = 4 + 1 = 5$$

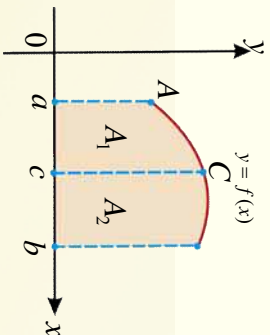
$$b) \int_0^3 (x^2 - 1) dx = \int_0^3 x^2 dx - \int_0^3 1 dx = \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^3 - [x]_0^3 = \frac{27}{3} - 3 = \frac{27-9}{3} = \frac{18}{3} = 6$$

6. که چیرې د  $f(x)$  تابع په یوه تړلی انټروال کې چې د  $a$ ،  $b$  او  $c$  ټکی شامل دي انټیګرال منونکي وي،

$$\text{نو:} \quad \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

**ثبوت:** دلته د  $[a, b]$  انټروال په دوو انټروالونو د  $[a, c]$  او  $[c, b]$  تقسیموو، وروسته د  $f(x)$  تابع انټیګرال په نوموړی

انټروالونو کې په پام کې نیسو.



د انټیګرال اصلي مفهوم ته په پام  $A = \int_a^b f(x) dx$  په حقیقت کې د هغې سطحې مساحت دی چې د

$f(x)$  د تابع د گراف او  $x$  د محور ترمنځ د  $[a, b]$  په انټروال کې محصوره ده. په داسې حال کې چې د هغه

سطحې مساحتونه چې د  $f(x)$  گراف او  $x$  د محور ترمنځ د  $[a, c]$  او  $[c, b]$  په انټروالونو کې محصوره ده

$$A_2 = \int_c^b f(x) dx, \quad A_1 = \int_a^c f(x) dx$$

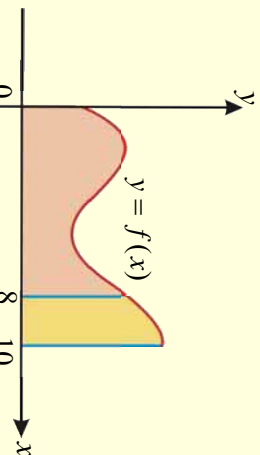
او په شکل کې واضح لیدل کېږي عبارت ده له:

$$A = A_1 + A_2 \Rightarrow \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

په پایله کې ویلای شو چې:

**مثال:** که چیرې  $\int_0^{10} f(x) dx = 17$  او  $\int_0^8 f(x) dx = 12$  وي، نو د  $\int_8^{10} f(x) dx$  انټیګرال قیمت محاسبه کړئ.

حل:



$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

$$\int_0^{10} f(x) dx = \int_0^8 f(x) dx + \int_8^{10} f(x) dx$$

اوس د  $\int_8^{10} f(x) dx$  انتگرال قيمت په لاس راوړو:

$$\int_8^{10} f(x) dx = \int_0^{10} f(x) dx - \int_0^8 f(x) dx = 17 - 12 = 5$$

7. که چېرې د  $f(x) \leq g(x)$  تابعگانې په  $[a, b]$  انټروال کې انتگرال منومنکې وي؛ نو لرو:

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

**ثبوت:**

$$\int_a^b g(x) dx - \int_a^b f(x) dx = \int_a^b [g(x) - f(x)] dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n [g(x) - f(x)] \Delta x$$

نو څرنگه  $g(x) - f(x) \geq 0$  او  $\Delta x \geq 0$  دی نو د هغې لېسې هر حد مثبت دی، نو د هغې لېسې هم منفي نه

دی يعنې:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n [g(x_i) - f(x_i)] \Delta x \geq 0 \Rightarrow \int_a^b [g(x) - f(x)] dx \geq 0$$

$$\int_a^b g(x) dx - \int_a^b f(x) dx \geq 0 \Rightarrow \int_a^b g(x) dx \geq \int_a^b f(x) dx$$

**مثال:** که چېرې  $f(x) = 1 - \frac{x^2}{4}$  او  $g(x) = 1 + \frac{x^2}{2}$  وي، نو د  $x > 1$  لپاره وپايلاست چې

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx \text{ دی.}$$

**حل:**

$$\int_a^b \left(1 - \frac{x^2}{4}\right) dx \leq \int_a^b \left(1 + \frac{x^2}{2}\right) dx$$

$$\int_a^b 1 dx - \int_a^b \frac{x^2}{4} dx \leq \int_a^b 1 dx + \int_a^b \frac{x^2}{2} dx$$

$$[x]_a^b - \frac{1}{12} [x^3]_a^b \leq [x]_a^b + \frac{1}{6} [x^3]_a^b$$

پوهېرو چې  $0 < (b-a)$  دی، نو:

$$(b-a) - \frac{1}{12}(b^3 - a^3) \leq (b-a) + \frac{1}{6}(b^3 - a^3) \quad / \div (b-a)$$

$$1 - \frac{1}{12}(b^3 - a^3) \leq 1 + \frac{1}{6}(b^3 - a^3)$$

$$-\frac{1}{12}(b^3 - a^3) \leq +\frac{1}{6}(b^3 - a^3) \quad / \div (b^3 - a^3)$$

$$-\frac{1}{12} < \frac{1}{6} \Rightarrow -1 < 2$$

8. که د  $f(x)$  تابع په  $[a, b]$  انټروال کې ممتدې او  $M, m$  قیمتونه په ترتیب سره د تابع مطلق اعظمي او مطلق

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

نو، وی، نو  $m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$

**ثبوت:** څرنگه چې  $m \leq f(x) \leq M$  دی نو لرو چې:

$$\int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b M dx$$

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

چې دا وروستی اړیکه د انټیګرال د تخمینې

قضیې په نامه یادېږي.

**مثال:**  $\int_0^1 e^{-x^2} dx$  انټیګرال په تخمینې توګه حساب کړئ.

**حل:** څرنگه چې د  $f(x) = e^{-x^2}$  تابع په  $[0, 1]$  انټروال کې ممتدې ده او  $M = f(0) = e^0 = 1$  مطلق اعظمي او  $m = f(1) = e^{-1}$  مطلق اصغري دی، نو لرو چې:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

$$e^{-1}(1-0) \leq \int_0^1 e^{-x^2} dx \leq 1(1-0)$$

$$e^{-1} \leq \int_0^1 e^{-x^2} dx \leq 1$$

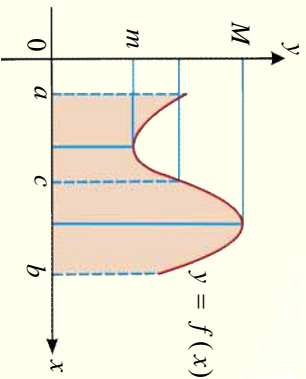
$$e^{-1} = \frac{1}{e} \approx 0,3679 \Rightarrow 0,3679 \leq \int_0^1 e^{-x^2} dx \leq 1$$

په پايله کې د انټيگرال تخميني قيمت د 1 او 0.3679 قيمتونو ترمنځ قرار لري.

9. که د  $f(x)$  تابع په  $[a, b]$  انټروال کې متمادی وي، نو د  $c$  یو حقیقي عدد شته چې:  $a \leq c \leq b$ ، نو:

$$\int_a^b f(x) dx = f(c)(b-a)$$

**ثبوت:** د  $b < a < b$  لپاره  $m$  او  $M$  قيمتونه په ترتيب د تابع مطلق اصغري او اعظمي قيمتونه د  $[a, b]$  په انټروال کې وي، لکه مخامخ شکل د انټيگرال د تخميني قضيې څخه په کار اخيستي د  $c \in [a, b]$  لپاره لرو چې:



$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a) \Rightarrow m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M$$

فرضو  $f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ ، وي، نو  $m \leq f(c) \leq M$  دی او د هر  $c$  حقیقي عدد لپاره،  $a \leq c \leq b$

$$\text{لرو چې: } f(c) = f(c) \Rightarrow \int_a^b f(x) dx = f(c)(b-a)$$

چې دا وروستی اړیکه د متوسط قیمت د قضيې په نامه یادېږي څرنگه چې  $f(c)$  د تابع متوسط قیمت په  $[a, b]$  انټروال کې دی.

**مثال:** د  $f(x) = x^2$  په  $[1, 4]$  انټروال کې په پام کې ونیسئ، آیا کولای شئ

$$\int_1^4 x^2 dx = \left[ \frac{x^3}{3} \right]_1^4 = \left[ \frac{64}{3} - \frac{1}{3} \right] = \frac{63}{3} = 21$$

**حل:** څرنگه چې  $f(x) = x^2$  د تابع ده اوس که د  $x$  په ځای د  $c$  قیمت په تابع کې وضع کړو

نو:  $f(c) = c^2$  سره کېږي چې دلته د متوسط قیمت د قضيې د فورمول څخه د  $c$  قیمت داسې په لاس

$$\text{راځي: } \int_a^b f(x) dx = f(c)(b-a)$$



اوس په پورتنۍ رابطه کې يې قيمت اېرود، لرو چې:

$$\int_1^4 x^2 dx = c^2(4-1)$$

$$21 = 3c^2 \Rightarrow c^2 = \frac{21}{3} \Rightarrow c^2 = 7 \Rightarrow c = \sqrt{7}$$

$$= f(c) , f(c) = c^2 = (\sqrt{7})^2 = 7 \Rightarrow f(c) = 7 , = 7$$

ښکاره شوه چې د تابع يو قيمت مساوي په او  $4 < \sqrt{7} < 1$  دی.

له مخکې څخه پوهېږو چې د مستطيل مساحت د طول او عرض د اوږدوالي د ضرب سره برابر دی نو د متوسط قيمت په فورمول کې  $f(c)$  طول او  $b-a$  عرض دی نو د منځني لاندې مساحت په  $[1,4]$  انټروال کې مساوي له هغه مستطيل سره دی چې اضلاع يې 7 او 3 دی.



### پوښتنې

1. لاندې معين انټيگرالونه محاسبه کړئ.

$$a) \int_{-1}^1 (x^3 + 2) dx = ?$$

$$e) \int_{-2}^3 3x dx$$

$$b) \int_2^5 7x dx = ?$$

$$f) \int_{-1}^2 (x^3 - \frac{1}{2}x^4) dx = ?$$

$$c) \int_{-2}^4 (-x) dx = ?$$

$$g) \int_{-4}^4 (2x^2 - \frac{1}{8}x^4) dx = ?$$

$$d) \int_{-1}^3 (2|x| - 3x) dx = ?$$

$$h) \int_1^3 \sqrt{x} dx$$

$$2. \text{ د } \int_{-1}^4 f(x) dx \text{ انټيگرال قيمت د } [-1, 4] \text{ په انټروال کې داسې پيدا کړئ، چې } \int_{-1}^1 f(x) dx = 5$$

$$\text{او } \int_{-1}^4 f(x) dx = -2 \text{ وي.}$$

3. د  $f(x) = x$  تابع په  $[0, 2]$  انټروال کې په نظر کې ونيسئ او د  $c$  قيمت په لاس راوړئ.

$$S(t) = v_0 \cdot t$$

10- د انټیگرال او مشتق اساسي قضیې  
 یو موټر په  $\frac{72 \text{ m}}{\text{sec}}$  چټکتیا سره په حرکت کې دی،  
 دربور برک ته فشار ورکوي او موټر وروسته له 6 ثانیو  
 ودرېږي په دې وخت کې وهل شوي فاصله پیدا کړی.



فعالیت

- د مشتق د تعریف څخه په گڼې اخیستې سره د  $f(x) = x^2$  د تابع مشتق د  $h = 0$  په ټکي کې پیدا کړی.
- د په لاس راغلی تابع انټیگرال په  $[0, 1]$  انټروال کې محاسبه کړی.
- د په لاس راغلو دواړو حالتونو قیمتونه سره پرتله کړی.
- له پورتنۍ فعالیت څخه په لاس راځي، چې:

د انټیگرال او مشتق تر منځ یوه منطقي اړیکه شته چې له دې اړیکې څخه په کار اخیستې سره کولای شوی د انټیگرال اصلي او اساسي قضیې په لاندې ډول ثبوت کړو:

### 1- د انټیگرال او مشتق لومړی اساسي قضیه:

که چېرې د  $f(x)$  تابع د  $[a, b]$  په انټروال کې متمادی وي او  $x$  په دې انټروال کې شامل وي، لرو چې:

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

څرنگه چې د  $f(x)$  تابع په  $[a, b]$  انټروال کې مشتق منځکې ده، نو د هر  $x \in [a, b]$  لپاره  $F'(x) = f(x)$  دی.  
**ثبوت:** څرنگه چې د  $f(x)$  تابع په  $[a, b]$  انټروال کې متمادی ده، نو د هر  $x \in [a, b]$  لپاره د  $f(x)$  تابع په  $[a, x]$  انټروال کې متمادی ده په پایله کې د  $f(x)$  تابع په دې انټروال کې انټیگرال منوونکي هم ده.

اوس د  $F(x)$  تابع مشتق د تعریف مطابق لیکو او بیا د  $x$  متحول ته د  $h$  په اندازه زیاتید ورکړو، لکه په لاندې ډول:

$$F'(x) = f(x)$$

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(a) + F(a) - F(x)}{h}$$

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(a) - (F(x) - F(a))}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x)|_{x+h} - F(x)|_a}{h}$$



۱۵۷

اوس د  $f(x)$  تابع په  $f(t)$  عوض کوو:

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(t) \Big|_a^{x+h} - F(t) \Big|_a^x}{h}$$

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt}{h}$$

$$\text{نظر دريم خاصيت ته لرو چې: } \int_a^b f(t) dt = - \int_b^a f(t) dt$$

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt}{h}$$

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_a^a f(t) dt + \int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_a^{x+h} f(t) dt}{h}$$

د متوسط قيمت د قضیې څخه  $\frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt$  چې  $f(c) = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt$  او  $x+h$  تر منځ واقع دی، نو کله چې  $h$  صفر ته تقرب وکړي  $c, x$  ته تقرب کوي، همدارنگه د  $f$  تابع له متمادیت څخه لرو:

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt = \lim_{c \rightarrow x} f(c) = f(x)$$

په پایله کې:  $F'(x) = f(x)$

مثال د:  $\int_2^{x^2+1} \frac{1}{t^2+1}$  مشتق پیدا کړئ.

حل:

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt \quad \text{چې} \quad F(x) = \int_a^{g(x)} f(t) dt$$

$$u = g(x) = x^2 + 1$$

$$f(t) = \frac{1}{t^2 + 1}$$

$$F'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$F'(x) = \frac{1}{(x^2 + 1)^2 + 1} \cdot (x^2 + 1)' = \frac{1}{(x^2 + 1)^2 + 1} \cdot 2x$$

$$F'(x) = \frac{2x}{(x^2 + 1)^2 + 1}$$

د زنجیرې قاعدې له مخې لرو:

## 2- د انتیگرال او مشتق دویمه اساسی قضیہ:

که چیري  $F(x)$  د  $f(x)$  تابع لومړنی تابع په  $[a, b]$  انټروال کې ممتلادي وي، په دې صورت کې لرو چې:

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$$

**ثبوت:** د مځکینۍ قضیې څخه پوهیږو چې که  $F(x) = \int_a^x f(t) dt$  دی له دې ځایه د

هر  $x \in [a, b]$  لپاره  $F'(x) = f(x)$  نو د دې دوو مقدارونو خلاف یو ثابت مقدار شته چې:

$$f(x) - F'(x) = \Rightarrow f(x) = F'(x) +$$

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

$$F'(x) = f(x)$$

$$\int_a^x f(t) dt = F(x) +$$

$$\int_a^x f(t) dt - F(x) =$$

که د  $x$  په ځای په پورتنۍ رابطه کې  $a$  وضع کوو، نو:

$$\int_a^a f(t) dt - F(a) = 0 - F(a) \Rightarrow -F(a)$$

که د

$$\int_a^x f(t) dt - F(x) = -F(a) \quad \int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$$

قیمت په لومړۍ رابطه کې وضع کوو، نو:  $\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$  که د  $x$  په ځای په دې رابطه کې  $b$  وضع شي، نو:

**یادونه:**

$$\int \sin x dx = -\cos x + c$$

$$\int \cos x dx = \sin x + c$$

$$\int \sec^2 x dx = \tan x + c$$

$$\int \cos ec^2 x dx = -\cot x + c$$

چې اخیږي رابطه په  $[F(x)]_a^b = \int_a^b f(t) dt$  په شکل

بڼه بدل کېږي دغه وروستی اړیکه د لومړني تابع او

$\int_a^b f(t) dt$  انتیگرال ترمنځ اړیکه ښيي، چې د

نیټن "لا اینز" رابطې په نوم هم یادېږي.

مثال د :  $\int_0^1 x^2 dx$  انٹیگرال حاصل پیدا کریں۔

$$\int_0^1 x^2 dx = F(1) - F(0) = \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3} \cdot 1^3 - \frac{1}{3} \cdot 0^3 = \frac{1}{3} \quad \text{حل:}$$



1. لاندی مشتقات پیدا کریں۔

$$a) F(t) = \int_{\sin t}^{\cos t} \frac{1}{4-x^2} dx$$

$$b) F(t) = \int_0^{\cos t} \frac{1}{4-x^2} dx$$

$$c) F(t) = \int_{-\pi}^t \frac{\cos y}{1+y^2} dy$$

$$d) F(x) = \int_1^x \frac{\sin t}{t} dt$$

2. کہہ پہ  $t$  تابع کی  $F(0) = 2$  وی، د  $F(b)$  مقدار پہ  $1, \dots, 0.4, 0.2, 0$  تک کی پیدا کریں۔

3.  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$  پیدا کریں۔

$$\int 2x\sqrt{1+x^2} dx$$

### 11- په تعويضي طريقي سره انټيگرال نيو نه

- آيا کولای شئ چې مخامخ انټيگرال د نامعين انټيگرال له خوا مو څخه په کار اخېستې سره حل کړئ.
- که نه شئ کولای، نو د جذر لاندې افاده په يوه متحول سره عوض کړئ او بيا هغه حساب کړئ او وولئ چې په انټيگرال کې د وضع کولو دا طريقه په څه نوم يادېږي.



فعاليت

• د  $\int_0^4 \sqrt{2x+1} dx$  انټيگرال کې د جذر لاندې افاده په  $u$  سره عوض کړئ.

• د  $u$  مشتق ونيسي او د  $dx$  قيمت پيدا کړئ.

- څرنگه چې نوموړی انټيگرال يو معين انټيگرال دی، نو د  $u = 2x + 1$  په معادله کې د  $x = 4$  او  $x = 0$  قيمتونه وضع او د انټيگرال سرحدونه د  $u$  له جنسه په لاس راوړئ، وروسته د انټيگرال قيمت محاسبه کړئ.

له پورتنی فعالیت څخه لاندې پایلې ته رسېږو:

که د  $f(x)$  تابع په  $[a, b]$  انټروال کې مشتق منونکی وي،  $u = g(x)$  او  $F'(x) = f(x)$  سره تعويض شي، څرنگه چې  $dx = g'(x) du$  دی، له زنجيري قاعدې څخه ليکلای شو:

$$\int_a^b f(g(x)) g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u) du$$

لومړی مثال: د  $\int_1^2 \frac{dx}{(3-5x)^2}$  انټيگرال قيمت پيدا کړئ.



حل : د قوس ذنه افاده په  $u$  عوض کوو:

$$u = 3 - 5x, \quad du = -5 dx \quad dx = -\frac{du}{5}$$

$$\begin{cases} x=1 \\ u=3-5x \end{cases} \Rightarrow u=3-5 \cdot 1=-2 \Rightarrow u=-2$$

$$\begin{cases} x=2 \\ u=3-5x \end{cases} \Rightarrow u=3-5 \cdot 2=3-10 \Rightarrow u=-7$$

$$\int_1^2 \frac{dx}{(3-5x)^2} = \int_{-2}^{-7} \frac{1}{u^2} \left(-\frac{1}{5}\right) du = -\frac{1}{5} \int_{-2}^{-7} \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{5} \left[ -\frac{1}{u} \right]_{-2}^{-7} = \frac{1}{5} \left[ \frac{1}{5u} \right]_{-2}^{-7} = \frac{1}{5} \left[ -\frac{1}{7} + \frac{1}{2} \right] = \frac{1}{14}$$

دویم مثال : د  $\int_0^1 x^2 (1+2x^3)^5 dx$  انټیگرال حساب کوئ.

حل : د قوس ذنه افاده په  $u$  عوض کوو.

$$u = 1 + 2x^3, \quad du = 6x^2 dx \Rightarrow x^2 dx = \frac{1}{6} du$$

$$\begin{cases} x=0 \\ u=1+2x^3 \end{cases} \Rightarrow u=1+2 \cdot 0=1 \Rightarrow u=1$$

$$\begin{cases} x=1 \\ u=1+2x^3 \end{cases} \Rightarrow u=1+2 \cdot 1=3 \Rightarrow u=3$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^2 (1+2x^3)^5 dx &= \int_1^3 u^5 \cdot \frac{1}{6} \cdot du = \frac{1}{6} \int_1^3 u^5 du = \frac{1}{6} \left[ \frac{u^6}{6} \right]_1^3 = \frac{1}{6} \left[ \frac{3^6}{6} - \frac{1}{6} \right] \\ &= \frac{1}{6} \left[ \frac{729}{6} - \frac{1}{6} \right] = \frac{1}{6} \left[ \frac{728}{6} \right] \\ &= \frac{728}{36} = \frac{182}{9} = 20.\bar{2} \end{aligned}$$



فعالیت

- د  $\int x^2 \sqrt{x^3+1} dx$  انټیگرال کې د جذر لاندې افاده د  $u$  په متحول سره تعویض کوئ.
- له  $u$  څخه مشتق ونیسئ او په لاس راغلی قیمت په لومړني انټیگرال کې وضع او هغه حساب کوئ.



- د پورته څخه د  $F(x) + C$  په لاس راغلي تابع څخه مشتق ونیسئ او د هغې څخه لومړنی تابع په لاس راوړئ.

له پورتنۍ فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راځي:

که د  $F(u)$  تابع د  $f(u)$  لومړنی تابع وي، د  $u = g(x)$  د متحول په تعویض سره یوه بله تابع چې مستقل متحول یې  $x$  او متمادي مشتق ولري له زنځیروي قاعدې څخه په کار اخیستنې سره لرو:

$$\int f(g(x))g'(x) dx = \int f(u) du$$

**لومړی مثال:**  $\int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}} dx$  انټیګرال حساب کړئ.

حل: د جنر لاندې افاده په  $u$  سره عوض کوو.

$$u = 1 - 4x^2, \quad du = -8x dx$$

$$x dx = -\frac{1}{8} du$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}} dx &= \int \frac{1}{\sqrt{u}} \left(-\frac{1}{8}\right) du = -\frac{1}{8} \int \frac{1}{\sqrt{u}} du = -\frac{1}{8} \int u^{-\frac{1}{2}} du = -\frac{1}{8} \left(\frac{u^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}\right) + C \\ &= -\frac{1}{8} \left(\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right) + C = -\frac{1}{8} \left(\frac{\sqrt{u}}{\frac{1}{2}}\right) + C = -\frac{1}{4} (2\sqrt{u}) + C = -\frac{1}{4} \sqrt{1-4x^2} + C \end{aligned}$$

**دویم مثال:**  $\int x^3 \cos(x^4 + 2) dx$  حساب کړئ.

حل: که چېرې  $u = x^4 + 2$  وضع کړو په لاس راځي:

$$u = x^4 + 2, \quad du = 4x^3 dx, \quad x^3 dx = \frac{1}{4} du$$

$$\begin{aligned} \int x^3 \cos(x^4 + 2) dx &= \int \cos u \cdot \frac{1}{4} du \\ &= \frac{1}{4} \int \cos u du \\ &= \frac{1}{4} \sin u + C \\ &= \frac{1}{4} \sin(x^4 + 2) + C \end{aligned}$$

لاندې انټيگرالونه د تعويض له لارې محاسبه کړئ.

a)  $\int \cos 3x dx = ?$

b)  $\int_1^2 x\sqrt{x-1} dx = ?$

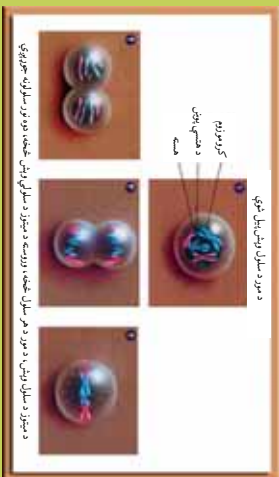
c)  $\int_0^7 \sqrt{4+3x} dx = ?$

d)  $\int 2\sqrt[3]{(1-4x)^2} dx = ?$

e)  $\int 2x(x^2+3)^4 dx = ?$

f)  $\int_0^5 \frac{x dx}{x^2+10} = ?$

g)  $\int \sqrt{\cos x} \sin x dx = ?$



## 12- قسمي انټیگرالونه

د حجروي وېش په وخت کې، یوه حجره په دوو یا څو حجرو وېشل کېږي. ایا کولای شئ دا لاره (روش) په نورو شیانو کې لکه: تېره، شکه او نورو کې ووبینو که ځواب هو وی، نو دا لاره د څه په نامه یادېږي.



• د  $\int \frac{xdx}{x^2+1}$  انټیگرال په تعویضي طریقه حل کړئ.

• د  $\int_{-1}^1 3x^2 \sqrt{x^3+1} dx$  انټیگرال قیمت په تعویضي طریقه پیدا کړئ.

• آیا کولای شئ چې د  $\int x^2 \sin x dx$  انټیگرال په تعویضي طریقه وشمېرئ.

له پورتنۍ فعالیت څخه دې پایلې ته رسېږو:

د  $\int f(x)g(x)dx$  په انټیگرال کې  $f(x)$  او  $g(x)$  دوي مشتق منونکی تابعگانې دي چې یوه له بلې سره د ضرب وړ وي یا نه وي، خو د انټیگرال محاسبه یې اسانه کار نه دی، که چېرې  $u = f(x)$  او  $v = g(x)$  وضع کړو، د ضرب حاصل مشتق یې مساوي یې:  $u'v + v'u = (u \cdot v)'$  دی. له پورتنۍ رابطې څخه  $u'v$  په لاس راوړو اوله اطراف څخه انټیگرال نیسو:

$$v' \cdot u = (u \cdot v)' - u' \cdot v$$

$$\int v' \cdot u \, dx = u \cdot v - \int u' \cdot v \, dx \quad \text{یا} \quad \int u \, dv = u \cdot v - \int v \, du$$

چې پورتنۍ رابطې ته د غیر معین انټیگرال فورمول په قسمي طریقه وايي.

که د  $u$  او  $v$  تابعگانې په  $[a, b]$  انټروال کې تعریف شوی وي، لاندې فورمول د معین انټیگرال فورمول په قسمي لاره (طریقه) بلل کېږي.

$$\int_a^b v' u \, dx = u \cdot v \Big|_a^b - \int_a^b v u' \, dx \quad \text{یا} \quad \int_a^b u \, dv = u \cdot v \Big|_a^b - \int_a^b v \, du$$

لومړی مثال: د  $\int x \sin x dx$  انټیګرال پیدا کړئ.  
حل:

$$\begin{aligned}u &= x, & du &= dx \\dv &= \sin x dx, & v &= -\cos x \\ \int u dv &= u \cdot v - \int v du \\ \int x \sin x dx &= x(-\cos x) - \int -\cos x dx \\ &= -x \cos x + \sin x + C\end{aligned}$$

دویم مثال: د  $\int_0^1 -x e^x dx$  انټیګرال حساب کړئ.  
حل:

یادونه:

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\begin{aligned}u &= -x, & du &= -dx, & -du &= dx \\dv &= e^x dx, & v &= e^x \\ \int_a^b v' \cdot u dx &= u \cdot v \Big|_a^b - \int_a^b v \cdot u' dx \\ \int_0^1 -x e^x dx &= [-x e^x]_0^1 + \int_0^1 e^x dx \\ &= -e^1 + 0 \cdot e^0 + [e^x]_0^1 \\ &= -e^1 + e^1 - e^0 = -e^0 \\ &= -1\end{aligned}$$



پوښتنې

لاندې انټیګرالونه حساب کړئ.

- a)  $\int \theta \cos \theta d\theta = ?$   
b)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos 2x dx = ?$   
c)  $\int x^2 \cos(x^3) dx = ?$   
d)  $\int_0^1 x e^x dx = ?$

### د څپر کې مهم ټکي

د ريمان مجموعه: فرضو د  $f(x)$  تابع په  $[a, b]$  انټروال کې متمادي او تعريف شوی وي او د ناحيې مساحت چې د  $x$  محور او د  $f(x)$  لا منحنی ترمنځ واقع دی چې په هندسي شکلونو نه شي بدلبدلای، محاسبه کړو.

د  $[a, b]$  انټروال چې په  $\Pi$  مستطیلونو تقسیمو څرنگه چې د هر مستطیل عرض د  $(\Delta x = \frac{b-a}{n})$  رابطنی څخه، په لاس راځي او د مستطیلونو طول عبارت دی د تابع قیمت په هم هغه ټکي کې، دا فاصلې په لاندې ډول دي:

او د مستطیلونو انټروالونه د  $1, 2, 3, \dots, n$  لپاره په لاندې ډول دي:

$$x_0 = a, \quad x_1 = a + \Delta x, \quad x_2 = a + 2\Delta x, \dots, x_i = a + i\Delta x, \dots, x_n = b$$
$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], [x_2, x_3], \dots, [x_{i-1}, x_i], \dots, [x_{n-1}, x_n]$$

که د لاندینيو مستطیلونو مساحت په  $f(x_{i-1})\Delta x$  او د پورتنیو مستطیلونو مساحت په  $f(x_i)\Delta x$  وپنډو د شي او د محصور شوي سطحي مساحت په  $A$  وپنډو، نو لرو چې:

$$\sum_{i=1}^n f(x_{i-1})\Delta x < A < \sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta x$$

نامعین انټیگرالونه: که چېرې د  $f(x)$  تابع په  $[a, b]$  انټروال کې تعريف او  $F(x)$  د  $f(x)$  یوه لومړنۍ تابع وي. د  $C + F(x)$  توابعو سټ چې  $C$  یو ثابت عدد وي د غیر معین انټگرال په نامه یادېږي او داسې لیکل کېږي:  $C + F(x) = \int f(x) dx$

د نامعین انټیگرالونو خواص (ځانګړتیاوي):

$$\int dx = x + C$$

$$\int a f(x) dx = a \int f(x) dx$$

$$\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$$

$$\int [f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)] dx = \int f_1(x) dx + \int f_2(x) dx + \dots + \int f_n(x) dx$$

$$\int [f(x) \cdot g(x)] dx \neq \int f(x) dx \cdot \int g(x) dx$$

$$\int \frac{f(x) dx}{g(x)} \neq \frac{\int f(x) dx}{\int g(x) dx}, \quad g(x) \neq 0$$

**معین انتیگرال:** د  $f(x)$  تابع د ریمان مجموعی لمبیت ته په  $[a, b]$  انټروال کې کله چې  $n$  بې نهایت ته نږدی شي د  $\Delta x$  فرعي انټروالونو اوږدوالی صفر ته نږدی کېږي، چې د  $f(x)$  تابع ټاکلی انتیگرال د  $x = a$  څخه تر  $x = b$  پورې په نوم یادېږي.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x = \int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

ته د انتیگرال لاندینی سرحد او  $b$  ته د انتیگرال پورتنی سرحد وایي.

**د معین انتیگرال خواص (ځانګړتیاوې):**

$$\int_a^b C dx = C(b-a)$$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

$$\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$$

$$\int_a^a f(x) dx = 0$$

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

$$f(x) \leq g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

$$\int_a^b f(x) dx = f(c)(b-a) \Rightarrow f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

### د اښکړيال او مشتق لومړی اساسي قضيه:

که چيرې د  $f(x)$  تابع په  $[a, b]$  انټروال کې متمادی وي او  $x$  په دې انټروال کې شامل وي، لرو چې:

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

څرنگه چې د  $f(x)$  تابع په  $[a, b]$  انټروال کې د مشتق وړ ده، نو د هر  $x \in [a, b]$  لپاره  $F'(x) = f(x)$  دی.

### د اښکړيال او مشتق دويمه اساسي قضيه:

• که چيرې  $f(x)$  تابع د  $f(x)$  لومړنی تابع په  $[a, b]$  انټروال کې متمادی وي، په دې صورت کې لرو چې:

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$$

- که  $F(u)$  د  $f(u)$  لومړنی تابع وي او د  $u = g(x)$  متحول سره تعريض شي چې مستقل متحول يې  $x$  او متمادی مشتق ولري. د زنجیری قاعدې څخه په کار اخیستې سره لرو:  
$$\int f(g(x))g'(x) dx = \int f(u) du$$
- که  $F(x)$  تابع په  $[a, b]$  انټروال کې د مشتق مننونکي وي، او  $u = g(x)$  همدارنگه  $F'(x) = f(x)$  سره تعريض شي، څرنگه چې  $du = g'(x) dx$  دی، له زنجیري قاعدې څخه لیکلای شو:

$$\int_a^b f(g(x))g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u) du$$

- د  $\int f(x)g(x) dx$  اښکړيال کې  $f(x)$  او  $g(x)$  دوي مشتق مننونکي تابعگانې وي چې په خپل منځ کې قابل د ضرب وي او یا نه وي، خو د اښکړيال محاسبه يې آسانه کار نه دی، که چيرې  $u = f(x)$  او  $v = g(x)$  سره عوض شي، د هغوی د حاصل ضرب مشتق عبارت دی له:

$$(u \cdot v)' = u'v + v'u$$



له پورتنې اړیکې څخه  $v' \cdot u$  په لاس راوړو او له دواړو خواوو څخه انټیګرال نیسو:

$$\int v' \cdot u \, dx = u \cdot v - \int u' \cdot v \, dx \quad \text{یا} \quad \int u \, dv = u \cdot v - \int v \, du$$

چې اخیری اړیکې ته د غیر معین انټیګرال فورمول په قسمي طریقه وايي.

- که د  $u$  او  $v$  تابعګانې په  $[a, b]$  انټروال کې تعریف شوی وي لاندې فورمول، د معین انټیګرال فورمول په قسمي لاره (طریقه) بلل کېږي:

$$\int_a^b v' u \, dx = u \cdot v \Big|_a^b - \int_a^b v u' \, dx \quad \text{یا} \quad \int_a^b u \, dv = u \cdot v \Big|_a^b - \int_a^b v \, du$$

## د څپرکي پوښتني

1- د لاندې ټاکلو انتگرالونو قیمت پیدا کړئ.

$$a) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$b) \int_{-4}^4 [2x^2 - \frac{1}{8}x^4] dx$$

$$c) \int_2^4 \frac{1}{x^2} dx$$

$$d) \int_0^3 4 dx$$

$$e) \int_1^3 \sqrt{x} dx$$

$$f) \int_1^2 (x^2 - x^5) dx$$

$$g) \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos^2 x} dx$$

$$h) \int_{-2}^0 [\frac{x^3}{4} + \frac{x^2}{3}] dx$$

$$i) \int_2^3 (x^3 + x^2) dx$$

$$j) \int_{-2}^2 [x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 3x - 4] dx$$

$$k) \int_0^{\pi} \sin x dx$$

$$l) \int_1^2 x^2 dx$$

2- لاندې غیر معین انتگرالونه حل کړئ.

$$a) \int [\sin x + 8x^3] dx$$

$$b) \int [x^5 + \frac{4}{x} + x^3 + \frac{2}{x^2} + x] dx$$

$$c) \int x(1 - 2x^2) dx$$

$$d) \int \sin x dx$$

$$e) \int \frac{\sin 2x}{2 \sin x} dx$$

$$f) \int \frac{(1-x)^2}{1-x} dx$$

$$g) \int \sqrt[3]{x^3} dx$$

$$h) \int \frac{3x^2 + 8x}{x} dx$$

$$i) \int (2x^2 + 3) dx$$

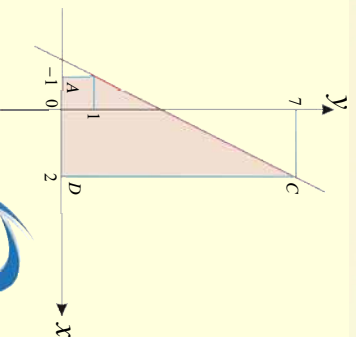
$$j) \int \frac{1}{\sqrt{x^3 + 2}} dx$$

$$k) \int \frac{(1+x)(1-x)}{x-x^3} dx$$

$$l) \int (3x^2 + 4x - 1) dx$$

3- د لاندې محصور شوي سطحي مساحت د شکل له مخې پیدا کړئ.

$$\int_{-1}^2 (2x+3) dx$$



4- لاندې انټیگرالونه د تعویضي طریقې په مرسته پیدا کړئ.

a)  $\int 3 \cos(2x+1) dx$

g)  $\int_0^2 \frac{dt}{(3-2t)^2}$

b)  $\int \sqrt{3x+5} dx$

h)  $\int_0^2 x^2 \cdot \sqrt{9-x^3} dx$

c)  $\int \frac{2 dx}{x+2}$

i)  $\int \frac{1}{(x-10)^7} dx$

d)  $\int (3x+6)^3 dx$

j)  $\int_0^1 (1-x^2)^3 x dx$

e)  $\int x^3 \sqrt{x^4+2} dx$

k)  $\int (4-3x)^7 dx$

f)  $\int (x^3+2)^2 3x^2 dx$

l)  $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt[4]{x^3+2}}$

5- لاندې انټیگرالونه د قسمي طریقې په مرسته پیدا کړئ.

a)  $\int x \cos x dx$

f)  $\int x \sqrt{1+x} dx$

b)  $\int_0^\pi \sin x \cos x dx$

g)  $\int x^2 \cdot e^{2x} dx$

c)  $\int e^x \cdot \cos x dx$

h)  $\int e^{2x} \sin 3x dx$

d)  $\int_0^{2\pi} x \cos 3x dx$

i)  $\int x^2 \cdot e^{-x} dx$

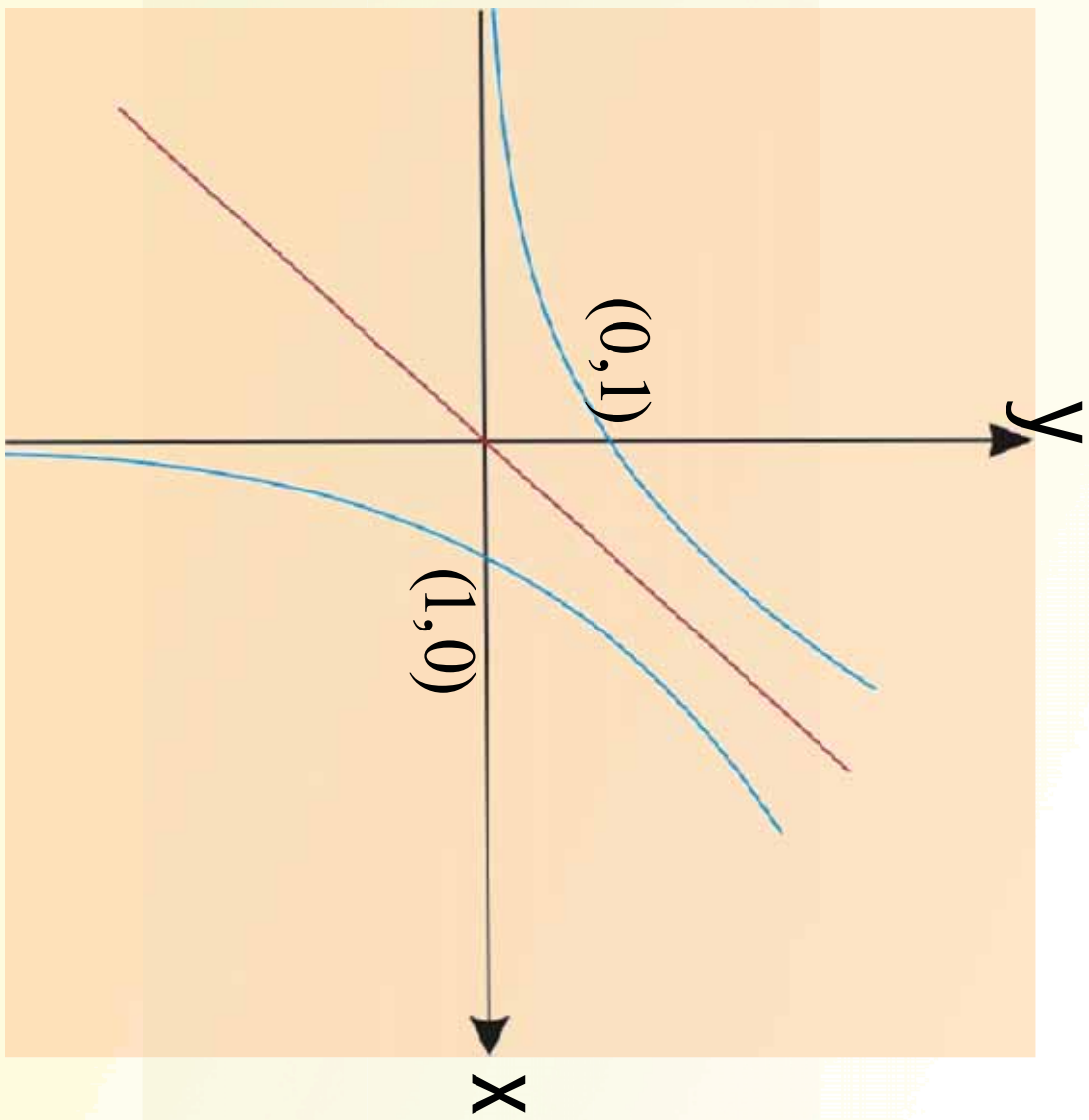
e)  $\int x e^{-x} dx$

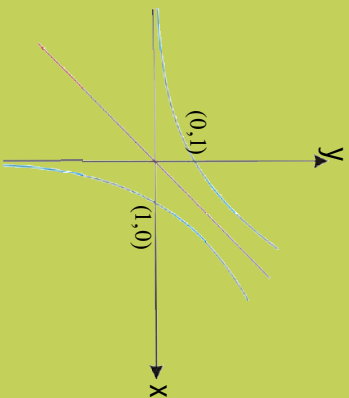
# پنجم خپر کی

## د لو گار یتھی او اکسپونشیل تابعگانو مشتق او

### انتیگرال







**د لوگارېتمي او اکسپوننشل تابعگانو مشتق**  
مخامخ شکل د څه ډول تابعگانو گراف راښيي، نومونه  
بې واخلئ.



- لوگارېتم تعريف او خواص بې وليکئ.
  - لوگارېتمي او اکسپوننشل تابعگانې يوه له بلې سره څه اړيکې لري.
  - که  $X \log_b X$  يوه متصلا تابع وي، نو  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + X)^{\frac{1}{x}}$  له کوم عدد سره مساوي ده.
  - د  $f(x) = y$  د تابع له دواړو خواوو څخه طبيعي لوگارېتم ونيسئ، اړيکه بې وليکئ.
- د پورتنۍ فعاليت پايله داسې بيانوو:

**په عمومي ډول که**  $f(x) = \ln x$  **او**  $g(x) = a^x$  **وي؛ نو**  $g'(x) = a^x \ln a$  **او**  $f'(x) = \frac{1}{x}$  **دي.**

**ثبوت:**

-1

$$y = g(x) = a^x$$

$$\ln y = \ln a^x = x \ln a$$

د مساوات له دواړو خواوو څخه نظر X ته مشتق نيسو:

$$\frac{y'}{y} = x' \ln a + x(\ln a)'$$

$$\frac{y'}{y} = \ln a + 0$$

$$\frac{1}{y} y' = \ln a$$

$$y' = y \ln a \Rightarrow g'(x) = a^x \ln a$$

$$f(x) = \ln x$$

$$(\ln x)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln \frac{x+h}{x}}{h}$$

$$\begin{aligned} (\ln x)' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \ln \left( \frac{x+h}{x} \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \ln \left( 1 + \frac{h}{x} \right) = \frac{1}{x} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} \ln \left( 1 + \frac{h}{x} \right) \\ &= \frac{1}{x} \lim_{h \rightarrow 0} \ln \left( 1 + \frac{h}{x} \right)^{\frac{x}{h}} \end{aligned}$$

که  $u = \frac{x}{h} = \frac{1}{u} = \frac{h}{x}$  دی څرنگه چې  $h \rightarrow 0$  تقرب وکړي نو  $u \rightarrow \infty$  ته نږدی کېږي،

لیکلای شو چې:

$$\begin{aligned} (\ln x)' &= \frac{1}{x} \lim_{u \rightarrow \infty} \ln \left( 1 + \frac{1}{u} \right)^u = \frac{1}{x} \lim_{u \rightarrow \infty} \ln \left( 1 + \frac{1}{u} \right)^u \\ (\ln x)' &= \frac{1}{x} \ln e = \frac{1}{x} \quad \text{نو: } \lim_{u \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{u} \right)^u = e \end{aligned}$$

**قضیه**

$$1. \quad \text{که د } x \log_a e = \log_a x \text{ تابع مشتق منورنکی وي، نو مشتق یې } f'(x) = \log_a x$$

$$2. \quad \text{که } f(x) = \log_a g(x) \text{ او } g(x) \text{ مشتق منورنکی وي، نو } e \log_a g(x) = (g(x))' \log_a g(x)$$

**ثبوت:**

-1

$$f(x) = \log_a x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x} \log_a e$$

$$f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(x+h) - \log_a x}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \log_a \frac{x+h}{x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \log_a \left( 1 + \frac{h}{x} \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \cdot \frac{x}{x} \log_a \left( 1 + \frac{h}{x} \right) = \frac{1}{x} \lim_{h \rightarrow 0} \log_a \left( 1 + \frac{h}{x} \right)^{\frac{x}{h}}$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x} \log_a \lim_{h \rightarrow 0} \left( 1 + \frac{h}{x} \right)^{\frac{x}{h}}$$

اوس که  $u = \frac{x}{h}$  وضع شي نو  $\frac{h}{x} = \frac{1}{u} = \frac{1}{u}$  کېږي، که  $h \rightarrow 0$  صفر ته تقرب وکړي، نو  $u \rightarrow \infty$  کوي، يعنې:

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x} \log_a \lim_{u \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{u} \right)^u = \frac{1}{x} \log_a e$$





$$2- \text{غزاورو ثبوت کرو چي: } e^{\log_a g(x)} = \frac{g'(x)}{g(x)}$$

د زنجيري قاعدې له مخې:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\log_a g(x))' = (\log_a g(x))' \cdot g'(x) = \frac{1}{g(x)} \log_a e \cdot g'(x) \\ &= \frac{g'(x)}{g(x)} \log_a e \end{aligned}$$

$$(\log_a g(x))' = (\ln g(x))' = \frac{g'(x)}{g(x)}$$

که  $a = e$  وضع شي؛ نو لرو:

**پايله:**

1- د Exponential تابعگانو مشتق د لوگارتم په مرسته کولای شو په اسانې سره په لاس راوړو.

که  $y = e^x$  وي ددې تابع مشتق  $e^x = y'$  دی ځکه که  $y = e^x$  رابطې څخه طبیعي لوگارتم ونیسو، په لاس راځي:

$$y = e^x \Rightarrow \ln y = x \ln e = x$$

$$(\ln y)' = (x)' \Rightarrow \frac{y'}{y} = 1 \Rightarrow y' = y \cdot 1 = e^x$$

2- که  $y = e^x$  او  $u$  تابع د  $x$  وي، نو:  $y' = u'e''$

3- که  $y = a^x$  کله چې  $a > 0$  او  $a \neq 1$  وي، نو:  $y' = u'a'' \ln a$

4- د لوگارتمي تابعگانو د مشتق پیدا کولو لپاره په بېلابېلو قاعدو سره له دې اړیکې څخه ګټه اخلو:

$$y = \log_a u \Rightarrow y' = (\log_a u)' = \frac{u'}{u} \log_a e$$

$$y' = \frac{u'}{u} \log_a e = \frac{u'}{u} \cdot \frac{1}{\log_e a} \Rightarrow y' = \frac{(\ln u)'}{\ln a} = \frac{u'}{u \ln a}$$

**لومړی مثال:** د  $f(x) = \ln(x^2 + 1)$  تابع مشتق پیدا کړئ.

**حل:** که  $g(x) = x^2 + 1$  وضع کړو، نو لرو:

$$g(x) = x^2 + 1$$

$$g'(x) = 2x$$

$$(\ln g(x))' = \frac{g'(x)}{g(x)}$$

$$(\ln(x^2 + 1))' = \frac{(x^2 + 1)'}{x^2 + 1} = \frac{1}{x^2 + 1} \cdot 2x \Rightarrow f'(x) = (\ln(x^2 + 1))' = \frac{2x}{x^2 + 1}$$



دویم مثال : د  $f(x) = \ln(x^2 - 5x + 4)$  تابع مشتق پیدا کریں۔

حل :

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= \ln(x^2 - 5x + 4) \\ g(x) &= x^2 - 5x + 4 \Rightarrow g'(x) = 2x - 5 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} (\ln g(x))' &= \frac{g'(x)}{g(x)} \\ (\ln(x^2 - 5x + 4))' &= \frac{g'(x)}{g(x)} = \frac{2x - 5}{x^2 - 5x + 4} \end{aligned}$$

دریم مثال : د  $f(x) = \log_a \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}}$  او  $f(x) = \ln \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}}$  تابعگانو مشتق پیدا کریں۔

حل : پوهیرو چي  $\log_a \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}} = \log_a \left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{\frac{1}{2}}$  ، نو لیکلای شو، چي :

$$\log_a \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}} = \log_a \left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \log_a \frac{x^2+1}{x^2-1} = \frac{1}{2} (\log_a(x^2+1) - \log_a(x^2-1))$$

$$\begin{aligned} (\log_a \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}})' &= \frac{1}{2} (\log_a(x^2+1) - \log_a(x^2-1))' \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{(x^2+1)'}{(x^2+1)} \log_a e - \frac{(x^2-1)'}{(x^2-1)} \log_a e \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{2x}{x^2+1} \log_a e - \frac{2x}{x^2-1} \log_a e \right] = \frac{1}{2} \cdot 2x \log_a e \left[ \frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{x^2-1} \right] \\ &= \frac{-2x}{x^4-1} \log_a e \end{aligned}$$

حل : پوهیرو چي  $\ln \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}} = \ln \left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{\frac{1}{2}}$  ، نو لیکلای شو، چي :

$$\begin{aligned} \ln \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}} &= \ln \left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (\ln(x^2+1) - \ln(x^2-1)) \\ (\ln \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}})' &= \frac{1}{2} [\ln(x^2+1) - \ln(x^2-1)]' = \frac{1}{2} [(\ln(x^2+1))' - (\ln(x^2-1))'] \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{2x}{x^2+1} - \frac{2x}{x^2-1} \right) = \frac{-2x}{x^4-1} \end{aligned}$$

**څلورم مثال:** د  $y = e^{(x^2+1)}$  تابع مشتق پيدا کړئ.  
حل: پوهېږو چې که  $e^u = y$  وي نو  $e^u = y$

$$y = e^{(x^2+1)} \Rightarrow y' = (x^2 + 1)' \cdot e^{x^2+1} = 2x \cdot e^{x^2+1}$$

**پنځم مثال:** د  $y = \sqrt{x}$  تابع مشتق په لاس راوړئ.

حل: پوهېږو چې که چېرې  $a^u = y$  وي نو  $u' a^u \ln a$  سره دی، نو:

$$y = \sqrt{x} = (2)^x \Rightarrow y' = \left(\frac{1}{2}\right)' \cdot 2^{\frac{1}{x}} \ln 2 = \frac{-1}{x^2} \cdot 2^{\frac{1}{x}} \cdot \ln 2$$

**شپږم مثال:** د  $y = x^{2x}$  تابع مشتق پيدا کړئ.

حل: که د معادلې له دواړو خواوو څخه طبيعي لوگارتم ونیسو، په لاس راځي چې:

$$y = x^{2x}$$

$$\ln y = \ln x^{2x}$$

$$\ln y = 2x \ln x$$

$$(\ln y)' = (2x \ln x)' \Rightarrow \frac{y'}{y} = 2 \ln x + 2x \cdot \frac{1}{x}$$

$$y' = 2(\ln x + 1) \cdot y \Rightarrow y' = 2(\ln x + 1) \cdot x^{2x}$$

**اووم مثال:** د  $y = 10^x$  تابع مشتق حساب کړئ.

حل: پوهېږو چې  $a \ln a = y' \Rightarrow y = a^x$  دی، نو:

$$y = 10^x$$

$$y' = 10^x \cdot \ln 10$$

**اتم مثال:** د  $y = e^{3x}$  تابع مشتق پيدا کړئ.

حل: که  $u = 3x$  وضع شي، نو:  $u'(x) = 3$

$$y = e^u$$

$$y' = e^u \cdot u' = e^{3x} \cdot 3$$

$$y' = 3e^{3x}$$

**نهم مثال:** د لاندې تابعگانو مشتق پيدا کړئ.

$$1) y = \log(x^4 + 1)$$

$$2) y = \log_3(\log_2 x)$$

$$3) y = \log_{x^2-1} x^2 + 1$$

**حل:** پوهپرو چي د لوگارتمي توابعو مشتق په مختلفو قاعدو سره د لاندي قضبي څخه په گڼه اخيستمي سره په لاس راوړو:

$$y = \log_a u$$

$$y' = (\log_a u)' = \frac{u'}{u} \log_a e = \frac{u'}{u \log_e a} = \frac{u'}{u \ln a}$$

$$1) y = \log(x^4 + 1) \Rightarrow y' = \frac{4x^3}{(x^4 + 1) \ln 10}$$

$$2) y = \log_3(\log_2 x) \Rightarrow y' = \frac{(\log_2 x)'}{\ln 3 \log_2 x} = \frac{\frac{1}{x \ln 2}}{\ln 3 \log_2 x} = \frac{1}{(\ln 2)(\ln 3)x \log_2 x}$$

$$= \frac{1}{\ln 2 \cdot \ln 3 \cdot x \cdot \frac{\log_e x}{\log_e 2}} = \frac{1}{\ln 2 \cdot \ln 3 \cdot x \cdot \frac{\ln x}{\ln 2}} = \frac{1}{\ln 3 x \ln x}$$

$$3) y = \log_{x^2-1} x^2 + 1 = \frac{\log_e(x^2+1)}{\log_e(x^2-1)} = \frac{\ln(x^2+1)}{\ln(x^2-1)}$$

**پوهپرو چي**  $y = \frac{u}{v} \Rightarrow y' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$  **د نوي نولرو:**

$$y' = \frac{\frac{2x}{x^2+1} \cdot \ln(x^2-1) - \frac{2x}{x^2-1} \ln(x^2+1)}{[\ln(x^2-1)]^2}$$



**پوښتني**

د لاندي توابعو مشتق پيدا کړي:

a)  $f(x) = \ln \sin 3x$

b)  $f(x) = \ln \sqrt{3x^2 + 7}$

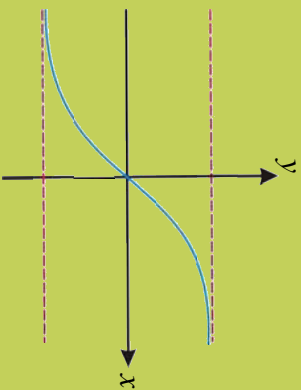
c)  $f(x) = \ln(5x^2 - 6x + 5)$

d)  $f(x) = \log_{10} 3x^2$

e)  $f(x) = y = x^{x^x}$

f)  $y = \frac{(x+1)^2(\sqrt{x-1})}{(x+4)^3 e^x}$

**د معکوسو تابعگانو مشتق**  
 مخامخ شکل د څه ډول تابع گراف راښيي؟



که چیرې  $f$  او  $g$  یوه د بلې دوی معکوسې تابعګانې وي، یعنې  $x = g(y) \Leftrightarrow y = f(x)$  نو:  
 مخامخ شکل د څه ډول تابع گراف راښيي؟  
 چې د تابع او ضمنې تابعگانو له مشتق څخه لیکلای شو:

$$\left. \begin{array}{l} y = f(x) \\ x = g(y) \end{array} \right\} \Rightarrow y'_x \cdot x'_y = y'_y \Rightarrow y'_x \cdot x'_y = 1 \Rightarrow y'_x = \frac{1}{x'_y}$$

مثال: د  $y = a^x$  تابع مشتق د هغې د معکوسې تابع په مرسته پیدا کړئ.  
 حل:

$$\begin{aligned} y = a^x &\Rightarrow x = \log_a y \\ \Rightarrow y'_x &= \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\log_a y)'} = \frac{1}{\frac{1}{y} \log_a e} = \frac{1}{\log_a e} = y \log_e a \\ y'_x &= a^x \ln a \end{aligned}$$

**د مثلثاتي معکوسو تابعگانو مشتق**

د مثلثاتي معکوسو تابعگانو مشتق د لاندې اړیکو په مرسته لاسته راوړو:

- 1)  $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- 2)  $(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
- 3)  $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$
- 4)  $(\operatorname{arccot} x)' = \frac{-1}{1+x^2}$

ثبوت:

$$1) y = \arcsin \sin x \Leftrightarrow x = \sin y$$

$$(\arcsin \sin x)' = ?$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}}$$

$$\Rightarrow (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$2) y = \arccos \cos x \Leftrightarrow x = \cos y$$

$$(\arccos \cos x)' = ?$$

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\cos y)'} = \frac{1}{-\sin y} = \frac{-1}{\sqrt{1 - \cos^2 y}}$$

$$\Rightarrow (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$3) y = \arctan \tan x \Leftrightarrow x = \tan y$$

$$\Rightarrow (\arctan \tan x)' = y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\tan y)'} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \cos^2 y$$

$$= \frac{\cos^2 y}{1} = \frac{\cos^2 y}{\sin^2 y + \cos^2 y}$$

د کسر صورت او مخارج په  $y$   $\cos^2$  ویشو:

$$(\arctan \tan x)' = \frac{\cos^2 y}{\sin^2 y + \cos^2 y} = \frac{1}{\tan^2 y + 1} = \frac{1}{1 + x^2}$$

$$\Rightarrow (\arctan x)' = \frac{1}{1 + x^2}$$

$$4) y = \arccot x \Leftrightarrow x = \cot y$$

$$(\arccot x)' = ?$$

$$\begin{aligned} (\arccot x)' = y'_x &= \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\cot y)'} = \frac{1}{\frac{-1}{\sin^2 y}} \\ &= -\sin^2 y = \frac{-\sin^2 y}{1} = \frac{-\sin^2 y}{\sin^2 y + \cos^2 y} \\ &= -\frac{\sin^2 y}{\sin^2 y + \cos^2 y} = -\frac{1}{1 + x^2} \end{aligned}$$

د کسر صورت او مخارج په  $y \sin^2$  ویشو:

**لومړی مثال:** د  $y = (\arctan x)^5$  مشتق پیدا کړئ.

$$y' = 5(\arctan x)^4 (\arctan x)' = 5(\arctan x)^4 \frac{1}{1+x^2}$$

**دویم مثال:** د  $y = \log_5(\arctan x)$  تابع مشتق پیدا کړئ.

$$\begin{aligned} y' = [\log_5(\arctan x)]' &= \log_5 u = \frac{u'}{u \ln a} \\ &= \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{\arctan x \ln 5} \end{aligned}$$

**درېم مثال:** د  $y = \arctan e^x$  تابع د مشتق مقدار د  $x = 0$  څخه پیدا کړئ.

$$\begin{aligned} y' &= [\arctan e^x]' = (\arctan u)' = \frac{u'}{1+u^2} = \frac{e^x}{1+e^{2x}} \\ y'(0) &= \frac{e^0}{1+e^0} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$



پوښتني

1. د لاندې تابعگانو مشتق پيدا کړئ.

1)  $y = (\arcsin x)^3$

2)  $y = \log_2(\arcsin x)$





$$\frac{2}{x+1} + \frac{1}{x^2-1} = \frac{2x-1}{x^2-1}$$

### قسمي کسرونه

د یو کسرونه تجزیه کول په قسمي کسرونو:

په هر یو چې د  $\frac{1}{x+1}$  او  $\frac{1}{x^2-1}$  د جمعې حاصل

دی، آیا کولای شئ چې له دې کسرونه د

$\frac{1}{x+1}$  او  $\frac{1}{x^2-1}$  کسرونه لاسته راوړئ.



### فعالیت

- د  $\frac{7}{x+1}$ ، او  $\frac{2}{x-5}$  کسرونه سره جمع کړئ.
- د پورته کسرونو د جمعې حاصل، بېرته په لومړنیو کسرونو راوړئ.
- واقعي کسرونه څه ډول کسرونه دي، تعریف یې کړئ.
- د پورتنۍ فعالیت پایله داسې بیانو:

**تعریف:** د یوه واقعي کسرونه کوچنی کسرونه چې د جمعې د عواملو په شکل لیکل شوی وي، که چېرې هغوی سره جمع کړو، راکړل شوی واقعي کسرونه په لاس راځي، نو دا جمع شوي لومړني کسرونه د قسمي کسرونو په نامه یادېږي.

د یوه واقعي کسرونه تجزیه کولو لپاره لاندې حالتونه په پام کې نیسو:

### لومړی حالت:

که چېرې د  $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$  ناطق کسرونه مخ (  $P_n(x)$  ) له خطي، بیلابیلو ضربی عواملو څخه جوړ شوی وي او تکرار نه وي په لاندې بڼه بللېدلای شي:

$$\frac{P_m(x)}{P_n(x)} = \frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{x-x_2} + \frac{C}{x-x_3} + \dots + \frac{D}{x-x_n}$$

(A, C, ... حقیقي عددونه دي)

**لومړی مثال:** د  $\frac{4x^2 - x - 39}{x^3 - 4x^2 - 7x + 10}$  کسرونه قسمي کسرونو تجزیه کړئ.

**حل:** د مخونو پولینوم په لومړنیو ضربی عواملو تجزیه کوو، نو په لاس راځي:



$$x^3 - 4x^2 - 7x + 10 = (x-5)(x-1)(x+2)$$

لیبل کبری، چي نوموری کسر له دریو قسمي کسرونو څخه جوړ شوی دی، صورتونه یې  $A$ ،  $C$ ،  $\frac{1}{x+2}$  ټاکو:

$$\frac{4x^2 - x - 39}{x^3 - 4x^2 - 7x + 10} = \frac{A}{x-5} + \frac{1}{x-1} + \frac{C}{x+2}$$

$$\frac{4x^2 - x - 39}{x^3 - 4x^2 - 7x + 10} = \frac{A(x-1)(x+2) + (x-5)(x+2) + C(x-1)(x-5)}{(x-5)(x-1)(x+2)}$$

$$\frac{4x^2 - x - 39}{x^3 - 4x^2 - 7x + 10} = \frac{Ax^2 + Ax - 2A + x^2 - 3x - 10 + Cx^2 - 6Cx + 5C}{(x-5)(x-1)(x+2)}$$

$$\frac{4x^2 - x - 39}{x^3 - 4x^2 - 7x + 10} = \frac{(A+C)x^2 + (A-3-6C)x + (-2A-10+5C)}{(x-5)(x-1)(x+2)}$$

لیبل کبری، چي د دواړو خواوو د کسرونو مخ جونه سره برابر دي، نو باید صورتونه هم سره برابر وي، نو د مطابقت د خواصو(د ورته حلونو ضربونه سره مساوي وي) څخه په گټه اخستني سره لیکو:

$$\begin{cases} A + C = 4 \\ A - 3 - 6C = -1 \\ -2A - 10 + 5C = -39 \end{cases}$$

د پورته سیستم له حل څخه وروسته  $A=2$ ,  $C=3$  او  $C=-1$  په لاس راځي، نو:

$$\frac{4x^2 - x - 39}{x^3 - 4x^2 - 7x + 10} = \frac{2}{x-5} + \frac{3}{x-1} - \frac{1}{x+2}$$

**دویم مثال:** د کسر په قسمي کسرونو تجزیه کوئ.

**حل:** لومړی نوموړی کسر په واقعي کسر بدلوو او بیا پورتنی طریقې پرې تطبیقوو:

$$\frac{3x^3 - 6x^2 - 20x - 1}{x^2 - 2x - 8} = 3x + \frac{4x - 1}{x^2 - 2x - 8} = 3x + \frac{A}{x-4} + \frac{B}{x+2}$$

$$= \frac{A(x+2) + (x-4)B}{(x-4)(x+2)} = \frac{A(x+2) + (2A-4)B}{x^2 - 2x - 8}$$

$$\left. \begin{aligned} A + B &= 4 \\ 2A - 4 &= -1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow A = \frac{5}{2}, \quad B = \frac{3}{2}$$

$$\frac{3x^3 - 6x^2 - 20x - 1}{x^2 - 2x - 8} = 3x + \frac{5}{2(x-4)} + \frac{3}{2(x+2)}$$

### دویم حالت:

که د کسر د مخخوڅ ضربي عوامل لومړی درجه پولینوم وي چې ځینې یې تکرار راغلی وي، یعنې که د  $x-x_0$  عامل  $n$  ځلې په مخخوڅ کې تکرار شوی وي، نو لیکلای شو؛ چې:

$$\frac{P_m(x)}{P_n(x)} = \frac{A}{x-x_0} + \frac{\dots}{(x-x_0)^2} + \dots + \frac{\dots}{(x-x_0)^n}$$

لومړی مثال: د  $\frac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2}$  واقعي کسر په قسمي کسرونو تجزیه کړئ:

حل: د مخخوڅ د پولینوم ضربي عوامل په لاس راوړو:

$$\begin{aligned}x^3 - 4x^2 + 5x - 2 &= (x-1)(x-2)(x-1) \\ \frac{3x^2 - 6x + 2}{x^3 - 4x^2 + 5x - 2} &= \frac{3x^2 - 6x + 2}{(x-2)(x-1)^2} = \frac{A}{(x-2)} + \frac{C}{(x-1)} + \frac{C}{(x-1)^2} \\ &= \frac{A(x-1)^2 + (x-2)(x-1) + C(x-2)}{(x-2)(x-1)^2} \\ &= \frac{(A+ )x^2 + (-2A-3 + C)x + (A+2 - 2C)}{(x-2)(x-1)^2}\end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned}A+ &= 3 \\ -2A-3 + C &= -6 \\ A+2 - 2C &= 2\end{aligned} \right\} \begin{aligned}A &= 2 \\ &= 1 \\ C &= 1\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{3x^2 - 6x + 2}{x^3 - 4x^2 + 5x - 2} = \frac{2}{x-2} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}$$

### دریم حالت:

که د مخخوڅ ضربي عوامل دریمه درجه پولینوم چې د تجزیې وړ نه وي او تکرار هم نه وي راغلی، نو د  $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$

واقعي پولینوم د یو قسمي کسر  $\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$  بڼه لري.  
لومړی مثال: د  $\frac{5x^2+8x+9}{x^3+3x^2+6x+4}$  کسر په قسمي کسرونو تجزیه کړئ.

حل: د مخرج پولینوم ضربی عوامل عبارت دی له:

$$x^3 + 3x^2 + 6x + 4 = (x+1)(x^2 + 2x + 4)$$

خړنگه چې د  $x^2 + 2x + 4$  درې جمله‌یی د حقیقي عددونو په ست کې حل نه لري، نو په دې ساحه کې د تجزیې وړ نه ده له دې امله لیکو:

$$\frac{5x^2 + 8x + 9}{x^3 + 3x^2 + 6x + 4} = \frac{Ax + C}{x^2 + 2x + 4} + \frac{B}{x + 1} = \frac{(Ax + C)(x + 1) + C(x^2 + 2x + 4)}{(x^2 + 2x + 4)(x + 1)}$$

$$\left. \begin{aligned} A + C &= 5 \\ A + 2C &= 8 \\ + 4C &= 9 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} A &= 3 \\ &= 1 \\ C &= 2 \end{aligned} \Rightarrow \frac{5x^2 + 8x + 9}{x^3 + 3x^2 + 6x + 4} = \frac{3x + 1}{x^2 + 2x + 4} + \frac{2}{x + 1}$$



پوښتني

لاندې کسرونه په قسمي کسرونو تجزیه کړئ.

-1

a)  $\frac{-x^2 + 2x - 12}{x^3 + 2x^2 + 6x + 5}$

b)  $\frac{4x^2 - 3x + 8}{x^3 - 2x + 4}$

c)  $\frac{2x^4 - 8x^3 + 7x^2 - 3x + 4}{x^2 - 9x + 3}$

-2

a)  $\frac{1}{x^4(x+1)}$

b)  $\frac{3x^2 - 6x + 2}{x^3 - 4x^2 + 5x - 2}$

c)  $\frac{x^4 + 1}{x^2(x-1)}$

d)  $\frac{3x^2 + 5x + 10}{x^3 + 2x^2 - 4x - 8}$

e)  $\frac{3x^2 - 18x + 36}{x^3 - 6x^2 + 9x}$

-3

a)  $\frac{3x + 7}{(x^2 + x + 1)(x^2 - 4)}$

b)  $\frac{x^2 + 3x + 4}{x^4 - 2x^2 + 1}$

c)  $\frac{x^2 + 13x + 10}{x^3 - 5x^2}$

d)  $\frac{x^5}{x^4 - 1}$



د اکسپوننشل تابعگانو انټیگرالونه  
مخامخ اړیکې سره پرتله کړئ.

$$\log_a b = x$$
$$a^x = b$$



### فعالیت

- د  $f(x) = a^x$  تابع څه ډول تابع ده، نوم یې واخلي.
  - د لوگارتمې تابع یوه بېلگه وليکئ.
  - د  $\log_a x = C$  اړیکه په اکسپوننشل ډول وليکئ.
- له پورتنۍ فعالیت څخه لیکلای شو چې:

د  $f(x) = e^x$  طبيعي اکسپوننشل تابع لپاره لرو  $\int e^x dx = e^x + C$  نو په عمومي ډول

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}, \quad a \neq 1, \quad a \in \mathbb{R}^+$$

ثبوت:

$$\int a^x dx$$

$$u = 1 \Rightarrow du = 0 \cdot dx$$

$$dv = a^x \Rightarrow v = \frac{a^x}{\ln a}$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} - \int \frac{a^x}{\ln a} \cdot 0 \cdot dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

لومړی مثال: د  $f(x) = 2^{x-3}$  اکسپوننشل تابع انټیګرال غواړو پیدا کړو:  
د توان له قانون څخه لرو:

$$2^{x-3} = \frac{2^x}{2^3} = \frac{1}{8} 2^x$$

$$\int 2^{x-3} dx = \int \frac{1}{8} 2^x dx = \frac{1}{8} \int 2^x dx$$

$$\frac{1}{8} \int 2^x dx = \frac{1}{8} \cdot \frac{2^x}{\ln 2} + C$$

دویم مثال: دلاندې اکسپوننشل تابعگانو انټیګرالونه پیدا کړئ.

1)  $\int 3^{x+1} dx = ?$       2)  $\int 6^{x-1} dx = ?$

حل:

1)  $\int 3^{x+1} dx = ?$

$$3^{x+1} = 3^x \cdot 3$$

$$\int 3^x \cdot 3 dx = 3 \int 3^x dx = 3 \cdot \frac{3^x}{\ln 3} + C$$

2)  $\int 6^{x-1} dx = ?$

$$6^{x-1} = \frac{6^x}{6} = \frac{1}{6} \cdot 6^x$$

$$\int \frac{1}{6} 6^x dx = \frac{1}{6} \int 6^x dx = \frac{1}{6} \cdot \frac{6^x}{\ln 6} + C$$



پوښتني

دلاندې اکسپوننشل تابعگانو انټیګرالونه محاسبه کړئ.

- |                                  |                                    |                              |
|----------------------------------|------------------------------------|------------------------------|
| a) $\int 3^{x-1} dx$             | b) $\int 2^{-x} dx$                | c) $\int a^{x+b} dx$         |
| d) $\int \frac{1}{a^x} dx$       | e) $\int 2^x \cdot 3^x dx$         | f) $\int \frac{2^x}{3^x} dx$ |
| g) $\int \frac{4^{x+3}}{2^x} dx$ | h) $\int \frac{5^x + 3^x}{2^x} dx$ | i) $\int (1+2^x) dx$         |

**د لوگاريتمي تابعگانو انټيگرال**  
 وښئئ چې د تابع په کوم حالت کې نزولي او په کوم حالت کې صعودي ده.

$$y = a^x$$

$$\int a^x dx = ?$$



**فعالیت**

- لوگاريتم په څو ډوله دی، د هر ډول عمومي رابطه وليکئ.
- د  $x = a^y$  او  $y = \log_a x$  معادلې يو له بل سره څه اړيکه لري.
- د  $x = b^y$  او  $y = \log_b x$  تابعگانو گراف رسم کوئ.
- آیا کولای شو چې د لوگاريتمي تابعگانو انټيگرال ونیسو؟

د پورتنۍ فعالیت څخه پايله داسې بيانوو:

که  $(x \in \mathbb{R}^+)$   $f(x) = \ln x$  وي د طبيعي لوگاريتم د تابع لپاره ليکلای شو:  $\int \ln dx = x \cdot \ln x - x + C$

که  $(x, a \in \mathbb{R}^+, a \neq 1)$   $f(x) = \log_a x$

$$\int \log_a x dx = x \log_a \frac{x}{e}$$

**ثبوت:**

1- که  $a = e$  وضع شي، نو:

$$\int \log_e x dx = x \log_e \frac{x}{e} + C$$

$$\int \log_e x dx = \int \ln x dx = x \log_e \frac{x}{e} = x(\log_e x - \log_e e)$$

$$\int \ln x dx = x \ln x - x + C = x(\ln x - 1) + C$$

$$\int \log_a x \, dx = x \log_a \frac{x}{e} + C$$

$$u = \log_a x, \quad du = \frac{1}{x} \log_a e \, dx$$

$$dv = dx, \quad v = x$$

$$\int \log_a x \, dx = x \log_a x - \int x \frac{1}{x} \log_a e \, dx$$

$$= x \log_a x - \log_a e \int dx$$

$$= x \log_a x - x \log_a e = x(\log_a x - \log_a e) = x \log_a \frac{x}{e} + C$$

$$\int \log_a x \, dx = x \log_a \frac{x}{e} + C$$

مثال د:  $\int \ln 3x \, dx$  غیر معین انتیگرال غوارو پیدا کرو:

حل:

$$\begin{aligned} \int \ln 3x \, dx &= \int (\ln 3 + \ln x) \, dx = \int \ln 3 \, dx + \int \ln x \, dx \\ &= x \ln 3 + x \ln x - x \\ &= x(\ln 3 + \ln x) - x = x(\ln 3x - 1) \end{aligned}$$

یادونه:

(I) د تعویض Substitution له لارې کولای شو د غیر معین انتیگرال حل پیدا کړو.

لومړی مثال: لاندې انتیگرالونه پیدا کړئ.

حل:

$$a) \quad I = \int_2^1 \frac{1}{2} e^{-2x-3} \, dx$$

$$-2x - 3 = u, \quad -2 = \frac{du}{dx}, \quad dx = -\frac{1}{2} du$$

$$I = \int_2^1 \frac{1}{2} e^u \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) du = -\frac{1}{4} \int e^u du = -\frac{1}{4} e^u + C = -\frac{1}{4} e^{-2x-3} + C$$

$$b) \quad I = \int \frac{2dx}{x+2}$$

$$x + 2 = u, \quad 1 = \frac{du}{dx} \quad dx = du$$

$$I = \int \frac{2du}{u} = 2 \int \frac{du}{u} = 2 \ln|u| + C = 2 \ln|x+2| + C$$





دویم مثال : د  $f(x) = e^{2x}$  تابع انتیگرال ونیسی:

حل:

$$f(x) = e^{2x} \Rightarrow \int f(x) dx = \int e^{2x} dx = ?$$

$$u = 2x \Rightarrow du = 2dx$$

$$dx = \frac{du}{2}$$

$$f(x) = e^{2x} \Rightarrow \int f(x) dx = \int e^u \cdot \frac{du}{2} = \frac{1}{2} \int e^u du$$

$$\int e^{2x} dx = \frac{e^u}{2} + C = \frac{e^{2x}}{2} + C = \frac{1}{2} e^{2x} + C$$

$$\text{آزمائښت: } F'(x) = \frac{1}{2} e^{2x} \cdot 2 = e^{2x} = f(x)$$

دویم مثال : د  $f(x) = x \cdot \ln x^2$  انتیگرال حساب کړی.

حل:

$$f(x) = x \cdot \ln x^2 \Rightarrow \int f(x) dx = \int (x \cdot \ln x^2) dx = ?$$

$$u = x^2$$

$$du = 2x dx \Rightarrow dx = \frac{1}{2} du$$

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= \int x \cdot \ln u \cdot \frac{1}{2} du = \frac{1}{2} \int \ln u du = \frac{1}{2} [u \cdot \ln u - u + C] = \frac{1}{2} u \cdot \ln u - \frac{1}{2} u + C \\ &= \frac{1}{2} x^2 \cdot \ln x^2 - \frac{1}{2} x^2 + C \end{aligned}$$

(II) معین انتیگرالونه هم د بدلون(تعموض) له لارې حل کړي.

لومړی مثال : د  $\int_{-1}^1 e^{2x} dx$  انتیگرال پيدا کړی.

$$f(x) = e^{2x} \Rightarrow \int_{-1}^1 e^{2x} dx$$

$$u = 2x \Rightarrow du = 2dx \Rightarrow dx = \frac{1}{2} du$$

$$\left. \begin{aligned} x = -1, u = 2x &\Rightarrow u = 2(-1) = -2 \\ x = 1, u = 2x &\Rightarrow u = 2(1) = 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \int_{-1}^1 e^{2x} dx = \frac{1}{2} \int_{-2}^2 e^u du = \frac{1}{2} [e^u]_{-2}^2 = 3.627$$

دویم مثال : د انتیگرال قیمت پیدا کریں۔  
 $f(x) = \int_1^2 2x \cdot \ln x^2 dx$

$$u = x^2$$

$$du = 2x dx \Rightarrow dx = \frac{1}{2x} du$$

$$\left. \begin{array}{l} x=1, \quad u = x^2 = 1 \\ x=2, \quad u = x^2 = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow \int_1^2 2x \cdot \ln x^2 dx = \int_1^4 2x \cdot \ln u \cdot \frac{1}{2x} du = \int_1^4 \ln u du$$
$$= [u \cdot \ln u - u]_1^4 = [4 \cdot \ln 4 - 4] - [1 \cdot \ln 1 - 1] \approx 2.545$$



لاسی انتیگرالز نہ حل کریں۔

a)  $\int \ln 2x^3 dx$

b)  $\int \ln \sqrt{x} dx$

c)  $\int \log \frac{x}{2} dx$

d)  $\int 3 \log \frac{1}{x} dx$

e)  $\int_1^2 \frac{4}{e^{2x-4}} dx$

د قسمي کسرونو په مرسته د انټیګرال محاسبه  
د مخامخ کسر قسمي کسرونه پیدا کړئ.

$$\frac{5}{x^2 - 3x + 2} = \frac{?}{(x-2)} + \frac{?}{(x-1)}$$

مخکې مو د قسمي کسرونو تجزیه مطالعه کړه اوس غواړو چې د هغو  
تابگانو انټیګرالونه د قسمي کسرونو په واسطه ترخپرنې لاندې ونیسو.

**لومړی مثال:**  $\int \frac{7x-12}{x^2-6x+8} dx$  محاسبه کړئ.

**حل:** د قسمي کسرونو د تجزیې په مرسته لیکلای شو:

$$\begin{aligned} \frac{7x-12}{x^2-6x+8} dx &= \frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{(x-4)} \\ \frac{A(x-4) + B(x-2)}{(x-2)(x-4)} &= \frac{Ax-4A + Bx-2B}{(x-2)(x-4)} = \frac{(A+B)x-4A-2B}{(x-2)(x-4)} \\ A+B &= 7 \\ -4A-2B &= -12 \\ A=7- & \\ -4(7- & )-2 = -12 \\ -28+4 & -2 = -12 \\ -28+2 & = -12 \\ 2 = 16 & \Rightarrow = 8 \\ A=7-8 & = -1 \\ \frac{7x-12}{x^2-6x+8} &= -\frac{1}{x-2} + \frac{8}{x-4} \end{aligned}$$

نو لیکلای شو چې:

$$\begin{aligned} \int \frac{7x-12}{x^2-6x+8} dx &= \int \frac{-1}{x-2} dx + \int \frac{8}{x-4} dx \\ \int \frac{7x-12}{x^2-6x+8} dx &= -\int \frac{1}{x-2} dx + 8 \int \frac{1}{x-4} dx \\ &= -\ln|x-2| + 8\ln|x-4| + C = \ln(x-2)^{-1} + \ln(x-4)^8 + C \\ &= \ln[(x-2)^{-1} \cdot (x-4)^8] + C = \ln\left[\frac{(x-4)^8}{x-2}\right] + C \end{aligned}$$



**دویم مثال :** د  $\int \frac{-5x+9}{x^2+x-6} dx$  انٹیگرال محاسبه کوئ.

**حل :** مخرج په فکتوریزه تجزیه کوو:

نو:

$$\begin{aligned} \frac{-5x+9}{x^2+x-6} &= \frac{-5x+9}{(x-2)(x+3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+3} \\ \frac{A(x+3) + (x-2)B}{(x-2)(x+3)} &= \frac{A(x+3) + B(x-2)}{(x-2)(x+3)} \\ (A+B)x + 3A - 2B &= -5x + 9 \\ A+B &= -5 \Rightarrow A = -5 - B \\ 3A - 2B &= -5x + 9 \end{aligned}$$

د A او عددي قیمتونه عبارت دي له:

$$\begin{aligned} 3(-5 - B) - 2B &= 9 \\ -15 - 5B &= 9 \\ -5B &= 24 \\ B &= -\frac{24}{5} \\ A &= -5 + \frac{24}{5} = \frac{-25+24}{5} = -\frac{1}{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{-5x+9}{x^2+x-6} &= \frac{-\frac{1}{5}}{x-2} - \frac{\frac{24}{5}}{x+3} \\ \int \frac{-5x+9}{x^2+x-6} dx &= \int \frac{-\frac{1}{5}}{x-2} dx - \int \frac{\frac{24}{5}}{x+3} dx = -\frac{1}{5} \int \frac{1}{x-2} dx - \frac{24}{5} \int \frac{1}{x+3} dx \\ &= -\frac{1}{5} \ln(x-2) - \frac{24}{5} \ln(x+3) \\ &= \ln(x-2)^{-\frac{1}{5}} + \ln(x+3)^{-\frac{24}{5}} = \ln \left[ (x-2)^{-\frac{1}{5}} \cdot (x+3)^{-\frac{24}{5}} \right] + C \end{aligned}$$



لاندې انٹیگرالونه د قسمي کسرونو په طریقو حل کوئ.

a)  $\int \frac{x+2}{x^3-3x^2-x+3} dx$

b)  $\int \frac{x-2}{x^2-6x+13} dx$

c)  $\int \frac{x^6}{x^4+3x^2+2} dx$



### د څپرکي مهم ټکي

- که  $f(x) = e^x$  وي، نو ددې تابع مشتق عبارت له  $f'(x) = e^x$  دی.
- که  $f(x) = a^x$  وي، نو ددې تابع مشتق  $f'(x) = a^x \cdot \ln a$  دی.
- که  $f(x) = \log_a x$  وي، نو د تابع مشتق  $f'(x) = \frac{1}{x \ln a}$  دی.
- که  $f(x) = \log_a g(x)$  وي، نو د تابع مشتق  $f'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)} \log_a e$  دی.

- قسمي کسرونه: د یوه واقعي کسر هغه کوچنی کسرونه چې د جمعې د عواملو په شکل لیکل شوی دی که هغوی جمع کړو، راکړل شوي واقعي کسر په لاس راځي، قسمي کسرونه بلل کېږي.

- که چېرې د  $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$  د کسري پولینوم مخرچ  $(P_n(x))$  د خطي بیلابیلو ضربی عواملو څخه جوړ چې تکرار نه وي راغلی په لاندې بڼه بدیلدای شي:

$$\frac{P_m(x)}{P_n(x)} = \frac{A}{x-x_1} + \frac{C}{x-x_2} + \dots + \frac{C}{x-x_n}$$

- که د لومړی درجه پولینوم مخرچ ضربی عوامل چې ځینې یې تکرار راغلی وي، یعنې که د  $x-x_0$  عامل  $n$  ځلې تکرار شوی وي، نو لیکلای شو؛ چې:

$$\frac{P_m(x)}{P_n(x)} = \frac{A}{x-x_0} + \frac{C}{(x-x_0)^2} + \dots + \frac{C}{(x-x_0)^n}$$

- که د مخرچ ضربی عوامل دویمه درجه پولینوم د تجزیې وړ نه وي او تکرار هم نه وي راغلی نو د  $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$  واقعي پولینوم یو توپه کسر  $\frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c}$  بڼه لري.

- د اکسیونشنیل تابعگانو انتیگرال لپاره لیکلای شو:

$$\int e^x dx = e^x + C, \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad (a \in \mathbb{R}^+, a \neq 1)$$

- د لوگارتمی توابعو د انتیگرال لپاره لیکلای شو:

$$\int \ln dx = x \ln x - x + C, \quad \int \log_a x dx = x \log_a x + C$$

- ځینې تابعگانې چې پرته د بدلون له لارې حل کېږي، لیکو:

$$f(x) = e^x \Rightarrow \int f(x) dx = \int e^x dx = e^x + C$$

## د پنجم خپر کي پوښتني

لاندي پوښتني حل کړئ.

1. د  $f(x) = \ln\left(\frac{x-2}{x+2}\right)$  د تابع مشتق پيدا کړئ.
2. د  $f(x) = \ln\sqrt{x-1}$  تابع مشتق پيدا کړئ.
3. د  $y = 2x^{2x}$  تابع مشتق پيدا کړئ.
4. د  $f(x) = \log\sqrt{x^3}$  تابع مشتق پيدا کړئ.
5. لاندي کسرونه په قسمي کسرونو تجزيه کړئ.
6. لاندي اتيگرالونه پيدا کړئ.

1)  $\frac{x+1}{x^2-x-6}$

2)  $\frac{x^2-x+1}{x^3+2x^2+x}$

3)  $\frac{2x^2+3}{(x^2+1)^2}$

1)  $\int 5t^7 dt$

2)  $\int \frac{x^3-3}{x^2} dx$

3)  $\int (2 \cos x - 5 \sin x + e^x) dx$

4)  $\int \sqrt{\cos x} \sin x dx$

5)  $\int xe^{-x} dx$

6)  $\int \left(\frac{5}{(2x+1)(x-2)}\right) dx$

7)  $\int_1^3 3x^2 \sqrt{x^3+1} dx$

7- د لاندي تابعگانو مشتق پيدا کړئ.

a)  $y = \ln(x^2 + x + 1)$

b)  $y = \ln(\sin x)$

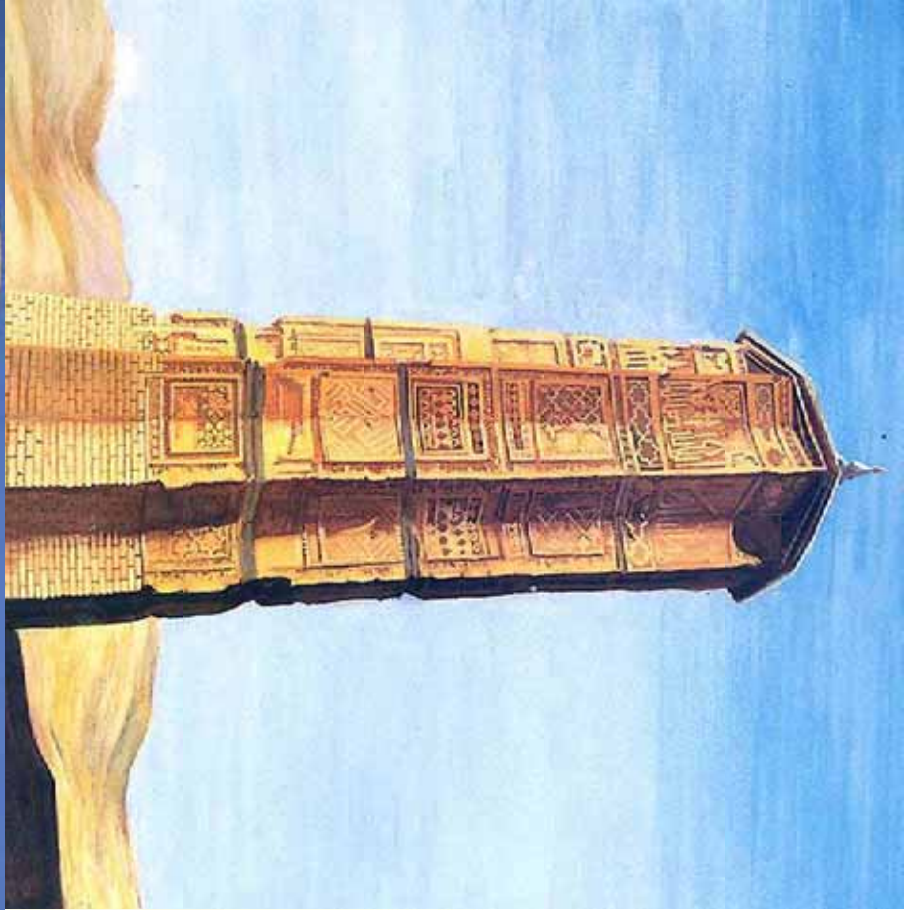
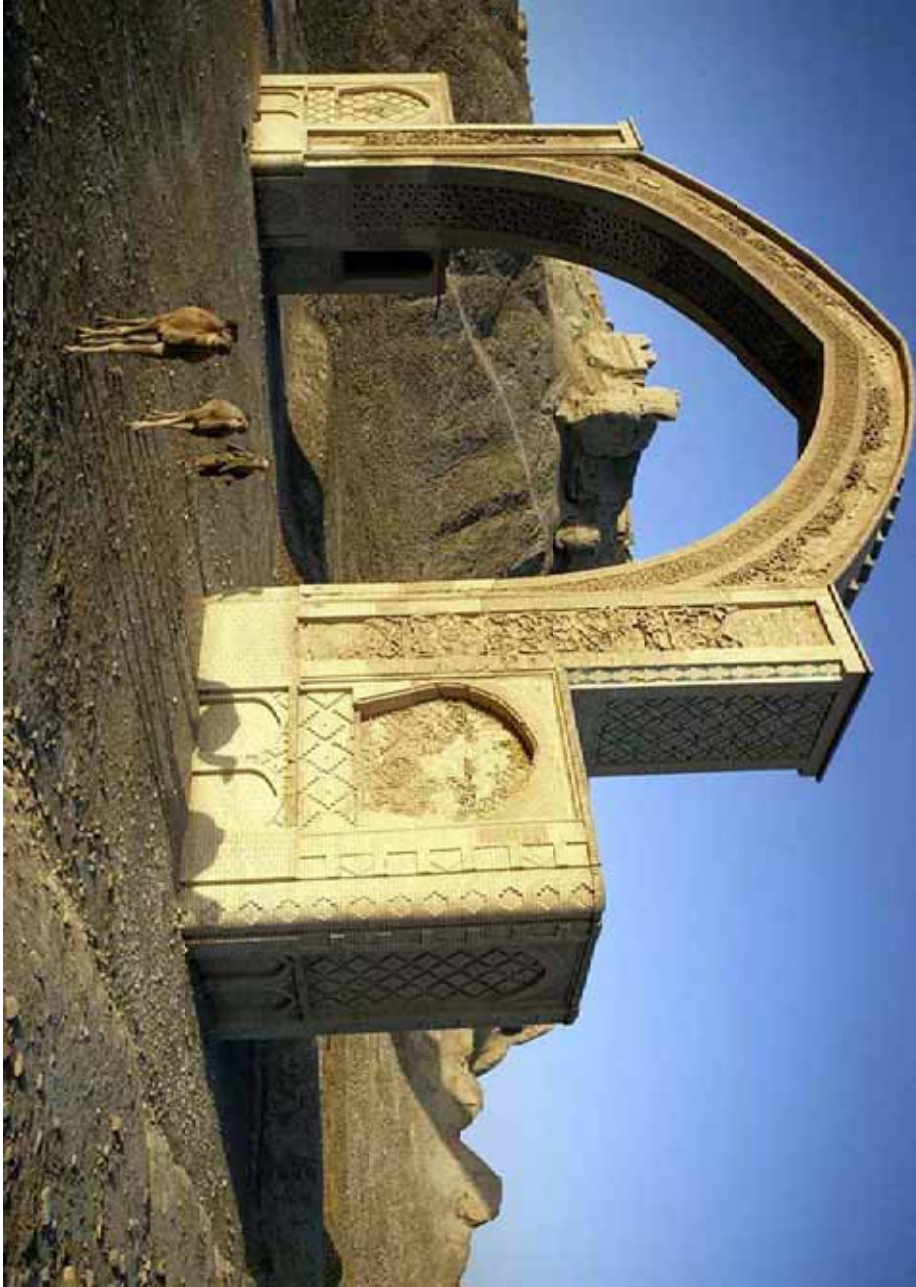
c)  $y = e^{x^2+1}$

d)  $y = \sqrt[3]{2}$

# شپریم خبر کی د انتیگرال تطبیقات

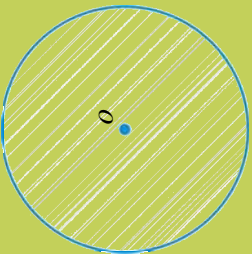








د یوې منحنی د محصور شوي سطحي د مساحت محاسبه  
*Accounting of area bounded by one curve*  
 د مخامخ شکل مساحت چې یوه سطحه د یوې منحنی  
 په واسطه ترل شوي دایره ده د مساحت فورمول یی  
 ورواست.



فعالیت

د  $x^2 - 1 = y$  تابع په پام کې ونیسئ.

- د تابع بحراني (Critical Point) ټکي او د  $x$  محور سره د تقاطع ټکي پیدا او گراف یې رسم کړئ.
- د  $x^2 - 1 = y$  تابع او  $x$  محور تر منځ د سطحي د مساحت قیمت د انټیگرال په مرسته پیدا کړئ.
- پورتنی فعالیت د  $x^2 + 2x - y = 0$  تابع لپاره تکرار کړئ او د منحنی او د  $x$  محور تر منځ محصور شوی مساحت محاسبه کړئ.

له پورتنی فعالیت څخه لاندې پایلې لاسته راځي:

- $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$  انټیگرال د یوې سطحي د مساحت قیمت رابښي چې د  $f(x) = y$  منحنی او د  $x$  محور او د  $x = a$ ,  $x = b$  د کرښو له خوا رابند (محصول) دی.
- که د  $f(x)$  تابع په  $[a, b]$  تړلی انټیروال کې مثبت او متمادي وي، یعنې  $f(x) \geq 0$  په دې صورت کې  $f(x)$  تابع گراف تل د  $x$  محور پورته خوا ته او که  $f(x) \leq 0$  وي، په دې حالت کې  $f(x)$  تابع گراف د  $x$  محور لاندې خوا ته واقع ده او منفي دی.

**لومړی مثال:** د  $x = 4 - y^2$  تابع د منځني او د  $y$  د محور تر منځ محصور شوی مساحت پیدا کړئ.

**حل:** لومړی د تابع بحراني ټکي او د  $y$  محور سره د پریکړې ټکي پیدا کوو، وروسته یې شکل رسموو، د بحراني ټکي د پیدا کولو لپاره لومړی د تابع مشتق نیسو او له صفر سره یې مساوي کوو او د محورونو سره د پریکړې ټکو د په لاس راوړلو لپاره تابع له صفر سره برابروو.

$$x = 4 - y^2 \Rightarrow x' = -2y = 0$$

$$x' = 0 \Rightarrow y = 0$$

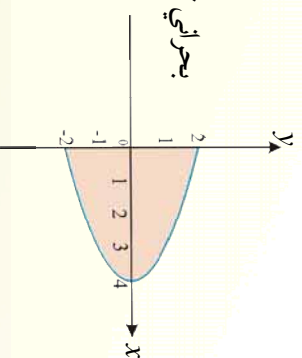
$$y = 0, \quad x = 4 - y^2 \Rightarrow x = 4 - 0 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow (4, 0)$$

بحراني ټکي

$$x = 0, \quad 4 - y^2 = 0 \Rightarrow y^2 = 4$$

$$y = \pm 2 \Rightarrow (0, 2), \quad (0, -2)$$

د محورونو سره د پریکړې ټکي



څرنگه چې د  $x = 4 - y^2$  معادله په  $[-2, 2]$  انټروال کې نظر  $x$  محور ته دواړه ټکي متناظر دي، نو د نمایي مساحت په پام کې نیولو سره، د انټیګرال د مساحت سرحدات په لاندې ډول په لاس راوړو:

$$A = \int_{-2}^2 (4 - y^2) dy = 2 \int_0^2 (4 - y^2) dy = 2 \left[ 4y - \frac{y^3}{3} \right]_0^2$$

$$A = 2 \left[ (4 \cdot 2 - \frac{2^3}{3}) - 0 \right] = 2 \left( 8 - \frac{8}{3} \right) = 2 \left( \frac{24 - 8}{3} \right) = 2 \left( \frac{16}{3} \right) = \frac{32}{3}$$

**دویم مثال:** د  $x = 1 - \frac{1}{2}x^2$  تابع منځنی د محصور شوی سطحی مساحت محاسبه کړئ.

**حل:** د محصور شوی سطحی د مساحت ټاکلو لپاره لومړی بحراني ټکي او د  $x$  محور سره د تقاطع ټکي په لاس راوړو.

$$y = 1 - \frac{1}{2}x^2, \quad y' = -x$$

$$y' = 0 \Rightarrow x = 0$$

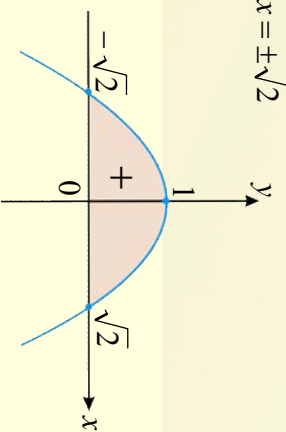
$$x = 0, \quad y = 1 - \frac{1}{2}x^2 = 1 \Rightarrow y = 1 - \frac{1}{2} \cdot 0^2 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow (0, 1)$$

بحراني ټکي

$$y = 0, \quad 1 - \frac{1}{2}x^2 = 0 \Rightarrow -\frac{1}{2}x^2 = -1 \Rightarrow x^2 = 2, \quad x = \pm\sqrt{2}$$

$$x_1 = \sqrt{2}, \quad x_2 = -\sqrt{2}$$

$$\text{د محورونو سره د پریکړې ټکي } (\sqrt{2}, 0), \quad (-\sqrt{2}, 0)$$



$$A = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (1 - \frac{1}{2}x^2) dx = 2 \int_0^{\sqrt{2}} (1 - \frac{1}{2}x^2) dx = 2 [x - \frac{1}{6}x^3]_0^{\sqrt{2}}$$

$$A = 2(\sqrt{2} - \frac{(\sqrt{2})^3}{6} - 0) = 2(\frac{6\sqrt{2} - (\sqrt{2})^3}{6}) = 2(\frac{6\sqrt{2} - \sqrt{8}}{6})$$

$$= (\frac{6\sqrt{2} - 2\sqrt{2}}{3}) = \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

$$A = 1.8853$$

**درېم مثال:** د  $y = x^2 - 3$  تابع گراف د  $x$  له محور سره يوه سطحه رابند وي، د دې سطحي مساحت پيدا کړئ.

**حل:** لومړی د سطحي د ټاکلو لپاره د تابع گراف رسمو او د تابع بحراني ټکی او د تقاطع ټکی په لاس راوړو:

$$y = x^2 - 3 \Rightarrow y' = 2x$$

$$y' = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$x = 0, y = x^2 - 3 \Rightarrow y = 0^2 - 3$$

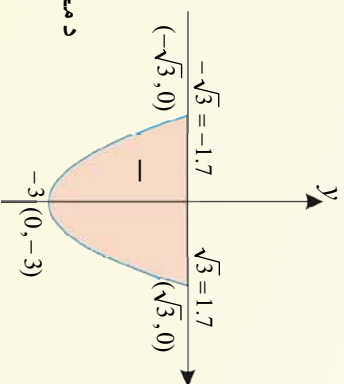
$$\Rightarrow y = -3 \Rightarrow (0, -3)$$

بحراني ټکی

$$y = 0, x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x^2 = 3$$

$$x = \pm\sqrt{3} \Rightarrow (\sqrt{3}, 0), (-\sqrt{3}, 0)$$

د محورونو سره د پېرېکړې ټکي



څرنگه چې د  $y = x^2 - 3$  تابع په  $[\sqrt{3}, -\sqrt{3}]$  انټروال کې د محور سره د پېرېکړې ټکي متناظر قيمتونه لري نو گراف يې د  $x$  محور څخه لاندې دی او انټيگرال يې منفي دی، نو د ټول مساحت څخه د انټيگرال د سرحدونو نيماني مساحت پيدا کوو او په 2 کې يې ضربوو:

$$A_1 = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (x^2 - 3) dx = -2 \int_0^{\sqrt{3}} (x^2 - 3) dx = -2 \left( \int_0^{\sqrt{3}} x^2 dx - 3 \int_0^{\sqrt{3}} dx \right) = -2 \left( \frac{1}{3} x^3 \Big|_0^{\sqrt{3}} - [3x]_0^{\sqrt{3}} \right)$$

$$= -2 \left( \frac{1}{3} [(\sqrt{3})^3 - 0] - 3[\sqrt{3} - 0] \right) = -2 \left( \frac{1}{3} (\sqrt{3})^3 - 3\sqrt{3} \right)$$

$$= -\frac{2}{3} (\sqrt{3})^3 + 6\sqrt{3} = -\frac{2}{3} (1.7)^3 + 6(1.7) = -\frac{2}{3} (4.913) + 10.2 = -\frac{9.826}{3} + 10.2$$

$$= -3.2753 + 10.2 = 6.9247$$

**ڄلورم مثال:** د  $y = x^2 - 3x$  تابع گراف رسم د منځني او  $x$  محور تر منځ د سطحي مساحت په  $[-1, 4]$  انټروال کي وټاکي.

**حل:** لومړی د منځني بحراني ټکي او له محورونو سره د پریکړي ټکي پیدا کوو:

$$y = x^2 - 3x$$

$$y' = 2x - 3 = 0 \Rightarrow 2x = 3, x = \frac{3}{2}$$

$$x = \frac{3}{2}, y = x^2 - 3x \Rightarrow y = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 3\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$y = \frac{9}{4} - \frac{9}{2} = -\frac{9}{4}, (x, y) = \left(\frac{3}{2}, -\frac{9}{4}\right)$$

بحراني ټکي

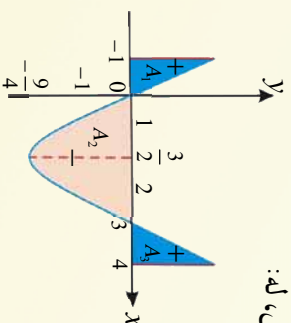
خړنگه چې  $0 < 2 = y''$  دی، نو د  $\left(\frac{3}{2}, -\frac{9}{4}\right)$  ټکي د تابع مطلق اصغري ټکي دی او د تقاطع ټکي يې د  $x$

له محور سره عبارت دی، له:

$$y = 0 \Rightarrow x^2 - 3x = 0$$

$$\Rightarrow x(x-3) = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 3$$



$$A = A_1 - A_2 + A_3 = \int_{-1}^0 (x^2 - 3x) dx - \int_0^3 (x^2 - 3x) dx + \int_3^4 (x^2 - 3x) dx$$

$$A = \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2\right]_{-1}^0 - \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2\right]_0^3 + \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2\right]_3^4$$

$$A = \left[\left(\frac{1}{3} \cdot 0 - \frac{3}{2} \cdot 0\right) - \left(\frac{1}{3} \cdot (-1)^3 - \frac{3}{2} \cdot (-1)^2\right)\right] - \left[\left(\frac{1}{3} \cdot 3^3 - \frac{3}{2} \cdot 3^2\right) - \left(\frac{1}{3} \cdot 0 - \frac{3}{2} \cdot 0\right)\right] +$$

$$\left[\left(\frac{1}{3} \cdot (4)^3 - \frac{3}{2} \cdot (4)^2\right) - \left(\frac{1}{3} \cdot (3)^3 - \frac{3}{2} \cdot (3)^2\right)\right]$$

$$= -\left(\frac{1}{3} - \frac{3}{2}\right) - \left(\frac{1}{3} \cdot 27 - \frac{3}{2} \cdot 9\right) + \left(\frac{1}{3} \cdot 64 - \frac{3}{2} \cdot 16\right) - \left(\frac{1}{3} \cdot 27 - \frac{3}{2} \cdot 9\right)$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{3}{2} - \frac{27}{3} + \frac{64}{2} - \frac{27}{2} + \frac{27}{2}$$

$$= \frac{1-27+64-27}{3} + \frac{3+27-48+27}{2} = \frac{65-54}{3} + \frac{57-48}{2} = \frac{11}{3} + \frac{9}{2} = \frac{22+27}{6} = \frac{49}{6}$$

**پنځم مثال:** د  $y = x^2 - 2x$  منحنی د  $x$  محور او  $x = -1$ ،  $x = 2$  کرښو تر منځ مساحت پیدا کړئ.

**حل:** لومړی بحراني ټکی وروسته د  $x$  محور سره د تقاطع ټکی په لاس راوړو:

$$y = x^2 - 2x \Rightarrow y' = 2x - 2 = 0$$

$$2x = 2 \Rightarrow x = 1$$

$$x = 1, \quad y = x^2 - 2x = 1^2 - 2(1) = -1 \Rightarrow (1, -1)$$
 بحراني ټکی

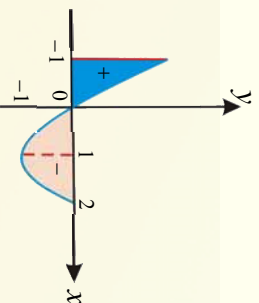
خړنگه چې د  $2 > 0$  "لاړی، نو تابع د  $(1, -1)$  په ټکي کې مطلق اصغري لري او د  $x$  محور سره یې

تقاطع په لاندې ډول ده.

$$y = 0, \quad x^2 - 2x = 0$$

$$x(x - 2) = 0$$

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 2$$



خړنگه چې منحنی د  $[-1, 2]$  په انټروال کې له مبدأ څخه تیرېږي او د منحنی یوه برخه د  $[-1, 0]$  په انټروال کې د  $x$  محور پورته خوا ته او بله برخه یې د  $[0, 2]$  په فاصلي کې د  $x$  محور ښکته خوا ته پرته ده

انتیګرال یې منفي دی:

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^0 (x^2 - 2x) dx - \int_0^2 (x^2 - 2x) dx = \left[ \frac{1}{3}x^3 - x^2 \right]_{-1}^0 - \left[ \frac{1}{3}x^3 - x^2 \right]_{-1}^2 \\ &= (0 - (-\frac{1}{3} - 1)) - ((\frac{8}{3} - 4) - 0) = -(-\frac{1}{3} - 1) - (\frac{8}{3} - 4) = -(\frac{-1-3}{3}) - (\frac{8-12}{3}) \\ &= -(\frac{-4}{3}) - (\frac{-4}{3}) = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = \frac{8}{3} \end{aligned}$$

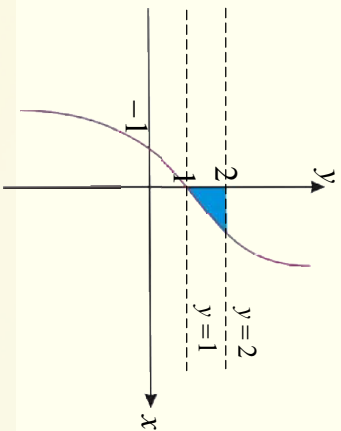


پوڻيشئي

-1 د  $f(x) = \sin x$  منحنی او د  $x$  محور تر منڃ مساحت په  $[2\pi, -2\pi]$  انٽروال کي حساب کړئ.

-2 د  $y = x^3 + 1$  تابع منحنی او  $y = 2$  ،  $y = 1$  محورو تر منڃ مساحت په  $[2\pi, -2\pi]$  انٽروال کي حساب کړئ.

کریبوتر منڃ مساحت وټاکئ.

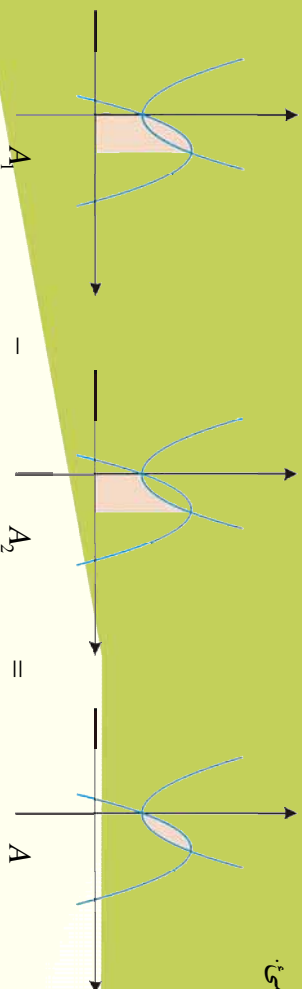


-3 د  $y = \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 1 + x}}$  منحنی او د  $x = 0$  او  $x = 1$  کریبوتر منڃ مساحت حساب کړئ.

## د دوو محصور شویو منحنی گانو تر منځ د مساحت محاسبه

### Accounting of area bounded by tow curves

لاندي شکلونه په پام کې ونیسئ د  $A = A_1 - A_2$  اړیکې د سموالي په اړه څه ویلای شئ.



فعالیت

که د  $1 - x^2 = y_1$  او  $x^2 - 1 = y_2$  تابعگانې راګرل شوی وي.

- د  $y_2 = y_1$  رابطې څخه د  $x$  قیمت په لاس راوړئ.
- د لاس ته راغلو قیمتونو په پام کې نیولو سره د هغوی ګراف رسم کړئ.
- څرنگه چې د  $y_1$  تابع ګراف د  $y_2$  تابع د ګراف څخه لوړ دی نو د تابعگانو د انټیګرال د تفریق حاصل ( $y_1 - y_2$ ) د  $x$  په ټاکل شوی انټروال کې حساب کړئ.
- نوموړی فعالیت د  $y = x^2$  تابع د منحنی او  $y = x + 2$  د کرني لپاره تکرار کړئ او د محصورې شوي سطحي مساحت حساب کړئ.

د پورتنۍ فعالیت څخه لاندي پایلې لاسته راځي:

- که چېرې د  $f(x) = y_1$  او  $g(x) = y_2$  دوو منحنی گانو د محصور شوي سطحي د محاسبې لپاره په هغه صورت کې چې  $f(x) > g(x)$  وي، یعنې د  $f(x)$  تابع ګراف د  $g(x)$  تابع د پاسه واقع وي نو لومړی د دواړو منحنی گانو د تقاطع ټکي پیدا کولو وروسته د پاسني او لانديني منحنی د  $x$  د محور سره مساحت په  $[a, b]$  انټروال کې محاسبه کوو:

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx$$

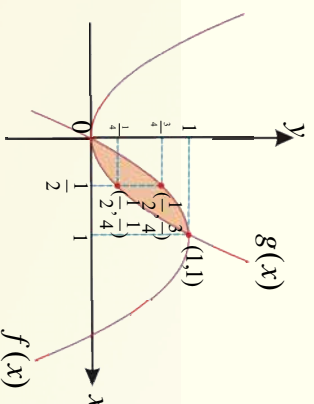
- که چیري د  $g(x)$  تابع گراف د  $f(x)$  تابع د گراف دپاسه واقع وي، نو لرو چي:

$$A = \int_a^b [g(x) - f(x)] dx = \int_a^b g(x) dx - \int_a^b f(x) dx$$

**لومړي مثال:** د  $f(x) = 2x - x^2$  او  $g(x) = x^2$  منحنی گانو د گرافونو ترمنځ د پرتي مساحي مساحت حساب کړئ.

**حل:** لومړی د دواړو منحنی گانو د تقاطع ټکی پیدا کړو:

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x - x^2, \quad g(x) = x^2 \\ f(x) &= g(x) \Rightarrow 2x - x^2 = x^2 \\ 2x - x^2 - x^2 &= 0 \\ 2x - 2x^2 &= 0 \\ 2x(1 - x) &= 0 \\ 2x &= 0 \Rightarrow x_1 = 0 \\ 1 - x &= 0 \Rightarrow x_2 = 1 \end{aligned}$$



لیدل کړي چي ددواړو منحنی گانو تقاطع  $(1,1)$  او  $(0,0)$  ده اوس د محصور شوي مساحي پیدا کړو.

$$\begin{aligned} A &= \int_a^b [f(x) - g(x)] dx = \int_0^1 [2x - x^2 - x^2] dx = \int_0^1 [2x - 2x^2] dx = \left[ \frac{2x^2}{2} - \frac{2x^3}{3} \right]_0^1 \\ &= \left[ x^2 - \frac{2}{3}x^3 \right]_0^1 = \left(1 - \frac{2}{3}\right) - 0 = \frac{3-2}{3} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

**دویم مثال:** د  $f(x) = x^2 - 6x + 2$  تابع او  $g(x) = 2 - x$  کرني د گرافونو ترمنځ د پرتي مساحي

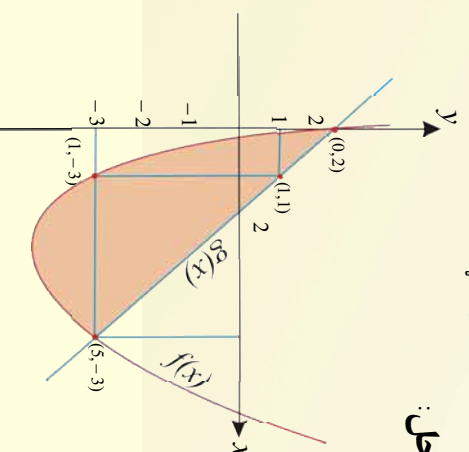
مساحت حساب کړئ.

**حل:**

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 6x + 2 \\ g(x) &= 2 - x \end{aligned} \Rightarrow f(x) = g(x)$$

$$\begin{aligned} x^2 - 6x + 2 &= 2 - x \Rightarrow x^2 - 6x + 2 - 2 + x = 0 \\ x^2 - 5x &= 0 \Rightarrow x(x - 5) = 0 \\ x_1 &= 0, \quad x_2 = 5 \end{aligned}$$

د کرني او منحنی د تقاطع ټکي  $(5,-3)$ ،  $(0,2)$  ⇒





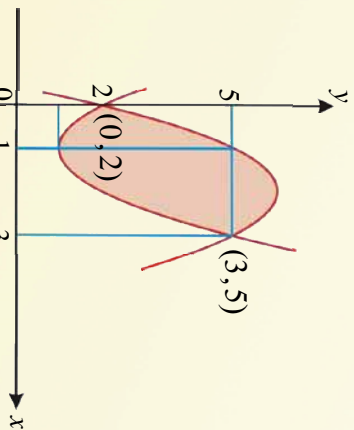
له شکل څخه ښکاري چې د  $g(x)$  کرښې گراف د  $f(x)$  گراف پورته خواته واقع دی، په دې معنی چې  $g(x) > f(x)$

$$\begin{aligned} A &= \int_a^b [g(x) - f(x)] dx = \int_0^5 (2 - x - x^2 + 6x - 2) dx \\ &= \int_0^5 (-x - x^2 + 6x) dx = \int_0^5 (-x^2 + 5x) dx \\ &= \left[ -\frac{x^3}{3} + 5 \cdot \frac{x^2}{2} \right]_0^5 = \left( -\frac{125}{3} + 5 \cdot \frac{25}{2} \right) - 0 = -\frac{125}{3} + \frac{125}{2} \\ &= \frac{-250 + 375}{6} = \frac{125}{6} \end{aligned}$$

**دریم مثال:** د  $f(x) = -x^2 + 4x + 2$  او  $g(x) = x^2 - 2x + 2$  تابعگانو د گرافونو ترمنځ د پرتې سطحې مساحت پیدا کړئ.

**حل:** څرنگه چې د دواړو گرافونو د تقاطع ټکي د انټیگرال حلونه جوړوي، نو د دې ټکو پیدا کولو لپاره

وضع کوو:



$$\begin{aligned} f(x) &= -x^2 + 4x + 2 \\ g(x) &= x^2 - 2x + 2 \end{aligned} \Rightarrow f(x) = g(x)$$

$$\begin{aligned} -x^2 + 4x + 2 &= x^2 - 2x + 2 \\ \Rightarrow -x^2 + 4x + 2 - x^2 + 2x - 2 &= 0 \\ \Rightarrow -2x^2 + 6x &= 0 \Rightarrow x(-2x + 6) &= 0 \\ \Rightarrow x_1 = 0, \quad -2x &= -6 \Rightarrow x_2 &= 3 \end{aligned}$$

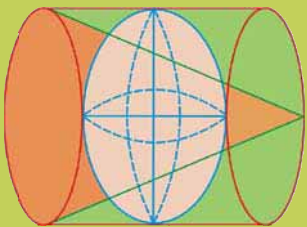
د دواړو منځني گانو د تقاطع ټکي  $(0, 2)$  ،  $(3, 5)$

د  $x$  محور سره د تقاطع ټکي عبارت له  $(5, 3)$  ،  $(2, 0)$  دی اوله شکل څخه لیدل کېږي چې د  $g(x)$  گراف د  $f(x)$  له گراف څخه پورته واقع دی نو لرو:

$$\begin{aligned}
A &= \int_a^b [f(x) - g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx = \int_0^3 (-x^2 + 4x + 2) dx - \int_0^3 (x^2 - 2x + 2) dx \\
&= \left[ -\frac{x^3}{3} + \frac{4x^2}{2} + 2x \right]_0^3 - \left[ \frac{x^3}{3} - \frac{2x^2}{2} + 2x \right]_0^3 \\
&= -\frac{1}{3} \cdot 27 + 2 \cdot 9 + 6 - 0 - \left( \frac{1}{3} \cdot 27 + 9 - 6 + 0 \right) \\
&= -9 + 18 - 9 + 9 \\
&= 9
\end{aligned}$$

### پوښتني

- 1- د  $y = x^2 + 4x - x^2$  منځني گانو د گرافونو تر منځ د پرتې سطحي مساحت پيدا کړئ.
- 2- د  $y = 2x - 2$  پارابول او  $y = x - 5$  کرنيي د گرافونو تر منځ د سطحي مساحت حساب کړئ.
- 3- د  $y^2 = 2x + 6$  منځني او  $y = x - 1$  کرنيي د گرافونو تر منځ د سطحي مساحت محاسبه کړئ.



## د دوراني جسمونو د حجمونو محاسبه

### Accounting of rounding things Volume

د مخالف شکل د جسمونو د حجمونو تر منځ نسبت پيدا کړئ.

په مخکښو ټولگيو کې مو د جسمونو حجم پيدا کړی وو پرته له دې چې د هغوی فورمولونه ثبوت شي منلي مو وو، خو اوس د جسمونو د حجم فورمولونه د معين انټيگرال څخه په گڼه اخيستنې سره ثبوتوو.



### فعاليت

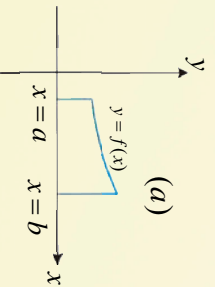
- يو ټکی او يوه کرښه په فضا کې داسې په پام کې ونيسئ، چې ټکی د کرښې په منځ کې واقع وي.
- هغه جسم چې د يوې مستقيمې کرښې له دوران څخه د يوه ټکي په شاوخوا له څرخېدو وروسته جوړېږي نوم يې واخلي.

- د نوموړی جسم د حجم فورمول وليکئ او وروايئ چې هغه څنگه ثبوتوو.

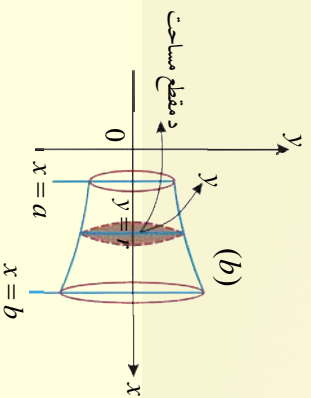
د پورتنی فعالیت پایله داسې بيانوو:

- که چېرې د  $y = f(x)$  متعادي تابع د منحنی مساحت

نظر (a) شکل



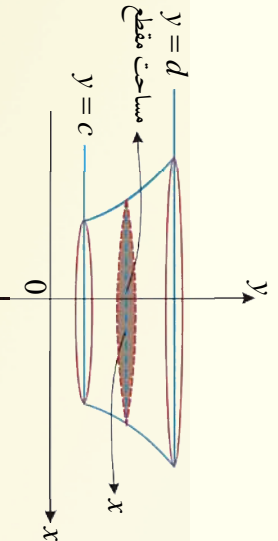
د  $x = a$  او  $x = b$  کرښو او منحنی په واسطه محصور شوی وي، نو د هغه جسم حجم چې د پورتنی تابع د منحنی له دوران څخه د  $x$  محور په شاوخوا لاسته راځي تقریباً استوانه یي شکل لري، لکه د (b) شکل.



چې ارتفاع يې  $\Delta x = b - a$  ده او د دې استوانې سطح د دایروي شکل په واسطه محصوره شوي ده چې دې سطحو ته مقطع وايي او پوهېږو چې د دایري مساحت نظر  $x$  محور ته  $A(x) = \pi r^2$  دی او ددې مقطع شعاع شکل ته په کتو سره د  $r$  محور سره موازي ده؛ نو  $r = \gamma$  کېږي او د حجم فورمول يې نظر ريمان مجموع ته په لاندې ډول دی:

$$v = \lim_{n \rightarrow \infty} V_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n A(x) \Delta x = \int_a^b \pi r^2 dx = \int_a^b \pi y^2 dx = \int_a^b \pi [f(x)]^2 dx$$

- که د  $x = f(y)$  تابع د منځني مساحت  $y = c$  او  $y = d$  کرښو ترمنځ محصور شوی وي دداسې استوانې د مقطع مساحت نظر  $\gamma$  محور ته  $A(y) = \pi r^2$  دی چې ارتفاع  $\Delta y = d - c$  او شعاع يې  $x = r$  سره ده هغه حجم چې ددې دوران څخه په لاس راځي په لاندې ډول دی:



$$v = \lim_{n \rightarrow \infty} V_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n A(y) \Delta y = \int_a^b \pi r^2 dy = \int_a^b \pi x^2 dy = \int_a^b \pi [f(y)]^2 dy$$

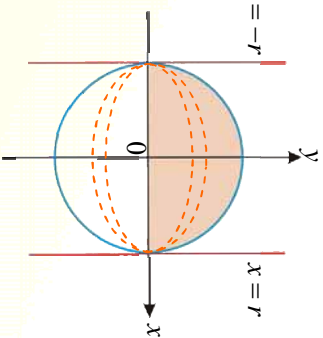
د دوراني جسمونو حجم د انټيګرال په مرسته په لاس راځي لکه:  
1- د انټيګرال په مرسته د کروي حجم پيدا کړئ.

**ثبوت:** پوهېږو چې که چېرې نیمه دایره د خپل قطر په شاوخوا وڅرخي کره لاس ته راځي او د دایري معادله  $r^2 = y^2 + x^2$  ده، اوس د نیمې دایري حجم له څرخېدو وروسته په لاس راوړو او هغه دوه برابره کوو، چې د دایري بشپړ حجم په لاس راشي

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$y^2 = r^2 - x^2$$

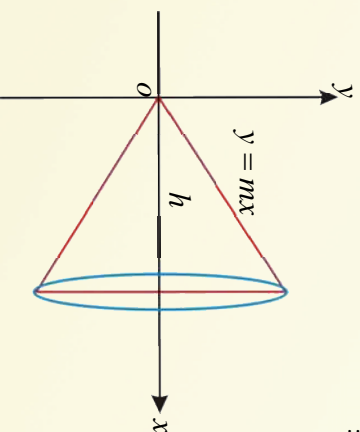
$$\begin{aligned}
 V &= \int_{-r}^r \pi y^2 dx = \pi \int_{-r}^r (r^2 - x^2) dx \\
 &= 2\pi \int_0^r (r^2 - x^2) dx = 2\pi \left[ r^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_0^r \\
 &= 2\pi \left[ \left( r^3 - \frac{r^3}{3} \right) - 0 \right] \\
 &= 2\pi \left( \frac{3r^3 - r^3}{3} \right) \\
 &= 2\pi \left( \frac{2r^3}{3} \right) \\
 V &= \frac{4}{3} \pi r^3 \quad (\text{د کروي حجم})
 \end{aligned}$$



2- د اېنٹیگرال په مرسته د مخروط حجم پیدا کړئ.

**ثبوت:** څرنگه چې مخروطي سطح د  $y = mx$  کرني له دوران څخه د  $x$  د محور په چاپیریال په لاس راځي نو:

$$\begin{aligned}
 V &= \int_0^h \pi y^2 dx \\
 &= \int_0^h \pi m^2 x^2 dx = \pi m^2 \int_0^h x^2 dx \\
 &= \pi m^2 \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^h = \pi m^2 \left( \frac{h^3}{3} \right) \\
 &= \frac{\pi h}{3} (mh)^2
 \end{aligned}$$



له پورته شکل څخه لیدل کېږي چې د مخروط قاعده دایروي بڼه لري او شعاع یې د  $h$  محور سره موازی ده، یعنې  $r // y$  او همدا رنگه د مخروط ارتفاع ( $h$ ) د  $x$  په محور باندې منطبق ده، نو د  $y = mx$  په اړیکه کې یې قیمت وضع کوو:

$$\begin{aligned}
 y = mx &\Rightarrow r = mh \\
 &= \frac{\pi h}{3} r^2 \\
 V &= \pi r^2 \times \frac{h}{3}
 \end{aligned}$$

خړنگه چې د مخروط قاعده دبروي ده، د ايرې مساحت  $\pi r^2$  ده، لرو چې:

$$V = \pi r^2 \cdot h$$

$$V = \pi r^2 \cdot h \quad (د مخروط حجم)$$

3- د ايس حجم چې د  $1 + \frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} = 1$  د منحنې او  $x$  محور په چاپير د لوی قطر په شاوخوا له دوران وروسته

جوړېږي، په لاس راوړی.

**ثبوت:** د ايس د نيمایي حجم د لوی قطر په شاوخوا په لاس راوړو او هغه دوه چنده کوو، چې د بشپړ ايس

حجم په لاس راشي.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2} \Rightarrow y^2 = b^2 - \frac{b^2}{a^2} x^2$$

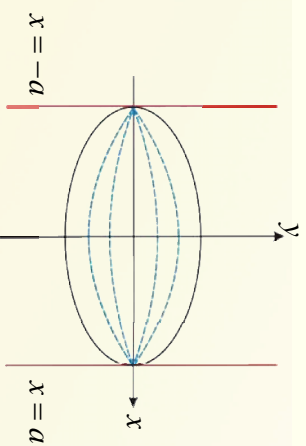
$$V = \int_{-a}^a \pi y^2 dx = \pi \int_{-a}^a [b^2 - \frac{b^2}{a^2} x^2] dx$$

$$= 2\pi \int_0^a [b^2 - \frac{b^2}{a^2} x^2] dx = 2\pi [b^2 x - \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x^3}{3}]_0^a$$

$$= 2\pi [(b^2 a - \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{a^3}{3}) - 0] = 2\pi [b^2 a - \frac{b^2 a}{3}]$$

$$= 2\pi [\frac{3b^2 a - b^2 a}{3}] = 2\pi [\frac{2b^2 a}{3}]$$

$$V = \frac{4}{3} \pi b^2 a \Rightarrow \text{د ايس دوران د لوی قطر په شاوخوا حجم} = \frac{4}{3} \pi b^2 a$$



که چېرې د ايس محراقونه د  $y$  په محور پراته وي او د هغه انگرال حساب کړو د ايس د کوچني قطر په شاوخوا حجم په لاندې ډول په لاس راشي:

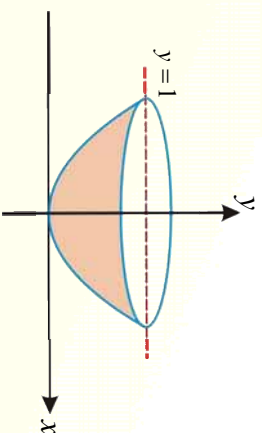
$$\text{حجم په لاندې ډول په لاس راشي:} \quad \frac{4}{3} \pi a^2 b$$

**لومړی مثال:** د هغه جسم حجم چي د  $y = x^2$  او  $y = 1$  کرني تر منځ پرتي مستوي مساحت د دوران څخه د  $y$  په محور په لاس راځي، پيدا کړئ.

**حل:** لومړی شکل رسمو وروسته يی مساحت حسابوو:

$$V = \int_a^b \pi x^2 dy = \pi \int_0^1 y dy = \frac{1}{2} \pi y^2 \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \pi$$

$$\Rightarrow V = \frac{\pi}{2}$$



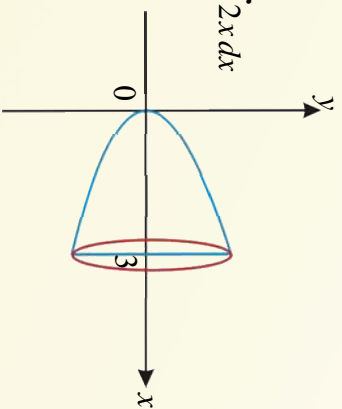
**دویم مثال:** د  $y = \sqrt{2x}$  تابع او  $y = 3$  کرني تر منځ د څرخیدلی جسم مساحت پيدا کړئ.

**حل:**

$$V = \int_a^b \pi y^2 dx = \int_0^3 \pi [\sqrt{2x}]^2 dx = \pi \int_0^3 [\sqrt{2x}]^2 dx = \pi \int_0^3 2x dx$$

$$V = 2\pi \int_0^3 x dx = 2\pi \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^3$$

$$V = 9\pi$$



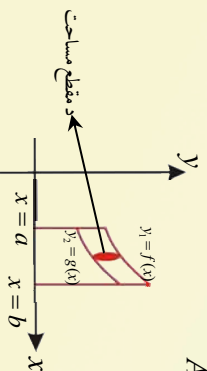
**يادونه:** که د  $y_1 = f(x)$  او  $y_2 = g(x)$  تابعگانې په  $[a, b]$  انټروال کې ممتادي وی د هغه دوراني جسم حجم د  $f(x)$  او  $g(x)$  منحنی گانو او د  $x = a$  ،  $x = b$  کرنيو تر منځ جوړېږي له لاندې رابطې څخه لاسته راځي:

$\Delta x$  د استواني ارتفاع

$$A(x) = \pi(y_1 - y_2)^2 = \pi y_1^2 - \pi y_2^2 = \pi(y_1^2 - y_2^2)$$

د هغې استواني د حجم فورمول چي د  $f(x)$  تابع گراف د

$g(x)$  تابع گراف څخه پورته قرار لري.



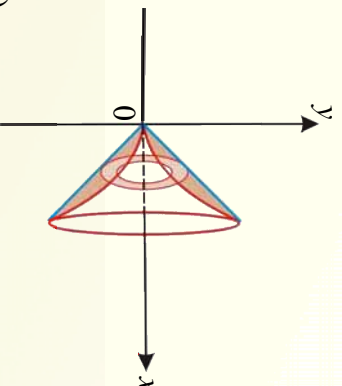
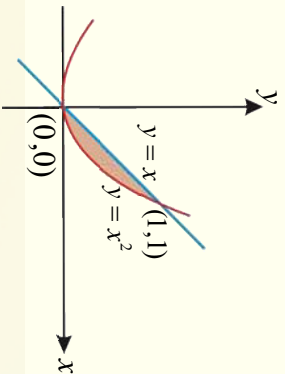
$$V = \int_a^b \pi(y_1^2 - y_2^2) dx = \pi \int_a^b (y_1^2 - y_2^2) dx$$

د هغې استوانې د حجم فورمول چې د  $g(x)$  تابع گراف د  $f(x)$  گراف څخه پورته واقع وي.

$$V = \int_a^b \pi(y_2^2 - y_1^2) dx = \pi \int_a^b (y_2^2 - y_1^2) dx$$

مثال: د هغه جسم پیدا کړئ چې د  $y = x^2$  منحنی او  $y = x$  کرني ترمنځ د پرتې سطحې مساحت له دوران څخه د  $x$  محور په شاوخوا په لاس راځي، محاسبه کړئ.

حل:



$$\left. \begin{aligned} y_1 &= x^2 = f(x) \\ y_2 &= x = g(x) \end{aligned} \right\} \Rightarrow y_2 > y_1, \quad g(x) > f(x)$$

$$= \int_a^b \pi(y_2^2 - y_1^2) dx = \int_0^1 \pi(x^2 - (x^2)^2) dx$$

$$= \pi \int_0^1 (x^2 - x^4) dx = \pi \left[ \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right]_0^1$$

$$= \pi \left[ \left( \frac{1}{3} - 0 \right) - \left( \frac{1}{5} - 0 \right) \right] = \pi \left[ \frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right]$$

$$V = \pi \left[ \frac{5-3}{15} \right] = \pi \left[ \frac{2}{15} \right] = \frac{2\pi}{15}$$



پوښتني

1. د هغه جسم حجم چې د  $y = \sin x$  تابع او د  $x = 0$  او  $x = \pi$  دوو کرنيو ترمنځ محصور شوی مساحت له دوران څخه د  $x$  د محور په چاپیر جوړېږي پیدا کړئ.

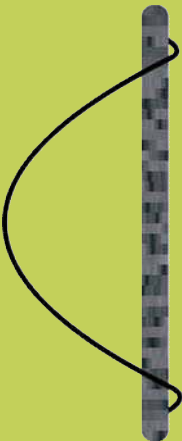
2. د هغه جسم حجم پیدا کړئ چې د  $y = x^3$  منحنی او  $y = 8$ ،  $x = 0$  کرنيو ترمنځ محصور شوی مساحت له دوران څخه د  $y$  د محور په چاپیر جوړېږي حساب کړئ؟



## د قوس د اوږوالی محاسبه

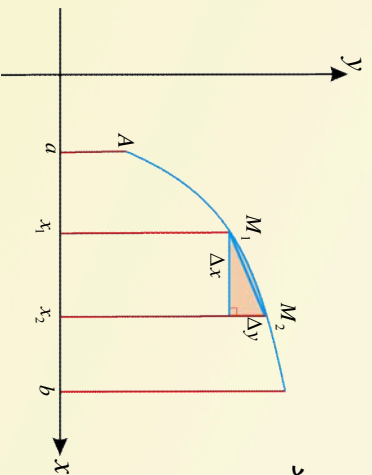
### Accounting the Length of Arc

خړنگه کولای شو چې د مخامخ پړي اوږدوالی پیدا کړو؟



فعالیت

- د قایمو مختصاتو په سیستم کې د  $y = f(x)$  تابع په  $[a, b]$  انټروال په پام کې ونیسئ او هغې ته  $A$  ووايي، داسې چې تابع په نوموړی فاصله کې متصادي او د مشتق وړ وي.
- د  $[a, b]$  انټروال په درېو مساوي برخو ویشو او د  $x_1$  او د  $x_2$  قوس اوږدوالی په  $M_1$  او  $M_2$  ښیو.
- د  $M_1$  له ځکې څخه یوه پوټه کرښه د  $M_2$  په ځکې او یوه بله کرښه، د هغې په مخامخ کرښه رسموو او د دواړو پوټه کرښو، د تقاطع ځکی ونوموئ.
- د  $M_1$  د کرښې فاصلې ته  $\Delta x$  او  $M_2$  ته  $\Delta y$  وايي او د  $M_1$  او  $M_2$  د قایم الزویه مثلث د مخامخ قوس اوږدوالی د فیثاغورث د قضیې په مرسته حساب کړئ.
- له پورتنی فعالیت څخه کولای شو، چې د  $M_1$  او  $M_2$  مثلث د مخامخ قوس اوږدوالی داسې ثبوت کړو.



ثبوت:

له قایم الزویه  $M_1$  او  $M_2$  مثلث څخه په گټې اخیستني سره لرو چې:

$$(M_1 M_2)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$$

$$M_1 M_2 = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

د مشتق له تعريف څخه پوهېږو:

$$f'(t) = \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad , \quad g'(t) = \frac{\Delta y}{\Delta t}$$

$$\Delta x = f'(t) \cdot \Delta t \quad , \quad \Delta y = g'(t) \cdot \Delta t$$

$$M_1 M_2 = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{[f'(t) \cdot \Delta t]^2 + [g'(t) \cdot \Delta t]^2}$$

$$M_1 M_2 = \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2} \cdot \Delta t$$

نو د ريمان له مجموعې څخه لرو:

$$\begin{aligned} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2} \cdot \Delta t \\ &= \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2} dt \end{aligned}$$

**لومړی مثال:** د  $x^2 + y^2 = r^2$  دایري محیط محاسبه کړئ:

**حل:** څرنگه چې د دایري پارامترې معادله په دې ډول ده  $\begin{cases} x = r \cos t \\ y = r \sin t \end{cases}$

که چېرې  $0 \leq t \leq \pi$  وي، نو د دایري نیمایي محیط پیدا کړئ.

$$P = \int_0^\pi \sqrt{x'^2 + y'^2} dt$$

$$x' = -r \sin t \quad , \quad y' = r \cos t$$

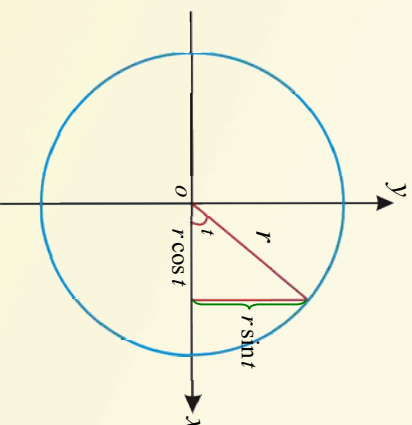
$$P = \int_0^\pi \sqrt{(-r \sin t)^2 + (r \cos t)^2} dt$$

$$P = \int_0^\pi \sqrt{r^2 \sin^2 t + r^2 \cos^2 t} dt$$

$$P = \int_0^\pi \sqrt{r^2 (\sin^2 t + \cos^2 t)} dt = \int_0^\pi \sqrt{r^2} dt$$

$$P = [r t]_0^\pi = (r \cdot \pi - r \cdot 0) = \pi r \quad \text{دایري نیمایي محیط}$$

$$P = 2\pi r \quad \text{د دایري مکمل محیط}$$



يادونه:

1- د  $f(x) = \gamma$  منحنی معادله په  $b \leq x \leq a$  انټروال کې راځول شوي ده، د  $x$  پارامتر په پام کې نيولو سره د

$$\int_a^b \sqrt{1+f'^2(x)} dx \quad \text{منحنی د قوس اوږدوالی داسی محاسبه کوو:}$$

مثال: د  $f(x) = x^{\frac{3}{2}}$  منحنی د قوس اوږدوالی په  $0 \leq x \leq 4$  فاصله کې حساب کړئ.

$$\text{حل: } f(x) = x^{\frac{3}{2}} \Rightarrow f'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$$

$$\begin{aligned} &= \int_a^b \sqrt{1+f'^2(x)} dx = \int_0^4 \sqrt{1+\left(\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\right)^2} \cdot dx \\ &= \int_0^4 \sqrt{1+\frac{9}{4}x} dx = \int_0^4 \sqrt{u} \cdot \frac{4}{9} du = \frac{4}{9} \int_0^{\frac{1}{4}} u^{\frac{1}{2}} du \\ &= \frac{4}{9} \left[ \frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} \right]_0^{\frac{1}{4}} = \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{3} [u^{\frac{3}{2}}]_0^{\frac{1}{4}} = \frac{8}{27} [\sqrt{u^3}]_0^{\frac{1}{4}} \\ &= \frac{8}{27} \left[ \sqrt{\left(1+\frac{9}{4}x\right)^3} \right]_0^4 = \frac{8}{27} \left[ \sqrt{\left(1+\frac{9}{4} \cdot 4\right)^3 - 1} \right] = \frac{8}{27} (\sqrt{10^3} - 1) \\ &= \frac{8}{27} (10\sqrt{10} - 1) \end{aligned}$$

$$u = 1 + \frac{9}{4}x$$

$$du = \frac{9}{4} dx$$

$$dx = \frac{4}{9} du$$

2- د  $f(x) = \gamma$  منحنی په  $b \leq \gamma \leq a$  انټروال کې راځول شوي ده، د  $\gamma$  پارامتر په پام کې نيولو سره

$$\int_a^b \sqrt{f'^2(\gamma)+1} d\gamma \quad \text{لرو، چې:}$$

مثال: د  $f(x) = \gamma^{\frac{3}{2}}$  منحنی د قوس اوږدوالی په  $4 \leq \gamma \leq 1$  انټروال کې حساب کړئ.

حل:

$$\begin{aligned} f(y) &= y^{\frac{3}{2}}, \quad f'(y) = \frac{3}{2} \cdot y^{\frac{1}{2}} \\ &= \int_a^b \sqrt{f'^2(y)+1} dy = \int_1^4 \sqrt{\left(\frac{3}{2} \cdot y^{\frac{1}{2}}\right)^2 + 1} dy \\ &= \int_1^4 \sqrt{\frac{9}{4}y+1} dy = \int_1^4 \sqrt{u} \cdot \frac{4}{9} du \\ &= \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{3} [u^{\frac{3}{2}}]_1^4 = \frac{8}{27} \left[ \sqrt{\frac{9}{4}y+1} \right]_1^4 \\ &= \frac{8}{27} [\sqrt{10} - \sqrt{\frac{9}{4}+1}] \\ &= \frac{8}{27} \left[ \sqrt{1000} - \sqrt{\left(\frac{13}{4}\right)^3} \right] = \frac{8}{27} \left[ 10\sqrt{10} - \sqrt{\frac{2197}{64}} \right] \end{aligned}$$

$$u = \frac{9}{4}y+1$$

$$du = \frac{9}{4}dy$$

$$dy = \frac{4}{9}du$$

پوښتني



1. د  $x = t^2$  او  $y = t^3$  د منحنیگانو د قوس اوږدوالی د  $1 \leq x \leq 2$  د فاصلې تر منځ پیدا کړئ.
2. د  $f(x) = \frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}}$  د منحنی د قوس اوږدوالی د  $0 \leq x \leq 1$  د فاصلې تر منځ پیدا کړئ.

## د څپرکي مهم ټکي

- د  $f(x) = F(b) - F(a)$  انټيگرال د یوې سطحې د مساحت اندازه یا پراخوالی رابنسې چې

د  $f(x)$  منحنی او د  $x$  د محور او د  $x = a$  او  $x = b$  کرښو له خوا رابند دی.

- که د  $f(x)$  تابع په  $[a, b]$  انټروال کې مثبت او متمادي وي، یعنې  $f(x) \geq 0$  په دې صورت کې د  $f(x)$  تابع تل د  $x$  د محور پورته خوا ته او که  $f(x) \leq 0$  وي، په دې حالت کې د  $f(x)$  د محور لاندې خوا ته واقع او انټيگرال یې منفي دی.

## د دوو منحنیگانو په واسطه د محصور شوی مساحت محاسبه:

- که څپرې د  $f(x)$  تابع د  $g(x)$  تابع د گراف په پورتنۍ برخه کې واقع وي، نو لرو:

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx$$

- که څپرې د  $g(x)$  تابع گراف د  $f(x)$  تابع په پاستي برخه کې واقع وي؛ لرو چې:

$$A = \int_a^b [g(x) - f(x)] dx = \int_a^b g(x) dx - \int_a^b f(x) dx$$

## د دوراني جسمونو د حجم مساحت:

- که څپرې د  $y = f(x)$  متمادي تابع مساحت د  $a = x$  او  $b = x$  کرښو په واسطه محصور شوی وي، نو د هغه جسم حجم چې د پورتنۍ تابع له منحنی دوران څخه د  $x$  محور په شاوخوا لاسته راځي تقریباً استوانه یي شکل لري .

چې ارتفاع یې  $a - b = \Delta x$  ده او د دې استوانې سطح د دایروي سطحو په واسطه محصوره شوي ده چې دې سطحو ته مقطع وايي او پوهېږو چې د دایري مساحت نظر د  $x$  محور ته  $A(x) = \pi r^2$  دی او ددې مقطع شعاع نظر شکل ته د  $r$  له محور سره موازي دی؛ نو  $r = y$  کېږي او د حجم فورمول یې نظر د ریمان مجموعې ته په

$$\text{لاندې ډول دی: } V = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n [f(x)]^2 \Delta x = \int_a^b [f(x)]^2 dx = \int_a^b \pi y^2 dx = \int_a^b \pi r^2 dx = \int_a^b A(x) \Delta x$$

- که د  $x = f(y)$  تابع مساحت د  $c = y$  ،  $d = y$  کرښو ترمنځ محصور شوی وي دداسې استوانې مقطع نظر  $Y$  محور ته  $A(y) = \pi r^2$  چې ارتفاع یې  $c - d = \Delta x$  او شعاع یې  $r = x$  سره ده هغه حجم چې ددې دوران د مساحت څخه په لاس راځي په لاندې ډول دی:

$$V = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n A(y) \Delta y = \int_a^b \pi x^2 dy = \int_a^b \pi r^2 dy = \int_a^b [f(y)]^2 dy$$

د قوس د اوږدوالي محاسبه:  $a$

$$= \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2} dt \quad \text{د قوس د اوږدوالی د محاسبې فورمول:}$$

$$= \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)} dx \quad (1)$$

$$= \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(y)} dy \quad (2)$$

### د شپږم څپرکي پوښتنې

1. د  $0 = 5 - x - y^2$  منحنی او د  $y$  د محور تر منځ د پرتې سطحې مساحت محاسبه کړئ.
2. د هغې سطحې مساحت چې د  $y = \sin x$  منحنی په  $[0, 2\pi]$  انټروال کې او د  $x$  د محور تر منځ پرتې ده، پیدا کړئ.
3. د  $2x - x^2 = y$  او  $6x - x^2 = y$  منحنی ګانو تر منځ د پرتې سطحې مساحت حساب کړئ.
4. د  $3 - 4x + x^2 = y$  منحنی او  $x$  محور تر منځ د پرتې سطحې مساحت پیدا کړئ.
5. د  $8x + 6x^2 - x^3 = y$  او  $4x - x^2 = y$  منحنی ګانو تر منځ د پرتې سطحې مساحت پیدا کړئ.
6. د هغه جسم حجم وټاکئ چې د  $y = \sin x - \cos x$  او  $x = \frac{\pi}{2}$  کرښو د  $x$  محور په شاوخوا له دوران څخه په لاس راځي، حساب کړئ.
7. د هغې سطحې حجم چې د  $2 + x^2 = \frac{1}{4}y$  منحنی د تابع له دوران څخه د  $x$  د محور پر شاوخوا په  $[0, 4]$  انټروال کې جوړ شوی وي.
8. د هغې رابنډې شوې مسطحې د جسم حجم چې د  $y = x^2$  او  $y = 2 + x^2$  دایرې له دوران څخه د  $x$  محور په شاوخوا جوړ شوي وي پیدا کړئ.
9. د هغه جسم حجم چې د  $1 + x = \frac{1}{2}y$  کرښې دوران او د  $x$  محور په  $[2, 6]$  انټروال کې جوړېږي، په لاس راوړئ.
10. د  $4 - x = y$  منحنی د قوس اوږدوالی په  $2 \leq x \leq -2$  انټروال کې حساب کړئ.
11. د  $\frac{4}{3} + x = y$  تابع د منحنی د قوس اوږدوالی په  $5 \leq x \leq 2$  انټروال کې پیدا کړئ.

# اووم خپر کی احصائے

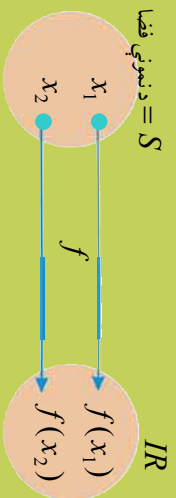






موز تپول افغانان يو.



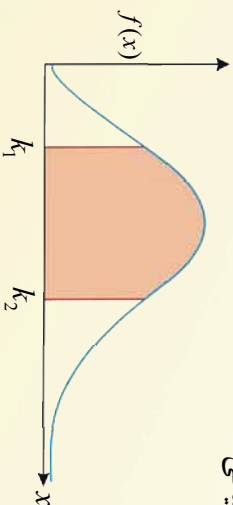


**د احتمال د تابع توزیع**  
 د تصادفي ازماينښت، نمونيزې فضا او ناڅاپه متحول کلمې  
 ستاسو په ذهن کې څه څه را ژوندلي کوي.



• هغه تصادفي متحول چې په احصائيه او احتمالاتو کې ترې گټه اخلي، له هغه متحول سره چې په الجبر کې مو لوستي دی څه توپير لري؟

• که  $x_1, x_2, \dots, x_n$  د يوه سټ عناصر او  $f(x_i) = P(x = x_i)$  تابع ولرو، هغه مرتبې جوړې چې د نوموړی تابع څخه په لاس راځي، جوړې او بيا يې وليکئ.



- مخامخ شکل ته په کتنې سره د  $k_1$  او  $k_2$  مقدارونو ترمنځ او  $f(x)$  د منځني لاندیني محدود شوی مساحت د انټیگرال په شکل وښئئ.

• د لاندې جدول په پام کې نیولو سره د  $\sum_{i=1}^2 x_i f(x_i) = [E(x = x_i)]$ ،  $[E(x_i) - x_i]^2$  او  $f(x_i) [E(x_i) - x_i]^2$  مجموعه په لاس راوړئ.

$x_i$	0	1
$f(x_i)$	0.5	0.5

د پورتنی فعالیت پایله داسې بیانوو:

– هغه تصادفي متحول چې په احصائیه او احتمالانو کې تر څېړنې لاندې نیول کېږي عبارت له هغه تابع څخه دی، چې د تعریف ناحیه یې نمونه یي فضا او د قیمتونو ناحیه یې حقیقي اعداد دي. که  $P(x = x_i) = f(x_i)$  ولرو نو د  $[x_n, f(x_n)]$ ،  $\dots$ ،  $[x_2, f(x_2)]$ ،  $[x_1, f(x_1)]$  مرتبو جوړونه د مجزاګسته احتمال تابع وایي.

- د تجمعي او پیوسته احتمال تابع کولای شو، په دې بڼه  $F(x) = P(X \leq x)$  وښوو.
- که چېرې  $f(x)$  د احتمال تابع او  $x$  تصادفي متحول وي، په دې صورت کې د دې احتمال چې  $x$  د  $k_1$  او  $k_2$  په منځ کې وي برابر دی له:

$$P(k_1 \leq x \leq k_2) = \int_{k_1}^{k_2} f(x) dx$$

- که چېرې  $x$  پیوسته ناڅاپه (تصادفي) متحول او  $k_2 < k_1$  څخه وي، په دې صورت کې:
- $P(k_1 \leq x \leq k_2) = F(k_2) - F(k_1)$  که چېرې  $x$  ناڅاپه مجزا متحول وي، په دې حالت کې اوسط (*Expected Value*) د  $x$  تصادفي مجزا متحول چې د  $E(x)$  په بڼه ښودل کېږي، برابر دی له:

$$E(x) = x_1 f(x_1) + x_2 f(x_2) + \dots + x_n f(x_n) = \sum_{i=1}^n x_i f(x_i)$$

$E(x)$  د  $x$  اوسط هم بلل کېږي چې هغه په  $\bar{x}$  ښيي همدارنگه که چېرې  $x$  گسسته تصادفي متحول وي، په دې صورت کې د  $x$  وریانس چې د  $S^2$  په شکل ښودل کېږي برابر دی له:

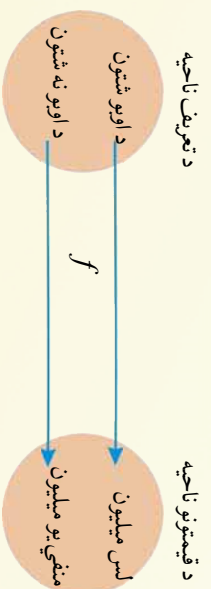
$$S^2 = \sum_{i=1}^n [x_i - E(x_i)]^2 f(x_i)$$

**مثال:** یو شخصي شرکت غواړي د یوې غونډې پر سر د اوبو یوه څاه وکړي، د اوبو څاه په یو میلیون افغاني تمامېږي که نوموړی څاه اوبه ورکړي د شرکت مالک لس میلیون افغاني اجوره اخلي، پرته له هغې به د څاه د کپنلو یو میلیون افغاني مصرف په زیان ورکړي.

الف- دا موضوع د یوې تابع په بڼه وښیئ.

ب- که د دې احتمال چې کیندل شوی څاه اوبه ورکړي 0.2 او د نه ورکولو احتمال یې 0.8 وي، په دې صورت کې د احتمال تابع، اوسط (Expected Value)، ورنانس او د  $x$  تصادفي متحول معیاري انحراف پیدا کړي.

**د الف حل:**



**د ب حل:** د تصادفي متحول احتمال تابع، اوسط، ورنانس او معیاري انحراف په لاندې جدول کې ښودل شوی دی:

تصادفي متحول	د تابع احتمال	اوسط	د تصادفي متحول د مربعاتو انحراف د تصادفي متحول له اوسط څخه	وارنانس	انحراف معیار
$x_i$	$f(x_i)$	$E(x) = \sum x_i f(x_i)$	$[x_i - E(x)]^2$	$S^2 = [x_i - E(x)]^2 f(x_i)$	$S$
-1	0.8	$-1 \cdot 0.8 = -0.8$	$(-1 - 1.2)^2 = 4.84$	$4.84 \cdot 0.8 = 3.872$	4.4
10	0.2	$10 \cdot 0.2 = 2$	$(10 - 1.2)^2 = 77.44$	$77.44 \cdot 0.2 = 15.488$	
	0.1	1.2		$\sum S^2 = 19.360$	

## پوښتني

فرض ڪو چي د يوه موٽر پلورنڻي د 100 ورځو ترڅو څلاو په لاندې ډول دی:

د ورځو شمېر	60	30	8	2
د ډيروټل شوو موٽرو شمېر	0	1	2	3

د  $x$  تصادفي متحول د احتمال تابع او د مجموعي احتمال تابع پيدا ڪري.

د مجموعي احتمال له تابع څخه په گټه اخېستني سره ووايو؛ چي په يوه ورځ کي حداکثر احتمال د (2) موٽرونو او

حداقل احتمال د دوو موٽرونو په کومه کچه ده؟



## د دوه جمله‌يي توزیع او د برنولي آزمویښت

یو ګډون کونکی د پوهنتون د کانکور په آزمویښه کې د 160 سوالونو څخه 100 سوالونه حل کړل. تاسې څه سورج کوئ چې دا ګډون کونکی په آزمویښه کې برالی کېږي او یا نې نتیجه پلې کېږي؟

د احتمال دوه جمله‌يي توزیع یوه معجزه توزیع ده چې د مختلفو پېښو د توصیف لپاره په کار وړل کېږي اکثراً پېښې چې په نړۍ کې منځ ته راځي دوه حالتونه لري.



### فعالیت

د لاندې آزمویښتي پېښو د شرطونو څخه څه ډول پایلې په لاس راوړلای شئ:

- خو ځلې دوه سکې واچول شي چې سمدلاسه دواړه شپږ راشي.
- څو ځلې دوه تاسه واخلې شي چې د شمېرو مجموعه یې له 7 څخه کوچنۍ شي.
- د یوې جمعې څخه څو ځلې د یوې مری (مهره) اخیستل چې د تورو او سپینو مری لرونکې ده.
- د یوې جمعې څخه چې د تورو او سپینو مریو لرونکې ده څو ځلې یوه مری واخیستل شي چې اخیستل شوی مری سپینه وي (چې اخیستل شوی مری بیا په جعبه کې واچول شي)
- که چېرې  $m$  بریالیتوب د  $n$  آزمایښت څخه ( $m < n$ ) چې ترتیب په کې مهم نه دی دا ټاکنه د څه په نامه یادېږي او فورمول یې ولیکئ.
- که د  $m$  شکلونو د بریالیتوب احتمال د  $n$  آزمایښت څخه په  $P$  او  $n - m$  شکلونو د ناکامې احتمال د  $n$  آزمایښت څخه په  $q$  وښودل شي نو د  $m$  کامیابي احتمال د آزمایښت د  $n$  شکلونو څخه به څو وي؟
- زده‌کونکي له پنځو څلور څوابه آزمویښي د پوښتنو سره مخامخ کېږي. هغوی په ناڅاپه ډول پوښتنو ته ځوابونه ورکوي، فرض وکړئ که د (سم ځواب) بریالیتوب په  $T$  او (ناسم ځواب) نه بریالیتوب د  $F$  په توری وښودل شي په دې صورت کې د هر یوه سم او ناسم ځواب احتمال به څومره وي؟
- له پورتنۍ فعالیت څخه څرګندېږي چې د برنولي آزمایښت یو ناڅاپه ازمایښت دی، چې کولای شو پایله یې په دوه حالتونو بریالیتوب او نایرالیټوب دسته بندي کړو.

د برنولي توزیع کولای شو چې په  $P(x=m) = P^m(1-P)^{n-m} = P^m \cdot q^{n-m}$  په بڼه وښو په داسې حال کې

چې  $P$  د برنولیتوب احتمال او  $q = 1 - p$  د نښرالیټوب احتمال دی.

که چېرې یو آزمایش  $n$  ځلې تکرار کړو، یو ترادف په لاس راځي، داسې چې که د هر آزمایش د برنولیتوب احتمال  $P$  او نښرالیټوب احتمال  $q$  وي، په دې صورت کې د  $n$  ځلې آزمایش څخه د  $m$  ځلې برنولیتوب

$$P(X \leq m) = \sum_{m=0}^n P^m q^{n-m} \quad 0 \leq m \leq n$$

احتمال عبارت دی له:  $0 \leq m \leq n$

پورتني اړیکه کولای شو چې په دې ډول  $B(m, n, p)$  هم وښو،  
د پورتنی فورمول په پام کې نیولو سره کولای شو، د دوه جملیدي د توزیع اوسط په  $np = \bar{x}$  او د دوی توزیع معیاري انحراف د  $S = \sqrt{npq}$  په بڼه وښو.

**مثال:** د یوه ناروغ د ښه کېدو احتمال د شکري له ناروغی څخه  $0.4$  دی، که چېرې  $15$  تنه په دې ناروغی اخته وي، ددې څومره احتمال شته چې پنځه تنه ښه شي او همدل شان پیدا کړی چې له  $3$  څخه تر  $4$  تنو پورې جوړ شي.

**حل:** څرنگه چې  $n = 15$  ،  $m = 5$  ،  $q = 0.6$  ،  $P = 0.4$  دی نو:

$$\begin{aligned} P(m=5) &= \binom{n}{m} P^m \cdot q^{n-m} = \binom{15}{5} (0.4)^5 (0.6)^{10} \\ &= \frac{15!}{5!(15-5)!} \cdot 0.01024 \cdot 0.00604661760 = \frac{360360}{120} \cdot 0.00006191 \\ &= \frac{22.3098876}{120} = 0.1859 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(3 \leq m \leq 4) &= \sum_{i=3}^4 \binom{15}{i} (0.4)^i (0.6)^{15-i} = (3^{15})(0.4)^3 (0.6)^{15-3} + (4^{15})(0.4)^4 (0.6)^{15-4} \\ &= \frac{15!}{3!(15-3)!} (0.064)(0.6)^{12} + \frac{15!}{4!(15-4)!} (0.0256)(0.6)^{11} \\ &= \frac{2730}{6} (0.000139264) + \frac{3270}{24} (0.0000928512) \\ &= \frac{0.38019072}{6} + \frac{0.3036}{24} = 0.063365 + 0.012650 \\ P(3 \leq m \leq 4) &= 0.076015 \end{aligned}$$



**پوښتنې**

- په یوه کلي کې 200 کورنۍ اوسېږي که هره کورنۍ 4 ماشومان ولري ددې احتمال پیدا کړئ چې هره کورنۍ حد اقل یو زوی لري.
- یوازې دوه زامن لري.
- یوه یا دوې لوڼې ولري.

## د پواسن د احتمال توزیع

- 1)  $b(x, n, p) = \binom{x}{n} p^x q^{n-x}$
- 2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} b(x, n, p) = \frac{\lambda^x \cdot e^{-\lambda}}{x!}$
- 3)  $P(x, \lambda) = \frac{\lambda^x \cdot e^{-\lambda}}{x!}$

که چېرې د برنولي دوه جملېيي توزیع فورمول په پام کې ونیسو، ایا ولای شي که چېرې د برنولي په دوه جملېيي توزیع کې د  $P$  قیمت صفر ته تقرب وکړي او د  $n$  قیمت لایتناهي ته تقرب وکړي؟ نو د برنولي دوه جملېيي توزیع څه سره مساوي کېږي.



فعالیت

که  $n = 5$ ,  $p = 0.1$ , او  $m = 2$  وي د  $P(x = m) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^m}{m!}$  قیمتونه په داسې حال کې چې  $P(X = m) = \binom{n}{m} p^m q^{n-m}$  او  $\lambda = np$  وي محاسبه کړئ او له پاسنیو توابع قیمتونه سره یې پرتله کړئ،

وینای شي چې د کوم فورمول په کار ورل، ساده دی؟

د پواسن فورمول کولای شي، چې د  $m$  شکلونو د کامیابي احتمال د  $n$  آزمایشونو څخه کله چې  $n$  لوی او د کامیابي احتمال  $P$  کوچنی وي، د تقریبي محاسبي لپاره وکارول کېږي.

دا فورمول عبارت دی له:  $P(X = m) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^m}{m!}$  چې  $\lambda = np$  او  $e = 2.71828$  دی.

په یاد ولرئ چې د پواسن په توزیع کې اوسط او هم ورناس له  $\lambda$  سره برابر دی.



**مثال:** 200 تنو مسافريٽو ديوي الوٽڪي ٽڪٽ اڻڀستلى هي د مخڪيو تجارو په اساس كه د هغه مسافريٽو چي ٽڪٽ پي رانيولي هي د نه راٽگ احتمال 0.01 وي. ديي احتمال چي 3 تنه مسافريٽو واپس را نه شي څومره هي.

**حل:** په هي مسئلہ کي درنه راٽل (ڪاميابي ده او همدرانگه ليدل کپري چي  $n = 200$  ڀير لوي او  $P = 0.01$  يعني د ڪاميابي احتمال کوچني هي، نو لرو:

$$P(X = m) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^m}{m!} \quad \lambda = np = 200 \cdot 0.01 = 2$$

$$P(3) = \frac{(2.71828)^{-2} \cdot 2^3}{3!} = \frac{1}{6} \cdot \frac{8}{(2.71828)^2} \cdot 8 = \frac{1}{6} \cdot \frac{7.3890461584}{6} = \frac{0.13533 \cdot 8}{6} = \frac{1.08268}{6} = 0.1804$$

اوس كه چيري دا احتمال د دو جملهي په فورمول محاسبه ڪرو، لرو چي:

$$P(X = m) = \binom{n}{m} P^m q^{n-m}$$

$$\left. \begin{array}{l} n = 200 \\ p = 0.01 \end{array} \right\} \Rightarrow q = 0.99$$

$$P(3) = P(X = 3) = \binom{200}{3} (0.01)^3 (0.999)^{200-3}$$

$$= \frac{200!}{3! \cdot 197!} (0.01)^3 (0.999)^{197} = 0.1814$$

خرنگه چي ليدل کپري دواړه څوابونه سره معادل دي نو واضح ده چي د ٻواسن د فورمول له لاري احتمال محاسبه ساده ده.



### يادونه:

د پواسن د فورمول په واسطه کولای شو چې په يوه ټاکلي وخت کې د ورتللو د شمېر احتمال په لاندې ډول وښيو:

$$P(X = m) = \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^m}{m!}$$

په پورتنۍ فورمول کې  $t$  د ښودل شوی وخت نسبت پر ټول وخت چې اوسط هڅې ته ورکړل شوی وي  $m$  د ورتللو شمېر  $t$  په واحد وخت کې د  $\lambda$  د ورنگ شمېر اوسط په واحد وخت کې دی.

**مثال:** که په يوه ساعت کې د يوه بانک د مراجعينو شمېر په متوسط ډول 60 تنه وي، ددې احتمال چې څلور تنه په لومړيو دريو دقيقو کې راغلي وي څومره دی.

**حل:**

$$\lambda = 60 \quad , \quad t = \frac{3}{60} = \frac{1}{20}$$

$$m = 4 \quad , \quad \lambda t = 60 \cdot \frac{1}{20} = 3$$

$$\begin{aligned} P(m = 4) &= \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^m}{m!} = \frac{e^{-3} (3)^4}{4!} = \frac{(2.71828)^{-3} (3)^4}{4!} = \frac{1}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot 81 \\ &= \frac{1}{24} \cdot 81 = \frac{4.03278}{24} = 0.168032 \end{aligned}$$

## پوښتني

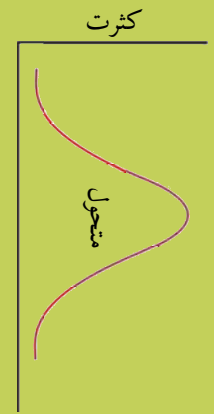
د چاپ د يوه ماشين د جوړولو لپاره په يوه کال کې په متوسط ډول ورتگ دوه ځلې ده، فرض کوو چې د پواسن توزیع په دې اړه صدق کوي.

**الف:** د ماشين د جوړولو لپاره د ورتگ د احتمال توزیع په يوه کال کې حساب کړئ.

**ب:** د توزیع اوسط او معيار انحراف څومره دی؟

**ج:** فرض کړئ که د هر ورتگ مصرف 100 افغانی وي، د هر ماشين د جوړولو مصرف پيدا کړئ؟

**د:** ددې احتمال چې په هر کال کې ديوه ماشين د جوړولو مصرف له 300 افغانیو څخه زیات وي، څومره دی؟

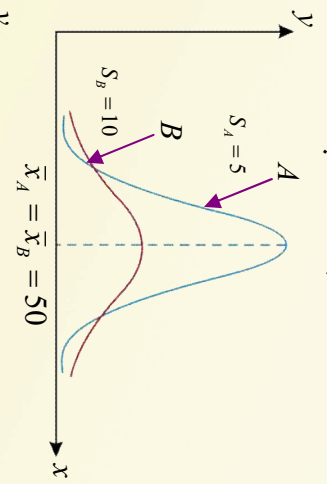


**د نورمال توزیع**  
 پوهیږو چې د نورمال منحنی شکل مشابه او متناظر له  
 زاغولی سره ده، په نورمال منحنی کې د پراگندګی مرکزي  
 شاخص صفر (معیاري انحراف او اوسط) څه ډول  
 ځایونه (موقعیتونه) نیولی شي.

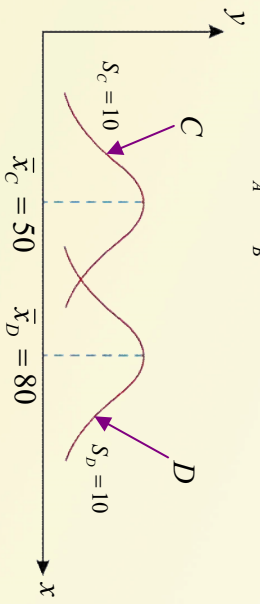


د نورمال بیلابیل توزیعات د بیلابیلو اوسط او معیار انحرافونو لرونکی دی.

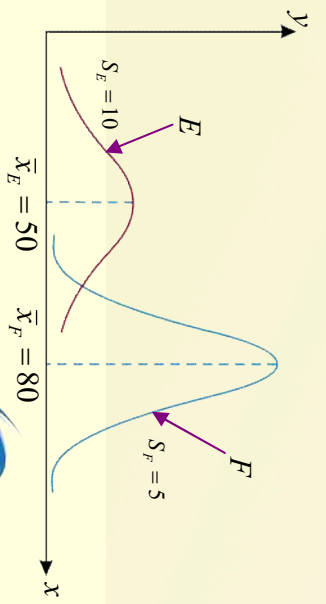
څو د نورمال توزیع له بیلابیلو اوسطو او معیار انحرافونو سره په لاندې شکلونو کې ورکړل شوي دي.



الف شکل



ب شکل



ج شکل



لانديني فعالیت له پورتنیو شکلونو څخه په گټه اخیستني سره په شفاهي ډول بیان کړئ؟

- د الف په شکل کې د  $A$  او  $B$  د تصادفي متحول توزیع د څه ډول معیاري انحراف او اوسط لرونکي

ده؟

- د ب په شکل کې  $C$  او  $D$  توزیع د څه ډول معیار انحراف او اوسط لرونکي دي؟
- د ج په شکل کې د  $E$  او  $F$  توزیع د څه ډول معیار انحراف اوسط لرونکي دي؟
- د نورمال منځني شکل ډوارو خواوو ته تر کوم ځایه غزیدلي دي؟

د پورتنی فعالیت له سرته رسولو څخه داسې پایله په لاس راځي چې:

د نورمال منځني توزیع کېدای شي چې په څلورو طریقو یو له بل سره توپیر ولري. د نورمال توزیع ریاضیکي معادله چې د  $f(x)$  احتمال توزیع تابع بنودونکی ده، په لاندې ډول بنوول کېږي.

$$f(x) = \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\bar{x}}{s}\right)^2}$$

$$f(x) = N(x, \bar{x}, s)$$

او یا

په داسې حال کې چې  $e = 2.71828$  او  $\pi$  هم ثابت عدد  $3.14189$  دی  $\bar{x}$  اوسط،  $s$  معیار انحراف

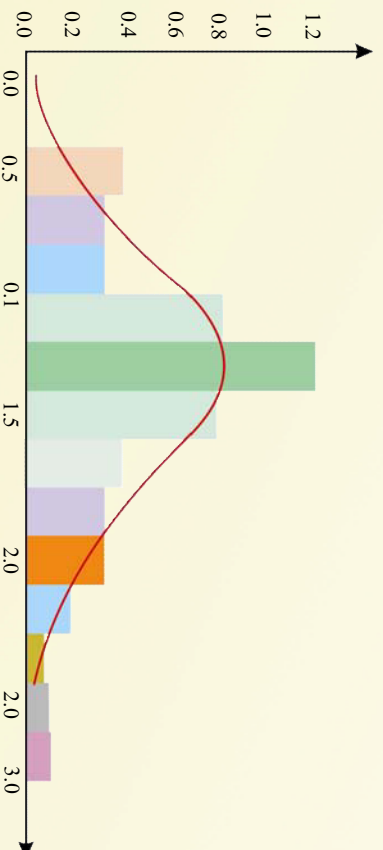
،  $x$  پیوسته تصادفي مقدار او  $f(x)$  د منځني جگوالی رانښيي.

د نورمال توزیع له پیوسته توزیعگانو څخه ده. د نورمال توزیع په واسطه کولای شو، د اندازه کولو توپیر په ښه توگه سره نږدې کړو.

**مثال:** د موټرونو ماشين د تيلو سوزولو په وخت کې يوه اندازه مضر لوګي توليدوي، د هغه مضر لوګي مقدار چې له 46 موټرونو توليدېږي، چې د يوه تن په واسطه چې لورزن نومېده په 1980 کال کې وڅېړل شو. يوه اندازه لوګي د نايټروجن اوکسايډونه لري. لاندې مستطلي گراف د نايټروجن اوکسايډ ميزان د

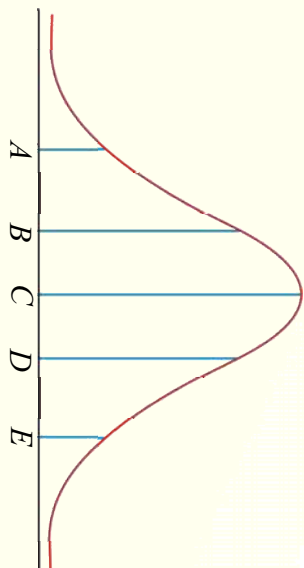
$(\frac{g}{mi})$  د 46 موټرونو د نورمال احتمال توزيع اوسط او وريانس چې د نوموړی کس له خوا تر څېړنې لاندې نيول شوی. ددې مستطلي گراف د ستونونو مساحت متناسب دی له هغو 46 نمونې شمېر له اندازه گيری سره چې ددې ستون د افقي ټکو تر منځ قرار لري.

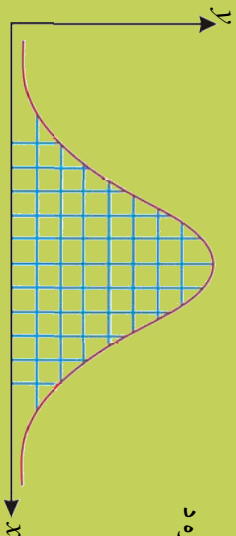
د مثال په ډول په څلورم ستون کې (چې له 1 څخه تر 1.2 پورې په افقي محور قرار لري) د  $0.174 = 0.870 \cdot 0.2 = \frac{4}{46}$  سره برابر دی ځکه 8 ډيټا له 1 څخه تر 1.2 پورې پراته دي.





لاٽيني شڪل ۾ پام ڪي وٺيسيءَ د  $A, B, C, D,$  او  $E$  ٽڪو موقعيت د معيار انحراف د اوسط له جنبه پيدا ڪري.





## د نورمال توزیع منحنی لاندې مساحت او د هغې سټنډرډ کول

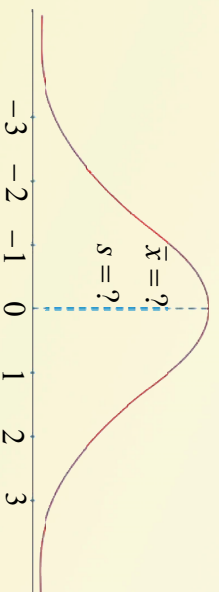
مخامخ شکل په پام کې ونیسئ:

د  $f(x) = y$  د منحنی لاندې مساحت د محاسبې لپاره د

څه ډول لارو وړاندیز کوئ.

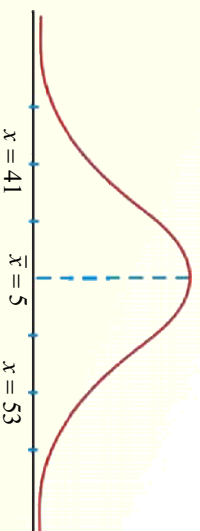


- که چېرې د  $x$  تصادفي پیوسته متحول د احتمال نورمال توزیع چې اوسط یې  $\bar{x}$  او معیار انحراف یې  $s$  وي، ددې احتمال چې دا تصادفي متحول د  $x_1$  او  $x_2$  تر منځ کمیت غوره کوي د انټیګرال په بڼه یې ولیکئ.
- سوچ کولای شئ چې د احتمال نورمال توزیع د ریاضي شکل انټیګرال محاسبه به ساده کار وي.
- که چېرې د نورمال تصادفي متحول په  $z = \frac{x - \bar{x}}{s}$  ډول ولیکو، د  $f(x)$  تابع د احتمال توزیع برابر له څه سره ده؟
- ویلای شئ چې اوسط او معیار انحراف په لاندې شکل کې له کومو عددونو سره برابر دی؟



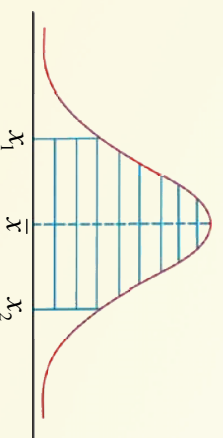
- که په لاندې شکل کې چې د  $x = 41$  او  $x = 53$  قیمتونه په نورمال ډول د  $\bar{x} = 50$  اوسط او

$$S = 5 \text{ معیار انحراف بنودل شوی دی نو د } z = \frac{x - \bar{x}}{s} \text{ مقدار په لاس راوړئ.}$$



له پورتنۍ فعالیت څخه دا پایله په لاس راځي چې د احتمال د محاسبې لپاره داسې چې د  $x$  پیوسته تصادفي متحول د  $x_1$  او  $x_2$  تر منځ یو کمیت ونیسئ، نو باید د  $x$  د احتمال د توزیع له تابع څخه انټګرال ونیسو او د منځني لاندې سطحه د  $x_1$  او  $x_2$  فاصلو ترمنځ په لاندې ډول محاسبه کړو:

$$f(x_1 < x < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\bar{x}}{s}\right)^2} dx = \int_{x_1}^{x_2} N(x, \bar{x}, s) dx$$



د نورمال توزیع احتمال محاسبه ساده کار نه دی، د نورمال توزیع ګانو د منځني لاندې مساحت محاسبه اوږدو جدولونو ته اړتیا لري چې عملاً ډاکټران دی، کولای شو چې د جدول د جوړولو شکل د احصائیوي data د ستونزو کولو په واسطه حل کړو.

په دې معنا چې کولای شو په  $x$  پورې اړوند تصادفي متحول چې د نورمال توزیع لرونکی دی، د لاندې

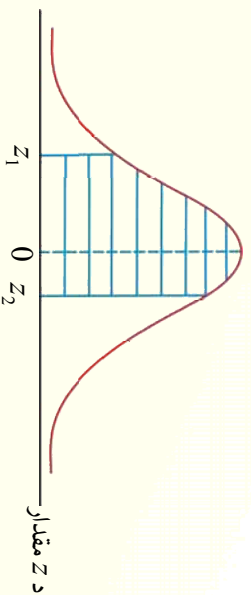
$$\text{اړیکې په واسطه ستونزو کړو.} \\ z = \frac{x - \bar{x}}{s}$$

دلته  $z$  د ستونزو نورمال متحول په نامه او منځني ته د ستونزو نورمال منځني په نامه یا د نورمال احتمال منځني نومول کېږي، په یاد ولرئ چې د  $z$  ستونزو وی، متحول تل د صفر اوسط لرونکی او یو معیار انحراف یې دی، همدارنګه د نورمال منځني او افقي محور ترمنځ مساحت له ټاکل شوي واحد سره برابر وي.



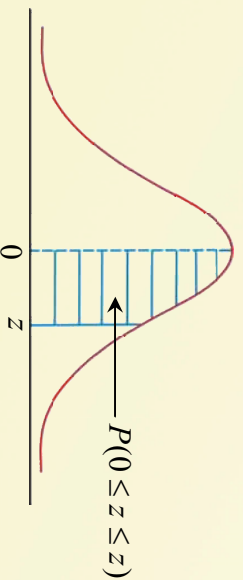
لاندي مساحت د يوه منځني يوه برخه د نورمال احتمال چي له احتمال سره مستقيم تناسب لري او کولای شو چي د  $z = \frac{x - \bar{x}}{s}$  بدلولو سره يي په لاندي ډول وښيو.

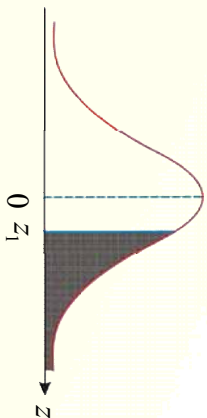
$$f(z_1 < z < z_2) = \int_{z_1}^{z_2} \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \int_{z_1}^{z_2} N(z, 0, 1) dz$$



د  $x$  متحول منځني لاندي مساحت چي د  $x = x_1$  او  $x = x_2$  ترمنځ واقع دی، د  $z$  متحول له منځني مساحت سره چي د  $z = z_1$  او  $z = z_2$  ترمنځ پراته مساوي دي. په پایله کي کولای شو چي د نورمال د توزیع سټنډرډه د جدول په لرلو سره د نورمال توزیع احتمال د ناڅاپه متحول د هر ممکنه قیمت لپاره په لاس راوړای شو.

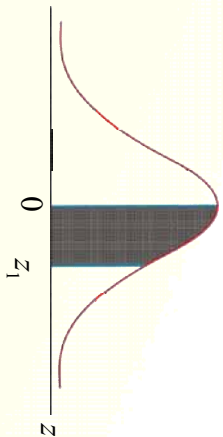
د سټنډرډ نورمال د توزیع احتمال د جدول د استعمال له لاري کولای شو، په لنډه ډول توضیح کړو. هغه جدول چي ددي لوست په پای کي راغلی دی، د سټنډرډ نورمال توزیع اړوند په احتمالانو کي ګډون لري. لاندي جدول ددي لوست يوه برخه د جدول پای راښيي، هغه ارقام چي د جدول دپاسه لیکل شوي دی، راښيي چي  $z$  د مثبتو مقدارونو لپاره تنظیم شوی دی چي د منځني لاندي مساحت له صفر ټکي څخه تر  $z$  پوري راښيي.





جدول (1)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9278	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9268	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997



جدول (2)

Z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	.0000	.0080	.0160	.0240	.0320	.0400	.0479	.0559	.0639	.0719
0.1	.0398	.0478	.0558	.0637	.0716	.0795	.0874	.0953	.1031	.1110
0.2	.0793	.0872	.0951	.1030	.1109	.1188	.1267	.1346	.1425	.1504
0.3	.1193	.1272	.1351	.1430	.1509	.1588	.1667	.1746	.1825	.1904
0.4	.1593	.1672	.1751	.1830	.1909	.1988	.2067	.2146	.2225	.2304
0.5	.2093	.2172	.2251	.2330	.2409	.2488	.2567	.2646	.2725	.2804
0.6	.2793	.2872	.2951	.3030	.3109	.3188	.3267	.3346	.3425	.3504
0.7	.3493	.3572	.3651	.3730	.3809	.3888	.3967	.4046	.4125	.4204
0.8	.4193	.4272	.4351	.4430	.4509	.4588	.4667	.4746	.4825	.4904
0.9	.4893	.4972	.5051	.5130	.5209	.5288	.5367	.5446	.5525	.5604
1.0	.5593	.5672	.5751	.5830	.5909	.5988	.6067	.6146	.6225	.6304
1.1	.6293	.6372	.6451	.6530	.6609	.6688	.6767	.6846	.6925	.7004
1.2	.6993	.7072	.7151	.7230	.7309	.7388	.7467	.7546	.7625	.7704
1.3	.7693	.7772	.7851	.7930	.8009	.8088	.8167	.8246	.8325	.8404
1.4	.8393	.8472	.8551	.8630	.8709	.8788	.8867	.8946	.9025	.9104
1.5	.9093	.9172	.9251	.9330	.9409	.9488	.9567	.9646	.9725	.9804
1.6	.9793	.9872	.9951	.0030	.0109	.0188	.0267	.0346	.0425	.0504
1.7	.0493	.0572	.0651	.0730	.0809	.0888	.0967	.1046	.1125	.1204
1.8	.1193	.1272	.1351	.1430	.1509	.1588	.1667	.1746	.1825	.1904
1.9	.1893	.1972	.2051	.2130	.2209	.2288	.2367	.2446	.2525	.2604
2.0	.2593	.2672	.2751	.2830	.2909	.2988	.3067	.3146	.3225	.3304
2.1	.3293	.3372	.3451	.3530	.3609	.3688	.3767	.3846	.3925	.4004
2.2	.3993	.4072	.4151	.4230	.4309	.4388	.4467	.4546	.4625	.4704
2.3	.4693	.4772	.4851	.4930	.5009	.5088	.5167	.5246	.5325	.5404
2.4	.5393	.5472	.5551	.5630	.5709	.5788	.5867	.5946	.6025	.6104
2.5	.6093	.6172	.6251	.6330	.6409	.6488	.6567	.6646	.6725	.6804
2.6	.6793	.6872	.6951	.7030	.7109	.7188	.7267	.7346	.7425	.7504
2.7	.7493	.7572	.7651	.7730	.7809	.7888	.7967	.8046	.8125	.8204
2.8	.8193	.8272	.8351	.8430	.8509	.8588	.8667	.8746	.8825	.8904
2.9	.8893	.8972	.9051	.9130	.9209	.9288	.9367	.9446	.9525	.9604
3.0	.9593	.9672	.9751	.9830	.9909	.9988	1.0067	1.0146	1.0225	1.0304
3.1	1.0293	1.0372	1.0451	1.0530	1.0609	1.0688	1.0767	1.0846	1.0925	1.1004
3.2	1.0993	1.1072	1.1151	1.1230	1.1309	1.1388	1.1467	1.1546	1.1625	1.1704
3.3	1.1693	1.1772	1.1851	1.1930	1.2009	1.2088	1.2167	1.2246	1.2325	1.2404
3.4	1.2393	1.2472	1.2551	1.2630	1.2709	1.2788	1.2867	1.2946	1.3025	1.3104
3.5	1.3093	1.3172	1.3251	1.3330	1.3409	1.3488	1.3567	1.3646	1.3725	1.3804
3.6	1.3793	1.3872	1.3951	1.4030	1.4109	1.4188	1.4267	1.4346	1.4425	1.4504
3.7	1.4493	1.4572	1.4651	1.4730	1.4809	1.4888	1.4967	1.5046	1.5125	1.5204
3.8	1.5193	1.5272	1.5351	1.5430	1.5509	1.5588	1.5667	1.5746	1.5825	1.5904
3.9	1.5893	1.5972	1.6051	1.6130	1.6209	1.6288	1.6367	1.6446	1.6525	1.6604
4.0	1.6593	1.6672	1.6751	1.6830	1.6909	1.6988	1.7067	1.7146	1.7225	1.7304
4.1	1.7293	1.7372	1.7451	1.7530	1.7609	1.7688	1.7767	1.7846	1.7925	1.8004
4.2	1.7993	1.8072	1.8151	1.8230	1.8309	1.8388	1.8467	1.8546	1.8625	1.8704
4.3	1.8693	1.8772	1.8851	1.8930	1.9009	1.9088	1.9167	1.9246	1.9325	1.9404
4.4	1.9393	1.9472	1.9551	1.9630	1.9709	1.9788	1.9867	1.9946	2.0025	2.0104
4.5	2.0093	2.0172	2.0251	2.0330	2.0409	2.0488	2.0567	2.0646	2.0725	2.0804
4.6	2.0793	2.0872	2.0951	2.1030	2.1109	2.1188	2.1267	2.1346	2.1425	2.1504
4.7	2.1493	2.1572	2.1651	2.1730	2.1809	2.1888	2.1967	2.2046	2.2125	2.2204
4.8	2.2193	2.2272	2.2351	2.2430	2.2509	2.2588	2.2667	2.2746	2.2825	2.2904
4.9	2.2893	2.2972	2.3051	2.3130	2.3209	2.3288	2.3367	2.3446	2.3525	2.3604
5.0	2.3593	2.3672	2.3751	2.3830	2.3909	2.3988	2.4067	2.4146	2.4225	2.4304



د مثال په ډول که چیرې  $z = 1.56 = z$  وي لومړی هغه سطر پیدا کړئ چې په هغه کې  $z$  د  $1.5$  معادل دی، که چیرې ددې کرښې په اوږدوالي پر مخ لاړ شو، تر څو هغه ستون ته ور سېږي چې له پاسه  $0.06$  لیکل شوی دی له  $0.9406$  عدد سره مخامخ کېږو چې د منځني د لاندې اړوندې سطحې د  $z = 0$  څخه تر

$$P(0 \leq Z \leq 1.56) = 0.9406 \quad z = 1.56 \text{ پورې دی، نو لیکلای شو چې:}$$

**لومړی مثال:** د څښلو (نوشابې) د بوتلونو د ډکولو دستگاه داسې تنظیم شوې ده، که  $952$  ملي لیتر نوشابه په بوتل کې واچوي ددې نوشابې میزان چې د نورمال توزیع اوسط یې  $952$  ملي لیتره او معیاري انحراف یې  $4$  ملي لیتره دی. ددې احتمال چې بوتل د  $952$  او  $956$  ملي لیترو ترمنځ نوشابه ولري، څومره دی.

**حل:** لومړی  $z$  د  $x$  له جنسه پیدا کوو:

$$z_1 = \frac{x - \bar{x}}{s} = \frac{952 - 952}{4} = \frac{0}{4} = 0$$

$$z_2 = \frac{956 - 952}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

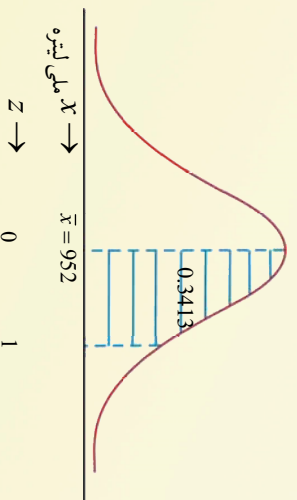
نو پر دې اساس د  $x$  د تعریف ناحیه له  $952$  څخه تر  $956$  د  $z$  تعریف د ناحیې له صفر څخه تر  $1$  بدلېږي. د لوست د پیل له جدول (2) څخه په گڼه اخیستې سره لرو  $P(0 \leq z \leq 1) = 0.3413$  احتمال داسې دی چې هغه بوتل چې له  $952$  څخه تر  $956$  ملي لیترو نوشابه ولري، یا په بل عبارت  $34.13$  فیصده ډکې شوي بوتلونه له  $952$  څخه تر  $956$  ملي لیتره نوشابه لري؛ یعنې:

$$P(0 \leq z \leq 1) = P(z_2) - P(z_1)$$

$$= P(1) - P(0)$$

$$= 0.3413 - 0$$

$$= 0.3413$$



**دویم مثال:** په یوه خاص مضمون کې د زده کوونکو د نمرود نورمال توزیع اوسط  $70$  او معیاري انحراف یې  $8$  دی له نورمال ستندرد جدول څخه په گڼه اخیستې سره له  $54$  څخه تر  $84$  نمرود ترمنځ فیصدي پیدا کړئ.

حل : د مسألي حل په لاندي ډول په ترسيمي بڼه بنودل شوی دی .

$$z_1 = \frac{54-70}{8} = -2 \quad \text{د } x = 54 \text{ لپاره لرو:}$$

$$z_2 = \frac{84-70}{8} = 1.75 \quad \text{د } x = 84 \text{ لپاره لرو:}$$

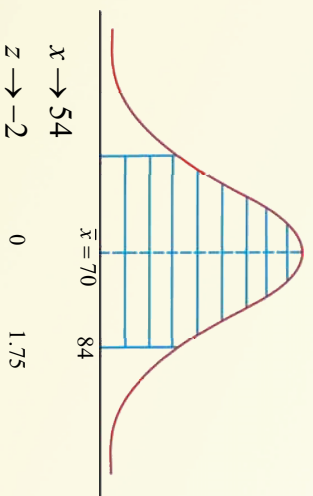
څرنگه چې د ستندرد نورمال منځني لاندي مساحت په يو محدود انټروال کې په پام کې نيول شوی دی؛ نو له نورمال ستندرد جدول (2) څخه لرو:

$$P(-2 \leq z \leq 0) = P(0 \leq z \leq 2) = 0.9772$$

$$P(0 \leq z \leq 1.75) = 0.9599$$

د ټاکل شوي مساحت د پام وړ احتمال دی .

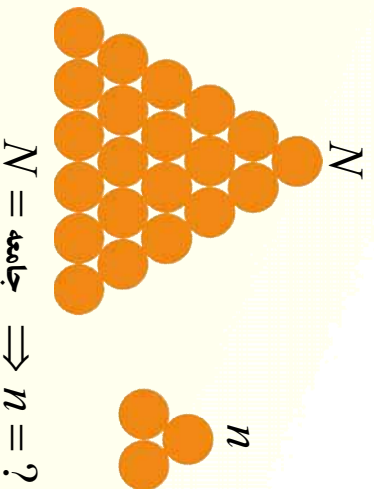
$$P(-2 \leq z \leq 0) + P(0 \leq z \leq 1.75) = 0.4772 + 0.4599 \\ = 0.9371$$



پوښتني

د لومړی مثال په پام کې نيولو سره محاسبه کړئ چې د بولټونو څو فیصده له 948 څخه تر 956 ملي لیټرو پورې نرشابه لري .

**نمونه اخیستل**  
په دې متل کې ((موتی د خروارو نمونه ده)) څرنگه  
تحلیلی.



### فعالیت

- که چېرې وغواړئ چې د افغانستان د 12 ټولګي د زده‌کوونکو ونې (قد) اندازه کړئ ددې کار لپاره څه ډول لارې وړاندیز کوئ.
- نمونه په دوو ډولونو وېشل کېږي، ساده نمونه او ناڅاپه نمونه، ناسې ددې نمونو کومې یوې ته غوره والی ورکوي؟ ولې؟
- د نمونه‌گیری لپاره ښکاره خپل دلایل شته ایا کولای شې یو یا دوه دلیلونه یې وولئ.
- سوچ کولای شې چې د اوسط او معیار انحراف عددي ځانګړنې چې د ټولني د توزیع او د نموني د توزیع لپاره ورڅخه ګټه اخیستل کېږي، یو شان وي.
- ایا د نمونه‌گیری او لیدل شویو ناڅاپه متحولیتو د مقدارونو ترمنځ توپیر شته؟
- له پورتنی فعالیت څخه پوهېږو چې د نمونه اخیستني بېلې بېلې لارې شته دی.
- ناڅاپه نمونه اخیستنه: د ټولني ټول عناصر په ټاکل کېدو کې هم چانس دی.
- سیستماتیک نمونه اخیستنه: د ټولني عناصر په منظم ډول کود وهل شوی دی.
- طبقه‌بني نمونه اخیستنه: ټولنه په بېلابېلو محالوسو ډلو وېشل شوی وي.
- خوشه‌بني نمونه اخیستنه: که ټولنه ډېره لویه وي، هغه په بېلابېلو څانګو وېشو او له هرې څانګې څخه یوه نمونه ټاکو.
- د هرې ټولني عددي ځانګړنې (اوسط معیار انحراف) ته د ټولني پارامتر ولې.
- د هرې ټولني د عددي نمونه‌گیری ځانګړنې (اوسط معیار انحراف) ته آماره ولې.
- د نموني پایلې د مشاهدې د مقدارونو په عنوان د ناڅاپه متحولیتو په پام کې نیسو.
- د "x<sub>1</sub>، x<sub>2</sub>، ...، x<sub>n</sub>" ناڅاپه متحولیتو یوه ناڅاپه نمونه د x تصادفي متحول ویل کېږي.



که چیرې تابع یې په دې ډول تعریف شوی وي.

$$f(x_1, x_2) \dots f(x_n) = f(x_1) \cdot f(x_2) \dots f(x_n)$$

**مثال:** فرض کوو چې په یوه قطی کې 5 سینی او 7 توري گولې وي، د قطی له منځ څخه 5 گولې یوه یوه ځای په ځای کول (د یوه عنصر دویم ځل ټاکل مجاز ټاکو).

د ټاکل شوی ناڅاپه نمونې تصادفي متحولین په ژبه بیان کوئ او اړونده توزیع یې پیدا کوئ.

**حل:** د  $x_1, x_2$  او  $x_3$  ناڅاپه متحولونو په پام کې ونیسئ په لومړۍ پړاو کې د  $x_1$  ناڅاپه متحول لپاره د صفر عدد د توري گولې لپاره او د (1) عدد د سینی گولې ټاکلو په لومړۍ پړاو کې ځانته غوره کوئ. او د  $x_2$  متحول هم د صفر عدد د توري گولې او د (1) عدد سینه گوله لپاره په دویم پړاو کې ځانته غوره کوي په همدې بڼه د  $x_3$  ناڅاپه متحول په دویم پړاو کې هم د صفر عدد د توري گولې لپاره ټاکو چې په دې پړاو کې (1) عدد سینه گوله ځانته غوره کوي، په دې حالت کې د  $x_1, x_2$  او  $x_3$  ناڅاپي متحولونه د برنولي ناڅاپه متحولین دي. د  $p = \frac{5}{12}$  له پارامتر او  $i = 1, 2, 3$  مقدارونو څخه لرو:

$$f(x_i) = \left(\frac{5}{12}\right)^{x_i} \left(1 - \frac{5}{12}\right)^{1-x_i}$$

څرنگه چې نمونه اخیسته ناڅاپه ده، نو د  $x_1, x_2$  و  $x_3$  ناڅاپه متحولین یو له بل څخه پیل دی نو تابع یې عبارت دی له:

$$f(x_1, x_2, x_3) = P(x_1 = x_1, x_2 = x_2, x_3 = x_3)$$

په یاد ولرئ چې د عناصرو هره ناڅاپه نمونې له مجهول پارامترونو سره تړلي نه دي، هغې ته آماره وايي.

## پوښتنې

1. که  $N = 25$  د یوې ټولني حجم وي که وغواړو، چې پنځه گونه ناڅاپه نمونه یې پیدا کوو، د هغو نمونو شمېر چې په لاس راځي څومره ده؟
2. ساده او ناڅاپه نمونې سره له مثال بیان کوئ؟
3. فرض کوو چې د یوې ټولني څخه مو ناڅاپه نمونه را نیولی ده څه سوچ کوئ چې ددې نمونې سره به څه وکړو؟

## د نموني د اوسط توزیع

دولت غواړي ویوهېږي چې د یوه ښار د وګړو متوسطه  
ګټه(سپما) څومره ده؟

$$\sum_{i=1}^n x_i = ?$$

$n$

ددې کار لپاره ناڅاپه نمونه ټاکي او د نموني اوسط محاسبه کوي.  
اوس باید ددې محاسبه شوي مقدار مشخصه کوم تخمین کړي؟



### فعالیت

- د لاندې data د دريو زده‌کوونکو د ورزشي لوبو د نيمرو پايله رابښي:

نوم نمبري	داود	سلیمان	پرواک
	2	3	4

- د نيمرو د احتمال توزیع يې وليکئ.
- د زده‌کوونکو د نيمرو اوسط او معيار انحراف حساب کړئ.
- راکړل شوی نمبري د مرتبو جوړو په مرسته(ممکنې دوه ګوني نموني د ځای په نيولو) اړيه او د هرې نموني اوسط د جدول په ټپه وښئ.
- د نمونو د اوسط د احتمال توزیع جدول(د  $\bar{x}$  د کثرت د توزیع جدول) وليکئ.
- د  $\bar{x}$  د کثرت توزیع جدول مستطلي ګرام رسم کړئ.
- د اوسط د  $\bar{x}$  متحول د زده‌کوونکو د نيمرو د اوسط سره پرتله کړئ.



له پورتنی فعالیت څخه دا پایله په لاس راځي:

که  $x_1, x_2, \dots, x_n$  د یوې ټولني د  $f(x)$  احتمال تابع ناڅاپه نمونه وي په دې صورت کې د ناڅاپه نموني احتمال توزیع عبارت دی له:

$x$	$x_1$	$x_2$	$\dots$	$x_n$
$f(x)$	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	$\dots$	$\frac{1}{n}$

$$E(\bar{x}_n) = \mu$$

د  $\bar{x}_n$  متحول د اوسط،

$$U(\bar{x}_n) = \frac{1}{n} \delta$$

د  $\bar{x}_n$  متحول وریانس،

$$S_n^2 = S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

د نموني وریانس

$$E(S^2) = S^2$$

د نمونې وریانس اوسط،

په داسې حال کې چې  $\bar{x}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$  نمونې اوسط،  $\mu$  د ټولني اوسط  $\delta^2$  د ټولني وریانس  $S^2$  د نموني وریانس دی.

**مثال:** د لاندې ټولنه، ټولې دوه گونې ممکنه ناڅاپه نموني د ځای په ځای کولو سره ټاکو:

$$f(x) = \frac{1}{3}, \quad x=1, 2, 3$$

**الف:** د  $x$  د احتمال توزیع ولیکئ.

**ب:** د ټولني اوسط او وریانس حساب کوئ.

**ج:** د  $\bar{x}$  د توزیع جدول تشکیل او مستطیبي گراف یې رسم کوئ.

**د:**  $E(\bar{x})$  او  $V(\bar{x})$  حساب کوئ.

**حل:**

**الف:**

$x$	1	2	3
$f(x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

ب:

$$\mu = E(x) = \sum_{x=1}^3 x f(x) = \frac{1}{3}(1+2+3) = 2$$

$$E(x^2) = \sum_{x=1}^3 x^2 f(x) = \frac{1}{3}(1^2 + 2^2 + 3^2) = \frac{14}{3}$$

$$\delta_x^2 = E(x^2) - (E(x))^2 = \frac{14}{3} - 2^2 = \frac{2}{3}$$

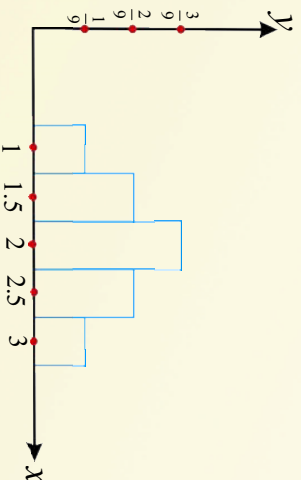
ج: لاندې جدول ټولې دوہگونې ممکنو نمونو د ځای نیول، د سره او هر یوه راښيي:

نمونه	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(3,1)	(3,2)	(3,3)
$\bar{x}$	1	1.5	2	1.5	2	2.5	2	2.5	3

د  $\bar{x}$  د توزیع د کثرت جدول په لاندې ډول ښودل کېږي:

$\bar{x}$	1	1.5	2	2.5	3
$f(\bar{x})$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

د  $\bar{x}$  مستطلي گراف په لاندې ډول رسمېږي:



د:

$$\mu_{\bar{x}} = E(\bar{x}) = \sum \bar{x} f(\bar{x}) = 1 \cdot \frac{1}{9} + 1.5 \cdot \frac{2}{9} + 2 \cdot \frac{3}{9} + 2.5 \cdot \frac{2}{9} + 3 \cdot \frac{1}{9} = \frac{18}{9} = 2$$

$$E(\bar{x}^2) = \sum \bar{x}^2 f(\bar{x}) = 1^2 \cdot \frac{1}{9} + (1.5)^2 \cdot \frac{2}{9} + 2^2 \cdot \frac{3}{9} + (2.5)^2 \cdot \frac{2}{9} + 3^2 \cdot \frac{1}{9} = \frac{13}{3}$$

$$\delta_{\bar{x}}^2 = V(\bar{x}) = E(\bar{x}^2) - (E(\bar{x}))^2 = \frac{13}{3} - 4 = \frac{1}{3}$$

$$E(x) = E(\bar{x}) = 2$$

نو لیدل کپری چي:

$$V(\bar{x}) = \frac{\sigma_x^2}{n} = \frac{3}{2} = \frac{1}{3}$$



1. فرض کوو چي يوه ټولنه د 2, 4, 6 او 8 څلورو عددونو څخه جوړه شوې وي، په دې صورت کي توزیع، اوسط او وریانس ددې ټولني محاسبه او وروسته ددې ټولني څخه دوه گونې ناڅاپه نمونه د ځای په نیولو سره وټاکي او د نموني توزیع اوسط یعنی  $\bar{x}$  په لاس راوړی. د کثرت څو ضلعي گراف يي رسم کړئ، د  $\bar{x}$  اوسط او وریانس حساب کړي.

## د مرکزي لېمیت قضیه

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} = ?$$

پوهېږو چې د ټولني کمیت ته د ټولني پارامتر او د نمونې کمیت ته نمونه بې اوسط ویل کېږي د  $\bar{x}$  او  $s_x$  د نمونو احصائیه د کوم پارامتر په اړه اطلاعات زموږ په اختیار کې بردي.



### فعالیت

- که د لویې ټولني حجم په  $\frac{S}{\sqrt{n}}$  و، د کوچني ټولني حجم په  $\frac{S}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$  چې  $N$  د ټولني عناصر شمېر،  $n$  د نمونه عناصرو شمېر او  $K$  معیار انحراف دی) وښو څه وخت کېدای شي چې د لویې ټولني حجم له کوچني ټولني سره برابر شي؟
- که د  $x_1, x_2, \dots, x_n$  نورمال توزیع یو له بل څخه بیل وي آیا د هغوی د جمع حاصل د نورمال توزیع لرونکی ده؟
- که  $x_1, x_2, \dots, x_n$  ناڅاپه ځانګړي متحولونه په یو شان توزیع شوی وي او د  $\mu$  اوسط لرونکی وي او  $\sigma^2$  وریانس وي ویلای شو چې د  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = K_n$  د توزیع وریانس او اوسط څو دی؟  
د پورتنی فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راځي:  
که چېرې  $N$  د لویې ټولني د  $\mu$  متناهي اوسط او  $\sigma^2$  متناهي وریانس لرونکی یوه ناڅاپه  $n$  ګونه نمونه وټاکو، په دې صورت کې د نمونې اوسط یعنی  $\bar{x}$  د تقریبي نورمال توزیع د  $\mu_x = \mu$  اوسط  $\sigma_x^2 = \frac{\sigma^2}{n}$  وریانس دی او په دې صورت کې د نمونې اوسط متحول د نورمال ستېږد توزیع دی. په داسې حال کې چې  $Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$  ناڅاپه متحول د نورمال ستېږد توزیع د  $N-1$  ضریب د  $N$  د لویو قیمتونو لپاره (1) ته نږدی کېږي. په حقیقت کې بې لېمیت هغه وخت چې  $n \rightarrow \infty$  وکړی، برابر له (1) سره دی.

**مثال:** د یوه لوی ټولګی څخه چې د زده‌کونکو د ریاضي مضمون نمبرو نورمال توزیع د 71 اوسط او معیار انحراف یې 9 دی. یوه 9 ټلې نمونه ټاکو، ددې احتمال چې ددې نمونې د نښرو اوسط له 80 څخه زیات وي حساب کړئ. همدارنگه که چیرې په تصادفي ډول یو زده‌کونکی وټاکو، په دې صورت کې احتمال ددې چې شمېرې یې له 80 څخه زیاتې وي محاسبه کړئ.

**حل:** څرنگه چې  $\bar{x}$  د نورمال توزیع د  $\mu$  په اوسط او معیار انحراف لرونکی دی، نو لرو:

$$\begin{aligned}P(\bar{x} > 80) &= P\left(z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\delta}{\sqrt{n}}} > \frac{80 - 71}{9} = P(z > 3)\right) \\ &= 1 - P(z) \leq 3 = 1 - 0.9987 = 0.0013\end{aligned}$$

همدارنگه د  $n = 1$  پلاره لرو:

$$\begin{aligned}P(\bar{x} > 80) &= P\left(z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\delta}{\sqrt{n}}} > \frac{80 - 71}{9} = P(z > 1)\right) \\ &= 1 - P(z) \leq 1 = 1 - 0.8413 = 0.1587\end{aligned}$$

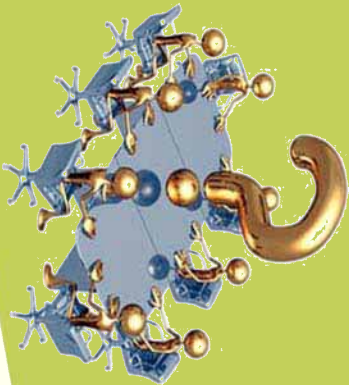
**پاملرنه:**

د  $P(z)$  قیمت له (2) جدول څخه په لاس راوړو.



پوښتنه

1- د هغو جمعو وزن چې د یوه ماشین په واسطه ترل کېږي، د نورمال توزیع اوسط یې  $\mu = 250\text{ gr}$  او معیاري انحراف یې  $\sigma = 20\text{ gr}$  وي. مطلوب دی، د هغې احتمال محاسبه چې د ناڅاپه نمونې د اوسط وزن  $n = 16$  تایی د جمعو کوچنی له  $240\text{ gr}$  وي.



### د نمونه يي توزیع نسبت

د  $A$  په یوه ښار کې  $n$  کسان غواړي د  $B$  یو کس د ښاروال په صفت وټاکي، که دا کسان تر پوښتنې لاندې راښي او  $x$  د موافقو کسانو شمېر وښيي ددې کسانو نسبي کثرت مساوي په څه دي.



- که چیرې  $x$  د دوو جملو توزیع لرونکی وي، کولای شو ولیکو چې:

$$f(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \quad x = 0, 1, 2, \dots, n$$

که چیرې  $\hat{P} = \frac{x}{n} \Rightarrow x = n\hat{P}$  وي د  $x$  قیمت په تعویض سره په پورتنۍ فورمول کې  $f(\hat{P})$  ولیکئ.

- د  $\hat{P} = \frac{x}{n}$  په فورمول کې که د  $x$  تصادفي متحول د  $n$  ناڅاپه متحولینو د  $x_1, x_2, \dots, x_n$  له مجموع څخه

تشکیل شوی وي،  $\hat{P}$  د نموني اوسط سره څه اړیکه لري؟

که چیرې  $x$  ناڅاپه متحول،  $n$  د برونې د آزماینښتونو مجموعه،  $P$  د هر آزماینښت بریالیتوب احتمال وي په دې صورت کې  $\hat{P}$  د نموني د نسبت آماره  $E(x) = np$  اوسط  $V(x) = npq$  د  $x$  ناڅاپه متحول وریانس وي.

د دوه جملېي د توزیع په پاملرنې سره د  $\hat{P}$  توزیع په دې فورمول سره کولای شو.

$$f(n\hat{P}) = \binom{n}{n\hat{P}} p^{n\hat{P}} (1-p)^{n(1-\hat{P})} \quad \hat{P} = 0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, 1$$

د  $\hat{P}$  ناڅاپه متحولینو اوسط (Expected Value) او وریانس په لاندې صورت لیکلای شو:

$$\mu_{\hat{P}} = E(\hat{P}) = P$$

$$\sigma^2 \hat{P} = V(\hat{P}) = \frac{pq}{n} = \frac{p(1-p)}{n}$$

$$z = \frac{x - n\hat{P}}{\sqrt{npq}} = \frac{\hat{P} - P}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}$$

د نورمال سټندارډ توزیع یې عبارت دی له:

**مثال:** د کالیو د بڼه والي احتمال  $P = 0.3$  دی، یوه ساده ناڅاپه نمونه  $n = 6$  ګونه ټاکو که چیرې  $x$  د ناقصو کالیو ښوونکی وي، د  $x$  او  $P$  احتمال توزیع ولیکی.

**حل:** د  $x$  ناڅاپه متحول د دوه جمله‌يي توزیع د  $P = 0.3$  او  $n = 6$  پارامترونه وي.

$$f(x) = P(X = x) = B(x, 6, 0.3) \quad x = 0, 1, \dots, 6$$

د دوه جمله‌يي توزیع جدول څخه په ګڼه اخیستنې سره لاندې احتمالونه محاسبه او د توزیع د جدول احتمال یې لیکو:

$x$	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	0.1176	0.3025	0.3241	0.1852	0.0595	0.0102	0.0007

د  $P$  ناڅاپه متحول د  $0, \frac{1}{6}, \frac{2}{6}, \frac{3}{6}, \frac{4}{6}, \frac{5}{6}, 1$  قیمتونه نیسي:

$$P(\hat{P} = 0) = P(X = 0) = 0.1176$$

$$P(\hat{P} = \frac{1}{6}) = P(X = 1) = 0.3025$$

او پاتې نور په مشابه ډول محاسبه کېږي، پام وکړئ چې:

$$P(\hat{P} = \frac{x}{n}) = P(X = x)$$

او د  $P$  د احتمال توزیع عبارت دی:

$\hat{P}$	0	1.6	2.6	3.6	5.6	1
$f(\hat{P})$	0.1176	0.3025	0.3241	0.0595	0.0102	0.0007

$$P(\hat{P} \leq 0.6) = P(x \leq 3.6) = P(x \leq 3) = \sum_{x=0}^3 B(x, 6, 0.3) = 0.9294$$

په پورتنۍ مثال کې:

$$P(\hat{P} \leq 0.27) = P(x \leq 1.62) = P(x \leq 3) = 0.1176 + 0.3025 = 0.4201$$

اویا:



1. ددې احتمال چې د یوه تن د غوښتنلیک فرم په پوره ډول پرته له غلطۍ (تېروتنې) څخه وکړي

$P = 0.7$  وي، یوه نمونه د  $n = 200$  ګونه د استخدام وکړ شوی فارمونه مو ټاکلی وي.

- ددې احتمال محاسبه کړئ چې  $P$  د  $0.05 \pm$  داخلي فاصله کې د تولني له بنسټ څخه ولېږي.

- ددې احتمال محاسبه کړي چې  $P$  د  $0.6$  څخه زیات وي.



## د څپر کې مهم ټکي

- ناڅاپه متحول هغه اصطلاح ده چې د بېرې تابع په عنوان په احصايه او احتمالونو کې ترې نه گڼه اخیستل کېږي.
- د يوه معجزا ناڅاپه متحول د احتمال تابع هغه تابع ده چې د تعريف ناحیه يې هغه عددونه دي چې ناڅاپه متحول کولای شي هغه غوره کړي او د قيمتونو ناحیه سره د تعريف د ناحیې د عناصرو اړونده احتمالونه گڼون لري.
- د تجمعي احتمال تابع هغه تابع ده چې د تعريف ناحیه کې هغه عددونه گڼون ولري چې د  $x$  ناڅاپه متحول يې ځانته غوره کړي او د قيمتونو ناحیه يې د  $f(x)$  ټول تصويرونه موجود دي.
- د يوه پيوسته(متمادي) متحول د احتمال تابع هغه تابع ده چې د تعريف ناحیه يې د  $x$  ټول پيوسته(متمادي) مقدارونه غوره کړي او د قيمتونو ناحیه يې  $F(x)$  ټول تصويرونه وي.
- د  $x$  معجزا ناڅاپه متحول اوسط Expected value او وړيلنس په وار سره عبارت دي له:

$$E(x) = \sum_{i=1}^n x_i f(x_i) = \bar{x}$$

$$V(x) = S^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - E(x_i))^2 f(x_i)$$

- د بربنولي توزيع،

$$P(X = m) = P^m (1 - P)^{1-m}$$

- د دوه جملېني توزيع،

$$P(X = m) = \binom{n}{m} P^m q^{n-m}$$

$$\bar{x} = np$$

$$S = \sqrt{npq}$$

- د دوه جملېني توزيع اوسط او معياري انحراف عبارت له:  $S = \sqrt{npq}$  ، چې فورمول يې عبارت دی له:

$$P(x = m) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^m}{m!}$$

- که  $N$  له بېرې نورمالې جامعي څخه د  $n$  ځلې (ښايي) ناڅاپه نمونه وټاکو د  $\bar{x}$  د نمونېني اوسط آماره د

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \quad \text{او} \quad \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n} \quad \text{اوسط سره او} \quad \mu_{(x)} = \mu$$

ده.

- د نورمال توزيع: د نورمال توزيع شکل له زنگولې سره مشابه او متناظر دی، په نورمال توزيع کې مرکزي شاخصونه يو له بل سره برابر دي او د پيوسته ناڅاپه متحولونو د ناحیې تعريف محدود دی چې د احتمال توزيع

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{x - \bar{x}}{\sigma} \right)^2}$$

يې عبارت ده له:

- چې  $\mu$  د ټولني اوسط او  $\sigma$  د ټولني معياري انحراف دی.

- د  $f(x)$  تابع د منحنی لاندې مساحت د محاسبې لپاره د  $a$  او  $b$  په فاصلو کې کولای شوه دې انټیګرال څخه ګټه واخلو:

$$P(a \leq x \leq b) = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

- که چېرې  $x$  د دوه جمله‌يي توزیع د  $n$  شمېر د برونوې پر لږه پسې ازماينښتونه،  $P$  د کامیابي احتمال او  $q = 1 - p$  د هر ازماينښت د نا بریاليتوب احتمال وي، په دې صورت کې د احصائيه د اوسط نمونه او د  $x$  ناڅاپه متحول وړانس په ترتيب سره عبارت دی له:  $\hat{P} = \frac{x}{n}$  ،  $E(x) = np$  او  $V(x) = npq$  همدا رنگه د دوه جمله‌يي توزیع، اوسط، وړانس او د ستندرد توزیع او  $\hat{P}$  ناڅاپه متحول په ترتيب سره عبارت دی له:

$$E(\hat{P}) = P , \quad f(\hat{P}) = \binom{n}{n\hat{P}} P^{n\hat{P}} q^{(1-\hat{P})}$$

$$z = \frac{\hat{P} - P}{\sqrt{\frac{Pq}{n}}} , \quad V(\hat{P}) = \frac{Pq}{n}$$

- ددې  $z = \frac{x - \mu}{\sigma}$  اړیکې په واسطه کولای شو چې هره احصائوي مجموعه یې د نورمال توزیع لرونکې وي هغه په ستندرد نورمال بدل کړو.
  - نمونه په دوو برخو ویشل کېږي، ساده نمونه او ناڅاپه نمونه.
  - د نمونه گیری طریقې په عمومي ډول عبارت دي له: ناڅاپه نمونه‌گیری، منظمه نمونه‌گیری، ګروپي نمونه‌گیری، خوشه‌يي نمونه‌گیری.
  - د  $x$  نمونې ناڅاپه متحولونو اړوند تابع په دې صورت تعریفېږي.
$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)$$
  - که چېرې  $x$  د ټولني يوه ناڅاپه نمونه د  $f(x)$  د احتمال تابع په لرلو سره وي  $E(\bar{x}_n) = \mu$  ، اوسط،  $V(\bar{x}_n) = \frac{1}{n} \sigma^2$  د ټولني وړانس،  $\sigma^2$  د ټولني وړانس او  $\sigma^2$  ته د نمونو وړانس وايي.

## د څپرکي پوښتني

1. دوه سګي څلور ځلي پورته واچوئ او د خط راتللو شمېر په پام کې ونيسئ:
  - ناڅاپه متحولونه د تابع په بڼه وښئ.
  - د هر ځل د پورته اچونې احتمال نمونېني فضا سره نسبت وړکړئ.
  - د تابع د تجمعي او مجزا احتمال وليکئ.
2. که چېرې د يوې جوړې بوټونو د تقیصې احتمال  $P = 0.1$  وي، د ناقصو بوټونو اوسط او معيار انحراف په يوه نمونه کې  $n = 400$  جوړو بوټونو پيدا کړئ.
3. د يوه شرکت په گام کې 500 پاڼې کمپيوټرونه شته چې د هغې له جملې څخه يې 50 پاڼې نقص لري، يو اڅپسونکی له هغې څخه 10 پاڼې کمپيوټرونه اخلي، ددې احتمال څومره دی چې هغې 8 پاڼې جوړ اڅپستی وي؟

4. لاندې اطلاعات چې اوسط او معيار انحراف د دوو پارامترونو په اړوند دی د نورمال توزيع د رسمولو لپاره ترې گټه واخلي. لومړی يو افقي محور رسم کړئ او د  $\bar{x}$  ،  $\bar{x} + s$  ،  $\bar{x} - s$  ،  $\bar{x} + 2s$  او  $\bar{x} - 2s$  ټکي پرې وټاکئ وروسته يو ټکی د  $h$  اختياري جگوالی په اندازه د  $\bar{x}$  له پاسه په پام کې ونيسئ او  $\bar{x} + s$  له پاسه يو ټکی د  $0.6h$  په جگوالی وټاکئ، پدې يو ټکی چې مختصات يې  $(\bar{x} + s, 0.6h)$  څرنگه چې د نورمال منحني منظر دی، همدا عمل په ځانگړې توگه په  $s - \bar{x}$  هم سرته ورسوئ. اوس د  $2s + \bar{x}$  ،  $2s - \bar{x}$  د پاسه دوه ټکي د  $h$  او  $0.15h$  په جگوالی په پام کې ونيسئ، پام وکړئ چې د نورمال منحني د دقيق رسمولو لپاره د  $0.6067h$  او  $0.1354h$  په ځای له  $0.6h$  او  $0.15h$  څخه گټه واخلي. په پايله کې دا ټکي د يوه منحني په واسطه وصل او وړايئ چې دا منحنی په کومو فاصلو کې محذب او په کومو فاصلو کې مقعر ده.

5. په يوه روغتون يوه څېړنه رابښي چې د مراجعينو شمېر د شنبې په ورځ وروسته له وخت څخه د 6 او 8 ترمنځ 25 تنه دی. فرض کړئ چې د پراسن د احتمال توزيع په دې حالت کې صدق وکړي.
  - د روغتون د مراجعينو د احتمال توضیح د دوشنبې له ورځې، وروسته له وخت څخه د 6 او 8 ساعتونو تر منځ پيدا او گراف يې رسم کړئ؟ آیا دا توزيع خمپده ده؟
  - ددې توزيع د اوسط او معيار انحراف مقدار په لاس راوړئ.
  - آیا دا ممکنه ده چې د دوشنبې په ورځ وروسته له وخت څخه د 6 او 8 ساعتونو ترمنځ به له 7 تنو څخه زيات روغتون ته مراجعه کړي وي؟ ولې؟
6. فرض کوو چې د يوه کتاب د يوه مخ د تېروتنو شمېر د پراسن د توزيع يا  $\lambda = \frac{1}{2}$  پارامتر لرونکی دی د محاسبي احتمال يې مطلوب دی داسې چې:

- حد اقل یوه ټایپي تېروتنه په هغه مخ کې وي.
- دقیقاً 5 ټایپي تېروتنې په هغه مخ کې دي.
- د 3 او 6 ترمنځ ټایپي تېروتنې په هغه کې وي.
- 7. فرض کوو چې د هغه پستون قطر چې د یوه اتوماتیکي ماشین په واسطه جوړېږي په نورمال یا اوسط 25 ملي متر او معیار انحراف یې 0.5 ملي متره توزیع شوی وي.
  - کله چې د پستون قطر د 25.2 او 25.9 ترمنځ وي احتمال یې څومره دی.
  - د پستونونو کوم نسبت د 25 ملي قطر لرونکی او له هغې څخه کم دی.
  - که چېرې 1000 پستونه جوړ شي، له هغوی څخه څو دانې ددې وړ دي چې 24.07 ملي مترو څخه کم قطر ولري.
  - د تولید شویو پستونونو څو فیصده د 24.56 ملي متره معادل قطر یا له هغه څخه زیات لري.
- 8. که چېرې  $x_1, x_2, \dots, x_n$  د ناڅاپه متحول یوه تصادفي نمونه وي ایا د  $\frac{x_1 + x_2}{x_4}$  او  $x_3 - x_2 + 3x_1$  تابع آماره دی.
  - 9. که چېرې  $x$  یو ناڅاپه متحول او د  $\mu$  او  $\sigma^2$  پارامترونه وي آیا د  $\frac{3x_1 - 2x_3 - \sigma}{8\mu + x_2}$  او  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)$  او  $\mu - x_3 + x_2$  او  $\sigma^2$  مجهول وي آیا پورتنیو تابعگانو ته احصایه ولی شو؟
  - 10. ټولنه د برق په څلورو ډلو کې ګډون لري، که د صمرونو اورډوالی یې د ساعتونو په حساب سره عبارت له 108 104 112 103 دی یوه ډله ناڅاپه ټاکنې فرض کوو چې د  $x$  ناڅاپه متحول ټاکل شوی د ډلو د عمر اورډوالی راوبښئ:
    - د  $x$  د احتمال توزیع ولیکئ.
    - $E(x)$  او  $V(x)$  محاسبه کړئ.
  - 11. د یوه ښار د وګړو د ګڼې اندازه چې د غیرنورمال توزیع  $\mu = 90$  افغانی اوسط او د 25 افغانی معیار انحراف سره دی که چېرې د 225 کسینز د وګړو د یوې نمونې د ګڼې مجموعه له 2100 افغانیو څخه زیاته وي، احتمال یې څومره دی؟
  - 12. پوهیږو چې %56 وګړي د A نوماند طرف دار دی، څومره ددې احتمال شته چې  $n = 50$  دوه ګونې یوه نمونه کې حداقل %60 وګړي د A نوماند طرفدار وي.
  - 13. په 12 مثال کې که چېرې  $P = 0.4$  وي، یعنې ددې احتمال چې یو وګړی د A کانډید طرفدار وي 0.4 دی، یوه  $n = 200$  ګونه نمونه وټاکو نو څومره ددې احتمال شته چې لاقل 100 وګړی د A کانډید طرفدار وي.

# اتم خپر کی احتمالات









## بېلې شوي (غیر متمادی) او نښتي (متمادی) فضاگانې

په مځامځ شکلونو کې د لومړي او دویم نل څخه په وار سره اوبه په ځمکه تویږي ویلای شئ چې له دې نلرونو څخه په ځمکه د اوبو د شاخکو د تویلو تویږ په څه کې دی؟



### فعالیت

- د یو رمل په اچولو سره ویلای شې چې د نمونه یې فضا ټولې ممکنې بېلې کومې دي؟
- آیا د ژني څخه د یو بې بڼې منې د لوښلو وخت وړاندوینه کولای شئ چې وروسته له څو ثانیو، دقیقو او یا ساعتونو څخه پر ځمکه ولوېږي؟

- نظر وخت ته د منې د لوښلو نمونه یې فضا ولیکي.
- د رمل دانې د اچولو تجربې نمونه یې فضا د عناصرو شمېر او له ونې څخه د منې د لوښلو وخت څنګه پرتله کولای شې.

د پورتنۍ فعالیت له سرته رسولو څخه لاندې پایله په لاس راځي:

د یوې ناڅاپه تجربې نمونه یې فضا عبارت له هغه ټاکلې او یا ناټاکلې سټ یا مجموعې څخه ده، چې د ځینې عناصرو یې د شمېر وړ، او ځینې یې د شمېر وړ نه وي. هغه نمونه یې فضاګانې چې عناصر یې د شمېر (countable) او تشخیص وړ وي د پریکړې یا ګڼسټه (شلیدلې) نمونه یې فضا یا متصل په نامه یادېږي او هغه نمونه یې فضاګانې چې عناصر یې د شمېر وړ نه وي د نښتي (نیوسټه) یا متمادی نمونه یې فضا په نامه یادېږي.

**لومړی مثال:** له لاندې نمونه یې فضاګانو څخه کومه یوه نښتي (نیوسټه) او کومه یوه پریکړې (ګڼسټه) ده.

**الف:** د دوو رمل دانو اچول

**ب:** د 8 او 12 ترمنځ د یوه حقیقي عدد ټاکل.

**ج:** له 30 زده کونکو څخه د 3 تنو ټاکل



د: د یوې کرې د حرارت د یوې درجې لوړېدل د 100 درجو د سانتي گړه څخه تر 1000 درجو د سانتي گړه پورې.

ه: د  $30^\circ$  او  $45^\circ$  زاویو ترمنځ یوه زاویه ټاکل.

**حل:** څرنګه چې (الف او ج) نمونېني فضاګانې د محدودو غړو له شمېر څخه جوړ شوي، نو پریکړې یا گسسته فضا ولې (ب، د او ه) له نامحدود حقیقي عددونو څخه تشکیل (جوړ) چې د شمېر وړ نه دي، نو نښتې یا پیوسته فضاګانې دي.

**دویم مثال:** څیړ د کور د ګالانو د اوبو لوی لپاره یو واټر پمپ اخیستی دي.

که چېرې د واټر پمپ عمر د ساعت له مخې په پام کې ونیسو، په دې حالت کې د واټر پمپ د عمر د اوږدوالي نمونه-یې فضا چې کېدای شي هر مثبت حقیقي عدد د واټر پمپ د وړاندېدو په صورت کې د کار د مودې قیمت شي؛ په دې ډول د داسې ناڅاپه حادثې پېښېدل صفر هر حقیقي عدد کېدای شي چې دانمونه یې فضا یوه غیر متمنې، نښتې یا پیوسته نمونه یې فضا ده؛ یعنې  $\{t \text{ د واټر پمپ د وړاندېدو وخت، } t \geq 0\} S = \{t \in IR : t \geq 0\}$  چې په پورتنۍ نمونه یې فضا کې  $t$  د واټر پمپ د عمر اوږدوالي رانېي.

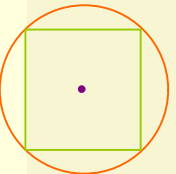
**يادونه:**

1- د لومړي مثال الف او ج جزونه کې محدودې نمونېني فضاګانو څخه بحث شوی چې عناصر یې د شمېر وړ دي، د ب او د جزونو کې نامحدودې نمونېني فضاګانې ذکر شوي چې عناصر یې د شمېر وړ نه دي، نو ځکه ټول مثبت حقیقي عددونه اخیستلای شي.

2- په دویم مثال کې نمونېني فضا متصل یا غیر محدوده ده چې د حقیقي عددونو د انټروال په توګه ښودل کېږي.

## پوښتني

- 1- یو غشي وېشونکی د یوه دایروي د سګ په دننه چې وړانګه یې  $I$  ده، په پام کې ونیسي. د غشي د لګېدو ځای د دایرې په دننه کې چې مرکز ته نږدې ولګېږي، د هغې نمونه یې فضا ارایه کړي. وویاست چې دا څنګه یوه نمونه یې فضا ده.
- 2- په مخامخ شکل کې په ناڅاپي یا تصادفي ډول د دایرې په دننه کې یو ټکي و ټاکي، احتمال ددې شته چې مطلوب ټکي د مربع په دننه کې وي.
- 3- یو طبیعي دوه رقمی عدد و ټاکي، هغه احتمال پیدا کړي چې عدد د 4 مضرب وي.







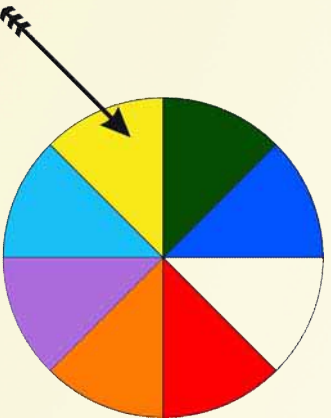
### هم چانسه پېښې

د یوې نورمال رمل دانې په اچولو کې د (1) او یا (5) شمېرې مخ ته راتللو لپاره شرط څه دي؟  
د 2 او 5 شمېرې د راتللو چانس یو له بل سره څه اړیکه لري؟



### فعالیت

د معماڅخه شکل په څېر یوه دايره په پام کې ونیسئ، که چېرې په راکړې شوې دايره کې یو ښکاري غشي وولې لاندي پوښتنو ته ځواب ورکړئ.



- په سور رنگه ناحیه او شین رنگه ناحیه کې د غشي لگېدل یو له بل سره څه اړیکه لري؟
  - د غشي د لگېدو چانس د کچه په اړه د نارنجي او سپینو رنگونو سره په پرتله باندې څه وپلای شي؟
  - د غشي د لگېدو د چانس کچې په تور رنگ څومره ده؟
  - د تجربې، نمونېني فضا یې ولیکئ.
  - لومړني ناڅاپه پېښې لست کړي او د هر یو احتمال پیدا کړي دي؟
  - د لومړنیو پېښو د احتمالونو د مجموع په برخه کې څه وپلای شي؟
  - د پورتنۍ فعالیت له اجرا کولو څخه لاندي پایله په لاس راوړو:
- هغه لومړنۍ ساده پېښې چې د هغوي د پېښېدلو چانس په یوې تجربې په اجرا کولو کې سره برابر وي، د هم چانسه پېښو په نامه یادېږي. لکه:
- که چېرې  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\} = S$  یوه نمونه یي فضا وي، نو  $\{e_i\}$  د هر  $i = 1, 2, \dots, n$  لپاره یوه ناڅاپه لومړني پېښه ده که  $0 \leq P(\{e_i\}) \leq 1$  ،  $i = 1, 2, \dots, n$  دي.

$$P(\{e_1\}) + P(\{e_2\}) + \dots + P(\{e_n\}) = \sum_{i=1}^n P(e_i) = 1$$

**مثال:** خلور تته په يوه لوبه کې گډون کوي. تاسې د هر يوه د گډلو احتمال پيدا کړئ! په داسې حال کې چې نمونه يي فضا هم چانسې وي.

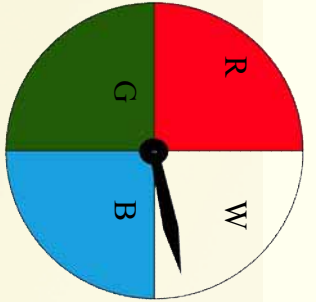
**حل:** که چېرې  $S = \{a, b, c, d\}$  نمونه يي فضا وي، نو د هرې ناخپه لومړنۍ پېښې احتمال  $\frac{1}{4}$  دی.

لو چې:  $P(a) = P(b) = P(c) = P(d) = \frac{1}{4}$

پاسنۍ لومړنۍ پېښې سره هم چانسې دي.

**پوښتني**

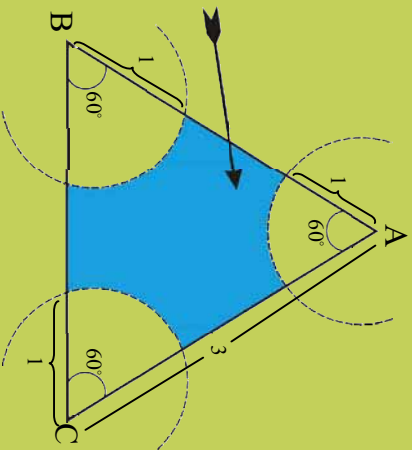
- مخامخ شکل په پام کې ونيسي، که چېرې د عقربې (ستې) درېدلو احتمال په آسماني او سپين رنگ 0.30 او د سره رنگ پرمخ 0.26 وي، د شنه رنگ پرمخ درېدلو احتمال به څومره وي؟



2- لاندې د کثرت جدول د رمل يوې دانې د اچولو لپاره په پام کې ونيسي. هغه احتمال پيدا کړئ، چې د رمل دانه (ک) شمېره راشي.

د رمل شمېره	1	2	3	4	5	6
کثرت	7	9	8	7	3	10

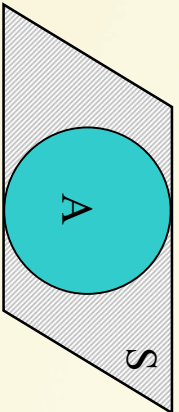
3- د رمل يوه دانه داسې ډکه شوی چې د جفت شمېرو د راتللو احتمال د طاق شمېرو دوه برابره وي، که يو چاپه شرط وهلو کې (ک) شمېره ټاکلې وي، د هغې احتمال پيدا کړئ.



**د نښتي يا پيوسته (متممادي) فضاگانو احتمال**  
 د يوه متساوي الاضلاع مثلث دننه چې هره ضلعه يې 3 واحد ده، يو غشي ولو، د دې احتمال چې د غشي د لگېدلو ټکي د مثلث د هر رأس نه د يو واحد په اندازه لوی وي، څو دی؟



- آیا ویلای شي چې د یوې توپه کرښې، د یوې مستوي د یوې برخې او یا د فضا د حجم څو ټکي یو پر بل پسې موجود دی؟
- د هغو ټکو د پېښلو احتمال چې د  $A$  په برخه کې چې د  $S$  د لویې برخې فرعي مساحت دی، لکه څرنگه چې په شکل کې لیدل کېږي د  $A$  او  $S$  د ساحو د مساحتونو د نسبت سره څه اړیکه لري؟
- آیا کولای شئ دا مسئله په فضا د یوه جسم حجم د یوې برخې د احتمال د محاسبې لپاره عمومیت ورکړئ؟ د پورتنۍ فعالیت له سرته رسولو څخه لاندې پایله لاسته راځي.

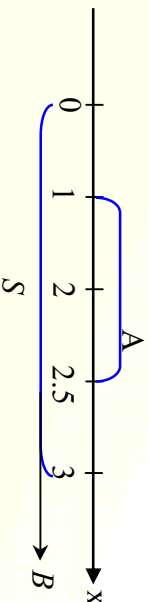


پیوسته(متممادي) نمونه یي فضا د نامعینو ټکو مجموعه ده، چې شکل یې د اعدادو په محور، په مستوي کې لکه سطح او یا په فضا کې لکه حجمونه دی، څرنگه چې ددې ټکو ښوونه ممکن نه ده، نو د احتمال د نسبت پیدا کولو لپاره د توپه کرښو د اوردوالي، د اشکالو سطحو او یا د جسمونو له حجم څخه استفاده کوو.  
 معمولاً اعداد له محور څخه په ګڼه اخیستې سره د  $x$  یو متحول، د یوه مساحت د یوې برخې لپاره د دوو متحولونو لکه  $x$  او  $y$  په همدې ترتیب د حجمونو لپاره له دريو متحولونو لکه  $x$ ،  $y$ ، او  $z$  څخه ګڼه اخلو.

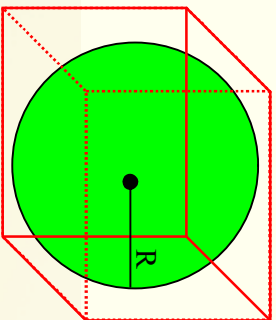
**لومړی مثال:** د اعدادو په محور د  $(0, 3)$  په انټروال کې د  $x$  یو ټکی په ناڅاپي یا اتفاقي ډول ټاکو پیدا کړئ ددې احتمال چې  $2.5 < x < 1$  وی؟

**حل:** د حقيقي اعدادو محور رسم کړئ د  $S$  او  $A$  فاصلي د هغې پر مخ ټاکو، د شکل په پام کې نيولو سره د  $A$  پېښې د پېښېدو احتمال څخه لرو:

$$P(A) = \frac{\text{د } A \text{ ټوټه کړنې اوږدوالي}}{\text{د } B \text{ ټوټه کړنې اوږدوالي}} = \frac{2.5-1}{3-0} = \frac{1.5}{3} = \frac{1}{2}$$



**دويم مثال:** په ناڅاپه ډول يو ټکی د يوه مکعب په دننه کې چې ضلعه يې 2 واحدونه وي ټاکو پيدا کړئ ددې احتمال چې نوموړي ټکی د مکعب د محاطي کړې په دننه کې وي.



**حل:** که چېرې کره د هغه مکعب په دننه کې چې ضلعه يې  $a$  واحدونه ده، محاطه وي، نو د کرې شعاع  $r = \frac{a}{2}$  کېدای شي نو:

$$r = \frac{a}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$A$  ناڅاپه پېښه د کرې د حجم او  $S$  نمونه يي فضا سره مساوي چې د مکعب حجم دی، نو لرو:

$$P(A) = \frac{\text{د کرې حجم}}{\text{د مکعب حجم}} = \frac{\frac{4}{3} \pi r^3}{a^3} = \frac{\frac{4}{3} \pi (1)^3}{2^3} = \frac{\pi}{6}$$

## پوښتنې

- 1- د حقيقي اعدادو په محور د  $A$  او  $B$  دوه ټکي په ناڅاپي يا تصادفي ډول داسې ټاکو چې  $-2 \leq B \leq 0$  او  $0 \leq A \leq 3$  وي، ددې احتمال پيدا کړئ چې د  $d$  واټن د  $A$  او  $B$  ترمنځ وي او 3 واحدو څخه لوی وي.
- 2- که چېرې يو ټکی په ناڅاپي يا تصادفي ډول د دايرې د سطحې پر مخ وټاکو، ددې احتمال پيدا کړئ، چې نوموړي ټکی نظر د دايرې محيط ته د دايرې مرکز ته نږدې وي.



## مشروط احتمال

له يوه ولايت څخه (20) تنه نارينه او ښځينه زده کونکي دکانکور په آزمونه کې د طب پوهنځي ته بريالي شوي دي، د هغوي له جملې څخه يې 5 تنه ښه کار له بازار دي. که په 15 تنو برياليو نارينه وو کې 4 تنه يې ښه کار ته بازان وي. د نوموړو محصلينو له مينځ څخه په اتفاقي ډول يو تن ټاکو احتمال د دې پيدا کړئ، چې:

- ټاکل شوی محصل يوه کار ته بازه نځلي وي؟
- په پورتنۍ سوال کې هغه نځلي په کوم شرط سره د طب پوهنځي ته بريالي شوي؟



## فعاليت

له 2500 زده کونکو څخه 1600 تنه يې په مطالعه کولو عادت لري. چې له 80% زده کونکو څخه يې 70% نارينه زده کونکي وي او په مطالعه کولو عادت ولري، که د ټولو زده کونکو لپاره احتمال يو شان وي، د لاندې پېښو په پام کې نيولو سره د يوه تن زده کونکي ټاکل د ښوونځي له زده کونکو څخه:

R: له مطالعې سره عادت لري.

M: نارينه زده کونکي دي.

F: يوه ښځينه زده کونکي ده.

د لاندې پوښتنو په حل فکر وکړئ:

- ددې احتمال پيدا کړئ چې د مطالعه کونکو له منځ څخه ټاکل شوي زده کونکي نارينه وي؟
- ددې احتمال پيدا کړئ چې د مطالعه کونکو له منځ څخه ټاکل شوی تن يوه ښځينه وي؟
- ددې احتمال پيدا کړئ چې ټاکل شوي زده کونکي يو نارينه وي په دې شرط چې په مطالعه عادت وي.

د پورته فعاليت د سرته رسولو څخه لاندې پايله به لاس راوړو:

په حقيقت کې د هغه نارينه زده کونکي د ټاکلو احتمال په دې شرط چې په مطالعه عادت ولري.

د لاندې احتمالات وپش له حاصل څخه عبارت دی که چیرې  $\Omega$  ټوله نمونښي فضا او  $|\Omega|$  نمونښي فضا د عناصرو شمیر وي، نو لرو:

$$\frac{|M \cap R|}{|M \cap R|} = \frac{|\Omega|}{|\Omega|} = \frac{P(M \cap R)}{P(R)} = P_R(M)$$

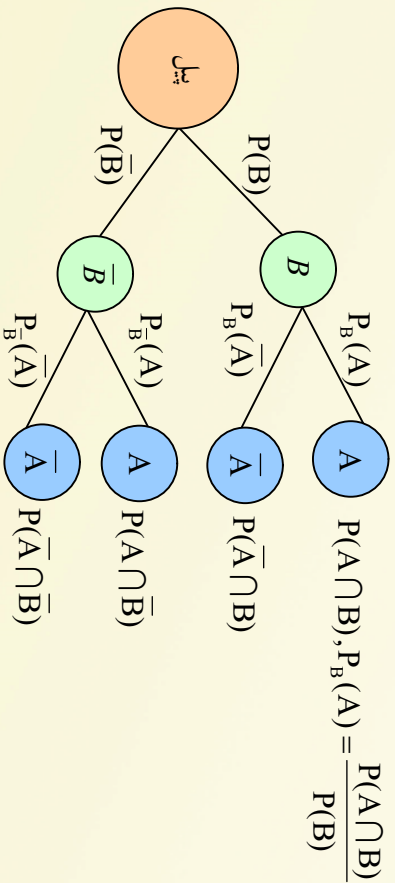
$$= \frac{|M \cap R|}{|R|} = \frac{|M \cap R|}{|\Omega|} \cdot \frac{|\Omega|}{|R|} = \frac{|M \cap R|}{|R|} \cdot \frac{|\Omega|}{|\Omega|} = \frac{|M \cap R|}{|R|}$$

د هغه نارینه زده‌کونکو د ټاکو احتمال چې په مطالعه عادت وي.

$P_R(M)$  د هغې پېښې له احتمال څخه عبارت دي چې ټاکلي زده‌کونکي نارینه وي، په دې شرط چې هغه په مطالعه عادت وي.

**تعریف:** که چیرې  $S$  نمونښي فضا  $A$  او  $B$  د نمونښي فضا دوي ناڅاپي پېښې وي، په داسې حال کې چې  $P(B) \neq 0$  وي. په دې حالت کې نوموړی احتمال یعنی  $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$  چې د  $A$  ناڅاپي پېښې احتمال نظر د  $B$  ناڅاپي پېښې ته مشروط احتمال بلل کېږي.

د پورته تعریف په پام کې نیولو سره نظر د مسیر لومړي قاعدې ته د ونډیز دیاگرام په مرسته هم په لاس راوړای شو.



د مشروط احتمال له فورمول څخه لاندې مهمې پایلې په لاس راځي:

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P_B(A)$$

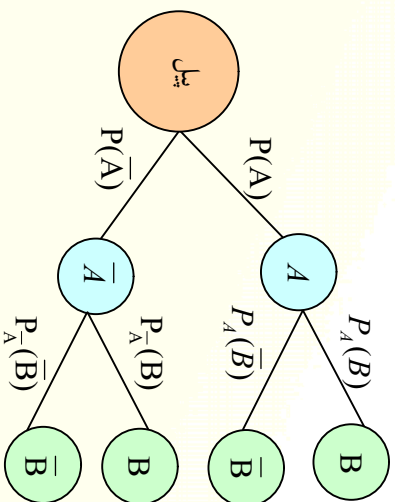
1- د مسیر د لومړي قاعدې څخه لرو:

$$P(A \cap \bar{B}) = P(\bar{B}) \cdot P_{\bar{B}}(A)$$

مسیر له دویمې قاعدې د څخه په گڼه اخیستې سره لرو:

$$P(A) = P(B) \cdot P_B(A) + P(\bar{B}) \cdot P_{\bar{B}}(A)$$

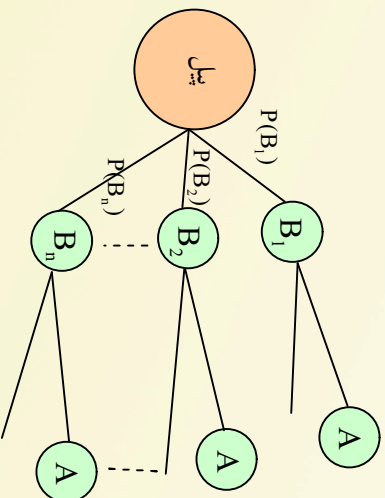
$$2- \text{ ونډیز(درختي) دیاگرام له مخې} \quad P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$



له لومړي پايلې څخه په لاس راځي چې:  $P_A(B) = \frac{P_B(A) \cdot P(B)}{P(B) \cdot P_B(A) + P(\bar{B}) \cdot P_B(A)}$

3- که چېرې نوموړی حالت د  $\Omega$  نمونه يي فضا ناڅاپي پېښو  $B_1, B_2, \dots, B_n$  اختياري ویش لپاره عمومي وړکړو د ژبې په ډول د ډيگرام د په پام کې نيولو سره کولای شو، لاندې فورمول په لاس راوړو.

$$P_A(B_i) = \frac{P_{B_i}(A) \cdot P(B_i)}{P(B_1) \cdot P_B(A) + \dots + P(B_n) \cdot P_B(A)} = \frac{P(A \cap B_i)}{\sum_{k=1}^n P(B_k) \cdot P_B(A)} \quad i=1, 2, \dots, n$$



**لومړی مثال:** یو زده کوونکی ښوونځي ته د تللو لپاره 50% هره ورځ د گاډي څخه گټه اخلي چې 70% په ټاکلي وخت ښوونځي ته رسېږي. په منځني ډول نوموړي 60% په ټاکلي وخت ښوونځي ته حاضرېږي که چېرې پېښې:

B: په ټاکلي وخت رسېدل

A: د گاډي په واسطه راتلل

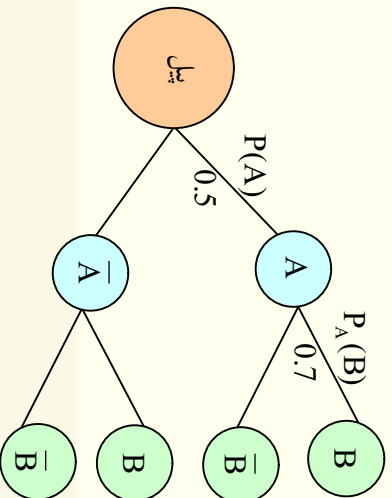


وي په دې صورت کې د A مشروط احتمال نظر B ته يعني  $P_B(A)$  مطلوب دي؟

**حل:** د نوموړي احتمال د پیدا کولو لپاره د ونهټيز يا درختي ډياگرام په پام کې نيولو سره نظر فورمول ته په لاندې

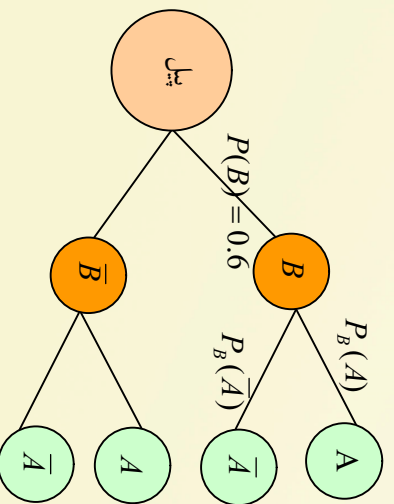
$$\text{چول په لاس راځي: } P_B(A) = \frac{P(A) \cdot P_A(B)}{P(B)} = \frac{0.5 \cdot 0.7}{0.6} = 0.58333 = 58.333\%$$

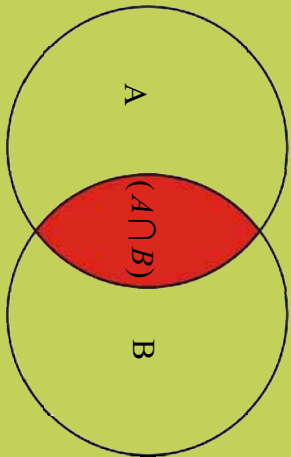
نو په دې اساس د گادې په واسطه د رسېدلو احتمال په دې شرط چې په ټاکلي وخت په ښوونځي کې وي %58.33 سلنې سره برابر دي.



### پوښتني

له لاندې ډياگرام څخه په گټه اخیستې سره د مشروط احتمال په ټاکلي وخت رسېدل ښوونځي ته په دې شرط چې د گادې په واسطه سرته رسېدلي وي، يعني  $P_A(B)$  د ناڅاپه پېښې احتمال ښوونځي ته په ټاکلي وخت رسېدل، په دې شرط چې د گادې په واسطه نه وي راغلي يعني  $P_A(B)$  مطلوب دي.





## د حاصل ضرب اصل

د  $A$  ناڅاڅه پېښې مشروط احتمال په  $B$ ، د  $A$  او  $B$  ناڅاڅه پېښې احتمال یو له بل سره څه اړیکه لري؟



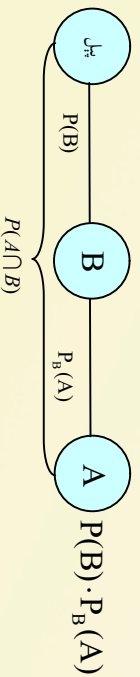
فعالیت

- که چیرې  $A$  او  $B$  دوي ناڅاڅه پېښې د  $S$  په نمونه یي فضا کې وي.
- د  $A$  ناڅاڅه پېښې مشروط احتمال  $B$  ته ولیکی.
- د ونډیز دیاگرام څخه په ګڼه اخیستې سره د  $P_B(A)$  قیمت په لاس راوړی.
- د  $(A \cap B)$  ناڅاڅه پېښو احتمال د  $A$  او  $B$  ناڅاڅه پېښو څخه او یا د  $A$  مشروط له  $B$  څخه، په ګڼه اخیستې سره ولیکی.
- د فعالیت د دوو پورتنیو بندونو د محاسبې پایلې یو له بل سره پرتله کړي.
- آیا کولای شو چې موضوع د فیرو ناڅاڅه پېښو لپاره عمومیت ورکړو.
- د پورتنۍ فعالیت له سرته رسولو څخه لاندې پایله په لاس راوړو.

د  $S$  په یوه نمونه یي فضا کې د  $A$  او  $B$  د دوو ناڅاڅه پېښو لپاره د مشروط احتمال د تعریف په پام کې نیولو سره

$$\text{لرو: } P(A \cap B) = P(B) \cdot P_B(A)$$

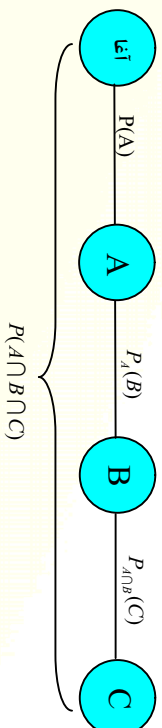
دا مسئله کولای شو چې د ونډیز دیاگرام په مرسته هم په لاس راوړو:



$$\Rightarrow P(A \cap B) = P(B) \cdot P_B(A)$$



دا مطلب د  $A$ ،  $B$  او  $C$  پښتو لپاره په لاندې ډول پراخو.



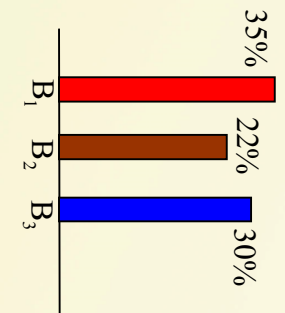
$$\Rightarrow P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P_A(B) \cdot P_{A \cap B}(C)$$

پورتني قاعده د حاصل ضرب په نامه يادېږي او کولای شو، هغه د يو شمېر اختياري ناڅاپي پښتو لپاره هم په لاس راوړو.

**مثال:** د  $B_1$ ،  $B_2$  او  $B_3$  ديو ولايتونو په پارلماني ټاکنو کې چې د هريوه لپاره د ټاکنو دگډون کوونکو فيصدي او د جمهوري گوند برخه فيصدي ورکړل شوي ده؟

په کوم احتمال د ټاکنو گډون کوونکي او يا رايې اچوونکي جمهوري گوند ټاکلی وي.  
**حل:** په لاندې ډول ناڅاپي پښتې تعريف او نوموړو:

$V$ : هغه رايې ورکونکي چې د جمهوري گوند بې ټاکلي دي.  
 $B_i$ : د ولايت رايې ورکونکي،  $B_1 - B_2 - B_3 \dots B_{(m-1)}$  لاندې ارقام ورکړل شوي وي.



ولايت	رأي ورکونکي فيصدي	جمهوري گوند ته رأي ورکونکي
$B_1$	33.2%	35
$B_2$	46.5%	22
$B_3$	20.3%	30

د  $B_i$  ( $i=1,2,3$ ) ناڅاپه پښتې په حقيقت کې بې د  $S$  نمونه بې فضا يو وېش جوړ کړي چې د هغوی لپاره صورت نيسي.

1-  $B_i$  يو له بل سره دوه په دوه مستقل او گډ عناصر نه لري.

2- د  $S$  نمونه بې فضا لپاره  $B_i = \bigcup_{i=1}^3 B_i$  دی، نو  $S = B_1 \cup B_2 \cup B_3 = \bigcup_{i=1}^3 B_i$  پښتو يو له بل سره يو په يو مستقل د هغوی لپاره صورت نيسي.

$$V = \bigcup_{i=1}^3 (B_i \cap V)$$

له دي اړیکې څخه کولای شو، د دواړو خواوو د احتمال لپاره ولیکو:

$$\begin{aligned} P(V) &= P\left(\bigcup_{i=1}^3 (B_i \cap V)\right) = \sum_{i=1}^3 P(B_i \cap V) = \sum_{i=1}^3 P(B_i) \cdot P_{B_i}(V) \\ &= P(B_1) \cdot P_{B_1}(V) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(V) + P(B_3) \cdot P_{B_3}(V) \\ &= 0.332 \cdot 0.35 + 0.465 \cdot 0.22 + 0.203 \cdot 0.3 = 0.1162 + 0.1023 + 0.0609 \\ &= 0.2794 = 27.94\% \end{aligned}$$

**تعریف:** که چیرې د  $B_1, B_2, \dots, B_n$  څرنګه چې  $P(B_i) \neq 0$  وي  $i=1, \dots, n$  پېښو عمومي حالت د S په نمونېي فضا کې یوه پېښه وي، نو  $P(A)$  د کامل احتمال په نامه یاد او د A اختیاري ناڅاپه پېښې لپاره لرو:

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(B_i) \cdot P_{B_i}(A)$$

د مشروط احتمال د تعریف، د اصل حاصل ضرب له قضیې څخه د کامل احتمال د مسئلې په پام کې نیولو څخه لاندې فورمول چې د بائیز (Bayes) د فورمول په نامه یادېږي، په آسانی سره په لاس راځي، داسې چې  $B_i$  چې  $i=1, \dots, n$  د S نمونه یې فضا یو پېښې لپاره چې  $P(B_i) \neq 0$ ،  $i=1, \dots, n$  د ناڅاپه پېښې احتمال چې  $P(A) \neq 0$  سره وي، لرو:

$$P_A(B_i) = \frac{P(A \cap B_i)}{P(A)} = \frac{P(B_i) \cdot P_{B_i}(A)}{\sum_{k=1}^n P(B_k) \cdot P_{B_k}(A)}$$

د بائیز (Bayes) فورمول:

د بائیز فورمول ډېر استعمال لري لکه د  $n=2$  لپاره  $B_1 = \bar{B}, B_2 = B$  په پام کې ونیسو، په حقیقت کې  $B_1$  او  $B_2$  د S نمونه یې فضا پېښې وي لرو:

$$P_A(B) = \frac{P(B) \cdot P_B(A)}{P(B) \cdot P_B(A) + P(\bar{B}) \cdot P_{\bar{B}}(A)}$$

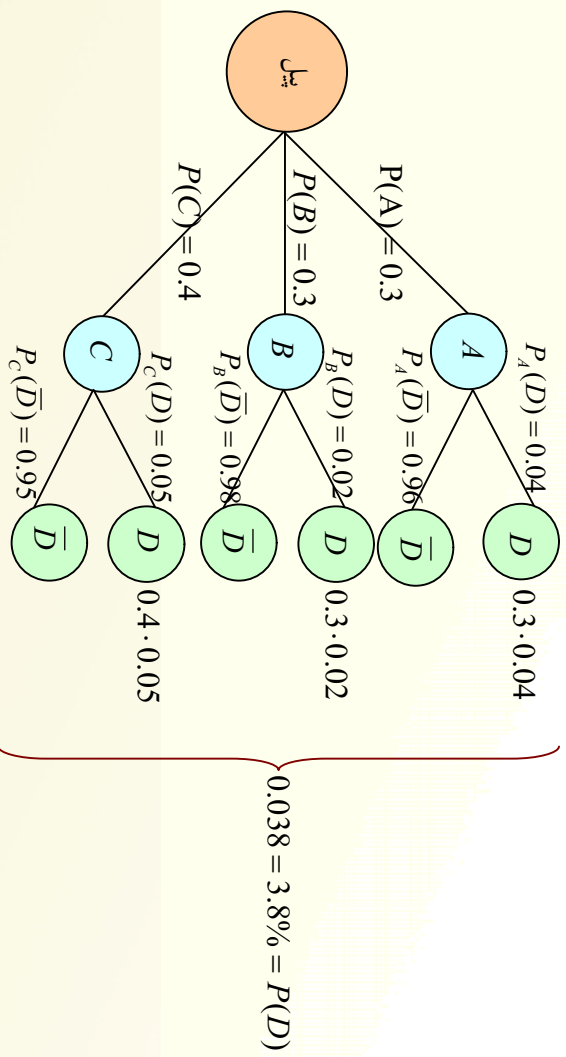
پورتنۍ فورمول د  $n=2$  د بائیز له فورمول څخه عبارت دي.

**مثال:** په یوه فابریکه کې د A، B او C درې ماشینونه په ترتیب سره 30%، 30% او 40% برخه د برق ګروپونه تولیدوي. که چیرې په ماشینونو کې د ګروپونو د خرابېدو کچه په ترتیب سره 4%، 2% او 5% وي او نوموړي ګروپونه په ګډه سره څرخ شي، مطلوب دي:

a) ددې احتمال چې یو اخیستل شوی ګروپ وران یا خراب وي.



- b) په کوم احتمال خراب خرڅ شوی گروپ د C ماشین پورې اړه لري.  
 c) یو نوی تولید شوی گروپ لرو، په کوم احتمال سره به B ماشین پورې مربوط وي.



د b جز:

$$P_D(C) = \frac{P(D \cap C)}{P(D)} = \frac{P(C) \cdot P_C(D)}{P(D)} = \frac{0.4 \cdot 0.05}{0.038} = \frac{0.02}{0.038} = 0.526 = 52.6\%$$

د c جز:

$$P_D(B) = \frac{P(\bar{D} \cap B)}{P(D)} = \frac{P(B) \cdot P_B(\bar{D})}{0.3 \cdot 0.96 + 0.3 \cdot 0.98 + 0.4 \cdot 0.95} = \frac{0.294}{0.288 + 0.294 + 0.38} = \frac{0.294}{0.962} = 0.3056 = 30.56\%$$



- 1- د 1000 دانو رملونو په منځ کې د یوې دانې په شپږ واړه مخونه یوازې د 6 شمیره وهل شوي ده. د هغوي له منځ څخه یوه ناڅاپه د رمل دانه ټاکل شوي او درې ځلې اچول شوي ده. درې ځلې 6 راغلي. پیدا کړي، هغه احتمال چې په ټاکل شوي دانه په سم ټول شمیرې وهل شوي وي؟

## د ناڅاپه پېښو استقلالیت

له مشروط احتمال څخه پوهیږو چې د  $A$  او  $B$  دوو ناڅاپو پېښو یا حادثو د  $B$  د پېښې پېښل د  $A$  په پېښه تاثیر اچوي په دې سبب لازمه ده چې د احتمال د محاسبې په وخت کې د  $A$  او  $B$  پېښه په پام کې ونیسو. د هغه حالت لپاره چې د  $A$  ناڅاپه پېښې پېښل پر  $B$  ناڅاپه پېښې اغېزه ونه لري او برعکس. د  $A$  او  $B$  د ضرب د حاصل احتمال د  $A \cap B$  پېښې له احتمال سره څه اړیکه لري.

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

**تعریف:** د  $A$  او  $B$  دوي ناڅاپه پېښې چې یوه پر بله اغېزه لرونکې نه وي د ناڅاپه مستقلو پېښو په نامه یادېږي.

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$



## فعالیت

- د  $S$  نمونه بې فضا او  $A$  او  $B$  دوي یوه له بلې څخه مستقلې پېښې چې د  $S$  نمونه بې فضا کې شامل وي، په پام کې ونیسئ.
  - د مشروط احتمال فورمول څخه په هغه صورت کې چې  $A$  او  $B$  یوه له بلې څخه مستقلې دوي پېښې وي د  $P_B(A)$  او  $P(A)$  احتمالونه یو له بل څخه څه توپیر لري؟
  - د  $P(A \cap B)$  ناڅاپه پېښې احتمال له څه سره مساوي دي؟
  - د  $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$  د  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$  د پېښو د احتمال د فورمول څخه په هغه صورت کې چې  $A$  او  $B$  گډو ټکی ونه لري څه پایله اخلي؟
- د پورتنۍ فعالیت له سرته رسولو څخه لاندې پایله په لاس راځي:
- 1: د  $A$  او  $B$  دوي پېښې مستقلې بل کېږي که چېرې:
- (د ضرب د حاصل اصل)  $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$
- 2: که چېرې  $A$  او  $B$  پېښې د گډو ټکو لرونکې نه وي، نو
- (د جمع د حاصل اصل)  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- $A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cap B) = 0$
- $\Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

**لومړی مثال:** که چېرې د یوه ښوونځي د زده کوونکو د سترگو رنگ او دکاوت یو پر بل پرته له اغېزې فرض شوي وي. د لاندې پېښو په پام کې نیولو سره په ناڅاپه ډول د یوه زده کوونکي ټاکلو لپاره:

H: ټاکل شوي تن یو هوښیار دکی زده کوونکي وي.

B: ټاکل شوي زده کوونکي توري سترگې ولري.

پیدا کړي هغه احتمال چې ټاکل شوي زده کوونکي په ناڅاپه توګه هوښیار دکی او توري سترگې ولري.

**حل:** ددې لپاره چې ټاکل شوي زده کوونکي هوښیار او توري سترگې ولري لیکلای شو:

$$\text{خړنګه چې } P(H) = P(H) \text{ بر سیره پردي } \frac{P(B \cap H)}{P(B)} \text{ نو:}$$

$$P(B \cap H) = P(H) \cdot P(B)$$

**عمومي حالت:** د  $A_1, A_2, \dots, A_n$  ( $n \geq 2$ ) ناڅاپه پېښې احتمالاً یو له بلې څخه مستقې بل کېږي که چېرې د هرو دوو یا څو پېښو په ترکیب کې د ضرب د حاصل قاعده صدق وکړي پرته له هغې پېښې احتمالاً یوه له بلې سره تړلي نومول کېږي.

**پایله:**

1: پاملرنه باید وشي چې د ضرب د حاصل له قاعدې څخه په ګټه اخیستنې سره په لاندې متقاطع جدول کې هم کولای شو چې  $A \cap B, \bar{A} \cap \bar{B}, A \cap \bar{B}, \bar{A} \cap B$  اناڅاپه پېښو احتمالي پایلې د  $A$  او  $B$  پېښو لپاره چې احتمالونه یې  $a$  او  $b$  وي، په آسانی په لاس راوړو. د  $A$  او  $B$  د مستقل والی څخه پوهیږو چې د  $A$  او  $\bar{A}$  او  $B$  په پای کې  $\bar{A}$  او  $\bar{B}$  هم یوه له بلې څخه مستقې دي؛ نو لرو:

	B	$\bar{B}$	
A	$P(A \cap B) = a \cdot b$	$P(A \cap \bar{B}) = a(1-b)$	a
$\bar{A}$	$P(\bar{A} \cap B) = b(1-a)$	$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = (1-a)(1-b)$	$1-a$
	b	$1-b$	1

2: د  $A, B$  او  $C$  درې ناڅاپه پېښې چې یوه له بلې څخه مستقې دي، لرو:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

$$P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C)$$

$$P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C)$$

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$$



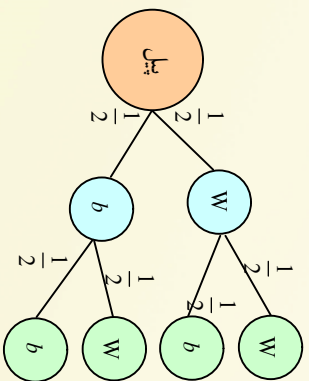
**دویم مثال:** په یوه کڅوړه کې دوی سښتي او دوی توري مری پرې دي. دوی یوه له بلې پسې له کڅوړې څخه پورته کوو، په داسې حال کې چې:

- a- د لومړی مری د پورته کولو نه وروسته هغه بیرته په کڅوړه کې ږدو.
- b- پرته له دې چې مری واپس کېږدول شي.

د A پښه: په لومړی ځل سښته مری راوړي. B: دویم ځل مری سښته وي. له یوې بلې څخه مستقلي یا ترلي (وابسته) دي.

**حل:**

ا)  $P(A) = \frac{1}{2}$  چې  $P(B) = \frac{1}{2}$  او  $P(A \cap B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$  څرنگه چې  $P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

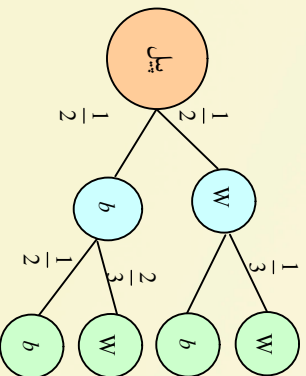


b) **څرنگه چې:**

$$P(A) = \frac{1}{2}, P(B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$$

نو A او B یوه له بلې څخه ترلي یا وابسته دي.



دریم مثال: د لاندې مقاطع جدول خالي ځایونه چې په نښه شوي دي وګڼي کړی:

	B	$\bar{B}$	
A	0.12	$P(A \cap \bar{B}) = ?$	$?$
$\bar{A}$	$P(\bar{A} \cap B) = ?$	$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = ?$	$?$
	$?$	0.6	

حل: څرنگه چې  $P(B) = 0.6$  دي نو لرو:

$$P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 1 - 0.6 = 0.4$$

$$P(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.12}{0.4} = 0.30$$

$$\Rightarrow P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0.3 = 0.70$$

او د پېښو د تقاطع څخه لرو چې:

$$P(A \cap \bar{B}) = P(A) \cdot P(\bar{B}) = 0.3 \cdot 0.6 = 0.18$$

$$P(\bar{A} \cap B) = P(\bar{A}) \cdot P(B) = 0.7 \cdot 0.4 = 0.28$$

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}) = 0.7 \cdot 0.6 = 0.42$$

په همدې ترتیب په جدول کې د قیمتونو په وضع کولو سره مسئله تکمیلېږي.



یو سټ چې عناصر یې 2, 3, 5 او 30 دی د یوه رقم د انتخاب احتمال یې 0.25 دی په ناڅاپي ډول له نوموړي سټ څخه یو رقم انتخابوو، که چیرې  $A_1$  ناڅاپه پېښه د هغه رقم چې انتخاب شوي او د تقسیم قابلیت په  $k$  ولري، آیا  $A_2, A_3$  او  $A_4$  ناڅاپي پېښې دوه په دوه مستقل دي او که نه؟

## د څپر کې مهم ټکي

### بېلې شوي (غیر متمادي) نمونه يي فضا:

هغه نمونه يي فضا چې عناصر يې د شمېر او تشخیص وړ وي، د پروبکړۍ يا گڼسته نمونيزې فضا په نامه يادېږي؛ لکه د رمل يا د سګي اچولو تجربې نمونيزې فضا.

### ښتې (متمادي) نمونه يي فضا:

هغه نمونه يي فضا چې عناصر يې د شمېر وړ نه وي د پيوسته يا متمادي نمونيزې فضا په نامه يادېږي چې د حقيقي اعدادو پر محور د فاصلي په بڼه او يا په فضا کې د هندسي شکلونو يا حجمونو په ډول څرگندېږي.

### هم چانس پېښې:

د يوې نمونه يي فضا لومړني پېښې چې د هغوي پېښې د تجربې په پای کې په برابر احتمال پېښېږي، هم چانس پېښې بلل کېږي. د هم چانس پېښو د احتمال مجموع له يوه سره مساوي ده.

### د ښتې (پيوسته) فضا احتمال:

د ټوټه کرښو، سطحو او حجمونو مساعد حالتونه د يوې پام وړ ناڅاپي پېښې لپاره په يوه تجربې نمونيزې فضا کې شامل ټوټه کرښو، سطحو او حجمونه عبارت دي د متصلې فضا له احتمال څخه.

### مشروط احتمال:

که چېرې  $A$  او  $B$  د  $S$ ، د نمونيزې فضا دوي ناڅاپه پېښې چې  $P(B) \neq 0$  وي په دې حالت کې شامل ټوټه کرښو، سطحو او حجمونه عبارت دي د متصلې فضا له احتمال څخه.

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

ته د  $A$  ناڅاپه پېښې د مشروط احتمال په نامه يادېږي په دې شرط چې د  $B$  پېښه له مخکې پېښه شوي وي.

### يوه له بلې څخه مستقلي پېښې:

د  $A$  او  $B$  دوه ناڅاپه پېښې يوه له بلې څخه مستقلي بلل کېږي، که چېرې:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \quad (\text{د ضرب د حاصل اصل})$$

## د څپرکي پوښتني

1. د لاندي نمونه يي فضا گانو څخه کومه يوه سره نښتی يا پيوسته او کومه يوه پرېکړی يا گسته دی؟
  - الف: د يوي رمل دانې اچولو تجربه
  - ب: د يوي سگې د اچولو تجربه
  - ج: د يو غشي لگېدل په يوه دايرهد: د يوي فلزي ميلي د اورېدوالي زياتېدلو تجربه نظر حرارت ته
2. د يو چارټر اېش چې اورېدوالي يې  $L$  دي په ناڅاپه ډول په سور اړه کوو، تر څو دوه برخې شي څومره احتمال ددي شته دي چې د کين اړخ اړه شوي برخه د ښي اړخ له درې برابره څخه کوچني وي.
3. د يوه خصوصي شرکت يو کارگر هره ورځ د 8 او 8:50 ساعتونو په منځ کې کورته نږدې تم ځاي کې چې د مامورينو په گاډي کې د کارته د تگ لپاره گډون وکړي او په 8:15، 8:30 او 8:45 وختونو تم ځاي ته رسېږي څومره احتمال ددي شته چې نوموړي تن له 5 دقيقو څخه لږ منتظر پاتې شي.
4. د  $[0,3]$  تړلي فاصلي څخه په ناڅاپه ډول دوه عدونه ټاکو، بېلګرې ددي احتمال چې د اعدادو مجموعه د 5 څخه کوچنۍ او د 2 څخه لويه وي.
5. په ناڅاپه ډول يو ټکي د مخروط دننه چې د قاعدې وړانګې يا شعاع يې  $R$  او جگوالی  $R\sqrt{3}$  دي ټاکو، پيدا کړي ددي احتمال چې ټکي د محاطي کړي دننه په دې مخروط کې قرار لري.
  - 1- د ميخانيکيت خرابېدل
  - 2- د خودکار د نيچې خرابېدلکه چېرې د يو خودکار قلم د خرابېدو احتمال 0.088 او ددي احتمال چې د خرابېدو دليل (1) شميره وي مساوي په 0.05 او د دويم نقص احتمال مساوي په 0.002 وي وڅېړئ: چې دوه پورتنۍ دلايل مستقلي او يا غير مستقلي پېښې دي؟
7. خيبر خوازي هغه څلور کلي گانې چې په جيب کې يې لري او سره يو شان دي د کورد دروازي قلف خلاص کړي په کوم احتمال سره وروسته د دريمې کلي له آزمويلو سره چې له جيب څخه يې را باسي د قلف اړوند کلي وي، په هغه صورت کې چې:
  - a) هره آزمويل شوي کلي په هغه صورت کې چې اصلي کلي نه وي دوباره په هغه جيب کې اچوي.
  - b) هره آزمويل شوي کلي په هغه صورت کې چې اصلي کلي نه وي په بل جيب کې اچوي.

**Get more e-books from [www.ketabton.com](http://www.ketabton.com)  
Ketabton.com: The Digital Library**