شمیر پوهنه

(ریاضي)

ستر کتاب

لومړی برخه

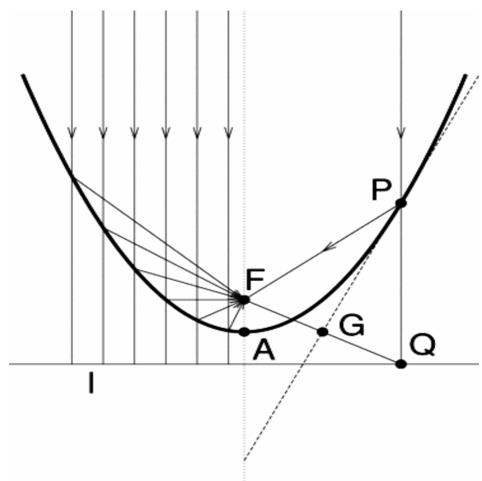
دویم غځېدلی چاپ

لیکونکی: ډاکتر ماخان (میږی) شینواری

شمیرپوهنه

(ریاضي)

سترکتاب



دویم غزېدلی چاپ

لیکونکی: ډاکتر ماخان میرِي شینواري

دلوي ښښتن په نامه

په دې هيله، چې په دې ليکنو او ژباړو به مې زموږ د بې وزلي او له پوهې پاتې ملت - په ما د پوهنې لپاره د لګښت - لپاره د پوهنې په لور داسې لږ ونډه اخستې وي.

كتاب پيژندنه

د کتاب نوم: د شميرپوهنه ستر کتاب(لومړۍ برخ)

ليکونکی: ډاکتر ماخان،، ميرى،، شينوارى

makhanshinwari@gmail.com

د خپريدو لړۍ

خپرندوی: د افغانستان کلتوري ودې ټولنه

جرمني

چاپ کال ۲۰۱۲

چاپ چارې

دانش خپرندويي ټولني تخنيکي څانګه

WWW.danishpress.com

پښتو مو ژبه او شميرپوهنه پرې ساده ده

د خپرندوی ټولنې یادښت

له هغې مودې را په دې خوا، چې د افغانستان د کلتوري ودې ټولنې د علمي، ساینسي او طبي اثرو د خپرولو لړۍ پیل کړې، تراوسه یې په دې لړ کې مهم اثار خپلو هیواولو ته وړاندې کړې دي.

موږ باور لرو، چې پښتو ژبه هغه وخت په یوه مهمه غني ژبه بدلیدلای شي، چې د پوهې په ګانه سمبال شي او په علمي او اکاډمیکو اثارو غني شي.

اوس چې زموږ ملي سراسري ژبه د بیلابیلوګواښونو او چلنجونو سره مخامخ ده، پر موږ ټولو ده، چې د دغه ګواښونو په وړاندې به په نره ودریږو او د علم او قلم په ژبه به ځواب ورته ووایو.

د اتحادیې له حوا د ډاکتر ماخان شینواري تراوسه زیاتو چاپ شویو اثارو په څنګ کې، د ده د پنځه وېښت شمیر پوهنې نویو ژباړو او لیکنو او دوه ټولنیزو لیکنو تر منځ، دغه اثر په همدې لړ کې ځکه د ارزښت وړ دی، چې د علمي، ساینسي اثارو د خپراوي په لړ کې د یوه مهم ګام په توګه ګڼل کیدای شي او هیله ده، چې د دې برخې مینه وال لوستوال، زده کوونکي او د پوهنتو زده کړې کته ترې واخستلی شي.

په درناوي

د افغانستان کلتوري ودې ټولنه

۲۰۰۱۲ ز ک

د لیکونکي مننه

د هر څه له مخه د هغو لیکونکو پروفیسرانو څخه زیاته مننه، چې د لیکنو څخه یې زما د ژباړې لپاره تفاهم لري. ماته د دوي د لیکنو د ژباړې په هیڅ ډول مادي ګټه نه شته او دا کار مې یوازې په یوه د پوهنې توانمندې ، مګر وروسته پاتې ژبې ویونکي ولس ته وړاندې دی، دا دې د دې پروفیسرانو له خوا په پوهنیزه اړخ کې زموږ په دې اړخ کې هم مرستې ته اړ ولس سره مرسته وي.

همدا ډول زموږ،، د افغانسان کلتوري ودې ټولنه،، جرمنې، د غړو، مرستندویانو او په تیره بیا د مشر تابه څخه زیاته مننه کوم، چې پرته له خپرندوې ټولنې په توګه یې د دې لیکنو زیاته اقتصادي ونډه هم په غاړه اخستې.

دې لاندې زما کلیوالو ملګرو او ملګرو د دې کتابونو په چاپ کې د توان سره سمه اقتصادي ونډه اخستې، چې زه ترې زیاته مننه کوم:

د ښاغلي دپلوم انجنیر ریحان الدین حساس، ښاغلي دپلوم انجنیر محمد اکبر نور، ښاغلی ډاکتر سردار ګانه وال، ښاغلی ډاکترماڼوګل ګانه وال، ښاغلي ټولنپوه محمدعارف بیان، ښاغلي دپلوم انجنیرمحمد ایوب بیان، همداسې زما د ملګري اروابناد ډاکتر حاجي محمد سلطانزي د څوي ښاغلي ډاکتر صالح محمد سلطانزي ، ډپلوم انجنیر او دپلوم اقتصاد پوه رحمت الله فتحي او نه اخر زما د لور ډاکتر څانګې شینواري او زما د څوي اقتصاد پوه او ټولنساپوه اباسین شینواري.

نه د ټولو په اخر کې زما له میرمن ښاپرۍ څخه ډېره زیاته مننه، چې زما د لیکنو- نه دا چې مخه یې نه ده نیولې- پوره ملاتړ کړي.

بیا هم له دوي څخه د زړه له کومې مننه کوم او لوي څښتن دې ورته اجرونه ورکړي، چې داسې مرستو ته دوام ورکړي.

په مننه : ستاسو ماخان شینواری

جرمني د بن ښار

۲۰۱۲ ز ک

نیولیک

د ستر کتاب دویمه برخه

د ډاکتر ماخان شینواري چاپ شوې لیکنې او ژباړې

د ډاکتر ماخان شینواري چاپ ته چمتو لیکنې او ژباړې

د ژباړي یا لیکونکي ژوند ته لنډه کتنه

د مهربان او بخښونکی خدای(ج) په نامه

سریزه

ګرانو هیوادوالو !
یو څه چي پيبل لري نو پاي هم باید ولري، د داسی یوه کار پيل او پای ته څما هم لوړه او تنده دومره زیاته ده، چی مېښت یی زما لپاره هم ناشونی دی.

د هيواد په هراړخیزه بدبختیو یو سړی هلته نور هم پوره پوهیدلی شي، چی په یوه کار پيل وکړي، څکه چی سملاسی ورته څرګندیږي، چی په هیڅ شي کی څموږ په هیواد کی لاتراوسه څه نه دي شوي په جوړښتیزه لور، په وراني کی مو د نړی سرکښي څانته ګټلی.
موږ ګورو چی په مسلکي چارو کی له پيل دا ستونځي موجود دي، چی تراوسه حتی هغه بنستیز مسلکي نومونه مو له خپلی ژبی نه دي را اخستلي، چی مسلك ته اسانتیاوې پیښوي. له کومه څاي چی ماته روښانه ده، تر نن ورځی په دې هکله چا په شمیرپوهنه د ستونځوبیو لپاره کومی هڅي هم نه دي کړي او ستتونځي یي نه دي ګاللي، چی دلته طبعآ افراد ملامت نه دې، بلکه څموږ دهیواد دتاریخ په اوږدو کی دولتني جوړښت، دپوهنی او همدا ډول د کلتور او ژبي د ودې دنده د حکومتونو ده، چي څموږ په هیواد کی څموږ حکومتونو خپل څانونه د دې کار جوګه نه دې ګڼلي، کیدی شي چی ووایو چي په ریښتیني یي ددې کار مخه هم نیولی ده، چی په افغاني ژزبه دې څه کار وشي.
ګرانو لوستونکو !
داکار څکه په افغانی او په ولسی افغاني لیکل شوی، چی زه په مسلکي اړخ کی یواځې، په علمي توګه په الماني ژبه پوهیږم، د انګلیسی سره هم بلد یم، نو دا

نومونه چې له دې دباندنیو ژبو را اړووم ، داچې په ښوونځي کې ځما لیك لوست په افغاني ژبه وو، په افغاني ژبه په ولسي پوهنیزه توګه اړولی شم. ماته دا کلیمې په مروجه افغاني ژبه نه دي معلومې او یا کومې چې ماته معلومې دي او زه ورسره بلد یم هغه همغه وخت ماته د پوهیدلو له امله د ستونځو ډکې ښکاریدلې .

شمیر پوهنه هم، د نورو پوهنو په څیر، یوه پراخه پوهنه ده او زیاتې څانګې لري. دا چې ځما په فکر دا متآسفانه نه یواځې زما لمړی کار دی، بلکه دا د افغاني ژبې په دې توګه یو لمړی علمي اثر دی، چې په دې بنسټیزه توګه په درسي او تمریني ډول سرته رسیږي.

نن نړۍ او د انسانانو فکر دومره پر مختګ کړی او دا نور هم په خورا چټکتیاوده کوي، چې پخپله انسان ورته د تعجب په سترګه ګوري، مګر موږ لا تراوسه په هغه بنسټیزو ستوځوبیو (د ستونځو حل باندې) پیل نه دی کړی ، که دا په هره څانګه کې هم وي. ځموږ پرابلمونه هراړخیز دي او هراخیزو هڅو ته مو ضرورت شته.

شمیرپوهنه څه شی دی ؟

شمیرپوهنه یو مرستندویه پوهنه ده، چې په ټولو پوهنو کې تغبنتي یا په بل عبارت : په ټولو پوهنو کې د پوهیدلو بنسټیزه ریبنه جوړه وي، که دا پوهنې اجتماعي وي او که طبعي (پیدایښتی) یعنی که ساپوهنه وي که اقتصاد او که کیمیا وي یا فزیك، بیله شمیر پوهنې یې وده او په پوهیدنه ناشونې ده. شمیرپوهنه له بلې خوا یواځنې خپلواکه پوهنه هم ده. شمیر پوهنه بل څه ته اړ نه ده.

ددې کتاب لیکلو زما زیات وخت په بر کې ونیوه او لیکل یې د پوره ستونځو سره

ټول کار زما په غاړه وو او بل چا را سره متآسفانه چې مرسته هم نه شوه کولی.

د داسی یوه کتاب لیکنی مسئولیت باید د دولت په غاړه وي او مسلکي باید د داسی لیکنی څخه خپل ژوند تآمین کړای شي. د همدې هدف لپاره د مسلك زدکړه کیږي. ما په دې کرښه غوښتل، چی څموږ د هیواد ستنځي نوږې هم ګوته لك کړم.

زه غواړم چی خپلی د سر خبرې په لاندې توګه رالنهې کړم
-د لیکونکی راهڅونی دلیلونه یا د شوق رابیدارول
-دداسی کتاب لیکنه په هغه وخت کی شوني کیږي، چی د لیکونکي اقتصادي ژوند تآمین وي، زه د ټولنیزو مرستو پیسو څخه ژوند کوم، یعنی د نورو خلکو د مالیا پیسو باندې. کار نه پیداکیږي او اجازه یي هم نه لرم چي پیسی وګټم.

- وخت باید پوره موجود وي او داهم ما پوره لروده، چی له دې د مخه می په سیاسی هلو ځلو دا وخت تیر کړی او دا اوس می خپل مسلك ته رامخه شوه.

- ددې کتاب لیکلو لپاره باید یو لیکونکی د خپلی ټولنی او د خپلی ټولنی د خلکو سره مینه ولری او په همدې ډول، د خپلی ټولنی او د ټولنی د خلکو او د ټولو څخه د مخه د خپل ځان لپاره هم خوبونه ولري، خیالونه ولري، چی یواځی د خوبونو رینښتیا کولو لپاره په داسی کار بریالی کیدی شي. ما ددې کار ستونځی په پوره مینه په غاړ واخستلی او دا کار می په پوره مینه سر ته ورساوه.
-په دې برسیره لیکونکی دې وظیفی ته هم باید شعوري وي، چی دی ددې کار لپاره د ملت په پیسو تربیه شوی او د ملت پور هم باید ادا شي، د داسی لږ پور اداکولو هم ما ته پوره خوښي راو بخښله.

په کور کی هم باید تر یوې ممکنه اندازې پورې یو تفاهم موجود وي یعنی یو غبرګوالی باید په کورنی کی وي، که داسی هم نه وي ، خو د داسی کار مخه باید ونه نیول شي ، د نورو ستونځوبیبو (ستونځو حل) په خاطر، چی موږ افغانان یی په ځانګړی توګه اقتصادی اړخ کی پوره لرو ، چی نه یواځي د ځان لپاره بلکه د خپلوانو لپاره هم باید پام وي، مګر ما دا توان په خپل ځان کی ددې امله نه کوته چی امکانات یي ځما لپاره نه وو.

دوم : د کتاب د لیکنو ستونځی:

د داسی کتاب لیکنه د پوره ستونځو سره مل ده، چی زه دې ستونځو ته په لاندې توګه ګوته نیسم.

۱ – دا کتاب په داسی ژبه لیکل کیږي چی له مری څخه نیول شوې، زیندی شوې، خپه شوي، خو د مرګ څخه بچ ده، له ښارونو شړل شوې، او یواځی په غرو او رغو کی ژوندی پاتی شوې.

دې ته باید ګوته ونیسم، چی دا کرښی دا مطلب نه لري، چی ګوندې زه به، خدای (ج) دې ونه کړي، د بلی ژبی په خلاف یم. دا زما کار نه دی او نه دا حق ځان ته ورکوم، خو دا حق لرم چی خپلی ژبی، د خپل ولس ژبی ته ، چی کړیدلی او وروسته پاتی ساتل شوې، ګوته ونیسم. موږ افغانانود افرادو په توګه هم افغاني ژبه پریښوولی چی ولس یعنی د یوه هیواد د ژبی دپریښوولو حق څوك نه لري، نه دولت او نه افراد . دا کار متاسفانه د افغاني ژبی په ضد او بیا د ټولو په سر کی پخپله د افغانانو څخه شوی دی، د بل ځا څخه څوك باید ګیله من نه وي.

افغاني ژبه، که څه هم پوهانو او د لیك لوست خاوندانو په زیات شمیر، نه ټولو، د لاسه ورکړې، خو بیا هم دا ژبه دا استعداد، د نورو ژبو په څیر لري، چی یوه پوهنیزه لیکنه وربانديې وشی یا بهتره پوهنیزه شي.

ژبه یواځې د پوهولو او پوهېدلو اله نه ده، بلکه د ولس پوهنیزه وده کې پوره غوره رول لري او د کلتوري ودې لارښودې او بنسټ دی، په دې برسېره د پوهې د اسانوولو خورا غوره اله ده. د یوه ولس د پرمختګ او د ژبې پرمخوده یو بل باندې سیده او په ځېږ اغیز من دي، چې ولس وروسته پاتې وي، ژبه یې وروسته پاتې ده او که یوه ژبه وروسته پاتې وي، نو هغه ولس د نورو ولسونو سره په پوهه کې سیالي نه شي کولی او د ولس خلك د نورو ولسونو د خلکو سره د سیالی کولو استعداد ځان کی نه شي روزلی، که څه هم استعدادونه به موجود وي.

ما کوښښ کړی چې کم له کمه بنسټیزې کلیمې په افغاني واړوم، چې دا کار مې په پوره بریالیتوب، د پوره ستونځو سره سره سرته رسولی او په دې هکله مې زیات فکر هم په کار اچولی چې مسلکي بنسټیزې کلیمې په روانه افغاني راوړل شي. هغه نومونه چې ټاکل شوي، داسې نومونه دي، چې د هغه شي ماهیت په کې روښانه دی. دا کا د هرڅه لمړی ددې لپاره باید وشي، چې په پوهنیزو شیانو او نومونو پوهېدل باید ساده شي.

په پوهنه کې له بلې ژبې تیرېدنه ناشونې ده او یا په بل عبارت په بله ژبه صرف نظر نه شي کیدی. دلته هم هدف دا نه دی چې افغاني ژبه دې د نورو ژبو د لغاتو څخه پاکه شي، دا کار یواځې هلته کیږي، چې یوه ژبه له پوهنې وروسته پاتې وي.

د پوهنیزې ودې سره ژبې ته د نورو ژبو لغات راننوځي او ضرور هم دي. ما کوښښ کړی چې که د کوم لغات لپاره د پښتو نوم یا نه وي او یا مناسب نه وي، هغه په جهاني مروجه لغاتو ولیکم.

دا چې افغاني د افغانستان ژبه او بیا هم ژیندۍ شوې ژبه ده، دا د دولت کار وو او افغاني ژبې ته د تنفس ورکولو یا بهتره د افغاني ژبې د ژیندۍ څخه خلاسون یا د افغاني ژبې څخه د لعنت د کړی لرې کولو دنده هم د دولت ده، خو ترهغې باید موږ هم دې ته پام ولرو او دا پاملرنه خپله دنده وګرځوو.

د یوه ولس په ژبنیو ستونځو هلته پوهیدل ممکن کیږي، چې څوك د ژبې سره په پوهنیزه توګه مخامخ شي. په افغاني ژبه دلمړي ځل لپاره داسې یوه لیکنه د ستونځو سره مل ده، مګر ناشونې نه ده.
دلته غواړم چې دې ته هم ګوته ونیسم، چې د نومونو په ټاکلو کې ما کله کله دوه نومونو کارولي، چې هغه مې په ټول کتاب کې شاید اصلاح کړي نه وي، خو په دې باور لرم چې په هدف کې ستونځې نه پیښوي لکه د بیلګې په توګه: ما لمړی ګنپوهنه لکیلې وه، چې وروسته مې شمیر پوهنې بانډې واړوله، شاید په ټولو ځایونو کې مې نه وي شمیرپوهنه کړي. دربګوډي ما لمړی دریکونجی لیکلی وو، چې دا هم شاید د کتاب په اوږدوکې نه وي اصلاح شوی، داسې نور څه به هم وي، خو دې ته بیا ګوته نیسم، چې د پوهیدلو لپاره دا کومې ستونځې ه پیښوي.

۲ – تخنیکي ستونځې:
د ګرانو لوستونکو پام به دې ته راوګرځي، چې څموږ لپاره د داسې کتاب لیکلوپه لار کې تخنیکي ستونځې هم خورا زیاتې دي. ما په کمپیوټر د شمیرپوهنې د فرمولونو لیکلو سره ستونځې لرودي، نو له دې امله مې د نورو کتابونو دکاپیو څخه بیاتې کړې او دلته مې سریښ کړې، چې کله کړې هم سریښ شوې دي او په دې هم پوهیږم، چې دا یو غیر قانوني کار هم دی، خو هیله ده چې د رااخستلشووکتابونو لیکونکي او چاپوونکي به دې ته تفاهم ولري او زه له دوي د هرڅه له مخه د دوي له دې تفاهم څخه د خوښې څرګندونه کوم.

غواړم د ګرانو لوستونکو دې ته هم پام راوګرځوم چې املایي غلطې به شوي وي،، خو په پوهیدلو کې به ستونځې پیښې نه کړي، د هغې بخښنه غواړم، زه نور دا کار نه شم ځنډولی، ځکه چې ډیر ورسره ستړی شوم.
ما هیڅ دا فکر نه کاوه، چې زه دې داسې یو کار سر ته ورسوم، خو خدای(ج) په

حرکت کی برکت ایښوولی دی.
لنډه دا، چی ددې کتاب د چاپ پورې چمتووالي کار ټول زما په غاړه وو، چی زه ورسره همدومره ستړی شوی هم یم او نورې سهوې او د غلطیئو سمولو لپاره می نور د زړه زور ختلی، که څه هم په دې اخرو ورځو کی د ملګرو په فشار ما ، څما په فکر ټولی سهوې لرې کړی.

دریم – کتاب د کومو لوستونکو لپاره دی؟

ګران لوستونکی به د را اخستلشوو کتابونو څخه دې ته پام راوګرځولی شي، چی دا کتاب د نوو څه ډول لیکنو څخه راټول شوی. ددې کتاب لوستونکی د پوهنتون د شمیرپوهنی، پیدایښتي پوهنو، اقتصاد او همداسی د نورو پوهنو زدکړي دي.
دا کتاب په ښوونځي کی هم کارول کیدی شي، خو ښوونکی باید دې ته پام وکړي، چي هغه څه، چی د کتاب په پیل کی هم دي، په پیل کی نه شي لوستل کیدی.
څنی څه په همدې لمړی برخه کی راغلي، چی نابلدو زدکوونکو ته به ستونځي پیدا کړي، خو دې ته د لږ پام وروسته، پام راګرځیدلی شي.

څلورم – دلوستلو وړاندیز

ما لږ ستونځي لرودې، چی دا کتاب په خپله خوښه ترتیب کړم. زه مجبور شوم چي یو کتاب د بنستیز کتاب په توګه ونیسم او د نورو کتابونو رااخستنی بیا په کی ځاي کړم.
ما د بنستیز کتاب په څیر د شیفر–جورج–تریپلر کتاب ونیوه. نو له دې امله می برخه ویش هم په همغه ډول کړی. ما غوښتل، چی د کتاب پیل په سمسوح یا بهتره سم اند (لنډ سمند) یعني منطق وکړم، خو هغه په اوومه برخه کي څیړل شوی.
څما وړاندیز دادی، چی اوومه– اتمه او نهمه برخه دې د هرڅه لمړی ولوستل شي

اومه اتمه او نهمه برخه څمور په هیواد کی زما په فکر ، چی نا اشنا وي. په هر صورت د اوومی برخی سریزه خو دي د هرڅه له مخه ولوستل شي او همداسی د ډیري پوهی سره اشناییینه هم خورا ضرور ده

شیپږم . مننه
ددې کتاب لیکلو کی ، که څما د دوستانو لخوا دې کار ته راهڅول نه وی، نو دا کار سرته نه شو رسیدلی، په تیره بیا په المان کي د « افغانستان کلتوري
ودې ټولنی »دوستانو. زه له دې د ټولو د زړه له کومی خوښنه کوم. د دې ټولنی د غړو او پلویانو زیاته خوښتنه، چی ددې کتاب چاپ یی د ټولنی په چوکاټ کي په غاړه اخستی.
ډیر محترم پوهاند مجاوراحمد زیار څخه زیاته مننه، چی د لغاتو د نظر څخه تیریدنه او همدا ډول په ټولو ماناوو کي ماته خوراگټوره مشوره هم راکړي.
زما میرمن زما د ستونځو شاهده وه. په زړه ناروغه، خو په پراخه او لوي زړه او پوره حوسیله یی زما د دې لیکنی ملاتړ کاوه، چی بی ددې له ملاتړ به دا کار هم سرته نه وی رسیدلی، که څه هم دا به یی کله کله ویل، چی گوندې پیسی می باید گټلی وی ، خو په دې پوهیږي، چی ددې چانس نه شته، کله کله به، چی به تنگه شوه نو ویل به یي چی نور دا د چرگانو ټونگي باید بس کړم. له دې امله زما دمیرمن ښاپیری څخه هم د زړه له کومی خوښنه کوم او دا پراخه سینه او دا ناروغه زړه یی همداسی ښه تکړه ورته د لوي خداي(ج) څخه غواړم، چی زما د داسی کارونوملاتړ نور هم وکړي.

راتلونکی کارونه: د همدې کتاب سره سم ما یو د هندسی کتاب ژباړلی، چی د

المان د پنځم ټولګی ځخه هندسه په کی راغلی د څه نونورو شمیرپوهنیزو مضوعاتو سره. دا به هم په دې کتاب پسی تړلی چاپ ته ورکړي شي.

زه یو بل خوب هم لرم، چی همدا اوس دې د یوه بل الجبر کتاب لیکلو باندې پیل وکړم. موضوعات می په سر کی راګرځي.

که چیرې نور دوستان او شمیرپوهان د شمیر پوهنی په ځانګه کی څه لیکل غواړي او په دې هکله ستونځي لري، او ستوځوبیو وړاندیزونه لري نو زه به ورسره وعده وکړم، چی دلته افغانان و ملاتړ ته راوهڅوم. د هغو دوستانو سره چي د شمیر پوهنی کوم کتاب ته یی د ژباړنی نیت وي او په افغانستان او پاکستان کی ژوند کوي نود هغو سره به وعده وکړم چی دلته ورته په دې ټولنه کی او یا د ټولنی دباندې د مرستی هلی ځلی وکړم. ځما هدف دادی، چی موږ باید داسی کارونو ته ملا راوتړو. له ما ځخه لټ بل څوک نه شته، دا چی ما دا کار سرته رسولی ، باور وکړي، چی هر بل افغان یی هم سرته رسولی شي،

په مینه ستاسو ماخان

افغاني ، يوناني او الماني الف بی

ا	ب	پ	ت	ټ	ث	ج	چ
څ	ځ	ڂ	ح	خ	د	ډ	ذ
ر	ړ	ز	ژ	ږ	ص	ض	ط
ظ	ع	غ	ف	ك	ګ	ق	ل
م	ن	و	ه	ي	ى	ې	ئ ۍ

يوناني الف بی

Α	α	A	α	Alpha
Β	β	B	β	Beta
Γ	γ	Γ	γ	Gamma
Δ	δ	Δ	δ	Delta
Ε	ε	E	ε	Epsilon
Ζ	ζ	Z	ζ	Zeta
Η	η	H	η	Eta
Θ	ϑ	Θ	ϑ	Theta
Ι	ι	I	ι	Iota
Κ	κ	K	$\varkappa$	Kappa
Λ	λ	Λ	λ	Lambda
Μ	μ	M	μ	My
Ν	ν	N	ν	Ny
Ξ	ξ	Ξ	ξ	Xi
Ο	ο	O	o	Omikron
Π	π	Π	π	Pi
Ρ	ρ	P	ϱ	Rho
Σ	σ	Σ	σ	Sigma
Τ	τ	T	τ	Tau
Υ	υ	Y	υ	Ypsilon
Φ	φ	Φ	φ	Phi
Χ	χ	X	χ	Chi
Ψ	ψ	Ψ	ψ	Psi
ω	ω	Ω	ω	Omega

اومیګا
د پښتو دینه

ک په الماني ک دینه

الماني الف بي

A	a	𝒜	𝒶	𝔄	𝔞
B	b	ℬ	𝒷	𝔅	𝔟
C	c	𝒞	𝒸	ℭ	𝔠
D	d	𝒟	𝒹	𝔇	𝔡
E	e	ℰ	ℯ	𝔈	𝔢
F	f	ℱ	𝒻	𝔉	𝔣
G	g	𝒢	ℊ	𝔊	𝔤
H	h	ℋ	𝒽	ℌ	𝔥
I	i	ℐ	𝒾	ℑ	𝔦
J	j	𝒥	𝒿	𝔍	𝔧
K	k	𝒦	𝓀	𝔎	𝔨
L	l	ℒ	𝓁	𝔏	𝔩
M	m	ℳ	𝓂	𝔐	𝔪
N	n	𝒩	𝓃	𝔑	𝔫
O	o	𝒪	ℴ	𝔒	𝔬
P	p	𝒫	𝓅	𝔓	𝔭
Q	q	𝒬	𝓆	𝔔	𝔮
R	r	ℛ	𝓇	ℜ	𝔯
S	s	𝒮	𝓈	𝔖	𝔰
T	t	𝒯	𝓉	𝔗	𝔱
U	u	𝒰	𝓊	𝔘	𝔲
V	v	𝒱	𝓋	𝔙	𝔳
W	w	𝒲	𝓌	𝔚	𝔴
X	x	𝒳	𝓍	𝔛	𝔵
Y	y	𝒴	𝓎	𝔜	𝔶
Z	z	𝒵	𝓏	ℨ	𝔷

شمیرپوهنیزې نخښې

مساوي .... $=$

نامساوي (نوروکتابونو کې) $\neq (=)$

کوچنی له .... $<$

لوي له........... $>$

کوچنی یا مساوي له .... $\leq$

لوي یا مساوي له .... $\geq$

ډیر کوچني .... $\ll$

ډیر لوي .... $\gg$

ورته یا متناسب.......... $\sim$

کونګروانیخ .... $\cong$

همداسې یا ښایي یا په ګوره کوي

کتمټ.................. $\equiv$

غبرګ .... $\parallel$

ناغبرګ................ $\nparallel$

ولاړ په .... $\perp$

دریګوډی .... $\triangle$

ګردی .... $\bigcirc$

نیمی یا قطر............ $\oslash$

کونج .... $\angle$

د دوه کرښو g او h ترمنځ کونج $\angle(g,h)$

کرښه، له A و B ته .... $\overline{AB}$

له A و B ته لوریزه کرښه..... $\overrightarrow{AB}$

لیندہ.................... AB

مطلقه ارزښت د .... |a|

ایماجینار یوون(واحد)....... i

د اویلرګڼ = ...2,7182818 e

پي د لودولف ګڼ π= ...3, 14149

د په لور هڅېږي یا کونورجنت کیږي ->

ناپای.................. œ

د x فنکشن یا په واك چې بلواك مو بللی f(x)

(لوستل يي (f د x یا د f, x لنډ : fx)

د x څیرونه په f(x) : لیکو: ~~x~~ f(x) f: x →

دلته h د x فنکشن، g د x فنکشن h(x); g(x)

لیمس یا پوله............... lim

	ساین	sin
تریګونومتریکي	کوساین	cos
بلواك	تانجنت	tan
	کوتنجنت...........	cot
	ارکوس ساین.........	arc sin
څیکلومتریکي	ارکوس کوساین	arc cos
بلواك	ارکوس تانجنت	arc tan
	ارکوس کوتانجنت.....	arc cot

لوګاریتم و بنسټ a ته $\log_a$

لوګاریتم و بنسټ ۱۰ ته $\lg_{10}$

دیکادیکي لوګاریتم.....

لوګاریتم و بنسټ e ته ln

طبعي یا پیدا ینښتي لوکاریتم

کمپلکس ګڼونه........... $\mathbb{C}$

رییلګڼونه .... $\mathbb{R}$

ټولګڼونه .... $\mathbb{Z}$

نامنفي ټولګڼونه یا

طبعي ګڼونه د صفر سره $\mathbb{N}^*$

طبعي ګڼونه .... $\mathbb{N}$

تعریفډیرى .... D

ارزښتډیرى........... W

حلډیرى L

د ډیري A پوتنځډیرى $P(A)$

ډیري............. M, N, A, B

تشډیرى .... $\emptyset$

برخه ډیرى............

پورته یا لویډیرى(چې بل ډیرى خوندي لري)

ټولنډیرى............ $\cup$

غوځډیرى .... $\cap$

د A کومپلیمنت ..... CA , A'

د ډیریو ورته والى ...... $A \sim B$

د ډیریو ځل.......... $A \times B$

لوستل B اتیران A یا - ځُل -

توپیرډیرى : A بي له B ده $A \setminus B$

دلته: a د b پرویشونی ده یا a b ویشي $a \mid b$

د a او b غټ ګډ په ویشونی(لنډ : غ ګ و) $ggt(a,b)$

د a او b کوچني ګډ زیاتځله(لنډ : ك ګ ځ) $kgv(a,b)$

دلته : a د M توکی دی .... $a \in M$

او a د M توکی نه دی .... $a \notin M$

تولنخښه (د ټولو x لپاره باور لري) $\forall$

د موجودیت نخښه: یو x موجود دی $\exists$

کونیونکشن A او B لیکو $A \wedge B$

دیسینکشن A یا B لیکو $A \vee B$

(کله کله الترناتیو)

ایمپلیکاشن: له A څخه B لاس ته راځي $A \Rightarrow B$

نیګیشن یا نه والی $\neg$

د A او B ویناو ورته والی یا اکویوالنت $A \Leftrightarrow B$

له A څخه B لاس ته راځ او له B څخه A لاس ته راځي.

ماتریکس......... A نورو کتابونو کي $\|A\|$

دیترمینانت $|A|$

د a څخه n–امه ریښه $\sqrt[n]{a}$

د x اکسپونتشلبلواك

د n – فاکولتیت یعنی $n!=1.2.3....n$ $n!$

بینومځلوونی $\binom{n}{p}$

لوستل: n په p باندې

له a تر b واز اینتروال $]a,b[$

$= \{ x \mid a < x < b \}$

له a تر b بند اینتروال $[a,b]$

$= \{ x \mid a \leq x \leq b \}$

کیڼ واز اینتروال $]a,b]$

$= \{ x \mid a < x \leq b \}$

ښی واز اینتروال $[a,b[$

$= \{ x \mid a \leq x < b \}$

د زیاتون نخښنه (سیګما) $\sum_{i=1}^{n}$

که د زیاتوننخښنه داسې وي

لوستل: له $i=1$ تر n پورې

څلنخښنه (پي) $\prod_{i=1}^{n}$

که داسې لیکل شوي وي

لوستل: له $i=1$ تر n پورې

پرموتیشن یا بدلون $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \end{pmatrix}$

۱ ۰ د شمیرپوهنې سم اند (د ریاضیاتو منطق (logic))

سم اند (سماند) یا منطق (logic یونانی کلمه ده، چي اند(فکر) یا وی(لغات) ته وایی).

د وینا د ټیک یا کره فرمولولو لپاره د سم اند(منطق) څخه کاراخستل کیږي د فورمال سم اند، د سم اند پوهنی بنسټ، د فکر ډول او فکر کولوقوانینو په څیر یې څیړنه د اریستو تلس(۳۸٤ تر ۳۲۲ ز ۰ ک۰ ا)) له خوا کیښول شوې۰

د ریاضیاتو منطق(د شمیرپوهنی سم اند) د شمیر پوهنې د یوې برخی په څیر پرمختګ یا وده وکړه۰ سم اند د شمیرپوهنی بنسټ دئ او د شمیر پوهنی په ټولو څانګو کی ننوتی۰

یادونه : سم اند په خپله ځته کې په فلسفه پورې تړلی مسلک دئ نو له دې امله دا لیکنه د ټولو مینه والولپاره په زړه پورې خوندیونې(متن) لرودئ شي۰ هیله ده، چې ګڼ هیوادوال به یې وګوری او کمي به یې راپوره کړي، دلته او یا په ځانله لیکنه کی۰

۱ .۰۱ پوهنیزه ژبه او پیدایښتي- یا طبیعي ژبه

اند (فکر) او ژبه یو له بل سره داسې تړلي، چې بیلیدنه یې ناشوني ده. په ورځني ژوند کی انسانان خپل اند یا فکر په طبیعي ژبه څرګندوي، مګر دا د مسلکي ژبی په څیر د

پوهنی(علم) لپاره بسیا نه کوي، ځکه چی د څنو لغاتو مانا کره یا ټینګه نه ده ټاکل شوی، دا په دې مانا، چی په طبیعي ژبه کی یو لغات بیلی بیلې ماناوي لري لکه لور(د ریبلو لور) او لور(په کومه لور) او یا څو لغاتونه ، لکه شلغم، ټیپر او منګړیتې، چی همغه یو څه یا شی په ګوته کوي.
په مسلکی نومونو کې یو څوترمینولوجي(Terminology لاتین، یونانی): په یوه مسلک کی شته(موجود دي) د مسلکي لغاتونو ټولګه او په همدې توګه د هغوي ښوونه ، منځ ته راوړل کیږي، چې د کلمو موخور(هدفمند) کره یاکلک اینوولو (ځای پرځاي کولو) د نورمي ویناو استعمال او د هغوي او د ورځنۍ ژبی ویناودو څخه ګټه اخلي٠

په دې ډول په شمیرپوهنه یا ریاضیاتو کی هم یوه پوهنیزه ژبه منځ ته راغلې، چی له پیدایښتي یا طبیعي ژبې او یوې ځانګړی ترمینولوجي سره یوځاي شوې یا په بل ډول : د پوهنیزې ژبی او یوې ځانګړي ترمینولوژي ټولګه ده٠

له دې امله شمیرپوهنه په یوه لوړه کچه ټیکوالی(Exaktheit) ، په یوه لنډ، روښانه ، څرګند او له دې امله یو لیدوړ « وینا ډول» درلودی شي٠

شمیرپوهنه او سم اند یا منطق دواړه دیوې سمبولیک ژبی څخه د کارونی یا استعمال کار اخستی شي. د لغاتو په ځاي نخښی اینوول کیږي، چی مصنوعي منځ ته راغلي او په ځانګړو ماناو سمبال دي٠

د شمیرپوهنی پوهنیزه ژبه کې غوښتنه داده، چې باید په کلکه او روښانه توګه د ریښتونو (Realität واقعیتونو) شیانوObjects ، د هغو شمیرنیزو څیرو او د دې لپاره پیدا یا منځ ته راغلو نخښو ترمنځ توپیر وکړي. شیان له انسانانو احساسیږي، د یوه ذهنیت (Abstruction ابسترکشن) له لارې په یوه کلیمه څیره (متصور؟) کیږي. او شته والی یې د یوې نخښې جوړښت construction ممکنوي. څیره کوونه یې د شمیرنې شیان دی او یوه «نخښونه» غوره کوي، چې دیوه نوم اوزیات وخت د یوې نخښې په څیر ځان نیسي، د بیلګې په توګه : لکه هر طبیعي ګڼ(عدد) د یوې نخښې داسي په نامه د عددنخښې (ګڼنخښې) له لارې انځوریږي. دا نخښه څیفر Ziffer یا ګڼنخښه(عددنخښه)، چې عربې همغځ صفر دی, بلل کیږي. داسې نخښونې دبنسټیزو نخښۀ څخه منځ ته راغلي. په درسي ځاي سیستم کې بنسټیز څیفرونه یا ګڼنخښی په لاندی ډول دي:

۰ ، ۱ ، ۲ ، ۳ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ۷ ، ۸ ، ۹ .

۱ ۰ ۲ د شمیر پوهنی سم اند بنسټیزې کلمې

۱ ۰ ۲ ۰ ۱ ثابتی، متحولې او ترومونه(۱)

Constants, variables, terms

په شمیرپوهنه کې شیان ، د شیانو ترمنځ اړیکې او د شیانو تړنې په نخښو(سومبولونو) انځوریږي.

۱ – شمیرپوهنیزې نخښې

- د ثابتو(تل همغو) لپاره نخښې (علامې): دا د یوه کره ټاکلې مانا لپاره نخښې دي یانې تغیر نه خوري، لکه ۷ ، ۱۲ ، π ،e, او داسې نور

- د اووښتونو یا واریابلو(متحولو) لپاره نخښې: دا د یوې ورکړ شوې ډیرۍ یا سټ (په ډیرۍ پوهنه کې روښانه کیږي) داسې په زړه پورې توکې لپاره یوه نخښه ده، کومه چې د اووښتونویا متحولو بنسټسټ یا-ډیرۍ بلل کیږي، دا په لاتین تورو په نخښه کیږي او کله کله په اندکس(ز۰ایندکسونو) یا پیژندنخښه index (ز۰ پیژندنخښې Indices) چې ایندکس د تورو پښو ته راځي په نخښه کیږي۰

لکه: $a_1; a_2; b_i; i = 1,2,3 \ldots$

- اړیکنخښې : دا د شیانو اوګڼونو یا اعدادو ترمنځ د اړیکو نخښې دي لکه $<$, $>$، $=$, $\leq$, $\geq$,

- د نښلونو،کارونو، تړنو یا عملیونخښې : لکه زیاتون-(جمعه)، کمون-تفریق-) ، ځل-(ضرب-)، او ویش -یا تقسیم نخښې: / ، : +, -, *

- تخنیکي نخښې : لکه سیمیکولوم (,, ,,)، نوکان ( ) او نور ډولونه يې او کوما ،

د نخښو لړۍ : که نوکان، واریابلی(اووښتوني), ثابتی او د هغوي یوځاي ایښودل د اړیکو- ، نښلونو- ، او تخنیکی نخښو یوځاي ایښوول موخه ور یا هدفمند یو په بل زیات شي، نو یوه د نخښو لړی ترې منځ ته راځی.

(۱) ثابتې((تل) همغه یا تل همغه، همغه ارزښتیزې) ،

متحولې :اوښتونی یا اوړیدونی یا واریابلې او ترمونه

بیلګه :

الف : د 3.(1 + 2a) – 144 + a یوه د نخښو لړی (ترادف) ده

ب : 3a – 6= 11x).(12 – b) ، دا د نخښو لړی نه ده، ځکه چې د نخښو لړۍ موخه وره یا هدفمنده نه ده ایښوول شوې، د برابرنخښې پسې نوک نه شته، دا په دې مانا، چې له دې څخه څه نه پوهیږو.

۲ - ترمونه terms, Termen : که په یوه لړۍ کې، یواځې ثابتې (همغه)، اووښتونې(متحولې، واریابلې) نښلونې او تخنیکي نخښې کارول شوې وي، یانې اړیکې نه وي کارول شوي، نو دې ته ترم ویل کیږي. هر یو ترم پوري که واریابلی ولرې پیژندډیری یا تعریفستې هم اړه لري، دا د داسي اووښتونو یا متحولو اصلی بنستستې یوه برخډیری او یا هغې سره برابر برخه ستې یا - ډېری ده، په کوم کې چې د ترم ارزښت بیرته د بنسټډېرۍ توکی دی. د ترم ارزښت شمیرل کیدی شي، که د مخه ټاکلشوې نارونې یا عملیې اجرا شي، که چېرې اووښتونې یا واریابلې د پیژندډېرۍ د توکو نخښونه غوره کړې. دا په لویو لاتین تورو(اکه: $(T, T_1, T_2$ په نخښه کیږي. که ترمونه اووښتونې ولري، نو د اووښتونو یوه ورزاته نخښه په نوکانو کې نیولکیږي، لکه :

T(x); T(x,y)

بیلګه :

الف : ترم 3/4 + 126 ، چې اووښتوني یا متحولې نه لري په Tسره په نخښه کوو او

لیکو: T=126 + 3/4 یا $T=126+\frac{3}{4}$

ب : ترم 2x + 10 چې اووښتوني یا متحولې x لري یاني T(x) = 10 + 2x ۰ د
اووښتونو بنسټېدیرۍ یا ـډېرۍ دې یا د طبیعي اعدادو ډیرۍN°وي

تعریفډیرۍ د بنسټېدیرۍ سره برابره ده، که په ترم کې د اووښتوني یا واریابلی x پهٔ ځاي

یو پیدایښتې ګڼ یا طبیعي عدد 2 کیږدو، نو د ترم ارزښت دۍ : T(2) = 14

پ : (x+2y)/x یا $\frac{x+2y}{x}$

ترم دۍ چې دوه متحولې لري او په T(x,y) سره یې په نخښه کوو۰ د اووښتونو یا
متحولو بنسټېدیرۍ دې د پیدایښتي یا طبیعي اعدادو سټN وي, نو د x لپاره تعریفډیرۍ
N° ده۰ د y لپاره N (پیدایښتی ګڼونډیرۍN° تعریفډیرۍ لپاره ترم نه دۍ تعریف
یاپیژند نه لري)

د x = 0 لپاره ترم نه دۍ تعریف یا پیژند ند لري

د ترم T(x,2y) = (x,y) /x یا $T(x,2y)=\frac{x+2y}{x}$

ارزښتشمیرنه د x=2 او y= 3 لپاره په دې ډول ده :4 = T(2,3) = (2+6) / 2

یادونه: د ګڼونو لپاره دې دریمه او څلورمه برخه وکتل شي، چې هلته ګڼونډیرۍ ورکړ
شوي دي۰

دا چې انسان د خپل چاپيريال د ټولو شيانو او پيداېښتونو سره لاس په ګريوان دئ، نو پوښتنې او هيلې رامنځ ته کيږي،غوښتنې لري او ويناوې کوي، په کومو ويناو کې،

چې شيان او رېښتونی(واقعيتونه) بيرته هنداره (منعکس) کيږي يا په يوه څه يا شي، چې وينا کيږي، نو موخه ترې د هغه څه رېښتون حالت يا ځاننيونه ده۰ يوه وينا په واقعيت کې ټيک هلته رېښتيا ده، کله، چې په هغې کې شي حالت يا بهتره شي ځاننيونه په رېښتونې شته يا موجود وي، په بل حالت کې دا وينا نارېښتيا (غلطه) ده. موږ نيسو، چې دا څه دې په شميرپوهنه کې کره ټاکلي وي او پريکړه دې پرې کيدی شي۰

پژند(تعريف) ۱ ۰ ۱ :

وينا د يوه شی ، څرنګوالي (چې څنګه دئ)، د هغۀ بيرته هندارونه يا منعکسونه ده۰ (دا په دې مانا، چې وينا يو شی په وينا کې همهغسی ښايي لکه څنګه چې دئ له دې امله شي هندارونه يامنعکسونه)، چې د ژبې له لارې وړاندې کيږي يا په همدې ډول په نخښه کيږي۰

يا په بل عبارت وينا د کليمو داسې هدفمند يوځايوالی يا يوځاي اېښوول دي، چې د يوه شی حالت (ځاننيونه) يا شکل او د شيانو رېښتونې اړيکی بيرته هنداره يا منعکسوي او موخه وردی، چې د هغه درېښتياوالي پوښتنه رامنځ ته کړای شي۰

يا په بل ډول :

د وينا لاندې سرې يو ژبنی يوون، يا يووالی (واحد unit ,Einheit)پوهيږي، کوم چې د شي اړيکی (د شي څرنګوالی) بيانوي۰ دلته دا مهمه نه ده، چې دا وينا په کومه ژبه، په پيدايښتي (طبيعي) او که په مصنوعي ژبه ويل شوې (افاده شوي) دا هم غوره نه ده، چې دا وينا د طبيعي پوهنو لپاره ده، د هوا حالاتو لپاره او که د بازار د نرخ لپاره ده۰

په بل او ورځني ډول: يوه وينا يوه جمله ده يا فرمول دی، چې يا رښتيا او يا نارښتيا ده۰ داسې هم ويل کيږي، چې وينا يو «رښتيارزښت » ،، رښتيا يا نا رښتيا ،، لري.

یعني : د شمیرپوهنې سم اند لپاره پریکړی د وینا « رینتیا ارزښت»(رښبنتیا یا نارښتیا) دئ٠ نور خویونه په راتلونکی کې نه څیړل کیږي٠

ویناوې د لاتین په لویو تورو A , A* په نخښه کوو او داسې نور٠

۱ ٠ ۲ ٠ ۳ د دوه ارزښتوالی اصول یا پرینځیپ جمله

هره وینا یواځی یو ممکن « رینتیا ارزښت» لرودئ شي، دا په دې نامه، چی وینا یا رینتیا ده او یا ناریښتیا. (د دریم نه والی اصول یا پرینځیپ)٠

دا په دې ماناو چې ددې دوه ارزښتونو تر منځ بل ارزښت ناشونی دئ. دوه ارزښتوالی او د دریم نه والی باید سره بدل نه شي.

که یوه ژبنۍ افاده یا وییینه د وینا په څیر ترتیبوو، دا بیا دلته ارزښتناکه ده، چی د ویناارزښت حتمآ باید څرګند یا معلوم نه وي٠ که بالاخره ټوله پوهنه د رښتیا لور غوره کړي وي، بیاهم موږ څرګند ژبنیو موادو ته اړ یو، چی د هغه شي حالت (ځاننیونه) افاده کړاي شو یا وویلی شو، د کومو په شته والی یا نه شته والی، چی پریکړه وشي٠

ټولې ویناوې له دې امله په دوه ټولګیو یا کلاسو ویشل کیږي، د رښتیا ویناو ټولګی او د نارښتیا ویناو ټولګی یا کلاس(صنف)٠

که وینا رینتیا وي، نو رینتیا ارزښت یې رینتیادئ او په w سره یې ښایو، که وینا رینتیا ارزښت ناریښتیا ولري ، نو په f یا،، نه،، یې ښایواو وایو، چې د وینا رینتیا ارزښت ناریښتیا دئ

تکرار : هره جمله، چی « رینتیا ارزښت» (رینتیا یا نا رینتیا) ولري، وینا بلل کیږي

شمیرپوهنیز سم اند(منطق) د ویناو سره سر او کار لري..

بیلګې:

غونډاله (جمله)

الف : » د کابل سین د کونړ له سین سره ګډیږي«ریښتیا وینا ده۰

ب : $3 + 4 = 7$ ریښتیا وینا ده

پ : » ٦ لومړنی ګڼ دی« دا ناریښتیا- یا ناتیک وینا ده۰(د اعدادو په برخه کې لومړني اعداد یاګڼونه کتلکیدی شي)

پوښتنجملی : » ته د څو کالو یې ؟ « نه شي کیدی یو ریښتیا ارزښت باندې تنظیم شي۰ له دې امله وینا نه ده۰

نورې بیلګې :

ویناوې دي:

(دپیتاګوراس (فیثاغورس) جمله۰

د کاتیتونو یا د یو بل سره ولاړو یا عمودو اړخونو یا ضلعو مربعګانو (څلوریو) زیاتون(جمعه) د هیپوتینوزې(اوږده اړخ قایمې زاویې ته مخامخ ضلعه یا قطر) د څلوری یا مربع سره برابر دی.

نورې بیلګې :

سرک لوند دی

ټول سپي خطرناک دي

$3 > 5$

په لاندې کې که یو کاربن له دوه اکسیجنه سره یوځای یا زیات شي، نو کاربن دوه اکسیډ CO_2 وښايي

د دي پرڅېړ یا مخامخ یا پر خلاف یا برعکس : ویناوې نه دي:

د کابل ښار; NaCl ; لمده کوڅه

د افغانستان د خلکو ژوند په دیرش کلن جنګ کې

لاندې ویناوې

کیمیا یوه طبیعي یا پیداینتي پوهنه (علم) ده

٧ پر دریو بی له پاتې (باقي) نه ویشل کیږي

د وینا «ریښتیا ارزښت » ریښتیا لري

لاندې ویناوې

برلین یو کوچنی ښار دئ

$3 < 5$ پنځه له دریو کوچنی دئ

ټول لومړني اعداد یاګنونه ناجوړه (طاق) دي

کابل د کونړ پر سین پروت دئ

هره یوه له دې ویناو « ریښتیا ارزښت » نا ریښتیا لري

نومه ونې: پورته مې د جفت لپاره، چې ورسره بلد یو جوړه ولیکه، نو طاق ته ناجوړه وایو٠

په لاندې کې به وڅیړو، چې ویناوې شته، چې نورې ویناوې د خپلې برخې په څیر په ځان کې خوندې(لنډ : خوندي) لري٠ داسې ویناوو ته یوځایشوې یا یوځای ایښول شوې یا ځنځیري ویناوې وایو او که غواړئ ! مرکبې ویناوې.

د دې لپاره بیلګه راوړو » که د کوم ګڼ(عدد)a پروت زیاتون یا پرته جمعه په 3 ویشوړ وي، نو داعدد یا ګڼ په 3 ویشوړ دی، یانی که عدد 1521 ولرو ، نو د دې عدد پرته جمعه 9=1+2+5+1 په 3 ویشوړ ده له دې لاس ته راځي، چی پخپله ۱۵۲۱ هم په 3 ویشوړ دی.

که کومه وینا په داسې ویناوو ویشوړ یا ټوټه کیدونکې نه وي، نو دې ته بیا ساده وینا ویل کیږي.

لکه : سپین غر یوه خورا جګه څوکه لري

یوه بله بیلګه د یوځای شوې(ځنځیري) وینا لپاره

سپینغر خورا خواریکښ دی، هغه په دې پوهیږي، چی نور کار ته وهڅوي.

څرګنده ده، چی دواړه ساده جملې د برخویناو په څیر یوځاي شوي ویناوې دي: » سپینغر خورا خواریکښ دی« همدا ډول » هغه (سپیغر) پوهیږي، چی نور کارته وهڅوي«.

دا ویناوې کیدی شي په نورو ډولونو هم یو له بل سره داسې وتړل شي، چې رښتیاارزښت یې همغه پاتې شي.

د بیلګي په توګه:

۱ - سپینغرخورا خواریکښ دی. یا هغه پوهیږي، چی نور کار ته وهڅوي

۲ - ځکه، چی هغه پوهیږي، نو کار ته وهڅوي، نو سپینغر خورا خواریکښ دی.

۳ - دا چی سپینغر پوهیږي، چی نور کار ته وهڅوي ، نو سپیغر خورا خواریکښ دی.

٤ – سره له دې، چی هغه پوهیږي، نور کار ته وهڅوي، هغه خورا خواریکښ دی.

ګورو، چی په دې ډول یو له بل توپیریدونکی تړلې یا ځنځیري، یا یوځاي شوی ویناوې جوړیږي، چی په خپله رښتیاارزښت کی یو له بل توپیر کیدی نه شي. د دوي توپیر د

دوي یو له بل سره تړلو څرنګوالي له لارې مخ ته پروت دئ یا رامنځ ته شوی دئ٠ په لاندې کې به ممکنه« ویناتړنه» (یا نورهم ښه: ویناځنځیرونه) تر څیړنې لاندې ونیول شي.

پیژند ١ ٠ ٢ :

یوه «ویناتړنه» یا یو «ویناتړاو» (نوره هم ښه: «زنځیرونه») داسې ژبنۍ وینې(افادې) دي، چې د هغوي په مرسته له یوې یا ډیرو وېناو څخه نوې ویناوې جوړېدی شي.

مور د سم اند یا منطق سټپرینځیپ په لاس ته راوړنو سره ځانونه په داسې ویناو رابندوو، کومې چې داسې جوړې وي، چې ریښتیا ارزښت یې یواځې او یواځې د «برخویناو» ریښتیا ارزښت په واک کې وي٠

بیلګی

الف: سپین ډیر خواریکښ دئ، هغه په دی پوهیږي، چې نور کار ته وهڅوي٠

ب : سپین یا راځی او یا لوبه نه کیږي٠

پ – د فوټبال په لوبه کې نه دباندې رفري او نه دننه رفري فاول یا ناسمي ولید٠

١ ٠ ٢ ٠ ٤ ویناتړنه یا وینابلواک (- فنکشن یا – تابع)

د ویناتړنو (عملیو)په هکله مو پورته بیلګو کې ولیدل، چې که څوک د تړنو لپاره « او » او یا « سره له دې» ونیسي تل یوه یوځاي شوې وینا منځ ته راځي. دا وینا هلته او فقط هلته ریښتیا ده، چې دواړه «برخویناوې» ریښتیا وي. دلته د خبرو پرځاي غواړو «ریښتیا فنکشن یا رښتیا تابع» وپیژنو. مور پریکړه کوو، چې د په زړه پورې ویناوو (ویناواریابلو یا وینا اووښتونو(وینا متحولو)) لپاره سومبولونه p,q,r,... او یا ا ، ب پ، وکارول شي یا استعمال شي. مور دا غواړو ساده پیل کړو، یانی د یوه یو

ځاينيونکی(يوځائيز يا يوګوني) بلواک يا فنکشن او که همغه پخوانی ډول تابع مو ښه راځي، له تابع څخه٠

يادونه: د بلواک يا تابع کلمه وروسته څيړل کيږي، دلته د بلواک يا فنکشن پرځاي ويناترنه يا عمليه بسيا کوي. دا ځنی ويونه(لغات) ستونځی لري، چی د ښونځي زده کوونکي يي هغه ساده ډول فکر ته رابولم او د لوړو زده کړو خاوندانو ته دا کومي ستونځی نه لري.

نه والی(نفی)Negation

د وينا تړاو يا ويناترنی(عمليي) «نه والی»: ديوی ويناP نه والی هغه وينا ده، چې هلته او يواځی هلته د رينښتيا ارزښت ناريښتيا لري، چیP ريښتيا ارزښت ريښتيا ولري٠

موږ د وينا P نه والی نفی په Pنه سره ښايو ، شميرپوهنيزه نخښونه يي په لاندي توګه ده ¬P په يوه جدول کي ريښتيا فنکشن يا ريښتيابلواک کي داسی څرګند وو(دا چي زه کله کله هغه شميرپوهنيز سومبول د نه p لپاره ¬P نه شم ليکلی، نو دا به همغسي p نه وليکم.

P	Pنه يا ¬P
w	F
f	w

د يوې وينا P تکرار نه والي يا بيا نه والي لاس ته راوړنه، لکه چي لاندې يي ګورو، هم خورا څرګنده ده .

p	¬p	¬¬p
w	f	w
f	w	f

دوه واره نه والی د همغي لومړنۍ وینا ربښتیاارزښت لري

په پیداېښتي ژبه کی نه والی په«نه» یا « نا » خپل ربښتینوالی مومي· «اباسین هغه خپل ټاکلی وخت ته را نه غی· دا د اباسین خپل ټاکلي وخت ته راغی « نه والی» دی·

نه والی ته بیلګه : د وینا ¬A نه والی : "7 < 3 „ وینا نهA ده: دا چی A ربښتیا ده، نو ¬A ناربښتیا ده·

ترنه(عملیه) یا کنجنکشن Conjunction (لاتین: ترنه، دلته د « او (and)» ترنه یا تړاو):

وینافورم یا – بڼه:

د وینا په څېر یا - مخامخ یا - برعکس وینا بڼه ربښتیا ارزښت نه لري، د وینافورم یا – بڼې لپاره بیلګی دي لکه پوښتنې، امرونه او نظرونه یاعقیدې:
۱ – هوا څنګه ده ؟

۲ - کورته لاړ شه

۳ – شین یو ښه رنګ دی·

که په ترمونو کې، چې واریابلی یا اوښتونې لري، اړیکنخښی ولیکل شي، یوه وینابڼه منځ ته راځي· یوه د نخښو لړۍ کم له کمه د یوې اووښتونې یا متحولې د بیلګې په توګه

3 + x <5 د بنسټیزورشو N کې نه ریښتیا ده او نه ناریښتیا· دا له دې امله وینا نه ده· که چیرې د واریابلې یا اووښتونې یا متحولې پر ځای ۰ او ۱ ولیکل شي، نو بیا یوه ربښتیا وینا ترې منځ ته راځي·

که چیرې په ځاي يې نور د پيدايښتي ګڼونو توکی ځاي په ځاي شي، نو بيا ناريښتيا ويناوې منځ ته ترې راځي٠

دا چی اووښتوني يا متحولي د بنسټيزي یا بنسټ سټ ځخه په خوښه توکی اخستلی شي، نو له دې امله دا اووښتوني د خپلواک يا ازاده اووښتوني(متحولی) په نامه يادیږي٠

پيژند :

یوه ويناښه د نخښو لړی ده، چې کم له کمه یوه خپلواکه اوښتوني(متحوله) لري او د

- د دې اووښتوني په ځاي د بنسټيزې ورشو يا ساحې او يا

- د دې اووښتوني ترلو ځخه د کوانتيفيکاتورونو(کوانتورونو) په مرسته یوه وينا جوړيدی شي.

يادونه :

که په لاندې کې د تړاو يا تړني کلمه منځ ته راځي، نو موخه ترې د « او » تړنه ياکنجنکشن conjunction دی٠ له ګرامر سره په توپير، چې هلته تړنه يا تړاو يو « تړونتيکی، تړاولغات» ښايي په سم اند کې تړنه يو ځرګند(دوه ځايلرونکی يا دوه ځاييزيا نوره هم ښه دوه ګونی) جملي تړل يا په بل عبارت دوه ځاينيونکي (نوره هم ښه : دوه ييز يا دوه- ګونی) فنکشن يا تابع(بلواک) تعريفوي يا پيژنی٠

د « او» تړنه او نخښه يې ∧

پيژند ۱ ٠ ۳ :

$p \wedge q$ دوه ويناوې p او q يانې د «او » يوځايوالیp او q يواځې او يواځې هلته يو ريښتيا ارزښت ريښتيا لري، چې p اوq دواړه ريښتيا ارزښت ريښتيا ولري٠ که له دې ځخه يوه وينا هم ناريښتيا وي، نو بيا د « او » تړنه ناريښتيا ده ٠

د ترني نخښنه ددوه ويناو q او p ترمنځ ليکل کيږي $p \wedge q$ او ويل کيږي p او p

موږ د « او » ترنه په لاندې جدول کې روښانه کوو يا انځوروو:

يادونه: په لاندې کې w رښتيا او f نارښتيا په معنا دي

$p \wedge q$	q	p
w	w	w
f	f	w
f	w	f
f	f	f

د « او » ترني ته بيلګه :

د دوه رښتينو ويناو د A وينا : „ $3 < 7$ „ او د B وينا : 3 يو لومړنی ګڼ دی رښتيا وينا $A \wedge B$ ده « ۳ له ۷ کوچنی او لومړنی ګڼ هم دی»۰

يادونه: موږ ګران لوستونکي به سره يوځاي فکر وکړو، چې دا پريمګنونه لومړي او که لومړني ګڼونه وبولو۰ زه فکر کوم، چې لومړي ګڼونه لومړنی نه دي۰ دا ځکه لومړي ګڼونه دي، چې له دوي له زياتون او يا کمون څخه لومړی ګڼونه جوړيږي۰ موږ به يې زياتون په پام کې راولو، چې : 3+5=8

د دوه ويناو دا ترنه يا کنجنکشن، چې مختلف رښتياارزښتونه ولري ياني د A وينا: 3 „ „ $7 <$ (رښتيا او د B وينا: « ۳ يو جوړه ګڼ دی (نارښتيا)، نو $A \wedge B$ وينا : چې ۳ له ۷ کوچنی دی او جوړه ګڼ دی « (نارښتيا) ده۰ دا ويناترنه ويناارزښت نارښتيا لري۰

د دوه ويناو د « او» ترنه دA وينا: $7 > 3$ او د B وينا « ۳ يو جوړه ګڼ يا جفتعدددی» يوه نارښتيا وينا ده : ۳ يو لومړنی ګڼ دی او له ۷ لوي دی۰

ومو لیدل، چې د « او » ترنه او یا کنجنکشن په ورسره بلده (عادي) توګه هلته جوړیږي، چې دوه ویناجملې په «او» سره وتړل شي:

غوټۍ «پټیدځاي» پیداکړ او دا پټیدنه یې پټه وساتله»۰ کیدی شي له «مګر» « سره له دې هم» « په همدې ډول » ترنه وویله – یا افاده شي۰

پورته ډول ، د بیلګی په توګه: په پټپټکي کې « که سپین پټ شي او هوسۍ د هغه د پټیدو ځاي پیدا کړي او دا چاته ونه ښایي»، نو داسې وایو « او » یا « هم »

هوسۍ د سپین د پټیدو ځاي پیدا کړ« او » دا پټیدځاي یې پټ واسته۰

۱) هلمند موړ(بډا) شو او هیواد یې پریښود ۰

۲) سره له دې، چې برلین کوچنی‌ښار دی‌هلته د منی د المپیک لوبې کیږي

۳) ۱۵ ګڼ جوړه دی، د هغه پروت زیاتن په ۳ ویشونی‌دی

په ټولیزه توګه د « او » ترنه هلته رښتیا ارزښت رښتیا لري، چې د جملی ټولی برخې رښتیاارزښت ریښتیا ولري، اړین نه ده، چې نظم په پام کی ونیول شي۰ په وینا ترنه کې کیدی شي زیاتې وینابرخی سره په ترنه « او » وتړل شي لکه « هغه راغی، ویې لیدل او برۍ یې په برخه شو»

پیژند ۱ ۰ ٤ :

د« یا(or)» ترنه یا دیسجنکشن Disjunction (لاتین: ټاکنه یا پریکړه) Alternative الترناتیو یا د » یا « ترنه» دا په « یا » بیرته ورکړ شوې «جمله ترنه» تل ژوروالی ته راهځوي: باید جوته شي، چې ترې تیریدنه یا صرف نظر په نه کیدونکی اوکه ترې نه تیریدونکی « یا » موخه ده۰ د دیسجنکشن یا د «یا»ترنی پیژند یا تعریف یواځنی دی او دا \/ د یا ترننخښه ده.

د دیسجنکشن نخښه د دوهویناو p او q ترمنځ ځایول کیږي p\/q او ویل کیږي p یا q او

په لاندې ډول ځرګندیږي۰

p	Q	p∨q
w	W	w
w	f	W
f	w	w
f	f	f

له دې پورته جدول څخه پوره جوتيږي، چې ديسجنكشن يا د « يا » ترنه p∨q يو داسې ربنتياتابع (-بلواک يا- فنكشن) دی، كوم چې هلته او هلته ربنتيا فنكشن ربنتيا اخلي، كله چې كم له كمه د « يا » ترنې يو غړی د ربنتيا ارزښت ربنتيا ولري يا واخلي٠ كه د ديسجنكشن دواړه غړي نارښتيا وي نو p∨q هم نا ربنتيا دی٠ دا د ربنتيا فنكشن كې د ځايونې « يا» څخه بل څه نه دي٠ يوه د «نه خونديكونې» يا « نه ځايونې» يا « په بركې نه نيونې» د « يا » وييينه يا افاده ده، چې دا په نورو ژبو كې په بل ډول مګر په پښتو كې « يا٠٠٠ او يا ٠٠٠» ليكل كيږي٠

بيلګه (د « يا » ترنې ته):

د دوه رېښتينو ويناو د « يا» ترنه د A وينا: „ 7 < 3„ اود B وينا: « ۳ د ٦ پرويشونی دی» يوه ربنتيا وينا A∨B ده : «۳ له ۷ كوچنی دی او د ٦ پرويشونی هم دی»٠

د دوه ويناو ترنه، چې مختلف ارزښتونه لري.

د A وينا „ 7 < 3 „ ربنتيا او د B وينا: „ 7 =3 „ (نارښتيا) ، نو A ∨ B ده، چې 7 < 3 يا 7 = 3 دا وينا ترنه د ربنتيا ارزښت ربنتيا w لري٠

د دوه نارښتیا ویناو د « یا »(" Or") تړنه:

د A وینا : "7 < 3 " او د B وینا: ۳ یو جوړه ګڼ (جفتت عدد)دی یوه نارښتیا وینا $A \vee B$ ده:

« ۳ له ۷ لوي او نا جوړه ګڼ (طاق عدد)دی»

الترناتیوAltenative یا انتیوالنځ Antivalenz ویناوې : دا د » یا « ویناتړنه باید د « یا ... او یا سره بدله نه شي، ځکه چې دا هلته هم نارښتیا ده، که چیرې دواړه ویناوی رښتیا وي٠

بیلګه : (دوه الترناتیو ویناو ته ، چې رښتیا وي)

د وینا 7 > 3 او« ۳ یو لومړی ګڼ دی» د الترناتیو په نامه داسې دی « ۳ یا له ۷ کوچنی دی او یا یو لومړی ګڼ دی» نارښتیا دی٠

بیلګی : (نه والي، کنجنکشن، دیسجنکشن ته)

یادونه: په لاندې w (Wahr) د رښتیا اوf(Falsch) د نارښتیا لپاره کارول شوي.:

ویناتړاو

A	π پي تولګڼ دی	f
B	π ایراشنل ګڼ دی	W
C	صفر له پي π کوچنی دی	W
D	π پي له دری کوچنی دی	f

W	π ټولګڼ نه دی	<u>A</u>
F	π کوچنی برابر له صفر	<u>C</u>
f	π ټولګڼ او له صفر لوي دی	A∨C
W	π ایراشنل او له صفر لوي دی	B∧C
W	πپي ټولګڼ یا له صفر لوي دی	A∨C
f	π ټولګڼ یا له ۳ کوچنی دی	A∨D

بیلګه : له دې بیلګی دمخه هغۀ فرمول دی

یا کتاب لولم او یا فلم ګورم۰ په دې بیلګه کی الترناتیو یا بدیل شته دی، یانې د » او یا « امکان شته۰ دا د » او یا « کارونه یا استعمال د خرڅلاو شیانو باندې باید بند وي۰ یانې دوه نرخونه باید ورنه کړای شي۰

دا لاندې فزیکي بېلګه ده، چې ګران لوستونکي دې پخپله هم ورته پام وکړي او ځیره دې یې په پام کې راولی۰ په شالت یا سرکت الجبر کې د کجنکشن یا د »او« ترنې« ریښتینوالی لپاره دوه پرلپسی(لړی) شالتونه ترل شوي دي،

Bild 7.1

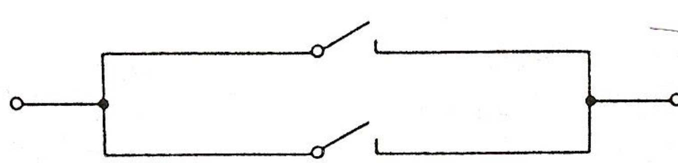


Bild 7.2

کمپلکس ربنتیابلواک یا – فنکشنونه

دا وروستۍبیلګه په ګوته کوي، چې داسی یوځاي شوې ویناوې جوړیدۍ شي، په کومو کې چې له یو زیات تړوني موجود وي٠

که دا ساده وینا که چې «په تیاتر کې نن لوبه کیږي» په p پس له دې جملی کمپلکس جوړخت دا نه تری تیریدونکی (ربنتیا - بلواک یا ربنتیا فنکشن » نهp pV دۍ٠ د دې لپاره هم د ربنتياارزښت فنکشن ورکول کیږي٠ د ربنتیا ارزښت لپاره p له دې څخه نهp یا p نه (دا دواړه دې برابر ومنل شي) او بیا هم نهp pV جوړیږي، چې جدول یې په لاندې ډول ورکړ شوی دۍ

د یوې وینا نه والی

p	Pنه	pVpنه
w	f	W
f	w	w

لاس ته راوړنه یا نتیجه هکپک کوونکي نه ده یوه وینا نهpVp تل ربنتیا ده، بی له ځانګړي حالت او له دې خپلواک، چې p کوم ربنتیاارزښت غوره کوي .

ویناسم اندیزې ویینې یا افادې، چې د هغې ربنتیابلواک کتمټ یا (identisch(identic ربنتیا دۍ(دا په دې مانا، چې که د ویناؤوښتونکي یا واریابلې ته هر ربنتیاارزښت ورکړ شي یانې ربنتیا یا نارښتیا تل د ربنتیا ارزښت ربنتیاغوره کوي)، وینا سم اندیزه قوانین بلل کیږي، یا ورته تاوتولوژي Tautologien

ویناسم اندیزې ویینې یا افادې، چې د هغو ربنتیاارزښت بلواک کتمټ نارښتیا دۍ (دا په دې مانا چې د متحولې یا اووښتونې په هره وینا ارزښت وینا نارښتیا ارزښت غوره کوي)

کونترا-دیکتوریکي وینا بلل کیږي•ورته ویناوې کونترادیکشنونه contradiction (د دوه ویناوو مخامخوالی یا – تضاد)

بیلګه :

رښتیاارزښت دې د ویینې یا افادې نه(p∨q) لپاره وشمیرل شي په همدې وخت کې دې د نهp∨q رښتیاارزښت هم وشمیرل شي او له بل سره دې پرتله شي.

جمله : ښایو، چې $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$

$$
\begin{array}{l}
p...q....p \vee q....\neg(p \vee q)......\neg p...\neg q...\neg p \wedge \neg q \\
w...w......w.........f.............f.....f.........f \\
w...f.......w........f.............f......w........f \\
f...w........w........f............w.......f.........f \\
f...f........f.........w............w........w.........w
\end{array}
$$

داچې د مخ ته پراته جدول څلورم او اوم درځ یو په بل پریوځي یا یو د بل سره برابر دي، نو ویېنې یا افادې $\neg(p \vee q)$ او $\neg p \wedge \neg q$ په څرګند ډول همغه رښتیا بلواک یا –فنکشنونه دي. دا په دې معنا چې ،، جملې: دا نارښتیا ده، چې p یاq ،، او ،، نه q او نهp ،، همغه رښتیا - (او په دې ډول همغه نارښتیا-) شرایط لري، که دp اوq په ځای بلې یوې لیدونکي جملې ځای نیولی وي. دا ډول دوه وینا تړاو -وینا تړنه) او تل همغه ارزښت ورکوي.

که په دې عملیو کې نوکان ځا په ځای شي، نو د عملیې ارزښت طبعاً همغه نه پاتیږي، لکه د بې نوکانو عملیې.

ایمپلیکیشن implication (لاتین: ورراګډول، خورول):

که دوه ویناوې د خپل تړاو له لارې« که۰۰۰، نو سره تنظیم یا ترتیب شي اپیلیکیشن سومبول=> چې دا سومبول د دواړو ویناو Aاو B ترمنځ ولاړ دئ: او دا مانا لري:

که A نو B یا په همدیډول «له A څخه B لاس ته راځي» وینا A ته پریمیس Prämisse (لاتین نیونه (فرضیه) وایي او وینا B ته کونکلوزیون Konklusion (لاتین: پاي لاس ته راوړنه) وایي۰ د دوه ویناو ایمپلیکیشن تیک هلته نارښتیا دی، چې پریمیسس رښتیا او کونکلوزیون نارښتیا وي۰ په بل ډول رښتیا دی۰

د دوه ویناو لاس ته راوړنه یا تعقیب د لاندې جدول له لارې یواځنی څرګندیدی شي

د لاس ته راوړنې یا ایمپلیکیشن یا پسې راتلنی، په ځان پسې لړنې سومبول =>

P	q	p=> q
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

دلته داسې یوه تړنه لرو، چې له دوه برخه ویناو A او B تیک هلته یو نارښتیا یوځاي شوې ویناچې په p=/>q سره ښایو)۰

کله چې لومړۍبرخه وینارښتیا او دومه برخه وینا نارښتیا وي په کمپیوتري یا پروګام ژبه کې داسې ویل کیږي: If….., then…..

کومې ژبنۍ افادې یا ویینې په دې رښتیا فنکشن بیرته اړول کیږي. بیرته یا په ښت

راګرځېدلی شي. په ښکاره ډول د بېلګې په توګه جمله: که پسرلی لوبه وګټي، نو ماښام د تلویزیون کتلو ته کورته راځي.

ناریښتیا ده، که د جملې لومړئ برخه رښتیاوي او دویمه نارښتیا. که په جدول کې برخه جملو ارزښتونه لکه د بېلګې په توګه د جدول لومړئ همداسې څلورمه کرښه سره یو د بل پرتله شي(که دواړه برخه جملې رښتیا همداسې نا رښتیا وي) پرابلمونه نه پیښوي، په دې حالت کې ټوله وینا رښتیا ده، که لومړئ برخه وینا نارښتیا او معکوس دویمه برخه رښتیاوي، نو په دې حالت کې به د بېلګې په توګه جمله نارښتیا ونه لیدل شي(که پسرلی لوبه ونه ګټي او سره له دې هم تلویزیون لیدلو ته راشي)، نو بیا د دوه ارزښتوالي پرینځیپ له مخې یواځې دا ارزښت ،، رښتیا،، باقي پاتې کیږي. د پورته فنکشني پوره والي له مخې په ګوته کوو، چې هم $\neg p \vee q$ او هم $\neg (p \vee \neg q)$ ټیک بیرته بیا(بیرته) د ایمپلیکیشن د رښتیا فنکشنونه ورکوي.

په بل ډول افادې یې: q که p، او یا هم p ، د q لپاره پوره کیدونکی شرط دی(په بل ډول یې: qد p لپاره اړیین شرط دی)

ورته والی :یوارزښتوالی(برابرارزښتوالی) Äquivalent

که دوه ویناوې qاو p خپله تړنه په » ټیک هلته ، که » په هم دې ډول « هلته او هلته، که»» تنظیم کړي، دې ته ورته والی یا ایکویوالنت وایي٠ د ایکویوالنت سومبول دیَ ≈ د دواړو ویناو pاوq ترمنځ دا سومبول پروت دیq ≈ p په دې مانا، چې p ټیک هلته که q ٠ ایکویوالنت سومبول یې په دواړو خواو ایمپلیکیشن لري: له p څخه q لاس ته راځي او له qڅخه p

د دوه ویناو ایکویوالنت ټیک هلته رښتیا دی، که دواړه ویناوې رښتیا یا دواړه ویناوې نارښتیا وي٠

دا شي څرنګوالی یا شي حالت په لاندې جدول کې روښانوو:

p	q	P⇔q
w	w	W
w	f	F
f	w	F
f	f	W

سیده او مخامخ یا په ځښ دي په دې مانا وي، چی له p څخه q لاس ته راځی او په ځښ، یا نی له q څخه p لاس ته راځی۰

۱ ۰ ۳ د ویناپلواکو یا ــفنکشنونو ترمنځ اړیکي

د دوه ویناو ترنه سم اندیزه یا منطقي برابرارزښته بلل کیږي، که د ویناو رښتیاارزښت د ترنویناارزښت سره یو په بل وخوري یا یو بل سره برابر شي۰ دا د یو ویناارزښت جدول له لارې ځرګندیدی شي۰ ومو لیدل، چی ایکویوالنت په دواړو لورو لاس ته راوړنه یا ایمپلیکیشن دی۰ په لاندې جدول کی به وګورو، چې دریم او شپږم درځونه، متې یا ستنی څنګه یو بل سره ځان نیسی یا ګورو، چی سره یوارزښته دي۰

p	q	p ⇔ q	p=>q	q ⇒ p	(p ⇒ q) (q ⇒ p)
W	w	w	w	w	..........W
w	*f*	f	f	*w*	.........*f*
F	*w*	*f*	*w*	*f*	.........F
f	*f*	w	w	*w*	.........*w*

ورته والی اړیکی د ورته والی یا ایکویوالنت سومبول باندې هم ښوول کیږي

$$(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)(q \Rightarrow p)$$

دا ورته والي ويناتړنه موږ ته دا اجازه راکوي، چې يو بل سره بدل کړو یانی د یوه ځاي د بل سره بدل کړو٠ له دې ښخه پيچلو تړنو کې لکه د شالت الجبر کې کار اخستل کيږي٠

د دې ورته والی ويناتړنې غوره بيلګه د،،دي مورګان،، قاعده ده De Morgansche Regel

$$(1)......(\overline{p \wedge q}) \Leftrightarrow (\overline{p} \vee \overline{q})$$
$$(2)......(\overline{p \vee q}) \Leftrightarrow (\overline{p} \wedge \overline{q})$$

د کنجنکشن او ديسجنکشن لپاره ديستريبوتيو قانون:

(3) $[p\wedge(q\vee r)]$ □ $[(p\wedge q) \vee (p\wedge r)]$

(4) $[p\vee(q\wedge r)]$ □ $[(p\vee q) \wedge (p\vee r)]$

١ ٠ ٤ وينافورم يا - بڼه او کوانتورونه

وينا سم اند په لاندې ډول ساده ټوليز کيدی شي٠ د بيلګي په توګه که مختلف شيان همغه خويونه ولري، نو ضرور ده، چې دا فورمال وويلي - - يا افاده کړای شو: دلته د ويناو پر ځاي د وينافورم ښخه خبري دي، يا غبريږو٠ دا داسی ژبنی وييني يا افادې دي، چې د شيانو لپاره واريابلی يا اووښتوني لري او لومړی د مناسب انفرادې ځاي پرځاي وروسته يوه وينا شي٠ بيلګي يی په لاندی ډول دي

لومړی : xپر دوه ويشونی دیٔ »

دويم : » z يو هوار ښلورګوډیٔ(ځلورضلعي) » دیٔ٠

دريم : «u له v ښخه لوي » دیٔ او داسی نور

ترهر ځاي پرځاي کولو وروسته ربښتیا یا نارښتیا وینا لاس ته راځي٠ که په دویم کی دz پرځاي «ډیرګوډی» (کثیرالاضلاع) ځاي پرځاي شي، نو یوه ربښتیا وینا لاس ته راځي٠

که په لومړي کیx د7 پرځاي ځاي پرځاي شي، نو یوه نارښتیا وینا لاس ته راځی٠ دریم یوه اړیکه(ریلیشن(ده، چې هلته د انفرادیو د ایښولو ترتیب هم یو رول لري٠ دلته که د تورو پر ځاي ګڼونه ږدو، نو هلته دا ربښتیا وینا ده که د لومړي توري پرځاي ستر ګڼ ځاي پرځاي شي٠د فورمال سم اند په ژبه د پریدیکات په شکل٠(له دې امله دې د سم اند برخی ته د پري دیکات first-order logic سم اند یا منطق وایي٠

بیرته داسی لیکو P(x), Q(z), R(u,v)

یوه بله کارونه یا عملیه شته، چې له وینا بڼي څخه وینا جوړوي٠ چې کوانتیفیکیشن Quantifikationبلل کیږي٠ دا ویناهغه وخت منځ ته راځي، چې ټول د وینا بڼی افراد همغه خویونه ولري، چې ټولوینا (Allaussage) ورته وایو٠یاچې په پوښتل شوي چاپریال کې داسي افراد شته وي، چې همغه خویونه ولري، دې ډول وینا ته موږ د شتون یا موجودیت وینا یا Existenzaussage وایو٠ زموږ په بیلګه کې یی استعمال لاندې را په ګوته وکي

څلورم : (پیدایښتی یا طبیعي) ګڼونه یا اعداد شته، چې په دوه ویشل کیږي

پنځم : ټولې څلورۍ (مربع) هوارې ډیرګوډۍ یا کثیرالاضلاع دي٠

د ټولکوانتور یا ټولوینا لپاره نخښه∀

د شتون- یا موجودیتکوانتور یا شتونوینا لپاره نخښه ∃

یادونه : د ټولکوانتور لپاره نخښه د سرچپه A په څیر ده او د شته والي کوانتور لپاره نخښه د په څټ E په څیر ده په پام کې دې وي، چې د کوانتورونو ورکونې وروسته اووښتونې (ویاریابلی یا مجهولی) ورکول کیږي٠

څلور ۱ : $\exists x \in P(x)$

داسی یي لولو، چی یوx په P(x) کې شته

پنځه ۱ : $\forall z \in Q(x)$

دا داسی لولو: د ټولوz لپاره ، چې په Q(x) کې پروت دئ (یا د ټولو۰۰ له ۰۰۰ څخه)

دا سومبول $\exists$ دا مانا لري،چې« کم له کمه یو ۰۰۰ شته»د وینابنی او په دې پورې اړوند واریابلو یا اووښتونو ډیریو جوړه، د دې سومبول سره یوه د« شتون- یا موجودیت وینا» ورکوي، په نامه د اووښتونو ساحه یا ډیری کې، په کوم کې چی کم له کمه یوه داسې اووښتوني ځاي په ځایونه شته وي کومه چې وینابڼه رښتیا وینا کوي۰

بیلګی (د رښتیا شتون - موجودیت ویناوي)

اول - $\exists x \in R: x+1=0$

(لوستل : یو داسی رییل ګڼ یا عدد x له(په) R (کې) شته ،د کوم لپاره چې0 =x+1 باور لري) دلته x دا مانا لري، چې x د رییلګڼډیری یا ریل ا عدادو سټ R توکی دئ او $\in$ په دې مانا دی، چې توکي له ۰۰۰ دی۰

دویم : $\exists x \in R:$

$$x^2 + 4x = 0$$

(لوستل: یو x له(په) R څخه(کې) شته د کوم لپاره ، چې $x^2+4x= 0$ باور لري)

دریم : $\exists x \in R: \quad x^2 - 4 = 0$

(په دې جمله کې حتی دوه رییلګڼونه شته دی، چې د هغې لپاره $x^2-4 = 0$ باور لري

: (2، -2)

جمله (د یوې شتونوینا یا موجودیتوینا نه والی یا نفی)

$$\exists x \notin R: x^2+1=0$$

لوستل: داسې رییلګڼ x نه شته، د کوم لپاره چې برابرون $x^2+1 = 0$ باور ولري

داسې وينابنی هم شته، د کومو لپاره، چې د اووښتونډيرئ يا واريابلډيرئ ټولو توکو لپاره رښتيا وينا شي۰

بيلګه: وينابنه « x په 2 ويشونی دئ » د جوړه ګڼونو هريوه لپاره رښتيا ارزښت لري په

دا سومبول ∀ په دې مانا دئ، چې « د ټولو x لپاره» د وينابنې او په همدې پورې اړوند د وينا متحولو ډېرئ يا سټ (ويناّاووښتونډيرئ يا واريابلډيرئ) ترنه له دې سومبول سره يوه Universalaussage يونيورزالوينا يا ټولوينا منځ ته راځي۰ په دې مانا چې د دې متحولو ډېرئ(اووښتونډيرئ) هر توکی لپاره د وينابنې څخه يوه رښتيا وينا جوړيږي۰

جمله : (دUniversalaussage يونيورزال- يا ټوليزې وينا يا ټولوينا لپاره

$$(1)........\forall x \in G : 2 \mid x$$

(د ټولو جوړه ګڼونو (جفت اعدادو)لپاره باور لري، چې x په ۲ ويشونی دئ)

$$(2).......\forall \in R, x^2 > x$$

(د ټولو رييلاعدادو x لپاره, کوم چې له يوه لوي وي باور لري $x^2 > x$)

جمله : (د نارښتيا ټوليزې وينا لپاره)

$$\forall x \in R : x^2 > x$$

دا وينا نارښتيا ده، ځکه چې دا د $1 \leq x \leq 0$ لپاره باور نه لري، پس دا وينا د ټولو ريل عددونو لپاره باور نه لري۰

۱ ۰ ۵ اړين – يا ضروري- او پوره کيدونکي شرطونه

د ايمپليکيکشن سومبولA=>B (« کهA نو B » « له A څخه Bلاس ته راځي»)يا په بل ډول : که A باور ولري، نو B هم باور لري»

په شمیرپوهنه کې ځانګړي فرمولونه شته٠

الف) « A د B لپاره پوره کیدونکی شرط دی»

ب) « B د A لپاره یو اړیین یا ضروري شرط دی»

فرمولونه الف) وايي، چې د A رښتینوالی د B رښتینوالی ځان پسی لري یانی له آ څخه ب پوره کیږي یا له یوه څخه وبل ته رسیږو یا د A شرطونه د B د شرطونو پوره کیدنو لپاره نیونه(فرضیه) ده او ب شرط پوره کیدنه اړیینه یا ضرور ده، چی آ پوره شي٠

بیا : وینا باور لري٠

د B وینا د باور لرلو لپاره دا پوره دی یا پوره کیدونکی دی یا بسیا کوي، که د A وینا باور ولري

بیلګي د پوره کیدونکو شرطونو لپاره:

۱ – ویناA : « ګڼ n پر ٦ ویشونی دی»

وینا B : « ګڼ n پر ۳ ویشونی دی»

A => B

د دې لپاره پوره کیدونکی شرط دی یا بسیا کوي، چې یو رییل ګڼ n پر ۳ ویشونی دی، که دا پر ٦ ویشونی وي٠
که n پر ٦ ویشونی وي، نو پر ۳هم ویشونی دی ٠ دا نو تراوسه دا مانا نه لري، چې ضرور دې ګڼ n که پر ۳ ویشونی وي، پر ٦ دې هم ویشونی وي٠ د بیلګي په توګه ګڼ ۹ پر ۳ ویشونی دی ، مګر په ٦ نه دی ویشونی٠

۲ - وینا A : “n > 7„

وینا B :وي دې n > 6:

A => B

د دې لپاره دا پوره کيدونکی دی، چې يو رييلګڼ ن له ٦ څخه لوي دی٠ که اړيکې، چې ن له ٦ لو دی، باور ولري

داسې رييلګڼونه هم شته، چې له ٦ څخه لوي دي، مګر له٧ څخه لوي نه دي٠ د بيلګي په توګه ٥ ،٦ يا شپږنيم

د ب) فرمولبندې وايي، چې وينا ب باورلرل غوښتونکی يا اړيين يا ضرور دی، د دې لپاره، چی وينا A باور ولري٠

که وينا B باور ونه لري نو وينا A هم باور نه لري ٠

بيلګی د اړيين(ضروري) شرطونو لپاره:

۱ – د دې لپاره، چې يوګڼ n پر 6 وويشل شي، اړين(ضرور) ده، چې دا ګڼ پر3 ويشونی وي٠ يو ګڼ، چې پر3 نه وي ويشونی، نو پر ٦هم ويشونی نه دی٠

۲ - ويناA : » څلور ګوډی يوه څلوری يا مربع ده«

وينا B : » څلور ګوډی څلور ولاړ کونجونه لري« $A => B$

د دې لپاره ضرور، چې يوه څلورګوډی يوه مربع(څلوری) ده دا خويونه دي، چې څلور ولاړ کونجونه ولري، که ټول ګونجونه يې ولاړ نه وي، نو مربع يا څلوری نه ده که يوه څلورګډی څلور ولاړکونجونه ولري اړين نه ده، چې څلوری يا مربع دې وي٠

د برابروالي يا برابرارزښتي (ايکويوالنت) سومبول«

$$A<=> B$$

(په دواړو لورو ايمپليکيشن) لپاره په شميرپوهنه کې هم فرمولبندي شته: دا وايي، چې A دB لپاره يو ضروري او پوره کيدونکی شرط دی٠ « دا وايي، چېA ټيک هلته باور لري، کله چې B باور ولري

بیلګی : د پوره کیدونکی او ضروري شرطونو لپاره

۱ – ویناA : « ګڼ یا عدد n پر ٦ ویشونی دی»

وینا B : « عدد n پر ۳ او ۲ ویشونی دی»

$$A <=> B$$

د دې لپاره ضرور او پوره کیدونکې دی، چې: n پر ٦ ویشونکی دی، که دا عدد پر۳ او ۲ ویشونکي وي٠

۲ – وینا A : » څلورګوډی یا څلورضلعي یوه څلوری یا مربع ده«

ویناB : « څلورګوډی څلور ولاړ کونجونه لري او څلو برابر اوږده اړخونه یا ضلعې»

$$A<=>B$$

ددې لپاره، چې څلورګوډی یو مربع دی ضرور او پوره کیدونکی دا خویونه دي، چې څلور ولاړ کونجونه او څلو برابر اوږده اړخونه(ضلعې) ولري٠

۱ ٠ ٦ د شمیرکلمو یا ویو(لغاتونو) شمیرنیز مفهوم(ترې پو هیدنه)

پیژند (تعریف) څه شی دی؟

د کلیمی ټاکنه ده، چې تیک ټاکلي او له مخامخوالی(تضاد) ازاده وي٠ په عامو خبرو کی کله که کلیمی راځي ، چې په مختلفو اشکالو ترې ځانګړي ماناوي اخستل کیږي، خوپه شمیرپو هنه کي داسي نه ده٠

د شمیرنی ټاکنی یا پیژندونه (تعریفونه)د تیک څرګندې پو هنې یوه نه پریښوونکی سمبال اله ده، یانې ترې تیریدل نه شي کیدای٠

جمله څه شی دی ؟

ټولې ربښتوني ويناوې په شميرپوهنه کې جملې بلل کيږي، چې د پيژندنې لپاره ښووني يا ثبوت ته اړتيا لري٠

اکسيوم Axium څه شی دئ؟

بې ثبوته ربښتينې وينا ته اکسيوم وايي

شميرپوهنيزې يا د رياضي جملې زياتې نيونې(فرضيې) او ثابتول(غوښتنه،جوته ونه يا ښوونه) په بر کې- يا خوندي لري٠

که دا وينا داسې وي، نو پس داسی به هم وي٠ دلته که دا وينا داسې وي نيونه يا فرضيه ده او نو داسې هم ده٠ دا غوښتنه ده، چې بايد ثبوت يا وښوول شي٠

اکسيوم : ۱ طبيعي عدد دئ (پيانو Peano)

: ټکی هغه دی، چې پر ويشونی نه وي يانې په ټکی ويشل بند دي٠ (Euklid)

: حتمي پيښه د پيښې امکان ۱ درجه لري٠

جمله: که درېګوډی ولاړکونجيز وي، نو(پس) د پيتا ګوراس (pythagoras) درسې جمله باور لري

: يو لومړی ګڼ، چې له دوه لوي وي، بايد ناجوړه(طاق) وي

: په اخره جمله کې نيونه(فرضيه) ده (که يو پريم عدد له ۲ لوي وي٠٠٠) او ثبوت يې (هر له دوه لوي عدد په دوه ويشل کيږي پس لومړی ګڼ نه شي کيدی، نو دا ټل ناجوړه ياطاق دئ)په څټوالي يا تضاد کې پيژندل کيږي٠
ټل داسې نه ده، چې د جملې د ربښتينوالی څخه دې د جملې په څټوالی يا تضاد هم ربښتيا وي٠

لکه:

جمله: که ٦٪ پس ۲٪ هم   (رښتیا)

جمله: که ۲ ٪ پس ٦٪ هم (ناربښتیا)

۰۰۰۰۰۰تیک هلته ، چۀ که۰۰۰۰یوځاي راوړي

بیلګه : که چیرې غبرګ اړخیز کې هر دننی کونج ۹۰ درجی وي، نو دا ولاړکونجیز(قام الزاویه) دی۰

په ځتې : که غبرګ اړخیز ولاړ کونجیز وي، نو دننی کونجونه ۹۰ درجی لوي دي۰

یوځایراوړل :

یو غبرګ اړخیزتیک هلته(هلته او هلته یا بیا او بیا یا یواځنې او یواځنې ټاکلی یا یواځنی ټاکلی او په ځتې) ولاړکونجیز دی، کله چې دننني کونجونه ۹۰ درجی لوي وي۰

۱ ۰ ۷ برابرونونه او نابرابرونونه (مساوات او نامساوات)

پیلبیلګه:

لمسی ، پلار او نیکه په ګډه ۱۱۳ کلن دي۰ پلار د ځوي د عمر یوکال کم اوه ځله عمر لري او نیکه د پلار د عمر له دوه برابره څخه ٦ کاله نور هم زیات عمر لري۰

پوښتنه : له دوي څخه هر یو څو کلن دی؟

د ځوي عمر په x سره ښایو، نو د پلار عمر 7 x-1 دی او د نیکه عمر 2(7x-1)+6 کاله کیږي، چی د دې ټولو زړښت وختونو زیاتون یا جمع بیا ۱۱۳ کاله دی یانی :

$$x+7x-1+2(7x-1)+6 = 113$$

یو ډول ترمونه رامنځ ته کیږي او ساده کیږي:

$$x+7x-1+14x-2+6= 113 \;\; \vee \;\; 22x +3 = 113$$

په کینې ۲۲ ځله د x ارزښت چې ۳ په ورزیات شوي او دا له ۱۱۳ سره برابر دئ

نو دا ګڼ ۲۲ ځله x بیا ۱۱۰ کیږي: $22x = 110$ او د x ساده ارزښت ۲۲ – مه برخه د ۱۱۰ ده یانې: په دې لاس ته راوړني سره زوي ۵ کلن پلار ۳٤ کلن او نیکه ۷٤ کلن دئ٠

که ترمونه T^ او T° د برابرووننخښی = باندې یو له بل سره وتړل شي، نو لاندې برابرون پیداکیږي: T° = T^ ٠

که چیرې ترمونه په دې نخښو ≤ , ≥ , > , < او(نابرابروننخښه =|) یو له بل سره وتړل شي یو نابراون منځ ته راځي.

برابرونونه او نابرابرونونه چې ناټاکلي یا مجهولو سره یوځاي شي، هغې ته د وینافورم یا نوره هم ښه وینا بڼه ویل کیږي٠

دا یا رښتیا یا نارښتیا وینا کیدی شي٠ که ناټاکلي، چې اوښتوني یې هم بولو(د بیلګې په توګه z , x , y) پر ځاي د بنسټیډیری ګڼونه ولیکل شي٠ په برابرونپوهنه کې له پیژند – یا تعریفډیری څخه هغه ګڼونه غوره دي، چې د ورکړ شوي فورم یا بڼې یو برابرون یا نابرابرون رښتیا وینا کړي٠

د یو برابرون یا نابرابرون (مساوات یا نامساوات) هر عدد ځاي پرځاي کول، چې وینابڼه پیژند - یا تعریفډیری پورې اړوند وي او دا وینا ریښتینې کوي، اوبیډیری یا حلډیری L کې پروت دئ یا د برابرون یا نابرابرون په ډکوونکو (پوره کوونکو) ډیریو پورې تړلی برابرون ته ، چې د ټولو ځاي پرځاي کولو لپاره ریښتوني وینا ورکوي کټمټ یا (identisch, identic) وینا وایي٠

بیلګې :

الف) $5x=4$ د $x = 0,8 = 4/5$ لپاره رښتیا وینا ته ځی : یانې

$5.0,8=4$ نو $L=\{0,8\}$

ب) $3x^2 = 48$ د $x = 4$ لپاره او $x = -4$ لپاره رښتیا وینا ته ځې

یانی $3.(-4)^2 = 48$ څخه لاس ته راځی او په څښ $3.4 = 48$ پس- $L = \{-4;4\}$

۲ – نابرابرون الف) $2x > 1 \Rightarrow L= \{x \mid x> -1/2 \}$

ب) $x < 3 \Rightarrow L = \{ x \mid x > -3 \}$

۳ – کتمتوالی : الف) $(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$

ب) $(a+b)^2 = a^2+b^2 +2ab$

دوه برابرونونه یا نابرابرونونه، چې په خپل پیژندډیرېکې سره برابر وي(یا یو پربل وخوري،

یانې یو د بل پرځاي ایښول کیدی شي) او همغه اوبی- یا حلډیرۍ ولري ایکویوالنت (Equivalent) یا «ځاي پرځاي کول برابر» یا ورته بلل کیږي۰

یادونه : دا لاندې د جدول په ډول دی، له پورته له ښي و کیڼ لور ته په درځ یانې ولاړ درځ لوستل کیږي

	نابرابرون	براون
۱) وينافورم کې کيدی شي،چې خواوې سره بدلې شي	T° < T^ T^ > T° 2x < 6 6 > 2x	T°=T^ T^ = T° 3x=5y 5y = 3x
۲) که وينافورم په دواړو خواووهمغه ترم زيات يا کم شي او د يوې ورزيات ترم پيژنددېرى خوندې وساتل شي يا ځاي کړي	T^ < T° => T^ ± T° < T° ± T^	T^ = T°=> T^ ±T° = T°± T^
يا تغير ونه خوري۰ مخامخ يا کېن لوربيلکه کې تفريفدېرى تغير خوړلی	3y < 4x ⇔ ⇔ 4y±2x < 4x±2x	2z = 8 => 2z ± 3 = 8 ±3

پر خټ بيلګه

2z=8 |=> 2z+3-z=8+3-z

دا چې z=4 دې نوي ورزيات شوي

ترم 3-z نه دی تعريف يا پيژندنه

لري، ځکه چې z - 3 يو پيدايښتي يا طبيعي ګڼ نه دی

۳) د وينافورم دواړه T^=T° ⇔ T^.T > T°.T T^ <T° ⇔

اړخونه کیدی شي چې　$T^{\wedge} < T^{\circ} \Leftrightarrow$　$T^{\wedge}.T = T^{\circ}.T$

له همغه مثبت ترم سره　$T^{\wedge}:T > T^{\circ}:T$　$\Leftrightarrow T^{\wedge}:T = T^{\circ} : T$

ځل او یا په همغه ترم　که $T > 0$　که$T > 0$ وي

وویشل شي　$3y - 12 < 30z - 90$　$4x+2 = 10x-6$

$\Leftrightarrow y - 4 < 10z - 30$　$\Leftrightarrow 2x + 1 = 5x - 3$

$\Leftrightarrow 4y - 16 < 40z - 120$　$\Leftrightarrow 2xc + 10 = 50x-30$

٤) د یوه برابرون　$T^{\wedge} < T^{\circ} \Leftrightarrow T^{\wedge}.T > T^{\circ}.T$　$T^{\wedge} = T^{\circ} \Leftrightarrow$

دواړه خواوې کیدی شي،　$T^{\wedge} < T^{\circ}$　$T^{\wedge}.T = T^{\circ}.T$

چې له یوه منفی ترم سره　$\Leftrightarrow T^{\wedge}:T = T^{\circ} : T$　$\Leftrightarrow T^{\wedge}:T > T^{\circ}:T$

ځل شي یا دواړه خواوې په　$T < 0$　$T < 0$

همغه ترم وویشل شي٠　$-2y < -4$　$3x = 12$

که په دې فورم کې　$\Leftrightarrow y > 2$　$\Leftrightarrow -9x = -36$

نابرابرونونه وي نو د　$\Leftrightarrow 10y > 20$　$\Leftrightarrow x = 4$

برابرون لورې بدلیږي، یا نخښه بدلیږي

یادونه :

په ټولیزه، چې په کتابونو کې لیکل شوي، ترمونه Tیو او T دوه په لانده توګه د اینډکس سره په نخښه کوي: T_1, T_2

---

۱ . ۷ . تمرنونه:

۱ – په ۱ . ۳ –مه برخه کې د رښتیا ارزښت ورتو الی له (۱) څخه تر (۴) پورې وښایاست.

۲ – د رښتیا ارزښت جدول له لارې وښایاست، چې لاندط ویناتړاو منطقي مساوي ارزښت دی.

الف - (A⇔B) او (B⇔A)

ب- (A=>B) او(AvB)

۲ ۰ ډیرۍ پوهنه Die Mengenlehre, the set theory

ډیرۍ پوهنې یا سټ تیوري باید خپل ځاي په شمیرپوهنه او همدا ډول په نورو پیداینښتي- یا طبیعی پوهنو کې نیولي وي، نو له دې امله د لنډ تیر وخت را په دې خوا په پرمختللو هیوادونو او اوس هم په افغانستان کې د ښوونځیو په لیکلوست کې پیل شوه، ځکه چې بې له ډیرپوهنې یا سټ تیوري شمیرپوهنه بې مفهومه ده او ناشونې۰ دا به له دې لیکنې څخه همدا اوس څرګنده شي، چې پیداینښتي یا طبیعي ګڼونه یا - اعداد او هرڅه د ګڼونو په څیره کې ، چې موږ ته څرګند وي هغه ټولې ډیرۍ یا سټ دي او بل څه نه دي۰

ډیري پوهنې (سټ تیوري)په پرمختللو هیوادونو کې هم د شلمې پیړۍ په دویه نیمه کې د میندو او پلرونو لپاره ستونځې پیدا کړي، ځکه، چې دوي د ډیرۍ پوهنې سره بلد نه وو او د خپلو کوچنیانو سره یې مرسته نه شوه کولی۰

د ډیرۍ کلمه له عدددونو یا ګڼونو پخوانۍ ده، که څه هم پخوا انسانانو په خپله خوښه نه ښوولې لکه اوس۰

په تراوس ورسره بلد ډول هم سټ يا ډېرئ پيژندل کيږي، لکه د ښوونځی نجونې او هلکان، يا په يوه ټولګی کې ميزونه او چوکی، يا لکه هغه نيزوړي، چې نيز راوړي او د سپين په پټي کې يې ډيرئ ډيرئ اچولي يا د هسکې مينې د ښوونځي په لسم ټولګی کې د زده کوونکو، کتابونو، کتابچو پنسلونو، څوکيو او ميزونو سټ يا ډيرئ۰

د ډېرئ پوهنې کلمه: موږ په افغانستان کې هم د ډيرئ له کليمې سره اوس بلد شوي يو که څه هم تربيلو بيلو پرديو نومونو لاندې، چی زما په اند به زده کوونکو او ښوونکو ته يواځې ذهني غوره والي لري، زه غواړم، چی د ډيرئ څو مختلف پيژندونه يا تعريفونه ورکړم، چې ښه مو ورته پام راوګرځي، دا له دې امله هم، چی د ډيري پوهنې (سټ تيوري) غوره والی ته مو نور هم پام راوګرځي۰

ډيرئ پوهنه د شميرپوهنې سټه جوړوي او د شميرپوهنې ټولې څانګې په ډيرئ پوهنه

ودانې دي۰ نن شميرپوهنه بې له ډيرئ پوهنې داسې وده نه شي کولی او سټه يې وزي۰

پيژند ۲ ۰ ۱

الف : ډيرئ يا سټ د ټاکلو شيانو يا کلمو ټولګه (يوځايوالی، مجموعه) ده، چې

پخپله خوښه د يوې ټاکلې بنسټډيرئ يا بنسټ سټ څخه ، چې د پيژندلشويو

اصولو يا کرکترېين له مخې ټاکل شوې وي

ب : د الماني شميرپوه کانتور(George Cantor 1845 – 1918) پيژند:

زموږ د خيال يا ليد څرګند ټاکلو ، ټيک يو له بل توپيرکيدونکو شيانو ټولګې

(يوځايټولولو يا مجموعې) ته ډيرئ وايي او هر شي ته، چې ډيرئ يې جوړه

کړې يا ډيرئ ترې جوړه شوې وي، د ډيرئ – يا سټ توکی وايی۰

(Set and elements of set ډيری او د ډيرئ توکی)

پ : د مختلفو شيانو ټولګې يوه يوون يا يووالی (واحد Einheit, unite) ته په

شمیرپوهنه کې ډیرۍ وایی

یادونه : د واحد لپاره، چې تراوسه ورسره بلد یو یوون یا یووالی ښه نومه ونې دي٠ دا که څو واره وویل شي، نو باورلرم، چې ورسره بلدیږو٠

ت : څرګند شیان د ګډو نخښو پربنسټ، چې تر څیړنې لاندې نیول کیږي او د دې نخښو له امله یوځاي ټولیږي یا ټولګه جوړوي، ډیرۍ یا سټ تشکیلوي٠ ګډې نخښې کیدی شي ښکلا، کوچنیوالی او داسې نور وي٠

یادونه: د ګرانو لوستونکو دې دې ته پام وي، چې په پورته پیژندونو کې یې غوره او د پام وړ پیژند یاتعریف د جورج کانتور پیژند دی.

بیلګه :

ګڼونه یا عددونه، نومونه، او توري کیدی شي د ډیریو بیلګو په توګه راوړل شي٠

ګورو، چې د ډیرۍ یا سټ کلمه په شمیرپوهنه کې بل ډول ده لکه په ولسي ژبه کې، چې دلته ډیرۍ د څنو شیانو زیات یوځاي کول موخه ده، د ځانګړو شرایطو لاندې.

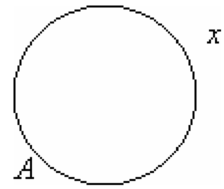
په شمیرپوهنه کې ډیرۍ په لویو لاتین تورو لیکل کیږي لکه A,B,.. او یا M,N, X,Y,.... د ډیریو توکي د لاتین په کوچنیو تورو لیکل کیږي، لکه a,b,c,... او m,n,x,v,...

د دې لپاره، چې وپوهیږو، چې ایا توکی a د ډیرۍ A توکی دی که نه نو لیکو: $a \in A$

په پورته کې توکی a د ډیرۍ A توکی دی.

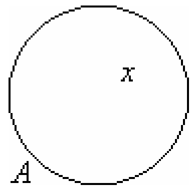
که a د A توکی نه وي ، نو لیکو: $a \notin A$ دلته a د ډیرۍ A توکی نه دی

دا پورته لینکدود له ښی وکیڼ لور ته هم لیکلی شو، چې پرلپسی لړۍ یې ساتلې پاتې شي٠ زه یې په څټ لیکنو سره لیکنیزې ستونځی لرم٠دا لاندې یې دیاګرام دی، خو توکي یې بل ډول لیکل شوي دي، چې ګرانو ستونکو ته به د پوهیدلو ستونځ پیدا نه کړي



$a \in A$

(a د A توکی نه دی)



$a \notin A$

(a د A توکی دی)

ډیری A دې له a,b,c,d,e,f,g,h, توکو جوړه وي، چې په لاندې توګه یی لیکو

$$A = \{ a,b,c,d,e,f,g,h\}$$

ګورو، چې { } د ډیری یا سټ نخښه ده

یادونه : دا د ډیری کلمه موږ په افغانستان کې سټ set بولو ، چې انګریزي ده، په فارسي کې یې مجموعه بولي، چې ډیری د شیانو مجموعه یا ټولګه ده او په الماني کې ورته مینګې Die Mengeوایي. هغه بنسټیزه خبره یې په پیژند یا تعریف کې ده، که موږ یې چې هرڅنګه وبولو، خو د یو بل څخه کره توپیرکیدونکو شیانو ټولګی ته ... وایو. د ټکو پر ځاي ، چی هر څه لیکی، خو موږ ګورو، چې په پښتو یې هغۀ مناسبه نوموه ونه ډیری ده، دا د کوټې کوټې څخه یا راپنډ او داسې نورو څخه ماته ښه ښکاریږي او زموږ ولس د دې نامه سره بلد دی، چې په پوهنه او لا نور ښه په شمیرپوهنه کې باید وکارول شي. زه بیا په دې ټینګار کوم، چې دا خپل ، چې ما ټاکلی یا بل څوک یې که بل ډول بولی د انګریزي یا الماني یا بل پردي نوم څخه ښه او پوهوړ دی. د سټ مانا که په ډکشنري کی وګوری ،نو پوه به شو، چې له دې نوم څخه مو خپل د پښتو نوم ښه او مناسب دی. ګورووچې دا نوم اوس ژورنالستان هم زیات کاروي او وایي، چې ډېری یا ډېری خلکو.... وکتل.

بیلګه ۲ ۰ ۱

الف) M_1 (لوستل M ایندکس ۱ دا به په لاندې نخښونه کې روښانه شي پام دې وي، چې (index(indeces ایندکش پیژند نخښې ته وایي) دې د لومړیو ګڼونو ډیر ۍ (اعدادو سټ) وي، نو باور لري: $7 \in M_1, 8 \notin M_1$

ب) M_2 دې د لاندې برابرونونو یا مساواتو د اوبیونو(حلونو) ډیرۍ وي

$$(x+1)(x-2) = 0$$

نو باور لري : $-1 \in M_2, 2 \in M_2, 1 \notin M_2$

بیلګه ۲ ۰ ۲ :

الف) د مساوات $(x+1)(x-2) = 0$ حل ډیرۍ M_2 ده $M_2 = \{-1, 2\}$

ب) د جوړه (جفت) عددونو یاګڼونو ډیرۍ M_3 ده $M_3 = \{0, 2, -2, 4, -4, ...\}$

ډیرۍ لکه، چې ومو ویل د توکو د خویونو له لارې هم ځرګندیدۍ شي یا ورکول کیدۍ شي۰

M = { x | د خوویونو ۰۰۰ سره x}

(لوستل: M د ټولو x ډیرۍ ده له خویونو ۰۰۰۰۰ سره)

بیلګه ۲ ۰ ۳

الف) { د ټولوx سټ ، چې هلته x یو لومړنی عدد یا ګڼ دۍ| M = { x

b) M = { x | (x+1)(x-2) = 0 }

$c)..........M = \{x \mid x \in R, 0 \leq x \leq 1\}$

تشډيرۍ: ډيرۍ، چې کوم توکی ونه لري تشډيرۍ يا خالي سټ بلل کيږي او داسی يې ليکو: θ يا $\{\}=\varnothing$
دا دې د يوې ډيرۍ يا سټ سره، چې يواځی له صفر څخه جوړه ده، نه بدليږي يانې

$$\{\} = \varnothing \neq \{0\}$$

بيلګه ۲ ۰ ٤

$$\{x \mid x \in Z, x^2 + x - \frac{3}{4} = 0\} = \theta$$

ځکه، چې د برابرون يا مساوات $x^2+x-3/4 = 0$ حلډيرۍ

$$\{x|x^2+x-/4= 0 \} = \{ 1 / 2 , -3/2\}$$

کوم ټولګڼ يا تام عدد خوندي نه لري۰

ټولګڼونو پيژند ته دې پام وي، چې د راشنلګڼونو برخډيرۍ ده۰دريمه برخه دې وکتلشي

بيلګه ۲ ۰ ۵ : د ز۰ کال د دويمې نيمايي مياشتنو سټ يا ډيرۍ په Ju , aug sep , ok,no, de سره ښايو او ليکو: A= { jul,aug,sep.ok,no,de}

نو داسې لرو يا نوره هم ښه داسی ليکلی شو: $jul \in A, jun \notin A$

دا په دې مانا، چې جولای د A توکی دی او جون د A توکی نه دی

بيلګه ۲ ۰ ٦ : ټول منديزي، چې نن مازيګر لمانځه ته د غارخلي لمنځتون يا جماعت ته راغلي۰

بيلګه ۲ ۰ ۷ : د هغو ميرو ، غواوو او وزو ډيرۍ، چې نن په نخاس کې خرڅې شوې.

بيلګه ۲ : ۸ د ټولو هغۀ ګڼونو ډيرۍ(عددونو سټ) M، چې ۳۰ ويشي يانې

۱ ، ۲ ، ۳ ، ۵ ، ٦ ، ۱۰ ، ۱۵ ، ۳۰

داسې يې ليکو : $M = \{ 1,2,3,5,6,10,15,30\}$

دا سټ پاي سټ ده داسي وايو، چې ډيرئ يا سټ M د ټولو هغو توکوx - لکه پورته - جوړ شوي، چې ۳۰ ويشي او داسې يې ليکو: $M =\{ x \mid x$ د ۳۰ پرويشونى ګڼ$\}$

د ټولو پيدايښتي يا طبيعي ګڼونو ډيرئ(اعدادو سټ) N ټاکو او داسې يې ليکو:

$$N = \{ 1,2,3,4\ldots.\}$$

دا نه پاى لرونکى يا لايتناهي ډيرئ(سټ) ده ، چې په لاندې ډول يې نخښه ده يا په لاندې ډول په نخښه کيږي: ∞

ګورو، چې په شميرپوهنه کى موږ پر پاى ګڼونو برسيره ناپاى عددونو سره هم مخامخ يو.

۲ . ۲ د ډيريو ترمنځ اړيکې relation between sets

د سټونو ترمنځ غوره اړيکى د برابروالى او خونديونې يا خوندي لرنې (مساويوالى او يو په بل کې ځاي لرلو) اړيکې دي.

پيژند ۲ . ۲ دوه ډيري يا سټونه M_1 او M_2 يو د بل سره برابرې دي، يانې

$$M_1 = M_2$$

که چيرې د ډيرئ يا سټ M_1 هر توکى د ډيرئ يا سټ M_2 توکى هم وي او پر ځټ يا برعکس هر د M_2 توکى د M_1 توکى هم وي.

برابرې ډيرئ برابر توکي هم لري

د بيلگی په توگه

$$M_1 = \{x \mid (x+1)(x-2)(x+3) = 0\}$$
$$M_2 = \{-1, 2, -3\}$$
$$\Leftrightarrow M_1 = M_2$$

گورو، چې M_1 د M_2 سره برابر دئ

برخډيرۍ(سبسټ subset)

پيژند ۲ ۰ ۳ :

يوه سټ M_1 د سټ يا ډېرۍ M_2 برخډيرۍ (لاندې ډيرۍ، خوندي ډيرۍ يا سب سټ) بلل کيږي يا M_1 په M_2 کې ځای ده يا نوره هم ښه M_1 په M_2 کې خوندي ده، ليکندود يا ليکنډول:

$M_1 \subseteq M_2$ که د ډيرۍ M_1 هر توکی دسټ يا ډېرۍ M_2 توکی هم وي۰

کيدی شي، چې M_1 د M_2 سره برابر هم وي، که برابروالی يا مساوات نا شوني وي نو بيا د اصلي برخډيرۍ يا اصلي سب سټ څخه غږيږو۰

پيژند ۲ ۰ ٤ :

يوه ډيرۍ يا سټ M_1 د M_2 اصلي برخډيرۍ ده او داسې يې ليکو: $M_1 \subset M_2$

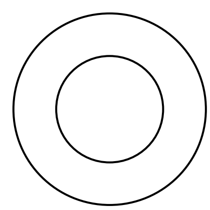
که $M_1 \subseteq M_2$ باور ولري او کم له کمه د M_2 يو توکی د M_1 توکی نه وي۰

بيلګې:

الف) که ولرو $M_1 = \{-1,1\}, M_2 = \{-1,0,1\}$ نو M_1 په M_2 کې اصلی خوندي دئ

ب) د ټولو څلوريو (مربعو) ډيرئ د ټولوڅلورګوډيو(څلور اضلاعو) اصلي برخډيرئ ده۰

پ) ځيره ۱ ۰ ۱ په هواره يا سطحه کې ټکوډيرئ ښايي، د کومو لپاره چې باور لري، که M_1 او M_2 د ټکو ډيرئ يا-سټ وي $M_1 \subset M_2$



که په پورته ځيره کې وګورو، نو يوه ګردئ (دايره) M_1 په بله لويه M_2 ګردئ کې خوندي ده۰

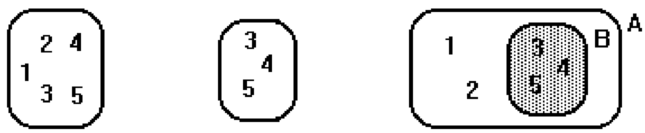
تشډيرئ په هره ډيرئ کې خوندي ده۰ هره ډيرئ په خپل ځان کې د نااصلي برخډيرئ په څير خوندي ده۰

يا دا پيژند :

$B \subseteq A$ که باور ولري : $x \Rightarrow A \in x \in B$

بيلګه:

$A=\{1,2,3,4,5\}$ $B=\{3,4,5\}$ $B \subseteq A$



پیژند ۲ ۰ ۵ :

هغه ډیرۍ، چې هیڅ توکی ونه لري تشډیرۍ بلل کیږي او داسې یې لیکو: $M=\theta=\{\}$

یادونه : پام دې وي، چې صفر ډیرۍ او تشډیرۍ سره بدلې نه شي یانې لاندې ته:
$\{\} = \theta \neq \{0\}$

د یوې ډېرۍ توان یا تواندېرۍ (توانسټ)

پیژند ۲ ۰ ٦ :

د یوې ډیرۍ M د ټولو برخډیریو ډیرۍ پوټنځډیرۍ یا په تواندیرۍ(-سټ) بلل کیږي او داسې یې لیکو:P(M) په تواندیرۍ توکي لري، چې هر یو یې بیا خپله ډیرۍ ده۰

بیلگه : د M = { a,b.c} ډیرۍ دا لاندې په تواندیرۍ لري

$$P(M) = \{ \{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}$$

هره ډیرۍ چې د توکو څخه جوړه وي هغه ټیک n جگ 2n توکی لري یانی : n^{2n}

دا پورته د جملې په څیر د پوره ایندکشن له لارې اوبی (حل-) کیدی شي(لومړۍ برخه دې وکتل شي)۰ دا دنده د گرانو لوستونکو د خوښې کار دی، که کوي یې۰

پیژند ۲ ۰ ۷ : د ډیرۍM زور |M| لاندې د ډیرۍ د توکو تعداد یاگڼون پوهیږو۰ که دوه ډیرۍ M اوN همغه زور ولري هغه ته یوزوریزه – یا برابرزوریزه ډیرۍ وایو او داسې یې لیکو: $|M| = |N|$

د برابرونونو يا مساواتو او خونديې ساتنو خويونه

الف) رفلکسيو- يا د انعکاس(هندارونيزې) اړيکيreflexivity

هغه اړيکي، چې د هغه او د هغه دخپل ځان ترمنځ ريښتوني ويناوې ورکړ شوي وي رفليکسيويا انعکاسي اړيکي بلل کيږي لکه: $M = M, M \subseteq M$

خونديې لرل اړيکې رفلکسيو نه دي $M \not\subset M$

دا په دې مانا، چې هيڅ ډيرۍ د خپل ځان اصلي برخډيرۍ يا برخسټ نه شي کيدی٠

ب) سيومتريکې اړيکي Symetric relation

هغه اړيکې سيومتريک بلل کيږي، چې د شيانو ترمنځ چې کارول کيږي يا استعماليږي يو له بل سره بدليدلی شي٠

لکه $M_1 = M_2 \Leftrightarrow M_2 = M_1$

خونديې لرل سيومتريکې اړيکې نه دي:

که وي $M_1 \subseteq M_2$ نو اړيکی $M_2 \subset M_1$ نارښتيا يا ناټيک دي

دا هلته چې وي: $M_1 \neq M_2$

پ) ترانزيتيويتي Transitivity يا وړون اړيکې

ترانزيتيويتي هغه اړيکې دي، چې له يوه نه وبل ته يې د وړلو امکان شته يا موجود وي٠

له $L = M$ او $M = N$ څخه لاس ته راځي $L = N$

او

$$M_1 \subseteq M_2 \wedge M_2 \subseteq M_3 \Rightarrow M_1 \subseteq M_3$$

پورته داسې لولو: که M_1 د M_2 برخډیرئ او M_2 د M_3 برخډیرئ وي، نوله دې څخه لاس ته راځی، چې M_1 د M_3 برخډیرئ ده

برابونونه یا مساوات او په بل کې ځایه ونه یا خوندي ساتنه ترانزیتیو اړیکې یا خویونه دي

۲ ۰ ۲ په ډیرئ کې کارونې یا عملیې

ټولنډیرئ (د اتحاد سټ)

پيژند۲ ۰ ۸ :

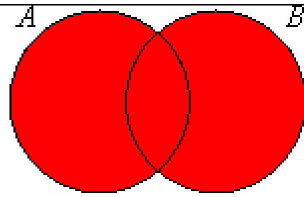
د دوه ډیریو M_1 او M_2 ټولنډیرئ(unionاتحاد سټ)، چې د ډیریو ټولنه ورته وایو ده:

$$M = M_1 \cup M_2$$

دلته داسې پوهیږو، چې M د ټولو هغو توکو څخه جوړه شوې ډیرئ یا سټ ده، چې لږ تر لږه د M_1 او M_2 توکي هم خوندي ولري۰

د ټولنې $M = M_1 \cup M_2$ هر توکی د M_1 یا M_2 توکی هم دئ (پرتله ۱ ــمه برخه د یا سره پرتله) یانې دا د ټولنډیرئ توکی د M_1 یا M_2 او یا د دواړو توکي دي۰

یا لاندې دیاګرام

$A ? B$ $A\cup B$ (B تولنه A) x) د A سره B اړيکې لري	

بيلګې

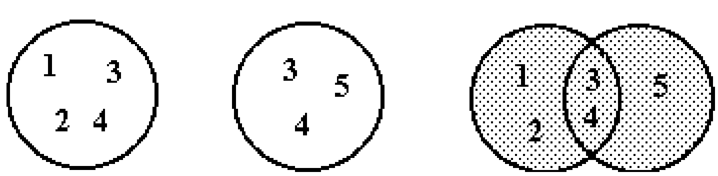
الف) M_1 دې د ځوانانو ډيرۍ وي، چې بکلوريا لري او M_2 دې د هغو ځوانانو ډيرۍ وي، چې مسلکي شهادتنامې لري، نو $M=M_1\cup M_2$ د ټولو هغو ځوانانو ډيرۍ ده، چې بکلوريا او مسلکي شهادتنامې ولري او يا دواړه شهادتنامې ولري.

ب)

$$M_1=\{k,a,r\},M_2=\{u,r,s,e,l\}$$
$$M_1\cup M_2=\{k,a,r,u,s,e,l\}$$

يا په لاندې توګه پېژند او بيلګه: A او B دې دوه ډيرۍ وي د دې ډيريو ټولنه داسې ليکو

A∪B = {x | x∈A ∨x∈B}
A={1,2,3,4}   B={3,4,5}   A∪B={1,2,3,4,5}



تل په ټکو ټکي شوې ټکيډيرۍ ټولنډيرۍ په ګوته کوي.

ب – خيره ۲ ۰ ۲ دوه په هواره کې ټکيډيرۍ په ګوته کوي، چې

الف) ټکيپردۍ دي٠ ب) ګډ ټکی لري٠

پ) اړيکې $M_1 \subset M_2$ پوره کوي:

د دې لپاره ځيرې په لاندې کې په بيلګو کې راغلې دي٠

د ټولنې لپاره کموتاتيو قانون باور لري» $M_1 \cup M_2 = M_2 \cup M_1$ دا په دې مانا، چې د لړۍپرلپسې دلته(لنډ: لړۍ) د ډيريو په ټولنه کی رول نه لوبوي

يادونه : که ګڼونه ۱ ، ۲ ، ۳ ، ٤ ٠٠٠ ولرو، نو دا پرلپسې بولو او که بيا دا سره جمعه کړو لکهٔ

$$1\ ,\ 1+2,1+2+3,1+2+3+4+,1+2+3+4++..+....$$

نو دا لړيپرلپسې يا لنډ: لړۍ بولو(پرلپسی برخه کې دې وکتل شي) دا په دې مانا، چې له دوو ځخه د زياتو ډيريو ټولنه لړۍپرلپسی(لنډ: لړۍ) رول نه لري٠

اسوځياتيو قانون باور لري٠

$$(M_1 \cup M_2) \cup M \ = M_1 \cup (M_2 \cup M_3) = M_1 \cup M_2 \cup M_3$$

غوځډيرۍ (د ډيريو غوځی يا –متقاطع سټ) intersection

يادونه : دا کړی شو، چې د ډيرو ګډغوځی وبولو(دا د ګرانو لوستونکو خوښه ده،کوم ناټيکوالی په کې نه شته)

پيژند:

ډيرۍ M د ډيرۍ M_1 او ډيرۍ M_2 غوځډيرۍ يا د تقاطع سټ ده(لوستل: M_1

غوځ(پرې)په M_2 (لنډ: غوځی): $M = M_1 \cap M_2$

که د ډيرۍ M ټول توکي د ډيرۍ M_1 او ډيرۍ M_2 توکی وي۰

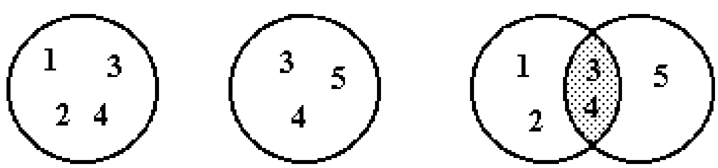
د غوڅډيرۍ $M = M_1 \cap M_2$ هرتوکی د ډيرۍ M_1 او ډيرۍ M_2 توکي دي (د ۱ –مې برۍ د هم او هم په مانا يا د «او» په مانا)

يا دا پيژند :

د ډيريو A او B غوڅی $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$

بيلګه:

A = { 1,2,3,4}, B = { 3,4,5} => $A \cap B = \{3, 4\}$



يادونه: دې پورته ډول دياګرام ته د ون دياګرام Venn-Diagram يا د Euler-Venn- Diagram وايي

بيلګې :

لومړۍ : يوه ډله زده کوونکي له ننګرهار او پکتيا څخه راځي، چې په M_1 يې په نخښه کوو۰ يوه بله ډله ، چې په M_2 يې په نخښه کوود کندهار او همغه د پکتيا زده کوونکي، چې په M سره يې ښنايو، دي۰ د دې دواړو ډلو غوڅډيرۍ

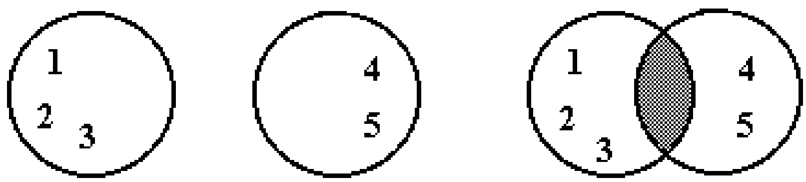
$$M = M_1 \cap M_2$$

د پکتيا زده کوونکي دي۰

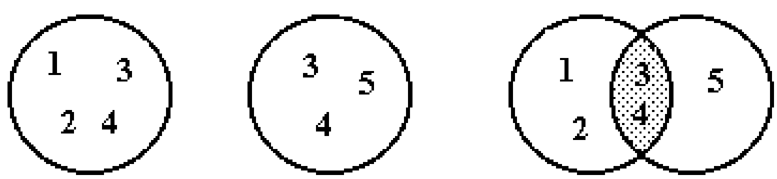
دويم:

$$M_1 = \{k, a, r\}, M_2 = \{u, r, s, e, l\},$$
$$M = M_1 \cap M = \{r, l\}$$

دريم خيره ۲ ۰ ۳ په هواره يا سطحه کې ښايي، چې الف) ګنون پردي دي



ب) يو بل سره ګډ ټکی لري



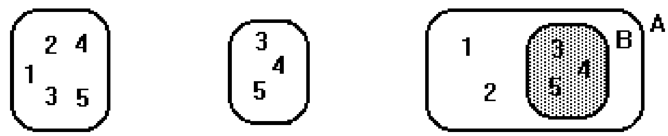
پ) اړيکی

$$M_1 \subset M_2$$

پوره کوي

بيلګه:

A={1,2,3,4,5} B={3,4,5} B⊆A



هغه ټکو باندې ټکي شوې ډېرۍ اصلي برخډېرۍ ده

دوه ډېرۍ، چې غوڅډېرۍ یې تشډېرۍ وي

$$M_1 \cap M_2 = \theta$$

لکه د مخه مو چې ګوته ورته ونیوله پردۍ بلل کیږي

د غوڅډېرۍ لپاره ، لکه څنګه د ټولنډېرۍ لپاره کموتاتیو قانون باور لري

$$M_1 \cap M_2 = M_2 \cap M_1$$

او اسوڅیاتیو قانون

$$(M_1 \cap M_2) \cap M_3 = M_1 \cap (M_2 \cap M_3) = M_1 \cap M_2 \cap M_3$$

ددواړو د ډېرۍکارونو یا ډېرۍ عملیو یانې ټولنډېرۍ او غوڅډېرۍ لپاره دواړه دیستریبوتیو قانونونه پوره کیږي یا باور لري

$$M_1 \cup (M_2 \cap M_3) = (M_1 \cup M_2) \cap (M_1 \cup M_3)$$

$$M_1 \cap (M_2 \cup M_3) = (M_1 \cap M_2) \cup (M_1 \cap M_3)$$

(د ګڼونو د شمیرکارونو یا عملیو لپاره یواځې یو دستریبوتیو قانون شته والی لري:

$$a_1.(a_2 + a_3) = a_1.a_2 + a_1.a_3$$

مګر په ټولیزه توګه باور نه لري

$$a_1 + (a_2.a_3) = (a_1 + a_2).(a_1 + a_3)$$

پيژند :

کمونډيرئ يا تفريق سټ M_2 د ډيرئ M_1 او ډيرئ M کموالی يا فرق دئ او

داسې يې ليکو: $M_2 = M / M_1 = \{x \mid x \in M \wedge x \notin M_1\}$

له M څخه د M_1 ډيرئ کمه شوې

يا کله چې د M_2 توکي د M هغه توکي وي، چې هغه د ډيرئ M_1 توکي نه وي۰

ليکندود ياليکنډول :
$A / B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$

لوستل : د A او B توپيرډيرئ ياکمونډيرئ يا تفريقډيرئ له ټولو هغو توکو x جوړه ده، د کومو لپاره، چې باور لري : x د A توکی دئ او x د B توکی نه دئ

بيلګې :

لومړئ : په يوه ټولګي کې د ټولو نارينه وو زده کړو ډيرئ ده M_1 او M_2 دټولو زده کړو ډيرئ (د نارينه وو او ښځينه وو) ، چې په شميرپوهنه کې لس نمرې وړي۰

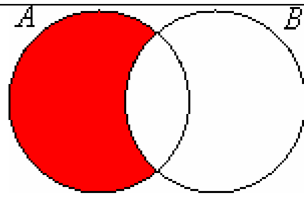
M_1 / M_2

د هغو زده کړو ډيرئ ده، چې ۲ ، ۳ ، ٤ ، ٥ ، ٦، ۷ ، ۸ ، ۹، نمرې وړي او ټول د هغو نجونو ډيرئ ده، چې په شميرپوهنه کې يې لس نمرې وړي۰

که په ټولګي کې يواځې نارينه زده کړي وي، نو باور لري

$M_1 / M_2 = \theta$

يا دا لاندې :

$A\backslash B$ (A بې له B) (x له A سره B اړیکې لري)	

دويم :

$$M_1 = \{k,r,a,i\}, M_2 = u,r,s,e,l\}$$
$$M_1 / M_2 = \{k,a\}, M_2 / M_1 = \{u,s,a\}$$

لکه څنګه، چې د کمون یا تفریق پیژند او بیلګي را په ګوته کوي په ټولیزه توګه باور نه لري:

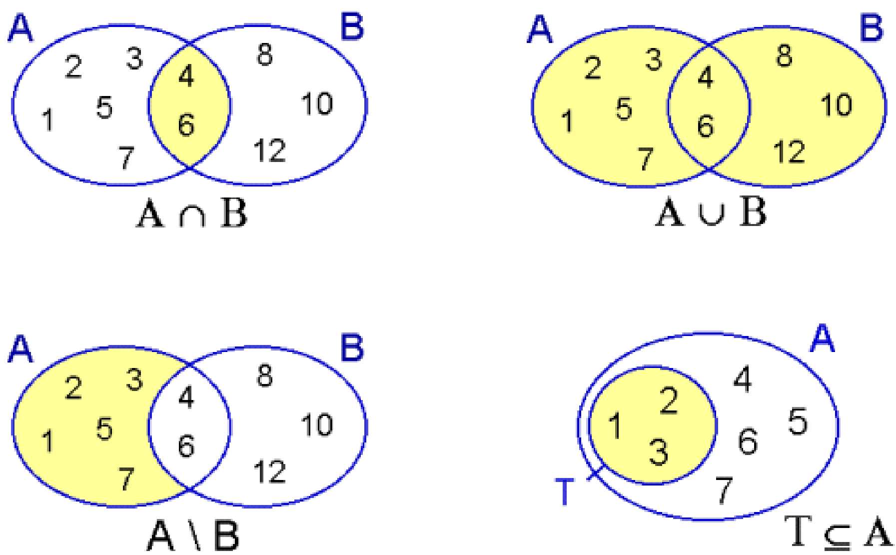
$$M_1 / M_2 \neq M_2 / M_1$$

د یوې ډیرۍ یا سټ کمپلمنت یا پوره کوونکی :

دا کارونه یا عملیه د نورو کارونو څخه توپیر لري، چې په ډیرۍ کی مو څیړلي۰ دا یوه یوځاییزه کارونه ده او دا نورې دوه ځایزې کارونی یا عملیې دي۰

موږ بنسټډیرۍ په U او د ټولو هغو توکو ډیرۍ، چېU کې پراته دي یانې دU توکي دي او هغه په M کې نه دي پراته یانې د M توکي نه دي پوره ډیرۍ یا کمپلیمنت بولو او د $\bar{M}$ سره یې په نخښه کوو۰

په لاندې څېره کې بیا د ډیرۍ غوڅۍ، - ټولنه او – کمون او برخډیرۍ ته د ګرانو لوستونکو لا زیات پام را اړوو۰



پيژند:

پوره كوونكې- يا تكميلډيرې (يا د يوې ډيرې كمپليمنټ) د يوې ډيرې M پوره كوونكې ډيرې $\bar{M}$ ټيک هغه توكي لري(د بنسټډيرې U څخه) ، كوم چې د M توكي نه وي٠

دوه ځله كمپليمنټډيرې جوړول خپلې لومړنی وينا ته ځي ، ياني $\bar{\bar{M}} = M$

دلته يواځې يوه ساده بيلګه راوړو: په يوه كلي كې دوه كورنی د توپير او برګ كورنی اوسيږي٠ كه دا دوه كورنی يو له بل سره خپلوي ونه لري، نو دوي يو له بل سره پوره ډيرې يا تكميلډيرې بلل كيږي ياني دا كلی پوره كوي٠

٢ ٠ ٤ خيرونه mapping يا اړيكې:

یادونه : پام دې وي، چې دا هغه ورسره بلد تابع کلمه نه ده، چې وروسته به ورسره بلد شو۰

په دې برخه کې لومړی د ډېرۍ ضرب کلمه پېژنو یا تعریفوو او بیا د ضرب کلمې کارونه څېړو۰

پېژند ۲ ۰ ۹ : د دواړو ډېریو M یو او M 2 ډېریضرب(اتیرانضرب) هم ورته وایي، یانې په x سره څلیزي یا ضربیزي

$$M = M_2 \times M_2$$

د ټولو تنظیم یا ترتیب شویو توکو

$$x \in M_1, y \in M_2$$

جوړو (x,y) ډېرۍ ده۰

بیلګې

$$M_1 = (a,b\}, M_2 = \{1,2,3\}$$
$$M_1 \times M_2 = \{(a,1),(a,2),(a,3),(b,1),(b,2),(b,3)\}$$

د جوړو د غوښتل شوي تنظیم له مخې څل په ډېریو کې کموتاتیو نه دی دا په دې مانا، چې

په ټولیزه توګه باور نه لري: $M_1 \times M_2 \neq M_2 \times M_1$

۲ – R دې د ټولو رییلګڼونو ډېرۍ وي۰ په هندسي مانا د کرښې د ټولو ټکو ډېرۍ۰ RxR د ټولو رییلګڼونو جوړو ډېرۍ ده، په هندسي مانا د هوارې یا سطحې د ټولو ټکو ډېرۍ ده۰

پېژند ۲ ۰ ۱۰ :

د څېرونې F لاندې د دوه ډېریو د ضربډېرۍ $M_2 \times M_2$ برخډېرۍ پوهیږو۰

پس د جوړه تنظیم شوو توکو ډیرۍ، چې $x \in M_1$ له یوه یا ډیرو توکو $y \in M_2$ سره تنظیم یا بهتره په باندې ځیره شي۰

داسی هم ویلی شو: د1 M توکي د2 M په یوه یا ډیرو توکو تنظیمیږي یا ځېره کیږي۰

که $(x.y) \in F \subseteq M_1 \times M_2$ وي، نو x اوریجنل یا اصلي توکی او y ځیره توکی بلل کیږي۰

د ټولو اصلي توکو ډیرۍ پیژندورشو یا تعریفورشو یا پیژنددیرۍ یا تعریفډیرۍ بلل کیږي او د ټولو ځېره توکو ډیرۍ د ځېرونې ډېرۍ، ارزښتورشو یا ارزښتډیرۍ بلل کیږي۰

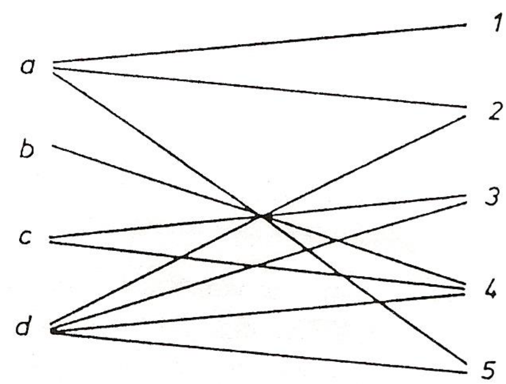
بیلګی

$$M_1 = \{a,b,c,d\}, M_2 = \{1,2,3,4\}$$

د جدول په توګه دM یو توکو ځېرونه ونه یا ځېره کوونه د M دوه په توکو

ځېره توکی		اصلي توکه یا ځیره کوونکی توکی
1 , 2 ,5	→	a
4	→	b
3,4	→	c
2,3,4,5	→	d

یا دا لاندې:



ځیرونه:

$$F = \{ (a,1),(a,2),(a,5),(b,4),(c,3),(c,4),(d,2),(d,3),(d,4),(d,5)\}$$

(د M یو او M دوه ډېریو د ټولو توکو جوړو ډېرۍ)

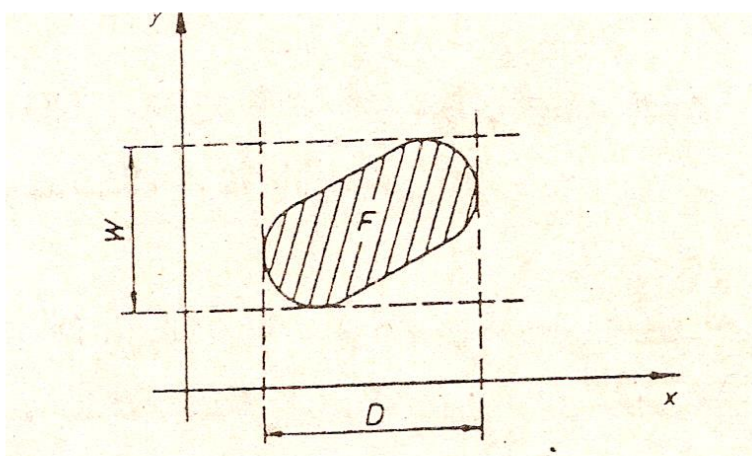


Bild 9.6 ځیره

دریم : هر پیدایښتي یا طبیعي ګڼ a د هغه په دوه ځله b=2a باندې ځیره کیږي٠ داسې پیژند شوې یا تعریف شوې ځیره ونه په لاندې بڼه هم انځوریدلی شي٠

$$F = \{(a,b) \mid a \in N, b = 2a\}$$

دلته هم N د پیدایښتي یا طبیعي ګڼونو ډیرۍ۰ پیژندډیرۍ یا تعریف- د ټولو پیدایښتي ګڼونوډیرۍ ده او ارزښتډیرۍ د ټولو جوړه ګڼونو ډیرۍ ده۰

څلورم : که M یو په یوه ښوونځي کې د ښوونکو ډیرۍ وي او M دوه په ښوونځي کې د ځانګړو ټولګیو ډیرۍ وي نو ښوونکي، چې په ټولګیو کې درس ورکوي دا یوه څېرونه ده۰ د ښوونکو ډیرۍ د ځانګړو ټولګیو په ډیرۍ کې

موږ د څېره ونې څلور حالتونه توپیروو:

پیژندونه(دې ته دې ګران لوستونکي ښه پام وکړي):

لکه په لومړۍ بیلګه کې په څیره ونه F کې د1 M ، چې تعریفډیرۍ D سره برابر دی او M2 ، چې له څیره ډیرۍ , W سره برابر دی ، توکي مو مخ ته پراته دي۰

له یوې څیرونې Fغبرګیزو د1 M په M2 باندې۰ دلته دې « د » او « په » ته پام وي)

وي دې: $D \subset M_1, W \subset M_2$

لکه په دویمه بیلګه کې ، نو د یوې څیره ونې F غبرګیزو له M1 په M2 کې (دلته دې

« په » او ,په کې » ته پام ور واړول شي)

وي دې : $D = M_1 \wedge W \subset M_2$

دلته د یوې څیره ونې غبرګیزو د1 M په M2 کې دلته دې دریمه بیلګه په پام کې راواړل شي۰

وي دې: $D \subset M_1 \wedge W = M_2$

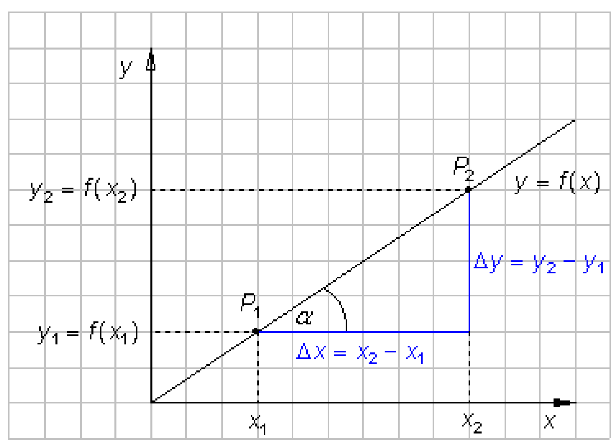
نو د یوې څیره ونې غبرګیزو له M1 په M2 باندې۰ دلته څلورمه بیلګه د بیلګې په توګه راوړو۰ د دې نیونې لاندې چې ټول ښوونکی ځانګړي ټولګیو ته درس ورکوي۰

يادونه : دا لاندې برخه دې ګران لوستونکي وګوري، خو د دې اوس وخت لپاره لږ ستونځمنه ده او شايد ځيرې هم رانه شي، خو که لږ د شميرپوهنې سره بلد شو، بيا پرې پوهيدل ساده دي. زه مخ ته لرم، چې په دې هکله ليکلى کتاب، چې چاپ شوى نه دى دلته پر ليکه کړم، چې هلته بيا دا موضوع لږ غزيدلې ده.

بيلګه ۲ . ۵ : موږ په هواره يا سطحه کې څرګند شوي کړى د ډيريځل RxR په ځير د برابرونونو له لارې رانيسو(R د رييلګنونو ډيرى د ګڼکرښې تکي دي(ګڼونه دې وکتل شي)).

الف) $y = 2x$ يوه ځيره ونه ده د R په R باندې ، ځکه چې باور لري

$$D=W=R$$

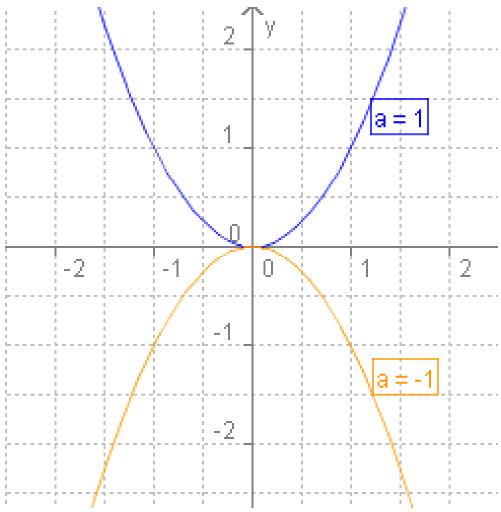


يادونه : په پورته ځيره کې برابرون $y = ax+b$ دى.

ب) $y = x^2$

يوه ځيره ونه ده د R په R کې ، ځکه چې باور لري

$$D = R \, , \; W = [0, \quad] \quad \infty$$



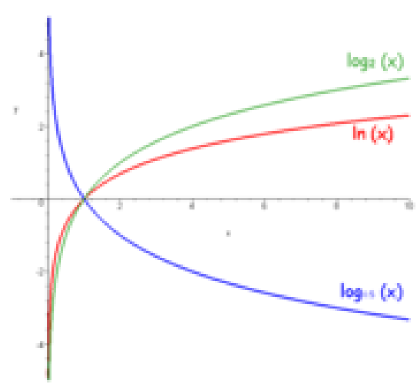
یادونه :

پوته بلواک د $x \mapsto ax^2 + bx + c$ ډول دی، چې $b = 0$, $c = 0$ او $a = 1$, $a = -1$ اینول شوي دي.

پ) $y = \log x$

یوه خیره ونه ده له R په R باندې » ځکه چې باور لري.

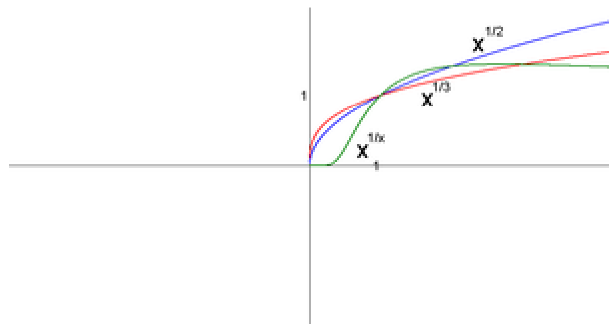
$D = (0, \infty) \wedge W = R$



ت) $y = +\sqrt{x}$

یوه څیرونه ده له R په R ، ځکه چې باور لري

$D = W[0, \infty]$



یادونه : پورته د دوبې ،دریمې او په x -مې رینښې په مانا دی

څیرې له ویکي څخه په مننه راکښنه شوي دي٠

پیژند ۲ ٠

یوه څیره ونه E یواځنی بلل کیږي٠ که هر $x \in D$ په ټیک یوه $y \in W$

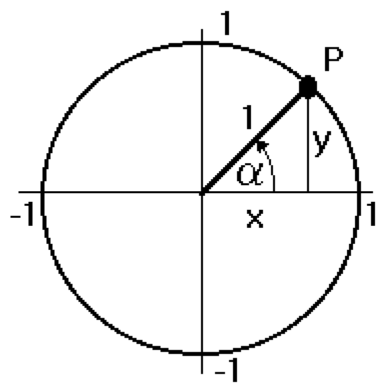
باندې څیره شي٠ دا په دې مانا، چې هر $x \in D$ ټیک یووار په $y \in W$

تنظیمدیرۍ یا جوړه ډیرۍ کې رامنځ ته کیږي٠ یوه یواځنی څیره ونه فنکشن

یا« بلواک» بلل کیږي او یا لکه تراوسه ورسره بلد یو یوه تابع بلل کیږي٠

پام:

دا دې دلته کره په ګوته شوې وي، چې زه « یوازنۍ څیره ونه » بلواک یا فنکشن بولم٠



بیلګه ۲ ۰ ٦ : په بیلګه ۲ ۰ ۵ کې له الف تر ت پورې ټولې څیروني فنکشنونه یا بلواک دی۰ د دې پر څنګ لاندې برابرون (یوونګردی یانې ګردی، چې وړانګه یې یو یوون یایووالی یا واحد وي څیره ۰) انځور شوې څیره ونه له R په R کې ([1,1-] (D=W فنکشن یا بلواک نه دی ، ځکه چې اصل دوه څیرې لري یانې که په تنظیمجوړه کې د څیره ونې لړي پرلپسې(لنډ:لړی) بدله شي، نو یوې پرڅټ څیره ونې ته راځو:

پیژند ۲ : څیره ونې F ته پرڅټ څیرونه F^{-1} د ټولو جوړو (x,y) ډیری ده له $(x,y) \in F$ سره ۰

پیژند ۳ ۰ یوه څیره ونه یویواځنی بلل کیږي، که یواځنیF او F^{-1} یوازنی څیروه ونې وي، دا په دې مانا، چې که هر $x \in D$ او $y \in W$ ټیک یو ځل په تنظیم کې منځ ته راشي۰

یادونه : د څیروني نوم څخه باید ونه ډار شو دا څیره ونې څیرې کووني (که څوک یو کالی یا رخت څیرېکوي)او څیره کووني توپیر، ځکه سره کیدی شي، چې هغه منځپانګه یې یو له بل توپیر لري۰ مونږ پښتو کې نږدې یو ډول لیکونکي ویونه (لغات) لرو، خو دا هغې منځپانګې له مخې توپیریږي۰
ډیری پوهنه د شمیرپوهنې سټه ده، نو په راتلونکې کې به یې نوره هم ژوره وڅیړو او همدا اوس هم نور ګران هیوادوال دې ته رابولم، چې له ما سره ګډ کار یا خپلواک دې کار ته ملا راوتړي۰

ما دا برخه غزولې، چې په خپل شووني وخت کې به ګرانو لوستونکو ته په ځانله توګه د یوه کتاب په څیر هم وړاندې شي.

۲ . ۵ تمرینونه

۱ – د لاندې ډېرئ یا سټ توکي د شمیرنې له لارې انځور کړئ

الف $\{x \mid x < 20$ او x لومړی عدد $\}$ (لوستل: د ټولو عددونو x ډېرئ یا سټ، چې x لومړنی عدد او $x < 20$ دئ).

ب- $\{x \mid x^2+x-6=0\}$

پ- $\{x \mid x > 0$ او $x^2+x-6=0\}$ دا په نوکانوکې ټول له کیڼ ښي لور ته لولو

ت) $\{x \mid x$ رییلګڼ او $x^2+1=0\}$ د ښه څه له ښي و کیڼي لور ته ولولی

۲ – د توکو x, y, z اړلرونوالی و ډیري M ته وڅیړئ !

الف) M د لمړنیو ګڼونو ډیرئ

$$x = 4, y = 5, z = 6$$

ب) M د لاندې مساواتو حلډیرئ (اوبیلډیرئ)

$$x^3 + x^2 - 6x = 0$$

$$x = 0, y = 2, z = 3$$

پ) M د ریشنلګڼونو ډیرئ چې په اینتروال $[-3, 3]$ کې پراته دي

$$x = -2, \quad y = \sqrt{2}, \quad z = 1/3$$

ت) M د رییلګڼونو ډیرئ چې په اینتروال $[-3, 3]$ کې پراته دي

$$x = -4, \quad y = \sqrt{2}, \quad z = 3$$

۳ – د لاندې ډیریو ترمنځ کومې اړیکې پرتې دي

الف) M_1 د ټول جفت ګڼونو ډیرئ

او M_2 د ټولو ټولګنونو ډیرۍ

ب) د ټولو مساواتو $x^2 + 2x - 3 = 0$, حلونو (اوبیو) ډیرۍ

$M_2 = \{ -3 , 1 \}$

پ) M_1 د ټولو ګنو ډیرۍ چي پر ۶ ویشل کیږي.

او M_2د ټولو ګنونو ډیرۍ چي په ۳ ویشل کیږي !

او M_3د ټولو ګنو ډیرۍ چي په ۱۲ ویشل کیږي !

۴ – د ډیرۍ $\{ a,u,t,o \}$ ټول برخډیري ورکړۍ !

۵ – د لاندې ډیریو څخه ټولنډیرۍ ، غوڅډیري او دواړه ثوډیري جوړ کړۍ !

الف) $M_1 = \{ k,a,m,e,l \}$, $M_2 = \{ m,a,u,l,t,i,e,r \}$

ب) $M_1 = \{ 2,4,6,.. \}$, $M_2 = \{ 3,6,9,.... \}$

پ) $M_1 = \{ x \mid x^2 + x +- 2 = 0 \}$, $M_2 = \{ x \mid x^2 - 3x + 2 = 0 \}$

۶ – د یوه ډیرۍ M او د تشډیري$\emptyset$ ټولنډیرۍ، غوڅډیرۍ او توپیرډیرۍ جوړ کړۍ !

۷ – د یوه ډیرۍ M او خپل همدې ډیرۍ ټولنډیرۍ ، غوڅډیرۍ او توپیرډیرۍ جوړ کړۍ !

۸ – وي دې $M_1 = \{ 4 , 8 , 12 \}$ $M_2 = \{ 3 , 6 , 8 \}$

$M_3 = \{ 0 , 2 , 4 , 6 \}$, $M_4 = \{ 6 , 12 , 18 \}$

جوړ کړۍ : $M = [(M_1 \cup M_2) \cap M_3] \setminus M_4$!

۹ – جوړ کړۍ

الف) $M_1 \cup (M_1 \cap M_2)$ پ) $M \setminus \emptyset$

ب) $M_1 \cap (M_1 \cup M_2)$ ت) $\emptyset \setminus M$

۱۰ – وي دې

$$M_1 \cup M_2 = \{1,2,3,4,5\},$$
$$M_1 \cap M_2 = 71,3,5\}$$
$$M_1 \setminus M_2 = \{2,4\}, M_1 \setminus M_2 = \varnothing$$

له دې پورته څخه M_1 او M_2 وټاکی !

۱۱ – وي دې

الف) $M_1 \cap M_2 = \varnothing$ ب) $M_1 \subset M_2$,

وټاکی: $M_1 \setminus M_2$!

۱۲ – وي دی M_1 , M_2 (د نیمواز) اینتروال تکي ډیري:

$$M_1 = \{-3, 3\}, M_2 = [1, 7]$$

وټاکی

الف) $M_1 \cup M_2$ ب) $M_1 \cap M_2$ پ) $M_1 \setminus M_2$

ت) $M_2 \setminus M_1$ ټ) $M_1 \times M_2$

۱۳ – وي دې $M_1 = \{1, 2, 3\}$, $M_2 = \{\{a, b\}$

الف) د $M_1 \times M_2$ ځل جوړ کړی

ددې لاندې ب) تر ت) برخی تمرین لپاره دې ۹ الف برخه وکتل شي.

ب) دا لاندې کوم ډول څیرونی دي

$$F_1 = \{(1,a),(1,b)\}$$
$$F_2 = \{(1,a),(3,a)\},$$
$$F_3 = \{(1,a),(2,b),(3,b)\},$$
$$F_4 = \{(1,a),(2,a),3,a)\},$$
$$F_5 = \{(1,a),(2b)\}$$

په ټولو حلونو (اوبیو) کی F_1 تر F_5 ورکړی .

پ) په څټ څیرونه ورکړی

ت) د څیرونو F_1 څخه تر F_5 پورې، کوم یواځنی او کوم حتی یویواځني دي ؟

۳ . دحقيقي اعدادو (-ګڼونو) سره د شميرلو بنسټيزې نښلونې

(ترني، كاروني يا عمليي)

۳ ۰ ۱ د اعدادو د سيستم جوړښت

۳ ۰ ۱ ۰ ۱ طبيعی اعداد يا -ګڼونه natürliche Zahlen

انسانانو له پخوا څخه اعدادو ته اړتيا درلوده۰ له دې امله يې پرمخ وديينه کې هڅې وکړې، چی له ډيری (سيټ) (د ليکنې په دننه کې ډيری پوهنه هم څيړلشوې)) سره داسې لارغوره کړي، چی دا ډيری تشريح کړای شي او د انسانانو او چاپيريال(طبيعت) د پرلپسې اخ او ډب په نتيجه کې د ګڼ يا عدد وی(کلمه يا لغات) راپيداشوی، چې د عدد يا ګڼ کليمې پربنسټ د رينتينو شيانو څرګند څومره والي (کميت)Quantitative ترلاسه کړي۰ د طبيعی اعداد و څخه په ګڼلو يا که غواړې شميرلو کې ګټه اخستل کيږي۰

۳ ۰ ۱ ۰ ۱ ۰ الف د طبيعي عددونو(پيدايښتي ګنونو) جوړښت

پيژند (تعريف)۳ ۰ ۱:

الف) ټول طبيعی اعداد د ډيری په څير يوه ټولګه جوړوي او د طبيعی اعدادو ډيری يا سټ په نامه ياديږي يا يې طبيعی اعداد بولو او په N او همداسې N° سره يې په نخښه کوو ۰

ډير پای طبيعي اعداد شته ، ځکه چې په هر طبيعی عدد پسی راتلونکی طبيعی عدد هم شته دی (يعنی په هرڅومره لوي طبيعی عدد پسی راتلونکی طبيعی عدد شته دی، چې دا وروسته روښانه کيږي)۰

ب) دطبيعي ګڼونو(اعدادو) اکسيوماتيکيAxiomatic جوړښت

اکسيوم جمله ده، چی اوبيونه (حل) نه غواړي او همداسی منل کيږي۰ دا چی جمله ، اکسيوم څه دي په لومړی برخه يانې سم اند (منطق) کې دې وکتل شي۰

طبيعی عدد کلمه د جيوسيپې پيانو(Giuseppe Peano له ۱۸۵۸ – ۱۹۲ ز۰کال) اکسيومونو پر بنسټ لاندې پيژند لري يا په لاندې توګه تعريف کيږي:

۱ – د صفر ګڼ يو پيدايښتي ګڼ دی

۲ - د هرطبيعي عدد يا ګڼ m لپاره يو يواځنی ټاکلی طبيعي عدد n شته، چې سملاسي(ترلی) د m پسی ګڼ دی، د کوم لپاره چی لرو: $m+1 = n = m^\wedge$

دلته $m^\wedge$ د m پسي سملاسې يا ترلی ګڼ يا عدد په ګوته کوي۰

۳ – هرطبيعي عدد زيات له زياته په يوه طبيعی عدد پسی سملاسي راتلونکی ګڼ دی۰

٤ – هیڅ طبیعي عدد نه شته، چې پسی راتلونکی پیدایښي عدد یې صفر وي٠

٥ – که طبیعي عددو ډیرۍ M صفر د توکي په څیر ولري او که له هر طبیعي عدد m سره د هغه پسی تړلی راتلونکی عدد یا ګڼ \`m هم د M توکی وي، نو M ټول

طبیعي عددونه خوندي لري یا په بل ډول » ټول طبیعي اعداد په کې ځاي دي٠

یادونه: ځني ادبیاتو کې، د پیانو سیستم کې، د صفر په ځای ۱ لیکل شوی. په دې حالت کې بیا صفر ته د طبیعي عدد یا ګڼ په څیر نه کتل کیږي. که بیا صفر ورسره مل کړو، نو د صفر سره طبیعي ا عدادو ډیرۍ یا –سټ یې د صفر سره بولو.

۱ . ۱ ب : د طبیعی اعدادو یا ګڼونو انځورونه او سیستمونه:

طبیعي اعداد په نخښو (دې ته په الماني کې Zifferوایي، چه همغه د صفر په معنا دی، خو دلته ترې مطلب، چې دا څیرو، دی) انځوریږي. د دې لپاره چې دا لړ ځای ونیسي، نو د لویو او وړو اعدادو لپاره نخښې له کوچنیو سره یوځای کیښول شوې دي. دا چې څرنګه یوه د عدد یا ګڼ نخښه له بل توپیریږي، په لاندې ډول یې د زیاتون یا جمعي سیستم او ځای سیستم کې ښایو.

په زیاتون سیستم کې هر بنسټیز ،،ځای،، یو ،، ځای ارزښت،، لري. د څیفرونو زیاتون د یو په بل کې د ورزیاتشوي بنسټیز څیفر پخپله هغه عدد یا ګڼ ورکوي. بیلګه یې په رومي ګڼونو کې راړو. دا له بنسټیزو څیفرونو جوړ شوی(ترې لاندې لسیز د اعدادو سیستم دی). زه دلته د ضرورت په بنسټ ټول ضروري څیفرونه چې موخه ترې عددونه دي، له پیل راوړم:

رومي عددونه:	M	D	C	L	X	V	I
عربي عددونه:	1000	500	100	50	10	5	1

طبیعي عدونه له دې امله یو د بل ترڅنګ لیکو چې کم ځای ونیسي لکه د بیلګې په توګه: CXX په دې معنا چې C+X+X

په رومي ګڼونو کې، که بنستیز کوچني ګڼنخښې لکه C , V , I د لوي ګڼنخښې و کیڼ لور ته ولیکل شي نو دا مانا لري چې دا کوچنی ګڼ له لوي ګڼ څخه کم شوی. د بیلګې په توګه: XC = C - X .

بیلګې: الف: MMDCCLXVIII په دې مانادی 2768

ب : MCMXXIX په دې مانا دی 1929

پ : CCCIV په دې مانا دی 304

ځایسیستم: په ځاي سیستم کې هره بنستیزه نخښه یو «ځاي ارزښت نخښه ارزښت» لري.

لکه : g– ئیز ځاي سیستم(پوزیشن سیستم ((Positionssystem)): د طبعي ګڼ n انځورونه په g– ئیزځای سیستم کې په دې ډول ده چې د یوه ورکړشوي ستې په بنسټ($g \in N$) $g \geq 2$ هر طبعي ګڼ n په لاندې ځانګړي ډول انځوریدلی شي:

$$n = a_k g^k + a_{k-1} g^{k-1} + \dots + a_1 g + a_0$$

دلته بنستیزې ګڼنخښې a_i، g د $i = 0,1,2,\dots,k$ او $k \geq 0$ د $0 \leq a_i \leq g-1$ چې $a_k \neq 0$ وي په کار راځي یا اړتیا ورته شته.

لیکلی شو :

$$n = a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0$$

که د بدلیدلو (د بل څه سره) امکانات رامنځ ته کیږي، نو بهتره به وي چې په

لاندې ډول وليکل شي

$$n = [a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0]_g$$

نن په ټوله نړۍ کې ګڼل په لسيز سيستم (ګڼځای ارزښت) باندې کيږي، چې تل داسې نه وه، لکه په افغانستان کې چې دا اوس هم د ډوډۍ پور لپاره په لرګي کرښه را کاږي، چې څو ډوډۍ واخستل شوې.

په لسيز سيستم کې ګڼځای «ارزښت» لري چې انځور شي، مګر په لرګي کې ځای ارزښت نه لري چې کرښه چيرته کښل شوې، هلته د پور کرښو له ګڼون يا تعداد څخه پور څرګنديږي.

بل د ګڼلو سيستم . لکه د مخه مو چې تر پام لاندې ونيوه، د ګڼلو رومي سيستم دی چې نن هم د ارزښت وړ دی او همدارنګه د مفهوم ډك، زياتونسيستم(جمعی –) څرګنديږي.

بيا هم غواړو چې دا په لاندې ډول ځانګړی کړو:

۱ – هره لاندې نخښه I, X, C کړای شي چې زيات ترزياته ۳ ځله(۳ واری) په يو ګڼ کی پرله پسی يا څنګ تر څنګ راشی

۲ – هره، د ګڼ نخښه V, L, M خورا زياته يو ځل څنګ تر څنګ په يوه ګڼ کی راتلی شي.

۳ – که بنسټيز نخښه I, X او يا ....__-- ددې نخښو د ارزښت نه لوړو ارزښت نخښو V, X, L, C, D يا M CXI تر مخ ځای په ځای شوې يا انځوروي نو د لوي ارزښت څخه کميږي .

زياتون او کمون (جمعه او منفي)

۴ – په هرګڼ انځورونږ(Zahlendarstellung) کی کیدی شي چې یواځې یو بستیز ګڼ تر مخ ځای په ځای یا انځور شي لکه: MXCVII = 1098 مګر نه IMIC
۵ – د یو ګڼ لپاره د امکان په حال باید کمی نخښې په کار واچول شي.

عربي ګنونه : دا ګنونه، چې موږ ورسره بلد یو، د لسیز سیستم ګنونه دي، چې عربی ګنونه بلل کیږي. دا د ګنلو لسیز سیستم عربو د هند څخه راوړی چې په دولسمه پیړۍ کې یې اروپا ته یو وړ. دا اصلي ګنونه له صفر (۰) تر ۹ پورې دي یا له 0 تر9 پورې، چې

خیفر ورته واي (همغه عربی صفر دی) چې دلته ترې بنستیز ګنونه پوهیدل کیږي.

لکه چې ګوته مو ورته ونیوه زیاتونسیستم نور ارزښت نه لري، څکه چې د یو ګڼ ارزښت د ګڼ نخښې زیاتون باندې انځور کیږي. د ځای سیستم سره د ګنونو انځورول ساده دي.

تعریف ۱ . ۱ ب : په یو «ځاي ارزښت سیستم» کی هغه ګڼ لوي دی چی زیات ځایونه ولري، که چیرې د ګڼ د ځایونو شمیر سره برابر وي(مساوي وي) نو هغه ګڼ ستر دی چی له کینی لورې یی نخښه لویه وي.

لسیز – یا لسګونی سیستم: لسیز سیستم هغه ځای ارزښت سیستم دی چي له انځورونی یی څرګندیږي. په لسیز سیستم کی د ګڼ انځورولو نخښې، لکه د مخه مو چی انځور کړې، ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹ دي. ۱۰ ګڼ د لسیز سیستم بنستیزه نخښه ده. دا چی نور ګنونه نه انځوریږي، نو ځای هلته ډک دی چی پرله پسی (ترتیب یانظم)
د ۰ تر ۹ یعنی له 0 تر 9 ګنونو پورې په ځای شوي وي.

په دې ډول د پسې جګ ځای یوون (واحد) د په کار اچول شووګڼنخښنو ګڼون (تعداد یا شمیر) دی، خموږ په حالت کی ۱۰ .

لکه چی د مخه مو ګوته ورته ونیوله، د پای (نه لایتناهی) ډیری (set , die Menge) ۹ –امه برخه دې وکتل شي)) غږو ګڼلو لپاره لاندې ګڼونه کفایت کوي: ۱، ۲، ۳، ۴، او داسی نور. ټولودې ګڼونو ته چی دصفرګڼ ورسره مل شي د طبعي ګڼونو ډیری N ویل کیږي. ددې لپاره لیکو :

$$N = \{ 0, 1, 2, . 3 . 4 , 5 , 6,....\} ; \qquad N^* = \{ 1, 2, 3, 4, ...\}$$

موږ ګڼونه په کوچنیو لاتینی ټکو یا حروفو ښایو لکه a ,b,c, ... n . دا ریښتوني

(ریښتینوالی یا واقعیت) چی n دې یو طبعي ګڼ وي، داسی لیکل کیږي $n \in N$ یا $n \in N^*$ (ویل کیږي چی: n د طبعي ګڼونوډیري N یا*N توکی دی(لنډ n د N یا *N ځخه دی)) په دې ځای کی دې دګڼ او ګڼځای (ځیفر) توپیر ته پام وي.

موږ دګڼونو ټاکلو لپاره بلد یا اشنا د نخښنډیري لسیز سیستم په کار اچوو (استعمالوو)

$$N_{10} = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,\}$$

د ګڼونو د نخښنو $a_i \in N_{10}$ پرله پسی، لکه د مخه مو چی په ګوته کړل، په لاندې ډول یو طبعي ګڼ انځوروي:

$$a_n\, a_{n-1}\, a_{n-2} \dots a_2\, a_1 a_0 = a_n.10^n + a_{n-1}10^{n-1} + a_{n-2}\, .10^{n-2} + ..+ a_2\, .10^2 + a_1.10 + a_0\, 10^0$$
$$a_i \in N.$$

ګڼونه په نورو ځیفرونو ډیري هم انځوریدی شي. د بیلګي په توګه په اینفورماتیك (Infrormatik) کی، چی د دوالسیستم (Dualsystem) (دوئیز سیستم) ځخه کار اخستل کیږي. ددې لپاره دوه ګڼنخښي (ځیفرونه) لیکل کیږي

$N = \{ 0,1 \}$

په لاندې جدول کې دلسيز او دوه ئيز سيستمونو لمړني ګڼونه يو د بل ترڅنګ کښل شوي:

دوه ئيز سيستم	لسيز سيستم
0	0
1	1
10	2
1 1	3
100	4

په ټوليزه توګه(عمومي توګه) دلته يو ځيفر پرلبسې(د عددون ترادف) $a_i \in N_2$ يو طبيعي عدد په لاندې ډول انځوروي،

$$a_n a_{n-1} \ldots\ldots a_2 a_1 a_0 = a_n.2^n + a_{n-1}.2^{n-1} + \ldots\ldots\ldots + a_2.2^2 + a_1.2^1 + a_0.2^0 \text{ , } a_i \in N$$

بیلګه ۱ . ۱ :

$$59 = 1.\ 32 + 1.16 + 1.8 + 0.4 + 1.2 + 1.1$$
$$= 1.2^5 + 1.2^4 + 1.\ 2^3 + 0.2^2 + 1.2^1 + 1.2^0 = 111011$$

يا دونه :: څه لنډ لنډيزونه

د طبيعي اعدادو ډيرى يا سټ داسى په نخښنه کوو:

د پيدايښتي يا طبيعى ګڼونو ډيرى $N = \{ 1, 2 , 3 , \ldots \}$

دپيدايښتي ګڼونو ډيرى د صفر سره $N^\circ = \{ 0, 1 , 2 , \ldots . \}$

ه کتابونو کی دا د صفر نخښنه په لاندې برخه کی راځي٠

۳ ٠ ۱ ٠ ب د طبیعي اعدادو یا ګڼونو انځورونه:

طبیعي اعداد په نخښنو انځورېږي٠ دا عددونه یا ګڼونه د ځان لپاره یو سیستم لري، چی هغه زیات یې موږ نه څیرو٠ زموږ لپاره غوره هغۀ عربی اعداد یا ګڼونه دی٠

یا په بل ډول : دا عددونه چی موږ ورسره بلد یو د لسیز ځایستسم عددونه دي، چی دا مو د مخه په ګوته کړل٠ دا کورونه (خوني یا خانې) لري او په هر کور کی له صفر تر ۹ ځاي نیوی شي او بیا یې هر ځاي یو ارزښت لري، له دې امله دا » ځاي ارزښت سیستم« دی٠ لومړي کور ته یویز، دوم ته لسیز، دریم ته سلیز او همداسی ، چی دا مو د مخه لږ روښانه کړي٠

انځورونه یا څیفرونه یې دي : ٠ ، ۱ ، ۲ ، ۳ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ۷ ، ۸ ، ۹ دا د بنسټیز ګڼونو نخښی دي، نور یې په کورونو یا ځایسیستم باندې روښانه کیدی شي٠

پیژند ۳ ٠ ۱ ٠ ب :

په یو» ځاي ارزښت سیستم « کې هغه ګڼ لوي دی، چی ډیر ځایونه ولري٠ که چیرې د ګڼ د ځایونو یا کورونو ګڼون (تعداد) سره برابر وي٠ نو بیا هغۀ ګڼ لوي دی، چی کینې لور یې ګڼنخښنه لویه وي٠

۳ ٠ ۱ ٠ پ : طبیعي اعدادو کې د شمیرنې بنسټیز قوانین

اوس په لاندې ډول د پیداینت ګڼونو، په ټولیزه توګه د رییل ګڼونو لپاره او وروسته د کمپلکسو ګڼونو لپاره هم باوري(معتبر) بنسټیز د شمیرنې قوانین وړاندې کوو:

الف : د انډول (نظم یا ترتیب یا لوي واړه ترتیب(Anordnung) بنسټیز قوانین:

که > ولرو، نو دې ننوتي کونج کی یا د نخښی خوله کی عدد یا ګڼ لوي دی او د وتلی کونج یا لوي کونج >که نخښه یا داسی کونجکی یا څټ یا ککره کې لیکل شوی عدد کوچنی دی۰ که ګڼونه یا اعداد ۱۵ او ۲۳ ولرو نو د لویواړه اړیکی داسی لیکو، یانې که 23 > 15 ولرو نو ترې څرګندیږي، چی عدد۱۵ له عدد ۲۳ کوچنی دی .

د دوه طبیعي اعدادو a اوb ترمنځ له لاندې اړیکو څخه ټیک یوه اړیکه باور لري»

$a < b \quad , a = b \quad , a > b$

۲ - ۲۱ =۲۱ که د ۲۱ په ځاي توری ولیکو هم a = a به وي اینه ونه یا هندارونه یا منعکسونه (ریفلیکسیویتي Reflexivity)

۳ – له a = b => (لاس ته راځي) b = a (سیومتري، انډول، ورته وابي (Symmetry

د انعکاسي (ایینه ونیز – یا هندارونیز) برابروالی یانی که چیري دا عددونه وراینه یا هنداره یا انعکاس شي، نو دواړه عددونه په دا بل لور بیرته سره برابر دي یا برابریږي۰ که انعکاسي(اینه ونیز)برابر نوم ورته کیږدو، نو هم مناسب به وي، خو موږ به یې همغه سیومتري وبولو۰

٤ - له a = b او b = c => (لاس ته راځی) a = c(ترانزیتیوTransitivity)

ترانزیتیو ګورو، چی یو له بل اړوند مانا ته نزدی دی، ځکه چی دا ګڼونه یو د بل سره په واکوالي تړلي یا له یو څخه وبل ته ځی یا وړل کیږي۰

۵ – له a < b اوb < c => (لاس ته راځی) یا a < c یا $a<b, b<c \Rightarrow a<c$

وړاندیز : که چیری دا پورته وي یا لغاتونه یا نومه ونی په همغه لاتین نومونو ولیکو ښه

به وي، خو له شميرپوهنی پرته مانا باندی يې هم پوهيدنه ښه او اړيينه ده۰

ب : د زياتون (جمع) Addition n. بنسټيز قوانين

كه چيرې له طبيعي اعدادو څخه يو ، دوه يا څو ګڼونه يو په بل زيات شي، نو يو پيدايښتي ګڼ ترې لاس ته راځی او دا كارونه(عمليه) «زياتون يت جمعه » بولو، ځكه، چې ګڼونه يو په بل زياتيږي۰

پيژند: د همغه ډول شيانو يا يو څه يو په بل زياتيدلو ته زياتون (جمع) وايو

كه عدد ۱۰ په عدد ۱۸ ورزيات كړو نوعدد ۲۸ ترې لاس ته راځی يا

۱۰ + ۱۸ = ۲۸

په پورته كې ۱۰ او ۱۸ يو پر بل زياتيږي، نو له دې امله يې «زياتېدونی» (ما تراوسه زياتووني بللي، خو فكر كوم،چې زياتيدوني يې ښه نومه ونه ده) بولي، ۱۰ + ۱۸ جمعه او ۲۸ « جمع ارزښت» بلل كيږي ۰ چې په هغه پخوانی نوم مو ورته حاصل جمع وايه ۰ + زياتوننخښه ده او = برابروننخښه (مساوات علامه) بولو

دجمعې يا زياتون بنسټيز قوانين

۱ - د دوه طبيعي اعدادو a او b لپاره تل يو زياتون (جمع) a + b شته دی

۲ - يواځنوالی : له a’ = a او b’ = b څخه لاس ته راځي: a’+b’ = a + b

۳ - COMMUTATIVE LAWكموتاتيو- يا بدلون قانون دی:a + b = b +a

۴ - assotiative law اسوشياتيو - سره ګډېدنې قانون. لرو
(a+b)+c=a+(b+c)=a+b+c

۵ - Monotony law مونوتوني – يا همغږيزوالي قانون :

له $a < b$ څخه لاس ته راځي $a+c < b+c$

يادونه : په $a+b=c$ کې a او b زياتېدوني $a+b$ زياتون او c زياتون ارزښت بلل کيږي

يادونه : په زياتون کې لاندی زياتونقوانين هم باوري دي:

ناپيلی توکی: په $N°$ کی يو توکی شته، چی که د هرپيدايښتي توکی سره په زياتون يا جمعه کی ور زيات شي همغه توکي ورکوي۰ دا توکی صفر دی: $a+0=a$

ناپيلی توکی کړی شو نالوريز وبولو،څکه،چې د کومې لور ګڼ باندې يې په زياتون کې بدلون نه راولی يا د زياتون ارزښت همغه پاتيږي، همداسې ناړونده او که بل څه مو په خوښه وي همغسې يې وبولی۰

پ : د کمون (تفريق)Subtraction بنستيز قوانين

پيژند:د پيدايښتي ګڼونو a او b لپاره، چې $a>b$ وي، يواځی يو x شته دی، د کوم لپاره ، چې باور لري: $a - b = x$

که $x= a -b$ شته وي، نو ټيک يواځني شته دي(موخه x دی)

نومه ونې: b کميدونی يا مفروق (تراوسه مې کمونی بللی) a ترې کمونی يا مفروق منه $a +b$ کمون او x کمون- يا تفريق ارزښت بلل کيږي يا بولو :

موږ پورته د لاتين تورو لپاره طبيعي اعدادونخښی ليکو، چی ساده يې ونوموو:

$$20 - 10 = 10$$

په پورته کی موږ له ۲۰ لس کم کړل، چی لاس ته راوړنه يې ۱۰ ده، نو له دی امله يې داسی نوموو:

تر مخ يادونه: په لاندې کې ع . د عربي په معنا دی

۲۰ «ترې کمونی »، ځکه، چی ترې کميږي(ع۰ مفروق منه)، ۱۰ «کموونی« يا کميدونی(ع۰ مفروق) دا بل لس يې «کمون ارزښت» يا د کمون لاس ته راوړنه(لنډ: لاس ته راوړنه يا کمون) (ع ۰ حاصل تفريق) ، – کموننخښه او = برابروننخښه ده۰

ت : د ځل (ضرب)Multiplication بنسټيز قوانين:

۱ - د دوه پيداينښتي ګڼونوa اوb لپاره د پيداينښتي ګڼونو په ډيری کې تل يو ځلa.b شته دی. د a.b لپاره داسې هم ليکوab په پورته کې aاوb ځلووني (ضريبونه) اوab=x « ځل ارزښت » يا ځل(حاصل ضرب) دی۰

وايي چی ضرب وهلو ته وايي او د جمع (که جمعې) لنډه طريقه، چی۰۰۰۰وي يا د زياتون لنډه لار ده۰ ګورو، چی دا پيژند، چی وهل او دربول دي زموږ لپاره دومره موخور نه دی او ځل د پښتو ښه نوم دی، چی له دربولو مو ځانونه راويستلي وي۰

که ووايو، چی : د کابل او جلالاباد ترمنځ لار ۱۵۰ کيلو متره ده۰ زمری له کابل څخه جلال اباد ته ۸ ځله لاړ، نو زمري به جلال اباد ته د تګ ټوله څومره لار وهلی وي؟

ليکو: ۱۵۰ × ۸ = ۱۲۰۰ ، نو زمري به ټوله ۱۲۰۰ کيلو متره لار وهلي وي۰ ګورو، چی د ځل نومونه د ضرب لپاره ښه او اسانه ده، ځکه چی پښتو ده او له ضريبونو څخه به هم ځلوونی اسان وي، به ۰۰۰وي نه، بلکی اسان دي۰

۲ - له $a = a´$ او $b = b´$ څخه لاس ته راځي $a´b´ = ab$ (يواځيتوب)

۳ - لرو $ab = ba$ کموتاتيو – يا د بدلون قانون

٤ - لرو $(ab)c = a(bc)$ د ګډولو- اسوشیاتیو قانون

٥ – لرو $(a+b)c = ac + bc$ د ویشوني- یا دیستریبوتیو قانون Distributive law

٦ - له $a < b$ او $c > 0$ لاسته راځي $ac < bc$

جګتیتوالي یا یوغږیزوالي قانون Monotony

ټ – د ویش بنسټیز قانون Division

پیژند۳ ۰ ۲ :

که د دوه طبیعي عددونو a او b لپاره، چې $a \neq b$ او $a \neq 0$ وي یانی صفر نه وي یو طبیعي عدد x شته، چی برابرون (مساوات) $ax = b$ پوره کړي، نو

$x = \frac{b}{a}$ یا b/a د b او a ویش (تقسیم) بلل کیږي، چې ماتګې(کسر) یې هم بولو

١ – که $a / b = x$ یا $x = \frac{a}{b} = a/b$ شته یا موجود وي ، نو یواځنی شته دی(یواځني په دې مانا، چې بل ګڼ x نه شته او یواځې همدا ګڼ x دی)

نومه ونې : په پورته برابرون کې a/b وېش x ویش ارزښت، b ویشونی یا ویشه وونی دی، ځکه چی په یوڅه ویشل کیږي او a پرویشونی بلل کیږي، ځکه، چی څه پر ویشل کیږي یا مقسوم، مقسوم علیه یا قاسم ، حاصل تقسیم ۰

ګورو چی له قاسم یا مقسوم او همداسی د مقسوم علیه او حاصل تقسیم څخه مو دا د پښتو نومه ونی پر- یا پرې ویشونی ، ویشه ونی اوویش ارزښت یا لاس ته راوړنه ساده او زر پوهوړ دي، خو په خواشینی به وه وایم، چی تراوسه په شمیرپوهنه کی ورسره نابلد یو ۰

که ۱۲ کتابچې پر څلورو زده کوونکو وویشو، نو هر یوه ته درې کتابچې رسیږي. ګورو، چې ۱۲ په یو څه ویشلکیږي، نو ویشونی یې ښه نوم دی. دا ۱۲ په څلور ویشل کیږي پر ۰۰۰ ویشل کیږي، نو له دې امله څلور پر ویشونی بولو، درې یې لاس ته راوړنه ده لکه چې تراوسه مو ورته حاصل تقسیم وایه، له دې امله ورته ویش ارزښت وایو او دا کارونه یا عملیه خو ویش بلل شوی.

۳ . ۱ . ۲ ټولګنونه یا تام اعداد INTEGERs

د دووو طبیعي عددونوa او bکمون یا تفریق (x= b-a) ټیک او ټیک هلته یا هلته او هلته د طبیعي عددونو ډیری یا سټ کی شته، چې وي : $a \le b$

د شمیرپوهنې نخښنو باندې داسې لیکل کیږي:

$$x = b - a \Leftrightarrow a \le b$$

انګریزي یې if and only if ټیک او ټیک هلته یا هلته او هلته(دا شننه یا وینه پورته د شمیرپوهنې نخښې ته ده).

که هغې نخښې ته وګورو، نو هم لاندې ترې څرګندیږي، له ښی لور کیڼ لاس ته راځی او په څټ(برعکس) له کیڼ لور ښی لاس ته راځی. یا که۰۰۰ وي، نو ۰۰۰ لاس ته راځی او په څټ.

ټولګنونه یا تام اعداد هم د انسانانو د اړتیاو پر بنسټ منځ ته راغلي ، یا منځ ته راوړل شوي.که چیرې سپین د خړ ۱۰۰ افغانیپوروړی وي او سپین ورته اتیا افغانۍ ورکړي، نو سپین بیا هم شل افغانی پوروړی پاتیږي، دا په دی ما، چې ۸۰ + ۱۰۰ - = ۲۰ - ۰ ګورو، چی ۲۰ – یو پیداینتي ګڼ یا طبیعي عدد نه دی.یا 80 – 100 = -20

په هغه حالت کی، چی کموونی (مفروق) له ترېکموني(مفروق منه) څخه لوی وي، نو لاس ته راوړنه یې طبیعي عدد نه دی. اوس یوه د اعدادو بلې ډیری پیژند ته اړ کیږو، چی هغه د ټولګڼونوډیری ده او دا د طبیعي عددونو او د طبیعي عددونو کمي(منفي) او صفر سره یوځاي کوو، چی ټولنه جوړوي(په ډیری کۀ به روښانه شي)، هغه څه، چې له دې ټولنې لاس ته راځي هغه د ټولګڼونو ډیری ده او داسې یې لیکو:

$$Z = N \cup -N \cup 0$$
$$Z = \{ \ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \ldots \}$$

د دې لپاره، چې ترې کمونی د کمېدونی کوچنی وي ، نو پیدایښتي ګڼونه په کمګڼونو غزوو یا پراخوو، دا په دې مانا، چی د پیدایښتي ګڼونو مخنخښه په کموننخښه یا منفي نخښه باندې سنبالوویاني (کیدی شي زموږ هیوادوال د څڼ نخښی په نامه ورسره بلدوي، خو هره نخښه، چې د ګڼ زیاتی یا کمی ښایي د ګڼ کیڼ لور ته لیکل کیږي، چې دا ما مخنخښه لیکلې او بللی

هغه په برخه ۳ ۰ ۱ ۰ ۱ کې ورکړ شوي شمیرقوانین په Z کې هم باور لري

د ټولګڼونوډیری

$$Z = \{ \ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots \}$$

د مخه مو شمیرقوانین، چې د پیدایښتي ګڼونو لپاره ورکړل، هغۀ د ټولګڼونو لپاره هم باور لري

د کمون یا تفریق بنسټقوانین (پسی یا دوام):

۲ - د هرو دوو ټولګڼونو یا تام اعدادو a او b لپاره یو ټولګڼ x=b-a شته، د کوم لپاره، چی a+x=b برابرون باوري دی

د ویش تیوري:

۳ ۰ ۱ ۰ ۲ الف د ویش قاعدې ، لارې یا خویونه

د طبیعي عددونولپاره د نورو قاعدو ترڅنګ ، چې د لومړنیو ګڼونو د ټوټه ونې یا تجز یي لپاره خورا ګټور دی باور لري

الف) یو ګڼ په ۲ (٤ ، ٨ ، ١٦) ویشونی دی، که د اخر ځیفر یا کور (له اخره(موخه تری ښی لور دی) دوه ، درې ، څلور ۰۰۰ بنستیزو ځیفرونو) څخه جوړ ګڼ په ۲ (٤ ، ٨ ، ١٦ ۰۰۰ویشونی وي) په دوه ویشونی ګڼ جوړه (جفت) نومیږي او بل ډول یی ناجوړه(طاق) بلل کیږي۰ ګورو، چی دلته هم په جوړې او ناجوړه ښه پوهیدلی شو

ب) یو ګڼ په ٥ (٢٥ ، ١٢٥ ، ٦٢٥ ، ۰۰) ویشونی دی، که د اخر(له ښي لور) بنستیز ځیفر (د اخر دوه، درې ، څلور ، ۰۰۰ بنستیز ځیفرونو) جوړ ګڼونه په ٥ (٢٥، ١٢٥ ، ٦٢٥ ۰۰۰) ویشوني وي

یادونه : په لاتین کی هغه، چی ښي لور ته وي هغه ته اخر وایي او موږ یې شاید لومړی وبولو۰ زه کوښښ کوم، چې دا پوهوړ ولیکم، خو بیا دې هم ګران لوستونکی تری ټیک ناپوهیدنه ماته وبخښي او مشوری دې راکړي۰

پ) یو ګڼ په ۳ همداسی ۹ ویشونی دی ، که د ګڼ پروت زیاتون پر دې ګڼونو ویشونی وي۰

د یوه ګڼ پروت زیاتون لاندې د هغه ګڼ بنستیز ه ګڼونخښو(ځیفرونو) زیاتون پوهیږو، بی له دې، چې د هغه ځاي ارزښت په پام کې ونیول شي۰

بیلګۀ : د 126 پروت زیاتون یا پرته جمعه ده: 1+2+6=9

ت) یو ګڼ په 11 ویشونی دی که د هغه ګڼ الترنیري(نخښه بدلونکی) پروت زیاتون۰ پر 11 ویشونی وي۰

الترنيري پروت زياتون، چې پروت کمون هم ورته وايي له بنستيزو ځيفرونو ۱ ، ۳ ، ۵ زياتون ځخه د ۲ ، ٤ ، ٦ ،۰۰۰ زياتون کمون پوهيږو ، بی له دې، چی ځاي ارزښت يي په پام کی ونيول شي يا په بل ډول، که د ناجوړه کوږ زياتون ځخه د جوړه د زياتون کم کړو۰

بيلکه: ۱۷۳۸ په ۱۱ ويشوني دي، ځکه، چې : ۱۵= ۸+ ۷ او ٤ - = ۳ – ۱ -، چی الترنيري زياتون يانی ۱۱ = ٤ – ۱۵ يې په ۱۱ ويشونی دی۰

ټ) يو ګڼ پ ه ۳۷ وېشوړ دی که (د ګڼ له اخر ځخه جړړشوي) د درېګوني ګڼونو زياتون پر ۳۷ وېشونی وي.

بيلکه:

37|(448+352+216+20)⇔ 37|1036 ځکه چې 37| 20216352448

ث) يو ګڼ په ۷ همداسې په ۱۳ ويشوړ دی، که د هغه (د ګڼ له لخ ځخه جوړ) درېګونی الترنيري زياتون پر ۷ همداسې پر ۱۳ وېشونی وي.

بيلکې : 7 | 37604 ځکه چې 7 | 567 ⇔(604-37)|7

13 | 9679293889 ځکه ، چې 13|1209 ⇔ (889-293+709-96) |13

ج) يو ګڼ په ۱۰۱ وېشونی دی، که (د ګڼ له اخر ځخه جړشوی) دوهګونی الترنيري زياتون په ۱۰۱ وېشونی وي.

بيلکه:

101|7930630669 ځکه چې 101|202 ⇔(69-06+63-03+79)|101

يادونه : که پيداښتي ګڼونه a او b ولرواو ولرو a : b ، نو a پر b وېشو، که وېش

ارزښت يې هر ګڼ وي او که پېداښتي ګڼونه a او b ولرو او ولرو b|a ، نو دا په دې مانه، چې ګڼ b ګڼ a ويشي بې له پاتې ياني ګڼ a په ګڼ b وېشوړ دی.

۳ ۰ ۱ ۰ ۲ټ) خوراغټ ګډ پرويشونی او خورا کوچنی ګډ زياتځله

يا بزرگترين قاسم مشترک و کوچکترين مضرب مشترک(ذو الاضعافالاقل)

Great common divisor and small common multiple

ددې لپاره، چې دا په سرليک کې ورکړ شوي څه ښه و پېژندلی شو ، داسې مخ ته ځو:

لاندې ګڼونه دې ورکړ شوي وي، سملاسي يې په لومړنيو ګڼونو تو‌ټه کوو

$$260 = 2.130=2.2.65=2.2.5.13 = 2^2.5.13$$

$$468=2.234=2.2.117=2.2.3.39=2.2.3.3.13=2^2.3^2.13$$

له پورته دواړو ګڼونو د لومړنيوګڼونو ځله وونو هر يوه څخه هغه لومړنی ګڼ رانيسو او سره ځله وو بې، چې په دواړو ګڼونو کې ګډ وي او توان(په خپل ځای کې دې وکتل شي) يا جګګڼ بې ټيټ يا کم وي . ياني

$$22.13 = 2.26 = 52$$

دا پورته لاس ته راوړی ګڼ ياني ۵۲ پورته دواړه ګڼونه وېشي ياني د دواړو ګڼونو پروېشونی

دی او خورا غټ پروېشونی هم دی. ياني ۵۲ خورا غټ او ددواړو ګډ پروېشونی دی.

لنډ : ۵۲ د پورته ګڼونو خورا غټ ګډ پروېشونی دئ.

داسې ګڼ , خوراغټ ګډ پروېشونی, بولو (لنډ ونه يې : غ ګ و)

هغه ګڼ، چې د دوه يا ډېرو ګڼونو ګډ پروشونی او خورا غټ هم وي، نو دې ګڼ ته خورا,,

غټ ګډ پروېشونی ,, (لنډونه: غ ګ و) وايو. يا

(Greatest commom divisor(g c d)بزرګترين عامل (مقسوم عليه) مشترک)

اوس بيا داسې مخ ته ځو:

په پورته کې هغه د دواړو ګڼونو لومړني ځله ووني، له هر څخه يو چې په جګ توان وي

يانې خورا غټ جګګڼ ولري ، هغه د جګ توان رابېلوو او بيا يې سره خله وو، چې لاس ته

ترې راځي: $2^2.3^2.5.13=2340$

دا پورته ګڼ يانې ۲۳۴۰ د دواړو ورکړ شوو ګڼونو ګډ زياتځله دئ (يانې ګډ په دواړو

وېشل کيږي) او دا خورا کوچنی ګڼ هم دئ. دا په دې مانا،چې له دې ګڼ بل کوچنی ګڼ نه

شته، چې د پورته ګڼونو دواړو ګډ زياتځله(څو برابره) وي.:

لنډ : خورا کوچنی ګڼ دی. د دواړوګڼونو (يانې ګډ) زياتځله (ګډ څو واره) دئ

لنډ يې : خورا کوچنی ګډ زياتځله (لنډونه يې: خ ګ ځ) يا
(Least common multiple(l.c.m.)کوچکترين مضرب مشترک يا ذوالاضعاف الاقل)

ګران هیوادوال دې ورته پام وکړي، چې کوم نوم به زموږ لپاره زر یا بیخي پوهوړ او ساده وي.

وریپسي داسي مخ ته ځو:

دا چې موږ په پیدایښت یا طبیعي ګڼونو کې له شمیرلو سره بلد شو ، نو په لاندې ډول پیژند ورکوو:

پیژند(تعریف)۳ ۰ ۳ :

a او b دې ټولګڼونه وي۰ وایو چې « ګڼ a ګڼ bویشي» (او یا هم a د bپرویشونې دئ او یا همa د b څو برابره (زیاتځله) دئ) که یو ټولګڼ u شته یا موجود وي او دا باوري کړيau=b ددې لپاره لیکوa|b (وایو، چې ګڼ aګڼ b ویشي ، خو اړیین یا ضرور نه ده، چې کلمه ګڼ ورسره وویل شي۰

که a د bپرویشونی نه وي، نو د دې لپاره لیکوa|/b(دا نخښنه /| دې د نه ویشونی لپاره ومنل شي)

بیا لیکو، چی : پیدایښتي ګڼونه، چی په ۲ ویشل کیږي جوړه (جفت) ګڼونه بلل کیږي او که نه نو ناجوړه (طاق) ګڼونه بلل کیږي۰ د صفر ګڼ د پیدایښتي ګڼونو په ډیری کې یو ځانګړی حالت لري۰

په لاندې جمله کې بې له ښوونې یا اوبیونې د دې ویشکلمی لپاره یو څو ساده شمیرقاعدې را یوځای کوو، چې په راتلونکې کې ترې کار اخستل کیږي۰

جمله ۳ ۰ ۱ :

د په خوښه یا زړه پورې ټولګڼونو a,b,c,d لپاره باوري دي:

(۱) 1 $\pm$ او a$\pm$ ویش (دا په نامه « ساده» پرویشوني دي)

(۲) د ۱ پرويشونی ۱ او ۱ - دي

(۳) تل باور لري، چې $0 \mid a$ او $a \mid 0$ يواځی په هغه حالت کې باور لري، چې $a = 0$ وي

(٤) له $a|b$ او $b|c \Rightarrow a|c$

(٥) له $a|b$ لاس ته راځي: $ac|bc$ ۰که $c \neq 0$ وي ، نو د دې په څټ هم باوري

دي۰ دا په دې مانا چې، که $ac|bc$ وي، نو$a|b$ هم باور لري۰د ګڼونو

ليکدود له مخې، که نړيوالجال ته پورته شو داسې ليکو، که نه دا پورته بسيا

کوي: $c \neq 0, a \mid b \Rightarrow ac \mid bc$

(٦) له$a|b$ او $c|d$ څخه لاس ته راځي او په څټ $ac| bd$ لنده ليکنه يې(که ن
ج ته پورته شوه): $a \mid b, c \mid d \Leftrightarrow ac \mid bd$

(۷) له $a \mid b$ او $b| a$ لاس ته راځي $a = \pm b$

(۸) له $a \mid b$ او$a|c$ څخه لاس ته راځي $a|(bx+cy)$ د ټولو ټولګڼونو x او y لپار

(۹) تيک هلته $a|b$ کله چی وي$|b|$ $|$ $|a|$،

(۱۰) که $a \mid b$ او $b = 0$ نه وي نو باوري دي $- | b| < a < |b|$

حل (اوبی) : (۱) له $a1 = (-a)(-1) = a$ لاس ته راځي
(۲) له $a0 = 0$ لرو $a \mid 0$. که وي $0 \mid a$, نو يو ټولګڼ u شته د کوم لپاره چی وي $0u = a$
او له کومی چی لاس ته راځي $a = 0$.
(۳) ساده دی.

(۴) كه $a \mid b$ او $b \mid c$, نو تولگنونه u او v د $au = b, bv = c$ سره موجود دی . له دې لاس ته راځي $c = bv = a(uv)$ ، پس $a \mid c$.

(۵) كه $a|b$ ، پس يو تولګڼ u د $au = b$ سره موجود دی، او هم د $(ac)u = bc$ سره، د كوم څخه چې لاس ته راځي $ac \mid bc$. د $c \neq 0$ لپاره دا اخرڅخير په څټ كيدی هم شي.

(۶) د $a|b$, $c|d$ او (۵) څخه لاس ته راځي چې $ac|bc$ او $bc|bd$ ، د (۴) له مخې $ac \mid bd$.

(۷) د $a \mid b$ اوه $b \mid a$ څخه د تولګنونو u او v موجوديت لاس ته راځي د $au = b$ او $bv = a$ سره. برسيره پر دې لاس ته راځي $a(uv) = a$, پس $a=0$ يا $u=v=\pm1$. په لمړي حالت كې د $a \mid b$ له امله $b = 0$, پس $a = b$. په دوم حالت كې $a = \pm b$ دی.

(۸) د تولګنونو u , v لپاره دې $au = b$ او $av = c$ ، نو له دې $a(ux+vy)=bx+cy$ لاس ته راځي، پس $a \mid (bx+cy)$ د تولو تولګنونو x او y لپاره.

(۹) وي دې $a|b$. له $a \mid b$ ، $a| \mid |a|$ او $|b| \mid b$ څخه او د (۴) څو واره استعمال څخه لاس ته راځي، چې $|a| \mid |b|$. په څټ: كه $|a| \mid |b|$ باورلري، نو د $a \mid |a|$ ، $|a| \mid |b|$ او $|b| \mid b$ څخه په ورته ډول لاس ته راځي $a \mid b$.

(۱۰) دی $a \mid b$ ، پس د (۹) هم $|a| \mid |b|$. كه $b \neq 0$ وي ، پس يو طبعي ګڼ u لاس ته راځي د $|a|u = |b|$ سره، له كوم چې $|a| \leq |b|$ لاس ته راځي.

كه $b|a$ د تولګنونو a,b لپاره د $b \neq 0$ سره، نو يو يواځنی معلوم ګڼ q شته (د a او همداسی د b «كومپليمنټ پرويشونی» بلل كيږي)، چې لرو $a = bq$.

په تېليزه توګه لاندې جمله باور لري

جمله ۳ ۰ ۲ (د ویش الګوریتم): a او b دې ټولګنونه وي۰ د $b \neq 0$ سره ۰ نو یواځني ټاکلي، په پاى پلونو(قدمونو) کى شمیرلکیدونکي ټولګنونه q او r (چې د a پر b ویش

څخه لاس ته راځي او «ویش» په همدې ډول « پاتى بلل کیږي، شته دي،د کومو لپاره چې باور لري: $a = bq + r \quad \wedge \quad |0| \leq r < b$

هر یو ټولګڼ کم له کمه ساده پرویشونى لري یعنى ± 1 او پخپله د دې ټولګڼ زیاتیز(مثبت) او کمیز(منفي)۰ دې پرویشؤنو ته «سادهٔ پرویشونى» وایو۰

پیژند ۳ ۰ ب :

هر یو ټولګڼ، چې یواځی او یواځي ساده پرویشونى ولري موږ ورته لومړنى ګنونه وایو او دا لومړنى یا پریم ګنونهPrimzahlen په pسره په نخښه کوو، چې دا پریم یا لومړى ګڼ د پیدایښتي ګنونوتوکى دي۰

هریو ټولګڼ، چې لومړنى ګڼ نه وي د لومړنیو ګنونو په څلونو(څله وونو)(ضریبونو) ټوټه یا تجزیه کیدى شي۰

بیلګى :

$240 = 24 . 10 = 3 . 8 . 2 . 5 = 2 . 2 . 2 . 2 . 3 . 5 = 2^4 \cdot 3 . 5$ - 1

$2310 = 2 . 1155 = 2 . 3 . 385 = 2 . 3 . 5 . 77 = 2 . 3 . 5 . 7 . 11$ -2

$3750 = 25 . 15 . 10 = 5 . 5 . 3 . 5 . 2 . 5 = 2 . 3 . 5^4$

که پورته بیلګو ته په ځیر شو نو په ۱ او ۳ راغلو ګنونو کى ګڼ ۲ د دواړو پر ویشونى دئ او همدا ډول ۳ هم د دواړوګنونو پرویشونى دئ یانى $2.3 = 6$ برسیره پردې ګڼ ۵ هم نو $2.3.5 = 30$ دواړه ګنونه ویشي او شاید په دې ګنونو کى یو خورا غټ ګډ پرویشونى هم وي۰

په پورته درېواړو بيلګو کې ۲ ، ۳ ، ۵ د ځلوونو په څير خوندي دي يانې دا ګڼونه ويش، چې له دې امله ګڼ ۳۰ د درجواړو ګڼونو غ۰ګ۰پ دی

پيژند ۳ ۰ پ :

a او b دې ټولګڼونه وي او d دې يو مثبت يا زياتونی ټولګڼ وي، د کومو لپاره، چې باور لري:

$$(1) d \mid a \wedge d \mid b$$
$$(2) t \mid a \wedge t \mid b \Rightarrow t \mid d$$

پس d د a او b خورا غټ ګډ پرويشونی(غ۰ګ۰پ) بلل کيږي d لپاره داسی ليکو:

$$d = (a,b)$$

نو d خورا غټ ګډ پرويشونی(لنډ: غ۰ګ۰پ) بلل کيږي۰

که باوري وي: $(a,b) = 1$ نو a او b پروېش پردي بلل کيږي يانې له ۱ پرته بل داسې ګڼ نه شته، چې دواړه ګڼونه پر وويشل شي.

يادونه : په زياتو ادبياتو کې لنډونه په درېتورو کيږي، خو که غواړی دا خورا غټ ګډ پرويشونی داسې رالنډوو : خ غ ګ پ

يادونه: ما د خورا غټ ګډ پرويشونی لپاره دا پورته درې توکي غوره کړي، که ګران لوستونکي بل وړانديز لري، نو زه يې ضرور په پام کی په پوره خوښی نيسم۰ دې دوه کلمو ته په فارسي ادبياتو کې بزرګترين قاسم مشترک او کوچکتريب مضرب مشترک وايي او ذوالاضعاف الاقل يې هم بولي۰

يادونه : که چيرې d او d^* دواړه د a او b غ ګ پ وي، نو له پورته پيژند څخه لاس ته راځي

چی $d \mid d^*$ او $d^* \mid d$ ، نو د $d \geq 0$, d^* له امله لرو $d^* = d$

لاندې جمله په وښايي ، چې داسي غ ګ و تل شته دی

جمله ۳ ۰ ۳ :
په خوښه تولګنونو a او b لپاره دې غ ګ پ d شته وي، نو تولګنونه x او y شته د کومو لپار، چې لرو: $d = ax + by$

حل(اوبي): که $a = b = 0$ وي ، نو 0 د a او b غ ګ و دی، نور ساده دی. د a او b د ممکنه بدلون (په پام کی دې وي چې د (a , b) تعریف په a او b کی سیومتریك دی) له امله اجازه لرو چې $b \neq 0$ ونیسو.
موږ اوس رکورسیف (rekursiv (دا په دې مانا چې د مخه غړي څخه وروستی یعني وریسی غړی لاس ته راوړلکیږي)
تولګنونه......., r_{-1}, r_0, r_1, r_2...... او .... q_1, q_2 په لاندې ډول تعریفوو : وي دې , $r_{-1} = a$
$r_0 = b$ د $i \geq 1$ او $r_{i-1} \neq 0$ لپاره تولګنونه q_i , r_i داسی تعینوو چی $r_{i-2} = q_i r_{i-1} + r_i$

او $|r_{i-1}| > r_i \geq o$ کوم چې له جملې (۱ . ۳) څخه ممکن کیدی شي . باید یو نه منفي ګڼ n ورکړ شوی وي، د کوم لپاره چی لرو $r_n \neq 0$ مګر $r_{n+1} = 0$, چی بی له دې بیا یوه نه پای د طبعي ګڼونو لویدونکی یا کمیدونکی پرلپسی لاس ته راځي، کوم چې ناشونی(ناممکن) دی. دامو اوس ددې لاندې مساواتو شیما ته لارښودوي

$$a = q_1 b + r_1$$

$$b = q_2 r_1 + r_2$$

....

....

$$r_{n-2} = q_n r_{n-1} + r_n$$

$$r_{n-1} = q_{n+1} r_n$$

که دا مساوات د ښکته پورته وويل شي، نو په ترتيب (يو په بل پسې) لاس ته راځي:

$$r_n \mid r_{n-1} , r_n \mid r_{n-2} , \dots r_n \mid b , r_n \mid a$$

دا په دې مانا چې r_n د a او b يو غ ګ و دی. t دې د a او b يو بل غ ګ و وي، نو په دې حالت کې که دا پورته مساوات له پورته ښکته ولولو، نو يو په بل پسې لرو

$$t \mid r_0 , t \mid r_1 , t \mid r_2 , \dots , t \mid r_{n-1} , t \mid r_n$$

دا په دې مانا چې $\mid r \mid$ د a اوb غ ګ و دی.

هر د دې ګڼونو r_iد ($-1 \le i \le n$) سره، په ځانګړي ډول r_n او ددې سره (a , b) يو د a او b لايني کمبينيشن دی ، په لاندې ډول $au + bv$, چې u او v تولګڼونه دي.

د $r_{-1} = a$

او $b = r_0$ لپاره ساده دی. که د يوه i لپاره د $1 \le i \le n$ سره، که يو د a او b يو لايني کمبينشن ښوونه د r_{i-1} او r_{i-2} لپاره همدا سم د لاسه پيداشوي وي، نوله $r_{i-2} = q_i r_{i-1} + r_i$ څخه د يوې داسې r_i د ځاي په ځاي کولو له لارې هم ، چې په دې ډول د ايندکشن له لارې غوښتنه لاس ته راځي. (پای)

يادونه : د غ ګ پ د ښووني متود ، چې پورته او په لاندې بيلګه کې راوړل شي د اويکليد الګوريتم"Euklid Algorithmus„ د يوې ګڼيزې دندې يا کارونې (عمليې) شيماتيکي اوبيونې(حل) متود په نامه ياديږي، نو له دې سرهx او y هم له a څخه

$d = ax + by$ اکسپليځيتExplizit (لاتين: څرګند، واضح، روښانه) شميرل کيدی شي٠

بيلګه:

غوښتنه (1764 , 2124) = d ٠ د اويکليد الګوريتم کارونې له لارې لرو:

$$2124 = 1 \cdot 1764 + 360$$

$$1764 = 4.360 + 323$$

$$360 = 1.324 + 36$$

$$324 = 9.36$$

$$=> d=36$$

که پورته وګورو نو   غ ک پ $d = 36$ دئ

د دې لپاره ، چې d له x او y سره په $d = ax+by$ ډول انځور کړی شو، نو په لاندې توګه مخ ته ځو:

$$36 = 360 - 1.324 = 360 - 1(1764 - 4.360) = (-1).1764 + 5.360$$

$$= (-1) . 1764 + 5.(2124 - 1764) = 2124 . 5 + 1764.(-6)$$

د پورته څخه د a او b لپاره لاندې مهمه پېژند نخښه يا نخښونه لاس ته راځي

يادونه : ماته دا لاندې جملې ښه ښکارېږي، چې ګرانو لوستونکو ته يې ښي له اوبيونې

وړاندې کړم، دا جملې په خته کې د ګڼونوتيوري دنده ده، چې په ګڼونتيوري کې بيا د ښوونې سره ښوول کيږي۰

جمله۳ ۰ ۹ :

a او b دې ټولګڼونه وي. د a او b يو ګډ پرويشونی $t \geq 0$ هلته او هلته د a او b ګ غ پ دئ کله چې دا شکل $t = ax + by$ د a او b ټولګڼونو سره انځور کړاي شو۰ په ځانګړي ډول a او b هلته او هلته ويشپردي دي، که ټولګڼونه x او y شته وي د کومو لپاره چې باور لر:

$$ax + by = 1$$

اوبیونه : د شرایطو ضرورت سم د لاسه له ۳ ړ ۶ څخه لاس ته راځي. دا چې شرایط پوره کېدونکي هم دي، له دې لاس ته راځي، چې هر د او پروېشوني د پروېشوني هم دي..

څو جملې په لاندې کې روړو، څنونتېري پورې اړه لر او دلته یې نه ښایو.

جمله : ۱۰ . ۳

a اوb دې ټولګنونه وي۰ د a اوb هر ګډ پرویشونی $t \geq 0$ لپاره باور لري:

$$(a/t,b/t) = (a,b) / t$$

په ځانګړي توګه t د a او b یو ګډ پرویشونی هلته اوهلته غ ګ پ دئ چې باور ولري

$$(a/t,b/t) = 1$$

لیما۳ ۰ ۱۱(جمله ګئ)(اویکلید): په خوښه ټولګنونو aاوb اوc لپاره باور لري

له $a|bc$ او $(a,b) = 1$ لاس ته راځي $a|c$

تعریف۲ ت : $a_1 , a_2 , ... a_n$ دې ټولګنونه وي $(n \geq 1)$, او d دې یو نه منفي ټولګڼ وي د کوم لپاره چې باور لري :

لمړی : $d \mid a_i$ د ټولو n ,....., $i = 1$ لپاره

ب : له $t \mid a_i$ څخه د ټولو n ,....., $i = 1$ لپاره لاس ته راځي $t \mid d$.

نو d د $a_1,...., a_n$ غ ګ و بلل کیږي او د d لپاره هم داسې لیکو $(a_1 , ... , a_n)$.

د a_n , ... , a_1 لپاره د داسی غ ګ و پواختتوب په ۲ . ۵ کی کتل کیدی شي او د موجودیت لپاره یې لرو :

جمله ۲ . ۱۳ : د خوښي تولګنونو a_n , ... , a_1 لپاره ($n \geq 1$) غ ګ و موجود او d د a_n , ... , a_1 خطي (لاینې) کمبینیشن دی دا په دې مانا چې

$$d = a_1x_1 + \ldots + a_nx_n$$

د مناسبو تولګنونو x_n , ... , x_1 لپاره.

یادونه : له دې بیا لاس ته راوړل کیدی شي:

$$(a_1 , ... , a_n) = ((a_1 ,..., a_{n-1}), a_n)$$

د په خوښه تولګنونو a_n ,..., a_1 د ($n \geq 1$) لپاره. سړی کړی شي چې د a_1,...,a_n غ ګ و پل په پل د اویکلید الګوریتموس له لارې پیدا کړي، چې دلته یې د اوبی یا حل ښخه تیریږو.

د اوبی یا حل لپاره یې د n په لور د پوره ایندکشن ښخه کار اخستل کیږي چې په ۸ –امه برخه کې ښیړل شوی دی.

بیلګې:

۱ - ګنونه 240 او 3750 غ ګ پ $30 = 2.3.5$ لري

۲ – لرو 408 او 748

$$408 = 2^3.3.17, 748 = 2^2.11.17$$

پس غ ګ پ دی: 17 . 2<2> = (408,748) یا دا لاندې که ن ج پورته شول

$$(408,748) = 2^2.17 = 68$$

۳ – پ غ ګ پ د ګڼونو او غ ګ پ 6 = (30.66.114) دی، ځکه، چې
30 = 2.3.5

او 66 = 2.3.11 او 114 = 2.3.19 دي

٤ – ګڼونه 54 او 65 ګډ پرویشونی نه لري دا موږ پرویشپردی بولو، ځکه، چې دي:

65 = 5.13 /\ 54 = 2.3.3.3

خورا کوچنی ګډ زیاتځلی(کوچکترین مضرب مشترک)

موږ په لاندې کې د خورا کوچني ګډ زیاتځله (لنډ: ک ګ ز) کلیمې په ځیرنه پیل کو۰ دا کلمه و غ ګ پ یوه دوه ییزه یا دوه ګونی یا غبرګه (دوال Dual) کلمه ده، موږ په لاندې ډول سملاسي تولیز پیژند ورکوو

تعریف۲ . ټ : $a_1 ,....., a_n$ دي ($n \geq 2$) ټولګڼونه وي، او v دې یو داسې نه منفي تولګڼ وي، د کوم لپاره چې باور لري:

الف – $a_i \mid v$ د $i = 1 ,, ... , n$ لپاره

ب – له $a_i \mid w$ څخه د $i = 1 , ... , n$ لپاره لاس ته راځي $v \mid w$.

نو v د $a_1 , ... , a_n$ کوچنی ګډ زیاتځله (لنډ : ك ګ ځ) بلل کیږي او داسې یې لیکو:

$$v = [a_1 , ... , a_n]$$

پیژند (د دوه ګڼونو لپاره)

a او b دې تولګڼونه وي او v دې یو داسې نه کمیز یا نه منفی تولګڼ وي، د کوم لپاره، چې باور لري:

(۱) $v|a$ او $v|b$

(۲) له $a|w$ او $b|w$ څخه لاس ته راځی $v | w$

نو v د a او b خورا کوچنی ګډ زیاتځله (لنډ» ک ګ ز او که غواړی خ ک ګ ز) بلل کیږي او په لاندې توګه یې لیکو

$$v = [a,b]$$

جمله :

په خوښه تولګڼونو $a,b,c,\ldots,n$ لپاره ک ګ ز شته دئ او دا یواځنی دئ

$$[a,b,c,\ldots,n]$$

یادونه: موږ لاندې مساوات هم د مختلفو جملو او د هغو له حلونولاس ته راوړو:

دتولګڼونو ($n \geq 3$) $a_1, \ldots a_n$ لپاره لرو $[a_1,\ldots,a_n] = [[a_1,\ldots,a_{n-1}], a_n]$

او هم $|a_1a_2| = [a_1, a_2](a_1, a_2)$

لاس ته راوړنې (داهم په همدې مانا مګر د جملی په څیر دی): د په خوښه تولګڼونو a, b, c لپاره باور لري: له $a | c$, $b | c$ او $(a,b) = 1$ څخه لاس ته راوړو $ab | c$

د ګڼتیوري بنسټیزه جمله:

پیژنده :

یو ټولګڼ$n > 1$ لومړی ګڼ (prime number) بلل کیږي، که له ساده پرویشونv بل پرویشونی ونه لري٠

لومړي ګڼونه لاندې غوه خویونه لري.:

لیما (لکه کوچنی جمله): که p یولمړی ګڼ وي او$p \mid a_1 \dots a_n$ د ټولګڼونو $a_1, \dots, a_n$ لپاره. نو $p \mid a_i$ د کم له کمه یوه i د $1 \leq i \leq n$ سره.
حل (اوبی): حل یی د ایندوکشن له لارې صورت نیسی، چی ددې لپاره باید ۸ - امه برخه کتل شوي وي.
د $n = 1$ لپاره ښوونه ساده ده . اوس دې $n > 1$ وي او لیما دې $n-1$ لپاره سملاسي باور ولري. نو لرو $p \mid a_n$ ، په بل ډول بیا له $p \nmid a_n$ څخه لاس ته راځی چې $(p, a_n) = 1$ دې . له مختنه تیرې جملی لاس ته راځي، چې که $p \mid a_1 \dots a_{n-1}$ وي ، نو داسې دی $p \mid a_i$ د یو i لپاره چې $1 \leq i \leq n-1$ وي د ایندکشن د نیونې په بستې.

د لومړنیو ګڼونو غوره والی د « ګڼونتیوري بنسټیزی جملې» څخه لاس ته راځي

جلمه (د ګڼونتیوري بنسټیزه جمله):

هر یو پیداینتي (طبیعي) ګڼ ،د ګڼونو تر تیب پورې، په یواځني او یواځني (یویواځنی (له دې کلمو څخه موخه داده، چې دا په یواځی یو ډول لیکل کیدی شي او بس٠ کیدی شي د ګڼونو پروتځاي بدل وي، خو ضریبونه همغه دي)) ډول د لومړنیو ګڼونو ځل په څیر لیکل کیدی شي٠

اوبی : ښوونه د n په لور ایندکشن له لارې مخ ته بیایو (برخه ۸ دې ودې کتل شي)
د $n = 1$ لپاره باور لري، که، لکه معمول ، 1 د طبیعي ګڼونو د تش(خالي) ځل په څیر تعریف کړو. له دې امله دې $n > 1$ وي او جمله دې د ټولو طبیعي ګڼونو $< n$ لپاره ښوول

شوي وي. موږ اوس تول د n پروپشونی $t > 1$ په نظر کي نيسو. کم له کمه يو داسی ګڼ شته لکه n . که p د دې پروپشونو کوچنی پروپشونی وي، نو p لمړی ګڼ دی. په بل ډول به نو بيا p يو پروپشونی q لرودی د $1 < q < p$ سره، او دا چی q د n پروپشونی وي، نو دا به د p تعريف رد کړي. دا چی $n / p < n$ د ايندونکشن نيوني په بنسټ $\frac{n}{p}$ د لمړي ګڼونو د څل په ځير ليکل کيدی نو په همدې ډول پخپله n هم.

وي دې $n = p_1p_2..p_r = p'_1p'_2...p'_s$ د n دوه ډوله د لمړيوګڼونو د څل په ځيرليکنه . له $p_1 \mid p'_1...p'_s$ اوس لاس ته راځي $p_1 \mid p'_i$ د يو i د $1 \le i \le s$ سره . د نمرې بدلولو له لارې دې وي $p_1 \mid p'_1$. داچي بيا $p_1 = p'_1$ باور لري، نو لاس ته راځي $p_2...p_r = p'_2....p'_s$ ، له کومو چی د ايدکشن له نيونی لرو $r - 1 = s - 1$ ، پس $r = s$ او (او د ترتيب بدلون) هم $p_i = p'_i$ له $2 \le i \le r$ لاس ته راځي .

پای.

د بنسټيزي جملی د ګټور استعمال لپاره لاندې جمله ده

> **جمله** : هر طبعی ګڼ n په تيك يو ډول په لاندې فورم انځوريدلی شي
> $n = \prod_p p^{\nu_p}$ (لپاره) p يواځي د پای ډيرو $\nu_p = 0$ (دې ν_p) (ν نيول شتګير)
> چيرته چی p ټولو طبعي ګڼونو کې په جګيدونکې لړۍ پرلپسې کې ځغلي.

يادونه: د عملي شميرنې لپاره په هغو ګڼونو چې جګ يې صفر وي تيريدل کيدی شي، لکه : $n = 28 , n = 2^2.7$ د $n = 2^2 . 3^0 . 5^0 . 7$ لپاره
لاس ته راوړنې : $(a,b) = 1$ او $(a , bc) = 1$، نو هم $(a , bc) = 1$ ،د په خوښه ټولګڼونو a , b , c لپاره

اوبی یا حل : نیولی دې وي چې $(a , bc) > 1$ ، نو بیا به یو لمړنی ګڼ p موجود وي د p/a او p / bc سره، د لیما ۲ . ۲ له مخې به یې باور لرودی p/b یا p/c داد $(a,b)=(a,c)=1$ سره تضاد دی.

جمله : a او b دې له صفر مختلف ګنونه وي او $|a| = \prod_p p^{\alpha_p}$ او $|b| = \prod_p p^{\beta_p}$ د دوي مطلقه ارزښتونو لمړی فاکتورتجزیه د ۲ . ۴ له مخې ، نو $a \mid b$ هلته او هلته باور لري که د ټولو لمړي ګنونو p لپاره باور ولري $\alpha_p \leq \beta_p$

لاس ته راوړنې : وي دې a او b له 0 مختلف ګنونه، $|a|=\prod_p p^{\alpha_p}$ همداسی $|b|=\prod_p p^{\beta_p}$ دې د مطلقه ارزښتونو لمړني فاکتورتوټونه(تجزیه) وي. نو باور لري

$$(a,b) =\prod_p p^{\min(\alpha_p, \beta_p)} , [a,b] = \prod_p p^{\max(\alpha_p, \beta_p)}$$

چیرته چې $\min(\alpha_p, \beta_p)$ د دواړو ګنونو α_p او β_p خوراکوچنی او $\max(\alpha_p, \beta_p)$ خورا لوي په ګوته کوي.

بیلګه : $a = 2124 = 2^2.3^2.59$ او $b = -1764 = -2^2.3^2.7^2$ نو لرو $(a,b)=2^2.3^2 = 36$ او $[a,b] = 2^2.3^2.7^2.59 = 104076$

یادونه : د لاس ته راوړنې ۲ څخه سم د لاسه له دوو څخه زیاتو ټولګنونوباندې غ ګ و او ك ګ ز هم استعمالیدی شي.

یو څو په لمړیو ګنونو اړونده پرابلومونو دې پوښتنو ته چې ایا ناپای زیات لمړي ګنونه موجود دي که نه اویکلید لخوا ځواب ورکړ شوی. لاندې یو ښکلي ځواب دی چې له هغه رینبه نیسي:

لاس ته راوړني : وي دې a اوb له 0 مختلف ګنونه، $|a|=\prod_p p^{\alpha_p}$ همداسې $|b|=\prod_p p^{\beta_p}$ دې د مطلقه ارزښتونو لمړني فاکتورونه (تجزیه) وي. نو باور لري

$$(a,b)=\prod_p p^{\min(\alpha_p,\beta_p)} , [a,b]=\prod_p p^{\max(\alpha_p,\beta_p)}$$

چیرته چې $\min(\alpha_p,\beta_p)$ د دواړو ګنونو α_p او β_p خوراکوچنی او $\max(\alpha_p,\beta_p)$ خورا لوي په ګوته کوي.

بیلګه : $a = 2124 = 2^2.3^2.59$ او $b = -1764 = -2^2.3^2.7^2$ نو لرو $(a,b)=2^2.3^2 = 36$
او $[a,b] = 2^2.3^2.7^2.59 = 104076$

یادونه : د لاس ته راوړنې ۲ ځخه سم د لاسه له دوو څخه زیاتو تولګنونوباندې غ ګ و او ك ګ ز هم استعمالیدی شي.

یو څو په لمړیو ګنونو اړونده پرابلومونو دې پوښتنو ته چې ایا ناپای زیات لمړي ګنونه موجود دي که نه اویکلید لخوا ځواب ورکړ شوی. لاندې یو ښکلي ځواب دی چې له هغه رینښه نیسي:

جمله: ناپاي ډیر لومړني ګنونه شته.

حل(اوبی) : موږ جمله ناسیده یا ناسمه ښایو (۸ –امه برخه دې وکتل شي) او نیسو چې پایډیر لمړی ګنونه $p_1 , p_2 , p_3 , ...,p_r$ موجود دي. ګڼ $N = p_1p_2...p_r+1$ له 1 لوي دی او له دې امله په یوه لمړي ګڼ p ویشونکی دی. د نیونی له مخی لرو $p = p_i$ د $1 \leq i \leq r$ سره . د $P|N$ او $p | p_1p_2....p_r$ له امله لاس ته راځي $p |1$.کوم چې ناشونی دی (ناممکن) له دې امله باید ناپای زیات لمړي ګنونه موجود وي.

یادونه : د میلاد څخه پخوا د « اریتوتنس غلبیل» متود څرګندوو، چې موږ د 1 او 100 ترمنځ د لمړي ګڼونو معلومول دځې متود له لارې په لاندې توګه څرګند وو

~~1~~ 2 3 ~~4~~ 5 ~~6~~ 7 ~~8~~ ~~9~~ ~~10~~ 11 ~~12~~ 13 ~~14~~
~~15~~ ~~16~~ 17 ~~18~~ 19 ~~20~~ ~~21~~ ~~22~~ 23 ~~24~~
~~25~~ ~~26~~ ~~27~~ ~~28~~ 29 ~~30~~ 31 ~~32~~ ~~33~~ ~~34~~ ~~35~~ ~~36~~
37 ~~38~~ ~~39~~ ~~40~~ 41 ~~42~~ 43 ~~44~~ ~~45~~ ~~46~~ 47 ~~48~~ ~~49~~ ~~50~~
~~51~~ ~~52~~ 53 ~~54~~ ~~55~~ ~~56~~ 57 ~~58~~ 59 ~~60~~ 61 ~~62~~ ~~63~~ ~~64~~
~~65~~ ~~66~~ 67 ~~68~~ ~~69~~ ~~70~~ 71 ~~72~~ 73 ~~74~~ ~~75~~ ~~76~~ ~~77~~
~~78~~ 79 ~~80~~ ~~81~~ ~~82~~ 83 ~~84~~ ~~85~~ ~~86~~ ~~87~~ ~~88~~ 89 ~~90~~ ~~91~~
~~92~~ ~~93~~ ~~94~~ ~~95~~ ~~96~~ 97 ~~98~~ ~~99~~ ~~100~~

۳ . ۱ . ۲ - راشنل ګڼونه Rational Nnumbers

(لاتین: عاقلانه یا هوښیار اعداد یا ګڼونه)

د افغانستان په دري ادبیاتو کې داسې ګڼونه او ایراشنلګڼونه کله ناطق د ګونګ اوداسې نورو ګڼونو په نامه یا دیږي، کله یې ماتګڼونه بللي، خوزه دا ښه بولم، چې دا همداسې یانې راشنلګڼونه وبلل شي، که څوک یې هوښیار ګڼونه بولی هم خوښه یی او یا مات ګڼونه ، خو دلته راځیو Ratio nهوښیار په معنا نه بلکه د نسبي په معنا دی٠

یادونه : که / ولرو یانې که ولرو a / b نو دا په دې مانا، چېa په b ویشل کیږي٠ که ولرو$\neq$ نود نابرابروننخښه ده٠ دا په دې مانا، چې b له 0 سره برابره نه ده٠ د دوه ګڼونود a او b ویش $x = b / a$ د تولګڼونو په ډیری کې تل هلته شته دی، چې a د b تولګنیز څو ځله وي٠

د دې لپاره، چې بیا هم ویش$a : b$ (دلته هم b پر a ویشل کیږي) کیدونی شي» سره له دې، چې ویش تل په تولګنونوکی پیژند نه لري یا تعریف نه دی یا صورت نه نیسي« باید د تولګنونو ډیری ماتګنونو(کسر) ډیری‌ته پراخه شي، چې د لومړي ځل لپاره افاده یا وینه b/a سومبولیک مانا لري، د نوو ګنونو په څیر نیسو او په تولګنونو یې ور زیاتوو، نو هغهٔ ګنونه، چې لاس ته راځی موږ ورته راشنلګنونه وایو ۰ دلته دا راشنل ګڼ د جوړې په څیر ورکړ شوی دی

cb / ca هلته باور لري، چې$c \neq 0$ دتولګڼ او$a |b$ د ماتګڼ په څیر ورکړ شوي وي

د راشنلګنونو ډیری، چې په Q سره ښایو د تولګنونو ماتګنو b/a چې $a \neq 0$ اوa او b د تولګنونو له ډیری وي، د تولګنونوپراخوالی دی او تول د مخه تیر بنستیز قوانین په کې باور لري او د ویش بنستیز قانون ته داسې پراخیدلی شي

ټ : د ویش(تقسیم) بنستیز قانون(دوام)

۲ - د دوه راشنل ګنونوa ، $a \neq 0$ او b لپاره یواځنی راشنل ګڼ $x = b/a$ شته دی، چې برابرون یا مساوات$ax = b$ پوره کوي

راشنل ګنونه هم د ورځنیو اړتیاو پر بنسټ منځ ته راغلی

بیلګه :

که شپږ منه غنم په دولسو تنو وویشو، نو د هر تن نیم من غنم راسیږي، چې دا نیم یې

راشنلګڼ دی، یاني $6 : 12 = 1 / 2 = 1 : 2$ یا $\frac{1}{2}$

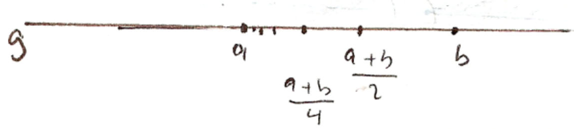
دا باید په ګوته کړو، چې راشنل ګنونه د پای یا ناپای لسمیز ګڼ په څیر لیکل کیدی شي

۳ ۰ ۱ ۰ ٤ - رييل ګڼونه(Real numbers (reele Zahlen

(فرانسوي: په رينتوني شته يا موجود)

د ريښنلګڼ په بنسټ هغه ورځني تيوريکی اړتياوي چی د شميرعمليو بی بنديزه (نامحدود) په کار اچولو يا استعمال ته موجود وي حل يا اوبی شوې او همدارنګه عملي اړتياوي چی اندازه کولو ته موجود وي هم حل شوې وي.

د ريښنلګڼ له لارې کيدی شي چی د کرښی اوږدوالی ټيك ورکړ شي يا په همدې مانا : په هرڅومره وړوکی ګڼونکرښه انتروال کی هم ناپای زيات ګڼونه، چی په ټکو يا نقطو انځور شوي، پراته دي.



ګڼونکرښه چه ضرورا کرښی کيدی شی

د ټولو دې امکاناتو سره سره هم بيا په يوه کرښه کی هر ټکی د ريښنلګڼ په ذريعه نه شي ښودل کيدی يا په بل عبارت د کرښی هر ټکی د ريښنلګڼ په مانا نه دی . دا ګڼونه چی د «ايريښنلګڼونو»په نامه ياديږي، کيدی شي د يوه پريوديکي (periodische) (د ګڼونو کړی نه شليږي) ناپای لسيزمات له لارې وښوول شي.

د بيلګي په توګه د مربع د نيمي (قطر) x اندازه چی د مربع يو اړخ ۱ وي نه شي کيدی چي په ريښنلګڼ وښوول شي. د پيتاګوراس د جملی په بنسټ د x لپاره لاندې مساوات لرو : $x^2 = 1^2 + 1^2$, پس $x = \sqrt{2}$

د رییلګڼ کلیمه یوه ژوره کلیمه ده چې د پوهیدلو لپاره یې «پولی» (لیمس lim) ته اړتیا موجود ده چې په ۱۸ –امه برخه کی به تر څیړنی لاندې ونیول شي.

ډیر اینتروالبندیدل چې په همغه یوه ټکی راځرځي مساوي(ورته) ارزښته (Äquivalent لاتین :مساوي ارزښته) لیدل کیږي

رییلګڼډیری R چې په ریشنلګڼډیري د ایریشنلګڼډیري ورزیاتول دي چې له ۲ . ۱ . ۱ . ۱ تر ۲ . ۱ . ۳ برخی پورې ټول بسټزقوانین په کی باور لري. د رییلګڼ له لارې دکرښی ټول ټکي په بر کی نیول کیدی شي. په دې ډول رییلګڼونه ټولی د شمیرلو او اندازه کولو اړتیاوې پوره کوي.

ګورو چې $x^2 + 1 = 0$ د رییلګڼ حل یا اوبی نه لري. دلته د دې ګڼونو پراخوالي ته اړتیا پیښیږي چې کمپلکسګڼونو ته پراخ شي، او په ۵ –امه برخه کی به تر څیړنی لاندې ونیول شي.

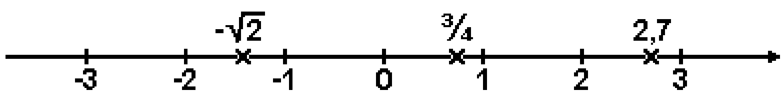
یا دا لاندې په لنډه توګه:

مورږ ګڼونه یا اعداد لرو، چې هغه راشنل ګڼونه نه دي یانی که مورږ د ۲ ګڼ ریښه(جذر) ونیسو، نو داسی یو ګڼ لاس ته راځي، چې هغه په لسمیزه توګه پاي ته نه شي رسیدی یانی پریودیکی (تل بیرته راګرځیدونی یا پسی نور هم پراخیدونی) دي. داسی ګڼونو ته ایراشنل ګڼونه وایو.

تل بیرته راګرځیدنیز (periodi(cal تل بیرته راګرځیدوني ,Period د ګڼونو ځنځیر نه شلیږي

ایراشنل – یا نانسبي عددونه یاګڼونه Irational numbers

د راشنل او ایراشنل ګڼونوټولنی ته رییل ګڼونه وایو(دا چې ټولنه څه شی دی، په ډیری پوهنه یا سیټتیوري کې به ولوستل شي) . ۰ موږ د ګڼونو د ښوولو لپاره لاندې ګڼونکرښه باسو په کومه کې چې له صفر سره پیداېښتي-، ټول- راشنل-،اراشنل ګڼونه کښل شوي دي یانې ریل ګڼونکرښه



۳ ۰ ۲ - رابیلشوی(له نورو -) د شمیر قواعد

په دې برخه کې د رییل ګڼونو لپاره رابیل شوي قوانین څیړو، چې د مخه تیرو قواعدو باندې ولاړ دي۰ دلته درانده ټکی دا لاندې دي:

- په رییلګڼونو کی څلور بنسټیز شمیرډولونه په ځانګړي توګه په لاندې ډول د نوکانو افادی (وییني) سره شمیرنه (نوکان اینسوول)۰ له زیاتون ګډ فاکتورونه یا ځلووني له نوکانو راوستل، د بینومیال فرمولونه۰

- پر صفر ویشنه د ناشونوالی په پام کی ساتنه

- له ماتو (کسرونو) سره شمیرل او په ځانګړي توګه لنډول (واړه کول) پراخول یا غزول او د اصلي ګډ ماتلاندي (مخرج المشترک) جوړول۰ د داسی ماتلاندی(مخرج) چې له ټاکلو او ناټاکلو ترمونو څخه جوړ وي۰

نوموني: کسر ته مات وایو او صورت او مخرج ته موږ ماتباندې او ماتلاندې وایو، چې سملاسي یې په مانا هم پوهیږو۰

۳ ۰ ۲ ۰ ۱ ـ جمعه او تفريق (زياتون او كمون)

د زياتون او كمون بنستيزو قوانينو څخه لاندې لاس ته راځي

$$-(-a) = a\ ,\ .\quad a - b = a + (-b),$$

$$(a+b+c\ \dots -c-d-\dots)+(e+f+\dots -g-h-\dots) = a+b+\dots -c-d-\dots +e+f+\dots -g-h-\dots$$

دا دا مانا لري، چې كه چيرې د نوكانو دباندې زياتوننخښه (د جمع علامه) وي، نو د نوكانو څخه ويستلو كې ګڼ خپله مخنخښه نه بدلوي۰ كه د نوكانو د باندی كموننخښه (منفي نخښه) وي، نو د ګڼونو له نوكانو ايستلو په حال كی د نوكانو دننه نخښی بدليږي۰ يانی كموننخښه زياتوننخښه او زياتوننخښه كموننخښه كيږي۰ بيلګه يې لاندې ګورو

$$(a+b+\dots -c-d-\dots)-(e+f+\dots -g-h-..)= a+b+\dots -c-d-\dots\dots -e-f-\dots\dots +g+h+\dots$$

په همدې ترتيب كيدی شي نوكان هم ځاي پرځای شي۰

دلته بايد مطلق ارزښت هم په ګوته شي ، چې په ګڼكرښه د صفر څخه د يوه رييلګڼ واټن په ګوته كوي،

د كوم لپاره چی ليكو :

مطلق عدد يا - ګڼ يا بي اړيكو ګڼ (absolut number)

دا په دې مانا، چې د دې ګڼ سره زياتيزه او كميزه نخښه يا مثبت او منفي نه ليكل كيږي يا يون(واحد) هم ورسره نه وي، دا ټيک او ټيک يو ګڼ ښايج او بس۰

$$|a| = a\ ;\ a > 0$$

a| = 0 ; a = 0

| a| = -a ; < 0

یانې که a زیاتیزه یا مثبت وي،نو a پخپله لیکواو که a کمیزه یا منفي وي، نو a- لیکواو که a صفر وي نو د هغه لپاره 0 لیکو

۳ ۰ ۲ ۰ ۲ ځل(ضرب)

د ځل لپاره لاندې د مخنخښی قوانین باور لري:

$$(+a)(+b) = +ab, (+a)(-b) = -ab , (-a)(-b) = + ab, (-a)(+b) = -ab$$

که چیرته ډیر نوکبندونه راګرځیدلی وي، نو دا د ځل قانون پل په پل پر مخ ځی

بیلګه:

$$(a+b)(c-d)(e-f-g) = (ac - ad + bc - bd)(e-f-g)$$

$$= (ace-acf-acg-ade+adf+adg + bce-bcf-bcg-bde-)bdf+bdg$$

د ځانګړي حالت په توګه د بینوم پیژندل شوی فرمولونه راوړو:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a + b)(a-b) = a^2 - b^2$$

ګران لوستونکی کولی شي، چې پورته فرمولونه وښايي، چې تيک دي.

دا په لاندې ډول کارولکيږي :

بېلګه ۱ . ۳ :

$$4a^2 + 12ab + 9b^2 = (2a + 3b)^2 .$$

$$a^2x^2 - 2abxy + b^2y^2 = (ax - by)^2 = (by - ax)^2.$$

$$16u^2 - 2v^2 = (4u + 2\ v)(4u - 2\ v)$$

۳ ۰ ۲ ۰ ۳ ويش

په پام دې کې ولرو، چې b:a د a = 0 لپاره کوم مفهوم نه لري۰ پر صفر ويش ناشونی دی

په ويش کی نوکبندول د زياتون، کمون او ځل په څير ساده نه کيږي۰ په ويش کی د زياتون په ډول ليکل شوی هر توکی په ماتلاندې ويشل کيږي:

بېلګه ۳ ۰ ٤ :

$$(3a^2b - 6ab^2 + 12\ abc) : 3ab = a - 2b + 4c$$

يا داسې

$$\frac{3a^2b}{3ab} - \frac{6ab^2}{3ab} + \frac{12abc}{3ab} = a - 2b + 4c$$

د $ab \neq 0$ لپاره

دي لاس ته راوړني(نتیجي) ته سړی د ګډو څلوونو یا فاکتورونو یا خپلواکنوک څخه وتلو له لارې هم رسیدلی شي:

$$3a^2b - 6ab^2 + 12\,abc = 3ab(\,a - 2b + 4c)$$

له دې ځایه کیدی شي، چې د بولینوم وېش بیل شي

بیلګه ۳ . ۵ :

$$(3a^2b - 6ab^2 + 5c) : 3ab = a - 2b \;\; \text{Rest} \;\; 5c \;\; \text{باقي} \;\; \Leftrightarrow$$

$$\frac{3a^2b}{3ab} - \frac{6ab^2}{3ab} + \frac{5c}{3ab} = a - 2b + \frac{5c}{3ab} \;\; \text{لپاره} \;\; ab \neq 0,$$

د یوه زیاتو یا چمعي وېش په یوه چمعه، کیدی شي د بینوم جکلي له لارې صورت ونیسي

بیلګه ۳ . ۶ : $(a^2 + 2ab + b^2) : (a + b) = a + b \quad \frac{(a+b)^2}{a+b} = a + b$ لپاره $a \neq -b.$

بیلګه ۳ . ۷ : $(a^2 - b^2) : (a + b) = a - b \Leftrightarrow \frac{a^2 - b^2}{a + b} = a - b$ لپاره $a \neq -b.$

بیلګه ۳ . ۸ :

$$\frac{(ax - by)^2}{by - ax} = \frac{(by - ax)^2}{by - ax} = by - ax \;\; \text{لپاره} \;\; ax \neq by,$$

دلته هم وېش د پاتې یا باقي سره شونی دی.

بیلګه ۳ . ۹ : $a^2 - 2ab + b^2) : (a - b) = [(a - b)^2 + b^2] : (a - b) = a - b :$

باقي یا پاتې b^2

له دې لاس ته راځی او په ښت

بيلګه ۱ . ۱۰

$$\frac{(a-b)^2+b^2}{a-b}=\frac{(a-b)^2}{a-b}+\frac{b^2}{a-b}=a-b+\frac{b^2}{a-b}$$ باقي $a \neq b$,

$(16u^2-v^2):(4u+\sqrt{2}\,v)=4u-\sqrt{2}\,v$ Rest v^2 باقي $\Leftrightarrow$

$$\frac{16u^2-v^2}{4u+\sqrt{2}\,v}=\frac{16u^2-2v^2+v^2}{4u+\sqrt{2}\,v}=\frac{16u^2-2v^2}{4u+\sqrt{2}\,v}+\frac{v^2}{4u+\sqrt{2}\,v}$$
$$=4u-\sqrt{2}\,v+\frac{v^2}{4u+\sqrt{2}\,v}$$

د $4u \neq -\sqrt{2}\,v$ لپاره

فورمال ور د دوه پولينومونو ويش دی (برخه ۱۲ دي اندول(پرتله) شي):

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x^1+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\ldots+b_1x^1+b_0}=P_n(x):Q_m(x),$$

که د ماتباندي پولينوم درجه د ماتلاندي پولينوم درجی لوي یا مساوي وي($n \geq m$).

مونږ نيسوچی: $a_n \neq 0, b_m \neq 0$ او $Q_m(x) \neq 0$.

د دواړو ويشو« توټه ويشو» (پارشيالويش(Partialdivision)) دا دی چی دا

د $P_n(x):Q_n(x)$ ويش په لاندي ډول وليکلی شو:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\text{Polynom } 1+\frac{\text{Polynom } 2}{Q_m(x)},$$

چيرته چی د پولينوم 2 درجه له $Q_m(x)$ درجی څخه کوچنی ده.

دي هدف ته په لاندي ډول رسيږو

۱ – سړی یواځی د جګ نظم غړي $a_nx^n:b_mx^m$ ويشي او له دي سره يوه

غلطي $F(x)$ کوي:

$$Q_{n(x)}:Q_m(x)=\frac{a_n}{b_m}x^{n-m}+F(x)$$ *

۲ – سړی (*) په ماتلاندې پولينوم $Q_m(x)$ ويشي

$$P_n(x) = (a_n / b_m)\, x^{n-m} Q_m(x) + F(x)$$

او له دې غلطی $F(x)$ ، په لاندې فورم یا ډول لاس ته راځي

$$F(x) = P_r(x) / Q_m(x)$$

د $P_r(x) = P_n(x) - (a_n / b_m)\, x^{n-m}\, Q_m(x)$ سره

چيرته چې د پولينوم $P_r(x) = c_r x^r + c_{r-1}x^{r-1} + .. + c_0$ درجه r د پيل پولينوم $P_n(x)$ له درجې n څخه کم له کمه په يوکوچنی وي . د ګڼونو شمير په

تکيه ويلی شو، چې $P_r(x)$ پاتی پولينوم يا په ساده ډول پاتی (باقي) دی.

۳ – که لا تراوسه د $Q_m(x)$ درجه r له m کوچنې وي نو د ټکو ۱ – او ۲ – ټوټه ويش په $P_r(x) : Q_m(x)$ استعماليږي، د لاندنی نتيجی سره

$$P_r(x) : Q_m(x) = (c_r / b_m)\, x^{r-m} + P_t(x)/Q_r(x)$$

چيرته چې د $P_t(x)$ درجه t کم له کمه په يو له $P_r(x)$ درجې کوچنی وي.

د ټوټه ويش دا عمليه اخر ته رسيږي، که (د پای ډيرو پلونو (قدمونو) اخستلو وروسته د ماتباندې غلطی پولينوم درجه له m څخه کوچنی وي.

بيلګه ۲ . ۱۱ . لمړی دې د ټوټه ويش ۱ او۲ پلونه (قدمونه، کدمونه) په پراخ ډول د لاندې ويش په بيلګه توضيح شي

$$P_n(x) : Q_m(x) = P_3(X):Q_1(x) = (6x^3+5x^2-3x+1):(3x-2)$$

	$P_3(x) \quad : Q_1(x) = (a_3 / b_1)x^2 + F(x)$
$(a_3 / b_1)x^2Q_1(x) = 2x^2(3x-2) =$	$(6x^3 + 5x^2-3x+1) : (3x-2) = 2x^2 \quad +F(x)$ $6x^3 - 4x^2$
$P_2(x) = P_3(x) - (a_3 / b_1)x^2Q(x) =$	$9x^2 - 3x + 1$
$F(x) = P_2(x) : Q_1(x) =$	$(9x^2 - 3x + 1) : (3x - 2)$

بیلګه ۱۳ . ۱۲ : د بورته ویش بیلګه ۱ . ۱۱د (F (x غلطی ته دوام ورکوو، ترڅو چی د لیکنی شکل لنډ شي:

$$F(x) = P_2(x):Q_1(x) = (9x^2-3x+1):(3x-2) = 3x+G(x)$$

$$3x.Q_1(x) \quad = \quad (9x^2-6x)$$

پاتي = $3x+1$ یاباقي

$$G(x)= (3x+1):(3x-2)$$

له دې لاندې نتجه لاس ته راځي :

$$(6x^3+5x^2-3x+1):(3x-2)=2x^2+3x + G(x)$$

$$G(x) = (3x+1):(ex-2) = 11 + H(x)$$

$$Q_1(x) = 3x-2$$

پاتی = 3 = یاباقي

$$H(x) = 3 : (3x-2)$$

پس باور لري

$$(6x^3+5x^2 - 3x+1) : (3x-2) = 2x^2+ 3x+1 + 3/(3x-2)$$

تول توګه ویش کیدی شي په لاندې ډول مخ ته یوړ شي .

$$
\begin{array}{lrl}
 & & (1)\quad (4)\quad (7)\quad (10) \\
 & (6x^3+5x^2-3x+1) : (3x-2) = & 2x^2 + 3x + 1 + 3/(3x-2) \\
(2) & \underline{6x^3-4x^2} & \\
(3) & -9x^2-3x+1 & \\
(5) & \underline{9x^2-6x} & \\
(6) & 3x+1 & \\
(8) & \underline{3x-2} & \\
(9) & 3 &
\end{array}
$$

دلته (i) د پرلپسي پل اخستلو په مانا ده.

جمله ۳ . ۱۳

$$
\begin{array}{lrl}
 & & (1)\quad (4)\quad (7)\quad (10) \\
 & (18x^4 + 15x^3 + 0x^2 - 2x + 1) : (3x^2 + x - 1) = & 6x^2 + 3x + 1 + \dfrac{2}{3x^2+x-1} \\
(2) & \underline{18x^4 + 6x^3 - 6x^2} & \\
(3) & 9x^3 + 6x^2 - 2x + 1 & \\
(5) & \underline{9x^3 + 3x^2 - 3x} & \\
(6) & 3x^2 + x + 1 & \\
(8) & \underline{3x^2 + x - 1} & \\
(9) & 2 &
\end{array}
$$

۳ ۰ ۲ ۰ ٤ ماتشمیرنه (کسرشمیرنه)

د مات m/n کلمه د لومړي ځل لپاره د تولګڼونو m,n څخه د ریشنلګڼونو انځورونو لپاره تعریف شوې۰ کیدی شي، چې دا کلمهa/b ته، چې a او b رییل ګڼونه دي، وغزول شي۰

باید په پام ې ور،چې ماتباندې صفر نه شي..

د بیلګي په توګه:

ویش(a/(b-c تیک هلته مفهوم لري، چې b≠c وي۰ ماتګڼ a/b همدا ګڼ ښایي

لکه a : b او یا $\frac{a}{b}$ ، دلته هم باید b |=0 وي.

په اخر کې باید په ګوته شي، چې مات لاندی – او همدارنګه ماتباندې ګڼ هم هر ماتګڼ کیدی شي او هم دواړه۰ دا باید دلته هم په پام کې وي، چې هیڅ یو ماتلاندې ګڼ باید صفر نه وي یانی دلته بی له اولنی ماتباندې نور یو ګڼ هم، چې ماتلاندې پورې اړه لري، نه شي صفر کیدی دا موږ د ماتو مات (کسرالکسر) بولو۰

بیلګې:

a : (b/c) = a / (b/c) , b |=0 , c|= 0 ,

(a/b) : c = (a/b) / c b|=0, c|= 0

(a/b): (c/d) = (a/b) / (c/d), b |= 0 , c |= 0 , d |=0

یا په لاندې ډول:

$$\frac{a}{b}:\frac{\frac{a}{b}}{c}, b \neq 0, c \neq 0, ..., \frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}, b \neq 0, c \neq 0, d \neq 0$$

په څو واره ماتګڼ کې باید اصلي ماتکربنه څرګنده پیژندونکي وي، چې په دې توګه د هر ډول ناټیکوالی مخه نیول شوي وي۰ په ټولیزه توګه باور لري

$$\frac{\frac{a}{b}}{c} \neq \frac{\grave{a}}{\frac{b}{c}}$$

هریو ماتګڼ b|=0, a / b په یوه ګڼ c |= 0 پراخیدی او همداسې لنډیدی شي

یانې ماتلاندې او ماتباندې په یوه ګڼ c ځلیدی یا ویشل کیدی شي او دا کړنلار په اصلي

ګڼ کې تغیر نه راولي

$$\frac{a}{b}=\frac{a.c}{b.c}=\frac{a:c}{b:c}, b \neq 0, c \neq 0$$

د ماتګڼ لنډوالی ددې لپاره ښه دی، چې ماتګڼ ساده کړي.

د بیلګې په توګه:

$$\frac{8}{12}=\frac{2}{3}, \frac{ax-ab}{y-ac}=\frac{x-b}{y-c}; a \neq 0, y \neq c$$

باید تل په پام کې ولرو، چې یواځنی فکتور یا ځلوونی یا ضریب لنډیدی شي او نه زیاتوونی د بیلګي په توګه لاندې ماتګڼ

(a+c):b+c) چې b≠ - c وي نه شي لنډيدى دا (a+c) : (b+c) = a:b

باور لري،چې b |= 0, c = 0 \/ -c |= a, a = b

پراخوالى يا غزول د دې لپاره اړيين دى، چې ډير ماتګنونه په ګډ ماتباندې (مخرج المشترک) راوستلى شي، ځکه چې يواځې هغۀ مات يو په بل زياتيدى يا يو له بل کميدى شي، چې ګډ ماتلاندې ولري.

لکه :
$$\frac{a}{c} \pm \frac{b}{c} = \frac{a \pm b}{c}, c \neq 0$$

که چيرې پرڅښ يا برعکس ماتګنونه a / b او c/d د نابرابر ماتلاندې لرونکى سره زياتوو او يا کموو ، نو دا په ګډ ماتلاندې بايد راولو۰ ګډ ماتلاندې د ټولو ماتلاندو څخه دى۰ د بيلګې په توګه لاندې باور ي دى:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} + \frac{e}{f} = \frac{adf + bcf + bde}{bdf}, b \neq 0, d \neq 0, f \neq 0 \Leftrightarrow bdf \neq 0$$

او دا لاندې

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} \pm \frac{cb}{bd} = \frac{ad \pm cb}{bd}, b \neq 0, d \neq 0 \Leftrightarrow bd \neq 0$$

تل بايد ماتګنونو ګڼلو کې ماتلاندې سره ځل نه شي، چې ګډ ماتلاندې لاس ته راولو، دا د ښوونځي په څرګنده بيلګه باندې ښايو

بيلګه: $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{15} - \frac{1}{36}$

کيدی شي، چې اصلي ماتلاندې)ا۰م۰ل (وټاکل شي

= 2.3.5.6.15.36= 97200 ا ۰ م ۰ ل ۰

کيدی شي، چی ا۰م۰ل۰ د لومړنيو ګڼونو ځل په څير هم وليکو:

2 = 2

3= 3

5 = 5

6 = 2. 3

15= 3 .5

3۰. 3.۰2۰36 = 2

$2^2.3^2.5 = 4.9.5 = 180$

پس د ګډ ماتلاندې لپاره د لوړګڼ يا لوړ جګګڼ يا لوړ طاقت لومړي ځلووني رانيول کيږي۰ چې ګڼل خورا ساده کوي۰

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{15} - \frac{1}{36}$$

$$\frac{90-60+36-30+12-5}{180} = \frac{43}{180}$$

دا چې دا تګلار څنګه د ماتو په تولیزه افاده استعماليدی شي لاندې بيلګه يی ښايي:

بيلګه ۳ ۰ ۱۵ په لاندې بيلګه کي

$$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}+\frac{1}{ab}-\frac{1}{a^2b}+\frac{1}{ab^2}$$

چې يواځې د لاندې لپاره موخه ور دی $a \neq 0 \wedge b \neq 0$

د اصلي ماتلاندې لپاره ياني

$$a.b(ab)(a^2b).(ab^2) = a^5.b^5$$

نه ټاکي، نو له دې امله دی

$$a = a$$

$$b = \quad b$$

$$ab = a \quad b$$

$$a^2 . b = a^2 \quad b$$

$$ab^2 = a \quad b^2$$

دا ا۰م۰ل۰ په لاندې توګه دی $= a^2 \quad b^2$

له دې امله لرو:

$$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}+\frac{1}{ab}-\frac{1}{a^2b}+\frac{1}{ab^2}=\frac{ab^2-a^2bab-b+a}{a^2b^2}$$

بیلگه ۳ ۰ ۱٦ : د وییني یا افادې

$$\frac{2}{a-2}+\frac{2}{a-1}-\frac{1}{a+1}-\frac{a+3}{a^2-1}-\frac{a+6}{a^2-4}, a\neq 0, a\neq \pm 2$$

لپاره ټاکو

a-2 = (a-2)

a – 1 = (a-1)

a+1 = (a+1)

a + 2 = (a+2)

a^2 - 1 = (a-1)(a+1)

a^2-4 = (a-2) (a+2)

(a-2)(a-1)(a+1)(a+2) = (a^2-1)(a^2-4)

دا پورته لاس ته راوړنه ا۰م۰ل۰- چۀ دا په همدې وخت کې غ ک پ هم دی- په ګوته کوي او له پورته څخه د مخه ورکړشوې افادې لپاره لاس ته راځي:

$$\frac{2(a^2-1)(a+2)+2(a^2-4)-(a-1)(a^2-4)-(a-2)(a^2-1)}{(a^2-1)(a^2-4)}$$

$$=\frac{(a+3)(a^2-4)+(a+6)(a^2-1)}{(a^2-1)(a^2-4)}$$

د دې مات ماتباندې صفر دې‌په دې ډول په پورته پيل کې ورکړ شوې افاده يا وينه د صفر پيچلې ليکلو بيلګه ده او بس٠

د ځل او ويش لپاره لاندې قاعدې باور دي:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}, b\neq \wedge d\neq \Leftrightarrow bd\neq 0$$

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}; b\neq 0, c\neq 0, d\neq 0 \Leftrightarrow bcd\neq 0$$

بيلګه ۳ ٠ ۱۷ الف)

$$1-\cfrac{1}{1-a\cfrac{1}{1-\cfrac{b}{a}}}=1-\cfrac{1}{1-\cfrac{a}{\cfrac{a-b}{a}}}=1-\cfrac{1}{1-\cfrac{a^2}{a-b}}=1-\cfrac{1}{\cfrac{a-b-a^2}{a-b}}$$

$$=1-\frac{a-b}{a-b-a^2}=\frac{a-b-a^2-a+b}{a-b-a^2}=\frac{-a^2}{a-b-a^2}=\frac{a^2}{a^2-a+b}$$

د $a\neq 0, a\neq b, a^2-a+b\neq 0$

لپاره٠ دا په دې مانا، چې

$$a\neq\frac{1}{2}(1\pm\sqrt{1-4b})$$

بيلګه ۳۰ء ۱۷ ب:

$$\frac{\frac{a}{a-b}-\frac{b}{a+b}}{\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a-b}}=\frac{\frac{a(a+b)-b(a-b)}{(a-b)(a+b)}}{\frac{a(a-b)+b(a+b)}{(a+b)(a-b)}}=\frac{a(a+b)-b(a-b)}{(a^2-b^2)}\cdot\frac{(a^2-b^2)}{a(a-b)+b(a+b)}$$

$$=\frac{a^2+ab-ab+b^2}{a^2-ab+ab+b^2}=\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2}=1, \forall\, |a|\neq|b|$$

يادونه: په پورته ليکنه کې د ګڼونو موضوع لږ وغزول شوه، خو لږ څه نور هم بايد راغلي وی٠ دلته اړيين د ګڼونو شميرقوانين دي او د ګڼونو پيژندل٠ د ګڼؤنو اړيکې د خونديونې له لارې

$N \subset Z \subset Q \subset R$

او په دې کنونو کې باوري د شمير قوانين، چې هغه زياتون ، کمون ، ځل ، ويش دئ او د ويش په بنسټ ماتشميرنه٠ دا بايد په همغه ساده ډول زده کړای شي٠

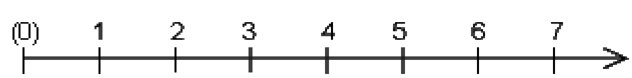
موږ هغه د لومړي وار لپاره اړيين د ګڼونو شميرنقوانين په لاندې توګه رالنډوو، چې د لومړي وار لپاره په همدې پوهيدنه بسيا کوي٠

ګڼونډيرئ (لنډه ټولګه)

پيدايښتي – يا طبيعي ګڼونډيرئ

N = {1, 2, 3, 4, 5, ... }.)

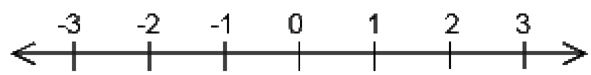
په وړانګه د پيدايښتي ګڼونو انځورونه



د ټولګڼونو ډېرۍ

$$Z = \{ \ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots \}$$

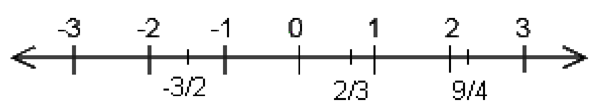
د ټولګڼونو ډېرۍ انځورونه په یوه کرښه



د راشنلګڼونو ډېرۍ

$$Q = \{\frac{p}{q} | p,q | Z \wedge q \neq 0\}$$

په ګڼونکرښه راشنلګڼونه د ټولګڼونو تر منځ پراته دي



هر راشنل ګڼ د لسمیز یا پریودیکی ګڼ په څیر لیکل کیدئ شي

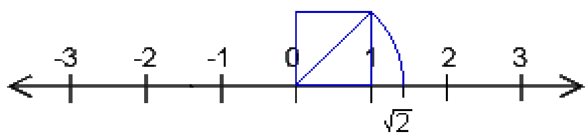
د ماتو سره شمیرنه

د دوه راشنلګڼونو ترمنځ تل ناپاي زیات نور راشنلګڼونه شته ، دا ګڼ پارته دي، مګر بیا یې هم ترمنځ نور ګڼونه یا ځایونه هم شته، چې ګڼونه په کې ځاي دی او دې ګڼونو ته مو ایراشنل ګڼونه وویل ۰ لکه چې یو راشنلګڼ نه دئ

راشنل او ایراشنلګڼونه رییل ګڼونه جوړوي

د رییل ګڼونوډېرۍ یا حقیقي اعدادو سټ

د ریيلګڼونو ډیرئ د ګڼونکرښی ټولو ټکو څخه جوړه ده، لاندې ګڼونکرښه کي روښانه ده



په ریيلګڼونوکي بی له بندیزونو شمیرل کړی شو، خو په ماتلاندې کي باید صفر نه وي او دا د هر ډول ګڼونولپاره باور لري

شمیرډولونه لومړئ پوړئ

:Additionزیاتون یا جمعه

زیاتوونی +زیاتونی = زیاتون

د زیاتون کموتاتیو قانون $a + b = b + a$

د زیاتون اسوڅیاتیو قانون $(a + b) + c = a + (b + c)$

و زیاتون ته د یوه بی اغیزه یا ناپیلی توکی شتون$a + 0 = a$

مخامخ – یا په ښټ ګن یا برعکس عدد$a + (-a) = 0$

کمون:Subtraktion

د زیاتون په ښټ کارونه یا عملیه ، ترې کمه وونی – کمه ونی = کمون

$a + x = b \Leftrightarrow x = b - a$

بیلګه: $7 + x = 10 \Leftrightarrow x = 10 - 7 = 3$

شمیرډولونه:

دویمه پوړی

ضرب یا ځل: فاکتور (ځله وونی ضریب) ۰ فاکتور(ځله وونی) ځل
د زیاتون تکرار، بیلګه. $4 + 4 + 4 = 3\cdot4 = 12$

د ضرب یا ځل کموتایتو قانون $a.b = b.a$

د ضرب یا ځل اسوشیاتیو قانون $(a\cdot b)\cdot c = a\cdot(b\cdot c)$

دستریبوتیو قانون $a\cdot(b + c) = a\cdot b + a\cdot c$

و ضرب ته د یوه ناپیلي توکي شتون(بي اغیزه توکی یې که وبولو هم بده به نه وي)

$a\cdot1 = a$

په څېټ ارزښت یا برعکس قیمت $a\cdot(1/a) = 1$

یو ضرب ټیک هلته صفر دئ، چې د صرب یو ضریب صفر وي $a\cdot0 = 0$

ویش:
ویشونی : پرویشونی = ویش (لوستل یې له ښي وکیڼ لورته)

ویش د ضرب یا ځل په څېټ کارونه ده) $a:b=c$

$a\cdot x = b \Leftrightarrow x = b:a$

د بېلګې په توګه z.B.: $4\cdot x = 12 \Leftrightarrow x = 12:4 = 3$

په صفر ویش پیژند نه لري یا تعریف نه لري

۳ . ۳ تمرینونه

۱ – د اعدادو یا ګڼونو ډولونه او د د اعدادو انځورونه

۱ ، ۱ – په کوم د اعدادو ډېرئ یا سټ کې د عدد a او عدد bلپاره د شمیرلو څلور قاعدې یا لارې باور لري؟

یادونه: دلته دې ترې کمونې یا مفروق منه او وېشونش یا مقسوم تل a وي همداسې دې کمونې یا مفروق او پروېشونې یا مقسوم علیه تل b وي.

a) $a = 8, \quad b = 2$
b) $a = 5, \quad b = 8$
c) $a = 7, \quad b = 0$
d) $a = -6, \quad b = 1$

۱ . ۲ عددونه او یو له بل سره پرتله کړئ او ورکړئ، چې له دې دواړو کوم لو دی!

a) $a = \frac{13}{17}, b = \frac{169}{289}$
b) $a = \frac{11}{21}, b = \frac{121}{231}$
c) $a = \frac{888}{901}, b = \frac{896}{911}$
d) $a = -\frac{13}{12}, b = -\frac{143}{130}$

۱ . ۳ – د اعدادو یا ګڼونو او څخه تفرسق، ضر ب او وېش جوړ کړئ! ورکړئ، چې دا نتیجې د اعدادو کومو ډولونو پورې اړه لري!

د پوښتنې ۱ ، ۱ یادونه دلته هم باور لري.

a) $a = \pi, \quad b = 5$
b) $a = \sqrt{2}, b = \sqrt{2}$
c) $a = \frac{2}{3}, \quad b = \frac{3}{2}$
d) $a = 0, \quad b = 1$

۱ . ۴- په دوه ییز سیستم کې لاندې ګڼونه یا اعداد انځور کړئ!

a) 28 b) 47 c) 73 d) 112

۱ . ۵ – لاندې ربښتوني يا راشنل اعداد د کوټيو کې اچوني يا کوټی وني له لارې په نږدې ۵ ځايونږ ټيک پيدا کړی.

a) $\sqrt{3}$ b) $\sqrt{18}$ c) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ d) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

۲ . د زياتيزو او ځليزو (د جمعې او ضرب) نوکانو وازول

۲ . ۱ – لاندې نوکان واز کړئ

a) $7a - 3b + (-a + 2c) - (3c - 6b) - (6a - 3c)$
b) $5a + [7c - (2a - 3b)] - (4c - a + b)$
c) $7a - [3a - (7 + 5b)] + [a - (4 - 6b)] - (2a + 7b)$
d) $8a - \{a + [(3a - 2b) - (5a + 3b)] - [(-a + 6b)]\}$

2.2. a) $(-a)(b - a - c)$
b) $2a[a - (b - 3a)]$
c) $3(a + b + c) - 5(a + b) - c - 2(b - c - a)$
d) $|a| \cdot (b - 2a) - b \cdot (a + 2b)$

2.3. a) $(2a - b)(9a + 4b)$ b) $(9a - 2b)(7a - 3b)$
c) $(a + b - c)(a - b - c)$ d) $(3a + 2b)(4a - 3b)(5a - 7b)$

2.4. a) $(7a - 5b)(3a + 4b) - (5a - 9b)(4a - b)$
b) $(a + 4)(a - 2) - (a + 2)(a - 1)$
c) $(a + b)(c - d) - (a - b)(c + d)$
d) $(1 - a)(a - 1) - 2(a + 1)(a - 2)$

۳ – د بينوم فرولونه

۳ . ۱ – د بينوم فرمولونه وکاروئ يا استعمال کړئ او د شونتيا سره سم يې ساده کړئ

a) $(-a + 3b)^2$ c) $(-a - b)(a - b)$
b) $(-1 + a)(a + 1)$ d) $(-1 + a)^2 - (1 - a)^2$

3.2. a) $(4a^2 - 3)(4a^2 + 3) - (3a - 4)^2 + (5a + 1)^2$
b) $(a^2 + b^2)^2 - (a^2 - b^2)^2$

c) $(3a + 2b - 5c)^2$
d) $(a + b - c - d)^2$

3.3. a) $49a^2 + 42a + 9$
b) $25a^2 + 40ab + 16b^2$
c) $169a^2 - 130ab + 25b^2$
d) $9a^4b^2 + 12a^2b + 4$

3.4. a) $(8a - b)^2 - 16a^2$
b) $81a^2 - 16\,(4a - 3b)^2$
c) $4a + 12\sqrt{ab} + 9b$
d) $(\sqrt{ab} - 1)(-1 - \sqrt{ab})$

3.5. a) $(a + b + 1)(a + b - 1)$
b) $(a + b)^2 + 2a + 2b + 1$
c) $a^2 - 2ab + b^2 - 2a + 2b + 1$
d) $a^2 + 2ab + b^2 - 4\,(a + b) + 4$

۳ . ۶ لاندې وېینې یا افادې ساده کړئ، داسې چې د مربع تکمیلوني له لارې پوره مربع وې جوړې کړئ!

a) $4a^2 - 12a + 9b^2 - 24\,b = 0$
b) $16a^2 + 25b^2 - 128a + 50b = 0$
c) $3a^2 - 2b^2 - 2\sqrt{6}\,a + 2\sqrt{6}\,b = 0$
d) $4x^2 + 12xy - 9a^2 + 12ab = 0$

۴ . د مناسبو ضریبونو له نوکانو راوسته له ۴ .
۱ تر ۴ . ۴ پورې پوښتنو کې ورکړ شوې وېینې یا افادې په ضریبونو توټه کړئ او تر شوونتیا پورې یې ساده کړئ.

4.1. a) $a + a^2$
b) $-a^2 - a$
c) $8ab + 20b^2$
d) $ab + ac - ad$

4.2. a) $a^2b^2 + ab + ab + 1$
b) $ab - ac - b + c$
c) $3a + 3 - 2a - 2 + 4b\,(a + 1)$
d) $8\,(7a - 5b) - 5c\,(7a - 5b)$

4.3. a) $3ac - 3bc - 2ad + 2bd + 4ac - 4bc - 7ad + 7bd$
b) $a^2b + ac - ab - c$
c) $15ab - 5a - 1 + 3b$
d) $4a^2 + 20ab + 25b^2 - a^2$

4.4. a) $(a^3 - a^2)(2a - 2a^2)$
b) $(-5a - 3b)^2 + (-5a + 3b)^2$
c) $(-5a - 10b)(-3a + 6b)$
d) $(-a - 1)(a - 1) - (a^2 - 1)$

۴ . ۵ – هر ځل د n لوی توان $(n=1,2,3,\ldots)$ له نوکانو راوباسئ!

a) $n^2 + n + 1$
b) $3n^2 - n + 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}$
c) $(1 - 2n)^3$
d) $(\frac{1}{4}n^2 + 3n - 1)^2$

۵ – د په نوکانو کې افادو وېش

لاندې وېش سره ته ورسوئ.

دا چې وېش په صفر ناشونی دی، په دې او لاندې ټولو تمرينونو کې دا ا رزښتونه له شميره وباسئ، کوم چې $a,b,\ldots$ يې نه شي نيولی يا اخستلای.

5.1. a) $(10a^2 - 2ab + 16ac) : 2a$
b) $(25ab - 40b^2) : (-5b)$
c) $(28a^3 - 20a^2 + 32a) : (-4a)$
d) $(27a^2b - 63ab^2) : (-9ab)$

5.2. a) $(3a^2 + 5ab + 2b^2) : (a + b)$
b) $(a^2 - 2ab - 3b^2) : (a - 3b)$
c) $(3a^2 + 2a - 5) : (3a + 5)$
d) $(4a^2 - 7ab + 3b^2) : (4a - 3b)$

5.3. a) $(35a^2 + 24ab - 15ac + 4b^2 - 6bc) : (5a + 2b)$
b) $(15a^3 + 67ab^2 - 52a^2b - 28b^3) : (5a - 4b)$
c) $(21ax - 15bx + 9cx - 35ay + 25by - 15cy) : (7a - 5b + 3c)$
d) $(12a^2 + ab - 17ac - 20b^2 + 29bc - 5c^2) : (3a + 4b - 5c)$

5.4. a) $(a^3 + b^3) : (b + a)$
b) $(1536b^3 + 375a^3) : (25a^2 + 64b^2 - 40ab)$
c) $(144a^4 - 81b^2) : (27b + 36a^2)$
d) $(a^3 - b^3) : (a - b)$

5.5. a) $(9a^3 - 7ab^2 + 2b^3) : (3a + 2b)$
b) $(a^2 - 10a - 25) : (a - 5)$
c) $(a^3 - 2ab + b^3) : (a + b)$
d) $(24a^4 - 26a^3 - 76a^2 + 32a) : (4a^2 - 7a - 8)$

5.6. a) $(x^4 - x^3 - 5x^2 - 40x + 7) : (x^2 + 3x + 9)$
b) $(2x^2 - x + xy - y^2 + 2y - 2) : (2x - y + 1)$
c) $(13a^2b + 4b^3 - ab^2 + 10a^3) : (2a + 3b)$
d) $(3a^3 + 2a^2 - 7a^2b + 3a - 2ab + 4ab^2 - 4b + 3) : (3a - 4b + 2)$

۶ . ماتشميرنه يا كسرشميرنه

۶ . ۱ – لاندې کسرونه صورت او م خرج يعنې د ماتباندې او ماتلاندې د خورا غټ ګډ پروېشوني سره د لومړنيو ضريبونو يا ځلوونو له لارې لنډ کړئ

a) $\frac{6\,732}{20\,196}$
b) $\frac{2\,730}{5\,005}$
c) $\frac{20\,520}{2\,280}$
d) $\frac{69\,069}{138\,138}$

۶ . ۲ – د لاندې اعداد خورا کوچنی ګډ زاتځلی (ذ الاضعافالاقل) پيدا کړئ

په لاندې کې und د او په معنا دی

a) 3, 6, 9, 18, 27, 54 und 81
b) 8, 12, 21, 42, 56 und 84
c) 5, 13, 16, 20, 26 und 42
d) 120, 252, 264, 315 und 616

۶ . ۳ . د برابر نوميزو يا برابرمخرج کسرونو شميرنه

6.3.1. a) $\frac{1}{3}+3\frac{1}{3}+3\cdot\frac{1}{3}-4\frac{2}{3}$
b) $\frac{3}{7}-\frac{1-6}{7}+2\frac{1}{7}-7\frac{2}{7}$
c) $10\frac{1}{5}-\frac{4-5}{5}-5\cdot\frac{1}{5}+\frac{10-1}{5}$
d) $2\frac{2}{26}+\frac{5-3}{13}+3\frac{33}{39}-0\cdot\frac{25}{65}$

6.3.2. a) $\frac{a+1}{a}-\frac{a-1}{a}-\frac{1-a}{a}$
c) $\frac{(a-b)^2}{ab}-\frac{1-2ab}{ab}-\frac{a^2+b^2}{ab}$

b) $\frac{a+1}{b}-\frac{a-b}{b}-\frac{b-a}{b}$ d) $\frac{(a-b)^3}{2ab}-\frac{(a+b)^3}{2ab}$

۶ . ۴ – د نا برابرنومیزو کسرونو جمعه او تفریق، په مخرج یا ماتلاندې کې ضربیونه

6.4.1. a) $5\frac{7}{12}+1\frac{41}{72}+2\frac{17}{24}+9\frac{5}{9}$ c) $\frac{5}{18}+\frac{5}{6}-\frac{1}{3}+\frac{14}{27}+\frac{71}{81}$

b) $36\frac{14}{39}+19\frac{4}{13}+15\frac{5}{6}-2\frac{19}{72}$ d) $\frac{15}{64}-\frac{77}{96}+\frac{1}{243}-\frac{3-8}{24}+3\frac{1}{1296}$

6.4.2. a) $\frac{b+5c-a}{6}-\frac{3a-7b+6c}{4}+\frac{4a-5b+7c}{3}$

b) $\frac{a-9}{18}+\frac{a-2}{6}+\frac{5(2a-1)}{12}-\frac{3(a-1)}{8}-\frac{2(3a-4)}{9}$

c) $\frac{16b+3a}{48}+\frac{7a-8b+9c}{24}-\frac{9a+8b+12c}{32}$

d) $\frac{4c-3a}{12ac}+\frac{5b-2c}{10bc}-\frac{b^2-c}{4b^2c}+\frac{4b^2-5a}{20ab^2}+\frac{2}{3a}+\frac{a-b}{5ab}$

6.4.3. a) $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}-\frac{a^2+b^2}{2b}-1$

b) $\frac{5a-6b}{30c^2}-\frac{b(5c^2-3a)}{15ac^2}-\frac{a}{4b}+\frac{a(3c^2-2b)}{12bc^2}+\frac{b}{3a}$

c) $\frac{3a^2+8b^2}{6ab}-\frac{a(4b-5c)}{10bc}+\frac{4a-5b}{10c}+\frac{b(3a-2c)}{6ac}$

d) $\frac{4c-3a}{12ac}+\frac{5b-2c}{10bc}-\frac{b^2-c}{4b^2c}+\frac{4b^2-5a}{20ab^2}+\frac{2}{3a}+\frac{a-b}{5ab}$

۶ . ۵ - د نابرابر نومیزو ماتونو(کسرونو) جمعه او تفریق(زیاتون او کمون)، جمعه مخرج یا ماتلاندې کې.

۶ . ۵ . ۱: د a لپاره یو په بل پسې ورکړشوي ارزښت ځای په ځای کړئ‌او دا داسې لاس ته راغلي ماتونه(کسرونه) سره یوځای کړئ! بیا په ټولیزه توګه د ورکړ شوو کسرونو لاس ته راوړنې ورکړئ او هغه ارزښتونه لرې کړي، چې د a د اخستلو یا نیولو اجازه نه لري.

a) $\frac{1}{a}+\frac{1}{a+1}+\frac{1}{a+2}$	د $a=1,2,3$ سره
b) $\frac{1}{a-2}-\frac{1}{a-1}+\frac{1}{a+1}-\frac{1}{a+2}$	د $a=3,4,5$ سره
c) $\frac{a}{a-1}+\frac{a}{a+1}-2$	د $a=2,3,4$ سره
d) $\frac{1}{a+1}-\frac{1}{a-1}+\frac{1}{(a+1)^2}-\frac{1}{(a-1)^2}$	د $a=2,3,4$ سره

6.5.2. a) $\frac{3a-1}{4a-1}-\frac{3}{4}$

b) $\frac{a-2}{a-3}-\frac{a-1}{a-2}$

c) $\frac{1}{a+1}+\frac{4}{3a+2}-\frac{3}{a+1}$

d) $\frac{10}{2a-2}-\frac{6a}{3a^2-6a}-\frac{9b}{3ab-9b}$

6.5.3. a) $\frac{3ax-3by}{6x^2y-6xy^2}-\frac{5a^2x+5aby}{10ax^2y+10axy^2}$

b) $\frac{6ab+9b}{6ab-6b}-\frac{6ab-4b}{6ab+6b}-\frac{10b^2}{12a^2b^2-12b^2}$

c) $\frac{1}{a^2-b^2}-\frac{2b^2}{2a^4-2a^2b^2}-\frac{b^2}{a^2b^2}+\frac{1}{a^2+b^2+2ab}$

d) $\frac{24a^2b-72ab^2}{60a^2b+24ab^2}-\frac{49a^2b-28ab^2}{35a^2b+14ab^2}-\frac{20a-10b}{10a-5b}$

6.5.4. a) $\frac{3a+b}{2a^2+2ab}-\frac{a^2+b^2}{2a^2b+2ab^2}+\frac{2a-5b}{4ab+4b^2}$

b) $\frac{a+2b}{3a^2-3ab}-\frac{1}{2b}-\frac{3b-a}{2ab-2b^2}$

c) $\frac{2a-5}{a+3}-\frac{3a-4}{a+2}+\frac{a^2+6a+10}{a^2+5a+6}$

d) $\frac{5a-2b}{3a+b}-\frac{88a^2+28ab+0{,}25b^2}{48a^2+7ab-3b^2}+\frac{24a+b}{16a-3b}$

6.5.5. a) $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-\frac{b^2}{a^2+ab}-\frac{a^2}{ab+b^2}$

b) $\frac{6a-5b}{8a^2+24ab+18b^2}-\frac{2a-b}{36a^2-81b^2}+\frac{3}{12a-18b}$

c) $\frac{2a+3b}{2ab+b^2}-\frac{4a^2+b^2}{4a^2b+2ab^2}-\frac{5a-b}{4a^2+2ab}$

d) $\frac{9a-b}{6a^2-2ab}-\frac{6a+b}{3ab-b^2}+\frac{1}{2b}$

۶ . ۶: د ماتونو يا کسرونو ضربونه(يا ځلونه):

6.6.1. a) $3\cdot\frac{1}{3}$ b) $b\cdot\frac{1}{a}$ c) $\frac{5}{8}\cdot\frac{8}{5}$ d) $\frac{0}{b}\cdot\frac{b}{c}$

6.6.2. a) $\left(\frac{a}{3b}+\frac{3b}{a}\right)\cdot 3ab$ c) $\left(\frac{1}{2a}+\frac{1}{3b}\right)\cdot(2a-3b)$

b) $\left(\frac{5a}{6bc}-\frac{6b}{7ac}+\frac{2c}{3ab}\right)\cdot 84abc$ d) $\left(\frac{2}{a}+\frac{3}{b}\right)\cdot\left(\frac{a}{2}-\frac{b}{3}\right)$

6.6.3. a) $\frac{4a^2-9b^2}{21a^2b+14a^3}\cdot\frac{7a+5ab}{6b-4a}$ b) $\frac{16a^4-a^2}{24a^3+8a^2}\cdot\frac{36a^2+24a+4}{4a+1}$

c) $\frac{a^2+1}{(a+1)^2}\cdot\frac{a^3+a^2+a+1}{(a^2+1)^2}$ d) $\frac{4ab-3a}{9ab-3b^2}\cdot\frac{18a-6b}{4a^2+10ab}\cdot\frac{8ab-6a}{4ab+10b^2}$

۶ . ۷ . د ماتونو وېش:

6.7.1. a) $\frac{2}{3}:3$ b) $a:\frac{1}{b}$ c) $\frac{a}{b}:b$ d) $\frac{0}{a}:\frac{1}{b}$

۶ . ۷ . ۲ : د لاندې وېينو يا افادو برعکس يا په څټ ارزښتونه پيدا کړی.

a) $\frac{a}{b}$ b) $\frac{a+1}{b}$ c) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ d) $\frac{1}{a+b}$

6.7.3. a) $\left(\frac{a}{2b}-\frac{2b}{a}\right):\frac{a}{a+2b}$ c) $\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right):\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)$

b) $\left(1-\frac{2}{a}+\frac{1}{a^2}\right):\frac{1-a^2}{a^2}$ d) $\left(\frac{a+b}{b}+\frac{a+b}{a}\right):\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$

6.7.4. a) $\dfrac{1-\frac{1}{a}}{\frac{1}{a}-\frac{1}{a^2}}$

b) $\dfrac{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+1}{\frac{a^2+b}{b}-\frac{a+b^2}{a}}$

c) $\dfrac{\frac{a}{a-b}+\frac{b}{a+b}}{\frac{a}{a+b}-\frac{b}{a-b}}$

d) $\dfrac{\frac{a}{1-a}+\frac{a+1}{a}}{\frac{a-1}{a}-\frac{a}{a+1}}$

6.7.5. a) $\dfrac{\frac{1}{a^3}-\frac{1}{b^3}}{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{ab}+\frac{1}{b^2}}$

b) $\dfrac{\frac{x^2}{ab}+x\cdot\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)-\frac{1}{ab}}{\frac{x}{a}-\frac{1}{b}}$

c) $\dfrac{\frac{a+b}{a-b}-\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}}{\frac{a+b}{a-b}-\frac{a-b}{a+b}}$

d) $\dfrac{\frac{1}{16a^2}+\frac{1}{2ab}+\frac{1}{b^2}}{\frac{1}{8a}+\frac{1}{2b}}+\dfrac{\frac{1}{16a^2}-\frac{1}{2ab}+\frac{1}{b^2}}{\frac{1}{8a}-\frac{1}{2b}}$

6.7.6. a) $\dfrac{a+\frac{1}{1-ab}}{1-\frac{1}{1-ab}}$

c) $1-\dfrac{1}{1-a\cdot\dfrac{1}{1+\frac{b}{a}}}$

b) $\dfrac{1}{a-\dfrac{a}{1-\frac{a}{a-b}}}$

d) $\dfrac{\dfrac{a+\frac{1}{4}b}{a-\frac{1}{4}b}-\dfrac{a-\frac{1}{4}b}{a+\frac{1}{4}b}}{1+\dfrac{b^2}{16a^2-b^2}}$

۶ . ۸ . لاندې ماتونه يا کسرونه، که ممکن وي، ساده کړئ (که غواړئ د مخکني شکل بدلون څخه وروسته)

6.8.1. a) $\dfrac{35ac-50bc}{7a-10b}$

c) $\dfrac{34ax+51bx-119cx}{2a+3b-7c}$

b) $\dfrac{a-\sqrt{a}\cdot b}{b-\sqrt{a}}$

d) $\dfrac{a^2-ab+ac}{b-a-c}$

6.8.2. a) $\dfrac{ax+bx+ay+by}{a+b}$ c) $\dfrac{91ab+7b+39a^2+3a}{13a+1}$

b) $\dfrac{ab+\frac{1}{2}b-\frac{1}{2}a-\frac{1}{4}}{a+\frac{1}{2}}$ d) $\dfrac{ax+\frac{x}{b}-\frac{a}{y}-\frac{1}{by}}{\frac{1}{b}+a}$

6.8.3. a) $\dfrac{25a^2-130ab+169b^2}{25a-65b}$ c) $\dfrac{\frac{1}{4}a^2b^2+17ab+289}{\frac{17}{2}\left(\frac{1}{17}ab+2\right)}$

b) $\dfrac{2x^2+8xy+8y^2}{(x+2y)^2}$ d) $\dfrac{25a-20\sqrt{ab}+4b}{ab(\sqrt{a}-0{,}4\sqrt{b})}$

6.8.4. a) $\dfrac{a^4-b^4}{(a+b)^2(a-b)}$ c) $\dfrac{(a^2-b^2)^2-(a^2+b^2)^2}{ab(a+b)}$

b) $\dfrac{(a+b)^4-(a-b)^4}{a^2+b^2}$ d) $\dfrac{(a^2+b^2)^2(a^2-b^2)^2+2a^4b^4}{a^4+b^4}$

6.8.5. a) $\dfrac{(\frac{1}{9}a^2+b^2+\frac{2}{3}ab)(x^3-27y^3)}{(2b+\frac{2}{3}a)(x-3y)}$ c) $\dfrac{(80-40ab+5a^2b^2)(4-ab)}{64\cdot\left(\frac{ab}{4}-1\right)^3}$

b) $\dfrac{(2x^2-20x+50)(2a-1)(a+\frac{1}{2})}{(1-2a)(2a+1)(25-x^2)}$ d) $\dfrac{(32a^3b^2x-18ax^3y^2)\cdot 3by}{(12ab^2y+9bxy^2)\cdot 2ax}$

6.8.6. a) $\dfrac{(a+b+1)(a+b-1)+(a-b)^2-2\cdot\left(b^2+\frac{1}{2}\right)}{a+1}$

b) $\dfrac{\left(4a+\frac{1}{4}b-2\sqrt{ab}\right)\cdot\left(2\sqrt{a}+\frac{1}{2}\sqrt{b}\right)}{2\sqrt{a}-\frac{1}{2}\sqrt{b}}$

c) $\dfrac{(a+1)^2-b^2}{a^2+2ab+b^2+2a+2b+1}$

d) $\frac{(a-1)^2-(b-1)^2}{a^2+b^2+2ab-4(a+b-1)}$

۶ . ۹ . د (1-) سره شميرنه

الف- ورکړشوی دې وي/ a(b-c) c . 1-=aځای په ځای کړئ او داسې لاس ترې راغلي کسر يا مات لپاره مختلف ليکدودونه ورکړئ.

ب – ورکړي دې (5c -3b-a)/(1-a) وي په صورت او مخرج (ماتباندې او ماتلاندې) کې (1-) له نوکانو راوباسئ او دا عدد لنډ کړئ.

پ – کسر يا مات (b² - a²) /(-a-b) د (1-)سره پراخ کړئ او ساده يې کړئ.

ت- ورکړی دې وي $1-\frac{25a^2-36b^2}{6b-5a}$ په مخرج يا ماتلاندې کې (1-) له نوکانو راباسئ او دا وييه يا افاده ساده کړئ.

٤ ۰ توان (پوتنځ) او ريښه (جذر) Potenz , Wurzel (Root)

په دې برخه کې د توان او جذر يا ريښې قوانين ترڅيرنې لاندې نيسو، دلته غوره دا ده، چې د کارونې يا استعمال چټکتيا ته پرمختګ (تکامل) ورکړو۰ دا مشوره کيږي، چې ريښه دې په پوتنځ واړول شي، چې د اکسپوننت - يا جګعدد يې نسبي يا راشنل وي۰ د دې فورمال ټيک کره د ګڼلو قوانينو په څنګ کې د باوري کيدو لپاره بايد په نيونو(فرضيو) هم ژور فکر وشي۰

د ريښې پيژند د خلاف يا پر ځټ عمليو مخه بايد نيول شوي وي، چې د هغې له مخې راديکاند (ريښه ويستونی يعنی هغه ګڼ، چې ريښه يی وېستلکيږي يا نيول کيږي،د ريښی نخښې لاندی ګڼ او هم د ريښی ارزښت نامنفي اعداد (ناکميز ګڼونه) وي۰ د توان زړه پورې ريل اکسپوننت (په جګ) هلته کره دی يا باوري دی، چې د بنسټ لپاره د مثبت عددونو نيونه يا فرضيه شوي وي۰

٤ ۰ ۱ توان (پوتنځPotenz) په ټولګڼيز يا تام عدد په جګ يل اکشسپوننت

پيژند ٤ ۰ ۱:

د يوه په خوښه ريل ګڼ توان لاندې مورږ د a د خپل ځان سره n- م واره ځل

پوهيږو۰ د دې لپاره ليکو: $a^n = b$ دلته a بنسټ $n = 1,2,3,\dots$

اکسپوننت(جګګڼ، لنډ: جګ) اوb د پوتنځ يا توان ارزښت بلل کيږي۰

د بيلګي په توګه

$$a = a\ ,\ a^2 = a\ .\ a\ ,\quad a^3 = a.a.a$$

(4,1) د $n = 0$ لپاره کره ټاکل کيږي $a^\circ = 1$ د $a \mid= 0$ سره

د پيژند يا تعريف پر بنسټ (اود څه بنديزونو په څلورديوالی کې، چې لاندې شوي) ښوول کيدی شي، چې د خوښی يا زړه پورې رييلګڼونو $a,b \in R$ او $m,n \in N^*$ نامنفی ټولګڼونو اکسپوننت يا جګګڼ لپاره لاندې باورلري

$$a^n.b^n = (a.b)^n;\dots\dots\dots\dots(4,2)$$

$$a^n : b^b = (\frac{a}{b})^n = (a/b)^n; b \neq 0;\dots\dots\dots\dots(4,3)$$

$$a^n.a^m = a^{n+m};\dots\dots\dots\dots(4,4)$$

$$a^n : a^m = \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}; a \neq 0, n \geq m;\dots\dots\dots\dots(4,5)$$

$$(a^n)^m = a^{n.m};\dots\dots\dots\dots(4,6)$$

دا پورته د توان اړیکې د توکنیز مثبت جګړ یا اکسپوننت لپاره باور لري، کیدی شي، چې توکنیونو ته وغزول شي، که چیرې پیژند ورکړو یا تعریف کړو:

$$\frac{1}{a^n}=a^{-n};n=1,2,3,....,..a\neq 0,..................(4,7)$$

دا پورته د توان قوانین د توکنیز جګ(اکسپوننت) لپاره بی بندیزونو یواځې د نه ورکیدونکو رییل بنسټونو یانې د $a\ |=0$ او $0=|b$ لپاره باور ي دي . په (4,5) کې بیا بندیز $n \geq m$ اړیین نه دی.

د توان قوانین کیدی شي په بڼه بدلونکو افادو یا وبینو وکارول- یا استعمال شي.

بیلګه 4 .1

$$[\frac{4a^{-3}b^{0}}{x^2y^{-1}}]^{-2}=(4abx^{-2}y)^{-2}=4^{-2}a^{6}x^{4}y^{-2}=\frac{a^{6}x^{4}}{16y^2},abxy\neq 0$$

بیلګه 4 . 2

$$\frac{9^4(a^2\sqrt{ab})^2}{18^2.(3ab)^3}=\frac{3^8.a^4.a.b^2}{2^2.3^4.3^3.a^3.b^3}=\frac{3a^2}{4b},a>0,b\neq 0$$

بیلګه 4 . 3

$$\frac{3-a}{a^{m-4}}+\frac{a^6-a^5+2a^3-1}{a^{m+1}}-\frac{2a^2+1}{a^{m-2}}=$$

$$=\frac{a^5(3-a)+a^6-a^5+2a^3-1-a^3(2a^2+1)}{a^{m+1}}=$$

$$=\frac{3a^5-a^6-a^5+2a^3-1-2a^5-a^3}{a^{m+1}}=\frac{a^3-1}{a^{m+1}},a\neq 0,m\in Z$$

پوتنځ زياتون او کمون کې بايد پام وي، چې يوازې د برابر پوتنځ ګڼونه يو له بل سره زياتيدی او يو له بل کميدی شي٠

بيلګه 4 . 4

$$3a^n + 2a^n = 5a^n$$

بيلګه4 . 5

$$4a^{n+1} + 2a^n + 5b^{n+1} - 3b^n - 3a^{n+1} + a^n - 4b^{n+1} + 3b^3 = a^{n+1} + 3a^n + b^{n+1}$$

دې ته بيا ګوته نيسو، چې د بنسټ - او پوتنځ مخنخښې کې دې توپير وشي٠ پوتنځ له مثبت - يا زياتونمخنخښې سره تل مثبت يا زياتيز پوتنځ ارزښت لري، په دې ترځ کې، چې پوتنځ د منفي - يا کميز بنسټ سره که اکسپوننت جوړه وي مثبت زياتيز او که اکسپوننت ناجوړه وي نو منفي - يا کمون ارزښت لري٠

باور لري:

$$(2a)^{2n} = +a^{2n}, ..., (-a)^{2n} = +2a^{2n}$$
$$(+a)^{2n+1} = +a^{2n+1}, ..., (-a)^{2n+1} = -a^{2n+1}, n \in Z, a > 0$$

٤ ٠ ٢ – ريښه او توان له ريشنل جګ عدد (اکسپوننت) سره

پيژند ٤ ٠ ٢

د يوه نامنفي ګڼ a لپاره n -مه ريښه هغه نامنفي ګڼ b دی، د کوم لپاره چې

باور لري: $b^n = a$

د دې لپاره ليکو:

$$b = \sqrt[n]{a}, n = 1, 2, 3, ...(4,8)$$
$$a \geq 0, b \geq 0..............................(4,9)$$

دلته a راديکاند Radikand ، يا ګڼ، چې ريښه (جذر) يې نيولکيږي(موږ دا

ريښه نيووني يا ريښه ويستونی بولو) او n دريښې جګ(اکسپوننت) اوb د

ريښې ارزښت يا ريښه ارزښت بلل کيږي.

بايد پردې ټينګار وشي، چې ريښه يوائې د نامنفی راديکاند يا ريښه ويستوني (ريښه نيوني) $a \geq 0$ راوستل کيږي يا نيول کيږي او پخپله په لاندې توګه يو نامنفي - يا ناکميز ارزښت لري يانی

$$b = \sqrt[n]{a} \geq 0$$

د دې کره کوني لپاره لاندې يادونې شوي دي:

۱ – د جوړه ... $n = 2,4,6,$ لپاره د $a<0$ سره ريښه b په ريبلګڼونو کې نه شته، کوم ، چې (4,8) پوره کړي

ځکه، چې د b جوړه په توان تل نامنفي يا ناکميز يانې زياتيز ګڼ دی.

۲ – د جوړه او مثبت - يا زياتيز برابرون $b^n = a$

په خته په ريښتوني دوه ريبل اوبيوني ياحلونه لري د بيلګي په توګه $b^2 = 4$

ياني $n = 2$ او $a = 4$ اوبيوني

$$b_1 = 2, b_2 = -2$$

دي٠ د دې لپاره، چې د راديکاند د شميرلو کاروني يواځنۍ سرته ورسولی شو، بايد د يوې اوبيوني لپاره پريکړه وکړو، نو له دې امله موږ مثبت ارزښت غوره بول

۳ – د ناجوړه . $n= 1 , 3 , 5$ او $a\geq 0$ لپاره

$$b^n = a$$

تل يواځني زياتيز(مثبت) اوبی يا حل لري ياني $b\geq 0$

٤ – د ناجوړه n او کيمز يا منفي a لپاره $b^n = a$

تل يواځني يو منفی اوبی يا حل لري٠ ياني $b < 0$ د بيلګي په توګه دا $b^3= -8$ يواځې

اوبی $b = -2$ لري.

په هر صورت بايد د جوړه... $n=2,4,6$ ګڼونو لپاره $a\geq 0,b\geq 0$ وغوښتل شي، ځکه چې په بل صورت کې به يا ريښه شته نه وي او يا به يواځنی اوبی نه لري، ياني ځو اوبی به شته وي

د ناجوړه يا طاقو $n = 1,3,5,\ldots$ لپاره کيدی شي، چې له دواړو غوښتنو تير شو٠ دلته به يواځې تاوان يا زيان دا وي، چې د تولو ممکن حالتونو لپاره به بيل بيل د ريښې د قوانينو غوره کولو ته اړ کيږو٠ له بلې خوا به ريښی د قوانينو ترتيبول د پوتنځ لپاره ، چې پورته ايښول شوي بنديزونه nقوانينو لپاره ستونځمن وي٠ له دې امله د ناجوړه ريښو

اکسپوننت غوره کوو او د يوائځني يو اوبی لپاره 2- د 8- = b³ او نه $-2=\sqrt[3]{-8}$

بلکه $-2=-\sqrt[3]{8}$- ليکو٠ په دې اړوند او د يادو شوو نيونو په بنسټ دې دا لاندې اوبی په ګوته شوی وي

$$\sqrt{a^2}=a,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4,10)$$

ځلوری ريښه يا مربع ريښه $\sqrt{a^2}$ د ټولو حقيقي اعدادو يا - ګڼونو a لپاره تعريف شوي٠ د نامثبت يا نازياتيز ې a لپاره به (4,10) په داسی حال کې، چې د منفي a لپاره به بيا د (4,10) اوبی منفي يا متيز وي، کوم، چې نيونه $b \geq 0$ نفې کوي.

په ځانګړي حالتونوکې به د (10 , 4) بنول شويو حالتونو استعمال لاندې مخامخوالي يا مضاد لاس ته راولي، لکه :

$$\sqrt{4}=\sqrt{2^2}=2,\sqrt{4}=\sqrt{(-2)^2}=-2$$

ياني د 2- = 2 سره٠

د (10 , 4) تيک داسې ليکل کيدی شي:

$$\sqrt{a^2}=|a|=\{a, a\geq 0,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4,11)$$

$$=\{-a \quad , a\leq 0 \qquad (4,11)$$

د ريښې يا جذر له پيژند (9 , 4) , (8 , 4) سره سم کيدی شي، چې لاندې باوري د ريښې قوانين وليکل شي د... $n = 1,2,3$ او $a, b\geq 0$ لپاره

$$\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4,12)$$

$$\sqrt[n]{a}:\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a}/\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a/b}, b>0\ldots\ldots(4,13)$$

$$\sqrt{a}.\sqrt[m]{a}=\sqrt[n.m]{a^{n+m}}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4,14)$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[n.m]{a}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4,15)$$

پورته د (4,15),(414),(413,),(4.12) ترمنځ بايد لږ واټن وي، خو کومه ترې ناسمه پوهيدنه نه رامخ ته کوي ۰ دلته پيژندل کيږي، چې د ريښې قوانين د پوتنځقوانينو ته، چې په(4,2) تر (4,6)پورې ورکړ شوي،د پرتلې وړ دي۰ په رښتيا چې دا د پوتنځقوانينو لاس ته راتلی شي، که پوتنځ د ريشنل اکسپوننت سره په لاندې ډول تعريف شي يا يې لاندې پيژند ورکړ شي۰

$$\sqrt[n]{a} = a^{1/n} \Leftrightarrow \sqrt[n]{a^{m}} = (\sqrt[n]{a})^{m} ....(4,16)$$

د... $a \geq 0$, $n = 1,2,3,\ldots$, $m = 1 , 2 , 3 4 \ldots$ لپاره

د بيلګې په توګه (١٦ ، ٤) په لاندې ډول ليکل کيږي

$$\sqrt[n]{a}.\sqrt[m]{a} = a^{1/n} \cdot a^{1/m} = a^{(1/n)+(1/m)} = a^{(n+m)/n.m} = \sqrt[n.m]{a^{n+m}}$$

دا اړيکې (4,16) کيدی شي منفي $m = -1,-2,-3,\ldots$ ته هم پراخه شي، چيرته، چې (4,17) په ټينګه - يا کره باور ولري

$$a^{-(m/n)} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}, a > 0....................(4,17)$$

بې له بنديزونو د خوښې جګو n او m لپاره د پوتنځقوانين (4, 2) تر (4,6) باور لري، خو يوازې هلته، چې نه ورکيدونو بنسټونو يانې $a>0$, $b>0$ نيونه شوې وي۰

د ريښې شميرلو لپاره بايد اساساً د(4,16) له مخې ريشنل اکسپوننتونه واوړي او له (4,2) تر (4,6) استعمال کړي

اړتيا لرو، چې د پوتنځ او ريښې سره شميرلو د قوانينو استعمال نيونې تل و ازمايلی شو۰ په ځانګړي ډول د بنسټ نه منفيتوب کمونوالی يا نامنفيوالی يا مثبتتوب(مثبتوالی يا زياتونوالی) پريږدو، چې لاندې ناسم پاي کيدډول وښايو۰

$$\sqrt{-a}=(-a)^{1/2}=(-a)^{2/4}=\sqrt[4]{(-a)^2}=\sqrt[4]{a^2}=a^{2/4}=a^{1/2}=\sqrt{a}$$

برابرون يوازې د دې ساده حالت0 = a لپاره شته دی يا باور لري، د 0=|a يا $a\neq 0$
لپاره a-او يا a منفي دي دا په دې مانا، چې a يا-a پيژند نه لري يا تعريف نه دی۰

د توان قوانين د توان سره شميرلو، چې راشنل جګ لري، په لاندې بيلګو کې روښانه کوو:

پام: په لاندې بيلګو کې دا تراوسه د شمير بنسټيز قوانين ټول راغلي، د نو ورسره بلدېدونکو ګرانو لوستونکو ته دې دا روښانه وي، چې د لږ فکر وروسته هرڅه روښانه کيدی شي۰ شميرنه يې لږ وخت نيسي، که غواړی پخپله يې يو ځل وشميری۰

بيلګه ٤ ۰ ٦

$$\sqrt[3]{\sqrt{125}}=\{(125)^{\frac{1}{2}}\}^{\frac{1}{3}}=(125)^{\frac{1}{6}}=(5^3)^{\frac{1}{6}}=5^{\frac{1}{2}}=\sqrt{5}=2,2361$$

بيلګه ٤ ۰ ٧

$$\frac{a^2\sqrt{b}c^{-2}}{\sqrt[3]{a^2}b^{-3}}:\frac{d^2\sqrt{c}}{\sqrt[5]{d}a^{-5}}=\{a^{(2-\frac{2}{3})}b^{(\frac{1}{2}+3)}c^{-2}\}:\{a^5c^{-2}d^{(2-\frac{1}{5})}\}=$$

$$=a^{(2-\frac{2}{3}-5)}b^{(\frac{1}{2}+3)}c^{(-2-\frac{1}{2})}d^{(-2+\frac{1}{5})}=a^{-\frac{11}{3}}b^{\frac{7}{2}}c^{-\frac{5}{2}}d^{-\frac{9}{5}}=$$

$$=\frac{\sqrt{b^7}}{\sqrt[3]{a^{11}}.\sqrt{c^5}.\sqrt[5]{d^9}}=\frac{b^3.\sqrt{b}.c^2}{a^3.\sqrt[3]{a^2}.c^2.\sqrt{c}..d^5.\sqrt{d^4}}$$

بيلګه ٤ ۰ ٨

$$8.\sqrt[3]{343}-4.\sqrt[3]{125}+5\sqrt[3]{8}-5\sqrt[3]{729}$$

$$=8.\sqrt[3]{7^3}-4\sqrt[3]{5^3}+5.\sqrt[3]{2^3}-5.\sqrt[3]{3^6}=8.7-4.5+5.2-5.9=1$$

بيلګه ٤ ۰ ۹

$$5.\sqrt{63}-2.\sqrt{175}-\sqrt{343}+3.\sqrt{28}$$
$$=5.\sqrt{7.3^2}-2.\sqrt{7.5^2}-\sqrt{7.7^2}+3.\sqrt{7.2^2}=$$
$$=5.3\sqrt{7}-2.5\sqrt{7}-7.\sqrt{7}+3.2.\sqrt{7}=$$
$$=15.\sqrt{7}-10.\sqrt{7}-7.\sqrt{7}+6.\sqrt{7}=4.\sqrt{7}$$

بيلګه ٤ ۰ ۱۰

$$\sqrt{a-\sqrt{a^2-b^2}}.\sqrt{a+\sqrt{a^2-b^2}}=\sqrt{(a-\sqrt{a^2-b^2}).(a+\sqrt{a^2-b^2})}=$$
$$=\sqrt{a^2-(\sqrt{a^2-b^2})^2}=\sqrt{a^2-a^2+b^2}=|b|$$

د $|a| \geq |b|$ لپاره

د مختلفو شميرلو لپاره موخور دی، چې مات لاندې کې منځ ته راغلي ريښې له منځه يوسو (د ماتلاندې ريشنل کول)۰

که په ماتلاندې کې يوه ريښه $\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$ د فاکتور يا ځلوونې په څيررامنځ ته شي، نو دا د وظيفې لپاره يوازې اړيين ده چې (m < n (m , n >0 او $m,n \in Z$ په پام کې راوړو

کارونه يا عمليه په لاندې ډول اجرا کيږي(N*|= 0 , a > 0)

$$Z/N=\frac{Z}{N}=\frac{Z}{N*\sqrt[n]{a^m}}=\frac{Z.a^{1-\frac{m}{n}}}{N*a^{\frac{m}{n}}.a^{1-\frac{m}{n}}}=\frac{Z.\sqrt[n]{a^{n-m}}}{N*a},..........(4,18)$$

بيلګه ٤ . ١١

$$\frac{3}{2\sqrt[3]{3}}=\frac{3}{2.3^{\frac{1}{3}}}=\frac{3.3^{\frac{2}{3}}}{2.3.3^{\frac{2}{3}}}=\frac{3^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}}}{2.3^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}}}=\frac{3^{\frac{2}{3}}}{2.3}=\frac{3^{\frac{2}{3}}}{2}=\frac{1}{2.\sqrt[3]{9}}$$

که په ماتلاندې کې د څلورې- يا مربع ريښې زياتون يا کمون وي $N=\sqrt{a}\pm\sqrt{b}$ نو ماتلاندې له مات $\sqrt{a}\pm\sqrt{b}$ سره غزوو او د بينوم فرمول استعمال سره له $a>0$ او $b>0$،چې $a\neq b$ وي لاس ته راځي:

$$\frac{Z}{N}=\frac{Z}{\sqrt{a}\pm\sqrt{b}}=\frac{Z.(\sqrt{a}\pm\sqrt{b})}{(\sqrt{a}\pm\sqrt{b}).(\sqrt{a}\mp\sqrt{b})}=\frac{Z.(\sqrt{a}\pm\sqrt{b})}{a-b},...(4,19)$$

بيلګه ٤ . ١٢

$$\frac{1}{2-\sqrt{3}}=\frac{2+\sqrt{3}}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}=\frac{2+\sqrt{3}}{4-3}=2+\sqrt{3}$$

بيلګه ٤ . ١٣

$$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{2}-\sqrt{3})}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2-3}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$$

۴ . ۳ توان(پوتنځ) د حقيقي – يا رييل جګ (اکسپوننت) سره

دلته دا په ګوته کوو يا دې دا ويل شوي وي، چې د توان ټول قوانين له (4,2) تر (4,7) دې په خوښه حقيقي اعدادو اکسپوننتونو(جګعددونو)m,n لپاره باور لري،طبعأ بې بنديزه ټيک د مثبت بنسټ لپاره. يعنې a,b>0 ، برسيره پردې دې بايد توان $a^{\alpha}; a>0$ د ناريښتوني يا ايراسنل عدد α لپاره تعريف شي.

که α یو ایراشنل – یا ریښتونی عدد وي، نو موږ د ۳ . ۱ . ۴ برخې سره سم انتروالونو بندولو په بنبت لرو: $\propto = \{a_{n;} a'_n\}$. دلته $a_{n;} a'_n$ هوښیار یا راشنل اعداد دي.

بیا نو

$$\beta = \{a^{a_n}; a^{a'_n}\} \qquad (4,20)$$

هم په انتورالونو بندول دي چې غږي يې (۴،۲) لاندې تعریف شوي توانونه دي د راشنل اکسپوننت سره. د هغه موجود په انتروالونو بندولو سره په دې توپیر، چې

$$2^1 < 2^{\sqrt{2}} < 2^2$$
$$2^{1,4} < 2^{\sqrt{2}} < 2^{1,5}$$
$$2^{1,41} < 2^{\sqrt{2}} < 2^{1,42}$$
$$2^{1,414} < 2^{\sqrt{2}} < 2^{1,415}$$
$$2^{1,4142} < 2^{\sqrt{2}} < 2^{1,4143}$$
$$\vdots$$

اخرني مساوات په دې معنا دی

نو لرو $$\sqrt[10000]{2^{1412 < 2^{\sqrt{2}} < \sqrt[10000]{2^{14143}}}}$$

٤ ، ٣ تولګه : د a>0, b>0 ریيل او $m, n \in N(n \neq 0)$

همدا ډول $m, n \in N(n \neq 0)$ ییلو لپاره باور لري

$$\alpha, \beta \in R$$

$$a^0 = 1, \frac{1}{a^\alpha} = a^{-\alpha}, \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}, \sqrt[n]{a^m} =$$

$$= (\sqrt[n]{a})^m = a^{\frac{m}{n}}$$

دا پورته موضوع تر دې ځايه بسيا کوي، که نور څه مخته راتلل، چې اړيين وو، هغه به بيا په ګډه ورزياتوو

۴ . ۵ . تمرينونه

۱ . د توان کلمه، د توان جمعه او تفريق يا زياتون او کمون

۱ . ۱ – د توان په ځير يې وليکئ

a) $(-a^{-1}) \cdot (-a^{-1}) \cdot (-a^{-1}) \cdot (-a^{-1})$ b) $-\left(\frac{1}{a^{-2}} \cdot \frac{1}{a^{-2}} \cdot \frac{1}{a^{-2}}\right)$

c) $-(b-a) \cdot (a-b) \cdot (a-b)$ d) $-(a^0 b) \cdot (a^0 b) \cdot (a^0 b) \cdot (a^0 b)$

1.2. a) -3^{-4} b) $(-5)^3$ c) $(-2^{-1})^3$ d) $-\left(\frac{2}{3}\right)^2$

1.3. a) $12a^2b - 6ab^2 - 15a^2b + 6ab^2 - 7a^2b$

b) $(3a+2b)x^4 - x^4(2b-3a) + x^4(3a+2b)$

c) $4(a-b)^2 + 2(b-a)^2 - 3(a-b)^2$

d) $18(a-1)^3 - 3(1-a)^3 - 15(a-1)^3 + 4(1-a)^3 + 3(1-a)^3$

۲ – د توانو ضرب او وېش د برابر بنسټ سره

2.1. a) $\frac{3a^{n+1} \cdot 6x^{n+7} \cdot 9b^{x+1}}{3x^n \cdot 2b^{x+1} \cdot 3a}$ c) $\frac{a^{x+1} \cdot b^{x+3} \cdot a^{3x-1} \cdot b^{x+3}}{a^{x-2} \cdot b^{3-x} \cdot a^x \cdot b^{x+1}}$

b) $\frac{a^{n+1} \cdot a^{n+1} \cdot a^n}{a^0 \cdot a^n \cdot a^{n-1}}$ d) $\frac{a^{3n-x} \cdot b^{2n+x}}{a^{n+2x} \cdot b^{2n-x}} \cdot \frac{x^{3n+2} \cdot y^{2n-1}}{x^{2n-3} \cdot y^{n+1}}$

2.2. a) $\frac{18x^{a+4}}{2y^{5a+7}} : \frac{4x^{7-3a}}{9y^{8+5a}}$ c) $\frac{42a^2b^3 \cdot x^{n+1}}{36c^3 \cdot y^2 \cdot z^{n-3}} : \frac{70a^3b^2 \cdot x^{n+2}}{54c^2y^4 \cdot z^{n-2}}$

b) $\frac{a^{5x-2y}}{b^{6m-1}} : \frac{a^{4x+y}}{b^{m-2}}$ d) $\frac{45xa^3 \cdot 9y^n(a-1)^2}{9yb^3 \cdot 30x^n(a+1)^2} : \frac{9y^{n-1}(1-a)^3}{24x^{n+1}(1+a)^2}$

---

۲ . د توان ضرب او جمعه(زیاتون) د همغه بنسټ سره:

2.3. a) $(x^{5n+3} + x^{4n+5} - x^{3n+4}) : x^{2n+3}$

b) $(143a^4b^5 - 221a^3b^5 - 247a^5b^4) : 13a^3b^4$

c) $(a^{n+1}b^{x-1} + a^nb^x + a^{n-1}b^{x+1}) : a^{n-2}b^{x-1}$

d) $(16a^8 - a^4b^2 + 9b^4) : (4a^4 - 5a^2b + 3b^2)$

د لوګاریتم بنسټ فرمولونو استعمال.

په لاندې کې x وشمیرئ

۳ . د توان په توانونه، د توانونو ضرب او وېش د برابر جګګڼ یا جګعدد سره، د کمیزو یا منفي اکسپوننتونو سره شمیرنه

3.1. a) $\left(1\frac{3}{4}\right)^2 : \left(2\frac{1}{3}\right)^2$

b) $4^{-2} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{-4}$

c) $\left(-\frac{1}{a^{-4}}\right)^{-5}$

d) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{-3}$

3.2. a) $\dfrac{18^4(a^2b)^2}{27^3\cdot(2a\sqrt{a}\cdot b)^2}$

b) $\dfrac{(6ab)^3\cdot(5a^2b)^4}{2^4\cdot 3ab^2\cdot(25a\sqrt{b})^2}$

c) $\left(\dfrac{4b^2y^2}{6a^2x^2}\right)^3\cdot\left(\dfrac{8a^3y^2}{6b^3x^3}\right)^4\cdot\left(\dfrac{18b^3x^6}{16a^3y^3}\right)^2$

d) $\left(\dfrac{45b^2y^3}{24a^3x}\right)^2\cdot\left(\dfrac{6bx^3}{9ay^3}\right)^3\cdot\left(\dfrac{75b^3x^3}{36a^4y}\right)^2$

3.3. a) $\dfrac{(3a-9b)^2}{81b^2-9a^2}$

b) $\dfrac{(6a-12b)^2\cdot(3a+6b)^2}{(6a^2-24b^2)^2}$

c) $\dfrac{(4a^2-9b^2)^2}{(3a^2-2ab)^2}\cdot\left(\dfrac{9a^2-4b^2}{2a^2+3ab}\right)^2$

d) $\left(\dfrac{2xb^3}{3ya^3}\right)^3\cdot\left(\dfrac{15x^2a^3}{8y^3b}\right)^2:\left(\dfrac{25x^3b^3}{12y^4a}\right)^2$

3.4. a) $\dfrac{27x^{-5}\cdot y^{-6}\cdot z^{-1}}{45x^{-4}\cdot y^{-5}\cdot z^0}\cdot\dfrac{49x^{-2}\cdot y^{-3}\cdot z^{-4}}{42x^{-3}\cdot y^{-4}\cdot z^{-3}}$

b) $\dfrac{a^{-2}\cdot x^{-4}\cdot y^{-6}}{b^3\cdot c^{-4}\cdot z^{-5}}:\dfrac{a^{-3}\cdot b^{-5}\cdot x^{-3}}{c^{-5}\cdot y^6\cdot z^{-7}}$

c) $\dfrac{(ax-ay)^m \cdot (3bx+3by)^n}{(cx^2-cy^2)^{m+n}}$

d) $\left(\dfrac{(x+y)^{3a-4}}{x^{a-1}y^2} : \dfrac{y^{2a-5}}{x^{4a-3}(x+y)^{3-2a}}\right)\dfrac{x^{4-3a}y^{3a-6}}{(x+y)^{a-2}}$

۴ . د کومو شرلیطو لاندې کیدی شي لاندې عددونه د یوه مربع – یا څلوری ریښه وي؟

4.1. a) $+a, -a$ b) $+a^2, -a^2$ c) $+a^3, -a^3$ d) ab

4.2. a) $+(a-b), -(a-b)$ b) $+(a-b)^2, -(a-b)^2$ c) a^2-b^2 d) a^2+b^2

۵ - د ریښو جمعه او تفریق)زیاتوناو کمون)

5.1. a) $6\sqrt{27}+2\sqrt{108}-7\sqrt{75}$

b) $\sqrt{50}+\sqrt{8}-\sqrt{72}+\sqrt{18}$

c) $3\sqrt[4]{256}-4\sqrt{49}-7\sqrt[3]{27}+2\sqrt[5]{32}$

d) $3\sqrt{50}-\sqrt{98}+4\sqrt{288}+14\sqrt{162}-\sqrt{25-9}\cdot\sqrt{2}$

5.2. a) $\dfrac{x(2r^2-4x^2)}{\sqrt{r^2-x^2}}-8x\sqrt{r^2-x^2}$

b) $\dfrac{r(4r^2-3rH)}{\sqrt{4r^2-2rH}}-3r\sqrt{4r^2-2rH}$

c) $2\sqrt{(x-k)^2+x^2}-\dfrac{(2x-k)^2}{\sqrt{2x^2-2kx+k^2}}$

d) $\dfrac{h^2+\left(c-\frac{c}{2}\right)^2-\left(c+\frac{c}{2}\right)^2}{\sqrt{h^2+\left(c-\frac{c}{2}\right)^2}}-\dfrac{h^2+2\cdot\frac{c^2}{4}}{\sqrt{h^2+\frac{c^2}{4}}}$

5.3. a) $\sqrt{1-x}+\dfrac{x+1}{2\sqrt{1-x}}$

b) $\dfrac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}+\dfrac{3x^2}{(1-x^2)^2\sqrt{1-x^2}}$

c) $\dfrac{\sqrt{a^2-x^2}}{a^2-x^2}+\dfrac{x^2}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}$

d) $\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+a^2}}+\dfrac{x}{(x+\sqrt{x^2+a^2})\cdot(\sqrt{x^2+a^2})}$

۶ – د ریښو یا جذرونو ضرب او وېش

6.1. a) $\sqrt{3\cdot 7}\cdot\sqrt{3\cdot 5}\cdot\sqrt{5\cdot 7}$ c) $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{4}} : \sqrt{\frac{a^2-b^2}{4}}$

b) $(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})$ d) $\sqrt{\frac{a^2+b^2+2ab}{2}}\cdot\sqrt{\frac{b^2-2ab+a^2}{2}}$

6.2. a) $(3-\sqrt{2})(2+3\sqrt{2})$ c) $\sqrt{12x^2-12x}\cdot\sqrt{3x^2-3}$

b) $\sqrt{8+2\sqrt{10}}\cdot\sqrt{8-2\sqrt{10}}$ d) $\sqrt{a^2+a}\cdot\sqrt{ab+b}$

6.3. a) $\left(4^{-\frac{1}{4}}+\left(\frac{1}{2^{-\frac{3}{2}}}\right)^{-\frac{4}{3}}\right)\cdot\left(4^{-0,25}-(2\sqrt{2})^{-\frac{4}{3}}\right)$ c) $\frac{\sqrt{a+c}+\sqrt{b+c}}{\sqrt{a+c}-\sqrt{b+c}}$

b) $\sqrt{6x^2-6}\cdot\sqrt{\frac{3x-3}{2x+2}}$ d) $\frac{\sqrt{(a-b)^2+a^2+b^2-2ab}}{\sqrt{2(a^2+b^2)(a^2-b^2)}}$

۷ – د توان او ريښې ريښه وېستنه (حلونه)

.1. a) $\sqrt{0,04^5}$ b) $\sqrt[3]{4200}$ c) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{8}}$ d) $\sqrt{\sqrt[4]{256}}$

.2. a) $\sqrt[2n-1]{a^{4n^2-1}}$ c) $\sqrt{\sqrt[3]{a^6\cdot b^{12}}}$

b) $\sqrt[4]{a^2\cdot\sqrt[3]{a^2}}$ d) $\sqrt[3]{\sqrt{a^6\cdot b^8}}$

.3. a) $\sqrt[3]{(a-b)^3(a+b)^4}$ c) $\frac{4\pi r^3-8\pi r^3}{\sqrt{\left(4r^2-2r\cdot\frac{4}{3}\cdot r\right)^3}}$

b) $\sqrt{\frac{1}{8}a^2+\sqrt{\left(\frac{a^2}{8}\right)^2+\frac{a^4}{8}}}$ d) $\pm\sqrt{\left(\frac{x_0y_1^2}{y_1^2-y_2^2}\right)^2-\frac{y_1^2x_0^2}{y_1^2-y_2^2}}-\frac{x_0y_1^2}{y_1^2-y_2^2}$

.4. a) $\sqrt[4]{\frac{a}{b}\cdot\sqrt[3]{\frac{b^2}{a}\cdot\sqrt{\frac{1}{a^2}}}}$ c) $\sqrt{a\cdot\sqrt[8]{a^5\cdot\sqrt[3]{a}}} : \sqrt[4]{a\cdot\sqrt[3]{a^2\cdot\sqrt{a}}}$

b) $\sqrt[3]{a^3\cdot\sqrt{a^2\cdot\sqrt[5]{a^8\cdot\sqrt[4]{a^3}}}}$ d) $\frac{\sqrt[6]{a^5\cdot\sqrt[3]{a^2}}}{\sqrt[3]{a^2\cdot\sqrt[6]{a^4}}} : \frac{\sqrt{a^3\cdot\sqrt[9]{a^7}}}{\sqrt[9]{a^7\cdot\sqrt{a}}}$

۸ – لاندې ماتونه يا کسرونه داسې شکل ته واړوئ، چې مخرج ريښه نه وي.

8.1. a) $\frac{3}{4\sqrt{3}}$ b) $\frac{4}{\sqrt[3]{2}}$ c) $\frac{10}{3\sqrt{8}}$ d) $\frac{15}{\sqrt[11]{243}}$

8.2. a) $\frac{a^2}{\sqrt[3]{a^5}}$ b) $\frac{1}{\sqrt[9]{x^{13}}}$ c) $\frac{y^2x}{\sqrt{x^3y}}$ d) $\frac{ab}{\sqrt[7]{a^2b^3}}$

8.3. a) $\frac{13}{7-\sqrt{10}}$ b) $\frac{6}{\sqrt{5}+1}$ c) $\frac{15}{3-\sqrt{6}}$ d) $\frac{16}{3+\sqrt{5}}$

8.4. a) $\frac{8}{3\sqrt{2}+4}$ b) $\frac{17}{3\sqrt{5}-2\sqrt{7}}$ c) $\frac{6}{\sqrt{8}+\sqrt{5}}$ d) $\frac{6}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$

8.5. a) $\frac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}$ b) $\frac{3(\sqrt{5}-\sqrt{8})}{\sqrt{8}+\sqrt{5}}$ c) $\frac{3+\sqrt{6}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ d) $\frac{4\sqrt{10}-7\sqrt{3}}{\sqrt{10}-\sqrt{3}}$

8.6. a) $\frac{7\sqrt{5}+4\sqrt{3}}{5\sqrt{3}+2\sqrt{5}}$ c) $\frac{\sqrt{3-\sqrt{2}}}{\sqrt{3+\sqrt{2}}}$

b) $\frac{2\sqrt{6}+3\sqrt{5}}{2\sqrt{6}-3\sqrt{5}}$ d) $\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$

۵ ۰ لوګاريتم يا لوګاريتموس Logarithmus

په دې برخه کې د لوکاريتم کلمه ترڅېړنې لاندې نيسو او د لوګاريتم د قوانينود استعمال اسانتياوې، چې په کره يا په کلکه يې په نيونو (فرضيو) پاملرنه شوې وې څېړو ۰

۵ ۰ ۱ د لوګاريتم کلمه

موږ په دې برخه کې لوګاريتم تر څېړنې لاندې نيسو، د لوګاريتم د قوانينو اسانتياوې څېړو ، چې په نيونو يا فرضيو کې بايد پوره پاملرنه شوې وي ۰د لوګاريتم $c = \log_b a$ پيژند لپاره د يوه زياتيز - يا مثبت عدد a يوه زياتيز - يا مثبت عدد b ته چې $b \neq 1$ او د لوګاريتم بنسټ بلل کيږي له لاندې برابرون يا مساوات څخه مخ ته ځو د په خوبنه c لپاره

$$b^c = a\ ; a > 0; b > 0; b \neq 1 \qquad (5,1)$$

که a او b له مخه ورکړ شوي وي، نو د برخې ٤ سره یواځنی ټاکلی دی۰ که a او b له مخه ورکړشوي وي، نودپورتنیو نیونو سره یواځنی ریيل ګڼ c شته دی، چې برابرون(4,1) پوره کوي۰ دې ته د a لوګاریتم وایود b پر بنسټ:

پیژند ۵ ۰ ۱:

د ریلل مثبت ګڼ a لوګاریتم لاندې، چې له یوه سره نابرابر بنسټ bولري، هغه ریلل ګڼ c پوهيږو , له کوم سره، چې b د هغه په توان یا پوتنخ کړو او ګڼ a ترې لاس ته راشي۰ لکه (5,1)

د دې لپاره لیکو:

$$c=\log_b a; a>0; b>0; b\neq 1, ...(5,2)$$

(5,1) او (۲ ۰ ۵) یو ارزښت لري د دې لپاره، چې د لوګاریتم قوانین له (5,2) سره سم لاس ته راوړو، نو د(5,1) ته بیرته ورګرځو۰ دا به په لاندې بیلګه کې روښانه شي،په کوم کې چې له a,b,c څخه تل دوه ګڼونه ورکړ شوي دي

بیلګه ۵ ۰ ۱

۵ ۰ ۱ الف : له $2^x=16$ لرو x=4 ، ځکه، چې $16=2^4$

ب له $3^x=\frac{1}{9}$ څخه لرو x=-2 ، ځکه چې $3^{-2}=1/3^2=1/9=\frac{1}{9}$

۵ ۰ ۱ ۰ ۲ الف: $2=\log_x 36$ د x²=36 سره یو ارزښت لري، نو لروx=6

ب : $-6=\log_x \frac{1}{36}$ د $x^{-6}=\frac{1}{64}=\frac{1}{2^6}=2^{-6}$ سره یو ارزښت لري،

نو لرو $x = 2$

۵ ۰ ۱ ۰ ۳ الف : $x = \log_5 125$ د $5^x = 125 = 5^3$ سره، یوارزښت لري،

نو $x = 3$

ب: $x = \log_{\frac{1}{2}}(\frac{1}{16})$ د $(\frac{1}{2})^x = 1/16 = (1/2)^4$

سره یو ارزښت لري، نو لرو $x= 4$

۳ ۰ ۱ ٤ الف $5 = \log_3 x$ د $3^5 = x$ سره یو ارزښت لري، نو $x=243$

ب : $-5 = \log_2 x$ د $2^{-5} = x$ سره یو ارزښت لري، نو لرو $x = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}$

۵ ۰ ۱ ۰ ۵ الف $2 = \log_x(-6)$ تعریف نه دی یا پیژند نه لري۰

ب : $x = \log_{-5} 125$ پیژند نه لري یا تعریف نه دی

پ: $\log_1 x$ پیژند یا تعریف نه دی

له (5,1) او(5,2) څخه لاس ته راځي

$$a = b^{\log a}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5,3)$$

$$\log_b 1 = 0, \log_b b = 1, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5,4)$$

.

د ځانګړي بنسټ لپاره لاندې سومبول کارولکیږي

$$b = e = 2,71828 \Leftrightarrow b = 10$$

$$\log_{10} a = \log a, \log_e a = \ln a, ...(5,5)$$

د lga لوګاریم ته لسیز لوګاریتم وایي او lna ته پیدایښتي یا طبیعي لوګاریتم وایي(e وروسته څیړو) زیات وخت د لسمیز لوګاریتم لپره داسې هم لیکو:

$$c = \log a \qquad (5,6)$$

که سومبولlog څو واره رامنځ ته شي، نو په پام کې دې وي، چې په خوښه، مګر همغه بنسټ باید وکارول شي۰

۵ ۰ ۲ د لوګاریتم قوانین

د لوګاریتم د پیژند سره سم د (5,1) او(5,2) له مخې کیدی شي د پوتنځ د قوانینو(5,3) تر(5,7) په مرسته لاندې لوګاریتم قوانین رابیل کړای شو، کوم چې په خوښه مګر همغه لوګاریتم بنسټ b |= 0 ، b>0 او د زیاتیز(مثبت) x> 0 , y > 0 لپاره باور لري

$$\log(x.y) = \log x + \log y, ...(5,7)$$

$$\log \frac{x}{y} = \log x - loy, ...(5,8)$$

$$\log x^a = a \log x, a \in R, ...(5,9)$$

$$\log \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \log, n = 1, 2, ..., ...(5,10$$

د پوتنځ قوانینو له مخې د دې فرمولونو راوستل یو د وړاندیز وړ د لوګاریتم ژورې څیړنې لپاره تمرین ښایي

د بیلګې په توګه له (۷ ، ۵) همداسې

$$\log_b(x.y)=\log_b x+\log_b y,..........................(5,11)$$

څخه په لاندې ډول او له (5,2)،(5,1) څخه لرو

$$c_1=\log\ \ x, c_2=\log_b y, c=\log_b(x+y),.................(5,12)$$

د لاندې سره یو ارزښت لري

$$b^{c_1}=x, b^{c_2}=y, b^c=x.y,..............................(5,13)$$

له(5,13) او د پوتنځ قانون(4, 2) پر بنسټ لرو :

$$b^c=x.y=b^{c_1}.b^{c_2}=b,\Rightarrow c=c_1+c_2,.....................(5,14)$$

او له (5,11) همداسې د(5,7) ښوونه د (5,12) له امله د لوګاریتم د (5,7) تر(5,10) قوانینو کیدی شي د پیچلي لوګاریتم له افادې څخه د لوګاریتم ساده بنسټیزې افادې ته بیرته راوګرځو اوپه څېټ۰

بیلګه ۵ ۰ ۲

$$\log\frac{2\sqrt{a+b}\,a^3b^2}{\sqrt[3]{c}(a+c)^2}$$

$$=\log 2+\frac{1}{2}\log(a+b)+3\log a+2\log b-\frac{1}{3}\log c-2\log(a+c)$$

بیلګه ۵ ۰ ۳

$$\log(a+b)+2\log(a-b)-\frac{1}{2}\log(a^2-b^2)$$
$$=\log\frac{(a+b)(a-b)}{\sqrt{a^2-b^2}}=\log\frac{(a^2-b^2)(a-b)}{\sqrt{a^2-b^2}}=\log[(a-b)\sqrt{a^2-b^2}]$$

اوس باید وښایو، چې تر کومو شرایطو لاندې دا اړیکې باور لري۰

په بیلګه ۵ ۰ ۲ کې په کینۍ اړخ کې لوګاریتم ځاي لري، چې د ټولوa,b,c تعریف دئ او لاندې برابرون پوره کوي یا ډکوي:

وي دېa+b>0 (د دې لپاره ، چې رېښه تعریف وي او صفر نه شي، ځکه، چې بیا لوګاریتم اوبی یا حل نه لري۰

وي دې$0 < c$ (د دې لپاره چې رېښه تعریف او ماتلاندې صفر نه شي)

وي دې $a+b \neq 0$ (د دې لپاره، چې لوګاریتم تعریف وي)

وي دې $b \neq 0, a > 0$ (د دې لپاره، لوګاریتم تعریف وي)
د کینۍ اړخ لوګاریتم په ځانګړي ډول د 1 = a = 2 . b = -1 , c لپاره تعریف دئ۰ په ښي اړخ کې ولاړ برابرون شکلبدلون یا ځیره بدلون رېښتونی کیدی نه شي، ځکه چېLog بې ځایه دئ ۰ د دې لپاره، چې د ځیرې بدلون رېښتونوالی ممکن شي، باید د $b \neq 0$ پر ځاي په ټینګه یا کره,b>0 وغوښتل شي ۰

په بیلګه۵ ۰ ۳ کې کینه خوا یواځې هلتهموخه وره ده، چې وي:

$$a+b>0, \quad a-b>0$$

نو بیا$a^2-b^2 = (a+b)(a-b) > 0$ او په دې بیلګ کې رامنځ ته شوي ټول لوګاریتمونه هم تعریف دي۰ دا اړیکې د ټولو a ، bلپاره هم باور لري،د کومو لپاره چېپورته نابرابرون ډک وي۰ دا کیدی شي$a > -b , a > b$ له امله هم و$a > |b|$ ته راغونډ شي۰

ته دې هم ګوته نیولې وي، چې لوګاریتم په یوه بنسټ b یوه بل لوګاریتم یوه په خوښه بل بنسټd ته د شمیراوړون د شمیرنې اړول کیدی شي $(b>0, b\neq 1, d>0, d\neq 1, a>0)$

د(۵،۳) له مخې باور لري $a=b^{\log_b a}$

د دې برابرون لوګاریتم نیول و بنسټd ته لرو:

$$\log_d a=\log_d b^{\log_b a}=(\log_b a)(\log_d b),...........(5,15)$$

د

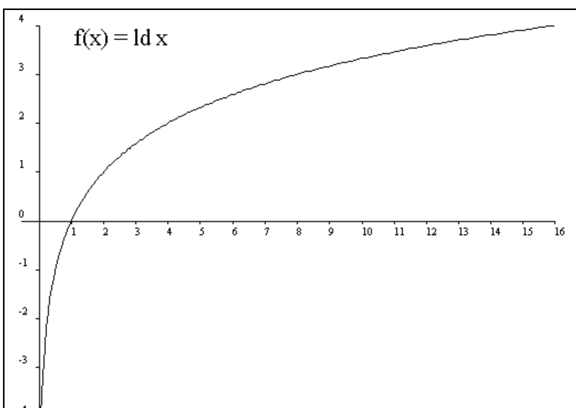
لسیز لوګاریتم اړول په پیداینتي یا طبیعي لوګاریتم او په څټ لپاره لیکو b=10, d = e همداسې b = e , d = 10 او لاس ته راځي :

Lga = (lge)(lna); …………………(16)

Lna=(ln10)(lga) = 2,30429lga;……(17)

$$\lg a=(\lg e)(\ln a),..............................(5,16)$$
$$\ln a(\ln 10)(\lg a)=2,30429\lg a,...........(5,17)$$

د لوګاریتم فنکشن یا بلواک او دیاګرام یې



$$b^{\log_b n} = n$$

$$\log_b b^x = x$$

تکرار د نورو تورو سره

د یوه ځل لوګاریتم

$$\log_b (n \cdot m) = \log_b n + \log_b m$$

$$\log_b \frac{n}{m} = \log_b n - \log_b m$$

د پوتنخ لوګاریتم

$$\log_b n^m = m \cdot \log_b n$$

د ریښي لوګاریتم

$$\log_b \sqrt[m]{n} = \frac{1}{m} \log_b n$$

د لوګاریتم یو په بل بدلیدل

$$\log_b n = \log_b d \cdot \log_d n$$

د کوما یا لسمیزمات نخښهٔ وروسته بینارځایونه ó او لسمیزسیستم

-- ---

	binär	dezimal
2^{-1}	0,1	0,5
2^{-2}	0,01	0,25
2^{-3}	0,001	0,125
2^{-4}	0,0001	0,062.5
2^{-5}	0,0000.1	0,031.25
2^{-6}	0,0000.01	0,015.625
2^{-7}	0,0000.001	0,007.812.5
2^{-8}	0,0000.0001	0,003.906.25
2^{-9}	0,0000.0000.1	0,001.953.125

۵ ۰ ۳ ټولګه

لوګاریمتم د اکسپوننشل فنکشن یا بلواک په څېړ بلواک دی

$x = \log_b n \iff b^x = n$

د $a,b,x,y,d, > 0$ رییل ګڼونواو $a, b, d \neq 1$ لپاره باور لري:

$$c = \log_b a \Leftrightarrow b^c = a, b^{\log_b a} = a, \log_b 1 = 0, \log_b b = 1, b \neq 1$$

$$\log_{10} a = \lg a, \log_e a = \ln a, e = 2,71828.....$$

$$\log(x.y) = lox + \log y, \log\frac{x}{y} = lodx - \log y,$$

$$\log x^{\alpha} = \alpha, \alpha \in R, \log\sqrt[n]{x}\frac{1}{n}\log x, n = 1,2,3,....$$

$$\log_b a = (lod_b d)(.(\log_d a),$$

$$\lg a = (\lg e).(\ln a) = 0,43429\ln a, \ln a = (\ln 10).(\lg a) = 2,30259\lg a$$

۵ . ۴ – تمرینونه

۱ . د د لوګاریتم تعریف

دلوګاریتم تعرف وکاروئ یا استعمالکړئ او x وټاکئ.

1.1. a) $\log_7 49 = x$ b) $\log_3 1 = x$ c) $\log_5 \sqrt[6]{25} = x$ d) $\log_{0,5} \frac{1}{32} = x$

1.2. a) $\lg \frac{1}{10} = x$ b) $\lg 10^{-\frac{1}{3}} = x$ c) $\lg \sqrt[3]{100} = x$ d) $\lg \sqrt{\frac{1}{10}} = x$

1.3. a) $\log_x 8 = 3$ b) $\log_x 25 = 2$ c) $\log_x 243 = 5$ d) $\log_x 1024 = 10$

1.4. a) $\log_x 4 = \frac{1}{2}$ b) $\log_x \frac{1}{5} = -1$ c) $\log_x \sqrt{10} = \frac{1}{2}$ d) $\log_x \frac{1}{32} = -5$

1.5. a) $4^x = 64$ b) $64^x = 64$ c) $9^x = 3$ d) $8^x = 4$

1.6. a) $2^x = \frac{1}{8}$ b) $3^x = \frac{1}{27}$ c) $5^x = 0{,}04$ d) $10^x = 0{,}0001$

1.7. a) $\lg x = 3$ b) $\lg x = -2$ c) $\log_2 x = 6$ d) $\log_{0,5} x = 4$

1.8. a) $\ln x = 2$ b) $\ln x = \frac{1}{2}$ c) $\ln x = -1$ d) $\ln x = 0$

۲ . د لوګاریتم قوانینو استعمال دلوګاریتم
قوانیناستعمال کړئ دو د a,b,c,d,m,n باور لرلو ورشو کره وټاکئ.

2.1. a) $\lg 2^4$ b) $\lg \left(\frac{1}{2}\right)^3$ c) $\lg \sqrt{10}$ d) $\lg\sqrt{\frac{1}{100}}$

2.2. a) $\ln \left(\sqrt{e}\right)^3$ b) $\ln\sqrt{e^{3(\ln e^2+\ln e^6)}}$ c) $\ln \sqrt{\frac{1}{\sqrt[3]{e^2}}}$ d) $\ln \sqrt{\frac{5e}{e^{\ln 5}}}$

2.3. a) $\lg \sqrt[7]{a^5}$ b) $\lg \frac{a^2b^3}{c}$ c) $\lg \sqrt[3]{\frac{ac^2}{bd}}$ d) $\lg \frac{a^2\sqrt{b}}{\sqrt{a^5b^3}}$

2.4. a) $\lg (a^4-b^4)$ b) $\lg (a^2+b^2)^2$ c) $\lg \frac{(a^2-b^2)^2}{a^4-b^4}$ d) $\lg \frac{a^2-b^2}{(a^2+b^2)^2}$

2.5. a) $\log \sqrt{\frac{1-a}{1+a}}$ c) $\ln \frac{\sqrt{a}\cdot b^{-2}}{\sqrt[3]{c}\cdot d^{-3}}$

b) $\lg \sqrt[n+1]{a^n \cdot \sqrt[m]{b^{-1}}}$ d) $\log 2 \sqrt{3\cdot\sqrt[3]{a^2b\cdot\sqrt[4]{ac^2}}}$

2.6. a) $\frac{1}{3}\log(a+b)+\frac{1}{3}\log(a-b)^{-1}$

b) $\lg a+n\lg(a+b)+n\lg(a-b)$

c) $\lg a-\frac{1}{2}\lg b+\frac{4}{3}\lg c$

d) $\frac{1}{3}\lg(a^2-b^2)-\frac{1}{2}\lg(a-b)-\frac{1}{2}\lg(a+b)$

2.7. a) $\frac{1}{3}\lg a+\frac{1}{3}\left\{\frac{1}{2}\lg(a+b)+\frac{1}{2}\lg(a-b)-\lg a-\lg b\right\}$

b) $\frac{1}{2}\lg(a^2+b^2)-\frac{1}{3}\{\lg(a-b)+\lg(a+b)\}$

c) $\frac{1}{3}(\lg a+3\lg b)-\frac{1}{2}(4\lg c-2\lg d)$

d) $\frac{1}{2}\ln\left(\frac{b}{a}+\sqrt{\frac{b^2}{a^2}-1}\right)-\frac{1}{2}\ln\frac{1}{b-\sqrt{b^2-a^2}}+\ln\sqrt{a}$

۳ . د لوګاریتم بنسټیز فرمولونو استعمال.

x وشمیرئ.

3.1. a) $x=\lg 5\cdot\lg 20+(\lg 2)^2$

b) $x=2\cdot 10^{2\lg 2}$

c) $x=3\cdot 10^{-2\lg 3}$

d) $x=\left(100^{\frac{1}{2}\lg 49}\right)^{\frac{1}{2}}$

3.2. a) $x=\sqrt{10^{2+\lg 9}}$

b) $x=\sqrt[3]{10^{4-\frac{1}{2}\lg 100}}$

c) $x=\sqrt[3]{10^{\frac{1}{2}(\lg 2+\lg 32)}}$

d) $x=\sqrt{\sqrt{10}^{\lg 16}}$

3.3. a) $x=\ln\frac{7,63}{\sqrt{e^3}}$

b) $x=\ln\frac{0,23}{2e^2}$

c) $x=\left\{\left(\sqrt[3]{e}\right)^2\right\}^{\ln 8}$

d) $x=\left(\sqrt{e}\right)^{3\ln 5}$

٦ ٠ ګونومتري (کونجکچ یا مثلثات (Gonometry

دا برخه هم د ښوونځي له امله یو تکراري خوي لري. ددې وظیفه به داوي چی د کونجکچ چېکتیاته (ګونومتري شمیرنی ته) په ګراد- او لینده کچ، دکونجفنکشن په استعمال د ولاړکونجیز - او عمومي درېګوډیود تریګونومتري فرمولونو په استعمال د تریګونومتري افادو په ځیره بدلون ته پر مختګ ورکړي یا پر مخ بوزي. غواړم چی د بنسټیزې هندسي کلیمی او قوانین مو د هرڅه له مخه مخ ته پراته وي . خو سره له دې به هم ددې کتاب لوستونکی د بنسټیزې هندسی سره بلد وي ٠ زه به کوښښ وکړم چی ځنی هندسي کلیمی،کم له کمه په ځیره کی ګرانو لوستونکو ته، په مناسب ځاي کی وړاندې کړم یا بهتره په پښتو ونوموم .

١ ٠ ٦ بنسټیزه هندسه

٦ . ١ . ١ ټکی او کرښه point (stright) line

ټکی او کرښه د بنسټیزې هندسی مهمی بنسټیزې کلیمی دي. دا ابسترکتی(خیالي، فکري ، نه لیدیدونکی) کلیمي په خورا ټیك راوړوندود هم نه شي تعریف کیدی، مګر ددوي ترمنځ موجودې اړیکي کیدی شي په شمیرنه کی په خورا زیاتو ډولونو استعمال شي، ٦

سره له دې هم هڅه کیږي چی ټکی او کرښه لیدوړ وګرځول شي لکه ځنګه چی   په ۴ . ۱
- امه برخه کی پېښ شوي. دلته کرښي په g ښوول شوي او غشی یی ناپای پراخوالی په
ګوته کوي. دا د غشي انځورونه دکرښی په انځورونه کی پریښول کیږي یعني نه
انځوریږي، که دا مو و ناریښتیاو ته ونه هڅوي ۰ ټکی کیدی شي د دوه کرښو غوځځاي
په ځیر ونیوله شي) ځیرې په غور وګورئ

وړانګه ray A

کرښه g

(stright line

بند کرښه یا ټوټه کرښه Line segment

A —— B

دوه کرښې په ټکی کې سره غوځوي

د بیلګي په توګه لاندې ویناوې باور یا صدق لري

- ددوه ټکو له لارې یوه کرښه ټاکل کیږي(پورته ځیره وګورئ)، چی دا کرښه دا
ټکي خوندي ساتي   یا پخپل بر کی لري .

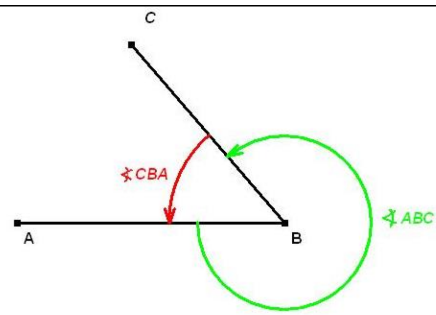
-    دوه ناغبرګي او په یوه هواره کی پرتی کرښی یو بل ټیك په یوه ټکي کی سره
غوځوي   (پورته ځیرو کي کتل کیږي)

یوه وړانګه s_1 له یوې لور په یوه ټکي A بنده کرښبرخه ده) (او یوه پایکرښه له دوه
ټکو A او B بنده یا راګیر کرښه ده)

----

٦ . ١ . ٢ کونج angle یا زاویه

که یوه وړانګه s_1 د خپل پیلځاي څخه په S و خپل اخر ځاي s_2 (ځیره ۴ . ۲الف) ته یووړه شي، نو دا وهل شوې هواره دننني هواره، s_1 او s_2 پښنی او په همدي ډول د S کونج α (الفا) ککره بلل کیږي.

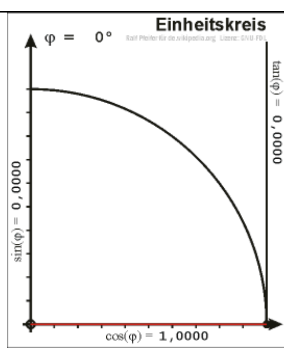


که څرخون د ساعت نخښي په څټ یا مخامخ وي نو دا څرخونلورمثبت یا زیاتیزه او همداسی کونج مثبت یا ز یاتیز کونج بولو او بل ډول څرخونلور یی منفي- یا کمیز کونج بلل کیږي.

په مخامخ ه کې سور په نخښه شوی کونج ننوتی او زرغون په نخښه شوی کونج وتلی کونج دی

کیدی شي چی یو کونج x په ګراد اندازه شي

$$x = a° \qquad (6.1)$$



په داسی حال کی چی ولاړکونج، کوم چی یو په بل ولاړې کرښي $g_1 \wedge g_2$ (او ته دي پام وي) یی جوړوي، له 90° سره مساوي وښایو(لاندي ځیره ، که نورېځیرې و نه کښل شوې) . کیدی شي چی کونج x (ایکس دلته د الفا په ځاي دی، توري پروانه لري، چی کوم وي)په لینده اندازه هم ورکړ شي

$$x = b \qquad (6.2)$$

په پورته یونګردۍ کې ګورو، چې هر ډول کوجونه کښل او ټاکل کیدی شي

په دې ډول ټاکل شوی ګردۍ لینده په وړانګه(شعاع) ویشل کیږي. له دې لارې x د یوه بي نومه ګڼ په څیر لاس ته راځي، چې د ډیرو ګڼلو لپاره ګټور دی. یوه په لینده اندازه ورکړ شوی کونج x په یوې یوونګردۍ) r = 1 (کی انځوروړ دی، چیرته چې دا د اړوند ګردیلیندې اوږدوالی ښاي (څیره په پورته کې کښل شوې)

په دې پسی یا ددې په تعقیب یو د 360° کونج د یوونګردۍ چاپیری) محیط(په ګوته کوي . له دې امله د ګرادGradmass (درجکچ (او)ګردي-) لیندې اندازې یا لیندیکچ یو په بل بدلون ممکن کیږي.

$$a^\circ = \frac{180^\circ}{\pi} b = 57,296^\circ b, b = \frac{\pi}{180^\circ} a^\circ = 0,017453a, ...(4,3)$$

پام : په پورته څیره کې هر ډول کونجونه که له ۳٦۰ درجو زیات هم وي کره کیدی ، که څیرې روښانه نه وو لیکل شوي، چې دا شیږمه برخه ده یا ٤ – مه برخه لیکل شوي وي،نو هغه دې ،نو ٤ دې په ٦ بدل شي۰.

د لاندې بیلګو له لارې دې د کونجورکولو یو څو امکاناته ونومول شي او په همدې ډول دې د »شمیراوړون اړیکی« یاپه ښه توګه د شمیر یو په بل بدلون اړیکی وڅیړل شي.

یادونه : زما شمیرونی یو ډول پرابلم لري او هغه دا چې د دقیقي او ثانیي نخښې هغهسې، چې ورسره بلد یو نه کاری، دا به راته ګران لوتونکي وبخښي۰

بیلګه .٦. ۱ :

کونج “a = 47°12'36 دې په لینده اندازه واړول شي. موږ لمړی کونج په دڅیمالو یا لسیزو برخو اړوو، دا په دې مانا چې ورکړ شوې دقیقي او ثانیي دې په ورته لسیزمات افاده شي:

12’=720“

720 = '12 "

پس په ټولیزه توګه $720'+36'' = 756''$ له دې لاس ته راځی

$1'=(1/3600)°$ (<=)

له دې وروسته په همدې توګه $756.(1/3600)°=0,21°$

له دې لاس ته راځي : $a=47°12'36''=47,21°$

په عمومي توګه باور لري

$$\alpha' = (\frac{\alpha}{60})°, \beta'' = (\frac{\beta}{3600})$$

د(٦ . ٣) پسی باور لري $b=0.017453.47,21=0,826$

دلته ځیرې راځي، خو د دې ځیرو په ځاي به موږ په پورته ځیرو بسیا وکړو، دا چې موږ تراوسه د لږ څه ځمککچ سره بلد یو (د دې لپاره دې زما د ځمککچ کتاب وکتل شي)، نو دا کومې ستونځې نه رامنځ ته کوي۰

بیلګه ٦ . ٢ :

کونج $\frac{\pi}{7}$ دې په درجه کچ یا -اندازه) لسیز او سکساګسیمال (لاتین :یوناني: د بابلیانو په ۶۰ اباد شوی ګڼیز سیستم(ځاي ارزښت سیستم) ویشنو (برخو) ورکړ شي. د (۳ . ۴) له

مخی لرو

$0,701°$ د $a° = 57,296°.(3,14/7)=25,701°$ اړولو په دقیقو او ثانیو ورکوي

$$0,701° = 0,701.60' = 42,06', \qquad 0,06' = 0,06.60=3,6''$$

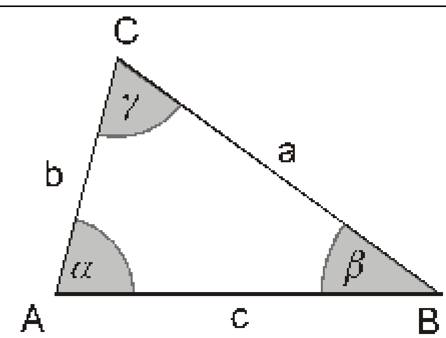
پس داسی دی $\frac{\pi}{7} = 25,701° = 25°42'3,6''$

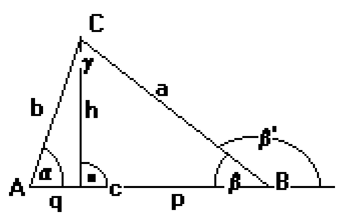
دا پورته داسی لوستل کیږي ۲۵ درجي، ۴۲ دقیقي او ۶ ، ۳ ثانیي

٦ . ١ . ٣ دریګوډی

یادونه: موږ دلته بیا د نومونو(نومه ونو) د ستونځو سره مخامخ کیږو. هغه هواره چی له کرښو راګیر وي دلته له درې کرښو یا هغه هواره، چې ګوډونه ، کونجونه یا ګوټونه ولري، موږ دا ۰۰۰ کونجي یا۰۰۰ ګوټي او یا ۰۰۰ګوډي بولو. ځموږ ژبه او الماني تر یوې ډیرې اندازی په ترکیبي نومونو کی او یا نورو نومونو ډولونوکی یو بل ته ورته دي او په الماني کی هم دې ته ځانګړي نومونه شته. ماته یو کونج چي له دباندې ورته کتل کیږي او د یوې بندې هواره وي ګوډ مناسب ښکاریږي. موږ په ورځنی یا مروجه ژبه کی وایو ، چی د هغه کلی په ګوډ کی .... دا تخنیکي هم درست دی، ځکه چی دا هم دلته مات دی یعنی ګوډ دی. که یو کونج له دننه وګورو نو هغی ته موږ تل کونج وییلی. که څوك په یوه ګوټه کی ناست وي نو وایي، چه په هغه کونج کی دلته نو بیا ګوډ نه وایي. ما د کتاب په اوږدو کی لمړی ځل د ټولو لپاره کونج کارولی، که ټول مو همغسی سم یا اصلاح نه کړل ، نو فکر کوم چی د ګرانو لوستونکو به ورته پام وي .

په ټولیزه توګه په یوه سطحه یا هواره کی له پرتو کرښو g1 , g2 , g2 څخه یو مثلث یا دریګوډی جوړیږي، چی ګوډونه یی C . B . A ، اړخونه یی c. b. a او کونجونه یی α,β,γ دي (د مثلث دننه کونجونه یا زا ویې او دباندې ګوډونه دي، چې موږ یط په پښتو کې همداسې بولو)) مخامخ ځیرې دې وکتل شي





لاندې جملې باور لري چې بی له ښوونی دلته راوړل کیږي

- په دريګوډي کی د کونجونو زياتون $180°$ درجی دیَ یا π دیَ

- يو دباندنی کونج د په نه پراته دننني کونجونو د زياتون سره مساوي ده، له دې امله د

  يوه دريګوډي د دباندنيو کوجونو زياتون $360°$ یا 2π دیَ۰

- د يوه دريګوډي د اړخونو نيمي په يوه ټکي کی يو بل سره پري کوي، چی دا په

  همدې وخت کی د دريګوډي » دروندټکی يا دثقل مرکز « دیَ. اړخنيمي يو بل په

  تناسب د۱ : ۲ پرې کوي يا په پښتو:

  د اړخونو ځاننيونه يی۱ :۲ ده) په ډیره کې وګوریَ) د يوه دريګوډي منځولاړې

  يو بل په يوه داسی ټکي کی سره غوڅوي، کوم چی په همدې وخت کی د چاپير
ګردي) هغه ګردیَ يا دايره چی دريګوډی په خپل دننه کی نيسي يا بهتره، د دريګوډي
خونديګردیَ(منځټکی دیَ)۰

د يوه دريګوډی کونجنيمي يو بل په يوه ټکي کی سره پرې کوي، چی دا په همدې وخت
کی د دننه ګردیَ) ګردیَ چی د دريګوډي

په دننه کی ده يا ګردیَ يا دايره کې خوندي دريګوډی (منځټکی دیَ) لاندې کې بې
ډیره شته) د يوه دريګوډي جګی يا د ارتفاع کرښی په يوه ټکی کی سره غوڅوي.)
ډیرې ټولې لاندې کتل کيږي

د هوارې ځمککچ کې غوره ټکي دا لاندې دي :او په دوي پورې لاندې ډیرې اړه لري،
چی تکرار راځی، خو پروا نه لري۰

د جګيو غوڅټکی Orthocenter **<u>Höhenschnittpunkt</u>** (*H*),

---

circumcenter <u>**Umkreismittelpunkt**</u> (*U*) ·د دباندنی- یا په راتاو گردی منځټکی

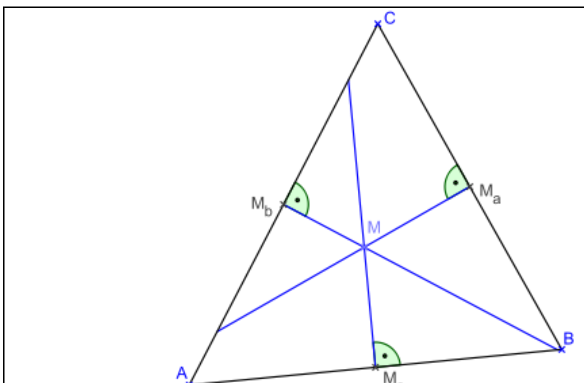
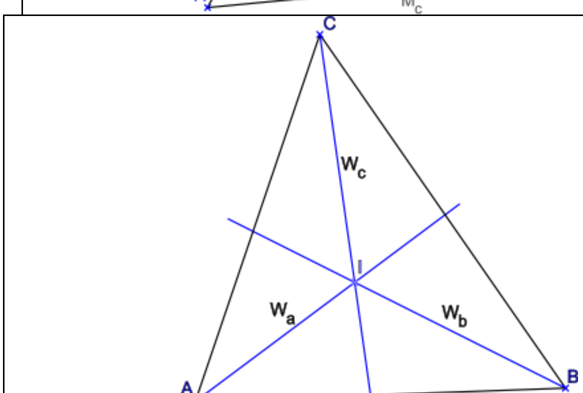
seid symetry <u>Seitensymmetralen</u>), ·د اړخسيومتريو غوښتکی

inscribed circle, incircle den <u>**Inkreismittelpunkt**</u> (*I*) ·د دننه گردی منځټکی

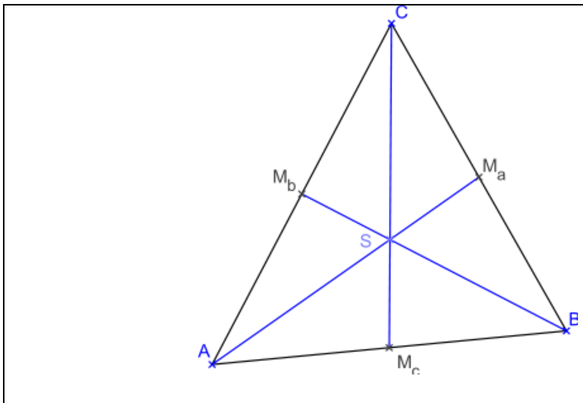
r <u>Winkelsymmetralen</u> · د کونجسيومتري

centroid <u>**Schwerpunkt**</u> (*S*) r · دروندټکی

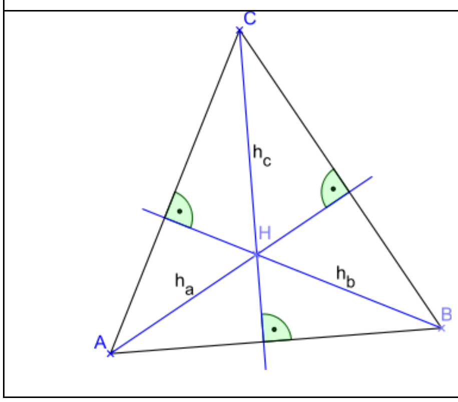
<u>Seitenhalbierenden</u>) median ·اړخنیمی

	مخامخ خيره کې مثلث ياد دريګودي په منځ عمود يا - ولاړې کرښې ښايي
	دامخامخ مثلث هغه کرښې ښايي، چې کونج نيموي او موږ يې کونجنيمی (ناصف الزاويه) بولو (په پورته خيره په نيم اړخ ولاړې کرښې دي)

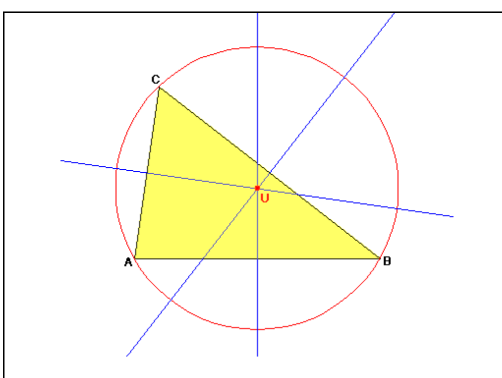
لاندې مثلث کې هغه کرښې دي، چې له کونج څخه اړخ نیموي٠ موږ یې اړخنیمی یا ناصف الاضلاع بولو٠

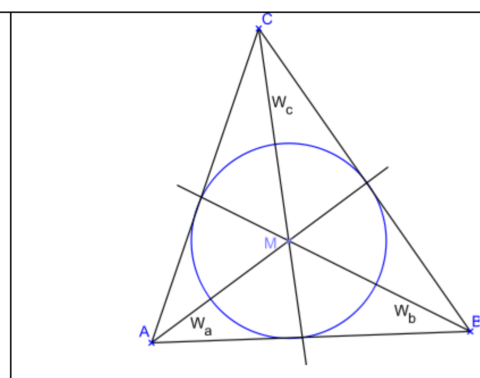


لاندې څېره کې د مثلث هغه کرښې دي، چې له کونج په اړخ ولاړې دي٠ دا د اړخ جګوالی په ګوته کوي، چې ما جګی یا ارتفاع بللي دي٠



په پورته څېره کې کونجنیمی دي ، چې منځ ټکی یې د خونديې ګردی یا دننه ګردی منځټکی هم دی

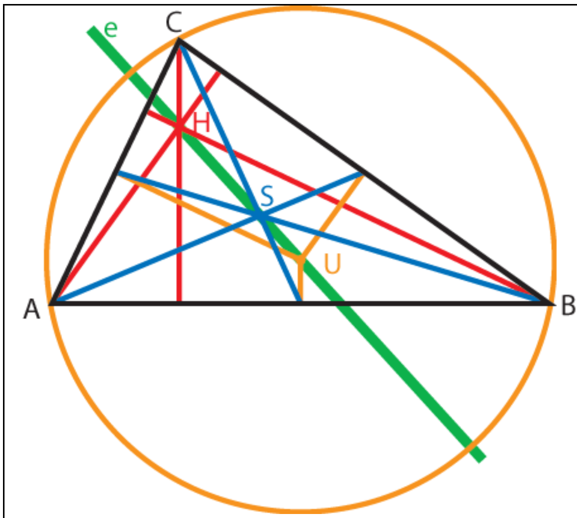




په پورته کینه ځیره کې د اړخ په نیمه ولاړې کرښي دي، چي غوڅتکی یې د په راتاو ګردی یا چاپیرګردی منځتکی دی۰

دا په یو ډول درې کرښي هرې درې یې په یوه تکی کې سره غوڅوي۰

که د یوې دریګوډی د منځولاړو په غوڅتکې یوه ګردی داسی ووهل شي، چې د ګردی کږه دریګوډیځ له یوه ګوډ څخه تیره شي، نو دا ګردی د دریګوډي له نورو دوه ګوډونو څخه هم تیریږي۰ که دریګوډی تیره کونجیزه وي، نو د ګردی منځتکی د دریګوډي په دننه کې پروت دی ، که دریګوډی ولاړکونجیزه وي، نو کونج د ګردی په هیپوتینوز ې یا اوږده اړخ پروت دی (د تالس جمله دې وکتل شي) او که دریګوډی پڅکونجیزه وي، نو منځتکی له دریګوډی دباندې پروت دی۰



که دریګوډی ABC وي ، S دروندتکی، U د چاپیریالګردی منځپکی ، او H د جګیو غوڅپکی وي، نو کرښه په لاندې ځاننیونه یا تناسب پراته دي :دا په لاندې ځیره کې کتل کیږي ۰

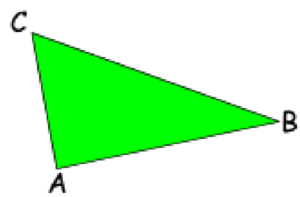
$$\overline{HS} : \overline{SU} = 2 : 1$$

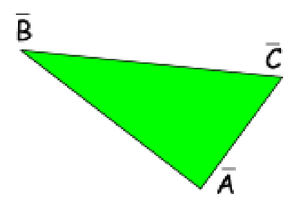
۶ . ۱ . ۴ برابرارزښتوالی او ورته والی یا مشابهت Congruence and Similarity

دوه دریګوډي ABC او A'B'C' یو بل سره کونګروانیڅ یا برابر پټووني دي یاني براربارزښته دي

$$ABC \equiv A'B'C'$$

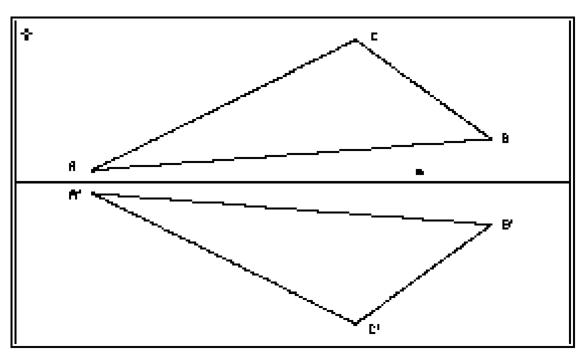
(4.4) که وکښول شي یانې که هرې لورته یووړل شي(وکښول شي) او وڅرخول شي او اینه ونه یا هندارونه یې یو بل پوره پټ کړي یا یو په بل پوره پریوځي (لاندې ځیر)





که دریګوډي سره کونګروانیځ وي، نو باید کم له کمه په دري اصلي ټوټو (اړخونو او کونجونو) کی یو بل سره مساوي وي

په څټ یی هم باور لري S اړخ او W کونج په ګوته کوي.



جملې: دریکوډي تیك هلته کونګرواینځ دي چې یو بل سره مساوي شي په

۱ - دريِ اړخونو کی SSS

۲ - دوه اړخونو او ددې اړخونو ترمنځ کونج کی SWS

۳ - دوه کوجونو او د لوي اړخ ته مخامخ کونج کی SSW

۴ - یوه اړخ او ددې اړخ دواړه خواو کونجونو کي ،WSW

د دې جملو په ثبت هم باور لري، دا په دې مانا چې که دریګوډي په کونګروا ینځ جملو کی ورکړشوو اصلي برخو کی سره برابر وي، نو دا کونګروا ینځ دي. د کونګروا ینځ جملو په بنسټ کیدی شي په ځانګړي توکه دریګوډیجوړښت سرته ورسول شي، کوم چې د کونګروا ینځ جملو کارونی په څیر لیدل کیدای شي .

د دوه هوارو شکلونو ورته والی (Ähnlichkeit)هلته مخ ته پروت دی، کله چې په همغو یا اړوند درې کونجونو کی یو بل سره برابر وي او د همغو یا اړوند اړخونو تر منځ یی تناسب یا ځاننیونه موجود وي .

دا جملي هلته هم باور لري که د کونګروا ینځ له جملو ورته جملو ته ورشو

جمله:

دوه دریګوډي تیك هلته یو بل ته ورته دي که یو دبل سره برابر وي، په :

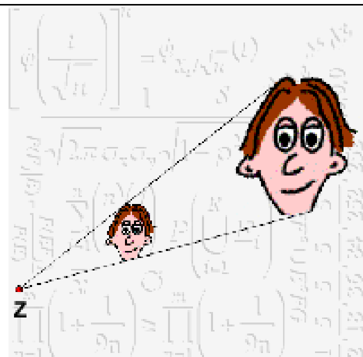
۱ - دري اړخونود اوږدوالي ترمنځ ځان نیونی یا تناسب کی

۲ - د دوه اړخونو د اوږدوالي ترمنځ تناسب او ددې اړخونو ترمنځ کونج کی

۳ - د دوه اړخونو او د لوي اړخ مخامخ کونجونو ترمنځ تناسب یا ځاننیونه کی

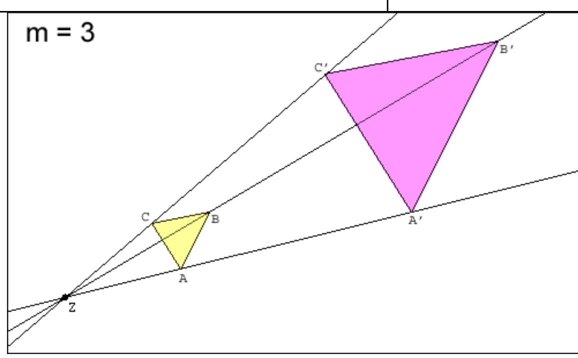
۴ - دوه مساوي پرتو کونجونو کی

دا مخامخ څيرې ورته دي ، که د دې دوه کرښو پای سره په يوه کرښه وتړی او د يوه اړخ د د په خوښه ټکي سره د مخ ته کرښې سره غبګه کرښه وباسۍ، نو دوه ورته درېګودي لاس ته راځي

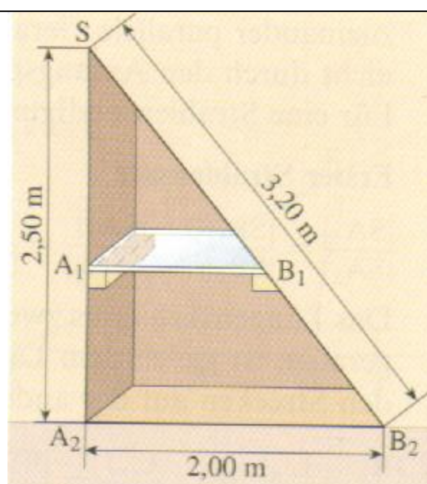


په لاندې څيره کې کښل شوي دريګودې ورته دي، دا په دې مانا چې باور لري:

$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$



د ورته جملو سره خپلواني جملې د وړانګو جملې دي:

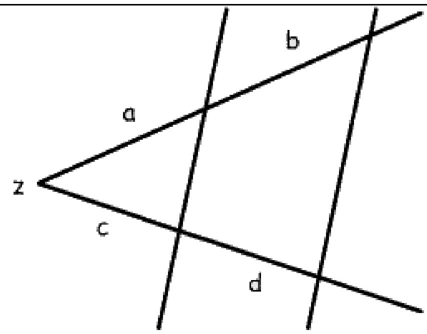


په دې پورته څيره کې درېګودي يو بل ته ورته دي٠

د وړانګې لومړۍ جمله:

دوه له یوه ټکی وتلې وړانګې ، که له دوه غبرګو کرښو غوڅې شي نو ټوټې یې لاندې اړیکی سره لري۰

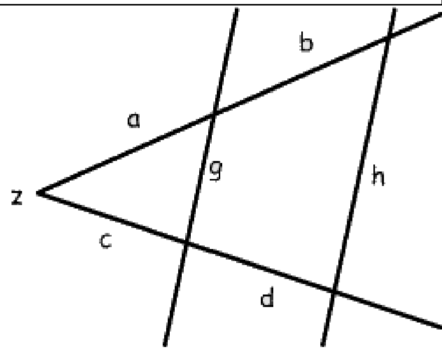
$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \qquad \frac{a}{(a+b)}=\frac{c}{(c+d)}$$



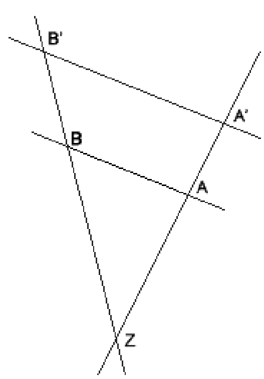
د وړانګې دویمه جمله:

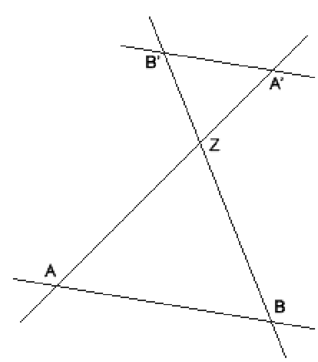
که له یوه ټکي دوه کرښې وکښل شي او دا بیا له دوه غبرګو کرښو غوڅې شي، نو د ټوټو ترمنځ دا لاندې اړیکی لري، دا ته والي له جملو ده۰ ټکی چې څنګهدي په پام کې نیول کیدی شي او د دې او پورته جملې ترمنځ توپیر ته هم پام نیولی شو

$$\frac{g}{h}=\frac{a}{(a+b)} \qquad \frac{g}{h}=\frac{c}{(c+d)}$$



یا دالاندې، چې هرڅه یې روښانه دي





$$\overline{ZA'} : \overline{ZA} = \overline{ZB'} : \overline{ZB}$$
$$\overline{ZA} : \overline{AA'} = \overline{ZB} : \overline{BB'}$$
$$\overline{ZA'} : \overline{AA'} = \overline{ZB'} : \overline{BB'}$$

$$\overline{A'B'} : \overline{AB} = \overline{ZA'} : \overline{ZA}$$
$$\overline{A'B'} : \overline{AB} = \overline{ZB'} : \overline{ZB}$$

(دا لاندې د لیکنې له لارې روښانه شوې څیره دې ګران لوستونکي وکاږي)

که درې په یوه ټکي کی پریکیدونکی کرښي g1 , g2 او g3 د دوه غبرګو) موازی(کرښو g4 او g5 لخوا پرې شي، نو د بیلګي په توګه له ۴ . ۱۰ کښل شوي څیرې څخه لاندې اړیکي لاس ته راځي:

$OA1 : OA2 = OB1 : OB2 , OA1 : OA2 = A1B1 : A2B2$. 1

دا په دې ماناچی په وړانګو پرتي ورته برخی په مساوي تناسب یا ځاننیوی سره پرتی دي:

$A1A2 : B1B2 = OA1 : OB1 = OA2 : OB2$. 2

دا په دې مانا چی: په وړانګو پرتي ورته برخی په مساوي تناسب یا ځاننیونی پرتی دي لکه اړونده، د ککری اندازه شوې برخي چی په وړانګه پرتی دي.

$A1A2 : A2A3 = B1B2 : B2B3 , A1A2 : B1B2 = A2A3 : B2B3$ - ۳

دا په دې مانا چی: په غبرګو پرتی کرښي په همغه برخوکی یو له بل سره په مساوي تناسب یا ځاننیونی پرتی دي

د وړانګو جملی هم باور لري، که د دوه غبرګو په څیر رامنځ ته شي یا که ککره د غبرګو ترمنځ پرته وي) په دې حالت کی دې وړانګي د کرښو په ځاي بدلی یا ولیکل شي   )

بیلګه ۴ . ۳ : د اړخونو a او c او همداسی د کونج الفا څخه دې

یو دریګوډی جوړ شي. لاندې حالتونه تر څیړني لاندې نیسو

$a > c$ - 1

موږ کاږو $AB = c$ او په ټکي A کونجالف

د c په کچه کاږو. په B یو ګردسلینده کاږو د a

په کچه چی د الفا ازاده پښه په ټکې C کې غوڅوي)

څیره دې ګران لوسونکی پخپله وکاږي، روښانه ده

$a < c$ - 2

دلته درې امکاناته شته دی(د دې درې امکاناتو څیره وکاږی)

۲ . ۱ : د ګردیلینده په B د a په اندازه د α ازاده پښه په دوه هغوټکو کي پرې کوي، په کومو کی چی اوبی یواځنی نه دی٠

۲ . ۲ : ګردسلینده د α ازاده پښه لمسوي٠

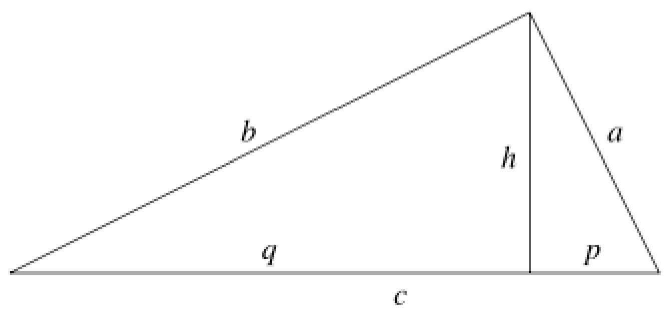
۲ . ۳ : ګردسلینده د α اندازه پښه نه غوڅوي .

$a = c$ (۳

ګردسلینده په B د a په اندازه د α ازاده پښه په دوه ټکو ، په نامه A او C کي پرې کوي. دې لپاره چی حالتونه ۲ - او ۳ - له منځه لرې او تل یواځنی حل ولرو، نو $a > c$ نیونه په دریم کونګرواینخ جمله کی ضرور ده

۶ . ۱ ٠ ۵ .ولاړکونجیز دریګوډی مثلث قایم الزاویه

د مختلفو دریګوډیو څخه موږ په لاندې برخه کی ولاړ کونجيز دریګوډی ترڅیړنی لاندې نیسو .په ولاړکونجیز دریګوډي کی د ولاړ کونج مخامخ اړخ
هوپوتینوزې) Hypotinuse(بلل کیږي، نور دواړه اړخونه کاتیتونه یو: کاتیت (Katheten)بلل کیږي. هغه ولاړکونجیز دریګوډي ته روځنی یا ورسره بلدې یا مروجی په نخښه کونه یا لنډ په نخښونه به له څیرې ۴ . ۱۳ څخه واخلئ



په ولاړکونجیز دریګوډي کی دا لاندې راوړل شوې اړیکی باور لري چی دلته یی بی له اوبی)ښوونی(راوړو:

یادونه : په ولاړګوډیز کې د ولاړکونج مخامخ اړخ اوږد اړخ بولو او د ولاړ ګوډ پیښې ولاړ اړخونه، چې غوښتوني کونج ته مخامخ مخامخ اړخ (پښه) او په موخه ور کونج پرته پښه په کونج پروت اړخ (- پښه) بولو او یا په دې لاتین نوموونو یانې مخامخ کاتیټ او (په کونج) پروت کاتیټ.

د پیتاګوراس (Pythagoras) جمله:

په ولاړکونجیز دریګوډي کی د هیپوتینوزې مربع هواره د دواړو کاتیتو د مربع هوارو زیاتون سره برابر یا مساي ده:

$$c^2 = a^2 + b^2 \qquad (6.5)$$

دکاتیتو(د ولاړاړخونو یا د مخامخ او په پراته اړخ(ضلع)) جمله:

په ولاړکونجیز دریګوډي کی د کاتیت مربع هواریزمساوي ده د ولاړ کونجي هوارې سره، چی له هیپوتینوزې او ددې کاتیت له پرویکشن یا پریوستون څخه لاس ته راځی:

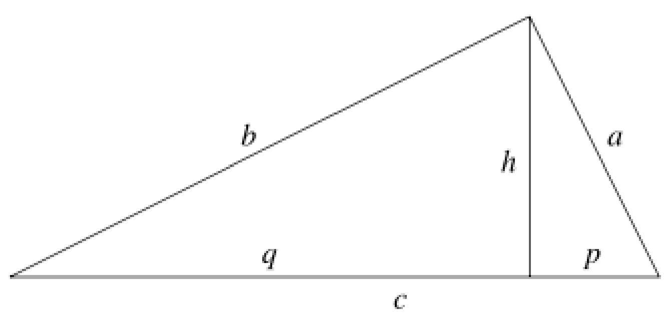
$$a^2 = p.c \, , \, b^2 = q.c \qquad (6,6)$$

جګجمله :

په ولاړکونجیز دریګوډي کی د هیپوتیزې په جګي مربع هواریزمساوي ده د هیپوتینوزې (لوي اړخ) برخو څخه منځ ته راغلې ولاړکونجي هوارې سره

$$h^2 = q \, . \, p \qquad (6.7)$$

یا په لاندې کې لنډ بیا ورکړ شوي



لنډ: (ددې لپاره دې پورته څېره وکتل شي)

پیتاګوراس جمله : $c^2 = a^2 + b^2$

.

د اويکليد د کاتيتونو(پروت – ،مخامخ اړخونو) جملې

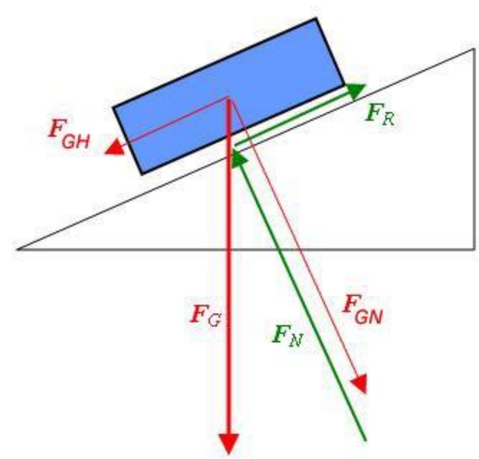
$$a^2 = c \cdot p$$

$$b^2 = c \cdot q$$

$$c = p + q$$

د اويکليد جګجمله $h^2 = p \cdot q$

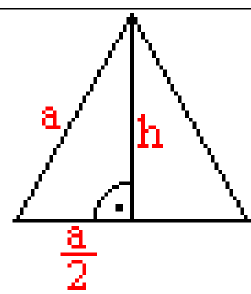
بيلګه ۴ . ۴ : (ځيره نه ده کښل شوې، د ې ته دې ګران لوستونکج فکر وکړي۰ دا يوه فزيکي دنده هم ده(ځېره وکښل شوه، نخښې هم لږ بدلې دي)) د يوه بدن د وزن G تجزيه څرګندوي (د بدن دروند ټکی) دا د فزيك له مخی هغه ټکی دی چی د بدن ټول وزن پرې پروت وي) KSP =)چی په يوه مائله هواره پروت دی، دا وزن مائلې هوارې سره غبرګ په يوه کښته کشونکی زور FH او په مائلی هوارې نيغ ولاړ ، ولاړ) عمودي(زور) قوه FN)تجزيه کيږي. د ښوولو ده چی، دريګوډي ABC د KSPاو FN او FH له خوا ټاکلي دريګوډي سره ورته دی

	يادونه: په ليکنه کې زور يا توان د لاندې ځېرې سره داسې بدلوو:شين تنيا د مستطيل شکل G دی $F_H = F_{GH}, F_N = F_{GN}, G = F_G$ ګوډونه : له پورته ګوډ A کښته ښی لور ته ګوډ C کښته کيڼ لور ته ګوډ B په ګوډ A کونج α ، په ګوډ B کونج β

داچې $G||AC$ ځغلي، نو FH او G یو کونج α جوړوي. دا چې $\beta = R - \alpha$ ده، نو FN او G کونج β جوړوي، دواړه درېګوډي په دې برسیره په ولاړکونج کې یو بل ته ورته دي.

یادونه : داسې بیلګې، چې ثېره یې نه شم ایستلی که وي هم بدې نه دي، ګران لوستونکي کړای شي،چې داسې ثېرې پخپله وباسي، دا دې یو تمرین وي. زما زړه نه شي، چې له لیکلو یې تیر شم.

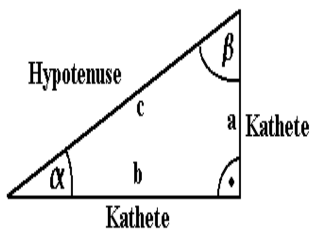
بیلګه ۴ . ۵ : په یوه مساوي اړخیز درېګوډي کې دې (لاندې ثېره) جګې و شمیرل شي .د ٦ . ۴ (له مخې لرو) جګې په همدې وخت کې د مخامخ اړخ نیمی هم دی، دا په دې درېګوډي کې وکاږی)

	$h^2 = a^2 - (a/2)^2$ $h^2 = a^2 - a^2/4$ $h^2 = (3 /4)a^2$ $h = (\sqrt{3}/2)a$

٦ . ۲ په ولاړکونجیز درېګوډي کې د اړخونو تناسب

د کونجکچ لپاره د اړخونو تناسب هم مساعد دی، چې یوه ولاړکونجیز درېګوډي کې جوړېږي(لاندې ثېره). که د کونج α مخامخ اړخ یا -کاتیت a gegkathete د مخامخ اړخ په ثېر وښایو، د b اړخ په β پروت اړخ ankathete او hypothenuse لوی اړخ وي، نو په ولاړکونجیز درېګوډي کې لاندې اړخځانیوني منځ ته راځي یا جوړېږي

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{katheta}{c}$$
$$\cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{kathetb}{c}$$
$$\tan\alpha = \frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{opk}{ank}$$
$$\cot\alpha = \frac{b}{a} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{ank}{opk}$$



د وړانګو جملو له امله دا اړيکي يا تناسب يواځي د کونج په واك کی دی. که په پام کی ونیول شي چي $\beta = 90° - \alpha$ دی، نولاندې اړیکی لیکلی شو

$$\sin\beta = \frac{b}{c} = \sin(90-\alpha) = \cos\alpha$$

$$\cos\beta = \frac{a}{c} = \cos(90-\alpha) = \sin\alpha$$

$$\tan\alpha = \frac{b}{a} = \tan(90-\alpha) = \cot\alpha$$

$$\cot\beta = \frac{a}{b} = \cot(90-\alpha) = \tan\alpha$$

له دې لیدل کیږي، چی د دې څلورو ارزښتونو د پیداکولو لپاره دوه ګنجدولونه پوره دي یا بسیا کوي .وریسي یا ددې په تعقیب پیژندوړ دي

$$\tan\alpha = \frac{in\alpha}{\cos\alpha}, \cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{\cot\alpha}; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(6,10)$$

برسیره پردې د پیتاګوراس د جملی په پام کی نیولو سره لرو

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(6,11)$$

$$1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}; 1 + \cot^2 = \frac{1}{\sin^2\alpha}; \ldots\ldots\ldots\ldots(6,12)$$

---

۶ . ۳. په یوونګردۍ کې د کونج فنکشنونه (-بلواك)

په ۴ . ۲ برخه کې $\sin\alpha; cis\alpha; \tan\alpha; \cot\alpha$ یواځې د لیدیدونکو)Konkrete(اړختناسبونو لپاره په یوه ولاړکونجیز دریګوډي کې ځاي په ځاي دي. دا ویناوې یواځې یا په ځانګړې توګه د $0<\alpha<\frac{\pi}{2}(0<\alpha<90°)$ لپاره تعریف دي. که د α خپلواك واریابل په ځیر ونیسو، نو $\sin\alpha$ او داسې نور فنکشنونه راپه ګوته کوي چې په برخه ۱۵ کې انځور دي او کوجنفنکشنونه بلل کیږي. په یاده شوې برخه کې) ځیرې ۱۵ . ۲۰ الف او ب

ددې لپاره چې د دې تعریفونو پراخوالی په زړه پورې کونجونو لپاره ممکن شي، نودا مو د یوون ګردي باندې مخ نخښې په واك کې کرښو ته لاربښودوي .د لته ټولی کرښی) د لته به له کرښو څموږ مطلب پای کرښی وي(، چې پخپله او یایی پرویکشن یا پریوستون یا پریوتنه په وړانګو s1 او s2 پروت وي زیاتون مخنخښه) مثبت مخنخښه(لري، ټولی کرښي او یایي پرویکشنونه پریوستونونه چې په وړانګو s'1 او s'2 پرتې وي کمون مخنخښه (منفي مخنخښه) لري .د لاندې ځیرو کښلو سره کیدی شي تعریفونه ۸ . ۴ (د په خوښه کونجونو لپاره پراخه شي

$$\sin\alpha=\overline{QP}, \cos\alpha=\overline{OP}, \tan\alpha=\overline{AD}, \cot\alpha=\overline{BE};..............................(6,13)$$

د کونج α لپاره چې په لومړي څلورمه یا کوادرانت Quadrant (لاتین: د کواوردیناتسیستم څلورمه کې پروت دی(لاندې ځیره له کیڼ و ښی لورته کښته دا په فرمولونوکې کارول شي توري ساده ایښوول کیږي۰ په ځیرو کې شنې کرښې د ساین دي او سرې کرښې کوساین دی او کونجونه ټول په ترتیب له یوه سره پهالف سره په نخښه کیږي، چې د دې لارې تانجنت او کوتانجنت هم پیدا دي او توري هم ایښوولی شو)، دا تعریفونه د هغو تعریفونو سره سر خوري، کوم چې په ولاړکونجیز دریګوډي کې تر ځیرنی نیول شوي دي .په پام کې دې وي چې کونج α په لینده اندازه کې د ګردیلیندې اوږدوالي AP سره مساوي دی، چیرته چې په زیات څرخون له 2 څخه لوییدلی هم شي .برسیره پر دې له تعریفونو) ۱۳ . ۴ (څخه لاس ته راځي، چې ساین-او کوساین فنکشنونه، پریود :°360) 2 (periode (تل تکراریدونکی ، بیرته

راګرځیدونکی(، تنجنت - او کوتنجنت فنکشنونه پریود(°180) لري .

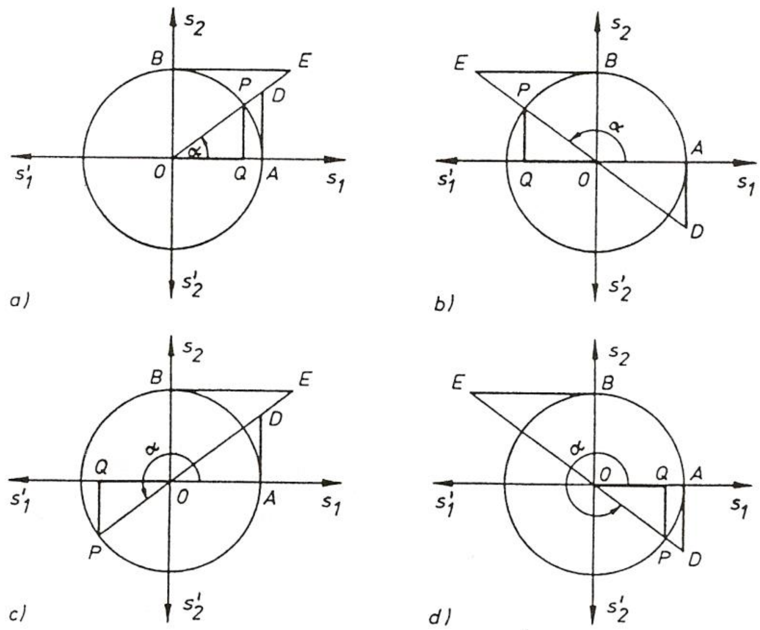


Bild 4.17 شکل

پس لرو

$$\sin(\alpha+2\pi)=\sin(\alpha+360°)=\sin\alpha$$
$$\cos(\alpha+2\pi)=\cos(\alpha+360°)=\cos\alpha;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(6.14)$$
په
$$\tan(\alpha+2\pi=\tan(\alpha+360°)=\tan\alpha$$
$$\cot(\alpha+2\pi)=\cot(\alpha+360°)=\cot\alpha$$

تولیزه)عمومي(توګه لرو

$$\sin(\alpha+2k\pi)=\sin(\alpha+k.360°)=\sin\alpha$$
$$\cos(\alpha+2k\pi)=\cos(\alpha+k.360°)=\cos\alpha;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(6.15)$$
$$\tan(\alpha+2k\pi=\tan(\alpha+k.360°)=\tan\alpha$$
$$\cot(\alpha+2k\pi)=\cot(\alpha+k.360°)=\cot\alpha$$

د ټولو ټولګټونو ....3 , 2, 1,0,1-,2-,3-.. = k لپاره

یادونه :د کوادرانت لپاره څلورمه لیکلی شو خو دا باید په پام کی وي چی دا په کواوردیناتسیستم کی دی

جدول یا تخته ۴ . ۱ د کونج-یازاویو توبعو وخنخښه

	لومړۍ څلورمه $(0;\frac{\pi}{2})$	دویمه څلورمه $(\frac{\pi}{2};\pi)$	دریمه څلورمه $(\pi;\frac{3}{2}\pi)$	څلورمه څلورمه $(\frac{3}{2}\pi;2\pi)$
sinx	+	+	-	-
cosx	+	-	-	+
Tan x	+	-	+	-
cotx	+	-	+	-

برسیره پر دې لاندې اړیکې باور لري؛

$$\sin(\pi-\alpha) = \sin\alpha \;,\quad \cos(\pi-\alpha) = -\cos.\alpha$$

$$\tan(\pi-\alpha) = -\tan\alpha \;,\quad \cot(\pi-\alpha) = -\cot\alpha \qquad (4.16)$$

$$\sin(\pi+\alpha) = -\sin\alpha \;,\quad \cos(\pi+\alpha) = -\cos\alpha \;,$$

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha \;,\quad \cos(-\alpha) = \cos\alpha$$

$$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha \;,\quad \cot(-\alpha) = -\cot\alpha$$

بیلګه ۴ . ۶ : د جبشمیروني سره د کونجفنکشن د $\alpha = 446°$ لپاره پیداکوو. دا

بدون

چې α په درجې اندازه ورکړ شوې ده، نو اومشالتریا سویچ ( ) دلته مطلب د

جبشمیري اړونه ده، پۀ غوښتل شوي فنکشن کی) په « DEG » سموو او بیا
لاندې ورکوني کوو.
په همدې ډول تکمي وهو

جدول یا تخته ۴ . ۱ د کونجفنکشنونو مخنخښه

دنده مو د لاندې مساوت حل یا اوبی دی

1. $\sin\alpha = a$, 2. $\cos\alpha = a$,
3. $\tan\alpha = a$, 4. $\cot\alpha = a$

دلته تمرینونه ۱ او ۲یواځې هلته موخه ور یا هدفمند ي، چې باور ولري$-1 \le a \le 1$

او په تمرین ۳ او ۴ کط په خوښه هر ارزښت نیولی شي.
یو «بنستیزوبی یا بنستیز حل»α_0 د هر تمرین د جبشمیرني سره په لاندې ډول یا
همداسې تکموترتیب لاس ته راځي (دا په دې اړه لري چې α_0 په درجه اندازه یا لیتده
اندازه اندازه کوو، نو په ورته ډول د سویچبدلون په "DEG" یا "RAD" باندې راولو)

1. $\boxed{a}$ $\boxed{F}$ $\boxed{\sin}$ 2. $\boxed{a}$ $\boxed{F}$ $\boxed{\cos}$
3 $\boxed{a}$ $\boxed{F}$ $\boxed{\tan}$ 4. $\boxed{a}$ $\boxed{1/x}$ $\boxed{F}$ $\boxed{\tan}$

تکمه F د په ځتې فنکشن ته تلنه ممکنوي.
دلته نو بیاد α_0 هر بنستیزحل په درجه یا لینده کچ څرګندیږي.
د $a = -0{,}55$ لپاره لاندې بنستیزحلونه لاس ته راځي :

1. $\alpha_0 = -33{,}367013° = -0{,}58236,$
2. $\alpha_0 = 123{,}36701° = 2{,}1531606,$

$$3.\ \alpha_0 = -28{,}810793° = -0{,}5028432,$$
$$4.\ \alpha_0 = -61{,}189206° = -1{,}0679531.$$

د مخ ت ه تيرو په بنسټ لو

$$1.\ \sin\alpha = \sin(180° - \alpha) = \sin(\pi - \alpha),$$
$$2.\ \cos\alpha = \cos(-\alpha)$$

او په ورته توګه،، فرعي يا څنګيز حل يا اوبی،،

$$1.\ \beta_0 = 180° - \alpha_0 = \pi - \alpha_0,$$
$$2.\ \beta_0 = -\alpha_0$$

لاس ته راشي

د ليديدونكي حالت $a = -0{,}55$ لپاره په دي مانا چی :

$$1.\ \beta_0 = 213{,}367013° = 2{,}1531563,$$
$$2.\ \beta_0 = -123{,}36701° = -2{,}1531606.$$

د α ټول حلونه د (۴ . ۱۵) له امله په لاندي فورم لاس ته راځي

1. und 2. $\alpha = \alpha_0 + k\cdot 360° = \alpha_0 + 2k\pi,$

$\alpha = \beta_0 + k\cdot 360° = \beta_0 + 2k\pi,$

3. und 4. $\alpha = \alpha_0 + k\cdot 180° = \alpha_0 + k\pi.$

بيلګه ۴ . ۹ : لرو $\sin x = 1/2\sqrt{3}$. ودي شميرل شي $\cos x$, $\tan x$, $\cot x$.

$$\cos x = \pm\sqrt{1-\sin^2 x} = \pm\sqrt{1-\frac{3}{4}} = \pm\sqrt{\frac{1}{4}} = \pm\frac{1}{2},$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{\pm\frac{1}{2}} = \pm\sqrt{3},$$

$$\cot x = \frac{1}{\tan x} = \frac{1}{\pm\sqrt{3}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

بیلګه ۴ . ۱۰ : په بیلګه ۴ . ۴ کې ورکړشوی زور F_H او F_N څومره لویې دي، که په مایل هواره پروت بدن وزن N 700 وي (دلته N د Newton لپاره دی چې وزن پرې اندازه کیږي) او مائلی هوارې مایلکونج $\beta = 28°$ وي؟

$$\sin\beta = \frac{F_H}{G}, \qquad F_H = G \cdot \sin\beta = 700\ \text{N} \cdot \sin 28°$$
$$= 700\ \text{N} \cdot 0{,}4695 = 328{,}65\ \text{N}.$$
$$\cos\beta = \frac{F_N}{G}, \qquad F_N = G \cdot \cos\beta = 700\ \text{N} \cdot \cos 28°$$
$$= 700\ \text{N} \cdot 0{,}8829 = 618{,}03\ \text{N}.$$

۴. ٦ دساین- او کوساین جملی

دا دواړه جملی ممکنوي چې په ټولیز یا عمومي درېګوډي کی شمیرنی پلی کړای شو

۱ . د ساین جملهد څیرې ۴ . ۱۸ له نخښوني سره لرو

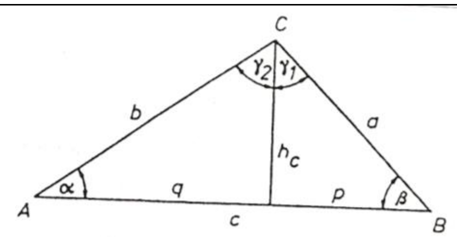


Bild 4.18

$$\sin\alpha = \frac{h_c}{b}, \quad \sin\beta = \frac{h_c}{a}$$

او له دې امله

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{a}{b} \quad \text{bzw.} \quad \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}.$$

په ورته توګه ښوول کیدی شي، چې په عمومي توګه صدق کوي

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}. \qquad (4.17)$$

څیره پورته او لاندې کښل شوي، دا یو ولاړکونجیز درېګوډی کښل کیږي(پورته او لاندې څیرې)

په ورته توګه ښوول کیدی شي، چی په عمومي توګه صدق کوي

د ساین جمله کیدی شي استعمال شي، که د یوه دریګوډي -دوه اړخونه او لوي اړخ ته

مخامخ کونج - SSW یو اړخ او داړه پرې پراته کونجونه WSWورکړشوي وي

۲ . د کوساین جمله

د ځیرې ۴ . ۱۸ څخه لاس ته راځي

$$\begin{aligned}
h_c^2 &= b^2 - q^2 \\
h_c^2 &= a^2 - p^2 \\
\hline
a^2 &= b^2 + p^2 - q^2, \quad p = c - q, \\
a^2 &= b^2 + (c - q)^2 - q^2, \\
a^2 &= b^2 + c^2 - 2cq + q^2 - q^2, \quad q = b \cos \alpha,
\end{aligned}$$

نو $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha.$ لرو او همداسې:

$$\boxed{\begin{aligned}
a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha, \\
b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta, \\
c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma.
\end{aligned} \qquad (4.18)}$$

د کوساین جله استعمالیدی شي، که په یوه درېګوډي یا مثلث کې

- درې اړخونه یا ضلعې یا

- دوه ا ړخونه(ضلعې) او له هغو رابند کونج یا زاویه

ورړ شوي وي.

بیلګه ۴ . ۱۱ :د دوه قوو(زور F1)او F2 لاس ته راوړل شوې R1 چی په پراته لورد F1سره کونج جوړوي ، څنګه شمیرل کیږي؟ د دې دوه قوو F1 او F2 برسیره له دوي جوړکونج هم معلوم دئ .د دې پوښتنی کولو د روښانولو لپاره ځیره ۴ . ۱۹

ورکړ شوې، له کومې څخه چې د دوي ترمنځ اړیکي هم معلومیږي .په دې پسې په

ABC دریګوډي کی، $F1 = c, F2 = a$ او $ss' = 180° - ss$ معلوم دي، α

او $R = b$ لټوونکی یا غوښتونکی لویي دي؟

د کوساین جملی (۱۸ . ۶) څخه لرو

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\ cosss$$

همداسی یا⇔

$$R^2 = F1^2 + F2^2 - 2F1F2 \cos(180° - ss')$$

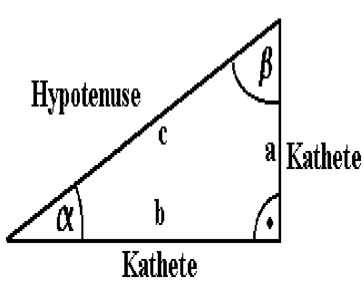
او د ساین له جملی (۱۷ .۶) لاس ته راځي

له کومو چی α تاکل کیدی شي .

لوي اړخ او ولاړ یا عمود اړخونه (هیپوتینوز او کاتیتونه یا مخامخ- او په پروت اړخ):

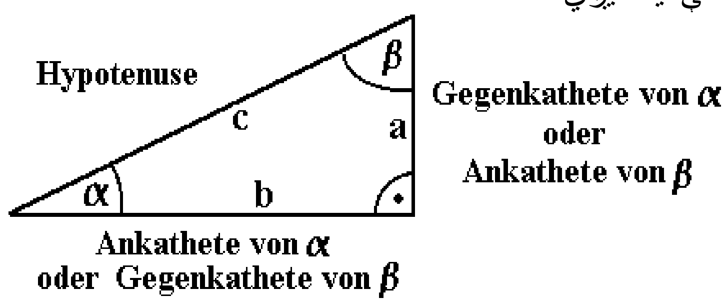
۱ – په ولاړکونجیز دریګوډي کې ولاړ کونج ته مخامخ اړخ هیپوتینوز یا لوي اړخ بولو٠

۲ - نور دواړه اړخونه غوښتوني – یا مطلوب کوج ته مخامخ اړخ او په مطلوب کونج پروت اړخ یا ولاړ اړخونه یا کاتیتونه بولو٠

مخامخ دریګوډی دې ورکړشوی وي: په لاندې درېګوډي کې کونجونه، او اړخونه جوت یا څرګند روښانه دي . د اړخونو نومونه: الفا کونج ته مخامخ مخامخ اړخ بولو او په الفا پروت اړخ په پروت یا پروت اړخ بولو. ولاړ کونج ته مخامخ لوی اړخ بولو	

لند یا تکرار :پورته او په لاندې بیلګه کې دا اړخونه دغوښتوني کونج مخامخ او په پراته اړخونه بلل کيږي

بیلګه
بیا دې همغه پورته درېګوډی ورکړ شوی وي، چې په بیتا پروتاوخ یا کاتیت د الفا مخامخ اړخ یا کاتیت او په څنګ په الفا پرو اړخ یا ه کاتیت د بیتا مخامخ اړخ یا کاتیت ده، چې په څیره کې لیدلکیږي٠



د ساین جمله

په تریګونومتري کې ساینجمه د درېګوډي د یوه کونج او د دې کونج مخامخ اړخ ترمنځ اړیکی ښایي٠ دا له البتانی میندل شوي او ښوول شوي٠ د درېګوډي درې اړخونه او درې ګونجونه ، وړانګه او چاپیری ورکړ شوي (لکه په فرمول کې) نو باور لري:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2r = \frac{u}{\pi}$$

یادونه : دا پورته فرمول دې (6,14)وي ٠

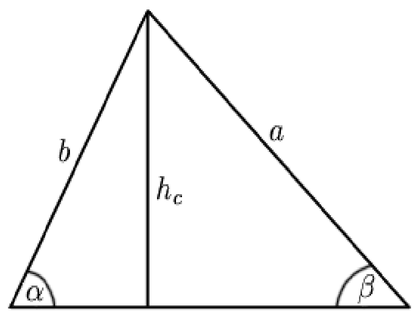
زیات وخت د ساین جمله په داسې ډول هم ورکول کيږي:

$$\sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma = a : b : c$$

که چیرې په درېګوډي کې د ساین جملې له لارې څه ښوول کيږي ، نو دې ته دې پام وي، چې په اینتروال [0°;180°] کې په ټولیزه توګه د همغه کونج دوه یو له بل بیل ارزښتونه لیدل کيږي، دا: دوه ګونوالی ګونګرواینځجمله په ګوته کوي٠

د دې لپاره دې د کوساین جمله هم وکتل شي

ښوونه : (دا خیره دې ٦ ، ١٨ وي او دا نا نومول شوي کونجونه دې x,y وي)



$$\sin\alpha = \frac{h_c}{b}$$

$$\sin\beta = \frac{h_c}{a}$$

په h_c پسې يې اوبی کوو

$$h_c = b\cdot\sin\alpha$$

د برابراینوني له لارې لاس ته راځي

$$a\cdot\sin\beta = b\cdot\sin\alpha$$

که په $\sin\alpha\cdot\sin\beta$ وویشو، نو د غوښتنې لومړی برخه کې لاس ته

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$$

راځي

برابرون له $\frac{c}{\sin\gamma}$ سره په پیداینتي توګه جګی h_a او یا h_b لاس ته راکوي

د کارونې بيلګه : درجګوډی ABC لارو او ورکړ شوي :

$\alpha = 73°$ ، $b = 3,8\,\mathrm{cm}$ ، $a = 5,4\,\mathrm{cm}$

دا نورې لویې دې په درېګوډې کی پیداشي

د β شمیرلو لپاره د ساین جمله کارول کیږي

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$$

$$\sin\beta = \frac{b \cdot \sin\alpha}{a} = \frac{3{,}8\,\text{cm} \cdot \sin 73^\circ}{5{,}4\,\text{cm}} = 0{,}67$$

$$\beta = \underline{42^\circ}$$

لکه د خه مو، چې ګوته ورته ونيوله يو بل کونج هم د همدې ارزښت سضته شته ، ياني

$$\beta' = 180^\circ - 42^\circ = 138^\circ$$

د دې اوبی په پوښتنه کې نه راځي، ځکه چې د درېګوډي د کونجونو زياتون به له ١٨٠ درجو ځخه واوړي۰

او نو ګاما د کونج زياتون جملې له لارې لاس ته ر اوړو

$$\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta = 180^\circ - 73^\circ - 42^\circ = \underline{65^\circ}$$

اړخ c هم داسې لاس ته راځي

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

$$c = \frac{a \cdot \sin\gamma}{\sin\alpha} = \frac{5{,}4\,\text{cm} \cdot \sin 65^\circ}{\sin 73^\circ} = \underline{5{,}118\,\text{cm}}$$

دکوساين جمله

په تريګونومتري کې کوساينجمله په درېګوډي کې د درېګوډي د اړخونو او کونجونو

ترمنځ اړيکې ښايي ، چې په لاندې توګه ورکړ شوي دي :

يادونه : دا لاندې فرمولونه دې (١٨ ۰ ٩) وي

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos\beta$$

که ګاما ۹۰ درجې وي، نو دپیتاګوراس جملې له مخې لرو:

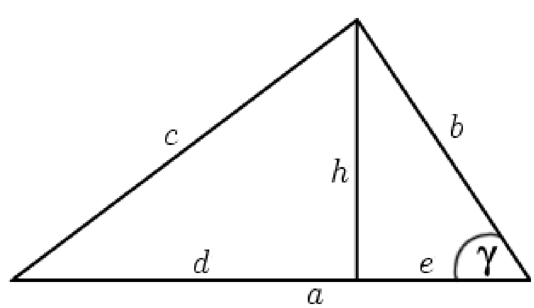
$$c^2 = a^2 + b^2$$

د کوساین جمله استعمالیدی شي، که په یوه دریګوډي کی

- درې اړخونه (SSS) یا
- دوه اړخونه او له هغو بند کونج (SWS) ورکړ شوي وي.

که له پورته څخه یې درې ورکړ شوي وي، نو څلورم یې پیداکولی شو

ښوونه :



د درېګوډي په کيڼ لور د پیتاګوراس قضیه استعمالوو، چې د c^2 لپاره یوه شمیرافاده یا – وبینه پیداکړو، د دې لپاره د دې خوا د ولاړاړخونو یا کاتیتو اوږدوالی څلوری یا مربع باید پیدا شي

$$h^2 = b^2 - e^2$$

د ښي اړخ لپاره د پيتاګوراس قضيي استعمال څخه لرو

$$d^2 = (a-e)^2 = a^2 - 2\cdot a\cdot e + e^2$$

(د بينوم فرمول)

د پيتاګوراس جملې له مخې د کيڼ لور لپاره لرو:

$$c^2 = h^2 + d^2$$

اوس دواړه پورته پيداشوي شميروييني يا- افادې سره زياتوو:

$$c^2 = b^2 - e^2 + a^2 - 2\cdot a\cdot e + e^2 = a^2 + b^2 - 2\cdot a\cdot e$$

اوس باور لري $\cos\gamma = \frac{e}{b}\left(\frac{ankathet}{Hypotenuse}\right)$

له دې لاس ته راځي $e = b\cdot\cos\gamma$

دا پورته ځاي په ځاي کوو، نو د c^2 لپاره لاس ته راځي:

$$c^2 = \underline{\underline{a^2 + b^2 - 2\cdot a\cdot b\cdot\cos\gamma}}$$

بيلګه:

يو درېګوډی ABC ، چې اړخونه يې څرګند دي، ورکړ شوی

$a = 4{,}9\ \text{cm}$ ،

$b = 2{,}8\ \text{cm}$

$c = 3{,}5\ \text{cm}$

د کونج β لویوالی غواړو پیداکړو

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos\beta$$

$$2 \cdot a \cdot c \cdot \cos\beta = a^2 + c^2 - b^2$$

$$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2 \cdot a \cdot c} = \frac{(4{,}9\,\mathrm{cm})^2 + (3{,}5\,\mathrm{cm})^2 - (2{,}8\,\mathrm{cm})^2}{2 \cdot 4{,}9\,\mathrm{cm} \cdot 3{,}5\,\mathrm{cm}} = 0{,}83$$

$$\beta = \underline{34^\circ}$$

دا پیژند ورکو یا داسې تعریفوو

$$\sin A = \frac{\mathrm{opp}}{\mathrm{hyp}} \qquad \cos A = \frac{\mathrm{adj}}{\mathrm{hyp}}$$

$$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{\mathrm{opp}}{\mathrm{adj}} \qquad \sec A = \frac{1}{\cos A} = \frac{\mathrm{hyp}}{\mathrm{adj}}$$

$$\cot A = \frac{\cos A}{\sin A} = \frac{\mathrm{adj}}{\mathrm{opp}} \qquad \csc A = \frac{1}{\sin A} = \frac{\mathrm{hyp}}{\mathrm{opp}}$$

Common formularکډ وډ فرمولونه

Pythagorean identitiesد پیتاګوراس کتمېوالی

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$$

$$1 + \tan^2 A = \sec^2 A$$

$$1 + \cot^2 A = \csc^2 A$$

زیاتون او کمون کتمتوالی Sum and difference identities

$$\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$$

$$\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$$

$$\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$$

$$\sin(A-B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$$

$$\cos(A-B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$$

$$\tan(A-B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$$

دوه برابره کونج کې ګتمتوالي Double-angle identities

$$\sin 2A = 2 \sin A \cos A$$

$$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A = 2\cos^2 A - 1 = 1 - 2\sin^2 A = \frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$$

$$\tan 2A = \frac{2\tan A}{1-\tan^2 A} = \frac{2\cot A}{\cot^2 A - 1} = \frac{2}{\cot A - \tan A}$$

د نیم کونج ګتمتوالی Half-angle identities

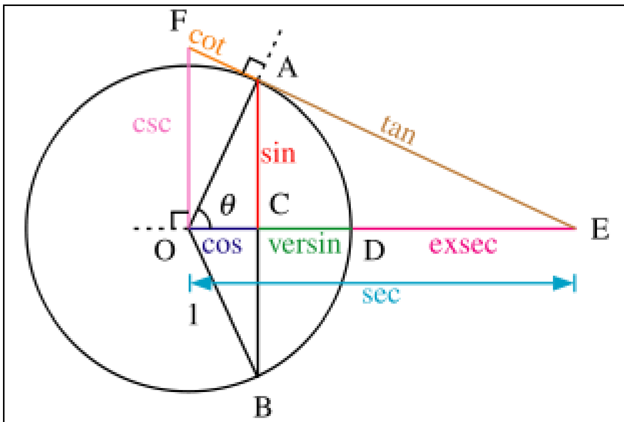
$$\sin \frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}$$

$$\cos \frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}$$

$$\tan\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos A}} = \frac{\sin A}{1+\cos A} = \frac{1-\cos A}{\sin A}$$

د ټريګونومتريکي کټمتوالي ليست List of trigonometric identities

نوره ژوره څېرنه دلته نه کړو، دې ته ګوته نيسو، چې په لاندې څېره کې ټريګونومتريکي فنکشنونه روښانه دي

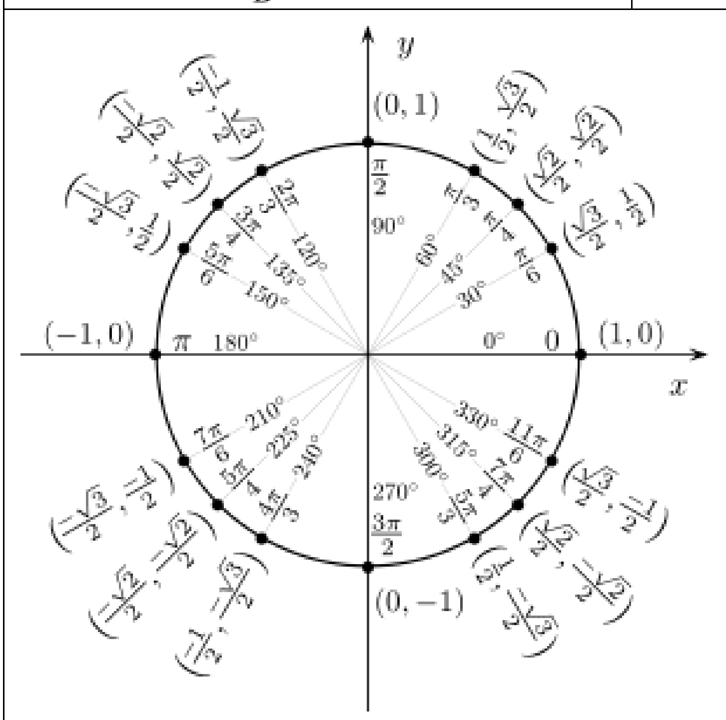


د يوه کونج θ ټول ټريګونومتريکي فنکشنونه په O باندې د يوې يونګردې ترم له لارې ورکول کېدی شي (يونګردی لاندې ورکړ شوي او کونجونه هم په نخښه شوي)

مخامخ:

يوونګردی(يووالي يا واحد ګردی)

The unit circle



Notationلیکنبڼه

دا لاندې لیکنبڼه یا - ډول د ټولو تریګونومتریکي – یا مثلثاتي فنکشنونو ساین، کوساین ، تانجنت ، کوتانجنت ، سیکانت، کوسیکانت لپاره باور لري، د لنډوني لپاره په لاندې جدول کې یواځې ساین او کوساین لیکل شوي دي

$\arcsin(x)$ کیدی شي$\sin^{-1}(x)$ ولیکل شي، خو د $(\sin(x))^{-1}$ سره باید بدل نه شي

Definitionsپیژند:

$$\cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \qquad \cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} = \frac{1}{\tan(x)}$$

تل بیرته راګرځیدنه ، سیومتري او بدلونPeriodicity, symmetry, and shifts .

:په یوون(یووالي-) ګردی یا دایره کې ساده لیدل کیږي

Periodicity تل بیرته راګرځیدنه

ساین ، کوساین ، سیکانت، کوسیکانت تل بیرته راګرځیدنه 2π ده(پوره ګردی) (تکرار دی)

$$\sin(x) = \sin(x + 2k\pi)$$

$$\cos(x) = \cos(x + 2k\pi)$$

$$\sec(x) = \sec(x + 2k\pi)$$

$$\csc(x) = \csc(x + 2k\pi)$$

تانجنت ، کوتانجنت تلبیرته راګرځیدنه π لري(نیمګردی یا نیمدایره) :

$$\tan(x) = \tan(x + k\pi)$$

$$\cot(x) = \cot(x + k\pi)$$

سيومتري Symmetry

د تريګونومتريکي فنکشنونو لپاره سيومتري ، لکه لاندې کښل شوي

$x \to -x,\ x \to \pi/2 - x$ يا، $x \to \pi - x$ په لاندې ډول ده

$$\begin{aligned}
\sin(-x) &= -\sin(x), & \sin\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right) &= \cos(x), & \sin(\pi - x) &= \sin(x) \\
\cos(-x) &= \cos(x), & \cos\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right) &= \sin(x), & \cos(\pi - x) &= -\cos(x) \\
\tan(-x) &= -\tan(x), & \tan\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right) &= \cot(x), & \tan(\pi - x) &= -\tan(x) \\
\cot(-x) &= -\cot(x), & \cot\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right) &= \tan(x), & \cot(\pi - x) &= -\cot(x) \\
\sec(-x) &= \sec(x), & \sec\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right) &= \csc(x), & \sec(\pi - x) &= -\sec(x) \\
\csc(-x) &= -\csc(x), & \csc\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right) &= \sec(x), & \csc(\pi - x) &= \csc(x)
\end{aligned}$$

بدلون : د $\pi/2$ او π بدلون دی

$$\begin{aligned}
\sin\left(x + \tfrac{\pi}{2}\right) &= \cos(x), & \sin(x + \pi) &= -\sin(x) \\
\cos\left(x + \tfrac{\pi}{2}\right) &= -\sin(x), & \cos(x + \pi) &= -\cos(x) \\
\tan\left(x + \tfrac{\pi}{2}\right) &= -\cot(x), & \tan(x + \pi) &= \tan(x) \\
\cot\left(x + \tfrac{\pi}{2}\right) &= -\tan(x), & \cot(x + \pi) &= \cot(x) \\
\sec\left(x + \tfrac{\pi}{2}\right) &= -\csc(x), & \sec(x + \pi) &= -\sec(x) \\
\csc\left(x + \tfrac{\pi}{2}\right) &= \sec(x), & \csc(x + \pi) &= -\csc(x)
\end{aligned}$$

د پيتاګوراس کتمتوالی Pythagorean identities

د دې بنسټ د پيتاګوراس قضيه ده

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

د کونج د زیاتون او کمون کتمتوالی Angle sum and difference identities

$$\sin(x \pm y) = \sin(x)\cos(y) \pm \cos(x)\sin(y)$$

د کمون او زیاتوننخښي په ورته ترتیب راځي لکه په فرمولونو کي

$$\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y)$$

که په کيڼ لور " + " وي، نو په ښي لور"-" راځي او په څټ

$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan(x) \pm \tan(y)}{1 \mp \tan(x)\tan(y)}$$

د کونج دوه ځلوالي فرمول Double-angle formulae

که $x = y$ کیږدو د پیتاګواراس یا موفریي فرمول له لارې لرو د $n = 2$ له امله ٠

$$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x) \quad = \frac{2\tan(x)}{1+\tan^2(x)}$$

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1 = 1 - 2\sin^2(x) \quad = \frac{1-\tan^2(x)}{1+\tan^2(x)}$$

$$\tan(2x) = \frac{2\tan(x)}{1-\tan^2(x)}$$

$$\cot(2x) = \frac{\cot(x) - \tan(x)}{2}$$

د نیمکونج فرمول Half-angle formular

$$\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos(x)}{2}}$$

$$\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(x)}{2}}$$

$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\sin(x/2)}{\cos(x/2)} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}. \qquad (1)$$

که د ریښي لاندې ماتباندې او مات لاندې له $1 + \cos x$ سره ځل شي ، نو د پیتاګوراس جملې له مخه لرو:

$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{(1+\cos x)(1+\cos x)}} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos^2 x}{(1+\cos x)^2}}$$

$$= \frac{\sin x}{1+\cos x}.$$

په ورته توګه که برابرون له (۱) له $1 - \cos x$ سره ځل شي، نو لور

$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{(1-\cos x)(1-\cos x)}{(1+\cos x)(1-\cos x)}} = \pm\sqrt{\frac{(1-\cos x)^2}{(1-\cos^2 x)}}$$

$$= \frac{1-\cos x}{\sin x}.$$

د نیمکونج فرمولونه د تانجنت لپاره دي:

$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\sin(x)}{1+\cos(x)} = \frac{1-\cos(x)}{\sin(x)}.$$

که کیږدو $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right),$

نو لرو: $\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}$

د ځل و زیاتون ته کټمتوالی Product-to-sum identities

$$\cos(x)\cos(y) = \frac{\cos(x-y) + \cos(x+y)}{2}$$

$$\sin(x)\sin(y) = \frac{\cos(x-y) - \cos(x+y)}{2}$$

$$\sin(x)\cos(y) = \frac{\sin(x-y) + \sin(x+y)}{2}$$

د زیاتون- و- ځل ته کټمتوالی (برابرون) Sum-to-product identities

که د x لپاره $(x+y)/2$ او y لپاره $(x-y)/2$ کیږدو نو لرو

$$\cos(x) + \cos(y) = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\sin(x) + \sin(y) = 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\cos(x) - \cos(y) = -2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\sin(x) - \sin(y) = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

که $x, y,$ او z د کوم درېګوډي کونجونه وي یا په نورو کلیمو، نو

نیمگردی یا نیمدایره $\text{if } x + y + z = \pi = \text{half circle},$ =که

نو یا او $\tan x + \tan y + \tan z = \tan x . \tan y . \tan z$

$\text{and } \sin(2x) + \sin(2y) + \sin(2z) = 4\sin(x)\sin(y)\sin(z).$

Trigonometric conversionsتریګونومتریکي په څتوالی

هر تریګونومتریکي فنکشن د بل تریګونومتریکي فنکشن سره سیده یا سیخي اړیکی لري۰ داسې اړیکی د په څټ اړیکو له لارې افاده یا ویل کیدی شي، لکه : که φ او ψ د تریګنومتریکي فنکشنونو د یوې جوړې نمایندګی وکړي ، او arcψ دې د ψ په څټ وي، داسې چې $\psi(\arc\psi(x)) = x$ ۰ نو $\varphi(\arc\psi(x))$ کیدی شي د یو الجبري فنکشن ترم x په څیر وویلی شي یا افاده شي۰

داسې فرمولونه د لاندې جدول له لارې ښوول کیدی شي : موږ دا نوره نه روښانه کوو او په لاندې جدول پوهیدی شو

cot	sec	csc	Tan	cos	sin	φ \ ψ
$\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{1}{x}$	$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$	$\sqrt{1-x^2}$	x	**sin**
$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$	$\frac{1}{x}$	$\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	x	$\sqrt{1-x^2}$	**Cos**
$\frac{1}{x}$	$\sqrt{x^2-1}$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	x	$\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$	$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$	**Tan**
$\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$	x	$\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$	$\sqrt{1+x^2}$	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	**sec**
x	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\sqrt{x^2-1}$	$\frac{1}{x}$	$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$	**cot**

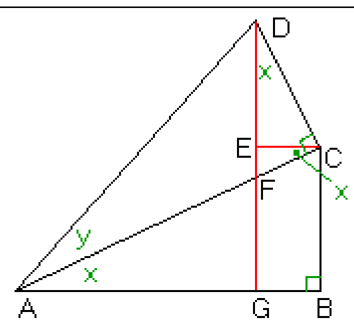
$$\sin 0 = \sin 0^\circ = 0 = \cos 90^\circ = \cos\left(\tfrac{\pi}{2}\right)$$
$$\sin\left(\tfrac{\pi}{6}\right) = \sin 30^\circ = 1/2 = \cos 60^\circ = \cos\left(\tfrac{\pi}{3}\right)$$
$$\sin\left(\tfrac{\pi}{4}\right) = \sin 45^\circ = \sqrt{2}/2 = \cos 45^\circ = \cos\left(\tfrac{\pi}{4}\right)$$
$$\sin\left(\tfrac{\pi}{3}\right) = \sin 60^\circ = \sqrt{3}/2 = \cos 30^\circ = \cos\left(\tfrac{\pi}{6}\right)$$
$$\sin\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = \sin 90^\circ = 1 = \cos 0^\circ = \cos 0$$

د طیلایي نسبت φ له امله لرو

$$\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \cos 36^\circ = \frac{\sqrt{5}+1}{4} = \varphi/2$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{10}\right) = \sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4} = \frac{\varphi-1}{2} = \frac{1}{2\varphi}$$

جیومتریکي غوښتنه (ثبوت)Geometric proofs



sin(*x* + *y*) = sin(*x*) cos(*y*) + cos(*x*) sin(*y*)

په مخامخ شیره کي کونج x د ولاړکونجیز درېکودي ABC برخه ده، او کونج y د و لاړکودیز درېکودي ACD برخه ده ۰ نو جوړښت DG و AB باندي ولاړ او CE و AB ته غبرګ دی

کونج ACE =کونجBAC = Angle x

EG = BC. کونج CDE= x

$$\sin(x+y)$$

$$= \frac{DG}{AD}$$

$$= \frac{EG+DE}{AD}$$

$$= \frac{BC+DE}{AD}$$

$$= \frac{BC}{AD} + \frac{DE}{AD}$$

$$= \frac{BC}{AD}\cdot\frac{AC}{AC} + \frac{DE}{AD}\cdot\frac{CD}{CD}$$

$$= \frac{BC}{AC}\cdot\frac{AC}{AD} + \frac{DE}{CD}\cdot\frac{CD}{AD}$$

$$= \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y).$$

$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$

Using the above figure:د پورته خيري څخه کار اخلو

$$\cos(x+y)$$

$$= \frac{AG}{AD}$$

$$= \frac{AB-GB}{AD}$$

$$= \frac{AB - EC}{AD}$$

$$= \frac{AB}{AD} - \frac{EC}{AD}$$

$$= \frac{AB}{AD} \cdot \frac{AC}{AC} - \frac{EC}{AD} \cdot \frac{CD}{CD}$$

$$= \frac{AB}{AC} \cdot \frac{AC}{AD} - \frac{EC}{CD} \cdot \frac{CD}{AD}$$

$$= \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y).$$

د $\sin(x-y)$ او $\cos(x-y)$ فرمولونو ښوونه

د $\cos(x-y)$ او $\sin(x-y)$ لپاره فرمولونه ساده ښوول کیږي، که د $\cos(x+y)$ او $\sin(x-y)$ لپاره فرمولونه وپیژنو

$$\mathbf{\sin(x-y) = \sin(x)\cos(y) - \cos(x)\sin(y)}$$

که په فمرول $\sin(x+y)$ کې د y په ځاي -y کیږدو نو لرو

$$\sin(x + (-y)) = \sin(x)\cos(-y) + \cos(x)\sin(-y).$$

که د فاکت څخه، چې ساین جوړه او کوساین ناجوړه فنکشنونه دي، نو لرو

$$\sin(x-y) = \sin(x)\cos(y) - \cos(x)\sin(y).$$

$$\mathbf{\cos(x-y) = \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y)}$$

موږ په پورته فرمول $\cos(x+y)$ کې د y په ځاي -y ږدو ، نو لرو

$$\cos(x + (-y)) = \cos(x)\cos(-y) - \sin(x)\sin(-y).$$

که د فاکت څخه، چې ساین جوړه او کوساین ناجړه فنکشنونه دي، نو لاس ته راوړو

$$\cos(x-y) = \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y).$$

۶ . ۵ تریګونومتریکي یا کونجکچ فرمولونه

د کونجبلواك یا کونجفنکشن د شمیرلو لپاره، له دا اوس څرګند فرمولونو، یوه د اړیکو ډله شته) د زیاتون)جمع(تیوریم(، له کومو یی چی دلته یوڅو راوړل غواړو .د همغو فرمولتولګه) کتاب چي فرمولونه په کي راټول وي(کی لاندې فرمولونه پیدا کیدی شي

$$\sin(x \pm y) = \sin x.\cos y \pm \cos x.\sin a; \qquad (6,19)$$
$$\cos(x \pm y) = \cos x.\cos y \mp \sin x.\sin y; \qquad (6,20)$$
$$\sin 2x = 2\sin x.\cos x; \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x; \qquad (6,21)$$
$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x.\tan y}; \qquad (6.22)$$
$$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}.\cos\frac{x-y}{2}; \qquad (6,23)$$
$$\sin x - \sin y = 2\cos\frac{x+y}{2}.\sin\frac{x-y}{2};$$

$$cox + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}.\cos\frac{x-y}{2}; \qquad (6,24)$$
$$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}.\sin\frac{x-y}{2}$$

ددې اړیکو ښوونه یوه مهمه کورني دنده ده، خو څه به په دې لاندې بېلګه کې وښایو

بیلګه ۶ . ۱۲ :

Cos(x+) = cosx.cosy –sinx.siny

موږ له څیرې ۴ . ۱۸ څخه مخ ته څو، او ځای په ځای کوو $\gamma_1 = x$ ، $\gamma_2 = y$ ،
نو لرو $\gamma = x + y$.

د کوساین له جملې لاس ته راځي

$$2ab\cos\gamma = a^2 + b^2 - c^2, \quad a^2 = p^2 + h_c^2, \quad b^2 = q^2 + h_c^2, \quad c^2 = (q+p)^2$$
$$= p^2 + h_c^2 + q^2 + h_c^2 - (q+p)^2,$$
$$= p^2 + h_c^2 + q^2 + h_c^2 - q^2 - 2qp - p^2$$

له $2ab\cos\gamma = 2h_c^2 - 2qp$ څخه لاس ته راځي

$$\cos\gamma = h_c^2/ab - qp/ab = (h/a).(h/b) - (q/b).(p/a),$$
$$\cos\gamma = \cos\gamma_1 .\cos\gamma_2 - \sin\gamma_1 . \sin\gamma_2$$
$$\cos(x+y) = \cos x .\cos y - \sin x . \sin y$$

څه چې د ښوولو وو

یادونه: ځای په ځای باید دې ته ګوته ونیسم، چې د ضرب او وېش تړاو نسبت و جمعې اړ تفریق یا زیاتو او کمون تړاو ته کلک یا کلک نښتی دی.

بیلګه ۴ . ۱۳ – لاندې وېینې یا افادې دې ساده شي

$$a)\ y = \sin(\alpha - \frac{\pi}{4}) + \sin(\alpha + \frac{\pi}{4})$$

دې (۶ . ۲۳) پسې د مساوات(برابرون) ښی اړخ د لاندې سره یو- یا هم ارزښته ده.

$$2\sin\frac{\alpha - \frac{\pi}{4} + \alpha + \frac{\pi}{4}}{2} \cdot \cos\frac{\alpha - \frac{\pi}{4} - \alpha - \frac{\pi}{4}}{2} = 2\sin\alpha\cos(-\frac{\pi}{4}) = 2\sin\alpha\cos\frac{\pi}{4},$$

له کوم چې $y = \sqrt{2}\ \sin\alpha$ لاس ته راځي

b) $y = \cos(\frac{3}{2}x + \pi)$

د (۶ . ۲۰) پسې لرو

$$\cos(\frac{3}{2}x + \pi) = \cos\frac{3}{2}x \cdot \cos\pi - \sin\frac{3}{2}x \cdot \sin\pi.$$

دا چې $\cos\pi = -1, \sin\pi = 0$ دی، نو لاس ته راځي

$$y = \cos(\frac{3}{2}x + \pi) = -\cos\frac{3}{2}x.$$

دې نتیجې ته د (۶ . ۱۶) استعمال وروسته هم رسیږو، له کومې چې لاس ته راځي

$\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha$ ist.

بیلګه ۶ . ۱۴ برابرون یا مسات $\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}, \quad 0 \le \alpha \le 2\pi,$ دې وښوول شي

دی $1 = \cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2}$ او $\cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}$ او له دې سره

$$\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2} - (\cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2})}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2}} = |\sin\frac{\alpha}{2}| = \sin\frac{\alpha}{2} \quad (\text{wegen } 0 \le \alpha \le 2\pi).$$

۶ . ۶ تمرینونه

۱ – بنستیزه هندسه یا څمککچونه

---

۱ . ۱ – لاندې کونجونه دې په لینده اندازه همداسې په درجه اندازه(د څسیما یا دسیمال یا لسمیز او سمساګیسیمال (د ۶۰ په بنسټ جوړ شوي ګڼل(که غواړې شمیرل) برخو) ورکړ شوي دي،

1.1.1.a) $15°$	b) $225°$	c) $105°$	d) $277{,}5°$
1.1.2.a) $\frac{\pi}{8}$	b) $\frac{\pi}{12}$	c) $2\pi+\frac{\pi}{2}$	d) $\pi-\frac{\pi}{3}$
1.1.3.a) $4{,}24°$	b) $70{,}9°$	c) $31°\ 17'\ 20''$	d) $228{,}1923°$
1.1.4.a) $5{,}19$	b) $0{,}22$	c) $2{,}31$	d) 1

۱ . ۲ – یو درېګوټی له $a = 4{,}5$ cm , $b = 12{,}2$ cm او $c = 11{,}7$ cm سره ورکړ شوی دی. دا درېګوټی جوړ کړی ! د اړخونو نیمووونکی وکاږی، د منځ ولاړې ، کونجنیمووونکي او جګې، همداسی یي ګردیخوندي او خوندیګردي ګردی(یعنی دباندې او دننه ګردی) رسم کړی.

۱ . ۳ – لاندې درېګوټی جوړ کړی

a) $a = 11{,}7$ cm , $b = 9{,}2$ cm , $\gamma = 43{,}5°$

b) $c = 16{,}1$ cm , $\alpha = 84{,}6°$ $\beta = 51{,}9°$

وښایي چی ولی دواړه درېګوټي ورته دي

۱ . ۴ – یو مساوي پښیز، ولاړکونجیز درېګوټي ABC ته یو مساوي اړخیز درېګوټی $A'B'C'$ داسی په دننه کی ورکړ شوی چی $\overline{A'B'} \parallel \overline{AB}$ څغلي او C' په $\overline{AB}$ پرته ده (ځیره ۴ . ۲۰ دې وکتل شي).

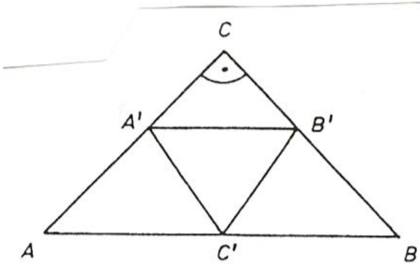


Bild 4.20 ځیره

ورکړی $\overline{A'B'} = \overline{A'C'} = \overline{B'C'}$ د $\overline{AC} = \overline{BC}$ سره!

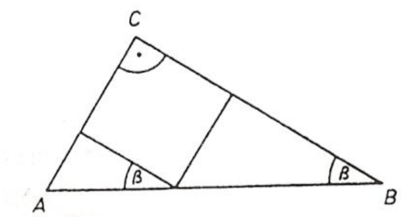


Bild 4.21

۱ . ۵ – په یوه ولاړکونجیز دریگوډي کی د خیري ۴ . ۲۱ سره سم په لیدوړ ډول په دننه کی یوه مربع ورکړ شوې. د مربع اړخونه وشمیری
الف) له کانتو څخه
ب) له هیوپوتینوزپېرخو څخه

۲ . د جبشمیرنی سره د ارزښتونوټاکنه

۲ . ۱ – له لاندې کونجونو څخه د لاندېکونجونو لپاره فنکشن ارزښتونه پیداکړی:

a) $\alpha = 47{,}15°$, b) $\alpha = -390°$, c) $\alpha = 7{,}784$, d) $\alpha = 13{,}195$

۲ . ۲ – کونج $ß$ دې د $\sin ß = a$, $\cos ß = a$, $\tan ß = a$, $\cot ß = a$ څخه د

a) $a = 0{,}8290$, b) $a = -0{,}2907$, c) $a = -2{,}145$, d) $a = 0{,}8660$

لپاره وشمیرل شي (په اوبی کی دې د الفا په ځاي بیتا ولیکل شي !!!)

۳ . په ولاړکونجیز دریگوډي کې شمیرنې

۳ . ۱ – په ولاړکونجیز ($\gamma = 90°$) دریگوډي کې معلوم دي

الف) $a = 3$ cm , $b = 4$ cm ، ب) $a = 5$ cm , $c = 12$ cm

کوم ازښتونه $\cot\alpha$, $\tan\alpha$, $\cos\alpha$, $\sin\alpha$ لري؟

۳ . ۲ – ولاړکونجیز دریگوډي کې ($\gamma = 90°$) نه ورکړشوي کونجونه او نه ورکړ شوي اړخونه وشمیری ، لاندې لویې موږ ته معلومې دي:

a) $a = 50$cm , b) $a = 40$cm , c) $b = 70$ cm , d) $c = 65$ cm

$b = 78{,}1$ cm $\alpha = 43°36'$ $\alpha = 18°55'$ $ß = 59°\,29'$

۳ . ۳ – وشمیری ! A , h_c او همداسی د ټاکلي مساوي پښیز دریگوډي ورکړ شوي پاتې کونجونه او اړخونه ($\alpha = ß$, $a = b$):

a) $a = 66$cm , b) $c = 22{,}4$ cm , c) $a = 38{,}9$ cm , d) $c = 30{,}3$ cm

$c = 130$ cm $\alpha = 47{,}8°$, $\gamma = 33{,}3°$ $\gamma = 48{,}2°$

ب) درې قوې دې د زوریا قوت $F_1 = 167{,}5N$, $F_2 = 112\ N$ او $F_3 = 157\ N$ سره ورکړ شوې وي، چې په ګډه یو دریګوډی جوړوي. د دې دریګوډي کونجونه چې له اړخونو رابند دي، څومره لوی دي؟

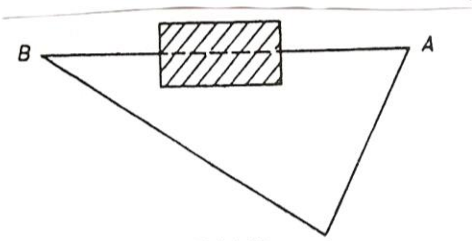


Bild 4.23 ځاکره

پ) دوه ټکي A او B چې یوه کور یې مخه پټه کړې وي، یو له بل څومره لرې دي، که $\widehat{BC} = 75{,}25\ m$, $\widehat{AC} = 51{,}75m$ او $\sphericalangle BCA = 71°15'\,45''$ وي (ځیره ۴ . ۲۳)

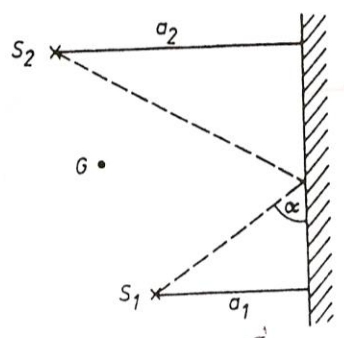


Bild 4.24 ځاکره

ت) د دوه یخ هاکي لوبغاړو S_1 او S_2 ترمنځ یو د مخالف ټیم لوبغاړی G ولاړ دی. S_1 په داسې ډول توپ و S_2 ته وهي چې توپ په یوه دیوال ولږیږي. (ځیره ۴ ، ۲۳ وګورئ).

د دواړو لوبغاړو S_1 او S_2 لریوالی څومره دی؟ که د دوي واټن له دیوال $a_1 = 2{,}5m$ همداسې $a_2 = 6{,}5\ m$ وي او توپ د یوه دې دیوال سره په یوه کونج $\alpha = 42°$ ولږیږي.؟

۵ . د تریګونومتریکي یا دریګوډیزو(مثلثاتي) فرمولونو استعمال

۵ . ۱ – بې له جبشمیري او جدول دې نور دوه درې فنکشن ارزښتونه دې وشمیرل شي، که ورکړ شوي وي: $(0 < \alpha < 2\pi)$:

a) $\sin\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ b) $\cos\alpha = \frac{4}{5}$ c) $\tan\alpha = \sqrt{3}$ d) $\cot\alpha = -\sqrt{3}$

---

۵ . ۲ - لاندې مساوات وښايی:

5.2.1. a) $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$ b) $1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$

c) $\cos \alpha \cdot \sqrt{1 + \tan^2 \alpha} = 1$ d) $1 + 2 \cos \alpha = 4 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1$

5.2.2. a) $\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2}}$ b) $\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{2}}$

c) $\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos\alpha}{\sin\alpha}$ d) $\cot \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos\alpha}{\sin\alpha}$

5.2.3. a) $\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$ b) $\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$

c) $\tan 3\alpha = \frac{3 \tan\alpha - \tan^3 \alpha}{1 - 3 \tan^2 \alpha}$ d) $\cot 3\alpha = \frac{\cot^3 \alpha - 3 \cot\alpha}{3 \cot^2 \alpha - 1}$

5.2.4. a) $\cos 2\alpha = \cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha$ b) $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\alpha}{2}$

c) $\cos 2\alpha = 1 - 8 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\alpha}{2}$ d) $\cos 2\alpha = \frac{1 - \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$

5.2.5. a) $\sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \cos 2\alpha = \frac{1}{4} \sin 4\alpha$

b) $\frac{\cos 2\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha} = -(\cos \alpha + \sin \alpha)$

c) $\sin \alpha + \sin (\alpha + \frac{2\pi}{3}) + \sin (\alpha + \frac{4\pi}{3}) = 0$

d) $\sin^2 (3\pi - \alpha) + \sin^2 (6{,}5\pi + \alpha) = 1$

۷ ۰ ګډوله ګڼونه یا کمپلیکس اعداد Komplexe Zahlen

د مخه مو ولیدل، چې څنګه یوه ګڼډیرۍ پر بله ګڼډیرۍ ودانه شوې ده۰ که ولرو

$$x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \quad x^2 = -1 \qquad (7,1)$$

که پورته برابرون ته وګورو، نو څرګند لیدل کیږي، چې دا په رییلګڼونډیرۍ کې اوبی یا حل نه لري، نو له دې امله باید (7 , 1) د ګڼنو ډیرۍ وغزول شي۰ له

$$x_1 = \sqrt{-1}, x_2 = -\sqrt{-1}, \ldots\ldots\ldots (7,2)$$

د $\sqrt{-1}$ ګڼ، چې د لومړي ځل لپاره د رییل مانانه لري، دا سومبول د $i = \sqrt{-1}$

ټاکل کیږي چیرته، چې لرو: $i^2 = -1$ د

$$x_1 = i, x_2 = -i \Leftrightarrow x_{12} = \pm i, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7,3)$$

لیکو : دا پورته د لاندې سره

$$i^2 = -1 \qquad (7,4)$$

د (7,1) ځاي نیسي، ځکه، چې باور لري

$$x_1^2 = i^2 = -1 \Leftrightarrow x_2^2 = i^2 = -1$$

دا چې i رییل مانا نه لري، نو دې سومبول ته ایماجینارګڼ imaginär(لاتین: فقط خیالي)یوون(واحد)وایو.

برابرون

$$x^2+a = 0 \Leftrightarrow x^2 = -a \quad , a > 0 \qquad (7,5)$$

کیدی شي په لاندې ډول ولیکل شي

$$x_1 = \sqrt{-a} = \sqrt{a}.\sqrt{-1} = \sqrt{a}.i, ...(7,6)$$
$$x_2 = -\sqrt{-a} = -\sqrt{a}.\sqrt{-1} = -\sqrt{a}.i$$

دلته د(7,4) له امله باور لري

$$x_1{}^2 = ai^2 = -a, x_2{}^2 = (-\sqrt{a})^2 i^2 = -a, ...(5,7)$$

اوس د ایماجینار ګڼ یوون(واحد) تولیز کوو

$$z = bi, b \in R, i^2 == -1, ...(5,8)$$

ایماجیناریوون(واحد)i =z یو ځانګړی ایماجینارګڼ b=1 دی

د تولیزې څلوری (عمومي مربع) برابرون(مساوات) اوبی(حل) :

$$x^2 + px + q = 0, p, q \in R, ...(7,9)$$

په لاندې ډول د څلورې پوره کولو یا مربع تکمیلول له لارې

$$(x + p/2)^2 = x^2 + px + p^2/4$$

=>لاس ته راځی یالرو

$$x^2 + px + q = (x + p/2)^2 = +(q - p^2/4) \qquad (7,10)$$

$$(x + p/2)^2 = p^2/4 - q \qquad (7,11)$$

او که فورمال پسی وګڼل شي

$$(x+p/2)_{1,2} = \pm\sqrt{p^2/4 - q}$$

نو لرو

$$x_{12} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{p^2/4 - q}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(7,12)$$

د $p^2 = 4q$ لپاره رییل «ډبل» اوبی یا حل لاس ته راځي

$$x_1 = x_2 = -\frac{p}{2}$$

که $p^2 > 4q$ وي نو(7,12) دوه مختلف رییل اوبیوني یا حلونه منځ ته راوړي۰

که $P^2 < 4q$ وي، نو رییل اوبی نه شته دئ

د ایماجینار ګڼ په مرسته کیدی شي ولیکو

$$\sqrt{\frac{p^2}{4} - q} = \sqrt{[q - \frac{p^2}{4}](-1)} = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}.i$$

که اوس ځاي پر ځاي کړو

$$-\frac{p}{2} = a \in R, \sqrt{q - p^2/4} = b \in R$$

نو په لاندې بڼه دوه اوبیونې یا حلونه لاس ته راځي

$$x_{1,2} = a \pm bi; a, b \in R$$

د دې فورم یا بڼې ګڼونه کمپلکس ګڼونهKomplexe Zahlen (لاتین: پوره کوونکي - یا پوره کیدونکي-) بلل کیږي

$$z = a+bi\ ,\ i^2 = -1;\ a,b \in R \qquad (7,13)$$

د کمپلکس ګڼونوډیرۍ په C سره په نخښه کوو

$$\bar{z} = a - bi, ... (7,14)$$

دا پورته (7,14) و(7.13) ته کنجوګيري کمپلکس ګڼ بلل کيږي۰ لنډ کنجوګيري کمپلکس ګڼ یا اوښتی ګڼ

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}, ... (5,15)$$

د دې مطلقه یا ساده ارزښت

$$a = re(z) \Leftrightarrow b = Im(z) \qquad (7,16)$$

د دې رییل همدا رنګه ایماجینار برخه

دوه کمپلکسګڼونه برابر بلل کیږي، که دوي په رییل او ایماجینار برخه کې یو له بل سره برابر وي:

$$a_1 + b_1 i = a_2 + b_2 i \Leftrightarrow a_1 = a_2, b_1 = b_2$$

موږ تل په پام کې لرو، چې$i^2 = -1$ ایښول شوې

ګډوله یا کمپلکس عدد کیدی شي په سطحه یا هاره کې د لاندې شکل سره سم(د ګاوس د اعدادوسطحه). سږی د کمپلکسو اعدادو سره همغسې شمیرنه کوي، لکه د حقیقي اعدادو سره او په پام کې نیسي چې:$i^2 = -1$

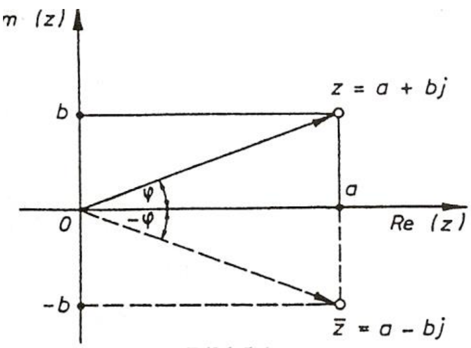


Bild 5.1

موږ دې سیستم ته پروت ولاړ سیستم وایو یا کواوردیناتسیستم Koordinaten systm

پورته څیره دې وکتل شي

پروتولاړ سیستم ته د (x,y) - سیستم هم وایي په پروتولاړ سیستم کې پروت څرخون(محور) د x - محور ته د هوارې یاسطڅې ریبلبرخه او ولاړ محور یا د y – محور ته یپایماجینار برخه وایي لکه څنګه، انځور شوي دي۰ په دې توګه په پروتولاړ سیستم کې یو ټکی منځ ته ر اځي، چې کمپلکس ګڼ انځوروي۰(موږ دا اوس دا برخه نوره نه څیړو، خو دا د وکتورونو په ډول انځورېږي او کارونی یا عملي یې هم همداسې دي، لکه د ورسره بلدو وکتورونو) یادونه : هغه ګران هیوادوال، چې نوي د شمیرپوهنی د دې برخې سره بلدیږي، د هغو لپاره دې په دا لومړي ځل ځنې وییونه یا لغاتونه یاکلمې په پام کې نه راځی، لکه د وکتور کلمه، خو دا پورته یا لاندې څیرو کې کتلی شو، چې د کمپلکس ګڼونو زیاتون او کمون څنګه دی

۷ ۰ ۱ زیاتون او کمون:

لاندې ځیرو ته دې پام وي او ګورو، چې رییل برخه او ایماجینار برخه د Re(z) او Im(z) سره په نخښه شوي دي

$$z_1 \pm z_2 = (a_1 + b_1 i) \pm (a_2 + b_2 i) = (a_1 \pm a_2) + (b_1 \pm b_2), ...(7,17)$$

بیلګه ۷ ۰ ۱ ورکړ شي:

$$z_1 = 2 - 3i, z_2 = 3 + 2i$$
$$\Rightarrow z_1 + z_2 = 5 - i, z_1 - z_2 = -1 - 5i$$
$$\Rightarrow$$
$$|z_1| = \sqrt{2^2 + 3} = \sqrt{13}, |z_1| = \sqrt{13}$$
$$-z_1 = -2 + 3i, -z_2 = -3 - 2i$$

زیاتون یا جمعه (او په همدې توګه کمون یا تفریق یعنې د(z2-) په زیاتون)کیدی شي د خبرې ۵ (په همدې توګه د خبرې ۷ . ۳) د ګراف له لارې هم ښوول شي.

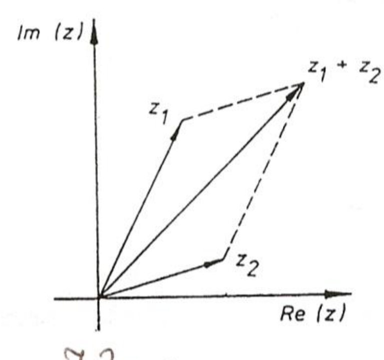


Bild 5.2 7.2 څېره

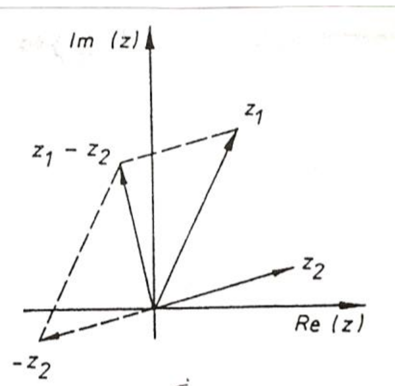
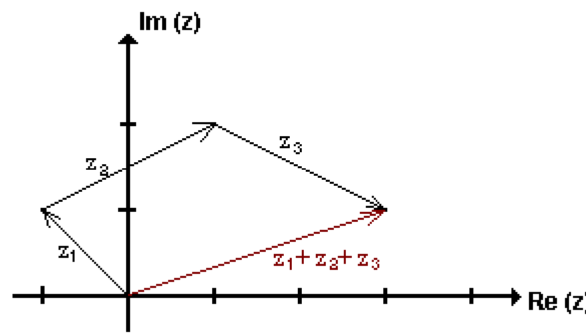
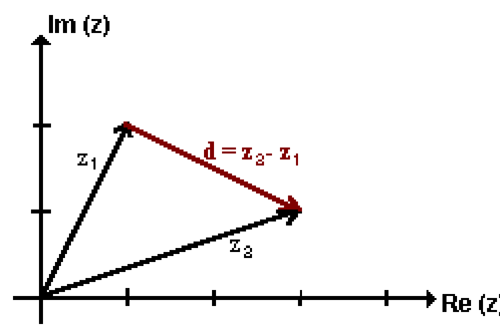


Bild 7.3 څېره

یا لاندې:



په پورته او لاندې ځیرو کې د کملپکس ګڼونو د زیاتون او کمون انځور لیدلکیږي٠



دکملپکس ګڼونو ارزښت

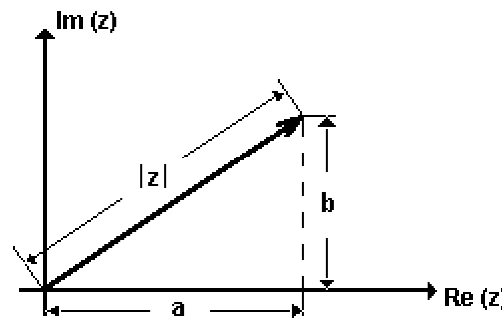
د وکتورz اوږدوالی د کملپکس ګڼونو ارزښت بلل کیبږي٠

دا د په |z| سره ښایو او د پیتاګوراس(فئثاغورث) د جملې

سره ښوول کیږي، د دې لپاره دې پورته اخرنی لیکه

هم وکتل شي٠ مخامخ ځیره موږ ته د کمپلکس ګڼ

د ارزښت انځور ښایي



$|z| = |a+bi| = \sqrt{a^2+b^2}$.

په درې ګوډي کې د اړخونو ځاننیونه یا تباسب له امله باور لري

$$||z_1|-|z_2|| \le |z_1+z_2| \le |z_1|+|z_2|, \qquad (7,18)$$

برسیره پر دې باور لري:

$$z_1+z_2=\overline{z_1}\pm\overline{z_2}$$

۷ . ۲ د کمپلکس ګڼونوځل:

د ورسره بلد نوک ایښوولو له لارې لاس ته راځي

$$(a_1+b_1i)(a_2+b_2i) = a_1a_2 + a_1b_2i + b_1a_2i + b_1b_2i^2$$
$$= a_1a_2 + a_1b_2i + b_1a_2i + b_1b_2(-1)$$
$$\Rightarrow$$

نو بارورل ري

$$(a_1+b_1i)(a_2+b_2i) = (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)i \qquad (7, 20)$$

ګران لوستونکی به زما په ستونځو پوه شي، چې لاتین توري په بدل ډول لیکل شوي، چې دا هم زما تخنیکي ستونځې دي، دا که په هرځایکې وي،دا به راته ګران د شمیرپوهنې مینه وال وبخښي۰ دا لاندې هم ساده ازمایل کیدی شي

$$\overline{z_1.z} = z_1.z_2 \quad , \quad |z_1 .z_2| = |z_1||z_2| \qquad (7,21)$$

بیلګه ۷ ۰ ۲

د $z.\bar{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2+b^2+(-ab+ab)i = a^2+b^2$

او (۱۵ ، ۷) له امله لاس ته راځي:

$$\Rightarrow \quad z.\bar{z} = |z|^2 \qquad (7,22)$$

۷ ۰ ۳ ویش

$$z_1 : z_2 = (a_1+b_1 i):(a_2+b_2 i) = \frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1+b_1}{a_2+b_2}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\bar{z}_2}{z_1\bar{z}_2} = \frac{(a_1+b_1 i)(a_2-b_2 i)}{(a_2+b_2 i)(a_2-b_2 i)} = \frac{(a_1a_2+b_1b_2)+(a_2b_1-a_1b_2)i}{a_2^2+b_2^2}$$

$$z_1 : z_2 = \frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1+b_1 i}{a_2+b_2 i} = \frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2} + \frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}i \qquad (7,23)$$

په دې پسی لاس ته راځي

$$\left|\frac{Z_1}{Z_2}\right| = \frac{|Z_1|}{|Z_2|}, \left(\overline{\frac{Z_1}{Z_2}}\right) = \frac{\overline{Z_1}}{\overline{Z_2}} \qquad (7,24)$$

بیلګه ۷ . ۳ :

د (۷ . ۲۴) د دوېمې برخې ښوونه:

$$\frac{\overline{Z_1}}{\overline{Z_2}} = \frac{\overline{Z}_1.Z_2}{\overline{Z}_2.Z_2} = \frac{(a_1 - b_1 i)(a_2 + b_2 i)}{(a_2 - b_2 i)(a_2 + b_2 i)} =$$
$$= \frac{(a_1a_2 + b_1b_2) + (a_1b_2 - a_2b_1)i}{a_2^2 + b_2^2} =$$
$$= \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} - \frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} i = \overline{\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)}$$

بیلګه ۷ ۰ ٤ :د Z1 او Z2 لپاره له سره سم لاس ته راځي:

$$Z_1 : Z_2 = \frac{Z_1}{Z_2} = \frac{2-3i}{3+2i} = \frac{(2-3i)(3-2i)}{(+2i)(3-2i)} = \frac{(6-6)-(4+9)i}{3^2+2^2} = \frac{13}{13} i = -i$$

۷ . ۴ . تمرینونه

۱ - مېلق یا همغه ارزښتونه او انځورونه

۱ . ۱ – لاندې په اریتمیتیکي یا شمیرنیزه توګه ورکړ شوي ورکړ شوي کمپلکس عددونه په ګاوس سېحه کې انځور کړئ! د دې عددونو مېلقه ارزښتونه وشمیرئ.

a) $z = 1 - i$ b) $z = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$

c) $z = 2(1 - \sqrt{3}i)$ d) $z = -1 - i$

---

۱ . ۲ – د ګاوس د عددونو سطحه کې د هغو لاندې مخلوط یا کمپلکس عددونو ځای ورکړئ، د کومو لپاره چې باور لري:

a) $|z|=\sqrt{2}$ b) $|z|<\sqrt{2}$ c) $|z|>\sqrt{2}$ d) $|z|=r$

۲ – جمعه او تفریق(زاتون او کمون)

۲ . ۱ – د شمیرنې او کاږنې یا رسم کونې له لارې پیدا کړئ

a) $(1+2i)+(2+i)$ b) $(-2+i)+1-2i)$

c) $(1-2i)-(1-2i)$ d) $(-1-2i)+(2-i)$

۲ . ۲ - د شمیرنې او کاږنې یا رسم کونې له لارې پیدا کړئ

a) $(22+5i)+(2+i)$ b) $(3+2i)-(5+2i)$

c) $(1+2i)-(1+2i)$ d) $i-(1-2i)$

۳ . ضرب(ځل) او وېش:

په لاندې کې a,b,c,d,x,y حقیقي ګڼونه دي.

۳ . ۲ – وشمیرئ

a) $(2+\sqrt{3}\,i).(3-\sqrt{2}i)$ b) $(3+2\sqrt{2}\,i).(3-2\sqrt{2}\,i)$

c) $(1+\sqrt{5}\,i).(1-\sqrt{5}\,i).(13-12i))$ d) $\sqrt{3+\sqrt{7}i}.\sqrt{3-\sqrt{7}i}$

۳ . ۲ – وشمیرئ

a) $(x+y\,i)\,(2x+yi)$ b) $(\sqrt{x}+\sqrt{y}\,i)(\sqrt{x}-\sqrt{y}\,i)$

c) $\left(\frac{2}{3}a-3bi\right)\cdot\left(\frac{4}{3}a+5bi\right)$ d) $(c-\sqrt{d}\,i)(-c-2\sqrt{d}\,i)$

---

۳ . ۳ – د لاندې ماتونو مخرج یا ماتلاندې حقیقي ورګرځوئ (a ، b حقیقي دي)

3.3.1. a) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}\,i}{\sqrt{3}+\sqrt{2}\,i}$ b) $\frac{1-20\sqrt{5}\,i}{7-2\sqrt{5}\,i}$

c) $\frac{56+33i}{12-5i}$ d) $\frac{63\ +\ 16i}{4\ +\ 3i}$

3.3.2. a) $\frac{5i}{\sqrt{2}-\sqrt{3}\,i}$ b) $\frac{3-27\sqrt{5}\,i}{7-3\sqrt{5}\,i}$

c) $\frac{i-\sqrt{3}}{\sqrt{3}\,i-2}$ d) $\frac{i}{8-i}(i+1)$

3.3.3. a) $\frac{3a+4bi}{4a-3bi}+\frac{4a-3bi}{4a+3bi}$ b) $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}\,i}{\sqrt{a}-\sqrt{b}\,i}-\frac{\sqrt{b}+\sqrt{a}\,i}{\sqrt{b}-\sqrt{a}\,i}$

c) $\frac{\sqrt{1+a}+\sqrt{1-a}\,i}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}\,i}-\frac{\sqrt{1-a}+\sqrt{1+a}\,i}{\sqrt{1-a}-\sqrt{1+a}\,i}$

d) $(5-i)\,(6-i)+\frac{5-i}{6-i}$

۴ . سره رایوځی شوې پوښتنې

ګډوله ګنونه یا اعداد ورکړ شوي.

$z_1 = \frac{1}{2}\sqrt{3}-\frac{i}{2}$ او $z_2 = -\frac{1}{4}-\sqrt{3}\frac{i}{4}.$

۳ - د لوګاریتم بنسټ فرمولونو استعمال. په لاندې تمرینونوکې x وشمرئ.

$z_1 = \frac{1}{2}\sqrt{3}-\frac{i}{2}$ und $z_2 = -\frac{1}{4}-\sqrt{3}\frac{i}{4}.$

وشمیرئ:

4.1. a) $z_1 + z_2$ b) $z_1 - z_2$ c) $z_1 \cdot z_2$ d) $\frac{z_1}{z_2}$

4.2. a) $|z_1|$ b) $|z_2|$ c) $\bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$ d) $\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$

4.3. a) $|z_1 + z_2|$ b) $|z_1 - z_2|$ c) $\bar{z}_1 + \bar{z}_2$ d) $\bar{z}_1 - \bar{z}_2$

4.4. a) $|z_1| \cdot |z_2|$ b) $\frac{|z_1|}{|z_2|}$ c) $|z_1 \cdot z_2|$ d) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|$

۴ . ۵ – د لاندې مربع مساواتو حلونه ورکړئ!

a) $x^2 + (1 + i)\, x - 2\,(1 - i) = 0$

b) $x^2 + (3 - 2i)\, x + 3\,(1 - i) = 0$

c) $x^2 - \frac{i}{2} \sqrt{2}\, x + 1 = 0$

d) $16\, x^2 + 8\,(i + 1)\, x + 2\,(i + \frac{9}{2}) = 0$

۸ - د ښوونې(ثبوت) متودونه

په شميرپوهنه کې داسې مخ په وړاندې ځو، چې د ځينو نيونو يا فرضيو په فرمولولو سره، غوښتنو يا ښوونو او يا لکه تراوسه د ثبوتولو پرابلم (د ګڼپوهنې جملې په څير) منځ ته رااچوو، چې دا نيونې او غوښتنې ويناوې دي. په جملو کېږ دې ماتماتيکي يا شميرپوهنيزه تړنه بيا ايمپليکيشن يا لاس ته راوړنه ده(مخ ته دې وکتل شي)ياني A => B دا غوښتنه د رښتيا ارزښت w غوښتنه B کې نغښتې او دا اوبی يا حل B له V او د دې تراوسه اوبی- يا حل شوو جملو لاس ته راځی. د دې لاس ته راوړنو لپاره بيلابيلې لارې شته ، چې په لاندې کې يې څيړو

۸ . ۱ سيده ياسيخه (مستقيمه) ښوونه

په سيده ښوونه (ثبوت) کې سرې له يوې وينا A څخه مخ ته ځي، چې رښتياارزښت يې څرګند دی او په دې لاس ته راوړنې پسې د B وينا لاس ته راوړي.

دا وينا B هم رښتيا ده، ځکه چې له يوې رښتيا پريميسې Prämisse (نيونې يا فرضيې) څخه رښتيا کونکلوزيون Konklusion (لاس ته راوړنه يا نوره هم ښه ښوونه يا ثبوت)(د اينمپليکيشن ۱ او ۲ ليکه د رښتياارزښت په جدول کې) له يوې رښتيا پريميسې څخه د نارښتيا کونکلوزيون لاس ته راوړنې نارښتيا دي (ايمپليکيشن رښتيا ارزښت ۲ ـم جدول).

بیلګه : سیده اوبیونه یا حل:

نیونه V : $x \geq 1$

غوښتنه B : $6x+3 \geq 3x + 6$

اوبی : وینا A ، چې رښتیا ارزښت w یې جوت دی، نیونه یې $x \geq 1$ ده۰ له 3 سره ځل له امله لاس ته راوړنې لرو چې په لاندې ډول دی$3x \geq 3$: د 3 زیاتون له لارې لرو: $3x + 3 \geq 6$ د $3x$ زیاتون له امله لاس ته راځي:

$6x + 3 \geq 3x+6$.

بیلګه:

د یوه ناټیک اوبیونې یا حل کارونه (متود)

د ښوونې دی $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{a.b}$

د ښوونې وړ وینا څخه لاندې لاس ته راوړنې لرو:

$$(a+b)^2 \geq ab$$

$$a^2+b^2+2ab \geq 4ab$$

$$a^2 -2ab+b^2 \geq 0$$

$$(a-b)^2 \geq 0$$

لاس ته راوړل شوې ویناوې $(a-b)^2 \geq 0$ بې بندیزه رښتیا دي۰ مګر دا د ښوولو وینا یواځې د شرایطو$a \geq 0, b \geq 0$ لاندې باور لري۰ له دې امله که له رښتیا وینا څخه غوښتل شوې یا د ښوولو ویناو ته نه شي راتلی(سیده ښوونه) او په ناسداږه یا غیرمستقیم ه ښوونه یا اوبیونه باندې استعمال شي نو ګټوره به وي، چې په لاندې توګه تر څېړنې لاندې ونیول شي۰

۸ ۰ ۲ ناسیده ښوونه یا - ثبوت:

په ناسیده ښوونه کې له یوه نفي یا نیگیشن یا نه والي څخه مخ ته ځو، چې A « ناغوښتنه» او له دې یوه وینا B لاس ته راوړل کیږي، کومه چې نارښتیا ده۰ وینا یعني نفیي غوښتنه یا ثبوت هم نارښتیا دی، ځکه چې له یوې نارښتیا نیونې څخه یوه نارښتیا ښوونه یا ثبوت لاس ته راتلی شي(د ایمپلیکیشن څلورمه کرښه).

له یوې رښتیا نیونې څخه د یوې نارښتیا ثبوت لاس ته راوړنه نارښتیا ده۰ (د ثبوت د رښتیا جدول څخه) که د غوښتنو نفی نارښتیا وي، نو غوښتنه بیا په دې اوبیونې یا حل کې رښتیا ده۰

بیلگه : ناسیده ښوونه یا ثبوت

نیونه V : a , b دې رییل گڼونه وي او وي دې: $a \geq 0, \quad b \geq 0$

ښوونه یا غوښتنه B :

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

اوبیونه : د غوښتنو نفیې ده $\frac{a+b}{2} \prec \sqrt{a.b}$

د پورته نابرابرون له څلورې یا مربع کولو له امله لاس ته راوړنه لرو:

$$(a+b)^2/4 < a.b$$

دواړه لورې له څلورو سره ضربوو، نو لاس ته راځي

$$(a+b)^2 < 4a.b$$

له څلورې وتنې یامربعوتنې څخه لاس ته راځي:

$$a^2+b^2+2ab < 4ab$$

په دواړو لورو د 4ab کموني څخه لاس ته راځي

$$a^2-2ab+b^2 < 0$$

د نابرابرون کينه لور د څلورئ ۰ مربع په بڼه ليکل کيدی شي او هيڅکله له صفر څخه نه شي کوچنئ کيدی۰ دا په دې مانا، چې $(a+b)^2 < 0$ نارښتيا دئ يا غلط دئ، نو له دې سره $(a+b) < ab$ نارښتيا دئ يانې

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

رښتيا دئ ۰

۲ – غوښتنه B :د ۲ ريښه يا جذر $\sqrt{2}$ ايرشنل دئ

اوبيونه يا حل : د غوښتنې نفيې ده، چې : د ۲ ريښه $\sqrt{2}$ ريشنل ګڼ دئ (د ريشنل ګڼونو لپاره دې برخه ۳ وکتل شي)، نو بايد بيا دوه ټولريشنل ګڼونه q, p, د $q\neq0$ سره شته وي، چې دا باوري شي:

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \Leftrightarrow p^2 = 2q^2$$

له دې پورته برابرون سره p^2 يو جوړه((جفت) ګڼ دئ۰ نو له دې امله p هم يو جوړه ګڼ دئ، ځکه چې يواځې د جوړه ګڼ مربع يا څلورئ جوړه کيدی شي $p=2p'$ له مربع يا څلورئ کولو او پر ځاي ايښوولو لاس ته راځي:

$$P^2 = 4p'^2،$$

$$2q^2 = 4p'^2$$

$$q^2 = 2p'^2$$

له اخرنی برابرون لاس ته راځي، چې q هم یو ځلوری یا مربع ګڼ دی. په دې پسې لرو p او q پر ۲ ویشونی دی، یانې پرویشپردی نه دی. که پرویشپردي ټول ګڼونه p او q له $\sqrt{2}$

سره شته نه وي، نو دا ډول ټولګڼونه نه شي کیدی، چې شته یا موجود وي.

۸ ۰ ۳ د پوره ایندکشن له لارې ښوونه

د پوره ایندکشن ثبوت یا حل د هغو غوښتنو لپاره کارول کیږي، چې د یوه ټاکلي ګڼ (n0 صفر باید لږ د ن د پېنی لاندې ولیکل شي) څخه د ټولو پیدایښتي ګڼونو لپاره باوري کیدی شي. یانې دلته نوینه داده، چې یوه وینا د لپاره که باور ولري، نو دا بیا د ټولو پیدایښت ګڼونو لپاره باور ي کیدی شي.

بیلګه ۱ :

د ټولو $n \geq 0$ لپاره ۲ په توان دn له صفر لوي یا له صفر بسره برابر دي یعنې باور لري: $2^n \geq 0$

بیلګه : د ټولو $n \geq 0$ لپاره باور لري $1+3+5+\ldots 2n+1)= n^2$

د پوره ایندکشن د ښوونې لپاره د « پوره ایندکشن پرینځیپ بنسټ» مخ ته پروت دی:

که یوه وینا دn= n0 یا(په لاندې، که ن،ج، ته پورته شو،نو صفر په پښه کېلیکل شوی) $n = n_0$ لپاره باور ولري او که د دې وینا د یوه په خوښه پیدایښتي ګڼ $n = k$ لپاره اور لرلو څخه د $n = k+1$ لپاره باوریوالی ترې لاس ته راشي، نو دا وینا د ټولو پیدایښتي ګڼونو $n \geq n_0$ لپاره ریښتونې ده .

په دې پسې په ترتیب د ایندکشن ښوونه په دوه پلونو یا قدمونو سرته رسیږي

۱ - د ایندکشن پیل

ښوول کیږي، چې دا وینا د $n \geq n_0$ لپاره باور لري

۲ – د ایندکشن پل

اوس باید یو ایمپلیکیشن یا لاس ته راوړنه وښوول شي. له دې امله د ایندکشن پل یا له برخه پلونو جوړ دئ

۲ الف: د ایندکشن نیونه :

نیول کیږي، چې وینا د $n = k \geq 0$ لپاره باور لي او دا نیونه په V فرمولبند کیږي

یادونه V د نیونې لپاره ځاي پرځاي کیږي یا راوړل کیږي.

۲ ب – د ایندکشن غوښتنه:

غوښتل کیږي، چې دا وینا د $n = k+1$ لپاره باور لري او دا غوښتنه په B فرمولبندي کوو. دا په ګوته کوو، چې B دلته د غوښتنې پرځاي لیکو

۲ ج – د ایندکشن ښوونه :

ښوول کیږي، چې B له A څخه لاس ته راځي: $A \Rightarrow B$

بیلګه ۱ :

۱ – د $n = 0$ لپاره باور لري $2^0 = 1 > 0$

۲ . ۱ . V ته :

$2^k > k$

و ۲ . ۲ B ته

$$2^{k+1} > k+1$$

۲ ۰ ۳ له B <= V : له $2^k > k$ او $2 > 1$ څخه د زیاتون له امله لاس ته راځي :

$$2 + 2^k > k+1$$

او له دې لاس ته راځي: $2.2^k > k+1, 2^{k+1} > k+1$

بیلګه ۲ :

۱ ۰ د $n = 1$ لپاره باور لري $1 = 1° = 1$

و ۲ ۰ ۱ V ته: $1+3+5++\ldots+(2k-1) = k^2$

و ۲ ۰ ۲ B ته:

و ۲ ۰ ۳ B <= V ته: له نیونې څخه د زیاتوون 2k+1 زیاتونې او له دې د ښي خوا د یوه بینومځلوری(-مربع) په څیر انځورونې څخه لاس ته راځي:

$$1+3+5+\ldots+(2k-1)+(2k+1=k^2+2k+1$$

او له دې د ښی خوا انځورونې څخه د بینوم ځلوری(-مربع) لاس ته راځی :

$$1+3+5+\ldots+(2k-1)+(2k+1)= (2k+1)^2$$

یادونه : د V او B پر ځاي کړی شو، چې نیونه او غوښتنه ولیکو، یانې موږ درې څه لرو، چې نیونه غوښتنه او ښوونه ده۰ په هغه ورسره بلد ډول یې ښوونه د یوه پارابلم حل دی، چې ما اوبی یا اوبیونه بللی(اوبي پښتو ده او ښه کره، همدې وي یا لغات ته مناسب خپل د پښتو نوم دی، چې ورسره بلد هم یو، لکه ملګوبی، خړوبی، چې موخه ترې همدا اوبی دی او په نورو ژبو کې هم همداسې دی)

دلته د شمیرپوهنې سم اند درس ته د پای ټکی ږدو، کۀ نور څه مو ښه مخ ته راغله هغه به بیا د ترڼې په ډول ورسره مل کړو۰ ستاسو وړاندیزونو ته هم سترګی په لار یم۰

۸ . ۴ تمرينونه

۱ – سيده وښايي

الف) له $a + 1/a = b$ څخه لاس ته راځي $a^3 + 1/a^3 = b^3 - 3b$

ب) د دوه تيرو کونجونو α ، β لپاره صدق کوي

$$\sin(\alpha + \beta) < \sin\alpha + \sin\beta$$

۲ – ناسيده وښايي :

الف) د ټولو x لپاره ، چې وي $0 < x < \infty$ ، صدق کوي

$$(3x - 4) / (2x + 4) > 1$$

ب) $\sqrt{2}$ يو ايريشنل ګڼ دی

۳ – د پوره اندکشن له لارې يې وښايئ

a) $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{(n+1)\,n}{2}.$

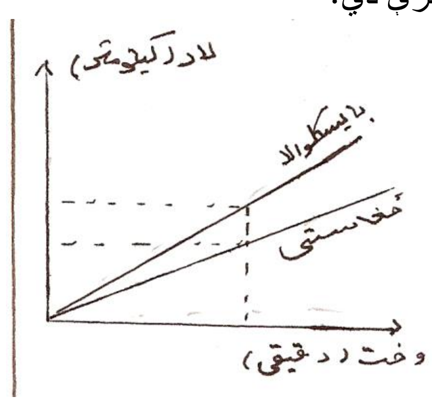
b) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{(2n+1)(n+1)\,n}{6}.$

c) $2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1.$

۹ ۰ کرښيز- یا خطي-یا لاینیز مساوات د یوې متحولې سره

پیل بیلګه

یو بایسکل ځغلوونکی او یو پلی له یوه ځایه په همغه وخت خوزي یا حرکت کوي، کوم چی په ګراف کی کښل شوی دی(که د ګراف کښل راته ناشوني شول بخښنه غواړم٠ که بل چا دا کار وکولی شو نو دا به یې هم مرسته وي، خو پرې پوهیدل کومې ستونځې نه لري) بایسکل په ګړۍ کی ۱۵ کیلومتره ځغلي او پلی ۱۰ کیلو متره په ګړۍ کي ځغلي. دوي پس له یونیم ساعت سره یوځاي کیږي. هر یو څومره لار وهي او یو له بل څومره لرې دي؟



دا موږ دلته، لکه په ځنو کتابونو کی چی د فنکشن د نامه لاندې ياديږي، په همغه نامه نه يادوو خو هدف به همغه وي که دا د برابرون يا مساوات په نامه وبولو .
وخت) په دقيقه (په t ښايو لار) کيلومتر(په s ښايو د لارانځورونی ګخه په ګراف کی ګرګنديږي چی بايسکلځغلوونکی له ۶۰ دقيقو وروسته ۱۵ کيلو متره ځغليدلي يعني 15km /hاو پلی ۱۰ کيلو متره يعني 10km/h
غواړود هرڅه لمړی وښايو چی هر يو له يونيم ساعت وروسته څومره لار وهلي او بيا دويمي پوښتني ته ځواب ورکوو.
بايسکل ځغلوونکی به له دوه ساعته وروسته 2.15km = 30 km ځغليدلی وي او پلی به 2.10km=20kmځغليدلی وي بايسکل ځغلونکی به له tوخته وروسته t.15km
15.tkm=لار وهلي وي. دلته وخت t خپلواك اوړيدونی يا نا پژندونکی او لار s بلواك اوړيدونی يا ناپيژندونکی يعني د t په واك کی دی. دا کليمي به بيا د فنکشن او څيرونو په برخو کی پوره تر څيړني لاندې ونيول شي. د بايسکل ځغلوونکي وهلې لار، چی په r يې ښايو برابرون داسی ليکو:

$$S_r = 15.t; t \in Q_0^+$$

د بايسکل ځغلونکی وهلی لار، tچی د بايکلځغلولو وخت دی طبعآ زياتيز يا مثبت دی ورته دپلي چی په lيي ښايو وهلي لار هم تاکل کيږي،يعني د l وهلی لار:

$$S_l = 10.t; t \in Q_0^+$$

له دې سره مو وښوول چی دواړه له پيل ټکي له 1,5 ساعته يو له بل څومره لرې دي.
وهل شوې لار :

د بايسکل ځغلوونکي $S_r = 15.1,5 = 22,5km$

د پلي $S_l = 10.1,5 = 15,0km$

ددې په تعقيب له 1,5 ساعته وروسته دواړه يو له بل 7,5 km لرې دي .

۹ . ۱ لاينيز- يا کرښيز مساوات :

د کرښيز مساوات فرمول د يوې اوښتونې يا مجهولې x سره داسی دی

$$Ax = a \qquad (9.1)$$

دلته A , a حقيقي اعداد دي. د (۱ . ۶) برابرون اوبيونه (حل) دا مانا لري چی ټول هغه حقيقي اعداد وښوول شي چی که په پورته (۱ . ۹) برابرون يا مساوات کې ځای په ځای شي، د مساوات شرايط پوره کړي. د حقيقي اعداد و بنسټيز قانون (۳ – مجه

برخه دې وکتل شي) په بنسټ کیدی شي چی د حقیقي عددد مساوات دواړه خواوي په یوه عدد سره ځل یا ضرب کړو. بی له دې چی مساوت زخمي شي. داچی ویش په د $\frac{1}{A}; A \neq 0$ ځل سره برابر دی نو لیکل کیږي

$$x = \frac{a}{A}; A \neq 0; ....(9,2)$$ ....

دا د (۱ . ۹) یواځنی ممکن حل دی۰که په څټ یا برعکس $A = 0$ وي، نو دلته دوه حالتونه یو د بل توپیرو و

۱ – که $a \neq 0$ وي: دا مساوات بیا داسی دي $0.x = a; a \neq 0$

دا یو مخامخوالی یا تضاد یا نوره هم ښه په څتوالی تشکیلوي ، نو په دې حالت کی حقیقي عدد x شته نه دی چی دا(۱ . ۹) مساوات پوره کړي.

۲ - که $a = 0$ وي، نو بیا برابرون (۱ . ۹) لاندې شکل نیسي

$$0.x = 0$$

دا برابرون بیا د ټولو ریبلګښونو xلپاره پوره (ډك) دی. یا برابرون پوره کوي.

دا بیا داسی هم لیکل کیږي : (په خوښه bel) = xپس دا لاندې باور لري:

برابرون (۱. ۹ .) د $A \neq 0$ لپاره یواځنی ټاکلي اوبیونه (۹ .۲) لريډ $A = 0$ او $a \neq 0$ لپاره اوبیونه نه لري د $A = 0$ او $a = 0$ لپاره هر ریبلګڼ x اوبیونه یا حل دی.

په دې لاس ته راوړنوکی، د یوې اووښتونې یا مجهولی سره د ریبل برابرونونو د ګڼلو ټوله تیوري خوندي ده .

یو لاینیز برابرون (مساوات) (یو برابرن، چی د برابرونونو په دواړو خواوکی د لاینیزو برابرونونو ترمونو زیاتون $a_i + x_i + b_i$ پرت وي) دا مخکني نورمالفورم (۹ . ۱) مو له مخه مخ ته نه دی پروت، پس سړی په دواړو خواو د لاینیزو ترمونو د هدف په لور زیاتون (همداسی کمون) له لارې همغه مخکني نورمالفورم ته بیرته راړوي، دا د II . 2 بنستیز قانون له مخی یو ورته فورمبدلون یا بڼه بدلون دی)(د اوبي یا حل ډیری تغیر نه دی خوړلی) د بیلګي په توګه لاندې مساوات ورکړ شوی

$$a_1x - b_1x + c_1 - d_1 = a_2x - b_2x + c_2 - d_2$$

پس کیدی شي چی په دواړو خوا $b_2x + d_1$ ور زیات کړو او $a_2x + c_1$

ترې کم کړو، نو لاس ته راځي

$$a_1x - b_1x - a_2x + b_2x = c_2 - d_2 - c_1 + d_1;......................(9.3)$$

دلته هغه د x لرونکی غړي د مساوات په کيڼ لور او ثابت د برابرون په ښي لورپراته دي. داسی ليکو

$$A = a_1 - b_1 - a_2 + b_2; a = c_2 - d_2 - c_1 + d_1$$

نو دا برابرون (۳ . ۹) د برابرون (۱ . ۹) سره (ته) کټمټ (ورته) دی، که په لاندې فورم يا بڼه يو مساوات ورکړ شوی وی

$$\frac{a_1}{a_2}x = \frac{b_1}{b_2}$$

(دا ټيك هلته موخه ور يا هدفمند دی چی $a \neq 0; b \neq 0$ وي) . نو برابرون د x په لور حل کيدلی شي ، که دا په a2 ځل شي او د 0=| a1 په حالت کی په a1 وويشل شي:

$$x = \frac{a_2b_1}{a_1b_2}$$

بيلګه ۹ . ۱ :

برابرون $\frac{a^2x - b^2}{a} - \frac{a(b-ax)}{b} + \frac{b^2}{a}$ هلته موخه ور دی چی $a \neq 0; b \neq 0$ وي.
ددې لپاره چی د ماتلاندې څخه ځانونه خلاص کړو، نو پورته ورکړ شوي برابرون د ګډماتلاندي a.b سره ځل کوو:

$$b(a^2x - b^2) - a^2(b - ax) + b^2 = a^2b$$

$$a^2bx - b^3 - a^2b + a^2x + b^3 = a^2b$$

اوس برابرون ترتيبيږي او راټوليګی، xله نوکانو څخه راوځي

$$a^2bx + a^3x = a^2b + b^3 + a^2b - b^3$$

$$a^2(ax + b) = 2a^2b$$

د $a \neq 0$ له امله کيدی شي په a^2 وويشل شي (a+b)x=2b

دا د لاينيز برابرونونو بنسټيزه بڼه (فورم) (۱ . ۹) ده

که ($a + b \neq 0, (a \neq -b)$ وي ، نو(x = 2b /(a + b

یوګونی یا یواځنی اوبیونه یا حل دئ
که(a = -b) a + b = 0 ، نو د $b \neq 0$ له امله اوبیون شته نه ده .
هغه حالت چی ناپاي زیاتي اوبیونې یا حلونه منځ ته راځي(د x =په خوښه) ، د نیونی یا فرضیي له امله چی باید $b \neq 0$ وي، موجود نه دئ.
پام:
په دې هکله زیاتې بیلګی کیدی شي راوړل شي، چې ضریب یا ځله ووني په مختلفو توانونو وي۰ زه دلته یواځې دومره یادونه کوم، چې په مساواتو کې، چې اوښتونی یا متحولې ولري، همغهسی شمیرل کیږي، لکه په ریبلعددونو کې۰
دلته هم باید دې ته پام وي، چې ماتلاندې صفر نه شي۰ که چیرې اړیینې وې او یا ګرانو لوستونکو یې راوړل وغوښتل، نو زه به بیا دا کار سرته ورسوم او بیلګي به هم راوړم او که چیرې کوم د شمیرپوهنې مینه وال په دې هکله د پوښتنو ځوابونه غوښتل، زه به وهڅیږم او دا کار به هم سر ته ورسوم، که لوي ځښتن غوښتل۰ زه دومره یادونه کوم، چې په دې هکله زما د شمیرپوهنې بنسټیز کتاب کې زیاتې بیلګي راوړل شوي، خو نه پوهیږي، چې دا کتاب به چا ته ورسیږي او که نه

بیلګه 9 . ۲ :
برابرون (x/a)-((a-x)/2bc)+(a-x)/3c =1 یواځي
د $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$ $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$ لپاره موخه ور دئ.
ددې لپاره چی مات لاندې له منځه یوسو، نو مساوات د ا.م.ل. 6abc ا(صلي ماتلاندې) سره ځل کوو: 6bcx-3a(a-x)+2ab(a-x) =6abc
ورپسی نور، په لاندې ډول، د څرګندو شمیرلارو یا ـ قاعدو له لارې لاس ته راځي:

$$6bcx-3a^2+3ax+2a^2b-2abx=6abc$$

$$(6bc+3a-2ab)x=6abc+3a^2-2a^2b,$$

$$(6bc+3a-2ab)x=a(6bc+3a-2ab)$$

دا بیرته د لاینی مساوات (۹ . ۱) بنسټیزه ده، او له دې امله صدق کوي:
د $6bc+3a-2ab \neq 0$ لپاره x=a د مخ ته پراته مساوات یواځنی حل دئ.
د $6bc+3a-2ab = 0$ لپاره د $0x = 0$ له امله هر ریبل کې x اوبیونه ده.
نو لرو x=a د $6bc+3a-2ab \neq 0$ لپاره د $6bc+3a-2ab = 0$ لپاره x په خوښه
دلته د څیړل شوو برابرونونو، چی په ساده ډول یی لاینیزوالی یا لاینیزتوب پیژندل کیږي، په څنګ کی برابرون شته چی په اصل (پرینځیپ) کی کرښیز یا لاینیز نه دي

مګر په لاینیز مساوات یا برابرونونو اړول کیدی شي. دلته ددې غوښتنو په څنګ کی چی د ناپیژندونکو ضریبونو a,b,c ..... لپاره شوي، زیات وخت په x هم شرطونه اېښول کیږي.
ددې لپاره لاندې کی درې ساده بیلګي راوړو:

بیلګه ۹ . ۳ :
برابرون $(8x - 9)(3x - 4) - (5x - 6)^2 = (4 + x)(3 - x) - 9$
د لومړي حل لپاره څلوری برابرېن یا مربع مساوات دی، ځکه چی څلوری(مربع) غړي لري. د یو له بل څلولو یا ضربولو وروسته څلوری غړي له منځه ځي. یو لاینې مساوات د یوې ځانګړي سره سره پاتي کیږي:

$$24x^2 - 32x - 27x + 36 - (25x^2 - 60x + 36) = 12 - 4x + 3x - x^2 - 9$$

$$-x^2 + x = 3 - x - x^2$$

$$2x = 3$$

$$x = 3 / 2$$

بیلګه ۹ . ۴ : برابرون $(2x - a) / (x - b) = 1$ یواځي هلته هدفمند دی که حل x دا شرط $x \neq b$ پوره کړي. نو بیا لرو: $2x - a = x - b \Rightarrow x = a - b$
د $x \neq b$ له امله باید باوري وي $a - b \neq b$ له دې امله لرو $a \neq 2b$ پس ورکړ شوی مساوات د $a \neq 2b$ لپاره یواځنی ټاکلی حل $x = a-b$ لري او پرته له دې ($a = 2b$) حل نه لري.

بیلګه ۹ . ۵ :
مساوات $(a / x) + (b / x) - (c / x) = 1$
یواځي هلته هدفمند دی چی $x \neq 0$ وي. ددې نیونو لاندې باور لري . $x = a + b - c$ دا نو د $x \neq 0$ له امله یواځي هلته حل دی، کله چی $a + b \neq c$ وي. پس ورکړ شوي مساوات یواځي د $a + b \neq c$ لپاره یواځنی ټاکلی حل $x = a + b - c$ لري، په غیر له دې ($a + b = c$) حل یا اوبیونه نه لري

بیلګه ۹ . ۶ : د لاندې مساوات څیړنه:

$$\frac{b^3c^2x - \frac{1}{a^2}}{121500ab^4c^3} - \frac{a^2x - \frac{1}{b^3c^2}}{2880a^3bc} + \frac{abcx - \frac{1}{ab^2c}}{5400(abc)^2} = 0,$$

چی ټيك د $abc \neq 0$ لپاره يو هدف لري، بايد د اصلي مات لاندې پيدا كولو لپاره د مات لاندې ك.ګ.ځ. تكرار شي

$$12150ab^4c^3 = 2^2.3^5.5^3.a.b^4.c^3$$
$$2880a^3bc = 2^6.3^2.5.a^3.b.c$$
$$5400(abc)^2 = 2^3.3^3.5^2.a^2.b^2.c^2$$

$$................ = 2^6.3^5.5^3.a^3.b.c^3 = 64.243.125.a^3bc^3$$

دا پورته ګڼ اصلي ماتلاندې (ا.م.ل) دئ

كه برابرون د ا.م.ل. سره ځل شي، نو ماتونه له منځه ځي او لاس ته راځي:

$$16a^2(b^3c^2x - \frac{1}{a^2}) - 225b^3c^2(a^2x - \frac{1}{b^3c^2}) + 120c.(abcx - \frac{1}{ab^2c}) = 0$$

د نوكانو يو له بل ځلولو راټول، ترتيبونه او ويشنه د x تر څنګ ولاړو فاكتورونو يا ضريبونو ($A = 89a^2b^3c^2 \neq 0$) څخه د نيونو سره سم دا لاندې لاس ته راوړكيږي

$$x = 1 / a^2b^3c^2,\ abc \neq 0$$

د دې وظيفي لپاره د حل نور امكانات نه شته.
تر اوسه مو هغه ماتونه وځيړل چې مات لاندې يي له ځلونو جوړ وو، غواړو چې اوس داسې ماتونه وڅيړو چې مات لاندې يي له زياتونونو جوړ وي، چې د نوكانو له لارې په ځلوونو ټوټه كيدلي يا تجزيه كيدلى شي .

بيلګه ۹ . ۷ :
برابرون

$$\frac{a^2(2bx-1)}{a^4b^2x^2-b^2} + \frac{b}{a^2b+b} = \frac{a^2bx}{a^2bx-b} + \frac{b^2(2ax-3)}{a^4x^2x^2-b^2} - 1$$

ټيك د دې نيونو سره صدق كوي $ab \neq 0$, $|x| \neq 1 / a^2$. :

اصلي مات لاندې) ا م ل (په لاندې ډول پيداکوو

$$a^4b^2x^2 - b^2 = b^2.(a^4x^2 -1)$$
$$= b^2.(a^2x+1)(a^2x-1)$$
$$a^2bx + b = b.(a^2x+1)$$
$$a^2bx - b = b. (a^2x-1)$$

$$b^2.(a^2x+1).(a^2x-1) = b^2(a4x^2 - 1 =$$

اصلي ماتلاندی)ا م ل

د اصلي مات لاندې مساواتو له نوکانو څخه راوتلو) چي يو يا څو غړی د نوکانو دباندې او نور په نوکانو کی بنديږي(، لنډونو او ځلوونو له لارې لاس ته راځي

$$.....a^2(2bx-1)+b^2(a^2x-1) = a^2b^2x(a^2x+1)+b^2(2ax-3)-b^2(a^4x^2-1)$$
$$2a^2bx - a^2 + a^2b^2x - b^2 = a^4b^2x^2 + a^2b^2x + 2ab^2x - 3b^2 - a^4b^2x^2 - b^2$$
$$.............2a^2bx - 2ab^2x = a^2 - b^2$$
$$.................2ab(a-b)x = (a+b)(a-b)$$
$$..................................x = \frac{a+b}{2ab}$$

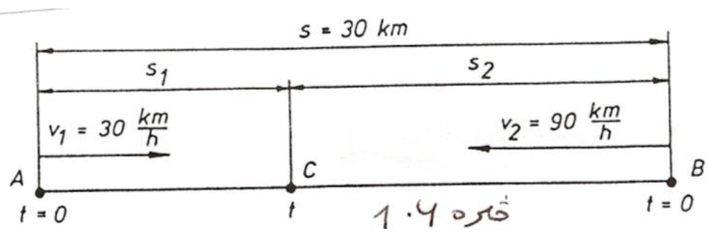
د $b \neq a$ او $0 \neq ab$ لپاره(دا د نيونو له لارې تل پوره دی)که $a = b$ وي، نو x د $0.x = 0$له امله په خوښه ارزښتونه نيولی شي، بی له هغو چی په بنسټيزو نيونو کی له نيونو د باندې ساتل شوي وي) يعني په مساوات کی ځاي ورته نه وي(. په دې حالت کی د xمطلقه ارزښت د کېونو $a = b$ د په څېر ارزښت سره نه شي مساوي کيدی .د x لپاره نيول شوې نيونی د حل ورکولو کی بايد په پام کی نيول شوي وي دا په دې مانا چي بايد تل پوره وي:

$$\pm 1 / a^2 \neq \frac{a+b}{2ab}$$

بيلګه ۹ . ۸ :

دوه ګاډي تمځايونه Aاو B يو له بل 30km لرې دي. د A څخه يو بارګاډی په ساعت کی د ديرش کيلومتره 30km/h په يوه ثابت سرعت يا چټکتيا باندې د B په لور

خوزيږي. د Bڅخه يو تيز ګاډی D د 90km/h ثابت سرعت سره دA په لور حرکت کوي. که دواړه ګاډي په همغه وخت کي حرکت وکړي ، کله به يو بل سره مخامخ شي؟دلته درې فزيکي لويي يو رول لري : لار، وخت او سرعت. دا به په سومبولونو t , s او vسره وښول شي. ددې شي ځانګړنيو لپاره ځيره ځېره وکاږئ



څېره ۱۰۷

پوښتنه » چيرته « د دواړو ګاډو د يوځايوالی ټکی C ته متوجه ده. دا کيدی شي د A څخه و C ته لريوالي(د بار کاډي لارs1) يا د Bلريوالي وC څخه(د تيزګاډي D لار s2) سره وشميرل شي. پوښتنه »کله« د ګاډو يوځايوالي وخت t ته متوجه ده. دا هدفمند دئ کی د وخت لپاره د وخت کمون له روانيدو تر يوځايکيدو وټاکو. دلته درې اوړېدوني يا مجهولی مخ ته لرو s1 , s2 او t .

د پورته ورکړشو شي نيونی سره مناسب لاندې اړيکی باور لري:

$$v_1 = s_1 / t \quad , v_2 = s_2 / t \quad , \quad s_1 = + s_2 = s$$

د باورې ارزښتونو مارونې يا استعمال سره لاس ته راځي

$$s_1 = 30\ t \quad , s_2 = 90\ t \quad , s_1 + s2 = 30$$

(دلته د اندازی يونونه(واحدونه) پريښوول کيږي. او پريکړه کوو چی لار په کيلو متر او وخت په ساعت ښايو)!

دا درې مجهولی s1 , s2 او t دی د دې برابرونونو يا مساواتو سره چی حل به يی په همداسی په برخه ۱۱ کی ورکړشوی وي، مګر دا دومره ساده دې چي د يوې له پيژندلو سملاسي نورې هم شميرل کيدی شي. کيدی شي چی دا مساوات په يوې مجهولی مساواتو بيرته واړول شي. ددې مجهولی x په ځای کيدی شي s1 , s2 او t وټاکل شي .

که وليکو s1 = x ، نو د اخري برابرون څخه لاس ته راځي s2 = 30 - x. دا په لمړنيو دوه مساواتو کی ځاي په ځاي کوو او دواړه د t په لور حلووو:

$$t = s1 / 30 = s2 / 90 = x / 30 = (30 -x) / 90$$

نو لرو: $x / 30 = (30-x) / 90$

لاینیز ټاکنبرابرون یا ټاکنبرابرون د x لپاره دی، چی ساده حل کیدی شي:

$30x = 30 - x$, $4x = 30$ $x = 7,5$

نو لرو

$s_1 = 7,5$ km , $s_2 = 22,5$ km , $t = (7,5 / 30)h = 1h/4 = 15$ min

که ولیکو $x = s2$ ، نو شمیرنه لاندې لار غوره کوي یا بهیر نیسي:

$s_1 = 30 - x$, $t = s_1 / 30 = s_2 / 90 = (30 - x)/ 90$

$3(30 - x) = x$

$90 = 4x$

$x = 22,5$,

$s_2 = 22,5$km , $s_1 = 7,5$ km , $t = (22,4/90)h = 1h/4 = 15$ min

که بالاخره وخت $t = x$ د اووښتونې یا ناپېژندونی په څیر وټاکو، نو بار لري یا صدق کوي: $s1 + s2 = 30x + 90x = 30$

$20x = 30$

$x = 30 / 120 = 1/4$, $t = (1/4)h = 15$ min

$s1 = 30t = 30 /4$ km $= 7,5$km

$s2 = 90t = 22,5$ km

دواړه ګاډي له ټکی A څخه د $0,25$ h $= 15$ min حرکت وروسته په $7,5$ km لریوالی یو بل سره مخامخ کیږي

بیلګه ۹ . ۵ – مساوات $(a/x)+(b/x)-(c/x)=1$

یواځي هلته هدفمند دی چی $x \neq 0$ وي. ددې نیونو لاندې باور لري $x = a + b - c$. دا نو د $x \neq 0$ له امله یواځې هلته حل دی، کله چې $a + b \neq c$ وي. پس ورکړ شوي مساوات یواځې د $a + b \neq c$ لپاره یواځنی ټاکلی حل $x = a + b - c$ لري، په غیر له دې ($a+b=c$) حل نه لري.

بیلګه۹ . ۶ – د لاندې مساواتو څیړنه

$$\frac{b^3c^2x - \frac{1}{a^2}}{121500ab^4c^3} - \frac{a^2x - \frac{1}{b^3c^2}}{2880a^3bc} + \frac{abcx - \frac{1}{ab^2c}}{5400(abc)^2} = 0,$$

چی تیك د $abc \neq 0$ لپاره یو هدف لري، باید د اصلي مات لاندې پیدا کولو لپاره د مات لاندې ك.گ.خ. تکرار شي.

$121500ab^4c^3 = 2^2 . 3^5 .5^3 .a . b^4 .c^3$

$2880a^3bc = 2^6 .3^2 .5.a^3.b . c$

$5400\ a^2b^2c^2 = 2^3 .3^3.5^2.a^2b^2c^2$

اصلي ماتلاندې لنډ «ا م ل» $= 2^{6}.3^{5}.5^3 .a^3b.c^3 = 64.243.124.a^3bc^3$

که مساوات د ا.م.ل. سره ځل شي، نو ماتونه له منځه ځي او لاس ته راځي

$$16a^2 \cdot \left(b^3c^2x - \frac{1}{a^2}\right) - 225b^3c^2 \cdot \left(a^2x - \frac{1}{b^3c^2}\right) + 120ab^2c \cdot \left(abcx - \frac{1}{ab^2c}\right) = 0.$$

د نوکانو یو له بل ځلولو راتول، ترتیبونه او ویشنه د x تر څنګ ولاړو فاکتورونویا ضریبونو ($A = 89a^2b^3c^2 \neq 0$) څخه د نیونو سره سم دا لاندې لاس ته راوړکیږي

$$x = 1 / a^2b^3c^2 \quad , \quad abc \neq 0$$

د دې وظیفې لپاره د حل نور امکانات نه شته.

تر اوسه مو هغه ماتونه وڅېړل چی مات لاندې یې له ځلونو جوړ وو، غواړو چی اوس داسې ماتونه وڅېړو چي مات لاندې یې له زیاتونونو جوړ وي، چی د نوکانو له لارې په ځلونو توټه کیدلي یا تجزیه کیدلی شي.

بیلګه ۹ . ۷ :

$$\frac{a^2(2bx-1)}{a^4b^2x^2-b^2} + \frac{b}{a^2bx+b} = \frac{a^2bx}{a^2bx-b} + \frac{b^2(2ax-3)}{a^4b^2x^2-b^2} - 1$$

تیك د دې نیونو سره صدق کوي: $ab \neq 0$, $|x| \neq 1 / a^2$.

اصلي مات لاندې(ا م ل) په لاندې ډول پیداکوو:

$$a^4b^2x^2 - b^2 = b^2.(a^4x^2 - 1)$$
$$= b^2.(a^2x+1)(a^2x-1)$$
$$a^2bx + b = b.(a^2x+1)$$
$$a^2bx - b = b. \quad (a^2x-1)$$

اصلي ماتلاندی(ا م ل) $= b^2.(a^2x+1).(a^2x-1) = b^2(a^4x^2 - 1)$

د اصلي مات لاندې مساواتو له نوکانو څخه راوتلو (چي یو یا څو غړی د نوکانو دباندې او نور په نوکانو کی بندیږي) ، لنډونو او خلوونو له لارې لاس ته راځي:

$$\begin{aligned} a^2(2bx-1)+b^2(a^2x-1) &= a^2b^2x(a^2x+1)+b^2(2ax-3)-b^2(a^4x^2-1) \\ 2a^2bx-a^2+a^2b^2x-b^2 &= a^4b^2x^2+a^2b^2x+2ab^2x-3b^2-a^4b^2x^2+b^2 \\ 2a^2bx-2ab^2x &= a^2-b^2 \\ 2ab(a-b)x &= (a+b)(a-b) \\ x &= \frac{a+b}{2ab} \end{aligned}$$

د $a \neq b$ او $ab \neq 0$ لپاره (دا د نیونو له لارې تل پوره دی)

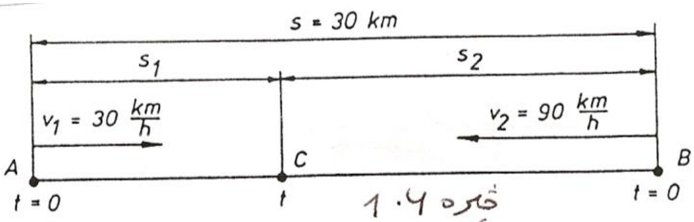
که $a = b$ وي، نو x د $0.x = 0$ له امله په خوښه ارزښتونه نیولی شي، بې له هغو چې په بنستیزو نیونو کې له نیونو د باندې ساتل شوي وي(یعني په مساوات کی ځاي ورته نه وي). په دې حالت کی د x مطلقه ارزښت د کنهونو $a = b$ د په څټ ارزښت سره نه شي مساوي کیدی.

د x لپاره نیول شوې نیونې د حل ورکولو کې باید په پام کې نیول شوي وي؛ دا په دې مانا چي باید تل پوره وي:

$$\pm 1 / a^2 \neq (a+b) / 2ab$$

بیلگه ۶ . ۸ : دوه ګاډي تمځایونه A او B یو له بل 30 km لرې دي. د A څخه یو بارګاډی په ساعت کی د دیرش کیلومتره 30 km/h په یوه ثابت سرعت یا چټکی باندې د B په لور حرکت کوي. دB څخه یو تیز ګاډی D د 90km / h ثابت سرعت سره د A په لور حرکت کوي. که دواړه ګاډي په همغه وخت کي حرکت وکړي ، کله به یو بل سره مخامخ شي؟

دلته درې فزیکي لویې یو رول لري : لار، وخت او سرعت. دا به په سومبولونو t , s اوv سره وښول شي. ددې شي ځانتیوني لپاره څېره ۶ . ۱ ورکړ شوې.



څېره ۶ . ۱

پوښتنه « چیرته » د دواړو ګاډو د یوځایوالی ټکی C ته متوجه ده. دا کیدی شي د A څخه و C ته لرېوالي(د بار کاډي لار s_1) یا د B لرېوالي و C څخه (د تیزګاډي D لار s_2) سره وشمیرل شي.

پوښتنه «کله» د ګاډو یوځایوالي وخت t ته متوجه ده. دا هدفمند دی کی د وخت لپاره د وخت کمون له روانیدو تر یوځایکیدو وټاکو.

دلته درې مجهولی مخ ته لرو s_2 , s_1 او t . د پورته ورکړشو شي نیونی سره مناسب لاندې اړیکی باور لري:

$$v_1 = s_1 / t \quad , v_2 = s_2 / t \quad , \quad s_1 = + s_2 = s$$

د باوری ارزښتونو استعمال سره لاس ته راځي

$$s_1 = 30\, t \ , \ s_2 = 90\, t \quad , s_1 + s_2 = 30$$

(دلته د اندازی یونونه پرېښوول کیږي. او پریکړه کوو چی لار په کیلو متر او وخت په ساعت ښایو!)

دا درې مجهولې s_2 ، s_1 او t دې د درې مساواتو سره چې حل به يې په ۶ الف او يا همداسې په برخه ۱۱ کې ورکړشوې وي، مګر دا دومره ساده دې چې د يوې له پيژندلو سملاسي نورې هم شميرل کيدی شي. کيدی شي چې دا مساوات په يوې مجهولې مساواتو بيرته واړول شي. ددې مجهولې x په ځای کيدی شي s_2 ، s_1 او t وټاکل شي. که وليکو $s_1 = x$ ، نو د اخرې مساوات څخه لاس ته راځي $s_2 = 30 - x$. دا په لمړنيو دوه مساواتو کې ځاې په ځاې کوو او دواړه د t په لور حلووو:

$$t = s_1 / 30 = s_2 / 90 = x / 30 = (30 - x) / 90$$

نو لرو

$$x / 30 = (30 - x) / 90$$

لاينې ټاکنمساوات د x لپاره دې، چې ساده حل کيدی شي:

$$30x = 30 - x\ ,\ 4x = 30$$

$$x = 7{,}5$$

$$s_1 = 7{,}5\ \text{km},\quad s_2 = 22{,}5\ \text{km},\quad t = \frac{7{,}5}{30}\,\text{h} = \frac{1}{4}\,\text{h} = 15\,\text{min}.$$

نو باور لري:

که $s2=x$ کيږدو،نو شميرنه په لانې ډول ځغلي يا لاندې لار غوره کوي:

$$s_1 = 30 - x,\quad t = \frac{s_1}{30} = \frac{s_2}{90} = \frac{30 - x}{30} = \frac{x}{90}\ ,$$

$$\begin{aligned} 3\,(30 - x) &= x, \\ 90 &= 4x, \\ x &= 22{,}5, \end{aligned}$$

$$s_2 = 22{,}5\ \text{km},\ s_1 = 7{,}5\ \text{km},\quad t = \frac{22{,}5}{90}\ \text{h} = \frac{1}{4}\ \text{h} = 15\,\text{min}.$$

که بالاخره وخت د نامعلومې په څير وټاکل شي، يعنې $x=t$ ، نو باور لري:

$$\begin{aligned} s_1 + s_2 &= 30x + 90x = 30, \\ 20\,x &= 30, \\ x &= \frac{30}{120} = \frac{1}{4},\quad t = \frac{1}{4}\ \text{h} = 15\ \text{min}. \end{aligned}$$

$$s_1 = 30\ t = \frac{30}{4}\ \text{km} = 7{,}5\ \text{km},$$

$$s_2 = 90\ t = 22{,}5\ \text{km}.$$

دواړه ګاډي له ټکي A څخه د 0,25h=15minخوزښت(حرکت) وروسته په 17,5kmکې يو بل سره مخامخ کيږي.

۹ . ۲ تمرينونه

۱ . ناکرښيز يا نالاينيز مساوات د يوې مجهولې سره

لاندې مساوات حل کړئ aاوb نتيجه يې د ازمايئ! د مجهولو ضريبونو سره ارزښتونه راوباسئ; چې a او b يې نه شي غوره کولی يا نيولی.

دا ورکړئ چې مساوات د کومو a او b لپاره يواځنی حل لري، حل نه لري او يا ناپای ډېر حلونه لري.

همداسې تلنه طا رويه د نورو مجهولو ضريبونوسره هم وکړئ، چې په نورو برخو کې منځ ته راځي.

۱ . ۱ ــبې له کسرونو يا ماتونو مساوات حل کړئ.

1.1.1. a) $8\left(\frac{1}{2}x-1\right)-2(x-1)=0$

b) $(3-x)(x+4)-9=(3x-4)(8x-9)-(5x-6)^2$

c) $2a(x+3)=(3+x)(5+2a)$

d) $3a-(7b+11a)-(3x-12b-9c)=(3x-8a)+5b-(3c-6x)$

1.1.2. a) $(a-x)(x+c)=2c(a-x)-(b-x)(c-x)$

b) $a(x+1)(ax+b)+b(a+bx)(1-x)=x^2(a-b)(a+b)$

c) $(x+a)(a-x)-b(b-a)=(x+a)(b-x)$

d) $a^2(x-a)+ab^2=b^2(x+b)-a^2b$

۱ . ۲ – کسري مساوات په مخرج کې د ټاکلو ضريبونو او فاکتورونو سره .

1.2.1. a) $\frac{3x-16}{3}+\frac{2x-10}{5}=3-\frac{x+1}{15}$ b) $4-\frac{10-3x}{5}=3-\frac{10-7x}{10}+\frac{x}{2}$

c) $\frac{2x+1}{2}+\frac{3x+1}{4}+\frac{5x+1}{8}=1-\frac{7x+1}{8}$ d) $\frac{4x+1}{3}+\frac{6x-1}{2}=5+5\cdot\frac{8x-10}{9}$

1.2.2. a) $\frac{4x-3}{20}-\frac{1}{12}(4x-5)=1-\frac{3}{5}(2x+11)$

b) $3(6\frac{1}{2}+x)-\frac{7}{3}(2x-\frac{19}{2})-\frac{8}{3}x+\frac{5}{3}=0$

c) $\frac{7x-16}{3}-\frac{4}{5}(x+1)+6=\frac{3x}{2}$ d) $\frac{3x}{4}-\frac{4}{3}(x-4)=3$

1.2.3. a) $\frac{3x-7}{5}-\frac{7-4x}{7}=\frac{5x-11}{10}-\frac{19-10x}{14}$

b) $\frac{17+4x}{10}-\frac{7+x}{5}=\frac{7x+13}{25}-\frac{5+x}{20}$

c) $\frac{2x-11}{15}-\frac{x}{5}+\frac{59}{40}=\frac{8x-59}{30}-\frac{16x-145}{24}$

d) $\frac{4x+4}{5}-\frac{5x-4}{55}=\frac{2x+9}{4}-\frac{12x-3}{44}$

1.2.4. a) $\frac{5x+17}{3}-\left(\frac{3x+8}{2}-3\right)=\frac{3x+12}{2}-\left(\frac{x+4}{6}+3\right)$

b) $2-\left(\frac{3x+8}{4}-\frac{2x+2}{3}\right)=1-\left(\frac{7x+20}{8}-\frac{2x-7}{3}\right)$

c) $\frac{4-x}{2}-\left(\frac{8-x}{3}-\frac{x+2}{4}\right)+\left(\frac{8-x}{6}-\frac{3(2+x)}{8}\right)+x=1$

d) $\frac{10-14x}{8x}-\left(\frac{6}{5}+\frac{4}{2x}\right)=\frac{5}{8x}-\left(\frac{12}{5}+\frac{14x+1}{10x}\right)$

۱ . ۳ – کسري – يا ماتمساوات، چې په مخرج کې يې نا ټاکلي ضريبونه او فاکتورونه ورکړشوې وي.

1.3.1. a) $\frac{ax-1}{bcx}+\frac{bx-1}{acx}+\frac{cx-1}{abx}=0$ b) $\frac{ax-b}{bcx}+\frac{bx-c}{acx}+\frac{cx-a}{abx}=0$

c) $\frac{3(x-b)}{a}-\frac{2(x-a)}{b}-1=0$ d) $\frac{a-b^2}{x}-\frac{c-b^2}{x}-b=0$

1.3.2. a) $\frac{bx-a}{a}+b=bx-1$ b) $\frac{x-a}{a}-a=\frac{x-b}{b}-b$

c) $\frac{a+b}{x}-a=ab-\frac{a-b}{x}$ d) $\frac{ax^2-bx+1}{a}=\frac{bx^2-ax+1}{b}$

1.3.3. a) $\frac{bx-a^2}{a}+\frac{ax-b^2}{b}=\frac{b-ab}{a}+\frac{a-ab}{b}$

b) $\frac{20a-x}{5a}+\frac{6b-cx}{2b}=10-\frac{9c-ax}{3c}$

c) $\frac{a^3}{b}(x-1)-\frac{b+c}{b}(1-2x)=b^2(1-x)+\frac{b+c}{b}$

d) $\frac{x(b-a)}{ab}+\frac{b(c-x)}{ac}=\frac{x+b}{a}-\left(\frac{b}{c}+\frac{x}{b}\right)$

۱ . ۴ - کسري – يا ماتمساوات، چې په مخرج کې يې نا ټاکلي ضريبونه او فاکتورونه ورکړشوې وي.

1.4.1. a) $\frac{5}{x+2}+\frac{3}{2(x+2)}=\frac{1}{2}-\frac{7}{2(x+2)}$ b) $\frac{12x+5}{16x-15}-\frac{16x+1}{15}=\frac{3-2x}{5}-\frac{2x-1}{3}$

c) $\frac{10-2x}{3}+\frac{13+2x}{7}=\frac{14x+26}{2x+21}-\frac{17+8x}{21}$

d) $\frac{2x^n+7x^{n-1}}{9}+\frac{7x^n-44x^{n-1}}{5x-14}=\frac{4x^n+27x^{n-1}}{18}$

1.4.2. a) $\frac{8x+7}{9x^2-4}=\frac{16}{15x-10}$ b) $\frac{24-5x}{6-2x}-5=\frac{34-14x}{9-3x}$

c) $\frac{x+4}{12x+4}-\frac{x-4}{3x+1}=5$ d) $\frac{10x-11}{12x+18}=\frac{3}{2}-\frac{4x+1}{6x-9}$

e) $\frac{x}{x-2}-\frac{x-2}{3x-6}=\frac{1}{6}$ f) $\frac{8-x}{5-10x}=2-\frac{5}{3-6x}$

g) $\frac{12x}{10x+5}+\frac{6x-10}{2x+1}-\frac{2x+25}{12x+6}+\frac{10x-1}{8x+4}=2$

h) $\frac{3x-2}{5x+10}-10=\frac{2x+1}{3x+6}+\frac{2(1-4x)}{x+2}$ i) $\frac{6x-1}{4x-6}+\frac{10x-7}{6x-9}=11-\frac{14x+1}{8x-12}$

j) $\frac{3x}{2x-\frac{1}{2}}-\frac{16x^2}{3(4x-1)}=\frac{4(1-x)}{3}-\frac{4}{12x-3}$

1.4.3. a) $\frac{x-2}{x+2}-\frac{x+4}{x-2}=2\frac{x-38}{x^2-4}$ b) $\frac{12}{x+4}-\frac{x+4}{x-4}+\frac{x^2}{x^2-16}=0$

c) $\frac{5x^2-120}{10-x}+\frac{3x^2+80x}{10+x}=\frac{2x^3+160}{100-x^2}$

d) $\frac{15x+2}{5x-2}+\frac{25x-2}{5x+2}=\frac{200x^2-25x+18}{25x^2-4}$

e) $\frac{16x^2-20x+4}{4x^2-16}=\frac{2x-1}{2x-4}+\frac{3(2x+1)}{2(x+2)}$

f) $\frac{7x^2+8}{2(x^2-1)}=\frac{2(x+1)}{x-1}+\frac{3x-4}{2x+2}$

g) $\frac{16x^2-6x}{2x+1}-\frac{6x}{1-2x}=\frac{32x^3-16x^2+4x+16}{4x^2-1}$

۱ . ۴ . ۴ –

---

a) $\frac{2x-5}{x-5}+\frac{3x-5}{x-9}=\frac{5x^2-39x+30}{x^2-14x+45}$

b) $\frac{2x-9}{x-12}+\frac{x-6}{x-24}=\frac{3x^2-87x-36}{x^2-36x+288}$

c) $\frac{11x+6}{x^2-3x-54}=\frac{3x-14}{2x-18}-\frac{3(x+2)}{2x+12}$

d) $\frac{7x-15}{3x-6}+\frac{8x-21}{3x-3}+\frac{10x+21}{3x^2-9x+6}=5$

e) $\frac{1}{3x+21}+\frac{1}{3(x-5)}-\frac{x+6}{4(x^2+2x-35)}=0$

f) $\frac{136x^2-4x-266}{48x^2-32x+5}=\frac{14x-19}{4x-1}-\frac{8x+25}{12x-5}$

g) $\frac{8x-3}{6x-4}+\frac{6x-4}{10x-6}=\frac{116x^2+10x-34}{60x^2-76x+24}$

۱ . ۴. ۵ -

a) $\frac{5x-12}{2}=\frac{5\cdot\left(\frac{1}{2}x^2+3\right)}{x+1}-\frac{7x-10}{2x-10}$; b) $\frac{28}{45-7x}=\frac{5}{x-9}-\frac{9}{x-5}$

c) $\frac{x+6}{x-2}+\frac{3x-8}{x-4}=\frac{6(x+9)}{x+6}$ d) $\frac{x-13}{x+3}+\frac{8x+45}{x+5}=\frac{9x+7}{x+2}$

۱ . ۵ – کسري مساوات، چې په مخرج يا مات لاندې کې يې ناټکلي ضريبونه او فکتورونه ورکړ شوي وي.

۱ . ۵ . ۱ –

a) $\frac{2a+x}{2a-x}=\frac{a+b}{a-b}$ b) $\frac{a-b}{2c-x}=\frac{a+b}{2c+x}$

c) $\frac{a}{a-2x}-\frac{b}{b-2x}=0$ d) $\frac{x-\sqrt{a}}{x-\sqrt{b}}-\frac{x-\sqrt{a}}{x+\sqrt{b}}=0$

۱ . ۵ . ۲ –

a) $\frac{a}{x+b}-1=1+\frac{b}{x+b}$ b) $a-\frac{ax}{x-1}=\frac{1}{a}-\frac{x}{ax-1}$

c) $a+b+\frac{x}{a+b}=a-b+\frac{x}{a-b}$ d) $\frac{1}{a+b}+\frac{a+b}{x}=\frac{1}{a-b}+\frac{a-b}{x}$

e) $\frac{x}{ab}+ab=\frac{1}{a+b}+(a+b)x$ f) $\frac{ax}{b}+\frac{bx}{a}+\frac{2ab}{a+b}=\frac{(a+b)^2x}{ab}$

g) $\frac{a+1}{b}x+\frac{b+1}{a}x+\frac{2ab}{a+b}=a+b+1$

1.5.3. a) $\frac{2(6x^2-11a^2)}{4x^2-9a^2}=5-\frac{4x+a}{2x+3a}$ b) $\frac{a}{1-x}-\frac{b}{x+1}=\frac{(a-b)(ab+1)}{1-x^2}$

c) $\frac{2a}{2-x}-\frac{2b}{x+2}=\frac{4(a^2b+ab^2+a-b)}{4-x^2}$

d) $\frac{b-x}{a+x}+\frac{1-x}{a-x}=\frac{a(1-2x)}{a^2-x^2}$ e) $\frac{ax+b}{ab-b^2}-\frac{a-bx}{ab+b^2}=\frac{2(ax+b)}{a^2-b^2}$

f) $\frac{2a+ab^2x}{a+ab^2x}-\frac{a^2(3-2bx)}{a^2-a^2b^4x^2}=\frac{b^2(2ax-1)}{a^2-a^2b^4x^2}-\frac{ab^2x}{a-ab^2x}$

۶٫۱ – کسرمساوات یا ماتبرابرون له دوه کسرونو سره

a) $\frac{\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}-x}-\frac{2}{3}=\frac{2}{3}-\frac{\frac{2}{3}x+\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}-x}$ b) $\frac{\frac{3}{2}-\frac{1}{x}}{\frac{3}{2}+\frac{1}{x}}-\frac{\frac{2}{3}-\frac{1}{x}}{\frac{2}{3}+\frac{1}{x}}=\frac{\frac{3}{2}-\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{x}+1}$

c) $\frac{a-\frac{1}{x}}{a+\frac{1}{x}}-\frac{1}{x}=\frac{x-\frac{1}{a}}{x+\frac{1}{a}}-\frac{1}{a}$ d) $\frac{\frac{1}{a}-\frac{1}{x}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{x}}=\frac{a-\frac{1}{x}}{a+\frac{1}{x}}$

۱ . ۷ .   شي تمرینونه

۱ . ۷ ۱ – که د یوه ګڼ څلور څله او ۱۴ زیاتون ۴۰ وي ، نو هغه ګڼ کوم دی؟

۱ ۷ . ۲ – که د یوه ګڼ څلورڅله او ۴ زیاتون ددې ګڼ او ۱۴ زیاتون سره برابر وي ، نو هغه ګڼ کوم دی ؟

۱ . ۷ . ۳ – د یوه ګڼ څلورمه برخه او پنځه څله ۴۲ ګڼ ورکوي ، نو هغه ګڼ کوم دی؟

---

۱ . ۷ . ۴ – که د يوه ګڼ څلوربرابره څخه ۲ کم شي او په يوه ګڼ وويشل شي چې ۴ ترې کم شوی او ۱۱ لاس ته ترې راشي، نو دا ګڼ به کوم وي؟

۱ . ۷ . ۵ – د يوه ګڼ پنځه ځله او د ۳ زياتو دوه ځله لوي دي. لکه د دې ګڼ دري ځله او ۱ کمون. دا ګڼ کوم دی؟

۱ . ۷ . ۶ – د يوه ګڼ څلورځله او ۱۴ کمون نيم دومره لوي دی لکه ددې ګڼ دوه ځل او ۸ . دا ګڼ څه نوميږي؟

۱ . ۷ . ۷ – د يوه ګڼ شپږ ځله او د ۵ کمون يا توپير چې ددې ګڼ په څلور ځله او ۵ زياتون وويشل شي، ۱ ور کوي. دا ګڼ څه نوميږي؟

۱. ۷ . ۸ – د يوه مات ماتباندې په ۵ له ماتلاندې کوچنی دی. که ماتباندې په ۲۳ او مات لاندې په ۸ لوي شي، نو د ورکړشوي مات په څټ ارزښت لاس ته ترې راځي. دا ګڼ څه نوميږي.

۱ . ۷ . ۹ – ۲۵ داسې په دوه ګڼونو بيل کړی يا تجزيه يا ټوټه کړی، چې د مربع توپير يې ۱۲۵ شي.

۱ . ۷ . ۱۰ – د دوه ګڼونو توپير يا کمون ۶ او مربع يې ۱۸۰ دی . ګڼونه څه نوميږي؟

۱ . ۷ . ۱۱ – دوه ګڼونه داسې تناسب کې دي، يا يو بل ته داسې ځانونه نيسي . که دوم په لمړی وويشل شي، نو ۲ لاس ته راځي او پاتې يې ۷ دي. دواړه ګڼونه کوم دي؟

۱ . ۷ . ۱۲ – د دوه ځاينيونکي ګڼ پروت زياتون ۱۲ دی. که له دې ګڼ ۱۸ کم شي، نو يو دوه ځاينيونکی ګڼ لاس ته راځي، د همغه ځايګڼونو سره مګر په څټ ترتيب سره.

۱ . ۷ . ۱۳ – يو زدکړی غواړي د يوه ګڼ څخه مربع ريښه د يو په بل کې بندولو پرينځيپ يا اصول له لارې پيدا کړي. دی لمړی يو ګڼ د ريښې په ځير

ټاکي، چې مربع يې په ۲۷ کوچنۍ دی. بيا يوه ريښنه ټاکي ، کومه چې دوه له هغه لوي دی چې لمړی ټاکل شوی. ددې ريښې مربع په ۳۳ لوي دی ، هغه ګڼ کوم دی چې مربع ريښنه يې غواړو پيدا کړو ؟

۱ . ۷ . ۱۴ – يو د سپورت ملګرو ټولنه له څلورو ډلو جوړه ده. لمړی ډله ۳۷ دملګرو غړي لري، په داسې حال کې چې نورو ډلې 4 / 1 , 5 / 1 په همدې ډول 2 / غړي په بر کې نيسي. د غړو شمير څومره دی او د هرې ډلې څومره دي

۱ . ۷ . ۱۵ – يو نفر په درې ورځو کې مجلې په داسې شمير خرڅوي: په لمړی ورځ 9 / 1، دومه ورځ 6 / 1 او په دريمه ورځ 4 / 1 د مجودو لوټوکه .

دی اوس له هغومجلو د نيمايي دوه کمي د څان سره لري. هغه څومره مجلې د خرڅلاو لپاره لرودې؟

۱ . ۷ . ۱۶ – يوه ميلمه د يوه زدکوونکی څخه د هغه د عمر پوښتنه وکړه. زدکوونکي په ټوکه ځواب ورکړ« څما پلار چې درې مياشتې پخوا يې خپله ۵۵ کلنی ولمانځله، څما د عمر څلورواره څخه 4 / 1 زيات زوړ دی.» زدکوونکی څومره عمر لري؟

۱ . ۷ . ۱۷ – د يوه زدکوونکي پلار څلورنيم ځله زوړ دی لکه د هغه ځوي. دواړه ۲۷ کاله د هغه د يو اوياکلن نيکه څخه ځوان دي، پلار او ځوي څومره زاړه دي؟

۱ . ۷ . ۱۸ – په يوه معما کې يو زدکوونکی د ې بل ته وايي: « که زه لما سره بټوه کې پيسو سره ۵،۲ افغانۍ ور زياتي کړم ، زياتون يې له ۵ سره ځل يا ضرب کړم او له دې ځل څخه ۱۲ کمی کړم او دا لاس ته راغلی کمون يا توپير په 11 وويشم نو نتيجه يې ۸ افغانۍ ده. » هغه زدکوونکی په خپله بټوه کې څومره پيسې لري؟

---

۱ . ۷ . ۱۹ – په یو په بل پسې تړلو مقاومتونو کی لمړی او دوهم یو ډول لوی دي،
دریم دوه ځله او څلورم دریځله دومره لوي دي لکه لمړی دوه یاد شوي
مقامتونه، ټول مقاومت ۱۰۵۰ (اومیګا) ، په دې پروت شپانونك
۱۱۰ ولټه دی. اوس الف) یوګونی مقاومتونه څومره لوي دي، ب
برققوه، برخه مقاومتونه ؟

۱ . ۷.۲۰ – د دوه غبرګ چالان عمومي مقاومت (ماته متأسفانه په افغانسان کی د
فزيك مروج نومونه دې معلوم، خو فکر کوم چي په هدف به پوه شو) دی
a) 1000Ω , b) 2000Ω
یو مقاومت4000Ωدی، هغه بل څومره لوي دی؟

۱ . ۷ . ۲۱ . د دریې غبرك قاومتونو څخه یې دوم دوه واره دومره لوي دی لکه لمړی
او دا دریم یې درېواره دومره لوي دی لکه دوم . هر مقاومت څومره لوي
دی، که عمومي مقاومت a) $12k\Omega$, b) 300Ω وي؟

. ۲۱ . د دریې غبرګو مقاومتونو څخه یې دوم دوه واره دومره لوي دی لکه لمړی
او دا دریم یې درېواره دومره لوي دی لکه دوم . هر مقاومت څومره لوي
دی، که عمومي مقاومت الف) $12k\Omega$
ب) 300Ω وي؟

. ۲۲ په اوبو کي یو د لرګي منډه باید څومره لوي وي، چي د لمبیدو استعداد
یې ۷۵۰ نیوټونه وي او د لرګي خاص وزن یا کلکوالی (د فرمول څخه
معلومیږي چی دا څه شی دی) $4\frac{N}{dm^3}$ وي؟

---

۷ . ۲۳ د سونګموادو ټانك د دوم ماشین لپاره ۴۰ لیتره ګډوډ د سونګ مواد لري. څومره تیل او څومره بنزین په ټانك کې موجوددي که ګډونه یې وي؟

۷ . ۲۴ د ښار د ښکلا لپاره د ښارمنځ د سرك په اوږدوالي ۸۵ ونې کینول کیږي. دا چې د مخه خرکې شوي او تل همغه واټن په یوه متر کوچنی شي ، نو په سرك بیا ۲۰ ونې زیاتې کینښول کیدی شي. د دې هرې ونې واټن وبلې ته څومره لویې دی؟

۷ . ۲۵ د بایسکلځغلونوکو ډله له سر څخه ۵۰ متره اوږدوالی لري. هغه ۴۵ کیلومتره په ساعت کې سرعت لري، چې په یوه پله چې اوږدوالی یې متره دی ، څومره وخت ته ضرورت لري، چې له پله پورې لاړ شي.

۷ . ۲۶ واورومنډه کې ، دا وروسته وړونکی د پروسږکلني وړونکي څخه یوه نیمه دقیقه وروسته په ځغاسته پیل کوي. د څو کیلو متره وروسته دی کړي چې لمړني ځغلیدونکي څخه مخ ته شي، که د ده منځنی سرعت ۵ متره ثانیه کې وي او د لمړي ۸ ، ۴ متره په ثانیه کې وي ؟

۷ . ۲۷ د تامنځي د دز سره د سپورت میله کي ۲۰۰ متره ځغاستې د منډې ډله په ځغاسته پیل کوي. ځغلیدونکی د پیل کرښې څخه لس متره شا ته ولاړدي. برخه نیوونکی په منډه پیل کوي ، چې د تومانچې د ډز کرد وګوري دو وخت توپیر څومره دی، که غږ رسیدنه په نظر کې ونه نیول شي او د غږ سرعت ۳۴۰ متره په ثانیه کې وي؟

۱۰ كومبيناتوريك - د بينوم جمله

كومبيناتريک څخه په شميرپوهنه کې د دې لپاره کار خلي، چې يو ګڼ ، پل ځاي بدلو ځومره والبښابي او که څو ګنونهڅپل ځاي بدل کړې دا څنګه ليکل کيږي۰ د ځای بدلون شميرنه ده
او د هغې ډولونه۰
په ۱۰۱۰ او ۲۰۱۰ برخو کی به د شميرپوهنی مرستندوي مواد د بينوم جملی(۳.۱۰)
برخه(او کومبيناتوريك (۱۰ . ۴ برخه) د فاکولتيت کليمي او بينوميالکوايفيڅينت (بينوم ځلوني) پيل شي .

۱۰ . ۱ فاکولتيت Die Fakultät, factorial

پيژند ۱۰ . ۱ :
د n!سومبول (ويل کيږی n « فاکولتيت «) لاندې سړی له1 تر n پورې ګڼونو ضرب پوهيږي، يعنی $n ! = 1.2....(n-2).(n-1).n$ برسيره پر دې تعريفوو: $0! = 1$

د فاکولتيت له پيژند څخه څرګنديږي، چی $(n+1)! = n!.(n+1)$ لرو.

یادونه:
په افغاني ادبیاتو کی تر هغي چی ماته معلومات شته د فاکولتیت په ځاي فاکتوریاِل لیکل شوی. ما په دې کتاب کی دا د الماني کلیمه یا پښتو ، ځله وونِي،، زیات کاره ولی، هیله ده چی تاسو به یی په خپله خوښه وټاکی. په دې کی کومه سهوه منځ ته نه شي راتلی۰

بیلګی :

الف n! : د $n = 5$ لپاره په دې ډول دی: $5! = 1 . 2 . 3 . 4 . 5 = 120$

ب : په دې ډول دی : $0!.2!.4! = 1.(1.2).(1.2.3.4) = 48$

پ: په دې ډول دی: $5!/3! = 1.2.3.4.5 / 1.2.3 = 4.5 = 20$

ت : په دې ډول دی

$$(n+2)!/(n-1)! = 1.2.3....(n-1)(n).(n+1).(n+2)/1.2.3...(n-1)$$
$$= n.(n+1).(n+2)$$

ټ: داسی دی

$$2.n! = 2.(1.2....n),$$
$$(2.n)! = 1.2....n.(n+1)....2n.$$

۱۰ . ۲ د بینوم ځلووني یا ضریبونه

پیژند: ۱۰ . ۲

د سیمبول $\binom{n}{k}$ (وییل کیږي n « پر » k لاندې د دوه ځله ونو ویش پوهیدل کیږي چی هر یو k ځله وونِي یا ضریبونه یا فاکتورونه لري :

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{n-k+1}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!} = \prod_{i=1}^{k} \frac{n+1-i}{i}$$

برسیره پر دې دا هم په کلکه کره کیدلی شي:

$$\binom{0}{0} = 1; \quad \binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1; \quad \binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1};$$

$$\binom{n}{1} = n$$

د k ګڼ یو پیدایښتي یا طبعي ګڼ دی او د ماتلاندي او مات باندې ګڼونو ګڼون یا تعداد ښایي،په مات لاندې کې د لومړیو k پیدایښت یا طببعي ګڼونو فاکتورونه دي. دn ګڼ رییل دی او د مات پورته لومړنی فاکتور دی. دوم فاکتور n - 1 ، دریم n-2 تر k –م فاکتور n-k+1 پورې . دا $\binom{n}{k}$ سومبول د اویلر(leo nard Euler له ۱۷۰۷ - ۱۷۸۳سویسي ګڼپوه، فزیکپوه او استرولوګ) لخوا د لومړي ځل لپاره پیل شو، له دې امله ورته د اویلر سومبول وایي پرتله یا مقایسه برخه ۱۰ . ۳ (. که ځوك دیوه بینوم پوتنځ یا توان شمیري) ۱۰ . ۳ برخه(، نو سیمبول $\binom{n}{k}$ لاس ته راځي چې د یوا-
ځنیو زیاتونونو ځلونه دي، او له دې امله ورته بینوم ضریب یا بینوم ځله وونې ویل کیږي.

بیلګی :

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!\cdot 2!} = \frac{5\cdot 4\cdot 3!}{2!\cdot 3!} = \frac{5\cdot 4}{2!} = \frac{20}{2} = 10$$

$$\binom{49}{6} = 13.983.816 \text{ ، } \binom{3}{5} = 0$$

$$\binom{2}{1/3}$$

تعریف نه دی ، ځکه چی 1 / 3 پیدأیښتي یا طبعي ګڼ نه دی.

د بینوم ضریبونو یا ځلونوخویونه:

---

۱ - د $n<k$ ، $n,k \in N$ لپاره باور لري $\binom{n}{k} = 0$

که n يو طبعي ګڼ وي او لهk کوچنی وي، نو صفر په ماتباندې کی يوځله وونی

یا ضیرب دی

۲ - د $n > k$ ، $n,k \in N$ لپاره باور لري

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

اوبيونه (حل): سړی د !(n-k سره د مات $\binom{n}{k}$ پراخوالي له امله لاس ته راوړي

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{n-k+1}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!} = \prod_{i=1}^{k} \frac{n+1-i}{i}$$

دا پورته برابرون له $\frac{(n-k)!}{(n-k)!}$ سره ځلوو، نو لاس ته راځي

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

له دې نور لاس ته راځي، که د k په ځاي n - k وليکل شي

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-n+k)!} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

۳ - باور لري

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

حل (اوبی) : د کیڼ اړخ زیاتون څخه دا لاندې لاس ته راوړل کیدی شي، که د بينوم ضريبونه يا ځلووني د ماتو په څیر وليکل شي ، ماتونه ور زيات کړي او د زياتونون ګډ فاکتورونه چی په ماتباندې کی دی په نوکانو کی ونيسي اوپاتی ساده کړي :

$$\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!}+\frac{n(n-k)...(n-k+1)(n-k)}{(k+1)!}=$$

$$=\frac{n(n-1)...(n-k+1)+n(n-k)...(n-k+1)(n-k)}{(k+1)!}=$$

$$=\frac{n(n-1)...(n-k+1)[k+1+n-k]}{(k+1)!}=$$

$$=\frac{n(n-1)...(n-k+1)(n+1)}{(k+1)!}$$

كه په پورته ا افاده يا وپينه كې د مات پورته اخرنی فاكتور د لومړي ځله ووني په څير وليكل شي، لاندې بينوميال يا بينوم ځلوونی (ضريب) تعريفوي:

$$\binom{n+1}{k+1}$$

۱۰ . ۳ د بينوم جمله

د بينوم لاندې سرې د دوه توكو (ګڼونو) زياتون پوهيږي. يعني: x+y
د بيونم جمله موږ ته ښايي چې څنګه د يو بينوم

$$(x+y)^n$$

پوتنځ، چې پيدايښتي ګڼ n يې ايكسپوننت يا جكګڼ يا لنډ جګ وي، د زياتون په څير پر مخ بيول كيږي. كه د x + y بينوم پوتنځ د n = 0,1,2,3,4,5,6 اكسپوننت لپاره شميرو، نو لاندې نتيجه لاس ته راوړو :
پاسكال دريګوډی

$$(x+y)^0=.....................1$$
$$(x+y)=....................x+y$$
$$(x+y)^2=...............x^2+2xy+y^2$$
$$(x+y)^3=.............x^3+3x^2x+3xy^2+y^3$$
$$(x+y)^4=..........x^4+4xy+6x^2y^2+4xy^3+y^4$$
$$(x+y)^5=....x^5+5x^4y+10x^3y^2+10x^2y^3+5xy^4+y^5$$
$$(x+y)^6=x^6+6x^5y+15x^4y^2+20x^3y^3+15x^2y^4+6xy^5+y^6$$

په دې د زياتونونو پرمخبيولوکی يو قانونيت ليدل کيږي. د زياتونو ګڼون(شمير، تعداد)
د بينوم د اکسپوننت څخه په يو لوي دئ . ټول زياتونی د x او y پوتنځ ځل لري، په
داسی ډول چی د x او y پوتنځ زياتون په n برابريږي او په دې ډول د x پوتنځ په
کميدلو) د y پوتنځ په زياتيدلو دx په اکسپوننت په ترتيب پرلپسی

$$n , n-1, ...1 , 0$$

د yاکسپوننت په ترتيب $0,1$ ..,$n-1,n$دي. د بينوم پوتنځ کوايفځينتونه داسی په
نامه پاسکال Blaise Pascal(۱۶۲۳ - ۱۶۶۲ فرانسوي شمرنپوه(ګڼوندريګوډی
جوړوي .

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & \\
 & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & \\
1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1
\end{array}$$

په دې کی هر ګڼ د دواړو پورته کيڼ-ښي پرتوګڼونوزياتون دئ، چی بي له کړاو د نورو
اکسپوننتويا په جګو $n = 7,8,$... .. لپاره پرمخ بيول کيدی شي. د ډيرو لويو
اکسپوننتو n لپاره بيا هم دالار له کړاو ډکه ده ليونارد اويلرLeonhard Euler
د کومبيناتوريك فکرونو کی د کوايفيځينتونو يووني يا يوونوالي يا بهتره يوونواليز
ستروکتورونه يا جوړښتونه وپيژندل. په n -م n (د بينوم جګ يا اکسپوننت (ليکه
اوK- م ځای، n ,.... , $k = 0 , 1$ کی ولاړ ضريب دفورم څخه دئ) له
کومه امله چی په ۱۰ . ۲ برخه کی د اويلر سومبول په نوم داسی بلل شوي د بينوم
ضريب په
ځير رامنځ ته شو)که د پاسکال ګڼونو دريګوډی د اويلر سومبول استعمال په ځيروليکل
شي نو لاس ته راځي۰

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\binom{0}{0}$$

$$\ldots\ldots\ldots\binom{1}{0}\binom{1}{1}$$

$$\ldots\ldots\binom{2}{0}\binom{2}{1}\binom{2}{1}$$

$$\ldots\ldots\binom{3}{0}\binom{3}{1}\binom{3}{2}\binom{3}{3}$$

$$\ldots\binom{4}{0}\binom{4}{1}\binom{4}{2}\binom{4}{3}\binom{4}{4}$$

$$\ldots\binom{5}{0}\binom{5}{1}\binom{5}{2}\binom{5}{3}\binom{5}{4}\binom{5}{5}$$

$$\binom{6}{0}\binom{6}{1}\binom{6}{2}\binom{6}{3}\binom{6}{4}\binom{6}{5}\binom{6}{6}$$

داویلر سومبول کی د فاکتور پرځای ، چې ګڼونه دی ، سومبول $\binom{n}{k}$ لیکل کیږي.

یادونه : ما کله a,b او کله بیا x,y لیکلي، دا په یو ډول لیکنه ښکلې ښکاریږي،
خو زه کله کله داسې ستونځې لرم .
په ۱۰ . ۲ برخه کی د بینومیالکوایفیځینت لپاره ښوول شوو خویونو۲ په بنسټ د پاسکال
دریکوډي منځنی محور ته سیومتري پراته کوایفیځینته سره مساوي دي. داچی هر کو-
ایفیځینت وربانديې پورته کوایفیځینتونو زیاتون سره مساوي دی په ۳ کی وښوول شو)
د تمرین وظیفه ۱۰ . ۴ دې هم ورسره پر تله) مقایسه(شي) د اویلر سیمبول په
استعمال
د یوه بینوم $(a+b)^n$ د پوتنځ د زیاتون پرمختګ د یوه طبیعي ګڼ n لپاره په لاندې ډول
لیکلو ته اجازه راکوي

جمله ۱۰ . ۱ (د بینوم جمله)

$$(a+b)^n=\binom{n}{0}a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2+\ldots+\binom{n}{n-1}ab^{n-1}+\binom{n}{n}b^n$$
$$=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^{n-i}b^i$$

اوبونه (حل): د پوره ایندکشن له لارې:

د ایندوکشن پیل : (n = 0)

$$(a+b)^{k+1}=\binom{k+1}{0}a^{k+1}+\binom{k+1}{1}a^kb+\binom{k+1}{2}a^{k-1}b^2+\ldots+\binom{k+1}{k}ab^n+\binom{k+1}{k+1}b^{k+1}$$

$$(a+b)^0=\binom{0}{0}a^0=1$$

د ایندکشن نیونه : (n = k)

$$(a+b)^k=\binom{k}{0}a^k+\binom{k}{1}a^{k-1}b+\binom{k}{2}a^{k-2}b^2+\ldots+\binom{k}{k-1}ab^{n-1}+\binom{k}{k}b^k$$

د اندکشن غوښتنه: (n = k + 1)

$$(a+b)^{k+1}=\binom{k+1}{0}a^{k+1}+\binom{k+1}{1}a^kb+\binom{k+1}{2}a^{k-1}b^2+\ldots+\binom{k+1}{k}ab^n$$
$$+\binom{k+1}{k+1}b^{k+1}$$

دایندکشن ښوونه:

$$(a+b)^{k+1}=(a+b)^k(a+b)$$
$$=\binom{k}{0}a^{k+1}+\binom{k}{1}a^kb+\binom{k}{2}a^{k-1}b^2+\ldots+\binom{k}{k}ab^k$$
$$+\binom{k}{0}a^{k+1}b+\binom{k}{1}a^{k-1}b^2+\binom{k}{2}a^{k-2}b^3+\ldots+\binom{k}{k-1}ab^k++\binom{k}{k}b^{k+1}$$

که یو د بل سره (یو د بل لاندې په څنګ یا کږې پرتی) برابر پوتنځ یا توان څلونه د اویلر فرمول یا سومبول د زیاتونخویونو د استعمال له لارې سره راټول (یوځاي) شي

$$C_{W_6}^{(4)} = \binom{6+4-1}{4} = 126$$

$$\binom{k}{1}+\binom{k}{0}=\binom{k+1}{1},\binom{k}{2}+\binom{k}{1}=\binom{k+1}{2},\ldots,\binom{k}{k}+\binom{k}{k-1}=\binom{k+1}{k}$$

لومړي او اخر زیاتون ضریبونه ولیکل شي نو غوښتل شوې اړیکی لاس ته راځي

$$\binom{k}{0}=\binom{k+1}{0},\binom{k}{k}=\binom{k+1}{k+1}$$

د (a-b)=a+(-b) له امله د بینوم له جملی د یوه n -م پوتنځ دکمون څخه لاس ته راځي

$$(a-b)^n = \binom{n}{0}a^n - \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 - \binom{n}{3}a^{n-3}b^3 + \ldots \pm \binom{n}{n}b^n$$

$$= \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^{n-i}(-b)^i$$

بیلګي:

$$(x+y)^3 = \binom{3}{0}x^3 + \binom{3}{1}x^2y + \binom{3}{2}xy^2 + \binom{3}{3}y^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

$$(x-y)^3 = \binom{3}{0}x^3 + \binom{3}{1}x^2(-y) + \binom{3}{2}x(-y)^2 + \binom{3}{3}(-y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$$

۱۰ . ۴ کومبیناتوریك:

کومبیناتوریك د یوې ډیرۍ د پای غړو یوځای درولو یا راوړلو ترتیب قوانینو سره سر او کارلري. کیدی شي د ټولو غړو یا یوې برخي یوځاییولو په څیر راوړل شي، په یوځاییولو کی کیدی شي د غړو ترتیب یو رول ولوبوي او یا هم نه، او همدارنګه په راښوځاییولو کی

کیدی شي د غړو تکرار راشی او یا هم نه. له دې امله د یوځاییولو یا ټولګی درې ډولونه توپیروو(Komplexion هم ورته وایي)، په نامه پرموتیشن، وارییشن، کمبینیشن (Permutation, Variation, Kmobination) کوم چې په لاندې برخو کی یو په بل پسی څیړل کیږي او په اخرنی جدول کی به لیدیدونکی څرګند شي یا لیدوړو ښوول شي

۱۰ ۰ ٤ ۰ ۱۱ **پرموتیشن**Permutare
(لاتین: ..سره بدلول، دلته دا اصلاً ځای بدلون دی. لنډ: بدلون)

پیژند ۱۰ . ۳ :
د n غړو یو پرموتیشن (ځای بدلون)بې له تکرار داسی »یوځای درول« دي، په کوم کی
چې n غړي په یوه د زړه پورې ترتیب کی څنګ په څنګ ولاړ وي. د n غړو مختلفه ترتیبونه
تل د مختلفو پرموتیشنونو یا ځایبدلونونو په مانا ده
بیلګی:

۱ - د دوه غړو پرموتیشن

الف : 1 2 دی 12 21

ب : a , m دی a m m a

۲ - د درې غړو پرموتیشنونه
الف : ۱ ، ۲ ، ۳ دي:

۱۲۳ ۲۱۳ ۳۱۲

۱۳۲ ۲۳۱ ۳۲۱

ب : a,m,s دی:

ams mas sam

asm msa sma

۳ - د څلور غړو پرموتیشنونه

الف : 1,2,3,4 دي:

4123	3124	2134	1234
4132	3142	2143	1243
4213	3214	2314	1324
4231	3241	2341	1342
4312	3412	2413	1423
4321	3421	2431	1432

دا پورته پرموتیشنونه له پورته وکښته لور ته لیکسیکایي ترتیب دي، دې ته به د کرانو لوستونکو پام وي، وروسته هم همداسی دي، که دا توري وي او که ګڼونه ۰ په ګڼونو کی پیدایښتي ده، چې د پښتو لیکسیکایي ترتیب پجه [ام کی نیول شوی۰له ښي لور کښته بیا بیرته ګین لور خوزښت دی۰

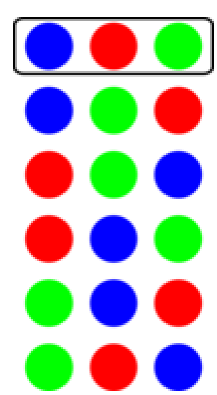
ب : a,m,s,u دي:له کن کښته لور ته بیا بیرته پورته

uams	samu	masu	amsu
uasm	saum	maus	amus
umas	smau	msau	asmu
umsa	smua	msua	asum
usam	suam	muas	aums
usma	suma	musa	ausm

پ (ا ت ج ګ   دي:دلته طبعاً له ښي وکيڼ لورته ترتيبيږي(

اتجګ	تاجګ	جاتګ	ګاتج
اتګج	تاګج	جاګت	ګاجت
اجتګ	تجاګ	جتاګ	ګتاج
اجګت	تجګا	جتګا	ګتجا
اګتج	تګاج	جګات	ګجات
اګجت	تګجا	جګتا	ګجتا

د ټولو پرموتيشنونود ليکلو لپاره مرستندوی مواد، د بيلګی په ډول له څلورو غړو څخه د ۲۴ پرموتيشنونو، ليکسيکني ترتيب، دا په دي مانا چی د ليکسکا لغاتو ترتيب ته »کټ مټ« (ورته) دی، چی د غړو پيدايښتي لړی مخته پرته وي (په تورو، په ګڼونوکښطبعی يو په بل پسي). دبيلګي په توګه د غړو a , m , s , u ۲۴ پرموتيشنونه په لکسيکا ترتيب ورکړ شوي. د دې غړو) يا تورو(جوړ شوي پرموتيشنونه) لغاتونه(maus همدا رنګه saum په دې ترتيب کی ۸ -ام همدا ډول په ۱۴ -ام ځاي کی ولاړ دي. همدا ډول په   پ (کی د څلورو تورو ا ، ت ، ج ، ګ پرموتيشن ورکړ شوی چی ۸ -۱م ځا ي کی يي تاګج   ولاړ او په ۱۵ – م ځای کی يي   جتاګ ولاړ دی.



د پورته درې غونډارو لپاره نظم یا ترتیب ۲ ۰ ۳ = ٦ دی۰

که لیکو ، چې 1.2.3.4.5.6نو ددې پرځای لیکو $6! = 720$:

جمله ۱۰ . ۲ :

د پرموتیشنونو Pn ګڼون (شمیر یا تعداد) ، د n یوله بل مختلفو غړو، په لاندې

ډول دی : $n = Pn!$

اوبنونه : د پوره ایندکشن له لارې :

داپندکشن پیل : $(n = 1)$: $P_1 = 1! = 1$

د ایدکشن نیونه : $(n = k)$: $P_k = k!$

د ایندکشن غوښتنه : $(n = k+1)$: $P_{k+1} = (k+1)!$

د ایندکشن ښوونه : k غړو ته په !k پرموتیشنونو کی د ځل په څیر یو(k+1) -ام غړی راځي. دا (k+1) - ام غړی کیدی شي له لومړې تر (k+1) - ام ځاي پورې ودرېږي، داسې چی د (k+1) -ام غړي ورنیولو د هر k غړو پرموتیشن k+1 پرموتیشنونه د k+1 غړو پرموتیشنونه شي. له دې امله باور لري

$$P_{k+1} = P_k\ (k+1) = k!(k+1) = (k+1)!$$

بیلګه :

په څومره مختلفو لړیو پرلپسی (دا مړضوع په ۱۸ برخه کې کتلی شئ) کی لس زدکوونکی په یوه لیست کی خپل نومونه لیکلی شي ؟

اوبی یا حل : $P_{10} = 10! = 3628800$ •

پیژند ۱۰ . ۴ :

هر د k غړو ترتیبونه، د کومو څخه چی i-ام غړی ni - ځله رامنځ ته کیږي، د i = 1 , 2 , ... ,k لپاره، نو پرموتیشن د تکرار) د تکرارسره پرموتیشن(سره نومیږي . د غړو شمیر په پرموتیشن کی بیا داسی دی $n = n_1 + n_2 + ... + n_k$

بیلګی :

۱ - د دوه غړو a , b پرموتیشن په کوم کی چی غړی a یو ځل او غړی b دوه ځله رامنځ ته کیږي،

$(k = 2; n_1 = 1; n_2 = 2; n = n_1 + n_2 = 1 + 2 = 3)$

په دي ډول دی: abb bab bba

۲ - د غړو a , b پرموتیشن، په کوم کی چی a دوه ځله، غړی b دري ځله رامنځ ته کیږي $(k = 2; n_1 = 2; n_2 = 3; n = n_1 + n_2 = 2 + 3 = 5)$ په لاندې ډول دی

abbba abbab ababb aabbb
babba babab baabb
bbbaaa bbaba bbaab

جمله ۱۰ . ۳ : د k غړو د پرموتیشن ګڼون یا تعداد $P_n^{(n_1,n_2,...,n_k)}$ ، له کومو چی i-ام غړی ni -ځله رامنځ ته کیږي ، په لاندې ډ ول دی:

$$P_n^{(n_1,n_2,...,n_k)} = \frac{n!}{n_1!.n_2!....n_k!}$$

حلونه یا اوبیونه: که په پرموتیشن کی n = n1 + n2 + ...+ nk (دلته دي ګڼونه دn ایندکس کي ومنل شي) غړو یو له بل توپیر لرودی (مختلف وي) ، نو n! پرموتیشنونه

به موجود وی، که i - ام غړی ni -ځله رامنځ ته شي، داچې د ni غړو لپاره ni!
پرموتیشنونه موجود دي، نو ni پرموتیشنونه د یوه پرموتیشن په څیر رایو ځاي کیږي،

دا په دې مانا چې د!n شمیر په $n_i!$ باید وویشل شي (i = 1 . ..., k)

بیلګی :

۱ - د k = 2 مختلفو غړو پرموتیشن، په کوم کی چی لومړی $(n_1\text{-}1)$ - ځله او دویم $(n_1\text{-}2)$ - ځله رامنځ ته کیږي، دی:

$$P_3^{(1,2)} = \frac{(1+2)!}{1!2!} = \frac{3!}{1!.2!} = 3$$

۲ - د k = 2 مختلفو غړو پرموتیشن، په کومو کی چی لومړی (n1=2) -ځله او دویم (n2 = 3) -ځله رامنځ ته شي، دی

$$P_5^{(2,3)} = \frac{5!}{2!.3!} = 10$$

۱۰ . ۴ . ۲ واریيشن اوښتنه یا بدلیدنه Variation :

تعریف ۱۰ . ۵:

د n غړو واریشن (بدلیدنه یا اووښتنه Variation) لاتین(بدلونه اووښتنه تغیرونه یا بیا تغیرونه) و k -ام ټولګي ته(وهرې k ټوټی ته، $n \le k$) هر له k غړو یوځانکول (یوځاي درول، یوځاي لیکل) دی، کوم چی د n غړو د لړی پرلپسی په نظر کی نیولو سره جوړیږي..

بیلګي:

۱ - د درې غړوa,b,c واریيشن و دویم ټولګي ته دي :

---

ab ba ca
ac bc cb

۲ - د څلورو غړو d , a , b , c واريیشنونه و۲ - م ټولګي ته دي:

ab ba ca da
ac bc cb db
ad bd cd dc

د څلورو غړو d , a , b , c واريیشنونه و ۳ - ۱م ټولګي ته دي

abc	bac	cab	dab
abd	bad	cad	dac
acb	bca	cba	dba
acd	bcd	cbd	dbc
adb	bda	cda	dca
adc	bdc	cdb	dcb

۳ - د پنځه غړو 1 , 2 , 3 ,4, 5 واريیشنونه و ۲ - ۱م ټولګي ته دي

12	21	31	41	51
13	23	32	42	52
14	24	34	43	53
15	25	35	45	54

د n غړو واریشنونه و n -ام ټولګي ته د n غړو پرموتیشن سره یو شی یا براابر کیږي

جمله ۱۰ ۰ ٤ :

د n غړو و k -ام ټولګي ته د واریشنونو ګڼون (تعداد) $V_n^{(k)}$ دی :

$$V_n^{(k)} = n(n-1)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

اوبښونه : د مکلمل (پوره یا بشپړ ایندکشن له لارې) ایندکشن په k اړه لري، n ځاي په ځاي دی یا ځاي په ځاي کلك ولاړ دی

ایندکشن پیل :(k = 1)

$$V_n^{(1)} = n!/(n-1)! = n$$

ټیك (صحیح) دی ، ځکه چی له n غړوکیدی چی له یوه غړی جوړ واریشنونه جوړکړی شي.

ایندکشن نیونه : (k = k0) :

$$V_n^{(k_0)} = n!/(n-k_0)!$$

ایندکشن غوښتنه(ثبوت:):(k0 +1 = k)

$$V_n^{(k_0+1)} = n!/(n-k_0-1)!$$

دایندکشن ښوونه : د k0 - م درجی هر واریيشن لپاره، په دې واریيشن کی نه رامنځ ته کیدونکو پاتی n - k0 غړو شمیر دی .که په ترتیب یو له دې n - k0 غړو د دې k -م ټولګی واریشنونو $V_n^{(k)}$

په اخرکی ځاي په ځاي شي، نو له دې يو دk+1 ټولګي n - k0 واريشنونه لاس ته راځي، او که دا کار په ټولو واريشنونو $v_n^{(k)}$ وشي، نولاندې واريشنونه لاس ته راځي:

$$\frac{n!}{(n-k_0)!}(n-k_0)=\frac{n!}{(n-k_0-1)!}$$

(که چيرې يود n - k0 غړو ورزيات په يو بل ځای کيښوولی وی، نو يودk+1 ټولګي واريیشن به يی لاس ته راوړی وی، کوم چی همدا اوس موجود دئ. دا سړی په بيلګه ۲ (n = 4, k = 2 , k =3) باندې ليدوړ کولی شي)

بيلګي:

۱ - د درې غړو واريیشنونو شمير و دوم ټولګي ته دی : $v_3^{(2)}=\dfrac{3!}{(3-2)!}=6$

۲ - د څلور غړو واريیشنونو شمير و دوم ټولکی ته دئ: $v_4^{(2)}=\dfrac{4!}{(4-2)!}=12$

د څلور غړو واريیشنونو شمير ودريم ټولګي ته دئ: $v_4^{(3)}=\dfrac{4!}{(4-3)!}=24$

۳ - د پنځه غړو واريیشنونو شمير ودوم ټولګي ته دئ: $v_5^{(2)}=\dfrac{5!}{(5-2)!}=20$

پيژند ۱۰ . ۶ :

د n غړو واريیشنونه و k - ام ټولګي ته په کوم کی چی يوګونی غړي تر k-ځله تکرار وي نو واريیشنونه د تکرار سره نوميږي يا بلل کيږي.

بيلګی: ۱ - د درې غړو a , b , c واريیشنونه و دوم ټولګي د تکرار سره دي:

---

ca ba aa

cb bb ab

cc ba ac

۲ - څلور غړو a , d , c , b د دویم ټولګی واریېشنونه د تکرار سره دي:aa

da ca ba

db cb bb ab

dc cc bc ac

dd cd bd ad

۳ - د درې غړو 1 , 2 , 3 د دریم ټولګي واریېشنونه دي(دا لاندې ولاړ ترتیب له کیڼ وښي لور ته دی، خو په لاندې کې په څټ شوی)

311 211 111

312 212 112

313 213 113

321 221 121

322 222 122

323 223 123

331 231 131

332 232 132

333 233 133

جمله ۱۰ . ۵ : د n غړو د k -ام تولګي د واریيشنونو شمير $V_{W_n}^{(k)}$

$C_6^{(4)}.C_{43}^{(2)} = \binom{6}{4}\binom{43}{2} = 13545$ د تکرار سره دی: $V_{W_n}^{(k)} = n^k$

حل)اوبی): په k د پوره ایندکشن له لارې:

د ایندکشن پیل (k = 1) :

د $V_{W_n}^{(1)} = n^1$ لپاره صحیح دی، ځکه چی له n غړو څخه n واریيشنونه،چی هر یوله یوه غړي جوړ دی، جوړيږي.

د ایندکشن نیونه (k0 = k) : $V_{W_n}^{(k_0)} = n^{k_0}$

د ایندکشن غوښتنه (k0+ 1 = k): $V_{W_n}^{(k_0+1)} = n^{k_0+1}$

د ایندکشن ښوونه : د (k0 + 1) -ام درجی واریيشنونه د nk واریيشنونو چی k0 – امه درجه واریيشنونو څخه لاس ته راځي، په کوم کی چی له دوي هر یو په ترتیب د n غړو اخر ته یو ور واچوي یا ورزیات (علاوه) کړي (یادونه دې، چی په واریشنونو بی له تکرار شوې ، وکتل شي) .

له دې امله د دې شمير $n^{k_0}.n = n^{k+1}$ واریيشنونه دی.

بیلګي :

۱ - د درې غړو و دوم تولګي ته د واریيشنونوشمير له تکرار سره دی

$$V_{W_3}^{(2)} = 3^2 = 9$$

۲ - د څلور غړو و دوم تولګی ثه د واریيشنونو شمير له تکرار سره دی

$$V_{W_4}^{(2)} = 4^2 = 16$$

---

۳ - د درې غړو و دریم توپلګي ته ض واریېشنونو شمیر له تکرار سره دی

$$V_{W'_3}^{(3)} = 3^2 = 27$$

۴ - د مورس نخښه (Morsezeichen) له دوه غړو ، ټکی او لنډې کرښې یوځای کیږي.

د یوه ، دوه درې او څلورو غړو جوړه نخښو شمیر دئ

$$V_{W'_2}^{(1)} + V_{W'_2}^{(2)} + V_{W'_2}^{(3)} + V_{W'_2}^{(4)} = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = 30$$

۱۰ . ۴ . ۳ کمبینیشن (Kombination (لاتین: یو بل سره تړل)

تعریف ۱۰ . ۷ :

د n غړو و k-ام توپلګي ته ($n > k$) یو کمبنیشن هغه دئ چی هر یو له k غړو یوځاي دروولو څخه ، کوم چی له n غړو، بی د غړو له نظم په پام کی نیولو سره، جوړوي.

کمبینیشن له واریېشن منځ ته راځي، که چیری نظم په پام کی ونه نیول شي.

بیلګي:

۱ - د درې غړو a , b , c و دوم توپلګي ته کمبینیشن په لاندې ډول دئ:

bc ac

ac ۰۰۰۰۰

۲ - د څلور غړو d , a , b , c و دوم توپلګي ته کمبینیشن په لاندې ډل دئ

cd bc ab

bd ac ۰۰۰۰۰

ad ۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰

د دې څلو غړو ودريم ټولګي ته کمبينيشنونه په لاندې ډول دي:

abc bcd

acd

۳ - د پنځه غړو 1 , 2 , 3, 4 , 5 و دريم ټولګي ته کمبينيشنونه په لاندې ډول دي(لاندی هم بايد له کيڼ لاندې لورته په ښی لور ليکل شوي وی)

123	234	345
124	235	
125	245	
134		
135		
145		

جمله ۱۰ . ۶ : د n غړو و k -م ټولګي ته د کمبينيشنونو شمير دی $C_n^{(k)}$

$$C_n^{(k)} = \binom{n}{k}$$

اوبی (حل): د n غړو و k-ام ټولګي ته د اوريیشنونو شمير دی:

$$V_n^{(k)} = \frac{n!}{n-k}$$

کمبينيشنونه له واريیشنونو په دې توپيريږي، چی ترتيب په نظر کی نه نيول کيږي، دا بيا دا مانا لري چی ټول د k غړو $k!$ پرموتيشنونه په يو کمبينيشن کی يوه ته يوځاي کيږي.له دې امله لرو :

$$C_n^{(k)} = \frac{V_n^{(k)}}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!.k!} = \binom{n}{k}$$

بيلګی :

۱ - و دوم ټولګي ته د درې غړو کمبينشنونو شميريا ګڼون دی

$$C_3^{(2)} = \binom{3}{2} = 3$$

۲ - و څلورم ټولګي ته د څلور غړو کمبينيشنونو شمير دیډ څلورو غړو و دريم ټولګي ته د کمبينيشنونو شمير دی

$$C_4^{(2)} = \binom{4}{2} = 6$$

۳ - د پنځه غړو ودريم ټولګي ته د کمبينيشنونو شمير دی

$$C_4^{(3)} = \binom{4}{3} = 4$$

۴ - په لاتري (۶ له ۴۹ څخه) د امکاناتو لپاره شمير دی

الف (يو شپږ $C_{49}^{(6)} = \binom{49}{6} = 13983816$

ب : يو څلور $C_6^{(4)}.C_{43}^{(2)} = \binom{6}{4}\binom{43}{2} = 13545$

۶ تيپ عددونه د يوه ۴ عددونوګروپ څخه بوځاي کيږي، چی له ايستل شوو شپږ عددونو (۴ تيک يا صحيح) او دوه عددونه(۲ پاتی عددونه) دي .

پيژند ۱۰ . ۸ :

د n غړو و k-ام ټولګي ته كمبينيشن، په كوم چی يواځني غړي k - ځله تكراروي، كمبينيشنونه د تكرار سره نوميږي.

بيلګي:

۱ - د درې غړو a , b , c و دويم ټولګي ته د تكرار سره كمبينشنونه دي.

aa ....

ab ...... bb

ac bc cc

۲ - د څلور غړو d , a , b , c و دويم ټولګي ته د تكرار سره كمبينيشنونه دي

aa ....

ab .... bb

ac .... bc cc

ad bd cd dd

۳- د دري غړو 1 , 2 , 3 و دريم ټولګي ته د تكرار سره كمبينيشنونه دي(لاندي ليكنه بايد له كيڼ لور پيل وی، خو دلته له ښی لور پيل شوی وكيڼ لور ته)

111 221 331

112 222 332

113 223 333

123

جمله ۱۰ . ۷ : د n غړو و k - ام ټولګي ته د تکرار سره د کمبینیشنونو شمیر یا ګڼون دی:

$$C_{W_n}^{(k)} = \binom{n+k-1}{k}$$

دلته دې له ښوونی(چی په kد پوره ایندکشن له لار ې صورت نیسی) تیر شو.

بېلګې: ۱ - د درې غړو و دویم ټولګې ته د تکرار سره کمبېنیشنونه ګڼون یا شمېر دی

$$C_{W_3}^{(2)} = \binom{3+2-1}{2} = 6$$

۲ - دڅلورو غړو و دویم ټولګې ته د تکرار سره کمبېنیشنونه ګڼون یا شمېر دی

$$C_{W_4}^{(2)} = \binom{4+2-1}{2} = 10$$

۳ - د درې غړو و دریم ټولګې ته د تکرار سره کمبېنیشنونه ګڼون یا شمېر دی

$$C_{W_3}^{(3)} = \binom{3+3-1}{3} = 10$$

۴ - د څلورو مکعبونو ، چې اړخونه یې د یوه تر شپږ نخښه وي . (نخښه شپږ اړخیز ممکن مختلف اچول ، په دې مانا چې کومې سترګې سره لوېږي لاندې دي.

$$C_{W_6}^{(4)} = \binom{6+4-1}{4} = 126$$

۱۰ . ۴ . ۴ د برموتییشن،وارییشن،کمبینیشن ټولکه

داا	د په پا یوې برخې راټولونه م کی نیولو شوو غړو		د ټولو په پام کی نیول شوو غړو راټولونه یا ټولګه
	له نظم تیریدنه	نظم په پام کی نیونه	
	کمبینیشن	وارییشن	پرموتیشن
د ټول غړي یوله بل توپیر لري	د n غړو کمبینیشن و k-ام ټولګي ته شمیر یا ګڼون $C_n^{(k)} = \binom{n}{k}$	د n غړو وارییشن و k-ام ټولګي ته شمیر یا ګڼون $V_n^{(k)} = \frac{n!}{(n-k)!}$	دn غړو پرموتیشن شمیر یا ګڼون $P_n = n!$
له تکرار سره	د n غړو دکمبینیشن شمیر وk -ام ټولګي د تکرار سره $C_{W_n}^{(k)} = \binom{n+k-1}{k}$	د n غړوواریيشن شمیر د تکرار سره $V_{W_n}^{(k)} = n^k$	د k غړو پرموتیشن د ni غړو سره په k -م ګروپ کی $P_n^{(n_1,n_2,...n_k)} = \frac{n!}{n_1!.n_2!....n_k!}$

۱۰ . ۵ تمرينونه

۱ – لاندې فاكولتی وشميرى

الف) $7!$ ، ب) $3!.5!$ ، پ) $6! / 4!.10!$

۲ – لاندې ويشونه ساده كړی

a) $(n+1)! / (n-2)!$ b) $(2n)! / n!$ c) $n! / 2n!$

۳ – لاندې افادې وشميرى!

a) $\binom{6}{4}$ b) $\binom{1,5}{3}$ c) $\binom{-1}{6}$ d) $\binom{4}{1}$ e) $\binom{4}{0}$

f) $\binom{8}{8}$ g) $\binom{5}{4}\cdot 4!$ h) $\binom{7}{6}\cdot 3!$ i) $\binom{6}{7}\cdot 3!$ j) $\dfrac{\binom{7}{6}}{3!}$

۴ – لاندې زياتونونه وشميرى!

a) $\binom{2}{1}+\binom{2}{2}$ b) $\binom{3}{1}+\binom{3}{2}$ c) $\binom{3}{2}+\binom{3}{3}$

d) $\binom{4}{1}+\binom{4}{2}$ e) $\binom{4}{2}+\binom{4}{3}$ f) $\binom{4}{3}+\binom{4}{4}$

۵ – لاندې افادې د بينوم د فرمول كاروني (استعمال) په بنسټ وګڼی!

a) $(x+y)^7$ b) $(a-6)^6$ c) $(5a+4y)^3$

d) $(x/2 - y/3)^4$ e) $(2\ \ a+3\ \ b)^2$ f) $(x^2+y^2)^3$

۶ – لاندې افادې ساده كړی!

a) $(-1+a)^2 - (1-a)^2$ b) $(a^2+b^2)^2 - (a^2-b^2)^2$

c) $(\ \ ab - 1)(-a - \ \ ab) + ab$

۷ – د بينوم په يو ځل يی بيل (تجزيه) كړی!

a) $25a^2 + 10\,ab + b^2$ b) $(49a^2 - 42a + 9$

c) $169a^2 - 130\,ab + 25b^2$ d) $2x+2.\ \ 6xy + 3y$

---

۸ – الف) د غړو ۱ ، ۲، ۳، ۴ پرموتیشنونه په لکسیکوگرافي نظم ولیکی!
ب) د a,e,f,h,n پرموتیشنونو په څو ځایونو کی« fahne » او«hafen » ولاړ دي؟ دا الماني کلیمي دي چی دپښتو اړونه یی « بیرغ» او« بندر» دی.

۹ – الف) په څو ځایترتیب یا تنظیم کیدی شي ، شپږ کسه ځاي ونیسی؟
ب) څومره پنځۀ ځیفري ګڼونه د پنځه ځیفرونو4, 3, 2, 1, 0 سره کیدی شي ولیکل شي، که هغه ګڼونه چی په صفر پیل کیږي ونه لیکل شي ؟
پ) د غړوa,b,c,d,f څومره پرموتیشنونه په c ، په de ، په cdef پیل کیږي؟

۱۰ – الف) د غړو a , b , c ټول پرموتیشنونه ولیکی، په کومو کي چي a او b هره یوځل، غړی c دوه ځله رامنځ ته کیږي.
ب) د دې پرموتیشنونو ګڼون یا شمیر وګڼی!

۱۱ – څومره تنظیم شوي جوړې د الفبا د۲۶ (لاتین توري) تورو څخه جوړیدلی شي ؟

۱۲ – د څلورم ټولګي څومره مختلف واریېشنونه د
الف) بې له تکرار
ب) له تکرار سره د غړو 8 , 6 , 4, 2, 0 موجود دي؟

۱۳ – یوه سوری کارت له ۸۰ سوریدرځونو چي هریو لس سوري لري، جوړ دی. څومره د سوریو یوځایلیکل ممکن دي، که هر درځ ټیك یو ځل سوری شي؟

۱۴ – له شپږ غړو جوړ کمبینیشن ګڼون و څلورم ټولګي ته او پنځم ټولګي ته څومره لوي دی،
الف) بې له تکرار
ب) له تکرار سره؟

۱۵ – یادونه : دا د کارتو لوبولپاره تمرین نه دی لیکل شوی

---

۱۶ – څومره مختلفې ازمايني ممكن دي كه په يوه توليد كې له هر ۲۰ يوه وازمايل شي؟

۱۷ – په موټرو ترافيك نخښې په لاندې توګه يوځای شوی : يوه د ځای نښونه ډله د نخښی الف بی پسې څلور ګروپ يا ډله راځي، چې له څيفرونو ۰ تر ۹ څخه جوړ وي. د يوې كره ټاكلی الف بی پيژندنښی يا ترافيكی نخښی ممكن دي؟

۱۸ – د مختلفو اندازو او د خامموادو جوړ نلونه ، د رنګونی له لارې يو له بل توپيريدی شي ، كه څلور رنګ نښونی ولرو؟

۱۹ – د منډې يوه ميچ په اخركی شپږ پاتی منډې وهونكی برخه اخلي. د منډو څومره امكانات موجود دي؟

۲۰ – په څومره ډوله

الف) اته مختلفی مرغلرې،

ب) درې سرې، څلور شنی، يوه زرغونه مرغلره

ترتيبيدلی شي؟

۲۱ – څومره تلفونونه كيدی شي وتړل شي كی يواځي پنځه ځايزه نمره موجود وي؟ څومره تلفون تړل ممكن دي كه تلفون نمرې شپږځايزې وي او په 0 پيلكيدنه يی اجازه ونه لري؟

۲۲ – د درې شپږسترګيو (يا –اړخيزو) سره (څيره مكعب دی اومخونه له يوې تر شپږ سترګو باندې په نخښه دي، ماته يې د پښتو نوم نه راځي او االماني يی Würfel دی) څومره مختلفی اچونی ممكن دي، چې ټولې شپږسترګې مختلفې سترګې ګنون وښايي؟

څومره مختلفې اچونې له درې شپږسترګيو سره ممكن دي؟

۱۱ کرښیز-، خطي – یا لاینیز الجبر

یادونه : د لته دې هم د هرڅه له مخه بیا دې ته ګوته نیول شوي وي ، چې څه به تکرار
وي، خو هغه لاتین متل دی، چی » تکرار د زدکړې مور ده .«
لاندې مخ ته پرته اصلي برخه دm برابرونونو ځوابونو ته چی n اووښتونې یا مجهولی یا
ناپیژندونکی لري، وقف ده، چیرته چی m د برابرونونو ګڼون یا تعداد n د
ناپیژندونکو یا مجهولو ګڼون (تعداد) سره برابر او همدا ډول لوي او یا کوچنی کیدی
شي
په ۱۱ . ۱ برخه کی د دوه ناپیژندونکو یا مجهولو سره د برابرونونو سیستمونه تر
څیړنی لاندې نیول کیږي، چی د ښوونځي شمیرپوهنی تکرار دی، مګر دلته د
برابرونونو سیستمونه د ناټاکلوځلونو یا ضریبونو یا فاکتورونو سره هم راوړل کیږي،
چی د حالتونو توپیریدنه یي اړیینه ده۰
دا راوړنی به په ۱۱ . ۲ برخه کی دري ناپیژندونکو یا نامعلومو او په ۱۱ . ۳ برخه کی
په خوښه زیاتوناپیژندونکو ته وغزیږي، په ټولو برخو کی پل په پل د دیترمینانت کلیمه او
د ګاوس الګوریتم د کار ډګر ته را اچول کیږي .
په ۱۱ . ۴ برخه د هوموجینو برابرونونو سیستم ځانګړي ځوابونه په بر کی نیسي۰
یادونه : ولې لاینیز برابرونونه او نه کریز یا بندکرښیز یا خطی؟

موږ د برابرونونو له څیرې پوهیږو، چۀ دا یوه کرښه ورکوي، چې لاتین یا کۀ غواړئ انګریزي یې لاین نوموليٰ. د کرښو اوبندکرښو نومونه هم شته، خو د دې لپاره، چې د نورو درسي منځپانګی سره یې توپیر وي،نو موږ هم ورته له دې امله لاینیز وایو.

۱۱ . ۱ . لاینیز برابرون د دوه ناپیژندونکو سره

داسی یو مساوات د دوه ناپیژندونکو سرهکیدي چی په لاندې ډول انځور شي

$ax + by = c$ (11 . 1)

دلته کیدی شي چی ناپیژندونکی لویي x او y په خوښه رییل ګڼونه وي چی یو له بل سره په ورکړ شوي بڼه تړلي. یا په بل عبارت : x او y واریابلی(اووښتونکی یا لنډ: اووښتوني) دي، برابرون (۱۱ . ۱) لاینیز فنکشن(بلواك) برابرون په ګوته کوي چی د هغي څیره په y,x کواوردینات کی ناپای کرښه ده(۱۶ - امه برخه دی وکتل شي)

ځانګړی حالت : a = 0 یا b = 0 په ځانګړې توګه کرښه انځوروي یا په ګوته کوي چی د y - محوراو همداسی د x - محور سره غبرګه د ه .

که دا (۱ . ۱۱) برابرون د دواړو نایژندونکو یا مجوهولو x اوy لپاره ټاکنمساوات یا ټاکنبرابرون ونیول شي، نو دا پوښتنه رامنځ ته کیږي، چی ددې مسیٔلی د حل (اوبی) لاندې به څه پوهیدل غوښتونکی وي.

د (۱۱. ۱) برابرون اوبیونه په څرګند ډول د ټولو ارزښتجوړو (x ,y) ډیری ده، چی(۱۱.۱) برابرون پوره کوي. که اصلي حالت a , b |= 0 ته پام وکړو نو برابرون (۱ . ۱۱) د y په لور داسی ځوابوو.

$y = - (a/b) x + c/b$ (11 . 2)

کیدی شي چی x په خوښه وټاکل شي اوy له (۲ . ۱۱) برابرون څخه لاس ته راولو. ګورو چی ناپاي ډیرې اوبیوني یا حلونه لاس ته راځی یعني د اوبیوني ډیری یا اوبیډیری L په لاندې ډول ده

$L = \{ (x, y) \mid y = - (a/b) x + c/b \}$ (11 . 3)

داسې لوستل کیږي: L د ټولو (x,y) جوړو ډیری ده ،داسې چې..... (وروسې هغه برابرون).

ددې لپاره لنډ لیکل کیږي: د (۱ . ۱۱) برابرون اوبی یا حل $y = -(a/b)x+c/b$ ،د خوښی x .

طبعاً کيدی شي چي برابرون د x په لور هم اوبی شي. دلته y په خوښه نيسو، نو د لته د برابرون (۱۱ . ۱) ځواب داسی دی , x = -(b/a)y + c/b په خوښهy ۰

دا چي په لاندې کی موږ د دربو يا ډيرو ناپيژندونکو يا نامعلومو برابرونونو سره سر او کار لرو، نو موخه ور بولو که ناپيژندونکې د x, y , z .... سره په نخښه نه کړو بلکه د $x_1, x_2, x_3, ...$ سره .

ددې په نخښونو سره کيدی شي چی په څرګند ډول وښايو:

لاندې برابرون د دوه ناپيژندونکو x_1, x_2 سره

$$a_1x_1 + a_2x_2 = b, ...(11,4)$$

د a |= 0 لپاره

∞^i

ځوابونه لري

∞^i

په دې مانا چی i = 1 , 2, 3۰۰۰ ناپيژندونکو يا نامعلومی لپاره په خوښه r ازښتونه کيښوول کيدی شي.

$$x_1 = -\frac{a_2}{a_1}x_2 + \frac{b}{a_1}, ...(11,5)$$

په خوښه x_2

د

$a_2 \neq 0$

لپاره

∞

ځوابونه

$$x_2 = -\frac{a}{a_2}x_1 + \frac{b}{a_2}; ....(11,6)$$

x_1

په خوښه

د a1 =a2 = b = 0 (0.x1+ 0.x2= b = 0 لپاره ناپای ډير ځوابونه)

د په خوښه

$$x_1, x_2, ...(11,7)$$

د
$a_1 = 0; a_2 = 0; b \neq 0$
لپاره
$0.x_1 + 0.x_2 = b \neq 0$

په ښتوالی یا تضاد یا مخامخوالی دی، له دې امله ځواب نه شته.
نوټ : دلته
∞^i
دا مانا لري چې د ناپیژندونې یا مجهولی
x_i
لپاره $i = 1,2..$ په خوښه ناپای ارزښتونه نیول کیدی شي.

۱۱ . ۱ . ۲ – دوه لاینیز برابرونونه د دوه ناپیژندونکو سره
د دوه برابرونونو سیستم د دوه ناپیژندونکو سره لاندې عمومي شکل لري

$$I............a_{11}x_1 a_{12}x_2 = a_1$$
$$II..........a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = a_2;..................(11,8)$$

دا ټاکلي برابرونونه کیدی شي چې په اووښتونو یا واریابلو x 1 اوx2کی د بلواکبرابرون یا فنکشنمساوات په څیر ونیول شي او په x1 , x2 - کواوردیناتسیستم کی د کرښو په ډول انځور شي. که کرښې یو بل غوڅې کړې نو دا د مساواتو په سیستم (۸ . ۱۱) کی د کرښو یوګونی(بهتره : یوګونی، یواځنی د بل څه لپاره کارول شوی) اوبیونه ده یا حل دی.
که دواړه کرښې یو په بل پریوځې نو دا په دې مانا دې چې II همغه مساوات لکه I انځوروي. دلته دا بسیاکوي، چې د ۱۱ . ۱ . ۱ . له مخې تیك یا فقط مساوات I یا مساوات II حل شي. دلته ناپاي ډېر
∞^1
ځوابونه موجود دي.
داسي هم کیدی شي چې فورمال
∞^2
رامنځ ته شي، که ټول
$a_{ik} \wedge a_i$

د صفر سره برابر ي. موږ دلته دا حالت نه څیړو. دا څیړو چې، که دا برابرون اوبیونه ونه لري. دا حالت هغه وخت رامنځ ته کیږي، چې کرښه I اوکرښه II غبرګي ځغلي مګر یو په بل نه وي پرتې.

په دوه برابرونونو کي، د دوه ناپیژندونکو یا اووبنتونو سره، کیدي شي لاندې حالتونه را منځ ته شي

۱ - یو یواځني ټاکلی ځواب مو مخ ته پروت دئ (اصلي حالت)

۲ - کوم ځواب مو و مخ ته نه دئ پروت (سیستم مخامخوالی یا تضاد لري)

۳ - ناپای ډیر ځوابونه موجود دی II (برابرون برابر په I مساوات او یا د هغه څو برابره دی)

۴ - ناپاي ډیر ځوابونه موجود دي.

(ټول $a_{ik} = 0$ او ټول $a_i = 0$ دي)

د دوه برابرونونو له مخی چی دوه ناپیژندونکی لري، کیدی شي په اسانتیا وپیژندل شي، چی د برابرونونو کوم حالت مو مخ ته پروت دئ.

په سیستمونو کی چي درې یا زیاتي واریابلی یا اووبنتونې لري ورته حالتونه په ساده ډول نه شو پیژندلی چي کوم حالت تر مخ لرو. دلته باید فورمال پرمخ لاړ شو، دا چی څنګه دا کار سرته رسولی شو غواړو چی د پوښتنو په فورمال ځواب پیل وکړو او د برابرونونو پوښتنو ته ځواب پیدا کړو. دلته باید دري بنسټیز د مساواتسیستم د ځواب کاردودونه)متودونه(تکرار شي:

۱ . د برابر یا مساوي ځاي په ځاي کولو متود:

دواړه برابرونونه د یوې نامعلومی په لور اوبی کیږي(د بیلګي په توګه د x دوه په لور(، دواړه برابرې لیکي او په دې ډول یو برابرون د یوې نامعلومي سره منځ ته راځي۰

۲ - یو د بل پر ځاي کینبولو متود:

برابرون یا مساوات د یوې ناپیژندونکې (د بیلګي په توګهx دوه) په لور ځواب کیږي او دا لاس ته راوړنه په بل برابرون کی ځاي په ځاي کیږي، په دې ډول د یوې ناپیژندونې برابرون منځ ته راځي (د بیلګي په توګه دx یو)

---

۳ - د زياتون کارونه (جمع کولو عمليه):

سړی يو ټاکلی څو برابره (کيدی شي چی کميز يا منفي هم وي) د II برابرون د I برابرون يوه ټاکلي څو برابره سره زياتوي، داسی چي يوه ناپيژندونی بيا مخ ته نه راځی يا له منځه ولاړه شي. د نيتجي سره بيا دا بله ناپيژندوني څيړي. دا د داوړو نامعلومو(ناپيژندونو) لپاره کيداي شي . دا متود دبرابرونونو د سيستم لپاره بنسټيز دی چی د ديترمينانتو (die Determinanten) له لارې د برابرونونو ځواب لاس ته راوړو .
دا متود په درې ځانګړو برابرونسيستمونو باندې بايد وکارول شي، ټول څلورځلوني(ځله ووني يا ضريبونه) بايدله صفر توپير ولري يعني $a_{ik} \neq 0$ که چيرې يو $a_{ik} = 0$ د بيلګي په توګه $a_{21} = 0$نو بيا به مساواتو په لاندې ډول د درېګوډي جوړښت لرودی:

$$I............a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = a_1;......a_{11} \neq 0$$
$$II....................a_{22}x_2 = a_2,.......a_{22} \neq 0;..........(11,9)$$

دلته نو
$a_{21} = 0$

بيا له II سيده راويستل کيدی شو او د نتيجي څخه يي چی په I کی کښيښودل شوې وی x_1 هم معلوميدی شو. دلته دا په ګوته کوو چی د ګاوس الګوريتم په استعمال بيا برابرون د درېګوډي شکل باندې اړول کيږي .دا درې څرګند حالتونه په لاندې ډول دي :
سيستم ۱

I 2x1 + 3x2 = 4
II x1 - 2x2 = -5

دا سيستم يواځنی يوځواب لر II برابرون د I برابرون سره اړيکی نه لري

سيستم ۲
2x1 + 3x2 = 4
II 4x1 + 6x2 = 8

په اسانۍ ګورو چی دلته II برابرون په ۲ ځل شوی I برابرون دی . دواړه برابرونونه همغه کرښه وښايی او په دې ډول د مساواتو اوبيونې ناپای دی.

سیستم ۳:

I $2x1 + 3x2 = 4$

II $4x1 + 6x2 = 10$

دلته بي ډیله څرګنده ده چی برابرونونه یو د بل تضاد یا یو د بل په څټ دي .د Iبرابرون دوه برابره په لاندي ډول دی:

$4x1 + 6x2 = 8$

په دې توګه ناممکن ده چی II هم باوري وي، نو له دې امله دا سیستم ۳ اوبیونه نه لري.

بیلګه ۱۱ . ۱ :

سیستم۱ دې په پورته درې ورکړ شوو متودونو ځواب شي .

الف: مساوي اینوولوکارونه یا عملیه

$$I':.....x_1 = 2-(3/2)x_2;.......;II':.....x_1 = 2x_2 - 5$$

$$2-(3/2)x_2 = x_2 - 5$$

$$-(7/2)x_2 = -7$$

$$x_2 = 2;\Rightarrow$$

$$x_1 = 2-(3/2).2$$

$$x_1 = -1$$

ب) د بل په ځاي کینولوکاروونه (عملیه) : II د x1 په لور ځواب کیږي او بیا په I کی ځاي په ځاي کیږي۰

$$II'::.........x_1 = 2x_2 - 5$$

$$2(2x_2 - 5) + 3x_2 = 4$$

$$4x_2 - 10 + 3x_2 = 4$$

$$7x_2 = 14$$

$$x_2 = 2 \Rightarrow x_1 = 2.2 - 5 \Rightarrow x_1 = -1$$

پ) د زیاتونکاروونه: x_1 له منځه ځي، که (2-) ځله د II برابرون و I ته زیات شي.

$$I:................2x_1+3x_2=4$$
$$(-2)II:.......-2x_1+4x_2=10$$
$$I-2II:...................7x_2=14$$
$$.................................x_2=2$$

کیدی شي، ود بیلګي په توګه، له II څخه x1 وشمیرل شي:

$$x_1=2x_2-5=4-5=-1$$

د زیاتون کاروونی په کلکه یا تل استعمال څخه کیدی شي
x2
له منځه یو وړل شي، په دې شکل چی د II درې برابره د I دوه ځله ته ورزیات کړی شي.

$$2.I:............4x_1+6x_2=8$$
$$3.II:............3x_1-6x_2=-15$$
$$-------------------$$
$$2.I+3.II:.......7x_1.........=-7$$
$$.......................x_1............=-1$$

یادونه : په پورته کې یا نورو کومو ځایونو کې ، چې ټکی چیرته اینسول کیږي، پوهیږو، چې چیرته ټکی د ځاي غزونې او چیرته د ځل لپاره ځاي په ځاي شوي دي

بیلګه ۱۱ . ۲ :
سیسم ۲ دې په پورته درې متودو ځواب شي:

الف (مساوي اینوولو:
I' : x1 = 2 -(3/2).x2
II': x1 = 2 -(3/2)x2
2- (3/2)x2 = 2 - /3/2)x
0.x2 = 0

دلته
$x2$
په خوښه. دا په دي مانا چی
$x2$
هر ارزښت نيوی شي ۰ له 'I څخه ناپای ډير ځوابونه لاس ته راځي
$x1 = 2 - (3/2)x2$ او $x2$ په خوښه.

ب) د بل په ځاي ايښوولومتود: $I' \quad x1 = 2-(3/2)x2$,
په II کی ايښول کيږي

$$II' \quad 4.(2-(3/2)x2) + 6x2 = 8$$
$$8-6x2+6x2 = 8$$
$$0.x2 = 0 \quad x2$$

په خوښه له 'II لاس ته راځي
$I' : x1 = 2 - 3/2\ x2$ $x2$ په خوښه

پ) د زياتون متود يا لار يا طريقه:

$$2.I \quad 4x1 + 6x2 = 8$$
$$II \quad 4x1 + 6x2 = 8$$

$$II - 2.I : \ 0x1 + 0x2 = 0$$

که يواځی دا مساوات په نظر کي ونيول شي ، نو $x1$ او $x2$په خوښه ټاکل کيدی شي، دا چی د $x1$ او $x2$ ترمنځ په I يا II کی ورکړ شوي اړيکي دي ، نو يواځي يوه ناپيژندونکو په خوښه ټاکل کيدی شي . ځواب داسی دی:

$$x1 = 2-(3/2)x2$$

$x2$په خوښه

په همدي ډول:

$$x2 = 4/3 -(2/3)x1 ,$$

دلته $x1$ په خوښه ټاکل کيږي

بيلګه ۱۱ . ۳ :

سیستم ۳ دې په پورته درې ورکړشوومتودونو ځواب شي.

الف (مساوي ځاي په ځاي کولو متود:

$$I' : \quad x1 = 2 -(3/2)x2$$
$$II' : \quad x1 = 5/2 -(3/2)x2$$
$$2-(3/2)x2 = 5/2 -(3/2)x2$$
$$0.x2 = 1/ 2$$

دا یو په ښتوالی یا تضاد دی، ځکه چی هیڅ یو ریيل ګڼ x2 نه شته چی دا مساوات پوره کړي، نو له دې امله کوم ځواب نه شته یا وجود نه لري.

ب) د بل په ځاي لیکلو عملیه: $I' : \quad x1 = 2 - (3/2)x2$,

په II کی دی په ځای شي

$$II': 4.(2-(3/2)x2)+6x2 = 10$$
$$8 - 6x2 + 6x2 = 10$$
$$0.x2 = 2$$

دا مخامخوالی یا په ښتوالی یا تضاد دی ، پس ځواب نه شته.

پ) د زیاتون متود:

$$2 . I \quad 4x + 6x = 8$$
$$II \quad 4x + 6x = 10$$

$$2.I - II \quad 0.x + 0.x = -2$$

په ښتوالی یا تضا د دی ، ځواب وجود نه لري

د لاندې بیلګو سره غواړو د منځ ته راتللو پیښتنو ځوابونو لپاره اړوند لارښوونه ګوته لك کړو.

بیلګه ۱۱ ۰ ٤ : په لاندې فورم یا بڼه برابرونسیستم ورکړ شوی:

$$I \quad x /(a+b) +y/(a-b)$$
$$II \quad x /(a-b) +y/(a+b)$$

دا ټیك هلته موخه ور یا هدفمند دی چی a =| b او a- =| b وي، یعنی |a| |= |b| وي .

کیدی شي چی دا سیستم د پورتنیو متودونو څخه په یوه متود ترلی ځواب کړي، د یوه د مخه ورکړ شوي فورم یا بڼې اوړون له لارې هم ځواب کیدی شي.

لمړی د جمعی متود څخه کار اخلو:

د I ځل له $1/(a+b)$ او II ځل له $-1/(a-b)$ څخه وروسته دا لرو:

$$x/(a+b)^2+y/(a^2-b^2)=1/(a+b)$$

$$-x/(a-b)^2-y/(a^2-b^2)=-1/(a-b)$$

له دې سره د y دواړه ځله وونې یاضریبونه یو د بل مخامخ (یا په بل عبارت یو د بل په ځتې) نخښی لري او له دې امله د زیاتون په حالت کی له منځه ځي، نو په دې توګه مو یو برابرون د یوې ناپیژندونکی سره مخ ته پروت دی:

$$\frac{x}{(a+b)^2}-\frac{x}{(a-b)^2}=\frac{1}{a+b}-\frac{1}{a-b}$$

$$\frac{(a-b)^2-(a+b)^2}{(a+b)^2(a-b)^2}x=\frac{a-b-(a+b)}{a^2-b^2}$$

$$\frac{a^2-2ab+b^2-a^2-2ab-b^2}{(a^2-b^2)^2}x=\frac{a-b-a-b}{a^2-b^2}$$

$$-\frac{4ab}{a^2-b^2}x=-2b$$

$$2abx=b(a^2-b^2)....(*)$$

$$x=\frac{a^2-b^2}{2a};ab\neq 0$$

که I له $1/(a+b)$ او IIله $-1/(a-b)$ سره ځل شي کیدی شي: چی y په ورته ډول وشمیرل شي:

$$\frac{x}{a^2-b^2}-\frac{y}{(a-b)^2}=\frac{1}{a-b}$$

$$-\frac{x^2}{a^2-b^2}-\frac{y}{(a+b)^2}=\frac{1}{a-b}-\frac{1}{a+b}$$

$$\frac{(a+b)^2-(a-b)^2}{(a-b)^2(a+b)^2}y=\frac{a-b-(a+b)}{a^2-b^2}$$

$$\frac{a^2+2ab+b^2-a^2+2ab-b^2}{(a^2-b^2)^2}y=\frac{a+b-a+b}{a^2-b^2}$$

$$-\frac{4ab}{a^2-b^2}y=2b$$

$$2aby=b(a^2-b^2)....(*)$$

$$y=\frac{a^2-b^2}{2a};ab\neq 0$$

دلته مو ځانګړی حالت مخ ته پروت دی، چی دواړه ناپیژندونکی مساوي دي، کومی چی ځمونږ د څیړنی لپاره بي مفهومه دی.

دا د x , y لپاره شمیرل شوي ارزښتونه په هغه حالت کی باوري دی چی ab |= 0 وي.

نو څیړو چی کوم حالت توپیر د ab = 0 لپاره منځ ته راځي. . دلته مساوات) * (تر څیړنی لاندې نیسو او درې حالته توپیرو:

1. a = 0 , b |= 0

مساوات)*(داسی دي

0.x = -2b3, 0 . y = -2b3

په دې حالت کی برابرون سیستم ځواب نه لري.) تضاد مخ ته پروت دی

2. a |= 0 , b = 0

برابرون(*)(په دې حالت کی داسی دی.

0 . x = 0 ; 0 . y = 0

دلته مخامخوالی یا په څتوالی یا تضاد نه شته (له I او هم له II لاس ته راځي

x/a+y/a=1 <=> x+y=a

که y خپلواك وټاکل شي، نو لرو x=a-y دلته y په خوښه ټاکل کیدی شي.

په بل حالت کی لرو , $y = a - x$ دلته x په خوښه دی
3 . $a=b=0$
دا حالت د نیونی له مخی بند ، ناشونی یا ناممکن دی.

بیلګه ۱۱ . ۵:

$$\frac{11}{2x-3y}+\frac{18}{3x-2y}=13$$

$$\frac{27}{3x-2y}-\frac{2}{2x-3y}=1$$

که دا سیستم د $(3x-2y)(2x-3y)$ سره ځلوني په بنسټ فورم بدل کړي، نو لرو:

$$69x-76y=78x^2-169xy+78y^2$$

$$48x-77y=6x^2-13xy+6y^2$$

او کتل کیږي چی په دې ډول لاینیز برابرونتسیستم د x او y لپاره منځ ته نه راځي . دا چی په دې هر یو سیستم کی دوه ماتلاندې سره برابر دي نو کیدی شي چی نوې ناپیژندونکی u , v و لیکو. دا وشمیرو او بیا له دې وروسته لویي x , y راپیدا کړو . موږ ځاي پر ځاي کو

$u=1/(2x-3y)$,$v=1/(3x-2y)$
او لاس ته راوړو:

$$11u+18v=13 \iff 11u+18v=13$$
$$27v-2u=1 \qquad -2u+27v=1$$

موږ د زیاتون یا جمعی متود کاروو

$$33u+54v=39$$
$$4u-54v=-2$$

$$37u=37$$
$$u=1 \Rightarrow v=1/9$$

له دې سره کیدی شي x او y وشمیرل شي:

$$1=1/(2x-3y) \iff 2x-3y=1$$
$$1/9=1/(3x-2y) \iff 3x-2y=9$$

له دې څخه غوښتونکی ځواب $x = 5$, $y = 3$ لاس ته راځي.

۱۱ . ۱ . ۳ دویمه درجه دیترمیناتې او د کرامر قاعده

که په ټولیزسیستم(11.8) باندې د زیاتون متود استعمال شي، نودx2د له منځه وړلو په لار لاس ته راځي

$$I' = a_{22}.I - a_{22}.II$$

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})$$

پورته برابرون دی) ۱۱،۱۰ (وي

اود x1 د له منځه وړلو:

$$II' = a_{11}.II - _{21}.I :$$

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = (a_{11}a_2 - a_1a_{21})$$

دا پورته برابرون دې (۱۱،۱۱) وي

که 0 =| (a11a22 -a12a21) وي، نو له دې یواځنی ټاکلی ځواب لاس ته راځي

$$x_1 = \frac{a_1a_{22} - a_{12}a_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}};\ x_2 = \frac{a_{11}a_2 - a_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}},\ldots\ldots\ldots(11,12)$$

که د ارزښتونه په (11 . 8) کی ځای په ځای شي نو تصدیقیږي، چې(11 . 12) په ریښتینی د (11, 8) ځواب دی. له (11 . 10) تر (11 . 12) سرې په واقعیت یا رښتونی کی د دیترمینانت کلیمی په لور لاروی کوي(لارښودوي.)

پیژند ۱۱ . ۱: د یو منظم سیستم دوه ځله دوه رییلو ګڼونو $a_{ik}, (i, k = 1, 2)$ د د ۲ -امه درجه دیترمینانت لاندې ، لاندینی ګڼ پوهیږو:

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21};\ldots\ldots\ldots\ldots(11,13)$$

د اصلي دوه کونجتړي یا دیاګونال (قطر) د توکوځل، ترې کم(منفی) د څنګ یا فرعی دوه کوجنتړي(قطر) د توکو ځل(یا) د اصلي دوه کونجتړې یا قطر د توکو ځل څخه د څنګ یا فرعي دوه کونجتړې د توکو ځل کمیږي یا منفی کیږي)

یادونه : دا اوس او وروسته دیترمینانت بڼه د ماتریکس په څیره لیکل شوی، په دیترمینانت کې کرښی سمې دي، خو کومه ناسمپوهنه په کې نه راځي.

په (11 . 13) کی د xi ځله ووني یا ضریبونه داسی لیکل شوي لکه په (11 . 8) سیستم کی . د (11.13) دیترمینانت له دې امله د (11 8) (له ماڅخه دانوکانو کې دننه ګڼونه کله کله بدلیږي، دې ته دې د ګرانو لوستونکو پام وي، دا شمیرپوهنیزه ناسمي منځ ته نه راولي) سیستم د ځلونو (ضریبونو) دیترمینانت بلل کیږي.

که په (11. 13) کی لومړی (درز، ستن یا متّه یا ولاړه لیکه یا-کیله) د دیترمینانت ولاړه لیکه(په ځای) چې د xi ځله ووني یا ضریبونه دی د (11 . 8) برابرونسیستم

ښي اړخ (مطلقه توکی) توکي a1 , a2 وليکل شي نو(په x1 اړونده) لاندې ديترمينانت لاس ته راځي:

$$D_1 = \begin{pmatrix} a_1 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_1 a_{12} - a_{12} a_2$$

د پورته برابرون ګڼه يا نمره دې) ١١،١٤ (وېپه همدې ډول که د) 11 . 13 (ديترمينانت دوهم درز بدل کړی شي، نو دx2 پورې اړوند لاندې ديترمينانت لاس ته راځي

$$D_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_1 \\ a_{21} & a_2 \end{pmatrix} = a_{11} a_2 - a_1 a_{21}; \ldots\ldots\ldots\ldots (11,15)$$

که له (11 . 10) تر(11 . 12) پورې له (11 . 13) تر (11 . 15) پرتله يامقايسه شي نو لاس ته راځي

جمله ١١ . ١ (د کرامر قاعده):
که د ځله وونو يا ضربيونو ديترمينانت لپاره په (11. 13) کی

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \neq 0; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (11,16)$$

باوري وي نو د مساواتو سيستم (11 . 8) يوائځنی ټاکلی ځواب لري

x1=D1/D ; x2 = D2/D /11,17)

په داسی حال چی D1 او D2 د (11 . 14) او (11 . 15) له مخی شميرل کيږي.
د (11 . 10) او (11 . 11) له امله لرو

جمله ١١ . ٢ :
که په (١١ . ١٣) کی د ځلونو ديترمينانت D لپاره باوري وي

0 = D (11,18)

او د کم له کمه يوې ديترمينانتD1 يا D2 لپاره په (11 ,14) يا (11 , 15) باوري وي

D1|=0 V D2 |=0 (11,19)

نو (11 . 8) سيستم ځواب نه لري، ځکه چي برابرون يی يو د بل سره مخامخ دي (تضاد کی دي)

جمله۱۱ . ۳ :
باوري دي

$$D=D1=D2=0 \qquad (11 . 20)$$

نو يو له برابرونونو I يا II زياتي دئ) دواړه برابرونونه يو بل ته اړ دی يا د بل په واك کی دي(او د ۱۱ . ۱ . ۱ . برخی متود استعماليدلی شي يا کار ترې اخستل کيدی شي.
د ښوونبيلګو په څير دې اوس د ۱۱ . ۱ تر ۱۱ . ۳ پورې بيلګي (۱۱ . ۱ . ۲ برخه) کارول شوي سيستمونه ۱ ،۲ او۳ ګران لستونکي په ديترنمنانتو ځواب کړي، که چيرې ما دا کار سرت ونه رساوه۰.
بيلګه ۱۱ . ۶ : د سيستم لپاره باور لري

$$D=\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & -2\end{vmatrix}=-4-3=-7\neq 0$$

پس يواځنی تاکلی ځواب لري. پسی باور لري

$$D_1=\begin{vmatrix}4 & 3\\ -5 & -2\end{vmatrix}=-8+15=7\neq 0; D_2=\begin{vmatrix}2 & 4\\ 1 & -5\end{vmatrix}=-10-4=-14$$

له دې امله باوري دی

x1=D1/D=7/-7 , x2=D2/D=-14/-7= 2 ,

بيلګه۱۱ . ۷ :

د سيستم ۲ لپاره باور لري

$$D=\begin{vmatrix}2 & 3\\ 4 & 6\end{vmatrix}=12-12=0$$

او ورپسی

$$D_1=\begin{vmatrix}4 & 3\\ 8 & 6\end{vmatrix}=24-24=0; D_2=\begin{vmatrix}2 & 4\\ 4 & 8\end{vmatrix}=16-16=0$$

له دې امله ناپاي ډير ځوابونه موجود دي) بيلګه۱۱ . ۲ دې وکتل شي.)

بيلګه ۱۱ . ۸ :   د سيستم ۳ لپاره باور لري

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 12 - 12 = 0$$

D =   2   3   =12 -12 = 0

او ورپسی

$$D_1 = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 10 & 6 \end{vmatrix} = 24 - 30 \neq 0$$

همدلت روښانه ده، چی ځواب نه شته(د 0=| 4 = D2له شميرلوکيدی شي، چی تيرشو)

بيلګه ۱۱ . ۹ :

موږ بالاخره غواړو چي په بيلګه ۱۱ . ۴ کی ورکړ شوی مساواتسيستم ته د ديترمينانت له لارې ځواب ورکړواو ددې لپاره لومړی   D , D1 او D2 شميرو:

$$D=\begin{vmatrix} \frac{1}{a+b} & \frac{1}{a-b} \\ \frac{1}{a-b} & \frac{1}{a+b} \end{vmatrix} = \frac{1}{(a+b)^2}-\frac{1}{(a-b)^2}=\frac{(a-b)^2-(a+b)^2}{(a+b)^2(a-b)^2}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \frac{a^2-2ab+{}^2-a^2-2ab-b^2}{(a^2-b^2)^2}=-\frac{4ab}{(a^2-b^2)^2};$$

$$D_1=\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{a-b} \\ 1 & \frac{1}{a+b} \end{vmatrix} = \frac{1}{a+b}-\frac{1}{a-b}=\frac{a-b-(a+b)}{(a+b)(a-b)}=-\frac{2b}{a^2-b^2};$$

$$D_2=\begin{vmatrix} \frac{1}{a+b} & 1 \\ \frac{1}{a-b} & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{a+b}-\frac{1}{a-b}=\frac{a-b-(a+b)}{(a+b)(a-b)}=-\frac{2b}{a^2-b^2}$$

لومړی حالت $ab \mid= 0$:

دلته دیترمینانت $D \mid= 0$ او دا د برابرونسیستم یواځنی ټاکلی ځواب دئ

$$x=\frac{D_1}{D}=\left(-\frac{2b}{a^2-b^2}\right):\left(-\frac{4ab}{(a^2-b^2)^2}\right)=\frac{2b}{a^2-b^2}\cdot\frac{(a^2-b^2)^2}{4ab}=\frac{a^2-b^2}{2a}$$

$$y=\frac{D_2}{D}=\frac{a^2-b^2}{2a}$$ (د $D1 = D2$ له امله)

دوم ۱ حالت $a=0,b\mid=0$: دلته $D = 0$ مگر

$D1 = D2 \mid= 0$

او د مساواتسیستم ځواب نه لري

دوم ۲

دلته $D = D1 = D2 = 0$

او ناپای ډیر ځوابونه موجود دي چې په بیلګه ۱۱ . ۴ کي بنوول شوي .

دوم ۳ حالت $a = b = 0$:

دلته مساواتسیستم هدفمند نه دئ (په صفر ویش مخ ته پروت دئ) مشوره کیږي چې

لاندی د برابرونونو سیستم دې د لاندې بریالي فورم بدلولو وروسته دبیلا بیلو لارو
ځواب شي او د ځواب متودونه دې یو د بل سره پرتله یا مقایسه شي.

$(a-b)x+(a+b)y=a^2-b^2$

$(a+b)x+(a-b)y=a^2-b^2$

١١ . ١ . ٤ د ګاوس الګوریتم

په ١١ . ١ . ٢ . برخه کي ځیرل شوو متودو ټیك په نظر نیولو سره (برابرو لیکلو- په
ځاي - او د زیاتون عملیه) ، کره پوهیدلی شو چی ددې په مرسته ټولیز د برابرونسیستم
(8 . 11)

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = a_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = a_2$$

په یوه درېګوډیز جوړ سیتسم

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = a_1$$
$$\ldots\ldots\ldots a_{22}x_2 = a_2$$

بدلولي شو، کوم چی بیا خورا ساده ځواب کیدی شي

١ . که a22 |= 0 وي، نو لاس ته راځي:

الف) $x2=a2/a22$

ب) برسیره پر دې که $a_{11} \neq 0$ وي، نو لاس ته راځي:

$$x1=(a1/a11)-(a12/a11)x2=$$
$$(a1/a11)-(a12/a11).(a2/a22)$$

٢ . که a22 = 0 او a2 |= 0 وي نو ځواب موجود نه دئ یا نه شته

٣ . که a22 =0 او a2 = 0 وي، نو ٢- م برابرون بی هوده دی (د ضرورت وړ نه
دی)، او سړی بیا ا. برابرون د ١١ . ١ . ١ برخی متود په مرسته ځوابولی شي.
د (11 . 8) سیستم د ځواب پرابلم په دې ډول کمیږي، چی دا سیستم په دریګوډی بڼه
یا – ځیره واړوي . هغه الګوریتم چی دا په هر حالت کی ځواب کولی شي، د ګاوس
الګوریتم دی. یا (11 . 8) سیستم دریګوډی ځیره لري او یا ټول aik د صفر سره
برابر نه دي.

په لاندې کی (11 . 8) سیستم په روڅنی - یا مروج ډول او هم شیماتیکي ډول لیکل کیږي.

		x1	x2	RS
I	$a11x1+a12x2= a1$	a11	a12	a1
II	$a21x1+a22x2= a2$	a21	a22	a2

(دلته RS د مساواتو د ښي خوا (ښ خ) یا ښی لور یا ښی اړخ مانا ورکوي)، که I په ځای پرېښودل شي اود II برابرون $a11 / a21$ - ځله له I برابرون څخه کم شي ، نولرو

		x_1	x_2	Rs
I	$a_{11}x_1+a_{12}x_2 = a_1$	a_{11}	a_{12}	a_1
II'	$0.x_1+(a_{12}-a_{11}.a_{22}/a_{21})x_2=a_1-a_{11}.a_2/a_{21}$	0	$a_1- a_{11}.a_{22}/a_{21}$	$a_1-a_{11}.a_2/ a_{21}$

که II' لنډ په دی فورم ولیکل شي

نو ټول سیستم لاندې شکل غوره کوي :

		x1	x2	RS
I	$a11x1+a12x2= a1$	a11	a12	a1
II'	$b22x2 = b2$		b22	b2

اوس بیرته باید زیات حالتونه یو له بل توپیر شي:

-که $b22 \ne 0$ وي ، نو x2 له II' او x1 له I لاس ته راځي.

-که $b22 = 0 , b2 \ne 0$ وي، نو ځواب وجود نه لري.

-که $b22 = b2 = 0$ وي، نو ناپای زیات ځوابونه موجود دي، چی له I او ۱۱ . ۱ . ۱ برخی ته ورته را څرګندیدی شي (معلومیدلی شي.)

سیستمونه ۱ ، ۲ ، ۳ د ګاوس په الګوریتم ښوول کیږي

بیلګه ۱۱ . ۱۰ :

دا سیستم داسی لیکل او شیماتیك کیږی:

		x_1	x_2	RS
I	$2x_1 + 3x_2 = 4$	2	3	4
II	$x_1 - 2x_2 = -5$	1	-2	-5

که غوښتونکی دریګوډیخیره غواړو لاس ته راولو نو Iهمداسی پریږدو او له II څخه دI یو یو په دوه ځله کموو :

		x_1	x_2	RS
I	$2x_1 + 3x_2 = 4$	2	3	4
II'	$0.x_1 - (7/2)x_2 = -5$	0	-7/2	-5

له 'II لاس ته راځي x2 = 2
او له I څخه لاس ته راځي. x1 = 2 -(3/2) x2 = -1

بیلګه ۱۱ . ۱۱:

دلته سیستمونه ۲ او ۳ یواځي په شیماتیکي ډول (جدول په شکل (څیړو. دلته د لمړی لیکی دوه ځله د دوهمی لیکی کمیږي

سیستم ۳

	x1	x2	RS
I	2	3	4
II	4	6	10
II'=II-2.I	0	0	2

سیستم۲

	x1	x2	RS
I	2	3	4
II	4	6	8
II'=II-2.I	0	0	0

په سیستم ۲ کی ګورو چی لمړی برابرون د دوم برابرون په مخامخ څه نوی نه لري (0 = 0 تضاد یا مخامخوالی نه شته). له دې امله یو برابرون (د بیلګي په توګه I) موجود دی چی د ۱۱ . ۱ . ۱ برخي او یا ۱۱ . ۲ په څیر ځواب کیږي. په سیستم ۳ کی تضاد همدا اوس لیدل کیږي" 0 = 2 " ، نو له دې امله ځواب نه شته.

بیلګه ۱۱ . ۱۲ :

سیستم I دې په څلور ډوله یا واریانتو د ګاوس الګوریتم په مرسته وڅیړل شي

دوم واریانت

	x1	x2	RS
I	2	3	4
II	1	-2	-5
II'=II+(2/3).I	7/3	0	-7/3
1.	2	1	-1

اول واریانت

	x1	x2	RS
I	2	3	4
II	1	-2	-5
II'=II-(1/2).I	0	-7/2	-7
2.	-1	2.	2

څلورم وایانت

	x1	x2	Rs
I	2	3	4
II	1	-2	-5
I=I-2.II	0	7	114
1.	-1	1.	2

دریم واریانت

	x1	x2	RS
I	2	3	4
II	1	-2	-5
I'= I+(3/2).II	7/2	0	-7/2
2.	2	2.	-1

دا دلته د يو ګڼ په چوکات یا څلورګوټیز کی نیول دا مانا لري چې د هغی د پاسه ناپیژندونکي د مساوات څخه شمیرل کیږي، کومه چې په هغه لیکه کی پرته ده چې چوکاټ شوي، دا په یواځني ډول دا مانا لري :

واریانت ۱:

ا) له I څخه دې x1 و شمیرل شي

ب) له 'II څخه دې x2 وشمیرل شي

پ) په 1 کی x2 له 'II شمیرل کیږي:

$$x2= -7 / (-7/ 2) =2$$

ت) په 2 کی x1 له I شمیرل کیږي:

$$x = (1/ 2)(4 - 3.2) = -1$$

واریانت ۲ :

ا) له I څخه دې x2 وشمیرل شي

ب) له 'II څخه دې $x1$ وشمیرل شي

پ (له 'II لرو: $x1 = -1$

ت) له I څخه لرو: $x2 = 2$

واریانت (امکان) ۳

ا) له II څخه دې $x2$ وشمیرل شي

ب) له 'I څخه دې $x1$ وشمیرل شي

پ) له 'I لرو $x1 = -1$

ت (له II لرو $x2 = 2$

واریانت (امکان) ۴

ا) له II دې $x1$ و شمیرل شي

ب) له 'I څخه دې $x2$ وشمیرل شي

پ (له 'I لر $x2 = 14 / 7 = 2$

ت) له II لرو:

$x1 = -5+2.2 = -1$

ټولی څلور واریانتی یا امکانت برابر ارزښتونه لری، خو دا چی په څلورمه واریانت کی په ټولګڼونو شمیرنه کیږي، »مخته وونه« یا مخوونه(برتري) یا نوره هم ښه وړاندې توب ورکول کیږي.

۱۱ . ۱ . ۵ له دوه وو زیات برابرونونه د دوه ناپیژندونکو سرهره

که څوك له دوه زیات برابرونونه د دوه اوښتونو یا ناپیژندونکو سره ځواب کوي، په ټولیزه (عمومي) توګه باید په نخښه شي چی لومړي دوه برابرونونه $x1, x2$ ځوابونه لري. که دا ځوابونه په نورو برابرونونو کی ځای په ځای شي تضاد ته رسیږو. د دوه ناپیژندونکو سره له دوه زیات مساوات په ټولیزه توګه حل نه لري. یواځي په ځانګړی حالت کی دا سیستم ځواب لرودی شي. موږ دا پروسه اول په عمومي ښوونلارې څیړو او بیا د ګاوس الګوریتم له لارې.

بیلګه ۱۱ . ۱۳: لاندني دوه سیستمونه ورکړ شوي دي

$$\text{a) } \begin{array}{ll} I & x1 + 2x2 = 3 \\ II & 2x1 - x2 = 1 \\ III & 3x1 + x2 = 2 \end{array} \qquad \text{b) } \begin{array}{ll} I & x1 + 2x2 = 3 \\ II & 2x1 - x2 = 1 \\ III & 3x1 + x2 = 4 \end{array}$$

له I او II څخه د څرګندو یا معلومومتودونو له لارې په دواړو سیستمونو کی لاندې، په لومړی ځل یواځنی پیژندل شوی، ځواب لاس ته راځي۰

له) a او)b ځخه لرو $x1 + 2x2 = 1$ که دا ارزښتونه په IIIکی ځاي په ځاي شي نو لرو:

په (a) کې :$4 = 1.1+3.1$ |= 2, په (b) کی : $4 = 1.1 + 3.1$

نو سیستم (a) ځواب نه لري او سیستم ($\hat{b}$) یواځني ټاکلی ځواب لري

یعني $x1=x2=1$

بیلګه ۱۱ . ۱۴ :

په بیلګه ۱۱ . ۱۳ کي ورکړ شوي مساوت اوس د ګاوس د الګوریتم له لارې ځواب کوو.

a)	x1	x2	RS	b)	x1	x2	RS
I	1	2	3	I	1	2	3
II	2	-1	1	II	2	-1	1
III	3	1	3	III	3	1	4
II'=II-2.I	0	-5	-5	II'=II-2.I	0	-5	-5
III'=II-3.I	0	-5	-7	III=III-3.I	0	-5	-5
III''=III'-II'	0	0	-2	III=III'-II'	0	0	0

په a) کی تضاد پیژندلکیږي (III':0.x1+0.x2=-2) ځواب نه شته یا وجود نه لري .

په b) کی تضاد مخ ته نه دی پروت .(III':0.x1+0.x2=0) لهII' ځخه لرو:

$x2 = 1$ او له I ځخه لاس ته راځی : $x1=3-2.1=1$

۱۱ . ۲ لاینیزبرابرونتسیستم د دريې ناپیژندونکو سره

۱۱. ۱ ۰ ۲ ۰ یو برابرون د دري ناپیژندونکو سره

مو ږ یو مساوات د دري ناپیژندونکو سره تر ځیرني لاندې نیسو:

$$a11x1 + a12x2+ a13x3 = a1 \quad (11 . 21)$$

دوه مختلف حالتونه ۱ او ۲ او نورمال فورم ۳ ممکن دي

$$I . \quad a11=a12=a13=0 \qquad (11 . 22)$$

دلته x1 , x2 او x3 یو له بل پوره خپلواك ټاکل کیدی شي. ویل کیږي چی ناپاي ډیر ځوابونه مخ ته پراته دي (x1 په خوښه، x2په خوښه او x3په خوښه)

$$2. \quad a11=a12= a13= 0 ,a1|=0 \quad (11 . 23)$$

دلته تضاد مخ ته پروت دی

$0x1+0.x2+0.x3 = a1 \neq 0$

اوبيونه نه شته.

۳- د کم له کمه يوه ځلجوړې i, k لپار دې $aik \neq 0$ وي. (بې د ټوليز وبنديزونو يا عموميت د محدود والی دې $a11 \neq 0$ وي (. کيدی شي چی $x2$ او $x3$ په خوښه وټاکل شي (ناپاي ډير ځوابونه)، او لاس ته راځي

$x1=(1/a11)(a1-a12x2-a13x3)$ په خوښه$x1$ او $x3$ (11,24)

۱۱ . ۲ . ۲ دوه برابرونونه د درې ناپيژندونکو سره

لاندې د دوه برابرونسيستمونه د درې اوښتونو يا ناپيژندونکو سره

$a11x1+a12x2+a13x3=a1$ (11,25)

$a21x1+a22x2+a23x3= a2$ (11,25)

موږ دا را ويستلي حالتونه ، چيرته چی د ټولو i, kلپاره$aik= 0$ ، په پام کی نه نيسو. دا حالت هم په پام کي نه نيسو چی دوم برابرون د لومړي په څير وي (ناپاي ډير ځوابونه. او يا دوهم برابرون د لمړي سره په مخامخوالي يا ښتوالي يا تضاد کی وي (ځواب نه وي) . دا ټول حالتونه اسان پيژندونکي دي. موږ په يوه بيلګه کی دا اصلي حالت څيړو چی يو ناپيژندونکي يا نامعلوم (د بيلګي په توګه $x3$) په خوښه ټاکل کيږي او دا نورې دوه ناپيژندونکی يا اووښتونې ($x1$ او $x2$) يواځنی لاس ته راځي، او يا يواځنی ورکول کيدی شي (ناپاي ډير ځوابونه).

بيلګه ۱۱ . ۱۵:

		x1	x2	x3	RS		
I	$x1+x2+x3=3$	1	1	1	3		
II	$x1+2x2+3x3=6$	1	2	3	6		
II'=II-I	$0.x1+x2+2x3=3$	0	1	2	3		

له II' لاس ته راځي

$x2 = 3 -2x3$

له I څخه لاس ته راځي

$x1=3-x2-x3=3-(3-2x3)-x3, x1= x3$

او له دې لاس ته راځي
,x1=x3,x2 = 3 -2x3 x3 په خوښه.

۱۱ . ۲ . ۳ دریمه درجه دیترمینانت او د کرامر قاعده

اوس درې برابرونونه یا معادلې یا مساوات د درې ناپېژندونکو سره څیړو

$$\begin{aligned}
&\text{I} && a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3= a_1 && (11 . 26)\\
&\text{II} && a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3= a_2 && (11,26)\\
&\text{III} && a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3= a_3 && (11,26)
\end{aligned}$$

له دې سیستم څخه کیدی شي چې د ۱۱ . ۱ . ۲ برخې د برابر لیکلو او یو د بل په ځای لیکلو متودونه په ساده ډول استعمال شي. د زیاتونتیورم (-قضیه) فکر غواړي او د دریمي درجي دیترمینانت او د کرامر قاعدې په لور مو د (۱۱ . ۲۶) سیستم ځواب پیدا کولو لپاره هڅوي

پیژند ۱۱ . ۲:
رییل ګڼونو aik (i,k = 1,2,3 (یو درې درجه منظم د دیتمرمینانت سیستم

$$D=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix};\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots(11,27)$$

لاندې سرې لاندنی رییلګڼ پوهیدلی شي):

$$D=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}=a_{11}\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}-a_{12}\begin{pmatrix} a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33}\end{pmatrix}+a_{13}\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{pmatrix}=$$

$$a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32)})-a_{12}(a_1a_{33}-a_{23}a_{31})+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{33});\dots\dots\dots\dots(11,28)$$

له دې سره د دریمی درجي دیترمینانت شمیرنه د دوهمی درجی دیترمینانت په شمیرنه بدله شوه. . ۱۱ . ۲ تعریف او په ځانګړې توګه) 28. 11 (فرمول په لاندې ډول توضیح کیدی شي:
پیژند ۱۱ . ۳ : په (11 . 27) کی د دیترمینانت D لاندېدیترمینانت Aik لاندې هغه دومه درجه دیترمینانت پوهیدلی شو، چی د D دیترمینانت i- می لیکی او k - م درځ یا متې د لرې کولو یا د منځه وړلو له لارې منځ ته راځي(زه د ماتریکس په دننه

کې دا ليکې او مټې يا ستې له منځه نه شم وړلی، خو دا کومې ستونځې نه پيښوی ، ځکه، چې لاس ته راوړنه يې پسې ليکل شوې)

$$A_{11} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$A_{12} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$A_{13} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

په دې ډول کيدی شي چې د ۱۱ . ۲ ديترمينانت په دې فورم وليکل شي

پيژند ۱۱ . ۴ :
د دريمی درجي ديترمينانت D لاندې، چې په (11 . 27) کی ورکړ شوی دی، دا لاندې ګڼ پو هيدل کيږي:

$$D = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

د زياتون عمليي ځخه، چې دلته نسبت د دوه ناپيژندونکو مساواتو ته چې دوه ناپيوندونکی لري، روښانه ده، د (11 . 26) ځخه لاس ته راوړل کيږي:

$$Dx1 = D1 \,,\; Dx2 = D2 \,,\; Dx3 = D3 \quad (11 . 29)$$

په داسی حالت کی چې Di داسي لاس ته راځي چې د ځله وونوديترمينانت (11 . 28) کی سړی i - م درځ يا ستن يا مټه د (11. 26) برابرون ښي لور ته ځای په ځای کړي.

$$D_1 = \begin{pmatrix} a_1 & a_{12} & a_{13} \\ a_2 & a_{22} & a_{23} \\ a_3 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}; D_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_1 & a_{13} \\ a_{21} & a_2 & a_{23} \\ a_{31} & a_3 & a_{33} \end{pmatrix}; D_{13} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_3 \end{pmatrix}; \ldots\ldots (11,30)$$

موږ دا نتيجه بي له ښووني ورکوو.
له (۱۱ . ۲۹) ځخه لاندې جملی لاس ته راځي:

جمله ۱۱ . ۴ (د کرامر قاعده) :
که د (۱۱ . ۲۶) د ځله وونوديترمينانتو(۱۱). ۲۷ ،په همدې ډول (۱۱ . ۲۸) لپاره

$D \neq 0$ (11 . 31)

با وري وي ، نو (۱۱ . ۲۶) برابرونسيستم يواځنی ځواب لري

$x3=D3/D$; $x2=D2/D$; $x1=D1/D$ (11,32)

جمله ۱۱ . ۵ :

که $D = 0$ مګر $|Di| = 0$ کم له کمه د يوه i ($i = 1,2,3$) لپاره وي، نو د (۱۱ . ۲۶) برابرونسيستم ځواب نه لري (په (۱۱ . ۲۹ کی تضاد دی)

جمله ۱۱ . ۶ :

که $D = D1 = D2 = D3 = 0$ وي، نو په (۱۱ . ۲۶) کی کم له کمه يو برابرون له ضرورته زيات دی او دا (۱۱ . ۲۶) برابرونسيستم کيدي شي چي د ۱۱ . ۲ . ۲ متودونو بانديې ځواب شي (وړانديز دئ چی د ګاوس الګوريتم له متود ; چی په ۱ . ۲ . ۴ برخه کی ورکړ شوي ځواب شي.)

بيلګه ۱۱ . ۱۶ :

په لاندې سيستم

$$\begin{aligned} &\mathrm{I} && x1 \quad\;\; -x3 = -2 \\ &\mathrm{II} && x1 + x2 - x3 = 0 \\ &\mathrm{III} && 2x1 - x2 \quad\;\; = 0 \end{aligned}$$

کی دئ

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = 1.\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - 0.\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + (-1).\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = -1 - 0 - 1.(-1-2) = 2$$

$$D_1 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - 0\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - 1\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = 2;$$

$$D_2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1.\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - (-2)\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} - 1.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = 4;$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1.\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 9 \end{vmatrix} - 0.\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 6$$

نو يواځنی ټاکلی ځواب موجود دی.

$x1=D1/D=2/2=1,\ x2=D2/D=4/2=2,\ x3=D3/D=6/2=3$

بيلګه ۱۱ . ۱۷ :

په لاندې سيستم

$$\begin{array}{ll} I & x1 + x2 + x3 = 0 \\ II & x1 \quad -x3 = 0 \\ III & 2x1 + x2 \quad =1 \end{array}$$

کي دی.

دا بيلګه دې ګران لوستونکی پخپله وښايي ، چې اوبيونه نه شته ۰ دې ته بايد ګوته ونيسم، $D = 0$ او $D1= -1 |= 0$ ، چې ځواب نه لري۰

۱۱ . ۲ . ۴ د ګاوس الګوريتم

د ګاوس الګورتيم لومړی د (۱۱ . ۲۶) برابرونسيستم لپاره استعماليږي. دا د دوه مساواتو لپاره چې درې ناپيژندونکي لري او همدارنګه د زياتو مساواتو سيستم لپاره چې درې ناپيژندونکي لري د استعمال وړ دی.

د ګاوس د الګوريتم موخه په دې کی پرته ده چی (11 . 16) سيستم د ورته بدلونفورم له لارې په دريګوډيفورم را اوړي.

$$\begin{array}{lr} I & a11x1+a12x2+a13x3=a1 \quad (11 . 34) \\ II & b22x2+b23x3=b2 \\ III & c33x3=c3 \end{array}$$

بنسټيز حالت : که $a11|=0, b11|=0, c11|=0$ وي نو يو په بل پسی سړی کړی شي چی له III $x3$, او له II $x2$, وشميري. مګر په (11 . 34) کی ځانګړي حالتونه هم پيژندل کيږي:

-که $c3|=0, c33=0$ وې، نو يو په ځتوالی يا تضاد مخ ته پروت دی، ځواب وجود نه لري

- که $c3=c33=0$ وی، نو III له ضرورتزيات دی سړی يواځی I او II څيړي.

- که $c33=c3=0$ او برسيره پر دې $a11|=0, b11|=0$ وي، نو $x3$ په خوښه ټاکل کيدی شي او $x2$ له II او $x1$ له I چی $x3$ ته اړ وي، شميرلکيدی شي (ناپای ډير ځوابونه)

-برسيره پر دې که $b22=b23=0$, $b2|=0$ وي، نو ځواب وجود نه لري

-که نور هم ولرو چی $c33=c3=0$ او $b22=b23=b3=0$ وي ، نو II له ضرورت زيات دی او له $a11|=0$ کيدی شي چی $x2$ او $x3$ په خوښه وټاکل شي، او $x1$ له I لاس

ته راځي چی $x2$ او $x3$ ته اړ (په واك کی یا تابع) وي (ناپاي ډیر ځوابونه ځوابونه) .
که ټول ځلونه او د مساواتو ښی خوا صفر وي ، نو ناپاي ځوابونه موجود دی.

د ګاوس الګوریتموس د دريِ ناپیژندونکو(11 . 26) سره له دوه پلونو(قدم) جوړ دئ
لومړی پل (قدم) : نیسو چی په (11 . 2 6)کی $|a11 =| 0$ دی. دا د نمريِ بدلولو په بنسټ همیشه لاس ته راوړی شو) بي له ورکړ شووحالتونو) چی ټول $aik = 0$ وي) .
دلته I ورکول کیږي، او له II د I دا $a21/a11$ - ځله او له III دا $a31 / a11$ - ځله د I کموي. ددې څخه لاندې سیستم لاس ته راځي:

$$
\begin{array}{lr}
\text{I} & a11x1+a12x2+a13x3=a1 \quad (11 . 35) \\
\text{II} & b22x2+b23x3=b2 \\
\text{III} & c33x3=c3
\end{array}
$$

دویم پل (قدم) : د $b22 |=0$ نیوني سره په II' او III' باندې د ۱۱ . ۱ . ۴ برخي سره سم د ګاوس الګوریتم استعمالیږي : سړی II' بي تغیره پریږدي اولهIII' دا $b32/b22$-ځله د II' کموي، له دې راپیداکیږي

$$
\begin{array}{lr}
\text{I} & a11x1+a12x2+a13x3=a1 \quad (11 . 37) \\
\text{II} & b22x2+b23x3=b2 \\
\text{III} & c33x3=c3
\end{array}
$$

د ګاوس د شیما فورمالیتي سره سم بیا دا شکل غوره کي

	x1	x2	x3	RS
I	a11	a12	a13	a1
II	a21	a22	a23	a2
III	a31	a32	a33	a3
II' = II-(a21/a11)I		b22	b23	b2
III' = III-(a31/a11)I		b32	b33	b3
III'' = III' - (b32/b22)II'			c33	c3

$$x3 = c3 / c33$$

$$x2=(1/b22)(b2-b23x3)$$

$$x1=(1/a1)(a1-a12x2-a13x3)$$

بيلګه ۱۱ . ۱۸ : دا سيستم ۰(مقايسه بيلګه ۱۱ . ۱۶)

$$\begin{array}{ll} \mathrm{I} & x_1 - x_3 = -2 \\ \mathrm{II} & x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ \mathrm{III} & 2x_1 - x_2 = 0 \end{array}$$

د ګاوس الګوريتم سره په لاندې ډول حل کيږي

	x1	x2	x3	RS
I	1	0	-1	-2
II	1	1	-1	0
III	2	-1	0	0
II'= II - I	0	1	0	2
III'= III - 2.I	0	-1	2	4
III'' = III' + II'		0	2	6

$x_3=6/2=3$

$x_2=2$……………………

$x_1=-2+x_3=-2+3=1$

بيلګه۱۱ . ۱۹: (پرتله بيلګه ۱۱ . ۱۷) دا سيستم

$$\begin{array}{ll} \mathrm{I} & x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ \mathrm{II} & x_1 - x_3 = 0 \\ \mathrm{III} & 2x_1 + x_2 = 1 \end{array}$$

د ګاوس د الګوريتم په مرسته په لاندې ډول حل کيږي

	x1	x2	x3	RS
I	1	1	1	0
II	1	0	-1	0
III	2	1	0	1

II'=II-I	0	-1	-2	0
III'=III-2.I	0	-1	-2	1
III''=III'-II'	0	0	0	1

دلته دی "0 = 1 " تضاد. سيستم نه اوبی کيږي يا حل نه لري.

بيلګه ۱۱ . ۲۰: (مقايسه يا پرتله بيلګه ۱۱ . ۱۷) دا سيستم

I $x_1 + x_2 + x_3 = 3$

II $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6$

III $2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 9$

په لاندې ډول د ګاوس په الګوريتم اوبيونه ده

	x1	x2	x3	RS
I	1	1	1	3
II	1	2	3	6
III	2	3	4	9
II'=II-I	0	1	2	3
III'=III-2I	0	1	2	3
III'' = III'-II'	0	0	0	0

$x_3=$ په خوښه

$x_2 = 3 - 2x_3$

$x_1 = 3 - x_2 - x_3 = 3 - (3 - 2x_3) - x_3 = x_3$

۱۱ ۰ ۳ په خوښه ډير مساوات ، په خوښه ډير ناپيژندونکو سره

موږ په عمومي ډول د لاينيز سيستم برابرونونو په لار ښونی پيل کوو m (برابرون د nناپيژندونکو سره)

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+....+a_{1n}x_n=a1..................(11,37)$$
$$a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}+....+a_{2n}x_n=a_2$$
$$...$$
$$...$$
$$a_{nm}x_1+a_{m2}x_2+a_{m3}x_3+.....+a_{mn}x_n=a_m$$

دا په خوښه یا ازاد پرېږدو چې د برابرونونو ګڼون (تعداد) m د ناپیژندونکو n د ګڼون (تعداد) څخه لوي، کوچنی او که برابر دی. په څرګندو دندو یا وظایف موږ دلته له څلور ناپیژندونکو څخه نه پورته کېږو او یوائې لاندې دوه متودونه څېړو

۱۱ ۰ ۳ . ۱ د n - م درجې دیترمینانت او د کرامر قاعده

پیژند ۱۱ . ۵ :
د n ریبل ګڼونو aik یوه منظم سیستم n- م درجي دیترمینانت

$$D=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix};........................(11,38)$$

لاندې سرِی لاندنې ریبل ګڼ پوهیږي:

$$D=a_{11}A_{11}-a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}-a_{14}A_{14}+...\pm a_{1n}A_{1n}.....(11,39)$$

دلته aik غړي پورې مربوطه لاندې دیترمینانت Aik د (n-1) - م درجې دیترمینانت ده، چې پاتیږي، که په Dکې i - مه لیکه او k - م درځ ، متِه یا ستن (لیکه او درځ چې aikپه کې ولاړ وی) په کرښه لرې کړي یا کرښه پرې تیره کړي، یعنی ووهي.

په دې ډول د-n ام درجې دیترمینانت شمیرل و- (n-1)-ام درجې دیترمینانت شمیرلو ته راتیتیږي .
په ځانګړي توره د څلورمی درجې دیترمینانت لپاره دا لرو

$$A_{11}=\begin{vmatrix} a_{22}a_{23}a_{24} \\ a_{32}a_{33}a_{34} \\ a_{42}a_{43}a_{44} \end{vmatrix}; A_{12}=\begin{vmatrix} a_{21}a_{23}a_{24} \\ a_{31}a_{33}a_{34} \\ a_{41}a_{43}a_{44} \end{vmatrix};....A_{1n}\,etc$$

که n برابرونونه د n ناپیژندونکو سره مخ ته ولرو) په) 11 . 37 (کی لرو) n=m د جمع تیورم په مرسته داسی سیستمونو لپاره لاندې نتیجه لاس ته راوړو

$$Dx1=D1,Dx2=D2, ...Dxn= Dn \qquad (11 . 42)$$

د Di دیترمینانت داسی لاس ته راځي چی د ځله وونویا ضریبونو په دیترمینانت) ۱۱ . ۳۸ (کی د-i ام درځ متې یا ستن د برابرونسیستم د ښي لاس سره بدل کړي .

د بیلګی په توګه یوسیستم د ۴ مساواتو او۴ ناپیژندونکو سره (پرتله مقایسه ۱۱ . ۴۰)

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_1 a_{12} a_{13} a_{14} \\ a_2 a_{22} a_{23} a_{24} \\ a_3 a_{32} a_{33} a_{34} \\ a_4 a_{42} a_{43} a_{44} \end{vmatrix} ; D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} a_1 a_{13} a_{14} \\ a_{21} a_2 a_{23} a_{24} \\ a_{31} a_3 a_{33} a_{34} \\ a_{41} a_4 a_{43} a_{44} \end{vmatrix} ; .... (11,43)$$

له(11 . 42) څخه لاس ته راځي

جمله ۱۱ . ۷ (د کرامر Cramer قاعده):

د ځله وونې یا ضریب دیترمینانت (۳۸.۱۱) لپاره د یوه مساوات سیستم د n مساواتو د nناپیژندوکو سره په (۱۱ . ۳۷) د m = n سره) باوري دی

D |= 0 (اصلي حالت) (44 . 11)

نو دا برابرونسیستم یواځنی ټاکلی ځواب لري(حل لري

$$x1=D1/D,x2=D2/D,...,xn=Dn/D. \quad (11 . 45)$$

برعکس که , D = 0 مګر D1 |= 0 کم له کمه د یوه i لپاره نو دا سیستم حل نه لري . که D=D1=D2=...=Dn=0 وي، نو کم له کمه یو مساوات غیر ضروري دی (دلته د اوبیونې لپاره د ګاوس الګوریتم وړاندیز کوو)

بیلګه ۱۱ . ۲۱:

لا ندې سیستم دې حل شي

I	x_1		$+x_3$		$= 0$
II	$2x_1$	$+x_2$		$+x_4$	$=0$
III		x_2		$-x_4$	$= 4$
IV	x_1	$-x_2$	$-x_3$	$+x_4$	$= -2$

$$D=\begin{vmatrix}1010\\2102\\010-1\\1-1-11\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}102\\10-1\\-1-11\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}212\\01-1\\1-11\end{vmatrix}=-3-3=-6$$

$$D_1=\begin{vmatrix}0010\\0102\\410-1\\-2-1-11\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}012\\41-1\\-2-11\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}2-1\\-21\end{vmatrix}+2.\begin{vmatrix}41\\-2-1\end{vmatrix}=-2-4=-6$$

$$D_2=\begin{vmatrix}1010\\2002\\040-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}002\\40-1\\-2-11\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}202\\04-1\\1-21\end{vmatrix}=2.\begin{vmatrix}40\\-2-1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}2\begin{vmatrix}4-1\\-21\end{vmatrix}\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}04\\1-2\end{vmatrix}=$$

$$=2.(4)+.2+2.(-4)=-12$$

$$D_3=\begin{vmatrix}1000\\2102\\014-1\\1-1-21\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}102\\14-1\\-1-21\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}4-1\\-21\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}2.\begin{vmatrix}14\\-1-2\end{vmatrix}=4-2+2(-2+4)=6\end{vmatrix}$$

$$D_4=\begin{vmatrix}1010\\2100\\0104\\1-1-1-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}100\\104\\-1-1-2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}210\\014\\1-1-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}04\\-1-2\end{vmatrix}+2.\begin{vmatrix}14\\-1-2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}01\\1-2\end{vmatrix}=$$

$$=4+2.2-(-4)=12;$$

$$x_1=\frac{-6}{-6}=1;x_2=\frac{-12}{-6}=2;x_3=\frac{6}{-6}=-1;x_4=\frac{12}{-6}=-2$$

۱۱ .۳ . ۲ د ګاوس الګوریتم:

موږ ولیدل چی د ګاوس الګوریتم له لارې د مساوتو یو دریکوجشکل سیستم لاس ته راوستی شو، چی د هغي له مخی څرګندولی شو چی کوم حل)ځواب(مخ ته پروت دی .

دا په لاندې بیلګه څرګندوو

بیلګه ۱۱ . ۲ ۲ :

که په بیلګه ۱۱ . ۲۱ کی ورکړ شوی سیستم د ګاوس الګوریتم له لارې حل کړو، نو لاندني شیما لاس ته راځي:

	x1	x2	x3	x4	Rs
I	1	0	1	0	0
II	2	1	0	2	0
III	0	1	0	-1	4
IV	1	-1	-1	1	-2
II'=II -2.I	0	1	-2	2	0
4III' = III	0	1	0	-1	4
IV' = IV-I	0	1	-2	1	-2
III'' = III' - II'	0	0	2	-3	4
IV'' = IV' +II'	0	0	-4	3	-2
IV''' = IV'' + 2.II''	0	0	0	-3	6

$x4 = -2$

$x3=1/2(4+3.(-2))= -1$

$x2=0+(-1)(-2)= 2$......

$x1 = -(-1) = 1$ ....

بیلګه ۱۱ . ۲۳:

دا برابرونسیستم

I x1 +x2 +x3 +x4=4

II x1 -x2 -x3 +x4=0

III 3x1 -x2 -x3 +x4=2

حل یا اوبیونه ی نه لرې، لکه د ګاوس له شیما څخه چی لیدل کیږي:

	x1	x2	x3	x4	RS
I	1	1	1	1	4

II	1	-1	-1	1	0
III	3	-1	-1	3	2
II' = II-I	0	-2	-2	0	-4
III' = III-3.I	0	-4	-4	0	-10
III'' = III' - 2.II'	0	0	0	0	-2

دلته "III په ښتوالی یا تضاد خوندي لري " 0 = 2- "

بیلګه ۱۱ . ۲۴:

لاندې سیستم د ۵ برابرونونو او ۴ ناپیژندونکو سره

I $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4$

II $x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0$

III $3x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 = 4$

IV $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 10$

V $3x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 8$

ګورو چی oe1 (ناپای ډیر) اوبیوني لري

	x1	x2	x3	x4	RS
I	1	1	1	1	4
II	1	-1	-1	1	0
III	3	-1	-1	3	4
IV	1	2	3	4	10
V	3	1	1	3	8
II' = II-I	0	2	- 2	0	-4
III'= III-3.I	0	-4	-4	0	-8
IV' = IV -I	0	1	2	3	6
V' = V-3.I	0	-2	-2	0	-4

II"= II'+2.IV'	0	0	2	6	8
III'=III'+4.IV'	0	0	4	12	16
V" = V' +2.IV'	0	0	2	6	8
III''' = III"-2.II'	0	0	0	0	0
V'''=V"-II	0	0	0	0	0

ګورو چی III''' او V''' تضاد نه لري. سړی کړي شي چی x4 په خوښنه وټاکي او لاس ته راوړي

له , x3=4-x4 "II له x2=6-2(4-3x4)-3x4=-2+3x4 'IV او لهI

x=4-x2-x3-x4=4-(-2+3x4)-(4-3x4)-x4=2-x4

نو x1=2-x4   په خوښنه x4 ټاکو

او x2=-2+3x4   ، په خوښنه x4 ټاکو

او x3=4-3x4   په خوښنه x4 ټاکو

یادونه : هغه ګڼ یا نوره هم ښه هغه ځله وونی، چې غواړو صفر شي یا له منځه وړو هغه مو شنه کړي٠

سړی د ګاوس شیما په دوم بلاك کی پیژندلی شي، مساوات، کوم چی په 'III او 'V پورې اړه لري، بل څه نه افاده کوي په غیر له هغی چی په 'II اړه لرونکي دي. کیدی شو چی په 'III او 'V لیکو مو کرښه تیره کړې وی) له منځه وړې وی (. دریم بلا ك به یواځي له کرښی 'II جوړ وی، او د ګاوس الګوریتم به له دې سره پاي میندلی وی.

۱۱ . ۴ هوموژین مساواتسیستم:

د n مساواتو یو سیستم د n نامعلومو سره چی د ټولو مطلقه غړي ورك شي، هموګین مساواتسیسمتم بلل کیږي   .

د n = 3 لپاره دا د مثال په توګه هوموګېن سیستم بلل کیږي

$$
\begin{aligned}
&\text{I} \quad a11x1+a12x2+a13x3= 0.............\\
&\text{II} \quad a21x1+a22x2+a23x3= 0 \quad (11.\ 46\\
&\text{III} \quad a31x1+a32x2+a33x3= 0.................................
\end{aligned}
$$

یو داسی هموژینسیستم تل یوه اسانه اوبیونه یا اسان حل لري

$$x1=x2=x3=...=xn=0 \qquad (\ 11.\ 47\ )$$

که د ځلوونو د یترمینانت (۱۱ . ۳۸) لپاره D |= 0 باور ولري، نو د جملی ۱۱ . ۷ شیما څخه یواځي اسان trivial اوبیونه یاحل موجود دی او باور لري

جمله ۱۱ . ۸ : یو هوموګین مساواتسیستم یواځ هلته سخت حل لري، که $D = 0$ باوري وي

بیلګه ۱۱ . ۲۵ :

دا هوموژین برابرونسیستم

$$\begin{array}{lr} \mathrm{I} & x_1 \quad +x_3=0 \\ \mathrm{II} & x_1 \ -x_2 \quad =0 \\ \mathrm{III} & x_1 \ +x_2 +x_3=0 \end{array}$$

د

$$D=\begin{vmatrix}1&0&1\\1&-1&0\\1&1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1&0\\1&1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&-1\\1&1\end{vmatrix}=-1+(1+1)\neq 0$$

له امله یواځنی ساده اوبیونه $x_1=x_2=x_3=0$ لري.

بیلګه ۱۱ . ۲۶:

دا هموګین مساواتسیستم

$$\begin{array}{lr} \mathrm{I} & x_1 \quad +x_3 = 0 \\ \mathrm{II} & x_1 +x_2 \quad = 0 \\ \mathrm{III} & x_1 +x_2 +x_3 = 0 \end{array}$$

$$D=\begin{vmatrix}1&0&1\\1&-1&0\\0&1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1&0\\1&1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&-1\\0&1\end{vmatrix}=-1+1=0$$

د

له امله ناساده اوبنونه هم لري دا په لاندې ډول د ګاوس د الګوریتموس څخه لاس ته راځي: په لاندې کې RS د پاتې- یا باقي سیستم په معنا دی.

x1 x2 x3 RS

---

0 0 1 I 1

0 II 1 -1 0

0 III 0 1 1

II'=II-I 0 -1 -1 0

III' = III 0 1 1 0

II'' = II + III' 0 0 0 0

گورو چی II"تضاد نه لري x3په خوښه ټاکو، او له III' لاس ته راځيx3-=x2 او له I
څخه لاس ته راځي x3-=x1نوx3- =x1نو X3 په خوښه او x3- = x2 نوx3 په خوښه

. تمرینونه

د نامعلومو لپاره -لکه له ښوونځي چې ورسره بلد یو-پوهیږو او یا هم

۱ – کرښیز مساواتسیستم له دوه مجهولو سره.

مشوره مو داده، چې د دې تمرینونو د حل لپاره د مختلفو تګلارو څخه کار اخستلس شي، چې بیایې و ازمایو. د لته دې د زیاتون یا جمعې قانون او همداسې د ګاوس الګوریتم ته لومړیتوب ورکړ شي ا و د دیترمینانت سره شمیرنه دې یوه بله د استعمال لار وي.

۱ . ۱ – مساوتسیستم د ټاکلو ضریبونو سره

1.1.1. a) $\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &= 8 \\ 3x_1 - 6x_2 &= -30 \end{aligned}$ b) $\begin{aligned} x_1 &= 3x_2 - 14 \\ x_2 &= 3x_1 - 22 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} 51x - \frac{3}{20y} &= 3 \\ 48x - \frac{1}{10y} &= 2 \end{aligned}$ d) $\begin{aligned} \frac{1}{x} + \frac{2}{y} &= 3 \\ \frac{5}{x} - \frac{1}{y} &= 4 \end{aligned}$

1.1.2. a) $\begin{aligned} 5(x_2 + 2) - 3(x_1 + 1) &= 23 \\ 3(x_2 - 2) &= 19 - 5(x_1 - 1) \end{aligned}$ b) $\begin{aligned} 3(2x_1 - x_2) + 4(x_1 - 2x_2) &= 87 \\ 2(3x_1 - x_2) - 3(x_1 - x_2) &= 82 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} 4 - \frac{1}{3}\left(2x - y - \frac{9}{2}\right) &= \frac{1}{8}(3x - 6 - 4y) \\ 4 - \frac{x - \frac{1}{2}y + 3}{3} &= \frac{2y - x - 6}{8} \end{aligned}$ d) $\begin{aligned} 3y - \frac{3(4x - 3y)}{2} &= 2x - 3y - 1 \\ 3x - \frac{3(3x - 2y)}{5} &= 5x - 3y - 1 \end{aligned}$

1.1.3. a) $\begin{aligned} \frac{1}{\frac{7}{2}x - 3} &= \frac{1}{4y - 3} \\ \frac{1}{\frac{5}{2}x + 4} &= \frac{1}{3y + 1} \end{aligned}$ b) $\begin{aligned} \frac{1}{3x - 5} &= \frac{4}{7y - 13} \\ \frac{1}{y - x} &= \frac{8}{3x + y} \end{aligned}$

c) $\frac{1}{y-10} = \frac{25}{12x+19}$
$\frac{1}{45-x} = \frac{8}{15y+1}$

d) $4+y = x$
$\frac{2}{5-3x} = \frac{3}{7-2y}$

1.1.4. a) $(x-1)(2y+5) = (y+1)(2x-1)$
$(2x+7)(y-2) = (2y-3)(x+2)$

b) $4(5y-3)(2x+1) = (10x+7)(4y-3)$
$2(2y+1)(x+4) = (2x+5)(2y+3)$

c) $\frac{1}{x}+\frac{1}{y} = \frac{1}{2}$
$\frac{1}{x}-\frac{1}{y} = \frac{1}{6}$

d) $\frac{3}{x}+\frac{8}{y} = 3$
$\frac{15}{x}-\frac{4}{y} = 4$

1.1.5. a) $\frac{9x_1}{2}+\frac{3x_2}{2} = 3$
$3x_1+x_2 = 2$

b) $\frac{2x_2-5x_1}{6}+\frac{x_1}{6} = \frac{x_2-2x_1}{3}$
$\frac{5-3x_1}{3}-\frac{4x_2-1}{4} = \frac{6x_1+23}{12}-\frac{3x_1-4x_2}{2}$

c) $\frac{12}{4x_1+3x_2}-\frac{1}{3(3x_1-2x_2)} = \frac{1}{6}$
$\frac{5}{3x_1-2x_2}+\frac{6}{4x_1+3x_2} = 5{,}25$

d) $3(x_1-2)+4(2x_2+\frac{3}{2}) = 0$
$5(x_1+3)-3(x_2-\frac{1}{3}) = 16$

1.1.6. a) $3x_1+4x_2 = 8$
$5x_1-2x_2 = 9$
$7x_1-8x_2 = 10$

b) $6x_1-x_2 = 1$
$9x_1+2x_2 = 5$
$3x_1-x_2 = 1$

c) $5x_1-3x_2 = -3$
$3x_1+5x_2 = 5$
$3x_1-1{,}8x_2 = -1{,}8$
$0{,}9x_1+1{,}5x_2 = 1{,}5$

d) $2x_1-3x_2 = 10$
$-\frac{1}{3}x_1+\frac{1}{2}x_2 = -\frac{5}{3}$
$x_1-1{,}5x_2 = 5$
$0{,}5x_1-0{,}75x_2 = 2{,}5$

۱ ، ۲ – مساواتسیستم د ناتاکلو ضریبونو سره

1.2.1. a) $x_1+x_2 = a$
$ax_1-x_2 = b$

b) $3x_1-2x_2 = 5a$
$2x_1-3x_2 = 5b$

c) $10x + 6y = 4a + b$
$6x + 10y = 4a - b$

d) $14x - 15y = 24a$
$10x - 21y = 24b$

1.2.2. a) $\frac{x_1}{2a+b} - \frac{x_2}{2a-b} = \frac{8ab}{b^2-4a^2}$
$\frac{x_1}{2a+b} + \frac{x_2}{2a-b} = \frac{8a^2+2b^2}{4a^2-b^2}$

b) $-(a+b)x_1 + (a-b)x_2 = 0$
$(a-b)x_1 + (a+b)x_2 - 4ab = 0$

c) $\left(\frac{a^2+b^2}{2b}\right)^2 \cdot x - \left(\frac{b^2-a^2}{2b}\right)^2 \cdot y = a^2$
$\frac{a^2+b^2}{2b} \cdot x + \frac{b^2-a^2}{2b} \cdot y = b$

d) $\frac{x}{b+c} - \frac{y}{a+c} = a - c$
$\frac{x}{a+b} - \frac{y}{b+c} = b - a$

1.2.3. a) $x + y = \frac{2(a^2+b^2)}{a^2-b^2}$
$x - y = \frac{4ab}{a^2-b^2}$

b) $x + y = \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$
$2x + 3y = \frac{2a^2+ab+3b^2}{a^2-b^2}$

c) $ax + by = 2a$
$a^2x - b^2y = a^2 + b^2$

d) $ax + by = a^3 + 2a^2b + b^3$
$bx + ay = a^3 + 2ab^2 + b^3$

1.2.4. a) $ax + by = 2a$
$x + y = \frac{a^2+b^2}{ab}$

b) $(a-b)x + (a+b)y = a + b$
$\frac{x}{a+b} - \frac{y}{a-b} = \frac{1}{a+b}$

c) $\frac{x-a}{y-a} = \frac{a-b}{a+b}$
$\frac{x}{y} = \frac{a^3-b^3}{a^3+b^3}$

d) $(a-b)x + y = \frac{a+b+1}{a+b}$
$x + (a+b)y = \frac{a-b+1}{a-b}$

۱ . ۳ – شي شميرنه

۱. ۳. ۱ کوم دوه اعداد لاندې خويونه لري؟ که هرعدد په ۵ لوی شي، د مربع يا څلورئ کمون(تفريق) يې په ۱۰۰ لوييږي، په داسي حا لي جي ضرب يې په۳۲۵ زياتيږي.

۱ . ۳ . ۲ د دوه عددونو جمعه يا زياتون دومره لوي دی، لکه د تفريق مربع يې.

که ۴ لومړي عدد تع ورزيات شي او له دويم عدد کم شي، نو د مربع کمون د يا تفريق يې ۹۹ دی، وښايئ چې عددونه څومره لوی دي؟

---

۱ . ۳ . ۳ د هرو دوه ګڼونو څخه هر یویی په 2 لویږي، نو ګڼونه څانونه نیسي لکه: 4 : 3 . که له هر یوه ددې دوه ګڼونوڅخه 3 کم شي ، نو داسې لاس ته راغلی ګڼ ځان نیسي لکه : 3 : 2 . دواړه ګڼونه کوم دي؟

۱ . ۳ . ۴ د دوه ګڼونو زیاتون 999 دی. که لمړی ګڼ په 9 وویشل شي او دوم په 6 ، نو د ویشونکو زیاتون 138 دی . هر یو ددې دوه ګڼونو څومره لوي دی؟

۱ . ۳ . ۵ د دوه ګڼونو زیاتون 1000 دی. که لمړی له 2 او دوم له 3 سره څل یا ضرب شي، نو د څلونو زیاتون یی 2222 دی. هر یو له دې ګڼونوڅومره لوي دی؟

۱ . ۳ . ۶ په دوه ګڼونو کې یو له بل په 0,909 لوي دی، زیاتون یې 3,191 دی. دواړه ګڼونه څه نومیږي یا کوم دي؟

۱ . ۳ . ۸ . د یوه دریکونجي د دوه اړخونواوږدوالي زیاتون 8,4 cm دی او پرېکشن یا پریوستون یی د دریکونجي په دریم اړخ 4 cm او 1,6 cm دی. د دریګوډي اړخونه څومره لوي دي؟

۱ . ۳ . ۹ . د یوه لوي ښار ترمنځ دوه کلي X او Y د ښار له مرکز Z سره یو دریګوډی جوړوي . له X څخه چې له Z څخه تیریږي ،Y ته اوږدوالي 12 cm دی، Y له مرکز Z څخه 2 km زیات لري دی نسبت و X ته ، دواړه منځ کلی X او Y له مرکز Z څخه څومره لرېدي؟

۱ . ۳ . ۱۰ . د یوه فوټبال میدان څخه د څلورکونجي شکله د لرګیو راګرځیدلی دیوال، چې 420 m اوږد دی ، باید په اغزیو سیمانو بدل کړي. دلته یوه خوا په 5 m کوچنی کیږي، که بل اړخ په 10 m اوږده شي. له دې سره د سیمګرځی اوږده د هوارې دننه په $100 m^2$ زیاتیږي. د څلورکونجیز اړخونه څومره لوي دي؟

۱ . ۳ . ۱۱ . د یوه موټر ماشین یخی ۸ لیتره اوبه خوندي کوي او دوه وتللارې لري، دا کیدی شي خالي شي، که د بیلګي په توګه لمړی 5 دقیقی او دوم 2 دقیقی واز کړي او یا دوم 6 دقیقي او لمړي 3 دقیقي واز شي. په هرنل کي څومره اوبه په یوه دقیقه کی وزي؟

۱ . ۳ ۱۲ . یو پلار له خوي څخه ۳۶ کاله زوړ دی په ۵ کاله کی پلارد خوي 1 / 4 عمرڅخه ور زیات 3 برابره د خوي عمر لري اوس پلار او خوي هر یو څومره عمر لري؟

۱ . ۳ . ۱۳ د شربت د ګډولو لپاره دوه ډوله شربتونه سره ګډیږي. که له لمړې درې بوتله واخستل شي او له دوم ۷ بوتله نو د یوه بوتل ارزښت دې ۲ مارکه وشمیرل شي. مګر که له لمړې ۷ بوتله او له دوم درې بوتله سره ګډ شي، د یوه بوتل ارزښت 40 , 2 الماني مارکه(DM) کیږي. د په کارونو شربتونو بوتل به څومره ارزښت ولري؟

۱ . ۳ . ۱۴ . یود $450\ m^3$ اوبو اوبه ډکی یا اوبه ساتی (بیلر) له دوه نلونو ډکیږي. که لمړی نل درې دقیقي او دوم یوه دقیه واز وي،نو په اوبه ساتي کی $40\ m^3$ اوبه جریان لرودی شي. مګر که لمړی یوه دقیقه او دوم نل ۷ دقیقي وازې وي، نو اوبه ساتي ته $60 m^3$ اوبه جریان لري. هر نل په یوه دقیقه کی څومره اوبه اوبه ساتي ته غورځوي؟ څومره باید هر نل له همغه یوه وخته واز وي چی اوبه ساتی ډك شي؟

۱ . ۳ . ۱۵ . دوه کارګرو ته د کندنی کار ور په غاړه کیږي. که دواړه یو ځای کار وکړي، نو ۱۲ ورځو ته ضرورت دی. که لمړی دوه ورځي او دوم درې ورځي کار وکړي، نو په دې وخت کی یواځي 1 / 5 برخه د کار کړه کیږي. څومره ورځی به له دوي هر یو ځانله د دې کار لپاره ضرورت ولري ؟ اړتیا ولري؟

---

۱ . ۳ . ۱۶ . د يوې ګردۍ په چاپيري چې ۱۰۰ متره اورد دی، دوه بدنونه په حرکت راځي. هغوي هر ۲۰ دقيې حرکت کوي، که هغوي په همغه لور حرکت وکړي او هر ۴ دقيې، که هغوي يو د بل په څټ لور حرکت وکړي، هر بدن په يوه ثانيه کی څومره واټن تی کوي يا وهي؟

۱ . ۳ . ۱۷ . په يوه ګردۍ چی چاپړی يې ۹۹۹ متره اورد دی دوه بدنونه په همغه لور حرکت کوي او دا حرکت په هرو ۳۷ ثانيوکی. د دواړو بدنونو سرعت څومره دی، که د لمړي سرعت څلور واره لوي لکه د دوم وی ؟

۲

. کرښيز مساوات سيستمونه د درې مجهولو سره ۲ .

۱ – مساواتسيستم د ټاکلو ضريبونو سره

a) $x + y = 14$, $x + z = 15$, $y + z = 16$

b) $x_1 - x_2 = 4$, $x_1 + x_3 = 18$, $x_2 - x_3 = 6$

c) $x_1 + x_2 = 6{,}6$, $x_1 - x_3 = 2{,}6$, $x_2 - x_3 = 2$

d) $x + y + z = 25$, $3x - 2z = 1$, $20y - 16z = 0$

e) $2x + 3z = 13$, $3x - 4y = 3$, $5y - 6z = 9$

f) $12x + 24y - 42z = 30$, $4x + 8y - 14z = 10$, $6x + 12y - 21z = 15$

g) $5x + 3y + 2z = 207$, $5x - 3y = 37$, $3y - 2z = 19$

h) $x_1 + x_2 - x_3 = 17$, $x_1 - x_2 + x_3 = 13$, $-x_1 + x_2 + x_3 = 14$

i) $x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 11$, $2x_1 - 3x_2 + x_3 = 6$, $6x_1 - 16x_2 + 10x_3 = 39$

j)
$$4x + 4\frac{1}{2}y - 6\frac{3}{4}z = 20$$
$$2\frac{1}{5}x - 2\frac{1}{3}y + 1\frac{1}{2}z = 5\frac{2}{3}$$
$$1\frac{2}{3}x + 1\frac{3}{4}y - 4\frac{1}{2}z = 3\frac{1}{3}$$

k)
$$\frac{2}{5}x - y = 0$$
$$\frac{2}{3}x - z = 1$$
$$-\frac{2}{3}y + z = 2$$

۲ . ۲ – مساوات سيستمونه د ناټاکلو ضريبونو سره

a) $x_1 + x_2 = 2c$, $x_1 + x_3 = 2b$, $x_2 + x_3 = 2a$

b) $x_1 + x_2 = 2(a + b)$, $x_1 + x_3 = 2(a + c)$, $x_2 + x_3 = 2(b + c)$

c) $ax + by - z = 1$, $ax - by + z = b$, $-ax + by + z = a$

d) $ax + y - cz = 2a$
$-ax + y + cz = 2c$
$ax - y + cz = 2ac$

e) $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2a$
$\frac{1}{x} + \frac{1}{z} = 2b$
$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 0$

f) $-\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{2}{a}$
$\frac{1}{x} - \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$
$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{z} = \frac{2}{b}$

g) $x + \frac{y}{b} - \frac{z}{c} = a$
$y + \frac{z}{c} - \frac{x}{a} = b$
$z + \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = c$

h) $\frac{x}{b+c} + \frac{y}{c-a} = a + b$
$\frac{y}{c+a} + \frac{z}{a-b} = b + c$
$\frac{z}{a+b} + \frac{x}{b-c} = c + a$

۳ . په خوښه زيات مساوات د په خوښي زياتو مجهولو سره

a) $2x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 7$
$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7$
$0{,}5x_1 + x_2 + 1{,}5x_3 - 0{,}5x_4 = 3$
$3x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 10$

b) $3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 6$
$x_1 + 0{,}5x_2 + x_3 = 1$
$7x_1 + x_2 + 6x_3 + x_4 = 10$
$6x_1 + 0{,}5x_2 + 5x_3 + x_4 = 9$

c) $x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 - 2x_5 = 1$
$-2x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 = 3$
$-2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 - 2x_5 = 5$
$3x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_4 + x_5 = 2$
$x_1 - 2x_2 - 2x_3 + x_4 + 3x_5 = 4$

d) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 21$
$x_1 - x_2 - x_3 + x_4 - x_5 + x_6 = 1$
$6x_1 - 5x_2 + 4x_3 - 3x_4 + 2x_5 - x_6 = 0$
$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 - 6x_6 = 19$
$2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 5x_4 + 6x_5 - 7x_6 = -24$
$-x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 + x_6 = 3$

هوموجين مساوات سيستمونه:

a) $3x_1 - 4x_2 + 7x_3 = 0$
$-x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0$
$-2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 0$

b) $-x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0$
$5x_1 - 3x_2 + 6x_3 = 0$
$3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$

c) $20x_1 - 10x_2 + 15x_3 = 0$
$-12x_1 + 6x_2 - 9x_3 = 0$
$8x_1 - 4x_2 + 6x_3 = 0$

d) $6x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0$
$9x_1 - 5x_2 + 6x_3 = 0$

۱۲ . الجبري مساوات يا - برابرونونه

۱۲ . ۱ نالاينيز- يا ناكربښيز- يا ناخطي برابرونونه

ټول مساوات چې د نورمالفورم

$$A . x = a \qquad (12.1)$$

سره يوارزښته (اكويوالنت) نه وي ، نالاينيز – يا ناكربښيز مساوات بلل كيږي او عمومي فورم يې په لاندې ډول دی

$$F(x) = 0 \qquad (12 . 2)$$

دلته F (x) په x كې يوه ناكربښيزه يا ناخطي وييڼه يا افاده ده . د (12 . 2) حل دا مانا لري چې ټول د xارزښتونه پيدا شي د كومو لپاره چې (12 . 2) باوري وي. بايد په پام كې ونيول شي چې ايا يواځې رييل ارزښتونه پيدا كوو او كه كمپلس ارزښتونه هم غواړو چې پيدا كړو. د بيلګې په توګه لاندې ناكربښيز يا لاينيز مساوات

$$x^2 - x - 2 = 0$$

لاندې دواړه رييل ځوابونه لري

$$x1 = -1 , x2 = 2$$

چې د ارزښتونو ځاي په ځاي كولو سره يې مساوات باوري كيږي .ددې په څېټ يا برعكس دا برابرون $x^2 + 1 = 0$ رييل ځواب نه لري (۵ -مه برخه دي وكتل شي)، بلكه لاندې ايماګينار ځوابونه لري : $x1= i , x2 = -i$

د دې حالت د ښه روښانولو لپاره دې (۱۵ برخه دې وكتل شي) د برابرون او فنكشن ترمنځ اړيكو ته پاملرنه وشي: اړيكو $y=F(x)$ ته فنكشنبرابرون او x ته متحوله

وايي، چې زه يې کله اووښتونی او کله ناپيژندوني بولم(ښه نومه ونه يې اوښتوني ده) په څېټ یا برعکس (2 . 12) یو ټاکنمساوات دی او x هلته یوه ناپيژندونکی یا اوښتونی دی.

د (2 . 12) برابرون یا مساوات اوبیوني یا حل ته د برابرون د (F (x صفرځای یا د مساوات F(x)=0 جذر یا ريښه هم وايي.

هغه برابرون یا مساوات چی په (۱۲ . ۲) فورم نه دئ ورکړ شوی کیدی شي چی په دې لاندې فورم واړول شي. د بیلګي په توګه د دې برابرون لپاره :

$$\frac{f(x)}{g(x)} = a; g(x) \neq 0$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = a; g(x) \neq 0$$ او f(x)=g(x)

نورمال فورم په لاندې ډول لاس ته راوړل کيږي

F(x)=f(x)-a.g(x)=0 او F(x)= f(x)-g(x)= 0

د نالاينيزو برابرونونو لپاره د لاينيزو برابرونونو په څير راغونده (اختماميه، رابنده، راتړلی) تیوري نه شته. په پوليزه یا عمومي ډول څوك نور فرمول نه شي ورکولی، د کوم له مخی چی د صفرځاي معلومیدی شي. باید په نومریکو (numerischen Methoden) متودونو یا ورپسې ګڼ متودونو په ورنزدې یا تقريبي ډول پيداشي

نالاينييز برابرونونه په دوه ټولګيو ويشل کيږی: الجبري او تراسځندنت چی په دې او راتلونکی څپرکي یا لکه چی ما استعمال کړې برخه کی یی څيړو، چي اوبيوني يی روښانه افاده شوې (explizit لاتين: واضح یا روښانه ، افاده شوی، اکسپليځټ) دي.

له ۱۲ . ۲ څخه تر ۱۲ . ۴ پورې الجبري برابرونونه څيړل کيږي چی په لاندې نورمال فورم یا – بڼه اړول کيدی شي

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_1 x + a_0 = 0 ....(12,3)$$

دلته په (2 . 12) کی یو نالاينيز بلواک یا – فنکشن (F (x د یوه n - م درجی پولينوم په څير مخ ته پروت دی . موږ په (۱۲ . ۲) کی د ضريبونو(ځله وونو) لپاره یواځی رييل ګڼونه پريږدو (په دې مانا چي ځلونه یواځي رييل وي، یواځی رييل ګڼونو ته اجازه ورکوو) .

دا په (۱۲ . ۳) کی کیږ اړخ ته n - م درجه پولینوم

$$F(x) = P_n(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_1x + a_0 = 0 ....(12,4)$$

ته ټول ریشنل (- ریښتونی) بلواک یا فنکشن هم وايي، ځکه چی د ریشنل شمیرله عملیو زیاتون، کمون، او ځل له لاري او نه په x واریابلی او ai د ریيل ضریبونو، ځلونو یا فاکتورونو باندې د ویش کارونی کارولو (عملي استعمال) له لارې منځ ته راځي .ټولیز برانرون یا

$$b_nx^n + b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + ... + b_1x + b_0 = 0; b_n \neq 0 ....(12,5)$$

کیدي شي په bn|= 0 ویش باندې په (۱۲ . ۳) نورمال فورم واړول شي .

که دا نه لاینیزفنکشن یا ۰ بلواک (F (x په (۱۲ . ۲) باندې په واریابلي یا اووښتوني x او ځلونو باندې ټول د شمیر کاروني یا عملیي او بالاخره دویش کارونه وکارول شي یا اجرا شي او ریيل پارامتر (Parameterپه شمیرپوهنه کې ثابت (همغځ) او یا مرستندویه لوي ده) تشکیل شي نو فنکشنونو ته بیا مات ریشنل فنکشنونه ویل کیږي.
دا تل د دوه پولینومونو یا ریشنل فنکشنونو د ویش په څیر انځوروږ دي

$$F(x) = R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{b_nx^n + b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + ... + b_1x + b_0}{c_mx^m + c_{m-1}x^{m-1} + c_{m-2}x^{n-2} + ... + c_1x + c_0}; .....(12,6)$$

په همدې ډول برابرون

$$F(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = 0; ....(12,7)$$

تل په (۱۲ . ۵) یا (۱۲ . ۳) برابرون اړول وړ دي . دا باید په پام کی وي چی د (۱۲ . ۳) لپاره یواځنی هغه ځواب په پوښته کی راځي، د کوم لپاره چی باوري وي:

$$Q_m(x) \neq 0$$

که چیرې د نالاینیزبلواک یا - فنکشن جوړولو کی د ریشنل شمیرعملیو تر څنګ د توان (مټ، په جګ) یا پوتنځ کول او جذر نیولوته هم اجازه ورکړل شي نو بیا سرې د الجري فنکشنونو څخه غږیږ. یعني داسي فنکشنونو ته الجبري فنکشنونه ویل کیږي او (۱۲ . ۲) برابرون بیا الجبري برابرون بلل کیږي ، دا ډول مساوات هم کیدی شي چی په (۱۲ . ۳) فورم واړول شي.

هره n - مه ریښه یا جذر $\sqrt{G(x)}$

د ($G(x)$ افادې يا ويينې له منځه وړل کيدی شي, که چيرې څوك دا برابرون په يوه خوا راوړي او بيا د برابرونونو دواړه خواوې دn په توان کړي يا د n پوتنځ يا مټ ته جګ کړي . دا په ۱۲ . ۴ برخه کی په څرګندو يا معلومو بيلګوڅيړل کيږي . په نومولو تګلارو د الجبري مساواتو ځينه د (۱۲ . ۳) فورم برابرونونو ته راکښته کيدلی شي. د الجبري مساواتو دا نورمال فورم د n - می درجي برابرون هم بلل کيږي. ټول نالاينيز برابرونونه چی الجبري برابرون نه دي، ترانسڅيندنت برابرون بلل کيږي . د ترانسڅيندنت رابرونونو درې تيوپونه، په نامه ، اکسپوننشل برابرونونه ، لوګاريتمي برابرونونه ، او ګونومتريکي برابرونونه دي چي په برخه ۱۳ کی به تر څيړني لاندې ونيول شي.

۱۲ . ۲ څلوری(مربع-) مساوات په توان(مټ، جګ) د ۲

۱۲ . ۲ . ۱ په جګ د ۲ مساوات په نورماله بڼه

د نالاينيزو الجبري برابرونونو ساده بڼه د ۲ په توان يا مټ (په جګ ۲ هم ويل کيږي) برابرونونه دي چی څلوری يا مربع برابرونونه بلل کيږي .د دې ټوليزه بڼه (عمومي فورم) داسی ده ۰ دی

$$b_2x^2 + b_1x + b_0 = 0; b_2 \neq 0; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (12,8)$$

په b2 يي ويش په لاندې ډول يو ورته ارزښته (اکويوالنت äquivalent) نورمالبڼه يا نورمالفورم ورکوي

$$x^2 + a_1x + a_0 = 0; (a_1 \neq b_1/b_b; a_0 \neq b_0/b_2); \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (12,9)$$

ددې حل د څلوری پوره کونې يا مربعتکميل څخه په ګټه د بينوم په فورمل ودې کتل شي: ۱ . ۲ . ۲) ولاړ دی.

$$[x + a_a/2]^2 = x^2 + a_1x + \frac{a^2{}_1}{4}; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (12,10)$$

په دې ډول کيدی شي چی (۱۲ . ۹) برابرون په لاندې فورم داسی واړول شي:

$$x^2+a1x+a0=(x+a1/2)^2+a0-a1^2/4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$[x+a1/2]^2=(a1^2/4)-a0 \qquad (12,11)$$

که وي

$$(a1^2/4)-a0>0 \Leftrightarrow a1^2 -4a0>0 \Leftrightarrow a1^2>4a0 \quad (12,12)$$

نو دوه امکانات شته دی، چی (۱۲ . ۱۱) برابرون پوره کړي:
داصدق کوي

$$x+\frac{a_1}{2}=\sqrt{(a_1^2/4)-a_0};.........................(12,13)$$

یا

$$x+\frac{a_1}{2}==-\sqrt{(a_1^2/4)-a_0};.........................(12,14)$$

دا دواړه خواو په توان د ۲ څخه، د (۱۲ . ۱۳) او همداسی د (۱۲ . ۱۴) څخه (۱۲ ۱۲)برابرون او په دې ډول (۱۲ . ۹) برابرون لاس ته راځي (په پام کی دې وي چی a د ۲ اصلي برخی په بینا تل نا کمیز یا نامنفي ګڼ پوهیدل کیږي، چی څلوری یا مربع یی a ده) . له (۱۲ . ۱۳) په همدې ډول له (۱۲ . ۱۴) څخه ریبل ځوابونه لاس ته راځي،

$$x_1=-\frac{a_1}{2}+\sqrt{(a_1^2/4)-a_0};x_2=-\frac{a_1}{2}-\sqrt{(a_1^2/4)-a_0};.........................(12,15)$$

او ددې لپاره دا هم لیکلی شو

$$x_{1,2}=-\frac{a_1}{2}\pm\sqrt{(a_1^2/4)-a_0};.........................(12,16)$$

په (۱۲ . ۹) کی د (۱۲ . ۱۵) په همدې توګه (۱۲ . ۱۶) ځاي پر ځاي کولو څخه پوهیدل کیږي چی دواړه ارزښتونه
x1 او x2
په ریښتونی څلوری برابرون یا مربع مساوات پوره کوي.
په لاندې حالت کی

$$(a_1^2/4)-a_0=0 \Leftrightarrow a_1^2-4a_0=0 \Leftrightarrow a_1^2=4a_0;.............(12,17)$$

د (۱۲ . ۱۶) له لارې تیك یو ریبل اوبی لرو:

$$x_{1,2}=x_1=x_2=-(a_1/2)\pm 0=-a \;\; /2;.................................(12,18)$$

په (۱۲ . ۱۵) همداسی په (۱۲ . ۱۶) باندې په تکیه دا اوبی دوه واره دی یا په بل عبارت دوه واره رامنځ ته کيږي او په دې ډول د یوه دوه واره اوبیوني (۱۲ . ۱۸)څخه غږيږو.

که وي

$$(a_1^2/4)-a_0<0 \Leftrightarrow a_1^2-4a_0<0 \Leftrightarrow a_1^2<4a_0;................/12,19)$$

نو (۱۲ . ۱۱) همداسی (۱۲ . ۹) رییل حل نه لري. که په کمپلس ګڼونو شمیرنه وکړو نو له ۵ - برخی څخه لاندې لاس ته راوړو

$$x+a_1/2=\sqrt{a_0-(a_1^2/4)i} \wedge x+a_1/2=-\sqrt{a_0-(a_1^2/4)i}$$

او په دې ډول د کونجوګیرت کمپلکس حل جوړه لاس ته راځي:

$$x_{1,2}=-a_1/2\pm\sqrt{a_0-(a_1^2/4)i};...................(12,20)$$

له دې څخه هم چی په (۱۲ . ۹) ځای په ځای شي څرګندیږي چی د x1 او x2 ارزښتونه پیل برابرون یا مساوات پوره کوي.

که په (۱۲ . ۱۹) حالت کی لاندې څرګندونی ته پام وي

$$\pm\sqrt{a_0-(a_1^2/4)i}=\pm\sqrt{(a_1^2/4)i-a_0};...................(12,21)$$

نو لاندې جمله ىی راغونډه داسی فرمولولی شو

جمله ۱۲ . ۱: (د څلوری یا مربع) په توان یا جګ د ۲) برابرونونو د اوبیوني فرمول) د څلوری- یا مربع برابرونونو(مساواتو) $x^2+a_1x+a_0=0$

$$x_{1,2}=-a_1/2\pm\sqrt{a_0-(a_1^2/4)i}$$

ټیک دوه ځوابونه لري

د $a_1^2>4a_0$

په حالت کی دوه مختلف رییل حلونه دی، د $a_1^2=4a_0$ په حالت کی یو رییل دوه برابره(ډبل) حل دی او د $a_1^2<4a_0$ په حالت کی یو جوړه کونیوګیرت - کنجوګیریکمپلکس حل شته شته دي.

په ساده ډول لاندې د وییتا جمله هم د مربع مساوتو لپاره ښوول کیدی شي

جمله ۱۲ . ۲ (د ویيتا(Vieta)جمله) :

که x1 او x2 د خلورئ - یا مربع برابرونونو (۱۲ . ۹) همداسی د (۱۲ . ۸) اوبیوني وي نو باوري دی

$$a_1 = b_0 / b_1 = x_1.x_2; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(12,22)$$

$$a_2 = b_1 / b_2 = -(x_1 + x_2); \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(12,23)$$

حل : (۱۲ . ۲۳) فرمول په دریواړو حالتونو کی سم د لاسه له لاندې څخه لاس ته راځي:

$$-(x_1 + x_2) = \left[\frac{a_1}{2} - \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_0}\right] + \left[\frac{a_1}{4} + \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_0}\right] = a_i$$

د (۱۲ . ۲۲) فرمول د تصدیق لپاره د بینوم دریم فرمول او $i^2 = -1$ استعمال څخه په په (۱۲ . ۱۲) حالت کی باور لري :

$$x_1.x_2 = \left[-\frac{a_1}{2} + \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_0}\right].\left[-\frac{a_1}{2} - \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_0}\right] = \frac{a_1^2}{4} - \left[\sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_0}\right]^2$$

$$= \frac{a_1^2}{4} - \frac{a_1^2}{4} + a_0 = a_0$$

په (۱۲ . ۱۷) حالت کی لاس ته راځي:

$$x_1.x_2 = \left[-\frac{a_1}{2} + 0\right]\left[-\frac{a_1}{2} - 0\right] = \frac{a_1^2}{4} = a_0$$

په (۱۲ . ۱۹) حالت کی باوري دي:

$$x_1.x_2 = \left[-\frac{a_1}{2} + \sqrt{a_0 - \frac{a_1^2}{4}}\,i\right].\left[-\frac{a_1}{2} - \sqrt{a_0 - \frac{a_1^2}{4}}\,i\right] = \frac{a_1^2}{4} - \left[\sqrt{a_0 - \frac{a_1^2}{4}}\right]^2 i^2$$

$$= \frac{a_1^2}{4} - [a_0 - \frac{a_1^2}{4}].(-1) = \frac{a_1^2}{4} + a_0 - \frac{a_1^2}{4} = a_0$$

د وییتا جملی په مرسته لاندې جمله باوري کیږي یا تصدیقیږي

جمله ۱۲ . ۳ :

یو ۲ درجبیز پولینوم کیدی شي چی په دوه لاینی فاکتورونو یا ضریبونو یا ځله وونو بیل یا ټوټه یا تجزیه شي:

$$x^2 + a_1x + a_0 = (x - x_1)(x - x_2);..................(12,24)$$

په همدې ډول

$$b_2x^2 + b_1x + b_0 = b_2(x - x_1)(x - x_2);..................(12,25)$$

چیرته چي x1 او x2 د څلوری برابرونونو یا مربع مساواتو (۱۲ . ۹) په همدې ډول د (۱۲ . ۸) دواړه ځوابونه دي

اوبیونه : له (۱۲ . ۲۲) ، (۱۲ . ۲۳) څخه د (۱۲ . ۹) همداسی د (۱۲ . ۸) په پام کي نیولو سره لرو

$$(x - x_1)(x - x_2) = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 = x^2 + a_1x + a_0 =$$

$$= \frac{1}{b_2}(b_2x^2 + b_1x + b_0)$$

د جملی ۱۲ . ۳ څخه دې ته راځول کیږو چی د (۱۲ . ۱۷) حالت کی د دوه برابره ریبل اوبیو څخه خبرې وکړو(وغږیږو). د x1 = x2 له امله لاس ته راځي

$$x^2 + a_1x + a_0 = (x - x_1)^2; a_1^2 = 4a_0;..................(12,26)$$

دا دري حالتونه(۱۲ . ۱۲) .(۱۲ . ۱۷) او (۱۲ . ۱۹) کیدی شي چی د فنکشن

$$y = p_2(x) = x^2 + a_1x + a_0$$

ځیرو یا شکلونو (ګراف) په مرسته د کتلو شي.

ګراف په بنسټیزه توګه پارابول انځوروي، چی پورته خوا ته سرواز دی. ځکه چی که xهرڅومره کوچنی شي)که x د کمیز ناپای په جګ یا توان شي) اوهمدارنګه x هرڅومره لوي شي (که x د ∞ (ناپای) په جګ شي y لوییږي (ستریږي یا غټیږي) ، ځکه چیx² نسبت و x ته په توان یا قوي جګیږي له ټولو پولو(yد ناپای لور ته ځي)۰ د دې ډول پولو کره پیژند یا تعریف په ۱۹ - برخه کي لوستل کیدی شي.

په (۱۲ . ۱۲) حالت کی د x - محور په داړو رييلو ځايونو x1 او x2 کی غوڅيږي؛ په (۱۲ . ۱۷) حالت کی په x1 = x2 ځای کی يي لمسوي او په (۱۲ . ۱۹) حالت کی ګډ ټکي ورسره نه لري يا نه وررسيږي (پرتله ځيره . ۱۲ . ۱)

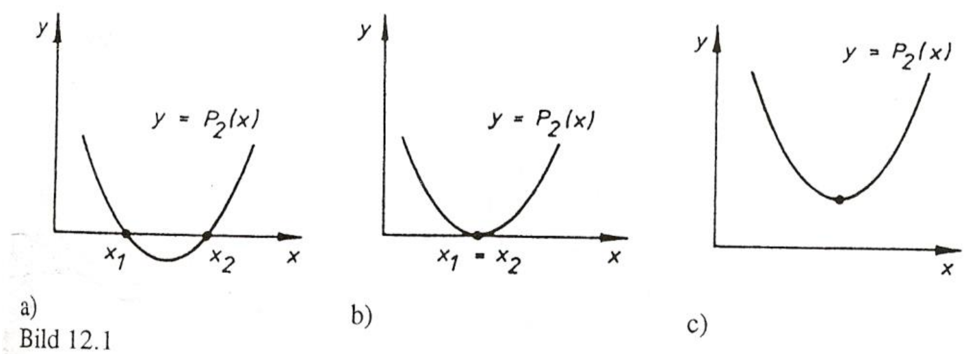


Bild 12.1

له جملی ۱۲ . ۱ تر ۱۲ . ۳ پوري به په درې ساده ډوله د (۱۲ . ۱۲) ، (۱۲ ، ۱۷ ، ۱۲ . ۱۹) سره مناسبو بيلګو روښانه شي.

بيلګه ۱۲ . ۱ :

په برابرون x² - x - 6 = 0 کی لرو

a1 = - 1 , a0 = -6 او د $a_1^2 - 4a_0 1 + 24 = 25 > 0$

له امله (۱۲ ، ۱۲) حالت مخ ته پروت دی.
دواړه له صفر مختلف ځايونه د جملی ۱۲ . ۱ څخه په لاندې فورم لاس ته راځي:

$$x_{1,2} = 1/2 \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 6} = 1/2 \pm \sqrt{1/4 + 24/4} = 1/2 \pm \sqrt{25/4} = 1/2 \pm 5/2$$

$$\Rightarrow x_1 = 3; x_2 = -2$$

جمله ۱۲ . ۲ :

له لاندې لاس ته راوړنی ياتعقيب څخه باوري کيږي

$$a_0 = -6 = x_1 x_2 = 3(-2) = -6$$

$$a_1 = -1 = -(x_1 + x_2) = -(3 - 2) = -1$$

له جملی ۱۲ . ۳ څخه لاس ته راځي: $x^2-x-6=(x-3)(x+2)$

بیلګه ۱۲ . ۲ :

له مساواتو $x^2-4x+4=0$ لرو $a1=-4, a0=4$ او د $a_1^2-4a_0=16-4.4=0$

له امله (۱۲ . ۱۷) حالت مخ ته لرو ۰ دوه ئیز ریښ حل په لاندې ډول له جملی ۱۲ . ۱
څخه لاس ته راځي $x_{1,2}=2\pm\sqrt{4-4}=2$ نو لرو $x1 = x2 = 2$

جمله ۱۲ . ۳ :
په لاندې ډول باوري کیږي

$$a_0=4=x_1.x_2=2.2=4$$
$$a_1=-4=-(x\ +x_2)=-(2+2)=-4$$

د جملی ۱۲ . ۳ له مخی لرو $x^2-4x+4=(x-2)^2$

بیلګه ۱۲ . ۳ :

له مساواتو $x^2-4x+13=0$ څخه لرو , $a1=-4$,$a0=13$ او د $a_1^2-4a_0=16-52-36$

له امله حالت (۱۲ ، ۱۹) مخ ته لرو.

د کونیوګیرت(کنجوګیري) کمپلکس جوړه اوبیونو یا حلونو له جملی ۱۲ . ۱ څخه په
لاندې بڼه یا فورم لاس ته راولو

$$x_{1,2}=2\pm\sqrt{4-13}=2\pm\sqrt{-9}=2\pm3i$$
$$\Rightarrow x\ =2+3i; x_2=2-3i$$

د جملی ۱۲ . ۲ سره سم باور لري

$$a_0=-4=-(x_1+x_2)=-(2+3i+2-3i)=-4$$
$$a_1=13=x_1.x\ =(2+3i)(2-3i)=4-9i^2=4+9=13$$

او د جملې ۱۲ . ۳ له مخې داسې دئ

$$x^2-4x+13=(x-2-3i)(x-2+3i)$$

د مربع مساوات (۱۲ . ۸) همداسې (۱۲. ۹) اوبې په ښکاره ډول ساده کيږي، که يو ځلې a0 اويا a1 ورك شي:

د a0 = 0 لپاره لرو $x(x+a_1)=0 \Leftrightarrow x_1=0; x_2=-a_1$

د a1=0 لپاره لرو

$$x^2+a_0=0$$

$$\Rightarrow x^2=-a_0; x_{,2}=\pm\sqrt{a_0}$$

۱۲ . ۲ . ۲ څلوری(مربع-)برابرون چې په نورمالبڼه

مخ ته نه دي پراته

که يو مربع مساوات په نورمال فورم (۱۲ . ۹) مخ ته نه وي پروت، له دې د مخه چې جمله ۱۲ . ۱ وکارول شي، نو بايد په دې بڼه واړول شي.

بليګه ۱۲ . ۴ :

$$2x-(x+2)^2=(x-2)^2-4(x+1)$$

$$2x-x^2-4x-4=x^2-4x+4-4x-4$$

$$-x^2-2x-4=x^2-8x$$

$$x^2-3x+2=0$$

$$x_{1,2}=3/2\pm\sqrt{9/4-2}=3/2\pm\sqrt{9/4-8/4}=3/2\pm\sqrt{3/2}\pm\sqrt{1/4}=3/2\pm1/2$$

$$\Rightarrow x_1=2; x_2=1$$

که مجهول يا ناپيژندلی يا اوړيدونې x د مات لاندې رامنځ ته شي، نو بايد په صفر ويش ناممکن يا ناشونوالی په پام کي ونيول شي.

بيلګه ۱۲ . ۵ :

برابرون $(x^2+2x)/(2x^2+2x-4)=1$
تیك هلته مانا لري، چی وي $|2x^2+2x-4| = 0$

لومړی ورکړشوی برابرون اوبی کیږي او بیا ازمائل کیږي، چي ایا د ماتلاندې شرایط پوره دی، که نه.

$$x^2+2x=2x^2+2x-4$$
$$-x^2 = -4$$
$$x_{,2} = \pm 2; x \ = 2; x_2 = -2$$

د $x=x1=-2$ لپاره په ماتلاندې کی لرو

$$2x^2 + 2x - 4 = 8 + 4 - 4 = 8 \neq 0$$

او $x = x2 = -2$ لپاره په ماتلاندې کی لرو
$$2x^2 + 2x - 4 = 8\text{-}4\text{-}4 = 0$$
له دې امله $x1 = 2$ د پیل برابرون اوبی دی

۱۲ . ۲ . ۳ د n - م درجي ځانګړي برابرونونه ، چی په څلوری یا مربع برابرونونو بیرته بدلیدلی شي

د n - مي درجی مساواتو(۱۲ . ۳) یو څو ځانګړي حالتونه کیدی شي چی د څلوری برابرونونو یا مربع مساواتو په مرسته ځواب شي یا اوبی شي۰ دا ځانګړی حالت موجود دی یا شته دی که باور ولري

$$a_1 = a_1 = \ldots = a_{n-3} = 0 \qquad (12\,,27)$$

دn- می درجی برابرون بیا داسی دي

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} = 0; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(12,28)$$
$$\Leftrightarrow$$
$$x^{n-2}(x^2 + a_{n-1}x + a_{n-2}) = 0$$
$$\Rightarrow x^{n-2} = 0 \vee x^2 + a_{n-1}x + a_{n-2} = 0; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(12,30)$$

يادونه : په پورته کې له (۱۲ ، ۳۰) پورته برابرون (۱۲،۲۹) دئ
د دې برابرونونو دوهم برابرون يو څلورئ - يا مربع برابرون دی، چې د جملي ۱۲ . ۱ په بنسټ لاندې ځواب لري

$$x_{1,2} = -\frac{a_{n-1}}{2} \pm \sqrt{\frac{a_{n-1}^2}{4} - a_{n-2}}$$

لومړی برابرون دا اوبی يا حل لري $x = 0$ چی دا (n-2)- ځله رامنځ ته کيږي $x_3 = x_4 = ... = x_n = 0$

بيلګه ۱۲ . ۶:

برابرون $x^6 + 2x^5 - 3x^4$ د $x^6 + 2x^5 - 3x^4 = x^4(x^2 + x - 3)$
او $x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1+3} = -1 \pm 2$
لاندې اوبيونې لرو

$$x_1 = 1, x_2 = -3; x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = 0$$

نور هم هغه حالت ساده دی، که $a_{n-2} = 0$ وي، او باور ولري

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} = 0; x^{n-1}(x + a_{n-1}) = 0 \Rightarrow$$
$$x_1 - a_{n-1}, x_2 = x_3 = ... = x_n = 0; ....(12,32)$$

يو بل ځانګړی حالت مخ ته لرو، که د برابرون (۱۲ ، ۳) درجه n جوړه ګڼ يا جفت - وي

$$n = 2k \qquad (12 . 33)$$

او فقط (ټيك) ځله ووني يا كوايفيڅينتونه a0 او ak له صفر سره برابر نه وي:

$$x^{2k} + a_k x^k + a_0 = 0; ....(12,34)$$

دلته داسی ځاي په ځاي كوو

$$y = x^k; ....(12,35)$$

او له دې سره د y لپاره څلورې برابرون يا مربع مساوات لاس ته راځي:

$$y^2 + a_k y + a_0 = 0 \qquad (12, 36)$$

د لاندې څوابونو سره (پرتله : جمله ۱۲ ، ۱)

$$y_{1,2} = -(a_k/2) \pm \sqrt{\frac{a_k^2}{4} - a_0}; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (12,37)$$

د(۱۲ ، ۳۵) له امله دې د لاندې دوه برابرونونو

$$x^k = y_2 \wedge x^k = y_1; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (12,38)$$

ټولې اوبيونې وڅيرلى شي، چې د $k = 1$ لپاره ساده دى، د $k = 2$ لپاره(بيکوادرات برابرون) (د څلورى څلورى يا د مربع مربع) يا د رييلو $y1$ او $y2$ لپاره د تراوسه څرګندو ميتودو سره تل کيدونکى دى . نور حالتونه ددې اوس وخت لپاره په ټوليزه توګه ستونځى لري.

بيلګه ۱۲ . ۷ :

لاندې بيکوادرات برابرون $x4 + 5x^2 -6 = 0$ کيدى د سوبستيچيوشن يعني بدلون له لارې $y = x^2$ په څلورى برابرون $y^2+5y-36=0$ باندې بدل شي. د جملى ۱۲ . ۱ په بنسټ لرو

$$y_{,2} = -5/2 \pm \sqrt{25/4+36} = -5/2 \pm \sqrt{25/4+144/4}$$

$$= -5/2 \pm \sqrt{169/4} = -5/2 \pm 13/2$$

$$\Rightarrow y_1 = 4; y_2 = -9$$

دواړه برابرونونه ، چې د بيرته بدلون(-سوبستيچيوشن) له امله لاس ته راوړو

$$x^2 = 4 , x^2 = -9$$

لاندې اوبى يا حل لري

$$x1 = 2 , x2 = -2 , x3 = 3i , x4 = -3i$$

---

۱۲ . ۲ . ۴ د برابرونسیستمونه چی بیرته په ځلوری برابرونونو بد لید لی شي

یوه د نالاینیزو مساواتسیستمونو لړۍ کیدی شي چي په ځلوری برابرون یا مربع مساواتو بیرته واړول شي. ددې لپاره دوه ساده بیلګي راوړو.

بیلګه ۱۲ . ۸:

$$x + y = 1 \qquad (12, 39)$$

$$x^2 + y^2 = 13 \qquad (12, 40)$$

لومړی برابرون د y په لور حل کیږي، $y = 1 - x$، او دا حل په دوم برابرون کی اینوول کیږي:

$$x^2 + (1-x)^2 = 13$$

$$x^2 + 1 - 2x + x^2 = 13$$

$$2x^2 - 2x - 12 = 0$$

$$x^2 - x - 6 = 0$$

$$x_{1,2} = 1/2 \pm \sqrt{1/4 + 6} = 1/2 \pm \sqrt{25/4} = 1/2 \pm 5/2 \Leftrightarrow$$

$$x = 3, x_2 = -2$$

د (۱۲ ، ۴۰) له مخی په دې لاندې د y - ارزښتونه اړه لري

$$y1 = -2 , y2 = 3$$

نو دا نه لاینیز برابرون لاندي اوبیونې لري

$x1 = 3 , y1 = -2$ او $x2 = -2 , y2 = 3$

بیلګه ۱۲ . ۹ :

د لاندې مساواتو سیستم کی

$$ax + y = 1; \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$$

چی یواځي د $x \neq 0, y \neq 0$ لپاره موخه وریا هدفمند دی، دوم برابرون په xy ځلولو(ضربولو)سره په لاندې بڼه اړول کیږي:

$$y + x = xy \qquad (12,42)$$

لومړی برابرون د y په لور ځواب کیږي

$$y = 1 - ax \qquad (12, 43)$$

او په (۱۲ . ۴۲) کی ایښول کیږی یا ځای په ځای کیږي

$$1 - ax + x = x(1 - ax) = x - ax^2$$

$$, ax^2 - ax + 1 = 0 \qquad (12,44)$$

د $a = 0$ په حالت کی (۱۲ . ۴۴) برابرون مخامخوالی لري یا په ښتوالی لري یا تضاد لاس ته راکوي » $1 = 0$ « نو ځواب نه شته

د $a \neq 0$ لپاره د(۱۲ . ۴۴) ښخه لاس ته راځی $x^2 - x + 1/a = 0$

او د جملی ۱۲. ۱ له امله لرو $x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{4} - \frac{1}{a}$

د

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{a} > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{4} \text{.......................}(12.45)$$

لپاره مو (۱۲ . ۱۲) حالت مخ ته پروت دی . دوه برخی حالتونه باید په پام کی ونیول شي:

د $0 > a$ لپاره له (۱۲ ، ۴۵) ښخه لرو $a > 4$, او د $0 > a$ لپاره له (۱۲ ، ۴۵) ښخه لرو . $a < 4$ له دې امله د

$$a < 0 \quad \text{او} \quad a > 4 \qquad (12, 46)$$

لپاره د (۱۲ ، ۴۴) دوه مختلف ریل ځوابونه موجود دي:

$$x_1 = 1/2 + \sqrt{1/4 - 1/a}, x_2 = 1/2 - \sqrt{1/4 - 1/a}; \text{....................}(12.47)$$

په دې پوروې د (۱۲ ، ۴۶) له مخی دواړه دy - ارزښتونه هم اړه لري

$$y_1 = 1 - a/2 - a.\sqrt{1/4 - 1/a}; y_2 = 1 - a/2 + \sqrt{1/4 - 1/a}; \text{.................}(12.48)$$

باید وازمایيل شي چی د (۱۲ ، ۴۶) په حالت کی x1 , x2 , y1 ,y2 (ټول) نابرابر په صفر دي . تل $x1 > 1/2$ دی. که $x2 = 0$ وی، نو باوري به وی

$$1/2 = \sqrt{1/4 - 1/a}; 1/4 = 1/4 - 1/a$$

دا د هیڅ a لپاره ممکن نه دی. له دې امله $x_2 \neq 0$ دی
که $y1 = 0$ یا $y2 = 0$ وی، نو لاندې به باور لرودی:

$$1 - a + a^2/4 = a^2/4 - 1 \Leftrightarrow 1 = 0$$

دا هم ناشونی یا ناممکن دی، نو دلته هملرو $y_1 \neq 0;\ y_2 \neq 0.$
په (۱۲ ، ۴۶) حالت کی د (۱۲ ، ۴۱) د (۱۲ ، ۴۷) ، (۱۲ ، ۴۸) سر ه سم، دوه

مختلف رییل ځوابونه شته دی - غواړی- موجود دي
د x1 , y1 . او x2, y2

$$1/4-1/a=0 \Leftrightarrow a=4 \qquad (12, 49)$$

لپاره(۱۲ ، ۱۷) حالت مخ ته پروت دی، او برابرون (۱۲، ۴۴) ډېل رییل حل لري

$$x1 = x2 = 1/2 \qquad (12,50)$$

په دې پورې د (۱۲ ، ۴۳) له مخې هغه y - ارزښت ډېل ګڼ اوبی پورې هم اړه لري.

$$y1 = y2 = 1 - 4.(1/2) = -1$$

د (۱۲ ، ۴۹) په حالت کی پس د (۱۲ . ۱۹) يو ريل، ډېل ګڼلی حل موجود دی

$$x1=x2=1/2,\ y1=y2=-1 \qquad (12, 51)$$

د

$$1/4-1/a < 0 \Leftrightarrow 1/a > 1/4 \qquad (12, 52)$$

لپاره (۱۲ ، ۱۹) حالت مخ ته پروت دی. د $a > 0$ لپاره (۱۲ ، ۵۲) د $a<4$ کتمټ (ورته) دی، او د $a< 0$ لپاره د$a>4$ سره کتمټ دی (له دې امله په ښتوالی یا تضاد) .
نو د(۱۲ ،۵۲) باور لري، د

$$0 < a < 4 \qquad (12, 53)$$

لپاره . په دې حالت کی (۱۲ ، ۴۴) کونجوګيري کمپلکس اوبيونې لري:

$$x_1 = 1/2 + \sqrt{\frac{1}{a} - \frac{1}{4}}\,i; x_2 = 1/2 - \sqrt{\frac{1}{a} - \frac{1}{4}}\,i; \quad \text{...............}(12.54$$

د (۱۲ ، ۴۳) له مخی په دې پورې د y - ارزښتونه اړه لري:

$$y_1 = 1 - a/2 - a\sqrt{\frac{1}{a} - \frac{1}{4}}\,i; y_2 = 1 - a/2 + a\sqrt{\frac{1}{a} - \frac{1}{4}}\,i; \quad \text{.............}(12,55)$$

له دې ارزښتونو هيڅ هم صفر کيدی نه شي .پس په يوځاي شوي يا راټوله توګه لرو:
برابرونسيستم (۱۲ ، ۴۱) د $a = 0$ لپاره اوبی نه لري، د $a < 0$, په همدې ډول $a >$ 4لپاره دواړه ريل اوبي (۱۲ ، ۴۷) ، (۱۲ ، ۴۸) ، د $a = 4$ لپاره رييل ډبل ګنلي اوبۍ (۱۲ ، ۵۱) او د $0 < a < 4$ لپاره دوه کونجوګيري کمپلکس اوبي (۱۲ ، ۵۴) ، (۱۲ ، ۵۵) لري.

۱۲ . ۳ دريمه درجه مساوات يا - برابرونونه

ددې لپاره چی په زړه پورې -n (ام (درجي مساواتو حلول ساده کړای شو نو لکه د مساواتو مربع سيستم جملو ته ورته جملی د دريمی درجی مساوات لپاره ځيرو.
د دريمی درجی مساواتو نورمال فورم په د (۱۲ . ۳) سره سم په لاندې ډول دی.

$$x^3+a2x^2+a1x+a0=0 \qquad (12,56)$$

دا پولينوم

$$y=P3(x)=x^3+ a2x^2+a1x +a0 \qquad (12 , 57)$$

لاندې بنستيز خويونه لري: که x ډير لوي شي يعني ناپای په لور لاړشي $x \to \infty$ نو y هم د ناپای په لور ځي، ځکه چی دx^3 ارزښت نسبت د x^2 ارزښت ته په بيړه جګيږي او بيا همداسي و x ته هم . که a1 او a2 کميز يا منفي هم وي نو y به د لويو -x ارزښتونو لپاره زياتيز يا مثبت وي. داچي x^3 د کميز x - ارزښت لپاره له صفر کوچنی دی، نو په همدې ډول

x->-o د y -> -o

لپاره .د دې ډول »پولوارزښت يا ليمس« لپاره کره تعريفونه بيا په ۱۹ برخه کی په پراخه توګه څيړل کيږي .د يو-x ارزښت) خورا کوچنی هم کيدی شي (شته چی د هغه

لپاره $y < 0$ وي اود يو x - ازښت) چې خورا لوي هم کيدى شي) ، د کوم لپاره چې $y>0$ دی. ددې دواړو ارزښتونو تر منځ بايد د مساوات (۱۲ . ۵۶) يو ريښل اوبی پروت وي.

په ډيرو لاندې بيلګو کی سرې کړی شي چې په ساده ډول د جدول په مرسته ازمائيلي حلونه پيدا کړي، په عمومي توګه بيا هم بايد وشميرل شي.

ددې لپاره يو څو بيلګی:

بيلګه ۱۲ ، ۱۰ الف:

د پولينوم

$$y = x^3 - 3x^2 -4x + 12 \qquad (12, 58)$$

لپاره لاندې د ارزښت جدول لاس ته راځي

$X = 0 , 1 , -1 , 2$

$Y = 12 , 6 , 12 , 0$

په دې توګه يو ريښل صفرځاي پيدا شو

$$x_1 = 2 \qquad (12, 59)$$

په ۱۵-مه برخه کی به د هورنر شيما په بنسټ يو متود ورکړ شي ، دکومی له لار ې چې بيا د مټ(توان= لوړولو ته اړتيا نه پيدا کيږي او پولينومونو د فنکشن ارزښت ساده پيدا کيدی شي يا شميرل کيدی شي

بيلګه ۱۲ . ۱۱ الف:

دا برابرون

$$2x^3 + 11x^2 + 12x - 9 = 0 \qquad (12,60)$$

لاندې نورمال فورم يا -بڼه لري

$$x^3 +(11 / 2) x^2 + 6x - 9/2 = 0 \qquad (12 . 61)$$

د صفرځاي پيداکولو لپاره دې د (۱۲ . ۶۰)مساوات لپاره د ارزښت جدول جوړ شي)ترتيب شي وشميرل شي (، ځکه چې هلته ماتونه منځ ته نه راځي:

$X = 0 , 1 ,1 / 2$

$Y = -9 , 16 , 0$

نو

$$x_1=1/2 \qquad (12, 62)$$

د مساوات (۱۲ . ۶۰) په همدې ډول (۱۲ . ۶۱) یو رییل صفرځای دی

بیلګه ۱۲ . ۱۲ الف:

د لاندې برابرون لپاره

$$x^3-9x^2+27x-27=0 \qquad (12, 63)$$

د ارزښت جدول

$$X = 0 \;,\; 1 \;,\; -1 \;;\; 2 \;,\; -2,\; 3$$
$$Y = -27 \;,\; -8 \;,\; -64 \;,\; -1 \;,\; -25,\; 0$$

له لارې لاندې رییل صفرځاي لاس ته راځي

$$x = 3 \qquad (12, 64)$$

بیلګه ۱۲ . ۱۳ الف :

د برابرون

$$x^3 - 9x^2 + 27x - 27 = 0 \qquad (12, 65)$$

لپاره د جدول

$$X = 0 \;,\; 1$$
$$Y = -3 \;;\; 0$$

سره لاندې صفرځاي لاس ته راځي

$$x = 1 \qquad (12, 66)$$

په ټولیزه توګه کیدی شي په کلکه څرګند شي ، چې د دریم درجې برابرونسیستم (۱۲ . ۵۶) لپاره تل یو رییل اوبې یاحل x1 شته دی. دا یو واقعیت دی چې بې له شوونې یې لیکو، چې دا پولینوم (۱۲، ۵۷) بې له پاتې په لاینیز فاکتور (x - x1) ویشل کیدی شي او یو دومه درج پولینوم ترې لاس ته راځي:

$$(x^3+a2x^2+a1x+a0):(x-x1)=x^2+b1x+b0$$

له دې امله داسې دی

جمله ۱۲ . ۴ :
هر دریمه درجه برابرون (۱۲ . ۵۶) کم له کمه یو رییل اوبی x1لري او دا لاندې باوري دي

$$P_3(x) = x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = (x - x_1)(x^2 + b_1x + b_0);.............(12,67)$$

دلته نو بیا نور د دریمي درجي مساواتو (۱۲ . ۵۶) دوه حلونه x2 او x3لاس ته راځي که څلورې برابرون یا مربع مساوات $x^2 + b1x + b0 = 0$ اوبی شي، او د جملو ۱۲ . ۱او ۱۲ . ۳ سره کیدی شي چی لاندې جمله فرمولبندې کړی شو

جمله ۱۲ . ۵ :
هر دریمه درجه برابرون درې اوبیوني یا اوبي x1 , x2,x3 لري او دا باور لري

$$x^3+a2x^2+a1x+a0=(x-x1)(x-x2)(x-x3) \quad (12 , 68)$$

دلته دا لاندني حالتونه ممکن دي

۱ - درې رییل مختلف حلونه x1 , x2 او x3 شته دی (موجود دي)

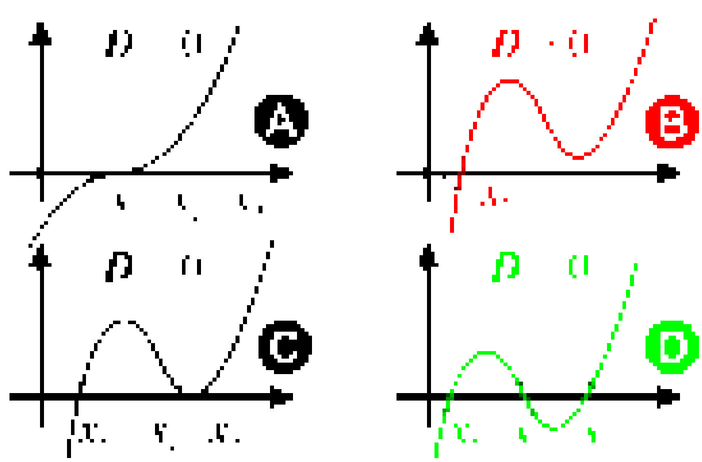
۲ - یو رییل حل x1 او ددې سره مختلف یو ډبل رییل حل x2=x3شته دی .

۳ - یو رییل درېګونی حل شته دی

$$x1 = x2 = x3$$

۴ - یو رییل حل x1 او یوه جوړه کونجوګیرت کملکس اوبیوني یا اوبي $x_2 = \overline{x_3}$ شته دی

دا لاندې څیره د ټولو راشنل فنکشنونو(۱۲ . ۵۷) تیپیکي تلنه د جملی ۱۲ . ۵ څلورو حالتونو کی ښایي



د (۱۲ . ۶۸) فرمول په مرسته د بني اړخ په ځلولواو فاکتورونو(ځله وونو) پرتلی یا انډول له لارې کیدی شي د دریمی درجي پولینومو لپاره د وییتا جمله تصدیق کړي چی د جملی ۱۲ . ۲ سره سر خوري

جمله ۱۲ . ۶ :

که x1 , x2 او x3 د دريمي درجي برابرون (۱۲ . ۵۶) اوبیونې وي ، نو لاندې باوري دي

$$a0=-x1.x2.x3 \qquad (12,69)$$

$$a1=x1x2+x1x3+x2x3 \qquad (12,70)$$

$$a2=-(x1+x2+x3) \qquad (12,71)$$

جملی ۱۲ . ۴ په مرسته دې اوس د بیلګو ۱۲ . ۱۰ الف، تر ۱۲ . ۱۳ الف پورې د نورو دواړوx2 او x3 اوبیونې ولټول شي.

بیلګه ۱۲ . ۱۰ ب :

(۱۲ . ۵۸) برابرون د (۱۲ . ۵۹) برابرون له مخی x1 = 2 حل لري. سړی دا ځواب د ۱ . . ۲ ۴ . برخي له مخي د پارشل Partial- (ټوټه-(ویش په بنسټ لاس ته راوړي.

$$(x^3-3x^2-4x+12):(x-2)=x^2-x-6$$

$$..\underline{x^3+2x^2}$$

$$........-x^2-4x+12$$

$$.........\underline{-x^2+2x.........}$$

$$..............-6x+12$$

$$..............-6x+12$$

له x² - x - 6 = 0 څخه لاس ته راځي

$$x_{2,3}=1/2\pm\sqrt{1/4+6}=1/2\pm\sqrt{1/4+24/4}=1/2\pm5/2,$$

$$x2=3, x_3=-2$$

دلته د جملی ۱۲ . ۵ لومړی حالت لرو، د لاندې مختلفو ریيلو ځوابونو سره
، $x1 = 2 , x2 = 3 , x3 = -2$
او داسی دئ:

$$x^3-3x^2-4x+12 = (x-2)(x-3)(x+2)$$

بیلګه ۱۲ . ۱۱ ب :

(۱۲ . ۶۰) برابرون د (۱۲ . ۶۲) برابرونونو له مخی اوبی
$x1 = 1/2$
لري او داسی دئ:

$$(2x^3+11x^2+12x-9):(x-1/2)=2x^2+12x+18$$

او له $2x^2 + 12x + 18 = 0$

په همدې ډول یا (□) له $x^2 +6+9=0$ څخه لاس ته راځي

$$x_{2,3} = -3 \pm \sqrt{9-9} = -3 \Leftrightarrow x_2 = x_3 = -3$$

دلته د جملي ۱۲. ۵ دوم حالت مخ ته پروت دی د یوه ریيل حل او یو بل له دې حل مختلف ډبل ریيل حل سره، یعنی لرو , $x1=1/2 , x2=x3=-3$ او داسی دئ

$$x^3+(1/2)x^2+6x-9/2)=(x-1/2)(x+3)^2$$

بیلګه ۱۲ . ۱۲ب :

(۱۲ . ۶۳) برابرون د(۱۲ . ۶۴) له مخی $x1 = 3$ ځواب لري. دلته باور لري

$$(x^3-9x^2+27x-27):(x-3)=x^2-6x+9$$

له $x^2-6x+9=0$ څخه لاس ته راځي

$$x_{2,3} = 3 \pm \sqrt{9-9} = 3$$

نو دلته مو د جملی ۱۲ . ۵ د دریم حالت درې برابره ځواب مخ ته پروت دی یعنی

$$x_1 = x_2 = x_3 = 3$$

او داسی دئ

$$x^3+-9x^2+27x-27=(x-3)^3$$

بیلکه ۱۲ . ۱۳ ب : (۱۲ . ۶۵) برابرون د (۱۲ . ۶۶) برابرونونو له مخی ځواب
$x1 = 1$ لري، او داسی دی

$$(x^3 -5x^2 +17x-13):(x-1) = x^2-4x+13$$

له $x^2-4x+13 = 0$ څخه لاندې لاس ته راځي

$$x_{2,3} = 2 \pm \sqrt{4-13} = 2 \pm 3i$$

دلته د جملی ۱۲ . ۵ څلورم حالت د یوه ریبل حل او یوه جوړه کونیوګیرت کملکس ځوابونوسره مخ ته پروت دي.

$$x1 = 1 , x2 = 2+3i , x3 = 2 - 3i,$$

او دا باوري دي

$$x^3-5x^2+17x-13=(x-1)(x-2-3i)(x-2+3i) =(x-1)(x^2-4x+13)$$

۱۲ . ۴ د ریښی (جذر) برابرون

په ۱۲ . ۱ برخه کی د ریښی رابرون وڅیړل شو. او دا هم څرګند شو چی څنګه د ریښی برابرون په ریشنل برابرونو اوله دې سره n- می درجي برابرونو بدلیدلي شي٠ دا دې دلته د بیلګو په څير پاتي وي. یواځي ریبل اوبیونې به و څیړل یا و پلټل شي.

جمله ۱۲ . ۱۴ :

د ریښي برابرون

$$7+3\sqrt{2x+4} =16;..........................(12,72)$$

ډیر ساده کیدی شي چی په لاینیزو برابرونونو واړول شي

$$3\sqrt{2x+4} =9; \sqrt{2x+4} =3; 2x+4=9; 2x=5; x=5/2;........(12,73)$$

د ازمایلو لپاره که (۱۲ . ۷۳) برابرون په (۱۲ . ۷۲) برابرونونو کی خوندي شي، نو څرګندیږي چی دا دx-ارزښتونه په ریښتیا د مخه ورکړ شوي ارزښتونه پوره کوي

$$7+3\sqrt{5+4} = 7+3.3=16$$

بیلګه ۱۲ . ۱۵:

د ريښی برابرون يا مساوات

$$\sqrt{2x+19}+5=0;..........(12,74)$$

کيدی شي په ساده بڼه واړول شي

$$\sqrt{2x+19}=-5; 2x+19=5; x=3;.........................(12,75)$$

د ازمايني لپاره، که (۱۲ . ۷۵) د پيل په برابرون (۱۲ . ۷۴) کی خوندي شي، نو دا برابرون ورکوي

$$\sqrt{2x+19}=10\neq 0$$

له دې امله ارزښت $x = 3$ د برابرون (۱۲ . ۷۴) ځواب نه دی . په دې لاس ته راوړنو سره يا په دې تعقيب د پيل برابرون ځواب نه لري.) داسي کيدی هم نه شي، ځکه چي تل $0<2x + 19$ دی)۰

دا ساده بیلګی موږ ته را ښايي چي بايد د ريښی مساواتو حل تل وازمايل شي چی ايا په ريښتوني دا ځواب دی او که نه، او دا په داسی ډول چی شميرل شوي ارزښتونه په پيل مساوات کی کيږدي چی ايا مساوات پوره کوي که نه . دا عمل يواځي د ازمايلو لپاره نه دئ چي ګوندې تيك يا صحيح شميرنه شوې او که نه، بلکه دا ځواب يو اړيين سما نديز پل يا ضروری منطقي پل دئ .

په توليزه توګه باور لري: که برابرون:

$$f (x) = g (x) \qquad (12 , 76)$$

په يو ې نوي بڼه واړول شي

$$F (x) = G (x) \qquad (12,77)$$

چی د برابرون دواړو لورو ته يا يو څه ور زيات شي ، يا تری کم شي، ياداوړه خواوې په يوه ګڼ ځل (ضرب) شي او يا وويشل شي (په دې حال کی بايد پرويشونی صفر نه وي، ځکه چی په صفر ويشل اجازه نه لرو) که دواړه خواوی د ريښی لاندې راشي او يايه توان پورته شي نود پيل برابرون (۱۲ ، ۷۶) هر ابی بدل شوي برابرون (۱۲ . ۷۷) ځواب هم دی ، مګر نه په ځټ (برعکس، مخامخ). کيدی شي چی اړول شوی برابرون (۱۲ . ۷۷) زيات ځوابونه ولري نسبت و پيل برابرون (۱۲ ، ۷۶) ته . دا به په لاندې بيلګه کي روښانه شي.

بيلګه ۱۲ . ۱۶:

د ريښې يا جذر برابرون يا مساوات

$$\sqrt{x}-\sqrt{x-1}=\sqrt{2x-1} \quad (12.78)$$

څلورئ يا مربع ته د جګولو له لارې دا بڼه غوره ګوي

$$x+(x-1)-2\sqrt{x(x-1)}=2x-1$$

$$x+(x-1)-2x(x-1)=2x-1 ,$$

نو $\sqrt{x(x-1)}=0$

په بيا څلورئ يا مربع کولو سره سړی يو مربعمسوات لاس ته راوړي

$$x(x-1) = 0 \quad (12, 79)$$

چې لاندې اوبی يا ځواب لري :

$$x_1 = 0, x_2 = 1 \quad (12.80)$$

دا د (۱۲ . ۷۹) اوبيونې دي، مګر بايد و ازمايل شي چې ايا دا د (۱۲ . ۷۸) اوبيونې هم دي که نه.

د $x = 0$ لپاره په (۱۲ . ۷۸) کی دوه ريښی نه دې تعريف يا ددوه ريښو پيژند نه شته، نو $x = 0$ د (۱۲ . ۷۸) اوبيونه نه ده .

د $x = 1$ لپاره لاس ته راځي $1 - 0 = 1$

له دې امله $x = 1$ د پيل بيلګی (۱۲ . ۷۸) يوګونی ځواب يا اوبی دی .

بيلګه ۱۲ . ۱۷:

د ريښی برابرون

$$\sqrt{x}.\sqrt{x-3}-\sqrt{x^2-4x+3}-\sqrt{2x^2-7x+3}=0,............(12,81)$$

کيدی شي چې په ورته ډول لکه (۱۲ . ۷۸) بڼه واړول شي:

$$\sqrt{x}.\sqrt{x-3}=\sqrt{x^2-4x+3}+\sqrt{2x^2-7x+3} =>$$

$$x(x-3)=(x^2-4x+3)+(2x^2-7x+3)+2\sqrt{(x^2-4x+3)(2x^2-7x+3)} =>$$

$$-2\sqrt{(x^2-4x+3)(2x^2-7x+3)}=2x^2-8x+6$$

$$(x^2-4x+3)(2x^2-7x+3)=(x^2-4x+3)^2;.........(12.82)$$

دا برابرون یا مساوات پوره دی، که $x^2-4x+3=0$ باور ولري، نو د لاندې لپاره

$$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4-3} = 2 \pm 1, x_1 = 3, x_2 = 1, ...(12,83)$$

د ټولونورو x لپاره $x^2-4x+3|= 0$ دی ، او (۱۲ . ۸۲) کیدی شي چي په لاندې فاکتور وویشل شي:

$$2x^2- 7x + 3 = x^2 -4x + 3$$

$$x^2 - 3x = 0$$

$$x(x-3) = 0$$

$$x3 = 0, x4 = x1 = 3$$

او په (۱۲ . ۸۱) کی ځاي په ځاي کولو سره ازمایل کیږي، چی کوم له لاندې ارزښتونو

$$x_1 = 3, x_2 = 2, x_3 = 0$$

پیل برابرون ډکوي.(باوري کوي، پوره کوي)

د $x = 3$ لپاره باور لري:

$$\sqrt{3}.\sqrt{0} - \sqrt{9-12+3} - \sqrt{18-21+3} = 0$$

له دې امله $x = 3$ د پیل برابرون یا مساوات (۱۲ ۸۱) اوبی یا حل دی . د

$x3 = 0$ او $x2 = 1,$

لپاره ریښي پیژند نه لري یا تعریف نه دی، نو له دې امله د پیل برابرون (۱۲ . ۸۱)

اوبی حل $x = 3$ (12 . 85)

یواځني حل دی

۱۲ – تمرینونه

۱ – مربع مساوات

۱،۱- مربع مساواتدټاکلو ضریبونو سره

1.1.1. a) $x^2 - 4 = 0$ b) $3x^2 + 27 = 0$

c) $x^2 - 9x = 0$ d) $5x^2 = 125\,x$

1.1.2. a) $(x + \frac{1}{3})(x - \frac{1}{3}) = \frac{7}{12}$ b) $(x + \frac{1}{2})(x - \frac{1}{2}) = \frac{5}{16}$

c) $(x - 6)(x + 5) = 0$ d) $(x - \sqrt{7})(x - \sqrt{5}) = 0$

1.1.3. a) $x^2 - 6x + 8 = 0$ b) $x^2 + 4x + 2 = 0$

c) $x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} = 0$ d) $x^2 + 27\frac{1}{12} = 10\frac{7}{12}x$

1.1.4. a) $3x^2 - 20 = x$ b) $7x^2 + 23x = 84$

c) $(43 + 10x)^2 + (66 + 10x)^2 = (79 + 14x)^2$

d) $(3x - 5)^2 - (2x + 5)^2 = 0$

1.1.5. a) $\frac{8-x}{2} - \frac{2x-11}{x-3} = \frac{x-2}{6}$ b) $3x - \frac{3x-10}{9-2x} = 2 + \frac{6x^2-40}{2x-1}$

c) $\frac{5x-1}{6x-9} - \frac{9x-4}{8x+12} - \frac{3x+8}{4x^2-9} = \frac{1}{2}$ d) $\frac{3}{x-2} - \frac{8}{4-3x} = \frac{19}{2x+1}$

۱ . ۲ – مربع مساوات د ناټاکلو ضریبونو سره

1.2.1. a) $x^2 - a^2 = 0$ b) $x^2 - ax = 0$

c) $x^2 + \frac{4}{3}ax + \frac{1}{3}a^2 = 0$ d) $x^2 + \frac{1}{2}bx - \frac{1}{2}b^2 = 0$

1.2.2. a) $8x^2 - 10bx - 3b^2 = 0$ b) $12x^2 - 34ax + 10a^2 = 0$

c) $16x^2 - 8ax + a^2 - b^2 = 0$ d) $ax^2 + bx + c = 0$

1.2.3. a) $a^2 - x^2 = (a - x)(b + c - x)$

b) $(x - a + b)(x - a + c) = (a - b)^2 - x^2$

c) $(a + bx)^2 + (ax - b)^2 = 2(a^2x^2 + b^2)$

d) $(x + a + b)(x - a + b) + (x + a - b)(x - a - b) = 0$

1.2.4. a) $ax^2 - (a^2 + 1)x + a = 0$ b) $abx^2 - (a^2 + b^2)x + ab = 0$

c) $a^2(a - x)^2 = b^2(b - x)^2$

d) $(a - x)^2 - (a - x)(x - b) + (x - b)^2 = (a - b)^2$

1.2.5. a) $x + \frac{1}{x} = \frac{a-b}{a+b} + \frac{a+b}{a-b}$ b) $x - \frac{1}{x} = \frac{a}{b} - \frac{b}{a}$

c) $\frac{a+x}{b+x} + \frac{b+x}{a+x} = \frac{5}{2}$ d) $\left(\frac{a-x}{x-b}\right)^2 = 8\left(\frac{a-x}{x-b}\right) - 15$

۱ . ۳ – مساوات سیتم، کوم مو مربع مساوتو ته لاربنبودوي یا بیایي

1.3.1. a) $3x + 2y = 3$, $xy = 3$ b) $10x + y = 10$, $5x(15x + y) = 75$

c) $3x + 7y = 21$, $3x^2 - 7y = \frac{21}{2}$ d) $x^2 + xy + y^2 = 1372$, $2x - y = 2$

1.3.2. a) $x + y = a$, $xy = b$

b) $xy = a$, $\frac{x}{y} = b$

c) $x^2 + y^2 = c^2$, $\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$

d) $ax^2 - \frac{b}{y^2} = 2(a^2 - b^2)$, $bx^2 - \frac{a}{y^2} = a^2 - b^2$

۱ . ۴ – د n-مې درجې ځانګړې مساوات، چېپه مربع مساوات بيرته اړول کيدی شي

۱ . ۴ . ۱ – بې مربع مساوات د ټاکلو یا معلومو ضريبونو سره

a) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ b) $(x^2 - 5)^2 + (x^2 - 1)^2 = 40$

c) $(x^2 - 10)(x^2 - 3) = 78$ d) $10x^4 - 21 = x^2$

۱ . ۴ . ۲ - بې مربع مساوات د ناټاکلو یا نامعلومو ضريبونو سره

a) $x^4 + a^4 + b^4 = 2a^2x^2 + 2b^2x^2 + 2a^2b^2$

b) $(a^2x^2 + b^4)(x^2 - a^2) = b^2(x^4 - a^4)$

c) $\frac{a^2b^2x^2}{a^3b + ab^3x^2} + \frac{ab - x^2}{x^2 - 1} = \frac{a^2b^2}{a^2 + b^2x^2}$

d) $\frac{(a-b)x^4}{a^2 - b^2} + \frac{4x^2}{a+b} = x^2 + 4$

۱ . ۴ . ۳ – د n-مې رجې مساوات د $a_0 = a_1 = \ldots = a_{n-3} = 0$ سره

a) $x^{10} + 6x^9 + 5x^8 = 0$ b) $\frac{5}{2}x^5 + 7x^4 = -20x^3$

c) $abx^8 - (a^2 + b^2)x^7 = -abx^6$ d) $ax^{22} - a^2x^{11} + a^2 - a = 0$

۱ . ۵ – لاندې مساوات هم د xاو هم د a پسې حل کړئ!

a) $x^2 + \sqrt{a}\,x - a = 0$ b) $x^2 - 2bx + 2(ab - \frac{1}{2}a^2) = 0$

c) $x^2 + 9ab = (a + b)(x + 2a + 2b)$ d) $(x + b)(x - b) = a(2x - a)$

۱ . ۶ . – شي شوالونه

۱ . ۶ شي سوالونه

۱ . ۶ . ۱ الف دوه ګټونه ځان داسې نيسي لکه 1 : 3 . ددې ګټونو د مربع زياتون ۱۵۶۰ دی. دا ګټونه څه نوميږي؟

ب) د درې يو په بل پسې ګڼونو د لوي ګڼ مربع دومره ده ، لکه د دوه کوچنيوګڼونو د مربعو زياتونونو. دا ګڼونه څه نوميږي يا کوم دي؟

پ) د کوم مثبت ګڼ لسرځله د هغه د مربع څخه ۹۹۹ کوچنی دی؟

ت) مات 1/4 په دوه فاکتورونو a او b داسې تجزيه کړی، چې لاندې زياتون $(a^2 + b^2)/(a^2 - b^2)$ يې لاس ته راشي.

. ۶ . ۲ . الف) په يوه برابر برقجريان کی مقاومت په ديرش اوم $30\ \Omega$ لوييږي، په کوم کې چی د برققوه په همغه د 220 V (وولټه) شپانونګ په پنځه امپير (1,65A) کوچنی‌شي . مقاومت او برققوه څومره دي؟

ب) دوه سيخونه چی مقاومت يی $60\ \Omega$ يو له بل توپير لري، چې يوه د غبرګ چالانولوعمومي مقاومت $22,5\ \Omega$ کړي. دواړه برخه مقاومتونه څومره لوي دي؟

. ۶ . ۳ . الف) يوه د بايسکلځغلونی لار چې ۲۲۵ کيلو متره اوږده ده، د يوه موادو موټر څخه په درينيم ساعته لنډ وخت کې وهل کيږي،چې د موټر په منځني سرعت چې 26, 25 km/h نسبت و بايسکلځغلونکي ته د موادو موټر او بايسکل ځغلونکي سرعت او د وهلو وخت څومره دي؟

ب) د سپورت جشن کې يو سپورتي چې له A و B ته په 5km/h سرعت ځغلي، له خپل منډپيل څخه يونيم ساعت وروسته له يوه بايسکلسپورتي څخه وروسته کيږي، کوم چې له مخامخ کيدو نيم ساعت وروسته B ته رسيږي، او سملاسي بيرته ګرځي او په همغه وخت کې A ته رسيږي په کوم کې چې ځغاستی و B ته رسيږي، د $\overline{AB}$ کرښه څومره لری ده؟

پ) دوه ډبډبي ځغاستي،يوبل باندې نيغ ولاړو سرکونو د څلورلاري په لور،په ډبډبيو ځغلي. د لمړي سرعت ۵ متره په ثانيه کی، دوم څلور متره په ثانيه کی دي دوي له ۳ ثانيو وروسته يو ۳۵ متره لريوالی يو له بل لري، دوي يو

له بل په سرچینه کې د څلور لارې څومره لرېوالی لروده، که لمړی له دوم ۴ متره ورته نژدې وو؟

ت) د ګاډي یو لاین د موټرڅغاست سرك لمړی برخې سره غبرګ غزیدلی. د یوه موټر څغاستي پیل کې د یو مخته راتلونکي ګاډي واټن ۲۲۵ متره لرې دی. کله دوه ماشینونه په همغه ځګوالي دي، که موټرڅغاستی منظم تعجیل او یو تعجیل د $10m/s^2$ کی لري، په داسې حال کی چی د ګاډی سرعت ثابت او $72\ km/h$ دی؟

ټ) په منځنی سرعت $v_m = 18km/h$ په ۶ بجو له لایپځیږ څخه د دیساو په لور بایسکل څغلیدونکی په ۸ بجو ، په همغه وخت کی له دیساو څخه د لایپځیږ په لور راتلونکی بایسکل څغاستی سره مخامخ کیږي. ورستنی ۱۰۰ دقیق د مخه دیساو ته راځي لکه دوم ولایپځیږ ته. د دیساو او لایپځیږ ترمنځ لریوالی یا واټن څومره دی؟

۱ . ۶ . ۴ . الف) په ولاړنجیز درېګوډي کې ، کاتیتې څانونه داسې یوبل سره نیسي لکه 3:4 ، هیپوتینوزې ۵۰ سانتي متره ده ، کاتیتې څومره اوږدې دي؟

ب) د یوه ولاړکونجیز دریګوډي اړخونه څومره لوي دي ، که د دواړو کاتیتو زیاتون یې۱۷ سانتیمتره اود یوې کاتیتې او هیپوتینوزې زیاتون ۱۸ سانتي متره وي ؟

پ) د یوه سمکونجیز (ولاړکونجیز) دریګوډي کاتیتې څومره لویې دي، که د هغوي زیاتون ۴۲ سانتیمتره وي ، د دریګوډي هواردننه ۲۱۶ مربع سانتي متره وي ؟

ت) د یوه ولاړګوډي نیمی (قطر) ۳۵ سانتي متره اوږد دی، که د ولاړ ګوډي اوږد اړخ ۸ سانتي متره وغزول شي او لنډ اړخ ۶ سانتي متره وغزول شي، د نیمي اوږدوالی ۱۰ سانتیمتره لویږي. د سمکونجیز اړخونه څومره لوي دي؟

ت) که د مربع یوه خوا ۷ سانتي متره وغزوي او بل اړخ په همدې ارزښت لنډ کړي،نو مربع او سمکونجیز دواړه د هوارې دننه ۴۹۵۱ مربع سانتي متره لري. د سم اړخیز اړخونه څومره لوي دي؟ (یا ولاړ اړخ)

ټ) د یوې ګردۍ وړانګه ۱۶ سانتي متره اوږده ده. په ګرده کې دننځاي مربع اړخ څومره لوي دی؟ (یا څونډي مربع اړخ)

ج) د یوې ګردۍ نیمي باید څومره لوي، که په دننه منځشوې مربع اړخ ۱ سانتي متره د هغه د وړانګې څخه لوي وي؟

ح) که د یوې ګردۍ نیمي (قطر) ۳ سانتي متره لوي شي ،نو د ګردۍ هواره دوه برابره کیږي. د ګردۍ سرچینې نیمي څومره لویه ده؟

خ) د یوه نیمغونډي نیمي څومره دی، که د هغه د دیوال لویوالی ۳ سانتیمتره او او تشه کې یې ۵۰۱۶ مکعبسانتي متره وي؟

۲ – د دریمې او څلورمې درجې مساوات

2.1 a) $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$ b) $x^3 + x^2 - 5x - 84 = 0$

c) $3x^3 - x^2 - 9x + 3 = 0$ d) $x^3 + x - 2 = 0$

2.2. a) $4x^4 - 12x^3 + 7x^2 + 3x - 2 = 0$ b) $x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 6x = 0$

c) $x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 4x - 5 = 0$ d) $6x^4 + 5x^3 - 38x^2 + 5x + 6 = 0$

۳ . ریښه مساوات:

ټول ارزښتونه x وشمیرئ، چې د لاندې مساالتو حلونه یا اوبیونې دي. د هرې پوښتنې د ټیکاوي لپاره ازماېښت وکړئ!

۳ . ۱ – ریښه مساوات د ټاکلو ضریبونو یا څلوونو سره:

3.1.1. a) $\sqrt{x} = 3$ b) $\frac{3}{2}\sqrt{x} - \frac{2}{3}\sqrt{x} + 7 = 2\sqrt{x}$

c) $\frac{5}{3}\sqrt{15x} - \frac{3}{5}\sqrt{15x} - 11 = \frac{1}{3}\sqrt{15x}$

d) $\sqrt[3]{x} = 5$

3.1.2. a) $(3\sqrt{x} - 5)(5\sqrt{x} - 3) = 5(3x - 31)$

b) $(5\sqrt{x}-2)^2+(12\sqrt{x}-9)^2=(13\sqrt{x}-9)^2$

c) $\dfrac{5\sqrt{x}+12}{7\sqrt{x}+15}=\dfrac{4}{5}$ d) $\dfrac{2\sqrt{x}+3}{2\sqrt{x}-3}=7$

3.1.3. a) $\dfrac{\sqrt{x}-3}{7}-\dfrac{\sqrt{x}-25}{5}=7-\dfrac{2+\sqrt{x}}{4}$ b) $\dfrac{16-\sqrt{x}}{2}-\dfrac{10-\sqrt{x}}{3}=\sqrt{x}$

c) $\sqrt{x}+\sqrt{2x}=1$ d) $2\sqrt{x}-\sqrt{2x}=2+\sqrt{2}$

3.1.4. a) $10-\sqrt{x-2}=3$ b) $\sqrt{3x-5}+4=5$

c) $\sqrt[3]{7x-6}+6=10$ d) $4\sqrt[3]{5x-8}=3\sqrt[3]{9x+1}$

3.1.5. a) $9\sqrt{5x+1}=20+4\sqrt{5x+1}$ b) $\sqrt{7x+2}=\dfrac{5x+6}{\sqrt{7x+2}}$

c) $3\sqrt{4x-3}-\dfrac{10x}{\sqrt{4x-3}}=\dfrac{1}{\sqrt{4x-3}}$ d) $\dfrac{9x}{\sqrt{10x-9}}-\sqrt{10x-9}=\dfrac{2}{\sqrt{10x-9}}$

3.1.6. a) $\sqrt{9x^2-10x-55}=3x-5$ b) $x+1=\sqrt{2x^2+\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}}$

c) $17-4\sqrt{\dfrac{3x+5}{x-7}}=1$ d) $24-7\cdot\sqrt[3]{\dfrac{4x-1}{x-6}}=3$

3.1.7. a) $\sqrt{52-3\sqrt{5x+6}}=2\sqrt{10}$ b) $\sqrt{x+1-\sqrt{2x+3}}=1$

c) $\sqrt{37-7\sqrt{5x+4}}=4$ d) $\sqrt[4]{19-3\sqrt[3]{5x-9}}=2$

3.1.8. a) $\sqrt{9x-17}-3\sqrt{x-4}=1$ b) $2\sqrt{9x+4}-3\sqrt{4x-11}=1$

c) $\sqrt{x+9}-\sqrt{x+2}=\sqrt{4x-27}$ d) $\sqrt{9x+10}-\sqrt{x-1}=\sqrt{4x+9}$

3.1.9. a) $\sqrt{x+4}-\sqrt{x-8}+\sqrt{x-3}-\sqrt{x+13}=0$

b) $\sqrt{x+9}+\sqrt{x-12}=\sqrt{x}+\sqrt{x-7}$

c) $\sqrt[3]{9x+10}-\sqrt{3x+4}=0$ d) $\left|\sqrt{3x+7}\right|+\left|\sqrt{4-x}\right|=3$

3.1.10. a) $\dfrac{1}{1+\sqrt{1-x}}+\dfrac{1}{1-\sqrt{1-x}}=\dfrac{2x}{9}$ b) $\sqrt[3]{76+x}+\sqrt[3]{76-x}=8$

c) $\left(\sqrt[3]{x}-1\right)^2+\sqrt[3]{x^2}=\sqrt[3]{x}$ d) $\sqrt[4]{x^3}-2\sqrt{x}+x=0$

----

۳ . ۲ – رېښه مساوات د نامعلومو ضريبونو سره

3.2.1. a) $\sqrt{x} = a$ b) $\sqrt[3]{x} = b$

c) $a - \sqrt[3]{x} = b$ d) $a\sqrt{x} - b = c\sqrt{x} - d$

3.2.2. a) $\sqrt{x-a} = b$ b) $\sqrt[3]{a-x} = b$

c) $\sqrt[4]{a^4 + x} = a$ d) $\sqrt[6]{a^6 - x} = b$

3.2.3. a) $(\sqrt{ax} + \sqrt{b})(\sqrt{ax} - \sqrt{b}) = (a+1)(a-1)b$

b) $(a - \sqrt{x})\,(b - \sqrt{x}) = (c + \sqrt{x})\,(d + \sqrt{x})$

c) $\dfrac{\sqrt{ax} - b}{\sqrt{ax} + b} = \dfrac{3\sqrt{ax} - 2b}{3\sqrt{ax} + 5b}$ d) $\dfrac{2a + 3\sqrt{bx}}{3a + 2\sqrt{bx}} = \dfrac{3b + 2\sqrt{ax}}{2b + 3\sqrt{ax}}$

3.2.4. a) $\sqrt{x} + \dfrac{\sqrt{b} - \sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{a}}$ b) $\dfrac{\sqrt{a} + \sqrt{x}}{\sqrt{a} - \sqrt{x}} = \dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{a} + \sqrt{x}} - \left|\dfrac{(x+a)^2}{a(x-a)}\right|$

c) $\dfrac{a + b\sqrt{x}}{a + b} = \dfrac{c + d\sqrt{x}}{c + d}$ d) $\dfrac{a + b\sqrt{x}}{a\sqrt{x} + b} = \dfrac{c + d\sqrt{x}}{c\sqrt{x} + d}$

3.2.5. a) $x + \sqrt{x^2 - a^2} = a$ b) $x - \sqrt{ax(1+x) + 1 - x} = 1$

c) $\sqrt{x+a} = a - \sqrt{x}$ d) $\sqrt{x + a^2} - \sqrt{x} = b$

3.2.6. a) $\sqrt{a-x} + \sqrt{b-x} = \dfrac{b}{\sqrt{b-x}}$ b) $\sqrt{x+a} - \sqrt{5x - 3a - 4b} = \dfrac{2b}{\sqrt{x+a}}$

c) $\sqrt{x+a} - \sqrt{x-a} = \dfrac{x+a-b}{\sqrt{x+a}}$

d) $\sqrt{3a - 2b + 2x} - 2\sqrt{3a - 2b - 2x} = \dfrac{a + 2b + 2x}{\sqrt{3a - 2b + 2x}}$

3.2.7. a) $\dfrac{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}} = \dfrac{a}{b}$ b) $\dfrac{\sqrt{3x^2 - 1} + \sqrt{3 - x^2}}{\sqrt{3x^2 - 1} - \sqrt{3 - x^2}} = \dfrac{a}{b}$

c) $\sqrt[3]{a+x} + \sqrt[3]{a-x} = \sqrt[3]{2a}$ d) $\sqrt[3]{a+x} + \sqrt[3]{a-x} = \sqrt[3]{c}$

۳ ، ۳ – مساوات سیستمونه، چې ریښه مساوات خوندي لري

3.3.1 a) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=8$, $\sqrt{xy}=15$

b) $x+y=58$, $\sqrt{x}+\sqrt{y}=10$

c) $\sqrt{x-5}+\sqrt{y+2}=5$, $x+y=16$

d) $\sqrt{5-3x+x^2}+\sqrt{5-3y+y^2}=6$, $x+y=3$

3.3.2 a) $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=\dfrac{a}{b}$, $xy=(a^2-b^2)^2$

b) $\dfrac{x\sqrt{x}+y\sqrt{y}}{x\sqrt{x}-y\sqrt{y}}=\dfrac{a}{b}$, $x^3-c^3=c^3-y^3$

c) $x\sqrt{x+y}=a$, $y\sqrt{x+y}=b$

d) $x\sqrt[3]{x^2+y^2}=a$, $y\sqrt[3]{x^2+y^2}=b$

۱۳ ترانسځندنت برابرونونه یا ـ مساوات

لکه څنګه چی په ۱۲ . برخه کی دي ته ګوته نیول شوې وه، چی دلته یو اځي هغه ترانسځندنت مساوات څېړل کيږي، کوم چی بيرته په الجبري مساواتو اړول کیدی شي.
دا بيرته په الجبري مساواتو اړول، لکه څنګه په ريښه مساواتوکی، په خوښه په بل شکل اړول کيږي او په داسي ډول دي لکه همك‌ته:

د فرمول په اړولو(فورم بدلون یا بڼه بدلون) سره کوم ځواب له منځه نه ځي، خو کيدی شي چی اړولی فرمول زياتې اوبيونې یا حلونه نسبت د پيل برابرون ته ولري. له دې امله بايد د اړول شوي برابرون ټولې اوبيونې په پيل برابرون کی ځاي په ځاي یا کيښوول شي او وکتل شي چی کوم له دې د پيل مساوات حلونه هم دي

لکه څنګه په ريښه يي برابرونونو یا مساواتو کی ، دلته هم يواځی ريښل اوبيونې پلټل کيږي.

۱۳ . ۱ لوګاريتمي مساوات

د لوګاريتمي مساواتو او اکسپوننشل یا په جګ سماواتو د حل (اوبي) پيدا کولو لپاره اړيين یا ضرور(ضروري یا اړيين شرايط) دی، چی د يو عدد(ګڼ) aلوګاريتم، د b په بنسټ، معلوم کړو یا وڅېړو.

$$x = \log_b a; a > 0, b >, b \neq 1 ....(13,1)$$

د بنسټ b = 10 لپاره(lga) او د بنسټ b=e لپاره (ln a) کيدی شي (۱۳ . ۱)

سیده د جبشمیري له لارې پیداشي. په څټ یا برعکس د 10 =| b |=e لپاره برابرونونه په دې ډول اړول کیږي

$$x = \log_b a = \lg a / \lg b = \ln a / \ln b......................(13.2)$$

د لوګاریتمي مساواتو یو ساده ډول یا شکل (تیپ) دا دئ

$$\log_b x = c..................................(13.3)$$

دا برابرون د (7. ۱) ، (7. ۲) له مخی لاندې ته ورته دئ:

$$x = b^c ....(13,4)$$

دا سی افاده هم د جبشمیري سره شمیرل کیدی شي.

بیلګه ۱۳ . ۱ $\log_2 x = 1,5; x = 2^{1,5} = 2.8284$:

په همدې ډول د (۱۳ . ۳) بڼې اوبیونه په لاندې ټولیز شوي شکل هم ساده دی

$$\log_b f(x) = c..(13,5)$$

دلته (f(x یوه الجبري وبینه یا افاده ده، د (۱۳ . ۵) سره الجبري برابرون کتمټ (ورته) دئ

$$f(x) = b^c ....(13,6)$$

ټولې د (۱۳ . ۶) اوبیونې د (۱۳ . ۵) اوبیونې هم دي

بیلګه ۱۳ . ۲ : لوګاریتمیز برابرون

$$\log_2(x^2 + x + 6) = 3$$

دلاندې مساواتوسره کتمټ دي

$x^2+x-2=0 \Leftrightarrow$ (همداسی) $x^2+x+6=2^3= 8$

او لاندې اوبیونې لري

$$x_{1,2}=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{8}{4}}=\frac{1}{2}\pm\frac{3}{2};x_1=-2;x_2=1$$

یو د (۱۳ . ۵) ډول (تیپ) برابرون هم مخ ته لرو، که د هغه کینې لور (ارخ) ته یود لوګاریتم ریشنل لاینیز کمبینشن الجبري وییبنه یا افاده موجوده وي

$$r_1.\log_b g_1(x)+r_2.\log_2(x)+r_3.\log_b g_3(x)+...=c.........(13,7)$$

دلته ځلوني ri راشنل ګڼونه دي. د لوګاریتم قوانینو (۷. ۷) ، (۷. ۹) کاروني یا استعمال څخه، ۷ برخه وګورئ، (۱۳ ، ۵) لاس ته راځي او دا د لاندې برابرونونو سره

$$f(x)=\{g_1(x)\}^{r_1}.\{g_2(x)\}^{r_2}...................................(13,8)$$

بیلګه ۱۳ . ۳:

لومړی له $\log_3(x-1)+\frac{1}{2}\log_3 x-\frac{1}{2}\log_3(x-1)=2$ څخه لاندې لاس ته راځي

$$\log[(x-1)(\frac{x}{x-1})^{\frac{1}{2}}]$$

اوله دې څخه رینبه برابرون $\sqrt{x}.\sqrt{x-1}=9$ ،

د کوم له څلورئ یا مربع کولو څخه $x(x-1)=81$ یعني $x^2-x-81=0$

د لاندې ځواب سره

$$x_{1,2}=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{324}{4}}=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{325}{4}}=\frac{1}{2}\pm(\frac{1}{2}).18.03;$$

$$x_1=9,515;x_2=-8,515$$

تیك دا $x1=9,515$ پیل برابرون پوره کوي

. د $x=x2<0$ لپاره $\log x$ او په همدې ډول $\log(x-1)$ پیژند نه لري یا تعریف نه دي.

بیلګه ۱۳ . ۴:

له $\log_b(2x+3)=\log_b(x-1)-1$ څخه لاس ته راځي

$$\log_b[(2x+3)/(x-1)]=1$$

او نور پسی $\frac{2x+3}{x-1} = b^1 = b$ پس

$2x+3=bx-b$
$b+3=x(b-2)$
$x=(b+3)/b-1)$

پیل وینه یا افاده د $x>1$ لپاره موخه وره یا هدفمنده ده، یعني
که $1<(b+3)/b-2)$ وي.
د $b>2$یعنی $b-2>0$ څخه لاس ته راځ $b+3 > b-2$
له دې لرو $-2<3$دا د ټولو b لپاره پوره دی
د. $b \le 2$ لپاره د $b+3 \le b-2$ $b+3 < b-2$ څخه $2 \le 3$ لاس ته راځي اودا د هیڅ b
لپاره باور نه لري .
له دې امله کره د $b > 2$ لپاره اوبی شته دی. د $b \le 2$ لپاره اوبیونه نه شته دی.

د لاندې لوګاریتمي تیپ برابرون هم کیدی شي په الجبري مساواتو بیرته واړول شي

$$F(\log_b f(x)) = 0 \qquad (13.9)$$

چیرته چی F او هم f الجبریزې ویینې یا افادې دي. د بدلون کاروايي یا عملیه اجرا کوو

$$y=\log_b f(x)......................................(13,10)$$

او په لمړي پل کی الجبري برابرون اوبی کوو

$$F(y)=0 \qquad (13.11)$$

ددې اوبیونه ..$y1,y2$ په (۱۳/۱۰) کی ږدو، نو د هر yi لپاره د تیپ (۱۳/۵)
لوګاریتمي مساوات لاس ته راځي:

$$\log_b f(x) = y_i; \quad i = 1,2,3,......... \qquad (13.12)$$

له دې څخه لاندې الجبري مساوات لاس ته راځي

$$f(x)=b^{y_i} \qquad (13.13)$$

ددې لپاره چی و ازمائیلی شو چی ایادا هم برابرون پوره کوي، نو ټول ددې برابرونونو اوبیونې یا ځوابونه باید په پیل برابرون (۱۳/۹) کی کینوول شي یا ځاي په ځای شي،

بیلګه ۱۳ . ۵ : برابرون $\log^2 x - \lg x - 2 = 0$ د سبستیټیوشن(بدلون) $y=\lg x$ سره په
ځلوری برابرون $y^2 - y - 2 = 0$ بدلیږي .
د $y_1 = 2$ او $y_2 = -1$ ځوابونو سره
له $\lg x = 2$ او $\lg x = -1$ لاس ته راځي

$$x_1 = 10^2 = 100 \quad \text{او} \quad x_2 = 10^{-1} = \frac{1}{10}$$

دواړه ځوابونه د پیل برابرون ځوابونه دي.

بیلګه ۱۳ . ۶ :

له برابرون $(6/(\lg x + 1)) + (8/(\lg x - 1)) = 3$
د $x>0$, مګر $(x \neq 1/10,\ x \neq 10)$ چی د اصلي ماتلاندې $(\lg x - 1)(\lg x + 1)$ سره
ځل شی، لاس ته ترې راځي

$$6(\lg x - 1) + 8(\lg x + 1) = 3(\lg^2 - 1)$$

$$,\quad 6\lg x - 6 + 8\lg x + 8 = 3\lg^2 x - 3$$

$$0 = 3\lg^2 x - 14\lg x - 5$$

او د بدلون $y = \lg x$ سره مو لاندې ځلوری بڼې یا مربعفورم ته بیایي:

$$3y^2 - 14y - 5 = 0\ ,\ y^2 - (14/3)y - 5/3 = 0$$

د لاندې ځوابونو سره

$$y_{1,2} = \frac{7}{3} \pm \sqrt{\frac{49}{9} + \frac{15}{9}} = \frac{7}{3} \pm \frac{8}{3};\ y_1 = lox_1 = 5;\ y_2 = \lg x_2 = -\frac{1}{3}$$

$$x_1 = 10^5;\ x_2 = x^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{10}}$$

دواړه ارزښتونه پیل مساوات پوره کوي.

که په یوه برابرون کی لوګاریتمونه د مختلفو بنسټونو bسره رامنځ ته شي، نو کیدی شي د (۱۳ . ۲) په مرسته په همغه برابر بنسټ واړول شي

بیلګه ۱۳ . ۷ :

له $\log_2(x-1) + \log_4(x-1) - 1 = 0$

څخه دلاندې برابرون په مرسته لاس ته راځي:

$$\log_4(x-1) = \frac{\log_2(x-1)}{\log_2 4} = \frac{1}{2}\log_2(x-1),$$

$$\log_2(x-1) + \frac{1}{2}\log_2(x-1) - 1 = 0,\ \log_2(x-1) = \frac{2}{3},\ x-1 = 2^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{2^2} = \sqrt[3]{4},$$

$$x = 1 + \sqrt[3]{4}.$$

دا ارزښت د پیل برابرون اوبی یا ځواب هم دی:

$$\log_2\sqrt[3]{4} + \log_4\sqrt[3]{4} - 1 = \frac{1}{3}\log_2 4 + \frac{1}{3}\log_4 4 - 1 = \frac{1}{3}\cdot 2 + \frac{1}{3} - 1 = 0.$$

۱۳ . ۲ اکسپوننشل – یا په جګ برابرونونه

ساده اکسپوننشل برابرون(مساوات)

$$a^x = b; a > 0, a \neq 1, b > 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (13,14)$$

کیدی شي چی د لوګاریتم نیولو سره سملاسي حل شي(ځواب شي)

$$x = \log_a b = \lg_b / \lg_a = \ln b / \ln a \qquad (13, 15)$$

لاندني برابرونونه په ساده ډول په (۱۳ ، ۱۴) ډول (رقم (تیوپ) برابرونونو باندې اړول کیدی شي.

بیلګه ۱۳ . ۸:

$$2^x + 3^{x+2} - 2^{x+2} - 3^{x+1} = 0.$$

$$2^x(1-2^2) + 3^x(3^2-3) = 0,\ \text{bzw.}\ 6\cdot 3^x = 3\cdot 2^x,\ \text{bzw.}\ \left(\frac{2}{3}\right)^x = 2,$$

$$x = \frac{\lg 2}{\lg\frac{2}{3}} = \frac{\lg 2}{\lg 2 - \lg 3} = -1{,}7095.$$

که په (۱۳ . ۱۴) د الجبري ويينې يا افادي(x) fاکسپوننتونه ياجګګڼونه وي، نو:

$$a^{f(x)}=b, a>0, a|=1, b>0 \qquad (13 . 16)$$

په دې ډول د لوګاريتمولو له لارې يو الجبري برابرون لاس ته راځي

$$f(x)=\log_a b \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (13,17)$$

د کومو ځوابونه چې د) ۱۳ . ۱۶ (ځوابونه هم دی.

بيلګه ۱۳ . ۹ : مساوات $4 = 2^{x^2+x-4}$

مو لاندې ځلورئ برابرون يا مربع مساوات ته بيايي (لاربنودوي)

$$(x^2+x-4)=\log_2 4 = 2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + x - 6 = 0$$

د $x_1 = 2 , x_2 = -3$ ځوابونوسره ، کوم چی د پيل برابرون اوبيونې يا ځوابونه هم دي٠

بيلګه ۱۳ . ۱۰ :

په برابرون $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \left(\frac{3}{2}\right)^{x+1}$ کی د يوه پوتنځ بنسټ د بل پوتنځ د بنسټ په څټ ارزښت دی. له دې امله باور لري

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{x+1} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-3}$$

له دې څخه لاس ته راځي

$$x_1 + 1 = -3 , x_2 = -4$$

بيلګه ۱۳ . ۱۱ : په مساوات $16^{(3^x)} = 4^{(6^x)}$

کې کيدئ شي چې ناپيژندونکي د اکسپونتت يا په ځګ څخه د دوه واره لوګاريتمولو له لارې لاس ته راشي (راحل شي):

$$3^x \cdot \lg 16 = 6^x \cdot \lg 4 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{6}\right)^x = \frac{\lg 4}{\lg 16} \Leftrightarrow x \cdot \lg 0,5 = \lg \frac{\lg 4}{\lg 16} = \lg \frac{2\lg 2}{4\lg 2},$$

$$x \cdot \lg 0,5 = \lg 0,5 \qquad \text{یا oder} \quad \left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{2},$$

$$x = 1 \qquad\qquad x = 1.$$

بیلګه ۱۳ . ۱۲ : $7\sqrt[x]{22} - 15\sqrt[x]{25} = 0$

یو د تیپ یا ډوی مساوات دي، ځکه چې باور لري

$$\frac{\sqrt[x]{22}}{\sqrt[x]{25}} = \frac{15}{7} \Leftrightarrow \sqrt[x]{\frac{22}{25}} = \frac{15}{7} \Leftrightarrow \left(\frac{22}{25}\right)^{\frac{1}{x}} = \frac{15}{7}$$

او له دې امله

$$\frac{1}{x} = \frac{\lg\frac{15}{7}}{\lg\frac{22}{25}} \Leftrightarrow x = \frac{\lg 22 - \lg 25}{\lg 15 - \lg 7} = 0,1677.$$

که د مساوات په کیڼ اړخ د اکسپوننشل افادو ځلونه او یا ویشونه هم وي، د مختلفو بنسټونو او مختلفو الجبري اکسپوننتونو سره، کیدی شي چې د لوګاریتمولو له لارې الجبري مساوات لاس ته راشی.

له

$$\frac{a_1^{f_1(x)}.a_2^{f_2(x)}........}{b_1^{g_1(x)}.b_2^{g_2(x)}........} = c;..................................(13,18)$$

څخه لاس ته راځي:

$$f_1(x)\lg a_1 + f_2(x)\lg a_2 + ... - g_1(x)\lg b_1 - g_2(x)\lg b_2 - .... = \lg c \qquad (13 . 19)$$

که یو مساوات مو مخ ته پروت وي، په کوم کی چی د یوه اکسپوننشل افادې یوه الجبري وپینه یا افاده F د الجبري اکسپوننت($f(x)$ سره رامنځ ته شي

$$F(a^{f(x)}) = 0 ;....................................(13,20$$

نو دا بدلونه کوو

$$y = a^{f(x)} \qquad (13 . 21)$$

د برابرون

$$F(y) \qquad (13.22)$$

د ټولواوبیونو $y_1, y_2, y_3;$............... لپاره باید

$$a^{f(x)} = y_i ; i=1,2,3....... \qquad (13.23)$$

په همدې ډول

$$f(x) = \log_a y_i \quad ; i = 1, 2, 3 .... \qquad (13.24)$$

اوبی شي

بیلګه ۱۳ . ۱۳:

برابرون $3^{2x} + 3^x = 2$ کیدی شي چی د بدلون $y = 3^x \, (y^2 = 3^{2x})$ سره په څلوری

برابرون یا مربع مساوات $y^2+y-2=0$ بیرته واړول شي. لاس ته راځي

$$y_{1.2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{8}{4}} = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}; y_1 = 3^x = 1; y_2 = 3^x = -2$$

له دې څخه لاس ته راځي

$$x_1 . \lg 3 = \lg 1 = 0, \; x_1 = 0$$

دا برابرون $x_2 . \lg 3 = \lg(-2)$ اوبیونه نه لري

بیلګه ۱۳ . ۱۴ :

په برابرون

$$\sqrt{e^{x^2-1}} - \sqrt{e^{x^2-1} - 1} = \sqrt{2e^{x^2-1} - 1} .... (13,25)$$

کې داسی بدلوو:

$$y = e^{x^2-1} .... (13,26)$$

او لاس ته راوړو

$$\sqrt{y}-\sqrt{y-1}=\sqrt{2y-1};..............................(13,27)$$

له دې څخه د مربع کوولو له لارې لاس ته راځي:

$$y+y-1-2\sqrt{y(y-1)}=2y-1\Rightarrow -2\sqrt{y(y-1)}=0 => y(y-1)=0$$
$$y_1=0; y_2=1$$

$y_2=1$ ټیك (۱۳ ، ۲۷) پوره کوي. له دې امله

$$e^{x^2-1}=1;..(13,28)$$

حل اوبی . د لوګاریتمولو څخه تعقیبیږي:

$x^2-1=\ln 1=0,$

$x1 = 1 , x2 =-1$

دواړه ارزښتونه پیلبراړون پوره کوي۰

برسیره پر دې باید وښوول شي، چې په برخی ۱۳ . ۱ او ۱۳ ۲ کی انځور شوي متودونو سره یوه د مساواتو ټوله لړی حل کیدی شي، په کوم کی اکسپوننشل افادې او لوګاریتم یوځاي رامنځ ته کیږي.

بیلګه ۱۳ . ۱۵ :

له $2^{(\ln^2 x-\ln x+1)}=8$ څخه د بیلګي په توګه د بنسټ 2 لوګاریتمولو له لارې لاس ته راځي

$\ln^2 x-\ln x+1=\log_2 8 = 3$

که کیږدو $y = \ln x$ ، نو دا څلوری برابرون یا مربع مساوات $y^2-y-2=0$ لاس ته راځي،د ځوابونو

$y1 = -1 , y2 = 2$

سره او له دې بیا لاس ته راځي:

$\ln x=-1 , \ln x=2, x1=e^{-1}=1/e , x2=e^2$

۱۳ . ۳ ګونومتریکي- یا کونجکچ برابرون

د ګونومتري ساده برابرون لاندې ځيره لري

$$\sin x=a \ , \ \cos x=a \qquad (13 . 29)$$

$$\tan x=a \ , \ \cot x=a, \qquad (13 . 30)$$

دلته فقط دواړه لومړي برابرونونه (۱۳ . ۲۹) ځوابونه لري ، که $-1 \le a \le 1$ باور ولري، نور ارزښتونه $\sin x$ او $\cos x$ نه شي غوره کولی(پرتله برخه ۶ . ۳) د جبشميرني سره د تکمو یا ګوتکونو په پرلپسی د (۱۳ . ۲۹) همداسی (۱۳ . ۳۰) یو ځواب لاس ته راځي

د(۱۳، ۲۹) لپاره

a F sin a F cos

د (۱۳،۳۰) لپاره

a F tan a 1/x tan

دا چي $\tan x$ او $\cot x$ پریودې همداسی 180°لري او په یوه اینتروال کی چي اوږدوالی همداسی 180°لري د(۱۳ ۳۰) تیك یو ځواب پروت دی، لاندې جمله صدق کوي

جمله ۱۳ . ۱ :که x_0 د(۱۳ . ۳۰) یو ځواب وي) چی د بیلګي په توګه د جبشميرنی په مرسته لاس ته راځي)، نو د (۱۳ . ۳۰) د لاندې بڼی ټول ځوابونه تر لاسه کوو

$$x_k = x_0 + k\pi = x_0 + k.180°; k = ... -3, -2, -1, 01, 2, 3, ...; .... (13, 31)$$

په همدې ډول دې دلته هم د هندسی برخه په پام کی وي. چی د هغو له مخې په (۱۳ ، ۳۱) کی د بیلګي په توګه باور لري

$$x_k = \frac{\pi}{6} + k\pi = 30° + k.180°$$

د کونجونو فنکشنونه $\sin x$ او $\cos x$ پریودې(تل بېرته راګرځېدنه یا دوران)

$$2\pi = 380°$$

لري. مساوات (۲۹.۱۳) ددې اوږدوالی اینتروال کی دوه حلونه لري. که چیرته د جبشمیرني سره یوه اوبیونه x_0 پیداشي، نو د sin x = a په حالت کی $x = -x_0$ هم یو حل دی، او $x = -x_0$ د cos x = a په حالت کی یو بل اوبی

یا حل دی. پس لرو:

جمله ۱۳ . ۲ : که x0 د (۱۳ ، ۲۹) یو هغه اربیونه یا حل وي، چی د بیلګي په توګه په جبشمیروني لاس ته راځي، نو د sin x = a ټول حلونه په لاندې ډول لاس ته راځي

$$x_k = x_0 + 2k\pi = x_0 + k.360°; k = ...-3,-2,-1,0,1,2,3,....; \qquad (13,32)$$

$$\bar{x} = \pi - x_0 + 2k\pi = 180° - x_0 + k.360°; \qquad (13,33)$$

او د cos x = a ټول حلونه په لاندې ډول لاس ته راځی

$$x_k = x_0 + 2k\pi = x_0 + k.360°; k = ...-3,-2,-1,0,1,2,3,....; \qquad (13,34)$$

$$\bar{x} = -x_0 + 2k\pi = -x_0 + k.360°; \qquad (13,35)$$

بیلګه ۱۳ . ۱۶: د مساوات sin x = 0,23910 لپاره د جبشمیرني سره لاندې حلونه لاس ته راځي: (په درجه کچ یا ګراد اندازه) x0 =13,833427º

(په لینده کچ) 0,24143 = 0,017453. 3,833427

د) ۱۳ . ۳۲ (،) ۱۳ ، ۳۳ (له امله په لاندې سره ټولې اوبیونې راکړ شوي دي

$$x_k = 13,833427 + k.360º = 0,24143 + k.6,28318,$$

$$\bar{x}_k = 166,16657º + k.360 = 2,9001 + k.6,28318.$$

بیلګه ۱۳ . ۱۷ : د برابرون cos x = -0,682000 اوبیونه د جبشمیروني سره مومو

$$x0 = 133,00013º = 133º = 2,32125.$$

د (۱۳ ، ۳۴) او (۱۳ . ۳۵) له مخی ټول حلونه په لاندې ډول لاس ته راځي

$$x_k = 133° + k.360° = 2,32125 + k.6,28318,$$

$$\bar{x}_k = -133° + k.360° = -2,34125 + k.6,28318$$

بیلګه ۱۳ . ۱۸:

د برابرون $\tan x = -\sqrt{3} = 4{,}843000$ حل په جبشمیرني پیداکوو

x_0 =-59,999988°=-60° = -1,04718

له دې امله د) ۱۳ . ۳۱ (له مخې ټول حلونه په لاندې ډول لاس ته راځي

x_k = -60° + k.180°= -1,04718° + k.3,14159

بیلګه۱۳ . ۱۹:

د برابرون cotx=4,843000 ټولې اوبیونې یا حلونه د جبشمیرني سره داسی

x_0 =11,666677° = 11,67°= 0,203675

لاس ته راځي. په دې توګه د (۱۳ . ۳) له مخې ټول حلونه په لاندې ډول لرو:

x_k = 11,67° + k.180°=0,203675 + k.3,14159

بیلګه ۱۳ . ۲۰ : مساوات $\sin x = \sqrt{2}$ د $1 < 2$ له امله اوبیونه ل نه لري .

د ګونومتري مساواتو نور تیپونه یا ډولونه، کوم چې تراوسه په څرګندومتودو یا لارو ځوابوړ دي، لاندې بڼه لري

$$\sin f(x) = a, \quad \cos f(x) = a \qquad (13.36)$$

$$\tan f(x) = a, \quad \cot f(x) = a \qquad (13.37)$$

دلته کیدی شي چی (f(x الجبري او یا ترانسځیندنته افاده ويکه بدل (سوبستیتوتي) شي

$$y=f(x) \qquad (13.38)$$

نو لاندې مساواتونه لاس ته راځي

$$\sin y= a, \cos y = a \qquad (13.39)$$

$$\tan y= a, \cot y = a \qquad (13.40)$$

دا کیدی شي د جملی ۱۳ . ۱ سره سم اوبی کړای شي. ددې اوبیونې یا حلونه دې

y3, y2, ,y1 , ... وي .

د (۱۳ ، ۳۷) سره سم د $f(x) = y_i, \ i = 1,2,3,...$ ټولې اوبیونې یا حلونه لاس ته راځي ددې لپاره دې بیلګه ورکړ شي.

بیلګه ۱۳ . ۲۱: $\sin(x-120°)/3=1/2$

د سبستیچیوشن یا بدلون $y=(x-120°)/3$ سره لاس ته راځي $\sin y=1/2$ د لاندې اوبیوني (حل) سره

$$y_k = 30° + k.360° \;,\; k = ...,-3,-2,-1, 0,1,2,3...$$

$$\overline{y}_k = 150° + k.360°$$

ټول د $(x - 120°)3 = y_k$, $(x - 120°)/3 = y_k$ اوبیوني (حلونهو پـه توګه لاس ته راځي:

$$x_k = 3y_k +120 = 90°+3k.360°+120° = 210° +3k.360°$$

$$\overline{x}_k = 3y_k +120° = 450° + 3k . 360° + 120° = 570°+3k.360°$$

د ګونومتري فنکشنونو یو بل تیپ یا ډول ، له لاندې څخه لاس ته راځي

$$f(\sin x,\cos x,\tan x,\cot x,\sin 2x,\cos 2x,\tan 2x,\cot 2x,\sin 3x,\cos 3x,\tan 3x,\cot 3x, ...) \qquad (13 . 42)$$

دلته که د بیلګي په توګه بدل شي

$$y = \sin x \qquad (13 . 43)$$

د ۴ . ۵ برخی تریګونومتري فرمولونو په مرسته ټول په (۴۲ ، ۱۳) رامنځ ته شوي کونجفنکشنونه په y سره افاده کولی شو:

$$\cos x = \pm\sqrt{1-\sin^2 x} = \pm\sqrt{1-y^2},$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{y}{\pm\sqrt{1-y^2}}, \qquad \cot x = \frac{1}{\tan x} = \frac{\pm\sqrt{1-y^2}}{y}, \qquad (13.44)$$

$$\sin 2x = 2\sin x\cos x = \pm 2y\sqrt{1-y^2}, \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1-2y^2 \quad (\text{usw.}$$

(او داسې نور

له دې سره برابرون (۴۲ . ۱۳)، پهy ، یو برابرون بدلیږي:

$$F(y) = 0 \qquad (13 , 45)$$

دا دې په همغه ډول حلیدونکي وي او حلونه دې ....y3. y2 , y1 وي. نو بیاد(۱۳.۴۳)سره مناسب لرو

$$\sin x = y_i, i = 1,2,3... \quad (13.46)$$

اوبی کړي او د ټولو اوبیونو سره، کوم چی په (۴۲ . ۱۳) کي ښول شي ، وازمایل شي، چی ایا دا هم پوره کوي، که نه په (۴۲ . ۱۳) کیدی د x په ځاي یوه افاده g(x) هم ولیکلی شي.

$$f(\sin g(x), \cos g(x),....) = 0 \quad (13.47)$$

نو بیا سړی بدلوي

$$y = \sin g(x) \quad (13.48)$$

د پورته متود تشریح لپاره په لاندې ډول دوه ساده بیلګي ورکول کیږي

بیلګه ۱۳ . ۲۲:
برابرون

$$\sin x + \cos x = 1 \quad (13.49)$$

د (۴۲ . ۱۳) ، (۴۴ . ۱۳) سره ځان په رینبه ببرابرون بدلوي

$$y \pm \sqrt{1-y^2} = 1 \Leftrightarrow \pm\sqrt{1-y^2} = 1-y \Leftrightarrow 1-y^2 = 1 + y^2 - 2y \quad (13.50)$$

$$\Leftrightarrow 0 = 2y^2 - 2y = 2y(y-1)$$

$$y_1 = 0 , y_2 = 1 \quad (13.51)$$

اوس دې په یاد شي ، چی د y2=1 لپاره برابرون (۵۰ . ۱۳) او له دې سره سم برابرون (۴۹ . ۱۳) تل پوره دي. د دې په څنګ یا خلاف y1 فقط د (۵۰. ۱۳) حل دی ، که د
رینبی له مخه زیاتیز یا مثبت نخښه وي. دا حالت یوائې هلته مخ ته پروت دی، چی $\cos x>0$ وي.

دا هلته هم پام ته راځي، که د برابرون (۵۱ . ۱۳) سره برابرون (۴۶ . ۱۳)حل یا اوبی شي او
حل یا اوبنونه یی په (۴۹ . ۱۳) کی کیښول شي:

$$\sin x = y_1 = 0 , x_k = k\pi ; \; k = ...-3,-2,-1,0,1,2,3... \quad (13.52)$$

$$\sin x = y_2 = 1 , x_k = \pi/2 + 2k ; \; k = ..,-3,-2,-1,0,1,2,3,... \quad (13.53)$$

که (۵۲ . ۱۳) په (۴۹ . ۱۳) کېښوول شي، نو لاس ته راځي:

د جوړه k لپاره $\sin x_k + \cos x_k = \sin k\pi + \cos k\pi = 0 + 1$

د جوړه k لپاره $\sin x_k + \cos x_k = \sin k\pi + \cos k\pi = 0 - 1$

د پیلمساوات د زیاتځله حلونه یواځي جفت ګڼونه دي($x\pi = 2k\pi$) که(۱۳ . ۵۳) په (۱۳ . ۴۹) کېښوول شي، نو لاس ته راځي

$$\sin x_k + \cos x_k = \sin(\pi/2 + 2k) + \cos(\pi/2 + 2k) = \sin\pi/2 + \cos\pi/2 = 1 + 0 = 1$$

له دې وروسته ټول xk پیلبرابرون پوره کوي .

نو د (۱۳ . ۴۹) ټولې اوبیونې په لاندې بڼه لاس ته راځي

$$x_k = 2k\ ,\ x_k = \pi/2 + 2k\ ;\ k = ..-3,-2,-1,o,1,2,3,... \quad (13.54)$$

بیلګه ۱۳ . ۲۳ : د برابرون $\cos x + \cos 2x = 0 \quad (13.55)$

سره کیدی شي د ریښی مساوات څخه لار واړوو یت تیرشو. که چیرته $y = \cos x$ بدل کړي. د

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = y^2 - (1 - y^2) = 2y^2 - 1 \quad (13.57)$$

له امله له څخه (۱۳,۵۵) مربع مساوات لاس ته راوړو.

$$2y^2 + y - 1 = 0 \quad (13.58)$$

د دې حل سره : $y_{1;2} = -\frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{8}{16}} = -\frac{1}{4} \pm \frac{3}{4}$,

$$y_1 = \frac{1}{2}\ ,\quad y_2 = -1. \quad (13.59)$$

په (۱۳ . ۵۶) کې ایښوولو له لارې لاس ته راځي

$$\cos x = y_1 = \frac{1}{2}\ ,\quad x_k = 60° + k \cdot 360° = \frac{\pi}{3} + 2k\pi,$$

$$\bar{x}_k = 300° + k \cdot 360° = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi, \quad (13.60)$$

$$\cos x = y_2 = -1, \quad \bar{\bar{x}}_k = 180° + k \cdot 360° = \pi + 2k\pi, \quad (13.61)$$

$$x = \begin{Bmatrix} 60^o \\ 180^o \\ 300^o \end{Bmatrix} + k \cdot 360^o = \begin{Bmatrix} \frac{\pi}{3} \\ \pi \\ \frac{5\pi}{3} \end{Bmatrix} + 2k\pi. \quad (13.62)$$

تمرینونه

ټول ارزښتونه x وشمیرئ، چې لاندې برابرونونه پوره کوي! پام دې وي، چې د هرې پ،ښتني سره يې ازمايل يا ازماېښت اړيندی.

۱ - لوګاريتمي مساوات يا برابرونونه

1.1. a) $\log_4(x+1) = -3$ b) $4 - 3\lg 2x = 10$

c) $\lg\sqrt{2x} = 1{,}314$ d) $\ln(x-1)^2 = 2$

1.2. a) $\lg(2x+5) - \lg(3x+1) = 2$ b) $\lg 4x + \lg 2x + \lg x = 6$

c) $\frac{1}{3}\ln x^6 = \frac{1}{2}\ln 81$ d) $\lg(x-1)^2 = 6\lg 2$

1.3. a) $\lg(x-1) + \lg 3 = \lg(x^2-1)$

b) $\lg(x+1)^2 = \lg 2 + \lg(x+1) + \lg(x-1)$

c) $\lg x - \lg 4 = \lg 35 - \lg(x+4)$

d) $\lg(x-2) - \frac{1}{2}\lg 4 = \frac{1}{3}\lg 125 - \lg(x+1)$

1.4. a) $\lg x + \lg(x+1) + \lg(x-1) = \lg 24$

b) $\lg 3 + 2\lg x = \lg(4+x^3)$ c) $\lg(152+x^3) - 3\lg(x+2) = 0$

d) $2\lg^2 x^3 - 3\lg x - 1 = 0$

1.5. a) $\lg x + \lg(a - \frac{1}{a}) = \lg(1 - \frac{1}{a}) + \lg(1 + \frac{1}{a})$

b) $\lg(ax) - \lg a + \lg\frac{b}{a} = \lg b + \lg\frac{x}{a}$

c) $\lg x - \lg\frac{x}{abx-1} = \lg(a-1) + \lg(a+1)$

d) $\log_a(2x+1) = \log_a(x-1) + 1$

1.6. a) $\frac{10}{\lg x - 2} - \frac{5}{\lg x + 1} = 4$ b) $\frac{1}{\lg x + 1} - \frac{3}{\lg x - 3} = 2$

c) $\frac{2}{\log_2 x + 1} - \frac{1}{\log_2 x - 5} = 1$ d) $\frac{1}{5 - \lg x} + \frac{2}{1 + \lg x} = 1$

1.7. a) $\lg(x^2+1) = 2\lg^{-1}(x^2+1) - 1$ b) $(\log_5 x - 2)\log_5 x = 25^{\log_5\sqrt{3}}$

c) $\lg^2 x^3 - 10\lg x + 1 = 0$ d) $\sqrt{\lg(1-x)} + 5\lg(1-x) = 6$

1.8. a) $2\lg\lg x = \lg(3 - 2\lg x)$ b) $\log_2(x-14) = 1 + \frac{1}{2}\log_2(3x-26)$

c) $4\log_3^3 5x - 7\log_3 15x + 7 = 0$ d) $3\lg^2 x^2 - \lg x - 1 = 0$

1.9. a) $x^{\lg x+2} = 1000$ b) $x = 10^{1-0{,}25 \lg x}$

c) $x^{\log_5(5x)-4} = 625$ d) $x^{\log_a x} = a^2 x$

1.10. a) $x \lg \sqrt[5]{5^{2x-8}} - \lg 25 = 0$ b) $\log_2(4 \cdot 3^x - 6) - \log_2(9^x - 6) = 1$

c) $\log_2(9 - 2^x) = 10^{\lg(3-x)}$ d) $x(\lg 5 - 1) = \lg(2^x + 1) - \lg 6$

1.11. a) $\log_2[2 + \log_3(x+3)] = 0$ b) $\log_5[\log_2(\log_4 x)] = 0$

c) $2\log_x 27 - 3\log_{27} x = 1$ d) $\dfrac{\lg x}{\lg(x+1)} = -1$

۲ - اکسپوننشل مساوات

2.1. a) $(a^{x-2})^{x+2} = (a^{x+3})^{x-4}$ b) $a(a^{x-3})^{x+2} = a^{3x+5}(a^x)^{x-6}$

c) $\sqrt[3]{a^{2x+9}} = \sqrt[4]{a^{3x+5}}$ d) $\sqrt[x-2]{a^{11-x}} = \sqrt[9-x]{a^{x+3}}$

2.2. a) $10^{5x} = 3^{10}$ b) $0{,}375^x = 2576$

c) $\sqrt[x]{6{,}325} = 1500$ d) $\sqrt[x]{10{,}27} = \sqrt[4]{5}$

2.3. a) $\left(\frac{3}{4}\right)^{2x-3} = \left(\frac{4}{3}\right)^{3x+5}$ b) $\left(\frac{6}{7}\right)^{3x+10} = \left(\frac{7}{6}\right)^{2x-3}$

c) $\left(\frac{3}{5}\right)^{2x+1} = \left(\frac{5}{8}\right)^{3x+4}$ d) $16 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{3x-1} = 27 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{x+1}$

2.4. a) $\left(\frac{1}{100}\right)^{\frac{1}{x}} = 24{,}24^{\frac{1}{10}}$ b) $\sqrt[2x]{3^{3x+2}} = \sqrt[3x]{2^{2x+3}}$

c) $3^{(2^x)} = 2^{(3^x)}$ d) $8^{(5^x)} = 4^{(7^x)}$

2.5. a) $4^{x^2-x+1} = 8^x$ b) $3^{9x+1} = 9^{3x-1}$

c) $\sqrt{9^{x(x-1)-0{,}5}} = \sqrt[4]{3}$ d) $\sqrt[3]{\sqrt[x-1]{3^{10x+5}}} = \sqrt[3x-9]{27^{3x-7}}$

e) $2^{x^2-6x-2{,}5} = 16\sqrt{2}$ f) $2^{x^2-7{,}7x+16{,}5} = 8\sqrt{2}$

g) $5^{(x^2+x-2)(3-x)} = 1$ h) $4^{\sqrt{x+1}} = 64 \cdot 2^{\sqrt{x+1}}$

2.6. a) $7^{2x+1} - 3^{x-1} = 7^{2x+3} - 3^{x+1}$ b) $2^{x+1} - 3^{x} = 2^{x+3} - 3^{x+2}$

c) $3^{2x-1} - 5^{3x-2} = 3^{2x+1} - 5^{3x+2}$ d) $5^{2x} - 3 \cdot 5^{x} + 2 = 0$

e) $5^{4\sqrt{x}} - 6 \cdot 5^{2\sqrt{x}} + 5 = 0$ f) $2^{\frac{3}{\sqrt{x}}} - 2^{\frac{2}{\sqrt{x}}+1} + 2^{\frac{1}{\sqrt{x}}} - 2 = 0$

g) $3^{x+1} - 2 = 9^{x}$

h) $3^{x+1} + 3^{x-1} + 3^{x-2} = 5^{x} + 5^{x-1} + 5^{x-2}$

i) $2 \cdot 3^{x+3} + 7 \cdot 3^{x-2} = 493$ j) $3^{\sqrt{x}} - 3^{1-\sqrt{x}} = \frac{26}{3}$

k) $33 \cdot 2^{x-1} - 4^{x+1} = 2$ l) $3^{x} + 3^{x+1} + 3^{x+2} = 5^{x}$

2.7. a) $5^{x-3} + 2 \cdot 5^{x-2} = 5{,}08$ b) $5^{\sqrt{x}} - 5^{3-\sqrt{x}} = 20$

c) $9^{\sqrt{x^2+3x}} + 0{,}5 + 9 = 28 \cdot 3^{\sqrt{x^2+3x}}$ d) $2^{-2x} - 17 \cdot 2^{-(x+2)} + 1 = 0$

e) $2^{x^2} + 2^{1-x^2} = \frac{9}{2}$ f) $12\sqrt[2x]{3} - \sqrt[x]{3} = 27$

g) $4^{\sqrt{3x^2-2x}+1} + 2 = 9 \cdot 2^{\sqrt{3x^2-2x}}$ h) $\sqrt{3^{x-56}} - 7 \cdot \sqrt{3^{x-60}} = 162$

i) $9^{x^2-1} - 36 \cdot 3^{x^2-3} + 3 = 0$

2.8. a) $\frac{3^{x} + 3^{-x}}{3^{x+1} - 1} = \frac{5}{12}$ b) $\frac{2^{x}+1}{2^{x} - 4^{x}} = 6$

c) $4 + \frac{2}{3^{x}-1} = \frac{5}{3^{x-1}}$ d) $\frac{2^{x}+10}{4} = \frac{9}{2^{x-2}}$

e) $x^{x} = x$

۳ – ګونومتريکي – يا کونجکچيز مساوات

3.1. a) $\tan x = \frac{1}{2}$ b) $\sin x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ c) $\cot x = \frac{2}{5}$ d) $\tan x = -1$

3.2. a) $\sin(2x - \frac{\pi}{2}) = 0{,}309$ b) $\cos(2x - \frac{\pi}{3}) = 0{,}342$

c) $\sin(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{10}) = 0{,}809$ d) $\cos(x + \frac{\pi}{3}) = 0{,}471$

3.3. a) $5\sin^2 x - 10\cos^2 x - 1 = 0$ b) $\cos^2 x + \frac{1}{3}\sin x\cos x + \frac{2}{3}\sin^2 x = 1$

c) $\cos^2 x + 2\cos x - \sin^2 x + 1 = 0$ d) $2\cos^2 x + \sin x - 1 = 0$

e) $\sin^2 x + 5\sin x\cos x + 8\cos^2 x = 0$ f) $\sin^2 x - \cos^2 x - 3\sin x + 2 = 0$

g) $\sin^2 x - 2\cos x + 2 = 0$ h) $\sqrt{1+\cos x} = \sin x$

i) $\sqrt{1+\sin x} + \cos x = 0$ j) $\sin^4 x = 2\cos^2 x - 1$

k) $\sqrt{\cos x} + \sqrt[4]{2}\sin x = 0$ l) $1 - \cos x = \sin x$

3.4. a) $\sin 2x = \sqrt{3}\sin x$ b) $\cos 2x = \cos x$

c) $\sin 2x \cdot \tan x = 1$ d) $\cos 2x + 3\cos x = 1$

e) $\cos\frac{x}{2} - \cos x = 1$ f) $2\sin\frac{x}{2} - \cos x + 1 = 0$

g) $\cos x + \cos 2x = \sin x + \sin 2x$

h) $2\sin x\cos 2x - 1 + 2\cos 2x - \sin x = 0$

i) $3(1 - \sin x) = 1 + \cos 2x$ j) $\sin 2x + 2\cot x = 0$

k) $3\cos 2x - 20\sin x = 9$ l) $\cos 2x + 2\cos x + 1 = 0$

3.5. a) $2\sin^2\frac{x}{2} + \cos 2x = 0$ b) $2\cos^2\frac{x}{2} + \cos 2x = 1$

c) $\tan x - \sin x = 2\sin^2\frac{x}{2}$ d) $\sin^2 x - \cos^2 x = \cos\frac{x}{2}$

e) $2\sin^2 x + \sin^2 2x = 2$ f) $3 - 2\sin^2 2x = 2\sin^2 x$

g) $5\cos 2x + 16\sin x + 14\sin^2 x + 7 = 0$

h) $3\cos 2x - 6\cos x + 4\sin^2 x = -3$

i) $2\cos x + 3 = 4\cos\frac{x}{2}$ j) $2\sin^2 x + \sin^2 2x = 0$

k) $\tan x + \tan 2x - \tan 3x = 0$

3.6. a) $\cos x\cos 2x = \cos 3x$ b) $\sin 5x\cos 3x = \frac{1}{2}\sin 8x - 0{,}5$

c) $\sin^2 x + \cos^2 2x = \sin^2 3x + \cos^2 4x$ d) $(\cos 8x)^2 \cdot 2 + \sin 16x = 1$

e) $2\cos^2 4x + \sin 10x = 1$ f) $2 - 6\sin x\cos x = \cos 4x$

g) $\cos 4x + 2\cos^2 x = 1$ h) $\sin x\cos 5x = \sin 9x\cos 3x$

---

i) $\sin\frac{7x}{2}\cos\frac{3x}{2}=\sin\frac{9x}{2}\cos\frac{x}{2}$ j) $\cos\frac{7x}{2}\cos\frac{x}{2}=\cos\frac{9x}{2}\cos\frac{3x}{2}$

k) $\sin x-\sin 3x+\sin 5x-\sin 7x=0$ l) $\cos x+\cos 3x=\cos 5x+\cos 7x$

3.7. a) $2\sin^3 x-3\sin x\cos x=0$ b) $4\sin^3 x-8\sin^2 x-\sin x+2=0$

c) $\tan^3 x+\tan^2 x\ \ 3\tan x-3=0$ d) $\tan^3 x-\tan^2 x+\tan x=1$

3.8. a) $\sqrt{3}\sin x+3\cos x=0$ b) $\sqrt{3}\sin x+\cos x=\sqrt{3}$

c) $\sqrt{3}\sin 3x+\cos 3x=1$ d) $\sqrt{2\sin 2x}+2\sin x=0$

e) $1-\sin x=\sin^2(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2})$ f) $2\sin^2\frac{x}{2}=\cos(\frac{3\pi}{2}+\frac{x}{2})$

g) $1-\cos 2x+\cos 6x-\cos 8x=0$ h) $\cos x-2\cos 3x+\cos 5x=0$

i) $\cos 4x+2\cos^2 x=0$ j) $1-\sin x\cos x+\sin x-\cos x=0$

k) $\cos 3x+\sin 3x=\cos x+\sin x$ l) $\sin x\cos x-\sin^2 x-\cos x+\sin x=0$

m) $\sin x+\cos x=\frac{1}{\cos x}$ n) $(\cos x)^{\sin x}=1$

o) $\frac{1+\cos 2x}{2\cos x}=\frac{\sin 2x}{1-\cos 2x}$

۱۴. د نامساواتو یا نابرابرونونو او مطلقه ارزښتونو سره شمیرنه

۱۴ . ۱:نابرابرون(نامساوات)

۱۴ . ۱ . ۱ بنسټيزې کليمى او شميرقوانين

يو نابرابرون لاس ته راځي، که دوه ترمونه T1 او T2 د يوې اړيکنخښى $<, \geq, >$ او $\leq$ له لارې يو د بل سره تړلي وي.
په لاندې کى به نابرابرونونه تر څيرنى لاندې ونيول شي، چى يوه يا دوه رييلى واريابلى يا اوښتونى ولري . يو نابرابرون د دوه واريابلو(اووښتونو) سره د وينامنطق په بنسټ يو د وينا شکل ښايي، د هغو سره چى واريابلى هر ارزښت غوره کولى شي، د کومو لپاره چى ترمونه T1 او T2 څرګندذي . يو اوبى يا حل هر هغه ارزښت دى ، په همدې توګه هغه ارزښت جوړه ده، چى واريابل يا اووښتوني يى غوره کولى شي او په ترم کى د هغي ځاي په ځاي کيدو سره نابرابرون يوه ريښتونى وينا وي . د ټولو اوبيونو يا ځوابونو ټولګه په حلډيري L کى سره راټوليګي.
په لاندې برخه کى به ډير د وينامنطق(ويناسم انديز) سومبولونه چى په برخه ۱ ۰ ۲ (او د ډيري عمليو سومبولونه) چى په برخه ۲ . ۳ راغلي په کار واچول شي. د دې سومبولونو د اهميت يا غوره والي سره دې سړى ښيا هم ځان اشنا کړي.
د نابرابرونونو سره شميرنه کى دې لاندې قاعدې په پام کي ونيول شي(مقايسه برخه ۳)، دلته دې a , b , c او dرييل ګڼونه وي. لاندې باور لري

$$a<b \Leftrightarrow a \pm c<b \pm c, \qquad (14,1)$$
$$a<b \wedge c>0 \Rightarrow a.c<b.c \qquad (14,2)$$
$$a:b<b:c \qquad (14,2)$$
$$a<b \wedge c<0 \Rightarrow a.c>a.c \qquad (14,3)$$
$$a:c>b:c \qquad (14,3)$$
$$a<b \wedge c=0 \Rightarrow a.c=b.c \qquad (14,4)$$

د برابرونونو شمیرنی سره انډول کی دي دلته (۱۴ . ۳) قاعده ځانګړې تر پام لاندې وي.د منفی یا کمیز ګڼ سره ځل یا ویش عملیه کی دا د نابرابرون نخښه راکرځي یا را په شټ کيږي یا که غواړئ برعکس کيږي. د بیلګي په توګه $3 < 4$ مګر که داوړه خواوې د 1 - سره ځل شي نو لاس ته راځي $-3 > -4$

ټول د شمیرلو لپاره ورکړ شوي قواعد د نابرابرون لپاره په ورته ډول د اړیکنخښنو > سره باور لري دا په دې مانا چې$a \leq b$ دا چی په څرګند ډول د دوه ګڼونو ځل او ویش هلته زیاتیز (مثبت)دی چی دواړه ګڼونه همغه مخنخښه ولري او کمیز (منفي) که چیری مخنخښي یی توپیر ولري، او لاندې اړیکی باور لري:

$$a.b>0 \Leftrightarrow \qquad (14,5)$$
$$\Leftrightarrow a:b>0\ (a>0 \wedge b>0) \vee (a<0 \wedge b<0), \qquad (14,5)$$
$$a.b<0 \Leftrightarrow \qquad (14,6)$$
$$\Leftrightarrow (a>0 \wedge b<0) \vee (a<0 \wedge b>0). \qquad (14,6)$$

دبرابرونونو شریکولو کی، په ځانګړي ډول د ویش لپاره، باید ونیول شي چی $b \mid= 0$ یعني د ځل او ویش لپاره دې تویریدونکو قاعدو ته پام وي . د بیلګي په توګه دي:

$$a.b \geq 0 \Leftrightarrow (a \geq \wedge (a \geq 0) \vee (a<0 \wedge b<0) \qquad (14,7)$$
$$a:b \geq 0 \Leftrightarrow (a \geq 0 \wedge b>0) \vee (a \leq 0 \wedge b<0) \qquad (14,8)$$

۱۴ . ۱ . ۱الف اینتروال

د واریابلو د څیړنو لپاره باید ټول معتبر ډیري ورکړل شي، د بیلګي په توګه د یوه فنکشن یا بلواك تعریف - او ارزښت ډیري.

پیژند ۴ . ۱ الف :
یو اینتروال یو د یوبل سره اړوند د ریيلګڼونو R برخه ډیر) ده۰

یو اینتروال له دې امله، بې له تشوالي یا تشي ، د ګڼکرښې یوه ټاکلې برخه ده، چې له دوه ګڼونو a او b رابندیږي. که د غاړې ټکي په اینتروال کی دننه وي یا خونديږ وي نو د بند

اینتروال څخه غږیږو او که اینتروال پورې اړه ونه لري، واز اینتروال دی، او په همدې ډول نیمبند او نیم واز اینتروالونه.
د اوبیدیری په ورکولو سره په ګڼکرښې باندې، لاندې د انیتروال انځورونه په کار اچول کیږي.

لاندې ۱۱ د اینتروال مختلف تیپونه دي یا نې ، چې a او b له R دي او $a < b$ ده۰

1. $(a,b) = \{x \mid a < x < b\}$ واز اینتروا ، اخر تخري په اینترول اړه نه لیر
2. $[a,b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$ بند اینتروال ، اخر توري په اینتروال ځوريږ اړه لري
3. $[a,b) = \{x \mid a \leq x < b\}$ ښی واز اینتروال
4. $(a,b] = \{x \mid a < x \leq b\}$ کيڼ واز اینتروال
5. $(a,\infty) = \{x \mid x > a\}$ ښي لورته ناپاي او کيڼ لور ته واز اینتروال
6. $[a,\infty) = \{x \mid x \geq a\}$ ښي لور ته ناپای او کيڼ لور ته بند اینترال
7. $(-\infty,b) = \{x \mid x < b\}$ ښي لور ته واز او کيڼ ورته ناپاي اینتروال
8. $(-\infty,b] = \{x \mid x \leq b\}$ ښي لور ته بند او کيڼ لورت ناپاي اینتروال
9. $(-\infty,\infty) = \mathbb{R}$ ناپای اینتروال ، ټول رییلګڼونه
10. $\{a\}$ د دې یوه توري ډیری
11. $\varnothing$ تشډیری

لاندې اینتروالونه د ناپای په لور هم رابند دي یانې په دې مانا، چې د ناپای ډیری هم په اینتروال پورې اړه لري، یانې ناپای ډیری ټولنه ورسره جوړوي۰

1. $[-\infty,b] = \{x \mid x \leq b\} \bigcup \{-\infty\}$
2. $[-\infty,b) = \{x \mid x < b\} \bigcup \{-\infty\}$
3. $[a,\infty] = \{x \mid x \geq a\} \bigcup \{\infty\}$

$$(a,\infty] = \{x \mid x > a\} \bigcup \{\infty\}$$

4. $[-\infty,\infty] = \mathbb{R}^+$

پورته ته الترناتیو یا بدیلي لیکنبڼه Alternative notation

په نړیواله توګه یو بل ډول لیکنبڼۀ په لاندې ډول ورکو لکیږي

$]a,b[= \{ x \mid a < x < b \}$

$[a,b] = \{ x \mid a \le x \le b \}$

$[a,b[= \{ x \mid a \le x < b \}$

$]a,b] = \{ x \mid a < x \le b \}$

یادونه : داپورته د اینتروال ډولونه د نړیوال جال څخه راکښته شوي، دا می هم وغوښتل ګرانو لوستونکو ته وړاندی کړم

بند انیتروال : ۰۰۰۰ $[a,b]=\{x|a\le x\le b\}$

نیم و از اینتروال :۰۰۰۰۰ $(a,b]=\{x|a<x\le b\}$

نیم واز اینتروال :۰۰۰۰۰۰ $[a,b)=\{x|a\le x<b\}$

واز اینتروال : ۰۰۰۰۰ $(a,b)=\{x|a<x<b\}$

ښی بند ناپای اینتروال : (-oe,b]={x|x≤b}

کڼ بند ناپای اینتروال : [a,oe)={x|x≥a}

ښی واز ناپای اینتروال :۰ (-oe,b)={x|x<b}

کیڼ واز ناپای اینتروال :۰ (a,oe)={x|x<b}

ناپای اینتروال : {x د ګڼکرښی ټکی دیx}=(-oe، oe)

بیلګه ۱۴ . ۱الف:

په بنستیزه ډیری Rکی د لاندې برابرون پیژنددیری غوښتنه منځ ته رااچوو.

$x - 2 = 1 + 7 - x$

حل : د دې ترم $T1(x) = x - 2$ پیژنددېری ده:

$D1 = [2 , oe)$

په همدې توګه د ترم $T2(x)=1+7-x$ پیژنددېری ی ده: ($D2 =(-oe,7$

د برابرون دپیژنددېری لپاره لاس ته راوړو:

$$D = D_1 \bigcap D_2 = [2,\infty) \bigcap (-\infty, 7] = [2,7]$$

لاندې ځیره وګورې(متاسفانه، چې ښه څېره نه شم کښلی)

D2=(-∞;7]

D1=[2;∞]

۱۴ . ۱ ۲ .نابرابرون د یوې مجهولی سره

د شمیرقاعد ې لومړی د هغونابرابرونونو لپاره په کار اچول کیږي چی یوه اوښتوني یا مجهوله ولري، او اوبیونې یی په ټولیزه توګه د اینټروالونو له لارې انځوریږي.
(۱۴ . ۱) قاعده د په خوښه ترمونو د زیاتون او کمون داسی اجازه راکوي، لکه په برابرونونو کی.

بیلګه ۱۴ . ۱:

لرو $5x-6<4+9x$ دواړو لورو ته $-9x + 6$ ورزیاتوو، نو لرو $-4x < 10$ دواړه خواوې په 4 - ویشو.

د (۱۴ . ۳) له مخې لاس ته راځي $x > -5/2$

د اوبیونې ډېر یا اوبیدېری : $L=(-5/2,oe)$

که په یوه غوښتونکی ځل یا ویش کی ځله وونی، همداسي پرویشونی یو واریابل یا اووښتونی ترم وي، نو باید د (۱۴ . ۲) تر (۱۴ . ۴) سره سم ددې ترم د مخنخښي په واك والي کی د حالت توپیرونه(ښه یې : توپیره ونه) تر پام لاندې ونیول شي .

د یوګونو اوبیډیریو پیداکولوپه هکله، په هر ډول چی وي، باید په پام کی ولرل شي، چی یوائې هغه د نابرابرون شمیرل شوي د x - ارزښتونه اوبیونې دي، چي ټول ىی سملاسي (په همدې وخت کی) هغه نیول شوی (فرض شوی) شرایط پوره کړي.

هر برخ اوبیډېری یا برخحلډیری کیدی شي چی د غوڅډیری په څیر له همغه هرپورتني نماینده برخساحویا-ورشو(یا نوره هم ښه : -برخچاپیریالونو) واریابلی (اووښتونی) او د نابرابرون ډیری شمیرل شوو واریابلو یا اووښتونکو ارزښتونو جوړ شي. د غوڅډیری جوړښت، کیدی شي چی د یوګونو ډیریو د ګرافیکی انځورونو په څیر په ګڼوړانګه ساده شي. د نامساوتو ټولې اوبیډیری د برخ اوبیډیري یوه د یوګونو حالتونو ټولنډیری ده .

بیلګه ۱۴ . ۲:

(3x-5)(x-2)<4(x-2)

که په (x-2) باندې وویشل شي، نو باید د شرایطو په پام کی لرلو سره سم

د x > 2 لپاره (x-2)>0

د x = 2 لپاره (x-2)=0

د x <2 لپاره (x-2)<0

نابرابرن دې په درې برخه ساحو کی یو له بل بیل وڅیړل شي.

لومړی حالت:

$x > 2 <=> x \in (2,\infty)$

دلته د مخ ته پراته نامساوت لاندې ورته بڼه بدلون څخه لاس ته رائحي

$3x-5 \le 4 <=> 3x \le 9 \Leftrightarrow x \le 3 \Leftrightarrow x \in (-\infty,3]$

له دې x - ارزښتونو څخه یوائې هغه د مخه ورکړ شوي نابرابرون ، چي په لومړي حالت کی راوړل شوي اوبیونې دي ، یوائې هغه x د

$x \in (2,\infty)$

سره د اوبیو یا اوبیونو په څیر نیسو. له دې امله د لومړي حالت اوبیډیري لرو:

$L_1 = (2,\infty)\bigcap(-\infty,3] = (2,3]$

دوم حالت:

$x = 2 \Leftrightarrow x \in \{2\}$

د لته په (2- x) باندې ويشل کيدی نه شي.

د $x = 2$ ارزښت ليکلو رښتيا وينا $0 \geq 0$ لاس ته راځي او له دې امله

$L2 = \{2\}$

دريم حالت:

$x < 2 \Leftrightarrow x \in \{-\infty, 2\}$

د $0 > 2 - x$ له امله د (۱۴ . ۳) له مخی پخپله د مخه ورکړ شوي نابرابرون لاندې ورته فورمونه ورکوي

$3x - 5 \geq 4 \Leftrightarrow 3x \geq 9 \Leftrightarrow x \geq 3 \Leftrightarrow x \in [3, \infty)$

له دې x - ارزښتونو کوم يو نه شي کيدی چی په دريم حالت کی راوړل شي:

$L_3 = (-\infty, 2) \cap [3, \infty) = \varnothing$

د برخه اوبيډيريو ټولنی ځخه ټول اوبيډير) لاس ته راځي:

$L = L_1 \bigcup L_2 \bigcup L_3 = (2,3] \bigcup \{2\} \bigcup \varnothing = [2,3]$

نو ټولې اوبيوني هغه x د ي د کومو لپاره چي لرو: $2 < x < 3$

په لاندې بيلګو کي نور دومره زيات توضيحات نه ورکول کيږي.

بيلګه ۱۴ . ۳ :

$(3x-1)/(2x+4)<2$

د شرايطو $|2x+4|=0$ له مخی، دا په دې مانا چی $x |=2$ د مات لاندې سره ځله ونې له امله

د $x>-2$ لپاره $(2x+4)>0$

د $x<-2$ لپاره $(2x+4)<2$

سره سم يواځي دوه حالتونه توپيروو:

لومړی حالت:

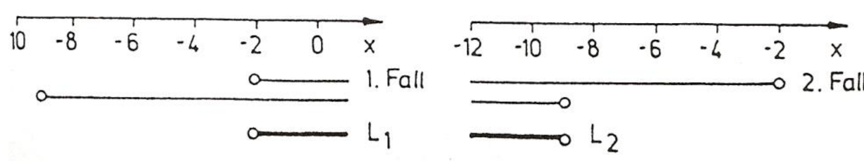
$$x > -2 \Leftrightarrow x \in (-2, \infty)$$
$$3x - 1 < 4x + 8 \Leftrightarrow x > -9 \Leftrightarrow x \in (-9, \infty)$$
$$L_1 = (-2, \infty) \cap (-9, \infty) = (-2, \infty)$$

څېره ۱۴ ۱ الف: دا څېره لاندې کښل شوی، په هغې کې چې بیا دا اوبیدیری روښانه شو.

دوم حالت:

$$x < -2 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -9)$$
$$3x - 1 > 4x + 8 \Leftrightarrow x < -9 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -9)$$
$$L_2 = (-\infty, -2) \cap (-\infty, -9) = (-\infty, -9)$$
$$L = L_1 \cup L_2 = (-\infty, -9)$$

پورته اخر د نابرابرون یا نامساوات حل یا اوبی دی.



a) b)

Bild 14 1

څېره ۱۴ ا ب : دلته هم ګښونوکربښي شته، چۀ په هغې کې دا اوبیدیری روښانه کارل شوي دي. ، که څېره مې ونه کارله، نو داکار بج ګران لوستونکی هم وکولای شي.

د مخنخښی راوړلو په بنسټ د نابرابرن یوه ځانګړي بڼه یا فورم، چی په (۵.۱۴) تر (۱۴ . ۸) اړیکو کی استعمال شوي، اوبیونه ګټوره وښايي.

نابرابرونونه

دلته هم څو بیلګې راوړل کیږي، چې نابرابرونونه په کې اوبی شوي دي.

دا برخه د نړیوالجال څخه راکښنته شوي، له دې امله یې لیکښه د مخکنۍ لیکښې سره توپیر لري. دا لاندې لرو .

$$ax + b > 0, \qquad a \neq 0$$;

$$x^2 - 5 < 0$$;

$$|2x - 5| \leq x + 10$$;

دلته اوبیونې اینتروالونه دي. ښول کیږي، چې اوبیډیرۍ څنګه پیداکیږي او د دې لپاره

اړیین شرایط کوم دي.

- په دواړو لورو همغه ګڼ زیاتیدلی یا کمیدلی شي
- که دواړه خواي د کمیز ګڼ سره ځل شي یا په کمیز ګڼ وویشل شي، نو مخنخښه تغیر خوري. که زیاتیز وي، نو دواړه خوا په توان کیدی شي او ریښج یې وستل کیدی شي، پام دې وي، چې برابرون بیا زیاتیزه او که کمیزه مخ نخښه غوره کوي او یا دواړه
- موږ (1.9:1 اوبی کوو

د $a > 0$ سره لورو

$$ax + b > 0 \Longleftrightarrow ax > -b \Longleftrightarrow x > -\frac{b}{a}$$

د لاندې حلستې یا اوبیډیرۍ

$$\mathcal{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -\frac{b}{a}\} = (-\frac{b}{a}, \infty).$$

د $a < 0$ سره لرو

$$ax + b > 0 \Longleftrightarrow ax > -b \Longleftrightarrow x < -\frac{b}{a}$$

د لاندې اوبيډيرئ سره

$$\mathcal{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -\frac{b}{a}\} = (-\infty, -\frac{b}{a}).$$

موږ (1.9:2 اوبی کوو :

$$x^2 - 5 < 0 \Longleftrightarrow x^2 < 5 \Longleftrightarrow |x| < \sqrt{5}$$

په اخرنې پل کې دې دې ته پام وي $\sqrt{x^2} = |x|.)$ د روانښه تشيرح لپاره يا شننې لپاره يو د حالت توپير رامنځ ته کوو :

په حالته $x \geq 0$ کې $|x| = x,$ او $|x| < \sqrt{5}$ په ساده ډول $x < \sqrt{5}.$ مانا لري

په حالت ist $x < 0$ کې $|x| = -x,$ او $|x| < \sqrt{5}$ د , $-x < \sqrt{5}$ په مانا يا ورته $x > -\sqrt{5}.$ نو لرو

$$|x| < \sqrt{5} \Longleftrightarrow -\sqrt{5} < x < \sqrt{5}$$

او اوبيډيرئ

$$\mathcal{L} = (-\sqrt{5}, 0) \cup [0, \sqrt{5}) = (-\sqrt{5}, \sqrt{5}).$$

موږ 1.9:3 اوبی کوو د یوه حالت تو[پر سره

$$2x-5\le x+10,\quad x\le 15 \quad\Longleftrightarrow$$

$$2x-5\ge 0 \quad x\ge \frac{5}{2} \quad\Longleftrightarrow\quad 2x\ge 5 \quad\Longleftrightarrow$$

(i) که وي $2x-5\ge 0;$ نو دی $|2x-5|=2x-5,$ او موږ لرو

له دې لاس ته راځي

$$\frac{5}{2}\le x\le 15.$$

$2x-5<0.$ (ii)نو دی $|2x-5|=-(2x-5)$ او لرو

$$-2x+5\le x+10 \quad\Longleftrightarrow\quad -3x\le 5 \quad\Longleftrightarrow x \quad \ge -\frac{5}{3},$$

$$2x-5<0 \quad\Longleftrightarrow\quad 2x<5 \quad\Longleftrightarrow\quad x<\frac{5}{2}.$$

له دې لاس ته راځي:

$$-\frac{5}{3}\le x<\frac{5}{2}.$$

د نابرابرون اوبیونډیری له دې امله ده

$$\mathcal{L}=[-\frac{5}{3},\frac{5}{2})\cup[\frac{5}{2},15]=(-\frac{5}{3},15].$$

په لاندې کې يو څو تمرينونه ورکړ شوي، کۀ ګران مينه وال يې غواړې تمرين کړې۰

لاندې نابرارونونه اوبی کړئ

(i) $\frac{3}{x+5} < 2$,

(ii) $\sqrt{x^2 + x + 2} > x$,

(iii) $|x+5| > |x-2|$.

بيلګه ۱۴ . ۴:

$1/(3-x)>2/(x+6)$, $x|=-6$; $x |= 3$

د اصلي ماتلاندې $(3-x)(x+6)$ سره د حٔل له امله بايد بيا هم د هغه مخنخبنه په پام کی ونيول شي. شرايط، د کومولە مخی چی مات لاندې مثبت د ی، کيدی شي د (۱۴ . ۵) له لارې وميندل شي:

$$(3-x)(x+6)>0 \Leftrightarrow (3-x)>0 \wedge x+6> \vee (3-x)<0 \wedge x+6<0$$
$$\Leftrightarrow (x<3 \wedge x>-6) \vee (x>3 \wedge x<-6) \Leftrightarrow -6<x<3$$

نو (۱۴ . ۶) شوونې کوي يا ممکنه وي، چی هغه ورشو(ساحه يا ډيری يا نه هم شهچاپيريال) پيدا کړو چيرته چی اصلي مات لاندې کميز يا نفي دئ:

$$(3-x)(x+6)<0 \Leftrightarrow (3-x) >0 \wedge x+6><0 \vee (3-x)<0 \wedge x+6>0$$
$$\Leftrightarrow (x<3 \wedge x<-6) \vee (x>3 \wedge x>-6) \Leftrightarrow x < -6 \vee x>3$$

له دې امله د (۱۴ . ۲) او (۱۴ . ۳) په پام کې لرلو سره شميرنه لاس ته راځي:

لمړی حالت :

$$-6 < x < 3 \Leftrightarrow x \in (-6 , 3)$$

د زیاتیز ځله ووني یا مثبت فاکتور (3-x)(x+ 6) سره ځلولو له امله د اړیکو نخښه ساتلی پاتیږي:

$$x+6 \ge 6-2x \Leftrightarrow x \ge 0 \Leftrightarrow x \in [0,\infty),$$

$$L_2 = (-6,3) \cap [0,\infty) = [0,3)....(mape(zirah)14.2a)$$

دوم حالت : $x < -6 \vee x > 3) \Leftrightarrow x \in (-\infty,-6) \cup (3,\infty)$

دا چی د لته اصلي مات لاندې منفی دی، نو ځل د اړیکو نخښه باندې راګرځیدونی یا په څټ (چپه یا برعکس(تاسیر لري:

$$x+6 \le 6-2x \Leftrightarrow x \le 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty,0)$$

$$L_2 = [(-\infty,-6) \cup (3,\infty)] \cap (-\infty,0) = (-\infty,-6)....(mape(zirah)14.2b)$$

اوبیډیری $: L = L_1 \cup L_2 = [0,3) \cup (-\infty,-6) = (-\infty,-6) \cup [0,3)$

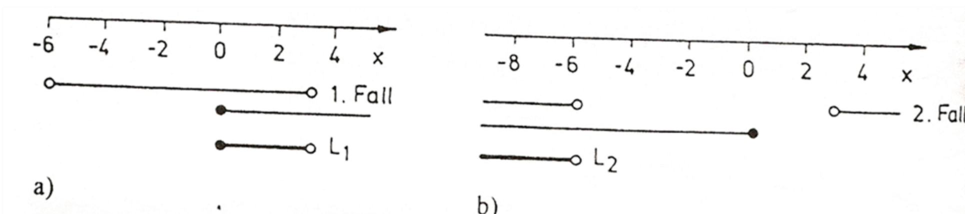


Bild 14.2 ځیره

د څلوری برابرون یا مربع نامساوات حل لپاره کیدی شي د څلوری ترم ځل انځورونی څخه کار واخستل شي.

بیلګه ۱۴ . ۵ : $-x^2+9x<0$

لومړی د (۱۴ . ۳) په پام کي نیولو سره دx^2 د مخ (کیڼ لور) کمیز- یا منفي ځلو,وونوباندې ویشل کیږي:

$$x^2 - (9/2)x + 2 > 0$$

ددې لپاره چی دا نامساوات د ځل په ځیر ولیکلی شو، د مربع مساواتو حل شمیرو، کومه چی د اړیکنخښي په ځاي د مساواتنخښی ځاي په ځاي کولوروسته منځ ته راځي.

$$x^2-(9/2)x+2=0 \Rightarrow x_1=4 , x_2=1/2$$

$$x^2 - \frac{9}{2}x + 2 > 0 \Leftrightarrow (x-4)(x-\frac{1}{2}) > 0 \Leftrightarrow (x > 4 \wedge x > \frac{1}{2}) \vee (x < 4 \wedge x < \frac{1}{2})$$

$$\Leftrightarrow x > 4 \vee x < \frac{1}{2}$$

له دې سره د (۱۴ . ۵) په کارولو د نابرابرون حل لاس ته راځي:

حلډېری : $L=(-\infty;\frac{1}{2})\cup(4;\infty)=R\setminus\{\frac{1}{2};4\}$

په دې برسیره دې په یاد وي چې داډول نامساوات د مشهور مربع فنکشن د کرېږ کښلو له مخې هم حل کیدی شي، په ځانګړي ډول هلته، چې اړوند مربع شکل رییل حل نه لري٠ بالاخره پهپای کې د وېش د مخنښي راوړلو یوه بیلګه ښایو.

بیلګه ۱۴ . ۶ : $\frac{x+5}{3x-2}\leq 0,\ x\neq\frac{2}{3}$.

حل (۱۴,۸) ته ورته دی

$$\frac{x+5}{3x-2}\leq 0 \Leftrightarrow (x\geq -5 \wedge x<\frac{2}{3}) \vee (x\leq -5 \wedge x>\frac{2}{3}) \Leftrightarrow -5\leq x<\frac{2}{3}.$$

د سیستم حل ډېری یا حل سټ: $L=[-5,\frac{2}{3})$.

۱۴ . ۱ . ۳ د نابرابرونسیستم د یوې ناپیژندونکی یا مجهولی یا اوښتونې سره

د یوه نابرابرون سیستم اوبیډیری L د یوګونو نابرابرونونو اوبیډیریو غوځډیری ده . ګټور یا موخه وربه وي (دا هدفمند دی)، که نابرابرون لکه په یوه برابرونسیستم کی په نمره کړی شي ، ددې لپاره چی دا یوګوني (دا په دې مانا چی یو یو) اوبی کړی شو.

بیلګه ۱۴ . ۷

$$5-2x\geq 3-x$$
$$x^2-5x-6<0$$
$$I.5-2x\geq 3-x \Leftrightarrow x\leq 2 \Rightarrow L_I=(-\infty,2]$$
$$II.x^2-5x<0 \Leftrightarrow (+1)(x-6)<0 \Leftrightarrow -1<x<6 \Rightarrow L_{II}=(-1,6)$$
$$\Rightarrow L=L_I\cap L_{II}=(-\infty,2]\cap(-1,6)=(-1,2]$$

د سیستم اوبیډیری: Lدی

بیلګه ۱۴ . ۸

$$-2<\frac{4x-10}{x-1}<3,x\neq 1$$

د داسې نابرابرون ځنځیرونه یا یو بل سره تړنه د دواړو نابرابرونونو د سیستم سره په یوه مانا دي:

$$I.-2<\frac{4x-10}{x-1}$$

$$II.\frac{4x-10}{x-1}<3$$

د همغه فاکتور(x-1) سره د حل اړیین یا ضروری حالت توپیریدنه کیدی شي د دواړو نابرابرونونو لپاره غبرګ د لیدوړ بنی سره وځیړل شي (مخ په وړاندې یووړ شي) :

(یادونه: په لاندې کې دې Fall(1) لومړې حالت او Fall(2) دویم حالت وي)

$$\ldots\ldots I \ldots\ldots II$$

$$1.Fall^{(1)}\quad x\in(1,\infty)$$

$$-2x+2<4x-10 \qquad 4x-10<3x-3$$

$$\Leftrightarrow x>2\Leftrightarrow x\in(2,\infty). \qquad \Leftrightarrow x<7\Leftrightarrow x\in(-\infty,7).$$

$$L_{I_1}=(1,\infty)\cap(2,\infty)=(2,\infty) \qquad L_{II_1}=(1,\infty)\cap(-\infty,7)=(1,7)$$

$$2.Fall^{(2)}\quad x\in(-\infty,1)$$

$$-2x+2>4x-10 \qquad 4x-10>3x-3$$

$$\Leftrightarrow x<2\Leftrightarrow x\in(-\infty,2). \qquad \Leftrightarrow x>7\Leftrightarrow x\in(7,\infty).$$

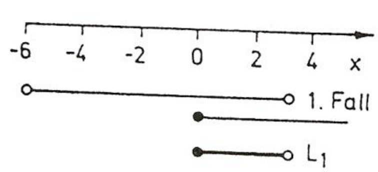
$$L_{I_2}=(-\infty,1)\cap(-\infty,2)=(-\infty,1) \qquad L_{II_2}=(-\infty,1)\cap(7,\infty)=\varnothing$$

$$L_I=L_{I_1}\cup L_{I_2}=(-\infty,1)\cup(2,\infty) \qquad L_{II}=L_{II_1}\cup L_{II_2}=(1,7)$$

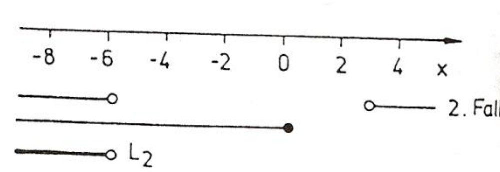
د LI او LII غوښتیرۍ جوړول بیرته کیدی شي چې د یوګونو اوبیډیریوګنوړانګه باندې د لیدنی شي)(ځیره ۱۴ . ۳

د سیستم اوبیډیری:

$$L=L_I\cap L_{II}=(2,7)$$



a)



b)

---

۱۴ . ۱ . ۴ نابرابرون د دوه اووښتونو یا مجهولو(ناپیژندونکو) سره

د دوه نابرابرون - یا نابرابرونسیستمونو اوبیډیرۍ د یوه اوبیډیرۍ $R^2 = R\times R$ برخډیرۍ ده، چی د هوارۍ په څیر د لیدنی کیدی شي. له دې امله ګرافیکي ښوونه د ټکو ډیري په ځیر په یوه کواوردینات سیستم کی مساعد دی. په دې برخه کی به موږ یواځي د لاندې ډول لاینیزنابرابرون::

$$ax + by + c > 0 \ (\geq 0 \ , <0, \leq 0 \ ) \qquad (14.9)$$

واریابلو یا اوښتونو x , y او ثابتو ځله وونو(ضریبونو)

$a,b,c \in R$

سره د شرایطو $a|=0 \ v \ b \ |=0$ سره سم تر څیرنی لاندې ونیسو.

که ددې اړیکو نخښه د برابرون سره بدله کړو نو د یوې کرښي برابرون $ax+by+c=0$ لاس ته راځي، کومه چی د پروتولاړ - یا کواوردینات سیستم په دوه نیمو هوارویا ستحو ویشي. د نابرابرونسیستم (۱۴ . ۹) ، چی ټیك په یوه له دې دوه هوارو کی باور لري، په راتلونکي بیلګه ۱۴ . ۹ کی ښوول کیږي. د اوبیډیرۍ په هواره کی د کرښونو یا کرښو کرښو کولو(د ډیرو کرښو کښلو) له لارې په نخښه کیدی شي. که په نابرابرون کي برابرون نه وي پرېښوول شوي یعني برابرون په کی نه وي ځاي شوي، نو راتولونکی کرښه د اوبیډیرۍ پورې اړه نه لري او کیدی شي یواځي ټوټه ټوټه کرښی (پرې لاین یا غوڅکرښو) په څیر په نخښه شي، لکه څنګه چی د ډیرۍ ګرافیکي ښوونه ورځنی یا بلده یا معمول ده. که برابرون ورپورې اړه ولري، نو کرښه د اوبیډیرۍ پورې اړه لرونکی برخی په څیر په نخښه کیږي.

بیلګه ۱۴ . ۹ :

$$2x+5y-10>0$$

که نابرابرون د y په لور اوبی شي، نو دې ته ورته نابرابرون $y>-(2/5).x+2$ لاس ته راځي، کوم چی په یوه کره نیولي x په روښانه توګه د لویو y - ارزښتونو لپاره پوره دی نسبت ورته برابرون ته . له دې امله دهوارې چی د کرښې $y=-(2/5).x+2$ څخه پورتني نیمی هوارې ټول ټکی اوبیډیرۍ L جوړوي ش که څیره ون کښل شوه، نو پل په پل داکار ګران د شمیرپوهنې مینه وال کولی شوي ۱۴ . ۴)

دا په بیلګه ۱۴ . ۹ کی تشریح تګلار په نابرابرون (۱۴ . ۹) کی د مخه نیسي چي $b|=0$ دی. په ټولیزه توګه یا عمومي ډول دا متود د استعمال وړ دی، چی د کواوردینات سیستم

يوه په خوښه ټاکلي ټکی ځای په ځاي کولو کی ، چی په کرښه ax+bx+c=0 نه وي پروت٠

ازمايو چي ايا دا نابرابرون په اړونده نيمه هواره کی باور لري او يا نه.که ممکن وي نو د شميرنی د ساده والي له امله ځانګړی ټکی(0.0) ټاکو. دا په بيلګه ۱۴ . ۹ کی ددې ټکی بدلون وروسته نا ريښتيا وينا 10 - > 0 لاس ته راکوي او په دې ډول د اوبيډيری پيداشوی ځاي (ښه به پروتځاي وي خو د لنډونی له امله ځاي بسيا کوي) تصديقوي.
دلته يوه ځيره کښل کيږي دلته د اوښتونو پرځاي ګڼونه ږدو او بيا کرښه باسو٠ په کواوردينات کي د هوارې هغه برخه، چې اوبيډيری ده کرښ کرښه کوو، دا په دې مانا، چې د کرښی هغه دکرښونو لور ته ابيډيری ده٠

د يوه نابرابرونسيستم چی دوه مجهولی ولري، نو هر نابرابرون ځانله ځانله اوبی کيږی او بالاخر ه بي د يوګونو اوبيډيريو غوڅډيری نيول کيږي يا جوړيږي.

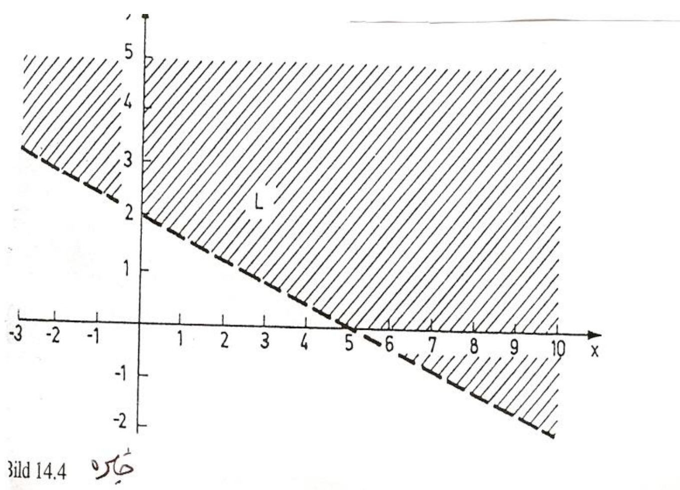


Bild 14.4 ځاکره

بيلګه ۱۴ . ۱۰:
I . 2x+y<6
II. 4x-y>0

(0,0) نابرابرون I پوره کوي او له دې امله په اړونده اوبيډيري LI کی پروت دی. دا چی په نابرابرون II کی د (0 , 0) سيده برابرون باوري دي، نو دلته بايد يو بل ټکی د بيلګي په توګه (0 , 1) کيښول شي، کوم چی د په ځنوالي يا تضاد په لور ځي، او له

دې امله اوبيډيرى LII کی نه دیٔ پروت. (؟؟؟ش ۱۴ . ۵ الف(. ش ۱۴ . ۵ ب دسیستم حلډيرى L ښايي چي له دوه نيمکرښو بنديږي يا له دوه نيم کرښومحدوديږي.
د وړانديزارزښت لري چی د تمرينونو په خپلواك كار كولو کی د غوښتونكو اوبيډيريو L د يوګونو نيمهوارو غوځډيرى حتي تر غاړې پورې رنګينه يا کرښی کرښی راوکښل شي، چی په دې ډول یی يو کواوردیناتسيستم د انځورولو لپاره بسيا وکړي .ش ۱۴ . ۵

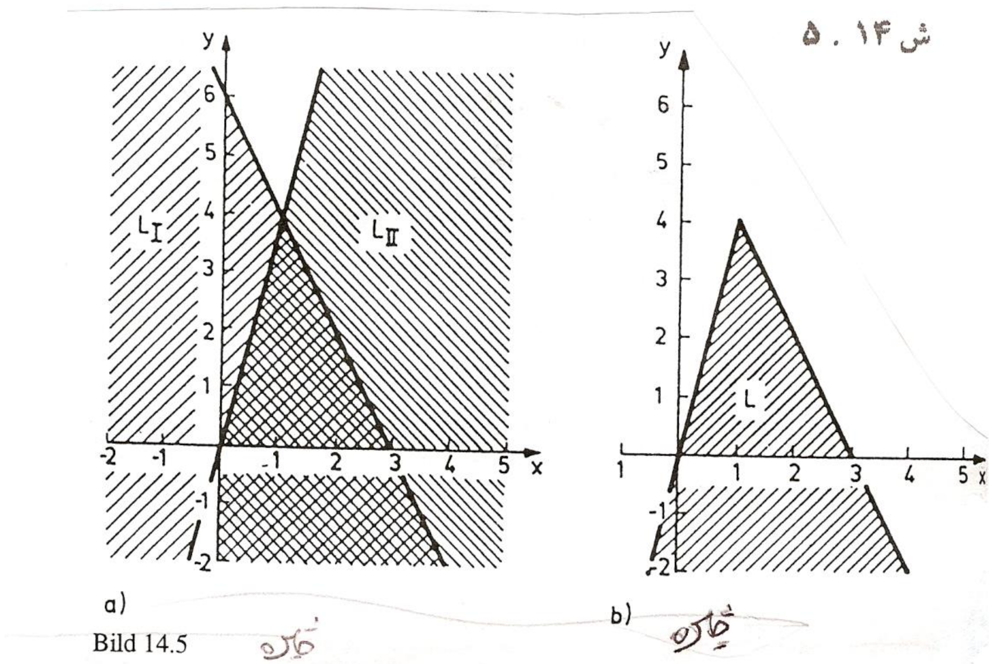


Bild 14.5

بیلګه ۱۴ . ۱۱:

I . $x-3y-6<0$

II. $-x+y+1<0$

III. $x-6<0$

دا اوبيډيرى په ش ۱۴ . ۶ کی انځور ۱۲ کرښي
د پورته نابرابرونسيستم له مخۀ د هر نابرابرون لپاره کرښه کشل کيږي، په يوه کواوردينات سيستم کې او بيا د هوارې هغه برخه، چې دريواړه کرو کې رابنده منهواره وي، هغه يې اوبی دیٔ.

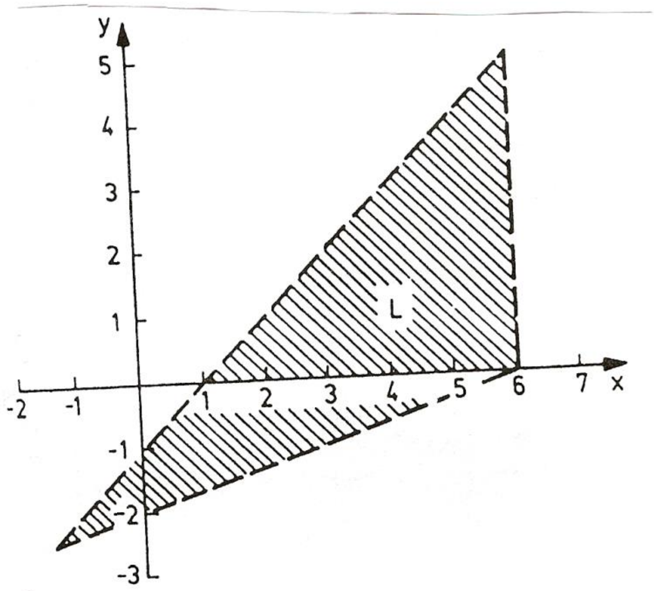


Bild 14.6 خاکه

۱۴ . ۲ برابرون او نابرابرون د مطلقه ارزښتونو سره

۱۴ . ۲ ۱ د مطلقه ارزښتونو سره شمیرنه

که په یوه براورن یا نابرابرون کی د ترمونو مطلقه ارزښتونه د مجهولی په څیر رییلي واريابلي یا اووښتونی وي، نو د مجهول په لور له ابیولو د مخه باید یو د مطلقه ارزښت خپلواك فورم پیداشي. داچي له برخی ۳ څخه څرګنده ده چی د یوه رییل ګڼ مطلقه ارښت د

مخنخښی په واك په توپیري ډول جوړيږي نو د یوه ترم لیکل بي له مطلقه ارزښت، په پرینځیپ کی دوه حالتونه توپیريږي٠
داسی دی:

$T(x) = T(x)$ لپاره $T(x) \geq 0$ د (14,10)
$T(x) = -T(x)$ لپاره $T(x) < 0$ د (14,10)

که مطلقه ارزښت د صفر لوي يا په صفر برابر وي، نو کيدی شي چی د مطلقه ارزښت لرې پريښول شي، يا د نورو ترمونو سره په تړلو په نوکانو بدل شي. که مطلقه ارزښت متن منفي وي يعني د مطلقه ارزښت دننه، نو د مطلقه ارزښت نخښو په ځاي نوکان ليکل کيږي او دا نوکان بيا په (۱ -) ځليږي. هغه ټکي چي په (۱۴ ، ۱۰) کی ورکړ شوي شرايط پوره کوي، نو پريښول کيږي چی ځانونه په قاعده کي په اينتروال وښايي، کوم چی ديسيونکت(پردي) برخه ډيری د اوښتونوچاپيريالونه دي، د کوم لپاره چی (T(x ښوول شوی دی. د دواړو برخه چاپيريالونو تولنديږي، بايد بيرته د ټول هغه واريابلچاپيريال ورکړي، کوم چی د کنترول لپاره بايد و ازمايل شي. په دې ځاي کی دې د ځله ووني او ويش مطلقه ارزښتونو لپاره قواعد ورکړ شي، چی د بدلون لپاره د ارزښت وړ دي.

که a اوb رييل ګڼونه وي ، نو لاندې باور لري کيږي٠

$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$$

$$|a : b| = |a| : |b|$$ د $b \neq 0$ لپاره

۱۴ . ۲ . ۲ برابرون د مطلقه ارزښت سره

د يوه مطلقه ارزښت مساوات حل لکه چی د حالت توپيرولوکی توضيح شوی ، بايد په هر حالت کی وازمايل شي چی ايا دا اوبيونې په نيول شوي يا فرض شوي اينتروال کي پراته دی او که يوائې د اوبې په ځير ښکاريدونکي رامنځ ته کيږي . يوګوني اوبيونې اوبيډيري L کی رايوځاي کيږي. د مقايسي يا انډول يا پرتلی لپاره د برابرونونو هغه کرافيکي اوبيونې شونی يا ممکن دی، په کوم کی چی هره لور يا اړخ د يو فنکشن تنظيم عمليي راوړل کيږي يا رانيول کيږي او په x , y - پروت ولاړ – يا کواوردينات سيستم
کی انځوريږي .
د دواړو فنکشنونو غوځټکي x - کواورديناتونه په همدې وخت کی د برابرونونو اوبيونې دي.

بيلګه ۱۴ . ۱۲:

$$|x+1|=(x/2)+2$$

باور لري:

$(x+1) \geq 0$ د $x > -1$ لپاره

$(x+1) < 0$ د $x < -1$ لپاره

(14,11) د $x \geq -1$ لپاره $|x+1| = x+1$

(14,11) د $x < -1$ لپاره $|x+1| = -x-1$

لومړی حالت

$x \in [-1,\infty)$

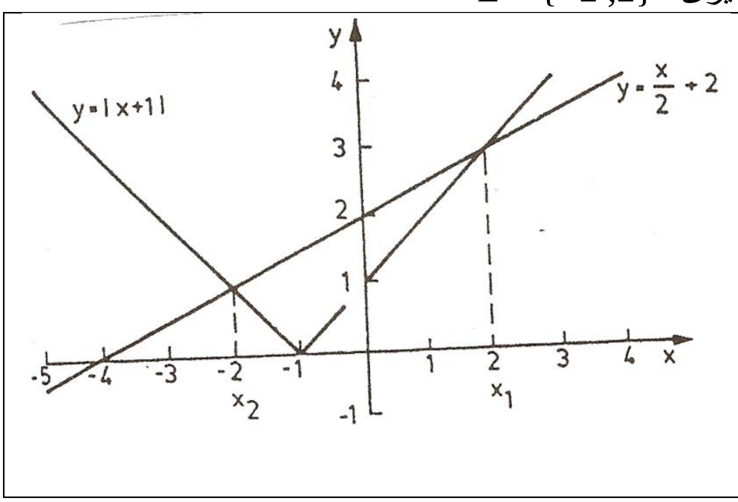
$$|x+1| = x/2+2 \Leftrightarrow x+1 = x/2+2 \Leftrightarrow x = 2 \in [-1,\infty] \Rightarrow x_1 = 2$$

دوم حالت:

$x \in [-1,\infty)$

$$|x+1| = x/2+2 \Leftrightarrow -x-1 = x/2+2 \Leftrightarrow x = -2 \in [-\infty,-1] \Rightarrow x_2 = -2$$

د برابرون یا مساوات اوبیډیری $L = \{-2, 2\}$



په داسی حال کی چی د ښی اړخ د ورکړشوي برابرون، $y = x/2 + 2$, ګرافیکی انځورونه، په څرګند ډول یوه کرښه ده، کیڼ اړخ، $y = |x+1|$ د (۱۴ . ۱۱) سره د دوه نیموکرښو په څیر منځ ته راځي.
اوبی : کیدی شي په ځ. ۱۴ . ۷ کی ولوستل شي

که یو برانرون د لاینیزو ترمونو زیات مطلقه ارزښتونه ولري، نو شووني یا مساعد ده چی لومړی د هغه ګنوړانګه په هغه ځاي کی وویشل شي، چیرته چی د ترمونو مخنخښنه د مطلقه ارزښت په دننه کی تغیر خوري او د هر یوه مطلقه ارزښت څرګندونه په داسی لاس ته راغلو برخه اینټروالونو کی د لیدلو وړ یوځاي راټول کړي.

بیلګه ۱۴ . ۱۳ :

|1- x|-|2x+3|=1

د (۱۴ . ۱۰) پسی لرو:

د x<1 لپاره |1-x|=1-x

د x>1 لپاره =-1+x

او(لاندې او پورته هم لومړی له کیڼ وښی لو رته لوستل کیږي

د x>-3/2 لپاره |2x+3|=2x+3

د x<-3/2 لپاره =-1x-3

یوځاي راټول یا د ګډ فرمولولو لاندې تر پام یا تر تظر

	x<-3/2	-3/2<x <1	x>1
|-1+x|	1-x	1-x	−1+x
|2x+3|	2x+3	-2x-3	|2x+3|

له دې امله د برابرون اوبې کی درې حالتونه توپیروو. برسره پر دې باید کمیزه – یا منفي نخښه د دویم مطلقه ارزښت د مخه په پام کی ونیول شي:

لمړی حالت:

$x \in (-\infty, -3/2)$

$1-x-(-2x-3)=1 \Leftrightarrow x+4=1 \Leftrightarrow x=-3 \in (-\infty.-3/2) \Rightarrow x_1=-3$

دم حالت:

$x \in [-3/2, 1]$

$1-x-(2x+3)=1 \Leftrightarrow -3x-2=1 \Leftrightarrow x=-1 \in (-\infty.-3/2) \Rightarrow x_2=-1$

دریم حالت:

$x \in (1, \infty)$

$-1+x-(2x+3)=1 \Leftrightarrow -x-4=1 \Leftrightarrow x=-5 \notin (1, \infty)$

په وروستی حالت کی شمیرل شوی ارزښت د نیونی سره په څټ یا تضادکی دی، چې x3 = -5

یواځي ښکارندډوله اوبی دی(دا په دې مانا چې یواځی د اوبي په څیر یا - غوندې ښکاریږي) .

اوبډیری : L = {-3,-1}

د ښکارندډوله اوبي منځ ته راتګ کیدی شي، چی د ګراف اوبي – یا حللارې له لارې ځرګند

شي. د کینِ اړخ یا لور مطلقه ارزښت خپلواك یا ازاد ښودل کیدی شی چی توته توته د مخه تیرشوي شمیرنو په بوګونوحالتونو کی لاس ته راځی. له دې امله تعقیبیږي:

د $x > -3/2$ لپاره $=x+4$

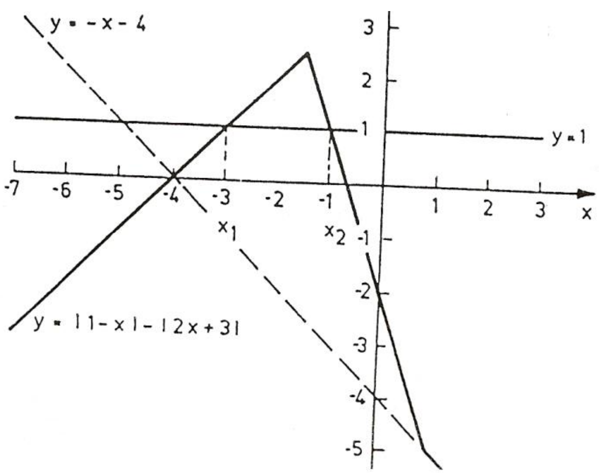
د $-2/3< x < 1$ لپاره $|1-x|-|2x+3|=-3x-2$

د $x > 1$ لپاره $=-x-4$

ښی لور همغه - یا ثابت فنکشن $y = 1$ دی . د مخه شمیرل شوو اوبیونو پرتلې له پرتلې مقایسي ځیره شته، خو زما په ستونځو ګرانلوستونکی اوس بلد دي ۱۴ . ۸ ښایي، چی دواړه کږې ریښتیا د $x < -3/2$

او $-3/2< x < 1$-لپاره رښتیا هره یوه بله یوځل پرې کوي، مګر د $x > 1$ لپاره یو بل نه پریکوي. په دریم حالت کی د اړوند کرښی توتی $y = -x-4$ د اوږدوالی پرتکی راکوي، د کرښي $y = 1$ د حل په ځیر حل د نیول شوي اینتراوال د باندې دی ځیره (شاید داځیره هم ځیره نه شي، کهٔ کرانو مینه والو داکار پخپله وکړ ، نو نور به هم ګتور به وي)ش . ۱۴ . ۸

دلته هغه ځیره باید ریښی او یا راغلی وي، یا راغلې وی۰



که د مطلقه ازښت نخښی په یوه ځلوري - یا مربع ترم کی له منځه وړل کیږي، نو کیدی شي چی د مخنخښي غوښتل شوي ځیرنی چي په برخه ۱۴. ۱ . ۲ کی تر ځیړني نیول شوې د مربع نامساوات د حل متود ګټه ترې واخستل شي.) بیلګه ۱۴ . ۵ دې مقایسه شي)

بیلګه ۱۴ . ۱۴:

$|x^2 - 6x + 5| = 3$

د $x^2-6x+5>0 \Leftrightarrow (x-1)(x-5)>0 \Leftrightarrow x<1 \vee x>5$

او $x^2-6x+5<0 \Leftrightarrow (x-1)(x-5)<0 \Leftrightarrow 1<x<5$

سره لاس ته راځي

(14,12) د $x<1 \vee x>5$ لپاره $|x^2-6x+5|=x^2-6x+5$

(14,12) د $1<x<5$ لپاره $|x^2-6x+5|=-x^2+6x-5$

لومړی حالت: $x \in (-\infty,-1] \cup [5,\infty)$

$x^2-6x+5=3 \Leftrightarrow x^2-6x+2=0,$

$L \Rightarrow x_1=3+\sqrt{7}=5{,}65 \in [5, \infty)$, $x_2= 3 - \sqrt{7} = 0{,}35 \in (-oe , 1]$

دوم حالت $x \in (1,5)$:

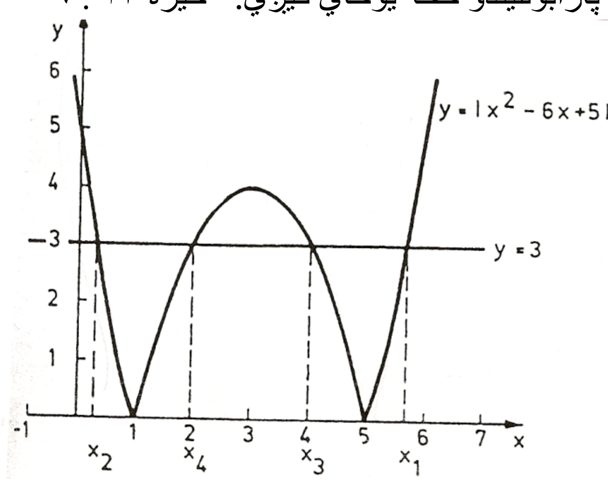
$-x^2+6x-5=3 \Leftrightarrow x^2-6x+8=0,$

$L \Rightarrow x_3=4 \in (1 , 5)$, $x_4= 2 \in (1 , 5)$

پام : که چیرې حل یا اوبی مو نه وو لیکلی او L مو لیکلی وو ، نو دا د اوبی په مانا دی المانی Lösung ورته وایي چی لند په L لیکل کیږي .

اوبیډیری: $L = \{3 - \sqrt{7}); 2;4;3;3+\sqrt{7}\}$

ځیره ۱۴ . ۹ د ګراف له لاری اوبی ښایي. کیڼ لور $y=|x^2-6x+5|$ د (۱۴ . ۱۲) له امله د پارابوللیندو څخه یوځای کیږي. ځیره ۱۴ . ۹



ځیره ۱۴.۹

په ټولیزه توګه د یوه برابرون اوبي کی ، په کوم کی چی n مختلف ارزښتوييني یا - افادې یعني $|T_i(x)|$, i = 1,2,...n منځ ته راځي، 2^n حالتونه یو له بل توپیر کیږي. دا د هغه کیدونکو کیدنو یا ممکن امکاناتو ګڼون یا تعداد دی ، کوم چی موجود دی ، چی د ترم د $T_i(x)$ تیپ یا بڼی وي چی یا

$T_i(x)$ >0 او یا $T_i(x)$ <0 راکوي، یعنی د دوه توکو د وارییشن امکاناتو ټولګي ته (پرتله ۱۰ . ۴ . ۲ برخه) د ارزښت نخښی د له منځه وړلو له امله د (۱۴ ، ۱۰)

قاعدې سره سم 2^n برابرونونه منځ ته راځي، چي په ټولیزه یا عمومي توګه دې اوبیوني $x_1,x_2,x_3,......$ ولرودی شي. یوازی دا باید وازمایل شي ، چی ایا دا اوبي xi پیلبرابرون پوره کوي که نه.

د دې ټولیزې تګلار پسی موږ په بیلګي ۱۴ . ۱۳ کی د

T1(x)=1-x, T2=(2x+1)

سره، په لاندې $4 = 2^2$ حالتونو باندې کار کوو:

$$1.\ T_1(x) \geq 0 \wedge T_2(x) \geq 0: \quad (1-x)-(2x+3)=1 \Rightarrow x_1=-1.$$

$$2.\ T_1(x) \geq 0 \wedge T_2(x) < 0: \quad (1-x)+(2x+3)=1 \Rightarrow x_2=-3.$$

$$3.\ T_1(x) < 0 \wedge T_2(x) \geq 0: -(1-x)-(2x+3)=1 \Rightarrow x_3=-5.$$

$$4.\ T_1(x) < 0 \wedge T_2(x) < 0: -(1-x)+(2x+3)=1 \Rightarrow x_4=-\frac{1}{3}.$$

پیلبرابرون د x1=1, x2 = -3لپاره پوره دي مګر د x3 اوx4لپاره پوره نه دي.

۱۴ . ۲ . ۳ نابرابرون دمطلقه ارزښت سره

که په نابرابرونو کی مطلقه ارزښتونه منځ ته راشی، نو داسی دي لکه په برخه. ۱۴ .۲ ۲ کی د حالتونو توپیر سره ونیسی یعني د کارپیل په وکړي، کوم چی بي له مطلقه ارزښتنخښو د انځوروني لپاره ضرر یا غوښتونکي دي. د واریابلو یا اووښتونکو اړونده برخه چاپیریال په دننه بیا مختلف نابرابرون ۱۴ .۱ سره سم حل کوو، د کوم سره چي بیرته د حالت توپیر اړیین دئ

بیلګه ۱۴ . ۱۵ : |7-3x|>2

لومړی حالت:

$$7-3x \ge 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 7/3]$$
$$7-3x \ge 2 \Leftrightarrow x \in (-\infty; 5/3]$$
$$L_1 = (-\infty, 7/3] \cap (-\infty, 5/3) = (-\infty, 5/3]$$

دویم حالت:

$$7-3x < 0 \Leftrightarrow x \in (7/3, \infty)$$
$$-7+3x \ge 2 \Leftrightarrow x \in [, \infty)$$
$$L_2 = (7/3, \infty) \cap [3, \infty) = [3, \infty)$$
$$\Rightarrow$$
$$L = L_1 \cup L_2 = (-\infty, 5/3] \cup [3, \infty) = R \setminus (5/3, 3)$$

په پورته کې دې د غشي څوکه له پامه کې نه راړل کیږي:

بیلګه ۱۴ . ۱۶: $|x-5|<|x+1|$

د یوګونو ترمونو انځورونه بي له ارزښتنخښی:

د $x > 5$ لپاره $|x-5|= x-5$

د $x < 5$ لپاره $|x-5|=-x+5$

او

د $x \ge 1$ لپاره $|x+1|=x+1$

د $x \le -1$ لپاره $|x + 1| = -x - 1$

په یوه لید وړ توګه په لاندې توګه راټولیګي رایوځاي کیږي یا راغونډیږي :

	$X > -1$	$-1\le x<5$	$x\ge 5$
$\lvert x-5\rvert =$	$-x+5$	$-x+5$	$x-5$
$\lvert x+1\rvert =$	$-x-1$	$x+1$	$x+1$

لومړی حالت: $x \in (-\infty, -1)$

$$|x-5|<|x+1| \Leftrightarrow -x+5<-x-1 \Leftrightarrow 0<-6$$

د هر $x<-1$ نابرابرون یوې ناریښتیا وینا ته لاربښودوي، چی په دې حالت کی کوم اوبه وي ، دا په دې مانا چي: $L1 = \emptyset$

دوم حلات $x \in [-1, 5)$:

$|x-5|<|x+1| \iff -x+5<-x-1 \iff x>2 \iff$
$x \in [2, \infty]$
$L_2 = [-1,5) \cap (2,5) = (2,5)$

دریم حالت: $x \in [5, \infty)$

$|x-5| < |x+1| \iff x-5 < x+1 \iff 0<6$

هر $x \geq 5$ نابرابرون پوره کوي، دا په دې مانا چې: $L3 = [5 , oe)$

حلډیری: $L = L_1 \cup L_2 \cup L_3 = (2,5) \cup ([5,\infty) = (2,\infty)$

بیلګه ۱۴ . ۱۷: $|x^2-4x-21|<24$

د $x^2-4x-21 \geq 0 \iff x<-3 \vee x \geq 7$

او $x^2-4x-21<0 \iff -3<x<7$

څخه لاس ته راځي:

د $x<-3 \vee x \geq 7$ لپاره $|x^2-4x-21|=x^2-4x-21$

د $-3<x<7$ لپاره $= -x^2+4x+21$

لومړی حالت: $x \in (-\infty,-3] \cup [7,\infty)$

$|x^2-4x-21|<24 \iff x^2-4x-21<24 \iff x^2-4x-45<0$
$\iff -5 < x < 9 \iff$
$x \in (-5,9)$

$L_1 = [(-\infty,-3] \cup [7,\infty)] \cap (-5,9) = (-5,-3] \cup [7,9)$

دویم حالت: $x \in (-3,7)$

$|x^2-4x-21|<24 \iff -x^2+4x+21<24 \iff x^2-4x+3>0$
$\iff x<1 \vee x>3 \iff$
$x \in (-\infty,1) \cup (3,\infty),$

$L_2 = (-3,7) \cap [(-\infty,1)] \cup (3,\infty) = (-3,1) \cup (3,7)$

اوبیډیری:

$L = L_1 \cup L_2 = (-5,1) \cup (3,9)$

دا بیلګې د دې درس لپاره بسیا کوي، دا بیا دلته هم تکرار لیکم، که په کومه موضوع کې ګرانو لوستونکو څه زیات غوښتل هغه هم په پام کې نیول کیږي او کړی شو، چې په ګډه هره موضوع وغزوو۰

په لاندې کې به په یوه بیلګه کې داسې نامساوات وڅیړو، په کومه کې چې مجهوله په مطلقه ارزښت افاده شوي وي او هم مات لاندې کې منځ ته راشي.

بیلګه ۱۴ . ۱۸: $|1+2x| / (1-x) < 1 , x \neq 1$

د (۱۴ ، ۱۰) له مخې د مطلقه ارزښت له منځه وړلاو د مات لاندې سره د نابرابرون ځله ونه د (۱۴ . ۲) او (۱۴ . ۳) له مخې په هر وخت کې د همغه ترم مخنخښه باید په پام کې ونیول شي. باور لري یا صدق کوي:

د $x \geq -1/2$ لپاره $|1+2x| = 1+2x$

د$x<-1/2$ لپاره $|1+2x|=-1-2x$

او

د $x< 1$ لپاره $(1-x)>0$

د $x > 1$ لپاره $(1-x) < 0$

دلته هم په همغه دوه تیریدونکو ځایونو کې ګنوړانګه سره بیله یا توټه کیږي، داسې چې په راتلونکو ګڼلو کې یا ځانیزه توګه درې حالتونه یو له بل توپیریږي.

	$X<-1/2$	$-1\leq x<1$	$x>1$
$\|1+2x\|$	$-1-2x>$	$1+2x$	$1+2x$
$=1-x$	>0	>0	<0

لومړی حالت: $x \in (-oe, -1/2)$

$-1-2x\leq 1-x \iff x\geq -2 \iff$

$x \in [-2 , oe)$

$L_1 = (-oe, -1/2) \cap [-2 , oe) = [-2 , -1/2)$

دویم حالت $x \in [- 1/2,1)$:

$1+2x < 1- x \iff x<o \iff x \in (-oe,0]$

$L_2 = [-1/2 ,1] \cap (-oe,0] = [-1/2, 0)$

دریم حالت:

$x \in (1, oe)$

$1+2x \geq 1-x \iff x \geq 0 \iff x \in [0, oe)$

$L_3 = (1, oe) \cap [0, oe) = (1, oe)$

د حلونو سټ(اوبیډیری):

$L = L_1 \cup L_2 \cup L_3 = [-2;0] \cup (1,oe)$

د دوه ناپیژندونکو سره د یوه نامساوات ارزښت حلډیري پیدا کولو لپاره هم باید لمړی ارزښت له منځه ولاړ شي. مساوات (۱۴ . ۱۰) ته ورته د واریابلو یا اوښتونکو x او y سره، د یوه لایني ترم ارزښت سره، باور لري:

(14,13) د $ax+by+c \geq 0$ لپاره $= ax+by+c$

(۱۴ ، ۱۳) د $ax+by+c < 0$ لپاره $|ax+by+c| = -(ax+by+c$

د نیونو یا فرضیو سره $a \neq 0 \;\; v \;\; b \neq 0$

دواړه بني لیکل شوي شرطونه په برخه ۱۴ . ۱ . ۴ کی د کارول شوې بڼی(۱۴ . ۹) نابرابرون
هم کارول شوي . له دې امله باید یو نامساوات د ارزښت افادي (۱۴ . ۹) سره، د کرښی $ax + by + c = 0$ له لارې ورکړ شوې، یو له بل بیلی یا جدا، د x,y-هوارې نیمه هوارې یو له بل بیلی اوبی کړی شي.

بیلګه ۱۴ . ۱۹:

$|x-y+1| > x-2x-4$

د (۱۴ . ۱۳) اړیکو باور لري :

د $-x-y+1 \geq 0$ لپاره $|-x-y+1| = -x-y+1$

د $x-y+1 < 0$ لپاره $= x + y - 1$

لومړی حالت: $-x - y + 1 > 0$

$|-x-y+1| > x-2y-4 \iff -x-y+1 > x-2y-4 \iff -2x+y+5 > 0$

$L1 = \{(x,y) | -x-y+1 \geq 0 , -2x+y+5 > 0\}$

دوم حالت: $x-y+1 < 0$

$|-x-y+1| > x-2y-4 \iff x+y-1 > x-2y-4 \iff 3y+3 > 0 \iff y < -1$

$L2=\{(x;y)|-x-y+1<0 ,y>-1\}$

له دې سره L1 او L2 د اوبیډیرۍ دوه نابرابرونونو غوڅدیرۍ ده او کیدی شي، لکه څنګه یو نابرابرون د یوه ګراف سره انځور شي (څیره دلته هم په پوښتنه کې ده ۱۴ . ۱۰ الف) اوبیډیرۍ بیرته د ورکړ شوو نابرابرونونو برخ اوبیډیریو ټولنډیرۍ ده٠ (څیره ۱۴ . ۱۰ ب) دلته هم همغه د مخه پام لرنه)٠

که په یوه نابرابرون کی دوه ارزښت افادې یا – ویینې د (۱۴ . ۱۳) بڼی رامنځ ته شي، نو د ارزښت ترپام نیولو سره څلور حالتونه یو له بل توپیر کیدی شي.

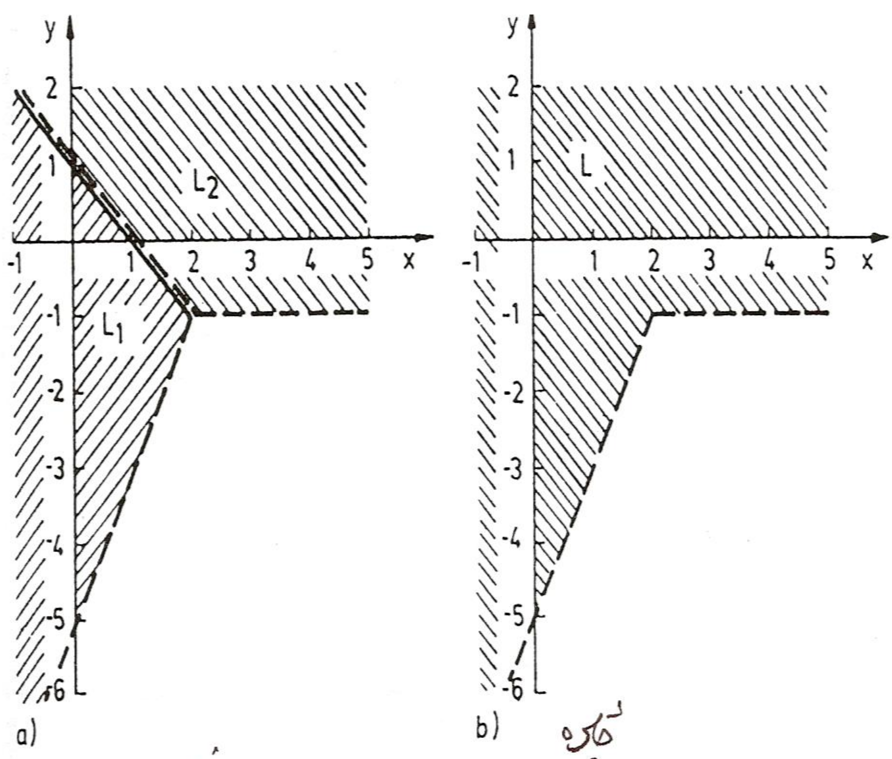


Bild 14.10 څېره

تمرینونه

لاندې نامساواتو حلېږي پیدا کړی

1. a) $8x-3<2x+9$ b) $5-7x\le 3x-10$

c) $\frac{x}{2}-\frac{2}{3}>\frac{1}{2}+\frac{x}{9}$ d) $3(3x-2)\ge 4(3-2x)$

e) $\frac{8x-5}{5}\le\frac{2x+5}{3}$ f) $\frac{3}{4}-\frac{2}{3}x>\frac{5}{4}x+\frac{1}{6}$

g) $\frac{8}{9}+6x\ge 2(\frac{5}{6}+3x)$ h) $\frac{1}{3}(\frac{x}{8}-6)<\frac{x}{6}-\frac{x}{8}+1$

2. a) $(3x+1)(2x-1)<(5x-3)(2x-1)$

b) $(8x-9)(3x+2)\ge(2+7x)(2+3x)$

c) $(7x-3)(5-7x)>(3-7x)(5x+3)$

d) $(5+2x)(7-5x)\le(10+4x)(2-3x)$

e) $x^2-x-6\le 2x+4$ f) $x^2+5x-6>3-3x$

g) $x^2+3x\ge -2x-6$ h) $x^2-4x+4<4x-8$

3. a) $\frac{3}{2x-4}\le 2$ b) $\frac{3x-4}{2-3x}\ge 4$

c) $\frac{2x-2}{2x+2}<2$ d) $\frac{5x+3}{x}<-2$

e) $\frac{4x+1}{3x-2}>5$ f) $\frac{9-3x}{x-3}>-3$

g) $\frac{4x+6}{2x+3}<3$ h) $\frac{3(4x-1)}{x-1}\ge 12-\frac{2(4x-5)}{x-1}$

4. a) $\frac{3}{4x-4}\le\frac{2}{x-6}$ b) $\frac{1}{5-3x}>\frac{1}{5x+4}$

c) $\frac{x+1}{x-3}<\frac{x-1}{x+2}$ d) $\frac{4x-3}{2x+1}\le\frac{2x+3}{x+2}$

e) $\frac{2x-1}{2x+1}+\frac{3x+1}{x-2}>4$ f) $\frac{x-3}{1-6x}-\frac{2x+1}{4x+3}\ge-\frac{2}{3}$

g) $\frac{2x+1}{2x-2}+\frac{2x-3}{3x-3}\ge 1$ h) $\frac{2-5x}{3-x}-\frac{2-6x}{1-3x}<\frac{3}{8}\cdot 27^{\log_3 2}$

5. a) $(2x-3)(3x-2)<0$ b) $(x+3)(7-x)\le 0$

c) $x^2+4x+3\ge 0$ d) $x^2-8x+7\le 0$

e) $x^2+4x+5<0$ f) $x^2-6x+10>0$

g) $x^2 - 2x + 1 > \frac{5}{2}x - 1$ h) $2x^2 - 3x - 3 < 3(x - 1)$

6. a) $(x^2 - 6x + 5)(x^2 + 1) < 0$ b) $(x^2 - 4x + 5)(x^2 + 1) \leq 0$

c) $(x^2 - 2x + 2)(x^2 + 4) > 0$ d) $(9 - x^2)(x^2 + 3x + 2) \geq 0$

e) $(x^2 + 4x - 5)(x^2 - 4) > 0$ f) $2x^4 - x^3 + 10x^2 - 5x > 0$

g) $-x^3 - 3x^2 + 16x + 48 \leq 0$ h) $\frac{x^3}{\sqrt{2}} - \sqrt{2}\,x^2 - \frac{\sqrt{2}}{2}x + \sqrt{2} < 0$

7. a) $\frac{x+4}{x+3} > 0$ b) $\frac{x+3}{x-7} < 0$

c) $\frac{2x+3}{3x-4} \leq 0$ d) $\frac{x-2}{5x+1} \geq 0$

e) $\frac{6+9x}{4+6x} < 0$ f) $\frac{2x-1}{8x-4} > 0$

g) $\frac{3x-12}{x^2-4x} \geq 0$ h) $\frac{x^2-25}{2x+10} \leq 0$

8. a) $x - 8 + \frac{7}{x} < 0$ b) $x + 3 - \frac{4}{x+3} > 0$

c) $8(x - 2) \geq \frac{20}{x+1} + 3(x - 7)$ d) $\frac{3x-24}{4} - (2x - 6) > -\frac{5}{x}$

د لاندې نامساواتسیستمونو حل ډېرى وټاکى

9. a) $2 + x \geq 2x - 7$
$5(x - 3) \geq 2(x - 3)$

b) $x + 6 < 14 - 3x$
$6 + 7x \geq 3x + 5$

c) $\frac{2}{3} - \frac{x}{2} > \frac{x}{3} + \frac{1}{6}$
$\frac{1}{2} + \frac{3}{4}x < \frac{8-x}{3}$

d) $x + \frac{1}{3} \leq 2x - \frac{7}{6}$
$5(x - \frac{3}{2}) \leq 2x - 3$

10. a) $x^2 - 3x < 0$
$2(x + 2) < 4x - 1$

b) $x^2 + 6x + 8 < 0$
$2(x + 2) > x + 3$

c) $x^2 - 9 < 0$
$x + 2 > 2(x - 1)$

d) $x^2 - 3x + 3 > 0$
$4(x - 1) < 2(x + 1)$

11. a) $x^2 - 4x - 5 \leq 0$
$x^2 + 6x - 16 < 0$

b) $x^2 + 2x - 8 < 0$
$x^2 - 3x - 4 > 0$

c) $x^2 - 5x > 0$
$x^2 - 9 > 0$

d) $x^2 - 6x + 5 < 0$
$x^2 + 8x + 15 < 0$

12. a) $3x+2>2x+1>3(x-4)$ b) $-1<\frac{7x-3}{8x-5}<1$

c) $2<\frac{5x+1}{2x-1}<5$ d) $1<\frac{x^2+4x+5}{x+1}<4$

13. a) $3-x<2-4x$ b) $x+5>\frac{7}{2}x+\frac{3}{2}$

$x+3<\frac{1}{2}(x+1)$ $4(x-1)<13-\frac{1}{4}x$

$\frac{x}{2}>x+\frac{1}{2}$ $2x-1>x+6$

د لاندې نامساواتو او همداسې د نامساواتسیستمونو حاوېرۍ په کارتیزې کواوردینات – یاپروتولاړ سیستم کې ګرافیکې انځور کړۍ.

14. a) $y\geq-\frac{3}{2}x+3$ b) $y<-\frac{2}{3}x+2$

c) $x<2y+2$ d) $x>-y+3$

e) $4x-5y>12$ f) $-3x-8y\leq24$

g) $2(y-3)\leq6(x-1)$ h) $5x-y+2>3y-3x-10$

15. a) $2x+3y>-6$, $x-y<2$ b) $3x-y>3$, $x+y>4$

c) $x>1$, $x+2y<4$, $y+3>x$ d) $x-4y-6\leq0$, $2x+y-3\leq0$, $y-5\leq0$

16. a) $-2<x+y<2$, $-2<x-y<2$ b) $x>2$, $-3<y<2+x$, $x+y<5$

c) $x^2-y^2\leq0$ d) $(2x+y+1)(3y-x-1)>0$

د لاندې نامساواتو حاوېرۍ د شمیرلو او همداسې ګرافیکې لارې پیداکړۍ.

17. a) $|x-3|=5$ b) $|x+2|=7$

c) $|1-\frac{x}{2}|=x+\frac{5}{2}$ d) $|x+3|=|3x-4|$

e) $|x-4|=|2x+3|$ f) $|9-3x|-|2x-1|=4-2x$

g) $|2-3x|-|x+1|+|2x+2|=3$ h) $|x-3|-|3x-4|+|2x+1|=6$

18. a) $|x^2-2x-8|=7$ b) $|8-2x^2|=6$

c) $|2x - x^2| = 8$ d) $|x^2 + 6x + 5| = 5$

e) $|x^2 - 4x + 3| = 1$ f) $|x^2 - 2x - 3| = 1$

g) $|4x^2 + 4x + 4| = 3$ h) $|x^2 - 3x + 7| = 4$

19. a) $\left|\dfrac{2x+4}{x-3}\right| = 1$ b) $\left|\dfrac{2x-4}{x+3}\right| = 2$

د لاندې نامساتو حلډېرۍ پیدا کړئ

20. a) $|x - 2| < 3$ b) $|2 - 4x| \geq 1$

c) $2 - |1 - x| \geq 1 + x$ d) $|2x - 3| < x + 3$

e) $|3x - 5| > 2|x + 2|$ f) $|3x + 3| \geq \left|\dfrac{1}{2}x - 1\right|$

g) $|x - 4| + |2 - x| \leq 2$ h) $|3 - x| < 2 - |x - 5|$

21. a) $|x^2 + 2x - 3| \leq 12$ b) $|x^2 - 6x + 8| \geq 3$

c) $|x^2 + 4x - 5| > 2$ d) $|15 + 2x - x^2| < 7$

e) $|x^2 - 6x + 11| < 1$ f) $|x^2 + 4x + 7| > 2$

g) $|3 + 6x + 3x^2| > 0$ h) $|x^2 + 4x| < 4$

22. a) $\left|\dfrac{x+3}{1-x}\right| > 3$ b) $\left|\dfrac{1-4x}{2-x}\right| > 4$

c) $\dfrac{2x+3}{|x+4|} \leq 1$ d) $\dfrac{\frac{2}{3}x - \frac{3}{2}}{\left|\frac{3}{4} + \frac{x}{2}\right|} \leq \dfrac{5}{6}$

e) $\dfrac{|3x-2|}{x+2} \geq 2$ f) $\dfrac{|x-1|}{2x+2} \geq 1$

د

لاندې نامساواتو حلډېرۍ په یوه په یوه کواوردیناتسیستم کې انځور کړئ او ا نځور یې وکاږئ

23. a) $x + y < |3x + 2|$ b) $y + |x + 2| \leq 4$

c) $x + |y - 2| < 3$ d) $|2x + y - 3| \geq 2y - 3x + 4$

e) $|x + 3| + |y - 5| \leq 3$ f) $|x + y - 2| > |y - x + 1|$

g) $|x + y + 1| \leq |x - y - 1|$ h) $|x - y| > |x - 2y - 2|$

۱۵ فنکشنونه(بلواك یا تابع)

۱۵ . ۱ د فنکشن کلیمه او د فنکشن انځورونه:

غواړم چی ددې برخی په پیل کی دی کلیمي ته د لوستونکو پام راوګرځوم: د فنکشن کلیمه کله د یواځنی څیرونی، چی په هندسه کی خورا ډیره کارول کیږي یا استعمالیږي ، کله د تابع(بلواك) او بیا زیاته د فنکشن په نامه ځموږ په دې کار کی بلل شوې چی موږ ورسره تراوسه د تابع تر نامه لاندې هم بلد یو، ځما په اند یا فکر که دا موږ بلواك وبولو، نو هدفمند به مو نومولی وي. په لاندې کي به وګور چی خپلواکی او بلواکی ناپیوندونکی ځموږ د څیړلو متن جوړوی

پیژند ۱۵ . ۱:

د یوې رییلی واریابلی ریل ارزښته فنکشن(لنډ: فنکشن) د ریبلو ګنونو ډیری باندې ، د یوې ډیری $D \subseteq R$ یوه یواځنی څیرونه ده. D دپیژند ډیری نومیږي .
د ټولو ارزښتونو ډیری چي y یی د ځان لپاره غوره کولی شي، که x د پیژنددیری یا تعریف ډیري په دننه کی وځغلي، د ارزښت ډیری W بلل کیږي .
د ي وې قانونمندی f له مخی هر $x \in M$یواځني یوه $y \in W$باندې تنظیمیږي:

$$y = f(x)$$

اوس نو x خپلواك واریابل یا اووښتونی یا مجهوله بلل کیږي یا نومیږي او y بلواك واریابل یا اووښتونی بلل کیږي

د فنکشن مختلف انځورډولونو ترمنځ سړی توپیروي. د فنکشن »کلیمه انځورونه« یوه په خوله ویونکی یا یو اعلانونکی ، له ماتماتیکي یا شمیریز سومبولیك ځخه تیریدونکی یا په شمیریز سومبولیك صرف نظر کوونکی، مګر ددې لپاره یو پیچلی، د تشریح شکل دی، چی په لاندې کي به ورسره بلد شو.

بیلګه ۱۵ . ۱ : هر رییل ګڼ د همغه رییلګڼ په نیم ور زیات ۱ باندې تنظیمیدل.

بیلګه ۱۵ . ۲ : هر یو منفي ګڼ به د هغه په مطلقه ارزښت او هر یو مثبت ګن او صفر به د هغه په مربع تنظیم شي.

د شمیرپوهی سومبولونو تر استعمال لاندې، تحلیلي (شننیزه) انځورونه د بلواک یا فنکشن تشریح ده. دلته x او y د نورو رییلو ګڼونو سره د بنسټیزو کارونو یا عملیو ، زیاتون، کمون ، ځل ، ویش ، او د بنسټیزو فنکشنونو له لارې تړل دي (پرتله برخه ۱۵ . ۴).

بیلګی ۱۵ . ۱ ته: $y=(x/2)+1, D=R , W=R$

بیلګی ۱۵ . ۲ ته : د $x<0$ لپاره $y=|x|$
دلته $D=R,W = [0,\infty)$ د $x>0$ لپاره $y=x^2$
پام دې وي چی په داسی حالت کي له کیڼ و ښې لور ته یا ګډوډلوستل کیږی یعنی داسی لولو: y د x مطلقه ارزښت سره مساوي دی ، که چیرې x له 0 کوچنی وي. داسی لیکنو ته دې ګران لوستونکی پوره پام ولري او فکر کوم چی له اشتباه سره به نه مخامخ کیږو) . تحلیلي(شننیزه) انځورونه اکسپلیځیت(واضح)روښانه و څرګند) explizitنومیږي، که د فنکشن برابرون ، لکه په بیلګو ۱۵ ، ۱ او ۱۵ . ۲ چی په یوه د yپه لور حلکیدونکي فورم مخ ته پروت وي: $y =f(x)$ که چیرې داسي نه وي نو د تحلیلي - یا شننیزې انځوروني شکل $F(x,y)=0$ دی او فنکشن ایمپلیځیت (ورسره ځای شوي یا وراسره تړلی implizit) بلل کیږي یا نومیږي . د بیلګی په توګه به $2y-x-1=0$ $D=R,W=R$,فنکشن د بیلګي ۱۵ . ۱ یو ایمپیلیځیت انځورونه وی. دیوه فنکشن نه هره ایمپلیځیت شنینیزه بڼه (ایمپلیځیت تحلیلي فورم) کیدی شي په

اکسپلیځیت شننیزه یا سپړنیزه بڼه (تحلیلي فورم) واړول شي. د بیلګی په توګه : که $x+y+y^5-1=0$ وي، نو دا د y په لور اکسپلیځیت حل کیدونکی نه دی.

د یو فنکشن تحلیلي یا شننیزې انځورونی ځانګړې بڼه پارامتری څرګندونه ده. دلته تنظیم د یوه مرستندوي اووښتوني یا واریابلی t ، دا په نامه پارامتر، له لاري لاربنودیږي. هر پارامتر (له یوه پارامتر ساحی څخه)

$x = \varphi(t) \quad , y = \Psi(t)$

په یو ارزښتجوړې x,y تنظیمیږي.

بیلګه ۱۵ . ۱ ته: $x=2t , y=t+1; -oe< t <oe$ به یوه پارامتري انځورونه وی او $x = t , y = t/2 + 1$ به یوه بله پارامتري انځورونه وي.

زیات وخت فنکشنونه د جدول په څیر ورکول کیږي

بیلګي ۱۵ . ۱ته:

X	-2	-1	0	1	2	....
Y	2	0,5	1	1,5	2	.....

بیلګي ۱۵ ، ۲ ته:

X....	-3	2	-1	0	1	2	3	...
Y....	3	2	1	0	1	4	9	...

د فنکشن ګرافیکی انځورونه (د یوې ټوټې) په x,y- کواوردینات سیستم کی د یوې کږې له لارې، د هغه فنکشن انځورونی څخه عبارت ده ، چی د واریابلو

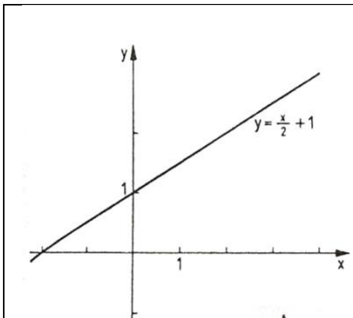


Bild 15.1 ځاره

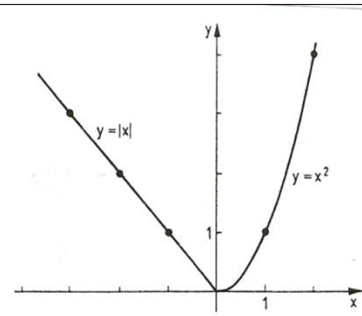


Bild 15.2 ځاره

یا اووښتونوجوړې د x,y - هواره یا سطحه کی یواځني او یواځني ټکي باندې تنظیمیږي .

څیره ۱۵ . ۱ . او ۱۵ . ۲) بیلګي ۱۵ . ۲ته بیلګي ۱۵ . ۱ته

۱۵ . ۲ د فنکشنونو- یا بلواکو خویونه

پیژند ۱۵ . ۲: $y = f(x)$
په ایتروال $]a,b[$ کی هلته او هلته یا تیك هلته مونوتون جګیدونکی
(مونوتون لویدونکی) دی، چیرته چی ددوه په زړه پورې ارزښتونو
$x \in [a,b] \wedge y \in [a,b]$ لپاره د$x1<x2$ سره باور ولري:
$$f(x1) \le f(x2) \quad (f(x1)>f(x2))$$
که د برابرونخښه باور ونه لري نو له کره یا کلکی مونوتوني غږیږو.

وبیلګي ۱۵ . ۱ ته: $y=(1/2)x+1$ په $D = R$ کی کلك مونوتون دئ

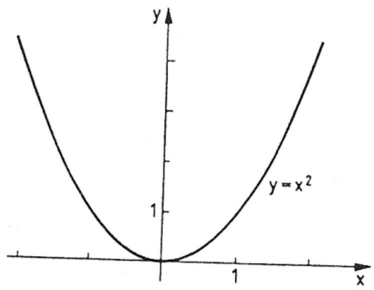
و بیلګي ۱۵ . ۲ ته: $y=|x|$ د $x<0$ لپاره
او $y= x^2$ د $x>0$ لپاره
په اینتروال) $[oe,0]$ کي مونوتون تیټیدونکی یا -لویدونکی
او په اینتروال $[oe,0]$ کی مونوتون جګیدونکی دی

پیژند یا تعریف ۱۵ . ۳ :

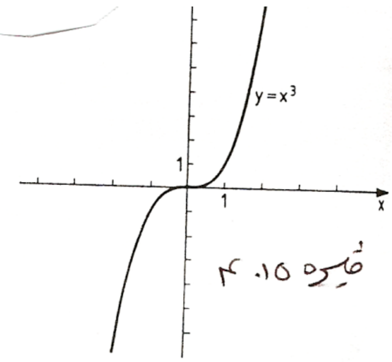
په یوه اینتروال $]-a,a[$ کی یو تعریف شوی فنکشن $y = f(x)$ هلته او هلته جوړه (جفت) یا سیومتریك symetrisch,(ناجوړه (طاق) یا نا- یا انتیسیومتریكantisymetrisch بلل کیږي چی باوري وي
$$f(-x) = f(x) \quad (f(-x) = -f(x))$$
د جوړه فنکشنونو څیرې اکسیال یا محوري سیومتریك و y - محور ته ځغلي) دلته هم څیره شته ، نو تل به همغه څه لیکم؟ ۱۵ . ۳ (، طاق فنکشنونه و سرچینی ته منځني یا مرکزي سیومتریك ځغلي) بیا هم څیره او ۰۰۰۰ش ۱۵ . ۴)

بیلګه ۱۵ . ۴
فنکشن $y= x^3 ,D= R$
یو ناجوړه یا طاق فنکشن دی :
$$(-x^3) = -x^3$$

بیلګه ۱۵ . ۳ :
فنکشن $y=x^2,D=R$
یو جوړه یا جفت فنکشن دئ:
$$(-x)^2 = x^2$$



څېره ۱۵ . ۳



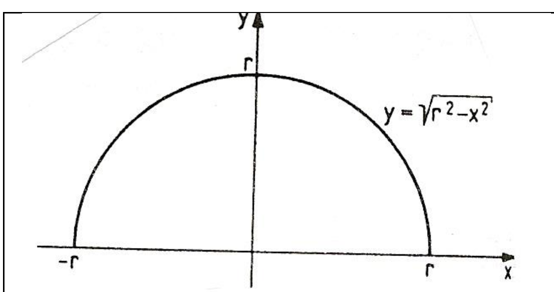
څېره ۱۵ . ۴

د بیلګي ۱۵ . ۱ او ، ۱۵ . ۲ فنکشنونه نه جوړه یا جفت او نه ناجوړه یا طاق دي

پیژند ۱۵ . ۴:

$y = f(x)$ تیك هلته په D (پیژندډیری ده) بند یا رابند(محدود)بلل کیږي که
یو $k > 0$ داسی شته وي چي دا باور ولري :
$|f(x)| < k \quad \forall x \in D$

بیلګه ۱۵ . ۵:

فنکشن $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, $D = [-r, r]$ بند یا راګیر(محدود)(زه به دا له دې وروسته بند وبولم) دی، ځکه چی لرو:نیم یوونګردی څیره ده ش . ۱۵ . ۵ $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2} \le r$	

پیژند ۱۵ . ۵:
$y = f(x)$ پریودیکي(دوراني یا بیرته- یا تل بیرته راګرځیدونکی periodical بلل
کیږي د دوران یا راګرځیدونی p سره ، که باور ولري:
$f(x + p) = f(x)$
د دورانی یا تل راګځیدونکو (پریودیکي) فنکشنونو تیوپیکي بیلګي تریګونومتریکي
فنکشنونه دي (پرتله برخه ۱۵ . ۳)

پیژند ۱۵ . ۶ :

ټول $x \in D$ د $f(x)=0$ سره، د فنکشن $f(x)$ صفر ځایونه بلل کيږي۰

د فنکشن صفرځایونه د مساوات $f(x) = 0$ د حل له لارې پیدا کيږي. داحلونه د x- محور سره د فنکشن کرښې د غوڅټکو x - ارزښتونه دي.

بیلگی ۱۵ . ۱ته:

د فنکشن $y = 1/2\,x + 1$ صفرځایونه د مساوات $x/2 + 1 = 0$ اوبی $x = -2$ دی
(ځیره ۱۵ . ۱)

بیلگه۰ ۱۵ . ۶:

فنکشن $y = x^2 - 4$ دوه صفرځایونه لري:

$$x^2 - 4 = 0 \iff x_1 = 2\,,\quad x_2 = -2$$

فنکشن $y = x^2 + 4$ صفرځایونه نه لري.) بیا هم ځیر ۱۵ . ۶)

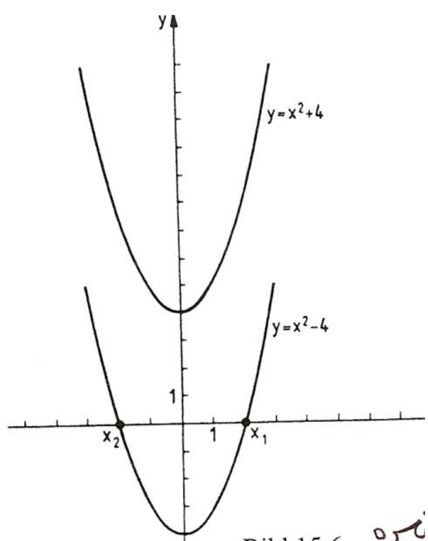


Bild 15.6 ځیره

پیژند ۱۵ . ۷:

$x \in D \quad , \quad y \in W \quad y = f(x),$

یویواځنی« یا یواځنی او یواځنی بلل کیږي، که هریو $y \in W$ د یوه $x \in D$ په واك کی وي یا هر یو $y \in W$ ته یوه $x \in D$ څیره شوی وي، د کوم لپاره چی باور ولري: (= y f(x)یو یویواځنی یایواځنی او یواځنی فنکشن په څتکیدونکی دی ، دا په دې مانا چې دا یو فنکشن (x = g(y تعریفوي، یعني په څټ یا چپه فنکشن. که دلته د اووښتونو یا واریابلو د نخښی(نخونی) سره بدلی شي، نو د په څټ فنکشن په توګه لرو y=g(x) دا د فنکشن روځنی یا وسره بده یا که غواړی مروجه څیره ده، چی x خپلواك اوyبلواك ، دلته د x په واك کی واریابل یامجهولی یا ناپیزندونکی دي د y=f(x) په څټ یا برعکس فنکشن لپاره داسی هم لیکلی شو: $y = f^{-1}(x)$

فنکشن y = x د خپل په څټ فنکشن سره کټمټ(- ورته) identic دی۰ د په څټ یا برعکس فنکشن $y = f^{-1}(x)$
کرافیکی څیره y = x په کرښه د y =f(x)(هندارونه) یعنی په هنداره کی څیرونه او لنډ یی: هندارونه) ده۰

بیلګي ۱۵ ، ۱ ته :

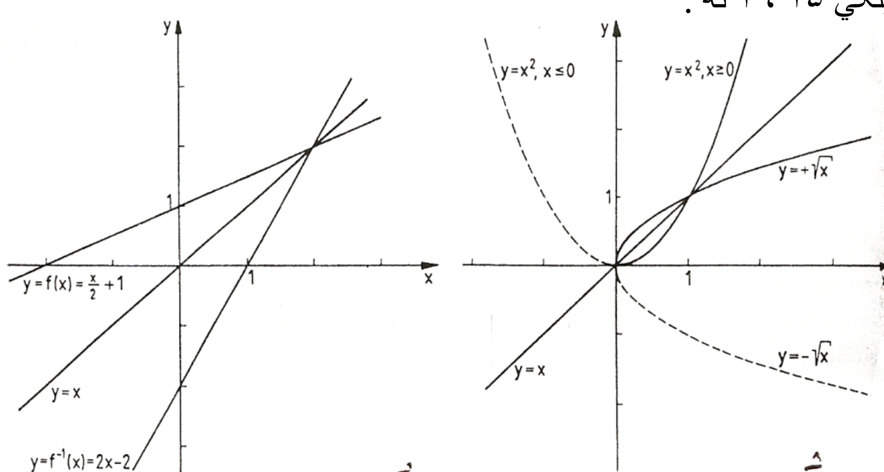


Bild 15.7a څېره
Bild 15.7b څېره

د فنکشن y = f(x)= x/2 +1 چپه یا په څټ فنکشن داسی دی

$y = f^{-1}(x) = 2x - 2$

سړی $y = x/2 + 1$ د x په لور اوبی کوي: $x=2y-2$ او بالاخره x او y سره بدلوي .
(ښیره. ۱۵ ۷ الف)

بیلګي ۱۵ . ۳ ته : فنکشن

$x \in D$ $y = x^2$,

ښیرره ش ۱۵ . ۳) په ښتکیدونکی دي یا په ښتکیدونکی نه دی.

هر $y \in W$ $=[0,oe]$ پورې دوه$[-oe,oe]$ = $x \in D$ اړه لري، یعنی $x=+y$او $x=-y$

مګر $y= x^2$کلك مونوتون جګیدونګی دی (او په دې ډول یواځنی او یواځنی).

د $0 \geq x$ لپاره او کلك مونوتون لویدونکی د $0 < x$ لپاره. $y=x^2,x\geq0$

ته چپه- یا په ښت فنکشن $y=+ x$ دی، او $0 > x$, $y = x^2$ ته چپه- یا په ښت فنکشن $y =$ x -دی. (ښیره ۱۵ . ۷ ب) .

په ټولیزه (عمومي) توګه لاندې جمله باور لري

جمله ۱۵ . ۱ :

که $y = f(x)$کلك مونوتون جګیدونکی) لویدونکی (وي ،نو په ښت فنکشن $y = f^{-1}(x)$ موجود دی او دا هم کلك مونوتون جګیدونکی (لویدونکی) دی.

۱۵ . ۳ . بنسټیز فنکشنونه

په دې برخه کې بنسټیز فنکشنونه تعریفیږي. دا ټول راشنل فنکشنونه، مات راشنل فنکشنونه، پوتنځ یا په توان فنکشنونه، ایکسپوننشل فنکشنونه او لوګاریتم فنکشنونه، تریګونومتري فنکشنونه او ښیکلومتري فنکشنونه دي. دا بنسټیز فنکشنونه به د ځپلوځانګړدوله خویونو له مخی وښیرل شي. په برخه ۱۵ . ۴ که به دفنکشن فنکشنونه (ځنځیری - یا تړلي فنکشنونه) وښیرل شي. د فنکشنونو ښیرل به د هغو ځانګړدوله یا کرکتریستیکي خویونو له مخی هلته هم دوام وومومي، که د دیفرنشل شمیرنی کومکي مواد مو مخ ته پراته وي (برخه ۲۰ . ۴)

پیژند ۱۵ . ۸ :

فنکشن

$$y=a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a^2 x^2 + a_1 x + a_0, n \in N; a_i \in R, a_n \neq 0 \quad (15.1)$$

د ټولو $x \in R$ لپاره تعریف دئ او n - مه درجه ټولریشنلفنکشن نومیږي.دې ډول فنکشنونو ته پولینوم فنکشنونه(یا لنډ : پولینوم) هم ویل کیږي

یو ساده ټول ریشنل - ۱ - امه درجه ($n = 1$) یالاینې فنکشن په لاندې ډول دئ:

$$y = mx + n \qquad (15.2)$$

دلته m او n په (۱۵ . ۱) کی پارامترونو a1 او a0 په مانا دي. د لاینې فنکشنونو څیره(ګراف) یوه کرښه ده چې په $y = n$ کی دy - محور غوڅوي ($x = 0$) او جګوالی $m = \tan\alpha$

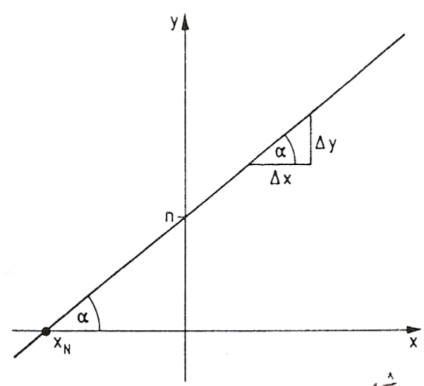


Bild 15.8 ګاره

لري (څېره پورته . ۱۵ . ۸) جګوالی د y - ارزښت د تغیر د x - ارزښت تغیر سره متناسب دی: $m = \Delta y / \Delta x = \frac{\Delta y}{\Delta x}$

کرښه جګیږي که $m > 0$ او لویږي یا ټیټیږي که $m < 0$ وي اوکه $m = 0$ وي، دx - محور سره غبرګه ځغلي . کرښه ،که $|m| = 0$ نیول شوی وي، ټیك یو صفرځاي (y $= 0$ لري: $x_N = - n/m$

که را په غاړه شي چی د یوې کرښی برابرون، چی له دوه ټکو (x1,y1) او (x2,y2) تیریږي، پیدا کړو چي پو په بل نیغي نه وي ولاړې ، نو د هغو جګوالی m او د هغو پرټکی

یا نوره ښه غږڅټکی n په y - محور د برابرونسیستم

$$y1 = x1m + n , y2 = x2m + n$$

له مخی پیدا کوو او په دې توګه لاس ته راوړو

$$(y-y1)/(x-x1)=(y2-y1)/(x2-x1)$$

په بل پل)قدم(کی مونږ ۲ -امه درجه ټولریشنل فنکشنونه یا مربع فنکشنونه رامنځ ته کوو لکه په (۱۵ . ۱) کې $a_2 = a, a_1 = b, a_0 = c$

$$y=ax^2+bx+c , a \mid= 0 \qquad (15.3)$$

د مربع فنکشنونو څیره) ګراف (پارابول دئ چی د هغي سیومتري محور و y - محور ته غبرګ ځغلي. کوایفیڅینت) ځله ووني یا ځلیدونکی (a,b,c) د پارابول د ککرې ځاي او بڼه)فورم(ټاکی.

مونږ د مربع فنکشن یو څو ځانګړي حالتونه تر څیړنې لاندې نیسو.

1. $y=x^2(a=1 ,b=0,c=0)$ (15 . 4)

نورمال پارابول، د ککرې کواوردینات: $x_s = 0 , y_s = 0$

(ځ . ۱۵ . ۹)

2. $y=x^2+px+q$ $(a=1 , b=p , c=q)$ (15 . 5)

او $x^2 + px$ ته د څلورئ - یا مربع تکمیلولو ورزیاتونی ښخه لاس ته راځي:

$$y=x^2+px (p/2)^2+q-(p/2)^2=(x+p/2)^2+q-p^2/2 \quad (15,5)$$

یو و (نسبت) (۱۵ . ۴) ته (مخامخ) د x - لور په p/2 - اودy - لور په $q - p^2 /4$ راکښل (راښکل-یا راکش -) شوی نورمال پارابول د ی ، دا په دې مانا چی په (۱۵ . ۵) راکښل شوی پارابول دا ککره لرې:

$$x_s = -p/2 , y_s =q - p^2/4$$

بیلګه ۱۵ . ۷:

$$y=x^2+6x+10, xs=-6/2=-3,ys=10-6^2/2=1$$

(ځ،۱۵ . ۹)

---

3. $y = ax^2$ (a|=0,b=0, c = 0)

د ککرۍ (سر یا رآس) کواوردینات . $x_s = 0$, $y_s = 0$

پارابول د $|a| > 1$ لپاره خور، د $|a|<1$ لپاره پرسیدلی،د $a > 0$ لپاره پورته لور ته او د $a < 0$ لپاره کښته لورته واز دی (خلاص دی)

بیلګه ۱۵ . ۸:

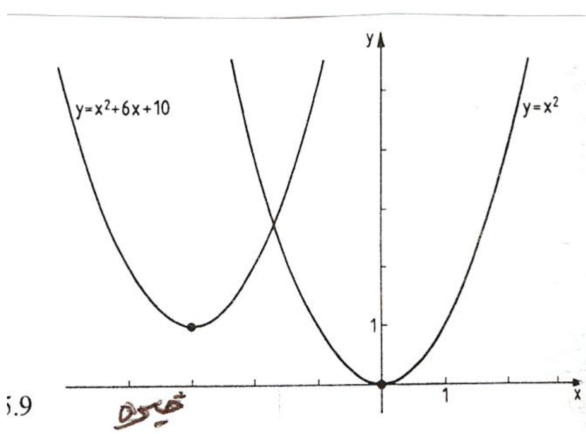
$y = 2x^2$, $y = (1/2)x^2$, $y = -2x^2$

(ځ . ۱۵ . ۱۰)

4. $y=ax^2+bx+c=a[x^2+(b/a)x+c/a]$

د ککرۍ (رأس) کواوردینات داسی دی (لکه په ۱۵ . ۵ کی یی چی مخ ته تللي یو)

$$x_s = -b/2a; y_s = a[(c/a)-(b^2/4a^2)] = c - b^2/4a^2$$



.9

بیلګه ۱۵ . ۹:

$y=-(1/2)x^2+x+4$,(a=-1/2, b=1, c=4)

دککرۍ کواوردینات:

$$x_s = -1/(2.(1/2)) = 1, y_s = 4-12/(4.(-1/2)) = 9/2$$

دا چي $a = -1/2$ دی، نو پارابول پرسیدلی او لاندې لور ته واز دی (ش ۱۵ . ۱۱)

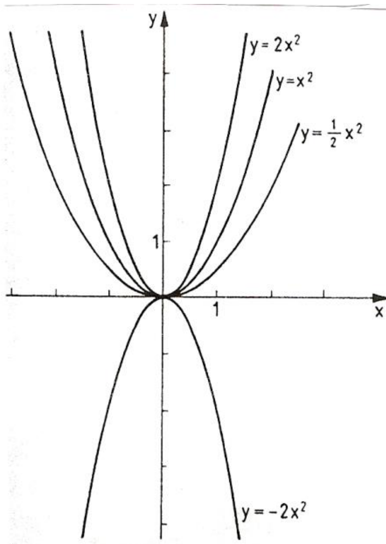


Bild 15.10 ځېره

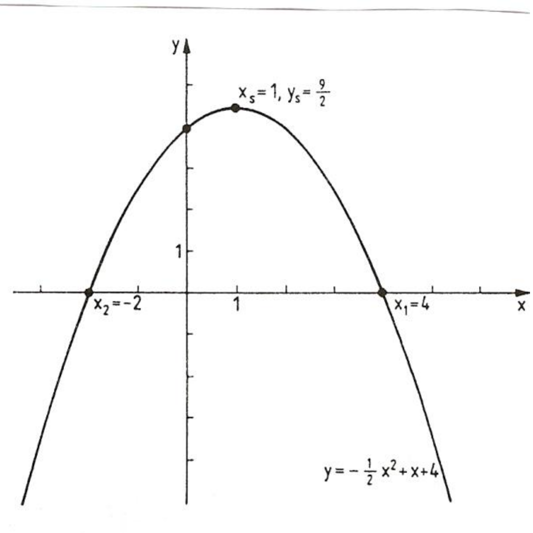


Bild 15.11 ځاېره

د فنکشن $y=ax^2+bx+c$د صفرځایونه د برابرون $ax^2+bx+c=0$ اوبیونـي دي.
وبیلګي ۱۵ . ۹ ته (خ. ۱۵ . ۱) :
صفر ځایونه له دې لاس ته راځي : $-(1/2)x^2+x+4=0$ ، چې دلته $x_1 = 4, x_2 = -2$ دي٠

و بیلګي ۱۵ . ۷ (ځیره ۱۵ . ۹) ته :
د $x^2+6x+10=0$ یاني $x_{1,2} = -3 \pm \sqrt{9-10} = -3 \pm \sqrt{-1} = -3 \pm i$ ځخه لاس ته
راځي چې برابرون رییل صفرځایونه نه لري .

فنکشن$y = x^2$ غبرګ یا جوړه(ډبل) صفرځایونه لري یاني $x_{1,2} = 0$ دي
د ټولریشنل فنکشن دریمو او لوړو درجو لپاره به د بیلګي په توګه دټولریشنلفنکشنونو
بیلګي له مخې، دریمه درجه ټولریشنل فنکشن راوړو
چي د فنکشن ارزښت شمیرلو یو ځانګړی لیدوړ فورم دی، د هورنرشیما(بڼه) Horne rschema، معرفي شي. ددې لپاره به د(۱۵ . ۶) فورم بدل شي.

$$x_{4,5} = -1 \pm \sqrt{1-5} = -1 \pm 2i$$

$$y = [a_3x^2 + a_2x + a_1]x + a_0 = [(a_3x + a_2)x + a_1)x + a_0$$

هغه ورکړ شوي خپلواك x_1 پورې اړوند فنکشن ارزښت $y_1 = f(x_1)$ کیدی شي له دې بڼې سره په لاندې ډول وشمیرل شي:
a_3 له x_1 سره ځل کيږي، دې سره a_2 زياتيږي، زياتون يې له x_1 سره ځل، او a_1 ور زياتوو، زياتون د x_1 سره ځل او a_0 ور زياتوو. دا د عمليوپرلپسی په لاندې ډول د لاندې شيما (د هورنرشيما) له لارې په ليدوړ ډول مخ ته بيايو (څرکندوو)

خلونه یا ضریبونه	a_0	a_1	a_2	
منځني څلونه	$[(a_3x_1+a_2)x_1+a_1]x_1$	$(a_3x_1+a_2)x_1$	a_3x_1	
منځني زياتون	$[(a_3x_1+a_2)x_1+a_1]x_1+a_0 = f(x_1)$	$(a_3x_1+a_2)x_1+a_1$	$a_3x_1+a_2$	a_3

ددې شيما پوهيدل لږ نابلد دی او څه فکر غواړي، خو پرې پوهيدل له نورو مساواتو څخه روښان دی.

بيلګه ۱۵ . ۱۰ : د فنکشن $y=x^3-3x^2-14x-5$ لپاره دفنکشن ارزښتونه له لاندې خپلواکو $x_1 = -2$ او $x_2 = 5$ څخه شميرل کيږي.
يادونه: دا د هورنر شيمت زما په دې اوسنۍ د برينکمن ژباړه کې مفصل شته(ژباړی).
اوبیونه) :

	1	-2	-14	-5
$x_1 = -2$		-2	8	12
	1	-4	-6	$7 = f(-2)$
$x_2 = 5$		5	15	5
	1	3	1	$0=f(5)$

لرو $f(-2) = 7$ او $f(5) = 0$ (صفرځایونه)

که چېرې ددریمی درجی ریشنلفنکشن یو صفرځاي ولري، نو کړی شو چی د پولینوم ویش له لارې دا لاینې فاکتور بیل کړو(پرتله ۱۲ - امه برخه، جمله ۱۲ . ۴)

بیلګې ۱۵ . ۱۰ ته: $(x^3-2x-14x-5):(x-5)=x^2+3x+1$ له دې امله لرو:

$$y = x^3-2x^2-5 = (x^2+3x+1)(x-5)$$

د ویش پولینومونو څلووني ، یعنی 1 د(x^2) سره ، 3 د (x) سره او 1 د هورنرشیما په اخره لیکه کی ولاړ دی. د هورنرشیما له لاری د صفرځاي شمیرلو سره په همغه وخت یا دمګړی کی د پولینوم ویش صورت نیسي. لرو:

$$[a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0):(x-x_1)=a_3x^2+(a_3x_1+a_2)x+[(a_2x_1+a_1)x_1+a_1]$$

او $f(x1)=0$ چی د $(x-x_1)$ سره د څلونې له لارې دا تصدیقیدلی شي. پاتی صفر ځایونه د څلوری – یا مربع برابرنی د اوبیونې له لارې لاس ته راځي

$$x^2+3x+1=0;\ x_{2,3}=-\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}-1}=-(3\pm\sqrt{5})/2$$

په دې ډول د دریمی درجې فنکشن د درې لاینې فنکشنونو د څلونې په څیر لیکل کیدی شي (پرتله: برخه ۱۲ جمله ۱۲ . ۵)

$$y=x^3-2x^2-14x-5 = (x-5)[x-\frac{-3+\sqrt{5}}{2}][x-\frac{-3-\sqrt{5}}{2}]$$

د جملی۱۲ . ۵ وینا په عمومي توګه د ټولو n- م درجو ریشنل فنکشنونولپاره لاندېجمله باور ي کوي

جمله ۱۵ . ۲ :

هر n - م درجه ټول ریشنلفنکشن n صفرځایونه لري . کیدي شي دا ټول یو له بل توپیر ولري او یادا صفرځایونه څوځله هم رامنځ ته شي، رییل او یا جوړه کونجوګیري کملکس کیدی شي.

که $x_1, x_2, ,..., x_n$ دلاندې فنکشن n صفر ځایونه وي

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$$

نو دا د لاینیز فاکتورونو د څلونې په څیر په لاندې ډول لیکل کیدی شي:

$$y = (x - x_1)(x - x_2)...(x - x_n)a_n$$

د هورنرشیما په استعمال کی دې لاندې په پام کی ونیول شي:
که په یوه n - م درجه پولینوم کی یو x - پوتنځ نه وي ، نو د هغه د کوایفیشینت یا ځله وونې لپاره دې صفر ولیکل شي .

بیلګه ۱۵ . ۱۱ :
5 - مه درجه ټول ریشنلفنکشن $y = 2x^5 - 6x^3 - 20x^2 - 8x + 80$ درې صفرځایونه
$x_1 = x_2 = 2, x_3 = -2$
لري. نور صفرځایونه دې پیداکړی شي او فنکشن دې د لاینیزو فاکتورونو د څلونې په څیر ولیکل شي.

ځواب : د هورن جملی له لارې یو په بل پسی د پولینوم ویش یو پاتی 2 - مه درجه پولینوم لاس ته راکوي:

	2	0	-6	-20	-8	80
x_1 = 2		4	8	4	-32	-80
	2	4	5	-1	-40	0 = f(0
x_2 = 2		4	16	36	40	....
	2	8	18	20	0=f(2)	
x_3 = -2		-4	-8	-20		
	2	4	10	0=f(-2)		

دا پاتی پولینوم $2x^2+4x+10 = 2(x^2+2x+5)$ د $x^2+2x+5 = 0$ له امله
د $x_{4,5} = -1\pm\sqrt{1-5} = -1\pm 2i$
لپاره لاندې د حل فورم لري $2x^2+4x+10 = 2(x+1-2i)(x+1+2i)$

په دې ډول ورکړشوی پولینوم په لاندې ډول لیکل کیږي

$$y=2(x-2)^2(x+2)(x+1-2i)(x+1+2i)$$

ددې لپاره چې د دريمي او جګو درجو د ټول ريشنلفنکشنونو يوه څيره يا تصوير ولرودی شو، نور کرکټريستيکی يا د خويونو ټکی يی د ديفرنځيالشميرني له لارې لاسته راوستی شو(برخه ۲۰ . ۴)

بي له دې چې د دفيرنځيالشمير له مرستي کار واخلو ، کيدی شي چې د هغه د ناپای په هکله وينا وي وکړی شو. موږ په ليديدونکی ډول د فنکشن د پولی کليمه په کار اچوو، کومه به چې په برخه ۱۹ کی ټيك تعريف شي. دا د بيلګي په توګه دا مانا لري چې $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = g$ سره (f(x)تل ارزښت g ته نزدې کيږي، که x د oe ياني ناپای په لور لاړشي. د

(۱۵ . ۱) لپاره باورلري:

$$\lim_{x\to\pm\infty} y = \lim_{x\to\pm\infty} x^n . \lim_{x\to\pm\infty}[a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \ldots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n}] = a_n \lim_{x\to\pm\infty} x^n$$

دا چې

xn -> oe

د x -> ± oe لپاره که n جوړه (جفت) وي

او xn ->±oe د±oe<- x لپاره که n ناجوړه (طاق) وي، او له دې لاس ته راځي

که n جوړه او a_n زياتيز يا مثبت وي، نو لرو $\lim\limits_{x\to\infty} y = \infty; \lim\limits_{x\to-\infty} y = \infty$

(کږه له oe - څخه دoe په لور ځي) .

که n جوړه او a_nکميز يا منفي وي، نو لرو: $\lim\limits_{x\to\infty} y = -\infty; \lim\limits_{x\to-\infty} y = \infty -$

کږه د oe - څخه د oe - په لور ځي) .

که n ناجوړه او a_n کميز يا مثبت وي ، نو لرو: $\lim\limits_{x\to\infty} y = \infty; \lim\limits_{x\to-\infty} y = -\infty$

کږه له oe - څخه د oe په لور ځي)

کهن n ناجوړه او a_nکميز وي ، نو لرو: $\lim\limits_{x\to\infty} y = -\infty; \lim\limits_{x\to-\infty} y = \infty$

کږه لهoe څخه د oe - په لور ځي)

پيژند ۱۵ . ۹ :
فنکشن

$$y=\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+...+b_1x+b_0};..........(15,7)$$
$$n,m\in N_0;a_k,b_i\in R;Q_m\neq 0$$

مات ريشنلفنکشن بلل کيږي او د ټولو x د $Q_m(x)\neq 0$ لپاره تعريف دی.

فنکشن (۱۵ . ۷) اصلي مات نوميږي، که n<m وي او نااصلي مات دی که n ≥ m ٠ نااصل مات فنکشن کيدی شي چي د پولينوم ويش له لارې تجزيه (ټوټه) شي او د يوه ټول ريشنلفنکشن او يوه ريښتونی ماتی برخی د زياتون په څير وليکل شي.

بيلګه ۱۵ . ۱۲:

فنکشن $y=\frac{2x^4-3x^3-6x^2+13x-6}{x^3-4x}$ اصل مات نه دی(n =4,m=3) په ماتلاندې
فنکشن باندې دماتباندې فنکشن ويش څخه لاس ته راځي:

$$(2x^4-3x^3-6x^2+13x-6):(x^3-4x)=2x-3$$

د $2x^2+x-6$ پاتی (باقي) سره. پس لرو:
$y=2x-3+(2x^2+x-6)/(x^3-4x).$

فنکشن (۱۵ . ۷) د $x = x0$ لپاره يو صفرځاي لري، که $x = x0$ وي نو باور لري:
$P_n(x_0)=0$ مګر $Q_m(x)\neq 0$

دا د $x=x_L$ لپاره تشځاي (Lücke) لري،که وي: $P_n(x_0)=0$ او $Q_m(x)=0$
د $x=x_P$ لپاره يو قطب pol لري که وي: $P_n(x_P)\neq 0$ مګر $Q_m(x_P)=0$

بيلګه ۱۵ . ۱۳ :

فنکشن ($y=(2x^2+x-6)/(x^3-4x)$ د ماتباندې- او ماتلاندې فکشنونو ټوټي کولو وروسته په لاندې فورم د لايني فاکتورونوپه توګه ليکل کيږي.

$$y = \frac{2(x-\frac{3}{2})(x+2)}{x(x+2)(x-2)}$$

د $x = x_0 = 3/2$ لپاره ماتباندې صفر دئ، مګر مات لاندې صفر نه دئ (صفرځای)مات لاندې- او مات باندې فنکشنونه د $x = xL = -2$ لپاره صفر دې (تشځای)
د $x = x_{P1} = 0$ او $x = x_{P2} = 0$ لپاره ماتلاندې صفر او مات باندې صفر نه دئ (قطب)
که x سره د قطب ځاي ته نزدې شي، نو y د ناپاي په لور ځي چي د قطبځای (ټيك ناپاى ځاى بللکيږي) xpکی کرږه داسيمپټوټي کرښي $x = xP$ ته نزدې کيږي .د يوه تشځای xL په حالت کی ماتفنکشن د نامعلومی افادې $0 / 0$ شکل غوره کوي، له دې امله د $x = xL$ لپاره تعريف نه دی.

په ناپای کی د فنکشن ځان نيونی ته:

د اصل ماتفنکشن ($n<m$) د x په جګ پوتنځ يعنی x^m د ماتباندې او ماتلاندې د ويش ښخه لاس ته راځی:

$$y = \frac{\frac{a_n}{x^{-n+m}} + \frac{a_{n-1}}{x^{-n+1+m}} + \ldots + \frac{a_1}{x^{-1+m}} + \frac{a_0}{x^m}}{b_m + \frac{b_{m-1}}{x} + \ldots + \frac{b_1}{x^{m-1}} + \frac{b_0}{x^m}} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{0}{b_m} = 0$$

داچی د x ټول اکسپوننتونه مثبت دي، او د x ټول پوتنځونه د ناپای په لور ځي ، نو د آصل مات فنکشن ښيره د x->±oe لپاره د x - محور ته نزدې کيږي. فنکشنونه

چی آصل مات نه وي نو د x->±oe لپاره داسی ځانونه نيسي، چی اصل د ماتفنکشن برخه يی د صفر په لور ځي، لکه ټولريشنل برخه .
د نااصل مات فنکشن ښيره د x -> ±oe سره ، ځان خپل ټولريشنلبرخی ته نزدې کوي.

بيلګه ۱۵ . ۱۴:

الف: $y = x /(x^2+1)$ د $x0 = 0$ په ځاي کی صفرځای لري. تشځاي او پول یا قطب نه لري ريیل اوبیونه نه لري) او د$x -> \pm oe$ لپاره دx- محور $(y = 0)$ د اسیمپتوتی په څیر لري (خیره. ۱۵ . ۱۲)

ب: $y=(x^2+2x-3)/(x+2)=x- 3/(x+2)$ صفرځایونه($x^2+2x-3 =0$) په $x1 =-3$ او $x1=1$ کی لري . تشځای نه لري او په $x3 = -2$ کی قطب لري دا په دې مانا چی $x = -2$-اسیمپتوتی دی، او د $x \rightarrow \pm oe$ لپاره فنکشن $y = x$ اسیمپتوتي کيږي)دا سیمپتوتی کلیمه دې په برخه ۱۶ . ۴ کی هم وکتل شي)

موږ په دې پسی ځانله شوي ځانګړي ټول - یا مات ریشنلفنکشنونه راوړو:
فنکشن

$$y = x^n; n \in Z \setminus \{0,1\} ....(15,8_a)$$

یو ځانګړی پوتنځفنکشن دی(د پوتنځ پيژند 6 ۰ ۱)

(15.8)د زیاتیززیاتیز یا مثبت تولګې n لپاره یو تولرشنل فنکشن دی. د جوړه تولګې nلپاره تولریشنل فنکشن دی. د تولګې n لپاره تولی کرې د تعریف دیری(-) = D oe,oe، د ارزښت دیری($W=(0,oe$او ګډ ټکی $(1,1)$، $(0,0)$,$(1,1)$ لري. (ځیره ۱٤ الف ۱۵) د ناجوړه ګڼ د n لپاره($D = (-oe,oe$ او($W = (-oe,oe)$ دي او $(1,-1)$, $(0,0)$. $(1,1)$ ګډ ټکي دي (ځیره ۱۵ . ۱۴ ب)۰

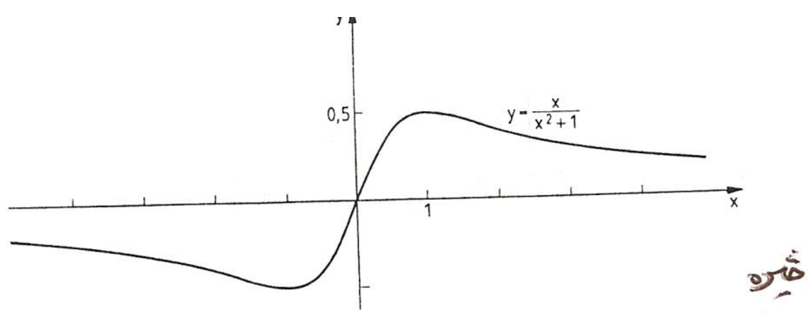
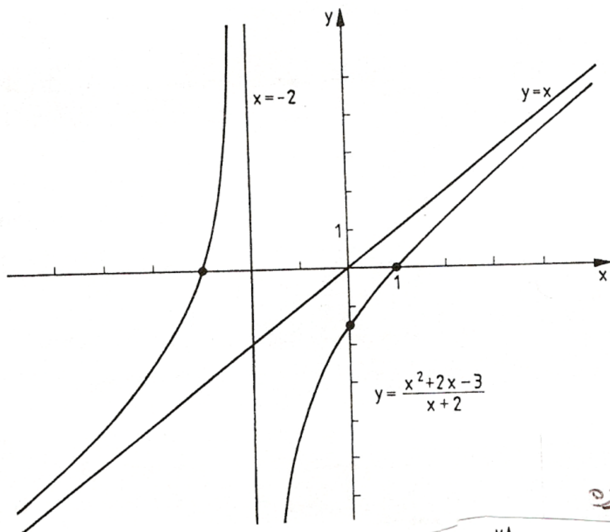


Bild 15.12



ښيره Bild 15.13

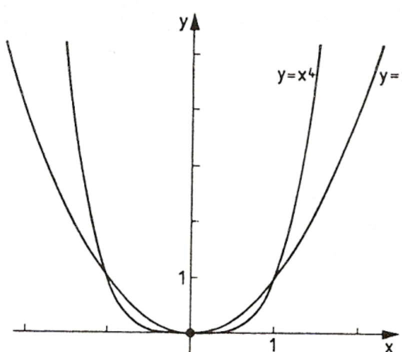


Bild 15.14a ښيره

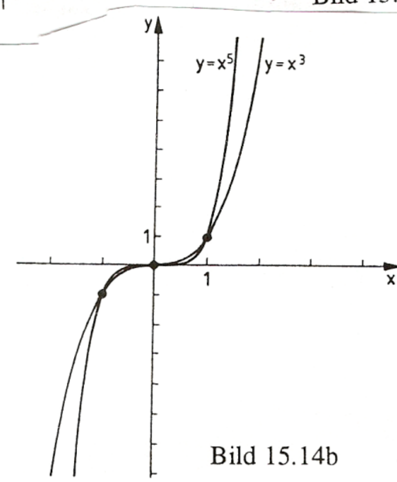


Bild 15.14b ښيره

(۱۵ ، ۸ الف) د ټول کميز يا منفي ګڼ nلپاره يو مات ريشنل فنکشن دئ په $x = 0$ کی د يوه قطب او $y = 0$ کی يوې اسيمپټوتی په ښير. د جوړه ګڼون يا تعداد (کميز n لپاره ټولی کرږې د پيژند ډيري
$D = (-oe,oe)\setminus\{0\}$ د ارزښت ډيري($W = (0,oe)$ لري اوګډټکي $(1,1)$, $(-1,1)$
؟؟؟ ښيره ش. ۱۵/۱۵الف) .
د ناجوړه ګڼون (کميز n)لپاره{ $D = (-oe,oe)\setminus\{0\}$ او($W=(-oe,oe$) او(1-،1-) (1,1) ګډ ټکی دی (ښيره »۱۵ . ۱۵ ب) .
دوه ښيرې دي

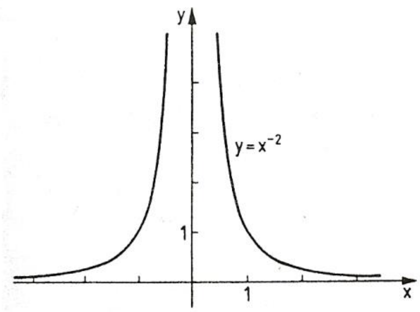


Bild 15.15a

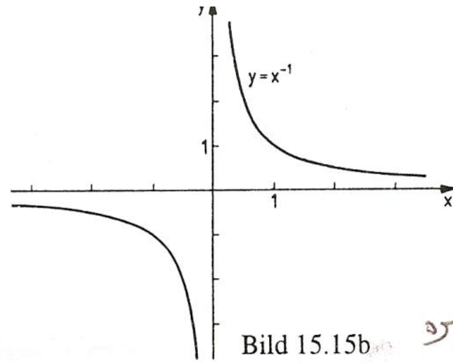


Bild 15.15b

د پوتنځ فنکشن پر ځښ بلواک لپاره دې د مونوتوني اینتروال په پام کی ونیول شي.(پرتله بیلګه(بیلګه ۱۵ .۳)
د فنکشن) لوستل له کيڼ وښي لور ته

$$y = x^n; n \in N^*\{1\}, D = [0,\infty), W = [0,\infty)$$

چپه- یا پر ځښ فنکشن په لاندې ډول دی.

$$y = \sqrt[n]{x}\ ,\ n \in N \setminus \{1\}\ ,\ D = [0,\infty), W = [0,\infty) ....(15,8_b)$$

او رېښه فنکشن نوميږي (پيژند ۶ . ۲ دې وګتل شي) پوتنځ فنکشن کیدی شي و ریشنل ایکسپوننت ته پراخه شي) دلته لرو $x^{\frac{n}{m}} = (\sqrt[n]{x})^m\ \ x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$ (پرتله برخه ۴)

که پوتنځ فنکشنونه د ریشنل فنکشنونو لپاره راوړل شي:

$$y = x^n\ ,\ a \in Q\ ,\ x > 0 \qquad (15.8c)$$

نو د ریښي فنکشن (۱۵ . ۸ ب) دې د پوتنځ فنکشن په څیر وپوهیدی شي.

د پوتنځ فنکشن (۱۵ . ۸ ث) پرځښ بیرته پوتنځ فنکشن دی.
ټولیز پوتنځ فنکشن پیژند د رییل ایکسپوننت لپاره ورکړ شوی(د رییلګنونو کلیمه دې وګتل شي برخه ۳ ۰ ۱ . ۴ کی)

پیژند ۱۵ . ۱۰ : فنکشن

$$y = x^{\alpha}\ \ ,\ \ \alpha \in R\ ,\ x > 0 \qquad (15.8d)$$

پوتنځ فنکشن نوميږي

بیلګه ۱۵ . ۱۵ : فنکشن

$y = x^{\frac{3}{2}} = \sqrt{x^3} , x \geq 0$

لاندې چپه - یا پر ښۍ فنکشن لرو

$y = x^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{x^2} , x \geq 0$

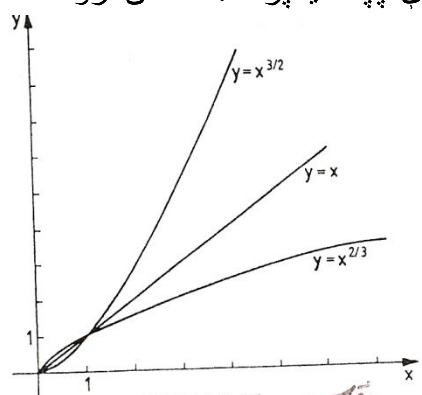


Bild 15.16a خیره ب)

(خیره ۱۵ . ۱۶ الف)

فنکشن لاندې چپه فنکشن لري: $y = x^{-1/2} = 1 / \sqrt{x}, x > 0$

خیره ۱۵ . ۱۶ ب)

$y = x^{-2} = 1/x^2 , x > 0$

یادونه : په پیژند ٤ . ۲ کی مو وویل چی یوائی د ناکمیز رادیکاندو رینه ویستل کیدو اجازه لرو. دا کړنلار دې د پرښۍ فنکشن جوړولو برسیره د مونوتوني غوښتلو لپاره هم په
پام کی وي. د بیلګي په توګه فنکشن
$y=x^3$ په ټول تعریفدیري کي مونوتون پورته کیدونکی وی او له دې امله ټول په ښۍ کیدونکی وی، $y = \sqrt[3]{x}$ د فنکشن $y = x^3$ په پیژنددیری($D = [0,oe$ کی پر ښۍ فنکشن دی، په داسی حال کی، چی د$y= x^3$ پرښۍ فنکشن د[$D= (-oe,0$
سره په $y = -\sqrt[3]{-x} = -\sqrt[3]{|x|}$ فنکشن کی ورکړ شوی دی(ش. ۱۵ . ۱۷) .

پیژند ۱۵ . ۱۱: فنکشن

$y=a^x , a > 0, a \neq 1$..................................(15,9)

ایکسپوننشلفنکشن یا په جګ(لنډ »جګ«) بلواك بلل کيږي۰
(د ایکسپوننت یا »جګ« کلیمی لپاره دی پيژند ۴ . ۱ وکتل شي)

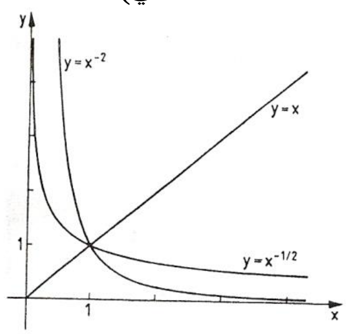


Bild 15.16b خیره

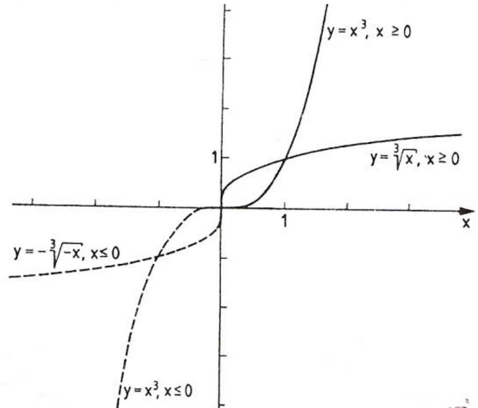


Bild 15.17 خیره

پورته دوه خیرې دې پام کې ونیول شي

فنکشن (۱۵ . ۹) لاندې پيژندېرى(D=(-oe,oe او ارزښتډيرى(W=(o,oe لري. د $a^0 = 1$ له امله ټکی(() 0,1 د ټولو کږو ګډ ټکی دی

د a>0 لپاره (۱۵ . ۹)
په کلکه يو غږيز- یا مونوتونجګیدونکی دئ اود x->oe سره د x - محور ته اسیمپوتیك ورنزدې کيږي .د 0<a<1 لپاره) ۱۵ . ۹ (په کلکه مونوتون لویږي او ځان د oe <- x سره د x -محور ته اسیمپتوتیك نزدې کوي .

د اکسپوننشل فنکشنونو يو څو بیلګې
(a=2; e ; 10 ; 1 /2 ; 1/e ; 1/10)
په خیره ۱۵ . ۱۸ کی انځور شوي

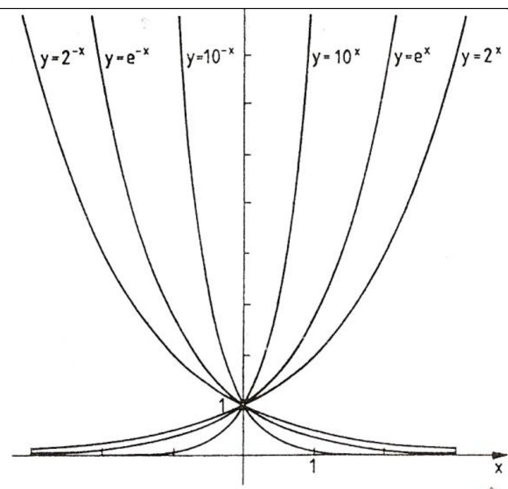


Bild 15.18 خیره

پيژند ۱۵ . ۱۲ :

لاندې فنکشن د ایکسپوننشل فنکشن په څېر فنکشن دی

$$y = \log_a x \,,\; a > 0 \,,\; a \,|= 1 \qquad (15.10)$$

او لوګاریتم فنکشن بلل کیږي

د لوګاریتم کلیمي لپاره پیژند ۵ . ۱ وګورئ) فنکشن (۱۵ . ۱۰) پیژنددیری $D = (0.oe\ )$ او د ارزښتدیری($W=(-oe,oe\ )$ لري.

د $y = \log_a x$ کرې د ګرو $y=a^x$ هندارونه ده، په کرښه $y=x$ ۰ ټکی(1,0) د ټولوکرو ګډ ټکی دی (څیره شته دی)

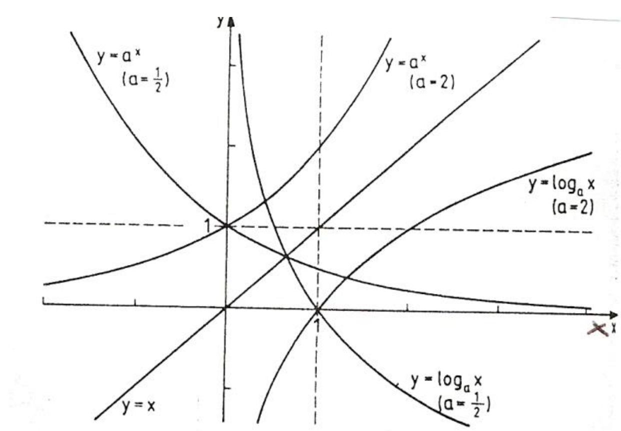


Bild 15.19 څېره

د $a>1$لپاره(۱۵ . ۱۰) کلك مونوتونجګیدونکی اود $x->0$لپاره اسیومپتوتیك د کمیز y - محور ته نزدې کیږي. د $0<a<1$لپاره (۱۵ . ۱۰) کلك مونوتون لویدونکی دی او د $x> 0$لپاره اسیمپتوتیك د زیاتیز y - محور ته نزې کیږي. په شکل ۱۵ . ۱۹ کی $y=a^x$ او په څېر یی یعني $y = \log_a x$

د $a= 2$ او $a=1/2$ لپاره انځوریږي .

په ځانګړې توګه لیکل کیږي $y = \log_{10}x = \lg x \,,\; y = \log_e x = \ln x$ ۰

پیژند ۱۵ . ۱۳:

د تریگونومتري فنکشنونو یا د کونجفنکشنونو لاندي(پرتله برخه ۶ . ۳) دا لاندني فنکشنونه په نخښه کیږي یا راوړل کیږي.

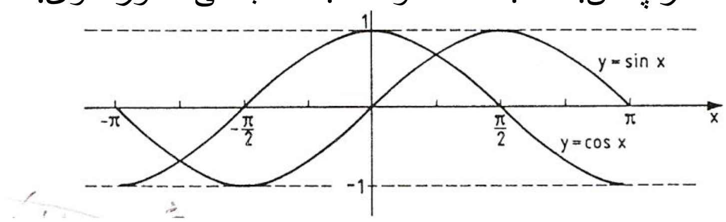
$$y=\sin x ;D=R,W=[1,1]\ldots\ldots(15,11_a)$$

$$y=\cos x; D=R, W=[-1,1]\ldots\ldots(15,11_b)$$

$$y=\tan x=\sin x/\cos x; D=R\setminus\{\frac{\pi}{2}+k\pi\}, W=R, k\in Z\ldots.(15,11_c)$$

$$y=\cot x=\cos x/\sin x; D=R\setminus\{k\pi\}, W=R, k\in Z\ldots\ldots(15,11_d)$$

د دې کږوتګلار په ش. ۱۵ .۲۰الف او ۱۵ . ۲۰ ب کی انځور شوی.



تریگونومتریکی فنکشنونه $y = \sin x, y = \tan x , y = \cot x$ ناجوړه فنکشنونه، او $y = \cos x$ یو جوړه فنکشن یا – بلواک دی.

تریگونومتریکي فنکشنونه پریودیکي فنکشنونه دي(مقایسه ۱۵ . ۵)
فنکشنونه $y=\sin x , y= \cos x$ پریودې 2π لري، دا په دې مانا چی لرو:

$$\sin (x+2k\pi) = \sin x ; \cos(x+2k\pi)= \cos x , k\in Z$$

لاندې فنکشنونه پریود π لري
$y=\tan x , y=\cot x$.دا په دې مانا چي

$$\tan (x + k\pi) = \tan x,\ \cot (x + k\pi) = \cot x , k\in Z$$

د تریگونومتریکي فنکشنونو صفرځایونه دي $x_k = k\pi, k\in Z$

د $y=\tan x$, $k\in Z$ $x_k=\frac{\pi}{2}+k\pi$ $y=\sin x$ لپاره او د $y = \cot x$, $y = \cos x$

لپاره تانجنت - او کوتنجنت فنکشنونه قطب ځایونه(ناپاځایونه) لري یعني $y = \tan x$ په $x_k=\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in Z$ او $y = \cot x$ په $k\in Z$, $x_k= k\pi$ کی.

د تریگونومتریکی فنکشنونو لپاره دې د هغو مونوتوني خویونه په پام کی ونیول شي. د بیلګي په توګه

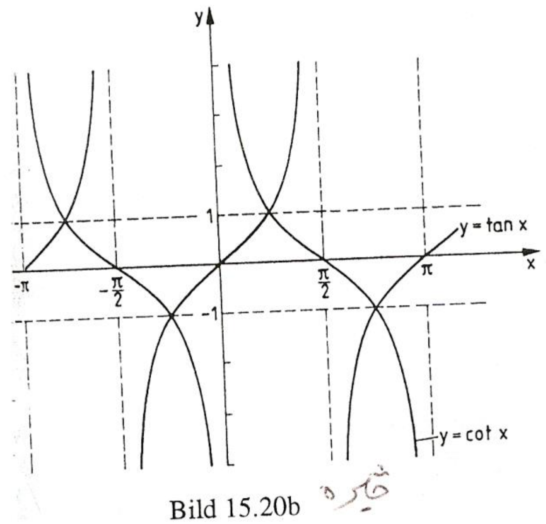


Bild 15.20b

فنکشن y = sin x په ایترووال $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ کي مونوتون جگیدونکی دئ او په انتروال $[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}]$ کی مونوتون لویدونکی، او دا مونوتوني خویونه په یوه پوره پریودې کی تکراریږي. پس ویلی شو:

د $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ لپاره y = sin x جگیدونکی یا پورته کیدونکی دئ

د $\frac{\pi}{2}+2k\pi \le x \le \frac{3\pi}{2}+2k\pi$ لپاره لویدونکی دئ، او په ورته توگه

د $-\pi+2k\pi \le x \le 0+2k\pi$ لپاره y = cos x پورته کیدونکی دی۰

د $0+2k\pi \le x \le \pi+2k\pi$ لپاره لویدونکی دئ

د $-\frac{\pi}{2}+2k\pi \le x \le \frac{\pi}{2}+2k\pi$ لپاره y = tan x جگیدونگی دئ

د $0+k\pi < x < \pi+k\pi; k \in Z$ لپاره y =cot x جگیدونکی دی ،

په تنجنت ـ او کوتنجنت فنکشنونو کی د قطب ځایونه د مونوتوني اینتروالونو ترمنځ پراته دي، له دې امله دا مونوتوني ایترووالونه واز اینتروالونه دي.د ساین فنکشنونه د بیلگي په توگه د وخت په پریودیکي انځور کی خپل استعمال مومي Schwingung (شوینگونگ: رپیدنه=. په عمومي ډول دلته خپلواك واریابل په t نخښه کیږي .فنکشن

$$y = a \sin(\omega t + \varphi) \qquad (15 . 11e)$$

هارموني فنکشن بلل کيږي.

يادونه: فنکشن (۱۵ . ۱۱ت) د پيژند (۱۵ . ۱۵) له مخی تړلی يا ځنځيري فنکشن دی.
موږ ترڅيرني لاندې نيسو چي د سا ين فنکشن د مخه فاکتور a فاکتور د خپلواك واريابل
tاو زياتوونکی د ساين فنکشن په خپلواك)Argoment(د کږېڅيره باندې څه تاسير
اچوي.

۱ - د فاکتور a تاثير په فنکشن y = a . sin t د y = sin t فنکشن ارزښت باندې غزول
يا راکشول دی که (|a| > 1)او يا پړسول دي که
|a| < 1)وي y= a.sin x فنکشن ارزښت a - ځله د فنکشن ارزښت
y = sin t دی، چيرته چی برسيره پردې د a > 0 لپاره په t - محور يوه
اينه څيرونه هم منځ ته راولي (څره ش. ۱۵ ۲۱ الف .) (a = 2 , a = 1 / 2
په فنکشن کی a امپليتودې Amplitude(جګوالی(نوميږي او د
شوينګنګ Schwingungرپيدنی پراخوالی يا ښه : سور باندې تاثير اچوي.
څيره شته

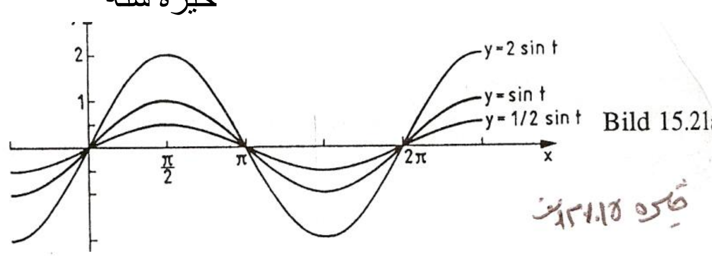
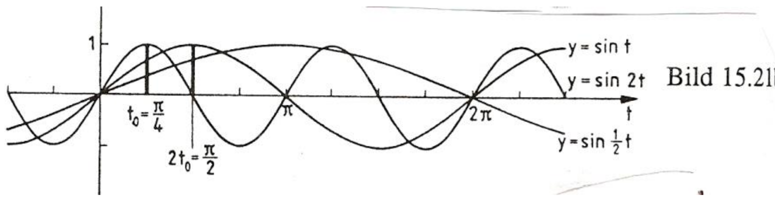


Bild 15.21ă

۲ - په فنکشن $y = \sin\omega t$ کی فاکتور ω په فنکشن y = sin t باندې يو وختني غزول که
$|\omega|<1$ يا پړسول که $|\omega|>1$ وي تاثير اچوي.چيرته چی د $\omega > 0$ لپاره برسيره پردې يو
په y- محور اينونه هم ده.
د يوه ټاکلي خپلواك $t = t_0$ لپاره په فنکشن $y = \sin\omega t$ يوه فنکشن ارزښت، دy = sin t
خپلواك ω -ځله ، يعني $t = \omega t_0$ لپاره غوره کوي (څيره ؟؟ ش . ۱۵ . ۲۱ ب).
ګردی فرکونځ (Kreisfrequenz) بلل کيږي، دا په پريودې تاثير اچوي او $y = \omega t$
پريودې $P = \frac{2\pi}{\omega}$ لري.



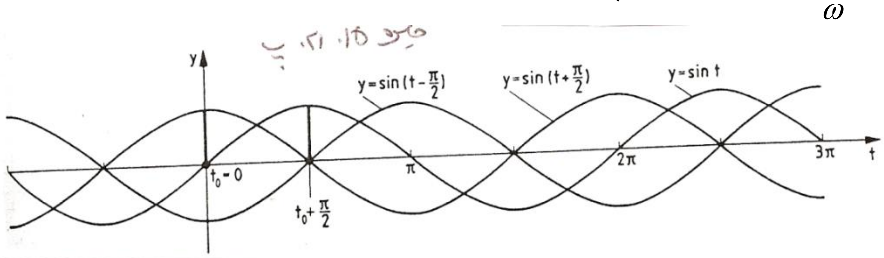
۳ – زیاتیدونکی φ په فنکشن $y = \sin (t+\varphi)$ کی د $y = \sin t$ باندې دیوې راکښنی تاثیر په $|\varphi|$ له کینی لور φ 0> او یا له ښي لور φ 0< اچوي .
د یوه ټاکلي خپلواك $t = t0$ لپاره د فنکشن $y = \sin (t+\varphi)$ سره یو فنکشن ارزښت، چی د $y=\sin t$ لپاره٠
د φ په کچه راکښل شوی (یعنی د یوه ځاي څخه بل ځای ته وړل شوی) وي، یعني د $t = t_0+\varphi$ لپاره، غوره کوي.(ځیره ، ۱۵ . ۲۱ پ)

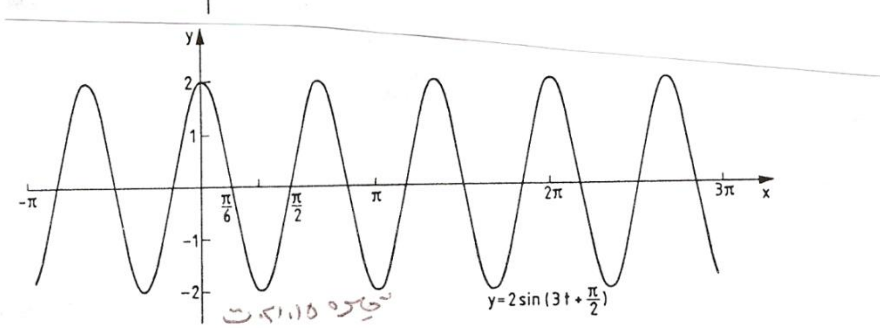
$$(\varphi = \frac{\pi}{2}, \varphi=-\frac{\pi}{2})$$

په فنکشن

$$y = a.\sin (\omega t +\varphi)= a . \sin\omega (t+\frac{\varphi}{\omega})$$

کی φ چی فازې نومیږي یو د راکښلو تاثیر په کره $y = a.\sin\omega t$ د $\frac{\varphi}{\omega}$ په اندازه اچوي.





په پورته شکل ۱۵ .۲۱ ت کی هارموني فنکشن $y = 2 . \sin(3t+\frac{\pi}{2})$ انځورډی. هغه امپلیتود $a = 2$ لري، پریوډې یی $P=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2}{3}\pi$ او په $\frac{\varphi}{\omega}=\frac{\pi}{6}$ کې د sint و کیڼ لورته راکښل شوی دی.

خبره ۱۵ . ۲ پ $\varphi=\frac{\pi}{2}, \varphi=-\frac{\pi}{2}$

د تریګونومتري فنکشنونو(یواځني) په معکوسوالي یا په ښتوالي کی موږ په ځانګړو یوغږیزو یا مونوتوني اینتروالونو تکیه کوو، د لاندې تعریف سره مناسب

پیژند .۱۵ ۰ ۱۴ :
(پام: ځیرې له تشریح د مخه راغلې، بله لار نه وه)

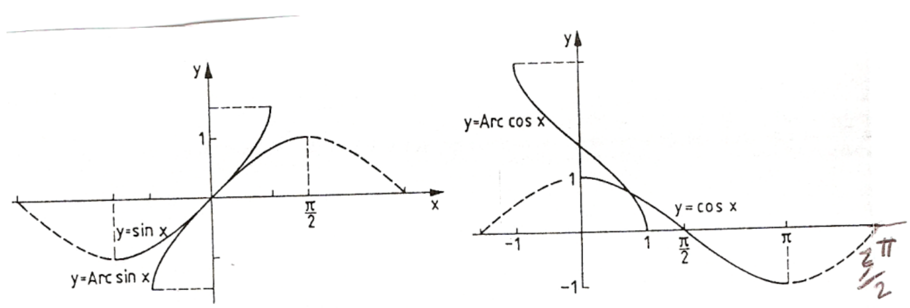


Bild 15.22 Bild 15.23

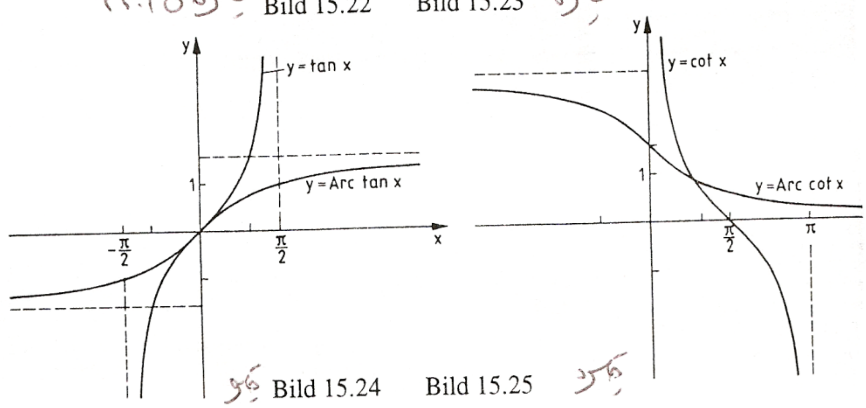


Bild 15.24 Bild 15.25

د لاندې فنکشنونو

---

1. $y = \sin x$,	$D = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$,	$W = [-1, 1]$	(15.12a)
2. $y = \cos x$,	$D = [0, \pi]$,	$W = [-1, 1]$	(15.12b)
3. $y = \tan x$,	$D = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$,	$W = \mathbf{R}$	(15.12c)
4. $y = \cot x$,	$D = (0, \pi)$,	$W = \mathbf{R}$	(15.12d)

پرځېټ یا چپه فنکشنونه لاندې څیکلومتریکي فنکشنونه (ارکوس فنکشنونه) دي:

1. $y = \mathrm{Arc}\sin x$,	$D = [-1, 1]$,	$W = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$	(15.13a)
2. $y = \mathrm{Arc}\cos x$,	$D = [-1, 1]$,	$W = [0, \pi]$	(15.13b)
3. $y = \mathrm{Arc}\tan x$,	$D = \mathbf{R}$,	$W = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$	(15.13c)
4. $y = \mathrm{Arc}\cot x$,	$D = \mathbf{R}$,	$W = (0, \pi)$	(15.13d)

د تریګونومتري فنکشنونو برخی په مونوتوني ایتروالونو) ۱۵ .۱۲ الف(تر) ۱۵ . ۱۲ ت (او د هغوي چپه) ۱۵ . ۱۳ الف (تر) ۱۵ . ۱۳ ت (په څیرو ۱۵ . ۲۲ تر ۱۵ ۲۵ پورې انځور دي.

۱۵ . ۴ ځنځیري (تړلي) فنکشنونه

پیژند ۱۵ . ۱۵ :

د $x \in D$ لپاره یو فنکشن $z = g(x)$ د ارزښتډیري W سره ورکړ شوی او برسیره پر دې د $z \in W$ لپاره یو فنکشن $y = f(z)$ ورکړشوی، نو

$$y = f(g(x)) \qquad (15.14)$$

د x تړلی (ځنځیري) فنکشن بلل کیږي.

یادونه : یو تړلی فنکشن کیدی شي چی زیاتو ځنځیرونو سره هم رامنځ ته شي: د بیلګې په توګه $z = f(x$

د $x \in D, z \in W$ لپاره او $w = h(z)$ د $z \in W, w \in W^*$ لپاره

او $y = f(w)$ د $W^* \in W$ لپاره لرو،

نو $y = f[h(g(x))]$ هم د x یو تړلی فنکشن دی

بیلګه ۱۵ . ۱۶ :

الف : د $z = 2x + 4$ او $y = e^z$ سره تړلی فنکشن $y = e^{2x+4}$ لاس ته راځي .

ب : په تړلي فنکشن $y = \sin x^2$ کی $z = x^2$ دننني - او $y = \sin z$ د باندنی فنکشن دی.
په تړلي فنکشن $y = \sin^2 x = (\sin x)^2$ کي $z = \sin x$ د ننني - او $y = z^2$ دباندنی فنکشن دی
پ : د
$$, y = \cos w \quad w = \sqrt{z} \quad , \quad z = 2x + 4,$$
سره تړلي فنکشن $y = \cos\sqrt{2x+4}$ لاس ته راځي
ت : په تړلي فنکشن $y=\text{Arctan}1/(x-1)$ کی$z=x-1$ دننني، $w=1/z$منځنی او $y=\text{Arctan } w$دباندنی فنکشن دی .

یادونه : د یوه ورکړشوي x - ارزښت لپاره د ځنځیري فنکشنونو د فنکشن ارزښت شمیرنی

له » دننه « پیل کیږي .

بیلګي ۱۵ . ۱۶ ته :
ب) د $x = 0.5$ لپاره دی
$$z=x^2=0,5^2=0,25;y=\sin x^2=\sin z=\sin 0,25=0,24740$$
او
$$z=\sin x=\sin 0,5=0,47942;y=\sin^2 x=z^2=0,47942^2=0,22984$$

پ) د $x = 2$ لپاره دی $z=x-1=2-1=1$; $w=1/z=1/1=1$
$$y=\text{Arctan}w=\text{Arctan}1=\frac{\pi}{4}$$

روښانونه، تشریح:

$y=f(x)$ تحلیلي(شننیزه) وینا بلل کیږي، که$f(x)$ له رییل ګڼونواو بسټیزو فنکشنونوڅخه د زیاتون، کمون،ځل، ویش، له لارو تړلی یا ناتړلي(ځنځیري یا نا ځنځیري) جوړیږي

د بیلګي په توګه دې په پام کی وي، چي ماتلاندې فنکشن دې صفر نه وي د پوتنځ بنسټ او همداډول رادیکاند منفی نه شي کیدلی، او یا باید مثبت وي، چی د لوګاریتم نومروس باید

مثبت وي او(Arc sin f(x همداډول(Arc cosf(x تیك د $x \in [-1,1]$ لپاره پېژند لري یا تعریف دي

بیلګه ۱۵ . ۱۷ :

د لاندې تحلیلي ویناو لپاره دې تعریفېدیري پیداکړی شي.

الف $y = \sqrt{x^2 - 3}$

رادیکاند باید کمیز یا منفي نه وي، چی دا مان لري:

$x^2-3 \geq 0 \iff x^2 \geq 3 \iff |x| \geq 3$ ($x \geq \sqrt{3}$ v $x \leq -\sqrt{3}$)

نو لرو $D = (-oe , - 3] \cup [3 ,oe]$

ب)($y=lg(x+2)+1/(3+2x-x^2$ له لمړي زیاتونی کی باید $0 <$ Numerus نومروس وي دا په دې مانا چی : $x +2 >0 \iff x >-2$ ،

پس($D1=(-2,oe$

په دوم زیاتوني کی باید مات لاندې په صفر برابر نه وي (=| 0) وي . د مات لاندې صفرځایونه

له $3-2x-x^2 = 0$ څخه لاس ته راځي او دي $x1=2,x2=-1$.

نو $D2=R\backslash(2;-1)$ دی

د فنکشن تعریفېدیری باید دا اول زیاتونی او همداسی د دوم زیاتونی تعریفېدیري وي یعنی د D1 او D2

غوڅېدیری: $D=D_1 \cap D_2 = (2 ,oe) \backslash \{2; -1\}$

پ) $y = Arc\ sin\ (x-1)/5$ د ارکوس ساین-فنکشن د تعریفېدیري په پام کی نیولو سره باید باور ولري-

$-1 \leq (x-1)/5 \leq 1 \iff -5 \leq x-1 \leq 5 \iff -4 \leq x \leq 6 \Rightarrow D=[-4,6]$

ت $(y = 1 / \sqrt{(x^2 - 4)}$

رادیکاند باید له صفر لوي وي او مات لاندې دصفرسره نامساوي، دا په دې مانا چی

$x^2-4>0 \iff x^2<4 \iff x>2$ یا $x<-2$

نو دی $D=(-\infty,-2) \cup (2,\infty)$

---

۱۵ . ۵ تمرینونه

۱ – د ایمپلیڅیت توابعو ایکسپلیڅیت انځورونه ورکړئ

الف - $6x-10y=15$ ب - $x+y/3 = 5$

پ - $2x^2 -3y +3 = 0$ ت – $x^2 -4x + 2y - 8 = 0$

۲ - لاندې فنکشنونه په پارامترانځورونی ورکړ شوي

a) $x = 2t \quad y = -t^2 + 3t$ b) $x = \sqrt{t} \quad y = 2t+1$

c) $x = 1/t \quad y = 2(t-3)$ d) $x (/2)t -1 \quad y = t^2$

پارامتر له منځه یوسی او په دې سره ورکړی $y = f(x)$

۳ - لاندې فنکشنونه په مونوتوني وڅیړئ، او که ممکن وي نو مونوتوني اینتروالونه په تعریفډیریو بیل (تجزیه) کړئ یا لږ ته کړی.

a) $y = 2x - 3$ b) $y = -2x + 3$ c) $y = x^2$

d) $y = -2x^2$ c) $y = 2x^2 + 1$ f) $y = |x|$

۴ – پریکړه وکړی چی لاندې فنکشنونه جفت، ناجفت او یا له دې دووکوم نه دي:

a) $y = x$ b) $y = x + 1$ c) $y = x - 1$

d) $y = 2x^2$ e) $y = 2x^2 + 1$ f) $y = (x-1)^2$

g) $y = x^2 /2$ h) $y = x^5$ i) $y = |x|$

۵ – د لاندې فنکشنونو د صفر ځایونه پیدا کړی

---

a) $y = -2x + 3$ b) $y = (x-1)(x+2)$ c) $y = x^2-x-2$

d) $y = 2x^2 -12x +18$ e) $y = x^2 + 1$ f) $y = x^3$

۶ – لاندېفنکشنونو ته په ځپ فنکشونونه پیدا کړی

a) $y = -2x + 3$ b) $y = x^2 + 1$, $D = [0, \infty)$, $W = [0,\infty)$

c) $y = (x+1)^2$, $D = [-1,\infty)$, $W=[0,\infty)$, d) $y=x^3/2$, $D = [0,\infty)$, $W=[0,\infty)$

۷ – لاندې لاینې فنکشنونه ورکړ شوې دې

a) $y = 0{,}4x -1{,}6$ b) $y = -x + 1$ c) $y = (1/5)(3x +1{,}5)$

d) $y = 2$ e) $3x -3y -7 = 0$ f) $4y + x = -1$

کرښې دې وکښل شې. جګوالي کونج α دې پیدا شې. او صفرخایونه x_N و ګنی!

۸ – کومه کرښه له لاندې ټکو تیریږې

a) (2,3) (5,5) b) (1 ,1) او (3,7) c) (-1,0) او (-2,-3) ?

۹ – لاندې مربع بلواك یا فنکشنونه ورکړ شوې

a) $y = x^2 -4x +3$ b)$y = x^2-8x+16$ c) $y = x^2 -6x +10$

d) $y = (x-5x)(x-1)$ e) $2x^2 -10x+12$ f) $y = 3x^2 +6x$

g) $y = -\frac{x^2}{2}+x + 4$ h) $y = x^2/4 + x +2$ i) $y = 5x^2 +45$

د ککرې کواوردینات دې پیداشې، صفرخایونه دې وګنل شې او پارابول دې انځور شې

۱۰ – د لاندې پولریشنل فنکشنونه دې دورکړشوو x ارزښتونو سره د هورنرشیما د استعمال له لارې وګنل شې. فنکشنونه د ګا د خلفورم باندې انځور شې

a) $y = f(x) = x^3 -6x +5$; $x_1 = 1$, $x_2 = -1$

b) $y = f(x) = (1/2)x^3 -x^2 -(13/2)x -5$; $x_1 = 1/5$ $x_2 = 5$

c) $y = f(x) = x^3 +2x + 2x$; $x_1 = -2$ $x_2= 0{,}2$

d) $y = f(x) = x^4 -x^3 -28x^2 32x +40$; $x_1 = 2$ $x_2 = 5$

e) $y = f(x) = 2x^4 - 3x^2 -6x^2 +5x +6$; $x_1 = 1{,}5$ $x_2 = 2$

۱۱ – مات ریشنل فنکشنونه وکړی شي :

a) $y=\dfrac{x^2+x-2}{x^2+2x-3}$ b) $y=\dfrac{x^4-3x^3-4x^2}{x^2+5x+6}$

c) $y=\dfrac{x^3+2x^2+x}{x^4-13x^2+36}$ d) $y=\dfrac{x}{(x^3+6x^2+9x)(x^2-4x+4)}$

e) $y=\dfrac{2x^3-x^2+6x-3}{x^2+3}$.

صفرځایونه دې وګټل شي، پول. تشخایونه او د $x \to \pm 8$ لپاره څان نیونه!

۱۲ – لاندېفنکشنونو ته په څپ فنکشنونه جوړ کړی

a) $y=2^{x-1}$, $D=R$, $W=(0,\infty)$ b) $y=2^x-1$, $D=R$, $W=(-1,\infty)$

c) $y=\log_3 x$, $D=(0,\infty)$, $W=R$ d) $y=\ln(x-1)$, $D=(1,\infty)$, $W=R$

۱۳ – لاندې فنکشنونو ته مونوتوني اینتروالونه ورکړی او برخه په څپ فنکشنونه:

a) $y=(x-1)^2$ b) $y=x^2-1$ c) $y=(x+1)^2+1$

d) $y=x^2-4x+5$ e) $y=4x^2$ f) $y=(1/4)x^2+x/2+1$

۱۴ – ترلي فنکشنونه $y=f[h(g(x))]$ په دننه او دباندې فنکشنونو

$$y=f(w),\ w=h(z),\ z=g(x)$$

بیل (تجزیه) کړی(د تعریف–او ارزښتدیرېوورکولو څخه کیدی شي تیرشو)

a) $y=e^{(x+1)^2}$ b) $y=\left(e^{x+1}\right)^2$ c) $y=\lg\sqrt{2x-3}$

d) $y=\sqrt{\lg(2x-3)}$ e) $y=\tan\sqrt{x-3}$ f) $y=\sqrt{\tan(x-3)}$

g) $y=\sqrt{\tan x-3}$ h) $y=\tan\sqrt{x}-3$ i) $y=\operatorname{Arc}\sin x^2+$

j) $y=[\operatorname{Arc}\cos(3x-2)]^{\frac{1}{2}}$ k) $y=\ln\sin\dfrac{x}{3}$ l) $y=\sin\ln(x+\dfrac{1}{3}$

m) $y=\sqrt{\dfrac{1}{\sin x}}$ n) $y=\dfrac{1}{\sqrt{\sin x}}$ o) $y=\dfrac{1}{\sin\sqrt{x}}$

p) $y=\operatorname{Arc}\cot e^{2x+1}$.

۱۵ - ترلي فنکشنونه $y = f[h\{g(k(x))\}]$ په دباندې او دننه فنکشنونو

$y = f(v),\ v = h(w), w = (g(z)),\ z = k(x)$

بيل کړی(د تعريف– او ارزښتدېرې باندې تيرونه کيدی شي)

a) $y = \left[\operatorname{Arc}\cot\left(e^x + 1\right)\right]^{\frac{1}{2}}$ b) $y = e^{\operatorname{Arccot}(2x+1)^{\frac{1}{2}}}$ c) $y = \sin\left[\cos\frac{x-4}{3}\right]^2$

d) $y = \sqrt{5 - \tan\sqrt{x}}$ e) $y = \cos\left[\ln\left(x^2 - 1\right) + 1\right]$ f) $y = \log_3\left[\sqrt{2^x + 1}\right]$

g) $y = e^{\tan\sqrt{7x-1}}$ h) $y = \tan e^{\sqrt{7x-1}}$.

۱۶ - د لاندې شننيزويا سيرنيز (تحليلي) افادو لپاره تعريفدېرې پيدا کړی.

a) $y = \sqrt{x-3}$ b) $y = \sqrt{3 - x^2}$ c) $y = \sqrt{x^2 - 9}$

d) $y = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 9}}$ e) $y = \frac{1}{x^2 + x - 6}$ f) $y = \ln(2x + 5)$

g) $y = \operatorname{Arc}\cos(2x - 4)$ h) $y = \sqrt{x} + \frac{1}{x}$ i) $y = \ln x + \frac{1}{x-1}$.

د ډاکتر ماخان شینواري چاپ شوې لیکنې:

<u>1988 Vienna (Austria):</u>

<u>لومړی:</u>

H.K. Kaiser , M. Shinwari : Aproximation compact pological algebra : general algebra 6 ; Page 117 – 122 contributions to

<u>1987 Vienna (Austria):</u>

<u>دویم:</u>

Diss . Interpolation und Aproximation durch Polynime in Universalen Algebren . Uni. Wien

Dissertation Interpolation and Aproximation by Polynome in universal Algebras, at the University of Vienna/Austria

لاندې د شمیرپوهنې پښتوټول کتابونه په المان کې د ،، افغانستان کلتوري ودې ټولنه،،له خوا چاپ شوي دي

<u>2000 Bonn (Germany):</u>

دریم: د شمیرپوهنې ستر کتاب : د شمیرپوهنې برسیره د انجنري، فزیک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زده کوونکو لپاره (دا کتاب په ۹۰۰ مخونو کې چاپ او دا نوې لیکنه به یې څنو ځایونو غزېدلې او څنې ځایونه ترې لرې شوي دي)

<u>2003 Bonn (Germany):</u>

څلورم: څمککچپوهنه(هندسه) ، په سلو زرو کې شمیرنه، د ګټې – او کټې د کټې شمیرنه ، د اختمالوالي شمېرنه کتاب د ښوونځي ټولې اړتیاوې پوره کوي

<u>2003 Bonn (Germany):</u>

پنځم: الجبرونه (د الجبر بنستونه دي)

2003 Bonn (Germany):

شپږم: د شمیرپوهنې انګرېزي – پښتو ډکشنري.

2003 Bonn (Germany):

اووم: د شمیرپوهنې الماني ـ پښتو- او پښتو الماني ډکشنري

Mathematical dictionary German/ Pashto and Pashto/German

2003 Bonn (Germany):

اتم: دفرنڅیال برابرون (دا کتاب په دې ځانګه کې یو پیل دی، ساده لیکل شوی)

Differential equation Translation; An Introduction

Bonn (Germany): 2003

نهم: د شمیر پوهنې فرمولونو ټولګه

Mathematical Formulas

2003 Bonn (Germany):

لسم: شمیرپوهنه له عربي په پښتو

1997 Bonn (Germany):

یوولسم: د افغانستان په هکله سپینې خبرې: په المان کې

،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خوا

یادونه: له ۲۰۰۰ کال دمخه ډاکتر ماخان شینواري د ،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خوا درې ساسي مجلې هم را وستلې.

د ډاکتر ماخان ،،میرې،، شینواري لیکنې او ژباړې چې په چاپیدو یې پیل کیږي

2012 Bonn; Germany; Kabul Afghanistan

ژباړې چې همدا اوس چاپ شوې دي:

: *Prof. Brinkmann. (From Brinkmann.du.de)*

لاندې د برینککن لیکنې چې له پرینمن ن ج څخه ژباړل شوي دي.

۱ - شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره لومړی ټوک

۲ – شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره دویم ټوک

۳ – شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره دریم ټوک

۴ - د احتمالوالي شمیرنه د ښوونځي لپاره

۵ – احصایه یا ستاتیستیک دښوونځي لپاره

لاندې کتابونه د شتوتګارت د پوهنتون د استادانو د لکچرونو څخه چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپاره شوي، را ژباړل شوي دي.

۶ – انالیزی ۱

۷ – انالیزې ۲

۸ – کرښیز الجبر

۹ - د شمیرپوهنې بنسټونه

۱۰ - د فرمولونو ټولګه

۱۱ – فنکشنل انالیز

۱۲ – وکتور شمیرنه

نوري ژباړې

۱۳ – له www./grundstudium.info/linearealgebra څخه:کرښیز الجبر

۱۴ – Georg Gutenbrunner ګڼونپوهنه یا د اعدادو تیوري

زما لیکنې : همدا اوس ځنې چاپ شوي او ځنې چاپ ته چمتو دي.

<u>Bonn (Germany):</u>

۱۵ - د شمیرپوهنې ستر کتاب دویم چاپ د پوره تغیراتو سره :

دا کتاب د شمیرپوهنې برخې برسیره د انجنري، فزیک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زدهکوونکو لپاره پوره ګټور دی. په کتاب کې د اړتیا سره زیاتونه او کونه راغلې

کتب په دوه برخو کې چاپ شوی دی

الف . لومړۍ برخه

ب . دویمه برخه

۱۶ - ځمککچپوهنه (هندسه) دویم چاپ د پوره تغیراتو سره

۱۷ – الجبر بنسټونه دویم چاپ له تغیراتو سره

۱۸ - ډېرۍ پوهنه یا سټ تیوري

۱۹ – د شمیرپوهنې سم اند (منطق ریاضي)

۲۰ - د یو څو شمیرپوهانو ژوندلیک

۲۱ – د شمیر پوهنې ګډې وډې لیکنې

۲۲- داهم ژباړه ده، خو لیکونکی یې متآسفانه راڅخه نابلد شوی: د مشتق او انتیګرال شمیرنو ته تمرینونه او اوبیونې یا حلونه یې

۲۳ – د شمیرپوهنې انګریزي پښتو او عربي + درې ډکشنري

۲۴ – د شمیرپوهنې پښتو انګرېزي ډکشنري

۲۵ – د شمیرپوهنې پښتو ډکشنري د شمیرپوهنیزو وییونو په پښتو روښانه ونه

۲۶ - د زړه له کومې(دا هغه لیکنې دي، چې ځنې یې په نړیول جالونو کې خپرې شوي دي.)

۲۷ – د افغانستان په هکله سپیني خبرې، چې وبه غزیږي.

نوري لیکنې، چې په ژباړه یې پیل شوی، خو لا پوره نه دي

– د شتوتکارت پوهنتون لکچرنوټونو څخه ، چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپریږي:

د ګروپونو تیوري

- د ښوونځي لپاره فزیک د برینکمن لیکنه

له پنځم ټولګي څخه تر اومم ټولګي پورې ژباړل شوی (دا چې زما دویم مسلک فزیک دی، دا لیکنې ژباړم. دا هم د دې لیکوال یوه ډېره ښه لیکنه ده، چې -د شمیرپوهنې په څیر- دلته هم زیات تمرینونه د حل یا اوبیونې سره په کې راغلي او ماته زیات ګټور برېښي)

د ليکوال ژوند ته لنډه کتنه

ماخان په اولني نوم میړي شینواری د اروابنادي پستو او اروابناد نوررحمان زوي په ۱۳۲۰ ؟ ه لمريز کې د شینوارو هسکه مینه کې دې نړۍ ته سترګې راغړولي.

د هسکې مینې د لومړنې ښوونځي (د لومړنيو زده کوونکو څخه) څخه وروسته د رحمان بابا ليسه له ۱۹۵۴ تر ۱۹۶۵ پورې(ښوونځي له لومړي ټولګې پيل او د دويم ټولګې څخه ګام او پای).

د ۱۹۶۶ تر سپټبر د کابل طب پوهنځی. له ۱۹۶۶ سپتمبر څخه د اتريش برس، چې هلته يې د شمیرپوهنې ډاکتري په پوره ستونځو تر لاسه کړه.

د۱۹۹۸۷ ش ک تر ۱۹۸۸ د فبروري تر پای د دباندنيو چارو وزارت کې مامور. د ۱۹۸۸ مارچ څخه تر ۱۹۹۲ جون پورې په بن کې د افغانستان جمهوريت سفارت شارژد افیر(صفر نه وو). له هغې وروسته په جرمنې کې سياسي پناه. له ۲۰۰۸ مارچ څخه د ۲۰۰۹ دسمبر پورې د د رياضي څانګه کې د پوهنې وزارت درسي نساب کې دنده.

ماخان میړي په ۱۹۷۲ کې له لرې د میرمن ښاپيرۍ سره واده شوی، چې د واده خبر ورته اتريش ته راغی. ده له میرمن ښاپيری سره په ۱۹۶۳ ز ک کې کوزده کړې وه.

دوي ته لوي څښتن په اتريش ويانا کې د مای په شلم ۱۹۷۹ ز ک دوه بچيان وبخښل، چې څانګه او اباسين نوميږي. څانګه په المان کې د پوهنتون علمي همکاره وه او د حقوقو ډاکتره ده او اباسين ملي اقتصاد او ټولنيزه سايکولوژي لوستلې.

ماخان شينواري بې کاره نه دی او لږ تر لږه له ۹۷ ۱۹ څخه همدا د کتابونو ليکلو اوو د ژباړې دنده يې په غاړه اخستې، چې خپل فکر د شونې پولې تازه وساتي.


ډاکتر ماخان (مېرې) شینواری
احصـایه
(ستاتیستیک)
دېرې _ پوهنه (سټ تیوري)
SET THEORY
لیکونکی:
ډاکتر ماخان (مېرې) شینواری
شمېر پوهنه
(ریاضـي)
ستر کتاب
دویم غځېدلی چاپ
لیکونکی: ډاکتر ماخان (مېرې) شینواری
شمېر پوهنه
(ریاضـي)
ستر کتاب
دویم غځېدلی چاپ
لیکونکی: ډاکتر ماخان (مېرې) شینواری
د افغانستان د کلتوري ودې ټولنه _ جرمني
VEREIN ZUR FORDERUNG DER
AFGHANISCHEN KULTUR E.V
د خپرونو لړ (۱۳۰)