



# شمپر پوهنه

(رياضي)

ستر کتاب

Ketabton.com

لومړۍ برخه

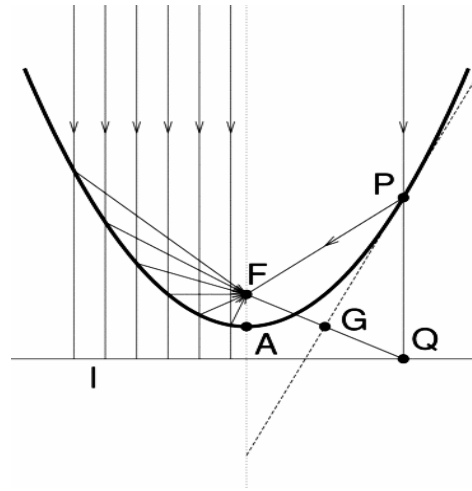
دويم غځېدلی چاپ

ليکونکي: ډاکټر ماخان (مېرې) شينواری

# شمير پوهنه

(رياضي)

## ستر کتاب



دويم غزېدلی چاپ

ليکونکی: ډاکټر ماخان ميري شينواري

## دلوي څښتن په نامه

په دې هيله، چې په دې ليکنو او ژباړو به مې زموږ د بې وزلي او له پوهې پاتې ملت - په ما د پوهنې لپاره د لگښت - لپاره د پوهنې په لور داسې لږ ونډه اخستې وي.

### کتاب پيژندنه

د کتاب نوم: د شميرپوهنه ستر کتاب (لومړۍ برخ)

ليکونکي: ډاکتر ماخان،، ميری،، شينواری

[makhanshinwari@gmail.com](mailto:makhanshinwari@gmail.com)

د خپريدو لړۍ

خپرنډوی: د افغانستان کلتوري ودې ټولنه

جرمني

۲۰۱۲

چاپ کال

### چاپ چارې

دانش خپرنډويي ټولني تخنيکي څانگه

[WWW.danishpress.com](http://WWW.danishpress.com)

د چاپ حقوق خپرنډويي ټولني ليکونکي يا ژباړي سره خوندي دي.

پښتو مو ژبه او شميرپوهنه پرې ساده ده

## د خپرندوی ټولني یادښت

له هغې مودې را په دې خوا، چې د افغانستان د کلتوري ودې ټولني د علمي، ساينسي او طبي اثارو د خپرولو لړۍ پيل کړې، تراوسه يې په دې لړ کې مهم اثار خپلو هيواولو ته وړاندې کړې دي.

مور باور لرو، چې پښتو ژبه هغه وخت په يوه مهمه غني ژبه بدلیدلای شي، چې د پوهې په ګاڼه سمبال شي او په علمي او اکاډميکو اثارو غني شي.

اوس چې زموږ ملي سراسري ژبه د بيلابيلو ګواښونو او چلنجونو سره مخامخ ده، پر مور ټولو ده، چې د دغه ګواښونو په وړاندې به په نره ودرېږو او د علم او قلم په ژبه به ځواب ورته ووايو.

د اتحاديې له خوا د ډاکټر ماخان شينواري تراوسه زياتو چاپ شويو اثارو په څنګ کې، د ده د پنځه وېښت شمير پوهني نويو ژباړو او ليکنو او دوه ټولنيزو ليکنو تر منځ، دغه اثر په همدې لړ کې ځکه د ارزښت وړ دی، چې د علمي، ساينسي اثارو د خپراوي په لړ کې د يوه مهم ګام په توګه ګڼل کيدای شي او هيله ده، چې د دې برخې مينه وال لوستوال، زده کوونکي او د پوهنتو زده کړې کټه ترې واخستلی شي.

په درناوي

د افغانستان کلتوري ودې ټولنه

۲۰۰۱۲ زک

## د ليکونکي مننه

د هر څه له مخه د هغو ليکونکو پروفيسرانو څخه زياته مننه، چې د ليکنو څخه يې زما د ژباړې لپاره تفاهم لري. ماته د دوي د ليکنو د ژباړې په هيڅ ډول مادي گټه نه شته او دا کار مې يوازې په يوه د پوهني توانمندي، مگر وروسته پاتې ژبې ويونکي ولس ته وړاندې دی، دا دې د دې پروفيسرانو له خوا په پوهنيزه اړخ کې زموږ په دې اړخ کې هم مرستې ته اړ ولس سره مرسته وي.

همدا ډول زموږ، د افغانستان کلتوري ودې ټولنه، جرمني، د غرو، مرستندويانو او په تيره بيا د مشر تابه څخه زياته مننه کوم، چې پرته له خپرندويې ټولني په توگه يې د دې ليکنو زياته اقتصادي ونډه هم په غاړه اخستې.

دې لاندې زما کليوالو ملگرو او ملگرو د دې کتابونو په چاپ کې د توان سره سمه اقتصادي ونډه اخستې، چې زه ترې زياته مننه کوم:

د بناغلي دپلوم انجنير ریحان الدين حساس، بناغلي دپلوم انجنير محمد اکبر نور، بناغلي ډاکتر سردار گانه وال، بناغلي ډاکتر مانوکل گانه وال، بناغلي ټولنپوه محمدعارف بيان، بناغلي دپلوم انجنير محمد ايوب بيان، همداسې زما د ملگري ارواښاد ډاکتر حاجي محمد سلطانزي د ځوي بناغلي ډاکتر صالح محمد سلطانزي، دپلوم انجنير او دپلوم اقتصاد پوه رحمت الله فتحې او نه اخر زما د لور ډاکتر څانگي شينواري او زما د ځوي اقتصاد پوه او ټولنساپوه اباسين شينواري.

نه د ټولو په اخر کې زما له ميرمن بناپړۍ څخه ډېره زياته مننه، چې زما د ليکنو - نه دا چې مخه يې نه ده نيولې - پوره ملاتړ کړي.

بيا هم له دوي څخه د زړه له کومې مننه کوم او لوي څښتن دې ورته اجر و نه ورکړي، چې داسې مرستو ته دوام ورکړي.

په مننه : ستاسو ماخان شينواری

جرمني د بن ښار

۲۰۱۲ زک

## نيولیک

نوي سريزه

سريزه

افغاني، يوناني، لاتين الف ب

شميرپوهنيزي نخبنی

۱	د شميرپوهني سم اند يا منطق	۰ ۱
۱	پوهنيزه ژبه او پيداښت يا طبيعي ژبه	۱ ۰ ۱
۳	د شميرپوهني سم اند بنسټيزه کليمي	۲ ۰ ۱
۳	ثابتي، اووښتوني يا واريابلي، ترمونه	۱ ۰ ۳ ۰ ۱
۵	وينا	۲ ۰ ۲ ۰ ۱
۷	د دوه ارزښتوالي اصول يا پرينخيپ	۳ ۰ ۲ ۰ ۱
۱۳	وينا فورم يا ۰ بڼه او کوانتورونه	۴ ۰ ۱
۲۸	اړين او پوره کيدونکي شرطونه	۵ ۰ ۱
۳۱	د شميرکليمه يا د لغاتو .....	۶ ۰ ۱
۳۳	برابرون او نابرابرون	۷ ۰ ۱
۳۸	تمرينونه	۸ . ۱
۳۹	ډيری پوهنه	۰ ۲
۴۰	د ډيری پوهني کليمه	۱ ۰ ۲
۴۵	د ډيريو ترمنځ اړيکي	۲ . ۲

۴۶	برخ‌دبری	
۴۸	د یوې ډبرې توان یا توان‌دبری (توانست)	
۵۰	په ډبرې کې کارونې یا عمليې (۱)	۳۰۲
۵۲	غوڅ‌دبری یا متقاط‌دبری	
۵۷	د یوې ډبرې یا ست کمپلیمنت	
۵۸	څیرونه	۴۰۲
۶۷	تمرینونه	
۷۰	د رییل گونو سره د شمیرلو بنسټیزې...	۰۳
۷۰	د گونو- یا اعدادو سیستم جوړښت	۱۰۳
۷۰	پیدایښتي یا طبیعي گونه	۱۰۱۰۳
۷۱	د پیدایښت یا طبیعي گونو جوړښت	الف ۰۱۰۳
۷۲	د پیدایښت گونو انځورونه او شمیرنه	ب ۰۱۰۳
۷۸	د شمیرنې بنسټیز قوانین	پ ۰۱۰۳
۸۴	ټولگڼونه	۲۰۱۰۳
۸۶	الف د ویش تیوري	۲۰۱۰۳
۸۸	غټ گډ پرویشونې (بزرگترین مقسوم علیه ...)	ب ۲۰۱۰۳
۱۰۶	راشئلگڼونه	۳۰۱۰۳
۱۰۸	رییلگڼونه	۴۰۱۰۳
۱۱۹	ماتشمیرنه	۱۰۲۰۳

۱۳۰	تمرینونه	۳ . ۳
۱۴۱	پوتنخ یا توان ، رینه یا جذر	۰ ۴
۱۴۱	توان د تولگنیز په جگ یا اکسپوننت	۱ ۰ ۴
۱۴۴	رینه او توان د راشنل اکسپوننت یا جگن سره	۲ ۰ ۴
۱۵۱	توان دریلگن اکسپوننت یا جگن سره	۳ ۰ ۴
۱۵۲	تولگه	۴ ۰ ۴
۱۵۸	لوگاریم	۰ ۵
۱۵۸	د لوگاریم کلیمه	۱ ۰ ۵
۱۶۶	تولگه	۳ ۰ ۵
۱۶۹	گونومتری	۰ ۶
۱۶۹	بنسټیزه ځمکچپونه یا هندسه	۱ ۰ ۶
۱۶۹	ټکی او کرښه	۱ ۰ ۱ ۰ ۶
۱۷۱	کونج	۲ ۰ ۱ ۰ ۶
۱۷۴	درېگودی	۳ ۰ ۱ ۰ ۶
۱۷۸	کونکروانیخ او ورته والی	۴ ۰ ۱ ۰ ۴
۱۸۴	ولارکونجیز درېگودی	۵ ۰ ۱ ۶ ۰
۱۸۸	په ولارکونجیز درېگودی کې د ...	۲ ۰ ۶
۱۹۰	په یوونگرودی کې د کونج بلواک ..	۳ ۰ ۶
۱۹۵	د ساین او کوساین جملې	۴ ۰ ۶



۲۰۵	تریگنومتريکي کټمتوالي	۵۰۶
۲۱۵	تریگنومتريکي يا کونجکچيز فرمولونه	۵۰۶
۲۲۲	کمپلکس گڼونه	۰۷
۲۳۵	د بنوونې يا ثبوت متودونه	۰۸
۲۳۵	سیده بنوونه	۱۰۸
۲۳۷	ناسیده بنوونه	۲۰۸
۲۳۹	د پوره ایندکشن له لارې بنوونه	۳۰۸
۲۴۳	لاينيز برابرې له یوې اوریدونې يا ...	۹
۲۴۴	لاينيز برابرې	۱۰۹
۲۶۶	کومبيناټوريک، د بينوم جمله	۱۰
۲۶۶	فاکولتيت يا فاکتوریل	۱۰۱۰
۲۶۷	د بينوم ځله ونه	۲۰۱۰
۲۷۰	د بينوم جمله	۳۰۱۰
۲۷۴	کومبيناټوريک	۴۰۱۰
۲۷۵	پرموتيشن	۱۰۴۰۱۰
۲۸۰	واريشن	۲۰۴۰۱۰
۲۸۶	کمبينيشن	۳۰۴۰۱۰
۲۹۱	د پرموتيشن، واريشن او ....	۴۰۴۰۱۰
۲۹۵	لاينيز الجبري برابرې	۰۱۱

۲۹۶	لانیز برابر و نه دوه اوریدونو یا ...	۱۰۱۱
۳۰۷	دویمه درجه دیترمینانت او د کرامر...	۳۰۱۰۱۱
۳۱۲	د گاوس الگوریتم	۴۰۱۰۱۱
۳۱۶	له دوه وو زیات برابر و نه له دوه ...	۵۰۱۰۱۱
۳۱۷	لانیز برابر و نه له درې ....	۲۰۱۱
۳۱۷	یو برابر و نه له درې ناپیژندونو سره	۱۰۲۰۱۱
۳۱۸	دوه برابر و نه له درې ...	۲۰۲۰۱۱
۳۱۹	دریمه درجه دیترمینانت او د ...	۳۰۲۰۱۱
۳۲۲	د گاوس لگوریتم	۴.۲.۱۱
۳۲۵	په خوښه ډېر مساوات د په خوښه ...	۳۰۱۱
۳۲۶	د $n$ -م درجې دیترمینانت او د ...	۱۰۳۰۱۱
۳۲۸	د گاوس الگوریتم	۲۰۳۰۱۱
۳۳۳	تمر و نه	
۳۴۰	الجبري برابر و نه	۱۲
۳۴۰	نالانیز برابر و نه	۱۰۱۲
۳۴۳	څلورۍ ئیز یا مربع برابر و نه	۲۰۱۲
	د دوه په جگ برابر و نه ، د بیتا جمله	۱.۲۰.۱۲
۳۵۰	څلورۍ برابر و نه ، چې په نورمال	۲۰۲۰۱۲
۳۵۱	د $n$ -م درجې ځانگړي برابر و ...	۳۰۲۰۱۲

۳۵۷	دریمه درجه برابر ونونه	۳۰۱۲
	د ریښې برابر ونونه	۴۰۱۲
۳۷۵	ترانسخیندننت برابر ونونه	۱۳
۳۷۵	لوگاریتم برابر ونونه	۱۰۱۳
۳۸۰	اکسپوننشل- یا په جگړې برابر ونونه	۲۰۱۳
۳۸۵	گونومتريکي یا کنجکچیز برابر ونونه	۳۰۱۳
۳۹۶	له نابرابرونو او مطلقه ارزښت ..	۱۴
۳۹۶	نابرابرونونه	۱۰۱۴
	بنسټيزې کلیمې او شمیر قوانین	۱۰۱۰۱۴
۳۹۷	اینټروال	الف ۱۰۱۴
۴۰۰	نابرابرونونه له یوې ناپېژندونکې...	۲۰۱۰۱۴
۴۰۹	د نابرابرونو سیستم ...	۳۰۱۰۱۴
۴۱۱	نابرابرونونه له دوه ناپېژندونکو سره	۴۰۱۰۱۴
۴۱۴	برابرونونه او نابرابرونونه ....	۲۰۱۴
۴۱۴	له مطلقه ارزښت سره شمیرنه	۱۰۲۰۱۴
۴۱۵	برابرونونه له مطلقه ارزښت سره	۲۰۲۰۱۴
۴۲۰	نابرابرونونه له مطلقه ارزښت سره	۳۰۲۰۱۴
۴۳۰	بلواک یا فنکشنونه یا طابع	۱۵
۴۳۰	د بلواک کلیمه او د بلواک انځورونه	۱۰۱۵

۴۳۳	د بلواک خویونه	۲۰۱۵
<b>د ستر کتاب دویمه برخه</b>		
۴۶۶	د هواری یا سطحی شننیزه هندسه ...	۱۶
۴۶۶	کرښه	۱۰۱۶
۴۷۵	گردی	۲۰۱۶
۴۸۲	ایلیپسی	۳۰۱۶
۴۸۷	هیوپربول	۴۰۱۶
۴۹۲	پارابول	۵۰۱۶
۴۹۴	تولگه	۶۰۱۶
۵۰۲	وکتور شمیرنه	۱۷
۵۰۲	د وکتور پیژند یا تعریف،	۱۰۱۷
۵۰۲	په کارتیزی کواوردینات سیستم کې د وکتور انځورونه	
۵۰۹	د دوه وکتورونو سکالار ځل	۲۰۱۷
۵۱۲	د دوه وکتورونو وکتوري ځل	۳۰۱۷
۵۱۷	غبرگهواریز یا موازي الاضلاع ضرب	۴۰۱۷
	په شننیزه ځمککچ کې د وکتورونو ....	۵۰۱۷
۵۲۱	د یوې کرښې وکتوري انځورونه	۱۰۵۰۱۷
۵۲۴	د هواری یا سطحی وکتوري انځورونه	۲۰۵۰۱۷
۵۲۵	د هواربرابرونو سکالار فورم یا ۰ بڼه	۵۰۱۷

۵۳۳	پرلپسي او پرلپسي لړۍ	۱۸
۵۳۳	پيل	۱۰ ۱۸
۵۳۴	د گڼون - عددونو پرلپسي کليمه	۲۰ ۱۸
۵۴۲	مونوتوني پرلپسي	۱۰ ۲۰ ۱۸
۵۴۵	اريتميټيکي پرلپسي	۲۰ ۲۰ ۱۸
۵۴۷	هندسي پرلپسي	۳۰ ۲۰ ۱۸
۵۵۰	لړۍ	۲۰ الف ۱۸
۵۵۵	هندسي لړۍ	۱۰ الف ۲۰ ۱۸
۵۵۷	اريتميټيکي لړۍ	۲ الف ۲۰ ۱۸
۵۵۸	د پرلپسي او لړيو د پولې ...	۴۰ ۱۸
۵۷۸	د فنکشنونو پولې او ناپريکيدنه	۱۹
	بنسټيزې کليمې	۱۰ ۱۹
۵۸۶	د پولو يا حدونو خويونه	
۵۹۲	د راشنل، کسري يا نسبي	
۵۹۶	د مثلثاتي يا درېکودي کچ توابعو پولې	
۶۰۴	ناپريکيدني	
	په پوله ارزښت او ناپريکيدني څو جملې	۲۰ ۱۹
۶۱۰	د ناپريکيدونکو فنکشنونو خويونه	۳۰ ۱۹
	د بنسټيزو فنکشنونو ناپريکيدنه	۴۰ ۱۹

۶۱۶	د څپرکي ټولگه	
۶۲۶	دفرنخیالشمیرنه	۲۰
۶۲۶	د تابع تغیر منخ ارزښت(منخنی قیمت)	
۶۲۸	په یوه ټکي کي د تابع گراف ...	
۶۳۰	د لخصوی(سترگورپ) تغیر...	
۶۳۱	کمبنتوپش ( تقسیم تفاضل؟)	
۶۳۳	دفرنشلوپش یا رابیلیدنه یا مشتق	
۶۳۶	کمبنتوپش او مشتق یا رابیلیدنه	
۶۴۳	د $x_0$ په حای کي د فنکشن مشتق	
۶۴۷	د تانجنټ پیژند او خویونه	
۶۵۰	د تانجنټ او عمود یا ولاړ تولید مسوات	
۶۵۲	په بیدیا کي جگوالی	
	الف : د تانجنټ یا جگیدني غوره والی	۱۰۱.۲۰
۶۵۶	د فرنخیال یا رابیلیدني یا مشتق قاعدې	۲۰۲۰
۶۶۲	د درپگودیزو یا مثلثاتي .....	
۶۷۰	د اکسپوننشل یا په جگ توابعو....	
۶۷۶	د مشتق استعمال په طبیعي پوهن کي	
۶۸۳	د ایمپلیخیت توابعو مشتف	
۶۸۶	د بنسټیزو رابیلیدنو(مشتقونو) جدول	



۷۸۹	انتیگر الشمیرنه	۲۱
۷۹۰	د ریمن(ناټاکلی) انتیگرال	
۷۹۴	بنسټیزه یا لومړنی تابع	
۷۹۶	سطحه او لومړنی تابع	
۷۹۹	ناټاکلی انتیگرال	
۸۱۲	د ټاکلي انتیگرال شمیرنه	
۸۱۴	تکمیلیدونکي بنسټونه	
۸۱۵	د ټاکلي انتیگرال څخه و ټاکلي ...	
۸۱۷	د انتیگرالونې قاعدې	
۸۱۹	د اکسپوننشل توابعو انتیگرال	
۸۱۹	د لوگارېتمې توابعو انتیگرال	
۸۲۱	بدلون قانون	
۸۲۷	توابع، چې بی د بدلون له لارې...	
۸۳۲	ټوټه انتیگرالونه	
۸۳۴	د ټوټه انتیگرالونې لار	
۸۳۸	د ټوټه راشنل کسرونو انتیگرال	
۸۴۱	نایای(مبهم) انتیگرال	
۸۵۲	د ټاکلو انتیگرالونو حل د بدلون له لارې	
۸۶۲	د انتیگرال شمیرنې استعمال	



تمرینونه

۸۸۸

د ډاکټر ماخان شینواري چاپ شوي لیکنې او ژباړې  
د ډاکټر ماخان شینواري چاپ ته چمتو لیکنې او ژباړې  
د ژباړې یا لیکونکي ژوند ته لنډه کتنه

## د مهربان او بخښونکي خدای (ع) په نامه

سرريزه

گرانو هيوادوالو!

يو څه چي پيل لري نو پاي هم بايد ولري، د داسي يوه کار پيل او پای ته ځما هم لوړه او تنده دومره زياته ده، چي مهربت يي زما لپاره هم ناشوني دي.

د هيواد په هراړخيزه بدبختيو يو سړی هلته نور هم پوره پوهيدلی شي، چي په يوه کار پيل وکړي، ځکه چي سملاسي ورته څرگند يږي، چي په هيڅ شي کي ځمور په هيواد کي لائراسه څه نه دي شوې په جوړښتيزه لور، په وړانگي کي مو د نړی سرکښي خاتنه گڼلي.

موږ گورو چي په مسلکي چارو کي له پيل دا ستونځي موجود دي، چي تراوسه حتی هغه بنسټيز مسلکي نومونه مو له خپلي ژبي نه دي را اخستلي، چي مسلک ته اسانتياوې پيښوي. له کومه ځاي چي ماته روښانه ده، تر نن ورځي په دې هکله چا په شميرپوهنه د ستونځويو لپاره کومې هڅي هم نه دي کړي او ستونځي يي نه دي گاللي، چي دلته طبعاً افراد ملامت نه دي، بلکه ځمور د هيواد د تاريخ په اوږدو کي دولتني جوړښت، دپوهني او همدا ډول د کلتور او ژبي د ودې دنده د حکومتونو ده، چي ځمور په هيواد کي ځمور حکومتونو خپل ځانونه د دې کار جوگه نه دي گڼلي، کيدی شي چي ووايو چي په ريښتيني بي ددې کار مخه هم نيولی ده، چي په افغاني ژبه دې څه کار وشي.

گرانو لوستونکو!

داکار ځکه په افغاني او په ولسي افغاني ليکل شوی، چي زه په مسلکي اړخ کي يواځي، په علمي توگه په الماني ژبه پوهيږم، د انگليسي سره هم بلد يم، نو دا

نومونه چی له دې دباندنیو ژبو را اړووم ، داچې په ښوونځي کې ځما لیک لوست په افغاني ژبه وو، په افغاني ژبه په ولسي پوهنیزه توگه اړولی شم. ماته دا کلیمې په مروجہ افغاني ژبه نه دي معلومې او یا کومې چې ماته معلومې دي او زه ورسره بلد یم هغه همغه وخت ماته د پوهیدلو له امله د ستونځو ډکې ښکاریدلې .

شمیر پوهنه هم، د نورو پوهنو په څیر، یوه پراخه پوهنه ده او زیاتې څانگې لري. دا چی ځما په فکر دا متأسفانه نه یواځي زما لمړی کار دی، بلکه دا د افغاني ژبې په دې توگه یو لمړی علمي اثر دی، چی په دې بنسټیزه توگه په درسي او تمرینی ډول سرته رسیږي.

نن نړی او د انسانانو فکر دومره پرمختگ کړی او دا نور هم په خورا چټکتیاوډه کوي، چی پخپله انسان ورته د تعجب په سترگه گوري، مگر موږ لا تراوسه په هغه بنسټیزو ستونځو ( د ستونځو حل باندې ) پیل نه دی کړی ، که دا په هره څانگه کې هم وي. ځمور پرابل مونه هراړخیز دي او هراخیزو هڅو ته مو ضرورت شته،

### شمیر پوهنه څه شی دی؟

شمیر پوهنه یو مرستندویه پوهنه ده، چی په ټولو پوهنو کې نغښتي یا په بل عبارت : په ټولو پوهنو کې د پوهیدلو بنسټیزه رینه جوړه وي، که دا پوهنی اجتماعي وي او که طبعی ( پیداينبتی ) یعنی که ساپوهنه وي که اقتصاد او که کیمیا وي یا فزیک، بیله شمیر پوهنی یی وده او په پوهیدنه ناشونی ده. شمیر پوهنه له بلی خوا یواځنی خپلواکه پوهنه هم ده. شمیر پوهنه بل څه ته اړ نه ده.

ددې کتاب لیکلو زما زیات وخت په بر کې ونیوه او لیکل یی د پوره ستونځو سره

ټول کار زما په غاړه وو او بل چا را سره متأسفانه چې مرسته هم نه شوه کولی.

د داسی یوه کتاب لیکنی مسئولیت باید د دولت په غاړه وي او مسلکي باید د داسی لیکنی څخه خپل ژوند تأمین کړای شي. د همدې هدف لپاره د مسلک زدکړه کيږي. ما په دې کرښه غوښتل، چې ځمور د هیواد ستنخي نورې هم گوته لک کړم.

زه غواړم چې خپلی د سر خبرې په لاندې توگه رالاندې کړم

— د لیکونکی راهڅونې دلیلونه یا د شوق رابیدارول

— د داسی کتاب لیکنه په هغه وخت کی شوني کيږي، چې د لیکونکي اقتصادي

ژوند تأمین وي، زه د ټولنیزو مرستو پیسو څخه ژوند کوم، یعنی د نورو خلکو د

مالیا پیسو باندې. کار نه پیدا کيږي او اجازه یې هم نه لرم چې پیسی وگټم.

— وخت باید پوره موجود وي او داهم ما پوره لروده، چې له دې د مخه می په سیاسی

هلو ځلو دا وخت تیر کړی او دا اوس می خپل مسلک ته رامنځه شوه.

— د دې کتاب لیکلو لپاره باید یو لیکونکی د خپلی ټولنی او د خپلی ټولنی د

خلکو سره مینه ولری او په همدې ډول، د خپلی ټولنی او د ټولنی د خلکو او د

ټولو څخه د مخه د خپل ځان لپاره هم خوبونه ولري، خیالونه ولري، چې یواځی د

خوبونو ریښتیا کولو لپاره په داسی کار بریالی کیدی شي. ما د دې کار ستونځی

په پوره مینه په غاړ واخستلی او دا کار می په پوره مینه سر ته ورساوه.

— په دې برسیره لیکونکی دې وظیفی ته هم باید شعوري وي، چې دی د دې کار

لپاره د ملت په پیسو تربیه شوی او د ملت پور هم باید ادا شي، د داسی لږ پور

ادا کولو هم ما ته پوره خوښي راو بخښله.

په کور کی هم باید تر یوې ممکنه اندازې پورې یو تفاهم موجود وي یعنی یو غبروالی باید په کورنی کی وي، که داسی هم نه وي ، خود داسی کار مخه باید ونه نیول شي ، د نورو ستونځو بیو ( ستونځو حل ) په خاطر، چی مور افغانان یی په ځانگړی توگه اقتصادی اړخ کی پوره لرو، چی نه یواځی د ځان لپاره بلکه د خپلوانو لپاره هم باید پام وي، مگر ما دا توان په خپل ځان کی ددې امله نه کوته چی امکانات یی ځما لپاره نه وو.

### دوم : د کتاب د لیکنو ستونځی:

د داسی کتاب لیکنه د پوره ستونځو سره مل ده، چی زه دې ستونځو ته په لاندې توگه گوته نیسم.

۱ - دا کتاب په داسی ژبه لیکل کیږی چی له مری څخه نیول شوې، زیندی شوې، خپه شوې، خود مرگ څخه بچ ده، له بنارونو شړل شوې، او یواځی په غرو او رغو کی ژوندی پاتی شوې.

دې ته باید گوته ونیسم، چی دا کرنی دا مطلب نه لري، چی گوندې زه به، خدای (ج) دې ونه کړی، د بلی ژبی په خلاف یم. دا زما کار نه دی او نه دا حق ځان ته ورکوم، خودا حق لرم چی خپلی ژبی، د خپل ولس ژبی ته ، چی کمیدلی او وروسته پاتی ساتل شوې، گوته ونیسم. مور افغانانود افرادو په توگه هم افغاني ژبه پریښوولی چی ولس یعنی د یوه هیواد د ژبی دپریښوولو حق څوک نه لري، نه دولت او نه افراد. دا کار متاسفانه د افغاني ژبی په ضد او بیا د ټولو په سر کی پخپله د افغانانو څخه شوی دی، د بل څا څخه څوک باید گیله من نه وي. افغاني ژبه، که څه هم پوهانو او د لیک لوست خاوندانو په زیات شمیر، نه ټولو، د لاسه ورکړې، خوبیا هم دا ژبه دا استعداد، د نورو ژبو په څیر لري، چی یوه پوهنیزه لیکنه ورباندې وشی یا بهتره پوهنیزه شی.

ژبه یواځی د پوهولو او پوهیدلو اله نه ده، بلکه د ولس پوهنیزه وده کی پوره غوره رول لري او د کلتوري ودې لارښودې او بنسټ دي، په دې برسیره د پوهی د اسانولو خورا غوره اله ده. د یوه ولس د پرمختګ او د ژبی پرمخوده یو بل باندې سیده او په خټ اغیز من دي، چی ولس وروسته پاتی وي، ژبه یی وروسته پاتی ده او که یوه ژبه وروسته پاتی وي، نو هغه ولس د نورو ولسونو سره په پوهه کي سیالی نه شي کولی او د ولس خلك د نورو ولسونو د خلکو سره د سیالی کولو استعداد خان کی نه شي روزلی، که څه هم استعدادونه به موجود وي.

ما کونښن کړی چی کم له کمه بنسټیزې کلیمی په افغاني واپروم، چی دا کار می په پوره بریالیتوب، د پوره ستونځو سره سره سرتو رسولی او په دې هکله می زیات فکر هم په کار اچولی چی مسلکي بنسټیزې کلیمی په روانه افغاني راوړل شي. هغه نومونه چی ټاکل شوي، داسی نومونه دي، چی د هغه شي ماهیت په کی روښانه دی. دا کا د هرڅه لمړی ددې لپاره باید وشي، چی په پوهنیزو شیانو او نومونو پوهیدل باید ساده شي.

په پوهنه کی له بلی ژبی تیریدنه ناشونی ده او یا په بل عبارت په بله ژبه صرف نظر نه شي کیدی. دلته هم هدف دا نه دی چی افغاني ژبه دې د نورو ژبو د لغاتو څخه پاکه شي، دا کار یواځي هلته کیږي، چی یوه ژبه له پوهنی وروسته پاتی وي. د پوهنیزې ودې سره ژبی ته د نورو ژبو لغات رانتوځي او ضرور هم دي. ما کونښن کړی چی که د کوم لغات لپاره د پښتو نوم یا نه وي او یا مناسب نه وي، هغه په جهانی موجه لغاتو ولیکم.

دا چی افغاني د افغانستان ژبه او بیبا هم زیندی شوې ژبه ده، دا د دولت کار وو او افغاني ژبی ته د تنفس ورکولو یا بهتره د افغاني ژبی د زیندی څخه خلاسون یا د افغاني ژبی څخه د لعنت د کړی لري کولو دنده هم د دولت ده، خو ترهغي باید موږ هم دې ته پام ولرو او دا پاملرنه خپله دنده وگرځوو.

د يوه ولس په ژبنيو ستونځو هلته پوهيدل ممکن کيږي، چي څوک د ژبي سره په پوهنيزه توگه مخامخ شي. په افغاني ژبه دلمري ځل لپاره داسي يوه ليکنه د ستونځو سره مل ده، مگر ناشوني نه ده.

دلته غواړم چي دې ته هم گوته ونيسم، چي د نومونو په ټاکلو کي ما کله کله دوه نومونو کارولي، چي هغه مي په ټول کتاب کي شايد اصلاح کړي نه وي، خو په دې باور لرم چي په هدف کي ستونځي نه پيښوي لکه د بيلگي په توگه: ما لمري گڼپوهنه لکيلي وه، چي وروسته مي شمير پوهني باندي واروله، شايد په ټولو ځايونو کي مي نه وي شميرپوهنه کړي. درېگودي ما لمري دريکونجی ليکلي وو، چي دا هم شايد د کتاب په اوږدو کي نه وي اصلاح شوی، داسي نور څه به هم وي، خو دې ته بيا گوته نيسم، چي د پوهيدلو لپاره دا کومي ستونځي ه پيښوي.

#### ۲ - تخنيکی ستونځی:

د گرانو لوستونکو پام به دې ته راوگرځي، چي څمور لپاره د داسي کتاب ليکلوپه لار کي تخنيکی ستونځي هم خورا زياتي دي. ما په کمپيوتر د شميرپوهني د فرمولونو ليکلو سره ستونځي لرو دي، نو له دې امله مي د نورو کتابونو دکاپيو څخه بياتي کړي او دلته مي سرينس کړي، چي کله کيږي هم سرينس شوي دي او په دې هم پوهيږم، چي دا يو غير قانوني کار هم دی، خو هيله ده چي د رااخستلشووکتابونو ليکونکی او چاپوونکی به دې ته تفاهم ولري او زه له دوي د هرڅه له مخه د دوي له دې تفاهم څخه د خوښی څرگندونه کوم.

غواړم د گرانو لوستونکو دې ته هم پام راوگرځوم چي املايي غلطی به شوي وي،، خو په پوهيدلو کي به ستونځي پيښي نه کړي، د هغي بڅښنه غواړم، زه نور دا کار نه شم ځنډولی، ځکه چي ډير ورسره ستړی شوم.

ما هيڅ دا فکر نه کاوه، چي زه دې داسي يو کار سر ته ورسوم، خو خداي (ج) په

حرکت کی برکت ایښوولی دی.

لنډه دا، چی ددی کتاب د چاب پورې چمتووالي کار ټول زما په غاړه وو، چی زه ورسره همدومره ستړی شوی هم یم او نورې سهوې او د غلطیو سمولو لپاره می نور د زړه زور ختلی، که څه هم په دې اخرو ورځو کی د ملگرو په فشار ما ، ځما په فکر ټولی سهوې لرې کړی.

دریم - کتاب د کومو لوستونکو لپاره دی؟

گران لوستونکی به د را اخستلشو کتابونو څخه دې ته پام راوگرځولی شي، چی دا کتاب د نوو څه ډول لیکنو څخه راټول شوی. ددی کتاب لوستونکی د پوهنتون د شمیرپوهنی، پیداښتني پوهنو، اقتصاد او همداسی د نورو پوهنو زدکړي دي. دا کتاب په ښوونځي کی هم کارول کیدی شي، خو ښوونکی باید دې ته پام وکړي، چی هغه څه، چی د کتاب په پیل کی هم دي، په پیل کی نه شي لوستل کیدی. ختی څه په همدې لمړی برخه کی راغلي، چی نابلدو زدکړونکو ته به ستونځي پیدا کړي، خو دې ته د لږ پام وروسته، پام راگرځیدلی شي.

څلورم - دلوستلو وړاندیز

ما لږ ستونځي لرو دې، چی دا کتاب په خپله خوښه ترتیب کړم. زه مجبور شوم چی یو کتاب د بنسټیز کتاب په توگه ونیسم او د نورو کتابونو رااخذتني بیا په کی ځای کړم.

ما د بنسټیز کتاب په څیر د شیفر-جورج-تریپلر کتاب ونیوه. نو له دې امله می برخه ویش هم په همغه ډول کړی. ما غوښتل، چی د کتاب پیل په سمسوح یا بهتره سم اند ( لنډ سمند ) یعنی منطق وکړم، خو هغه په اوومه برخه کی څیرل شوی. ځما وړاندیز دادی، چی اوومه- اتمه او نهمه برخه دې د هرڅه لمړی ولوستل شي



اومه اتمه او نهمه برخه څمور په هیواد کی زما په فکر ، چی نا آشنا وی . په هر صورت د اوومی برخی سریزه خودی د هرڅه له مخه ولوستل شي او همداسی د ډیری پوهی سره اشناینه هم خورا ضرور ده

شپږم . مننه

ددې کتاب لیکلو کی ، که څما د دوستانو لخوا دې کار ته راهڅول نه وی ، نو دا کار سرته نه شو رسیدلی ، په تیره بیا په المان کی د « افغانستان کلتوري ودې ټولنی » دوستانو . زه له دې د ټولو د زړه له کومی خوښنه کوم . د دې ټولنی د غړو او پلویانو زیاته خوښتنه ، چی ددې کتاب چاپ یی د ټولنی په چوکاټ کی په غاړه اخستی .

ډیر محترم پوهاند مجاور احمد زیار څخه زیاته مننه ، چی د لغاتو د نظر څخه تیریدنه او همدا ډول په ټولو ماناوو کی ماته خورا گټوره مشوره هم راکړې . زما میرمن زما د ستونځو شاهده وه . په زړه ناروغه ، خو په پراخه او لوی زړه او پوره حوسیله یی زما د دې لیکنی ملاتړ کاوه ، چی بی ددې له ملاتړ به دا کار هم سرته نه وی رسیدلی ، که څه هم دا به یی کله کله ویل ، چی گوندې پیسی می باید گټلی وی ، خو په دې پوهیږی ، چی ددې چانس نه شته ، کله کله به ، چی به تنگه شوه نو ویل به یی چی نور دا د چرگانو ټونگی باید بس کړم . له دې امله زما دمیرمن ښاپیږی څخه هم د زړه له کومی خوښنه کوم او دا پراخه سینه او دا ناروغه زړه یی همداسی ښه تکړه ورته د لوی خدای (ج) څخه غواړم ، چی زما د داسی کارونو ملاتړ نور هم وکړی .

راتلونکی کارونه: د همدې کتاب سره سم ما یو د هندسی کتاب ژباړلی ، چی د

المان د پنځم ټولگي څخه هندسه په کي راغلي د څه نونورو شمير پوهنيزو موضوعاتو سره. دا به هم په دې کتاب پسي ټولي چاپ ته ورکړي شي.

زه يو بل خوب هم لرم، چي همدا اوس دې د يوه بل الجبر کتاب ليکلو باندې پيل وکړم. موضوعات مي په سر کي راگرځي.

که چيرې نور دوستان او شمير پوهان د شمير پوهني په څانگه کي څه ليکل غواړي او په دې هکله ستونځي لري، او ستوځوييو وړانديزونه لري نوزه به ورسره وعده وکړم، چي دلته افغانان و ملاتړ ته راوهڅوم. د هغو دوستانو سره چي د شمير پوهني کوم کتاب ته يي د ژباړني نيت وي او په افغانستان او پاکستان کي ژوند کوي نود هغو سره به وعده وکړم چي دلته ورته په دې ټولنه کي او يا د ټولني دباندې د مرستي هلي ځلي وکړم. ځما هدف دادی، چي موږ بايد داسي کارونو ته ملا راوتړو.

له ما څخه لت بل څوک نه شته، دا چي ما دا کار سرته رسولي، باور وکړي، چي هر بل افغان يي هم سرته رسولي شي،

په مينه ستاسو ماخان

افغاني ، يوناني او الماني الف بي

ا	ب	پ	ت	ت	پ	ت	ا
ځ	څ	ځ	ح	خ	ځ	څ	ځ
ر	ډ	ز	ژ	ږ	ڙ	ښ	ر
ظ	ع	غ	ف	ك	گ	ق	ظ
م	ن	و	ه	ي	ې	ی	م

الماني الف بي

A a	<i>Aa</i>	Ⓐ ⓐ
B b	<i>Bb</i>	Ⓑ ⓑ
C c	<i>Cc</i>	Ⓒ Ⓒ
D d	<i>Dd</i>	Ⓓ ⓓ
E e	<i>Ee</i>	Ⓔ ⓔ
F f	<i>Ff</i>	Ⓕ Ⓕ
G g	<i>Gg</i>	Ⓖ ⓖ
H h	<i>Hh</i>	Ⓗ ⓗ
I i	<i>Ii</i>	Ⓘ ⓓ
J j	<i>Jj</i>	Ⓣ Ⓣ
K k	<i>Kk</i>	Ⓚ Ⓚ
L l	<i>Ll</i>	Ⓛ Ⓛ
M m	<i>Mm</i>	Ⓜ Ⓜ

N n	<i>Nn</i>	Ⓝ Ⓝ
O o	<i>Oo</i>	Ⓞ Ⓞ
P p	<i>Pp</i>	Ⓟ Ⓟ
Q q	<i>Qq</i>	Ⓠ Ⓠ
R r	<i>Rr</i>	Ⓡ Ⓡ
S s	<i>Ss</i>	Ⓢ Ⓢ
T t	<i>Tt</i>	Ⓣ Ⓣ
U u	<i>Uu</i>	Ⓤ Ⓤ
V v	<i>Vv</i>	Ⓥ Ⓥ
W w	<i>Ww</i>	Ⓦ Ⓦ
X x	<i>Xx</i>	Ⓧ Ⓧ
Y y	<i>Yy</i>	Ⓨ Ⓨ
Z z	<i>Zz</i>	Ⓩ Ⓩ

يوناني الف بي

A α	<i>A α</i>	Alpha
B β	<i>B β</i>	Beta
Γ γ	<i>Γ γ</i>	Gamma
Δ δ	<i>Δ δ</i>	Delta
E ε	<i>E ε</i>	Epsilon
Z ζ	<i>Z ζ</i>	Zeta
H η	<i>H η</i>	Eta
Θ θ	<i>Θ θ</i>	Theta
I ι	<i>I ι</i>	Iota
K κ	<i>K κ</i>	Kappa
Λ λ	<i>Λ λ</i>	Lambda
M μ	<i>M μ</i>	My

N ν	<i>N ν</i>	Ny
Ξ ξ	<i>Ξ ξ</i>	Ni
Ο ο	<i>Ο ο</i>	Omikron
Π π	<i>Π π</i>	Pi
Ρ ρ	<i>Ρ ρ</i>	Rho
Σ σ	<i>Σ σ</i>	Sigma
Τ τ	<i>Τ τ</i>	Tau
Υ υ	<i>Υ υ</i>	Ypsilon
Φ φ	<i>Φ φ</i>	Phi
Χ χ	<i>Χ χ</i>	Chi
Ψ ψ	<i>Ψ ψ</i>	Psi
Ω ω	<i>Ω ω</i>	Omega

↑ ډاډميټا  
ډاډميټا ډاډميټا

شمیر پوهنیزې نخښې

=	..... مساوي
=(=)	نامساوي (نور و کتابونو کی)
<	کوچنی له .....
>	لوي له .....
≤	کوچنی یا مساوي له .....
≥	لوي یا مساوي له .....
≪	ډیر کوچني .....
≫	ډیر لوي .....
~	ورته یا متناسب .....
≈	کونګرو اینڅ .....
	همداسی یا بشایي یا په ګوره کوي
≡	کټمتی .....
	غبرګ .....
	ناغبرګ .....
⊥	ولایر په .....
△	دریګودی .....
○	ګردی .....
⊙	نیمی یا قطر .....
<	کونج .....
< (g,h)	د دوه کرښو g او h ترمنځ کونج
$\overline{AB}$	کرښه، له A و B ته .....
$\vec{AB}$	له A و B ته لوریزه کرښه .....

	AB	.....	لينده
	a	.....	مطلقه ارزښت د
	i	.....	ايماجينار يوون (واحد)
	e	2,7182818... =	د اويلر گڼې
		3, 14149... = $\pi$	پي د لودولف گڼې
	->		د په لور هڅيرې يا کونورجنت کيرې
	$\infty$	.....	ناپای
	f(x)		د x فنکشن يا په واک چي بلواک موبللی
			(لوستل يي ( f د x يا د f, x لنډ : fx )
	f: x →	f(x) → x	د x خيرونه په f(x) : لیکو:
		h(x); g(x)	دلته h د x فنکشن، g د x فنکشن
	lim	.....	ليمس يا پوله
sin		.....	ساین
cos		.....	کوساین
tan		.....	تانجنت
cot		.....	کوتنجنت
arc sin		.....	ارکوس ساین
arc cos		.....	ارکوس کوساین
arc tan		.....	ارکوس تانجنت
arc cot		.....	ارکوس کوتانجنت
	$\log_a$		لوگاریتم و بنسټ a ته
	$\lg_{10}$		لوگاریتم و بنسټ 10 ته
			دیکادیکی لوگاریتم
	ln		لوگاریتم و بنسټ e ته
			طبعي يا پیدایښتي لوگاریتم

C	..... کمپلکس ګڼونه
IR	..... رییل ګڼونه
Z	..... ټولګڼونه
	نامنفی ټولګڼونه یا
$\mathbb{N}^*$	طبعي ګڼونه د صفر سره
$\mathbb{N}$	..... طبعي ګڼونه
D	..... تعریفه پیری
W	..... ارزښته پیری
L	..... حل پیری
$P(A)$	د $A$ ډیري پوتنځه پیری
$M, N, A, B$	..... ډیری
$\emptyset$	..... تشه پیری
	برخه ډیری
	پورته یا لویډیری (چی بل ډیری خوندي لري)
$\cup$	..... ټولنه پیری
$\cap$	..... غوڅه پیری
$CA, A'$	د $A$ کومپلیمنت
$A \sim B$	د ډیری ورته والی
$A \times B$	د ډیریو څل
	لوستل $B$ اتیران $A$ یا - حل -
$A \setminus B$	توپیر ډیری : $A$ بی له $B$ ده
$a   b$	دلته : $a$ د $b$ پرویشونی ده یا $a$ $b$ ویشي
$\text{ggf}(a, b)$	د $a$ او $b$ غټ ګډ په ویشونی (لنډ : غ ګ و )
$\text{kgv}(a, b)$	د $a$ او $b$ کوچني ګډ زیاتڅله (لنډ : ک ګ څ )

$a \in M$	دلته $a$ د $M$ توکی دی .....
$a \notin M$	او $a$ د $M$ توکی نه دی .....
$\forall$	ټولنڅښنه (د ټولو $x$ لپاره باور لري)
$\exists$	د موجودیت نڅښنه: یو $x$ موجود دی
$A \wedge B$	کونیونکشن $A$ او $B$ لیکو
$A \vee B$	دیسینکشن $A$ یا $B$ لیکو
	(کله کله الترناټیو)
$A \Rightarrow B$	ایمپلیکاشن: له $A$ څخه $B$ لاس ته راځي
$\neg$	نیگیشن یا نه والی
$A \Leftrightarrow B$	د $A$ او $B$ ویناو ورته والی یا اکویوانت
	له $A$ څخه $B$ لاس ته راځ او له $B$ څخه $A$ لاس ته راځي.
$\ A\ $	ماتریکس..... $A$ نورو کتابونو کی
$ A $	دیترمینانت
$\sqrt{a}$	د $a$ څخه $n$ -مه ریښه
	د $x$ اکسپوننشبلبلواک
$n!$	د $n$ - فاکولتیت یعنی $n! = 1.2.3...n$
$\binom{n}{p}$	بینومخلوونی
	لوستل: $n$ په $p$ باندي
$] a, b[$	له $a$ تر $b$ واز اینتروال $= \{ x \mid a < x < b \}$
$[ a, b ]$	له $a$ تر $b$ بند اینتروال $= \{ x \mid a \leq x \leq b \}$
$] a, b ]$	کین واز اینتروال $= \{ x \mid a < x \leq b \}$
$[ a, b [$	بسی واز اینتروال $= \{ x \mid a \leq x < b \}$

$$\sum_{k=1}^n$$

د زیاتون نڅښه (سیگما)

که د زیاتون نڅښه داسی وي

لوستل: له  $i=1$  تر  $n$  پورې

$$\prod_{i=1}^n$$

ځلنڅښه (پی)

که داسی لیکل شوي وي

لوستل: له  $i=1$  تر  $n$  پورې

پرموتیشن یا بدلون

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \end{pmatrix}$$



## ۰ ۱ د شمیرپوهنې سم اند (د ریاضیاتو منطق (logic))

سم اند (سماند) یا منطق (logic یونانی کلمه ده، چې اند (فکر) یا وی (لغات) ته وایی).

د وینا د ټیک یا کره فرمولولو لپاره د سم اند (منطق) څخه کار اخستل کیري د فورمال سم اند، د سم اند پوهنې بنسټ، د فکر ډول او فکر کولو قوانینو په څیر یې څیرنه د اریستو تلس (۳۸۴ تر ۳۲۲ ز. ک. ا.) له خوا کینول شوي.

د ریاضیاتو منطق (د شمیرپوهنې سم اند) د شمیر پوهنې د یوې برخې په څیر پرمختګ یا وده وکړه. سم اند د شمیرپوهنې بنسټ دی او د شمیر پوهنې په ټولو څانګو کې ننوتی.

یادونه: سم اند په خپله څټه کې په فلسفه پورې تړلی مسلک دی نو له دې امله دا لیکنه د ټولو مینه والو لپاره په زړه پورې خونديونې (متن) لرو دی شي. هیله ده، چې ګڼ هیوادوال به یې وګوری او کمی به یې راپوره کړي، دلته او یا په ځانله لیکنه کې.

### ۰ ۱. ۱ پوهنیزه ژبه او پیدایښتي- یا طبیعي ژبه

اند (فکر) او ژبه یو له بل سره داسې تړلي، چې بیلیدنه یې ناشوني ده. په ورځني ژوند کې انسانان خپل اند یا فکر په طبیعي ژبه څرګندوي، مګر دا د مسلکي ژبې په څیر د

پوهنی (علم) لپاره بسيا نه کوي، ځکه چې د ځنو لغاتو مانا کره یا ټينگه نه ده ټاکل شوی، دا په دې مانا، چې په طبيعي ژبه کې يو لغات بیلې بیلې ماناوي لري لکه لور(د ریلو لور) او لور (په کومه لور) او یا څو لغاتونه ، لکه شلغم، ټیپر او منگریټي، چې همغه یو څه یا شی په گوته کوي.

په مسلکي نومونو کې یو څو ترمینولوجي (Terminology لاتین، یونانی): په یوه مسلک کې شته (موجود دي) د مسلکي لغاتونو ټولگه او په همدې توگه د هغوي بنسونه ، منځ ته راوړل کيږي، چې د کلمو موخو (هدفمند) کره یا کلک ایښوولو ( ځای پرځای کولو) د نورمي ویناو استعمال او د هغوي او د ورځنۍ ژبې وینادود څخه گټه اخلي.

په دې ډول په شمیر پوهنه یا ریاضیاتو کې هم یوه پوهنیزه ژبه منځ ته راغلي، چې له پیدایښتي یا طبيعي ژبې او یوې ځانگړې ترمینولوجي سره یوځای شوي یا په بل ډول : د پوهنیزې ژبې او یوې ځانگړې ترمینولوژي ټولگه ده.

له دې امله شمیر پوهنه په یوه لوړه کچه ټیکوالی ( Exaktheit ) ، په یوه لنډ، روښانه ، څرگند او له دې امله یو لیدور « وینا ډول» درلودی شي .

شمیر پوهنه او سم اند یا منطق دواړه د یوې سمبولیک ژبې څخه د کارونې یا استعمال کار اخستی شي. د لغاتو په ځای نڅښی ایښوول کيږي، چې مصنوعي منځ ته راغلي او په ځانگړو ماناو سمبال دي .

د شمیر پوهنی پوهنیزه ژبه کې غوښتنه داده، چې باید په کلکه او روښانه توگه د ریښتونو ( Realität واقعیتونو) شیانو Objects ، د هغو شمیرنیزو څیرو او د دې لپاره پیدا یا منځ ته راغلو نڅښو تر منځ توپیر وکړي. شیان له انسانانو احساسیږي، د یوه ذهنیت ( Abstruction ابسترکشن) له لارې په یوه کلیمه څیره ( متصور؟ ) کيږي. او شته والی یې د یوې نڅښې جوړښت construction ممکنوي. څیره کوونه یې د شمیرنې شیان دی او یوه «نڅښونه» غوره کوي، چې دیوه نوم اوزیات وخت د یوې نڅښې په څیر ځان نیسي، د بیلگې په توگه : لکه هر طبيعي گڼ(عدد) د یوې نڅښې داسې په نامه د عددنڅښې (گڼنڅښې) له لارې انځور یږي. دا نڅښه څیفر Ziffer یا گڼنڅښه(عددنڅښه)، چې عربي همغه صفر دی، بلل کيږي. داسې نڅښونې د بنسټیزو نڅښو څخه منځ ته راغلي. په درسي ځای سیستم کې بنسټیز څیفر ونه یا گڼنڅښې په لاندې ډول دي:

۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹ .

### ۱۰۱ د شمیر پوهنی سم اند بنسټیزې کلمې

#### ۱۰۲۰۱ ثابتې، متحولې او ترومونه(۱)

Constants, variables, terms

په شمیرپوهنه کې شیان ، د شیانو ترمنځ اړیکې او د شیانو ترنې په نڅېنو ( سومبولونو ) انځورېږي.

#### ۱ – شمیرپوهنیزې نڅېنې

- د ثابتو (تل همغو) لپاره نڅېنې ( علامې): دا د یوه کره ټاکلې مانا لپاره نڅېنې دي یانې تغیر نه خوري، لکه  $e, \pi, 12, 7$  او داسې نور

- د اووښتونو یا واریابلو(متحولو) لپاره نڅېنې: دا د یوې ورکړ شوي ډیرۍ یا ست ( په ډیرۍ پوهنه کې روښانه کيږي) داسې په زړه پورې توکي لپاره یوه نڅېنه ده، کومه چې د اووښتونو یا متحولو بنسټسټ یا-ډیرۍ بلل کيږي، دا په لاتین تورو په نڅېنه کيږي او کله کله په اندکس (ز) ایندکسونو) یا پیژندنڅېنه index ( ز ) پیژندنڅېنې Indices ) چې ایندکس د تورو پښو ته راځي په نڅېنه کيږي \*

لکه:  $a_1; a_2; b_i; i = 1,2,3 \dots$

- اړیکنڅېنې : دا د شیانو اوگنونو یا اعدادو ترمنځ د اړیکو نڅېنې دي لکه  $<, >, =, \leq, \geq,$

- د نښلونو، کارونو، ترنو یا عملیونڅېنې : لکه زیاتون-(جمعه)، کمون-تفریق-)، ځل- (ضرب-)، او ویش -یا تقسیم نڅېنې:  $+, -, *$

- تخنیکي نخبني : لکه سیمیکولوم (,, ,), نوکان ( ) او نور ډولونه یې او کوما ، د نخبنو لړۍ : که نوکان، واریابلی (اووښتونې)، ثابتی او د هغوي یوځاي ایښودل د اړیکو- ، نښلونو- ، او تخنیکي نخبنو یوځاي ایښوول موخه ور یا هدفمند یو په بل زیات شي، نو یوه د نخبنو لړۍ ترې منځ ته راځي .

(۱) ثابتي(تل) همغه یا تل همغه، همغه ارزښتيزي) ،

متحولي: اووښتونۍ یا اووړیدونۍ یا واریابلي او ترمونه

بیلگه :

الف : د  $3(2a + 1) - a + 144$  یوه د نخبنو لړۍ (ترادف) ده

ب :  $11x = 3a - 6$  ،  $(12 - b)$  ، دا د نخبنو لړۍ نه ده، ځکه چې د نخبنو لړۍ موخه وره یا هدفمنده نه ده ایښوول شوي، د برابر نخبني پسي نوک نه شته، دا په دې مانا، چې له دې څخه څه نه پوهیږو.

۲- ترمونه terms, Termen : که په یوه لړۍ کې، یوځاي ثابتي ( همغه )، اووښتونې ( متحولي، واریابلي) نښلونې او تخنیکي نخبني کارول شوي وي، یانې اړیکي نه وي کارول شوي، نو دې ته ترم ویل کیږي. هر یو ترم پوري که واریابلی ولري پیژندډیری یا تعریفست هم اړه لري، دا د داسې اووښتونو یا متحولو اصلی بنسټست یوه برخدیری او یا هغې سره برابر برخه ست یا - ډېری ده، په کوم کې چې د ترم ارزښت بیرته د بنسټدیری توکی دی. د ترم ارزښت شمیرل کیدی شي، که د مخه ټاکلشوي ناروني یا عملیې اجرا شي، که چېرې اووښتونې یا واریابلي د پیژندډیری د توکو نخبنونه غوره کړي. دا په لویو لاتین تورو (اکه:  $T, T_1, T_2$ ) په نخبنه کیږي. که ترمونه اووښتونې ولري، نو د اووښتونو یوه ورزاته نخبنه په نوکانو کې نیولکیږي، لکه :

$T(x); T(x,y)$

بیلگه :

الف : ترم  $126 + 3/4$  ، چې اووښتونې یا متحولې نه لري په  $T$  سره په نڅښه کوو او

$$T = 126 + \frac{3}{4} \quad \text{یا} \quad T = 126 + 3/4 \quad \text{لیکو:}$$

ب : ترم  $10 + 2x$  چې اووښتونې یا متحولې  $x$  لري یانې  $T(x) = 10 + 2x$  د

اووښتونو بنسټیږی یا ډېری دې یا د طبیعي اعدادو ډیری  $N^{\circ}$  وي

تعریفیږی د بنسټیږی سره برابره ده، که په ترم کې د اووښتونې یا واریابلی  $x$  په ځای

یو پیدایښتی گڼ یا طبیعي عدد 2 کیږدو، نو د ترم ارزښت دی :  $T(2) = 14$

$$\frac{x+2y}{x} \quad \text{یا} \quad (x+2y)/x \quad \text{پ:}$$

ترم دی چې دوه متحولې لري او په  $T(x,y)$  سره یې په نڅښه کوو . د اووښتونو یا متحولو بنسټیږی دې د پیدایښتی یا طبیعي اعدادو ست  $N$  وي، نو د  $x$  لپاره تعریفیږی  $N^{\circ}$  ده . د  $y$  لپاره  $N$  (پیدایښتی گڼوډیری  $N^{\circ}$  تعریفیږی لپاره ترم نه دی تعریف یاپیژند نه لري)

د  $x = 0$  لپاره ترم نه دی تعریف یا پیژند ند لري

$$T(x, 2y) = \frac{x+2y}{x} \quad \text{یا} \quad T(x, 2y) = (x,y) / x \quad \text{د ترم}$$

ارزښتشمیرنه د  $x=2$  او  $y=3$  لپاره په دې ډول ده :  $T(2,3) = (2+6) / 2 = 4$

یادونه: د گڼونو لپاره دې دریمه او څلورمه برخه وکتل شي، چې هلته گڼوډیری ورکړ شوي دي .

دا چې انسان د خپل چاپيريال د ټولو شيانو او پيدايښتونو سره لاس په گريوان دی، نو پوښتنې او هيلې رامنځ ته کيږي، غوښتنې لري او ويناوې کوي، په کومو ويناو کې،

چې شيان او ريښتوني (واقعيتونه) بيرته هنداره (منعکس) کيږي يا په يوه څه يا شي، چې وينا کيږي، نو موخه ترې د هغه څه ريښتون حالت يا ځاننيونه ده. يوه وينا په واقعيت کې ټيک هلته ريښتيا ده، کله، چې په هغې کې شي حالت يا بهتره شي ځاننيونه په ريښتوني شته يا موجود وي، په بل حالت کې دا وينا نارينتيا (غلطه) ده. مور نيسو، چې دا څه دې په شميرپوهنه کې کره ټاکلي وي او پرېکړه دې پرې کيدی شي.

پژند( تعريف ) ١٠١ :

وينا د يوه شی ، څرنگوالي (چې څنگه دی)، د هغه بيرته هندارونه يا منعکسونه ده. ( دا په دې مانا، چې وينا يو شی په وينا کې هممغسی بنایي لکه څنگه چې دی له دې امله شي هندارونه يا منعکسونه)، چې د ژبې له لارې وړاندې کيږي يا په همدې ډول په نڅېنه کيږي.

يا په بل عبارت وينا د کلیمو داسې هدفمند يوځايوالي يا يوځاي ايسنول دي، چې د يوه شی حالت (ځاننيونه) يا شکل او د شيانو ريښتوني اړيکې بيرته هنداره يا منعکسوي او موخه وردي، چې د هغه دريښتياوالي پوښتنه رامنځ ته کړای شي.

يا په بل ډول :

د وينا لاندي سړی يو ژبنی يوون، يا يووالی ( واحد ,Einheit, unit) پوهيږي، کوم چې د شي اړيکې ( د شي څرنگوالي) بيانوي. دلته دا مهمه نه ده، چې دا وينا په کومه ژبه، په پيدايښتي (طبيعي) او که په مصنوعي ژبه ويل شوي ( افاده شوي) دا هم غوره نه ده، چې دا وينا د طبيعي پوهنو لپاره ده، د هوا حالاتو لپاره او که د بازار د نرخ لپاره ده.

په بل او ورځني ډول: يوه وينا يوه جمله ده يا فرمول دی، چې يا رښتيا او يا نارښتيا ده. داسې هم ويل کيږي، چې وينا يو «رښتيا ارزښت» ،، رښتيا يا نارښتيا ،، لري.

یعنی : د شمیرپوهنې سم اند لپاره پریکړی د وینا « رینتیا ارزښت» (رېښتیا یا نارېښتیا) دی. نور خوږونه په راتلونکی کې نه څیرل کیږي.

ویناوې د لاتین په لویو تورو  $A, A^*$  په نڅښه کوو او داسې نور.

### ۱ ۰ ۲ ۰ ۳ د دوه ارزښتوالی اصول یا پرینځیپ جمله

هره وینا یواځی یو ممکن « رینتیا ارزښت» لږودی شي، دا په دې نامه، چی وینا یا رینتیا ده او یا نارینتیا. ( د دریم نه والی اصول یا پرینځیپ).

دا په دې ماناو چی ددې دوه ارزښتونو تر منځ بل ارزښت ناشونی دی. دوه ارزښتوالی او د دریم نه والی باید سره بدل نه شي.

که یوه ژبنی افاده یا وینه د وینا په څیر ترتیبوو، دا بیا دلته ارزښتناکه ده، چی د وینا ارزښت حتماً باید څرگند یا معلوم نه وي. که بالاخره ټوله پوهنه د رېښتیا لور غوره کړي وي، بیا هم مور څرگند ژبنيو موادو ته اړ یو، چی د هغه شي حالت (ځانښوونه) افاده کړای شو یا وویلی شو، د کومو په شته والی یا نه شته والی، چی پریکړه وشي.

ټولې ویناوې له دې امله په دوه ټولگیو یا کلاسو ویشل کیږي، د رېښتیا ویناو ټولگی او د نارېښتیا ویناو ټولگی یا کلاس (صنف).

که وینا رینتیا وي، نو رینتیا ارزښت یې رینتیا دی او په  $w$  سره یې ښایو، که وینا رینتیا ارزښت نارینتیا ولري، نو په  $f$  یا، نه، یې ښایو او ویو، چی د وینا رینتیا ارزښت نارینتیا دی.

تکرار : هره جمله، چی « رینتیا ارزښت» ( رینتیا یا نارینتیا) ولري، وینا بلل کیږي

شميرپوهنيز سم اند (منطق) د ويناو سره سر او کار لري..

بيلگي:

غونډاله ( جمله )

الف : « د کابل سين د کونړ له سين سره گډيري» ريښتيا وينا ده .

ب :  $3 + 4 = 7$  ريښتيا وينا ده

پ : « ۶ لومړنی گڼ دی» دا نارينتيا- يا ناتيک وينا ده ( د اعدادو

په برخه کي لومړني اعداد يا گڼونه کتلکیدی شي)

پوښتنجملی : « ته د څو کالو يي ؟ » نه شي کیدی يو ريښتيا ارزښت باندي تنظيم شي . له دې امله وينا نه ده .

نورې بيلگي :

ويناوې دي:

(دپيتاگوراس (فيثاغورس) جمله .

د کاتيتونو يا د يو بل سره ولاړو يا عمودو اړخونو يا ضلعو مربعگانو (څلوريو) زياتون (جمعه) د هيپوتينوزي (اورده اړخ قاپمي زاويې ته مخامخ ضلعه يا قطر) د څلوري يا مربع سره برابر دی.

نورې بيلگي :

سرک لوند دی

ټول سپي خطرناک دي



په لاندې کې که یو کاربن له دوه اکسیجنه سره یوځای یا زیات شي، نو کاربن دوه اکسید  $CO_2$  وښايي

د دي پرخت یا مخامخ یا پر خلاف یا برعکس : ویناوې نه دي:

د کابل ښار; NaCl; لمده کوڅه

د افغانستان د خلکو ژوند په دیرش کلن جنگ کې

لاندې ویناوې

کیمیا یوه طبیعي یا پیدایښتي پوهنه (علم) ده

۷ پر دريو بی له پاتي (باقي) نه ویشل کيږي

د وينا «ريښتيا ارزښت» ريښتيا لري

لاندې ویناوې

برلین یو کوچنی ښار دی

$5 < 3$  پنځه له دريو کوچنی دی

ټول لومړني اعداد یا اگونونه ناجوره (طاق) دي

کابل د کونړ پر سین پروت دی

هره یوه له دي ویناو « ريښتيا ارزښت » نا ريښتيا لري

نومه ونې: پورته مې د جفت لپاره، چې ورسره بلد یو جوړه ولیکه، نو طاق ته ناجوره وایو .

په لاندې کې به وځیرو، چی ویناوې شته، چې نورې ویناوې د خپلې برخې په څیر په ځان کې خوندي ( لنډ : خوندي) لري . داسې ویناوو ته یوځاپشوي یا یوځای ایښول شوي یا ځنځیري ویناوې وایو او که غواړی ! مرکبي ویناوې.

د دې لپاره بیلگه راوړو « که د کوم گڼ(عدد) a پروت زیاتون یا پرته جمعه په 3 ویشور وي، نو دا عدد یا گڼ په 3 ویشور دی، یانې که عدد 1521 ولرو ، نو د دې عدد پرته جمعه  $9=1+2+5+1$  په 3 ویشور ده له دې لاس ته راځي، چې پخپله ۱۰۲۱ هم په 3 ویشور دی.»

که کومه وینا په داسې ویناوو ویشور یا توتته کیدونکې نه وي، نو دې ته بیا ساده وینا ویل کیږي.»

لکه : سپین غر یوه خورا جگه څوکه لري

یوه بله بیلگه د یوځای شوي ( ځنځیري ) وینا لپاره

سپینغر خورا خواریکښ دی، هغه په دې پوهیږي، چې نور کار ته وهڅوي.»

څرگنده ده، چې دواړه ساده جملې د برخویناوو په څیر یوځای شوي ویناوې دي: « سپینغر خورا خواریکښ دی» همدا ډول « هغه (سپیغر) پوهیږي، چې نور کار ته وهڅوي»»

دا ویناوې کیدې شي په نورو ډولونو هم یو له بل سره داسې وتړل شي، چې رښتیا ارزښت یې همغه پاتې شي.»

د بیلگې په توگه:

۱ - سپینغر خورا خواریکښ دی.» یا هغه پوهیږي، چې نور کار ته وهڅوي

۲ - ځکه، چې هغه پوهیږي، نو کار ته وهڅوي، نو سپینغر خورا خواریکښ دی.»

۳ - دا چې سپینغر پوهیږي، چې نور کار ته وهڅوي ، نو سپیغر خورا خواریکښ دی.»

۴ - سره له دې، چې هغه پوهیږي، نور کار ته وهڅوي، هغه خورا خواریکښ دی.»

گورو، چې په دې ډول یو له بل توپیریدونکی تړلې یا ځنځیري، یا یوځای شوی ویناوې جوړیږي، چې په خپله رښتیا ارزښت کی یو له بل توپیر کیدي نه شي.» د دوي توپیر د

دوي يو له بل سره تړلو څرنگوالي له لارې مخ ته پروت دی یا رامنځ ته شوی دی. په لاندې کې به ممکنه «ویناتر نه» (یا نور هم بڼه: ویناځنځیرونه) تر څیړنې لاندې ونيول شي.

پیژند ۲۰۱ :

یوه «ویناتر نه» یا یو «ویناتراو» (نوره هم بڼه: «زنځیرونه») داسې ژبنی وینني (فادي) دي، چې د هغوي په مرسته له یوې یا ډیرو ویناو څخه نوي ویناوې جوړیدی شي.

مور د سم اند یا منطق سټیرینځیپ په لاس ته راوړنو سره ځانونه په داسې ویناو رابندوو، کومې چې داسې جوړې وي، چې ریښتیا ارزښت یې یواځې او یواځې د «برخویناو» ریښتیا ارزښت په واک کې وي.

### بیلگې

الف: سپین ډیر خواریکښ دی، هغه په دی پوهیږي، چې نور کار ته وهڅوي.

ب : سپین یا راځی او یا لوبه نه کیږي.

پ – د فوټبال په لوبه کې نه دباندې رفرې او نه دننه رفرې فاول یا ناسمي ولید.

## ۱ ۰ ۲ ۰ ۴ ویناتر نه یا وینابلواک ( - فنکشن یا - تابع)

د ویناترونو (عملیو) په هکله مو پورته بیلگو کې ولیدل، چې که څوک د ترنو لپاره « او » او یا « سره له دې» ونیسي تل یوه یوځای شوي وینا منځ ته راځي. دا وینا هلته او فقط هلته ریښتیا ده، چې دواړه «برخویناوې» ریښتیا وي. دلته د خبرو پرځای غواړو «ریښتیا فنکشن یا ریښتیا تابع» وپیژنو. مور پریکړه کوو، چې د په زړه پورې ویناوو ( ویناواریابلو یا وینا اووښتونو(وینا متحولو)) لپاره سومبولونه  $p, q, r, \dots$  او یا  $a, b, p$ ، وکارول شي یا استعمال شي. مور دا غواړو ساده پیل کړو، یانې د یوه یو

ځاينپوښکي (يوځائيز يا يوگونې) بلواک يا فنکشن او که همغه پخوانی ډول تابع مو ښه راځي، له تابع څخه.

يادونه: د بلواک يا تابع کلمه وروسته څيرل کيږي، دلته د بلواک يا فنکشن پرځاي وينا تر نه يا عمليه بسيا کوي. دا ځنی ويونه (لغات) ستونځی لري، چی د ښونځي زده کوونکي يې هغه ساده ډول فکر ته رابولم او د لوړو زده کړو خاوندانو ته دا کومې ستونځی نه لري.

### نه والی (نفي) Negation

د وينا تر او يا وينا تر نې (عمليې) «نه والی»: د يوې وينا P نه والی هغه وينا ده، چې هلته او يواځی هلته د ريښتيا ارزښت نارېښتيا لري، چې P ريښتيا ارزښت ريښتيا ولري.

مور د وينا P نه والی نفي په P نه سره ښايو، شميرپوهنيزه نڅښونه يې په لاندې توگه ده: په يوه جدول کې ريښتيا فنکشن يا ريښتيا بلواک کې داسی څرگند وو (دا چې زه کله کله هغه شميرپوهنيز سومبول د نه p لپاره نه شم ليکلی، نو دا به همغسې p نه وليکم.

P	P نه يا $\neg P$
w	F
f	w

د يوې وينا P تکرار نه والي يا بيا نه والي لاس ته راوړنه، لکه چې لاندې يې گورو، هم خورا څرگنده ده.

p	$p \neg$	$p \neg \neg$
w	f	w
f	w	f

دوه واره نه والی د همغې لومړنی وینا رښتیا ارزښت لري

په پیدایښتي ژبه کی نه والی په «نه» یا «نا» خپل رښتینوالی مومي • «اباسین هغه خپل ټاکلی وخت ته را نه غی • دا د اباسین خپل ټاکلي وخت ته راغی «نه والی» دی •

نه والی ته بیلگه : د وینا  $A \neg$  نه والی : “ $3 < 7$ ”, وینا نه  $A$  ده: دا چی  $A$  رښتیا ده، نو  $A \neg$  نارښتیا ده •

ترنه(عملیه) یا کنجکشن Conjunction ( لاتین: ترنه، دلته د « او (and)» ترنه یا تراو):

### وینافورم یا – بڼه:

د وینا په څنډ یا - مخامخ یا - برعکس وینا بڼه رښتیا ارزښت نه لري، د وینافورم یا – بڼي لپاره بیلگی دي لکه پوښتنی، امرونه او نظرونه یا عقیدي:  
۱ – هوا څنگه ده؟

۲ - کورته لار شه

۳ – شین یو بڼه رنگ دی •

که په ترمونو کي، چي واریابلی یا اوبنتوني لري، اریکنځبنی ولیکل شي، یوه وینابڼه منځ ته راځي • یوه د نځبنو لړی کم له کمه د یوي اوبنتوني یا متحولي د بیلگي په توگه

$3 + x < 5$  د بنسټیزو رشو  $N$  کي نه ریښتیا ده او نه ناربیښتیا • دا له دي امله وینا نه ده • که چیرې د واریابلي یا اوبنتوني یا متحولي پر ځاي • او ۱ ولیکل شي، نو بیا یوه رښتیا وینا ترې منځ ته راځي •

که چیرې په ځای یې نور د پیدایښتي گڼونو توکی ځای په ځای شي، نو بیا نارینتیا ویناوي  
منځ ته ترې راځي.

دا چی اووښتوني یا متحولې د بنسټیږی یا بنسټ سټ څخه په خوښه توکی اخستلی شي،  
نو له دې امله دا اووښتوني د خپلواک یا ازاده اووښتوني(متحولې) په نامه یادیري.

پیژند :

یوه وینابڼه د نخبو لری ده، چې کم له کمه یوه خپلواکه اووښتوني(متحوله) لري او د

- د دې اووښتوني په ځای د بنسټیزې ورشو یا ساحې او یا

- د دې اووښتوني ترلو څخه د کوانتفیکاتورونو( کوانتورونو) په مرسته یوه وینا

جوړیدی شي.

یادونه :

که په لاندې کې د تر او یا ترني کلمه منځ ته راځي، نو موخه ترې د « او » ترنه  
یاکنجکشن conjunction دی. له گرامر سره په توپیر، چې هلته ترنه یا تر او یو «  
ترونټکی، تراولغات» ښایي په سم اند کې ترنه یو څرگند( دوه ځایرونکی یا دوه ځاییزیا  
نوره هم ښه دوه گونی) جملې ترل یا په بل عبارت دوه ځایینونکي ( نوره هم ښه : دوه ییز  
یا دوه- گونی) فنکشن یا تابع(بلواک) تعریفوي یا پیژنی.

د « او » ترنه او نخبه یې  $\wedge$

پیژند ۳۰۱ :

$p \wedge q$  دوه ویناوي  $p$  او  $q$  یانې د « او » یوځایوالی  $p$  او  $q$  یواځي او یواځي هلته یو

رښتیا ارزښت رښتیا لري، چې  $p$  او  $q$  دواړه رښتیا ارزښت رښتیا ولري. که له دې

څخه یوه وینا هم نارښتیا وي، نو بیا د « او » ترنه نارښتیا ده.

د ترني نخبه ددوه ويناو  $p$  او  $q$  ترمنځ ليکل کيږي  $p \wedge q$  او ويل کيږي  $p$  او  $q$

مور د « او » ترنه په لاندې جدول کې روښانه کوو يا انځوروو:

يادونه: په لاندې کې  $w$  رښتيا او  $f$  نارښتيا په معنا دي

	$p$	$q$	$p \wedge q$
$w$	$w$	$w$	$w$
$w$	$w$	$f$	$f$
$f$	$f$	$w$	$f$
$f$	$f$	$f$	$f$

د « او » ترني ته بيلگه :

د دوه رښتینو ويناو د  $A$  وينا:  $3 < 7$ ، او د  $B$  وينا:  $3$  يو لومړنی گڼ دی رښتيا وينا  $A \wedge B$  ده «  $3$  له  $7$  کوچنی او لومړنی گڼ هم دی ».

يادونه: مور گران لوستونکي به سره يوځای فکر وکړو، چې دا پريمگڼونه لومړي او که لومړني گڼونه وبولو. زه فکر کوم، چې لومړي گڼونه لومړنی نه دي. دا ځکه لومړي گڼونه دي، چې له دوي له زياتون او يا کمون څخه لومړی گڼونه جوړيږي. مور به يې زياتون په پام کې راولو، چې:  $8 = 5 + 3$

د دوه ويناو دا ترنه يا کنجکشن، چې مختلف رښتيا ارزښتونه ولري يانې د  $A$  وينا:  $3 < 7$ ، (رښتيا او د  $B$  وينا: «  $3$  يو جوړه گڼ دی (نارښتيا)، نو  $A \wedge B$  وينا: چې  $3$  له  $7$  کوچنی دی او جوړه گڼ دی » (نارښتيا) ده. دا وينا ترنه وينا ارزښت نارښتيا لري.

د دوه ويناو د « او » ترنه د  $A$  وينا:  $3 > 7$  او د  $B$  وينا «  $3$  يو جوړه گڼ يا جفت عدد دی » يوه نارښتيا وينا ده:  $3$  يو لومړنی گڼ دی او له  $7$  لوي دی.

و مولیدل، چی د «او» ترنه او یا کنجکشن په ورسره بلده (عادي) توگه هلته جوریري،  
چی دوه ویناجملې په «او» سره وتړل شي:

غوټی «پتیدخاي» پیدا کر او دا پتیدنه یې پټه وساتله» • کیدی شي له «مگر» «سره له دي  
هم» «په همدې ډول» ترنه وویلېه – یا افاده شي •

پورته ډول، د بیلگی په توگه: په پټیکي کي «که سپین پټ شي او هوسی د هغه د پتیدو  
خاي پیدا کړي او دا چاته ونه بنایي»، نو داسي وایو «او» یا «هم»

هوسی د سپین د پتیدو خاي پیدا کړ «او» دا پتیدخاي یې پټ واسته •

۱) هلمند مور(بدا) شو او هیواد یې پرینود •

۲) سره له دي، چی برلین کوچنی ښار دی هلته د منی د المپیک لوبی کیري

۳) ۱۵ گن جوړه دی، د هغه پروت زیاتن په ۳ ویشونی دی

په ټولیزه توگه د «او» ترنه هلته رښتیا ارزښت رښتیا لري، چی د جملی ټولی برخي  
رښتیا ارزښت رښتیا ولري، اړین نه ده، چی نظم په پام کی ونیول شي • په وینا ترنه کي  
کیدي شي زیاتي وینا برخي سره په ترنه «او» وتړل شي لکه «هغه راغی، ویی لیدل او  
بری یې په برخه شو»

پیژند ۱۰۴ :

د «یا (or)» ترنه یا دیسجکشن Disjunction (لاتین: ټاکنه یا پریکره) Alternative  
الترناتیو یا د «یا» ترنه» دا په «یا» بیرته ورکړ شوي «جمله ترنه» تل ژوروالی  
ته راهڅوي: باید جوتنه شي، چی تري تیریدنه یا صرف نظر په نه کیدونکی اوکه  
تري نه تیریدونکی «یا» موخه ده • د دیسجکشن یا د «یا» ترنی پیژند یا تعریف  
یواځنی دی او دا  $\vee$  د یا ترننخبه ده.

د دیسجکشن نخبه د دوه ویناو  $p$  او  $q$  ترمنځ خایول کیري  $p/q$  او ویل کیري  $p$  یا  $q$  او

په لاندې ډول څرگندیږي •



p	Q	$p \vee q$
w	W	w
w	f	W
f	w	w
f	f	f

له دې پورته جدول څخه پوره جوتيري، چې ديسجنکشن يا د « يا » ترنه  $p \vee q$  يو داسې رېسټيټابېل (بلواک يا- فنکشن) دی، کوم چې هلته او هلته رېسټيټا فنکشن رېسټيټا اخلي، کله چې کم له کمه د « يا » ترني يو غړی د رېسټيټا ارزښت رېسټيټا ولري يا واخلي. که د ديسجنکشن دواړه غړي نارېسټيټا وي نو  $p \vee q$  هم نارېسټيټا دی. دا د رېسټيټا فنکشن کې د ځايوني « يا » څخه بل څه نه دي. يوه د «نه خونديکوني» يا «نه ځايوني» يا « په برکې نه نيوني» د « يا » ويينه يا افاده ده، چې دا په نورو ژبو کې په بل ډول مگر په پښتو کې « يا » او يا « لیکل کيږي ».

بيلگه ( د « يا » ترني ته):

د دوه رېسټينو ويناو د « يا » ترنه د A وينا:  $3 < 7$ ، او د B وينا: « ۳ د ۶ پرويشوني دی » يوه رېسټيټا وينا  $A \vee B$  ده: « ۳ له ۷ کوچنی دی او د ۶ پرويشوني هم دی ».

د دوه ويناو ترنه، چې مختلف ارزښتونه لري.

د A وينا  $3 < 7$ ، رېسټيټا او د B وينا:  $3 = 7$ ، ( نارېسټيټا )، نو  $A \vee B$  ده، چې  $3 < 7$  يا  $3 = 7$  دا وينا ترنه د رېسټيټا ارزښت رېسټيټا لري.

د دوه نارښتيا ويناو د « يا » ( "Or " ) ترنه:

د A وينا : "  $3 > 7$  " او د B وينا: ۳ يو جوړه گن (جفتت عدد) دی يوه نارښتيا وينا ده:  $A \setminus B$

« ۳ له ۷ لوي او نا جوړه گن (طاق عدد) دی»

الترناتيو Alternative يا انتيوالنخ Antivalenz ويناوي : دا د « يا » وينا ترنه بايد د « يا ... او يا سره بدله نه شي، ځکه چې دا هلته هم نارښتيا ده، که چيري دواړه ويناوي رښتيا وي.»

بيلگه : ( دوه الترناټيو ويناو ته ، چې رښتيا وي)

د وينا  $3 < 7$  او « ۳ يو لومړی گن دی» د الترناټيو په نامه داسي دی « ۳ يا له ۷ کوچنی دی او يا يو لومړی گن دی» نارښتيا دی.

بيلگی : ( نه والي، کنجکشن، ديسجکشن ته )

يادونه: په لاندي (Wahr) w د رښتيا او (Falsch) f د نارښتيا لپاره کارول شوي.:

وينا تر او

f	$\pi$ پي ټولگن دی	A
W	$\pi$ ايراشنل گن دی	B
W	صفر له پي $\pi$ کوچنی دی	C
f	$\pi$ پي له دري کوچنی دی	D

W	$\pi$ تولگن نه دی	<u>A</u>
F	$\pi$ کوچنی برابر له صفر	<u>C</u>
f	$\pi$ تولگن او له صفر لوي دی	A\C
W	$\pi$ ایراشنل او له صفر لوي دی	B\C
W	$\pi$ پی تولگن یا له صفر لوي دی	A\C
f	$\pi$ تولگن یا له ۳ کوچنی دی	A\D

بیلگه : له دې بیلگې دمخه هغه فرمول دی

یا کتاب لولم او یا فلم گورم . په دې بیلگه کې الترناتیو یا بدیل شته دی، یانې د « او یا » امکان شته . دا د « او یا » کارونه یا استعمال د خرڅلاو شیانو باندې باید بند وي . یانې دوه نرخونه باید ورته ورنه کرای شي .

دا لاندې فزیکي بیلگه ده، چې گران لوستونکي دې پخپله هم ورته پام وکړي او څیره دې یې په پام کې راوړي . په شالته یا سرکت الجبر کې د کجنگشن یا د «او» ترنې» ریننننوالی لپاره دوه پرلپسې (لړی) شالونه تړل شوي دي،

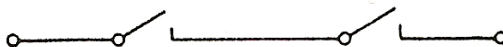


Bild 7.1

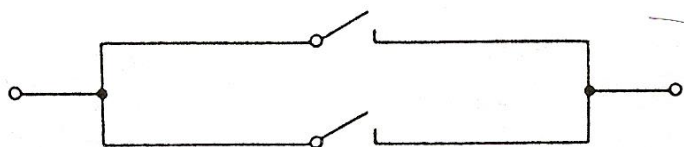


Bild 7.2

## کمپلکس ربنتیابلواک یا – فنکشنونه

دا وروستی بیلگه په گوته کوي، چې داسی یوځای شوې ویناوې جوړیدی شي، په کومو کې چې له یو زیات تړوني موجود وي .

که دا ساده وینا که چې «په تیاتر کې نن لوبه کیري» په  $p$  پس له دې جملې کمپلکس جوړخت دا نه تری تیریدونکی ( ربنتیا - بلواک یا ربنتیا فنکشن «  $p \vee p$  نه دی . د دې لپاره هم د ربنتیارزبنت فنکشن ورکول کیري . د ربنتیا ارزبنت لپاره  $p$  له دې څخه نه  $p$  یا  $p$  نه ( دا دواړه دې برابر ومنل شي) او بیا هم نه  $p \vee p$  جوړیري، چې جدول یې په لاندې ډول ورکړ شوی دی

د یوې وینا نه والی

$p \vee p$ نه	P نه	p
W	f	w
w	w	f

لاس ته راوړنه یا نتیجه هکپک کونکې نه ده یوه وینا نه  $p \vee p$  تل ربنتیا ده، بی له ځانگړي حالت او له دې خپلواک، چې  $p$  کوم ربنتیارزبنت غوره کوي .

ویناسم اندیزې وینې یا افادې، چې د هغې ربنتیابلواک کټمت یا *identisch*(*identical*) ربنتیا دی ( دا په دې مانا، چې که د وینا او وینتونکې یا واریابلي ته هر ربنتیارزبنت ورکړ شي یانې ربنتیا یا ناربنتیا تل د ربنتیا ارزبنت ربنتیاغوره کوي)، وینا سم اندیزه قوانین بلل کیري، یا ورته تاوتولوژي *Tautologien*

ویناسم اندیزې وینې یا افادې، چې د هغو ربنتیارزبنت بلواک کټمت ناربنتیا دی ( دا په دې مانا چې د متحولي یا اووینتونې په هره وینا ارزبنت وینا ناربنتیا ارزبنت غوره کوي)

كونترا-ديكتوریكي وینا بلل کیری ورته ویناوې کونترادیکشنونه contradiction ( د دوه ویناوو مخامخوالی یا - تضاد)

بیلگه :

رښتیا ارزښت دي د ویني يا افادي نه (p\q) لپاره وشمیرل شي په همدې وخت کي دي د نه\q نه p رښتیا ارزښت هم وشمیرل شي او له بل سره دي پرتله شي.

جمله : بنایو، چي  $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$

p...q....p ∨ q....¬(p ∨ q).....¬p...¬q...¬p ∧ ¬q
w...w.....w.....f.....f.....f.....f
w...f.....w.....f.....f.....f.....w.....f
f...w.....w.....f.....f.....w.....f.....f
f...f.....f.....w.....w.....w.....w

داچې د مخ ته پراته جدول څلورم او اوم درخ یو په بل پریوخي یا یو د بل سره برابر دي، نو ویني یا افادي (p ∨ q) - او  $\neg p \wedge \neg q$  په څرگند ډول همغه رښتیا بلواک یا قنکشونه دي. دا په دي معنا چي ،، جملي: دا نارښتیا ده، چي p یا q ،، او ،، نه q او نه p ،، همغه رښتیا - ( او په دي ډول همغه نارښتیا-) شرایط لري، که د p او q په ځای بلي یوي لیدونکي جملي ځای نیولی وي. دا ډول دوه وینا تراو وینا ترنه ) او تل همغه ارزښت ورکوي.

که په دي عملیو کي نوکان ځا په ځای شي، نو د عملیي ارزښت طبعاً همغه نه پاتیري، لکه د بي نوکانو عملیي.

ایمپلیکیشن implication (لاتین: ورراگډول، خورول):

که دوه ویناوې د خپل تړاو له لارې «که...» نو سره تنظیم یا ترتیب شي ایپلیکیشن سومبول  $\Rightarrow$  چې دا سومبول د دواړو ویناوو A او B ترمنځ ولاړ دی: او دا مانا لري:

که A نو B یا په همدې ډول «له A څخه B لاس ته راځي» وینا A ته پریمیس Prämisse (لاتین نیونه (فرضیه) وایي او وینا B ته کونکلوزیون Konklusion) لاتین: پای لاس ته راوړنه) وایي. د دوه ویناوو ایپلیکیشن ټیک هلته نارښتیا دی، چې پریمیس رښتیا او کونکلوزیون نارښتیا وي. په بل ډول رښتیا دی.

د دوه ویناوو لاس ته راوړنه یا تعقیب د لاندې جدول له لارې یواځنی څرگندی شي د لاس ته راوړني یا ایپلیکیشن یا پسي راتلنی، په ځان پسي لرنې سومبول  $\Rightarrow$

$p \Rightarrow q$	q	P
w	w	w
f	f	w
w	w	f
w	f	f

دلته داسی یوه ترنه لرو، چې له دوه برخه ویناوو A او B ټیک هلته یو نارښتیا یوځای شوي ویناچي په  $p \Rightarrow q$  (سره ښایو).

کله چې لومړی برخه وینا رښتیا او دومه برخه وینا نارښتیا وي په کمپیوټري یا پروګام ژبه کې داسی ویل کیږي: If....., then.....

کومي ژبني افادي يا ویني په دي رښتیا فنکشن بیرته اړول کیږي. بیرته یا په څنډ

راگر ځیدلی شي. په بنکاره ډول د بیلګې په توګه جمله: که پسرلی لوبه وګټي، نو ماښام د تلویزیون کتلو ته کورته راځي.

نارینتیا ده، که د جملې لومړئ برخه رښتیاوي او دویمه نارینتیا. که په جدول کې برخه جملو ارزښتونه لکه د بیلګې په توګه د جدول لومړئ همداسې څلورمه کرښه سره یو د بل پرتله شي (که دواړه برخه جملې رښتیا همداسې نارینتیا وي) پرابلمونه نه پېښوي، په دې حالت کې ټوله وینا رښتیا ده، که لومړئ برخه وینا نارینتیا او معکوس دویمه برخه رښتیاوي، نو په دې حالت کې به د بیلګې په توګه جمله نارینتیا ونه لیدل شي (که پسرلی لوبه ونه ګټي او سره له دې هم تلویزیون لیدلو ته راشي)، نو بیا د دوه ارزښتوالي پریڅپ له مخې یواځې دا ارزښت ،، رښتیا،، باقي پاتې کیږي. د پورته فنکشنې پوره والي له مخې په ګوته کوو، چې هم  $p \vee q$  او هم  $\neg(p \vee \neg q)$  ټیک بیرته بیا(بیرته) د ایمپلیکیشن د رښتیا فنکشنونه ورکوي.

په بل ډول افادې یې: که  $q$  که  $p$ ، او یا هم  $p$ ، د  $q$  لپاره پوره کیدونکی شرط دی (په بل ډول یې:  $p$  د  $q$  لپاره اړین شرط دی)

ورته والی: یوازینتوالی (برابر ارزښتوالی) Equivalent

که دوه ویناوې  $q$  او  $p$  خپله ترڅه په « ټیک هلته ، که » په هم دې ډول « هلته او هلته، که » تنظیم کړي، دې ته ورته والی یا ایکویوالنت وايي. د ایکویوالنت سومبول دی:  $\approx$  د دواړو ویناوو  $p$  او  $q$  ترمنځ دا سومبول پروت دی  $q \approx p$  په دې مانا، چې  $p$  ټیک هلته که  $q$  ایکویوالنت سومبول یې په دواړو خواو ایمپلیکیشن لري: له  $p$  څخه  $q$  لاس ته راځي او له  $q$  څخه  $p$

د دوه ویناوو ایکویوالنت ټیک هلته رښتیا دی، که دواړه ویناوې رښتیا یا دواړه ویناوې نارینتیا وي.

دا شي څرنگوالی یا شي حالت په لاندې جدول کې روښانوو:

$P \leftrightarrow q$	q	p
W	w	w
F	f	w
F	w	f
W	f	f

سیده او مخامخ یا په څټ دي په دي مانا وي، چی له p څخه q لاس ته راځی او په څټ، یا نی له q څخه p لاس ته راځی.

### ۳۰۱ د وینابلواکو یا فنکشنونو ترمنځ اړیکې

د دوه ویناو ترنه سم اندیزه یا منطقي برابرازبسته بلل کیږي، که د ویناو رښتیا ارزښت د ترنوینا ارزښت سره یو په بل وځوري یا یو بل سره برابر شي. دا د یو وینا ارزښت جدول له لارې څرگندیږي شي. ومو لیدل، چی ایکویوالنت په دواړو لورو لاس ته راوړنه یا ایمپلیکیشن دی. په لاندې جدول کی به وگورو، چی دریم او شپږم درځونه، متي یا ستنی څنگه یو بل سره ځان نیسی یا گورو، چی سره یوازښته دي.

p	q	$p \leftrightarrow q$	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$(p \Rightarrow q) (q \Rightarrow p)$
W	w	w	w	w	.....W
w	f	f	f	w	.....f
F	w	f	w	f	.....F
f	f	w	w	w	.....w

ورته والی اړیکې د ورته والی یا ایکویوالنت سومبول باندې هم ښوول کیږي

$$(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q) (q \Rightarrow p)$$



دا ورته والي ویناترنه مور ته دا اجازه راکوي، چي یو بل سره بدل کړو یانی د یوه ځاي د بل سره بدل کړو. له دې څخه پیچلو ترنو کي لکه د شالت الجبر کي کار اخستل کيږي.

د دې ورته والي ویناترنی غوره بیلگه ده، دي مورگان،، قاعده ده De Morgansche Regel

$$(1) \dots \overline{(p \wedge q)} \Leftrightarrow (\overline{p} \vee \overline{q})$$

$$(2) \dots \overline{(p \vee q)} \Leftrightarrow (\overline{p} \wedge \overline{q})$$

د کنجکشن او دیسجنکشن لپاره دیستریبوتیو قانون:

$$(3) [p \wedge (q \vee r)] \sqsubset [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$$

$$(4) [p \vee (q \wedge r)] \sqsubset [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$$

## ۱ • ۴ وینافورم یا - بڼه او کوانتورونه

وینا سم اند په لاندې ډول ساده ټولیز کیدی شي. د بیلگي په توگه که مختلف شيان همغه خویونه ولري، نو ضرور ده، چي دا فورمال وویلي - - یا افاده کړای شو: دلته د ویناو پر ځاي د وینافورم څخه خبري دي، یا غږیږو. دا داسی ژبني ویني یا افادي دي، چي د شيانو لپاره واریابلی یا اووینتوني لري او لومړی د مناسب انفرادي ځاي پرځاي وروسته یوه وینا شي. بیلگي یی په لاندی ډول دي

لومړی : «پر دوه ویشونی دی»

دویم : «z یو هوار څلورگودی (څلورضلي) دی»

دریم : «u له v څخه لوي» دی او داسی نور

تر هر ځای پرځای کولو وروسته رښتیا یا نارښتیا وینا لاس ته راځي. که په دویم کی  $z$  پرځای «ډیرکوډی» (کثیرالاضلاع) ځای پرځای شي، نو یوه رښتیا وینا لاس ته راځي. که په لومړي کی  $x$  7د پرځای ځای پرځای شي، نو یوه نارښتیا وینا لاس ته راځي. دریم یوه اړیکه (ریلیشن) ده، چې هلته د انفرادیو د ایښولو ترتیب هم یو رول لري. دلته که د تورو پر ځای ګڼونه ږدو، نو هلته دا رښتیا وینا ده که د لومړي توري پرځای ستر ګڼ ځای پرځای شي. د فورمال سم اند په ژبه د پریدیکات په شکل ( له دې امله دې د سم اند برخې ته د پري دیکات first-order logic سم اند یا منطق وایي.

بیرته داسی لیکو  $P(x), Q(z), R(u,v)$

یوه بله کارونه یا عملیه شته، چې له وینا بڼې څخه وینا جوړوي. چې کوانتیفیکیشن Quantifikation بلل کيږي. دا ویناهغه وخت منځ ته راځي، چې ټول د وینا بڼی افراد همغه خوینونه ولري، چې ټول وینا (Allaussage) ورته وایو. یا چې په پوښتل شوي چاپیریال کې داسی افراد شته وي، چې همغه خوینونه ولري، دې ډول وینا ته مور د شتون یا موجودیت وینا یا Existenzaussage وایو. زموږ په بیلګه کې یی استعمال لاندې را په ګوته وکي

څلورم: (پیدایښتی یا طبیعي) ګڼونه یا اعداد شته، چې په دوه ویشل کيږي

پنځم: ټولې څلورې (مربع) هوارې ډیرکوډی یا کثیرالاضلاع دي.

د ټولکوانتور یا ټول وینا لپاره نڅښه  $\forall$

د شتون- یا موجودیتکوانتور یا شتون وینا لپاره نڅښه  $\exists$

یادونه: د ټولکوانتور لپاره نڅښه د سرچپه  $A$  په څیر ده او د شته والي کوانتور لپاره نڅښه د په څې  $E$  په څیر ده په پام کې دې وي، چې د کوانتورونو ورکونې وروسته اووښتونې ( ویاړیالې یا مجهولې) ورکول کيږي.

څلورم ۱:  $\exists x \in P(x)$

داسی یې لولو، چې یو  $x$  په  $P(x)$  کې شته

پنځه ۱ :  $\forall z \in Q(x)$

دا داسی لولو: د ټولو  $z$  لپاره، چې په  $Q(x)$  کې پروت دی (یا د ټولو  $z$  له  $Q(x)$  څخه)

دا سومبول  $\exists$  دا مانا لري، چې «کم له کمه یو  $z$  شته» د وینابنې او په دې پورې اړوند واریابلو یا اووښتونو ډیریو جوړه، د دې سومبول سره یوه د «شتون- یا موجودیت وینا» ورکوي، په نامه د اووښتونو ساحه یا ډیری کې، په کوم کې چې کم له کمه یوه داسی اووښتونی ځای په ځایونه شته وي کومه چې وینابنه رښتیا وینا کوي.

بیلگی (د رښتیا شتون - موجودیت ویناوي)

$$\exists x \in R: x+1=0 \quad \text{اول -}$$

(لوستل: یو داسی رییل گڼ یا عدد  $x$  له  $R$  (په) کې شته، د کوم لپاره چې  $x+1=0$  باور لري) دلته  $x$  دا مانا لري، چې  $x$  د رییلگڼډیری یا رییل اعدادو سټ  $R$  توکی دی او  $\in$  په دې مانا دی، چې توگی له  $Q(x)$  دی.

دویم:  $\exists x \in R:$

$$x^2 + 4x = 0$$

(لوستل: یو  $x$  له  $R$  څخه (په) کې شته د کوم لپاره، چې  $x^2+4x=0$  باور لري)

دریم:  $\exists x \in R: x^2 - 4 = 0$

(په دې جمله کې حتی دوه رییلگڼونه شته دی، چې د هغې لپاره  $x^2-4=0$  باور لري)

: (2، -2)

جمله (د یوې شتونوینا یا موجودیتوینا نه والی یا نفی)

$$\exists x \notin R: x^2+1=0$$

لوستل: داسی رییلگڼ  $x$  نه شته، د کوم لپاره چې برابر  $x^2+1=0$  باور ولري

داسې ويناښي هم شته، د کومو لپاره، چې د اووښتونډيرۍ يا واريابلډيرۍ ټولو توکو لپاره رښتيا وينا شي.

بيلگه: ويناښه « $x$  په 2 ويشونۍ دۍ» د جوړه گڼونو هر يوه لپاره رښتيا ارزښت لري په

دا سومبول  $\forall$  په دې مانا دۍ، چې «د ټولو  $x$  لپاره» د ويناښي او په همدې پورې اړوند د وينا متحولو ډېرۍ يا ست (وينا اووښتونډيرۍ يا واريابلډيرۍ) تر نه له دې سومبول سره يوه  $\text{Universalaussage}$  يونيورزالوينا يا ټولويانا منځ ته راځي. په دې مانا چې د دې متحولو ډېرۍ (اووښتونډيرۍ) هر توکي لپاره د ويناښي څخه يوه رښتيا وينا جوړېږي.

جمله: (د  $\text{Universalaussage}$  يونيورزال- يا ټوليزې وينا يا ټولويانا لپاره

$$(1) \dots \forall x \in G : 2 \mid x$$

(د ټولو جوړه گڼونو (جفت اعدادو) لپاره باور لري، چې  $x$  په ۲ ويشونۍ دۍ)

$$(2) \dots \forall x \in R, x^2 > x$$

(د ټولو رييل اعدادو  $x$  لپاره، کوم چې له يوه لوي وي باور لري  $x^2 > x$ )

جمله: (د نارښتيا ټوليزې وينا لپاره)

$$\forall x \in R : x^2 > x$$

دا وينا نارښتيا ده، ځکه چې دا د  $0 \leq x \leq 1$  لپاره باور نه لري، پس دا وينا د ټولو ريل عددونو لپاره باور نه لري.

۱ ۰ ۵ اړين - يا ضروري- او پوره کيدونکي شرطونه

د ايمپليکيشن سومبول  $A \Rightarrow B$  («که  $A$  نو  $B$ ») «له  $A$  څخه  $B$  لاس ته راځي» يا په بل ډول: که  $A$  باور ولري، نو  $B$  هم باور لري»

په شميرپوهنه کې ځانگړي فرمولونه شته .

الف ) « A د B لپاره پوره كيدونكې شرط دى »

ب ) « B د A لپاره يو اړيبن يا ضروري شرط دى »

فرمولونه الف ) وايي، چې د A رښتینوالی د B رښتینوالی ځان پسی لري یانی له آ څخه ب پوره کيږي یا له یوه څخه وبل ته رسيږو یا د A شرطونه د B د شرطونو پوره کيدنو لپاره نیونه(فرضیه) ده او ب شرط پوره کيدنه اړيبنه يا ضرور ده، چی آ پوره شي .

بيا : وينا باور لري .

د B وينا د باور لرلو لپاره دا پوره دى يا پوره كيدونكې دى يا بسيا كوي، كه د A وينا باور ولري

بيلگي د پوره كيدونكو شرطونو لپاره:

۱ - وينا A : « گن n پر ۶ ويشونى دى »

وينا B : « گن n پر ۳ ويشونى دى »

$$A \Rightarrow B$$

د دې لپاره پوره كيدونكې شرط دى يا بسيا كوي، چې يو رييل گن n پر ۳ ويشونى دى، كه دا پر ۶ ويشونى وي .

كه n پر ۶ ويشونى وي، نو پر ۳ هم ويشونى دى . دا نو تراوسه دا مانا نه لري، چې ضرور دې گن n كه پر ۳ ويشونى وي، پر ۶ دې هم ويشونى وي . د بيلگي په توگه گن ۹ پر ۳ ويشونى دى ، مگر په ۶ نه دى ويشونى .

۲ - وينا A : «  $n > 7$  »

وينا B : وي دې  $n > 6$

$$A \Rightarrow B$$

د دې لپاره دا پوره کيدونکی دی، چې يو رييلگن ن له ۶ څخه لوي دی، که اړیکې، چې  
ن له ۶ لو دی، باور ولري

داسې رييلگنونه هم شته، چې له ۶ څخه لوي دي، مگر له ۷ څخه لوي نه دي، د بيلگې په  
توگه ۵، ۶ يا شپږنيم

د ب) فرمولبندي وايي، چې وينا ب باور لرل غوښتونکی يا اړيکې يا ضرور دی، د دې  
لپاره، چې وينا A باور ولري،

که وينا B باور ونه لري نو وينا A هم باور نه لري.

بيلگې د اړيکې (ضروري) شرطونو لپاره:

۱ - د دې لپاره، چې يوگن n پر 6 وويشل شي، اړين (ضرور) ده، چې دا گن پر 3 ويشونی  
وي، يوگن، چې پر 3 نه وي ويشونی، نو پر 6 هم ويشونی نه دی.

۲ - وينا A: « څلور گودی يوه څلورۍ يا مربع ده »

وينا B: « څلور گودی څلور ولاړ کونجونه لري »  $A \Rightarrow B$

د دې لپاره ضرور، چې يوه څلورگودی يوه مربع (څلورۍ) ده دا خويونه دي، چې څلور  
ولاړ کونجونه ولري، که ټول کونجونه يې ولاړ نه وي، نو مربع يا څلورۍ نه ده که يوه  
څلورگدی څلور ولاړ کونجونه ولري اړين نه ده، چې څلورۍ يا مربع دې وي.

د برابروالي يا برابر ارزښتي (ايکويوالنت) سومبول»

$$A \Leftrightarrow B$$

(په دواړو لورو ايمپليکيشن) لپاره په شمير پوهنه کې هم فرمولبندي شته: دا وايي، چې  
د A لپاره يو ضروري او پوره کيدونکی شرط دی، « دا وايي، چې A ټيک هلته  
باور لري، کله چې B باور ولري

بیلگی : د پوره کیدونکی او ضروري شرطونو لپاره

۱- وینا A : « گڼ یا عدد n پر ۶ ویشونی دی»

وینا B : « عدد n پر ۳ او ۲ ویشونی دی»

$$A \Leftrightarrow B$$

د دې لپاره ضرور او پوره کیدونکي دی، چې: n پر ۶ ویشونکی دی، که دا عدد پر ۳ او ۲ ویشونکي وي.

۲- وینا A : « څلورگودی یا څلورضلي یوه څلوری یا مربع ده»

وینا B : « څلورگودی څلور ولاړ کونجونه لري او څلو برابر اوږده اړخونه یا

ضلي»

$$A \Leftrightarrow B$$

ددې لپاره، چې څلورگودی یو مربع دی ضرور او پوره کیدونکی دا خویونه دي، چې څلور ولاړ کونجونه او څلو برابر اوږده اړخونه (ضلي) ولري.

۱ ۰ ۶ د شمیرکلمو یا ویو (لغاتونو) شمیرنیز مفهوم ( ترې پوهیدنه)

پیژند ( تعریف ) څه شی دی؟

د کلیمی ټاکنه ده، چې ټیک ټاکلي او له مخامخوالی (تضاد) ازاده وي. په عامو خبرو کی کله که کلیمی راځي، چې په مختلفو اشکالو ترې ځانگړي ماناوي اخستل کيږي، خو په شمیرپوهنه کې داسې نه ده.

د شمیرنی ټاکنی یا پیژندونه (تعریفونه) د ټیک څرگندي پوهنی یوه نه پریښوونکی سمبال اله ده، یانې ترې تیریدل نه شي کیدای.

### جمله څه شی دی ؟

ټولې رښتونې ویناوې په شمیرپوهنه کې جملې بلل کېږي، چې د پیژندنې لپاره ښوونې یا ثبوت ته اړتیا لري .

### اکسیوم Axiom څه شی دی؟

بې ثبوت رښتینې وینا ته اکسیوم وايي

شمیرپوهنیزې یا د ریاضي جملې زیاتې نیونې ( فرضیې ) او ثابتول ( غوښتنه، جوته ونه یا ښوونه ) په بر کې - یا خوندي لري .

که دا وینا داسې وي، نو پس داسې به هم وي . دلته که دا وینا داسې وي نیونه یا فرضیه ده او نو داسې هم ده . دا غوښتنه ده، چې باید ثبوت یا وښوول شي .

اکسیوم : ۱ طبیعي عدد دی ( پېانو Peano )

: ټکی هغه دی، چې پر ویشونې نه وي یانې په ټکی ویشل بند دي . (Euklid)

: حتمي پېښه د پېښې امکان ۱ درجه لري .

جمله: که درېگودی ولاړکونجیز وي، نو ( پس ) د پیتاگوراس ( pythagoras ) درسي جمله باور لري

: یو لومړی گن، چې له دوه لوي وي، باید ناجوره ( طاق ) وي

: په اخره جمله کې نیونه (فرضیه) ده ( که یو پریم عدد له ۲ لوي وي ۰۰۰ ) او ثبوت یې ( هر له دوه لوي عدد په دوه ویشل کېږي پس لومړی گن نه شي کیدی، نو دا تل ناجوره یا طاق دی ) په ځټوالی یا تضاد کې پیژندل کېږي .  
تل داسې نه ده، چې د جملې د رښتینوالی څخه دې د جملې په ځټوالی یا تضاد هم رښتیا وي .



لکه:

جمله: که ۶٪ پس ۲٪ هم (رېښتيا)

جمله: که ۲٪ پس ۶٪ هم (نارېښتيا)

۰۰۰۰۰ تیک هلته، چه که ۰۰۰۰۰ یوځای راوړي

بیلگه: که چیرې غبرگ اړخیز کې هر دنننی کونج ۹۰ درجی وي، نو دا ولاړ کونجیز (قام الزاویه) دی.

په څټ: که غبرگ اړخیز ولاړ کونجیز وي، نو دنننی کونجونه ۹۰ درجی لوي دي. یوځای اوړل:

یو غبرگ اړخیز تیک هلته (هلته او هلته یا بیا او بیا یا یواځنی او یواځنی ټاکلی یا یواځنی ټاکلی او په څټ) ولاړ کونجیز دی، کله چې دنننی کونجونه ۹۰ درجی لوي وي.

۱ ۰ ۷ برابر ونونه او نابرابرونونه (مساوات او نامساوات)

بیلگه:

لمسی، پلار او نیکه په گډه ۱۱۳ کلن دي. پلار د ځوي د عمر یو کال کم او ه ځله عمر لري او نیکه د پلار د عمر له دوه برابره څخه ۶ کاله نور هم زیات عمر لري.

پوښتنه: له دوي څخه هر یو څو کلن دی؟

د ځوي عمر په  $x$  سره بڼایو، نو د پلار عمر  $x-1$  دی او د نیکه عمر  $2(x-1)+6$  کاله کیږي، چی د دې ټولو زړښت وختونو زیاتون یا جمع بیا ۱۱۳ کاله دی یانی:

$$x+7x-1+2(7x-1)+6 = 113$$

یو ډول ترمونه رامنځ ته کيږي او ساده کيږي:

$$x+7x-1+14x-2+6= 113 \quad \vee \quad 22x +3 = 113$$

په کيڼ ۲۲ ځله د  $x$  ارزښت چې ۳ په ورزيات شوي او دا له ۱۱۳ سره برابر دی

نو دا گڼ ۲۲ ځله  $x$  بيا ۱۱۰ کيږي:  $22x = 110$  او د  $x$  ساده ارزښت ۲۲ – مه برخه د

۱۱۰ ده يانې: په دې لاس ته راوړنې سره زوي ۵ کلن پلار ۳۴ کلن او نيکه ۷۴ کلن

دی.

که ترمونه  $T^{\circ}$  او  $T^{\wedge}$  د برابر و نښې = باندې يو له بل سره وتړل شي، نولاندې

برابرون پيدا کيږي:  $T^{\circ} = T^{\wedge}$

که چيرې ترمونه په دې نښو  $\leq, \geq, >, <$  او (نابرابرونڅخه  $=$ ) يو له بل سره وتړل شي يو نابراون منځ ته راځي.

برابرونونه او نابرابرونونه چې ناتا کلي يا مجهولو سره يوځاي شي، هغې ته د وينا فورم يا نوره هم بڼه وينا بڼه ويل کيږي.

دا يا رښتيا يا نارښتيا وينا کيدی شي، که ناتا کلي، چې اوبستونې يې هم بولو (د بيلگې په توگه  $z, x, y$ ) پر ځاي د بنسټيږی گڼونه وليکل شي، په برابر و نپوهنه کې له پيژند – يا تعريفیږی څخه هغه گڼونه غوره دي، چې د ورکړ شوي فورم يا بڼې يو برابر و ن يا نابرابرون رښتيا وينا کړي.

د يو برابر و ن يا نابرابرون (مساوات يا نامساوات) هر عدد ځاي پر ځاي کول، چې وينا بڼه پيژند – يا تعريفیږی پورې اړوند وي او دا وينا رښتيني کوي، اوبيدیږی يا حلیدری  $L$  کې پروت دی يا د برابر و ن يا نابرابرون په ډکونکو (پوره کونکو) ډيريو پورې تړلی برابر و ن ته، چې د ټولو ځاي پر ځاي کولو لپاره رښتوني وينا ورکوي کټمت يا (identisch, identic) وينا وايي.

بیلگی :

الف)  $5x = 4$  د  $x = 0,8 = 4/5$  لپاره رښتیا وینا ته ځی : یانې

$$L = \{0,8\} \quad \text{نو} \quad 5 \cdot 0,8 = 4$$

ب)  $3x^2 = 48$  د  $x = 4$  لپاره او  $x = -4$  لپاره رښتیا وینا ته ځی

$$L = \{ \text{یانې } 48 = 3 \cdot (-4)^2 \text{ څخه لاس ته راځی او په څنګ } 3 \cdot 4 = 48 \text{ پس-} \} \\ \{4;4\}$$

$$۲ - \text{نابرابرون الف) } \{x \mid x > -1/2\} \Rightarrow L = 2x > 1$$

$$\text{ب) } \{x \mid x > -3\} \Rightarrow L = x < 3$$

$$۳ - \text{کټمټوالی : الف) } (x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$

$$\text{ب) } (a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

دوه برابرونه یا نابرابرونه، چې په خپل پیژندډیری کې سره برابر وي (یا یو پر بل وځوري،

یانې یو د بل پرځای ایښول کیدی شي) او همغه اوبی- یا حلډیری ولري ایکویوالنت (Equivalent) یا «ځای پرځای کول برابر» یا ورته بلل کیري.

یادونه : دا لاندې د جدول په ډول دی، له پورته له بنې و کین لور ته په درځ یانې ولاړ درځ لوستل کیري

براون	نابرابرون	
$T^{\circ} = T^{\wedge} \quad T^{\wedge} = T^{\circ}$ $3x = 5y \quad 5y = 3x$	$T^{\circ} < T^{\wedge} \quad T^{\wedge} > T^{\circ}$ $2x < 6 \quad 6 > 2x$	( ۱ ) وینافورم کی کیدی شي، چي خواوي سره بدلي شي
$T^{\wedge} = T^{\circ} \Rightarrow$ $T^{\wedge} \pm T^{\circ} = T^{\circ} \pm T^{\wedge}$	$T^{\wedge} < T^{\circ} \Rightarrow$ $T^{\wedge} \pm T^{\circ} < T^{\circ} \pm T^{\wedge}$	( ۲ ) که وینافورم په دواړو خواوو همغه ترم زیات یا کم شي او د یوي ورزیات ترم پیژنددیری خوندي وساتل شي یا خاي کړي
$2z = 8 \Rightarrow$ $2z \pm 3 = 8 \pm 3$	$3y < 4x \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 4y \pm 2x < 4x \pm 2x$	یا تغیر ونه خوري مخامخ یا کین لور بیلگه کي تفریفدیری تغیر خورلی

پر خت بیلگه

$$2z=8 \Rightarrow 2z+3-z=8+3-z$$

دا چي  $z=4$  دي نوي ورزیات شوي

ترم  $3-z$  نه دی تعریف یا پیژندنه

لري، خکه چي  $3-z$  يو پیدایینتي یا طبیعی گن نه دی

$$T^{\wedge} < T^{\circ} \Leftrightarrow T^{\wedge}.T > T^{\circ}.T \quad T^{\wedge} = T^{\circ} \Leftrightarrow$$

( ۳ ) د وینافورم دواړه

---

$T^{\wedge}.T = T^{\circ}.T$	$T^{\wedge} < T^{\circ} \Leftrightarrow$	اړخونه كيدى شي چې
$\Leftrightarrow T^{\wedge}:T = T^{\circ} : T$	$T^{\wedge}:T > T^{\circ}:T$	له همغه مثبت ترم سره
كه $T > 0$ وي	كه $T > 0$	خُل او يا په همغه ترم
$4x+2 = 10x-6$	$3y -12 < 30z -90$	وويشل شي
$\Leftrightarrow 2x + 1 = 5x -3$	$\Leftrightarrow y - 4 < 10z -30$	
$\Leftrightarrow 2xc + 10 = 50x-30$	$\Leftrightarrow 4y -16 < 40z -120$	
$T^{\wedge}=T^{\circ} \Leftrightarrow$	$T^{\wedge} < T^{\circ} \Leftrightarrow T^{\wedge}.T > T^{\circ}.T$	( ٤ ) د يوه برابرون
$T^{\wedge}.T = T^{\circ}.T$	$T^{\wedge} < T^{\circ}$	دواړه خواوې كيدى شي،
$\Leftrightarrow T^{\wedge}:T > T^{\circ}:T$	$\Leftrightarrow T^{\wedge}:T = T^{\circ} : T$	چې له يوه منفي ترم سره
$T < 0$	$T < 0$	خُل شي يا دواړه خواوې په
$3x = 12$	$-2y < -4$	همغه ترم وويشل شي،
$\Leftrightarrow -9x = -36$	$\Leftrightarrow y > 2$	كه په دې فورم كې
$\Leftrightarrow x = 4$	$\Leftrightarrow 10y > 20$	نابرابرونونه وي نو د
		برابرون لورې بدليري، يا نخبه بدليري

يادونه :

په توليزه، چې په كتابونو كې ليكل شوي، ترمونه  $T$  يو او  $T$  دوه په لاندۀ توگه دايندكس سره په نخبه كوي:  $T_1, T_2$

۱ . ۷ . تمرنونه:

۱ - په ۱ . ۳ - مه برخه کې د رېښتيا ارزښت ورتوالی له (۱) څخه تر (۴) پورې وښایاست.

۲ - د رېښتيا ارزښت جدول له لارې وښایاست، چې لاندې ویناتر او منطقي مساوي ارزښت دی.

الف -  $(A \Leftrightarrow B)$  او  $(B \Leftrightarrow A)$

ب -  $(A \Rightarrow B)$  او  $(A \vee B)$

## ۲ • ډیری پوهنه Die Mengenlehre, the set theory

ډیری پوهنې یا سټ تیوري باید خپل ځای په شمیرپوهنه او همدا ډول په نورو پیدایښتي-یا طبیعي پوهنو کې نیولې وي، نو له دې امله د لنډ تیر وخت را په دې خوا په پرمختللو هیوادونو او اوس هم په افغانستان کې د بنوونځیو په لیکلوسټ کې پیل شوه، ځکه چې بي له ډیرپوهنې یا سټ تیوري شمیرپوهنه بي مفهومه ده او ناشونې • دا به له دې لیکنې څخه همدا اوس څرگنده شي، چې پیدایښتي یا طبیعي گڼونه یا - اعداد او هرڅه د گڼونو په څیره کې ، چې مور ته څرگند وي هغه ټولې ډیری یا سټ دي او بل څه نه دي •

ډیری پوهنې (سټ تیوري) په پرمختللو هیوادونو کې هم د شلمې پیړۍ په دویمه نیمه کې د میندو او پلرونو لپاره ستونځې پیدا کړې، ځکه، چې دوي د ډیری پوهنې سره بلد نه وو او د خپلو کوچنیانو سره یې مرسته نه شوه کولی •

د ډیری کلمه له عددونو یا گڼونو پخوانۍ ده، که څه هم پخوا انسانانو په خپله خوښه نه بنووله لکه اوس •

په تراوس ورسره بلد ډول هم ست یا ډېری پیژندل کیږي، لکه د بنوونځی نجونی او هلکان، یا په یوه ټولگی کې میزونه او چوکی، یا لکه هغه نیزوري، چې نیز راوري او د سپین په پټي کې یې ډیری ډیری اچولي یا د هسکي مینې د بنوونځي په لسم ټولگی کې د زده کوونکو، کتابونو، کتابچو پنسلونو، څوکیو او میزونو ست یا ډیری \*

د ډېری پوهني کلمه: مور په افغانستان کې هم د ډیری له کلیمې سره اوس بلد شوي یو که څه هم تریلو بیلو پرديو نومونو لاندې، چې زما په اند به زده کوونکو او بنوونکو ته یواځې ذهني غوره والي لري، زه غواړم، چې د ډیری څو مختلف پیژندونه یا تعریفونه ورکړم، چې ښه مو ورته پام راوگرځي، دا له دې امله هم، چې د ډيري پوهني ( ست تیوري) غوره والی ته مو نور هم پام راوگرځي \*

ډیری پوهنه د شمیرپوهني سټه جوړوي او د شمیرپوهني ټولي څانگې په ډیری پوهنه ودانې دي \* نن شمیرپوهنه بې له ډیری پوهني داسې وده نه شي کولی او سټه یې وزي \*

پیژند ۱۰۲

الف : ډیری یا ست د ټاکلو شیانو یا کلمو ټولگه ( یوځایوالی، مجموعه) ده، چې

پخپله خوښه د یوې ټاکلي بنسټډیری یا بنسټ ست څخه ، چې د پیژندلشویو

اصولو یا کرکتریین له مخې ټاکل شوي وي

ب : د الماني شمیرپوه کانتور ( George Cantor 1845 – 1918 ) پیژند:

زموږ د خیال یا لید څرگند ټاکلو ، ټیک یو له بل توپیرکیدونکو شیانو ټولگي

( یوځایټولولو یا مجموعي ) ته ډیری وایي او هر شي ته، چې ډیری یې جوړه

کړي یا ډیری تري جوړه شوي وي، د ډیری – یا ست توکی وایي \*

( Set and elements of set ډیری او د ډیری توکی )

پ : د مختلفو شیانو ټولگي یوه یوون یا یووالی ( Einheit, unite واحد ) ته په



## شمیرپوهنه کې ډیری وایی

یادونه : د واحد لپاره، چې تراوسه ورسره بلد یو یوون یا یووالی بڼه نومه ونی دي، دا که څو واره وویل شي، نو باورلرم، چې ورسره بلدیرو.

ت : څرگند شیان د گډو نخبو پربنسټ، چې تر څیرني لاندې نیول کیږي او د دې نخبو له امله یوځای ټولیري یا ټولگه جوړوي، ډیری یا ست تشکیلي، گډې نخبی کیدی شي بنسټ، کوچنیوالی او داسې نور وي.

یادونه: د گرانو لوستونکو دې دې ته پام وي، چې په پورته پیژندونو کې یې غوره او د پام وړ پیژند یا تعریف د جورج کانتور پیژند دی.

بیلگه :

گڼونه یا عددونه، نومونه، او توري کیدی شي د ډیریو بیلگو په توگه راوړل شي.

گورو، چې د ډیری یا ست کلمه په شمیرپوهنه کې بل ډول ده لکه په ولسي ژبه کې، چې دلته ډیری د ځنو شیانو زیات یوځای کول موخه ده، د ځانگړو شرایطو لاندې.

په شمیرپوهنه کې ډیری په لویو لاتین تورو لیکل کیږي لکه  $A, B, \dots$  او یا  $M, N,$

$X, Y, \dots$  د ډیریو توکي د لاتین په کوچنیو تورو لیکل کیږي، لکه  $a, b, c, \dots$

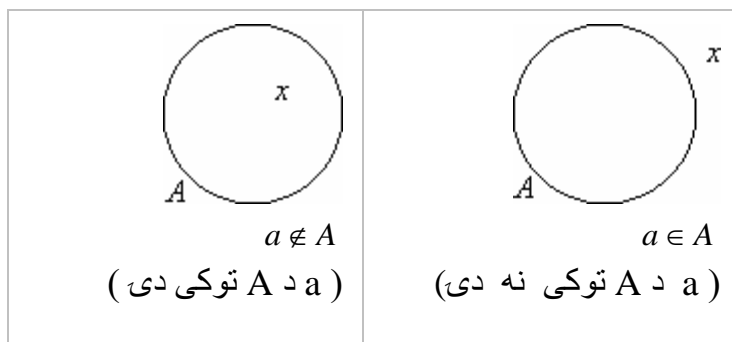
او  $m, n, x, v, \dots$

د دې لپاره، چې وپوهیږو، چې ایا توکی  $a$  د ډیری  $A$  توکی دی که نه نو لیکو:  $a \in A$

په پورته کې توکی  $a$  د ډیری  $A$  توکی دی.

که  $a$  د  $A$  توکی نه وي، نو لیکو:  $a \notin A$  دلته  $a$  د ډیری  $A$  توکی نه دی.

دا پورته لینکدود له بنی وکین لور ته هم لیکلی شو، چې پرلپسی لری یې ساتلي پاتې شي. زه یې په څټ لیکنو سره لیکنيزي ستونځی لرم. دا لاندې یې دیاگرام دی، خو توکي یې بل ډول لیکل شوي دي، چې گرانو ستونکو ته به د پوهیدلو ستونځ پیدا نه کړي



ډیری  $A$  دې له  $a, b, c, d, e, f, g, h$  توکو جوړه وي، چې په لاندې توگه یی لیکو

$$A = \{ a, b, c, d, e, f, g, h \}$$

گورو، چې  $\{ \}$  د ډیری یا ست نخبه ده

یادونه : دا د ډیری کلمه مور په افغانستان کې ست set بولو ، چې انگریزي ده، په فارسي کې یې مجموعه بولي، چې ډیری د شیانو مجموعه یا ټولگه ده او په الماني کې ورته مینگی Die Menge وایي . هغه بنسټیزه خبره یې په پیژند یا تعریف کې ده، که مور یې چې هرڅنگه وبلو، خو د یو بل څخه کره توپیر کیدونکو شیانو ټولگی ته ۰۰۰ وایو. د ټکو پر ځای ، چې هر څه لیکي، خو مور گورو، چې په پښتو یې هغه مناسبه نومونه ونه ډیری ده، دا د کوتي کوتي څخه یا راپند او داسې نورو څخه ماته بڼه بنسټیزې او زموږ ولس د دې نامه سره بلد دی، چې په پوهنه او لا نور بڼه په شمیرپوهنه کې باید وکارول شي . زه بیا په دې ټینگار کوم، چې دا خپل ، چې ما ټاکلی یا بل څوک یې که بل ډول بولی د انگریزي یا الماني یا بل پردي نوم څخه بڼه او پوهور دی . د ست مانا که په ډکشنري کې وگورئ ، نو پوه به شو، چې له دې نوم څخه مو خپل د پښتو نوم بڼه او مناسب دی. گورو چې دا نوم اوس ژورنالستان هم زیات کاروي او وایي، چې ډیری یا ډیری خلکو.... وکتل.

بیلگه ۱۰۲

الف)  $M_1$  (لوستل  $M$  ایندکس ۱ دا به په لاندې نخبونه کې روښانه شي پام دي وي، چې  $\text{index}(\text{indeces})$  ایندکس پیژند نخبې ته وايي) دي د لومړیو گڼونو ډیری (اعدادو ست) وي، نو باور لري:  $7 \in M_1, 8 \notin M_1$

ب)  $M_2$  دي د لاندې برابر وونو یا مساواتو د اوبیونو (حلونو) ډیری وي

$$(x+1)(x-2) = 0$$

نو باور لري:  $-1 \in M_2, 2 \in M_2, 1 \notin M_2$

بیلگه ۲۰۲:

الف) د مساوات  $(x+1)(x-2) = 0$  حل ډیری  $M_2$  ده  $M_2 = \{-1, 2\}$

ب) د جوړه (جفت) عددونو یا گڼونو ډیری  $M_3$  ده  $M_3 = \{0, 2, -2, 4, -4, \dots\}$

ډیری لکه، چې ومو ویل د توکو د خویونو له لارې هم څرگندی شي یا ورکول کیدی شي.

$$M = \{x \mid x \text{ د خویونو } \dots \text{ سره}\}$$

(لوستل:  $M$  د ټولو  $x$  ډیری ده له خویونو  $\dots$  سره)

بیلگه ۳۰۲

الف)  $M = \{x \mid x \text{ د ټولو } x \text{ ست، چې هلته } x \text{ یو لومړنی عدد یا گڼ دی}\}$

$$b) \quad M = \{x \mid (x+1)(x-2) = 0\}$$

$$c) \dots \dots \dots M = \{x \mid x \in R, 0 \leq x \leq 1\}$$

تشدیری: ډیری، چې کوم توکی ونه لري تشدیری یا خالي سټ بلل کیري او داسی یی لیکو:  $\theta$  یا  $\{\} = \emptyset$   
 دا دې د یوې ډیری یا سټ سره، چې یواځی له صفر څخه جوړه ده، نه بدلیري یانې

$$\{\} = \emptyset \quad \neq \{0\}$$

بیلگه ۰۲ ۴

$$\{x \mid x \in \mathbb{Z}, x^2 + x - \frac{3}{4} = 0\} = \theta$$

ځکه، چې د برابرېون یا مساوات  $x^2 + x - 3/4 = 0$  حلډیری

$$\{x \mid x^2 + x - 3/4 = 0\} = \{1/2, -3/2\}$$

کوم ټولگن یا تام عدد خوندي نه لري.

ټولگنونو پیژند ته دې پام وي، چې د راشنلگنونو برخدیری ده. دریمه برخه دې وکتلشي

بیلگه ۰۲ ۵: د ز ۰ کال د دویمي نیمايي میاشتو سټ یا ډیری په Ju, aug, sep,

ok, no, de سره بنایو او لیکو:  $A = \{jul, aug, sep, ok, no, de\}$

نو داسي لرو یا نوره هم بڼه داسی لیکلی شو:  $jul \in A, jun \notin A$

دا په دې مانا، چې جولای د A توکی دی او جون د A توکی نه دی

بیلگه ۰۲ ۶: ټول مندیزي، چې نن مازیگر لمانځه ته د غارخلي لمنځتون یا جماعت ته ته راغلي.

بیلگه ۰۲ ۷: د هغو میرو، غواوو او وزو ډبرئ، چې نن په نخاس کې خرڅي شوي.

بیلگه ۰۲ ۸: د ټولو هغو گنونو ډیری (عددونو سټ) M، چې ۳۰ ویشي یانې

۳۰، ۱۵، ۱۰، ۶، ۵، ۳، ۲، ۱

داسې یې لیکو :  $M = \{ 1,2,3,5,6,10,15,30 \}$

دا ست پای ست ده داسې وایو، چې ډیری یا ست  $M$  د ټولو هغو توکو  $x$  - لکه پورته - جوړ شوي، چې ۳۰ ویشي او داسې یې لیکو:  $M = \{ x \mid x \text{ د } 30 \text{ پر ویشونې گن} \}$

د ټولو پیدایښتي یا طبیعي گڼونو ډیری (اعدادو ست)  $N$  ټاکو او داسې یې لیکو:

$$N = \{ 1,2,3,4,\dots \}$$

دا نه پای لرونکی یا لایتناهي ډیری (ست) ده ، چې په لاندې ډول یې نخښه ده یا په لاندې ډول په نخښه کیري:  $\infty$

گورو، چې په شمیر پوهنه کې مور پر پای گڼونو برسیره ناپای عددونو سره هم مخامخ یو.

## ۲۰۲ د ډیریو ترمنځ اړیکې relation between sets

د ستونو ترمنځ غوره اړیکې د برابر والی او خونديونې یا خوندي لرنې ( مساوی والی او یو په بل کې ځای لرلو) اړیکې دي .

پیژند ۲۰۲ دوه ډیری یا ستونه  $M_1$  او  $M_2$  یو د بل سره برابرې دي، یانې

$$M_1 = M_2$$

که چېرې د ډیری یا ست  $M_1$  هر توکی د ډیری یا ست  $M_2$  توکی هم وي او پر څټ یا برعکس هر د  $M_2$  توکی د  $M_1$  توکی هم وي .

برابري ډیری برابر توکي هم لري

د بیلگی په توګه

$$M_1 = \{x \mid (x+1)(x-2)(x+3) = 0\}$$

$$M_2 = \{-1, 2, -3\}$$

$$\Leftrightarrow M_1 = M_2$$

ګورو، چې  $M_1$  د  $M_2$  سره برابر دی

برخډیری (سبسټ subset)

پیژند ۳۰۲ :

یوه سټ  $M_1$  د سټ یا ډیری  $M_2$  برخډیری (لاندې ډیری، خوندي ډیری یا سب

سټ) بلل کیږي یا  $M_1$  په  $M_2$  کې ځای ده یا نوره هم ښه  $M_1$  په  $M_2$  کې خوندي

ده، لیکندود یا لیکندول:

$$M_1 \subseteq M_2 \quad \text{که د ډیری } M_1 \text{ هر توکی دست یا ډیری } M_2 \text{ توکی هم وي.}$$

کیدۍ شي، چې  $M_1$  د  $M_2$  سره برابر هم وي، که برابروالی یا مساوات نا شوني وي نو بیا

د اصلي برخډیری یا اصلي سب سټ څخه غږیږو.

پیژند ۴۰۲ :

$$M_1 \subset M_2 \quad \text{یوه ډیری یا سټ } M_1 \text{ د } M_2 \text{ اصلي برخډیری ده او داسې یې لیکو: } M_1 \subset M_2$$

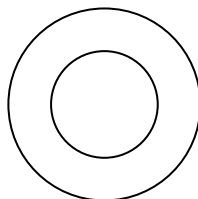
که  $M_1 \subseteq M_2$  باور ولري او کم له کمه د  $M_2$  یو توکی د  $M_1$  توکی نه وي.

بیلگي:

الف) که ولرو  $M_1 = \{-1, 1\}, M_2 = \{-1, 0, 1\}$  نو  $M_1$  په  $M_2$  کې اصلی خوندي دی

ب) د ټولو څلوریو (مربعو) ډیری د ټولو څلورگودیو (څلور اضلعو) اصلی برخدیری ده.

پ) څیره ۱ ۰ ۱ په هواره یا سطحه کې ټکو ډیری بنایي، د کومو لپاره چې باور لري، که  $M_1$  او  $M_2$  د ټکو ډیری یا ست وي  $M_1 \subset M_2$



که په پورته څیره کې وگورو، نو یوه گردی (دایره)  $M_1$  په بله لویه  $M_2$  گردی کې خوندي ده.

تشدیری په هره ډیری کې خوندي ده. هره ډیری په خپل ځان کې د ناصلي برخدیری په څیر خوندي ده.

یا دا پیژند:

$$x \Rightarrow A \in x \in B \qquad B \subseteq A \text{ که باور ولري:}$$

بیلگه:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\} \quad B = \{3, 4, 5\} \qquad B \subseteq A$$



پیژند ۰ ۰ ۲ :

هغه ډیری، چې هیڅ توکی ونه لري تشدیری بلل کیږي او داسې یی لیکو:  $M = \theta = \{\}$

یادونه : پام دې وي، چې صفر ډیری او تشدیری سره بدلې نه شي یانې لاندې ته:  
 $\{\} = \theta \neq \{0\}$

د یوې ډیری توان یا توانډیری ( توانست )

پیژند ۰ ۰ ۲ :

د یوې ډیری M د ټولو برخدیریو ډیری پوتنخدیری یا په توانډیری (ست) بلل

کیږي او داسې یی لیکو:  $P(M)$  په توانډیری توکي لري، چی هر یو یی بیا خپله

ډیری ده •

بیلگه : د  $M = \{ a, b, c \}$  ډیری دا لاندې په توانډیری لري

$$P(M) = \{ \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\} \}$$

هره ډیری چې د توکو څخه جوړه وي هغه تیک n جگ 2n توکی لري یانې :  $n^{2n}$

دا پورته د جملې په څیر د پوره ایندکشن له لارې اوبی ( حل- ) کیدی شي ( لومړی برخه دې وکتل شي ) • دا دنده د گرانو لوستونکو د خوښې کار دی، که کوي یی •

پیژند ۰ ۰ ۲ : د ډیری M زور |M| لاندې د ډیری د توکو تعداد یا گنون پوهیږو • که دوه ډیری M او N همغه زور ولري هغه ته یوزوریزه – یا برابرزوریزه ډیری وایو او

$$|M| = |N| \text{ لیکو: داسې یی لیکو:}$$



د برابر ونونو یا مساواتو او خوندي ساتنو خویونه

الف) رفلکسیو- یا د انعکاس (هندارونیزی) اړیکې reflexivity

هغه اړیکې، چې د هغه او د هغه دخپل ځان ترمنځ ریښتوني ویناوي ورکړ شوي وي

رفلکسیویا انعکاسي اړیکې بلل کیږي لکه:  $M = M, M \subseteq M$

خوندي لرل اړیکې رفلکسیو نه دي  $M \not\subseteq M$

دا په دې مانا، چې هیڅ ډیری د خپل ځان اصلي برخدیری یا برخست نه شي کیدی.

ب) سیومتريکې اړیکې Symetric relation

هغه اړیکې سیومتريک بلل کیږي، چې د شیانو ترمنځ چې کارول کیږي یا استعمالیږي

یو له بل سره بدلیدلی شي.

لکه  $M_1 = M_2 \Leftrightarrow M_2 = M_1$

خوندي لرل سیومتريکې اړیکې نه دي:

که وي  $M_1 \subseteq M_2$  نو اړیکې  $M_2 \subset M_1$  نارښتیا یا ناتیکی دي

دا هلته چې وي:  $M_1 \neq M_2$

پ) ترانزیتیویتي Transitivity یا ورون اړیکې

ترانزیتیویتي هغه اړیکې دي، چې له یوه نه وبل ته یې د وړلو امکان شته یا موجود

وي.

له  $L = M$  او  $M = N$  څخه لاس ته راځي  $L = N$

او

$M_1 \subseteq M_2 \wedge M_2 \subseteq M_3 \Rightarrow M_1 \subseteq M_3$

پورته داسې لولو: که  $M_1$  د  $M_2$  برخدیری او  $M_2$  د  $M_3$  برخدیری وي، نوله دي  
 څخه لاس ته راځی، چې  $M_1$  د  $M_3$  برخدیری ده  
 برابونونه یا مساوات او په بل کې ځایه ونه یا خوندي ساتنه ترانزیتو اړیکې یا خوبونه دي

## ۲۰۲ په ډیری کې کارونې یا عملیې

ټولندیری (د اتحاد ست)

پیژند: ۸۰۲

د دوه ډیریو  $M_1$  او  $M_2$  ټولندیری (union اتحاد ست)، چې د ډیریو ټولنه ورته

وایو ده:

$$M = M_1 \cup M_2$$

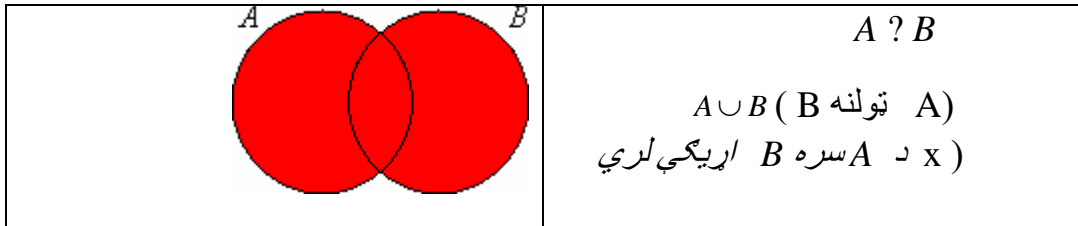
دلته داسې پوهیرو، چې  $M$  د ټولو هغو توکو څخه جوړه شوي ډیری یا ست ده،

چې لږ تر لږه د  $M_1$  او  $M_2$  توکي هم خوندي ولري.

د ټولني  $M = M_1 \cup M_2$  هر توکی د  $M_1$  یا  $M_2$  توکی هم دی (پرتله ۱ - مه برخه

د یا سره پرتله) یانې دا د ټولندیری توکی د  $M_1$  یا  $M_2$  او یا د دواړو توکي دي.

یا لاندې دیاگرام



بیلگی

الف)  $M_1$  دې د ځوانانو ډیری وي، چې بکلوریا لري او  $M_2$  دې د هغو ځوانانو ډیری وي، چې مسلکي شهادتنامې لري، نو  $M = M_1 \cup M_2$  د ټولو هغو ځوانانو ډیری ده، چې بکلوریا او مسلکي شهادتنامې ولري او یا دواړه شهادتنامې ولري.

(ب)

$$M_1 = \{k, a, r\}, M_2 = \{u, r, s, e, l\}$$

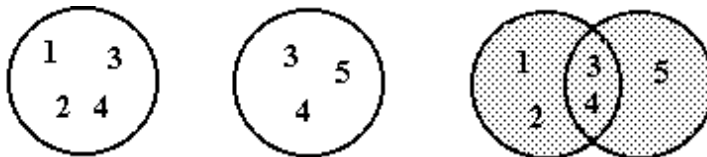
$$M_1 \cup M_2 = \{k, a, r, u, s, e, l\}$$

یا په لاندې توګه پیژند او بیلګه: A او B دې دوه ډیری وي د دې ډیریو ټولنه داسې لیکو

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

$$A = \{1, 2, 3, 4\} \quad B = \{3, 4, 5\} \quad A \cup B$$

$$B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$



تل په ټکو ټکي شوي ټکیډیری ټولنډیری په ګوته کوي.

پ – څیره ۲۰۲ دوه په هواره کې ټکیډیری په ګوته کوي، چې

الف) ټکیړدی دی . ب) گډ ټکی لري .

پ) اړیکې  $M_1 \subset M_2$  پوره کوي:

د دې لپاره څیرې په لاندې کې په بیلگو کې راغلي دي .

د ټولني لپاره کموتاتیو قانون باور لري «  $M_1 \cup M_2 = M_2 \cup M_1$  » دا په دې مانا، چې د

لړۍ پرلپسې دلته (لنډ: لړۍ) د ډیریو په ټولنه کې رول نه لوبوي

یادونه: که ګڼونه ۱، ۲، ۳، ۴، ۰۰۰ ولرو، نو دا پرلپسې بولو او که بیا دا سره جمعہ کرو لکه

$$1, 1+2, 1+2+3, 1+2+3+4, 1+2+3+4+...+....$$

نو دا لړۍ پرلپسې یا لنډ: لړۍ بولو (پرلپسې برخه کې دې وکتل شي) دا په دې مانا، چې

له دوو څخه د زیاتو ډیریو ټولنه لړۍ پرلپسې (لنډ: لړۍ) رول نه لري .

اسوڅیاتیو قانون باور لري .

$$(M_1 \cup M_2) \cup M_3 = M_1 \cup (M_2 \cup M_3) = M_1 \cup M_2 \cup M_3$$

غوڅډیری (د ډیریو غوڅی یا -متقاطع سټ) intersection

یادونه: دا کری شو، چې د ډیرو گډغوڅی وبولو (دا د ګرانو لوستونکو خوښه ده، کوم

ناتیګوالی په کې نه شته)

پیژند:

ډیری M د ډیری  $M_1$  او ډیری  $M_2$  غوڅډیری یا د تقاطع سټ ده (لوستل:  $M_1$ )

غوڅ (پری) په  $M_2$  (لنډ: غوڅی):  $M = M_1 \cap M_2$

که د ډیری  $M$  ټول توکي د ډیری  $M_1$  او ډیری  $M_2$  توکي وي .

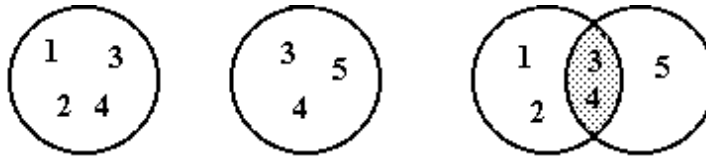
د غوڅډیری  $M = M_1 \cap M_2$  هر توکی د ډیری  $M_1$  او ډیری  $M_2$  توکي دي (د ۱-می بری د هم او هم په مانا یا د «او» په مانا)

یا دا پیژند :

$$A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\} \quad \text{غوڅی } B \text{ او } A \text{ ډیریو}$$

بیلگه:

$$A = \{ 1,2,3,4\}, B = \{ 3,4,5\} \Rightarrow A \cap B = \{3,4\}$$



یادونه: دې پورته ډول دیاگرام ته د ون دیاگرام Venn-Diagram یا د

Euler-Venn- Diagram وایی

بیلگي :

لومړی: یوه ډله زده کوونکي له ننګرهار او پکتیا څخه راځي، چې په  $M_1$  یې په نڅبنه کوو . یوه بله ډله ، چې په  $M_2$  یې په نڅبنه کوو د کندهار او همغه د پکتیا زده کوونکي، چې په  $M$  سره یې بنايو، دي . د دې دواړو ډلو غوڅډیری

$$M = M_1 \cap M_2$$

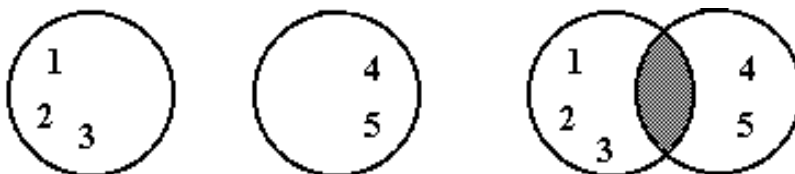
د پکتیا زده کوونکي دي .

دویم:

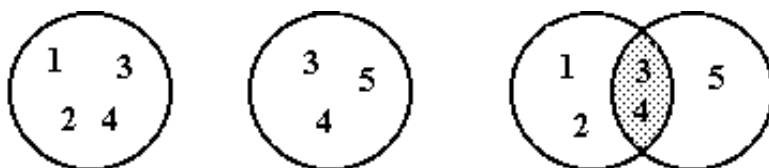
$$M_1 = \{k, a, r\}, M_2 = \{u, r, s, e, l\},$$

$$M = M_1 \cap M_2 = \{r, l\}$$

دریم څیره ۲ ۰ ۳ په هواره یا سطحه کې بنایي، چې الف) گڼون پردي دي



ب) یو بل سره گډ ټکی لري



پ) اړیکي

$$M_1 \subset M_2$$

پوره کوي

بیلگه:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\} \quad B = \{3, 4, 5\}$$

$$B \subseteq A$$



هغه ټکو باندې ټکي شوي ډیری اصلي برخډیری ده

دوه ډیری، چې غوڅډیری یې تشډیری وي

$$M_1 \cap M_2 = \theta$$

لکه د مخه مو چې گوته ورته و نیوله پردی بلل کیري

د غوڅډیری لپاره، لکه څنگه د ټولنډیری لپاره کموناتیو قانون باور لري

$$M_1 \cap M_2 = M_2 \cap M_1$$

او اسوڅیاتیو قانون

$$(M_1 \cap M_2) \cap M_3 = M_1 \cap (M_2 \cap M_3) = M_1 \cap M_2 \cap M_3$$

د دواړو د ډیری کارونو یا ډیری عملیو یانی ټولنډیری او غوڅډیری لپاره دواړه دیستریبوتیو قانونونه پوره کیري یا باور لري

$$M_1 \cup (M_2 \cap M_3) = (M_1 \cup M_2) \cap (M_1 \cup M_3)$$

$$M_1 \cap (M_2 \cup M_3) = (M_1 \cap M_2) \cup (M_1 \cap M_3)$$

(د گنونو د شمیرکارونو یا عملیو لپاره یواځي یو دستریبوتیو قانون شته والی لري:

$$a_1 \cdot (a_2 + a_3) = a_1 \cdot a_2 + a_1 \cdot a_3$$

مگر په ټولیزه توگه باور نه لري

$$a_1 + (a_2 \cdot a_3) = (a_1 + a_2) \cdot (a_1 + a_3)$$

پيژند :

کمونډیري یا تفریق سټ  $M_2$  د ډیري  $M_1$  او ډیري  $M$  کموالی یا فرق دی او

$$M_2 = M / M_1 = \{x \mid x \in M \wedge x \notin M_1\} \quad \text{داسې یې لیکو:}$$

له  $M$  څخه د  $M_1$  ډیري کمه شوي

یا کله چې د  $M_2$  توکي د  $M$  هغه توکي وي، چې هغه د ډیري  $M_1$  توکي نه وي.

لیکنود یا لیکندول :

$$A / B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$

لوستل : د  $A$  او  $B$  توپیر ډیري یا کمونډیري یا تفریق ډیري له ټولو هغو توکو  $x$  جوړه ده، د کومو لپاره، چې باور لري :  $x$  د  $A$  توکی دی او  $x$  د  $B$  توکی نه دی

بیلگي :

لومړی : په یوه ټولگي کې  $M_1$  د ټولو نارینه وو زده کړو ډیري ده او  $M_2$  د ټولو زده کړو ډیري (د نارینه وو او بنځینه وو) ، چې په شمیر پوهنه کې لس نمرې وړي.

$$M_1 / M_2$$

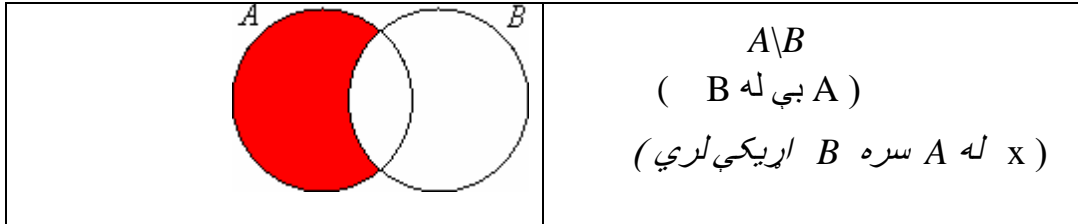
د هغو زده کړو ډیري ده، چې ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، نمرې وړي او ټول د هغو نجونو ډیري ده، چې په شمیر پوهنه کې یې لس نمرې وړي.

که په ټولگي کې یواځې نارینه زده کړي وي، نو باور لري

$$M_1 / M_2 = \theta$$

یا دا لاندې :





دویم :

$$M_1 = \{k, r, a, i\}, M_2 = \{u, r, s, e, l\}$$

$$M_1 / M_2 = \{k, a\}, M_2 / M_1 = \{u, s, a\}$$

لکه څنگه، چې د کمون یا تفریق پیژند او بیلگي را په گوته کوي په ټولیزه توګه باور نه لري:

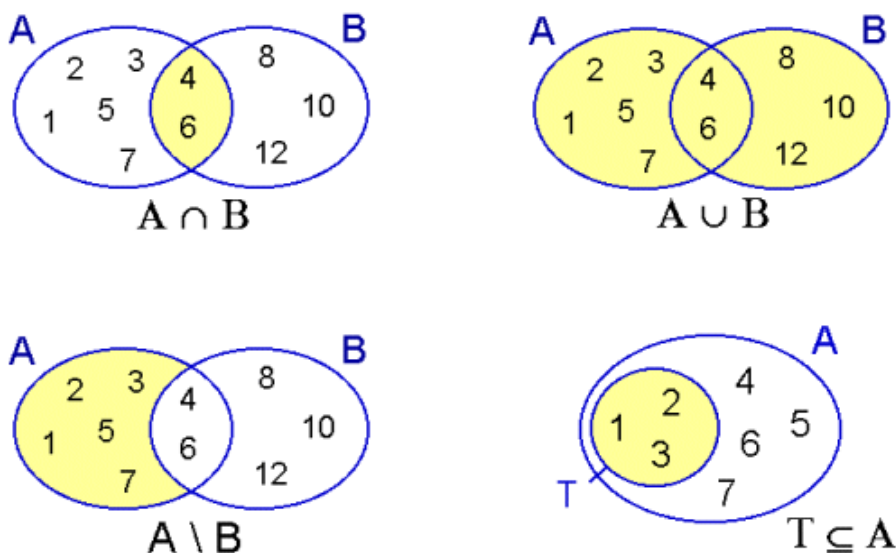
$$M_1 / M_2 \neq M_2 / M_1$$

### د یوې ډیرۍ یا ست کېلمنت یا پوره کونکی :

دا کارونه یا عملیه د نورو کارونو څخه توپیر لري، چې په ډیرۍ کې مو څیرلي • دا یوه یوځاییزه کارونه ده او دا نورې دوه ځایزې کارونې یا عملیې دي •

مور بنسټیډیرۍ په U او د ټولو هغو توکو ډیرۍ، چې U کې پراته دي یانې د U توکي دي او هغه په M کې نه دي پراته یانې د M توکي نه دي پوره ډیرۍ یا کېلمنت بولو او د  $\bar{M}$  سره یې په نڅېنه کوو •

په لاندې څیره کې بیا د ډیرۍ غوڅۍ، - ټولنه او - کمون او برخډیرۍ ته د ګرانو لوستونکو لاریات پام را اړوو •



پيژند:

پوره کونکی- یا تکمیلډیری (یا د یوې ډیری کمپلیمنت) د یوې ډیری  $M$  پوره

کونکې ډیری  $\bar{M}$  تیک هغه توکي لري (د بنسټډیری  $U$  څخه)، کوم چې د  $M$

توکي نه وي.

دوه ځله کمپلیمنټډیری جوړول خپلي لومړنی وینا ته ځي، یانې  $\bar{\bar{M}} = M$

دلته یواځې یوه ساده بیلگه راوړو: په یوه کلي کې دوه کورنۍ د توپیر او برک کورنۍ اوسیري. که دا دوه کورنۍ یو له بل سره خپلوي ونه لري، نو دوي یو له بل سره پوره ډیری یا تکمیلډیری بلل کیري یانې دا کلی پوره کوي.

۴۰۲ څیرونه mapping یا اړیکي:

یادونه: پام دی وي، چې دا هغه ورسره بلد تابع کلمه نه ده، چې وروسته به ورسره بلد شو.

په دي برخه کي لومړی د ډیری ضرب کلمه پیژنو یا تعریفوو او بیا د ضرب کلمي کارونه څیرو.

پیژند ۱۰۲: د دواړو ډیریو  $M$  یو او  $M_2$  ډیری ضرب (اټیران ضرب) هم ورته وایي، یاني په  $x$  سره ځلیري یا ضربیري

$$M = M_2 \times M_2$$

د ټولو تنظیم یا ترتیب شویو توکو

$$x \in M_1, y \in M_2$$

جوړو  $(x, y)$  ډیری ده.

بیلگي

$$M_1 = (a, b), M_2 = \{1, 2, 3\}$$

$$M_1 \times M_2 = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)\}$$

د جوړو د غوښتل شوي تنظیم له مخي ځل په ډیریو کي کموتاتیو نه دی دا په دي مانا، چې

$$M_1 \times M_2 \neq M_2 \times M_1 \quad \text{په ټولیزه توگه باور نه لري:}$$

۲-  $R$  دي د ټولو رییلگنونو ډیری وي. په هندسي مانا د کرني د ټولو ټکو ډیری.  $R \times R$  د ټولو رییلگنونو جوړو ډیری ده، په هندسي مانا د هواري یا سطحې د ټولو ټکو ډیری ده.

پیژند ۱۰۰۲:

د څیروني  $F$  لاندي د دوه ډیریو د ضرب ډیری  $M_2 \times M_2$  برخډیری پوهیرو.

پس د جوړه تنظیم شوو توکو ډیری، چې  $x \in M_1$  له یوه یا ډیرو توکو  $y \in M_2$  سره تنظیم یا بهتره په باندې څیره شي.

داسی هم ویلی شو: د  $M_1$  توکی د  $M_2$  په یوه یا ډیرو توکو تنظیمیږي یا څیره کیږي. که  $(x,y) \in F \subseteq M_1 \times M_2$  وي، نو  $x$  اوریجنل یا اصلي توکی او  $y$  څیره توکی بلل کیږي.

د ټولو اصلي توکو ډیری پیژندور شو یا تعریفور شو یا پیژندډیری یا تعریفډیری بلل کیږي او د ټولو څیره توکو ډیری د څېروني ډېری، ارزښتور شو یا ارزښتډیری بلل کیږي.

بیلگی

$$M_1 = \{a, b, c, d\}, M_2 = \{1, 2, 3, 4\}$$

د جدول په توګه د  $M$  یو توکو څېرونه ونه یا څېره کوونه د  $M$  دوه په توکو

څېره توکی                      اصلي توکه یا څیره کوونکی توکی

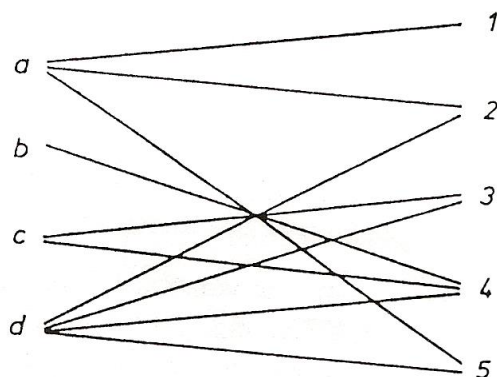
a -----→ 1, 2, 4, 5

b -----→ 4

c -----→ 3, 4

d -----→ 2, 3, 4, 5

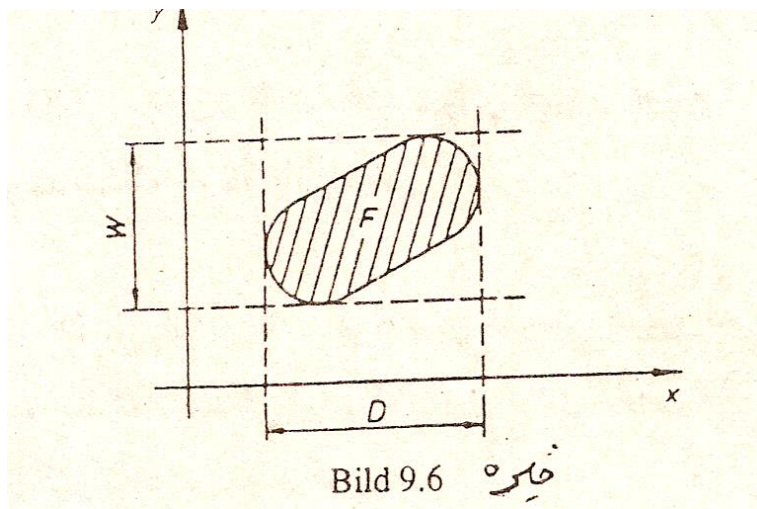
یا دا لاندې:



څیرونه:

$$F = \{ (a,1), (a,2), (a,5), (b,4), (c,3), (c,4), (d,2), (d,3), (d,4), (d,5) \}$$

(د M یو او M دوه ډیریو د ټولو توکو جوړو ډیری)



دریم : هر پیدایینتی یا طبیعی گن a د هغه په دوه ځله  $b=2a$  باندي څیره کیري . داسي

پیژند شوي یا تعریف شوي څیره ونه په لاندي بڼه هم انځوریدلی شي .

$$F = \{ (a,b) \mid a \in \mathbb{N}, b = 2a \}$$

دلته هم  $N$  د پیدایښتي یا طبیعي گڼونو ډیری، پیژندډیری یا تعریف- د ټولو پیدایښتي گڼونو ډیری ده او ارزښت ډیری د ټولو جوړه گڼونو ډیری ده.

څلورم: که  $M$  یو په یوه ښوونځي کې د ښوونکو ډیری وي او  $M$  دوه په ښوونځي کې د ځانگړو ټولگيو ډیری وي نو ښوونکي، چې په ټولگيو کې درس ورکوي دا یوه څېړنه ده. د ښوونکو ډیری د ځانگړو ټولگيو په ډیری کې

مور د څېړه ونې څلور حالتونه توپيروي:

پیژندنه (دې ته دې گران لوستونکي ښه پام وکړي):

لکه په لومړۍ بیلگه کې په څیره ونه  $F$  کې د  $M_1$ ، چې تعریف ډیری  $D$  سره برابر دی او  $M_2$ ، چې له څیره ډیری،  $W$  سره برابر دی، ټوکی مو مخ ته پراته دي.

له یوې څیروني  $F$  غږیرو د  $M_1$  په  $M_2$  باندې. دلته دې « د » او « په » ته پام وي

وي دې:  $D \subset M_1, W \subset M_2$

لکه په دویمه بیلگه کې، نو د یوې څیره ونې  $F$  غږیرو له  $M_1$  په  $M_2$  کې (دلته دې

« په » او « په کې » ته پام ور واورول شي)

وي دې:  $D = M_1 \wedge W \subset M_2$

دلته د یوې څیره ونې غږیرو د  $M_1$  په  $M_2$  کې دلته دې دریمه بیلگه په پام کې راوړل شي.

وي دې:  $D \subset M_1 \wedge W = M_2$

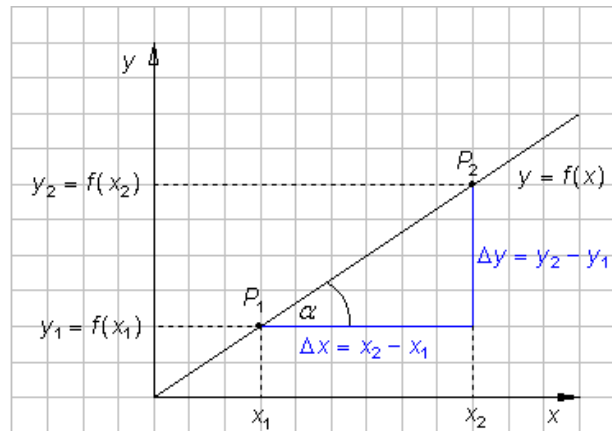
نو د یوې څیره ونې غږیرو له  $M_1$  په  $M_2$  باندې. دلته څلورمه بیلگه د بیلگي په توگه راوړو. د دې نیوني لاندې چې ټول ښوونکي ځانگړي ټولگيو ته درس ورکوي.

یادونه : دا لاندې برخه دې گران لوستونکي وگوري، خو د دې اوس وخت لپاره لږ ستونځمنه ده او شاید څیرې هم رانه شي، خو که لږ د شمیرپوهنې سره بلد شو، بیا پرې پوهیدل ساده دج ۰ زج مخ ته لرم، چې په دې هکله لیکلی کتاب، چې چاپ شوی نه دی دلته پر لیکه کړم، چې هلته بیا دا موضوع لږ غزیدلي ده.

بیلگه ۰ ۰ ۲ : مور په هواره یا سطحه کې څرگند شوي کږی د ډیریځل  $R \times R$  په څیر د برابررونو له لارې رانیسو ( $R$  د رییلگونو ډیری د گڼکږنې ټکي دي) گڼونه دې وکتل شي)) ۰

الف)  $y = 2x$  یوه څیره ونه ده د  $R$  په  $R$  باندې، ځکه چې باور لري

$$D=W=R$$

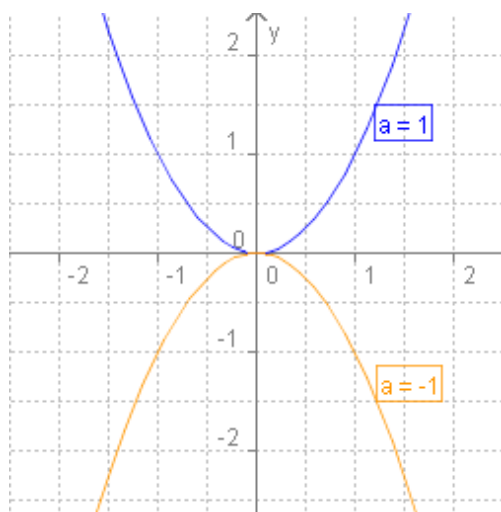


یادونه : په پورته څیره کې برابرې  $y = ax + b$  دی.

$$y = x^2 \text{ ( ب )}$$

یوه څیره ونه ده د  $R$  په  $R$  کې، ځکه چې باور لري

$$D = R, W = [0, \infty)$$



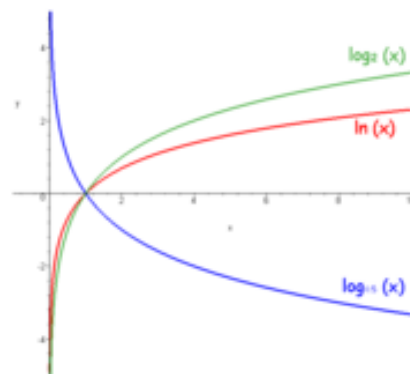
یادونه :

پوته بلواک د  $x \mapsto ax^2 + bx + c$  ډول دی، چې  $b = 0$  ,  $c = 0$  او  $a = 1$  ,  $a = -1$  ایښول شوي دي .

پ (  $y = \log x$  )

یوه څیره ونه ده له  $R$  په  $R$  باندې « ځکه چې باور لري » .

$$D = (0, \infty) \wedge W = R$$

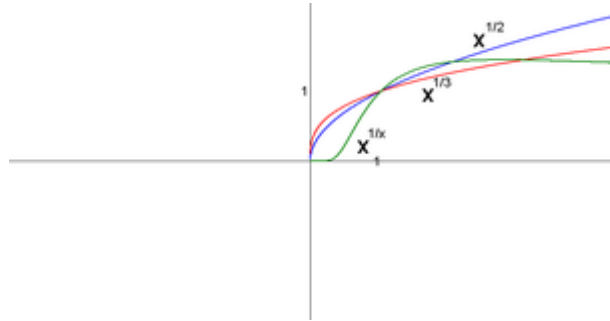




(ت)  $y = +\sqrt{x}$

یوه څیرونه ده له  $R$  په  $R$  ، ځکه چې باور لري

$D = W[0, \infty]$



یادونه : پورته د دویي، دریمي او په  $x$  مې ریښي په مانا دی

څیري له ویکي څخه په مننه راکښته شوي دي .

پیژند ۲ .

یوه څیره ونه  $E$  یواځنی بلل کیږي . که هر  $x \in D$  په ټیک یوه  $y \in W$

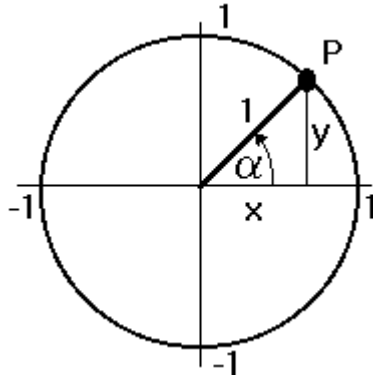
باندي څیره شي . دا په دې مانا، چې هر  $x \in D$  ټیک یووار په  $y \in W$

تنظیمډیری یا جوړه ډیری کي رامنځ ته کیږي . یوه یواځنی څیره ونه فنکشن

یا « بلواک » بلل کیږي او یا لکه تراوسه ورسره بلد یو یوه تابع بلل کیږي .

پام:

دا دې دلته کره په گوته شوې وي، چې زه « یوازنی څیره ونه » بلواک یا فنکشن بولم .



بیلگه ۲.۰۶: په بیلگه ۲.۰۵ کې له الف تر ت پورې ټولې څیروني فنکشنونه یا بلواک دی. د دې پر څټ لاندې برابرېون (یوونگردي یاني گردی، چې وړانگه یې یو یوون پایووالی یا واحد وي څیره ۰) انځور شوي څیره ونه له R په R کې  $D=W([-1,1])$  فنکشن یا بلواک نه دی، ځکه چې اصل دوه څیرې لري یاني که په تنظیمجوره کې د څیره ونې لري پرلپسې (لنډلری) بدله شي، نو یوې پرڅټ څیره ونې ته راځو:

پیژند ۲: څیره ونې F ته پرڅټ څیرونه  $F^{-1}$  د ټولو جوړو  $(x,y)$  ډیری ده له  $(x,y) \in F$  سره.

پیژند ۳: یوه څیره ونه یو یواځنی بلل کیري، که یواځنی F او  $F^{-1}$  یوازنی څیروه ونې وي، دا په دې مانا، چې که هر  $x \in D$  او  $y \in W$  ټیک یو ځل په تنظیم کې منځ ته راشي.

یادونه: د څیروني نوم څخه باید ونه ډار شو دا څیره ونې څیرې کوونې (که څوک یو کالی یا رخت څیرېکوي) او څیره کوونې توپیر، ځکه سره کیدی شي، چې هغه منځپانگه یې یو له بل توپیر لري. مور پښتو کې نږدې یو ډول لیکونکي ویونه (لغات) لرو، خو دا هغې منځپانگې له مخې توپیر لري.

ډیری پوهنه د شمیر پوهني سټه ده، نو په راتلونکې کې به یې نوره هم ژوره وڅیرو او همدا اوس هم نور گران هیوادوال دې ته رابولم، چې له ما سره گډ کار یا خپلواک دې کار ته ملا راوترې.



او  $M_2$  د ټولو ټولگنونو ډیری

ب) د ټولو مساواتو  $x^2 + 2x - 3 = 0$ , حلونو (اویو -) ډیری

$$M_2 = \{-3, 1\}$$

پ)  $M_1$  د ټولو گڼو ډیری چي پر ۶ ویشل کیږي.

او  $M_2$  د ټولو گڼو ډیری چي په ۳ ویشل کیږي!

او  $M_3$  د ټولو گڼو ډیری چي په ۱۲ ویشل کیږي!

۴- د ډیری  $\{a, u, t, o\}$  ټول برخه ډیری ورکړی!

۵- د لاندې ډیریو څخه ټولنه ډیری، غوڅه ډیری او دواړه ټولنه ډیری جوړه کړی!

الف)  $M_1 = \{k, a, m, e, l\}$ ,  $M_2 = \{m, a, u, l, t, i, e, r\}$

ب)  $M_1 = \{2, 4, 6, \dots\}$ ,  $M_2 = \{3, 6, 9, \dots\}$

پ)  $M_1 = \{x \mid x^2 + x - 2 = 0\}$ ,  $M_2 = \{x \mid x^2 - 3x + 2 = 0\}$

۶- د یوه ډیری  $M$  او د تشه ډیری  $\emptyset$  ټولنه ډیری، غوڅه ډیری او توپیر ډیری جوړه کړی!

۷- د یوه ډیری  $M$  او خپل همدې ډیری ټولنه ډیری، غوڅه ډیری او توپیر ډیری جوړه کړی!

۸- وي دې  $M_1 = \{4, 8, 12\}$   $M_2 = \{3, 6, 8\}$

$M_3 = \{0, 2, 4, 6\}$ ,  $M_4 = \{6, 12, 18\}$

جوړه کړی:  $M = [(M_1 \cup M_2) \cap M_3] \setminus M_4$

۹- جوړه کړی

الف)  $M_1 \cup (M_1 \cap M_2)$  (پ)

پ)  $M_1 \cap (M_1 \cup M_2)$  (ت)

۱۰- وي دې

$$M_1 \cup M_2 = \{1,2,3,4,5\},$$

$$M_1 \cap M_2 = \{1,3,5\}$$

$$M_1 \setminus M_2 = \{2,4\}, M_2 \setminus M_1 = \emptyset$$

له دې پورته څخه  $M_1$  او  $M_2$  وټاکي!

۱۱- وي دي

الف)  $M_1 \cap M_2 = \emptyset$  ب)  $M_1 \subset M_2$ ,

وټاکي:  $M_1 \setminus M_2 = \emptyset$ !

۱۲- وي دي  $M_1, M_2$  (د نیمواز) اینټروال ټکي ډيري:

$$M_1 = [-3, 3], M_2 = [1, 7]$$

وټاکي

الف)  $M_1 \cup M_2$  ب)  $M_1 \cap M_2$  پ)  $M_1 \setminus M_2$

ت)  $M_2 \setminus M_1$  ټ)  $M_1 \times M_2$

۱۳- وي دي  $M_1 = \{1, 2, 3\}$ ,  $M_2 = \{a, b\}$

الف) د  $M_1 \times M_2$  څل جوړ کړی

د دې لاندې ب) تر ت) برخې تمرین لپاره دې ۹ الف برخه وکتل شي.

ب) دا لاندې کوم ډول څیرونی دي

$$F_1 = \{(1,a),(1,b)\}$$

$$F_2 = \{(1,a),(3,a)\},$$

$$F_3 = \{(1,a),(2,b),(3,b)\},$$

$$F_4 = \{(1,a),(2,a),(3,a)\},$$

$$F_5 = \{(1,a),(2b)\}$$

په ټولو حلونو (اوبیو) کې  $F_1$  تر  $F_5$  ورکړی.

پ) په څټ څیرونه ورکړی

ت) د څیرونو  $F_1$  څخه تر  $F_5$  پورې، کوم یواځنی او کوم حتی یویواځنی دي؟

### ۳. دحقیقي اعدادو (-گڼونو) سره د شمیرلو بنسټیزې نښلونې

(ترنۍ، کارونۍ یا عمليې)

۱۰۳ د اعدادو د سیستم جوړښت

۱۰۱۰۳ طبیعي اعداد یا -گڼونه natürliche Zahlen

انسانانو له پخوا څخه اعدادو ته اړتیا درلوده. له دې امله یې پرمخ وديینه کې هڅې وکړې، چې له ډیرې (سپټ) (د لیکنې په دننه کې ډیرې پوهنه هم څیرل شوي)) سره داسې لار غوره کړي، چې دا ډیرې تشریح کړای شي او د انسانانو او چاپیریال (طبیعییت) د پرلپسې اخ او دب په نتیجه کې د گڼ یا عدد وی (کلمه یا لغات) راپیداشوی، چې د عدد یا گڼ کلیمې پر بنسټ د ریښتینو شیانو څرگند څومره والي (کمیت) Quantitative ترلاسه کړي. د طبیعي اعداد و څخه په گڼلو یا که غواړي شمیرلو کې گټه اخستل کیري.

### ۱۰۳. الف د طبیعي عددونو (پیداينتي گنونو) جوړښت

پیژند (تعریف) ۱۰۳:

الف ( الف ) ټول طبیعي اعداد د پیری په څیر یوه ټولگه جوړوي او د طبیعي اعدادو پیری یا سټ په نامه یادېږي یا یې طبیعي اعداد بولو او په  $N$  او همداسې  $N^0$  سره یې په نڅینه کوو.

پیر پای طبیعي اعداد شته ، ځکه چی په هر طبیعي عدد پسې راتلونکی طبیعي عدد هم شته دی ( یعنی په هر څومره لوي طبیعي عدد پسې راتلونکی طبیعي عدد شته دی، چی دا وروسته روښانه کيږي).

### ب) د طبیعي گنونو (اعدادو) اکسیوماتیکي Axiomatic جوړښت

اکسیوم جمله ده، چی اوبیونه ( حل ) نه غواړي او همداسې منل کيږي. دا چی جمله ، اکسیوم څه دي په لومړۍ برخه یانې سم اند ( منطق ) کي دي وکتل شي.

طبیعی عدد کلمه د جیوسپي پیانو ( Giuseppe Peano له ۱۸۵۸ – ۱۹۲۰ ز. کال) اکسیومونو پر بنسټ لاندې پیژند لري یا په لاندې توگه تعریف کيږي:

۱ – د صفر گن یو پیداينتي گن دی

۲ - د هر طبیعي عدد یا گن  $m$  لپاره یو یواځنی ټاکلی طبیعي عدد  $n$  شته، چی سملاسي (ترلی) د  $m$  پسې گن دی، د کوم لپاره چی لرو:  $m+1 = n = m^{\wedge}$

دلته  $m^{\wedge}$  د  $m$  پسې سملاسي یا ترلی گن یا عدد په گوته کوي.

۳ – هر طبیعي عدد زیات له زیاته په یوه طبیعي عدد پسې سملاسي راتلونکی گن دی.

۴ – هيڅ طبيعي عدد نه شته، چي پسي راتلونكي پيدايښي عدد يې صفر وي.

۵ – که طبيعي عددو ډيري  $M$  صفر د توکي په څير ولري او که له هر طبيعي عدد  $m$  سره د هغه پسي ترلي راتلونكي عدد يا گن  $m$  هم د  $M$  توکي وي، نو  $M$  ټول

طبيعي عددونه خوندي لري يا په بل ډول « ټول طبيعي اعداد په کي ځاي دي ».

يادونه: ځني ادبياتو کي، د بيانو سيستم کي، د صفر په ځاي ۱ ليکل شوي. په دې حالت کي بيا صفر ته د طبيعي عدد يا گن په څير نه کتل کيږي. که بيا صفر ورسره مل کړو، نو د صفر سره طبيعي اعدادو ډيري يا – ست يې د صفر سره بولو.

### ۱. ۱ ب : د طبيعي اعدادو يا گنونو انځورونه او سيستمونه:

طبيعي اعداد په نخښو ( دې ته په الماني کي Ziffer وايي، چه همغه د صفر په معنا دی، خو دلته ترې مطلب، چي دا څيرو، دی) انځور يږي. د دې لپاره چي دا لږ ځاي ونيسي، نو د لويو او وړو اعدادو لپاره نخښي له کوچنيو سره يوځاي کيښول شوي دي. دا چي څرنګه يوه د عدد يا گن نخښه له بل توپير يږي، په لاندې ډول يې د زياتون يا جمعي سيستم او ځاي سيستم کي ښايو.

په زياتون سيستم کي هر بنسټيز،، ځاي،، يو،، ځاي ارزښت،، لري. د څيږونو زياتون د يو په بل کي د ورزياتشوي بنسټيز څيږ پخپله هغه عدد يا گن ورکوي. بيلګه يې په رومي گنونو کي راوړو. دا له بنسټيزو څيږونو جوړ شوي ( ترې لاندې لسيز د اعدادو سيستم دی). زه دلته د ضرورت په بنسټ ټول ضروري څيږونه چي موخه ترې عددونه دي، له پيل راوړم:



رومي عددونه: I V X L C D M

عربي عددونه: 1 5 10 50 100 500 1000

طبيعي عدونه له دي امله يو د بل ترڅنگ لیکو چي کم ځای ونيسي لکه د بیلگي په توگه:  
CXX په دي معنا چي  $C+X+X$

په رومي گڼونو کی، که بنسټيز کوچني گڼنځي لکه I, V, C د لوي گڼنځي و کين لور ته وليکل شي نو دا مانا لري چي دا کوچني گڼ له لوي گڼ څخه کم شوی. د بیلگي په توگه:  $XC = C - X$ .

بیلگي: الف: MMDCCLXVIII په دي مانا دی 2768

ب: MCMXXIX په دي مانا دی 1929

پ: CCCIV په دي مانا دی 304

ځایسیستم: په ځای سیستم کی هره بنسټيزه نځبڼه یو «ځای ارزښت نځبڼه ارزښت» لري.

لکه:  $g$ - ټيز ځای سیستم (پوزیشن سیستم (Positionssystem): د طبيعي گڼ  $n$  انځورونه په  $g$ - ټيز ځای سیستم کی په دي ډول ده چي د یوه ورکړ شوي سټی په بنسټ ( $g \in \mathbb{N}, g \geq 2$ ) هر طبيعي گڼ  $n$  په لاندې ځانگړي ډول انځوریدلی شي:

$$n = a_k g^k + a_{k-1} g^{k-1} + \dots + a_1 g + a_0$$

دلته بنسټيزي گڼنځي  $a_i, g, a_i \geq 0, i = 0, 1, 2, \dots, k, a_i \leq g-1$  چي  $a_k \neq 0$  وي په کار راځی یا اړتیا ورته شته.

لیکلی شو:

$$n = a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0$$

که د بدلیدلو (د بل څه سره) امکانات رامنځ ته کيږي، نو بهتره به وي چي په

لاندې ډول ولیکل شي

$$n = [a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0]_g$$

نن په ټوله نړۍ کې گڼل په لسيز سيستم ( گڼځای ارزښت ) باندې کيږي، چې تل داسی نه وه، لکه په افغانستان کې چې دا اوس هم د ډوډۍ پور لپاره په لرگي کرښه را کاري، چې څو ډوډۍ واخستل شوې.

---

په لسيز سيستم کې گڼځای «ارزښت» لري چې انځور شي، مگر په لرگي کې ځای ارزښت نه لري چې کرښه چيرته کښل شوې، هلته د پور کرښو له گڼون يا تعداد څخه پور څرگنديږي.

بل د گڼلو سيستم . لکه د مخه مو چې تر پام لاندې ونيوه، د گڼلو رومي سيستم دی چې نن هم د ارزښت وړ دی او همدارنگه د مفهوم ډک، زياتونسيستم (جمعی -) څرگنديږي.

بيا هم غواړو چې دا په لاندې ډول ځانگړی کړو:

۱ - هره لاندې نڅښه I, X, C کړای شي چې زيات ترزياته ۳ ځله (۳ واری) په يو گڼ کې پرله پسې يا څنگ تر څنگ راشی

۲ - هره، د گڼ نڅښه V, L, M, خورا زياته يو ځل څنگ تر څنگ په يوه گڼ کې راتلی شي.

۳ - که بنسټيز نڅښه I, X او يا ..... ددې نڅښو د ارزښت نه لوړو ارزښت

نڅښو V, X, L, C, D يا M CXI تر مخ ځای په ځای شوې يا انځوروي نو د لوي ارزښت څخه کميږي .

زياتون او کمون (جمعه او منفي )

- ۴ - په هرگڼ انځور (Zahlendarstellung) کی کیدی شي چې یواځې یو بستیز گڼ تر مخ ځای په ځای یا انځور شي لکه:  $1098 = \text{MXCVIII}$  مگر نه IMIC
- ۵ - د یو گڼ لپاره د امکان په حال باید کمی نڅښی په کار واچول شي.

عربي گڼونه : دا گڼونه، چی مور ورسره بلد یو، د لسيز سیستم گڼونه دي، چی عربي گڼونه بلل کیږي. دا د گڼلو لسيز سیستم عربو د هند څخه راوړی، چې په دولسمه پیړی کې یې اروپا ته یو وړ. دا اصلي گڼونه له صفر ( ۰ ) تر ۹ پورې دي یا له ۰ تر 9 پورې، چی

څیفر ورته واي (همغه عربي صفر دی) چې دلته ترې بنسټیز گڼونه پوهیدل کیږي.

لکه چی گوته مو ورته ونیوه زیاتونسیستم نور ارزښت نه لري، ځکه چی د یو گڼ ارزښت د گڼ نڅښی زیاتون باندې انځور کیږي. د ځای سیستم سره د گڼونو انځورول ساده دي.

تعریف ۱ . ۱ ب : په یو «ځای ارزښت سیستم» کی هغه گڼ لوي دی چی زیات ځایونه ولري، که چیرې د گڼ د ځایونو شمیر سره برابر وي ( مساوي وي ) نو هغه گڼ ستر دی چی له کینی لورې یی نڅښه لویه وي.

لسيز - یا لسگونى سیستم: لسيز سیستم هغه ځای ارزښت سیستم دی چې له انځورونى یی څرگند کیږي. په لسيز سیستم کی د گڼ انځورولو نڅښی، لکه د مخه مو چی انځور کې، ۱، ۰، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹ دي. ۱۰ گڼ د لسيز سیستم بنسټیزه نڅښه ده. دا چی نور گڼونه نه انځور کیږي، نو ځای هلته ډک دی چی پرله پسى ( ترتیب یانظم ) د ۰ تر ۹ یعنی له ۰ تر 9 گڼونو پورې په ځای شوي وي.

په دې ډول د پسی جگ ځای یوون (واحد) د په کار اچول شوو گڼنځنبو گڼون (تعداد یا شمیر) دی، څمور په حالت کی ۱۰ .

لکه چی د مخه مو گوته ورته ونیوله، د پای (نه لایتناهی) ډیری (set, die Menge) ۹-امه برخه دې وکتل شي) غړو گڼلو لپاره لاندې گڼونه کفایت کوي: ۱، ۲، ۳، ۴، او داسی نور. ټولو دې گڼونو ته چی د صفر گڼ ورسره مل شي د طبعی گڼونو ډیری N ویل کیږي. ددې لپاره لیکو :

$$N = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots \}; \quad N^* = \{ 1, 2, 3, 4, \dots \}$$

مور گڼونه په کوچنیو لاتینی ټکو یا حروفو بنایو لکه a, b, c, ... n . دا ریښتوني

(ریښتینوالی یا واقعیت) چی n دې یو طبعی گڼ وي، داسی لیکل کیږي  $n \in N$  یا  $n \in N^*$  (ویل کیږي چی: n د طبعی گڼونو ډیری N یا  $N^*$  توکی دی) (لنډ n د N یا  $N^*$  څخه دی) (په دې ځای کی دې دگن او گڼځای (څیفر) توپیر ته پام وي.

مور دگڼونو ټاکلو لپاره بلد یا اشنا د تخنیک ډیری لسیز سیستم په کار اچوو (استعمالوو)

$$N_{10} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

د گڼونو د نځنبو  $a_i \in N_{10}$  پرله پسی، لکه د مخه مو چی په گوته کړل، په لاندې ډول یو طبعی گڼ انځوروي:

$$a_n a_{n-1} a_{n-2} \dots a_2 a_1 a_0 = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + a_{n-2} \cdot 10^{n-2} + \dots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0 \cdot 10^0$$

$$a_i \in N.$$

گڼونه په نورو څیفرنو ډیری هم انځوریدی شي. د بیلگي په توگه په اینفورماتیک (Informatik) کی، چی د دوالسیستم (Dualsystem) (دوئیز سیستم) څخه کار اخستل کیږي. ددې لپاره دوه گڼنځنبی (څیفرونه) لیکل کیږي

$$N = \{ 0, 1 \}$$

په لاندې جدول کې دلسیز او دوه ئیز سیستمونو لمړني گڼونه یو د بل ترڅنگ کښل شوي:

لسیز سیستم	دوه ئیز سیستم
0	0
1	1
2	10
3	11
4	100

په ټولیزه توگه (عمومي توگه) دلته یو څیفر پرلپسې (د عددون ترادف)  $a_i \in N_2$  یو طبیعي عدد په لاندې ډول انځوروي،

$$a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0 = a_n \cdot 2^n + a_{n-1} \cdot 2^{n-1} + \dots + a_2 \cdot 2^2 + a_1 \cdot 2^1 + a_0 \cdot 2^0, a_i \in N$$

$$59 = 1 \cdot 32 + 1 \cdot 16 + 1 \cdot 8 + 0 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \quad \text{بیلگه ۱.۱} :$$

$$= 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 111011$$

یا دونه :: څه لنډ لنډیزونه

د طبیعي اعدادو ډیری یا ست داسی په نڅښه کوو:

$$N = \{ 1, 2, 3, \dots \}$$

$$N^\circ = \{ 0, 1, 2, \dots \}$$

ه کتابونو کی دا د صفر نخبه په لاندې برخه کی راځي .

### ۳ . ۱ . ۰ ب د طبیعي اعدادو یا گڼونو انځورونه:

طبیعي اعداد په نخبو انځور پيري . دا عددونه یا گڼونه د ځان لپاره یو سیستم لري، چی هغه زیات یې مور نه څیرو . زموږ لپاره غوره هغه عربی اعداد یا گڼونه دی .

یا په بل ډول : دا عددونه چی مور ورسره بلد یو د لسيز ځایستسم عددونه دي، چی دا مو د مخه په گوته کړل . دا کورونه (خونی یا خانې) لري او په هر کور کی له صفر تر ۹ ځاي نیوی شي او بیا یې هر ځاي یو ارزښت لري، له دې امله دا « ځاي ارزښت سیستم » دی . لومړي کور ته یویز، دوم ته لسيز، دریم ته سلیز او همداسی ، چی دا مو د مخه لږ روښانه کړي .

انځورونه یا څیفرونه یې دي : ۰ ، ۱ ، ۲ ، ۳ ، ۴ ، ۵ ، ۶ ، ۷ ، ۸ ، ۹ دا د بنسټیز گڼونو نخبی دي، نور یې په کورونو یا ځایسیستم باندې روښانه کیدی شي .

پیژند ۳ . ۱ . ۰ ب :

په یو « ځاي ارزښت سیستم » کی هغه گڼ لوي دی، چی ډیر ځایونه ولري . که چیرې د گڼ د ځایونو یا کورونو گڼون (تعداد) سره برابر وي . نو بیا هغه گڼ لوي دی، چی کین لور یې گڼنخبه لويه وي .

۳ . ۱ . ۰ پ : طبیعي اعدادو کی د شمیرني بنسټیز قوانین

اوس په لاندې ډول د پیدایښت گڼونو، په ټولیزه توگه د رییل گڼونو لپاره او وروسته د کمپلکسو گڼونو لپاره هم باوري (معتبر) بنسټیز د شمیرني قوانین وړاندې کوو:

الف : د انډول (نظم یا ترتیب یا لوي واره ترتیب) (Anordnung) بنسټيز قوانين:

که  $<$  ولرو، نو دې ننوتې کونج کې یا د نخښې خوله کې عدد یا گڼ لوي دی او د وتلې کونج یا لوي کونج  $<$  که نخښه یا داسې کونج کې یا څټ یا ککره کې لیکل شوی عدد کوچنی دی. که ځنونه یا اعداد ۱۵ او ۲۳ ولرو نو د لویو واره اړیکې داسې لیکو، یانې که  $15 < 23$  ولرو نو ترې څرگندېږي، چې عدد ۱۵ له عدد ۲۳ کوچنی دی.

د دوه طبیعي اعدادو  $a$  او  $b$  ترمنځ له لاندې اړیکو څخه ټیک یوه اړیکه باور لري»

$$a < b, a = b, a > b$$

۲ -  $21 = 21$  که د  $21$  په ځای توری ولیکو هم  $a = a$  به وي اینه ونه یا هندارونه یا منعکسونه (ریفلیکسیویټي Reflexivity)

۳ - له  $a = b$  او  $b = a$  (لاس ته راځي)  $b = a$  (سیومټري، انډول، ورته وایي Symmetry)

د انعکاسي (ایینه ونیز - یا هندارونیز) برابروالی یانې که چیرې دا عددونه وراینه یا هنداره یا انعکاس شي، نو دواړه عددونه په دا بل لور بیرته سره برابر دي یا برابرېږي. که انعکاسي (اینه ونیز) برابر نوم ورته کېږدو، نو هم مناسب به وي، خو مور به یې همغه سیومټري وبولو.

۴ - له  $a = b$  او  $b = c$  (لاس ته راځي)  $a = c$  (ترانزیتیو Transitivty)

ترانزیتیو گورو، چې یو له بل اړوند مانا ته نزدی دی، ځکه چې دا ځنونه یو د بل سره په واکوالي تړلي یا له یو څخه وبل ته ځی یا ورل کېږي.

۵ - له  $a < b$  او  $b < c$  (لاس ته راځي) یا  $a < c$  یا  $a < b, b < c \Rightarrow a < c$

ورانډیز : که چیرې دا پورته وي یا لغاتونه یا نومه ونی په همغه لاتین نومونو ولیکو بڼه

به وي، خو له شمیرپوهنی پرته مانا باندی یې هم پوهیدنه ښه او اړینه ده.

ب : د زیاتون ( جمع ) Addition n. بنسټیز قوانین

که چیرې له طبیعي اعدادو څخه یو ، دوه یا څو ګڼونه یو په بل زیات شي، نو یو پیدایښتي ګڼ تري لاس ته راځي او دا کارونه ( عملیه ) «زیاتون یت جمع» بولو، ځکه، چی ګڼونه یو په بل زیاتیري .

پېژند: د همغه ډول شیانو یا یو څه یو په بل زیاتیدلو ته زیاتون ( جمع ) وایو

که عدد ۱۰ په عدد ۱۸ ورزیات کړو نو عدد ۲۸ تري لاس ته راځي یا

$$28 = 18 + 10$$

په پورته کې ۱۰ او ۱۸ یو پر بل زیاتیري، نو له دې امله یې «زیاتېدونۍ» ( ما تراوسه زیاتوونې بللي، خو فکر کوم، چې زیاتېدونې یې ښه نومونه ونه ده) بولي،  $10 + 18$  جمع او ۲۸ « جمع ارزښت » بلل کیري . چی په هغه پخوانی نوم مو ورته حاصل جمع وایه  $0 +$  زیاتونڅښه ده او = برابر ونڅښه ( مساوات علامه ) بولو

دجمعی یا زیاتون بنسټیز قوانین

۱ - د دوه طبیعي اعدادو  $a$  او  $b$  لپاره تل یو زیاتون ( جمع )  $a + b$  شته دی

۲ - یواځنوالی : له  $a' = a$  او  $b' = b$  څخه لاس ته راځي:  $a' + b' = a + b$

۳ - COMMUTATIVE LAW کموتاتیو - یا بدلون قانون دی:  $a + b = b + a$

۴ - assoiative law اسوخیاتیو - سره ګډېدنې قانون. لرو

$$(a+b)+c=a+(b+c)=a+b+c$$

۵ - Monotony law مونوتوني - یا همغږیزوالي قانون :



له  $a < b$  څخه لاس ته راځي  $a+c < b+c$

یادونه: په  $a+b=c$  کې  $a$  او  $b$  زیاتېدونې  $a+b$  زیاتون او  $c$  زیاتون ارزښت بلل کيږي

یادونه: په زیاتون کې لاندې زیاتونقوانین هم باوري دي:

ناپېلې توکي: په  $N^0$  کې یو توکي شته، چې که د هر پیدایښتي توکي سره په زیاتون یا جمعه کې ور زیات شي همغه توکي ورکوي، دا توکي صفر دی:  $a+0=a$

ناپېلې توکي کړی شو نالوریز و بولو، ځکه، چې د کومې لور گن باندې یې په زیاتون کې بدلون نه راولی یا د زیاتون ارزښت همغه پاتېږي، همداسې نارونده او که بل څه مو په خوښه وي همغسې یې و بولی.

### پ: د کمون (تفریق) Subtraction بنسټیز قوانین

پېژند: د پیدایښتي گڼونو  $a$  او  $b$  لپاره، چې  $a > b$  وي، یواځې یو  $x$  شته دی، د کوم لپاره، چې باور لري:  $a - b = x$

که  $x = a - b$  شته وي، نو ټیک یواځني شته دي (موخه  $x$  دی)

نومه ونې:  $b$  کمیدونې یا مفروق (تراوسه مې کمونې بللی)  $a$  ترې کمونې یا مفروق منه  $a + b$  کمون او  $x$  کمون- یا تفریق ارزښت بلل کيږي یا بولو:

مور پورته د لاتین تورو لپاره طبیعي اعدادونځبني لیکو، چې ساده یې ونوموو:

$$20 - 10 = 10$$

په پورته کی مور له ۲۰ لس کم کرل، چی لاس ته راورنه یی ۱۰ ده، نو له دی امله یی داسی نوموو:

تر مخ یادونه: په لاندې کې ع . د عربي په معنا دی

۲۰ «ترې کمونی»، ځکه، چی ترې کمیري (ع . مفروق منه)، ۱۰ «کمونی» یا کمیدونی (ع . مفروق) دا بل لس یی «کمون ارزښت» یا د کمون لاس ته راورنه (لند: لاس ته راورنه یا کمون) (ع . حاصل تفریق) ، - کمونڅښنه او = برابر ونڅښنه ده .

ت : د ځل ( ضرب ) Multiplication بنسټیز قوانین:

۱ - د دوه پیدایښتي گڼونو a او b لپاره د پیدایښتي گڼونو په ډیری کې تل یو ځل a.b شته دی. د a.b لپاره داسې هم لیکو ab په پورته کې a او b ځلونی ( ضریبونه ) او  $ab=x$  » ځل ارزښت « یا ځل ( حاصل ضرب ) دی .

وايي چی ضرب وهلو ته وایي او د جمع ( که جمعی ) لنډه طریقه، چی ۰۰۰۰ وي یا د زیاتون لنډه لار ده . گورو، چی دا پیژند، چی وهل او دربول دي زموږ لپاره دومره موخوږ نه دی او ځل د پښتو بڼه نوم دی، چی له دربولو مو ځانونه راویستلي وي .

که ووايو، چی : د کابل او جلالاباد ترمنځ لار ۱۵۰ کیلو متره ده . زمري له کابل څخه جلال اباد ته ۸ ځله لار، نو زمري به جلال اباد ته د تگ ټوله څومره لار وهلی وي؟

لیکو:  $150 \times 8 = 1200$  ، نو زمري به ټوله ۱۲۰۰ کیلو متره لار وهلي وي . گورو، چی د ځل نومونه د ضرب لپاره بڼه او اسانه ده، ځکه چی پښتو ده او له ضریبونو څخه به هم ځلونوی اسان وي، به ۰۰۰ وي نه، بلکی اسان دي .

۲ - له  $a' = a$  او  $b' = b$  څخه لاس ته راځي  $a'b' = ab$  ( یواځیتوب )

۳ - لرو  $ab = ba$  کموتاتیو - یا د بدلون قانون

۴ - لرو  $(ab)c = a(bc)$  د گډولو- اسوخیاتیو قانون

۵ - لرو  $(a+b)c = ac + bc$  د ویشونې- یا دیستریبوتیو قانون  
Distributive law

۶ - له  $a < b$  او  $c > 0$  لاسته راځي  $ac < bc$

جگښتوالي یا یو غریزووالي قانون Monotony

ټ - د ویش بنسټیز قانون Division

پیژند ۲۰۳ :

که د دوه طبیعي عددونو  $a$  او  $b$  لپاره، چې  $a \neq b$  او  $a \neq 0$  وي یانې صفر نه وي یو طبیعي عدد  $x$  شته، چې برابر و ( مساوات )  $ax = b$  پوره کړي، نو

$x = \frac{b}{a}$  یا  $b/a$  د  $b$  او  $a$  ویش (تقسیم) بلل کيږي، چې ماتگن (کسر) یې هم بولو

۱ - که  $a/b = x$  یا  $x = \frac{a}{b} = a/b$  شته یا موجود وي، نو یواځنی شته دی (یواځنی په دې مانا، چې بل گڼ  $x$  نه شته او یواځی همدا گڼ  $x$  دی)

نومه ونې: په پورته برابر وون کې  $a/b$  ویش  $x$  ویش ارزښت،  $b$  ویشونې یا ویشه وونی دی، ځکه چې په یوڅه ویشل کيږي او  $a$  پرویشونې بلل کيږي، ځکه، چې څه پر ویشل کيږي یا مقسوم، مقسوم علیه یا قاسم، حاصل تقسیم .

گورو چې له قاسم یا مقسوم او همداسې د مقسوم علیه او حاصل تقسیم څخه مو دا د پښتو نومه ونې پر- یا پرې ویشونې، ویشه ونې او ویش ارزښت یا لاس ته راوړنه ساده او زر پوهور دي، خو په خواشینۍ به وه وایم، چې تراوسه په شمیرپوهنه کې ورسره نابلد یو .

که ۱۲ کتابچې پر څلورو زده کوونکو ویشو، نو هر یوه ته درې کتابچې رسیري .  
 گورو، چې ۱۲ په یو څه ویشل کیري، نو ویشونۍ یې بنه نوم دی . دا ۱۲ په څلور ویشل  
 کیري پر ۰۰۰ ویشل کیري، نو له دې امله څلور پر ویشونۍ بولو، درې یې لاس ته  
 راوړنه ده لکه چې تراوسه مو ورته حاصل تقسیم وایه، له دې امله ورته ویش ارزښت  
 وایو او دا کارونه یا عملیه خو ویش بلل شوی .

### ۲۰۱۰۳ ټولگڼونه یا تام اعداد INTEGERS

د دوو طبیعي عددونو  $a$  او  $b$  کمون یا تفریق ( $x = b - a$ ) ټیک او ټیک هلته یا هلته او  
 هلته د طبیعي عددونو ډیری یا سټ کی شته، چې وي :  $a \leq b$

د شمیرپوهنې نخښو باندې داسې لیکل کیري:

$$x = b - a \Leftrightarrow a \leq b$$

انگریزي یې if and only if ټیک او ټیک هلته یا هلته او هلته( دا شننه یا وینه پورته د  
 شمیرپوهنې نخښې ته ده) .

که هغې نخښې ته وگورو، نو هم لاندې ترې څرگندیري، له بنۍ لور کین لاس ته راځی  
 او په څټ( برعکس) له کین لور بنۍ لاس ته راځی . یا که ۰۰۰ وي، نو ۰۰۰ لاس ته  
 راځی او په څټ .

ټولگڼونه یا تام اعداد هم د انسانانو د اړتیاو پر بنسټ منځ ته راغلي ، یا منځ ته راوړل  
 شوي . که چیرې سپین د څر ۱۰۰ افغانۍ پوروری وي او سپین ورته اتیا افغانۍ ورکړي،  
 نو سپین بیا هم شل افغانۍ پوروری پاتیري، دا په دی ما، چی  $۸۰ + ۱۰۰ = ۲۰ - ۰$  .  
 گورو، چی  $۲۰ -$  یو پیدایښتي گڼ یا طبیعي عدد نه دی . یا  $80 - 100 = -20$

په هغه حالت کې، چې کمونې (مفروق) له ترې کمونې (مفروق منه) څخه لوی وي، نو لاس ته راوړنه یې طبیعي عدد نه دی. اوس یوه د اعدادو بلې ډیرې پیژند ته اړ کیږو، چې هغه د ټولګونو ډیرې ده او دا د طبیعي عددونو او د طبیعي عددونو کمې (منفي) او صفر سره یوځای کوو، چې ټولنه جوړوي (په ډیرې کچه به روښانه شي)، هغه څه، چې له دې ټولني لاس ته راځي هغه د ټولګونو ډیرې ده او داسې یې لیکو:

$$Z = \mathbb{N} \cup -\mathbb{N} \cup 0$$

$$Z = \{ \dots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots \}$$

د دې لپاره، چې ترې کمونې د کمېدونې کوچنۍ وي، نو پیدایښتي ګڼونه په کمګڼونو غزوو یا پراخوو، دا په دې مانا، چې د پیدایښتي ګڼونو مخنښنه په کموننښنه یا منفي نښنه باندې سنبالوویانې (کیدې شي زموږ هیوادوال د څټ نښې په نامه ورسره بلدوي، خو هره نښنه، چې د ګڼ زیاتۍ یا کمۍ بنایي د ګڼ کین لور ته لیکل کیږي، چې دا ما مخنښنه لیکلې او بللې

هغه په برخه ۳ ۰ ۱ ۰ ۱ کې ورکړ شوي شمیرقوانین په  $Z$  کې هم باور لري

د ټولګونو ډیرې

$$\} \quad Z = \{ \dots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$$

د مخه مو شمیرقوانین، چې د پیدایښتي ګڼونو لپاره ورکړل، هغه د ټولګونو لپاره هم باور لري

د کمون یا تفریق بنسټقوانین (پسې یا دوام):

۲ - د هرو دوو ټولګونو یا تام اعدادو  $a$  او  $b$  لپاره یو ټولګن  $x=b-a$  شته، د کوم لپاره، چې  $a+x=b$  برابرېږي باوري دی

د ویش تیوري:

### ۳. ۱۰. ۲ الف د ویش قاعدې ، لارې یا خویونه

د طبیعي عددونولپاره د نورو قاعدو ترڅنګ ، چې د لومړنیو ګڼونو د ټوټه ونې یا تجزیې لپاره خورا ګټور دی باور لري

( الف ) یو ګڼ په ۲ ( ۴ ، ۸ ، ۱۶ ) ویشونی دی، که د اخر څیفر یا کور ( له اخره ) موخه تری بنی لور دی ( دوه ، درې ، څلور ، ۰۰۰ بنسټیزو څیفرانو ) څخه جوړ ګڼ په ۲ ( ۴ ، ۸ ، ۱۶ ، ۰۰۰ ویشونی وي ) په دوه ویشونی ګڼ جوړه ( جفت ) نومیري او بل ډول یی ناجوړه ( طاق ) بلل کیږي . ګورو ، چی دلته هم په جوړې او ناجوړه بڼه پوهیدلی شو

( ب ) یو ګڼ په ۵ ( ۲۵ ، ۱۲۵ ، ۶۲۵ ، ۰۰ ) ویشونی دی، که د اخر ( له بنی لور ) بنسټیز څیفر ( د اخر دوه ، درې ، څلور ، ۰۰۰ بنسټیز څیفرانو ) جوړ ګڼونه په ۵ ( ۲۵ ، ۱۲۵ ، ۶۲۵ ) ویشوني وي

یادونه : په لاتین کی هغه ، چی بنی لور ته وي هغه ته اخر وایي او مور یی شاید لومړی وبلو . زه کوبنس کوم ، چې دا پوهور ولیکم ، خو بیا دی هم ګران لوستونکی تری ټیک ناپوهیدنه ماته وبخښي او مشوری دې راګري .

( پ ) یو ګڼ په ۳ همداسی ۹ ویشونی دی ، که د ګڼ پروت زیاتون پر دې ګڼونو ویشونی وي .

د یوه ګڼ پروت زیاتون لاندې د هغه ګڼ بنسټیز ه ګڼونځښو ( څیفرانو ) زیاتون پوهیږو ، بی له دې ، چې د هغه ځای ارزښت په پام کې ونیول شي .

بیلگه : د 126 پروت زیاتون یا پرته جمعه ده:  $1+2+6=9$

( ت ) یو ګڼ په 11 ویشونی دی که د هغه ګڼ التریري ( نځښه بدلونکی ) پروت زیاتون ، پر 11 ویشونی وي .

الترنیري پروت زیاتون، چی پروت کمون هم ورته وایی له بنسټیزو څیږونو ۱ ، ۳ ، ۵ ، زیاتون څخه د ۲ ، ۴ ، ۶ ، ۰۰۰ ، زیاتون کمون پوهیږو ، بی له دې، چی ځای ارزښت یې په پام کی ونیول شي یا په بل ډول، که د ناجوره کور زیاتون څخه د جوړه د زیاتون کم کرو .

بیلگه: ۱۷۳۸ په ۱۱ ویشوني دي، ځکه، چې :  $15 = 8 + 7$  او  $-3 = 1 - 4$ ، چی  
الترنیري زیاتون یانی  $11 = 4 - 15$  یې په ۱۱ ویشونی دی .

ت) یو گڼ پ ه ۳۷ وپشور دی که ( د گڼ له اخر څخه جبرشوي) د درېگوني گڼونو زیاتون پر ۳۷ وپشونی وي.

بیلگه:

$$37|20216352448 \text{ | } 37 \text{ ځکه چې } 37|1036 \Leftrightarrow 37|(448+352+216+20)$$

ث) یو گڼ په ۷ همداسي په ۱۳ ویشور دی، که د هغه ( د گڼ له لڅ څخه جوړ) درېگوني التریري زیاتون پر ۷ همداسي پر ۱۳ وپشونی وي.

$$7|37604 \text{ | } 7 \text{ ځکه چې } 7|567 \Leftrightarrow 7|(604-37)$$

$$13|9679293889 \text{ | } 13 \text{ ځکه ، چې } 13|1209 \Leftrightarrow 13|(889-293+709-96)$$

ج) یو گڼ په ۱۰۱ وپشونی دی، که ( د گڼ له اخر څخه جرشوی) دوهگوني التریري زیاتون په ۱۰۱ وپشونی وي.

بیلگه:

$$101|7930630669 \text{ | } 101 \text{ ځکه چې } 101|202 \Leftrightarrow 101|(69-06+63-03+79)$$

یادونه: که پیدایښتي ګڼونه  $a$  او  $b$  ولرو او ولرو  $a:b$ ، نو  $a$  پر  $b$  وېشو، که وېش

ارزښت یې هر ګڼ وي او که پیدایښتي ګڼونه  $a$  او  $b$  ولرو او ولرو  $b|a$ ، نو دا په دې مانه، چې ګڼ  $b$  ګڼ  $a$  ویشي بې له پاتي یانې ګڼ  $a$  په ګڼ  $b$  وېشوړ دی.

۳۰۱۰۲ (ت) خوراغت ګډ پرویشونې او خورا کوچنی ګډ زیاتخه

یا بزرګترین قاسم مشترک و کوچترین مضرب مشترک (نو الاضعافالاقل)

Great common divisor and small common multiple

ددې لپاره، چې دا په سرلیک کې ورکړ شوي څه ښه و پېژندلی شو، داسې مخ ته خو:

لاندي ګڼونه دې ورکړ شوي وي، سملاسي یې په لومړنیو ګڼونو توتېه کوو

$$260 = 2 \cdot 130 = 2 \cdot 2 \cdot 65 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 13 = 2^2 \cdot 5 \cdot 13$$

$$468 = 2 \cdot 234 = 2 \cdot 2 \cdot 117 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 39 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 13 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 13$$

له پورته دواړو ګڼونو د لومړنیو ګڼونو ځله وونو هر یوه څخه هغه لومړنی ګڼ رانیسو او سره ځله ووېي، چې په دواړو ګڼونو کې ګډ وي او توان (په خپل ځای کې دې وکتل شي) یا جګګڼ یې تیت یا کم وي. یانې

$$22 \cdot 13 = 2 \cdot 26 = 52$$

دا پورته لاس ته راوړی ګڼ یانې ۵۲ پورته دواړه ګڼونه وېشي یانې د دواړو ګڼونو پروېشونې

دی او خوراغت پروېشونې هم دی. یانې ۵۲ خوراغت او ددواړو ګډ پروېشونې دی.



لنډ : ۵۲ د پورته گڼونو خورا غټ گډ پروېشونى دى.

داسي گڼ , خوراغټ گډ پروېشونى, بولو ( لنډ ونه يې : غ گ و )

هغه گڼ، چې د دوه يا ډېډېرو گڼونو گډ پروېشونى او خورا غټ هم وي، نو دې گڼ ته  
,,خورا

غټ گډ پروېشونى ,, (لنډونه: غ گ و) وايو. يا

Greatest commom divisor(g c d)(بزرگترین عامل (مقسوم عليه ) مشترک)

اوس بيا داسي مخ ته خو:

په پورته كې هغه د دواړو گڼونو لومړني ځله ووني، له هر څخه يو چې په جگ  
توان وي

ياني خورا غټ جگگڼ ولري ، هغه د جگ توان رابېلوو او بيا يې سره ځله وو، چې  
لاس ته

$$2^2.3^2.5.13=2340 \quad \text{ترې راځي:}$$

دا پورته گڼ ياني ۲۳۴۰ د دواړو وركړ شوو گڼونو گډ زياتځله دى ( ياني گډ په  
دواړو

وېشل كيږي) او دا خورا كوچنى گڼ هم دى. دا په دې مانا، چې له دې گڼ بل كوچنى گڼ  
نه

شته، چې د پورته گڼونو دواړو گډ زياتځله( خو برابره ) وي.:

لنډ : خورا كوچنى گڼ دى. د دواړو گڼونو (ياني گډ) زياتځله (گډ څو واړه) دى

لنډ يې : خورا كوچنى گډ زياتځله ( لنډونه يې: خ گ ځ ) يا

Least common multiple(l.c.m.)(كوچكترين مضرب مشترك يا ذوالضعاف  
الاقل)

گران هیوادوال دې ورته پام وکړي، چې کوم نوم به زموږ لپاره زریا بیخي پوهور او ساده وي.

ورپسې داسې مخ ته ځو:

دا چې مور په پیدایښت یا طبیعي گڼونو کې له شمیرلو سره بلد شو، نو په لاندې ډول پیژند ورکوو:

پیژند(تعریف) ۳۰۳ :

a او b دې ټولگڼونه وي . وایو چې « گن a گن b ویشي» ( او یا هم a د b پرویشونې دی او یا هم a د b څو برابره ( زیاتځله ) دی) که یو ټولگن u شته یا موجود وي او دا باوري کړي  $au = b$  ددې لپاره لیکو  $a|b$  ( وایو، چې گن a گن b ویشي ، خو اړین یا ضرور نه ده، چې کلمه گن ورسره وویل شي .

که a د b پرویشونې نه وي، نو د دې لپاره لیکو  $a|b$  (دا نخبه / دې د نه ویشونې لپاره ومنل شي)

بیا لیکو، چې : پیدایښتي گڼونه، چې په ۲ ویشل کیري جوړه ( جفت ) گڼونه بلل کیري او که نه نو ناجوړه ( طاق ) گڼونه بلل کیري . د صفر گن د پیدایښتي گڼونو په ډیرۍ کې یو ځانگړی حالت لري .

په لاندې جمله کې به له بنوونې یا اوبیونې د دې ویشکلمې لپاره یو څو ساده شمیرقاعدي را یوځای کوو، چې په راتلونکي کې ترې کار اخستل کیري .

جمله ۱۰۳ :

د په خوبښه یا زړه پورې ټولگڼونو a,b,c,d لپاره باوري دي:

( ۱ )  $\pm 1$  او  $\pm a$  ویش ( دا په نامه « ساده» پرویشونې دي)

(۲) د ۱ پرويشونى ۱ او ۱- دي

(۳) تل باور لري، چې  $a \mid 0$  او  $0 \mid a$  يواځى په هغه حالت كې باور لري، چې  $a = 0$  وي(۴) له  $a \mid b$  او  $a \mid c$  له(۵) له  $a \mid b$  لاس ته راځي:  $ac \mid bc$ ، كه  $c \neq 0$  وي، نو د دې په څېت هم باوريدي. دا په دې مانا چې، كه  $ac \mid bc$  وي، نو  $a \mid b$  هم باور لري. د گڼونو

ليكدود له مخې، كه نړيوالجال ته پورته شو داسې ليكو، كه نه دا پورته بسيا

كوي:  $c \neq 0, a \mid b \Rightarrow ac \mid bc$ (۶) له  $a \mid b$  او  $c \mid d$  څخه لاس ته راځي او په څېت  $ac \mid bd$  لنډه ليكنه يې (كه ن ج ته پورته شوه):  $a \mid b, c \mid d \Leftrightarrow ac \mid bd$ (۷) له  $a \mid b$  او  $b \mid a$  لاس ته راځي  $a = \pm b$ (۸) له  $a \mid b$  او  $a \mid c$  څخه لاس ته راځي  $a \mid (bx+cy)$  د ټولو ټولگڼونو  $x$  او  $y$  لپار(۹) ټيک هلته  $a \mid b$  كله چې وي  $|a| \mid |b|$ ،(۱۰) كه  $a \mid b$  او  $b = 0$  نه وي نو باوري دي  $-|b| < a < |b|$ حل (اوبى): (۱) له  $a1 = (-a)(-1) = a$  لاس ته راځي(۲) له  $a0 = 0$  لرو  $a \mid 0$ . كه وي  $0 \mid a$ ، نو يو ټولگڼ  $u$  شته د كوم لپاره چې وي  $0u = a$ او له كومې چې لاس ته راځي  $a = 0$ .

(۳) ساده دى.

( ۴ ) که  $a|b$  او  $b|c$ ، نو ټولگڼونه  $u$  او  $v$  د  $au = b$ ,  $bv = c$  سره موجود دی. له دې لاس ته راځي  $c = bv = a(uv)$ ، پس  $a|c$ .

( ۵ ) که  $a|b$ ، پس یو ټولگڼ  $u$  د  $au = b$  سره موجود دی، او هم د  $(ac)u = bc$  سره، د کوم څخه چې لاس ته راځي  $ac|bc$ . د  $c \neq 0$  لپاره دا اخرختخیر په څټ کېدی هم شي.

( ۶ ) د  $a|b$ ,  $c|d$  او ( ۵ ) څخه لاس ته راځي چې  $ac|bc$  او  $bc|bd$ ، د ( ۴ ) له مخی  $ac|bd$ .

( ۷ ) د  $a|b$  او  $b|a$  څخه د ټولگڼونو  $u$  او  $v$  موجودیت لاس ته راځي د  $au = b$  او  $bv = a$  سره. برسیره پر دې لاس ته راځي  $a(uv) = a$ ، پس  $a=0$  یا  $u=v=\pm 1$ . په لمړي حالت کې د  $a|b$  له امله  $b=0$ ، پس  $a=b$ . په دوم حالت کې  $a = \pm b$  دی.

( ۸ ) د ټولگڼونو  $u, v$  لپاره دي  $au = b$  او  $av = c$ ، نو له دې  $a(ux+vy) = bx+cy$  لاس ته راځي، پس  $a|(bx+cy)$  د ټولو ټولگڼونو  $x$  او  $y$  لپاره.

( ۹ ) وي دې  $a|b$ . له  $a|b$ ،  $a|a$  او  $b|b$  څخه او د ( ۴ ) څو واره استعمال څخه لاس ته راځي، چې  $a||b$ . په څټ: که  $a||b$  باور لری، نو د  $a||a$ ،  $a||b$  او  $b|b$  څخه په ورته ډول لاس ته راځي  $a|b$ .

( ۱۰ ) دی  $a|b$ ، پس د ( ۹ ) هم  $a||b$ . که  $b \neq 0$  وي، پس یو طبعي گڼ  $u$  لاس ته راځي د  $|a|u = |b|$  سره، له کوم چې  $|a| \leq |b|$  لاس ته راځي.

که  $b|a$  د ټولگڼونو  $a, b$  لپاره د  $b \neq 0$  سره، نو یو یواځنی معلوم گڼ  $q$  شته (د  $a$  او همداسی د  $b$  «کومپلیمنت پرویشونی» بلل کېږي)، چې لرو  $a = bq$ .

په ټولیزه توگه لاندې جمله باور لري

جمله ۲۰۳ (د ویش الگوریتم):  $a$  او  $b$  دې ټولگڼونه وي،  $b \neq 0$  سره، نو یواځني ټاکلي، په پای پلونو (قدمونو) کې شمیرلکيدونکي ټولگڼونه  $q$  او  $r$  (چې  $a$  پر  $b$  ویش

څخه لاس ته راځي او «ویش» په همدې ډول «پاتی بلل کيږي، شته دی، د کومو لپاره چې باور لري:  $a = bq + r \wedge |0| \leq r < b$

هر یو ټولگڼ کم له کمه ساده پرویشونې لري یعنی  $\pm 1$  او پخپله د دې ټولگڼ زیاتيز (مثبت) او کمیز (منفي) دې پرویشونو ته «ساده پرویشونې» وایو.

پېژند ۲۰۳ ب:

هر یو ټولگڼ، چې یواځې او یواځي ساده پرویشونې ولري مور ورته لومړنۍ گڼونه وایو او دا لومړنۍ یا پریم گڼونه Primzahlen په  $p$  سره په نخښه کوو، چې دا پریم یا لومړی گڼ د پیدایښتي گڼونو توکی دی.

هر یو ټولگڼ، چې لومړنۍ گڼ نه وي د لومړنیو گڼونو په ځلونو (ځله وونو) (ضریبونو) ټوټه یا تجزیه کیدی شي.

بیلگی:

$$240 = 24 \cdot 10 = 3 \cdot 8 \cdot 2 \cdot 5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5 \quad - 1$$

$$2310 = 2 \cdot 1155 = 2 \cdot 3 \cdot 385 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 77 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \quad - 2$$

$$3750 = 25 \cdot 15 \cdot 10 = 5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5 = 2 \cdot 3 \cdot 5^4$$

که پورته بیلگو ته په خیر شو نو په ۱ او ۳ راغلو گڼونو کې گڼ ۲ د دواړو پر ویشونې دی او همدا ډول ۳ هم د دواړو گڼونو پرویشونې دی یانې  $6 = 2 \cdot 3$  برسیره پردې گڼ ۵ هم نو  $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$  دواړه گڼونه ویشي او شاید په دې گڼونو کې یو خورا غټ گڼ پرویشونې هم وي.

په پورته درېواړو بیلگو کې ۲، ۳، ۵ د ځلونو په څیر خوندي دي یانې دا ګڼونه ویش، چې له دې امله ګڼ ۳۰ د درجوو ګڼونو غ۰ګ۰پ دی

پیژند ۰۳ پ :

a او b دې ټولګڼونه وي او d دې یو مثبت یا زیاتونی ټولګڼ وي، د کومو لپاره، چې باور لري:

$$(1) d | a \wedge d | b$$

$$(2) d | a \wedge d | b \Rightarrow d | a \wedge d | b$$

پس d د a او b خورا غټ ګډ پرویشونی (غ۰ګ۰پ) بلل کیري d لپاره داسی لیکو:

$$d = (a, b)$$

نو d خورا غټ ګډ پرویشونی (لنډ: غ۰ګ۰پ) بلل کیري.

که باوري وي:  $(a, b) = 1$  نو a او b پروېش پردي بلل کیري یانې له ۱ پرته بل داسې ګڼ نه شته، چې دواړه ګڼونه پر ووبشل شي.

یادونه: په زیاتو ادبیاتو کې لنډونه په درېټورو کیري، خو که غواړی دا خورا غټ ګډ پرویشونی داسې رالندوو: خ غ ګ پ

یادونه: ما د خورا غټ ګډ پرویشونی لپاره دا پورته درې ټوکي غوره کړي، که ګران لوستونګي بل وړاندیز لري، نو زه یې ضرور په پام کې په پوره خوېسی نیسم. دې دوه کلمو ته په فارسي ادبیاتو کې بزرګترین قاسم مشترک او کوچکترب مشرک وایي او ذوالضعاف الاقل یې هم بولي.

یادونه: که چیرې d او  $d^*$  دواړه د a او b غ ګ پ وي، نو له پورته پیژند څخه لاس ته راځي

چی  $d^* | d$  او  $d | d^*$  ، نو  $d \geq 0$  ،  $d^*$  له امله لرو  $d^* = d$

لاندي جمله به وښايي ، چې داسي غ گ و تل شته دی

جمله ۳۰۳ :

په خوښه ټولگڼونو  $a$  او  $b$  لپاره دي غ گ پ  $d$  شته وي، نو ټولگڼونه  $x$  او  $y$  شته د کومو لپار، چې لرو:  $d = ax + by$

حل (اوبی): که  $a = b = 0$  وي ، نو  $d = 0$  او  $a$  او  $b$  غ گ و دی، نور ساده دی. د  $a$  او  $b$  ممکنه بدلون (په پام کی دي وي چې د  $(a, b)$  تعريف په  $a$  او  $b$  کی سیومتریک دی) له امله اجازه لرو چې  $b \neq 0$  ونیسو.

موږ اوس رکورسیف (rekursiv) دا په دي ماتا چې د مخه غړي څخه وروستی یعنی ورپسې غړی لاس ته راوړلکیري

ټولگڼونه  $r_1, r_0, r_1, r_2, \dots$  او  $q_1, q_2, \dots$  په لاندي ډول تعريفوو: وي دي  $r_{-1} = a$  ،  $r_0 = b$  د  $i \geq 1$  او  $r_{i-1} \neq 0$  لپاره ټولگڼونه  $q_i, r_i$  داسی تعینوو چې  $r_{i-2} = q_i r_{i-1} + r_i$

او  $0 \leq r_i < |r_{i-1}|$  کوم چې له جملی (۳ . ۱) څخه ممکن کیدی شي . باید یو نه منفی گڼ  $n$  ورکړ شوی وي، د کوم لپاره چې لرو  $r_n \neq 0$  مگر  $r_{n+1} = 0$  ، چې بی له دي بیا یوه نه پای د طبعي گڼونو لویدونکی یا کمیدونکی پرلپسې لاس ته راځي، کوم چې ناشونی (ناممکن) دی. دامو اوس ددي لاندي مساواتو شیما ته لارښودوي

$$a = q_1 b + r_1$$

$$b = q_2 r_1 + r_2$$

.....

.....

$$r_{n-2} = q_n r_{n-1} + r_n$$

$$r_{n-1} = q_{n+1} r_n$$

که دا مساوات د ښکته پورته وویل شي، نو په ترتیب (یو په بل پسې) لاس ته راځي:

$$r_n | r_{n-1}, r_n | r_{n-2}, \dots, r_n | b, r_n | a$$

دا په دې مانا چې  $r_n$  د  $a$  او  $b$  یو غ ګ و دی.  $t$  دې د  $a$  او  $b$  یو بل غ ګ و وي، نو په دې حالت کې که دا پورته مساوات له پورته ښکته ولولو، نو یو په بل پسې لرو

$$t | r_0, t | r_1, t | r_2, \dots, t | r_{n-1}, t | r_n$$

دا په دې مانا چې  $|r|$  د  $a$  او  $b$  غ ګ و دی.

هر د دې ګڼونو  $rd_i$  ( $-1 \leq i \leq n$ ) سره، په ځانګړي ډول  $r_n$  او د دې سره  $(a, b)$  یو د  $a$  او  $b$  لاینې کمبیشن دی، په لاندې ډول  $au + bv$ ، چې  $u$  او  $v$  ټولګڼونه دي.

$$r_{-1} = a$$

او  $r_0 = b$  لپاره ساده دی. که د یوه  $i$  لپاره  $1 \leq i \leq n$  سره، که یو د  $a$  او  $b$  یو

لاینې کمبیشن ښوونه د  $r_{i-1}$  او  $r_{i-2}$  لپاره همدا سم د لاسه پیدا شوي وي، ټوله  $r_{i-2} = q_i r_{i-1} + r_i$  څخه د یوې داسې  $r_i$  د ځای په ځای کولو له لارې هم، چې په دې ډول د ایندکشن له لارې غوښتنه لاس ته راځي. ( پای )

یادونه: د غ ګ پ د ښوونې متود، چې پورته او په لاندې بیلګه کې راوړل شي د اویکلید الګوریتم "Euklid Algorithmus"، د یوې ګڼیزې دندې یا کارونې ( عملیې ) شیماتیکی اوبیوني ( حل ) متود په نامه یادېږي، نو له دې سره  $x$  او  $y$  هم له  $a$  څخه

$d = ax + by$  اکسپلیټ  $Explicit$  ( لاتین: څرګند، واضح، روښانه ) شمیرل کیدی شي.

بیلګه:

غوښتنه  $d = (2124, 1764)$  د اویکلید الګوریتم کارونې له لارې لرو:

$$2124 = 1 \cdot 1764 + 360$$



$$1764 = 4.360 + 323$$

$$360 = 1.324 + 36$$

$$324 = 9.36$$

$$\Rightarrow d=36$$

که پورته وگورو نو غ ک پ  $d = 36$  دی

د دې لپاره، چې  $d$  له  $x$  او  $y$  سره په  $d = ax + by$  ډول انځور کړی شو، نو په لاندې توگه مخ ته ځو:

$$36 = 360 - 1.324 = 360 - 1(1764 - 4.360) = (-1).1764 + 5.360$$

$$= (-1).1764 + 5.(2124 - 1764) = 2124 . 5 + 1764.(-6)$$

د پورته څخه  $d$  او  $b$  لپاره لاندې مهمه پیژند نڅښه یا نڅښونه لاس ته راځي

یادونه: ماته دا لاندې جملې ښه ښکارېږي، چې گرانو لوستونکو ته یې بی له اوبیوني

وړاندې کړم، دا جملې په خټه کې د گڼونوتیوري دنده ده، چې په گڼونوتیوري کې بیا د ښوونې سره ښوول کېږي.

جمله ۳۰۹:

$a$  او  $b$  دې ټولگڼونه وي. د  $a$  او  $b$  یو گډ پرویشونی  $t \geq 0$  هلته او هلته د  $a$  او  $b$  ک غ پ دی کله چې دا شکل  $t = ax + by$  د  $a$  او  $b$  ټولگڼونو سره انځور کړای شو. په ځانگړي ډول  $a$  او  $b$  هلته او هلته ویشپړدي دي، که ټولگڼونه  $x$  او  $y$  شته وي د کومو لپاره چې باور لر:

$$ax + by = 1$$

اوبیونه : د شرایطو ضرورت سم د لاسه له ۳ پر ۶ څخه لاس ته راځي. دا چې شرایط پوره کېدونکي هم دي، له دې لاس ته راځي، چې هر د او پروېشوني د پروېشوني هم دي..

څو جملې په لاندې کې ورو، گنونتېري پورې اړه لر او دلته یې نه بڼایو.

جمله : ۱۰ . ۳

a او b دې ټولگڼونه وي ۰ د a او b هر گډ پروېشوني  $t \geq 0$  لپاره باور لري:

$$(a/t, b/t) = (a, b) / t$$

په ځانگړي توگه t د a او b یو گډ پروېشوني هلته او هلته غ گ پ دې چې باور ولري

$$(a/t, b/t) = 1$$

لیما ۳۰ ۱۱ (جمله گي) (اویکلید): په خوبه ټولگڼونو a او b او c لپاره باور لري

له  $a|bc$  او  $(a, b) = 1$  لاس ته راځي  $a|c$

**تعریف ۳:**  $a_1, a_2, \dots, a_n$  دې ټولگڼونه وي ( $n \geq 1$ )، او دې یو نه منفي

ټولگڼ وي د کوم لپاره چې باور لري :

لمړی :  $d | a_i$  د ټولو  $i = 1, \dots, n$  لپاره

ب : له  $a_i | t$  څخه د ټولو  $i = 1, \dots, n$  لپاره لاس ته راځي  $t | d$ .

نو د  $a_1, \dots, a_n$  غ گ و بلل کېږي او د d لپاره هم داسی لیکو  $(a_1, \dots, a_n)$ .

---

د  $a_1, \dots, a_n$  لپاره د داسی غ گ و یواختوب په ۲. ۵ کی کتلی کیدی شي او د موجودیت لپاره یی لرو :

جمله ۱۳. ۴: د خوبی پولگنونو  $a_1, \dots, a_n$  لپاره ( $n \geq 1$ ) غ گ و موجود او  $d$  د  $a_1, \dots, a_n$  خطی (لایني) کمبینیشن دی دا په دې مانا چی

$$d = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n$$

د متناسبو پولگنونو  $x_1, \dots, x_n$  لپاره.

یادونه : له دې بیا لاس ته راوړل کیدی شي:

$$(a_1, \dots, a_n) = ((a_1, \dots, a_{n-1}), a_n)$$

د په خوبه پولگنونو  $a_1, \dots, a_n$  د ( $n \geq 1$ ) لپاره. سری کړی شي چی د  $a_1, \dots, a_n$  غ گ و پل په پل د اویکلید الگوریتموس له لاری پیدا کړي، چی دلته یی د اوبی یا حل څخه تیریرو.

د اوبی یا حل لپاره یی د  $n$  په لور د پوره ایندکشن څخه کار اخستل کیږي چې په ۸-مه برخه کې څیړل شوی دی.

بیلگی:

۱ - کڼونه 240 او 3750 غ گ پ  $2.3.5 = 30$  لري

۲ - لرو 408 او 748

$$408 = 2^3 \cdot 3 \cdot 17, 748 = 2^2 \cdot 11 \cdot 17$$

۳. دحقیقی اعدادو .....  


---

۱۰۰

پس غ گ پ دی:  $17 \cdot 2^{408,748} = 2^{2 \cdot 408,748}$  یا دا لاندی که ن ج پورته شول

$$(408,748) = 2^2 \cdot 17 = 68$$

۳- پ غ گ پ دگنونو او غ گ پ  $6 = (30.66.114)$  دی، خکه، چي

$$30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$$

$$\text{او } 66 = 2 \cdot 3 \cdot 11 \quad \text{او } 114 = 2 \cdot 3 \cdot 19 \text{ دي}$$

۴- گنونه 54 او 65 گد پرویشونی نه لري دا مور پرویشپردی بولو، خکه، چي دي:

$$65 = 5 \cdot 13 \quad \wedge \quad 54 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$$

### خورا کوچنی گد زیاتخلی (کوچکترین مضرب مشترک)

مور په لاندی کی د خورا کوچنی گد زیاتخله (لند: ک گ ز) کلیمی په خیرنه پیل کو . دا کلمه و غ گ پ یوه دوه بیزه یا دوه گونی یا غبرگه (دوال Dual) کلمه ده، مور په لاندی دول سملاسی تولیز پیژند ورکوو

تعریف ۳. تب:  $a_1, \dots, a_n$  دې ( $n \geq 2$ ) ټولگنونه وي، او  $v$  دې یو داسی

نه منفی ټولگن وي، د کوم لپاره چی باور لري:

الف -  $a_i | v$  ,  $i = 1, \dots, n$  لپاره

ب - له  $a_i | w$  څخه د  $i = 1, \dots, n$  لپاره لاس ته راځي  $v | w$ .

نو  $v$  د  $a_1, \dots, a_n$  کوچنی گد زیاتخله (لند: ک گ خ) بلل کیږي او داسی یې لیکو

$$v = [a_1, \dots, a_n]$$

پیژند (د دوه گڼونو لپاره )

a او b دې ټولگڼونه وي او v دې یو داسې نه کمیز یا نه منفی ټولگڼ وي، د کوم لپاره، چې باور لري:

$$v|a \text{ او } v|b \quad (۱)$$

$$a|w \text{ او } b|w \text{ څخه لاس ته راځی } v|w \quad (۲)$$

نو v د a او b خورا کوچنی گډ زیاتخه (لنډ) ک گ ز او که غواړی خ ک گ ز بلل کیري او په لاندې توگه یې لیکو

$$v = [a, b]$$

جمله :

په خوښه ټولگڼونو a, b, c, ..., n لپاره ک گ ز شته دی او دا یواځنی دی

$$[a, b, c, \dots, n]$$

یادونه: مور لاندې مساوات هم د مختلفو جملو او د هغو له حلونو لاس ته راوړو:

$$[a_1, \dots, a_n] = [[a_1, \dots, a_{n-1}], a_n] \text{ لپاره لرو } (n \geq 3) \text{ } a_1, \dots, a_n$$

$$(a_1, a_2) [a_1, a_2] = |a_1 a_2| \text{ او هم}$$

لاس ته راوړنې (داهم په همدې مانا مگر د جملې په څیر دی): د په خوښه ټولگڼونو a, b, c لپاره باور لري: له  $a|c, b|c$  او  $(a, b) = 1$  څخه لاس ته راوړو  $ab|c$

د گڼتیري بنسټیزه جمله:

پیژنده :

یو ټولګن  $n > 1$  لومړی ګن (prime number) بلل کیږي، که له ساده پرویشنون  $v$  بل پرویشنو ونه لري،

لومړي ګنونه لاندې غوه خوږونه لري.:

لیما (لکه کوچنی جمله): که  $p$  یولمړی ګن وي او  $p \mid a_1 \dots a_n$  د ټولګونو  $a_1, \dots, a_n$  لپاره. نو  $p \mid a_i$  د کم له کمه یوه  $i$  د  $1 \leq i \leq n$  سره. حل (اوبی): حل یی د ایندوګشن له لارې صورت نیسی، چی ددې لپاره باید  $n - 1$  برخه کتل شوي وي.

د  $n = 1$  لپاره ښوونه ساده ده. اوس دې  $n > 1$  وي او لیما دې  $n - 1$  لپاره سملاسي باور ولري. نولرو  $p \mid a_n$ ، په بل ډول بیا له  $p \nmid a_n$  څخه لاس ته راځی چې  $(p, a_n) = 1$  دې. له مخته تیرې جملی لاس ته راځی، چې که  $p \mid a_1 \dots a_{n-1}$  وي، نو داسې دی  $p \mid a_i$  د یو  $i$  لپاره چې  $1 \leq i \leq n - 1$  وي د ایندوګشن د نیونې په بستې.

د لومړنیو ګنونو غوره والی د «ګنونتیوري بنسټیزی جملی» څخه لاس ته راځي

جمله (د ګنونتیوري بنسټیزه جمله):

هر یو پیدایښتي (طبیعی) ګن، د ګنونو تر تیب پورې، په یواځني او یواځني (یویواځنی له دې کلمو څخه موخه داده، چې دا په یواځی یو ډول لیکل کیدی شي او بس، کیدی شي د ګنونو پروتخاي بدل وي، خو ضربونه همغه دي)) ډول د لومړنیو ګنونو ځل په څیر لیکل کیدی شي.

اوبی: ښوونه د  $n$  په لور ایندوګشن له لارې مخ ته بیایو (برخه  $n$  دې ودې کتل شي) د  $n = 1$  لپاره باور لري، که، لکه معمول،  $1$  د طبیعي ګنونو د تش (خالي) ځل په څیر تعریف کړو. له دې امله دې  $n > 1$  وي او جمله دې د ټولو طبیعي ګنونو  $n > 1$  لپاره ښوول

شوي وي. مور اوس ټول د  $n$  پرویشونی  $t > 1$  په نظر کي نیسو. کم له کمه یو داسی گڼ شته لکه  $n$ . که  $p$  د دې پرویشونو کوچنی پرویشونی وي، نو  $p$  لمړی گڼ دی. په بل ډول به نو بیا  $p$  یو پرویشونی  $q$  لرودی د  $1 < q < p$  سره، او دا چی  $q$  د  $n$  پرویشونی وي، نو دا به د  $p$  تعریف رد کړي. دا چی  $n/p < n$  د ایندونکشن نیونی په بنسټ  $\frac{n}{p}$  د لمړي گڼونو د ځل په څیر لیکل کیدی نو په همدې ډول پخپله  $n$  هم.

وي دې  $n = p_1 p_2 \dots p_r = p'_1 p'_2 \dots p'_s$  دوه ډوله د لمړیو گڼونو د ځل په څیر لیکنه. له  $p_1 | p'_1 \dots p'_s$  اوس لاس ته راځي  $p_i | p'_i$  د یو  $i$  د  $1 \leq i \leq s$  سره. د نمړې بدلولو له لارې دې وي  $p_1 | p'_1$ . داچي بیا  $p_1 = p'_1$  باور لري، نو لاس ته راځي  $p_2 \dots p_r = p'_2 \dots p'_s$ . له کومو چی د ایدکشن له نیونی لرو  $r-1 = s-1$ ، پس  $r = s$  او ( او د ترتیب بدلون) هم  $p_i = p'_i$  له  $2 \leq i \leq r$  لاس ته راځي.

پای.

د بنسټیزې جملې د گټور استعمال لپاره لاندې جمله ده

جمله : هر طبعی گڼ  $n$  په ټیک یو ډول په لاندې فورم انخوریډلی شي  

$$n = \prod_p p^{\nu_p} \quad (\nu_p = 0 \text{ یا } \nu_p \geq 1)$$
 چیرته چی  $p$  ټولو طبعي گڼونو کې په جگیدونکې لړۍ پرلپسې کې خفلي.

یادونه: د عملي شمیرنې لپاره په هغو گڼونو چې جگ یې صفر وي تیریدل کیدی شي. لکه:  $n = 28$ ,  $n = 2^2 \cdot 7$  د  $n = 2^2 \cdot 3^0 \cdot 5^0 \cdot 7$  لپاره لاس ته راوړنې:  $(a, b) = 1$  او  $(a, bc) = 1$ ، نو هم  $(a, bc) = 1$ ، د په خوښه ټولگڼونو  $a, b, c$  لپاره

اوبی یا حل : نیولی دې وي چې  $(a, bc) > 1$  ، نو بیا به یو لمړنی گڼ  $p$  موجود وي د  $a, b) = (a, c)$  یا  $p/b$  یا  $p/c$  داد او  $p/bc$  سره، د لیمای ۲ . ۲ له مخې به یې باور لرو دی.  $(a, b) = 1$  سره تضاد دی.

جمله :  $a$  او  $b$  دې له صفر مختلف گڼونه وي او  $|a| = \prod_p p^{\alpha_p}$  او  $|b| = \prod_p p^{\beta_p}$  د دوي مطلقه ارزښتونو لمړی فاکتور تجزیه د ۲ . ۴ له مخې ، نو  $a|b$  هلته او هلته باور لري که د ټولو لمړي گڼونو  $p$  لپاره باور ولري  $\alpha_p \leq \beta_p$

لاس ته راوړنې : وي دې  $a$  او  $b$  له 0 مختلف گڼونه،  $|a| = \prod_p p^{\alpha_p}$  همداسې  $|b| = \prod_p p^{\beta_p}$  دې د مطلقه ارزښتونو لمړني فاکتور ټوټونه (تجزیه) وي. نو باور لري

$(a, b) = \prod_p p^{\min(\alpha_p, \beta_p)}$  ،  $[a, b] = \prod_p p^{\max(\alpha_p, \beta_p)}$

چیرته چې  $\min(\alpha_p, \beta_p)$  د دواړو گڼونو  $\alpha_p$  او  $\beta_p$  خورا کوچنی او  $\max(\alpha_p, \beta_p)$  خورا لوی په گوته کوي.

بیلگه :  $a = 2124 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 59$  او  $b = -1764 = -2^2 \cdot 3^2 \cdot 7^2$  نو لرو  $(a, b) = 2^2 \cdot 3^2 = 36$

او  $[a, b] = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7^2 \cdot 59 = 104076$

یادونه : د لاس ته راوړنې ۲ څخه سم د لاسه له دوو څخه زیاتو ټولگڼونو باندې غ گ و او ک گ ز هم استعمالیدی شي.

یو څو په لمړیو گڼونو اړونده پرابلومونو دې پوښتنو ته چی ایا ناپای زیات لمړي گڼونه موجود دي که نه اویکلید لخوا خواب ورکړ شوی. لاندې یو ښکلي خواب دی چی له هغه ریښه نیسي:



لاس ته راوړني : وي دې  $a$  او  $b$  له 0 مختلف ګڼونه،  $|a| = \prod_p p^{\alpha_p}$  همدا سې  $|b| = \prod_p p^{\beta_p}$  دې د مطلقه ارزښتونو لمړني فاکتورټوټونه (تجزیه) وي. نو باور لري

$$(a, b) = \prod_p p^{\min(\alpha_p, \beta_p)}, [a, b] = \prod_p p^{\max(\alpha_p, \beta_p)}$$

چیرته چې  $\min(\alpha_p, \beta_p)$  د دواړو ګڼونو  $\alpha_p$  او  $\beta_p$  خورا کوچنی او  $\max(\alpha_p, \beta_p)$  خورا لوی په ګوته کوي.

**بیلګه :**  $a = 2124 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 59$  او  $b = -1764 = -2^2 \cdot 3^2 \cdot 7^2$  نو لرو  $(a, b) = 2^2 \cdot 3^2 = 36$  او  $[a, b] = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7^2 \cdot 59 = 104076$

یادونه : د لاس ته راوړني ۲ څخه سم د لاسه له دوو څخه زیاتو ټولګڼونو باندې غ ګ و او ک ګ ز هم استعمالیدی شي.

یو څو په لمړیو ګڼونو اړونده پرابلومونو دې پوښتنو ته چې ایا ناپای زیات لمړي ګڼونه موجود دي که نه اویکلید لخوا ځواب ورکړ شوی. لاندې یو ښکلي ځواب دی چې له هغه رېښه نیسي:

جمله: ناپاي ډیر لومړني ګڼونه شته.

حل (اوبی) : موږ جمله ناسیده یا ناسمه ټیایو ( $\infty$  -مه برخه دې وکتل شي) او نیسو چې پایډیر لمړی ګڼونه  $p_1, p_2, p_3, \dots, p_r$  موجود دي. ګڼ  $N = p_1 p_2 \dots p_r + 1$  له 1 لوی دی او له دې امله په یوه لمړي ګڼ  $p$  ویشونکی دی. د نیونی له مخی لرو  $p = p_i$  د  $1 \leq i \leq r$  سره. د  $N | p_1 p_2 \dots p_r$  او  $p | p_1 p_2 \dots p_r$  له امله لاس ته راځي  $p | 1$ . کوم چې ناشونی دی (ناممکن) له دې امله باید ناپای زیات لمړي ګڼونه موجود وي.

يادونه : د ميلاد څخه پخوا د « اريتوتنس غلبيل » متود څرگندوو، چي موږ د 1 او 100 ترمنځ د لمړي گڼونو معلومول د هغې متود له لارې په لاندې توگه څرگند وو

<del>1</del>	<del>2</del>	3	<del>4</del>	5	<del>6</del>	7	<del>8</del>	<del>9</del>	<del>10</del>	11	<del>12</del>	13	<del>14</del>	
		<del>15</del>	<del>16</del>	17	<del>18</del>	19	<del>20</del>	<del>21</del>	<del>22</del>	23	<del>24</del>			
<del>25</del>	<del>26</del>	<del>27</del>	<del>28</del>	29	<del>30</del>	31		<del>32</del>	<del>33</del>	<del>34</del>	<del>35</del>	<del>36</del>		
	37	<del>38</del>	<del>39</del>	<del>40</del>	41	<del>42</del>	43	<del>44</del>	<del>45</del>	<del>46</del>	<del>47</del>	<del>48</del>	<del>49</del>	50
<del>51</del>	<del>52</del>	53	<del>54</del>	<del>55</del>	<del>56</del>	<del>57</del>	<del>58</del>	<del>59</del>	<del>60</del>	61	<del>62</del>	<del>63</del>	<del>64</del>	
		<del>65</del>	<del>66</del>	67	<del>68</del>	<del>69</del>	<del>70</del>	71	<del>72</del>	73	<del>74</del>	<del>75</del>	<del>76</del>	<del>77</del>
<del>78</del>	79	<del>80</del>	<del>81</del>	<del>82</del>	83	<del>84</del>	<del>85</del>	<del>86</del>	<del>87</del>	<del>88</del>	89	<del>90</del>	<del>91</del>	
				<del>92</del>	<del>93</del>	<del>94</del>	<del>95</del>	<del>96</del>	<del>97</del>	<del>98</del>	<del>99</del>	<del>100</del>		

### ۳. ۱. ۰. ۳ - راشنل گڼونه Rational Numbers

( لاتين: عاقلانه يا هوبښيار اعداد يا گڼونه )

د افغانستان په دري ادبياتو كې داسې گڼونه او ايراشنلگڼونه كله ناطق د گونگ او داسې نورو گڼونو په نامه يا ديري، كله يې ماتگڼونه بللي، خوزه دا بڼه بولم، چي دا همداسي يانې راشنلگڼونه وبلل شي، كه څوك يې هوبښيار گڼونه بولي هم خوبڼه يې او يا مات گڼونه، خو دلته راڅيو Ratio n هوبښيار په معنا نه بلکه د نسبي په معنا دی.

يادونه : كه / ولرو يانې كه ولرو  $a/b$  نو دا په دې مانا، چي  $a$  په  $b$  ويشل كيږي. كه ولرو  $\neq$  نود نابرابرونڅښه ده. دا په دې مانا، چي  $b$  له 0 سره برابره نه ده. د دوه گڼونود  $a$  او  $b$  ویش  $x = b/a$  د ټولگڼونو په ډيري كې تل هلته شته دی، چي  $a$  د  $b$  ټولگڼيز څو ځله وي.

د دې لپاره، چې بیا هم ویش  $a : b$  (دلته هم  $b$  پر  $a$  ویشل کیږي) کیدونی شي « سره له دې، چې ویش تل په ټولګونو کې پیژند نه لري یا تعریف نه دی یا صورت نه نیسي » باید د ټولګونو ډیرۍ ماتګونو (کسر) ډیرۍ ته پراخه شي، چې د لومړي ځل لپاره افاده یا وینه  $b/a$  سومبولیک مانا لري، د نوو ګونو په څیر نیسو او په ټولګونو یې ور زیاتوو، نو هغه ګڼونه، چې لاس ته راځي مور ورته راشنلګڼونه وایو. دلته دا راشنل ګڼ د جوړې په څیر ورکړ شوی دی

$cb / ca$  هلته باور لري، چې  $c \neq 0$  د ټولګڼ او  $a | b$  د ماتګڼ په څیر ورکړ شوي وي

د راشنلګڼو ډیرۍ، چې په  $Q$  سره ښایو د ټولګڼو ماتګڼو  $b/a$  چې  $a \neq 0$  او  $a$  او  $b$  د ټولګڼو له ډیرۍ وي، د ټولګڼو پراخوالی دی او ټول د مخه تیر بنسټیز قوانین په کې باور لري او د ویش بنسټیز قانون ته داسې پراخیدلی شي

ټ : د ویش (تقسیم) بنسټیز قانون (دوام)

۲ - د دوه راشنل ګڼونو  $a$ ،  $a \neq 0$  او  $b$  لپاره یواځنی راشنل ګڼ  $x = b/a$  شته دی، چې برابرې او مساوات  $ax = b$  پوره کوي

راشنل ګڼونه هم د ورځنیو اړتیاو پر بنسټ منځ ته راغلي

بیلګه :

که شپږ منه غنم په دولسو تنو وویشو، نو د هر تن نیم من غنم، راسپړي، چې دا نیم یې

راشنلګڼ دی، یانې  $1 : 2 = 1 / 2 = 6 : 12$  یا  $\frac{1}{2}$

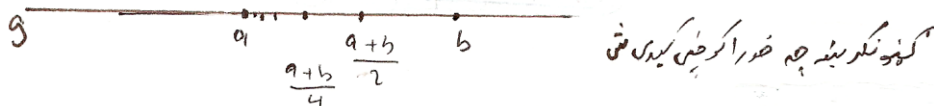
دا باید په ګوته کړو، چې راشنل ګڼونه د پای یا ناپای لسمیز ګڼ په څیر لیکل کیدی شي

### Real numbers (reele Zahlen) - ریيل گڼونه ۰۱۰۳ - ۴

(فرانسوي: په ریښتونني شته يا موجود)

د ریښتلگن په بنسټ هغه ورځنی تیوريکی اړتیاوي چی د شمیر عملیو بی بندیزه (نامحدود) په کار اچولو یا استعمال ته موجود وي حل یا اوبی شوي او همدارنگه عملي اړتیاوي چی اندازه کولو ته موجود وي هم حل شوي وي.

د ریښتلگن له لارې کیدی شي چی د کرنی اوردوالی ټیک ورکړ شي یا په همدې مانا: په هرڅومره وړوکی گڼونکرښه انټروال کی هم ناپای زیات گڼونه، چی په ټکو یا نقطو انځور شوي، پراته دي.



د ټولو دې امکاناتو سره سره هم بیا په یوه کرښه کی هر ټکی د ریښتلگن په ذریعه نه شي ښودل کیدی یا په بل عبارت د کرنی هر ټکی د ریښتلگن په مانا نه دی . دا گڼونه چی د «ایریښتلگنونو» په نامه یادیري، کیدی شي د یوه پریودیکی (periodische) (د گڼونو کړی نه شلیري) ناپای لسيزمات له لارې وښوول شي.

د بیلگي په توگه د مربع د نیمي (قطر) x اندازه چی د مربع یو اړخ ۱ وي نه شي کیدی چي په ریښتلگن وښوول شي. د پیتاگوراس د جملی په بنسټ د x لپاره لاندې مساوات

$$x = \sqrt{2} \text{ پس } , x^2 = 1^2 + 1^2 \text{ لرو :}$$

د رییلگن کلیمه یوه ژوره کلیمه ده چی د پوهیدلو لپاره یی «پولی» ( لیمس  $\lim$  ) ته اړتیا موجود ده چی په ۱۸-مه برخه کی به تر څیړنی لاندې ونیول شي.

ډیر اینتروالبندیدل چی په همغه یوه ټکی راڅرخي مساوي (ورته ) ارزښته (Equivalent لاتین :مساوي ارزښته) لیدل کیږي

رییلگنډیری  $R$  چی په ریشنگنډیری د ایریشنگنډیری ورزیاتول دي چی له  $۱ . ۱ . ۳$  تر  $۳ . ۱ . ۳$  برخی پورې ټول بستزقوانین په کی باور لري. د رییلگن له لارې دکربنی ټول ټکی په بر کی نیول کیدی شي. په دې ډول رییلگنونه ټولی د شمیرلو او اندازه کولو اړتیاوې پوره کوي.

گورو چی  $x^2 + 1 = 0$  د رییلگن حل یا اوبی نه لري. دلته د دې گڼونو پراخوالي ته اړتیا پیښیږي چی کمپلکسگڼونو ته پراخ شي، او په ۵-مه برخه کی به تر څیړنی لاندې ونیول شي.

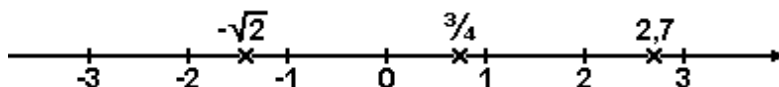
یا دا لاندې په لنډه توگه:

مورن گڼونه یا اعداد لرو، چی هغه راشنل گڼونه نه دي یانی که مورن د ۲ گڼ ریښه(جذر) ونیسو، نو داسی یو گڼ لاس ته راځي، چی هغه په لسمیزه توگه پای ته نه شي رسیدی یانی پریودیکی ( تل بیرته راگرځیدونی یا پسی نور هم پراخیدونی ) دي . داسی گڼونو ته ایراشنل گڼونه وایو .

تل بیرته راگرځیدنیز (  $periodic$  ) تل بیرته راگرځیدونی Period, د گڼونو خنځیر نه شلیږي

### ايراشنل – يا نانسيبي عددونه ياگڼونه Irrational numbers

د راشنل او ايراشنل گڼونو ټولني ته رييل گڼونه وايو ( دا چي ټولنه څه شي دي، په ډيري پوهنه يا سيټيوري کي به ولوستل شي). ۰ مور د گڼونو د بنوولو لپاره لاندې گڼونکرښه باسو په کومه کي چي له صفر سره پيدايبستي، ټول- راشنل، راشنل گڼونه کښل شوي دي ياني رييل گڼونکرښه



۳ ۰ ۲ - رابيلشوي (له نورو -) د شمير قواعد

په دې برخه کي د رييل گڼونو لپاره رابيل شوي قوانين څيرو، چي د مخه تيرو قواعدو باندې ولاړ دي، دلته درانده ټکي دا لاندې دي:

- په رييلگڼونو کي څلور بنسټيز شمير ډولونه په ځانگړي توگه په لاندې ډول د نوکانو افادي (وييني) سره شميرنه ( نوکان ايښوول) له زياتون گډ فاکتورونه يا ځلووني له نوکانو راوستل، د بينوميال فرمولونه.

- پر صفر ويشنه د ناشونوالي په پام کي ساتنه

- له ماتو ( کسرونو ) سره شميرل او په ځانگړي توگه لندول ( واړه کول ) پراخول يا غزول او د اصلي گډ ماتلاندې ( مخرج المشترك ) جوړول، د داسي ماتلاندې ( مخرج ) چي له ټاکلو او ناټاکلو ترمونو څخه جوړ وي.

نوموني: کسر ته مات وايو او صورت او مخرج ته مور ماتباندې او ماتلاندې وايو، چي سملاسي يي په مانا هم پوهيرو.

### ۱۰۲۰۳ - جمعه او تفریق (زیاتون او کمون)

د زیاتون او کمون بنسټیزو قوانینو څخه لاندې لاس ته راځي

$$-(-a) = a, \quad a - b = a + (-b),$$

$$(a + b + c \dots -c -d \dots) + (e + f + \dots -g -h \dots) = \\ a + b + \dots -c -d \dots + e + f + \dots -g -h \dots$$

دا دا مانا لري، چې که چیرې د نوکانو دباندي زیاتوننڅېبه (د جمع علامه) وي، نو د نوکانو څخه ویستلو کې گڼ خپله مخنڅېبه نه بدلوي. که د نوکانو د باندي کموننڅېبه (منفي نڅېبه) وي، نو د گڼونو له نوکانو ایستلو په حال کې د نوکانو دننه نڅېبی بدلیري. یانی کموننڅېبه زیاتوننڅېبه او زیاتوننڅېبه کموننڅېبه کیږي. بیلگه یې لاندې گورو

$$(a + b + \dots -c -d \dots) - (e + f + \dots -g -h \dots) = a + b + \dots - \\ c -d \dots - e -f \dots + g + h \dots$$

په همدې ترتیب کیدی شي نوکان هم ځای پرځای شي.

دلته باید مطلق ارزښت هم په گوته شي، چې په گڼکرښه د صفر څخه د یوه ریپلگن واټن په گوته کوي،

د کوم لپاره چې لیکو:

مطلق عدد یا - گڼ یا بی اړیکو گڼ (absolut number)

دا په دې مانا، چې د دې گڼ سره زیاتیزه او کمیزه نڅېبه یا مثبت او منفي نه لیکل کیږي یا یون (واحد) هم ورسره نه وي، دا ټیک او ټیک یو گڼ بنایج او بس.

$$|a| = a \quad ; \quad a > 0$$

$$|a| = 0 ; a = 0$$

$$|a| = -a ; < 0$$

ياني که a زياتيزه يا مثبت وي، نو a پخپله ليکواو که a کميزه يا منفي وي، نو -a ليکواو که a صفر وي نو د هغه لپاره 0 ليکواو

$$۳ \cdot ۲ \cdot ۲ \cdot ۲ \text{ (ضرب)}$$

د خل لپاره لاندي د مخنځبنی قوانین باور لري:

$$(+a)(+b) = +ab, (+a)(-b) = -ab, (-a)(-b) = +ab, (-a)(+b) = -ab$$

که چيرته ډير نوکبندونه راگرځيدلی وي، نو دا د خل قانون پل په پل پر مخ ځی

بيلگه:

$$\begin{aligned} (a+b)(c-d)(e-f-g) &= (ac - ad + bc - bd)(e-f-g) \\ &= (ace - acf - acg - ade + adf + adg + bce - bcf - bcg - bde - bdf + bdg) \end{aligned}$$

د ځانگړي حالت په توگه د بينوم پيژندل شوی فرمولونه راوړو:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a + b)(a-b) = a^2 - b^2$$



گران لوستونکی کولی شي، چې پورته فرمولونه وښايي، چې ټيک دي.

دا په لاندې ډول کارولکيري :

بيلگه ۱ . ۳ :

$$4a^2 + 12ab + 9b^2 = (2a + 3b)^2 .$$

$$a^2x^2 - 2abxy + b^2y^2 = (ax - by)^2 = (by - ax)^2.$$

$$16u^2 - 2v^2 = (4u + 2v)(4u - 2v)$$

۳۰۲۰۳ ویش

په پام دي کې ولرو، چې  $b:a$  د  $a = 0$  لپاره کوم مفهوم نه لري . پر صفر ویش ناشونی دی

په ویش کې نوکښډول د زیاتون، کمون او ځل په څیر ساده نه کيري . په ویش کې د زیاتون په ډول لیکل شوی هر توکی په ماتلاندې ویشل کيري:

بيلگه ۳ . ۴ :

$$(3a^2b - 6ab^2 + 12 abc) : 3ab = a - 2b + 4c$$

یا داسي

$$\frac{3a^2b}{3ab} - \frac{6ab^2}{3ab} + \frac{12abc}{3ab} = a - 2b + 4c$$

د  $ab \neq 0$  لپاره

دې لاس ته راوړنې(نتیجې) ته سړی د گډو ځلوونو یا فاکتورونو یا خپلواکنوک څخه وتلو له لارې هم رسیدلی شي:

$$3a^2b - 6ab^2 + 12 abc = 3ab(a - 2b + 4c)$$

له دې ځایه کیدی شي، چې د بولینوم وېش بیل شي

بیلگه ۳ . ۵ :

$$(3a^2b - 6ab^2 + 5c) : 3ab = a - 2b \text{ Rest } 5c$$
  
$$\frac{3a^2b}{3ab} - \frac{6ab^2}{3ab} + \frac{5c}{3ab} = a - 2b + \frac{5c}{3ab} \quad ab \neq 0$$

د یوه زیاتو یا چمعي وېش په یوه چمعه، کیدی شي د بینوم جکلي له لارې صورت ونیسي

$$(a^2 + 2ab + b^2) : (a + b) = a + b \quad \frac{(a + b)^2}{a + b} = a + b \quad a \neq -b$$

بیلگه ۳ . ۶ :

$$(a^2 - b^2) : (a + b) = a - b \quad \frac{a^2 - b^2}{a + b} = a - b \quad a \neq -b$$

بیلگه ۳ . ۷ :

$$\frac{(ax - by)^2}{by - ax} = \frac{(by - ax)^2}{by - ax} = by - ax \quad ax \neq by$$

بیلگه ۳ . ۸ :

دلته هم وېش د پاتي یا باقي سره شونی دی.

$$a^2 - 2ab + b^2 : (a - b) = [(a - b)^2 + b^2] : (a - b) = a - b$$

بیلگه ۳ . ۹ : باقي یا پاتي  $b^2$

له دې لاس ته راځی او په څنټ

$$\frac{(a-b)^2 + b^2}{a-b} = \frac{(a-b)^2}{a-b} + \frac{b^2}{a-b} = a-b + \frac{b^2}{a-b} \quad \text{په } a \neq b,$$

$$\therefore (16u^2 - v^2) : (4u + \sqrt{2}v) = 4u - \sqrt{2}v \text{ Rest } v^2 \quad \text{پاتې} \Rightarrow$$

$$\frac{16u^2 - v^2}{4u + \sqrt{2}v} = \frac{16u^2 - 2v^2 + v^2}{4u + \sqrt{2}v} = \frac{16u^2 - 2v^2}{4u + \sqrt{2}v} + \frac{v^2}{4u + \sqrt{2}v}$$

$$= 4u - \sqrt{2}v + \frac{v^2}{4u + \sqrt{2}v}$$

بیلگه ۱۰.۱

$$د \quad 4u = -\sqrt{2}v \quad \text{لپاره}$$

فورمال ور د دوه پولینومونو ویش دی ( برخه ۱۲ دې انډول (پرتله) شي ):

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x^1 + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x^1 + b_0} = P_n(x) : Q_m(x),$$

که د ماتباندي پولینوم درجه د ماتلاندي پولینوم درجی لوي يا مساوي وي ( $n \geq m$ ).  
مور نیسوجی:  $a_n \neq 0, b_m \neq 0$  او  $Q_m(x) \neq 0$ .

د دواړو ویشو «توته ویشو» ( پارخیالویش ( Partialdivision )) دا دی چی دا  
د  $P_n(x) : Q_m(x)$  ویش په لاندي ډول ولیکلی شو:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \text{Polynom 1} + \frac{\text{Polynom 2}}{Q_m(x)},$$

چیرته چی د پولینوم 2 درجه له  $Q_m(x)$  درجی څخه کوچنی ده.  
دې هدف ته په لاندي ډول رسیږو.

۱ - سړی یواخی د جگ نظم غږي  $a_n x^n : b_m x^m$  ویشي او له دې سره یوه

غلطي  $F(x)$  کوي:

$$Q_n(x) : Q_m(x) = \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} + F(x) \quad *$$

۲ - سری (\*) په ماتلاندې پولینوم  $Q_m(x)$  ویشي

$$P_n(x) = (a_n / b_m) x^{n-m} Q_m(x) + F(x)$$

او له دې غلطی  $F(x)$  ، په لاندې فورم یا ډول لاس ته راځي

$$F(x) = P_r(x) / Q_m(x)$$

د  $P_r(x) = P_n(x) - (a_n / b_m) x^{n-m} Q_m(x)$  سره

چیرته چې د پولینوم  $P_r(x) = c_r x^r + c_{r-1} x^{r-1} + \dots + c_0$  درجه  $r$  د پیل

پولینوم  $P_n(x)$  له درجې  $n$  څخه کم له کمه په یو کوچنی وي . د گڼونو شمیر په

تکیه ویلی شو، چې  $P_r(x)$  پاتی پولینوم یا په ساده ډول پاتی (باقي) دی. ۳ - که لا تراوسه د  $Q_m(x)$  درجه  $r$  له  $m$  کوچنی وي نو د ټکو ۱ - او ۲ - ټوټه ویش

په  $Q_m(x) : P_r(x)$  استعمالیږي، د لاندې نتیجې سره

$$P_r(x) : Q_m(x) = (c_r / b_m) x^{r-m} + P_t(x) / Q_r(x)$$

چیرته چې د  $P_t(x)$  درجه  $t$  کم له کمه په یو له  $P_r(x)$  درجې کوچنی وي.

د ټوټه ویش دا عملیه اخر ته رسیږي، که (د پای ډیرو پلونو (قدمونو) اخستلو وروسته د ماتلاندې غلطی پولینوم درجه له  $m$  څخه کوچنی وي.

بیلگه ۲ . ۱۱ . لمړی دې د ټوټه ویش ۱ او ۲ پلونه (قدمونه، کدمونه) په پراخ ډول د لاندې ویش په بیلگه توضیح شي

$$P_n(x) : Q_m(x) = P_3(x) : Q_1(x) = (6x^3 + 5x^2 - 3x + 1) : (3x - 2)$$

	$P_3(x) : Q_1(x) = (a_3 / b_1)x^2 + F(x)$
$(a_3 / b_1)x^2Q_1(x) = 2x^2(3x-2) =$	$(6x^3 + 5x^2 - 3x + 1) : (3x-2) = 2x^2 + F(x)$ $6x^3 - 4x^2$
$P_2(x) = P_3(x) - (a_3 / b_1)x^2Q_1(x) =$	$9x^2 - 3x + 1$
$F(x) = P_2(x) : Q_1(x) =$	$(9x^2 - 3x + 1) : (3x - 2)$

بیلگه ۱۲ . د ټوټه ویش بیلگه ۱ . ۱۱ د  $F(x)$  غلطی ته دوام ورکوو، ترڅو  
چې د لیکنی شکل لنډ شي:

---

$$F(x) = P_2(x) : Q_1(x) = (9x^2 - 3x + 1) : (3x - 2) = 3x + G(x)$$

$$3x \cdot Q_1(x) = (9x^2 - 6x)$$

$$\text{پاتي} = 3x + 1 \quad \text{ياباقي}$$

$$G(x) = (3x + 1) : (3x - 2)$$

له دې لاندې نتیجه لاس ته راځي :

$$(6x^3 + 5x^2 - 3x + 1) : (3x - 2) = 2x^2 + 3x + G(x)$$

$$G(x) = (3x + 1) : (3x - 2) = 11 + H(x)$$

$$Q_1(x) = 3x - 2$$

$$\text{ياباقي} = 3 = \text{پاتي}$$

$$H(x) = 3 : (3x - 2)$$

پس باور لري

$$(6x^3 + 5x^2 - 3x + 1) : (3x - 2) = 2x^2 + 3x + 1 + 3/(3x - 2)$$

ټول ټوټه ویش کیدی شي په لاندې ډول مخ ته یووړ شي .

(1) (4) (7) (۱۰)

$$(6x^3 + 5x^2 - 3x + 1) : (3x - 2) = 2x^2 + 3x + 1 + 3/(3x - 2)$$

(2)  $\frac{6x^3 - 4x^2}{\phantom{}}$

(3)  $\frac{-9x^2 - 3x + 1}{\phantom{}}$

(5)  $\frac{9x^2 - 6x}{\phantom{}}$

(6)  $\frac{3x + 1}{\phantom{}}$

(8)  $\frac{3x - 2}{\phantom{}}$

(9)  $\frac{3}{\phantom{}}$

دلته (i) د پرلپسې پل اخستلو په مانا ده.

جمله ۳ . ۱۳

(1) (4) (7) (10)

$$(18x^4 + 15x^3 + 0x^2 - 2x + 1) : (3x^2 + x - 1) = 6x^2 + 3x + 1 + \frac{2}{3x^2 + x - 1}$$

(2)  $\frac{18x^4 + 6x^3 - 6x^2}{\phantom{}}$

(3)  $\frac{9x^3 + 6x^2 - 2x + 1}{\phantom{}}$

(5)  $\frac{9x^3 + 3x^2 - 3x}{\phantom{}}$

(6)  $\frac{3x^2 + x + 1}{\phantom{}}$

(8)  $\frac{3x^2 + x - 1}{\phantom{}}$

(9)  $\frac{2}{\phantom{}}$

### ۳ . ۲ . ۴ ماتشمیرنه ( کسر شمیرنه )

د مات  $m/n$  کلمه د لومړي ځل لپاره د ټولګڼونو  $m, n$  څخه د ریشنلګڼونو انځورونو لپاره تعریف شوي . کیدی شي، چې دا کلمه  $a/b$  ته، چې  $a$  او  $b$  ریيل ګڼونه دي، وغزول شي .

باید په پام کې وړ، چې ماتباندي صفر نه شي..

د بیلګې په توګه:

ویش  $a/(b-c)$  ټیک هلته مفهوم لري، چې  $b \neq c$  وي . ماتګڼ  $a/b$  همدا ګڼ بڼایي

لکه  $a : b$  او یا  $\frac{a}{b}$ ، دلته هم باید  $b \neq 0$  وي.

په اخر کې باید په ګوته شي، چې مات لاندی – او همدارنګه ماتباندي ګڼ هم هر ماتګڼ کیدی شي او هم دواړه . دا باید دلته هم په پام کې وي، چې هیڅ یو ماتلاندي ګڼ باید صفر نه وي یانی دلته بی له اولنی ماتباندي نور یو ګڼ هم، چې ماتلاندي پورې اړه لري، نه شي صفر کیدی دا مور د ماتو مات ( کسرالکسر ) بولو .

بیلګې:

$$a : (b/c) = a / (b/c) , b \neq 0 , c \neq 0 ,$$

$$(a/b) : c = (a/b) / c \quad b \neq 0 , c \neq 0$$

$$(a/b) : (c/d) = (a/b) / (c/d) , b \neq 0 , c \neq 0 , d \neq 0$$

یا په لاندې ډول:

$$\frac{a}{b} : \frac{b}{c}, b \neq 0, c \neq 0, \dots, \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}, b \neq 0, c \neq 0, d \neq 0$$

په خو واره ماتګن کې باید اصلي ماتګرښه څرګنده پیژندونکي وي، چې په دې توګه د هر ډول ناتیګوالی مخه نیول شوي وي. په ټولیزه توګه باور لري

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} \neq \frac{a}{c}$$

هر یو ماتګن  $a/b$ ،  $b=0$ ، په یوه ګڼ  $c \neq 0$  پراخیدي او همداسې لنډیدي شي

یاني ماتلاندې او ماتباندي په یوه ګڼ  $c$  ځلیدي یا ویشل کیدی شي او دا کرنلار په اصلي

ګڼ کې تغیر نه راوړي

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c} = \frac{a : c}{b : c}, b \neq 0, c \neq 0$$

د ماتګن لنډوالی ددې لپاره ښه دی، چې ماتګن ساده کړي.

د بیلګې په توګه:

$$\frac{8}{12} = \frac{2}{3}, \frac{ax-ab}{y-ac} = \frac{x-b}{y-c}; a \neq 0, y \neq c$$

باید تل په پام کې ولرو، چې یواځنی فکتور یا څلورنی یا ضریب لنډیدي شي او نه زیاتوونی د بیلګې په توګه لاندې ماتګن



$(a+c):b+c = a:b$  وي نه شي لندیدی دا چې  $b \neq -c$

باور لري، چې  $b \neq 0, c = 0 \vee -c = a, a = b$

پراخوالی یا غزول د دې لپاره اریین دی، چې ډیر ماتګونونه په ګډ ماتباندي (مخرج المشترك) راوستلی شي، ځکه چې یواځې هغه مات یو په بل زیاتیدی یا یو له بل کمیدی شي، چې ګډ ماتلاندي ولري.

$$\frac{a}{c} \pm \frac{b}{c} = \frac{a \pm b}{c}, c \neq 0 \quad \text{لکه:}$$

که چیرې پرځت یا برعکس ماتګونونه  $a/b$  او  $c/d$  د نابرابر ماتلاندي لرونکی سره زیاتوو او یا کموو، نو دا په ګډ ماتلاندي باید راولو. ګډ ماتلاندي د ټولو ماتلانديو څخه دی. د بیلګې په توګه لاندي باور ی دی:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} + \frac{e}{f} = \frac{adf + bcf + bde}{bdf}, b \neq 0, d \neq 0, f \neq 0 \Leftrightarrow bdf \neq 0$$

او دا لاندي

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} \pm \frac{cb}{bd} = \frac{ad \pm cb}{bd}, b \neq 0, d \neq 0 \Leftrightarrow bd \neq 0$$

تل باید ماتګونونو ګڼلو کې ماتلاندي سره ځل نه شي، چې ګډ ماتلاندي لاس ته راولو، دا د بنوونځي په څرګنده بیلګه باندي ښایو

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{15} - \frac{1}{36} \quad \text{بیلګه:}$$

کیدی شي، چي اصلي ماتلاندي(۰م۰ل (وتاکل شي

$$= 2.3.5.6.15.36 = 97200 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 1$$

کیدی شي، چي ۰م۰ل د لومړنيو گڼونو ځل په څير هم وليکو:

$$2 = 2$$

$$3 = 3$$

$$5 = 5$$

$$6 = 2 \cdot 3$$

$$15 = 3 \cdot 5$$

$$3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 36 = 2$$

---

$$2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 4 \cdot 9 \cdot 5 = 180$$

پس د گډ ماتلاندي لپاره د لورگن يا لور جگگن يا لور طاقت لومړي ځلوني رانيول کيږي، چي گڼل خورا ساده کوي.

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{15} - \frac{1}{36}$$

$$\frac{90 - 60 + 36 - 30 + 12 - 5}{180} = \frac{43}{180}$$

دا چي دا تگلار څنگه د ماتو په توليزه افاده استعماليدی شي لاندې بيلگه يی ښايي:

بيلگه ۳. ۱۵۰ په لاندې بيلگه کې

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} + \frac{1}{ab} - \frac{1}{a^2b} + \frac{1}{ab^2}$$

چې يواځې د لاندې لپاره موخه ور دی  $a \neq 0 \wedge b \neq 0$

د اصلي ماتلاندې لپاره يانې

$$ab(ab)(a^2b).(ab^2) = a^4.b^4$$

نه ټاکي، نو له دې امله دی

$$a = a$$

$$b = b$$

$$ab = a \cdot b$$

$$a^2 \cdot b = a^2 \cdot b$$

$$ab^2 = a \cdot b^2$$

-----

$$= a^2 \cdot b^2 \quad \text{دا ۱۰م، ۱۰ل، په لاندې توگه دی}$$

له دې امله لرو:

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} + \frac{1}{ab} - \frac{1}{a^2b} + \frac{1}{ab^2} = \frac{ab^2 - a^2bab - b + a}{a^2b^2}$$

بیلگه ۱۶۰۳ : د ویني یا افادي

$$\frac{2}{a-2} + \frac{2}{a-1} - \frac{1}{a+1} - \frac{a+3}{a^2-1} - \frac{a+6}{a^2-4}, a \neq 0, a \neq \pm 2$$

لپاره ټاکو

$$a-2 = (a-2)$$

$$a-1 = (a-1)$$

$$a+1 = (a+1)$$

$$a+2 = (a+2)$$

$$a^2-1 = (a-1)(a+1)$$

$$a^2-4 = (a-2)(a+2)$$

---


$$(a-2)(a-1)(a+1)(a+2) = (a^2-1)(a^2-4)$$

دا پورته لاس ته راوړنه ۰.۱م.۰ل. - چۀ دا په همدې وخت کې غ ک پ هم دی- په گوته کوي او له پورته څخه د مخه ورکړشوي افادي لپاره لاس ته راځي:

$$\frac{2(a^2-1)(a+2) + 2(a^2-4) - (a-1)(a^2-4) - (a-2)(a^2-1)}{(a^2-1)(a^2-4)}$$

$$= \frac{(a+3)(a^2-4) + (a+6)(a^2-1)}{(a^2-1)(a^2-4)}$$

د دې مات ماتباندي صفر دې په ډول په پورته پيل کې ورکړ شوي افاده يا وينه د صفر پيچلي ليکلو بيلگه ده او بس .

د ځل او ویش لپاره لاندې قاعدې باور دي:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}, b \neq 0, d \neq 0 \Leftrightarrow bd \neq 0$$

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}; b \neq 0, c \neq 0, d \neq 0 \Leftrightarrow bcd \neq 0$$

بيلگه ۳۰۳ (الف)

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{1 - a \frac{1}{1 - \frac{b}{a}}} &= 1 - \frac{1}{1 - \frac{a}{a-b}} = 1 - \frac{1}{1 - \frac{a^2}{a-b}} = 1 - \frac{1}{\frac{a-b-a^2}{a-b}} \\ &= 1 - \frac{a-b}{a-b-a^2} = \frac{a-b-a^2-a+b}{a-b-a^2} = \frac{-a^2}{a-b-a^2} = \frac{a^2}{a^2-a+b} \end{aligned}$$

$$a \neq 0, a \neq b, a^2 - a + b \neq 0$$

د

لپاره ۰ دا په دې مانا، چې

$$a \neq \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{1-4b})$$

بيلگه ۳۰۳ (ب):

$$\frac{\frac{a}{a-b} - \frac{b}{a+b}}{\frac{a}{a+b} + \frac{b}{a-b}} = \frac{\frac{a(a+b) - b(a-b)}{(a-b)(a+b)}}{\frac{a(a-b) + b(a+b)}{(a+b)(a-b)}} = \frac{a(a+b) - b(a-b)}{(a^2 - b^2)} \cdot \frac{(a^2 - b^2)}{a(a-b) + b(a+b)}$$

$$= \frac{a^2 + ab - ab + b^2}{a^2 - ab + ab + b^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2} = 1, \forall |a| \neq |b|$$

یادونه: په پورته لیکنه کې د گڼونو موضوع لږ و غزول شوه، خو لږ څه نور هم باید راغلي وی. دلته اړیین د گڼونو شمیرقوانین دي او د گڼونو پیژندل. د گڼونو اړیکې د خونديونې له لارې

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

او په دې کڼونو کې باوري د شمیر قوانین، چې هغه زیاتون، کمون، ځل، ویش دی او د ویش په بنسټ ماتشمیرنه. دا باید په هماغه ساده ډول زده کړای شي.

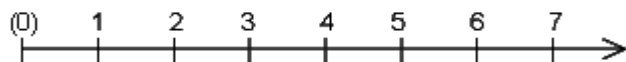
مور هغه د لومړي وار لپاره اړیین د گڼونو شمیرنقوانین په لاندې توګه رالندوو، چې د لومړي وار لپاره په همدې پوهیدنه بسیا کوي.

گڼونډیری ( لنډه ټولګه)

پیدایښتي - یا طبیعي گڼونډیری

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

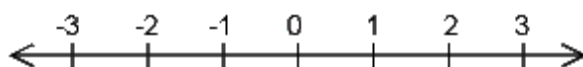
په وړانګه د پیدایښتي گڼونو انځورونه



د ټولګڼونو ډیری

$$Z = \{ \dots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots \}$$

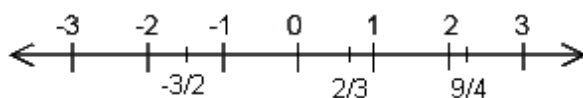
د ټولګڼونو ډیری انځورونه په یوه کرښه



د راشنلګڼونو ډیری

$$Q = \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in Z \wedge q \neq 0 \right\}$$

په ګڼونکرښه راشنلګڼونه د ټولګڼونو تر منځ پراته دي



هر راشنل ګڼ د لسمیز یا پریودیګی ګڼ په څیر لیکل کیدی شي

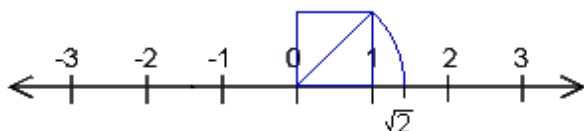
د ماتو سره شمیرنه

د دوه راشنلګڼونو ترمنځ تل ناپاي زیات نور راشنلګڼونه شته ، دا ګڼ پراته دي، مګر بیا یې هم ترمنځ نور ګڼونه یا ځایونه هم شته، چې ګڼونه په کې ځای دی او دې ګڼونو ته مو ایراشنل ګڼونه وویل . لکه چې یو راشنلګڼ نه دی

راشنل او ایراشنلګڼونه رییل ګڼونه جوړوي

د رییل ګڼونو ډیری یا حقیقي اعدادو سټ

د رییلګنونو ډیری د ګڼونکریسی ټولو ټکو څخه جوړه ده، لاندې ګڼونکریسه کې روښانه ده



په رییلګنونو کې بی له بندیزونو شمیرل کړی شو، خو په ماتلاندې کې باید صفر نه وي او دا د هر ډول ګڼونولپاره باور لري

شمیرډولونه لومړی پوری

Addition: زیاتون یا جمعه

زیاتوونی + زیاتوونی = زیاتون

د زیاتون کموتاتیو قانون  $a + b = b + a$

د زیاتون اسوخیاتیو قانون  $(a + b) + c = a + (b + c)$

و زیاتون ته د یوه بی اغیزه یا ناپیلی توکی شتون  $a + 0 = a$

مخامخ – یا په څټ ګن یا برعکس عدد  $a + (-a) = 0$

کمون: Subtraktion

د زیاتون په څټ کارونه یا عملیه ۰ ترې کمه وونی – کمه ونی = کمون

$$a + x = b \Leftrightarrow x = b - a$$



بیلگه:  $7 + x = 10 \Leftrightarrow x = 10 - 7 = 3$

شمیرډولونه:

دویمه پوری

ضرب یا ځل: فاکتور ( ځله وونی ضریب ) ۰ فاکتور ( ځله وونی ) ځل  
 $4 + 4 + 4 = 3 \cdot 4 = 12$  . د زیاتون تکرار، بیلگه

د ضرب یا ځل کموتاتیو قانون  $a \cdot b = b \cdot a$

د ضرب یا ځل اسوخیاتیو قانون  $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

دستریبیوتیو قانون  $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

و ضرب ته د یوه ناپیلی توکي شتون ( بي اغیزه توکی یې که وپولو هم بده به نه وي )

$a \cdot 1 = a$

په څټ ارزښت یا برعکس قیمت  $a \cdot (1/a) = 1$

یو ضرب ټیک هلته صفر دی، چې د ضرب یو ضریب صفر وي  $a \cdot 0 = 0$

ویش:

ویشونى : پرویشونى = ویش ( لوستل یې له بني وکین لورته )

ویش د ضرب یا ځل په څټ کارونه ده  $a : b = c$

$a \cdot x = b \Leftrightarrow x = b : a$

$z.B.: 4 \cdot x = 12 \Leftrightarrow x = 12 : 4 = 3$  د بېلگې په توگه

په صفر ویش پیژند نه لري یا تعریف نه لري

## ۳. ۳ تمرینونه

۱ - د اعدادو یا گڼونو ډولونه او د د اعدادو انځورونه

۱ ، ۱ - په کوم د اعدادو ډبرئ یا ست کې د عدد  $a$  او عدد  $b$  لپاره د شمیرلو څلور قاعدې یا لارې باور لري؟

یادونه: دلته دې ترې کمونې یا مفروق منه او وېشونش یا مقسوم تل  $a$  وي همداسې دې کمونې یا مفروق او پروېشونې یا مقسوم علیه تل  $b$  وي.

a)  $a = 8, b = 2$

c)  $a = 7, b = 0$

b)  $a = 5, b = 8$

d)  $a = -6, b = 1$

۱. ۲ عددونه او یو له بل سره پرتله کړئ او ورکړئ، چې له دې دواړو کوم لو دی!

a)  $a = \frac{13}{17}, b = \frac{169}{289}$

c)  $a = \frac{888}{901}, b = \frac{896}{911}$

b)  $a = \frac{11}{21}, b = \frac{121}{231}$

d)  $a = -\frac{13}{12}, b = -\frac{143}{130}$

۱. ۳ - د اعدادو یا گڼونو او څخه تفرسق، ضرب او وېش جوړ کړئ! ورکړئ، چې دا نتیجې د اعدادو کومو ډولونو پورې اړه لري!

د پوښتنې ۱ ، ۱ یادونه دلته هم باور لري.

a)  $a = \pi, b = 5$

c)  $a = \frac{2}{3}, b = \frac{3}{2}$

b)  $a = \sqrt{2}, b = \sqrt{2}$

d)  $a = 0, b = 1$

۱. ۴ - په دوه بیض سیستم کې لاندې گڼونه یا اعداد انځور کړئ!

a) 28

b) 47

c) 73

d) 112

۱. ۵ - لاندې رښتوني یا راشنل اعداد د کوټیو کې اچونې یا کوټې ونې له لارې په نږدې ۵ ځایونږ ټیک پیدا کړی.

a)  $\sqrt{3}$       b)  $\sqrt{18}$       c)  $\sqrt{2} + \sqrt{3}$       d)  $\frac{1}{\sqrt{2}}$

۲. د زیاتیزو او څلیزو (د جمعي او ضرب) نوکانو وازول

۲. ۱ - لاندې نوکان واز کړی

a)  $7a - 3b + (-a + 2c) - (3c - 6b) - (6a - 3c)$   
 b)  $5a + [7c - (2a - 3b)] - (4c - a + b)$   
 c)  $7a - [3a - (7 + 5b)] + [a - (4 - 6b)] - (2a + 7b)$   
 d)  $8a - \{a + [(3a - 2b) - (5a + 3b)] - [(-a + 6b)]\}$

2.2. a)  $(-a)(b - a - c)$   
 b)  $2a[a - (b - 3a)]$   
 c)  $3(a + b + c) - 5(a + b) - c - 2(b - c - a)$   
 d)  $|a| \cdot (b - 2a) - b \cdot (a + 2b)$

2.3. a)  $(2a - b)(9a + 4b)$       b)  $(9a - 2b)(7a - 3b)$   
 c)  $(a + b - c)(a - b - c)$       d)  $(3a + 2b)(4a - 3b)(5a - 7b)$

2.4. a)  $(7a - 5b)(3a + 4b) - (5a - 9b)(4a - b)$   
 b)  $(a + 4)(a - 2) - (a + 2)(a - 1)$   
 c)  $(a + b)(c - d) - (a - b)(c + d)$   
 d)  $(1 - a)(a - 1) - 2(a + 1)(a - 2)$

۳ - د بینوم فرولونه

۳. ۱ - د بینوم فرمولونه وکاروی یا استعمال کړی او د شونتیا سره سم یې ساده کړی

a)  $(-a + 3b)^2$       c)  $(-a - b)(a - b)$   
 b)  $(-1 + a)(a + 1)$       d)  $(-1 + a)^2 - (1 - a)^2$

3.2. a)  $(4a^2 - 3)(4a^2 + 3) - (3a - 4)^2 + (5a + 1)^2$   
 b)  $(a^2 + b^2)^2 - (a^2 - b^2)^2$

- c)  $(3a + 2b - 5c)^2$   
 d)  $(a + b - c - d)^2$
- 3.3. a)  $49a^2 + 42a + 9$  c)  $169a^2 - 130ab + 25b^2$   
 b)  $25a^2 + 40ab + 16b^2$  d)  $9a^4b^2 + 12a^2b + 4$
- 3.4. a)  $(8a - b)^2 - 16a^2$  c)  $4a + 12\sqrt{ab} + 9b$   
 b)  $81a^2 - 16(4a - 3b)^2$  d)  $(\sqrt{ab} - 1)(-1 - \sqrt{ab})$
- 3.5. a)  $(a + b + 1)(a + b - 1)$   
 b)  $(a + b)^2 + 2a + 2b + 1$   
 c)  $a^2 - 2ab + b^2 - 2a + 2b + 1$   
 d)  $a^2 + 2ab + b^2 - 4(a + b) + 4$

۳. ۶ لاندې ویني یا افادې ساده کړی، داسې چې د مربع تکمیلوني له لارې پوره مربع وي جوړې کړی!

- a)  $4a^2 - 12a + 9b^2 - 24b = 0$   
 b)  $16a^2 + 25b^2 - 128a + 50b = 0$   
 c)  $3a^2 - 2b^2 - 2\sqrt{6}a + 2\sqrt{6}b = 0$   
 d)  $4x^2 + 12xy - 9a^2 + 12ab = 0$

۴. د مناسبو ضریبونو له نوکانو راوسته  
 ۱ تر ۴ پورې پوښتنو کې ورکړ شوي ویني یا افادې په ضریبونو ټوټه کړی او تر شونتیا پورې یې ساده کړی.

- 4.1. a)  $a + a^2$  c)  $8ab + 20b^2$   
 b)  $-a^2 - a$  d)  $ab + ac - ad$
- 4.2. a)  $a^2b^2 + ab + ab + 1$  c)  $3a + 3 - 2a - 2 + 4b(a + 1)$   
 b)  $ab - ac - b + c$  d)  $8(7a - 5b) - 5c(7a - 5b)$
- 4.3. a)  $3ac - 3bc - 2ad + 2bd + 4ac - 4bc - 7ad + 7bd$   
 b)  $a^2b + ac - ab - c$   
 c)  $15ab - 5a - 1 + 3b$   
 d)  $4a^2 + 20ab + 25b^2 - a^2$

4.4. a)  $(a^3 - a^2)(2a - 2a^2)$  c)  $(-5a - 10b)(-3a + 6b)$   
 b)  $(-5a - 3b)^2 + (-5a + 3b)^2$  d)  $(-a - 1)(a - 1) - (a^2 - 1)$

۴. ۵ - هر ځل د  $n$  لوی توان ( $n=1,2,3,\dots$ ) له نوکانو راوباسی!

a)  $n^2 + n + 1$  c)  $(1 - 2n)^3$   
 b)  $3n^2 - n + 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}$  d)  $(\frac{1}{4}n^2 + 3n - 1)^2$

۵ - د په نوکانو کې افادو وېش

لاندي وېش سره ته ورسوی.

دا چې وېش په صفر ناشونی دی، په دې او لاندي ټولو تمرینونو کې دا ارزښتونه له شمیره وباسی، کوم چې  $a, b, \dots$  یې نه شي نیولی یا اخستلی.

5.1. a)  $(10a^2 - 2ab + 16ac) : 2a$  c)  $(28a^3 - 20a^2 + 32a) : (-4a)$   
 b)  $(25ab - 40b^2) : (-5b)$  d)  $(27a^2b - 63ab^2) : (-9ab)$

5.2. a)  $(3a^2 + 5ab + 2b^2) : (a + b)$  c)  $(3a^2 + 2a - 5) : (3a + 5)$   
 b)  $(a^2 - 2ab - 3b^2) : (a - 3b)$  d)  $(4a^2 - 7ab + 3b^2) : (4a - 3b)$

5.3. a)  $(35a^2 + 24ab - 15ac + 4b^2 - 6bc) : (5a + 2b)$   
 b)  $(15a^3 + 67ab^2 - 52a^2b - 28b^3) : (5a - 4b)$   
 c)  $(21ax - 15bx + 9cx - 35ay + 25by - 15cy) : (7a - 5b + 3c)$   
 d)  $(12a^2 + ab - 17ac - 20b^2 + 29bc - 5c^2) : (3a + 4b - 5c)$

5.4. a)  $(a^3 + b^3) : (b + a)$   
 b)  $(1536b^3 + 375a^3) : (25a^2 + 64b^2 - 40ab)$   
 c)  $(144a^4 - 81b^2) : (27b + 36a^2)$   
 d)  $(a^3 - b^3) : (a - b)$

5.5. a)  $(9a^3 - 7ab^2 + 2b^3) : (3a + 2b)$   
 b)  $(a^2 - 10a - 25) : (a - 5)$   
 c)  $(a^3 - 2ab + b^3) : (a + b)$   
 d)  $(24a^4 - 26a^3 - 76a^2 + 32a) : (4a^2 - 7a - 8)$

۱۳۴ ۳ . دحقیقی اعدادو .....  


---

- 5.6. a)  $(x^4 - x^3 - 5x^2 - 40x + 7) : (x^2 + 3x + 9)$   
 b)  $(2x^2 - x + xy - y^2 + 2y - 2) : (2x - y + 1)$   
 c)  $(13a^2b + 4b^3 - ab^2 + 10a^3) : (2a + 3b)$   
 d)  $(3a^3 + 2a^2 - 7a^2b + 3a - 2ab + 4ab^2 - 4b + 3) : (3a - 4b + 2)$

۶ . ماتشمیرنه یا کسرشمیرنه

۶ . ۱ - لاندی کسرونه صورت او م خرج یعنی د ماتباندي او ماتلاندي د خورا غټ گډ پروېشوني سره د لومړنیو ضریبونو یا ځلونو له لاری لند کری

a) $\frac{6\ 732}{20\ 196}$	c) $\frac{20\ 520}{2\ 280}$
b) $\frac{2\ 730}{5\ 005}$	d) $\frac{69\ 069}{138\ 138}$

۶ . ۲ - د لاندی اعداد خورا کوچنی گډ زاتځلی (ذالضعافالقل) پیدا کری

په لاندی کی und د او په معنا دی

- |                               |                               |
|-------------------------------|-------------------------------|
| a) 3, 6, 9, 18, 27, 54 und 81 | c) 5, 13, 16, 20, 26 und 42   |
| b) 8, 12, 21, 42, 56 und 84   | d) 120, 252, 264, 315 und 616 |

۶ . ۳ . د برابر نومیزو یا برابر مخرج کسرونو شمیرنه

- 6.3.1. a)  $\frac{1}{3} + 3\frac{1}{3} + 3 \cdot \frac{1}{3} - 4\frac{2}{3}$   
 b)  $\frac{3}{7} - \frac{1-6}{7} + 2\frac{1}{7} - 7\frac{2}{7}$   
 c)  $10\frac{1}{5} - \frac{4-5}{5} - 5 \cdot \frac{1}{5} + \frac{10-1}{5}$   
 d)  $2\frac{2}{26} + \frac{5-3}{13} + 3\frac{33}{39} - 0 \cdot \frac{25}{65}$

- 6.3.2. a)  $\frac{a+1}{a} - \frac{a-1}{a} - \frac{1-a}{a}$       c)  $\frac{(a-b)^2}{ab} - \frac{1-2ab}{ab} - \frac{a^2+b^2}{ab}$

$$b) \frac{a+1}{b} - \frac{a-b}{b} - \frac{b-a}{b}$$

$$d) \frac{(a-b)^3}{2ab} - \frac{(a+b)^3}{2ab}$$

۶. ۴ - د نا برابر نومیزو کسرونو جمعه او تفریق، په مخرج یا ماتلاندي کې ضریبونه

$$6.4.1. a) 5 \frac{7}{12} + 1 \frac{41}{72} + 2 \frac{17}{24} + 9 \frac{5}{9}$$

$$c) \frac{5}{18} + \frac{5}{6} - \frac{1}{3} + \frac{14}{27} + \frac{71}{81}$$

$$b) 36 \frac{14}{39} + 19 \frac{4}{13} + 15 \frac{5}{6} - 2 \frac{19}{72}$$

$$d) \frac{15}{64} - \frac{77}{96} + \frac{1}{243} - \frac{3-8}{24} + 3 \frac{1}{1296}$$

$$6.4.2. a) \frac{b+5c-a}{6} - \frac{3a-7b+6c}{4} + \frac{4a-5b+7c}{3}$$

$$b) \frac{a-9}{18} + \frac{a-2}{6} + \frac{5(2a-1)}{12} - \frac{3(a-1)}{8} - \frac{2(3a-4)}{9}$$

$$c) \frac{16b+3a}{48} + \frac{7a-8b+9c}{24} - \frac{9a+8b+12c}{32}$$

$$d) \frac{4c-3a}{12ac} + \frac{5b-2c}{10bc} - \frac{b^2-c}{4b^2c} + \frac{4b^2-5a}{20ab^2} + \frac{2}{3a} + \frac{a-b}{5ab}$$

$$6.4.3. a) \frac{b}{a} + \frac{a}{b} - \frac{a^2+b^2}{2b} - 1$$

$$b) \frac{5a-6b}{30c^2} - \frac{b(5c^2-3a)}{15ac^2} - \frac{a}{4b} + \frac{a(3c^2-2b)}{12bc^2} + \frac{b}{3a}$$

$$c) \frac{3a^2+8b^2}{6ab} - \frac{a(4b-5c)}{10bc} + \frac{4a-5b}{10c} + \frac{b(3a-2c)}{6ac}$$

$$d) \frac{4c-3a}{12ac} + \frac{5b-2c}{10bc} - \frac{b^2-c}{4b^2c} + \frac{4b^2-5a}{20ab^2} + \frac{2}{3a} + \frac{a-b}{5ab}$$

۶. ۵ - د نا برابر نومیزو ماتونو (کسرونو) جمعه او تفریق (زیاتون او کمون)، جمعه مخرج یا ماتلاندي کې.

۶. ۵. ۱: د  $a$  لپاره یو په بل پسې ورکړ شوي ارزښت ځای په ځای کړئ او دا داسې لاس ته راغلي ماتونه (کسرونه) سره یوځای کړئ! بیا په ټولیزه توګه د ورکړ شوو کسرونو لاس ته راوړنې ورکړئ او هغه ارزښتونه لري کړي، چې د  $a$  د اخستلو یا نیولو اجازه نه لري.

a) $\frac{1}{a} + \frac{1}{a+1} + \frac{1}{a+2}$	د سره $a=1,2,3$
b) $\frac{1}{a-2} - \frac{1}{a-1} + \frac{1}{a+1} - \frac{1}{a+2}$	د سره $a=3,4,5$
c) $\frac{a}{a-1} + \frac{a}{a+1} - 2$	د سره $a=2,3,4$
d) $\frac{1}{a+1} - \frac{1}{a-1} + \frac{1}{(a+1)^2} - \frac{1}{(a-1)^2}$	د سره $a=2,3,4$

6.5.2. a)  $\frac{3a-1}{4a-1} - \frac{3}{4}$

c)  $\frac{1}{a+1} + \frac{4}{3a+2} - \frac{3}{a+1}$

b)  $\frac{a-2}{a-3} - \frac{a-1}{a-2}$

d)  $\frac{10}{2a-2} - \frac{6a}{3a^2-6a} - \frac{9b}{3ab-9b}$

6.5.3. a)  $\frac{3ax-3by}{6x^2y-6xy^2} - \frac{5a^2x+5aby}{10ax^2y+10axy^2}$

b)  $\frac{6ab+9b}{6ab-6b} - \frac{6ab-4b}{6ab+6b} - \frac{10b^2}{12a^2b^2-12b^2}$

c)  $\frac{1}{a^2-b^2} - \frac{2b^2}{2a^4-2a^2b^2} - \frac{b^2}{a^2b^2} + \frac{1}{a^2+b^2+2ab}$

d)  $\frac{24a^2b-72ab^2}{60a^2b+24ab^2} - \frac{49a^2b-28ab^2}{35a^2b+14ab^2} - \frac{20a-10b}{10a-5b}$

6.5.4. a)  $\frac{3a+b}{2a^2+2ab} - \frac{a^2+b^2}{2a^2b+2ab^2} + \frac{2a-5b}{4ab+4b^2}$

b)  $\frac{a+2b}{3a^2-3ab} - \frac{1}{2b} - \frac{3b-a}{2ab-2b^2}$

c)  $\frac{2a-5}{a+3} - \frac{3a-4}{a+2} + \frac{a^2+6a+10}{a^2+5a+6}$

d)  $\frac{5a-2b}{3a+b} - \frac{88a^2+28ab+0,25b^2}{48a^2+7ab-3b^2} + \frac{24a+b}{16a-3b}$

6.5.5. a)  $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - \frac{b^2}{a^2+ab} - \frac{a^2}{ab+b^2}$

b)  $\frac{6a-5b}{8a^2+24ab+18b^2} - \frac{2a-b}{36a^2-81b^2} + \frac{3}{12a-18b}$



$$c) \frac{2a+3b}{2ab+b^2} - \frac{4a^2+b^2}{4a^2b+2ab^2} - \frac{5a-b}{4a^2+2ab}$$

$$d) \frac{9a-b}{6a^2-2ab} - \frac{6a+b}{3ab-b^2} + \frac{1}{2b}$$

۶. ۶: د ماتونو یا کسرونو ضربونه (یا ځلونه):

$$6.6.1. a) 3 \cdot \frac{1}{3}$$

$$b) b \cdot \frac{1}{a}$$

$$c) \frac{5}{8} \cdot \frac{8}{5}$$

$$d) \frac{0}{b} \cdot \frac{b}{c}$$

$$6.6.2. a) \left( \frac{a}{3b} + \frac{3b}{a} \right) \cdot 3ab$$

$$c) \left( \frac{1}{2a} + \frac{1}{3b} \right) \cdot (2a - 3b)$$

$$b) \left( \frac{5a}{6bc} - \frac{6b}{7ac} + \frac{2c}{3ab} \right) \cdot 84abc$$

$$d) \left( \frac{2}{a} + \frac{3}{b} \right) \cdot \left( \frac{a}{2} - \frac{b}{3} \right)$$

$$6.6.3. a) \frac{4a^2-9b^2}{21a^2b+14a^3} \cdot \frac{7a+5ab}{6b-4a}$$

$$b) \frac{16a^4-a^2}{24a^3+8a^2} \cdot \frac{36a^2+24a+4}{4a+1}$$

$$c) \frac{a^2+1}{(a+1)^2} \cdot \frac{a^3+a^2+a+1}{(a^2+1)^2}$$

$$d) \frac{4ab-3a}{9ab-3b^2} \cdot \frac{18a-6b}{4a^2+10ab} \cdot \frac{8ab-6a}{4ab+10b^2}$$

۶. ۷: د ماتونو وېش:

$$6.7.1. a) \frac{2}{3} : 3$$

$$b) a : \frac{1}{b}$$

$$c) \frac{a}{b} : b$$

$$d) \frac{0}{a} : \frac{1}{b}$$

۶. ۷. ۲: د لاندې وینو یا افادو برعکس یا په څټ ارزښتونه پیدا کړی.

$$a) \frac{a}{b}$$

$$b) \frac{a+1}{b}$$

$$c) \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

$$d) \frac{1}{a+b}$$

$$6.7.3. a) \left( \frac{a}{2b} - \frac{2b}{a} \right) : \frac{a}{a+2b}$$

$$c) \left( \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) : \left( \frac{a}{b} - \frac{b}{a} \right)$$

$$b) \left( 1 - \frac{2}{a} + \frac{1}{a^2} \right) : \frac{1-a^2}{a^2}$$

$$d) \left( \frac{a+b}{b} + \frac{a+b}{a} \right) : \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$$

6.7.4. a) 
$$\frac{1 - \frac{1}{a}}{\frac{1}{a} - \frac{1}{a^2}}$$

b) 
$$\frac{\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 1}{\frac{a^2 + b}{b} - \frac{a + b^2}{a}}$$

6.7.5. a) 
$$\frac{\frac{1}{a^3} - \frac{1}{b^3}}{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{ab} + \frac{1}{b^2}}$$

b) 
$$\frac{\frac{x^2}{ab} + x \cdot \left( \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right) - \frac{1}{ab}}{\frac{x}{a} - \frac{1}{b}}$$

c) 
$$\frac{\frac{a}{a-b} + \frac{b}{a+b}}{\frac{a}{a+b} - \frac{b}{a-b}}$$

d) 
$$\frac{\frac{a}{1-a} + \frac{a+1}{a}}{\frac{a-1}{a} - \frac{a}{a+1}}$$

c) 
$$\frac{\frac{a+b}{a-b} - \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}}{\frac{a+b}{a-b} - \frac{a-b}{a+b}}$$

d) 
$$\frac{\frac{1}{16a^2} + \frac{1}{2ab} + \frac{1}{b^2}}{\frac{1}{8a} + \frac{1}{2b}} + \frac{\frac{1}{16a^2} - \frac{1}{2ab} + \frac{1}{b^2}}{\frac{1}{8a} - \frac{1}{2b}}$$

6.7.6. a) 
$$\frac{a + \frac{1}{1-ab}}{1 - \frac{1}{1-ab}}$$

c) 
$$1 - \frac{1}{1-a \cdot \frac{1}{1+\frac{b}{a}}}$$

b) 
$$\frac{1}{a - \frac{a}{1 - \frac{a}{a-b}}}$$

d) 
$$\frac{\frac{a + \frac{1}{4}b}{a - \frac{1}{4}b} - \frac{a - \frac{1}{4}b}{a + \frac{1}{4}b}}{1 + \frac{b^2}{16a^2 - b^2}}$$

۶ . ۸ . لاندی ماتونه یا کسرونه، که ممکن وی، ساده کری ( که غواری د

مخکني شکل بدلون څخه وروسته)

6.8.1. a) 
$$\frac{35ac - 50bc}{7a - 10b}$$

b) 
$$\frac{a - \sqrt{a \cdot b}}{b - \sqrt{a}}$$

c) 
$$\frac{34ax + 51bx - 119cx}{2a + 3b - 7c}$$

d) 
$$\frac{a^2 - ab + ac}{b - a - c}$$

$$6.8.2. \text{ a) } \frac{ax + bx + ay + by}{a + b}$$

$$\text{b) } \frac{ab + \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}a - \frac{1}{4}}{a + \frac{1}{2}}$$

$$6.8.3. \text{ a) } \frac{25a^2 - 130ab + 169b^2}{25a - 65b}$$

$$\text{b) } \frac{2x^2 + 8xy + 8y^2}{(x + 2y)^2}$$

$$6.8.4. \text{ a) } \frac{a^4 - b^4}{(a + b)^2(a - b)}$$

$$\text{b) } \frac{(a + b)^4 - (a - b)^4}{a^2 + b^2}$$

$$6.8.5. \text{ a) } \frac{\left(\frac{1}{9}a^2 + b^2 + \frac{2}{3}ab\right)(x^3 - 27y^3)}{\left(2b + \frac{2}{3}a\right)(x - 3y)}$$

$$\text{b) } \frac{(2x^2 - 20x + 50)(2a - 1)\left(a + \frac{1}{2}\right)}{(1 - 2a)(2a + 1)(25 - x^2)}$$

$$6.8.6. \text{ a) } \frac{(a + b + 1)(a + b - 1) + (a - b)^2 - 2 \cdot \left(b^2 + \frac{1}{2}\right)}{a + 1}$$

$$\text{b) } \frac{\left(4a + \frac{1}{4}b - 2\sqrt{ab}\right) \cdot \left(2\sqrt{a} + \frac{1}{2}\sqrt{b}\right)}{2\sqrt{a} - \frac{1}{2}\sqrt{b}}$$

$$\text{c) } \frac{(a + 1)^2 - b^2}{a^2 + 2ab + b^2 + 2a + 2b + 1}$$

$$\text{c) } \frac{91ab + 7b + 39a^2 + 3a}{13a + 1}$$

$$\text{d) } \frac{ax + \frac{x}{b} - \frac{a}{y} - \frac{1}{by}}{\frac{1}{b} + a}$$

$$\text{c) } \frac{\frac{1}{4}a^2b^2 + 17ab + 289}{\frac{17}{2}\left(\frac{1}{17}ab + 2\right)}$$

$$\text{d) } \frac{25a - 20\sqrt{ab} + 4b}{ab(\sqrt{a} - 0,4\sqrt{b})}$$

$$\text{c) } \frac{(a^2 - b^2)^2 - (a^2 + b^2)^2}{ab(a + b)}$$

$$\text{d) } \frac{(a^2 + b^2)^2(a^2 - b^2)^2 + 2a^4b^4}{a^4 + b^4}$$

$$\text{c) } \frac{(80 - 40ab + 5a^2b^2)(4 - ab)}{64 \cdot \left(\frac{ab}{4} - 1\right)^3}$$

$$\text{d) } \frac{(32a^3b^2x - 18ax^3y^2) \cdot 3by}{(12ab^2y + 9bxy^2) \cdot 2ax}$$

$$d) \frac{(a-1)^2 - (b-1)^2}{a^2 + b^2 + 2ab - 4(a+b-1)}$$

۶ . ۹ . د (-1) سره شمیرنه

الف- ورکړ شوی دې وي  $a(b-c)/c$  .  $a=-1$  .  $a$  خای په خای کړی او داسې لاس تری راغلي کسر یا مات لپاره مختلف لیکدودونه ورکړی.

ب – ورکړي دې  $(5c - 3b - a)/(1 - a)$  وي په صورت او مخرج ( ماتلاندې او ماتلاندې) کې (-1) له نوکانو راوباسی او دا عدد لنډ کړی.

پ – کسر یا مات  $(b^2 - a^2)/(-a - b)$  د (-1) سره پراخ کړی او ساده یې کړی.

ت- ورکړی دې وي  $1 - \frac{25a^2 - 36b^2}{6b - 5a}$  په مخرج یا ماتلاندې کې (-1) له نوکانو راوباسی او دا وینه یا افاده ساده کړی.

## ٤٠٠ توان (پوتنخ) او رینه ( جذر ) Potenz , Wurzel ( Root)

په دې برخه کې د توان او جذر یا رینه قوانین ترخیرني لاندی نیسو، دلته غوره دا ده، چې د کاروني یا استعمال چټکتیا ته پرمختگ (تکامل) ورکړو. دا مشوره کیري، چې رینه دې په پوتنخ وړول شي، چې د اکسپوننت - یا جگعدد یې نسبي یا راشنل وي. د دې فورمال ټیک کره د گڼلو قوانینو په څنگ کې د باوري کیدو لپاره باید په نیونو(فرضیو) هم ژور فکر وشي.

د رینه پیژند د خلاف یا پر څټ عملیو مخه باید نیول شوي وي، چې د هغې له مخې رادیکاند (رینه ویستونی یعنی هغه گن، چې رینه یې وپستلکیري یا نیول کیري، د رینه نخبني لاندی گن او هم د رینه ارزښت نامنفي اعداد (ناکمیز گڼونه) وي. د توان زړه پورې ریل اکسپوننت (په جگ) هلته کره دی یا باوري دی، چې د بنسټ لپاره د مثبت عددونو نیونه یا فرضیه شوي وي.

٤٠١ توان (پوتنخ Potenz) په ټولگڼیز یا تام عدد په جگ یل اکسپوننت

پیژند ۱۰۴:

دیوه په خوښه ریل گن توان لاندې مور د  $a$  د خپل ځان سره  $-n$  م واره ځل

پوهیږو، د دې لپاره لیکو:  $a^n = b$  دلته  $a$  بنسټ  $n = 1, 2, 3, \dots$

اکسپوننت (جگگن، لنډ: جگ) او  $b$  د پوتنخ یا توان ارزښت بلل کیري.

د بیلگي په توگه

$$a = a, a^2 = a \cdot a, a^3 = a \cdot a \cdot a$$

$$(4,1) \quad n = 0 \quad \text{د لپاره کره ټاکل کیري} \quad a^0 = 1 \quad \text{د} \quad a \neq 0 \quad \text{سره}$$

د پیژند یا تعریف پر بنسټ (اود څه بندیزونو په څلور دیوالی کې، چې لاندې شوي) بنوول کیدی شي، چې د خوښی یا زړه پورې ریلگنونو  $a, b \in R$  او  $m, n \in N^*$  نامنفی ټولگنونو اکسپوننت یا جگگن لپاره لاندې باورلري

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n; \dots \dots \dots (4,2)$$

$$a^n : b^n = \left(\frac{a}{b}\right)^n = (a/b)^n; b \neq 0; \dots \dots \dots (4,3)$$

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}; \dots \dots \dots (4,4)$$

$$a^n : a^m = \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}; a \neq 0, n \geq m; \dots \dots \dots (4,5)$$

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}; \dots \dots \dots (4,6)$$

دا پورته د توان اړیکې د ټولګنیز مثبت جګړې یا اکسپوننت لپاره باور لري، کیدۍ شي، چی ټولګنونو ته وغزول شي، که چیرې پیژند وړکړو یا تعریف کړو:

$$\frac{1}{a^n} = a^{-n}; n = 1, 2, 3, \dots, a \neq 0, \dots \dots \dots (4, 7)$$

دا پورته د توان قوانین د ټولګنیز جګ (اکسپوننت) لپاره بی بندیزونو یواځې د نه ورکیدونکو رییل بنسټونو یانې د  $a \neq 0$  او  $b \neq 0$  لپاره باور ی دي . په (4,5) کې بیا بندیز  $n \geq m$  اړین نه دی .

د توان قوانین کیدۍ شي په بڼه بدلونکو افادو یا وینو وکارول- یا استعمال شي .

#### ۱. بیلګه 4 . 1

$$\left[ \frac{4a^{-3}b^0}{x^2y^{-1}} \right]^{-2} = (4abx^{-2}y)^{-2} = 4^{-2}a^6x^4y^{-2} = \frac{a^6x^4}{16y^2}, abxy \neq 0$$

#### ۲. بیلګه 4 . 2

$$\frac{9^4(a^2\sqrt{ab})^2}{18^2.(3ab)^3} = \frac{3^8.a^4.a.b^2}{2^2.3^4.3^3.a^3.b^3} = \frac{3a^2}{4b}, a > 0, b \neq 0$$

#### ۳. بیلګه 4 . 3

$$\begin{aligned} \frac{3-a}{a^{m-4}} + \frac{a^6 - a^5 + 2a^3 - 1}{a^{m+1}} - \frac{2a^2 + 1}{a^{m-2}} &= \\ = \frac{a^5(3-a) + a^6 - a^5 + 2a^3 - 1 - a^3(2a^2 + 1)}{a^{m+1}} &= \\ = \frac{3a^5 - a^6 - a^5 + 2a^3 - 1 - 2a^5 - a^3}{a^{m+1}} = \frac{a^3 - 1}{a^{m+1}}, a \neq 0, m \in Z \end{aligned}$$

پوتنخ زیاتون او کمون کی باید پام وي، چې یوازی د برابر پوتنخ ګڼونه یو له بل سره زیاتیدی او یو له بل کمیدی شي.

بیلګه 4 . 4

$$3a^n + 2a^n = 5a^n$$

بیلګه 5 . 4

$$4a^{n+1} + 2a^n + 5b^{n+1} - 3b^n - 3a^{n+1} + a^n - 4b^{n+1} + 3b^3 = a^{n+1} + 3a^n + b^{n+1}$$

دی ته بیا ګوته نیسو، چې د بنسټ - او پوتنخ مخنځنې کی دی توپیر وشي. پوتنخ له مثبت - یا زیاتونمخنځنې سره تل مثبت یا زیاتیز پوتنخ ارزښت لري، په دی ترڅ کی، چې پوتنخ د منفي - یا کمیز بنسټ سره که اکسپوننت جوړه وي مثبت زیاتیز او که اکسپوننت ناچوړه وي نو منفي - یا کمون ارزښت لري.

باور لري:

$$(2a)^{2n} = +a^{2n}, \dots, (-a)^{2n} = +2a^{2n}$$

$$(+a)^{2n+1} = +a^{2n+1}, \dots, (-a)^{2n+1} = -a^{2n+1}, n \in \mathbb{Z}, a > 0$$

۲۰۴ - رینه او توان له ریشنل جګ عدد (اکسپوننت) سره

پیژند ۲۰۴

د یوه نامنفي ګڼ a لپاره n -مه رینه هغه نامنفي ګڼ b دی، د کوم لپاره چې



باور لري:  $b^n = a$

د دې لپاره لیکو:

$$b = \sqrt[n]{a}, n = 1, 2, 3, \dots (4, 8)$$

$$a \geq 0, b \geq 0 \dots (4, 9)$$

دلته a رادیکاند Radikand ، یا گڼ، چې رینه (جذر) یې نیولکیري (مور دا

رینه نیووني یا رینه ویستونی بولو) او n دریني جگ(اکسپوننت) او b د

ریني ارزښت یا رینه ارزښت بلل کیري •

باید پردې ټینگار وشي، چې رینه یواځي د نامنفي رادیکاند یا رینه ویستوني (رینه نیوني)  $a \geq 0$  راوستل کیري یا نیول کیري او پخپله په لاندې توگه یو نامنفي - یا ناکمیز ارزښت لري یانی

$$b = \sqrt[n]{a} \geq 0$$

د دې کره کوني لپاره لاندې یادوني شوي دي:

۱- د جوړه  $n = 2, 4, 6, \dots$  لپاره د  $a < 0$  سره رینه b په رییلگونو کې نه شته، کوم ، چې (4,8) پوره کړي ،

ځکه، چې د b جوړه په توان تل نامنفي یا ناکمیز یانی زیاتیز گڼ دی •

۲- د جوړه او مثبت - یا زیاتیز برابرېون  $b^n = a$

په خټه په ریښتوني دوه رییل اوبیوني یا حلونه لري د بیلگي په توگه  $b^2 = 4$

یانی  $n = 2$  او  $a = 4$  اوبیونی

$$b_1 = 2, b_2 = -2$$

دی ۰ ددی لپاره، چې درادیکاند د شمیرلو کارونې یواځنی سرته ورسولی شو، باید د یوې اوبیونی لپاره پریکړه وکړو، نو له دې امله مور مثبت ارزښت غوره بول

۳- د ناجوره  $n = 1, 3, 5$  او  $a \geq 0$  لپاره

$$b^n = a$$

تل یواځنی زیاتیز (مثبت) اوبی یا حل لري یانی  $b \geq 0$

۴- د ناجوره  $n$  او کیمز یا منفي  $a$  لپاره  $b^n = a$

تل یواځنی یو منفي اوبی یا حل لري ۰ یانی  $b < 0$  د بیلگي په توگه دا  $b^3 = -8$  یواځی

اوبی  $b = -2$  لري.

په هر صورت باید د جوړه  $n = 2, 4, 6, \dots$  گڼونو لپاره  $a \geq 0, b \geq 0$  وغوښتل شي، ځکه چې په بل صورت کې به یا رینه شته نه وي او یا به یواځنی اوبی نه لري، یانی څو اوبی به شته وي

د ناجوره یا طاقو،  $n = 1, 3, 5, \dots$  لپاره کیدی شي، چې له دواړو غوښتنو تیر شو ۰ دلته به یواځی تاوان یا زیان دا وي، چې د ټولو ممکن حالتونو لپاره به بیل بیل د رینې د قوانینو غوره کولو ته اړ کیږو ۰ له بلې خوا به رینې د قوانینو ترتیبول د پوتنخ لپاره، چې پورته ایښول شوي بندیزونه  $n$  قوانینو لپاره ستونځمن وي ۰ له دې امله د ناجوره رینو

اکسیوننت غوره کوو او د یواځني یو اوبی لپاره  $-2 = \sqrt[3]{-8}$  د  $b^3 = -8$  او نه  $-2 = \sqrt[3]{-8}$

بلکه  $-2 = \sqrt[3]{-8}$  لیکو . په دې اړوند او د یادو شوو نیونو په بنسټ دې دا لاندې اوبی په گوته شوی وي

$$\sqrt{a^2} = a, \dots \dots \dots (4,10)$$

څلوری رینه یا مربع رینه  $\sqrt{a^2}$  د ټولو حقیقي اعدادو یا - گنونو  $a$  لپاره تعریف شوي . د نامثبت یا نازیاتیزې  $a$  لپاره به  $(4,10)$  په داسی حال کې، چې د منفي  $a$  لپاره به بیا د  $(4,10)$  اوبی منفي یا متیز وي، کوم، چې نیونه  $b \geq 0$  نفي کوي.

په ځانگړي حالتونو کې به د  $(4, 10)$  بنول شویو حالتونو استعمال لاندې مخامخوالي یا مضاد لاس ته راولي، لکه :

$$\sqrt{4} = \sqrt{2^2} = 2, \sqrt{4} = \sqrt{(-2)^2} = -2$$

یاني د  $-2 = 2$  سره .

د  $(4, 10)$  ټیک داسی لیکل کیدی شي:

$$\sqrt{a^2} = |a| = \{a, a \geq 0, \dots \dots \dots (4,11)$$

$$= \{ -a, a \leq 0 \} \quad (4,11)$$

د رینې یا جذر له پیژند  $(4, 9)$  ,  $(4, 8)$  سره سم کیدی شي، چې لاندې باوري د رینې قوانین ولیکل شي د  $n = 1, 2, 3, \dots$  او  $a, b \geq 0$  لپاره

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab} \dots \dots \dots (4,12)$$

$$\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a/b} = \sqrt[n]{a/b}, b > 0 \dots \dots \dots (4,13)$$

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{a} = \sqrt[n \cdot m]{a^{n+m}} \dots \dots \dots (4,14)$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a} \dots \dots \dots (4,15)$$

پورته د (4,15),(4,14),(4,13),(4,12) ترمنځ باید لږ واټن وي، خو کومه ترې ناسمه پوهیدنه نه رامنځ ته کوي • دلته پیژندل کیږي، چې د رینې قوانین د پوتنخ قوانینو ته، چې په (4,2) تر (4,6) پورې ورکړ شوي، د پرتلي وړ دي • په رښتیا چې دا د پوتنخ قوانینو لاس ته راتلی شي، که پوتنخ د ریشل اکسپوننت سره په لاندې ډول تعریف شي یا یې لاندې پیژندل ورکړ شي •

$$\sqrt[n]{a} = a^{1/n} \Leftrightarrow \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m \dots\dots(4,16)$$

د... 4, 3, 2, 1, m = 1, 2, 3, ..., n ≥ 0, a لپاره

د بیلگې په توګه ( ۱۶ ، ۴ ) په لاندې ډول لیکل کیږي

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{a} = a^{1/n} \cdot a^{1/m} = a^{(1/n)+(1/m)} = a^{(n+m)/n \cdot m} = \sqrt[n \cdot m]{a^{n+m}}$$

دا اړیکې (4,16) کیدی شي منفي  $m = -1, -2, -3, \dots$  ته هم پراخه شي، چېرته، چې (4,17) په ټینګه - یا کره باور ولري

$$a^{-m/n} = \frac{1}{a^{m/n}}, a > 0 \dots\dots\dots(4,17)$$

بې له بندیزونو د خوښې جګو n او m لپاره د پوتنخ قوانین (4, 2) تر (4,6) باور لري، خو یواځې هلته، چې نه ورکیدونو بنسټونو یانې  $a > 0, b > 0$  نیونه شوي وي •

د رینې شمیرلو لپاره باید اساساً د (4,16) له مخې ریشل اکسپوننتونه واورې او له (4,2) تر (4,6) استعمال کړي

اړتیا لرو، چې د پوتنخ او رینې سره شمیرلو د قوانینو استعمال نیونې تل و ازمایلی شو • په ځانګړي ډول د بنسټ نه منفي توب کمونوالی یا نامنفیوالی یا مثبت توب (مثبتوالی یا زیاتونوالی) پریردو، چې لاندې ناسم پای کیدوول وښایو •

$$\sqrt{-a} = (-a)^{1/2} = (-a)^{2/4} = \sqrt[4]{(-a)^2} = \sqrt[4]{a^2} = a^{2/4} = a^{1/2} = \sqrt{a}$$

برابرون یوازي د دې ساده حالت  $a = 0$  لپاره شته دی یا باور لري، د  $a=0$  یا  $a \neq 0$  لپاره  $a$  او یا  $-a$  منفي دي دا په دې مانا، چې  $a$  یا  $-a$  پیژند نه لري یا تعریف نه دی. د توان قوانین د توان سره شمیرلو، چې راشنل جگ لري، په لاندې بیلگو کې روښانه کوو:

پام: په لاندې بیلگو کې دا تراوسه د شمیر بنسټیز قوانین ټول راغلي، د نو ورسره بلدېدونکو گرانو لوستونکو ته دې دا روښانه وي، چې د لږ فکر وروسته هرڅه روښانه کیدی شي. شمیرنه یې لږ وخت نیسي، که غواړی پخپله یې یو ځل وشمیری.

بیلگه ۶۰۴

$$\sqrt[3]{\sqrt{125}} = \{(125)^{\frac{1}{2}}\}^{\frac{1}{3}} = (125)^{\frac{1}{6}} = (5^3)^{\frac{1}{6}} = 5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5} = 2,2361$$

بیلگه ۷۰۴

$$\begin{aligned} \frac{a^2 \sqrt{bc}^{-2}}{\sqrt[3]{a^2 b^{-3}}} : \frac{d^2 \sqrt{c}}{\sqrt[5]{da}^{-5}} &= \{a^{(2-\frac{2}{3})} b^{(\frac{1}{2}+3)} c^{-2}\} : \{a^5 c^{-2} d^{(2-\frac{1}{5})}\} = \\ &= a^{(2-\frac{2}{3}-5)} b^{(\frac{1}{2}+3)} c^{(-2-\frac{1}{2})} d^{(-2+\frac{1}{5})} = a^{-\frac{11}{3}} b^{\frac{7}{2}} c^{-\frac{5}{2}} d^{-\frac{9}{5}} = \\ &= \frac{\sqrt{b^7}}{\sqrt[3]{a^{11}} \cdot \sqrt{c^5} \cdot \sqrt[5]{d^9}} = \frac{b^3 \cdot \sqrt{b} \cdot c^2}{a^3 \cdot \sqrt[3]{a^2} \cdot c^2 \cdot \sqrt{c} \cdot d^5 \cdot \sqrt{d^4}} \end{aligned}$$

بیلگه ۸۰۴

$$\begin{aligned} &8 \cdot \sqrt[3]{343} - 4 \cdot \sqrt[3]{125} + 5 \sqrt[3]{8} - 5 \sqrt[3]{729} \\ &= 8 \cdot \sqrt[3]{7^3} - 4 \sqrt[3]{5^3} + 5 \cdot \sqrt[3]{2^3} - 5 \cdot \sqrt[3]{3^6} = 8 \cdot 7 - 4 \cdot 5 + 5 \cdot 2 - 5 \cdot 9 = 1 \end{aligned}$$

بيلگه ۹۰۴

$$\begin{aligned}
 & 5.\sqrt{63} - 2.\sqrt{175} - \sqrt{343} + 3.\sqrt{28} \\
 &= 5.\sqrt{7.3^2} - 2.\sqrt{7.5^2} - \sqrt{7.7^2} + 3.\sqrt{7.2^2} = \\
 &= 5.3\sqrt{7} - 2.5\sqrt{7} - 7.\sqrt{7} + 3.2.\sqrt{7} = \\
 &= 15.\sqrt{7} - 10.\sqrt{7} - 7.\sqrt{7} + 6.\sqrt{7} = 4.\sqrt{7}
 \end{aligned}$$

بيلگه ۱۰۰۴

$$\begin{aligned}
 & \sqrt{a - \sqrt{a^2 - b^2}} \cdot \sqrt{a + \sqrt{a^2 - b^2}} = \sqrt{(a - \sqrt{a^2 - b^2})(a + \sqrt{a^2 - b^2})} = \\
 &= \sqrt{a^2 - (\sqrt{a^2 - b^2})^2} = \sqrt{a^2 - a^2 + b^2} = |b|
 \end{aligned}$$

د  $|a| \geq |b|$  لپاره

د مختلفو شميرلو لپاره موخوږ دى، چې مات لاندې کې منځ ته راغلي ريښي له منځه يوسو  
( د ماتلاندې ريښنل كول )

که په ماتلاندې کې يوه ريښه  $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$  د فاکتور يا ځلوني په څيررامنځ ته شي،  
نو دا د وظيفي لپاره يوازې اړيښ ده چې  $m < n$  ( $m, n > 0$ ) او  $m, n \in \mathbb{Z}$  په پام  
کې راوړو

کارونه يا عمليه په لاندې ډول اجرا کيږي ( $N \neq 0, a > 0$ )

$$\frac{Z}{N} = \frac{Z}{N} = \frac{Z}{N \cdot \sqrt[n]{a^m}} = \frac{Z \cdot a^{\frac{1-m}{n}}}{N \cdot a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{1-m}{n}}} = \frac{Z \cdot \sqrt[n]{a^{n-m}}}{N \cdot a}, \dots \dots (4,18)$$

بیلگه ۱۱۰.۴

$$\frac{3}{2\sqrt[3]{3}} = \frac{3}{2 \cdot 3^{\frac{1}{3}}} = \frac{3 \cdot 3^{\frac{2}{3}}}{2 \cdot 3 \cdot 3^{\frac{1}{3}}} = \frac{3^{\frac{2}{3}}}{2 \cdot 3^{\frac{1}{3} + \frac{1}{3}}} = \frac{3^{\frac{2}{3}}}{2 \cdot 3^{\frac{2}{3}}} = \frac{3^{\frac{2}{3}}}{2 \cdot 3^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{2}$$

که په ماتلاندي کې د څلورۍ- يا مربع رېښې زياتون يا کمون وي  $N = \sqrt{a} \pm \sqrt{b}$  نو  
ماتلاندي له مات  $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$  سره غزوو او د بينوم فرمول استعمال سره له  $a > 0$  او  $b > 0$   
چې  $a \neq b$  وي لاس ته راځي:

$$\frac{Z}{N} = \frac{Z}{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}} = \frac{Z \cdot (\sqrt{a} \pm \sqrt{b})}{(\sqrt{a} \pm \sqrt{b}) \cdot (\sqrt{a} \pm \sqrt{b})} = \frac{Z \cdot (\sqrt{a} \pm \sqrt{b})}{a - b}, \dots (4,19)$$

بیلگه ۱۲۰.۴

$$\frac{1}{2 - \sqrt{3}} = \frac{2 + \sqrt{3}}{(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})} = \frac{2 + \sqrt{3}}{4 - 3} = 2 + \sqrt{3}$$

بیلگه ۱۳۰.۴

$$\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{(\sqrt{2} + \sqrt{3})(\sqrt{2} - \sqrt{3})} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{2 - 3} = \sqrt{3} - \sqrt{2}$$

۴. ۳. توان (پوتنځ) د حقيقي - يا رييل جگ (اکسپوننت) سره

دلته دا په گوته کوو يا دي دا ويل شوي وي، چې د توان ټول قوانین له (4,2) تر (4,7)  
دي په خوښه حقيقي اعدادو اکسپوننتونو (جگعددونو)  $m, n$  لپاره باور لري، طبعاً بي بنديزه  
ټيک د مثبت بنسټ لپاره. يعنې  $a, b > 0$ ، برسیره پردې دي بايد توان  $a^\alpha$  د  
نارینتونې يا ایراسنل عدد  $\alpha$  لپاره تعريف شي.

که  $\alpha$  یو ایراشنل – یا ریښتونی عدد وي، نو موږ د ۳، ۱، ۴ برخې سره سم انټروالونو بندولو په بنېت لرو:  $\alpha = \{a_n; a'_n\}$ . دلته  $a_n, a'_n$  هونښيار يا راشنل اعداد دي. بیا نو

$$\beta = \{a^{a_n}; a^{a'_n}\} \quad (4,20)$$

هم په انټروالونو بندول دي چې غړي يې (۲، ۴) لاندې تعريف شوي توانونه دي د راشنل اکسپوننت سره. د هغه موجود په انټروالونو بندولو سره په دې توپير، چې

$$\begin{aligned} 2^1 &< 2\sqrt{2} < 2^2 \\ 2^{1,4} &< 2\sqrt{2} < 2^{1,5} \\ 2^{1,41} &< 2\sqrt{2} < 2^{1,42} \\ 2^{1,414} &< 2\sqrt{2} < 2^{1,415} \\ 2^{1,4142} &< 2\sqrt{2} < 2^{1,4143} \\ &\vdots \end{aligned}$$

اخرني مساوات په دې معنا دی

$$10000 \sqrt{2^{14142} < 2\sqrt{2} < 10000 \sqrt{2^{14143}}} \quad \text{نو لرو}$$

۳۰۴ ټولگه: د  $a > 0, b > 0$  رييل او  $m, n \in N(n \neq 0)$

همدا ډول  $m, n \in N(n \neq 0)$  بيلو لپاره باور لري

$$\alpha, \beta \in R$$

$$\begin{aligned} a^0 &= 1, \frac{1}{a^\alpha} = a^{-\alpha}, \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}, \sqrt[n]{a^m} = \\ &= (\sqrt[n]{a})^m = a^{\frac{m}{n}} \end{aligned}$$



دا پورته موضوع تر دې ځایه بسیا کوي، که نور څه مخته راتلل، چې اړین وو، هغه به بیا په گډه ورزیاتوو

۴. ۵. تمرینونه

۱. د توان کلمه، د توان جمع او تفریق یا زیاتون او کمون

۱. ۱ - د توان په څیر یې ولیکئ

$$\begin{array}{ll} \text{a) } (-a^{-1}) \cdot (-a^{-1}) \cdot (-a^{-1}) \cdot (-a^{-1}) & \text{b) } -\left(\frac{1}{a^{-2}} \cdot \frac{1}{a^{-2}} \cdot \frac{1}{a^{-2}}\right) \\ \text{c) } -(b-a) \cdot (a-b) \cdot (a-b) & \text{d) } -(a^0 b) \cdot (a^0 b) \cdot (a^0 b) \cdot (a^0 b) \end{array}$$

$$1.2. \quad \text{a) } -3^{-4} \quad \text{b) } (-5)^3 \quad \text{c) } (-2^{-1})^3 \quad \text{d) } -\left(\frac{2}{3}\right)^2$$

$$1.3. \quad \begin{array}{l} \text{a) } 12a^2b - 6ab^2 - 15a^2b + 6ab^2 - 7a^2b \\ \text{b) } (3a + 2b)x^4 - x^4(2b - 3a) + x^4(3a + 2b) \\ \text{c) } 4(a-b)^2 + 2(b-a)^2 - 3(a-b)^2 \\ \text{d) } 18(a-1)^3 - 3(1-a)^3 - 15(a-1)^3 + 4(1-a)^3 + 3(1-a)^3 \end{array}$$

۲ - د توانو ضرب او وېش د برابر بنسټ سره

$$2.1. \quad \begin{array}{ll} \text{a) } \frac{3a^{n+1} \cdot 6x^{n+7} \cdot 9b^{x+1}}{3x^n \cdot 2b^{x+1} \cdot 3a} & \text{c) } \frac{a^{x+1} \cdot b^{x+3} \cdot a^{3x-1} \cdot b^{x+3}}{a^{x-2} \cdot b^{3-x} \cdot a^x \cdot b^{x+1}} \\ \text{b) } \frac{a^{n+1} \cdot a^{n+1} \cdot a^n}{a^0 \cdot a^n \cdot a^{n-1}} & \text{d) } \frac{a^{3n-x} \cdot b^{2n+x} \cdot x^{3n+2} \cdot y^{2n-1}}{a^{n+2x} \cdot b^{2n-x} \cdot x^{2n-3} \cdot y^{n+1}} \end{array}$$

$$2.2. \quad \begin{array}{ll} \text{a) } \frac{18x^{a+4}}{2y^{5a+7}} : \frac{4x^{7-3a}}{9y^{8+5a}} & \text{c) } \frac{42a^2b^3 \cdot x^{n+1}}{36c^3 \cdot y^2 \cdot z^{n-3}} : \frac{70a^3b^2 \cdot x^{n+2}}{54c^2y^4 \cdot z^{n-2}} \end{array}$$

$$\text{b) } \frac{a^{5x-2y}}{b^{6m-1}} \cdot \frac{a^{4x+y}}{b^{m-2}} \quad \text{d) } \frac{45xa^3 \cdot 9y^n(a-1)^2}{9yb^3 \cdot 30x^n(a+1)^2} : \frac{9y^{n-1}(1-a)^3}{24x^{n+1}(1+a)^2}$$

۲ . د توان ضرب او جمع (زیاتون) د همغه بنسټ سره:

- 2.3. a)  $(x^{5n+3} + x^{4n+5} - x^{3n+4}) : x^{2n+3}$   
 b)  $(143a^4b^5 - 221a^3b^5 - 247a^5b^4) : 13a^3b^4$   
 c)  $(a^n + 1b^x - 1 + a^n b^x + a^n - 1b^x + 1) : a^n - 2b^x - 1$   
 d)  $(16a^8 - a^4b^2 + 9b^4) : (4a^4 - 5a^2b + 3b^2)$

د لوگاریتم بنسټ فرمولونو استعمال.

په لاندې کې X وشمیرئ

۳ . د توان په توانونه، د توانونو ضرب او ویش د برابر جگښ یا جگدود سره، د کمیزو یا منفي اکسپوننتونو سره شمیرنه

- 3.1. a)  $\left(1\frac{3}{4}\right)^2 : \left(2\frac{1}{3}\right)^2$  c)  $\left(-\frac{1}{a^{-4}}\right)^{-5}$   
 b)  $4^{-2} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{-4}$  d)  $\left(\frac{3}{4}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{-3}$
- 3.2. a)  $\frac{18^4(a^2b)^2}{27^3 \cdot (2a\sqrt{a} \cdot b)^2}$  c)  $\left(\frac{4b^2y^2}{6a^2x^2}\right)^3 \cdot \left(\frac{8a^3y^2}{6b^3x^3}\right)^4 \cdot \left(\frac{18b^3x^6}{16a^3y^3}\right)^2$   
 b)  $\frac{(6ab)^3 \cdot (5a^2b)^4}{2^4 \cdot 3ab^2 \cdot (25a\sqrt{b})^2}$  d)  $\left(\frac{45b^2y^3}{24a^3x}\right)^2 \cdot \left(\frac{6bx^3}{9ay^3}\right)^3 \cdot \left(\frac{75b^3x^3}{36a^4y}\right)^2$
- 3.3. a)  $\frac{(3a-9b)^2}{81b^2-9a^2}$  c)  $\frac{(4a^2-9b^2)^2}{(3a^2-2ab)^2} \cdot \left(\frac{9a^2-4b^2}{2a^2+3ab}\right)^2$   
 b)  $\frac{(6a-12b)^2 \cdot (3a+6b)^2}{(6a^2-24b^2)^2}$  d)  $\left(\frac{2xb^3}{3ya^3}\right)^3 \cdot \left(\frac{15x^2a^3}{8y^3b}\right)^2 : \left(\frac{25x^3b^3}{12y^4a}\right)^2$
- 3.4. a)  $\frac{27x^{-5} \cdot y^{-6} \cdot z^{-1}}{45x^{-4} \cdot y^{-5} \cdot z^0} \cdot \frac{49x^{-2} \cdot y^{-3} \cdot z^{-4}}{42x^{-3} \cdot y^{-4} \cdot z^{-3}}$   
 b)  $\frac{a^{-2} \cdot x^{-4} \cdot y^{-6}}{b^3 \cdot c^{-4} \cdot z^{-5}} : \frac{a^{-3} \cdot b^{-5} \cdot x^{-3}}{c^{-5} \cdot y^6 \cdot z^{-7}}$

$$c) \frac{(ax - ay)^m \cdot (3bx + 3by)^n}{(cx^2 - cy^2)^{m+n}}$$

$$d) \left( \frac{(x+y)^{3a-4}}{x^{a-1}y^2} : \frac{y^{2a-5}}{x^{4a-3}(x+y)^{3-2a}} \right) \frac{x^{4-3a}y^{3a-6}}{(x+y)^{a-2}}$$

۴. د کومو شرلیطو لاندې کیدی شي لاندې عددونه د یوه مربع - یا څلوری رینه وي؟

4.1. a)  $+a, -a$       b)  $+a^2, -a^2$       c)  $+a^3, -a^3$       d)  $ab$

4.2. a)  $+(a-b), -(a-b)$       b)  $+(a-b)^2, -(a-b)^2$       c)  $a^2 - b^2$       d)  $a^2 + b^2$

۵ - د رینو جمع او تفریق زیاتونو (کمون)

5.1. a)  $6\sqrt{27} + 2\sqrt{108} - 7\sqrt{75}$

b)  $\sqrt{50} + \sqrt{8} - \sqrt{72} + \sqrt{18}$

c)  $3\sqrt[4]{256} - 4\sqrt{49} - 7\sqrt[3]{27} + 2\sqrt[5]{32}$

d)  $3\sqrt{50} - \sqrt{98} + 4\sqrt{288} + 14\sqrt{162} - \sqrt{25-9} \cdot \sqrt{2}$

5.2. a)  $\frac{x(2r^2 - 4x^2)}{\sqrt{r^2 - x^2}} - 8x\sqrt{r^2 - x^2}$

c)  $2\sqrt{(x-k)^2 + x^2} - \frac{(2x-k)^2}{\sqrt{2x^2 - 2kx + k^2}}$

b)  $\frac{r(4r^2 - 3rH)}{\sqrt{4r^2 - 2rH}} - 3r\sqrt{4r^2 - 2rH}$

d)  $\frac{h^2 + \left(c - \frac{c}{2}\right)^2 - \left(c + \frac{c}{2}\right)^2}{\sqrt{h^2 + \left(c - \frac{c}{2}\right)^2}} - \frac{h^2 + 2 \cdot \frac{c^2}{4}}{\sqrt{h^2 + \frac{c^2}{4}}}$

5.3. a)  $\sqrt{1-x} + \frac{x+1}{2\sqrt{1-x}}$

b)  $\frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} + \frac{3x^2}{(1-x^2)^2\sqrt{1-x^2}}$

c)  $\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a^2 - x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{(a^2 - x^2)^3}}$

d)  $\frac{1}{x + \sqrt{x^2 + a^2}} + \frac{x}{(x + \sqrt{x^2 + a^2}) \cdot (\sqrt{x^2 + a^2})}$

۶ - د رینو یا جذرونو ضرب او وېش

- 6.1. a)  $\sqrt{3 \cdot 7} \cdot \sqrt{3 \cdot 5} \cdot \sqrt{5 \cdot 7}$  c)  $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{4}} : \sqrt{\frac{a^2-b^2}{4}}$   
 b)  $(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})$  d)  $\sqrt{\frac{a^2+b^2+2ab}{2}} \cdot \sqrt{\frac{b^2-2ab+a^2}{2}}$
- 6.2. a)  $(3 - \sqrt{2})(2 + 3\sqrt{2})$  c)  $\sqrt{12x^2 - 12x} \cdot \sqrt{3x^2 - 3}$   
 b)  $\sqrt{8+2\sqrt{10}} \cdot \sqrt{8-2\sqrt{10}}$  d)  $\sqrt{a^2+a} \cdot \sqrt{ab+b}$
- 6.3. a)  $\left(4^{-\frac{1}{4}} + \left(\frac{1}{2^{-\frac{3}{2}}}\right)^{\frac{4}{3}}\right) \cdot \left(4^{-0.25} - (2\sqrt{2})^{-\frac{4}{3}}\right)$  c)  $\frac{\sqrt{a+c} + \sqrt{b+c}}{\sqrt{a+c} - \sqrt{b+c}}$   
 b)  $\sqrt{6x^2-6} \cdot \sqrt{\frac{3x-3}{2x+2}}$  d)  $\frac{\sqrt{(a-b)^2+a^2+b^2-2ab}}{\sqrt{2(a^2+b^2)(a^2-b^2)}}$

۷- د توان او ریښه وپستنه (حلونه)

1. a)  $\sqrt{0,04^5}$  b)  $\sqrt[3]{4200}$  c)  $\sqrt[3]{\sqrt[3]{8}}$  d)  $\sqrt[4]{\sqrt{256}}$
2. a)  $2^{n-1}\sqrt{a^{4n^2-1}}$  c)  $\sqrt[3]{\sqrt{a^6 \cdot b^{12}}}$   
 b)  $\sqrt[4]{a^2 \cdot \sqrt[3]{a^2}}$  d)  $\sqrt[3]{\sqrt{a^6 \cdot b^8}}$
3. a)  $\sqrt[3]{(a-b)^3(a+b)^4}$  c)  $\frac{4\pi r^3 - 8\pi r^3}{\sqrt{\left(4r^2 - 2r \cdot \frac{4}{3} \cdot r\right)^3}}$   
 b)  $\sqrt{\frac{1}{8}a^2 + \sqrt{\left(\frac{a^2}{8}\right)^2} + \frac{a^4}{8}}$  d)  $\pm \sqrt{\left(\frac{x_0 y_1^2}{y_1^2 - y_2^2}\right)^2 - \frac{y_1^2 x_0^2}{y_1^2 - y_2^2} - \frac{x_0 y_1^2}{y_1^2 - y_2^2}}$
4. a)  $\sqrt[4]{\frac{a}{b}} \cdot \sqrt[3]{\frac{b^2}{a}} \cdot \sqrt{\frac{1}{a^2}}$  c)  $\sqrt{a \cdot \sqrt[8]{a^5 \cdot \sqrt[3]{a}}} : \sqrt[4]{a \cdot \sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt{a}}$   
 b)  $\sqrt[3]{a^3 \cdot \sqrt{a^2 \cdot \sqrt[5]{a^8 \cdot \sqrt[4]{a^3}}}}$  d)  $\frac{\sqrt[6]{a^5 \cdot \sqrt[3]{a^2}}}{\sqrt[3]{a^2 \cdot \sqrt[6]{a^4}}} : \frac{\sqrt[4]{a^3 \cdot \sqrt[9]{a^7}}}{\sqrt[9]{a^7 \cdot \sqrt{a}}}$

۸ - لاندې ماتونه یا کسرونه داسې شکل ته واړوئ، چې مخرج رینه نه وي.

- 8.1. a)  $\frac{3}{4\sqrt{3}}$       b)  $\frac{4}{\sqrt[3]{2}}$       c)  $\frac{10}{3\sqrt{8}}$       d)  $\frac{15}{\sqrt[11]{243}}$
- 8.2. a)  $\frac{a^2}{\sqrt[3]{a^5}}$       b)  $\frac{1}{\sqrt[9]{x^{13}}}$       c)  $\frac{y^2x}{\sqrt{x^3y}}$       d)  $\frac{ab}{\sqrt[7]{a^2b^3}}$
- 8.3. a)  $\frac{13}{7-\sqrt{10}}$       b)  $\frac{6}{\sqrt{5}+1}$       c)  $\frac{15}{3-\sqrt{6}}$       d)  $\frac{16}{3+\sqrt{5}}$
- 8.4. a)  $\frac{8}{3\sqrt{2}+4}$       b)  $\frac{17}{3\sqrt{5}-2\sqrt{7}}$       c)  $\frac{6}{\sqrt{8}+\sqrt{5}}$       d)  $\frac{6}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$
- 8.5. a)  $\frac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}$       b)  $\frac{3(\sqrt{5}-\sqrt{8})}{\sqrt{8}+\sqrt{5}}$       c)  $\frac{3+\sqrt{6}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$       d)  $\frac{4\sqrt{10}-7\sqrt{3}}{\sqrt{10}-\sqrt{3}}$
- 8.6. a)  $\frac{7\sqrt{5}+4\sqrt{3}}{5\sqrt{3}+2\sqrt{5}}$       c)  $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$
- b)  $\frac{2\sqrt{6}+3\sqrt{5}}{2\sqrt{6}-3\sqrt{5}}$       d)  $\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$

## ٥٠ لوگاریتم یا لوگاریتموس Logarithmus

په دې برخه کې د لوگاریتم کلمه ترڅیرني لاندې نيسو او د لوگاریتم د قوانینو د استعمال اسانتیاوي، چې په کره یا په کلکه یې په نیونو (فرضیو) پاملرنه شوي وي څیرو ٠

### ٥٠١ د لوگاریتم کلمه

مور په دې برخه کې لوگاریتم تر څیرني لاندې نيسو، د لوگاریتم د قوانینو اسانتیاوي څیرو، چې په نیونو یا فرضیو کې باید پوره پاملرنه شوي وي ٠ د لوگاریتم  $c = \log_b a$  پیژندلپاره د یوه زیاتیز - یا مثبت عدد  $a$  یوه زیاتیز - یا مثبت عدد  $b$  ته چې  $b \neq 1$  او د لوگاریتم بنسټ بلل کیري له لاندې برابرون یا مساوات څخه مخ ته څو د په خوښه  $c$  لپاره

$$b^c = a; a > 0; b > 0; b \neq 1 \quad (5,1)$$

که  $a$  او  $b$  له مخه ورکړ شوي وي، نو د برخی  $x$  سره یواځنی ټاکلی دی. که  $a$  او  $b$  له مخه ورکړ شوي وي، نو دپورتنيو نيونو سره یواځنی ريلل گڼ  $c$  شته دی، چې برابر و (4,1) پوره کوي. دې ته د  $a$  لوگاریتم وايود  $b$  پر بنسټ:

پيژند ١٠٥:

د ريلل مثبت گڼ  $a$  لوگاریتم لاندې، چې له يوه سره نابرابر بنسټ  $b$  ولري، هغه ريلل گڼ  $c$  پوهيږو، له کوم سره، چې  $b$  د هغه په توان يا پوتنخ کړو او گڼ  $a$  ترې لاس ته راشي. لکه (5,1)

د دې لپاره ليکو:

$$c = \log_b a; a > 0; b > 0; b \neq 1, \dots \dots \dots (5,2)$$

(5,1) او (٢٠٥) يو ارزښت لري د دې لپاره، چې د لوگاریتم قوانين له (5,2) سره سم لاس ته راوړو، نو د (5,1) ته بيرته ورگرځو. دا به په لاندې بيلگه کې روښانه شي، په کوم کې چې له  $a, b, c$  څخه تل دوه گڼونه ورکړ شوي دي

بيلگه ١٠٥

١٠٥ الف: له  $2^x = 16$  لرو  $x=4$ ، ځکه، چې  $16 = 2^4$

ب له  $3^x = \frac{1}{9}$  څخه لرو  $x=-2$ ، ځکه چې  $3^{-2} = 1/3^2 = 1/9 = \frac{1}{9}$

٢٠١٠٥ الف:  $2 = \log_x 36$  د  $x^2=36$  سره يو ارزښت لري، نو لرو  $x=6$

ب:  $-6 = \log_x \frac{1}{36}$  د  $x^{-6} = \frac{1}{64} = \frac{1}{2^6} = 2^{-6}$  سره يو ارزښت لري،

--

نو لرو  $x = 2$

الف ۳ ۰ ۱ ۰ ۵ :  $x = \log_5 125$  د  $5^x = 125 = 5^3$  سره، یو ارزښت لري،

نو  $x = 3$

ب:  $x = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{16}\right)$  د  $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 1/16 = (1/2)^4$

سره یو ارزښت لري، نو لرو  $x = 4$

الف ۴ ۱ ۰ ۳ :  $5 = \log_3 x$  د  $3^5 = x$  سره یو ارزښت لري، نو  $x = 243$

ب:  $-5 = \log_2 x$  د  $2^{-5} = x$  سره یو ارزښت لري، نو لرو  $x = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}$

الف ۵ ۰ ۱ ۰ ۵ :  $2 = \log_x (-6)$  تعریف نه دی یا پیژند نه لري.

ب:  $x = \log_{-5} 125$  پیژند نه لري یا تعریف نه دی

پ:  $\log_1 x$  پیژند یا تعریف نه دی

له  $(5,1)$  او  $(5,2)$  څخه لاس ته راځي

$a = b^{\log a}$ , .....(5,3)

$\log_b 1 = 0, \log_b b = 1$ , .....(5,4)

.



د ځانگړي بنسټ لپاره لاندې سومبول کارولکيږي

$$b = e = 2,71828 \Leftrightarrow b = 10$$

$$\log_{10} a = \log a, \log_e a = \ln a, \dots \dots \dots (5,5)$$

د  $\lg a$  لوگارېم ته لسيز لوگارېتم وايي او  $\ln a$  ته پېدايښتي يا طبيعي لوگارېتم وايي ( $e$  وروسته څيرو) زيات وخت د لشميز لوگارېتم لپره داسې هم ليکو:

$$c = \log_a \tag{5,6}$$

که سومبول  $\log$  څو واره رامنځ ته شي، نو په پام کې دې وي، چې په خوبنه، مگر همغه بنسټ بايد وکارول شي.

۰ ۵ د لوگارېتم قوانين

د لوگارېتم د پېژند سره سم د  $(5,1)$  او  $(5,2)$  له مخې کيدی شي د پوتنځ د قوانينو  $(5,3)$  تر  $(5,7)$  په مرسته لاندې لوگارېتم قوانين رابيل کړای شو، کوم چې په خوبنه مگر همغه لوگارېتم بنسټ  $b > 0$ ،  $b \neq 0$  او د زياتيز (مثبت)  $x > 0$ ،  $y > 0$  لپاره باور لري

$$\log(x \cdot y) = \log x + \log y, \dots \dots \dots (5,7)$$

$$\log \frac{x}{y} = \log x - \log y, \dots \dots \dots (5,8)$$

$$\log x^a = a \log x, a \in R, \dots \dots \dots (5,9)$$

$$\log \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \log x, n = 1, 2, \dots, \dots \dots (5,10)$$

د پوتنځ قوانينو له مخې د دې فرمولونو راوستل يو د وړانديز وړ د لوگارېتم ژورې څيړني لپاره تميرن ښايي

--

د بیلگې په توګه له ( ۷ ، ۵ ) همداسې

$$\log_b (x.y) = \log_b x + \log_b y, \dots\dots\dots(5,11)$$

څخه په لاندې ډول او له (5,2)،( 5,1) څخه لرو

$$c_1 = \log x, c_2 = \log_b y, c = \log_b (x + y), \dots\dots\dots(5,12)$$

د لاندې سره یو ارزښت لري

$$b^{c_1} = x, b^{c_2} = y, b^c = x.y, \dots\dots\dots(5,13)$$

له (5,13) او د پوتنڅ قانون ( 2 ، 4 ) پر بنسټ لرو :

$$b^c = x.y = b^{c_1} . b^{c_2} = b, \Rightarrow c = c_1 + c_2, \dots\dots\dots(5,14)$$

او له (5,11) همداسې د(5,7) بنوونه د (5,12) له امله د لوگاریتم د (5,7) تر (5,10)

قوانینو کیدی شي د پیچلي لوگاریتم له افادې څخه د لوگاریتم ساده بنسټیزې افادې ته بیرته راوګرځو او په څټ .

بیلګه ۰ ۵ ۲

$$\log \frac{2\sqrt{a+b} a^3 b^2}{\sqrt[3]{c}(a+c)^2}$$

$$= \log 2 + \frac{1}{2} \log(a+b) + 3 \log a + 2 \log b - \frac{1}{3} \log c - 2 \log(a+c)$$

بیلګه ۰ ۵ ۳

$$\begin{aligned} & \log(a+b) + 2\log(a-b) - \frac{1}{2}\log(a^2-b^2) \\ &= \log \frac{(a+b)(a-b)}{\sqrt{a^2-b^2}} = \log \frac{(a^2-b^2)(a-b)}{\sqrt{a^2-b^2}} = \log[(a-b)\sqrt{a^2-b^2}] \end{aligned}$$

اوس باید و بنایو، چې تر کومو شرایطو لاندې دا اړیکې باور لري.

په بیلگه ۰ ۵ ۲ کې په کین اړخ کې لوگاریتم ځای لري، چې د ټولو  $a, b, c$  تعریف دی او لاندې برابرون پوره کوي یا ډکوي:

وي دې  $a+b > 0$  ( د دې لپاره ، چې ریښه تعریف وي او صفر نه شي، ځکه، چې بیا لوگاریتم اوبی یا حل نه لري .

وي دې  $c > 0$  ( د دې لپاره چې ریښه تعریف او ماتلاندې صفر نه شي)

وي دې  $a+b \neq 0$  ( د دې لپاره، چې لوگاریتم تعریف وي)

وي دې  $b \neq 0, a > 0$  ( د دې لپاره، لوگاریتم تعریف وي)

د کین اړخ لوگاریتم په ځانگړي ډول د  $a = 2, b = -1, c = 1$  لپاره تعریف دی. په بني اړخ کې ولاړ برابرون شکلبدلون یا څیره بدلون ریښتونۍ کیدی نه شي، ځکه چې  $\text{Log}$  بي ځایه دی. د دې لپاره، چې د څیرې بدلون ریښتونوالی ممکن شي، باید د  $b \neq 0$  پر ځای په ټینگه یا کره،  $b > 0$  وغوښتل شي.

په بیلگه ۰ ۵ ۳ کې کینه خوا یواځې هلتهموخه وره ده، چې وي:

$$a+b > 0, \quad a-b > 0$$

نو بیا  $a^2-b^2 = (a+b)(a-b) > 0$  او په دې بیلگ کې رامنځ ته شوي ټول لوگاریتمونه هم تعریف دي. دا اړیکې د ټولو  $a, b$  لپاره هم باور لري، د کومو لپاره چې پورته نابرابرون ډک وي. دا کیدی شي  $a > b, a > -b$  له امله هم  $a > |b|$  ته راغونډ شي.

--

دې -----

ته دې هم گوته نیولې وي، چې لوگارېتم په یوه بنسټ  $b$  یوه بل لوگارېتم یوه په خوښه بل بنسټ  $d$  ته د شمیر اوږون د شمیرني اړول کیدی شي  $(b > 0, b \neq 1, d > 0, d \neq 1, a > 0)$

$$a = b^{\log_b a} \quad \text{د (۵،۳) له مخې باور لري}$$

د دې برابرون لوگارېتم نیول و بنسټ  $d$  ته لرو:

$$\log_d a = \log_d b^{\log_b a} = (\log_b a)(\log_d b), \dots \dots \dots (5,15)$$

د

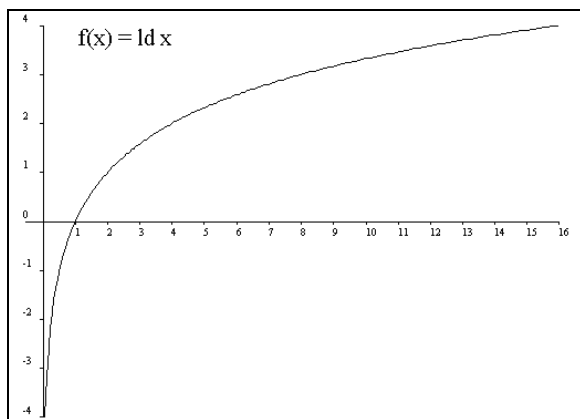
لسیز لوگارېتم اړول په پیداښتي يا طبيعي لوگارېتم او په څنټ لپاره لیکو  $b=10, d=e$  همداسي  $b=e, d=10$  او لاس ته راځي :

$$\text{Lga} = (\text{lge})(\text{lna}); \dots \dots \dots (16)$$

$$\text{Lna} = (\text{ln}10)(\text{lga}) = 2,30429\text{lga}; \dots \dots (17)$$

$$\text{lg} a = (\text{lg} e)(\text{ln} a), \dots \dots \dots (5,16)$$

$$\text{ln} a (\text{ln} 10)(\text{lg} a) = 2,30429 \text{lg} a, \dots \dots \dots (5,17)$$



د لوگارېتم فنکشن يا بلواک او دياگرام يې

$$b^{\log_b n} = n$$

$$\log_b b^x = x$$

تکرار د نورو تورو سره

د یوه ځل لوگاریتم

$$\log_b (n \cdot m) = \log_b n + \log_b m$$

$$\log_b \frac{n}{m} = \log_b n - \log_b m$$

د پوتنڅ لوگاریتم

$$\log_b n^m = m \cdot \log_b n$$

د ریښې لوگاریتم

$$\log_b \sqrt[m]{n} = \frac{1}{m} \log_b n$$

د لوگاریتم یو په بل بدیل

$$\log_b n = \log_b d \cdot \log_d n$$

د کوما یا لسمیزمات نڅښه وروسته بینارځایونه ۰ او لسمیزسیستم

	binär	dezimal
$2^{-1}$	0,1	0,5
$2^{-2}$	0,01	0,25
$2^{-3}$	0,001	0,125
$2^{-4}$	0,0001	0,0625
$2^{-5}$	0,0000.1	0,031.25
$2^{-6}$	0,0000.01	0,015.625
$2^{-7}$	0,0000.001	0,007.812.5
$2^{-8}$	0,0000.0001	0,003.906.25
$2^{-9}$	0,0000.0000.1	0,001.953.125

## ۳ ۰ ۵ تولگه

لوگاریتم د اکسیوننشل فنکشن یا بلواک په خت بلواک دی

$$x = \log_b n \Leftrightarrow b^x = n$$

د  $a, b, x, y, d, > 0$  رییل گڼونو او  $a, b, d \neq 1$  لپاره باور لري:

$$c = \log_b a \Leftrightarrow b^c = a, b^{\log_b a} = a, \log_b 1 = 0, \log_b b = 1, b \neq 1$$

$$\log_{10} a = \lg a, \log_e a = \ln a, e = 2,71828.....$$

$$\log(x.y) = \log x + \log y, \log \frac{x}{y} = \log x - \log y,$$

$$\log x^\alpha = \alpha \log x, \alpha \in R, \log \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \log x, n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\log_b a = (\log_b d) \cdot (\log_d a),$$

$$\lg a = (\lg e) \cdot (\ln a) = 0,43429 \ln a, \ln a = (\ln 10) \cdot (\lg a) = 2,30259 \lg a$$

## ۴ ۰ ۵ تمرینونه

۱. د د لوگاریتم تعریف

دلوگاریتم تعرف و کاروی یا استعمال کریں او  $x$  و تاکائی.

- 1.1. a)  $\log_7 49 = x$     b)  $\log_3 1 = x$     c)  $\log_5 \sqrt[6]{25} = x$     d)  $\log_{0,5} \frac{1}{32} = x$   
 1.2. a)  $\lg \frac{1}{10} = x$     b)  $\lg 10^{-\frac{1}{3}} = x$     c)  $\lg \sqrt[3]{100} = x$     d)  $\lg \sqrt{\frac{1}{10}} = x$   
 1.3. a)  $\log_x 8 = 3$     b)  $\log_x 25 = 2$     c)  $\log_x 243 = 5$     d)  $\log_x 1024 = 10$   
 1.4. a)  $\log_x 4 = \frac{1}{2}$     b)  $\log_x \frac{1}{5} = -1$     c)  $\log_x \sqrt{10} = \frac{1}{2}$     d)  $\log_x \frac{1}{32} = -5$   
 1.5. a)  $4^x = 64$     b)  $64^x = 64$     c)  $9^x = 3$     d)  $8^x = 4$   
 1.6. a)  $2^x = \frac{1}{8}$     b)  $3^x = \frac{1}{27}$     c)  $5^x = 0,04$     d)  $10^x = 0,0001$   
 1.7. a)  $\lg x = 3$     b)  $\lg x = -2$     c)  $\log_2 x = 6$     d)  $\log_{0,5} x = 4$   
 1.8. a)  $\ln x = 2$     b)  $\ln x = \frac{1}{2}$     c)  $\ln x = -1$     d)  $\ln x = 0$

دلوگاریتم

۲. د لوگاریتم قوانینو استعمال

قوانین استعمال کریں دو  $a, b, c, d, m, n$  باور لریلو ورشو کره و تاکائی.

- 2.1. a)  $\lg 2^4$     b)  $\lg \left(\frac{1}{2}\right)^3$     c)  $\lg \sqrt{10}$     d)  $\lg \sqrt{\frac{1}{100}}$   
 2.2. a)  $\ln (\sqrt{e})^3$     b)  $\ln \sqrt{e^{3(\ln e^2 + \ln e^6)}}$     c)  $\ln \sqrt{\frac{1}{\sqrt[3]{e^2}}}$     d)  $\ln \sqrt{\frac{5e}{e^{\ln 5}}}$   
 2.3. a)  $\lg \sqrt[7]{a^5}$     b)  $\lg \frac{a^2 b^3}{c}$     c)  $\lg \sqrt[3]{\frac{ac^2}{bd}}$     d)  $\lg \frac{a^2 \sqrt{b}}{\sqrt{a^5 b^3}}$   
 2.4. a)  $\lg (a^4 - b^4)$     b)  $\lg (a^2 + b^2)^2$     c)  $\lg \frac{(a^2 - b^2)^2}{a^4 - b^4}$     d)  $\lg \frac{a^2 - b^2}{(a^2 + b^2)^2}$   
 2.5. a)  $\log \sqrt{\frac{1-a}{1+a}}$     c)  $\ln \frac{\sqrt{a} \cdot b^{-2}}{\sqrt[3]{c} \cdot d^{-3}}$   
 b)  $\lg \sqrt[n+1]{a^n \cdot \sqrt[m]{b^{-1}}}$     d)  $\log 2 \sqrt{3 \cdot \sqrt[3]{a^2 b} \cdot \sqrt[4]{ac^2}}$

--

- 2.6. a)  $\frac{1}{3} \log(a+b) + \frac{1}{3} \log(a-b)^{-1}$   
 b)  $\lg a + n \lg(a+b) + n \lg(a-b)$   
 c)  $\lg a - \frac{1}{2} \lg b + \frac{4}{3} \lg c$   
 d)  $\frac{1}{3} \lg(a^2 - b^2) - \frac{1}{2} \lg(a-b) - \frac{1}{2} \lg(a+b)$
- 2.7. a)  $\frac{1}{3} \lg a + \frac{1}{3} \left\{ \frac{1}{2} \lg(a+b) + \frac{1}{2} \lg(a-b) - \lg a - \lg b \right\}$   
 b)  $\frac{1}{2} \lg(a^2 + b^2) - \frac{1}{3} \{ \lg(a-b) + \lg(a+b) \}$   
 c)  $\frac{1}{3} (\lg a + 3 \lg b) - \frac{1}{2} (4 \lg c - 2 \lg d)$   
 d)  $\frac{1}{2} \ln \left( \frac{b}{a} + \sqrt{\frac{b^2}{a^2} - 1} \right) - \frac{1}{2} \ln \frac{1}{b - \sqrt{b^2 - a^2}} + \ln \sqrt{a}$

۳. د لوگاریتم بنسٹیز فرمولونو استعمال.

X وشمیری.

- 3.1. a)  $x = \lg 5 \cdot \lg 20 + (\lg 2)^2$  c)  $x = 3 \cdot 10^{-2 \lg 3}$   
 b)  $x = 2 \cdot 10^{2 \lg 2}$  d)  $x = \left( 100^{\frac{1}{2} \lg 49} \right)^{\frac{1}{2}}$
- 3.2. a)  $x = \sqrt{10^{2 + \lg 9}}$  c)  $x = \sqrt[3]{10^{\frac{1}{2} (\lg 2 + \lg 32)}}$   
 b)  $x = \sqrt[3]{10^{4 - \frac{1}{2} \lg 100}}$  d)  $x = \sqrt{\sqrt{10}^{\lg 16}}$
- 3.3. a)  $x = \ln \frac{7,63}{\sqrt{e^3}}$  c)  $x = \left\{ (3\sqrt{e})^2 \right\}^{\ln 8}$   
 b)  $x = \ln \frac{0,23}{2e^2}$  d)  $x = (\sqrt{e})^{3 \ln 5}$



## ٦ . گونومتری ( کونجکچ یا مثلثات Gonometry )

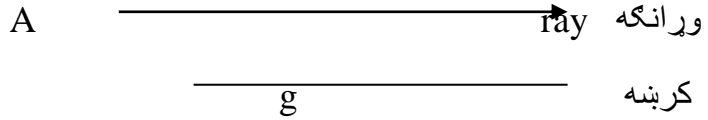
دا برخه هم د بنوونځي له امله یو تکراري خوي لري. ددې وظیفه به داوي چی د کونجکچ چټکتیا ته ( گونومتری شمیرنی ته ) په گراد- او لینده کچ، دکونجفنگشن په استعمال د ولاړ کونجیز - او عمومي درېگودیود تریگونومتری فرمولونو په استعمال د تریگونومتری افادو په څیره بدلون ته پر مختگ ورکړي یا پر مخ بوزي. غواړم چی د بنسټیزې هندسي کلیمی او قوانین مو د هرڅه له مخه مخ ته پراته وي . خو سره له دې به هم ددې کتاب لوستونکی د بنسټیزې هندسی سره بلد وي ، زه به کوبنښ وکړم چی ځنی هندسي کلیمی، کم له کمه په څیره کی گرانو لوستونکو ته، په مناسب ځای کی وړاندې کړم یا بهتره په پښتو ونوموم .

### ٦ . ١٠ بنسټیزه هندسه

#### ٦ . ١ . ١ ټکی او کرښه point (stright) line

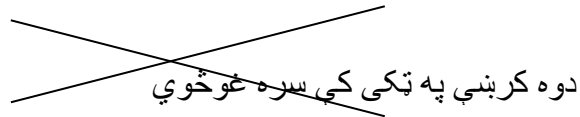
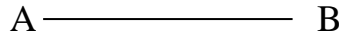
ټکی او کرښه د بنسټیزې هندسی مهمی بنسټیزې کلیمی دي. دا ابسترکتی ( خیالي، فکري ، نه لیدیدونکی) کلیمی په خورا ټیک راوړوندود هم نه شي تعریف کیدی، مگر ددوي ترمنځ موجودې اړیکې کیدی شي په شمیرنه کی په خورا زیاتو ډولونو استعمال شي، ٦

سره له دې هم هڅه کيږي چې ټکی او کرښه لیدور وگرځول شي لکه څنگه چې په ۴ . ۱ -  
 - امه برخه کی پینښ شوي. دلته کرښي په  $g$  بنوول شوي او غشی یی ناپای پراخوالی په  
 گوته کوي. دا د غشي انځورونه دکرښی په انځورونه کی پریښول کيږي يعني نه  
 انځور یږي، که دا مو و نارینتیاو ته ونه هڅوي . ټکی کیدی شي د دوه کرښو غوڅځاي  
 په څیر ونیوله شي ) څیرې په غور وگوری



(stright line

بند کرښه یا ټوټه کرښه Line segment



د بیلگي په توگه لاندې ویناوي باور یا صدق لري

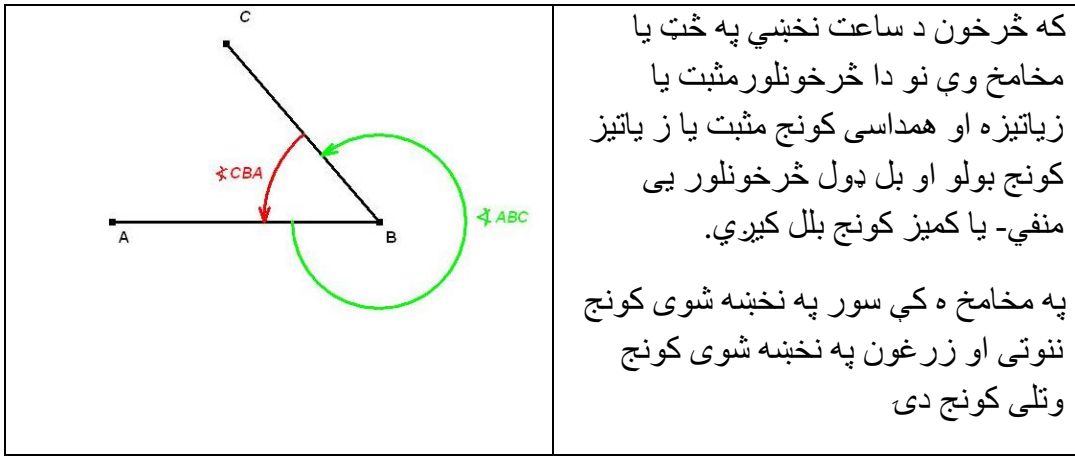
- ددوه ټکو له لارې یوه کرښه ټاکل کيږي ( پورته څیره وگوری)، چې دا کرښه دا  
 ټکي خوندي ساتي یا پخپل بر کی لري .

- دوه ناغبرگي او په یوه هواره کی پرتی کرښی یو بل ټیک په یوه ټکي کی سره  
 غوڅوي (پورته څیرو کي کنل کيږي)

یوه وړانگه  $s_1$  له یوې لور په یوه ټکي A بنده کرښبرخه ده ) ( او یوه پایکرښه له دوه  
 ټکو A او B بنده یا راگیر کرښه ده )

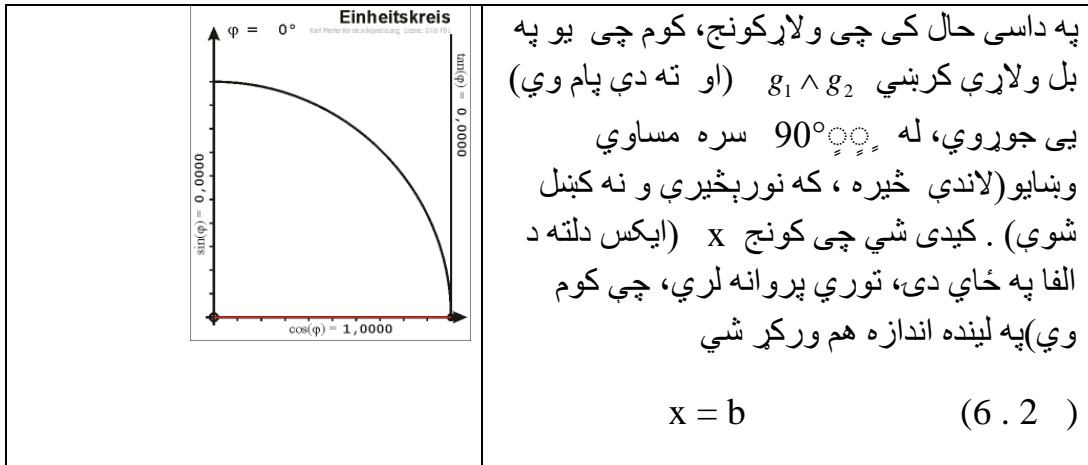
## ۶ . ۱ . ۲ کونج angle یا زاویه

که یوه وړانگه  $s_1$  د خپل پیلخاي څخه په  $S$  و خپل اخر ځای  $s_2$  ( څیره ۴ . ۲ الف ) ته یووره شي، نو دا وهل شوي هواره دنننی هواره،  $s_1$  او  $s_2$  پینې او په همدې ډول د  $S$  د کونج  $\alpha$  (الف) ککره بلل کيږي.



کیدی شي چی یو کونج  $x$  په گراد اندازه شي

$$x = a^\circ \quad (6.1)$$



په پورته یونگردي کې گورو، چې هر ډول کوچونه کښل او ټاکل کیدی شي

په دې ډول ټاکل شوی گردی لینده په وړانگه ( شعاع) ویشل کیږي. له دې لارې  $x$  د یوه بي نومه گڼ په څیر لاس ته راځي، چې د ډیرو گڼلو لپاره گټور دی. یوه په لینده اندازه ورکړ شوی کونج  $x$  په یوې یونگردي ( $r = 1$ ) کې انځور ور دی، چېرته چې دا د اړوند گردیلیندې اوږدوالی بنایي ( څیره په پورته کې کښل شوې )

په دې پسی یا ددې په تعقیب یو د  $360^\circ$  کونج د یونگردي چاپیری ( محیط) په گوته کوي . له دې امله د گراد Gradmass ( درجکچ ( او (گردي-) لیندې اندازې یا لیندیکچ یو په بل بدلون ممکن کیږي.

$$a^\circ = \frac{180^\circ}{\pi} b, b = 57,296^\circ b, b = \frac{\pi}{180^\circ} a^\circ = 0,017453a, \dots (4,3)$$

پام : په پورته څیره کې هر ډول کوچونه که له  $360^\circ$  درجو زیات هم وي کره کیدی ، که څیرې روښانه نه وو لیکل شوي، چې دا شمیرمه برخه ده یا  $4^\circ$  - مه برخه لیکل شوي وي، نو هغه دې ، نو  $4^\circ$  دې په  $6^\circ$  بدل شي .

د لاندې بیلگو له لارې دې د کونجور کولو یو څو امکاناته ونومول شي او په همدې ډول دې د «شمیر اړون اړیکې» یاپه بڼه توگه د شمیر یو په بل بدلون اړیکې وڅیړل شي.

یادونه : زما شمیرونې یو ډول پرابلم لري او هغه دا چې د دقیقې او ثانوي نڅښې هغهسي، چې ورسره بلد یو نه کارې، دا به راته گران لوتونکي وبخښي .

بیلگه ۱.۶ :

کونج “ $a = 47^\circ 12' 36''$  دې په لینده اندازه واپول شي. مور لمړی کونج په دخیمالو یا لسيزو برخو اړوو، دا په دې مانا چې ورکړ شوي دقیقې او ثانوي دې په ورته لسيزمات افاده شي:

$$12' = 720''$$

$$720 = '12''$$

پس په ټولیزه توګه  $756'' = 36'' + 720'$  له دې لاس ته راځي

$$1' = (1/3600)^\circ \quad (<=)$$

له دې وروسته په همدې توګه  $756 \cdot (1/3600)^\circ = 0,21^\circ$

له دې لاس ته راځي :  $a = 47^\circ 12' 36'' = 47,21^\circ$

په عمومي توګه باور لري

$$\alpha' = \left(\frac{\alpha}{60}\right)^\circ, \beta'' = \left(\frac{\beta}{3600}\right)$$

د ( ۶ . ۳ ) پسی باور لري  $b = 0.017453 \cdot 47,21 = 0,826$

دلته څیرې راځي، خو د دې څیرو په ځای به مور په پورته څیرو بسیا وګړو، دا چې مور تراوسه د لږ څه ځمککچ سره بلد یو ( د دې لپاره دې زما د ځمککچ کتاب وکتل شي )، نو دا کومي ستونځې نه رامنځ ته کوي .

بیلګه ۶ . ۲ :

کونج  $\frac{\pi}{7}$  دې په درجه کچ یا -اندازه ( لسيز او سکساګسیمال (لاتین: یوناني: د بابلیانو

په ۶۰ اباد شوی ګنیز سیستم ( ځای ارزښت سیستم ) ویشنو ( برخو ) ورکړ شي. د ( ۳ ) .  
له ( ۴ )

مخې لرو

$a^\circ = 57,296^\circ \cdot (3,14/7) = 25,701^\circ$  د  $0,701^\circ$  اړولو په دقیقو او ثانیو ورکوي

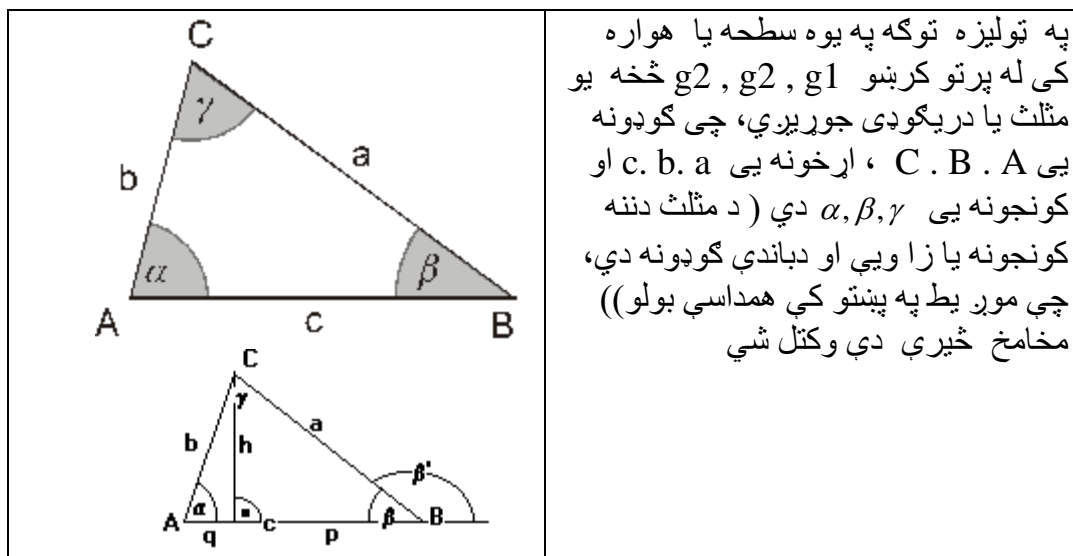
$$0,701^\circ = 0,701 \cdot 60' = 42,06', \quad 0,06' = 0,06 \cdot 60 = 3,6''$$

پس داسی دی  $\frac{\pi}{7} = 25,701^\circ = 25^\circ 42' 3,6''$

دا پورته داسی لوستل کیری ۲۵ درجی، ۴۲ دقیقې او ۶ ، ۳ ثانیې

### ۳. ۱. ۶ دریکوډی

یادونه: مور دلته بیا د نومونو (نومه ونو) د ستونځو سره مخامخ کیرو. هغه هواره چی له کرینو راگیر وي دلته له درې کرینو یا هغه هواره، چی گوډونه ، کونجونه یا گوټونه ولری، مور دا ۰۰۰ کونجی یا ۰۰۰ گوټی او یا ۰۰۰ گوډی بولو. ځمور ژبه او المانی تر یوې ډیرې اندازی په ترکیبې نومونو کی او یا نورو نومونو ډولونوکی یو بل ته ورته دي او په المانی کی هم دي ته ځانگړي نومونه شته. ماته یو کونج چی له دباندې ورته کتل کیری او د یوې بندې هواره وي گوډ مناسب بنکاریری. مور په ورځنی یا مروجه ژبه کی وایو ، چی د هغه کلی په گوډ کی .... دا تخنیکي هم درست دی، ځکه چی دا هم دلته مات دی یعنی گوډ دی. که یو کونج له دننه وگورو نو هغی ته مور تل کونج ویلی. که ځوک په یوه گوټه کی ناست وي نو وایي، چه په هغه کونج کی دلته نو بیا گوډ نه وایي. ما د کتاب په اوږدو کی لمړی ځل د ټولو لپاره کونج کارولی، که ټول مو همغسی سم یا اصلاح نه کړل ، نو فکر کوم چی د گرانو لوستونکو به ورته پام وي .



لاندي جملی باور لري چی بی له بنوونی دلته راوړل کيږي

- په دريگوډي کی د کونجونو زیاتون  $180^\circ$  درجی دی یا  $\pi$  دی
- یو دبانندی کونج د په نه پراته دننني کونجونو د زیاتون سره مساوي ده، له دی امله د یوه دريگوډي د دبانندیو کوجونو زیاتون  $360^\circ$  یا  $2\pi$  دی.
- د یوه دريگوډي د اړخونو نیمي په یوه ټکي کی یو بل سره پري کوي، چی دا په همدی وخت کی د دريگوډي « دروندټکی یا دثقل مرکز » دی. اړخنيمي یو بل په تناسب د ۱ : ۲ پرې کوي یا په پښتو:

د اړخونو ځانښوونه یی ۱ : ۲ ده ) په څیره کی وگوری ( د یوه دريگوډي منځولاري

یو بل په یوه داسی ټکي کی سره غوڅوي، کوم چی په همدی وخت کی د چاپیر ( گردی ) هغه گردی یا دایره چی دريگوډی په خپل دننه کی نیسي یا بهتره، د دريگوډي خونديگردي ( منځټکی دی ) .

د یوه دريگوډی کونجنيمي یو بل په یوه ټکي کی سره پري کوي، چی دا په همدی وخت کی د دننه گردی ) گردی چی د دريگوډي

په دننه کی ده یا گردی یا دایره کی خوندي دريگوډی ( منځټکی دی ) لاندي کی بي څیره شته ) د یوه دريگوډي جگی یا د ارتفاع کرښی په یوه ټکی کی سره غوڅوي. څيري ټولي لاندي کتل کيږي

د هوارې ځمککچ کی غوره ټکي دا لاندي دي : او په دوي پورې لاندي څيري اړه لري، چی تکرار راځی، خو پروا نه لري.

Orthocenter Höhenschnittpunkt (H), د جگیو غوڅټکی

circumcenter **Umkreismittelpunkt** ( $U$ ) د دبانندی- یا په راتاو گردی  
منځتکی

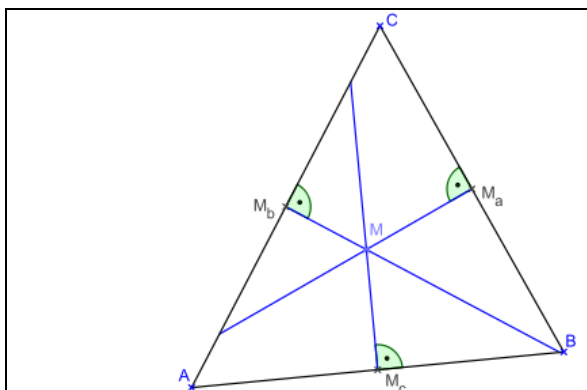
seid symetry **Seitensymmetralen**), د اړخسیومتریو غوڅتکی

inscribed circle, incircle den **Inkreismittelpunkt** ( $I$ ) د دننه گردی  
منځتکی

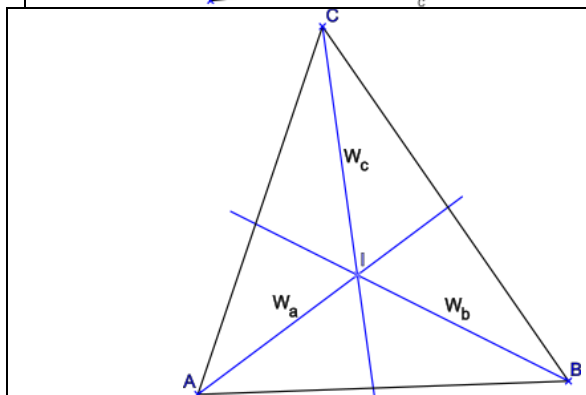
r **Winkelsymmetralen** د کونجسیومتری

centroid **Schwerpunkt** ( $S$ ) r د روندتکی

arخنیمی median **Seitenhalbierenden**)

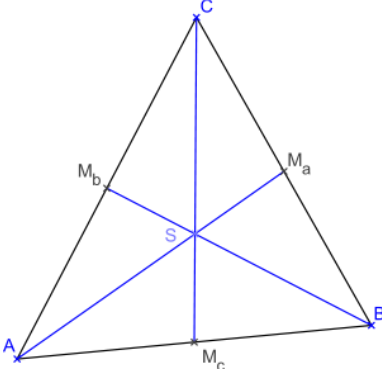
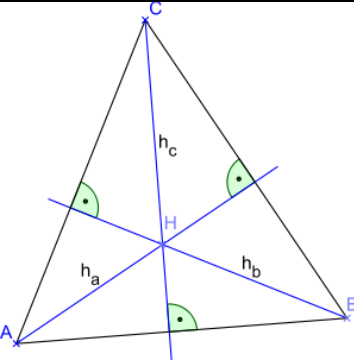


مخامخ څیره کي مثلث یاد  
دریگودی په منځ عمود یا - ولاری  
کرنی بنایي

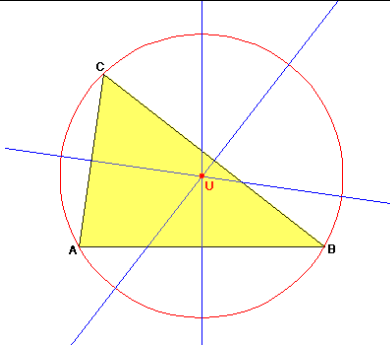
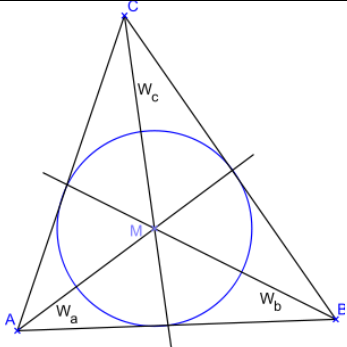


دامخامخ مثلث هغه کرنی بنایي، چي  
کونج نیموي او مور يي کونجی  
(ناصف الزاویه) بولو ( په پورته څیره  
په نیم اړخ ولاری کرنی دي )



	<p>لاندي مثلث کي هغه کرښي دي، چي له کونج څخه اړخ نیموي • مور يي اړخني می یا ناصف الاضلاع بولو •</p>
	<p>لاندي څره کي د مثلث هغه کرښي دي، چي له کونج په اړخ ولاړي دي • دا د اړخ جگوالی په گوته کوي، چي ما جگي یا ارتفاع بللي دي •</p>

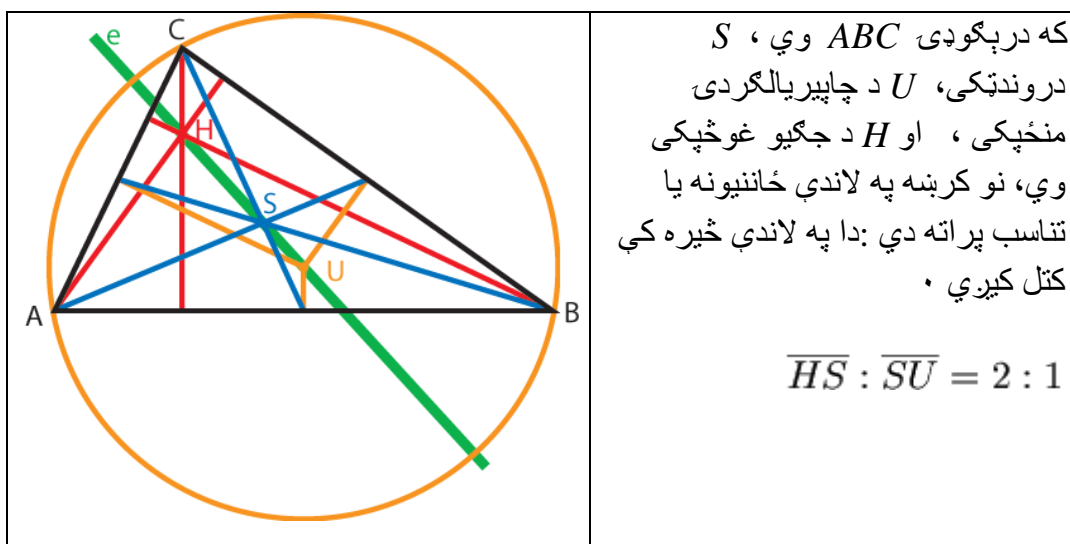
په پورته څیره کي کونجی می دي ، چي منځ ټکی يي د خوندي گردی یا دننه گردی منځکی هم دی

	
---	--

په پورته کینه څیره کې د اړخ په نیمه ولاړې کرښې دي، چې غوڅټکی یې د په راتاو گردی یا چاپېرگردی منځټکی دی.

دا په یو ډول درې کرښې هرې درې یې په یوه ټکی کې سره غوڅوي.

که د یوې درېګوډۍ د منځولارو په غوڅټکي یوه گردی داسی ووهل شي، چې د گردی کره درېګوډی له یوه ګوډ څخه تیره شي، نو دا گردی د درېګوډي له نورو دوه ګوډونو څخه هم تیریري. که درېګوډی تیره کونجیزه وي، نو د گردی منځټکی د درېګوډي په دننه کې پروت دی، که درېګوډی ولاړکونجیزه وي، نو کونج د گردی په هیپوتینوز ی یا اوږده اړخ پروت دی ( د تالس جمله دې وکتل شي) او که درېګوډی پڅکونجیزه وي، نو منځټکی له درېګوډی دباندې پروت دی.



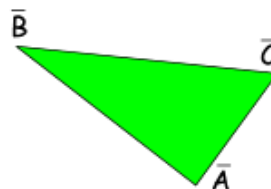
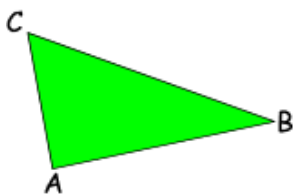
۶ . ۱ . ۴ برابر ارزښتوالی او ورته والی یا مشابهت Congruence and Similarity

دوه درېګوډي  $ABC$  او  $A'B'C'$  یو بل سره کونګرواینڅ یا برابر پټووني دي

یانې برابرارښته دي

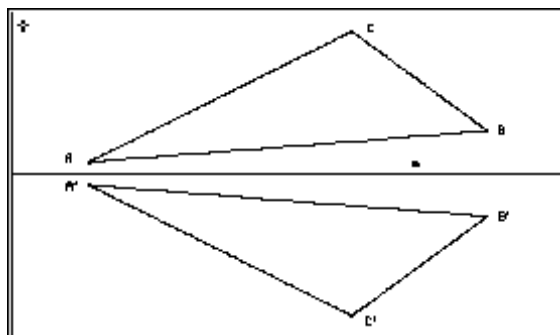
$$ABC \cong A'B'C'$$

(4.4) که وکبنول شي يانی که هرې لورته یوورل شي (وکبنول شي) او وخرخول شي او اینه ونه یا هندارونه یې یو بل پوره پټ کړي یا یو په بل پوره پریوخي (لاندي څیر)



که دریگودي سره کونگرواینځ وي، نو باید کم له کمه په دري اصلي ټوټو ( اړخونو او کونجونو) کی یو بل سره مساوي وي

په څټ یی هم باور لري S اړخ او W کونج په گوته کوي



جملې: دريگودې ټيک هلته کونگرواينځ دي چی يو بل سره مساوي شي په

۱ - دري اړخونو کی SSS

۲ - دوه اړخونو او ددې اړخونو ترمنځ کونج کی SWS

۳ - دوه کوجونو او د لوي اړخ ته مخامخ کونج کی SSW

۴ - يوه اړخ او ددې اړخ دواړه خواو کونجونو کی, WSW

د دی جملو په څنټ هم باور لري، دا په دي مانا چی که دريگودې په کونگرواينځ جملو کی ورکړشو اصلي برخو کی سره برابر وي، نو دا کونگرواينځ دي. د کونگرواينځ جملو په بنسټ کيدی شي په ځانگړي توکۀ دريگوديجوربنت سرته ورسول شي، کوم چی د کونگرواينځ جملو کارونی په څير ليدل کيدای شي .

د دوه هوارو شکلونو ورته والی (Ähnlichkeit) هلته مخ ته پروت دی، کله چی په همغو يا اړوند دري کونجونو کی يو بل سره برابر وي او د همغو يا اړوند اړخونو تر منځ یی تناسب يا ځاننيونه موجود وي .

دا جملې هلته هم باور لري که د کونگرواينځ له جملو ورته جملو ته ورشو

جمله:

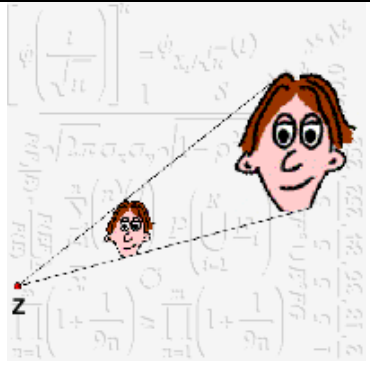
دوه دريگودې ټيک هلته يو بل ته ورته دي که يو دبل سره برابر وي، په :

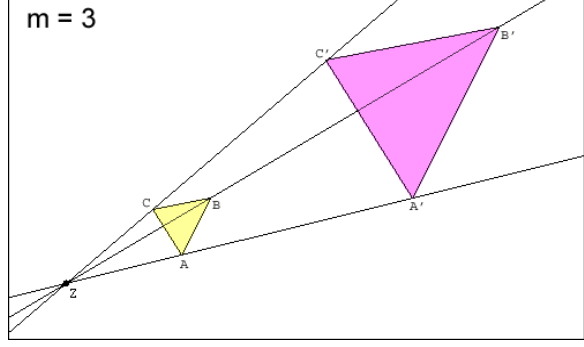
۱ - دري اړخونود اوږدوالي ترمنځ ځان نيونی يا تناسب کی

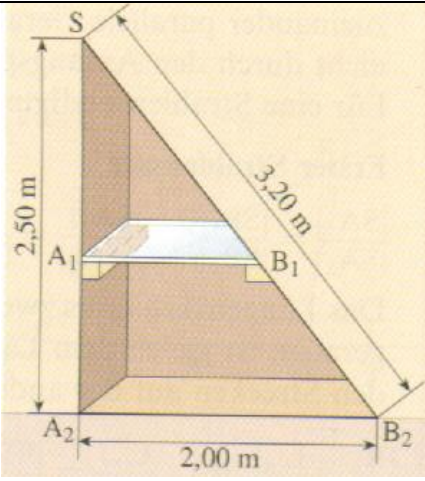
۲ - د دوه اړخونو د اوږدوالي ترمنځ تناسب او ددې اړخونو ترمنځ کونج کی

۳ - د دوه اړخونو او د لوي اړخ مخامخ کونجونو ترمنځ تناسب يا ځاننيونه کی

۴ - دوه مساوي پرتو کونجونو کی

	<p>دا مخامخ څیرې ورته دي ، که د دې دوه کرښو پای سره په یوه کرښه وتړی او د یوه اړخ د د په خوښه ټکي سره د مخ ته کرښې سره غبگه کرښه وباسی، نو دوه ورته درېگودي لاس ته راځي</p>
---	---

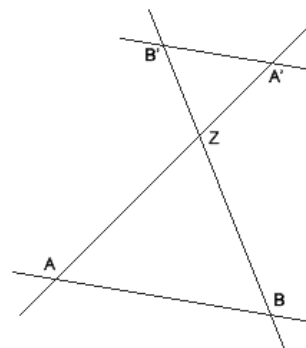
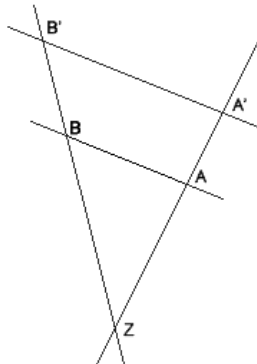
<p><math>m = 3</math></p> 	<p>په لاندې څیره کې کښل شوي درېگودي ورته دي، دا په دې مانا چې باور لري:</p> <p><math>\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'</math></p>
--	---

	<p>د ورته جملو سره خپلواني جملی د وړانگو جملی دي:</p>
---	---

په دې پورته څیره کې درېگودي یو بل ته ورته دي .

	<p>د وړانگې لومړۍ جمله:</p> <p>دوه له یوه ټکي وتلې وړانگې ، که له دوه غبرگو کرښو غوڅې شي نو ټوټې یې لاندې اړیکې سره لري .</p> $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \frac{a}{(a+b)} = \frac{c}{(c+d)}$
	<p>د وړانگې دویمه جمله:</p> <p>که له یوه ټکي دوه کرښې وکښل شي او دا بیا له دوه غبرگو کرښو غوڅې شي، نو د ټوټو ترمنځ دا لاندې اړیکې لري، دا ته والي له جملو ده .</p> <p>ټکی چې څنگهډي په پام کې نیول کیدی شي او د دې او پورته جملې ترمنځ توپیر ته هم پام نیولی شو</p> $\frac{g}{h} = \frac{a}{(a+b)} \quad \frac{g}{h} = \frac{c}{(c+d)}$

یا دالاندې، چې هرڅه یې روښانه دي



$$\begin{aligned}\overline{ZA'} : \overline{ZA} &= \overline{ZB'} : \overline{ZB} \\ \overline{ZA} : \overline{AA'} &= \overline{ZB} : \overline{BB'} \\ \overline{ZA'} : \overline{AA'} &= \overline{ZB'} : \overline{BB'}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{A'B'} : \overline{AB} &= \overline{ZA'} : \overline{ZA} \\ \overline{A'B'} : \overline{AB} &= \overline{ZB'} : \overline{ZB}\end{aligned}$$

( دا لاندې د لیکنې له لارې روښانه شوي څیره دې گران لوستونکي وکارې )

که درې په یوه ټکي کې پریکیدونکي کرښي  $g_1, g_2$  او  $g_3$  د دوه غبرگو (موازی) کرښو  $g_4$  او  $g_5$  لخوا پری شي، نو د بیلگي په توگه له ۴ . ۱۰ کینل شوي څیرې څخه لاندې اړیکي لاس ته راځي:

$$OA_1 : OA_2 = OB_1 : OB_2, OA_1 : OA_2 = A_1B_1 : A_2B_2 \quad . 1$$

دا په دې مانا چې په وړانگو پرتي ورته برخې په مساوي تناسب یا ځانښوونې سره پرتې دي:

$$A_1A_2 : B_1B_2 = OA_1 : OB_1 = OA_2 : OB_2 \quad . 2$$

دا په دې مانا چې: په وړانگو پرتي ورته برخې په مساوي تناسب یا ځانښوونې پرتې دي لکه اړونده، د ککړی اندازه شوي برخي چې په وړانگه پرتې دي.

$$A_1A_2 : A_2A_3 = B_1B_2 : B_2B_3, A_1A_2 : B_1B_2 = A_2A_3 : B_2B_3 \quad - 3$$

دا په دې مانا چې: په غبرگو پرتې کرښي په همغه برخو کې یو له بل سره په مساوي تناسب یا ځانښوونې پرتې دي

د وړانگو جملې هم باور لري، که د دوه غبرگو په څیر رامنځ ته شي یا که ککړه د غبرگو ترمنځ پرته وي) په دې حالت کې دې وړانگي د کرښو په ځای بدلی یا ولیکل شي (

بیلگه ۴ . ۳ : د اړخونو  $a$  او  $c$  او همداسی د کونج الف  $\alpha$  څخه دې

یو دریگودی جوړ شي. لاندې حالتونه تر څیرني لاندې نیسو

$$a > c \quad - 1$$

مور کارو  $AB = c$  او په ټکي  $A$  کونج الف

د  $c$  په کچه کارو. په  $B$  یو گردیلینده کارو د  $a$

په کچه چی د الف ازاده پښه په ټکي  $C$  کې غوڅوي (

څیره دې گران لوسونکی پخپله وکارې، روښانه ده

$$a < c \quad - 2$$

دلته درې امکاناته شته دی ( د دې درې امکاناتو څیره وکارې )

۲ . ۱ : د گردیلینده په  $B$  د  $a$  په اندازه د  $\alpha$  ازاده پښه په دوه هغو ټکو کې پرې کوي،  
په کومو کې چی اوبی یواځنی نه دی .

۲ . ۲ : گردیلینده د  $\alpha$  ازاده پښه لمسوي .

۲ . ۳ : گردیلینده د  $\alpha$  اندازه پښه نه غوڅوي

$$a = c \quad ( ۳ )$$

گردیلینده په  $B$  د  $a$  په اندازه د  $\alpha$  ازاده پښه په دوه ټکو، په نامه  $A$  او  $C$  کې پرې

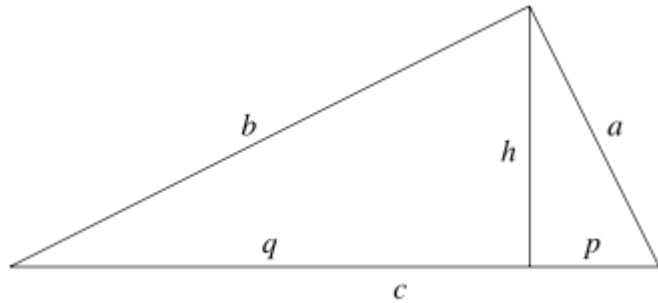
کوي. دې لپاره چی حالتونه ۲ - او ۳ - له منځه لرې او تل یواځنی حل ولرو، نو  $a > c$

نیونه په دریم کونگرواینڅ جمله کی ضرور ده

۶ . ۱ . ۵ . ولار کونجیز دریگودی مثلث قایم الزاویه



د مختلفو دریګوډیو څخه مور په لاندې برخه کې ولاړ کونجیز دریګوډی ترڅیرنی لاندې نیسو. په ولاړ کونجیز دریګوډي کې د ولاړ کونج مخامخ اړخ هوپوتینوزې ( Hypotinuze ) بلل کیږي، نور دواړه اړخونه کاتیتونه یو: کاتیت ( Katheten ) بلل کیږي. هغه ولاړ کونجیز دریګوډي ته روځنی یا ورسره بلدي یا مروجی په نخښه کونه یا لنډ په نخښونه به له څیرې ۴ . ۱۳ څخه واخلی



په ولاړ کونجیز دریګوډي کې دا لاندې راورل شوي اړیکې باور لري چی دلته یی بی له اوبی) بنوونی( راورو:

یادونه: په ولاړ ګوډیز کې د ولاړ کونج مخامخ اړخ اوږد اړخ بولو او د ولاړ ګوډ پښې ولاړ اړخونه، چې غوښتونې کونج ته مخامخ مخامخ اړخ ( پښه ) او په موخه ور کونج پرته پښه په کونج پروت اړخ ( - پښه ) بولو او یا په دې لاتین نومونو یانې مخامخ کاتیت او (په کونج) پروت کاتیت.

د پیتاګوراس ( Pythagoras ) جمله:

په ولاړ کونجیز دریګوډي کې د هیپوتینوزې مربع هواره د دواړو کاتیتو د مربع هوارو زیاتون سره برابر یا مساوي ده:

$$c^2 = a^2 + b^2 \quad (6.5)$$

-

دکاتیټو ( د ولاړ اړخونو یا د مخامخ او په پراته اړخ (ضلع) ) جمله:

په ولاړ کونجیز دریځوډي کی د کاتیټ مربع هواریز مساوي ده د ولاړ کونجی هوارې سره، چی له هیپوتینوزي او ددی کاتیټ له پرویکشن یا پریوستون څخه لاس ته راخی:

$$a^2 = p \cdot c, \quad b^2 = q \cdot c \quad (6,6)$$

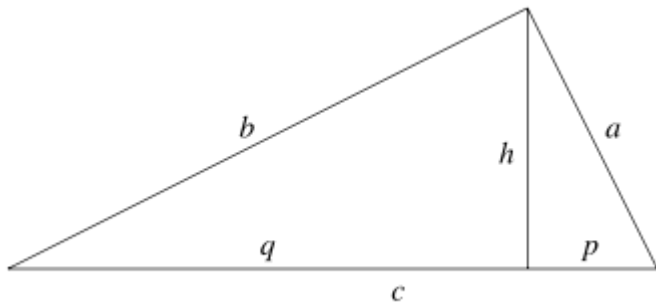
جگجمله :

په ولاړ کونجیز دریځوډي کی د هیپوتیزې په جگي مربع هواریز مساوي ده د هیپوتینوزي

( لوي اړخ ) برخو څخه منځ ته راغلي ولاړ کونجی هوارې سره

$$h^2 = q \cdot p \quad (6.7)$$

یا په لاندې کی لنډ بیا ورکړ شوي



لنډ: ( ددی لپاره دی پورته څېره وکتل شي)

$$c^2 = a^2 + b^2 \quad \text{پیتاگوراس جمله :}$$

د اویکلید د کاتیتونو ( پروت - ،مخامخ اړخونو) جملې

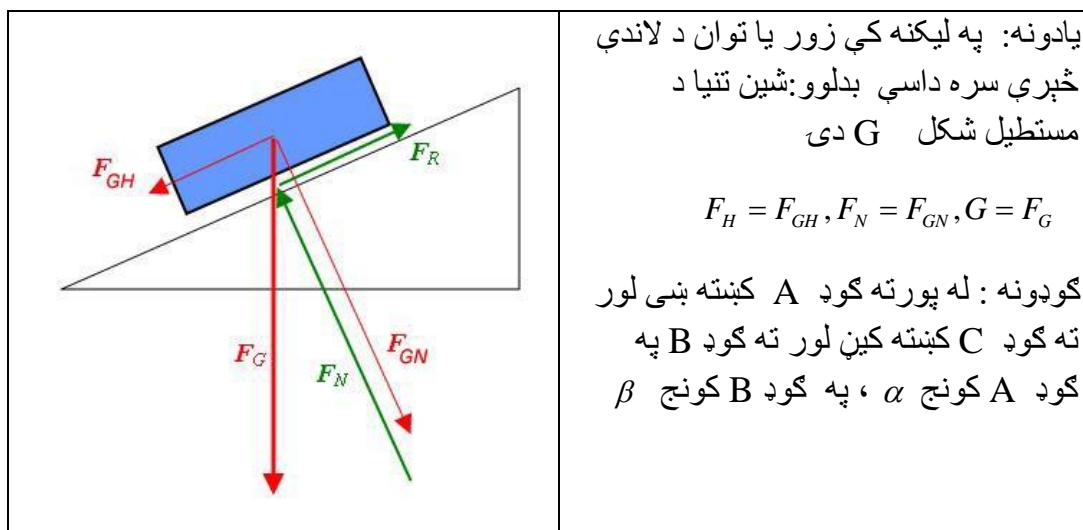
$$a^2 = c \cdot p$$

$$b^2 = c \cdot q$$

$$c = p + q$$

$$h^2 = p \cdot q \quad \text{د اویکلید جگجمله}$$

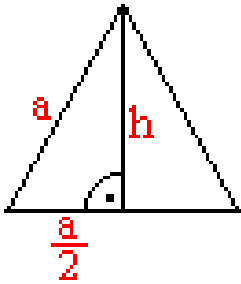
بیلگه ۴ . ۴ : (خپره نه ده کښل شوي، دې ته دې گران لوستونکچ فکر وکړي، دا یوه فزیکي دنده هم ده) خپره وکښل شوه، نخښې هم لږ بدلې دي)) د یوه بدن د وزن  $G$  تجزیه څرگندوي (د بدن دروند ټکی) دا د فزیک له مخې هغه ټکی دی چې د بدن ټول وزن پرې پروت وي (= KSP) چې په یوه مائله هواره پروت دی، دا وزن مائلي هوارې سره غیرگ په یوه کښته کشونکی زور  $F_H$  او په مائلي هوارې نیغ ولاړ ، ولاړ) عمودي( زور)  $F_N$  تجزیه کيږي. د ښوولو ده چې، دريگودي  $ABC$  د KSP او  $F_N$  او  $F_H$  له خوا ټاکلي دريگودي سره ورته دی



داچی  $G||AC$  خُغلي، نو FH او G یو کونج  $\alpha$  جوړوي. دا چی  $\beta = R - \alpha$  ده، نو FN او G کونج  $\beta$  جوړوي، دواړه دريگودي په دې برسیره په ولاړکونج کی یو بل ته ورته دي.

یادونه : داسې بیلگې، چې خیره یې نه شم ایستلی که وي هم بدې نه دي، گران لوستونکي کړای شي، چې داسې خیرې پخپله وباسي، دا دې یو تمرین وي. زما زړه نه شي، چې له لیکلوی تیر شم.

بیلگه ۴ . ۵ : په یوه مساوي اړخیز دريگودي کی دې ( لاندې خیره ) جگی و شمیرل شي . ۶ . ۴ ( له مخی لرو ) جگی په همدې وخت کی د مخامخ اړخ نیمی هم دی، دا په دې درېگودي کی وکاری )

	$h^2 = a^2 - (a/2)^2$ $h^2 = a^2 - a^2/4$ $h^2 = (3/4)a^2$ $h = (\sqrt{3}/2)a$
--	--

۶ . ۲ په ولاړکونجیز دريگودي کی د اړخونو تناسب

د کونجکچ لپاره د اړخونو تناسب هم مساعد دی، چې یوه ولاړکونجیز دريگودي کی جوړیږي ( لاندې خیره ). که د کونج  $\alpha$  مخامخ اړخ یا -کاتیت  $a$  gegkathete د مخامخ اړخ په خیر وښایو، د  $b$  اړخ په  $\beta$  پروت اړخ ankathete او hypotenuse لوي اړخ وي، نو په ولاړکونجیز دريگودي کی لاندې اړخانیوني منځ ته راځي یا جوړیږي

	$\sin \alpha = \frac{a}{c} = \frac{\text{katheta}}{c}$ $\cos \alpha = \frac{b}{c} = \frac{\text{kathetb}}{c}$ $\tan \alpha = \frac{a}{b} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\text{opk}}{\text{ank}}$ $\cot \alpha = \frac{b}{a} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\text{ank}}{\text{opk}}$
--	---

د وړانگو جملو له امله دا اړیکي یا تناسب یواځي د کونج په واک کی دی. که په پام کی ونیول شي چي  $\beta = 90^\circ - \alpha$  دی، نولاندي اړیکي لیکلی شو

$$\sin \beta = \frac{b}{c} = \sin(90 - \alpha) = \cos \alpha$$

$$\cos \beta = \frac{a}{c} = \cos(90 - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\tan \alpha = \frac{b}{a} = \tan(90 - \alpha) = \cot \alpha$$

$$\cot \beta = \frac{a}{b} = \cot(90 - \alpha) = \tan \alpha$$

له دې لیدل کیږي، چی د دې څلورو ارزښتونو د پیدا کولو لپاره دوه گنجدولونه پوره دي یا بسیا کوي . ورپسې یا ددې په تعقیب پیژندور دي

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{1}{\tan \alpha}; \dots \dots \dots (6,10)$$

برسیره پردې د پیناگوراس د جملی په پام کی نیولو سره لرو

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1; \dots \dots \dots (6,11)$$

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}; 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}; \dots \dots \dots (6,12)$$

۳. ۰ ۶ په یوونگردي کی د کونج فنکشنونه ( -بلواک )

په ۲. ۴ برخه کی  $\sin \alpha; \cos \alpha; \tan \alpha; \cot \alpha$  یواځي د لیدیدونکو (Konkrete) اړختناسیونو لپاره په یوه ولاړ کونجیز دریگوډي کی ځای په ځای دي. دا ویناوې یواځي یا په ځانگړې توگه د  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$  ( $0 < \alpha < 90^\circ$ ) لپاره تعریف دي. که  $\alpha$  د خپلواک واریابل په څیر ونیسو، نو  $\sin \alpha$  او داسی نور فنکشنونه راپه گوته کوي چی په برخه ۱۵ کی انځور دي او کوچن فنکشنونه بلل کیري. په یاده شوي برخه کی ( څیرې ۱۵ . ۲۰ الف او ب

ددې لپاره چی د دي تعریفونو پراخوالی په زړه پوري کونجونو لپاره ممکن شي، نو دا مو د یوون گردي باندي مخ نڅبنی په واك کی کرښو ته لارښودوي . دلته ټولی کرښی ( د لته به له کرښو څمور مطلب پای کرښی وي ) ، چی پخپله او یایی پرویکشن یا پریوستون یا پریوتنه په وړانگو  $s_1$  او  $s_2$  پروت وي زیاتون مخنځبنه ( مثبت مخنځبنه ) لري، ټولی کرښي او یایی پرویکشنونه پریوستونونه چی په وړانگو  $s'_1$  او  $s'_2$  پرتی وي کمون مخنځبنه ( منفي مخنځبنه ) لري . دلاندي څیرو کښلو سره کیدی شي تعریفونه ۴ . ۸ ( د په خوبنه کونجونو لپاره پراخه شي

$$\sin \alpha = \overline{QP}, \cos \alpha = \overline{OP}, \tan \alpha = \overline{AD}, \cot \alpha = \overline{BE}; \dots \dots \dots (6,13)$$

د کونج  $\alpha$  لپاره چي په لومړي څلورمه یا کوادرنانت (لاتین: د کواردیناتسیستم څلورمه کی پروت دی) لاندي څیره له کین و ښی لورته کښته دا په فرمولونوکی کارول شي توري ساده ایښوول کیري . په څیرو کی شني کرښي د ساین دي او سري کرښي کوساین دی او کونجونه ټول په ترتیب له یوه سره پهالف سره په نڅبنه کیري، چي د دي لاري تانجنت او کوتانجنت هم پیدا دي او توري هم ایښوولی شو )، دا تعریفونه د هغو تعریفونو سره سر خوري، کوم چی په ولاړ کونجیز دریگوډي کی تر څیرنی نیول شوي دي . په پام کی دي وي چی کونج  $\alpha$  په لینده اندازه کی د گردیلیندي اورډوالي AP سره مساوي دی، چیرته چی په زیات څرخون له ۲ څخه لوییدلی هم شي . برسیره پر دي له تعریفونو ( ۱۳ . ۴ ) څخه لاس ته راځي، چی ساین-او کوساین فنکشنونه، پریود ( $360^\circ$ ) 2 ( periode ) تل تکراریدونکی ، بیرته

راگر حیدونکی، تنجنت - او کوتنجنت فنکشونونه پریود (180°) لری .

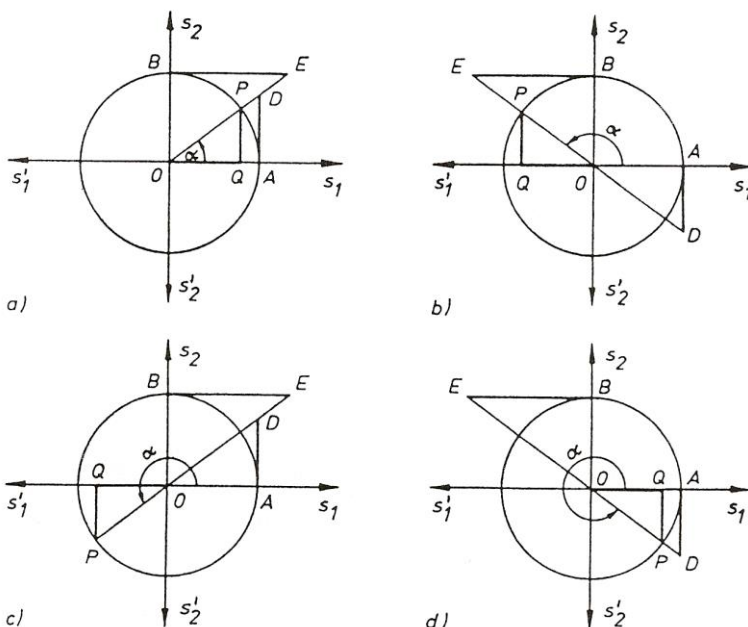


Bild 4.17 <sup>نقشه</sup>

پس لرو

$$\sin(\alpha + 2\pi) = \sin(\alpha + 360^\circ) = \sin \alpha$$

$$\cos(\alpha + 2\pi) = \cos(\alpha + 360^\circ) = \cos \alpha; \dots \dots \dots (6.14)$$

په

$$\tan(\alpha + 2\pi) = \tan(\alpha + 360^\circ) = \tan \alpha$$

$$\cot(\alpha + 2\pi) = \cot(\alpha + 360^\circ) = \cot \alpha$$

تولیزه (عمومي) توگه لرو

$$\sin(\alpha + 2k\pi) = \sin(\alpha + k.360^\circ) = \sin \alpha$$

$$\cos(\alpha + 2k\pi) = \cos(\alpha + k.360^\circ) = \cos \alpha; \dots \dots \dots (6.15)$$

$$\tan(\alpha + 2k\pi) = \tan(\alpha + k.360^\circ) = \tan \alpha$$

$$\cot(\alpha + 2k\pi) = \cot(\alpha + k.360^\circ) = \cot \alpha$$

د ټولو ټولگنونو  $k = \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$  لپاره

یادونه: د کوارانت لپاره څلورمه لیکلی شو خو دا باید په پام کې وي چی دا په کوار دیناتسیستم کې دی

جدول یا تخته ۴ . ۱ د کونج-پازاویو توابعو وخنځبه

	لومړئ څلورمه $(0; \frac{\pi}{2})$	دویمه څلورمه $(\frac{\pi}{2}; \pi)$	دریمه څلورمه $(\pi; \frac{3}{2}\pi)$	څلورمه څلورمه $(\frac{3}{2}\pi; 2\pi)$
$\sin x$	+	+	-	-
$\cos x$	+	-	-	+
$\tan x$	+	-	+	-
$\cot x$	+	-	+	-

برسیره پر دې لاندې اړیکې باور لري:

$$\begin{aligned} \sin(\pi - \alpha) &= \sin \alpha, & \cos(\pi - \alpha) &= -\cos \alpha \\ \tan(\pi - \alpha) &= -\tan \alpha, & \cot(\pi - \alpha) &= -\cot \alpha \\ \sin(\pi + \alpha) &= -\sin \alpha, & \cos(\pi + \alpha) &= -\cos \alpha, \\ \sin(-\alpha) &= -\sin \alpha, & \cos(-\alpha) &= \cos \alpha \\ \tan(-\alpha) &= -\tan \alpha, & \cot(-\alpha) &= -\cot \alpha \end{aligned} \quad (4.16)$$

بیلگه ۴ . ۶ : د جشمیروني سره د کونجفنکشن د  $\alpha = 446^\circ$  لپاره پیدا کوو. دا چی  $\alpha$  په درجی اندازه ورکړ شوی ده، نو اوهمشالتیریا سویچ  $\alpha$  د لته مطلب د



جېشمیري اړوته ده، په غوښتل شوي فنکشن کې ( په « DEG » سمو او بیا  
لاندي ورکونی کوو.  
په همدې ډول تکمي وهو

جدول یا تخته ۴ . ۱ د کونجفکشنونو مخنځینه

دنده مو د لاندي مساوت حل یا اوبی دی

$$1. \quad \sin \alpha = a, \quad 2. \quad \cos \alpha = a,$$

$$3. \quad \tan \alpha = a, \quad 4. \quad \cot \alpha = a$$

دلته تمرینونه ۱ او ۲ یواځي هلته موخه ور یا هدفمند ی، چې باور ولري  $-1 \leq a \leq 1$

او په تمرین ۳ او ۴ کط په خوښه هر ارزښت نیولی شي.

یو «بنسټیزوبی یا بنسټیز حل»  $\alpha$  د هر تمرین د جېشمیرني سره په لاندي ډول یا  
همداسی تکموتریب لاس ته راځي ( دا په دې اړه لري چی  $\alpha$  په درجه اندازه یا لینده  
اندازه اندازه کوو، نو په ورته ډول د سویچېدلون په "DEG" یا "RAD" باندي راولو)

$$1. \quad \boxed{a} \quad \boxed{F} \quad \boxed{\sin} \quad 2. \quad \boxed{a} \quad \boxed{F} \quad \boxed{\cos}$$

$$3 \quad \boxed{a} \quad \boxed{F} \quad \boxed{\tan} \quad 4. \quad \boxed{a} \quad \boxed{1/x} \quad \boxed{F} \quad \boxed{\tan}$$

تکمه F د په خټې فنکشن ته تلنه ممکنوي.

دلته نو بیاد  $\alpha$  هر بنسټیز حل په درجه یا لینده کچ څرگندیږي.

د  $a = -0,55$  لپاره لاندي بنسټیز حلونه لاس ته راځي :

$$1. \quad \alpha_0 = -33,367013^\circ = -0,58236,$$

$$2. \quad \alpha_0 = 123,36701^\circ = 2,1531606,$$

$$3. \alpha_0 = -28,810793^\circ = -0,5028432,$$

$$4. \alpha_0 = -61,189206^\circ = -1,0679531.$$

د مخ ت ه تیرو په بنسټ لو

$$1. \sin \alpha = \sin (180^\circ - \alpha) = \sin (\pi - \alpha),$$

$$2. \cos \alpha = \cos(-\alpha)$$

او په ورته توګه،، فرعي یا ځنګیز حل یا اوبی،،

$$1. \beta_0 = 180^\circ - \alpha_0 = \pi - \alpha_0,$$

$$2. \beta_0 = -\alpha_0$$

لاس ته راشي

د لیددونکي حالت  $a = -0,55$  لپاره په دې مانا چی :

$$1. \beta_0 = 213,367013^\circ = 2,1531563,$$

$$2. \beta_0 = -123,36701^\circ = -2,1531606.$$

د  $\alpha$  ټول حلونه د ( ۱۵ . ۴ ) له امله په لاندې فورم لاس ته راځي

$$1. \text{ und } 2. \quad \alpha = \alpha_0 + k \cdot 360^\circ = \alpha_0 + 2k\pi,$$

$$\alpha = \beta_0 + k \cdot 360^\circ = \beta_0 + 2k\pi,$$

$$3. \text{ und } 4. \quad \alpha = \alpha_0 + k \cdot 180^\circ = \alpha_0 + k\pi.$$

بیلګه ۴ . ۹ : لرو  $\sin x = 1/2 \sqrt{3}$  . ودې شمیرل شي  $\cos x$  ,  $\tan x$  ,  $\cot x$

$$\cos x = \pm \sqrt{1 - \sin^2 x} = \pm \sqrt{1 - \frac{3}{4}} = \pm \sqrt{\frac{1}{4}} = \pm \frac{1}{2},$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{\pm \frac{1}{2}} = \pm \sqrt{3},$$

$$\cot x = \frac{1}{\tan x} = \frac{1}{\pm \sqrt{3}} = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

بیلگه ۴ . ۱۰ : په بیلگه ۴ . ۴ کې ورکړشوی زور  $F_H$  او  $F_N$  څومره لویې دي، که په مایل هواره پروت بدن وزن  $700\text{ N}$  وي (دلته  $N$  د Newton لپاره دی چی وزن پرې اندازه کیږي ) او مائلې هوارې مایلکونج  $B = 28^\circ$  وی؟

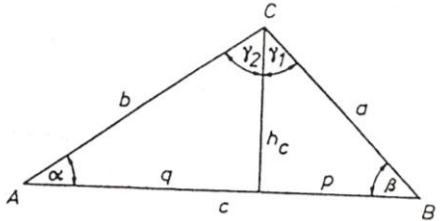
$$\sin \beta = \frac{F_H}{G}, \quad F_H = G \cdot \sin \beta = 700\text{ N} \cdot \sin 28^\circ \\ = 700\text{ N} \cdot 0,4695 = 328,65\text{ N}.$$

$$\cos \beta = \frac{F_N}{G}, \quad F_N = G \cdot \cos \beta = 700\text{ N} \cdot \cos 28^\circ \\ = 700\text{ N} \cdot 0,8829 = 618,03\text{ N}.$$

۴. ۶ دساین- او کوساین جملی

دا دواړه جملی ممکنوي چی په تولیز یا عمومي دریگودي کی شمیرنی پلی کرای شو

۱. د ساین جمله د څیري ۴ . ۱۸ له نڅبنوني سره لرو

 <p>Bild 4.18</p>	$\sin \alpha = \frac{h_c}{b}, \quad \sin \beta = \frac{h_c}{a}$ <p>او له دې امله</p> $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{a}{b} \quad \text{bzw.} \quad \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta}$
--	--

په ورته توگه بنوول کیدی شي، چې په عمومي توگه صدق کوي

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} \quad (4.17)$$

څیره پورته او لاندې کینل شوي، دا یو ولارکونجیز درېگودی کینل کیږي ( پورته او لاندې څیري )

په ورته توگه بنوول کیدی شي، چی په عمومي توگه صدق کوي

د ساین جمله کیدی شي استعمال شي، که د یوه درېگودي -دوه اړخونه او لوي اړخ ته

مخامخ کونج - SSW یو اړخ او داړه پرې پراته کونجونه WSW ورکړشوي وي

۲. د کوساین جمله

د څیرې ۴. ۱۸ څخه لاس ته راځي

$$h_c^2 = b^2 - q^2$$

$$h_c^2 = a^2 - p^2$$

$$a^2 = b^2 + p^2 - q^2, \quad p = c - q,$$

$$a^2 = b^2 + (c - q)^2 - q^2,$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2cq + q^2 - q^2, \quad q = b \cos \alpha,$$

نو  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$  لرو او همداسې:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha,$ $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta,$ $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma.$	(4.18)
---	--------

د کوساین جمله استعمالیدی شي، که په یوه درېگودي یا مثلث کې

- درې اړخونه یا ضلعي یا

- دوه اړخونه (ضلعي) او له هغو رابند کونج یا زاویه

ورر شوي وي.

بیلگه ۴. ۱۱: د دوه قوو (زور F1) او F2 لاس ته راوړل شوي R1 چی په پراته لورد

F1 سره کونج جوړوي، څنگه شمیرل کیري؟ د دې دوه قوو F1 او F2 برسیره له

دوي جوړ کونج هم معلوم دی. د دې پوښتنی کولو د روښانولو لپاره څیره ۴. ۱۹

ورکر شوي، له کومی څخه چی د دوي ترمنځ اړیکي هم معلوميزي . په دې پسی په  
 ABC دريگودي کی،  $F1 = c, F2 = a$  او  $180^\circ - \alpha$  معلوم دي،

او  $R = b$  لتوونکی یا غوښتونکی لويي دي؟

د کوساین جملی ( ۱۸ . ۶ ) څخه لرو

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \alpha$$

همداسی یا  $\Leftrightarrow$

$$R^2 = F1^2 + F2^2 - 2F1F2 \cos(180^\circ - \alpha)$$

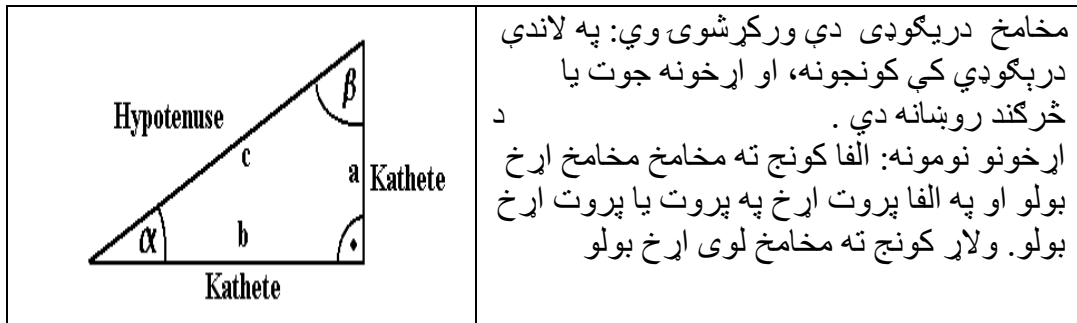
او د ساین له جملی ( ۱۷ . ۶ ) لاس ته راځي

له کومو چی  $\alpha$  ټاکل کیدی شي .

لوي اړخ او ولاړ یا عمود اړخونه (هیپوتینوز او کاتیتونه یا مخامخ- او په پروت اړخ):

۱- په ولاړ کونجیز دريگودي کی ولاړ کونج ته مخامخ اړخ هیپوتینوز یا لوي اړخ بولو .

۲- نور دواړه اړخونه غوښتوني- یا مطلوب کوچ ته مخامخ اړخ او په مطلوب کونج پروت اړخ یا ولاړ اړخونه یا کاتیتونه بولو .

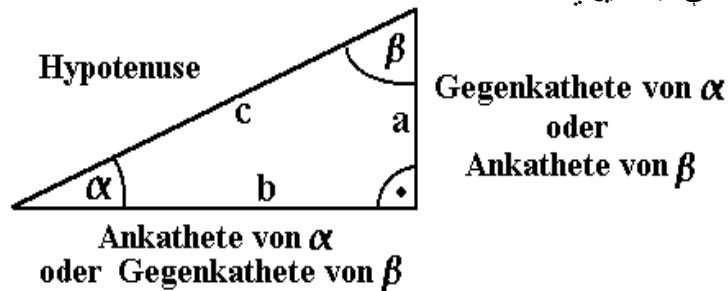


-

لند يا تکرار: پورته او په لاندې بیلگه کې دا اړخونه د غوښتونې کونج مخامخ او په پراته اړخونه بلل کېږي

بیلگه

بیا دې همغه پورته درېګوډۍ ورکړ شوی وي، چې په بیتا پروتاوخ یا کاتیت د الفا مخامخ اړخ یا کاتیت او په څټ په الفا پرو اړخ یا ه کاتیت د بیتا مخامخ اړخ یا کاتیت ده، چې په څیره کې لیدل کېږي.



د ساین جمله

په تریګونومتري کې ساینجه د درېګوډي د یوه کونج او د دې کونج مخامخ اړخ ترمنځ اړیکې ښایي. دا له البتانی میندل شوي او ښوول شوي. د درېګوډي درې اړخونه او درې گونجونه، وړانګه او چاپیری ورکړ شوي (لکه په فرمول کې) نو باور لري:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2r = \frac{u}{\pi}$$

یادونه: دا پورته فرمول دې (6,14) وي.

زیات وخت د ساین جمله په داسې ډول هم ورکول کېږي:

$$\sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma = a : b : c$$

که چیرې په درېګوډي کې د ساین جملې له لارې څه ښوول کېږي، نو دې ته دې پام وي، چې په اینټروال  $[0^\circ; 180^\circ]$  کې په ټولیزه توګه د همغه کونج دوه یو له بل بیل ارزښتونه لیدل کېږي، دا: دوه گونوالی گونګرواینڅجمله په ګوته کوي.

د دې لپاره دې د کوساین جمله هم وکتل شي

ښوونه: ( دا څیره دې ۶ ، ۱۸ وي او دا نا نومول شوي کونجونه دې x,y وي )

	$\sin \alpha = \frac{h_c}{b}$ $\sin \beta = \frac{h_c}{a}$ <p>په <math>h_c</math> پسې يې اوبی کوو</p> $h_c = b \cdot \sin \alpha$ <p>د برابر ايسونو له لارې لاس ته راځي</p> $a \cdot \sin \beta = b \cdot \sin \alpha$ <p>که په <math>\sin \alpha \cdot \sin \beta</math> وويشو، نو د غوښتنې لومړی برخه کې لاس ته</p> $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta}$ <p>راځي</p>
--	--

برابرون له  $\frac{c}{\sin \gamma}$  سره په پيدايښتي توگه جگې  $h_a$  او يا  $h_b$  لاس ته راكوي

د کارونې بيلگه: درجگودی ABC لارو او ورکړ شوي:

$$a = 5,4 \text{ cm} , b = 3,8 \text{ cm} , \alpha = 73^\circ$$

دا نورې لويې دې په درېگودي کې پيداشي

د  $\beta$  شميرلو لپاره د ساين جمله کارول کيږي

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta}$$

$$\sin \beta = \frac{b \cdot \sin \alpha}{a} = \frac{3,8 \text{ cm} \cdot \sin 73^\circ}{5,4 \text{ cm}} = 0,67$$

$$\beta = \underline{42^\circ}$$

لکه د خه مو، چې گوته ورته ونیوله یو بل کونج هم د همدې ارزښت سخته شته ، یانې

$$\beta' = 180^\circ - 42^\circ = 138^\circ$$

د دې اوبی په پوښتنه کې نه راځي، ځکه چې د درېګوډي د کونجونو زیاتون به له ۱۸۰ درجو څخه واوړي.

او نو گاما د کونج زیاتون جملې له لارې لاس ته راوړو

$$\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta = 180^\circ - 73^\circ - 42^\circ = \underline{65^\circ}$$

اړخ  $c$  هم داسې لاس ته راځي

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

$$c = \frac{a \cdot \sin \gamma}{\sin \alpha} = \frac{5,4 \text{ cm} \cdot \sin 65^\circ}{\sin 73^\circ} = \underline{5,118 \text{ cm}}$$

دکوساین جمله

په تریگونومتری کې کوساینجمله په درېګوډي کې د درېګوډي د اړخونو او کونجونو

ترمنځ اړیکې ښایي ، چې په لاندې توګه ورکړ شوي دي :

یادونه : دا لاندې فرمولونه دې ( ۱۸۰ ) وي



۶ گونومتری ( کونجکچ یا -اندازونه

۲۰۱

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \gamma$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos \beta$$

که گاما ۹۰ درجی وي، نو دپیتاگوراس جملی له مخی لرو:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

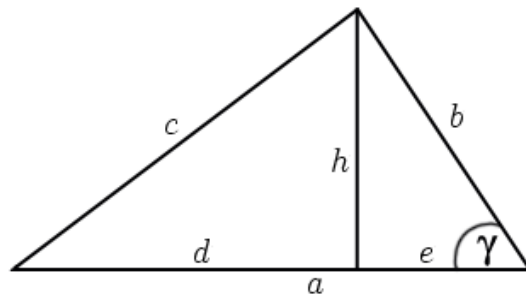
د کوساین جمله استعمالیدی شي، که په یوه دریگودی کی

- درې اړخونه (SSS) یا

- دوه اړخونه او له هغو بند کونج (SWS) ورکړ شوي وي.

که له پورته څخه یې درې ورکړ شوي وي، نو څلورم یې پیدا کولی شو

بڼونه :



د درېگودی په کین لور د پیتاگوراس قضیه استعمالوو، چې د  $c^2$  لپاره یوه شمیرافاده یا -  
وینه پیدا کړو، د دې لپاره د دې خوا د ولاړ اړخونو یا کاتینو اوږدوالی څلوری یا مربع  
باید پیدا شي

$$h^2 = b^2 - e^2$$

د بني اړخ لپاره د پیتاگوراس قضیې استعمال څخه لرو

$$d^2 = (a - e)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot e + e^2$$

( د بینوم فرمول )

د پیتاگوراس جملې له مخې د کین لور لپاره لرو:

$$c^2 = h^2 + d^2$$

اوس دواړه پورته پیدا شوي شمیرو بینې یا- افادې سره زیاتوو:

$$c^2 = b^2 - e^2 + a^2 - 2 \cdot a \cdot e + e^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot e$$

$$\cos \gamma = \frac{e}{b} \left( \frac{\text{ankathet}}{\text{Hypotenuse}} \right)$$

اوس باور لري

$$e = b \cdot \cos \gamma$$

له دې لاس ته راځي

دا پورته ځای په ځای کوو، نو د  $c^2$  لپاره لاس ته راځي:

$$c^2 = \underline{\underline{a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \gamma}}$$

بیلگه:

یو درې کورنۍ ABC ، چې اړخونه یې څرگند دي، ورکړ شوی

$$a = 4,9 \text{ cm} ,$$

$$b = 2,8 \text{ cm}$$

$$c = 3,5 \text{ cm}$$

- ۲۰۳

۶ گونمتری ( کونجکچ یا -اندازونه

د کونج  $\beta$  لویوالی غوارو پیداکړو

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos \beta$$

$$2 \cdot a \cdot c \cdot \cos \beta = a^2 + c^2 - b^2$$

$$\cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2 \cdot a \cdot c} = \frac{(4,9 \text{ cm})^2 + (3,5 \text{ cm})^2 - (2,8 \text{ cm})^2}{2 \cdot 4,9 \text{ cm} \cdot 3,5 \text{ cm}} = 0,83$$

$$\beta = \underline{34^\circ}$$

دا پیژند ورکو یا داسې تعریفوو

$$\sin A = \frac{\text{opp}}{\text{hyp}} \quad \cos A = \frac{\text{adj}}{\text{hyp}}$$

$$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{\text{opp}}{\text{adj}} \quad \sec A = \frac{1}{\cos A} = \frac{\text{hyp}}{\text{adj}}$$

$$\cot A = \frac{\cos A}{\sin A} = \frac{\text{adj}}{\text{opp}} \quad \csc A = \frac{1}{\sin A} = \frac{\text{hyp}}{\text{opp}}$$

**Common formular** د فرمولونه

**Pythagorean identities** د پیتاگوراس کتمتوالی

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$$

$$1 + \tan^2 A = \sec^2 A$$

$$1 + \cot^2 A = \csc^2 A$$

**Sum and difference identities** زیاتون او کمون کتمتوالی

$$\sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$$

$$\cos(A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$$

$$\tan(A + B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$$

$$\sin(A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$$

$$\cos(A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$$

$$\tan(A - B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$$

**Double-angle identities** دوه برابرہ کونج کی کتمتوالی

$$\sin 2A = 2 \sin A \cos A$$

$$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A = 2 \cos^2 A - 1 = 1 - 2 \sin^2 A = \frac{1 - \tan^2 A}{1 + \tan^2 A}$$

$$\tan 2A = \frac{2 \tan A}{1 - \tan^2 A} = \frac{2 \cot A}{\cot^2 A - 1} = \frac{2}{\cot A - \tan A}$$

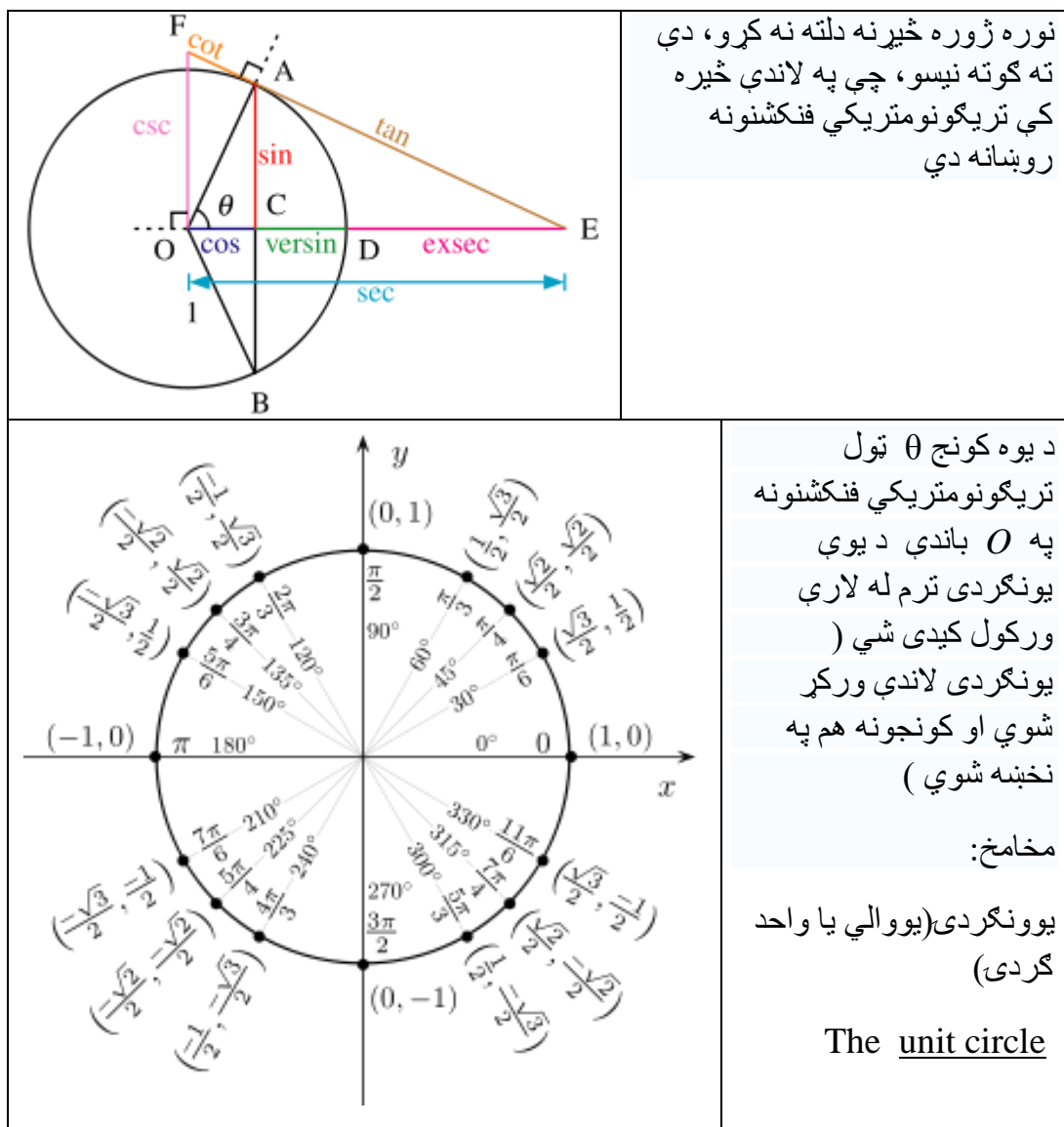
**Half-angle identities** د نیم کونج کتمتوالی

$$\sin \frac{A}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos A}{2}}$$

$$\cos \frac{A}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos A}{2}}$$

$$\tan \frac{A}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos A}{1 + \cos A}} = \frac{\sin A}{1 + \cos A} = \frac{1 - \cos A}{\sin A}$$

د تريگونومتریکی کیمتوالي لیست List of trigonometric identities



**Notation لیکنبڼه**

دا لاندې لیکنبڼه یا - ډول د ټولو تریگونومتریکی - یا مثلثاتی فنکشنونو ساین، کوساین، تانجنټ، کوتانجنټ، سیکانټ، کوسیکانټ لپاره باور لري، د لنډونې لپاره په لاندې جدول کې یواځې ساین او کوساین لیکل شوي دي

$\arcsin(x)$  کیدی شي  $\sin^{-1}(x)$  ولیکل شي، خو د  $(\sin(x))^{-1}$  سره باید بدل نه شي

**Definitions پیژند:**

$$\cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \quad \cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} = \frac{1}{\tan(x)}$$

تل بیرته راگرځیدنه، سیومتری او بدلون . Periodicity, symmetry, and shifts

په یوون (یووالي-) گردی یا دایره کې ساده لیدل کیږي

**Periodicity تل بیرته راگرځیدنه**

ساین، کوساین، سیکانټ، کوسیکانټ تل بیرته راگرځیدنه  $2\pi$  ده (پوره گردی) ( تکرار دی )

$$\sin(x) = \sin(x + 2k\pi)$$

$$\cos(x) = \cos(x + 2k\pi)$$

$$\sec(x) = \sec(x + 2k\pi)$$

$$\csc(x) = \csc(x + 2k\pi)$$

تانجنټ، کوتانجنټ تل بیرته راگرځیدنه  $\pi$  لري ( نیمگردی یا نیمدایره ) :

$$\tan(x) = \tan(x + k\pi)$$

$$\cot(x) = \cot(x + k\pi)$$

### Symmetry سیومتری

د تریگونومتریکی فنکشنونو لپاره سیومتری، لکه لاندې کبل شوي

یا  $x \rightarrow -x$ ,  $x \rightarrow \pi/2 - x$  یا  $x \rightarrow \pi - x$  په لاندې ډول ده

$$\begin{array}{lll} \sin(-x) = -\sin(x), & \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x), & \sin(\pi - x) = \sin(x) \\ \cos(-x) = \cos(x), & \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x), & \cos(\pi - x) = -\cos(x) \\ \tan(-x) = -\tan(x), & \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot(x), & \tan(\pi - x) = -\tan(x) \\ \cot(-x) = -\cot(x), & \cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \tan(x), & \cot(\pi - x) = -\cot(x) \\ \sec(-x) = \sec(x), & \sec\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \csc(x), & \sec(\pi - x) = -\sec(x) \\ \csc(-x) = -\csc(x), & \csc\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sec(x), & \csc(\pi - x) = \csc(x) \end{array}$$

بدلون: د  $\pi/2$  او  $\pi$  بدلون دی

$$\begin{array}{ll} \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x), & \sin(x + \pi) = -\sin(x) \\ \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(x), & \cos(x + \pi) = -\cos(x) \\ \tan\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\cot(x), & \tan(x + \pi) = \tan(x) \\ \cot\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\tan(x), & \cot(x + \pi) = \cot(x) \\ \sec\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\csc(x), & \sec(x + \pi) = -\sec(x) \\ \csc\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sec(x), & \csc(x + \pi) = -\csc(x) \end{array}$$

د پیتاگوراس کټمتوالی Pythagorean identities

د دي بنسټ د پیتاگوراس قضیه ده

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

د کونج د زیاتون او کمون کتمتوالی Angle sum and difference identities

$$\sin(x \pm y) = \sin(x) \cos(y) \pm \cos(x) \sin(y)$$

د کمون او زیاتونڅخې په ورته ترتیب راځي لکه په فرمولونو کې

$$\cos(x \pm y) = \cos(x) \cos(y) \mp \sin(x) \sin(y)$$

که په کین لور “+” وي، نو په بڼې لور “-” راځي او په څنډ

$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan(x) \pm \tan(y)}{1 \mp \tan(x) \tan(y)}$$

د کونج دوه ځلوالی فرمول Double-angle formulae

که  $x = y$  کېږدو د پیناګواراس یا موفریې فرمول له لارې لرو د  $n = 2$  له امله •

$$\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x) = \frac{2 \tan(x)}{1 + \tan^2(x)}$$

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 2 \cos^2(x) - 1 = 1 - 2 \sin^2(x) = \frac{1 - \tan^2(x)}{1 + \tan^2(x)}$$

$$\tan(2x) = \frac{2 \tan(x)}{1 - \tan^2(x)}$$

$$\cot(2x) = \frac{\cot(x) - \tan(x)}{2}$$

Half-angle formular د نیمکونج فرمول



$$\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos(x)}{2}}$$

$$\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos(x)}{2}}$$

$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\sin(x/2)}{\cos(x/2)} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}. \quad (1)$$

که د ریښې لاندې ماتباندي او مات لاندې له  $1 + \cos x$  سره ځل شي، نو د پیتاگوراس جملې له مخه لرو:

$$\begin{aligned} \tan\left(\frac{x}{2}\right) &= \pm \sqrt{\frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{(1 + \cos x)(1 + \cos x)}} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos^2 x}{(1 + \cos x)^2}} \\ &= \frac{\sin x}{1 + \cos x}. \end{aligned}$$

په ورته توګه که برابرې له (۱) له  $1 - \cos x$  سره ځل شي، نو لور

$$\begin{aligned} \tan\left(\frac{x}{2}\right) &= \pm \sqrt{\frac{(1 - \cos x)(1 - \cos x)}{(1 + \cos x)(1 - \cos x)}} = \pm \sqrt{\frac{(1 - \cos x)^2}{(1 - \cos^2 x)}} \\ &= \frac{1 - \cos x}{\sin x}. \end{aligned}$$

د نیمکونج فرمولونه د تانجنت لپاره دي:

$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\sin(x)}{1 + \cos(x)} = \frac{1 - \cos(x)}{\sin(x)}.$$

$$t = \tan\left(\frac{x}{2}\right), \quad \text{که کیردو}$$

$$\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2} \quad \text{نولرو:}$$

**Product-to-sum identities** د خل و زیاتون ته کتمتوالی

$$\cos(x) \cos(y) = \frac{\cos(x-y) + \cos(x+y)}{2}$$

$$\sin(x) \sin(y) = \frac{\cos(x-y) - \cos(x+y)}{2}$$

$$\sin(x) \cos(y) = \frac{\sin(x-y) + \sin(x+y)}{2}$$

**Sum-to-product identities** د زیاتون-و-خل ته کتمتوالی ( برابرون)

که د  $x$  لپاره  $(x+y)/2$  او  $y$  لپاره  $(x-y)/2$  کیردو نولرو

$$\cos(x) + \cos(y) = 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\sin(x) + \sin(y) = 2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\cos(x) - \cos(y) = -2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\sin(x) - \sin(y) = 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

که  $x, y, z$  د کوم درېگودې کونجونه وي یا په نورو کلیمو، نو

نیمگردی یا نیمدایره  $\leq$  if  $x + y + z = \pi = \text{half circle}$ ,

$$\tan x + \tan y + \tan z = \tan x \cdot \tan y \cdot \tan z \text{ او}$$

$$\text{and } \sin(2x) + \sin(2y) + \sin(2z) = 4 \sin(x) \sin(y) \sin(z).$$

### Trigonometric conversions تریگونومتریکی په ختوالی

هر تریگونومتریکی فنکشن د بل تریگونومتریکی فنکشن سره سیده یا سیخی اریکی لري. داسې اریکی د په خت اریکو له لاري افاده یا ویل کیدی شي، لکه: که  $\phi$  او  $\psi$  د تریگونومتریکی فنکشنونو د یوې جوړې نمایندګی وکړي، او  $\psi = \text{arc}\psi$  دې د  $\psi$  په خت وي، داسې چې  $\psi(\text{arc}\psi(x)) = x$  نو  $\phi(\text{arc}\psi(x))$  کیدی شي د یو الجبري فنکشن ترم  $x$  په خیر ووېلی شي یا افاده شي.

داسې فرمولونه د لاندې جدول له لاري بنوول کیدی شي: مور دا نوره نه روښانه کوو او په لاندې جدول پوهیدی شو

$\cot$	$\sec$	$\csc$	$\text{Tan}$	$\cos$	$\sin$	$\phi \setminus \psi$
$\frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x}$	$\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$	$\frac{1}{x}$	$\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$	$\sqrt{1 - x^2}$	$x$	<b>sin</b>
$\frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$	$\frac{1}{x}$	$\frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x}$	$\frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$	$x$	$\sqrt{1 - x^2}$	<b>Cos</b>
$\frac{1}{x}$	$\sqrt{x^2 - 1}$	$\frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$	$x$	$\frac{\sqrt{1 - x^2}}{x}$	$\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$	<b>Tan</b>
$\frac{\sqrt{1 + x^2}}{x}$	$x$	$\frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$	$\sqrt{1 + x^2}$	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$	<b>sec</b>
$x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$	$\sqrt{x^2 - 1}$	$\frac{1}{x}$	$\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$	$\frac{\sqrt{1 - x^2}}{x}$	<b>cot</b>

$$\sin 0 = \sin 0^\circ = 0 = \cos 90^\circ = \cos \left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\sin \left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin 30^\circ = 1/2 = \cos 60^\circ = \cos \left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\sin \left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin 45^\circ = \sqrt{2}/2 = \cos 45^\circ = \cos \left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\sin \left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin 60^\circ = \sqrt{3}/2 = \cos 30^\circ = \cos \left(\frac{\pi}{6}\right)$$

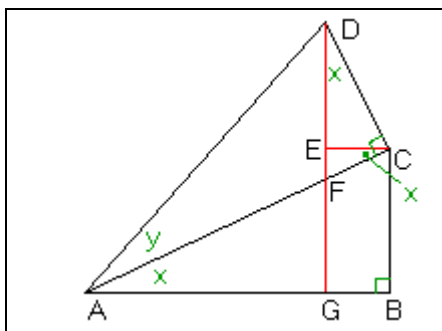
$$\sin \left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin 90^\circ = 1 = \cos 0^\circ = \cos 0$$

د طیلايي نسبت  $\varphi$  له امله لرو

$$\cos \left(\frac{\pi}{5}\right) = \cos 36^\circ = \frac{\sqrt{5} + 1}{4} = \varphi/2$$

$$\sin \left(\frac{\pi}{10}\right) = \sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5} - 1}{4} = \frac{\varphi - 1}{2} = \frac{1}{2\varphi}$$

**جیومتریکی غوښتنه (ثبوت) Geometric proofs**



$$\sin(x + y) = \sin(x) \cos(y) + \cos(x) \sin(y)$$

په مخامخ څیره کې کونج  $x$  د ولاړ کونجیز درېکودي  $ABC$  برخه ده، او کونج  $y$  د ولاړ کونجیز درېکودي  $ACD$  برخه ده. نو جوړښت  $DG$  و  $AB$  باندې ولاړ او  $CE$  و  $AB$  ته غبرگ دی

ACE = کونج BAC = Angle x

EG = BC.     CDE = x کونج

$$\sin(x + y)$$

$$= \frac{DG}{AD}$$

$$= \frac{EG + DE}{AD}$$

$$= \frac{BC + DE}{AD}$$

$$= \frac{BC}{AD} + \frac{DE}{AD}$$

$$= \frac{BC}{AD} \cdot \frac{AC}{AC} + \frac{DE}{AD} \cdot \frac{CD}{CD}$$

$$= \frac{BC}{AC} \cdot \frac{AC}{AD} + \frac{DE}{CD} \cdot \frac{CD}{AD}$$

$$= \sin(x) \cos(y) + \cos(x) \sin(y).$$

$$\cos(x + y) = \cos(x) \cos(y) - \sin(x) \sin(y)$$

د پورته څیرې څخه کار اخلو: Using the above figure:

$$\cos(x + y)$$

$$= \frac{AG}{AD}$$

$$= \frac{AB - GB}{AD}$$

-

$$\begin{aligned}
 &= \frac{AB - EC}{AD} \\
 &= \frac{AB}{AD} - \frac{EC}{AD} \\
 &= \frac{AB}{AD} \cdot \frac{AC}{AC} - \frac{EC}{AD} \cdot \frac{CD}{CD} \\
 &= \frac{AB}{AC} \cdot \frac{AC}{AD} - \frac{EC}{CD} \cdot \frac{CD}{AD} \\
 &= \cos(x) \cos(y) - \sin(x) \sin(y).
 \end{aligned}$$

د  $\sin(x - y)$  او  $\cos(x - y)$  فرمولونو بڼوونه

د  $\cos(x - y)$  او  $\sin(x - y)$  لپاره فرمولونه ساده بڼوول کيږي، که د  $\cos(x + y)$  او  $\sin(x - y)$  لپاره فرمولونه وپيژنو

$$\sin(x - y) = \sin(x) \cos(y) - \cos(x) \sin(y)$$

که په فرمول  $\sin(x + y)$  کې د  $y$  په ځای  $-y$  کيږدو نو لرو

$$\sin(x + (-y)) = \sin(x) \cos(-y) + \cos(x) \sin(-y).$$

که د فاکت څخه، چې ساين جوړه او کوساين نا جوړه فنکشنونه دي، نو لرو

$$\sin(x - y) = \sin(x) \cos(y) - \cos(x) \sin(y).$$

$$\cos(x - y) = \cos(x) \cos(y) + \sin(x) \sin(y)$$

موږ په پورته فرمول  $\cos(x + y)$  کې د  $y$  په ځای  $-y$  ږدو، نو لرو

$$\cos(x + (-y)) = \cos(x) \cos(-y) - \sin(x) \sin(-y).$$

که د فاکت څخه، چې ساین جوړه او کوساین ناچره فنکشنونه دي، نو لاس ته راوړو

$$\cos(x - y) = \cos(x) \cos(y) + \sin(x) \sin(y).$$

۶. ۵ تریگونومتریکی یا کونجکچ فرمولونه

د کونجبلواک یا کونجفنکشن د شمیرلو لپاره، له دا اوس څرگند فرمولونو، یوه د اړیکو ډله شته ( د زیاتون) جمع ( تیریم)، له کومو یی چی دلته یوڅو راوړل غواړو. د همغو فرمولتولگه) کتاب چي فرمولونه په کي راټول وي ( کی لاندې فرمولونه پیدا کیدی شي

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cdot \cos y \pm \cos x \cdot \sin y; \dots \dots \dots (6, 19)$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cdot \cos y \mp \sin x \cdot \sin y; \dots \dots \dots (6, 20)$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cdot \cos x; \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x; \dots \dots \dots (6, 21)$$

$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \pm \tan x \cdot \tan y}; \dots \dots \dots (6, 22)$$

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2}; \dots \dots \dots (6, 23)$$

$$\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cdot \sin \frac{x-y}{2};$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2}; \dots \dots \dots (6, 24)$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \cdot \sin \frac{x-y}{2}$$

ددې اړیکو بنسونه یوه مهمه کورني دنده ده، خو څه به په دې لاندې بېلگه کې وښایو

بیلگه ۶ . ۱۲ :

$$\cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$$

مورد له خیرې ۴ . ۱۸ څخه مخ ته څو، او ځای په ځای کوو  $\gamma_1 = x$  ،  $\gamma_2 = y$  نولو  $\gamma = x + y$  .

د کوساین له جملې لاس ته راځي

$$\begin{aligned} 2ab \cos \gamma &= a^2 + b^2 - c^2, \quad a^2 = p^2 + h_c^2, \quad b^2 = q^2 + h_c^2, \quad c^2 = (q+p)^2 \\ &= p^2 + h_c^2 + q^2 + h_c^2 - (q+p)^2, \\ &= p^2 + h_c^2 + q^2 + h_c^2 - q^2 - 2qp - p^2 \end{aligned}$$

له  $2ab \cos \gamma = 2h_c^2 - 2qp$  څخه لاس ته راځي

$$\begin{aligned} \cos \gamma &= h_c^2 / ab - qp / ab = (h/a) \cdot (h/b) - (q/b) \cdot (p/a), \\ \cos \gamma &= \cos \gamma_1 \cdot \cos \gamma_2 - \sin \gamma_1 \cdot \sin \gamma_2 \\ \cos(x+y) &= \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y \end{aligned}$$

څه چې د بنوولو وو

یادونه: ځای په ځای باید دې ته گوته ونیسیم، چې د ضرب او وېش تړاو نسبت و جمعې اړ تفریق یا زیاتو او کمون تړاو ته کلک یا کلک نښتی دی.

بیلگه ۴ . ۱۳ - لاندې وینې یا افادې دې ساده شي

$$a) y = \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$$

دې (۶ . ۲۳) پسي د مساوات (برابرون) بنی اړخ د لاندې سره یو- یا هم ارزښته ده.

$$2 \sin \frac{\alpha - \frac{\pi}{4} + \alpha + \frac{\pi}{4}}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \frac{\pi}{4} - \alpha - \frac{\pi}{4}}{2} = 2 \sin \alpha \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 2 \sin \alpha \cos \frac{\pi}{4},$$



له کوم چې  $y = \sqrt{2} \sin \alpha$  لاس ته راځي

$$b) y = \cos\left(\frac{3}{2}x + \pi\right)$$

د ( ۶ . ۲۰ ) پسي لرو

$$\cos\left(\frac{3}{2}x + \pi\right) = \cos\frac{3}{2}x \cdot \cos\pi - \sin\frac{3}{2}x \cdot \sin\pi.$$

دا چې  $\cos \pi = -1, \sin \pi = 0$  دی، نو لاس ته راځي

$$y = \cos\left(\frac{3}{2}x + \pi\right) = -\cos\frac{3}{2}x.$$

دې نتيجه ته د ( ۶ . ۱۶ ) استعمال وروسته هم رسيدو، له کومې چې لاس ته راځي

$$\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha \text{ ist.}$$

بيلگه ۶ . ۱۴ برابرې يا مساوات  $\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}, 0 \leq \alpha \leq 2\pi,$  دې وښوول شي

دی  $1 = \cos^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2}$  او  $\cos \alpha = \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}$  له دې سره

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} &= \sqrt{\frac{\cos^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2} - (\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2})}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{2}} = |\sin \frac{\alpha}{2}| = \sin \frac{\alpha}{2} \quad (\text{wegen } 0 \leq \alpha \leq 2\pi). \end{aligned}$$

۶ . ۶ تمرینونه

۱ - بنسټيزه هندسه يا ځمکچونه

۱. ۱ - لاندې کونجونه دې په لینه اندازه همداسې په درجه اندازه ( د څسما یا دسیمال یا لسمیز او سمساکیسیمال ( د ۶۰ په بنسټ جوړ شوي گنل(که غواړی شمیرل) برخو) ورکړ شوي دي،

- |                           |                     |                           |                          |
|---------------------------|---------------------|---------------------------|--------------------------|
| 1.1.1. a) $15^\circ$      | b) $225^\circ$      | c) $105^\circ$            | d) $277,5^\circ$         |
| 1.1.2. a) $\frac{\pi}{8}$ | b) $\frac{\pi}{12}$ | c) $2\pi + \frac{\pi}{2}$ | d) $\pi - \frac{\pi}{3}$ |
| 1.1.3. a) $4,24^\circ$    | b) $70,9^\circ$     | c) $31^\circ 17' 20''$    | d) $228,1923^\circ$      |
| 1.1.4. a) 5,19            | b) 0,22             | c) 2,31                   | d) 1                     |

۲. ۱ - یو درېگودی له  $a = 4,5 \text{ cm}$ ,  $b = 12,2 \text{ cm}$ , او  $c = 11,7 \text{ cm}$  سره ورکړ شوی دی. دا درېگودی جوړ کړی! د اړخونو نیموونکی وکارې، د منح ولاړې، کونج نیموونکي او جگې، همداسې یې گردی خوندي او خوندي گردی گردی (یعنی دباندي او دننه گردی) رسم کړی.

۱. ۳ - لاندې درېگودی جوړ کړی

a)  $a = 11,7 \text{ cm}$ ,  $b = 9,2 \text{ cm}$ ,  $\gamma = 43,5^\circ$

b)  $c = 16,1 \text{ cm}$ ,  $\alpha = 84,6^\circ$ ,  $\beta = 51,9^\circ$

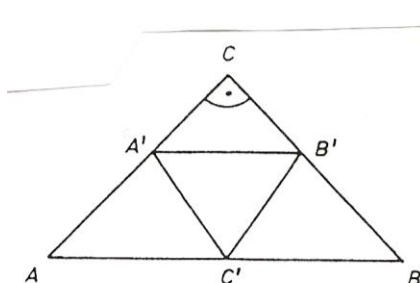


Bild 4.20 څایره

وښایې چې ولی دواړه درېگودي ورته دي!

۱. ۴ - یو مساوي پښیز، ولاړ کونجیز

درېگودي ABC ته یو مساوي

اړخیز درېگودی  $A'B'C'$  داسې په دننه

کی ورکړ شوی چې  $\overline{A'B'} \parallel \overline{AB}$  خغلي

او  $C'$  په  $\overline{AB}$  پرته ده (خیره ۴. ۲۰ دې

وکتل شي).

ورکړی  $\overline{A'B'} = \overline{A'C'} = \overline{B'C'}$  د  $\overline{AC} = \overline{BC}$  سره!

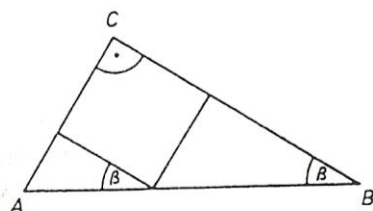


Bild 4.21

۱. ۵ - په یوه ولاړ کونجیز دریگودي کی د  
خیرې ۴ . ۲۱ سره سم په لیدور ډول  
په دننه کی یوه مربع ورکړ شوی. د مربع  
اړخونه وشمیری  
الف ) له کانتو څخه

ب ) له هیپوتینوز پېر خو څخه

۲ . د جشمیرنی سره د ارزښتونو ټاکنه

۱. ۲ - له لاندې کونجونو څخه د لاندې کونجونو لپاره فنکشن ارزښتونه پیدا کړی:

$$a) \alpha = 47,15^\circ, \quad b) \alpha = -390^\circ, \quad c) \alpha = 7,784, \quad d) \alpha = 13,195$$

۲. ۲ - کونج B دې د  $\sin B = a$ ,  $\cos B = a$ ,  $\tan B = a$ ,  $\cot B = a$  څخه د

$$a) a = 0,8290, \quad b) a = -0,2907, \quad c) a = -2,145, \quad d) a = 0,8660$$

لپاره وشمیرل شي ( په اوبی کی دې د الفا په ځای بیتا ولیکل شي !!! )

۳ . په ولاړ کونجیز دریگودي کې شمیرنی

۱. ۳ - په ولاړ کونجیز (  $\gamma = 90^\circ$  ) دریگودي کې معلوم دي

$$a = 5 \text{ cm}, \quad c = 12 \text{ cm} \quad (\text{الف}) \quad a = 3 \text{ cm}, \quad b = 4 \text{ cm} \quad (\text{ب})$$

کوم ارزښتونه  $\sin \alpha$ ,  $\cos \alpha$ ,  $\tan \alpha$ ,  $\cot \alpha$  لري؟

۲. ۳ - ولاړ کونجیز دریگودي کې (  $\gamma = 90^\circ$  ) نه ورکړ شوي کونجونه او نه ورکړ

شوي اړخونه وشمیری، لاندې لویی مور ته معلومي دي:

$$a) a = 50 \text{ cm}, \quad b) a = 40 \text{ cm}, \quad c) b = 70 \text{ cm}, \quad d) c = 65 \text{ cm}$$

$$b = 78,1 \text{ cm} \quad \alpha = 43^\circ 36' \quad \alpha = 18^\circ 55' \quad B = 59^\circ 29'$$

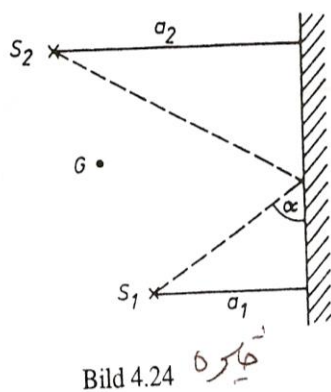
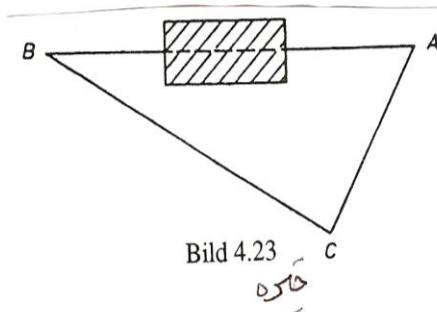
۳. ۳ - وشمیری  $h_c$ ,  $A$  او همداسی د ټاکلي مساوي پښیز دریگودي ورکړ شوي

پاتې کونجونه او اړخونه (  $a = b$ ,  $\alpha = B$  ):

$$a) a = 66 \text{ cm}, \quad b) c = 22,4 \text{ cm}, \quad c) a = 38,9 \text{ cm}, \quad d) c = 30,3 \text{ cm}$$

$$c = 130 \text{ cm} \quad \alpha = 47,8^\circ, \quad \gamma = 33,3^\circ, \quad \gamma = 48,2^\circ$$

ب) درې قوې دې د زوریا قوت  $F_1 = 167,5\text{N}$ ,  $F_2 = 112\text{N}$ , او  $F_3 = 157\text{N}$  سره ورکړ شوي وي، چې په گڼه یو دريگودي جوړوي. د دې دريگودي کونجونه چې له اړخونو رابند دي، څومره لوي دي؟



پ) دوه ټکي A او B چې یوه کوری مخه پټه کړې وي، یو له بل څومره لرې دي، که  $\overline{BC} = 75,25\text{ m}$ ,  $\overline{AC} = 51,75\text{ m}$  او  $\angle BCA = 71^\circ 15' 45''$  وي (څیره ۴، ۲۳) ت) د دوه بیخ هاګي لوبغاړو  $S_1$  او  $S_2$  ترمنځ یو د مخالف تیم لوبغاړی G ولاړ دی.  $S_1$  په داسی ډول توپ و  $S_2$  ته وهي چې توپ په یوه دیوال ولږیږي. (څیره ۴، ۲۳ وګوری.) د دواړو لوبغاړو  $S_1$  او  $S_2$  لږوالی څومره دی؟ که د دوي واټن له دیوال  $a_1 = 2,5\text{ m}$  همدا سی  $a_2 = 6,5\text{ m}$  وي او توپ د یوه دې دیوال سره په یوه کونج  $\alpha = 42^\circ$  ولږیږي؟

۵. د تریگونومتریکی یا درېگودیزو (مثلثاتي) فرمولونو استعمال

۵. ۱ - بی له جیشمیری او جدول دې نور دوه درې فنکشن ارزښتونه دې وشمیرل شي، که ورکړ شوي وي:  $(0 < \alpha < 2\pi)$ :

a)  $\sin \alpha = \frac{1}{2}\sqrt{2}$     b)  $\cos \alpha = \frac{4}{5}$     c)  $\tan \alpha = \sqrt{3}$     d)  $\cot \alpha = -\sqrt{3}$

۵ . ۲ - لاندی مساوات وینایی:

$$5.2.1. a) 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$b) 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

$$c) \cos \alpha \cdot \sqrt{1 + \tan^2 \alpha} = 1$$

$$d) 1 + 2 \cos \alpha = 4 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1$$

$$5.2.2. a) \sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$$

$$b) \cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$$

$$c) \tan \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$d) \cot \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$5.2.3. a) \sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$$

$$b) \cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$$

$$c) \tan 3\alpha = \frac{3 \tan \alpha - \tan^3 \alpha}{1 - 3 \tan^2 \alpha}$$

$$d) \cot 3\alpha = \frac{\cot^3 \alpha - 3 \cot \alpha}{3 \cot^2 \alpha - 1}$$

$$5.2.4. a) \cos 2\alpha = \cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha$$

$$b) \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$c) \cos 2\alpha = 1 - 8 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$d) \cos 2\alpha = \frac{1 - \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$$

$$5.2.5. a) \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \cos 2\alpha = \frac{1}{4} \sin 4\alpha$$

$$b) \frac{\cos 2\alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha} = -(\cos \alpha + \sin \alpha)$$

$$c) \sin \alpha + \sin \left( \alpha + \frac{2\pi}{3} \right) + \sin \left( \alpha + \frac{4\pi}{3} \right) = 0$$

$$d) \sin^2 (3\pi - \alpha) + \sin^2 (6,5\pi + \alpha) = 1$$

## ٧٠ گډوله گڼونه يا کمپليکس اعداد Komplexe Zahlen

د مخه مو وليدل، چې څنگه يوه گڼډيری پر بله گڼډيری ودانه شوی ده. که ولرو

$$x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -1 \quad (7, 1)$$

که پورته برابرون ته وگورو، نو څرگند ليدل کيږي، چې دا په رييلگڼونډيری کې اوبی يا حل نه لري، نو له دې امله بايد (7, 1) د گڼنو ډيری وغزول شي. له

$$x_1 = \sqrt{-1}, x_2 = -\sqrt{-1}, \dots \dots (7, 2)$$

د  $\sqrt{-1}$  گڼ، چې د لومړي ځل لپاره د رييل مانانه لري، دا سومبول د  $i = \sqrt{-1}$

ټاکل کيږي چيرته، چې لرو:  $i^2 = -1$

$$x_1 = i, x_2 = -i \Leftrightarrow x_{12} = \pm i, \dots \dots (7, 3)$$

ليکو : دا پورته د لاندې سره

$$i^2 = -1 \quad (7, 4)$$

د (7,1) ځاي نيسي، ځکه، چې باور لري

$$x_1^2 = i^2 = -1 \Leftrightarrow x_2^2 = i^2 = -1$$

دا چې  $i$  رييل مانا نه لري، نو دې سومبول ته ايماجينارگن (imaginär) لاتين: فقط خيالي) يوون (واحد) وايو.

برابرون

$$x^2 + a = 0 \Leftrightarrow x^2 = -a, \quad a > 0 \quad (7,5)$$

کيدی شي په لاندې ډول وليکل شي

$$x_1 = \sqrt{-a} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{a}i, \dots \dots \dots (7,6)$$

$$x_2 = -\sqrt{-a} = -\sqrt{a} \cdot \sqrt{-1} = -\sqrt{a}i$$

دلته د (7,4) له امله باور لري

$$x_1^2 = ai^2 = -a, x_2^2 = (-\sqrt{a})^2 i^2 = -a, \dots \dots \dots (5,7)$$

اوس د ايماجينار گن يوون (واحد) توليز کوو

$$z = bi, b \in R, i^2 = -1, \dots \dots \dots (5,8)$$

ايماجيناريوون (واحد)  $z = i$  يو ځانگړی ايماجينارگن  $b=1$  دی

د توليزې څلورۍ (عمومي مربع) برابرون (مساوات) اوبی (حل) :

$$x^2 + px + q = 0, \quad p, q \in R, \dots \dots \dots (7,9)$$

په لاندې ډول د څلورې پوره کولو يا مربع تکميلول له لارې

$$(x + p/2)^2 = x^2 + px + p^2 / 4$$

=> لاس ته راځي يا لرو

$$x^2 + px + q = (x + p/2)^2 + (q - p^2/4) \quad (7, 10)$$

$$(x + p/2)^2 = p^2/4 - q \quad (7, 11)$$

او که فورمال پسي وگڼل شي

$$\pm \sqrt{p^2/4 - q} = \quad_{1,2} (x + p/2)$$

نو لرو

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{p^2/4 - q}, \dots \dots \dots (7,12)$$

د  $p^2 = 4q$  لپاره رييل «ډبل» اوبی يا حل لاس ته راځي

$$x_1 = x_2 = -\frac{p}{2}$$

که  $p^2 > 4q$  وي نو (7,12) دوه مختلف رييل اوبيوني يا حلونه منځ ته راوړي.

که  $p^2 < 4q$  وي، نو رييل اوبی نه شته دی

د ايماجينار گڼ په مرسته کيدی شي وليکو

$$\sqrt{\frac{p^2}{4} - q} = \sqrt{[q - \frac{p^2}{4}](-1)} = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}.i$$

که اوس ځاي پر ځاي کړو



$$-\frac{p}{2} = a \in R, \sqrt{q - p^2/4} = b \in R$$

نو په لاندې بڼه دوه اوبيوني يا حلونه لاس ته راځي

$$x_{1,2} = a \pm bi; a, b \in R$$

د دې فورم يا بڼې گڼونه کمپليکس گڼونه (Komplexe Zahlen) (لاتين: پوره کوونکي - يا پوره کيدونکي-) بلل کيږي

$$z = a+bi, i^2 = -1; a, b \in R \quad (7,13)$$

د کمپليکس گڼونو ډيری په C سره په نڅښه کوو

$$\bar{z} = a - bi, \dots \dots \dots (7,14)$$

دا پورته (7,14) و (7,13) ته کنجوگيري کمپليکس گڼ بلل کيږي. لاند کنجوگيري کمپليکس گڼ يا اوبښتی گڼ

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}, \dots \dots \dots (5,15)$$

د دې مطلقه يا ساده ارزښت

$$a = \text{re}(z) \Leftrightarrow b = \text{Im}(z) \quad (7,16)$$

د دې رييل همدا رنگه ايماجينار برخه

دوه کمپليکس گڼونه برابر بلل کيږي، که دوي په رييل او ايماجينار برخه کې يو له بل سره برابر وي:

$$a_1 + b_1i = a_2 + b_2i \Leftrightarrow a_1 = a_2, b_1 = b_2$$

مور تل په پام کې لرو، چې  $i^2 = -1$  ایښول شوي

گډوله يا کمپلیکس عدد کیدی شي په سطحه يا هاره کې د لاندې شکل سره سم (د گاوس د اعدادو سطحه). سری د کمپلیکسو اعدادو سره همغښي شمیرنه کوي، لکه د حقيقي اعدادو سره او په پام کې نیسي چې:  $i^2 = -1$

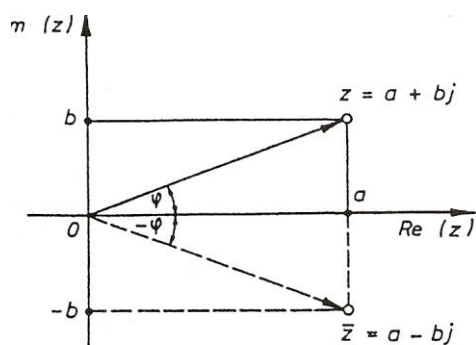


Bild 5.1

مور دې سیستم ته پروت ولاړ سیستم وایو يا کواور دیناتسیستم Koordinaten system

پورته څیره دې وکتل شي

پروتولاړ سیستم ته د  $(x, y)$  - سیستم هم وایي په پروتولاړ سیستم کې پروت څرخون (محور) د  $x$  - محور ته د هوارې یاسطخې ریبلبرخه او ولاړ محور یا د  $y$  - محور ته یپایماجینار برخه وایي لکه څنگه، انځور شوي دي. په دې توگه په پروتولاړ سیستم کې یو ټکی منځ ته راځي، چې کمپلیکس گڼ انځوروي. (مور دا اوس دا برخه نوره نه څیرو، خو دا د وکتورونو په ډول انځوریري او کارونی یا عملي یي هم همداښي دي، لکه د ورسره بلدو وکتورونو) یادونه: هغه گران هیوادوال، چې نوي د شمیرپوهنی د دې برخي سره بلدیري، د هغو لپاره دي په دا لومړي ځل ځني وییونه یا لغاتونه یا کلمی په پام کې نه راځي، لکه د وکتور کلمه، خو دا پورته یا لاندې څیرو کې کتلی شو، چې د کمپلیکس گڼونو زیاتون او کمون څنگه دی

۷۰۱ زیاتون او کمون:

لاندي څيرو ته دي پام وي او گورو، چي رييل برخه او ايماجينار برخه د  $Re(z)$  او  $Im(z)$  سره په نڅبنه شوي دي

$$z_1 \pm z_2 = (a_1 + b_1i) \pm (a_2 + b_2i) = (a_1 \pm a_2) + (b_1 \pm b_2)i, \dots\dots(7,17)$$

بيلگه ۱۰۷ ورکړ شي:

$$z_1 = 2 - 3i, z_2 = 3 + 2i$$

$$\Rightarrow z_1 + z_2 = 5 - i, z_1 - z_2 = -1 - 5i$$

$\Rightarrow$

$$|z_1| = \sqrt{2^2 + 3} = \sqrt{13}, |z_1| = \sqrt{13}$$

$$-z_1 = -2 + 3i, -z_2 = -3 - 2i$$

زياتون يا جمعه ( او په همدې توگه کمون يا تفریق يعني د  $-z_2$  ) په زيانونه کيډي شي د څېرې ۵ ( په همدې توگه د څېرې ۷ . ۳ ) د گراف له لاري هم بنوول شي.

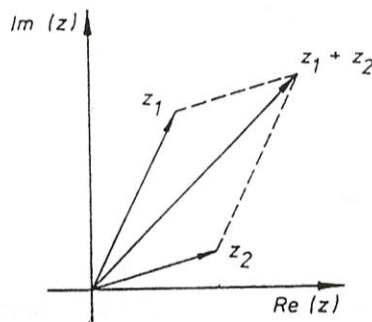


Bild 7.2  
څېره

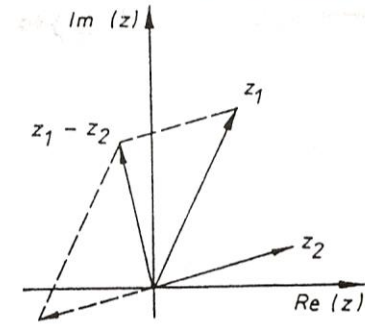
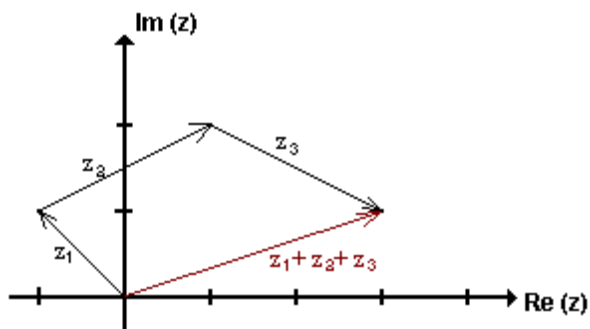


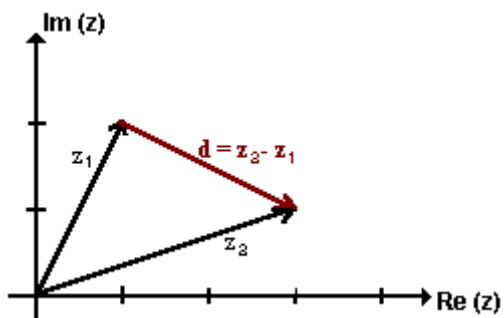
Bild 7.3  
څېره

-

يا لاندې:



په پورته او لاندې څیرو کې د کمپلیکس گڼونو د زیاتون او کمون انځور لیدلکیري.



### د کمپلیکس گڼونو ارزښت

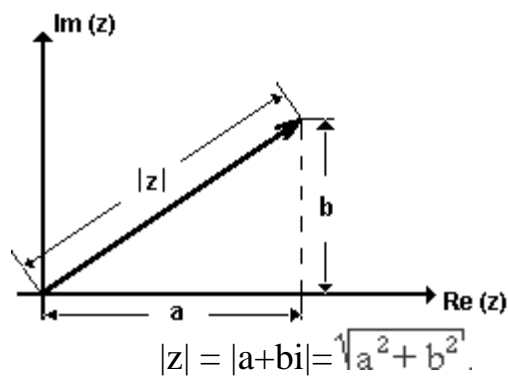
د وکتور  $z$  اوږدوالی د کمپلیکس گڼونو ارزښت بلل کیږي.

دا د  $|z|$  سره ښایو او د پیتاگوراس (فینثاغورث) د جملې

سره ښوول کیږي، د دې لپاره دې پورته اخیلي لیکه

هم وکتل شي. مخامخ څیره مور ته د کمپلیکس گڼ

د ارزښت انځور ښایي



په درې گوډي کې د اړخونو ځانښوونه يا تناسب له امله باور لري

$$\| |z_1| - |z_2| \| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|, \dots \dots \dots (7,18)$$

برسیره پر دې باور لري:

$$z_1 + z_2 = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$$

۷. ۲ د کمپلیکس گڼونوځل:

د ورسره بلد نوک ایښوولو له لارې لاس ته راځي

$$\begin{aligned}
 (a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) &= a_1 a_2 + a_1 b_2 i + b_1 a_2 i + b_1 b_2 i^2 \\
 &= a_1 a_2 + a_1 b_2 i + b_1 a_2 i + b_1 b_2 (-1) \\
 &\Rightarrow
 \end{aligned}$$

نو باورول ري

$$(a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i \quad (7, 20)$$

-

گران لوستونکی به زما په ستونځو پوه شي، چې لاتین توري په بدل ډول لیکل شوي، چې دا هم زما تخنیکي ستونځي دي، دا که په هرځایکې وي، دا به راته گران د شمیرپوهنې مینه وال وبخښي. دا لاندې هم ساده ازمايل کیدی شي

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} \quad , \quad |z_1 \cdot z_2| = |z_1| |z_2| \quad (7,21)$$

بیلگه ۲۰۷

$$= (a+bi) ( a-bi) = a^2+b^2+(-ab + ab)i = a^2+b^2 \overline{z \cdot \bar{z}} \quad \text{د}$$

او (۱۵، ۷) له امله لاس ته راځي:

$$\Rightarrow \overline{z \cdot \bar{z}} = |z|^2 \quad (7, 22)$$

۳۰۷ ویش

$$z_1 : z_2 = (a_1 + b_1 i) : (a_2 + b_2 i) = \frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i}$$

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{z_1 \overline{z_2}}{z_1 z_2} = \frac{(a_1 + b_1 i)(a_2 - b_2 i)}{(a_2 + b_2 i)(a_2 - b_2 i)} = \\ &= \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + (a_2 b_1 - a_1 b_2) i}{a_2^2 + b_2^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_1 : z_2 &= \frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = \\ (7,23) \quad &= \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} i \end{aligned}$$

په دې پسی لاس ته راځي

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad \overline{\left( \frac{z_1}{z_2} \right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} \quad (7,24)$$

بیلگه ۳.۷ :

د (۲۴.۷) د دویمې برخې بڼونه:

$$\begin{aligned} \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} &= \frac{\overline{z_1} \cdot z_2}{\overline{z_2} \cdot z_2} = \frac{(a_1 - b_1i)(a_2 + b_2i)}{(a_2 - b_2i)(a_2 + b_2i)} = \\ &= \frac{(a_1a_2 + b_1b_2) + (a_1b_2 - a_2b_1)i}{a_2^2 + b_2^2} = \\ &= \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} - \frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} i = \overline{\left( \frac{z_1}{z_2} \right)} \end{aligned}$$

بیلگه ۴.۷: د او  $Z_1$  لپاره له  $Z_2$  سره سم لاس ته راځي:

$$Z_1 : Z_2 = \frac{Z_1}{Z_2} = \frac{2-3i}{3+2i} = \frac{(2-3i)(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)} = \frac{(6-6)-(4+9)i}{3^2+2^2} = \frac{13}{13}i = -i$$

۴.۷. تمرینونه

۱ - مېلق يا همغه ارزښتونه او انځورونه

۱. ۱ - لاندې په اریتمیټیکي یا شمیرنیزه توگه ورکړ شوي ورکړ شوي کمپلیکس عددونه په گاوس سپحه کې انځور کړئ! د دې عددونو مېلقه ارزښتونه وشمیرئ.

a)  $z = 1 - i$

b)  $z = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$

c)  $z = 2(1 - \sqrt{3}i)$

d)  $z = -1-i$

-

۱. ۲ - د گاوس د عددونو سطحه کي د هغو لاندې مخلوط يا ڪمپليڪس عددونو ڄاڻ و رکڙي، د کومو لپاره چي باور لري:

$$\text{a) } |z| = \sqrt{2} \quad \text{b) } |z| < \sqrt{2} \quad \text{c) } |z| > \sqrt{2} \quad \text{d) } |z| = r$$

۲ - جمعه او تفريق (زاتون او ڪمون)

۲. ۱ - د شميرني او ڪارني يا رسم کوني له لاري پيدا ڪڙي

$$\text{a) } (1+2i)+(2+i) \quad \text{b) } (-2+i)+1-2i$$

$$\text{c) } (1-2i)-(1-2i) \quad \text{d) } (-1-2i)+(2-i)$$

۲. ۲ - د شميرني او ڪارني يا رسم کوني له لاري پيدا ڪڙي

$$\text{a) } (22 + 5i) + (2 + i) \quad \text{b) } (3 + 2i) - (5 + 2i)$$

$$\text{c) } (1 + 2i) - (1 + 2i) \quad \text{d) } i - (1 - 2i)$$

۳. ضرب (خل) او وېش:

په لاندې کي  $a, b, c, d, x, y$  حقيقي گڻونه دي.

۳. ۲ - وشميرئ

$$\text{a) } (2 + \sqrt{3}i) \cdot (3 - 2i) \quad \text{b) } (3 + 2\sqrt{2}i) \cdot (3 - 2\sqrt{2}i)$$

$$\text{c) } (1 + \sqrt{5}i) \cdot (1 - \sqrt{5}i) \cdot (13 - 12i) \quad \text{d) } \sqrt{3 + \sqrt{7}i} \cdot \sqrt{3 - \sqrt{7}i}$$

۳. ۲ - وشميرئ

$$\text{a) } (x + yi)(2x + yi) \quad \text{b) } (\sqrt{x} + \sqrt{y}i)(\sqrt{x} - \sqrt{y}i)$$

$$\text{c) } \left(\frac{2}{3}a - 3bi\right) \cdot \left(\frac{4}{3}a + 5bi\right) \quad \text{d) } (c - \sqrt{d}i)(-c - 2\sqrt{d}i)$$



۷. گډوله گڼونه يا کمپليکس اعداد - ۲۳۳

۳. ۳ - د لاندې ماتونو مخرج يا ماتلاندې حقيقي ورگرځوئ (a, b حقيقي دي)

$$3.3.1.a) \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}i}{\sqrt{3} + \sqrt{2}i}$$

$$b) \frac{1 - 20\sqrt{5}i}{7 - 2\sqrt{5}i}$$

$$c) \frac{56 + 33i}{12 - 5i}$$

$$d) \frac{63 + 16i}{4 + 3i}$$

$$3.3.2.a) \frac{5i}{\sqrt{2} - \sqrt{3}i}$$

$$b) \frac{3 - 27\sqrt{5}i}{7 - 3\sqrt{5}i}$$

$$c) \frac{i - \sqrt{3}}{\sqrt{3}i - 2}$$

$$d) \frac{i}{8 - i}(i + 1)$$

$$3.3.3.a) \frac{3a + 4bi}{4a - 3bi} + \frac{4a - 3bi}{4a + 3bi}$$

$$b) \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}i}{\sqrt{a} - \sqrt{b}i} - \frac{\sqrt{b} + \sqrt{a}i}{\sqrt{b} - \sqrt{a}i}$$

$$c) \frac{\sqrt{1+a} + \sqrt{1-a}i}{\sqrt{1+a} - \sqrt{1-a}i} - \frac{\sqrt{1-a} + \sqrt{1+a}i}{\sqrt{1-a} - \sqrt{1+a}i}$$

$$d) (5 - i)(6 - i) + \frac{5 - i}{6 - i}$$

۴. سره رايوځی شوي پوښتنې

گډوله گڼونه يا اعداد ورگرځ شوي.

$$z_2 = -\frac{1}{4} - \sqrt{3}\frac{i}{4} \quad \text{او} \quad z_1 = \frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{i}{2}$$

۳ - د لوگاريتم بنسټ فرمولونو استعمال. په لاندې تمرینونو کې x وشمړئ.

$$z_1 = \frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{i}{2} \quad \text{und} \quad z_2 = -\frac{1}{4} - \sqrt{3}\frac{i}{4}$$

و شمیرئ:

-

- 
- 4.1. a)  $z_1 + z_2$       b)  $z_1 - z_2$       c)  $z_1 \cdot z_2$       d)  $\frac{z_1}{z_2}$
- 4.2. a)  $|z_1|$       b)  $|z_2|$       c)  $\bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$       d)  $\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$
- 4.3. a)  $|z_1 + z_2|$       b)  $|z_1 - z_2|$       c)  $\bar{z}_1 + \bar{z}_2$       d)  $\bar{z}_1 - \bar{z}_2$
- 4.4. a)  $|z_1| \cdot |z_2|$       b)  $\frac{|z_1|}{|z_2|}$       c)  $|z_1 \cdot z_2|$       d)  $\left| \frac{z_1}{z_2} \right|$

۴. ۵ - د لاندی مربع مساواتو حلونه ورکری!

- a)  $x^2 + (1 + i)x - 2(1 - i) = 0$
- b)  $x^2 + (3 - 2i)x + 3(1 - i) = 0$
- c)  $x^2 - \frac{i}{2}\sqrt{2}x + 1 = 0$
- d)  $16x^2 + 8(i + 1)x + 2\left(i + \frac{9}{2}\right) = 0$

## ۸ - د بنوونې (ثبوت) متودونه

په شمیرپوهنه کې داسې مخ په وړاندې څو، چې د ځینو نیونو یا فرضیو په فرمولولو سره، غوښتنو یا بنوونو او یا لکه تراوسه د ثبوتولو پرابلم (د گڼپوهنې جملې په څیر) منځ ته راچوو، چې دا نیونې او غوښتنې ویناوې دي. په جملو کې دې ماتماتیکي یا شمیرپوهنیزه ترنه بیا ایمپلیکیشن یا لاس ته راوړنه ده (مخ ته دې وکتل شي) یانې  $A \Rightarrow B$  دا غوښتنه د رښتیا ارزښت  $w$  غوښتنه  $B$  کې نغښتې او دا اوبی یا حل  $B$  له  $V$  او د دې تراوسه اوبی- یا حل شوو جملو لاس ته راځي. د دې لاس ته راوړنو لپاره بیلابیلی لارې شته، چې په لاندې کې یې څیرو

### ۸.۰۱ سیده یاسیخه (مستقیمه) بنوونه

په سیده بنوونه (ثبوت) کې سړی له یوې وینا  $A$  څخه مخ ته ځي، چې رښتیا ارزښت یې څرگند دی او په دې لاس ته راوړنې پسې د  $B$  وینا لاس ته راوړي.

دا وینا  $B$  هم رښتیا ده، ځکه چې له یوې رښتیا پریمیسې  $\text{Prämisse}$  (نیونې یا فرضیې) څخه رښتیا کونکلوزیون  $\text{Konklusion}$  (لاس ته راوړنه یا نوره هم ښه بنوونه یا ثبوت) (د اینمپلیکیشن ۱ او ۲ لیکه د رښتیا ارزښت په جدول کې) له یوې رښتیا پریمیسې څخه د نارښتیا کونکلوزیون لاس ته راوړنې نارښتیا دي (ایمپلیکیشن رښتیا ارزښت ۲ - م جدول).

بیلگه : سیده اوبیونه یا حل:

$$x \geq 1 \quad : V \quad \text{نیونه}$$

$$6x+3 \geq 3x+6 \quad : B \quad \text{غوبننه}$$

اوبی : وینا A ، چې رښتیا ارزښت w یې جوت دی، نیونه یې  $x \geq 1$  ده. له 3 سره  
خُل له امله لاس ته راوړنې لرو چې په لاندې ډول دی  $3x \geq 3$  : د 3 زیاتون له لارې  
لرو:  $3x + 3 \geq 6$  د  $3x$  زیاتون له امله لاس ته راځي:

$$6x + 3 \geq 3x + 6.$$

بیلگه:

د یوه ناتیګ اوبیونې یا حل کارونه (متود)

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{a.b}$$

د بنوونې دی

د بنوونې وړ وینا څخه لاندې لاس ته راوړنې لرو:

$$(a+b)^2 \geq 4ab$$

$$a^2+b^2+2ab \geq 4ab$$

$$a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$$

$$(a-b)^2 \geq 0$$

لاس

ته راوړل شوې ویناوې  $(a-b)^2 \geq 0$  یې بندیزه رښتیا دي. مګر دا د بنوولو وینا یواځې  
د شرایطو  $a \geq 0, b \geq 0$  لاندې باور لري. له دې امله که له رښتیا وینا څخه غوښتل شوې  
یا د بنوولو ویناو ته نه شي راتلې (سیده بنوونه) او په ناسداه یا غیرمستقیم ه بنوونه یا  
اوبیونه باندې استعمال شي نو ګټوره به وي، چې په لاندې توګه تر څیرنې لاندې ونيول  
شي.

۲۰۸ ناسیده بنوونه یا - ثبوت:

په ناسیده بنوونه کې له یوه نفی یا نیګیشن یا نه والي څخه مخ ته ځو، چې A « ناغوبنته» او له دې یوه وینا B لاس ته راوړل کېږي، کومه چې ناربنتیا ده. وینا یعنی نفی غوبنته یا ثبوت هم ناربنتیا دی، ځکه چې له یوې ناربنتیا نیوني څخه یوه ناربنتیا بنوونه یا ثبوت لاس ته راتلی شي ( د ایمپلیکیشن څلورمه کرېنه).

له یوې ربنتیا نیوني څخه د یوې ناربنتیا ثبوت لاس ته راوړنه ناربنتیا ده. (د ثبوت د ربنتیا جدول څخه) که د غوبنتو نفی ناربنتیا وي، نو غوبنته بیا په دې اوبیوني یا حل کې ربنتیا ده.

بیلګه : ناسیده بنوونه یا ثبوت

نیونه  $V : a, b$  دې رییل ګڼونه وي او وي دې:  $a \geq 0, b \geq 0$

بنوونه یا غوبنته B :

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

$$\frac{a+b}{2} < \sqrt{a.b}$$

اوبیونه : د غوبنتو نفی ده

د پورته نابرابرون له څلورۍ یا مربع کولو له امله لاس ته راوړنه لرو:

$$(a+b)^2/4 < a.b$$

دواړه لوري له څلورو سره ضربوو، نو لاس ته راځي

$$(a+b)^2 < 4a.b$$

له څلورۍ وتني یا مربعوتني څخه لاس ته راځي:

$$a^2 + b^2 + 2ab < 4ab$$

په دواړو لورو د  $4ab$  کمونې څخه لاس ته راځي

$$a^2 - 2ab + b^2 < 0$$

د نابرابرون کینه لور د څلورۍ  $\bullet$  مربع په بڼه لیکل کیدی شي او هیڅکله له صفر څخه نه شي کوچنی کیدی.  $\bullet$  دا په دې مانا، چې  $(a+b)^2 < 0$  نارښتیا دی یا غلط دی، نو له دې سره  $(a+b) < ab$  نارښتیا دی یانې

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

رښتیا دی  $\bullet$

۲ - غوښتنه B: د ۲ ریښه یا جذر  $\sqrt{2}$  ایریشنل دی

اوبیونه یا حل: د غوښتنې نفی ده، چې: د ۲ ریښه  $\sqrt{2}$  ریشنل گن دی (د ریشنل گڼونو لپاره دې برخه ۳ وکتل شي)، نو باید بیا دوه ټولریشنل گڼونه  $p, q$  د  $q \neq 0$  سره

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \Leftrightarrow p^2 = 2q^2$$

شته وي، چې دا باوري شي:

له دې پورته برابرون سره  $p^2$  یو جوړه (جفت) گن دی. نو له دې امله  $p$  هم یو جوړه گن دی، ځکه چې یواځې د جوړه گن مربع یا څلورۍ جوړه کیدی شي  $p = 2p'$  له مربع یا څلورۍ کولو او پر ځای ایښوولو لاس ته راځي:

$$p^2 = 4p'^2$$

$$2q^2 = 4p'^2$$

$$q^2 = 2p'^2$$

له اخرنی برابر و لاس ته راځي، چې  $q$  هم یو څلوری یا مربع گڼ دی. په دې پسي لرو  $p$  او  $q$  پر  $\sqrt{2}$  ویشونی دی، یانې پرویشپردی نه دی. که پرویشپردی ټول گڼونه  $p$  او  $q$  له

سره شته نه وي، نو دا ډول ټولگڼونه نه شي کیدی، چې شته یا موجود وي.

۳۰۸ د پوره ایندکشن له لارې بنوونه

د پوره ایندکشن ثبوت یا حل د هغو غوښتنو لپاره کارول کیږي، چې د یوه ټاکلي گڼ  $n_0$  ( صفر باید لږ د  $n$  د پښی لاندې ولیکل شي) څخه د ټولو پیدایښتي گڼونو لپاره باوري کیدی شي. یانې دلته نوینه داده، چې یوه وینا د لپاره که باور ولري، نو دا بیا د ټولو پیدایښت گڼونو لپاره باور ي کیدی شي.

بیلگه ۱:

د ټولو  $n \geq 0$  لپاره  $2^n \geq 0$  په توان د  $n$  له صفر لوي یا له صفر سره برابر دي يعنې باور لري:

بیلگه: د ټولو  $n \geq 0$  لپاره باور لري  $1+3+5+\dots+2n+1 = n^2$

د پوره ایندکشن د بنووني لپاره د « پوره ایندکشن پریڅپ بنسټ » مخ ته پروت دی:

که یوه وینا  $n_0 = n$  یا (په لاندې، که  $n$ ، ج، ته پورته شو، نو صفر په پښه کېلیکل شوی)  $n = n_0$  لپاره باور ولري او که د دې وینا د یوه په خوښه پیدایښتي گڼ  $n = k$  لپاره اور لرلو څخه د  $n = k+1$  لپاره باوریوالی ترې لاس ته راشي، نو دا وینا د ټولو پیدایښتي گڼونو  $n \geq n_0$  لپاره ریښتوني ده.

په دې پسي په ترتيب د ايندکشن بنوونه په دوه پلونو يا قدمونو سرته رسيري

۱ - د ايندکشن پيل

بنوول کيري، چې دا وينا د  $n \geq n_0$  لپاره باور لري

۲ - د ايندکشن پل

اوس بايد يو ايمپليکيشن يا لاس ته راوړنه وبنوول شي، له دې امله د ايندکشن پل يا له برخه پلونو جوړ دی

۲ الف: د ايندکشن نيونه :

نيول کيري، چې وينا د  $n = k \geq 0$  لپاره باور لري او دا نيونه په  $V$  فرمولبند کيري

يادونه  $V$  د نيوني لپاره خاي پر خاي کيري يا راوړل کيري.

۲ ب - د ايندکشن غوښتنه:

غوښتل کيري، چې دا وينا د  $n = k+1$  لپاره باور لري او دا غوښتنه په  $B$  فرمولبندي کوو. دا په گوته کوو، چې  $B$  دلته د غوښتنې پر خاي ليکو

۲ ج - د ايندکشن بنوونه :

بنوول کيري، چې  $B$  له  $A$  څخه لاس ته راځي:  $A \Rightarrow B$

بيلگه ۱ :

۱ - د  $n = 0$  لپاره باور لري  $2^0 = 1 > 0$

۲ ۰ ۱ ۰ ۲  $V$  ته :

$$2^k > k$$

و ۲ ۰ ۲  $B$  ته



$$2^{k+1} > k+1$$

۲۰۳ له  $V \Rightarrow B$  : له  $2^k > k$  او  $2 > 1$  څخه د زیاتون له امله لاس ته راځي :

$$2+2^k > k+1$$

او له دې لاس ته راځي:  $2.2^k > k+1, 2^{k+1} > k+1$

بیلگه ۲ :

$$1 = 1^0 = 1 \text{ د } n = 1 \text{ لپاره باور لري}$$

$$1+3+5+\dots+(2k-1) = k^2 \text{ ته: } V \text{ ۱۰۲ و}$$

$$B \text{ ۲۰۲ ته:}$$

و  $V \Rightarrow B$  ۳۰۲ ته: له نیوني څخه د زیاتوون  $2k+1$  زیاتوني او له دې د بنی خوا د یوه بینومڅلوری(-مربع) په څیر انځوروني څخه لاس ته راځي:

$$1+3+5+\dots+(2k-1)+(2k+1)=k^2+2k+1$$

او له دې د بنی خوا انځوروني څخه د بینوم څلوری(-مربع) لاس ته راځي :

$$1+3+5+\dots+(2k-1)+(2k+1)=(2k+1)^2$$

یادونه: د  $V$  او  $B$  پر ځای کړی شو، چې نیونه او غوښتنه ولیکو، یانې مور درې څه

لرو، چې نیونه غوښتنه او بنوونه ده، په هغه ورسره بلد ډول یې بنوونه د یوه پارابلم حل دی، چې ما اوبی یا اوبیونه بللی (اوبی پښتو ده او بنه کره، همدې وي یا لغات ته مناسب خپل د پښتو نوم دی، چې ورسره بلد هم یو، لکه ملگوبی، خروبی، چې موخه ترې همدا اوبی دی او په نورو ژبو کې هم همداسې دی)

دلته د شمیرپوهنې سم اند درس ته د پای ټکی ږدو، که نور څه مو بنه مخ ته راغله هغه به بیا د ترنې په ډول ورسره مل کړو. ستاسو وړاندیزونو ته هم سترگی په لار یم.

## ۸ . ۴ تمرینونه

۱ - سیده و بنایي

الف) له  $a + 1/a = b$  څخه لاس ته راځي  $a^3 + 1/a^3 = b^3 - 3b$ ب) د دوه تیرو کونجونو  $\alpha$  ،  $\beta$  لپاره صدق کوي  
 $\sin(\alpha + \beta) < \sin \alpha + \sin \beta$ 

۲ - ناسیده و بنایي :

الف) د ټولو  $x$  لپاره ، چې وي  $0 < x < \infty$  ، صدق کوي

$$(3x - 4) / (2x + 4) > 1$$

ب)  $\sqrt{2}$  یو ایریشنل گڼ دی

۳ - د پوره اندکشن له لارې یې وبنایئ

a)  $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{(n+1)n}{2}$ .

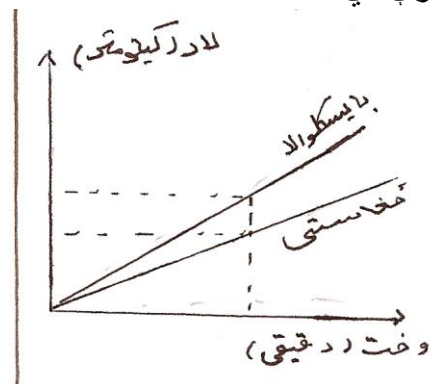
b)  $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{(2n+1)(n+1)n}{6}$ .

c)  $2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1$ .

## ۹. کر بنیز- یا خطي-یا لاینیز مساوات د یوې متحولې سره

### پیل بیلگه

یو بایسکل ځغلوونکی او یو پلی له یوه ځایه په همغه وخت خوزي یا حرکت کوي، کوم چی په گراف کی کښل شوی دی (که د گراف کښل راته ناشوني شول بخښنه غواړم، که بل چا دا کار وکولی شو نو دا به یې هم مرسته وي، خو پری پوهیدل کومی ستونځي نه لري) بایسکل په گری کی ۱۵ کیلومتره ځغلي او پلی ۱۰ کیلومتره په گری کی ځغلي. دوي پس له یونیم ساعت سره یوځای کیږي. هر یو څومره لار وهي او یو له بل څومره لری دي؟



دا مور دلته، لکه په ځنو کتابونو کې چې د فنکشن د نامه لاندې یادېږي، په همغه نامه نه یادوو خو هدف به همغه وي که دا د برابرېون یا مساوات په نامه وېولو .  
 وخت ( په دقیقه ( په  $t$  ښایو لار ) کیلومتر ( په  $s$  ښایو د لار انځورونې څخه په گراف کې څرگندېږي چې بایسکل ځغلوونکی له ۶۰ دقیقو وروسته ۱۵ کیلو متره ځغلیږي یعنې  $15\text{km/h}$  او پلې ۱۰ کیلو متره یعنې  $10\text{km/h}$  غواړود هرڅه لمړی وښایو چې هر یو له یونیم ساعت وروسته څومره لار وهلي او بیا دویمې پوښتنې ته ځواب ورکوو.

بایسکل ځغلوونکی به له دوه ساعته وروسته  $2.15\text{km} = 30\text{km}$  ځغلیږي وي او پلې به  $2.10\text{km} = 20\text{km}$  ځغلیږي وي بایسکل ځغلوونکی به له  $t$  وخته وروسته  $t.15\text{km}$   $= 15.t\text{km}$  لار وهلي وي. دلته وخت  $t$  خپلواک اوړیدونکی یا نا پېژندونکی او لار  $s$  بلواک اوړیدونکی یا ناپېژندونکی یعنې د  $t$  په واک کې دی. دا کلیمې به بیا د فنکشن او څیرونو په برخو کې پوره تر څیړنې لاندې ونيول شي. د بایسکل ځغلوونکي وهلي لار، چې په  $t$  یې ښایو برابرېون داسې لیکو:

$$S_r = 15.t; t \in Q_0^+$$

د بایسکل ځغلوونکی وهلي لار،  $t$  چې د بایکل ځغلولو وخت دی طبعاً زیاتیز یا مثبت دی ورته د پلې چې په ایې ښایو وهلي لار هم ټاکل کېږي، یعنې د  $l$  وهلي لار:

$$S_l = 10.t; t \in Q_0^+$$

له دې سره مو وښوول چې دواړه له پیل ټکي له ۱,۵ ساعته یو له بل څومره لرې دي. وهل شوي لار:

$$S_r = 15.1,5 = 22,5\text{km} \quad \text{د بایسکل ځغلوونکي}$$

$$S_l = 10.1,5 = 15,0\text{km} \quad \text{د پلې}$$

د دې په تعقیب له ۱,۵ ساعته وروسته دواړه یو له بل  $7,5\text{km}$  لرې دي .

۹ . ۱ لاینیز- یا کرښیز مساوات :

د کرښیز مساوات فرمول د یوې اوښتونې یا مجهولې  $x$  سره داسې دی

$$Ax = a \quad (9.1)$$

دلته  $A, a$  حقیقي اعداد دي. د ( ۱ . ۶ ) برابرېون او بیونه ( حل ) دا مانا لري چې ټول هغه حقیقي اعداد وښوول شي چې که په پورته ( ۱ . ۹ ) برابرېون یا مساوات کې ځای په ځای شي، د مساوات شرایط پوره کړي. د حقیقي اعداد و بنسټیز قانون ( ۳ - مچه

برخه دي وکتل شي) په بنسټ کېدی شي چی د حقیقي عدد مساوات دواړه خواوي په یوه عدد سره ځل یا ضرب کړو. بی له دې چی مساوات زخمي شي. داچی ویش په د

$$\frac{1}{A}; A \neq 0 \text{ ځل سره برابر دی نو لیکل کيږي}$$

$$x = \frac{a}{A}; A \neq 0; \dots\dots\dots(9, 2)$$

دا د ( ۱ . ۹ ) یواځنی ممکن حل دی. که په څټ یا برعکس  $A = 0$  وي، نو دلته دوه حالتونه یو د بل توپيرونو

۱ - که  $a \neq 0$  وي: دا مساوات بیا داسی دي  $0.x = a; a \neq 0$  دا یو مخامخوالی یا تضاد یا نوره هم بڼه په څټوالی تشکیلوي ، نو په دي حالت کی حقیقي عدد  $x$  شته نه دی چی دا ( ۱ . ۹ ) مساوات پوره کړي.  
۲ - که  $a = 0$  وي، نو بیا برابرېون ( ۱ . ۹ ) لاندې شکل نیسي

$$0.x = 0$$

دا برابرېون بیا د ټولو رییلګڼونو  $x$  لپاره پوره (ډک) دی. یا برابرېون پوره کوي. دا بیا داسی هم لیکل کيږي: ( په خوبڼه  $bel$  )  $x = bel$  پس دا لاندې باور لري: برابرېون ( ۱ . ۹ ) د  $A \neq 0$  لپاره یواځنی ټاکلي اوبیونه ( ۹ . ۲ ) لري د  $A = 0$  او  $a \neq 0$  لپاره اوبیونه نه لري د  $A = 0$  او  $a = 0$  لپاره هر رییلګڼ  $x$  اوبیونه یا حل دی.

په دي لاس ته راوړنوکی، دیوی اوبښتونې یا مجهولی سره د رییل برابرېونونو د ګڼلو ټوله تیوري خوندي ده .

یو لاینيز برابرېون ( مساوات ) ( یو برابرېون، چی د برابرېونونو په دواړو خواوکی د لاینيزو برابرېونونو ترمونو زیاتون  $a_i + x_i + b_i$  پرت وي ) دا مخکني نورمالفورم ( ۹ .

۱ ) مو له مخه مخ ته نه دی پروت، پس سړی په دواړو خواو د لاینيزو ترمونو د هدف په لور زیاتون ( همداسی کمون ) له لاري همغه مخکني نورمالفورم ته بیرته راروي، دا

د 2 . II بنسټيز قانون له مخی یو ورته فورم بدلون یا بڼه بدلون دی ) ( د اوبي یا حل ډیری تغیر نه دی خوړلی ) د بیلګي په توګه لاندې مساوات ورکړ شوی

$$a_1x - b_1x + c_1 - d_1 = a_2x - b_2x + c_2 - d_2$$

پس کېدی شي چی په دواړو خوا  $b_2x + d_1$  وړ زیات کړو او  $a_2x + c_1$

تری کم کرو، نو لاس ته راځي

$$a_1x - b_1x - a_2x + b_2x = c_2 - d_2 - c_1 + d_1; \dots \dots \dots (9.3)$$

دلته هغه د  $x$  لرونکی غړي د مساوات په کین لور او ثابت د برابرېون په بنی لور پراته دي. داسی لیکو

$$A = a_1 - b_1 - a_2 + b_2; a = c_2 - d_2 - c_1 + d_1$$

نو دا برابرېون (۳ . ۹) د برابرېون (۱ . ۹) سره (ته) کیمت (ورته) دی، که په لاندې فورم یا بڼه یو مساوات ورکړ شوی وی

$$\frac{a_1}{a_2} x = \frac{b_1}{b_2}$$

(دا تیک هلته موخه ور یا هدفمند دی چی  $a \neq 0; b \neq 0$  وي). نو برابرېون د  $x$  په لور حل کیدلی شي، که دا په  $a_2$  حل شي او د  $a_1 \neq 0$  په حالت کی په  $a_1$  ویشل شي:

$$x = \frac{a_2 b_1}{a_1 b_2}$$

بیلگه ۹ . ۱ :

برابرېون  $\frac{a^2x - b^2}{a} - \frac{a(b - ax)}{b} + \frac{b^2}{a}$  هلته موخه ور دی چی  $a \neq 0; b \neq 0$  وي.

ددې لپاره چی د ماتلاندې څخه ځانونه خلاص کړو، نو پورته ورکړ شوي برابرېون د کیماتلاندې  $a.b$  سره حل کوو:

$$b(a^2x - b^2) - a^2(b - ax) + b^2 = a^2b$$

$$a^2bx - b^3 - a^2b + a^2x + b^3 = a^2b$$

اوس برابرېون ترتیبیږي او راټولیگی،  $x$  له نوکاتو څخه راوځي

$$a^2bx + a^2x = a^2b + b^3 + a^2b - b^3$$

$$a^2(ax + b) = 2a^2b$$

د  $a \neq 0$  له امله کیدی شي په  $a^2$  ویشل شي  $(a+b)x = 2b$

دا د لاینیز برابرېونو بنسټیزه بڼه (فورم) (۱ . ۹) ده

که  $(a+b) \neq 0, (a \neq -b)$  وي، نو  $x = 2b / (a + b)$

يوگونی يا يواځنی اوبیونه يا حل دی

که  $(a = -b) \text{ } a + b = 0$  ، نو د  $b \neq 0$  له امله اوبیون شته نه ده .  
هغه حالت چی ناپاي زیاتي اوبیوني يا حلونه منځ ته راځي (د  $x$  په خوښه) ، د نیونی يا فرضیي له امله چی باید  $b \neq 0$  وي، موجود نه دی.  
پام:

په دې هکله زیاتي بیلگی کیدی شي راوړل شي، چې ضریب يا ځله ووني په مختلفو توانونو وي . زه دلته یواځې دومره یادونه کوم، چې په مساواتو کې، چې اوبستونی يا متحولې ولري، همغهسی شمیرل کیري، لکه په رییلعددونو کې .  
دلته هم باید دې ته پام وي، چې ماتلاندي صفر نه شي . که چیرې اریبني وي او يا گرانو لوستونکو یې راوړل وغوښتل، نو زه به بیا دا کار سرته ورسوم او بیلگی به هم راوړم او که چیرې کوم د شمیرپوهني مینه وال په دې هکله د پوښتنو ځوابونه غوښتل، زه به وهڅیرم او دا کار به هم سر ته ورسوم، که لوي څښتن غوښتل . زه دومره یادونه کوم، چې په دې هکله زما د شمیرپوهني بنسټيز کتاب کې زیاتي بیلگی راوړل شوي، خو نه پوهیري، چې دا کتاب به چا ته ورسیري او که نه

بیلگه ۹ . ۲ :

برابرون  $1 = (x/a) - ((a-x)/2bc) + (a-x)/3c$  یواځي  
د  $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$  لپاره موخه ور دی.  
ددې لپاره چی مات لاندي له منځه یوسو، نو مساوات د ا.م.ل.  $6abc$  (صلي ماتلاندي)  
سره ځل کوو:  $6bcx - 3a(a-x) + 2ab(a-x) = 6abc$   
ورپسی نور، په لاندي ډول، د څرگندو شمیرلارو يا - قاعدو له لاري لاس ته راځي:

$$6bcx - 3a^2 + 3ax + 2a^2b - 2abx = 6abc$$

$$(6bc + 3a - 2ab)x = 6abc + 3a^2 - 2a^2b,$$

$$(6bc + 3a - 2ab)x = a(6bc + 3a - 2ab)$$

دا بیرته د لاینی مساوات ( ۹ . ۱ ) بنسټینه ده، او له دې امله صدق کوي:

د  $6bc + 3a - 2ab \neq 0$  لپاره  $x = a$  د مخ ته پراته مساوات یواځنی حل دی.

د  $6bc + 3a - 2ab = 0$  لپاره د  $0x = 0$  له امله هر رییل کن  $x$  اوبیونه ده.

نو لرو  $x = a$  د  $6bc + 3a - 2ab \neq 0$  لپاره د  $6bc + 3a - 2ab = 0$  لپاره  $x$  په خوښه

دلته د څیرل شوو برابر ونونو، چې په ساده ډول یی لاینیزوالی يا لاینیزتوب پیژندل کیري، په څنگ کی برابر ون شته چی په اصل (پرینڅیپ) کی کرښيز يا لاینيز نه دي

مګر په لاینيز مساوات یا برابر ونونو اړول کیدی شي. دلته ددې غوښتنو په څنګ کی چی د ناپیژندونکو ضریبونو  $a, b, c, \dots$  لپاره شوي، زیات وخت په  $x$  هم شرطونه ایښول کیږي.

ددې لپاره لاندې کی درې ساده بیلګې راوړو:

بیلګه ۳. ۹ :

$$\text{برابرون } (8x - 9)(3x - 4) - (5x - 6)^2 = (4 + x)(3 - x) - 9$$

د لومړي ځل لپاره څلورې برابرېږن یا مربع مساوات دی، ځکه چی څلورې (مربع) غړي لري. دیو له بل څلولو یا ضربولو وروسته څلورې غړي له منځه ځي. یو لاینيز مساوات د یوې ځانګړي سره سره پاتي کیږي:

$$24x^2 - 32x - 27x + 36 - (25x^2 - 60x + 36) = 12 - 4x + 3x - x^2 - 9$$

$$-x^2 + x = 3 - x - x^2$$

$$2x = 3$$

$$x = 3 / 2$$

بیلګه ۴. ۹ : برابرېږن  $(2x - a) / (x - b) = 1$  یواځي هلته هدفمند دی که حل  $x$  دا

شرط  $x \neq b$  پوره کړي. نو بیا لرو:  $2x - a = x - b \Rightarrow x = a - b$

د  $x \neq b$  له امله باید باوري وي  $a - b \neq b$  له دې امله لرو  $a \neq 2b$  پس ورکړ

شوی مساوات د  $a \neq 2b$  لپاره یواځي ټاکلی حل  $x = a - b$  لري او پرته له دې

( $a = 2b$ ) حل نه لري.

بیلګه ۵. ۹ :

$$\text{مساوات } (a/x) + (b/x) - (c/x) = 1$$

یواځي هلته هدفمند دی چی  $x \neq 0$  وي. ددې نیونو لاندې باور لري  $x = a + b - c$

دانود  $x \neq 0$  له امله یواځي هلته حل دی، کله

چی  $a + b \neq c$  وي. پس ورکړ شوي مساوات یواځي د  $a + b \neq c$  لپاره یواځي ټاکلی

حل  $x = a + b - c$  لري، په غیر له دې ( $a + b = c$ ) حل یا اوبیونه نه لري

بیلګه ۶. ۹ : د لاندې مساوات څیرنه:

$$\frac{b^3c^2x - \frac{1}{a^2}}{121500ab^4c^3} - \frac{a^2x - \frac{1}{b^3c^2}}{2880a^3bc} + \frac{abcx - \frac{1}{ab^2c}}{5400(abc)^2} = 0,$$



چی تیک د  $abc \neq 0$  لپاره یو هدف لري، باید د اصلي مات لاندې پیدا کولو لپاره د مات لاندې ک.ک.خ. تکرار شي.

$$12150ab^4c^3 = 2^2 \cdot 3^5 \cdot 5^3 \cdot a \cdot b^4 \cdot c^3$$

$$2880a^3bc = 2^6 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot a^3 \cdot b \cdot c$$

$$5400(abc)^2 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot a^2 \cdot b^2 \cdot c^2$$

---


$$\dots\dots\dots = 2^6 \cdot 3^5 \cdot 5^3 \cdot a^3 \cdot b \cdot c^3 = 64 \cdot 243 \cdot 125 \cdot a^3bc^3$$

دا پورته گن اصلي ماتلاندې (ا.م.ل) دی

که برابرېون د ا.م.ل. سره حل شي، نو ماتونه له منځه ځي او لاس ته راځي:

$$16a^2(b^3c^2x - \frac{1}{a^2}) - 225b^3c^2(a^2x - \frac{1}{b^3c^2}) + 120c \cdot (abcx - \frac{1}{ab^2c}) = 0$$

د نوکانو یو له بل څلور راتول، ترتیبونه او ویشنه د  $x$  تر څنګ ولاړو فاکتورونو یا ضربونو ( $A = 89a^2b^3c^2 \neq 0$ ) څخه د نیونو سره سم دا لاندې لاس ته راوړکیري

$$x = 1 / a^2b^3c^2, \quad abc \neq 0$$

د دې وظیفې لپاره د حل نور امکانات نه شته.

تر اوسه مو هغه ماتونه وڅیړل چې مات لاندې یې له څلونو جوړ وو، غواړو چې اوس داسې ماتونه وڅیړو چې مات لاندې یې له زیاتونونو جوړ وي، چې د نوکانو له لارې په څلونو توپه کیدلې یا تجزیه کیدلې شي .

بیلگه ۹ . ۷ :

برابرون

$$\frac{a^2(2bx-1)}{a^4b^2x^2-b^2} + \frac{b}{a^2b+b} = \frac{a^2bx}{a^2bx-b} + \frac{b^2(2ax-3)}{a^4x^2x^2-b^2} - 1$$

تیک د دې نیونو سره صدق کوي  $ab \neq 0$  ,  $|x| \neq 1/a^2$  .

اصلی مات لاندې ( په لاندې ډول پیداکوو

$$a^4b^2x^2 - b^2 = b^2.(a^4x^2 - 1)$$

$$= b^2.(a^2x+1)(a^2x-1)$$

$$a^2bx + b = b.(a^2x+1)$$

$$a^2bx - b = b. (a^2x-1)$$

$$b^2.(a^2x+1).(a^2x-1) = b^2(a^4x^2 - 1) =$$

اصلی ماتلاندی) ا م ل

د اصلی مات لاندې مساواتو له نوکانو څخه راوتلو) چي یو یا څو غړی د نوکانو د باندې او نور په نوکانو کی بندیزې ( ، لندونو او څلوونو له لارې لاس ته راځي

$$.....a^2(2bx-1)+b^2(a^2x-1) = a^2b^2x(a^2x+1)+b^2(2ax-3)-b^2(a^4x^2 - 1)$$

$$2a^2bx - a^2 + a^2b^2x - b^2 = a^4b^2x^2 + a^2b^2x + 2ab^2x - 3b^2 - a^4b^2x^2 - b^2$$

$$.....2a^2bx - 2ab^2x = a^2 - b^2$$

$$.....2ab(a - b)x = (a + b)(a - b)$$

$$.....x = \frac{a + b}{2ab}$$

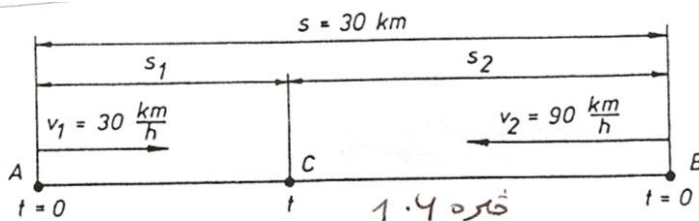
د  $a \neq b$  او  $ab \neq 0$  لپاره ( دا د نیونو له لارې تل پوره دی ) که  $a = b$  وي، نو  $x = 0$  له امله په خوښه ارزښتونه نیولی شي، بی له هغو چی په بنسټیزو نیونو کی له نیونو د باندې ساتل شوي وي) یعنی په مساوات کی ځای ورته نه وي. ( په دې حالت کی د  $x$  مطلقه ارزښت د  $a = b$  د په څې ارزښت سره نه شي مساوي کیدی. د  $x$  لپاره نیول شوی نیونی د حل ورکولو کی باید په پام کی نیول شوي وي دا په دې مانا چي باید تل پوره وي:

$$\pm 1 / a^2 \neq \frac{a+b}{2ab}$$

بیلگه ۹ . ۸ :

دوه گاډې تمځایونه A او B یو له بل 30km لري دي. د A څخه یو بارگاډی په ساعت کی د دیرش کیلومتره 30km/h په یوه ثابت سرعت یا چټکتیا باندې د B په لور

خوزیږي. د B څخه یو تیز گاډی د D د  $90\text{km/h}$  ثابت سرعت سره د A په لور حرکت کوي. که دواړه گاډي په همغه وخت کې حرکت وکړي، کله به یو بل سره مخامخ شي؟ دلته درې فزیکي لویي یو رول لري: لار، وخت او سرعت. دا به په سومبولونو  $t$ ,  $s$  او  $v$  سره وښودل شي. ددې شي ځانښوونې لپاره څیره څېره وکارو



پوښتنه «چیرته» د دواړو گاډو د یوځایوالي ټکی C ته متوجه ده. دا کیدی شي د A څخه و C ته لږیوالی (د بار گاډي لار  $s_1$ ) یا د B لږیوالی و C څخه (د تیز گاډي لار  $s_2$ ) سره وشمیرل شي. پوښتنه «کله» د گاډو یوځایوالي وخت  $t$  ته متوجه ده. دا هدفمند دی کی د وخت لپاره د وخت کمون له روانیدو تر یوځایکیدو وټاکو. دلته درې اورېدونې یا مجهولې مخ ته لرو  $s_1$ ,  $s_2$  او  $t$ .

د پورته ورکړشو شي نیونې سره مناسب لاندې اړیکې باور لري:

$$v_1 = s_1 / t, v_2 = s_2 / t, s_1 + s_2 = s$$

د باوري ارزښتونو مارونې یا استعمال سره لاس ته راځي

$$s_1 = 30t, s_2 = 90t, s_1 + s_2 = 30$$

(دلته د اندازې یونونه (واحدونه) پریښوول کيږي. او پریکړه کوو چی لار په کیلو متر او وخت په ساعت ښایو!)

دا درې مجهولې  $s_1$ ,  $s_2$  او  $t$  دی ددې برابر ونونو یا مساواتو سره چی حل به یی په همداسی په برخه ۱۱ کی ورکړ شوی وي، مگر دا دومره ساده دي چې د یوې له پیژندلو سملاسي نوري هم شمیرل کیدی شي. کیدی شي چې دا مساوات په یوې مجهولې مساواتو بیړته واړول شي. ددې مجهولې  $x$  په ځای کیدی شي  $s_1$ ,  $s_2$  او  $t$  وټاکل شي.

که ولیکو  $s_1 = x$ ، نو د اخري برابر ون څخه لاس ته راځي  $s_2 = 30 - x$  دا په لمړنیو دوه مساواتو کی ځای په ځای کوو او دواړه د  $t$  په لور حلوو:

$$t = s_1 / 30 = s_2 / 90 = x / 30 = (30 - x) / 90$$

$$x / 30 = (30 - x) / 90 \quad \text{نو لرو:}$$

لاینیز ټاکنبرابرون یا ټاکنبرابرون د  $x$  لپاره دی، چی ساده حل کیدی شي:

$$30x = 30 - x, 4x = 30 \quad x = 7,5$$

نولرو

$$s_1 = 7,5 \text{ km}, s_2 = 22,5 \text{ km}, t = (7,5 / 30)h = 1h/4 = 15 \text{ min}$$

که ولیکو  $s_2 = x$ ، نو شمیرنه لاندې لار غوره کوي یا بهیر نیسي:

$$s_1 = 30 - x, t = s_1 / 30 = s_2 / 90 = (30 - x) / 90$$

$$3(30 - x) = x$$

$$90 = 4x$$

$$x = 22,5$$

$$s_2 = 22,5 \text{ km}, s_1 = 7,5 \text{ km}, t = (22,5 / 90)h = 1h/4 = 15 \text{ min}$$

که بالاخره وخت  $t = x$  د اووښتونې یا ناپیژندونې په څیر وټاکو، نو بار لري یا صدق

$$s_1 + s_2 = 30x + 90x = 30$$

$$20x = 30$$

$$x = 30 / 20 = 1,5, t = (1,5 / 30)h = 15 \text{ min}$$

$$s_1 = 30t = 30 / 4 \text{ km} = 7,5 \text{ km}$$

$$s_2 = 90t = 22,5 \text{ km}$$

دواړه گاډي له ټکی A څخه د  $0,25 \text{ h} = 15 \text{ min}$  حرکت وروسته په 7, 5 km لریوالی یو بل سره مخامخ کیږي

بیلگه ۹. ۵ - مساوات  $(a/x) + (b/x) - (c/x) = 1$

یواځي هلته هدفمند دی چی  $x \neq 0$  وي. ددې نیونو لاندې باور لري  $x = a + b - c$ . دا

نود  $x \neq 0$  له امله یواځې هلته حل دی، کله چی  $a + b = c$  وي. پس ورکړ شوي

مساوات یواځې د  $a + b = c$  لپاره یواځنی ټاکلی حل  $x = a + b - c$  لري، په غیر له

دې  $(a+b=c)$  حل نه لري.

بیلگه ۹. ۶ - د لاندې مساواتو څیرنه

$$\frac{b^3 c^2 x - \frac{1}{a^2}}{121500 a b^4 c^3} - \frac{a^2 x - \frac{1}{b^3 c^2}}{2880 a^3 b c} + \frac{a b c x - \frac{1}{a b^2 c}}{5400 (a b c)^2} = 0,$$

چی تیک د  $abc \neq 0$  لپاره یو هدف لري، باید د اصلي مات لاندې پیدا کولو لپاره د مات لاندې ک.م.خ. تکرار شي.

$$121500ab^4c^3 = 2^2 \cdot 3^5 \cdot 5^3 \cdot a \cdot b^4 \cdot c^3$$

$$2880a^3bc = 2^6 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot a^3 \cdot b \cdot c$$

$$5400 a^2b^2c^2 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot a^2b^2c^2$$

$$\text{اصلي مات لاندې لنډ «ا م ل»} = 2^6 \cdot 3^5 \cdot 5^3 \cdot a^3b \cdot c^3 = 64 \cdot 243 \cdot 124 \cdot a^3bc^3$$

که مساوات د ا.م.ل. سره حل شي، نو ماتونه له منځه ځي او لاس ته راځي

$$16a^2 \cdot \left( b^3c^2x - \frac{1}{a^2} \right) - 225b^3c^2 \cdot \left( a^2x - \frac{1}{b^3c^2} \right) + 120ab^2c \cdot \left( abcx - \frac{1}{ab^2c} \right) = 0.$$

د نوکانو یو له بل څلورواټول، ترتیبونه او ویشنه د  $x$  تر څنګ ولاړو فاکتورونو یا ضریبونو ( $A = 89a^2b^3c^2 \neq 0$ ) څخه د نیونو سره سم دا لاندې لاس ته راوړ کیږي

$$x = 1 / a^2b^3c^2, \quad abc \neq 0$$

د دې وظیفې لپاره د حل نور امکانات نه شته.

تر اوسه مو هغه ماتونه وڅیړل چې مات لاندې یې له څلورو جوړ وو، غواړو چې اوس داسې ماتونه وڅیړو چې مات لاندې یې له زیاتونونو جوړ وي، چې د نوکانو له لارې په څلورو ټوټه کیدلي یا تجزیه کیدلی شي.

بیلګه ۹ . ۷ :

$$\frac{a^2(2bx-1)}{a^4b^2x^2-b^2} + \frac{b}{a^2bx+b} = \frac{a^2bx}{a^2bx-b} + \frac{b^2(2ax-3)}{a^4b^2x^2-b^2} - 1$$

تیک د دې نیونو سره صدق کوي:  $ab \neq 0, |x| = 1/a^2$ ,

اصلي مات لاندې (ا م ل) په لاندې ډول پیدا کړو:

$$\begin{aligned} a^4 b^2 x^2 - b^2 &= b^2 \cdot (a^4 x^2 - 1) \\ &= b^2 \cdot (a^2 x + 1)(a^2 x - 1) \\ a^2 b x + b &= b \cdot (a^2 x + 1) \\ a^2 b x - b &= b \cdot (a^2 x - 1) \end{aligned}$$

$$= b^2 \cdot (a^2 x + 1) \cdot (a^2 x - 1) = b^2 (a^4 x^2 - 1) \quad (\text{امل ل})$$

د اصلي مات لاندې مساواتو له نوکانو څخه راوتلو (چې یو یا څو غړی د نوکانو د باندې او نور په نوکانو کې بندیري)، لاندونو او څلوونو له لارې لاس ته راځي:

$$\begin{aligned} a^2 (2bx - 1) + b^2 (a^2 x - 1) &= a^2 b^2 x(a^2 x + 1) + b^2 (2ax - 3) - b^2 (a^4 x^2 - 1) \\ 2a^2 bx - a^2 + a^2 b^2 x - b^2 &= a^4 b^2 x^2 + a^2 b^2 x + 2ab^2 x - 3b^2 - a^4 b^2 x^2 + b^2 \\ 2a^2 bx - 2ab^2 x &= a^2 - b^2 \\ 2ab (a - b) x &= (a + b) (a - b) \\ x &= \frac{a + b}{2ab} \end{aligned}$$

د  $a = b$  او  $ab = 0$  لپاره (دا د نیونو له لارې تل پوره دی)

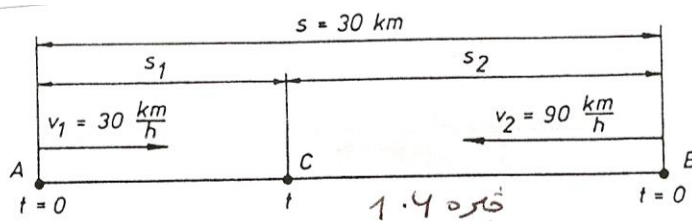
که  $a = b$  وي، نو  $x = 0$  له امله په خوښه ارزښتونه نیولی شي، بې له هغو چې په بنسټیزو نیونو کې له نیونو د باندې ساتل شوي وي (یعنې په مساوات کې ځای ورته نه وي). په دې حالت کې د  $x$  مطلقه ارزښت د  $a = b$  د په څټ ارزښت سره نه شي مساوي کیدی.

د  $x$  لپاره نیول شوي نیونې د حل ورکولو کې باید په پام کې نیول شوي وي، دا په دې مانا چې باید تل پوره وي:

$$\pm 1 / a^2 = (a+b) / 2ab$$

بیلگه ۶. ۸ : دوه گاډي تمخایونه A او B یو له بل 30 km لرې دي. د A څخه یو بار گاډی په ساعت کی د دیرش کیلومتره 30 km/h په یوه ثابت سرعت یا چټکی باندې د B په لور حرکت کوي. د B څخه یو تیز گاډی D د 90 km/h ثابت سرعت سره د A په لور حرکت کوي. که دواړه گاډي په همغه وخت کی حرکت وکړي، کله به یو بل سره مخامخ شي؟

دلته درې فزیکي لویي یو رول لري: لار، وخت او سرعت. دا به په سومبولونو  $s$ ,  $t$ , او  $v$  سره وپنول شي. ددې شي ځانتیوني لپاره څیره ۶. ۱ ورکړ شوې.



پوښتنه «چیرته» د دواړو گاډو د یوځایوالي ټکی C ته متوجه ده. دا کیدی شي د A څخه و C ته لریوالي (د بار گاډي لار  $s_1$ ) یا د B لریوالي و C څخه (د تیزگاډي D لار  $s_2$ ) سره وشمیرل شي.

پوښتنه «کله» د گاډو یوځایوالي وخت  $t$  ته متوجه ده. دا هدفمند دی کی د وخت لپاره د وخت کمون له روانیدو تر یوځایکیدو وټاکو.

دلته درې مجهولی مخ ته لرو  $s_1$ ,  $s_2$  او  $t$ . د پورته ورکړشو شي نیونی سره مناسب لاندې اړیکې باور لري:

$$v_1 = s_1 / t, v_2 = s_2 / t, s_1 + s_2 = s$$

د باور ارزښتونو استعمال سره لاس ته راځي

$$s_1 = 30 t, s_2 = 90 t, s_1 + s_2 = 30$$

(دلته د اندازی یونونه پریښوول کیږي. او پریکړه کوو چی لار په کیلو متر او وخت په ساعت بنايو!)

دا درې مجهولې  $s_1$ ,  $s_2$  او  $t$  دی د درې مساواتو سره چې حل به یې په ۶ الف او یا همداسې په برخه ۱۱ کې ورکړشوی وي، مگر دا دومره ساده دې چې د یوې له پیژندلو سملاسي نورې هم شمیرل کیدی شي. کیدی شي چې دا مساوات په یوې مجهولې مساواتو بیرته واپرول شي. ددې مجهولې  $x$  په ځای کیدی شي  $s_1$ ,  $s_2$  او  $t$  وټاکل شي. که ولیکو  $s_1 = x$ ، نو د اخري مساوات څخه لاس ته راځي  $s_2 = 30 - x$ . دا په لمړنیو دوه مساواتو کې ځای په ځای کوو او دواړه د  $t$  په لور حلوو:

$$t = s_1 / 30 = s_2 / 90 = x / 30 = (30 - x) / 90$$

نولرو

$$x / 30 = (30 - x) / 90$$

لایني ټاکنمساوات د  $x$  لپاره دي، چې ساده حل کیدی شي:

$$30x = 30 - x, 4x = 30$$

$$x = 7,5$$

$$s_1 = 7,5 \text{ km}, s_2 = 22,5 \text{ km}, t = \frac{7,5}{30} \text{ h} = \frac{1}{4} \text{ h} = 15 \text{ min.}$$

نو باور لري:

که  $s_2 = x$  کیردو، نو شمیرنه په لاني ډول ځغلي یا لاندې لار غوره کوي:

$$s_1 = 30 - x, t = \frac{s_1}{30} = \frac{s_2}{90} = \frac{30 - x}{30} = \frac{x}{90},$$

$$3(30 - x) = x,$$

$$90 = 4x,$$

$$x = 22,5,$$

$$s_2 = 22,5 \text{ km}, s_1 = 7,5 \text{ km}, t = \frac{22,5}{90} \text{ h} = \frac{1}{4} \text{ h} = 15 \text{ min.}$$

که بالاخره وخت د نامعلومي په څیر وټاکل شي، یعنی  $x = t$ ، نو باور لري:

$$s_1 + s_2 = 30x + 90x = 30,$$

$$20x = 30,$$

$$x = \frac{30}{20} = \frac{3}{2}, t = \frac{1}{4} \text{ h} = 15 \text{ min.}$$

$$s_1 = 30t = \frac{30}{4} \text{ km} = 7,5 \text{ km},$$

$$s_2 = 90t = 22,5 \text{ km.}$$



دواړه گاډي له ټکي A څخه د  $0,25h=15min$  خوزښت (حرکت) وروسته په  $17,5km$  کې یو بل سره مخامخ کیږي.

۹ . ۲ تمرینونه

- ۱ . ناکرښيز يا نالاینيز مساوات د یوې مجهولې سره لاندې مساوات حل کړئ a او b نتیجه یې د ازمايي! د مجهولو ضریبونو سره ارزښتونه راوباسئ؛ چې a او b یې نه شي غوره کولی یا نیولی. دا ورکړئ چې مساوات د کومو a او b لپاره یواځنی حل لري، حل نه لري او یا ناپای ډېر حلونه لري. همداسې تلنه طا رویه د نورو مجهولو ضریبونو سره هم وکړئ، چې په نورو برخو کې منځ ته راځي.
- ۱ . ۱ - بی له کسرونو یا ماتونو مساوات حل کړئ.

1.1.1. a)  $8\left(\frac{1}{2}x - 1\right) - 2(x - 1) = 0$   
 b)  $(3 - x)(x + 4) - 9 = (3x - 4)(8x - 9) - (5x - 6)^2$   
 c)  $2a(x + 3) = (3 + x)(5 + 2a)$   
 d)  $3a - (7b + 11a) - (3x - 12b - 9c) = (3x - 8a) + 5b - (3c - 6x)$

1.1.2. a)  $(a - x)(x + c) = 2c(a - x) - (b - x)(c - x)$

b)  $a(x + 1)(ax + b) + b(a + bx)(1 - x) = x^2(a - b)(a + b)$

c)  $(x + a)(a - x) - b(b - a) = (x + a)(b - x)$

d)  $a^2(x - a) + ab^2 = b^2(x + b) - a^2b$

۱ . ۲ - کسري مساوات په مخرج کې د ټاکلو ضریبونو او فاکتورونو سره .

1.2.1. a)  $\frac{3x-16}{3} + \frac{2x-10}{5} = 3 - \frac{x+1}{15}$       b)  $4 - \frac{10-3x}{5} = 3 - \frac{10-7x}{10} + \frac{x}{2}$   
 c)  $\frac{2x+1}{2} + \frac{3x+1}{4} + \frac{5x+1}{8} = 1 - \frac{7x+1}{8}$       d)  $\frac{4x+1}{3} + \frac{6x-1}{2} = 5 + 5 \cdot \frac{8x-10}{9}$

1.2.2. a)  $\frac{4x-3}{20} - \frac{1}{12}(4x-5) = 1 - \frac{3}{5}(2x+11)$

b)  $3\left(6\frac{1}{2} + x\right) - \frac{7}{3}\left(2x - \frac{19}{2}\right) - \frac{8}{3}x + \frac{5}{3} = 0$

c)  $\frac{7x-16}{3} - \frac{4}{5}(x+1) + 6 = \frac{3x}{2}$

d)  $\frac{3x}{4} - \frac{4}{3}(x-4) = 3$

$$\begin{aligned}
 1.2.3. \quad & \text{a) } \frac{3x-7}{5} - \frac{7-4x}{7} = \frac{5x-11}{10} - \frac{19-10x}{14} \\
 & \text{b) } \frac{17+4x}{10} - \frac{7+x}{5} = \frac{7x+13}{25} - \frac{5+x}{20} \\
 & \text{c) } \frac{2x-11}{15} - \frac{x}{5} + \frac{59}{40} = \frac{8x-59}{30} - \frac{16x-145}{24} \\
 & \text{d) } \frac{4x+4}{5} - \frac{5x-4}{55} = \frac{2x+9}{4} - \frac{12x-3}{44} \\
 1.2.4. \quad & \text{a) } \frac{5x+17}{3} - \left( \frac{3x+8}{2} - 3 \right) = \frac{3x+12}{2} - \left( \frac{x+4}{6} + 3 \right) \\
 & \text{b) } 2 - \left( \frac{3x+8}{4} - \frac{2x+2}{3} \right) = 1 - \left( \frac{7x+20}{8} - \frac{2x-7}{3} \right) \\
 & \text{c) } \frac{4-x}{2} - \left( \frac{8-x}{3} - \frac{x+2}{4} \right) + \left( \frac{8-x}{6} - \frac{3(2+x)}{8} \right) + x = 1 \\
 & \text{d) } \frac{10-14x}{8x} - \left( \frac{6}{5} + \frac{4}{2x} \right) = \frac{5}{8x} - \left( \frac{12}{5} + \frac{14x+1}{10x} \right)
 \end{aligned}$$

۱ . ۳ - کسري - يا ماتمسوات، چې په مخرج کې يې نا ټاکلي ضريبونه او فاکتورونه ورکړ شوي وي.

$$\begin{aligned}
 1.3.1. \quad & \text{a) } \frac{ax-1}{bcx} + \frac{bx-1}{acx} + \frac{cx-1}{abx} = 0 & \text{b) } \frac{ax-b}{bcx} + \frac{bx-c}{acx} + \frac{cx-a}{abx} = 0 \\
 & \text{c) } \frac{3(x-b)}{a} - \frac{2(x-a)}{b} - 1 = 0 & \text{d) } \frac{a-b^2}{x} - \frac{c-b^2}{x} - b = 0 \\
 1.3.2. \quad & \text{a) } \frac{bx-a}{a} + b = bx-1 & \text{b) } \frac{x-a}{a} - a = \frac{x-b}{b} - b \\
 & \text{c) } \frac{a+b}{x} - a = ab - \frac{a-b}{x} & \text{d) } \frac{ax^2-bx+1}{a} = \frac{bx^2-ax+1}{b}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 1.3.3. \quad & \text{a) } \frac{bx-a^2}{a} + \frac{ax-b^2}{b} = \frac{b-ab}{a} + \frac{a-ab}{b} \\
 & \text{b) } \frac{20a-x}{5a} + \frac{6b-cx}{2b} = 10 - \frac{9c-ax}{3c} \\
 & \text{c) } \frac{a^3}{b}(x-1) - \frac{b+c}{b}(1-2x) = b^2(1-x) + \frac{b+c}{b} \\
 & \text{d) } \frac{x(b-a)}{ab} + \frac{b(c-x)}{ac} = \frac{x+b}{a} - \left( \frac{b}{c} + \frac{x}{b} \right)
 \end{aligned}$$

۱ . ۴ - کسري - يا ماتمسوات، چې په مخرج کې يې نا ټاکلي ضريبونه او فاکتورونه ورکړ شوي وي.

$$1.4.1. \quad a) \frac{5}{x+2} + \frac{3}{2(x+2)} = \frac{1}{2} - \frac{7}{2(x+2)} \quad b) \frac{12x+5}{16x-15} - \frac{16x+1}{15} = \frac{3-2x}{5} - \frac{2x-1}{3}$$

$$c) \frac{10-2x}{3} + \frac{13+2x}{7} = \frac{14x+26}{2x+21} - \frac{17+8x}{21}$$

$$d) \frac{2x^n + 7x^{n-1}}{9} + \frac{7x^n - 44x^{n-1}}{5x-14} = \frac{4x^n + 27x^{n-1}}{18}$$

$$1.4.2. \quad a) \frac{8x+7}{9x^2-4} = \frac{16}{15x-10}$$

$$b) \frac{24-5x}{6-2x} - 5 = \frac{34-14x}{9-3x}$$

$$c) \frac{x+4}{12x+4} - \frac{x-4}{3x+1} = 5$$

$$d) \frac{10x-11}{12x+18} = \frac{3}{2} - \frac{4x+1}{6x-9}$$

$$e) \frac{x}{x-2} - \frac{x-2}{3x-6} = \frac{1}{6}$$

$$f) \frac{8-x}{5-10x} = 2 - \frac{5}{3-6x}$$

$$g) \frac{12x}{10x+5} + \frac{6x-10}{2x+1} - \frac{2x+25}{12x+6} + \frac{10x-1}{8x+4} = 2$$

$$h) \frac{3x-2}{5x+10} - 10 = \frac{2x+1}{3x+6} + \frac{2(1-4x)}{x+2} \quad i) \frac{6x-1}{4x-6} + \frac{10x-7}{6x-9} = 11 - \frac{14x+1}{8x-12}$$

$$j) \frac{3x}{2x-\frac{1}{2}} - \frac{16x^2}{3(4x-1)} = \frac{4(1-x)}{3} - \frac{4}{12x-3}$$

$$1.4.3. \quad a) \frac{x-2}{x+2} - \frac{x+4}{x-2} = 2 \frac{x-38}{x^2-4} \quad b) \frac{12}{x+4} - \frac{x+4}{x-4} + \frac{x^2}{x^2-16} = 0$$

$$c) \frac{5x^2-120}{10-x} + \frac{3x^2+80x}{10+x} = \frac{2x^3+160}{100-x^2}$$

$$d) \frac{15x+2}{5x-2} + \frac{25x-2}{5x+2} = \frac{200x^2-25x+18}{25x^2-4}$$

$$e) \frac{16x^2-20x+4}{4x^2-16} = \frac{2x-1}{2x-4} + \frac{3(2x+1)}{2(x+2)}$$

$$f) \frac{7x^2+8}{2(x^2-1)} = \frac{2(x+1)}{x-1} + \frac{3x-4}{2x+2}$$

$$g) \frac{16x^2-6x}{2x+1} - \frac{6x}{1-2x} = \frac{32x^3-16x^2+4x+16}{4x^2-1}$$

$$a) \frac{2x-5}{x-5} + \frac{3x-5}{x-9} = \frac{5x^2-39x+30}{x^2-14x+45}$$

$$b) \frac{2x-9}{x-12} + \frac{x-6}{x-24} = \frac{3x^2-87x-36}{x^2-36x+288}$$

$$c) \frac{11x+6}{x^2-3x-54} = \frac{3x-14}{2x-18} - \frac{3(x+2)}{2x+12}$$

$$d) \frac{7x-15}{3x-6} + \frac{8x-21}{3x-3} + \frac{10x+21}{3x^2-9x+6} = 5$$

$$e) \frac{1}{3x+21} + \frac{1}{3(x-5)} - \frac{x+6}{4(x^2+2x-35)} = 0$$

$$f) \frac{136x^2-4x-266}{48x^2-32x+5} = \frac{14x-19}{4x-1} - \frac{8x+25}{12x-5}$$

$$g) \frac{8x-3}{6x-4} + \frac{6x-4}{10x-6} = \frac{116x^2+10x-34}{60x^2-76x+24}$$

- ۵.۴.۱

$$a) \frac{5x-12}{2} = \frac{5 \cdot \left(\frac{1}{2}x^2+3\right)}{x+1} - \frac{7x-10}{2x-10}$$

$$b) \frac{28}{45-7x} = \frac{5}{x-9} - \frac{9}{x-5} ;$$

$$c) \frac{x+6}{x-2} + \frac{3x-8}{x-4} = \frac{6(x+9)}{x+6}$$

$$d) \frac{x-13}{x+3} + \frac{8x+45}{x+5} = \frac{9x+7}{x+2}$$

۱. ۵ - کسری مساوات، چي په مخرج یا مات لاندې کي یې ناتیکلي ضریبونه او فکتورونه ورکړ شوي وي.

- ۱.۵.۱

$$a) \frac{2a+x}{2a-x} = \frac{a+b}{a-b}$$

$$b) \frac{a-b}{2c-x} = \frac{a+b}{2c+x}$$

$$c) \frac{a}{a-2x} - \frac{b}{b-2x} = 0$$

$$d) \frac{x-\sqrt{a}}{x-\sqrt{b}} - \frac{x-\sqrt{a}}{x+\sqrt{b}} = 0$$

- ۲.۵.۱

a)  $\frac{a}{x+b} - 1 = 1 + \frac{b}{x+b}$

b)  $a - \frac{ax}{x-1} = \frac{1}{a} - \frac{x}{ax-1}$

c)  $a+b + \frac{x}{a+b} = a-b + \frac{x}{a-b}$

d)  $\frac{1}{a+b} + \frac{a+b}{x} = \frac{1}{a-b} + \frac{a-b}{x}$

e)  $\frac{x}{ab} + ab = \frac{1}{a+b} + (a+b)x$

f)  $\frac{ax}{b} + \frac{bx}{a} + \frac{2ab}{a+b} = \frac{(a+b)^2 x}{ab}$

g)  $\frac{a+1}{b} x + \frac{b+1}{a} x + \frac{2ab}{a+b} = a+b+1$

1.5.3. a)  $\frac{2(6x^2 - 11a^2)}{4x^2 - 9a^2} = 5 - \frac{4x+a}{2x+3a}$  b)  $\frac{a}{1-x} - \frac{b}{x+1} = \frac{(a-b)(ab+1)}{1-x^2}$

c)  $\frac{2a}{2-x} - \frac{2b}{x+2} = \frac{4(a^2b + ab^2 + a - b)}{4-x^2}$

d)  $\frac{b-x}{a+x} + \frac{1-x}{a-x} = \frac{a(1-2x)}{a^2-x^2}$  e)  $\frac{ax+b}{ab-b^2} - \frac{a-bx}{ab+b^2} = \frac{2(ax+b)}{a^2-b^2}$

f)  $\frac{2a+ab^2x}{a+ab^2x} - \frac{a^2(3-2bx)}{a^2-a^2b^4x^2} = \frac{b^2(2ax-1)}{a^2-a^2b^4x^2} - \frac{ab^2x}{a-ab^2x}$

۶، ۱ - کسر مساوات یا ماتر ابرون له دوه کسرونو سره

a)  $\frac{\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}}{\frac{2}{3} - x} - \frac{2}{3} = \frac{2}{3} - \frac{\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}}{\frac{2}{3} - x}$

b)  $\frac{\frac{3}{2} - \frac{1}{x}}{\frac{3}{2} + \frac{1}{x}} - \frac{\frac{2}{3} - \frac{1}{x}}{\frac{2}{3} + \frac{1}{x}} = \frac{\frac{3}{2} - \frac{2}{3}}{\frac{3}{2} + \frac{1}{x}}$

c)  $\frac{a - \frac{1}{x}}{a + \frac{1}{x}} - \frac{1}{x} = \frac{x - \frac{1}{a}}{x + \frac{1}{a}} - \frac{1}{a}$

d)  $\frac{\frac{1}{a} - \frac{1}{x}}{\frac{1}{a} + \frac{1}{x}} = \frac{a - \frac{1}{x}}{a + \frac{1}{x}}$

۷، ۱ . شي تمرینونه

۱۷، ۱ - که د یوه گڼ څلور څله او ۱۴ زیاتون ۴۰ وي ، نو هغه گڼ کوم دی؟

۷۱، ۲ - که د یوه گڼ څلور څله او ۴ زیاتون ددې گڼ او ۱۴ زیاتون سره برابر وي ، نو

هغه گڼ کوم دی؟

۷۱، ۳ - د یوه گڼ څلورمه برخه او پنځه څله ۴۲ گڼ ورکوي ، نو هغه گڼ کوم دی؟

- ۱ . ۷ . ۴ - که د یوه گڼ څلوربرابره څخه ۲ کم شي او په یوه گڼ ویشل شي چی ۴ ترې کم شوی او ۱۱ لاس ته ترې راشي، نو دا گڼ به کوم وي؟
- ۱ . ۷ . ۵ - د یوه گڼ پنځه څخه او د ۳ زیاتو دوه څخه لوي دی لکه د دې گڼ دري څخه او ۱ کمون. دا گڼ کوم دی؟
- ۱ . ۷ . ۶ - د یوه گڼ څلورڅخه او ۱۴ کمون نیم دومره لوي دی لکه ددې گڼ دوه څخه او ۸ . دا گڼ څه نومیږي؟

- ۱ . ۷ . ۷ - د یوه گڼ شپږ څخه او د ۵ کمون یا توپیر چی ددې گڼ په څلور څخه او ۵ زیاتون ویشل شي، ۱ ور کوي. دا گڼ څه نومیږي؟
- ۱ . ۷ . ۸ - د یوه مات ماتباندي په ۵ له ماتلاندي کوچنی دی. که ماتباندي په ۲۳ او مات لاندي په ۸ لوي شي، نو د ورکړشوي مات په څټ ارزښت لاس ته ترې راځي. دا گڼ څه نومیږي.
- ۱ . ۷ . ۹ - ۲۵ داسی په دوه گڼونو بیل کړی یا تجزیه یا ټوټه کړی، چی د مربع توپیر یی ۱۲۵ شي.
- ۱ . ۷ . ۱۰ - د دوه گڼونو توپیر یا کمون ۶ او مربع یی ۱۸۰ دی. گڼونه څه نومیږي؟
- ۱ . ۷ . ۱۱ - دوه گڼونه داسي تناسب کی دي، یا یو بل ته داسي ځانونه نیسی . که دوم په لمړی ویشل شي، نو ۲ لاس ته راځي او پاتی یی ۷ دي. دواړه گڼونه کوم دي؟
- ۱ . ۷ . ۱۲ - د دوه ځاینیونکي گڼ پروت زیاتون ۱۲ دی. که له دې گڼ ۱۸ کم شي، نو یو دوه ځاینیونکی گڼ لاس ته راځي، د همغه ځایگڼونو سره مگر په څټ ترتیب سره.
- ۱ . ۷ . ۱۳ - یو زدکړی غواړي د یوه گڼ څخه مربع رینسه د یو په بل کی بندولو پرینځیپ یا اصول له لارې پیدا کړي. دی لمړی یو گڼ د رینسی په څیر

ټاکي، چی مربع یی په ۲۷ کوچنی دی. بیا یوه رینسه ټاکي ، کومه چی دوه له هغه لوي دی چی لمړی ټاکل شوی. ددې رینسي مربع په ۳۳ لوي دی ، هغه گڼ کوم دی چی مربع رینسه یی غواړو پیدا کړو ؟

۱۴ . ۷ . ۱ - یو د سپورت ملگرو ټولنه له څلورو ډلو جوړه ده. لمړی ډله ۳۷ دملگرو غړي لري، په داسی حال کی چی نورو ډلی  $1/4$  ,  $1/5$  په همدې ډول  $2/2$  غړي په بر کی نیسي. د غړو شمیر څومره دی او د هرې ډلی څومره دي

۱۵ . ۷ . ۱ - یو نفر په درې ورځو کی مجلی په داسی شمیر خرڅوي: په لمړی ورځ  $1/9$ ، دومه ورځ  $1/6$  او په دریمه ورځ  $1/4$  د موجودو لوتوکه .

دی اوس له هغومجلو د نیمايي دوه کمی د ځان سره لري. هغه څومره مجلی د خرڅلاو لپاره لرودي؟

۱۶ . ۷ . ۱ - یوه میلمه د یوه زدکونکی څخه د هغه د عمر پوښتنه وکړه. زدکونکی په ټوکه ځواب ورکړ « ځما پلار چی درې میاشتی پخوا یی خپله ۵۵ کلنی ولمانځله، ځما د عمر څلورواړه څخه  $1/4$  زیات زوړ دی.» زدکونکی څومره عمر لري؟

۱۷ . ۷ . ۱ - د یوه زدکونکي پلار څلورنیم ځله زوړ دی لکه د هغه خوي. دواړه ۲۷ کاله د هغه د یو اویاکلن نیکه څخه ځوان دي، پلار او ځوي څومره زاړه دي؟

۱۸ . ۷ . ۱ - په یوه معما کی یو زدکونکی دې بل ته وایي: « که زه لما سره بټوه کی پیسو سره ۵،۲ افغانی ور زیاتي کړم ، زیاتون یی له ۵ سره ځل یا ضرب کړم او له دې ځل څخه ۱۲ کمی کړم او دا لاس ته راغلی کمون یا توپیر په 11 ویشم نو نتیجه یی ۸ افغانی ده. » هغه زدکونکی په خپله بټوه کی څومره پیسی لري؟

١٩.٧.١ - په یو په بل پسې تړلو مقاومتونو کې لمړی او دوهم یو ډول لوی دي، دریم دوه ځله او څلورم درېځله دومره لوی دي لکه لمړی دوه یاد شوي مقاومتونه، ټول مقاومت ١٠٥٠ ( اومیگا ) ، په دې پروت شپانونک ١١٠ ولته دی. اوس الف ( یوگونی مقاومتونه څومره لوی دي، ب

برقوه، برخه مقاومتونه؟

٢٠.٧.١ - د دوه غبرگ چالان عمومي مقاومت ( ماته متأسفانه په افغانسان کې د فزیک مروج نومونه دې معلوم، خو فکر کوم چې په هدف به پوه شو ) دی

$$a) 1000 \Omega, \quad b) 2000 \Omega$$

یو مقاومت ٤٠٠٠ دی، هغه بل څومره لوی دی؟

٢١.٧.١ . د درې غبرگ مقاومتونو څخه یی دوم دوه واړه دومره لوی دی لکه لمړی او دا دریم یی درېواړه دومره لوی دی لکه دوم ، هر مقاومت څومره لوی دی، که عمومي مقاومت  $300 \Omega$  ( ب ) ،  $12 k \Omega$  ( ا ) وي؟

٢١ . د درې غبرگو مقاومتونو څخه یی دوم دوه واړه دومره لوی دی لکه لمړی او دا دریم یی درېواړه دومره لوی دی لکه دوم ، هر مقاومت څومره لوی دی، که عمومي مقاومت الف (  $12 k \Omega$  )

ب )  $300 \Omega$  وي؟

٢٢ . په اوبو کې یو د لرگي منډه باید څومره لوی وي، چې د لمبیدو استعداد یی ٧٥٠ نیوتونه وي او د لرگي خاص وزن یا کلکوالی ( د فرمول څخه معلومیږي چې دا څه شی دی )  $4 \frac{N}{dm^3}$  وي؟



- ۷ . ۲۳ د سونگموادو تانک د دوم ماشین لپاره ۴۰ لیتره گلوډ د سونگ مواد لري. خومره تیل او خومره بتزین په تانک کی موجود دي که گډونه یی وي؟
- ۷ . ۲۴ د ښار د ښکلا لپاره د ښارمنځ د سرک په اوږدوالي ۸۵ ونی کینول کیږي. دا چی د مخه خرکړ شوی او تل همغه واټن په یوه متر کوچنی شي ، نو په سرک بیا ۲۰ ونی زیاتی کیننول کیدی شي. د دې هرې ونې واټن وبللی ته خومره لویي دی؟
- ۷ . ۲۵ د بایسکل ځغلونو کوډله له سر څخه ۵۰ متره اوږدوالی لري. هغه ۴۵ کیلومتره په ساعت کی سرعت لري، چی په یوه پله چی اوږدوالی یی متره دی ، خومره وخت ته ضرورت لري، چی له پله پورې لاړ شي.
- ۷ . ۲۶ واورومنده کی ، دا وروسته وړونکی د پروسپر کلني وړونکی څخه یوه نیمه دقیقه وروسته په ځفاسته پیل کوي. د څو کیلو متره وروسته دی کړی چی لمړني ځغلیدونکي څخه مخ ته شي، که د ده منځنی سرعت ۵ متره ثانیه کی وي او د لمړي ۸ ، ۴ متره په ثانیه کی وي ؟
- ۷ . ۲۷ د تامنځي د دز سره د سپورت میله کی ۲۰۰ متره ځفاستی د منډې ډله په ځفاسته پیل کوي. ځغلیدونکی د پیل کرښي څخه لس متره شا ته ولاړدي. برخه نیوونکی په منډه پیل کوي ، چی د تومانچی د ډز کرد وگوري دو وخت توپیر خومره دی، که غږ رسیدنه په نظر کی ونه نیول شي او د غږ سرعت ۳۴۰ متره په ثانیه کی وي؟

## ۱۰ کومبيناټوريك - د بينوم جمله

کومبيناټوريک څخه په شميرپوهنه کې د دې لپاره کار خلي، چې يو گڼ ، پل ځای بدلون څومره والښتې او که څو گڼونځپل ځای بدل کړي دا څنگه ليکل کيږي . د ځای بدلون شميرنه ده

او د هغې ډولونه .

په ۱۰۱۰ او ۲۰۱۰ برخو کې به د شميرپوهنې مرستندوي مواد د بينوم جملې (۳.۱۰)

برخه) او کومبيناټوريک ( ۱۰ . ۴ برخه) د فاکولتيت کليمې او بينوميالکوايفيڅينټ (بينوم ځلوني) پيل شي .

### ۱۰ . ۱ فاکولتيت Die Fakultät, factorial

پيژند ۱۰ . ۱ :

د  $n!$  سومبول (ويل کيږي  $n$  « فاکولتيت » ) لاندې سرې له ۱ تر  $n$  پورې گڼونو ضرب پوهيږي، يعنی  $n! = 1.2....(n-2).(n-1).n$  برسیره پر دې تعريفو:  $1 = 0!$

د فاکولتيت له پيژند څخه څرگنديږي، چې  $(n+1)! = n!.(n+1)$  لرو.

## ۱۰ کومبيناټوریک - د بېنوم جمله ۲۶۷

يادونه:

په افغاني ادبياتو کې تر هغې چې ماته معلومات شته د فاکولټيت په ځاي فاکتوريال ليکل شوی. ما په دې کتاب کې دا د الماني کلیمه يا پښتو ، ځله ووني،، زيات کاره ولی، هيله ده چې تاسو به يې په خپله خوښه وټاکي. په دې کې کومه سهوه منځ ته نه شي راتلی.

بیلگی :

الف  $n!$  : د  $n = 5$  لپاره په دې ډول دی:  $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ ب : په دې ډول دی :  $0! \cdot 2! \cdot 4! = 1 \cdot (1 \cdot 2) \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4) = 48$ پ: په دې ډول دی:  $5!/3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 / 1 \cdot 2 \cdot 3 = 4 \cdot 5 = 20$ 

ت : په دې ډول دی

 $(n+2)!/(n-1)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1)(n) \cdot (n+1) \cdot (n+2) / 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1)$  $= n \cdot (n+1) \cdot (n+2)$ 

ت: داسی دی

$$2 \cdot n! = 2 \cdot (1 \cdot 2 \dots n),$$

$$(2 \cdot n)! = 1 \cdot 2 \dots n \cdot (n+1) \dots 2n.$$

۱۰ . ۲ د بېنوم ځلوني يا ضربونه

پېژند: ۱۰ . ۲

د سيمبول  $\binom{n}{k}$  ( وييل کيږي  $n$  « پر »  $k$  لاندې د دوه ځله ونو ویش پوهيدل کيږي چې هر يو  $k$  ځله ووني يا ضربونه يا فاکتورونه لري :

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \dots \cdot \frac{n-k+1}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!} = \prod_{i=1}^k \frac{n+1-i}{i}$$

برسيره پر دې دا هم په کلکه کره کيدلی شي:

$$\binom{0}{0} = 1; \quad \binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1; \quad \binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1};$$

$$\binom{n}{1} = n$$

د  $k$  گڼ يو پيدايښتي يا طبعي گڼ دی او د ماتلاندي او مات باندي گڼونو گڼون يا تعداد بنایي، په مات لاندي کي د لومړيو  $k$  پيدايښت يا طبعي گڼونو فاکتورونه دي. د  $n$  گڼ رييل دی او د مات پورته لومړنی فاکتور دی. دوم فاکتور  $n - 1$ ، دريم  $n - 2$  تر  $k - 1$

فاکتور  $n - k + 1$  پوري . دا  $\binom{n}{k}$  سومبول د اويلر (Leonhard Euler) له ۱۷۰۷ - ۱۷۸۳ سويسي گڼپوه، فزيکپوه او استرولوگ) لخوا د لومړي ځل لپاره پيل شو، له دې امله ورته د اويلر سومبول وايي پرته يا مقايسه برخه ۱۰ . ۳ . (که څوک ديوه

بينوم پوټنڅ يا توان شميري) ۱۰ . ۳ برخه، نو سيمبول  $\binom{n}{k}$  لاس ته راځي چی د یوا-

ځنيو زياتونونو ځلونه دي، او له دې امله ورته بينوم ضريب يا بينوم ځله ووني ويل کيږي.

بيلگی :

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{2! \cdot 3!} = \frac{5 \cdot 4}{2!} = \frac{20}{2} = 10$$

$$\binom{49}{6} = 13.983.816, \quad \binom{3}{5} = 0$$

$$\binom{2}{1/3}$$

تعريف نه دی، ځکه چی  $1/3$  پيدايښتي يا طبعي گڼ نه دی.

د بينوم ضريبونو يا ځلونو څويونه:

$$۱ - د  $n, k \in \mathbb{N}$  ،  $n < k$  لپاره باور لري  $\binom{n}{k} = 0$$$

که  $n$  يو طبعي گڼ وي او له  $k$  کوچنی وي، نو صفر په ماتباندي کی يوځله وونی

يا ضيرب دی

$$۲ - د  $n, k \in \mathbb{N}$  ،  $n > k$  لپاره باور لري$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

اوبیونه (حل): سری د  $(n-k)!$  سره د مات  $\binom{n}{k}$  پراخوالي له امله لاس ته راوړي

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \dots \cdot \frac{n-k+1}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!} = \prod_{i=1}^k \frac{n+1-i}{i}$$

دا پورته برابرول له  $\frac{(n-k)!}{(n-k)!}$  سره ځلوو، نو لاس ته راځي

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

له دې نور لاس ته راځي، که د  $k$  په ځای  $n-k$  وليکل شي

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-n+k)!} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

۳ - باور لري

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

حل (اوبی): د کڼ اړخ زیاتون څخه دا لاندې لاس ته راوړل کیدی شي، که د بينوم ضریبونه يا ځلووني د ماتو په څیر وليکل شي ، ماتونه ور زیات کړي او د زیاتونون گډ فاکتورونه چی په ماتباندي کی دی په نوکانو کی ونیسي او پاتی ساده کړي :

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} &= \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} + \frac{n(n-k)\dots(n-k+1)(n-k)}{(k+1)!} = \\ &= \frac{n(n-1)\dots(n-k+1) + n(n-k)\dots(n-k+1)(n-k)}{(k+1)!} = \\ &= \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)[k+1+n-k]}{(k+1)!} = \\ &= \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)(n+1)}{(k+1)!} \end{aligned}$$

که په پورته افاده يا وېينه کې د مات پورته اخرنی فاکتور د لومړي ځله ووني په څير وليکل شي، لاندې بېنوميال يا بېنوم ځلونی (ضريب) تعريفوي:

$$\binom{n+1}{k+1}$$

۱۰ . ۳ د بېنوم جمله

د بېنوم لاندې سړی د دوه توکو (گنونو) زياتون پوهیږي. يعنې:  $x+y$  د بېنوم جمله مور ته بنايي چی څنگه د يو بېنوم

$$(x+y)^n$$

پوتنڅ، چی پيدايښتي گن  $n$  یی ایکسپوننت يا جگن يا لنډ جگ وي، د زياتون په څير پر مخ بيول کيږي. که د  $x+y$  بېنوم پوتنڅ د  $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$  اکسپوننت لپاره شميرو، نو لاندې نتيجه لاس ته راوړو :

پاسکال دريگودی

$$\begin{aligned} (x+y)^0 &= \dots\dots\dots 1 \\ (x+y)^1 &= \dots\dots\dots x+y \\ (x+y)^2 &= \dots\dots\dots x^2 + 2xy + y^2 \\ (x+y)^3 &= \dots\dots\dots x^3 + 3x^2x + 3xy^2 + y^3 \\ (x+y)^4 &= \dots\dots\dots x^4 + 4xy + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4 \\ (x+y)^5 &= \dots\dots\dots x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5 \\ (x+y)^6 &= x^6 + 6x^5y + 15x^4y^2 + 20x^3y^3 + 15x^2y^4 + 6xy^5 + y^6 \end{aligned}$$

په دې د زياتونونو پرمخبيولوکي يو قانونيت ليدل کيږي. د زياتونو گڼون (شمير، تعداد) د بينوم د اکسپوننت څخه په يو لوي دي. ټول زياتوني د  $x$  او  $y$  پوتنځ ځل لري، په داسې ډول چې د  $x$  او  $y$  پوتنځ زياتون په  $n$  برابري او په دې ډول د  $x$  پوتنځ په کميدلو) د  $y$  پوتنځ په زياتيدلو د  $x$  په اکسپوننت په ترتيب پرلپسې

$$n, n-1, \dots, 1, 0$$

د  $y$  اکسپوننت په ترتيب  $0, 1, n-1, \dots$  دي. د بينوم پوتنځ کوايفيځينټونه داسې په نامه پاسکال (Blaise Pascal) ۱۶۲۳ - ۱۶۶۲ فرانسوي شمرنپوه (گڼوندریگودی جوړوي .

				1					
				1	1				
			1	2	1				
		1	3	3	1				
	1	4	6	4	1				
	1	5	10	10	5	1			
	1	6	15	20	15	6	1		
1	7	21	35	35	21	7	1		

په دې کې هر گڼ د دواړو پورته کين-بني پرتوگڼونو زياتون دی، چې بي له کړاو د نورو اکسپوننتويا په جگو  $n = 7, 8, \dots$  .. لپاره پرمخ بيول کيدی شي. د ډيرو لويو اکسپوننتو  $n$  لپاره بيا هم دالار له کړاو ډکه ده ليونارد اويلر Leonhard Euler د کومبيناټوريک فکرونو کې د کوايفيځينټونو يووني يا يوونوالي يا بهتره يوونواليز ستروکتورونه يا جوړبښتونه وپيژندل. په  $n - m$  (د بينوم جگ يا اکسپوننت) ليکه او  $K$ -م ځای،  $k = 0, 1, \dots, n$  کې ولاړ ضريب د فورم څخه دی) له کومه امله چې په ۱۰ . ۲ برخه کې د اويلر سومبول په نوم داسې بلل شوي د بينوم ضريب په څير رامنځ ته شو) که د پاسکال گڼونو دريگودی د اويلر سومبول استعمال په څيرولیکل شي نو لاس ته راځي .

$$\begin{aligned}
 & \dots\dots\dots \binom{0}{0} \\
 & \dots\dots\dots \binom{1}{0} \binom{1}{1} \\
 & \dots\dots\dots \binom{2}{0} \binom{2}{1} \binom{2}{2} \\
 & \dots\dots\dots \binom{3}{0} \binom{3}{1} \binom{3}{2} \binom{3}{3} \\
 & \dots\dots\dots \binom{4}{0} \binom{4}{1} \binom{4}{2} \binom{4}{3} \binom{4}{4} \\
 & \dots\dots\dots \binom{5}{0} \binom{5}{1} \binom{5}{2} \binom{5}{3} \binom{5}{4} \binom{5}{5} \\
 & \dots\dots\dots \binom{6}{0} \binom{6}{1} \binom{6}{2} \binom{6}{3} \binom{6}{4} \binom{6}{5} \binom{6}{6}
 \end{aligned}$$

داويلر سومبول کی د فاکتور پرځاي ، چي گڼونه دی ، سومبول  $\binom{n}{k}$  ليکل کيږي.

يادونه : ما کله a,b او کله بيا x,y ليکلي، دا په يو ډول ليکنه بنکلي بنکار يږي، خو زه کله کله داسي ستونځي لرم .  
 په ۱۰ . ۲ برخه کی د بېنوميالکوايفيځينټ لپاره بنسټ ونيول شوو خو يونو ۲ په بنسټ د پاسکال دريگودي منځنی محور ته سيومتري پراته کوايفيځينته سره مساوي دي. داچي هر کو- ايفيځينټ ورباندي پورته کوايفيځينتونو زياتون سره مساوي دی په ۳ کی ونيول شو) د تمرين وظيفه ۱۰ . ۴ دي هم ورسره پر تله ( مقايسه( شي ) د اويلر سيمبول په استعمال

د يوه بېنوم  $(a+b)^n$  د پوتنځ د زياتون پرمختگ د يوه طبيعي گڼ n لپاره په لاندي ډول ليکلو ته اجازه راکوي



جمله ۱۰. ۱ (د بينوم جمله)

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

$$= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^{n-i} b^i$$

اوبونه (حل): د پوره ايندکشن له لارې:

د ايندکشن پيل: (n = 0)

$$(a+b)^{k+1} = \binom{k+1}{0}a^{k+1} + \binom{k+1}{1}a^k b + \binom{k+1}{2}a^{k-1}b^2 + \dots + \binom{k+1}{k}ab^n + \binom{k+1}{k+1}b^{k+1}$$

$$(a+b)^0 = \binom{0}{0}a^0 = 1$$

د ايندکشن نيونه: (n = k)

$$(a+b)^k = \binom{k}{0}a^k + \binom{k}{1}a^{k-1}b + \binom{k}{2}a^{k-2}b^2 + \dots + \binom{k}{k-1}ab^{k-1} + \binom{k}{k}b^k$$

د اندکشن غوښتنه: (n = k + 1)

$$(a+b)^{k+1} = \binom{k+1}{0}a^{k+1} + \binom{k+1}{1}a^k b + \binom{k+1}{2}a^{k-1}b^2 + \dots + \binom{k+1}{k}ab^n + \binom{k+1}{k+1}b^{k+1}$$

دايندکشن بنوونه:

$$(a+b)^{k+1} = (a+b)^k (a+b)$$

$$= \left( \binom{k}{0}a^{k+1} + \binom{k}{1}a^k b + \binom{k}{2}a^{k-1}b^2 + \dots + \binom{k}{k}ab^k \right) (a+b)$$

$$+ \left( \binom{k}{0}a^{k+1}b + \binom{k}{1}a^{k-1}b^2 + \binom{k}{2}a^{k-2}b^3 + \dots + \binom{k}{k-1}ab^k + \binom{k}{k}b^{k+1} \right)$$

که یو د بل سره (یو د بل لاندې په څنګ یا کږې پرټی) برابر پوتنڅ یا توان ځلونه د اویلر فرمول یا سومبول د زیاتونځویونو د استعمال له لارې سره راټول (یوځای) شي

$$C_{W_6}^{(4)} = \binom{6+4-1}{4} = 126$$

$$\binom{k}{1} + \binom{k}{0} = \binom{k+1}{1}, \binom{k}{2} + \binom{k}{1} = \binom{k+1}{2}, \dots, \binom{k}{k} + \binom{k}{k-1} = \binom{k+1}{k}$$

لومړي او اخر زیاتون ضریبونه ولیکل شي نو غوښتل شوي اړیکې لاس ته راځي

$$\binom{k}{0} = \binom{k+1}{0}, \binom{k}{k} = \binom{k+1}{k+1}$$

د  $(a-b) = a + (-b)$  له امله د بینوم له جملې د یوه  $n$ -م پوتنڅ دکمون څخه لاس ته راځي

$$\begin{aligned} (a-b)^n &= \binom{n}{0} a^n - \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 - \binom{n}{3} a^{n-3} b^3 + \dots \pm \binom{n}{n} b^n \\ &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^{n-i} (-b)^i \end{aligned}$$

بیلګې:

$$(x+y)^3 = \binom{3}{0} x^3 + \binom{3}{1} x^2 y + \binom{3}{2} x y^2 + \binom{3}{3} y^3 = x^3 + 3x^2 y + 3x y^2 + y^3$$

$$(x-y)^3 = \binom{3}{0} x^3 + \binom{3}{1} x^2 (-y) + \binom{3}{2} x (-y)^2 + \binom{3}{3} (-y)^3 = x^3 - 3x^2 y + 3x y^2 - y^3$$

#### ۴.۱۰ کومبيناټوريک:

کومبيناټوريک د یوې ډیرې د پای غړو یوځای درولو یا راوړلو ترتیب قوانینو سره سر او کارلري. کیدی شي د ټولو غړو یا یوې برخې یوځایولو په څیر راوړل شي، په یوځایولو کې کیدی شي د غړو ترتیب یو رول ولوبوي او یا هم نه، او همدارنگه په راوځایولو کې

کیدی شي د غرو تکرار راشی او یا هم نه. له دې امله د یوځایولو یا ټولگی درې ډولونه توپيروو (Komplexion هم ورته وايي)، په نامه پرموتیشن، وارییشن، کمبینیشن (Permutation, Variation, Kmobination) کوم چی په لاندې برخو کی یو په بل پسې څیرل کیري او په اخرنی جدول کی به لیدیدونکی څرگند شي یا لیدورو بنوول شي

۱۰ ۰ ۴ ۱۱ پرموتیشن Permutare

( لاتین: ..سره بدلول، دلته دا اصلاً ځای بدلون دی. لنډ: بدلون)

پیژند ۳. ۱۰ :

n د غرو یو پرموتیشن (ځای بدلون) بي له تکرار داسی «یوځای درول» دي، په کوم کی

چي n غري په یوه د زره پورې ترتیب کی څنګ په څنګ ولاړ وي. د n غرو مختلفه ترتیبونه

تل د مختلفو پرموتیشنونو یا ځایبدلونونو په مانا ده بیلگی:

۱ - د دوه غرو پرموتیشن

الف : 2 1 دی 12 21

ب : a, m دی m a a m

۲ - د درې غرو پرموتیشنونه

الف : ۱، ۲، ۳ دي:

۱۲۳ ۲۱۳ ۳۱۲

۱۳۲ ۲۳۱ ۳۲۱

ب : a,m,s دی:

ams mas sam

asm msa sma

۳ - د څلور غړو پرموتيشنونه

الف : 1,2,3,4 دي:

4123	3124	2134	1234
4132	3142	2143	1243
4213	3214	2314	1324
4231	3241	2341	1342
4312	3412	2413	1423
4321	3421	2431	1432

دا پورته پرموتيشنونه له پورته وکښته لور ته ليکسيکايي ترتيب دي، دي ته به د کرانو لوستونکو پام وي، وروسته هم همداسی دي، که دا توري وي او که گڼونه ۰ په گڼونو کی پيداينستي ده، چې د پښتو ليکسيکايي ترتيب پجه [ام کی نيول شوی ۰ له بني لور کښته بيا بيرته گين لور خوزبت دی ۰

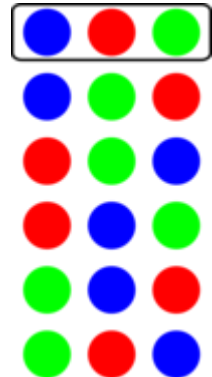
ب : a,m,s,u دي: له کن کښته لور ته بيا بيرته پورته

uams	samu	masu	amsu
uasm	saum	maus	amus
umas	smau	msau	asmu
umsa	smua	msua	asum
usam	suam	muas	aums
usma	suma	musa	ausm

پ ( ا ت ج گ ) دي: دلته طبعاً له بني وکين لورته ترتيبيري)

اتجگ	تاجگ	جاتگ	گاتج
اتکج	تاگج	جاگت	گاجت
اجتگ	تجاگ	جتاگ	گتاج
اجگت	تجگا	جتگا	گتجا
اگتج	تگاج	جگات	گجات
اگجت	تجگا	جگتا	گجتا

د ټولو پرموتيشنونود ليکلو لپاره مرستندوی مواد، د بيلگی په ډول له څلورو غړو څخه د ۲۴ پرموتيشنونو، ليکسيکني ترتيب، دا په دي مانا چي د ليکسکا لغاتو ترتيب ته «کت مت» (ورته) دي، چي د غړو پيدايبنتي لړۍ مخته پرته وي (په تورو، په گڼونوکطبعی يو په بل پسي). دبيلگي په توگه د غړو a , m , s , u ۲۴ پرموتيشنونه په لکسيکا ترتيب ورکړ شوي. د دي غړو) يا تورو ( جوړ شوي پرموتيشنونه ( لغاتونه) maus همدا رنگه saum په دي ترتيب کي ۸-ام همدا ډول په ۱۴-ام ځاي کي ولاړ دي. همدا ډول په پ ( کي د څلورو تورو ا، ت، ج، گ پرموتيشن ورکړ شوی چي ۸-ام ځاي کي يي تاگج ولاړ او په ۱۵-م ځاي کي يي جتاگ ولاړ دی.



د پورته درې غونډارو لپاره نظم يا ترتيب  $۲ \times ۳ \times ۶ = ۳۶$  دی.

که لیکو، چې  $1.2.3.4.5.6$  نو ددې پرځاي لیکو:  $6! = 720$

جمله ۱۰. ۲:

د پرموتيشنونو  $P_n$  گڼون (شمير يا تعداد)، د  $n$  يوله بل مختلفو غړو، په لاندې

$$n! = P_n$$

اوبونه: د پوره ايندکشن له لارې:

$$(n = 1): P_1 = 1! = 1 \quad \text{د ايندکشن پيل:}$$

$$(n = k): P_k = k! \quad \text{د ايندکشن نيونه:}$$

$$(n = k+1): P_{k+1} = (k+1)! \quad \text{د ايندکشن غوښتنه:}$$

د ايندکشن بنوونه:  $k$  غړو ته په  $k!$  پرموتيشنونو کې د ځل په ځير يو  $(k+1)$  -ام غړی راځي. دا  $(k+1)$  -ام غړی کيدی شي له لومړي تر  $(k+1)$  -ام ځاي پورې ودريري، داسی چې د  $(k+1)$  -ام غړي ورنیولو د هر  $k$  غړو پرموتيشن  $k+1$  پرموتيشنونه د  $k+1$  غړو پرموتيشنونه شي. له دې امله باور لري

$$P_{k+1} = P_k (k+1) = k!(k+1) = (k+1)!$$

بيلگه:

په څومره مختلفو لړيو پرلپسې (دا موضوع په ۱۸ برخه کې کتلی شي) کې لس زدکوونکی په يوه لیست کې خپل نومونه لیکلی شي؟

$$\bullet \quad P_{10} = 10! = 3628800 \quad \text{اوبی يا حل:}$$

پيژند ۱۰ . ۴ :

هر د  $k$  غرو ترتيبونه، د کومو څخه چې  $i$ -ام غړی  $n_i$  - ځله رامنځ ته کيږي،  
 د  $i = 1, 2, \dots, k$  لپاره، نو پرموتیشن د تکرار) د تکرار سره پرموتیشن (سره نوميري  
 . د غرو شمير په پرموتیشن کې بيا داسی دی  $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$

بيلگی :

۱ - د دوه غرو  $a, b$  پرموتیشن په کوم کې چې غړی  $a$  يو ځل او غړی  $b$  دوه ځله  
 رامنځ ته کيږي،

$$(k = 2; n_1 = 1; n_2 = 2; n = n_1 + n_2 = 1 + 2 = 3)$$

په دې ډول دی:  $abb$        $bab$        $bba$

۲ - د غرو  $a, b$  پرموتیشن، په کوم کې چې  $a$  دوه ځله، غړی  $b$  درې ځله رامنځ ته  
 کيږي ( $k = 2; n_1 = 2; n_2 = 3; n = n_1 + n_2 = 2 + 3 = 5$ ) په لاندې ډول دی

$abbba$        $abbab$        $ababb$        $aabbbb$   
 $babba$        $babab$        $baabb$   
 $bbbaa$        $bbaba$        $bbaab$

جمله ۱۰ . ۳ : د  $k$  غرو د پرموتیشن گنون يا تعداد  $P_n^{(n_1, n_2, \dots, n_k)}$  ، له کومو چې  $i$ -  
 ام غړی  $n_i$  - ځله رامنځ ته کيږي ، په لاندې ډول دی:

$$P_n^{(n_1, n_2, \dots, n_k)} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!}$$

حلونه يا اوبيونه: که په پرموتیشن کې  $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$  (دلته دې گڼونه د  
 ايندکس کې ومنل شي) غرو يو له بل توپير لرودی (مختلف وي) ، نو  $n!$  پرموتیشنونه

به موجود وی، که  $i$  - ام غړی  $ni$  - ځله رامنځ ته شي، داچې د  $ni$  غړو لپاره  $ni!$  پرموتیشنونه موجود دي، نو  $ni$  پرموتیشنونه د یوه پرموتیشن په څېر رایو ځای کېږي،

دا په دې مانا چې د  $n!$  شمیر په  $n_i!$  باید وویشل شي ( $i = 1, \dots, k$ )

بیلگې:

۱ - د  $k = 2$  مختلفو غړو پرموتیشن، په کوم کې چې لومړی  $(n_1 - 1)$  - ځله او دویم  $(n_1 - 2)$  - ځله رامنځ ته کېږي، دی:

$$P_3^{(1,2)} = \frac{(1+2)!}{1!2!} = \frac{3!}{1!2!} = 3$$

۲ - د  $k = 2$  مختلفو غړو پرموتیشن، په کومو کې چې لومړی  $(n_1 = 2)$  - ځله او دویم

$$P_5^{(2,3)} = \frac{5!}{2!3!} = 10 \quad \text{ځله رامنځ ته شي، دی}$$

۱۰. ۴. ۲ وارییشن اوښتنه یا بدلېدنه Variation:

تعریف ۱۰. ۵:

د  $n$  غړو وارییشن (بدلېدنه یا اوښتنه Variation) لاتین ( بدلونه اوښتنه تغېرونه یا بیا تغېرونه) و  $k$  - ام ټولگي ته (وهرې  $k$  ټوټې ته،  $n \leq k$ ) هر له  $k$  غړو یوځانکول (یوځای درول، یوځای لیکل) دی، کوم چې د  $n$  غړو د لړۍ پر لپسې په نظر کې نیولو سره جوړېږي..

بیلگې:

۱ - د درې غړو  $a, b, c$  وارییشن و دویم ټولگي ته دي:



۱۰ کومبيناټوريڪ - د بينوم جمله ۲۸۱

---

ab ba ca  
ac bc cb

۲ - د څلورو غړو  $d, a, b, c$  واري پيشنونه و ۲ - م ټولگي ته دي:

ab ba ca da  
ac bc cb db  
ad bd cd dc

د څلورو غړو  $d, a, b, c$  واري پيشنونه و ۳ - م ټولگي ته دي

dab cab bac abc  
dac cad bad abd  
dba cba bca acb  
dbc cbd bcd acd  
dca cda bda adb  
dcb cdb bdc adc

۳ - د پنځه غړو  $5, 4, 3, 2, 1$  واري پيشنونه و ۲ - م ټولگي ته دي

51 41 31 21 12  
52 42 32 23 13  
53 43 34 24 14  
54 45 35 25 15

د  $n$  غړو واریشونونه و  $n$  -ام ټولګي ته د  $n$  غړو پرموتیشن سره یو شی یا برابر کیري جمله ۱۰ ۰ ۴ :

د  $n$  غړو و  $k$  -ام ټولګي ته د واریشونو ګڼون (تعداد)  $V_k^{(k)}$  دی :

$$V_k^{(k)} = n(n-1)(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

اوبونه : د مکمل (پوره یا بشپړ ایندکشن له لارې) ایندکشن په  $k$  اړه لري،  $n$  ځای په ځای دی یا ځای په ځای کلک ولار دی

ایندکشن پیل : ( $k = 1$ )

$$V_n^{(1)} = n!/(n-1)! = n$$

ټیک (صحیح) دی، ځکه چې له  $n$  غړوکیدي چې له یوه غړی جوړ واریشونونه جوړکړی شي.

ایندکشن نیونه : ( $k = k_0$ ) :

$$V_n^{(k_0)} = n!/(n-k_0)!$$

ایندکشن غوښتنه(ثبوت) : ( $k_0 + 1 = k$ ) :

$$V_n^{(k_0+1)} = n!/(n-k_0-1)!$$

د ایندکشن بنوونه : د  $k_0 - m$  درجی هر واریشون لپاره، په

$n - k_0$

دې واریشون کی نه رامنځ ته کیدونکو پاتی

غړو شمیر دی. که په ترتیب یو له دې  $n - k_0$  غړو د دې  $k$  -م ټولګی واریشونو  $V_n^{(k)}$

۱۰ کومبیناتوریک - د بینوم جمله ۲۸۳

په اخرکی ځای په ځای شي، نو له دې یو د  $k+1$  ټولګي  $n - k$  واریشونونه لاس ته راځي، او که دا کار په ټولو واریشونونو  $v_n^{(k)}$  وشي، نولاندې واریشونونه لاس ته راځي:

$$\frac{n!}{(n-k_0)!} (n-k_0) = \frac{n!}{(n-k_0-1)!}$$

(که چیرې یو د  $n - k$  غړو ورزیات په یو بل ځای کینوولی وی، نو یو د  $k+1$  ټولګي واریشون به یی لاس ته راوړی وی، کوم چی همدا اوس موجود دی. دا سړی په بیلګه ۲ ( $k = 2, n = 4$ ) باندې لیدور کولی شي)

بیلګي:

۱ - د درې غړو واریشونونو شمیر و دوم ټولګي ته دی:  $v_3^{(2)} = \frac{3!}{(3-2)!} = 6$

۲ - د څلور غړو واریشونونو شمیر و دوم ټولګی ته دی:  $v_4^{(2)} = \frac{4!}{(4-2)!} = 12$

د څلور غړو واریشونونو شمیر ودریم ټولګي ته دی:  $v_4^{(3)} = \frac{4!}{(4-3)!} = 24$

۳ - د پنځه غړو واریشونونو شمیر و دوم ټولګي ته دی:  $v_5^{(2)} = \frac{5!}{(5-2)!} = 20$

پیژند ۱۰ . ۶ :

د  $n$  غړو واریشونونه و  $k$  - ام ټولګي ته په کوم کی چی یوګونی غړي تر  $k$ -ځله تکرار وي نو واریشونونه د تکرار سره نومیري یا بلل کیري.

بیلګی: ۱ - د درې غړو  $a, b, c$  واریشونونه و دوم ټولګي د تکرار سره دي:

---

	ca	ba	aa
cb	bb	ab	
	cc	ba	ac

۲ - څلور غړو a , b , c , d د دویم ټولگی وارییشنونه د تکرار سره دي: aa:

	da	ca	ba
db	cb	bb	ab
dc	cc	bc	ac
	dd	cd	bd
		ad	

۳ - د درې غړو 1 , 2 , 3 د دریم ټولگی وارییشنونه دي (دا لاندې ولار ترتیب له کین ویني لور ته دی، خو په لاندې کې په څټ شوی)

311	211	111
312	212	112
313	213	113
321	221	121
322	222	122
323	223	123
331	231	131
332	232	132
333	233	133

۱۰ کومبيناټوريک - د بينوم جمله ۲۸۵

جمله ۱۰. ۵: د  $n$  غړو د  $k$ -ام ټولگي د واريښنونو شمير  $V_{W_n}^{(k)}$

$$V_{W_n}^{(k)} = n^k \quad \text{د تکرار سره دی:} \quad C_6^{(4)} \cdot C_{43}^{(2)} = \binom{6}{4} \binom{43}{2} = 13545$$

حل(اوبی): په  $k$  د پوره ايندکشن له لارې:

د ايندکشن پيل ( $k = 1$ ):

د  $V_{W_n}^{(1)} = n^1$  لپاره صحیح دی، ځکه چې له  $n$  غړو څخه  $n$  واريښتونه، چې هر یو له یوه غړي جوړ دی، جوړیږي.

د ايندکشن نیونه ( $k_0 = k$ ):  $V_{W_n}^{(k_0)} = n^{k_0}$

د ايندکشن غوښتنه ( $k_0 + 1 = k$ ):  $V_{W_n}^{(k_0+1)} = n^{k_0+1}$

د ايندکشن بنسونه: د ( $k_0 + 1$ ) -ام درجی واريښتونه د  $nk$  واريښتونو چې  $k_0 -$ امه درجه واريښتونو څخه لاس ته راځي، په کوم کې چې له دوي هر یو په ترتیب د  $n$  غړو اخر ته یو وړ واچوي یا ورزیات (علاوه) کړي (یادونه دی، چې په واريښتونو بی له تکرار شوي، وکتل شي).

له دې امله د دې شمير  $n^{k_0} \cdot n = n^{k_0+1}$  واريښتونه دی.

بیلگي:

۱ - د درې غړو و دوام ټولگي ته د واريښتونو شمير له تکرار سره دی

$$V_{W_3}^{(2)} = 3^2 = 9$$

۲ - د څلور غړو و دوام ټولگي ته د واريښتونو شمير له تکرار سره دی

$$V_{W_4}^{(2)} = 4^2 = 16$$

۳ - د درې غړو و دريم ټولگي ته ض واريشونو شمير له تکرار سره دی

$$V_{\theta_3}^{(3)} = 3^2 = 27$$

۴ - د مورس نخبه ( Morsezeichen ) له دوه غړو ، ټکی او لنډې کرښې يوځای کيږي.

د يوه ، دوه درې او څلورو غړو جوړه نخبو شمير دی

$$V_{\theta_2}^{(1)} + V_{\theta_2}^{(2)} + V_{\theta_2}^{(3)} + V_{\theta_2}^{(4)} = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = 30$$

۱۰ . ۴ . ۳ کمبينيټشن ( Kombination ) (لاتين: يو بل سره تړل)

تعريف ۱۰ . ۷ :

د  $n$  غړو و  $k$ -ام ټولگي ته ( $n > k$ ) يو کمبينيټشن هغه دی چې هر يو له  $k$  غړو يوځای دروولو څخه ، کوم چې له  $n$  غړو ، بی د غړو له نظم په پام کی نيولو سره ، جوړوي.

کمبينيټشن له واريټشن منځ ته راځي ، که چيری نظم په پام کی ونه نيول شي.

بيلگي:

۱ - د درې غړو  $a, b, c$  و دوم ټولگي ته کمبينيټشن په لاندې ډول دی:

bc      ac  
ac      .....

۲ - د څلور غړو  $d, a, b, c$  و دوم ټولگي ته کمبينيټشن په لاندې ډول دی

cd      bc      ab  
bd      ac      .....  
ad      .....

د دې څلو غړو ودریم ټولگي ته کمبينيټونونه په لاندې ډول دي:

bcd      abc  
acd

۳ - د پنځه غړو 1, 2, 3, 4, 5 و دریم ټولگي ته کمبينيټونونه په لاندې ډول دي (لاندی هم باید له کین لاندې لورته په بنی لور لیکل شوي وی)

345      234      123  
          235      124  
                  245      125  
                                  134  
  135  
  145

جمله ۱۰. ۶: د n غړو و k-م ټولگي ته د کمبينيټونونو شمیر دی  $C_n^{(k)}$

$$C_n^{(k)} = \binom{n}{k}$$

اوبی (حل): د n غړو و k-م ټولگي ته د اوربينيټونونو شمیر دی:

$$V_n^{(k)} = \frac{n!}{n-k}$$

کمبينيټونونه له اوربينيټونونو په دې توپیر يري، چی ترتیب په نظر کی نه نیول کيږي، دا بیا دا مانا لري چی ټول د k غړو k! پرموتيشونونه په یو کمبينيټون کی یوه ته یوځای کيږي

$$C_n^{(k)} = \frac{V_n^{(k)}}{k!} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \binom{n}{k} : \text{له دې امله لرو:}$$

بيلگی :

۱ - و دوم ټولگي ته د درې غړو کمبينيټونو شمير يا گڼون دی

$$C_3^{(2)} = \binom{3}{2} = 3$$

۲ - و څلورم ټولگي ته د څلور غړو کمبينيټونو شمير دی د څلورو غړو و دريم ټولگي ته د کمبينيټونو شمير دی

$$C_4^{(2)} = \binom{4}{2} = 6$$

۳ - د پنځه غړو و دريم ټولگي ته د کمبينيټونو شمير دی

$$C_4^{(3)} = \binom{4}{3} = 4$$

۴ - په لاتري ( ۶ له ۴۹ څخه ) د امکاناتو لپاره شمير دی

$$C_{49}^{(6)} = \binom{49}{6} = 13983816 \quad \text{الف ( يو شپږ )}$$

$$C_6^{(4)} \cdot C_{43}^{(2)} = \binom{6}{4} \binom{43}{2} = 13545 \quad \text{ب : يو څلور}$$

۶ ټيپ عددونه د يوه ۴ عددونوگروپ څخه بوځاي کيږي، چي له ايستل شوو شپږ عددونو ( ۴ ټيک يا صحيح ) او دوه عددونه ( ۲ پاتي عددونه ) دي .

پيژند ۱۰ . ۸ :



د  $n$  غړو و  $k$ -ام ټولگي ته کمبينيټون، په کوم چي يواځني غړي  $k$  - ځله تکراروي، کمبينيټونونه د تکرار سره نوميري.

بيلگي:

۱ - د درې غړو  $a, b, c$  و دويم ټولگي ته د تکرار سره کمبينيټونونه دي.

aa .....

bb ab .....

cc bc ac

۲ - د څلور غړو  $d, a, b, c$  و دويم ټولگي ته د تکرار سره کمبينيټونونه دي

aa .....

bb ab .....

cc bc ac .....

dd cd bd ad

۳- د درې غړو  $1, 2, 3$  و دريم ټولگي ته د تکرار سره کمبينيټونونه دي (لاندې ليکنه بايد له کين لور پيل وي، خو دلته له بنی لور پيل شوی وکين لور ته )

331 221 111

332 222 112

333 223 113

123

جمله ۱۰. ۷: د  $n$  غرو و  $k$  - ام ټولگي ته د تکرار سره د کمبينيټونو شمير يا گڼون دی:

$$C_{W_n}^{(k)} = \binom{n+k-1}{k}$$

دلته دي له بنوونی (چی په  $k$  پوره ايندکشن له لاری صورت نیسی) تیر شو.

بېلگي: ۱ - د درې غرو و دویم ټولگي ته د تکرار سره کمبينيټونو گڼون یا شمېر دی

$$C_{W_3}^{(2)} = \binom{3+2-1}{2} = 6$$

۲ - د څلورو غرو و دویم ټولگي ته د تکرار سره کمبينيټونو گڼون یا شمېر دی

$$C_{W_4}^{(2)} = \binom{4+2-1}{2} = 10$$

۳ - د درې غرو و دریم ټولگي ته د تکرار سره کمبينيټونو گڼون یا شمېر دی

$$C_{W_3}^{(3)} = \binom{3+3-1}{3} = 10$$

۴ - د څلورو مکعبونو، چې اړخونه یې دیوه تر شپږ نخبه وي. (نخبه شپږ اړخیز) ممکن مختلف اچول، په دی مانا چې کومی سترگی سره لویزي لاندې دي.

$$C_{W_6}^{(4)} = \binom{6+4-1}{4} = 126$$

## ۱۰. ۴. ۴ د برموتيشن، واريشن، کمبينيټن ټولګه

د ټولو په پام کې نيول شوو غړو راتولونه يا ټولګه	د په پا يوې برخې راتولونه م کې نيولو شوو غړو	دا
	له نظم تيريدنه	
نظم په پام کې نيونه	کمبينيټن	
پرموتيشن	واريشن	
د n غړو پرموتيشن شمير يا گڼون $P_n = n!$	د n غړو واريشن و k-ام ټولګي ته شمير يا گڼون $V_n^{(k)} = \frac{n!}{(n-k)!}$	د n غړو کمبينيټن و k-ام ټولګي ته شمير يا گڼون $C_n^{(k)} = \binom{n}{k}$
د k غړو پرموتيشن د n۱ غړو په k-م گروپ کې	د n غړو واريشن شمير د تکرار سره $V_{W_n}^{(k)} = n^k$	د n غړو دکمبينيټن شمير و k-ام ټولګي د تکرار سره $C_{W_n}^{(k)} = \binom{n+k-1}{k}$
له تکرار سره		
$P_n^{(n_1, n_2, \dots, n_k)} = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$		

## ۱۰. ۵ تمرينونه

۱ - لاندې فاکولټي وشميری

الف)  $7!$  ، ب)  $3! \cdot 5!$  ، پ)  $6! / 4! \cdot 10!$

۲ - لاندې ويشونه ساده کړی

a)  $(n+1)! / (n-2)!$     b)  $(2n)! / n!$     c)  $n! / 2n!$

۳ - لاندې افادې وشميری!

a)  $\binom{6}{4}$     b)  $\binom{1,5}{3}$     c)  $\binom{-1}{6}$     d)  $\binom{4}{1}$     e)  $\binom{4}{0}$

f)  $\binom{8}{8}$     g)  $\binom{5}{4} \cdot 4!$     h)  $\binom{7}{6} \cdot 3!$     i)  $\binom{6}{7} \cdot 3!$     j)  $\frac{\binom{7}{6}}{3!}$

۴ - لاندې زياتونونه وشميری!

a)  $\binom{2}{1} + \binom{2}{2}$     b)  $\binom{3}{1} + \binom{3}{2}$     c)  $\binom{3}{2} + \binom{3}{3}$   
d)  $\binom{4}{1} + \binom{4}{2}$     e)  $\binom{4}{2} + \binom{4}{3}$     f)  $\binom{4}{3} + \binom{4}{4}$

۵ - لاندې افادې د بينوم د فرمول کارونی (استعمال) په بنسټ وگنی!

a)  $(x+y)^7$     b)  $(a-6)^6$     c)  $(5a+4y)^3$

d)  $(x/2 - y/3)^4$     e)  $(2a+3b)^2$     f)  $(x^2+y^2)^3$

۶ - لاندې افادې ساده کړی!

a)  $(-1+a)^2 - (1-a)^2$     b)  $(a^2+b^2)^2 - (a^2-b^2)^2$

c)  $(ab-1)(-a-ab)+ab$

۷ - د بينوم په يو ځل يی بيل (تجزیه) کړی!

a)  $25a^2 + 10ab + b^2$     b)  $49a^2 - 42a + 9$

c)  $169a^2 - 130ab + 25b^2$     d)  $2x+2 \cdot 6xy + 3y$

۸ - الف ) د غړو ۱، ۲، ۳، ۴ پرموتيشنونه په لکسيکوگرافي نظم وليکئ!  
 ب ) د a, e, f, h, n پرموتيشنونو په څو ځايونو کې « fahne » او « hafen » ولاړ دي؟ دا الماني کليمي دې چې دپښتو اړونه يې « بيرغ » او « بندر » دي.

۹ - الف ) په څو ځايونو ترتيب يا تنظيم کيدی شي ، شپږ کسه ځاي ونيسي؟  
 ب ) څومره پنځه ځيفري گڼونه د پنځه ځيفرونو 0, 1, 2, 3, 4 سره کيدی شي وليکل شي، که هغه گڼونه چې په صفر پيل کيږي ونه ليکل شي؟  
 پ ) د غړو a, b, c, d, f څومره پرموتيشنونه په c ، په de ، په cdef پيل کيږي؟

۱۰ - الف ) د غړو a, b, c ټول پرموتيشنونه وليکئ، په کومو کې چې a او b هره يوځل، غړی c دوه ځله رامنځ ته کيږي.  
 ب ) د دې پرموتيشنونو گڼون يا شمير وگڼئ!

۱۱ - څومره تنظيم شوي جوړې د الفبا د ۲۶ (لاتين توري) تورو څخه جوړيدلی شي؟

۱۲ - د څلورم ټولگي څومره مختلف وارييشنونه د الف ) بي له تکرار

ب ) له تکرار سره د غړو 0, 2, 4, 6, 8 موجود دي؟

۱۳ - يوه سوری کارت له ۸۰ سوريډرځونو چې هريو لس سوري لري، جوړ دکله څومره د سوريو يوځاي ليکل ممکن دي، که هر درخ ټيک يو ځل سوری شي؟

۱۴ - له شپږ غړو جوړ کمبينيشن گڼون و څلورم ټولگي ته او پنځم ټولگي ته څومره لوي دی،

الف ) بي له تکرار

ب ) له تکرار سره؟

۱۵ - يادونه : دا د کارتو لوبولپاره تمرين نه دی ليکل شوی

- 
- ۱۶ - څومره مختلفې ازماينې ممکن دي که په يوه توليد کې له هر ۲۰ يوه وازمايل شي؟
- ۱۷ - په موټرو ترافيک نخبنې په لاندې توگه يوځای شوی : يوه د ځاي نښونه ډله د نخبنې الف بي پسي څلور گروپ يا ډله راځي، چې له څيږونو ۰ تر ۹ څخه جوړ وي. د يوې کره ټاکلې الف بي پيژندنې يا ترافيکي نخبنې ممکن دي؟
- ۱۸ - د مختلفو اندازو او د خامموادو جوړ نلونه ، د رنگونې له لارې يو له بل توپيريدي شي ، که څلور رنگ نښونې ولرو؟
- ۱۹ - د منډې يوه مېچ په اخرکې شپږ پاتي منډې وهونکې برخه اخلي. د منډو څومره امکانات موجود دي؟
- ۲۰ - په څومره ډوله  
الف ) اته مختلفې مرغلرې،  
ب ) درې سرې، څلور شنې، يوه زرغونه مرغلره  
ترتيبيدلې شي؟
- ۲۱ - څومره تلفونونه کيدی شي وټرل شي کې يواځي پنځه ځاييزه نمره موجود وي؟  
څومره تلفون ټرل ممکن دي که تلفون نمرې شپږځاييزې وي او په 0 پيلکيدنه يې اجازه ونه لري؟
- ۲۲ - د درې شپږسترگيو ( يا -اړخيزو) سره ( څيره مکعب دی او مخونه له يوې تر شپږ سترگو باندې په نخبنه دي، ماته يې د پښتو نوم نه راځي او الماني يې **Würfel** دی) څومره مختلفې اچونې ممکن دي، چې ټولې شپږسترگې مختلفې سترگې گڼون وښايي؟  
څومره مختلفې اچونې له درې شپږسترگيو سره ممکن دي؟

## ۱۱ کرښيز-، خطي - يا لاینيز الجبر

یادونه : دلته دې هم د هرڅه له مخه بیا دې ته گوته نیول شوي وي ، چی څه به تکرار وي، خو هغه لاتین مثل دی، چی « تکرار د زدکړې مور ده . »

لاندې مخ ته پرته اصلي برخه د  $m$  برابر ونونو ځوابونو ته چی  $n$  اووښتونې یا مجهولې یا ناپېژندونکې لري، وقف ده، چیرته چی  $m$  د برابر ونونو گڼون یا تعداد  $n$  د ناپېژندونکو یا مجهولو گڼون (تعداد) سره برابر او همدا ډول لوي او یا کوچنی کیدی شي

په ۱۱ . ۱ برخه کی د دوه ناپېژندونکو یا مجهولو سره د برابر ونونو سیستمونه تر څیرنی لاندې نیول کيږي، چی د بنوونځي شمیرپوهنی تکرار دی، مگر دلته د برابر ونونو سیستمونه د ناکلوځلونو یا ضریبونو یا فاکتورونو سره هم راوړل کيږي، چی د حالتونو توپیریدنه یې اریینه ده .

د راوړنی به په ۱۱ . ۲ برخه کی درې ناپېژندونکو یا نامعلومو او په ۱۱ . ۳ برخه کی په خوبه زیاتوناپېژندونکو ته وغزیري، په ټولو برخو کی پل په پل د دیتر مینانت کلیمه او د گاوس الگوریتم د کار ډگر ته را اچول کيږي .

په ۱۱ . ۴ برخه د هوموجینو برابر ونونو سیستم ځانگړي ځوابونه په بر کی نیسي ، یادونه : ولې لاینيز برابر ونونه او نه کریز یا بندکرښيز یا خطي؟

مورن د برابر ونونو له څیرې پوهیږو، چه دا یوه کرښه ورکوي، چې لاتین یا که غواړی انگریزي یې لاین نومولی، د کرښو او بندکرښو نومونه هم شته، خو د دې لپاره، چې د نورو درسي منځپانگی سره یې توپیر وي، نو مورن هم ورته له دې امله لاینیز وایو.

### ۱۱. ۱. لاینیز برابر ورون د دوه ناپیژندونکو سره

داسی یو مساوات د دوه ناپیژندونکو سره کیدی چی په لاندې ډول انځور شي

$$ax + by = c \quad (11.1)$$

دلته کیدی شي چی ناپیژندونکی لویي  $x$  او  $y$  په خوښه رییل گڼونه وي چی یو له بل سره په ورکړ شوي بڼه تړلي. یا په بل عبارت:  $x$  او  $y$  واریابلی (اووښتونکی یا لنډ: اووښتوني) دي، برابر ورون (۱۱. ۱) لاینیز فنکشن (بلواک) برابر ورون په گوته کوي چی د هغې څیره په  $x, y$  کواوردینات کی ناپای کرښه ده (۱۶ - امه برخه دی وکتل شي)

ځانگړی حالت:  $a = 0$  یا  $b = 0$  په ځانگړې توگه کرښه انځوروي یا په گوته کوي چی د  $y$  - محور او  $x$  - محور سره غبرگه ده.

که دا (۱۱. ۱) برابر ورون د دواړو ناپیژندونکو یا مجوهولو  $x$  او  $y$  لپاره ټاکنمساوات یا ټاکنبرابرون و نیول شي، نو دا پوښتنه رامنځ ته کیږي، چی ددې مسی نلی د حل (اوبی) لاندې به څه پوهیدل غوښتونکی وي.

د (۱۱. ۱) برابر ورون اوبیونه په څرگند ډول د ټولو ارزښتجوړو  $(x, y)$

ډیری ده، چی (۱۱. ۱) برابر ورون پوره کوي. که اصلي حالت  $a, b \neq 0$  ته پام وکړو نو برابر ورون (۱۱. ۱) د  $y$  په لور داسی ځوابوو.

$$y = -(a/b)x + c/b \quad (11.2)$$

کیدی شي چی  $x$  په خوښه وټاکل شي او  $y$  له (۱۱. ۲) برابر ورون څخه لاس ته راولو. گورو چی ناپای ډیری اوبیوني یا حلونه لاس ته راځی یعنی د اوبیوني ډیری یا اوبیدیری  $L$  په لاندې ډول ده

$$L = \{ (x, y) \mid y = -(a/b)x + c/b \} \quad (11.3)$$

داسی لوستل کیږي:  $L$  د ټولو  $(x, y)$  جوړو ډیری ده، داسی چی.... (ورپسی هغه برابر ورون)

ددې لپاره لنډ لیکل کیږي: د (۱۱. ۱) برابر ورون اوبی یا حل  $y = -(a/b)x + c/b$ ، د خوښی  $x$



طبعاً کیدی شي چي برابر وځي د  $x$  په لور هم اوبی شي. دلته  $y$  په خوښه نيسو، نو دلته د برابر وځي ( ۱۱ . ۱ ) ځواب داسی دی،  $x = -(b/a)y + c/b$  په خوښه  $y$  .

دا چي په لاندې کی مور د درېو یا ډيرو ناپيژندونکو یا نامعلومو برابر وځي سره سر او کار لرو، نو موخه ور بولو که ناپيژندونکي د  $x, y, z, \dots$  سره په نخښه نه کړو بلکه د  $x_1, x_2, x_3, \dots$  سره .

ددې په نخښونو سره کیدی شي چي په څرگند ډول وښايو:

لاندې برابر وځي د دوه ناپيژندونکو  $x_1, x_2$  سره  
 $a_1x_1 + a_2x_2 = b, \dots \dots \dots (11,4)$

د  $a \neq 0$  لپاره  
 $\infty^i$

ځوابونه لري  
 $\infty^i$

په دې مانا چي  $i = 1, 2, 3, \dots, \infty$  ناپيژندونکو یا نامعلومی لپاره په خوښه  $r$  ازبنتونه کيښوول کیدی شي.

$$x_1 = -\frac{a_2}{a_1}x_2 + \frac{b}{a_1}, \dots \dots \dots (11,5)$$

په خوښه  $x_2$   
 د

$$a_2 \neq 0$$

لپاره

$\infty$   
 ځوابونه

$$x_2 = -\frac{a}{a_2}x_1 + \frac{b}{a_2}; \dots \dots \dots (11,6)$$

$x_1$

په خوښه

$$a_1 = a_2 = b = 0 \quad (0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 = b = 0)$$

د په خوښه

$$x_1, x_2, \dots \dots \dots (11,7)$$

د

$$a_1 = 0; a_2 = 0; b \neq 0$$

لپاره

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 = b \neq 0$$

په څټوالی یا تضاد یا مخامخوالی دی، له دې امله ځواب نه شته.  
نوټ: دلته

$\infty^i$

دا مانا لري چی د ناپیژندوني یا مجهولی

$x_i$

لپاره  $i = 1, 2, \dots$  په خوبه ناپای ارزښتونه نیول کیدی شي.

۱۱ . ۱ . ۲ - دوه لاینیز برابر ونونه د دوه ناپیژندونکو سره  
د دوه برابر ونونو سیستم د دوه ناپیژندونکو سره لاندې عمومي شکل لري

$$I \dots \dots \dots a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = a_1$$

$$II \dots \dots \dots a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = a_2; \dots \dots \dots (11,8)$$

دا ټاکلي برابر ونونه کیدی شي چی په اووښتونو یا واریابلو  $x_1$  او  $x_2$  کی د  
بلواکبر ابرون یا فنکشن مساوات په څیر ونیول شي او په  $x_1, x_2$  - کو اور دینا تسیستم کی  
د کربنو په ډول انځور شي. که کربني یو بل غوڅي کړي نو دا د مساواتو په سیستم ( ۸ .  
۱۱ ) کی د کربنو یوگونی ( بهتره : یوگونی، یواځنی د بل څه لپاره کارول شوی )  
اوبیونه ده یا حل دی.

که دواړه کربني یو په بل پریوځي نو دا په دې مانا دي چې II همغه مساوات لکه I  
انځوروي. دلته دا بسیاکوي، چی د ۱۱ . ۱ . ۱ . له مخي ټیک یا فقط مساوات I یا  
مساوات II حل شي. دلته ناپايي ډیر

$\infty^1$

ځوابونه موجود دي.

داسي هم کیدی شي چی فورمال

$\infty^2$

رامنځ ته شي، که ټول

$$a_{ik} \wedge a_i$$

د صفر سره برابر یی. مور دلته دا حالت نه څیرو. دا څیرو چی، که دا برابران اوبیونه ونه لری. دا حالت هغه وخت رامنځ ته کیږی، چی کرینه I او کرینه II غبرگی ځغلی مگر یو په بل نه وی پرتی.

په دوه برابرانونی کی، د دوه ناپیژندونکو یا اوبنتونو سره، کیدی شي لاندی حالتونه رامنځ ته شي

- ۱ - یو یواځنی تاکی خواب مو مخ ته پروت دی (اصلي حالت)
- ۲ - کوم خواب مو و مخ ته نه دی پروت (سیستم مخامخوالی یا تضاد لری)
- ۳ - ناپای ډیر خوابونه موجود دی II (برابران برابر په I مساوات او یا د هغه څو برابره دی)
- ۴ - ناپای ډیر خوابونه موجود دي.

( ټول  $a_{ik} = 0$  او ټول  $a_i = 0$  دي )

د دوه برابرانونو له مخی چی دوه ناپیژندونکی لری، کیدی شي په اسانتیا وپیژندل شي، چی د برابرانونو کوم حالت مو مخ ته پروت دی. په سیستمونو کی چی درې یا زیاتی واریابلی یا اوبنتونی لری ورته حالتونه په ساده ډول نه شو پیژندلی چی کوم حالت تر مخ لرو. دلته باید فورمال پرمخ لار شو، دا چی څنکه دا کار سرته رسولی شو غوارو چی د پوبنتو په فورمال خواب پیل وکړو او د برابرانونو پوبنتو ته خواب پیدا کړو. دلته باید درې بنسټیز د مساواتسیستم د خواب کار دودونه (متودونه) تکرار شي:

۱. د برابر یا مساوی ځای په ځای کولو متود:

دواړه برابرانونه د یوی نامعلومی په لور اوبی کیږی (د بیلگی په توگه د  $x$  دوه په لور)، دواړه برابرې لیکي او په دې ډول یو برابران د یوی نامعلومی سره منځ ته راځی.

۲ - یو د بل پر ځای کینولو متود:

برابران یا مساوات د یوی ناپیژندونکی (د بیلگی په توگه  $x$  دوه) په لور خواب کیږی او دا لاس ته راوړنه په بل برابران کی ځای په ځای کیږی، په دې ډول د یوی ناپیژندونکی برابران منځ ته راځی (د بیلگی په توگه  $x$  یو)

## ۳ - د زیاتون کارونه (جمع کولو عملیه):

سړی یو ټاکلی څو برابره (کیدۍ شي چی کمیز یا منفي هم وي) د II برابرون د I برابرون یوه ټاکلي څو برابره سره زیاتوي، داسی چې یوه ناپېژندونۍ بیا مخ ته نه راځی یا له منځه ولاړه شي. د نتیجې سره بیا دا بله ناپېژندونې څیرې. دا د داوړو نامعلومو (ناپېژندونو) لپاره کیدای شي. دا متود د برابرونونو د سیستم لپاره بنسټیز دی چې د دیتریمینانتو (die Determinanten) له لارې د برابرونونو ځواب لاس ته راوړو. دا متود په درې ځانگړو برابرونسیتمونو باندې باید وکارول شي، ټول څلور ځلوني (ځله ووني یا ضریبونه) باید له صفر توپیر ولري یعنی  $a_{ik} \neq 0$  که چیرې یو  $a_{ik} = 0$  د بیلگې په توگه  $a_{21} = 0$  نو بیا به مساواتو په لاندې ډول د درېگودې جوړښت لروډی:

$$I \dots \dots \dots a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = a_1; \dots \dots a_{11} \neq 0$$

$$II \dots \dots \dots a_{22}x_2 = a_2, \dots \dots a_{22} \neq 0; \dots \dots (11,9)$$

دلته نو

$$a_{21} = 0$$

بیا له II سیده راویستل کیدی شو او د نتیجې څخه یې چې په I کی کښینودل شوي وی  $x_1$  هم معلومیدی شو. دلته دا په گوته کوو چې د گاوس الگوریتم په استعمال بیا برابرون د درېگودې شکل باندې اړول کیري. دا درې څرگند حالتونه په لاندې ډول دي:

سیستم ۱

$$I \quad 2x_1 + 3x_2 = 4$$

$$II \quad x_1 - 2x_2 = -5$$

دا سیستم یواځنی یو ځواب لري II برابرون د I برابرون سره اړیکې نه لري

سیستم ۲

$$2x_1 + 3x_2 = 4$$

$$II \quad 4x_1 + 6x_2 = 8$$

په اسانۍ گورو چې دلته II برابرون په ۲ ځل شوی I برابرون دی. دواړه برابرونونه همغه کرښه وینای او په دې ډول د مساواتو اوبیوني ناپای دی.

سیستم ۳:

$$\text{I} \quad 2x_1 + 3x_2 = 4$$

$$\text{II} \quad 4x_1 + 6x_2 = 10$$

دلته بي ډيله څرگنده ده چي برابرونه يو د بل تضاد يا يو د بل په څنډ دي. د I برابرون دوه برابره په لاندې ډول دي:

$$4x_1 + 6x_2 = 8$$

په دې توگه ناممکن ده چي II هم باوري وي، نو له دې امله دا سیستم ۳ اوبیونه نه لري.

بیلگه ۱۱.۱:

سیستم ۱ دي په پورته درې ورکړ شوو متودونو ځواب شي .

الف: مساوي ايسنولوکارونه يا عمليه

$$I': \dots x_1 = 2 - (3/2)x_2; \dots; II': \dots x_1 = 2x_2 - 5$$

$$2 - (3/2)x_2 = x_2 - 5$$

$$-(7/2)x_2 = -7$$

$$x_2 = 2; \Rightarrow$$

$$x_1 = 2 - (3/2) \cdot 2$$

$$x_1 = -1$$

(ب) د بل په ځاي کينولوکاروونه ( عمليه ): II د x1 په لور ځواب کيږي او بيا په I کی ځاي په ځاي کيږي .

$$II':: \dots x_1 = 2x_2 - 5$$

$$2(2x_2 - 5) + 3x_2 = 4$$

$$4x_2 - 10 + 3x_2 = 4$$

$$7x_2 = 14$$

$$x_2 = 2 \Rightarrow x_1 = 2 \cdot 2 - 5 \Rightarrow x_1 = -1$$

( پ ) د زیاتونکاروونه:  $x_1$  له منځه ځي، که ( -2 ) ځله د II برابرون و I ته زیات شي.

$$\begin{aligned}
I : & \dots\dots\dots 2x_1 + 3x_2 = 4 \\
(-2)II : & \dots\dots\dots -2x_1 + 4x_2 = 10 \\
I - 2II : & \dots\dots\dots 7x_2 = 14 \\
& \dots\dots\dots x_2 = 2
\end{aligned}$$

۱۱ کرښیز-، خطي – يا لاینیز الجبر ۳۰۲

---

کیدی شي، ود بیلگي په توگه، له II څخه  $x_1$  وشمیرل شي:  
 $x_1 = 2x_2 - 5 = 4 - 5 = -1$

د زیاتون کاروونی په کلکه یا تل استعمال څخه کیدی شي  
 $x_2$   
له منځه یو وړل شي، په دې شکل چی د II درې برابره د I دوه ځله ته ورزیات کری  
شي.

$$\begin{aligned}
2.I : & \dots\dots\dots 4x_1 + 6x_2 = 8 \\
3.II : & \dots\dots\dots 3x_1 - 6x_2 = -15 \\
----- \\
2.I + 3.II : & \dots\dots\dots 7x_1 \dots\dots\dots = -7 \\
& \dots\dots\dots x_1 \dots\dots\dots = -1
\end{aligned}$$

یادونه : په پورته کي یا نورو کومو ځایونو کي ، چي ټکی چیرته ایښول کیري، پوهیږو،  
چي چیرته ټکی د ځاي غزونې او چیرته د ځل لپاره ځاي په ځاي شوي دي

بیلگه ۱۱ . ۲ :

سیسم ۲ دې په پورته درې متودو ځواب شي:

الف ( مساوي ایښوولو:

$$\begin{aligned}
I' : & x_1 = 2 - (3/2)x_2 \\
II' : & x_1 = 2 - (3/2)x_2 \\
2 - (3/2)x_2 = 2 - (3/2)x_2 & \\
0.x_2 = 0 &
\end{aligned}$$

دلته

$$x^2$$

په خوښه. دا په دي مانا چي

$$x^2$$

هر ارزښت نيوي شي . له I' څخه ناپايي ډير ځوابونه لاس ته راځي  
 $x^2 = 2 - (3/2)x^2$  او  $x^2$  په خوښه.

۳۰۳

۱۱ کرښيز-، خطي - يا لاینيز الجبر

(ب) د بل په ځاي ايښوولو متود:  $x^2 = 2 - (3/2)x^2$  , I'

په II کي ايښول کيږي

$$II' \quad 4 \cdot (2 - (3/2)x^2) + 6x^2 = 8$$

$$8 - 6x^2 + 6x^2 = 8$$

$$0 \cdot x^2 = 0 \quad x^2$$

په خوښه له II' لاس ته راځي

$$I' : x^2 = 2 - 3/2 x^2 \quad x^2 \text{ په خوښه}$$

(پ) د زياتون متود يا لار يا طريقه:

$$2.I \quad 4x^1 + 6x^2 = 8$$

$$II \quad 4x^1 + 6x^2 = 8$$

$$II - 2.I : 0x^1 + 0x^2 = 0$$

که يواځي دا مساوات په نظر کي ونيول شي ، نو  $x^1$  او  $x^2$  په خوښه ټاکل کيږي شي، دا چي د  $x^1$  او  $x^2$  ترمنځ په I يا II کي ورکړ شوي اړيکي دي ، نو يواځي يوه ناپيژندونکو په خوښه ټاکل کيږي شي . ځواب داسي دی:

$$x^1 = 2 - (3/2)x^2$$

$x^2$  په خوښه

په همدې ډول:

$$x^2 = 4/3 - (2/3)x^1 ,$$

دلته  $x^1$  په خوښه ټاکل کيږي

بيلگه ۱۱ . ۳ :

سیستم ۳ دی په پورته درې ورکړشو و متودونو ځواب شي.

الف ( مساوي ځاي په ځاي کولو متود:

$$I' : x_1 = 2 - (3/2)x_2$$

$$II' : x_1 = 5/2 - (3/2)x_2$$

$$2 - (3/2)x_2 = 5/2 - (3/2)x_2$$

$$0 \cdot x_2 = 1/2$$

۳۰۴ ۱۱ کرښیز، خطي – يا لاینيز الجبر

دا يو په څټوالی يا تضاد دی، ځکه چی هیڅ یو رییل گڼ  $x_2$  نه شته چی دا مساوات پوره کړي، نو له دې امله کوم ځواب نه شته يا وجود نه لري.

ب) د بل په ځاي لیکلو عملیه:  $I' : x_1 = 2 - (3/2)x_2$  ,

په II کی دی په ځای شي

$$II' : 4 \cdot (2 - (3/2)x_2) + 6x_2 = 10$$

$$8 - 6x_2 + 6x_2 = 10$$

$$0 \cdot x_2 = 2$$

دا مخامخوالی يا په څټوالی يا تضاد دی، پس ځواب نه شته.  
پ) د زیاتون متود:

$$2 \cdot I \quad 4x + 6x = 8$$

$$II \quad 4x + 6x = 10$$

$$2 \cdot I - II \quad 0 \cdot x + 0 \cdot x = -2$$

په څټوالی يا تضاد دی، ځواب وجود نه لري

د لاندې بیلگو سره غواړو د منځ ته راتللو پښتنو ځوابونو لپاره اړوند لارښوونه گوته لك کړو.

بیلگه ۱۱ ۰ ۴ : په لاندې فورم يا بڼه برابر و نسیستم ورکړ شوی:

$$I \quad x/(a+b) + y/(a-b)$$

$$II \quad x/(a-b) + y/(a+b)$$

دا ټيک هلته موخه ور يا هدفمند دی چی  $b = a$  او  $b = -a$  وي، یعنی  $|a| = |b|$  وي .



کیدی شي چی دا سیستم د پورتنیو متودونو څخه په یوه متود تړلی ځواب کړي، د یوه د مخه ورکړ شوي فورم یا بني اوریون له لاري هم ځواب کیدی شي.

لمړی د جمعی متود څخه کار اخلو:

د I ځل له  $1/(a+b)$  او II ځل له  $1/(a-b)$  څخه وروسته دا لرو:

$$x/(a+b)^2 + y/(a^2 - b^2) = 1/(a+b)$$

$$-x/(a-b)^2 - y/(a^2 - b^2) = -1/(a-b)$$

له دې سره د  $y$  دواړه ځله ووني یا ضربیونه یو د بل مخامخ (یا په بل عبارت یو د بل په څټ) نڅبنی لري او له دې امله د زیاتون په حالت کی له منځه ځي، نو په دې توگه مو یو برابرېون د یوې ناپېژندونکی سره مخ ته پروت دی:

۳۰۵

۱۱ کرښیز، خطي - یا لاینیز الجبر

$$\frac{x}{(a+b)^2} - \frac{x}{(a-b)^2} = \frac{1}{a+b} - \frac{1}{a-b}$$

$$\frac{(a-b)^2 - (a+b)^2}{(a+b)^2(a-b)^2} x = \frac{a-b - (a+b)}{a^2 - b^2}$$

$$\frac{a^2 - 2ab + b^2 - a^2 - 2ab - b^2}{(a^2 - b^2)^2} x = \frac{a-b - a-b}{a^2 - b^2}$$

$$-\frac{4ab}{a^2 - b^2} x = -2b$$

$$2abx = b(a^2 - b^2) \dots (*)$$

$$x = \frac{a^2 - b^2}{2a}; ab \neq 0$$

که I له  $1/(a+b)$  او II له  $1/(a-b)$  سره ځل شي کیدی شي: چی  $y$  په ورته ډول وشمیرل شي:

$$\frac{x}{a^2-b^2} - \frac{y}{(a-b)^2} = \frac{1}{a-b}$$

$$-\frac{x^2}{a^2-b^2} - \frac{y}{(a+b)^2} = \frac{1}{a-b} - \frac{1}{a+b}$$

$$\frac{(a+b)^2 - (a-b)^2}{(a-b)^2(a+b)^2} y = \frac{a-b - (a+b)}{a^2-b^2}$$

$$\frac{a^2+2ab+b^2 - a^2+2ab-b^2}{(a^2-b^2)^2} y = \frac{a+b-a-b}{a^2-b^2}$$

$$-\frac{4ab}{a^2-b^2} y = 2b$$

$$2aby = b(a^2-b^2) \dots (*)$$

$$y = \frac{a^2-b^2}{2a}; ab \neq 0$$

۱۱ کرینیز، خطی - یا لاینیز الجبر

۳۰۶

دلته مو ځانگړی حالت مخ ته پروت دی، چی دواړه ناپېژندونکی مساوي دي، کومی چی ځمور د څیرنی لپاره بي مفهومه دی.  
 دا د  $x, y$  لپاره شمیرل شوي ارزښتونه په هغه حالت کی باوري دی چی  $ab \neq 0$  وي.  
 نو څیرو چی کوم حالت توپیر د  $ab = 0$  لپاره منځ ته راځي. دلته مساوات  $(*)$  (تر څیرنی لاندې نیسو او درې حالت ته توپيروو:

$$1. a = 0, b \neq 0$$

(مساوات  $(*)$  داسی دي

$$0.x = -2b^3, 0.y = -2b^3$$

په دې حالت کی برابرون سیستم ځواب نه لري.) تضاد مخ ته پروت دی

$$2. a \neq 0, b = 0$$

برابرون  $(*)$  (په دې حالت کی داسی دی.

$$0.x = 0; 0.y = 0$$

دلته مخامخوالی یا په څتوالی یا تضاد نه شته (له I او هم له II لاس ته راځي

$$x/a + y/a = 1 \Leftrightarrow x+y=a$$

که  $y$  خپلواک و ټاکل شي، نو لرو  $x=a-y$  دلته  $y$  په خوښه ټاکل کیدی شي.

په بل حالت کی لرو ،  $y = a - x$  دلته  $x$  په خوښه دی  
 $a=b=0$  . 3  
 دا حالت د نیونی له مخی بند ، ناشونی یا ناممکن دی.

بیلگه ۱۱ . ۵:

$$\frac{11}{2x-3y} + \frac{18}{3x-2y} = 13$$

$$\frac{27}{3x-2y} - \frac{2}{2x-3y} = 1$$

که دا سیستم د  $(3x-2y)(2x-3y)$  سره ځلونی په بنسټ فورم بدل کړي، نو لرو:  
 $69x-76y=78x^2-169xy+78y^2$

$$48x-77y=6x^2-13xy+6y^2$$

او کتل کیري چی په دي ډول لاینیز برابرونتسیستم د  $x$  او  $y$  لپاره منځ ته نه رآخي . دا چی په دي هر یو سیستم کی دوه ماتلاندې سره برابر دي نو کیدی شي چی نوې ناپیزندونکی  $u$  ,  $v$  و لیکو. دا وشمیرو او بیا له دي وروسته لویي  $y$  ,  $x$  راپیدا کړو . مور ځاي پر ځاي کو

۱۱ کرنیز-، خطي – یا لاینیز الجبر ۳۰۷

$$u=1/(2x-3y) , v=1/(3x-2y)$$

او لاس ته راوړو:

$$11u+18v=13 \Leftrightarrow 11u+18v=13$$

$$27v-2u=1 \quad -2u+27v=1$$

مور د زیاتون یا جمعۍ متود کاروو

$$33u+54v=39$$

$$4u-54v=-2$$

$$37u=37$$

$$u=1 \Rightarrow v=1/9$$

له دي سره کیدی شي  $x$  او  $y$  وشمیرل شي:

$$1=1/(2x-3y) \Leftrightarrow 2x-3y=1$$

$$1/9=1/(3x-2y) \Leftrightarrow 3x-2y=9$$

له دي څخه غوښتونکی ځواب  $y = 3$  ,  $x = 5$  لاس ته رآخي.

### ۱۱. ۱. ۳ دویمه درجه دیترمینانتي او د کرامر قاعده

که په تولیز سیستم (11.8) باندي د زیاتون متود استعمال شي، نو د  $x_2$  له منځه وړلو په لاس ته راځي

$$I' = a_{22} \cdot I - a_{21} \cdot II$$

$$(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{11})x_1 = (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{11})$$

پورته برابرون دي (11, 10) وي

او د  $x_1$  له منځه وړلو:

$$II' = a_{11} \cdot II - I:$$

$$(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{11})x_2 = (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{11})$$

دا پورته برابرون دي (11, 11) وي

که  $|a_{11}a_{22} - a_{21}a_{11}| = 0$  وي، نو له دې یواځنی ټاکلی ځواب لاس ته راځي

$$x_1 = \frac{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{11}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{11}}; x_2 = \frac{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{11}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{11}}, \dots \dots (11,12)$$

که د ارزښتونه په (11, 8) کی ځای په ځای شي نو تصدیقیري، چی (11, 12) په

ریښتینی د (11, 8) ځواب دی. له (11, 10) تر (11, 12) سری په واقعیت یا

رښتونی کی د دیترمینانت کلیمی په لور لاروی کوي (لارښودوي).

۳۰۸ کرښیز، - خطي - یا لاینیز الجبر ۱۱

پیژند ۱۱. ۱: د یو منظم سیستم دوه ځله دوه ریپلو گڼونو  $a_{ik}, (i, k=1, 2)$  د

د ۲-امه درجه دیترمینانت لاندې، لاندینی گڼ پوهیرو:

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{11}, \dots \dots (11,13)$$

د اصلي دوه کونجتری یا دیاگونال (قطر) د توکو ځل، تری کم (منفی) د څنگ یا فرعی

دوه کونجتری (قطر) د توکو ځل (یا) د اصلي دوه کونجتری یا قطر د توکو ځل څخه د

څنگ یا فرعی دوه کونجتری د توکو ځل کمیري یا منفی کیري)

یادونه: دا اوس او وروسته دیترمینانت بڼه د ماتریکس په څیره لیکل شوی، په

دیترمینانت کی کرښی سمی دي، خو کومه ناسمپوهنه په کی نه راځي.

په (11, 13) کی د  $x_i$  ځله ووني یا ضریبونه داسی لیکل شوي لکه په (11, 8)

سیستم کی. د (11.13) دیترمینانت له دې امله د (11, 8) (له ماڅخه دانوکانو کی

دنده گڼونه کله کله بدلیري، دې ته دې د گرانو لوستونکو پام وي، دا شمیر پوهنیزه ناسمی

منځ ته نه راولي) سیستم د ځلونو (ضریبونو) دیترمینانت بلل کیري.

که په (11, 13) کی لومړی (درز، ستن یا مټه یا ولاره لیکه یا-کیله) د دیترمینانت

ولاره لیکه(په ځای) چی د  $x_i$  ځله ووني یا ضریبونه دی د (11, 8) برابرونسیستم

بني اړخ (مطلقه توکی) توکي  $a_1, a_2$  وليکل شي نو (په  $x_1$  اړونده) لاندې دیترمینانت لاس ته راځي:

$$D_1 = \begin{pmatrix} a_1 & a_{11} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_1 a_{22} - a_{11} a_2$$

د پورته برابرون گڼه يا نمره دې (  $11, 14$  ) (وي په همدې ډول که د  $13, 11$  ) دیترمینانت دوهم درز بدل کړی شي، نو د  $x_2$  پورې اړوند لاندې دیترمینانت لاس ته راځي

$$D_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_1 \\ a_{21} & a_2 \end{pmatrix} = a_{11} a_2 - a_1 a_{21}; \dots \dots \dots (11,15)$$

که له (  $10, 11$  ) تر (  $12, 11$  ) پورې له (  $13, 11$  ) تر (  $15, 11$  ) پرتله يامقایسه شي نو لاس ته راځي

جمله ۱۱ . ۱ (د کرامر قاعده):

که د ځله وونو يا ضریبونو دیترمینانت لپاره په (  $13, 11$  ) کی ۱۱ کرښیز، خطي - يا لاینیز الجبر

۳۰۹

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \neq 0; \dots \dots \dots (11,16)$$

باوري وي نو د مساواتو سیستم (  $8, 11$  ) یواځنی ټاکلی ځواب لري  
 $x_1 = D_1/D$  ;  $x_2 = D_2/D$  (11,17)

په داسی حال چی  $D_1$  او  $D_2$  د (  $14, 11$  ) او (  $15, 11$  ) له مخی شمیرل کیږي.  
د (  $10, 11$  ) او (  $11, 11$  ) له امله لرو

جمله ۱۱ . ۲ :

که په (  $13, 11$  ) کی د ځلونو دیترمینانت  $D$  لپاره باوري وي

$$0 = D \quad (11,18)$$

او د کم له کمه یوې دیترمینانت  $D_1$  یا  $D_2$  لپاره په (  $14, 11$  ) یا (  $15, 11$  ) باوري وي

$$|D_1|=0 \vee |D_2|=0 \quad (11,19)$$

نو (  $8, 11$  ) سیستم ځواب نه لري، ځکه چې برابرون یی یو د بل سره مخامخ دي ( تضاد کی دي)

جمله ۱۱ . ۳ :

باوري دي

$$D=D_1=D_2=0 \quad (11.20)$$

نو يو له برابر ونونو I يا II زياتي دي ( دواړه برابر ونونه يو بل ته اړ دي يا د بل په واک کې دي ) او د ۱۱ . ۱ . ۱ . برخې متود استعماليدلی شي يا کار ترې اخستل کيدی شي.

د بنوونبيلگو په څير دي اوس د ۱۱ . ۱ تر ۱۱ . ۳ پورې بيلگي ( ۱۱ . ۱ . ۲ برخه ) کارول شوي سيستمونه ۱ ، ۲ او ۳ گران لستونکي په ديترنمنانتو ځواب کړي، که چيرې ما دا کار سرت ونه رساوه .

بيلگه ۱۱ . ۶ : د سيستم لپاره باور لري

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -4 - 3 = -7 \neq 0$$

پس يواځنی ټاکلی ځواب لري. پسې باور لري

$$D_1 = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -5 & -2 \end{vmatrix} = -8 + 15 = 7 \neq 0; D_2 = \begin{vmatrix} 24 \\ 1-5 \end{vmatrix} = -10 - 4 = -14$$

۱۱ کرښيز-، خطي- يا لاینيز الجبر ۳۱۰

له دي امله باوري دي

$$x_1 = D_1/D = 7/-7, x_2 = D_2/D = -14/-7 = 2,$$

بيلگه ۱۱ . ۷ :

د سيستم ۲ لپاره باور لري

$$D = \begin{vmatrix} 23 \\ 46 \end{vmatrix} = 12 - 12 = 0$$

او ورپسې

$$D_1 = \begin{vmatrix} 43 \\ 86 \end{vmatrix} = 24 - 24 = 0; D_2 = \begin{vmatrix} 24 \\ 48 \end{vmatrix} = 16 - 16 = 0$$

له دې امله ناپايي ډير ځوابونه موجود دي (بيلگه ۱۱ . ۲ دې وکتل شي).

بيلگه ۱۱ . ۸ : د سيستم ۳ لپاره باور لري

$$D = \begin{vmatrix} 23 \\ 46 \end{vmatrix} = 12 - 12 = 0$$

$$D = 2 \quad 3 = 12 - 12 = 0$$

او ورپسې

$$D_1 = \begin{vmatrix} 23 \\ 106 \end{vmatrix} = 24 - 30 \neq 0$$

همدلت روښانه ده، چې ځواب نه شته (د  $D_2 = 4 \mid = 0$  له شمير لوکيدی شي، چې تير شو)

بيلگه ۱۱ . ۹ :

مور بالاخره غواړو چې په بيلگه ۱۱ . ۴ کې ورکړ شوی مساوات سيستم ته د ډيټر مينانت له لارې ځواب ورکړو او ددې لپاره لومړی  $D_1$ ,  $D$  او  $D_2$  شميرو:

$$D = \begin{vmatrix} \frac{1}{a+b} & \frac{1}{a-b} \\ \frac{1}{a-b} & \frac{1}{a+b} \end{vmatrix} = \frac{1}{(a+b)^2} - \frac{1}{(a-b)^2} = \frac{(a-b)^2 - (a+b)^2}{(a+b)^2(a-b)^2}$$

$$\dots\dots\dots = \frac{a^2 - 2ab + b^2 - a^2 - 2ab - b^2}{(a^2 - b^2)^2} = -\frac{4ab}{(a^2 - b^2)^2};$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{a-b} \\ 1 & \frac{1}{a+b} \end{vmatrix} = \frac{1}{a+b} - \frac{1}{a-b} = \frac{a-b - (a+b)}{(a+b)(a-b)} = -\frac{2b}{a^2 - b^2};$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} \frac{1}{a+b} & 1 \\ \frac{1}{a-b} & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{a+b} - \frac{1}{a-b} = \frac{a-b - (a+b)}{(a+b)(a-b)} = -\frac{2b}{a^2 - b^2}$$

لومړی حالت  $ab \neq 0$  :

دلته دینترمینانت  $D \neq 0$  او دا د برابر ونسیستم یواځنی ټاکلی ځواب دی

$$x = \frac{D_1}{D} = \left( -\frac{2b}{a^2 - b^2} \right) : \left( -\frac{4ab}{(a^2 - b^2)^2} \right) = \frac{2b}{a^2 - b^2} \cdot \frac{(a^2 - b^2)^2}{4ab} = \frac{a^2 - b^2}{2a}$$

$$y = \frac{D_2}{D} = \frac{a^2 - b^2}{2a} \quad (د D_1 = D_2 \text{ له امله})$$

دوم حالت  $a=0, b \neq 0$  : دلته  $D = 0$  مگر

$$D_1 = D_2 \neq 0$$

او د مساواتسیستم ځواب نه لري

دوم ۲

$$D = D_1 = D_2 = 0$$

او ناپای ډیر ځوابونه موجود دي چی په بیلگه ۱۱ . ۴ کی بنوول شوي .

دوم حالت  $a = b = 0$  :

۱۱ کرنیز، خطي - یا لاینیز الجبر

۳۱۲

دلته مساواتسیستم هدفمند نه دی (په صفر ویش مخ ته پروت دی) مشوره کیري چی



لاندی د برابر ونونو سیستم دې د لاندې بریالی فورم بدلولو وروسته دبیلو بیلو لارو  
خواب شي او د خواب متودونه دې یو د بل سره پرتله یا مقایسه شي.

$$(a-b)x+(a+b)y=a^2-b^2$$

$$(a+b)x+(a-b)y=a^2-b^2$$

۱۱ . ۱۰ . ۴ د گاوس الگوریتم

په ۱۱ . ۱ . ۲ . برخه کي څیرل شوو متودو ټیک په نظر نیولو سره ( برابر و لیکلو- په  
خاي - او د زیاتون عملیه ) ، کره پوهیدلی شو چی ددې په مرسته ټولیز د برابر ونسیستم

( 8 . 11 )

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = a_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = a_2$$

په یوه درېگودیز جوړ سیستم

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = a_1$$

$$\dots\dots\dots a_{22}x_2 = a_2$$

بدلولي شو، کوم چی بیا خورا ساده خواب کیدی شي

۱ . که  $a_{22} \neq 0$  وي، نو لاس ته راځي:

$$x_2 = a_2/a_{22} \quad (\text{ف})$$

ب ) برسیره پر دې که  $a_{11} \neq 0$  وي، نو لاس ته راځي:

$$x_1 = (a_1/a_{11}) - (a_{12}/a_{11})x_2 = (a_1/a_{11}) - (a_{12}/a_{11}).(a_2/a_{22})$$

۲ . که  $a_{22} = 0$  او  $a_2 \neq 0$  وي نو خواب موجود نه دی یا نه شته

۳ . که  $a_{22} = 0$  او  $a_2 = 0$  وي، نو ۲- م برابر ون بی هوده دی ( د ضرورت وړ نه

دی)، او سری بیا ا. برابر ون د ۱۱ . ۱ . ۱ برخه متود په مرسته خوابولی شي.

د ( 8 . 11 ) سیستم د خواب پرابلم په دې ډول کمیري، چی دا سیستم په دریگودی بڼه

یا - څیره وړوي . هغه الگوریتم چی دا په هر حالت کی خواب کولی شي، د گاوس

الگوریتم دی. یا ( 8 . 11 ) سیستم دریگودی څیره لري او یا ټول aik د صفر سره

برابر نه دي.



په لاندې کې ( 8 . 11 ) سیستم په روځنی - یا مروج ډول او هم شیماتیکی ډول لیکل کیري.

x1 x2 RS

$$\text{I} \quad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = a_1 \quad a_{11} \quad a_{12} \quad a_1$$

$$\text{II} \quad a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = a_2 \quad a_{21} \quad a_{22} \quad a_2$$

(دلته RS د مساواتو د بڼې خوا (بڼ خ) یا بڼی لور یا بڼی اړخ مانا ورکوي)، که I په ځای پریښودل شي اود II برابرون  $a_{11} / a_{21}$  - ځله له I برابرون څخه کم شي ، نولرو

..... x1 x2 Rs

$$\text{I} \quad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = a_1 \quad a_{11} \quad a_{12} \quad a_1$$

$$\text{II}' \quad 0 \cdot x_1 + (a_{12} - a_{11} \cdot a_{22} / a_{21})x_2 = a_1 - a_{11} \cdot a_2 / a_{21} \quad 0 \quad a_1 - a_{11} \cdot a_{22} / a_{21} \quad a_1 - a_{11} \cdot a_2 / a_{21}$$

که II' لند په دی فورم ولیکل شي

نو ټول سیستم لاندې شکل غوره کوي :

x1 x2 RS

$$\text{I} \quad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = a_1 \quad a_{11} \quad a_{12} \quad a_1$$

$$\text{II}' \quad b_{22}x_2 = b_2 \quad b_{22} \quad b_2$$

اوس بیرته باید زیات حالتونه یو له بل توپیر شي:

-که  $b_{22} \neq 0$  وي ، نو  $x_2$  له II' او  $x_1$  له I لاس ته راځي.

-که  $b_{22} = 0$  ،  $b_2 \neq 0$  وي، نو ځواب وجود نه لري.

-که  $b_{22} = b_2 = 0$  وي، نو ناپای زیات ځوابونه موجود دي، چی له I

او ۱ . ۱ . ۱۱ برخې ته ورته را څرگندی شي (معلومیدلی شي).

سیستمونه ۱ ، ۲ ، ۳ د گاوس په الگوریتم ښوول کیري

بیلگه ۱۱ . ۱۰ :

۱۱ کرښیز-، خطي - یا لاینیز الجبر

۳۱۴

دا سیستم داسی لیکل او شیماتیک کیری:

		$x_1$	$x_2$	RS
I	$2x_1 + 3x_2 = 4$	2	3	4
II	$x_1 - 2x_2 = -5$	1	-2	-5

که غوښتونکی دریگوډیخیره غواړو لاس ته راولو نو I همداسی پریږدو او له II څخه دا یو یو په دوه ځله کموو :

		$x_1$	$x_2$	RS
I	$2x_1 + 3x_2 = 4$	2	3	4
II'	$0.x_1 - (7/2)x_2 = -5$	0	-7/2	-5

له II لاس ته راځي  $x_2 = 2$   
او له I څخه لاس ته راځي.  $x_1 = 2 - (3/2)x_2 = -1$

بیلگه ۱۱ . ۱۱:

دلته سیستمونه ۲ او ۳ یواځي په شیماتیکی ډول (جدول په شکل) څیړو. دلته د لمړی لیکي دوه ځله د دوهمی لیکي کمیږي

		سیستم ۲			سیستم ۳			
		$x_1$	$x_2$	RS	$x_1$	$x_2$	RS	
	I	2	3	4	I	2	3	4
	II	4	6	8	II	4	6	10
	II'=II-2.I	0	0	0	II'=II-2.I	0	0	2

په سیستم ۲ کی گورو چی لمړی برابرېون د دوم برابرېون په مخامخ څه نوی نه لري (0 = 0 تضاد یا مخامخوالی نه شته). له دې امله یو برابرېون (د بیلگي په توگه I) موجود دی چی د ۱۱ . ۱ . ۱ برخي او یا ۱۱ . ۲ په څیر ځواب کیری. په سیستم ۳ کی تضاد همدا اوس لیدل کیری " 2 = 0 " ، نو له دې امله ځواب نه شته.

بیلگه ۱۱ . ۱۲ :

سیستم I دی په څلور ډوله یا واریانتو د گاوس الگوریتم په مرسته وڅیرل شي

اول واریانت

دوم واریانت

x1 x2 RS

x1 x2 RS

I	2	3	4
II	1	-2	-5

I	2	3	4
II	1	-2	-5

$$II' = II - (1/2) \cdot I \quad 0 \quad -7/2 \quad -7 \quad \quad II' = II + (2/3) \cdot I \quad 7/3 \quad 0 \quad -7/3$$

2.	-1	2.	2
دریم واریانت			
x1	x2	RS	

1.	2	1	-1
څلورم واریانت			
x1	x2	Rs	

I	2	3	4
II	1	-2	-5

I	2	3	4
II	1	-2	-5

$$I' = I + (3/2) \cdot II \quad 7/2 \quad 0 \quad -7/2 \quad \quad I = I - 2 \cdot II \quad 0 \quad 7 \quad 114$$

2.	2	2.	-1	1.	-1	1.	2
----	---	----	----	----	----	----	---

دا دلته د یو گڼ په چوکاټ یا څلورگودیز کی نیول دا مانا لري چی د هغی د پاسه ناپیژندونکی د مساوات څخه شمیرل کیږي، کومه چی په هغه لیکه کی پرته ده چی چوکاټ شوی، دا په یواځني ډول دا مانا لري : واریانت ۱:

( ا ) له I څخه دی x1 و شمیرل شي

( ب ) له II څخه دی x2 و شمیرل شي

( پ ) په 1 کی x2 له II شمیرل کیږي:

$$x2 = -7 / (-7/2) = 2$$

( ت ) په 2 کی x1 له I شمیرل کیږي:

$$x = (1/2)(4 - 3 \cdot 2) = -1$$

واریانت ۲ :

( ا ) له I څخه دی x2 و شمیرل شي

(ب) له II څخه دې  $x_1$  وشمیرل شي

پ (له II لرو:  $x_1 = -1$ )

ت (له I څخه لرو:  $x_2 = 2$ )

واریانت (امکان) ۳

(ا) له II څخه دې  $x_2$  وشمیرل شي

ب (له I څخه دې  $x_1$  وشمیرل شي

پ (له I لرو  $x_1 = -1$ )

ت (له II لرو  $x_2 = 2$ )

واریانت (امکان) ۴

(ا) له II دې  $x_1$  وشمیرل شي

ب (له I څخه دې  $x_2$  وشمیرل شي

پ (له I لرو  $x_2 = 14/7 = 2$ )

ت (له II لرو:

$$x_1 = -5 + 2.2 = -1$$

ټولې څلور واریانتی یا امکانت برابر ارزښتونه لری، خو دا چی په څلورمه واریانت

کی په ټولگنونو شمیرنه کیري، «مخته وونه» یا مخوونه (برتری) یا نوره هم ښه

وړاندې توب ورکول کیري.

## ۱۱. ۱. ۵ له دوه وو زیات برابر ونونه د دوه ناپیژندونکو سره

که څوک له دوه زیات برابر ونونه د دوه اوبتونو یا ناپیژندونکو سره ځواب کوي، په ټولیزه (عمومي) توگه باید په نڅښه شي چی لومړي دوه برابر ونونه  $x_1, x_2$  ځوابونه لري. که دا ځوابونه په نورو برابر ونونو کی ځای په ځای شي تضاد ته رسیرو. د دوه ناپیژندونکو سره له دوه زیات مساوات په ټولیزه توگه حل نه لري. یواځي په ځانگړی حالت کی دا سیستم ځواب لرودی شي. مور دا پروسه اول په عمومي ښوونلارې څیرو او بیا د گاوس الگوریتم له لارې.

بیلگه ۱۱. ۱۳: لاندني دوه سیستمونه ورکړ شوي دي

$$a) \text{ I } \quad x_1 + 2x_2 = 3 \quad b) \text{ I } \quad x_1 + 2x_2 = 3$$

$$\text{ II } \quad 2x_1 - x_2 = 1 \quad \text{ II } \quad 2x_1 - x_2 = 1$$

$$\text{ III } \quad 3x_1 + x_2 = 2 \quad \text{ III } \quad 3x_1 + x_2 = 4$$

له I او II څخه د څرگندو یا معلومو متودونو له لارې په دواړو سیستمونو کی لاندې، په

لومړی حل یواځنی پیژندل شوی، ځواب لاس ته راځي.

له ( a او b ) څخه لرو  $x_1 + 2x_2 = 1$  که دا ارزښتونه په III کی ځای په ځای شي نو لرو:

په ( a ) کی:  $4 = 1.1 + 3.1$ , په ( b ) کی:  $4 = 1.1 + 3.1$  نو سیستم ( a ) ځواب نه لري او سیستم ( b ) یواځني ټاکلی ځواب لري یعنی  $x_1 = x_2 = 1$  بیلگه ۱۱. ۱۴:

په بیلگه ۱۱. ۱۳ کی ورکړ شوي مساوت اوس د گاوس د الگوریتم له لارې ځواب کوو.

a)  $x_1 \quad x_2 \quad RS$       b)  $x_1 \quad x_2 \quad RS$

	I	1	2	3		I	1	2	3
	II	2	-1	1		II	2	-1	1
	III	3	1	3		III	3	1	4
	II'=II-2.I	0	-5	-5		II'=II-2.I	0	-5	-5
	III'=III-3.I	0	-5	-7		III=III-3.I	0	-5	-5
	III''=III'-II'	0	0	-2		III=III'-II'	0	0	0

په ( a ) کی تضاد پیژندلکیري (  $III': 0.x_1 + 0.x_2 = -2$  ) ځواب نه شته یا وجود نه لري .  
 په ( b ) کی تضاد مخ ته نه دی پروت . له (  $III': 0.x_1 + 0.x_2 = 0$  ) له II څخه لرو:  
 $x_2 = 1$  او له I څخه لاس ته راځی:  $x_1 = 3 - 2.1 = 1$

۱۱. ۲ لاینیز برابر و نسیستم د درې ناپیژندونکو سره

۱۱. ۲۰۱ یو برابر و ن د درې ناپیژندونکو سره

مور یو مساوات د درې ناپیژندونکو سره تر څیرني لاندې نیسو:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = a_1 \quad (11.21)$$

دوه مختلف حالتونه ۱ او ۲ او نورمال فورم ۳ ممکن دي

$$I. \quad a_1 = a_2 = a_3 = 0 \quad (11.22)$$

دلته  $x_1, x_2$  او  $x_3$  یو له بل پوره خپلواک ټاکل کیدی شي. ویل کیري چی ناپاي ډیر ځوابونه مخ ته پراته دي (  $x_1$  په خوبه،  $x_2$  په خوبه او  $x_3$  په خوبه )

$$2. \quad a_1 = a_2 = a_3 = 0, a_1 \neq 0 \quad (11.23)$$

دلته تضاد مخ ته پروت دی

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = a_1 \quad | = 0$$

اوبیونه نه شته.

۳- د کم له کمه یوه ځلجورې  $i, k$  لپاره  $a_{ik} = 0$  وي. ( بي د تولیز وبنديزونو يا عمومیت د محدود والی دی  $a_{11} \neq 0$  وي. ) کیدی شي چی  $x_2$  او  $x_3$  په خوښه وټاکل شي ( ناپايي ډیر ځوابونه)، او لاس ته راځي

$$x_1 = (1/a_{11})(a_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3) \quad \text{او } x_3 = (11,24)$$

۱۱ . ۲ . ۲ دوه برابر ونونه د درې ناپيژندونکو سره

لاندې د دوه برابر ونسیستمونه د درې اوبنتونو يا ناپيژندونکو سره

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = a_1 \quad (11,25)$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = a_2 \quad (11,25)$$

مور دا را ویستلي حالتونه ، چیرته چی د ټولو  $i, k$  لپاره  $a_{ik} = 0$  ، په پام کی نه نیسو. دا حالت هم په پام کی نه نیسو چی دوم برابر ون د لومړي په څیر وي ( ناپايي ډیر ځوابونه. او يا دوه برابر ون د لمړي سره په مخامخوالي يا څټوالي يا تضاد کی وي ) ځواب نه وي. دا ټول حالتونه اسان پیژندونکي دي. مور په یوه بیلگه کی دا اصلي حالت څیرو چی یو ناپيژندونکي يا نامعلوم ( د بیلگي په توگه  $x_3$  ) په خوښه ټاکل کیري او دا نورې دوه ناپيژندونکی يا اوبنتوني (  $x_1$  او  $x_2$  ) یواځنی لاس ته راځي، او يا یواځنی ورکول کیدی شي ( ناپايي ډیر ځوابونه).

بیلگه ۱۱ . ۱۵:

$$x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad RS$$

$$I \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 3 \quad x_1 + x_2 + x_3 = 3$$

$$II \quad x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 6$$

$$II' = II - I \quad 0x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3$$

له II لاس ته راځي

$$x_2 = 3 - 2x_3$$

له I څخه لاس ته راځي

$$x_1 = 3 - x_2 - x_3 = 3 - (3 - 2x_3) - x_3, \quad x_1 = x_3$$

او له دي لاس ته راځي  
 $x_1 = x_3, x_2 = 3 - 2x_3$  په خوښه.

۱۱ . ۲ . ۳ دریمه درجه دیترمینانت او د کرامر قاعده

اوس درې برابر ونونه یا معادلي یا مساوات د درې ناپېژندونکو سره څیرو

$$\text{I} \quad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = a_1 \quad (11, 26)$$

$$\text{II} \quad a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = a_2 \quad (11, 26)$$

$$\text{III} \quad a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = a_3 \quad (11, 26)$$

له دي سیستم څخه کیدی شي چې د ۱۱ . ۱ . ۲ برخې د برابر لیکلو او یو د بل په ځای لیکلو متودونه په ساده ډول استعمال شي. د زیاتون تیورم (-قضیه) فکر غواړي او د دریمي درجي دیترمینانت او د کرامر قاعدې په لور مو د (۱۱ . ۲۶) سیستم ځواب پیدا کولو لپاره هڅوي

پېژند ۱۱ . ۲:

ریيل گڼونو  $a_{ik}$  (  $i, k = 1, 2, 3$  ) یو درې درجه منظم د دیترمینانت سیستم

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}; \dots \dots \dots (11, 27)$$

لاندي سړی لاندنی ریلگن پوهیدلی شي):

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11} \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - a_{12} \begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} + a_{13} \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} =$$

$$a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}); \dots \dots \dots (11, 28)$$

له دي سره د دریمي درجي دیترمینانت شمیرنه د دوهمی درجی دیترمینانت په شمیرنه بدله شوه. ۱۱ . ۲ تعریف او په ځانگړي توگه ( 11 . 28 ) فرمول په لاندي ډول توضیح کیدی شي:

پېژند ۱۱ . ۳ : په ( 11 . 27 ) کی د دیترمینانت  $D$  لاندې دیترمینانت  $A_{ik}$  لاندي هغه دومه درجه دیترمینانت پوهیدلی شو، چې د  $D$  دیترمینانت  $i$ - می لیکي او  $k$  - م درځ یا متي د لري کولو یا د منځه وړلو له لاري منځ ته راځي (زه د ماتریکس په دننه



کي دا ليکي او متي يا ستي له منځه نه شم ورلی، خو دا کومي ستونځي نه پيښوي، ځکه،  
چي لاس ته راوړنه بي پسي ليکل شوي (

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

په دي ډول کيدی شي چي د ۱۱ . ۲ ديترمينانت په دي فورم وليکل شي

پيژند ۱۱ . ۴ :

د دريمي درجي ديترمينانت D لاندې، چي په ( 11 . 27 ) کي ورکړ شوی دی،  
دا لاندې گڼ پوهيدل کيږي:

$$D = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

د زياتون عمليي څخه، چي دلته نسبت د دوه ناپيژندونکو مساواتو ته چي دوه ناپيژندونکي  
لري، روښانه ده، د ( 11 . 26 ) څخه لاس ته راوړل کيږي:

$$Dx_1 = D_1, Dx_2 = D_2, Dx_3 = D_3 \quad (11.29)$$

په داسي حالت کي چي  $D_i$  داسي لاس ته راځي چي د ځله وونوديترمينانت ( 11 . 28 )  
( کي سري i - م درځ يا ستن يا مته د ( 11 . 26 ) برابر وني لور ته ځای په ځای  
کړي.

$$D_1 = \begin{pmatrix} a_1 & a_{21} & a_{31} \\ a_2 & a_{22} & a_{32} \\ a_3 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}; D_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_1 & a_{13} \\ a_{21} & a_2 & a_{23} \\ a_{31} & a_3 & a_{33} \end{pmatrix}; D_3 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_3 \end{pmatrix}; \dots (11, 30)$$

مور دا نتيجه بي له ښووني ورکوي.

له ( 11 . ۲۹ ) څخه لاندې جملې لاس ته راځي:

جمله ۱۱ . ۴ ( د کرامر قاعده ) :

که د ( 11 . ۲۶ ) د ځله وونوديترمينانتو ( 11 . ۲۷ )، په همدې ډول ( 11 . ۲۸ ) لپاره

$$D \neq 0 \quad (11.31)$$

با وری وی، نو (۱۱. ۲۶) برابر ونسیستم یواخی خواب لری

$$x_3 = D_3/D \quad ; x_2 = D_2/D \quad ; x_1 = D_1/D \quad (11,32)$$

جمله ۱۱. ۵:

که  $D = 0$  مگر  $|D_i| = 0$  کم له کمه دیوه  $i (i = 1, 2, 3)$  لپاره وی، نو د (۱۱. ۲۶) برابر ونسیستم خواب نه لری (په (۱۱. ۲۹) کی تضاد دی)

جمله ۱۱. ۶:

که  $D = D_1 = D_2 = D_3 = 0$  وی، نو په (۱۱. ۲۶) کی کم له کمه یو برابر ونسیستم ضرورته زیات دی او دا (۱۱. ۲۶) برابر ونسیستم کیدی شي چي د ۱۱. ۲. ۲. متودونو باندي خواب شي (وړانديز دی چی د گاوس الگوریتم له متود؛ چی په ۱۱. ۲. ۱. برخه کی ورکړ شوي خواب شي).

بیلگه ۱۱. ۱۶:

په لاندی سیستم

$$\text{I} \quad x_1 - x_3 = -2$$

$$\text{II} \quad x_1 + x_2 - x_3 = 0$$

$$\text{III} \quad 2x_1 - x_2 = 0$$

کی دی

$$D = \begin{vmatrix} 10 & -1 \\ 11 & -1 \\ 2 & -10 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -10 & -1 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + (-1) \cdot \begin{vmatrix} 11 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 0 - 1 \cdot (-1 - 2) = 2$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} -20 & -1 \\ 01 & -1 \\ 0 & -10 \end{vmatrix} = -2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -10 & -1 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 00 & -1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 01 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 2;$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 10 & -1 \\ 200 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 00 & -1 \end{vmatrix} - (-2) \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 20 & -1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 10 & -1 \\ 20 & -1 \end{vmatrix} = 4;$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 10 & -2 \\ 110 \\ 2 & -10 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 10 \\ -19 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 10 \\ -10 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 11 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 6$$

نو یواځنی ټاکلی ځواب موجود دی.

$$x_1 = D_1/D = 2/2 = 1, x_2 = D_2/D = 4/2 = 2, x_3 = D_3/D = 6/2 = 3$$

بیلگه ۱۱ . ۱۷ :

په لاندې سیستم

$$I \quad x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

$$II \quad x_1 - x_3 = 0$$

$$III \quad 2x_1 + x_2 = 1$$

کي دی.

دا بیلگه دی گران لوستونکی پخپله وښايي ، چې اوبیونه نه شته . دي ته باید گوته ونیسیم ،  $D = 0$  او  $D_1 = -1 \neq 0$  ، چې ځواب نه لري .

۱۱ . ۲ . ۴ د گاوس الگوریتم

د گاوس الگوریتم لومړی د ( ۱۱ . ۲۶ ) برابر ونسیستم لپاره استعمالیږي. دا د دوه مساواتو لپاره چې درې ناپېژندونکي لري او همدارنگه د زیاتو مساواتو سیستم لپاره چې درې ناپېژندونکي لري د استعمال وړ دی.

د گاوس د الگوریتم موخه په دې کی پرته ده چې ( ۱۱ . ۱۶ ) سیستم د ورته بدلونفورم له لارې په دریکوډیفورم را اوږي.

$$I \quad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = a_1 \quad (11.34)$$

$$II \quad b_{22}x_2 + b_{23}x_3 = b_2$$

$$III \quad c_{33}x_3 = c_3$$

بنسټیز حالت : که  $a_{11} \neq 0, b_{11} \neq 0, c_{11} \neq 0$  وي نو یو په بل پسې سړی کړی شي چې له III  $x_3$ ، او له II  $x_2$ ، وشمیږي. مگر په ( ۱۱ . ۳۴ ) کی ځانگړي حالتونه هم پیژندل کیږي:

- که  $c_3 \neq 0, c_{33} = 0$  وي، نو یو په ځنډوالی یا تضاد مخ ته پروت دی، ځواب وجود نه لري

- که  $c_3 = c_{33} = 0$  وي، نو III له ضرورت زیات دی سړی یواځی I او II څیږي.

- که  $c_3 = c_{33} = 0$  او برسیره پر دې  $a_{11} \neq 0, b_{11} \neq 0$  وي، نو  $x_3$  په خوښه ټاکل کیدی

شي او  $x_2$  له II او  $x_1$  له I چې  $x_3$  ته اړ وي، شمیرل کیدی شي ( ناپای ډیر ځوابونه )

- برسیره پر دې که  $b_2 \neq 0, b_{22} = b_{23} = 0$  وي، نو ځواب وجود نه لري

- که نور هم ولرو چې  $c_{33} = c_3 = 0$  او  $b_{22} = b_{23} = b_3 = 0$  وي، نو II له ضرورت زیات

دی او له  $a_{11} \neq 0$  کیدی شي چې  $x_2$  او  $x_3$  په خوښه وټاکل شي، او  $x_1$  له I لاس

ته راځي چي  $x^2$  او  $x^3$  ته اړ (په واك كی يا تابع) وي (ناپايي ډير ځوابونه ځوابونه).  
 كه ټول ځلونه او د مساواتو بنی خوا صفر وي ، نو ناپايي ځوابونه موجود دی.  
 د گاوس الگوریتموس د درې ناپیژندونكو ( 11 . 26 ) سره له دوه پلونو (قدم) جوړ دی  
 لومړی پل ( قدم ) : نیسو چي په ( 11 . 2 . 6 ) كی  $a_{11} \neq 0$  دی. دا د نمرې بدلولو په  
 بنسټ همیشه لاس ته راوړی شو ( بي له وركړ شوو حالتونو) چي ټول  $a_{ik} = 0$  وي).  
 دلته I وركول كيږي، او له II د I دا  $a_{21}/a_{11}$  - ځله او له III دا  $a_{31}/a_{11}$  - ځله د I  
 كموي. ددې څخه لاندی سیستم لاس ته راځي:

$$\text{I } a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = a_1 \quad (11.35)$$

$$\text{II } b_{22}x_2 + b_{23}x_3 = b_2$$

$$\text{III } c_{33}x_3 = c_3$$

دویم پل ( قدم ) : د  $b_{22} \neq 0$  نیوني سره په II او III باندي د ۱۱ . ۱ . ۴ برخي سره  
 سم د گاوس الگوریتم استعمالیږي : سړی II بي تغیره پریږدي اوله III دا  $b_{32}/b_{22}$ -ځله  
 د II كموي، له دې راپیداكيږي

$$\text{I } a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = a_1 \quad (11.37)$$

$$\text{II } b_{22}x_2 + b_{23}x_3 = b_2$$

$$\text{III } c_{33}x_3 = c_3$$

د گاوس د شیمې فورمالیټي سره سم بیا دا شکل غوره كي

	x1	x2	x3	RS
I	a11	a12	a13	a1
II	a21	a22	a23	a2
III	a31	a32	a33	a3

$$\text{II}' = \text{II} - (a_{21}/a_{11})\text{I} \quad b_{22} \quad b_{23} \quad b_2$$

$$\text{III}' = \text{III} - (a_{31}/a_{11})\text{I} \quad b_{32} \quad b_{33} \quad b_3$$

$$\text{III}'' = \text{III}' - (b_{32}/b_{22})\text{II}' \quad c_{33} \quad c_3$$

$$x_3 = c_3 / c_{33}$$

$$x_2 = (1/b_{22})(b_2 - b_{23}x_3)$$

$$x_1 = (1/a_{11})(a_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3)$$

بیلگه ۱۱. ۱۸: دا سیستم (مقایسه بیلگه ۱۱. ۱۶)

$$\text{I} \quad x_1 - x_3 = -2$$

$$\text{II} \quad x_1 + x_2 - x_3 = 0$$

$$\text{III} \quad 2x_1 - x_2 = 0$$

د گاوس الگوریتم سره په لاندې ډول حل کيږي

$x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad \text{RS}$

				I	1	0	-1	-2	
				II	1	1	-1	0	
III	2	-1	0	0					
				II' = II - I	0	1	0	2	
				III' = III - 2.I	0	-1	2	4	

$$\text{III}'' = \text{III}' + \text{II}' \quad 0 \quad 2 \quad 6$$

$$x_3 = 6/2 = 3$$

$$x_2 = 2 \dots \dots \dots$$

$$x_1 = -2 + x_3 = -2 + 3 = 1$$

بیلگه ۱۱. ۱۹: (پرتله بیلگه ۱۱. ۱۷) دا سیستم

$$\text{I} \quad x_1 + x_2 - x_3 = 0$$

$$\text{II} \quad x_1 - x_3 = 0$$

$$\text{III} \quad 2x_1 + x_2 = 1$$

د گاوس الگوریتم په مرسته په لاندې ډول حل کيږي

$x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad \text{RS}$

				I	1	1	1	0	
				II	1	0	-1	0	
				III	2	1	0	1	

$$\begin{array}{r} \text{II}' = \text{II} - \text{I} \quad 0 \quad -1 \quad -2 \quad 0 \\ \text{III}' = \text{III} - 2\text{I} \quad 0 \quad -1 \quad -2 \quad 1 \end{array}$$

$$\text{III}'' = \text{III}' - \text{II}' \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1$$

دلته دی "  $1 = 0$  " تضاد. سیستم نه اوبی کیری یا حل نه لری.

بیلگه ۱۱ . ۲۰: (مقایسه یا پرتله بیلگه ۱۱ . ۱۷) دا سیستم

$$\text{I} \quad x_1 + x_2 + x_3 = 3$$

$$\text{II} \quad x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6$$

$$\text{III} \quad 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 9$$

په لاندې ډول د گاوس په الگوریتم اوبیونه ده

$$\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & \text{RS} \end{array}$$

$$\text{I} \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 3$$

$$\text{II} \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 6$$

$$\text{III} \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 9$$

$$\text{II}' = \text{II} - \text{I} \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3$$

$$\text{III}' = \text{III} - 2\text{I} \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3$$

$$\text{III}'' = \text{III}' - \text{II}' \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0$$

$$\text{په خوښه} \quad = x_3$$

$$x_2 = 3 - 2x_3$$

$$x_1 = 3 - x_2 - x_3 = 3 - (3 - 2x_3) - x_3 = x_3$$

۱۱ . ۳۰ په خوښه ډیر مساوات ، په خوښه ډیر ناپیژندونکو سره

مور په عمومي ډول د لاینیز سیستم برابرونو په لار بنونی پیل کوو m (برابرون د ناپیژندونکو سره)

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = a_1 \dots \dots \dots (11,37)$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23} + \dots + a_{2n}x_n = a_2$$

.....

.....

$$a_{nm}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots + a_{mn}x_n = a_m$$

دا په خوښه یا ازاد پریردو چی د برابر ونونو گنون ( تعداد ) m د ناپیژندونکو n د گنون ( تعداد ) څخه لوي، کوچنی او که برابر دی. په څرگندو دندو یا وظایف مور دلته له څلور ناپیژندونکو څخه نه پورته کیرو او یواځی لاندې دوه متودونه څیرو

۱۱ . ۳ . ۱ - م درجی دیترمینانت او د کرامر قاعده

پیژند ۱۱ . ۵ :

د n ریبیل گنونو aik یوه منظم سیستم -n م درجی دیترمینانت

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}; \dots \dots \dots (11,38)$$

لاندې سری لاندنی ریبیل گن پوهیږي:

$$D = a_{11}A_{11} - a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} - a_{14}A_{14} + \dots \pm a_{1n}A_{1n} \dots \dots (11,39)$$

دلته aik غري پوري مربوطه لاندې دیترمینانت Aik د (n-1) - م درجی دیترمینانت ده، چی پاتیري، که په D کی i - مه لیکه او k - م درخ ، مته یا ستن ( لیکه او درخ چی aik په کی ولاړ وی ) په کرښه لري کرښه پرې تیره کړي، یعنی ووهي.

په دې ډول د-n ام درجی دیترمینانت شمیرل و- (n-1) -ام درجی دیترمینانت شمیرلو ته راتیښیږي .

په ځانگړي توره د څلورمی درجی دیترمینانت لپاره دا لرو

$$A_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}; A_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}; \dots A_{1n} \text{ etc}$$

که  $n$  برابر و نونه  $n$  ناپیژندونکو سره مخ ته ولرو ( په ) 11 . 37 ( کی لرو )  $n=m$  د جمع تیورم په مرسته داسی سیستمونو لپاره لاندې نتیجه لاس ته راوړو

$$Dx_1=D_1, Dx_2=D_2, \dots, Dx_n=D_n \quad (11.42)$$

د  $D_i$  دیترمینانت داسی لاس ته راځي چی د ځله وونویا ضریبونو په دیترمینانت ( ۱۱ .

۳۸ ) کی  $i$ -ام درځ متي یا ستن د برابر و نسیستم د بني لاس سره بدل کړي .

د بیلگی په توگه یوسیستم د ۴ مساواتو او ۴ ناپیژندونکو سره ( پرتله مقایسه ۱۱ . ۴۰

(

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}; D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}; \dots \dots \dots (11.43)$$

له ( 11 . 42 ) څخه لاس ته راځي

جمله ۱۱ . ۷ ( د کرامر Cramer قاعده):

د ځله ووني یا ضریب دیترمینانت ( ۱۱ . ۳۸ ) لپاره د یوه مساوات سیستم د  $n$  مساواتو د

$n$  ناپیژندونکو سره په ( ۱۱ . ۳۷ ) د  $m = n$  ( سره ) باوري دی

$$D = 0 \quad (\text{اصلي حالت}) \quad (11.44)$$

نو دا برابر و نسیستم یواځنی تاکی ځواب لري ( حل لري

$$x_1=D_1/D, x_2=D_2/D, \dots, x_n=D_n/D. \quad (11.45)$$

برعکس که  $D = 0$  مگر  $D_1 \neq 0$  کم له کمه د یوه  $i$  لپاره نو دا سیستم حل نه لري .

که  $D=D_1=D_2=\dots=D_n=0$  وي، نو کم له کمه یو مساوات غیر ضروري دی (دلته د

اوبیوني لپاره د گاوس الگوریتم وړاندیز کوو )

بیلگه ۱۱ . ۲۱:

لاندې سیستم دې حل شي

$$\text{I} \quad x_1 + x_3 = 0$$

$$\text{II} \quad 2x_1 + x_2 + x_4 = 0$$

$$\text{III} \quad x_2 - x_4 = 4$$

$$\text{IV} \quad x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = -2$$



$$D = \begin{vmatrix} 1010 \\ 2102 \\ 010-1 \\ 1-1-11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 102 \\ 10-1 \\ -1-11 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 212 \\ 01-1 \\ 1-11 \end{vmatrix} = -3-3 = -6$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 0010 \\ 0102 \\ 410-1 \\ -2-1-11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 012 \\ 41-1 \\ -2-11 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2-1 \\ -21 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 41 \\ -2-1 \end{vmatrix} = -2-4 = -6$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1010 \\ 2002 \\ 040-1 \\ 1-1-21 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 002 \\ 40-1 \\ -2-11 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 202 \\ 04-1 \\ 1-21 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 40 \\ -2-1 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 4-1 \\ -21 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 04 \\ 1-2 \end{vmatrix} = \\ = 2(4) + 2 + 2(-4) = -12$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1000 \\ 2102 \\ 014-1 \\ 1-1-21 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 102 \\ 14-1 \\ -1-21 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4-1 \\ -21 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 14 \\ -1-2 \end{vmatrix} = 4-2 + 2(-2+4) = 6$$

$$D_4 = \begin{vmatrix} 1010 \\ 2100 \\ 0104 \\ 1-1-1-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 100 \\ 104 \\ -1-1-2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 210 \\ 014 \\ 1-1-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 04 \\ -1-2 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 14 \\ -1-2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 01 \\ 1-2 \end{vmatrix} = \\ = 4 + 2 \cdot 2 - (-4) = 12;$$

$$x_1 = \frac{-6}{-6} = 1; x_2 = \frac{-12}{-6} = 2; x_3 = \frac{6}{-6} = -1; x_4 = \frac{12}{-6} = -2$$

۱۱ . ۳ . ۲ د گاوس الگوریتم:

مورن ولیدل چی د گاوس الگوریتم له لاری د مساوتو یو دریکو جشکل سیستم لاس ته راوستی شو، چی د هغی له مخی څرگندولی شو چی کوم حل (خواب) مخ ته پروت دی

دا په لاندی بیلگه څرگندوو

بیلگه ۱۱ . ۲۲ :

که په بیلگه ۱۱ . ۲۱ کی ورکړ شوی سیستم د گاوس الگوریتم له لاری حل کړو، نو لاندنی شیما لاس ته راځی:

---

	x1	x2	x3	x4	Rs
I	1	0	1	0	0
II	2	1	0	2	0
III	0	1	0	-1	4
IV	1	-1	-1	1	-2

$$\begin{array}{l} \text{II}' = \text{II} - 2\text{I} \quad 0 \quad 1 \quad -2 \quad 2 \quad 0 \\ 4\text{III}' = \text{III} \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad -1 \quad 4 \\ \text{IV}' = \text{IV} - \text{I} \quad 0 \quad 1 \quad -2 \quad 1 \quad -2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{III}'' = \text{III}' - \text{II}' \quad 0 \quad 0 \quad 2 \quad -3 \quad 4 \\ \text{IV}'' = \text{IV}' + \text{II}' \quad 0 \quad 0 \quad -4 \quad 3 \quad -2 \end{array}$$

$$\text{IV}''' = \text{IV}'' + 2\text{II}'' \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -3 \quad 6$$

$$\begin{aligned} x_4 &= -2 \\ x_3 &= 1/2(4 + 3(-2)) = -1 \\ x_2 &= 0 + (-1)(-2) = 2 \dots\dots \\ x_1 &= -(-1) = 1 \dots\dots\dots \end{aligned}$$

بیلکه ۱۱ . ۲۳:

دا برابر ونسیستم

$$\begin{array}{l} \text{I} \quad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ \text{II} \quad x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ \text{III} \quad 3x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 2 \end{array}$$

حل یا اویبونه ی نه لری، لکه د گاوس له شیما خخه چی لیدل کیری:

$$\begin{array}{c} x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad RS \\ \hline \text{I} \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 4 \end{array}$$

---

	II	1	-1	-1	1	0
	III	3	-1	-1	3	2

---

	II' = II-I	0	-2	-2	0	-4
	III' = III-3.I	0	-4	-4	0	-10

---

	III'' = III' - 2.II'	0	0	0	0	-2
--	----------------------	---	---	---	---	----

---

دلته III " په څتوالی یا تضاد خوندي لري "  $-2 = 0$  "

بیلگه ۱۱ . ۲۴ :

لاندي سیستم د ۵ برابر ونونو او ۴ ناپیژندونکو سره

$$\begin{array}{l} \text{I} \quad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ \text{II} \quad x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ \text{III} \quad 3x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 = 4 \\ \text{IV} \quad x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 10 \\ \text{V} \quad 3x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 8 \end{array}$$

گورو چی  $oe1$  (ناپای ډیر) اوبیونی لري

	x1	x2	x3	x4	RS
--	----	----	----	----	----

---

	I	1	1	1	1	4
	II	1	-1	-1	1	0
	III	3	-1	-1	3	4
	IV	1	2	3	4	10
	V	3	1	1	3	8

---

	II' = II-I	0	2	-2	0	-4
	III' = III-3.I	0	-4	-4	0	-8
	IV' = IV - I	0	1	2	3	6
	V' = V-3.I	0	-2	-2	0	-4

---

$$\begin{array}{r}
 \text{II}'' = \text{II}' + 2 \cdot \text{IV}' \quad 0 \quad 0 \quad 2 \quad 6 \quad 8 \\
 \text{III}' = \text{III}' + 4 \cdot \text{IV}' \quad 0 \quad 0 \quad 4 \quad 12 \quad 16 \\
 \text{V}'' = \text{V}' + 2 \cdot \text{IV}' \quad 0 \quad 0 \quad 2 \quad 6 \quad 8 \\
 \hline
 \text{III}''' = \text{III}'' - 2 \cdot \text{II}' \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \\
 \text{V}''' = \text{V}'' - \text{II} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0
 \end{array}$$

گورو چی III''' او V''' تضاد نه لري. سری کړي شي چی  $x^4$  په خوښه وټاکي او لاس ته راوړي

$$\text{له II}'' \quad x^3 = 4 - x^4 \quad \text{او IV}' \quad x^2 = 6 - 2(4 - 3x^4) - 3x^4 = -2 + 3x^4 \quad \text{له I}$$

$$x = 4 - x^2 - x^3 - x^4 = 4 - (-2 + 3x^4) - (4 - 3x^4) - x^4 = 2 - x^4$$

$$\text{نو } x^1 = 2 - x^4 \quad \text{په خوښه } x^4 \text{ ټاکو}$$

$$\text{او } x^2 = -2 + 3x^4 \quad \text{، په خوښه } x^4 \text{ ټاکو}$$

$$\text{او } x^3 = 4 - 3x^4 \quad \text{په خوښه } x^4 \text{ ټاکو}$$

یادونه: هغه گڼ یا نوره هم ښه هغه ځله ووني، چې غواړو صفر شي یا له منځه وړو هغه مو شنه کړي.

سری د گاوس شیمای په دوم بلاک کی پیژندلی شي، مساوات، کوم چی په III' او V' پورې اړه لري، بل څه نه افاده کوي په غیر له هغی چی په II' اړه لرونکي دي. کیدی شو چی په III' او V' لیکو مو کرښه تیره کړي وی ( له منځه وړي وی ). دریم بلاک به یواځي له کرښی II' جوړ وی، او د گاوس الگوریتم به له دې سره پای میندلی وی.

۱۱. ۴ هوموژین مساواتسیستم:

د  $n$  مساواتو یو سیستم د  $n$  نامعلومو سره چی د ټولو مطلقه غړي ورك شي، هموگین مساواتسیستم بلل کيږي .

د  $n = 3$  لپاره دا د مثال په توگه هوموگین سیستم بلل کيږي

$$\text{I} \quad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0 \dots\dots\dots$$

$$\text{II} \quad a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0 \quad (11.46)$$

$$\text{III} \quad a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = 0 \dots\dots\dots$$

یو داسی هوموژینسیستم تل یوه اسانه اوبیونه یا اسان حل لري

$$x_1 = x_2 = x_3 = \dots = x_n = 0 \quad (11.47)$$

که د ځلوونو د یترمینانت ( ۱۱. ۳۸ ) لپاره  $D \neq 0$  باور ولري، نو د جملی ۱۱. ۷ شیمای څخه یواځي اسان trivial اوبیونه یا حل موجود دی او باور لري

جمله ۱۱. ۸: یو هوموگین مساواتسیستم یواځ هلتته سخت حل لري، که  $D = 0$  باوري وي بیلگه ۱۱. ۲۵:

دا هوموژین برابر ونسیستم

$$\text{I} \quad x_1 + x_3 = 0$$

$$\text{II} \quad x_1 - x_2 = 0$$

$$\text{III} \quad x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

د

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 + (1+1) \neq 0$$

له امله یواځنی ساده اوبیونه  $x_1 = x_2 = x_3 = 0$  لري. بیلگه ۱۱. ۲۶:

دا هوموگین مساواتسیستم

$$\text{I} \quad x_1 + x_3 = 0$$

$$\text{II} \quad x_1 + x_2 = 0$$

$$\text{III} \quad x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 + 1 = 0$$

د

له امله ناساده اوبیونه هم لري دا په لاندې ډول د گاوس د الگوریتموس څخه لاس ته راځي: په لاندې کې RS د پاتې- یا باقی سیستم په معنا دی.

$x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad \text{RS}$

---


$$0 \quad 0 \quad 1 \quad \text{I} \quad 1$$

$$0 \quad \text{II} \quad 1 \quad -1 \quad 0$$

$$0 \quad \text{III} \quad 0 \quad 1 \quad 1$$

---


$$\text{II}' = \text{II} - \text{I} \quad 0 \quad -1 \quad -1 \quad 0$$

$$\text{III}' = \text{III} \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0$$

---


$$\text{II}'' = \text{II} + \text{III}' \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0$$

گورو چی II "تضاد نه لري"  $x_3$  په خوښه ټاکو، او له III لاس ته راځي  $x_2 = -x_3$  او له I څخه لاس ته راځي  $x_1 = -x_3$  نو  $x_1 = -x_3$  او  $x_2 = -x_3$  نو  $x_3$  په خوښه

### تمرینونه

د نامعلومو لپاره - لکه له بنوونځي چې ورسره بلد یو-پوهیږو او یا هم

۱ - کرښیز مساواتسیستم له دوه مجهولو سره.

مشوره مو داده، چې د دې تمرینونو د حل لپاره د مختلفو تگلارو څخه کار اخستلس شي، چې بیایي و ازمایو. دلته دې د زیاتون یا جمعې قانون او همداسې د گاوس الگوریتم ته لومړیتوب ورکړ شي او د دیترمینانت سره شمیرنه دې یوه بله د استعمال لار وي.

۱. ۱ - مساواتسیستم د ټاکلو ضریبونو سره

$$1.1.1. \quad a) \quad \begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &= 8 \\ 3x_1 - 6x_2 &= -30 \end{aligned}$$

$$b) \quad \begin{aligned} x_1 &= 3x_2 - 14 \\ x_2 &= 3x_1 - 22 \end{aligned}$$

$$c) \quad \begin{aligned} 51x - \frac{3}{20y} &= 3 \\ 48x - \frac{1}{10y} &= 2 \end{aligned}$$

$$d) \quad \begin{aligned} \frac{1}{x} + \frac{2}{y} &= 3 \\ \frac{5}{x} - \frac{1}{y} &= 4 \end{aligned}$$

$$1.1.2. \quad a) \quad \begin{aligned} 5(x_2 + 2) - 3(x_1 + 1) &= 23 \\ 3(x_2 - 2) &= 19 - 5(x_1 - 1) \end{aligned}$$

$$b) \quad \begin{aligned} 3(2x_1 - x_2) + 4(x_1 - 2x_2) &= 87 \\ 2(3x_1 - x_2) - 3(x_1 - x_2) &= 82 \end{aligned}$$

$$c) \quad \begin{aligned} 4 - \frac{1}{3}(2x - y - \frac{9}{2}) &= \frac{1}{8}(3x - 6 - 4y) \\ 4 - \frac{x - \frac{1}{2}y + 3}{3} &= \frac{2y - x - 6}{8} \end{aligned}$$

$$d) \quad \begin{aligned} 3y - \frac{3(4x - 3y)}{2} &= 2x - 3y - 1 \\ 3x - \frac{3(3x - 2y)}{5} &= 5x - 3y - 1 \end{aligned}$$

$$1.1.3. \quad a) \quad \begin{aligned} \frac{1}{\frac{7}{2}x - 3} &= \frac{1}{4y - 3} \\ \frac{1}{\frac{5}{2}x + 4} &= \frac{1}{3y + 1} \end{aligned}$$

$$b) \quad \begin{aligned} \frac{1}{3x - 5} &= \frac{4}{7y - 13} \\ \frac{1}{y - x} &= \frac{8}{3x + y} \end{aligned}$$

$$\text{c) } \frac{1}{y-10} = \frac{25}{12x+19}$$

$$\frac{1}{45-x} = \frac{8}{15y+1}$$

$$\text{d) } 4+y = x$$

$$\frac{2}{5-3x} = \frac{3}{7-2y}$$

$$\text{1.1.4. a) } (x-1)(2y+5) = (y+1)(2x-1)$$

$$(2x+7)(y-2) = (2y-3)(x+2)$$

$$\text{b) } 4(5y-3)(2x+1) = (10x+7)(4y-3)$$

$$2(2y+1)(x+4) = (2x+5)(2y+3)$$

$$\text{c) } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{6}$$

$$\text{d) } \frac{3}{x} + \frac{8}{y} = 3$$

$$\frac{15}{x} - \frac{4}{y} = 4$$

$$\text{1.1.5. a) } \frac{9x_1}{2} + \frac{3x_2}{2} = 3$$

$$3x_1 + x_2 = 2$$

$$\text{b) } \frac{2x_2 - 5x_1}{6} + \frac{x_1}{6} = \frac{x_2 - 2x_1}{3}$$

$$\frac{5-3x_1}{3} - \frac{4x_2-1}{4} = \frac{6x_1+23}{12} - \frac{3x_1-4x_2}{2}$$

$$\text{c) } \frac{12}{4x_1+3x_2} - \frac{1}{3(3x_1-2x_2)} = \frac{1}{6}$$

$$\frac{5}{3x_1-2x_2} + \frac{6}{4x_1+3x_2} = 5,25$$

$$\text{d) } 3(x_1-2) + 4(2x_2 + \frac{3}{2}) = 0$$

$$5(x_1+3) - 3(x_2 - \frac{1}{3}) = 16$$

$$\text{1.1.6. a) } 3x_1 + 4x_2 = 8$$

$$5x_1 - 2x_2 = 9$$

$$7x_1 - 8x_2 = 10$$

$$\text{b) } 6x_1 - x_2 = 1$$

$$9x_1 + 2x_2 = 5$$

$$3x_1 - x_2 = 1$$

$$\text{c) } 5x_1 - 3x_2 = -3$$

$$3x_1 + 5x_2 = 5$$

$$3x_1 - 1,8x_2 = -1,8$$

$$0,9x_1 + 1,5x_2 = 1,5$$

$$\text{d) } 2x_1 - 3x_2 = 10$$

$$-\frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{2}x_2 = -\frac{5}{3}$$

$$x_1 - 1,5x_2 = 5$$

$$0,5x_1 - 0,75x_2 = 2,5$$

۱، ۲ - مساواتسیستم د ناکلو ضربیونو سره

$$\text{1.2.1. a) } x_1 + x_2 = a$$

$$ax_1 - x_2 = b$$

$$\text{b) } 3x_1 - 2x_2 = 5a$$

$$2x_1 - 3x_2 = 5b$$

$$\begin{aligned} \text{c) } 10x + 6y &= 4a + b \\ 6x + 10y &= 4a - b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } 14x - 15y &= 24a \\ 10x - 21y &= 24b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1.2.2. \text{ a) } \frac{x_1}{2a+b} - \frac{x_2}{2a-b} &= \frac{8ab}{b^2-4a^2} \\ \frac{x_1}{2a+b} + \frac{x_2}{2a-b} &= \frac{8a^2+2b^2}{4a^2-b^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } -(a+b)x_1 + (a-b)x_2 &= 0 \\ (a-b)x_1 + (a+b)x_2 - 4ab &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \left(\frac{a^2+b^2}{2b}\right)^2 \cdot x - \left(\frac{b^2-a^2}{2b}\right)^2 \cdot y &= a^2 \\ \frac{a^2+b^2}{2b} \cdot x + \frac{b^2-a^2}{2b} \cdot y &= b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } \frac{x}{b+c} - \frac{y}{a+c} &= a-c \\ \frac{x}{a+b} - \frac{y}{b+c} &= b-a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1.2.3. \text{ a) } x + y &= \frac{2(a^2+b^2)}{a^2-b^2} \\ x - y &= \frac{4ab}{a^2-b^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } x + y &= \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2} \\ 2x + 3y &= \frac{2a^2+ab+3b^2}{a^2-b^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } ax + by &= 2a \\ a^2x - b^2y &= a^2 + b^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } ax + by &= a^3 + 2a^2b + b^3 \\ bx + ay &= a^3 + 2ab^2 + b^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1.2.4. \text{ a) } ax + by &= 2a \\ x + y &= \frac{a^2+b^2}{ab} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } (a-b)x + (a+b)y &= a+b \\ \frac{x}{a+b} - \frac{y}{a-b} &= \frac{1}{a+b} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \frac{x-a}{y-a} &= \frac{a-b}{a+b} \\ \frac{x}{y} &= \frac{a^3-b^3}{a^3+b^3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } (a-b)x + y &= \frac{a+b+1}{a+b} \\ x + (a+b)y &= \frac{a-b+1}{a-b} \end{aligned}$$

۱. ۳ - شي شميرنه

۱. ۳. ۱ کوم دوه اعداد لاندې خويونه لري؟ که هر عدد په ۵ لوی شي، د مربع يا څلورئ کمون (تفریق) يې په ۱۰۰ لويږي، په داسې حالې جې ضرب يې په ۳۲۵ زیاتيږي.

۱. ۳. ۲ د دوه عددونو جمعه يا زیاتون دومره لوي دی، لکه د تفریق مربع يې.

که ۴ لومړي عدد تع ورزیات شي او له دویم عدد کم شي، نو د مربع کمون د يا تفریق يې ۹۹ دی، وښايئ چې عددونه څومره لوی دي؟



۱. ۳. ۳. د هرو دوه گڼونو څخه هر یو یی په 2 لویوي، نو گڼونه ځانونه نیسي لکه: 4 : 3 . که له هر یوه ددې دوه گڼونو څخه 3 کم شي ، نو داسی لاس ته راغلی گڼ خان نیسی لکه : 3 : 2 . دواړه گڼونه کوم دي؟
۱. ۳. ۴. د دوه گڼونو زیاتون 999 دی. که لمړی گڼ په 9 وویشل شي او دوم په 6 ، نو د ویشونکو زیاتون 138 دی . هر یو ددې دوه گڼونو څومره لوي دي؟
۱. ۳. ۵. د دوه گڼونو زیاتون 1000 دی. که لمړی له 2 او دوم له 3 سره ځل یا ضرب شي، نو د ځلونو زیاتون یی 2222 دی. هر یو له دې گڼونو څومره لوي دي؟
۱. ۳. ۶. په دوه گڼونو کې یو له بل په 0,909 لوي دی، زیاتون یی 3,191 دی. دواړه گڼونه څه نومېږي یا کوم دي؟
۱. ۳. ۸. د یوه درېکونجې د دوه اړخونو اوږدوالي زیاتون 8,4 cm دی او پریکشن یا پریوستون یی د درېکونجې په دریم اړخ 4 cm او 1,6 cm دی. د درېگودي اړخونه څومره لوي دي؟
۱. ۳. ۹. د یوه لوي ښار ترمنځ دوه کلي X او Y د ښار له مرکز Z سره یو درېگودی جوړوي . له X څخه چی له Z څخه تیرېږي ، Y ته اوږدوالي 12 cm دی، Y له مرکز Z څخه 2 km زیات لري دی نسبت و X ته ، دواړه منځ کلی X او Y له مرکز Z څخه څومره لرېدي؟
۱. ۳. ۱۰. د یوه فوتبال میدان څخه د څلورکونجې شکل د لرگیو راگرځیدلی دیوال، چی 420 m اوږد دی ، باید په اغزیو سیمانو بدل کړي. دلته یوه خوا په 5 m کوچنی کيږي، که بل اړخ په 10 m اوږده شي. له دې سره د سیمگرځی اوږده د هواری دننه په 100 m<sup>2</sup> زیاتېږي. د څلورکونجیز اړخونه څومره لوي دي؟

۱۱. ۳. ۱. د یوه موټر ماشین یخې ۸ لیتره اوبه خوندي کوي او دوه وتلارې لري، دا کیدی شي خالي شي، که د بیلګي په توګه لمړی 5 دقیقې او دویم 2 دقیقې واز کړي او یا دویم 6 دقیقې او لمړی 3 دقیقې واز شي. په هر نل کې څومره اوبه په یوه دقیقه کې وزي؟

۱۲۳. ۱. یو پلار له څوي څخه ۳۶ کاله زوړ دی په ۵ کاله کې پلار د څوي  $1/4$  عمر څخه ور زیات 3 برابره د څوي عمر لري اوس پلار او څوي هر یو څومره عمر لري؟

۱۳. ۳. ۱. د شربت د ګډولو لپاره دوه ډوله شربتونه سره ګډیږي. که له لمړې درې بوتله واخستل شي او له دویم ۷ بوتله نو د یوه بوتل ارزښت دې ۲ مارکه وشمیرل شي. مګر که له لمړې ۷ بوتله او له دویم درې بوتله سره ګډ شي، د یوه بوتل ارزښت 40, 2 الماني مارکه (DM) کیږي. د په کارونو شربتونو بوتل به څومره ارزښت ولري؟

۱۴. ۳. ۱. یو د  $450 \text{ m}^3$  اوبو اوبه ډکې یا اوبه ساتی (بیلر) له دوه نلونو ډکیږي. که لمړی نل درې دقیقې او دویم یوه دقیقه واز وي، نو په اوبه ساتي کې  $40 \text{ m}^3$  اوبه جریان لږودی شي. مګر که لمړی یوه دقیقه او دویم نل ۷ دقیقې واز وي، نو اوبه ساتي ته  $60 \text{ m}^3$  اوبه جریان لري. هر نل په یوه دقیقه کې څومره اوبه اوبه ساتي ته غورځوي؟ څومره باید هر نل له همغه یوه وخته واز وي چې اوبه ساتي ډک شي؟

۱۵. ۳. ۱. دوه کارګرو ته د کندنې کار ور په غاړه کیږي. که دواړه یوځای کار

وکړي، نو ۱۲ ورځو ته ضرورت دی. که لمړی دوه ورځې او دویم درې ورځې کار وکړي، نو په دې وخت کې یواځې  $1/5$  برخه د کار کړه کیږي. څومره ورځې به له دوي هر یو ځانله د دې کار لپاره ضرورت ولري؟ اړتیاوې؟

۱۶. ۳. ۱. د یوې گردۍ په چاپیری چی ۱۰۰ متره اوږد دی، دوه بدنونه په حرکت

راځي. هغوي هر ۲۰ دقیقې حرکت کوي، که هغوي په همغه لور حرکت

وکړي او هر ۴ دقیقې، که هغوي یو د بل په څنډ لور حرکت وکړي، هر

بدن په یوه ثانیه کی څومره واټن تی کوي یا وهي؟

۱۷. ۳. ۱. په یوه گردۍ چی چاپیری یی ۹۹۹ متره اوږد دی دوه بدنونه په همغه لور

حرکت کوي او دا حرکت په هرو ۳۷ ثانیو کی. د واړو بدنونو سرعت څومره

دی، که د لمړي سرعت څلور واړه لوي لکه د دوم لوی؟

۲

. ۲

۱. کرښيز مساوات سیستمونه د درې مجهولو سره

۱ - مساواتسیستم د ټاکلو ضریبونو سره

a)  $x + y = 14$

$x + z = 15$

$y + z = 16$

b)  $x_1 - x_2 = 4$

$x_1 + x_3 = 18$

$x_2 - x_3 = 6$

c)  $x_1 + x_2 = 6,6$

$x_1 - x_3 = 2,6$

$x_2 - x_3 = 2$

d)  $x + y + z = 25$

$3x - 2z = 1$

$20y - 16z = 0$

e)  $2x + 3z = 13$

$3x - 4y = 3$

$5y - 6z = 9$

f)  $12x + 24y - 42z = 30$

$4x + 8y - 14z = 10$

$6x + 12y - 21z = 15$

g)  $5x + 3y + 2z = 207$

$5x - 3y = 37$

$3y - 2z = 19$

h)  $x_1 + x_2 - x_3 = 17$

$x_1 - x_2 + x_3 = 13$

$-x_1 + x_2 + x_3 = 14$

i)  $x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 11$

$2x_1 - 3x_2 + x_3 = 6$

$6x_1 - 16x_2 + 10x_3 = 39$

j)  $4x + 4\frac{1}{2}y - 6\frac{3}{4}z = 20$

$2\frac{1}{5}x - 2\frac{1}{3}y + 1\frac{1}{2}z = 5\frac{2}{3}$

$1\frac{2}{3}x + 1\frac{3}{4}y - 4\frac{1}{2}z = 3\frac{1}{3}$

k)  $\frac{2}{5}x - y = 0$

$\frac{2}{3}x - z = 1$

$-\frac{2}{3}y + z = 2$

۲. ۲ - مساوات سیستمونه د ناتاکلو ضریبونو سره

a)  $x_1 + x_2 = 2c$

$x_1 + x_3 = 2b$

$x_2 + x_3 = 2a$

b)  $x_1 + x_2 = 2(a + b)$

$x_1 + x_3 = 2(a + c)$

$x_2 + x_3 = 2(b + c)$

c)  $ax + by - z = 1$

$ax - by + z = b$

$-ax + by + z = a$

$$\begin{array}{lll}
 \text{d) } ax + y - cz = 2a & \text{e) } \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2a & \text{f) } -\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{2}{a} \\
 -ax + y + cz = 2c & \frac{1}{x} + \frac{1}{z} = 2b & \frac{1}{x} - \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0 \\
 ax - y + cz = 2ac & \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 0 & \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{z} = \frac{2}{b} \\
 \\
 \text{g) } x + \frac{y}{b} - \frac{z}{c} = a & & \text{h) } \frac{x}{b+c} + \frac{y}{c-a} = a+b \\
 y + \frac{z}{c} - \frac{x}{a} = b & & \frac{y}{c+a} + \frac{z}{a-b} = b+c \\
 z + \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = c & & \frac{z}{a+b} + \frac{x}{b-c} = c+a
 \end{array}$$

۳. په خوښه زیات مساوات د په خوښی زیاتو مجهولو سره

$$\begin{array}{ll}
 \text{a) } 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 7 & \text{b) } 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 6 \\
 x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7 & x_1 + 0,5x_2 + x_3 = 1 \\
 0,5x_1 + x_2 + 1,5x_3 - 0,5x_4 = 3 & 7x_1 + x_2 + 6x_3 + x_4 = 10 \\
 3x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 10 & 6x_1 + 0,5x_2 + 5x_3 + x_4 = 9 \\
 \\
 \text{c) } x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 - 2x_5 = 1 & \text{d) } x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 21 \\
 -2x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 = 3 & x_1 - x_2 - x_3 + x_4 - x_5 + x_6 = 1 \\
 -2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 - 2x_5 = 5 & 6x_1 - 5x_2 + 4x_3 - 3x_4 + 2x_5 - x_6 = 0 \\
 3x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_4 + x_5 = 2 & x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 - 6x_6 = 19 \\
 x_1 - 2x_2 - 2x_3 + x_4 + 3x_5 = 4 & 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 5x_4 + 6x_5 - 7x_6 = -24 \\
 & -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 + x_6 = 3
 \end{array}$$

هوموجین مساوات سیستمونه:

$$\begin{array}{lll}
 \text{a) } 3x_1 - 4x_2 + 7x_3 = 0 & \text{b) } -x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0 & \text{c) } 20x_1 - 10x_2 + 15x_3 = 0 \\
 -x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0 & 5x_1 - 3x_2 + 6x_3 = 0 & -12x_1 + 6x_2 - 9x_3 = 0 \\
 -2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 0 & 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 & 8x_1 - 4x_2 + 6x_3 = 0 \\
 \\
 \text{d) } 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0 & & \\
 9x_1 - 5x_2 + 6x_3 = 0 & &
 \end{array}$$

## ۱۲ . الجبري مساوات يا - برابرونونه

۱۲ . ۱ نالاینیز- یا ناکرنبیز- یا ناخطي برابرونونه

ټول مساوات چی د نورمالفورم

$$A \cdot x = a \quad (12.1)$$

سره یوارزبته ( اکویالنت ) نه وي ، نالاینیز – یا ناکرنبیز مساوات بلل کیري او

عمومي فورم یی په لاندې ډول دی

$$F(x) = 0 \quad (12.2)$$

دلته  $F(x)$  په  $x$  کی یوه ناکرنبیزه یا ناخطي وینه یا افاده ده . د ( 12 . 2 ) حل دا مانا لري چی ټول د  $x$  ارزبستونه پیدا شي د کومو لپاره چی ( 12 . 2 ) باوري وي. باید په پام کی ونیول شي چی ایا یواځي رییل ارزبستونه پیدا کوو او که کمپلس ارزبستونه هم غواړو چی پیدا کرو. د بیلگی په توگه لاندې ناکرنبیز یا لاینیز مساوات

$$x^2 - x - 2 = 0$$

لاندې دواړه رییل ځوابونه لري

$$x_1 = -1, x_2 = 2$$

چی د ارزبستونو ځاي په ځاي کولو سره بي مساوات باوري کیري .ددي په څټ یا برعکس دا برابرون  $x^2 + 1 = 0$  رییل ځواب نه لري ( ۵ -مه برخه دي وکتل شي)،

بلکه لاندې ایماگینار ځوابونه لري :  $x_1 = i, x_2 = -i$

د دي حالت د ښه روښانولو لپاره دي ( ۱۵ برخه دي وکتل شي ) د برابرون او فنکشن

ترمنځ اړیکو ته پاملرنه وشي: اړیکو  $y = F(x)$  ته فنکشنبرابرون او  $x$  ته متحوله

## ۱۲. الجبري مساوات يا - برابر ونونه ۳۴۱

وايي، چې زه يې کله اووښتونی او کله ناپيژندونی بولم (بڼه نومه ونه يې اوښتونی ده) په څټ يا برعکس (2. 12) يو ټاکنمساوات دی او  $x$  هلته يوه ناپيژندونکی يا اوښتونی دی.

د (2. 12) برابر ون يا مساوات اوښتونی يا حل ته د برابر ون د  $F(x)$  صفر ځای يا د مساوات  $F(x)=0$  جذر يا ريښه هم وايي. هغه برابر ون يا مساوات چې په (2. 12) فورم نه دی ورکړ شوی کيدی شي چې په دې لاندې فورم وړول شي. د بيلگي په توگه د دې برابر ون لپاره :

$$\frac{f(x)}{g(x)} = a; g(x) \neq 0$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = a; g(x) \neq 0 \text{ او } f(x)=g(x)$$

نورمال فورم په لاندې ډول لاس ته راوړل کيږي

$$F(x)=f(x)-a.g(x)=0 \text{ او } F(x)=f(x)-g(x)=0$$

د نالاینيزو برابر ونونو لپاره د لاینيزو برابر ونونو په څير راغونډه (اختتاميه، رابنده، راتړلی) تيوري نه شته. په پوليزه يا عمومي ډول څوک نور فرمول نه شي ورکولی، د کوم له مخې چې د صفر ځای معلوميدی شي. بايد په نومريکو (numerischen Methoden) متودونو يا ورپسې گڼ متودونو په ورنزدې يا تقريبي ډول پيداشي

نالاینيز برابر ونونه په دوه ټولگيو ویشل کيږي: الجبري او تراسخندنت چې په دې او راتلونکی څپرکي يا لکه چې ما استعمال کړې برخه کې يې څيرو، چې اوښتونی يې روښانه افاده شوي (explizit لاتين: واضح يا روښانه، افاده شوی، اکسپليڅت) دي.

له 2. 12 څخه تر 4. 12 پورې الجبري برابر ونونه څيرل کيږي چې په لاندې نورمال فورم يا - بڼه اړول کيدی شي

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \dots + a_1x + a_0 = 0 \dots\dots\dots(12,3)$$

دلته په (2. 12) کې يو نالاینيز بلواک يا - فنکشن  $F(x)$  د يوه  $n$  - م درجی پولینوم په څير مخ ته پروت دی. مور په (2. 12) کې د ضريبونو (ځله ونو) لپاره يواځی رييل گڼونه پريږدو (په دې مانا چې ځلونه يواځی رييل وي، يواځی رييل گڼونو ته اجازه ورکولو).

دا په ( ۱۲ . ۳ ) کی کین اړخ ته  $n$  - م درجه پولینوم

$$F(x) = P_n(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \dots + a_1x + a_0 = 0 \dots\dots\dots(12,4)$$

ته ټول ریشنل ( - ریښتونی ) بلواک یا فنکشن هم وایي، ځکه چی د ریشنل شمیرله عملیو زیاتون، کمون، او ځل له لاري او نه په  $x$  واریابلی او  $a_i$  د رییل ضریبونو، ځلونو یا فاکتورونو باندي د ویش کارونی کارولو ( عملي استعمال ) له لاري منځ ته راځي . ټولیز برانرون یا

$$b_nx^n + b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \dots + b_1x + b_0 = 0; b_n \neq 0 \dots\dots\dots(12,5)$$

کیدي شي په  $bn \neq 0$  ویش باندي په ( ۱۲ . ۳ ) نورمال فورم وارول شي .

که دا نه لاینیز فنکشن یا ۰ بلواک  $F(x)$  په ( ۱۲ . ۲ ) باندي په واریابلي یا اووښتونی  $x$  او ځلونو باندي ټول د شمیر کارونی یا عمليي او بالاخره د ویش کارونه وکارول شي یا اجراشي او رییل پارامتر (Parameter) په شمیرپوهنه کی ثابت (همغه) او یا مرستندویه لوي ده) تشکیل شي نو فنکشنونو ته بیا مات ریشنل فنکشنونه ویل کیږي. دا تل د دوه پولینومونو یا ریشنل فنکشنونو د ویش په څیر انځور ور دي

$$F(x) = R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{b_nx^n + b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \dots + b_1x + b_0}{c_mx^m + c_{m-1}x^{m-1} + c_{m-2}x^{m-2} + \dots + c_1x + c_0} ; \dots\dots\dots(12,6)$$

په همدې ډول برابرون

$$F(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = 0; \dots\dots\dots(12,7)$$

تل په ( ۱۲ . ۵ ) یا ( ۱۲ . ۳ ) برابرون اړول وړ دي . دا باید په پام کی وي چی د ( ۱۲ . ۳ ) لپاره یواځنی هغه ځواب په پوښته کی راځي، د کوم لپاره چی باوري وي:

$$Q_m(x) \neq 0$$

که چیري د نالاینیز بلواک یا - فنکشن جوړولو کی د ریشنل شمیر عملیو تر څنګ د توان ( مټ، په جګ ) یا پوتنخ کول او جذر نیولوته هم اجازه ورکړل شي نو بیا سری د الجري فنکشنونو څخه غریب یعنی داسي فنکشنونو ته الجبري فنکشنونه ویل کیږي او ( ۱۲ . ۲ ) برابرون بیا الجبري برابرون بلل کیږي ، دا ډول مساوات هم کیدی شي چی په ( ۱۲ . ۳ ) فورم وارول شي.

هره  $n$  - مه ریښه یا جذر  $\sqrt{G(x)}$

د  $G(x)$  افادې يا ويښي له منځه وړل کيدی شي، که چيرې څوک دا برابر ون په يوه خوا راوړي او بيا د برابر ونونو دواړه خواوې د  $n$  په توان کړي يا د  $n$  پوتنځ يا مت ته جگ کړي . دا په ۱۲ . ۴ برخه کې په څرگندو يا معلومو بيلگوڅيرل کيږي . په نومولو تگلارو د الجبري مساواتو څيرنه د ( ۱۲ . ۳ ) فورم برابر ونونو ته راکښته کيدلی شي. د الجبري مساواتو دا نورمال فورم د  $n$  - می درجي برابر ون هم بلل کيږي. ټول نالاینيز برابر ونونه چی الجبري برابر ون نه دي، ترانسځيندنت برابر ون بلل کيږي . د ترانسځيندنت رابرونونو درې ټيپونه، په نامه ، اکسپوننشل برابر ونونه ، لوگاريتمي برابر ونونه ، او گونومتريکي برابر ونونه دي چي په برخه ۱۳ کې به تر څيرني لاندې ونيول شي.

۱۲ . ۲ څلورۍ (مربع-) مساوات په توان (مت، جگ) د ۲

۱۲ . ۲ . ۱ په جگ د ۲ مساوات په نورماله بڼه

د نالاینيزو الجبري برابر ونونو ساده بڼه د ۲ په توان يا مت ( په جگ ۲ هم ويل کيږي ) برابر ونونه دي چی څلورۍ يا مربع برابر ونونه بلل کيږي . د دې ټوليزه بڼه ( عمومي فورم ) داسی ده ۰ دی

$$b_2x^2 + b_1x + b_0 = 0; b_2 \neq 0; \dots\dots\dots(12,8)$$

په  $b_2$  يي ویش په لاندې ډول يو ورته ارزښته ( اکويوالنت equivalent ) نورمالينه يا نورمالفورم ورکوي

$$x^2 + a_1x + a_0 = 0; (a_1 \neq b_1 / b_2; a_0 \neq b_0 / b_2); \dots\dots\dots(12,9)$$

ددې حل د څلورۍ پوره کوني يا مربعتکمیل څخه په گټه د بينوم په فورم ودي کتل شي: ( ۱ . ۲ . ۲ ) ولاړ دی.

$$[x + a_1 / 2]^2 = x^2 + a_1x + \frac{a_1^2}{4}; \dots\dots\dots(12,10)$$

په دې ډول کيدی شي چی ( ۱۲ . ۹ ) برابر ون په لاندې فورم داسی واپرول شي:

$$x^2 + a_1x + a_0 = (x + a_1/2)^2 + a_0 - a_1^2/4 = 0 \Leftrightarrow$$



$$[x+a_1/2]^2=(a_1^2/4)-a_0 \quad (12,11)$$

که وي

$$(a_1^2/4)-a_0>0 \Leftrightarrow a_1^2-4a_0>0 \Leftrightarrow a_1^2>4a_0 \quad (12,12)$$

نو دوه امکانات شته دی، چی (۱۲ . ۱۱) برابر ون پوره کړي:  
دا صدق کوي

$$x + \frac{a_1}{2} = \sqrt{(a_1^2/4) - a_0}; \dots\dots\dots(12,13)$$

يا

$$x + \frac{a_1}{2} = -\sqrt{(a_1^2/4) - a_0}; \dots\dots\dots(12,14)$$

دا دواړه خواو په توان د ۲ څخه، د (۱۲ . ۱۳) او همداسی د (۱۲ . ۱۴) څخه (۱۲) برابر ون او په دې ډول (۱۲ . ۹) برابر ون لاس ته راځي (په پام کی دې وي چی a د ۲ اصلي برخي په بيټا تل نا کميز يا نامنفي گڼ پوهيدل کيږي، چی څلوری يا مربع يی a ده). له (۱۲ . ۱۳) په همدې ډول له (۱۲ . ۱۴) څخه رييل ځوابونه لاس ته راځي،

$$x_1 = -\frac{a_1}{2} + \sqrt{(a_1^2/4) - a_0}; x_2 = -\frac{a_1}{2} - \sqrt{(a_1^2/4) - a_0}; \dots\dots\dots(12,15)$$

او ددې لپاره دا هم ليکلی شو

$$x_{1,2} = -\frac{a_1}{2} \pm \sqrt{(a_1^2/4) - a_0}; \dots\dots\dots(12,16)$$

په (۱۲ . ۹) کی د (۱۲ . ۱۵) په همدې توگه (۱۲ . ۱۶) ځاي پر ځاي کولو څخه پوهيدل کيږي چی دواړه ارزښتونه  $x_1$  او  $x_2$

په ريښتونی څلوری برابر ون يا مربع مساوات پوره کوي.  
په لاندي حالت کی

$$(a_1^2/4) - a_0 = 0 \Leftrightarrow a_1^2 - 4a_0 = 0 \Leftrightarrow a_1^2 = 4a_0; \dots\dots\dots(12,17)$$

د (۱۲ . ۱۶) له لاري ټيک يو رييل اوبی لرو:

$$x_{1,2} = x_1 = x_2 = -(a_1/2) \pm 0 = -a_1/2; \dots\dots\dots(12,18)$$

۱۲ . الجبري مساوات يا - برابر ونونه ۳۴۵

په ( ۱۲ . ۱۵ ) همداسی په ( ۱۲ . ۱۶ ) باندې په تکیه دا اوبی دوه واره دی یا په بل عبارت دوه واره رامنځ ته کیږي او په دې ډول د یوه دوه واره اوبیوني ( ۱۲ . ۱۸ ) څخه غږیږو.

که وي

$$(a_1^2/4) - a_0 < 0 \Leftrightarrow a_1^2 - 4a_0 < 0 \Leftrightarrow a_1^2 < 4a_0; \dots\dots\dots/12,19)$$

نو ( ۱۲ . ۱۱ ) همداسی ( ۱۲ . ۹ ) رییل حل نه لري. که په کمپلس گڼونو شمیرنه وکړو نو له ۵ - برخی څخه لاندې لاس ته راوړو

$$x + a_1/2 = \sqrt{a_0 - (a_1^2/4)i} \wedge x + a_1/2 = -\sqrt{a_0 - (a_1^2/4)i}$$

او په دې ډول د کونجوگیرت کمپلکس حل جوړه لاس ته راځي:

$$x_{1,2} = -a_1/2 \pm \sqrt{a_0 - (a_1^2/4)i}; \dots\dots\dots(12, 20)$$

له دې څخه هم چی په ( ۱۲ . ۹ ) ځای په ځای شي څرگندیږي چی د  $x_1$  او  $x_2$  ارزښتونه پیل برابر ونه یا مساوات پوره کوي.

که په ( ۱۲ . ۱۹ ) حالت کی لاندې څرگندونی ته پام وي

$$\pm \sqrt{a_0 - (a_1^2/4)i} = \pm \sqrt{(a_1^2/4)i - a_0}; \dots\dots\dots(12, 21)$$

نو لاندې جمله بی راغونډه داسی فرمولولی شو

جمله ۱۲ . ۱: ( د څلوری یا مربع ) په توان یا جگ د ۲ ) برابر ونونو د اوبیوني

فرمول ( د څلوری- یا مربع برابر ونونو(مساواتو)  $x^2 + a_1x + a_0 = 0$

$$x_{1,2} = -a_1/2 \pm \sqrt{a_0 - (a_1^2/4)i}$$

تیک دوه ځوابونه لري

$$a_1^2 > 4a_0 \quad \text{د}$$

په حالت کی دوه مختلف رییل حلونه دی، د  $a_1^2 = 4a_0$  په حالت کی یو رییل دوه

برابره(ډبل) حل دی او د  $a_1^2 < 4a_0$  په حالت کی یو جوړه کونیوگیرت - کنجوگیریکمپلکس حل شته شته دي.

په ساده ډول لاندې د وییټا جمله هم د مربع مساوتو لپاره بنوول کیدی شي

جمله ۱۲ . ۲ ( د وييتا (Vieta) جمله ) :

که  $x_1$  او  $x_2$  د څلورۍ - يا مربع برابر ونونو ( ۱۲ . ۹ ) همداسې د  
( ۱۲ . ۸ ) اوبيوني وي نو باوري دی

$$a_1 = b_0 / b_1 = x_1 \cdot x_2; \dots \dots \dots (12, 22)$$

$$a_2 = b_1 / b_2 = -(x_1 + x_2); \dots \dots \dots (12, 23)$$

حل : ( ۱۲ . ۲۳ ) فرمول په دريو اړو حالتونو کې سم د لاسه له لاندي څخه لاس ته راځي:

$$-(x_1 + x_2) = \left[ \frac{a_1}{2} - \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_0} \right] + \left[ \frac{a_1}{4} + \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_0} \right] = a_i$$

د ( ۱۲ . ۲۲ ) فرمول د تصديق لپاره د بينوم دريم فرمول او  $i^2 = -1$  استعمال څخه په  
په ( ۱۲ . ۱۲ ) حالت کې باور لري :

$$\begin{aligned} x_1 \cdot x_2 &= \left[ -\frac{a_1}{2} + \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_0} \right] \cdot \left[ -\frac{a_1}{2} - \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_0} \right] = \frac{a_1^2}{4} - \left[ \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_0} \right]^2 \\ &= \frac{a_1^2}{4} - \frac{a_1^2}{4} + a_0 = a_0 \end{aligned}$$

په ( ۱۲ . ۱۷ ) حالت کې لاس ته راځي:

$$x_1 \cdot x_2 = \left[ -\frac{a_1}{2} + 0 \right] \left[ -\frac{a_1}{2} - 0 \right] = \frac{a_1^2}{4} = a_0$$

په ( ۱۲ . ۱۹ ) حالت کې باوري دي:

$$\begin{aligned} x_1 \cdot x_2 &= \left[ -\frac{a_1}{2} + \sqrt{a_0 - \frac{a_1^2}{4} i} \right] \cdot \left[ -\frac{a_1}{2} - \sqrt{a_0 - \frac{a_1^2}{4} i} \right] = \frac{a_1^2}{4} - \left[ \sqrt{a_0 - \frac{a_1^2}{4} i} \right]^2 i^2 \\ &= \frac{a_1^2}{4} - \left[ a_0 - \frac{a_1^2}{4} \right] \cdot (-1) = \frac{a_1^2}{4} + a_0 - \frac{a_1^2}{4} = a_0 \end{aligned}$$

## ۱۲ . الجبري مساوات يا - برابر ونونه ۳۴۷

د وبيتا جملې په مرسته لاندې جمله باوري کيږي يا تصديقيږي

جمله ۱۲ . ۳ :

يو ۲ درجيز پولينوم کيدی شي چی په دوه لايڼي فاکتورونو يا ضريبونو يا ځله وونو بيل يا توته يا تجزيه شي:

$$x^2 + a_1x + a_0 = (x - x_1)(x - x_2); \dots \dots \dots (12, 24)$$

په همدې ډول

$$b_2x^2 + b_1x + b_0 = b_2(x - x_1)(x - x_2); \dots \dots \dots (12, 25)$$

چيرته چې  $x_1$  او  $x_2$  د څلورې برابر ونونو يا مربع مساواتو (۱۲ . ۹) په همدې ډول د (۱۲ . ۸) دواړه ځوابونه دي

اوبیونه : له (۱۲ . ۲۲) ، (۱۲ . ۲۳) څخه د (۱۲ . ۹) همداسی د (۱۲ . ۸) په پام کي نیولو سره لرو

$$\begin{aligned} (x - x_1)(x - x_2) &= x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 = x^2 + a_1x + a_0 = \\ &= \frac{1}{b_2}(b_2x^2 + b_1x + b_0) \end{aligned}$$

د جملې ۱۲ . ۳ څخه دي ته راهڅول کيږو چی د (۱۲ . ۱۷) حالت کی د دوه برابره ریل اوبیو څخه خبرې وکړو (وغږیږو). د  $x_1 = x_2$  له امله لاس ته راځي

$$x^2 + a_1x + a_0 = (x - x_1)^2; a_1^2 = 4a_0; \dots \dots \dots (12, 26)$$

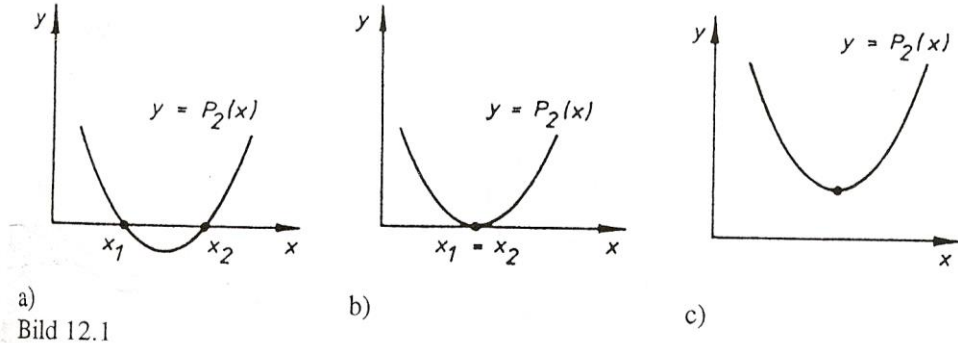
دا دري حالتونه (۱۲ . ۱۲) . (۱۲ . ۱۷) او (۱۲ . ۱۹) کيدی شي چی د فنکشن

$$y = p_2(x) = x^2 + a_1x + a_0$$

څیرو يا شکلونو ( گراف ) په مرسته د کتلو شي.

گراف په بنسټيزه توگه پارابول انځوروي، چی پورته خوا ته سرواز دی. ځکه چی که  $x$  هرڅومره کوچنی شي (که  $x$  د کميز ناپای په جگ يا توان شي) او همدارنگه  $x$  هرڅومره لوي شي (که  $x$  د  $\infty$  ناپای) په جگ شي  $y$  لويیږي (ستريږي يا غټیږي) ، ځکه چی  $x^2$  نسبت و  $x$  ته په توان يا قوي جگيږي له ټولو ټولو (د ناپای لور ته ځي) . د دې ډول ټولو کره پیژند يا تعريف په ۱۹ - برخه کي لوستل کيدی شي.

په ( ۱۲ . ۱۲ ) حالت کې د  $x$  - محور په دارو ریبیلو ځایونو  $x_1$  او  $x_2$  کې غوڅیږي؛  
 په ( ۱۷ . ۱۲ ) حالت کې په  $x_1 = x_2$  ځای کې یې لمسوي او په ( ۱۹ . ۱۲ ) حالت  
 کې گډ ټکي ورسره نه لري یا نه ورسیري ( پرتله څیره . ۱۲ . ۱ )



له جملې ۱۲ . ۱ تر ۱۲ . ۳ پورې به په درې ساده ډوله د ( ۱۲ . ۱۲ ) ، ( ۱۲ ، ۱۷ ) ،  
 ( ۱۹ . ۱۲ ) سره مناسبو بیلگو روښانه شي.

بیلگه ۱۲ . ۱ :

په برابر ونه  $x^2 - x - 6 = 0$  کې لرو

$$a_1^2 - 4a_0a_1 + 24 = 25 > 0 \quad \text{او} \quad a_1 = -1, a_0 = -6$$

له امله ( ۱۲ ، ۱۲ ) حالت مخ ته پروت دی.

دواړه له صفر مختلف ځایونه د جملې ۱۲ . ۱ څخه په لاندې فورم لاس ته راځي:

$$x_{1,2} = 1/2 \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 6} = 1/2 \pm \sqrt{1/4 + 24/4} = 1/2 \pm \sqrt{25/4} = 1/2 \pm 5/2$$

$$\Rightarrow x_1 = 3; x_2 = -2$$

جمله ۱۲ . ۲ :

له لاندې لاس ته راوړنی یاتعقیب څخه باوري کیري

$$a_0 = -6 = x_1 x_2 = 3(-2) = -6$$

$$a_1 = -1 = -(x_1 + x_2) = -(3 - 2) = -1$$

له جملې ۱۲ . ۳ څخه لاس ته راځي:  $x^2 - x - 6 = (x-3)(x+2)$

بيلگه ۱۲ . ۲ :

له مساواتو  $x^2 - 4x + 4 = 0$  لرو  $a_1 = -4, a_0 = 4$  او د  $a_1^2 - 4a_0 = 16 - 4 \cdot 4 = 0$

له امله ( ۱۲ . ۱۷ ) حالت مخ ته لرو . دوه نيز ريبيل حل په لاندي ډول له جملې ۱۲ . ۱

څخه لاس ته راځي  $x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4-4} = 2$  نو لرو  $x_1 = x_2 = 2$

جمله ۱۲ . ۳ :

په لاندي ډول باوري کيږي

$$a_0 = 4 = x_1 \cdot x_2 = 2 \cdot 2 = 4$$

$$a_1 = -4 = -(x_1 + x_2) = -(2 + 2) = -4$$

د جملې ۱۲ . ۳ له مخې لرو  $x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$

بيلگه ۱۲ . ۳ :

له مساواتو  $x^2 - 4x + 13 = 0$  څخه لرو ،  $a_1 = -4, a_0 = 13$  او د  $a_1^2 - 4a_0 = 16 - 52 = -36$

له امله حالت ( ۱۲ ، ۱۹ ) مخ ته لرو.

د کونيوگيرت (کنجوگيري) کمپلکس جوړه اوبيونو يا حلونو له جملې ۱۲ . ۱ څخه په لاندي بڼه يا فورم لاس ته راوولو

$$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4-13} = 2 \pm \sqrt{-9} = 2 \pm 3i$$

$$\Rightarrow x_1 = 2 + 3i; x_2 = 2 - 3i$$

د جملې ۱۲ . ۲ سره سم باور لري

$$a_0 = -4 = -(x_1 + x_2) = -(2 + 3i + 2 - 3i) = -4$$

$$a_1 = 13 = x_1 \cdot x_2 = (2 + 3i)(2 - 3i) = 4 - 9i^2 = 4 + 9 = 13$$

او د جملې ۱۲. ۳ له مخې داسې دی

$$x^2 - 4x + 13 = (x - 2 - 3i)(x - 2 + 3i)$$

د مربع مساوات (۱۲. ۸) همداسې (۱۲. ۹) اوبې په بنکاره ډول ساده کيږي، که یو خلی  $a_0$  اویا  $a_1$  ورك شي:

$$x(x + a_1) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0; x_2 = -a_1 \quad \text{د } a_0 = 0 \text{ لپاره لرو}$$

د  $a_1 = 0$  لپاره لرو

$$x^2 + a_0 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 = -a_0; x_{1,2} = \pm \sqrt{-a_0}$$

## ۱۲. ۲. ۲. خلوری (مربع-) برابر ون چی په نورمالبنه

مخ ته نه دي پراته

که یو مربع مساوات په نورمال فورم (۱۲. ۹) مخ ته نه وي پروت، له دې د مخه چی جمله ۱۲. ۱ وکارول شي، نو باید په دې بنه وارول شي.

بليگه ۱۲. ۴:

$$2x - (x+2)^2 = (x-2)^2 - 4(x+1)$$

$$\begin{aligned} 2x - x^2 - 4x - 4 &= x^2 - 4x + 4 - 4x - 4 \\ -x^2 - 2x - 4 &= x^2 - 8x \\ x^2 - 3x + 2 &= 0 \end{aligned}$$

$$x_{1,2} = 3/2 \pm \sqrt{9/4 - 2} = 3/2 \pm \sqrt{9/4 - 8/4} = 3/2 \pm \sqrt{3/2} \pm \sqrt{1/4} = 3/2 \pm 1/2$$

$$\Rightarrow x_1 = 2; x_2 = 1$$

که مجهول یا ناپېژندلی یا اوریدوني  $x$  د مات لاندې رامنځ ته شي، نو باید په صفر ویش ناممکن یا ناشونوالی په پام کي ونیول شي.

بيلگه ۱۲. ۵:

۱۲ . الجبري مساوات يا - برابر ونونه ۳۵۱

$$(x^2+2x)/(2x^2+2x-4)=1$$

$$2x^2+2x-4 = 0 \quad \text{چې وي تيك هلته مانا لري،}$$

لومړی ورکړشوی برابر ون اوبی کيږي او بيا از مائل کيږي، چې ايا د ماتلاندي شرايط پوره دی، که نه.

$$x^2+2x=2x^2+2x-4$$

$$-x^2 = -4$$

$$x_2 = \pm 2; x_1 = 2; x_2 = -2$$

د  $x=x_1=-2$  لپاره په ماتلاندي کې لرو

$$2x^2 + 2x - 4 = 8 + 4 - 4 = 8 \neq 0$$

او  $x = x_2 = -2$  لپاره په ماتلاندي کې لرو

$$2x^2 + 2x - 4 = 8 - 4 - 4 = 0$$

له دې امله  $x_1 = 2$  د پيل برابر ون اوبی دی

۱۲ . ۲ . ۳ د n - م درجي خانگري برابر ونونه ،

چې په څلورې يا مربع برابر ونونو بېرته بدلېدلی شي

د n - مې درجې مساواتو ( ۱۲ . ۳ ) يو څو خانگري حالتونه کيدی شي چې د څلورې

برابر ونونو يا مربع مساواتو په مرسته ځواب شي يا اوبی شي . دا خانگري حالت

موجود دی يا شته دی که باور ولري

$$a_1 = a_1 = \dots = a_{n-3} = 0 \quad (12, 27)$$

د n-مې درجې برابر ون بيا داسی دي

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} = 0; \dots \dots \dots (12, 28)$$

⇔

$$x^{n-2}(x^2 + a_{n-1}x + a_{n-2}) = 0$$

$$\Rightarrow x^{n-2} = 0 \vee x^2 + a_{n-1}x + a_{n-2} = 0; \dots \dots \dots (12, 30)$$



يادونه : په پورته کې له ( ۱۲ ، ۳۰ ) پورته برابر ون ( ۱۲ ، ۲۹ ) دی  
 د دې برابر ونونو دوهم برابر ون يو څلورۍ - يا مربع برابر ون دی، چې د جملې ۱۲  
 ۱ . په بنسټ لاندې ځواب لري

$$x_{1,2} = -\frac{a_{n-1}}{2} \pm \sqrt{\frac{a_{n-1}^2}{4} - a_{n-2}}$$

لومړی برابر ون دا اوبی يا حل لري  $x = 0$  چې دا ( n-2 ) - ځله رامنځ ته  
 کيږي  $x_3 = x_4 = \dots = x_n = 0$

بيلگه ۱۲ . ۶ :

برابر ون  $x^6 + 2x^5 - 3x^4 = x^4(x^2 + x - 3)$  د  $x^6 + 2x^5 - 3x^4$

$$x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1+3} = -1 \pm 2$$

لاندې اوبيوني لرو

$$x_1 = 1, x_2 = -3; x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = 0$$

نور هم هغه حالت ساده دی، که  $a_{n-2} = 0$  وي، او باور ولري

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} = 0; x^{n-1}(x + a_{n-1}) = 0 \Rightarrow$$

$$x_1 - a_{n-1}, x_2 = x_3 = \dots = x_n = 0; \dots \dots \dots (12, 32)$$

يو بل ځانگړی حالت مخ ته لرو، که د برابر ون ( ۱۲ ، ۳ ) درجه n جوړه گن يا جفت  
 وي -

$$n = 2k \quad ( 12 . 33 )$$

او فقط ( ټيک ) ځله ووني يا کوايفيښنونه  $a_0$  او  $ak$  له صفر سره برابر نه وي:

$$x^{2k} + a_k x^k + a_0 = 0; \dots \dots \dots (12, 34)$$

دلته داسی په ځاي کولو

$$y = x^k; \dots \dots \dots (12, 35)$$

۱۲ . الجبري مساوات يا - برابر ونونه ۳۵۳

او له دي سره د  $y$  لپاره څلورۍ برابر ون يا مربع مساوات لاس ته راځي:

$$y^2 + a_k y + a_0 = 0 \quad (12, 36)$$

د لاندي ځوابونو سره (پرتله : جمله ۱۲ ، ۱)

$$y_{1,2} = -(a_k / 2) \pm \sqrt{\frac{a_k^2}{4} - a_0}; \dots \dots \dots (12, 37)$$

د ( ۱۲ ، ۳۵ ) له امله دي د لاندي دوه برابر ونونو

$$x^k = y_2 \wedge x^k = y_1; \dots \dots \dots (12, 38)$$

ټولي اوبيوني وڅيرلي شي، چي د  $k = 1$  لپاره ساده دي، د  $k = 2$  لپاره ( بيكوادرات برابر ون) ( د څلورۍ څلورۍ يا د مربع مربع ) يا د رييلو  $y_1$  او  $y_2$  لپاره د تراوسه څرگندو ميتودو سره تل كيدونكي دي . نور حالتونه ددي اوس وخت لپاره په ټوليزه توگه ستونځي لري.

بيلگه ۱۲ . ۷ :

لاندي بيكوادرات برابر ون  $x^4 + 5x^2 - 6 = 0$  كيدي د سوبستيچيوشن يعني بدلون له لاري  $y = x^2$  په څلورۍ برابر ون  $y^2 + 5y - 36 = 0$  باندي بدل شي. د جملې ۱۲ . ۱ په بنسټ لرو .

$$y_{2} = -5/2 \pm \sqrt{25/4 + 36} = -5/2 \pm \sqrt{25/4 + 144/4}$$

$$= -5/2 \pm \sqrt{169/4} = -5/2 \pm 13/2$$

$$\Rightarrow y_1 = 4; y_2 = -9$$

دواړه برابر ونونه ، چي د بيرته بدلون (-سوبستيچيوشن) له امله لاس ته راوړو

$$x^2 = 4 , x^2 = -9$$

لاندي اوبي يا حل لري

$$x_1 = 2 , x_2 = -2 , x_3 = 3i , x_4 = -3i$$

## ۱۲ . ۲ . ۴ د برابر ونسيستمونه چي بيرته په څلوري برابر ونونو بد ليدي شي

يوه د نالاینيزو مساواتسيستمونو لړۍ کيدی شي چي په څلوري برابر ون يا مربع مساواتو بيرته وارول شي. ددې لپاره دوه ساده بيلگي راوړو.

بيلگه ۱۲ . ۸:

$$x + y = 1 \quad (12, 39)$$

$$x^2 + y^2 = 13 \quad (12, 40)$$

لومړی برابر ون د  $y$  په لور حل کيږي،  $y = 1 - x$ ، او دا حل په دوم برابر ون کي ايښوول کيږي:

$$x^2 + (1 - x)^2 = 13$$

$$x^2 + 1 - 2x + x^2 = 13$$

$$2x^2 - 2x - 12 = 0$$

$$x^2 - x - 6 = 0$$

$$x_{1,2} = 1/2 \pm \sqrt{1/4 + 6} = 1/2 \pm \sqrt{25/4} = 1/2 \pm 5/2 \Leftrightarrow$$

$$x_1 = 3, x_2 = -2$$

د  $(12, 40)$  له مخي په دې لاندې د  $y$  - ارزښتونه اړه لري

$$y_1 = -2, y_2 = 3$$

نو دانه لاینيز برابر ون لاندې اوبيوني لري

$$x_1 = 3, y_1 = -2 \quad \text{او} \quad x_2 = -2, y_2 = 3$$

بيلگه ۱۲ . ۹:

د لاندې مساواتو سيستم کي

$$ax + y = 1; \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$$

۱۲. الجبري مساوات يا - برابر ونونه ۳۵۵

چی یواځي د  $x \neq 0, y \neq 0$  لپاره موخه وریا هدفمند دی، دوم برابر ون په  $xy$  څلولو (ضربولو) سره په لاندې بڼه اړول کيږي:

$$y + x = xy \quad (12,42)$$

لومړی برابر ون د  $y$  په لور ځواب کيږي

$$y = 1 - ax \quad (12, 43)$$

او په (۱۲ . ۴۲) کی ایښول کيږی یا ځای په ځای کيږي

$$1 - ax + x = x(1 - ax) = x - ax^2$$

$$ax^2 - ax + 1 = 0 \quad (12,44)$$

د  $a = 0$  په حالت کی (۱۲ . ۴۴) برابر ون مخامخوالی لري یا په څټوالی لري یا تضاد لاس ته راکوي «  $0 = 1$  » نو ځواب نه شته

د  $a \neq 0$  لپاره د (۱۲ . ۴۴) څخه لاس ته راځی  $x^2 - x + 1/a = 0$

$$x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{4} - \frac{1}{a}$$

او د جملی ۱۲. ۱ له امله لرو

د

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{a} > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{4} \dots \dots \dots (12.45)$$

لپاره مو (۱۲ . ۱۲) حالت مخ ته پروت دی. دوه برخي حالتونه باید په پام کی ونيول شي:

د  $a > 0$  لپاره له (۱۲ ، ۴۵) څخه لرو ،  $a > 4$  او د  $a < 0$  لپاره له

(۱۲ ، ۴۵) څخه لرو .  $a < 4$  له دي امله د

$$a < 0 \text{ او } a > 4 \quad (12, 46)$$

لپاره د (۱۲ ، ۴۴) دوه مختلف ریل ځوابونه موجود دي:

$$x_1 = 1/2 + \sqrt{1/4 - 1/a}, x_2 = 1/2 - \sqrt{1/4 - 1/a}; \dots \dots \dots (12.47)$$

په دي پوروي د (۱۲ ، ۴۶) له مخی دواړه دي - ارزښتونه هم اړه لري

$$y_1 = 1 - a/2 - \sqrt{1/4 - 1/a}; y_2 = 1 - a/2 + \sqrt{1/4 - 1/a}; \dots \dots \dots (12.48)$$

باید وازماینیل شي چی د ( ۱۲ ، ۴۶ ) په حالت کی  $x_1, x_2, y_1, y_2$  (تول) نابرابر په صفر دي . تل  $x_1 > 1/2$  دی. که  $x_2 = 0$  وی، نو باوري به وی

$$1/2 = \sqrt{1/4 - 1/a}; 1/4 = 1/4 - 1/a$$

دا د هیڅ  $a$  لپاره ممکن نه دی. له دي امله  $x_2 \neq 0$  دی که  $y_1 = 0$  یا  $y_2 = 0$  وی، نو لاندې به باور لرو دی:

$$1 - a + a^2/4 = a^2/4 - 1 \Leftrightarrow 1 = 0$$

دا هم ناشونی یا ناممکن دی، نو دلته هم لرو  $y_1 \neq 0; y_2 \neq 0$ . په ( ۱۲ ، ۴۶ ) حالت کی د ( ۱۲ ، ۴۱ ) د ( ۱۲ ، ۴۷ )، ( ۱۲ ، ۴۸ ) سره سم، دوه

مختلف رییل ځوابونه شته دی - غواړی- موجود دي  $x_2, y_2$  او  $x_1, y_1$

د

$$1/4 - 1/a = 0 \Leftrightarrow a = 4 \quad (12, 49)$$

لپاره ( ۱۲ ، ۱۷ ) حالت مخ ته پروت دی، او برابر ون ( ۱۲ ، ۴۴ ) ډبل رییل حل لري

$$x_1 = x_2 = 1/2 \quad (12, 50)$$

په دي پوري د ( ۱۲ ، ۴۳ ) له مخي هغه  $y$  - ارزښت ډبل گڼ اوبی پوري هم اړه لري.

$$y_1 = y_2 = 1 - 4 \cdot (1/2) = -1$$

د ( ۱۲ ، ۴۹ ) په حالت کی پس د ( ۱۲ . ۱۹ ) یو رییل، ډبل گڼلی حل موجود دی

$$x_1 = x_2 = 1/2, y_1 = y_2 = -1 \quad (12, 51)$$

د

$$1/4 - 1/a < 0 \Leftrightarrow 1/a > 1/4 \quad (12, 52)$$

لپاره ( ۱۲ ، ۱۹ ) حالت مخ ته پروت دی. د  $a > 0$  لپاره ( ۱۲ ، ۵۲ ) د  $a < 4$  کټمټ (ورته) دی، او د  $a < 0$  لپاره  $a > 4$  سره کټمټ دی (له دي امله په ځټوالی یا تضاد).

نو د ( ۱۲ ، ۵۲ ) باور لري، د

$$0 < a < 4 \quad (12, 53)$$

۱۲. الجبري مساوات يا - برابر ونونه ۳۵۷

لپاره . په دې حالت کې ( ۱۲ ، ۴۴ ) کونجوگيري کمپلکس اوبيوني لري:

$$x_1 = 1/2 + \sqrt{\frac{1}{a} - \frac{1}{4}i}; x_2 = 1/2 - \sqrt{\frac{1}{a} - \frac{1}{4}i}; \dots (12,54)$$

د ( ۱۲ ، ۴۳ ) له مخې په دې پورې د  $y$  - ارزښتونه اړه لري:

$$y_1 = 1 - a/2 - a \sqrt{\frac{1}{a} - \frac{1}{4}i}; y_2 = 1 - a/2 + a \sqrt{\frac{1}{a} - \frac{1}{4}i}; \dots (12,55)$$

له دې ارزښتونو هېڅ هم صفر کېدی نه شي . پس په يوځاي شوي يا راټوله توگه لرو:  
برابرونسيستم ( ۱۲ ، ۴۱ ) د  $a = 0$  لپاره اوبی نه لري، د  $a < 0$  په همدې ډول  $a > 4$  لپاره دواړه ريل اوبي ( ۱۲ ، ۴۷ ) ، ( ۱۲ ، ۴۸ ) ، د  $a = 4$  لپاره ريل ډبل گنلي اوبی ( ۱۲ ، ۵۱ ) او د  $0 < a < 4$  لپاره دوه کونجوگيري کمپلکس اوبي ( ۱۲ ، ۵۴ ) ، ( ۱۲ ، ۵۵ ) لري.

۱۲ . ۳ دريمه درجه مساوات يا - برابر ونونه

ددې لپاره چې په زړه پورې  $n$ - ( ام ) درجي مساواتو حلول ساده کړای شو نو لکه د مساواتو مربع سيستم جملو ته ورته جملې د دريمې درجې مساوات لپاره څيرو . د دريمې درجې مساواتو نور مال فورم په د ( ۱۲ . ۳ ) سره سم په لاندې ډول دی .

$$x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0 \quad (12,56)$$

دا پولينوم

$$y = P_3(x) = x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \quad (12, 57)$$

لاندې بنسټيز خوښونه لري: که  $x$  ډير لوي شي يعني ناپای په لور لارشي  $x \rightarrow \infty$  نو  $y$  هم د ناپای په لور ځي، ځکه چې د  $x^3$  ارزښت نسبت د  $x^2$  ارزښت ته په بیره جگيري او بيا همداسې و  $x$  ته هم . که  $a_1$  او  $a_2$  کميز يا منفي هم وي نو  $y$  به د لويو  $x$ - ارزښتونو لپاره زياتيز يا مثبت وي. داچې  $x^3$  د کميز  $x$  - ارزښت لپاره له صفر کوچنی دی، نو په همدې ډول

$$x \rightarrow -\infty \quad y \rightarrow -\infty$$

لپاره . د دې ډول «پولو ارزښت يا ليمس» لپاره کره تعريفونه بيا په ۱۹ برخه کې په پراخه توگه څيرل کيږي . د يو- $x$  ارزښت ) خورا کوچنی هم کېدی شي ( شته چې د هغه

لپاره  $y < 0$  وي اود  $y = x - x$  ( ازبنت ) چی خورا لوي هم کیدی شي ) ، د کوم لپاره چی  $y > 0$  دی. ددی دواړو ارزبنتونو تر منځ باید د مساوات ( ۱۲ . ۵۶ ) یو رییل اوبی پروت وي.

په ډیرو لاندې بیلگو کی سری کری شي چی په ساده ډول د جدول په مرسته آزمائيلي حلونه پیدا کړي، په عمومي توگه بیا هم باید وشمیرل شي.

ددې لپاره یو څو بیلگی:

بیلگه ۱۲ ، ۱۰ الف:

د پولینوم

$$y = x^3 - 3x^2 - 4x + 12 \quad (12, 58)$$

لپاره لاندې د ارزبنت جدول لاس ته راځي

$$X = 0, 1, -1, 2$$

$$Y = 12, 6, 12, 0$$

په دې توگه یو رییل صفرځای پیدا شو

$$x - 1 = 2 \quad (12, 59)$$

په ۱۵-مه برخه کی به د هورنر شیما په بنسټ یو متود ورکړ شي ، دکومی له لارې چی بیا د مت (توان) لورولو ته اړتیا نه پیدا کیري او پولینومونو د فنکشن ارزبنت ساده پیدا کیدی شي یا شمیرل کیدی شي

بیلگه ۱۲ . ۱۱ الف:

دا برابر ون

$$2x^3 + 11x^2 + 12x - 9 = 0 \quad (12, 60)$$

لاندې نورمال فورم یا -بڼه لري

$$x^3 + (11/2)x^2 + 6x - 9/2 = 0 \quad (12, 61)$$

د صفرځای پیدا کولو لپاره دې د ( ۱۲ . ۶۰ ) مساوات لپاره د ارزبنت جدول جوړ شي

(ترتیب شي وشمیرل شي ) ، ځکه چی هلته ماتونه منځ ته نه راځي:

$$X = 0, 1, 1/2$$

$$Y = -9, 16, 0$$

نو

$$x - 1 = 1/2 \quad (12, 62)$$

۱۲ . الجبري مساوات يا - برابرونونه ۳۵۹

د مساوات ( ۱۲ . ۶۰ ) په همدې ډول ( ۱۲ . ۶۱ ) يو رييل صفرځای دی

بیلگه ۱۲ . ۱۲ الف:

د لاندې برابرون لپاره

$$x^3-9x^2+27x-27=0 \quad ( 12 , 63 )$$

د ارزښت جدول

$$X = 0 , 1 , -1 ; 2 , -2, 3$$
$$Y = -27 , -8 , -64 , -1 , -25, 0$$

له لارې لاندې رييل صفرځاي لاس ته راځي

$$x = 3 \quad ( 12 , 64 )$$

بیلگه ۱۲ . ۱۳ الف :

د برابرون

$$x^3 -9x^2 +27x -27 =0 \quad ( 12 , 65 )$$

لپاره د جدول

$$X = 0 , 1$$
$$Y = -3 ; 0$$

سره لاندې صفرځاي لاس ته راځي

$$x = 1 \quad ( 12 , 66 )$$

په ټوليزه توگه کيدی شي په کلکه څرگند شي ، چې د دريم درجی برابرونسيستم

( ۱۲ . ۵۶ ) لپاره تل يو رييل اوبی یا حل  $x1$  شته دی. دا يو واقعیت دی چې بي له

ښوونی یی لیکو، چې دا پولینوم ( ۱۲ ، ۵۷ ) بي له پاتي په لاینيز فاکتور

(  $x - x1$  ) ویشل کيدی شي او يو دومه درج پولینوم ترې لاس ته راځي:

$$(x^3+a2x^2+a1x+a0):(x-x1)=x^2+b1x+b0$$

له دې امله داسی دی



جمله ۱۲. ۴ :

هر دريمه درجه برابر ون ( ۱۲ . ۵۶ ) کم له کمه يو رييل اوبی  $x_1$  لري او دا لاندي باوري دي

$$P_3(x) = x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = (x - x_1)(x^2 + b_1x + b_0); \dots \dots \dots (12, 67)$$

دلته نو بيا نور د دريمي درجي مساواتو ( ۱۲ . ۵۶ ) دوه حلونه  $x_2$  او  $x_3$  لاس ته راځي که څلورۍ برابر ون يا مربع مساوات  $x^2 + b_1x + b_0 = 0$  اوبی شي، او د جمله ۱۲ . ۱۱ او ۱۲ . ۳ سره کيدی شي چی لاندي جمله فرمولبندي کړی شو  
جمله ۱۲ . ۵ :

هر دريمه درجه برابر ون دري اوبيوني يا اوبي  $x_1, x_2, x_3$  لري او دا باور لري  
 $x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$  ( 12 , 68 )

دلته دا لاندي حالتونه ممکن دي

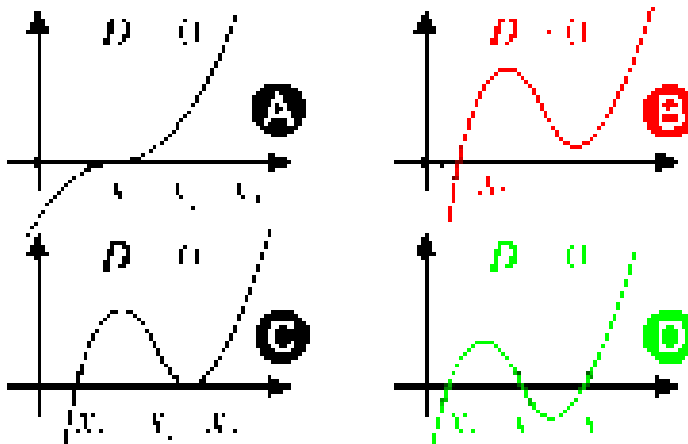
- ۱ - دري رييل مختلف حلونه  $x_1, x_2$  او  $x_3$  شته دی ( موجود دي )
- ۲ - يو رييل حل  $x_1$  او ددي سره مختلف يو ډبل رييل حل  $x_2 = x_3$  شته دی .
- ۳ - يو رييل درېگونی حل شته دی

$$x_1 = x_2 = x_3$$

۴ - يو رييل حل  $x_1$  او يوه جوړه کونجوگيرت کملکس اوبيوني يا

$$x_2 = x_3 \text{ شته دی}$$

دا لاندي څيره د ټولو راشنل فنکشنونو ( ۱۲ . ۵۷ ) تيبيکي تلنه د جمله ۱۲ . ۵ څلورو حالتونو کی بنایي



۱۲ . الجبري مساوات يا - برابر ونونه ۳۶۱

د ( ۱۲ . ۶۸ ) فرمول په مرسته د بني اړخ په ځلولواو فاکتورونو(ځله وونو) پرتلی يا انډول له لارې کيدی شي د دريمی درجي پولینومو لپاره د وييتا جمله تصدیق کړي چی د جملی ۱۲ . ۲ سره سر خوري

جمله ۱۲ . ۶ :

که  $x_1, x_2$  او  $x_3$  د دريمي درجي برابر ون ( ۱۲ . ۵۶ ) اوبیوني وي ، نو لاندې باوري دي

$$a_0 = -x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \quad (12,69)$$

$$a_1 = x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 \quad (12,70)$$

$$a_2 = -(x_1 + x_2 + x_3) \quad (12,71)$$

جملی ۱۲ . ۴ په مرسته دې اوس د بیلگو ۱۲ . ۱۰ الف، تر ۱۲ . ۱۳ الف پورې د نورو دواړو  $x_2$  او  $x_3$  اوبیوني ولټول شي.

بیلگه ۱۲ . ۱۰ ب :

( ۱۲ . ۵۸ ) برابر ون د ( ۱۲ . ۵۹ ) برابر ون له مخی  $x_1 = 2$  حل لري. سری دا ځواب د ۱ . . ۲۲ . برخي له مخي د پارشل Partial- (ټوټه- ) ویش په بنسټ لاس ته راوري.

$$(x^3 - 3x^2 - 4x + 12) : (x - 2) = x^2 - x - 6$$

$$\underline{..x^3 + 2x^2}$$

$$..... - x^2 - 4x + 12$$

$$..... \underline{-x^2 + 2x} .....$$

$$..... - 6x + 12$$

$$..... - 6x + 12$$

له  $x^2 - x - 6 = 0$  څخه لاس ته راځي

$$x_{2,3} = 1/2 \pm \sqrt{1/4 + 6} = 1/2 \pm \sqrt{1/4 + 24/4} = 1/2 \pm 5/2,$$

$$x_2 = 3, x_3 = -2$$

دلته د جملې ۱۲ . ۵ لومړۍ حالت لرو، د لاندې مختلفو ريبلو خوابونو سره

$$x_1 = 2, x_2 = 3, x_3 = -2,$$

او داسې دى:

$$x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = (x - 2)(x - 3)(x + 2)$$

بيلگه ۱۲ . ۱۱ ب :

(۱۲ . ۶۰) برابرون د (۱۲ . ۶۲) برابرونونو له مخې اوبى

$$x_1 = 1/2$$

لري او داسې دى:

$$(2x^3 + 11x^2 + 12x - 9) : (x - 1/2) = 2x^2 + 12x + 18$$

$$2x^2 + 12x + 18 = 0 \quad \text{او له}$$

په همدې ډول يا (□) له  $x^2 + 6x + 9 = 0$  څخه لاس ته راځي

$$x_{2,3} = -3 \pm \sqrt{9 - 9} = -3 \Leftrightarrow x_2 = x_3 = -3$$

دلته د جملې ۱۲ . ۵ دوم حالت مخ ته پروت دى د يوه ريبيل حل او يو بل له دې حل

مختلف ډبل ريبيل حل سره، يعنې لرو ،  $x_1 = 1/2, x_2 = x_3 = -3$  او داسې دى

$$x^3 + (1/2)x^2 + 6x - 9/2 = (x - 1/2)(x + 3)^2$$

بيلگه ۱۲ . ۱۲ ب :

(۱۲ . ۶۳) برابرون د (۱۲ . ۶۴) له مخې  $x_1 = 3$  خواب لري. دلته باور لري

$$(x^3 - 9x^2 + 27x - 27) : (x - 3) = x^2 - 6x + 9$$

له  $x^2 - 6x + 9 = 0$  څخه لاس ته راځي

$$x_{2,3} = 3 \pm \sqrt{9 - 9} = 3$$

نو دلته مو د جملې ۱۲ . ۵ د دريم حالت درې برابره خواب مخ ته پروت دى يعنې

$$x_1 = x_2 = x_3 = 3$$

او داسې دى

$$x^3 + -9x^2 + 27x - 27 = (x - 3)^3$$

۱۲ . الجبري مساوات يا - برابرونونه ۳۶۳

بیلگه ۱۲ . ۱۳ ب : ( ۱۲ . ۶۵ ) برابرون د ( ۱۲ . ۶۶ ) برابرونونو له مخی خُواب

$$x_1 = 1 \text{ لري، او داسی دی}$$

$$(x^3 - 5x^2 + 17x - 13):(x-1) = x^2 - 4x + 13$$

له  $x^2 - 4x + 13 = 0$  څخه لاندې لاس ته راځي

$$x_{2,3} = 2 \pm \sqrt{4 - 13} = 2 \pm 3i$$

دلته د جملی ۱۲ . ۵ څلورم حالت د یوه رییل حل او یوه جوړه کونیوگیرت کملکس خُوابونوسره مخ ته پروت دي.

$$x_1 = 1, x_2 = 2 + 3i, x_3 = 2 - 3i,$$

او دا باوري دي

$$x^3 - 5x^2 + 17x - 13 = (x-1)(x-2-3i)(x-2+3i) = (x-1)(x^2 - 4x + 13)$$

۱۲ . ۴ د ریینی (جذر) برابرون

په ۱۲ . ۱ برخه کی د ریینی رابرون وڅیړل شو. او دا هم څرگند شو چی ځنگه د ریینی برابرون په ریشئل برابرونو اوله دي سره  $n$  می درجي برابرونو بدلیدلي شي، دا دي دلته د بیلگو په څیر پاتي وي. یواځي رییل اوبیوني به و څیړل یا و پلټل شي.

جمله ۱۲ . ۱۴ :

د ریینی برابرون

$$7 + 3\sqrt{2x+4} = 16; \dots\dots\dots(12, 72)$$

ډیر ساده کیدی شي چی په لاینیزو برابرونونو واپړول شي

$$3\sqrt{2x+4} = 9; \sqrt{2x+4} = 3; 2x+4 = 9; 2x = 5; x = 5/2; \dots\dots\dots(12, 73)$$

د ازمایلو لپاره که ( ۱۲ . ۷۳ ) برابرون په ( ۱۲ . ۷۲ ) برابرونونو کی خوندي شي، نو څرگندیږي چی دا د  $x$ -ارزبتونه په ریینتیا د مخه ورکړ شوي ارزبتونه پوره کوي

$$7 + 3\sqrt{5+4} = 7 + 3 \cdot 3 = 16$$

بیلگه ۱۲ . ۱۵:

د ریښی برابر یو یا مساوات

$$\sqrt{2x+19} + 5 = 0; \dots\dots\dots(12,74)$$

کیدۍ شي په ساده بڼه وارول شي

$$\sqrt{2x+19} = -5; 2x+19 = 5; x = 3; \dots\dots\dots(12,75)$$

د ازمايني لپاره، که ( ۱۲ . ۷۵ ) د پیل په برابر یو ( ۱۲ . ۷۴ ) کی خوندي شي، نو دا برابر یو ورکوي

$$\sqrt{2x+19} = 10 \neq 0$$

له دې امله ارزښت  $x = 3$  د برابر یو ( ۱۲ . ۷۴ ) ځواب نه دی . په دې لاس ته راورنو سره یا په دې تعقیب د پیل برابر یو ځواب نه لري. داسي کیدۍ هم نه شي، ځکه چې تل  $x + 19 > 0$  دی.

دا ساده بیلگۍ مور ته را بنایي چی باید د ریښی مساواتو حل تل وازمایل شي چی ایا په ریښتوني دا ځواب دی او که نه، او دا په داسی ډول چی شمیرل شوي ارزښتونه په پیل مساوات کی کیردي چی ایا مساوات پوره کوي که نه . دا عمل یواځي د ازمايلو لپاره نه دی چې گوندي تیک یا صحیح شمیرنه شوي او که نه، بلکه دا ځواب یو اریښ سما ندیز پل یا ضروری منطقي پل دی .

په ټولیزه توگه باور لري: که برابر یو:

$$f(x) = g(x) \quad (12, 76)$$

په یو ی نوي بڼه وارول شي

$$F(x) = G(x) \quad (12,77)$$

چی د برابر یو دواړو لورو ته یا یو څه ور زیات شي ، یا تری کم شي، یاداوره خواوي په یوه گڼ ځل ( ضرب ) شي او یا وویشل شي ( په دې حال کی باید پرویشونی صفر نه وي، ځکه چی په صفر ویشل اجازه نه لرو) که دواړه خواوی د ریښی لاندې راشي او پایه توان پورته شي نود پیل برابر یو ( ۱۲ ، ۷۶ ) هر ابی بدل شوي برابر یو ( ۱۲ ) .

( ۷۷ ) ځواب هم دی ، مگر نه په څنټ ( برعکس، مخامخ). کیدۍ شي چی اړول شوی برابر یو ( ۱۲ . ۷۷ ) زیات ځوابونه ولري نسبت و پیل برابر یو ( ۱۲ ، ۷۶ ) ته . دا به په لاندې بیلگه کي روښانه شي.

بیلگه ۱۲ . ۱۶:

د ریښې یا جذر برابرون یا مساوات

$$x-x-1=2x-1 \quad (12.78)$$

څلورۍ یا مربع ته د جگولو له لارې دا بڼه غوره کوي

$$x+(x-1)-2\sqrt{x(x-1)}=2x-1$$

$$x+(x-1)-2x(x-1)=2x-1 ,$$

$$\sqrt{x(x-1)}=0 \quad \text{نو}$$

په بیا څلورۍ یا مربع کولو سره سړی یو مربع مساوات لاس ته راوړي

$$x(x-1)=0 \quad (12, 79)$$

چی لاندې اوبی یا ځواب لري :

$$x_1 = 0, x_2 = 1 \quad (12.80)$$

داد (۱۲ . ۷۹) اوبیونې دي، مگر باید و ازمایل شي چی ایا داد (۱۲ . ۷۸) اوبیونې هم دي که نه.

د  $x = 0$  لپاره په (۱۲ . ۷۸) کی دوه ریښې نه دي تعریف یا ددوه ریښو پیژندنه شته، نو  $x = 0$  د (۱۲ . ۷۸) اوبیونه نه ده .

$$1 = 0 - 1 \quad \text{د } x = 1 \text{ لپاره لاس ته راځي}$$

له دې امله  $x = 1$  د پیل بیلگی (۱۲ . ۷۸) یوگونی ځواب یا اوبی دی .

بیلگه ۱۲ . ۱۷:

د ریښې برابرون

$$\sqrt{x} \cdot \sqrt{x-3} - \sqrt{x^2-4x+3} - \sqrt{2x^2-7x+3} = 0, \dots \dots (12,81)$$

کیدۍ شي چی په ورته ډول لکه (۱۲ . ۷۸) بڼه وارول شي:

$$\sqrt{x} \cdot \sqrt{x-3} = \sqrt{x^2-4x+3} + \sqrt{2x^2-7x+3} \Rightarrow$$

$$x(x-3) = (x^2-4x+3) + (2x^2-7x+3) + 2\sqrt{(x^2-4x+3)(2x^2-7x+3)} \Rightarrow$$

$$-2\sqrt{(x^2-4x+3)(2x^2-7x+3)} = 2x^2-8x+6$$

$$(x^2-4x+3)(2x^2-7x+3) = (x^2-4x+3)^2; \dots \dots (12.82)$$

دا برابرون يا مساوات پوره دی، که  $x^2-4x+3=0$  باور ولري، نو د لاندې لپاره

$$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4-3} = 2 \pm 1, x_1 = 3, x_2 = 1, \dots (12, 83)$$

د ټولونورو  $x$  لپاره  $|x^2-4x+3|=0$  دی، او (۱۲ . ۸۲) کیدی شي چي په لاندې فاکتور وويشل شي:

$$2x^2 - 7x + 3 = x^2 - 4x + 3$$

$$x^2 - 3x = 0$$

$$x(x-3) = 0$$

$$x_3 = 0, x_4 = x_1 = 3$$

او په (۱۲ . ۸۱) کی ځای په ځای کولو سره ازمايل کيږي، چي کوم له لاندې ارزښتونو

$$x_1 = 3, x_2 = 2, x_3 = 0$$

پيل برابرون دکوي. (باوري کوي، پوره کوي)

د  $x = 3$  لپاره باور لري:

$$\sqrt{3} \cdot \sqrt{0} - \sqrt{9-12+3} - \sqrt{18-21+3} = 0$$

له دې امله  $x = 3$  د پيل برابرون يا مساوات (۱۲ . ۸۱) اوبی يا حل دی . د

$$x_2 = 1, \text{ او } x_3 = 0$$

لپاره ريښي پيژند نه لري يا تعريف نه دی، نو له دې امله د پيل برابرون (۱۲ . ۸۱)

اوبی حل  $x = 3$  (12 . 85)

یواځني حل دی

۱۲ - تمرينونه

۱ - مربع مساوات

۱، ۱ - مربع مساوات دکلو ضربونو سره

1.1.1. a)  $x^2 - 4 = 0$

c)  $x^2 - 9x = 0$

b)  $3x^2 + 27 = 0$

d)  $5x^2 = 125x$

1.1.2. a)  $(x + \frac{1}{3})(x - \frac{1}{3}) = \frac{7}{12}$

c)  $(x - 6)(x + 5) = 0$

b)  $(x + \frac{1}{2})(x - \frac{1}{2}) = \frac{5}{16}$

d)  $(x - \sqrt{7})(x - \sqrt{5}) = 0$

- 1.1.3. a)  $x^2 - 6x + 8 = 0$  b)  $x^2 + 4x + 2 = 0$   
 c)  $x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} = 0$  d)  $x^2 + 27\frac{1}{12} = 10\frac{7}{12}x$
- 1.1.4. a)  $3x^2 - 20 = x$  b)  $7x^2 + 23x = 84$   
 c)  $(43 + 10x)^2 + (66 + 10x)^2 = (79 + 14x)^2$   
 d)  $(3x - 5)^2 - (2x + 5)^2 = 0$
- 1.1.5. a)  $\frac{8-x}{2} - \frac{2x-11}{x-3} = \frac{x-2}{6}$  b)  $3x - \frac{3x-10}{9-2x} = 2 + \frac{6x^2-40}{2x-1}$   
 c)  $\frac{5x-1}{6x-9} - \frac{9x-4}{8x+12} - \frac{3x+8}{4x^2-9} = \frac{1}{2}$  d)  $\frac{3}{x-2} - \frac{8}{4-3x} = \frac{19}{2x+1}$

۱ . ۲ - مربع مساوات د ناتاکلو ضربونو سره

- 1.2.1. a)  $x^2 - a^2 = 0$  b)  $x^2 - ax = 0$   
 c)  $x^2 + \frac{4}{3}ax + \frac{1}{3}a^2 = 0$  d)  $x^2 + \frac{1}{2}bx - \frac{1}{2}b^2 = 0$
- 1.2.2. a)  $8x^2 - 10bx - 3b^2 = 0$  b)  $12x^2 - 34ax + 10a^2 = 0$   
 c)  $16x^2 - 8ax + a^2 - b^2 = 0$  d)  $ax^2 + bx + c = 0$
- 1.2.3. a)  $a^2 - x^2 = (a - x)(b + c - x)$   
 b)  $(x - a + b)(x - a + c) = (a - b)^2 - x^2$   
 c)  $(a + bx)^2 + (ax - b)^2 = 2(a^2x^2 + b^2)$   
 d)  $(x + a + b)(x - a + b) + (x + a - b)(x - a - b) = 0$
- 1.2.4. a)  $ax^2 - (a^2 + 1)x + a = 0$  b)  $abx^2 - (a^2 + b^2)x + ab = 0$   
 c)  $a^2(a - x)^2 = b^2(b - x)^2$   
 d)  $(a - x)^2 - (a - x)(x - b) + (x - b)^2 = (a - b)^2$
- 1.2.5. a)  $x + \frac{1}{x} = \frac{a-b}{a+b} + \frac{a+b}{a-b}$  b)  $x - \frac{1}{x} = \frac{a}{b} - \frac{b}{a}$   
 c)  $\frac{a+x}{b+x} + \frac{b+x}{a+x} = \frac{5}{2}$  d)  $\left(\frac{a-x}{x-b}\right)^2 = 8\left(\frac{a-x}{x-b}\right) - 15$

۱ . ۳ - مساوات سیستم، کوم مو مربع مساوتو ته لارښودوي يا بيابي

- 1.3.1. a)  $3x + 2y = 3$  b)  $10x + y = 10$   
 $xy = 3$   $5x(15x + y) = 75$
- c)  $3x + 7y = 21$  d)  $x^2 + xy + y^2 = 1372$   
 $3x^2 - 7y = \frac{21}{2}$   $2x - y = 2$



1.3.2. a)  $x + y = a$

$xy = b$

b)  $xy = a$

$\frac{x}{y} = b$

c)  $x^2 + y^2 = c^2$

$\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$

d)  $ax^2 - \frac{b}{y^2} = 2(a^2 - b^2)$

$bx^2 - \frac{a}{y^2} = a^2 - b^2$

۱. ۴ - د  $n$ -مې درجې ځانگړي مساوات، چې په مربع مساوات بېرته اړول کیدی شي

۱. ۴. ۱ - بی مربع مساوات د ټاکلو یا معلومو ضریبونو سره

a)  $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

b)  $(x^2 - 5)^2 + (x^2 - 1)^2 = 40$

c)  $(x^2 - 10)(x^2 - 3) = 78$

d)  $10x^4 - 21 = x^2$

۱. ۴. ۲ - بی مربع مساوات د ناټاکلو یا نامعلومو ضریبونو سره

a)  $x^4 + a^4 + b^4 = 2a^2x^2 + 2b^2x^2 + 2a^2b^2$

b)  $(a^2x^2 + b^4)(x^2 - a^2) = b^2(x^4 - a^4)$

c)  $\frac{a^2b^2x^2}{a^3b + ab^3x^2} + \frac{ab - x^2}{x^2 - 1} = \frac{a^2b^2}{a^2 + b^2x^2}$

d)  $\frac{(a - b)x^4}{a^2 - b^2} + \frac{4x^2}{a + b} = x^2 + 4$

۱. ۴. ۳ - د  $n$ -مې درجې مساوات د  $a_0 = a_1 = \dots = a_{n-3} = 0$  سره

a)  $x^{10} + 6x^9 + 5x^8 = 0$

b)  $\frac{5}{2}x^5 + 7x^4 = -20x^3$

c)  $abx^8 - (a^2 + b^2)x^7 = -abx^6$

d)  $ax^{22} - a^2x^{11} + a^2 - a = 0$

۱. ۵ - لاندې مساوات هم د  $x$  او هم د  $a$  پسی حل کړئ!

a)  $x^2 + \sqrt{a}x - a = 0$

b)  $x^2 - 2bx + 2(ab - \frac{1}{2}a^2) = 0$

c)  $x^2 + 9ab = (a + b)(x + 2a + 2b)$

d)  $(x + b)(x - b) = a(2x - a)$

۱. ۶ - شي سوالونه

۱. ۶. شي سوالونه

۱. ۶. ۱ الف دوه گڼونه ځان داسې نيسي لکه 3 : 1 . ددې گڼونو د مربع زیاتون

۱۵۶۰ دی. دا گڼونه څه نومبیري؟

ب) د درې یو په بل پسې گڼونو د لوي گڼ مربع دومره ده، لکه د دوه کوچنیو گڼونو د مربعو زیاتونونه. دا گڼونه څه نومبیري یا کوم دي؟  
پ) د کوم مثبت گڼ لس څخه د هغه د مربع څخه ۹۹۹ کوچنی دی؟  
ت) مات  $1/4$  په دوه فاکتورونو  $a$  او  $b$  داسې تجزیه کړی، چې لاندې زیاتون  $(a^2 + b^2)/(a^2 - b^2)$  یې لاس ته راشی.

۶. ۲. الف) په یوه برابر برقجریان کې مقاومت په دیرش اوم  $30 \Omega$  لویبیري، په کوم کې چې د برققوه په همغه د  $220 V$  (وولته) شپانونگ په پنځه امپیر ( $1,65 A$ ) کوچنی شي. مقاومت او برققوه څومره دي؟  
ب) دوه سیخونه چې مقاومت یې  $60 \Omega$  یو له بل توپیر لري، یوه  $>$  غبرگ چالانولو عمومي مقاومت  $22,5 \Omega$  لري. دواړه برخه مقاومتونه څومره لوي دي؟

۶. ۳. الف) یوه د بایسکل څغلوونې لار چې  $225$  کیلو متره اوږده ده، د یوه موادو موټر څخه په درینیم ساعته لنډ وخت کې وهل کیږي، چې د موټر په منځني سرعت چې  $25, 26 km/h$  نسبت و بایسکل څغلوونکي ته د موادو موټر او بایسکل څغلوونکي سرعت او د وهلو وخت څومره وي؟  
ب) د سپورت جشن کې یو سپورتي چې له  $A$  و  $B$  ته په  $5 km/h$  سرعت څغلي، له خپل منډپیل څخه یونیم ساعت وروسته له یوه بایسکل سپورتي څخه وروسته کیږي، کوم چې له مخامخ کیدو، نیم ساعت وروسته  $B$  ته رسیږي، او سملاسي بیرته گرځي او په همغه وخت کې  $A$  ته رسیږي په کوم کې چې څغاستی و  $B$  ته رسیږي، د  $\overline{AB}$  کرښه څومره لرې ده؟  
پ) دوه ډډبې څغاستي یوبل باندې نیغ ولاړو سرکونو د څلورلاري په لور، په ډډبېو څغلي. د لمړي سرعت  $5$  متره په ثانیه کې، دوم څلور متره په ثانیه کې دوي له  $3$  ثانیو وروسته یو  $35$  متره لریوالی یو له بل لري، دوي یو

له بل په سرچینه کې د څلور لارې څومره لږوالی لروده، که لمړی له دوم ۴ متره ورته نژدې وو؟

ت) د گادي يو لاین د موټر څفاست سرک لمړی برخې سره غبرگ غزیدلی. د یوه موټر څفاستی پیل کې د یو مخته راتلونکي گادي واټن ۲۲۵ متره لري دی. کله دوه ماشينونه په همغه جگوالي دي، که موټر څفاستی منظم تعجيل او يو تعجيل د  $10m/s^2$  کی لري، په داسی حال کی چی د گادی سرعت ثابت او  $72 km/h$  دی؟

ت) په منځنی سرعت  $v_m = 18km/h$  په ۶ بجو له لایپڅیر څخه د دیساو په لور بایسکل څغلیدونکی په ۸ بجو ، په همغه وخت کی له دیساو څخه د

لایپڅیر په لور راتلونکی بایسکل څفاستی سره مخامخ کیږي. ورسنی ۱۰۰ دقیق د مخه دیساو ته راځي لکه دوم ولایپڅیر ته. د دیساو او

لایپڅیر ترمنځ لږوالی یا واټن څومره دی؟

۱ . ۶ . ۴ . الف) په ولاړ کونجیز دریځوډي کې ، کاتیتې ځانونه داسې یوبل سره نیسي لکه 3:4 ، هیپوتینوزې ۵۰ سانتي متره ده ، کاتیتې څومره اوږدې دي؟

ب) د یوه ولاړ کونجیز دریځوډي اړخونه څومره لوي دي ، که د دواړو کاتیتو زیاتون یې ۱۷ سانتیمتره اود یوې کاتیتې او هیپوتینوزې زیاتون ۱۸ سانتي متره وي ؟

پ) د یوه سمکونجیز ( ولاړ کونجیز ) دریځوډي کاتیتې څومره لويي دي، که د هغوي زیاتون ۴۲ سانتیمتره وي ، د دریځوډي هوار دننه ۲۱۶ مربع سانتي متره وي ؟

ت) د یوه ولاړ څوډي نیمې ( قطر ) ۳۵ سانتي متره اوږد دی، که د ولاړ څوډي اوږد اړخ ۸ سانتي متره وغزول شي او لنډ اړخ ۶ سانتي متره وغزول شي، د نیمي اوږدوالی ۱۰ سانتیمتره لویږي. د سمکونجیز اړخونه څومره لوي دي؟

ت) که د مربع یوه خوا ۷ سانتی متره وغزوي او بل اړخ په همدې ارزښت لند کړي، نو مربع او سمکونجیز دواړه د هوارې دننه ۴۹۵۱ مربع سانتی متره لري. د سم اړخیز اړخونه څومره لوي دي؟ (یا د لارې لړۍ)

ب) د یوې گردۍ وړانګه ۱۶ سانتی متره اوږده ده. په گردۍ کې دنږځاي مربع اړخ څومره لوي دی؟ (یا د لارې لړۍ)

ج) د یوې گردۍ نیمې باید څومره لوي، که په دننه منځشوي مربع اړخ ۱ سانتی متره د هغه د وړانګې څخه لوي وي؟

ح) که د یوې گردۍ نیمې ( قطر ) ۳ سانتی متره لوي شي، نو د گردۍ هواره دوه برابره کيږي. د گردۍ سرچینې نیمې څومره لويه ده؟

خ) د یوه نیمغونډي نیمې څومره دی، که د هغه د دایرې لویوالي ۳ سانتیمتره او او تشکې یې ۵۰۱۶ مکعبسانتي متره وي؟

۲ - د درېمې او څلورمې درجې مساوات

$$2.1 \quad a) \quad x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0 \quad b) \quad x^3 + x^2 - 5x - 84 = 0$$

$$c) \quad 3x^3 - x^2 - 9x + 3 = 0 \quad d) \quad x^3 + x - 2 = 0$$

12.5 Übungsaufgaben 1

$$2.2. \quad a) \quad 4x^4 - 12x^3 + 7x^2 + 3x - 2 = 0 \quad b) \quad x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 6x = 0$$

$$c) \quad x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 4x - 5 = 0 \quad d) \quad 6x^4 + 5x^3 - 38x^2 + 5x + 6 = 0$$

۳ . ریښه مساوات:

ټول ارزښتونه  $x$  وشمیرئ، چې د لاندې مساواتو حلونه یا اویونې دي. د هرې پوښتنې د ټیکایي لپاره ازماښت وکړئ!

۳ . ۱ - ریښه مساوات د ټاکلو ضریبونو یا څلورنو سره:

$$3.1.1. \quad a) \quad \sqrt{x} = 3$$

$$b) \quad \frac{3}{2}\sqrt{x} - \frac{2}{3}\sqrt{x} + 7 = 2\sqrt{x}$$

$$c) \quad \frac{5}{3}\sqrt{15x} - \frac{3}{5}\sqrt{15x} - 11 = \frac{1}{3}\sqrt{15x}$$

$$d) \quad \sqrt[3]{x} = 5$$

$$3.1.2. \quad a) \quad (3\sqrt{x} - 5)(5\sqrt{x} - 3) = 5(3x - 31)$$

- b)  $(5\sqrt{x} - 2)^2 + (12\sqrt{x} - 9)^2 = (13\sqrt{x} - 9)^2$
- c)  $\frac{5\sqrt{x}+12}{7\sqrt{x}+15} = \frac{4}{5}$  d)  $\frac{2\sqrt{x}+3}{2\sqrt{x}-3} = 7$
- 3.1.3. a)  $\frac{\sqrt{x}-3}{7} - \frac{\sqrt{x}-25}{5} = 7 - \frac{2+\sqrt{x}}{4}$  b)  $\frac{16-\sqrt{x}}{2} - \frac{10-\sqrt{x}}{3} = \sqrt{x}$
- c)  $\sqrt{x} + \sqrt{2x} = 1$  d)  $2\sqrt{x} - \sqrt{2x} = 2 + \sqrt{2}$
- 3.1.4. a)  $10 - \sqrt{x-2} = 3$  b)  $\sqrt{3x-5} + 4 = 5$
- c)  $\sqrt[3]{7x-6} + 6 = 10$  d)  $4\sqrt[3]{5x-8} = 3\sqrt[3]{9x+1}$
- 3.1.5. a)  $9\sqrt{5x+1} = 20 + 4\sqrt{5x+1}$  b)  $\sqrt{7x+2} = \frac{5x+6}{\sqrt{7x+2}}$
- c)  $3\sqrt{4x-3} - \frac{10x}{\sqrt{4x-3}} = \frac{1}{\sqrt{4x-3}}$  d)  $\frac{9x}{\sqrt{10x-9}} - \sqrt{10x-9} = \frac{2}{\sqrt{10x-9}}$
- 3.1.6. a)  $\sqrt{9x^2-10x-55} = 3x-5$  b)  $x+1 = \sqrt{2x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}}$
- c)  $17 - 4\sqrt{\frac{3x+5}{x-7}} = 1$  d)  $24 - 7 \cdot \sqrt[3]{\frac{4x-1}{x-6}} = 3$
- 3.1.7. a)  $\sqrt{52-3\sqrt{5x+6}} = 2\sqrt{10}$  b)  $\sqrt{x+1} - \sqrt{2x+3} = 1$
- c)  $\sqrt{37-7\sqrt{5x+4}} = 4$  d)  $\sqrt[4]{19-3\sqrt[3]{5x-9}} = 2$
- 3.1.8. a)  $\sqrt{9x-17} - 3\sqrt{x-4} = 1$  b)  $2\sqrt{9x+4} - 3\sqrt{4x-11} = 1$
- c)  $\sqrt{x+9} - \sqrt{x+2} = \sqrt{4x-27}$  d)  $\sqrt{9x+10} - \sqrt{x-1} = \sqrt{4x+9}$
- 3.1.9. a)  $\sqrt{x+4} - \sqrt{x-8} + \sqrt{x-3} - \sqrt{x+13} = 0$
- b)  $\sqrt{x+9} + \sqrt{x-12} = \sqrt{x} + \sqrt{x-7}$
- c)  $\sqrt[3]{9x+10} - \sqrt{3x+4} = 0$  d)  $|\sqrt{3x+7}| + |\sqrt{4-x}| = 3$
- 3.1.10. a)  $\frac{1}{1+\sqrt{1-x}} + \frac{1}{1-\sqrt{1-x}} = \frac{2x}{9}$  b)  $\sqrt[3]{76+x} + \sqrt[3]{76-x} = 8$
- c)  $(\sqrt[3]{x}-1)^2 + \sqrt[3]{x^2} = \sqrt[3]{x}$  d)  $\sqrt[4]{x^3} - 2\sqrt{x} + x = 0$

۳ . ۲ - ريښه مساوات د نامعلومو ضربيونو سره

- 3.2.1. a)  $\sqrt{x} = a$  b)  $\sqrt[3]{x} = b$   
 c)  $a - \sqrt[3]{x} = b$  d)  $a\sqrt{x} - b = c\sqrt{x} - d$
- 3.2.2. a)  $\sqrt{x-a} = b$  b)  $\sqrt[3]{a-x} = b$   
 c)  $\sqrt[4]{a^4+x} = a$  d)  $\sqrt[6]{a^6-x} = b$
- 3.2.3. a)  $(\sqrt{ax} + \sqrt{b})(\sqrt{ax} - \sqrt{b}) = (a+1)(a-1)b$   
 b)  $(a - \sqrt{x})(b - \sqrt{x}) = (c + \sqrt{x})(d + \sqrt{x})$   
 c)  $\frac{\sqrt{ax} - b}{\sqrt{ax} + b} = \frac{3\sqrt{ax} - 2b}{3\sqrt{ax} + 5b}$  d)  $\frac{2a + 3\sqrt{bx}}{3a + 2\sqrt{bx}} = \frac{3b + 2\sqrt{ax}}{2b + 3\sqrt{ax}}$
- 3.2.4. a)  $\sqrt{x} + \frac{\sqrt{b} - \sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{a}}$  b)  $\frac{\sqrt{a} + \sqrt{x}}{\sqrt{a} - \sqrt{x}} = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{a} + \sqrt{x}} - \left| \frac{(x+a)^2}{a(x-a)} \right|$   
 c)  $\frac{a+b\sqrt{x}}{a+b} = \frac{c+d\sqrt{x}}{c+d}$  d)  $\frac{a+b\sqrt{x}}{a\sqrt{x}+b} = \frac{c+d\sqrt{x}}{c\sqrt{x}+d}$
- 3.2.5. a)  $x + \sqrt{x^2 - a^2} = a$  b)  $x - \sqrt{ax(1+x) + 1 - x} = 1$   
 c)  $\sqrt{x+a} = a - \sqrt{x}$  d)  $\sqrt{x+a^2} - \sqrt{x} = b$
- 3.2.6. a)  $\sqrt{a-x} + \sqrt{b-x} = \frac{b}{\sqrt{b-x}}$  b)  $\sqrt{x+a} - \sqrt{5x-3a-4b} = \frac{2b}{\sqrt{x+a}}$   
 c)  $\sqrt{x+a} - \sqrt{x-a} = \frac{x+a-b}{\sqrt{x+a}}$   
 d)  $\sqrt{3a-2b+2x} - 2\sqrt{3a-2b-2x} = \frac{a+2b+2x}{\sqrt{3a-2b+2x}}$
- 3.2.7. a)  $\frac{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}} = \frac{a}{b}$  b)  $\frac{\sqrt{3x^2-1} + \sqrt{3-x^2}}{\sqrt{3x^2-1} - \sqrt{3-x^2}} = \frac{a}{b}$   
 c)  $\sqrt[3]{a+x} + \sqrt[3]{a-x} = \sqrt[3]{2a}$  d)  $\sqrt[3]{a+x} + \sqrt[3]{a-x} = \sqrt[3]{c}$

۳ ، ۳ - مساوات سيستمونه، چي ريڻه مساوات خوندي لري

3.3.1 a)  $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 8$   
 $\sqrt{xy} = 15$

b)  $x + y = 58$   
 $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 10$

c)  $\sqrt{x-5} + \sqrt{y+2} = 5$   
 $x + y = 16$

d)  $\sqrt{5-3x+x^2} + \sqrt{5-3y+y^2} = 6$   
 $x + y = 3$

3.3.2 a)  $\frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} = \frac{a}{b}$   
 $xy = (a^2 - b^2)^2$

b)  $\frac{x\sqrt{x} + y\sqrt{y}}{x\sqrt{x} - y\sqrt{y}} = \frac{a}{b}$   
 $x^3 - c^3 = c^3 - y^3$

c)  $x\sqrt{x+y} = a$   
 $y\sqrt{x+y} = b$

d)  $x\sqrt[3]{x^2+y^2} = a$   
 $y\sqrt[3]{x^2+y^2} = b$

### ۱۳ ترانسخندنت برابرونونه یا - مساوات

لکه څنگه چې په ۱۲ . برخه کی دې ته گوته نیول شوې وه، چې دلته یواځې هغه ترانسخندنت مساوات څیرل کیږي، کوم چې بیرته په الجبري مساواتو اړول کیدی شي. دا بیرته په الجبري مساواتو اړول، لکه څنگه په ریښه مساواتوکی، په خوبه په بل شکل اړول کیږي او په داسې ډول دي لکه هملته:

د فرمول په اړولو ( فورم بدلون یا بڼه بدلون) سره کوم ځواب له منځه نه ځي، خو کیدی شي چې اړولی فرمول زیاتي اوبیوني یا حلونه نسبت د پیل برابرون ته ولري. له دې امله باید د اړول شوي برابرون ټولې اوبیوني په پیل برابرون کی ځاي په ځاي یا کیښوول شي او وکتل شي چې کوم له دې د پیل مساوات حلونه هم دي

لکه څنگه په ریښه یې برابرونونو یا مساواتو کی ، دلته هم یواځې ریښل اوبیوني پلټل کیږي.

#### ۱۳ . ۱ لوگاریتمي مساوات

د لوگاریتمي مساواتو او اکسپوننشل یا په جگ سماواتو د حل (اوبې) پیدا کولو لپاره اړیین یا ضرور(ضروري یا اړیین شرایط) دی، چې د یو عدد(گڼ) a لوگاریتم، د b په بنسټ، معلوم کړو یا وڅیړو.

$$x = \log_b a; a > 0, b >, b \neq 1 \dots\dots\dots(13,1)$$

د بنسټ  $b = 10$  لپاره (lga) او د بنسټ  $b=e$  لپاره (ln a) کیدی شي ( ۱۳ . ۱ )



سیده د جبشمیری له لاری پیداشی. په څټ یا برعکس د  $e|b|=10$  لپاره برابرونونه په دې ډول اړول کیری

$$x = \log_b a = \lg a / \lg b = \ln a / \ln b \dots \dots \dots (13.2)$$

د لوگاریتمی مساواتو یو ساده ډول یا شکل ( تیپ ) دا دی

$$\log_b x = c \dots \dots \dots (13.3)$$

دا برابرون د ( ۱ . 7 ) ، ( ۲ . 7 ) له مخی لاندې ته ورته دی:

$$x = b^c \dots \dots \dots (13,4)$$

دا سی افاده هم د جبشمیری سره شمیرل کیدی شی.

$$\text{بیلگه } ۱۳ . ۱ : \log_2 x = 1,5; x = 2^{1,5} = 2.8284$$

په همدې ډول د ( ۱۳ . ۳ ) بڼی اویونه په لاندې تولید شوي شکل هم ساده دی

$$\log_b f(x) = c \dots \dots \dots (13,5)$$

دلته  $f(x)$  یوه الجبري ویینه یا افاده ده، د ( ۱۳ . ۵ ) سره الجبري برابرون کټمټ ( ورته ) دی

$$f(x) = b^c \dots \dots \dots (13,6)$$

تولی د ( ۱۳ . ۶ ) اویونی د ( ۱۳ . ۵ ) اویونی هم دي

بیلگه ۱۳ . ۲ : لوگاریتمیز برابرون

$$\log_2 (x^2 + x + 6) = 3$$

دلاندې مساواتوسره کټمټ دي

$$x^2+x-2=0 \Leftrightarrow (x^2+x+6=2^3=8) \text{ (همداسی)}$$

او لاندې اویونی لري

$$x_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{8}{4}} = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}; x_1 = -2; x_2 = 1$$

یود (۱۳. ۵) ډول (تیپ) برابرون هم مخ ته لرو، که دهغه کینې لور (ارخ) ته یود لوگاریتم ریشنل لاینیز کمیشن الجبري وینه یا افاده موجوده وي

$$r_1 \cdot \log_b g_1(x) + r_2 \cdot \log_2(x) + r_3 \cdot \log_b g_3(x) + \dots = c \dots (13,7)$$

دلته ځلوني ri راشنل ګڼونه دي. د لوگاریتم قوانینو (۷.۷)، (۹.۷) کاروني یا استعمال څخه، ۷ برخه وګوری، (۱۳، ۵) لاس ته راځي او دا د لاندې برابرونو سره

$$f(x) = \{g_1(x)\}^{r_1} \cdot \{g_2(x)\}^{r_2} \dots (13,8)$$

بیلګه ۱۳. ۳:

لومړی له  $2 = \log_3 x - \frac{1}{2} \log_3(x-1) + \frac{1}{2} \log_3(x-1)$  څخه لاندې لاس ته راځي

$$\log \left[ (x-1) \left( \frac{x}{x-1} \right)^{\frac{1}{2}} \right]$$

اوله دې څخه رینه برابرون  $9 = \sqrt{x} \cdot \sqrt{x-1}$  ،

د کوم له څلوری یا مربع کولو څخه  $x(x-1) = 81$  یعنی  $x^2 - x - 81 = 0$  د لاندې ځواب سره

$$x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{324}{4}} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{325}{4}} = \frac{1}{2} \pm \left(\frac{1}{2}\right) \cdot 18.03;$$

$$x_1 = 9,515; x_2 = -8,515$$

تیک دا  $x_1 = 9,515$  پیل برابرون پوره کوي

. د  $x = x_2 < 0$  لپاره  $\log x$  او په همدې ډول  $\log(x-1)$  پیژند نه لري یا تعریف نه دي.

بیلګه ۱۳. ۴:

له  $\log_b(2x+3) = \log_b(x-1) - 1$  څخه لاس ته راځي

$$\log_b \left[ \frac{2x+3}{x-1} \right] = 1$$

او نور پسی  $\frac{2x+3}{x-1} = b^1 = b$  پس

$$2x+3=bx-b$$

$$b+3=x(b-2)$$

$$x=(b+3)/(b-1)$$

پیل وینه یا افاده د  $x > 1$  لپاره موخه وره یا هدفمنده ده، یعنی که  $(b+3)/(b-2) > 1$  وي.

$$b > 2 \text{ یعنی } b-2 > 0 \text{ څخه لاس ته راځ } b+3 > b-2$$

له دې لرو  $3 > -2$  دا د ټولو  $b$  لپاره پوره دی

$$b \leq 2 \text{ د } b \leq 2 \text{ لپاره د } b+3 \leq b-2 \text{ څخه } 3 \leq 2 \text{ لاس ته راځي اودا د هېڅ } b$$

لپاره باور نه لري .

له دې امله کره د  $b > 2$  لپاره اوبی شته دی. د  $b \leq 2$  لپاره اوبیونه نه شته دی.

د لاندې لوگاریتمي تیپ برابر ون هم کیدی شي په الجبري مساواتو بیرته وارول شي

$$F(\log_b f(x)) = 0 \quad (13.9)$$

چیرته چی  $F$  او هم  $f$  الجبریزې وینه یا افادې دي. د بدلون کاروایي یا عملیه اجرا کوو

$$y = \log_b f(x) \dots \dots \dots (13,10)$$

او په لمړي پل کی الجبري برابر ون اوبی کوو

$$F(y) = 0 \quad (13.11)$$

ددې اوبیونه  $y_1, y_2, \dots$  په  $(13/10)$  کی رډو، نو د هر  $y_i$  لپاره د تیپ  $(13/5)$  لوگاریتمي مساوات لاس ته راځي:

$$\log_b f(x) = y_i; \quad i = 1, 2, 3, \dots \dots \dots (13.12)$$

له دې څخه لاندې الجبري مساوات لاس ته راځي

$$f(x) = b^{y_i} \quad (13.13)$$

ددې لپاره چی و ازمائیلی شو چی ایادا هم برابر ون پوره کوي، نو ټول ددې برابر ونونو اوبیوني یا ځوابونه باید په پیل برابر ون  $(13/9)$  کی کیننول شي یا ځای په ځای شي،

بیلگه ۱۳ . ۵ : برابر ون  $\log^2 x - \lg x - 2 = 0$  د سبستیخیوشن (بدلون)  $y = \lg x$  سره په څلوری برابر ون  $y^2 - y - 2 = 0$  بدلیږي .  
 د  $y_1 = 2$  او  $y_2 = -1$  ځوابونو سره له  $\lg x = 2$  او  $\lg x = -1$  لاس ته راځي .  
 $x_1 = 10^2 = 100$  او  $x_2 = 10^{-1} = \frac{1}{10}$   
 دواړه ځوابونه د پیل برابر ون ځوابونه دي .  
 بیلگه ۱۳ . ۶ :

له برابر ون  $(6 / (\lg x + 1)) + (8 / (\lg x - 1)) = 3$  د  $x > 0$  مگر  $(x \neq 1/10, x \neq 10)$  چی د اصلي ماتلاندي  $(\lg x + 1)(\lg x - 1)$  سره ځل شی، لاس ته ترې راځي

$$\begin{aligned} 6(\lg x - 1) + 8(\lg x + 1) &= 3(\lg^2 x - 1) \\ 6\lg x - 6 + 8\lg x + 8 &= 3\lg^2 x - 3 \\ 0 &= 3\lg^2 x - 14\lg x - 5 \end{aligned}$$

او د بدلون  $y = \lg x$  سره مو لاندې څلوری بڼې یا مربع فورم ته بیایي:

$$3y^2 - 14y - 5 = 0, \quad y^2 - (14/3)y - 5/3 = 0$$

د لاندې ځوابونو سره

$$y_{1,2} = \frac{7}{3} \pm \sqrt{\frac{49}{9} + \frac{15}{9}} = \frac{7}{3} \pm \frac{8}{3}; \quad y_1 = \log x_1 = 5; \quad y_2 = \log x_2 = -\frac{1}{3}$$

$$x_1 = 10^5; \quad x_2 = x^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{10}}$$

دواړه ارزښتونه پیل مساوات پوره کوي.

۳۸۰ ۱۳ ترانسخندنت برابرونه یا - مساوات

که په یوه برابرون کی لوگاریمونه د مختلفو بنسټونو  $b$  سره رامنځ ته شي، نو کیدی شي د (۱۳ . ۲) په مرسته په همغه برابر بنسټ واپول شي

بیلگه ۱۳ . ۷ :

$$\log_2(x-1) + \log_4(x-1) - 1 = 0$$

څخه دلاندې برابرون په مرسته لاس ته راځي:

$$\log_4(x-1) = \frac{\log_2(x-1)}{\log_2 4} = \frac{1}{2} \log_2(x-1),$$

$$\log_2(x-1) + \frac{1}{2} \log_2(x-1) - 1 = 0, \log_2(x-1) = \frac{2}{3}, x-1 = 2^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{2^2} = \sqrt[3]{4},$$

$$x = 1 + \sqrt[3]{4}.$$

دا ارزښت د پیل برابرون اوبی یا ځواب هم دی:

$$\log_2 \sqrt[3]{4} + \log_4 \sqrt[3]{4} - 1 = \frac{1}{3} \log_2 4 + \frac{1}{3} \log_4 4 - 1 = \frac{1}{3} \cdot 2 + \frac{1}{3} - 1 = 0.$$

۱۳ . ۲ اکسپوننشل - یا په جگ برابرونه

ساده اکسپوننشل برابرون (مساوات)

$$a^x = b; a > 0, a \neq 1, b > 0 \dots \dots \dots (13, 14)$$

کیدی شي چی د لوگاریم نیولو سره سملاسي حل شي (ځواب شي)

$$x = \log_a b = \lg_b / \lg_a = \ln b / \ln a \quad (13, 15)$$

لاندني برابرونه په ساده ډول په (۱۳، ۱۴) ډول (رقم) تپوپ) برابرونو باندې اړول کیدی شي.

بیلگه ۱۳ . ۸:

$$2^x + 3^{x+2} - 2^{x+2} - 3^{x+1} = 0.$$

$$2^x(1 - 2^2) + 3^x(3^2 - 3) = 0, \text{ bzw. } 6 \cdot 3^x = 3 \cdot 2^x, \text{ bzw. } \left(\frac{2}{3}\right)^x = 2,$$

$$x = \frac{\lg 2}{\lg \frac{2}{3}} = \frac{\lg 2}{\lg 2 - \lg 3} = -1,7095.$$

که په ( ۱۳ . ۱۴ ) د الجبري ويښي يا افادي ( x ) f اکسپوننټونه يا جگگڼونه وي، نو:

$$af(x)=b, a>0, a\neq 1, b>0 \quad (13, 16)$$

په دې ډول د لوگاريتمولو له لارې يو الجبري برابر ون لاس ته راځي

$$f(x)=\log_a b \dots\dots\dots(13,17)$$

د کومو ځوابونه چې د ( ۱۳ . ۱۶ ) ځوابونه هم دي.

$$2^{x^2+x-4} = 4 \quad \text{بیلگه ۱۳ . ۹ : مساوات}$$

مولاندي څلورۍ برابر ون يا مربع مساوات ته بيايي ( لارښودوي )

$$(x^2+x-4)=\log_2 4 = 2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + x - 6 = 0$$

د  $x_1 = 2, x_2 = -3$  ځوابونوسره ، کوم چې د پيل برابر ون اوبيوني يا ځوابونه هم دي .

بیلگه ۱۳ . ۱۰ :

په برابر ون  $\left(\frac{3}{2}\right)^{x+1} = \left(\frac{2}{3}\right)^3$  کې د يوه پوتنځ بنسټ د بل پوتنځ د بنسټ په څنډ ارزښت

دي. له دې امله باور لري

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{x+1} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-3}$$

له دې څخه لاس ته راځي

$$x_1 + 1 = -3, x_2 = -4$$

$$16^{(3^x)} = 4^{(6^x)} \quad \text{بیلگه ۱۳ . ۱۱ : په مساوات}$$

کې کيدی شي چې ناپيژندونکي د اکسپوننت يا په جگ څخه د دوه واړه لوگاريتمولو

له لارې لاس ته راشي (راحل شي):

$$3^x \cdot \lg 16 = 6^x \cdot \lg 4 \Rightarrow \left(\frac{3}{6}\right)^x = \frac{\lg 4}{\lg 16} \Rightarrow x \cdot \lg 0,5 = \lg \frac{\lg 4}{\lg 16} = \lg \frac{2 \lg 2}{4 \lg 2},$$

$$x \cdot \lg 0,5 = \lg 0,5 \quad \text{یا} \quad \text{oder} \quad \left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{2},$$

$$x = 1$$

$$x = 1.$$

$$7^x \sqrt{x} - 15^x \sqrt{25} = 0 \quad \text{بیلگه ۱۲ . ۱۳} :$$

یو د تیپ یا پوی مساوات دي، ځکه چې باور لري

$$\frac{\sqrt[x]{22}}{\sqrt[x]{25}} = \frac{15}{7} \Leftrightarrow \sqrt[x]{\frac{22}{25}} = \frac{15}{7} \Leftrightarrow \left(\frac{22}{25}\right)^{\frac{1}{x}} = \frac{15}{7}$$

اوله دې اسم

$$\frac{1}{x} = \frac{\lg \frac{15}{7}}{\lg \frac{22}{25}} \Leftrightarrow x = \frac{\lg 22 - \lg 25}{\lg 15 - \lg 7} = 0,1677.$$

که د مساوات په کین اړخ د اکسپوننشل افادو ځلونه او یا ویشونه هم وي، د مختلفو بنسټونو او مختلفو الجبري اکسپوننتونو سره، کیدی شي چی د لوگاریتمولو له لاری الجبري مساوات لاس ته راشی. له

$$\frac{a_1^{f_1(x)} \cdot a_2^{f_2(x)} \dots}{b_1^{g_1(x)} \cdot b_2^{g_2(x)} \dots} = c; \dots \dots \dots (13,18)$$

څخه لاس ته راځي:

$$f_1(x) \lg a_1 + f_2(x) \lg a_2 + \dots - g_1(x) \lg b_1 - g_2(x) \lg b_2 - \dots = \lg c \quad (13.19)$$

که یو مساوات مو مخ ته پروت وي، په کوم کی چی د یوه اکسپوننشل افادې یوه الجبري ویینه یا افاده F د الجبري اکسپوننت f(x) سره رامنځ ته شي  
 $F(a^{f(x)})=0 ; \dots \dots \dots (13,20)$

نو دا بدلونه کوو

$$y = a^{f(x)} \quad (13.21)$$

د برابرون

$$F(y) \quad (13.22)$$

د ټولو اوبيونو  $y_1, y_2, y_3; \dots$  لپاره بايد

$$a^{f(x)} = y_i; i=1,2,3, \dots \quad (13.23)$$

په همدې ډول

$$f(x) = \log_a y_i; i = 1, 2, 3, \dots \quad (13.24)$$

اوبى شي

بيلگه ۱۳. ۱۳:

برابرون  $3^{2x} + 3^x = 2$  كيدى شي چى د بدلون  $y = 3^x (y^2 = 3^{2x})$  سره په څلورى

برابرون يا مربع مساوات  $y^2 + y - 2 = 0$  بېرته وارول شي. لاس ته راځي

$$y_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{8}{4}} = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}; y_1 = 3^x = 1; y_2 = 3^x = -2$$

له دې څخه لاس ته راځي

$$x_1 \cdot \lg 3 = \lg 1 = 0, x_1 = 0$$

دا برابرون  $x_2 \cdot \lg 3 = \lg(-2)$  اوبيونه نه لري

بيلگه ۱۴. ۱۳:

په برابرون

$$\sqrt{e^{x^2-1}} - \sqrt{e^{x^2-1} - 1} = \sqrt{2e^{x^2-1} - 1} \dots \dots \dots (13,25)$$

كى داسى بدلوو:

$$y = e^{x^2-1} \dots \dots \dots (13,26)$$

او لاس ته راوړو



$$\sqrt{y} - \sqrt{y-1} = \sqrt{2y-1}; \dots \dots \dots (13, 27)$$

له دې څخه د مربع کولو له لارې لاس ته راځي:

$$y + y - 1 - 2\sqrt{y(y-1)} = 2y - 1 \Rightarrow -2\sqrt{y(y-1)} = 0 \Rightarrow y(y-1) = 0$$

$$y_1 = 0; y_2 = 1$$

تيك  $y_2 = 1$  (۱۳ ، ۲۷) پوره کوي. له دې امله

$$e^{x^2-1} = 1; \dots \dots \dots (13, 28)$$

حل اوبی . د لوگاريتمولو څخه تعقيبيري:

$$x^2 - 1 = \ln 1 = 0,$$

$$x_1 = 1, x_2 = -1$$

دواړه ارزښتونه پيلبرارون پوره کوي .

برسيره پر دې بايد وښوول شي، چي په برخي ۱۳ . ۱ او ۲ ۱۳ کي انځور شوي متودونو سره يوه د مساواتو ټوله لړي حل کيدی شي، په کوم کي اکسپوننشل افادي او لوگاريتم يوځاي رامنځ ته کيري.

بيلگه ۱۳ . ۱۵ :

له  $2^{(\ln^2 x - \ln x + 1)} = 8$  څخه د بيلگي په توگه د بنسټ 2 لوگاريتمولو له لارې لاس ته راځي

$$\ln^2 x - \ln x + 1 = \log_2 8 = 3$$

که کيزدو  $y = \ln x$  ، نو دا څلوري برابران يا مربع مساوات  $y^2 - y - 2 = 0$  لاس ته راځي، د ځوابونو

$$y_1 = -1, y_2 = 2$$

سره او له دې بيا لاس ته راځي:

$$\ln x = -1, \ln x = 2, x_1 = e^{-1} = 1/e, x_2 = e^2$$

۱۳ . ۳ گونومتريکي- يا کونجکچ برابران

د گونومتری ساده برابر ون لاندې څیره لري

$$\sin x = a, \cos x = a \quad (13.29)$$

$$\tan x = a, \cot x = a, \quad (13.30)$$

دلته فقط دواړه لومړي برابر ونونه (۱۳.۲۹) ځوابونه لري، که  $1 \geq a \geq -1$  باور ولري، نور ارزښتونه  $\sin x$  او  $\cos x$  نه شي غوره کولی (پرتله برخه ۶.۳) د جبشمیرني سره د تکمو یا گوتکونو په پرلپسې د (۱۳.۲۹) همداسې (۱۳.۳۰) یو ځواب لاس ته راځي د (۱۳،۲۹) لپاره

a F	sin a F	cos
-----	---------	-----

د (۱۳،۳۰) لپاره

a F	tan a	1/x	tan
-----	-------	-----	-----

دا چې  $\tan x$  او  $\cot x$  پریودی همداسې  $180^\circ$  لري او په یوه اینتروال کې چې اوږدوالی همداسې  $180^\circ$  لري د (۱۳.۳۰) ټیک یو ځواب پروت دی، لاندې جمله صدق کوي

جمله ۱۳.۱: که  $x \neq 0$  د (۱۳.۳۰) یو ځواب وي چې د بیلگي په توگه د جبشمیرني په مرسته لاس ته راځي، نو د (۱۳.۳۰) د لاندې بڼې ټول ځوابونه تر لاسه کوو

$$x_k = x_0 + k\pi = x_0 + k.180^\circ; k = \dots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots; \dots (13, 31)$$

په همدې ډول دي دلته هم د هندسی برخه په پام کې وي. چې د هغوله مخي په (۱۳، ۳۱) کې د بیلگي په توگه باور لري

$$x_k = \frac{\pi}{6} + k\pi = 30^\circ + k.180^\circ$$

د کونجونو فنکشنونه  $\sin x$  او  $\cos x$  پریودی (تل بېرته راگځېدنه یا دوران)  $2\pi = 380^\circ$

لري. مساوات (۲۹.۱۳) ددي اوردوالی اینتروال کی دوه حلونه لري. که چیرته د  
جشمیرني سره یوه اوبیونه  $x_0$  پیداشي، نو د  $\sin x = a$  په حالت کی  $x = -x_0$   
هم یو حل دی، او  $x = -x_0$  د  $\cos x = a$  په حالت کی یو بل اوبی  
یا حل دی. پس لرو:

جمله ۱۳. ۲: که  $x_0$  د (۱۳، ۲۹) یو هغه اربیونه یا حل وي، چی د بیلگی په توگه  
په جشمیروني لاس ته راځي، نو د  $\sin x = a$  ټول حلونه په لاندې ډول لاس ته راځي

$$x_k = x_0 + 2k\pi = x_0 + k.360^\circ; k = \dots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots; \dots (13,32)$$

$$\bar{x} = \pi - x_0 + 2k\pi = 180^\circ - x_0 + k.360^\circ; \dots (13,33)$$

او د  $\cos x = a$  ټول حلونه په لاندې ډول لاس ته راځي

$$x_k = x_0 + 2k\pi = x_0 + k.360^\circ; k = \dots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots; \dots (13,34)$$

$$\bar{x} = -x_0 + 2k\pi = -x_0 + k.360^\circ; \dots (13,35)$$

بیلگه ۱۳. ۱۶: د مساوات  $\sin x = 0,23910$  لپاره د جشمیروني سره لاندې حلونه  
لاس ته راځي: (په درجه کچ یا گراد اندازه)  $x_0 = 13,833427^\circ$   
(په لینده کچ)  $0,24143 = 0,017453. 3,833427$   
د (۱۳. ۳۲) (،) ۱۳، ۳۳ (له امله په لاندې سره ټولې اوبیوني راکړ شوي دي  
 $x_k = 13, 833427 + k.360^\circ = 0,24143 + k.6,28318,$   
 $\bar{x}_k = 166,16657^\circ + k.360 = 2,9001 + k.6,28318.$

بیلگه ۱۳. ۱۷: د برابرېون  $\cos x = -0,682000$  اوبیونه د جشمیروني سره مومو

$$x_0 = 133,00013^\circ = 133^\circ = 2,32125.$$

د (۱۳، ۳۴) او (۱۳. ۳۵) له مخی ټول حلونه په لاندې ډول لاس ته راځي

$$x_k = 133^\circ + k.360^\circ = 2,32125 + k.6,28318,$$

$$\bar{x}_k = -133^\circ + k.360^\circ = -2,34125 + k.6,28318$$

۳۸۷ ۱۳ ترانسخندنت برابر ونونه يا - مساوات

بيلگه ۱۳ . ۱۸:

د برابر ون  $\tan x = -\sqrt{3} = 4,843000$  حل په جشميرني پيداكوو

$$x_0 = -59,999988^\circ = -60^\circ = -1,04718$$

له دې امله د ( ۱۳ . ۳۱ ) له مخې ټول حلونه په لاندې ټول لاس ته راځي

$$x_k = -60^\circ + k.180^\circ = -1,04718^\circ + k.3,14159$$

بيلگه ۱۳ . ۱۹:

د برابر ون  $\cot x = 4,843000$  ټولې اوبيوني يا حلونه د جشميرني سره داسې

$$x_0 = 11,666677^\circ = 11,67^\circ = 0,203675$$

لاس ته راځي. په دې توگه د ( ۱۳ . ۳ ) له مخې ټول حلونه په لاندې ټول لرو:

$$x_k = 11,67^\circ + k.180^\circ = 0,203675 + k.3,14159$$

بيلگه ۱۳ . ۲۰: مساوات  $\sin x = \sqrt{2}$  د  $1 < 2$  له امله اوبيونه ل نه لري .

د گونومټري مساواتو نور ټيپونه يا ډولونه، كوم چې تراوسه په څرگندومتودو يا لارو ځوابور دي، لاندې بڼه لري

$$\sin f(x) = a, \quad \cos f(x) = a \quad (13.36)$$

$$\tan f(x) = a, \quad \cot f(x) = a \quad (13.37)$$

دلته كيدى شي چې  $f(x)$  الجبري او يا ترانسخيندنته افاده وي كه بدل (سوبستيتوتي) شي

$$y = f(x) \quad (13.38)$$

نو لاندې مساواتونه لاس ته راځي

$$\sin y = a, \quad \cos y = a \quad (13.39)$$

$$\tan y = a, \quad \cot y = a \quad (13.40)$$

دا كيدى شي د جملې ۱۳ . ۱ سره سم اوبى كړاى شي. ددې اوبيوني يا حلونه دي

$$y_1, y_2, y_3, \dots \text{ وي .}$$

د ( ۱۳ ، ۳۷ ) سره سم د  $f(x) = y_i, i = 1, 2, 3, \dots$  ټولې اوبيوني يا حلونه لاس ته

راځي ددې لپاره دې بيلگه وركړ شي.

$$\sin(x-120^\circ)/3=1/2 \quad \text{بیلگه ۱۳ . ۲۱:}$$

د سبستیچوشن یا بدلون  $y=(x-120^\circ)/3$  سره لاس ته راځي  $\sin y=1/2$  د لاندې اوبیوني (حل) سره

$$y_k = 30^\circ + k \cdot 360^\circ, \quad k = \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$$

$$\bar{y}_k = 150^\circ + k \cdot 360^\circ$$

تول د  $(x - 120^\circ)/3 = y_k$  ،  $(x - 120^\circ) = 3y_k$  اوبیوني (حلونو) په توگه لاس ته راځي:

$$x_k = 3y_k + 120 = 90^\circ + 3k \cdot 360^\circ + 120^\circ = 210^\circ + 3k \cdot 360^\circ$$

$$\bar{x}_k = 3\bar{y}_k + 120^\circ = 450^\circ + 3k \cdot 360^\circ + 120^\circ = 570^\circ + 3k \cdot 360^\circ$$

د گونومتري فنکشنونو یو بل تیپ یا ډول ، له لاندې څخه لاس ته راځي

$$f(\sin x, \cos x, \tan x, \cot x, \sin 2x, \cos 2x, \tan 2x, \cot 2x,$$

$$\sin 3x, \cos 3x, \tan 3x, \cot 3x, \dots) \quad (13.42)$$

دلته که د بیلگي په توگه بدل شي

$$y = \sin x \quad (13.43)$$

د ۴ . ۵ برخی تریگونومتري فرمولونو په مرسته تول په (۴۲ ، ۱۳) رامنځ ته شوي کونجفنکشنونه په  $y$  سره افاده کولی شو:

$$\cos x = \pm \sqrt{1 - \sin^2 x} = \pm \sqrt{1 - y^2},$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{y}{\pm \sqrt{1 - y^2}}, \quad \cot x = \frac{1}{\tan x} = \frac{\pm \sqrt{1 - y^2}}{y}, \quad (13.44)$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x = \pm 2y \sqrt{1 - y^2}, \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2y^2 \quad \left( \begin{array}{l} \text{نورې نور} \\ \text{usw.} \end{array} \right)$$

له دې سره برابرون (۴۲ . ۱۳) ، په  $y$  ، یو برابرون بدلیږي:

$$F(y) = 0 \quad (13, 45)$$

دا دې په همغه ډول حلیدونکي وي او حلونه دې  $y_1, y_2, y_3, \dots$  وي. نو بیاد (۱۳.۴۳) سره مناسب لرو

$$\sin x = y_i, i=1,2,3,\dots \quad (13.46)$$

اوبی کړي او د ټولو اوبیونو سره، کوم چی په (۱۳.۴۲) کي بنول شي، وازمایل شي، چی ایا دا هم پوره کوي، که نه په (۱۳.۴۲) کیدی د  $x$  په ځای یوه افاده  $g(x)$  هم ولیکلی شي.

$$f(\sin(x), \cos(x), \dots) = 0 \quad (13.47)$$

نو بیا سری بدلوي

$$y = \sin(x) \quad (13.48)$$

د پورته متود تشریح لپاره په لاندې ډول دوه ساده بیلگي ورکول کيږي

بیلگه ۱۳.۲۲:

برابرون

$$\sin x + \cos x = 1 \quad (13.49)$$

د (۱۳.۴۲)، (۱۳.۴۴) سره ځان په رینه بربابرون بدلوي

$$y \pm \sqrt{1-y^2} = 1 \Leftrightarrow \pm \sqrt{1-y^2} = 1-y \Leftrightarrow 1-y^2 = 1 + y^2 - 2y \quad (13.50)$$

$$\Leftrightarrow 0 = 2y^2 - 2y = 2y(y-1)$$

$$y_1 = 0, y_2 = 1 \quad (13.51)$$

اوس دې په یاد شي، چی د  $y_2=1$  لپاره بربابرون (۱۳.۵۰) او له دې سره سم بربابرون (۱۳.۴۹) تل پوره دي. د دې په څټ یا خلاف  $y_1$  فقط د (۱۳.۵۰) حل دی، که د

رینه له مخه زیاتیز یا مثبت نخبه وي. دا حالت یواځي هلته مخ ته پروت دی، چی  $\cos x > 0$ .

دا هلته هم پام ته راځي، که د بربابرون (۱۳.۵۱) سره بربابرون (۱۳.۴۶) حل یا اوبی شي او

حل یا اوبونه یی په (۱۳.۴۹) کی کینول شي:

$$\sin x = y_1 = 0, x_k = k\pi; k = \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots \quad (13.52)$$

$$\sin x = y_2 = 1, x_k = \pi/2 + 2k; k = \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots \quad (13.53)$$

که (۵۲ . ۱۳) په (۴۹ . ۱۳) کینوول شي، نو لاس ته راځي:

$$\sin x_k + \cos x_k = \sin k\pi + \cos k\pi = 0 + 1$$

د جوړه k لپاره

$$\sin x_k + \cos x_k = \sin k\pi + \cos k\pi = 0 - 1$$

د جوړه k لپاره

د پیل مساوات د زیاتخه حلونه یواځي جفت گڼونه دي (  $x_k = 2k\pi$  ) که (۱۳ . ۵۳) په (۴۹ . ۱۳) کینوول شي، نو لاس ته راځي

$$\sin x_k + \cos x_k = \sin(\pi/2 + 2k) + \cos(\pi/2 + 2k) = \sin\pi/2 + \cos\pi/2 = 1 + 0 = 1$$

له دې وروسته ټول  $x_k$  پیل برابرون پوره کوي .

نو د (۴۹ . ۱۳) ټولي اوبیوني په لاندې بڼه لاس ته راځي

$$x_k = 2k, x_k = \pi/2 + 2k; k = \dots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots \quad (13.54)$$

بیلگه ۱۳ . ۲۳: د برابرون (13.55)  $\cos x + \cos 2x = 0$  سره کیدی شي د ریښی مساوات څخه لار واورو بیت تیر شو. که چیرته  $y = \cos x$  بدل کړي. د

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = y^2 - (1 - y^2) = 2y^2 - 1 \quad (13.57)$$

له امله له څخه (۱۳،۵۵) مربع مساوات لاس ته راوړو.

$$2y^2 + y - 1 = 0 \quad (13.58)$$

$$y_{1,2} = -\frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{8}{16}} = -\frac{1}{4} \pm \frac{3}{4}$$

د دې حل سره:

$$y_1 = \frac{1}{2}, y_2 = -1. \quad (13.59)$$

په (۱۳ . ۵۶) کې ایښوولو له لارې لاس ته راځي

$$\cos x = y_1 = \frac{1}{2}, x_k = 60^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{\pi}{3} + 2k\pi,$$

$$\bar{x}_k = 300^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi, \quad (13.60)$$

$$\cos x = y_2 = -1, \bar{x}_k = 180^\circ + k \cdot 360^\circ = \pi + 2k\pi, \quad (13.61)$$

$$x = \left\{ \begin{array}{l} 60^\circ \\ 180^\circ \\ 300^\circ \end{array} \right\} + k \cdot 360^\circ = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\pi}{3} \\ \pi \\ \frac{5\pi}{3} \end{array} \right\} + 2k\pi. \quad (13.62)$$

تمرینونه

ټول ارزبنتونه  $x$  وشميری، چي لاندي برابر ونونه پوره کوي! پام دي وي، چي د هري پ، بنتي سره يي ازمايل يا ازمايننت اړيندي.

۱ - لوگاريتمي مساوات يا برابر ونونه

$$1.1. \quad a) \log_4(x+1) = -3$$

$$b) 4 - 3 \lg 2x = 10$$

$$c) \lg \sqrt{2x} = 1,314$$

$$d) \ln(x-1)^2 = 2$$

$$1.2. \quad a) \lg(2x+5) - \lg(3x+1) = 2$$

$$b) \lg 4x + \lg 2x + \lg x = 6$$

$$c) \frac{1}{3} \ln x^6 = \frac{1}{2} \ln 81$$

$$d) \lg(x-1)^2 = 6 \lg 2$$

$$1.3. \quad a) \lg(x-1) + \lg 3 = \lg(x^2-1)$$

$$b) \lg(x+1)^2 = \lg 2 + \lg(x+1) + \lg(x-1)$$

$$c) \lg x - \lg 4 = \lg 35 - \lg(x+4)$$

$$d) \lg(x-2) - \frac{1}{2} \lg 4 = \frac{1}{3} \lg 125 - \lg(x+1)$$

$$1.4. \quad a) \lg x + \lg(x+1) + \lg(x-1) = \lg 24$$

$$b) \lg 3 + 2 \lg x = \lg(4+x^3)$$

$$c) \lg(152+x^3) - 3 \lg(x+2) = 0$$

$$d) 2 \lg^2 x^3 - 3 \lg x - 1 = 0$$

$$1.5. \quad a) \lg x + \lg\left(a - \frac{1}{a}\right) = \lg\left(1 - \frac{1}{a}\right) + \lg\left(1 + \frac{1}{a}\right)$$

$$b) \lg(ax) - \lg a + \lg \frac{b}{a} = \lg b + \lg \frac{x}{a}$$

$$c) \lg x - \lg \frac{x}{abx-1} = \lg(a-1) + \lg(a+1)$$

$$d) \log_a(2x+1) = \log_a(x-1) + 1$$

$$1.6. \quad a) \frac{10}{\lg x - 2} - \frac{5}{\lg x + 1} = 4$$

$$b) \frac{1}{\lg x + 1} - \frac{3}{\lg x - 3} = 2$$

$$c) \frac{2}{\log_2 x + 1} - \frac{1}{\log_2 x - 5} = 1$$

$$d) \frac{1}{5 - \lg x} + \frac{2}{1 + \lg x} = 1$$

$$1.7. \quad a) \lg(x^2+1) = 2 \lg^{-1}(x^2+1) - 1$$

$$b) (\log_5 x - 2) \log_5 x = 25^{\log_5 \sqrt{3}}$$

$$c) \lg^2 x^3 - 10 \lg x + 1 = 0$$

$$d) \sqrt{\lg(1-x)} + 5 \lg(1-x) = 6$$

$$1.8. \quad a) 2 \lg \lg x = \lg(3 - 2 \lg x)$$

$$b) \log_2(x-14) = 1 + \frac{1}{2} \log_2(3x-26)$$

$$c) 4 \log_3^3 5x - 7 \log_3 15x + 7 = 0$$

$$d) 3 \lg^2 x^2 - \lg x - 1 = 0$$



- 1.9. a)  $x^{\lg x+2} = 1000$  b)  $x = 10^{1-0,25 \lg x}$   
 c)  $x^{\log_5(5x)-4} = 625$  d)  $x^{\log_a x} = a^2 x$
- 1.10. a)  $x \lg \sqrt[5]{5^{2x-8}} - \lg 25 = 0$  b)  $\log_2(4 \cdot 3^x - 6) - \log_2(9^x - 6) = 1$   
 c)  $\log_2(9 - 2^x) = 10^{\lg(3-x)}$  d)  $x(\lg 5 - 1) = \lg(2^x + 1) - \lg 6$
- 1.11. a)  $\log_2[2 + \log_3(x + 3)] = 0$  b)  $\log_5[\log_2(\log_4 x)] = 0$   
 c)  $2 \log_x 27 - 3 \log_{27} x = 1$  d)  $\frac{\lg x}{\lg(x+1)} = -1$

۲ - اکسپوننشل مساوات

- 2.1. a)  $(a^{x-2})^{x+2} = (a^{x+3})^{x-4}$  b)  $a(a^{x-3})^{x+2} = a^{3x+5}(a^x)^{x-6}$   
 c)  $\sqrt[3]{a^{2x+9}} = \sqrt[4]{a^{3x+5}}$  d)  $a^{x-2}\sqrt{a^{11-x}} = 9^{-x}\sqrt{a^{x+3}}$
- 2.2. a)  $10^{5x} = 3^{10}$  b)  $0,375^x = 2576$   
 c)  $\sqrt[x]{6,325} = 1500$  d)  $\sqrt[x]{10,27} = \sqrt[4]{5}$
- 2.3. a)  $\left(\frac{3}{4}\right)^{2x-3} = \left(\frac{4}{3}\right)^{3x+5}$  b)  $\left(\frac{6}{7}\right)^{3x+10} = \left(\frac{7}{6}\right)^{2x-3}$   
 c)  $\left(\frac{3}{5}\right)^{2x+1} = \left(\frac{5}{8}\right)^{3x+4}$  d)  $16 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{3x-1} = 27 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{x+1}$
- 2.4. a)  $\left(\frac{1}{100}\right)^{\frac{1}{x}} = 24,24 \frac{1}{10}$  b)  $2^x \sqrt{3^{3x+2}} = 3^x \sqrt{2^{2x+3}}$   
 c)  $3^{(2^x)} = 2^{(3^x)}$  d)  $8^{(5^x)} = 4^{(7^x)}$
- 2.5. a)  $4^{x^2-x+1} = 8^x$  b)  $3^{9x+1} = 9^{3x-1}$   
 c)  $\sqrt{9^{x(x-1)-0,5}} = \sqrt[4]{3}$  d)  $\sqrt[3]{x-1} \sqrt{3^{10x+5}} = \sqrt[3]{27^{3x-7}}$   
 e)  $2^{x^2-6x-2,5} = 16\sqrt{2}$  f)  $2^{x^2-7,7x+16,5} = 8\sqrt{2}$   
 g)  $5^{(x^2+x-2)(3-x)} = 1$  h)  $4\sqrt{x+1} = 64 \cdot 2\sqrt{x+1}$

- 2.6. a)  $7^{2x+1} - 3^{x-1} = 7^{2x+3} - 3^{x+1}$       b)  $2^{x+1} - 3^x = 2^{x+3} - 3^{x+2}$   
 c)  $3^{2x-1} - 5^{3x-2} = 3^{2x+1} - 5^{3x+2}$       d)  $5^{2x} - 3 \cdot 5^x + 2 = 0$   
 e)  $5^{4\sqrt{x}} - 6 \cdot 5^{2\sqrt{x}} + 5 = 0$       f)  $2^{\frac{3}{\sqrt{x}}} - 2^{\frac{2}{\sqrt{x}}+1} + 2^{\frac{1}{\sqrt{x}}} - 2 = 0$   
 g)  $3^{x+1} - 2 = 9^x$   
 h)  $3^{x+1} + 3^{x-1} + 3^{x-2} = 5^x + 5^{x-1} + 5^{x-2}$   
 i)  $2 \cdot 3^{x+3} + 7 \cdot 3^{x-2} = 493$       j)  $3^{\sqrt{x}} - 3^{1-\sqrt{x}} = \frac{26}{3}$   
 k)  $33 \cdot 2^{x-1} - 4^{x+1} = 2$       l)  $3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2} = 5^x$
- 2.7. a)  $5^{x-3} + 2 \cdot 5^{x-2} = 5,08$       b)  $5^{\sqrt{x}} - 5^{3-\sqrt{x}} = 20$   
 c)  $9^{\sqrt{x^2+3x}} + 0,5 + 9 = 28 \cdot 3^{\sqrt{x^2+3x}}$       d)  $2^{-2x} - 17 \cdot 2^{-(x+2)} + 1 = 0$   
 e)  $2^{x^2} + 2^{1-x^2} = \frac{9}{2}$       f)  $12^{2x}\sqrt{3} - x\sqrt{3} = 27$   
 g)  $4^{\sqrt{3x^2-2x}+1} + 2 = 9 \cdot 2^{\sqrt{3x^2-2x}}$       h)  $\sqrt{3^{x-56}} - 7 \cdot \sqrt{3^{x-60}} = 162$   
 i)  $9^{x^2-1} - 36 \cdot 3^{x^2-3} + 3 = 0$
- 2.8. a)  $\frac{3^x + 3^{-x}}{3^{x+1} - 1} = \frac{5}{12}$       b)  $\frac{2^x + 1}{2^x - 4^x} = 6$   
 c)  $4 + \frac{2}{3^x - 1} = \frac{5}{3^{x-1}}$       d)  $\frac{2^x + 10}{4} = \frac{9}{2^{x-2}}$   
 e)  $x^x = x$

۳ - گونومتريکي - يا کونجکچيز مساوات

- 3.1. a)  $\tan x = \frac{1}{2}$       b)  $\sin x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$       c)  $\cot x = \frac{2}{5}$       d)  $\tan x = -1$
- 3.2. a)  $\sin(2x - \frac{\pi}{2}) = 0,309$       b)  $\cos(2x - \frac{\pi}{3}) = 0,342$   
 c)  $\sin(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{10}) = 0,809$       d)  $\cos(x + \frac{\pi}{3}) = 0,471$

- 3.3. a)  $5 \sin^2 x - 10 \cos^2 x - 1 = 0$       b)  $\cos^2 x + \frac{1}{3} \sin x \cos x + \frac{2}{3} \sin^2 x = 1$   
 c)  $\cos^2 x + 2 \cos x - \sin^2 x + 1 = 0$       d)  $2 \cos^2 x + \sin x - 1 = 0$   
 e)  $\sin^2 x + 5 \sin x \cos x + 8 \cos^2 x = 0$       f)  $\sin^2 x - \cos^2 x - 3 \sin x + 2 = 0$   
 g)  $\sin^2 x - 2 \cos x + 2 = 0$       h)  $\sqrt{1 + \cos x} = \sin x$   
 i)  $\sqrt{1 + \sin x} + \cos x = 0$       j)  $\sin^4 x = 2 \cos^2 x - 1$   
 k)  $\sqrt{\cos x} + \sqrt[4]{2} \sin x = 0$       l)  $1 - \cos x = \sin x$
- 3.4. a)  $\sin 2x = \sqrt{3} \sin x$       b)  $\cos 2x = \cos x$   
 c)  $\sin 2x \cdot \tan x = 1$       d)  $\cos 2x + 3 \cos x = 1$   
 e)  $\cos \frac{x}{2} - \cos x = 1$       f)  $2 \sin \frac{x}{2} - \cos x + 1 = 0$   
 g)  $\cos x + \cos 2x = \sin x + \sin 2x$   
 h)  $2 \sin x \cos 2x - 1 + 2 \cos 2x - \sin x = 0$   
 i)  $3(1 - \sin x) = 1 + \cos 2x$       j)  $\sin 2x + 2 \cot x = 0$   
 k)  $3 \cos 2x - 20 \sin x = 9$       l)  $\cos 2x + 2 \cos x + 1 = 0$
- 3.5. a)  $2 \sin^2 \frac{x}{2} + \cos 2x = 0$       b)  $2 \cos^2 \frac{x}{2} + \cos 2x = 1$   
 c)  $\tan x - \sin x = 2 \sin^2 \frac{x}{2}$       d)  $\sin^2 x - \cos^2 x = \cos \frac{x}{2}$   
 e)  $2 \sin^2 x + \sin^2 2x = 2$       f)  $3 - 2 \sin^2 2x = 2 \sin^2 x$   
 g)  $5 \cos 2x + 16 \sin x + 14 \sin^2 x + 7 = 0$   
 h)  $3 \cos 2x - 6 \cos x + 4 \sin^2 x = -3$   
 i)  $2 \cos x + 3 = 4 \cos \frac{x}{2}$       j)  $2 \sin^2 x + \sin^2 2x = 0$   
 k)  $\tan x + \tan 2x - \tan 3x = 0$
- 3.6. a)  $\cos x \cos 2x = \cos 3x$       b)  $\sin 5x \cos 3x = \frac{1}{2} \sin 8x - 0,5$   
 c)  $\sin^2 x + \cos^2 2x = \sin^2 3x + \cos^2 4x$       d)  $(\cos 8x)^2 \cdot 2 + \sin 16x = 1$   
 e)  $2 \cos^2 4x + \sin 10x = 1$       f)  $2 - 6 \sin x \cos x = \cos 4x$   
 g)  $\cos 4x + 2 \cos^2 x = 1$       h)  $\sin x \cos 5x = \sin 9x \cos 3x$

$$i) \sin \frac{7x}{2} \cos \frac{3x}{2} = \sin \frac{9x}{2} \cos \frac{x}{2} \quad j) \cos \frac{7x}{2} \cos \frac{x}{2} = \cos \frac{9x}{2} \cos \frac{3x}{2}$$

$$k) \sin x - \sin 3x + \sin 5x - \sin 7x = 0 \quad l) \cos x + \cos 3x = \cos 5x + \cos 7x$$

$$3.7. \quad a) 2 \sin^3 x - 3 \sin x \cos x = 0 \quad b) 4 \sin^3 x - 8 \sin^2 x - \sin x + 2 = 0$$

$$c) \tan^3 x + \tan^2 x - 3 \tan x - 3 = 0 \quad d) \tan^3 x - \tan^2 x + \tan x = 1$$

$$3.8. \quad a) \sqrt{3} \sin x + 3 \cos x = 0 \quad b) \sqrt{3} \sin x + \cos x = \sqrt{3}$$

$$c) \sqrt{3} \sin 3x + \cos 3x = 1 \quad d) \sqrt{2 \sin 2x} + 2 \sin x = 0$$

$$e) 1 - \sin x = \sin^2 \left( \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right) \quad f) 2 \sin^2 \frac{x}{2} = \cos \left( \frac{3\pi}{2} + \frac{x}{2} \right)$$

$$g) 1 - \cos 2x + \cos 6x - \cos 8x = 0 \quad h) \cos x - 2 \cos 3x + \cos 5x = 0$$

$$i) \cos 4x + 2 \cos^2 x = 0 \quad j) 1 - \sin x \cos x + \sin x - \cos x = 0$$

$$k) \cos 3x + \sin 3x = \cos x + \sin x \quad l) \sin x \cos x - \sin^2 x - \cos x + \sin x = 0$$

$$m) \sin x + \cos x = \frac{1}{\cos x} \quad n) (\cos x)^{\sin x} = 1$$

$$o) \frac{1 + \cos 2x}{2 \cos x} = \frac{\sin 2x}{1 - \cos 2x}$$

## ۱۴. د نامساواتو يا نابرابرونو او مطلقه ارزښتونو سره شميرنه

### ۱۴. ۱: نابرابرون (نامساوات)

#### ۱۴. ۱. ۱ بنسټيزې کليمې او شميرقوانين

يو نابرابرون لاس ته راځي، که دوه ترمونه  $T1$  او  $T2$  د يوې اړيکښې  $>$ ,  $\geq$ ,  $<$ , او  $\leq$  له لارې يو د بل سره تړلي وي.

په لاندې کې به نابرابرونه تر څيرنې لاندې ونيول شي، چې يوه يا دوه ريښې واريابلی يا اوبستونې ولري. يو نابرابرون د دوه واريابلو (اوبستونو) سره د وينا منطقي په بنسټ يو د وينا شکل بنایي، د هغو سره چې واريابلی هر ارزښت غوره کولی شي، د کومو لپاره چې ترمونه  $T1$  او  $T2$  څرگند دي. يو اوبی يا حل هر هغه ارزښت دی، په همدې توگه هغه ارزښت جوړه ده، چې واريابل يا اوبستونې يی غوره کولی شي او په ترم کې د هغې ځای په ځای کېدو سره نابرابرون يوه ريښتونی وينا وي. د ټولو اوبيونو يا ځوابونو ټولگه په حلپيري  $L$  کې سره راټولېږي.

په لاندې برخه کې به ډير د وينا منطق (وينا سم انديز) سومبولونه چې په برخه ۱. ۰ ۲ ( او د ډيري عمليو سومبولونه ) چې په برخه ۲. ۳ راغلي په کار واچول شي. د دې سومبولونو د اهميت يا غوره والي سره دې سړی بيا هم ځان اشنا کړي. د نابرابرونو سره شميرنه کې دې لاندې قاعدې په پام کې ونيول شي ( مقايسه برخه ۳ )، دلته دې  $a, b, c$  او  $d$  درييل گڼونه وي. لاندې باور لري

$$a < b \Leftrightarrow a \pm c < b \pm c, \quad (14,1)$$

$$a < b \wedge c > 0 \Rightarrow a.c < b.c \quad (14,2)$$

$$a : b < b : c \quad (14,2)$$

$$a < b \wedge c < 0 \Rightarrow a.c > b.c \quad (14,3)$$

$$a : c > b : c \quad (14,3)$$

$$a < b \wedge c = 0 \Rightarrow a.c = b.c \quad (14,4)$$

د برابررونو شمیرنی سره انډول کی دې دلته ( ۱۴ . ۳ ) قاعده ځانگړې تر پام لاندې وي. د منفي يا کمیز گڼ سره ځل يا ویش عملیه کی دا د نابرابرون نخبه راگرځي يا را په څټ کيږي يا که غواړی برعکس کيږي. د بیلگي په توگه  $4 > 3$  مگر که داوړه خواوې د  $1 -$  سره ځل شي نو لاس ته راځي  $3 < -4$  -

ټول د شمیرلو لپاره ورکړ شوي قواعد د نابرابرون لپاره په ورته ډول د اړیکنخبو  $>$  سره باور لري دا په دې مانا چی  $a \leq b$  دا چی په څرگند ډول د دوه گڼونو ځل او ویش هلته زیاتیز ( مثبت ) دی چی دواړه گڼونه همغه مخنخبه ولري او کمیز ( منفي ) که چیری مخنخبی یی توپیر ولري، او لاندې اړیکی باور لري:

$$a.b > 0 \Leftrightarrow \quad (14,5)$$

$$\Leftrightarrow a.b > 0 (a > 0 \wedge b > 0) \vee (a < 0 \wedge b < 0), \quad (14,5)$$

$$a.b < 0 \Leftrightarrow \quad (14,6)$$

$$\Leftrightarrow (a > 0 \wedge b < 0) \vee (a < 0 \wedge b > 0). \quad (14,6)$$

د برابرونو شریکولو کی، په ځانگړي ډول د ویش لپاره، باید ونیول شي چی  $b \neq 0$  یعنی د ځل او ویش لپاره دې توپیریدونکو قاعدو ته پام وي. د بیلگي په توگه دي:

$$a.b \geq 0 \Leftrightarrow (a \geq 0 \wedge (a \geq 0) \vee (a < 0 \wedge b < 0)) \quad (14,7)$$

$$a.b \geq 0 \Leftrightarrow (a \geq 0 \wedge b > 0) \vee (a \leq 0 \wedge b < 0) \quad (14,8)$$

## ۱۴. ۱ الف اینتروال

د اریابلو د څیرنو لپاره باید ټول معتبر ډیري ورکړل شي، د بیلگي په توگه د یوه فنکشن یا بلواک تعریف - او ارزښت ډیري.

پیژند ۱۴. ۴ الف :

یو اینتروال یو د یوبل سره اړوند د رییلگڼونو  $R$  برخه ډیر) ده.

يو اينتروال له دې امله، بي له تشوالي يا تشي، د گڼکړبڼی يوه ټاکلی برخه ده، چې له دوه گڼونو  $a$  او  $b$  رابنديږي. که د غاړې ټکي په اينتروال کې دننه وي يا خوندي وي نو د بند

اينتروال څخه غږيږو او که اينتروال پورې اړه ونه لري، واز اينتروال دی، او په همدې ډول نيمبند او نيم واز اينتروالونه. د اوبديږی په ورکولو سره په گڼکړبڼی باندې، لاندې د اينتروال انځورونه په کار اچول کيږي.

لاندې ۱۱ د اينتروال مختلف ټيپونه دي يا ني، چې  $a$  او  $b$  له  $R$  دي او  $a < b$  ده.

1.  $(a, b) = \{x \mid a < x < b\}$  واز اينتروال، اخر تخري په اينتروال اړه نه لير

2.  $[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$  بند اينتروال، اخر توري په اينتروال توري اړه لري

3.  $[a, b) = \{x \mid a \leq x < b\}$  بڼی واز اينتروال

4.  $(a, b] = \{x \mid a < x \leq b\}$  کين واز اينتروال

5.  $(a, \infty) = \{x \mid x > a\}$  بڼي لورته ناپاي او کين لور ته واز اينتروال

6.  $[a, \infty) = \{x \mid x \geq a\}$  بڼي لور ته ناپای او کين لور ته بند اينتروال

7.  $(-\infty, b) = \{x \mid x < b\}$  بڼي لور ته واز او کين ورته ناپاي اينتروال

8.  $(-\infty, b] = \{x \mid x \leq b\}$  بڼي لور ته بند او کين لورته ناپاي اينتروال

9.  $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$  ناپای اينتروال، ټول رييلگڼونه

10.  $\{a\}$  د دې يوه توري ډيری

11.  $\emptyset$  تشډيری

لاندې اينتروالونه د ناپای په لور هم رابند دي ياني په دې مانا، چې د ناپای ډيری

هم په اينتروال پورې اړه لري، ياني ناپای ډيری ټولنه ورسره جوړوي.

1.  $[-\infty, b] = \{x \mid x \leq b\} \cup \{-\infty\}$

2.  $[-\infty, b) = \{x \mid x < b\} \cup \{-\infty\}$

3.  $[a, \infty] = \{x \mid x \geq a\} \cup \{\infty\}$

$$(a, \infty] = \{x \mid x > a\} \cup \{\infty\}$$

$$[-\infty, \infty] = \mathbb{R}^+ .4$$

### Alternative notation پورته ته الترناټیو یا بدیلی لیکنښه

په نړیواله توګه یو بل ډول لیکنښه په لاندې ډول ورکول کېږي

$$]a, b[ = \{x \mid a < x < b\}$$

$$[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$$

$$[a, b[ = \{x \mid a \leq x < b\}$$

$$]a, b] = \{x \mid a < x \leq b\}$$

یادونه : داپورته د اینټروال ډولونه د نړیوال جال څخه راکښته شوي، دا می هم وغوښتل  
گرانو لوستونکو ته وړاندې کړم

$$]a, b[ = \{x \mid a < x < b\} \quad \bullet \bullet \bullet \bullet$$

$$[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\} \quad \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet$$

$$]a, b[ = \{x \mid a < x < b\} \quad \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet$$

$$(a, b) = \{x \mid a < x < b\} \quad \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet$$

$$(-\infty, b] = \{x \mid x \leq b\} \quad \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet$$

$$[a, \infty) = \{x \mid x \geq a\} \quad \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet$$

$$(-\infty, b) = \{x \mid x < b\} \quad \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet$$

$$(a, \infty) = \{x \mid x > a\} \quad \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet$$

$$(-\infty, \infty) = \{x \mid x \in \mathbb{R}\} \quad \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet$$

بیلګه ۱۴ . الف:

په بنسټیزه ډیری  $\mathbb{R}$  کی د لاندې برابرون پیژندډیری غوښتنه منځ ته راچوو.

$$x - 2 = 1 + 7 - x$$



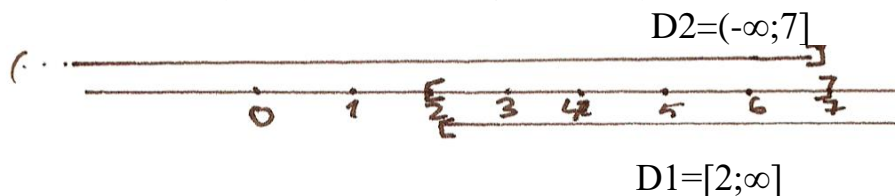
حل : د دې ترم  $T1(x) = x - 2$  پيژندډيری ده:

$$D1 = [2, \infty)$$

په همدې توگه د ترم  $T2(x) = 1 + 7 - x$  پيژندډيری ی ده:  $D2 = (-\infty, 7)$   
د برابرېون د پيژندډيری لپاره لاس ته راوړو:

$$D = D_1 \cap D_2 = [2, \infty) \cap (-\infty, 7] = [2, 7]$$

لاندي څيره وگوري (متاسفانه، چې ښه څېره نه شم کښلی)



### ۱۴ . ۱ . نابرابرون د یوې مجهولې سره

د شمیرقاعدي لومړی د هغونابرابرونونو لپاره په کار اچول کيږي چې یوه اوښتونې یا مجهوله ولري، او اوبیوني یی په ټولیزه توگه د اینتروالونو له لارې انځوريزي.  
( ۱۴ . ۱ ) قاعده د په خوښه ترمونو د زیاتون او کمون داسی اجازه راکوي، لکه په برابررونو کی.

بیلگه ۱۴ . ۱ :

لرو  $5x - 6 < 4 + 9x$  دواړو لورو ته  $-9x + 6$  ورزیاتوو، نو لرو  $-4x < 10$   
دواړه خواوې په ۴ - ویشو.

د ( ۱۴ . ۳ ) له مخې لاس ته راځي  $x > -5/2$

د اوبیوني ډیر یا اوبیدډیري :  $L = (-5/2, \infty)$

که په یوه غوښتونکی ځل یا ویش کی ځله وونی، همداسي پرویشونی یو واریابل یا اوښتونې ترم وي، نو باید د ( ۱۴ . ۲ ) تر ( ۱۴ . ۴ ) سره سم ددې ترم د مخښیني په واک والي کی د حالت توپیرونه (ښه یي : توپیږه ونه) تر پام لاندي ونیول شي .

د یوگونو اوبیدیریو پیدا کولو په هکله، په هر ډول چې وي، باید په پام کې ولرل شي، چې یواځې هغه د نابرابرون شمیرل شوي  $x$  - ارزښتونه اوبیوني دي، چې ټول یې سملاسي (په همدې وخت کې) هغه نیول شوی (فرض شوی) شرایط پوره کړي.

هر برخ اوبیدیری یا برخلیدیری کیدی شي چې د غوڅدیری په څیر له همغه هرپورتني نماینده برخساحویا-ورشو (یا نوره هم ښه: برخچاپیریالونو) واریابلی (اووښتونې) او د نابرابرون ډیری شمیرل شوو واریابلو یا اووښتونکو ارزښتونو جوړ شي. د غوڅدیری جوړښت، کیدی شي چې د یوگونو ډیریو د گرافیکي انځورونو په څیر په گڼورانگه ساده شي. د نامساوتو ټولې اوبیدیری د برخ اوبیدیری یوه د یوگونو حالتونو ټولنیدیری ده.

بیلگه ۱۴. ۲:

$$(3x-5)(x-2) < 4(x-2)$$

که په  $(x-2)$  باندې وویشل شي، نو باید د شرایطو په پام کې لرلو سره سم

$$x > 2 \text{ لپاره } (x-2) > 0$$

$$x = 2 \text{ لپاره } (x-2) = 0$$

$$x < 2 \text{ لپاره } (x-2) < 0$$

نابرابرن دي په درې برخه ساحو کې یو له بل بیل وڅیرل شي.  
لومړی حالت:

$$x > 2 \iff x \in (2, \infty)$$

دلته د مخ ته پراته نامساوت لاندې ورته ښه بدلون څخه لاس ته راځي

$$3x - 5 \leq 4 \iff 3x \leq 9 \iff x \leq 3 \iff x \in (-\infty, 3]$$

له دې  $x$  - ارزښتونو څخه یواځې هغه د مخه ورکړ شوي نابرابرون، چې په لومړي حالت کې راوړل شوي اوبیوني دي، یواځې هغه  $x$  د

$$x \in (2, \infty)$$

سره د اوبیو یا اوبیونو په څیر نیسو. له دې امله د لومړي حالت اوبیدیری لرو:

$$L_1 = (2, \infty) \cap (-\infty, 3] = (2, 3]$$

دوم حالت:

$$x = 2 \Leftrightarrow x \in \{2\}$$

دلته په  $(x - 2)$  باندې ویشل کیدی نه شي.د  $x = 2$  ارزښت لیکلو رښتیا وینا  $0 \geq 0$  لاس ته راځي او له دې امله

$$L_2 = \{2\}$$

دریم حالت:

$$x < 2 \Leftrightarrow x \in \{-\infty, 2\}$$

د  $x - 2 < 0$  له امله د  $(14, 3)$  له مخی پخپله د مخه ورکړ شوي نابرابرون

لاندې ورته فورمونه ورکوي

$$3x - 5 \geq 4 \Leftrightarrow 3x \geq 9 \Leftrightarrow x \geq 3 \Leftrightarrow x \in [3, \infty)$$

له دې  $x$  - ارزښتونو کوم یو نه شي کیدی چی په دریم حالت کی راوړل شي:

$$L_3 = (-\infty, 2) \cap [3, \infty) = \emptyset$$

د برخه اوبیدیریو ټولنی څخه ټول اوبیدیر (لاس ته راځي):

$$L = L_1 \cup L_2 \cup L_3 = (2, 3] \cup \{2\} \cup \emptyset = [2, 3]$$

نو ټولې اوبیوني هغه  $x$  دي د کومو لپاره چې لرو:  $2 < x < 3$ 

په لاندې بیلگو کې نور دومره زیات توضیحات نه ورکول کیري.

بیلگه ۱۴. ۳:

$$(3x-1)/(2x+4) < 2$$

د شرایطو  $|2x+4|=0$  له مخی، دا په دې مانا چی  $|x|=2$  د مات لاندې سره ځله ونی له

امله

$$d > -2 \text{ لپاره } (2x+4) > 0$$

$$d < -2 \text{ لپاره } (2x+4) < 0$$

سره سم یواځي دوه حالتونه توپيروو:

لومړی حالت:

۴۰۳

۱۴. د نامساواتو يا نابرابرونو .....  
-----

$$x > -2 \Leftrightarrow x \in (-2, \infty)$$

$$3x - 1 < 4x + 8 \Leftrightarrow x > -9 \Leftrightarrow x \in (-9, \infty)$$

$$L_1 = (-2, \infty) \cap (-9, \infty) = (-2, \infty)$$

څیره ۱۴ الف: دا څیره لاندې کښل شوی، په هغې کې چې بیا دا اوبیدیری روښانه شو.

دوم حالت:

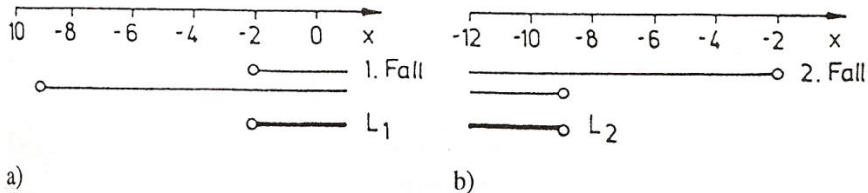
$$x < -2 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -2)$$

$$3x - 1 > 4x + 8 \Leftrightarrow x < -9 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -9)$$

$$L_2 = (-\infty, -2) \cap (-\infty, -9) = (-\infty, -9)$$

$$L = L_1 \cup L_2 = (-\infty, -9)$$

پورته اخر د نابرابرون يا نامساوات حل يا اوبی دی.



a)

b)

Bild 14 1

څیره ۱۴ ب: دلته هم گڼونو کړنې شته، چه په هغې کې دا اوبیدیری روښانه کارل شوي دي، که څیره مې ونه کارله، نو داکار بج گران لوستونکی هم وکولای شي.

د مخښی راورلو په بنسټ د نابرابرن یوه ځانگړي بڼه يا فورم، چې په (۵.۱۴) تر (۸.۱۴) اړیکو کې استعمال شوي، اوبیونه گټوره وښايي.

نابرابرونه

دلته هم څو بیلگې راورل کيږي، چې نابرابرونه په کې اوبی شوي دي.

دا برخه د نړيوالجال څخه راکښته شوي، له دې امله يې ليکبڼه د مخکنۍ ليکبڼې سره توپير لري، دا لاندې لرو .

$$ax + b > 0, \quad a \neq 0$$

$$x^2 - 5 < 0$$

$$|2x - 5| \leq x + 10$$

دلته اوبیوني اینتروالونه دي، بنول کيږي، چې اوبیډیږی څنگه پيدا کيږي او د دې لپاره اړين شرايط کوم دي.

- په دواړو لورو همغه گڼ زیاتیدلی یا کمیدلی شي
- که دواړه خواي د کمیز گڼ سره ځل شي یا په کمیز گڼ ویشل شي، نو مخنځبڼه تغیر خوري، که زیاتیز وي، نو دواړه خوا په توان کیدی شي او ریښج یې وستل کیدی شي، پام دې وي، چې برابرې بیا زیاتیزه او که کمیزه مخ نځبڼه غوره کوي او یا دواړه
- مورن (1.9:1) اوبی کوو

د  $a > 0$  سره لورو

$$ax + b > 0 \iff ax > -b \iff x > -\frac{b}{a}$$

د لاندې حلست یا اوبیډیږی

$$\mathcal{L} = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x > -\frac{b}{a} \right\} = \left( -\frac{b}{a}, \infty \right).$$

۴۰۵ ۱۴. د نامساواتو يا نابرابرونو .....  
-----

د  $a < 0$  سره لرو

$$ax + b > 0 \iff ax > -b \iff x < -\frac{b}{a}$$

د لاندې اوبيديري سره

$$\mathcal{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -\frac{b}{a}\} = (-\infty, -\frac{b}{a}).$$

مورن (1.9:2) اوبي کور :

$$x^2 - 5 < 0 \iff x^2 < 5 \iff |x| < \sqrt{5}$$

په اخري پل کې دې ته پام وي  $\sqrt{x^2} = |x|$  د روانه تشريح لپاره يا شنني لپاره  
يو د حالت توپير رامنځ ته کوو :

په حالت کې  $x \geq 0$  کې  $|x| = x$  او  $|x| < \sqrt{5}$  په ساده ډول  $x < \sqrt{5}$  مانا لري

په حالت کې  $x < 0$  کې  $|x| = -x$  او  $|x| < \sqrt{5}$  د  $-x < \sqrt{5}$  په مانا يا  
ورته  $x > -\sqrt{5}$  نولو

$$|x| < \sqrt{5} \iff -\sqrt{5} < x < \sqrt{5}$$

او اوبيديري

$$\mathcal{L} = (-\sqrt{5}, 0) \cup [0, \sqrt{5}) = (-\sqrt{5}, \sqrt{5}).$$

مور 1.9:3 اوبی کوو دیوه حالت تو]پرسره

$$\iff x \leq 15, \quad 2x - 5 \leq x + 10$$

$$\iff 2x \geq 5 \iff x \geq \frac{5}{2} \quad 2x - 5 \geq 0$$

(i) که وي نو دی  $2x - 5 \geq 0$ ; او مور لرو  $|2x - 5| = 2x - 5$ ,

له دي لاس ته راخي

$$\frac{5}{2} \leq x \leq 15.$$

$2x - 5 < 0$ . (ii) نو دی  $|2x - 5| = -(2x - 5)$  او لرو

$$-2x + 5 \leq x + 10 \iff -3x \leq 5 \iff x \geq -\frac{5}{3},$$

$$2x - 5 < 0 \iff 2x < 5 \iff x < \frac{5}{2}.$$

له دي لاس ته راخي:

$$-\frac{5}{3} \leq x < \frac{5}{2}.$$

د نابرابرون اوبيونديری له دي امله ده

$$\mathcal{L} = \left[-\frac{5}{3}, \frac{5}{2}\right) \cup \left[\frac{5}{2}, 15\right] = \left(-\frac{5}{3}, 15\right].$$

۴۰۷

۱۴. د نامساواتو يا نابرابرونو .....  
-----

په لاندې کې يو څو تمرينونه ورکړ شوي، که گران مينه وال يې غواړي تمرين کړي.

لاندې نابرابرونه اوبی کړی

$$\frac{3}{x+5} < 2 \quad (i)$$

$$\sqrt{x^2 + x + 2} > x \quad (ii)$$

$$|x+5| > |x-2| \quad (iii)$$

بیلگه ۱۴ . ۴:

$$1/(3-x) > 2/(x+6), x \neq -6; x \neq 3$$

د اصلي ماتلاندې  $(3-x)(x+6)$  سره د ځل له امله بايد بيا هم د هغه مخنځبنه په پام کې ونيول شي. شرايط، د کوموله مخی چی مات لاندې مثبت دی، کیدی شي د (۱۴ . ۵) له لارې ومیندل شي:

$$(3-x)(x+6) > 0 \Leftrightarrow (3-x) > 0 \wedge x+6 > 0 \vee (3-x) < 0 \wedge x+6 < 0$$

$$\Leftrightarrow (x < 3 \wedge x > -6) \vee (x > 3 \wedge x < -6) \Leftrightarrow -6 < x < 3$$

نو (۱۴ . ۶) شوونې کوي يا ممکنه وي، چی هغه ورشو (ساحه يا ډیری يا نه هم بنهچاپیریال) پیدا کړو چیرته چی اصلي مات لاندې کمیز يا نفي دی:

$$(3-x)(x+6) < 0 \Leftrightarrow (3-x) > 0 \wedge x+6 < 0 \vee (3-x) < 0 \wedge x+6 > 0$$

$$\Leftrightarrow (x < 3 \wedge x < -6) \vee (x > 3 \wedge x > -6) \Leftrightarrow x < -6 \vee x > 3$$

له دې امله د (۱۴ . ۲) او (۱۴ . ۳) په پام کې لرلو سره شمیرنه لاس ته راځي:  
لمری حالت:

$$-6 < x < 3 \Leftrightarrow x \in (-6, 3)$$



د زياتيز ځله ووني يا مثبت فاکتور  $(3-x)(x+6)$  سره ځلولو له امله د اړیکو نڅبنه ساتلی پاتیري:

$$x+6 \geq 6-2x \Leftrightarrow x \geq 0 \Leftrightarrow x \in [0, \infty),$$

$$L_2 = (-6, 3) \cap [0, \infty) = [0, 3) \dots (\text{map}(z\text{irah})14.2a)$$

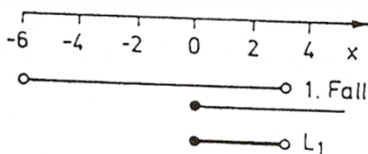
$$\text{دوم حالت: } x < -6 \vee x > 3 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -6) \cup (3, \infty)$$

دا چې د لته اصلي مات لاندې منفي دی، نو ځل د اړیکو نڅبنه باندې راگرځیدونی یا په څټ (چپه یا برعکس) تاسیر لري:

$$x+6 \leq 6-2x \Leftrightarrow x \leq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 0)$$

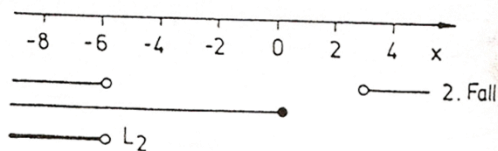
$$L_2 = [(-\infty, -6) \cup (3, \infty)] \cap (-\infty, 0) = (-\infty, -6) \dots (\text{map}(z\text{irah})14.2b)$$

$$\text{اوبیدیری } L = L_1 \cup L_2 = [0, 3) \cup (-\infty, -6) = (-\infty, -6) \cup [0, 3)$$



a)

Bild 14.2 څیره



b)

د څلورۍ برابرون یا مربع نامساوات حل لپاره کیدی شي د څلورۍ ترم ځل انځورونی څخه کار واخستل شي.

$$\text{بیلگه ۱۴. ۵: } -x^2+9x < 0$$

لومړی د (۱۴. ۳) په پام کي نیولو سره د  $x^2$  د مخ (کین لور) کمیز- یا منفي ځلو، وونوباندې ویشل کیري:

$$x^2 - (9/2)x + 2 > 0$$

ددي لپاره چې دا نامساوات د ځل په څیر ولیکلی شو، د مربع مساواتو حل شمیرو، کومه چې د اړیکنڅبنې په ځای د مساواتنڅبنې ځای په ځای کولووروسته منځ ته راځي.

$$x^2 - (9/2)x + 2 = 0 \Rightarrow x_1 = 4, x_2 = 1/2$$

$$x^2 - \frac{9}{2}x + 2 > 0 \Leftrightarrow (x-4)(x-\frac{1}{2}) > 0 \Leftrightarrow (x > 4 \wedge x > \frac{1}{2}) \vee (x < 4 \wedge x < \frac{1}{2})$$

$$\Leftrightarrow x > 4 \vee x < \frac{1}{2}$$

له دې سره د (۱۴. ۵) په کارولو د نابرابرون حل لاس ته راځي:

$$L = (-\infty; \frac{1}{2}) \cup (4; \infty) = R \setminus \{\frac{1}{2}; 4\}$$

په دې برسیره دې په یاد وي چی داډول نامساوات د مشهور مربع فنکشن د کبري کښلو له مخی هم حل کیدی شي، په ځانگړي ډول هلته، چی اړوند مربع شکل رییل حل نه لري، بالاخره پهبای کې د وېش د مخنښي راوړلو یوه بیلگه ښایو.

$$\frac{x+5}{3x-2} \leq 0, x \neq \frac{2}{3} \quad \text{بیلگه ۱۴. ۶.}$$

حل (۱۴، ۸) ته ورته دی

$$\frac{x+5}{3x-2} \leq 0 \Leftrightarrow (x \geq -5 \wedge x < \frac{2}{3}) \vee (x \leq -5 \wedge x > \frac{2}{3}) \Leftrightarrow -5 \leq x < \frac{2}{3}$$

$$L = [-5, \frac{2}{3}).$$

د سیستم حل ډبري یا حل ست:

۱۴. ۱. ۳ د نابرابرونسیستم د یوې ناپیژندونکی

یا مجهولی یا اوبنتوني سره

د یوه نابرابرون سیستم اوبیدیری L د یوگونو نابرابرونو اوبیدیریو غوڅدیری ده. گټور یا موخه ور به وي (دا هدفمند دی)، که نابرابرون لکه په یوه برابر ونسیستم کی په نمره کړی شي، ددې لپاره چی دا یوگوني (دا په دې مانا چی یو یو) اوبی کړی شو.

بیلگه ۱۴. ۷

$$5 - 2x \geq 3 - x$$

$$x^2 - 5x - 6 < 0$$

$$I. 5 - 2x \geq 3 - x \Leftrightarrow x \leq 2 \Rightarrow L_I = (-\infty, 2]$$

$$II. x^2 - 5x < 0 \Leftrightarrow (+1)(x - 6) < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 6 \Rightarrow L_{II} = (-1, 6)$$

$$\Rightarrow L = L_I \cap L_{II} = (-\infty, 2] \cap (-1, 6) = (-1, 2]$$

د سیستم اوبیدیری: L دی

بیلگه ۱۴ . ۸

$$-2 < \frac{4x-10}{x-1} < 3, x \neq 1$$

د داسی نابرابرون خنځیرونه یا یو بل سره تړنه د دواړو نابرابرونو د سیستم سره په یوه مانا دی:

$$I. -2 < \frac{4x-10}{x-1}$$

$$II. \frac{4x-10}{x-1} < 3$$

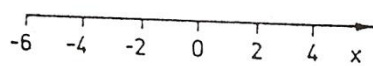
د همغه فاکتور  $(x-1)$  سره د ځل اړین یا ضروری حالت توپیریدنه کیدی شي د دواړو نابرابرونو لپاره غبرگ د لیدور بنی سره وڅیرل شي (مخ په وړاندې یوور شي):  
(یادونه: په لاندې کې دې  $Fall(1)$  لومړې حالت او  $Fall(2)$  دویم حالت وي)

.....I.....II

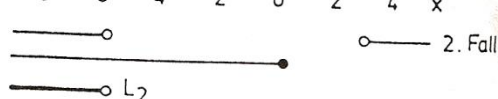
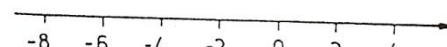
	$-2x+2 < 4x-10$	$4x-10 < 3x-3$
1. $Fall^{(1)}$	$\Leftrightarrow x > 2 \Leftrightarrow x \in (2, \infty)$	$\Leftrightarrow x < 7 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 7)$
$x \in (1, \infty)$	$L_I = (1, \infty) \cap (2, \infty) = (2, \infty)$	$L_{II_1} = (1, \infty) \cap (-\infty, 7) = (1, 7)$
	$-2x+2 > 4x-10$	$4x-10 > 3x-3$
2. $Fall^{(2)}$	$\Leftrightarrow x < 2 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 2)$	$\Leftrightarrow x > 7 \Leftrightarrow x \in (7, \infty)$
$x \in (-\infty, 1)$	$L_{I_2} = (-\infty, 1) \cap (-\infty, 2) = (-\infty, 1)$	$L_{II_2} = (-\infty, 1) \cap (7, \infty) = \emptyset$
	$L_I = L_{I_1} \cup L_{I_2}$	$L_{II} = L_{II_1} \cup L_{II_2}$
	$= (-\infty, 1) \cup (2, \infty)$	$= (1, 7)$

د LI او LII غوڅیږی جوړول بیرته کیدی شي چې د یوگونو او بیډیر یوگنورانگه باندې د لیدنی شي) (څیره ۱۴ . ۳  
د سیستم او بیډیری:

$$L = L_I \cap L_{II} = (2, 7)$$



a)



b)

## ۱۴. ۱. ۴ نابرابرون د دوه اووبنتونو يا مجهولو (نایژندونکو) سره

د دوه نابرابرون - يا نابرابرونسيستمونو اوبيديري د يوه اوبيديري  $R^2 = R \times R$  برخديري ده، چي د هوارې په څير د ليدني كيدي شي. له دې امله گرافيكي بنوونه د ټكو پيري په څير په يوه كواوردينات سيستم كې مساعد دي. په دې برخه كې به مور يواځي د لاندې ډول لايينز نابرابرون::

$$ax + by + c > 0 \quad (\geq 0, < 0, \leq 0) \quad (14.9)$$

واريايلو يا اووبنتونو  $x, y$  او ثابتو ځله وونو (ضريبونو)

$$a, b, c \in R$$

سره د شرايطو  $a=0 \vee b=0$  سره سم تر څيرني لاندې ونيسو.

كه ددې اړيكو نخښه د برابرې سره بدله كړو نو د يوې كرنبي نابرابرون  $ax+by+c=0$  لاس ته راځي، كومه چي د پروتولاړ - يا كواوردينات سيستم په دوه نيمو هوارو يا ستحو ويشي. د نابرابرونسيستم (۱۴. ۹)، چي ټيگ په يوه له دې دوه هوارو كې باور لري، په راټلونكي بيلگه ۱۴. ۹ كې بنوول كيږي. د اوبيديري په هواره كې د كرنبونو يا كرنبو كرنبو كولو (د پيرو كرنبو كبللو) له لاري په نخښه كيدي شي. كه په نابرابرون كې برابرې نه وي پريبنوول شوي يعني برابرې په كې نه وي ځاي شوي، نو راټولونكي كرنبه د اوبيديري پوري اړه نه لري او كيدي شي يواځي ټوټه ټوټه كرنبي (پري لايين يا غوڅكرنبي) په څير په نخښه شي، لكه څنگه چي د پيري گرافيكي بنوونه ورځني يا بلده يا معمول ده. كه برابرې ورپوري اړه ولري، نو كرنبه د اوبيديري پوري اړه لرونكي برخي په څير په نخښه كيږي.

بيلگه ۱۴. ۹ :

$$2x+5y-10>0$$

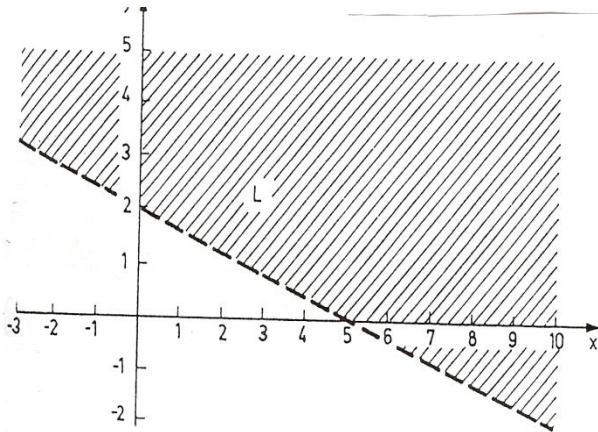
كه نابرابرون د  $y$  په لور اوبي شي، نو دې ته ورته نابرابرون  $y > -(2/5).x + 2$  لاس ته راځي، كوم چي په يوه كره نيولي  $x$  په روښانه توگه د لويو  $y$  - ارزښتونو لپاره پوره دي نسبت ورته برابرې ته. له دې امله دهوارې چي د كرنبي  $y = -(2/5).x + 2$  څخه پورتنی نیمی هوارې ټول ټكي اوبيديري  $L$  جوړوي ش كه څيره ون كبلل شوه، نو پل په پل ډاكار گران د شمير پوهني مينه وال كولي شوي (۱۴. ۴)

دا په بيلگه ۱۴. ۹ كې تشریح تگلار په نابرابرون (۱۴. ۹) كې د مخه نيسي چي  $b=0$  دي. په ټوليزه توگه يا عمومي ډول دا متود د استعمال وړ دي، چي د كواوردينات سيستم

يوه په خوښه ټاکلي ټکی ځای په ځای کولو کی ، چی په کرښه  $ax+bx+c=0$  نه وي پروت .

ازمایو چي ایا دا نابرابرون په اړونده نیمه هواره کی باور لري او یا نه.که ممکن وي نو د شمیرنی د ساده والي له امله ځانگری ټکی (0,0) ټاکو. دا په بیلگه ۱۴ . ۹ کی ددی ټکی بدلون وروسته نارینتیا وینا  $10 < 0$  لاس ته راکوي او په دې ډول د اوبیدیری پیداشوی ځای ( ښه به پروتځای وي خو د لنډونی له امله ځای بسیا کوي) تصدیقوي. دلته یوه څیره کښل کیري دلته د اوبنتونو پرځای گڼونه ږدو او بیا کرښه باسو . په کواور دینات کې د هوارې هغه برخه، چي اوبیدیری ده کرښ کرښه کوو، دا په دې مانا، چي د کرښی هغه دکرښونو لور ته ابیدیری ده .

د یوه نابرابرونسیستم چی دوه مجهولی ولري، نو هر نابرابرون ځانله ځانله اوبی کیری او بالاخره یی د یوگونو اوبیدیریو غوڅدیری نیول کیري یا جوریري.



حکړه Bild 14.4

بیلگه ۱۴ . ۱۰:

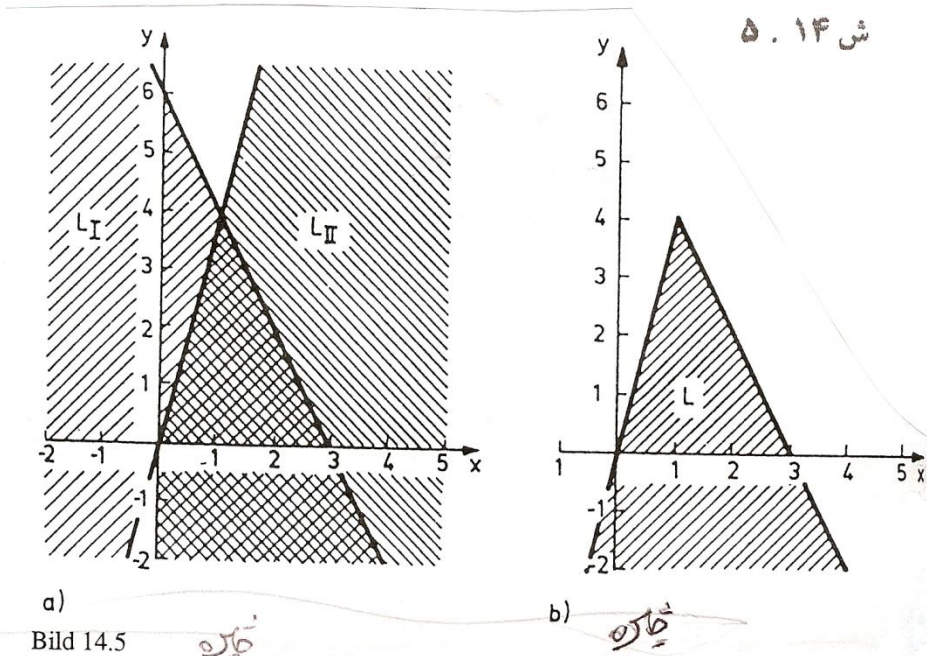
I.  $2x+y < 6$

II.  $4x-y > 0$

(0,0) نابرابرون I پوره کوي او له دې امله په اړونده اوبیدیری LI کی پروت دی. دا چی په نابرابرون II کی د (0, 0) سیده برابر و باوري دي، نو دلته باید یو بل ټکی د بیلگي په توگه ( 1 , 0 ) کښنول شي، کوم چی د په څټوالي یا تضاد په لور ځي، او له

دي امله اوبيديری LII کی نه دی پروت. (؟؟؟ش ۱۴ . الف) . ش ۱۴ . ۵ ب دسیستم حلدیری L بنایي چي له دوه نیمکربنو بندیري يا له دوه نیم کربنو محدودیري. د وړاندیزارزبنت لري چی د تمرینونو په خپلواک کار کولو کی د غوښتونکو اوبیدیریو L د یوگونو نیمهوارو غوڅدیری حتی تر غاړې پورې رنگینه یا کربنی کرښی راوکنبل شي، چی په دي ډول یی یو کواوردیناتسیستم د انځورولو لپاره بسیا وکړي . ش ۱۴ .

۵



بیلگه ۱۴ . ۱۱:

I.  $x-3y-6<0$

II.  $-x+y+1<0$

III.  $x-6<0$

دا اوبیدیری په ش ۱۴ . ۶ کی انځور ۱۲ کربني د پورته نابرابرونسیستم له مخه د هر نابرابرون لپاره کربنه کښل کیري، په یوه کواوردینات سیستم کی او بیا د هوارې هغه برخه، چی درپواره کرو کی رابنده منهواره وي، هغه یی اوبی دی.

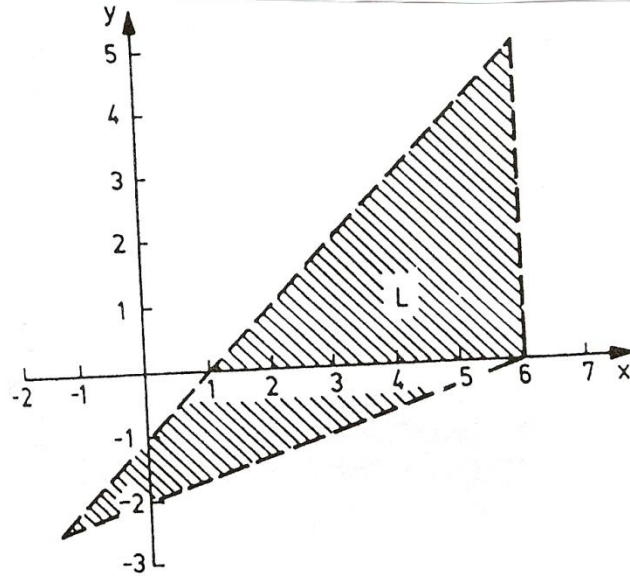


Bild 14.6 *نځیره*

۱۴. ۲ برابرون او نابرابرون د مطلقه ارزښتونو سره

۱۴. ۱۲ د مطلقه ارزښتونو سره شمیرنه

که په یوه برارون یا نابرابرون کې د ترمونو مطلقه ارزښتونه د مجهولې په څیر ریښې واریاږي یا اووښتونې وي، نو د مجهول په لور له اخیولو د مخه باید یو د مطلقه ارزښت خپلواک فورم پیدا شي. داچې له برخې ۳ څخه څرگنده ده چې د یوه ریښې گڼ مطلقه ارزښت د

مخښې په واک په توپیری ډول جوړیږي نو د یوه ترم لیکل بهی له مطلقه ارزښت، په پریښیپ کې دوه حالتونه توپیریږي:

داسې دی:

$$T(x) = T(x) \quad \text{لپاره} \quad T(x) \geq 0 \quad \text{د} \quad (14,10)$$

$$T(x) = -T(x) \quad \text{لپاره} \quad T(x) < 0 \quad \text{د} \quad (14,10)$$

که مطلقه ارزښت د صفر لوی یا په صفر برابر وي، نو کیدی شي چې د مطلقه ارزښت لري پریښول شي، یا د نورو ترمونو سره په تړلو په نوکانو بدل شي. که مطلقه ارزښت متن منفي وي يعني د مطلقه ارزښت دننه، نو د مطلقه ارزښت نخبو په ځای نوکان لیکل کيږي او دا نوکان بیا په ( ۱ - ) ځليږي. هغه ټکي چې په ( ۱۴ ، ۱۰ ) کی ورکړ شوي شرایط پوره کوي، نو پریښول کيږي چې ځانونه په قاعده کې په اینټروال وښايي، کوم چې دیسیونکت ( پردي) برخه ډیرې د اوبستونو چاپیریالونه دي، د کوم لپاره چې  $T(x)$  ښوول شوی دی. د دواړو برخه چاپیریالونو ټولنډیري، باید بیرته د ټول هغه واریابل چاپیریال ورکړي، کوم چې د کنټرول لپاره باید و ازمایل شي. په دې ځای کې دې د ځله وونی او ویش مطلقه ارزښتونو لپاره قواعد ورکړ شي، چې د بدلون لپاره د ارزښت وړ دي.

که  $a$  او  $b$  رییل گڼونه وي، نو لاندې باور لري کيږي:

$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$$

$$|a : b| = |a| : |b| \quad \text{د } b \neq 0 \text{ لپاره}$$

## ۱۴ . ۲ . ۲ برابرې د مطلقه ارزښت سره

د یوه مطلقه ارزښت مساوات حل لکه چې د حالت توپیرولوکی توضیح شوی، باید په هر حالت کې وازمایل شي چې ایا دا اوبیوني په نیول شوي یا فرض شوي اینټروال کې پراته دی او که یواځې د اوبې په څیر ښکاریدونکي رامنځ ته کيږي. یوگوني اوبیوني اوبیدیري  $L$  کې رایوځای کيږي. د مقایسې یا انډول یا پرتلی لپاره د برابرېونو هغه کرافیکي اوبیوني شونې یا ممکن دي، په کوم کې چې هره لور یا اړخ د یو فنکشن تنظیم عملي راورل کيږي یا رانیول کيږي او په  $x, y$  - پروت ولاړ - یا کواوردینات سیستم

کې انځورېږي .

د دواړو فنکشنونو غوڅټکي  $x$  - کواوردیناتونه په همدې وخت کې د برابرېونو اوبیوني دي.

بیلگه ۱۴ . ۱۲:

$$|x+1|=(x/2)+2$$



باور لري:

$$(x+1) \geq 0 \quad \text{د } x > -1 \text{ لپاره}$$

$$(x+1) < 0 \quad \text{د } x < -1 \text{ لپاره}$$

$$(14,11) \quad \text{د } x \geq -1 \text{ لپاره } |x+1| = x+1$$

$$(14,11) \quad \text{د } x < -1 \text{ لپاره } |x+1| = -x-1$$

لومړی حالت

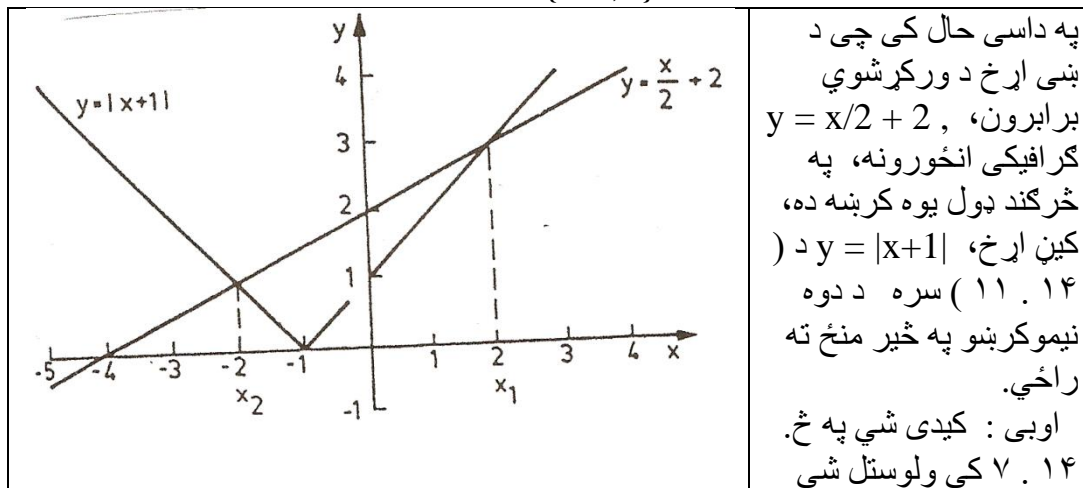
$$x \in [-1, \infty)$$

$$|x+1| = x/2 + 2 \Leftrightarrow x+1 = x/2 + 2 \Leftrightarrow x = 2 \in [-1, \infty) \Rightarrow x_1 = 2$$

دوم حالت:

$$x \in [-1, \infty)$$

$$|x+1| = x/2 + 2 \Leftrightarrow -x-1 = x/2 + 2 \Leftrightarrow x = -2 \in [-\infty, -1] \Rightarrow x_2 = -2$$

د برابرېون يا مساوات او بېدېری  $L = \{-2, 2\}$ 

که یو برانرون د لاینیزو ترمونو زیات مطلقه ارزښتونه ولري، نو شونې یا مساعد ده چی لومړی د هغه گټور انګه په هغه ځای کی وویشل شي، چیرته چی د ترمونو منځښه د مطلقه ارزښت په دننه کی تغیر خوري او د هر یوه مطلقه ارزښت څرگندونه په داسی لاس ته راغلو برخه اینتر والونو کی د لیدلو وړ یوځای راټول کړي.

بیلګه ۱۴. ۱۳:

$$|1-x|-|2x+3|=1$$

د (۱۴. ۱۰) پسی لرو:

$$x < 1 \quad \text{د لپاره} \quad |1-x|=1-x$$

$$x > 1 \quad \text{د لپاره} \quad =-1+x$$

او) لاندې او پورته هم لومړی له کین وښی لو رته لوستل کیري

$$x > -3/2 \quad \text{د لپاره} \quad |2x+3|=2x+3$$

$$x < -3/2 \quad \text{د لپاره} \quad =-1x-3$$

یوځای راټول یا د گډ فرمولولو لاندې تر پام یا تر نظر

$$x < -3/2 \quad -3/2 < x < 1 \quad x > 1$$

$$|-1+x| \quad 1-x \quad 1-x \quad -1+x$$

$$|2x+3| \quad 2x+3 \quad -2x-3 \quad |2x+3|$$

له دې امله د برابرې اوبې کی درې حالتونه توپیروو. برسره پر دې باید کمیزه – یا منفي نخبه د دویم مطلقه ارزښت د مخه په پام کی ونیول شي: لمړی حالت:

$$x \in (-\infty, -3/2)$$

$$1-x-(-2x-3)=1 \Leftrightarrow x+4=1 \Leftrightarrow x=-3 \in (-\infty, -3/2) \Rightarrow x_1 = -3$$

دم حالت:

$$x \in [-3/2, 1]$$

$$1-x-(2x+3)=1 \Leftrightarrow -3x-2=1 \Leftrightarrow x=-1 \in (-\infty, -3/2) \Rightarrow x_2 = -1$$

دریم حالت:

$$x \in (1, \infty)$$

$$-1+x-(2x+3)=1 \Leftrightarrow -x-4=1 \Leftrightarrow x=-5 \notin (1, \infty)$$

په وروستی حالت کی شمیرل شوی ارزښت د نیونی سره په څټ یا تضادکی دی، چی  $x^3 = -5$

یوځای ښکارندوبله اوبې دی) دا په دې مانا چی یوځای د اوبې په څیر یا - غونډې ښکاریري).

$$L = \{-3, -1\}$$

د ښکارندوبله اوبې منځ ته راتگ کیدی شي، چی د گراف اوبې – یا حللارې له لارې څرگند

شي. د کين اړخ يا لور مطلقه ارزښت خپلواک يا ازاد ښودل کيدی شی چې ټوټه ټوټه د مخه تير شوي شميرنو په بوگونو حالتونو کې لاس ته راځي. له دې امله تعقيبيري:

$$d \quad x > -3/2 \quad \text{لپاره} \quad =x+4$$

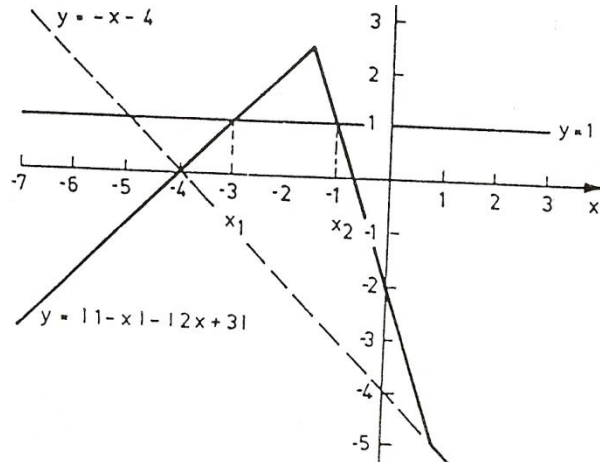
$$d \quad -2/3 < x < 1 \quad \text{لپاره} \quad |1-x| - |2x+3| = -3x-2$$

$$d \quad x > 1 \quad \text{لپاره} \quad =-x-4$$

ښی لور همغه - يا ثابت فنکشن  $y = 1$  دی. د مخه شميرل شوو اوبيونو پرتلي له پرتلي مقایسي څيره شته، خو زما په ستونځو گرانلوستونکی اوس بلد دي ۱۴. ۸ ښايي، چې دواړه کزي ريښتيا د  $x < -3/2$

او  $-3/2 < x < 1$  لپاره ريښتيا هره يوه بله يوځل پرې کوي، مگر د  $x > 1$  لپاره يو بل نه پرېکوي. په دريم حالت کې د اړوند کرښې ټوټې  $y = -x-4$  د اوږدوالی پرتلی راکوي، د کرښې  $y = 1$  د حل په څير حل د نيول شوي اينتراوال د باندې دی څيره ( شايد داڅيره هم څيره نه شي، که کرانو مينه والو داکار پخپله وکړ، نو نور به هم گټور به وي) ش. ۱۴. ۸

دلته هغه څيره بايد ريشی او يا راغلی وي، يا راغلي وی.



که د مطلقه ارزښت نخښی په يوه څلوري - يا مربع ترم کې له منځه وړل کيږي، نو کيدی شي چې د مخنځښي غوښتل شوي څيرنی چې په برخه ۱۴. ۱. ۲ کې تر څيرني نيول شوي د مربع نامساوات د حل متود گټه ترې واخستل شي. بيلگه ۱۴. ۵ دې مقایسه شي (

بيلگه ۱۴. ۱۴:

$$|x^2 - 6x + 5| = 3$$

$$x^2 - 6x + 5 > 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-5) > 0 \Leftrightarrow x < 1 \vee x > 5 \text{ د}$$

$$x^2 - 6x + 5 < 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-5) < 0 \Leftrightarrow 1 < x < 5 \text{ او}$$

سره لاس ته راځي

$$|x^2 - 6x + 5| = x^2 - 6x + 5 \text{ لپاره } x < 1 \vee x > 5 \text{ د (14,12)}$$

$$|x^2 - 6x + 5| = -x^2 + 6x - 5 \text{ لپاره } 1 < x < 5 \text{ د (14,12)}$$

لومړۍ حالت:  $x \in (-\infty, -1] \cup [5, \infty)$

$$x^2 - 6x + 5 = 3 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 2 = 0,$$

$$L \Rightarrow x_1 = 3 + \sqrt{7} = 5,65 \in [5, \infty), x_2 = 3 - \sqrt{7} = 0,35 \in (-\infty, 1]$$

دوم حالت:  $x \in (1, 5)$

$$-x^2 + 6x - 5 = 3 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 8 = 0,$$

$$L \Rightarrow x_3 = 4 \in (1, 5), x_4 = 2 \in (1, 5)$$

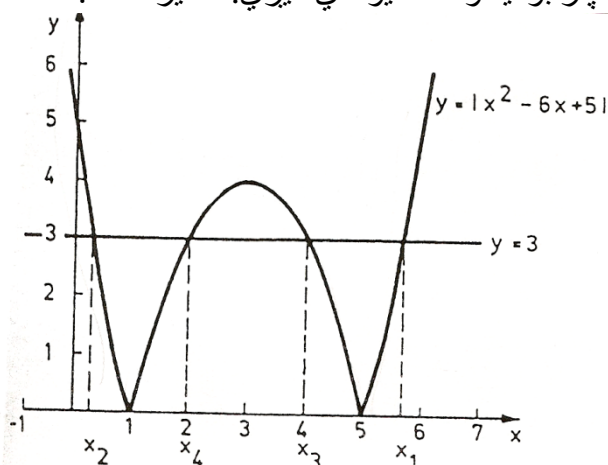
پام: که چیرې حل یا اوبی مونه وو لیکلی او L مو لیکلی وو، نو دا د اوبی په مانا دی

الماني Lösung ورته وايي چی لند په L لیکل کيږي .

$$L = \{3 - \sqrt{7}\}; 2; 4; 3; 3 + \sqrt{7}\}$$

خیره ۱۴. ۹ د گراف له لاری اوبی بنایي. کين لور  $y = |x^2 - 6x + 5|$

د (۱۴. ۱۲) له امله د پارابولیندو څخه یوځای کيږي. خیره ۱۴. ۹



خیره ۱۴. ۹

په ټوليزه توگه د يوه برابرون اوبي کي ، په کوم کي چي  $n$  مختلف ارزښتو ييني يا - افادي يعني  $|T_i(x)|$ ،  $i = 1, 2, \dots, n$  منځ ته راځي،  $2^n$  حالتونه يو له بل توپير کيري. دا د هغه کيدونکو کيدنو يا ممکن امکاناتو گڼون يا تعداد دی ، کوم چي موجود دی ، چي د ترم  $T_1(x)$  د تيب يا بنی وي چي يا

$T_1(x) > 0$  او يا  $T_1(x) < 0$  راکوي، يعني د دوه توکو د وارييشن امکاناتو ټولگي ته ( پرتله ۱۰ . ۴ . ۲ برخه) د ارزښت نخښي د له منځه وړلو له امله د ( ۱۴ ، ۱۰ ) قاعدې سره سم  $2^n$  برابرونونه منځ ته راځي، چي په ټوليزه يا عمومي توگه دي اوبيوني  $x_1, x_2, x_3, \dots$  ولرودی شي. يواځي دا بايد وازمايل شي ، چي ايا دا اوبي  $x_i$  پيلبرابرون پوره کوي که نه.

د دي ټوليزي تگلار پسي مور په بيلگي ۱۴ . ۱۳ کي د

$$T_1(x) = 1 - x, T_2(x) = (2x + 1)$$

سره، په لاندې  $4 = 2^2$  حالتونو باندې کار کوو:

$$1. T_1(x) \geq 0 \wedge T_2(x) \geq 0: (1 - x) - (2x + 3) = 1 \Rightarrow x_1 = -1.$$

$$2. T_1(x) \geq 0 \wedge T_2(x) < 0: (1 - x) + (2x + 3) = 1 \Rightarrow x_2 = -3.$$

$$3. T_1(x) < 0 \wedge T_2(x) \geq 0: -(1 - x) - (2x + 3) = 1 \Rightarrow x_3 = -5.$$

$$4. T_1(x) < 0 \wedge T_2(x) < 0: -(1 - x) + (2x + 3) = 1 \Rightarrow x_4 = -\frac{1}{3}.$$

پيلبرابرون د  $x_1 = 1, x_2 = -3$  لپاره پوره دي مگر د  $x_3$  او  $x_4$  لپاره پوره نه دي.

### ۱۴ . ۲ . ۳ نابرابرون دمطلقه ارزښت سره

که په نابرابرون ونو کي مطلقه ارزښتونه منځ ته راشي، نو داسي دي لکه په برخه ۱۴ . ۲ . ۲ کي د حالتونو توپير سره ونيسي يعني د کارپيل په وکړي، کوم چي بي له مطلقه ارزښتنڅخه د انځوروني لپاره ضرر يا غوښتونکي دي. د واريابلو يا اووښتونکو اړونده برخه چاپيريال په دننه بيا مختلف نابرابرون ۱۴ . ۱ سره سم حل کوو، د کوم سره چي بيرته د حالت توپير اړين دی

$$\text{بيلگه ۱۴ . ۱۵: } |7 - 3x| > 2$$

لومړی حالت:

$$7 - 3x \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 7/3]$$

$$7 - 3x \geq 2 \Leftrightarrow x \in (-\infty; 5/3]$$

$$L_1 = (-\infty, 7/3] \cap (-\infty, 5/3] = (-\infty, 5/3]$$

دویم حالت:

$$7 - 3x < 0 \Leftrightarrow x \in (7/3, \infty)$$

$$-7 + 3x \geq 2 \Leftrightarrow x \in [3, \infty)$$

$$L_2 = (7/3, \infty) \cap [3, \infty) = [3, \infty)$$

$$\Rightarrow$$

$$L = L_1 \cup L_2 = (-\infty, 5/3] \cup [3, \infty) = R \setminus (5/3, 3)$$

په پورته کې دې د غشي څوکه له پامه کې نه رارل کيږي:

$$\text{بیلگه ۱۴ . ۱۶ : } |x-5| < |x+1|$$

د یوگونو ترمونو انځورونه بي له ارزښتتخښی:

$$\text{د } x > 5 \text{ لپاره } |x-5| = x-5$$

$$\text{د } x < 5 \text{ لپاره } |x-5| = -x+5$$

او

$$\text{د } x \geq 1 \text{ لپاره } |x+1| = x+1$$

$$\text{د } x \leq -1 \text{ لپاره } |x+1| = -x-1$$

په یوه لید وړ توگه په لاندې توگه راټولیکي رابوځاي کيږي یا راغونډيږي :

$$x > -1 \quad -1 \leq x < 5 \quad x \geq 5$$

$$|x-5| = \begin{matrix} -x+5 & -x+5 & x-5 \end{matrix}$$

$$|x+1| = \begin{matrix} -x-1 & x+1 & x+1 \end{matrix}$$

لومړی حالت:  $x \in (-\infty, -1)$ 

$$|x-5| < |x+1| \Leftrightarrow -x+5 < -x-1 \Leftrightarrow 0 < -6$$

د هر  $x < -1$  نابرابرون یوې نارښتیا وینا ته لارښودوي، چې په دې حالت کې کوم اوبه

$$\text{وي، دا په دې مانا چې: } L1 = \emptyset$$

دوم حالات  $x \in [-1, 5)$ :

$$|x-5| < |x+1| \Leftrightarrow -x+5 < -x-1 \Leftrightarrow x > 2 \Leftrightarrow x \in [2, \infty)$$

$$L_2 = [-1, 5) \cap (2, 5) = (2, 5)$$

دریم حالت:  $x \in [5, \infty)$

$$|x-5| < |x+1| \Leftrightarrow x-5 < x+1 \Leftrightarrow 0 < 6$$

هر  $x \geq 5$  نابرابرون پوره کوي، دا په دې مانا چي:  $L_3 = [5, \infty)$

$$L = L_1 \cup L_2 \cup L_3 = (2, 5) \cup ([5, \infty)) = (2, \infty)$$

بیلگه ۱۴. ۱۷:  $|x^2-4x-21| < 24$

$$x^2-4x-21 \geq 0 \Leftrightarrow x < -3 \vee x \geq 7 \quad \text{د}$$

$$x^2-4x-21 < 0 \Leftrightarrow -3 < x < 7 \quad \text{او}$$

څخه لاس ته راځي:

$$|x^2-4x-21| = x^2-4x-21 \quad \text{د } x < -3 \vee x \geq 7 \text{ لپاره}$$

$$= -x^2+4x+21 \quad \text{د } -3 < x < 7 \text{ لپاره}$$

لومړی حالت:  $x \in (-\infty, -3] \cup [7, \infty)$

$$|x^2-4x-21| < 24 \Leftrightarrow x^2-4x-21 < 24 \Leftrightarrow x^2-4x-45 < 0$$

$$\Leftrightarrow -5 < x < 9 \Leftrightarrow$$

$$x \in (-5, 9)$$

$$L_1 = [(-\infty, -3] \cup [7, \infty)) \cap (-5, 9) = (-5, -3] \cup [7, 9)$$

دویم حالت:  $x \in (-3, 7)$

$$|x^2-4x-21| < 24 \Leftrightarrow -x^2+4x+21 < 24 \Leftrightarrow x^2-4x+3 > 0$$

$$\Leftrightarrow x < 1 \vee x > 3 \Leftrightarrow$$

$$x \in (-\infty, 1) \cup (3, \infty),$$

$$L_2 = (-3, 7) \cap [(-\infty, 1) \cup (3, \infty)) = (-3, 1) \cup (3, 7)$$

اوبیدیری:

$$L = L_1 \cup L_2 = (-5, 1) \cup (3, 9)$$

دا بیلگي د دې درس لپاره بسيا کوي، دا بيا دلته هم تکرار لیکم، که په کومه موضوع کي گرانو لوستونکو څه زیات غوښتل هغه هم په پام کي نیول کیري او کړی شو، چي په گډه هره موضوع و غزوو .

په لاندې کې به په يوه بيلگه کې داسې نامساوات وڅيړو، په کومه کې چې مجهوله په مطلقه ارزښت افاده شوي وي او هم مات لاندې کې منځ ته راشي.

$$\text{بيلگه } ۱۴ . ۱۸ : |1+2x| / (1-x) < 1, x \neq 1$$

د (۱۰، ۱۴) له مخې د مطلقه ارزښت له منځه وړلاو د مات لاندې سره د نابرابرون ځله ونه د (۲، ۱۴) او (۳، ۱۴) له مخې په هر وخت کې د همغه ترم مخنځېنه بايد په پام کې ونيول شي. باور لري يا صدق کوي:

$$د \quad x \geq -1/2 \quad \text{لپاره} \quad |1+2x| = 1+2x$$

$$د \quad x < -1/2 \quad \text{لپاره} \quad |1+2x| = -1-2x$$

او

$$د \quad x < 1 \quad \text{لپاره} \quad (1-x) > 0$$

$$د \quad x > 1 \quad \text{لپاره} \quad (1-x) < 0$$

دلته هم په همغه دوه تيريدونکو ځايونو کې گڼور انګه سره بيله يا توتې کيږي، داسې چې په راتلونکو گڼلو کې يا ځانيزه توګه درې حالتونه يو له بل توپيريږي.

$$x > 1 \quad -1 \leq x < 1 \quad x < -1/2$$

$$|1+2x| \quad -1-2x > \quad 1+2x \quad 1+2x$$

$$=1-x \quad >0 \quad >0 \quad <0$$

$$\text{لومړۍ حالت:} \quad x \in (-\infty, -1/2)$$

$$-1-2x \leq 1-x \Leftrightarrow x \geq -2 \Leftrightarrow$$

$$x \in [-2, \infty)$$

$$L_1 = (-\infty, -1/2) \cap [-2, \infty) = [-2, -1/2)$$

$$\text{دويم حالت} \quad x \in [-1/2, 1)$$

$$1+2x < 1-x \Leftrightarrow x < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 0)$$

$$L_2 = [-1/2, 1) \cap (-\infty, 0) = [-1/2, 0)$$

درېم حالت:



$$x \in (1, \infty)$$

$$1 + 2x \geq 1 - x \Leftrightarrow x \geq 0 \Leftrightarrow x \in [0, \infty)$$

$$L_3 = (1, \infty) \cap [0, \infty) = (1, \infty)$$

د حلونو سټ (اوبیدیری):

$$L = L_1 \cup L_2 \cup L_3 = [-2; 0] \cup (1, \infty)$$

د دوه ناپېژندونکو سره د یوه نامساوات ارزښت حدیروي پیدا کولو لپاره هم باید لمری ارزښت له منځه ولاړ شي. مساوات (۱۴ . ۱۰) ته ورته د واریابلو یا اوبنتونکو  $x$  او  $y$  سره، د یوه لاینی ترم ارزښت سره، باور لري:

$$(14, 13) \text{ د } ax + by + c \geq 0 \text{ لپاره } = ax + by + c$$

$$(14, 13) \text{ د } ax + by + c < 0 \text{ لپاره } |ax + by + c| = -(ax + by + c)$$

د نیونو یا فرضیو سره  $a \neq 0 \vee b \neq 0$

دواړه بنی لیکل شوي شرطونه په برخه ۱۴ . ۱ . ۴ کی د کارول شوي بنی (۱۴ . ۹) نابرابرون

هم کارول شوي. له دې امله باید یو نامساوات د ارزښت افادي (۱۴ . ۹) سره، د کرښی  $ax + by + c = 0$  له لارې ورکړ شوي، یو له بل بیلی یا جدا، د  $x, y$ -هواری نیمه هواری یو له بل بیلی اوبی کړی شي.

بیلگه ۱۴ . ۱۹:

$$|x - y + 1| > x - 2x - 4$$

د (۱۴ . ۱۳) اړیکو باور لري:

$$\text{د } -x - y + 1 \geq 0 \text{ لپاره } |x - y + 1| = -x - y + 1$$

$$\text{د } x - y + 1 < 0 \text{ لپاره } = x + y - 1$$

لومړی حالت:  $-x - y + 1 > 0$

$$|x - y + 1| > x - 2y - 4 \Leftrightarrow -x - y + 1 > x - 2y - 4 \Leftrightarrow -2x + y + 5 > 0$$

$$L1 = \{(x, y) | -x - y + 1 \geq 0, -2x + y + 5 > 0\}$$

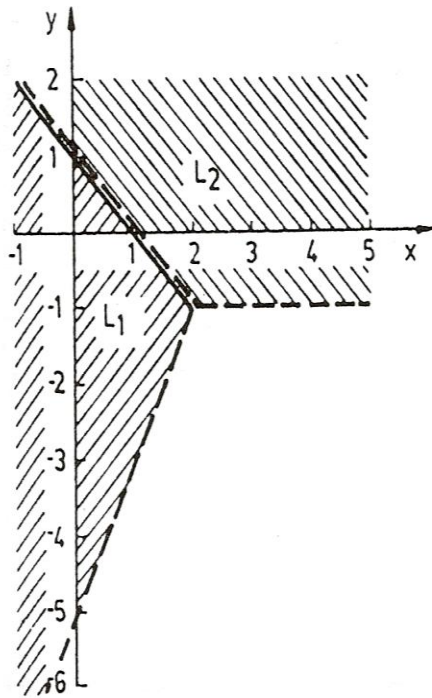
دوم حالت:  $x - y + 1 < 0$

$$|x - y + 1| > x - 2y - 4 \Leftrightarrow x + y - 1 > x - 2y - 4 \Leftrightarrow 3y + 3 > 0 \Leftrightarrow y < -1$$

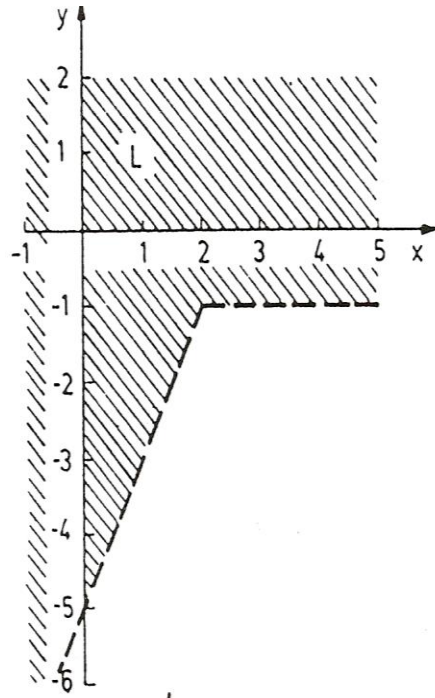
$$L2 = \{(x,y) | -x-y+1 < 0, y > -1\}$$

له دې سره  $L1$  او  $L2$  د اوبیدیرۍ دوه نابرابرونونو غوڅیږی ده او کیدی شي، لکه څنگه یو نابرابرون د یوه گراف سره انځور شي ( څیره دلته هم په پوښتنه کې ده ۱۴ . ۱۰ الف ) اوبیدیرۍ بیرته د ورکړ شوو نابرابرونونو برخ اوبیدیر یو تولندیږی ده ( څیره ۱۴ . ۱۰ ب ) دلته هم همغه د مخه پام لرنه ) .

که په یوه نابرابرون کې دوه ارزښت افادې یا - ویني د ( ۱۴ . ۱۳ ) بنی رامنځ ته شي، نو د ارزښت تر پام نیولو سره څلور حالتونه یو له بل توپیر کیدی شي.



a)



b)

Bild 14.10 څیره

لاندې نامساواتو حلېږئ پيدا كړئ

1. a)  $8x - 3 < 2x + 9$       b)  $5 - 7x \leq 3x - 10$   
 c)  $\frac{x}{2} - \frac{2}{3} > \frac{1}{2} + \frac{x}{9}$       d)  $3(3x - 2) \geq 4(3 - 2x)$   
 e)  $\frac{8x - 5}{5} \leq \frac{2x + 5}{3}$       f)  $\frac{3}{4} - \frac{2}{3}x > \frac{5}{4}x + \frac{1}{6}$   
 g)  $\frac{8}{9} + 6x \geq 2(\frac{5}{6} + 3x)$       h)  $\frac{1}{3}(\frac{x}{8} - 6) < \frac{x}{6} - \frac{x}{8} + 1$
2. a)  $(3x + 1)(2x - 1) < (5x - 3)(2x - 1)$   
 b)  $(8x - 9)(3x + 2) \geq (2 + 7x)(2 + 3x)$   
 c)  $(7x - 3)(5 - 7x) > (3 - 7x)(5x + 3)$   
 d)  $(5 + 2x)(7 - 5x) \leq (10 + 4x)(2 - 3x)$   
 e)  $x^2 - x - 6 \leq 2x + 4$       f)  $x^2 + 5x - 6 > 3 - 3x$   
 g)  $x^2 + 3x \geq -2x - 6$       h)  $x^2 - 4x + 4 < 4x - 8$
3. a)  $\frac{3}{2x - 4} \leq 2$       b)  $\frac{3x - 4}{2 - 3x} \geq 4$   
 c)  $\frac{2x - 2}{2x + 2} < 2$       d)  $\frac{5x + 3}{x} < -2$   
 e)  $\frac{4x + 1}{3x - 2} > 5$       f)  $\frac{9 - 3x}{x - 3} > -3$   
 g)  $\frac{4x + 6}{2x + 3} < 3$       h)  $\frac{3(4x - 1)}{x - 1} \geq 12 - \frac{2(4x - 5)}{x - 1}$
4. a)  $\frac{3}{4x - 4} \leq \frac{2}{x - 6}$       b)  $\frac{1}{5 - 3x} > \frac{1}{5x + 4}$   
 c)  $\frac{x + 1}{x - 3} < \frac{x - 1}{x + 2}$       d)  $\frac{4x - 3}{2x + 1} \leq \frac{2x + 3}{x + 2}$   
 e)  $\frac{2x - 1}{2x + 1} + \frac{3x + 1}{x - 2} > 4$       f)  $\frac{x - 3}{1 - 6x} - \frac{2x + 1}{4x + 3} \geq -\frac{2}{3}$   
 g)  $\frac{2x + 1}{2x - 2} + \frac{2x - 3}{3x - 3} \geq 1$       h)  $\frac{2 - 5x}{3 - x} - \frac{2 - 6x}{1 - 3x} < \frac{3}{8} \cdot 27^{\log_3 2}$
5. a)  $(2x - 3)(3x - 2) < 0$       b)  $(x + 3)(7 - x) \leq 0$   
 c)  $x^2 + 4x + 3 \geq 0$       d)  $x^2 - 8x + 7 \leq 0$   
 e)  $x^2 + 4x + 5 < 0$       f)  $x^2 - 6x + 10 > 0$

- g)  $x^2 - 2x + 1 > \frac{5}{2}x - 1$       h)  $2x^2 - 3x - 3 < 3(x - 1)$
6. a)  $(x^2 - 6x + 5)(x^2 + 1) < 0$       b)  $(x^2 - 4x + 5)(x^2 + 1) \leq 0$   
 c)  $(x^2 - 2x + 2)(x^2 + 4) > 0$       d)  $(9 - x^2)(x^2 + 3x + 2) \geq 0$   
 e)  $(x^2 + 4x - 5)(x^2 - 4) > 0$       f)  $2x^4 - x^3 + 10x^2 - 5x > 0$   
 g)  $-x^3 - 3x^2 + 16x + 48 \leq 0$       h)  $\frac{x^3}{\sqrt{2}} - \sqrt{2}x^2 - \frac{\sqrt{2}}{2}x + \sqrt{2} < 0$
7. a)  $\frac{x+4}{x+3} > 0$       b)  $\frac{x+3}{x-7} < 0$   
 c)  $\frac{2x+3}{3x-4} \leq 0$       d)  $\frac{x-2}{5x+1} \geq 0$   
 e)  $\frac{6+9x}{4+6x} < 0$       f)  $\frac{2x-1}{8x-4} > 0$   
 g)  $\frac{3x-12}{x^2-4x} \geq 0$       h)  $\frac{x^2-25}{2x+10} \leq 0$
8. a)  $x - 8 + \frac{7}{x} < 0$       b)  $x + 3 - \frac{4}{x+3} > 0$   
 c)  $8(x-2) \geq \frac{20}{x+1} + 3(x-7)$       d)  $\frac{3x-24}{4} - (2x-6) > -\frac{5}{x}$
- د لاندې نامساواتسيستمونو حل دېرې وټاکئ
9. a)  $2 + x \geq 2x - 7$       b)  $x + 6 < 14 - 3x$   
 $5(x - 3) \geq 2(x - 3)$        $6 + 7x \geq 3x + 5$   
 c)  $\frac{2}{3} - \frac{x}{2} > \frac{x}{3} + \frac{1}{6}$       d)  $x + \frac{1}{3} \leq 2x - \frac{7}{6}$   
 $\frac{1}{2} + \frac{3}{4}x < \frac{8-x}{3}$        $5(x - \frac{3}{2}) \leq 2x - 3$
10. a)  $x^2 - 3x < 0$       b)  $x^2 + 6x + 8 < 0$   
 $2(x + 2) < 4x - 1$        $2(x + 2) > x + 3$   
 c)  $x^2 - 9 < 0$       d)  $x^2 - 3x + 3 > 0$   
 $x + 2 > 2(x - 1)$        $4(x - 1) < 2(x + 1)$
11. a)  $x^2 - 4x - 5 \leq 0$       b)  $x^2 + 2x - 8 < 0$   
 $x^2 + 6x - 16 < 0$        $x^2 - 3x - 4 > 0$   
 c)  $x^2 - 5x > 0$       d)  $x^2 - 6x + 5 < 0$   
 $x^2 - 9 > 0$        $x^2 + 8x + 15 < 0$

12. a)  $3x + 2 > 2x + 1 > 3(x - 4)$  b)  $-1 < \frac{7x-3}{8x-5} < 1$   
 c)  $2 < \frac{5x+1}{2x-1} < 5$  d)  $1 < \frac{x^2+4x+5}{x+1} < 4$
13. a)  $3 - x < 2 - 4x$  b)  $x+5 > \frac{7}{2}x + \frac{3}{2}$   
 $x+3 < \frac{1}{2}(x+1)$   $4(x-1) < 13 - \frac{1}{4}x$   
 $\frac{x}{2} > x + \frac{1}{2}$   $2x - 1 > x + 6$

د لاندې نامساواتو او همداسې د نامساوات سیستمونو حادېرې په کار تیزې کواوردینات -  
 یاپروتولار سیستم کې گرافیکي انځور کړی.

14. a)  $y \geq -\frac{3}{2}x + 3$  b)  $y < -\frac{2}{3}x + 2$   
 c)  $x < 2y + 2$  d)  $x > -y + 3$   
 e)  $4x - 5y > 12$  f)  $-3x - 8y \leq 24$   
 g)  $2(y - 3) \leq 6(x - 1)$  h)  $5x - y + 2 > 3y - 3x - 10$
15. a)  $2x + 3y > -6$  b)  $3x - y > 3$   
 $x - y < 2$   $x + y > 4$   
 c)  $x > 1$  d)  $x - 4y - 6 \leq 0$   
 $x + 2y < 4$   $2x + y - 3 \leq 0$   
 $y + 3 > x$   $y - 5 \leq 0$
16. a)  $-2 < x + y < 2$  b)  $x > 2$   
 $-2 < x - y < 2$   $-3 < y < 2 + x$   
 $x + y < 5$   
 c)  $x^2 - y^2 \leq 0$  d)  $(2x + y + 1)(3y - x - 1) > 0$

د لاندې نامساواتو حادېرې د شمیرلو او همداسې گرافیکي لارې پیدا کړی.

17. a)  $|x - 3| = 5$  b)  $|x + 2| = 7$   
 c)  $|1 - \frac{x}{2}| = x + \frac{5}{2}$  d)  $|x + 3| = |3x - 4|$   
 e)  $|x - 4| = |2x + 3|$  f)  $|9 - 3x| - |2x - 1| = 4 - 2x$   
 g)  $|2 - 3x| - |x + 1| + |2x + 2| = 3$  h)  $|x - 3| - |3x - 4| + |2x + 1| = 6$
18. a)  $|x^2 - 2x - 8| = 7$  b)  $|8 - 2x^2| = 6$

c)  $|2x - x^2| = 8$

d)  $|x^2 + 6x + 5| = 5$

e)  $|x^2 - 4x + 3| = 1$

f)  $|x^2 - 2x - 3| = 1$

g)  $|4x^2 + 4x + 4| = 3$

h)  $|x^2 - 3x + 7| = 4$

19. a)  $\left| \frac{2x+4}{x-3} \right| = 1$

b)  $\left| \frac{2x-4}{x+3} \right| = 2$

د لاندې نامساواتو حلډبرې پیدا کړئ

20. a)  $|x - 2| < 3$

b)  $|2 - 4x| \geq 1$

c)  $2 - |1 - x| \geq 1 + x$

d)  $|2x - 3| < x + 3$

e)  $|3x - 5| > 2|x + 2|$

f)  $|3x + 3| \geq \left| \frac{1}{2}x - 1 \right|$

g)  $|x - 4| + |2 - x| \leq 2$

h)  $|3 - x| < 2 - |x - 5|$

21. a)  $|x^2 + 2x - 3| \leq 12$

b)  $|x^2 - 6x + 8| \geq 3$

c)  $|x^2 + 4x - 5| > 2$

d)  $|15 + 2x - x^2| < 7$

e)  $|x^2 - 6x + 11| < 1$

f)  $|x^2 + 4x + 7| > 2$

g)  $|3 + 6x + 3x^2| > 0$

h)  $|x^2 + 4x| < 4$

22. a)  $\left| \frac{x+3}{1-x} \right| > 3$

b)  $\left| \frac{1-4x}{2-x} \right| > 4$

c)  $\frac{2x+3}{|x+4|} \leq 1$

d)  $\frac{\frac{2}{3}x - \frac{3}{2}}{\left| \frac{3}{4} + \frac{x}{2} \right|} \leq \frac{5}{6}$

e)  $\frac{|3x-2|}{x+2} \geq 2$

f)  $\frac{|x-1|}{2x+2} \geq 1$

د

لاندې نامساواتو حلډبرې په یوه په یوه کواورډیناتسیستم کې انځور کړئ او انځور یې

وکارئ

23. a)  $x + y < |3x + 2|$

b)  $y + |x + 2| \leq 4$

c)  $x + |y - 2| < 3$

d)  $|2x + y - 3| \geq 2y - 3x + 4$

e)  $|x + 3| + |y - 5| \leq 3$

f)  $|x + y - 2| > |y - x + 1|$

g)  $|x + y + 1| \leq |x - y - 1|$

h)  $|x - y| > |x - 2y - 2|$

## ۱۵ فنکشنونه (بلواک یا تابع)

۱۵ . ۱ د فنکشن کلیمه او د فنکشن انځورونه:

غوږم چی ددی برخی په پیل کی دی کلیمی ته د لوستونکو پام راوگرځوم: د فنکشن کلیمه کله د یواځنی څیرونی، چی په هندسه کی خورا ډیره کارول کیږي یا استعمالیږي ، کله د تابع(بلواک) او بیا زیاته د فنکشن په نامه ځمور په دې کار کی بلل شوي چی مور ورسره تراوسه د تابع تر نامه لاندې هم بلد یو، ځما په اند یا فکر که دا مور بلواک وبولو، نو هدفمند به مو نومولی وي. په لاندې کي به وگور چی خپلواکی او بلواکی ناپیوندونکی ځمور د څیرلو متن جوړوی

پیژند ۱۵ . ۱:

د یوې ریښلی واریابلی ریښل ارزښته فنکشن ( لند: فنکشن ) د ریښلو گڼونو ډیری باندې ، د یوې ډیری  $D \subseteq R$  یوه یواځنی څیرونه ده.  $D$  دپیژند ډیری نومیري .

د ټولو ارزښتونو ډیری چي  $y$  یی د ځان لپاره غوره کولی شي، که  $x$  د پیژندډیری یا تعریف ډیری په دننه کی وځغلي، د ارزښت ډیری  $W$  بلل کیږي . د یوې قانونمدی  $f$  له مخی هر  $x \in M$  یواځني یوه  $y \in W$  باندې تنظیمیږي:

$$y = f(x)$$

اوس نو  $x$  خپلواک واریابل یا اووښتونی یا مجهوله بلل کیږي یا نومیري او  $y$  بلواک واریابل یا اووښتونی بلل کیږي

د فنکشن مختلف انځورډولونو ترمنځ سرې توپيروي. د فنکشن «کلیمه انځورونه» یوه په خوله ویونکی یا یو اعلانونکی، له ماتماتيکي یا شمیریز سومبولیک څخه تیریدونکی یا په شمیریز سومبولیک صرف نظر کوونکی، مگر ددې لپاره یو پیچلی، د تشریح شکل دی، چی په لاندې کي به ورسره بلد شو.

بیلگه ۱۵. ۱: هر رییل گن د همغه رییلگن په نیم ور زیات ۱ باندې تنظیمیدل.

بیلگه ۱۵. ۲: هر یو منفي گن به د هغه په مطلقه ارزښت او هر یو مثبت گن او صفر به د هغه په مربع تنظیم شي.

د شمیرپوهی سومبولونو تر استعمال لاندې، تحلیلي (شننیزه) انځورونه د بلواک یا فنکشن تشریح ده. دلته  $x$  او  $y$  د نورو رییلو گنونو سره د بنسټیزو کارونو یا عملیو، زیاتون، کمون، ځل، ویش، او د بنسټیزو فنکشنونو له لارې تړل دي (پرتله برخه ۱۵ (۴).

بیلگی ۱۵. ۱ ته:  $y=(x/2)+1, D=R, W=R$

بیلگی ۱۵. ۲ ته:  $y=|x|$  د  $x < 0$  لپاره

دلته  $D=R, W = [0, \infty)$  د  $x > 0$  لپاره  $y=x^2$

پام دې وي چی په داسی حالت کي له کین و ښي لور ته یا گډوډلوستل کیری یعنی داسی لولو:  $y$  د  $x$  مطلقه ارزښت سره مساوي دی، که چیرې  $x$  له ۰ کوچنی وي. داسی لیکنو ته دی گران لوستونکی پوره پام ولري او فکر کوم چی له اشتباه سره به نه مخامخ کیرو). تحلیلي (شننیزه) انځورونه اکسپلیخیت (واضح) روښانه و څرگند)  $explicit$  نومیري، که د فنکشن برابر و، لکه په بیلگو ۱۵، ۱ او ۱۵. ۲ چی په یوه د  $y$  په لور حلکیدونکي فورم مخ ته پروت وي:  $y=f(x)$  که چیرې داسی نه وي نو د تحلیلي - یا شننیزې انځوروني شکل  $F(x,y)=0$  دی او فنکشن ایمپلیخیت ( ورسره ځای شوي یا وراسره تړلی  $implicit$ ) بلل کیری یا نومیری. د بیلگی په توگه به  $2y-x-1=0$   $D=R, W=R$  فنکشن د بیلگی ۱۵. ۱ یو ایمپلیخیت انځورونه وی. دیوه فنکشن نه هره ایمپلیخیت شننیزه بڼه ( ایمپلیخیت تحلیلي فورم) کیدی شي په

اکسپلیخیت شننیزه یا سپرنیزه بڼه (تحلیلي فورم) وارول شي. د بیلگی په توگه: که  $x + y + y^5 - 1 = 0$  وي، نو دا د  $y$  په لور اکسپلیخیت حل کیدونکی نه دی.



د یو فنکشن تحلیلي یا شننيزې انځورونې ځانگړې بڼه پارامتری څرگندونه ده. دلته تنظیم د یوه مرستندوي اووښتونې یا واریابلی  $t$ ، دا په نامه پارامتر، له لاري لارښودیري. هر پارامتر ( له یوه پارامتر ساحی څخه )  
 $x = \varphi(t)$  ,  $y = \Psi(t)$   
 په یو ارزښتجوړي  $x,y$  تنظیمیري.

بیلگه ۱۵ . ۱ ته:  $x=2t, y=t+1; -oe < t < oe$  به یوه پارامتری انځورونه وی او  $x = t, y = t/2 + 1$  به یوه بله پارامتری انځورونه وي. زیات وخت فنکشنونه د جدول په څیر ورکول کیري بیلگي ۱۵ . ۱ ته:

X .....-2 -1 0 1 2 ....

Y .....2 0,5 1 1,5 2 .....

بیلگي ۱۵ ، ۲ ته:

X....-3 2 -1 0 1 2 3 ...

Y....3 2 1 0 1 4 9 ...

<p>Bild 15.1 څیره</p>	<p>Bild 15.2 څیره</p>	<p>د فنکشن گرافيکی انځورونه (د یوې توپې) په <math>x,y</math> کوآوردینات سیستم کی د یوې کزې له لاري، د هغه فنکشن انځورونې څخه عبارت ده، چی د واریابلو</p>
-----------------------	-----------------------	--

یا اووښتونو جوړي د  $x,y$  - هواره یا سطحه کی یواځني او بواځني ټکي باندي تنظیمیري . څیره ۱۵ . ۱ او ۱۵ . ۲ ( بیلگي ۱۵ . ۲ ته بیلگي ۱۵ . ۱ ته

## ۱۵ . ۲ د فنکشنونو- یا بلواکو خویونه

پېژند ۱۵ . ۲:  $y = f(x)$ 

په اینتروال  $[a, b]$  کی هلته او هلته یا ټیک هلته مونوتون جگیدونکی (مونوتون لویدونکی) دی، چیرته چی ددوه په زړه پورې ارزښتونو  $x \in [a, b] \wedge y \in [a, b]$  لپاره  $x_1 < x_2$  سره باور ولري:

$$f(x_1) \leq f(x_2) \quad (f(x_1) > f(x_2))$$

که د برابر و نښه باور ونه لري نو له کره یا کلکی مونوتوني غږیرو.

و بیلگی ۱۵ . ۱ ته:  $y = (1/2)x + 1$  په  $D = R$  کی کلک مونوتون دی

و بیلگی ۱۵ . ۲ ته:  $y = |x|$  د  $x < 0$  لپاره

او  $y = x^2$  د  $x > 0$  لپاره

په اینتروال  $(0, \infty)$  کی مونوتون ټیټېدونکی یا -لویدونکی او په اینتروال  $(0, \infty)$  کی مونوتون جگیدونکی دی

پېژند یا تعریف ۱۵ . ۳:

په یوه اینتروال  $[-a, a]$  کی یو تعریف شوی فنکشن  $y = f(x)$  هلته او هلته جوړه (جفت) یا سیومتریک  $\text{symetrisch}$ ، (ناجوړه (طاق) یا نا- یا انتیسیومتریک  $\text{antisymetrisch}$  بلل کیږي چی باوري وي

$$f(-x) = f(x) \quad (f(-x) = -f(x))$$

د جوړه فنکشنونو څیری اکسیال یا محوري سیومتریک و  $y$  - محور ته ځغلي (دلته هم څیره شته، نو تل به همغه څه لیکم؟ ۱۵ . ۳)، طاق فنکشنونه و سرچینی ته منځني یا مرکزي سیومتریک ځغلي (بیا هم څیره او ۰۰۰۰ ش ۱۵ . ۴)

بیلگه ۱۵ . ۳:

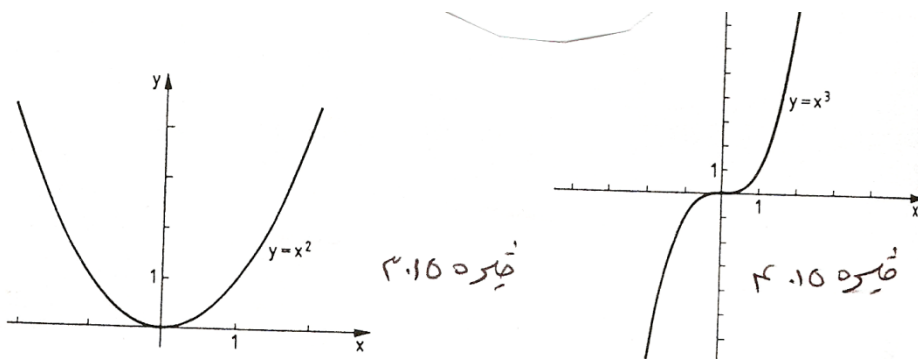
فنکشن  $y = x^2, D = R$   
یو جوړه یا جفت فنکشن دی:

$$(-x)^2 = x^2$$

بیلگه ۱۵ . ۴:

فنکشن  $y = x^3, D = R$   
یو ناجوړه یا طاق فنکشن دی:

$$(-x^3) = -x^3$$



د بیلگي ۱. ۱۵، او، ۲. ۱۵ فنکشنونه نه جوړه یا جفت او نه ناجوړه یا طاق دي

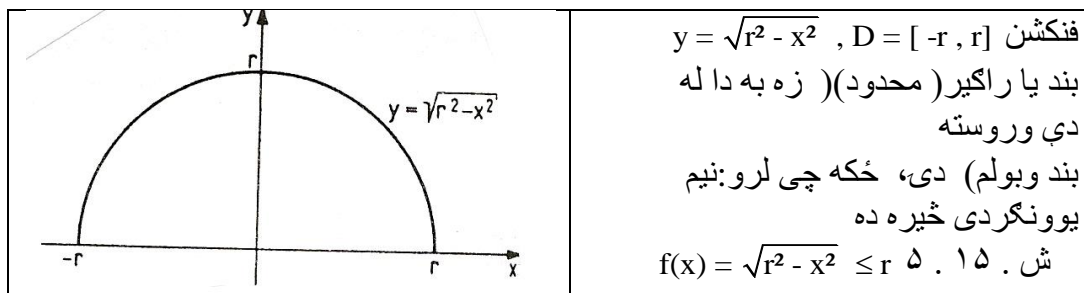
پیژند ۴. ۱۵:

$y = f(x)$  تیک هلته په  $D$  (پیژنددیری ده) بند یا رابند (محدود) بلل کیږي که

یو  $k > 0$  داسی شته وي چې دا باور ولري:

$$|f(x)| < k \quad \forall x \in D$$

بیلگه ۵. ۱۵:



پیژند ۵. ۱۵:

$y = f(x)$  پریودیکی (دورانی یا بیرته-یا تل بیرته راگرځیدونکی periodical بلل

کیږي د دوران یا راگرځیدونی  $p$  سره، که باور ولري:

$$f(x + p) = f(x)$$

د دورانی یا تل راگرځیدونکو (پریودیکی) فنکشنونو تیوبیکی بیلگي تریگونومتريکی

فنکشنونه دي (پرتله برخه ۱۵. ۳)

بیژند ۱۵ . ۶ :

تول  $x \in D$  د  $f(x)=0$  سره، د فنکشن  $f(x)$  صفر خایونه بلل کیري .

د فنکشن صفر خایونه د مساوات  $f(x) = 0$  د حل له لارې پیدا کیري. داخلونه د  $x$ - محور سره د فنکشن کبري د غوڅتکو  $x$  - ارزښتونه دي.

بیلگی ۱۵ . اته:

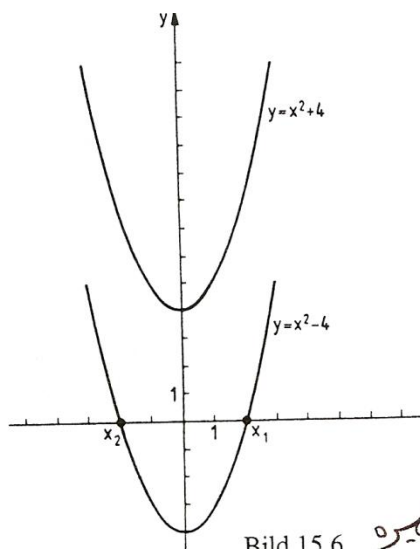
د فنکشن  $y = 1/2 x + 1$  صفر خایونه د مساوات  $x/2 + 1 = 0$  اوبی  $x = -2$  دی (خیره ۱۵ . ۱)

بیلگه ۱۵ . ۶:

فنکشن  $y = x^2 - 4$  دوه صفر خایونه لري:

$$x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 2, x_2 = -2$$

فنکشن  $y = x^2 + 4$  صفر خایونه نه لري. (بیا هم خیره ۱۵ . ۶)



پېژند ۱۵ . ۷:

$$x \in D, y \in W \quad y = f(x),$$

یو یواځنی «یا یواځنی او یواځنی بلل کیري، که هر یو  $y \in W$  د یوه  $x \in D$  په واک کی وي یا هر یو  $y \in W$  ته یوه  $x \in D$  څیره شوی وي، د کوم لپاره چی باور ولري: ( $y = f(x)$ ) یو یو یواځنی یا یواځنی او یواځنی فنکشن په څټکیدونکی دی، دا په دی مانا چي دا یو فنکشن ( $x = g(y)$ ) تعریفوي، یعنی په څټ یا چپه فنکشن. که دلته د اوو بڼتونو یا واریابلو د نڅبنی (نخونی) سره بدلی شي، نو د په څټ فنکشن په توگه لرو  $y = g(x)$  دا د فنکشن روځنی یا وسره بده یا که غواړی مروجه څیره ده، چی  $x$  خپلواک او  $y$  بلواک، دلته د  $x$  په واک کی واریابل یا مجهولی یا ناپیزندونکی دي د  $y = f(x)$  په څټ یا برعکس فنکشن لپاره داسی هم لیکلی شو:  $y = f^{-1}(x)$

فنکشن  $y = x$  د خپل په څټ فنکشن سره کټمت (-ورته) *identic* دی. د په څټ یا برعکس فنکشن  $y = f^{-1}(x)$  کرافیکی څیره  $y = x$  په کرښه د  $y = f(x)$  (هندارونه) یعنی په هنداره کی څیرونه او لنډی: هندارونه) ده.

بیلگی ۱۵، ۱ ته:

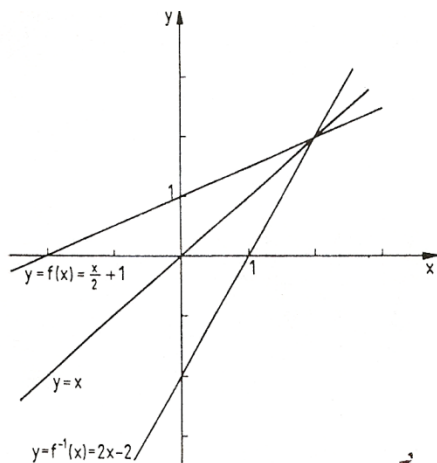


Bild 15.7a

څایره

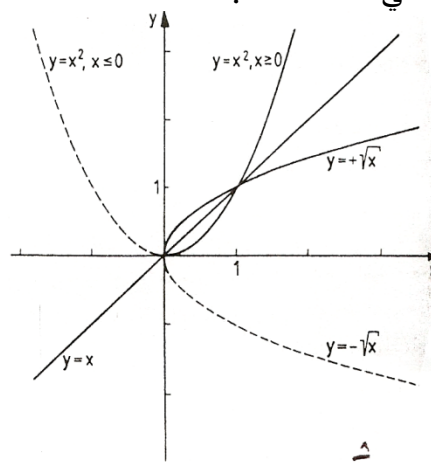


Bild 15.7b

څایره

د فنکشن  $y = f(x) = x/2 + 1$  چپه یا په څټ فنکشن داسی دی

$$y = f^{-1}(x) = 2x - 2$$

سری  $y = x/2 + 1$  په لور اوبی کوي:  $x = 2y - 2$  او بالاخره  $x$  او  $y$  سره بدلوي .  
(څیره. ۱۵ ۷ الف)

بیلگي ۱۵ . ۳ ته : فنکشن

$$x \in D \quad y = x^2 ,$$

څیره ش ۱۵ . ۳) په څټکیدونکی دي یا په څټکیدونکی نه دی.

هر  $y \in W = [0, \infty)$  پورې دوه  $x \in D = [-\infty, \infty)$  اړه لري، یعنی  $x = +y$  او  $x = -y$  مگر  $y = x^2$  کلک مونوتون جگیدونکی دی ( او په دې ډول یواځنی او یواځنی ).

د  $x \geq 0$  لپاره او کلک مونوتون لویدونکی د  $x < 0$  لپاره.  $y = x^2, x \geq 0$  ته چپه- یا په څټ فنکشن  $y = +x$  دی، او  $y = x^2, x < 0$  ته چپه- یا په څټ فنکشن  $y = -x$  دی. ( څیره ۱۵ . ۷ ب ).

په ټولیزه (عمومي) توگه لاندې جمله باور لري

جمله ۱۵ . ۱ :

که  $y = f(x)$  کلک مونوتون جگیدونکی ( لویدونکی ) وي، نو په څټ فنکشن  $y = f^{-1}(x)$  موجود دی او دا هم کلک مونوتون جگیدونکی ( لویدونکی ) دی.

۱۵ . ۳ . بنسټیز فنکشنونه

په دې برخه کې بنسټیز فنکشنونه تعریفیږي. دا ټول راشنل فنکشنونه، مات راشنل فنکشنونه، پوتنڅ یا په توان فنکشنونه، ایکسپوننشل فنکشنونه او لوگارېتم فنکشنونه، تریگونومتری فنکشنونه او څیکلومتری فنکشنونه دي. دا بنسټیز فنکشنونه به د خپلو ځانگړې ډوله خویونو له مخی وڅیرل شي. په برخه ۱۵ . ۴ که به د فنکشن فنکشنونه (ځنځیری - یا ترلي فنکشنونه) وڅیرل شي. د فنکشنونو څیرل به د هغو ځانگړې ډوله یا کرکترېستيکي خویونو له مخی هلته هم دوام ومومي، که د ډیفرنشل شمیرنی کومکي مواد مو مخ ته پراته وي ( برخه ۲۰ . ۴ )

پیژند ۱۵ . ۸ :

فنکشن

$$y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0, n \in \mathbb{N}; a_i \in \mathbb{R}, a_n \neq 0 \quad (15.1)$$

د ټولو  $x \in \mathbb{R}$  لپاره تعريف دی او  $n$  - مه درجه ټولریشن فنکشن نوميری. دې ډول فنکشنونو ته پولینوم فنکشنونه (یا لنډ: پولینوم) هم ويل کيږي

يو ساده ټول ریشنل - ۱ - مه درجه ( $n = 1$ ) یا لاینی فنکشن په لاندې ډول دی:

$$y = mx + n \quad (15.2)$$

دلته  $m$  او  $n$  په (۱۵.۱) کې پارامترونو  $a_1$  او  $a_0$  په مانا دي. د لاینی فنکشنونو

څیره (گراف) یوه کرښه ده چې په  $y = n$  کې  $y$  - محور غوڅوي

$$m = \tan \alpha \quad \text{او جگوالی } (x = 0)$$

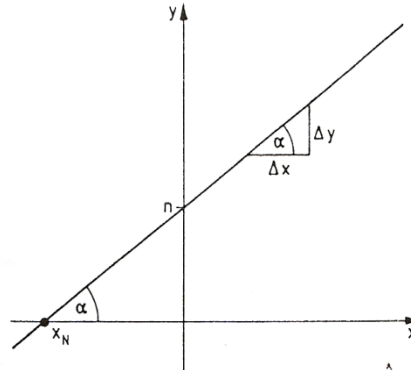


Bild 15.8

څیره

لري (څېره پورته . ۱۵ . ۸ ) جگوالی د  $y$  - ارزښت د تغیر د  $x$  - ارزښت تغیر سره

$$m = \Delta y / \Delta x = \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \text{متناسب دی:}$$

کرښه جگيري که  $m > 0$  او لويږي یا ټيټيږي که  $m < 0$  وي او که  $m = 0$  وي،

د  $x$  - محور سره غبرگه ځغلي . کرښه ، که  $m = 0$  نیول شوی وي، ټيک يو صفرځاي ( $y$

$$= 0 \quad \text{لري: } x_N = -n/m$$

که را په غاړه شي چې د یوې کرښې برابرې، چې له دوه ټکو  $(x_1, y_1)$  او  $(x_2, y_2)$

تیريږي، پیدا کړو چې یو په بل نیغی نه وي ولاړې ، نو د هغو جگوالی  $m$  او د هغو

پرېتکی

یا نوره بڼه غږختکی  $n$  په  $y$  - محور د برابر ونسیستم

$$y_1 = x_1 m + n, y_2 = x_2 m + n$$

له مخی پیدا کوو او په دې توگه لاس ته راوړو

$$(y - y_1)/(x - x_1) = (y_2 - y_1)/(x_2 - x_1)$$

په بل پل (قدم) کی مور ۲ -امه درجه ټولریشنل فنکشنونه یا مربع فنکشنونه رامنځ ته

کوو لکه په (۱۵. ۱) کی  $a_2 = a, a_1 = b, a_0 = c$

$$y = ax^2 + bx + c, a \neq 0 \quad (15.3)$$

د مربع فنکشنونو څیره (گراف) پارابول دی چی د هغی سیومتری محور و  $y$  - محور ته غبرگ ځغلی. کوایفیخینت) ځله وونی یا ځلیدونکی  $(a, b, c)$  د پارابول د ککری ځای او بڼه (فورم) ټاکی.

مور د مربع فنکشن یو څو ځانگړی حالتونه تر څیرنی لاندی نیسو.

$$1. y = x^2 (a=1, b=0, c=0) \quad (15.4)$$

نورمال پارابول، د ککری کواوردینات:  $x_s = 0, y_s = 0$

(خ. ۱۵. ۹)

$$2. y = x^2 + px + q \quad (a=1, b=p, c=q) \quad (15.5)$$

او  $x^2 + px$  ته د څلوری - یا مربع تکمیلولو ورزیاتونی څخه لاس ته راځی:

$$y = x^2 + px \quad (p/2)^2 + q - (p/2)^2 = (x + p/2)^2 + q - p^2/4 \quad (15,5)$$

یو و (نسبت) (۱۵. ۴) ته (مخامخ) د  $x$  - لور په  $p/2$  - اود  $y$  - لور په

$q - p^2/4$  راکنبل (راښکل-یا راکش -) شوی نورمال پارابول دی، دا په دې مانا چی

په (۱۵. ۵) راکنبل شوی پارابول دا ککره لری:

$$x_s = -p/2, y_s = q - p^2/4$$

بیلگه ۱۵. ۷:

$$y = x^2 + 6x + 10, x_s = -6/2 = -3, y_s = 10 - 6^2/4 = 1$$

(خ، ۱۵. ۹)



$$3. y = ax^2 \quad (a \neq 0, b=0, c=0)$$

د ککری (سر یا راس) کو اور دینات .  $x_s = 0, y_s = 0$

پارابول د  $|a| > 1$  لپاره خور، د  $|a| < 1$  لپاره پرسیدلی، د  $a > 0$  لپاره پورته لور ته او د  $a < 0$  لپاره کینته لور ته واز دی (خلاص دی)

بیلگه ۱۵ . ۸:

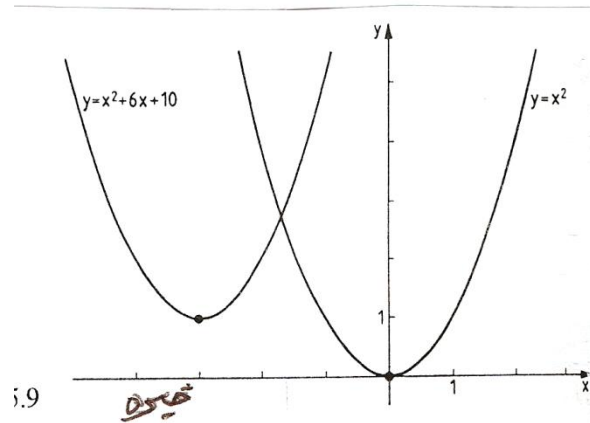
$$y = 2x^2, y = (1/2)x^2, y = -2x^2$$

(ش . ۱۵ . ۱۰)

$$4. y = ax^2 + bx + c = a[x^2 + (b/a)x + c/a]$$

د ککری (راس) کو اور دینات داسی دی ( لکه په ۱۵ . ۵ کی یی چی مخ ته تللی یو )

$$x_s = -b/2a; y_s = a[(c/a) - (b^2/4a^2)] = c - b^2/4a^2$$



بیلگه ۱۵ . ۹:

$$y = -(1/2)x^2 + x + 4, (a = -1/2, b = 1, c = 4)$$

د ککری کو اور دینات:

$$x_s = -1/(2 \cdot (-1/2)) = 1, y_s = 4 - 12/(4 \cdot (-1/2)) = 9/2$$

دا چې  $a = -1/2$  دی، نو پارابول پرسیدلی او لاندې لور ته واز دی (ش . ۱۵ . ۱۱)

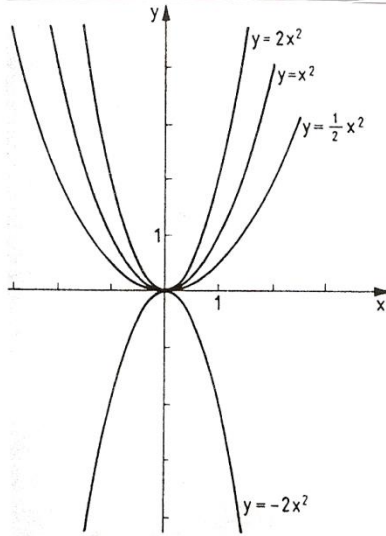


Bild 15.10

تۆرۈ

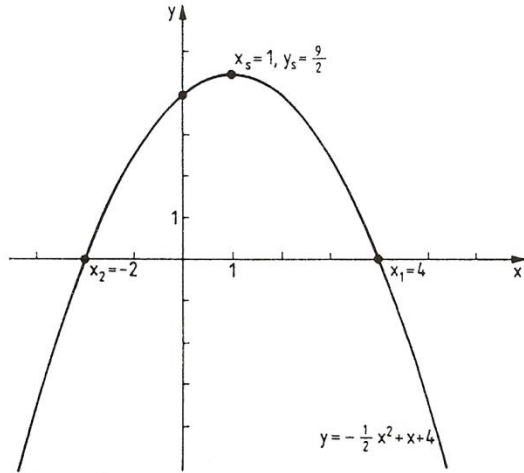


Bild 15.11

قارە

د فنكشن  $y = ax^2 + bx + c$  د صفرخايونه د برابرۈن  $ax^2 + bx + c = 0$  اوبيوني دي.  
 وبيلگي ۹. ۱۵ ته (خ. ۱۵. ۱) :  
 صفر خايونه له دي لاس ته راخي :  $-(1/2)x^2 + x + 4 = 0$  ، چي دلته  $x_2 = -2, x_1 = 4$  دي .

و بيلگي ۷. ۱۵ (خيره ۹. ۱۵) ته :

د  $x^2 + 6x + 10 = 0$  ياني  $x_{1,2} = -3 \pm \sqrt{9-10} = -3 \pm \sqrt{-1} = -3 \pm i$  خخه لاس ته  
 راخي چي برابرۈن رييل صفرخايونه نه لري .

فنكشن  $y = x^2$  غبرگ يا جوره (دبل) صفرخايونه لري ياني  $x_{1,2} = 0$  دي  
 د تولريشنل فنكشن دريمو او لوړو درجو لپاره به د بيلگي په توگه دتولريشنل فنكشنونو  
 بيلگي له مخي، دريمه درجه تولريشنل فنكشن راوړو  
 چي د فنكشن ارزښت شميرلو يو خانگري ليدور فورم دي، د هورنرشيما(بنه) Horne  
 rschema، معرفي شي. ددي لپاره به د (۶. ۱۵) فورم بدل شي.

$$x_{4,5} = -1 \pm \sqrt{1-5} = -1 \pm 2i$$

$$y = [a_3x^2 + a_2x + a_1]x + a_0 = [(a_3x + a_2)x + a_1]x + a_0$$

هغه ورکړ شوي خپلواک  $x_1$  پورې اړوند فنکشن ارزښت  $y_1 = f(x_1)$  کیدی شي له دې بڼې سره په لاندې ډول وشمیرل شي:

$a_3$  له  $x_1$  سره ځل کيږي، دې سره  $a_2$  زیاتوي، زیاتون یې له  $x_1$  سره ځل، او  $a_1$  ور زیاتوو، زیاتون د  $x_1$  سره ځل او  $a_0$  ور زیاتوو. دا د عملیو پرلپسې په لاندې ډول د لاندې شیمې (د هورنر شیمې) له لارې په لیدور ډول مخ ته بیایو (څرکندوو)

	$a_2$	$a_1$	$a_0$	
۱	$a_3 x_1$	$(a_3 x_1 + a_2) x_1$	$[(a_3 x_1 + a_2) x_1 + a_1] x_1$	ځلونه یا ضربونه
				منځنۍ ځلونه
-----				
۳	$a_3 x_1 + a_2$	$(a_3 x_1 + a_2) x_1 + a_1$	$[(a_3 x_1 + a_2) x_1 + a_1] x_1 + a_0$	منځنۍ زیاتون
			$= f(x_1)$	

ددې شیمې پوهیدل لږ نابلد دی او څه فکر غواړي، خو پرې پوهیدل له نورو مساواتو څخه روښان دی.

بیلگه ۱۵ . ۱۰ : د فنکشن  $y = x^3 - 3x^2 - 14x - 5$  لپاره د فنکشن ارزښتونه له لاندې خپلواکو  $x_1 = -2$  او  $x_2 = 5$  څخه شمیرل کيږي. یادونه: دا د هورنر شیمت زما په دې اوسنۍ د برینکمن ژباړه کې مفصل شته (ژباړی). او بیونه ( :

	1	-2	-14	-5
$x_1 = -2$		-2	8	12
	1	-4	-6	$7 = f(-2)$
$x_2 = 5$		5	15	5
	1	3	1	$0 = f(5)$

لرو  $f(-2) = 7$  او  $f(5) = 0$  (صفر ځایونه)

که چیرې ددریمی درجی ریشنل فنکشن یو صفرخای ولري، نو کړی شو چی د پولینوم ویش له لاری دا لایني فاکتور بیل کړو ( پرتله ۱۲ - امه برخه، جمله ۱۲ . ۴ )

بیلگي ۱۵ . ۱۰ ته:  $(x^3 - 2x - 14x - 5) : (x - 5) = x^2 + 3x + 1$  له دې امله لرو:

$$y = x^3 - 2x^2 - 5 = (x^2 + 3x + 1)(x - 5)$$

د ویش پولینومونو ځلونې، یعنی ۱ د  $(x^2)$  سره، ۳ د  $(x)$  سره او ۱ د هورنر شیمیا په اخره لیکه کی ولار دی. د هورنر شیمیا له لاری د صفرخای شمیرلو سره په همغه وخت یا دمگری کی د پولینوم ویش صورت نیسي. لرو:

$$[a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0] : (x - x_1) = a_3x^2 + (a_3x_1 + a_2)x + [(a_2x_1 + a_1)x_1 + a_1]$$

او  $f(x_1) = 0$  چی د  $(x - x_1)$  سره د ځلونې له لاری دا تصدیقیدلی شي. پاتی صفر ځایونه د څلوری - یا مربع برابرنی د اوبیوني له لاری لاس ته راځي

$$x^2 + 3x + 1 = 0; x_{2,3} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 1} = -(3 \pm \sqrt{5}) / 2$$

په دې ډول د دریمی درجی فنکشن د درې لایني فنکشنونو د ځلونې په څیر لیکل کیدی شي ( پرتله: برخه ۱۲ جمله ۱۲ . ۵ )

$$y = x^3 - 2x^2 - 14x - 5 = (x - 5) \left[ x - \frac{-3 + \sqrt{5}}{2} \right] \left[ x - \frac{-3 - \sqrt{5}}{2} \right]$$

د جملی ۱۲ . ۵ وینا په عمومي توگه د ټولو  $n$ -م درجو ریشنل فنکشنونولپاره لاندېجمله باوري کوي

جمله ۱۵ . ۲:

هر  $n$  - م درجه ټول ریشنل فنکشن  $n$  صفر ځایونه لري . کیدی شي دا ټول یو له بل توپیر ولري او یادا صفر ځایونه څوځله هم رامنځ ته شي، رییل او یا جوړه کونجوگیری کملکس کیدی شي.

که  $x_1, x_2, \dots, x_n$  دلاندې فنکشن  $n$  صفر ځایونه وي

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

نو دا د لاینیز فاکتورونو د ځلوني په څیر په لاندې ډول لیکل کیدی شي:

$$y = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n) a_n$$

د هورنر شیمای په استعمال کی دې لاندې په پام کی ونیول شي:

که په یوه  $n$  - م درجه پولینوم کی یو  $x$  - پوتنڅ نه وي ، نو د هغه د کوایفیسیئنټ یا ځله ووني لپاره دې صفر ولیکل شي .

بیلگه ۱۵ . ۱۱ :

۵ - م درجه ټول ریشنفنکشن  $y = 2x^5 - 6x^3 - 20x^2 - 8x + 80$  درې صفر ځایونه

$$x_1 = x_2 = 2, x_3 = -2$$

لري. نور صفر ځایونه دې پیدا کړی شي او فنکشن دې د لاینیزو فاکتورونو د ځلوني په څیر ولیکل شي.

ځواب : د هورنر جملی له لارې یو په بل پسې د پولینوم ویش یو پاتی ۲ - م درجه پولینوم لاس ته را کوي:

$x_1 = 2$	2	0	-6	-20	-8	80	
		4	8	4	-32	-80	
	2	4	5	-1	-40	0 = f(0)	
$x_2 = 2$		4	16	36	40	....	
		2	8	18	20	0 = f(2)	
$x_3 = -2$		-4	-8	-20			
		2	4	10	0 = f(-2)		

دا پاتی پولینوم  $x^2 + 4x + 10 = 2(x^2 + 2x + 5)$  د  $x^2 + 2x + 5 = 0$  له امله

$$x_{4,5} = -1 \pm \sqrt{1-5} = -1 \pm 2i$$

لپاره لاندې د ځل فورم لري-  $2x^2 + 4x + 10 = 2(x+1-2i)(x+1+2i)$

$$2i)(x+1+2i)$$

په دې ډول ورکړ شوی پولینوم په لاندې ډول لیکل کیري

$$y = 2(x-2)^2(x+2)(x+1-2i)(x+1+2i)$$

ددې لپاره چې د دریمې او جگو درجو د ټول ریشنلفنکشنونو یوه څیره یا تصویر ولرودی شو، نور کرکتریسټیکې یا د خوینو ټکې یې د دیفرنځیالشمیرنې له لارې لاسته راوستی شو (برخه ۲۰ . ۴)

بي له دې چې د دیفرنځیالشمیر له مرستي کار واخلو، کیدی شي چې د هغه د ناپای په هکله وینا وي وکړی شو. مور په لیږدونکې ډول د فنکشن د پولې کلیمه په کار اچوو، کومه به چې په برخه ۱۹ کی ټیک تعریف شي. دا د بیلگې په توگه دا مانا لري چې  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = g$  سره  $f(x)$  تل ارزښت  $g$  ته نژدې کیږي، که  $x$  د  $oe$  یانې ناپای په لور لاړشي. د

(۱۵ . ۱) لپاره باورلري:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^n \cdot \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[ a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \dots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n} \right] = a_n \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^n$$

دا چې

$$x^n \rightarrow oe$$

د  $x \rightarrow \pm oe$  لپاره که  $n$  جوړه (جفت) وي

او  $x^n \rightarrow \pm oe$  د  $x \rightarrow \pm oe$  لپاره که  $n$  ناجوړه (طاق) وي، او له دې لاس ته راځي

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y = \infty; \lim_{x \rightarrow -\infty} y = \infty$$

که  $n$  جوړه او  $a_n$  زیاتیز یا مثبت وي، نو لرو  $oe$  (کږه له  $oe$  - څخه په لور ځي).

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y = -\infty; \lim_{x \rightarrow -\infty} y = \infty$$

که  $n$  جوړه او  $a_n$  کمیز یا منفي وي، نو لرو:  $oe$  (کږه د  $oe$  - په لور ځي).

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y = \infty; \lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty$$

که  $n$  ناجوړه او  $a_n$  کمیز یا مثبت وي، نو لرو:  $oe$  (کږه له  $oe$  - څخه د  $oe$  په لور ځي)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y = -\infty; \lim_{x \rightarrow -\infty} y = \infty$$

که  $n$  ناجوړه او  $a_n$  کمیز وي، نو لرو:  $oe$  (کږه له  $oe$  څخه د  $oe$  - په لور ځي)

پیژند ۱۵ . ۹ :  
فنکشن

$$y = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0}; \dots (15, 7)$$

$$n, m \in N_0; a_k, b_i \in R; Q_m \neq 0$$

مات ریشنفنکشن بلل کیری او د ټولو  $x$  د  $Q_m(x) \neq 0$  لپاره تعریف دی.

فنکشن (۱۵ . ۷) اصلي مات نومیری، که  $n < m$  وي او نااصلي مات دی که  $n \geq m$  . نااصل مات فنکشن کیدی شي چي د پولینوم ویش له لاری تجزیه (توته) شي او د یوه ټول ریشنفنکشن او یوه ریشنونی ماتې برخی د زیاتون په څیر ولیکل شي.

بیلگه ۱۵ . ۱۲:

فنکشن  $y = \frac{2x^4 - 3x^3 - 6x^2 + 13x - 6}{x^3 - 4x}$  اصل مات نه دی ( $n=4, m=3$ ) په ماتلاندي

فنکشن باندي د ماتباندي فنکشن ویش څخه لاس ته راځي:

$$(2x^4 - 3x^3 - 6x^2 + 13x - 6) : (x^3 - 4x) = 2x - 3$$

د  $2x^2 + x - 6$  پاتی (باقي) سره. پس لرو:

$$y = 2x - 3 + (2x^2 + x - 6) / (x^3 - 4x).$$

فنکشن (۱۵ . ۷) د  $x = x_0$  لپاره یو صفرځای لري، که  $x = x_0$  وي نو باور لري:

$$P_n(x_0) = 0 \text{ مگر } Q_m(x) \neq 0$$

دا د  $x = x_L$  لپاره تشځای (Lücke) لري، که وي:  $P_n(x_0) = 0$  او  $Q_m(x) = 0$

د  $x = x_p$  لپاره یو قطب pol لري که وي:  $P_n(x_p) \neq 0$  مگر  $Q_m(x_p) = 0$

بیلگه ۱۵ . ۱۳:

فنکشن ( )  $y = (2x^2 + x - 6) / (x^3 - 4x)$  د ماتباندي- او ماتلاندي فنکشنونو ټوتي کولو وروسته په لاندي فورم د لایني فاکتورونوپه توگه لیکل کیري.

$$y = \frac{2(x - \frac{3}{2})(x + 2)}{x(x + 2)(x - 2)}$$

د  $x = x_0 = 3/2$  لپاره ماتباندي صفر دی، مگر مات لاندي صفر نه دی ( صفرخای) مات لاندي- او مات باندي فنکشنونه د  $x = x_L = -2$  لپاره صفر دي ( تشخای )  
 د  $x = x_{p1} = 0$  او  $x = x_{p2} = 0$  لپاره ماتلاندي صفر او مات باندي صفر نه دی ( قطب )  
 که  $x$  سره د قطب خاي ته نزدي شي، نو  $y$  د ناپای په لور خي چي د قطبخای ( ټيک ناپای خای بللکیري )  $x_p$  کی کره داسیمپتوتي کرښي  $x = x_P$  ته نزدي کیري . د يوه تشخای  $x_L$  په حالت کی ماتفنکشن د نامعلومی افادي  $0 / 0$  شکل غوره کوي، له دي امله د  $x = x_L$  لپاره تعريف نه دی.

په ناپای کی د فنکشن خان نیونی ته:

د اصل ماتفنکشن (  $n < m$  ) د  $x$  په جگ پوتنخ یعنی  $x^m$  د ماتباندي او ماتلاندي د ویش خخه لاس ته راخی:

$$y = \frac{\frac{a_n}{x^{-n+m}} + \frac{a_{n-1}}{x^{-n+1+m}} + \dots + \frac{a_1}{x^{-1+m}} + \frac{a_0}{x^m}}{b_m + \frac{b_{m-1}}{x} + \dots + \frac{b_1}{x^{m-1}} + \frac{b_0}{x^m}} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{0}{b_m} = 0$$

داچی د  $x$  ټول اکسپوننتونه مثبت دي، او د  $x$  ټول پوتنخونه د ناپای په لور خي ، نو د اصل مات فنکشن خیره د  $x \rightarrow \pm\infty$  لپاره د  $x$  - محور ته نزدي کیري. فنکشنونه

چی اصل مات نه وي نو د  $x \rightarrow \pm\infty$  لپاره داسی خانونه نیسي، چی اصل د ماتفنکشن برخه یی د صفر په لور خي، لکه ټولریشنل برخه .  
 د ناصل مات فنکشن خیره د  $x \rightarrow \pm\infty$  سره ، خان خپل ټولریشنلبرخی ته نزدي کوي.



الف:  $y = x / (x^2 + 1)$  د  $x_0 = 0$  په ځای کې صفر ځای لري. تشځاي او پول  
 يا قطب نه لري. رييل اوبيونه نه لري او  $\pm \infty$  لپاره  $x \rightarrow \pm \infty$  د  $y = 0$  محور (څيره. ۱۵. ۱۲)

ب:  $y = (x^2 + 2x - 3) / (x + 2) = x - 3 / (x + 2)$  صفر ځايونه  $(x^2 + 2x - 3 = 0)$  په  $x_1 = -3$   
 او  $x_2 = 1$  کې لري. تشځاي نه لري او په  $x_3 = -2$  کې قطب لري دا په دې مانا چې  $x =$   
 2-اسيمپټوټی دی، او د  $x \rightarrow \pm \infty$  لپاره فنکشن  $y = x$  اسيمپټوټي کيږي (دا سيمپټوټی  
 کليمه دې په برخه ۱۶. ۴ کې هم وکتل شي)

مور په دې پسې ځانله شوي ځانگړي ټول - يا مات ريشنل فنکشنونه راوړو:  
 فنکشن

$$y = x^n; n \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1\} \dots \dots \dots (15, 8_a)$$

يو ځانگړی پوټنخ فنکشن دی (د پوټنخ پيژند ۶ ۰ ۱)

(15.8) د زياتيز زياتيز يا مثبت ټولگن  $n$  لپاره يو ټولرشنل فنکشن دی. د جوړه ټولگن  
 $n$  لپاره ټولرشنل فنکشن دی. د ټولگن  $n$  لپاره ټولی کړي د تعريف ډيری  $D = (-\infty, \infty)$   
 $W = (0, \infty)$  او گډ ټکی  $(1, 1)$ ،  $(0, 0)$ ،  $(1, 1)$  لري. (څيره  
 ۱۴ الف ۱۵) د نا جوړه گډ د  $n$  لپاره  $D = (-\infty, \infty)$   
 او  $W = (-\infty, \infty)$  دي او  $(-1, -1)$ ،  $(0, 0)$ ،  $(1, 1)$  گډ ټکي دي (څيره ۱۴. ۱۵)  
 •(ب)

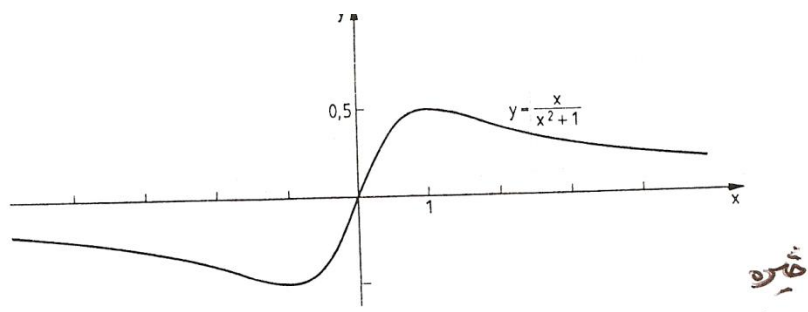


Bild 15.12

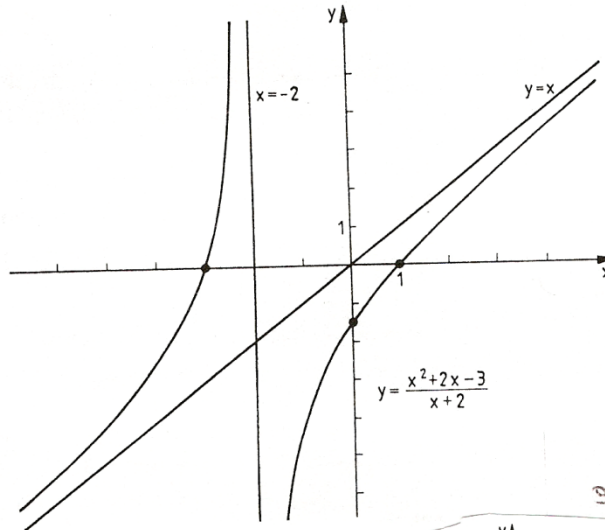


Bild 15.13

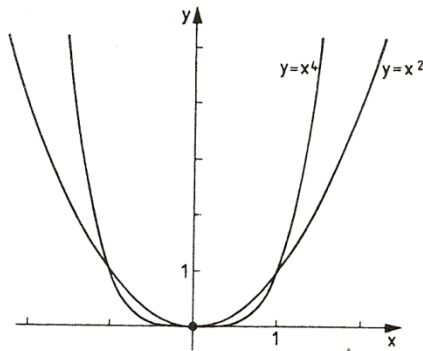


Bild 15.14a

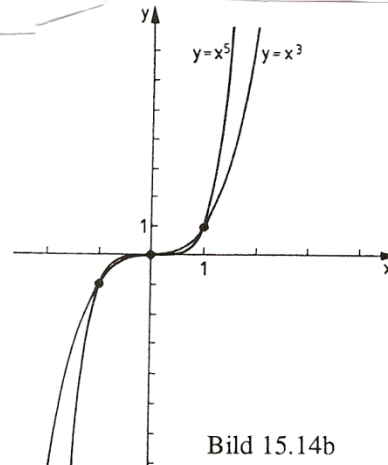


Bild 15.14b

(۱۵، ۸ الف) د ټول کمیز یا منفي گڼ لپاره یو مات ریشنل فنکشن دی په  $x = 0$  کی د یوه قطب او  $y = 0$  کی یوې اسیمپټوتی په څیر. د جوړه گڼون یا تعداد (کمیز)  $n$  لپاره ټولی کړي د پیژند ډیري

$D = (-\infty, \infty) \setminus \{0\}$  د ارزښت ډیري  $W = (0, \infty)$  لري او گڼډکي  $(-1, 1), (1, 1)$  .؟؟؟ څیره ش. ۱۵/۱۵ الف).

د نا جوړه گڼون (کمیز  $n$ ) لپاره  $D = (-\infty, \infty) \setminus \{0\}$  او  $W = (-\infty, \infty)$  او  $(-1, -1)$  او  $(1, 1)$  گڼډکي دی (څیره «۱۵. ۱۵ ب).

دوه څیري دي

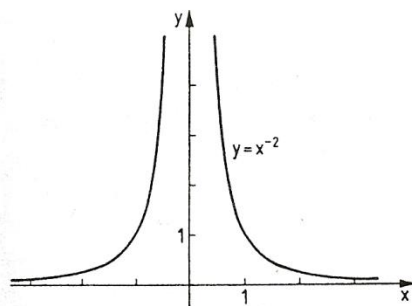


Bild 15.15a

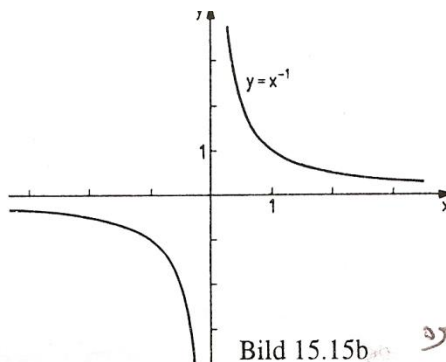


Bild 15.15b

د پوتنخ فنکشن پر څټ بلواک لپاره دې د مونوتوني اينټروال په پام کې ونيول شي. (پرتله بيلگه (بيلگه ۱۵. ۳) د فنکشن) لوستل له کين ويني لور ته  
 $y = x^n; n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}, D = [0, \infty), W = [0, \infty)$

چپه- يا پر څټ فنکشن په لاندې ډول دی.

$$y = \sqrt[n]{x}, n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}, D = [0, \infty), W = [0, \infty) \dots \dots \dots (15, 8_b)$$

او ريښه فنکشن نوميري (پيژند ۶ . ۲ دې وکتل شي) پوتنخ فنکشن کيدی شي و ريشل اېکسپوننت ته پراخه شي ( دلته لرو  $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}} = (x^{\frac{1}{n}})^m = x^{\frac{m}{n}}$  (پرتله برخه ۴)

که پوتنخ فنکشنونه د ريشل فنکشنونو لپاره راوړل شي:

$$y = x^a, a \in \mathbb{Q}, x > 0 \quad (15. 8c)$$

نو د ريښي فنکشن (۱۵ . ۸ ب) دې د پوتنخ فنکشن په څير وپوهيدی شي.

د پوتنخ فنکشن (۱۵ . ۸ ث) پر څټ بيرته پوتنخ فنکشن دی. ټوليز پوتنخ فنکشن پيژند د رييل اېکسپوننت لپاره ورکړ شوی (د رييلگنونو کليمه دې وکتل شي برخه ۳ . ۱۰ . ۴ کی)

پيژند ۱۵ . ۱۰ : فنکشن

$$y = x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}, x > 0 \quad (15. 8d)$$

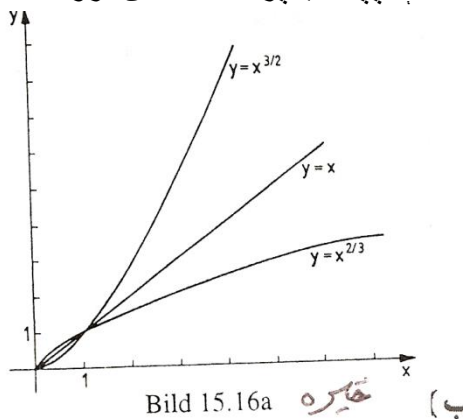
پوتنخ فنکشن نوميري

بیلگه ۱۵ . ۱۵ : فنکشن

$$y = x^{\frac{3}{2}} = \sqrt{x^3}, x \geq 0$$

لاندي چپه - يا پر خت فنکشن لرو

$$y = x^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{x^2}, x \geq 0$$



(خیره ۱۵ . ۱۶ الف )

فنکشن لاندي چپه فنکشن لري:  $y = x^{-1/2} = 1/\sqrt{x}, x > 0$

(خیره ۱۵ . ۱۶ ب)

$$y = x^{-2} = 1/x^2, x > 0$$

يادونه : په پيژند ۴ . ۲ کی مو وويل چي يواخي د ناکميز راديکاندو ريښه ويستل کيدو اجازه لرو. دا کړنلار دي د پرخت فنکشن جوړولو برسیره د مونوتوني غوښتلو لپاره هم په

پام کی وي. د بيلگي په توگه فنکشن

$y = x^3$  په ټول تعريفیږي کي مونوتون پورته کيدونکی وي او له دي امله ټول په خت کيدونکی وي،  $y = \sqrt[3]{x}$  د فنکشن  $y = x^3$  په پيژندډیری  $D = [0, \infty)$  کی پر خت فنکشن

دی، په داسی حال کی، چي د  $y = x^3$  پرخت فنکشن د  $D = (-\infty, 0]$

سره په  $y = -\sqrt[3]{-x} = -\sqrt[3]{|x|}$  فنکشن کی ورکړ شوی دی (ش. ۱۵ . ۱۷) .

پيژند ۱۱ . ۱۵ : فنکشن

$$y = a^x, a > 0, a \neq 1 \dots \dots \dots (15,9)$$

ایکسپوننشلفنکشن یا په جگ (لند «جگ» بلواک بلل کیري  
( د ایکسپوننت یا «جگ» کلیمی لپاره دی پیژند ۴ . ۱ وکتل شي )

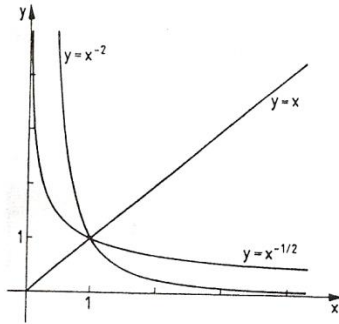


Bild 15.16b

تیره

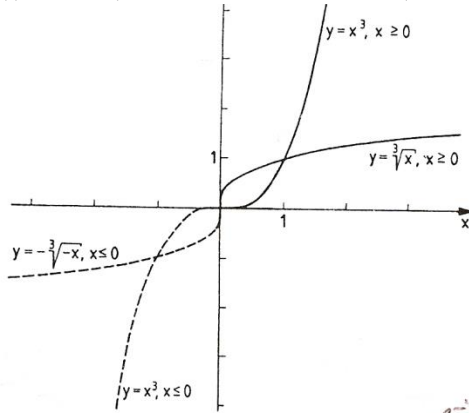


Bild 15.17

تیره

پورته دوه څیرې دي پام کې ونیول شي

فنکشن ( ۹ . ۱۵ ) لاندې پیژنددیري  $D=(-oe,oe)$  او ارزبنددیري  $W=(o,oe)$  لري. د  $a^0=1$  له امله ټکی  $(0,1)$  د ټولو کږو گډ ټکی دی

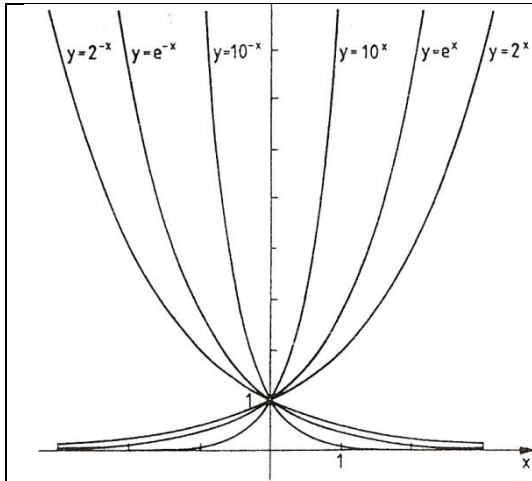


Bild 15.18

تیره

د  $a>0$  لپاره ( ۹ . ۱۵ )  
په کلکه یو غریز- یا مونوتونجکیدونگی  
دی او د  $x \rightarrow oe$  سره د  $x$  - محور ته  
اسیمپوتیک ورنزدې کیري. د  $0<a<1$   
لپاره ( ۹ . ۱۵ ) په کلکه مونوتون لویږي  
او ځان د  $oe$  سره د  $x$  - محور ته  
اسیمپوتیک نزدې کوي .

د اکسپوننشلفنکشنونو یو څو بیلگي  
(  $a=2; e; 10; 1/2; 1/e; 1/10$  )  
په څیره ۱۵ . ۱۸ کی انځور شوي

پیژند ۱۲ . ۱۵ :

لاندي فنکشن د ايکسپوننشل فنکشن په څېت فنکشن دی

$$y = \log_a x, a > 0, a \neq 1 \quad (15.10)$$

او لوگاريتم فنکشن بلل کيږي

د لوگاريتم کليمي لپاره پيژند ۵ . ۱ وگوري) فنکشن ( ۱۵ . ۱۰ ) پيژندديږي  
 او  $D = (0, \infty)$  د ارزښنديږي  $W = (-\infty, \infty)$  لري.

د  $y = \log_a x$  کږې د گڼو  $y = a^x$  هندارونه ده، په کږبنه  $y = x$  ټکي  $(1, 0)$  د ټولو کږو  
 گڼ ټکي دی ( څيره شته دی)

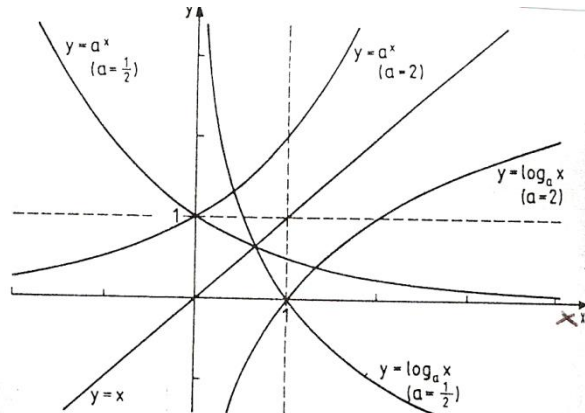


Bild 15.19 څيره

د  $a > 1$  لپاره ( ۱۵ . ۱۰ ) کک مونوتونجگيدونکی او د  $x > 0$  لپاره اسيمپټوتیک د کميز  $y$  -  
 محور ته نږدې کيږي. د  $0 < a < 1$  لپاره ( ۱۵ . ۱۰ ) کک مونوتون لويدونکی دی او د  
 $x > 0$  لپاره اسيمپټوتیک د زياتيز  $y$  - محور ته نږدې کيږي. په شکل ۱۵ . ۱۹ کې  $y = a^x$

او په څېت يی يعني  $y = \log_a x$

د  $a = 2$  او  $a = 1/2$  لپاره انځور يږي .

په ځانگړې توگه ليکل کيږي  $y = \log_e x = \ln x$  ,  $y = \log_{10} x = \lg x$

پيژند ۱۵ . ۱۳:

د تریگونومتری فنکشنونو یا د کونجفنکشنونو لاندې (پرتله برخه ۶ . ۳) دا

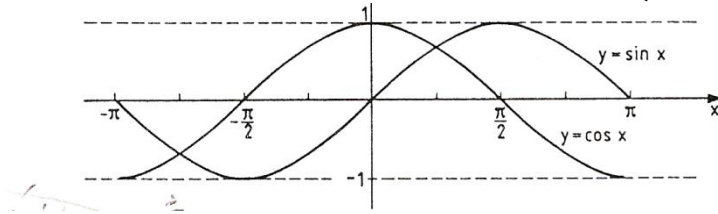
$$y = \sin x; D = \mathbb{R}, W = [1, 1] \dots \dots \dots (15, 11_a)$$

$$y = \cos x; D = \mathbb{R}, W = [-1, 1] \dots \dots \dots (15, 11_b)$$

$$y = \tan x = \sin x / \cos x; D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}, W = \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z} \dots \dots (15, 11_c)$$

$$y = \cot x = \cos x / \sin x; D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi\}, W = \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z} \dots \dots \dots (15, 11_d)$$

د دې کبروتگلار په ش. ۱۵ . ۲۰ الف او ۱۵ . ۲۰ ب کی انځور شوی.



تریگونومتریکی فنکشنونه  $y = \sin x$ ,  $y = \tan x$ ,  $y = \cot x$  ناچوره فنکشنونه، او  $y = \cos x$  یو جوړه فنکشن یا - بلواک دی.

تریگونومتریکی فنکشنونه پریودیکی فنکشنونه دي (مقایسه ۱۵ . ۵) فنکشنونه  $y = \sin x$ ,  $y = \cos x$  پریودی  $2\pi$  لري، دا په دې مانا چي لرو:

$$\sin(x + 2k\pi) = \sin x; \cos(x + 2k\pi) = \cos x, k \in \mathbb{Z}$$

لاندې فنکشنونه پریود  $\pi$  لري

$$y = \tan x, y = \cot x \text{ دا په دې مانا چي}$$

$$\tan(x + k\pi) = \tan x, \cot(x + k\pi) = \cot x, k \in \mathbb{Z}$$

د تریگونومتریکی فنکشنونو صفر ځایونه دي  $x_k = k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$$y = \cos x, y = \cot x \text{ د } x_k = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}, y = \tan x \text{ لپاره او}$$

لپاره تانجنت - او کوتنجنت فنکشنونه قطب ځایونه (ناپاڅایونه) لري يعني  $y = \tan x$

$$\text{په } x_k = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \text{ او } y = \cot x \text{ په } x_k = k\pi, k \in \mathbb{Z} \text{ کی.}$$

د تریگونومتریکی فنکشنونو لپاره دې د هغو مونوتوني خویونه په پام کی ونيول شي. د بیلگي په توگه

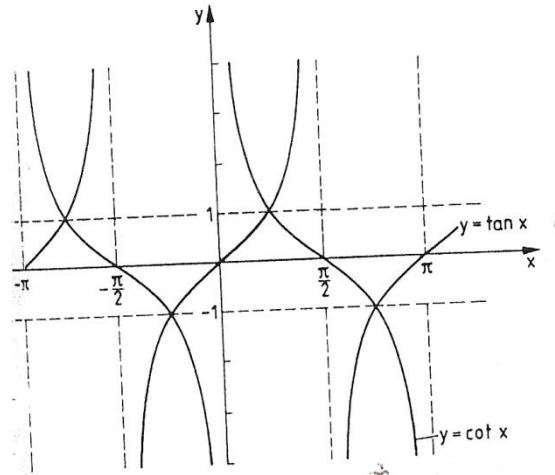


Bild 15.20b

فنکشن  $y = \sin x$  په ایتروال  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  کې مونوتون جگیدونکی دی او په انتروال

$[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$  کې مونوتون لویدونکی، او دا مونوتوني خویونه په یوه پوره پریودی کې

تکرارېږي. پس ویلی شو:

د  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  لپاره  $y = \sin x$  جگیدونکی یا پورته کیدونکی دی

د  $\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x \leq \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$  لپاره لویدونکی دی، او په ورته توګه

د  $-\pi + 2k\pi \leq x \leq 0 + 2k\pi$  لپاره  $y = \cos x$  پورته کیدونکی دی.

د  $0 + 2k\pi \leq x \leq \pi + 2k\pi$  لپاره لویدونکی دی

د  $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$  لپاره  $y = \tan x$  جگیدونکی دی

د  $0 + k\pi < x < \pi + k\pi; k \in \mathbb{Z}$  لپاره  $y = \cot x$  جگیدونکی دی،

په تنجنت - او کوتنجنت فنکشنونو کې د قطب خایونه د مونوتوني اینتروالونو ترمنځ پراته

دي، له دې امله دا مونوتوني ایتروالونه واز اینتروالونه دي. د ساین فنکشنونه د بیلګې په

توګه د وخت په پریوډیکي انځور کې خپل استعمال مومي (Schwingung) (شوینګونګ:

رپیدنه = په عمومي ډول دلته خپلواک واریابل په  $t$  نڅښه کېږي. فنکشن

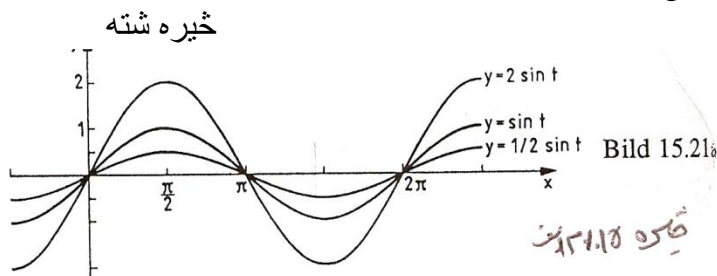


$$y = a \sin(\omega t + \varphi) \quad (15.11e)$$

هارموني فنکشن بلل کيږي.

يادونه: فنکشن (۱۵.۱۱ب) د پيژند (۱۵.۱۵) له مخی ترلی يا ځنځيري فنکشن دی. مور ترڅيرني لاندې نيسو چي د ساين فنکشن د مخه فاکتور a فاکتور د خپلواک واريابل او زياتوونکی د ساين فنکشن په خپلواک (Argument) د کړنځيره باندي څه تاسير اچوي.

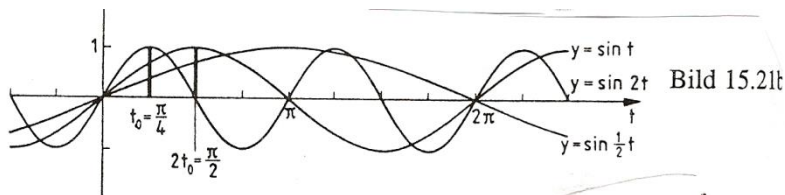
۱ - د فاکتور a تاثیر په فنکشن  $y = a \cdot \sin t$  د  $y = \sin t$  فنکشن ارزښت باندي غزول يا راکشول دی که ( $|a| > 1$ ) او يا پرسول دي که ( $|a| < 1$ ) وي. فنکشن ارزښت  $y = a \cdot \sin x$  - ځله د فنکشن ارزښت  $y = \sin t$  دی، چيرته چی برسیره پردي د  $a < 0$  لپاره په t - محور يوه اينه څيرونه هم منځ ته راولي (څيره ش. ۱۵.۲۱ الف). ( $a = 2$ ,  $a = 1/2$ ) په فنکشن کی a امپليټوډي (جگوالی) نوميري او د شوينگنگ Schwingung رپيدنی پراخوالی يا بنه : سور باندي تاثیر اچوي.



۲ - په فنکشن  $y = \sin \omega t$  کی فاکتور  $\omega$  په فنکشن  $y = \sin t$  باندي يو وختي غزول که  $|\omega| < 1$  يا پرسول که  $|\omega| > 1$  وي تاثیر اچوي. چيرته چی د  $\omega < 0$  لپاره برسیره پردي يو په -y محور اينونه هم ده.

د يوه ټاکلي خپلواک  $t = t_0$  لپاره په فنکشن  $y = \sin \omega t$  يوه فنکشن ارزښت،  $y = \sin t$  خپلواک  $\omega$  - ځله، يعني  $t = \omega t_0$  لپاره غوره کوي (څيره ؟؟ ش. ۱۵.۲۱ ب).

گردی فرکونڅ (Kreisfrequenz) بلل کيږي، دا په پريودي تاثیر اچوي او  $y = \omega t$  پريودي  $P = \frac{2\pi}{\omega}$  لري.



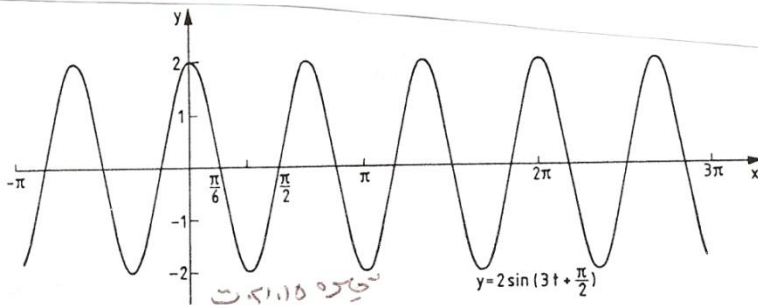
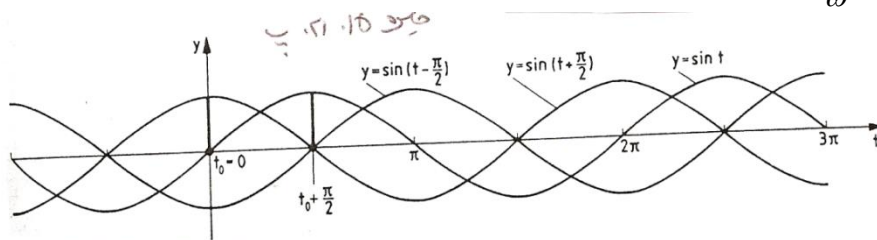
۳- زیاتیدونکی  $\varphi$  په فنکشن  $y = \sin(t+\varphi)$  کی د  $y = \sin t$  باندې دیوې راکبنی تاثیر په  $|\varphi|$  له کینی لور  $\varphi > 0$  او یا له بني لور  $\varphi < 0$  اچوي .  
 د یوه ټاکلي خپلواک  $t = t_0$  لپاره د فنکشن  $y = \sin(t+\varphi)$  سره یو فنکشن ارزښت، چی د  $y = \sin t$  لپاره  $t = t_0$  په کچه راکنل شوی (یعنی دیوه ځای څخه بل ځای ته ورل شوی) وي،  
 یعنی د  $\varphi = t_0$  لپاره، غوره کوي. (څیره، ۱۵ . ۲۱ پ)

$$\left(\varphi = \frac{\pi}{2}, \varphi = -\frac{\pi}{2}\right)$$

په فنکشن

$$y = a \cdot \sin\left(\omega t + \varphi\right) = a \cdot \sin\omega\left(t + \frac{\varphi}{\omega}\right)$$

کی  $\varphi$  چی فازي نومیري یو د راکنلو تاثیر په کبه  $y = a \cdot \sin\omega t$  د  $\frac{\varphi}{\omega}$  په اندازه اچوي.



په پورته شکل ۱۵. ۲۱ ت کی هارموني فنکشن  $y = 2 \cdot \sin(3t + \frac{\pi}{2})$  انخوردی. هغه

امپلیتود  $a = 2$  لري، پریودی یی  $P = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2}{3}\pi$  او په  $\frac{\varphi}{\omega} = \frac{\pi}{6}$  کې

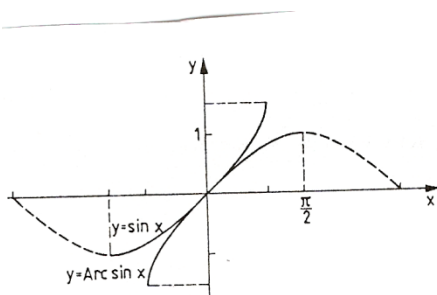
د  $\sin t$  و کین لورته راکنبل شوی دی.

خبره ۱۵. ۲ پ  $\varphi = \frac{\pi}{2}, \varphi = -\frac{\pi}{2}$

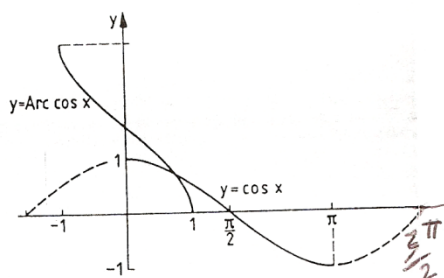
د تریگونومتری فنکشنونو (یواځني) په معکوسوالي یا په ځنوالي کی مور په ځانگړو یو غریزو یا مونوتوني اینتروالونو تکیه کوو، د لاندې تعریف سره مناسب

پیژند. ۱۴۰۱۵:

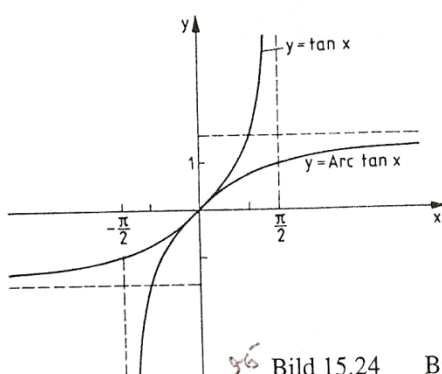
(پام: څیری له تشریح د مخه راغلي، بله لار نه وه)



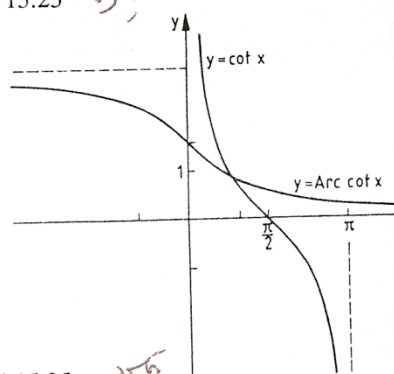
تیره ۱۵.۲۲ Bild 15.22



تیره ۱۵.۲۳ Bild 15.23



تیره ۱۵.۲۴ Bild 15.24



تیره ۱۵.۲۵ Bild 15.25

د لاندې فنکشنونو

$$1. y = \sin x, \quad D = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad W = [-1, 1] \quad (15.12a)$$

$$2. y = \cos x, \quad D = [0, \pi], \quad W = [-1, 1] \quad (15.12b)$$

$$3. y = \tan x, \quad D = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \quad W = \mathbf{R} \quad (15.12c)$$

$$4. y = \cot x, \quad D = (0, \pi), \quad W = \mathbf{R} \quad (15.12d)$$

پرځټ يا چپه فنکشنونه لاندې ځیکلومتریکي فنکشنونه (ارکوس فنکشنونه) دي:

$$1. y = \text{Arc sin } x, \quad D = [-1, 1], \quad W = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \quad (15.13a)$$

$$2. y = \text{Arc cos } x, \quad D = [-1, 1], \quad W = [0, \pi] \quad (15.13b)$$

$$3. y = \text{Arc tan } x, \quad D = \mathbf{R}, \quad W = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \quad (15.13c)$$

$$4. y = \text{Arc cot } x, \quad D = \mathbf{R}, \quad W = (0, \pi) \quad (15.13d)$$

د تريگونوميتریکي فنکشنونو برخې په مونوټوني ايتروالونو ( ۱۵ . ۱۲ الف (تر) ۱۵ . ۱۲ ت (او د هغوي چپه) ۱۵ . ۱۳ الف (تر) ۱۵ . ۱۳ ت (په ځيرو ۱۵ . ۲۲ تر ۱۵ . ۲۵ پورې انځور دي.

### ۱۵ . ۴ ځنځيري (ترلي) فنکشنونه

پيژند ۱۵ . ۱۵ :

د  $D \in x$  لپاره يو فنکشن  $z = g(x)$  د ارزښتديري  $W$  سره ورکړ شوی او برسیره پر دې د  $W \in z$  لپاره يو فنکشن  $y = f(z)$  ورکړ شوی، نو

$$y = f(g(x)) \quad (15.14)$$

د  $x$  ترلي (ځنځيري) فنکشن بلل کيږي.

يادونه : يو ترلي فنکشن کيدی شي چی زیاتو ځنځيرونو سره هم رامنځ ته شي: د بيلگي

$$z = f(x)$$

$$D \in z, z \in D, w = h(z) \text{ لپاره او } w \in W, w \in W^* \text{ لپاره}$$

$$\text{او } y = f(w) \text{ لپاره لرو،}$$

$$\text{نو } y = f[h(g(x))] \text{ هم د } x \text{ يو ترلي فنکشن دی}$$

بيلگه ۱۵ . ۱۶ :

الف : د  $z = 2x + 4$  او  $y = e^z$  سره ترلي فنکشن  $y = e^{2x+4}$  لاس ته راځي .

ب : په ترلي فنکشن  $y = \sin x^2$  کې  $z = x^2$  دننې - او  $y = \sin z$  د باندني فنکشن دی.  
په ترلي فنکشن  $y = \sin^2 x = (\sin x)^2$  کې  $z = \sin x$  د ننې - او  $y = z^2$  د باندني  
فنکشن دی

پ : د

$$y = \cos w \quad w = \sqrt{z} \quad , \quad z = 2x + 4,$$

سره ترلي فنکشن  $y = \cos \sqrt{2x + 4}$  لاس ته راځي

ت : په ترلي فنکشن  $y = \text{Arctan} 1/(x-1)$  کې  $z = x-1$  دننې،  $w = 1/z$  منځني او  
 $y = \text{Arctan} w$  د باندني فنکشن دی .

يادونه : د يوه ورکړ شوي  $x$  - ارزښت لپاره د ځنځيري فنکشنونو د فنکشن ارزښت  
شميرنی

له « دننه » پيل کيږي .

بيلگي ۱۵ . ۱۶ ته :

(ب) د  $x = 0.5$  لپاره دی

$$z = x^2 = 0,5^2 = 0,25; y = \sin x^2 = \sin z = \sin 0,25 = 0,24740$$

او

$$z = \sin x = \sin 0,5 = 0,47942; y = \sin^2 x = z^2 = 0,47942^2 = 0,22984$$

(پ) د  $x = 2$  لپاره دی  $z = x - 1 = 2 - 1 = 1$  ;  $w = 1/z = 1/1 = 1$

$$y = \text{Arctan} w = \text{Arctan} 1 = \frac{\pi}{4}$$

روښانونه، تشریح:

$y = f(x)$  تحليلي (شننيزه) وينا بلل کيږي، که  $f(x)$  له رييل گڼونو او بستيزو  
فنکشنونو څخه د زياتون، کمون، ځل، ویش، له لارو ترلی يا ناترلي (ځنځيري يا نا  
ځنځيري) جوړيږي

د بيلگي په توگه دي په پام کې وي، چي ماتلاندي فنکشن دي صفر نه وي د پوتنڅ بنسټ او  
همداول راديکاند منفي نه شي کيدلی، او يا بايد مثبت وي، چي د لوگاريتم نومروس بايد

مثبت وي او  $(\text{Arc sin } f(x))$  همدابول  $(\text{Arc cos } f(x))$  تیک د  $x \in [-1, 1]$  لپاره پېژند لري يا تعريف دي

بیلگه ۱۵ . ۱۷ :

د لاندې تحلیلي ویناو لپاره دې تعریفیږي پیدا کړی شي.

$$y = \sqrt{x^2 - 3} \quad \text{الف}$$

رادیکاند باید کمیز یا منفي نه وي، چی دا مان لري:

$$x^2 - 3 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \geq 3 \Leftrightarrow |x| \geq \sqrt{3} \quad (x \geq \sqrt{3} \vee x \leq -\sqrt{3})$$

$$D = (-\infty, -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}, \infty)$$

ب)  $y = \lg(x+2) + 1/(3+2x-x^2)$  له لمري زیاتونی کی باید  $\text{Numerus} > 0$  نومروس وي دا په دې مانا چی :  $x + 2 > 0 \Leftrightarrow x > -2$  ،

$$D_1 = (-2, \infty)$$

په دوم زیاتونی کی باید مات لاندې په صفر برابر نه وي ( $0 \neq$ ) وي . د مات لاندې صفر خایونه

$$\text{له } 3 - 2x - x^2 = 0 \quad \text{خخه لاس ته راځي او دي. } x_1 = 2, x_2 = -1$$

$$\text{نو } D_2 = \mathbb{R} \setminus \{2, -1\} \text{ دی}$$

د فنکشن تعریفیږی باید دا اول زیاتونی او همداسی د دوم زیاتونی تعریفیږي وي یعنی د

$$D_1 \text{ او } D_2$$

$$\text{غوځدیږی: } D = D_1 \cap D_2 = (2, \infty) \setminus \{-1\}$$

پ)  $y = \text{Arc sin } (x-1)/5$  د ارکوس ساین-فنکشن د تعریفیږي په

پام کی نیولو سره باید باور ولري-

$$-1 \leq (x-1)/5 \leq 1 \Leftrightarrow -5 \leq x-1 \leq 5 \Leftrightarrow -4 \leq x \leq 6 \Rightarrow D = [-4, 6]$$

$$\text{ت } (y = 1/\sqrt{x^2 - 4})$$

رادیکاند باید له صفر لوي وي او مات لاندې د صفر سره نامساوي، دا په دې مانا چی

$$x^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow x^2 < 4 \Leftrightarrow x > 2 \text{ یا } x < -2$$

$$\text{نو دی } D = (-\infty, -2) \cup (2, \infty)$$

## ۵. ۱۵ تمرینونه

۱ - د ایمپلیسیت توابعو ایکسپلیسیت انځورونه ورکړی

الف -  $6x - 10y = 15$       ب -  $x + y/3 = 5$

پ -  $2x^2 - 3y + 3 = 0$       ت -  $x^2 - 4x + 2y - 8 = 0$

۲ - لاندې فنکشنونه په پارامترانځورونې ورکړ شوي

a)  $x = 2t$     $y = -t^2 + 3t$       b)  $x = \sqrt{t}$     $y = 2t + 1$

c)  $x = 1/t$     $y = 2(t-3)$       d)  $x = (1/2)t - 1$     $y = t^2$

پارامتر له منځه یوسی او په دې سره ورکړی  $y = f(x)$

۳ - لاندې فنکشنونه په مونوټوني وڅیړی، او که ممکن وي نو مونوټونر اینټروالونه په

تعریف لیریو بیل (تجزیه) کړی، یا لوسته کړی.

a)  $y = 2x - 3$       b)  $y = -2x + 3$       c)  $y = x^2$

d)  $y = -2x^2$       e)  $y = 2x^2 + 1$       f)  $y = |x|$

۴ - پریکړه وکړی چی لاندې فنکشنونه جفت، ناجفت او یا له دې دوو کوم نه دي:

a)  $y = x$       b)  $y = x + 1$       c)  $y = x - 1$

d)  $y = 2x^2$       e)  $y = 2x^2 + 1$       f)  $y = (x-1)^2$

g)  $y = x^2/2$       h)  $y = x^5$       i)  $y = |x|$

۵ - د لاندې فنکشنونو د صفر ځایونه پیدا کړی

$$a) y = -2x + 3 \quad b) y = (x-1)(x+2) \quad c) y = x^2 - x - 2$$

$$d) y = 2x^2 - 12x + 18 \quad e) y = x^2 + 1 \quad f) y = x^3$$

۶ - لاندې فنکشنونو ته په څې فنکشنونو ته پیدا کړی

$$a) y = -2x + 3 \quad b) y = x^2 + 1, \quad D = [0, \infty), W = [0, \infty)$$

$$c) y = (x+1)^2, \quad D = [-1, \infty), W = [0, \infty), \quad d) y = x^3 / 2, \quad D = [0, \infty), W = [0, \infty)$$

۷ - لاندې لاینې فنکشنونه ورکړ شوي دي

$$a) y = 0,4x - 1,6 \quad b) y = -x + 1 \quad c) y = (1/5)(3x + 1,5)$$

$$d) y = 2 \quad e) 3x - 3y - 7 = 0 \quad f) 4y + x = -1$$

۸ - کرني دې وکښل شي، جگوالي کونج  $\infty$  دې پیدا شي. او صفرخايونه  $x_N$  وگڼئ!

۹ - کومه کرښه له لاندې ټکو تيريري

$$a) (2,3) \quad (5,5) \quad b) (1,1) \text{ د } (3,7) \quad c) (-1,0) \text{ د } (-2,-3) ?$$

۹ - لاندې مربع بلواک يا فنکشنونه ورکړ شوي

$$a) y = x^2 - 4x + 3 \quad b) y = x^2 - 8x + 16 \quad c) y = x^2 - 6x + 10$$

$$d) y = (x-5x)(x-1) \quad e) 2x^2 - 10x + 12 \quad f) y = 3x^2 + 6x$$

$$g) y = -\frac{x^2}{2} + x + 4 \quad h) y = x^2 / 4 + x + 2 \quad i) y = 5x^2 + 45$$

د ککړې کواوردينات دې پیدا شي، صفرخايونه دې وگڼل شي او پارابول دې انځور شي

۱۰ - د لاندې ټولريشنل فنکشنونه دې دورکړ شوو  $x$  ارزښتونو سره د هورنرشيما د

استعمال له لارې وگڼل شي. فنکشنونه د  $k$  د خلفورم باندې انځور شي

$$a) y = f(x) = x^3 - 6x + 5; \quad x_1 = 1, \quad x_2 = -1$$

$$b) y = f(x) = (1/2)x^3 - x^2 - (13/2)x - 5; \quad x_1 = 1/5 \quad x_2 = 5$$

$$c) y = f(x) = x^3 + 2x + 2x; \quad x_1 = -2 \quad x_2 = 0,2$$

$$d) y = f(x) = x^4 - x^3 - 28x^2 - 32x + 40; \quad x_1 = 2 \quad x_2 = 5$$

$$e) y = f(x) = 2x^4 - 3x^2 - 6x^2 + 5x + 6; \quad x_1 = 1,5 \quad x_2 = 2$$



۱۱ - مات ریشنل فنکشنونه وگرې شي :

$$a) y = \frac{x^2 + x - 2}{x^2 + 2x - 3}$$

$$b) y = \frac{x^4 - 3x^3 - 4x^2}{x^2 + 5x + 6}$$

$$c) y = \frac{x^3 + 2x^2 + x}{x^4 - 13x^2 + 36}$$

$$d) y = \frac{x}{(x^3 + 6x^2 + 9x)(x^2 - 4x + 4)}$$

$$e) y = \frac{2x^3 - x^2 + 6x - 3}{x^2 + 3}$$

صفرخايونه دي وگنل شي، پول. تشخايونه او د  $\pm 8$  لپاره  $x \rightarrow$  څه ښه!

۱۲ - لاندې فنکشنونه ته په څې فنکشنونه جوړ کړی

$$a) y = 2^{x-1}, D = \mathbb{R}, W = (0, \infty) \quad b) y = 2^x - 1, D = \mathbb{R}, W = (-1, \infty)$$

$$c) y = \log_3 x, D = (0, \infty), W = \mathbb{R} \quad d) y = \ln(x-1), D = (1, \infty), W = \mathbb{R}$$

۱۳ - لاندې فنکشنونه ته مونوتوني ايتروالونه ورکړی او برخه په څې فنکشنونه:

$$a) y = (x-1)^2 \quad b) y = x^2 - 1 \quad c) y = (x+1)^2 + 1$$

$$d) y = x^2 - 4x + 5 \quad e) y = 4x^2 \quad f) y = (1/4)x^2 + x/2 + 1$$

۱۴ - تړلي فنکشنونه  $y = f[h(g(x))]$  په دننه او دباندې فنکشنونه

$$y = f(w), w = h(z), z = g(x)$$

بيل ( تجزيه ) کړی ( د تعريف او ارزښت د پيرو کولو څخه کيدی شي تيرشو )

$$a) y = e^{(x+1)^2}$$

$$b) y = (e^{x+1})^2$$

$$c) y = \lg \sqrt{2x-3}$$

$$d) y = \sqrt{\lg(2x-3)}$$

$$e) y = \tan \sqrt{x-3}$$

$$f) y = \sqrt{\tan(x-3)}$$

$$g) y = \sqrt{\tan x - 3}$$

$$h) y = \tan \sqrt{x-3}$$

$$i) y = \text{Arc sin } x^2 +$$

$$j) y = [\text{Arc cos}(3x-2)]^{\frac{1}{2}}$$

$$k) y = \ln \sin \frac{x}{3}$$

$$l) y = \sin \ln(x + \frac{1}{3})$$

$$m) y = \sqrt{\frac{1}{\sin x}}$$

$$n) y = \frac{1}{\sqrt{\sin x}}$$

$$o) y = \frac{1}{\sin \sqrt{x}}$$

$$p) y = \text{Arc cote } 2^{x+1}$$

۱۵- تړلي فنکشنونه  $y = f[h\{g(k(x))\}]$  په دباندي او دتنه فنکشنونو

$$y = f(v), v = h(w), w = g(z), z = k(x)$$

بيل کړی (د تعريف- او ارزښتديري باندي تيرونه کيدی شي )

$$a) y = [\text{Arc cot}(e^x + 1)]^{\frac{1}{2}} \quad b) y = e^{\text{Arccot}(2x+1)^{\frac{1}{2}}} \quad c) y = \sin\left[\cos\frac{x-4}{3}\right]^2$$

$$d) y = \sqrt{5 - \tan\sqrt{x}} \quad e) y = \cos[\ln(x^2 - 1) + 1] \quad f) y = \log_3[\sqrt{2^x + 1}]$$

$$g) y = e^{\tan\sqrt{7x-1}} \quad h) y = \tan e^{\sqrt{7x-1}}$$

۱۶- د لاندي شنينزويا سپرنيز (تحليلي) افادو لپاره تعريفديري پيدا کړی.

$$a) y = \sqrt{x-3} \quad b) y = \sqrt{3-x^2} \quad c) y = \sqrt{x^2-9}$$

$$d) y = \frac{1}{\sqrt{x^2-9}} \quad e) y = \frac{1}{x^2+x-6} \quad f) y = \ln(2x+5)$$

$$g) y = \text{Arc cos}(2x-4) \quad h) y = \sqrt{x} + \frac{1}{x} \quad i) y = \ln x + \frac{1}{x-1}$$

د ډاکټر ماخان شینواري چاپ شوي ليکنې:

1988 Vienna (Austria):

لومړۍ:

H.K. Kaiser , M. Shinwari : Aproximation compact pological algebra :  
general algebra 6 ; Page 117 – 122 contributions to

1987 Vienna (Austria):

دویم:

Diss . Interpolation und Aproximation durch Polynime in Universalen Algebren .  
Uni. Wien

*Dissertation Interpolation and Aproximation by Polynome in universal Algebras,  
at the University of Vienna/Austria*

لاندې د شمیرپوهنې پښتوتول کتابونه په المان کې د ،، افغانستان کلتوري ودې ټولنه، له  
خوا چاپ شوي دي

2000 Bonn (Germany):

دریم: د شمیرپوهنې ستر کتاب : د شمیرپوهنې برسیره د انجنري، فزیک او اقتصاد  
لپاره ، همداسې د بنوونکو او زده کوونکو لپاره ( دا کتاب په ۹۰۰ مخونو کې چاپ  
او دا نوي ليکنه به يې ځنو ځایونو غزېدلې او ځنې ځایونه ترې لرې شوي دي)

2003 Bonn (Germany):

څلورم: ځمکچپوهنه ( هندسه ) ، په سلو زرو کې شمیرنه، د گټې – او کټې د کټې  
شمیرنه ، د احتمالي شمېرنه کتاب د بنوونځي ټولې اړتیاوې پوره کوي

2003 Bonn (Germany):

پنځم: الجبرونه ( د الجبر بنسټونه دي)

2003 Bonn (Germany):

شمير: د شميرپوهني انگرېزي - پښتو ډکشنري.

2003 Bonn (Germany):

اووم: د شميرپوهني الماني - پښتو - او پښتو الماني ډکشنري

*Mathematical dictionary German/ Pashto and Pashto/German*

2003 Bonn (Germany):

اتم: دفرنخيال برابرېون ( دا کتاب په دې څانگه کې يو پيل دی، ساده ليکل شوی)

*Differential equation Translation; An Introduction*

Bonn (Germany): 2003

نهم: د شمير پوهني فرمولونو ټولگه

*Mathematical Formulas*

2003 Bonn (Germany):

لسم: شميرپوهنه له عربي په پښتو

1997 Bonn (Germany):

يوولسم: د افغانستان په هکله سپيني خبري: په المان کې

،،د افغانستان روغي او بيا ابادولو ټولنه،، له خو

يادونه: له ۲۰۰۰ کال دمخه ډاکتر ماخان شينواري د ،،د افغانستان روغي او بيا

آبادولو ټولنه،، له خوا درې ساسي مجلي هم را وستلي.

د ډاکتر ماخان ،،ميري،، شينواري ليکنې او ژباړې چې په چاپيدو يې پيل کيږي

## 2012 Bonn; Germany; Kabul Afghanistan

ژباړې چې همدا اوس چاپ شوي دي:

: Prof. Brinkmann. (From Brinkmann.du.de)

لاندي د برينکمن ليکني چې له پرينمن ن ج څخه ژباړل شوي دي.

- ۱ - شمير پوهنه د بنوونځي لپاره لومړی توک
- ۲ - شمير پوهنه د بنوونځي لپاره دويم توک
- ۳ - شمير پوهنه د بنوونځي لپاره دريم توک
- ۴ - د احتمالوالي شميرنه د بنوونځي لپاره
- ۵ - احصايه يا ستاتيستيک د بنوونځي لپاره

لاندي کتابونه د شتوتگارت د پوهنتون د استادانو د لکچرونو څخه چې د شتوتگارت پوهنتون ن ج څخه خپاره شوي، را ژباړل شوي دي.

- ۶ - اناليزی ۱
- ۷ - اناليزی ۲
- ۸ - کربنيز الجبر
- ۹ - د شمير پوهني بنسټونه
- ۱۰ - د فرمولونو ټولگه
- ۱۱ - فنکشنل اناليز
- ۱۲ - وکتور شميرنه

نورې ژباړې

۱۳ – له [www.grundstudium.info/linearealgebra](http://www.grundstudium.info/linearealgebra) څخه: کربنيز الجبر

۱۴ – Georg Gutenbrunner گڼونپوهنه يا د اعدادو تيوري

زما ليکنې : همدا اوس ځنې چاپ شوي او ځنې چاپ ته چمتو دي.

Bonn (Germany):

۱۵ - د شميرپوهنې ستر کتاب دويم چاپ د پوره تغيراتو سره :

دا کتاب د شميرپوهنې برخې برسیره د انجنري، فزيک او اقتصاد لپاره ، همداسې د بڼوونکو او زده‌کونکو لپاره پوره گټور دی. په کتاب کې د اړتيا سره زياتونه او کونه راغلي

کتاب په دوه برخو کې چاپ شوی دی

الف . لومړۍ برخه

ب . دويمه برخه

۱۶ - ځمکچپوهنه ( هندسه ) دويم چاپ د پوره تغيراتو سره

۱۷ – الجبر بنسټونه دويم چاپ له تغيراتو سره

۱۸ - ډېرۍ پوهنه يا ست تيوري

۱۹ – د شميرپوهنې سم اند ( منطق رياضي)

۲۰ - د يو څو شميرپوهانو ژوندليک

۲۱ – د شمير پوهنې گډې ودې ليکنې

۲۲ - داهم ژباړه ده، خو ليکونکی يې متأسفانه راڅخه نابلد شوی: د مشتق او انټيگرال شميرنو ته تمرينونه او اوبیوني يا حلونه يې

۲۳ - د شمیرپوهنې انگریزې پښتو او عربي + درې ډکشنري

۲۴ - د شمیرپوهنې پښتو انگریزې ډکشنري

۲۵ - د شمیرپوهنې پښتو ډکشنري د شمیرپوهنیزو وییونو په پښتو روښانه ونه

۲۶ - د زړه له کومې (دا هغه لیکنې دي، چې ځنې یې په نړیول جالونو کې خپرې شوي دي.)

۲۷ - د افغانستان په هکله سپینې خبرې، چې و به غزیري.

نوري لیکنې، چې په ژباړه یې پیل شوی، خو لا پوره نه دي

- د شتوتکارت پوهنتون لکچرنوټونو څخه ، چې د شتوتگارت پوهنتون ن ج څخه خپریري:

د گروپونو تیوري

- د بنوونځي لپاره فزیک د برینکمن لیکنه

له پنځم ټولگي څخه تر اومم ټولگي پورې ژباړل شوی ( دا چې زما دویم مسلک فزیک دی، دا لیکنې ژباړم. دا هم د دې لیکوال یوه ډېره بڼه لیکنه ده، چې -د شمیرپوهنې په څیر- دلته هم زیات تمرینونه د حل یا اوبیوني سره په کې راغلي او ماته زیات گټور برېشي)

## د ليکوال ژوند ته لنډه کتنه

ماخان په اولني نوم ميړي شينواري د اروابنادي پستو او اروابناد نوررحمان زوي په ۱۳۲۰ هـ لمريز کي د شينواريو هسکه مينه کي دې نړۍ ته سترگي راغړولي.

د هسکي ميني د لومړني ښوونځي (د لومړنيو زده کونکو څخه) څخه وروسته د رحمان بابا ليسه له ۱۹۵۴ تر ۱۹۶۵ پوري (ښوونځي له لومړي ټولگي پيل او د دويم ټولگي څخه گام او پای).

د ۱۹۶۶ تر سپټمبر د کابل طب پوهنځي. له ۱۹۶۶ سپټمبر څخه د اتریش برس، چي هلته يې د شميرپوهني ډاکټري په پوره ستونځو تر لاسه کړه.

د ۱۹۹۸۷ ش ک تر ۱۹۸۸ د فبروري تر پای د دباندنيو چارو وزارت کي مامور. د ۱۹۸۸ مارچ څخه تر ۱۹۹۲ جون پوري په بن کي د افغانستان جمهوريت سفارت شارژد افير (صفر نه وو). له هغې وروسته په جرمني کي سياسي پناه. له ۲۰۰۸ مارچ څخه د ۲۰۰۹ دسمبر پوري د د رياضي څانگه کي د پوهني وزارت درسي نساب کي دنده.

ماخان ميړي په ۱۹۷۲ کي له لري د ميرمن ښاپيري سره واده شوی، چي د واده خبر ورته اتریش ته راغی. ده له ميرمن ښاپيري سره په ۱۹۶۳ ز ک کي کوزده کړي وه.

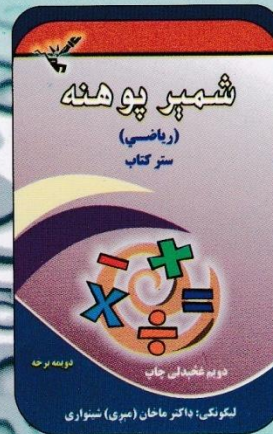
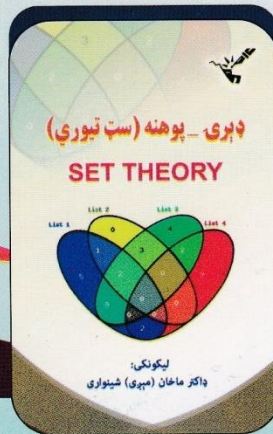
دوي ته لوي څښتن په اتریش ويانا کي د مای په شلم ۱۹۷۹ ز ک دوه بچيان وبخښل، چي څانگه او اباسين نوميري. څانگه په المان کي د پوهنتون علمي همکاره وه او د حقوقو ډاکټره ده او اباسين ملي اقتصاد او ټولنيزه سايکولوژي لوستلي.

ماخان شينواري بي کاره نه دی او لږ تر لږه له ۱۹۹۷ څخه همدا د کتابونو ليکلو اوو د ژباړي دنده يې په غاړه اخستي، چي خپل فکر د شوني پولي تازه وساتي.





داکتر ماخان (مېری) شینواری



د افغانستان د کلتوري ودې ټولنه - جرمني

VEREIN ZUR FORDERUNG DER AFGHANISCHEN KULTUR E.V

د خپرونو لړ (۱۳۰)

**Get more e-books from [www.ketabton.com](http://www.ketabton.com)  
Ketabton.com: The Digital Library**