

1.1 تعريف او ډولونه:

تعريف: هغه معادله چې مشتقات ولري دتفاضلي معادلي په نوم ياديږي، كيداشي چې دغه مشتقات معمولي مشتقات وي او يا قسمي مشتقات وي.

تفاضلي معادلي په دوه ډوله دي

معمولي تفاضلي معادله (Ordinary Differential Equation)

هغه معادله چې د x مستقل متحول، د y غيرمستقل متحول چې y ته د x تابع هم وايو او د y هر ترتيب مشتق نظر x ته ولري دمعمولي تفاضلي په نامه سره ياديږي.

مثالونه:

$$\begin{array}{ll} 1. \frac{dy}{dx} + 3y = 0 & 4. \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2y = \sin x \\ 2. \frac{dy}{dx} + y = e^x & 5. \frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + 3y = 0 \\ 3. \frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2y = 0 & 6. \left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^2 + 7\frac{d^2y}{dx^2} + 8\frac{dy}{dx} - 9y = \log x \end{array}$$

قسمي تفاضلي معادله (Partial Differential Equation)

هغه تفاضلي معادله چې دوه يا څو مستقل متحوله، تابع او ددغه تابع قسمي مشتقات (هر ترتيب چې وي) ولري دقسمي تفاضلي معادلي په نامه سره ياديږي.

مثالونه:

که چيرته z د x او y تابع وي نو:

$$7. \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \quad 8. x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 2z \quad 9. \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

1.2 دتفاضلي معادلو ترتيب او درجه

دتفاضلي معادلي ترتيب:

په تفاضلي معادله كې لوړ ترين مشتق دتفاضلي معادلي دترتيب څخه عبارت دی.

دتفاضلي معادلي درجه:

په تفاضلي معادله كې دلورترين ترتيب توان دتفاضلي معادلي ددرجي څخه عبارت دی.

په پورته مثالونو کې:

- | | |
|-------------------------------|-------------------------------|
| (1) لومړی ترتیب او لومړی درجه | (2) لومړی ترتیب او لومړی درجه |
| (3) دوهم ترتیب لومړی درجه | (4) لومړی ترتیب دوهمه درجه |
| (5) دوهم ترتیب لومړی درجه | (6) دریم ترتیب دوهمه درجه |

همدارنگه د $\frac{d^2y}{dx^2} = \left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}$ تفاضلي معادلي دترتیب او درجې دپیداکولو لپاره لومړی دمعادلي دواړه خواوې مربع کوو ، په نتیجه کې معادله لاندې شکل غوره کوي

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 = \left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^3$$

اوس پورته معادله دوهم ترتیب او دوهمه درجه تفاضلي معادله ده.

باید په یاد ولری چې دتفاضلي معادلو ترتیب او درجه کوم چې مونږ تعریف کړل باید مثبت تام عدد وي.

دتفاضلي معادلو حل

یوه معمولي تفاضلي معادله لاندې عمومي شکل لری

$$F[x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}] = 0 \quad (1)$$

دیوې تفاضلي معادلي حل عبارت دهغه تابع څخه دی ، کوم چې په راکړل شوی معادله کې صدق وکړي ، $\phi(x)$ تابع ته د (1) تفاضلي معادلي حل ویل کیږي ، که چیرته :

$$F[x, \phi(x), \phi'(x), \dots, \phi^n(x)] = 0$$

یابه بل عبارت $y=\phi(x)$ تابع په (1) معادله کې صدق وکړي.

د n ام ترتیب تفاضلي معادلو حل ، چې n اختیاري ثابت عددونه ولري د عمومي حل (general solution) په نامه سره یادېږي، که چیرته په عمومي حل کې داخیاری ثابت عدد په ځای خاص قیمت وضعه شي ، دتفاضلي معادلي مشخص حل (particular solution) لاس ته راځي.

1.3 دتفاضلي معادلو ترتیب دپارامتر دحذفولوپه واسطه

ددې لپاره چې مونږ بڼه پوه شو چې څنگه کولای شو چې تفاضلي معادله دپارامتر دحذفولو په واسطه تشکیل کړو ، نو لاندې مثال په نظر کې نیسو.

مثال: داسي تفاضلي معادله تشكيل كړئ، كوم چې د $y = a \cos(x + b)$ منحنیاتو مجموعه رابنایي، a او b اختیاري ثابت عددونه دي.

حل:

$$y = a \cos(x + b) \dots \dots \dots (1)$$

داولي معادلي نظر x ته مشتق اخلو

$$\frac{dy}{dx} = -a \sin(x + b) \dots \dots \dots (2)$$

اوس ددوهمي معادلي نظر x ته مشتق اخلو

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -a \cos(x + b) \dots \dots \dots (3)$$

ددریمي معادلي څخه د a قیمت لمنځه وړو، په نتیجه کې لاندې تفاضلي معادله لاسته راځي

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -y \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$$

په نتیجه کې ویلای شو، که وغواړو یوه تفاضلي معادله تشکیل کړو، نو لومړی باید دورکړل شو منحنیاتو مجموعي کوم چې د پارامترونو دلودونکي ده، مشتق ونیسو او بیا پارامترونه حذف کړو.

یادښت: (i) دمنحنیاتو هغه مجموعه کوم چې یو پارامتر ولري، لومړی ترتیب تفاضلي معادله تشکیلوی.

(ii) په عمومي ډول دمنحنیاتو هغه مجموعه کوم چې n پارامترونه ولري، n ام ترتیب تفاضلي معادله تشکیلوي.

1.4 لومړی ترتیب او لومړی درجه تفاضلي معادله

په دې فصل کې مونږ د لومړی ترتیب او لومړی درجی تفاضلي معادلو دحل لپاره مختلفي طریقو باندې بحث کوو، چې په عمومي ډول لومړی ترتیب او لومړی درجه تفاضلي معادلي لاند شکل لري.

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0 \dots \dots \dots (1)$$

دپورته عمومي شکل، عمومي حل عبارت دی له:

$$F(x, y, c) = 0 \dots \dots \dots (2)$$

په دوهمه معادله کې c یو اختیاري ثابت عدد دی، کوم چې په لومړی معادله کې صدق کوي، که چېرته c ته یومشخص قیمت وکړو، نو په دې صورت کې عمومي حل په مشخص حل باندې بدلیري.

مونڊر دلومري معادلي ڇيني معياري شڪلونه په لاندي طريقو باندي حل ڪوو.

(1) هغه معادلي ڇي متحولين بي دتفكيڪ وړ وي او يا دساده ڪولو څخه وروسته تفكيڪ ته برابري

(2) متجانسي تفاضلي معادلي

(3) متجانسو تفاضلي معادلوته بدليدونكي تفاضلي معادلي

(4) ڪاملي تفاضلي معادلي

(5) ڪاملو تفاضلي معادلوته بدليدونكي تفاضلي معادلي

(6) خطي تفاضلي معادلي

(7) خطي تفاضلي معادلوته بدليدونكي تفاضلي معادلي (برنولي شڪل)

1.5 دتفكيڪ وړ معادلي (Separation of variables):

ددي لپاره دتفاضلي معادلي لاندي شڪل په نظر ڪي نيسو

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)} \dots \dots \dots (1) \quad (g(y) \neq 0)$$

دمتحويلينو په جداڪولو سره لومري معادله په لاندي شڪل ليكو او بيا بي انتيگرا نيسو

$$g(y)dy = f(x)dx \quad \Rightarrow \quad \int g(y)dy = \int f(x)dx$$

دانتيگرا ل دنيوني څخه وروسته د (1) تفاضلي معادلي حل په لاندي ډول لاسته راځي

$$G(y) = F(x) + c$$

ڇي $F(x)$ او $G(y)$ په ترتيب سره د x او y توابع او c يو اختياري ثابت عدد دي.

عملي مثالونه:

$$\text{لومري مثال: } \frac{dy}{dx} = \frac{1+y^2}{1+x^2} \text{ تفاضلي معادله حل ڪري}$$

حل: دمتحويلينو دجلاڪولو څخه وروسته معادله په لاندي ډول حل ڪوو

$$\frac{dy}{1+y^2} = \frac{dx}{1+x^2}$$

$$\int \frac{1}{1+y^2} dy = \int \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$\tan^{-1} y = \tan^{-1} x + A$$

$$\tan^{-1} y - \tan^{-1} x = A$$

$$\tan^{-1} \frac{y-x}{1+yx} = A$$

$$\tan^{-1} \frac{y-x}{1+yx} = \tan^{-1} c \Rightarrow \frac{y-x}{1+yx} = c \Rightarrow y-x = c(1+yx)$$

کوم چي دغوبنټل شوي معادلي مطلوب حل دی

دوهم مثال: $\frac{dy}{dx} = e^{x+y} + x^2 e^y$ تفاضلي معادله حل کری

حل: لومړی یې متحولین سره بیلوو اوبیا یې دواړو خواوو انټیگرال نیسو

$$\frac{dy}{dx} = e^x e^y + x^2 e^y$$

$$\frac{dy}{dx} = e^y (e^x + x^2)$$

$$e^{-y} dy = (e^x + x^2) dx$$

$$\int e^{-y} dy = \int (e^x + x^2) dx$$

$$-e^{-y} + c = e^x + \frac{x^3}{3} \quad \text{یا} \quad e^x + e^{-y} + \frac{1}{3} x^3 = c$$

دریم مثال: $e^x \tan y dx + (1 - e^x) \sec^2 y dy = 0$ تفاضلي معادله حل کری

حل: ددی لپاره چي متحولین یې سره بیل کړو ، نومعادله په $(1 - e^x) \tan y$ باندې ویشو

$$\frac{e^x}{1 - e^x} dx + \sec^2 y dy = 0$$

$$-\int \frac{e^x}{e^x - 1} dx + \int \frac{\sec^2 y}{\tan y} dy = \log c$$

$$-\ln(e^x - 1) + \ln \tan y = \ln c$$

$$\ln \left(\frac{\tan y}{e^x - 1} \right) = \ln c \quad \text{یا} \quad \tan y = c(e^x - 1)$$

خلورم مثال: $\tan y \frac{dy}{dx} = \sin(x+y) + \sin(x-y)$ تفاضلی معادله حل کری

حل: د $\sin C + \sin D$ رابطی څخه په استفادې سره پورته معادله په لاندې شکل لیکوو

$$\tan y \frac{dy}{dx} = 2 \sin x \cos y$$

$$\frac{\tan y}{\cos y} dy = 2 \sin x dx$$

$$\sec y \tan y dy = 2 \sin x dx$$

$$\int \sec y \tan y dy = 2 \int \sin x dx$$

$$\sec y = -2 \cos x + c \quad \text{یا} \quad \sec y + 2 \cos x = c$$

پنځم مثال: $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos(x+y)}$ تفاضلی معادله حل کری

په راکړل شوي معادله کې متحولین یو دبل څخه نه بیلیري، خو که $x+y=t$ سره تعویض کړو، نو بیا کولای شو متحولین یې په اسانۍ سره بیل کړو

$$x + y = t \quad \Rightarrow \quad 1 + \frac{dy}{dx} = \frac{dt}{dx} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dt}{dx} - 1$$

دپورته قیمتونو په وضعه کولو سره معادله لاندې شکل غوره کوي

$$\frac{dt}{dx} - 1 = \frac{1}{\cos t} \quad \Rightarrow \quad \frac{dt}{dx} = \frac{1}{\cos t} + 1 = \frac{1 + \cos t}{\cos t}$$

اوس یې متحولین سره بیلوو، چې لاندې شکل لاسته راځوي

$$\frac{\cos t dt}{1 + \cos t} = dx$$

$$\left(\frac{\cos^2 \frac{t}{2} - \sin^2 \frac{t}{2}}{2 \cos^2 \frac{t}{2}} \right) dt = dx \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \tan^2 \frac{t}{2} \right) dt = dx$$

$$\frac{1}{2} \left(1 - \tan^2 \frac{t}{2} \right) dt = dx \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} \left(1 - \left(\sec^2 \frac{t}{2} - 1 \right) \right) dt = dx$$

$$\frac{1}{2} \left(2 - \sec^2 \frac{t}{2} \right) dt = dx \quad \Rightarrow \quad \left(1 - \frac{1}{2} \sec^2 \frac{t}{2} \right) dt = dx$$

$$\int \left(1 - \frac{1}{2} \sec^2 \frac{t}{2} \right) dt = \int dx \quad \Rightarrow \quad t - \tan \frac{t}{2} = x + c$$

$$x + y - \tan \left(\frac{x+y}{2} \right) = x + c \quad \text{یا} \quad y - \tan \left(\frac{x+y}{2} \right) = c$$

کوم چي دراڪرل شوي معادلي عمومي حل دی

شپيرم مثال: $\frac{dy}{dx} + 1 = e^{x+y}$ تفاضلي معادله حل کړئ

حل: $x+y=t$ سره نيسو

$$x + y = t \quad \Rightarrow \quad 1 + \frac{dy}{dx} = \frac{dt}{dx}$$

دغه قيمتونه په معادله کي وضعه کوو ، او په لاندې ډول يي حل کوو

$$\frac{dt}{dx} = e^t \quad \Rightarrow \quad e^{-t} dt = dx$$

$$\int e^{-t} dt = \int dx$$

$$-e^{-t} = x + c$$

$$-e^{-(x+y)} = x + c \quad \Rightarrow \quad x + e^{-(x+y)} + c = 0$$

اووم مثال: $(2x - 3y + 1)dx + (6y - 4x + 3)dy = 0$ تفاضلي معادله حل کړئ

حل: راڪرل شوي معادله کي متحولين سره نه بيليري ، خوکه په لاندې ډول تعويض اجرا کړو ، نو بيا کولای شو چي په اسانۍ سره معادله کي متحولين سره بيل کړو

$$2x - 3y = t \quad \Rightarrow \quad 2 - \frac{3dy}{dx} = \frac{dt}{dx}$$

دغه قيمتونه په معادله کي وضعه کوو او په لاندې ډول يي حل کوو

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(2x - 3y) + 1}{2(2x - 3y) - 3}$$

$$\frac{1}{3} \left(2 - \frac{dt}{dx} \right) = \frac{t+1}{2t-3} \quad \text{یا} \quad \frac{dt}{dx} = \frac{t-9}{2t-3} \Rightarrow \frac{(2t-3)}{t-9} dt = dx$$

$$\int \left(\frac{2t-3}{t-9} \right) dt = \int dx \quad \text{یا} \quad \int \left(\frac{2t}{t-9} - \frac{3}{t-9} \right) dt = \int dx$$

$$2 \int \frac{t-9+9}{t-9} dt - 3 \int \frac{1}{t-9} dt = \int dx$$

$$2 \int \left(1 + \frac{9}{t-9} \right) dt - 3 \int \frac{1}{t-9} dt = \int dx$$

$$2[t + 9 \ln(t-9)] - 3 \ln(t-9) = x + A$$

$$2t + 15 \ln(t-9) = x + A$$

$$(4x - 6y) + 15 \ln(2x - 3y - 9) = x + A$$

$$3x - 6y + 15 \ln(2x - 3y - 9) = A$$

$$\text{یا} \quad x - 2y + 5 \ln(2x - 3y - 9) = c \quad c = \frac{1}{3}A$$

اتم مثال: $\frac{dy}{dx} = \sin(x+y) + \cos(x+y)$ تفاضلی معادله حل کریں

حل:

$$t = x + y \Rightarrow \frac{dt}{dx} = 1 + \frac{dy}{dx}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dt}{dx} - 1$$

دغه قیمتونه په راکرل شوي تفاضلی معادله کې وضعه کوو

$$\frac{dt}{dx} - 1 = \sin t + \cos t \Rightarrow \frac{dt}{dx} = \sin t + \cos t + 1$$

$$\frac{dt}{\sin t + \cos t + 1} = dx \Rightarrow \frac{dt}{2 \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2} + 2 \cos^2 \frac{t}{2}} = dx$$

صورت او مخرج په $\cos^2 \frac{t}{2}$ باندې ویشو

$$\frac{\sec^2 \frac{t}{2}}{2 \left[\tan \frac{t}{2} + 1 \right]} dt = dx$$

$$\int \frac{\sec^2 \frac{t}{2}}{2 \left[\tan \frac{t}{2} + 1 \right]} dt = \int dx$$

$$\ln \tan \left[\frac{t}{2} + 1 \right] = x + c \quad \text{یا} \quad \tan \left[\frac{x + y + 2}{2} \right] = e^{x+c}$$

$$\tan \left(\frac{x + y + 2}{2} \right) = A e^x \quad (A = e^c)$$

1.6 تمرینونه

لاندې تفاضلي معادلي حل کړئ

01. $(e^y + 1) \cos x \, dx + e^y \sin x \, dy = 0$

02. $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 y}{1 + x^3}$

03. $(x + 1) \frac{dy}{dx} + 1 = 2e^{-y}$

04. $y - x \frac{dy}{dx} = a \left(y^2 + \frac{dy}{dx} \right)$

05. $(x^2 - yx^2) \frac{dy}{dx} + y^2(1 + x) = 0$

06. $\frac{dy}{dx} + xy = xy^3$

07. $x \sqrt{1 + y^2} dx = y \sqrt{1 + x^2} dy = 0 \quad \frac{dy}{dx} + \frac{\sqrt{1 - y^2}}{\sqrt{1 - x^2}} = 0, \quad y = 1, \quad x = 0$

09. $\frac{dy}{dx} = \frac{x(2 \ln x + 1)}{\sin y + y \cos y}$

10. $a \left(x \frac{dy}{dx} + 2y \right) = 2xy \frac{dy}{dx}$

11. $\frac{dy}{dx} (1 + x)(1 + y^2), \quad y = 1, \quad x = 0$

12. $\cos y \ln(\sec x + \tan x) dx = \cos x \ln(\sec y + \tan y) dy$

تفکیک ته بدلیدونکي تفاضلي معادلي

13. $\frac{dy}{dx} = (3x + 2y + 4)^2$ 14. $\frac{dy}{dx} = \frac{6x - 2y - 7}{3x - y + 4}$
15. $(x + 2y - 1)dx = (x + 2y + 1)dy$ 16. $\frac{dy}{dx} = (x + y)^2$
17. $\frac{dy}{dx} = \sin(x + y)$ 18. $\frac{dy}{dx} = 1 + e^{x-y}$
19. $x^4 \frac{dy}{dx} + x^3 y + \operatorname{cosec}(xy) = 0$ 20. $x dy + y dx + 4\sqrt{1 - x^2 y^2} dx = 0$

جوابونه:

01. $\sin(e^y + 1) = c$ 02. $y^3 = c(1 + x^3)$ 03. $(x + 1) = c(2 - e^y)$
04. $(x + a) = c \cdot \frac{y}{(1 - ay)}$ 05. $\ln\left(\frac{x}{y}\right) - \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = c$ 06. $\frac{y^2 - 1}{y^2} = Ae^{x^2}$
07. $\sqrt{1 + x^2} + \sqrt{1 + y^2} = c$ $\sin^{-1} x + \sin^{-1} y = \frac{\pi}{2}$ 09. $x^2 \ln x - y \sin y = c$
10. $e^{-2y} y^a x^{2a} = A$ 11. $\tan^{-1} y = x + \frac{x^2}{2} + \frac{\pi}{4}$
12. $[\ln(\sec x + \tan x)]^2 - [\ln(\sec y + \tan y)]^2 = c$
13. $\frac{1}{\sqrt{6}} \tan^{-1} \left[\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} (3x + 2y + 4) \right] = x + c$
14. $2x - y - 15 \ln(3x - y + 19) + c = 0$ 15. $x = y + \frac{2}{3} \ln \left(x + 2y - \frac{1}{3} \right) + c$
16. $\tan^{-1}(x + y) = x + c$ 17. $1 + \tan \left\{ \frac{x + y}{2} \right\} + \frac{2}{x + c} = 0$
18. $x = e^{-(x-y)} + c$ 19. $\cos xy = -\frac{1}{2x^2} - c$ 20. $\sin^{-1}(xy) + 4x = c$

متجانسي تفاضلي معادلي (Homogeneous Differential Equations)

$f(x, y)$ يوه n امه درجه متجانسه تابع ده، که چيرته $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y)$ سره شي،
دمثال په ډول $x^2 + xy$ ، $\sqrt{x^2 + y^2}$ او $\sin\left(\frac{x}{y}\right)$ په ترتيب سره دوهمه، اوله او صفرمه
درجه متجانسي توابع دي.

$M(x, y) dx + N(x, y) = 0$ يوه لومړۍ ترتيب او لومړۍ درجه متجانسه تفاضلي معادله ده، که
چيرته M او N يو شان درجه لرونکي متجانسي توابع وي، پورته معادله کولای شو د $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$

په شکل وليکو، چې $f(x, y) = -\frac{M(x, y)}{N(x, y)}$ يوه صفرمه درجه متجانسه تابع ده، دغه تابع بيا د
 $\frac{y}{x}$ يا $\frac{x}{y}$ په شکل ليکلای شو، چې ددې څخه لاندي معادلي لاسته راځي

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right) \dots \dots \dots (1) \quad \text{يا} \quad \frac{dx}{dy} = f\left(\frac{x}{y}\right) \dots \dots \dots (2)$$

په لومړۍ معادله کې $\frac{y}{x} = v$ سره تعويض کوو او په دوهمه معادله کې $\frac{x}{y} = v$ سره تعويض کوو،
ورسته يې بيا متحولين سره بيلوو او حل بيا يې حل کوو، چې دلومړۍ معادلي لپاره په لاندي ډول عمل
اجراکوو

$$\frac{y}{x} = v \quad \Rightarrow \quad y = vx, \quad \frac{dy}{dx} = v + x \frac{dv}{dx}$$

دغه قيمتونه په لومړۍ معادله کې وضعه کوو

$$v + x \frac{dv}{dx} = f(v)$$

اوس يې متحولين سره بيلوو او انټيگرال يې نيسو

$$\frac{dx}{x} = \frac{dv}{f(v) - v} \quad \Rightarrow \quad \ln x + c = \int \frac{dv}{f(v) - v}$$

چې c يو اختياري ثابت عدد دی، همدارنگه دوهمي معادلي دحل لپاره په لاندي ډول عمل اجراکوو

$$\frac{x}{y} = v \quad \Rightarrow \quad x = vy, \quad \frac{dx}{dy} = v + y \frac{dv}{dy}$$

دغه قيمتونه په دوهمه معادله کې وضعه کوو

$$v + y \frac{dv}{dy} = f(v)$$

پورته معادله هم دمتحولينو په جلا کولو سره حل کوو

عملي مثالونه:

لومړی مثال: $(x - y)dy - (x + y)dx = 0$ تفاضلي معادله حل کړئ

حل: لومړی معادله د $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x-y}$ په شکل لیکو، دمعادلي بني صرف یوه متجانسه تابع ده، او په لاندې ډول تعویض اجرا کوو

$$y = vx \Rightarrow \frac{dy}{dx} = v + x \frac{dv}{dx}$$

دغه قیمتونه په معادله کې وضعه کوو

$$v + \frac{xdv}{dx} = \frac{x + vx}{x - vx} \Rightarrow v + \frac{xdv}{dx} = \frac{1 + v}{1 - v} \Rightarrow \frac{xdv}{dx} = \frac{1 + v}{1 - v} - v$$

$$\frac{xdv}{dx} = \frac{(1 + v) - v(1 - v)}{1 - v} \quad \text{یا} \quad \frac{1 - v}{1 + v^2} dv = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{1}{1 + v^2} dv - \frac{1}{2} \int \frac{2v}{1 + v^2} dv = \int \frac{1}{x} dx$$

$$\tan^{-1} v - \frac{1}{2} \ln(1 + v^2) = \ln x + c \Rightarrow \tan^{-1} \frac{y}{x} - \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{y^2}{x^2} \right) = \ln x + c$$

$$\text{یا} \quad \tan^{-1} \frac{y}{x} - \ln \sqrt{x^2 + y^2} = c$$

دوهم مثال: $(x^2 - xy + y^2)dx - xydy = 0$ تفاضلي معادله حل کړئ

حل: لومړی معادله په لاندې شکل لیکو

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 - xy + y^2}{xy} = \frac{1 - \frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^2}}{\frac{y}{x}}$$

دمعادلي بني طرف یوه متجانسه تابع رابښايي، او دحل لپاره یې لومړی په لاندې ډول تعویض اجرا کوو

$$\frac{y}{x} = v \Rightarrow \frac{dy}{dx} = v + x \frac{dv}{dx}$$

دغه قیمتونه په معادله کې وضعه کوو

$$v + x \frac{dv}{dx} = \frac{1 - v + v^2}{v} \quad \text{یا} \quad x \frac{dv}{dx} = \frac{1 - v - v^2}{v} - v \quad \text{یا} \quad x \frac{dv}{dx} = \frac{1 - v}{v}$$

اوس ڀي متحولين سره بيلو او انٽيگرل ڀي نيسو

$$\frac{dx}{dv} = \frac{v}{1 - v} dv \quad \text{یا} \quad \frac{dx}{v} = \left(\frac{v - 1 + 1}{1 - v} \right) dv$$

$$\int \frac{1}{x} dx = - \int \left(1 + \frac{1}{v - 1} \right) dv$$

$$\ln x = -[v + \ln(v - 1)] + c \quad \text{یا} \quad \ln x(v - 1) = c - v$$

$$\ln(y - x) = c - \frac{y}{x}$$

کوم چي ډراکرل شوي معادلي عمومي حل دی

ډريم مثال: $x dy - y dx = \sqrt{x^2 + y^2} dx$ تفاضلي معادله حل کړئ

حل: لومړی راکرل شوی معادله په لاندي شکل ليکو

$$x \frac{dy}{dx} - y = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$x \frac{dy}{dx} = y + \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y + \sqrt{x^2 + y^2}}{x}$$

کومه چي يوه متجانسه تفاضلي معادله ده او دحل کولو لپاره ڀي په لاندي ډول تعويض اجراکوو

$$y = vx \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = v + \frac{xdv}{dx}$$

دغه قيمتونه په معادله کي وضعه کوو

$$v + \frac{xdv}{dx} = \frac{vx + \sqrt{x^2 + v^2 x^2}}{x} = v + \sqrt{1 + v^2}$$

$$\frac{xdv}{dx} = \sqrt{1 + v^2}$$

متحولين ڀي سره بيلو او انٽيگرال ڀي نيسو

$$\frac{dv}{\sqrt{1+v^2}} = \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{1}{\sqrt{1+v^2}} dv = \int \frac{1}{x} dx$$

$$\ln [v + \sqrt{1+v^2}] = \ln x + \ln c \quad \Rightarrow \quad v + \sqrt{1+v^2} = xc$$

$$\frac{y}{x} + \sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}} = xc \quad \Rightarrow \quad y + \sqrt{x^2 + y^2} = x^2 c$$

خلورم مثال: $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \tan \frac{y}{x}$ تفاضلی معادله حل کریں

حل: لیڈل کیڑی چي دمعالی بنی طرف یوه متجانسه تابع ده ، نودحل لپاره یی په لاندی ډول تعویض اجراوو

$$\frac{y}{x} = v \quad \Rightarrow \quad y = vx \quad \therefore \quad \frac{dy}{dx} = v + \frac{xdv}{dx}$$

دغه قیمتونه په معادله کې وضعه کوو

$$v + \frac{xdv}{dx} = v + \tan x \quad \Rightarrow \quad \frac{xdv}{dx} = \tan v \quad \text{یا} \quad \frac{dv}{\tan v} = \frac{dx}{x}$$

$$\cot v dv = \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \int \cot v dv = \int \frac{1}{x} dx$$

$$\ln \sin v + \ln c = \ln x \quad \text{یا} \quad x = c \sin v \quad \text{یا} \quad x = c \sin \left(\frac{y}{x} \right)$$

پنجم مثال: لاندی تفاضلی معادله حل کریں

$$x \cos \left(\frac{y}{x} \right) (y dx + x dy) = y \sin \left(\frac{y}{x} \right) (x dy - y dx)$$

حل: تفاضلی معادله په لاندی شکل لیکو

$$\left[x \cos \left(\frac{y}{x} \right) + y \sin \left(\frac{y}{x} \right) \right] y - \left[y \sin \left(\frac{y}{x} \right) - x \cos \left(\frac{y}{x} \right) \right] x \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\left\{ x \cos \left(\frac{y}{x} \right) + y \sin \left(\frac{y}{x} \right) \right\} y}{\left\{ y \sin \left(\frac{y}{x} \right) - x \cos \left(\frac{y}{x} \right) \right\} x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\left\{ \cos\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{y}{x} \sin\left(\frac{y}{x}\right) \right\} \frac{y}{x}}{\left\{ \frac{y}{x} \sin\left(\frac{y}{x}\right) - \cos\left(\frac{y}{x}\right) \right\}} \dots\dots\dots (1)$$

اوس دمعدالی دحل لپاره په لاندې ډو تعویض اجراکوو

$$\frac{y}{x} = v \quad \Rightarrow \quad y = vx \quad \therefore \quad \frac{dy}{dx} = v + \frac{xdv}{dx}$$

ددغه قیمتونو په وضعه کولو سره لومړی معادله لاندې شکل غوره کوي

$$v + \frac{xdv}{dx} = \frac{v(\cos v + v \sin v)}{v \sin v - \cos v}$$

$$\frac{xdv}{dx} = \frac{v(\cos v + v \sin v)}{v \sin v - \cos v} - v = \frac{2v \cos v}{v \sin v - \cos v}$$

$$2 \frac{dx}{x} = \frac{v \sin v - \cos v}{v \cos v} dv$$

$$2 \int \frac{1}{x} dx = \int \left(\frac{\sin v}{\cos v} - \frac{1}{v} \right) dv$$

$$2 \ln x = -\ln \cos v - \ln v + \ln c$$

$$\ln x^2 = \ln \left(\frac{c}{v \cos v} \right)$$

$$x^2 v \cos v = c \quad \text{یا} \quad xy = \cos \left(\frac{y}{x} \right) = c$$

شپږم مثال: لاندې تفاضلي معادله حل کړی

$$\left(1 + e^{\frac{x}{y}} \right) dx + e^{\frac{x}{y}} \left(1 - \frac{x}{y} \right) dy = 0$$

حل: راکړل شوی معادله کولای شو په لاندې ډول ولیکو

$$\frac{dx}{dy} = - \frac{e^{\frac{x}{y}} \left(1 - \frac{x}{y} \right)}{\left(1 + e^{\frac{x}{y}} \right)} \dots\dots\dots (1)$$

دمعادلی بنی طرف یوه متجانسه تابع راښایي ، نو دمعادلی دحل لپاره په لاندې ډول تعویض اجراکوو

$$x = vy \quad \therefore \quad \frac{dx}{dy} = v + y \frac{dv}{dy}$$

دغه قیمتونه په لومړۍ معادله کې وضعه کوو

$$v + y \frac{dv}{dy} = -\frac{e^v(1-v)}{(1+v)} \quad y \frac{dv}{dy} = -\frac{e^v(1-v)}{(1+v)} - v = -\frac{(v+e^v)}{1+v}$$

اوس یې متحولین سره بیلوو او انټیگرال یې پیداکوو

$$\frac{1+e^v}{v+e^v} dv = -\frac{dy}{y} \quad \therefore \quad \int \left(\frac{1+e^v}{v+e^v} \right) dv = -\int \frac{1}{y} dy$$

$$\ln(v+e^v) = -\ln y + \ln c$$

$$\ln(v+e^v) y = \ln c \quad \text{یا} \quad y(v+e^v) = c$$

$$y \left(\frac{x}{y} + e^{\frac{x}{y}} \right) = c \quad \text{یا} \quad x + ye^{\frac{x}{y}} = c$$

1.7 تمرینونه

لاندې تفاضلي معادلي حل کړی

$$01. \quad (x-y) \frac{dy}{dx} = x+2y$$

$$02. \quad (x^3 - 3xy^2)dx = (y^3 - 3x^2y)dy$$

$$03. \quad (3xy + y^2)dx - (x^2 + xy)dy = 0$$

$$04. \quad x \frac{dy}{dx} - y + x \sin\left(\frac{y}{x}\right) = 0$$

$$05. \quad (x^2 - 2y^2)dx + xydy = 0$$

$$06. \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \tan\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$07. \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x^3 + 2y^3}{2xy^2}$$

$$08. \quad \frac{dy}{dx} = 1 + \frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^2}$$

$$09. \quad y dx + x \left(\ln\left(\frac{y}{x}\right) \right) - 2x dy = 0$$

$$10. \quad x^2 + (x^2 - xy) \frac{dy}{dx} = 0$$

$$11. \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x - \sqrt{xy}}$$

$$12. \quad \left(x \tan\frac{y}{x} - y \sec^2\frac{y}{x} \right) dx + x \sec^2\left(\frac{y}{x}\right) dy = 0$$

$$13. \quad (x^2 + y^2)dx = 2xdy \quad y(1) = 0 \quad 14. \quad xe^{\frac{y}{x}} - y + xy' = 0 \quad y(e) = 0$$

جوابونه:

1. $\ln|x^2 + xy + y^2| = 2\sqrt{3} \tan^{-1}\left(\frac{x+2y}{x\sqrt{3}}\right) + c$ 2. $(x^2 - y^2) = c(x^2 + y^2)^2$

3. $\ln\left|\frac{y}{x^3}\right| + \frac{y}{x} = c \quad (x \neq 0, y \neq 0)$

4. $x \sin \frac{y}{x} = c \left(1 + \cos \frac{y}{x}\right) \left(x \sin \frac{y}{x}\right) \quad (x \neq 0)$

5. $y^2 = x^2 + cx^4$ 6. $\sin\left(\frac{y}{x}\right) = cx$ 7. $2y^3 = 3x^3(\ln x + c)$

8. $y = x \tan \ln(cx)$ 9. $cy = \ln \frac{y}{x} - 1$ 10. $y = (\ln y + c)$

11. $2 \cdot \sqrt{\frac{x}{y}} + \ln y = 0$ 12. $x \tan \frac{y}{x} = c$ 13. $x^2 - y^2 = x$

14. $y = -x \ln \ln|x| \quad (x \neq 0)$

1.8 هغه معادلي چي په متجانسو معادلو باندې بدليري

داډول معادلي عموماً د $\frac{dy}{dx} = \frac{ax+by+c}{Ax+By+C}$ په شکل دي، چي a, b, c, A, B, C ثابت عددونه دي، دداډول معادلو دحل لپاره لاندې دوه حالتونه موجود دي.

اول حالت: که چيرته (فرضيه) $\frac{a}{A} = \frac{b}{B} = k$ نو په دې صورت کي معادله لاندې شکل اختياري

$$\frac{dy}{dx} = \frac{k(Ax + By) + c}{Ax + By + C}$$

په داډول معادلو کي کولاي شو چي د $Ax + By = t$ تعويض څخه وروسته متحولين په اسانۍ سره بيل کړو.

دوهم حال: که چيرته $\frac{a}{A} \neq \frac{b}{B}$ سره وي، نو په دې صورت کي راکړل شوي تفاضلي معادله د $x = X + h$ او $y = Y + k$ په وضعه کولو سره معادله په متجانسه تفاضلي معادله باندې بدليري، چي h او k ثابت عددونه دي، او دمعادلاتو دحل څخه لاسته راځي.

$$x = X + h \Rightarrow dx = dX, \quad y = Y + k \Rightarrow dy = dY$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dY}{dX}$$

اوس نو معادله لاندی شکل اختیاروی

$$\frac{dY}{dX} = \frac{(aX + bY) + (ah + bl + c)}{(AX + BY) + (Ah + Bk + C)}$$

که چیرته h او k داسی انتخاب کړو چې $ah + bk + c = 0$, $Ah + Bk + C = 0$ سره شي، نو په دی صورت کي پورته معادله لاندی شکل اختیاروی

$$\frac{dY}{dX} = \frac{aX + bY}{AX + BY}$$

پورته معادله یوه متجانسه تفاضلی معادله ده ، او دلاندی تعویض په اساس یی حل کوو

$$Y = VX, \quad V = V(X) \quad X = VY, \quad V = V(Y)$$

عملي مثالونه: $\frac{dy}{dx} = \frac{x+2y+1}{2x+4y+3}$ تفاضلی معادله حل کړئ

حل: راکرل شوی معادله یوه متجانسه معادله نه ده ، خو نوموړی معادله په پورته حالتونو کي لومړی حالت رابنایي ، نوراکرل شوی معادله په لاندی شکل لیکو

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + 2y + 1}{2(x + 2y) + 3} \dots \dots \dots (1) \quad x + 2y = t \quad \Rightarrow \quad 1 + 2 \frac{dy}{dx} = \frac{dt}{dx}$$

ددغه قیمتونو په وضعه کولو سره لومړی معادله لاندی شکل اختیاروی

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dt}{dx} - 1 \right) = \frac{t + 1}{2t + 3}, \quad \frac{dt}{dx} - 1 = \frac{2t + 2}{2t + 3}$$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{2t + 2}{2t + 3} + 1 = \frac{2t + 2 + 2t + 3}{2t + 3}$$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{4t + 5}{2t + 3} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{2t + 3}{4t + 5} \right) dt = dx$$

$$\int \left(\frac{\frac{1}{2}(4t + 5) + \frac{1}{2}}{4t + 5} \right) dt = \int dx \quad \frac{1}{2} \int \left(1 + \frac{1}{4t + 5} \right) dt = x + c$$

$$\frac{1}{2} \left[t + \frac{1}{4} \ln(4t + 5) \right] = x + c$$

$$4t + \ln(4t + 5) = 8x + 8c$$

$$4(x + 2y) + \ln(4x + 8y + 5) = 8x + c_1$$

$$4(2y - x) + \ln(4x + 8y + 5) = c_1$$

کوم چي دراکرل شوي معادلي عمومي حل دی

دوهم مثال: $(x + 2y)(dx - dy) = dx + dy$ تفاضلي معادله حل کړئ

حل: راکرل شوي معادله په لاندې ډول لیکو

$$(x + 2y - 1)dx = (x + 2y + 1) \quad \text{يا} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x + 2y - 1}{x + 2y + 1} \dots \dots \dots (1)$$

$$x + 2y = t \quad \Rightarrow \quad 1 + 2\frac{dy}{dx} = \frac{dt}{dx} \quad \text{يا} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left[\frac{dt}{dx} - 1\right]$$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{dt}{dx} - 1\right] = \frac{t - 1}{t + 1} \quad \text{يا} \quad \frac{dt}{dx} - 1 = \frac{2t - 2}{t + 1}$$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{2t - 2}{t + 1} + 1 = \frac{2t - 2 + t + 1}{t + 1} = \frac{3t - 1}{t + 1}$$

اوس يې متحولين سره بيلوو

$$\left(\frac{t + 1}{3t - 1}\right) dt = dx \quad \text{يا} \quad \frac{1}{3}\left[1 + \frac{4}{3t - 1}\right] dt = dx$$

اوس يې انټيگرال پيداوو

$$\frac{1}{3} \int \left(1 + \frac{4}{3t - 1}\right) dt = \int dx$$

$$\frac{1}{3} \left[t + 4 \cdot \frac{1}{3} \ln(3t - 1) \right] = x + c$$

$$\frac{1}{3} \left[x + 2y + \frac{4}{3} \ln(3x + 6y - 1) \right] = x + c$$

کوم چي دراکرل شوي معادلي عمومي حل دی

دریم مثال: $\frac{dy}{dx} = \frac{x+2y-3}{2x+y-3}$ تفاضلی معادله حل کریں

حل: راکرل شوی معادله $\frac{a}{A} \neq \frac{b}{B}$ په شکل ده، نو دراکرل شوی معادلی دحل لپاره په لاندې ډول تعویض اجراکوو

$$x = X + h, \quad y = Y + k \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dY}{dX}$$

ددغه قیمتونو په وضعه کولو سره راکرل شوی معادله لاندې شکل غوره کوي

$$\frac{dY}{dX} = \frac{X + 2Y + (h + 2k - 3)}{2X + Y + (2h + k - 3)}$$

د $2h + k - 3 = 0$ او $h + 2k - 3 = 0$ معادلو دحل څخه $k = 1$ او $h = 1$ لاسته راځي

$$\therefore x = X + 1, \quad y = Y + 1 \quad \Rightarrow \quad X = x - 1, \quad Y = y - 1$$

اوس نوموړي معادله لاندې شکل اختیاروي، کومه چې یوه متجانسه معادله ده

$$\frac{dY}{dX} = \frac{X + 2Y}{2X + Y} \dots \dots \dots (1)$$

$$Y = VX \quad \text{نو} \quad \frac{dY}{dX} = V + X \frac{dV}{dX}$$

ډپورته قیمتونو په وضعه کولو سره لومړی معادله لاندې شکل اختیاروي

$$V + X \frac{dV}{dX} = \frac{X + 2VX}{2X + VX} \quad \Rightarrow \quad V + X \frac{dV}{dX} = \frac{1 + 2V}{2 + V}$$

$$X \frac{dV}{dX} = \frac{1 + 2V}{2 + V} - V = \frac{1 + 2V - 2V - V^2}{2 + V} = \frac{1 - V^2}{2 + V}$$

اوس یې متحولین سره بیلوو او دقسمي کسرونو دتجزیې په مرسته یې انٹیگرال پیداکوو

$$\left(\frac{2 + V}{1 - V^2} \right) dV = \frac{dX}{X} \quad \Rightarrow \quad \left[\frac{3}{2} \left(\frac{1}{1 - V} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 + V} \right) \right] dV = \frac{dX}{X}$$

$$\frac{3}{2} \int \left(\frac{1}{1 - V} \right) dV + \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{1 + V} \right) dV = \int \frac{1}{X} dX$$

$$-\frac{3}{2} \ln(1 - V) + \frac{1}{2} \ln(1 + V) = \ln X + \ln c$$

$$-3 \ln(1 - V) + \ln(1 + V) = 2(\ln X + \ln c)$$

$$\ln \frac{1 + V}{(1 - V)^3} = 2 \ln X c$$

$$X^2 c^2 = \frac{1 + V}{(1 - V)^2} \quad c^2(X - Y)^3 = X + Y \quad \left(\because V = \frac{Y}{X} \right)$$

$$(x - y)^3 c^2 = x + y - 2$$

څلورم مثال: $\frac{dy}{dx} = \frac{3y-7x+7}{3x-7y-3}$ تفاضلي معادله حل کړئ

حل: راکړل شوي معادله دوهم حالت ته ورته ده، او دحل لپاره يې په لاندې ډول تعویض اجرا کوو

$$x = X + h, \quad y = Y + k \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dY}{dX}$$

دپورته قیمتونو په وضعه کولو سره راکړل شوي معادله لاندې شکل اختیاري وي

$$\frac{dY}{dX} = \frac{3Y - 7X + (3k - 7h + 7)}{3X - 7Y + (3h - 7k - 3)}$$

د $3k - 7h + 7 = 0$ او $3h - 7k - 3 = 0$ معادلو دحل څخه $h=1$ او $k=0$ څخه لاسته راځي، په نتیجه کې معادله لاندې شکل اختیاري وي، کومه چې یوه متجانسه تفاضلي معادله ده

$$\frac{dY}{dX} = \frac{3Y - 7X}{3X - 7Y}$$

$$Y = VX \quad \Rightarrow \quad \frac{dY}{dX} = V + X \frac{dV}{dX}$$

$$V + X \frac{dV}{dX} = \frac{3VX - 7X}{3X - 7VX} = \frac{3V - 7}{3 - 7V}$$

$$X \frac{dV}{dX} = \frac{3V - 7}{3 - 7V} - V = \frac{3V - 7 - 3V + 7V^2}{3 - 7V}$$

$$X \frac{dV}{dX} = \frac{7(V^2 - 1)}{3 - 7V}$$

اوس يې متحولین سره بیلوو او دقسامي کسرونو دتجزیې په مرسته يې انټیگرال پیدا کوو

$$7 \frac{dX}{X} = \frac{3 - 7V}{(V - 1)(V + 1)} dV$$

$$7 \int \frac{1}{X} dX = - \int \left(\frac{2}{V - 1} + \frac{5}{V + 1} \right) dV$$

$$7 \ln X = -[2 \ln(V - 1) + 5 \ln(V + 1)] + \ln c$$

$$X^7 (V - 1)^2 (V + 1)^5 = c \quad \text{يا} \quad X^7 \left(\frac{Y}{X} - 1 \right)^2 \left(\frac{Y}{X} + 1 \right)^5 = c$$

$$(Y - X)^2 (Y + X)^5 = c \quad \text{يا} \quad (y - x + 1)^2 (y + x - 1)^2 = c$$

1.9 تمرينونه:

لاندي تفاضلي معادلي حل كرى

1.
$$\frac{dy}{dx} = \frac{x - y + 3}{2x - 2y + 5}$$

2.
$$(6x - 4y + 3)dx = (3x - 2y + 1)dy$$

3.
$$\frac{dy}{dx} = \frac{y - x + 1}{y - x - 5}$$

4.
$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x - 4y - 2}{3x - 4y - 3}$$

5.
$$(2x - 4y + 3)dy + (x - 2y + 1)dx = 0$$

6.
$$(x - 2y + 5)dx - (2x + y - 1)dy = 0$$

7.
$$\frac{dy}{dx} = \frac{y - x + 1}{y + x + 5}$$

8.
$$(2x + 3y - 5) \frac{dy}{dx} + (3x + 2y - 5) = 0$$

9.
$$(2x + y + 6)dx = (y - x - 3)dy$$

10.
$$\frac{dy}{dx} = \frac{x - y + 1}{x + 2y - 3}$$

11.
$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + 2y - 3}{2x + y - 3}$$

12.
$$(2y - x - 1)dy - (2x - y + 1)dx = 0$$

جوابونه:

1.
$$(2y - x) = \ln(x - y + 2) + c$$

2.
$$(2y - x) = \frac{1}{4} \ln(12x - 8y + 1) + c$$

3.
$$\frac{(y - x)^2}{2} - 5(y - x) = 6x + c$$

4.
$$x - y = \ln(3x - 4y + 1) + c$$

5.
$$\ln\{4(x - 2y) + 5\} = 4(x + 2y) + c$$

6.
$$x^2 - y^2 - 4xy + 10x + 2y = c$$

$$7. \ln\{(x+2)^2 + (y+3)^2\}^{\frac{1}{2}} + \tan^{-1}\left\{\frac{y+3}{x+2}\right\} = c$$

$$8. 3x^2 + 4xy + 3y^2 - 10x - 10y + 10 = c \quad 9. y^2 - 2xy - 2x^2 - 6y - 12x - 18 = c$$

$$10. \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln\left(\frac{X + \sqrt{2}Y}{X - \sqrt{2}Y}\right) - \frac{1}{2} \ln\left(\frac{2Y^2 - X^2}{X^2}\right) = X + c \quad X = x - \frac{1}{3}, Y = y - \frac{4}{3}$$

$$11. (y-x)^3 = c(x+y-2) \quad 12. (3x-3y+2)(x+y)^3 = c$$

خطي تفاضلي معادلي (Linear Differential Equations)

هغه تفاضلي معادلي چي (1) $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$ شكل ولري ، خطي تفاضلي معادلي ورته وايي ، چي P او Q د x تابع دي، يا هم ثابت عددونه دي ، y او د y مشتق y' بايد يو مثبت تام عدد وي ، چي ديو څخه به لوي هم نه وي ، او نه به yy' حاصل ضرب په شکل وي.

دلومړي معادلي دحل لپاره ، دمعادلي دواړه خواوي په $e^{\int P dx}$ فکتور کي ضربوو ، کوم چي لاندې شکل اختياروي

$$\left[\frac{dy}{dx} + P(x)y\right] e^{\int P dx} = Q(x)e^{\int P dx} \quad \text{يا} \quad \frac{d}{dx}[y e^{\int P dx}] = Q(x)e^{\int P dx}$$

اوس يي نظر x ته انتيگرال نيسو

$$y e^{\int P dx} = \int Q(x) e^{\int P dx} dx + c$$

کوم چي غوښتل شوي حل دي

يادابنت: $e^{\int P dx}$ فکتور ته دانتيگرال فکتور ته دلومړي معادلي دانتيگرال فکتور وايي ، همدارنگه ځيني وخت خطي تفاضلي معادله لاندې شکل اختياروي

$$\frac{dx}{dy} + P(y)x = Q(y)$$

چي په دي صورت کي درا کرل شوي معادلي دانتيگرال فکتور عبارت د $e^{\int P dy}$ څخه دي ، او دمعادلي حل په لاندې ډول دي

$$xe^{\int P dy} = \int Q(y)e^{\int P dy} dy + c$$

عملي مثالونه:

لومری مثال: $\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x}y = x^3$ تفاضلي معادله حل کری

حل: راکړل شوي معادله $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$ په شکل ده، چې $Q = x^3$ او $P = \frac{2}{x}$ څخه دي، دانتيگرال فکتور يې په لاندې ډول پيدا کوو

$$IF = e^{\int P dx} = e^{\int \frac{2}{x} dx} = e^{2 \ln x} = e^{\ln x^2} = x^2$$

اوس دمعادلي عمومي حل دلاندې فورمول په اساس لاسته راوړو

$$y \times IF = \int Q \cdot IF dx + c$$

قيمتونه په فورمول کي وضعه کوو

$$y x^2 = \int x^3 \cdot x^2 dx + c \quad \text{يا} \quad y x^2 = \int x^5 dx + c$$

$$y x^2 = \frac{x^6}{6} + c \quad \text{يا} \quad y = \frac{x^4}{6} + \frac{c}{x^2}$$

دوهم مثال: $\frac{dy}{dx} + y \sec x = \tan x$ تفاضلي معادله حل کری

حل: $P = \sec x$ ، $Q = \tan x$ سره دي، نو لومری يې دانتيگرال فکتور په لاندې ډول پيدا کوو

$$IF = e^{\int P dx} = e^{\int \sec x dx} = e^{\ln(\sec x + \tan x)} = (\sec x + \tan x)$$

پس دمعادلي عمومي حل په لاندې ډول دی

$$y(\sec x + \tan x) = \int \tan x (\sec x + \tan x) dx + c$$

$$y(\sec x + \tan x) = \int \sec x \tan x dx + \int (\sec^2 x - 1) dx + c$$

$$y(\sec x + \tan x) = \sec x + \tan x - x + c \quad \therefore y = 1 + \frac{c - x}{\sec x + \tan x}$$

دریم مثال: $\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x}y = x \ln x$ تفاضلي معادله حل کریئ

حل:

$$p = \frac{2}{x} \quad \text{او} \quad Q = x \ln x$$

دمعادلي دحل لپاره لومړی باید دانتيگرال فکتور پیداکړو

$$IF = e^{\int P dx} = e^{\int \frac{2}{x} dx} = e^{2 \ln x} = e^{\ln x^2} = x^2$$

اوس دراکړل شوي معادلي دحل لپاره په لاندي ډول عمل اجراکړو

$$y \cdot x^2 = \int x \ln x \cdot x^2 dx + c$$

پورته انتيگرال دانقسام په طريقه پیداکړو

$$yx^2 = \ln x \cdot \frac{x^4}{4} - \frac{x^4}{16} + c \quad \text{يا} \quad y = \frac{x^2}{4} \ln x - \frac{x^2}{16} + \frac{c}{x^2}$$

څلورم مثال: $(1 + x^2) \frac{dy}{dx} + y = e^{\tan^{-1} x}$ تفاضلي معادله حل کریئ

حل: راکړل شوي معادله لومړی په لاندي شکل لیکو

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{(1 + x^2)} y = \frac{e^{\tan^{-1} x}}{1 + x^2}, \quad P = \frac{1}{1 + x^2} \quad \text{او} \quad Q = \frac{e^{\tan^{-1} x}}{1 + x^2}$$

دراکړل شوي معادلي دحل لپاره لومړی دانتيگرال فکتور پیداکړو

$$IF = e^{\int P dx} = e^{\int \frac{1}{1+x^2} dx} = e^{\tan^{-1} x}$$

اوس معادله په لاندي ډول پیداکړو

$$ye^{\tan^{-1} x} = \int \frac{e^{\tan^{-1} x}}{1 + x^2} \cdot e^{\tan^{-1} x} dx + c = \int \frac{e^{2 \tan^{-1} x}}{1 + x^2} dx + c$$

$$ye^{\tan^{-1} x} = I + c$$

په معادله کي موجود انتيگرال لومړی په تعويضي طريقه پیداکړو ، او بيا يي په معادله کي د I په ځای وضعه کړو

$$I = \int \frac{e^{2 \tan^{-1} x}}{1+x^2} dx, \quad \tan^{-1} x = t \Rightarrow \frac{1}{1+x^2} dx = dt$$

$$I = \int e^{2t} dt = \frac{e^{2t}}{2} = \frac{e^{2 \tan^{-1} x}}{2}$$

نو دراکرل شوي معادلي حل په لاندې ډول دی

$$ye^{\tan^{-1} x} = \frac{e^{2 \tan^{-1} x}}{2} + c \quad y = \frac{e^{\tan^{-1} x}}{2} + c e^{-\tan^{-1} x}$$

پنځم مثال: $\sin^2 x \frac{dy}{dx} - y = \cot x$ تفاضلي معادله حل کړئ

حل: راکرل شوي معادله په لاندې شکل لیکو

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{\sin^2 x} = \frac{\cot x}{\sin^2 x} \quad \text{یا} \quad \frac{dy}{dx} - y \operatorname{cosec}^2 x = \cot x \operatorname{cosec}^2 x$$

$$P = -\operatorname{cosec}^2 x$$

$$Q = \cot x \operatorname{cosec}^2 x$$

اوس یې دانتيگرال فکتور په لاندې ډول پیدا کوو

$$IF = e^{\int P dx} = e^{-\int \operatorname{cosec}^2 x dx} = e^{\cot x}$$

پس دمعادلي عمومي حل په لاندې ډول پیدا کوو

$$ye^{\cot x} = \int (\cot x \operatorname{cosec}^2 x) e^{\cot x} dx + c$$

$$ye^{\cot x} = I + c$$

د I قیمت لومړی په لاندې ډول لومړی دتعويضي طريقي او وروسته دانقسام طريقي څخه په گټه اخیستني سره پیدا کوو

$$I = \int (\cot x \operatorname{cosec}^2 x) e^{\cot x} dx$$

$$\cot x = t$$

$$-\operatorname{cosec}^2 x dx = dt$$

$$I = -\int t e^t dt = -\left[t e^t - \int e^t \cdot 1 dt \right]$$

$$I = -[t e^t - e^t] = e^t - t e^t = e^t(1 - t)$$

په نتیجه کې لیکلای شو چې

$$y e^{\cot x} = e^{\cot x}(1 - \cot x) + c \quad \text{یا} \quad y = (1 - \cot x) + ce^{-\cot x}$$

شپږم مثال: $(x + \tan y) dy = \sin 2y dx$ تفاضلي معادله حل کړئ

حل: راکړل شوي معادله کولای شو په لاندې ډول ولیکو

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + \tan y}{\sin 2y} \quad \text{یا} \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sin 2y} x = \frac{\tan y}{\sin 2y}$$

کومه چې د $\frac{dx}{dy} + P(y)x = Q(y)$ شکل لري، ددې څخه لیکلای شو چې:

$$P = -\frac{1}{\sin 2y} \quad \text{او} \quad Q = \frac{\tan y}{\sin 2y}$$

لومړی دانتيگراډ فکتور په لاندې ډول پیداوو

$$\begin{aligned} IF = e^{\int P dy} &= e^{-\int \frac{1}{\sin 2y} dy} = e^{-\frac{1}{2} \int \frac{\sec^2 y}{\tan y} dy} = e^{-\frac{1}{2} \ln \tan y} = e^{\ln \frac{1}{\sqrt{\tan y}}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\tan y}} = \sqrt{\cot y} \end{aligned}$$

اوس دراکړل شوي معادلې عمومي د فورمول په نظر کې نیولوسره په لاندې ډول حل کوو

$$x \sqrt{\cot y} = \int \frac{\tan y}{\sin 2y} \sqrt{\cot y} dy + c = \int \frac{\sec^2 y}{2 \sqrt{\tan y}} dy + c$$

$$x \sqrt{\cot y} = \sqrt{\tan y} + c \quad x = \tan y + c \sqrt{\tan y}$$

اووم مثال: $(1 + y^2) dx = (\tan^{-1} y - x) dy$ تفاضلي معادله حل کړئ

حل: لومړی راکړل شوي معادله په لاندې ډول لیکو

$$\frac{dx}{dy} + \frac{1}{1 + y^2} x = \frac{\tan^{-1} y}{1 + y^2} \quad \text{نو} \quad P = \frac{1}{1 + y^2} \quad \text{او} \quad Q = \frac{\tan^{-1} y}{1 + y^2}$$

اوس دراکړل شوي معادلې دحل لپاره دانتيگراډ فکتور په لاندې ډول پیداوو

$$IF = e^{\int \frac{1}{1+y^2} dy} = e^{\tan^{-1} y}$$

پس دراکړل شوي معادلي عمومي حل په لاندې ډول پيدا کوو

$$xe^{\tan^{-1}y} = \int \frac{\tan^{-1}y}{1+y^2} e^{\tan^{-1}y} dy + c$$

$$xe^{\tan^{-1}y} = \int t e^t dt + c \quad t = \tan^{-1}y$$

$$xe^{\tan^{-1}y} = (t-1)e^t + c$$

$$xe^{\tan^{-1}y} = (\tan^{-1}y - 1)e^{\tan^{-1}y} + c$$

$$\therefore x = (\tan^{-1}y - 1) + ce^{\tan^{-1}y}$$

اتم مثال: $y \ln y dx + (x - \ln y)dy = 0$ تفاضلي معادله حل کړئ

حل: راکړل شوي معادله په لاندې ډول لیکو

$$\frac{dx}{dy} + \frac{1}{y \ln y} x = \frac{1}{y} \quad P = \frac{1}{y \ln y}, \quad Q = \frac{1}{y}$$

اوس دراکړل شوي معادلي دحل لپاره دانتيگرال فکتور په لاندې ډول پيدا کوو

$$IF = e^{\int \frac{1}{y \ln y} dy} = e^{\ln \ln y} = \ln y$$

اوس راکړل شوي معادله په لاندې ډول حل کوو

$$x \ln y = \int \frac{1}{y} \cdot \ln y dy + c = \int t dt + c, \quad \ln y = t \Rightarrow \frac{1}{y} dy = dt$$

$$= \frac{t^2}{2} + c$$

$$x \ln y = \frac{(\ln y)^2}{2} + c \quad \therefore x = \frac{\ln y}{2} + \frac{c}{\ln y}$$

نهم مثال: $\frac{dy}{dx} = x \sin 2y = x^3 \cos^2 y$ تفاضلي معادله حل کړئ

حل: راکړل شوي معادله يوه معياري خطي تفاضلي معادله نه ده، ددې لپاره چې معادله په معياري شکل وليکو، نومعادله په $\cos^2 y$ باندې ويشو

$$\sec^2 y \frac{dy}{dx} + 2x \tan y = x^3 \dots \dots \dots (1)$$

په لومړۍ معادل کې په لاندې ډول تعویض اجراکوو

$$\tan y = t \quad \Rightarrow \quad \sec^2 y \frac{dy}{dx} = \frac{dt}{dx}$$

اوس لومړۍ معادله لاندې شکل اختیاري

$$\frac{dt}{dx} + 2x t = x^3 \quad \text{نو} \quad P = 2x \quad \text{او} \quad Q = x^3$$

اوس یې دانتيگرال فکتور په لاندې ډول پیداکوو

$$IF = e^{\int P dx} = e^{\int 2x dx} = e^{x^2}$$

ډپورته قیمتونو په لرلوسره دمعدالي عمومي حل په لاندې ډول پیداکوو

$$te^{x^2} = \int x^3 e^{x^2} dx + c$$

$$= \int x \cdot x^2 e^{x^2} dx + c \quad x^2 = u; \quad 2x dx = du; \quad x dx = \frac{du}{2}$$

$$= \int u e^u du + c$$

$$= u e^u - \int e^u du + c$$

$$= u e^u - e^u + c$$

$$te^{x^2} = (u - 1)e^u + c \quad \Rightarrow \quad te^{x^2} = (x^2 - 1)e^{x^2} + c$$

$$\therefore t = (x^2 - 1) + ce^{-x^2} \quad t = \tan y$$

$$\tan y = (x^2 - 1) + ce^{-x^2}$$

یادښت: پورته مثال $f'(y) \frac{dy}{dx} + f(y)P(x) = Q(x)$ شکل لري، ددې ډول معادلو دحل لپاره $f(y) = t$ وضعه کوو

لسم مثال: $x \frac{dy}{dx} - y = x^3 \cos x$, $y(\pi) = 0$ تفاضلی معادله حل کری

حل: لومری راکرل شوی معادله په لاندې ډول لیکو

$$\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x}y = x^2 \cos x, \quad P = -\frac{1}{x} \quad \text{او} \quad Q = x^2 \cos x$$

اوس دراکرل شوی معادله دحل لپاره دانتيگرال فکتور په لاندې ډول پیداکوو

$$IF = e^{-\int \frac{1}{x} dx} = e^{-\ln x} = e^{\ln \frac{1}{x}} = \frac{1}{x}$$

اوس دمعادله عمومي حل په لاندې ډول پیداکوو

$$y \frac{1}{x} = \int x^2 \cos x \cdot \frac{1}{x} dx + c$$

$$\frac{y}{x} = \int x \cdot \cos x dx + c$$

$$\frac{y}{x} = x \sin x - \int \sin x \cdot 1 dx + c$$

$$\frac{y}{x} = x \sin x + \cos x + c$$

$$y = x^2 \sin x + x \cos x + cx \quad x = \pi, \quad y = 0$$

$$0 = \pi^2 \sin \pi + \pi \cos \pi + c\pi$$

$$0 = -\pi + c\pi, \quad c\pi = \pi \Rightarrow c = 1$$

پس دمعادله خصوصي حل په لاندې ډول دی

$$y = x^2 \sin x + x \cos x + x$$

تمرینونه:

لاندې تفاضلی معادله حل کری

1. $x(x^2 + 1) \frac{dy}{dx} = y(1 - x^2) + x^2 \ln x$
2. $\frac{dy}{dx} + y \cot x = \sin x$
3. $x \cos x \frac{dy}{dx} + y(x \sin x + \cos x) = 1$
4. $(1 - x^2) \frac{dy}{dx} + 2xy = x \sqrt{1 - x^2}$
5. $\frac{dy}{dx} + y = \sin x$
6. $(x + 1) \frac{dy}{dx} - y = e^x(1 + x)^2$
7. $\frac{dy}{dx} + y \tan x = \sin 2x$
8. $\frac{dy}{dx} + 3y = e^{-x} \cos x$
9. $\frac{dy}{dx} = \frac{x + y \cos x}{1 + \sin x}$
10. $\frac{dy}{dx} + y \cot x = 4x \operatorname{cosec} x$
11. $\frac{dy}{dx} - 2y \tan x = \sec^4 x$
12. $(x + y + 1) \frac{dy}{dx} = 1$
13. $\frac{dy}{dx} - \frac{\tan y}{1 + x} = (1 + x) e^x \sec y$
14. $(x + 2y^2) \frac{dy}{dx} = y$
15. $y^2 + \left(x - \frac{1}{y}\right) \frac{dy}{dx} = 0$ (Hint reduce in form $\frac{dx}{dy} + P_1x = Q_1$)
16. $(x + 1) \frac{dy}{dx} + (1 + x)y = 2 \sin x$ $y(0) = 2$
17. $x \frac{dy}{dx} + y = x \cos x + \sin x$ $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$
18. $\frac{dy}{dx} + \frac{2x}{x^2 + 1}y = \frac{1}{(x^2 + 1)^2}$ $y(0) = 0$

1. $\frac{[y(x^2 + 1)]}{x} = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 + c$
2. $y \sin x = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + c$
3. $y x \sec x = \tan x + c$
4. $\frac{y}{(1 - x^2)} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} + c$
5. $y = \frac{1}{2}(\sin x - \cos x) + ce^{-x}$
6. $y = (x + 1)(e^x + c)$
7. $y \sec x = c - 2 \cos x$
8. $y = ce^{-3x} + e^{-x} \left(\frac{\sin x + 2 \cos x}{5}\right)$

9. $y(1 + \sin x) + \frac{x^2}{2} = c$ 10. $y = (2x^2 + c)\operatorname{cosec} x$
 11. $y \cos^2 x = c + \tan x$ 12. $x = ce^y - (y + 2)$
 13. $\sin y = (1 + x)(c + e^x)$ 14. $\frac{x}{y} = y^2 + c$
 15. $x = ce^{\frac{1}{y}} + \frac{1}{y} + 1$ 16. $y = \frac{\sin x - \cos x}{1 + x} + \frac{3e^{-x}}{1 + x}$
 17. $y = \sin x$ 18. $y = \frac{\tan^{-1} x}{x^2 + 1}$

1.13 برنولي معادله (Bernoulli's Equation)

خُيني لومری ترتیب تفاضلي معادلي دي چي خطي شکل نه لري ، خو دمتحولينو په مناسب تعویض سره کولای شو چي نوموړي معادلي په خطي تفاضلي معادلو باندې تبدیلی کرو، یو شکل ددوي څخه دبرنولي معادله هم ده ، کوم چي دسویس ریاضي پوه (1654-1705) Jacob Bernoulli په واسطه منځ ته راغلي دي، دبرنولي دمعادلي عمومي شکل په لاندې ډول دی

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n \dots\dots\dots (1), \quad (n \neq 0, n \neq 1)$$

چي P او Q د x تابع دي او یا هم امکان لري چي ثابت عددونه وي، لومړی معادله کولای شو چي دخطي معادلي په شکل ولیکو ، ددي کار لپاره لومړی معادله y^n باندې ویشو، نو لاندې معادله لاسته راگوي

$$y^{-n} \frac{dy}{dx} + P y^{1-n} = Q \dots\dots\dots (2)$$

اوس په لاندې ډول تعویض اجراکوو

$$y^{1-n} = v \Rightarrow (1 - n)y^{-n} \frac{dy}{dx} = \frac{dv}{dx}$$

دپورته قیمتونو په وضعه کولو سره دوهمه معادله لاندې شکل اختیاروي

$$\frac{1}{1 - n} \frac{dv}{dx} + P v = Q \quad \text{یا} \quad \frac{dv}{dx} + P(1 - n)v = Q(1 - n) \dots\dots\dots (3)$$

دریمه معادله یوه خطي تفاضلي معادله ده ، چې کولای شو نوموړې معادله دانتيگرال دفکتور په پیداکولو سره حل کړو.

عملي مثالونه:

لومړی مثال: $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = y^2$ تفاضلي معادله حل کړئ

حل: راکړل شوي معادله برنولي معادله ده ، لومړی راکړل شوي معادله په y^2 باندې ویشو

$$\frac{1}{y^2} \frac{dy}{dx} - \frac{y^{-1}}{x} = 1 \quad \text{یا} \quad y^{-2} \frac{dy}{dx} - \frac{1}{x} y^{-1} = 1$$

اوس دپورته معادلي دحل لپاره په لاندې ډول تعویض اجراکوو

$$y^{-1} = v \quad \Rightarrow \quad -y^{-2} \frac{dy}{dx} = \frac{dv}{dx}$$

دپورته قیمتونو په وضعه کولو سره معادله په لاندې خطي تفاضلي معادلي باندې بدلیري

$$-\frac{dv}{dx} - \frac{1}{x} v = 1 \quad \text{یا} \quad \frac{dv}{dx} + \frac{1}{x} v = -1$$

اوس یې دانتيگرال فکتور په لاندې ډول پیداکوو

$$P = \frac{1}{x}, \quad Q = -1 \quad \text{نو} \quad IF = e^{\int P dx} = e^{\int \frac{1}{x} dx} = e^{\ln x} = x$$

پس دراکړل شوي معادلي عمومي حل په لاندې ډول دي

$$v x = \int -1 x dx + c \quad \text{یا} \quad v x = -\frac{x^2}{2} + c \quad \text{یا} \quad y^{-1} x = -\frac{x^2}{2} + c$$

دوهم مثال: $x \frac{dy}{dx} + y = y^2 \ln x$ تفاضلي معادله حل کړئ

حل: لومړی راکړل شوي معادله په لاندې ډول لیکو

$$y^{-2} \frac{dy}{dx} + \frac{1}{x} y^{-1} = \frac{1}{x} \ln x \dots \dots \dots (1)$$

اوس دمعادلي دحل لپاره په لاندې ډول تعویض اجراکوو

$$y^{-1} = v \quad \Rightarrow \quad -y^{-2} \frac{dy}{dx} = \frac{dv}{dx}$$

دپورته قيمتونوپه وضعه كولوسره معادله په لاندي خطي تفاضلي معادله باندې بدليري

$$-\frac{dv}{dx} + \frac{1}{x}v = \frac{1}{x} \ln x \quad \text{يا} \quad \frac{dv}{dx} - \frac{1}{x}v = -\frac{1}{x} \ln x$$

اوس يې دانتيگرال فکتور پيدا کوو

$$P = -\frac{1}{x}, \quad Q = -\frac{1}{x} \ln x \quad IF = e^{-\int \frac{1}{x} dx} = e^{-\ln x} = e^{\ln \frac{1}{x}} = \frac{1}{x}$$

پس دمعادلي عمومي حل په لاندي ډول دی

$$v \cdot \frac{1}{x} = \int -\frac{1}{x} \ln x \cdot \frac{1}{x} dx + c \quad \text{يا} \quad v x^{-1} = -\int x^{-2} \ln x + c$$

$$v x^{-1} = -\left[\ln x \frac{x^{-1}}{-1} + \int \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} dx \right] + c = -\left[-\frac{\ln x}{x} + \frac{x^{-1}}{-1} \right] + c$$

$$y x^{-1} = \ln x \cdot x^{-1} + x^{-1} + c \quad y^{-1} = \ln x + 1 + cx$$

دریم مثال: تفاضلي معادله حل کړئ $\frac{dy}{dx} - 2y \tan x = y^2 \tan^2 x$

حل: معادله په y^2 باندې ویشو

$$y^{-2} \frac{dy}{dx} - 2y^{-1} \tan x = \tan^2 x$$

اوس دمعادلي دحل لپاره په لاندي ډول تعویض اجرا کوو

$$y^{-1} = v \Rightarrow -y^{-2} \frac{dy}{dx} = \frac{dv}{dx} \quad \therefore -\frac{dv}{dx} - 2v \tan x = \tan^2 x$$

$$\frac{dv}{dx} + 2v \tan x = -\tan^2 x, \quad P = 2 \tan x \quad Q = -\tan^2 x$$

دانتيگرال فکتور په لاندي ډول پيدا کوو

$$IF = e^{\int P dx} = e^{\int 2 \tan x dx} = e^{2 \ln \sec x} = e^{\ln \sec^2 x} = \sec^2 x$$

$$\therefore v \cdot \sec^2 x = -\int \tan^2 x \sec^2 x dx + c$$

$$v \cdot \sec^2 x = -\frac{\tan^3 x}{3} + c \quad \text{يا} \quad \frac{1}{y} \sec^2 x = -\frac{\tan^3 x}{3} + c$$

خلورم مثال: $y(2xy + e^x)dx - xe^x dy = 0$ تفاضلي معادله حل کړئ

حل: لومړی راکړل شوي معادله برنولي معادلي په شکل لیکو

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = \frac{2}{e^x} y^2$$

پورته معادله برنولي معادله ده ، ددی لپاره چې دخطي معادلي په شکل یې ولیکو ، نو راکړل شوي معادله به y^2 باندې ویشو

$$y^{-2} \frac{dy}{dx} - \frac{y^{-1}}{x} = \frac{2}{e^x} \quad \text{پس } y^{-1} = v \quad \Rightarrow \quad -y^{-2} \frac{dy}{dx} = \frac{dv}{dx}$$

$$-\frac{dv}{dx} - \frac{v}{x} = \frac{2}{e^x} \quad \text{یا} \quad \frac{dv}{dx} + \frac{1}{x}v = -\frac{2}{e^x}, \quad P = \frac{1}{x} \quad Q = -\frac{2}{e^x}$$

$$IF = e^{\int P dx} = e^{\int \frac{1}{x} dx} = e^{\ln x} = x$$

پس دمعادلي عمومي حل عبارت دي له

$$v x = - \int 2 e^{-x} x dx + c = -2 \left[-x e^{-x} + \int e^{-x} dx \right] + c$$

$$= -2[-x e^{-x} - e^{-x}] + c \quad \text{یا} \quad \frac{1}{y} x = 2e^{-x}(x + 1) + c$$

پنځم مثال: $\frac{dy}{dx} + y \cos x = y^n \sin 2x$ تفاضلي معادله حل کړئ

حل: راکړل شوي معادله دبرنولي معادلي په شکل ده ، لومړی راکړل شوي معادله په y^n باندې ویشو

$$y^{-n} \frac{dy}{dx} + y^{1-n} \cos x = \sin 2x \dots \dots \dots (1)$$

$$y^{1-n} = v \quad \Rightarrow \quad (1-n)y^{-n} \frac{dy}{dx} = \frac{dv}{dx}$$

دپورته قیمتونو په وضعه کولوسره لومړی معادله په لاندې خطي معادلي باندې بدلیږي

$$\frac{1}{1-n} \frac{dv}{dx} + v \cos x = \sin 2x \quad \text{یا} \quad \frac{dv}{dx} + (1-n) \cos x \cdot v = (1-n) \sin 2x$$

$$P = (1-n) \cos x, \quad Q = (1-n) \sin 2x$$

$$IF = e^{\int P dx} = e^{\int (1-n) \cos x dx} = e^{(1-n) \sin x}$$

پس دمعادلي عمومي حل په لاندې ډول پيدا کوو

$$v e^{(1-n) \sin x} = \int (1-n) \sin 2x e^{(1-n) \sin x} dx + c$$

$$(1-n) \sin x = t \quad \Rightarrow \quad \cos x dx = \frac{1}{n-1} dt$$

$$v e^{(1-n) \sin x} = \int (1-n) 2 \sin x \cos x e^{(1-n) \sin x} dx + c$$

$$= \frac{2}{n-1} \int t e^t dt + c$$

$$= \frac{2}{n-1} \left[t e^t - \int 1 \cdot e^t dt \right] + c$$

$$= \frac{2}{n-1} [t e^t - e^t] + c = \frac{2}{n-1} [(t-1)e^t]$$

$$y^{(1-n)} e^{(1-n) \sin x} = \frac{2}{n-1} [(1-n) \sin x - 1] e^{(1-n) \sin x} + c$$

$$y^{1-n} = \left\{ \frac{2}{n-1} \right\} [(1-n) \sin x - 1] + c e^{-(1-n) \sin x}$$

شپږم مثال: $\frac{dz}{dx} + \frac{z}{x} \ln z = \frac{z}{x^2} (\ln z)^2$ تفاضلي معادله حل کړئ

حل: راکړل شوي معادله په z باندې ویشو، نو لاندې نتیجه لاسته راځوي

$$\frac{1}{z} \frac{dz}{dx} + \frac{1}{x} \ln z = \frac{1}{x^2} (\ln z)^2 \quad y = \ln z \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{z} \frac{dz}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = \frac{y^2}{x^2}$$

پورته معادله دبرنولي معادلي شکل دی، ددې لپاره چې په خطي شکل یې بدله کړو، نو معادله په y^2 باندې ویشو

$$y^{-2} \frac{dy}{dx} + \frac{y^{-1}}{x} = \frac{1}{x^2} \quad y^{-1} = v \quad \Rightarrow \quad -y^{-2} \frac{dy}{dx} = \frac{dv}{dx}$$

$$-\frac{dv}{dx} + \frac{v}{x} = \frac{1}{x^2} \quad \text{یا} \quad \frac{dv}{dx} - \frac{1}{x} v = -\frac{1}{x^2} \quad P = -\frac{1}{x}, \quad Q = -\frac{1}{x^2}$$

$$IF = e^{\int P dx} = e^{-\int \frac{1}{x} dx} = e^{-\ln x} = \frac{1}{x}$$

اوس یی عمومی حل پہ لاندی بول پیدا کرو

$$v \cdot \frac{1}{x} = \int -\frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{x} dx + c = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2} + c$$

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{2x^2} + cx \quad y = \ln z$$

$$\therefore \frac{1}{\ln z} = \frac{1}{2x} + cx$$

1.14 تمرینونہ:

لاندی تفاضلی معادلات حل کریں

1. $\frac{dy}{dx} - xy = x^3 y^2$ Ans: $\frac{1}{y^2} = 1 - x^2 + ce^{x^2}$
2. $2 \frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = \frac{y^2}{x^2}$ Ans: $\frac{1}{y} = \frac{1}{x} - \frac{c}{\sqrt{x}}$
3. $xy - \frac{dy}{dx} = y^3 e^{-x^2}$ Ans: $-\frac{1}{y^2} e^{x^2} = c - 2x$
4. $\sec^2 y \frac{dy}{dx} + 2x \tan y = x^3$ Ans: $\tan y e^{x^2} = c + \frac{1}{2} e^{x^2} (\tan y - 1)$ put $\tan y = v$
5. $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = y^2 x$ Ans: $1 + x^2 y + cxy = 0$
6. $\frac{dy}{dx} + y \tan x = y^3 \sec x$ Ans: $\cos^2 x = y^2 (2 \sin x + c)$
7. $x^3 \frac{dy}{dx} + y^4 \cos x = x^2 y$ Ans: $x^3 = (c + 3 \sin x) y^3$
8. $\frac{dy}{dx} + y \cot x = y^2 \sin^2 x \cos^2 x$ Ans: $\frac{1}{y} = \frac{1}{3} \sin x \cos^3 x + c \sin x$
9. $\frac{dy}{dx} + x \sin 2y = x^3 \cos^2 y$ Ans: $\tan y = \frac{1}{2} (x^2 - 1) + ce^{-x^2}$
10. $\frac{dy}{dx} (x^2 y^3 + xy) = 1$ Ans: $\frac{1}{x} = 2 - y^2 + ce^{-\frac{y^2}{2}}$

کاملي تفاضلي معادلي (Exact Differential Equations)

هغه تفاضلي معادلي جي (1) $M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$ شکل ولري ،
کاملي تفاضلي معادلي ورته وايي ، که چيرته دلومري معادلي چپ طرف ديوي تابع لکه $f(x, y)$ کامل
ديفرنسيال وي، يعني $M(x, y) dx + N(x, y) dy = df$ ، ياپه ساده ڊول باندي لومري معادلي ته
کامله تفاضلي معادله وايي که چيرته $u(x, y)$ په لاندي ڊول موجود وي

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M(x, y) \quad \text{او} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = N(x, y)$$

دمثال په ډول $x dy + y dx = 0$ تفاضلي معادله په نظر کي نيسو، نوموړي معادله کولای شو چي د
 $d(xy) = 0$ په شکل وليکو، کوم چي مونږ ته $df = 0$ شکل رابنایي ، چي f د x او y تابع ده،
دانتيگرال نيوني څخه وروسته $xy = c$ لاسته راځي ، کوم چي دراگرل شوي معادلي عمومي حل دي،
داډول معادلوته کاملي تفاضلي معادلي وايي.

قضيه: دلومري معادلي دکامل والي لپاره لازمي اوکافي شرط عبارت له $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ څخه دی.

(i) دلازمي شرط لپاره ثبوت:

فرض کړئ چي لومري معادله کامله ده ، مونږ بايد وبنایو چي $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ ، څرنگه چي لومري معادله
کامله ده ، نو دتعريف په اساس د $f(x, y)$ يوه تابع موجوده ده دکوم لپاره چي مونږ لاندي معادله لرو

$$df = M(x, y) dx + N(x, y) dy \quad \dots \dots \dots (2)$$

دتيرو رياضياتوپه اساس لرو چي

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \quad \dots \dots \dots (3)$$

دوهمي او دريمي معادلو دمقاييسي په اساس لرو چي

$$M = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad N = \frac{\partial f}{\partial y} \quad \dots \dots \dots (4) \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

څرنگه چي

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \quad \therefore \quad \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

کوم چي لازمي شرط رابنایي.

(ii) دکافي شرط لپاره ثبوت:

فرض کړئ چې $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ ، مونږ باید د $f(x, y)$ یوه تابع پیدا کړو ، دکوم لپاره چې لاندې معادله صدق وکړي

$$df = M(x, y) dx + N(x, y) dy \quad \text{یعني} \quad \frac{\partial f}{\partial x} = M(x, y) \quad \text{او} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = N(x, y)$$

مونږ باید د $f(x, y)$ تابع دابول لاسته راوړو ، دکوم لپاره چې څلورمه معادله کې لومړی حالت صدق وکړي، دنوموړی معادلي نظر x ته مشتق اخلو او y ثابت نیسو ، نو مونږ لاندې معادله لاسته راوړو

$$f = \int M(x, y) dx + \phi(y) \dots \dots \dots (5)$$

چې $\phi(y)$ یوه اختیاري تابع د y ده ، اوس $\phi(y)$ دابول انتخابوو چې په څلورمه معادله کې دوهم حالت لپاره هم صدق وکړي ، یعني (6) $\dots \dots \dots \frac{\partial f}{\partial y} = N(x, y)$ ، اوس د $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ په نظر کې نیولو سره $\phi(y)$ هروخت امکان لري.

د (5) څخه لیکلای شو چې

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[\int M(x, y) dx \right] + \phi'(y) \dots \dots \dots (7)$$

د (6) او (7) دمقایسي په اساس لیکلای شو چې

$$\phi'(y) = N(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \int M(x, u) dx \dots \dots \dots (8)$$

د (8) چپ طرف د x څخه مستقل دی

راځئ چې اوس د (4) حالت لاندې وینایو، x د (8) بڼې طرف ته دننه کیدای نه شي ، ددی لپاره مونږ باید وینایو چې د (8) د بڼې طرف قسمي مشتق صفر دی.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[N - \frac{\partial}{\partial y} \int M(x, y) dx \right] = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial}{\partial y} \int M dx \right] = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial}{\partial x} \int M dx \right]$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \int M dx = M(x, y) \quad \frac{\partial}{\partial x} \left[N - \frac{\partial}{\partial y} \int M dx \right] = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = 0$$

ځکه $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ اوس د (8) مشتق نظر y اخلو، نو ترلاسه کوو چې

$$\phi(y) = \int \left[N - \frac{\partial}{\partial y} \int M dx \right] dy + c \dots \dots \dots (9)$$

چي c يو اختياري ثابت عدد دی ، اوس که (9) په (5) کي وضعه کړو ، نو غوښتل شوي تابع لاسته راځوي

$$f(x, y) = \int M dx + \int \left[N - \frac{\partial}{\partial y} \int M dx \right] dy + c$$

دکومي چي کامل ډيفرنسيال عبارت له $M dx + N dy$ څخه دی دکاملوتفاضلي معادلو دحل طريقه:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \text{ چي ويناو چي لومړی بايد ويناو چي}$$

1. د $M(x, y)$ انټيگرال نظر x ته پيداوو او y ثابت په نظر کي نيسو ، لاسته راغلي انټيگرال په I_1 سره بناوو.

2. په $N(x, y)$ کي هغه حدونه چي x ونلري ، نظر y ته انټيگرال نيسو او دغه انټيگرال په I_2 سره بناوو.

3. $I_1 + I_2 = c$ دراکړل شوي معادلي عمومي حل دی

عملي مثالونه:

لومړی مثال: $(2xy + 3y) dx + (x^2 + 3x) dy = 0$ تفاضلي معادله حل کړئ

حل:

$$M = 2xy + 3y \quad \text{او} \quad N = x^2 + 3x$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2x + 3 \quad \text{او} \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 2x + 3$$

څرنګه چي $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ پس راکړل شوي معادله يوه کامله تفاضلي معاده ، اوس يي عمومي حل په لاندې ډول پيداوو

$$\int (2xy + 3y) dx + \int (0) dy = c$$

$$2y \frac{x^2}{2} + 3yx = c \quad \text{يا} \quad x^2y + 3xy = c$$

پورته معادله کولای شو په لاندی ډول حل کړو، چې لومړی دمعادلي چپ طرف دیو کامل ډیفرنسیال په شکل لیکو

$$(2xy dx + x^2 dy) + 3(x dy + y dx) = 0 \quad \text{یا} \quad d(x^2y) + 3d(xy) = 0$$

دانتيگرال څخه وروسته دراکړل شوي معادلي عمومي حل په لاس راځي

$$x^2y + xy = c$$

دوهم مثال: لاندې تفاضلي معادله حل کړئ

$$(5x^4 + 3x^2y^2 - 2xy^3)dx + (2x^3y - 3x^2y^2 - 5y^4)dy = 0$$

حل: پوهیږو چې

$$M = 5x^4 + 3x^2y^2 - 2xy^3 \quad \text{او} \quad N = 2x^3y - 3x^2y^2 - 5y^4$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 6x^2y - 6xy^2 \quad \text{او} \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 6x^2y - 6xy^2$$

څرنګه چې $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ پس راکړل شوی معادله یوه کامله تفاضلي معاده ، اوس یې عمومي حل په لاندې ډول پیداکو

$$\int (5x^4 + 3x^2y^2 - 2xy^3)dx + \int (-5y^4)dy = c$$

$$x^5 + x^3y^2 - x^2y^3 - y^5 = c$$

درېم مثال: $(e^y + 1) \cos x dx + e^y \sin x dy = 0$ تفاضلي معادله حل کړئ

حل: لیدل کېږي چې

$$M = (e^y + 1) \cos x \quad \text{او} \quad N = e^y \sin x$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = e^y \cos x \quad \text{او} \quad \frac{\partial N}{\partial x} = e^y \cos x$$

څرنګه چې $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ پس راکړل شوی معادله یوه کامله تفاضلي معاده ، اوس یې عمومي حل په لاندې ډول پیداکو

$$\int (e^y + 1) \cos x \, dx + \int (0) \, dy = c \quad \Rightarrow \quad (e^y + 1) \sin x = c$$

خلورم مثال: لاندی تفاضلی معادله حل کری

$$\left[y \left(1 + \frac{1}{x} \right) + \cos y \right] dx + [x + \ln x - x \sin y] dy = 0$$

حل: پوهیرو چی

$$M = y \left(1 + \frac{1}{x} \right) + \cos y \quad \text{او} \quad N = x + \ln x - x \sin y$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \left(1 + \frac{1}{x} \right) - \sin y \quad \text{او} \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \left(1 + \frac{1}{x} \right) - \sin y$$

خرنگه چی $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ پس راکرل شوی معادله یوه کامله تفاضلی معاده ، اوس یی عمومی حل په لاندی ډول پیداکو

$$\int \left[y \left(1 + \frac{1}{x} \right) + \cos y \right] dx + \int (0) \, dy = c$$

$$yx + y \ln x + x \cos y = c$$

پنځم مثال: لاندی تفاضلی معادله حل کری

$$(2x \ln y) \, dx + \left(\frac{x^2}{y} + 3y^2 \right) \, dy = 0$$

حل: لیدل کیږي چی

$$M = 2x \ln y \quad \text{او} \quad N = \frac{x^2}{y} + 3y^2$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2x \cdot \frac{1}{y} = \frac{2x}{y} \quad \text{او} \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{2x}{y}$$

خرنگه چی $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ پس راکرل شوی معادله یوه کامله تفاضلی معاده ، اوس یی عمومی حل په لاندی ډول پیداکو

$$\int (2x \ln y) dx + \int 3y^2 dy = c \quad \Rightarrow \quad x^2 \ln y + y^3 = c$$

شپڙم مثال: لاندی تفاضلی معادله حل کری

$$\left(1 + e^{\frac{x}{y}}\right) dx + e^{\frac{x}{y}} \left(1 - \frac{x}{y}\right) dy = 0$$

حل: لیڈل کیری چي

$$M = \left(1 + e^{\frac{x}{y}}\right) \quad N = e^{\frac{x}{y}} \left(1 - \frac{x}{y}\right)$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = e^{\frac{x}{y}} \left(-\frac{x}{y^2}\right) \quad \frac{\partial N}{\partial x} = e^{\frac{x}{y}} \left(-\frac{1}{y}\right) + \left(1 - \frac{x}{y}\right) e^{\frac{x}{y}} \frac{1}{y}$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = -\frac{e^{\frac{x}{y}}}{y} + e^{\frac{x}{y}} \frac{1}{y} - \frac{x}{y^2} e^{\frac{x}{y}} = \left(-\frac{x}{y^2}\right) e^{\frac{x}{y}}$$

څرنگه چي $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ پس راکړل شوی معادله یوه کامله تفاضلی معاده ، اوس یې عمومي حل په لاندی ډول پیداکو

$$\int \left(1 + e^{\frac{x}{y}}\right) dx + \int (0) dy = c$$

$$x + \frac{e^{\frac{x}{y}}}{\frac{1}{y}} = c \quad \text{یا} \quad x + y e^{\frac{x}{y}} = c$$

1.16 تمرینونه

لاندی تفاضلی معادلی حل کری

1. $3x(xy - 2)dx + (x^2 + 2y)dy = 0$
2. $y \sin 2x dx - (1 + y^2 + \cos^2 x)dy = 0$
3. $(x^2 - 2xy + 3y^2)dx + (y^2 + 6xy - x^2)dy$
4. $(y^2 - x^2)dx + 2xy dy = 0$
5. $\left(1 + 3e^{\frac{x}{y}}\right) dx + 3e^{\frac{x}{y}} \left(1 - \frac{x}{y}\right) dy = 0$
6. $(y \sec^2 x + \sec x \tan x)dx + (\tan x + 2y)dy = 0$

7. $(e^y + 1) \cos x \, dx + e^y \sin x \, dy = 0$

8. $\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2 y}\right) dx - \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{x^2 y}\right) dy = 0$

9. $\left(x + \frac{y^3}{x^2}\right) dx - 3y^2 dy = 0$

10. $(\cos x - 3x^2 \tan y) dx - x^3 \sec^2 y \, dy = 0$

11. $(ax + hy + g) dx + (hx + by + f) dy = 0$

12. $\left[\cos x \log_e(2y - 8) + \frac{1}{x}\right] dx + \frac{\sin x}{y - 4} dy = 0 \quad y(1) = \frac{9}{2}$

جوابونه:

1. $x^3 y - 3x^2 + y^2 = c$

2. $3y \cos 2x + 6y + 2y^3 = c$

3. $x^3 - 3x^2 y + 9xy^2 + y^3 = c$

4. $\frac{x^3}{3} - xy^2 = c$

5. $x + 3ye^{\frac{x}{y}} = c$

6. $y \tan x + \sec x + y^2 = c$

7. $(e^y + 1) \sin x = c$

8. $\ln\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{1}{xy} = c$

9. $x^3 - 2y^3 = cx$

10. $3y \cos 2x + (6y + 2y^3) = c$

11. $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c$

12. $\sin x \ln(2y - 8) + \ln x = 0$

1.17 هغه تفاضلي معادلي چي په كاملو تفاضلو معادلوباندي بدليري

په دې برخه کې ځينې معادلي تریبٹ لاندې نیسو ، کومې چې $Mdx + Ndy = 0$ شکل ولري خو کاملې نه وي، ولې ديوې مناسبې تابع دضربولو څخه وروسته په کاملوتفاضلي معادلوباندي بدليري ، چې دغه مناسبې تابع ته دانتيگرال فکتور يا داتمام عامل وايي ، دانتيگرال فکتور دپیداکولو لپاره لاندې قوانین بغير دثبوت څخه ترڅیرني لاندې نیسو.

لومړی قانون: که چیرته راکرل شوی تفاضلي معادله یوه متجانسه تفاضلي معادله وي او همدارنگه

$Mx + Ny \neq 0$ ، نو $\frac{1}{Mx+Ny}$ عبارت دانتيگرال فکتور څخه دی.

لومری مثال: $(x^4 + y^4)dx - xy^3dy = 0$ تفاضلی معادله حل کری

حل: راکرل شوی معادله یوه متجانسه تفاضلی معادله ده، نو لومری یې دانتيگرال فکتور پیدا کوو

$$IF = \frac{1}{Mx + Ny} = \frac{1}{(x^4 + y^4)x + (-xy^3)y} = \frac{1}{x^5}$$

اوس راکرل شوی معادله په $\frac{1}{x^5}$ کې ضربوو

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{y^4}{x^5}\right)dx - \frac{y^3}{x^4}dy = 0$$

پورته معادله یوه کامله تفاضلی معادله ده او په لاندې ډول یې حل کوو

$$\int \left(\frac{1}{x} + \frac{y^4}{x^5}\right)dx + \int (0)dy = c \quad \Rightarrow \quad \ln x - \frac{y^4}{4x^4} = c$$

دوهم مثال: $y^2dx + (x^2 - xy - y^2)dy = 0$ تفاضلی معادله حل کری

حل: راکرل شوی معادله یوه متجانسه تفاضلی معادله ده، نو دانتيگرال فکتور یې په لاندې ډول پیدا کوو

$$IF = \frac{1}{Mx + Ny} = \frac{1}{y^2x + (x^2 - xy - y^2)y} = \frac{1}{y(x^2 - y^2)}$$

اوس راکرل شوی معادله په لاسته راغلي انتيگرال فکتور کې ضربوو، نو معادله لاندې شکل اختیاروي

$$\frac{y}{x^2 - y^2}dx + \left(\frac{1}{y} - \frac{x}{x^2 - y^2}\right)dy = 0$$

پورته معادله یوه متجانسه تفاضلی معادله ده، او په لاندې ډول یې حل کوو

$$\int \frac{y}{x^2 - y^2}dx + \int \frac{1}{y}dy = c$$

$$y \cdot \frac{1}{2y} \ln \frac{x-y}{x+y} + \ln y = c \quad \text{یا} \quad \frac{1}{2} \ln \frac{x-y}{x+y} + \ln y = c$$

دوهم قانون: که چیرته $\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N}$ یواځې د x تابع وي، د $f(x)$ په شکل یې فرض کوو، نو $e^{\int f(x)dx}$ عبارت دانتیگرال فکتور څخه دی.

لومړی مثال: $2y dx + (2x \ln x - xy)dy = 0$ تفاضلي معادله حل کړئ
حل:

$$M = 2y \quad N = 2x \ln x - xy$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2 \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 2 \left(x \cdot \frac{1}{x} + \ln x \right) - y = 2(1 + \ln x) - y$$

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{2 - 2 - 2 \ln x + y}{2x \ln x - xy} = \frac{-2 \ln x + y}{x(2 \ln x - y)} = -\frac{1}{x} = f(x)$$

$$\therefore IF = e^{\int f(x)dx} = e^{-\int \frac{1}{x}dx} = e^{-\ln x} = \frac{1}{x}$$

اوس راکړل شوي معادله په $\frac{1}{x}$ کې ضربوو، نو ترلاسه کوو

$$\frac{2y}{x} dx + \frac{2x \ln x - xy}{x} dy = 0 \quad \text{یا} \quad \frac{2y}{x} dx + (2 \ln x - y) dy = 0$$

پورته معادله یوه کامله تفاضلي معادله ده، او په لاندې ډول یې حل کوو

$$\int \frac{2y}{x} dx + \int (-y) dy = c \quad \Rightarrow \quad 2y \ln x - \frac{y^2}{2} = c$$

دوهم مثال: لاندې تفاضلي معادله حل کړئ

$$(6x^2 + 4y^3 + 12y) dx + 3x(1 + y^2) dy = 0$$

حل:

$$M = 6x^2 + 4y^3 + 12y \quad N = 3x + 3xy^2$$

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{12y^2 + 12 - 3 - 3y^2}{3x(1 + y^2)} = \frac{12(y^2 + 1) - 3(1 + y^2)}{3x(1 + y^2)} = \frac{3}{x} = f(x)$$

$$\therefore IF = e^{\int f(x)dx} = e^{\int \frac{3}{x}dx} = e^{3 \ln x} = e^{\ln x^3} = x^3$$

راکړل شوي معادله په x^3 کې ضربوو

$$(6x^5 + 4x^3y^3 + 12x^3y) dx + 3x^4(1 + y^2) dy = 0$$

پورته معادله یوه کامله تفاضلي معادله ده، نو په لاندې ډول یې حل کوو

$$\int (6x^5 + 4x^3y^3 + 12x^3y) dx + \int (0) dy = c$$

$$x^6 + x^4y^3 + 3yx^4 = c$$

دریم قانون: که چېرته $\frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M}$ د y تابع وي، او د $f(y)$ په شکل یې وښایو نو $e^{\int f(y)dy}$ دانتيگرال فکتور دی.

لومړی مثال: لاندې تفاضلي معادله حل کړئ

$$(y^4 + 2y)dx + (xy^3 + 2y^4 - 4x)dy = 0$$

حل:

$$M = y^4 + 2y \quad N = xy^3 + 2y^4 - 4x$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 4y^3 + 2 \quad \frac{\partial N}{\partial x} = y^3 - 4$$

$$\frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} = \frac{(y^3 - 4) - (4y^3 + 2)}{(y^4 + 2y)} = \frac{-3(y^3 + 2)}{y(y^3 + 2)} = \frac{-3}{y} = f(y)$$

اوس یې دانتيگرال فکتور په لاندې ډول پیداوو

$$IF = e^{\int f(y)dy} = e^{-\int \frac{3}{y}dy} = e^{-3 \ln y} = e^{-\ln y^3} = \frac{1}{y^3}$$

اوس راکړل شوي معادله په $\frac{1}{y^3}$ کې ضربوو، نو ترلاسه کوو

$$\left(y + \frac{2}{y^2}\right) dx + \left(x + 2y - \frac{4x}{y^3}\right) dy = 0$$

پورته معادله یوه متجانسه معادله ده، نو عمومي حل یې په لاندې ډول دی

$$\int \left(y + \frac{2}{y^2} \right) dx + \int 2y dy = c$$

$$xy + \frac{2x}{y^2} + y^2 = c \quad \text{یا} \quad x \left(y + \frac{2}{y^2} \right) y + y^2 = c$$

څلورم قانون: که چېرته راکړل شوي معادله د $f_1(x, y)y dx + f_2(x, y)x dy = 0$ شکل ولري، چې $M = f_1(x, y)y$ او $N = f_2(x, y)x$ وي او $Mx - Ny \neq 0$ نو په دې صورت کې عبارت دانتيگرا ل فکتور څخه دی.

مثال: لاندې تفاضلي معادله حل کړئ

$$y(1 + 2xy) dx + x(1 - xy) dy = 0$$

حل:

$$M = yf_1(x, y) \quad N = xf_2(x, y)$$

$$M = y(1 + 2xy) \quad N = x(1 - xy)$$

$$Mx - Ny = xy(1 + 2xy) - xy(1 - xy) = xy + 2x^2y^2 - xy + x^2y^2$$

$$Mx - Ny = 3x^2y^2 \neq 0$$

پس دراکړل شوي معادلي دانتيگرا ل فکتور عبارت دی له

$$IF = \frac{1}{Mx - Ny} = \frac{1}{3x^2y^2}$$

راکړل شوي معادله په $\frac{1}{3x^2y^2}$ کې ضربوو، نو تر لاسه کوو چې

$$\left(\frac{1}{3x^2y} + \frac{2}{3x} \right) dx + \left(\frac{1}{3xy^2} - \frac{1}{3y} \right) dy = 0$$

پورته معادله یوه متجانسه معادله ده او عمومي حل یې په لاندې ډول دی

$$\int \left(\frac{1}{3x^2y} + \frac{2}{3x} \right) dx + \int -\frac{1}{3y} dy = c$$

$$-\frac{1}{3xy} + \frac{2}{3} \ln x - \frac{1}{3} \ln y = c \quad \text{یا} \quad -\frac{1}{xy} + 2 \ln x - \ln y = k \quad (k = 3c)$$

پنجم قانون: که چپرته معادله د $x^a y^b (my dx + nx dy) + x^c y^d (py dx + qx dy) = 0$ چي a, b, c, d, m, n, p, q ثابت عددونه دي شکل ولري، نو دراکرل شوي معادلي دانتيگرا ل فکتور عبارت د $x^h y^k$ څخه دی، د h او k دلاسته راوړلو لپاره لومړی راکرل شوي معادله په $x^h y^k$ کې ضربوو، ترڅو معادله په کامله تفاضلي معادله باندې بدله شي، بیا یې د کامل والي د شرط څخه په استفادې سره، دضریبونو دمقایسي څخه د h او k قیمتونه لاسته راوړو، دغه موضوع په لاندې مثال کې واضح کوو

مثال: $(y^2 + 2x^2y)dx + (2x^3 - xy) dy = 0$ معادله حل کړئ

حل: لومړی راکرل شوي معادله په لاندې ډول لیکو

$$y(y dx - x dy) + x^2(2y dx + 2x dy) = 0$$

اوس راکرل شوي معادله په $x^h y^k$ کې ضربوو، نو ترلاسه کوو

$$(x^h y^{k+2} + 2x^{h+2} y^{k+1})dx + (2x^{h+2} y^k - x^{h+1} y^{k+1})dy = 0 \dots \dots \dots (1)$$

پورته معادله باید یوه کامله تفاضلي معادله وي

$$M = x^h y^{k+2} + 2x^{h+2} y^{k+1}, \quad N = 2x^{h+2} y^k - x^{h+1} y^{k+1}$$

څرنګه چې لومړی معادله کامله ده، نو لروچي

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

$$(k+2)x^h y^{k+1} + 2(k+1)x^{h+2} y^k = 2(h+3)x^{h+2} y^k - (h+1)x^h y^{k+1}$$

دپورته عینیت دضریبونو د مساوات څخه لرو چې

$$k+2 = -(h+1) \quad \text{او} \quad 2(k+1) = 2(h+3)$$

$$يعني \quad h+k = -3 \quad \text{او} \quad h-k = -2$$

دپورته سیستم دحل څخه د h او k قیمتونه عبارت دي له

$$h = -\frac{5}{2} \quad k = -\frac{1}{2} \quad \therefore \quad IF = x^{-\frac{5}{2}} y^{-\frac{1}{2}}$$

اوس راکرل شوي معادله په $x^{-\frac{5}{2}} y^{-\frac{1}{2}}$ کې ضربوو

$$\left(x^{-\frac{5}{2}}y^{\frac{3}{2}} + 2x^{-\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{2}}\right) dx + \left(2x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{2}} + x^{-\frac{3}{2}}y^{\frac{1}{2}}\right) dy = 0$$

پورته معادله يوه متجانسه معادله ده ، او عمومي حل يې په لاندې ډول دی

$$y^{\frac{3}{2}}\left(-\frac{2}{3}x^{-\frac{3}{2}}\right) + 2y^{\frac{1}{2}}\left(2x^{\frac{1}{2}}\right) = c \quad \text{يا} \quad 6x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{3}{2}}y^{\frac{3}{2}} = c$$

1.18

لاندې تفاضلي معادلي حل کړئ

1. $(x^2 - 3xy + 2y^2) dx + x(3x - 2y) dy = 0$
2. $(x^2y - 2xy^2) dx + 2y dy = 0$
3. $(xy - y^2) dx - x^2 dy = 0$
4. $(x^2 + y^2 + 2x) dx + 2y dy = 0$
5. $(3xy - 2ay^2) dx + (x^2 - 2ayx) dy = 0$
6. $(x^3 - 2y^2) dx + 2y dy = 0$
7. $(xy^2 - x^2) dx + (3x^2y^2 + x^2y - 2x^3 + y^2) dy = 0$
8. $(y^4 + 2y) dx + (xy^3 + 2y^4 - 4x) dy = 0$
9. $(xy^2 + y) dx + 2(x^2y^2 + x + y^4) dy = 0$
10. $(xy \sin xy + \cos xy)y dx + (xy \sin xy - \cos xy)x dy = 0$
11. $(x^2y^2 + xy + 1) y dx + (x^2y^2 - xy + 1)x dy = 0$
12. $(2y dx + 3x dy) + 2xy(3ydx + 4xdy) = 0$

**Get more e-books from www.ketabton.com
Ketabton.com: The Digital Library**