1.1 تعریف او ډولونه:

تعریف : هغه معادله چې مشتقات ولري دتفاضلي معادلې په نوم يادېږي ، کیداشي چې دغه مشتقات معمولي مشتقات وي او یا قسمي مشتقات وي.

تفاضلي معادلې په دوه ډوله دي

معمولي تفاضلي معادله (Ordinary Differential Equation)

هغه معادله چې د x مستقل متحول ، د y غیرمستقل متحول چې y ته د x تابع هم وايو او د y هر ترتيب مشتق نظر x ته ولري دمعمولي تفاضلي په نامه سره يادېږي.

مثالونه:

1. $\frac{dy}{dx} + 3y = 0$

2. $\frac{dy}{dx} + y = e^x$

3. $\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2y = 0$

4. $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2y = \sin x$

5. $\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + 3y = 0$

6. $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^2 + 7\frac{d^2y}{dx^2} + 8\frac{dy}{dx} - 9y = \log x$

قسمي تفاضلي معادله (Partial Differential Equation)

هغه تفاضلي معادله چې دوه یاڅو مستقل متحوله ، تابع او ددغه تابع قسمي مشتقات (هر ترتیب چې وي) ولري دقسمي تفاضلي معادلې په نامه سره يادېږي.

مثالونه:

که چېرته z د x او y تابع وي نو:

7. $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ 8. $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 2z$ 9. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$

1.2 دتفاضلي معادلو ترتيب او درجه

دتفاضلي معادلې ترتيب:

په تفاضلي معادله کې لوړ ترين مشتق دتفاضلي معادلې دترتيب څخه عبارت دی.

دتفاضلي معادلې درجه:

په تفاضلي معادله کې دلوړترين ترتيب توان دتفاضلي معادلې ددرجې څخه عبارت دی.

په پورته مثالونو کې:

1) لومړی ترتیب او لومړۍ درجه
2) لومړی ترتیب او لومړۍ درجه
3) دوهم ترتیب لومړۍ درجه
4) لومړی ترتیب دوهمه درجه
5) دوهم ترتیب لومړۍ درجه
6) دریم ترتیب دوهمه درجه

همدارنګه د $\frac{d^2y}{dx^2} = \left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}$ تفاضلي معادلې دترتیب او درجې دپیداکولو لپاره لومړی دمعادلې دواړه خواوې مربع کوو ، په نتیجه کې معادله لاندې شکل غوره کوي

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 = \left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^3$$

اوس پورته معادله دوهم ترتیب او دوهمه درجه تفاضلي معادله ده.

باید په یاد ولرئ چی دتفاضلي معادلو ترتیب او درجه کوم چی مونږ تعریف کړل باید مثبت تام عدد وي.

دتفاضلي معادلو حل

یوه معمولي تفاضلي معادله لاندې عمومي شکل لری

$$F\left[x, y, y', y'', \dots\dots\dots\dots y^{(n)}\right] = 0 \dots\dots\dots\dots (1)$$

دیوې تفاضلي معادلې حل عبارت دهغه تابع څخه دی ، کوم چې په راکړل شوی معادله کی صدق وکړي، ϕ(x) تابع ته د (1) تفاضلي معادلې حل ویل کیږي ، که چیرته :

$$F[x, \phi(x), \phi'(x), \dots\dots\dots\dots, \phi^n(x)] = 0$$

یاپه بل عبارت y=ϕ(x) تابع په (1) معادله کې صدق وکړي.

د n ام ترتیب تفاضلي معادلو حل ، چې n اختیاري ثابت عددونه ولري د عمومي حل (general solution) په نامه سره یادیږي، که چیرته په عمومي حل کې داختیاری ثابت عدد په ځای خاص قیمت وضعه شي ، دتفاضلي معادلې مشخص حل (particular solution) لاس ته راځي.

1.3 دتفاضلي معادلو ترتیب دپارامتر دحذفولوپه واسطه

ددې لپاره چې مونږ ښه پوه شو چې څنګه کولای شو چی تفاضلي معادله دپارامتر دحذفولو په واسطه تشکیل کړو ، نو لاندې مثال په نظر کې نیسو.

مثال : داسي تفاضلي معادله تشکیل کړئ ، کوم چې د $y = a\cos(x+b)$ منحنیاتو مجموعه رانبایی ، a او b اختیاري ثابت عددونه دي.

حل:

$$y = a\cos(x+b) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

داولې معادلې نظر x ته مشتق اخلو

$$\frac{dy}{dx} = -a\sin(x+b) \ldots\ldots\ldots\ldots.. (2)$$

اوس ددوهمې معادلې نظر x ته مشتق اخلو

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -a\cos(x+b) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

ددریمې معادلې څخه د a قیمت لمنځه وړو، په نتیجه کې لاندې تفاضلي معادله لاسته راځي

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -y \quad => \quad \frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$$

په نتیجه کې ویلای شو، که وغواړو یوه تفاضلي معادله تشکیل کړو ، نو لومړی باید دورکړل شو منحنیاتو مجموعې کوم چې د پارامترونو دلودونکې ده ، مشتق ونیسو او بیا پارامترونه حذف کړو.

یاداښت: (i) دمنحنیاتو هغه مجموعه کوم چې یو پارامتر ولري ، لومړی ترتیب تفاضلي معادله تشکیلوی.

(ii) په عمومي ډول دمنحنیاتو هغه مجموعه کوم چې n پارامترونه ولري ، n ام ترتیب تفاضلي معادله تشکیلوي.

1.4 لومړی ترتیب او لومړۍ درجه تفاضلي معادله

په دې فصل کې مونږ د لومړی ترتیب او لومړۍ درجې تفاضلي معادلو دحل لپاره مختلفي طریقو باندې بحث کوو، چې په عمومي ډول لومړی ترتیب او لومړۍ درجه تفاضلي معادلې لاند شکل لري.

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots. (1)$$

دپورته عمومی شکل ، عمومي حل عبارت دی له:

$$F(x, y, c) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.. (2)$$

په دوهمه معادله کې c یو اختیاري ثابت عدد دی ، کوم چې په لومړۍ معادله کې صدق کوي، که چېرته c ته یومشخص قیمت وکړو ، نو په دې صورت کې عمومي حل په مشخص حل باندې بدلیږي.

مونږ دلومړۍ معادلې ځینې معیاري شکلونه په لاندې طریقو باندې حل کوو.

(1) هغه معادلې چې متحولین یې دتفکیک وړ وي او یا دساده کولو څخه وروسته تفکیک ته برابریږي
(2) متجانسي تفاضلي معادلې
(3) متجانسو تفاضلي معادلوته بدلیدونکي تفاضلي معادلی
(4) کاملی تفاضلي معادلې
(5) کاملو تفاضلي معادلوته بدلیدونکی تفاضلي معادلې
(6) خطي تفاضلي معادلې
(7) خطي تفاضلي معادلوته بدلیدونکي تفاضلي معادلې (برنولي شکل)

1.5 دتفکیک وړ معادلې (Separation of variables):

ددې لپاره دتفاضلي معادلې لاندې شکل په نظر کې نیسو

$$\frac{dy}{dx}=\frac{f(x)}{g(y)}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)\qquad (\,g(y)\neq 0\,)$$

دمتحولینو په جداکولو سره لومړۍ معادله په لاندې شکل لیکو او بیا یې انتیگرال نیسو

$$g(y)dy=f(x)dx\qquad =>\qquad \int g(y)dy=\int f(x)dx$$

دانتیگرال دنیونې څخه وروسته د (1) تفاضلي معادلې حل په لاندې ډول لاسته راځي

$$G(y)=F(x)+c$$

چې F(x) او G(y) په ترتیب سره د x او y توابع او c یو اختیاري ثابت عدد دی.

عملي مثالونه:

لومړی مثال: $\frac{dy}{dx}=\frac{1+y^2}{1+x^2}$ تفاضلي معادله حل کړئ

حل: دمتحولینو دجلاکولو څخه وروسته معادله په لاندې ډول حل کوو

$$\frac{dy}{1+y^2}=\frac{dx}{1+x^2}$$

$$\int\frac{1}{1+y^2}dy=\frac{1}{1+x^2}dx$$

$$\tan^{-1}y=\tan^{-1}x+A$$

$$\tan^{-1} y - \tan^{-1} x = A$$

$$\tan^{-1} \frac{y-x}{1+yx} = A$$

$$\tan^{-1} \frac{y-x}{1+yx} = \tan^{-1} c \quad => \quad \frac{y-x}{1+yx} = c \quad => \quad y - x = c(1+yx)$$

کوم چې دغوښتل شوي معادلې مطلوب حل دی

دوهم مثال: $\frac{dy}{dx} = e^{x+y} + x^2 e^y$ تفاضلي معادله حل کړئ

حل: لومړی یې متحولین سره بیلوو اوبیا یې ددواړو خواوو انتیګرال نیسو

$$\frac{dy}{dx} = e^x e^y + x^2 e^y$$

$$\frac{dy}{dx} = e^y(e^x + x^2)$$

$$e^{-y} dy = (e^x + x^2) dx$$

$$\int e^{-y} dy = \int (e^x + x^2) dx$$

$$-e^{-y} + c = e^x + \frac{x^3}{3} \quad \text{یا} \quad e^x + e^{-y} + \frac{1}{3}x^3 = c$$

دریم مثال: $e^x \tan y \ dx + (1-e^x)\sec^2 y \ dy = 0$ تفاضلي معادله حل کړئ

حل: ددی لپاره چې متحولین یې سره بیل کړو ، نومعادله په $(1-e^x)$. $\tan y$ باندې ویشو

$$\frac{e^x}{1-e^x} dx + \sec^2 y \, dy = 0$$

$$-\int \frac{e^x}{e^x - 1} dx + \int \frac{\sec^2 y}{\tan y} dy = \log c$$

$$-\ln(e^x - 1) + \ln \tan y = \ln c$$

$$\ln\left(\frac{\tan y}{e^x - 1}\right) = \ln c \quad \text{یا} \quad \tan y = c(e^x - 1)$$

خلورم مثال: $\tan y\frac{dy}{dx} = \sin(x+y) + \sin(x-y)$ تفاضلي معادله حل کړئ

حل: د *sin C +sin D* رابطې څخه په استفادې سره پورته معادله په لاندې شکل لیکوو

$$\tan y\frac{dy}{dx} = 2\sin x\cos y$$

$$\frac{\tan y}{\cos y}dy = 2\sin x\ \ dx$$

$$\sec y\tan y\ \ dy = 2\sin x\ \ dx$$

$$\int \sec y\tan y\ \ dy = 2\int \sin x\,dx$$

$$\sec y = -2\cos x + c \quad \text{یا} \quad \sec y + 2\cos x = c$$

پنځم مثال: $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos(x+y)}$ تفاضلي معادله حل کړئ

په راکړل شوې معادله کی متحولین یو دبل څخه نه بیلیږي ، خو که x+y=t سره تعویض کړو ، نو بیا کولای شو متحولین یې په اسانی سره بیل کړو

$$x+y=t \quad => \quad 1+\frac{dy}{dx} = \frac{dt}{dx} \quad => \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dt}{dx} - 1$$

دپورته قیمتونو په وضعه کولو سره معادله لاندې شکل غوره کوي

$$\frac{dt}{dx} - 1 = \frac{1}{\cos t} \quad => \quad \frac{dt}{dx} = \frac{1}{\cos t} + 1 = \frac{1+\cos t}{\cos t}$$

اوس یې متحولین سره بیلوو ، چې لاندې شکل لاسته راکوي

$$\frac{\cos t\ \ dt}{1+\cos t} = dx$$

$$\left(\frac{\cos^2\frac{t}{2} - \sin^2\frac{t}{2}}{2\cos^2\frac{t}{2}}\right)dt = dx \quad => \quad \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\tan^2\frac{t}{2}\right)dt = dx$$

$$\frac{1}{2}\left(1-\tan^2\frac{t}{2}\right)dt = dx \quad => \quad \frac{1}{2}\left(1-\left(\sec^2\frac{t}{2} - 1\right)\right)dt = dx$$

$$\frac{1}{2}\left(2-\sec^2\frac{t}{2}\right)dt = dx \qquad => \qquad \left(1-\frac{1}{2}\sec^2\frac{t}{2}\right)dt = dx$$

$$\int\left(1-\frac{1}{2}\sec^2\frac{t}{2}\right)dt = \int dx \qquad => \qquad t-\tan\frac{t}{2} = x+c$$

$$x+y-\tan\left(\frac{x+y}{2}\right) = x+c \qquad \text{یا} \qquad y-\tan\left(\frac{x+y}{2}\right) = c$$

کوم چې دراکړل شوې معادلې عمومي حل دی

شپږم مثال: $\frac{dy}{dx}+1 = e^{x+y}$ تفاضلي معادله حل کړئ

حل: x+y=t سره نیسو

$$x+y=t \qquad => \qquad 1+\frac{dy}{dx} = \frac{dt}{dx}$$

دغه قیمتونه په معادله کې وضعه کوو ، او په لاندې ډول یې حل کوو

$$\frac{dt}{dx} = e^t \qquad => \qquad e^{-t}dt = dx$$

$$\int e^{-t}dt = \int dx$$

$$-e^{-t} = x+c$$

$$-e^{-(x+y)} = x+c \qquad => \qquad x+e^{-(x+y)}+c+0$$

اووم مثال: $(2x-3y+1)dx+(6y-4x+3)dy = 0$ تفاضلي معادله حل کړئ

حل: راکړل شوې معادله کی متحولین سره نه بیلیږي ، خوکه په لاندې ډول تعویض اجرا کړو ، نو بیا کولای شو چی په اسانی سره معادله کې متحولین سره بیل کړو

$$2x-3y=t \qquad => \qquad 2-\frac{3dy}{dx} = \frac{dt}{dx}$$

دغه قیمتونه په معادله کې وضعه کوو او په لاندې ډول یې حل کوو

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(2x-3y)+1}{2(2x-3y)-3}$$

$$\frac{1}{3}\left(2-\frac{dt}{dx}\right)=\frac{t+1}{2t-3} \quad \text{يا} \quad \frac{dt}{dx}=\frac{t-9}{2t-3} \quad => \quad \frac{(2t-3)}{t-9}dt=dx$$

$$\int\left(\frac{2t-3}{t-9}\right)dt=\int dx \quad \text{يا} \quad \int\left(\frac{2t}{t-9}-\frac{3}{t-9}\right)dt=\int dx$$

$$2\int\frac{t-9+9}{t-9}dt-3\int\frac{1}{t-9}dt=\int dx$$

$$2\int\left(1+\frac{9}{t-9}\right)dt-3\int\frac{1}{t-9}dt=\int dx$$

$$2[t+9\ln(t-9)]-3\ln(t-9)=x+A$$

$$2t+15\ln(t-9)=x+A$$

$$(4x-6y)+15\ln(2x-3y-9)=x+A$$

$$3x-6y+15\ln(2x-3y-9)=A$$

$$\text{يا} \quad x-2y+5\ln(2x-3y-9)=c \qquad c=\frac{1}{3}A$$

اتم مثال: $\frac{dy}{dx}=\sin(x+y)+\cos(x+y)$ تفاضلي معادله حل کړئ

حل:

$$t=x+y \quad => \quad \frac{dt}{dx}=1+\frac{dy}{dx}, \quad \frac{dy}{dx}=\frac{dt}{dx}-1$$

دغه قيمتونه په راکړل شوي تفاضلي معادله کي وضعه کوو

$$\frac{dt}{dx}-1=\sin t+\cos t \quad => \quad \frac{dt}{dx}=\sin t+\cos t+1$$

$$\frac{dt}{\sin t+\cos t+1}=dx \quad => \quad \frac{dt}{2\sin\frac{t}{2}\,\cos\frac{t}{2}+2\cos^2\frac{t}{2}}=dx$$

صورت او مخرج په $\cos^2\frac{t}{2}$ باندې ويشو

$$\frac{\sec^2\frac{t}{2}}{2\left[\tan\frac{t}{2}+1\right]}dt=dx$$

$$\int\frac{\sec^2\frac{t}{2}}{2\left[\tan\frac{t}{2}+1\right]}dt=\int dx$$

$$\ln\tan\left[\frac{t}{2}+1\right]=x+c \qquad \text{يا} \qquad \tan\left[\frac{x+y+2}{2}\right]=e^{x+c}$$

$$\tan\left(\frac{x+y+2}{2}\right)=A\,e^{x} \qquad\qquad (A=e^{c})$$

1.6 تمرينونه

لاندې تفاضلي معادلې حل کړئ

01. $(e^{y}+1)\cos x\ dx+e^{y}\sin x\,dy=0$

02. $\frac{dy}{dx}=\frac{x^2y}{1+x^3}$

03. $(x+1)\frac{dy}{dx}+1=2e^{-y}$

04. $y-x\frac{dy}{dx}=a\left(y^2+\frac{dy}{dx}\right)$

05. $(x^2-yx^2)\frac{dy}{dx}+y^2(1+x)=0$

06. $\frac{dy}{dx}+xy=xy^3$

07. $x\sqrt{1+y^2}dx=y\sqrt{1+x^2}dy=0$

$\frac{dy}{dx}+\frac{\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1-x^2}}=0\,,\quad y=1,\ \ x=0$

09. $\frac{dy}{dx}=\frac{x(2\ln x+1)}{\sin y+y\cos y}$

10. $a\left(x\frac{dy}{dx}+2y\right)=2xy\frac{dy}{dx}$

11. $\frac{dy}{dx}(1+x)(1+y^2)\,,\qquad y=1,\qquad x=0$

12. $\cos y\ \ \ln(\sec x+\tan x)dx=\cos x\ \ln(\sec y+\tan y)dy$

تفکیک ته بدلیدونکي تفاضلي معادلې

13. $\frac{dy}{dx} = (3x + 2y + 4)^2$ 14. $\frac{dy}{dx} = \frac{6x - 2y - 7}{3x - y + 4}$

15. $(x + 2y - 1)dx = (x + 2y + 1)dy$ 16. $\frac{dy}{dx} = (x + y)^2$

17. $\frac{dy}{dx} = \sin(x + y)$ 18. $\frac{dy}{dx} = 1 + e^{x-y}$

19. $x^4 \frac{dy}{dx} + x^3 y + cosec\,(xy) = 0$ 20. $x\,dy + y\,dx + 4\sqrt{1 - x^2y^2}\,dx = 0$

جوابونه:

01. $\sin(e^y + 1) = c$ 02. $y^3 = c(1 + x^3)$ 03. $(x + 1) = c(2 - e^y)$

04. $(x + a) = c \cdot \frac{y}{(1 - ay)}$ 05. $\ln\left(\frac{x}{y}\right) - \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = c$ 06. $\frac{y^2 - 1}{y^2} = Ae^{x^2}$

07. $\sqrt{1 + x^2} + \sqrt{1 + y^2} = c$ $\sin^{-1} x + \sin^{-1} y = \frac{\pi}{2}$ 09. $x^2 \ln x - y \sin y = c$

10. $e^{-2y}\, y^a\, x^{2a} = A$ 11. $\tan^{-1} y = x + \frac{x^2}{2} + \frac{\pi}{4}$

12. $[\ln(\sec x + \tan x)]^2 - [\ln(\sec y + \tan y)]^2 = c$

13. $\frac{1}{\sqrt{6}} \tan^{-1}\left[\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}(3x + 2y + 4)\right] = x + c$

14. $2x - y - 15\ln(3x - y + 19) + c = 0$ 15. $x = y + \frac{2}{3}\ln\left(x + 2y - \frac{1}{3}\right) + c$

16. $\tan^{-1}(x + y) = x + c$ 17. $1 + \tan\left\{\frac{x + y}{2}\right\} + \frac{2}{x + c} = 0$

18. $x = e^{-(x-y)} + c$ 19. $\cos xy = -\frac{1}{2x^2} - c$ 20. $\sin^{-1}(xy) + 4x = c$

متجانسې تفاضلي معادلې (Homogeneous Differential Equations)

$f(x,y)$ يوه n امه درجه متجانسه تابع ده ، که چیرته $f(\lambda x\,,\lambda y) = \lambda^n\, f(x,y)$ سره شي،
دمثال په ډول $x^2 + xy$ ، $\sqrt{x^2+y^2}$ او $\sin\left(\frac{x}{y}\right)$ په ترتیب سره دوهمه ، اوله او صفرمه درجه متجانسې توابع دي.

$M(x\,,y)\,dx + N(x\,,y) = 0$ يوه لومړی ترتیب او لومړۍ درجه متجانسه تفاضلي معادله ده ، که چیرته M او N يو شان درجه لرونکي متجانسې توابع وي، پورته معادله کولای شو د $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ په شکل ولیکو، چې $f(x,y) = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)}$ يوه صفرمه درجه متجانسه تابع ده ، دغه تابع بیا د $\frac{x}{y}$ یا $\frac{y}{x}$ په شکل لیکلای شو ، چې ددې څخه لاندې معادلې لاسته راځي

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.(1) \qquad \text{یا} \qquad \frac{dx}{dy} = f\left(\frac{x}{y}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

په لومړۍ معادله کې $\frac{y}{x} = v$ سره تعويض کوو او په دوهمه معادله کې $\frac{x}{y} = v$ سره تعويض کوو، ورسته يې بیا متحولین سره بیلوو اوحل بیا يې حل کوو، چې دلومړۍ معادلې لپاره په لاندې ډول عمل اجراکوو

$$\frac{y}{x} = v \qquad => \qquad y = vx\,, \qquad \frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$$

دغه قیمتونه په لومړۍ معادله کې وضعه کوو

$$v + x\frac{dv}{dx} = f(v)$$

اوس يې متحولین سره بیلوو او انتیگرال يې نیسو

$$\frac{dx}{x} = \frac{dv}{f(v)-v} \qquad => \qquad \ln x + c = \int \frac{dv}{f(v)-v}$$

چې c يو اختیاري ثابت عدد دی ، همدارنګه ددوهمې معادلې دحل لپاره په لاندې ډول عمل اجراکوو

$$\frac{x}{y} = v \qquad => \qquad x = vy\;, \qquad \frac{dx}{dy} = v + y\frac{dv}{dx}$$

دغه قیمتونه په دوهمه معادله کې وضعه کوو

$$v + y\frac{dv}{dx} = f(v)$$

پورته معادله هم دمتحولینو په جلا کولو سره حل کوو

عملي مثالونه:

لومړی مثال: $(x-y)dy-(x+y)dx=0$ تفاضلي معادله حل کړئ

حل: لومړی معادله د $\frac{dy}{dx}=\frac{x+y}{x-y}$ په شکل لیکو ، دمعادلې ښي صرف یوه متجانسه تابع ده ، او په لاندې ډول تعویض اجرا کوو

$$y=vx \quad => \quad \frac{dy}{dx}=v+x\frac{dv}{dx}$$

دغه قیمتونه په معادله کې وضعه کوو

$$v+\frac{xdv}{dx}=\frac{x+vx}{x-vx} \quad => \quad v+\frac{xdv}{dx}=\frac{1+v}{1-v} \quad => \quad \frac{xdv}{dx}=\frac{1+v}{1-v}-v$$

$$\frac{xdv}{dx}=\frac{(1+v)-v(1-v)}{1-v} \quad \text{یا} \quad \frac{1-v}{1+v^2}dv=\frac{dx}{x}$$

$$\int\frac{1}{1+v^2}dv-\frac{1}{2}\int\frac{2v}{1+v^2}dv=\int\frac{1}{x}dx$$

$$\tan^{-1}v-\frac{1}{2}\ln(1+v^2)=\ln x+c \quad => \quad \tan^{-1}\frac{y}{x}-\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)=\ln x+c$$

$$\text{یا} \quad \tan^{-1}\frac{y}{x}-\ln\sqrt{x^2+y^2}=c$$

دوهم مثال: $(x^2-xy+y^2)dx-xydy=0$ تفاضلي معادله حل کړئ

حل: لومړی معادله په لاندې شکل لیکو

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x^2-xy+y^2}{xy}=\frac{1-\frac{y}{x}+\frac{y^2}{x^2}}{\frac{y}{x}}$$

دمعادلې ښي طرف یوه متجانسه تابع راښایي ، او دحل لپاره یې لومړی په لاندې دول تعویض اجراکوو

$$\frac{y}{x}=v \quad => \quad \frac{dy}{dx}=v+x\frac{dv}{dx}$$

دغه قیمتونه په معادله کې وضعه کوو

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{1 - v + v^2}{v} \quad \text{یا} \quad x\frac{dv}{dx} = \frac{1 - v - v^2}{v} - v \quad \text{یا} \quad x\frac{dv}{dx} = \frac{1 - v}{v}$$

اوس يي متحولين سره بيلوو او انتيګرل يي نيسو

$$\frac{dx}{dv} = \frac{v}{1 - v}dv \quad \text{یا} \quad \frac{dx}{v} = \left(\frac{v - 1 + 1}{1 - v}\right)dv$$

$$\int \frac{1}{x}dx = -\int \left(1 + \frac{1}{v - 1}\right)dv$$

$$\ln x = -[v + \ln(v - 1)] + c \quad \text{یا} \quad \ln x(v - 1) = c - v$$

$$\ln(y - x) = c - \frac{y}{x}$$

کوم چې دراکړل شوې معادلې عمومي حل دی

دريم مثال: $x\,dy - y\,dx = \sqrt{x^2 + y^2}dx$ تفاضلي معادله حل کړئ

حل: لومړی راکړل شوی معادله په لاندې شکل ليکو

$$x\frac{dy}{dx} - y = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$x\frac{dy}{dx} = y + \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y + \sqrt{x^2 + y^2}}{x}$$

کومه چې يوه متجانسه تفاضلي معادله ده او دحل کولو لپاره يې په لاندې ډول تعويض اجراکوو

$$y = vx \quad => \quad \frac{dy}{dx} = v + \frac{xdv}{dx}$$

دغه قيمتونه په معادله کې وضعه کوو

$$v + \frac{xdv}{dx} = \frac{vx + \sqrt{x^2 + v^2x^2}}{x} = v + \sqrt{1 + v^2}$$

$$\frac{xdv}{dx} = \sqrt{1 + v^2}$$

متحولين يې سره بيلوو او انتيګرال يې نيسو

$$\frac{dv}{\sqrt{1+v^2}}=\frac{dx}{x} \quad => \quad \int\frac{1}{\sqrt{1+v^2}}dv=\int\frac{1}{x}dx$$

$$\ln\left[v+\sqrt{1+v^2}\right]=\ln x+\ln c \quad => \quad v+\sqrt{1+v^2}=xc$$

$$\frac{y}{x}+\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}}=xc \quad => \quad y+\sqrt{x^2+y^2}=x^2c$$

ځلورم مثال: $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}+\tan\frac{y}{x}$ تفاضلي معادله حل کړئ

حل: ليدل کيږي چې دمعادلې ښی طرف يوه متجانسه تابع ده ، نودحل لپاره يې په لاندې ډول تعويض اجراکوو

$$\frac{y}{x}=v \quad => \quad y=vx \quad \therefore \quad \frac{dy}{dx}=v+\frac{xdv}{dx}$$

دغه قيمتونه په معادله کې وضعه کوو

$$v+\frac{xdv}{dx}=v+\tan x \quad => \quad \frac{xdv}{dx}=\tan v \quad \text{يا} \quad \frac{dv}{\tan v}=\frac{dx}{x}$$

$$\cot v\,dv=\frac{dx}{x} \quad => \quad \int\cot v\;dv=\int\frac{1}{x}dx$$

$$\ln\sin v+\ln c=\ln x \quad \text{يا} \quad x=c\sin v \quad \text{يا} \quad x=c\sin\left(\frac{y}{x}\right)$$

پنځم مثال: لاندې تفاضلي معادله حل کړئ

$$x\cos\left(\frac{y}{x}\right)(y\,dx+x\,dy)=y\sin\left(\frac{y}{x}\right)(x\,dy-y\,dx)$$

حل: تفاضلي معادله په لاندې شکل ليکو

$$\left[x\cos\left(\frac{y}{x}\right)+y\sin\left(\frac{y}{x}\right)\right]y-\left[y\sin\left(\frac{y}{x}\right)-x\cos\left(\frac{y}{x}\right)\right]x\frac{dy}{dx}=0$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\left\{x\cos\left(\frac{y}{x}\right)+y\,sin\,\left(\frac{y}{x}\right)\right\}y}{\left\{y\sin\left(\frac{y}{x}\right)-x\,cos\,\left(\frac{y}{x}\right)\right\}\,x}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\left\{\cos\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{y}{x}\ sin\ \left(\frac{y}{x}\right)\right\}\frac{y}{x}}{\left\{\frac{y}{x}\sin\left(\frac{y}{x}\right)-\ cos\ \left(\frac{y}{x}\right)\right\}}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.(1)$$

اوس دمعادلې دحل لپاره په لاندې ډو تعویض اجراکوو

$$\frac{y}{x}=v \quad => \quad y=vx \quad \therefore \quad \frac{dy}{dx}=v+\frac{xdv}{dx}$$

ددغه قیمتونو په وضعه کولو سره لومړی معادله لاندې شکل غوره کوي

$$v+\frac{xdv}{dx}=\frac{v(\cos v+v\sin v)}{v\ sin\ v-\cos v}$$

$$\frac{xdv}{dx}=\frac{v(\cos v+v\sin v)}{v\ sin\ v-\cos v}-v=\frac{2v\cos v}{v\sin v-\cos v}$$

$$2\frac{dx}{x}=\frac{v\sin v-\cos v}{v\cos v}dv$$

$$2\int\frac{1}{x}dx=\int\left(\frac{\sin v}{\cos v}-\frac{1}{v}\right)dv$$

$$2\ln x=-\ln\cos v-\ln v+\ln c$$

$$\ln x^2=\ln\left(\frac{c}{v\cos v}\right)$$

$$x^2\ v\cos v=c \qquad \text{یا} \quad xy=\cos\left(\frac{y}{x}\right)=c$$

شپږم مثال: لاندې تفاضلي معادله حل کړئ

$$\left(1+e^{\frac{x}{y}}\right)dx+e^{\frac{x}{y}}\left(1-\frac{x}{y}\right)dy=0$$

حل: راکړل شوی معادله کولای شو په لاندې ډول ولیکو

$$\frac{dx}{dy}=-\frac{e^{\frac{x}{y}}\left(1-\frac{x}{y}\right)}{\left(1+e^{\frac{x}{y}}\right)}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

دمعادلې ښی طرف یوه متجانسه تابع راښایي ، نو دمعادلې دحل لپاره په لاندې ډول تعویض اجراکوو

$$x = vy \qquad \therefore \qquad \frac{dx}{dy} = v + y\frac{dv}{dy}$$

دغه قیمتونه په لومړۍ معادله کې وضعه کوو

$$v + y\frac{dv}{dy} = -\frac{e^v(1-v)}{(1+v)} \qquad y\frac{dv}{dy} = -\frac{e^v(1-v)}{(1+v)} - v = -\frac{(v+e^v)}{1+v}$$

اوس یې متحولین سره بیلوو او انتیګرال یی پیداکوو

$$\frac{1+e^v}{v+e^v}dv = -\frac{dy}{y} \qquad \therefore \qquad \int\left(\frac{1+e^v}{v+e^v}\right)dv = -\int\frac{1}{y}dy$$

$$\ln(v+e^v) = -\ln y + \ln c$$

$$\ln(v+e^v)\,y = \ln c \qquad \text{یا} \qquad y(v+e^v) = c$$

$$y\left(\frac{x}{y} + e^{\frac{x}{y}}\right) = c \qquad \text{یا} \qquad x + ye^{\frac{x}{y}} = c$$

1.7 تمرینونه

لاندې تفاضلي معادلې حل کړی

01. $(x-y)\dfrac{dy}{dx} = x + 2y$

02. $(x^3 - 3xy^2)dx = (y^3 - 3x^2y)dy$

03. $(3xy + y^2)dx - (x^2 + xy)dy = 0$

04. $x\dfrac{dy}{dx} - y + x\sin\left(\dfrac{y}{x}\right) = 0$

05. $(x^2 - 2y^2)dx + xydy = 0$

06. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x} + \tan\left(\dfrac{y}{x}\right)$

07. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^3 + 2y^3}{2xy^2}$

08. $\dfrac{dy}{dx} = 1 + \dfrac{y}{x} + \dfrac{y^2}{x^2}$

09. $y\,dx + x\left(\ln\left(\dfrac{y}{x}\right)\right) - 2x\,dy = 0$

10. $x^2 + (x^2 - xy)\dfrac{dy}{dx} = 0$

11. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x - \sqrt{xy}}$

12. $\left(x\tan\dfrac{y}{x} - y\sec^2\dfrac{y}{x}\right)dx + x\sec^2\left(\dfrac{y}{x}\right)dy = 0$

13. $(x^2 + y^2)dx = 2xdy \qquad y(1) = 0$

14. $xe^{\frac{y}{x}} - y + xy' = 0 \qquad y(e) = 0$

جوابونه:

1. $\ln|x^2+xy+y^2| = 2\sqrt{3}\tan^{-1}\left(\frac{x+2y}{x\sqrt{3}}\right)+c$ 2. $(x^2-y^2)=c(x^2+y^2)^2$

3. $\ln\left|\frac{y}{x^3}\right|+\frac{y}{x}=c \qquad (x\neq 0\,,\ \ y\neq 0)$

4. $x\sin\frac{y}{x}=c\left(1+\cos\frac{y}{x}\right)\left(x\sin\frac{y}{x}\right) \qquad (x\neq 0)$

5. $y^2=x^2+cx^4$ 6. $\sin\left(\frac{y}{x}\right)=cx$ 7. $2y^3=3x^3(\ln x+c)$

8. $y=x\tan\ln(cx)$ 9. $cy=\ln\frac{y}{x}-1$ 10. $y=(\ln y+c)$

11. $2\cdot\sqrt{\frac{x}{y}}+\ln y=0$ 12. $x\tan\frac{y}{x}=c$ 13. $x^2-y^2=x$

14. $y=-x\ln\ln|x| \qquad (x\neq 0)$

1.8 هغه معادلې چې په متجانسو معادلو باندې بدلیږی

داړول معادلې عموما د $\frac{dy}{dx}=\frac{ax+by+c}{Ax+By+C}$ په شکل دي، چې a, b ,c ,A ,B, C ثابت عددونه دي، دداړول معادلو دحل لپاره لاندې دوه حالتونه موجود دي.

اول حالت: که چیرته $\frac{a}{A}=\frac{b}{B}=k$ (فرضیه) نو په دې صورت کې معادله لاندې شکل اختیاروي

$$\frac{dy}{dx}=\frac{k(Ax+By)+c}{Ax+By+C}$$

په داړول معادلو کې کولای شو چې د $Ax+By=t$ تعویض ځخه وروسته متحولین په اسانی سره بیل کړو.

دوهم حال: که چیرته $\frac{a}{A}\neq\frac{b}{B}$ سره وي، نو په دې صورت کې راکړل شوی تفاضلي معادله د $x=X+h$ او $y=Y+k$ په وضعه کولو سره معادله په متجانسه تفاضلي معادله باندې بدلیږي، چې h او k ثابت عددونه دي ، او دمعادلاتو دحل ځخه لاسته راځي.

$$x=X+h \quad => \quad dx=dX\,, \qquad y=Y+k \quad => \quad dy=dY$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dY}{dX}$$

اوس نو معادله لاندې شکل اختیاروي

$$\frac{dY}{dX} = \frac{(aX + bY) + (ah + bl + c)}{(AX + BY) + (Ah + Bk + C)}$$

که چیرته h او k داسې انتخاب کړو چې $Ah + Bk + C = 0$, $ah + bk + c = 0$ سره شي، نو په دی صورت کې پورته معادله لاندې شکل اختیاروي

$$\frac{dY}{dX} = \frac{aX + bY}{AX + BY}$$

پورته معادله یوه متجانسه تفاضلي معادله ده ، او دلاندې تعویض په اساس یې حل کوو

$$Y = VX\ ,\ \ V = V(X) \qquad\qquad X = VY\ ,\ \ V = V(Y)$$

عملي مثالونه: $\frac{dy}{dx} = \frac{x+2y+1}{2x+4y+3}$ تفاضلي معادله حل کړئ

حل: راکړل شوې معادله یوه متجانسه معادله نه ده ،خو نوموړی معادله په پورته حالتونو کې لومړی حالت رابښایې ، نوراکړل شوی معادله په لاندې شکل لیکو

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + 2y + 1}{2(x + 2y) + 3} \ \dots\dots\dots (1) \qquad x + 2y = t \qquad => \qquad 1 + 2\frac{dy}{dx} = \frac{dt}{dx}$$

ددغه قیمتونو په وضعه کولو سره لومړی معادله لاندې شکل اختیاروي

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dt}{dx} - 1\right) = \frac{t + 1}{2t + 3}\ ,\ \ \frac{dt}{dx} - 1 = \frac{2t + 2}{2t + 3}$$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{2t + 2}{2t + 3} + 1 = \frac{2t + 2 + 2t + 3}{2t + 3}$$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{4t + 5}{2t + 3} \qquad => \qquad \left(\frac{2t + 3}{4t + 5}\right) dt = dx$$

$$\int \left(\frac{\frac{1}{2}(4t + 5) + \frac{1}{2}}{4t + 5}\right) dt = \int dx \qquad \frac{1}{2}\int \left(1 + \frac{1}{4t + 5}\right) dt = x + c$$

$$\frac{1}{2}\left[t + \frac{1}{4}\ln(4t + 5)\right] = x + c$$

$$4t + \ln(4t + 5) = 8x + 8c$$

$$4(x + 2y) + \ln(4x + 8y + 5) = 8x + c_1$$

$$4(2y - x) + \ln(4x + 8y + 5) = c_1$$

کوم چې دراکړل شوی معادلې عمومي حل دی

دوهم مثال: $(x + 2y)(dx - dy) = dx + dy$ تفاضلي معادله حل کړئ

حل: راکړل شوي معادله په لاندې ډول لیکو

$$(x + 2y - 1)dx = (x + 2y + 1) \quad \text{یا} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x + 2y - 1}{x + 2y + 1} \ldots\ldots\ldots\ldots.(1)$$

$$x + 2y = t \quad => \quad 1 + 2\frac{dy}{dx} = \frac{dt}{dx} \quad \text{یا} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left[\frac{dt}{dx} - 1\right]$$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{dt}{dx} - 1\right] = \frac{t - 1}{t + 1} \quad \text{یا} \quad \frac{dt}{dx} - 1 = \frac{2t - 2}{t + 1}$$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{2t - 2}{t + 1} + 1 = \frac{2t - 2 + t + 1}{t + 1} = \frac{3t - 1}{t + 1}$$

اوس يې متحولين سره بیلوو

$$\left(\frac{t + 1}{3t - 1}\right)dt = dx \quad \text{یا} \quad \frac{1}{3}\left[1 + \frac{4}{3t - 1}\right]dt = dx$$

اوس يې انتیګرال پیداکوو

$$\frac{1}{3}\int\left(1 + \frac{4}{3t - 1}\right)dt = \int dx$$

$$\frac{1}{3}\left[t + 4 \cdot \frac{1}{3}\ln(3t - 1)\right] = x + c$$

$$\frac{1}{3}\left[x + 2y + \frac{4}{3}\ln(3x + 6y - 1)\right] = x + c$$

کوم چې دراکړل شوي معادلې عمومي حل دی

دریم مثال: $\frac{dy}{dx}=\frac{x+2y-3}{2x+y-3}$ تفاضلي معادله حل کړئ

حل: راکړل شوي معادله $\frac{a}{A}\neq\frac{b}{B}$ په شکل ده ، نو دراکړل شوی معادلې دحل لپاره په لاندې ډول تعویض اجراکوو

$$x=X+h\,,\quad y=Y+k \qquad => \qquad \frac{dy}{dx}=\frac{dY}{dX}$$

ددغه قیمتونو په وضعه کولو سره راکړل شوی معادله لاندې شکل غوره کوي

$$\frac{dY}{dX}=\frac{X+2Y+(h+2k-3)}{2X+Y+(2h+k-3)}$$

د $2h+k-3=0$ او $h+2k-3=0$ معادلو دحل څخه $k=1$ او $h=1$ لاسته راځي

$$\therefore \quad x=X+1\,,\quad y=Y+1 \qquad => \qquad X=x-1\,,\quad Y=y-1$$

اوس نوموړې معادله لاندې شکل اختیاروي، کومه چې یوه متجانسه معادله ده

$$\frac{dY}{dX}=\frac{X+2Y}{2X+Y} \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots (1)$$

$$Y=VX \qquad \text{نو} \qquad \frac{dY}{dX}=V+X\frac{dV}{dX}$$

دپورته قیمتونوپه وضعه کولوسره لومړی معادله لاندې شکل اختیاروي

$$V+X\frac{dV}{dX}=\frac{X+2VX}{2X+VX} \quad => \quad V+X\frac{dV}{dX}=\frac{1+2V}{2+V}$$

$$X\frac{dV}{dX}=\frac{1+2V}{2+V}-V=\frac{1+2V-2V-V^2}{2+V}=\frac{1-V^2}{2+V}$$

اوس یې متحولین سره بیلوو او دقسمي کسرونو دتجزیي په مرسته یې انتیګرال پیداکوو

$$\left(\frac{2+V}{1-V^2}\right)dV=\frac{dX}{X} \qquad => \qquad \left[\frac{3}{2}\left(\frac{1}{1-V}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+V}\right)\right]dV=\frac{dX}{X}$$

$$\frac{3}{2}\int\left(\frac{1}{1-V}\right)dV+\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{1+V}\right)dV=\int\frac{1}{X}dX$$

$$-\frac{3}{2}\ln(1-V)+\frac{1}{2}\ln(1+V)=\ln X+\ln c$$

$$-3\ln(1-V)+\ln(1+V)=2(\ln X+\ln c)$$

$$\ln\frac{1+V}{(1-V)^3}=2\ln X\,c$$

$$X^2c^2=\frac{1+V}{(1-V)^2} \qquad c^2(X-Y)^3=X+Y \qquad \left(\therefore V=\frac{Y}{X}\right)$$

$$(x-y)^3c^2=x+y-2$$

څلورم مثال: $\frac{dy}{dx}=\frac{3y-7x+7}{3x-7y-3}$ تفاضلي معادله حل کړئ

حل: راکړل شوې معادله دوهم حالته ته ورته ده ، او دحل لپاره یې په لاندې ډول تعویض اجراکوو

$$x=X+h\,,\qquad y=Y+k \qquad => \qquad \frac{dy}{dx}=\frac{dY}{dX}$$

دپورته قیمتونو په وضعه کولو سره راکړل شوې معادله لاندې شکل اختیاروي

$$\frac{dY}{dX}=\frac{3Y-7X+(3k-7h+7)}{3X-7Y+(3h-7k-3)}$$

د $3k-7h+7=0$ او $3h-7k-3=0$ معادلو دحل څخه h=1 او k=0 څخه لاسته راځي، په نتیجه کې معادله لاندې شکل اختیاروي، کومه چې یوه متجانسه تفاضلي معادله ده

$$\frac{dY}{dX}=\frac{3Y-7X}{3X-7Y}$$

$$Y=VX \qquad => \qquad \frac{dY}{dX}=V+X\frac{dV}{dX}$$

$$V+X\frac{dV}{dX}=\frac{3VX-7X}{3X-7VX}=\frac{3V-7}{3-7V}$$

$$X\frac{dV}{dX}=\frac{3V-7}{3-7V}-V=\frac{3V-7-3V+7V^2}{3-7V}$$

$$X\frac{dV}{dX}=\frac{7(V^2-1)}{3-7V}$$

اوس یې متحولین سره بیلوو او دقسمي کسرونو دتجزیې په مرسته یې انتیگرال پیداکوو

$$7\frac{dX}{X} = \frac{3-7V}{(V-1)(V+1)}dV$$

$$7\int \frac{1}{X}dX = -\int \left(\frac{2}{V-1} + \frac{5}{V+1}\right)dV$$

$$7\ln X = -[2\ln(V-1) + 5\ln(V+1)] + \ln c$$

$$X^7(V-1)^2(V+1)^5 = c \qquad \text{یا} \qquad X^7\left(\frac{Y}{X}-1\right)^2\left(\frac{Y}{X}+1\right)^5 = c$$

$$(Y-X)^2(Y+X)^5 = c \qquad \text{یا} \qquad (y-x+1)^2(y+x-1)^2 = c$$

1.9 تمرینونه:

لاندې تفاضلي معادلې حل کړئ

1. $\frac{dy}{dx} = \frac{x-y+3}{2x-2y+5}$
2. $(6x-4y+3)dx = (3x-2y+1)dy$
3. $\frac{dy}{dx} = \frac{y-x+1}{y-x-5}$
4. $\frac{dy}{dx} = \frac{3x-4y-2}{3x-4y-3}$
5. $(2x-4y+3)dy + (x-2y+1)dx = 0$
6. $(x-2y+5)dx - (2x+y-1)dy = 0$
7. $\frac{dy}{dx} = \frac{y-x+1}{y+x+5}$
8. $(2x+3y-5)\frac{dy}{dx} + (3x+2y-5) = 0$
9. $(2x+y+6)dx = (y-x-3)dy$
10. $\frac{dy}{dx} = \frac{x-y+1}{x+2y-3}$
11. $\frac{dy}{dx} = \frac{x+2y-3}{2x+y-3}$
12. $(2y-x-1)dy - (2x-y+1)dx = 0$

جوابونه:

1. $(2y-x) = \ln(x-y+2) + c$
2. $(2y-x) = \frac{1}{4}\ln(12x-8y+1) + c$
3. $\frac{(y-x)^2}{2} - 5(y-x) = 6x + c$
4. $x-y = \ln(3x-4y+1) + c$
5. $\ln\{4(x-2y)+5\} = 4(x+2y) + c$
6. $x^2 - y^2 - 4xy + 10x + 2y = c$

7. $\ln\{(x+2)^2+(y+3)^2\}^{\frac{1}{2}}+\tan^{-1}\left\{\dfrac{y+3}{x+2}\right\}=c$

8. $3x^2+4xy+3y^2-10x-10y+10=c$ 9. $y^2-2xy-2x^2-6y-12x-18=c$

10. $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left(\dfrac{X+\sqrt{2}Y}{X-\sqrt{2}Y}\right)-\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{2Y^2-X^2}{X^2}\right)=X+c \quad X=x-\dfrac{1}{3}\ ,\ Y=y-\dfrac{4}{3}$

11. $(y-x)^3=c(x+y-2)$ 12. $(3x-3y+2)(x+y)^3=c$

خطي تفاضلي معادلې (Linear Differential Equations)

هغه تفاضلي معادلې چې $\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.(1)$ شکل ولري ، خطي تفاضلي معادلې ورته وایي ، چې P او Q د x تابع دي، یا هم ثابت عددونه دي ، y او د y مشتق y' باید یو مثبت تام عدد وي ، چې دیو څخه به لوي هم نه وی، او نه به yy' دحاصل ضرب په شکل وي.

دلومړۍ معادلې دحل لپاره ، دمعادلې دواړه خواوې په $e^{\int Pdx}$ فکتور کې ضربوو ، کوم چې لاندې شکل اختیاروي

$$\left[\frac{dy}{dx}+P(x)y\right]e^{\int Pdx}=Q(x)e^{\int Pdx} \quad \text{یا} \quad \frac{d}{dx}\left[y\,e^{\int Pdx}\right]=Q(x)e^{\int Pdx}$$

اوس یې نظر x ته انتیګرال نیسو

$$ye^{\int Pdx}=\int Q(x)e^{\int Pdx}\,dx+c$$

کوم چې غوښتل شوې حل دی

یادابښت: $e^{\int Pdx}$ فکتورته دانتیګرال فکتور ته دلومړۍ معادلې دانتیګرال فکتور وایي، همدارنګه ځینې وخت خطي تفاضلي معادله لاندې شکل اختیاروي

$$\frac{dx}{dy}+P(y)x=Q(y)$$

چې په دې صورت کې دراکړل شوې معادلې دانتیګرال فکتور عبارت د $e^{\int Pdy}$ څخه دی ، او دمعادلې حل په لاندې ډول دی

$$xe^{\int Pdy} = \int Q(y)e^{\int Pdy}\,dy + c$$

عملي مثالونه:

لومړی مثال: $\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x}y = x^3$ تفاضلي معادله حل کړئ

حل: راکړل شوې معادله $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$ په شکل ده ، چې $Q = x^3$ او $P = \frac{2}{x}$ څخه دي، دانتيګرال فکتور يې په لاندې ډول پيداکوو

$$IF = e^{\int Pdx} = e^{\int \frac{2}{x}dx} = e^{2\ln x} = e^{\ln x^2} = x^2$$

اوس دمعادلې عمومي حل دلاندې فورمول په اساس لاسته راوړو

$$y \times IF = \int Q.IFdx + c$$

قيمتونه په فورمول کې وضعه کوو

$$y\,x^2 = \int x^3.x^2dx + c \quad \text{يا} \quad yx^2 = \int x^5dx + c$$

$$yx^2 = \frac{x^6}{6} + c \quad \text{يا} \quad y = \frac{x^4}{6} + \frac{c}{x^2}$$

دوهم مثال: $\frac{dy}{dx} + y\sec x = \tan\ x$ تفاضلي معادله حل کړې

حل: $Q = \tan x$, $P = \sec x$ سره دي ، نو لومړی يې دانتيګرال فکتور په لاندې ډول پيداکوو

$$IF = e^{\int Pdx} = e^{\int \sec x dx} = e^{\ln(\sec x + \tan x)} = (\sec x + \tan x)$$

پس دمعادلې عمومي حل په لاندې ډول دی

$$y(\sec x + \tan x) = \int \tan x\,(\sec x + \tan x)dx + c$$

$$y(\sec x + \tan x) = \int \sec x \tan x\,dx + \int (\sec^2 x - 1)dx + c$$

$$y(\sec x + \tan x) = \sec x + \tan x - x + c \qquad \therefore\ y = 1 + \frac{c - x}{\sec x + \tan x}$$

دریم مثال: $\frac{dy}{dx}+\frac{2}{x}y=x\ln x$ تفاضلي معادله حل کړئ

حل:

$$p=\frac{2}{x} \quad \text{او} \quad Q=x\ln x$$

دمعادلي دحل لپاره لومړی باید دانتیګرال فکتور پیداکړو

$$IF=e^{\int Pdx}=e^{\int\frac{2}{x}dx}=e^{2\ln x}=e^{\ln x^2}=x^2$$

اوس دراکړل شوې معادلې دحل لپاره په لاندې ډول عمل اجراکوو

$$y.x^2=\int x\ln x\,.x^2dx+c$$

پورته انتیګرال دانقسام په طریقه پیداکوو

$$yx^2=\ln x\,.\frac{x^4}{4}-\frac{x^4}{16}+c \quad \text{یا} \quad y=\frac{x^2}{4}\ln x-\frac{x^2}{16}+\frac{c}{x^2}$$

ځلورم مثال: $(1+x^2)\frac{dy}{dx}+y=e^{\tan^{-1}x}$ تفاضلي معادله حل کړئ

حل: راکړل شوې معادله لومړی په لاندې شکل لیکو

$$\frac{dy}{dx}+\frac{1}{(1+x^2)}y=\frac{e^{\tan^{-1}x}}{1+x^2} \quad , \quad P=\frac{1}{1+x^2} \quad \text{او} \quad Q=\frac{e^{\tan^{-1}x}}{1+x^2}$$

دراکړل شوې معادلې دحل لپاره لومړی دانتیګرال فکتور پیداکوو

$$IF=e^{\int Pdx}=e^{\int\frac{1}{1+x^2}dx}=e^{\tan^{-1}x}$$

اوس معادله په لاندې ډول پیداکوو

$$ye^{\tan^{-1}x}=\int\frac{e^{\tan^{-1}x}}{1+x^2}\,.e^{\tan^{-1}x}dx+c=\int\frac{e^{2\tan^{-1}x}}{1+x^2}dx+c$$

$$ye^{\tan^{-1}x}=I+c$$

په معادله کې موجود انتیګرال لومړی په تعویضي طریقه پیداکوو ، او بیا یې په معادله کې د I په ځای وضعه کوو

$$I = \int \frac{e^{2\tan^{-1}x}}{1+x^2}dx \quad , \qquad \tan^{-1}x = t \quad => \quad \frac{1}{1+x^2}dx = dt$$

$$I = \int e^{2t}dt = \frac{e^{2t}}{2} = \frac{e^{2\tan^{-1}x}}{2}$$

نو دراکړل شوې معادلې حل په لاندې ډول دی

$$ye^{\tan^{-1}x} = \frac{e^{2\tan^{-1}x}}{2} + c \qquad y = \frac{e^{\tan^{-1}x}}{2} + c\, e^{-\tan^{-1}x}$$

پنځم مثال: $\sin^2 x\frac{dy}{dx} - y = \cot x$ تفاضلي معادله حل کړئ

حل: راکړل شوې معادله په لاندې شکل لیکو

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{\sin^2 x} = \frac{\cot x}{\sin^2 x} \qquad \text{یا} \qquad \frac{dy}{dx} - y\, cosec^2x = \cot x\;\; cosec^2x$$

$$P = -cosec^2x \qquad Q = \cot x\;\; cosec^2x$$

اوس یې دانتیګرال فکتور په لاندې ډول پیداکوو

$$IF = e^{\int Pdx} = e^{-\int cosec^2x\, dx} = e^{\cot x}$$

پس دمعادلې عمومي حل په لاندې ډول پیداکوو

$$ye^{\cot x} = \int (\cot x\;\; cosec^2x)\, e^{\cot x}dx + c$$

$$ye^{\cot x} = I + c$$

د I قیمت لومړی په لاندې ډول لومړی دتعویضي طریقې او وروسته دانقسام طریقې څخه په ګټه اخیستنې سره پیداکوو

$$I = \int (\cot x\;\; cosec^2x)e^{\cot x}dx \qquad \cot x = t$$

$$-cosec^2x\, dx = dt$$

$$I = -\int t\, e^t dt = -\left[t\, e^t - \int e^t.1\, dt\right]$$

$$I = -[t\, e^t - e^t] = e^t - t\, e^t = e^t(1-t)$$

په نتیجه کې لیکلای شو چې

$$y\, e^{\cot x} = e^{\cot x}(1-\cot x) + c \qquad \text{یا} \qquad y = (1-\cot x) + ce^{-\cot x}$$

شپږم مثال: $(x+\tan y)\, dy = \sin 2y\, dx$ تفاضلي معادله حل کړئ

حل: راکړل شوې معادله کولای شو په لاندې ډول ولیکو

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+\tan y}{\sin 2y} \qquad \text{یا} \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sin 2y}x = \frac{\tan y}{\sin 2y}$$

کومه چې د $\frac{dx}{dy} + P(y)\, x = Q(y)$ شکل لري، ددې څخه لیکلای شو چې:

$$P = -\frac{1}{\sin 2y} \qquad \text{او} \qquad Q = \frac{\tan y}{\sin 2y}$$

لومړی دانتیګرال فکتور په لاندې ډول پیداکوو

$$IF = e^{\int P dy} = e^{-\int \frac{1}{\sin 2y}dy} = e^{-\frac{1}{2}\int \frac{\sec^2 y}{\tan y}dy} = e^{-\frac{1}{2}\ln \tan y} = e^{\ln \frac{1}{\sqrt{\tan y}}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\tan y}} = \sqrt{\cot y}$$

اوس دراکړل شوې معادلې عمومي دفورمول په نظر کې نیولوسره په لاندې ډول حل کوو

$$x\sqrt{\cot y} = \int \frac{\tan y}{\sin 2y}\sqrt{\cot y}\; dy + c = \int \frac{\sec^2 y}{2\sqrt{\tan y}} dy + c$$

$$x\sqrt{\cot y} = \sqrt{\tan y} + c \qquad\qquad x = \tan y + c\sqrt{\tan y}$$

اووم مثال: $(1+y^2)\, dx = (\tan^{-1} y - x)dy$ تفاضلي معادله حل کړئ

حل: لومړی راکړل شوې معادله په لاندې ډول لیکو

$$\frac{dx}{dy} + \frac{1}{1+y^2}x = \frac{\tan^{-1} y}{1+y^2} \qquad \text{نو} \quad P = \frac{1}{1+y^2} \qquad \text{او} \quad Q = \frac{\tan^{-1} y}{1+y^2}$$

اوس دراکړل شوې معادلې دحل لپاره دانتیګرال فکتور په لاندې ډول پیداکوو

$$IF = e^{\int \frac{1}{1+y^2}dy} = e^{\tan^{-1} y}$$

پس دراکړل شوې معادلې عمومي حل په لاندې ډول پیداکوو

$$xe^{\tan^{-1}y} = \int \frac{\tan^{-1}y}{1+y^2}\, e^{\tan^{-1}y}dy + c$$

$$xe^{\tan^{-1}y} = \int t\, e^t dt + c \qquad t = \tan^{-1}y$$

$$xe^{\tan^{-1}y} = (t-1)e^t + c$$

$$xe^{\tan^{-1}y} = (\tan^{-1}y - 1)e^{\tan^{-1}y} + c$$

$$\therefore \qquad x = (\tan^{-1}y - 1) + ce^{\tan^{-1}y}$$

اتم مثال: $y\ln y\, dx + (x - \ln y)dy = 0$ تفاضلي معادله حل کړئ

حل: راکړل شوې معادله په لاندې ډول لیکو

$$\frac{dx}{dy} + \frac{1}{y\ln y}x = \frac{1}{y} \qquad P = \frac{1}{y\ln y}\ , \qquad Q = \frac{1}{y}$$

اوس دراکړل شوې معادلې دحل لپاره دانتیګرال فکټور په لاندې ډول پیداکوو

$$IF = e^{\int \frac{1}{y\ln y}dy} = e^{\ln\ln y} = \ln y$$

اوس راکړل شوې معادله په لاندې ډول حل کوو

$$x\ln y = \int \frac{1}{y}\,.\ln y\, dy + c = \int t\, dt + c\ , \qquad \ln y = t \quad => \quad \frac{1}{y}dy = dt$$

$$= \frac{t^2}{2} + c$$

$$x\ln y = \frac{(\ln y)^2}{2} + c \qquad \therefore x = \frac{\ln y}{2} + \frac{c}{\ln y}$$

نهم مثال: $\frac{dy}{dx} = x\sin 2y = x^3\cos^2 y$ تفاضلي معادله حل کړئ

حل: راکړل شوې معادله یوه معیاري خطي تفاضلي معادله نه ده ، ددې لپاره چې معادله په معیاري شکل ولیکو، نومعادله په $\cos^2 y$ باندې ویشو

$$\sec^2 y\frac{dy}{dx}+2x\tan y=x^3 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

په لومړۍ معادل کې په لاندې ډول تعویض اجراکوو

$$\tan y=t \qquad => \qquad \sec^2 y\frac{dy}{dx}=\frac{dt}{dx}$$

اوس لومړۍ معادله لاندې شکل اختیاروي

$$\frac{dt}{dx}+2x\,t=x^3 \qquad \text{نو} \qquad P=2x \quad \text{او} \quad Q=x^3$$

اوس يې دانتیګرال فکتور په لاندې ډول پیداکوو

$$IF=e^{\int Pdx}=e^{\int\ 2x\,dx}=e^{x^2}$$

دپورته قیمتونو په لرلوسره دمعادلې عمومي حل په لاندې ډول پیداکوو

$$te^{x^2}=\int x^3e^{x^2}dx+c$$

$$=\int x.x^2e^{x^2}dx+c \qquad x^2=u\,;\ 2xdx=du;\ xdx=\frac{du}{2}$$

$$=\int ue^u du+c$$

$$=ue^u-\int e^u du+c$$

$$=ue^u-e^u+c$$

$$te^{x^2}=(u-1)e^u+c \qquad => \qquad te^{x^2}=(x^2-1)e^{x^2}+c$$

$$\therefore t=(x^2-1)+ce^{-x^2} \qquad t=\tan y$$

$$\tan y=(x^2-1)+ce^{-x^2}$$

یادابنت: پورته مثال $f'(y)\frac{dy}{dx}+f(y)P(x)=Q(x)$ شکل لري، ددابډول معادلو دحل لپاره $f(y)=t$ وضعه کوو

لسم مثال: $x\frac{dy}{dx} - y = x^3 \cos x \quad , \quad y(\pi) = 0$ تفاضلي معادله حل کړئ

حل: لومړی راکړل شوې معادله په لاندې ډول لیکو

$$\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x}y = x^2 \cos x\,, \qquad P = -\frac{1}{x} \quad \text{او} \quad Q = x^2 \cos x$$

اوس دراکړل شوې معادلې دحل لپاره دانتیګرال فکټور په لاندې ډول پیداکوو

$$IF = e^{-\int \frac{1}{x} dx} = e^{-\ln x} = e^{\ln \frac{1}{x}} = \frac{1}{x}$$

اوس دمعادلې عمومي حل په لاندې ډول پیداکوو

$$y\frac{1}{x} = \int x^2 \cos x \ \cdot \frac{1}{x} dx + c$$

$$\frac{y}{x} = \int x \,.\cos x \, dx + c$$

$$\frac{y}{x} = x \sin x - \int \sin x \cdot 1 \, dx + c$$

$$\frac{y}{x} = x \sin x + \cos x + c$$

$$y = x^2 \sin x + x \cos x + cx \qquad\qquad x = \pi\,, \qquad y = 0$$

$$0 = \pi^2 \sin \pi + \pi \cos \pi + c\pi$$

$$0 = -\pi + c\pi, \qquad c\pi = \pi \quad => \quad c = 1$$

پس دمعادلې خصوصي حال په لاندې ډول دی

$$y = x^2 \sin x + x \cos x + x$$

تمرینونه:

لاندې تفاضلي معادلې حل کړئ

1. $x(x^2+1)\dfrac{dy}{dx} = y(1-x^2) + x^2 \ln x$　　2. $\dfrac{dy}{dx} + y\cot x = \sin x$

3. $x\cos x\dfrac{dy}{dx} + y(x\sin x + \cos x) = 1$　　4. $(1-x^2)\dfrac{dy}{dx} + 2xy = x\sqrt{1-x^2}$

5. $\dfrac{dy}{dx} + y = \sin x$　　6. $(x+1)\dfrac{dy}{dx} - y = e^x(1+x)^2$

7. $\dfrac{dy}{dx} + y\tan x = \sin 2x$　　8. $\dfrac{dy}{dx} + 3y = e^{-x}\cos x$

9. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x + y\cos x}{1+\sin x}$　　10. $\dfrac{dy}{dx} + y\cot x = 4x\, cosec\, x$

11. $\dfrac{dy}{dx} - 2y\tan x = \sec^4 x$　　12. $(x+y+1)\dfrac{dy}{dx} = 1$

13. $\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{\tan y}{1+x} = (1+x)\, e^x \sec y$　　14. $(x+2y^2)\dfrac{dy}{dx} = y$

15. $y^2 + \left(x - \dfrac{1}{y}\right)\dfrac{dy}{dx} = 0$　　$\left(Hint\ reduce\ in\ form\ \ \dfrac{dx}{dy} + P_1 x = Q_1\right)$

16. $(x+1)\dfrac{dy}{dx} + (1+x)y = 2\sin x$　　$y(0) = 2$

17. $x\dfrac{dy}{dx} + y = x\cos x + \sin x$　　$y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$

18. $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{2x}{x^2+1}y = \dfrac{1}{(x^2+1)^2}$　　$y(0) = 0$

1. $\dfrac{[y(x^2+1)]}{x} = \dfrac{1}{2}x^2\ln x - \dfrac{1}{4}x^2 + c$　　2. $y\sin x = \dfrac{1}{2}\,x - \dfrac{1}{4}\sin 2x + c$

3. $y\,x\sec x = \tan x + c$　　4. $\dfrac{y}{(1-x^2)} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} + c$

5. $y = \dfrac{1}{2}\,(\sin x - \cos x) + ce^{-x}$　　6. $y = (x+1)(e^x + c)$

7. $y\sec x = c - 2\cos x$　　8. $y = ce^{-3x} + e^{-x}\left(\dfrac{\sin x + 2\cos x}{5}\right)$

9. $y(1+\sin x)+\frac{x^2}{2}=c$　　10. $y=(2x^2+c)cosec\,x$

11. $y\cos^2 x=c+\tan x$　　12. $x=ce^y-(y+2)$

13. $\sin y=(1+x)(c+e^x)$　　14. $\frac{x}{y}=y^2+c$

15. $x=ce^{\frac{1}{y}}+\frac{1}{y}+1$　　16. $y=\frac{\sin x-\cos x}{1+x}+\frac{3e^{-x}}{1+x}$

17. $y=\sin x$　　18. $y=\frac{\tan^{-1}x}{x^2+1}$

1.13 برنولي معادله (Bernoulli's Equation)

ځیني لومړی ترتیب تفاضلي معادلې دې چې خطي شکل نه لري ، خو دمتحولینو په مناسب تعویض سره کولای شو چې نوموړې معادلې په خطي تفاضلي معادلو باندې تبدیلي کړو، یو شکل ددوی ځخه دبرنولي معادله هم ده ، کوم چې دسویس ریاضي پوه (1654-1705) jacob Bernoulli په واسطه منځ ته راغلي دي، دبرنولي دمعادلې عمومي شکل په لاندې ډول دی

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)y^n \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)\,,\qquad (n\neq 0\,,\quad n\neq 1)$$

چې P او Q د x تابع دي او یا هم امکان لري چې ثابت عددونه وي، لومړی معادله کولاي شو چې دخطي معادلې په شکل ولیکو ، ددې کار لپاره لومړی معادله y^n باندې ویشو، نو لاندې معادله لاسته راکوي

$$y^{-n}\frac{dy}{dx}+P\,y^{1-n}=Q \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

اوس په لاندې ډول تعویض اجراکوو

$$y^{1-n}=v \quad => \quad (1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}=\frac{dv}{dx}$$

دپورته قیمتونو په وضعه کولو سره دوهمه معادله لاندې شکل اختیاروي

$$\frac{1}{1-n}\frac{dv}{dx}+P\,v=Q \qquad \text{یا} \qquad \frac{dv}{dx}+P(1-n)v=Q(1-n)\;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

دریمه معادله یوه خطي تفاضلي معادله ده ، چې کولای شو نوموړې معادله دانتیګرال دفکتور په پیداکولو سره حل کړو.

عملي مثالونه:

لومړی مثال: $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = y^2$ تفاضلي معادله حل کړئ

حل: راکړل شوې معادله برنولي معادله ده ، لومړی راکړل شوې معادله په y^2 باندې ویشو

$$\frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx} - \frac{y^{-1}}{x} = 1 \qquad \text{يا} \qquad y^{-2}\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x}y^{-1} = 1$$

اوس دپورته معادلې دحل لپاره په لاندې ډول تعویض اجراکوو

$$y^{-1} = v \qquad => \qquad -y^{-2}\frac{dy}{dx} = \frac{dv}{dx}$$

دپورته قیمتونو په وضعه کولو سره معادله په لاندې خطي تفاضلي معادلې باندې بدلیږي

$$-\frac{dv}{dx} - \frac{1}{x}v = 1 \qquad \text{يا} \qquad \frac{dv}{dx} + \frac{1}{x}v = -1$$

اوس یې دانتیګرال فکتورپه لاندې ډول پیداکوو

$$P = \frac{1}{x}\,, \quad Q = -1 \qquad \text{نو} \qquad IF = e^{\int P dx} = e^{\int \frac{1}{x} dx} = e^{\ln x} = x$$

پس دراکړل شوې معادلې عمومي حل په لاندې ډول دې

$$v\,x = \int -1\,x\,dx + c \qquad \text{يا} \qquad v\,x = -\frac{x^2}{2} + c \qquad \text{يا} \qquad y^{-1}x = -\frac{x^2}{2} + c$$

دوهم مثال: $x\frac{dy}{dx} + y = y^2 \ln x$ تفاضلي معادله حل کړئ

حل: لومړی راکړل شوې معادله په لاندې ډول لیکو

$$y^{-2}\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y^{-1} = \frac{1}{x}\ln x \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (1)$$

اوس دمعادلې دحل لپاره په لاندې ډول تعویض اجراکوو

$$y^{-1} = v \qquad => \qquad -y^{-2}\frac{dy}{dx} = \frac{dv}{dx}$$

دپورته قیمتونوپه وضعه کولوسره معادله په لاندې خطي تفاضلي معادله باندې بدلیږي

$$-\frac{dv}{dx}+\frac{1}{x}v=\frac{1}{x}\ln x \quad \text{یا} \quad \frac{dv}{dx}-\frac{1}{x}v=-\frac{1}{x}\ln x$$

اوس يې دانتیګرال فکتور پیداکوو

$$P=-\frac{1}{x} \;, \qquad Q=-\frac{1}{x}\ln x \qquad IF=e^{-\int\frac{1}{x}dx}=e^{-\ln x}=e^{\ln\frac{1}{x}}=x$$

پس دمعادلې عمومي حل په لاندې ډول دی

$$v\cdot\frac{1}{x}=\int-\frac{1}{x}\ln x\cdot\frac{1}{x}dx+c \quad \text{یا} \quad v\,x^{-1}=-\int x^{-2}\ln x+c$$

$$vx^{-1}=-\left[\ln x\frac{x^{-1}}{-1}+\int\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}dx\right]+c=-\left[-\frac{\ln x}{x}+\frac{x^{-1}}{-1}\right]+c$$

$$yx^{-1}=\ln x\cdot x^{-1}+x^{-1}+c \qquad y^{-1}=\ln x+1+cx$$

دریم مثال: $\frac{dy}{dx}-2y\tan x=y^2\tan^2 x$ تفاضلي معادله حل کړئ

حل: معادله په y^2 باندې ویشو

$$y^{-2}\frac{dy}{dx}-2y^{-1}\tan x=\tan^2 x$$

اوس دمعادلې دحل لپاره په لاندې ډول تعویض اجراکوو

$$y^{-1}=v \;\; => \quad -y^{-2}\frac{dy}{dx}=\frac{dv}{dx} \qquad \therefore\; -\frac{dv}{dx}-2v\tan x=\tan^2 x$$

$$\frac{dv}{dx}+2v\tan x=-\tan^2 x \;, \qquad P=2\tan x \qquad Q=-\tan^2 x$$

دانتیګرال فکتور په لاندې ډول پیداکوو

$$IF=e^{\int Pdx}=e^{\int 2\tan x dx}=e^{2\ln\sec x}=e^{\ln\sec^2 x}=\sec^2 x$$

$$\therefore\;\; v\cdot\sec^2 x=-\int\tan^2 x\sec^2 x\,dx+c$$

$$v\cdot\sec^2 x=-\frac{\tan^3 x}{3}+c \quad \text{یا} \quad \frac{1}{y}\sec^2 x=-\frac{\tan^3 x}{3}+c$$

څلورم مثال: $y(2x\,y+e^{x})dx-xe^{x}dy=0$ تفاضلي معادله حل کړئ

حل: لومړی راکړل شوې معادله برنولي معادلې په شکل ليکو

$$\frac{dy}{dx}-\frac{y}{x}=\frac{2}{e^{x}}y^{2}$$

پورته معادله برنولي معادله ده ، ددې لپاره چې دخطي معادلې په شکل يې وليکو ، نو راکړل شوې معادله به y^2 باندې ويشو

$$y^{-2}\frac{dy}{dx}-\frac{y^{-1}}{x}=\frac{2}{e^{x}} \qquad \text{پس} \quad y^{-1}=v \qquad => \qquad -y^{-2}\frac{dy}{dx}=\frac{dv}{dx}$$

$$-\frac{dv}{dx}-\frac{v}{x}=\frac{2}{e^{x}} \qquad \text{يا} \qquad \frac{dv}{dx}+\frac{1}{x}v=-\frac{2}{e^{x}}\ , \qquad P=\frac{1}{x} \qquad Q=-\frac{2}{e^{x}}$$

$$IF=e^{\int Pdx}=e^{\int\frac{1}{x}dx}=e^{\ln x}=x$$

پس دمعادلې عمومي حل عبارت دې له

$$v\,x=-\int 2\,e^{-x}\,x\,dx+c=-2\left[-xe^{-x}+\int e^{-x}dx\right]+c$$

$$=-2[-xe^{-x}-e^{-x}]+c \qquad \text{يا} \qquad \frac{1}{y}x=2e^{-x}(x+1)+c$$

پنځم مثال: $\frac{dy}{dx}+y\cos x=y^{n}\sin 2x$ تفاضلي معادله حل کړئ

حل: راکړل شوې معادله دبرنولي معادلې په شکل ده ، لومړی راکړل شوي معادله په y^n باندې ويشو

$$y^{-n}\frac{dy}{dx}+y^{1-n}\cos x=\sin 2x\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots.(1)$$

$$y^{1-n}=v \qquad => \qquad (1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}=\frac{dv}{dx}$$

دپورته قيمتونو په وضعه کولوسره لومړی معادله په لاندې خطي معادلې باندې بدليږي

$$\frac{1}{1-n}\frac{dv}{dx}+v\cos x=\sin 2x \qquad \text{يا} \qquad \frac{dv}{dx}+(1-n)\cos x\cdot v=(1-n)\sin 2x$$

$$P=(1-n)\cos x\ ,Q=(1-n)\sin 2x$$

$$IF=e^{\int Pdx}=e^{\int(1-n)csox}=e^{(1-n)\sin x}$$

پس دمعادلې عمومي حل په لاندې ډول پیداکوو

$$v\, e^{(1-n)\sin x} = \int (1-n)\sin 2x\, e^{(1-n)\sin x}\, dx + c$$

$$(1-n)\sin x = t \qquad => \qquad \cos x\, dx = \frac{1}{n-1} dt$$

$$v\, e^{(1-n)\sin x} = \int (1-n) 2\sin x \cos x\, e^{(1-n)\sin x}\, dx + c$$

$$= \frac{2}{n-1}\int t\, e^t dt + c$$

$$= \frac{2}{n-1}\left[t e^t - \int 1 . e^t dt\right] + c$$

$$= \frac{2}{n-1}[t\, e^t - e^t] + c = \frac{2}{n-1}[(t-1)e^t]$$

$$y^{(1-n)} e^{(1-n)\sin x} = \frac{2}{n-1}[(1-n)\sin x - 1]\, e^{(1-n)\sin x} + c$$

$$y^{1-n} = \left\{\frac{2}{n-1}\right\}[(1-n)\sin x - 1] + c e^{-(1-n)\sin x}$$

شپږم مثال: $\frac{dz}{dx} + \frac{z}{x}\ln z = \frac{z}{x^2}(ln\, z)^2$ تفاضلي معادله حل کړئ

حل: راکړل شوې معادله په z باندې ویشو، نولاندې نتیجه لاسته راکوي

$$\frac{1}{z}\frac{dz}{dx} + \frac{1}{x}\ln z = \frac{1}{x^2}(\ln z)^2 \qquad y = \ln z \qquad => \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{z}\frac{dz}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = \frac{y^2}{x^2}$$

پورته معادله دبرنولي معادلې شکل دی، ددې لپاره چې په خطي شکل یې بدله کړو ، نو معادله په y^2 باندې ویشو

$$y^{-2}\frac{dy}{dx} + \frac{y^{-1}}{x} = \frac{1}{x^2} \qquad y^{-1} = v \quad => \quad -y^{-2}\frac{dy}{dx} = \frac{dv}{dx}$$

$$-\frac{dv}{dx} + \frac{v}{x} = \frac{1}{x^2} \qquad \text{یا} \qquad \frac{dv}{dx} - \frac{1}{x}v = -\frac{1}{x^2} \qquad P = -\frac{1}{x}\ ,\quad Q = -\frac{1}{x^2}$$

$$IF = e^{\int P dx} = e^{-\int \frac{1}{x} dx} = e^{-\ln x} = \frac{1}{x}$$

اوس يې عمومي حل په لاندې ډول پيداکوو

$$v \cdot \frac{1}{x} = \int -\frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{x} dx + c = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2} + c$$

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{2x^2} + cx \qquad y = \ln z$$

$$\therefore \quad \frac{1}{\ln z} = \frac{1}{2x} + cx$$

1.14 تمرينونه:

لاندې تفاضلي معادلات حل کړئ

1. $\frac{dy}{dx} - xy = x^3 y^2 \quad Ans: \quad \frac{1}{y^2} = 1 - x^2 + ce^{x^2}$
2. $2\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = \frac{y^2}{x^2} \quad Ans: \quad \frac{1}{y} = \frac{1}{x} - \frac{c}{\sqrt{x}}$
3. $xy - \frac{dy}{dx} = y^3 e^{-x^2} \quad Ans: \quad -\frac{1}{y^2} e^{x^2} = c - 2x$
4. $\sec^2 y \frac{dy}{dx} + 2x \tan y = x^3 \quad Ans: \quad \tan y \, e^{x^2} = c + \frac{1}{2} e^{x^2} (\tan y - 1) \quad put \tan y = v$
5. $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = y^2 x \quad Ans: \quad 1 + x^2 y + cxy = 0$
6. $\frac{dy}{dx} + y \tan x = y^3 \sec x \quad Ans: \quad \cos^2 x = y^2 (2 \sin x + c)$
7. $x^3 \frac{dy}{dx} + y^4 \cos x = x^2 y \quad Ans: \quad x^3 = (c + 3 \sin x) y^3$
8. $\frac{dy}{dx} + y \cot x = y^2 \sin^2 x \cos^2 x \quad Ans: \quad \frac{1}{y} = \frac{1}{3} \sin x \cos^3 x + c \sin x$
9. $\frac{dy}{dx} + x \sin 2y = x^3 \cos^2 y \quad Ans: \quad tany = \frac{1}{2}(x^2 - 1) + ce^{-x^2}$
10. $\frac{dy}{dx}(x^2 y^3 + xy) = 1 \quad Ans: \quad \frac{1}{x} = 2 - y^2 + ce^{-\frac{y^2}{2}}$

کاملې تفاضلي معادلې (Exact Differential Equations)

هغه تفاضلي معادلې چې $(1)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\quad M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$ شکل ولري ، کاملې تفاضلي معادلې ورته وايي ، که چيرته دلومړۍ معادلې چپ طرف ديوې تابع لکه $f(x,y)$ کامل ديفرنسيال وی، يعني $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = df$ ، ياپه ساده ډول باندې لومړۍ معادلې ته کامله تفاضلي معادله وايي که چيرته $u(x,y)$ په لاندې ډول موجود وي

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M(x,y) \qquad \text{او} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = N(x,y)$$

دمثال په ډول $x\,dy + y\,dx = 0$ تفاضلي معادله په نظر کې نيسو، نوموړې معادله کولای شو چې د $d(xy) = 0$ په شکل وليکو، کوم چې مونږ ته $df = 0$ شکل رابنايي ، چې f د x او y تابع ده، دانتيګرال نيوني څخه وروسته $xy = c$ لاسته راځي ، کوم چې دراکړل شوې معادلې عمومي حل دې، داډول معادلوته کاملې تفاضلي معادلې وايي.

قضيه: دلومړۍ معادلې دکامل والي لپاره لازمي اوکافي شرط عبارت له $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ څخه دی.

(i) دلازمي شرط لپاره ثبوت:

فرض کړئ چې لومړۍ معادله کامله ده ، مونږبايد وښايو چې $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ ، څرنګه چې لومړۍ معادله کامله ده ، نو دتعريف په اساس د $f(x,y)$ يوه تابع موجوده ده دکوم لپاره چې مونږ لاندې معادله لرو

$$df = M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2$$

دتيرو رياضياتوپه اساس لرو چې

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

ددوهمې او دريمې معادلو دمقايسې په اساس لرو چې

$$M = \frac{\partial f}{\partial x}\,, \quad N = \frac{\partial f}{\partial y} \;\ldots\ldots\ldots\ldots(4) \;=>\; \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\,,\; \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial^2 y}{\partial y \partial x}$$

څرنګه چې

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 y}{\partial y \partial x} \qquad \therefore \quad \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

کوم چې لازمي شرط رابنايي.

(ii) دکافي شرط لپاره ثبوت:

فرض کړئ چې $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$ ، مونږ باید د $f(x,y)$ یوه تابع پیداکړو ، دکوم لپاره چې لاندې معادله صدق وکړي

$$df=M(x,y)\,dx+N(x,y)\,dy \quad \text{یعني} \quad \frac{\partial f}{\partial x}=M(x,y) \quad \text{او} \quad \frac{\partial f}{\partial y}=N(x,y)$$

مونږ باید د $f(x,y)$ تابع داډول لاسته راوړو ، دکوم لپاره چې څلورمه معادله کې لومړی حالت صدق وکړي، دنوموړی معادلې نظر x ته مشتق اخلو او y ثابت نیسو ، نو مونږ لاندې معادله لاسته راوړو

$$f=\int M(x,y)\ dx+\phi(y)\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5)$$

چې $\phi(y)$ یوه اختیاري تابع د y ده ، اوس $\phi(y)$ داډول انتخابوو چې په څلورمه معادله کې دوهم حالت لپاره هم صدق وکړي ، یعنې $\frac{\partial f}{\partial y}=N(x,y)\ \ldots\ldots\ldots(6)$ ، اوس د $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$ په نظر کې نیولو سره $\phi(y)$ هروخت امکان لري.

د (5) څخه لیکلای شو چې

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left[\int M(x,y)dx\right]+\phi'(y)\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(7)$$

د (6) او (7) دمقایسې په اساس لیکلای شو چې

$$\phi'(y)=N(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,u)\ dx\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(8)$$

د (8) چپ طرف د x څخه مستقل دی

راځی چې اوس د (4) حالت لاندې وښایو، x د (8) ښي طرف ته دننه کیدای نه شي ، ددی لپاره مونږ باید وښایو چې د (8) دښي طرف قسمي مشتق صفر دی.

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[N-\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx\right]=\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial}{\partial y}\int M\ dx\right]=\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial}{\partial x}\int M\ dx\right]$$

$$\frac{\partial}{dx}\int M\ dx=M(x,y) \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left[N-\frac{\partial}{\partial y}\int M\ dx\right]=\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}=0$$

څکه $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$ اوس د (8) مشتق نظر y اخلو، نو ترلاسه کوو چې

$$\phi(y) = \int \left[N - \frac{\partial}{\partial y}\int M\,dx\right]dy + c \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots (9)$$

چې c یو اختیاري ثابت عدد دی ، اوس که (9) په (5) کې وضعه کړو ، نو غوښتل شوی تابع لاسته راکوي

$$f(x,y) = \int M\,dx + \int \left[N - \frac{\partial}{\partial y}\int M\,dx\right]dy + c$$

دکومې چې کامل ډیفرنسیال عبارت له $M\,dx + N\,dy$ څخه دی

دکاملوتفاضلي معادلو دحل طریقه:

دداډول معادلو دحل لپاره لومړی باید وښایو چې $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$

1. د $M(x,y)$ انتیګرال نظر x ته پیداکوو او y ثابت په نظر کې نیسو، لاسته راغلي انتیګرال په I_1 سره ښایو.
2. په $N(x,y)$ کې هغه حدونه چې x ونلري ، نظر y ته انتیګرال نیسو او دغه انتیګرال په I_2 سره ښایو.
3. $I_1 + I_2 = c$ دراکړل شوې معادلې عمومي حل دی

عملي مثالونه:

لومړی مثال: $(2xy+3y)\,dx + (x^2+3x)\,dy = 0$ تفاضلي معادله حل کړئ

حل:

$M = 2xy + 3y$ او $N = x^2 + 3x$

$\frac{\partial M}{\partial y} = 2x + 3$ او $\frac{\partial N}{\partial x} = 2x + 3$

څرنګه چې $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ پس راکړل شوی معادله یوه کامله تفاضلي معاده ، اوس یې عمومي حل په لاندې ډول پیداکو

$$\int (2xy+3y)dx + \int (0)dy = c$$

$2y\frac{x^2}{2} + 3y\,x = c$ یا $x^2y + 3xy = c$

پورته معادله کولای شو په لاندی ډول حل کړو، چې لومړی دمعادلې چپ طرف دیو کامل ډیفرنسیال په شکل لیکو

$$(2xy\,dx + x^2\,dy) + 3(x\,dy + y\,dx) = 0 \quad \text{یا} \quad d(x^2y) + 3d(xy) = 0$$

دانتیګرال څخه وروسته دراکړل شوې معادلې عمومي حل په لاس راځي

$$x^2y + xy = c$$

دوهم مثال: لاندې تفاضلي معادله حل کړئ

$$(5x^4 + 3x^2y^2 - 2xy^3)dx + (2x^3y - 3x^2y^2 - 5y^4)dy = 0$$

حل: پوهیږو چې

$$M = 5x^4 + 3x^2y^2 - 2xy^3 \quad \text{او} \quad N = 2x^3y - 3x^2y^2 - 5y$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 6x^2y - 6xy^2 \quad \text{او} \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 6x^2y - 6xy^2$$

څرنګه چې $\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}$ پس راکړل شوی معادله یوه کامله تفاضلي معاده ، اوس یې عمومي حل په لاندې ډول پیداکو

$$\int (5x^4 + 3x^2y^2 - 2xy^3)dx + \int (-5y^4)dy = c$$

$$x^5 + x^3y^2 - x^2y^3 - y^5 = c$$

دریم مثال: $(e^y + 1)\cos x\ dx + e^y \sin \mathrm{x}\, dy = 0$ تفاضلي معادله حل کړئ

حل: لیدل کیږي چې

$$M = (e^y + 1)\cos x \quad \text{او} \quad N = e^y \sin x$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = e^y \cos x \quad \text{او} \quad \frac{\partial N}{\partial x} = e^y \cos x$$

څرنګه چې $\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}$ پس راکړل شوی معادله یوه کامله تفاضلي معاده ، اوس یې عمومي حل په لاندې ډول پیداکو

$$\int (e^y + 1)\cos x \ dx + \int (0)\ dy = c \qquad => \qquad (e^y + 1)\sin x = c$$

څلورم مثال: لاندې تفاضلي معادله حل کړئ

$$\left[y\left(1+\frac{1}{x}\right)+\cos y\right]dx + [x + \ln x - x\sin y]dy = 0$$

حل: پوهیږو چې

$$M = y\left(1+\frac{1}{x}\right)+\cos y \quad \text{او} \quad N = x + \ln x - x\sin y$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \left(1+\frac{1}{x}\right) - \sin y \quad \text{او} \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \left(1+\frac{1}{x}\right) - \sin y$$

څرنګه چې $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ پس راکړل شوی معادله یوه کامله تفاضلي معاده ، اوس یې عمومي حل په لاندې ډول پیداکو

$$\int \left[y\left(1+\frac{1}{x}\right)+\cos y\right]dx + \int (0)\ dy = c$$

$$yx + y\ln x + x\cos y = c$$

پنځم مثال: لاندې تفاضلي معادله حل کړئ

$$(2x\ln y)\ dx + \left(\frac{x^2}{y} + 3y^2\right)\ dy = 0$$

حل: لیدل کیږي چې

$$M = 2x\ln y \quad \text{او} \quad N = \frac{x^2}{y} + 3y^2$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2x \cdot \frac{1}{y} = \frac{2x}{y} \quad \text{او} \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{2x}{y}$$

څرنګه چې $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ پس راکړل شوی معادله یوه کامله تفاضلي معاده ، اوس یې عمومي حل په لاندې ډول پیداکو

$$\int (2x\ln y)\,dx + \int 3y^2 dy = c \qquad => \qquad x^2\ln y + y^3 = c$$

شپږم مثال: لاندې تفاضلی معادله حل کړئ

$$\left(1+e^{\frac{x}{y}}\right)dx + e^{\frac{x}{y}}\left(1-\frac{x}{y}\right)dy = 0$$

حل: ليدل کيږي چې

$$M = \left(1+e^{\frac{x}{y}}\right) \qquad N = e^{\frac{x}{y}}\left(1-\frac{x}{y}\right)$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = e^{\frac{x}{y}}\left(-\frac{x}{y^2}\right) \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = e^{\frac{x}{y}}\left(-\frac{1}{y}\right) + \left(1-\frac{x}{y}\right)e^{\frac{x}{y}}\frac{1}{y}$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = -\frac{e^{\frac{x}{y}}}{y} + e^{\frac{x}{y}}\frac{1}{y} - \frac{x}{y^2}e^{\frac{x}{y}} = \left(-\frac{x}{y^2}\right)e^{\frac{x}{y}}$$

څرنګه چې $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ پس راکړل شوی معادله يوه کامله تفاضلي معاده ، اوس يې عمومي حل په لاندې ډول پيداکو

$$\int \left(1+e^{\frac{x}{y}}\right)dx + \int (0)dy = c$$

$$x + \frac{e^{\frac{x}{y}}}{\frac{1}{y}} = c \qquad \text{يا} \qquad x + y\,e^{\frac{x}{y}} = c$$

1.16 تمرينونه

لاندې تفاضلي معادلې حل کړئ

1. $3x(xy-2)dx + (x^2+2y)dy = 0$
2. $y\sin 2x\ \ dx - (1+y^2+\cos^2 x)dy = 0$
3. $(x^2-2xy+3y^2)dx + (y^2+6xy-x^2)dy$
4. $(y^2-x^2)dx + 2xy\,dy = 0$
5. $\left(1+3e^{\frac{x}{y}}\right)dx + 3e^{\frac{x}{y}}\left(1-\frac{x}{y}\right)dy = 0$
6. $(y\sec^2 x + \sec x\tan x)dx + (\tan x + 2y)dy = 0$

7. $(e^y+1)\cos x \ dx + e^y \sin x \ dy = 0$

8. $\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2y}\right)dx-\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{x^2y}\right)dy=0$

9. $\left(x+\frac{y^3}{x^2}\right)dx-3y^2dy=0$

10. $(\cos x-3x^2\tan y)dx-x^3\sec^2 y \ dy=0$

11. $(ax+hy+g)dx+(hx+by+f)dy=0$

12. $\left[\cos x \ \log_e(2y-8)+\frac{1}{x}\right]dx+\frac{\sin x}{y-4} \ dy=0 \qquad y(1)=\frac{9}{2}$

جوابونه:

1. $x^3y-3x^2+y^2=c$
2. $3y\cos 2x+6y+2y^3=c$
3. $x^3-3x^2y+9xy^2+y^3=c$
4. $\frac{x^3}{3}-xy^2=c$
5. $x+3ye^{\frac{x}{y}}=c$
6. $y\tan x+\sec x+y^2=c$
7. $(e^y+1)\sin x=c$
8. $\mathrm{Ln}\left(\frac{x}{y}\right)+\frac{1}{xy}=c$
9. $x^3-2y^3=cx$
10. $3y\cos 2x+(6y+2y^3)=c$
11. $ax^2+2h\,xy+by^2+2gx+2fy+c$
12. $\mathrm{Sin}\,x\ln(2y-8)+\ln x=0$

1.17 هغه تفاضلي معادلې چې په کاملو تفاضلو معادلوباندې بدلیږي

په دې برخه کې ځینې معادلې تربحث لاندې نیسو ، کومې چې $Mdx+Ndy=0$ شکل ولري خو کاملې نه وي، ولې دیوې مناسبې تابع دضربولو څخه وروسته په کاملوتفاضلي معادلوباندې بدلیږي ، چې دغه مناسبې تابع ته دانتیګرال فکټور یا داتمام عامل وایې ، دانتیګرال فکټور دپیداکولو لپاره لاندې قوانین بغیر دثبوت څخه ترځیړنې لاندې نیسو.

لومړی قانون: که چیرته راکړل شوی تفاضلي معادله یوه متجانسه تفاضلي معادله وي او همدارنګه $Mx+Ny\neq 0$ ، نو $\frac{1}{Mx+Ny}$ عبارت دانتیګرال فکټور څخه دی.

لومړی مثال: $(x^4+y^4)dx - xy^3dy = 0$ تفاضلي معادله حل کړئ

حل: راکړل شوې معادله یوه متجانسه تفاضلي معادله ده ، نو لومړی یې دانتیګرال فکتور پیداکوو

$$IF = \frac{1}{Mx+Ny} = \frac{1}{(x^4+y^4)x+(-xy^3)y} = \frac{1}{x^5}$$

اوس راکړل شوې معادله په $\frac{1}{x^5}$ کې ضربوو

$$\left(\frac{1}{x}+\frac{y^4}{x^5}\right)dx - \frac{y^3}{x^4}dy = 0$$

پورته معادله یوه کامله تفاضلي معادله ده او په لاندې ډول یې حل کوو

$$\int\left(\frac{1}{x}+\frac{y^4}{x^5}\right)dx + \int(0)dy = c \qquad => \quad \ln x - \frac{y^4}{4x^4} = c$$

دوهم مثال: $y^2dx + (x^2-xy-y^2)dy = 0$ تفاضلي معادله حل کړئ

حل: راکړل شوې معادله یوه متجانسه تفاضلي معادله ده ، نو دانتیګرال فکتور یې په لاندې ډول پیداکوو

$$IF = \frac{1}{Mx+Ny} = \frac{1}{y^2x+(x^2-xy-y^2)y} = \frac{1}{y(x^2-y^2)}$$

اوس راکړل شوې معادله په لاسته راغلي انتیګرال فکتور کې ضربوو، نو معادله لاندې شکل اختیاروي

$$\frac{y}{x^2-y^2}dx + \left(\frac{1}{y}-\frac{x}{x^2-y^2}\right)dy = 0$$

پورته معادله یوه متجانسه تفاضلي معادله ده ، او په لاندې ډول یې حل کوو

$$\int\frac{y}{x^2-y^2}dx + \int\frac{1}{y}dy = c$$

$$y\cdot\frac{1}{2y}\ln\frac{x-y}{x+y} + \ln y = c \quad \text{یا} \quad \frac{1}{2}\ln\frac{x-y}{x+y} + \ln y = c$$

دوهم قانون: که چیرته $\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}$ یواځې د x تابع وي ، د f(x) په شکل يې فرض کوو، نو $e^{\int f(x)dx}$ عبارت دانتیګرال فکټور څخه دی.

لومړی مثال: $2y\,dx+(2x\ln x-xy)dy=0$ تفاضلي معادله حل کړئ

حل:

$$M=2y \qquad N=2x\ln x-xy$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=2 \qquad \frac{\partial N}{\partial x}=2\left(x\cdot\frac{1}{x}+\ln x\right)-y=2(1+\ln x)-y$$

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}=\frac{2-2-2\ln x+y}{2x\ln x-xy}=\frac{-2\ln x+y}{x(2\ln x-y)}=-\frac{1}{x}=f(x)$$

$$\therefore \quad IF=e^{\int f(x)dx}=e^{-\int\frac{1}{x}dx}=e^{-\ln x}=\frac{1}{x}$$

اوس راکړل شوې معادله په $\frac{1}{x}$ کې ضربوو ، نو ترلاسه کوو

$$\frac{2y}{x}dx+\frac{2x\ln x-xy}{x}dy=0 \quad \text{یا} \quad \frac{2y}{x}dx+(2\ln x-y)dy=0$$

پورته معادله یوه کامله تفاضلي معادله ده ، او په لاندې ډول یې حل کوو

$$\int\frac{2y}{x}dx+\int(-y)dy=c \qquad => \qquad 2y\ln x-\frac{y^2}{2}=c$$

دوهم مثال: لاندې تفاضلي معادله حل کړئ

$$(6x^2+4y^3+12y)\,dx+3x(1+y^2)\,dy=0$$

حل:

$$M=6x^2+4y^3+12y \qquad N=3x+3xy^2$$

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}=\frac{12y^2+12-3-3y^2}{3x(1+y^2)}=\frac{12(y^2+1)-3(1+y^2)}{3x(1+y^2)}=\frac{3}{x}=f(x)$$

$$\therefore \quad IF = e^{\int f(x)dx} = e^{\int \frac{3}{x}dx} = e^{3\ln x} = e^{\ln x^3} = x^3$$

راکړل شوې معادله په x^3 کې ضربوو

$$(6x^5 + 4x^3y^3 + 12x^3y)\,dx + 3x^4(1 + y^2)\,dy = 0$$

پورته معادله یوه کامله تفاضلي معادله ده ، نو په لاندې ډول یې حل کوو

$$\int (6x^5 + 4x^3y^3 + 12x^3y)\,dx + \int (0)dy = c$$

$$x^6 + x^4y^3 + 3yx^4 = c$$

دریم قانون: که چېرته $\frac{\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}}{M}$ د y تابع وي ، او د f(y) په شکل یې وښایو نو $e^{\int (y)dy}$ دانتیګرال فکتور دی.

لومړی مثال: لاندې تفاضلي معادله حل کړئ

$$(y^4 + 2y)dx + (xy^3 + 2y^4 - 4x)dy = 0$$

حل:

$$M = y^4 + 2y \qquad N = xy^3 + 2y^4 - 4x$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 4y^3 + 2 \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = y^3 - 4$$

$$\frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} = \frac{(y^3 - 4) - (4y^3 + 2)}{(y^4 + 2y)} = \frac{-3(y^3 + 2)}{y(y^3 + 2)} = \frac{-3}{y} = f(y)$$

اوس یې دانتیګرال فکتورپه لاندې ډول پیداکوو

$$IF = e^{\int (y)dy} = e^{-\int \frac{3}{y}} = e^{-3\ln y} = e^{-\ln y^3} = \frac{1}{y^3}$$

اوس راکړل شوې معادله په $\frac{1}{y^3}$ کې ضربوو ، نو ترلاسه کوو

$$\left(y + \frac{2}{y^2}\right)dx + \left(x + 2y - \frac{4x}{y^3}\right)dy = 0$$

پورته معادله یوه متجانسه معادله ده ، نو عمومي حل یې په لاندې ډول دی

$$\int \left(y+\frac{2}{y^2}\right)dx+\int 2y\,dy=c$$

$$xy+\frac{2x}{y^2}+y^2=c \quad \text{یا} \quad x\left(y+\frac{2}{y^2}\right)y+y^2=c$$

ځلورم قانون : که چېرته راکړل شوې معادله د $f_1(x,y)y\,dx+f_2(x,y)x\,dy=0$ شکل ولري، چې $M=f_1(x,y)y$ او $N=f_2(x,y)x$ وي او $Mx-Ny\neq 0$ نو په دې صورت کې $\frac{1}{Mx-Ny}$ عبارت دانتیګرال فکټور څخه دی.

مثال: لاندې تفاضلي معادله حل کړئ

$$y(1+2xy)\,dx+x(1-xy)\,dy=0$$

حل:

$$M=yf_1(x,y) \qquad N=xf_2(x,y)$$
$$M=y(1+2xy) \quad N=x(1-xy)$$

$$Mx-Ny=xy(1+2xy)-xy(1-xy)=xy+2x^2y^2-xy+x^2y^2$$

$$Mx-Ny=3x^2y^2\neq 0$$

پس دراکړل شوې معادلې دانتیګرال فکټور عبارت دی له

$$IF=\frac{1}{Mx-Ny}=\frac{1}{3x^2y^2}$$

راکړل شوې معادله په $\frac{1}{3x^2y^2}$ کې ضربوو، نو ترلاسه کوو چې

$$\left(\frac{1}{3x^2y}+\frac{2}{3x}\right)dx+\left(\frac{1}{3xy^2}-\frac{1}{3y}\right)dy=0$$

پورته معادله یوه متجانسه معادله ده او عمومي حل یې په لاندې ډول دی

$$\int \left(\frac{1}{3x^2y}+\frac{2}{3x}\right)dx+\int -\frac{1}{3y}\,dy=c$$

$$-\frac{1}{3xy}+\frac{2}{3}\ln x-\frac{1}{3}\ln y=c \quad \text{یا} \quad -\frac{1}{xy}+2\ln x-\ln y=k \qquad (k=3c)$$

پنځم قانون : که چیرته معادله د $x^a y^b(my\,dx+nx\,dy)+x^c y^d(py\,dx+qx\,dy)=0$ چې p,d,c,n,m,b,a او q ثابت عددونه دي شکل ولري، نو دراکړل شوي معادلي دانتیګرال فکټور عبارت د $x^h y^k$ څخه دی ، د k او h دلاسته راوړلو لپاره لومړی راکړل شوې معادله په $x^h y^k$ کې ضربوو ، ترڅو معادله په کامله تفاضلي معادله باندې بدله شي ، بیا یې د کامل والي دشرط څخه په استفادی سره ، دضریبونو دمقایسي څخه د k او h قیمتونه لاسته راوړو، دغه موضوع په لاندې مثال کې واضح کوو

مثال: $(y^2+2x^2y)dx+(2x^3-xy)\,dy=0$ معادله حل کړئ

حل: لومړی راکړل شوې معادله په لاندې ډول لیکو

$$y(y\,dx-x\,dy)+x^2(2y\,dx+2x\,dy)=0$$

اوس راکړل شوې معادله په $x^h y^k$ کې ضربوو ، نو ترلاسه کوو

$$(x^h y^{k+2}+2x^{h+2}y^{k+1})dx+(2x^{h+2}y^k-x^{h+1}y^{k+1})dy=0 \quad \ldots\ldots\ldots(1)$$

پورته معادله باید یوه کامله تفاضلي معادله وي

$$M=x^h y^{k+2}+2x^{h+2}y^{k+1} \quad , \quad N=2x^{h+2}y^k-x^{h+1}y^{k+1}$$

څرنګه چې لومړئ معادله کامله ده ، نو لروچې

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$$

$$(k+2)x^h y^{k+1}+2(k+1)x^{h+2}y^k=2(h+3)x^{h+2}y^k-(h+1)x^h y^{k+1}$$

دپورته عینیت دضریبونو د مساوات څخه لرو چې

$k+2=-(h+1)$ او $2(k+1)=2(h+3)$

یعنې $h+k=-3$ او $h-k=-2$

دپورته سیستم دحل څخه د h او k قیمتونه عبارت دي له

$$h=-\frac{5}{2} \qquad k=-\frac{1}{2} \qquad \therefore \quad IF=x^{-\frac{5}{2}}y^{-\frac{1}{2}}$$

اوس راکړل شوې معادله په $x^{-\frac{5}{2}}y^{-\frac{1}{2}}$ کې ضربوو

$$\left(x^{-\frac{5}{2}}y^{\frac{3}{2}}+2x^{-\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{2}}\right)dx+\left(2x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{2}}+x^{-\frac{3}{2}}y^{\frac{1}{2}}\right)dy=0$$

پورته معادله یوه متجانسه معادله ده ، او عمومي حل يې په لاندې ډول دی

$$y^{\frac{3}{2}}\left(-\frac{2}{3}x^{-\frac{3}{2}}\right)+2y^{\frac{1}{2}}\left(2x^{\frac{1}{2}}\right)=c \quad \text{يا} \quad 6x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{3}{2}}y^{\frac{3}{2}}=c$$

1.18

لاندې تفاضلي معادلې حل کړئ

1. $(x^2-3xy+2y^2)\,dx+x(3x-2y)\,dy=0$
2. $(x^2y-2xy^2)\ \ dx+2y\,dy=0$
3. $(xy-y^2)\,dx-x^2dy=0$
4. $(x^2+y^2+2x)\,dx+2y\,dy=0$
5. $(3xy-2ay^2)\,dx+(x^2-2ayx)\,dy=0$
6. $(x^3-2y^2)\,dx+2y\,dy=0$
7. $(xy^2-x^2)\,dx+(3x^2y^2+x^2y-2x^3+y^2)\,dy=0$
8. $(y^4+2y)\,dx+(xy^3+2y^4-4x)\,dy=0$
9. $(xy^2+y)\,dx+2(x^2y^2+x+y^4)\,dy=0$
10. $(xy\sin xy+\cos xy)y\,dx+(xy\sin xy-\cos xy)x\,dy=0$
11. $(x^2y^2+xy+1)\,y\,dx+(x^2y^2-xy+1)x\,dy=0$
12. $(2y\,dx+3x\,dy)+2xy(3ydx+4xdy)=0$