1.1 تعريف او ډولونه:

تعريف : هغه معادله چې مشتقات ولري دتفاضلي معادلي په نوم ياديږي ، کيداشی چې دغه مشتقات معمولي مشتقات وي او يا قسمي مشتقات وي.

تفاضلي معادلي په دوه ډوله دي

معمولي تفاضلي معادله (Ordinary Differential Equation)

هغه معادله چې د x مستقل متحول ، د y غيرمستقل متحول چې y ته د x تابع هم وايو او د y هر ترتيب مشتق نظر x ته ولري دمعمولي تفاضلي په نامه سره ياديږي.

مثالونه:

1. $\frac{dy}{dx} + 3y = 0$

2. $\frac{dy}{dx} + y = e^x$

3. $\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2y = 0$

4. $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2y = \sin x$

5. $\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + 3y = 0$

6. $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^2 + 7\frac{d^2y}{dx^2} + 8\frac{dy}{dx} - 9y = \log x$

قسمي تفاضلي معادله (Partial Differential Equation)

هغه تفاضلي معادله چې دوه ياڅو مستقل متحوله ، تابع او ددغه تابع قسمي مشتقات (هر ترتيب چې وي) ولري دقسمي تفاضلي معادلي په نامه سره ياديږي.

مثالونه:

که چيرته z د x او y تابع وي نو:

7. $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = a^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ 8. $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 2z$ 9. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$

1.2 دتفاضلي معادلو ترتيب او درجه

دتفاضلي معادلي ترتيب:

په تفاضلي معادله کي لوړ ترين مشتق دتفاضلي معادلي دترتيب څخه عبارت دی.

دتفاضلي معادلي درجه:

په تفاضلي معادله کي دلوړترين ترتيب توان دتفاضلي معادلي ددرجي څخه عبارت دی.

په پورته مثالونو کې:

1) لومړی ترتیب او لومړۍ درجه
2) لومړی ترتیب او لومړۍ درجه
3) دوهم ترتیب لومړۍ درجه
4) لومړی ترتیب دوهمه درجه
5) دوهم ترتیب لومړۍ درجه
6) دریم ترتیب دوهمه درجه

همدارنګه د $\frac{d^2y}{dx^2} = \left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}$ تفاضلي معادلې دترتیب او درجې دپیداکولو لپاره لومړی دمعادلې دواړه خواوې مربع کوو ، په نتیجه کې معادله لاندې شکل غوره کوي

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 = \left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^3$$

اوس پورته معادله دوهم ترتیب او دوهمه درجه تفاضلي معادله ده.

باید په یاد ولرئ چی دتفاضلي معادلو ترتیبب او درجه کوم چی مونږ تعریف کړل باید مثبت تام عدد وي.

دتفاضلي معادلو حل

یوه معمولي تفاضلي معادله لاندي عمومي شکل لری

$$F\left[x, y, y', y'', \dots\dots\dots\dots y^{(n)}\right] = 0 \dots\dots\dots\dots (1)$$

دیوې تفاضلي معادلې حل عبارت دهغه تابع څخه دی ، کوم چې په راکړل شوی معادله کی صدق وکړي، $\phi(x)$ تابع ته د (1) تفاضلي معادلې حل ویل کیږي ، که چیرته :

$$F[x, \phi(x), \phi'(x), \dots\dots\dots, \phi^n(x)] = 0$$

یاپه بل عبارت $y=\phi(x)$ تابع په (1) معادله کې صدق وکړي.

د n ام ترتیب تفاضلي معادلو حل ، چې n اختیاري ثابت عددونه ولري د عمومي حل (general solution) په نامه سره یادیږي، که چیرته په عمومي حل کې داختیاری ثابت عدد په ځای خاص قیمت وضعه شي ، دتفاضلي معادلې مشخص حل (particular solution) لاس ته راځي.

1.3 دتفاضلي معادلو ترتیب دپارامتر دحذفولوپه واسطه

ددې لپاره چې مونږ ښه پوه شو چې څنګه کولای شو چی تفاضلي معادله دپارامتر دحذفولو په واسطه تشکیل کړو ، نو لاندې مثال په نظر کې نیسو.

مثال : داسې تفاضلي معادله تشکیل کړئ ، کوم چې د $y = a\cos(x+b)$ منحنیاتو مجموعه راښایی ، a او b اختیاري ثابت عددونه دي.

حل:

$$y = a\cos(x+b) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

داولې معادلې نظر x ته مشتق اخلو

$$\frac{dy}{dx} = -a\sin(x+b) \ldots\ldots\ldots\ldots..(2)$$

اوس ددوهمې معادلې نظر x ته مشتق اخلو

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -a\cos(x+b) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

ددریمې معادلې څخه د a قیمت لمنځه وړو، په نتیجه کې لاندې تفاضلي معادله لاسته راځي

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -y \quad => \quad \frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$$

په نتیجه کې ویلای شو، که وغواړو یوه تفاضلي معادله تشکیل کړو ، نو لومړی باید دورکړل شو منحنیاتو مجموعي کوم چې د پارامترونو دلودونکي ده ، مشتق ونیسو او بیا پارامترونه حذف کړو.

یاداښت: (i) دمنحنیاتو هغه مجموعه کوم چې یو پارامتر ولري ، لومړی ترتیب تفاضلي معادله تشکیلوی.

(ii) په عمومي ډول دمنحنیاتو هغه مجموعه کوم چې n پارامترونه ولري ، n ام ترتیب تفاضلي معادله تشکیلوي.

1.4 لومړی ترتیب او لومړئ درجه تفاضلي معادله

په دې فصل کې مونږ د لومړی ترتیب او لومړئ درجی تفاضلي معادلو دحل لپاره مختلفي طریقو باندې بحث کوو، چې په عمومي ډول لومړی ترتیب او لومړئ درجه تفاضلي معادلې لاند شکل لري.

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.(1)$$

دپورته عمومی شکل ، عمومي حل عبارت دی له:

$$F(x, y, c) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..(2)$$

په دوهمه معادله کې c یو اختیاري ثابت عدد دی ، کوم چې په لومړئ معادله کې صدق کوي، که چېرته c ته یومشخص قیمت وکړو ، نو په دې صورت کې عمومي حل په مشخص حل باندې بدلیږي.

مونږ دلومړۍ معادلې ځینې معیاري شکلونه په لاندې طریقو باندې حل کوو.

(1) هغه معادلې چې متحولین یې دتفکیک وړ وي او یا دساده کولو څخه وروسته تفکیک ته برابریږي
(2) متجانسي تفاضلي معادلې
(3) متجانسو تفاضلي معادلوته بدلیدونکي تفاضلي معادلې
(4) کاملی تفاضلي معادلې
(5) کاملو تفاضلي معادلوته بدلیدونکی تفاضلي معادلې
(6) خطي تفاضلي معادلې
(7) خطي تفاضلي معادلوته بدلیدونکي تفاضلي معادلې (برنولي شکل)

1.5 دتفکیک وړ معادلې (Separation of variables):

ددې لپاره دتفاضلي معادلې لاندې شکل په نظر کې نیسو

$$\frac{dy}{dx}=\frac{f(x)}{g(y)}\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots(1) \qquad (\,g(y)\neq 0\,)$$

دمتحولینو په جداکولو سره لومړۍ معادله په لاندې شکل لیکو او بیا یې انتیګرال نیسو

$$g(y)dy=f(x)dx \qquad => \qquad \int g(y)dy=\int f(x)dx$$

دانتیګرال دنیونې څخه وروسته د (1) تفاضلي معادلې حل په لاندې ډول لاسته راځي

$$G(y)=F(x)+c$$

چې F(x) او G(y) په ترتیب سره د x او y توابع او c یو اختیاري ثابت عدد دی.

عملي مثالونه:

لومړی مثال: $\frac{dy}{dx}=\frac{1+y^2}{1+x^2}$ تفاضلي معادله حل کړئ

حل: دمتحولینو دجلاکولو څخه وروسته معادله په لاندې ډول حل کوو

$$\frac{dy}{1+y^2}=\frac{dx}{1+x^2}$$

$$\int\frac{1}{1+y^2}dy=\frac{1}{1+x^2}dx$$

$$\tan^{-1}y=\tan^{-1}x+A$$

$$\tan^{-1} y - \tan^{-1} x = A$$

$$\tan^{-1} \frac{y-x}{1+yx} = A$$

$$\tan^{-1} \frac{y-x}{1+yx} = \tan^{-1} c \quad => \quad \frac{y-x}{1+yx} = c \quad => \quad y - x = c(1+yx)$$

کوم چي دغوښتل شوي معادلې مطلوب حل دی

دوهم مثال: $\frac{dy}{dx} = e^{x+y} + x^2 e^y$ تفاضلي معادله حل کړئ

حل: لومړی يې متحولين سره بيلوو اوبيا يې ددواړو خواوو انتيګرال نيسو

$$\frac{dy}{dx} = e^x e^y + x^2 e^y$$

$$\frac{dy}{dx} = e^y (e^x + x^2)$$

$$e^{-y} dy = (e^x + x^2) dx$$

$$\int e^{-y} dy = \int (e^x + x^2) dx$$

$$-e^{-y} + c = e^x + \frac{x^3}{3} \quad \text{يا} \quad e^x + e^{-y} + \frac{1}{3} x^3 = c$$

دريم مثال: $e^x \tan y \ dx + (1 - e^x) \sec^2 y \ dy = 0$ تفاضلي معادله حل کړئ

حل: ددی لپاره چې متحولين يې سره بيل کړو ، نومعادله په $(1 - e^x) \ . \ \tan y$ باندې ويشو

$$\frac{e^x}{1-e^x} dx + \sec^2 y \, dy = 0$$

$$-\int \frac{e^x}{e^x - 1} dx + \int \frac{\sec^2 y}{\tan y} dy = \log c$$

$$-\ln(e^x - 1) + \ln \tan y = \ln c$$

$$\ln\left(\frac{\tan y}{e^x - 1}\right) = \ln c \quad \text{يا} \quad \tan y = c(e^x - 1)$$

خلورم مثال: $\tan y\frac{dy}{dx} = \sin(x+y) + \sin(x-y)$ تفاضلي معادله حل کړئ

حل: د *sin C +sin D* رابطې څخه په استفادې سره پورته معادله په لاندې شکل ليکوو

$$\tan y\frac{dy}{dx} = 2\sin x\cos y$$

$$\frac{\tan y}{\cos y}dy = 2\sin x\ \ dx$$

$$\sec y\tan y\ \ dy = 2\sin x\ \ dx$$

$$\int \sec y\tan y\ \ dy = 2\int \sin x\,dx$$

$$\sec y = -2\cos x + c \quad \text{يا} \quad \sec y + 2\cos x = c$$

پنځم مثال: $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos(x+y)}$ تفاضلي معادله حل کړئ

په راکړل شوې معادله کی متحولين يو دبل څخه نه بيليږي ، خو که x+y=t سره تعويض کړو ، نو بيا کولای شو متحولين يې په اسانی سره بيل کړو

$$x+y=t \quad => \quad 1+\frac{dy}{dx} = \frac{dt}{dx} \quad => \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dt}{dx} - 1$$

دپورته قيمتونو په وضعه کولو سره معادله لاندې شکل غوره کوي

$$\frac{dt}{dx} - 1 = \frac{1}{\cos t} \quad => \quad \frac{dt}{dx} = \frac{1}{\cos t} + 1 = \frac{1+\cos t}{\cos t}$$

اوس يې متحولين سره بيلوو ، چې لاندې شکل لاسته راکوي

$$\frac{\cos t\ \ dt}{1+\cos t} = dx$$

$$\left(\frac{\cos^2\frac{t}{2} - \sin^2\frac{t}{2}}{2\cos^2\frac{t}{2}}\right)dt = dx \quad => \quad \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\tan^2\frac{t}{2}\right)dt = dx$$

$$\frac{1}{2}\left(1-\tan^2\frac{t}{2}\right)dt = dx \quad => \quad \frac{1}{2}\left(1-\left(\sec^2\frac{t}{2} - 1\right)\right)dt = dx$$

$$\frac{1}{2}\left(2-\sec^2\frac{t}{2}\right)dt = dx \quad => \quad \left(1-\frac{1}{2}\sec^2\frac{t}{2}\right)dt = dx$$

$$\int\left(1-\frac{1}{2}\sec^2\frac{t}{2}\right)dt = \int dx \quad => \quad t-\tan\frac{t}{2} = x+c$$

$$x+y-\tan\left(\frac{x+y}{2}\right) = x+c \quad \text{یا} \quad y-\tan\left(\frac{x+y}{2}\right) = c$$

کوم چې دراکړل شوې معادلې عمومي حل دی

شپږم مثال: $\frac{dy}{dx}+1 = e^{x+y}$ تفاضلي معادله حل کړئ

حل: x+y=t سره نیسو

$$x+y=t \quad => \quad 1+\frac{dy}{dx} = \frac{dt}{dx}$$

دغه قیمتونه په معادله کې وضعه کوو ، او په لاندې ډول یې حل کوو

$$\frac{dt}{dx} = e^t \quad => \quad e^{-t}dt = dx$$

$$\int e^{-t}dt = \int dx$$

$$-e^{-t} = x+c$$

$$-e^{-(x+y)} = x+c \quad => \quad x+e^{-(x+y)}+c+0$$

اووم مثال: $(2x-3y+1)dx+(6y-4x+3)dy = 0$ تفاضلي معادله حل کړئ

حل: راکړل شوې معادله کی متحولین سره نه بیلیږي ، خوکه په لاندې ډول تعویض اجرا کړو ، نو بیا کولای شو چی په اسانی سره معادله کې متحولین سره بیل کړو

$$2x-3y=t \quad => \quad 2-\frac{3dy}{dx} = \frac{dt}{dx}$$

دغه قیمتونه په معادله کې وضعه کوو او په لاندې ډول یې حل کوو

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(2x-3y)+1}{2(2x-3y)-3}$$

$$\frac{1}{3}\left(2-\frac{dt}{dx}\right)=\frac{t+1}{2t-3} \quad \text{یا} \quad \frac{dt}{dx}=\frac{t-9}{2t-3} \quad => \quad \frac{(2t-3)}{t-9}dt=dx$$

$$\int\left(\frac{2t-3}{t-9}\right)dt=\int dx \quad \text{یا} \quad \int\left(\frac{2t}{t-9}-\frac{3}{t-9}\right)dt=\int dx$$

$$2\int\frac{t-9+9}{t-9}dt-3\int\frac{1}{t-9}dt=\int dx$$

$$2\int\left(1+\frac{9}{t-9}\right)dt-3\int\frac{1}{t-9}dt=\int dx$$

$$2[t+9\ln(t-9)]-3\ln(t-9)=x+A$$

$$2t+15\ln(t-9)=x+A$$

$$(4x-6y)+15\ln(2x-3y-9)=x+A$$

$$3x-6y+15\ln(2x-3y-9)=A$$

$$\text{یا} \quad x-2y+5\ln(2x-3y-9)=c \qquad c=\frac{1}{3}A$$

اتم مثال: $\frac{dy}{dx}=\sin(x+y)+\cos(x+y)$ تفاضلي معادله حل کړئ

حل:

$$t=x+y \quad => \quad \frac{dt}{dx}=1+\frac{dy}{dx}, \quad \frac{dy}{dx}=\frac{dt}{dx}-1$$

دغه قیمتونه په راکړل شوي تفاضلي معادله کي وضعه کوو

$$\frac{dt}{dx}-1=\sin t+\cos t \quad => \quad \frac{dt}{dx}=\sin t+\cos t+1$$

$$\frac{dt}{\sin t+\cos t+1}=dx \quad => \quad \frac{dt}{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}+2\cos^2\frac{t}{2}}=dx$$

صورت او مخرج په $\cos^2\frac{t}{2}$ باندې ویشو

$$\frac{\sec^2\frac{t}{2}}{2\left[\tan\frac{t}{2}+1\right]}dt = dx$$

$$\int\frac{\sec^2\frac{t}{2}}{2\left[\tan\frac{t}{2}+1\right]}dt = \int dx$$

$$\ln\tan\left[\frac{t}{2}+1\right] = x + c \quad \text{یا} \quad \tan\left[\frac{x+y+2}{2}\right] = e^{x+c}$$

$$\tan\left(\frac{x+y+2}{2}\right) = A\,e^{x} \qquad (A = e^{c})$$

1.6 تمرینونه

لاندې تفاضلي معادلې حل کړئ

01. $(e^y+1)\cos x\ \ dx + e^y \sin x\, dy = 0$ 02. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2 y}{1+x^3}$

03. $(x+1)\dfrac{dy}{dx} + 1 = 2e^{-y}$ 04. $y - x\dfrac{dy}{dx} = a\left(y^2 + \dfrac{dy}{dx}\right)$

05. $(x^2 - yx^2)\dfrac{dy}{dx} + y^2(1+x) = 0$ 06. $\dfrac{dy}{dx} + xy = xy^3$

07. $x\sqrt{1+y^2}dx = y\sqrt{1+x^2}dy = 0$ $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1-x^2}} = 0\,,\quad y = 1,\ \ x = 0$

09. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x(2\ln x + 1)}{\sin y + y\cos y}$ 10. $a\left(x\dfrac{dy}{dx} + 2y\right) = 2xy\dfrac{dy}{dx}$

11. $\dfrac{dy}{dx}(1+x)(1+y^2)\,,\qquad y = 1,\qquad x = 0$

12. $\cos y\ \ \ln(\sec x + \tan x)dx = \cos x\ \ \ln(\sec y + \tan y)dy$

تفکیک ته بدلیدونکي تفاضلي معادلې

13. $\dfrac{dy}{dx} = (3x + 2y + 4)^2$ 　　14. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{6x - 2y - 7}{3x - y + 4}$

15. $(x + 2y - 1)dx = (x + 2y + 1)dy$ 　　16. $\dfrac{dy}{dx} = (x + y)^2$

17. $\dfrac{dy}{dx} = \sin(x + y)$ 　　18. $\dfrac{dy}{dx} = 1 + e^{x-y}$

19. $x^4 \dfrac{dy}{dx} + x^3 y + cosec\,(xy) = 0$ 　　20. $x\,dy + y\,dx + 4\sqrt{1 - x^2y^2}\,dx = 0$

جوابونه:

01. $\sin(e^y + 1) = c$ 　　02. $y^3 = c(1 + x^3)$ 　　03. $(x + 1) = c(2 - e^y)$

04. $(x + a) = c \cdot \dfrac{y}{(1 - ay)}$ 　　05. $\ln\left(\dfrac{x}{y}\right) - \left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}\right) = c$ 　　06. $\dfrac{y^2 - 1}{y^2} = Ae^{x^2}$

07. $\sqrt{1 + x^2} + \sqrt{1 + y^2} = c$ 　　$\sin^{-1} x + \sin^{-1} y = \dfrac{\pi}{2}$ 　　09. $x^2 \ln x - y \sin y = c$

10. $e^{-2y}\, y^a\, x^{2a} = A$ 　　11. $\tan^{-1} y = x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{\pi}{4}$

12. $[\ln(\sec x + \tan x)]^2 - [\ln(\sec y + \tan y)]^2 = c$

13. $\dfrac{1}{\sqrt{6}} \tan^{-1}\left[\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}(3x + 2y + 4)\right] = x + c$

14. $2x - y - 15\ln(3x - y + 19) + c = 0$ 　　15. $x = y + \dfrac{2}{3}\ln\left(x + 2y - \dfrac{1}{3}\right) + c$

16. $\tan^{-1}(x + y) = x + c$ 　　17. $1 + \tan\left\{\dfrac{x + y}{2}\right\} + \dfrac{2}{x + c} = 0$

18. $x = e^{-(x-y)} + c$ 　　19. $\cos xy = -\dfrac{1}{2x^2} - c$ 　　20. $\sin^{-1}(xy) + 4x = c$

متجانسې تفاضلي معادلې (Homogeneous Differential Equations)

$f(x,y)$ یوه n امه درجه متجانسه تابع ده ، که چیرته $f(\lambda x\,,\lambda y) = \lambda^n\, f(x,y)$ سره شي،
دمثال په ډول $x^2 + xy$ ، $\sqrt{x^2+y^2}$ او $\sin\left(\frac{x}{y}\right)$ په ترتیب سره دوهمه ، اوله او صفرمه درجه متجانسې توابع دي.

$M(x\,,y)\,dx + N(x\,,y) = 0$ یوه لومړی ترتیب او لومړۍ درجه متجانسه تفاضلي معادله ده ، که چیرته M او N یو شان درجه لرونکي متجانسې توابع وي، پورته معادله کولای شو د $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ په شکل ولیکو، چې $f(x,y) = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)}$ یوه صفرمه درجه متجانسه تابع ده ، دغه تابع بیا د $\frac{x}{y}$ یا $\frac{y}{x}$ په شکل لیکلای شو ، چې ددې څخه لاندې معادلې لاسته راځي

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.(1) \qquad \text{یا} \qquad \frac{dx}{dy} = f\left(\frac{x}{y}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

په لومړۍ معادله کې $\frac{y}{x} = v$ سره تعویض کوو او په دوهمه معادله کې $\frac{x}{y} = v$ سره تعویض کوو، ورسته یې بیا متحولین سره بیلوو اوحل بیا یې حل کوو، چې دلومړۍ معادلې لپاره په لاندې ډول عمل اجراکوو

$$\frac{y}{x} = v \qquad => \qquad y = vx\,, \qquad \frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$$

دغه قیمتونه په لومړۍ معادله کې وضعه کوو

$$v + x\frac{dv}{dx} = f(v)$$

اوس یې متحولین سره بیلوو او انتیګرال یې نیسو

$$\frac{dx}{x} = \frac{dv}{f(v) - v} \qquad => \qquad \ln x + c = \int \frac{dv}{f(v) - v}$$

چې c یو اختیاري ثابت عدد دی ، همدارنګه ددوهمې معادلې دحل لپاره په لاندې ډول عمل اجراکوو

$$\frac{x}{y} = v \qquad => \qquad x = vy\;, \qquad \frac{dx}{dy} = v + y\frac{dv}{dx}$$

دغه قیمتونه په دوهمه معادله کې وضعه کوو

$$v + y\frac{dv}{dx} = f(v)$$

پورته معادله هم دمتحولینو په جلا کولو سره حل کوو

عملي مثالونه:

لومړی مثال: $(x-y)dy-(x+y)dx=0$ تفاضلي معادله حل کړئ

حل: لومړی معادله د $\frac{dy}{dx}=\frac{x+y}{x-y}$ په شکل لیکو ، دمعادلې ښي صرف یوه متجانسه تابع ده ، او په لاندې ډول تعویض اجرا کوو

$$y=vx \quad => \quad \frac{dy}{dx}=v+x\frac{dv}{dx}$$

دغه قیمتونه په معادله کې وضعه کوو

$$v+\frac{xdv}{dx}=\frac{x+vx}{x-vx} \quad => \quad v+\frac{xdv}{dx}=\frac{1+v}{1-v} \quad => \quad \frac{xdv}{dx}=\frac{1+v}{1-v}-v$$

$$\frac{xdv}{dx}=\frac{(1+v)-v(1-v)}{1-v} \quad \text{یا} \quad \frac{1-v}{1+v^2}dv=\frac{dx}{x}$$

$$\int\frac{1}{1+v^2}dv-\frac{1}{2}\int\frac{2v}{1+v^2}dv=\int\frac{1}{x}dx$$

$$\tan^{-1}v-\frac{1}{2}\ln(1+v^2)=\ln x+c \quad => \quad \tan^{-1}\frac{y}{x}-\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)=\ln x+c$$

$$\text{یا} \quad \tan^{-1}\frac{y}{x}-\ln\sqrt{x^2+y^2}=c$$

دوهم مثال: $(x^2-xy+y^2)dx-xydy=0$ تفاضلي معادله حل کړئ

حل: لومړی معادله په لاندې شکل لیکو

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x^2-xy+y^2}{xy}=\frac{1-\frac{y}{x}+\frac{y^2}{x^2}}{\frac{y}{x}}$$

دمعادلې ښي طرف یوه متجانسه تابع راښایي ، او دحل لپاره یې لومړی په لاندې دول تعویض اجراکوو

$$\frac{y}{x}=v \quad => \quad \frac{dy}{dx}=v+x\frac{dv}{dx}$$

دغه قیمتونه په معادله کې وضعه کوو

$$v+x\frac{dv}{dx}=\frac{1-v+v^2}{v} \quad یا \quad x\frac{dv}{dx}=\frac{1-v-v^2}{v}-v \quad یا \quad x\frac{dv}{dx}=\frac{1-v}{v}$$

اوس يي متحولين سره بيلوو او انتيګرل يي نيسو

$$\frac{dx}{dv}=\frac{v}{1-v}dv \quad یا \quad \frac{dx}{v}=\left(\frac{v-1+1}{1-v}\right)dv$$

$$\int\frac{1}{x}dx=-\int\left(1+\frac{1}{v-1}\right)dv$$

$$\ln x=-[v+\ln(v-1)]+c \quad یا \quad \ln x(v-1)=c-v$$

$$\ln(y-x)=c-\frac{y}{x}$$

کوم چې دراکړل شوې معادلې عمومي حل دی

دريم مثال: $x\,dy-y\,dx=\sqrt{x^2+y^2}dx$ تفاضلي معادله حل کړئ

حل: لومړی راکړل شوی معادله په لاندې شکل ليکو

$$x\frac{dy}{dx}-y=\sqrt{x^2+y^2}$$

$$x\frac{dy}{dx}=y+\sqrt{x^2+y^2}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y+\sqrt{x^2+y^2}}{x}$$

کومه چې يوه متجانسه تفاضلي معادله ده او دحل کولو لپاره يې په لاندې ډول تعويض اجراکوو

$$y=vx \quad => \quad \frac{dy}{dx}=v+\frac{xdv}{dx}$$

دغه قيمتونه په معادله کې وضعه کوو

$$v+\frac{xdv}{dx}=\frac{vx+\sqrt{x^2+v^2x^2}}{x}=v+\sqrt{1+v^2}$$

$$\frac{xdv}{dx}=\sqrt{1+v^2}$$

متحولين يې سره بيلوو او انتيګرال يې نيسو

$$\frac{dv}{\sqrt{1+v^2}} = \frac{dx}{x} \qquad => \qquad \int \frac{1}{\sqrt{1+v^2}} dv = \int \frac{1}{x} dx$$

$$\ln\left[v + \sqrt{1+v^2}\right] = \ln x + \ln c \qquad => \qquad v + \sqrt{1+v^2} = xc$$

$$\frac{y}{x} + \sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}} = xc \qquad => \qquad y + \sqrt{x^2+y^2} = x^2 c$$

څلورم مثال: $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \tan\frac{y}{x}$ تفاضلي معادله حل کړئ

حل: ليدل کيږي چې دمعادلې ښی طرف يوه متجانسه تابع ده ، نودحل لپاره يې په لاندې ډول تعويض اجراکوو

$$\frac{y}{x} = v \qquad => \qquad y = vx \qquad \therefore \qquad \frac{dy}{dx} = v + \frac{xdv}{dx}$$

دغه قيمتونه په معادله کې وضعه کوو

$$v + \frac{xdv}{dx} = v + \tan x \qquad => \qquad \frac{xdv}{dx} = \tan v \qquad \text{يا} \qquad \frac{dv}{\tan v} = \frac{dx}{x}$$

$$\cot v \, dv = \frac{dx}{x} \qquad => \qquad \int \cot v \;\, dv = \int \frac{1}{x} dx$$

$$\ln \sin v + \ln c = \ln x \qquad \text{يا} \qquad x = c \sin v \qquad \text{يا} \qquad x = c \sin\left(\frac{y}{x}\right)$$

پنځم مثال: لاندې تفاضلي معادله حل کړئ

$$x \cos\left(\frac{y}{x}\right)(y\,dx + x\,dy) = y \sin\left(\frac{y}{x}\right)(x\,dy - y\,dx)$$

حل: تفاضلي معادله په لاندې شکل ليکو

$$\left[x \cos\left(\frac{y}{x}\right) + y \sin\left(\frac{y}{x}\right)\right] y - \left[y \sin\left(\frac{y}{x}\right) - x \cos\left(\frac{y}{x}\right)\right] x \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\left\{x \cos\left(\frac{y}{x}\right) + y\, sin\;\left(\frac{y}{x}\right)\right\} y}{\left\{y \sin\left(\frac{y}{x}\right) - x\, cos\;\left(\frac{y}{x}\right)\right\}\; x}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\left\{\cos\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{y}{x}\ sin\ \left(\frac{y}{x}\right)\right\}\frac{y}{x}}{\left\{\frac{y}{x}\sin\left(\frac{y}{x}\right)-\ cos\ \left(\frac{y}{x}\right)\right\}}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.(1)$$

اوس دمعادلې دحل لپاره په لاندې ډو تعویض اجراکوو

$$\frac{y}{x}=v \quad => \quad y=vx \quad \therefore \quad \frac{dy}{dx}=v+\frac{xdv}{dx}$$

ددغه قیمتونو په وضعه کولو سره لومړی معادله لاندې شکل غوره کوي

$$v+\frac{xdv}{dx}=\frac{v(\cos v+v\sin v)}{v\ sin\ v-\cos v}$$

$$\frac{xdv}{dx}=\frac{v(\cos v+v\sin v)}{v\ sin\ v-\cos v}-v=\frac{2v\cos v}{v\sin v-\cos v}$$

$$2\frac{dx}{x}=\frac{v\sin v-\cos v}{v\cos v}dv$$

$$2\int\frac{1}{x}dx=\int\left(\frac{\sin v}{\cos v}-\frac{1}{v}\right)dv$$

$$2\ln x=-\ln\cos v-\ln v+\ln c$$

$$\ln x^2=\ln\left(\frac{c}{v\cos v}\right)$$

$$x^2\ v\cos v=c \qquad \text{یا} \quad xy=\cos\left(\frac{y}{x}\right)=c$$

شپږم مثال: لاندې تفاضلي معادله حل کړئ

$$\left(1+e^{\frac{x}{y}}\right)dx+e^{\frac{x}{y}}\left(1-\frac{x}{y}\right)dy=0$$

حل: راکړل شوی معادله کولای شو په لاندې ډول ولیکو

$$\frac{dx}{dy}=-\frac{e^{\frac{x}{y}}\left(1-\frac{x}{y}\right)}{\left(1+e^{\frac{x}{y}}\right)}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

دمعادلې ښی طرف یوه متجانسه تابع راښايي ، نو دمعادلې دحل لپاره په لاندې ډول تعویض اجراکوو

$$x = vy \qquad \therefore \qquad \frac{dx}{dy} = v + y\frac{dv}{dy}$$

دغه قیمتونه په لومړۍ معادله کې وضعه کوو

$$v + y\frac{dv}{dy} = -\frac{e^v(1-v)}{(1+v)} \qquad y\frac{dv}{dy} = -\frac{e^v(1-v)}{(1+v)} - v = -\frac{(v+e^v)}{1+v}$$

اوس يې متحولین سره بیلوو او انتیګرال یې پیداکوو

$$\frac{1+e^v}{v+e^v}dv = -\frac{dy}{y} \qquad \therefore \qquad \int\left(\frac{1+e^v}{v+e^v}\right)dv = -\int\frac{1}{y}dy$$

$$\ln(v+e^v) = -\ln y + \ln c$$

$$\ln(v+e^v)\,y = \ln c \qquad \text{يا} \qquad y(v+e^v) = c$$

$$y\left(\frac{x}{y} + e^{\frac{x}{y}}\right) = c \qquad \text{يا} \qquad x + ye^{\frac{x}{y}} = c$$

1.7 تمرینونه

لاندې تفاضلي معادلې حل کړئ

01. $(x-y)\dfrac{dy}{dx} = x + 2y$

02. $(x^3 - 3xy^2)dx = (y^3 - 3x^2y)dy$

03. $(3xy + y^2)dx - (x^2 + xy)dy = 0$

04. $x\dfrac{dy}{dx} - y + x\sin\left(\dfrac{y}{x}\right) = 0$

05. $(x^2 - 2y^2)dx + xydy = 0$

06. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x} + \tan\left(\dfrac{y}{x}\right)$

07. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^3 + 2y^3}{2xy^2}$

08. $\dfrac{dy}{dx} = 1 + \dfrac{y}{x} + \dfrac{y^2}{x^2}$

09. $y\,dx + x\left(\ln\left(\dfrac{y}{x}\right)\right) - 2x\,dy = 0$

10. $x^2 + (x^2 - xy)\dfrac{dy}{dx} = 0$

11. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x - \sqrt{xy}}$

12. $\left(x\tan\dfrac{y}{x} - y\sec^2\dfrac{y}{x}\right)dx + x\sec^2\left(\dfrac{y}{x}\right)dy = 0$

13. $(x^2 + y^2)dx = 2xdy \qquad y(1) = 0$

14. $xe^{\frac{y}{x}} - y + xy' = 0 \qquad y(e) = 0$

جوابونه:

1. $\ln|x^2+xy+y^2| = 2\sqrt{3}\tan^{-1}\left(\frac{x+2y}{x\sqrt{3}}\right)+c$ 2. $(x^2-y^2) = c(x^2+y^2)^2$

3. $\ln\left|\frac{y}{x^3}\right|+\frac{y}{x} = c \qquad (x \neq 0\,,\ \ y \neq 0)$

4. $x\sin\frac{y}{x} = c\left(1+\cos\frac{y}{x}\right)\left(x\sin\frac{y}{x}\right) \qquad (x \neq 0)$

5. $y^2 = x^2+cx^4$ 6. $\sin\left(\frac{y}{x}\right) = cx$ 7. $2y^3 = 3x^3(\ln x + c)$

8. $y = x\tan\ln(cx)$ 9. $cy = \ln\frac{y}{x} - 1$ 10. $y = (\ln y + c)$

11. $2\cdot\sqrt{\frac{x}{y}}+\ln y = 0$ 12. $x\tan\frac{y}{x} = c$ 13. $x^2-y^2 = x$

14. $y = -x\ln\ln|x| \qquad (x \neq 0)$

1.8 هغه معادلې چې په متجانسو معادلو باندې بدلیږی

داډول معادلې عموما د $\frac{dy}{dx} = \frac{ax+by+c}{Ax+By+C}$ په شکل دي، چې a, b ,c ,A ,B, C ثابت عددونه دي، دداډول معادلو دحل لپاره لاندې دوه حالتونه موجود دي.

اول حالت: که چیرته $\frac{a}{A} = \frac{b}{B} = k$ (فرضیه) نو په دې صورت کې معادله لاندې شکل اختیاروي

$$\frac{dy}{dx} = \frac{k(Ax+By)+c}{Ax+By+C}$$

په داډول معادلو کې کولاي شو چې د $Ax+By = t$ تعویض ځخه وروسته متحولین په اسانی سره بیل کړو.

دوهم حال: که چیرته $\frac{a}{A} \neq \frac{b}{B}$ سره وي، نو په دې صورت کې راکړل شوی تفاضلي معادله د $x = X+h$ او $y = Y+k$ په وضعه کولو سره معادله په متجانسه تفاضلي معادله باندې بدلیږي، چې h او k ثابت عددونه دي ، او دمعادلاتو دحل ځخه لاسته راځي.

$$x = X+h \quad \Rightarrow \quad dx = dX\,, \qquad y = Y+k \quad \Rightarrow \quad dy = dY$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dY}{dX}$$

اوس نو معادله لاندې شکل اختیاروي

$$\frac{dY}{dX} = \frac{(aX + bY) + (ah + bl + c)}{(AX + BY) + (Ah + Bk + C)}$$

که چیرته h او k داسي انتخاب کړو چې $Ah + Bk + C = 0$, $ah + bk + c = 0$ سره شي، نو په دی صورت کي پورته معادله لاندې شکل اختیاروي

$$\frac{dY}{dX} = \frac{aX + bY}{AX + BY}$$

پورته معادله یوه متجانسه تفاضلي معادله ده ، او دلاندې تعویض په اساس یی حل کوو

$$Y = VX\ ,\ \ V = V(X) \qquad\qquad X = VY\ ,\ \ V = V(Y)$$

عملي مثالونه: $\frac{dy}{dx} = \frac{x+2y+1}{2x+4y+3}$ تفاضلي معادله حل کړئ

حل: راکړل شوې معادله یوه متجانسه معادله نه ده ،خو نوموړی معادله په پورته حالتونو کې لومړې حالت رابنايي ، نوراکړل شوی معادله په لاندې شکل لیکو

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + 2y + 1}{2(x + 2y) + 3} \ \ldots\ldots\ldots(1) \qquad x + 2y = t \qquad => \qquad 1 + 2\frac{dy}{dx} = \frac{dt}{dx}$$

ددغه قیمتونو په وضعه کولو سره لومړۍ معادله لاندې شکل اختیاروي

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dt}{dx} - 1\right) = \frac{t + 1}{2t + 3}\ ,\ \ \frac{dt}{dx} - 1 = \frac{2t + 2}{2t + 3}$$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{2t + 2}{2t + 3} + 1 = \frac{2t + 2 + 2t + 3}{2t + 3}$$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{4t + 5}{2t + 3} \qquad => \qquad \left(\frac{2t + 3}{4t + 5}\right)dt = dx$$

$$\int\left(\frac{\frac{1}{2}(4t + 5) + \frac{1}{2}}{4t + 5}\right)dt = \int dx \qquad \frac{1}{2}\int\left(1 + \frac{1}{4t + 5}\right)dt = x + c$$

$$\frac{1}{2}\left[t + \frac{1}{4}\ln(4t + 5)\right] = x + c$$

$$4t + \ln(4t + 5) = 8x + 8c$$

$$4(x + 2y) + \ln(4x + 8y + 5) = 8x + c_1$$

$$4(2y - x) + \ln(4x + 8y + 5) = c_1$$

کوم چې دراکړل شوی معادلې عمومي حل دی

دوهم مثال: $(x + 2y)(dx - dy) = dx + dy$ تفاضلي معادله حل کړئ

حل: راکړل شوي معادله په لاندې ډول لیکو

$$(x + 2y - 1)dx = (x + 2y + 1) \quad \text{يا} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x + 2y - 1}{x + 2y + 1} \ldots\ldots\ldots\ldots.(1)$$

$$x + 2y = t \quad => \quad 1 + 2\frac{dy}{dx} = \frac{dt}{dx} \quad \text{يا} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left[\frac{dt}{dx} - 1\right]$$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{dt}{dx} - 1\right] = \frac{t - 1}{t + 1} \quad \text{يا} \quad \frac{dt}{dx} - 1 = \frac{2t - 2}{t + 1}$$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{2t - 2}{t + 1} + 1 = \frac{2t - 2 + t + 1}{t + 1} = \frac{3t - 1}{t + 1}$$

اوس يي متحولين سره بیلوو

$$\left(\frac{t + 1}{3t - 1}\right)dt = dx \quad \text{يا} \quad \frac{1}{3}\left[1 + \frac{4}{3t - 1}\right]dt = dx$$

اوس يي انتیګرال پیداکوو

$$\frac{1}{3}\int\left(1 + \frac{4}{3t - 1}\right)dt = \int dx$$

$$\frac{1}{3}\left[t + 4 \cdot \frac{1}{3}\ln(3t - 1)\right] = x + c$$

$$\frac{1}{3}\left[x + 2y + \frac{4}{3}\ln(3x + 6y - 1)\right] = x + c$$

کوم چې دراکړل شوي معادلې عمومي حل دی

دریم مثال: $\frac{dy}{dx}=\frac{x+2y-3}{2x+y-3}$ تفاضلي معادله حل کړئ

حل: راکړل شوي معادله $\frac{a}{A}\neq\frac{b}{B}$ په شکل ده ، نو دراکړل شوی معادلې دحل لپاره په لاندې ډول تعويض اجراکوو

$$x=X+h\,,\quad y=Y+k\qquad =>\qquad \frac{dy}{dx}=\frac{dY}{dX}$$

ددغه قيمتونو په وضعه کولو سره راکړل شوی معادله لاندې شکل غوره کوي

$$\frac{dY}{dX}=\frac{X+2Y+(h+2k-3)}{2X+Y+(2h+k-3)}$$

د $2h+k-3=0$ او $h+2k-3=0$ معادلو دحل څخه $k=1$ او $h=1$ لاسته راځي

$$\therefore\quad x=X+1\,,\quad y=Y+1\qquad =>\qquad X=x-1\,,\quad Y=y-1$$

اوس نوموړې معادله لاندې شکل اختياروي، کومه چې يوه متجانسه معادله ده

$$\frac{dY}{dX}=\frac{X+2Y}{2X+Y}\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$Y=VX\qquad \text{نو}\qquad \frac{dY}{dX}=V+X\frac{dV}{dX}$$

دپورته قيمتونوپه وضعه کولوسره لومړی معادله لاندې شکل اختياروي

$$V+X\frac{dV}{dX}=\frac{X+2VX}{2X+VX}\qquad =>\qquad V+X\frac{dV}{dX}=\frac{1+2V}{2+V}$$

$$X\frac{dV}{dX}=\frac{1+2V}{2+V}-V=\frac{1+2V-2V-V^2}{2+V}=\frac{1-V^2}{2+V}$$

اوس يې متحولين سره بيلوو او دقسمي کسرونو دتجزيي په مرسته يې انتيګرال پيداکوو

$$\left(\frac{2+V}{1-V^2}\right)dV=\frac{dX}{X}\qquad =>\qquad \left[\frac{3}{2}\left(\frac{1}{1-V}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+V}\right)\right]dV=\frac{dX}{X}$$

$$\frac{3}{2}\int\left(\frac{1}{1-V}\right)dV+\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{1+V}\right)dV=\int\frac{1}{X}dX$$

$$-\frac{3}{2}\ln(1-V)+\frac{1}{2}\ln(1+V)=\ln X+\ln c$$

$$-3\ln(1-V)+\ln(1+V)=2(\ln X+\ln c)$$

$$\ln\frac{1+V}{(1-V)^3}=2\ln X\,c$$

$$X^2c^2=\frac{1+V}{(1-V)^2}\qquad c^2(X-Y)^3=X+Y\qquad\left(\therefore V=\frac{Y}{X}\right)$$

$$(x-y)^3c^2=x+y-2$$

څلورم مثال: $\frac{dy}{dx}=\frac{3y-7x+7}{3x-7y-3}$ تفاضلي معادله حل کړئ

حل: راکړل شوې معادله دوهم حالته ته ورته ده ، او دحل لپاره یې په لاندې ډول تعویض اجراکوو

$$x=X+h\,,\qquad y=Y+k\qquad=>\qquad\frac{dy}{dx}=\frac{dY}{dX}$$

دپورته قیمتونو په وضعه کولو سره راکړل شوې معادله لاندې شکل اختیاروي

$$\frac{dY}{dX}=\frac{3Y-7X+(3k-7h+7)}{3X-7Y+(3h-7k-3)}$$

د $3k-7h+7=0$ او $3h-7k-3=0$ معادلو دحل څخه h=1 او k=0 څخه لاسته راځي، په نتیجه کې معادله لاندې شکل اختیاروي، کومه چې یوه متجانسه تفاضلي معادله ده

$$\frac{dY}{dX}=\frac{3Y-7X}{3X-7Y}$$

$$Y=VX\qquad=>\qquad\frac{dY}{dX}=V+X\frac{dV}{dX}$$

$$V+X\frac{dV}{dX}=\frac{3VX-7X}{3X-7VX}=\frac{3V-7}{3-7V}$$

$$X\frac{dV}{dX}=\frac{3V-7}{3-7V}-V=\frac{3V-7-3V+7V^2}{3-7V}$$

$$X\frac{dV}{dX}=\frac{7(V^2-1)}{3-7V}$$

اوس یې متحولین سره بیلوو او دقسمي کسرونو دتجزیې په مرسته یې انتیګرال پیداکوو

$$7\frac{dX}{X}=\frac{3-7V}{(V-1)(V+1)}dV$$

$$7\int\frac{1}{X}dX=-\int\left(\frac{2}{V-1}+\frac{5}{V+1}\right)dV$$

$$7\ln X=-[2\ln(V-1)+5\ln(V+1)]+\ln c$$

$$X^7(V-1)^2(V+1)^5=c \qquad \text{یا} \qquad X^7\left(\frac{Y}{X}-1\right)^2\left(\frac{Y}{X}+1\right)^5=c$$

$$(Y-X)^2(Y+X)^5=c \qquad \text{یا} \qquad (y-x+1)^2(y+x-1)^2=c$$

1.9 تمرینونه:

لاندې تفاضلي معادلې حل کړئ

1. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x-y+3}{2x-2y+5}$
2. $(6x-4y+3)dx=(3x-2y+1)dy$
3. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y-x+1}{y-x-5}$
4. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{3x-4y-2}{3x-4y-3}$
5. $(2x-4y+3)dy+(x-2y+1)dx=0$
6. $(x-2y+5)dx-(2x+y-1)dy=0$
7. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y-x+1}{y+x+5}$
8. $(2x+3y-5)\dfrac{dy}{dx}+(3x+2y-5)=0$
9. $(2x+y+6)dx=(y-x-3)dy$
10. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x-y+1}{x+2y-3}$
11. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x+2y-3}{2x+y-3}$
12. $(2y-x-1)dy-(2x-y+1)dx=0$

جوابونه:

1. $(2y-x)=\ln(x-y+2)+c$
2. $(2y-x)=\dfrac{1}{4}\ln(12x-8y+1)+c$
3. $\dfrac{(y-x)^2}{2}-5(y-x)=6x+c$
4. $x-y=\ln(3x-4y+1)+c$
5. $\ln\{4(x-2y)+5\}=4(x+2y)+c$
6. $x^2-y^2-4xy+10x+2y=c$

$$7.\quad \ln\{(x+2)^2+(y+3)^2\}^{\frac{1}{2}}+\tan^{-1}\left\{\frac{y+3}{x+2}\right\}=c$$

$$8.\quad 3x^2+4xy+3y^2-10x-10y+10=c \qquad 9.\quad y^2-2xy-2x^2-6y-12x-18=c$$

$$10.\quad \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left(\frac{X+\sqrt{2}Y}{X-\sqrt{2}Y}\right)-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{2Y^2-X^2}{X^2}\right)=X+c \qquad X=x-\frac{1}{3}\ ,\ \ Y=y-\frac{4}{3}$$

$$11.\quad (y-x)^3=c(x+y-2) \qquad 12.\quad (3x-3y+2)(x+y)^3=c$$

خطي تفاضلي معادلې (Linear Differential Equations)

هغه تفاضلي معادلې چې $\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.(1)$ شکل ولري ، خطي تفاضلي معادلې ورته وايي ، چې P او Q د x تابع دي، يا هم ثابت عددونه دي ، y او د y مشتق y' بايد يو مثبت تام عدد وي ، چې ديو ځخه به لوي هم نه وی، او نه به yy' دحاصل ضرب په شکل وي.

دلومړۍ معادلې دحل لپاره ، دمعادلې دواړه خواوې په $e^{\int Pdx}$ فکتور کې ضربوو ، کوم چې لاندې شکل اختياروي

$$\left[\frac{dy}{dx}+P(x)y\right]e^{\int Pdx}=Q(x)e^{\int Pdx} \quad \text{يا} \quad \frac{d}{dx}\left[y\,e^{\int Pdx}\right]=Q(x)e^{\int Pdx}$$

اوس يې نظر x ته انتيګرال نيسو

$$ye^{\int Pdx}=\int Q(x)e^{\int Pdx}\,dx+c$$

کوم چې غوښتل شوې حل دی

يادابښت: $e^{\int Pdx}$ فکتورته دانتيګرال فکتور ته دلومړۍ معادلې دانتيګرال فکتور وايي، همدارنګه ځيني وخت خطي تفاضلي معادله لاندې شکل اختياروي

$$\frac{dx}{dy}+P(y)x=Q(y)$$

چې په دې صورت کې دراکړل شوې معادلې دانتيګرال فکتور عبارت د $e^{\int Pdy}$ ځخه دی ، او دمعادلې حل په لاندې ډول دی

$$xe^{\int Pdy} = \int Q(y)e^{\int Pdy}\,dy + c$$

عملي مثالونه:

لومړی مثال: $\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x}y = x^3$ تفاضلي معادله حل کړئ

حل: راکړل شوې معادله $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$ په شکل ده ، چې $Q = x^3$ او $P = \frac{2}{x}$ څخه دي، دانتیګرال فکټور یې په لاندې ډول پیداکوو

$$IF = e^{\int Pdx} = e^{\int \frac{2}{x}dx} = e^{2\ln x} = e^{\ln x^2} = x^2$$

اوس دمعادلې عمومي حل دلاندې فورمول په اساس لاسته راوړو

$$y \times IF = \int Q.IFdx + c$$

قیمتونه په فورمول کې وضعه کوو

$$y\,x^2 = \int x^3.x^2dx + c \quad \text{یا} \quad yx^2 = \int x^5dx + c$$

$$yx^2 = \frac{x^6}{6} + c \quad \text{یا} \quad y = \frac{x^4}{6} + \frac{c}{x^2}$$

دوهم مثال: $\frac{dy}{dx} + y\sec x = \tan\ x$ تفاضلي معادله حل کړې

حل: $Q = \tan x$, $P = \sec x$ سره دي ، نو لومړی یې دانتیګرال فکټور په لاندې ډول پیداکوو

$$IF = e^{\int Pdx} = e^{\int \sec x dx} = e^{\ln(\sec x + \tan x)} = (\sec x + \tan x)$$

پس دمعادلې عمومي حل په لاندې ډول دی

$$y(\sec x + \tan x) = \int \tan x\,(\sec x + \tan x)dx + c$$

$$y(\sec x + \tan x) = \int \sec x \tan x\,dx + \int (\sec^2 x - 1)dx + c$$

$$y(\sec x + \tan x) = \sec x + \tan x - x + c \qquad \therefore\ y = 1 + \frac{c - x}{\sec x + \tan x}$$

دریم مثال: $\frac{dy}{dx}+\frac{2}{x}y=x\ln x$ تفاضلي معادله حل کړئ

حل:

$$p=\frac{2}{x} \quad \text{او} \quad Q=x\ln x$$

دمعادلې دحل لپاره لومړی باید دانتیګرال فکټور پیداکړو

$$IF=e^{\int Pdx}=e^{\int\frac{2}{x}dx}=e^{2\ln x}=e^{\ln x^2}=x^2$$

اوس دراکړل شوې معادلې دحل لپاره په لاندې ډول عمل اجراکوو

$$y.x^2=\int x\ln x\,.x^2dx+c$$

پورته انتیګرال دانقسام په طریقه پیداکوو

$$yx^2=\ln x\,.\frac{x^4}{4}-\frac{x^4}{16}+c \quad \text{یا} \quad y=\frac{x^2}{4}\ln x-\frac{x^2}{16}+\frac{c}{x^2}$$

څلورم مثال: $(1+x^2)\frac{dy}{dx}+y=e^{\tan^{-1}x}$ تفاضلي معادله حل کړئ

حل: راکړل شوې معادله لومړی په لاندې شکل لیکو

$$\frac{dy}{dx}+\frac{1}{(1+x^2)}y=\frac{e^{\tan^{-1}x}}{1+x^2} \quad , \quad P=\frac{1}{1+x^2} \quad \text{او} \quad Q=\frac{e^{\tan^{-1}x}}{1+x^2}$$

دراکړل شوې معادلې دحل لپاره لومړی دانتیګرال فکټور پیداکوو

$$IF=e^{\int Pdx}=e^{\int\frac{1}{1+x^2}dx}=e^{\tan^{-1}x}$$

اوس معادله په لاندې ډول پیداکوو

$$ye^{\tan^{-1}x}=\int\frac{e^{\tan^{-1}x}}{1+x^2}\,.e^{\tan^{-1}x}dx+c=\int\frac{e^{2\tan^{-1}x}}{1+x^2}dx+c$$

$$ye^{\tan^{-1}x}=I+c$$

په معادله کې موجود انتیګرال لومړی په تعویضي طریقه پیداکوو ، او بیا یې په معادله کې د I په ځای وضعه کوو

$$I = \int \frac{e^{2\tan^{-1}x}}{1+x^2} dx \quad , \qquad \tan^{-1}x = t \quad => \quad \frac{1}{1+x^2} dx = dt$$

$$I = \int e^{2t} dt = \frac{e^{2t}}{2} = \frac{e^{2\tan^{-1}x}}{2}$$

نو دراکړل شوې معادلې حل په لاندې ډول دی

$$y e^{\tan^{-1}x} = \frac{e^{2\tan^{-1}x}}{2} + c \qquad y = \frac{e^{\tan^{-1}x}}{2} + c\, e^{-\tan^{-1}x}$$

پنځم مثال: $\sin^2 x \frac{dy}{dx} - y = \cot x$ تفاضلي معادله حل کړئ

حل: راکړل شوې معادله په لاندې شکل ليکو

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{\sin^2 x} = \frac{\cot x}{\sin^2 x} \qquad \text{يا} \qquad \frac{dy}{dx} - y\, cosec^2 x = \cot x\ cosec^2 x$$

$$P = -cosec^2 x \qquad Q = \cot x\ cosec^2 x$$

اوس يې دانتيګرال فکتور په لاندې ډول پيداکوو

$$IF = e^{\int P dx} = e^{-\int cosec^2 x\, dx} = e^{\cot x}$$

پس دمعادلې عمومي حل په لاندې ډول پيداکوو

$$y e^{\cot x} = \int (\cot x\ cosec^2 x)\, e^{\cot x} dx + c$$

$$y e^{\cot x} = I + c$$

د I قيمت لومړی په لاندې ډول لومړی دتعويضي طريقې او وروسته دانقسام طريقې څخه په ګټه اخيستنې سره پيداکوو

$$I = \int (\cot x\ cosec^2 x) e^{\cot x} dx \qquad \cot x = t$$

$$-cosec^2 x\, dx = dt$$

$$I = -\int t\, e^t dt = -\left[t\, e^t - \int e^t .1\, dt\right]$$

$$I = -[t\, e^t - e^t] = e^t - t\, e^t = e^t(1-t)$$

په نتیجه کې لیکلای شو چې

$$y\,e^{\cot x} = e^{\cot x}(1-\cot x) + c \qquad \text{یا} \qquad y = (1-\cot x) + ce^{-\cot x}$$

شپږم مثال: $(x+\tan y)\,dy = \sin 2y\,dx$ تفاضلي معادله حل کړئ

حل: راکړل شوې معادله کولای شو په لاندې ډول ولیکو

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+\tan y}{\sin 2y} \qquad \text{یا} \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sin 2y}x = \frac{\tan y}{\sin 2y}$$

کومه چې د $\frac{dx}{dy} + P(y)\,x = Q(y)$ شکل لري، ددې څخه لیکلای شو چې:

$$P = -\frac{1}{\sin 2y} \qquad \text{او} \qquad Q = \frac{\tan y}{\sin 2y}$$

لومړی دانتیګرال فکتور په لاندې ډول پیداکوو

$$IF = e^{\int P dy} = e^{-\int \frac{1}{\sin 2y}dy} = e^{-\frac{1}{2}\int \frac{\sec^2 y}{\tan y}dy} = e^{-\frac{1}{2}\ln \tan y} = e^{\ln \frac{1}{\sqrt{\tan y}}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\tan y}} = \sqrt{\cot y}$$

اوس دراکړل شوې معادلې عمومي دفورمول په نظر کې نیولوسره په لاندې ډول حل کوو

$$x\sqrt{\cot y} = \int \frac{\tan y}{\sin 2y}\sqrt{\cot y}\ dy + c = \int \frac{\sec^2 y}{2\sqrt{\tan y}}dy + c$$

$$x\sqrt{\cot y} = \sqrt{\tan y} + c \qquad\qquad x = \tan y + c\sqrt{\tan y}$$

اووم مثال: $(1+y^2)\,dx = (\tan^{-1} y - x)dy$ تفاضلي معادله حل کړئ

حل: لومړی راکړل شوې معادله په لاندې ډول لیکو

$$\frac{dx}{dy} + \frac{1}{1+y^2}x = \frac{\tan^{-1} y}{1+y^2} \qquad \text{نو} \qquad P = \frac{1}{1+y^2} \qquad \text{او} \qquad Q = \frac{\tan^{-1} y}{1+y^2}$$

اوس دراکړل شوې معادلې دحل لپاره دانتیګرال فکتور په لاندې ډول پیداکوو

$$IF = e^{\int \frac{1}{1+y^2}dy} = e^{\tan^{-1} y}$$

پس دراکړل شوې معادلې عمومي حل په لاندې ډول پیداکوو

$$xe^{\tan^{-1}y} = \int \frac{\tan^{-1}y}{1+y^2}\, e^{\tan^{-1}y} dy + c$$

$$xe^{\tan^{-1}y} = \int t\, e^t dt + c \qquad t = \tan^{-1}y$$

$$xe^{\tan^{-1}y} = (t-1)e^t + c$$

$$xe^{\tan^{-1}y} = (\tan^{-1}y - 1)e^{\tan^{-1}y} + c$$

$$\therefore \qquad x = (\tan^{-1}y - 1) + ce^{\tan^{-1}y}$$

اتم مثال: $y\ln y\, dx + (x - \ln y)dy = 0$ تفاضلي معادله حل کړئ

حل: راکړل شوې معادله په لاندې ډول لیکو

$$\frac{dx}{dy} + \frac{1}{y\ln y}x = \frac{1}{y} \qquad P = \frac{1}{y\ln y}\ , \qquad Q = \frac{1}{y}$$

اوس دراکړل شوې معادلې دحل لپاره دانتیګرال فکتور په لاندې ډول پیداکوو

$$IF = e^{\int \frac{1}{y\ln y}dy} = e^{\ln\ln y} = \ln y$$

اوس راکړل شوې معادله په لاندې ډول حل کوو

$$x\ln y = \int \frac{1}{y}\,.\ln y\, dy + c = \int t\, dt + c\ , \qquad \ln y = t \quad => \quad \frac{1}{y}dy = dt$$

$$= \frac{t^2}{2} + c$$

$$x\ln y = \frac{(\ln y)^2}{2} + c \qquad \therefore x = \frac{\ln y}{2} + \frac{c}{\ln y}$$

نهم مثال: $\frac{dy}{dx} = x\sin 2y = x^3\cos^2 y$ تفاضلي معادله حل کړئ

حل: راکړل شوې معادله یوه معیاري خطي تفاضلي معادله نه ده ، ددې لپاره چې معادله په معیاري شکل ولیکو، نومعادله په $\cos^2 y$ باندې ویشو

$$\sec^2 y \frac{dy}{dx} + 2x \tan y = x^3 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.(1)$$

په لومړۍ معادل کې په لاندې ډول تعویض اجراکوو

$$\tan y = t \qquad => \qquad \sec^2 y \frac{dy}{dx} = \frac{dt}{dx}$$

اوس لومړۍ معادله لاندې شکل اختیاروي

$\frac{dt}{dx} + 2x\, t = x^3$ نو $P = 2x$ او $Q = x^3$

اوس يې دانتيګرال فکتور په لاندې ډول پيداکوو

$$IF = e^{\int Pdx} = e^{\int 2x\,dx} = e^{x^2}$$

دپورته قيمتونو په لرلوسره دمعادلې عمومي حل په لاندې ډول پيداکوو

$$te^{x^2} = \int x^3 e^{x^2} dx + c$$

$$= \int x.x^2 e^{x^2} dx + c \qquad x^2 = u\,;\ 2xdx = du;\ xdx = \frac{du}{2}$$

$$= \int ue^u du + c$$

$$= ue^u - \int e^u du + c$$

$$= ue^u - e^u + c$$

$$te^{x^2} = (u-1)e^u + c \qquad => \qquad te^{x^2} = (x^2-1)e^{x^2} + c$$

$$\therefore t = (x^2-1) + ce^{-x^2} \qquad t = \tan y$$

$$\tan y = (x^2-1) + ce^{-x^2}$$

يادابښت: پورته مثال $f'(y)\frac{dy}{dx} + f(y)P(x) = Q(x)$ شکل لري، ددادول معادلو دحل لپاره $f(y) = t$ وضعه کوو

لسم مثال: $x\frac{dy}{dx}-y=x^3\cos x \quad , \quad y(\pi)=0$ تفاضلي معادله حل کړئ

حل: لومړی راکړل شوې معادله په لاندې ډول لیکو

$$\frac{dy}{dx}-\frac{1}{x}y=x^2\cos x\,, \qquad P=-\frac{1}{x} \quad \text{او} \quad Q=x^2\cos x$$

اوس دراکړل شوې معادلې دحل لپاره دانتیګرال فکټور په لاندې ډول پیداکوو

$$IF=e^{-\int\frac{1}{x}dx}=e^{-\ln x}=e^{\ln\frac{1}{x}}=\frac{1}{x}$$

اوس دمعادلې عمومي حل په لاندې ډول پیداکوو

$$y\frac{1}{x}=\int x^2\cos x \,\cdot\frac{1}{x}dx+c$$

$$\frac{y}{x}=\int x\,.\cos x\,dx+c$$

$$\frac{y}{x}=x\sin x-\int\sin x\cdot 1\,dx+c$$

$$\frac{y}{x}=x\sin x+\cos x+c$$

$$y=x^2\sin x+x\cos x+cx \qquad\qquad x=\pi\,, \qquad y=0$$

$$0=\pi^2\sin\pi+\pi\cos\pi+c\pi$$

$$0=-\pi+c\pi, \qquad c\pi=\pi \quad => \quad c=1$$

پس دمعادلې خصوصي حال په لاندې ډول دی

$$y=x^2\sin x+x\cos x+x$$

تمرینونه:

لاندې تفاضلي معادلي حل کړئ

1. $x(x^2+1)\dfrac{dy}{dx} = y(1-x^2) + x^2 \ln x$ 2. $\dfrac{dy}{dx} + y\cot x = \sin x$

3. $x\cos x\dfrac{dy}{dx} + y(x\sin x + \cos x) = 1$ 4. $(1-x^2)\dfrac{dy}{dx} + 2xy = x\sqrt{1-x^2}$

5. $\dfrac{dy}{dx} + y = \sin x$ 6. $(x+1)\dfrac{dy}{dx} - y = e^x(1+x)^2$

7. $\dfrac{dy}{dx} + y\tan x = \sin 2x$ 8. $\dfrac{dy}{dx} + 3y = e^{-x}\cos x$

9. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x + y\cos x}{1+\sin x}$ 10. $\dfrac{dy}{dx} + y\cot x = 4x\, cosec\, x$

11. $\dfrac{dy}{dx} - 2y\tan x = \sec^4 x$ 12. $(x+y+1)\dfrac{dy}{dx} = 1$

13. $\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{\tan y}{1+x} = (1+x)\, e^x \sec y$ 14. $(x+2y^2)\dfrac{dy}{dx} = y$

15. $y^2 + \left(x - \dfrac{1}{y}\right)\dfrac{dy}{dx} = 0$ $\left(Hint\ reduce\ in\ form\ \ \dfrac{dx}{dy} + P_1 x = Q_1\right)$

16. $(x+1)\dfrac{dy}{dx} + (1+x)y = 2\sin x$ $y(0) = 2$

17. $x\dfrac{dy}{dx} + y = x\cos x + \sin x$ $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$

18. $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{2x}{x^2+1}y = \dfrac{1}{(x^2+1)^2}$ $y(0) = 0$

1. $\dfrac{[y(x^2+1)]}{x} = \dfrac{1}{2}x^2\ln x - \dfrac{1}{4}x^2 + c$ 2. $y\sin x = \dfrac{1}{2}\, x - \dfrac{1}{4}\sin 2x + c$

3. $y\, x\sec x = \tan x + c$ 4. $\dfrac{y}{(1-x^2)} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} + c$

5. $y = \dfrac{1}{2}\,(\sin x - \cos x) + ce^{-x}$ 6. $y = (x+1)(e^x + c)$

7. $y\sec x = c - 2\cos x$ 8. $y = ce^{-3x} + e^{-x}\left(\dfrac{\sin x + 2\cos x}{5}\right)$

9. $y(1+\sin x)+\dfrac{x^2}{2}=c$ 10. $y=(2x^2+c)cosec\,x$

11. $y\cos^2 x=c+\tan x$ 12. $x=ce^y-(y+2)$

13. $\sin y=(1+x)(c+e^x)$ 14. $\dfrac{x}{y}=y^2+c$

15. $x=ce^{\frac{1}{y}}+\dfrac{1}{y}+1$ 16. $y=\dfrac{\sin x-\cos x}{1+x}+\dfrac{3e^{-x}}{1+x}$

17. $y=\sin x$ 18. $y=\dfrac{\tan^{-1}x}{x^2+1}$

1.13 برنولي معادله (Bernoulli’s Equation)

ځيني لومړی ترتيب تفاضلي معادلې دې چې خطي شکل نه لري ، خو دمتحولينو په مناسب تعويض سره کولای شو چې نوموړې معادلې په خطي تفاضلي معادلو باندې تبديلي کړو، يو شکل ددوی څخه دبرنولي معادله هم ده ، کوم چې دسويس رياضي پوه jacob Bernoulli (1654-1705) په واسطه منځ ته راغلي دي، دبرنولي دمعادلې عمومي شکل په لاندې ډول دی

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)y^n\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)\,,\qquad (n\neq 0\,,\quad n\neq 1)$$

چې P او Q د x تابع دي او يا هم امکان لري چې ثابت عددونه وي، لومړی معادله کولاي شو چې دخطي معادلې په شکل وليکو ، ددې کار لپاره لومړی معادله y^n باندې ويشو، نو لاندې معادله لاسته راکوي

$$y^{-n}\frac{dy}{dx}+P\,y^{1-n}=Q\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

اوس په لاندې ډول تعويض اجراکوو

$$y^{1-n}=v\quad =>\quad (1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}=\frac{dv}{dx}$$

دپورته قيمتونو په وضعه کولو سره دوهمه معادله لاندې شکل اختياروي

$$\frac{1}{1-n}\frac{dv}{dx}+P\,v=Q\qquad \text{يا}\qquad \frac{dv}{dx}+P(1-n)v=Q(1-n)\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

دریمه معادله یوه خطي تفاضلي معادله ده ، چې کولای شو نوموړې معادله دانتیګرال دفکتور په پیداکولو سره حل کړو.

عملي مثالونه:

لومړی مثال: $\frac{dy}{dx}-\frac{y}{x}=y^2$ تفاضلي معادله حل کړئ

حل: راکړل شوې معادله برنولي معادله ده ، لومړی راکړل شوې معادله په y^2 باندې ویشو

$$\frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx}-\frac{y^{-1}}{x}=1 \quad \text{یا} \quad y^{-2}\frac{dy}{dx}-\frac{1}{x}y^{-1}=1$$

اوس دپورته معادلې دحل لپاره په لاندې ډول تعویض اجراکوو

$$y^{-1}=v \qquad => \qquad -y^{-2}\frac{dy}{dx}=\frac{dv}{dx}$$

دپورته قیمتونو په وضعه کولو سره معادله په لاندې خطي تفاضلي معادلې باندې بدلیږي

$$-\frac{dv}{dx}-\frac{1}{x}v=1 \quad \text{یا} \quad \frac{dv}{dx}+\frac{1}{x}v=-1$$

اوس یې دانتیګرال فکتورپه لاندې ډول پیداکوو

$$P=\frac{1}{x}\,, \quad Q=-1 \quad \text{نو} \quad IF=e^{\int P dx}=e^{\int\frac{1}{x}dx}=e^{\ln x}=x$$

پس دراکړل شوې معادلې عمومي حل په لاندې ډول دې

$$v\,x=\int -1\,x\,dx+c \quad \text{یا} \quad v\,x=-\frac{x^2}{2}+c \quad \text{یا} \quad y^{-1}x=-\frac{x^2}{2}+c$$

دوهم مثال: $x\frac{dy}{dx}+y=y^2\ln x$ تفاضلي معادله حل کړئ

حل: لومړی راکړل شوې معادله په لاندې ډول لیکو

$$y^{-2}\frac{dy}{dx}+\frac{1}{x}y^{-1}=\frac{1}{x}\ln x \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

اوس دمعادلې دحل لپاره په لاندې ډول تعویض اجراکوو

$$y^{-1}=v \qquad => \qquad -y^{-2}\frac{dy}{dx}=\frac{dv}{dx}$$

دپورته قیمتونوپه وضعه کولوسره معادله په لاندې خطي تفاضلي معادله باندې بدلیږي

$$-\frac{dv}{dx}+\frac{1}{x}v=\frac{1}{x}\ln x \quad \text{یا} \quad \frac{dv}{dx}-\frac{1}{x}v=-\frac{1}{x}\ln x$$

اوس يې دانتیګرال فکتور پیداکوو

$$P=-\frac{1}{x} \quad , \qquad Q=-\frac{1}{x}\ln x \qquad\qquad IF=e^{-\int\frac{1}{x}dx}=e^{-\ln x}=e^{\ln\frac{1}{x}}=x$$

پس دمعادلې عمومي حل په لاندې ډول دی

$$v\cdot\frac{1}{x}=\int-\frac{1}{x}\ln x\cdot\frac{1}{x}dx+c \quad \text{یا} \quad v\,x^{-1}=-\int x^{-2}\ln x+c$$

$$vx^{-1}=-\left[\ln x\frac{x^{-1}}{-1}+\int\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}dx\right]+c=-\left[-\frac{\ln x}{x}+\frac{x^{-1}}{-1}\right]+c$$

$$yx^{-1}=\ln x\cdot x^{-1}+x^{-1}+c \qquad\qquad y^{-1}=\ln x+1+cx$$

دریم مثال: $\frac{dy}{dx}-2y\tan x=y^2\tan^2 x$ تفاضلي معادله حل کړئ

حل: معادله په y^2 باندې ویشو

$$y^{-2}\frac{dy}{dx}-2y^{-1}\tan x=\tan^2 x$$

اوس دمعادلې دحل لپاره په لاندې ډول تعویض اجراکوو

$$y^{-1}=v \quad => \quad -y^{-2}\frac{dy}{dx}=\frac{dv}{dx} \qquad\qquad \therefore\ -\frac{dv}{dx}-2v\tan x=\tan^2 x$$

$$\frac{dv}{dx}+2v\tan x=-\tan^2 x \quad , \qquad P=2\tan x \qquad Q=-\tan^2 x$$

دانتیګرال فکتور په لاندې ډول پیداکوو

$$IF=e^{\int Pdx}=e^{\int 2\tan x dx}=e^{2\ln\sec x}=e^{\ln\sec^2 x}=\sec^2 x$$

$$\therefore\ \ v\cdot\sec^2 x=-\int\tan^2 x\sec^2 x\,dx+c$$

$$v\cdot\sec^2 x=-\frac{\tan^3 x}{3}+c \quad \text{یا} \quad \frac{1}{y}\sec^2 x=-\frac{\tan^3 x}{3}+c$$

څلورم مثال: $y(2x\,y+e^{x})dx-xe^{x}dy=0$ تفاضلي معادله حل کړئ

حل: لومړی راکړل شوې معادله برنولي معادلې په شکل ليکو

$$\frac{dy}{dx}-\frac{y}{x}=\frac{2}{e^{x}}y^{2}$$

پورته معادله برنولي معادله ده ، ددې لپاره چې دخطي معادلې په شکل يې وليکو ، نو راکړل شوې معادله به y^2 باندې ويشو

$$y^{-2}\frac{dy}{dx}-\frac{y^{-1}}{x}=\frac{2}{e^{x}}\qquad \text{پس}\quad y^{-1}=v\qquad =>\qquad -y^{-2}\frac{dy}{dx}=\frac{dv}{dx}$$

$$-\frac{dv}{dx}-\frac{v}{x}=\frac{2}{e^{x}}\qquad \text{یا}\qquad \frac{dv}{dx}+\frac{1}{x}v=-\frac{2}{e^{x}}\ ,\qquad P=\frac{1}{x}\qquad Q=-\frac{2}{e^{x}}$$

$$IF=e^{\int P dx}=e^{\int\frac{1}{x}dx}=e^{\ln x}=x$$

پس دمعادلې عمومي حل عبارت دې له

$$v\,x=-\int 2\,e^{-x}\,x\,dx+c=-2\left[-xe^{-x}+\int e^{-x}dx\right]+c$$

$$=-2[-xe^{-x}-e^{-x}]+c\qquad \text{یا}\qquad \frac{1}{y}x=2e^{-x}(x+1)+c$$

پنځم مثال: $\frac{dy}{dx}+y\cos x=y^{n}\sin 2x$ تفاضلي معادله حل کړئ

حل: راکړل شوې معادله دبرنولي معادلې په شکل ده ، لومړی راکړل شوي معادله په y^n باندې ويشو

$$y^{-n}\frac{dy}{dx}+y^{1-n}\cos x=\sin 2x\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.(1)$$

$$y^{1-n}=v\qquad =>\qquad (1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}=\frac{dv}{dx}$$

دپورته قيمتونو په وضعه کولوسره لومړی معادله په لاندې خطي معادلې باندې بدليږي

$$\frac{1}{1-n}\frac{dv}{dx}+v\cos x=\sin 2x\qquad \text{یا}\qquad \frac{dv}{dx}+(1-n)\cos x\cdot v=(1-n)\sin 2x$$

$$P=(1-n)\cos x\ ,Q=(1-n)\sin 2x$$

$$IF=e^{\int P dx}=e^{\int(1-n)csox}=e^{(1-n)\sin x}$$

پس دمعادلې عمومي حل په لاندې ډول پيداکوو

$$v\, e^{(1-n)\sin x} = \int (1-n)\sin 2x\, e^{(1-n)\sin x}\, dx + c$$

$$(1-n)\sin x = t \qquad => \qquad \cos x\, dx = \frac{1}{n-1} dt$$

$$v\, e^{(1-n)\sin x} = \int (1-n) 2 \sin x \cos x\, e^{(1-n)\sin x}\, dx + c$$

$$= \frac{2}{n-1}\int t\, e^t dt + c$$

$$= \frac{2}{n-1}\left[t e^t - \int 1 . e^t dt\right] + c$$

$$= \frac{2}{n-1}[t\, e^t - e^t] + c = \frac{2}{n-1}[(t-1)e^t]$$

$$y^{(1-n)} e^{(1-n)\sin x} = \frac{2}{n-1}[(1-n)\sin x - 1]\, e^{(1-n)\sin x} + c$$

$$y^{1-n} = \left\{\frac{2}{n-1}\right\}[(1-n)\sin x - 1] + c e^{-(1-n)\sin x}$$

شپږم مثال: $\frac{dz}{dx} + \frac{z}{x}\ln z = \frac{z}{x^2}(ln\, z)^2$ تفاضلي معادله حل کړئ

حل: راکړل شوې معادله په z باندې ويشو، نولاندې نتيجه لاسته راکوي

$$\frac{1}{z}\frac{dz}{dx} + \frac{1}{x}\ln z = \frac{1}{x^2}(\ln z)^2 \qquad y = \ln z \qquad => \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{z}\frac{dz}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = \frac{y^2}{x^2}$$

پورته معادله دبرنولي معادلي شکل دی، ددې لپاره چې په خطي شکل يې بدله کړو ، نو معادله په y^2 باندې ويشو

$$y^{-2}\frac{dy}{dx} + \frac{y^{-1}}{x} = \frac{1}{x^2} \qquad y^{-1} = v \quad => \quad -y^{-2}\frac{dy}{dx} = \frac{dv}{dx}$$

$$-\frac{dv}{dx} + \frac{v}{x} = \frac{1}{x^2} \qquad \text{يا} \qquad \frac{dv}{dx} - \frac{1}{x}v = -\frac{1}{x^2} \qquad P = -\frac{1}{x}\ ,\quad Q = -\frac{1}{x^2}$$

$$IF = e^{\int P dx} = e^{-\int \frac{1}{x} dx} = e^{-\ln x} = \frac{1}{x}$$

اوس يې عمومي حل په لاندې ډول پيداکوو

$$v \cdot \frac{1}{x} = \int -\frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{x} dx + c = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2} + c$$

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{2x^2} + cx \qquad y = \ln z$$

$$\therefore \quad \frac{1}{\ln z} = \frac{1}{2x} + cx$$

1.14 تمرينونه:

لاندې تفاضلي معادلات حل کړئ

1. $\frac{dy}{dx} - xy = x^3 y^2 \qquad Ans: \quad \frac{1}{y^2} = 1 - x^2 + ce^{x^2}$
2. $2\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = \frac{y^2}{x^2} \qquad Ans: \quad \frac{1}{y} = \frac{1}{x} - \frac{c}{\sqrt{x}}$
3. $xy - \frac{dy}{dx} = y^3 e^{-x^2} \qquad Ans: \quad -\frac{1}{y^2} e^{x^2} = c - 2x$
4. $\sec^2 y \frac{dy}{dx} + 2x \tan y = x^3 \qquad Ans: \quad \tan y\, e^{x^2} = c + \frac{1}{2} e^{x^2}(\tan y - 1) \qquad put \tan y = v$
5. $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = y^2 x \qquad Ans: \quad 1 + x^2 y + cxy = 0$
6. $\frac{dy}{dx} + y \tan x = y^3 \sec x \qquad Ans: \quad \cos^2 x = y^2(2 \sin x + c)$
7. $x^3 \frac{dy}{dx} + y^4 \cos x = x^2 y \qquad Ans: \quad x^3 = (c + 3 \sin x) y^3$
8. $\frac{dy}{dx} + y \cot x = y^2 \sin^2 x \cos^2 x \qquad Ans: \quad \frac{1}{y} = \frac{1}{3} \sin x \cos^3 x + c \sin x$
9. $\frac{dy}{dx} + x \sin 2y = x^3 \cos^2 y \qquad Ans: \quad tany = \frac{1}{2}(x^2 - 1) + ce^{-x^2}$
10. $\frac{dy}{dx}(x^2 y^3 + xy) = 1 \qquad Ans: \quad \frac{1}{x} = 2 - y^2 + ce^{-\frac{y^2}{2}}$

کاملې تفاضلي معادلې (Exact Differential Equations)

هغه تفاضلي معادلي چې (1) .... $M(x,y)\,dx+N(x,y)\,dy=0$ شکل ولري ، کاملې تفاضلي معادلې ورته وايي ، که چیرته دلومړۍ معادلې چپ طرف دیوې تابع لکه $f(x,y)$ کامل دیفرنسیال وی، یعني $M(x,y)\,dx+N(x,y)\,dy=df$ ، یاپه ساده ډول باندې لومړۍ معادلې ته کامله تفاضلي معادله وايي که چیرته $u(x,y)$ په لاندې ډول موجود وي

$$\frac{\partial u}{\partial x}=M(x,y) \qquad \text{او} \qquad \frac{\partial u}{\partial y}=N(x,y)$$

دمثال په ډول $x\,dy+y\,dx=0$ تفاضلي معادله په نظر کې نیسو، نوموړې معادله کولای شو چې د $d(xy)=0$ په شکل ولیکو، کوم چې مونږ ته $df=0$ شکل راښايي ، چې f د x او y تابع ده، دانتیګرال نیونې څخه وروسته $xy=c$ لاسته راځي ، کوم چې دراکړل شوې معادلې عمومي حل دی، داډول معادلوته کاملې تفاضلي معادلې وايي.

قضیه: دلومړۍ معادلې دکامل والي لپاره لازمي اوکافي شرط عبارت له $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$ څخه دی.

(i) دلازمي شرط لپاره ثبوت:

فرض کړئ چې لومړۍ معادله کامله ده ، مونږباید وښایو چې $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$ ، څرنګه چې لومړۍ معادله کامله ده ، نو دتعریف په اساس د $f(x,y)$ یوه تابع موجوده ده دکوم لپاره چې مونږ لاندې معادله لرو

$$df=M(x,y)\,dx+N(x,y)\,dy \quad .... (2)$$

دتیرو ریاضیاتوپه اساس لرو چې

$$df=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy \quad .... (3)$$

ددوهمې او دریمې معادلو دمقایسې په اساس لرو چې

$$M=\frac{\partial f}{\partial x}\,, \quad N=\frac{\partial f}{\partial y} \quad .... (4) \;=>\; \frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\,,\; \frac{\partial N}{\partial x}=\frac{\partial^2 y}{\partial y\partial x}$$

څرنګه چې

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 y}{\partial y\partial x} \qquad \therefore \quad \frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$$

کوم چې لازمي شرط راښايي.

(ii) دکافي شرط لپاره ثبوت:

فرض کړئ چې $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$ ، مونږ باید د $f(x,y)$ یوه تابع پیداکړو ، دکوم لپاره چې لاندې معادله صدق وکړي

$$df=M(x,y)\,dx+N(x,y)\,dy \quad \text{یعني} \quad \frac{\partial f}{\partial x}=M(x,y) \quad \text{او} \quad \frac{\partial f}{\partial y}=N(x,y)$$

مونږ باید د $f(x,y)$ تابع داډول لاسته راوړو ، دکوم لپاره چې څلورمه معادله کې لومړی حالت صدق وکړي، دنوموړی معادلې نظر x ته مشتق اخلو او y ثابت نیسو ، نو مونږ لاندې معادله لاسته راوړو

$$f=\int M(x,y)\ dx+\phi(y)\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots.(5)$$

چې $\phi(y)$ یوه اختیاري تابع د y ده ، اوس $\phi(y)$ داډول انتخابوو چې په څلورمه معادله کې دوهم حالت لپاره هم صدق وکړي ، یعنې $\frac{\partial f}{\partial y}=N(x,y)\ \dots\dots\dots(6)$ ، اوس د $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$ په نظر کې نیولو سره $\phi(y)$ هروخت امکان لري.

د (5) څخه لیکلای شو چې

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left[\int M(x,y)dx\right]+\phi'(y)\ \dots\dots\dots\dots\dots.(7)$$

د (6) او (7) دمقایسې په اساس لیکلای شو چې

$$\phi'(y)=N(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,u)\ dx\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots.(8)$$

د (8) چپ طرف د x څخه مستقل دی

راځی چې اوس د (4) حالت لاندې وښایو، x د (8) ښي طرف ته دننه کیدای نه شي ، ددی لپاره مونږ باید وښایو چې د (8) دښي طرف قسمي مشتق صفر دی.

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[N-\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx\right]=\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial}{\partial y}\int M\ dx\right]=\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial}{\partial x}\int M\ dx\right]$$

$$\frac{\partial}{dx}\int M\ dx=M(x,y) \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left[N-\frac{\partial}{\partial y}\int M\ dx\right]=\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}=0$$

څکه $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$ اوس د (8) مشتق نظر y اخلو، نو ترلاسه کوو چې

$$\phi(y) = \int \left[N - \frac{\partial}{\partial y}\int M\,dx\right]dy + c \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

چې c یو اختیاري ثابت عدد دی ، اوس که (9) په (5) کې وضعه کړو ، نو غوښتل شوې تابع لاسته راکوي

$$f(x,y) = \int M\,dx + \int \left[N - \frac{\partial}{\partial y}\int M\,dx\right]dy + c$$

دکومې چې کامل ډیفرنسیال عبارت له $M\,dx + N\,dy$ څخه دی

دکاملوتفاضلي معادلو دحل طریقه:

دداډول معادلو دحل لپاره لومړی باید وښایو چې $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$

1. د $M(x,y)$ انتیګرال نظر x ته پیداکوو او y ثابت په نظر کې نیسو، لاسته راغلي انتیګرال په I_1 سره ښایو.
2. په $N(x,y)$ کې هغه حدونه چې x ونلري ، نظر y ته انتیګرال نیسو او دغه انتیګرال په I_2 سره ښایو.
3. $I_1 + I_2 = c$ دراکړل شوې معادلې عمومي حل دی

عملي مثالونه:

لومړی مثال: $(2xy + 3y)\,dx + (x^2 + 3x)\,dy = 0$ تفاضلي معادله حل کړئ

حل:

$$M = 2xy + 3y \quad \text{او} \quad N = x^2 + 3x$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2x + 3 \quad \text{او} \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 2x + 3$$

څرنګه چې $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ پس راکړل شوی معادله یوه کامله تفاضلي معاده ، اوس یې عمومي حل په لاندې ډول پیداکو

$$\int (2xy + 3y)dx + \int (0)dy = c$$

$$2y\frac{x^2}{2} + 3y\,x = c \quad \text{یا} \quad x^2y + 3xy = c$$

پورته معادله کولای شو په لاندی ډول حل کړو، چې لومړی دمعادلې چپ طرف دیو کامل ډیفرنسیال په شکل لیکو

$$(2xy\,dx + x^2\,dy) + 3(x\,dy + y\,dx) = 0 \quad \text{یا} \quad d(x^2y) + 3d(xy) = 0$$

دانتیګرال څخه وروسته دراکړل شوې معادلې عمومي حل په لاس راځي

$$x^2y + xy = c$$

دوهم مثال: لاندې تفاضلي معادله حل کړئ

$$(5x^4 + 3x^2y^2 - 2xy^3)dx + (2x^3y - 3x^2y^2 - 5y^4)dy = 0$$

حل: پوهیږو چې

$$M = 5x^4 + 3x^2y^2 - 2xy^3 \quad \text{او} \quad N = 2x^3y - 3x^2y^2 - 5y$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 6x^2y - 6xy^2 \quad \text{او} \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 6x^2y - 6xy^2$$

څرنګه چې $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ پس راکړل شوی معادله یوه کامله تفاضلي معاده ، اوس یې عمومي حل په لاندې ډول پیداکو

$$\int (5x^4 + 3x^2y^2 - 2xy^3)dx + \int (-5y^4)dy = c$$

$$x^5 + x^3y^2 - x^2y^3 - y^5 = c$$

دریم مثال: $(e^y + 1)\cos x\; dx + e^y \sin x\, dy = 0$ تفاضلي معادله حل کړئ

حل: لیدل کیږي چې

$$M = (e^y + 1)\cos x \quad \text{او} \quad N = e^y \sin x$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = e^y \cos x \quad \text{او} \quad \frac{\partial N}{\partial x} = e^y \cos x$$

څرنګه چې $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ پس راکړل شوی معادله یوه کامله تفاضلي معاده ، اوس یې عمومي حل په لاندې ډول پیداکو

$$\int (e^y+1)\cos x \; dx + \int (0)\; dy = c \qquad => \qquad (e^y+1)\sin x = c$$

ځلورم مثال: لاندې تفاضلي معادله حل کړئ

$$\left[y\left(1+\frac{1}{x}\right)+\cos y\right]dx + [x+\ln x - x\sin y]dy = 0$$

حل: پوهيږو چې

$$M = y\left(1+\frac{1}{x}\right)+\cos y \quad \text{او} \quad N = x+\ln x - x\sin y$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \left(1+\frac{1}{x}\right)-\sin y \quad \text{او} \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \left(1+\frac{1}{x}\right)-\sin y$$

څرنګه چې $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ پس راکړل شوی معادله یوه کامله تفاضلي معاده ، اوس يې عمومي حل په لاندې ډول پيداکو

$$\int \left[y\left(1+\frac{1}{x}\right)+\cos y\right]dx + \int (0)\; dy = c$$

$$yx + y\ln x + x\cos y = c$$

پنځم مثال: لاندې تفاضلي معادله حل کړئ

$$(2x\ln y)\; dx + \left(\frac{x^2}{y}+3y^2\right)\; dy = 0$$

حل: ليدل کيږي چې

$$M = 2x\ln y \quad \text{او} \quad N = \frac{x^2}{y}+3y^2$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2x\cdot\frac{1}{y} = \frac{2x}{y} \quad \text{او} \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{2x}{y}$$

څرنګه چې $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ پس راکړل شوی معادله یوه کامله تفاضلي معاده ، اوس يې عمومي حل په لاندې ډول پيداکو

$$\int (2x \ln y)\, dx + \int 3y^2 dy = c \qquad => \qquad x^2 \ln y + y^3 = c$$

شپږم مثال: لاندې تفاضلی معادله حل کړئ

$$\left(1 + e^{\frac{x}{y}}\right) dx + e^{\frac{x}{y}} \left(1 - \frac{x}{y}\right) dy = 0$$

حل: لیدل کیږي چې

$$M = \left(1 + e^{\frac{x}{y}}\right) \qquad N = e^{\frac{x}{y}} \left(1 - \frac{x}{y}\right)$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = e^{\frac{x}{y}} \left(-\frac{x}{y^2}\right) \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = e^{\frac{x}{y}} \left(-\frac{1}{y}\right) + \left(1 - \frac{x}{y}\right) e^{\frac{x}{y}} \frac{1}{y}$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = -\frac{e^{\frac{x}{y}}}{y} + e^{\frac{x}{y}} \frac{1}{y} - \frac{x}{y^2} e^{\frac{x}{y}} = \left(-\frac{x}{y^2}\right) e^{\frac{x}{y}}$$

څرنګه چې $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ پس راکړل شوی معادله یوه کامله تفاضلي معاده ، اوس یې عمومي حل په لاندې ډول پیداکو

$$\int \left(1 + e^{\frac{x}{y}}\right) dx + \int (0) dy = c$$

$$x + \frac{e^{\frac{x}{y}}}{\frac{1}{y}} = c \qquad \text{یا} \qquad x + y\, e^{\frac{x}{y}} = c$$

1.16 تمرینونه

لاندې تفاضلي معادلې حل کړئ

1. $3x(xy - 2)dx + (x^2 + 2y)dy = 0$
2. $y \sin 2x \; dx - (1 + y^2 + \cos^2 x)dy = 0$
3. $(x^2 - 2xy + 3y^2)dx + (y^2 + 6xy - x^2)dy$
4. $(y^2 - x^2)dx + 2xy\, dy = 0$
5. $\left(1 + 3e^{\frac{x}{y}}\right) dx + 3e^{\frac{x}{y}} \left(1 - \frac{x}{y}\right) dy = 0$
6. $(y \sec^2 x + \sec x \tan x)dx + (\tan x + 2y)dy = 0$

7. $(e^y + 1)\cos x \ dx + e^y \sin x \ dy = 0$

8. $\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2 y}\right) dx - \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{x^2 y}\right) dy = 0$

9. $\left(x + \frac{y^3}{x^2}\right) dx - 3y^2 dy = 0$

10. $(\cos x - 3x^2 \tan y)dx - x^3 \sec^2 y \ dy = 0$

11. $(ax + hy + g)dx + (hx + by + f)dy = 0$

12. $\left[\cos x \ \log_e(2y - 8) + \frac{1}{x}\right] dx + \frac{\sin x}{y - 4} \ dy = 0 \qquad y(1) = \frac{9}{2}$

جوابونه:

1. $x^3 y - 3x^2 + y^2 = c$

2. $3y \cos 2x + 6y + 2y^3 = c$

3. $x^3 - 3x^2 y + 9xy^2 + y^3 = c$

4. $\frac{x^3}{3} - xy^2 = c$

5. $x + 3ye^{\frac{x}{y}} = c$

6. $y \tan x + \sec x + y^2 = c$

7. $(e^y + 1)\sin x = c$

8. $\mathrm{Ln}\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{1}{xy} = c$

9. $x^3 - 2y^3 = cx$

10. $3y \cos 2x + (6y + 2y^3) = c$

11. $ax^2 + 2h\,xy + by^2 + 2gx + 2fy + c$

12. $\mathrm{Sin}\, x \ln(2y - 8) + \ln x = 0$

1.17 هغه تفاضلي معادلې چې په کاملو تفاضلو معادلوباندې بدلیږي

په دې برخه کې ځینې معادلې تربحث لاندې نیسو ، کومې چې $Mdx + Ndy = 0$ شکل ولري خو کاملې نه وي، ولې دیوې مناسبې تابع دضربولو څخه وروسته په کاملوتفاضلي معادلوباندې بدلیږي ، چې دغه مناسبې تابع ته دانتیګرال فکتور یا داتمام عامل وایي ، دانتیګرال فکتور دپیداکولو لپاره لاندې قوانین بغیر دثبوت څخه ترځیړنې لاندې نیسو.

لومړی قانون: که چیرته راکړل شوی تفاضلي معادله یوه متجانسه تفاضلي معادله وي او همدارنګه $Mx + Ny \neq 0$ ، نو $\frac{1}{Mx+Ny}$ عبارت دانتیګرال فکتور څخه دی.

لومړی مثال: $(x^4 + y^4)dx - xy^3dy = 0$ تفاضلي معادله حل کړئ

حل: راکړل شوې معادله یوه متجانسه تفاضلي معادله ده ، نو لومړی یې دانتیګرال فکتور پیداکوو

$$IF = \frac{1}{Mx + Ny} = \frac{1}{(x^4 + y^4)x + (-xy^3)y} = \frac{1}{x^5}$$

اوس راکړل شوې معادله په $\frac{1}{x^5}$ کې ضربوو

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{y^4}{x^5}\right)dx - \frac{y^3}{x^4}dy = 0$$

پورته معادله یوه کامله تفاضلي معادله ده او په لاندې ډول یې حل کوو

$$\int \left(\frac{1}{x} + \frac{y^4}{x^5}\right)dx + \int (0)dy = c \qquad => \quad \ln x - \frac{y^4}{4x^4} = c$$

دوهم مثال: $y^2dx + (x^2 - xy - y^2)dy = 0$ تفاضلي معادله حل کړئ

حل: راکړل شوې معادله یوه متجانسه تفاضلي معادله ده ، نو دانتیګرال فکتور یې په لاندې ډول پیداکوو

$$IF = \frac{1}{Mx + Ny} = \frac{1}{y^2x + (x^2 - xy - y^2)y} = \frac{1}{y(x^2 - y^2)}$$

اوس راکړل شوې معادله په لاسته راغلي انتیګرال فکتور کې ضربوو، نو معادله لاندې شکل اختیاروي

$$\frac{y}{x^2 - y^2}dx + \left(\frac{1}{y} - \frac{x}{x^2 - y^2}\right)dy = 0$$

پورته معادله یوه متجانسه تفاضلي معادله ده ، او په لاندې ډول یې حل کوو

$$\int \frac{y}{x^2 - y^2}dx + \int \frac{1}{y}dy = c$$

$$y \cdot \frac{1}{2y}\ln\frac{x - y}{x + y} + \ln y = c \quad \text{یا} \quad \frac{1}{2}\ln\frac{x - y}{x + y} + \ln y = c$$

دوهم قانون: که چیرته $\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}$ یواځې د x تابع وي ، د f(x) په شکل یې فرض کوو، نو $e^{\int f(x)dx}$ عبارت دانتیګرال فکټور څخه دی.

لومړی مثال: $2y\,dx+(2x\ln x-xy)dy=0$ تفاضلي معادله حل کړئ

حل:

$$M=2y \qquad N=2x\ln x-xy$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=2 \qquad \frac{\partial N}{\partial x}=2\left(x\cdot\frac{1}{x}+\ln x\right)-y=2(1+\ln x)-y$$

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}=\frac{2-2-2\ln x+y}{2x\ln x-xy}=\frac{-2\ln x+y}{x(2\ln x-y)}=-\frac{1}{x}=f(x)$$

$$\therefore \quad IF=e^{\int f(x)dx}=e^{-\int\frac{1}{x}dx}=e^{-\ln x}=\frac{1}{x}$$

اوس راکړل شوي معادله په $\frac{1}{x}$ کې ضربوو ، نو ترلاسه کوو

$$\frac{2y}{x}dx+\frac{2x\ln x-xy}{x}dy=0 \quad \text{یا} \quad \frac{2y}{x}dx+(2\ln x-y)dy=0$$

پورته معادله یوه کامله تفاضلي معادله ده ، او په لاندې ډول یې حل کوو

$$\int\frac{2y}{x}dx+\int(-y)dy=c \qquad => \qquad 2y\ln x-\frac{y^2}{2}=c$$

دوهم مثال: لاندې تفاضلي معادله حل کړئ

$$(6x^2+4y^3+12y)\,dx+3x(1+y^2)\,dy=0$$

حل:

$$M=6x^2+4y^3+12y \qquad N=3x+3xy^2$$

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}=\frac{12y^2+12-3-3y^2}{3x(1+y^2)}=\frac{12(y^2+1)-3(1+y^2)}{3x(1+y^2)}=\frac{3}{x}=f(x)$$

$$\therefore \quad IF = e^{\int f(x)dx} = e^{\int \frac{3}{x}dx} = e^{3\ln x} = e^{\ln x^3} = x^3$$

راکړل شوې معادله په x^3 کې ضربوو

$$(6x^5 + 4x^3y^3 + 12x^3y)\, dx + 3x^4(1 + y^2)\, dy = 0$$

پورته معادله یوه کامله تفاضلي معادله ده ، نو په لاندې ډول یې حل کوو

$$\int (6x^5 + 4x^3y^3 + 12x^3y)\, dx + \int (0)dy = c$$

$$x^6 + x^4y^3 + 3yx^4 = c$$

دریم قانون: که چیرته $\frac{\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}}{M}$ د y تابع وي ، او د f(y) په شکل یې وښایو نو $e^{\int (y)dy}$ دانتیګرال فکتور دی.

لومړی مثال: لاندې تفاضلي معادله حل کړئ

$$(y^4 + 2y)dx + (xy^3 + 2y^4 - 4x)dy = 0$$

حل:

$$M = y^4 + 2y \qquad N = xy^3 + 2y^4 - 4x$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 4y^3 + 2 \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = y^3 - 4$$

$$\frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} = \frac{(y^3 - 4) - (4y^3 + 2)}{(y^4 + 2y)} = \frac{-3(y^3 + 2)}{y(y^3 + 2)} = \frac{-3}{y} = f(y)$$

اوس یې دانتیګرال فکتورپه لاندې ډول پیداکوو

$$IF = e^{\int (y)dy} = e^{-\int \frac{3}{y}} = e^{-3\ln y} = e^{-\ln y^3} = \frac{1}{y^3}$$

اوس راکړل شوې معادله په $\frac{1}{y^3}$ کې ضربوو ، نو ترلاسه کوو

$$\left(y + \frac{2}{y^2}\right) dx + \left(x + 2y - \frac{4x}{y^3}\right) dy = 0$$

پورته معادله یوه متجانسه معادله ده ، نو عمومي حل یې په لاندې ډول دی

$$\int\left(y+\frac{2}{y^2}\right)dx+\int 2y\,dy=c$$

$$xy+\frac{2x}{y^2}+y^2=c \quad \text{یا} \quad x\left(y+\frac{2}{y^2}\right)y+y^2=c$$

ځلورم قانون : که چېرته راکړل شوې معادله د $f_1(x,y)y\,dx+f_2(x,y)x\,dy=0$ شکل ولري، چې $M=f_1(x,y)y$ او $N=f_2(x,y)x$ وي او $Mx-Ny\neq 0$ نو په دې صورت کې $\frac{1}{Mx-Ny}$ عبارت دانتیګرال فکتور څخه دی.

مثال: لاندې تفاضلي معادله حل کړئ

$$y(1+2xy)\,dx+x(1-xy)\,dy=0$$

حل:

$$M=yf_1(x,y) \qquad N=xf_2(x,y)$$
$$M=y(1+2xy) \quad N=x(1-xy)$$

$$Mx-Ny=xy(1+2xy)-xy(1-xy)=xy+2x^2y^2-xy+x^2y^2$$

$$Mx-Ny=3x^2y^2\neq 0$$

پس دراکړل شوې معادلې دانتیګرال فکتور عبارت دی له

$$IF=\frac{1}{Mx-Ny}=\frac{1}{3x^2y^2}$$

راکړل شوې معادله په $\frac{1}{3x^2y^2}$ کې ضربوو، نو ترلاسه کوو چې

$$\left(\frac{1}{3x^2y}+\frac{2}{3x}\right)dx+\left(\frac{1}{3xy^2}-\frac{1}{3y}\right)dy=0$$

پورته معادله یوه متجانسه معادله ده او عمومي حل یې په لاندې ډول دی

$$\int\left(\frac{1}{3x^2y}+\frac{2}{3x}\right)dx+\int -\frac{1}{3y}\,dy=c$$

$$-\frac{1}{3xy}+\frac{2}{3}\ln x-\frac{1}{3}\ln y=c \quad \text{یا} \quad -\frac{1}{xy}+2\ln x-\ln y=k \qquad (k=3c)$$

پنځم قانون : که چیرته معادله د $x^a y^b(my\,dx + nx\,dy) + x^c y^d(py\,dx + qx\,dy) = 0$ چي p, d, c, n, m, b, a او q ثابت عددونه دي شکل ولري، نو دراکړل شوي معادلي دانتيګرال فکټور عبارت د $x^h y^k$ څخه دی ، د k او h دلاسته راوړلو لپاره لومړی راکړل شوې معادله په $x^h y^k$ کې ضربوو ، ترڅو معادله په کامله تفاضلي معادله باندې بدله شي ، بیا يې د کامل والي دشرط څخه په استفادی سره ، دضریبونو دمقایسي څخه د k او h قیمتونه لاسته راوړو، دغه موضوع په لاندې مثال کې واضح کوو

مثال: $(y^2 + 2x^2 y)dx + (2x^3 - xy)\,dy = 0$ معادله حل کړئ

حل: لومړی راکړل شوې معادله په لاندې ډول لیکو

$$y(y\,dx - x\,dy) + x^2(2y\,dx + 2x\,dy) = 0$$

اوس راکړل شوې معادله په $x^h y^k$ کې ضربوو ، نو ترلاسه کوو

$$(x^h y^{k+2} + 2x^{h+2} y^{k+1})dx + (2x^{h+2} y^k - x^{h+1} y^{k+1})dy = 0 \quad \dots\dots\dots(1)$$

پورته معادله باید یوه کامله تفاضلي معادله وي

$$M = x^h y^{k+2} + 2x^{h+2} y^{k+1} \quad , \quad N = 2x^{h+2} y^k - x^{h+1} y^{k+1}$$

څرنګه چي لومړئ معادله کامله ده ، نو لروچي

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

$$(k+2)x^h y^{k+1} + 2(k+1)x^{h+2} y^k = 2(h+3)x^{h+2} y^k - (h+1)x^h y^{k+1}$$

دپورته عینیت دضریبونو د مساوات څخه لرو چي

$k + 2 = -(h+1)$ او $2(k+1) = 2(h+3)$

یعنې $h + k = -3$ او $h - k = -2$

دپورته سیستم دحل څخه د h او k قیمتونه عبارت دي له

$$h = -\frac{5}{2} \qquad k = -\frac{1}{2} \qquad \therefore \quad IF = x^{-\frac{5}{2}} y^{-\frac{1}{2}}$$

اوس راکړل شوې معادله په $x^{-\frac{5}{2}} y^{-\frac{1}{2}}$ کې ضربوو

$$\left(x^{-\frac{5}{2}}y^{\frac{3}{2}}+2x^{-\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{2}}\right)dx+\left(2x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{2}}+x^{-\frac{3}{2}}y^{\frac{1}{2}}\right)dy=0$$

پورته معادله یوه متجانسه معادله ده ، او عمومي حل يې په لاندې ډول دی

$$y^{\frac{3}{2}}\left(-\frac{2}{3}x^{-\frac{3}{2}}\right)+2y^{\frac{1}{2}}\left(2x^{\frac{1}{2}}\right)=c \qquad \text{يا} \qquad 6x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{3}{2}}y^{\frac{3}{2}}=c$$

1.18

لاندې تفاضلي معادلې حل کړئ

1. $(x^2-3xy+2y^2)\,dx+x(3x-2y)\,dy=0$
2. $(x^2y-2xy^2)\;dx+2y\,dy=0$
3. $(xy-y^2)\,dx-x^2dy=0$
4. $(x^2+y^2+2x)\,dx+2y\,dy=0$
5. $(3xy-2ay^2)\,dx+(x^2-2ayx)\,dy=0$
6. $(x^3-2y^2)\,dx+2y\,dy=0$
7. $(xy^2-x^2)\,dx+(3x^2y^2+x^2y-2x^3+y^2)\,dy=0$
8. $(y^4+2y)\,dx+(xy^3+2y^4-4x)\,dy=0$
9. $(xy^2+y)\,dx+2(x^2y^2+x+y^4)\,dy=0$
10. $(xy\sin xy+\cos xy)y\,dx+(xy\sin xy-\cos xy)x\,dy=0$
11. $(x^2y^2+xy+1)\,y\,dx+(x^2y^2-xy+1)x\,dy=0$
12. $(2y\,dx+3x\,dy)+2xy(3ydx+4xdy)=0$