

شمير پوهنه ( رياضي )

د نهم ټولگي له پاره

ليکونکی:

ډاکټر ماخان ( ميري ) شينواري

**Ketabton.com**

011-1046@gmail.com

2017

شمير پوهنه (رياضي)

د نهم ټولگي لپاره

ليکونکی:

ډاکټر ماخان (ميري) شينواري

برېښناپته:

smakhan1946@gmail.com

۴ - کرنیز برابر ونسیستم د ۲ ..... ۱۱۹	سریزه ..... ۴
۴ . ۱ - د مناسب خواب تلنلار . ... ۱۳۴	۰ - پروت ولار سیستم یا کواورد ... ۶
۵ - په محور هندارونه ..... ۱۳۴	۱ - گردی ( دایره ) ..... ۸
۵ . ۱ - سیومتری ..... ۱۳۸	گردی هواره، - چاپیریال، - وړانگه، - ، نیمی، - دننه کونج، - منځهواره یا - دننه هواره، - گردی ټوټه، - گردی برخه، گردی کری، د گردیو پروتخایونه یو بل ته، څو پیژندونه، گردی لینده، د گردی منځکیکونج، د کرنیو پروتخایونه و.ته.
۵ . ۲ - مرکزي متناظر ..... ۱۴۰	۲ - ایلیپسی یا هگی ( بیضوي ) ، پیژند، د باغوان جوړونه، - چاپیریال، - منځهواره، - تمرینونه،
۵ . ۳ - دپرواره هندارونه ..... ۱۴۱	۳ - کرنیزی څیرونی یا تابع ..... ۳۸
۵ . ۴ - د وړنی - یا انتقالخیرنه ... ۱۴۲	۳ . ۱ - د محور غوڅتکی ..... ۴۲
۵ . ۵ - څرخون یا دوران ..... ۱۴۳	۳ . ۲ - جگینه ..... ۴۵
۵ . ۶ - په ټکی انعکاس ..... ۱۴۵	۳ . ۳ - د تابعو د گراف رسمول ... ۴۹
۵ . ۷ - طیلا بیغوخی ..... ۱۴۹	۳ . ۴ - کلیمی او د انځورونو ډولون ... ۵۱
۶ - درېگوډیکچ ..... ۱۶۱	۳ . ۵ - کرنیز برابر ونونه .. ۵۲
۷ - مربع مساوات ..... ۱۹۸	۳ . ۶ - پوښتنی ..... ۵۹
۷ . ۱ - سوچه مربع مساوات ..... ۱۹۸	۳ . ۷ - کرنیز توابع د ورکړ شو ... ۶۱
۷ . ۲ - د مربع مساوات عمومي .. ۲۰۰	۳ . ۸ - تمرینونه ..... ۶۷
۷ . ۴ - د $p-q$ فرمول ..... ۲۰۵	۳ . ۹ - ځانگری حالت ..... ۶۸
۸ - ماتبرابرون ..... ۲۲۳	
د مربع توابعو محورونو څتکی ۲۳۴	
ارزښت ..... ۲۳۶	
د شینواری کتابونه او ژوند ... ۲۵۱	

## سريزه

دا نږدې څلورېنځه کاله کيږي، چې زموږ هيواد هراړخيزه ستونزې لري او هر څه دي اورده جنگ را خراب کړي

گرانو هيوادوالو!

د نورو نيمگرتياو په څير زموږ درسي نصاب - په تيره شميرپوهنه - هم ډېره د ناسمون سره مخامخ ده.

که دا کار د دولت په څلورديوالي ونه شو، نو زه به وهڅيږم، چې دا ما ليکلي کتابونه دن ج له لارې له تاسو سره شريک کړم او دا د نړۍ په ستاندارد.

د بنوونځي په کتابونو کې د ستاتيستيک او احتمالوالي درس نور هم خورا ستونځمن دی، چې زه ترې دلته تيريرم او د بنوونځي د تيرو کتابونو څخه هم هيله ده- که زما کتابونه وړاندې نه شو- چې دا برخې يا سمې يا له درسي نصاب څخه ووېستل شي. په دې برخه باور وکړی، چې نه ليکونکی بوهيري او نه بل لوستونکی پرې پوهيدلی شي.

زما په دې د بنوونځي کتابونو کې دا برخې نه شته، خو که وخت مې پيدا کړ دا به هم سمې کړم. ما په دې هکله د احتمالوالي او ستاتيستيک کتابونه ژباړلي او همداسې مې په هندسه کې هم احتمالوالي شميرنه راوړي او د ستاتيستيک يو کتاب مې هم ژباړلي، چې زه به يې په مناسبوخت کې د ليدلو پټې گرانو لوستونکو ته دن ج له لارې ورکړم.

دا زما ځنې کتابونه او په ډېره مننه د [www.ketabton.com](http://www.ketabton.com) دن ج کې گرانو لوستونکو ته وړاندې شوي.

د شميرپوهنې سم اند يا منطق زموږ د نصاب په لسم ټولگي کې راغلی او هغه هم لکه ستاتيستيک او ... د پوهيدلو نه دی. دا- لکه څنگه چې برېښي- دومره پيچلی نه دی، نو زه دا درس له دې امله د اوم ټولگي په سر کې راوړم، هيله ده چې ستونځې به رامنځ ته نه کړي.

زه چې ترڅو ستاسو په منځ کې وم او د کار يم، ستاسو چوپړ کې به اوسم. راځي، چې ستونځوبي (د ستونځو حل) سره شريک کړو.

زه دې ليکنو او پرې قضاوت کولو ته ځانله يم.

تکرار په کې زيات دى، خو د موضوع، نه د خوديوني. وايي چې تکرار د زده کړې مورده، نو پروا نه لري. کمبستونه هم په کې شته. سره د ټولو نيگرتياوو دا د بنوونځي له پاره ډېره گتوره او زه چې پوهيرم، يواځنى سمه ليکنه ده.

دا چې سمه ليکنه، د ځان له امله نه وایم، دگرانو زده کوونکو او بنوونکو له پاره وایم. دا زما ليکنې نه دي، دا ما له نورو کتابونو څخه رانيولي، چې بايد سمې وي.

زه به وهڅيرم، چې درسمي بنوونځي کتابونو نا سمونونه له تاسو سره شريک کړم، خو ډېر لږ، يواځي داسې د يادوني له امله.

په ډېره خواشيني بايد ووايم، چې ملاتړى نه لرم، چې د ليکنې ستونځي راته په گوته کړي.

د نصاب د غړو څخه مې هيله ده، چې گټه ترې پورته کړي او په بنسټ يې د بنوونځي ليکنې سمې کړي.

د خونديوني ټيکاوې کې پوښتنه نه شته، ځکه چې ما هم د نورو ليکنو څخه راټول کړي او هڅيدلى يم، چې سم يې ترې راوښم.

باور وکړئ زه د دې ليکنو سره لږ ستړى شوى يم، نو ځنې ځايونه به داسې نيماگري پاتي وي، چې ستاسو پوهيدني ته کوم زيان نه رسوي، د هغې بڅبنه دې وي.

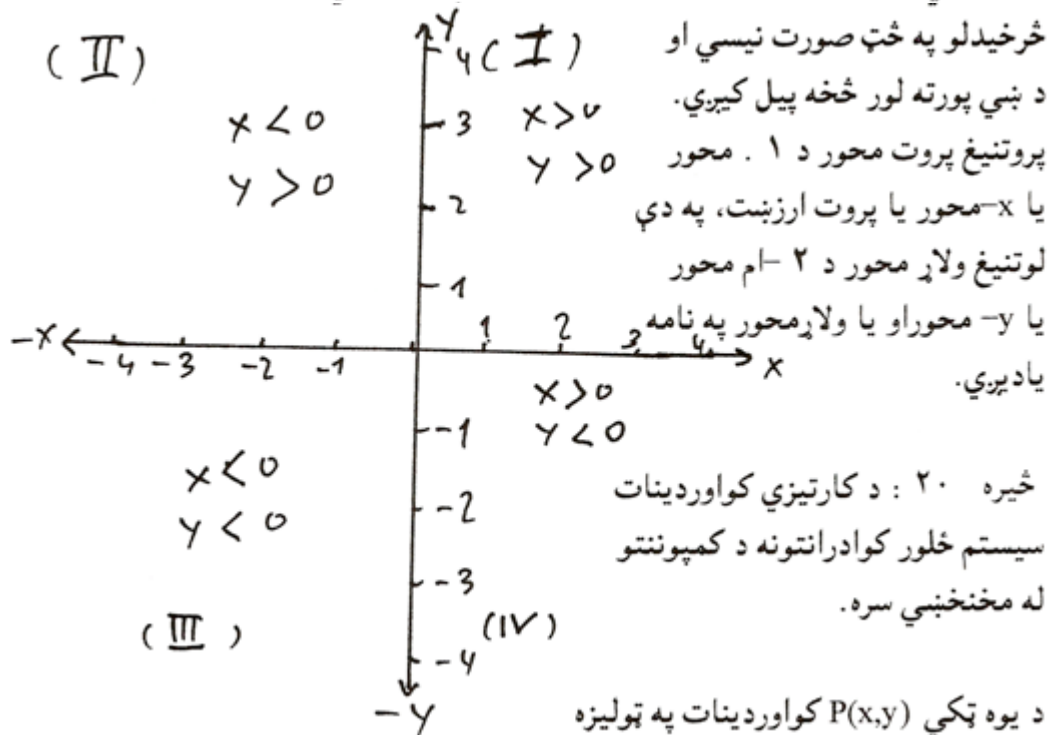
کله تمرينونه کم وي او کله تکرار راځي، چې دا بد مه گڼي.

په دې کتابونو ما دومره ځان بوخت کړى، چې باورکړى مغذمي ترې نورمور دى، نو له دې امله يې پای نور پايوم يا ورته د پای ټکى ږدم.

### کواردينات سيستم

يادونه : کواردينات سيستم څخه څمور هدف پروت ولاړ سيستم دی. دا په ادبياتو کې په همدې نامه يادېږي. ما کله کله همدا دواړه ترمينولوژي کارولي هيله ده چي گران لوستونکی به پرې اشتباهي نه شی.

د شميرپوهنی او همدا ډول د تخنيک په ډيرو څانگو کې د کواردينات سيستم ډير مهم رول لوبوي. په کارتيزي کواردينات سيستم کې د هوارې هر ټکي P د خپلو دواړو کوارديناتو (x,y) ورکولوسره کره يا ټيک ورکړ شوی دی. لمړی کمپوننت يا اېسڅيز (Abszisse) د x - ارزښت يا پروت ارزښت او دوهم کمپوننت يا اوردينات ( Ordinate ) د y - ارزښت بلل کېږي يا ولاړ ارزښت. کارتيزي کواردينات سيستم هواره د دوه يو په بل نيغ ولاړ محورونو ( لنډ : ولاړ محورونو ) له لارې په څلورو برخوويشي ( څلورمی Quadranten ) د کوارانتو نومره بندي يا نمره کول د ساعت



توگه اجازه نه لري چي بدل شي، ځکه چي دا کيموننتونه تنظيم شوې يا منظمه جوړه ده. د ځل يا ضرب لمړنی کيموننت د  $-y$  محور څخه فاصله ټاکي دوم کيموننت د  $-x$  محور څخه. که لمړی کيموننت منفي وي، نو ټکی د  $-y$  محور کين لور ته

تنجنت هغه کرښه ده، چي د دايري د چاپيريال (محيط) سره يو ټکی شريک ولري. د تماس په ټکي کي وړانگه په تنجنت نيغه ولاړه ده، يا ولاړه ده. تنجنت: خطي که به محيط دايره فقط يک نقطه مشترک داشته باشد تنجنت گفته ميشود. در نقطه تماس شعاع به مماس عمود است. مثال: در يک نقطه به خط منحنی دايره يک مماس رسم کنيد. به خط در نقطه يک عمود رسم شود. اين عمود مماس مطلوب ميباشد. از يک نقطه که بيرون دايره واقع باشد، مماسي را رسم نماييد. خط و به ان دايره تالس را رسم ميکنيم. نقاط و به دايره تالس به منحنی دايره نقاط تماس تانجنت هستند. يوه زاويه چي د دايري په چاپيريال کي د يوه وتر مخامخ پرته وي د محيط زاويه بلل کيږي. د همغه وتر مخامخ چاپيريال زاويي سره برابري دي

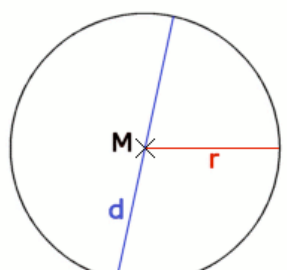
د منځتکي هغه زاويه له کومې چي وتر بريښي منځتکي زاويه بلل کيږي. هغه زاويه چي په يوه پايتکي کي

## ۱ - گردی (دایره)

یادونه: ولی گردی؟ موربه چې په هسکه مینه شینوارو کی غوزان کڼل، نویوه بنده کرده کربسه مو وپستله او هغی ته مو گردی ویل. دا نومونه د افغانستان په ټولو یا زیاتو ځایونو کې شته، خو پښتانه کله خپل نومونه تخریبوي.

د یوې پيالي غاړه که رنگ کړی او هغه په یوه کاغذ کيږدی، څیره چې لاس ته راځي، څه ورته وایی؟

د یوې افغانی ژی، څه شکل لري؟

	<p><b>پيژند یا تعریف</b></p> <p>د یوې سطحې یا هواري ټول هغه ټکی، کوم چې له یوه ټکی داسی په نامه منځتکي M څخه همغه واټن (فاصله) r (په نامه وړانگه یا شعاع) ولري، گردی لاین یا لنډ: گردی بلل کيږي (مخامخ څیره)</p>
---	--

لیکنود یې (دا لیکنود په پیل کې ورځنی یا معمول نه دی، وروسته په تحلیلي هندسه کې راځي، خو دلته که وي هم تاوان نه ري):

$$k = \{ X \in E \mid |MX| = r \}$$

لوستل یې: گردی ک د ټولو ټکو ایکس چې ایکس د اي توکی دی، ډېری ده، داسی چې..... دی.

گردی هواره او گردی چاپیری



په پام کی دی وي، چې د ټولو هغو ټکو ډېری یا سټ، چې له  $M$  څخه واټن (فاصله) یې له  $r$  څخه کوچنی یا د  $r$  سره برابر وي د دایرې سطحه بلل کیږي. (موخه یې گردی منځه واره ده یا ټیک: **گردیتوته**)

**د وړانګې (شعاع) پیژند:** لکه د مخه مو، چې په گوته کره، هغه کرښه چې د دایرې ژی یو ټکی د منځ ټکی سره تړي، هغه د دایرې وړانګه یا لنډ: وړانګه (شعاع) بلل کیږي، چې په  $r$  سره یې ښایو (پورته څیره وګوری).

**د نیمې یا قطر پیژند:** هغه کرښه، چې دایره په دننه کې نیموي د دایرې نیمې (قطر) بلل کیږي او په  $d$  سره یې په نڅښه کوو (پورته څیره دې وکتل شي).

### پیژند

د دایرې (گردی) دننه کونج یا ټول کونج یا پوره کونج  $360$  درجې لري.

گردیچاپیریال  $u$  د وړانګې  $r$  سره په لاندې ډول ورکړ شوی دی

$$u = d \cdot \pi = 2r \cdot \pi$$

او همداسې گردی منځ- یا دننه هواره  $A$  د وړانګې  $r$  سره په لاندې توګه ورکول کیږي

$$A = r^2 \cdot \pi = \frac{d^2 \cdot \pi}{4}$$

$$d = 2 \cdot \sqrt{\frac{A}{\pi}} = 2r$$

دا لاندې ورکړ شوی عدد «، پی  $\pi$ »، د دایرې عدد بلل کیږي

$$\pi = 3,14159265 \quad :$$

**یادونه:** دا چې ما کله هواره یا سطحه په  $A$  یا  $F$  او  $\pi$  می په  $Pi$  نڅښه کړې، هیله ده چې دا به گرانو لوستونکو ته ستونځې پېښې نه کړي.

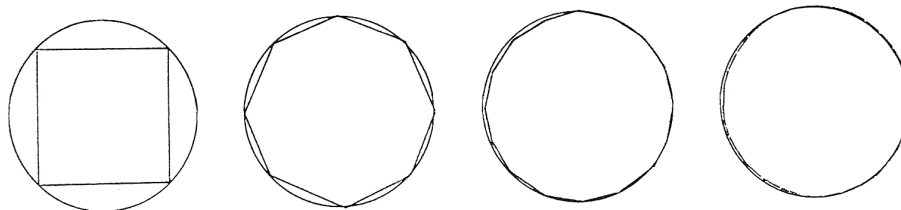
په پورته کې ورکړ شوی د دایرې عدد (گردی گڼ) « $\pi$  پی» گورو، چې بیرته راگرځیدونی دی. له دې امله یو ایراشنل عدد دی او د مات په څیر نه لیکل کیږي، بلکه له لسمیز (عشاریه) وروستی پریوډي یا تل بېرته راگرځېدونی ځیفر پرلپسې دی. په کارونه کې یې مور نژدې شمرنې یعنی راگردونې ته اړ یا مجبور یو، ځکه چې د جېشمیري د عددونو ځایونو له امله، چې پای دي یا پوله لري یا رابند (محدود) دي.

### څنگه سړی په دې بریالی شو چی دا عدد $\pi$ پیدا کړي؟

دا لار دې په لاندې کی لنډه ورکړ شي:

دا له اربنیمدس څخه پیل کارونه (عملیه) یا تگلار داسی پیل کيږي، چی په دایره کی یو ه مربع راگیروي یا رابنده وي او بالاخره یی په منځنیو ولاړو یا عمودونو سوکڅیسیف یا یو په بل پسې ۸، ۱۶، ۳۲ او داسی نورو، لور یا جگ کړي یعنی په همغه وخت کی دوه برابره کړی .

څیره ۱۱۹



یوې گردی ته د یوه  $n$ -گودې له لارې نزدیونه (نزدې کیدنه)

څیرې ۱۱۹ بنايې جی،

	<p>په مخامخ څیرو کی نهه ضلعي ورپسې شپږ ضلعي کببل شوي، دې ته گورو، چې څنگه گردی ته نزدې کيږي</p> <p>مخامخ څیره خو څوگودیز بریښي او ستره تری راتاو گردی مخامخ څیرو کی یوې دایرې ته د یوه <math>n</math>-ضلعي له لارې نزدیونه (نزدې کیدنه)</p> <p>کتل کيږي، هغه ۶۵۵۳۷ ضلعي، چې گورو نزدی یا تیک دایره ده)</p>
---	--

د زیاتیدونکي  $n$  سره کانتی یا ژی یا اړخونه (ضلعي) تل کوچني کيږي، چې پخپله له ۱۰۰ یا ۱۵۰ ورسونو ته په یوه پاڼه کی د کببلو یا رسمولو څخه وځي یا نه کببل کيږي، په همدې وخت کی د منځکی څخه د په همغه واټن د اضلاعو تعداد زیاتیږي (یعنی د مربع د اضلاعو د تعداد). د مربع پیلدایرې سره دا څیره تل نزدې کيږي. په

ورته توگه د دایرې چاپیریال او منځهواره هم همغه چاپیریالدايری ته نزدی کیري. د اضلاعو زیاتیدو سره د دایرې وړانگه هم لوییري. د هغو چاپیریال او منځهواره تل همغه ډیر ضلعي او په همدې توگه د چاپیریالدايری څخه. په روبنانه توگه لیدل کیري چی د چاپیریالدايری او د سطحی (منځ هوارې) د ناپای ډیر  $n$  ضلعو سره د  $n$  - ضلعي سره یوځای پریوځي یا یوځای کیري.

**په لاندې جدول کی د چاپیریال ارزښت او په همدې توگه د سطحی (منځهوارې ارزښت) د زیاتیدونکي  $n$  عدد سره ستابیل (په خپل حالت، چی ډیر تغیر په کی نه راځي) پیژندور دی:**

$n$ پیدایښتي گڼ	$U_n$ چاپیریال	$F_n$ منځهواره
4	5,656854	2
8	6,122934	2, 828427
16	6,242890	3,061467
32	6,273096	3,121445
64	6,280662	3,136548
128	6,282554	3,140331
256	6,283027	3,141277
512	6,283145	3,141572
1024	6,283175	3,141572
2048	6,283182	3,141587
4096	6,283184	3,141591

وروسته به وکتل شي چی څنگه د گردی چاپیرال (دایرې محیط) او د دایرې هواره (سطحه) د درېگوډیو (مثلثونو) له لارې ټاکل کیدی شي

**پیلبلکه:**

د بانک مدیر بناغلی سپین غواري د کنفرانسونو لپاره یو د بنیښي میز جوړ کړي چی په هره لور یی ۸ کسان ځای نیولی شي. ایا ددی لپاره یو میز چی ۲ متره نیمی (قطر) ولري بسیا کوي، که د یوه نفر لپاره له ۷۵ څخه تر ۸۰ سانتیمتره د میز په سور، ځای

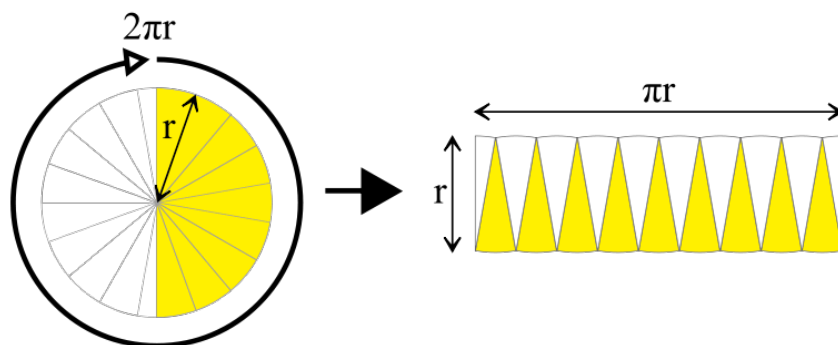
په پام کی نیول شوی وي؟

دا میز به څومره گران وي، که یو څلوری متر یا مترمربع د کار د معاش سره ۲۵۰ افغانی گران وي یا ۲۵۰ افغانی ارزښت ولري؟

دمیز محیط (چاپیریال) دی  $\pi \cdot 1m = 6,248m^2 = U$  په د هرکنفرانس برخوالو لپاره ۷۵ سانتی متره سرورځاي په پام کی وي، نو د محیط دی :  $8.75 = 600cm$

د ۸۰ سانتیمتره ځاي د نفر په سر  $80.8 = 640cm$  . قیمت وسطی یا منځ ارزښت یی  $6,2m$  دی. پس د نېکو هیلو سره ټول کسان په میز ځاي نیولی شي میز دا سطحه (هواره) لري:  $F = \pi \cdot 1m = 3142m^2$  او له دې امله  $3,142.250 = 785,40$  یانې افغانی ارزښت لري..

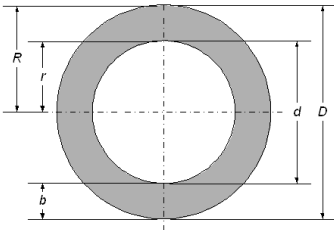
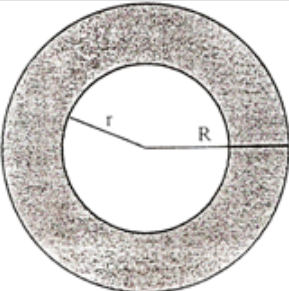
**په لاندې څیره کې کتل کیږي، چې د گردی منځهواره نزدی**



$$A = r^2 \cdot \pi = \frac{d^2 \cdot \pi}{4}$$

ده ( په پورته څیره کې د څیرې کوچنیوالي له امله د گردی څیره لږ تخریب شوه، خو دا ستونځې پوهور دي )

**گردیتوته ، گردیبرخه او گردیکری**

	<p>دیر وخت دننه- یا خونديگردي له چاپيريالگردي کوچنی وي. نو له دې امله د دوي په منځ کې يوه کرې منځ ته راځي، چې د هغې منځهواره د دواړو گردیو د کمون، کمبنت یا توپير څخه شميرل کېږي.</p>
	<p><b>جمله:</b> موږ دوه دایري لرو، چې د محاطي دایري وړانگه R او د محيطي دایري وړانگه r ده، نو د</p> $F_K = \pi R^2 - \pi r^2$ $F_K = \pi(R^2 - r^2)$ $F_K = \pi(R - r)(R + r)$

بل ډول يې: یوې د دایري کرې منځهواره ده  $A = \pi \cdot (R^2 - r^2)$

همداسې کیدی شي، چې د دایري محیط د دایري قطاع (د دایري برخې) د سور او دننه او دباندې گردې د نیميو څخه هم وشميرل شي، چې په لاندې کې يې گورو:

$$A = (D - b) \cdot b\pi$$

$$A = (d + b) \cdot b\pi$$

### پيايلگه:

د سپين ميز درز پيدا کړ. چې له غاړې يا ژۍ يې پنځه سانتي متره دننه لور ته ځغلي. بناغلی کړ او فکر کوي، چې که داميز په پنځه سانتي متره کوچنی کړی. کومه ميز سطحه پاتي کيږي او د دایري کرې چې له منځه ځي څومره لويه ده؟

او د همغه پیل نیونی سره لکه د مخه څومره نفر اوس په ميز ځای نیولی شي؟

$$F = (0,9\text{m})^2 \cdot \text{Pi} = 2,835\text{m}^2$$

د دایري کرې سطحه او محیط چاپیریا په لاندې ډول دي

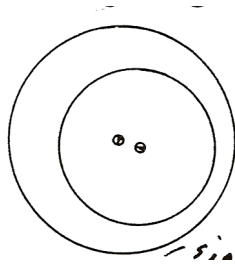
$$F = 1,95\text{m} \cdot 0,05\text{m} \cdot \text{Pi} = 0,30\text{m}^2$$

$$U' = 2,095m.Pi = 5,969m ; U' :8 = 74,6 \text{ cm}$$

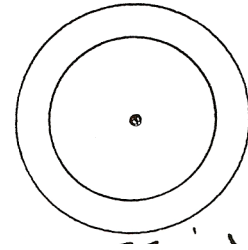
د داسې لږ ستونځو سره بیا هم ټول کسان پر میز ځای نیولی شي.

### د گردیو پړوتځایونه یو بل ته:

هغه دایرې، چې منځتکي یې یو په بل پرېوزي کونځنټري یا راټول او په غیر له دې اکسختري یا ناراټولي بلل کیږي.



نا یومنځي دایرې یا کړی

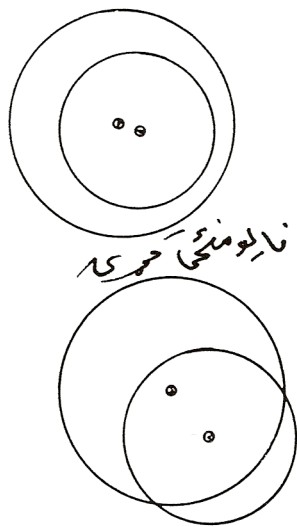


یو منځي کړی یا دایرې

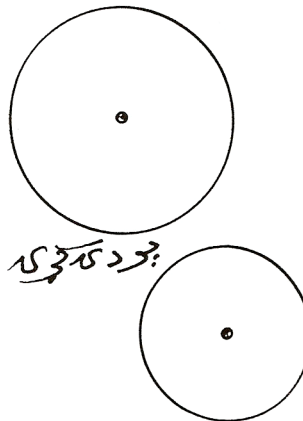
ددې لپاره. چې یوه دایره ټوله په بله پرېوزي کېدی شي دا کار د راکښلو له لارې په کونځنټري یا راټول دایرو وارول شي.

وي کیدی شي چې د راکښلو له لارې

په کونځینټري گردیو یا راټول گردیو څیره ۱۲۱ بدلی شي.



نا یومنځي حورې



جورد کړې حورې

هغه دوه یا زیاتې گردۍ چې منځ ټکي یې یو په بل پریوځي کونځنټري *Konzentrie* یا راټولې او په غیر له دې اکسټینټري *Exzentrie* یا ناراټولې بلل کیږي . که یوه گردۍ ټوله په بله کی پرته وي کیدی شي چې د راکنټلو له لارې په کونځنټري گردیو یا راټولگرديو بدلی شي.

که گردۍ یو بل پوره پټي نه کړي، نو د گډو هوارو) = غوڅډیريو) یا گډو پاتي یا باقي شمیرنه له ستونځو سره مخامخ کیږي . که گردۍ یو له بل سره گډ ټکي ونه لري نو دا گردۍ یو دبل سره پردۍ بلل کیږي . د دې گردیو څیرې مو نه کنبلي، دا کار دې گران لوستونکي په غاړه واخلي .

### څو پیژندونه یا تعریفونه:

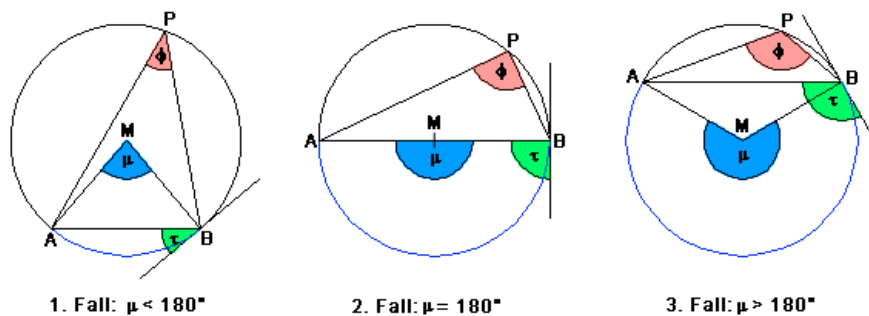
د گردۍ هغه برخه گردیتوته ( سگمنت ) *Segment/ Abschnitt* بلل کیږي، که چیرې یوه دایره (گردۍ) د یوې کرښې له لارې یا کرښه باندي غوڅه شي . داسی یوه کرښه غوڅکرښه یا غوڅوونی ( سیکانت ) *Sekante* بلل کیږي. غوڅکرښه گردۍ په دوه ټوټو ویش. که دا کرښه د گردۍ له منځ څخه تیره شي، نو گردۍ په دوه برابر و برخو ویشي، چې دا بیا گردۍ نیموونی بلل کیږي. هغه غوڅوونی چې له منځ ټکي تیره شي، د گردۍ نیمې یا لنډ: نیمې بلل کیږي. که گردۍ په یوه ټکي کی لمس کړی نو دا کرښه تانجنت بلل کیږي او که له گردۍ څخه دا کرښه دباندې تیره شي نو تیریدونی کرښه بلل کیږي . په گردۍ د غوڅکرښې دننه پرته برخه د گردۍ ټوټوونی ( *Sehne* ) یا وتر بلل کیږي . ټوټوونی یا *Sehne* بندکرښه ده په داسی حال کی چې غوڅی ، تنجنت او تیریدونکی ناپاي کرښي یا -لکه، چې ورسره بلد یو - کرښي دي . د یوه گردۍ څخه د دوه وړانگو په مرسته کیدی شي یوه برخه راغوڅه شي دا برخه گردیبرخه یا سکتور *Sektor* بلل کیږي. د منځټکیکونج یا منځني کونج او لیندي ( *Bogen* ) *b* سره مخامخ څیره ده

په لاندې څیرو کې د نومونو له الماني څخه په پښتو کونونه له کین وښی لورته:

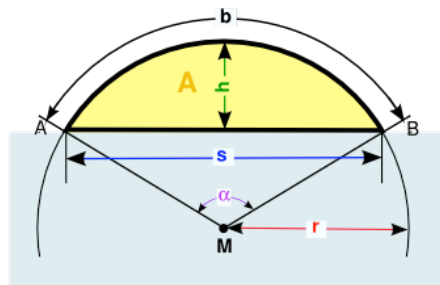
گردیلینده *Kreisbogen* د گردۍ ټوټه وونی(ټوټوونی) *Kreissehne* ،  
گردۍ برخه *Kreissector* ،



په گردی کی د کونجونو ډولونه:



د گردی ټوټه ( د څیړني پوهیدوله پاره دالاندې څیره پوره په پام کې وړی)



گردی ټوټه Kreissegment, د گردی ټوټی لویي:

- $\alpha$  = منځتیکونج Mittelpunktwinkel
- $b$  = گردی لینده Kreisbogen
- $h$  = د ټوټی جگوالی Segmenthöhe



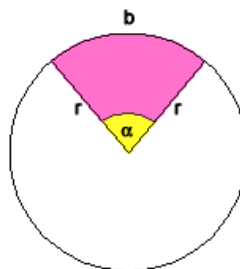
- Radius = ورانگه
- Kreissehne = ټوټه ووني (وتر)
- Segmentfläche = ټوټې هواره
- Kreismittelpunkt = گردې منځټکې
- Verbindung = A-M-B ترڼه برابرېښيز درېکودي

### د گردیتوټې فرمولونه Formel zum Kreissegment

$A = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot r^2 \cdot \pi - \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot \sin \alpha,$ $A = \frac{r \cdot b}{2} - \frac{s \cdot (r - h)}{2},$	<p>منځهواره مخامخ فرمول</p> <p><u>Flächeninhalt</u></p>
$r = \frac{4h^2 + s^2}{8h}$	<p><u>Radius</u> ورانگه ( شعاع )</p>
$s = 2r \cdot \sin \left( \frac{\alpha}{2} \right),$ $s = \frac{2h}{\tan \left( \frac{\alpha}{4} \right)} = 2h \cdot \cot \left( \frac{\alpha}{4} \right)$	<p><u>Kreissehne</u> ټوټه ووني ( وتر ) د وروسته لپاره دې په پام کې وي</p>
$h = r - \left( r \cdot \cos \left( \frac{\alpha}{2} \right) \right),$ $h = r - \sqrt{r^2 - \left( \frac{s}{2} \right)^2},$ $h = \frac{s}{2} \cdot \tan \left( \frac{\alpha}{4} \right)$	<p>Segmenthöhe</p> <p>د ټوټې جگوالی یا قطعې جگوالی</p>

$b = 2r \cdot \frac{\alpha \cdot \pi}{360^\circ},$ $b = r \cdot \pi \cdot \frac{\alpha}{180^\circ},$ $b = \frac{\alpha \cdot \pi \cdot (4h^2 + s^2)}{1440h},$	دليندي اوردوالي <a href="#">Bogenlänge</a>
$\alpha ,$ $\alpha = 4 \cdot \arctan\left(\frac{2h}{s}\right)$	<a href="#">Mittelpunktswinkel</a> منختکيکونج په درجه کچ ( <a href="#">Gradmaß</a> )
$\pi \doteq 3,1415926536$	<a href="#">Kreiszahl</a> کرديکن

### گردی برخه Kreissektor يا د گردی قطاع



Formeln zum Kreissektor د گردی برخې يا قطاع فرمولونه	
$A = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot r^2 \cdot \pi$	منخهواره <a href="#">Flächeninhalt</a>
$b = \frac{\alpha}{180^\circ} \cdot r \cdot \pi$	د گردی ليندي اوردوالي يا د قوس--
$r$	<a href="#">Radius</a> وړانگه
$\alpha$	منختکيکونج (په درجه کچ) <a href="#">Mittelpunktswinkel</a> ( <a href="#">Gradmaß</a> )

$\pi \approx 3,1415926536$	<a href="#">Kreiszahl</a> کرديگن يا د داېري عدد
----------------------------	---

د يوې گردې او کرښو پروتخايونه يوبل ته:

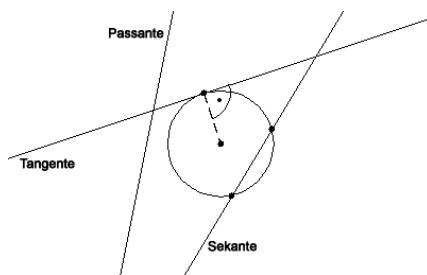
کرښه، چې گردې غوڅوي، غوڅونې بلل کيږي.

کرښه، چې گردې لمسوي يا د گردې مماس دی، د گردې لمسوني يا مماس بلل کيږي.

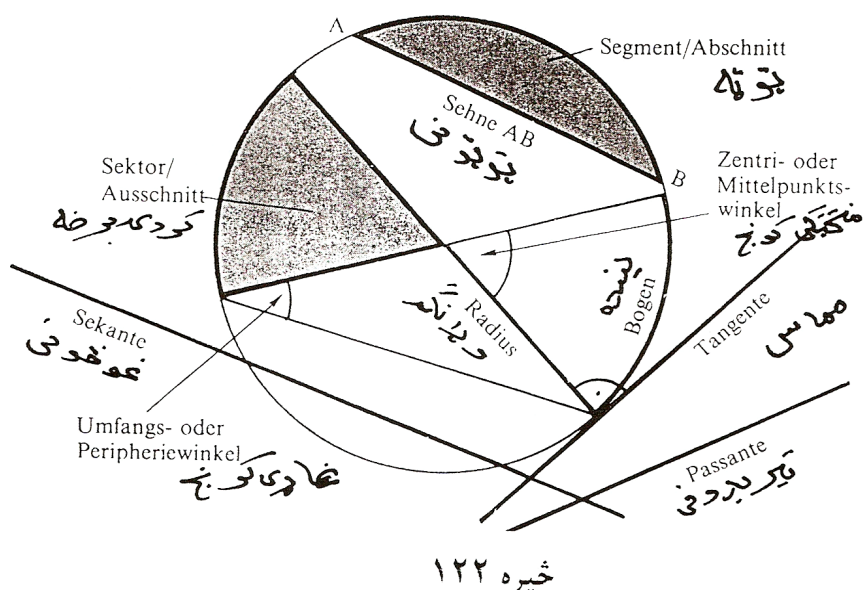
کرښه چې له گردې تيريږي، له گردې تيرېدونکې بلل کيږي.

د کرښو پروتخايونه د گردې ته:

په لاندې څيره کې د کرښو نومونه: **Passante** تيريدونې ، **Tangente** تانجنت ، **Sekante** غوڅونې ، لاندې څيره کې خو هرڅه روښانه دي.



په لاندې کې پورته ټولې څېرې په يوه څېره کې ورکړل شوي دي

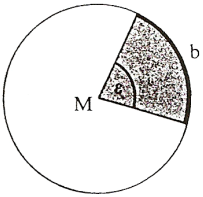


خیره ۱۲۲

**پیلبلگه :**

د یوه بنس موټر جوړولو لپاره ۱۷۵۰ کیلوگرامه اومه (خام) مواد په خرڅ رسیږي یا مصرفیږي. په دې کی اوسپنه او فولاد ۷۵ په سلو کی، په پالستي، شیشي او رنگ ټول ۹ په سلو کی رسیږي، په رنگه فلزونو او ربر ۶ په سلو کی رسیږي، او تیل ۴ په سلو کی. یو گردیدیاگرام وکارۍ چی هره برخه په کې ورکړ شوي وي .

	<p>د گردی ټوله هواره د ټولو موادو سره مساوي ده ( ۱۰۰ په سلو کی ) د جوړموادو برخه د گردببرخی څخه عبارت دی. یوه د یو په سلو کی برخه به یوه گردۍ برخه وي د منځکونج سره <math>360^\circ:100=3,6^\circ</math> وی .</p> <p>یعني <math>4\% \sim 14,4^\circ; 6\% \sim 21,6^\circ; 9\% \sim 32,4^\circ; 75\% = 270^\circ</math></p> <p>خیره دی، چې د هرڅه برخه کې ورنزدي شوول شوي وي په یوې گردۍ</p>
--	---

 <p>ε لویوالي b ده</p> <p>کټی د پوره یا لږدی او اغوستی</p> <p>خیره ۱۲۴</p>	<p>کې وکښل شي یا لاندې</p> <p><b>د گردی برخې خیره څرگندوي» د</b> منځکونج چې د ، ε سره یې په نڅښه کوو لویوالي په تناسب برخهواره Fsk او هم لینده b تغیر خوري او لاندې باوري دي:</p> $\frac{F_{SK}}{F} = \frac{b}{U} = \frac{\varepsilon}{360^\circ}$
---	--

**د ډبل برابرېون د دویمې برخې څخه باوري دي:**

**جمله :** د گردی برخې د لیندې اوږدوالی داسی دی:

$$b = \frac{n \cdot \varepsilon}{360^\circ} = \frac{2\pi r \cdot \varepsilon}{360^\circ} = \frac{\pi r \varepsilon}{180^\circ}$$

د لومړی برخې څخه د سیکتور یا گردیبرخی لپاره باوري کیږي

**جمله :** د سیکتور یا د گردیبرخی منځهواره په لاندې ډول ده:

$$F_{Sk} = \frac{F \cdot \varepsilon}{360^\circ} = \frac{\pi r^2 \cdot \varepsilon}{360^\circ} = \frac{r b}{2}$$

اریکي د مات  $F_{Sk} = \frac{r b}{2}$  د  $F_{Sk} = \frac{F \cdot b}{n} = \frac{\pi r^2 b}{2\pi r}$  د لنډونې څخه منځ ته راغلي

**بیلگه:** د خام موادو برخې ( بیلگه مخ ) هواره څومره لویه ده، که د گردی دیاگرام ۵ سانتي متره وي ؟

$$F \text{ اوسپنه او فولاد} = (25 \pi : 360^\circ) \cdot 270 = 0,218 \cdot 270 = 58,905 \text{ cm}^3$$

$$F \text{ پلاستیک} = 0,216 \cdot 32,4 = 7,069 \text{ cm}^3$$

$$F \text{ رنگه فلزات} = F \text{ رپر} = 0,218 \cdot 21,6 = 4712 \text{ cm}^3$$

$$F \text{ تیل} = 0,218 \cdot 14,4 = 3,142 \text{ cm}^3$$

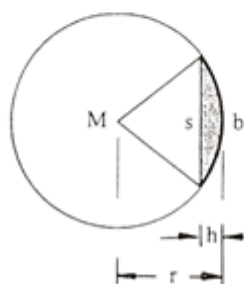
د ټولو ټولګه یا د ټولو زیاتون باید د گردۍ هواره ورکړي:

$$F = \pi r^2 = 78,54 \text{ cm}^3$$

د برخه‌وارې ددې فرمول سره نور د برخه‌وارې شمیرلو لپاره هم کوم جنجال یا پرابلم نه شته. د اخیښت هواره دلته بیا د برخه‌وارې او د دوه وړانګو او ټوټو څخه جوړ مساوي پښیز دريګوډي کمون دی.

څیره ۱۲۵

ګردۍ ټوټه



د دريګوډي هواره لپاره باور لري:

$$F = s(r - h) / 2 = 0,5 r^2 \cdot \sin \epsilon$$

(تریګونوميټري دی وکتل شي ....) او

ددې سره ټوټه هواره

جمله: د ګردیتوټې یا سکمنت هواره په لاندې ډول دي:

$$F_{Sg} = F_{Sh} - F$$

$$F_{Sg} = (br/2) - s(r - h) / 2$$

$$F_{Sg} = (\pi r^2 \epsilon / 360^\circ) - (r^2 \sin \epsilon) / 2$$

$$F_{Sk} = (r^2/2) [ \pi \epsilon / 180^\circ - \sin \epsilon ]$$

په کارونه یا عمل کې د ټوټه هواره لپاره ګټور نژدې ارزښت  $F_{Sg} = (2/3)sh$

ښوول شوی دی.

پیلیلگه: مدیر کراو له خان څخه پوښتي چی ایا د گردیمیز په ځای به یو منظم اته کو نجی هدفمند بهتر نه وای؟ نو په اختیار کي هواره او چاپیری به څومره لوي وي؟

لمړی گردیتوبی شمیرو. په ورته ډول لکه د گردی نزدې شمیرلو لپاره، د مربع څخه و ډیرکونجی ته، مخ ته څو او دې د اړخونو اوږدوالی  $s$  شمیرو.

منځولاره  $m$ ، د اته کو نجیز کانتی یا ژی  $k$  او بالاخره د دگردیتوبی جگولی  $h$  د پیتاگوراس د جملی په مرسته شمیرو.

لاندي لاس ته راځي:

$$s = \sqrt{2} \cdot 1 = 1,414 \text{ m}; m = \sqrt{a - (1,414 : 2)^2} = s / 2 = 0,707 \text{ m}$$

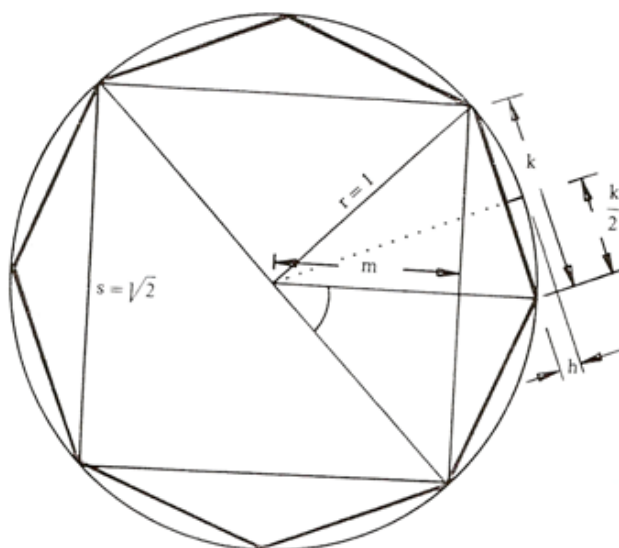
$$k = \sqrt{(1 - 0,707)^2 + 0,707^2} = 0,756 \text{ m}$$

$$h = 1 - \sqrt{1 - (0,765 : 2)^2} = 0,076 \text{ m}$$

$$d = 45^\circ = \text{ع}$$

له امله  $b = 0,393 \text{ m}$  دی. / له دې سره

$$F_{\text{توبه}} = 0,5 \cdot [0,393 \cdot 1 - 1,414(1 - 0,076)] = 0,039 \text{ m}^2$$

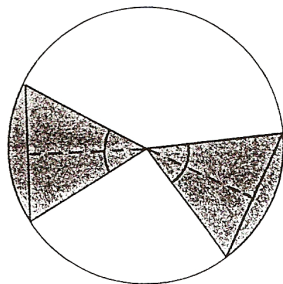


له دې څخه په هر صورت د بنیښی میز جوړیږي. ټوله غورزول شوې له دې امله په لاندې توگه ده:  $8.0.039 = 0,312 \text{ m}^2$ . میز اوس لاندې هواړه لري

$F_0 - F_{\text{غورزولشوي}} = 2,828 \text{ m}^2$

او په همدې توگه لکه د کوچني شوي گردیهواړه د وړانگي  $r = 95 \text{ cm}$  سره. د کیناستلوڅاي سور (k) حتی زیات شوی، چاپیری اوس  $U = 8.0,765 = 6,123 \text{ m}$

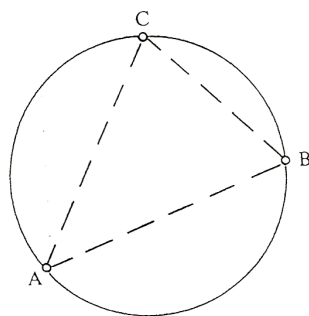
### د مساوي ټوپوونو جمله



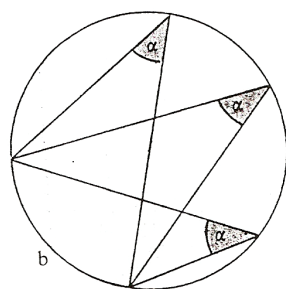
څیره ۱۳۱

مساوي اوږدې گردیتپوټی د گردی له منځتکي مساوي فاصلی لري، مساوي منځتکي کونجونه، مساوي گردیلینده، او مساوي گردیتپوټی او مساوي گردیبرخی لري.

### د چاپیرگردی جمله



د درې ټکو A, B, C لپاره یوه گردی موجود ده چی د دریواړو ټکو څخه تیریږي: دا د دریگونجي ABC چاپیرگردی بلل کیږي څیره

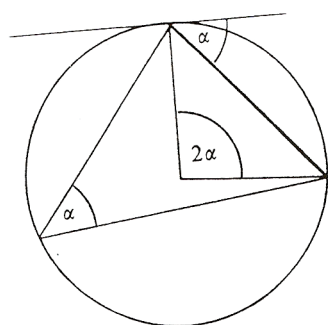


څیره ۱۳۳

### د پریفري - یا ژیکونج جمله

په همغه لینده باندې ټول پریفري - ژی کونجونه مساوي دي





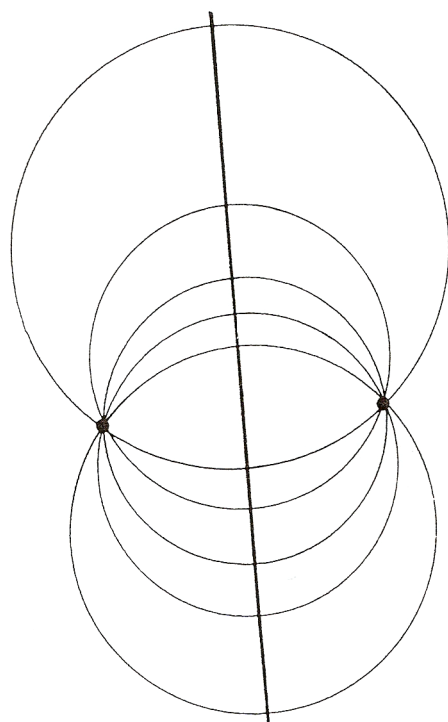
د منځتکي کونج او پریفریکونج یا ژبکونج جمله:

یو منځتکي کونج دوه برابره دومره لوي دی لکه په دې تړلی پریفری کونج. ( چاپیر کونج )

څیره ۱۳۴

د منځتکي کونج او د

تانجنت-پوتوني-کونج جمله:



د منځتکي کونج دوه ځله دومره لوي دی لکه په دې اړوند تانجنت-پوتوني کونج.

د گردیو جمله چی په دوه ټکو کی

سره پریکوي

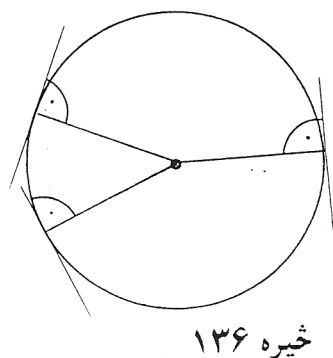
د ټولو گردیو منځتکی چی پو بل په

دوه ټکو A او B کی غوڅوي یو

ناپایکرنه باندي چی ځایلاين

( ځایکرنه ) ورته وايي پراته دي.

څیره ۱۳۵



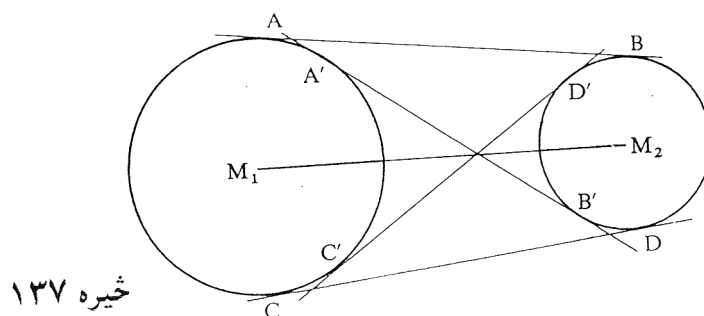
### د وړانگې او تنجنت جمله

په لمستکي پرته وړانگه او اړوند  
 تانجنت سره یو په بل ولاړ یا نیغ  
 پراته دي.

### د تانجنت جمله:

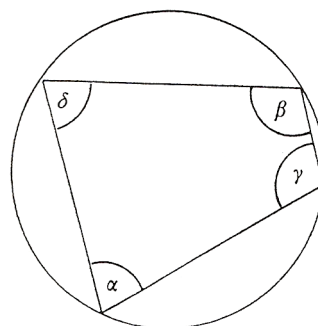
د دوه گردیو د منځ ټکو  $M_1$  او  $M_2$  سره تانجنتونه دنننی (دباندي) تانجنتونه  
 نومبيري که د دوه گردیو د منځټکو کرښه  $M_1 M_2$  غوڅه (غوڅه نه) کړي. که چیرې  
 دوه گردیو گډ دننني او دباندي تانجنتونه ولري، پس د داوړو تانجنتونو غوڅتوبې  
 همغه اوږدوالی لري.

$$|AB| = |CD| \iff (=>) \text{ په همدې ډول } |A'B'| = |C'D'|$$



27

د وترنو جمله: د وترنو زاويې، چې مخامخ پرته دي، يو بل سره  $180^\circ$  ته پوره کوي

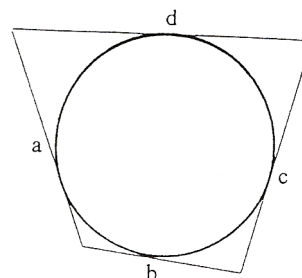


څیره ۱۳۸

$$\alpha + \beta = \gamma + \delta = 180^\circ$$

د تنجنتونو څلورضلعیو جمله:

د تنجنتونو په څلورضلعي کې د مخامخو ضلعو لویوالی د نورو ضلعولویوالی سره برابر دی



څیره ۱۳۹

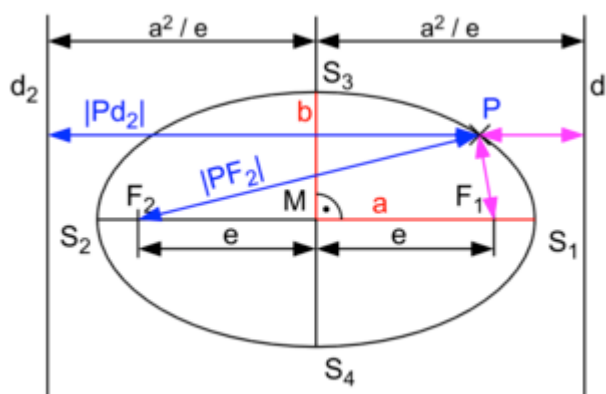
$$A+c = b+d$$

## ۲ - ایلپسی ( بیضوي یا هگی ) (دلته موخه هواره ده)

Ellipse

### پیلبلگه :

د کراو میز جورښت باندي مور په اته کونجی اوبی یا حل کی تم کری وو. دا چی په دی ډول یو میز سره تل د زخمی کیدو خطر موجود دی پوښتنه رامنځ ته کیږي چی : داسی یو را گردشوی ښکلی شکل ، چی گردی نه وي او منظم غوڅ وي، شته، چی د کراو ارتیا پوره کری؟ په ریښتونی ، داسی یو اوبی یا حل موجود دی، لکه چی لاندی څیره ښایي، چی هر د غاړی ټکی دوه ټکو واټنونو ته یو ثابت واټن لري

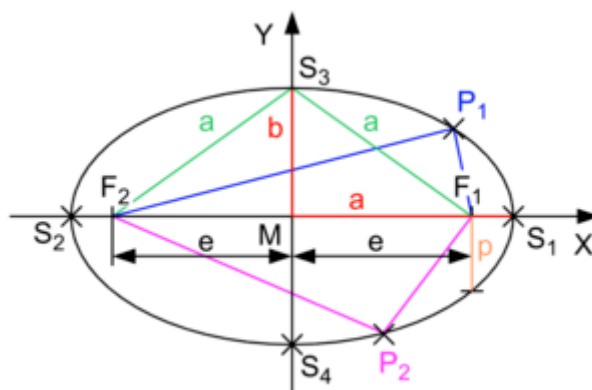


### پیژند یا تعریف:

د ټولو هغو ټکو P ډیری ته چی له دوه ځای په ځای ټکو F1 او F2 (سوزبډټکی یا بهتره سوزونټکو) څخه ثابت یا همغه واټن یا فاصله لري، ایلپسی نومیږي

لاندی واټنونو یا فاصلو ته سوزونورانگی وايي.

$$|PF_2| = r_2 \wedge |PF_1| = r_1$$



$$E = \{P \mid |\overline{F_1P}| + |\overline{F_2P}| = 2a\}$$

منځ ټکي) واروی M په (O ته د ایلیپسی منځ ټکی وای،  $e$  ته د سوزونوټن یا فاصله یا لاینی ایکسختریختایت (lineare Exzentrizität) یا لاینی ناراتوله وایي. ددی لویو لپاره لاندې اړیکي باوري دي

$$I \dots r + r = 2a \wedge II \dots a^2 - b^2 = e^2$$

په دې کی  $a$  او  $b$  د ایلیپسی لوي او وور نیممحورونه دي. اړیکه I روشانوي، که چیرې د ایلیپسی ټکی P د نیممحور  $a$  په اخر کی وټاکل شي، II د پیوتاگوراس له جملی لاس ته راځي که د P ټکی د  $b$  نیممحور په اخر پروت وي. دواړه ناپاکرښی چی د سوزونټکي تیریبوي او په دې په O کی ولاړه ناپای کرښه د ایلیپسی سیومیتری محورونه جوړوي. د خوشي په ټکی P کي هره په تانجنت ولاړه کرښه د سوزونورانگو ترمنځ کونج نیموي.

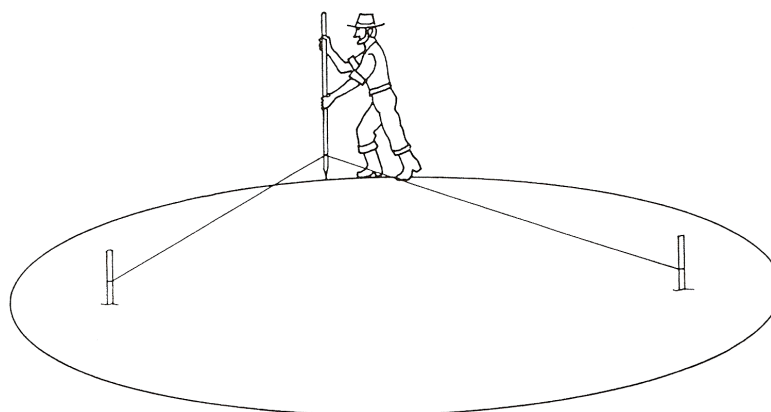
### د ایلیپسی جوړول د باغوان لخوا یا د ایلیپسی باغواني جوړښت:

دا څیره دې گران لوستونکي د تمرین په توگه وباسې، د یوې رسی، چی په  $2a$  اوږده وي، په داوړو سرونو کي موري وتړی او دا بپا په ځمکه ټکوهي، د یو بل (خوزیدونکی (موري یا لرگي په مرسته دا پری راکښ کړی یا راکاری او وگرځوی، دلته کوم شکل چي پیداکیږي ایلیپسی ده او دواړه د پری د

سرونو ټکي چی موري پري وهل شوي سوزونټکي دي. څیره په هر کواوردینات سیسم او یا په یوه میلی متر کاغذ کونځینتري یا راټولو گردیو په مرسته بل جوړښت امکان پیدا کیري، چی سری د یوه ټکي دوه گردی د  $a$  او  $b$  وړانگي ووهي او هره د خوښي وړانگه د نننی گردی په  $Pb$  او د باندنی گردی په  $Pa$  کی غوڅوي. که د  $Pb$  څخه یوه پرته کرښه ویستل شي او د همغه تر  $Pa$  دوام، نو هرچیرته یو د ایلیپسی یا هکی یا بیضوي ټکی لاس ته راځي. د ایلیپسی هر ټکی داسی پیدا کیدی شي. پیژندل کیري چی هر  $2b$  ته غبرگ ټوټونی

د  $k = a/b$  فاکتور سره لنډ شوی دی. له دې سره د هواری دننه هم تغیر خورې ددې فاکتور  $k$  په اندازه

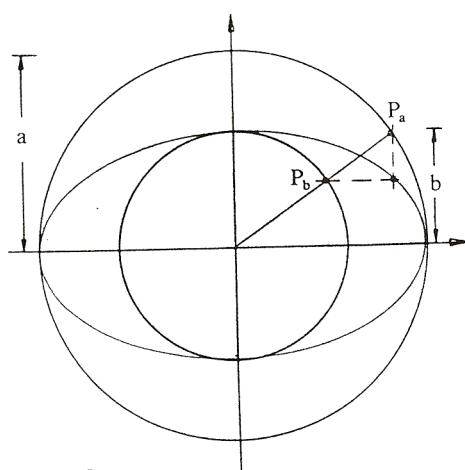
$$F(Kreis(gardai)) = \pi r \cdot r \Rightarrow \pi r \cdot (k \cdot r) = F(hagai, baizawy)$$



څیره ۱۴۱

او له دې چی  $r = a$  او  $(k \cdot r = b)$  د لته  $r$  د گردی « لویه نیمه اکسی (محور) ده

**جمله** : د ایلیپسی هواره ده  $F = \pi ab$  :



خیره ۱۴۲

د ایلپسی چاپیرونی په ساده ډول  
نه شي شمیرل کیدی، په عمل کی  
په زیات وخت کی نزدیونه یا نزدې  
شمیرنه بسیا کوي.

جمله : د ایلپسی چاپیری:

$$U \sim \pi (1,5 \cdot [a+b] - \sqrt{ab})$$

او یا گردی ته ورته ایلپسی. دا  
په دې مانا چی  $a \sim b$ :

$$U \sim \pi \cdot \sqrt{2(a^2 + b^2)}$$

دا فرمولونه، که  $a = b$  وي د گردی چاپیری ته ځي:

$$U = \pi (1,5 \cdot [a+a] - \sqrt{a^2}) = \pi (3a - a) = 2\pi a = 2\pi r \Leftrightarrow$$

اویا په په همدې توگه یا  $\Leftrightarrow$

$$U = \pi \cdot \sqrt{2(a^2 + a^2)} = \pi \cdot \sqrt{4a^2} = \pi 2a = 2\pi r$$

بیلگه:

کوم خورا لویوالی د بناغلی کړاو میز په ایلپسی یانیزوی یا هگی خیره لرودی  
شي؟

لوي محور  $a = 1\text{m}$  پاتي کيږي، کوچنی محور دی:  $b = 95\text{cm}$ . داچی میز باید د  
درځ ژوروالي پورې غوڅ شي. نوله دې امله هواره ده:

$$F = \pi \cdot 1.0,95 = 2,985\text{m}^2$$

چاپیری کیږي:

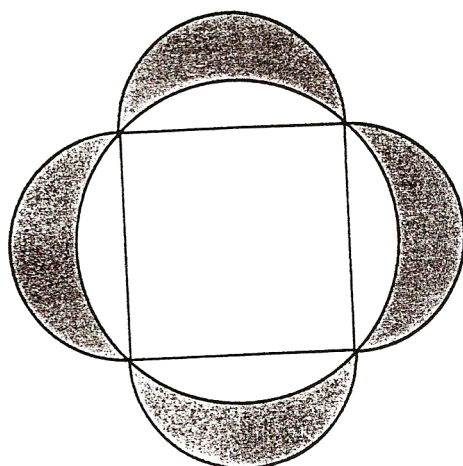
$$U \sim 1(1,5.1.95 - \sqrt{0,95}) 6,127 \text{ m} \Leftrightarrow$$

یا په همدې توګه د بیضوي یا هګی و د ګردی فورم ته یا ګردیڅیرې ته نزدې فورم نیسي  $U \sim 6,128 \text{ m}$ . له دې امله هګیڅیره د میز لپاره مساعد اوبی یا حل دی.

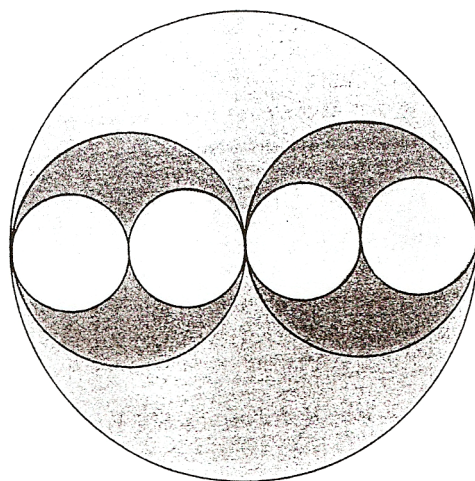
تمرینونه

- ۱ - په کالیفورنیا کی د یوزیمیت ملي پارک Yosemite National Park ، خپل ماموت ونو (Mammutbaumbestände) له امله خورا مشهور دی. کوم چاپیری یی هغه ونه لري چی وړانګه یی ۷ ، ۴ متره وي؟
- ۲ - د لاس ساعت دقیقه بنونکی ۱،۵ سانتي متره اوږد دی (خرخونمحور-څوکه)، څوکه یی په یوه سانیه، یوه ساعت، یوه ورځ، یوه اونۍ، یوه کال کی څومره لار وهي؟
- ۳ - ځمکه نزدې ۶۳۷۸ کیلومتره یوه قطبي (اکواتور) وړانګه لري. قطبچاپیری یی څومره دی؟
- ۴ - په خیال کی دې ولرو، چی له اکواتور یا قطب څخه یو پیری غزوو ( ۴۰۰۰۰ کیلومتره)، کوم چی د اکواتور یا قطب له چاپیری څخه یومتر اوږد دی. د یوه ځانګړي تخنیکي چمتووالی له لارې په هرځای کی د ځمکی څخه په همغه واټن راوړل کیږي. ایا دا واټن پوره لوي دی چی سپری ددې ترمنځ یوه د (ګیرکلی) پاکي وځایوولی شي یا ځای کړای شي؟
- ۵ - د غوڅهواره به یی د ځمګي سره څومره وي که د اکواتور یا قطب په اندازه جګ وي؟
- ۶ - په اکواتور یا قطب دوه ځایونه څومره لري دی، که یو له بل یوه اوږددرجی په





خیره ۱۴۳



خیره ۱۴۴

اندازه لری وی؟  
 ۷- د گردی چاپیری څنگه تغیر خوری، که د هغه وړانگه دوه برابره شی یا په همدې ډول نیمه شی؟  
 ۸- وبنایی : د مربع هواره د څلور میاشتو (سپورمیو) د هوارې سره مساوی ده (خیره ۱۴۳).

۹- د خیرې سره سم د گردیو هوارخوندي یا هوار دننه یا هوارمتن د مساوی وړانگي سره وټاکي. دا هره یوه د لویي گردی په سلو کی څومره برخه جوړوي؟  
 وبنایی چی د څلورواړو گردیو چاپیری د همغی وړانگي سره دومره لوی دی لکه د راچاپره یا دباندې گردی چاپیری.  
 ۱۰- د یوې مربع دباندې او دننه یوه گردی راگرځیدلي. د دواړو گردیو هوارې یو بل ته څنگه ځانونه نیسي (تناسب یا ځانیونه)؟

۱۱ - د دوه گردیو منځ ټکی د مساوي وړانګي  $r = 7,2 \text{ cm}$  سره، یو له بل دومره لري دي لکه دا وړانګه . د دواړو گردیو ګډ هواره اندازه کړی، چی څومره ده؟

۱۲ - په یوه گردی، چی وړانګه

یې  $r = 10 \text{ cm}$  ده، که

یوه گردیکړی کینبول شي،

چی هواره یې دومره لویه ده

لکه د دننه گردی هواره. د

دباندي گردی وړانګه به

څومره وي؟

۱۳ - د یوې گردی

برخهوارې،  $F_1$  او  $F_2$ ، لکه په

څیره ۱۴۵ کې ورکړ شوي،

وښایي، چی وړانګه یې  $r = 4 \text{ cm}$

وي. وښایي چی هواره په څلورو مساوي

هوارو ټوټه شوې ده ( څیره ۱۴۶ )

۱۴ - د هغه گردې وړانګه وښایي، کوم چی همغه هوارخوندي لري لکه :

الف ( یوه مربع، چی داړخ اوږدوالی یې ۵ سانتي متره وي.

ب ( یوه روتی چی نیمي یې ۴ سانتي متره او ۶ سانتي متره وي .

پ ( یو مساوي اړخیز دریکونجی چی د اړخ اوږدوالی ۷ سانتي متره وي.

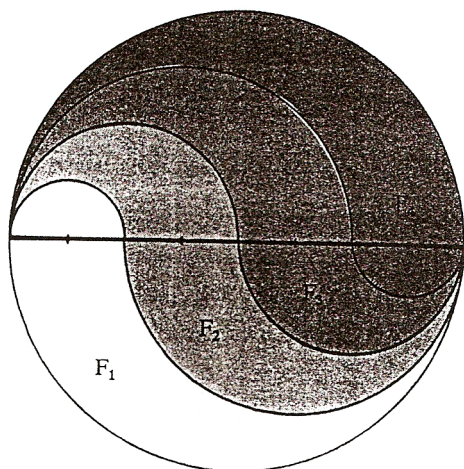
۱۵ - د یوه پنډ پینسیل سره یوه گردی وهل کیري، چی دننی وړانګه یې ۵

سانتي متره وي. داچی پنسل یو سانتي متره پنډ دی، نو دا په ریښتینی

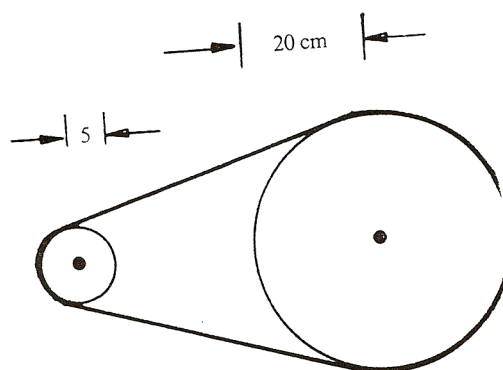
یوه گردیکړی ده. د دې گردیکړی هواره وشمیری.

۱۶ - یوه ساتلیت یا جوړه، یعنی مصنوعي سپوږمی، له ځمکی په یوه گردی

راڅرخي، چی سرعت یې په سانیه کی ۸ کیلو متره دی. د ځمکڅرخون لپاره



څیره ۱۴۵



خیره ۱۴۶

دا ۱ ساعت او ۲۸ دقیقو ته  
 ضرورت لري. وبنایي چی دا  
 ساتلیت یا جوړه سپورمی یا  
 مصنوعي سپورمی له ځمکی  
 څخه په کوم جگوالي الوزي؟  
 ۱۷ - د یوه څرخونکری یا بهتره  
 څرخونپتی په مرسته کیدی  
 شي څرخون حرکت یا  
 څرخونخوزون د یوې څپې په  
 بلی څپې راوړل یا واړول شي.  
 په یوه ورکشاپ کی یوه دقیقه  
 یعنی ډیره ټیک اړه په بریښنا  
 ماشین چلول کیږي یا په حرکت

راوړل کیږي. د اړې خوزون یا حرکت څومره زر یا تیزدی یا چټک دی، که د  
 ماشین څرخونڅرخنی یا گاډیل ( $r = 20 \text{ cm}$ ) په ثانیه کی ۸۰۰ ځله وگرځي؟

۱۸ - کوم چاپیری او هواره الیپسی یا بیضوي یا هگیڅیره لري که ولر:

a)  $a = 40 \text{ cm}$ ,  $b = 12 \text{ cm}$ ,    b)  $a = 6 \text{ cm}$ ,  $e = 1 \text{ cm}$

c)  $r_1 = 4 \text{ cm}$ ,  $r_2 = 3 \text{ cm}$ ,  $w(r_1, r_2) = 90^\circ$

۱۹ - وبنایي: په یو په بل پرتو الیپسو کی دی.  $a_1 = a_2$  او  $b_2 = b_1 / 2$ ، نو دنی  
 ایلپس بیضوي همدومره لویه ده، لکه په دې دپاسه ایلپسی یا هگیڅیرې  
 غاړه.

۲۰ - ځمکه په یوه کال د لمر څخه نزدې د یوې گردی په څیر راڅرخي. ددې

چاپیری وړانگه نزدې ۱۵۰ میلیونه کیلومتره ده.

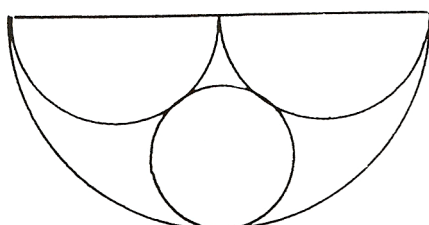
الف) د څرخونلار اوږدوالی څومره دی؟

ب) په کوم منځنی سرعت ( کیلو متره په سانیه کی ) ځمکه په خپل چاپیری راڅرخي؟

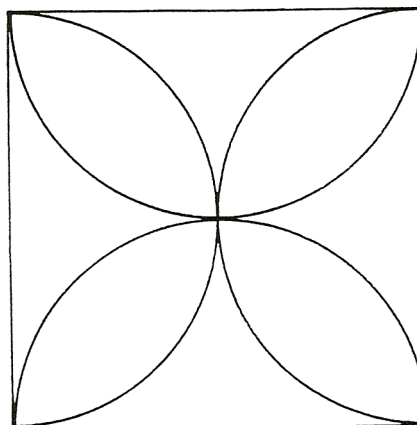
پ) په ورځ کی ځمکه نزدې څومره واټن تی کوي؟

ت) په ریښتونی ځمکه د لمر څخه په یوه ایلیپسی لار راڅرخي، چی په یوه سوزون ټکي کی پخپله لمر قرار لري. د لته هغه لنډ واټن ځمکه لمر ۱۴۷ میلیونه کیلو متره دی، او لرې واټن یی ۱۵۳ میلیونه کیلو متره دی. په دې ورزشیات ورکړو سره کوچنی نیممحور وټنایي، او همدا ډول د ایلیپسی یا بیضوي هواره او (نزدې) چاپیری هم.

۲۱- د ټولی هوارې کومه ټوټه برخه رنگ ده؟



څیره ۱۴۷



۲۲- د دوه گردیو وړانگی ځان داسی نیسي یا په تناسب کی سره پرتی دي، لکه 8 : 5 په لویه گردی کی یو گردیبرخه موجود ده ، چی د هغی لینده دومره لویه ده لکه د کوچنی گردی وړانگه  $r = 10 \text{ cm}$  . وشمیری.

الف- منځټکي کونج

ب - د گردبیرخی هواره.

۲۳ - کوم منځټکي کونج په لیندې پورې اړه لري، چي

الف ( ټيک همدومره لوي وي لکه وړانگه ؟

ب ( دوه واره دومره لوي وي لکه وړانگه ؟

پ ( نیم دومره لوي وي لکه وړانگه ؟

۲۴ - د یوې گردیتپوټونې منځ ټکي کونج وشمیری ، چي هواره یی همدومره لويه

وي، که په وړانگه یی چي مربع .

۲۵ - یو مصنوعي ساتلیت یا جوړه سپورمی ځمکه په ۲۰۰ کیلو متره جگوالي

راگردوي یعنی له ځمکي راگرځي یا بهتره له ځمکي راڅرخي. د راڅرخونوخت

یی ۱ ساعت، ۲۸ دقیق او ۲۶ ثانیې دي.

الف - سرعت یی څومره لوي دی؟

ب - په یوه دقیقه کی څومره لار وهي؟

۳- کرنیزو څیروونو یا توابعو ( فنکشنونو ) ته ننوتنه:

## 2.1.1. پیل یا ننوتنه:

د مخه درسونو څخه د کرښیزو ( لایني ) توابعو ( فنکشنونو ) سره د گراف په څیر بلد یو او د تابع مساوات سره د کرښیز مساوتو په څیر بلد یو. متناسبې اړیکې یا تناسب ټولگې یا اړیکې د کرښی په څیر انځوریدلای شي.

بیلگه:

په بازار کې د ماهي پلورونکي سره 1000 g ماهي 4,50 € قیمت لري، میرمن پښتنه غواړی 3000 g واخلي:

دا باید  $4,50€ \cdot 3 = 13,50€$  ورکړي. بناغلی سپین 5000 g اخلی او باید:  $4,50 € \cdot 5 = 22,50 €$  ورکړي .

په ټولیزه توگه ویلای شو: د K ارزښت د ثابت قیمت p سره د رانیونکي سټ (ډبرې) x لپاره  $K = p \cdot x$  دی.

یعني قیمت K د x په واک کې دی یا د x تابع دی. ، له دې امله د x تابع او له دې امله فنکشن دی،

د دې لپاره لیکو :  $K(x) = p \cdot x$  .

$K(x)$  د ارزښت تابع یا فنکشن هم بلل کیږي

د ماهی لپاره د قیمت تابع (یا د نرخ فنکشن) دی، د کوم لپاره چې د سټ واحد (د ډبرې یوون) په € او x د 1000g څو ځله د سټ واحدونو شمیر دی .

که د  $K(x)$  په ځای y ولیکو، نو راته څرگند مساوات  $y = 4,50 x$  ترې رامنځ ته کیږي. دا په کواورډینات سیستم (د وضعیه قیمت سیستم یا پروت ولاړ سیستم) کې د صفر له ټکي څخه تیرېدونکي یوه کرښه ده.

بیلگه :

39

غورځنگ د ملفون ( موبایل یا لاسي تلفون) قرارداد کړی، چې د میاشتي  $€ 20$  ورکوی او د دقیقې د تلفون قیمت یې  $€ 0,2$  دی. پوښتنې.

الف: څومره باید غورځنگ تادیه کړی، که دی 30 min, 60 min, 90 min, 120 min تلفون وکړي.

ارزښت په یوه ارزښتجدول کې انځور کړی.

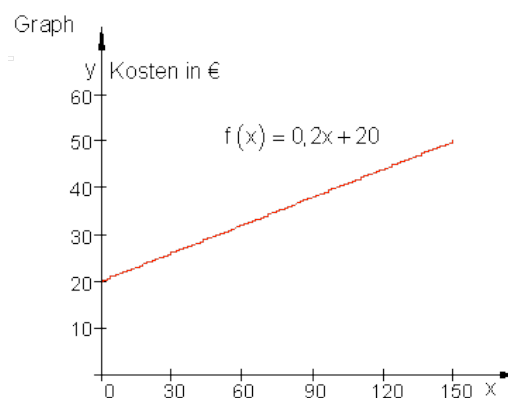
ب: په یوه مناسب وضعیه قیمت سیستم کې یې گراف رسم کړی.

پ: د ارزښتشمیرني لپاره یې د تابع مساوات څنگه دی؟

حل و الف ته: قیمت له یوه زیاتیدونې یا جمعي ثابت  $(€ 20)$  او  $(0,2 x)$  واریابلی یا متحولې برخې څخه منځ ته راځي، چیرته چې  $x$  د تلفون شوو دقیقو تعداد دی.

0	30	60	90	120	د خبرو دوام په دقیقو
20	26	32	38	44	قیمت په €

اوبې یا حل و ب ته: گراف،  $y$  قیمت په €، پروت: په دقیقو د خبرو دوام



حل و پ ته:

$x$  په دقیقو د خبرو خپلواکه متحوله ده  $y = f(x)$  په € د ټولې میاشتي د ټول مصرف بلواکه متحوله یا تابع ده. په لاندې شمیرنه کې یوونونه (واحدونه) دقیقې او € یورو نه لیکل کيږي.

. داسې مخ ته څو:

$0 \text{ min: } y = f(0) = 0,2 \cdot 0 + 20 = 20$ $30 \text{ min: } y = f(30) = 0,2 \cdot 30 + 20 = 26$ $60 \text{ min: } y = f(60) = 0,2 \cdot 60 + 20 = 32$ <hr/> $x \text{ min: } y = f(x) = 0,2 \cdot x + 20$	بنسټ پیسې باید تادیه شي  د $x$ دقیقو دوام لپاره د تابع مساوات
---	---

بیلگې :

د تابع مساواتو جوړښت لپاره بیلگې:

یو د اوبو ډنډ 1000 لیتره اوبه لري.. هره رځ دې ته 100 لیتره نورې اوبه راځي.

د اوبو ډبرې یا - سټ لپاره د تابع مساوات داسې دي:  $f(x) = 100 \cdot x + 1000$ .

اباسین هره میاشت € 1300 معاش اخلي. د معاش لپاره فرمول په € یورو.

د معاش لپاره د تابع مساوات دی:  $f(x) = 1300 \cdot x$

یو ټانک 4000 لیتره ډیزل لري. یو موټر هره رځ 500 لیتره مصرفوي.

د ټانک منځپانگې لپاره د تابع مساوات:  $f(x) = -500 \cdot x + 4000$ .

که د تابع متناسب اړیکې برقرار کیږي، نو لاندې فکر اړین دی:

ایا یو پیل ارزښت  $a_0$  شته؟

د منح تغییر ارزښت څومره دی ( د بیلگې په توگه هره رځ، دقیقه یا وزن).



تغیر ارزښت زیاتیز یا مثبت یا کمیز یا منفي دی (مثبت = زیاتیدنه، منفي = کمیدنه)

کرښیز برابر وړ یا مساوات په لاندې بڼه پیژنو:

$$y = m \cdot x + n \quad \text{یا} \quad y = m \cdot x + b$$

دا چې کرښیز مساوات د ټول راشنل توابعو کورنۍ پورې اړه لري، چې د لوړو ټولگیو موضوع ده، نو انځوریز ډول یې له پیله په همدې ډول منځ ته راغلی دي.

تعریف:

$n$ -مه درجه ټول راشنل- یا نسبي توابع:

یوه تابع  $f(x)$  د  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$  سره  $n$ -مه درجه

ټول راشنل یا ټول نسبي تابع بلل کیږي.

عددونه  $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_2, a_1, a_0$  ضریبونه (خلوه ووني) بلل کیږي.

دا چې دواړه اخري زیاتووني یا د جمعي برخي  $a_1 x + a_0$  په کرښیز و مساواتو اړه لري، تعریف ترې لاس ته راځي:

تعریف یا پیژند: ټول د لومړۍ درجې راشنل توابع:

یوه تابع  $f(x)$  د  $f(x) = a_1 x + a_0$  سره او  $a_1 \in \mathbb{R}, a_0 \in \mathbb{R}$  سره د  $-1$  درجې ټول راشنل تابع بلل کیږي

د تابع درجه د  $x$  د خورا لوی اکسپوننت یا جگ عدد (چې دلته  $1$  دی، ځکه چې  $x^1 = x$ ) ټاکل کیږي.

دلته ضریب  $a_1$  د  $m$  او  $a_0$  د  $b$  یا  $n$  لپاره لیکل شوی.

د،، کربنيزې يا لاینيز تابع،، اړیکې په دې ودانې دي، چې د کربنيزې تابع گراف په وضعیه قیمت سیستم (پروت ولاړ سیستم) کې یوه کربنه انځوروي.

په یاد ولری: د کربنيزې تابع گراف یوه کربنه انځوروي.

بیلگه: د کربنيز تابع د تابع مساواتو لپاره بیلگې:

$$f(x) = 2x - 13 \quad f(x) = \frac{3}{4}x + 3 \quad f(x) = -\sqrt{3} \cdot x - \pi \quad f(x) = 5 \quad f(x) = 3x + a_0 \quad f(x) = a_1 x$$

### تمرین ۱ :

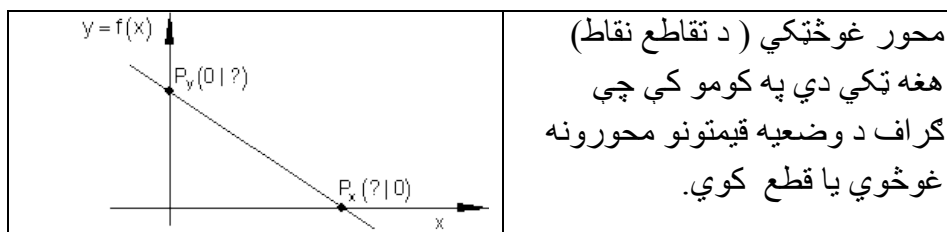
د  $D$  ټول عددي (تام عددي) ارزښت لپاره ارزښتجدول ولیکی او د گراف رسم یې وکاری.

$$D = \{x \mid -1 \leq x \leq 5\}_{\mathbb{R}} \quad \text{تعریف سټ} \quad f(x) = \frac{3}{4}x - 3$$

د تعریفست  $D$  لپاره د ارزښت سټ  $W$  وټاکي.

گراف په کومو ټکو کې د وضعیه قیمت سیستم محورونه قطع کوي؟

### ۳.۱ - د محور غوڅتکي (د تقاطع ټکي)



دا ارزښتونه لږ یا زیات له گراف څخه هم لوستل کیدی شي.

زیات وخت دا د ارزښتجدول څخه هم لوستل کیدی شي.

اوس موخه دا ده چې دا ارزښتونه د گراف او يا جدول ټاکلو لپاره وکارول شي يا استعمال شي.

$P_y$  د  $y$  محور سره د تقاطع- يا غوڅتکي ټکی (Ordinate) :

د ټولو ټکو د  $x$  ټول ارزښتونه چې د  $y$  په محور پراته دي ارزښت  $x = 0$  لري.

د لاینیزو (کرښیزو) توابعو عمومي مساوات يا - برابرېون :  $f(x) = a_1x + a_0$

شرایط:  $x = 0 \Rightarrow f(0) = a_1 \cdot 0 + a_0 = 0 + a_0 = a_0 \Rightarrow P_y(0 | a_0)$

د  $y$  محور سره د تقاطع ټکی د  $a_0$  له خوا - يا سره ټاکلی.

بیلگه:

$$f(x) = \frac{3}{4}x - 3$$

له دې لاس ته راځي چې  $P_y$  کواوردینات  $(0, -3)$  لري. د دې لپاره لیکو:  $P_y(0, -3)$

په یاد ولری: د  $y$  محور سره د تقاطع ټکی د  $f(x) = a_1x + a_0$  بڼې د ټولو کرښیزو توابعو لپاره کیدی شي مستقیماً له تابع مساوات څخه و لوستل شي. له دې څخه لاس ته راځي:  $P_y(0, a_0)$

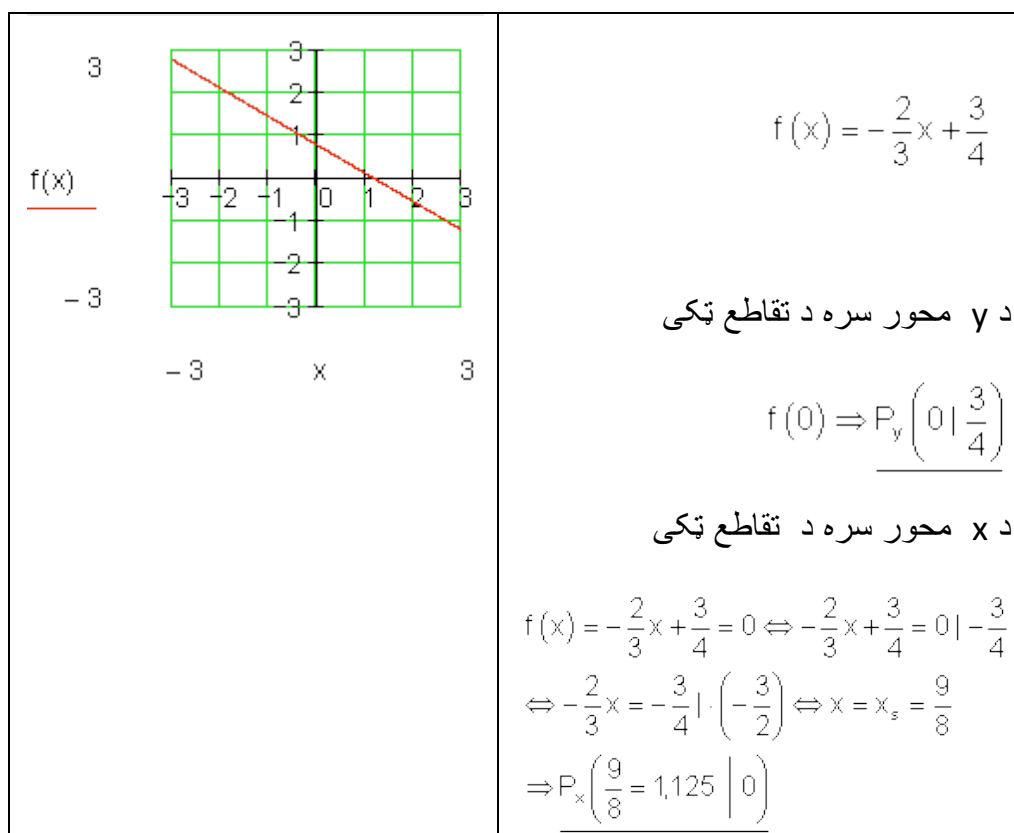
$P_x$  د  $x$  محور يا پراه محور سره غوڅتکي يا د تقاطع ټکی (Abszisse) :

د ټولو ټکو د  $y$  ارزښت (د تابع ارزښت) ، چې د  $x$  په محور پراته دي، ارزښت  $0$  لري.

حل: د  $P(x | f(x))$  له امله لرو:  $f(x) = 0 \Rightarrow P_x(x | 0)$

بیلگه:

د لاندې تابع د محورونو سره د تقاطع ټکي وټاکي او گراف يې رسم کړي.



د  $x$  محور سره د تقاطع ټکي د  $x$  کواورديناټ (پروت سيستم) هم صفرځای بلل کيږي.

ځکه چې د دې  $-x$  ارزښت لپاره (په دې ځای کې  $x$ ) د تابع ارزښت صفر دی.


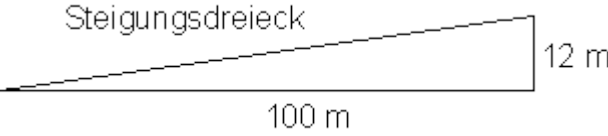
## تمرین ۲ :

د محورونو سره د تقاطع ټکي وشميرئ او د  $f(x) = -\frac{2}{3}x + \frac{3}{4}$  لپاره گراف وکارئ.

او په  $f(x)$  کې د اېښوولو سره صفرځايونه و آزمایئ.

### ۳.۲- جگیدنه (جگوالی) یا میلاند :

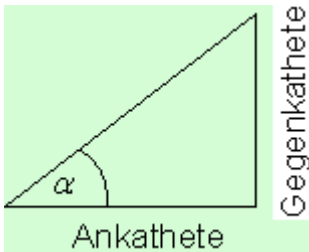
زیات گادي یا موټر کری شي فقط کم جگوالی ووھلی شي. له دي امله په غرونو کې غابنيزې پټلی یا د پرو (د وسپني پرو) (د جگیدن کوتي لپاره) کینسول کیري یا نسبیري یا غزبیري، دا هم د مایلو واټونو لپاره.:

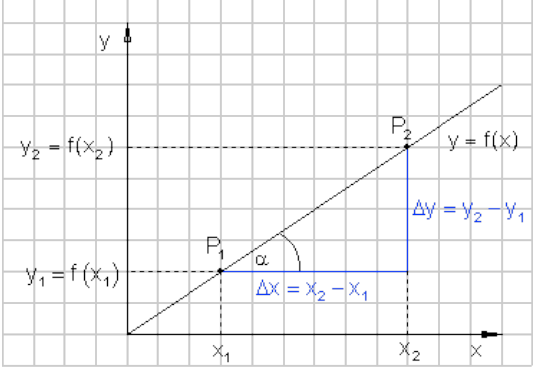
	<p>د سرکخته باندي ،، 12% جگوالی،، په دي معنا دی: په 100 m متره پروت ( افقي) واټن په 12 m متره جگيري.</p> <p>په لاندي کې</p> <p>Steigungsdreieck = د جگیدني درېگودي</p> 
---	---

دجگوالی توپیر او پرته یا افقی کرښی په منځ کې تناسب جگوالی یا میلان بلل کیري.

په انځور شوی حالت کې دی:  $12\text{m} : 100\text{m} = 0,12 \hat{=} 12\%$

<p>لاندې الماني په پښتو:</p> <p>ولار:مخامخ اړخ، پروت: په</p>	<p>پیژند(تعریف):</p> <p>جگوالی = m = مخامخ اړخ پر پروت یا گاونډي</p>
--	--

<p>پروت اړخ</p> 	<p>اړخ برابر تانجنت</p> $مخامخاړخ = m = \frac{\text{مخامخاړخ}}{\text{په پروت اړخ}} = \tan \alpha$ <p>کونج <math>\alpha</math> د جگوالی کونج هم بلل کيږي.</p>
---	--

<p>په څنګ کې تشکیل گراف کې یوه سرچینه یزه کرښه جوړه ده، چې له <math>P_1</math> او <math>P_2</math> څخه تیرېږي.</p> <p>د کرښې جگوالی دې د ټکو او کواوردیناتو په مرسته پیدا شی.</p> <p>د گاونډي او مخامخ اړخونو اوږدوالی د دواړو ټکو د کواوردیناتو دکمښت (تفریق) له لارې کره شوی.</p> <p>د کمښت یا توپیر لپاره لیکو:</p> $\Delta x = x_2 - x_1$ $\Delta y = y_2 - y_1 \quad \text{همداسې}$	
--	--

قضیه:

د جګیدني مثلث څخه د کرښې جگوالی شمیرل کیدی شي:

$$جگوالی = m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \tan(\alpha)$$

په یوه کواورډیناتسیستم کې د کرښې جگوالی د یوه په خوښه قایمالزاویه مثلث (ولارگوډیز درېگوډی) د پراته اړخ په مخامخ اړخ تناسب دی، چې اوږد اړخ یا نیمې یا قطر Hypotenuse یې د تابع د گراف برخه ده.

گومان مو نږدې دی، چې د  $a_1$  ضریب د کرښې مساواتو  $f(x) = a_1x + a_0$  د جگوالي دنده په غاړه لري.

دا باید اوس وښوول شي.

غوښتنه:

جگوالی  $m$  د کرښې مساواتو ضریب  $a_1$  په څه ډول کوي..

$$f(x) = a_1x + a_0$$

ښوونه:

$$\begin{aligned} f(x_2) &= a_1x_2 + a_0 & f(x_1) &= a_1x_1 + a_0 \\ m &= \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{a_1x_2 + a_0 - (a_1x_1 + a_0)}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{a_1x_2 + a_0 - a_1x_1 - a_0}{x_2 - x_1} = \frac{a_1x_2 - a_1x_1}{x_2 - x_1} = \frac{a_1(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = a_1 \Rightarrow \underline{\underline{m = a_1}} \end{aligned}$$

جمله :

د یوه کرښې تابع  $f(x) = a_1x + a_0$  د گراف جگوالی چې له ټکو  $P_1(x_1, y_1)$  او  $P_2(x_2, y_2)$  څخه تیرېږي د ضریب  $a_1$  لخوا ټاکل کېږي.

$$\underline{\underline{a_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}} \quad \text{په لنډه بڼه} \quad a_1 = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \tan \alpha$$

که د یوې کرښې دوه ټکي د کواورډیناتي له لارې ورکړ شوي وي، نو کیدی شي، چې

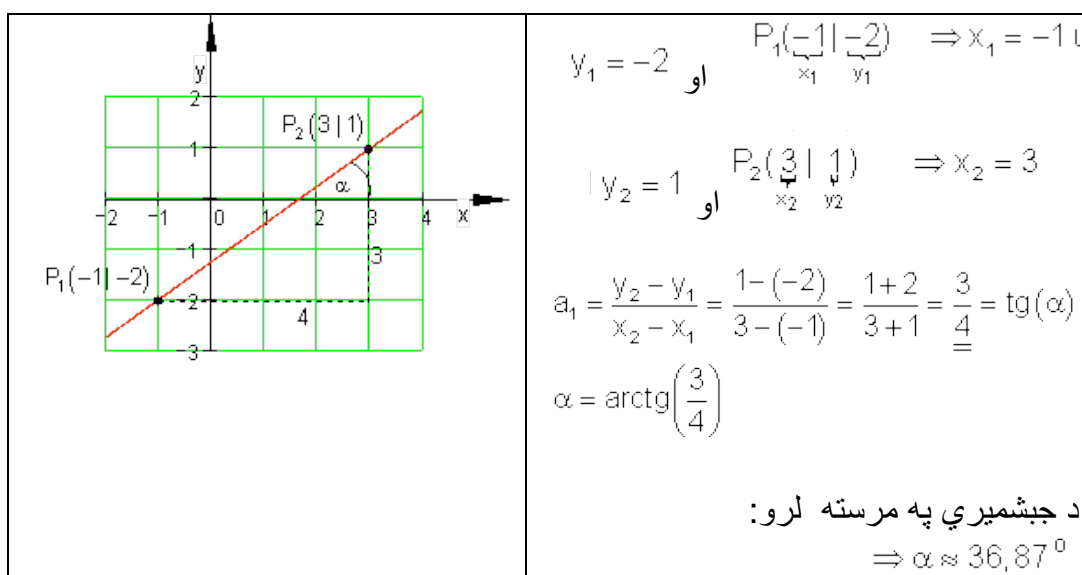
اول . کرښې رسمیري، که دواړه ټکي سره و نښلول شي او دا داسې مخ ته راغلي کرښه له ټکو اخوا وغزوي.

دویم. د کرښې جگوالی د د جگوالی مثلث په مرسته وشمیري

بیلگه :

$$P_2(3|1) \text{ او } P_1(-1|-2)$$

دې د یوې کرښې ټکي وي، چې جگوالی یې ټاکل کیږي



### ۳.۳- د توابعو د گراف رسمول

د کرښیزې تابع گراف تل کرښه ده. د یوې کرښې د رسمولو لپاره دوه ټکي اړین یا ضروري دي. که د تابع مساوات معلوم وي، نو د  $y$  محور سره غوڅټکی یا د تقاطع ټکی  $P_y$  هم پېژنو. دویم ټکی د جگوال له لارې لاس ته راوړی شو (د جگوالی مثلث).



	<p>بیلگه :</p> $f(x) = -0,5x - 1$ $a_1 = -0,5 = -\frac{1}{2} \quad a_0 = -1$ <p>گراف د <math>y</math> محور په <math>P_y(0, -1)</math> کې      غوڅوي یا قطعه کوي. دا ټکی په      کواردینات سیستم کې رسموو. د <math>P_y</math>      څخه دوه واحده یا یونونه بني لورته څو      او یو واحد یا یوون کښته لور ته. مور      د <math>P(2, -2)</math> لاس ته راوړو. اوس <math>P_y</math> د  <math>P</math> سره نښلوو او کرښه دواړو لورو ته      غزوو.</p>
--	--

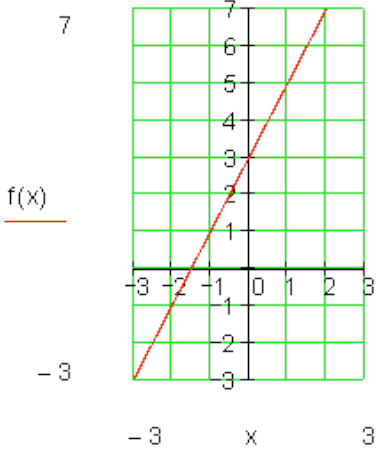
که غواړو د کرښې له یوه ټاکلي ټکي څخه، د جگوالي مثلث له لارې دویم ټکي ته راشو، کیدی شي دا لاندې لنډه بڼه په یاد کې ونیسو:

په یاد ولری: د مخرج واحدونه یا یوونونه بني لور ته ، د صورت واحدونه یا یوونونه د مخخښې په واک یا تابعیت کې پورته یا کښته لور ته.

دلته باور لري: د + لپاره پورته لور ته او - لپاره کښته لور ته

که دواړه ټکي ډېر نږدې پراته وي دا تڼلار کیدی شي ډېرواره و کارول شي. که د جگوالي ضریب  $a_1$  یو ټول(تام) گڼ یا عدد هم وي، دویم ټکی په دې ډول ټاکل کیدی شي، ځکه چې هر گڼ یا عدد کیدی شي په کسر بدل شي.

	<p>بیلگه: ټکی <math>P(-3, 2)</math> په کرښه پروت دی، چې جگوالی یې <math>a_1 = -1</math> دی.</p> $a_1 = -1 = -\frac{1}{1}$ <p>که څلور پله مخ ته لار شو، نو دواړه ټکي یو له بل پوره لري پراته دي چې یوه سوچه کرښه رسم کړای شو.</p>
--	--

	<p>له <math>P</math> څخه هر ځل څلور پله يا قدمونه بڼي لورته ځو او يو پل کښته لورته او ټکي <math>P_1</math> لاس ته راوړو. څلور پله بڼي لور او څلور پله کښته لور ته مو همغی برابرې نتيجې ته بيايي.</p>
	<p>بيلگه:</p> $y = f(x) = 2x + 3$ $a_1 = 2 = \frac{2}{1} \quad a_0 = 3$ <p>گراف د <math>y</math> محور په <math>P_y(0 3)</math> کې غوڅوي. دا ټکی په پروتولار - يا کواورديناټ سيستم کارو. له <math>P_y</math> يو يوون (واحد) بڼي لور ته ځو او دوه يوونه پورته لور ته. مور ټکی <math>P(1;5)</math> لاس ته راوړو. اوس <math>P_y</math> او <math>P</math> سره تړو او کرښه دواړولورو ته غزوو.</p>

### 2.1.5. تمرینونه :

د محورونو د تقاطع ټکي وشميرئ او کرښي رسم کړئ.

د لاندې کرښو گرافونه د امکان تر حده بي له جدول څخه رسم کړئ.

د دې لپاره د  $y$  محور او د جگوالي مثلث څخه کار واخلي. او  $x$  محور سره د تقاطع ټکي وشميرئ او د گرافونو له مخي بي وازمايي.

اول -  $f(x) = 2x - 5$  دويم -  $f(x) = -x + 3$  دريم -  $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$

څلورم -  $f(x) = -\frac{1}{2}x - 2$  پنځم -  $f(x) = \frac{1}{3}x - \frac{1}{2}$  شپږم -  $f(x) = -\frac{1}{4}x + \frac{3}{2}$

$$\text{اوم - ۱ } f(x) = \frac{2}{3}x + 2 \quad \text{تم - ۲ } f(x) = -\frac{3}{4}x - 1$$

$$\text{نهم - ۳ } f(x) = -3x + \frac{5}{10} \quad \text{لسم - ۴ } f(x) = \frac{5}{7}x - \frac{12}{4}$$

### ۳.۴- کلیمي او د انځورولو ډولونه يي

د  $f(x)$  تابع گراف لید شکل  $K_f$  هم بلل کيږي.

په ولاړکونجيز - يا قايم الزاويه کواورديناټ کې هر ټکي  $P$  يو  $x$  او  $y$  کواورديناټ  $P$  ( $x | y$ ) لري.

د  $x$  کواورديناټ د  $f(x)$  تابع مستقله يا خپلواکه متحوله ده.

د  $y$  کواورديناټ د  $f(x)$  تابع ارزښت په گوته کوي. له دې امله زيات وخت د دې لپاره لیکدود  $y = f(x)$  استعمالول کيږي.

د کرښيزو توابعو لپاره په ځانگړي ډول لاندې لیکدود عادي دی:

$y = f(x) = mx + b$  د کرښي مساوات بلل کيږي او فقط د  $f(x) = a_1x + a_0$  لپاره بل لیکندود دی، کوم سره چې  $b = a_0$   $\wedge$   $m = a_1$  باور لري.

### ۳.۵- کرښيز مساوات په مختلفو اشکالو رامنځ ته کيدل:

د کرښيز مساوات عمومي بڼه:

$$Ax + By + C = 0$$

$$\text{بیلگه: } 3x + 2y + 4 = 0$$

د کرښیز مساوات د محور برخو په بڼه

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$$

بیلگه:

د نورو شمیرنو لپاره هدفمند دی، چې دا مساوات په لاندې معلومه یا پیژندل شوې بڼه راوړو:

$$y = f(x) = a_1x + a_0 \quad \text{یا} \quad y = f(x) = mx + b$$

تمرینونه ۳:

د  $K_f$  کرښیزې تابع لیدعکس دی د  $f(x) = 1,5x - 2; x \in \mathbb{R}$  سره .

د یوې  $f$  تابع د کرښیز لیدخیره  $K_f$  د تابع گراف هم بللکیري.  
الف - ایا ټکی  $P(2,5 | 1,75)$  د  $K_f$  په کرښه پروت دی؟

ب - ټکي  $A(x_A | 4)$  او  $B(-2 | y_B)$  په  $K_f$  پراته دي.  $x_A$  او  $x_B$  وټاکي.

پ - د  $f(x)$  صفرخای وشمیري.

ت - د کوم  $x$  - ارزښت لپاره  $f(x) > 0$  باور لري؟

ټ - د  $f(x)$  ارزښتورشو یا ساحه وټاکي، که  $D = \mathbb{R}_+^x$  و ټاکل شي.

ث - گراف  $g$  د  $K_f$  راکښني له لارې، چې د  $y$  په لور منځ ته راځي او له ټکي  $N(4 | 0)$  تیرېږي.

بیلگه:

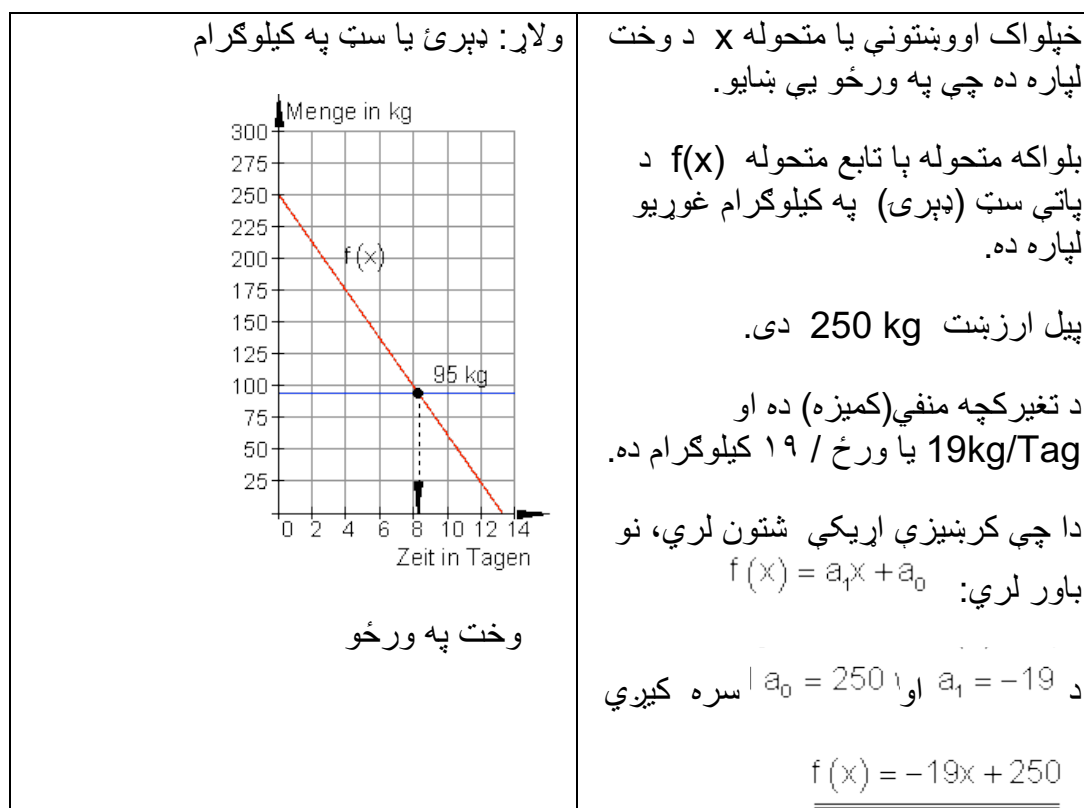
د،، پومس (سره شوي الوگان)،، گړندی رستورانټ د پومس لپاره هره ورځ 19 kg تازه غوړي په کار لري. تر اوسه په لاگر یا زخیره ځای کې 250 kg شتون لري.

الف – د تابع مساوات وکارئ او په یوه مناسب کواورډیناتسیست (پروتولار سیستم) کې یې گراف رسم کړئ.

ب – په لاگر کې 95 kg پاتې غوړیو ورسته باید د رستورانټ مشر د نورو پوښتنه وکړي (فرمایش ورکړي). له څو ورځو ورسته باید دا فرمایش صورت ونیسي؟

پ – دا غوړي څومره دوام لروډی شي، که سملاسي پسي را ونه غوښتل شي؟

الف ته حل -



ب ته حل – د 95 kg فرمایش ورکولو سره لاندې باور لري:

$$f(x) = 95 \Leftrightarrow -19x + 250 = 95 \quad | \cdot (-1)$$

$$\Leftrightarrow 19x - 250 = -95 \quad | +250$$

$$\Leftrightarrow 19x = 155 \quad | : 19$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{155}{19} \approx 8,156$$

فرمایش باید د 8 ورځو په شاوخوا کې صورت ونیسي.

ب ته حل – د  $y$ -محور سره د گراف د تقاطع یا غوڅتکی دې وټاکل شي:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow -19x + 250 = 0 \quad | \cdot (-1)$$

$$\Leftrightarrow 19x - 250 = 0 \quad | +250$$

$$\Leftrightarrow 19x = 250 \quad | : 19$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{250}{19} \approx 13,158$$

غوري لا نږدې تر 13 ورځو رسيري.

### 2.1.7. د تمرینونو حل :

تمرین ۱ : تمرین ۱ : د  $D$  ټول گڼیز (تام عددي) ارزښت لپاره ارزښتجدول ولیکی او د گراف رسم یې وکاري.

$$f(x) = \frac{3}{4}x - 3 \quad \text{تعریف سټ } D = \{x \mid -1 \leq x \leq 5\}_{\mathbb{R}}$$

د تعریفست  $D$  لپاره د ارزښت سټ  $W$  وټاکي.

گراف په کومو ټکو کې د وضعیه قیمت سیستم محورونه قطع کوي؟

حل :

$$f(x) = \frac{3}{4}x - 3 \quad D = \{x \mid -1 \leq x \leq 5\}_{\mathbb{R}}$$

$$f(-1) = \frac{3}{4} \cdot (-1) - 3 = -\frac{3}{4} - 3 = -\frac{3}{4} - \frac{12}{4} = -3,75$$

$$f(0) = \frac{3}{4} \cdot 0 - 3 = -3$$

$$f(1) = \frac{3}{4} \cdot 1 - 3 = \frac{3}{4} - 3 = \frac{3}{4} - \frac{12}{4} = -\frac{9}{4} = -2,25$$

$$f(2) = \frac{3}{4} \cdot 2 - 3 = \frac{3}{2} - 3 = \frac{3}{2} - \frac{6}{2} = -\frac{3}{2} = -1,5$$

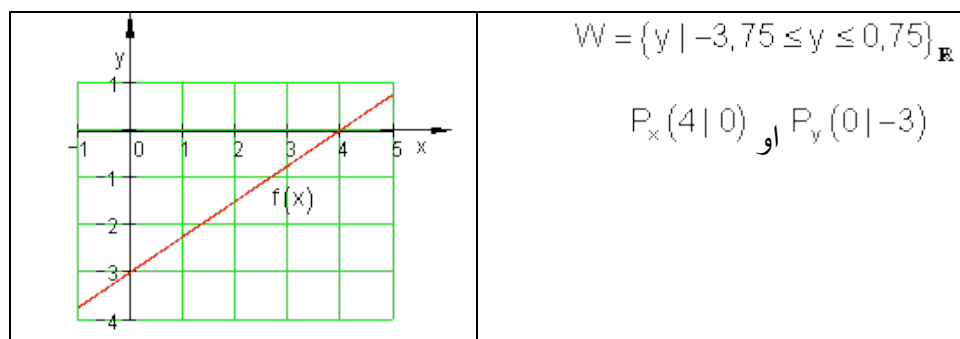
$$f(3) = \frac{3}{4} \cdot 3 - 3 = \frac{9}{4} - 3 = \frac{9}{4} - \frac{12}{4} = -\frac{3}{4} = -0,75$$

$$f(4) = \frac{3}{4} \cdot 4 - 3 = 3 - 3 = 0$$

$$f(5) = \frac{3}{4} \cdot 5 - 3 = \frac{15}{4} - 3 = \frac{15}{4} - \frac{12}{4} = \frac{3}{4} = 0,75$$

جدول او گراف:

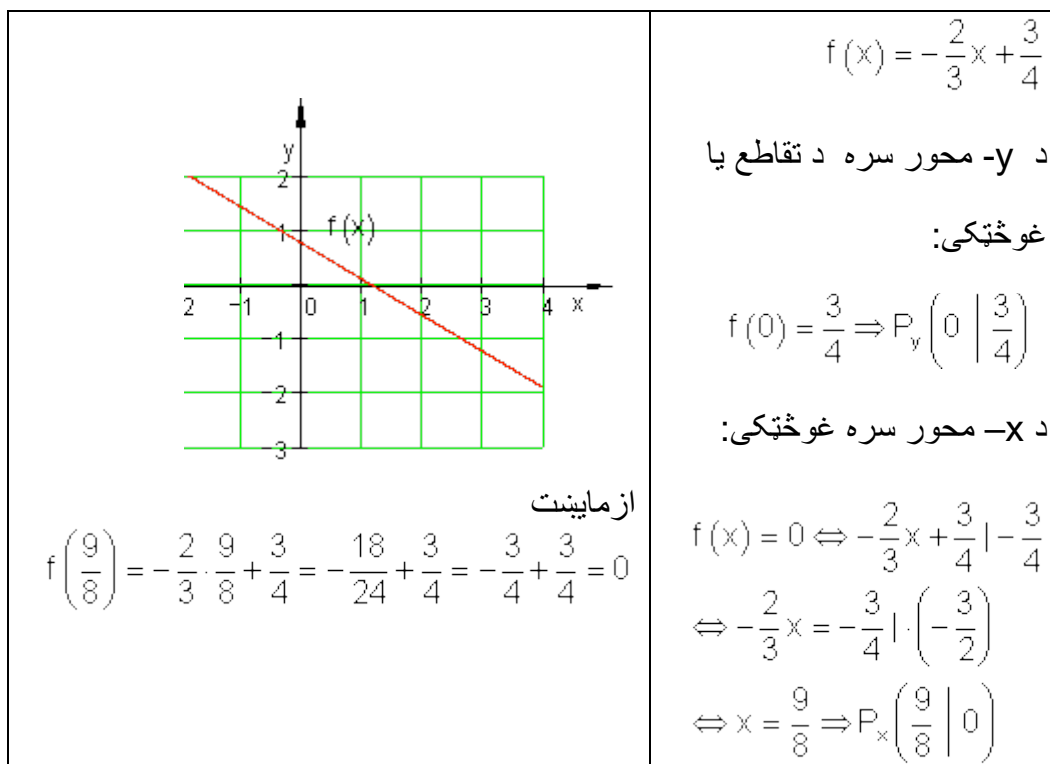
x	-1	0	1	2	3	4	5
f(x)	-3,75	-3	-2,75	-1,5	-0,75	0	0,75



تمرین ۲ -

د محورونو سره د تقاطع ټکي وشمیرئ او د  $f(x) = -\frac{2}{3}x + \frac{3}{4}$  لپاره گراف و کارئ. او په  $f(x)$  د اښوولو سره صفرخايونه و آزمایئ.

حل:



تمرین ۳: حل.

تمرینونه ۳:

$f$  د  $K_f$  کرښیزې تابع لیدعکس دی د  $f(x) = 1,5x - 2; x \in \mathbb{R}$  سره.

د یوې  $f$  تابع د کرښیز لیدخپره  $K_f$  د تابع گراف هم بللکیري.



الف - ایا ټکی  $P(2,5|1,75)$  د  $K_f$  په کرښه پروت دی؟

ب - ټکي  $A(x_A|4)$  او  $B(-2|y_B)$  په  $K_f$  پراته دي.  $x_A$  او  $x_B$  وټاکي.

پ - د  $f(x)$  صفرخای وشمېری.

ت - د کوم  $x$  - ارزښت لپاره  $f(x) > 0$  باور لري؟

ټ - د  $f(x)$  ارزښتورشو یا ساحه وټاکي، که  $D = R_+^x$  و ټاکل شي.

ث - گراف  $g$  د  $K_f$  راکښي له لارې، چې د  $y$  - په لور منځ ته راځي او له ټکي  $N(4|0)$ .

تیرپري.

و الف ته حل -  $f(x) = 1,5x - 2$

ازمایښت:

$$P(2,5;1,75): f(2,5) = 1,5 \cdot 2,5 - 2 = 1,75 \Rightarrow$$

$P \in K_f$  په کرښه پروت دی یا  $P \in K_f$ .

و ب ته حل -

$$A(x_A|4): f(x_A) = 1,5 \cdot x_A - 2 = 4$$

$$\Rightarrow 1,5 \cdot x_A - 2 = 4 | +2$$

$$\Leftrightarrow 1,5 \cdot x_A = 6 | : 1,5$$

$$\Leftrightarrow x_A = 4$$

$$B(-2|y_B): f(-2) = 1,5 \cdot (-2) - 2 = y_B$$

$$\Rightarrow y_B = 1,5 \cdot (-2) - 2 = -5$$

و پ ته حل -

صفرخایونه:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 1,5x - 2 = 0 \Leftrightarrow 1,5x - 2 = 0 | +2$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2}x = 2 | \cdot 2 \Leftrightarrow 3x = 4 | : 3 \Leftrightarrow x = \frac{4}{3} \Rightarrow P_x \left( \frac{4}{3} \mid 0 \right)$$

و ت ته حل -

$$f(x) = 1,5x - 2 > 0 \Leftrightarrow \frac{3}{2}x - 2 > 0 | +2 \Leftrightarrow \frac{3}{2}x > 2 | \cdot \frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow x > \frac{4}{3} \Rightarrow \text{Für } x > \frac{4}{3} \text{ ist } f(x) > 0$$

و ت حل -

$$(x > 0 \text{ په دي معنا چي } \mathbb{R}_+^*) \quad f(x) = 1,5x - 2 \quad D_f = \mathbb{R}_+^*$$

$$\Rightarrow f(x) > -2 \Rightarrow W_f = \{y \mid y = f(x) > -2\}$$

و ت ته حل- د  $y$  په لور راكېنه له ټكي  $N(4;0)$  څخه غبرگي (موازي) كړنې  $g(x) = (3/2)x + a_0$  لاس ته راځي.

د لاندې سره ازمايېنت:

$$N(4|0) := g(4) = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{2} \cdot 4 + a_0 = 0 \Leftrightarrow 6 + a_0 = 0 | -6 \Leftrightarrow a_0 = -6$$

ته چې له ټكي  $N(4;0)$  تيريري، غبرگه  $g(x) = (3/2)x - 2$  و  $g(x) = (3/2)x - 6$  ځغلي.

۳ . ۶ - پوښتنې

كړنيز مساوات | .

لومړۍ - د لاندې توابعو گرافونه هر يو په يوه كواوردينات سيستم كې وكاري

$$\text{الف - } f(x) = -\frac{5}{4}x + 1 = \text{پ} \quad f(x) = 2x - 4 = \text{ب} \quad f(x) = -\frac{2}{3}x + 2$$

$$f(x) = 2,5 = \text{ث} \quad f(x) = -0,3x = \text{ت} \quad f(x) = -4x + 5 =$$

دويم - و آزمایي، چي کرښه په  $P_1$  او  $P_2$  کې سرچینه بيزه کرښه ده.

$$\text{الف - } P_1(-1|3,5); P_2(2|-2) = \text{ب} \quad P_1(2|4); P_2(-1,5|-3)$$

دریم - د کوم  $x$  ارزښت لپاره  $f(x) > 0$  باور لري؟

$$\text{الف - } f(x) = \frac{x}{5} - \frac{7}{5} = \text{پ} \quad f(x) = -1,5(x-2) = \text{ب} \quad f(x) = 0,4x + 1$$

څلورم - د کرښيزي تابع ارزښت جدول معلوم دی. د تابع ترم او د محورونو د تقاطع ټکي معلوم کړی.

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} x & -1 & 0 & 1 & 2 \\ \hline y & -3 & -1 & 1 & 3 \end{array} = \text{ب} \quad \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} x & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline y & -2 & -1,5 & -1 & -0,5 & 0 & 0,5 \end{array} \text{الف -}$$

$$\text{پنځم - کرښيزه } f(x) = 3 - \frac{12}{7}x \text{ تابع ورکړ شوي}$$

الف - گراف رسم کړی او  $f(-1)$  په گوته کړی

$$\text{ب = ايا } P(\sqrt{7}|-1,54) \text{ يا ټکي د } f(x) \text{ په گراف پروت دی؟}$$

پ = تعریع ساحه  $D$  دي داسي محدوده شي، چي باور ولري:

$$W_r = \{y | 1 \leq y < \infty\} \text{ او } D_r \text{ وټاکي.}$$

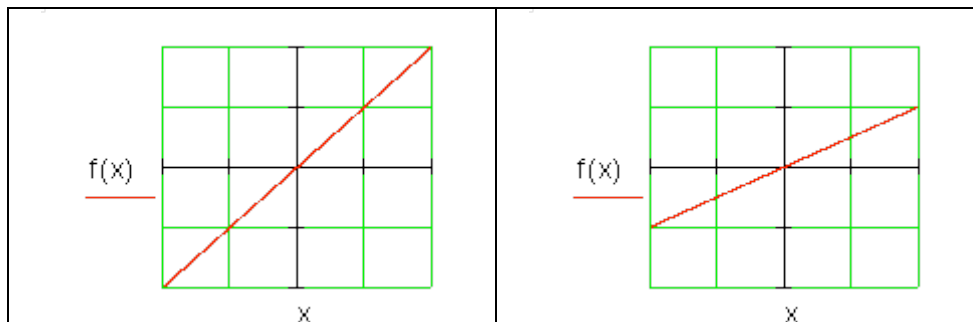
$$\text{ت = د } k \text{ د کوم ارزښت لپاره } f(\sqrt{2k}) < 0,6 \text{؟ دی؟}$$

$$\text{شپږم - د } g(x) = 0,75x + 3 \text{ او د } h(x) = -x - 2,5 \text{ توابع ورکړ شوي.}$$

کرښه  $h$  دي د  $y$  په لور داسي راکښل شي (يا دي داسي تغیر ورکړ شي)، چي  $g$  او تغیر خورلي کرښه  $h$  د  $x$  محور په همغه ټکي کې قطع (غوڅ) کړي.

د تغیر خورلي کرښي لپاره د  $f(x)$  تابع ترم وټاکي يا پيدا کړی.

اوم - کیدی شي لاندې گرافونه همغه کرښه انځور کړي؟ دلایل يې راوړی



### پوښتنې

کرنيز مساوات يا - برابر ونونه ||

### لومړۍ -

<p>د لاندې برابر ون له لارې کرښه <math>g</math> ورکړ شوي</p> $g(x) = 2x + 8,2$ <p>د څنگ څيرې کرښه وټاکي، چې د <math>g(x)</math> سره غبرگه له ټکي <math>P(2   2)</math> تيريري. د دې کرښې تابع مساوات وټاکي او خپله ټاکنه په دليل ودانه کړي.</p>	
---	--

### دويم -

ټکي  $P(4,5; -3)$  په کرښه چې صفر (سرچينه بيزه کرښه) پروت دی.

ټکي  $P(3;f(3))$  هم په دې کرښه پروت دی.  $f(x)$  وټکي.

دریم -

تکي  $A(1;3)$ ,  $B(-1;-7)$ ,  $C(2;-2)$  او  $D(8;7)$  د مساوات  $f(x) = 4x-3$  سره د کرښي پورته لور ته ، کښته لور ته او که په کرښه پراته دي؟

څلورم -

د کرښي  $g$  مساوات وټکی.

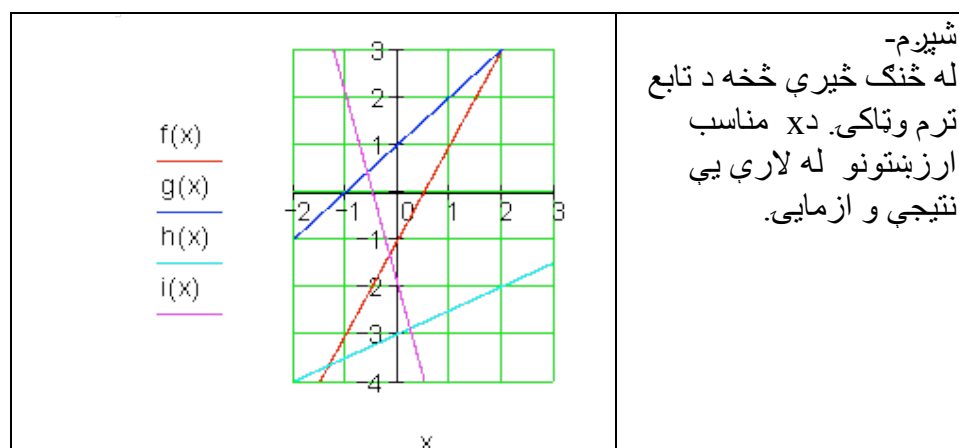
الف - له  $a_1 = -\frac{3}{4}$  او  $P(1|-2)$  له ب - له  $a_1 = 1,5$  او  $P(-1|-0,5)$

پ - له  $P_1(2|-4)$  او  $P_2(0|-2)$  ت - له سرچیني او  $P(-3|-1)$

پ - له  $P(-3|3)$  او وکرښي  $g(x) = -\frac{1}{2}x - 5$  ته غیرگ

پنځم - دیوه کرښيز تابع  $f$  لپاره  $f(2) = -3$  او  $f(0) = 5$  باور لري.

د تابع ترم وټاکي او  $f(0,25)$  او  $f(\sqrt{2})$  وشمیري.



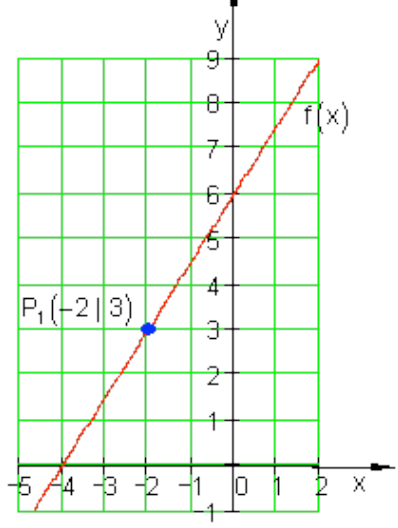
۳.۷ - کرښيزي توابع د ورکړشوو شرايطو سره

الف- لومړی حالت : د  $P$  ټکي څخه تیرې کرښې د  $a_1$  جگوالي سره

بیلگه:

یوه کرښه د  $a_1$  د جگوالي سره د  $P_1(x_1 | y_1)$  په ټکي کې ځلي.

د  $f(x) = a_1x + a_0$  تابع مساوات دې پیدا شي.

	<p>جگوالی: <math>a_1 = 1,5</math> ټکی <math>P_1(-2   3)</math></p> <p>وتون مساوات <math>f(x) = a_1x + a_0</math></p> <p>جگوالی ځای په ځای کړی</p> $f(x) = 1,5 \cdot x + a_0$ <p>د <math>a_0</math> لپاره دې ارزښت وشمیرل شي.</p> <p>د <math>P_1(-2   3)</math> لپاره ازمایښت</p> $f(-2) = 3 \Leftrightarrow 1,5 \cdot (-2) + a_0 = 3$ $\Leftrightarrow -3 + a_0 = 3   +3$ $\Leftrightarrow a_0 = 6$ <p>د تابع مساوات <math>f(x) = 1,5 \cdot x + 6</math></p> <p>ازمایښت:</p> $P_1(-2   3) \Leftrightarrow f(-2) = 3$ $f(-2) = 1,5 \cdot (-2) + 6 = -3 + 6 = 3$
--	--

بیلگه:

د حیواناتو ساتونکی د وینو اوتومات څخه د روځي 7,5 kg خوراک شته. دولس روځي، وروسته له هغې چې زیرمه له غذايي موادو ډکه شوې وه، هلته نور 250 kg پاتې دي.

الف - یو تابع مساوات ولیکي، چې دا حالت تشریح کړي

ب - په څومره سټ یا ډبري به دا د وینو زیرمه دولس ورځي د مخه ډکه شوې وي.

حل و الف ته - د  $x$  محور: وخت په ورځو

$y$  محور: د وینو زیرمه په کیلوگرام  $kg$ .

$$f(x) = -7,5x + a_0$$

$$P(12 | 250) \Rightarrow f(12) = 250 \Leftrightarrow -7,5 \cdot 12 + a_0 = 250$$

$$\Leftrightarrow -90 + a_0 = 250 | +90$$

$$\Leftrightarrow a_0 = 340 \Rightarrow f(x) = \underline{\underline{-7,5x + 340}}$$

حل و ب ته- د ډکیدني وخت  $x = 0$  دی.

$$\Rightarrow f(0) = -7,5 \cdot 0 + 340 = 340$$

د وینو شتون دولس 12 ورځي د مخه په 340 ډک شوی .

لکه څنګه په لومړي حالت کې چې د یوې کرني جگوالی او یو ټکی معلوم دي، شمېرنه په همغه ډول د ورکړشوو داتن یا داتن Daten سره مخ ته ځي.

په داسې حالت کې شمېرنه توپزه سرته رسیري. دا مو بیا یو فرمول ته لارښوده وي.

یوه کرښه د  $a_1$  جگوالي سره د  $P_1(x_1 | y_1)$  ټکي څخه تیري.ي.

د کرښمساواتو ټولیز فرمول دی:  $f(x) = a_1x + a_0$

$$P_1(x_1 | y_1) \Rightarrow f(x_1) = y_1 \Leftrightarrow a_1 \cdot x_1 + a_0 = y_1 | -a_1 \cdot x_1 \Leftrightarrow a_0 = y_1 - a_1 \cdot x_1$$

$$\Rightarrow f(x) = a_1 \cdot x + y_1 - a_1 \cdot x_1 = a_1 \cdot x - a_1 \cdot x_1 + y_1 = a_1(x - x_1) + y_1$$

$$f(x) = a_1(x - x_1) + y_1$$

دا د ټکی - جگوالي فرمول هم بلل کیږي.

بیلگه:

کي ځا په ځای کړی  $f(x) = a_1(x - x_1) + y_1$  په  $a_1 = -2; P_1(-3 | 4)$

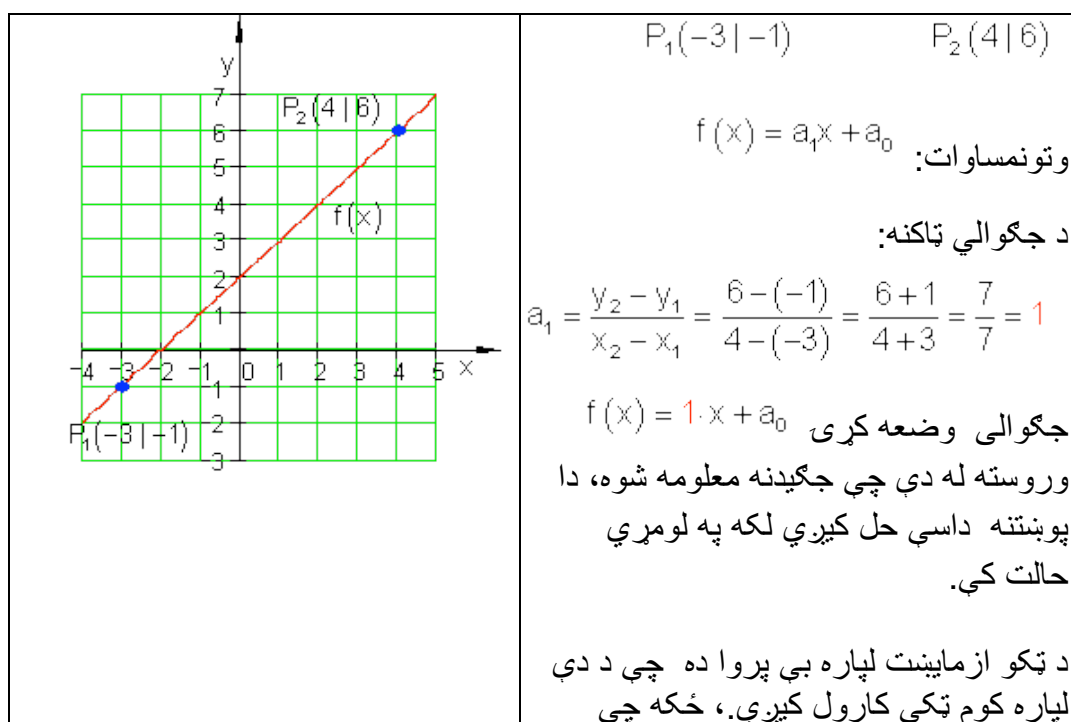
$$f(x) = -2(x - (-3)) + 4 = -2(x + 3) + 4 = -2x - 6 + 4 = \underline{\underline{-2x - 2}}$$

ب. دویم حالت: کرښه له دوه ټکو تیريزي

بیلگه:

دوه ټکی  $P_1(x_1 | y_1)$  او  $P_2(x_2 | y_2)$  په یوه کرښه پراته دي.

د  $f(x) = a_1x + a_0$  تابع مساوات غواړو پیدا کړو.





	دواړه ټکي به په کرښه پراته وي.
--	--------------------------------

د ټکو آزمایش د  $P_2(4|6)$  یا  $P_1$  لپاره

$$P_2(4|6) \Rightarrow f(4) = 6 \Leftrightarrow 1 \cdot 4 + a_0 = 6 \mid -4 \Leftrightarrow a_0 = 2 \Rightarrow f(x) = x + 2$$

بیلگه:

د فزیک څخه پوهیږو چې د حرارت معلومولو (تودوخې کچونې) لپاره مختلفې د تودوخې یا حرارت سکالا کارول کیږي. د څلزیوس سکالا Celsiuskala او د فارنهایت سکالا Fahrenheitskala

د دواړو ترمنځ کرښیزې اړیکې موجود دي.

$100^\circ\text{C}$  برابری دي د  $212^\circ\text{F}$  سره.  $0^\circ\text{C}$  برابر دی په  $32^\circ\text{F}$  سره.

د یوه تابع مساوات غواړو پیدا کړو، چې د هغې په مرسته  $^\circ\text{C}$  په  $^\circ\text{F}$  اړول کیږي.

خپلواکه متحوله  $x$  په  $^\circ\text{C}$  او بلواکه یا تابع متحوله  $y = f(x)$  په  $^\circ\text{F}$ .

جگوالی:

$$a_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{212 - 32}{100 - 0} = \frac{180}{100} = \frac{9}{5} \Rightarrow f(x) = \frac{9}{5}x + a_0$$

$$P_1(0|32) \Rightarrow f(0) = 32 \Leftrightarrow \frac{9}{5} \cdot 0 + a_0 = 32 \Leftrightarrow a_0 = 32$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{9}{5}x + 32$$

په بدل شوی تابع  $x$  په  $^\circ\text{C}$  کې کیږدی نتیجه یی ده.

د بیلگې په ډول:

$$x = 20^\circ\text{C} : f(20) = \frac{9}{5} \cdot 20 + 32 = 68 \Rightarrow 20^\circ\text{C} \triangleq 68^\circ\text{F}$$

د دویم حالت لپاره هم کیدی شي شمیرنه په ټولیزه توګه مخ ته بوتلی شی:

دوه ټکی  $P_1(x_1 | y_1)$  او  $P_2(x_2 | y_2)$  په یوه کرښه پراته دي.

د مساواتو عمومي بڼه ده:  $f(x) = a_1x + a_0$ .

$$a_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \Rightarrow f(x) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x + a_0 \quad \text{جګوالی:}$$

$$P_1(x_1 | y_1) \Rightarrow f(x_1) = y_1 \Leftrightarrow \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x_1 + a_0 =$$

$$y_1 \quad | \quad - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x_1 \Leftrightarrow a_0 = y_1 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x_1$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x + y_1 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x_1 =$$

$$= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x_1 + y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1) + y_1$$

$$f(x) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1) + y_1$$

دا په دوه ټکو کې د کرښیزو مساواتو یو ټولیزه بڼه ده .

په زیاتو ادبیاتو کې په لاندې ډول ده:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} ; x_1 \neq x_2$$

چیرته چې  $y = f(x)$  باور لري.

د عملي کارونې لپاره لاندې بڼه مساعده ده:

$$f(x) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1) + y_1$$

بیلګه:

$$f(x) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1 \quad P_1(2|-1); P_2(-3|2)$$

په کی خای په خای کری

$$f(x) = \frac{2 - (-1)}{-3 - 2}(x - 2) + (-1) = \frac{2+1}{-5}(x - 2) - 1 = -\frac{3}{5}(x - 2) - 1 = -\frac{3}{5}x + \frac{6}{5} - \frac{5}{5}$$

$$= -\frac{3}{5}x + \frac{1}{5} \Leftrightarrow f(x) = -\frac{3}{5}x + \frac{1}{5}$$

تمرین:

د °F په °C باندې شمیرني لپاره یو تابع مساوات ولیکی

### ۳.۸- تمرین: د تابع مساواتو شمیرنه

یو کرښیز مساوات د  $a_1$  جگوالی لري او د  $P$  له ټکي تیریري.

د  $f(x)$  تابع مساوات معلوم کری او د محورونو قاطع ټکي یا غوڅټکي او گراف انځور کری

اول -  $a_1 = \frac{1}{2}$   $P(2|-2)$  - دویم -  $a_1 = \frac{3}{4}$   $P(-1|3)$

دریم -  $a_1 = 2$   $P(3|-1)$  - څلورم -  $a_1 = \frac{4}{5}$   $P\left(\frac{3}{2} \mid 4\right)$

یوه کرښه له ټکو  $P_1$  او  $P_2$  تیریري.

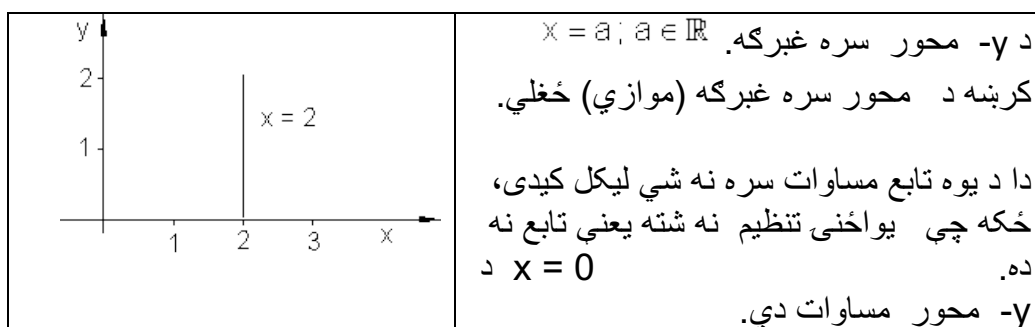
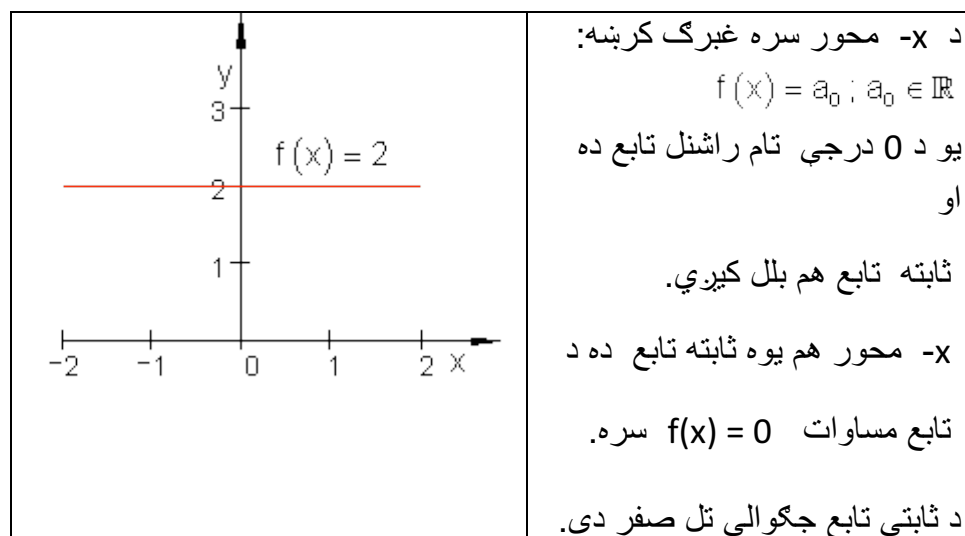
د  $f(x)$  تابع مساوات پیدا کری او د محور قاطع ټکي او گراف رسم کری.

پنځم -  $P_2(5|4)$   $P_1(2|1)$  شپږم -  $P_2(2|3)$   $P_1(-3|-2)$

اوم -  $P_2(4|-1)$   $P_1(-2|3)$  اتم -  $P_2(3|1)$   $P_1(-4|-1)$

$$P_1(-4 | -2) \quad P_2\left(\frac{7}{2} | 4\right) \quad \text{لسم} \quad P_1\left(-3 | \frac{9}{2}\right) \quad P_2(4 | -1) \quad \text{نهم} -$$

۳.۹- د کرښمساواتو ځانگړی حالت:

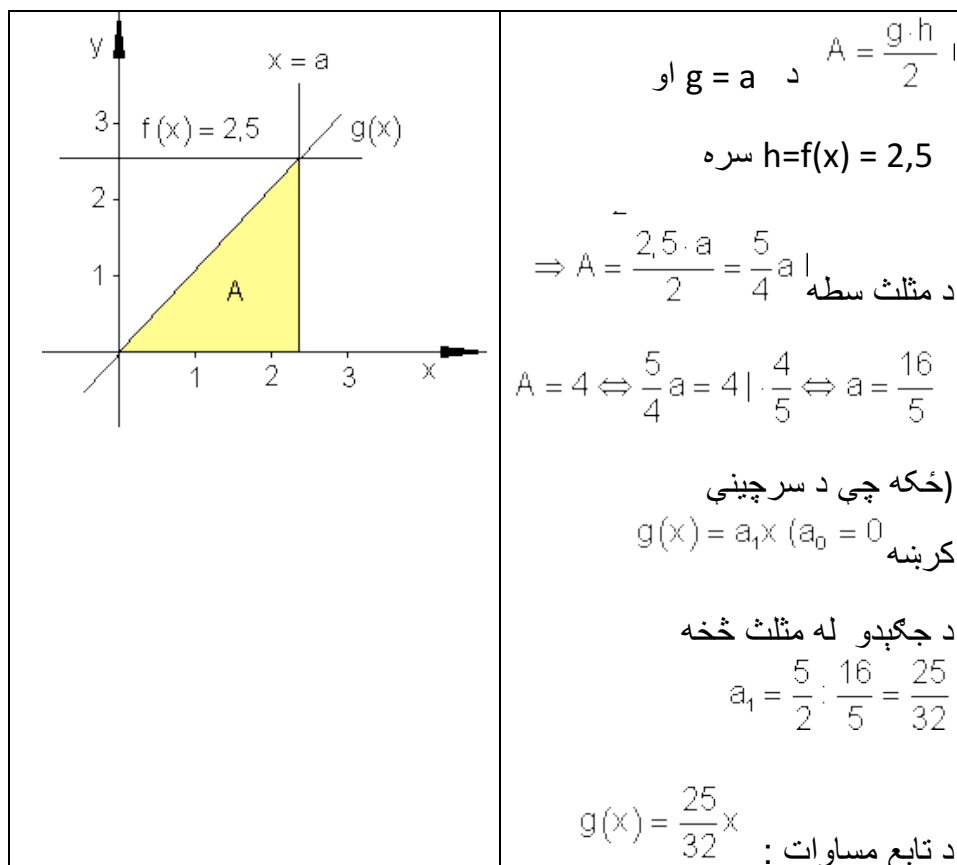


بیلگه:

یو  $f(x) = 2,5$  ور کړ شوی او  $y$ -محور سره موازي د  $a$  واټن د  $a > 0$  سره.  
یوه سرچینیزه کرښه  $g$  د  $P(a | f(x))$  ټکي څخه تیرېږي.

دا د  $x$  - محور او د  $y$  - محور سره غبرګي کرښې سره یو مثلث جوړوي.

$a$  داسې وټاکي چې وسطحه د سطحې څلور واحدونه (یوونونه FE) جوړ کړي. د دې حالت لپاره د  $g(x)$  تابع مساوات څنګه دي؟



تمرین: د  $^{\circ}\text{F}$  بدلون شمیرنه په  $^{\circ}\text{C}$  لپاره د تابع مساوات ولیکي

حل:

د  $^{\circ}\text{C}$  اړونه یا بدلون په  $^{\circ}\text{F}$  د متحولې لپاره دا معنلري:

$x$  په  $^{\circ}\text{F}$  مستقله یا خپلواکه متحوله ده او  $y = f(x)$  په  $^{\circ}\text{C}$  بلواکه یا تابع متحوله ده.

$$212^{\circ}\text{F} \triangleq 100^{\circ}\text{C} \Rightarrow P_1(212|100) \text{ او } 32^{\circ}\text{F} \triangleq 0^{\circ}\text{C} \Rightarrow P_1(32|0)$$

دا چې د حرارت الو ترمنځ يوه کرښيزه اړيکه پرته ده، نو ټکي  $P_1$  او  $P_2$  په يوه کرښه پراته دي.

د کرښي عمومي کرښيزه بڼه په دې ډول ده:  $f(x) = a_1x + a_0$ .

دلته ضريبونه  $a_0$  او  $a_1$  د ټاکلو دي.

$$a_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{100 - 0}{212 - 32} = \frac{100}{180} = \frac{10}{18} = \frac{5}{9} \Rightarrow f(x) = \frac{5}{9}x + a_0 \quad \text{جگوالی:}$$

ټکي ازمایښت د  $P_1(32|0)$  سره.

$$\Rightarrow f(32) = 0 \Leftrightarrow \frac{5}{9} \cdot 32 + a_0 = 0 \Leftrightarrow \frac{160}{9} + a_0 = 0 \quad | -\frac{160}{9} \Leftrightarrow a_0 = -\frac{160}{9}$$

$$\Rightarrow f(x) = f(x) = \frac{5}{9}x - \frac{160}{9} = \frac{5}{9}(x - 32)$$

د  $^{\circ}\text{F}$  اړونې په  $^{\circ}\text{C}$  لپاره باور لري.  $^{\circ}\text{F}$  in  $^{\circ}\text{C}$  gilt:  $f(x) = \frac{5}{9}(x - 32)$

x په  $^{\circ}\text{F}$  او y په  $^{\circ}\text{C}$ .

پوښتنې

کرښيز مساوات VI

لومړی -

د لاندې کرښيزو توابعو گرافونه و کارې او د ارزښت سټ يا - ډېری W و ټاکې

$$f(x) = -2x + 2; D = \{x | -3 \leq x \leq 5\}_{\mathbb{R}} \text{ الف -}$$

$$f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}; D = \{x | -4 \leq x \leq 4\}_{\mathbb{R}} \text{ ب -}$$

$$f(x) = \frac{3}{4}x - 3; D = \{x | -2 \leq x \leq 6\}_{\mathbb{R}} \text{ پ -}$$

$$f(x) = 3x - 6; D = \{x | -1 \leq x \leq 3\}_{\mathbb{R}} \text{ ت -}$$

دويم -

تکي  $P_1$  او  $P_2$  ورکړ شوي، چې په کرښه پراته دي. د  $f(x)$  تابع مساوات پيدا کړی او گراف يې وکاری

$$P_1(3 | 4); P_2(7 | -1); D = \{x | 0 \leq x \leq 7\}_{\mathbb{R}} \text{ الف -}$$

$$P_1(-8 | 1); P_2(2 | -3); D = \{x | -8 \leq x \leq 2\}_{\mathbb{R}} \text{ ب -}$$

$$P_1(4 | 3); P_2(-7 | -1); D = \{x | -7 \leq x \leq 4\}_{\mathbb{R}} \text{ پ -}$$

$$P_1(-4 | -4); P_2(4 | 2); D = \{x | -4 \leq x \leq 4\}_{\mathbb{R}} \text{ ت -}$$

دریم -

د لاندې مساواتو حلست يا حلډبري پيدا کړی. مساوات چې کسری راشنل ترمونه ولري، بايد د هغو تعريفورشو هم ورکړل شي.

$$\frac{5}{9} = x - \frac{1}{3} \text{ ت -} \quad x - \frac{2}{3} = \frac{3}{4} \text{ پ -} \quad 8 + x = 25 \text{ ب -} \quad x - 5 = 9 \text{ الف -}$$

$$8 - (x + 5) = 2 \text{ ج -} \quad a + bx = 3b + a \text{ ښ -} \quad 88 = 4x - 16 \text{ ټ -}$$

$$\text{ج} - 9 + (5 - x) = 6 \quad \text{ح} = (x - 5)(x - 2) = (x - 6)(x + 3) \quad \text{خ} -$$

$$\frac{x}{4} + \frac{5x}{6} + \frac{5}{6} = \frac{x}{2} + x \quad \text{خ} - (x + 3)(x + 7) = (x + 2)(x + 9)$$

$$\frac{x}{a-b} + \frac{x}{a+b} = a \quad \text{د} - \frac{ax}{b} - \frac{b}{ac} = \frac{a}{bc} - \frac{bx}{a} \quad \text{د} - \frac{3}{2x} + \frac{2}{3x} = \frac{1}{9} + \frac{7}{3x} \quad \text{ع} -$$

$$\text{ذ} - 23a - \{5ax - [9ax + (12a - 6ax)] - (3a - 8ax)\} - 15a = 5ax - 7a$$

څلورم: د لاندې توابعو د محورونو سره د تقاطع ټکي هم پيدا کړی.

$$\text{الف} - f(x) = 2x - 7 \quad \text{ب} - f(x) = -2x + 6 \quad \text{پ} - f(x) = 3x - 3$$

$$\text{ت} - f(x) = 2x + \frac{2}{3} \quad \text{ټ} - f(x) = \frac{3}{4}x + 2 \quad \text{ث} - f(x) = -\frac{3}{4}x + \frac{4}{5}$$

$$\text{ج} - f(x) = 3,5x + \frac{1}{2} \quad \text{چ} - f(x) = -2,5x + 2 \frac{1}{2} \quad \text{ح} - f(x) = 1\frac{3}{4}x - 3\frac{2}{3}$$

پنځم: د یوې کرښې دوه ټکي  $P_1$  او  $P_2$  ورکړ شوي د لاندې توابعو له ا تر IV لپاره وټاکي:

$$P_1(3 | 4); P_2(7 | -1); D = \{x | -2 \leq x \leq 8\} \quad \text{I.}$$

$$P_1(-8 | 1); P_2(2 | -3); D = \{x | -8 \leq x \leq 2\} \quad \text{II.}$$

$$P_1(4 | 3); P_2(-7 | -1); D = \{x | -8 \leq x \leq 4\} \quad \text{III.}$$

$$P_1(4 | 2); P_2(-4 | -4); D = \{x | -4 \leq x \leq 4\} \quad \text{IV.}$$

الف - د جگړدني ضريب m.

ب - د کرښې تابع مساوات



پ - د  $y$  محور سره د تقاطع ټکی  $P_y$

ت - د تقاطع ټکی  $P_y$  د  $x$  محور سره

ټ - په  $W$  باندې ارزښتدېرې  $W$ .

ټ - په  $D$  کې د تابع گراف

شپږم: لاندې مساواتسیستمونه حل کړئ:

$$\begin{array}{lll} \text{I} & 15y - 4x = -50 & \text{I} & 4x + 5y = 32 & \text{I} & 5y - 3x = 1 \\ \text{II} & x = y + 7 & \text{پ} & y = 5x - 11 & \text{ب} & x = y + 1 & \text{الف} \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \text{I} & x + y = a + b & \text{I} & 2y = 2x - 40 & \text{I} & 3x = y + 15 \\ \text{II} & x - y = a - b & \text{ټ} & 3x = 10 - 2y & \text{ټ} & 2y - 10 = 2x & \text{ت} \end{array}$$

پوښتني

کرنيز توابع XI

لومړۍ-

$$f_1(x) = \frac{1}{4}x + 2\frac{1}{4}; f_2(x) = -4x - 2; D = \{x \mid -9 \leq x \leq 0\}_{\mathbb{R}}$$

کرنيزه له تابع  $f_1(x)$  سره د دويمې کرنيزې د تابع  $f_2(x)$  سره غوڅيږي. وټاکئ:

الف - د کواورديناټونو  $x_s$  او  $y_s$  سره غوڅتکي  $S$ .

ب - د دواړو کرنيزو غوڅتکي د  $y$  محور سره.

پ - د دواړو کرښو غوڅتکي د  $x$  محور سره .

ت - د دواړو توابعو گراف په  $D$  کې .

دویم -

$$f_1(x) = -\frac{2}{3}x + 4; D = \{x \mid 0 \leq x \leq 6\}_{\mathbb{R}}$$

کرښه له تابع  $f_1(x)$  سره په ټکي  $S(3 \mid y_s)$  کې د تابع  $f_2(x)$  سره له کرښې څخه غوڅیږي.

وتاکي:

الف-د  $S$  پوره کواوردينيات

ب-تابع  $f_2(x)$  .

پ-د دواړو کرښو غوڅتکي د کواوردينيات محورونو سره.

ت-په  $D$  کې د دواړو توابعو گراف.

دریم:

$$f_1(x) = -\frac{3}{8}x + 1; D = \{x \mid -7 \leq x \leq 3\}_{\mathbb{R}}$$

کرښه د تابع  $f_1(x)$  سره په ټکي  $S(-4 \mid y_s)$  کې له کرښې څخه د تابع  $f_2(x)$  سره ، چې پروتمحور په  $-7$  کې غوڅوي، غوڅیږي.

وتاکي:

الف - د  $S$  پوره کواوردينيات.

ب - تابع  $f_2(x)$  .

پ - د دواړو کرښو غوڅتکي د کواوردينيات د محورونو سره.

ت - د دواړو توابعو گراف په  $D$  کې..

څلورم -

د يوه درېکودي يا مثلث ټکي  $P_1, P_2$  او  $P_3$  ورکړ شوي دي. د درېکودي د اړخونو تابع وټاکي. پخوا له دې يو پلان نقشه ترتيب کړي.

$$[P_1P_2] \triangleq f_1; [P_2P_3] \triangleq f_2; [P_1P_3] \triangleq f_3$$

$$P_1\left(-6 \mid \frac{3}{2}\right); P_2\left(-2 \mid -\frac{3}{2}\right); P_3(-4 \mid 3)$$

الف-

$$[P_1P_2] \triangleq f_1; [P_2P_3] \triangleq f_2; [P_1P_3] \triangleq f_3$$

$$P_1\left(6 \mid \frac{3}{2}\right); P_2\left(2 \mid -\frac{3}{2}\right); P_3(4 \mid 3)$$

ب -

پنځم -

$$f_1(x) = \frac{1}{2}x + 3; P_2(-2 \mid -3); D = \{x \mid -6 \leq x \leq 0\}_{\mathbb{R}}$$

کړبنه د تابع  $f_1(x)$  سره د دويمې کړبنې څخه د تابع  $f_2(x)$  سره ، چې له ټکي  $P_2$  تيريري ، په ټکي  $S$  کې ولاړکونجيزه غوڅيري.

وټاکي:

الف - د  $f_2(x)$  جگوالی  $m_2$  .

ب- تابع  $f_2(x)$  .

پ - د دواړو کړبنو غوڅتکی  $S$  .

ت - د دواړو کړبنو محور غوڅتکي.

ټ - د دواړو کړبنو گراف په  $D$  کې.

پوښتنې

### کرنښيزي توابع XIV

لومړی:  $A(-8|-6); C(-1|5); D = \{x | -8 \leq x \leq 2\}_{\mathbb{R}}$

له يوه قايمالزاويه مثلث، چې قايمه زاويه يې په B پرته ده، ټکی A او C ورکړ شوي دي. د مثلث ضلع (اړخ) [BC] د اوږدینات محور (ولارمحور) په 3 کې قطع کوي.

دا وټاکي:

الف-

$[AB] = f_1; [BC] = f_2; [AC] = f_3$  د مثلث درې د ضلعو توابع.

ب- د B ټکي کواوډینات يا وضعيه قيمت کي د ټکي B محورونه

پ- په D کې گراف.

دویم:  $A(-4|-1); B(2|-4); D = \{x | -4 \leq x \leq 5\}_{\mathbb{R}}$

د يوه مثلث ټکي A او B ورکړ شوي دي. د مثلث [BC] ضلع د  $\gamma$  محور په 12- کې قطع کوي; ضلع [AC] د x محور په 3- کې غوڅوي.

دا وټاکي:

الف-تابع  $f_1(x)$  ضلع [AB]. قطع کوي

ب - تابع  $f_2(x)$  ضلع [BC] غوڅوي.

پ - تابع  $f_3(x)$  ضلع [AC]

ت - د C ټکي وضعيه قيمتونه

ټ - د D ټکي وضعيه قيمتونه

دریم: توابع  $y = f(x) = 3x - 4$  او  $g(x) = ax + 3$  ورکړ شوي.

د دواړو توابعو گرافونه په ټکي  $(5 | 3)$  کې غوڅوي.

د  $h(x)$  تابع مساوات داسې وکارئ، چې گراف په ټکي  $S$  عمود ځغلي. په یوه وضیبه قیمتسیستم کې دریاوړه گرافونه رسم کړئ.

څلورم:

$$f_1(x) = \frac{1}{4}x + 2\frac{1}{4}; f_2(x) = -4x - 2; D = \{x | -10 \leq x \leq 1\}_{\mathbb{R}}$$

د  $f_1(x)$  تابع سره کرښه د دویمې کرښې د  $f_2(x)$  تابع سره قطع کوي.

دا وټاکئ:

الف- د  $S$  قاطع ټکی د  $x_s$  او  $y_s$  کواوډینات سره.

ب- د دواړو کرښو د قاطع ټکي د  $x$  محور سره.

پ- د دواړو کرښو قاطع ټکي د  $x$  محور سره.

ت- د دواړو توابعو گراف په  $D$  کې.

پنځم:

د  $g(x)$  تابع، چې په  $f(x)$  عمود ده پیدا کړئ. د  $g(x)$  گراف د  $y$  محور په  $(0 | 3)$  کې رسم کړئ. دواړه کرښې په یوه وضعیه قیمت سیستم (پروت ولاړ سیستم) کې رسم کړئ.

$$\text{الف - } f(x) = -2x + 2 \quad \text{ب - } f(x) = 3x - 6$$

$$\text{پ - } f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{3}{4} \quad \text{ت - } f(x) = \frac{3}{4}x - 3$$

شپږم: د دواړو کرښو غوڅتکی (نقاط تقاطع) وټاکئ او گراف یې وکارئ.

$$f_1(x) = \frac{1}{4}x + 2\frac{1}{4}; f_2(x) = -4x - 2; D = \{x \mid -10 \leq x \leq 1\} \mathbb{R} \text{ - الف}$$

$$f_1(x) = -2x + 2; f_2(x) = 3x - 6; D = \{x \mid -2 \leq x \leq 4\} \mathbb{R} \text{ - ب}$$

$$f_1(x) = -\frac{2}{3}x + 4; f_2(x) = \frac{3}{2}x - 2\frac{1}{2}; D = \{x \mid -1 \leq x \leq 7\} \mathbb{R} \text{ - پ}$$

$$f_1(x) = -\frac{3}{8}x + 1; f_2(x) = \frac{5}{6}x + 5\frac{5}{6}; D = \{x \mid -8 \leq x \leq 4\} \mathbb{R} \text{ - ت}$$

### ۳. ۱۰ - یو بل سره عمود یا ولاړې ځغلیدونکي کرني

که د دوه عمود قطع کیدونکو (غوځیدونکو) کرنيو جگوالی پیدا کول موخه وی، نو گومان کیږي، چې د دواړو جگوالو په منځ کې اړیکې شته.

<p style="text-align: center;"><b>Vorübung</b> له مخه تمرین:</p> <p>د <math>f(x) = \frac{3}{2}x</math> تابع گراف به وضعیه قیمتسیستم کې وکارئ. په دې کرنيه د هندسی مثلث په مرسته یو عمود کواو دینات په سرچینه وباسئ او جگوالی یې ولولئ یا په گوته کړئ.</p>	
---	--

g کرښي جگوالی:  $a_{1g} = \frac{3}{2}$ . گومان: د کرښي h جگوالی:  $a_{1h} = -\frac{2}{3}$  د  $a_{1h}$  منفي برعکس ارزښت د  $a_{1g}$  په گوته کوي يا انځوروي.

دلته د يوه منفي کسري جگوالي حالت څخه غږیږو.

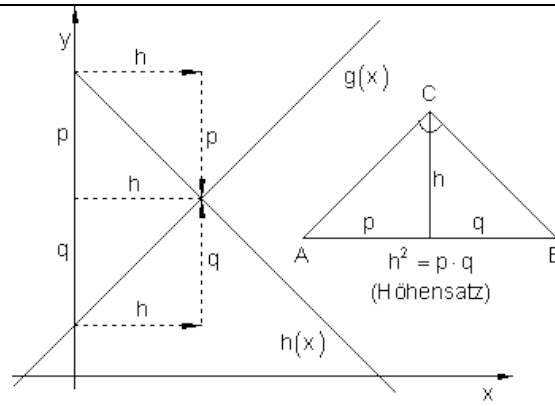
دا په دې معنا چې:  $a_{1h} = -\frac{1}{a_{1g}}$  همداسې  $a_{1h} \cdot a_{1g} = -1$  يا  $a_{1g} = -\frac{1}{a_{1h}}$

جمله:

د دوه یو په بل عمودو یا ولارو کرښو g او h جگوالي لپاره صدق کوی:

$a_{1g} = -\frac{1}{a_{1h}}$  يا  $a_{1h} \cdot a_{1g} = -1$  همداسې  $a_{1h} = -\frac{1}{a_{1g}}$

کرښي یو په بل عمود دي.

 <p style="text-align: center;">(Höhensatz = جگمله)</p>	<p>g او h جگوالي لیکل کیدی شي:</p> $a_{1h} = -\frac{p}{h} \quad \text{او} \quad a_{1g} = \frac{q}{h}$ $a_{1g} \cdot a_{1h} = \frac{q}{h} \cdot \left(-\frac{p}{h}\right) = -\frac{q \cdot p}{h^2} \quad (1)$ <p>د جگملي له مخي دی</p> $h^2 = p \cdot q$ <p>په (1) کي کیردی</p> $a_{1g} \cdot a_{1h} = -\frac{q \cdot p}{h^2} = -\frac{h^2}{h^2} = -1$ $\Rightarrow a_{1g} \cdot a_{1h} = -1$
---	--

بیلگه:

<p>غوښتنه: د <math>g</math> کرښ تابع مساوات <math>g(x)</math> . د <math>h</math> کرښ تابع مساوات <math>h(x)</math> . د <math>g</math> او <math>h</math> گراف د <math>D = \{ x \mid -5 \leq x \leq 4 \}_{\mathbb{R}}</math> لپاره</p>	<p>دوه یو بل ته ولاړگونجیز یا قام الزاویه یې ځغلندو کرښې <math>g</math> او <math>h</math> غوڅتکی یا د قطعہ کیدو تکی <math>S(2   3)</math> ورکړ شوي، چیرته چې د <math>g</math> جگوالی <math>a_{1g} = \frac{1}{2}</math> دی. د لاندي الماني پښتو: له ... امله ، لاس ته راځي، او <math>a_{1g} = \frac{1}{2}</math> wegen <math>g(x) \perp h(x)</math> folgt <math>a_{1h} = -2</math> <math>g(x) = \frac{1}{2}x + a_{0g}</math> und <math>h(x) = -2x + a_{0h}</math> <math>S(2   3) \Rightarrow g(2) = 3 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot 2 + a_{0g} = 3 \Leftrightarrow a_{0g} = 2</math> <math>S(2   3) \Rightarrow h(2) = 3 \Leftrightarrow -2 \cdot 2 + a_{0h} = 3 \Leftrightarrow a_{0h} = 7</math> <math>\Rightarrow g(x) = \frac{1}{2}x + 2</math> und <math>h(x) = -2x + 7</math></p>
<p>غوښتنه: د <math>g</math> کرښ تابع مساوات <math>g(x)</math> د <math>h</math> کرښ تابع مساوات <math>h(x)</math> . د <math>g</math> او <math>h</math> گراف د <math>D = \{ x \mid -5 \leq x \leq 4 \}_{\mathbb{R}}</math> لپاره</p>	<p>د دوه یو بل سره عمود ځغلیدونکو کرښو <math>g</math> او <math>h</math> غوڅتکی <math>S(2   3)</math> ورکړ شوی ، په کوم کې چې د <math>g</math> جگوالی <math>a_{1g} = \frac{1}{2}</math> دی</p>

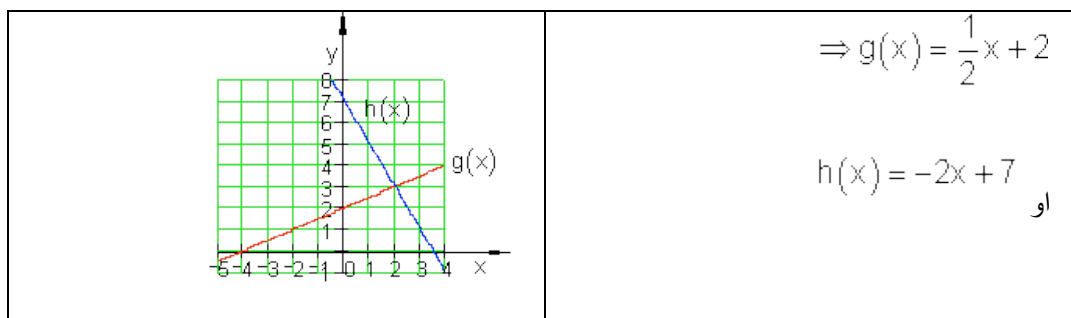
$$a_{1h} = -2 \quad \text{له } a_{1g} = \frac{1}{2} \quad \text{له } g(x) \perp h(x) \quad \text{امله لاس ته راځي}$$

$$d \quad h(x) = -2x + a_{0h} \quad \text{او} \quad g(x) = \frac{1}{2}x + a_{0g}$$

$$S(2 | 3) \Rightarrow g(2) = 3 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot 2 + a_{0g} = 3 \Leftrightarrow a_{0g} = 2$$

$$S(2 | 3) \Rightarrow h(2) = 3 \Leftrightarrow -2 \cdot 2 + a_{0h} = 3 \Leftrightarrow a_{0h} = 7$$





### 2.3.3 تمرینونه:

د دوه کرښو غوڅتکی (د قطعه کیدو ټکی) د دوه کرښو  $g_1(x)$  او  $g_2(x)$  توابع مساوات ورکړ شوي. د دواړو کرښو د قطعه کیدو (غوڅیدو) ټکی و بنایي او کرښې په یوه افقی-عمودي سیستم کې وبنایاست.

اول -  $g_1(x) = \frac{1}{2}x + 2$      $g_2(x) = -\frac{1}{2}x + 4$

دویم -  $g_1(x) = 2x - 1$      $g_2(x) = -2x + 1$

دریم -  $g_1(x) = \frac{3}{4}x - 4$      $g_2(x) = -\frac{1}{2}x - 1$

څلورم -  $g_1(x) = -\frac{1}{2}x + 2$      $g_2(x) = \frac{1}{2}x + 3$

پنځم -  $g_1(x) = \frac{2}{3}x + 2$      $g_2(x) = \frac{1}{2}x + 3$

شپږم -  $g_1(x) = \frac{3}{4}x + 1$      $g_2(x) = \frac{1}{2}x + 2$

یا دا لاندې

د دوه کرښو غوڅتکی د دوه کرښو  $g_1(x)$  او  $g_2(x)$  توابع مساوات ورکړ شوي :

د دواړو کښو غوڅتکی وشمیری او کرښې په یوه بورت ولاړ سیستم (کوآرډینات سیستم) کې وکارئ (رسم کړئ)

لومړی:  $g_1(x) = \frac{1}{2}x + 2$      $g_2(x) = -\frac{1}{2}x + 4$

$$g_1(x) = 2x - 1 \quad g_2(x) = -2x + 1 \quad \text{دویم:}$$

$$g_1(x) = \frac{3}{4}x - 4 \quad g_2(x) = -\frac{1}{2}x - 1 \quad \text{دریم:}$$

$$g_1(x) = -\frac{1}{2}x + 2 \quad g_2(x) = \frac{1}{2}x + 3 \quad \text{څلورم:}$$

$$g_1(x) = \frac{2}{3}x + 2 \quad g_2(x) = \frac{1}{2}x + 3 \quad \text{پنځم:}$$

$$g_1(x) = \frac{3}{4}x + 1 \quad g_2(x) = \frac{1}{2}x + 2 \quad \text{شپږم:}$$

د یوې  $g_1(x)$  کرښې تابع مساوات ور کړ شوي دي.  $g_1(x)$  و  $g_2(x)$  کرښې ته د عمود کرښې تابع مساوات وټاکي، که دا کرښه له  $P_1$  ټکي تیره شي. د دواړو کرښو د قاطع ټکي یا غوڅتکي وشمیرئ او دواړه کرښې په افقي-عمودي سیستم قیمت وضعیه سیستم کې رسم کړئ.

$$g_1(x) = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \quad \text{اوم -}$$

غواړو  $g_2(x) \perp g_1(x)$  پیدا کړو، چې له  $P_1(3 | -2)$  تیرېږي.

$$g_1(x) = 2x - 1 \quad \text{اتم -}$$

غواړو  $g_2(x) \perp g_1(x)$  پیدا کړو، چې له  $P_1(-2 | 5)$  تیرېږي.

$$g_1(x) = -\frac{4}{5}x + 3 \quad \text{نههم -}$$

غواړو  $g_2(x) \perp g_1(x)$  پیدا کړو، چې له  $P_1(-4 | -2)$  تیرېږي.

$$g_1(x) = 2x + 3 \quad \text{لسم -}$$

غوارو  $g_2(x) \perp g_1(x)$  پيداڪرو ، چي له  $P_1(2|-3)$  تيريري.

د قيمتشميرني څخه کار اخستنه يا استعمالونه :

د مالڪ لپاره ڊپره مهمه ده، چي د هغه يوه جنس توليد سٽ  $x$  وپيڙني ، کوم چي په توليد کي منڃ ته راغلي مصارف  $K$  د خرڇلاو څخه لاس ته راغلو  $E$  له لاري پوره ڪري.

تعريف:

که د ثابتو توکو سره  $K(x)$  مصارفو تابع او تل لرلي مصارفو لپاره صدق وکري:

تول لگڻت  $= K(x) = K$  د توليد سٽ  $x +$  تل لرلي لگڻت  $Kf$

که د توکو لگښت اوفیکس یا تل لړلي مصارف ثابت وي.  $K(x) = k \cdot x + K_f$

یادښت:

ټول لړلي مصارف د منځ ته راغلي لگښت تابع  $K(x)$  دي چې په یوه فابریکه کې د  $x$  تولید د ډېری یوونونو یا سټ واحدونو (ME) یوه ضرب څخه منځ ته راغلي دي.

د داني ارزښت بهتر یې قیمت  $k$  ټول قیمت دی د داني په سر (دا اووښتونې یا متحول دانه قیمتونه هم بلل کیږي).

ځای په ځای یا فیکس قیمتونه  $K_f$  هغه قیمتونه دي، چې که تولید ونه شي هلته هم منځ ته راځي (گټه، کرایه، بیمه، معاشونه او داسې نور).

پیژند (تعریف):

د لاس ته راغلو پیسو تابع  $E(x)$  په ثابت قیمت باور لري:

دخرځلاو پیسې  $E(x) = P \cdot x$  . ډېری  $x$  یعنی  $E(x) = P \cdot x$

پام (یادونه):

هغه په نرخ یا قیمت  $p$  خرڅه شوي ډېری یا سټ د لاس ته راوړني ډېری هم بلل کیږي.

تعریف:

د گټې تابع  $G(x)$  لپاره باور لري:

$$G(x) = E(x) - K(x)$$

پام (یادونه): ښه د  $G(x)$  نتیجه کمیزه یا منفي وي، فابریکه زیان کوي، که  $G(x)$  زیاتیزه یا مثبت وي، نو فابریکه گټه کوي.

که  $G(x) = 0$  وي، نو لگښت  $K(x)$  همدومره ستر دی، لکه لاس ته راوړنه  $E(x)$ .

دا ټکی د گټې پوله  $Gewinnschwelle$  بلل کیږي.

بیلگه : یوه فابریکه،، ملفونونه ( لاسي تلفونونه)،، جوړوي دانه په € 20 .

د فابریکې تللگښت د ورځې € 60000 دی.

د هر ،، ملفون،، خرڅلاو قیمت په دانه دی € 40.

فابریکه کری شي د ورځې خورا زیات یا ماکسمال 4000،، ملفونه،، تولید کړي ( د تولید توان یا کاپیټي پوله).

الف – د کوم تولید ډېری یا سټ سره فابریکه گټه کوي؟

ب - د کوم تولید ډېری سره فابریکه ماکسماله گټه کوي؟

پ – دا حالت په یوه مناسب کواوردینات سیستم کې گرافیکي انځور کړی.

الف - تابع مساوات ولیکی:

لگښت تابع :  $K(x) = 20 + 60000$

خرڅلاو تابع:  $E(x) = 40x$

$$G(x) = E(x) - K(x) = 40x - 20x - 60000 \\ = 20x - 60000$$

گټه تابع :

ردو:  $G(x) > 0$

$$\Leftrightarrow 20x - 60000 > 0 \quad | +60000 \\ \Leftrightarrow 20x > 60000 \quad | : 20 \quad \Leftrightarrow x > 3000$$

د یوه له  $x = 3000$  پورته،، ملفونونو،، د ورځې تولید ډېری فابریکه گټه کوي.

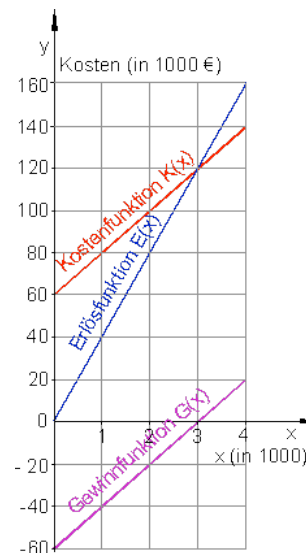
په  $x = 3000$  تولید سره گټه  $E(x)$  دومره ده لکه لگښت  $K(x)$  .

$$K(3000) = 20 \cdot 3000 + 60000 = 120000 \\ E(3000) = 40 \cdot 3000 = 120000$$

ب - په عظمي تولیدېږی یا - ست کی دگتي پیداکونه  $x_{\text{Max}} = 4000$ .

$$G(4000) = 20 \cdot 4000 - 60000 = 20000$$

د ورځي د 4000 ، ملفونو، د تولید گټه عظمي ده، دا 20000 € ده.



پ -

یادونه: له پورته کښته ته ژباړه: د لگښت تابع، د خرڅلاو تابع، د گټي تابع د گټي شولې یا پوله کیدی شي د گټي په تابع هم د لگښت تابع د گراف د غوڅتکي له لارې هم د خرڅلاو د گراف سره پیدا کړای شي. د غوڅتکي  $x$  کواوردینات د گټي شولې یا هغه ورشو چې گټه به کې صورت نیسي).. دهو د  $y$  کواوردینات په دې ځای کې لگښت ورکوي.

د ډېری - او پیسو یوونونه یا - واحدونه په یوه فابریکه کې د تولید ډېری د لویو دانو د تولید پروسه په گوته کوي، د بیلگې په توگه د ورځي Cd- Rohlinge 1.000 000. د تولید لگښت هم زیات وخت په میلیونونو وي.

داسې ستر گڼونه تل داسې ساده نه گڼل کېږي. له دې امله د تولید شوو دانولپاره د ډېری یوون یا - واحد کاروو او همداسې د لگښت پیسو واحدونو لپاره.

د بیلگې په توگه کیدی شي Cd- Rohlinge 1000 000 په 10 ستواحدونو(ډېری یوونو یا 10 ME) کې سره راټول کړو، چیرته چې د ډېری واحد د 100 000 دانو

لپاره ځای په ځای شوی دی. یعنی 100 000 دانې یو یون یا واحد دی. همداسې لگښتونه د پیسو واحدونو (یونونو) ته سره راټولیزې، د بیلگې په توګه € 9000 000 و 9 د پیسو واحدونو (یونونو) ته ( 9 GE ).

پرته له دې د لګښت واحد (یون) لپاره سړی په ټاکلي پیسو واحد (یون) پورې مربوط نه دی

بیلګه:

د یوه ټاکلي تولید لپاره دې د لګښت تابع  $K(x) = 0,3x + 4$  وي او د خرڅلاو تابع  $E(x) = 1,1x$  د ګټې په پولې Break-even-Point کې ټول لګښتونه څومره جګ دي؟

$$G(x) = E(x) - K(x) = 1,1x - 0,3x - 4 = 0,8x - 4$$

د لږ Break-even-Point :

$$G(x) > 0 \Leftrightarrow 0,8x - 4 > 0 \mid +4 \Leftrightarrow 0,8x > 4 \mid : 0,8 \Leftrightarrow x = 5$$

ټول تولید:  $K(5) = 0,3 \cdot 5 + 4 = 1,5 + 4 = 5,5$

د ګټې پوله د Break-even-Point  $t = 5$  ME ( د، ست واحد یا ډېری یون ،، لپاره راغلی) شاو خوا کې پرته ده، په دې ځای کې لګښت 5,5 GE (پیسو یون لپاره) دی.

پوښتنې:

کرنیزې توابع برخه IV

لومړی –

د کرنیزو توابعو تابع ترمونه معلوم کړی، که باور ولري؛

الف-  $f(1) = 7; f(-1) = 3$  ب-  $f(0) = a$  پ-  $f(a) = 0; f(2a) = -1$  د-  $f(a) = 1$

دویم –

کرنه و بنای، چي له  $P_1(\sqrt{k} | k)$  او  $P_2(1 | 1)$  تیرپري، جگوالی  $|a_1 = \sqrt{k} + 1|$  لري او د  $y$  محور په  $P_y(0 | -\sqrt{k})$  کی غوڅوي.

دریم -

و بنای: تکی  $P\left(\frac{k}{2}\sqrt{2} | k\right)$  د  $k \in \mathbb{R}$  لپاره په یوه کرنه پوت دی.

د کرنی مساوات و تکی

څلورم -

یوه کرنه چي له  $P(2,5 | 0)$  تیرپري د کواردینات د محورونو سره یو درپگودی یا مثلث جوړوي. د کوم جگوالی سره دا مثلث برابر پینیز (مساوی الاضلاع) دی؟

پنځم -

تابع  $f(x) = 3e^{-0.5x}$   $x \in \mathbb{R}$  ورکړ شوی.

د یوه کرنیز تابع  $h(x)$  لپاره باور لري:

$h(0) = f(0)$  او  $h(-2) = f(-2)$ .  $h(x)$  و تکی.

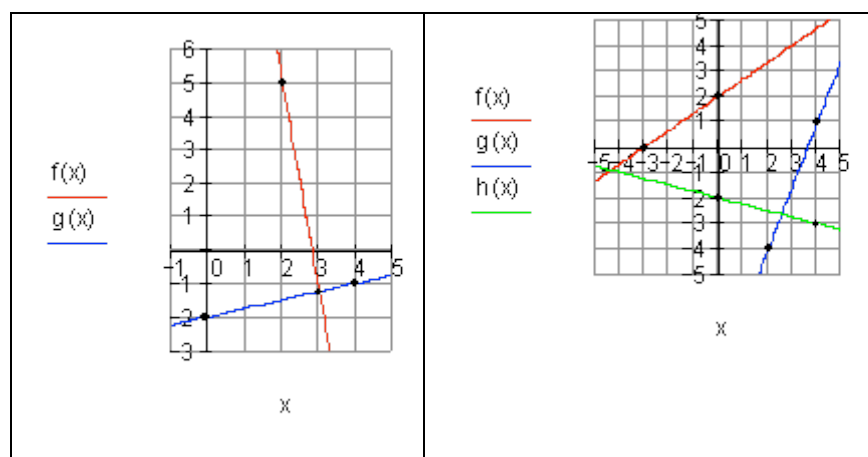
شپږم -

لاندي څيري د کرنیزو توابعو گرافونه خوندي لري.

د توابعو ترمونه و تکی.

الف-	ب-
------	----





اوم -

د دواړو کرښو غوڅتکي وټاکي او دا په یوه پروتولارسیستم کې رسم کړی.

الف -  $f(x) = -3x + \frac{5}{4}$ ;  $g(x) = -x - 1$       ب -  $f: 2y - x = 3$ ;  $g(x) = -\frac{1}{2}x + 4$

پ -  $f(x) = -\frac{2}{3}x - 1$ ;  $g(x) = \frac{1}{6}x - 4$       ت -  $f: x = 2$ ;  $g(x) = -\frac{3}{4}x - \frac{3}{2}$

اتم -

دوه کرښې  $f(x)$  او  $g(x)$  د  $x$  محور په  $x = 4$  کې غوڅوي .

ممکنه تابع ترمونه وټاکي.

$$a_1 = 1 \Rightarrow f(x) = x - 4$$

$$a_1 = 2 \Rightarrow g(x) = 2(x - 4) = 2x - 8$$

بېلگه:

پوښتنې

کرښيزې توابع برخه  $V$

لومړی -

و آزمایي چي ايا کرښي  $g, h, i$  د يوه ټکي څخه تېريري.

الف -  $g(x) = x + 1$  ;  $h: 2y + x + 4 = 0$  ;  $i: 3y - 5x = 7$

ب -  $g(x) = \frac{1}{6}x + \frac{3}{2}$  ;  $h(x) = -\frac{2}{3}x + 2$  ;  $i: 2x - y = 3$

دويم -

د دوه کرښيزو توابعو  $f(x)$  او  $g(x)$  ارزښت جدول ورکړر شوی دی.  
د دواړو توابعو گراف چپرته قطع کوي؟

د د کوم  $x$  ارزښت لپاره صدق کوي  $f(x) < g(x)$  ؟

$x$	0	1	2	3
$f(x)$	0	1,5	3	4,5
$g(x)$	-1	1	3	5

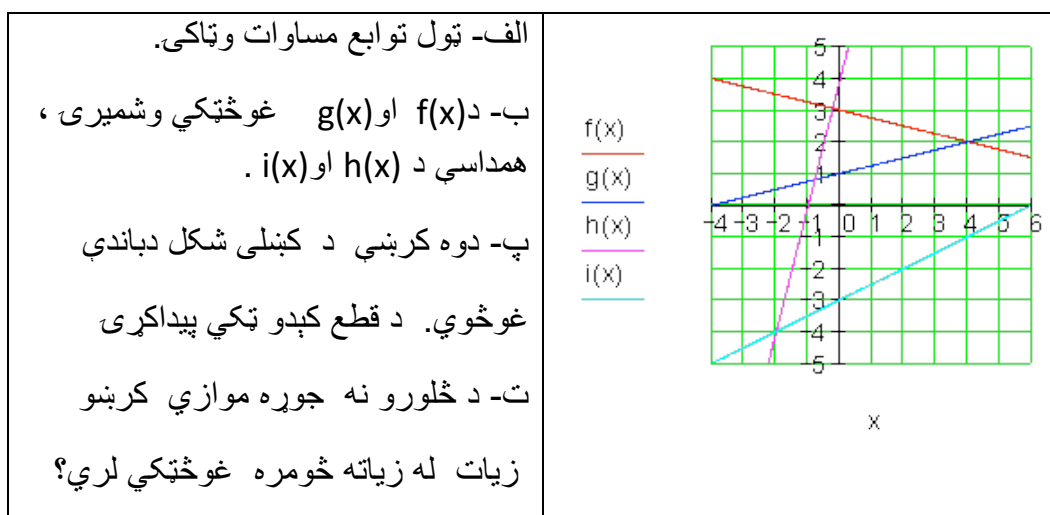
دریم -

د دواړو توابعو غوڅتکی وښایي او په کواوردینات سیستم کي يې گراف انځور کړی.

$f(x) = 0,04x + 20$  ;  $g(x) = 0,15x + 15$

څلورم -

د څلورو گرافونو سره شکل په پام کي ونیسی.



پنځم –

دوه یو په بل نیغې ولارې کرښې یو بل په  $(-1 | -2)$  کې غوڅوي .

ممکنه کرښ مساوات ورکړی.

شپږم –

کرښه  $h$  په کرښه  $g$  نیغه ولاره ده. د  $h$  جگوالی وټاکي.

الف –  $a_{1g} = -0,5e$  - ب  $a_{1g} = 2e^{-2}$  - پ  $a_{1g} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

اوم –

یوه مجله، چې د اخستلو € 2,20 قیمت لري، 120 000 جلده (پوښه) چاپیږي د بازار کشف دفتر په مرستع دوی کره کوي، چې د € 0,20 نرخ کمیدو په اساس مجله په 5000 پوښه زیاته خرڅیدی شي، د € 0,20 په نرخ جگوالي د 5000 مجلو خرڅلاو یې کمیږي.

الف –

د 140 000 مجلو د چاپ قیمت وښایی

د  $y$  دانو په چاپ خومره د پوښ قیمت ورکوي.

ب –

کوم د خرڅلاو گڼون یا تعداد د چاپ خوني انتظار کېدی شي، که د مجلي قیمت په  
€ 1,50 ټیټ کړي؟

## 2.4 د کرښیزو توابعو په مرسته

### 2.4.1 د ورځنیو ستونځو یا پرابلمونو حل:

د کرښیزو توابعو په مرسته ورځني ستونځوبي؟

بیلگه I:

ملک او سپین دواړه په روغتون کې د ناروغچوپړ په توګه په یوه بیارغونې روغتون کې کار کوي او دواړه همغه بنسټ معاش اخلي. په دې وخت کې باید دواړه زیات کار وکړي. د میاشتي په اخر کې دوی معاشونه سره پرتله کوي. د ملک نغد معاش € 3559 دی، د سپین € 3223. ملک په روانه میاشت کې ۴۳ ساعته زیات کار کړی او سپین فقط ۲۷ ساعته زیات کار کړی. بنسټ معاش او د زیات کار پیسې وښایي.

د زیات کار وخت:  $x$  اخستل شوی ټول معاش:  $f(x)$

دوه معاش حسابونه ورکړ شوي دي.

$$P_2(27 | 3223) \quad \text{او} \quad P_1(43 | 3559)$$

$$a_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3223 - 3559}{27 - 43} = \frac{-336}{-16} = 21 \Rightarrow f(x) = 21x + a_0$$

(  $a_1$  = زیات کار پیسې  $a_0$  = بنسټ معاش )

$$\begin{aligned} P_1(43 | 3559) \Rightarrow f(43) = 3559 &\Leftrightarrow 21 \cdot 43 + a_0 = 3559 \\ &\Leftrightarrow 903 + a_0 = 3559 \quad | -903 \\ &\Leftrightarrow a_0 = 2656 \\ \Rightarrow f(x) &= 21x + 2656 \end{aligned}$$

بنسټ معاش € 2656 دی او د زیاتکار € 21 .

بیلگه II

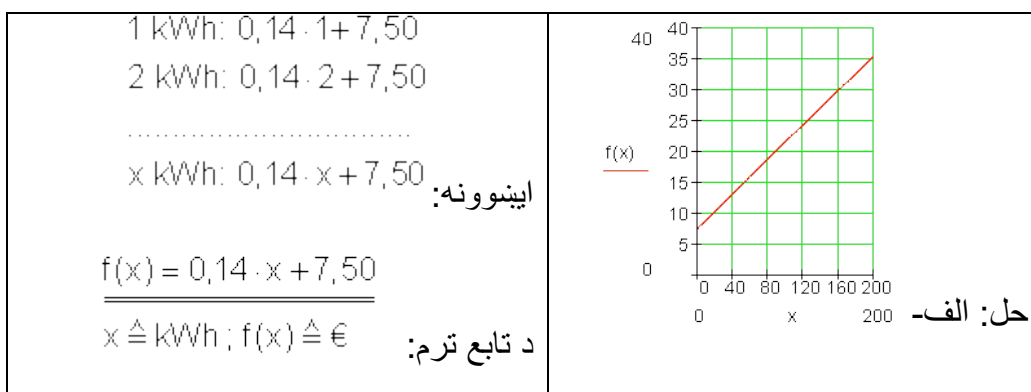
یو انرژي پلورونکی خپلو مشتریانو ته برېښنا په لاندې شرایطو وړاندې کوي:

یو kWh کیلو وات په ساعت د € 0,14 په نرخ د میاشتي په € 7,50 بنسټ پیسو .

الف – یو تابع ترم ولیکی. په یوه مناسب کواورډینات سیسم کې د 200 kWh پورې د برق مصرف ګراف وکارئ.

ب - د برېښنا د څلورو میاشتو لگښت € 150,40 دی. څومره برېښنا لگول شوي؟  
پ - یو دویم پلورونکی برېښنا په € 0,10 وړاندې کوي د میاشتي په € 10 بنسټ پیسو.

د برېښنا پلورونکي بدلول د کوم لگښت څخه ګټور تماميږي؟



یادونه: حساب بی له یوونونو صورت نیسي، دا د هرې نتیجې سره ورزیاتېږي.

ب- اینښوونه:  $f(x) = 0,14x + 7,50$  د میاشتنۍ شمیرني لپاره باور لري.

د څلورو میاشتو لپاره بنسټ پیسي € 30 دي

$$\Rightarrow f_4(x) = 0,14x + 30 \quad P(x | 150,4)$$

$$\Rightarrow f_4(x) = 0,14x + 30 = 150,4$$

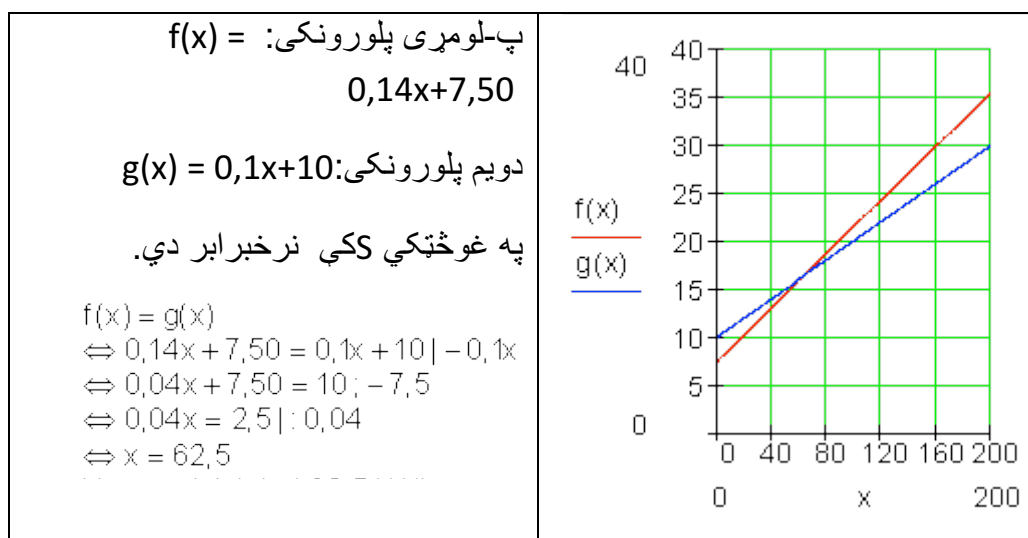
$$\Leftrightarrow 0,14x + 30 = 150,4 \quad | - 30$$

$$\Leftrightarrow 0,14x = 120,4 \quad | : 0,14$$

$$\Leftrightarrow x = 860$$

د برېښنا لگښت په څلورو میاشتو کې 860kWh وو.

پ-



### بیلگه III

د وښو(د حیواناتو د خوراک څه) چمتووالي اوتومات ،، کولابیر،، شپون د ورځي 7,5 kg خوراكي موادو ته اړتیا لري. دولس ورځي د مخه چې دا د خوراک موادو ذخیره پکه شوي وه، هلته نور هم 250 kg خوراكي مواد شتون لري.

الف –

یو د تابع مساوات ولیکی، چې دا حالت تشریح کوي.

ب - دولس ورځي پخوا په څومره خوراكي موادو دا ذخیره پکه شوي وه؟

پ – د 50 kg څخه وروسته دا ذخیره بیرته د ب - په اندازه پکیري . دا کله اړین کیري.

حل –

الف - x محور : وخت په ورځو y محور : د وښو یا خوراكي مواد په kg .

$$f(x) = -7,5x + a_0$$

$$P(12 | 250) \Rightarrow f(12) = 250 \Leftrightarrow -7,5 \cdot 12 + a_0 = 250$$

$$\Leftrightarrow -90 + a_0 = 250 | +90$$

$$\Leftrightarrow a_0 = 340 \Rightarrow \underline{\underline{f(x) = -7,5x + 340}}$$

ب - د پکولو وخت دی.

د پکوني وخت  $x = 0$  دی.

$$\Rightarrow f(0) = -7,5 \cdot 0 + 340 = 340$$

د خوراكي موادو شتون 12 ورځ د مخه 340 kg وو.

پ -

$$f(x) = 50 \Leftrightarrow -7,5x + 340 = 50 | -340$$

$$\Leftrightarrow -7,5x = -290 | :(-7,5)$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{580}{15} = \frac{116}{3} \approx 38,7$$

نږدې له 38,7 ورځو د مخه ذخيره بيرته پکه شوي.

#### بيلگه IV

د تلفون شرکت ،، ملفون ارزان،، (HB) وړاندې کوي:

هره د خبرو دقیقه € 0,06 قیمت لري، د میاشتي بنسټیز قیمت € 8,50 سره.

د ،، ملفون ارزاني،، (HP) شرایط دي:

هر د خبرو دقیقه € 0,08 قیمت لري، د میاشتي بنسټ قیمت € 5 سره.



( يوه سكيخ ترتيب كړی )

الف – په څومره دقيقو كې دواړه قيمتونه برابر دي؟

ب – ته د مياشت د تلفون لپاره لري ( پيسې نيا وركوي ) ته كوم شركت ټاكي او د ټاكلي شكت سره به څېرمه خبرې وكړي؟

پ – د الف او ب- نتيجې په يوه پروت ولاړ – يا كواوردينات سيستم كې انځور كړی.

حل :

$$\text{الف-} \quad \text{HB} : K_1(x) = 0,06x + 8,5 \quad \text{HP} : K_2(x) = 0,08x + 5$$

د لگښت برابر والی د دواړو كړښو په غوڅي كې شتون لري.

$$\begin{aligned} K_2(x) = K_1(x) &\Leftrightarrow 0,08x + 5 = 0,06x + 8,5 | - 0,06x \\ &\Leftrightarrow 0,02x + 5 = 8,5 | - 5 \\ &\Leftrightarrow 0,02x = 3,5 | : 0,02 \\ &\Leftrightarrow x = 175 \end{aligned}$$

$$K_1(175) = 0,06 \cdot 175 + 8,5 = 19$$

$$K_2(175) = 0,08 \cdot 175 + 5 = 19$$

له 175 دقيقو وروسته لگښت برابر دی.. (€ 19) .

ب –

HB :

$$\begin{aligned} K_1(x) = 25 &\Leftrightarrow 0,06x + 8,5 = 25 | - 8,5 \\ &\Leftrightarrow 0,06x = 16,5 | : 0,06 \\ &\Leftrightarrow x = 275 \end{aligned}$$

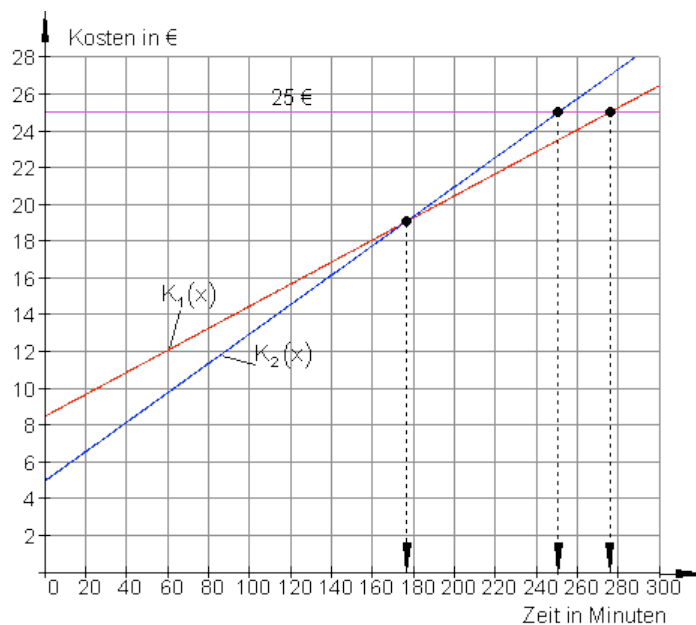
HP :

$$\begin{aligned} K_2(x) = 25 &\Leftrightarrow 0,08x + 5 = 25 | - 5 \\ &\Leftrightarrow 0,08x = 20 | : 0,08 \\ &\Leftrightarrow x = 250 \end{aligned}$$

د HB خدمتونه ارزان دي، ځكه چې د € 25 لپاره كېدی شي 275 دقيقې تلفون وشي.

برعکس یا په خټ د HP 25 € فقط د 250 دقیقو لپاره بسیا کوي.

پ –



پروت: وخت په دقیقه، ولاړ لگښت په یورو

بیلگه V

یو ه فابریکه کری شی خورا زیات یخوونی جوړ کری (د کاپا څیټي پوله).

متحوله د دانی لگښت ثابت دی او  $k_v = 300 \text{ €}$  دی.

یخوونی هر یو د  $375 \text{ €}$  قیمت باندې پلورل کیږي.

الف – قیمت تابع  $K(x)$  پیدا کری، چې د خرڅلاو تابع یې  $E(x)$  ده او د گټې تابع یې د فابریکې لپاره  $G(x)$  ده.

ب – د کوم تولیدېږی سره به د گټې پولې یا ورشو  $Gewinnschwelle$  ته ورسېږو؟

په دې ځای کې ټول مصارف څومره دي همداسې لاس ته راوړنه؟

پ – د توانپولي پورې گټه خورمه لويه ده؟

حل-

الف-

$K_f = 90\,000 \text{ €}$ $k_v = 300 \text{ €}$ $p = 375 \text{ €}$ $K(x) = k_v \cdot x + K_f = 300x + 90\,000$ $E(x) = p \cdot x = 375 \cdot x$ $G(x) = E(x) - K(x) = 75x - 90\,000$	ځاي په ځای لگښت: متحول د داني لگښت: د خرڅلو قيمت: دلگښت تابع: د خرڅلاو ابع: د گټې تابع:
--	--

ب – د گټې پوله هغه ځای دی، چې هلته گټه نهکيري.

$$G(x) = 0 \Leftrightarrow 75x - 90\,000 = 0 \mid +90\,000 \Leftrightarrow 75x = 90\,000 \mid :75 \Leftrightarrow x = x_s = 1\,200$$

$$E(x_s) = E(1\,200) = 375 \cdot 1\,200 = 450\,000 = K(x_s)$$

د ورځني د 1200 توليدپری سره فابريکهگټه کوي.

د گټې پولي کې لگښت همدومره لوي دی لکه خرڅلاو. (€ 450 000)

پ – د توانپولي گټه:  $G(1500) = 75 \cdot 1500 = 22\,500$

په توان پولي گټه € 22 500 ده.

بيلگه VI .

سپين د تلفون شرکت ،، ارزانه سرو يا -تلفون،، نرخ گوري

نرخ A : بنسټ نرخ € 5 د مياشتني لومړي لس ساعته مفت، پسي 0,5 Ct. / min .

نرخ B : بنسټ نرخ / € 10 د مياشتني لومړي ۲۰ ساعته مفت، پسي 0,4 Ct. / min .

نرخ : د میاشتی تولی پیسی یا Flatrate د میاشتی Flatrate 25 € / Monat.

د ورځې په منځنی توگه سپین دوه نیم ساعته سرف کوي.

الف - د هر نرخ لپاره د تابع مساوات ولیکی.

ب - په یوه مناسب پروت ولاړ سیستم یا کواوردینات سیستم کې د تابع گراف سم کړی.

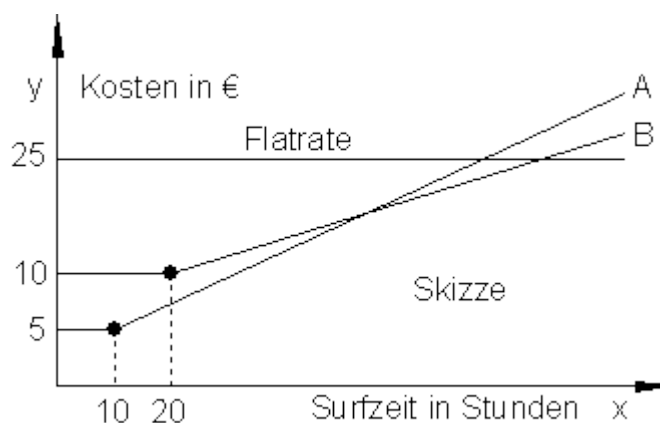
پ - روښانه کړی، {ې له گراف څخه ټول څه لوستل کیري (انترپریٹیشن یا تشریح)

ت - د سپین لپاره مساعد نرخ وشمېری.

ټ - د نرخ A او B لپاره په کوم ټکی کې ارزښت برابر دی؟

ث- د کوم سرف وخت وروسته دې سپین فلېټ رېټ وټاکي؟

حل -



محور x : وخت په ساعت      محور y : لگښت په یورو

نرخ A :

0,5 Ct/min = 30 Ct/h = 0,3 € / h (Steigung)      دلته ۶۰ دقیقې دي.

(جگوالی)

$$\Rightarrow K_A(x) = 0,3x + a_0$$

۱۰ مفت ساعته په دي معنا دي، چې په لومړيو لس ساعتونو كې يواځې 5€ د بنسټلگښت راځي.

له دي لاس ته راځي  $P(10;5)$

په دي ټكي كې د  $K_A(x)$  گراف ځغلي

$$P(10|5) \Rightarrow K_A(10) = 5 \Leftrightarrow 0,3 \cdot 10 + a_0 = 5 \quad | -3 \\ \Leftrightarrow a_0 = 2$$

د نرخ A لپاره تابع مساوات:  $K_A(x) = 0,3x + 2$

نرخ B:

0,4 Ct/min = 24 Ct/h = 0,24 €/h  
0,4 Ct/min دلته 60 ساعته دي (جگوالی)

$$\Rightarrow K_B(x) = 0,24x + a_0$$

۲۰ مفت ساعتونه په دي معنا دي، چې په لومړيو ۲۰ ساعتونو كې فقط د ۱۰ يورو بنسټپيسې راځي،

$\Rightarrow P(20;10)$

په دي ټكي كې د  $K_B(x)$  گراف ځغلي

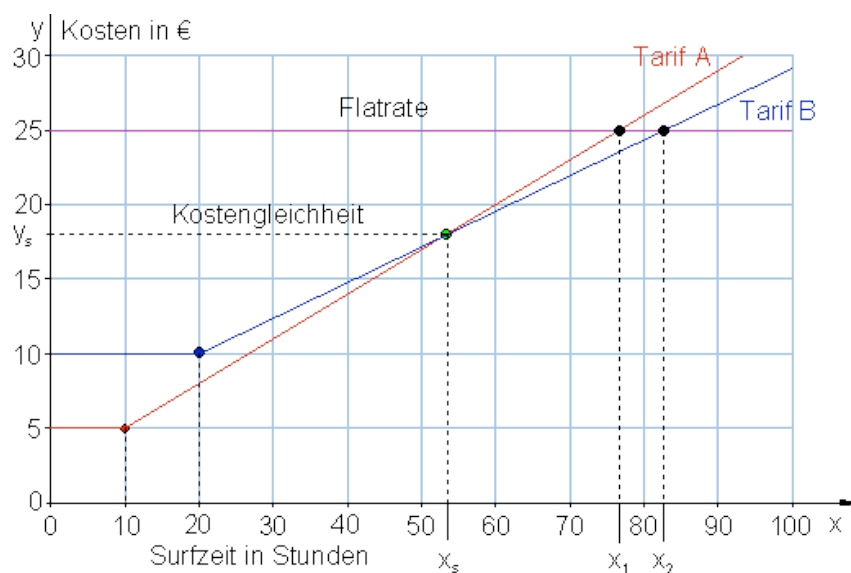
$$P(20|10) \Rightarrow K_B(20) = 10 \Leftrightarrow 0,24 \cdot 20 + a_0 = 10 \\ \Leftrightarrow 4,8 + a_0 = 10 \quad | -4,8 \\ \Leftrightarrow a_0 = 5,2$$

د نرخ B د تابع مساوات:  $K_B(x) = 0,24x + 5,2$

نرخ C : فلیٹ ریت له ساعتونو خپلواک دی.

د نرخ لپاره لپاره د تابع مساوات  $F(x) = 25$  (د محور ته غبرگ)

ب -



پ - په نږدې 53 ساعتونو کې دواړه کرښې سره غوڅوي، په دې ټکي کې لگښت برابر دی.

تر 53 پور د A نرخ مساعد دی. د 53 او 82 ترمنځ د B نرخ مساعد دی. له 82 وروسته فلیٹ ریت ګټور دی.

ت - سپین د میاشتي 75 ساعته سرف کوي. په دې سرف نرخ کې د ده لپاره B مساعد دی:

د میاشتي د سرف دوام  $2,5h.30 = 75St.$  ساعته:

$K_A(75) = 0,3 \cdot 75 + 2 = 24,50$	د نرخ لگښت:
$K_B(75) = 0,24 \cdot 75 + 5,2 = 23,20$	د نرخ لگښت:
$F(75) = 25$	د نرخ لگښت:

ټ - په دواړو کرښو کې دې د A او B نرخ برابروالی پیدا شي.

$$\begin{aligned} K_A(x) = K_B(x) &\Leftrightarrow 0,3x + 2 = 0,24x + 5,2 \mid -0,24x \\ &\Leftrightarrow 0,06x + 2 = 5,2 \mid -2 \\ &\Leftrightarrow 0,06x = 3,2 \mid : 0,06 \\ &\Leftrightarrow x = x_3 = \frac{320}{100} : \frac{6}{100} = \frac{320 \cdot 100}{100 \cdot 6} = \frac{320}{6} = \frac{160}{3} \\ &= 53 \frac{1}{3} \end{aligned}$$

( ۵۳ ساعته او ۲۰ دقیقې )

$$K_A\left(\frac{160}{3}\right) = \frac{3}{10} \cdot \frac{160}{3} + 2 = 16 + 2 = 18$$

53 h ساعتونو او 20 min دقیقو سرف وخت کې د نرخ برابروالی حاکم دی. په دې وخت کې لګښت د دواړو لپاره 18 € دی.

ث - د ګراف څخه لوستل کېږي، چې د  $K_B(x)$  غوڅتګی د  $F(x)$  سره هغه ټکی په نڅېنه کوي، چې له هغه څخه د سرف وخت مساعد دی نسبت و نرخ B ته.

$$\begin{aligned} K_B(x) = F(x) &\Leftrightarrow 0,24x + 5,2 = 25 \mid -5,2 \\ &\Leftrightarrow 0,24x = 19,8 \mid : 0,24 \\ &\Leftrightarrow x = x_2 = 82,5 \end{aligned}$$

د میاشتنی د 82,5 سرف دوام وروسته باید په فلټ ټ وړول شي.

پوښتنې

ګرښیز توابع VII

لومړی -

د لاندې ګرښیزو توابعو ګرافونه رسم کړی:

$$\text{a) } f(x) = -2x + 2 \quad \text{b) } f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$$

$$\text{c) } f(x) = \frac{3}{4}x - 3 \quad \text{d) } f(x) = 3x - 6$$

د ویم -

د یوه کرښه جگوالی  $a_1$  معلوم دی. پرته له دې یو ټکی  $P$  ورکړ شوی دی، چې په کرښه پروت دی. د تابع مساوات وټاکي او په یوه مناسب پروتولار سیستم کې یې گراف وکارې.

$$\text{الف - } P(3|4) \quad a_1 = 1 \quad \text{ب - } P(-8|1) \quad a_1 = -1$$

$$\text{پ - } P(4|3) \quad a_1 = \frac{1}{2} \quad \text{ت - } P(-4|3) \quad a_1 = -\frac{1}{2}$$

دریم -

په یوه کرښه ټکي  $P_1$  او  $P_2$  ورکړ شوي دي. چې په کرښه پراته دي. د تابع مساوات وټاکي او په یوه مناسب پروتولار سیستم کې یې گراف وکارې

$$\text{الف - } P_1(3|4) \quad P_2(7|-1) \quad \text{ب - } P_1(-8|1) \quad P_2(2|-3)$$

$$\text{پ - } P_1(4|3) \quad P_2(-7|-1) \quad \text{ت - } P_1(4|2) \quad P_2(-4|-4)$$

څلورم -

لاندي مساوات په  $x$  پسي حل کړي.

$$\text{الف - } x - 5 = 9 \quad \text{ب - } 8 + x = 25 \quad \text{پ - } x - \frac{2}{3} = \frac{3}{4} \quad \text{ت - } \frac{5}{9} = x - \frac{1}{3}$$

$$\text{ټ - } 88 = 4x - 16 \quad \text{ث - } a + bx = 3b + a \quad \text{ج - } 8 - (x + 5) = 2 \quad \text{چ - } 9 + (5 - x) = 6$$

پنځم -

د وړوکتون بڼوونکي او بڼوونکي د زړه له کومې د مارکي ،، برينمن نمره 1 ،، کافي چښي. دا اوس د بوتل زخيره 1,8 kg دانې ده. د اونی 350 g د کافي دانې د ماشين لپاره اړتيا شته.

الف - د تابع برابر ويلي، چې دا عمل روښانه کوي.

ب - له کوم وروسته د کافي زخيره پای ته رسيري.

پ - د کافي فرمايش پسي بايد ورکړ شي، که د کافي بوتل 400 g پاتي ولري. دا حالت به کله وي؟

ت - په یوه مناسب پروتولار سیستم کې د تابع گراف رسم کړي.

شپږم -



يو موټروان A په 8:00 بجو له کندهار څخه د ننګرهار په لور خوزي.  
 په همدې وخت کې موټروان B له ننګرهار څخه د کندهار په لور خوزي.  
 د کندهار څخه تر جلال اباد دې د سرک اوږدوالی 750 km و (توکلي؟)  
 موټروان A د 120 km/h منځنی چټکتيا سره ځي، موټروان B د 150 km/h  
 منځنی چټکتيا سره ځي.  
 په سرک دواړه موټروانان کله او چيرته سره مخامخ کيږي؟  
 د دې حالت څخه يوه سکيڅې جوړه کړه او وشميره  
 (لارښود: پروت = د وخت محور او ولاړ = د لار محور)  
 اوم - د يوه بارانمرتبېان چې توتېهېنه د  $1 \text{ m}^2$  بنسټ سطحې سره لري په ساعت کې 80  
 ليتره باران ورځي.  
 الف - د وخت t په واکوالي کې ډکجگوالي h روښانه يا تشریح کړی، که په مرتبېان کې  
 له پخوا 150 (t = 0) ليتره وي..  
 ب - د h او t ترمنځ اړيکې کرښيزې دي، که مرتبېان خيټور يا د غونډوسکي په بڼه وي،  
 نو؟

### پوښتنې

#### کرښيز مساوات XV

لومړی -

**پنځم - دا پوښتنه د مخه راغلي او دلته تکرار ده؟؟؟؟؟ ځواب يې هم شته.**  
 د وړوکتون ښوونکي او ښوونکي د زړه له کومې د مارکې ،، برينکمن نمره 1 ،،  
 کافي چې. دا اوس د بوتل زخيره 1,8 kg داني ده. د اوني 350 g د کافي داني د ماشين  
 لپاره اړتيا شته.  
 الف - د تابع برابرېون وليکي، چې دا عمل روښانه کوي.  
 ب - له کوم وخت وروسته د کافي زخيره پای ته رسيږي؟  
 پ - د کافي فرمايش پسي بايد ورکړ شي، که د کافي بوتل 400 g پاتې ولري. دا  
 حالت به کله وي؟  
 ت - په يوه مناسب پروتولار سيستم (کواردينات سيستم) کې د تابع گراف رسم کړی.  
 دويم: توبي او مري په يوه بيار غړني روغتون کې کار کوي او برابر معاش لري. په دې  
 وخت کې بايد دواړه زيا تکاري وکړي. د مياشتې په اخر کې دوی خپل معاشونه سره پرتله  
 کوي. د توبي معاش يې له ماليا € 3559، د ماري € 3223 . توبي په رواني مياشت

کې 43 ساعته زیات کار کړي، ماري معکوساً فقط 27 ساعته کار کړي. بنسټ معاش وشمیرئ او د زیات وخت ټول معاش. دریم: د جلالکوټ ژوبن د، کولاکرس، د وینو ذخیرې اوتومات د ورځې 7,5 kg د حیواناتو وینو ته اړتیا لري، دولس ورځې وروسته له هغط چط د وینو ذخیره ډکه شوي، په ذخیره کط تراوسه 250 kg شته.

الف- یو تابعمساوات ولیکئ، چې داسي حالت تشریح کوي او دط ته اړوند گراف په یوه مناسب پروتولار یا کواوردینات سیستم کې وکارئ.

ب- کومه ډېرئ یا سټ باندي دا ذخیره های دولس ورځې د مخه ډک شوی وو؟

پ- په به دا بیرته هغه په کې ورکړشوي شتون باندي بیرته ډک شي. دا کله غوښتونئ دی؟

څلورم: د ،، تلفونچوپر مغازه،، (HB) هره د خبرو دقیقه € 0,06 قیمت لري، چط د میاشتي بنسټ نرخ € 8,50 وي..

د ،، ارزان ملفون،، (HB) شرطونه دي: هره دقیقه € 0,08 ، د میاشتي بنسټ نرخ € 5 سره. (یوه څېره رسم کړئ).

الف- له څو دقیقو وروسته د دواړو ملفونونو لگښت برابر دی؟

ب- تاسو د میاشتي € 25 په اختیار کې لری (نیا پیسې ورکوي).

کوم چوپر غواړط او دا ستا د خوښط تلفونمغازط سره څومره اوږد تلفونکړئ شي؟

پ- د الف او ب نتیجط په پروتولار یا کواوردینات سیستم کط انځور کړئ.

پنځم -

په یوه هوټل کې د لمبا کوتي د گرمو اوبو چمتووالی لپاره د برېښنايي تیلگرمی ماشین ایښړل شوی. € 25000 د نرژي کلني لگښت راځي. د لرگرمی له لاري یوځلي € 50000 لگښت راځي. په دې پسي د نرژي لگښت فقط € 5000 په کال دی.

الف - په کوم وخت کې دا پیسې ځای نیسي؟ د دې وخت لپاره لگښت څومره دی؟

ب – د دې گراف وکارئ.

شپږم –

له گنیو څخه پوره یا گوره جوړیږي (د گنیو او خوړي ترمخ کرښیزې اړیکې وړاندښونه ده) یو د تابع ترم  $f(x)$  تشریح کوي، چې څومره کیلوگرامه خوړه د  $x$  kg څخه لاس ته راځي.

الف – د تابع ترم  $f(x)$  وټاکئ.

ب – وشمیرئ:  $f(100)$ ;  $f(250)$ ;  $f(x) = 25$

پ – د  $f(x)$  گراف وکارئ.

اوم –

سپین همدا اوس د طب درس په بري پای ته ورساوه او طبي بدلونپروگرام کي برخه اخلي. دا د یوه کال لپاره USA ته ځي. په المان تودوخي په درجه ځلزیوس  $^{\circ}\text{C}$  او امریکاکي په فارنهایت  $^{\circ}\text{F}$  کچيږي. سپین او څر له درس څخه پوهیږي، چې د دواړو تودوخيو ترمخ یو کرښیزه اړیکه شتون لري او  $0^{\circ}\text{C}$  د  $32^{\circ}\text{F}$  تودوخي او  $100^{\circ}\text{C}$  د  $212^{\circ}\text{F}$  تودوخي ده. د یوه تابع برابرون ته اوتیا لري، چې دوی دا تودوخي زر په هغه خپل ورسره بلده درجه وارولی شي.

الف – د سپین لپاره یو تابع مساوت وضعه کړئ، چې له  $^{\circ}\text{F}$  څخه په  $^{\circ}\text{C}$  شمېر بدلون اجازه ورکوي.

ب- د څر لپاره یو تابع مساوت وضعه کړئ، چې له  $^{\circ}\text{C}$  څخه په  $^{\circ}\text{F}$  شمېر بدلون اجازه ورکوي.

پ – په یوه د لمبا اخور کي تودوخي  $95^{\circ}\text{F}$  ده، دا څومره  $^{\circ}\text{C}$  وه؟

ت – د د یوه تودوخي  $40^{\circ}\text{C}$  تبه ټیټېدونکي کار باید سر ته ورسیري. دا په  $^{\circ}\text{F}$  کومه تودوخي ده؟

## پوښتنې

### کرنیز مساوات XVI

لومړی: یوه د میوې وېستنې فابریکه په خپل موټر د څښاک کارټن د رسولو لپاره په هره کارټن  $0,80 \text{ €}$  د میاشتي فیکس یا ځای په ځای لگښت  $840 \text{ €}$  شمیري.

الف – د  $x$  کارټونو د رسولو د لگښت لپاره یو د لگښت تابع منح ته راوړی. د  $2500$  کارټونو د رسولو لپاره څومره لگښت منح ته راځي؟

ب – یو د موادو رسولو شرکت د څښاک موادو رسولو لپاره په هر کارټن  $1,15 \text{ €}$  وړاندیز کوي. د  $x$  کارټونو د رسولو د لگښت یو ترم ولیکی. د کوم د رسولو گڼون یا تعداد لپاره د رسولو شرکت لگښت مساعد ده؟

پ- د میوې فابریکې ته یو وړاندیز وړاندې کړی، چې د لگښت سپما د  $4000$  کارټونو سره به  $680 \text{ €}$  وي.

دویم –

په یوه ملي اقتصاد موډل کې مصارف کرنیز د چمتوالي معاش په واک کې دي. د یوه  $1000 \text{ €}$  معاش سره لگښت  $900 \text{ €}$  دی. د  $1800 \text{ €}$  معاش سره به  $1460 \text{ €}$  وي.

الف – د مصرف تابع  $K$  لپاره تابع ترم ولیکی.

ب – د مصرفونې جگوالی وشمیری که معاش  $800 \text{ €}$  همداسې  $2500 \text{ €}$ ، همداسې  $4000 \text{ €}$  وی.

پ- د مصرفکچه (quote) د معاش برخه ده چې د مصرف لپاره کارول کیږي ((Konsumquote = Konsum / Einkommen)) د مصرف کوونکي د په ب – کې معاش څخه وټاکي. کومې ټولیزې اویکې د مصرف کوونکو او معاش ترمنځ شتون لري؟

ت- د معاش زیاتوالی  $dx$  دی. څو په سلو کې د معاش زیاتوالی د مصرف لپاره ورکړ شوی دی؟

ټ- کوم تابع S د معاش په واکوالي کې د سپماتوان تشریح کوي. تابع K او S  
گرافیکي انځور کړئ. د S صفرخای کوم غوره والی لري؟

دریم -

یو اوسپنه وړونکی  $l_0 = 85 \text{ m}$  اوږد دی او د پرسېښی ضریب یې

$$\alpha = \frac{12 \cdot 10^{-6}}{\text{K}} \quad (\text{K} \triangleq \text{Grad Kelvin})$$

دی. یو تابع ترم  $l(\Delta t) = l_0 + \alpha \cdot l_0 \cdot \Delta t$  د اوسپني باروړونکي اوږدوالی په گوته  
کوي، د په K تودوخی  $\Delta t$  په واکوالي کې.

الف - د دې اوسپني وړونکي د تابع ترم ورکړئ

ب- د لاندې تودوخی تغیر سره د اوسپني وړونکي اوږدوالی و شمیرئ.

: 30 K ; 60 K ; 40 K.

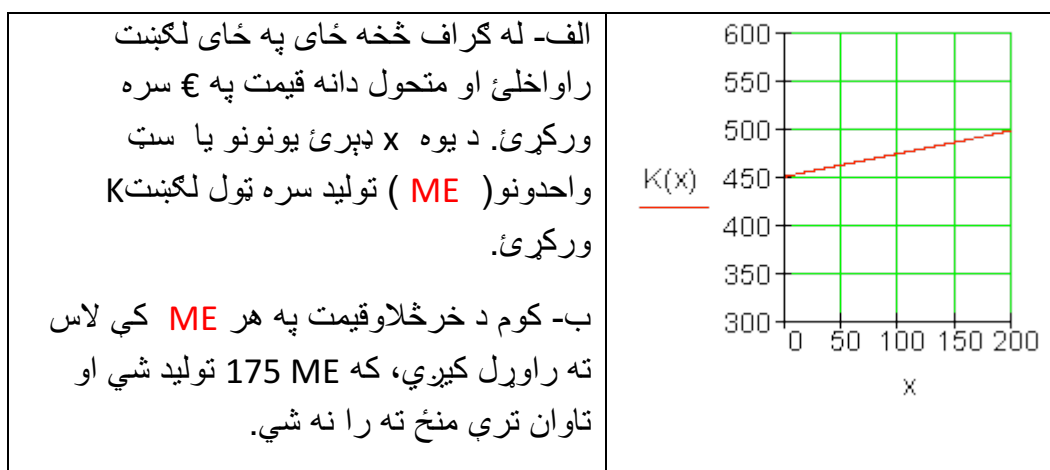
پ- اوسپنه وړونکی باید څومره اوږدوي، چې د 25 K تودوخی په جگوالي د اوږدوالی  
تغیر 25 mm وکړي؟

پوښتنې

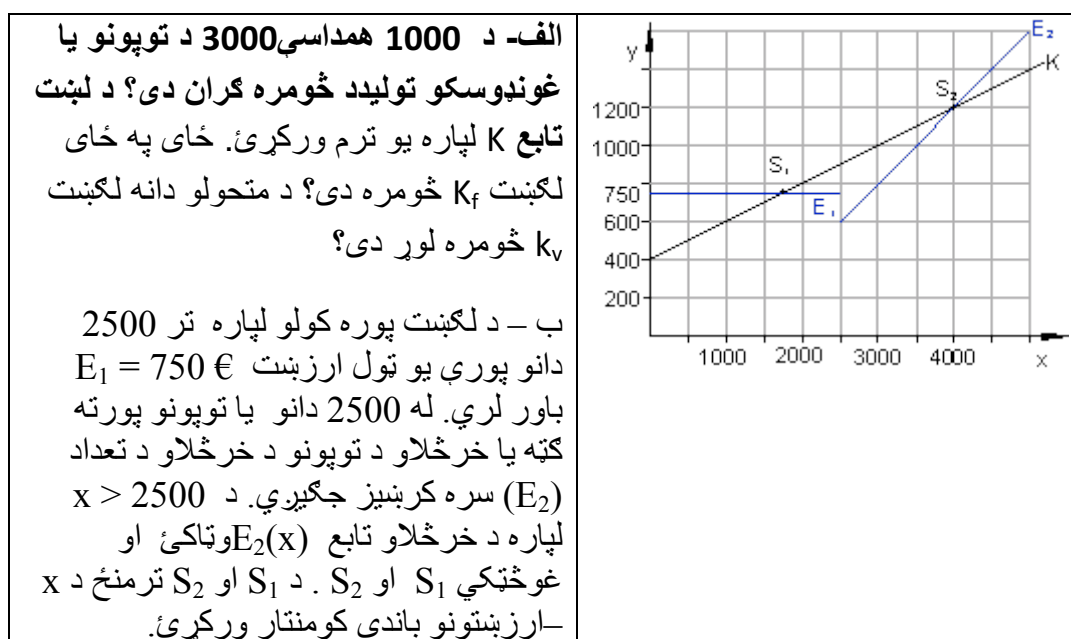
کرنیز توابع برخه XVII

لومړی: څیره د یوه کرنیز لگښت گراف بنایي (ټول لگښت)

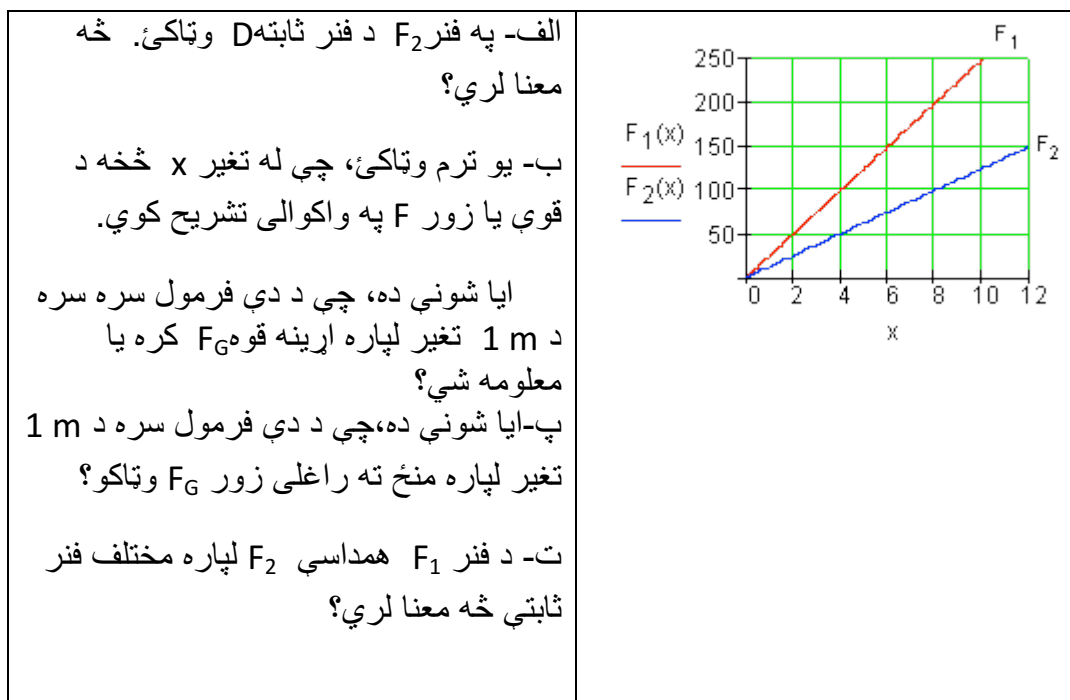
الف- له گراف څخه ځای په ځای لگښت راواخلئ او متحول دانه قیمت په € سره  
ورکړئ. د یوه x ډبرئ یونونو یا ست واحدونو (ME) تولید سره ټول لگښت K  
ورکړئ.



دویم: د تنیس توپونو تولید لپاره لگښت  $K$  کرښیز د تولید شوو توپونو تعداد  $x$  په واک کې دی.



درېم: د دې لپاره چې یوه فنر (بنکه) د فنر تلي په څیر وکارولی شو، په فنر باندې اغیزمنه وزن زور  $F_G$  (په نیوتون  $N$ ) او د فنر تغیر  $x$  (په  $cm$ ) تر منځ اړیکو څخه کره یا ټاکل کېږي.



څلورم: د یو نړیوالجال چلوونکی مشتریانو ته لاندې وړاندیز وړاندې کوي:

۵۰ ساعته انټرنټ، ټول لگښت € 27,50 . هره پسي دقیقه 1 Ct سنت.

دوه تاريف مودلونو باندې کار وکړئ، چې د انټرنټ استعمالکونکي ته د ۵۰ ساعتو لپاره همدا يا برابر شرايط ورکړي.

الف- ترخ ۱ بي له بنسټلگښت.

ب- نرخ ۲: د € 8 بنسټلگښت.

پ-د ۵۰ ساعته څخه زيات د کارولو دوام لپاره کوم تاريف يا نرخ مساعد دی؟

پوښتنې

کرنيز مساوات برخه XVIII

لومړی: چټک رستورانټ، MC – پومس(په غوړو کې سره یاپاخه شوي الوگان)، د پومس لوبني لپاره هره ورځ تازه غوړیو ته اړتیا لري. تر اوسه په زخیره کې 250 kg شته دي.

الف- د تابع مساوات ولیکئ او په یوه مناسب پروت-ولار- یا کواورډینات سیستم کې یې گراف وکارئ.

ب - د 95 kg زخیرې وروسته د رستورانټ مشر باید د نورو فرمایش وکړي. له څومره ورځو وروسته باید فرمایش صورت ونیسي.

پ-دا غوړي ترکومه وخت رسیږي، که پسي فرمایش ورنه کړای شي؟

دویم: د ،،رېنسن،، اسونو تیلېله کې په ټاکلي وخت کې باید (له سرو) پاک شي او له تازه وخو ته تیاری ونیول شي. د ورځي  $2,5 m^3$  سره ټولیري. ډېران یو د  $17 m^3$  ډکي یا حجم لري. ماکسیمال یا خورا زیات  $50 m^3$  سره زخیره کیدی شي.

الف- یو تابع مساوات ولیکئ چې دا حالت تشریح کوي او اړونده گراف یې په یوه مناسب پروت-ولارسیستم کې وکارئ.

ب – له کوم وخت وروسته باید سره یوورل شي؟

پ-څو ورځي د مخه د اخر ځل لپاره سره ورل شوي وه؟

دریم: ارین د ،،اران سرف،، نرخ گوري

نرخ A : اساسي یا بنسټ نرخ € 5 د میاشت لومړي لس ساعتونه ازاد دي، بیا 0,5 Ct په دقیقه.

نرخ B : اساسي یا بنسټ نرخ € 10 د میاشتي لومړي شل ساعتونه ازاد، بیا

0,4 Ct. / min. یا په دقیقه.

نرخ C : Flatrate یا په یوځل نرخ € 25 د میاشتي .

په منځني کچه ارمین د ورځي دویم ساعت سرف کوي یا نړیوال جال گوري.



الف- د هر نرخ پاره د تابع مساوات وليکئ.

ب- په يوه مناسب پروتولار- يا کواوردينات سيستم کي گرافونه وکارئ.

پ- ټول څه تشریح کړئ، چي له گرافونو څخه لوستل کيږي ( Interpretation ).

ت- د ارمين لپاره مساعد نرخ وشميرئ يا پيدا کړئ.

ټ- د نرخ A او B لپاره په کوم ټکي کي د نرخ برابروالی برلاسی دی؟

ث- له کوم سرف وخت څخه د ارمين لپاره فلاتريټ يا ټولنرخ مساعد دی

څلورم: لوگر او علي د ملفون(لاسي تلفون) د قرارداد شرایط هيڅ نه دي لوستلی.

دواړه غوښتنه لري، چي هغه مساعد قرارداد وکړي او دواړه په لاندي داتا باندې تکیه کوي:

لورا € 10,10 ورکوي، که هغه د میاشتي دیرش دقیقې تلفون وکړي او € 13,70 که هغه شپيته دقیقې تلفون وکړي.

علي € 10,10 ، که هغه د میاشتي دیرش دقیقې تلفون وکړي او € 15,20 که هغه د میاشتي اتيا دقیقې تلفون وکړي.

الف- د دواړو قراردادونو لپاره تابعمساوات وليکئ.

ب- دواړه گرافونه په يوه مناسب پروتولار- يا کواوردينات سيستم کي وکارئ.

پ- له دې دواړو کوم يو مساعد قرارداد لري. نتیجه يي مدله کړئ.

پنځم: يو د انرژي قرارداد دنرخمودل د میاشتي بنسټ نرخ G او يوه لگښتقيمت p pro kWh په يوکیلووات په ساعت څخه جوړ دی.

له دې سره يوه کرښيزه اړیکه منځ ته راځي:  $K(x) = p \cdot x + G$

لاندي نرخ راته جمتو لرو:

نرخ	د میاشتنی لگښت په يورو	يو کیلووات قیمت په يورو
-----	------------------------	-------------------------

Tarif I	11,80	0,157
Tarif II	9,00	0,172
Tarif III	14,40	0,135
Tarif IV	18,50	0,125

الف: د هر نرخ لپاره تابع مساوات وليکئ او په يوه مناسب پروتولار - يا کواوردينات سيستم وکاوی.

ب- د  $800 \text{ kWh}$  (  $800$  کيلرواټ په ساعت کې ) د منځنئ کورنئ مياشتني لگښت مساعد پلورونکي پيدا کړئ.

پ- په پروتولار - يا کواوردينات سيستم کې د کرښو غوڅتکي څه مفهوم لري؟

شپږم: کرښيزه تابع  $f(x) = 0,4x - 2$  ورکړښوي. د تابع گراف د  $x$  محور په زياتيز يا مثبت لور په  $4$  يوونونو يا واحدونو راکښل کيږي. د راکښلي کرښې تابعترم  $g(x)$  وټاکئ.  $g(x)$  څنگه له  $f(x)$  څخه جوړېدی شي؟

پوښتنې

کرښيز توابع برخه VIII

لومړی: يوه کرښه  $K_f$  د هغه د مساوات له لارې ورکړ شوي ده. تابع مساوات  $f(x) = a_1x + a_0$  يې وليکئ او د هر گراف په يوه مناسب کواوردينات سيستم کې وکاوی.

الف -  $K_f: 2x - 3y = 7$  ب -  $K_f: 3y - 4x - 1 = 0$  پ -  $K_f: y - 95x = 0$

$$\text{ت - } K_f: \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1 \quad \text{ب - } K_f: -\frac{x}{3} + \frac{y}{5} = 1 \quad \text{ث - } K_f: y = \sqrt{3}(x-2)$$

دويم: کرښيز تابع  $f(x)$  د  $f(x) = 1,25x + 1,5 \quad x \in \mathbb{R}$  سره ورکړ شوی دی.

$$\text{الف- د تابع ارزښتونه وشميرئ: } f(0); f(-1,5); f(0,7); f(\pi); f\left(\frac{\pi}{2}\right); f(u)$$

ب: تابع په کوم ځای کې ارزښت 5- لري؟

پ- د کوم افقي قيمت لپاره ارزښتونه مثبت (زاتيز) دي؟

ت- وښايئ، چې  $f(u+2) - f(u)$  له  $u$  خپلواک دی.

درېم: د لاندې کرښو مساواتو محور غوڅټکي وټاکئ او په يوه کواورديناټسيستم کې يې گرافونه رسم کړئ.

$$\text{الف - } f(x) = -\frac{3}{2}x + 4 \quad \text{ب - } f(x) = -4x - 3,5 \quad \text{پ - } f(x) = \frac{3}{7}x - 3$$

$$\text{ت - } f(x) = \frac{x}{6} + \frac{5}{6} \quad \text{ب - } f(x) = 2(x + 1,25) \quad \text{ث - } f(x) = -\frac{8}{3}x + \frac{5}{4}$$

څلورم: د غبرگو مساوات و کرښي د  $g(x) = -2x + 4$  سره د ټکي  $P(-3 | 1)$  له لارې وټاکئ.

پنځم: کرښه د تابع مساوات  $f(x) = 1,5x$  سره په کواورديناټسيستم کې رسم کړئ. بي له نورو مرستندويو موادو دا لاندې کرښي هم ور رسم کړئ.

$$g(x) = 1,5(x - 2) ; h(x) = 1,5x - 2 ; i(x) = 1,5(-x) ; j(x) = 1,5(2x)$$

شپږم: فيرما "Big Beauty" د شونډورنگ "Amore" توليدوي. دا په توليد کې منځ ته راغلي لگښونه د د توليد شوو دانوتعداد پېچ واک کې يا تابع دي. د  $x = 100$  دانو په توليد سره € 385 لگښت منځ ته راځي، د  $x = 200$  دانو په توليد سره € 410 لگښت منځ ته راځي. د دانوتعداد او د منځ ته راغلو لگښتونو ترمنځ يوه کرښيزه اړيکه شتون لري.

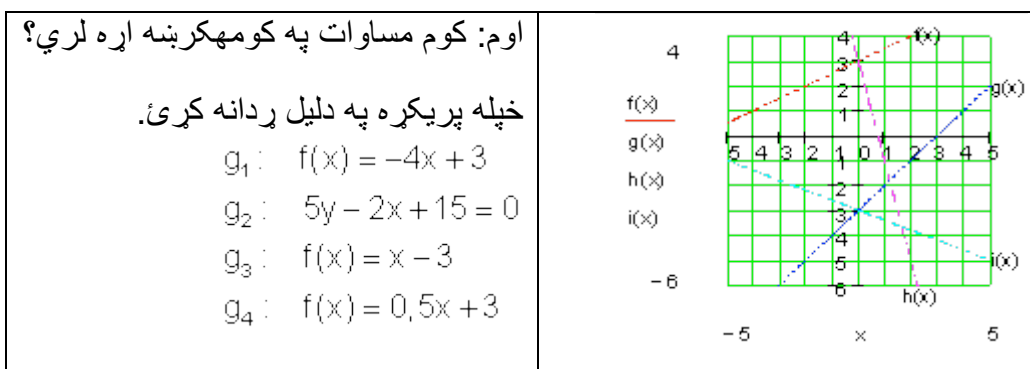
الف- د لگښت ت ابع وليکئ.

ب- د  $x = 140$  دانو توليد سره د داني لگښت څومره دی

پ- د خورا زياتو دانو توليد سره د داني لگښت د کوم ارزشت لور ته هڅيري؟

ت- په کوم ډېرئ يا سټ  $x$  سره د گټې ساحه پرته، که د هر شونډو رنگ خرڅلاو قيمت  $€ 5,20$  لاس ته راوړل شي؟

ټ- د  $K(x)$  (دلگښت تابع) او  $E(x)$  (د خرڅلاو تابع) گرافونه په يوه کواورډيناتسيستم کې وکارئ.



کرښيز برابرېون يا - مساوات

برخه  $X$

لومړی: د يوه کرښيز تابع د تابع ترم دی:  $f(x) = \frac{4}{3}x - 2$

الف- ټکی  $A(|u|-1)$  په گراف پروت دی.  $u$  وټاکئ

ب - د  $f(x)$  صفرځايونه وټاکئ

پ- د  $x$  د کوم ارزښت لپاره باور لري  $f(x) > 1$  ؟

ت-د  $f(x)$  ارزښتدېری یا سټ وټاکي، که  $D_f = \{x \mid 0 \leq x \leq 4\} \mathbb{R}$  وي.

ت-د  $f(x)$  گراف داسي و کښوي، چې کښول شوي کرښه د  $x$ -محور په  $x=-2$  کې غوڅه کړي.

دويم: دوه توابع  $f(x)$  او  $h(x)$  ورکړي. د کرښيز تابع  $h(x)$  گراف له سرچيني يا پيل څخه تيريري.

$h(x)$  وټاکي، که  $h(x)=f(0)$  او  $f(x) = 2e^x; x \in \mathbb{R}$  وي.

دریم: د کرښيز تابع  $f(x)$  سفر ځايونه او وټاکي، که لاندې اړيکي معلومي وي:

$$f(-4) = 2$$

$$f(1) = -4$$

څلورم: وښايي:

ټکي  $P_3\left(-\frac{\pi}{2} \mid 3\right)$  او  $P_1\left(\frac{\pi}{2} \mid -1\right); P_2\left(\frac{3\pi}{2} \mid -5\right)$  په يوه کرښه پراته دي.

پنځم: کرښه  $g$  داسي راکښل کيږي، چې راکښلي کرښه  $h$  له ټکي  $P$  څخه تيريري. د  $h$  مساوات يا برابرې وټاکي.

$$g(x) = -0,25x + 1 \quad P(3 \mid 4)$$

شپږم: د د کومو ارزښتونو لپاره کرښه په ټکو  $P_1(0 \mid 1,5k)$  او  $P_2(\sqrt{3k} \mid 2k)$  کې

جگوالي  $a_1 = 1$  لري؟

اوم: حل کړي:

الف-  $f(x) = 0,5x - 3$  د  $f(x) > 0$  لپاره د  $x$ -ارزښتونه وټاکي

ب-  $g(x) = 1,25x$  ;  $f(x) = 0,5x - 3$  . غوڅنکي وټاکي.

اتم: په يوه زخيره ټانک کې 9500 لیټه اوبه پرتې يا خوندي دي. هره وځ له ټانک څخه 160 لیټره اوبه وېستل کېږي.

الف- د دې (شي) حالت لپاره تابع مساوات وليکئ.

ب-له څومره ورځو وروسته ټانک تشیږي؟

پ- د تابع گراف وکارئ.

نهم: یو بایسکلځغاستی A په یوه وختځغاسته کې دچټکتیا منځ ارزښت  $25 \text{ km/h}$  ته رسېږي.

بایسکلځغاستی B 20 دقیقې د A څخه وروسته خوزي او یو منځنی چټکتیا 45  $\text{km/h}$  ته رسېږي.

چیرته او کله بایسکلځغاستی B و A ته رسېږي؟ یوه سکیڅي چمتو کړئ.

## ۴ -- کر بنیز مساوات سیستم د ۲ برابر ونونو او ۲ اوونونو سره.

داسې سیستم له دوه برابر ونونو یا مساواتو څخه جوړ دی. غوښتونې د دواړو مساواتو گډ حل دی. مختلفې تڼلارې شته، چې سړی حل ته ورسیري

په لاندې einsetzen in = په ... کې ایښوول.

د جمعي تڼلار:

د حل پل (قدم) غوڅي (قطاع، که قطعہ؟) د جمعي تڼلار ته لومړی امکان یا واریانت	مساوات سیستم: (I) $5x - 2y = 1$ (II) $3x + 3y = 9$
لومړی: مساوات ورته داسې بڼه بدل کړئ، چې ضریبونه (ترمنځ عددونه یا ځلوني) د $y$ متحولې تر مخنځینې پورې سره سروخوري.	(I) $5x - 2y = 1   \cdot 1,5$ (II) $3x + 3y = 9$ <hr style="width: 50%; margin-left: 0;"/> (I) $7,5x - 3y = 1,5$ (II) $3x + 3y = 9$
دویم: منځ ته راغلي مساوات سره جمعه کړي او د $x$ - متحولې پسې یې حل کړئ	(I) $7,5x - 3y = 1,5$ (II) $3x + 3y = 9$ } + <hr style="width: 50%; margin-left: 0;"/> $10,5x = 10,5   : 10,5$ $\Leftrightarrow \underline{\underline{x = 1}}$
دریم: د $x$ لپاره میندل شوي ارزښتونه د دواړو څخه په یوه مساوات کې کیږدئ او $y$ پسې یې حل کړي. څلورم: حلست یا حلډېرئ ولیکئ	په $3x + 3y = 9$ کې ایښوونه: $x = 1$ $3 \cdot 1 + 3y = 9$ $\Leftrightarrow 3 + 3y = 9   -3$ $\Leftrightarrow 3y = 6   : 3$ $\Leftrightarrow \underline{\underline{y = 2}}$

	$L = \{(1 2)\}$
--	-----------------

پنجم:

از مابینت د اینوونی له لاری

$$(I) \quad 5x - 2y = 1 \Rightarrow 5 \cdot 1 - 2 \cdot 2 = 1 \Leftrightarrow 5 - 4 = 1 \Leftrightarrow 1 = 1 \quad (w)$$

$$(II) \quad 3x + 3y = 9 \Rightarrow 3 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 9 \Leftrightarrow 3 + 6 = 9 \Leftrightarrow 9 = 9 \quad (w)$$

<p>د اینوونی تلنلار: د اینوونی تلنلار لپاره د حل پلونه (قدمونه) وارینت 1</p> <p>لومړی: مساوات (I) د <math>x</math> پسې حل کیري.</p> <p>دویم: د بني اړخ میندل شوی ترم په مساوات (II) کې اینوول کیري او د <math>y</math> پسې حل کیري.</p>	<p style="text-align: right;">مساواتسیستم</p> $(I) \quad 5x - 2y = 1$ $(II) \quad 3x + 3y = 9$ $(I) \quad 5x - 2y = 1   +2y$ $\Leftrightarrow 5x = 2y + 1   : 5$ $\Leftrightarrow x = \frac{2}{5}y + \frac{1}{5}$ $x = \frac{2}{5}y + \frac{1}{5} \text{ eingesetzt in (II): } 3x + 3y = 9$ $3 \left( \frac{2}{5}y + \frac{1}{5} \right) + 3y = 9$ $\Leftrightarrow \frac{6}{5}y + \frac{3}{5} + 3y = 9   - \frac{3}{5}$ $\Leftrightarrow \frac{6}{5}y + 3y = 9 - \frac{3}{5}$ $\Leftrightarrow \frac{21}{5}y = \frac{42}{5}   \cdot 5$ $\Leftrightarrow 21y = 42   : 21$ $\Leftrightarrow \underline{\underline{y = 2}}$
---	---



دریم: د  $y$  لپاره میندل شوی ارزښت په یو د دې دوه وتون مساواتو کې اېښوول کېږي، دا بیا په  $x$  پسې حل کېږي.

$$\begin{aligned} y = 2 \text{ eingesetzt in (II): } 3x + 3y &= 9 \\ 3x + 3 \cdot 2 &= 9 \\ \Leftrightarrow 3x + 6 &= 9 \quad | -6 \\ \Leftrightarrow 3x &= 3 \quad | : 3 \\ \Leftrightarrow \underline{x = 1} \end{aligned}$$

څلورم: د حل سټ ولیکئ

$$L = \{ \underline{\underline{(1 \mid 2)}} \}$$

پنځم: د اېښوولو له لارې حل

$$(I) \quad 5x - 2y = 1 \Rightarrow 5 \cdot 1 - 2 \cdot 2 = 1 \Leftrightarrow 5 - 4 = 1 \Leftrightarrow 1 = 1 \quad (w)$$

$$(II) \quad 3x + 3y = 9 \Rightarrow 3 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 9 \Leftrightarrow 3 + 6 = 9 \Leftrightarrow 9 = 9 \quad (w)$$

مساواتسې د حل پلونه (قدمونه) د اېښوولو تڼلار لپاره سټم

$$x - 2y = 1 \quad \text{واریانت 2}$$

$$x + 3y = 9$$

$$\begin{aligned} \text{لومړی: مساوات (II) د متحولي } y \text{ پسې حل کېږي.} & \quad | -3x \\ 9 - 3x & \quad | : 3 \\ 3 - x & \end{aligned}$$

$$5x - 2y = 1$$

دویم: دینی لور میندل سوی ترم په مساوات (I) کې کیردی او په  $x$  پسې یې حل کړی.

3.

$$x + 3y = 9$$

دریم: د  $x$  لپاره میندل شوی ارزښت په یو د دې دوه وتونمساوتو کې ایښوول کیري، او دا بیا د متحولې  $y$  پسې حل کیري.

$$\text{څلورم: جلست وليکئ} = \underline{\underline{\{(1 \mid 2)\}}}$$

پنځم: ازماښت د ایښوولو له لارې

$$(I) \quad 5x - 2y = 1 \Rightarrow 5 \cdot 1 - 2 \cdot 2 = 1 \Leftrightarrow 5 - 4 = 1 \Leftrightarrow 1 = 1 \quad (w)$$

$$(II) \quad 3x + 3y = 9 \Rightarrow 3 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 9 \Leftrightarrow 3 + 6 = 9 \Leftrightarrow 9 = 9 \quad (w)$$

ټولې درې تڼلارې د هغه د واریانتو سره په یوه ټکلي مساوتسیستم وکارول شو. که څوک یوگوني تڼلارې ټیک وگوري، پیژني، چې په واریانت ۲ کې لږ د شمیرلو کار غوښتونی دی.

په یوه ټاکلي تڼلار د شمیرلو کار د دې حل کوونکي مساوتسیستم په واک کې دی. له دې امله دې لومړی پام وشي، چې کومه تڼلار د لږ کار سره سرته رسیدی شي. د دې لپاره نو یو څو بیلگو ته اړ یو. لاندې بیگی دې د دې لپاره یوه کوچنی مرسته وي، چې مناسب د حل – یا ځواب تڼلار پیداشي.

### ۴ . ۱ - د مناسب جواب تئلاز لپاره بیلگی

--	--

بیلگه ۱ :

<p>(I) <math>y = 7x + 8</math>          (II) <math>y = -2x - 1</math></p> <p style="text-align: center;">د برابر اینوونی لار</p> $7x + 8 = -2x - 1 \quad   +2x$ $\Leftrightarrow 9x + 8 = -1 \quad   -8$ $\Leftrightarrow 9x = -9 \quad   :9$ $\Leftrightarrow \underline{\underline{x = -1}}$	<p><math>x=1</math> په (I) کی اینوونه <math>y=7x+8</math></p> $\left  \begin{array}{l} y = 7 \cdot (-1) + 8 \\ \Leftrightarrow y = -7 + 8 \\ \Leftrightarrow \underline{\underline{y = 1}} \end{array} \right.$ <p style="text-align: right;">حل: <math>L = \{(-1 1)\}</math></p> <p style="text-align: right;">ازماپینت</p> $\left  \begin{array}{l} \text{(I)} \quad y = 7x + 8 \Rightarrow y = 7 \cdot (-1) + 8 \\ \Leftrightarrow y = -7 + 8 \Leftrightarrow y = 1 \quad (w) \\ \text{(II)} \quad y = -2x - 1 \Rightarrow y = -2 \cdot (-1) - 1 \\ \Leftrightarrow y = 2 - 1 \Leftrightarrow y = 1 \quad (w) \end{array} \right.$
--	---

بیلکہ ۲:

$\begin{aligned} \text{(I)} \quad 2x + 4y &= 8 \\ \text{(II)} \quad 2x - 5y &= 35 \end{aligned}$ <p style="text-align: center;">د جمعے لار:</p> $\begin{aligned} \text{(I)} \quad 2x + 4y &= 8 \\ \text{(II)} \quad 2x - 5y &= 35 \quad   \cdot (-1) \end{aligned}$ <hr style="width: 100%;"/> $\begin{aligned} \text{(I)} \quad 2x + 4y &= 8 \\ \text{(II)} \quad -2x + 5y &= -35 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \text{(I)} \quad 2x + 4y &= 8 \\ \text{(II)} \quad -2x + 5y &= -35 \end{aligned}} \right\} +$ <hr style="width: 100%;"/> $9y = -27 \quad   \quad 9$ $\Leftrightarrow \underline{\underline{y = -3}}$	$y=3 \text{ اینوونہ پہ (1) کی}$ $2x+4y=8$ $\left  \begin{array}{l} 2x - 12 = 8 \quad   +12 \\ \Leftrightarrow 2x = 20 \quad   : 2 \\ \Leftrightarrow \underline{\underline{x = 10}} \end{array} \right.$ <p style="text-align: center;">حل: <math>L = \{(10   -3)\}</math></p> <p style="text-align: center;">از مابینت</p> $\begin{aligned} \text{(I)} \quad 2x + 4y &= 8 \Rightarrow 2 \cdot 10 + 4 \cdot (-3) = 8 \\ \Leftrightarrow 20 - 12 &= 8 \Leftrightarrow 8 = 8 \quad (w) \\ \text{(II)} \quad 2x - 5y &= 35 \Rightarrow 2 \cdot 10 - 5 \cdot (-3) = 35 \\ \Leftrightarrow 20 + 15 &= 35 \Leftrightarrow 35 = 35 \quad (w) \end{aligned}$
--	--

بیلکہ ۳:

$\begin{aligned} \text{(I)} \quad x + 2y &= 5 \\ \text{(II)} \quad -x + y &= 1 \end{aligned}$ <p style="text-align: center;">د اینوونہ لار:</p> <p style="text-align: center;">(II) پہ <math>y</math> پسے حل کریں</p>	$X=1 \text{ پہ (1) کی کیردی } x+2y=5$ $\left  \begin{array}{l} 1 + 2y = 5 \quad   -1 \\ \Leftrightarrow 2y = 4 \quad   : 2 \\ \Leftrightarrow \underline{\underline{y = 2}} \end{array} \right.$ <p style="text-align: center;">حل: <math>L = \{(1 2)\}</math></p>
---	--

$-x + y = 1 \quad   +x$ $\Leftrightarrow y = x + 1$ <p>پہ (I) کی کیردی <math>x+2y=5</math></p> $x + 2(x + 1) = 5$ $\Leftrightarrow x + 2x + 2 = 5 \quad   -2$ $\Leftrightarrow 3x = 3 \quad   : 3$ $\Leftrightarrow \underline{\underline{x = 1}}$	<p>ازماہنت</p> $(I) \quad x + 2y = 5 \Rightarrow 1 + 4 = 5$ $\Leftrightarrow 5 = 5 \quad (w)$ $(II) \quad -x + y = 1 \Rightarrow -1 + 2 = 1 = 35$ $\Leftrightarrow 1 = 1 \quad (w)$ <p>د ربتیا لپارہ</p>
--	--

بیلگہ ۴ :

$(I) \frac{3}{x} - \frac{5}{2y} = 2$ $(II) \frac{12}{x} + \frac{10}{y} = 4$ <p>د زیاتون یا جمعی لار:</p> $(I) \frac{3}{x} - \frac{5}{2y} = 2 \quad   \cdot 2$ $(II) \frac{12}{x} + \frac{10}{y} = 4 \quad   \cdot (-2)$ <hr/> $(I) \frac{6}{x} - \frac{5}{y} = 4$ $(II) -\frac{6}{x} - \frac{5}{y} = -2$ <hr/> $-\frac{10}{y} = 2 \quad   \cdot y$ $\Leftrightarrow -10 = 2y \quad   : 2$ $\Leftrightarrow -5 = y$ $\Leftrightarrow \underline{\underline{y = -5}}$	$(I) \frac{3}{x} - \frac{5}{2y} = 2$ <p><math>y = -5</math> اینوونه په کې</p> <p>حل:</p> <p>ازماښت</p>
---	--

127

$$\frac{3}{x} - \frac{5}{2y} = 2$$

$$| \frac{12}{x} + \frac{10}{y} = 4$$

Additionsverfahren :

$$\frac{3}{x} - \frac{5}{2y} = 2 | \cdot 2$$

$$| \frac{12}{x} + \frac{10}{y} = 4 | \cdot (-2)$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{6}{x} - \frac{5}{y} = 4 \\ -\frac{6}{x} - \frac{5}{y} = -2 \end{array} \right\} +$$

$$-\frac{10}{y} = 2 | \cdot y$$

$$-10 = 2y | : 2$$

$$-5 = y$$

$$\underline{\underline{y = -5}}$$

$$y = -5 \text{ eingesetzt in (I) } \frac{3}{x} - \frac{5}{2y} = 2$$

$$\frac{3}{x} - \frac{5}{2(-5)} = 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{x} + \frac{1}{2} = 2 | -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{x} = \frac{3}{2} | \cdot x$$

$$\Leftrightarrow 3 = \frac{3}{2}x | \cdot \frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{x = 2}}$$

Lösung:  $L = \{(2 | -5)\}$   $x, y \neq 0$ 

Probe:

$$(I) \frac{3}{x} - \frac{5}{2y} = 2 \Rightarrow \frac{3}{2} - \frac{5}{2(-5)} = 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2 \Leftrightarrow 2 = 2 \text{ (w)}$$

$$(II) \frac{12}{x} + \frac{10}{y} = 4 \Rightarrow \frac{12}{2} + \frac{10}{-5} = 4$$

$$\Leftrightarrow 6 - 2 = 4 \Leftrightarrow 4 = 4 \text{ (w)}$$

دا پورته په ورپورته های کېږي. کښته هم

همدا دی.....

$$\frac{3}{x} - \frac{5}{2y} = 2$$

$$| \cdot \frac{12}{x} + \frac{10}{y} = 4$$

Aditionsverfahren:

$$\frac{3}{x} - \frac{5}{2y} = 2 | \cdot 2$$

$$| \cdot \frac{12}{x} + \frac{10}{y} = 4 | \cdot (-2)$$


---


$$\left. \begin{array}{l} \frac{6}{x} - \frac{5}{y} = 4 \\ -\frac{6}{x} - \frac{5}{y} = -2 \end{array} \right\} +$$


---


$$-\frac{10}{y} = 2 | \cdot y$$

$$-10 = 2y | : 2$$

$$-5 = y$$

$$\underline{\underline{y = -5}}$$

$$y = -5 \text{ eingesetzt in (I) } \frac{3}{x} - \frac{5}{2y} = 2$$

$$\frac{3}{x} - \frac{5}{2(-5)} = 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{x} + \frac{1}{2} = 2 | -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{x} = \frac{3}{2} | \cdot x$$

$$\Leftrightarrow 3 = \frac{3}{2}x | \cdot \frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{x = 2}}$$

$$\text{Lösung: } L = \{(2 | -5)\} \quad x, y \neq 0$$

Probe:

$$(I) \quad \frac{3}{x} - \frac{5}{2y} = 2 \Rightarrow \frac{3}{2} - \frac{5}{2(-5)} = 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2 \Leftrightarrow 2 = 2 \quad (w)$$

$$(II) \quad \frac{12}{x} + \frac{10}{y} = 4 \Rightarrow \frac{12}{2} + \frac{10}{-5} = 4$$

$$\Leftrightarrow 6 - 2 = 4 \Leftrightarrow 4 = 4 \quad (w)$$



129

$$\frac{3}{x} - \frac{5}{2y} = 2$$

$$| \frac{12}{x} + \frac{10}{y} = 4$$

Additionsverfahren :

$$\frac{3}{x} - \frac{5}{2y} = 2 | \cdot 2$$

$$| \frac{12}{x} + \frac{10}{y} = 4 | \cdot (-2)$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{6}{x} - \frac{5}{y} = 4 \\ -\frac{6}{x} - \frac{5}{y} = -2 \end{array} \right\} +$$

$$-\frac{10}{y} = 2 | \cdot y$$

$$-10 = 2y | : 2$$

$$-5 = y$$

$$\underline{\underline{y = -5}}$$

$$y = -5 \text{ eingesetzt in (I) } \frac{3}{x} - \frac{5}{2y} = 2$$

$$\frac{3}{x} - \frac{5}{2(-5)} = 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{x} + \frac{1}{2} = 2 | -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{x} = \frac{3}{2} | \cdot x$$

$$\Leftrightarrow 3 = \frac{3}{2}x | \cdot \frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{x = 2}}$$

Lösung:  $L = \{(2 | -5)\} \quad x, y \neq 0$ 

Probe:

$$(I) \quad \frac{3}{x} - \frac{5}{2y} = 2 \Rightarrow \frac{3}{2} - \frac{5}{2(-5)} = 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2 \Leftrightarrow 2 = 2 \quad (w)$$

$$(II) \quad \frac{12}{x} + \frac{10}{y} = 4 \Rightarrow \frac{12}{2} + \frac{10}{-5} = 4$$

$$\Leftrightarrow 6 - 2 = 4 \Leftrightarrow 4 = 4 \quad (w)$$

يادونه:

مساواتسيستم د كسرونو ترمونو څخه جوړ دی. دا چي مخرج د صفر كيدو اجازه نه لري يا نه شي صفر كيدی، تعريفست بايد وركړ شي. داسی مساواتسيستم كرنيز نه دی.

د رسموني لار

$$(I) \quad x - y = -2 \quad L_I = \{(-2|0); (-1|1); (0|2); (1|3); \dots\}$$

$$(II) \quad -2x - y = 1 \quad L_{II} = \{(-2|3); (-1|1); (0|-1); (1|-3); \dots\}$$

دواړه مساوات د  $y$  پسي حل کيږي.

$$(I) \quad x - y = -2 \quad | +y$$

$$(II) \quad -2x - y = 1 \quad | +y$$

$$(I) \quad x = -2 + y \quad | +2$$

$$(II) \quad -2x = 1 + y \quad | -1$$

$$(I) \quad x + 2 = y \quad \Leftrightarrow y = x + 2$$

$$(II) \quad -2x - 1 = y \quad \Leftrightarrow y = -2x - 1$$

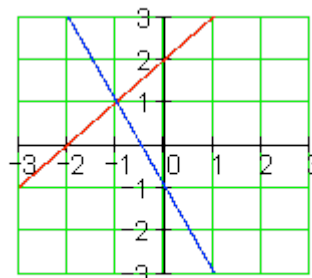
د هر مساوات لپاره ارزښتجوړي د حل سټ په گوته کوي.

کا دا په يوه کواورديناټسيستم کې وکښل شي، نو دوه کرښې ترې لاس ته راځي. د کرښو په غوڅتکي يا نقطه تقاطع کې د دواړو مساواتو حلست پروت دی.

$$L = \{(-1|1)\}$$

په هر مساوات کې د  $x$  لپاره عددونه ايښوول کيږي.

$x$	-2	-1	0	1
$y_I$	0	1	2	3
$y_{II}$	3	1	-1	-3



د رسمونې لار د مساوات او کرښو ترمنځ هندسي (ځمکچيزي) اړيکي ليدور کوي. د حل لار په حيث زيات وخت مناسب نه دی، چې د گډغوڅتکي کواورديناټ په گرافیک کې ناتيک لوستل کيدی شي.

## مساواتسيستم بي له يواځني حل څخه

رسميزه حل يا درسم له لارې حل د مساوات او کرښې په منځ کې هندسي اړيکي ليدور کوي.

- دوه کربني کیدی شي چې نسبت یو بل ته مختلف پروتخایونه ولري.

- دا کیدی چې په یو ټکي کې سره غوڅي کړي، لکه پورته بیلگه چې لیدور کوي، د دواړو کربنیز مساوات لپاره ټک یو حل شتون لري.

- دا کیدی شي یو بل سره غبرگي وي، نو په دې حالت کې کوم ټکی نه شته، چې دواړه کربني یې یو له بل سره گډ ولري. له دې سره اړونده مساوات له دې امله حل نه لري.

- دا کیدی شي یو په بل پرتې وي، یعنې کټمت وي، نو د یوې کربني هر ټکی به د بلې کربني ټکی هم وي. نو له دې امله به دا اړونده مساوات ناپای زیات حلونه ولري.

مساوات سیستم حل نه لري	
$\begin{array}{l} \text{(I)} \quad 10x + 4y = 4 \\ \text{(II)} \quad 5x + 2y = 1 \end{array} \cdot (-2)$ <hr style="width: 100%;"/> $\left. \begin{array}{l} \text{(I)} \quad 10x + 4y = 4 \\ \text{(II)} \quad -10x - 4y = -2 \end{array} \right\} +$	<p>دا د حل پیل مو یوه ناتیګ وینا ته بیایي. دا په دې معنا، چې مساواتسیستم ته حل شتون نه لري.. لیدور دا په دې معنا دی، چې دواړه کربني یو بل ته غبرگي ځغلي او کوم گډ ټکی نه لري.</p>
<p><math>0=2</math> نو دا ناتیګ وینا ده، له دې لاس ته راځي <math>L=\{\}</math></p>	

دا مساواتسیستم ناپای ډېر ځوابونه یا حلونه یا اویونی لري

$\begin{array}{l} \text{(I)} \quad 10x + 4y = 2 \\ \text{(II)} \quad 5x + 2y = 1 \end{array} \cdot (-2)$ <hr style="width: 100%;"/> $\left. \begin{array}{l} \text{(I)} \quad 10x + 4y = 2 \\ \text{(II)} \quad -10x - 4y = -2 \end{array} \right\} +$	<p>د ورته بڼه بدلون وروسته د مساوات (I) او مساوات (II) جمع کونې یو بل سره پورته کوي یا له منځه وړي، دا په دې معنا چې مساوات ورته یا ایډنټیک دي. هره د اعدادو جوړه، چې مساوات (I) پوره کوي، دا مساوات (II) هم پوره کوي. لیدور دا په دې معنا دی، چې کربني یو په بل پرتې دي.</p>
<p><math>0=0</math> له دې لاس ته راځي رښتیا وینا</p>	

## پوښتنې

## مساواتسيستم |

مساوات سيستم ته د دوه متحولو سره گډوله پوښتنې، کرښيز مساواتسيستم، سيستم د کسري ترمونو سره او شي پوښتنې (د متن سره پ، ب، بنټنې)

لومړۍ: د لاندې مساواتسيستم حلست وټاکئ

$$\begin{array}{ll} \text{(I)} & 4x + 5y = 32 \\ \text{(II)} & y = 5x - 11 \end{array} \quad \begin{array}{ll} \text{(I)} & 5y - 3x = 1 \\ \text{(II)} & x = y + 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{(I)} & 3x = y + 15 \\ \text{(II)} & 2y - 10 = 2x \end{array} \quad \begin{array}{ll} \text{(I)} & 15y - 4x = -50 \\ \text{(II)} & x = y + 7 \end{array}$$

د ویم: د لاندې مساواتسيستم حلست وټاکئ

الف- ب - پ - ت -

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & \begin{array}{l} \text{(I)} \quad 2y = 2x - 40 \\ \text{(II)} \quad 3x = 10 - 2y \end{array} \\ \text{b)} & \begin{array}{l} \text{(I)} \quad \frac{x}{2} - \frac{3y}{5} = 3 \\ \text{(II)} \quad \frac{x}{4} + y = 8 \end{array} \\ \text{c)} & \begin{array}{l} \text{(I)} \quad \frac{2x}{15} + \frac{7y}{12} = 3 \\ \text{(II)} \quad \frac{7x}{25} - \frac{5y}{16} = \frac{3}{20} \end{array} \\ \text{d)} & \begin{array}{l} \text{(I)} \quad \frac{x+5}{y-7} = \frac{4}{3} \\ \text{(II)} \quad \frac{x+2}{y-5} = \frac{5}{8} \end{array} \end{array}$$

دریم: د لاندې مساواتسيستم حلست وټاکئ

الف- ب - پ - ت -

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & \text{(I)} \quad \frac{4}{3x+1} = \frac{2}{3y-13} \\ & \text{(II)} \quad \frac{2}{5x-10} = \frac{4}{7y-6} \\ \text{b)} & \text{(I)} \quad \frac{7}{x} - \frac{12}{y} = \frac{5}{6} \\ & \text{(II)} \quad \frac{4}{y} + \frac{5}{2} = \frac{9}{x} \\ \text{c)} & \text{(I)} \quad \frac{4}{x} + \frac{8}{y} = \frac{5}{3} \\ & \text{(II)} \quad \frac{2}{x} - \frac{4}{y} = -\frac{1}{6} \\ \text{d)} & \text{(I)} \quad \frac{3}{2x-1} - \frac{8}{3y+2} = -\frac{1}{5} \\ & \text{(II)} \quad \frac{5}{2x-1} + \frac{4}{3y+2} = \frac{8}{15} \end{array}$$

څلورم: د لاندې مساواتسيستم حلست وټاکئ

$$\text{(I)} \quad \frac{7}{2x-5} - \frac{9}{7y+5} = \frac{10}{3} \qquad \text{(II)} \quad \frac{24}{2x-5} + \frac{15}{7y+5} = \frac{19}{3}$$

پنځم: يو پلار په دې لحظه كې څلورواوه دومره عمر لري لكه څوې يې او په ۵ كاله كې به فقط درې واړه دومره عمر ولري. دا دواړه همدا اوس څومره عمر لري؟

شپږم: په كوم وځا كې به يو (اوبه) ساتونى (بيلر؟) له دوه نلونو څخه نيمم ډك شي، چې لومړى نل د ټول ساتونې د ډكولو لپاره ۱۸ دقيقې اودويم د دې لپاره ۲۲ دقيقو ته اړتيا ولري يا په كار ولري؟

اوم: د يوه مستطيل يا ولاړكونجيز چاپيريال يا محيط ۱۸۰ سانتي متره دى. اړخ a څومره اوږد دى، كه اړخ b ۳۰ سانتي متره وي؟

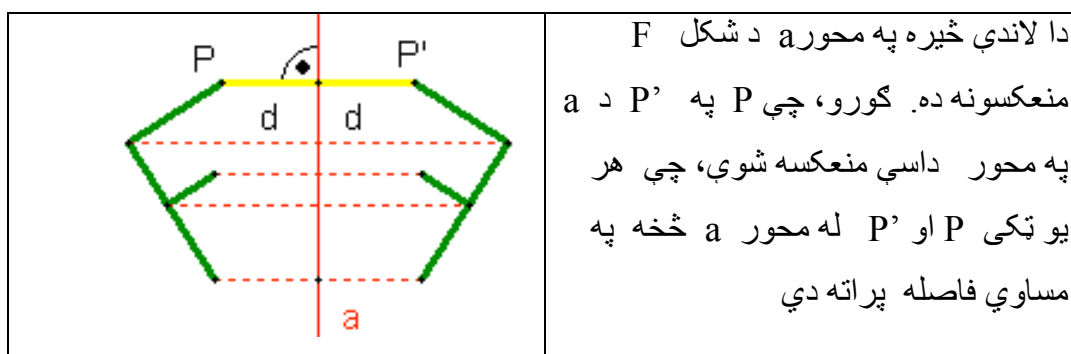
اتم: كه د دوه ارزښتخاييزه پرته جمعې يا پروت زياتون عدد 9 دى. كه ارزښتونه بدل شي، نو نوى عدد لاس ته راځي چې د زاړه عدد 7/4 ده. دواړه څا ارزښتونه څومره دي؟

## ۵ - په محور انعکاسونه (- منعکسونه یا هندارونه)

### Reflection

یوه څیره، چې یو څه په هنداره کې منعکس شوي کتل کيږي.....

پېژند(تعریف): که د یوه شکل هر ټکي  $P$  په یوه ټکي  $P'$  داسې منعکس شي یا راوگرځي، چې و ټکي  $P$  ته د محور  $a$  په نسبت سیومتريک (په همغه واټن یا فاصله) پروت وي، نو دا انعکاس په محور  $a$  منعکسونه (انعکاس کیدنه یا هندارونه) بلل کيږي.



په محور د انعکاس خویونه

(۱) د ټکي  $P$  او د عکس د ټکي  $P'$  د وصل قطعه خط په محور  $a$  نیميږي او په محور  $a$  عمود (ولاره پرته) ده. په پورته شکل کې د وصل کرښې نېمېدنه او عمودیت هم روښانه په نڅبنه شوي دي.

(۲) خط په خط منعکس کيږي.

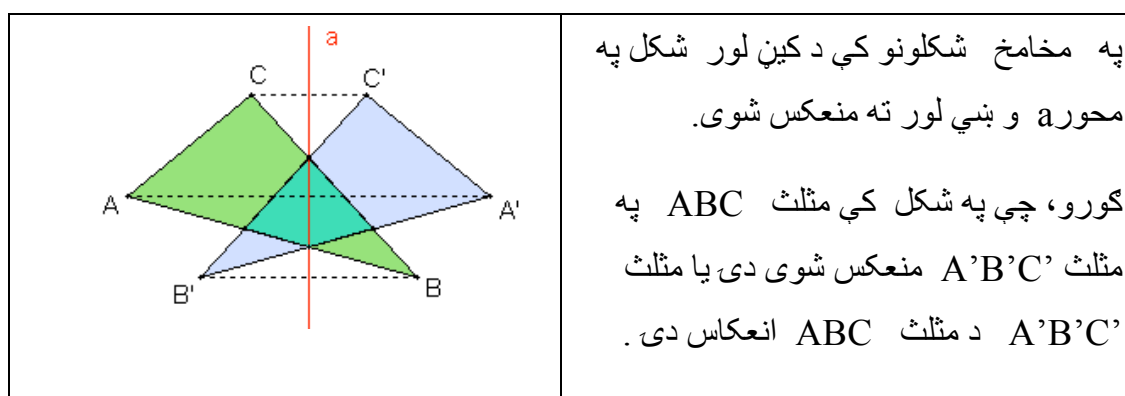
(۳) دایري په دایرو منعکس کيږي، داسې چې شعاع یې سره مساوي وي.

۴) قطعہ خطونہ پہ مساوي قطعہ خطونو منعکس کيڙي

۵) زاويي پہ مساوي لويو زاويو منعکس کيڙي.

۶) ديوه شکل پہ محور انعکاسونہ کي عکس خپل شکل پہ بل لور بدلوي يا خپل شکل پہ خٽ کوي.

شکل، چي دا پورته د انعکاس خوبونه بنايي



فعاليت ۱ :

په پورته شکل کي دي شاگردان وپوهيږي، چي کوم ټکی د کوم ټکي عکس دی او ترمنځ فاصلي دي سره مقايسه کړي.

زده کوونکي دي په شکل کي دانعکاس له امله نورو جوړو شوو مثلثونو ته پام وکړي او تر منځ اړيکي دي وبنايي.

تعريف :

هغه ټکي، چي په محور  $a$  پراته دي بيړته په خپل ځان منعکس کيږي، چي په ځان منعکسونه (انعکاس شدن به خود Fixppoint انعکاس) بلل کيږي.

	<p>فعالیت ۲ :</p> <p>۱) دامخامخ انعکاس وگوری.          دا په محور <math>m</math> انعکاس دی او          وښایی، چې کوم ټکی په کوم ټکي          منعکس شوی.</p>
--	---

۲) پورته په محور منعکس شکلونه نسبت یو بل ته څه بلل کیري؟

۳) زده کوونکي دې په څیره کې د انعکاس خویونه وښایی؟

۴) داسې تشکیل شوي شکلونه یو بل سره منطبق دي، که څنگه؟

په دې هکله خپل فکري دلایل راوړی.

تمرین :

۱) په کمیت سیستم کې ټکي  $A(-3,2)$  ټکی  $B(-1,0)$  او ټکی  $C(0,3)$  ورکړل شوي وي، نو له دې ټکو جوړ شکل انعکاس په همدې کمیاتو سیستم کې په لاندې ډول رسم کړی:

الف) په  $x$  محور منعکس کړی

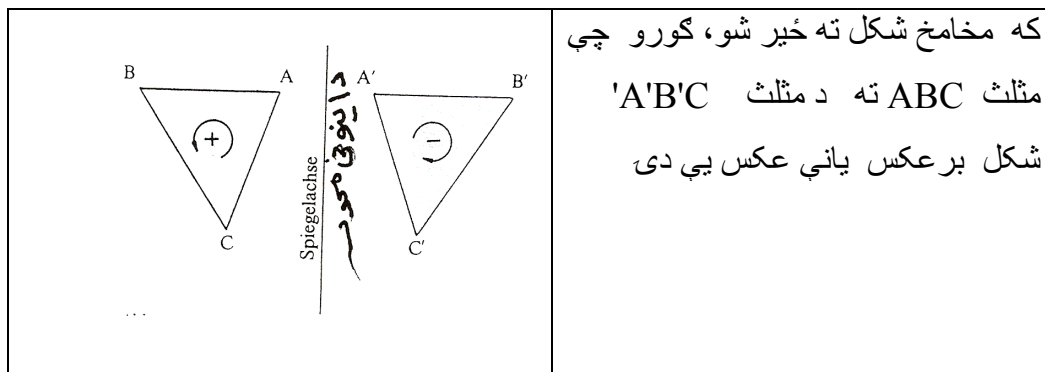
ب) په  $y$  محور منعکس کړی.

۲) په یوه - کمیت سیستم کې دې  $M(-3,-2)$  د یوې دایرې منځنۍ (نقطه مرکزي) وي. له دې ټکي د یو نیم سانتي متره په اندازه وړانگه (شعاع) دایره رسم کړی او بیا دا دایره په  $x$  محور او همداسې په  $y$ -محور منعکس کړی.

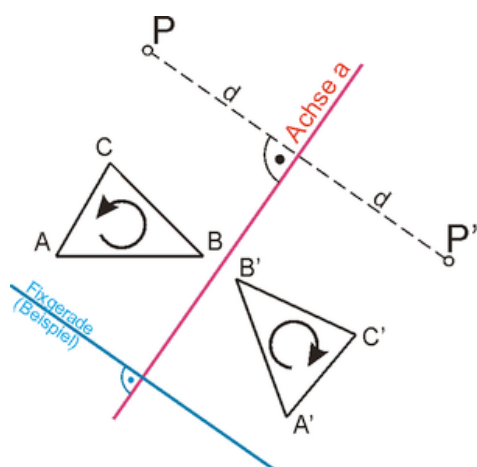


که خه توضیح مو زره غواري ، ويې ليکي.

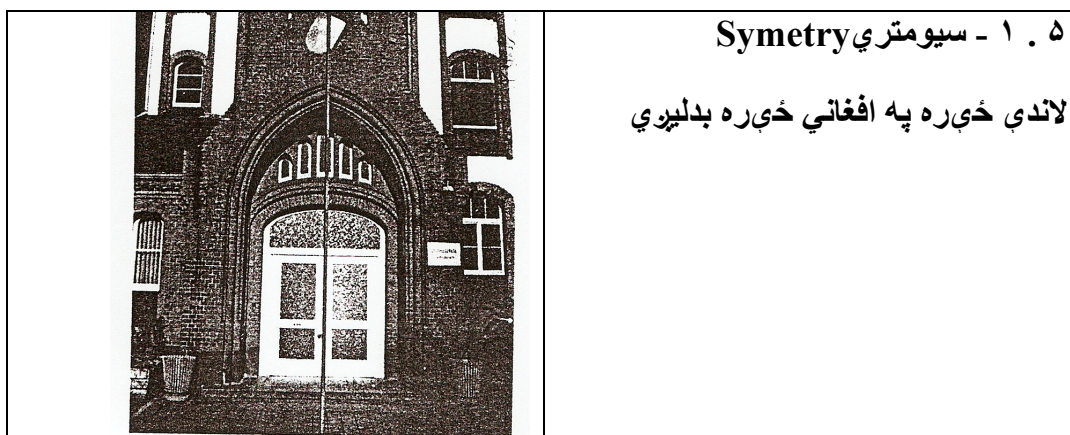
دلته که بله وتکل شي ؟؟؟؟؟؟؟



۳) په لاندې محوري انعکاس کې د ټکو او شکلونو انعکاس - چې څنگه یې صورت نیولی - تشریح کړی.



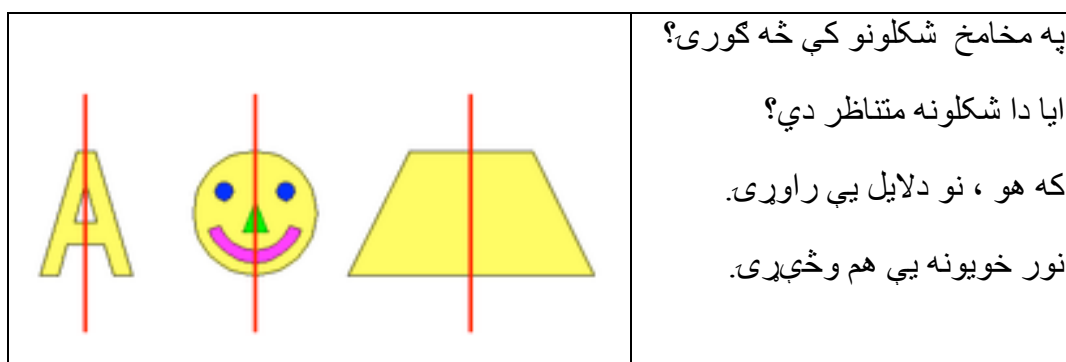
۳) زده کوونکي دی وښايي : که د دایري او منعکسه دایري مرکزونه د محور a د کوم ټکي سره وتړو چې په یوه خط نه وي پراته ، څنگه شکل منځ ته راځي؟



پيژند (تعريف) :

يو مسطح شكل متناظر (سيومتريک) بلل کيږي، که په يوه محور  $a$  داسي انعکاس منځ ته راشي، چې دا شکل په خپل ځان منعکس کړي.

فعاليت ۱ :



فعاليت:

- زده کوونکي دي يوه مربع وکارې او په هغې کې دې داسي خطونه رسم کړي، چې سيومتريک محورونه جوړوي.

عڪس دي تشریح ڪري، ڇي ڇنگه؟

متناظر شڪلونه دوه ڊوله دي

( ۱ ) محوري متناظر :

تعريف :

يو مسطح شڪل محوري متناظر بلل ڪيري، كه په يوه محور  $s$  داسي انعكاس صورت ونيسي، ڇي شڪل ٻي رته په خپل ځان منعكس شي.

بيلگه ۱ :

الف: مستطيل جي ناصف الاضلاع ته د محورونو په ڊول متناظر دي.

ب: يو متساوي الاضلاع مثلث  $ABC$  د ناصف الاضلاع  $s_1$  او  $s_2$  او  $s_3$  په نسبت محوري متناظر دي.

( ۲ ) مركزي متناظر:

تعريف :

يو مسطح شڪل مركزي متناظر بلل ڪيري، كه يو ٽڪي  $S$  داسي موجود وي، ڇي هر شڪل نسبت و دي ٽڪي ته ٻي رته په خپل ځان منعكس شي.

## ۵ . ۲ - مركزي متناظر شڪلونه

بيلگه ۲ :

الف : ٽوٽه ڪرنبه د منڇي ( نقطه مركزي ) سره

ب : متوازي الاضلاع د قطرونو د تقاطع ٽڪي په نسبت مركزي متناظر دي .

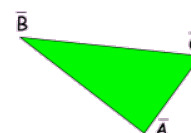
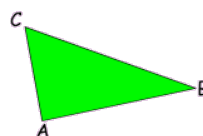
زده ڪوونڪي دڊا پورته تناظر تشریح ڪري

بڻوونڪي دي دا خيره زده ڪوونڪو ته د ڪرڻبي(خطڪش) له لاري روڻسانه ڪري.  
فعاليت:

	<p>په مخامخ شڪلونو ڪي فڪر وڪري، ڇي مرڪزي متناظر دي او ڪه نه؟ ولي؟ دلايل بي راوري.</p>
--	---

تمرينونه:

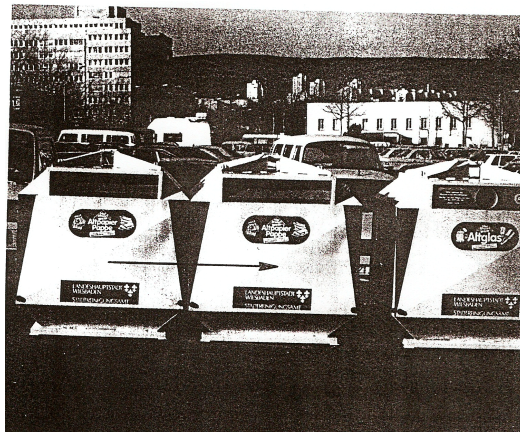
- ۱) په يوه متساوي الساقين مثلث ڪي ڇو متناظر محورونه شته؟
- ۲) دا رسم ڪري او وڻبايي، ڇي ولي متناظر محورونه يا وچور دي؟
- ۳) يو متطيل رسم ڪري او په هغه شڪل ڪي متناظر محورونه رسم ڪري.
- ۴) فڪر وڪري، ڇي د مربع ڪوم محورونه په مستطيل ڪي محورونه نه دي؟
- ۵) په لاندي خيره ڪي و گوري، محوري متناظر دي او ڪه نه؟ دلايل بي راوري



- ۶) په پوه دايره ڪي ڇو محوري متناظر محورونه موجود دي؟
- ۷) ايا دايره مروڪزي متناظر ده؟ ڪه هو نو ولي؟

۵. ۳ - دېرواره هندارونه يا منعکسونه يا بېرته راگرځيدنه

الف - انتقال (Translation)

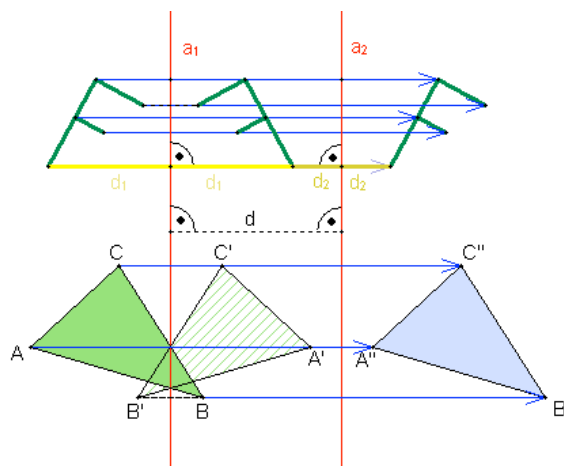


د پورته شکل په ډول که یو بل خپل شکل وي، خو بڼه به وي .

پېژند (تعريف):

که د یوه شکل هر ټکی سملاسي په همغه لور کش کړای شي يا و کښول شي، نو یو مساوي شکل منځ ته راځي. دا انعکاس کونه راکښونه (راکښنه يا ترانسلاشن) بلل کيږي.

په لاندې شکل کې انتقال ورکړ شوی دی.



په پورته شکل کې په محورونو  $a_1$  او  $a_2$  شکلونه له کین لور و ښي لورته منعکس شوي.

د وړني يا انتقال خوبونه:

دوه واړه هندارونه په غبرگ محور د  $d$  فاصلې سره همغه فاصله (قيمت) لري، لکه د یوې  $2d$  په محور عمود راکشونه. دا خوي په پورته شکل کې روښانه معلوميري.

انتقال ( غبرگ انتقال کښول يا وړل ) یواځنی انتقال دی. دا په دې مانا، چې په غیر له دې بل داسې انتقال نه شته.

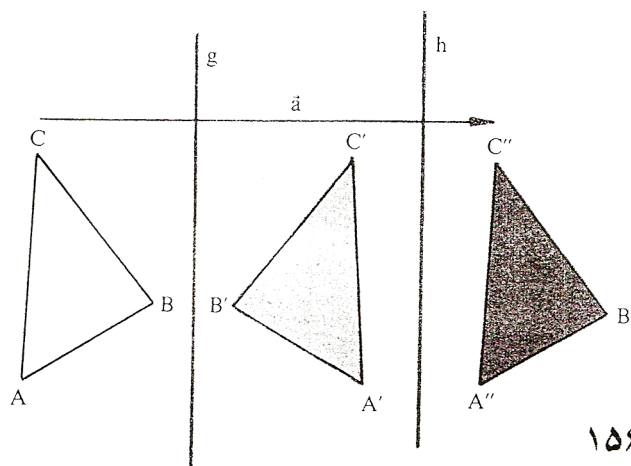
	<p>په لاندې شکل کې د یوه مثلث <math>ABC</math> ښي لور ته انتقال له لارې د <math>a</math> په اندازه انتقال دی، چې په نتیجه کې یې مثلث <math>A'B'C'</math> لاسته راځي. په انتقال کې د شکل لور هم همغه ده. یانې گورو، چې په انتقال کې شکل نه په څټ کيږي</p>
--	--

فعالیت :

د  $(x,y)$  - کمیت سیستم کی دی زده کونکی یومثلث  $ABC$  رسم کړي او دا دی دوه واره د  $d$  په اوږدوالي انتقال کړي. (دا کی دی شي، چې د زده کونکو په مینه یو گل او یا یوه بله بڼه خپره هم وي).  
په انتقال کی زموږ لپاره غوره د انتقال فاصله ده، چې یو څه څومره انتقال کيږي.

## ۵. ۴ - د وړني يا انتقال د جوړولو څیرنه

- ۱ - په هر نڅبڼه شوي ټکي (په مثلثونو کی رأس الزاويي او په دایرو کی مرکزونه په یو ټاکلي اندازه (د ټاکلي انتقال په اندازه) انتقال کړی (دا باید مساوي اوږده وي په همغه طرف او غبرگ).
- ۲ - د ټاکلو خطونو اخرنی نقطې د اصل په پرلپسي ترتیب سره ونبلولی. (د دایرې په انتقالولو کی : په اخر ټکي د  $T$  وړانګي په اندازه دایره ووهی)  
انتقال ځای په ځای ټکي نه لري (که د صفر اندازې په نامه  $identität$  ایدنتیتی یا کټمټ منعکسونی څخه صرف نظر شو)



څیره ۱۵۶

په یوه ځانګړي ډول یو په بل پسې په ډېرو محورونو انعکاس دی په دی ځای کی یاد شوی وي.

## ۵. ۵ - څرخون یا دوران (Rotation)

	<p>پيژند :</p> <p>که دیوه شکل هر تکی P په یوې  دایرې په ځای په ځای تکی M په  کونج <math>\curvearrowright</math> په وړانګه <math>\overline{MP}</math>  وڅرخي یا دوران وڅوري ، نو یو  شکل منځ ته راځي. دا انعکاس په  څرخون تکی M څرخون بلل  کیري.</p>
--	---

په لاندې څیره کې یو درېګودی په دوه زاویو او له دې امله په دوه محورونو څرخي.

	<p>د دوران څویونه</p> <p>په محورونو دوه واړه هندارونه،  چې په <math>\curvearrowright</math> کونج په تکی M  کې یو بل قطع کړي، په تکی M  باندي دیوه دوران سره  مساوي دي، که د دوران زاویه  وي. <math>\curvearrowright</math> ● <math>\square</math> <math>\curvearrowright</math></p>
--	---

پوښتنه

- که په پورته شکل کې که د دوران شعاع دوه متره وي، نو د B او B'' ترمنځ قوس به څومره لوي وي؟

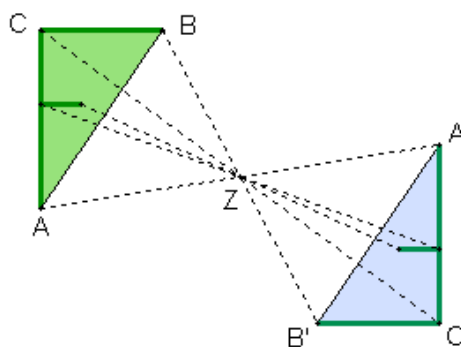


- حدس وکړی، چې د  $C$  او  $C''$  تر منځ شعاع او همداسې د قوس لویوالی به د وران کې د  $B$  او  $B''$  د قوس سره تفاوت ولری؟ او ولې؟

۵. ۶ - (په) ټکي انعکاس

پیژند:

په ټکي  $Z$  یو دوران د دوران د زاویې  $180^\circ$  سره یو مرکزي انعکاس دی.  $Z$  د مرکزي انعکاس وسطې نقطه (منځټکی) بلل کیږي.



په ټکي د منعکسونې یا په څټکونې خوي

یوه انعکاس کوونکې نقطه او د عکس نقطه یو قطعه خط ټاکي، چې په منځټکي نیمیری.

فعالیت :

په پورته شکل کې په نقطه د انعکاس خواص په ورکړ شوو تورو سره وښایی

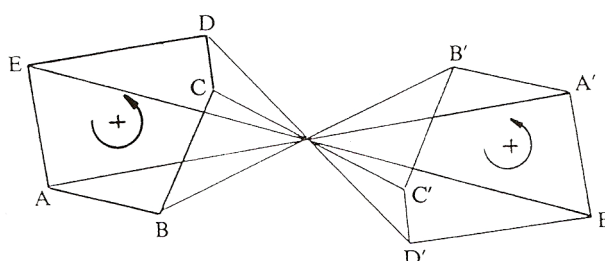
که د یوه موټر ټیټر – چې شکل یې دایروي دی- قطر 120 cm وي ، نو ووايي، چې 30 km لار وهلو که به دا ټیټر څو واړه دوران وکړي يا وڅرخي؟

**تعريف:**

يو دوران د دوران د زاويې  $\mu = \pm 180^\circ$  سره په ټکي انعکاس بلل کيږي.

دا انعکاس خپله لور ساتي يا همغه لوريزه انعکاس دی.

لاندي څیره دې وکتل شي



په ټکي د انعکاس د جوړولو تحليل يا څیره

۱ – د اصلي شکل د هر په نڅبنه ټکي څخه یوه کرښه وکارئ، چې له منعکس کونکي ټکي Z تیر شي او د |PZ| په فاصله د Z په بله لور وباسي.

۲ – داسې منځ ته راغلي ټکي په ترتیب یو د بل سره وتړئ ( وصل کړئ ) (همداسې په M' یوه د  $r'=r$  شعاع ووهئ)

**دوران :**

**تعريف :**

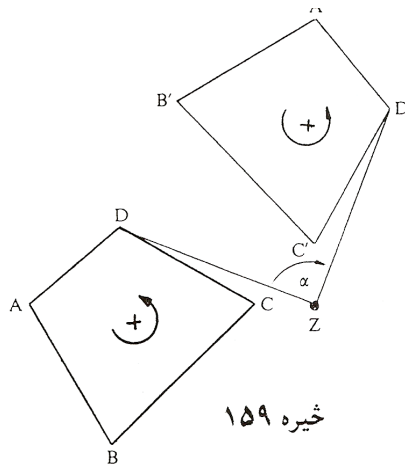
دوران يا څرخون D هغه انعکاس دی، چې په ورکړل شوي ټکي Z ( دوران منځ ) هر اصلي ټکي P په یوه منعکس شوي ټکي P' داسې تنظیم کړي، چې |PZ| او

$W(PZP') = \mu$ ، چي  $\mu$  د مخه په خای ورکړ شوی زاویه داس په نامه دوران زاویه ده.

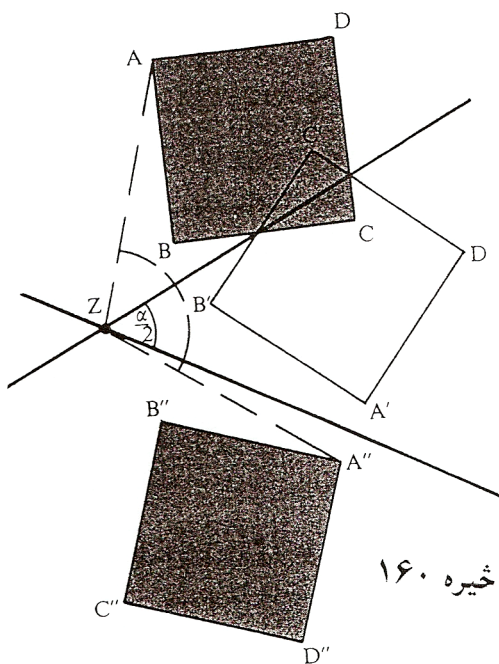
يو دوران د دوران د ټکي او د دورا له زاويي څخه يواځنی ټاکلی دی. دوران نور په علامه له مخه ورکړ شوي (ددي لپاره دي ټیرو لوستونو ته پاموي).

د دوران د جوړښت تحلیل:

۱ - په ټولو په نڅښه ټکو ( د مصلعو د زاويو د رأس ټکي، په دایره د مرکز ټکي) او د دوران په مرکز  $Z$  يوه وړانگه کيږدی. د هر ټکي  $P$  فاصله  $PZ$  په کومکي شعاع وکاروی، کومه چې له  $PZ$  سره زاویه  $\mu$  جوړوي



۲ - لاس ته راغلی ټکی د اصل سره په یو په بل پسې په ترتیب ونښلوی (په همدې ترتیب په یوه دایره شعاع ووهی). دوران په همغه لور کونکرو اینځ څیره کونه ده.

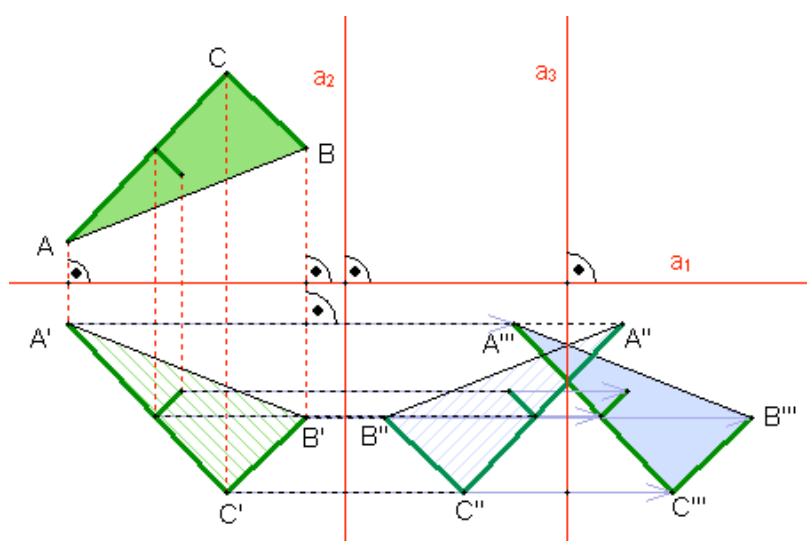


خوی انعکاس یا خوی رگرخیدنه یا بیرته راگرخینه die the glide  
 Gleitspiegelung  
انعکاس انزلاقی

یادونه: خوی د زیر مخامخ یا برعکس دی.

پېژند: خوی هندارونه د محور هنداروني یوه یو پرېل پسې هندارونه او محور ته  
 غبرگه راکبینه ده او یا په خټ..

لاندې خیره دې وکتل شي.



**د خوی** هنداروني خوي:

یوه خوی هندارونه کېدی شي، چي په دوه غبرگو محورونو او یوه په دې ولاړ محور  
 باندې د دريواره هنداروني له لارې منځ ته راشي یا جوړه شي.

نتیجه:

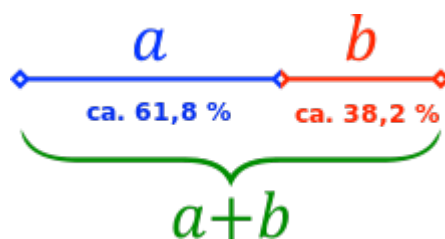
مور دلته انعکاس، سیومتری، دوران لنډ انعکاسو سیومتری او دوران وڅپرل . ومو لیدل، چې په دې ټولو کې شکلونه یو په بل پرېوزي، یواځې او یواځې په ځنو عملیو کې د شکل لور بدله وي.

دا هر څه مو چې ولوستل د انطباق خواص دي.

### ۵. ۷ - طلايي غوڅی

طلايي نسبت یا ناپرېکيدونکي وېشنه یا ټوټه ونه یو ځانگړی د وېشنې نسبت دی، چې د تاریخي دلایلو پر بنسټ اوږده ټوټه د **Major (M) Majority** یانې ستره ټوټه سره بڼایو یا په نڅېنه کوو او کوچنی برخه یا ټوټه د **minor (m) Minority** یانې کوچنی سره په نڅېنه کوو.

ددې نڅېنوني سره د طلايي نسبت شرایط په لاندې توگه ورکړل شوي دي.



$$m : M = M : (M+m)$$

لنډه ټوټه ځان و لوي ټوټې ته داسې نيسي يا لنډه ټوټه نسبت و لوی ټوټې ته داسې ده، لکه لويه ټوټه د لوي ټوټې او کوچنی ټوټې جمعې ته .

$$\frac{m}{M} = \frac{M}{m+M} \Leftrightarrow \frac{M}{m} = \frac{M+m}{M}$$

د طيلايي نسبتونو د مساواتو د کيني لور حل

$$\left(\frac{m}{M}\right)^2 + \frac{m}{M} = 1 \mid \sigma = \frac{m}{M} \Rightarrow$$

$$\sigma^2 + \sigma - 1 = 0 \text{ مربع مساوات}$$

$$\sigma = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \text{ فقط مثبت حل}$$

$$\sigma \approx 0,6180339887498484820$$

د طلايي نسبتونو د بني اړخ اوبيونه:

$$\frac{M}{m} = \frac{M+m}{M}$$

$$\frac{M}{m} = \frac{M}{m} + \frac{m}{M} \mid \tau = \frac{M}{m} \Leftrightarrow \frac{m}{M} = \frac{1}{\tau} \Rightarrow$$

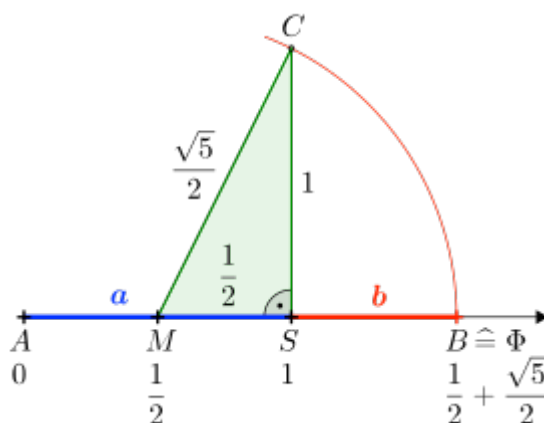
$$\tau = 1 + \frac{1}{\tau} \mid \tau$$

$$\tau^2 = \tau + 1$$

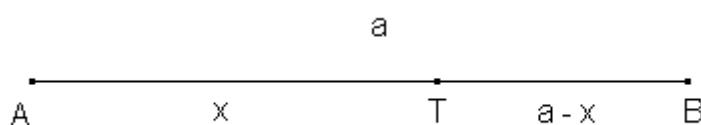
$$\tau^2 - \tau - 1 = 0 \text{ مربع مساوات}$$

$$\tau = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{فقط مثبت حل}$$

$$\tau \approx 1,61803398874989484820$$



توتیه کرینه  $a$  دې ورکړ شوی وي



د  $[AB]$  څخه د ورکړ شوي توتیه کرینې  $a$  اوږدوالي حل د  $x$  په مرسته، چي په

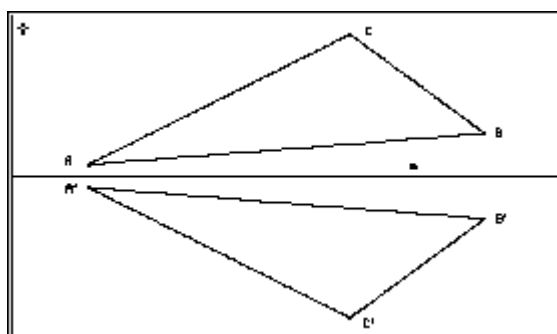
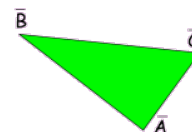
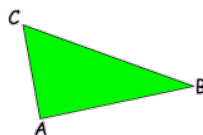
$[AT]$  کې پروت دی.

$$\frac{x}{a} = \frac{a-x}{a}$$
$$x^2 = a^2 - ax$$
$$x^2 + ax - a^2 = 0$$

د حل سټ فرمول د مثبت حل سره (د قطعه خط اوږدوالی)

$$\Rightarrow x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} a$$
$$\Rightarrow \sigma = \frac{x}{a} = \frac{a-x}{a} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \approx 0,618$$

دې پسي به نور غوره او په زړه پوري عزونه راشي





Beispiele:

1.



خیره ۱۴۹

**پیشنند:** هندسي شکلونه کونگروینخ ( برابر ) بلل کیري، که په فورم ، بنه ( خیره ) او



## ټولګه

هره کونګرواینڅ څیرونه د کرنې اینونې د تړلو څخه لاس ته راځي. دلته بیا هر کرنې اینونه څرخون لور بدلوي. له دې امله لرو:

د کرنې اینونو ( څرخونو یا کښونو ) جوړه تعداد یا گڼون یو همغه لوریز کونګرواینڅ څیرونه ده. د نا جوړه تعداد یا گڼون کرنې اینونو ( کرنې اینونې یا کښونو اینونې ) یو نا همغه لوریز کونګرواینڅ څیرونه ده.

دیو په بل پسې د کونګرواینڅ څیرونو کارونه بیرته کونګرواینڅ څیرونه لاس ته راګوي. دا چې هر کونګرواینڅ کرنې اینونه ده نو د پای کونګرواینڅ یو په بل پسې اینونه ده. برسیره پر دې هر کونګرواینڅ بیرته راګرځیدلی یا په څټ کیدلی شي. که له دوه وو زیات کونګرواینڅ څیرونې یو په بل پسې منځ ته راشي ، نو په خوښه اسوځیاتيو را یوځاي کیدی شي. الجبري ټول کونګرواینڅ څیرونې یو ګروپ جوړوي د ناپیلي کټمټ څیرونې سره، دا په دې مانا چې ناپیلي څیرونه ، چې په کارونه کې تغیر نه راوړی کټمټ څیرونه ده. ( د ګروپ لپاره دې نښلونې برخه وکتل شي )

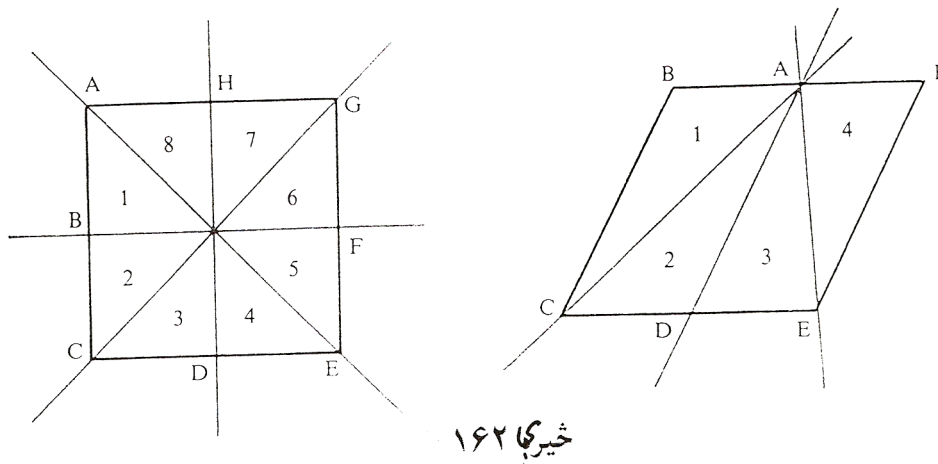
په عمل کې د دریګونو کونګرواینڅ جملې له پوره اهمیت ډکې دی

## کونګرواینڅ جملې:

الف ) په خپلو دري اړخونو کې ( SSS ) یا  
 ب ) په دوه اړخونو او لهدې اړخونو رابند کونج کې ( SWS ) یا  
 پ ) په دوه اړخونو کې او د اوږداړخ مخامخ کونج کې ( SSW ) یا  
 ت ) په یوه اړخ او دواړو راګیر کونجونو کې ( WSW ) یو بل سره وڅوري یا  
 سره مساوي شي

## تمرینونه

- ۱- په یوه غبرگ اړخیز ABCD هندارونی  $S_{BC} \circ S_{AB}$  وکارۍ.
- ۲- د کونگرواینڅ جملو په مرسته وښایي، چی غوڅکرنی پیلخیری په کونگرواینڅ برخو ټوټه کوي.



خیری ۱۶۲

- ۳- په یوه بیلگه وښایي :
- الف)  $S_g \circ S_h = S_h \circ S_g$
- ب)  $S_g \circ (S_h \circ V_g) = (S_g \circ S_h) \circ V_g$
- ۴- د «هیلگولند» کیشتی او د «کون ماری» لوي کینستی ترمنځ واټن ۵ کیلو متره دی . هیلگولند کیشتی په شمال لودیځ ۶۰ درجې ( $N60^\circ W$ ) دلته N د شمال او W د لودیځ لپاره دی، کرنلایني حرکت کوي او «کون ماري» په ۸۲ درجو جنوب لودیځ لور حرکت کوي ( $S82^\circ W$ ) دلته S د جنوب لپاره دی.

په دې وخت کې د «هیلګولند» څخه «کوبن ماری» په  $70^\circ$  درجو شمالشرق ( $N70^\circ O$ )

دلته O د ختیز لپاره ده، لیدل کېږي. Nord., Süd, West, Ost.

الف) په کوم کونج دواړه لارې یو بل غوڅوي؟

ب) د دې وخت له ځای څخه به هغه غوڅتېکی څومره لرې وي؟

۵- وي دې ABC یو مساوي پښیز دريګوډی، له بنسټ AB سره، g او h د

کونجونو  $\alpha$  او  $\beta$  کونجني می دي. وښایي چې دريګوډي ABP او ABQ

کونګرواینت دي. (P او Q د مخامخ اړخ سره د کرښو غوڅتېکي دي).

۶- څومره کورونتڅیرونی موجود دی چې لاندې څیرې یې په خپل ځان څیره کوي:

کرښی، گردی، غبرګ اړخي، مساوي پښیز دريګوډي، ولاړ ګوډی، راوتی،

مربع، مساوي اړخیز دريګوډي؟ کټمټڅیرونه دې نه په کی شمیرل کېږي.

۷- یو څرخیدونکی هنداره، یوه هنداره ده، چې په یوه خپله اینسول شوي هواره

پروت محور باندې څرخوړ اینسول شوي. ترتیب په څیره کې له پورته لور

انځورېږي.

د نور له چینی L څخه یوه وړانګه په هنداره د (a) په ځای یا ځاینیون کې

پریوزي او د هندارونې یا انعکاس قانون سره سم (پریووتکونج = وتلکونج)

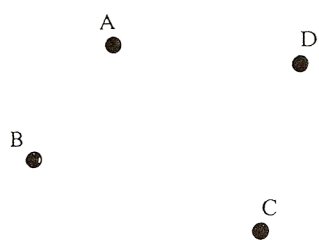
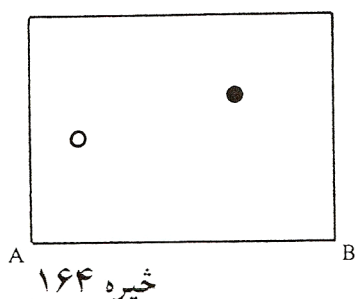
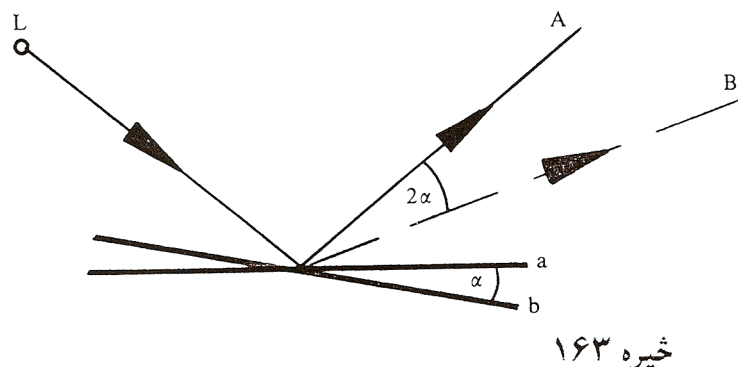
د  $\overline{OA}$  لور باندې بیرته غورځول- یا اینه کېږي یا منعکس کېږي. اوس

نو هنداره د  $\alpha$  په کونج د (b) ځای یا ځاینون ته راوړل کېږي یا

راڅرخېږي. دلته نو د نور وړانګه د  $\overline{OB}$  په لور هچینداره کېږي یا غورځول

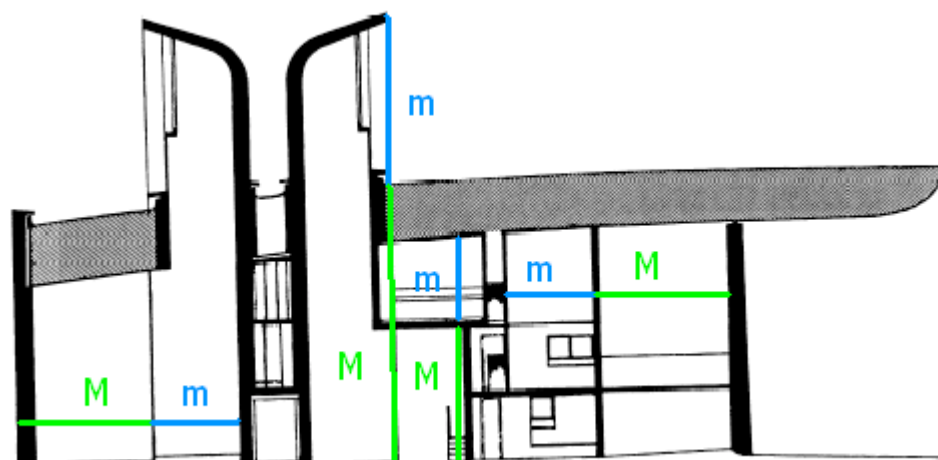
کېږي یا منعکس کېږي. وښایي:

$$w(\overline{OA}; \overline{OB}) = 2\alpha$$



۸- د کوتی منځ کی دوه توپونه ایښول شوي یو سپین او بل تور. د کوتی له دیوالونو څخه توپ بلی لور ته نه شي تللی سپین توپ دې داسی ووهل شي چي تور توپ ووهي. دا د اینه ونی یا انعکاس د قانون سره سم په دیوال AB لگيږي. ( څیره ) د کرښو لار وکارۍ « تور توپ - اینه ټکی یا انعکاس ټکی - سپین توپ »

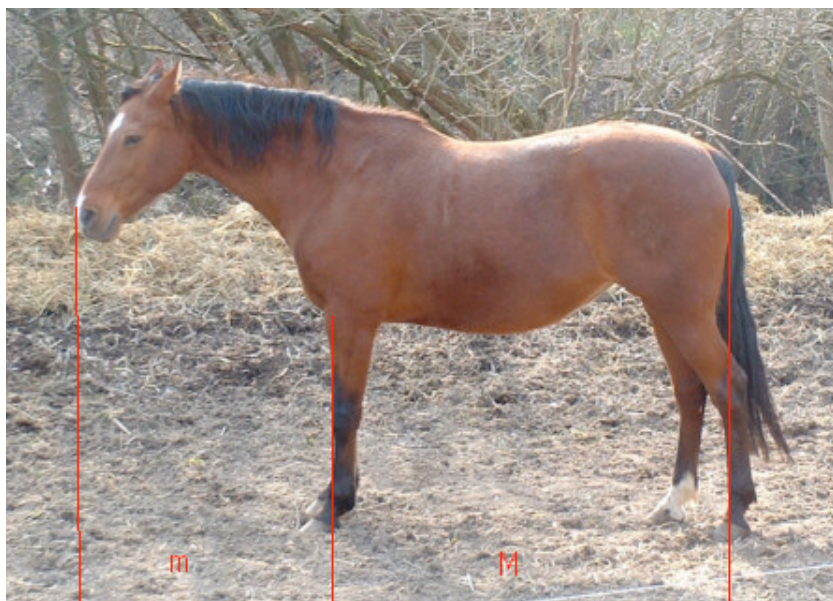
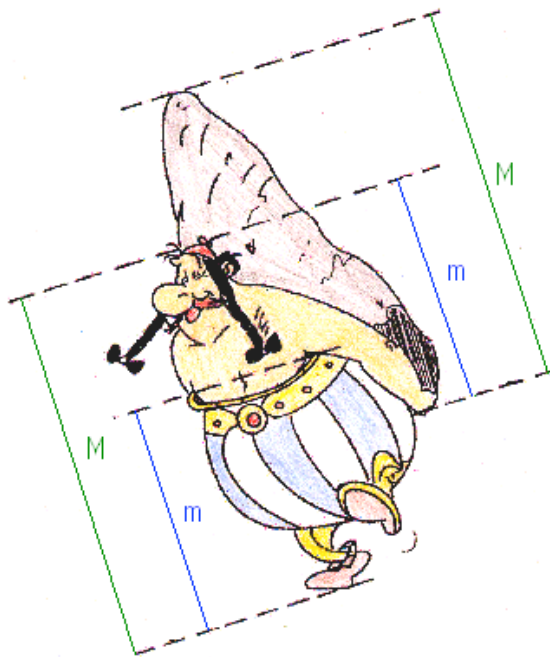
۹- دا د یوه کور څلور برجونه دي، چي په A,B,C,D سره یی بنایو ( څیره ) داسی یو ځای S شته ، له کوم چي برج A د برج C څخه یا سره پټ شي او برسیره پر دې له دې ځای څخه A د B او D د منځني په څیر ښکاره شي یا ځان وښايي ؟



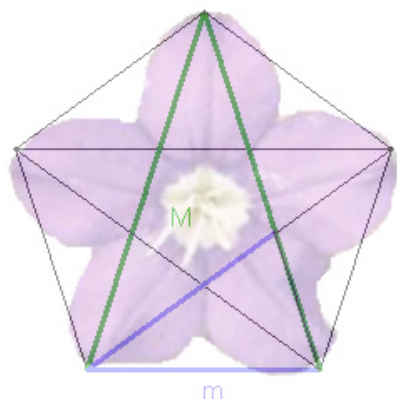
د یوه کور پروت غوڅی یا تقاطع د [Giovanni Denti](#) له مخې

مشهور ساختماني اینجنیر لو کوربوسیر (1887 – 1965) *Le Corbusier* په دېرو  
دولونو د خپلو جوربنتونو په جوربنت کې کارولی

دا لاندې شکل هم د یوه طلايي غوڅي دست لباره یوه بڼه  
بیلگه ده، چې پیداېښتي یا په طبیعت کې یې لرو  
ستاسو سرگرمی له پاره

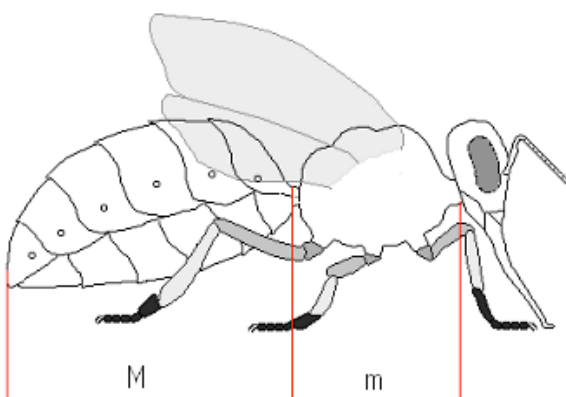


## Die Glockenblume



په منظم پنځه گوډي يا مخمس کي طلايي نسبت

Im regelmäßigen Fünfeck ist der goldene Schnitt enthalten.



دا لاندې د درېگوډيکچېرخه په نهم، لسم، او يولسم  
ټولگي لوستل کيږي. زه دا ټول په هره برخه راوړم،  
چې گران لوستونکي ورڅخه اړوندگټه واخستل شي

۶ - درېگوډي کچ يا ترېگونومتري.



## دریگودیکچ یا تریگونومتری Trigonometrie

### تعریفونه

د دریگودیکچ یا تریگونومتری دنده ده چی په هواره یا په هوا کی دریگودی کچ کړي ، د ځانگړوبلواکو له لارې، دې په نامه تریگونومتریبلواکو. برسیره پر دې د دې په مرسته پر یو دیکي یعنی په منظمه فاصله پرلپسی تکراریدونکی پینښی (موزی یی تل راگرځیدونی بللی شو) څیرل کیږي.

تریگونومتری تر هیپارچ ( Hipparch ۱۶۰ - ۱۲۵ له م پخوا ) پوري تعقیبیدی شي، وروسته له مصري پتولیمویس Patolemäus چې په ۱۶۸ م کال کی مړ شوی او بیا له هندي او عربو شمیرپوهانو له خوا پرمختگ ورکړ شو. له پیل دا د کارونی یا عملي کیدو د ستونځوسره مخامخ وه. دریگودیکچ خپل کارونه په استرنومی او فزیک، د ځمککچ یا اندازه کولو، د ځمک اندازونی، نقشو علم، او ابادی او نوتیک Nautik ( د کیشتیو د لارو نقشه ویستلو پوهنه ) کی مومي.

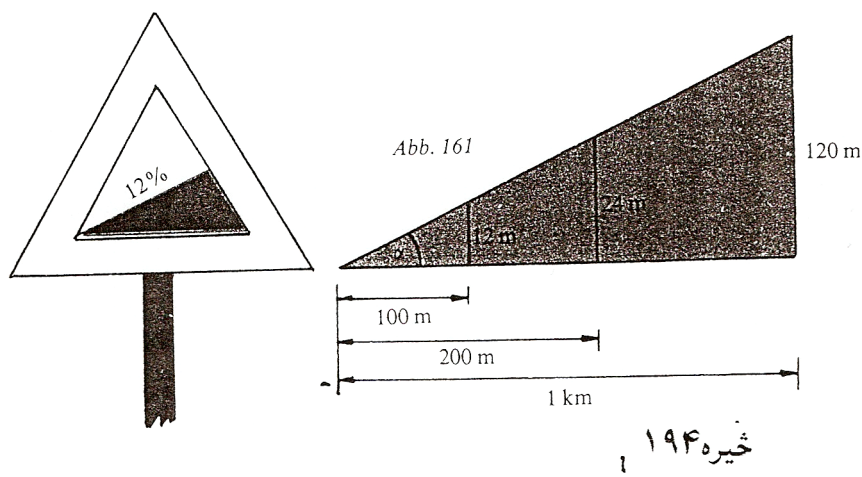
د تریگونومتری مانا یا مهموالی په ځانگړي ډول په دې ریښتینوالی یا واقعیت کی نغښتی، چی د دې په مرسته د پایکرښبلواکوالی ، د کونجبلواکوالی سره تړلی شي ( پام دې وي، چی دا تړاو شمیرپوهینیز مفهوم لري ).

پیلبللگه: د په مانایا مهم جگوالی یا لویدکرنسو نخبه لوحی یا په بله عبارت د زورې او پیچومی لیکتختی ( دې ته دې پام وي چی ما دا کلیمی هر چیرې د زورې او پیچومی په نامه نه دې بللی، خو دا به ښه وي ، چی په هغه مناسب ځای

کی ، که ما بیرته اصلاح نه کړې، نو په دې نومونو دې ونومول شي ( وهل شوي

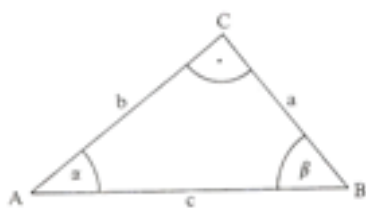
د دې له لارې کوم معلومات ورکول کیدی شي؟

پیچومی یا جگوال 12% په دې مانا چی په راتلونکو سلو مترو کی یو جگوالی د ۱۲ مترو وهل کیږي، دا ۱۲ متره ټیک ۱۲ له سلو دي. په نورو سلو مترو کی نور ۱۲ متره پیچومی یا جگوالی تی کیږي، نو په عمومي ډول یا ټولیزه توگه له ۲۰۰ متره پراته اوږدوالي وروسته ۲۴ متره پیچومی یا جگوالی. له یو کیلومتر وروسته دا پیچومی یا جگوالی لیدیدونکی ۱۲۰ متره ته جگپړي. کتل کیږي یا لیدل کیږي، چی په ورکړشوي پیچومی یا جگوالی کی د پیچومی توپیر متناسب یا په ځاننیونه و هواری فاصلي ته تغیر خوري . د پایکرښو تناسب یا ځاننیونه ثابت یا ځای په ځای پاتیري او د په سلو کی گڼ په لوحه ورکوي. د واقعي جگوالی اوږدوالي معلومات نه



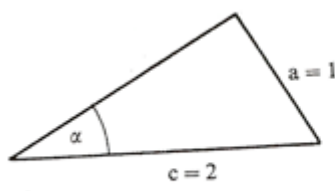
ورکوي همداسي زوړی یا لويدون. په داسي حالت کې هم بيا نورې لوجي هم زوړندې وي.  
 په همدې ډول پيچومي کيدی شي، لکه په سلو جمله کې، د کونج له لاري هم ورکړشي، چې د سرک ټوټه يی د پرتون سره جوړوي.  
 تريگونوميټري يا د په سلوکي ( د پيچومي يا جگوالي تناسب ) د پيچومي يا جگوالي ويناوي دي او يا په څرگندو پيچومي کونج يا جگکونج چې سلبيز پيچومي يا جگوالي ټاکي. په دې ډول په سلو کې ۱۲ جگوالي سره د پيچومي کونج په لاندې ډول دی  $\alpha = 6,48^\circ$ .

په پيليلگه کې څرگنديري چې دا پايرنبي د يوه ولاړه دريگودي اړخونه انځوروي، چې د دوه دريگوديو تناسب يا خاننيونه د کونج په بلواکي يا اړتوب ټايی. زيات وخت هيپوتينوزي ( اوږداړخ ) په  $c$  ښوول کيږي او هغه ته مخامخ کونج په  $\gamma$  . نورې دواړه کتيتي  $a$  او  $b$  دي او د دوي مخامخ کونجونه  $\alpha$  او  $\beta$ . اوس نو لاندې جملی باور لري:



څيره ۱۹۵

ساینبلواک sinusfunktion : بليگه:

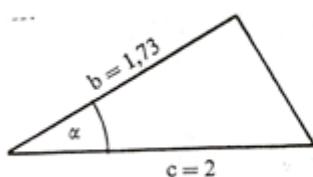


$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$

$\sin \alpha = \frac{a}{c} = \frac{\text{مخامخ کاتيت}}{\text{هيپوتينوزي}}$

څيره ۱۹۶

### کوساینلوک Cosinusfunktion بیلگه:



$$\cos \alpha = \frac{b}{c} = \frac{\text{پرتہ کتیت}}{\text{هیپوتینوزی}}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{1,73}{2} = 0,8660$$

۱۹۷

### تنجنتبلواک Tangensfunktion بیلگه:



$$\tan \alpha = \frac{a}{b} = \frac{\text{مخامخ کاتیت}}{\text{پروت کاتیت}}$$

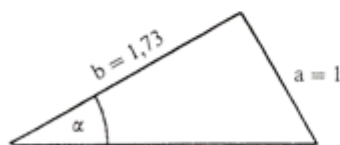
خیره ۱۹۸

$$\tan 30^\circ = \frac{1}{1,73} = 0,577$$

یادونه : پام دې وي چی د مخامخ کاتیت لاندې د دریگودی هغه اړخ پوهیرو، چی په هیپوتینوزی پراته کونج ته، چی خمور موخه وي، مخامخ پروت وي او هغه اړخ چی په همدې کونج پروت وي ، هغه ته په کونج پروت اړخ چی مور یی لنډ پروت کاتیت بولو.

دا لاندې نور کونجبلواک دي، چی کم کارول کیږي

### کوتنجنتبلواک Kotangensfunktion بیلگه

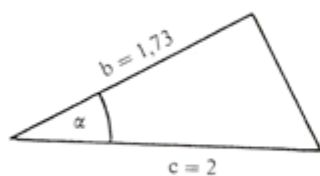


$$\cot \alpha = \frac{b}{a} = \frac{\text{پرتہ کاتیت}}{\text{مخامخ کاتیت}}$$

خیره ۱۹۹

$$\cot 30^\circ = \frac{1,73}{1} = 1,73$$

ڊير کم ، د بيلگي په توگه استرونومي کي، لاندې کونجبلواک کارول کيږي



سيکانسبلواک sekansfunktion بيلگه

$$\sec 30^\circ = \frac{2}{1.73} = 1.156$$

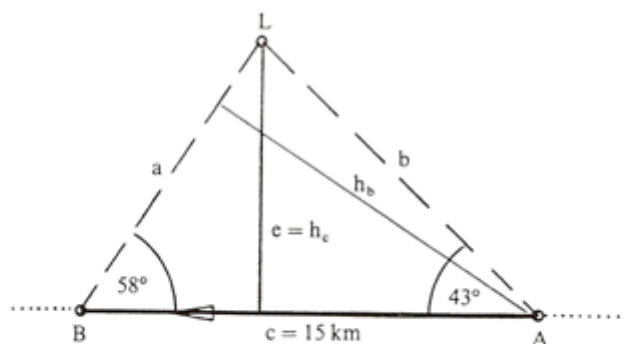
خيږه ۲۰۰  $\sec \alpha = \frac{c}{b} = \frac{\text{هيپوتينوزي}}{\text{پرته کاتيت}}$

يوه تگ پاڼکرنبي  $c = 15 \text{ km}$  او کونج  $B = 58^\circ$  وروسته.

په دوم ډز کي کيښتي له ډز رڼا اور څخه څومره لري ده؟

د A څخه و B ته د کيښتي نژدې واټن e ډز رڼا اور څخه څومره لري دي؟

په A کي له اور څخه څومره لري وه؟



خيږه ۲۰۲

اوبی یا حل:

$$\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta = 79^\circ; \quad \sin \beta = h_b / c \text{ او } \sin \gamma = h_b / b$$

د  $h_b$  په لور اوبصول یا حلول او په همدې وخت کي لاس ته راځي:

$$\begin{aligned}
 h_b &= c \cdot \sin \beta \quad \text{und} \quad h_b = b \cdot \sin \gamma \\
 \Rightarrow c \cdot \sin \beta &= b \cdot \sin \gamma \Leftrightarrow \frac{c}{b} = \frac{\sin \gamma}{\sin \beta} \\
 \Rightarrow b &= \frac{c \cdot \sin \beta}{\sin \gamma} = \frac{15 \cdot \sin 58^\circ}{\sin 79^\circ} = 12,959 \text{ km}
 \end{aligned}$$

د لنډ واټن e لپاره باور لري:

$$\sin \alpha = \frac{e}{b} \Rightarrow e = b \cdot \sin \alpha = 12,959 \cdot \sin 43^\circ = 8,838 \text{ km}$$

$$\sin \beta = \frac{e}{a} \Rightarrow a = \frac{e}{\sin \beta} = \frac{8,838}{\sin 58^\circ} = 10,421 \text{ km}$$

لکه چې په یاد راوړل شو، د هماغه دريگودي اړخونو a او b په شمیرنه کې

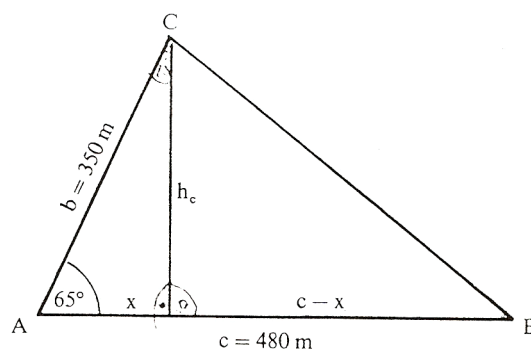
د ساین جمله :

په خوبه دريگودي کې د اړخونو ځاننښونه یا تناسب د اړخونو مخامخ کونجونو د ساین ځاننښونه یا تناسب دی.

$$\begin{aligned}
 \sin \alpha / \sin \beta &= a / b & \sin \beta / \sin \gamma &= b / c \\
 \sin \gamma / \sin \alpha &= c / a
 \end{aligned}$$

د ساین جمله په پخ دريگودي کې هم باور لري ( تمرین دې وکتل شي ). ددې سره په یوه دريگودي کې نه موجودې ټوټې هلته شمیرل کېږي، چیرته چې دوه اړخونه او یو مخامخ کونج یا دوه کونجونه او یو مخامخ اړخ ورکړ شوی وي. سړی بیا څه کوي که دریاوړه اړخونه ورکړ شوي وي او یا دوه اړخونه او د هغوتر منځ راگیر کونج؟

پیلبلگه : په یوه د ډبروسکرو کان کی دوه ستنی  $b = 350 \text{ m}$  او  $c = 480 \text{ m}$  دي او یو کونج  $\alpha = 65^\circ$  څرگندوي.  
د B څخه و C ته به د نښلولو ستن یا تیر څومره لوي وي ؟



څیره ۲۰۳

اوبی یا حل :

جگوالی یا جگمی  $h_c$  کرښه  $AB = c$  په دوه ټوټو  $x$  او  $c-x$  ویشي.

دلته دی  $x = b \cdot \cos \alpha$  ،

ځکه چی  $\cos \alpha = x / b$  دی . د پیتاگوراس د جلی له مخی

لرو :  $h_c^2 = b^2 - x^2$

او

$$a^2 = h_c^2 + (c-x)^2 .$$

$$a^2 = h_c^2 + c^2 + x^2 - 2cx$$

$$a^2 = b^2 - x^2 + c^2 + x^2 - 2cb \cos \alpha$$

$$\Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

د اړخونو اوږدوالی نومونى او کونج کيدى شي چي منظم بيرته راگرځيدونکى  
(خیکلیکي يوناني کلیمه ده گردی ډوله يا منظم بيرته راگرځيدونکى zyklisch)  
يو بل سره بدل شي» له دې امله باور لري

### کوساين جمله

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma$$

په هر يوه دريگودي كى د هر اړخ مربع مساوي ده، د نورو دواړو اړخونو د مربع  
زياتون سره ترې كم دوه ځله د دې دوه اړخونو ځل او ددې دوه اړخونو رابند  
شوي كونج كوساين سره ځل.

د كوساين جمله د پيوټاگوراس د جملې عموميت يا ټوليز ته هم وايي. ( تمرين ۶

مخ دې وکتل شي )

د کونجبلواک له لارې يو بل متود، د ډيرگودي شميرلو لپاره، تر څو دا په  
دريگوديو ويشل کيدى شي چى پوره اړخونه او کونجونه يى څرگند وي، پيدا شو.  
د دې ټولو سره د څلورگودي يو وربرسيره بل د شمير فرمول پيداشو:

$$A = 0,5 \cdot d_1 \cdot d_2 \cdot \sin \alpha$$

$$\sin \alpha = w(d_1; d_2) \quad \text{چيرته چي}$$

$$A = 0,5(d_2 h_1 + d_1 h_2) \quad \text{اوبى يا حل :}$$

که  $d_1$  په  $e$  او  $f$  ټوټه يا تجزيه شي، نو لرو

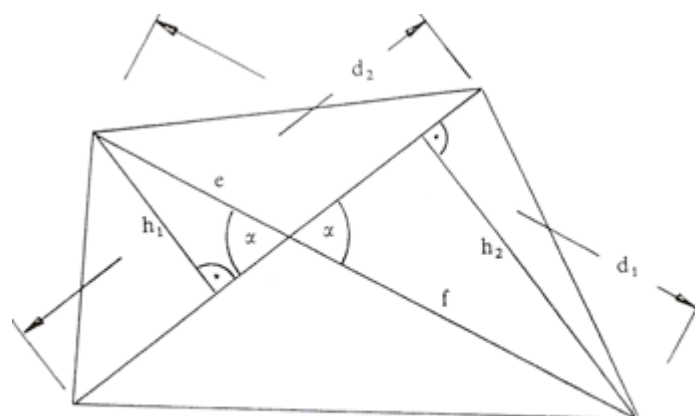
$$h_1 = e \cdot \sin \alpha$$

$$h_2 = f \cdot \sin \alpha$$

$$\Rightarrow A = 0,5 \cdot d_2 \cdot (e + f) \sin \alpha$$

$$\Rightarrow A = 0,5 \cdot d_2 \cdot d_1 \sin \alpha$$





څيره ۲۰۴

### د په خوښه کونجونو تريگونوميټريکي بلواکي

په اخره برخه کې مو وويل، چې کونجبلواک، نه يواځې د دننه لورته تيرو درېگونو لپاره، بلکه د هغو کونجونو لپاره چې له  $90^\circ$  درجو لوي وي، هم هدفمند (موخور) تشریحوړ دي. له دې وروسته کونجبلواکو خپله پوره موخه يا هدف تر لاس کېږي.

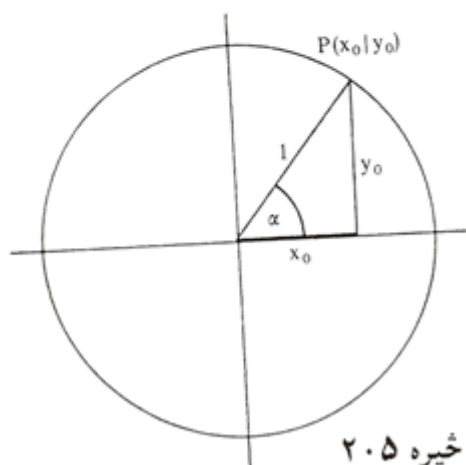
دا پراختيا څنگه تصور يا د خيالوړ کيدی شي؟

په ښه توگه داسې کيدی شي چې په يوه ولاړ پروت سيستم يا کواوردیناتسيستم کې يوه گردی ووهي چې وړانگه يې ۱ يعنی يو يوون يا واحد دی ( دې ته يوونگردی ويل کېږي، ځکه چې وړانگه يې يو يوون دی) او د گردی منځتکي او د پروت ولاړ سيستم کواوردېنات سرچينه يو په بل پريوخي. نو بيا هر دريگونو، چې د هغی يو کونج د گردی ځنټريکونج دی، يعنی کونج يې د گردی په منځ يا ځنټر پروت دی، (څيره ۱۴۲) کم له کمه يې يو اړخ ۱ يعنی يو يوون اوږدوالی لري. دا د دريگونو په دننه کې شميرنه او اړيکي اسانه کوي.

لمری د یوه ولاړ کونجیز دریځوډي څخه پیل کوو، چی په لمړي لمړي څلورمه یا کوارانت (Quadrant) کی پروت دی . نو هیپوتینوزې ۱ اوردوالی لري، او په گردی، د کونجتهگی  $P(x_0|y_0)$  په پام کی نیولو سره، باور لري:

$$\sin \alpha = y_0 / 1 = y_0, \quad \cos \alpha = x_0 / 1 = x_0$$

دا کرښی د پریوستون او یا د سیور پدروخونو په څیر لاس ته راځي، که موږ وړانگه د یوه ټالوهونکی مړوند په څیر ونیسو یعنی فرض کړو، کوم چی د محور غبرگي رڼا لاندې راشی.



څیره ۲۰۵

په دې ولاړ کونجیز دریځوډي کی کیدی شي چی د پیتاگوراس جمله وکارول شي:

تریگونومتریکی پیتاگوراس:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

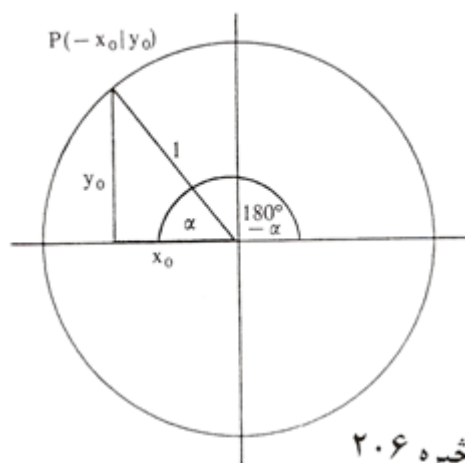
چیرته چی  $\sin^2 \alpha = \sin \alpha \cdot \sin \alpha$  په مانا دی.

کیدى شي، چی پوښتنه وشي چی همدا « سیوری » بیا کله لاس ته راتلی شي. دا حالت بیاتیک هلته لاس ته راځي، چی وړانگه د منفي x - محور سره یو کونج  $\alpha$  جوړ کړي، یعنی څنتریکونج یی  $180^\circ - \alpha$  وي.

د « سیوروڅیرو » څخه لاس ته راځي:

$$\sin (180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\cos (180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$$



خکه چی دا سیوری همغومره اوږد  
دی لکه د مخه، مگر اوس له صفر  
پیل مخامخ (منفی) لور بنایي.

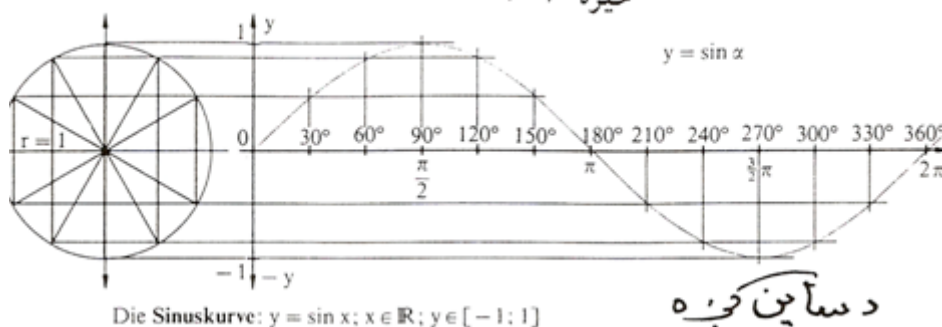
په ورته توگه لاس ته راځي :

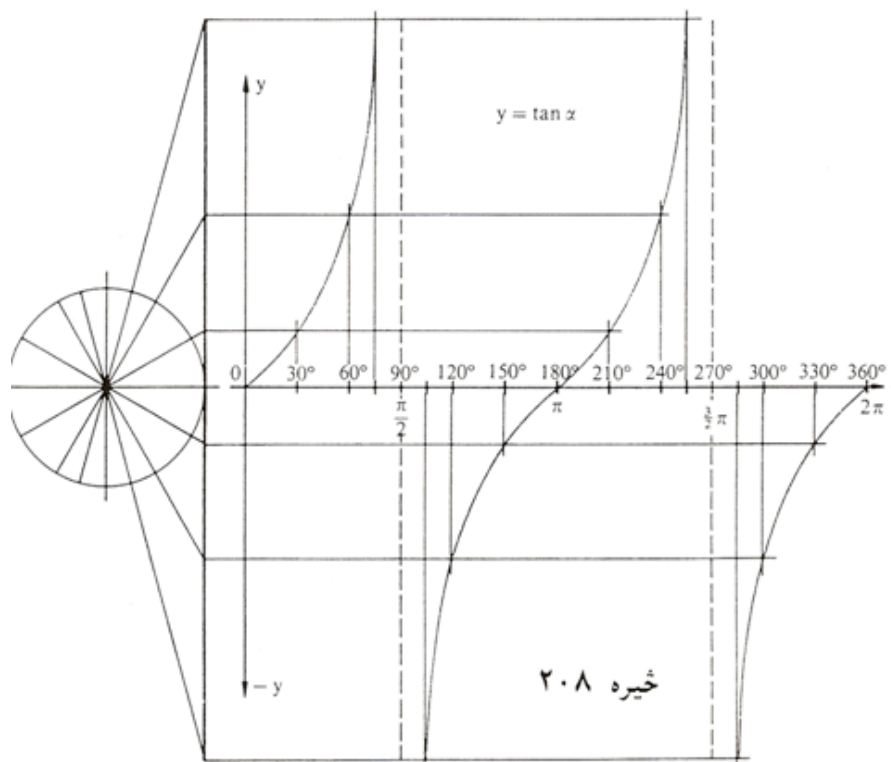
$$\begin{aligned} \sin(180^\circ + \alpha) &= -\sin \alpha; \\ \cos(180^\circ + \alpha) &= -\cos \alpha \\ \sin(360^\circ - \alpha) &= \sin(-\alpha) = -\sin \alpha; \\ \cos(360^\circ - \alpha) &= \cos(-\alpha) = \cos \alpha \end{aligned}$$

څیره ۲۰۶

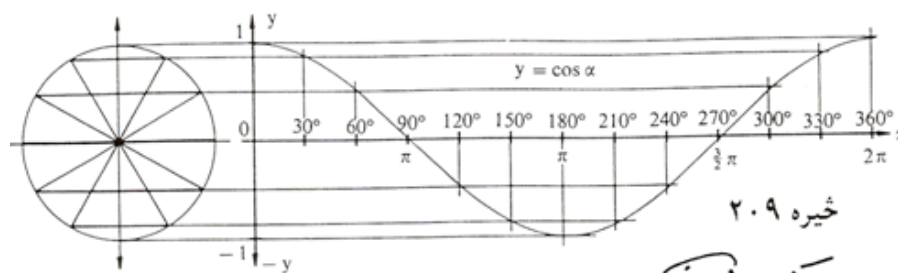
د کونج  $360^\circ + \alpha$  لپاره بیرته د سرچیني کونج اړیکي لاس ته راځي: همدا ډول  
د  $720^\circ + \alpha$  لپاره اوهمداسی نور. په دې توگه د په خوښه کونجفنکشونو یا  
کونجبلواکو لپاره د ساین او کوساین بلواک تعریف دي.  
د  $\tan \alpha = \sin \alpha / \cos \alpha$  له امله (مقایسه مخ | ۱۵) دا د تنجنت بلواک لپاره  
هم صدق کوي. له دې امله لاندې د بلواکگرافونه لاس ته راځي

څیره ۲۰۷

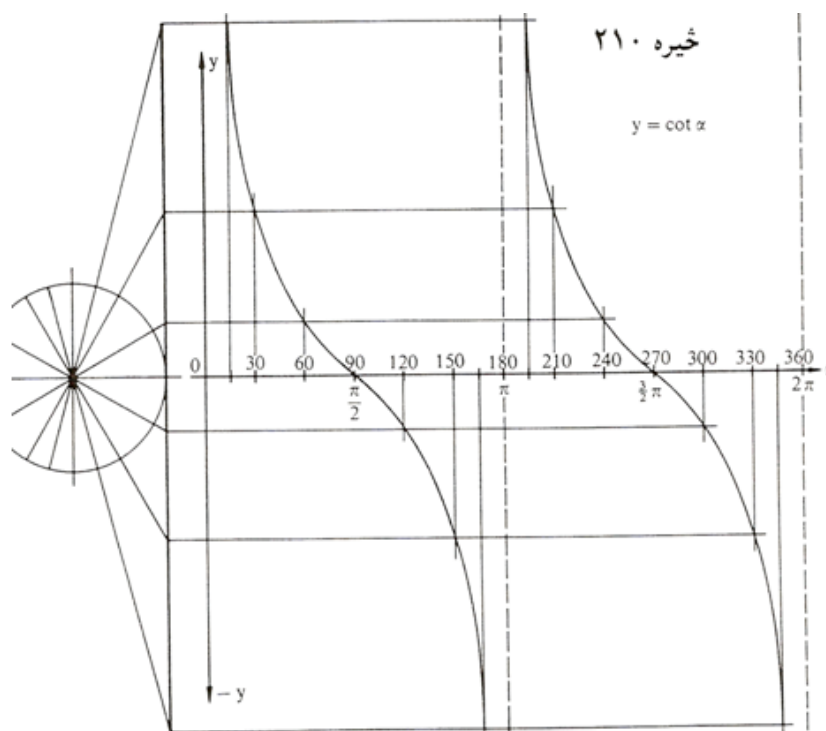




Die Tangenskurve:  $y = \tan x; x \in \mathbb{R} \setminus \{x | x = (2z+1)\frac{\pi}{2} \wedge z \in \mathbb{Z}\}; y \in \mathbb{R}$



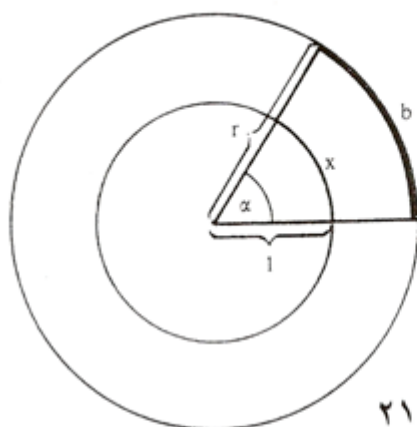
Die Kosinuskurve:  $y = \cos x; x \in \mathbb{R}; y \in [-1; 1]$



Die Kotangenskurve:  $y = \cot x; x \in \mathbb{R} \setminus \{x | x = z \cdot \pi \wedge z \in \mathbb{Z}\}; y \in \mathbb{R}$   
 د کونجنت کوربه

### لینده اندازه (لینده کچ) Das Bogenmaß

په زره درجه د کونجکچ یا - اندازه سره بلد یو ( دمخه ولیدل، چی ۳۶۰ درجی پوره گردی-نهایی. هغه، چی لږ ورسره بلد یو یا زیات ورسره بلد نه یو، هغه نوې درجه ده، چی گردی په ۴۰۰ مساوي برخو ویشل کیږي. دا په دواړو کچیوونونو یا کچواحدونو کی گډ دي، چی په گڼونو اندازه کیږي، بی له کچ یوون، ارزښت پیری رییلگڼونه دي، په داسی حال کی چی وتل گڼونه (= د تعریف پیری گڼونه) یو یوون یا واحد (درجه یا گون) لري. دا په کارونه یا عمل کی مور زیات وښت د خنډ سره مخامخ کوي. له دې امله د لیندې کچ سره د کونجکچ لپاره یو ور زیات امکان پیدا شو.



څیره ۲۱۱

کونج لويي په واقعيت کی  
 يوون «راد ( rad )» لري،  
 مگر دا په کارونه يا عمل  
 کی کيدی ونه ليکل شي  
 يا صرف نظر پرې وشي،  
 که بدلون ته مو نه  
 راهڅوي. دا کونجکچونه  
 چی د کونج لپاره په  
 تريگونوميتریکي بلواکو  
 کی اينسودل کيږی ( د  
 بيلگي په توگه  $\sin$  )

ارگومنټ ( Argument تعريفډيری ) بلل کيږي. په تعريفډيري کی کيدی شي چی  
 نوې درجه ، زره درجه او يا لينده کچ وکارول شي. کاروونکی دې پام ولري چی په  
 جشميري کی همغه مودوس په کار اچول شوي دی. ( راتلونکی دې وکتل شي )

په برخه گردیبرخوکی وښوول شو ( گردیبرخی د مخه څیړل شوي دي ) چی هر کونج پورې یوه گردیبرخه یا گردی لینده اړه لري، نو ټولی گردی پورې  $360^\circ$  درجی کونج یا  $2\pi r$  اړه لري، یوه کونج  $\alpha$  پورې بیا یوه لینده  $b$  اړه لري، کومه چی په چاپیری کی  $\alpha$  همداسی نیسی لکه په پیل کی  $\alpha$  و  $360^\circ$  درجو ته . دلته گردیگن دی :  $\pi = 3,14\dots$  (دا مو له دې پخوا لاس ته راوړی دی)

### پیلبلگه:

کونج  $\alpha = 60^\circ$  له گردی د  $10$  سانتیمتره وړانگی سره یوه په لاندې ډول گردی لینده  $b = 20\pi \cdot 60^\circ : 360^\circ = 10,47 \text{ cm}$  غوڅوي یا بیلوي. د گردی

چاپیری دی :  $U = 20\pi = 62,83 \text{ cm}$

همغه کونج  $\alpha$  د  $5$  سانتی متره وړانگی سره گردیلینده

$b = 10\pi \cdot 60^\circ : 360^\circ = 5,236 \text{ cm}$

غوڅوي. دا گردی لاندې چاپیری لري :  $U = 10 = 31,416 \text{ cm}$

له گردی د وړانگی  $r = 1 \text{ cm}$  سره ددې په خټ یا برعکس کونج گردیلینده

$b = 2\pi \cdot 60^\circ : 360^\circ = 1,047 \text{ cm}$

غوڅوي» د دې گردی چاپیری فقط  $U = 2\pi = 6,283$  دی .

له بیلگی څرگندیږي، چی لینده اندازه په همغه اندازه زیاتیږي لکه وړانگه. له دې امله کیدی شي خپله شمیرنه په یوونگردي د وړانگی  $1$  سره رابنده یا محدوده کړي او روښانه کړي:

تعریف: په یوونگردي د گردیلیندی اوږدوالي کچگن، چی په څنتریکونج

باندې څیره شوي، لینده کچ بلل کیږي. لاندې شمیراوړون باوري کوي:

$$x = (\alpha / 180^\circ) \cdot \pi \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = (x / \pi) 180^\circ = \frac{x}{\pi} \cdot 180^\circ$$

دا چې د وړانګې څرخون په پوره کونج هم وراوړیدی شي، نو له دې امله د لینده کچ لپاره په خوښه ریلګڼونه پریښوول شوي.  
بیلګی:

$$\begin{aligned} \alpha = 1^\circ &\Leftrightarrow x = \frac{1^\circ}{180^\circ} \pi = 0,0175 \text{ (rad)} & \alpha = 180^\circ &\Leftrightarrow x = \frac{180^\circ}{180^\circ} \pi = \pi = 3,1416 \\ \alpha = 30^\circ &\Leftrightarrow x = \frac{30^\circ}{180^\circ} \pi = \frac{\pi}{6} = 0,5236 & \alpha = 360^\circ &\Leftrightarrow x = \frac{360^\circ}{180^\circ} \pi = 2\pi = 6,2832 \\ \alpha = 45^\circ &\Leftrightarrow x = \frac{45^\circ}{180^\circ} \pi = \frac{\pi}{4} = 0,7854 & \alpha = 720^\circ &\Leftrightarrow x = \frac{720^\circ}{360^\circ} \pi = 4\pi = 12,5664 \text{ usw.;} \\ \alpha = 60^\circ &\Leftrightarrow x = \frac{60^\circ}{180^\circ} \pi = \frac{\pi}{3} = 1,0472 & & \\ \alpha = 90^\circ &\Leftrightarrow x = \frac{90^\circ}{180^\circ} \pi = \frac{\pi}{2} = 1,5708 & \alpha = -75^\circ &\Leftrightarrow x = \frac{-75^\circ}{180^\circ} \pi = \frac{-5}{12} \pi = -1,309 \end{aligned}$$

### ارکوسبلواکي Arcusfunktionen

زیات وخت دا پوښتنه هم رامنځ ته کیږي، چې لکه په ورکړشو کرښخاننیونو راپیداشوې کونجونه څنګه معلومیږي یا څنګه راڅرګندیږي یا بهتره څنګه ځانونه نیسي. ددې لپاره چې دا پوښتنه ځواب شي، باید امکانات ولټول شي، چې د کونجبلواک ارزښتونو څخه څنګه بیرته کونج یا په همدې توګه د هغه تعریفیږي ته، په لینده کچ راتلی شو. دا کونجبلواک پریودیکی یا تل بیرته راګرځیدونکي بلواک دی، دا په دې مانا، چې د بلواک ارزښت په منظمه توګه د مختلفو کونجونولپاره یا

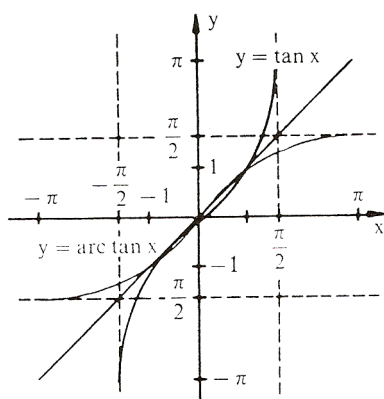
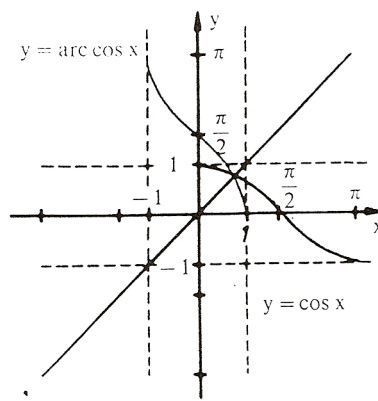
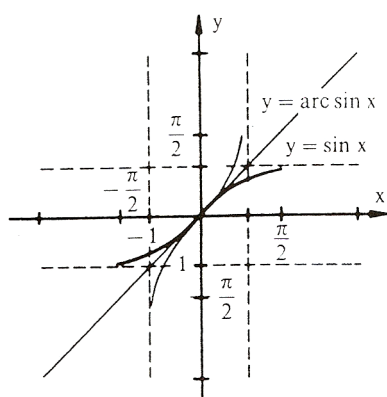


مختلفو واپتونو وروسته، بلواک ارزښتونه تکرارېږي. د دې لپاره چې په څټکيدنه ممکن شي، نو باید د خپل تعريف ډيری په يوه برخه ډيري رابند يا محدود شي.

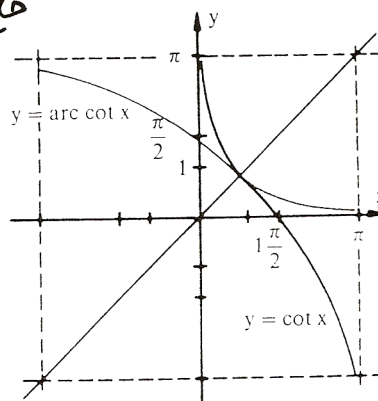
تعريف: د يوه ( رابند يا محدود ) تريگونوميټريکي بلواک په څټ بلواکونه ارکوس بلواک Arcusfunktion بلل کيږي يا څيکلوميټريکي بلواک ( لاتين ارکوس Arcus = Bogen = لينده )

دلته  $\arcsin(x)$  لوستل کيږي «د  $x$  ارکوس ساين. د کونجبلواک تعريف ډيري دلته اړونده ارکوسبلواک ارزښت ډيري دی او په څټ ارگومنټ يا تعريف ډيري دلته تل يو ريلگن دی.

Trigonometrische Funktion تريگونوميټريکي بلواک	Arcusfunktion ارکوسبلواک
$f: x \mapsto \sin(x)$ $ID = \left\{x \mid -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right\}$ $W = \{y \mid -1 \leq y \leq 1\}$	$f^{-1}: x \mapsto \arcsin(x)$ $ID = \{x \mid -1 \leq x \leq 1\}$ $W = \left\{y \mid -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}\right\}$
$f: x \mapsto \cos(x)$ $ID = \{x \mid 0 \leq x \leq \pi\}$ $W = \{y \mid -1 \leq y \leq 1\}$	$f^{-1}: x \mapsto \arccos(x)$ $ID = \{x \mid -1 \leq x \leq 1\}$ $W = \{y \mid 0 \leq y \leq \pi\}$
$f: x \mapsto \tan(x)$ $ID = \left\{x \mid -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right\}$ $W = \{y \mid -\infty < y < \infty\}$	$f^{-1}: x \mapsto \arctan(x)$ $ID = \{x \mid -\infty < x < \infty\}$ $W = \left\{y \mid -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\right\}$
$f: x \mapsto \cot(x)$ $ID = \{x \mid 0 < x < \pi\}$ $W = \{y \mid -\infty < y < \infty\}$	$f^{-1}: x \mapsto \operatorname{arccot}(x)$ $ID = \{x \mid -\infty < x < \infty\}$ $W = \{y \mid 0 < y < \pi\}$



فایده های



بینگی:

Beispiele:

1.  $\arcsin(0,8) = 0,9273(\text{rad}) = 53,13^\circ$
2.  $\arccos(1) = 0(\text{rad}) = 0^\circ$
3.  $\arctan(-100) = -1,5608(\text{rad}) = -89,43^\circ$
4.  $\text{arccot}(-70) = -0,0143(\text{rad}) = -0,82^\circ$

۵ - دا چی کونجبلواک و ارکوسبلاک یو د بل په ختې بلواک دې نو باور لري

$$\begin{aligned} \sin(\arcsin(y)) &= y; & \arcsin(\sin(x)) &= x \\ \cos(\arccos(y)) &= y; & \arccos(\cos(x)) &= x \\ \tan(\arctan(y)) &= y; & \arctan(\tan(x)) &= x \\ \cot(\text{arccot}(y)) &= y; & \text{arccot}(\cot(x)) &= x \end{aligned}$$

یعنی په لاندې توګه چې

$$\begin{aligned} \sin(\arcsin(0,4)) &= \sin(23,58^\circ) = 0,4 \\ \arccos(\cos(\pi/3)) &= \arccos(0,5) = 1,0472 \\ \tan(\arctan(-40)) &= \tan(-88,5679^\circ) = -39,9999 \\ \text{arccot}(\cot(60^\circ)) &= \text{arccot}(0,5774) = 1,0472 \end{aligned}$$

## د تريگونوميټريکي بلواکو خويونه

دا چې کونجکچ په درجه کچ او هم په لينده کچ ورکول کيدی شي، کيدی شي چې يوه کونج بلواک تعريفیږی يا  $\alpha$  او يا  $x$  وي. ددې لپاره چې د يوه بلواک خوي باندې ټينگار وکړو، بايد په لاندې په لينده کچ تکیه وکړو.

د لاندې خويونو لمړی ډله يواځي له تعريف مساوات (د مخه راغلی) او د پيتاگوراس له جملی لاس ته راځي (د مخه لوستل شوې) لاندې صدق کوي:

تعريف:

$$\tan(x) = \frac{\text{مخامخ کاتيت}}{\text{هيپوتينوزي}} = \frac{\text{مخامخ کاتيت}}{\text{پرتة کاتيت}} = \frac{\text{هيپوتينوزي}}{\text{پرتة کاتيت}} = \sin(x) / \cos(x)$$

ورته:

$$\cot(x) = \cos(x) / \sin(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

له دې لاس ته راځي

$$\cot(x) = 1 / \tan(x) \Leftrightarrow \tan(x) = 1 / \cot(x)$$

برسيره پر دې لرو:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

د دې سره لاس ته راځي:

$$1 / \cos^2 x = 1 + \tan^2 x ; 1 / \sin^2 x = 1 + \cot^2 x$$

په لاندې کې *gegeben* ورکړی او *gesucht* غوښتونې یا پلټونې په مانا دي

$\begin{array}{l} \text{gegeben} \\ \text{وړېدا} \\ \text{غوښتونې} \end{array}$	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$	$\cot x$
$\sin x$	$\sin x$	$\pm \sqrt{1 - \cos^2 x}$	$\pm \frac{\tan x}{\sqrt{1 + \tan^2 x}}$	$\pm \frac{1}{\sqrt{1 + \cot^2 x}}$
$\cos x$	$\pm \sqrt{1 - \sin^2 x}$	$\cos x$	$\pm \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 x}}$	$\pm \frac{\cot x}{\sqrt{1 + \cot^2 x}}$
$\tan x$	$\pm \frac{\sin x}{\sqrt{1 - \sin^2 x}}$	$\pm \frac{\sqrt{1 - \cos^2 x}}{\cos x}$	$\tan x$	$\frac{1}{\cot x}$
$\cot x$	$\pm \frac{\sqrt{1 - \sin^2 x}}{\sin x}$	$\pm \frac{\cos x}{\sqrt{1 - \cos^2 x}}$	$\frac{1}{\tan x}$	$\cot x$

لکه چې د مخه مو په گوته کړل، کیدې شي چې تریگونومتريکي بلواک د مختلفو گونجونو لپاره روښانه شي. که لمړي ورکړ شوي بلواک ارزښتونه مقایسه شي، نو په کره توگه یا په کلکه توگه لاس ته راوړی شو

تعریف : تریگونومتريکي بلواک ټول پریودیکي یعنی بیرته راگرځیدونکي دي،

دا په دې مانا، چې د بلواک ارزښتونه په منظمو واټنونو کې تکرارېږي. په دې د

ساین بلواک او د کوساین بلواک راگرځیدنه (یا  $360^\circ$  درجې) لري،

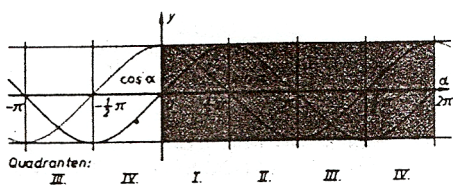
کوټنجنتبلواک راگرځیدنه (یا  $180^\circ$  درجې) لري.

$$\sin(x \pm 2k\pi) = \sin x \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} k \in \mathbb{N}$$

$$\tan(x \pm k\pi) = \tan x \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} k \in \mathbb{N}$$

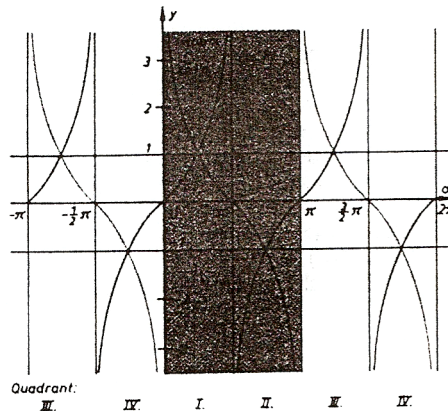
$$\cos(x \pm 2k\pi) = \cos x \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} k \in \mathbb{N}$$

$$\cot(x \pm k\pi) = \cot x \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} k \in \mathbb{N}$$



خیره ۲۱۴

د ساین - او کوساین فنکشن  
په وجود یاس راڼو څرگندونه



د قنجنیت او توپنجنیت فنکشن په وجود

بیلګې:

$$\begin{aligned}
 \sin 50^\circ &= \sin (50^\circ + 360^\circ) = \sin (50^\circ - 720^\circ) = 0,76604 \\
 \cos -30^\circ &= \cos (-30^\circ - 360^\circ) = \cos (-30^\circ + 1080^\circ) = 0,86603 \\
 \tan 2,5 &= \tan (2,5 - \pi) = \tan (2,5 + 5\pi) = -0,74702 \\
 \cot 10 &= \cot (10 + \pi) = \cot (10 - \pi) = 1,54235 \\
 \sin 35^\circ &= \sin (180^\circ - 35^\circ) = -\sin (180^\circ + 35^\circ) = -\sin (360^\circ - 35^\circ) = 0,573576 \\
 \cos 35^\circ &= -\cos 145^\circ = -\cos 215^\circ = \cos 325^\circ = 0,81952 \\
 \tan 0,6109 &= -\tan 2,5307 = \tan 3,7525 = -\tan 5,6723 = 0,700208 \\
 \cot 0,6109 &= -\cot 2,5307 = \cot 3,7525 = -\cot 5,6723 = 1,428042
 \end{aligned}$$

که د فنکشن گراف ته په څیر شو نو په دې برسیره په ټینګه روښانیري :

$x$	$\pi - x$	$\pi + x$	$2\pi - x$	
$\sin x = \sin(\pi - x) = -\sin(\pi + x) = -\sin(2\pi - x)$				(Abb. 179)
$\cos x = -\cos(\pi - x) = -\cos(\pi + x) = \cos(2\pi - x)$				(Abb. 179)
$\tan x = -\tan(\pi - x) = \tan(\pi + x) = -\tan(2\pi - x)$				(Abb. 180)
$\cot x = -\cot(\pi - x) = \cot(\pi + x) = -\cot(2\pi - x)$				(Abb. 180)

بیلگی:

	$\alpha$	$180^\circ - \alpha$	$180^\circ + \alpha$	$360^\circ - \alpha$
	$35^\circ$	$145^\circ$	$215^\circ$	$325^\circ$
sin	0,573576	0,573576	-0,573576	-0,573576
cos	0,819152	-0,819152	-0,819152	0,819152
tan	0,700208	-0,700208	0,700208	-0,700208
cot	1,428148	-1,428148	1,428148	-1,428148

که شه هم نن د کونجبلواکو شمیرلو لپاره، یواځی د جشمیری یا کمپیوتر څخه کار اخستل کیږي، هدفمند بولو، چی یو څو زیات د استعمال وړ ارزښتونه په لاندې ورکړو.

$x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	$\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$2\pi$
$\alpha$	$0^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$	$120^\circ$	$135^\circ$	$150^\circ$	$180^\circ$	$270^\circ$	$360^\circ$
sin x bzw. sin $\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
cos x bzw. cos $\alpha$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	-1	0	1
tan x bzw. tan $\alpha$	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	-	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0	-	0
cot x bzw. cot $\alpha$	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	-	0	-

د نته ماچو د هداړول په مانا دس او کیدس تیږی یا هموی .

له دې جدول څخه کیدی شي په خیال کی یا گوماني لاس ته راوړی شو

$$\begin{aligned} \sin x &= \cos \left( \frac{\pi}{2} - x \right) & \cos x &= \sin \left( \frac{\pi}{2} - x \right) \\ \tan x &= \cot \left( \frac{\pi}{2} - x \right) & \cot x &= \tan \left( \frac{\pi}{2} - x \right) \end{aligned}$$

دا گومان کیدی شي په ولاړ کونجیز دریگوډي کي د تعریف په مرسته په ساده توگه وپسول شي. :

$$\sin \beta = a/c \quad \text{او} \quad \cos \beta = a/c$$

د  $\beta = 90^\circ -$  له امله لاس ته راځي :

$$\sin \beta = \cos (90^\circ - \beta)$$

په ورته توگه نورې غوښتنې هم لاس

ته راتلی شي.

دا له څیرو څخه هم لاس ته راوړل کیدی شي، ځکه د سین او کوساین

بلواکو یا په همدې ډول د تانجنت او کوتنجنټ بلواکو گرافونه د  $x = \pi/2$  کربنی

ته یو بل سره محوریو مترې ځغلي :

له څیرو او بیلگو څخه په دې برسیره لاس ته راځي:

تعریف: د کوساین بلواک جفت دی، لرو:

$$\cos(x) = \cos(-x)$$

ساین -، تنجنټ - او کوتنجنټ بلواک نا جفت دي» د دوي لپاره باور لري:

$$\sin(x) = -\sin(-x), \quad \tan(x) = -\tan(-x); \quad \cot(x) = -\cot(-x)$$

یادونه: په دې نلواکو کي کیدی شي چی  $x$  له نوکانو دباندي هم وي:

بیلگی:

$$\sin 60^\circ = -\sin (-60^\circ) = 0,86603$$

$$\cos 0,75 = \cos(-0,75) = -0,70711$$

$$\tan 150^\circ = -\tan (-150^\circ) = -0,57735$$

$$\cot 1,3 = -\cot(-1,3) = 0,27762$$

### د زیاتون قضیې یا تیورمونه

دا چې کونجبلواک لایني نه دي ( د فنکشنګراف کرښه نه ده، بلکه کره ده ) ، نو ډبل تعریفیږي پورې ساده ډبل بلواک ارزښت اړه نه لري. لکه

$$\sin 30^\circ = 0,5 \quad \sin 90^\circ = 1 \quad \sin 180^\circ = 0$$

د داسې په نامه زیاتونمسئلي په مرسته ممکن کیږي، چې د بلواک ارزښت د کونج په دوه برابرولو یا په همدې ډول د دوه کونجونو یو په بل زیاتولو د یوګونو کونجونو لپاره ارزښتونه رابې کړی شو.

بیلگی:

$$1. \quad \sin(x + y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y$$

$$1'. \quad \sin(x - y) = \sin x \cdot \cos y - \cos x \cdot \sin y$$

$$2. \quad \cos(x + y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$$

$$2'. \quad \cos(x - y) = \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y$$

$$3. \quad \sin 2x = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x$$

$$4. \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$



$$5. \sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

$$6. \cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

$$7. \sin\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{0,5(1 - \cos x)}$$

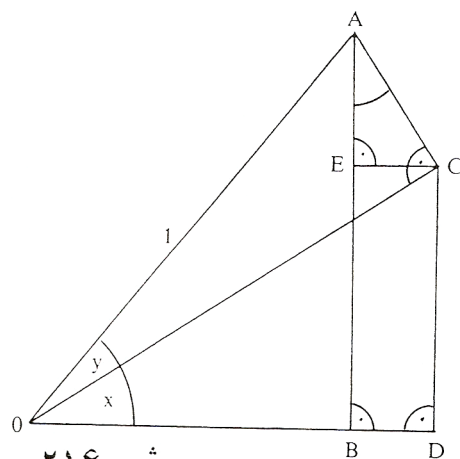
$$8. \cos\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{0,5(1 + \cos x)}$$

$$9. \tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \cdot \tan y} \quad \text{mit } \tan x \cdot \tan y \neq 1$$

$$9'. \tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \cdot \tan y} \quad \text{mit } \tan x \cdot \tan y \neq 1$$

$$10. \cot(x+y) = \frac{\cot x \cdot \cot y - 1}{\cot x + \cot y} \quad \text{mit } \cot x \neq -\cot y$$

$$10'. \cot(x-y) = \frac{\cot x \cdot \cot y + 1}{\cot x - \cot y} \quad \text{mit } \cot x \neq \cot y$$



خیره ۲۱۶

1. und 2.:

$$|OA| = 1$$

$$|AC| = \sin y; \quad |OC| = \cos y$$

$$|AB| = \sin(x+y); \quad |OB| = \cos(x+y)$$

$$\frac{|EC|}{|AC|} = \sin x \Rightarrow |EC| = |AC| \cdot \sin x = \sin x \cdot \sin y$$

$$\frac{|OD|}{|OC|} = \cos x \Rightarrow |OD| = |OC| \cdot \cos x = \cos x \cdot \cos y$$

$$\frac{|EA|}{|AC|} = \cos x \Rightarrow |EA| = |AC| \cdot \cos x = \cos x \cdot \cos y$$

$$\frac{|DC|}{|OC|} = \sin x \Rightarrow |DC| = |OC| \cdot \sin x = \sin x \cdot \sin y$$

بر حسب برداری لرو:

$$|AB| = |AE| + |EB| = |AE| + |CD|$$

$$|OB| = |OD| - |BD| = |OD| - |EC|$$

د کای په های کولو تغه ښودنه په لاس راځي

$$\sin(x + y) = \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y$$

$$\cos(x + y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$$

1'. 2':

3. 4.:  $x = y$ . های په های کچه

5.: Setze  $z + t = x$ ;  $z - t = y \Rightarrow z = \frac{x + y}{2}$ ;  $t = \frac{x - y}{2}$

کین ره

$$\sin(x + y) = \sin(z + t) = \sin z \cdot \cos t + \cos z \cdot \sin t$$

پس لرو

$$= \sin \frac{x + y}{2} \cos \frac{x - y}{2} + \cos \frac{x + y}{2} \sin \frac{x - y}{2}$$

$$\cos(x + y) = \cos(z + t) = \cos z \cdot \cos t - \sin z \cdot \sin t$$

پس

$$\Rightarrow \sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x + y}{2} \cos \frac{x - y}{2}$$

6. ښودنه په ورته توګه مخ ته ځي

7.:  $x = y = z/2$

لیږد

$$\Rightarrow \cos(x + y) = \cos z = \cos 2 \cdot \frac{z}{2} = \cos^2 \frac{z}{2} - \sin^2 \frac{z}{2}$$

$$\Rightarrow \sin^2 \frac{z}{2} = \cos^2 \frac{z}{2} - \cos z = 1 - \sin^2 \frac{z}{2} - \cos z \quad (*)$$

$$\Rightarrow 2 \sin^2 \frac{z}{2} = 1 - \cos z \Rightarrow \sin^2 \frac{z}{2} = \frac{1}{2} (1 - \cos z)$$

د ولټه نیونې له لارې ښودنه لرو

8.:  $(*) \sin^2 \frac{z}{2}$  durch  $1 - \cos^2 \frac{z}{2}$ .

په (\*) کې ولټه لیکه لیکه لیکه

9-10: د 11 پرته له 1 او 2 نه چې له لاسه راځي

## بلواک یا فنکشن $y = a \cdot \sin(bx+c) + d$

لکه چي په پيل کی مو وویل په طبیعت او تخنیک کی ډیرې پېښې شته دی چي تل بیرته راگرځي یا لنډ: راگرځي، یعنی پریودیکی دي. د دې د تشریح لپاره په خپل سوچه یا خالصه بڼه تل د ساین بلواک بسیا نه کوي.

دا زیات علتونه لري: لمړی د ساینبلواک د  $-1$  او  $1$  ترمنځ ارزښت نیسي، له بلي لور داواقعي د کونج په واک کی نه دي بلکه د وخت په واک کی دي د یوې راگرځیدنی سره، چي دا په ساده توگه د  $2$  په ډول نه شي رانیولکیدی. له دې امله د ساین بلواک د دې کارونو د روښانولو لپاره باید موډیفیخیر شي یا یی بڼه واوري. دا بڼه اوړون او د هغی تاثیر په لاندې لیدنه کی راټول شويدي، گراف یی ورزیاتی څیرونی لپاره دی. په ورته ډول د نورو کونجبلواکو لپاره باور لري په عمل کی مگر یواځي د ساینبلواک ( په همدې توگه د هغی مخامخ د کوساین بلواک چي په  $\pi/2$  سره راکښل شوی وي ) د مانا ډک دي. ( لوستن: له پښ لورڅخه )

بیلگی	د کارونی ساحه	تاثیر	بلواک
څیره ۲۱۷	ټولی تلپیره راگرځیدونی تعاملونه		$y = \sin(x)$
څیره ۲۱۸	د یوه مساوکی او ډول شپاړتوډ یو په بل مړیون	$d$ - لور بانډې راکښنه	$y = \sin(x) + d$

$y = \sin(x+c)$	د فاز تغییر یا های بدلون	په بدل بوښنا جریان د بوښنا او شیاؤونک تغییر دو ښانوده	شماره ۲۱۹
$y = a \cdot \sin(x)$	د امپلیټود د ټاکل بدلون فاز ټور - 1 له $180^\circ$ فاز ټاکل بدلون دک	د یوه بندل خوږ بدنه	شماره ۲۲۰
$y = \sin(bx)$	د یو لړۍ د تغیر یا بدلون سورعت $b > 1$ په لږه کچه کېدل $0 < b < 1$ په لږه کچه کېدل $b < 0$ په ضد کچه کېدل کله مخور دک	د یوه نښته یو لړۍ تغییر نه په یوه وخت دا ورنه روښانه کېدل لږه لږه لږه د مغز الویه او ازولونکی	شماره ۲۲۱
$y = a \cdot \sin(bx+c)+d$	عمومي حالت	کمپلکس پروډې جریان یا عمل	شماره ۲۲۲

## تمرینونه

۱ - د لاندې ورکړې سره څیره بله کړی

$$4^\circ 6' = 4,1^\circ \quad ; \quad 10^\circ, 5' = 10^\circ 30'$$

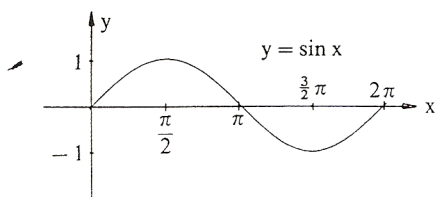
a)  $6,75^\circ =$       b)  $120,48^\circ =$       c)  $-75,65^\circ =$   
d)  $52^\circ 16' =$       e)  $97^\circ 13' =$       f)  $44^\circ 44' 44'' =$

۲ - په درجه کچې وليکي

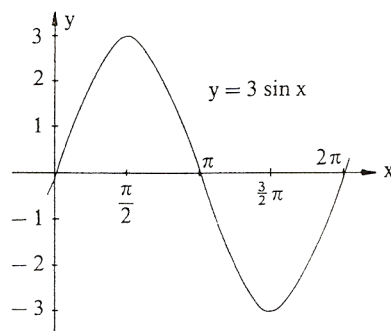
a)  $x = \sqrt{1/3}$ ,      b)  $x = -\pi/4$ ,      c)  $x = (2/3)\pi$   
d)  $x = 4$       e)  $x = -3$       f)  $x = 4,7$

۳ - په لینده کچې یې وليکي

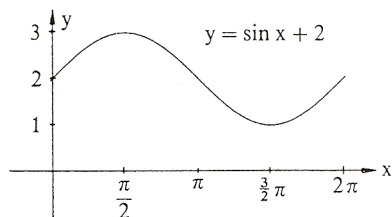
a)  $15^\circ$       b)  $-60^\circ$       c)  $540^\circ$       d)  $20^\circ 15'$       e)  $15,75^\circ$



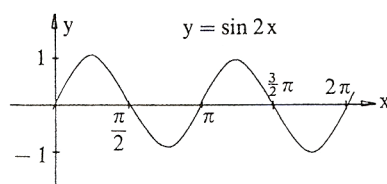
څيره ۲۱۷



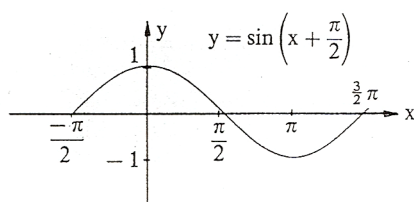
څيره ۲۲۰



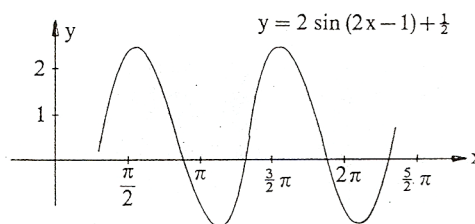
څيره ۲۱۸



څيره ۲۲۱



څيره ۲۱۹



څيره ۲۲۲

د دې بلواک ګراف د ساين کبرې  $y = \sin x$  څخه لکه چې ګورو لاس ته راځي:

- ۱- د ارزښت دوه ځله کيدل
- ۲- د نيمې راګرځيد اوږدوالی باندې پرسیدنه
- ۳- په يوه يوون د نبي لور ته راګڼنه
- ۴- په  $1/2$  پورته لورته 100% راګڼنه

## ۴ - وټاکي

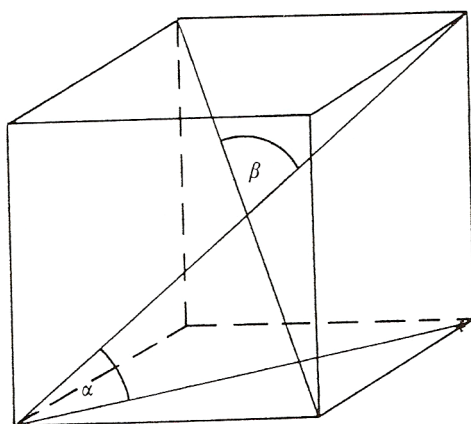
- a)  $\sin 20^\circ$     b)  $\sin(-30^\circ)$     c)  $\sin 172^\circ$     d)  $\sin 1^\circ 4'$   
 e)  $\cos 35^\circ$     f)  $\cos 380^\circ$     g)  $\cos(-27^\circ)$     h)  $\cos 47,9^\circ$   
 i)  $\tan 11^\circ$     k)  $\tan(-15^\circ)$     l)  $\tan 33,33^\circ$     m)  $\tan 13^\circ 13'$   
 n)  $\cot 870^\circ$     o)  $\cot(-11^\circ)$     p)  $\cot 14^\circ 14'$   
 q)  $\cot(-2^\circ 2')$   
 r)  $\sin \alpha = 0,8$     s)  $\cos \alpha = 0,9$     t)  $\tan \alpha = 2,5$   
 u)  $\cot \alpha = -1$     v)  $\sin \varphi = 0,3$     w)  $\cos \varphi = -0,13$   
 x)  $\tan \varphi = -4$     y)  $\cot \varphi = 0,3$     z)  $\arcsin(x) = \pi/2$

۵ - په يوه ولاړ کونجيز دريگودي کې لرو  $\gamma = 90^\circ$  او په دې برسیره :

a)  $a = 7 \text{ cm}; b = 6 \text{ cm}$

b)  $a = 16 \text{ cm}; \gamma = 66^\circ 45'$

c)  $c = 5 \text{ cm}; a = 3 \text{ cm}$



خیره ۲۲۳

پاتی ټوټی وشمیری

۶ - په مساوي پښيز دريگودي

کي (  $a =$  پښه ده ) دی

a)  $a = 10 \text{ cm}; \alpha = 80^\circ 40'$

b)  $a = 12 \text{ cm}; h = 8 \text{ cm}$

c)  $\beta = 40^\circ; a = 7 \text{ cm}$

پاتی ټوټی وشمیری

۷ - د يوه پخکونجيز ( $90^\circ < \alpha$ )

دريگودي لپاره ساين وشمیری

۸ الف ( کوساين د يوه پخ کونجيز

دريگودي لپاره وشمیری ) ( $\alpha > 90^\circ$ )

- ب) په يوه ولاړکونجيز دريگودي کوم فرمول لاس ته راځي؟  
 ۹ - په يوه مکعب کې د يوه هوا نيمې او بنسټهوارې ترمنځ کونج څومره لوي دی؟  
 څيره د دواړو هوا يا فضا يا بدن نيميو ترمنځ کونج څومره لوي دی؟  
 ۱۰ - د دوه گرديو وړانگي

$$r_1 = 5 \text{ cm}, r_2 = 4 \text{ cm}$$

دي او همداسې د منځتکو واپن  $|M_1M_2| = 8 \text{ cm}$  ورکړ شوی دی.

د دواړو گرديو د تماس

مماسونو غوڅکونجی وټاکي

او د کپې غوڅونی اوږدوالی .

- ۱۱ - په يوه دريگودي کې د يوه

کونجني می مخامخ اړخ په داسې

ځان نيونه يا تناسب غوڅوي لکه

په دې پرته خواوې. دا غوښتنه د

ساین جملی په مرسته حل

( اوبی ) کړی ( څيره ۲۲۴ ).

- ۱۲ - که يوه بار ځاي ته،

چي ۱، ۵۰ متره جگ دی،

يوه زينه ورجگه شي

ميلانکونج په دې زيات ترزيات  $33^\circ$  وي، زينه دې څومره لويه وي؟

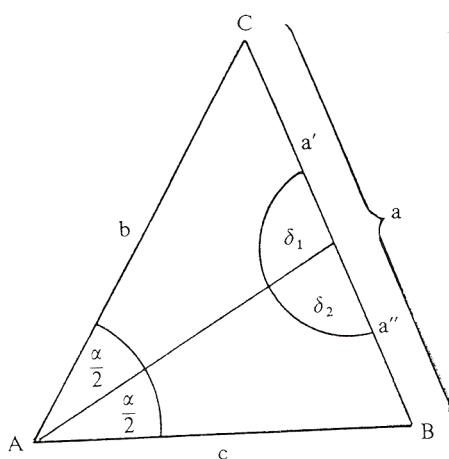
- ۱۳ - الف) د يوې پورته ختلی کوڅي جگوالي توپير دې څومره وي، که دا

کوڅه ۱۶۰۰ متره اوږده او 12% جگه وي؟

ب) د ۱۵۴۰ پرته لارې وهلو وروسته د جگوالي توپير څومره دی؟

پ) د يوه زورندې پټيلار، چي ۱۷۰۰ متره اوږده ده، په سلو کې څومره

لوي دی، که دا د جگوالي توپير ۵۰۰ متره ولري؟

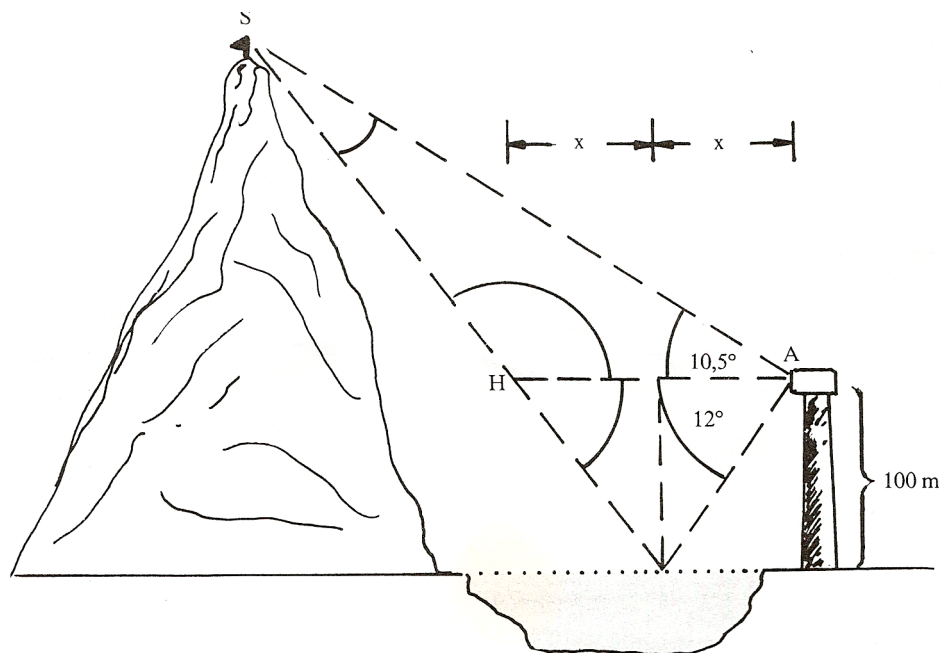


څيره ۲۲۴

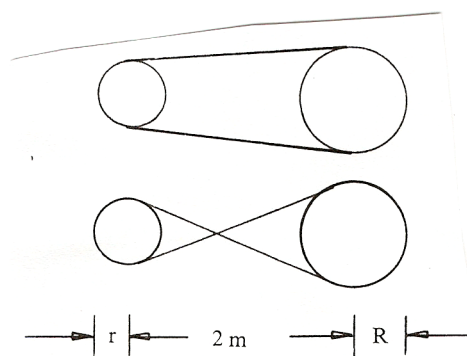
- ۱۴ - یو د اوبو بیلر ( کتله = ۱۰۰ کیلوگرامه ) په یوه دره پورته خپژول کيږي، چی میلانکونج  $\alpha = 25^\circ$  لري. د وزن زور په زوړند زور تختی سره غبرگ او نورمال یعنی ولاړ زور ( د فشار زور ) ولاړ تجزیه یا ټوټه کيږي، دواړه زوره څومره لوي دی ؟ ( ۱ کیلوگرام = ۸۱ ، ۹ نیوتن  $1 \text{ kg} = 9,81 \text{ N}$  ).
- ۱۵ - یو تلفونستن په څلور رسیو، چی هره یوه یی ۵۳ متره اوږده ده، درول کيږي. درسیو میلانکونج  $60^\circ$  دی په پښه باندې په کوم جگوالی باید رسی وړلی شي ؟
- ۱۶ - د یوې ۵۳ متره جگي ونی سیوری ۵ ، ۱۲ متره اوږد دی. په ځمکه لمرورانگی په کوم جگوالی یوبل سره مخامخ کيږي؟
- ۱۷ - د یوه ۵ متره جگ کتونټکي ( لکه د یوه کور، په دوم منځل کی کړکی ) ، څخه د یوه برج څوکه لیدل کيږي چی جگیدونکوج یی  $\alpha = 18,5^\circ$  او پښیټکی یی  $\beta = 8^\circ$  لوید کونج ، برج څومره جگ دی ؟ د لیدټکي څخه یی پروت لریوالی څومره دی ؟
- ۱۸ - الف ( د پیزا ( Pisa ) کور برج ۴۷ متره جگ دی، او څوکه یی د پښی ټکي څخه ۵۰ ، ۴ متره وراوړي. دا برج څومره مایل دی ؟
- ب ) د یوه جومات برج چی ۱۵۰ متره جگ وي، لیدونکی د کوم کونج لاندې دا برج کتلی شي، که دا برج په ځمکي ټکي ( یعنی د سترگي جگوالی د برج بنسټټکي سره برابر وي )، څخه وکتل شي، چی د برج له بنسټ څخه ۵۰۰ متره واټن ولري؟
- پ ) د ۵ ، ۱ کیلو متره لریوالی څخه یو بل برج د کوم کونج لاندې لیدل کيږي
- که جگوالی یی ۱۶۰ متره وي؟
- که جگوالی یی ۱۳۷ متره وي ؟
- ت ) د پراته کوم اوږدوالی لاندې د بنسټ څخه د ۱۲ درجی کونج لاندې
- د بل برج څوکه بنکاریزې چی جگوالی یی ۱۴۳ متره وي ؟



- د پاریس د ایفل برج بنسکاریری چی جگوالی یی ۳۰۰ متره دی ؟
- ۱۹ - د بنیپس اهرام (Cheops pyramide) ۱۳۷ متره جگوالی لري او د بنسټ د یوه اړخ اوردوالی یی ۲۳۰ متره دی چی بنسټ یی مربع شکل لري
- الف ) د اړخهوارې میلانکونج څومره دی ؟
- ب ) د څنگهوارې دریاوړه دنننی کونجونه څومره لوي دي؟
- ۲۰ - یو ژوری یا قبر - ۸ ، ۱ متره ژور دی ، بنسټسور یی ۵ ، ۲ متره دی ، د پورته لور ته وازکونج ی دواړو لورو ته ۶۰ درجی دی
- الف ) دا کبر پخپل وازوالی یا سر کی څومره پراخ دی ؟
- ب ) که ۱۰ متره اورد وي ، نو بیا دا څومره اوبه ځایکوي ، که جگوالی یی ۵۰ ، ۱ متره وي ؟
- ۲۱ - یو ډنډ په سر کی ۶ متره سرور دی او ۵ ، ۴ متره جگوالی لري د بحیرې لور ته  $14^\circ$  میلان لري ، د دننه لور ته  $28^\circ$  میلان لري . د ډنډ بنسټ څومره سور لري ؟ د هغی د نیمی هواره څومره ده ؟
- ۲۲ - د ریفلډنډ Riffelsee څخه یو بڼه لید د ماترهورن (ماترنبنسکر یا د ماترن د غره څوکه Matterhorn ) دواړه په زیرمات ، سویس Zermatt / Schweiz کی دی ) اچول کیږي که دا د یوه لیدتکي څخه چی ۱۰۰ متره جگ دی د ډنډ په لور بنسکته وکتل شي ، نو د غره د څوکی هندارونه د  $12^\circ$  پریوتکونج لاندې لیدل کیږي . د غره څوکه د یوپورته کونج  $11^\circ$  لاندې لیدل کیږي . د ریفلډنډ باندي د ماترنبنسکر څوکه څومره جگه پروته ده ؟
- څیره



خیره ۲۲۵

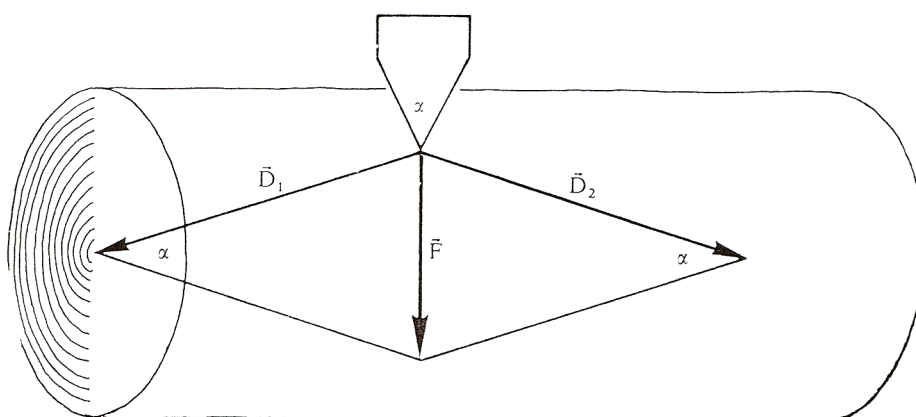


خیره ۲۲۶

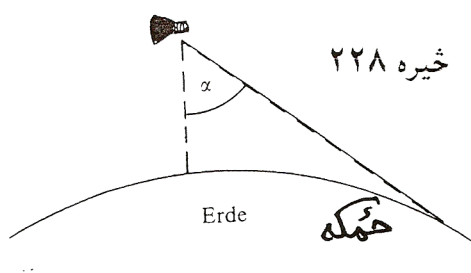
۲۳ - الف) یوه د کښولو کړی،  
 چي په دوه دکښولو چیترو  
 باندي راتاو ده، خومره اوږده  
 ده، که لاندي اندازې ولري  
 $r = 22 \text{ cm}$ ,  $R = 35 \text{ cm}$ ,  
 $|M_1 M_2| = 2 \text{ m}$ ?

ب) دا کړی به خومره اوږدې وي  
 که د اټیران په خیر له چیتروگانو یا  
 تیکلیو راکی حیدل وي ؟

۲۴ الف ( د ونی په سته یو کایل )موری ) په خټک د  $D$  زور سره وهل کیږي. د فشار هغه زورونه  $D$  څومره لوي دي، کوم چی د سټی درځونه ، که د کایل یا تبرگي کونج  $\alpha = 6^\circ$  وي. ( حیره ۱۹۴ )؟  
 ب ( په کومکایلکونج یا تبرگیکونج لرو:  $|D|=|F|$  )؟



خیره ۲۲۷



خیره ۲۲۸

۲۵- د یوه الوتماشین څخه

ځمکه د یوه  $\alpha$  کونج لاندې

لیدل کیږي ( خیره ) دا الوتماشین

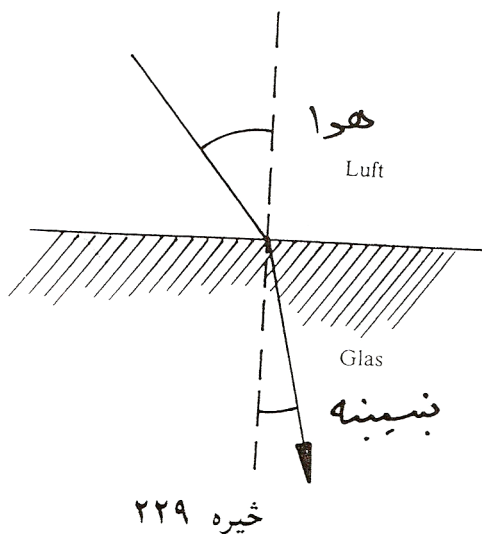
څومره جگ الوزې ؟ ( د ځمکې

وړانگه : ۶۳۷۰ کیلومتره )

۲۶- یو گادی د  $v_{\text{په}} = 120 \text{ km/h}$  سرعت

سره روان دی، نو د باران څاڅکی په

پټلی د تلنلور باندې په  $115^\circ$  کونج



د چیترو (مطلب د گاډې د اوسپنی  
تیر یا گاډیل دی) مخامخ ځغلي.  
له دې ورکړو څخه د باران د څاڅکو  
د لویدلو سرعت  $v_g$  وټاکی ؟  
۲۷ - که د لمرورانگه په دوه مختلفو  
طبقو ولویری، نو خپلی لور ته تغیر  
یا بدلون ورکوي. د سنیلوس Snellius  
د ماتقاعدي له مخی کیدی شي چی د  
ماتیدو قانون وشمیرل شي. دا قانون  
وايي، چی پروتورانگه ، ماتورانگه او  
ولارکرنه یا عمود په بیلیدونکی هواری په یوه هواره پراته دي او برسیره پر  
دې لاندې اړیکي باور لري یا صدق کوي:

$$\sin \alpha / \sin \beta = n$$

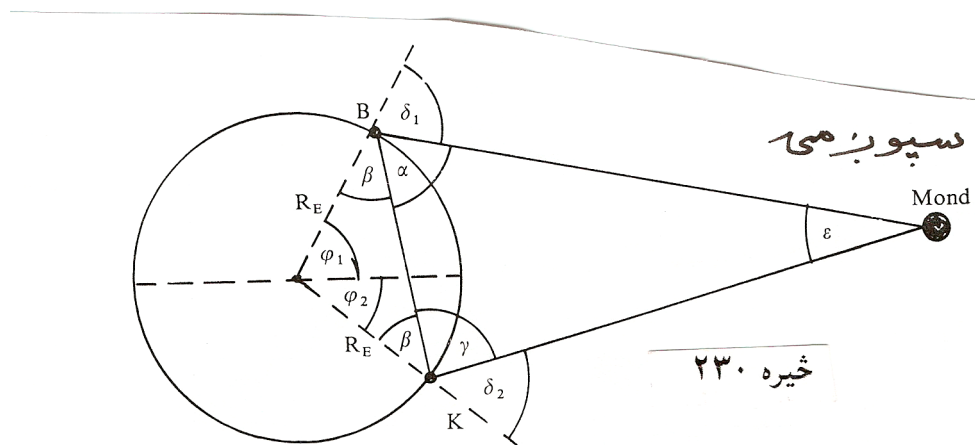
که د رټورانگه په یوه بنسینه ( اوبو ) پروزي، نو  $n = 1,5$  (1,33) دی. ونبایي،  
چی ماتکونجونه څومره لوي دي، کوم چی په لاندې پروتکونجونو اړه لري:

$$? \quad 10,5^\circ, 15,8^\circ, 27,3^\circ, 41,2^\circ, 67,6^\circ, 72,4^\circ, 81,9^\circ$$

۲۸ - په ۱۸مه میلادي پیړی کی د سپورمی لریوالی تریگومتريکي وټاکل  
شو. په برلین کی ( جغرافیوي اوردوالی  $\varphi_1 = 52, 52^\circ$  ) او لکه د بنو هیلو  
په کونج کی (  $\varphi_2 = -33,93^\circ$  )، کوم چی په همغه اوردگراد پراته دي، د  
سپورمی سره په همغه وخت کی تړل کیږي. له دې لاس ته راغلل:

$$\delta_1 = 32,08^\circ \text{ او } \delta_2 = 55,72^\circ$$

وشمیری  $|BK|, \beta, |KM|$  او له دې څخه  $d_{EM}$ .



۲۹ - لرځيدنی Schwingungen تل د وخت په اړه شميرل کيږي يعني د وخت  $t$  ترواک لاندې دي. دا د بلواک  $y = a \cdot (\sin(2\pi/T)) \cdot t + k$  له لارې ورکړ شوي. دلته  $(2\pi/T)t = x$  هغه کونج دی، کوم چي په  $T$  وخت کی وهلکيږي.  $1/T = f$  د يوه څرخون پريود يا راگرځيدنی وخت په گوته کوي او د لرځيدنی دوام بلل کيږي «  $f$  فرکونخ frequenz بلل کيږي.

## ۷- مربع مساوات ( خلوری برابرونونه )

### ۷ . ۱ - سوچه خلوری برابرون

مساوات  $x^2=25$  حل کری

د ازماښت سره حل  $x_1=5$  یا  $x_2=-5$  لاس ته راځي

ځکه چې  $(x_1)^2 = 5^2 = 25$  یا  $(x_2)^2 = (-5)^2 = 25$

مساوات د ورته بڼه بدلون له لارې لاس ته راوړل کيږي.

په دواړو لورو رینه ونیسی  $x^2=25$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2} = \sqrt{25}$$

ارزښت حل کری  $\Leftrightarrow |x| = 5$

(Fall حالت ته وايي)

$$\text{Fall 1: } x \geq 0 \Rightarrow |x| = x = 5 \Rightarrow \underline{\underline{x_1 = 5}}$$

$$\text{Fall 2: } x < 0 \Rightarrow |x| = -x = 5 \Leftrightarrow x = -5 \Rightarrow \underline{\underline{x_2 = -5}}$$

ارزښت يا مطلقه ارزښت ته روښانه ونه

يو سړی 120 € گټي، مور داسې هم وايو چې يو سړی 120 € د پيسو ارزښت گټي.

يو سړی د 120 € جزا پانه اخلي، مور وايو چې دی بايد د 120 € پيسو ارزښت تاديه کړي يا ورکړي.

د اقتصادي تخنيک له مخې گټل د مثبت او جزا د منفي په معنا دي.

نو: گټل 120 €، د جزا پانه -120 €،

په دواړو حالتونو کې دا 120 € دي.

د يوه حقيقي گڼ يا عدد ارزښت لرو، که دا مخخښه + بدله شوه.

بيلگې:

$$\begin{array}{cccc} |4| = 4 & |5,12| = 5,12 & |\sqrt{3}| = \sqrt{3} & |\pi| = \pi \\ |-4| = 4 & |-5,12| = 5,12 & |-\sqrt{3}| = \sqrt{3} & |-\pi| = \pi \end{array}$$

دا دومه ساده هم نه دی، که مور د يوې اووښتونې  $x$  ارزښت غواړو وټاکو  $|x| = x$  تل د ټولو حقيقي گڼونو يا اعدادو لپاره باور نه لري.

بيلگه:

--	--	--

گومان  $|x| = x$  فقط هلته تیک دی، چي  $x \geq 0$  وي.

د  $x < 0$  لپاره ناتیك دی..

مور دا رزنت ټاكلو كي بايد دوه حالتونه سره توپیر كړو:

لومړی حالت كه  $x \geq 0$  وي  $|x| = x$

دویم حالت كه  $x < 0$  وي  $|x| = -x$

بیله:

$x = 5$  دا چي  $x > 0$  دی باور لري  $|x| = x$  ځكه چي  $|5| = 5$  (لومړی حالت)

$x = -5$  دا چي  $x < 0$  دی باور لري  $|x| = -x$  ځكه چي  $|-5| = 5$  (دیم حالت)

د یوه حقیقي عدد ارزنت تل مثبت دی.

ارزنت د یوه عدد لویوالی ورکوي، بی له دي چي مخ نخښه په پام كي ونیل شي.

د حل بدیل |



د بني  $ax^2 = b$  يا  $ax^2 + c = 0$  برابرونونه سوچه مربعيز بلل كيږي..

دا د مناسب بڼه بدلون وروسته د ريښه نيونې له لارې حل كيږي.

په لاندي كې fall د حالت په معنا دی.

$$\begin{aligned} 2x^2 - 8 &= 0 & | +8 \\ \Leftrightarrow 2x^2 &= 8 & | :2 \\ \Leftrightarrow x^2 &= 4 & | \sqrt{\phantom{x}} \\ \Leftrightarrow \sqrt{x^2} &= \sqrt{4} \\ \Leftrightarrow |x| &= 2 \end{aligned}$$

لومړی حالت	$x \geq 0:  x  = x = 2 \Rightarrow \underline{\underline{x_1 = 2}}$
دويم حالت	$x < 0:  x  = -x = 2 \Leftrightarrow x = -2 \Rightarrow \underline{\underline{x_2 = -2}}$

بيلگه:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}x^2 &= 9 & | \cdot 2 \\ \Leftrightarrow x^2 &= 18 & | \sqrt{\phantom{x}} \\ \Leftrightarrow \sqrt{x^2} &= \sqrt{18} & | \\ \Leftrightarrow |x| &= \sqrt{18} \end{aligned}$$

لومړی حالت:	$x \geq 0:  x  = x = \sqrt{18} \Rightarrow \underline{\underline{x_1 = \sqrt{18}}}$
دويم حالت:	$x < 0:  x  = -x = \sqrt{18} \Leftrightarrow x = -\sqrt{18} \Rightarrow \underline{\underline{x_2 = -\sqrt{18}}}$

د حل بدیل||

د مساوات  $x^2+2x=0$  حل

د ازمیلو له لارې لرو :  $x_1=1$  یا  $x_2=-2$

$$x_1^2 + 2x_1 = 0 \Leftrightarrow 0^2 + 2 \cdot 0 = 0 \quad \text{ځکه چې}$$

$$x_2^2 + 2x_2 = 0 \Leftrightarrow (-2)^2 + 2 \cdot (-2) = 4 - 4 = 0 \quad \text{یا}$$

د نوکانو بندولو له لارې هم همدا نتیجه لاس ته راځي:

$$x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow \underbrace{x(x+2)}_{\text{Produkt}} = 0$$

### ضرب Produkt

دوه امکانات (شونتیاوي) شتون لري، چې دا ضرب صفر شي:

$$x = 0 \Rightarrow 0 \cdot (0+2) = 0 \cdot 2 = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

$$(x+2) = 0 \Rightarrow x \cdot 0 = 0 \quad \text{دویم حالت: د په دې معنا چې}$$

$$(x+2) = 0 \Leftrightarrow x = -2 \Rightarrow \underline{\underline{x_2 = -2}}$$

د صفر ضرب جمله:

یو ضرب صفر دی، که لږ تر لږه د هغه یو ضریب صفر وي.

پام:

د بڼې یا مساوات سیستم تل کیدی شي د اووښتوني یا متحولي له نوکانو راوستني له لارې حل شي.

بیلگه:

Probe از مابینت mit...سره. ausklammern د نوکانو و باسی،  
Nullprodukt صفر ضرب

$$\begin{aligned}
 3x^2 + 2x &= 0 && | x \text{ ausklammern} \\
 \Leftrightarrow x(3x + 2) &= 0 && | \text{Nullprodukt} \\
 \text{Fall 1: } x &= 0 && \Rightarrow \underline{\underline{x_1 = 0}} \\
 \text{Fall 2: } 3x + 2 &= 0 && | -2 \\
 \Leftrightarrow 3x &= -2 && | :3 \\
 \Leftrightarrow x &= -\frac{2}{3} && \Rightarrow \underline{\underline{x_2 = -\frac{2}{3}}}
 \end{aligned}$$

بیلگه:

Probe از مابینت mit...سره. ausklammern د نوکانو و باسی،  
Nullprodukt صفر ضرب

$$\begin{aligned}
 \frac{2}{3}x^2 &= \frac{3}{4}x && | -\frac{3}{4}x \\
 \Leftrightarrow \frac{2}{3}x^2 - \frac{3}{4}x &= 0 && | x \text{ ausklammern} \\
 \Leftrightarrow x\left(\frac{2}{3}x - \frac{3}{4}\right) &= 0 && | \text{Nullprodukt} \\
 \text{Fall 1: } x &= 0 && \Rightarrow \underline{\underline{x_1 = 0}} \\
 \text{Fall 2: } \frac{2}{3}x - \frac{3}{4} &= 0 && | +\frac{3}{4} \\
 \Leftrightarrow \frac{2}{3}x &= \frac{3}{4} && | \cdot \frac{3}{2} \\
 \Leftrightarrow x &= \frac{9}{8} && \Rightarrow \underline{\underline{x_2 = \frac{9}{8}}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Probe: mit } x &= \frac{9}{8} \\
 \frac{2}{3}x^2 &= \frac{3}{4}x \\
 \Leftrightarrow \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{9}{8}\right)^2 &= \frac{3}{4} \cdot \frac{9}{8} \\
 \Leftrightarrow \frac{2}{3} \cdot \frac{9 \cdot 9}{8 \cdot 8} &= \frac{3 \cdot 9}{4 \cdot 8} \\
 \Leftrightarrow \frac{27}{32} &= \frac{27}{32}
 \end{aligned}$$

۷. ۲ - د مربع مساوات عمومی بنه

$$ax^2 + bx + c = 0$$

بیلگه:

$$2x^2 - 3x + 4 = 0; \quad -x^2 + x - 5 = 0; \quad \frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{2}x - 8 = 0$$

د عملي شمیرني لپاره زموږ مشوره داده، چې دا انځورونه ساده شي.

د دې لپاره د برابرې دواړه خواوې په  $a$  وپشو او په دې توگه په لاندې ډول د مربع مساوات نورمال بڼه لاس ته راوړو

$$\frac{ax^2}{a} + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = \frac{0}{a} \Leftrightarrow x^2 + \underbrace{\frac{b}{a}}_p x + \underbrace{\frac{c}{a}}_q = 0 \Leftrightarrow x^2 + px + q = 0$$

۷. ۳ - د مربع تکمیلوني په مرسته د حل تکلار

بیلگه:

$$2x^2 - 16x - 40 = 0 \quad | :2 \quad \text{په نورمال بڼه راوړنه:}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 8x - 20 = 0 \quad | \text{ مربع تکمیلنه}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{x^2 - 8x + 4^2}_{2. \text{ binomische Formel}} - 4^2 - 20 = 0 \quad | +4^2 + 20$$

$$\Leftrightarrow (x-4)^2 = 36 \quad | \sqrt{\quad}$$

$$\Leftrightarrow |x-4| = 6$$

$$\text{Fall 1: } (x-4) \geq 0 \Rightarrow x-4 = 6 \quad | +4$$

$$\Leftrightarrow x = 10 \Rightarrow \underline{\underline{x_1 = 10}}$$

$$\text{Fall 2: } (x-4) < 0 \Rightarrow -(x-4) = 6 \quad | \cdot (-1)$$

$$\Leftrightarrow x-4 = -6 \quad | +4$$

$$\Leftrightarrow x = -2 \Rightarrow \underline{\underline{x_2 = -2}}$$

په پورته کې Fall د حالت په معنا دی.

هر مربع مساوات د مربع تکمیلوني له لارې یټا متود په مرسته حل کېدی شي.

د مربع تکمیلوني ته یادونه:

د  $x$  ضربونه نیمیري، مربع کېري، جمعه کېري او بېرته منفي کېري.

د لومړي یا دویم بینوم فرمول له لارې بیا مربع جوړېري.

## ۷. ۴ - د - q - p فرمول

که مربع مساوات په نورمال بڼه دا د مربع تکمیلېدنې تلنلار وکارول شي، نو د - q - p فرمول ته راځي، د کوم سره چې مربع مساوات نور هم ساده حل کېري.

Oder یا  $x^2+px+q=0$

$\Leftrightarrow x^2+px +q=0$

$$\Leftrightarrow x^2 + px + \underbrace{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2}_{1. \text{ binomische Formel}} + q = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$$

$$\Leftrightarrow \left|x + \frac{p}{2}\right| = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$$\Leftrightarrow \left(x_1 + \frac{p}{2}\right) = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \quad \text{oder} \quad -\left(x_2 + \frac{p}{2}\right) = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{x_1 = -\left(\frac{p}{2}\right) + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}}} \quad \text{oder} \quad \underline{\underline{x_2 = -\left(\frac{p}{2}\right) - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}}}$$

$$\underline{\underline{x_{1/2} = -\left(\frac{p}{2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}}}$$

يا په لنده بڼه لیکو:

دلته د ریښې لاندې  $\pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$  ځانگړې معنا لري.

دا دیسکریمینانت  $D$  بلل کیږي

له دې سره کېدی شي د حل فرمول په لنډ ډول ولیکل شي

$$x_2 = -\left(\frac{p}{2}\right) - \sqrt{D} \quad \text{يا} \quad x_1 = -\left(\frac{p}{2}\right) + \sqrt{D}$$

دوه حلتوكي (عناصر؟)	$D > 0 \Rightarrow L = \{x_1; x_2\}$	كه وي
يو حالتوكي (ډبل حل)	$D = 0 \Rightarrow L = \{x\}$	كه وي
حلتوكي نه شته	$D < 0 \Rightarrow L = \{ \}$	كه وي

د مربع مساوات د حل سره دي لومړی ديسکريمينانتي وټاکل — يا معلومه شي، چي د حلونو گڼون يا تعداد لاس ته راوړو.

کله کله له دي سره شمېرکار کميري.

بيلگه:

$$x^2 + 6x + 10 = 0 \Rightarrow p = 6 \quad q = 10$$

$$D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 3^2 - 10 = 9 - 10 = -1 \Rightarrow |$$

له دي لاس ته راځي چي حل نه شته

بيلگه:

په لاندې کي also د ,,يعني,, او يا ,,نو,, په معنا دی

$$3x^2 - 5x + 2 = 0 \quad | : 3$$

$$\Leftrightarrow x^2 - \frac{5}{3}x + \frac{2}{3} = 0 \quad \Rightarrow p = -\frac{5}{3}; q = \frac{2}{3} \Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$$

$$\text{also } D = \left(-\frac{5}{6}\right)^2 - \frac{2}{3} = \frac{25}{36} - \frac{2 \cdot 12}{3 \cdot 12} = \frac{25}{36} - \frac{24}{36} = \frac{1}{36} \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{\frac{1}{36}} = \frac{1}{6}$$

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} = \frac{5}{6} \pm \frac{1}{6} \left| \begin{array}{l} \Rightarrow x_1 = \frac{5}{6} + \frac{1}{6} = \frac{6}{6} = 1 \\ \Rightarrow x_2 = \frac{5}{6} - \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \end{array} \right.$$

### د مربع توابعو صفرخايونه

د دې لپاره چې د يوه مربع تابع صفرخايونه پيدا كړو، تل بايد يو مربع مساوات حل كړو.

كه دا دوه حلتوكي لري، نو ميع تابع د گراف د  $x$  - محور په دوه ټكو كې غوڅوي..

كه يو حلتوكی لري، نو دا گراف د  $x$  محور په يوه ټكي كې لمسوي (د خپل ككرټكي سره).

كه حل ونه لري، نو گراف د  $x$  محور پورته لور ته يا كښته لور ته ځغلي او غوڅتکی نه لري.

### د حل كنترول

لكه په هر مساوات كې كېدی شي حل داسې كنترول شي، چې د حلتوكي په سرچينيز مساوات كې ځايه ځای شي، يعنې كنترول وكړي.

په مربع مساواتو كې دا ساده دی، د وينا د ريښې جملې سره.

د وينا **Vieta** جمله :



که مربعیز مساوات  $x^2 + px + q = 0$  دوه حلونه ولري، نو باور لري:

$$x_1 \cdot x_2 = q \quad \text{او} \quad -x_1 - x_2 = p$$

دد مربع مساوات په نورمال بڼه کې په ساده ډول ایښوونې سره سری دا ثبوتولی شي.

$x_1$  او  $x_2$  سره جمعہ کړئ

$$x_1 + x_2 = -\frac{p}{2} + \sqrt{D} + \left(-\frac{p}{2} - \sqrt{D}\right)$$

$$\Leftrightarrow x_1 + x_2 = -\frac{p}{2} + \sqrt{D} - \frac{p}{2} - \sqrt{D}$$

$$\Leftrightarrow x_1 + x_2 = -\frac{p}{2} - \frac{p}{2} = -p$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{p = -x_1 - x_2}}$$

$x_1$  او  $x_2$  سره ضرب کړئ

$$x_1 \cdot x_2 = \left(-\frac{p}{2} + \sqrt{D}\right) \cdot \left(-\frac{p}{2} - \sqrt{D}\right)$$

$$\Leftrightarrow x_1 \cdot x_2 = \left(-\frac{p}{2}\right)^2 + \underbrace{\frac{p}{2} \cdot \sqrt{D} - \frac{p}{2} \cdot \sqrt{D}}_0 - D$$

$$\Leftrightarrow x_1 \cdot x_2 = \left(-\frac{p}{2}\right)^2 - \left[\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q\right]$$

$$\Leftrightarrow x_1 \cdot x_2 = \left(-\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{x_1 \cdot x_2 = q}}$$

بیلگه:

غوښتنه یا ثبوت:

مربع مساوات  $x^2+x-6=0$  او  $x_1 = 2$  او  $x_2 = -3$  حلونه لري.

$$q = -6 \text{ او } p = 1$$

ازمايننت

$$-x_1 - x_2 = -2 - (-3) = 1 = p$$

$$x_1 \cdot x_2 = 2 \cdot (-3) = -6 = q$$

برعکس يا په څنډ د وينا د جملې سره کيدی شي چې مربع مساوات جوړ کړو، کوم چې ټاکلي حلونه لري.

بيلگه:

يو څلوريز يا مربع مساوات څنگه بايد وبريښي، چې د هغه حلېږی  $L = \{-2; 1\}$  وي؟

$$p = -x_1 - x_2 = -(-2) - 1 = 1$$

$$q = x_1 \cdot x_2 = (-2) \cdot 1 = -2$$

له دې لاس ته راځي، چې  $x^2+x-2=0$  اړونده مربع مساوات دی.

پام:

دا فقط يو مربع مساوات دی د دې حلېږی سره.

د دې ټول ډېرځله هم همدا حل لري.

بيلگه: يو مربع مساوات دې څنگه وي، که د هغه حلېږی (حلسټ)  $L = \{-2; 1\}$  وي؟

$$p = -x_1 - x_2 = -(-2) - 1 = 1$$

$$q = x_1 \cdot x_2 = (-2) \cdot 1 = -2$$

$$\Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \quad |$$

(له دي لاس ته راځي) د دي اړونده مربع مساوات دی.

يادونه: دا فقط يو مربع مساوات دی، د دي حل سره.

د دي ټول زياتخه يا هم همدا حلديږي لري.

کرښيز ضريبونه (ځلووني) يا فاکتورونه:

يد بل امکان هم شته، چي مربع مساوات جوړکړای شو.

بيلگه:

$$L = \{x_1 | x_2\} \quad | \quad \text{دي د يو مربع مساوات حل وي،}$$

$$\underbrace{(x - x_1)}_{\text{Faktor 1}} \cdot \underbrace{(x - x_2)}_{\text{Faktor 2}} = 0$$

نو باور لري. (ضرب)

دا د يوه مربع مساوات کرښيزه بڼه ده.

يو شرب ټيک هلته صفر دی، چي لږ تر لږه پر له دي دوه ضريبونو څخه صفر وي.

$\Rightarrow (x - x_1) = 0 \Leftrightarrow x = x_1$ $\Rightarrow (x - x_2) = 0 \Leftrightarrow x = x_2$	ضريب ۱ صفر دی: لاس ته راځي ضريب ۲ صفر دی: لاس ته راځي
---	--

بيلگه:  $x_1=3$  يا  $x_2=-2$  دي د يوه مربع مساوات حلونه وی.

$$\text{کرښيزه بڼه بدلون: } (x-3)(x+2)=0$$

$$\text{مربع : } x^2 - x - 6 = 0$$

کرنیزه ضریبونه:

یو بل امکان هم شته، چې مربع مساوات جوړ کړو.

بیلگه:

$L = \{x_1; x_2\}$  د یوه مربع مساوات حلېږی وي.

$$\underbrace{(x - x_1)}_{\text{Faktor 1}} \cdot \underbrace{(x - x_2)}_{\text{Faktor 2}} = 0 \quad | \quad \text{نو باور لري: (ضریب:faktor)}$$

دا د یوه مربع مساوات کرنیزه بڼه ده.

یو ضرب تیک هله صفر دی، که لږ تر لږه یو له دواړو ضریبونو صفر وي.

ضریب ۱ صفر دی:

$$\Rightarrow (x - x_1) = 0 \Leftrightarrow x = x_1$$

ضریب ۲ صفر دی:

$$\Rightarrow (x - x_2) = 0 \Leftrightarrow x = x_2$$

بیلگه:  $x_1 = 3$  یا  $x_2 = -2$  د یوه مربع مساوات حلونه وي.

$$\text{کرنیزه بڼه: } (x-3)(x+2)=0$$

$$\text{مربع مساوات: } x^2 - x - 6 = 0$$

$$p = -1 \quad q = -6 \Rightarrow D = (-0,5)^2 + 6 = 6,25$$

$$x_1 = 0,5 + \sqrt{6,25} = 3 \quad \text{oder} \quad x_2 = 0,5 - \sqrt{6,25} = -2$$

تولگه:

$$ax^2 + c = 0 \text{ لومړۍ بڼه:}$$

بڼه بدلون و  $x^2 = ?$  ته او د ریښه نیونې له لارې حل

$$ax^2 + bx = 0 \text{ دویم بڼه یا ډول:}$$

د اووښتونې یا ماحولې  $x$  له نوکانو اېستلو له لارې حل.

$$x(ax + b) = 0 \text{ او د صفر ضرب جمله و کاروی.}$$

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ دریمه بڼه:}$$

مساوات په نورمال بڼه راوړی

$$x^2 + px + q = 0 \text{ او د } P-q \text{ فرمول سره حل کړی.}$$

$$D = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \quad x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \text{ د سره}$$

د  $D > 0$  لپاره دوه حلونه شتون لري.  $L = \{x_1; x_2\}$

د  $D = 0$  لپاره ډبل حل شتون لري  $x_1 = x_2 \Rightarrow L = \{x_{1/2}\}$

د  $D < 0$  لپاره حل شتون نه لري.  $L = \{ \} = \emptyset$

د ویتا د ریښې جمله (موخه د مربع مساواتو د حلونو جمله هم کېدی شي):

که مربع مساوات  $ax^2 + bx = 0$  دوه حلونه ولري، نو باور لري:

$$x_1 \cdot x_2 = q \quad \text{او} \quad -x_1 - x_2 = p$$

د یوه مربع مساوات کرښیزه بڼه:

دې د یوه مربع مساوات حل وي.  $L = \{x_1 | x_2\}$

نو باور لري:  $\underbrace{(x - x_1)}_{\text{Faktor 1}} \cdot \underbrace{(x - x_2)}_{\text{Faktor 2}} = 0$  (ضرب)

یا  $a(x - x_1)(x - x_2) = 0 \Leftrightarrow L = \{x_1 | x_2\}$

پوښتنې:

لاندې مربع مساوات حل کړئ. د دې لپاره اړونده هغه بڼه تڼلار و کاروی او د خای په خای کولو له لارې یې و ازمایی.

1.  $4x^2 = 1$     2.  $x^2 + 4x = 0$

3.  $2x^2 - 16x + 14 = 0$     4.  $(x + 2)^2 = 16$

5.  $4x^2 - 16 = 0$     6.  $x^2 - 8x + 7 = 0$

7.  $x^2 + \pi x = 0$     8.  $2(x + 3)^2 - 18 = 0$

9.  $-x^2 + x = -\frac{1}{2}$     10.  $3x^2 + 12x + 3 = 0$

11.  $-x^2 + 8x - 8 = 0$     12.  $4(x - 4)^2 = 32$

$$13. \quad \frac{1}{12}x^2 - x = 0 \quad 14. \quad \frac{1}{4}x^2 + 2x - \frac{2}{5} = 0$$

$$15. \quad \frac{3}{16}x^2 - \frac{3}{4}x = 0 \quad 16. \quad -\frac{3}{4}x^2 + 3x + 9 = 0$$

$$17. \quad \frac{3}{2}x^2 - x - 4 = 0 \quad 18. \quad \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{3}x = 0$$

$$19. \quad 2x^2 - \frac{10}{3}x - \frac{4}{3} = 0 \quad 20. \quad \frac{2}{3}x^2 + 4x = 0$$

بیلگہ ۱:

پہ لاندی کی Probe ازماہنت.

$$8x^2 = 2 \mid : 8 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{4} \mid \sqrt{\quad} \Leftrightarrow |x| = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x_{1/2} = \pm \frac{1}{2}$$

$$\text{Probe: } x_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow 8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 8 \cdot \frac{1}{4} = 2 \quad x_2 = -\frac{1}{2} \Rightarrow 8 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = 8 \cdot \frac{1}{4} = 2$$

بیلگہ ۲:

$$2x^2 + 8x = 0 \Leftrightarrow x(2x + 8) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0 \mid$$

$$2x + 8 = 0 \mid -8 \Leftrightarrow 2x = -8 \mid : 2 \Leftrightarrow x_2 = -4 \quad (\text{د صفر ضرب جملہ})$$

ازماہنت:

$$x_1 = 0 \Rightarrow 2 \cdot 0 + 8 \cdot 0 = 0 \quad x_2 = -4 \Rightarrow$$

$$2 \cdot (-4)^2 + 8 \cdot (-4) = 2 \cdot 16 - 32 = 0$$

بیلگه ۳:

$$4x^2 - 32x + 28 = 0 \mid :4 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 7 = 0$$

$$\Rightarrow p = -8 \quad q = 7 \quad D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 16 - 7 = 9 \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{9} = 3$$

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left| \begin{array}{l} x_1 = 4 + 3 = 7 \\ x_2 = 4 - 3 = 1 \end{array} \right. \quad \text{Probe: } \begin{array}{l} 4 \cdot 49 - 32 \cdot 7 + 28 = 0 \\ 4 \cdot 1 - 32 \cdot 1 + 28 = 0 \end{array}$$

بیلگه ۴:

$$2(x+2)^2 = 32 \mid :2 \Leftrightarrow (x+2)^2 = 16 \mid \sqrt{\quad} \Leftrightarrow |x+2| = 4$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{l} x+2 = 4 \Leftrightarrow x_1 = 2 \\ x+2 = -4 \Leftrightarrow x_2 = -6 \end{array} \quad \text{Probe: } \begin{array}{l} 2(2+2)^2 = 2 \cdot 16 = 32 \\ 2(-6+2)^2 = 2 \cdot 16 = 32 \end{array}$$

مربع مساوات ته پوښتنې

**I** څلوریز (مربع) مساوات

لومړۍ –

لاندې مربع مساوات په  $x$  پسي حل کړی

$$\frac{5}{4} - \frac{1}{2}x^2 = -\frac{1}{4}x^2 \quad \text{پ.} \quad \frac{4}{5}(x^2 - 3) = 0 \quad \text{ب.} \quad 4 - x^2 = 0 \quad \text{الف.}$$

$$x^2 - \frac{a^2}{2} = 0 \quad \text{ث.} \quad \frac{1}{2}x^2 - 2t^2 = 0 \quad \text{ج.} \quad 3x^2 + 8 = 5 \quad \text{ت.}$$

دویم –



جانان غواري خپله بدآیی په دوه کاله کې دوه برابره کړي.

گټه باید څومره وي، که گټه هم ورسره په گټه وي.

درېم –

200 باکتریاگانې په دوه ساعته کې 450 باکتریاو ته زیاتوي.

دا باکتریاوي په ساعت کې څو په سلو یعنې % کې زیاتوي.

څلورم –

د یوه مربع دوه کونجترې یا قطر 8 cm اوږد دی..

د مربع اړخ څومره اوږد دی؟

پنځم –

یو ولاړکوډیز یا مستطیل  $60,75 \text{ m}^2$  سطحه لري.

د اړخونو اوږدوالی وټاکي، که

الف – یو اړخ درېواړه دومره اوږد وي لکه دا بل.

ب – اړخونه یې په 3 m یو له بل توپیر لري.

شپږم –

دوه گڼونه په 4 یو له بل توپیر لري. د دواړو عددونو ضرب 480 دی.

دواړه اعداد وټاکي. اوم –

دوه گڼونه وټاکي، چې زیاتون یا جمع یې 4,1 او ضرب یې 4 وي.

اتم –

t په واکوالي کې حلونو گڼون یا تعداد او ځای وټاکي

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}t\right)x^2 + 2t = 0; t > 1 \quad \text{الف. } tx^2 + 1 = 0; t \neq 0 \quad \text{ب. } x^2 + t - 2 = 0 \quad \text{پ.}$$

نهم-

مربع مساوات په  $x$  پسې حل کړی.

الف-  $2x^2 + 2x - 24 = 0$  ب-  $-3x^2 - 5x + 8 = 0$  پ-  $\frac{1}{2}x^2 - 4x + 8 = 0$   
 ت-  $3 - 2x + \frac{1}{3}x^2 = 0$  ب-  $x(x+t) = 1$  ث-  $-x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{5}{4} = 0$   
 ج-  $(x+2)^2 - 2 = 0$  چ-  $-x^2 + 4ax - 4a^2 = 0$  ح-  $2tx^2 + tx - t = 0; t \neq 0$   
 خ-  $x^2 - 2tx + 6t = 3x$  غ-  $x^2 - 4tx + 3t^2 = 0$  ځ-  $\frac{1}{4t}x^2 - t = 0; t \neq 0$   
 لسم -

دیسکریمینانتي Diskriminante وټاکي

الف-  $ax^2 + ax - 2 = 0; a \neq 0$  ب-  $(a+1)x^2 - x + a = 0; a \neq -1$   
 پ-  $\frac{a^2}{2}x^2 - 4x = x^2 - ax + 1; a \neq 0$  ت-  $(ax)^2 - \sqrt{a} \cdot x + \frac{2}{a} = 0; a > 0$   
 یولسم -

وښایي، چې برابرې  $x^2 + ax - 1 = 0$  د هر  $a \in \mathbb{R}$  لپاره دوه حلونه لري.  
 دولسم -

$a$  په واکوالي کې د مساواتو حلونه وښایي یا وټاکي.

الف-  $-ax^2 + 2ax - a + 1 = 0; a > 0$  ب-  $x^2 - 2ax - 6a = -3x$  پ-  
 $x^2 - ax + a = x$   
 ت-  $-ax^2 + 2a^2x + 3a^3 = 0$  ب-  $ax^2 + 2x - 3 = 0$  ث-  $-x^2 + 1,5ax - 0,5a^2 = 0$   
 ج-  $2x^2 + x - 3a = 0$  چ-  $-\frac{1}{a}(x^2 - 5x) = 0; a \neq 0$  ح-  $\frac{x^2}{3} - \frac{2}{3}ax - a^2 = 0$   
 دیارلسم -

وښایي چې  $L = \{1 + \sqrt{2-3t}; 1 - \sqrt{2-3t}\}$  د ټول  $t \leq \frac{2}{3}$  لپاره

د  $x^2 - 2x + 3t - 1 = 0$  حلونه دي.  
څوارلسم -

و بنایي چې  $t$  د کومو ارزښتونو لپاره  $x = t$  د  $x^2 - 5x + t = 0$  حل دی.  
پنځلسم -

و بنایي:  $x^2 - 2x - t^2 = 0$  د ټولو  $t \in \mathbb{R}$  لپاره دوه حلونه لري.

## پوښتنې

### مربع مساوات II

لومړی: مربع مساوات  $x$  پسي حل کړئ.

$$\frac{3}{2}x = \frac{1}{2}x^2 \quad \text{الف-} \quad 8x^2 + 3x = 0 \quad \text{ب-} \quad x^2 - x = 0 \quad \text{پ-} \quad \frac{3}{2}x = \frac{1}{2}x^2$$

$$\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} = 0 \quad \text{ت-} \quad -\frac{1}{5}x - \frac{1}{2}x^2 = 0 \quad \text{ټ-} \quad \frac{4}{5}(x^2 - 4x) = 0 \quad \text{ث-} \quad \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} = 0$$

$$\frac{t}{2}x - tx^2 = 0; t \neq 0 \quad \text{ح-} \quad \frac{x^2}{t} - tx = 0; t \neq 0 \quad \text{چ-} \quad -\frac{1}{8}x^2 + 2tx = 0 \quad \text{ج-} \quad \frac{t}{2}x - tx^2 = 0; t \neq 0$$

دویم:  $a$  په واکوالي کې د حلونو تعداد یا گڼون وټاکئ.

$$\text{الف-} \quad ax^2 - 6x = 0 \quad \text{ب-} \quad x^2 - 2x = (2-a)x^2$$

دریم: مساوات  $4x^2 = 12x$  دې ورکړ شوی وي. سپینگل دواړه اړخونه د  $x$  سره ویشي او لاس ته د حل په څیر  $x = 3$  راوړو. په دې هکله مو موقف څرگند کړئ.

## مربع مساوات ته پوښتنې

### مربع مساوات III

لومړی: لاندې مربع مساوات د ټوټه ونې (تجزیې) له لارې حل کړئ.

الف-  $x^2 + 8x + 16 = 0$  ب-  $x^2 + 5x - 24 = 0$  پ-  $-2x^2 + 4x + 30 = 0$

دویم:

الف-  $(x+4)(x-5) = 0$  ب-  $(2x+7)(4x-1) = 0$  پ-  $(x+t)(x-2t) = 0$

ت-  $0,5x^2 - 3x + 4 = 0$  ټ-  $-0,5x^2 - x + 1,5 = 0$  ٺ-

$$\frac{1}{3a}(2x - x^2) = 0; a \neq 0$$

### مربع - یا څلوریز مساوات IV

لومړی: بې له فرمول څخه یې حل کړئ.

الف-  $(x-5)^2 = 49$  ب-  $(3x+4)^2 = 1$  پ-  $9 - (2x+5)^2 = 0$

ت-  $\frac{3}{4}(x-2)^2 = 12$  ټ-  $\frac{1}{12}x^2 = x$  ٺ-  $\frac{4x}{t^2}(2t+x) = 0; t \neq 0$

$$\text{ج - } 2tx - (t-1)x^2 = 0; t \neq 1 \quad \text{چ - } 1,5(x - 0,5a)^2 = 0$$

$$(x-1)^2 - t = 0; t > 0$$

دويم: لاندې برابر ونونه يا مساوات حل کړئ

$$\text{الف - } -2x(x-5) = 0 \quad \text{ب - } -\frac{1}{2}(2x-1)(x-5) = 0 \quad \text{پ - } 1 - \frac{1}{(1-x)^2} = 0$$

درېم: د a

د کومو ارزښتونو لپاره مساوات  $(x+2)(x-a)=0$  ټيک يو حل لري؟

څلورم: د جشميري سره د ټيک دوه لسميزو سره حلېږئ وشميرئ.

$$\text{الف - } 436x^2 + 18x - 12 = 0 \quad \text{ب - } x^2 + 6x - 1024 = 0 \quad \text{پ - } x^2 + 92x - 9876 = 0$$

$$\text{ت - } 119,6\pi + 9,6\pi x - 2\pi x^2 = 0 \quad \text{ث - } \sqrt{2}x^2 + 2\sqrt{2}x - 1 = 0$$

$$0,025x^2 + 2x - 0,254 = 0$$

پنځم: وښايئ:  $(a+b)^{-1} = a^{-1} + b^{-1}$  د ټول  $a, b \neq 0$  لپاره يو ناتيک حل

لري.

## مربع مساوات v

لومړی: لاندې مربع مساوات حل کړئ

$$\text{الف - } \frac{x}{3} - x^2 = 0 \quad \text{ب - } 73 - 52s + 14s^2 = 25 \quad \text{پ - } \frac{x^2}{a} - e^{-2} = 0$$

$$\text{ت - } \frac{1}{4}x^2 + 65x - 3600 = 0 \quad \text{ث - } 2a^2 + 7a + 3 = 0$$

$$8,5x = \frac{1}{16}x^2 + \frac{1}{2}x + 200$$

دويم: مساوات  $2x + \frac{2}{x} = 5$  ورکړ شوي دي.

الف- تعریفور شو او حلډبرئ یې وټاکئ.

د مساوت په بني لور د 5 په ځای کوم عدد باید ځای ونیسي، له کومي سره چې دا ناتغیره مساوات حل  $2^{1/2}$  ولري؟

دریم: د پارامتر د کومي ټاکنې لپاره مساوات ټیک یو حل لري؟

$$\text{الف- } 3x^2 + ax - a = 0 \quad \text{ب- } ax^2 + \frac{a}{2}x - 1 = 0 \quad \text{پ- } -\frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(a-x)^2} = 0$$

څلورم: یو مربع مساوات وټاکئ.

الف- د حل  $L = \{-5; 3\}$  سره، ب- له حل  $L = \{-2, 5\}$  سره. پ- چط کوم حل

ونه لري. ت- چې د  $x^2 - 5x - 24 = 0$  د حل سره برابر حل ولري.

پنځم: د ارزښت(مطلق) مساوات حل کړئ.

$$\text{الف- } |(x+2)^2| = 2 \quad \text{ب- } |x^2 - x + 3| = 1 \quad \text{پ- } |x+1| = x^2$$

شپږم: د ولاړکودیز یا مستطیل د اړخونو اوږدوالی وټاکئ، که دا ولاړکودیز

الف- یو چاپیریال د  $U = 38 \text{ m}$  او یو مساحت د  $A = 88 \text{ m}^2$  ولري.

ب- یو مساحت د  $A = 16 \text{ m}^2$  ولري او د سور اوږدوالی یې  $4/3$  وي.

اوم: وښایئ: که د دوه حقیقي عددونو کمښت یا تفریق د ضرب په څلور ځله زیات شي، نو سړی د دواړو حقیقي عددونو مربع زیاتون یا جمعه لاس ته راوړي.

اتم: د یوه دیوال په اوږدوالي یو ولاړکودیز پټي د  $A = 800 \text{ m}^2$  سطحې سره د یوه ټول  $100 \text{ m}$  متره سیم سره رابندېږي. د اړخونو اوږدوالي څنگه ټاکل کېږي؟ کوم ماکسیمال یا خورا لویه سطحه له دې سره رابندېږي؟

نهم: د  $x$  د جوړښت ټوټو قیمت  $K(x)$  دی. یو جوړښت ټوټه یا برخه په  $E(x)$  پلورل کېږي. څومره جوړښت ټوټې باید تولید شي، چې د  $200 \text{ €}$  یوه گټه لاس ته راوړل شي؟

$$K(x) = x^2 + 100x + 80 \quad (\text{د ارزښت تابع يا فنکشن})$$

$$E(x) = 160 - 2x \quad (\text{د خرڅلاو تابع})$$

لسم: يوه فابريکه مواد توليدوي، چې ارزښت يې په هره دانه € 65 دی. د  $x$  توليدولو دانو ټول قيمت يا لگښت  $E(x)$  دی. کوم تعداد دا دانې بايد توليد شي، چې گټه ترې لاس ته راشي؟ د څومره تعداد دانو سره يوه گټه د € 1500 لاس ته راځي.

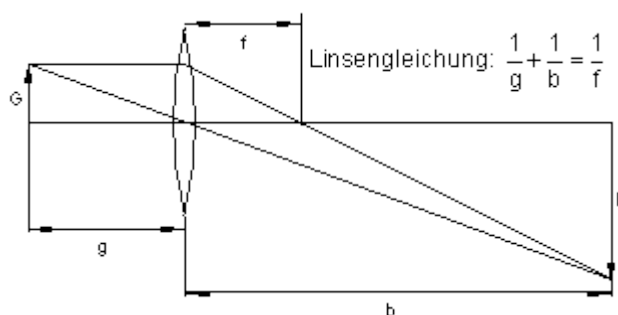
$$K(x) = \frac{1}{5}x^2 + 20x + 1000 \quad (\text{لگښت فنکشن})$$

يولسم: يو شی  $G$  د عدسي له لارې، چې د سوزونټيکي اوږدوالی يې  $f = 0,2 \text{ m}$  دی په يو اوپټيکي څيره  $B$  باندې پريوځي يا څيره کيږي. د شي او څيري ترمنځ واټن يې  $1 \text{ m}$  دی.

الف- دا شی  $G$  او همداسي څيره  $B$  يې د عدسي څخه څومره لرې دي؟

ب - عدسه بايد ماکسيمال څومره د سوزونټيکي واټن ولري؟

په لاندي څيره کې: Linsengleichung د عدسي مساوات.



۸ - ماتر ابرون يا د کسرونو مساوات

۸ . ۱ - د ماتیرابرونونو حلونه یا اوبیونه

کسر مساوات — لکه کرینیز مساوات — د ورته بڼه بدلون له لارې حل کیدی شي. مگر مخ ته له دې تعريف-یا پیژندور شو وټاکل شي. بنسټیږی IR ده، که بل څه نه وي ورکړ شوي. نو تعريفیږی اووښتون ارزښتونه یا د متحولو ارزښتونه خوندي لري، د کومو لپاره چې مساوات باوري وي. د تعريفور شو لپاره دې تر څیرني لاندې ونيول شي، چې ماتلاندې یا مخرج د کومو ارزښتونو لپاره صفر کیري. ټیک دا ارزښتونه تعريف ورشو پورې اړه نه لري.

بیلگه:

$$\frac{4+x}{x-2} = 6 \quad \text{له دې لاس ته راځي: } D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$$

ځکه چې ویش په صفر اجازه نه لري.

$$\begin{aligned} \frac{4+x}{x-2} &= 6 && | \cdot (x-2) \\ \Leftrightarrow 4+x &= 6 \cdot (x-2) \\ \Leftrightarrow 4+x &= 6x-12 && | -6x \\ \Leftrightarrow 4-5x &= -12 && | -4 \\ \Leftrightarrow -5x &= -16 && | : (-5) \\ \Leftrightarrow x &= \frac{16}{5} && \text{da } x \in D \Rightarrow L = \underline{\underline{\left\{ \frac{16}{5} \right\}}} \end{aligned}$$

بیلگه:

$$\frac{5}{x+3} + \frac{1}{x-1} = 0 \quad D = \mathbb{R} \setminus \{-3; 1\}$$

ځکه چې د  $x=-3$  لپاره لومړی مخرج د  $x=1$  لپاره، دویم مخرج صفر کیري.

اسلي ماها لاندې یا — مخرج:  $(x+3)(x-1)$



$$\begin{aligned}
& \frac{5(x-1)}{(x+3)(x-1)} + \frac{1(x+3)}{(x+3)(x-1)} = 0 && | \cdot (x+3)(x-1) \\
\Leftrightarrow & 5(x-1) + (x+3) = 0 \\
\Leftrightarrow & 5x - 5 + x + 3 = 0 \\
\Leftrightarrow & 6x - 2 = 0 && | +2 \\
\Leftrightarrow & 6x = 2 && | :6 \\
\Leftrightarrow & x = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} && \text{da } x \in D \Rightarrow L = \left\{ \frac{1}{3} \right\}
\end{aligned}$$

بیلگه:

Hauptnenner د اصلي ماتلاندي يا مخرج په معنا

$$\begin{aligned}
& \frac{x}{x+1} + \frac{4}{x-1} = \frac{x}{x-1} && D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \quad \text{Hauptnenner: } (x+1)(x-1) \\
& \frac{x(x-1)}{(x+1)(x-1)} + \frac{4(x+1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{x(x+1)}{(x-1)(x+1)} && | \cdot (x-1)(x+1) \\
\Leftrightarrow & x^2 - x + 4x + 4 = x^2 + x \\
\Leftrightarrow & 3x + 4 = x && -x \\
\Leftrightarrow & 2x + 4 = 0 && | -4 \\
\Leftrightarrow & 2x = -4 && | :2 \\
\Leftrightarrow & x = -2 && \text{da } x \in D \Rightarrow L = \{-2\}
\end{aligned}$$

وروسته له دې چې په دواړو لورو يا خواوو مساوات په اصلي مخرج راپل شو يا واپړول شو، پای ضرب مو د اصلي مخرج سره دې ته بيايي، چې نور کسرونه نور شتون نه لري.

بیلگه:

$$\begin{aligned} \frac{a-x}{b-x} - \frac{a-b}{a+b} &= 0 \quad D = \mathbb{R} \setminus \{x=b\}; a+b \neq 0 \quad \text{Hauptnenner: } (b-x)(a+b) \\ \frac{(a-x)(a+b)}{(b-x)(a+b)} - \frac{(a-b)(b-x)}{(a+b)(b-x)} &= 0 \quad | \cdot (b-x)(a+b) \\ \Leftrightarrow (a-x)(a+b) - (a-b)(b-x) &= 0 \\ \Leftrightarrow a^2 + ab - ax - bx - [ab - ax - b^2 + bx] &= 0 \\ \Leftrightarrow a^2 + \cancel{ab} - \cancel{ax} - bx - \cancel{ab} + \cancel{ax} + b^2 - bx &= 0 \\ \Leftrightarrow a^2 - 2bx + b^2 &= 0 \quad | -a^2 - b^2 \\ \Leftrightarrow -2bx &= -a^2 - b^2 \quad | : (-2b) \\ \Leftrightarrow x &= \frac{a^2 + b^2}{2b} \Rightarrow L = \left\{ \frac{a^2 + b^2}{2b} \right\}; b \neq 0 \end{aligned}$$

دا چي بنی لور فقط له صفر ارزبنتونو جوړه ده، نو کینه لور په اصلي مخرج راوړل کيږي. دآله مخرج سره ضرب مو دلته هم دي ته لارښودوي، چي نور کسرونه شتون نه لري. مگر په پام کي دي ونيول شي، چي ماتکرښه په نوکانو کي نيول کيږي. که د کسرکريسي يا ماتکرښي مخ ته کميزه يا منفي مخنځښه شتون ولري، نو د کسر له منځه تلني وروسته دي اړونده صورت يا ماتباندي په يوه منفي نوک کي کيښوی شي.

د په څټ- يا معکوس ارزښت جوړولو سره چلول:

په لاندي کي: Kehrwertbildung معکوس ارزښت جوړونه، HN اصلي مخرج.

$$\begin{aligned} \frac{2}{x+1} = \frac{4}{x-2} \quad | \text{Kehrwertbildung } D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 2\} & \text{ په ځنو حالتونو کيډی شي} \\ \Leftrightarrow \frac{x+1}{2} = \frac{x-2}{4} \quad \text{HN} = 4 & \text{ شميرنه د د په څټ - يا} \\ \Leftrightarrow \frac{2x+2}{4} = \frac{x-2}{4} \quad | \cdot 4 & \text{ معکوس ارزښت جوړوني له} \\ \Leftrightarrow 2x+2 = x-2 \Leftrightarrow x = -4 \Rightarrow L = \{-4\} \in D & \text{ لاري ساده کړای شي.} \\ & \text{ دا په ځانگړي توگه هلته باور} \\ & \text{ لري، چي د مسرونو صورت} \\ & \text{ فقط له عددونو جوړ وي.} \end{aligned}$$

د ضرب سره چلول د اټیران (صلیب) له لارې:

شمیرنه کیدی شي

↓ Multiplikation über Kreuz

چلیپا یا اټیران ضرب له لارې هم  
لنډه شي.

$$\frac{4}{x+2} = \frac{3}{5x-4} \Rightarrow D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -2; \frac{4}{5} \right\}$$

$$\frac{4}{x+2} = \frac{3}{5x-4} \quad | \text{Multiplikation über Kreuz}$$

$$\Leftrightarrow 4(5x-4) = 3(x+2)$$

$$\Leftrightarrow 20x - 16 = 3x + 6 \quad | -3x + 16$$

$$\Leftrightarrow 17x = 22 \quad | :17 \Leftrightarrow x = \frac{22}{17}$$

$$\Rightarrow L = \left\{ \frac{22}{17} \right\}$$

دلته د لومړي مات یا کسر

مخرج (ماتلاندي) د دویم کسر له

صورت سره ضربیږي او د دویم

مخرج د لومړي کسر له صورت

سره ضربیږي.

مگر دا ټیک هلته شونی دی، چي

کسر مساوات دا ترڅنګ بڼه

ولري.

د اټیرا – یا چلیپا ضرب د باوریوالي لپاره ساده بڼونه:

$$\frac{2}{x+1} = \frac{4}{x-2} \Leftrightarrow \frac{x+1}{2} = \frac{x-2}{4} \quad \text{غوښتنه یا ثبوت:}$$

بڼونه د یوه ساده ورته بڼې بدلون له لارې سرته رسوو.

$$\frac{2}{x+1} = \frac{4}{x-2} \quad | \cdot (x+1) \Leftrightarrow 2 = \frac{4(x+1)}{x-2} \quad | \cdot (x-2)$$

$$\Leftrightarrow 2(x-2) = 4(x+1) \quad | :8 \Leftrightarrow \frac{1}{4}(x-2) = \frac{1}{2}(x+1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-2}{4} = \frac{x+1}{2} \Leftrightarrow \frac{x+1}{2} = \frac{x-2}{4} \quad \text{q.e.d (was zu beweisen war)}$$

q.e.d (was zu beweisen war) څه چي د بڼولو وو

بیلګه:

په لاندې کې: Definitionsmenge تعريفور شو يا-ست،

Kehrwertbildung د معكوس ارزښت جوړونه.

$$\frac{1}{x} + \frac{2}{x-2} = 0 \Rightarrow \text{Definitionsmenge: } D = \mathbb{R} \setminus \{0; 2\}$$

$$\frac{1}{x} + \frac{2}{x-2} = 0 \mid -\frac{2}{x-2} \Leftrightarrow \frac{1}{x} = -\frac{2}{x-2} \mid \text{Kehrwertbildung}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{x-2}{2} \mid \cdot 2 \Leftrightarrow 2x = -(x-2) \Leftrightarrow 2x = -x+2 \mid +x$$

$$\Leftrightarrow 3x = 2 \mid : 3 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3} \text{ da } x \in D \Rightarrow L = \underline{\underline{\left\{ \frac{2}{3} \right\}}}$$

$$\frac{x^2 + 4x + 3}{x + 3} = x - 2 \Rightarrow \text{Definitionsmenge: } D = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$$

Hauptnenner:  $x + 3$

$$\frac{x^2 + 4x + 3}{x + 3} = \frac{(x-2)(x+3)}{x+3} \mid \cdot (x+3)$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 4x + 3 = x^2 + 3x - 2x - 6 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 3 = x^2 + x - 6 \mid -x^2$$

$$\Leftrightarrow 4x + 3 = x - 6 \mid -x \Leftrightarrow 3x + 3 = -6 \mid -3$$

$$\Leftrightarrow 3x = -9 \mid : 3 \Leftrightarrow x = -3 \text{ da } x \notin D \Rightarrow L = \underline{\underline{\{ \}}}$$

بيلگه:

دا بيلگه په گوته كوي، چې د تعريفور شو ټاكل څومره غوره دي. ورته بڼه بدلون مو په رښتيا يوي نتيجه ته بيايي، مگر وتونمسوات د دي ارزښت لپاره تعريف نه دي.

بيلگه:

Trik چلول ته وايي

$$\frac{x^2}{x^2-1} - \frac{x-1}{x+1} = \frac{1-2x}{1-x^2} \Rightarrow D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$$

$$\text{Trick: } \frac{1-2x}{1-x^2} = -\frac{1-2x}{x^2-1} = \frac{2x-1}{x^2-1}$$

له دې سره اصلي مخراج  $x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$  دی. د بینوم دریمې جملې په بنسټ.

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{x^2-1} - \frac{(x-1)(x-1)}{\underbrace{(x+1)(x-1)}_{x^2-1}} = \frac{2x-1}{x^2-1} \cdot (x^2-1)$$

$$\Leftrightarrow x^2 - \frac{(x-1)(x-1)}{2. \text{ binomische Formel}} = 2x-1 \Leftrightarrow x^2 - (x^2 - 2x + 1) = 2x-1$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x^2 + 2x - 1 = 2x - 1 \Leftrightarrow 2x - 1 = 2x - 1$$

دا مساوات د هر  $x \in \mathbb{D}$  لپاره پوره دی: له دې لاس ته راځي:  $L = D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$ .

دا مساوات ناپای زیات حلونه لري، ځکه چې مساوات شرایط د تعریفورشو د هر  $x$  لپاره پوره دي.

ماتمسواتو (کسر مساواتو) ته پوښتنې

### ماتمسوات |

لومړی: تعریفورشو وټاکئ او مساوات حل کړئ.

$$\text{الف- } \frac{2}{x} + 3 = \frac{5}{2} \quad \text{ب- } \frac{2}{3x-4} - \frac{1}{20} = \frac{5}{6x-8} \quad \text{پ- } \frac{2}{x-1} - \frac{4}{x+1} = \frac{1}{x-1}$$

$$\text{ت- } \frac{2+x}{x-1} = \frac{3+2x}{x+1} - 1 \quad \text{ټ- } \frac{x^2+4x+3}{x+3} = x-2 \quad \text{ث- } \frac{-3x+6}{2x-4} + \frac{x}{x-2} = -\frac{7}{6}$$

$$\text{ج- } \frac{4}{x-1} + \frac{1}{5} = \frac{3}{1-x} + \frac{8}{5} \quad \text{چ- } x + \frac{2x}{x-1} = 0 \quad \text{ح- } \frac{32}{8x+16} = \frac{5x}{2x+4}$$

$$\text{خ- } \frac{x^2}{x^2-1} - \frac{x-1}{x+1} = \frac{1-2x}{1-x^2} \quad \text{ځ- } \frac{5x-5}{x+1} + 2 = \frac{6x-3}{2x-1} + 4 \quad \text{څ- } \frac{x}{x-2} - \frac{1}{2} = \frac{3}{2x-4}$$

$$\text{د- } \frac{3-x}{x+1} - 4 = 0 \quad \text{ډ- } \frac{1}{x} + \frac{2}{x-2} = 0 \quad \text{ذ- } 3u^2 + 6u = \frac{4}{3} + \frac{8}{3u}$$

دویم: ایا غوښتنه ټیک ده؟

$$\frac{2x^2 + 4x - 30}{2x - 6} = x + 5 \quad \text{د ټول } x \in \mathbb{R} \text{ لپاره}$$

دریم: تعریفور شو وټاکئ او ساواتت حل کړئ.

$$\text{الف - } \quad 2x + (4 - 2u) \frac{u+3}{u-1} = -2u + 6$$

$$\text{ب - } \quad ux + (u+3) \frac{u}{u-3} = -u$$

څلورم: وښایئ:

$$(a+1)^{-1} = a^{-1} + 1; a \in D \quad \text{حل نه لري.}$$

پنځم: مساواتسیستم حل کړئ:

$$\text{I: } \frac{3}{x-23} = \frac{-2}{y+2} \quad \text{II: } \frac{x-4}{y+2} = \frac{x-2}{y+5}$$

شپږم: یوه لاری  $405 \text{ m}^3$  بار زخیره ځای ته په  $x$  تلوو وړي. یوه ستره لاری د دې لپاره ۹ کمو تلوو ته اړتیا لري. دواړه لاری د دې بار لپاره په ګډه ۲۰ تلوو ته اړتیا لري. هره لاری ځانله څومره تلوو ته اړتیا لري او هره یوه د څومره د بارولو توان لري؟

اوم: کوم طبیعي عدد(عددونه) کیدی شي د صورت ته ورزیات کړي او په همدې وخت کې د مخرج څخه کم کړي، چې ۲- ترې لاس ته راوړي؟

$$\text{اتم: مساوات } \frac{6-2x}{x^2-9} = \frac{3}{2} \text{ ورکړ شوي دي.}$$

الف- تعریف ورشو او حلورشو یا حلپېړئ یې وټاکئ.

ب- د  $3/2$  په ځای بل عدد داسې ولیکئ، چې پرته له دې دا بی تغیره یا تغیر نه خوړونکی مساوات  $x = -1$  حل ولري.

د کسر مساواتو د تعریفور شو لپاره بیلګه:

بیلگه ۱:

$$\frac{2}{x} + 7 = 3 : \text{ له دې لاس ته راځي } D = \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ تعريف ورشو:}$$

د کسر مساوات د متحولي ټولو ارزښتونو لپاره باور لري، پرته له صفر.

بیلگه ۲:

$$\frac{3}{x-7} = 2 \text{ له دې لاس ته راځي تعريف ورشو: } D = \mathbb{R} \setminus \{7\}, \text{ ځکه چې}$$

$$x-7=0 \Leftrightarrow x=7$$

د کسر مساوات باور لري د ټولو متحولو  $x$  ارزښتونو لپاره پرته له ۷. ځکه چې د  $x = 7$  لپاره مخرج صفر کیږي.

بیلگه ۳:

$$\frac{4}{x+2} + \frac{3}{5x-4} = 1 \text{ له دې لاس ته راځي: } D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -2; \frac{4}{5} \right\}$$

$$\text{ځکه چې } x+2=0 \Leftrightarrow x=-2 \text{ او } 5x-4=0 \Leftrightarrow 5x=4 \Rightarrow x=\frac{4}{5}$$

په لومړي کسر کې مخرج د  $x=-2$  لپاره صفر کیږي.

په دویم کسر یا مات کې د  $x=4/5$  لپاره مخرج یا ماتلاندې صفر کیږي.

په صلیب یا اتیران باندې د ضرب له لارې چلول:

$$\frac{4}{x+2} = \frac{3}{5x-4} \mid \text{ د اتیران یا چلییا یا صلیب له لارې ضرب}$$

$$: \Leftrightarrow 4(5x-4) = 3(x+2)$$

$$\Leftrightarrow 20x - 16 = 3x + 6 \mid -3x + 16 \Leftrightarrow 17x = 22 \mid 17 \Leftrightarrow x = \frac{22}{17} \Rightarrow L = \underline{\underline{\left\{ \frac{22}{17} \right\}}}$$

پوښتنې

کسر نابرابرونونه

کسر نامساوات |

لومړۍ: تعریفې وټاکئ او نامساوات حل کړئ

$$\text{الف-} \quad \frac{3-x}{x-2} > \frac{x+4}{2(x-2)} \quad \text{پ-} \quad \frac{1}{2x} > \frac{1}{3x} - 2 \quad \text{ب-} \quad \frac{3}{x+4} < 0$$

$$\text{ت-} \quad 4 - \frac{3+2x}{1-x} \geq 0 \quad \text{ب-} \quad \frac{x-2}{x-5} \geq 0 \quad \text{ث-} \quad \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} \leq 0$$

$$\text{ج-} \quad \frac{x}{x-1} < 1 \quad \text{چ-} \quad \frac{3-2x}{5x+2} \leq 1 \quad \text{ح-} \quad \frac{x-2}{x^2} \geq 0$$

دویم: کوم طبیعي عدد(اعداد) د  $2/5$  صورت ته ورزیات کړي او په همدې وخت کې له  
مخرج څخه کم کړي، چې د کسر ارزښت له څلورو لوی وي؟

دریم: وښایئ: د  $ux^3 - (4u+1)x^2 = 0$  حل د  $u > 0$  لپاره په انټروال  $\left[ \frac{1}{2}; 2 \right]$   
کې نه دی پروت.

څلورم: وښایئ:



$$\frac{-1-8u}{-2u} > 4 \quad \text{د } u > 0 \text{ لپاره باور لري:}$$

نامساوات په ورته توګه لکه مساوات د ورته بڼه بدلون له لارې حل کېږي. د لته دې په پام کې وي، چې د کمیز ګڼ يا عدد سره د ضرب له لارې يا د وېش له لارې اړیک نڅېنه بدلېږي يا معکوسه کېږي. که چېرې يو نامساوات د يو عدد سره ضربېږي، نو باید د حالت توپير وشي. لومړی حالت، که د اووښتوني يا متحولي ارزښت زیاتيز وي، دویم حالت که د متحولي ارزښت کميز وي.

بیلګه: په لاندې کې Fall د حالت په معنا دی.

$$-x + 2 > 1 \mid -2 \Leftrightarrow -x > -1 \mid \cdot (-1) \Leftrightarrow x < 1$$

$$\frac{1}{x} < 4 \Rightarrow D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Fall I:  $x > 0$

$$\frac{1}{x} < 4 \mid \cdot x \Leftrightarrow 1 < 4x \mid : 4$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4} < x \Leftrightarrow x > \frac{1}{4}$$

Fall II:  $x < 0$

$$\frac{1}{x} < 4 \mid \cdot x \Leftrightarrow 1 > 4x \mid : 4$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4} > x \Leftrightarrow x < \frac{1}{4} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L = \left\{ x \mid x < 0 \text{ oder } x > \frac{1}{4} \right\}$$

له شرایطو

$$x > 0 \text{ und } x > \frac{1}{4} \Rightarrow x > \frac{1}{4}$$

له شرایطو

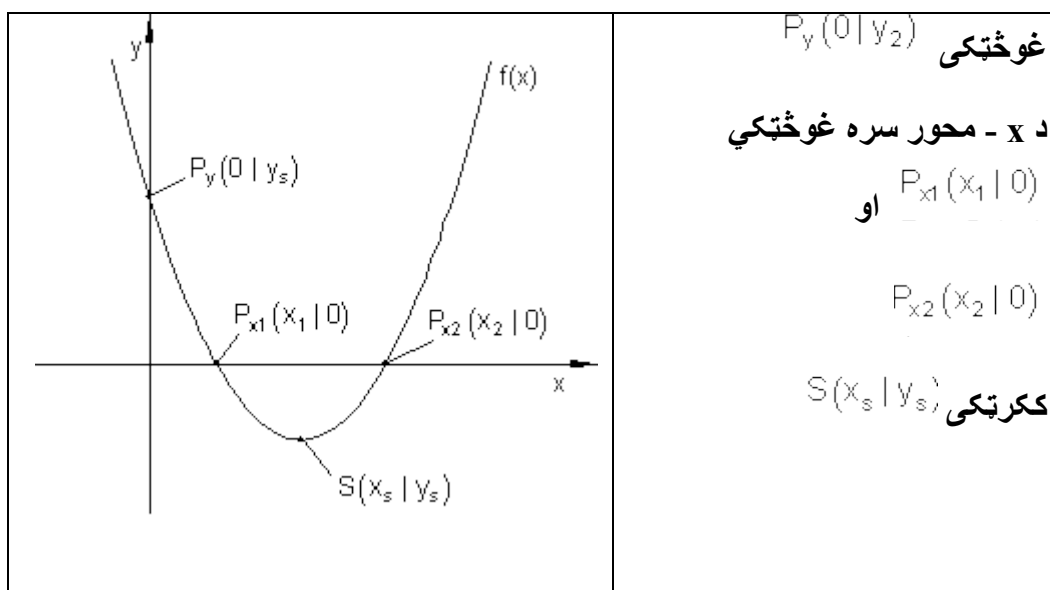
$$x < 0 \text{ und } x < \frac{1}{4} \Rightarrow x < 0$$

په پورته کې und د او په معنا دی.

## د مربع توابعو د محورونو غوڅتکي

د محورونو غوڅتکي

	<p>په څنگ څیره کې د گراف کتلو کې یوڅو تکی په ځانگړې توگه پام ته راځي</p> <p>د <math>y</math>-محور سره</p>
--	---



ڌير نبيلگه:

د ڌير نبيلگي په توگه دا  $f(x) = x^2 - 6x + 5$  تابع په چوپړڪي لرو.

د  $y$ -محور سره غوڻٽڪي

گراف د  $y$ -محور په  $P_y$  ٽڪي ڪي غوڻوي.

د هر ٽڪي لپاره، ڇي د  $y$  محور باندې پروت دي، د  $x$  ڪو اوڀر ديناٽ صفر دي.

د  $P_y$  لپاره شرطونه:  $f(0)$

$$f(x) = x^2 - 6x + 5 \Rightarrow f(0) = 0^2 - 6 \cdot 0 + 5 = 5 \Rightarrow \underline{\underline{P_y(0 | 5)}}$$

په دي حالت ڪي به توانيدلي وي، ڇي د  $y$ -ڪو اوڀر ديناٽ سيده د تابع مساوات څخه ولولو.

بيلگه:

$$S(3;4) \text{ (ککرتکی یا د راس تکی)} \quad f(x) = (x-3)^3 - 4$$

$$P_y(0|y_y) \Rightarrow y_s = f(0) = (0-3)^2 - 4 = 9 - 4 = 5 \Rightarrow \underline{\underline{P_y(0|5)}}$$

د  $x$  محور سره غوڅتکی

گراف د  $x$  محور د  $P_{x1}$  او  $P_{x2}$  په ټکو کې غوڅوي.

د هر تکی لپاره، چې د  $x$  په محور پروت دی، د  $y$  کواوردینات صفر دی.

د لپاره شرایط:

داسې  $f(x) = (x-3)^3 - 4 = 0$  ایښونه مو مربع مساوات  $(x-3)^3 - 4 = 0$  ته بیایي:

د مربع تکمیلیدوله لارې حل یا ښوونه:

$$x^2 - 6x + 3^2 - 3^2 + 5 = 0 \Leftrightarrow (x-3)^2 - 9 + 5 = 0 \Leftrightarrow (x-3)^2 - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)^2 = 4 \quad \sqrt{\quad} \Leftrightarrow |x-3| = \sqrt{4}$$

$$\Leftrightarrow x-3 = \pm\sqrt{4}$$

$$\Rightarrow x_1 = \sqrt{4} + 3 = 2 + 3 = 5 \quad \vee \quad x_2 = -\sqrt{4} + 3 = -2 + 3 = 1$$

$$\underline{\underline{P_{x1}(5|0)}; P_{x2}(1|0)}}$$

## تمرینونه :

د مربع تکمیلیدنو له لارې د صفرخای ټاکنه د یوه پارابول ( 2-مه درجه ټول راشنل تابع) د تابع مساوات ورکړل شوي دي. د لاندې پارابول لپاره صفرخایونه او د محورونو غوڅتکي وټاکي. د ککرتکي په مرسته گراف وکاري.

$$\begin{aligned}
 f(x) = -x^2 - x + 6 \quad S\left(-\frac{1}{2} \mid \frac{25}{4}\right) & \text{ - دويم} & f(x) = x^2 + 4x - 5 \quad S(-2 \mid -9) & \text{ - اول} \\
 f(x) = -x^2 - 4x - 4 \quad S(-2 \mid 0) & \text{ - دريم} & & \\
 f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - 6 \quad S\left(-\frac{1}{2} \mid -\frac{49}{8}\right) & \text{ - خلورم} & & \\
 f(x) = x^2 - 4x + 5 \quad S(2 \mid 1) & \text{ - شپږم} & f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 5 \quad S(4 \mid -3) & \text{ - پنځم} \\
 f(x) = 4x^2 + x - 5 \quad S\left(-\frac{1}{8} \mid -\frac{81}{16}\right) & \text{ - اتم} & f(x) = \frac{1}{4}x^2 + x - 1 \quad S(-2 \mid -2) & \text{ - اوم} \\
 f(x) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x - 2 \quad S\left(1 \mid -\frac{7}{3}\right) & \text{ - لسم} & f(x) = -4x^2 - x + 5 \quad S\left(-\frac{1}{8} \mid \frac{81}{16}\right) & \text{ - نهم}
 \end{aligned}$$

### ارزښت (مطلقه ارزښت)

يادونه:

يو کس د 120 € گټي، مور هم وايو چې هغه د 120 € ارزښت گټي. يو کس د 120 € جزا پاته تر گوتو کوي، مور وايو هغه بايد د 120 € د پيسو جزا ورکړي. په دواړو حالتونو کې مطلب يا موخه 120 € دي.

د اقتصادي تخنيک له مخې گټه د مثبت (زياتيز) او جریمه د منفي (کمیز) په معنای.

د يوه عدد ارزښت يا مطلقه ارزښت د شمير پوهنې له مخې تل مثبت دی.

د دې لپاره چې د يوې متحولي ارزښت وشميرلی شو، نو يو د شميرلو قانون ته اړ يو.

د شميرلو قانون:	که $x \geq 0$ وي.
$ x  = \begin{cases} x \\ -x \end{cases}$	که $x < 0$ وي.

بيلگه:

د مطلقه ارزښت مساوات  $|x + 2| = \sqrt{3}$  دې حل کړای شي. د شميرني قانون:

$ x+2  = \begin{cases} x+2 \\ -(x+2) \end{cases}$	که $x+2 \geq 0$ وي
	که $x+2 < 0$ وي

دا مو د حالت توپير ته بيايي:

لومړی حالت: که  $x+2 \geq 0$  وي، نو لاس ته راځي

$$x+2 = \sqrt{3} \Leftrightarrow x_1 = -2 + \sqrt{3}$$

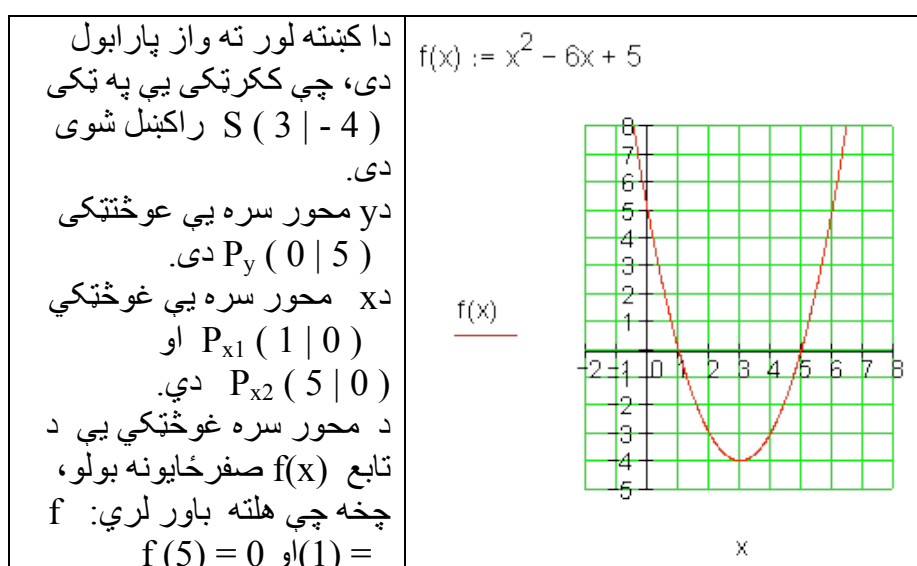
دويم حالت: که  $x+2 < 0$  وي، نو لاس ته راځي

$$-(x+2) = \sqrt{3} \Leftrightarrow x+2 = -\sqrt{3} \Leftrightarrow x_2 = -2 - \sqrt{3}$$

حل په لنډه بڼه:

$$|x+2| = \sqrt{3} \Rightarrow x+2 = \pm\sqrt{3}$$

د نورو څيړنو لپاره د بيلگي گراف کارو:



د تعريف او ارزښت سټ (ډېری)

زيات وخت د تابع تلنه په يوه ټاکلي ورشو يا ساحه کې تر څيړني نيول کيږي.

دا مو تعريف ډېری او ارزښت ډېری ته لارښودوي.

ځمور د بيلگي تابع دې فقط له  $x = -1$  تر  $x = +6$  د ارزښتونو په ورشو کې په

هلته رامنځ ته کېدونکو تابع ارزښتونو وڅيړل شي.

تعريف سټ (-ډېرې):  $D = \{x \mid -1 \leq x \leq 6\}_{\mathbf{R}}$  په دې معنا چې له  $x=-1$  تر  $x=6$  پورې دتابع خورا کوچنی ارزښت (مینیموم) ککرتکی دی، ځکه چې پارابول پورته لور ته واز دی، پس  $x \min = -4$ . اوس د انټروال پولې  $x=-1$  او  $x=6$  څیرل کیري.

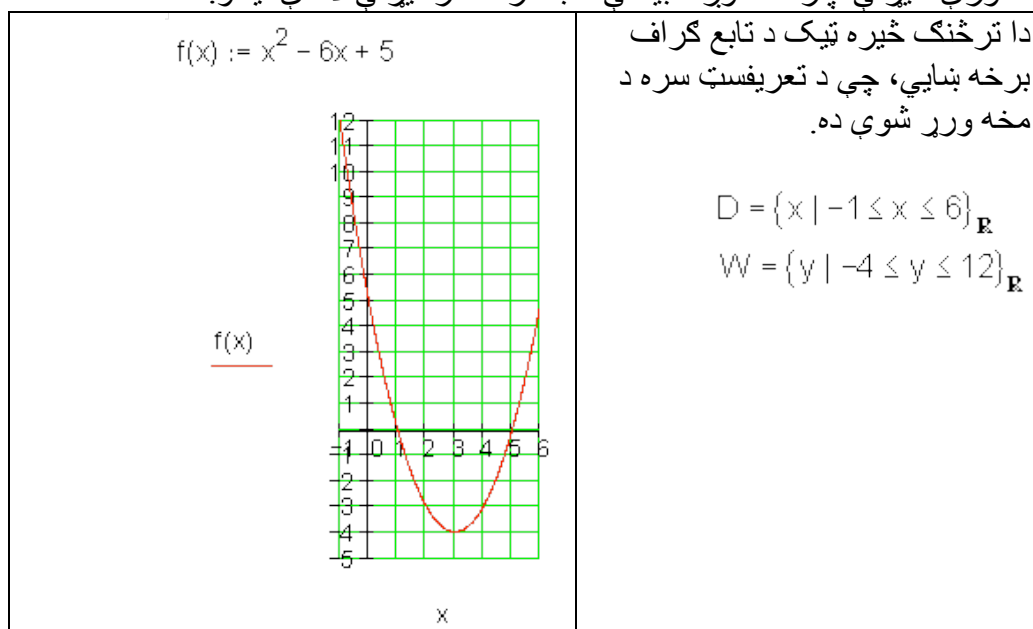
$$f(-1) = (-1)^2 - 6 \cdot (-1) + 5 = 1 + 6 + 5 = 12$$

$$f(6) = 6^2 - 6 \cdot 6 + 5 = 36 - 36 + 5 = 5$$

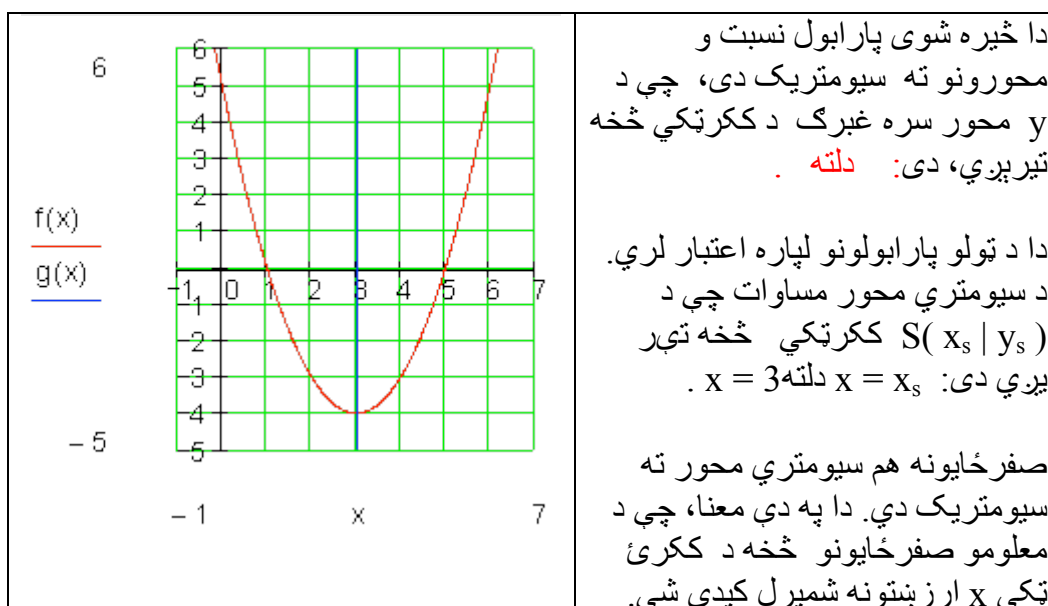
له دې سره ارزښت سټ دی:

$$\underline{\underline{W = \{y \mid -4 \leq y \leq 12\}_{\mathbf{R}}}}$$

د ارزښت ډېرې یا -سټ تل د تعريف سټ له لارې ورکول کیري. د نوري څیرني لپاره ځمور د بیلگي تاب گراف ترڅیرني لاندې نیسو.



د سیومتري څیرنه:



له صفرځایونو څخه د ککرتکي شمیرنه

صفرځایونه:  $x_1, x_2$  څرگندېږي. له دې لاس ته راځي:

$$\Rightarrow x_s = \frac{x_1 + x_2}{2} \Rightarrow S(x_s | f(x_s))$$

زموږ د بیلگې لپاره باور لري:

$$x_1 = 1; x_2 = 5 \Rightarrow x_s = \frac{1+5}{2} = 3 \Rightarrow S(3 | f(3))$$

که د مربع تابع صفرځایونه معلوم وي، نو د دې اریتمیتیکی منځ د ککرتکي  $x$  کواوردینات دی.

د  $-p - q$  فرمول پیداکونه

د یوه مربع تابع د صفرځایونو پیداکولو امکانات د مربع تکمیلیدنو له امله د مربع مساوات د حل له لارې صورت نیسي. د دې لپاره یو د حل فرمول هم منځ ته راوړی شو.

$$x^2 - 6x + 5 = 0 \text{ مربع مساوات}$$



مو د مربع مساوات نور ماليني ته بيايي:  
 د  $x^2 - 6x + 5 = 0$  حل د مربع تکميليدني له لاري.

$$\Leftrightarrow x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \Leftrightarrow \left|x + \frac{p}{2}\right| = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \Leftrightarrow x + \frac{p}{2} = \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{x_1 = -\left(\frac{p}{2}\right) + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}} \quad \underline{\underline{x_2 = -\left(\frac{p}{2}\right) - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}}}$$

د ريښي لاندې افاده (ويينه) دېسکريمينانت بلل کيږي.

$$\text{Diskriminante} = D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \text{دېسکريمينانت}$$

$$\underline{\underline{x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D}}}$$

د  $p-q$  - فرمول:

زموږ د بيلگې تابع صفرخايونه دي اوس د  $p - q$  - فرمول په مرسته وشميرل شي.

$$x^2 - 6x + 5 = 0 \Rightarrow p = -6; q = 5$$

لومړی دې دېسکريمينانت وشميرل شي:

$$D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = (-3)^2 - 5 = 9 - 5 = 4$$

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} = 3 \pm \sqrt{4} \Rightarrow x_1 = 3 + 2 = 5 \quad \vee \quad x_2 = 3 - 2 = 1$$

دېسکريمينانت او د حلونو ست

مربع مساوات تل حلونو نه دي.

بيلگه:

$$x^2 - 6x + 10 = 0 \Rightarrow p = -6; q = 10$$

$$\Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = (-3)^2 - 10 = -1$$

فرمول -p-q

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} = 3 \pm \sqrt{-1} \Rightarrow \dots$$

حل نه لري.

که دېسکریمینات منفی (کمیزه) مخنځېنه ولري، نو مساوات حلون نه دي، ځکه چې ریښې فقط د مثبت ارزښتونو لپاره تعریف دي.

مربع مساوات کېدی شي چې فقط یو حل هم ولري.

بېلگه:

$$x^2 - 6x + 9 = 0 \Rightarrow p = -6; q = 9$$

$$\Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = (-3)^2 - 9 = 0$$

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} = 3 \pm \sqrt{0} = 3 \quad \text{فرمول: -p-q}$$

فقط یو حل.

تولگه:

دېسکریمینانت D د یوه مربع مساوات د حلونو تعداد ټاکي

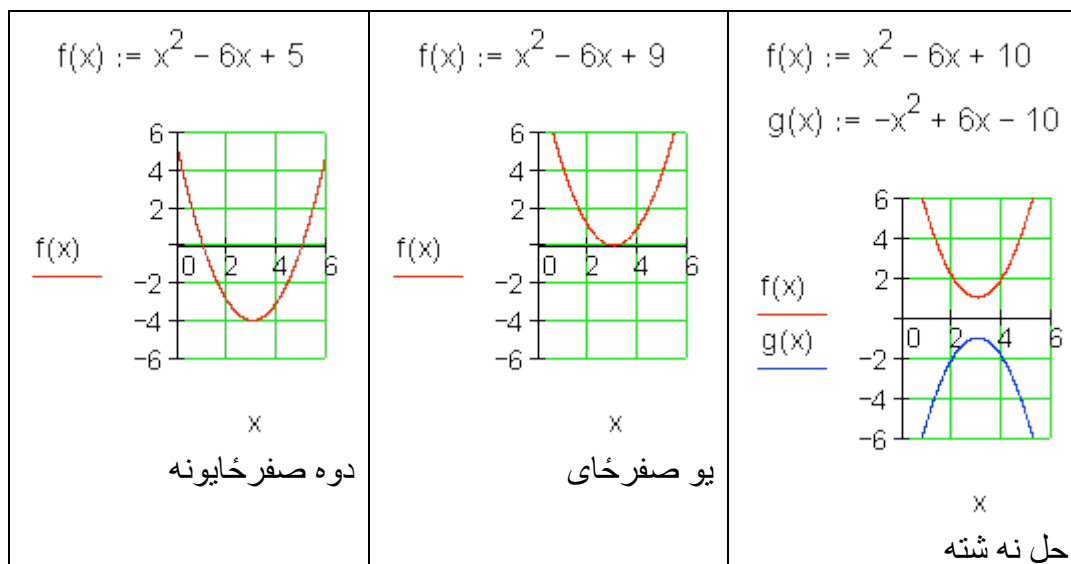
$$x_1 = -\left(\frac{p}{2}\right) + \sqrt{D} \quad \vee \quad x_2 = -\left(\frac{p}{2}\right) - \sqrt{D}$$

د دوه حلونو ډېری (سټ)	$D > 0 \Rightarrow L = \{x_1; x_2\}$
د یوه حل سټ	$D = 0 \Rightarrow L = \{x\}$
د حلونو سټ نه شته	$D < 0 \Rightarrow L = \{ \}$

د حلونو سټ او د تابع گراف

د یوه مربع تابع د گراف تلنه د مربع مساوات د حلونو سټ باندې څه معنا لري؟  
زموږ په بیلگه مور مربع مساوات لرو دوه، هیڅ او فقط یوه حل سره.

مور د دې اړونده تابع گراف رسموو.



که دوه صفرځایونه شتون ولري، نو د تابع گراف د  $x$  محور دوه واړه غوڅوي.  
د یوه صفرځای سره د تابع گراف د  $x$  محور په ککر ټکي کې لمسوي.  
که صفرځای مو مخ ته نه پروت، نو د پورته لور ته واز پارابول ککر ټکی د  $x$  محور  
پورته لور ته پروت دی، کښته لور ته واز پارابول ککر ټکی د  $x$  محور کښته لور ته  
پروت دی.

د ویتا Vieta جمله:

جمله:

$x_1$  او  $x_2$  د مربع مساوات  $x^2 + px + q$  حلونه دي، نو د ویتا د ریښې جمله باور لري:

$$x_1 + x_2 = -p \quad \text{او} \quad x_1 \cdot x_2 = q.$$

بنوونه (ثبوت): ثبوت د سېده شمیرني له لارې صورت نیسي:

$x_1$ او $x_2$ سره ضرب کړی	$x_1$ او $x_2$ سره جمعه کړی
----------------------------	-----------------------------

$x_1 + x_2 = -\frac{p}{2} + \sqrt{D} + \left(-\frac{p}{2} - \sqrt{D}\right)$ $\Leftrightarrow x_1 + x_2 = -\frac{p}{2} + \sqrt{D} - \frac{p}{2} - \sqrt{D}$ $\Leftrightarrow x_1 + x_2 = -\frac{p}{2} - \frac{p}{2} = -p$ $\Rightarrow \underline{\underline{x_1 + x_2 = -p}}$	$x_1 \cdot x_2 = \left(-\frac{p}{2} + \sqrt{D}\right) \cdot \left(-\frac{p}{2} - \sqrt{D}\right)$ <p style="text-align: center; font-size: small;">3. Binomische Formel</p> $\Leftrightarrow \left(-\frac{p}{2}\right)^2 - (\sqrt{D})^2 = \left(-\frac{p}{2}\right)^2 - D$ $\Leftrightarrow \left(-\frac{p}{2}\right)^2 - \left[\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q\right] = q$ $\Rightarrow \underline{\underline{x_1 \cdot x_2 = q}}$
--	--

دا جمله د حل د کنترول لپاره بڼه د کار (استعمال) وړ ده.

بیلگه:

$$x^2 - 6x + 5 = 0 \Rightarrow p = -6; q = 5$$

$$x_1 = 5; x_2 = 1 \quad \text{حل:}$$

$$x_1 + x_2 = 5 + 1 = 6 = -p (w)$$

$$x_1 \cdot x_2 = 5 \cdot 1 = 5 = q (w)$$

### صفر خایونه او کرښیز ضریبونه (فاکتورونه)

د وینا جملې له مخې باور لري:

$$\therefore x_1 + x_2 = -p \quad \wedge \quad x_1 \cdot x_2 = q$$

په نورمال بڼه یې د  $p = -x_1 - x_2$  سره کیږدی

$$x^2 + px + q = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + (-x_1 - x_2) \cdot x + x_1 \cdot x_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x_1x - x_2x + x_1x_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x - x_1) - x_2(x - x_1) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{(x - x_1)}_{\text{Linearfaktor}} \underbrace{(x - x_2)}_{\text{Linearfaktor}} = 0$$

د پورته پښتو: کرښیز ضریبونه

یو مربع مساوات چې صفرخایونه یې معلوم وي، کېدی شي د کرښیزو ضریبونو په ضرب سره ولیکل شي.

جمله:

د صفر ضرب جمله:

یو ضرب ټیک هلته صفر دی، چې لږ تر لږه یو ضریب یې صفر وي. دا زموږ د مربع تابع د مربع مساوات لپاره په دې معنا دی:

$$x^2 - 6x + 5 = 0 \Rightarrow p = -6; q = 5$$

$$x_1 = 5; x_2 = 1$$

حل:

$$x^2 - 6x + 5 = 0 \Leftrightarrow (x - 5)(x - 1) = 0$$

اوس پخپله کولی شو، چې مربع مساوات د مخه ورکړ شوي صفرخایونو سره جوړ کړو: یو مربع مساوات دې د صفر خایونو  $x_1 = -2$  او  $x_2 = 3$  سره دې منځ ته راوړل شي، چې کښته لور ته واز وي او ضریب  $\frac{3}{4}$  ولري.

$x_1 = -2; x_2 = 3$ $f(x) = -\frac{3}{4}(x+2)(x-3)$ $= -\frac{3}{4}(x^2 - x - 6) = -\frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{9}{2}$ $x_s = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-2 + 3}{2} = \frac{1}{2}$ $y_s = f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{9}{2} = \frac{75}{16}$ $\Rightarrow S\left(\frac{1}{2} \mid \frac{75}{16}\right)$	$f(x) := -\frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{9}{2}$
---	--

بیلگه

د صفرخایونو ټاکلو لپاره د مربع تکمیلیدني له لارې مفصله بیلگه:

په توليزه بڼه د پارابول تابع مساوات

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 6$$

د صفر ځايونو لپاره شرطونه

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 6 = 0$$

$$-\frac{1}{2}x^2 - 2x + 6 = 0 \quad \text{مربع مساوات}$$

بايد اوس د مربع تکميليدني له لارې حل شي.

$-\frac{1}{2}x^2 - 2x + 6 = 0 \mid : \left(-\frac{1}{2}\right)$ $\Leftrightarrow x^2 + 4x - 12 = 0$ $\Leftrightarrow x^2 + 4x + \left(\frac{4}{2}\right)^2 - \left(\frac{4}{2}\right)^2 - 12 = 0$	<p>په نورمال بڼه راوړل</p> <p>نورمال مربع مساوات</p> <p>مربع تکميلونه</p>
---	---

$$\Leftrightarrow \underbrace{x^2 + 4x + 4}_{1. \text{ binomische Formel}} - \underbrace{4 - 12}_{-16} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + 2)^2 - 16 = 0 \mid +16$$

$$\Leftrightarrow (x+2)^2 = 16 \quad | \sqrt{\quad}$$

$$\Leftrightarrow |x+2| = \sqrt{16} = 4$$

رینه و بستنه یا رینه نیونه

ارزینت حل کری

$x+2 = 4 \quad   -2 \Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow x_1 = 2$	لومری حالت
$x+2 = -4 \quad   -2 \Leftrightarrow x = -6 \Rightarrow x_2 = -6$	دویم حالت

صفرخایونه:  $x_1 = 2$  همداسی  $x_2 = -6$

د  $x$  محور سره غوختکی:  $P_{x1}(2|0)$  همداسی  $P_{x2}(-6|0)$

د  $y$  محور سره غوختکی شرطونه:

$$y_s = f(0) = -\frac{1}{2} \cdot 0^2 - 2 \cdot 0 + 6 = 6 \Rightarrow P_y(0|6)$$

### پوښتنی

پارابولونه د ورکړ شوو شرطونو سره

لومری - د تابع  $f(x) = x^2 + a_1x + a_0$  د ضریبونو لپاره باید کوم شرایط پوره شي، له کومو سره چې تابع  $f(x)$  صفرخایونه ونه لري؟

دويم - د  $f(x)$  او  $g(x)$  برعكس ځايونه د  $x$  په واکوالي (تابعیت) کې و څیړی، که باور ولري:

$$g(x) = ax^2 - a; x \in \mathbb{R}; a \in \mathbb{R}^* \quad \text{او} \quad f(x) = -x^2 + 1; x \in \mathbb{R}$$

دریم - د  $f(x)$  او  $g(x)$  مربع توابع په لاندې توگه ورکړ شوي دي:

$$g(x) = 0,5x(x+3); x \in \mathbb{R} \quad \text{او} \quad f(x) = -x^2 - 3x; x \in \mathbb{R}$$

الف - په کواورديناټ - يا پروتولار سيستم کې د  $f(x)$  او  $g(x)$  گرافونه و کارې. بي له شمیرني دليل روارې، چې ولې  $f(x)$  او  $g(x)$  د  $x$  په محور سره غوڅوي..

$S(1,5;2,25)$  د  $f(x)$  ککره ( رأس ) دی.

د  $g(x)$  ککره ورکړی.

ب - کرښه د  $x=u$  سره د  $-3 < u < 0$  لپاره  $f(x)$  په ټکي  $P$  او  $g(x)$  په ټکي  $Q$  کې غوڅوي.

د  $P$  او  $Q$  کواورديناټونه و ټاکي.

پ - د  $PQ$  بنده کرښه د يوه مستطیل يا ولاړگوديز يو اړخ (ضلع) دی، چې په دواړو پارابولونو کې دننه ده. د مستطیل منځ يا سطحه د  $u = -1$  لپاره او چاپيريال  $U$  د  $u$  په واکوالي کې وټاکي.

ت - پارابول  $g(x)$  د  $y$  په لور داسې و کښوي، چې دا راکښل شوی پارابول د  $f(x)$  گراف لمس کړي. د لمستکي کواورديناټ وشمیري.

ټ -  $a$  داسې وټاکي چې  $f(a) - f(a+1) = 0$  باور ولري.

څلورم - يو مربع تابع  $f(x)$  ورکړ شوی.



a داسې وټاکي، چې پارابول  $g(x)$  د  $f(x)$  گراف لمس کړي.

پنځم - وښايي، چې داسې ارزښت نه شته، چې د  $f(x)$  گراف نورمال پارابول لمس کړي.

$$f(x) = ax^2 + 1$$

شپږم - يو پارابول د تابع مساوات  $f(x)$  سره په  $S(0|6)$  کې يوه ککره لري او د  $x$  محور په ټکي  $P_x(2\sqrt{3}|0)$  کې غوڅوي.

د تابع مساوات وټاکي او گراف يې رسم کړي.

اوم - د وييمې درجې ټول کسري (راشنل) تابع  $f(x)$  کواوردينات محورونه په ټکو  $P_y(0|-k)$  او  $P_{x_1}(k|0); P_{x_2}(-2|0)$  کې غوڅوي.

د  $f(x)$  تابع مساوات وټاکي.

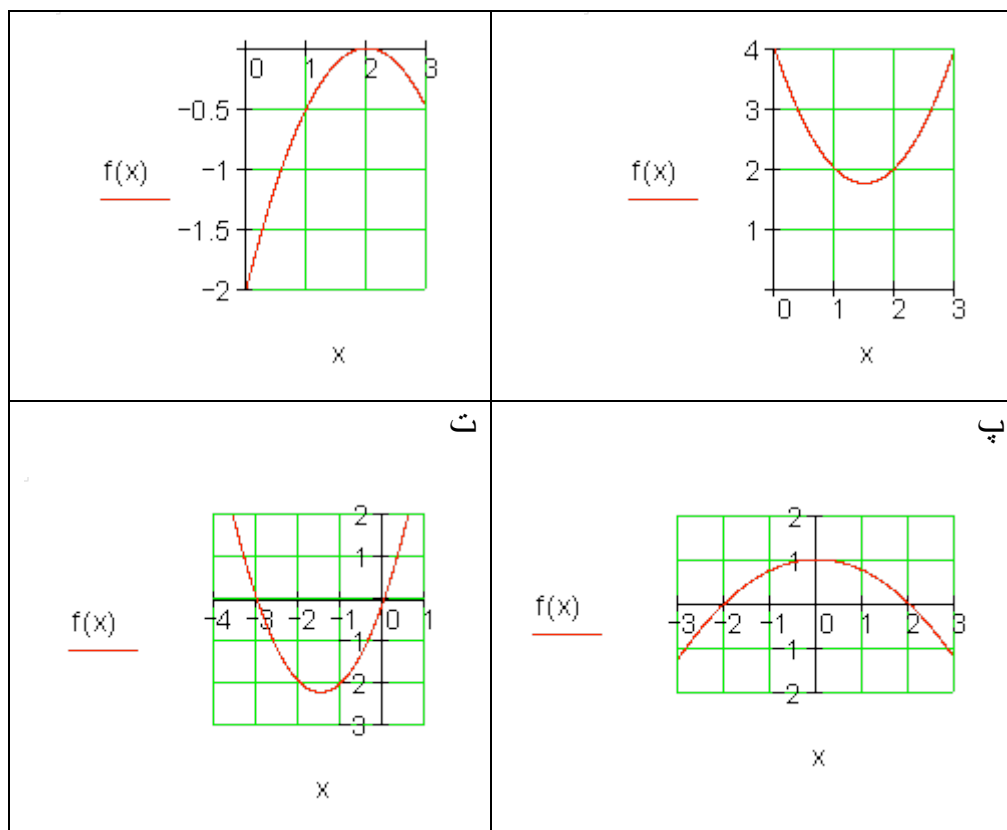
اتم - ضريبونه  $a_1$  او  $a_2$  داسې پيدا کړي، چې تابع  $f(x) = a_2x^2 + a_1x + 3$  په  $x = -1$  او  $x = 0,5$  ځايونو کې همغه تابع ارزښت ولري لکه تابع  $g(x) = 2x - 1$ .

## پوښتني

پارابولونه د ورکړو شرطونو سره **||**

لومړی- د څيرنو څخه د تابع مساوات وټاکي..

الف	ب -
-----	-----



دويم - د يوه مربع تابع  $f(x) = 3x^2 - bx + b$  کراف د  $x$  محور په  $x = -3$  کې غوڅوي. د تابع ترم وټاکي.

دریم - يو مربع مساوات صفرخايونه  $-2$  او  $3$  لري او خورا کوچني تابع ارزښت  $-1$  لري.  $f(x)$  وټاکي.

څلورم - د مربع تابع  $f(x) = x^2 + a_1x + a_0$  د ضريبونو  $a_1$  او  $a_0$  په هکله کومي ويناوي ( د رياضي منطق وگوري) کېدی شي؟

الف -  $f(x)$  يو صفرخای  $x = 0$  لري.

ب - د  $f(x)$  صفرخايونه په مخنځېنه کې يو له بل توپير لري.

پنځم - د يوه مربع  $f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$  تابع لپاره  $f(0) = 5$  او  $f(1) = 2$  باور لري

الف - د  $a_2$  او  $a_1$  ترمنځ کومې اړیکې پرته دي؟

ب - د  $a_2$  او  $a_1$  د کومو ارزښتونو لپاره  $x = 3$  صفرځای دی؟

شپږم - پارابولونه د ورکړشوو شرایطو له اړخه

الف - د شمیرني له لارې وښایي، چې د مساوات  $f(x) = x^2 - 1,5x + 2$  سره پارابول د  $x$  محور سره غوڅتکی نه لري.

ب - د  $a_2$  (د صفر سره نابرابر) د کوم ارزښت سره پارابول د مساوات  $f(x) = a_2x^2 + 1,5x + 2$  سره یو تکی، نه کوم تکی یا دوه تکی د  $x$  محور سره لري؟

اوم - د تابع  $f(x) = x^2 + a_1x + a_0$  د ضریبونو لپاره باید کوم شرطونه پوره وي، چې د هغو له مخې  $f(x)$  کوم صفرځای ونه لري؟

اتم - د تابع  $f(x)$  خورالوی یا همداسې خورا کوچني ارزښتونه وټاکي.

الف -  $f(x) = (x-2)^2 - 2x - 2$  ب -  $f(x) = -0,5x^2 + 0,5x - 6$

خورالوي ارزښت دی.  $f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{47}{8}$

## د ډاکټر ماخان شینواري لیکنې:

1988 Vienna (Austria):

لومړۍ:

H.K. Kaiser , M. Shinwari : Aproximation compact pological algebra : contributions to general algebra 6 ; Page 117 – 122

1987 Vienna (Austria):

دویم:

Diss . Uni. Interpolation und Aproximation durch Polynime in Universalen Algebren .  
Wien

*Dissertation at the Interpolation and Aproximation by Polynome in universal Algebras,  
University of Vienna/Austria*

لاندې د شمیرپوهنې پښتو ټول کتابونه په المان کې د ،، افغانستان کلتوري ودې ټولنه، له خوا چاپ شوي دي

2000 Bonn (Germany):

دریم: د شمیرپوهنې ستر کتاب : د شمیرپوهنې برسیره د انجنري، فزیک او اقتصاد لپاره ، همداسې د بنوونکو او زده کوونکو لپاره ( دا کتاب په ۹۰۰ مخونو کې چاپ او دا نوي لیکنه به یې ځنو ځایونو غزېدلې او ځنې ځایونه ترې لرې شوي دي)

2003 Bonn (Germany):

څلورم: ځمکچپوهنه ( هندسه ) ، په سلو، زرو کې شمیرنه، د گټې – او کټې د کټې شمیرنه ، د احتمالي شمیرنه کتاب د بنوونځي ټولې اړتیاوې پوره کوي

2003 Bonn (Germany):

پنځم: الجبرونه ( د الجبر بنسټونه دي )

2003 Bonn (Germany):

شپږم: د شميرپوهنې انگرېزي - پښتو ډکشنري.

2003 Bonn (Germany):

اووم: د شميرپوهنې الماني - پښتو - او پښتو الماني ډکشنري

*Mathematical dictionary German/ Pashto and Pashto/German*

2003 Bonn (Germany):

اتم: دفرنخيال برابرون ( دا کتاب په دې څانگه کې يو پيل دی، ساده ليکل شوی )

*Differential equation Translation; An Introduction*

Bonn (Germany): 2003

نهم: د شمير پوهنې فرمولونو ټولگه

*Mathematical Formulas*

2003 Bonn (Germany):

لسم: شميرپوهنه له عربي په پښتو

1997 Bonn (Germany):

يوولسم: د افغانستان په هکله سپينې خبرې: په المان کې

،د افغانستان روغي او بيا ابادولو ټولنه، له خو

یادونه: له ۲۰۰۰ کال دمخه ډاکټر ماخان شینواري د ،، د افغانستان روغي او بیا ابادولو ټولنه،، له خوا درې ساسي مجلې هم را وستلې.

د ډاکټر ماخان ،،میري،، شینواري لیکنې او ژباړې چې په چاپیدو یې پیل کیري

2012 Bonn; Germany; Kabul Afghanistan

ژباړې:

: Prof. Brinkmann. (From Brinkmann.du.de)

لاندې د برینکمن لیکنې چې له پرینکمن ن ج څخه ژباړل شوي دي.

۱ - شمیرپوهنه د بنوونځي لپاره لومړی ټوک

۲ - شمیرپوهنه د بنوونځي لپاره دویم ټوک

۳ - شمیرپوهنه د بنوونځي لپاره دریم ټوک

۴ - د احتمالوالي شمیرنه د بنوونځي لپاره

۵ - احصایه یا سناتیسټیک د بنوونځي لپاره

لاندې کتابونه د شتوتگارت د پوهنتون د استادانو د لکچرونو څخه چې د شتوتگارت پوهنتون ن ج څخه خپاره شوي را ژباړل شوي.

۶ - انالیزی ۱

۷ - انالیزی ۲

۸ - کرنیز الجبر

۹ - د شمیرپوهنې بنسټونه

۱۰ - د فرمولونو ټولگه

۱۱ - فنکشنل انالیز

۱۲ - وکتور شمیرنه

نورې ژباړې

۱۳ - له [www.grundstudium.info/linearealgebra](http://www.grundstudium.info/linearealgebra) څخه: کرښيز الجبر

۱۴ - Georg Guttenbrunner گڼونپوهنه يا د اعدادو تيوري

زما ليکنې

Bonn (Germany):

۱۵ - د شميرپوهنې ستر کتاب دويم چاپ د پوره تغيراتو سره : دا کتاب د شميرپوهنې برخې برسيره د

انجنري، فزيک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زده‌کوونکو لپاره پوره گټور دی. په کتاب کې د اړتيا سره زياتونه او کونه راغلي

۱۶ - ځمکچپوهنه ( هندسه ) دويم چاپ د پوره تغيراتو سره

۱۷ - الجبر بنسټونه دويم چاپ له تغيراتو سره

۱۸ - ډېرې پوهنه يا سټ تيوري

۱۹ - د شميرپوهنې سم اند ( منطق رياضي )

۲۰ - د يو څو شميرپوهانو ژوندليک

۲۱ - د شمير پوهنې گډې وډې ليکنې

۲۲ - داهم ژباړه ده، خو ليکونکي يې متأسفانه راڅخه نابلد شوی: د مشتق او انتيگرال شميرنو ته تمرينونه او اوبيوني يا حلونه يې

۲۳ - د شميرپوهنې انگريزي پښتو او عربي + درې ډکشنري

۲۴ - د شمیرپوهنې پښتو انگرېزي ډکشنري

۲۵ - د شمیرپوهنې پښتو ډکشنري د شمیرپوهنیزو وییونو په پښتو روښانه ونه

۲۶ - د زړه له کومې (دا هغه لیکنې دي، چې ځنې یې په نړیول جالونو کې خپرې شوي دي).

۲۷ - د افغانستان په هکله سپینې خبرې، چې و به غزیري.

نوري لیکنې، چې په ژباړه یې پیل شوی، خو لا پوره نه دي

- د شتوتکارت پوهنتون لکچرنوتونو څخه، چې د شتوتکارت پوهنتون ن ج څخه خپریري:

د گروپونو تیوري

- د ښوونځي لپاره فزیک د برینکمن لیکنه

له پنځم ټولگي څخه تر اووم ټولگي پورې ژباړل شوی (دا چې زما دویم مسلک فزیک دی، دا لیکنې ژباړم. دا هم د دې لیکوال یوه ډېره ښه لیکنه ده، چې د شمیرپوهنې په څیر- دلته هم زیات تمرینونه د حل یا اوبیوني سره په کې راغلي او ماته زیات گټور برېښي)

دا لاندې د ښوونځي کتابونه دا اوس پای ته ورسیدل:

شمیرپوهنه د اوم ټولگي له پاره

شمیرپوهنه د اتم ټولگي له پاره

شمیرپوهنه د نهم ټولگي له پاره

شمیرپوهنه د لسم ټولگي له پاره

شمیرپوهنه د یولسم ټولگي له پاره

شمیرپوهنه د دولسم ټولگي له پاره

ریاضي برای صنف دوازده



## د ليکوال ژوند ته لنډه کتنه

<p>ماخان په اولني نوم ميروي شينواری د ارواښادي پستو او ارواښاد نوررحمان زوي په ۱۳۲۰ ه لمریز کي د شينواریو هسکه مينه کي دي نړۍ ته سترگي راغړولي.</p> <p>د هسکي ميني د لومړني ښوونځي (د لومړنيو زده کوونکو څخه) څخه وروسته د رحمان بابا لیسې له ۱۹۵۴ تر ۱۹۶۵ پوري (ښوونځي له لومړي ټولگي پيل او د دويم ټولگي څخه گام او پای).</p>	
---	--

د ۱۹۶۶ تر سپټمبر د کابل طب پوهنځي. له ۱۹۶۶ سپټمبر څخه د اتریش برس، چي هلته يې د شميرپوهني ډاکټري په پوره ستونځو تر لاسه کړه.

۱۹۹۸۷ ش ک تر ۱۹۸۸ د فبروري تر پای د دباندنيو چارو وزارت کي مامور.

د ۱۹۸۸ مارچ څخه تر ۱۹۹۲ جون پوري په بن کي د افغانستان جمهوريت سفارت شارژد افير (صفر نه وو).

له هغي وروسته په جرمني کي سياسي پناه. له ۲۰۰۸ مارچ څخه د ۲۰۰۹ دسمبر پوري د د رياضي څانگه کي د پوهني وزارت درسي نساب کي دنده.

ماخان ميروي په ۱۹۷۲ کي له لري د ميرمن ښاپيري سره واده شوی، چي د واده خبر ورته اتریش ته راغی.

ده د ميرمن ښاپيري سره په ۱۹۶۳ ز ک کي کوزده کړي وه.

دوي ته لوي څښتن په اتریش ويانا کي د مای په شلم ۱۹۷۹ ز ک دوه بچيان وبخښل، چي څانگه او اباسين نوميري. څانگه په المان کي د پوهنتون علمي همکاره وه او د حقوقو ډاکټره ده او اباسين ملي اقتصاد او ټولنيزه سايکولوژي لوستلي.

**Get more e-books from [www.ketabton.com](http://www.ketabton.com)  
Ketabton.com: The Digital Library**