شمیرپوهنه (ریاضي)

د لسم ټولګي لپاره

برېښنا پته : smakhan1946@gmail.com

لیکونکی:

ډاکترماخان میرزي شینواری

2016

جرمني د بن ښار

شمیرپوهنه

د لسم ټولګي لپاره

لیکونکی:
ډاکتر ماخان(میرزی) شینواری
Smakhan1946@gmail.com

نیولیک

سریزه

دا ځلوېښت کاله کېږي، چې زموږ هیواد هراړخیزه ستونزې لري او هر څه دې اوږده جنګ را خراب کړي

ګرانو هیوادوالو!

د نورو نیمګرتیاو په څېر زموږ درسي نصاب - په تیره شمیرپوهنه - هم ډېره د ناسمون سره مخامخ ده.

که دا کار د دولت په ځلوردیوالي ونه شو، نو زه به وهڅيږم، چې دا ما لیکلي کتابونه د ن ج له لارې له تاسو سره شریک کړم او دا د نړۍ په ستاندارد.

د ښوونځي په کتابونو کې د ستااتیستیک او احتمالوالي درس نور هم خورا ستونځمن دی، چې زه ترې دلته تیریږم او د ښوونځي د تیرو کتابونو څخه هم هیله ده- که زما کتابونه وړاندې نه شو- چې دابرخې یا سمې یا له درسي نصاب څخه ووېستل شي. په دې برخه باور وکړئ، چې نه لیکونکی بوهیږي او نه بل لوستونکی پرې پوهیدلی شي.

زما په دې د ښوونځي کتابونو کې دا برخې نه شته، خو که وخت مې پیدا کړ دا به هم سمې کړم. ما په دې هکله د احتمالوالي او ستاتیستیک کتابونه ژباړلي او همداسې مې په هندسه کې هم احتمالوالي شمیرنه راوړي او د ستاتیستیک یو ګتاب مې هم ژباړلي، چې زه به یې په مناسبوخت کې د لیدلو پتې ګرانو لوستونکو ته د ن ج له لارې ورکړم.

دا زما ځني کتابونه او په ډېره مننه د www.ketabton.com ن ج کې ګرانولوستونکوته وړاندې شوي.

د شمیرپوهني سم اند یا منطق زموږ د نصاب په لسم ټولګي کې راغلی او هغه هم لکه ستاتیستیک او ... د پوهیدلو نه دی. دا- لکه څنګه چې برېښي- دومره پیچلی نه دی، نو زه دا درس له دې امله د اوم ټولګي په سرکې راوړم، هیله ده چې ستونځې به رامنځ ته نه کړي.

زه چې ترڅو ستاسو په منځ کې وم او د کار یم، ستاسو چوپړ کې به اوسم. راځئ، چې ستونځوبې(د ستونځو حل) سره شریک کړو.

زه دې لیکنو او پرې قضاوت کولو ته ځانله یم.

تکرار په کې زیات دئ، خو د موصوع، نه د خودیونې. وایې چې تکرار د زده کړې مورده، نو پروا نه لري. کمښتونه هم په کې شته. سره د ټولو نیګرتیاوو دا د ښوونځي له پاراه ډېره ګټوره او زه چې پوهیږم، یواځنۍ سمه لیکنه ده.

دا چې سمه لیکنه ، د ځان له امله نه وایم، دګرانو زده کوونکو او ښوونکو له پاره وایم. دا زما لیکنې نه دې، دا ما له نورو کتابونو څخه رانیولي، چې باید سمې وي.

زه به وهڅیږم، چې درسمي ښوونځي کتابونو نا سمونونه له تاسو سره شریک کړم، خو ډېر لږ، یواځې داسې د یادونې له امله.

په ډېره خواشینۍ باید ووایم، چې ملاتړی نه لرم، چې د لیکنې ستونځې راته په ګوته کړي.

د نصاب د غړو څخه مې هیله ده، چې ګټه ترې پورته کړي او په بنسټ یې د ښوونځي لیکنې سمې کړي.

د خوندیونې ټیکاوي کې پوښتنه نه شته، ځکه چې ما هم د نورو لیکنو څخه راټول کړي او هڅیدلی یم، چې سم یې ترې راونیسم.

باور وکړئ زه د دې لیکنو سره لږ ستړی شوی یم، نو ځنې ځایونه به داسې نیمګړي پاتې وي، چې ستاسو پوهیدنې ته کوم زیان نه رسوي، د هغې بخښنه دې وي.

کله تمرینونه کم وي او کله تکرار راځي، چې دا بد مه ګڼئ.

په دې کتابونو ما دومره ځان بوخت کړی، چې باورکړئ مغذ مې ترې نورموړ دئ، نو له دې امله یې نور پایوم یا ورته د پای ټکی ږدم.

پولینومشمیرنه

پویلینوم څه شی دی؟

یو پولینوم د اووښتوني یا واریابلي –چې موږيې د x سره په نښه کوو- له ډېرواره توان د زیاتون دی: د توان جګګښونه پیداښتي یا طبیعي ګڼونه دي. زیاتون له دې برسیره پای دی.

بیلګه: $a_n \cdot x^n + \ldots + a_3 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$

همداسې

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0$$

یا هم:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

دلته n یو پیداښتي ګڼ اوپای دی او a_i ریلګڼونه دي د ټولو $i=0,1,\ldots n$ له پاره.

پیژند: د پولینمچګګڼ n د پولینوم درجه بلل کیږي، که $a_n \neq 0$ وي.

په یاد ولری: په پورته سر کې- د پولینوم لیکنبنه د توان په همغږیزجګیدونکي لیکنبنه اودا کښته یې د پولینوم د توان په همغیزټیټیدونکي لیکنبنه ده.

د پولینومونو سره شمیرنه یا کارونې داسې لنډې څیړو

د پولینومونو زیاتون: که له

$$a_5 \cdot x^5 + \ldots + a_3 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$$

سره

$$b_5 \cdot x^5 + b_3 \cdot x^3 + b_2 \cdot x^2 + b_1 \cdot x + b_0$$

زیاته-وو، نو داسې مخ ته ځو:

په دې پورته برابرون کې ګورو، چې اووښتونې یا واریابله د څلور په جګ یعني x^4 نه شته. دا په دې مانا ده،چې څله وونی یا صریب یې صفر دی. یعنې $o\ x^4$ یا

$$b_5 \cdot x^5 + o\ x^4 + b_3 \cdot x^3 + b_2 \cdot x^2 + b_1 \cdot x + b_0$$

زیاتونعملیه یا کارونه مح ته بیای:

$$a_5 \cdot x^5 + a_4 \cdot x^4 + a_3 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$$

$$b_5 \cdot x^5 + o\ x^4 + b_3 \cdot x^3 + b_2 \cdot x^2 + b_1 \cdot x + b_0$$

$$(a_{5+}\ b_5\ )x^5 + (a_4 + o)x^4 + (a_3 + b_3)x^3 + a_2 + b_2\ \ )x^2 + (a_1 + b_1)x + (a_0\ \ + b_0\ )$$

ګورو،چېد برابر توا یا برابر جګګڼ واریابلې سره زیاتیږي.

بیلګه:

$$3 \cdot x^5 + 6x^4 + x^3 + 4 \cdot x^2 + 2 \cdot x + 7$$

$$2x^5 + o\ x^4 + 8x^3 + 5x^2 + x + 1$$

$$(a_{5+}\ b_5\ )x^5 + (a_4 + o)x^4 + (a_3 + b_3)x^3 + a_2 + b_2\ \ )x^2 + (a_1 + b_1)x + (a_0\ \ + b_0\ )$$

د پولینومونو کمون کارونه:

کمون یې هم په همدې بیلګه داسې لیکو:

$$a_5\cdot x^5 + a_4\cdot x^4 + a_3\cdot x^3 + a_2\cdot x^2 + a_1\cdot x + a_0$$

$$-(b_5\cdot x^5 + o\, x^4 + b_3\cdot x^3 + b_2\cdot x^2 + b_1\cdot x + b_0)$$

$$(a_5 - b_5)\cdot x^5 + (a_4 - o)x^4 + (a_3 - b_3)x^3 + (a - b_2)x^2 + (a_1 - b_1)x + (a_0 - b_0)$$

بیلګه:

$$3\cdot x^5 + 6x^4 + x^3 + 4\cdot x^2 + 2\cdot x + 7$$

$$-(2x^5 + o\, x^4 + 8x^3 + 5x^2 + x + 1)$$

$$x^5 + 6x^4 \quad -7x^3 \quad -x^2 + x + 6$$

پيژند: دوه پولينومونه سره برابر دي، که خله ووني يا صريبونه يې سره برابر وي، دا په دې مانا چې

$$a_n\cdot x^n + \ldots + a_3\cdot x^3 + a_2\cdot x^2 + a_1\cdot x + a_0$$

او

$$b_n\cdot x^n + \ldots + b_3\cdot x^3 + b_2\cdot x^2 + b_1\cdot x + b_0$$

سره برابر دي که $b_i = a_i$ وي،د ټولو $i=1,2,:::n$ له پاره.

د پولينومونوپه هکله مو په اتم ټولګي کې د ترمونوبرخه کې پوره زده کړه کړې. په پولينوم کې هم ټول هغه شميرلارې، چې په ګڼونو کې باور لري باوري دي.

دا لاندې بيلګې دې هم داروښانه کړي:

د پولينومونوله پاره نورې بيلګې:

- $3x^2 + 2x + 5$
- $7x^3 + x^2 + 6x + 2$

- $10x^5 + 3x^4 + 2x$

د پولینوم ډولونه:

په شمیرپوهنه کې د پولینوم مختلف ډولونه شته.په شمیرپوهنه کې د بینوم لاندې یو پولینوم پوهیږو، چې له دوه غړو جوړ وي یا په بل ډول ویلی شوي، چې یو بینوم د دوه مونومونو زیاتون یا کمون دی.دا لاندې بیلګې دا هم ښايي، چې بینوم څنګه برېښي!

- $a + b$
- $x^3 + y^3$
- $x - 3$

پولینوم، چې له درې زیاتونونو جوړ دی‌ترینوم بلل کیږي. لاندې بیلګه دا روښانه کوي.

- $a^2 + b^2 + c^2$
- $6a^2 + 7a^3 + 8a^4$

زیاتون ته بیلګه

$$(-x^5-2x^4-3x^2-x+2) + (x^2+2) = -x^5-2x^4-2x^2-x+4$$

پولینومکمون ته بیلګه: په لاندې بیلګه کې ګورو، چې د برابر توانونو x یو له بل څخه کمیږي.

$$(x^4 + 3x^3 + 2x^2 + 6x) – (3x^3 + 2x^2 + 6x) = x^4$$

ځل (ضرب):

دا لاندې درې بیلګې د ځل یا ضرب له پاره ورکړ شوي.

موږ.او تاسي د دې لارې سره د بینوم فرمول او د ترمونو د ځله ونو له لارې بلد یو، چې دلته ستاسوپام ورته رااړول کیږي

$$(x-4)\cdot\left(x^2-2x+3\right) = x^3-6x^2+11x-12$$

$$(x-5)\,(x^2+3\,x+7) = x^3-2\,x^2-8\,x-35$$

$$(x-3)(4x+7) = 4x^2 - 5x - 21$$

$$(x+1)(x^2+x-6) = x^3 + x^2 - 6x + x^2 + x - 6 = \underline{\underline{x^3 + 2x^2 - 5x - 6}}$$

پولینوموېش:

دا لاندې بېلګه د وېش له پاره راوړ، خو دا چې وېش لږ پيچلی دی، په دې به پوره وغږېږو.

$(x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 6x) : (x + 3) = x^3-x^2+5x-9 + (27)/(x+3)$

$-(x^4+3x^3)$
$-(-x^3-3x^2)$
$-(5x^2+15x)$
$-(-9x-27)$
پاتېRest: 27

کربنېزځله ووني سره ځل کيږي يا ضربيږي

$$f(x) = (x+1)(x+2)(x-1,5)$$

د ځله ووني ۲ سره غزول کيږي.

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2+3x+2)(x-1,5) \\ &= x^3 - 1,5x^2 + 3x^2 - 4,5x + 2x - 3 \\ &= x^3 + 1,5x^2 - 2,5x - 3 \quad /\cdot 2 \end{aligned}$$

$$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 5x - 6$$

پولينوم وېش:

که د يوه پولينوم صفرځای معلوم وي، نو کړی شو د پولينوم وېش له لارې د پولينوم درجه په يوه کمه کړو. که دا مو مربع مساوات ته لاربنود کړي يا بوځيو نو ساده دی، چې نور صفرځايونه بيدا کړو. لاندې بېلګې دې د پولينوم وېش روښانه کړي.

د بيلګې په توګه د دريمې درجې ټولراشنل تابع صفرځايونه معلوم دي، نو کيدی شي چې د تابع مساوات د کرښيزو صريبونوپه څېر وليکلی شو:

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

چيرته چې $x_1 ; x_2 ; x_3$ صفرځايونه دي.

موږ اوس په څرګنده توکه تابع يا څيرونه د څيړنې لاندې نيسو

$$f(x) = x^3 - x^2 - 5x + 6$$

چيرته چې $x1=2$ يو صفرځای دی، ځکه چې

$$f(2) = 2^3 - 2^2 - 5 \cdot 2 + 6 = 8 - 4 - 10 + 6 = 0$$

له دې سره له دې سره کېدی شي د تابع مساوات د $x1=2$ صفرځآی لاندې (له امله) په پام کې ونيسو او لکه چې لاس ته راځي و
ليکو $f(x) = x^3 - x^2 - 5x + 6 = (\ldots\ldots\ldots)(x-2)$

د صفرځای ټاکلو لپاره اينوونه : $f(x)= 0 \Leftrightarrow x^3-x^2-5x+6=(\ldots)(x-2)=0$
دا افاده $x^3-x^2-5x+6=(\ldots)(x-2)=0$ څېړو

د نوکانو افادې يا ويينې $(\ldots)$ټاکو

دواړه لورې په $(x-2)$وېشو

$$(x^3-x^2-5x+6) :(x-2)=(\ldots)$$

په دې توګه د نوکانو افاده $(\ldots)$لاس ته راځي.

وېش د لیکنیز وېش قانون سره سم مخ ته بیایو

$$\begin{array}{l}\left(x^3-x^2-5x+6\right):(x-2)=x^2+x-3\\ \underline{-\left(x^3-2x^2\right)}\\ \quad x^2-5x\\ \quad \underline{-\left(x^2-2x\right)}\\ \qquad -3x+6\\ \qquad \underline{-(-3x+6)}\end{array}$$

د نوکانو افاده $(\ldots)$ اوسx^2+x-3 بنه لري

له دې لاس ته راځي د صفرځای ټاکنو لپاره اینوونه:

$$f(x)=0 \Leftrightarrow x^3-x^2-5x+6=(\ldots)(x-2)=(x^2+x-3)(x-2)=0$$

نو دا مربع مساوات x^2+x-3 اوس حل کوو.

دا د p-q- فرمول سره ځوابوو:

$$p=1;\ q=-3 \Rightarrow D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=\frac{1}{4}+3=\frac{13}{4} \Rightarrow \sqrt{D}=\sqrt{\frac{13}{4}}$$

$$x_{2/3}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D}\quad \left|\begin{array}{l} x_2=-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{13}{4}}\\ x_3=-\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{13}{4}}\end{array}\right.$$

صفرځایونه:

$$x_1=2;\ x_2=-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{13}{4}};\ x_3=-\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{13}{4}}$$

د x محور سره غوځتكي:

$$P_{x1}(2|0);P_{x2}\left(-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{13}{4}}|0\right);P_{x3}\left(-\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{13}{4}}|0\right)$$

تابع مساوات:

$$f(x)=(x-2)\left(x+\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{13}{4}}\right)\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{13}{4}}\right)\Leftrightarrow f(x)=x^3-x^2-5x+6$$

د پولينوموېش او ليکنيز پولينوموېش په منځ کې اړيکې شته. په لاندې مخامخوالي کې دا د وېش بې له پاتې په حالت کې را ښايي.

$62228 : 47 = 1\ 3\ 2\ 4$	$(x^3-6x^2+11x-12) : (x-4) = x^2-2x+3$
$-47 \leftarrow 47\cdot 1$	$-(x^3-4x^2) \leftarrow (x-4)\cdot x^2$
152	$-2x^2+11x$
$-141 \leftarrow 47\cdot 3$	$-(-2x^2+8x) \leftarrow (x-4)\cdot(-2x)$
112	$3x-12$
$-94 \leftarrow 47\cdot 2$	$-(3x-12) \leftarrow (x-4)\cdot 3$
188	0
$-188 \leftarrow 47\cdot 4$	
0	

ګڼ ۶۲ د لومړيو دوه ځايونو څخه چوړ دی د دې د وېشونو ګڼونو څخه د پروېشوني (۴۷)

سره وېشل کيږي. لاس ته راوړنه (۱) د (۴۷) سره ځل يا ضرب کيږي او د ګڼ (۶۲) څخه کميږي. د کمښت نتيجې کمښت (۱۵۲) سره په همدې ډول پرمخ ځو تر څو د کمښت لاس ته راوړنه صفر شي.

ازمايښت : $47\cdot 1324=62228$

بيلګه:

سرلیک

$$\left(-6x^3+5x^2+14x-12\right):(-2x+3)=3x^2+2x-4$$

$$\underline{-\left(-6x^3+9x^2\right)}$$

$$-4x^2+14x$$

$$\underline{-(-4x^2+6x)}$$

$$8x-12$$

$$-\underline{(8x-12)}$$

$$0$$

Probe:

$$\left(-6x^3+5x^2+14x-12\right)=\left(3x^2+2x-4\right)(-2x+3)$$

بیلګه:

$$\left(x^3+3x^2-6x-8\right):(x-2)=x^2+5x+4$$

$$\underline{-\left(x^3-2x^2\right)}$$

$$5x^2-6x$$

$$\underline{-\left(5x^2-10x\right)}$$

$$4x-8$$

$$\underline{-(4x-8)}$$

$$0$$

Probe: $\left(x^2+5x+4\right)(x-2)=\left(x^3+3x^2-6x-8\right)$

بیلګه:

سرلیک

$$\left(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\right):(a+b)=a^2+2ab+b^2$$
$$\underline{-\left(a^3+a^2b\right)}$$
$$2a^2b+3ab^2$$
$$\underline{-\left(2a^2b+2ab^2\right)}$$
$$ab^2+b^3$$
$$\underline{-\left(ab^2+b^3\right)}$$
$$0$$

ازماېښت:

$$:\left(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\right)=\underbrace{\left(a^2+2ab+b^2\right)}_{\text{1. binomische Formel}}(a+b)=\underbrace{(a+b)(a+b)(a+b)}_{\text{Linearfaktoren}}$$

بیلګه:

$$\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{4}{3}x^2+\frac{1}{3}x+2\right):(x-2)=\frac{1}{3}x^2-\frac{2}{3}x-1$$
$$\underline{-\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{2}{3}x^2\right)}$$
$$-\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{3}x$$
$$\underline{-\left(\frac{2}{3}x^2+\frac{4}{3}x\right)}$$
$$-x+2$$
$$\underline{-(-x+2)}$$
$$0$$

ازماېښت: $\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{4}{3}x^2+\frac{1}{3}x+2\right)=\left(\frac{1}{3}x^2-\frac{2}{3}x-1\right)(x-2)$

بیلګه:

$$
\begin{array}{l}
\left(2x^3 \qquad -14x-12\right):(x-3)=2x^2+6x+4 \\
\underline{-\left(2x^3-6x^2\right)} \\
\qquad 6x^2-14x \\
\qquad \underline{-\left(6x^2-18x\right)} \\
\qquad\qquad 4x-12 \\
\qquad\qquad \underline{-(4x-12)} \\
\qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

په ځنو حالتونوکي دا ښه ده، چي د پولينوم ليکنوکي د اړتيا په وخت کښيوه تشيا پريږدو، کلکه په پورته بيلګه کي چيګورو.

يوه بله شونتيا يي داده، چي هغه تشيا د صفر سره ډکه کړو، لکه دا لاندي:

$$2x^3-14x-12=2x^3+0x^2-14x-12$$

بيلګه:

لاندي بيلګه يو وېش د پاتي سره مخ ته بيايي.لکه ښکګه چي د ليکنيز وېش ښخه راته ښرګند دی.

$$
\begin{array}{l}
\left(x^3+3x^2-6x-8\right):(x-1)=x^2+4x-2 \ (\text{Rest } -10) \\
\underline{-\left(x^3-x^2\right)} \qquad\qquad \Rightarrow \left(x^3+3x^2-6x-8\right):(x-1)=x^2+4x-2-\dfrac{10}{(x-1)} \\
\qquad 4x^2-6x \\
\qquad \underline{-\left(4x^2-4x\right)} \\
\qquad\qquad -2x-8 \\
\qquad\qquad \underline{-(-2x+2)} \\
\qquad\qquad\quad -10 \quad \text{Rest}
\end{array}
$$

$$\text{Probe: } \left(x^2+4x-2-\frac{10}{(x-1)}\right)(x-1)=\left(x^3+3x^2-6x-8\right)$$

دا چي نوي بلدي يون کي د ناسمون سره مخامخ کيږي،غوره ده چي د دې ازماېښت هم وکړو.

د پولينوموېش په کارونه کې که د پولينوموېش يوصفرځای څرګند وي، نو کيدی شي د پولينوم درجه په يوه وړه يا رکمه شي.

$x_1 = 2$ د پولينوم يو صفرځای دی.

$$\left(x^3 - x^2 - 5x + 6\right) : (x - 2) = \underbrace{x^2 + x - 3}_{\text{Restpolynom}}$$

$$\begin{array}{l} -\left(x^3 - 2x^2\right) \\ \hline \quad x^2 - 5x \\ \quad -\left(x^2 - 2x\right) \\ \hline \qquad -3x + 6 \\ \qquad -(-3x + 6) \\ \hline \end{array}$$

د پاتې پولينوم صفرځايونه اوس کيديشي د څلورۍ يا مربع پولينوم

$$x^2 + x - 3 = 0$$

له لارې پيدا کړو.

د سمون ازماېشت يې وکړی.

بيلګه: پولينوموېش او ازماېښت يې

$$\left(x^3+2x^2-5x-6\right):(x+1)=x^2+x-6$$
$$\underline{-\left(x^3+x^2\right)}$$
$$x^2-5x$$
$$\underline{-\left(x^2+x\right)}$$
$$-6x-6$$
$$\underline{-(-6x-6)}$$

$$\text{Prob e}:(x+1)\left(x^2+x-6\right)=x^3+x^2-6x+x^2+x-6=\underline{\underline{x^3+2x^2-5x-6}}$$

پوښتنې:

لاندې پولينومونه مخ ته بوځئ

الف- $\left(x^3-3x^2-6x+8\right):(x+1)$ ب – $\left(2x^3-x^2-8x+4\right):\left(x^2-4\right)$

پ - $\left(2x^3-3x+1\right):(2x-1)$ ت - $\left(6a^6+a^4b+25b^3\right):\left(3a^2+5b\right)$

ټ - $\left(8x^5-6x^7+2x\right):2x^2$

ث - $\left(9a^5b^3-12a^3b^5\right):3a^3b^3$

ج - $\left(15a^9-8a^6b+8b^3\right):\left(3a^3+2b\right)$ ،

چ – $\left(14a^4-a^3+5a^2-3a+1\right):\left(7a^2-4a+1\right)$

ح – $\dfrac{3x^5y^{n+2}+3x^2y^{3n+2}-2x^{m+3}y^{n+3}-2x^my^{3n+3}}{x^3+y^{2n}}$

ځ - $\dfrac{48a^{n+x}+56a^{x}b^{x}-72a^{n}b^{c}-84b^{x+c}}{12a^{n}+14b^{x}}$

څ - $\dfrac{8a^{2n+1}-10a^{2n}b+15a^{3n-2}b-12a^{3n-1}}{2a^{2n}-3a^{3n-2}}$

خ - $\dfrac{2a^{5}b^{x+2}-2a^{3}b^{x+5}+3a^{4}b^{2x-1}-3a^{2}b^{2x+2}}{a^{2}-b^{3}}$

پولينوم برابرون:

د یوه برابرون په کينې اوښي لور د x مختلف توانونه یو پولينوم برابرون ورکوي

$$\text{Beispiel}: x^3-6x=3x^2-8$$

د داسې برابرون د اوبی له پاره لومړيدا برابرون په داسي نامه صفربڼه اړوي. دا په دې مانا چې برابرون تر هغې په ورتهبڼه بدلوناړولکيږي، چې په ښيلور یواځې صفر پاتې شي.

$$\text{Beispiel}: x^3-6x=3x^2-8\,|\,-3x^2$$
$$\Leftrightarrow x^3-3x^2-6x=-8\,|\,+8$$
$$\Leftrightarrow x^3-3x^2-6x+8=0$$

د صفربڼې يا- فورم په ځای د پولينوم دې بڼې ته هم نورمال بڼه وايي. موږ د پولينوم پنځه بديلونهراړوړو

لومړی بديل:

په برابرون کې د اووښتونې x یو یواځنی توان مخ ته راځي.

$$ax^n+b=0 \Rightarrow x=\sqrt[n]{\frac{-b}{a}}$$

که n ناجوړه وي،نوریښه وېښتوني کیدی شي کمیز ګڼ هم وي.
د رېښي ټیک یو حل شتون لري.
که n جوړه وي، نوریښه نیونی(هغه ګڼ چېریښه یېنیول کیږي) یواځې زیاتیز ګڼ کیدی شي.
دوه اوبیونې شتون لري.
بیلګه:

$$\begin{aligned} &8x^3 + 27 = 0 \mid -27 \\ \Leftrightarrow\ &8x^3 = -27 \mid : 8 \\ \Leftrightarrow\ &x^3 = -\frac{27}{8} \mid \sqrt[3]{} \\ \Leftrightarrow\ &x = \sqrt[3]{-\frac{27}{8}} = -\frac{3}{2} \Rightarrow \underline{\underline{L = \left\{-\frac{3}{2}\right\}}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &2x^4 - 3 = 0 \mid +3 \\ \Leftrightarrow\ &2x^4 = 3 \mid : 2 \\ \Leftrightarrow\ &x^4 = \frac{3}{2} \mid \sqrt[4]{\frac{3}{2}} \\ \Leftrightarrow\ &x = \sqrt[4]{\frac{3}{2}} \approx 1{,}107 \Rightarrow \underline{\underline{L = \left\{\sqrt[4]{\frac{3}{2}} \approx 1{,}107\right\}}} \end{aligned}$$

په لومړي حالت کې n ناجوړه دې. ریښه نیوني کمیزه هم کیدی شي
اویواځې یواوبی شتون لري.
په دویم حالت کې n جوړه دی، ریښه نیونی زیاتیزدی.که کمیزوي بیا برابرون اوبی نه لري.

دویم بدیل:

پولینومبرابرون یوځلوریبرابرون (مربع مساوات) انځوروي

سرلیک

$$ax^2+bx+c=0 \Leftrightarrow x^2+px+q=0$$

$$x_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\underbrace{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}_{D}}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D}$$

دا د -p-q- – فرمول له لارې اوبی –یا حلکیري

بیلګه

$$x^2-13x+36=0 \quad p=-13 \quad q=36$$

$$D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q$$

$$=\left(\frac{13}{2}\right)^2-36=\frac{169}{4}-\frac{144}{4}=\frac{25}{4}$$

$$\Rightarrow\sqrt{D}=\sqrt{\frac{25}{4}}=\frac{5}{2}$$

$$x_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D}\quad\left|\begin{array}{l}x_1=\frac{13}{2}+\frac{5}{2}=9\\[2mm] x_2=\frac{13}{2}-\frac{5}{2}=4\end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{L=\{4;9\}}}$$

D د دېسکریمینانت له پاره لیکلکیږي چې هغې لرلو سره مخ دمخه سړی د اوبیونویا حلومو څومره وال یا ګڼون ټاکلی شي.

که صفر < D وي ، نو څلوری برابرون دوه اوبي یا حلونه لري

که صفر = D وي،نو برابرون یواځې یو ډبل اوبیلري

که صفر > D وي، نو برابرون اوبی نه لري په دې حالت کې نو سړی نور مخ ته نه ځي.

دریم بدیل

ولینومبرابرونیو دوه-څلوری برابرون biquadratische انځوري.

$$ax^4 + bx^2 + c = 0 \Leftrightarrow z^2 + pz + q = 0$$

$$z_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\underbrace{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}_{D}} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D}$$

$$x^2 = z \Rightarrow x = \pm\sqrt{z} \text{ für } z \geq 0$$

$$ax^4 + bx^2 + c = 0 \Leftrightarrow z^2 + pz + q = 0$$

$$z_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\underbrace{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}_{D}} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D}$$

$$x^2 = z \Rightarrow x = \pm\sqrt{z} \text{ für } z \geq 0$$

د په ځا اېښووني يا سبستيچيوشن z د -p-q- فرمول په مرسته يا له لارې شميرل کيدی شي

پسې دې بيرته په ځايونه په ځښسبستيچيوشن وکارول شي او ريښه دې ونيل شي.

ريښه ټيک د   زياتيز - p-q-z - ارزښتونو   له پاره نيول کيدی شي.

بيلګه:

$$\frac{1}{10}x^4 - \frac{9}{5}x^2 + \frac{81}{10} = 0$$

$$\text{Substitution: } z = x^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{10}z^2 - \frac{9}{5}z + \frac{81}{10} = 0 \,|\cdot 10$$

$$\Leftrightarrow z^2 - 18z + 81 = 0$$

$$p = -18\,;\; q = 81$$

$$\Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 81 - 81 = 0$$

$$z = -\frac{p}{2} = 9$$

$$\text{Rücksubstitution}$$

$$z = 9 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x_{1/2} = \pm 3$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{L = \{-3;3\}}}$$

په دې حالت کې د یسکریمینانت صفر دئ، داسې چې د سبستیچیوشناووښتونې له پاره یو اوبي .(z = 9) شتون لري.
دا په دېمانا، چې د ۴ –مې درجې پولینوم ټیک دوه اوبي یا ځوابونه لري.

ځلورمبدیل:
په پولینومبرابرون کې هغه همغه ارژښته یا مطلقه غړی نه لرو.

$$ax^3+bx^2+cx=0 \Leftrightarrow x\left(ax^2+bx+c\right)=0$$

$$x_1=0 \quad ax^2+bx+c=0 \Rightarrow x_{2/3}$$

اووښتونې یا مجهوله x کیدی شي له نوکانو راووېستلشي.
اوبیونې د صفرځل یا – صرب له جملې شمیرلکیدی شي (د فاکتورکولو تلنلار)،

بیلګه

$$\begin{aligned}
& x^3+x^2-2x=0 \\
& \Leftrightarrow x\left(x^2+x-2\right)=0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x_1=0}} \\
& \Rightarrow x^2+x-2=0 \\
& \Rightarrow p=1;\ q=-2 \\
& \Rightarrow D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=\frac{1}{4}+2=\frac{9}{4} \\
& \Rightarrow \sqrt{D}=\sqrt{\frac{9}{4}}=\frac{3}{2} \\
& \Rightarrow x_{2/3}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D} \quad \left|\begin{array}{l} x_2=-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}=1 \\ x_3=-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}=-2 \end{array}\right. \\
& \Rightarrow \underline{\underline{L=\{-2;0;1\}}}
\end{aligned}$$

د صفر ځلوونې یا صریب دویم ځلوونی کیدی شي د p-q - فرمولسره سادهوشمیرلشي.
د صفرځلووني جمله: یوځل یا صرب ټیک هلته صفردئ، چې یو ځلوونی صفر ړي.

پنځم بدیل:
پولینومبرابرون له بدیلونو ۱ – ۴ په ځیر نه دئ.

$$ax^3+bx^2+cx+d=0$$

په ډېرو حالتونوکېکیدی شي، د پوینوموېشله لارې اوبی ومیندلشي.
د دې له پاره باید یواوبی معلوم وي.

که د پولینوم یواوبی معلوم وي،نو کیدی شید پولینوم درجه د وېش له لارېیه یوه کمه شي. که دا یو ځلوری برابرون راکړي،نو اوبیونه یېبیا ساده ه، چې نور اوبي پیدا کړو.
لاندې بیلګه چې اوبی $x = 2$ معلوم دی،د پولینوم تلنلار روښانه یا معلوموي.
پولینوموېش همغه په راته ځرګنده لیکنیزډول لاس ته راوړو.
Division.
وېشنه

$$(x^3 - x^2 - 5x + 6) : (x - 2) = x^2 + x - 3$$
$$\underline{-(x^3 - 2x^2)}$$
$$x^2 - 5x$$
$$\underline{-(x^2 - 2x)}$$
$$-3x + 6$$
$$\underline{-(-3x + 6)}$$

د نوکانو(....) وبینه یا افاده اوس دا بڼه $x^2 + x - 3$ لري.
له دې د نورو شمیرنوځای په ځای کول لاسته راځي
$$x^3 - x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow (x^2 + x - 3)(x - 2) = 0$$
اوس دا ځلوری برابرون یا مربع مساوات $(x^2 + x - 3)$ د اوبیونې دي،چې د
p-q- فرمول له لارې سرته رسیږي.

$$p = 1; q = -3 \Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \frac{1}{4} + 3 = \frac{13}{4} \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{\frac{13}{4}}$$

$$x_{2/3} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left| \begin{array}{l} x_2 = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{13}{4}} \\ x_3 = -\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{13}{4}} \end{array} \right.$$

$$x_1 = 2; x_2 = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{13}{4}}; x_3 = -\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{13}{4}}$$

$$\Rightarrow L = \left\{-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{13}{4}};\ 2; -\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{13}{4}}\right\}$$

که چیرې د ګومان یا ازماېښت له لورې اوبی نه شي پیداکیدی، نوبیا د نومریک تلنلار څخه کار اخستلکیږي(دا به اوس زموږ دنده نه وي).

برابرونونو ته تمرینونه:

۱ - برابرونونه د x پسې اوبی – یا حل کړئ او ازماېښت يې سرت هورسوئ.

الف - $\frac{1}{5}x^3 - 25 = 0$ ب - $\frac{27}{10}x^3 - \frac{4}{5} = 0$ پ - $8x\left(x^2 - 1\right) = -8x + 1$

۲ – برابرونونه د x پسې اوبی – یا حل کړئ او ازماېښت يې سرت هورسوئ.

الف - $27x^3 - 8 = 0$ ب – $\frac{1}{16}x^3 - 4 = 0$ پ- $-2 + \frac{7}{8}x^3 = -\frac{5}{2}x^3 - 1$

۳ - برابرونونه د x پسې اوبی – یا حل کړئ او ازماېښت يې سرت هورسوئ.

الف- $4k^2x^3 - 2k = 0; k > 0$ ب – $\frac{1}{4b}\left(x^3 - b^3\right) = 0; b > 0$ پ - $(x + 2a)^3 = \frac{1}{8}$

۴ - برابرونونه د x پسې اوبی – یا حل کړئ او ازماېښت يې سرت هورسوئ.

$$\frac{k \cdot x^3}{4} - 2k = 0$$

۵ - ځانګړې باکتریاګاني د ۴ ساعتونو په منځ کې خپل ګنو(تعداد) څلور برابره کوي.په یوه ساعت کې يې په سلوکې ډېروالی څومره دی؟

۶ – د کال په پیل کې د موټروختارزښت نوی ټاکییا کره کیږي. د یوه پنځه کلن زوړ کارشوې یوم،ترپلورونکی € 8500 ورکوي.

د موټر کلنی زیان به څومره (د وختارزښت د په سلو کې) وي، که سړی له دې، که سړس داسېمخ ته لاړ شي چې دا په لومړیوپنځه کلونوکې برابر جګ وي؟

۷ – برابرونونه اوبی –یا حل کړئ

سرلیک

الف ـ $\frac{1}{4}x^3 - 4x = 0$ ب- $3x^3 + \frac{4}{3}x^2 = 0$ پ ـ $x^3 + x^2 - 2x = 0$

۸ – برابرونونه اوبیکړئ

الف- $4x(x^2 - x) = 7x^3 - 7x^2 - 6x$ ب- $\frac{3}{4}x^3 - 3x^2 = 0$

پ --- $\frac{1}{8}x^3 - x^2 + 2x = 0$

دا لاندې برابرونونه اوبي کړئ

الف- $x^3 + 4x^2 - 20x - 48 = 0$ ب ـ $-\frac{1}{2}x^3 + 4x = \frac{1}{2}x^2 - 4$

پ ـ $-2x^3 + 6x^2 - 4x = \frac{1}{2}x - 1$ ت- $x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 4x + 2 = 0;\ x_1 = \frac{1}{2}$

ټ ـ $\frac{1}{3}\left(\frac{5}{2}x^3 + 4x^2 - 2x\right) = \frac{3}{2}$

لاندې برابرونونه حل کړئ چې يو اوبی يا حل يېمعلوم وي

الف ـ $x^3 - 3x^2 - 6x - 2 = 0;\ x_1 = -1$

د پولينوم وېش څخه کارواخلئ.

-- د پولينوموېش څخه کار واخلئ

الف- $\left(4x^3 - 6x + \frac{5}{2}\right):(2x - 1)$ ب ـ $(x^3 - 2kx^2 - 2x + 4k):(x^2 - 2)$

۱۲ – برابرون $x^3 - 4x^2 + (k + 4)x - 2k = 0$ ورکړشوی. وښايئ، چې د $x_1 = 2$ لپاره برابرون يواوبی دی. د k د کوم ارزښت لهپاره ټيک يو دبل اوبی شته؟

لاس ته راوړنه د کرښيزو ځلوونو يا صربيبونوپه څير وليکی.

پوښتنه:

a داسې وټاکئ، چې برابرون

$(ax - 1)(x + 2)(x - 1/2) = 0$
ټيک دوه اوبيونې يا حلونه ولري
يو د دريمې درجې برابرون دا دوه { 4- ; 2 } = L اوبيونې لري.
الف - د اوبيونو يا حلونوپه هکله ويناوې وکړی.
ب – دوه برابرونونه ددې اوبيونې ورکړی.
۳ – برابرونونه اوبيکړی

الف- $2x^3 - x^2 - x = 0$ ب - $x^3 + \frac{5}{6}x^2 - \frac{1}{3}x = \frac{1}{6}$

۴ – برابرونونه اوبيکړی

الف- $-3x^3 + 5x^2 + 4 = 0$ ب- $x^3 - \frac{16}{5}x^2 + \frac{17}{5}x - \frac{6}{5} = 0$

۵- برابرونونه اوبيا حلکړی

الف - $x^3 + x^2 - \sqrt{2}x^2 - 2x - \sqrt{2}x + 2\sqrt{2} = 0$

ب- $x^3 - 2,63x^2 - 1,45x + 3,08 = 0$

برابرونونه اوبی کړی

الف – $-u^3 + \frac{1}{2}u^2 + \frac{5}{2}u - \frac{3}{2} = 0$ ب - $a^3 - 4a^2 - a + 4 = 0$

۷ – برابرونونه حل کړی

الف - $x^3 - \left(3 + \sqrt{3}\right)x^2 + 3\sqrt{3}x = 0$

ب- $\left(x - \frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right) = 0$ پ- $\frac{1}{6}x^3 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{6}x + 1 = 0$

ت - $\frac{4}{10}x^3 - \frac{6}{10} = 0$ ټ - $x^3 - 5x^2 + 6,25x = 0$

ث - $\frac{4}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 = 0$ ج - $x^3 - x^2 - \frac{3}{4}x = 0$

چ - $x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0$ خ - $x^3 - 3x^2 = -4$

څ - $(3x - 5)\frac{(x - 2)^2}{5} = 0$

پوښتنې
۱ - برابرونونه د پسې حل کړی

الف – $\frac{1}{4}x^3+\frac{3}{2}x^2+3x+2=0$ ب $\frac{1}{3}x^3-\frac{2}{3}x^2-\frac{5}{3}x+2=0$

پ - $-\frac{1}{4}x^3+\frac{1}{2}x^2+\frac{9}{4}=0$ ت - $\frac{1}{5}x^3-\frac{3}{5}x^2-5x+15=0$

ټ- $2x^3-x^2-5x-2=0$ ث - $(3x-1)(x+k)^2=0$

۱ ـد x پسې یې اوبی کړی $(k\neq 0)$

الف - $\frac{1}{9k}\left(x^4+x^3-12x^2\right)=0$ ب - $\frac{k}{2}x^4-kx^3-\frac{3k}{2}x^2=0$

پ - $\frac{x^2}{5k^2}\left(x^2-3k\right)=0\,;\,k>0$ ت - $x^4-26x^2+25=0$

ټ – $-\frac{1}{2}x^4+3x^2-4=0$ ث - $\frac{1}{2}x^4-4x^2+2=0$

ج – $-\frac{1}{16}x^4+x^2-3=0$ چ - $\frac{1}{3}\left(x^2-3\right)^2-3=0$

ځ - $\frac{1}{3}x^4-2x^2+3=0$ څ - $x^4-11x^2+18=0$

پوښتنې

حلونه یا اوبیونې وټاکئ

الف – $\frac{1}{3}x^4-3x^3=0$ ب - $\frac{1}{7}x^4-7=0$ پ - $\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^2+1=0$

ت- $-2x^4+x^2+x=0$ ټ - $\frac{1}{4}x^5-\frac{3}{4}x^3-x=0$ ث - $\frac{1}{3}\left(x^2-4\right)^2-3=0$

ج - $\frac{2}{5}\left(x^2-9\right)(x+2)^2=0$ چ - $\frac{1}{64}x^3+\frac{1}{4}x^2+x=0$ ځ - $x^4-5x^2-2x=0$

څ - $x^4-6x^2+8=0$

د ګاوس الګوریتم **Der Gauß- Algorithmus**

فکر دې وشي، چې دا برخه په یولسم ټولګي کې راشي. دلته یې راوړنه هم بده نه ده.

یادونه: خوارزمية د Algorithmus عربي مانا ده : زما په اند دا الخوارزميّة دی، چې په لاتین کې ترې الګوریتموس جوړ شوی دی.

الخواریزم د الګوریتم نومورکونکی، یوه شوروي پوست مارکي چې د الخواریزم د ۱۲۰۰ کلیزې جشن په هکله راوېستلې وه.

الګوریتم د پرابلم یا د پرابلمونود ټولګي یا یوه یواځنۍ د اوبیونې تلنلار ړه.

الګوریتم یوه نړیواله تلنلار ده د په خوښه کرښیز برابرونونو سیستم اوبیونې ته

ننوتنبیلګې:

د کرښې ډول په توګه کار کوو.

د لیکو له پاره اجازه شته :

- بدلیدلی شي
- د یوه ګڼ سره ځلیدلی شي.
- په یوه ګڼ سره وېشلکیدی شي.

درې برابرونونه د درې اووښتونویا واریابلو یا متحولو سره

له بنه بدلون څخه لرو

$$7x_1 + 3x_2 - 5x_3 = -12$$
$$-x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 5$$
$$-4x_1 + x_2 - 3x_3 = 1$$

شمیرنخیره یا شیما داسې لیکو

- سره زیاتیدی شي

- سره کم کړي

درځونه هم سره بدلیدلی شي، که اووبنتوني یا واریابلي x ورسره واخستل شي.

د اوبیوني یا حل لاس ته راوړنه د بیرته په څټ اینسوونې له راې هم کیدی شي.

$$-14x_3 = -14$$
$$\Leftrightarrow \underline{\underline{x_3 = 1}}$$
$$-11x_2 + 23\cdot 1 = 23$$
$$\Leftrightarrow -11x_2 = 0$$
$$\Leftrightarrow \underline{\underline{x_2 = 0}}$$
$$7x_1 + 3\cdot 0 - 5\cdot 1 = -12$$
$$\Leftrightarrow 7x_1 = -7$$
$$\Leftrightarrow \underline{\underline{x_1 = -1}}$$

$$L = \{-1; 0; 1\}$$

ازمایښت: په لاندې کې د رښتیا له پاره ځاي په ځای دي.

$$7\cdot(-1) + 3\cdot 0 - 5\cdot 1 = -12 \quad (w)$$
$$-1\cdot(-1) - 2\cdot 0 + 4\cdot 1 = 5 \quad (w)$$
$$-4\cdot(-1) + 1\cdot 0 - 3\cdot 1 = 1 \quad (w)$$

x_1	x_2	x_3	
7	3	−5	−12
−1	−2	4	5
−4	1	−3	1

x_1	x_2	x_3	
*	*	*	*
0	*	*	*
0	0	*	*

شمیرنه داسي مخ ته بیایو: شننه یې بشي لور ته ده.

x_1	x_2	x_3		
7	3	−5	−12	$\|\cdot 4$
−1	−2	4	5	$\|\cdot 28$
−4	1	−3	1	$\|\cdot 7$
28	12	−20	−48	
−28	−56	112	140	II + I
−28	7	−21	7	III + I
28	12	−20	−48	$\|: 4$
0	−44	92	92	$\|: 4$
0	19	−41	−41	
7	3	−5	−12	
0	−11	23	23	$\|\cdot 19$
0	19	−41	−41	$\|\cdot 11$
7	3	−5	−12	
0	−209	437	437	$\|: 19$
0	209	−451	−451	III + II
7	3	−5	−12	
0	−11	23	23	
0	0	−14	−14	

د بیخي نویو له پاره یادونې:

د اوبیوني له پاره تلندول کیدی شي په کوچنیو پلونو توته شي.

۱ـ د اصلي ماتلاندې سره د لیکي له لارې ځل (ضرب) سره د د ماتونو مخه ونیسی.

۲- په لومړی کربنه لومړی ګڼ باید زیاتیز وي(که نه، بیا کیدی شي د -۱ سره ځل شي)

۳- د ځل یا وېش له لارې وهڅېږي چې په لومړي درځ کې ټول ګڼونه همغه ارزښت ولري.

په ۲ -مه او ۳ -مه لیکه کې دې لومړي ګڼونه کمیزوي.

۴- ۲ -مې او ۳ -مې لیکې هرې یوې ته دې لومړی لیکه ورزیاته شي. له دې سره په لومړي درځ کې ۲ صفرونه منځ ته راځي.

۵- په۲ -مه لیکه کې دې دویم ګڼ زیاتیز وي(که نه، نو د -۱ سره دې ځل شي)

۶ -د ځل یاوېش له لارې په دې نیت کې شي، چې له ۲-مې لیکې په دویم درځ کې ټول ګڼونه همغه ارزښت ولري.

۷ - و ۲ -مېلیکې یا کرښې ته ۳ -مه لیکه ورزیاته کړی. له دې سره په ۳-مه لیکه کې ۲ صفرونه منځ ته راځي.

۸ - لاس ته راوړی د اوبی یا حل په ځتې لور کیږدی.

برابر پرمختګډول کیدی شي د هغو سیستمونو له پاره هم وکارول شي، چې له دریو زیات برابرونونه شتون ولري:

بڼه بدلونونه کړی شي سړی بل ډول هم مخ ته بوځي.دا چې ،، ځنګه،، دا یواځې د شمیرپوهانو مهارت ته پرېږدو. د زیاتو تمرینونوله لارې سړی یوه غوره لار پیدا کوي. د شونتیا پورې دې د ماتونومخه دې ونیولشي، چې د نا اړینې تیرونې مخه نیول شوي وي. که سړی ورته تازه وي، کیدی شي دېر بڼه بدلونونه په یوه وخت جوړ کړي، له دېلارې لیکنه کیږي، خود ناسمون شونتیا زیاتیږي؟

د په ځتې اینوولو له لارې د اوبي یا حل لاس ته راوړنه	لانې الماني:سره بدل کړی

tausche: $\rightleftarrows$

x_1	x_2	x_3		
7	3	−5	−12	
−1	−2	4	5	$\mid\cdot(-1)$ I $\rightleftarrows$ II
−4	1	−3	1	
1	2	−4	−5	
7	3	−5	−12	II - 7·I
−4	1	−3	1	III + 4·I
1	2	-4	-5	
0	-11	23	23	$\mid\cdot 9$
0	9	-19	-19	$\mid\cdot 11$
1	2	−4	−5	
0	−99	207	207	$\mid : 9$
0	99	−209	−209	III + II
1	2	-4	-5	
0	-11	23	23	
0	0	-2	-2	

$$-2x_3 = -2$$
$$\Leftrightarrow \underline{\underline{x_3 = 1}}$$
$$-11x_2 + 23\cdot 1 = 23$$
$$\Leftrightarrow -11y = 0$$
$$\Leftrightarrow \underline{\underline{x_2 = 0}}$$
$$x_1 + 2\cdot 0 - 4\cdot 1 = -5$$
$$\Leftrightarrow x_1 = -7$$
$$\Leftrightarrow \underline{\underline{x_1 = -1}}$$
$$L = \{-1; 0; 1\}$$

ازماېښت:

$$7\cdot(-1) + 3\cdot 0 - 5\cdot 1 = -12 \quad (w)$$
$$-1\cdot(-1) - 2\cdot 0 + 4\cdot 1 = 5 \quad (w)$$
$$-4\cdot(-1) + 1\cdot 0 - 3\cdot 1 = 1 \quad (w)$$

بیلګه ۱ :(ساده یا اسانه)

د په څټ اینوولو له لارې د اوبیا حل لاس ته راوړنه

$$2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 8$$
$$3x_1 + 4x_2 - 5x_3 = -4$$
$$4x_1 - 6x_2 + 3x_3 = 1$$

x_1	x_2	x_3		
2	−3	4	8	$\mid\cdot 6$
3	4	−5	−4	$\mid\cdot 4$
4	−6	3	1	$\mid\cdot 3$
12	−18	24	48	$\mid : 6$
12	16	−20	−16	II - I
12	−18	9	3	III - I
2	-3	4	8	
0	34	-44	-64	
0	0	-15	-45	

$$-15x_3 = -45$$
$$\Leftrightarrow \underline{\underline{x_3 = 3}}$$
$$34x_2 - 44\cdot 3 = -64$$
$$\Leftrightarrow 34x_2 = 68$$
$$\Leftrightarrow \underline{\underline{x_2 = 2}}$$
$$2x_1 - 3\cdot 2 + 4\cdot 3 = 8$$
$$\Leftrightarrow 2x_1 = 2$$
$$\Leftrightarrow \underline{\underline{x_1 = 1}}$$
$$L = \{1; 2; 3\}$$

Probe:

$$2\cdot 1 - 3\cdot 2 + 4\cdot 3 = 8 \quad (w)$$
$$3\cdot 1 + 4\cdot 2 - 5\cdot 3 = -4 \quad (w)$$
$$4\cdot 1 - 6\cdot 2 + 3\cdot 3 = 1 \quad (w)$$

بيلګه ۲ (منځنۍ سخته)

د په ځنډ اينوولو له لارې د اوبي يا حل لاس ته راوړنه

$$3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = -2$$
$$4x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 9$$
$$8x_1 + 7x_2 - 9x_3 = 13$$

x_1	x_2	x_3		
3	2	−4	−2	$\vert\cdot 8$
4	−5	3	9	$\vert\cdot 6$
8	7	−9	13	$\vert\cdot 3$
24	16	−32	−16	$\vert : 8$
24	−30	18	54	II - I
24	21	−27	39	III - I
3	2	-4	-2	
0	-46	50	70	$\vert:2$ II $\rightleftarrows$ III
0	5	5	55	$\vert:5$
3	2	-4	-2	
0	1	1	11	$\vert\cdot 23$
0	-23	25	35	
3	2	−4	−2	
0	23	23	253	$\vert : 23$
0	−23	25	35	III + II
3	2	−4	−2	
0	1	1	11	
0	0	48	288	

$$48x_3 = 288$$
$$\Leftrightarrow \underline{\underline{x_3 = 6}}$$
$$x_2 + 1\cdot 6 = 11$$
$$\Leftrightarrow \underline{\underline{x_2 = 5}}$$
$$3x_1 + 2\cdot 5 - 4\cdot 6 = -2$$
$$\Leftrightarrow 3x_1 = 12$$
$$\Leftrightarrow \underline{\underline{x_1 = 4}}$$

$$L = \{4\,;5\,;6\}$$

ازمايښت:

$$3\cdot 4 + 2\cdot 5 - 4\cdot 6 = -2 \quad (w)$$
$$4\cdot 4 - 5\cdot 5 + 3\cdot 6 = 9 \quad (w)$$
$$8\cdot 4 + 7\cdot 5 - 9\cdot 6 = 13 \quad (w)$$

بيلګه ۳ : (سخته): لاندې درې برابرونونه غواړو اوبی کړو

$$\frac{1}{2}x_1 - \frac{4}{5}x_2 + \frac{3}{8}x_3 = 4$$
$$\frac{3}{4}x_1 + \frac{3}{8}x_2 + \frac{1}{5}x_3 = 23$$
$$\frac{4}{5}x_1 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{4}x_3 = 8$$

x_1	x_2	x_3		
$\frac{1}{2}$	$-\frac{4}{5}$	$\frac{3}{8}$	4	$\vert \cdot 40$
$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{5}$	23	$\vert \cdot 40$
$\frac{4}{5}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	8	$\vert \cdot 20$
20	−32	15	160	$\vert \cdot 12$
30	15	8	920	$\vert \cdot 8$
16	−10	5	160	$\vert \cdot 15$
240	−384	180	1920	$\vert : 12$
240	120	64	7360	II - I
240	−150	75	2400	III - I
20	−32	15	160	
0	504	−116	5440	$\vert : 4$
0	234	−105	480	$\vert : 3$
20	−32	15	160	
0	126	−29	1360	$\vert \cdot 13$
0	78	−35	160	$\vert \cdot 21$
20	−32	15	160	
0	1638	−377	17680	$\vert : 13$
0	1638	−735	3360	III - II
20	-32	15	160	
0	126	-29	1360	
0	0	-358	-14320	

د په ځتښ اینوولو له لارې حل لاس ته راوړنه

$$-358x_3 = -14320$$
$$\Leftrightarrow \underline{\underline{x_3 = 40}}$$
$$126x_2 - 29 \cdot 40 = 1360$$
$$\Leftrightarrow 126x_2 = 2520$$
$$\Leftrightarrow \underline{\underline{x_2 = 20}}$$
$$20x_1 - 32 \cdot 20 + 15 \cdot 40 = 160$$
$$\Leftrightarrow 20x_1 = 200$$
$$\Leftrightarrow \underline{\underline{x_1 = 10}}$$
$$L = \{10 ; 20 ; 40\}$$

ازماېښت:

$$\frac{1}{2} \cdot 10 - \frac{4}{5} \cdot 20 + \frac{3}{8} \cdot 40 = 4$$
$$\Leftrightarrow 5 - 16 + 15 = 4 (w)$$
$$\frac{3}{4} \cdot 10 + \frac{3}{8} \cdot 20 + \frac{1}{5} \cdot 40 = 23$$
$$\Leftrightarrow \frac{15}{2} + \frac{15}{2} + 8 = 23 (w)$$
$$\frac{4}{5} \cdot 10 - \frac{1}{2} \cdot 20 + \frac{1}{4} \cdot 40 = 8$$
$$\Leftrightarrow 8 - 10 + 10 = 8 (w)$$

د کاروني یا استعمال بیلګې

د تولراشنل فنکشن د فنکشن برابرون د شمیرلو له لارې، چې څلور ټکي يې معلوم دي،

د ګاوس الګوریتم کارونه یا استعمال

د کاروني بیلګه۱:

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$$\begin{array}{llcll}
P_1(1|4) \Rightarrow & f(1) & = & 1a_3 + 1a_2 + 1a_1 + 1a_0 & = 4 \\
P_2(2|2) \Rightarrow & f(2) & = & 8a_3 + 4a_2 + 2a_1 + 1a_0 & = 2 \\
P_3(4|4) \Rightarrow & f(4) & = & 64a_3 + 16a_2 + 4a_1 + 1a_0 & = 4 \\
P_4(5|20) \Rightarrow & f(5) & = & 125a_3 + 25a_2 + 5a_1 + 1a_0 & = 20
\end{array}$$

a_0	a_1	a_2	a_3		
1	1	1	1	4	
1	2	4	8	2	II − I
1	4	16	64	4	III − I
1	5	25	125	20	IV − I
1	1	1	1	4	
0	1	3	7	−2	
0	3	15	63	0	III − 3·II
0	4	24	124	16	IV − 4·II
1	1	1	1	4	
0	1	3	7	−2	
0	0	6	42	6	
0	0	12	96	24	IV − 2·III
1	1	1	1	4	
0	1	3	7	−2	
0	0	6	42	6	
0	0	0	12	12	

$\Rightarrow$

$$12a_3 = 12 \Leftrightarrow \boxed{a_3 = 1}$$

$$6a_2 + 42a_3 = 6$$
$$\Leftrightarrow 6a_2 + 42 = 6 \mid -42$$
$$\Leftrightarrow 6a_2 = -36 \mid : 6 \Leftrightarrow \boxed{a_2 = -6}$$

$$a_1 + 3a_2 + 7a_3 = -2$$
$$\Leftrightarrow a_1 - 18 + 7 = -2$$
$$\Leftrightarrow a_1 - 11 = -2 \mid +11 \Leftrightarrow \boxed{a_1 = 9}$$

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 4$$
$$\Leftrightarrow a_0 + 9 - 6 + 1 = 4$$
$$\Leftrightarrow a_0 + 4 = 4 \mid -4 \Leftrightarrow \boxed{a_0 = 0}$$

$$\underline{\underline{f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x}}$$

د کارونپیلکه ۲

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$$\begin{array}{llcll}
P_1\left(1 \middle| -\frac{11}{2}\right) \Rightarrow & f(1) & = & 1a_3 + 1a_2 + 1a_1 + 1a_0 & = -\frac{11}{2} \\
P_2\left(-1 \middle| \frac{9}{2}\right) \Rightarrow & f(-1) & = & -1a_3 + 1a_2 - 1a_1 + 1a_0 & = \frac{9}{2} \\
P_3(-2|8) \Rightarrow & f(-2) & = & -8a_3 + 4a_2 - 2a_1 + 1a_0 & = 8 \\
P_4\left(-3 \middle| \frac{5}{2}\right) \Rightarrow & f(-3) & = & -27a_3 + 9a_2 - 3a_1 + 1a_0 & = \frac{5}{2}
\end{array}$$

a_0	a_1	a_2	a_3		
1	1	1	1	$-\frac{11}{2}$	$\vert \cdot 2$
1	−1	1	−1	$\frac{9}{2}$	$\vert \cdot 2$
1	−2	4	−8	8	$\vert \cdot 2$
1	−3	9	−27	$\frac{5}{2}$	$\vert \cdot 2$
2	2	2	2	−11	
2	−2	2	−2	9	II − I
2	−4	8	−16	16	III − I
2	−6	18	−54	5	IV − I
2	2	2	2	−11	
0	−4	0	−4	20	$\vert : (-2)$
0	−6	6	−18	27	$\vert : 3$
0	−8	16	−56	16	$\vert : 4$
2	2	2	2	−11	
0	2	0	2	−10	
0	−2	2	−6	9	III + II
0	−2	4	−14	4	IV + II
2	2	2	2	−11	
0	2	0	2	−10	
0	0	2	−4	−1	
0	0	4	−12	−6	IV − 2·III
2	2	2	2	−11	
0	2	0	2	−10	
0	0	2	−4	−1	
0	0	0	−4	−4	

$\Rightarrow$

$-4a_3 = -4 \Leftrightarrow \boxed{a_3 = 1}$

$2a_2 - 4a_3 = -1$

$\Leftrightarrow 2a_2 - 4 = -1 \mid +4$

$\Leftrightarrow 2a_2 = 3 \mid : 2 \Leftrightarrow \boxed{a_2 = \frac{3}{2}}$

$2a_1 + 2a_3 = -10$

$\Leftrightarrow 2a_1 + 2 = -10 \mid -2$

$\Leftrightarrow 2a_1 = -12 \mid : 2 \Leftrightarrow \boxed{a_1 = -6}$

$2a_0 + 2a_1 + 2a_2 + 2a_3 = -11$

$\Leftrightarrow 2a_0 - 12 + 3 + 2 = -11$

$\Leftrightarrow 2a_0 - 7 = -11 \mid +7$

$\Leftrightarrow 2a_0 = -4 \mid : 2 \Leftrightarrow \boxed{a_0 = -2}$

$$\underline{\underline{f(x) = x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 6x - 2}}$$

د کاروني بيلګه ۳ :

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$$P_1(-1|-16) \Rightarrow \quad f(-1) = -1a_3 + 1a_2 - 1a_1 + 1a_0 = -16$$

$$P_2(2|11) \Rightarrow \quad f(2) = 8a_3 + 4a_2 + 2a_1 + 1a_0 = 11$$

$$P_3(4|-11) \Rightarrow \quad f(4) = 64a_3 + 16a_2 + 4a_1 + 1a_0 = -11$$

$$P_4(6|-9) \Rightarrow \quad f(6) = 216a_3 + 36a_2 + 5a_1 + 1a_0 = -9$$

a_0	a_1	a_2	a_3		
1	−1	1	−1	−16	
1	2	4	8	11	II − I
1	4	16	64	−11	III − I
1	6	36	216	−9	IV − I
1	−1	1	−1	−16	
0	3	3	9	27	|: 3
0	5	15	65	5	|: 5
0	7	35	217	7	|: 7
1	−1	1	−1	−16	
0	1	1	3	9	
0	1	3	13	1	III − II
0	1	5	31	1	IV − II
1	−1	1	−1	−16	
0	1	1	3	9	
0	0	2	10	−8	
0	0	4	28	−8	IV − 2·III
1	−1	1	−1	−16	
0	1	1	3	9	
0	0	2	10	−8	
0	0	0	8	8	

$\Rightarrow$

$$8a_3 = 8 \Leftrightarrow \boxed{a_3 = 1}$$

$$2a_2 + 10a_3 = -8$$
$$\Leftrightarrow 2a_2 + 10 = -8 \,|\, -10$$
$$\Leftrightarrow 2a_2 = -18 \,|: 2 \Leftrightarrow \boxed{a_2 = -9}$$

$$a_1 + a_2 + 3a_3 = 9$$
$$\Leftrightarrow a_1 - 9 + 3 = 9$$
$$\Leftrightarrow a_1 - 6 = 9 \,|\, +6 \Leftrightarrow \boxed{a_1 = 15}$$

$$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 = -16$$
$$\Leftrightarrow a_0 - 15 - 9 - 1 = -16$$
$$\Leftrightarrow a_0 - 25 = -16 \,|\, +25 \Leftrightarrow \boxed{a_0 = 9}$$

$$\underline{\underline{f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x + 9}}$$

د کاروني بیلګه۴ :

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$$
\begin{array}{llcll}
P_1(-1|7) \Rightarrow & f(-1) & = & -1a_3 + 1a_2 - 1a_1 + 1a_0 & = 7 \\
P_2(-2|6) \Rightarrow & f(-2) & = & -8a_3 + 4a_2 - 2a_1 + 1a_0 & = 6 \\
P_3(3|1) \Rightarrow & f(3) & = & 27a_3 + 9a_2 + 3a_1 + 1a_0 & = 1 \\
P_4(-3|-2) \Rightarrow & f(-3) & = & -27a_3 + 9a_2 - 3a_1 + 1a_0 & = -2
\end{array}
$$

a_0	a_1	a_2	a_3		
1	−1	1	−1	7	
1	−2	4	−8	6	II − I
1	3	9	27	1	III − I
1	−3	9	−27	−2	IV − I
1	−1	1	−1	7	
0	−1	3	−7	−1	
0	4	8	28	−6	III + 4·II
0	−2	8	−26	−9	IV − 2·II
1	−1	1	−1	7	
0	−1	3	−7	−1	
0	0	20	0	−10	
0	0	2	−12	−7	

$\Rightarrow$

$$20a_2 = -10 \Leftrightarrow \boxed{a_2 = -\frac{1}{2}}$$

$$2a_2 - 12a_3 = -7$$

$$\Leftrightarrow -1 - 12a_3 = -7 \mid +1$$

$$\Leftrightarrow -12a_3 = -6 \mid : (-12) \Leftrightarrow \boxed{a_3 = \frac{1}{2}}$$

$$-a_1 + 3a_2 - 7a_3 = -1$$

$$\Leftrightarrow -a_1 - \frac{3}{2} - \frac{7}{2} = -1$$

$$\Leftrightarrow -a_1 - 5 = -1 \mid +5$$

$$\Leftrightarrow -a_1 = 4 \mid : (-1) \Leftrightarrow \boxed{a_1 = -4}$$

$$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 = 7$$

$$\Leftrightarrow a_0 + 4 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 7$$

$$\Leftrightarrow a_0 + 3 = 7 \mid -3 \Leftrightarrow \boxed{a_0 = 4}$$

Die Funktionsgleichung: $$\underline{\underline{f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 4x + 4}}$$

د پړرته المانیژباړه:د څیروني یا تابع برابرون

د کاروني بیلګه ۵ :

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$$\begin{aligned}
P_1(2\,|\,22) \Rightarrow\ & f(2) &=\ & 8a_3 + 4a_2 + 2a_1 + 1a_0 &=\ & 22\\
P_2(4\,|\,44) \Rightarrow\ & f(4) &=\ & 64a_3 + 16a_2 + 4a_1 + 1a_0 &=\ & 44\\
P_3(-4\,|\,4) \Rightarrow\ & f(-4) &=\ & -64a_3 + 16a_2 - 4a_1 + 1a_0 &=\ & 4\\
P_4(8\,|\,40) \Rightarrow\ & f(8) &=\ & 512a_3 + 64a_2 + 8a_1 + 1a_0 &=\ & 40
\end{aligned}$$

a_0	a_1	a_2	a_3		
1	2	4	8	22	
1	4	16	64	44	II − I
1	−4	16	−64	4	III − I
1	8	64	512	40	IV − I
1	2	4	8	22	
0	2	12	56	22	
0	−6	12	−72	−18	III + 3 · II
0	6	60	504	18	IV − 3 · II
1	2	4	8	22	
0	2	12	56	22	
0	0	48	96	48	
0	0	24	336	−48	$IV - \frac{1}{2} \cdot III$
1	2	4	8	22	
0	2	12	56	22	
0	0	48	96	48	
0	0	0	288	−72	

$\Rightarrow$

$$288a_3 = -72 \Leftrightarrow \boxed{a_3 = -\frac{1}{4}}$$

$$\begin{aligned}
& 48a_2 + 96a_3 = 48\\
\Leftrightarrow\ & 48a_2 - 24 = 48\,|\,+24\\
\Leftrightarrow\ & 48a_2 = 72\,|\,:48 \Leftrightarrow \boxed{a_2 = \frac{3}{2}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 2a_1 + 12a_2 + 56a_3 = 22\\
\Leftrightarrow\ & 2a_1 + 18 - 14 = 22\\
\Leftrightarrow\ & 2a_1 + 4 = 22\,|\,-4\\
\Leftrightarrow\ & 2a_1 = 18\,|\,:2 \Leftrightarrow \boxed{a_1 = 9}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& a_0 + 2a_1 + 4a_2 + 8a_3 = 22\\
\Leftrightarrow\ & a_0 + 18 + 6 - 2 = 22\\
\Leftrightarrow\ & a_0 + 22 = 22\,|\,-22 \Leftrightarrow \boxed{a_0 = 0}
\end{aligned}$$

Die Funktionsgleichung: $f(x) = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 9x$

د پرته المانيژباړه:د ځيرونبيا تابع برابرون

د کاروني بيلکه۶ :

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$$\begin{array}{llcll}
P_1(1|0) \Rightarrow & f(1) & = & 1a_3 + 1a_2 + 1a_1 + 1a_0 & = 0 \\
P_2(-1|-2) \Rightarrow & f(-1) & = & -1a_3 + 1a_2 - 1a_1 + 1a_0 & = -2 \\
P_3(2|16) \Rightarrow & f(2) & = & 8a_3 + 4a_2 + 2a_1 + 1a_0 & = 16 \\
P_4(-3|-4) \Rightarrow & f(-3) & = & -27a_3 + 9a_2 - 3a_1 + 1a_0 & = -4
\end{array}$$

a_0	a_1	a_2	a_3		
1	1	1	1	0	
1	−1	1	−1	−2	II − I
1	2	4	8	16	III − I
1	−3	9	−27	−4	IV − I

1	1	1	1	0	
0	−2	0	−2	−2	
0	1	3	7	16	$\text{III} + \frac{1}{2}\cdot\text{II}$
0	−4	8	−28	−4	

1	1	1	1	0	
0	−2	0	−2	−2	
0	0	3	6	15	$\vert:3$
0	0	8	−24	1	$\vert:8$

1	1	1	1	0	
0	−2	0	−2	−2	
0	0	1	2	5	
0	0	1	−3	0	IV − III

1	1	1	1	0	
0	−2	0	−2	−2	
0	0	1	2	5	
0	0	0	−5	−5	

$\Rightarrow$

$$-5a_3 = -5 \Leftrightarrow \boxed{a_3 = 1}$$

$$a_2 + 2a_3 = 5$$
$$\Leftrightarrow a_2 + 2 = 5 \,|\, -2 \Leftrightarrow \boxed{a_2 = 3}$$

$$-2a_1 - 2a_3 = -2$$
$$\Leftrightarrow -2a_1 - 2 = -2 \,|\, +2$$
$$\Leftrightarrow -2a_1 = 0 \Leftrightarrow \boxed{a_1 = 0}$$

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0$$
$$\Leftrightarrow a_0 + 3 + 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow a_0 + 4 = 0 \,|\, -4 \Leftrightarrow \boxed{a_0 = -4}$$

$$\underline{\underline{f(x) = x^3 + 3x^2 - 4}}$$

د کاروني بيلګه ۷ :

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$$\begin{array}{llcll}
P_1(1|1) \Rightarrow & f(1) & = & 1a_3 + 1a_2 + 1a_1 + 1a_0 & = 1 \\
P_2(2|0) \Rightarrow & f(2) & = & 8a_3 + 4a_2 + 2a_1 + 1a_0 & = 0 \\
P_3(-2|4) \Rightarrow & f(-2) & = & -8a_3 + 4a_2 - 2a_1 + 1a_0 & = 4 \\
P_4(3|9) \Rightarrow & f(3) & = & 27a_3 + 9a_2 + 3a_1 + 1a_0 & = 9
\end{array}$$

a_0	a_1	a_2	a_3		
1	1	1	1	1	
1	2	4	8	0	II − I
1	−2	4	−8	4	III − I
1	3	9	27	9	IV − I
1	1	1	1	1	
0	1	3	7	−1	
0	−3	3	−9	3	III + 3 · II
0	2	8	26	8	IV − 2 · II
1	1	1	1	1	
0	1	3	7	−1	
0	0	12	12	0	
0	0	2	12	10	$IV - \frac{1}{6} \cdot III$
1	1	1	1	1	
0	1	3	7	−1	
0	0	12	12	0	
0	0	0	10	10	

$\Rightarrow$

$$10a_3 = 10 \Leftrightarrow \boxed{a_3 = 1}$$

$$12a_2 + 12a_3 = 0$$
$$\Leftrightarrow 12a_2 + 12 = 0 \mid -12$$
$$\Leftrightarrow 12a_2 = -12 \mid : 12 \Leftrightarrow \boxed{a_2 = -1}$$

$$a_1 + 3a_2 + 7a_3 = -1$$
$$\Leftrightarrow a_1 - 3 + 7 = -1$$
$$\Leftrightarrow a_1 + 4 = -1 \mid -4 \Leftrightarrow \boxed{a_1 = -5}$$

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 1$$
$$\Leftrightarrow a_0 - 5 - 1 + 1 = 1$$
$$\Leftrightarrow a_0 - 5 = 1 \mid +5 \Leftrightarrow \boxed{a_0 = 6}$$

$$\underline{\underline{f(x) = x^3 - x^2 - 5x + 6}}$$

د کارونې بیلګه ۸ :

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$$
\begin{array}{llcll}
P_1(1|6) \Rightarrow & f(1) & = & 1a_3 + 1a_2 + 1a_1 + 1a_0 & = 6 \\
P_2(3|-4) \Rightarrow & f(3) & = & 27a_3 + 9a_2 + 3a_1 + 1a_0 & = -4 \\
P_3\left(-\frac{1}{2}\,|\,\frac{45}{8}\right) \Rightarrow & f\left(-\frac{1}{2}\right) & = & -\frac{1}{8}a_3 + \frac{1}{4}a_2 - \frac{1}{2}a_1 + 1a_0 & = \frac{45}{8} \\
P_4\left(-\frac{3}{2}\,|\,-\frac{77}{8}\right) \Rightarrow & f\left(-\frac{3}{2}\right) & = & -\frac{27}{8}a_3 + \frac{9}{4}a_2 - \frac{3}{2}a_1 + 1a_0 & = -\frac{77}{8}
\end{array}
$$

a_0	a_1	a_2	a_3		
1	1	1	1	6	
1	3	9	27	−4	
1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{45}{8}$	$\mid\cdot 8$
1	$-\frac{3}{2}$	$\frac{9}{4}$	$-\frac{27}{8}$	$-\frac{77}{8}$	$\mid\cdot 8$
1	1	1	1	6	
2	3	9	27	−4	II − I
8	−4	2	−1	45	III − 8·I
8	−12	18	−27	−77	IV − 8·I
1	1	1	1	6	
0	2	8	26	−10	
0	−12	−6	−9	−3	III + 6·II
0	−20	10	−35	−125	IV + 10·II
1	1	1	1	6	
0	2	8	26	−10	
0	0	42	147	−63	|: 21
0	0	90	225	−225	|: 45
1	1	1	1	6	
0	2	8	26	−10	
0	0	2	7	−3	
0	0	2	5	−5	IV − III
1	1	1	1	6	
0	2	8	26	−10	
0	0	2	7	−3	
0	0	0	−2	−2	

$\Rightarrow$

$-2a_3 = -2 \Leftrightarrow \boxed{a_3 = 1}$

$2a_2 - 7a_3 = -3$

$\Leftrightarrow 2a_2 + 7 = -3 \mid -7$

$\Leftrightarrow 2a_2 = -10 \mid : 2 \Leftrightarrow \boxed{a_2 = -5}$

$2a_1 + 8a_2 + 26a_3 = -10$

$\Leftrightarrow 2a_1 - 40 + 26 = -10$

$\Leftrightarrow 2a_1 - 14 = -10 \mid +14$

$\Leftrightarrow 2a_1 = 4 \mid : 2 \Leftrightarrow \boxed{a_1 = 2}$

$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 6$

$\Leftrightarrow a_0 + 2 - 5 + 1 = 6$

$\Leftrightarrow a_0 - 2 = 6 \mid +2 \Leftrightarrow \boxed{a_0 = 8}$

$$\underline{\underline{f(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 8}}$$

د کاروني یا استعمال بیلګه۹ :

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$$P_1\left(1 \mid -\frac{9}{2}\right) \Rightarrow \quad f(1) = 1a_3 + 1a_2 + 1a_1 + 1a_0 = -\frac{9}{2}$$

$$P_2\left(-1 \mid \frac{11}{2}\right) \Rightarrow \quad f(-1) = -1a_3 + 1a_2 - 1a_1 + 1a_0 = \frac{11}{2}$$

$$P_3\left(3 \mid -\frac{5}{2}\right) \Rightarrow \quad f(-3) = 27a_3 + 9a_2 + 3a_1 + 1a_0 = -\frac{5}{2}$$

$$P_4\left(-\frac{5}{2} \mid -8\right) \Rightarrow \quad f\left(-\frac{5}{2}\right) = -\frac{125}{8}a_3 + \frac{25}{4}a_2 - \frac{5}{2}a_1 + 1a_0 = -8$$

a_0	a_1	a_2	a_3		
1	1	1	1	$-\frac{9}{2}$	$\mid \cdot 8$
1	−1	1	−1	$\frac{11}{2}$	$\mid \cdot 8$
1	3	9	27	$-\frac{5}{2}$	$\mid \cdot 8$
1	$-\frac{5}{2}$	$\frac{25}{4}$	$-\frac{125}{8}$	−8	$\mid \cdot 8$

$$-11a_3 = -11 \mid : (-11)$$
$$\Leftrightarrow \boxed{a_3 = 1}$$

8	8	8	8	−36	
8	−8	8	−8	44	II − I
8	24	72	216	−20	III − I
8	−20	50	−125	−64	IV − I
8	8	8	8	−36	|: 4
0	−16	0	−16	80	|: 4
0	16	64	208	16	|: 4
0	−28	42	−133	−28	|: 7
2	2	2	2	−9	
0	−4	0	−4	20	
0	4	16	52	4	III + II
0	−4	6	−19	−4	IV − II
2	2	2	2	−9	
0	−4	0	−4	20	
0	0	16	48	24	|: 8
0	0	6	−15	−24	|: 3

$$2a_2 + 6a_3 = 3$$
$$\Leftrightarrow 2a_2 + 6 = 3 \mid -6$$
$$\Leftrightarrow 2a_2 = -3 \mid : 2$$
$$\Leftrightarrow \boxed{a_2 = -\frac{3}{2}}$$

$$\Rightarrow \quad -4a_1 - 4a_3 = 20$$
$$\Leftrightarrow -4a_1 - 4 = 20 \mid +4$$
$$\Leftrightarrow -4a_1 = 24 \mid : (-4)$$
$$\Leftrightarrow \boxed{a_1 = -6}$$

$$2a_0 + 2a_1 + 2a_2 + 2a_3 = -9$$
$$\Leftrightarrow 2a_0 - 12 - 3 + 2 = -9$$
$$\Leftrightarrow 2a_0 - 13 = -9 \mid +13$$
$$\Leftrightarrow 2a_0 = 4 \mid : 2$$

د کاروني يا استعمال بيلکه ۱۰ :

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$$\begin{array}{llcll}
P_1(1|25) \Rightarrow & f(1) & = & 1a_3 + 1a_2 + 1a_1 + 1a_0 & = 25 \\
P_2(-1|-49) \Rightarrow & f(-1) & = & -1a_3 + 1a_2 - 1a_1 + 1a_0 & = -49 \\
P_3(3|27) \Rightarrow & f(3) & = & 27a_3 + 9a_2 + 3a_1 + 1a_0 & = 27 \\
P_4(5|5) \Rightarrow & f(5) & = & 125a_3 + 25a_2 + 5a_1 + 1a_0 & = 5
\end{array}$$

a_0	a_1	a_2	a_3		
1	1	1	1	25	
1	−1	1	−1	−49	II − I
1	3	9	27	27	III − I
1	5	25	125	5	IV − I
1	1	1	1	25	
0	−2	0	−2	−74	
0	2	8	26	2	III + II
0	4	24	124	−20	IV + 2·II
1	1	1	1	25	
0	−2	0	−2	−74	
0	0	8	24	−72	
0	0	24	120	−168	IV − 3·III
1	1	1	1	25	
0	−2	0	−2	−74	
0	0	8	24	−72	
0	0	0	48	48	

$\Rightarrow$

$48a_3 = 48 \Leftrightarrow \boxed{a_3 = 1}$

$8a_2 + 24a_3 = -72$

$\Leftrightarrow 8a_2 + 24 = -72 \mid -24$

$\Leftrightarrow 8a_2 = 96 \mid : 8 \Leftrightarrow \boxed{a_2 = -12}$

$-2a_1 - 2a_3 = -74$

$\Leftrightarrow -2a_1 - 2 = -74 \mid +2$

$\Leftrightarrow -2a_1 = -72 \mid : (-2) \Leftrightarrow \boxed{a_1 = 36}$

$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 25$

$\Leftrightarrow a_0 + 36 - 12 + 1 = 25$

$\Leftrightarrow a_0 + 25 = 25 \mid -25 \Leftrightarrow \boxed{a_0 = 0}$

$$\underline{\underline{f(x) = x^3 - 12x^2 + 36x}}$$

پوښتنې:

$\begin{vmatrix} x_1 + x_2 + 0x_3 = 28 \\ x_1 + 0x_2 + x_3 = 30 \\ 0x_1 + x_2 + x_3 = 32 \end{vmatrix} \Rightarrow L = \{13; 15; 17\}$	$\begin{vmatrix} 2x_1 + 3x_2 + 0x_3 = 12 \\ 3x_1 + 0x_2 + 2x_3 = 11 \\ 0x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 10 \end{vmatrix} \Rightarrow L = \{3; 2; 1\}$
$\begin{vmatrix} x_1 + x_2 - x_3 = 17 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 13 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 7 \end{vmatrix} \Rightarrow L = \{15; 12; 10\}$	$\begin{vmatrix} -4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 8 \\ 5x_1 + 4x_2 - 6x_3 = -8 \\ -3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 19 \end{vmatrix} \Rightarrow L = \{-1; 3; 2{,}5\}$
$\begin{vmatrix} x_1 + x_2 + x_3 = 9 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 15 \\ x_1 + 3x_2 + 9x_3 = 23 \end{vmatrix} \Rightarrow L = \{5; 3; 1\}$	$\begin{vmatrix} x_1 + x_2 + x_3 = 9 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 14 \\ x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 20 \end{vmatrix} \Rightarrow L = \{5; 3; 1\}$

$$\begin{vmatrix} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 = -7 \\ -2x_1 + x_2 - 4x_3 - 5x_4 = -6 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = 6 \\ -3x_1 + 4x_2 - 6x_3 + 2x_4 = -21 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \\ \hline 1 & 3 & -2 & 1 & -7 \\ -2 & 1 & -4 & -5 & -6 \\ 1 & -3 & 1 & 0 & 6 \\ -3 & 4 & -6 & 2 & -21 \end{array} \Rightarrow L = \{1; -1; 2; -1\}$$

$$\begin{vmatrix} -2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 2x_4 = 9 \\ 3x_1 + 4x_2 - 8x_3 + x_4 = -2 \\ x_1 - 6x_2 - x_3 + 3x_4 = 20 \\ x_4 = 5 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \\ \hline -2 & 3 & -4 & 2 & 9 \\ 3 & 4 & -8 & 1 & -2 \\ 1 & -6 & -1 & 3 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array} \Rightarrow L = \{-1; -1; 0; 5\}$$

د لاس ته راوړنې د کنترل له پاره دې ازمايښت وشي.

Das Horner – Schema هورنر- شيما

د دي له پاره چې د جګودرجو ټولراشنلځيرونو يا كه غواړئ توابعو ګراف وکښلای شو، بايد يو ارزښت جدول برابرکړو. دا به ډېر وخت اوځای ونيسي، چې د دې له پاره اړين ځيره ارزښتونه يا فنكشنارزښتونه وشميرو.

د هورنر – شيما دا شميرنې ډېرې ساده کوي.

بيلګه : دريمه درجه ټولراشنل فنكشن يا راشنل ځيرونه

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

د x د ډېرځله نوكانو بندولو له لارېمنځ ته راځي:

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = x\left[a_3x^2 + a_2x + a_1\right] + a_0 = \underbrace{x\underbrace{\left[x\left(\underbrace{a_3x + a_2}_{e_2}\right) + a_1\right]}_{e_4} + a_0}_{E}$$

که سړی غواړي چې د $x = x_1$ له پاره فنكشن ارزښت وشميري، نوکی دی شي سړی په لاندې ډول له دننه دباندې لورته مخ ته لاړ شي:

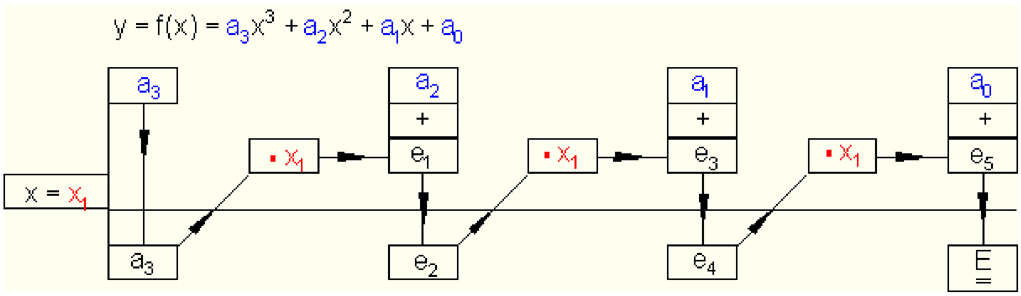
-- ګرد نوکان وشميري

--منځ لاس ته راوړنه (ښه ليکنه به يې داسې وي: منځلاس –ته-راوړنه) د x_1 سره ځل کړي او a_1 ته يې ور زيات کړي

--لاس ته راوړنه د x_1 سره ځل کړي او a_0 ته يې ور زيات کړو

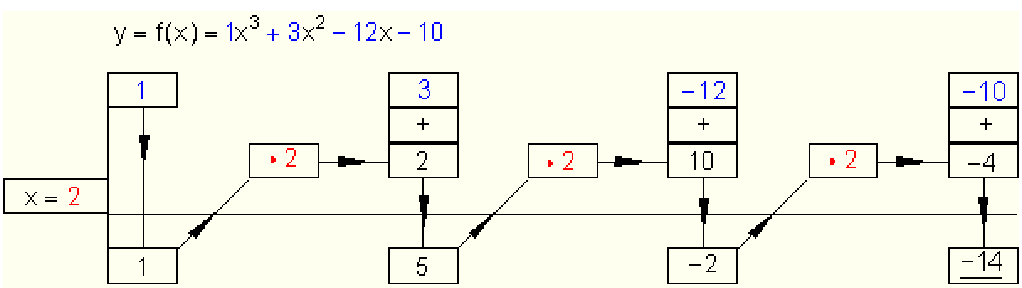
دا شميرنكاروني يا كه غواړئ شميرنعمليې کيدی شي ځيره ډوله يا شيماتيکي داسې انځور کړو:

تولیزه بڼه Allgemeines Schema:



بیلګه : $y = f(x) = x^3 + 3x^2 - 12x - 10$

د $x = 2$ له پاره دې د $y = f(2)$ ارزښت د هورنر – شیما له لارې وشمیرل شي.



نولاس ته راځي یا باورلری: $y = f(2) = \underline{-14}$

د یوه دریمي درجي پولینوم له پاره- چې غواړو ګراف یې رسم کړو یا کاږو- باید یو ارزښتجدول جوړکړو.

$y = f(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6 \quad D_f = \{x \mid -4 \le x \le 3\}_{\mathbb{R}}$

$a_3 = 1 \quad a_2 = 4 \quad a_1 = 1 \quad a_0 = -6$

	1	4	1	−6	
x = −4		−4	0	−4	
	1	0	1	−10	= f(−4)
	1	4	1	−6	
x = −3		−3	−3	+6	
	1	1	−2	0	= f(−3)
	1	4	1	−6	
x = −2		−2	−4	+6	
	1	2	−3	0	= f(−2)
	1	4	1	−6	
x = −1		−1	−3	+2	
	1	3	−2	−4	= f(−1)
	1	4	1	−6	
x = 1		+1	+5	+6	
	1	5	6	0	= f(1)
	1	4	1	−6	
x = 2		+2	+12	+26	
	1	6	13	20	= f(2)
	1	4	1	−6	
x = 3		+3	+21	+66	
	1	7	22	60	= f(3)
	1	4	1	−6	
x = −2,5		−2,5	−3,75	+6,875	
	1	1,5	−2,75	0,875	= f(−2,5)

ارزښتجدول؛

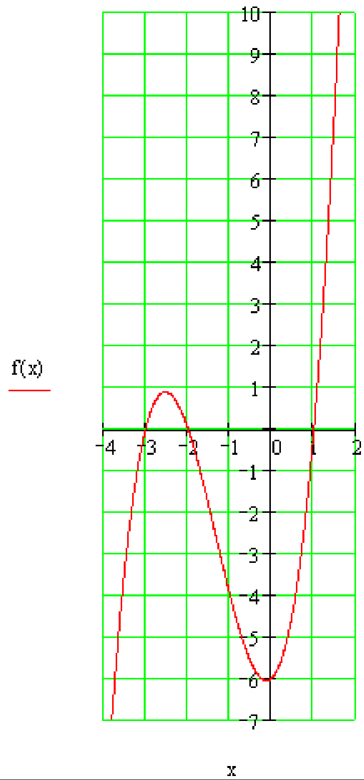
x	-4	-3	-2,5	-2	-1
f(x)	-10	0	0,875	0	-4
x	0	1	2	3	
f(x)	-6	0	20	60	

د لبنتي- یا جدولارزښت سره کیدی شی په نږدې توګه ګراف وکښل شي.

که د ګراف کښلو کې څرګنده شي،چې یوبل ځای هم پاتې دی،دا کیدی شي هر وخت د هورنرشیما په مرسته پیدا شي.

ګراف په لاندې x – ځایونوکې صفر ارزښتونه لري: $-3; -2;1$

دا y – محور په -6 کې غوڅوي.



که په کښلوکې څرګنده شي چې یوبل ځای هم پاتې دی، نو دا کیدی شي د هونرشیما په مرسته پیدا کړو،د بیلګیپه توګه$f\ (0,5)$

	1	4	1	-6	
x = 0,5		+0,5	+2,25	+1,624	
	1	4,5	3,25	-4,375	= f(0,5)

د پولینوم وېشني پر ځای کیدی شي د تولراشنل تابع درجه د هورنر شیما له لارې هم کمه شي.

موږ د هورنر شیما څیړو:

موږ بیرته تابع ترڅیرني لاندې نیسو

$f(x)=x^3-x^2-5x+6$

چیرته چي $x1=2$یو صفرځای دی.

د $f(x)=x^3-x^2-5x+6$ لپاره د هورن شیما د $x1=2$ سره

موخه د ضریب (x-2) له نوکانو وتنه ده. $\begin{array}{c\|cccc} & 1 & -1 & -5 & 6 \\ x=2 & \downarrow & \underline{2} & \underline{2} & \underline{-6} \\ & 1 & 1 & -3 & 0 \end{array}$	په دریمه لیکه کې درې عددونه د ویش نتیجو لپاره هم د پاتي پولینوم ضریبونه بللکیږي. $f(x)=\underbrace{(x-2)}_{\text{Linearfaktor}}\underbrace{(1\cdot x^2+1\cdot x-3)}_{\text{Restpolynom}}$ پاتي پولینوم کربنیز ضریب

د $f(x)$ د نورو صفرځایونو لپاره د پاتي یا باقي پولینوم صفرځایونه شمیرو. دا د اړونده مربع مساوات د حل له لارې کیږي.

نتیجه یې د لاندې پولینوم ویش بیلګې سره وګورۍ.

بیلګه: $f(x)=\frac{1}{4}x^3+x^2-x-4$ چیرته چي $x_1=-2$ یو صفرځای دی.

$\begin{array}{c\|cccc} & \frac{1}{4} & 1 & -1 & -4 \\ x=-2 & \downarrow & -\frac{1}{2} & -1 & 4 \\ \hline & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -2 & 0 \end{array}$	باقي یا پاتي پولینوم: $\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x-2$ $f(x)=(x+2)\left(\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x-2\right)$ د مربع مساوت حل $\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x-2=0$ له دې لاس ته راځي او معکوس: $x2=2$ او $x3=-4$

بیلګه:

$f(x)=-x^3+7x-6=-x^3+0\cdot x^2+7x-6$ چیرته چي $x_1=1$ یو صفرځای دی

باقي پولينوم:$-1.x-1.x+6$ $f(x)=(x-1)(.x^2-x+6)$ د مربعيز مساوات حل: $.x^2-x+6$له دي لاس تره اوپه څټ يا برعکس $x2=2$ او$x3=-3$	$\begin{array}{c\|cccc} & -1 & 0 & 7 & -6 \\ x=1 & \downarrow & -1 & -1 & 6 \\ \hline & -1 & -1 & 6 & 0 \end{array}$

لکه بيلګه چې ښايي، د هورن شيما سره د پاتې پولينوم ټاکنه ساده ده نسبت د پولينوم وېش ته.

دا ټولې پورته تلنلارې مو د مربع مساوات حل ته لاربښودوي. که دا ونه توانيږو، نو د نومريکي تلنلارو څخه کار اخستل کيږي، چې دا دلته نه څېړل کيږي.

تمرينونه: د پولينوم وېش...

د لندې ترمونو لپاره د پولينوم وېش وکاروی:

لومړی - $(x^3+2x^2-5x-6):(x+1)$ دېم - $(2x^3-14x-12):(x-3)$

دريم - $(3x^3-15x^2-51x+63):(x-7)$ څلورم - $\left(\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{2}x^2-2x+6\right):(x+2)$

پنځم - $\left(x^3+\frac{11}{2}x^2+5x-4\right):(x+2)$ شپږم - $\left(x^3+\frac{3}{2}x^2-\frac{11}{2}x-3\right):(x-2)$

اوم - $\left(x^3-\frac{5}{4}x^2-\frac{23}{4}x+\frac{3}{2}\right):(x-3)$ اتم - $\left(x^3-\frac{5}{3}x^2-\frac{47}{3}x-5\right):(x+3)$

نهم - $\left(x^3+\frac{3}{2}x^2-\frac{11}{2}x-3\right):(x+3)$ لسم - $\left(3x^3-15x^2-51x+63\right):(x-1)$

تمرینونه: د ټول راشنل توابعو صفرځایونه.

تمرین ټولراشنل تابع **IV**

د صفرځایونو ټاکنه له مختلفو لارو څخه.

د یوه تاسو ته مناسب قانو له مخې د ټولراشنل توابعو صفرځایونه وټاکئ. د x محور سره د ګراف غوځتکي و ټاکي او د تابع مساوات د کربنیزو ضریبونو د ضرب په څیر انځور کړئ.

اول - $f(x)=\frac{1}{2}x^4-\frac{13}{2}x^2+18$ دویم - $f(x)=x^3-4x^2+x+6$

دریم - $f(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x-1$ څلورم - $f(x)=-\frac{3}{2}x^4+\frac{75}{2}x^2-216$

پنځم - $f(x)=-\frac{1}{4}x^3-\frac{1}{2}x^2+\frac{11}{4}x+3$ شپږم - $f(x)=-\frac{3}{4}x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{9}{4}x$

اوم - $f(x)=3x^4-3$ اتم - $f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{4}{3}x^2+\frac{1}{3}x-2$

نهم - $f(x)=2x^3-4x^2-16x$ لسم - $f(x)=2x^3+4x^2-26x+20$

پوښتنې

د ټول هوښیار یا راشنل توابعو محورغوځتکي ګرافونه

صفرځایونه وشمیرئ او ګرافونه وکاږئ

لومړی: د لاندې توابعو صفرځایونه وشمیرئ

الف- $f(x)=x^4+2x^3+x^2$ ب - $f(x)=x^2-6x+9$

پ - $f(x)=\left(x^2-25\right)\left(\frac{1}{2}x+4\right)$ ت - $f(x)=x^6-x^4$

ټ - $f(x)=3x\left(\frac{2}{3}x-2\right)(-2x+3)$ ث - $f(x)=3\left(x^2+4\right)\left(x^2-4x+10\right)$

دویم: لومړی: د د لاندې توابعو صفرځایونه وشمیرئ

الف- $f(x)=x^4-6x^2+5$ ب - $f(x)=4x^4+6x^2-\frac{7}{4}$ پ - $f(x)=x^6-8x^4+20x^2$

دریم: لومړی: د د لاندې توابعو صفرځایونه وشمیرئ

الف- $f(x)=2x^3+4x^2-2x-4$ ب - $f(x)=x^3-12x+16$

پ - $f(x)=x^4-2x^3-3x^2+4x+4$ ت - $f(x)=2x^3-10x^2-4x+20$

ټ - $f(x)=x^4-\frac{11}{4}x^2-\frac{9}{4}x-\frac{1}{2}$ ث - $f(x)=-3x^3+3x^2-3x+3$

ج - $f(x)=-5x^3-10x^2-\frac{5}{2}x-5$ چ - $f(x)=x^4+3x^3+5x^2+9x+6$

څلورم: لومړی: د د لاندې توابعو صفرځایونه وشمیرئ

الف- $f(x)=-3x^4+15x^2-12$ ب - $f(x)=x^4-x^3-2x^2$

پ - $f(x)=-2x^3+2x^2+16x-24$ ت - $f(x)=\left(x^2-6x+9\right)(x-4)$

ټ - $f(x)=x^6-3x^4-4x^2$ ث - $f(x)=x^4-25x^2-60x-36$

پنځم: د لاندې ټولراشنل توبعو ګرافونه په یوه مناسب پروتولاړ یا کواودینات سیتم کې وکاږئ. د دې لپاره یو ارزښت جدول واچوئ او محور غوڅټکي وټاکئ

الف- $f(x)=x^3-6x^2+9x \quad D_f=\{x\,|-0,5\le x\le 4,5\}_{\mathbb{R}}$

ب - $f(x)=x^3+\frac{3}{2}x^2-6x-2 \quad D_f=\{x\,|-3,5\le x\le 2,5\}_{\mathbb{R}}$

پ - $f(x)=x^3-6x^2+9x-2 \quad D_f=\{x\,|-0,2\le x\le 4\}_{\mathbb{R}}$

ت - $f(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{2}x^2-4x+4 \quad D_f=\{x\,|-3\le x\le 3,5\}_{\mathbb{R}}$

ټ - $f(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2-6x+2 \quad D_f=\{x\,|-2,5\le x\le 3,5\}_{\mathbb{R}}$

ث - ج - $f(x)=\frac{1}{4}x^3-3x^2+9x \quad D_f=\{x\,|-0,2\le x\le 8\}_{\mathbb{R}}$

شپږم: د لاندې توابعو صفرځايونه وټاکئ او ګراف يې تر شونې پولې پورې ښه وکاږئ. ارزښتجدول کيږدئ او ځنې ارزښتونه د جبشميري سره وشميرئ. ځنې صفرځايونه اټکل کړئ او که شوني وي، صفرځايونه وشميرئ.

الف- $f(x)=x^3-\frac{2}{3}x^2-\frac{10}{3}x-1$ ب - $f(x)=0,01\left(x^3-x^2-x+1\right)$

پ - $f(x)=0,1x^3-0,3x^2-9x-10$ ت - $f(x)=(x-1,7)\left(x^2-3\right)$

تر ۶۴۰ پورې دلته محورغوځتيکيراځي؟

اړيکي "Relation":

یوه اړیکهٔ له دوه شیانو جوړه ده:

۱ – یوه وینابنه

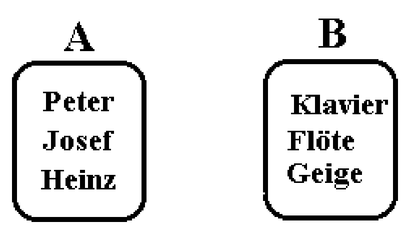
۲ – جوړه، چې دا وینا یې پوره کوي(چې وینابنه یوه رښتیا وینا کوي)۰

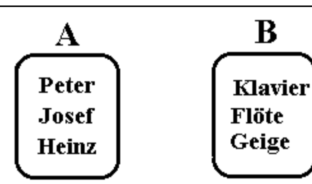
بیلګه :

دیوې کورنی د غړو ډیری A دې ورکړ شوې وي او B د لوبو یا موزیک الو ډیری۰

B	A
فوټبال	سپین
هاکي	
زیرګل	
والبال	
کوچی	

یا دا لاندې

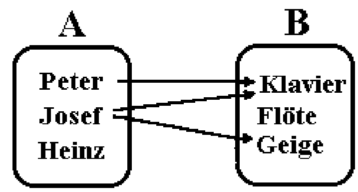


موزیک الي پیانو شپیلی ګایګي		د کسانونومونه: پتر یوسف هاینخ

د دوارو ډیریو په منځ کې یوه بینار وینابنه دې یوه وینابنه وي، چې سرى a اله bباندې لوبې کوي۰

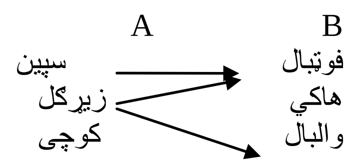
جوړه ، چې وینابنه پوره کوي، کیدی شي د بیلګی په توګه لاندې جوړې وي:

پتر په کلاویر لوبه کوي، یوسف په کلاویر لوبه کوي ، یوسف په ګایګي لوبه کوي، د څیرې په توګه اړیکي داسي انځوریږي:



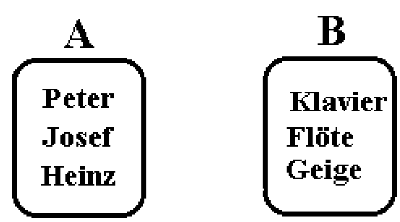
a spielt das Instrument b

یا دا لاندې



نورې بیلګی

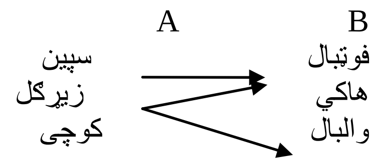
موږ د مخه دا لاندې ډیرې منځ ته ر اوړې:

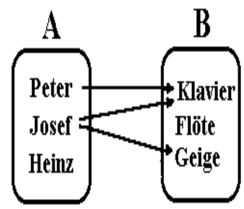


د دواړو ډیریو په منځ کې د اړیکو په څیر موږ اړیکې «په اله لوبه کوي» راوړې
یا دا لاندې

فوټبال هاکي والبال	سپین زیړګل کوچی

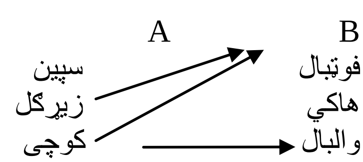
سرلیک

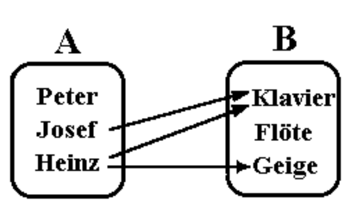




a spielt das Instrument b

په پورته کې ښوول کیږي، چې څوک په کومه اله لوبه کوي.
موږ اوس دواړه ډیرۍ A او B ساتو ، مګر د دوي ترمنځ نوې اړیکې غواړو وپیژنو یا تعریف کړو:
بینار اړیکې دې اوس داسې وي، چې « اله لري» او « په اله باندې لوبه کوي» نور نه وي.
د دې برسیره دې اړیکې « اله لري » لاندې درې جوړې ولری :
هاینځ کلاویر لري
هاینځ یوه ګایګې لري
یوسف یوه کلاویر لري
د څیرې په څیر انځور یږي:





a besitzt das Instrument b

لیدلکیږي، چې د دوه ډیریو په منځ کې مختلفې اړیکې منځ ته راتللی شي یا ټینګیدلی شي.

شننیزه انځورونه
مخ ته تیرو مخونوکې مو زده کړل، یوې اړیکې پورې دوه شیان اړه لري: یوه وینا بڼه او یوه جوړه، چې دا وینابڼه پوره کوي.
کله اړیین نه دي یا نه شي کیدی، چې ټولې جوړې ورکړ‌ای شو، کومې چې په یوه اړیکې پورې اړه لري.

بیلګه ۱
ډیری $A = \{1,2,3\}$ او ډیری $B=\{1,2,3\}$ دې ورکړ شوي وي. وینابڼه کوچنی له یا لنډ >

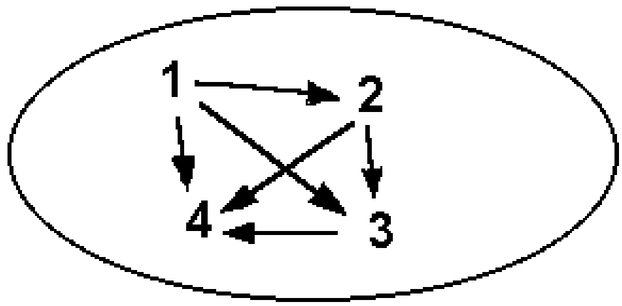
هر زده کوونکی پوهیږي، چې جوړې $(1/2),(1/3)$ او $(2/3)$ دا وینابڼه پوره کوي. جوړو ګڼلو ته اړنه یو، بلکې دا د وینابڼې مخ ته پرتې ډیری A او B ته.

بیلګه ۲
په ځانګړې توګه دا هلته له پامه غورځول کیږي، چې ټولې جوړې وشمیري، کله چې وینابڼو ته مخ ته پرتې ډیری یا ډېرې لویې وي او یا ناپای.
بیلګه : ډیری : $A = B = \{1, 2, 3, \ \dots\}$
وینابڼه: له هغې، چې لیدل کیږي، چې بیخي ناشوني ده، چې ټولې جوړې وشمیرل شي، چې دا وینابڼه پوره کوي.

بیلګه ۳
کله کله اړیکه بیخي نه شي انځوریدلی.
بیلګه : ډیری نارینه =M او ښځینه =F وینابڼه کې راوستل شي، چهٔ « واده له سره ».
دا څوک نه شي ګڼلی، چې څوک له چا سره واده دی او دا نه په برخه اخستونکو ډیریو M او F کې ورکړ شوې.

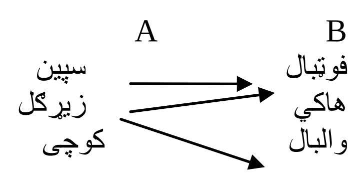
د یوې اړیکې تیوپ یا ډول
اړیکه په دوه ګروپونو ویشل کیدی شي.
۱ – ددوه ډیریو ترمنځ اړیکې
۲ – د یوې ډیری په دننه کې اړیکې

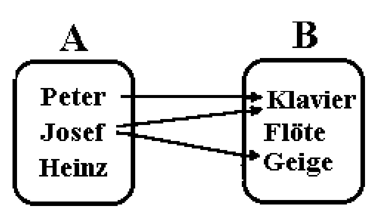
تیوپ ۱ – مورږ وپیژند
د تیوپ ۲ - لپاره بیلګه لاندې اړیکې دي(چې په څېره کې کښل شوي دي):



x له y څخه کوچنی دي

د مخ ته تیرو بیلګو په مخامخوالي یا تضاد دلته د ډیریو د توکو ترمنځ اړیکې پرتې دي
بنسټډیرې ،موخه ډیرې یا تر مخورشو پسې ورشو
Erklärungروښانه ونه
د ډیرې A (بنسټډیرې) او B (موخه ډیرې) په اړیکو کې په رېښتوني د مخ ته ورشو (پتر ،یوس) همداسې ورپسې ورشو (کلاویر، ګایګې) اړیکې هغه توکې جوړوي، چې په کارونه کې ونډه لري.
A د لوبغاړو نومونه دي او B د لوبو نومونه دي





بنسټډیرې : {سپین ، زیرګل، کوچی } :Grundmenge
موخه ډیرې : { فوټبال ، هاکي ، والیبال } Zielmenge

Vorbereich ترمخورشو {Peter, Josef} :
Nachbereich ورپسي ورشو {Klavier, Geige} :

ځني شميرپوهان دا مخورشو او همداسي پسي ورشو، تعريفېدېری ، ارزښتډيری يا تعريفورشو همداسي ارزښتورشو بولي

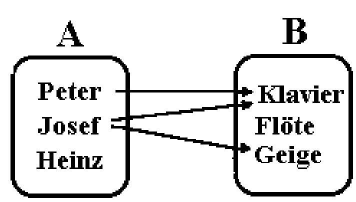
د اړيكو تختهRelationstafel

تراوسه مو تولې اړيكي د غشيدياګرام له لارې انځور كړل٠ يو شونوالی يا امكانات يې د اړيكو تختې له لارې انځورونه ده:

د دې لپاره د بنسټډيری او موخه ډيری توكي په يوه جدول كې ليكو٠ د بنسټډيری توكي په پورته ليكه كې ليكو اود موخه ډيری‌توكي په كيڼ درځ يا كينه مته كې ليكو٠

په صليبونه سره هغه پيژند يا تعريف وركول كيږي، چې د موخه ډيری په توكي باندې د بنسټډيری يو توكی تنظيم شوی وي٠

د بيلګې په توګه بيرته همغه د ساز الو سره بيلګه راوړو



په دې پورې اړونده اړيكتخته په لاندې ډول ليدل كيږي

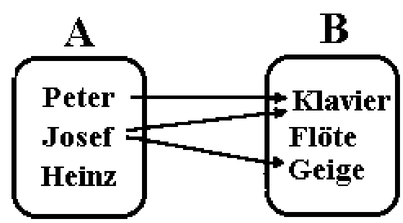
	Peter	Josef	Heinz
Klavier	x	x	
Flöte			
Geige		x	

د كواوردينات سيستم انځوربنه

تراوسه مو اړيکي د غشيدياګرام او اړيکتختو له لارې انځور کړې٠ اوس يو دريم شوونوالی يا دريمه شوونتيا يا امکان غواړو وپيژنو:
انځورونه په يوه کواوردیناتسیستم کې :

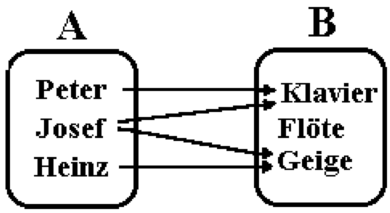
د بنسټيزې توکي د پروتمحور په نخښه کوو او د موخه ډيرې توکي په ولاړ محور په نخښه کوو ٠
د ټکو سره هغه د بنسټيزې توکي او ورسره د تنظيمډيرې تنظيم توکو ټاکلي وي

بيلګه
د بيلګی په توګه بيرته هغه بيلګه د لوبو يا موزيک الاتو سره ټاکو:
دلته په دې لاندې الماني ليکنپيا ښه يې :ځيره بسيا کړی شو



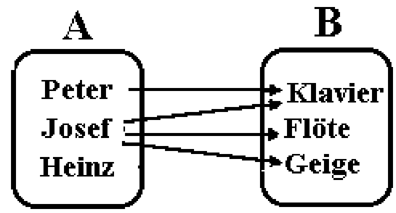
په کواوردیناتسیستم کې انځورونه داسې ليدل کيږي

کښ پوره کيدونکی اړيکې :
د Aڅخه هرتوکی کم له کمه د B په يوه توکي تنظيميږي(پيژندورشو يا مخ ته ورشو او بنسټيزه ډيرې کټمټ دي)
ښي پوره اړيکې : دB هر توکی کم له کمه د ځيرې په توګه منځ ته راځي (پسې ورشو او موخه ډيرې کټمټ دي)



Linksvollständig

کيڼ پوره



rechtsvollständig

ښی پوره

ښی یواځنی اړیکې

د ښنسټډیرۍ (کيڼ) هر توکی په زیات ترزیاته د موخه ډیرۍ (ښی)
باندې تنظیمیږي٠

پام مرسته : غشي ښي « ښيلوریز) يواځنی دي٠

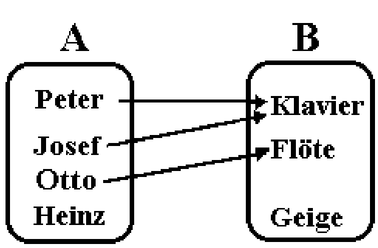
کيڼ يواځنی اړیکې :

د ښی ډيری هر توکی زیات ترزیاته یو وار د یوې ډیرۍ (کینډیرۍ) د
خیرې په ډول منځ ته راځي٠

پام مرسته : غشي ښي لورته يواځني دي٠

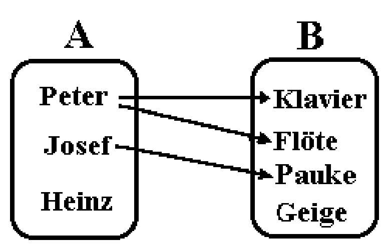
ناټيکوالی!

یا دا لاندې، چې د توپونو په ځای موزیک الې ورکړ شوي دي



rechtseindeutig

ښی



linkseindeutig

کيڼ يواځنی

يواځنی، .

يو کينپوره کيدونکی او بنی يواځنی اړيکي يواځنی اړيکي بلل کيږي (فنکشن او يا ځيروني)

په غشيدياگرام کې يو فنکشن په دې پيژندل کيږي ، چې په هر توکی تيک يو غشی پيل کيږي

په ښت اړيکي : په ښپ اړيکو کې

١ – مخ – او پسي ورشوگاني سره بدليږي(پيژندديری او ارزښتديری)

٢ – اوښتوني سره بدليږي

رفلکسيو اړيکي reflexive relations

دياگرام : په هرتوکي يوکړئ غشی شته

رفلکسيو اړيکي :

د رفليکسو اړيکو پيژند : د هرو برابرو توکو جوړه اړيکو پوری اړج لري

د فرمو په ځير يي ليکنه : د تولو a لپاره باور لري:
aRa

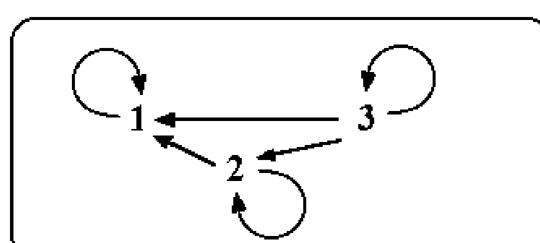
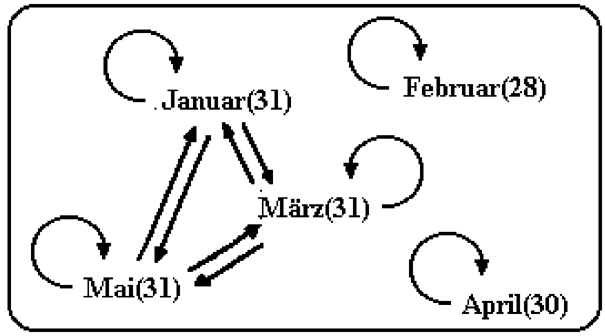


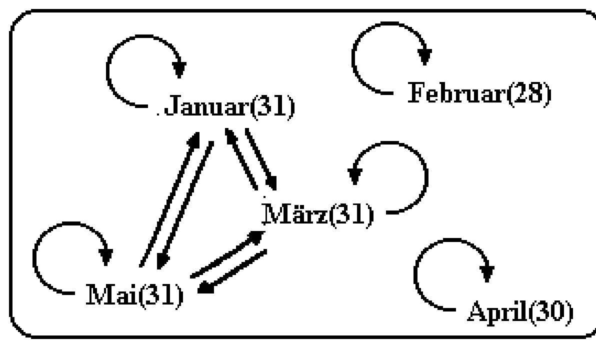
Bild: Die reflexive Relation ≥

انتيرفلکسيو(ايرفلکسيو اړيکي
Antireflexive
(irreflexive)
Relationen

پيژند : په انتيرفلکسيو اړيکو کې په هيڅ توکي کړۍ غشی نه شته
د همغه توکي جوړه اړيکو پورې اړوند نه دی، يا په اړيکو ونده نه لري٠
د فرمول په توګه ليکل يې : $\neg(aRa)$



سيومتريکي اړيکي : symetric relations
هر غشي ته په څټ غشی شته
که (a,b) اړيکو پورې اړه ولري ، نو (b,a) هم په اړيکو پورې اړه لري٠
د سيومري اړيکو څيره: « همغومره ورځې لري لکه»



انتيسيومتري اړيکې: Antiasymetric reltions
د انتيسيومتري اړيکو دياګرام : په څټ غشی نه شته ٠
که (a,b) په اړيکو اړه ولري،نو (b,a) په اړيکو اړه نه لري، مګر که $a = b$ وي٠

فرمول: $a\,R\,b \wedge b\,R\,a \Rightarrow a = b$

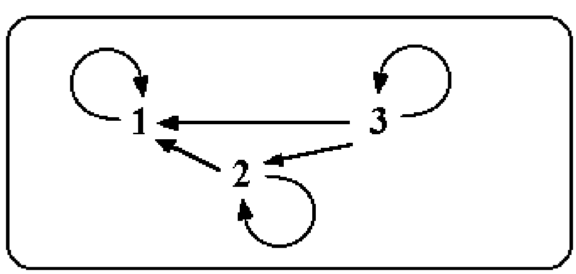
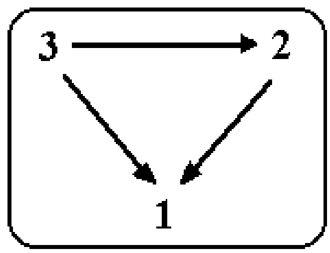


Bild: Die antisymmetrische Relation $\geq$

Antiasymetric reltions: ناسيومتريک اړيکې پورته ښېره

اسيومتريکي اړيکې
asymetric relations (Asymmetrische Relationen)

د اسيومتريکي اړيکو دياګرام نه په ښت غشی لري او نه کړي غشی لري٠
د اسيومتريکي اړيکو پيژند: انتيرفليکسيو او انتيسيومتريکي اړيکې
فرمول : ¬(bRa ⇒ aRb

ښېره: اسيومتري اړيکې	

خيره کونه يا **توابع Funktionen**

p

يادونه: په انرېزي کې mapping د او الماني کې DieAbbildung په نامه ن,مولشوي، چې پښتومانا يې خيرونه يا خيره کونه ده.

فنکشندوه اوښتونيبا وارياپلپلري، چې يوه خپلواکه اوبله يپواکه ده. له دېام له د فنکشن لهپاره ناسمد تابع نومورکړشويدی.

په رياضي يا شميرپوهنه کې خيرونه يا توابع

په شمیرپوهنه کې طبیعي ، تخنیکي یا هم نورو ورځنیو کارونو کې زیات وخت یوه لویه د بلې لوي په واک کې وي یا که غواړئ د هغې تابع وي، لکه د بیلګې په توګه د یوه موټر د بنزین سوزول یا استعمالول د هغه د تللې چټکتیا یا سرعت په واک کې یا تابع دی. دا ډول ساده اړیکې مو پخوا هم لوستلې او ګرافیکي مو په یوه کواوردینات – یا پروتولاړسیستم کې انځور کړي.

بیلګې:

د یوه شي یا جنس قیمتت د هغه د خرڅ شوې ډیرئ یا سټ په واک کې دی یا تابع دی.

ټوله دباندنئ تودوخي د ورځې د وخت په واک کې ده.

د یوه بایسکلځغلونکي وهلې لار په مساوي چټکتیا یا سرعت د تلنې وخت په واک کې ده.

د موټر د بریک لار په روښانه توګه د هغه د چټکتیا په واک کې ده.

د یوه کوچني لوېدنه د هغه د عمر په واک ده.

د یوه ریاضي ازموېنې نمرې د لاس ته راوړول ټکو په لاس کې ده.

د یوې بډایئ د ګټې قیمت یا لاس ته راوړنه د په د مخه ټاکلې ګټې سره دوخت تیرېدنې په واک کې ده.

تمرین ۱ : د داسې یو په واکوالي یا تابعیت لپاره نورې بیلګې هم پیدا کړئ.

له پورته بیلګې څخه لیدل کیږي، چې هر دوه لویې سره تنظیمیږي.

ډیرئ یا سټ ← وخت خرڅشوې سټ په قیمت اغیزه لري.

د ورځې وخت ← تودوخي. د ورځې وخت په اندازه شوې تودوخي اغیز لري.

د لاس ته راړلو ټکو تعداد یا ګڼون ← نمرې د یوې ازموېنې نمرې د لاس ته راړلو ټکو اغیزمن کیږي.

تمرين ۲ : د پاتې بيلګو لپاره او د هغو لپاره چې په تمرين ۱ کې مو ميندلي اړيکې پيدا کړئ.

دا يو له بل سره تظيم شوي لويې متحولې(اووښتونې يا **Variablen**) بلل کيږي.

دلته دې دې ته پام وشي، چې کوم په واکوالی يا تابعيت د دوي په منځ کې شتون لري.

د رياضي نمرې د ښوونکي له نظره د لاس ته راوړو ټکو په واک کې دي، مګر نه د نمرو د ټکو په واک کې.

سرې نمرې د بلواک يا تابع متحولو په حيث هم ښايي او د ټکو تعداد د خپلواک متحولو په حيث ښايي.

د ټکو او نمرو په منځ کې يو فنکشن يا بلواکيزې يا که غواړئ تابعيتي اړيکې شتون لري.

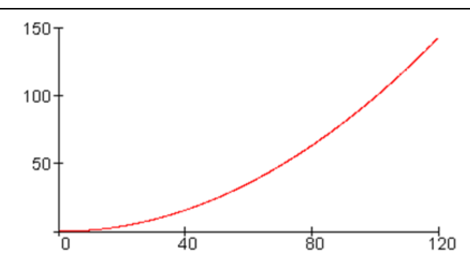
لکه د مخه درسونو څخه چې پوهيږو، ډېر امکانات شتون لري چې د دوه متحولو ترمنځ تابعيتي اړيکې تشريح کړو يا انځور کړو.

د مختلفو چټکتياو لپاره د بريک لار اندازه کيږي او يو ارزښت جدول ترتيبيږي.

چټکتيا په km/h(x)	20	40	60	80	100	120
د بريکنيولو لار په m(y)	4	16	36	64	100	144

که د جدول ارزښتونه په يوه پروت ولاړ – يا کواوردينات سيستم کې وکښل شي، نو سرې ګراف لاس ته راوړي وروسته له هغې چې ټکي يو له بل سره وتړل شي کوم چې د چټکتيا او بريکلار ترمنځ اړيکې تشريح کوي.

د پراته محور ، چې ابسځيز هم بلل کيږي د خپلواکي متحولي x ارزښتونه پيدا کيږي، په ولاړ محور چې اوردينات هم بل کيږي د بلواک متحولي y = f(x)ارزښتونه ميندل کيږي.



تمرين ۳ :   د ارزښت جدول سره سم په يوه مناسب پروتولاړ – يا کواورديناتسيستم کې اړونده ټکې وکاږئ او دا په يوه ګراف کې سره ونښلوئ.

د بریکلار د چټکتیا 90 ; 70 ; 50 ; 30 او 110 km/h لپاره د لوستلو له لارې وټا کئ.

پولیس یوه د90 m د بریک لار اندازه کوي؟

دا موټر د کومې چټکتیا یا سرعت سره خغلي؟

زیات وخت دا هم شوني ده چې فنکشنال یا تابیعي اړیکي د تابع مساوات له لارې انځور شي.

د بریکلار لپاره باور لري: $y = f(x) = 0{,}01\ x^2$

دلته $y = f(x)$ د بریکلار لپاره اینبوول شوی او دا وایي، چې y -کواوردینات په کواوردیناتسیستم کې د متحولې x په واک کې دی، یعني د خپلواک متحولېx یو تابع دی یا په واک کې دی. تابعمساوات دی، کوم چې هغه قانون ورکوي، چې ارزښتونه د $f(x)$ تابع یا بلواک متحولې جوړوي.

د تابع مساوات په ځاي هم وایو چې $f(x) = 0{,}01\ x^2$ د تابع قانون دی.

تمرین ۴ : که تابع مساوات $f(x) = 0{,}01\ x^2$ وي، نو لوستل شوي ارزښتونه وشمیرئ؟

له دا تراوسه شوې کار څخه کیدی شي ووایو:

پیژند یا تعریف:

د یوه تابع سره د خپلواک متحولېx هر ارزښت ټیک یو تابع ارزښت $f(x)$ باندې- یا سره تنظیمیږي. سرې دا هم وایي چې یوه تابع یو یواځنی نظم دی.

$$\underbrace{f : x \rightarrow \underbrace{f(x) = x - 1}_{\text{Funktionsgleichung}}}_{\text{Funktion}}$$

لیکندول:f

پورته لومړۍیې په پښتو: تابع برابرون

که په راتلونکې کې له یوه تابع غږیږو، نو د دې تشریح لپاره فقط تابع مساوات ورکوو، یعني فقط $f(x) = ...$ ی.

د تابع نوم f دی.

دا $f(x) \quad x \rightarrow$ لیکندود روښانه کوي، د هر x –ارزښت سره یو ټاکلی تابع ارزښت $f(x)$اړه لري.

تابع مساوات $f(x) = x - 1$ د شمیرلو قاعده یا قانون راکوي، چې تابع ارزښت څنګه جوړیږي.

د دې لپاره چې د نظم یواځنوالی بیا وښایو، لاندې بیلګه راوړو:

هر زده کوونکی یو ټاکلی د بوټانو لویوالی لري. دلته حتمي ده چې زیات زده کوونکي به یو- - یا هماغه د بوټانو لویوالی ولري.

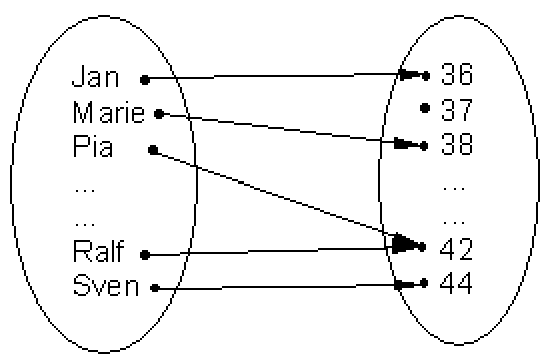
یواځنواوالی په زده کوونکو اړه لري ← د بوټانو لویوالی.

د متحولو سره کښلی یا لیکلې دا په دې معنا دی، چې د زده کوونکي نوم خپلواکه متحوله په ګوته کوي او هغه سره تنظیم شوې د بوټانو لویوالی بلواکه یا تابع متحوله جوړوی.

معکوس یا په څټ د زده کوونکو تنظیم یواځنی نه دی، ځکه چې ډېر زده کوونکي د بیلګې په توګه ۴۲ نمرې د بوټانو لویوالی لرودی شي.

دا ډول تابع د تابعمساوات نه لري، دا کیدی شي چې د ډېرئ څیرې یا سټعکس په څیر انځور شي.

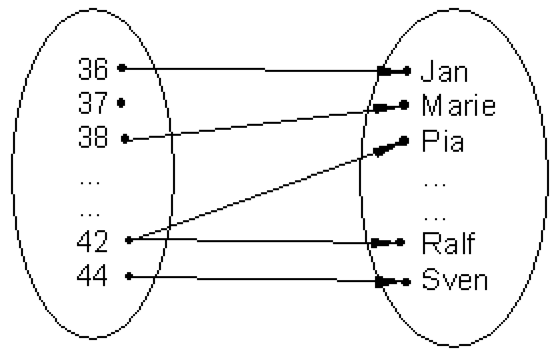
یواځنی نظم(تابع یا فنکشن)



د بوټانولویوالی ډېرئ یاسټ   د زده کوونکو سټ

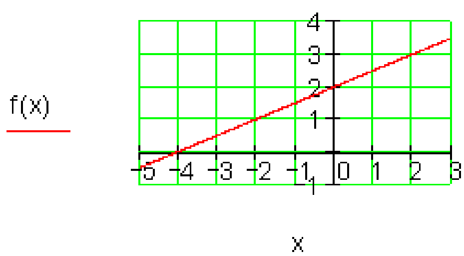
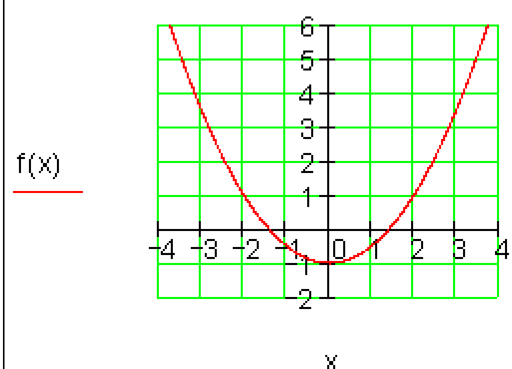
(ارزښت ډېرئ)　　　　(تعريفډېرئ)

نظم يواځنى نه دى (تابع نه دى)

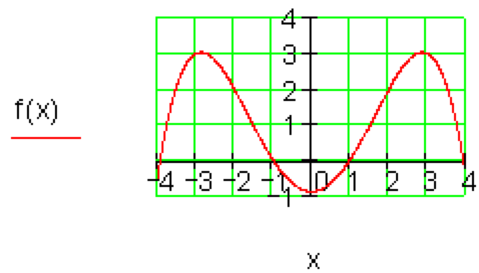


د دواړو ستونو بدلول

د رياضيكي توابعو او تابعمساواتو بيلګي (له كيڼ و ښي لورته)

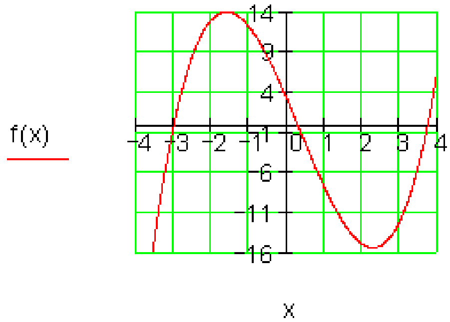
$f(x) := \frac{1}{2} \cdot x + 2$  كرښيز مساوات(ګرښنه (	$f(x) := \frac{1}{2} \cdot x^2 - 1$  مربع مساوات(پارا بل)

$$f(x) := \frac{-7}{120}\cdot x^4 + \frac{23}{24}\cdot x^2 - \frac{9}{10}$$



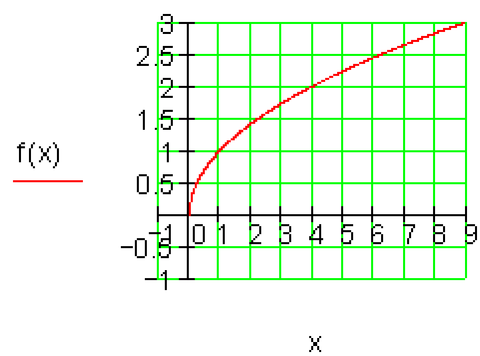
د خلورمي درجي تولراشنل تابع

$$f(x) := x^3 - x^2 - 11x + 3$$



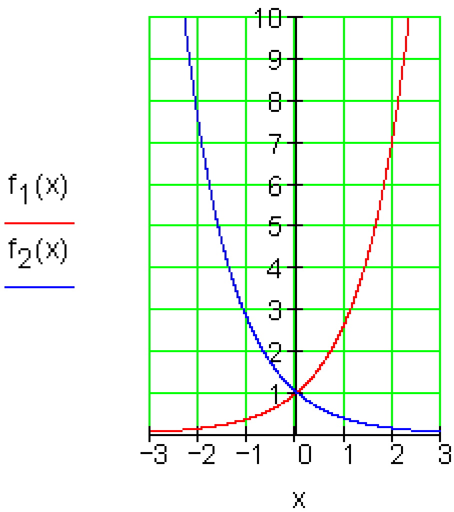
د دريمي درجي تولراشنل تابع

$$f(x) := \sqrt{x}$$



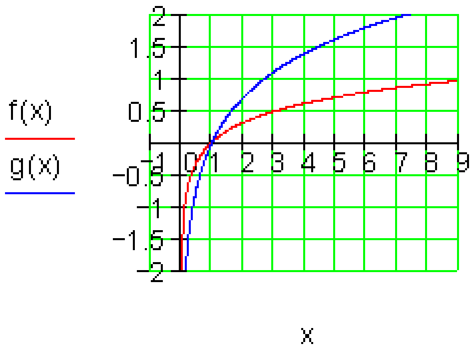
ريښه تابع

$$f_1(x) := e^x \qquad f_2(x) := e^{-x}$$



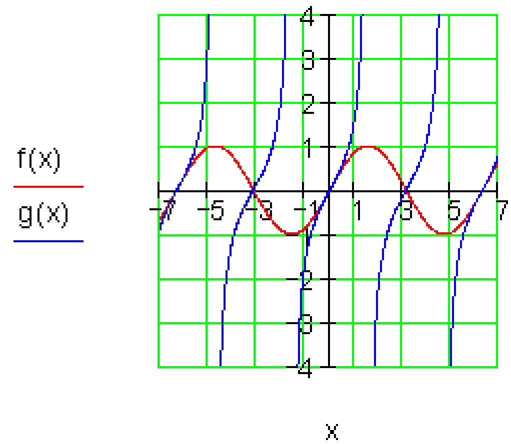
اکسپوننشل تابع

$f(x) := \log(x) \qquad g(x) := \ln(x)$



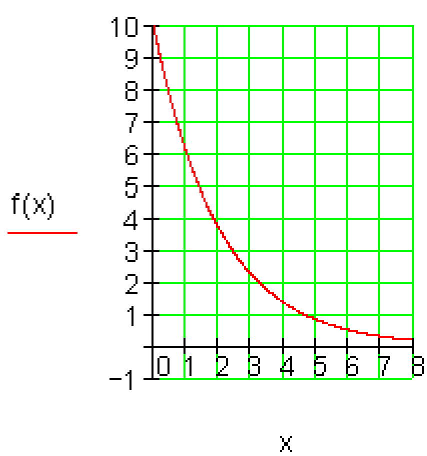
لوګاريتمتابع

$f(x) := \sin(x) \qquad g(x) := \tan(x)$



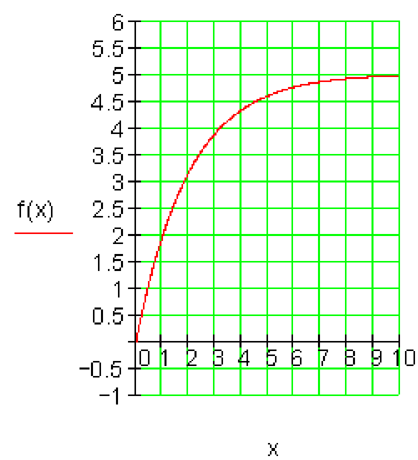
تريګونومتريکي(مثلثاتي) تابع

$f(x) := 10e^{-0.5 \cdot x}$



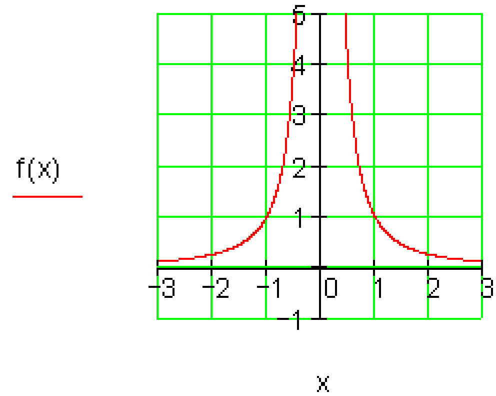
اکسپيننشلي کښته کيدنه

$f(x) := 5 \cdot \left(1 - e^{-0.5 \cdot x}\right)$



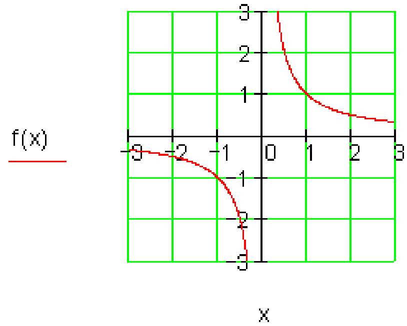
اکسپوننشل مربنتکره

$$f(x) := \frac{1}{x^2}$$



های پارابول محورسیومتریک

$$f(x) := \frac{1}{x}$$



های پارابول تکی سیومتریک

تعریف- او ارزښتډېرئ یا - سټ

تعریف(پیژند):

د یوه تابع تعدریفسټ **D** د ټولو خپلواکو متحولو ډېرئ یا سټ ده، د کومو لپاره چې تابع تعریف دی.

ارزښت ډېرئ **W** د ټولو تابع ارزښتونو- یا بلواکو - سټ ده، چې د D له توکو منځ ته راځي.

بیلګه:

$f(x) = \frac{1}{x}$ تعریفسټ $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$	$f(x) = \frac{1}{2}x + 2$ تعریفسټ D=R

د صفر سره د وېش اجازه نه شته	Rد حقیقيي اعدادو ډېرئ ده

بېلګه:

$f(x) = x^2 \quad D = \mathbb{R}\,;\, W = \mathbb{R}_+$ د تابع ارزښت په حیث فقط مثبت یا زیاتیز ارزښتونه رامنځ ته کیږي	$f(x) = x + 1 \quad D = \mathbb{R}\,;\, W = \mathbb{R}$ تابع هر په خوښه ارزښت نیولی شي.

شمیرپو هنیزه لیکندود او د هغه معنا

$f(4) = 7$ د خپلواکو متحولو د ارزښت $x = 4$ لپاره د تابع ارزښت 7 دی.

دا د ارزښتجوړه (7 | 4)په کواوردیناتسیستم کې د ټکي (7 | 4) P کواوردیناتونه جوړوي.

$f(x) = 9$ غوښتونی د x -ارزښت دی، چې په هغه پورې تابع ارزښت 9 اړه لري.

$y = f(5)$ د $x = 5$ لپاره تابع ارزښت دی.

ټولګه:

یو یواځنی نظم، چې په هغه کې د تعریف سټ D څخه خپلواکه متحوله x ټیک یو تابع ارزښت $f(x)$ باندې تنظیم شي څیرونه (چېموږ یې تابع بولو) یا فنکشن بلل کیږي.

تابعي(خپلواکیز) یا فنکشنلي اړوندوالی د یوه تابع مساوات(د بیلګې په توګه: $f(x) = 2x + 1$) سره لیکل –یا تشریح کیږي.

تابع مساوات کې د x –ارزښتونو په اینښولو سره د تابع ارزښت لاس ته راځي، چې دا د x -ارزښتونو سره یوه ارزښت جدول کې اینښولی یا انځورولی شو.

د ارزښتجدول هره جوړه په کواوردینات سیستم کې ټیک یو ټکی په ګوته کوي.

په زياتو حالتونو کې کيدی شي دا منځ ته راغلي ټکي يوه ګراف ته سره رايوځای يا وتړل شي.

د ټول x - ارزښتونو ډېرئ، هغه چې په تابع مساوات کې ځای په ځای شي تعريف ډېرئ يا ـــسټ بلل کيږي.

د ټول تابع ارزښتونو ډېرئ يا ـــسټ، چې دلته منځ ته راځي، د تابع ارزښت ډېرئ W پورې اړه لري.

د تمرينونو حل

لومړی تمرين: د داسي بلواکوالي لپاره نوري بيلګي پيدا کړئ.

ځواب: - د يوه تيلسوزونکي ماشين قدرت د څرخونتعداد(د ماشين د څرخيدو تعداد) په واک کي دی.

- د يوې ګردئ يا دايرې سطحه د وړانګې يا شعاع په واک کې ده.

- د بريښنا پيسي د ثابت قيمت سره د انرژي يا بريښنا مصرف په واک کې ده.

دويم تمرين : د پاتي بيلګو او د هغو لپاره چي تاسو په لومړي تمرين کي وليدل ګډې اړيکي سره په فرمولبندۍ کې راوړي.

ځواب:

لار → د خوزښت وخت: په مساوي پاتې چټکتيا د خوزښت وخت په وهلې لار اغيز لري.

بريکلار → چټکتيا: د يوه موټر چټکتيا د بريکلار باندې اغيزه لري.

ټوله ګټه → د تيريدني وخت: د سرمايي ايښوني وخت د ګټي لاس ته راوړنه باندې اغيزه لري.

وده → عمر: د کوچني عمر د هغه په وده اغيزه لري.

قدرت ← څرخونتعداد: د يوه سوزونکي ماشين د تيلو سوزيدنه د هغه په څرخونتعداد پورې اړه لري.

سطحه ← وړانګه : د ګردئ يا دايرې وړانګه د دايرې سطحه باندې اغيز لري.

د بريښنا حساب ← انرژي ستې: د سوزولې بريښنا يا انرژئ ستې يا ډېرئ د بريښنا بل(هغه د مصارفو کاغز) اغيزمن کوي.

دريم تمرين:په يو مناسب کواورديناتسيستم کې د ارزښت جدول اړوند ټکي وکاږئ او دا يوه ګراف ته سره وتړئ.

د چټکتيا 90 ; 70 ; 50 ; 30 او 110 km/h لپاره د لوستلو له لارې بريکلار پيدا کړئ.

پوليس يوه د 90 m بريکلار کچوي. دا موټر دکومې چټکتيا سره تلی؟

ځواب:

د 30 km/h چټکتيا بريکلار 9 m ده

د 50 km/h چټکتيا بريکلار 25 m ده

د 70 km/h چټکتيا بريکلار 48 m ده

د 90 km/h چټکتيا بريکلار 80 m ده

د 110 km/h چټکتيا بريکلار 120 m ده

له 90 m بريکلار سره يو موټر 95 km/h د چټکتيا سره ځغلي.

تلنلار: په کواورديناتسيستم يا پروتولاړ سيستم کې د x -محور(ابسڅيزا) د خپلواکو متحولو ډېرئ نمايندګي کوي، د y –محور (اوردينات) د بلواک يا تابع متحولو نماينده ده.

د مخه له دې چې په يوه کواورديناتسيستم کې ارزښتونه ليکل –يا کښل کيږي بايد وکتل شي، چې کومه خپلواک- او کومه بلواک- يا تابع متحوله ده.

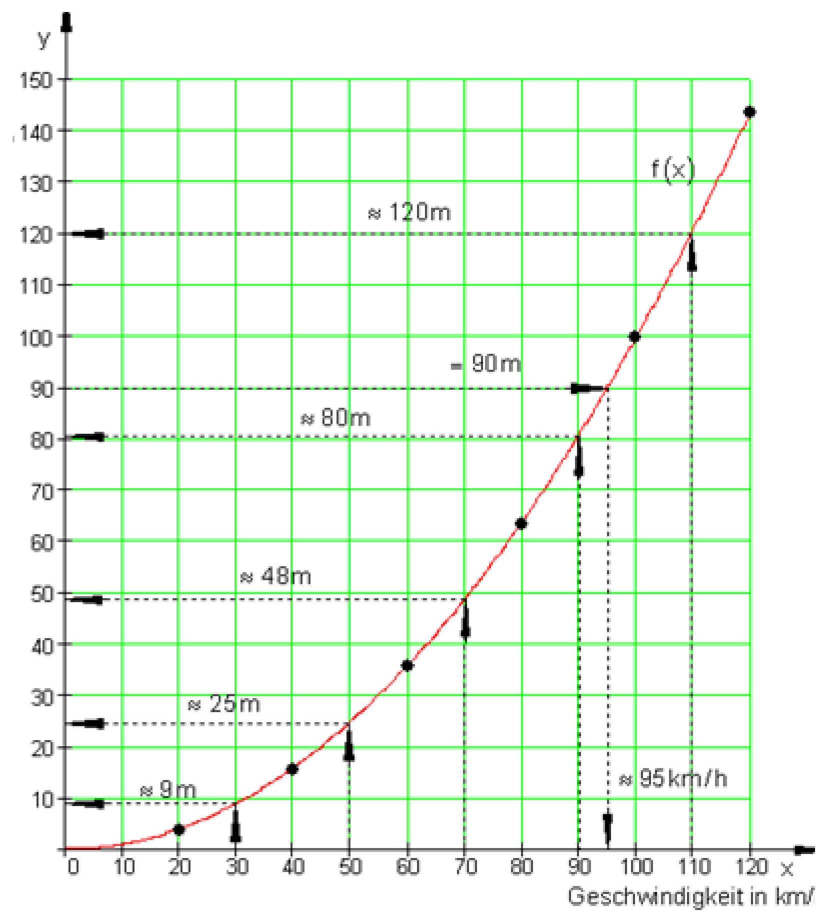
پسي دا هم غوره ده، چې د کچونې لپاره يوو ښه کچونی يا هغه اله چې اندازه پرې کچوو بايد ومومو.

د دې لپاره د جدول لوي او کوچني ارزښتونه کتل کيږي او پرېکړه کيږي چ دواړه محورونه په څو برخو بايد ووېشل شي.

وروسته له هغې چې ټول په جدول کې ټکي په کواورديناتسيستم کې ځای په ځای شوي، نو بيا دا ټکي د ګراف په توګه سره تړل – يا نښلول کيږي

کيدی شي له ګراف څخه د داسي x -ارزښتونو لپاره هغه لړ يا ډېر تابع ارزښتونه هم ولوستل شي، چې په ارزښت جدول کې مخ ته نه راځي.

معکوس کيدی شي د يوه ټاکلي تابعارزښت اړونده x -ارزښت ولوستل شي. د دې نتيجو ټيکوالی د دې په واک کې دی، چې ګراف څومره ټيک کښل شوی دی.



پورته کواوردينات – يا پروتولاړسيستم کي: پروت: چټکتيا په کيلومتر. ولاړ:بريکلار په متر

ځلورم تمرين:

لوستل شوي ارزښتونه وشميرئ، که تابع مساوات $f(x) = 0{,}01\,x^2$ وي.

ځواب:

تابعارزښتونه داسې شميرلکيږي، چې اړونده د x ارزښتونه په تابع مساوات کې کېښوول شي.

$$f(x) = 0{,}01x^2 = \frac{1}{100}x^2$$

$$x = 30 \Rightarrow f(30) = 0{,}01 \cdot 30^2 = 0{,}01 \cdot 900 = 9$$

$$x = 50 \Rightarrow f(50) = 0{,}01 \cdot 50^2 = 0{,}01 \cdot 2500 = 25$$

$$x = 70 \Rightarrow f(70) = 0{,}01 \cdot 70^2 = 0{,}01 \cdot 4900 = 49$$

$$x = 90 \Rightarrow f(90) = 0{,}01 \cdot 90^2 = 0{,}01 \cdot 8100 = 81$$

$$x = 110 \Rightarrow f(110) = 0{,}01 \cdot 110^2 = 0{,}01 \cdot 12100 = 121$$

د 30 km/h چټکتيا بريکلار 9 m ده

د 50 km/h چټکتيا بريکلار 25 m ده

د 70 km/h چټکتيا بريکلار 48 m ده

د 90 km/h چټکتيا بريکلار 80 m ده

د 110 km/h چټکتيا بريکلار 120 m ده

له 90 m بريکلار سره يو موټر 95 km/h د چټکتيا سره ځغلي.

بريکلار 90 m کچ شوي ، غواړو چټکتيا پيدا کړو.

پيل: $f(x) = 90 \Leftrightarrow 0{,}01x^2 = 90$ دا مساوات په x پسې ځواب کړئ

$$0{,}01x^2 = 90 \mid : 0{,}01 \Leftrightarrow x^2 = 9000 \mid \sqrt{}$$

$$\Leftrightarrow |x| = \sqrt{9000} \Leftrightarrow |x| = \sqrt{900 \cdot 10} \Leftrightarrow |x| = 30\sqrt{10}$$

ارزښت حل کړئ.

$$|x| = 30\sqrt{10} \Leftrightarrow x_{1/2} = \pm 30 \cdot \sqrt{10} \approx \pm 94{,}9$$

نسبت و پوښتني ته فقط مثبت یا زیاتیز ارزښتونه موخه ور دي، څکه چي مونږ مثبته چټکتیا په پام کې نیسو. د 90 m بریکلار سره د موټر چټکتیا 94,9 km/h وه.

یادونه:لومړی شمیرنه تیک ارزښتونه راکوي، سره له دې هم موخه وردی، چې دا شمیرل شوي ارزښتونه په ګراف کې یا له ګراف څخه هم د لوستلو له لارې کنترول کړو.

پوښتني

تابع I

لومړی:

ټول ټکي په کواوردینات سیستم کې په نخښه کړئ، چې کواوردینات یې ورکړ شوي شرایط پوره کوي.

الف- $y \le -1 \wedge x \ge 1$ ب- $y \in \mathbb{R} \wedge -2 \le x \le 3$ پ- $x \in \mathbb{R} \wedge y = 2$

ت - $0 \le x \le 4 \wedge y \ge 0$ ټ- $|x| \ge 1{,}5 \wedge |y| \le 2$ ث- $y > 0 \wedge x = -1$

دویم: په مناسب کواوردینات سیستم کې لاندې ټکي رسم کړئ.

$$A(40 \mid 220);\ B(10 \mid 250);\ C(200 \mid 300);\ D(80 \mid 240)$$

ایا د x – او y -کواوردیناتو ترمنځ کومې اړیکې شته؟ د دې لپاره یو ترم ولیکئ او نور درې ټکي ورکړئ.

دریم: د ټکو ځای وټاکئ

الف- ټکي $P_t\left(t-1 \mid \frac{1}{t+1}\right)$ د t€R کوم ارزښت په لومړئ څلورئکي پروت دی؟

ب- ټکي $Q_t\left(t \mid t^2-1\right)$ د t€R کوم ارزښت لپاره دx محور کښته لور ته پرته ده؟

څلورم:

د ټکوډېرئ یا ــسټ $A=\left\{(1 \mid 3);\left(2 \mid \frac{3}{2}\right);(3 \mid 1);\left(4 \mid \frac{3}{4}\right);\ldots\right\}$ ورکړ شوی دی.

د A نور درې توکي ورکړئ او دا ټکي په یوه کواوردینات سیتم کې وکاږئ. ایا د x- او y -کواوردیناتونو ترمنځ اړیکې شته؟

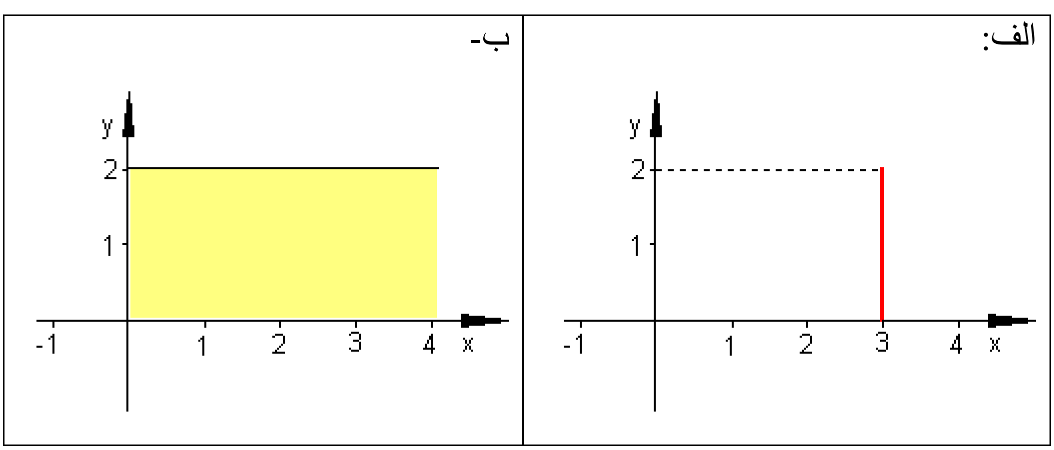
پنځم: یو ټکی $P\left(t \mid \frac{t}{2}+3\right)$ د t€R سره ورکړشوی دی.

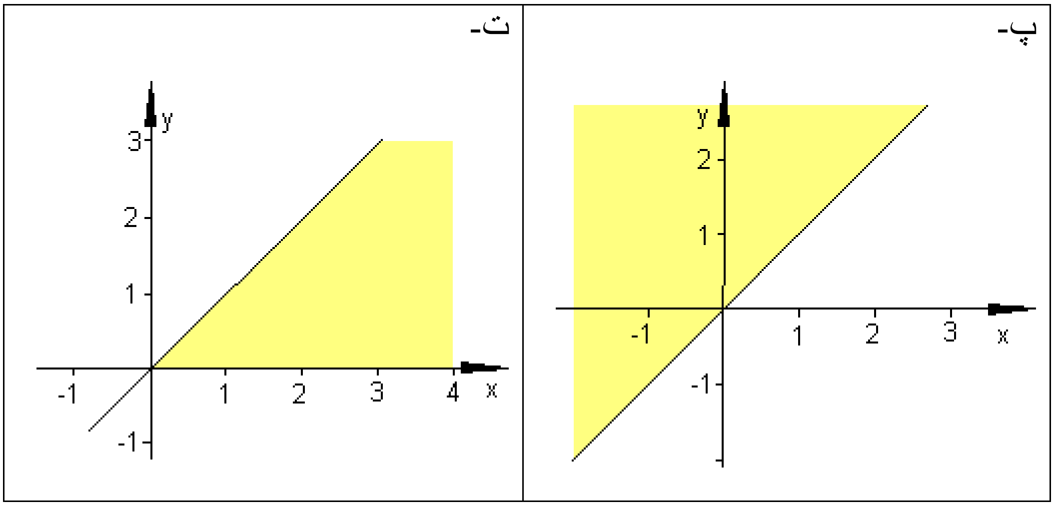
د t لپاره څه ارزښتونه ورکړي او دا د دې اړونده ټکي په یوه کواوردینات سیستم کې وکاږئ.

د کومو t -ارزښتونو لپاره باور لري:

د ټکي P د x -کواوردینات د ټکي د y -کواوردینات سره برابر دي؟

شپږم: په نخښه شوې کربنه او همداسې سطحه تشریح کړئ.





پوښتنې

توابع II

لومړی

ښاغلی برګ د یوه ملفون(لاسي یا لاسي تلفون) قرارداد د لاندې شرايطو سره وکړ:

د مياشتې € 20 ، د تلفون قيمت په دقيقه € 0,35 .

الف- که دی 80 ,40 یا 120 دقيقې تلفون وکړي، نو مياشتنی حساب به يې څومره جګ وي؟

ب - لګښت لپاره يو ترم ولیکئ چې په دقيقه کې د خبرو د دوام په واک کې وي.

پ – اړيکې ګرافيکي انځور کړئ.

دويم:يوه الوتکه د سوزونموادو کيروزين 10500 Liter ليتره زخيره لري.

په 100 km دا 180 Liter سوزوي.

الف- د په لیتر مصرف جدول جوړ کړئ. یو واټن له 0 km تر5000 km پورې وټاکئ.

ب – اړیکې یې ګرافیکي ځور کړئ.

پ-له څومره کیلومتره وروسته به زخیره تمامه شوې وی؟

ت - د الوتنې د لار ترم د ټانک د خوندیونې په واکوالي کې وټاکئ.

دریم: یو د شمیراړونې جدول جوړ کړئ، چې ^{0} څلزیوس (^{0}C) په فارنهایت(^{0}F) اړوي د 20^{0}C - او 60^{0}C په ساحه یا ورشو کې. د دې لپاره اړین داتا تشریح کړئ. اړیکې ګرافیکي انځور کړئ. دا اړیکې کوم ترم په ګوته کوي؟ د ا د تبې تودوخئ کچونه (ترمومتر) د ناروغ د تبې په اندازه کئ چې ده ایا دا حرارت یا تودوخي د ژوند خطر لري؟

څلورم: یوه د مالونو لیږلو مغازه غواړي لګښت له امله یو د تحفې پاکټ ولیږي. د پاکټولو تخنیکي پرابلم له امله یې یو اړخ د 35 cm سره کره ټاکلی دی. د پوست د لګښت نظم باید په پام کې نیول شوی وي

د لګښت نظم: مربع ډوله پاکټونه دننه په هیواد کې.

خورا کوچنئ کتله(یا بهتره ډکی): اوږدوالی 15 cm ، سور 11 cm ، جګوالی1 cm .

خورا جګه کتله: اوږدوالی 60 cm ، سور 30 cm ، لوړوالی 15 cm یا اوږدوالی جمعه یې سور جمعه یې یا په ورزیات جګوالی = 90 cm. خورا زیات وزن 2 kg.

الف- د یوه ډکي یاحجم V = 21 dm^{3} لپاره د سور او جګوالي ترمنځ اړیکې وټاکي.

ب- دا ماکسیمال رسیدلوړ ډکی یا حجم څومره لوي دی؟

پنځم: فرمول ورکړشوی دی.

الف- ش څنګه تغیر خوري، که کوچنی شي.

ب- ایا لاندې اړیکې به د فرمول له لارې تشریح شي؟

A : د کرایې موټر ټول لګښت د عدد a د تللی کیلو متر او د هغه د یوه کیلو متر د قیمت c لپاره.

B : د ودرېدلو لار یا واټن a د بریکلارb او عکس العمل لارc څخه شمیرل کیږي.

پ-شي اړیکې ورکړئ چې د فرمول له لارې تشریح کیدی شي یا روښانه کیدی شي.

شپږم: یو ولاړګوډیز یا مستطیل $U = 12\ cm$ چاپیریال یا محیط لري.

الف- اړخونه څنګه یو د بل په واک کې کیدی شي.

ب- یو ترم وټاکئ، چې بلواکوالی د اړخ a څخه ورکوي یا د اړخ a په واک کې یا تابع دی.

پ- د a د کوم ارزښت لپاره سطحه خورا لویه وي؟

پوښتنې

توابع III

لومړی: توابع f(x) ورکړ شوي. یو مناسب ارزښتجدول وکاږئ. دې ته اړوند ګراف رسم کړئ.

الف - $f(x)=\frac{1}{2}x+1$ ب - $f(x)=x^2$ پ - $f(x)=\frac{1}{x+3}$ ت- $f(x)=3^x$

دویم: فکر وکړئ، چې ایا یو ،،یواځنی نیظم،،د $x \rightarrow y$ لپاره مخ ته لرو: $x^2+y^2=1$

دریم: ټکی P ورکړ شوی دی. ایا یوه تابع مخ ته لرو؟ که هو، نو نظمقانو وټکئ او خورا لویه تعریفسټ یا – ډېرئ هم وټاکئ.

$$P=\left\{(2|1);\left(5|\frac{1}{4}\right);\left(10|\frac{1}{9}\right);\left(25|\frac{1}{24}\right);\ldots\right\}$$

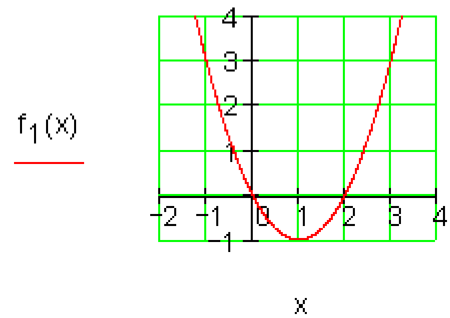
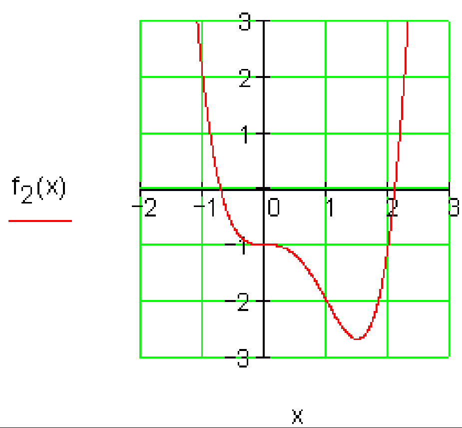
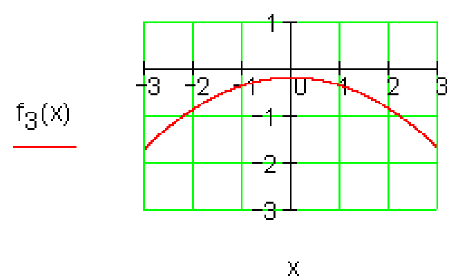
څلورم: یو ارزښتجدول ولیکئ او د تابع ګراف وکاږئ:

$$f(x)=\frac{1}{8}\left(x^3-2x-4\right);\ x\in\mathbb{R}$$

الف- د جبشمیري سره f (3) او f (- 2) وشمیرئ.

ب- په کوم ځای کې د تابع ارزښت صفر دی؟

پ-د کومو x -ارزښتونو لپاره تابعارزښت 1 دی؟
ت-د کومو x -ارزښتونو لپاره تابعارزښت کميز يا منفي دی؟
ټ-د کومو x -ارزښتونو لپاره باور لري: $f (x) < 1$ کړئ، چې د کوم تابع لپاره باور لري:
پنځم: د درې توابعو $f1, f2, f3$ ګراف ورکړ شوی دی. پرېکړه وکړئ:

الف- د تابع ارزښتونه هر چيرته صفر دي. ب- توابع په انټروال] 1 ; 0,5 [منفي يا کميز دي پ-. $f (2) < f (0)$ ت-. $f (0) = - 1$ ټ-. $f (- 2) = f (2)$	
	

پوښتنې

توابع **IV**

لومړی: تابع f ورکړ شوې د $f(x) =-0,2(2-x); x€R$ سره

پرېکړه وکړئ، چې ايا لاندې وېناوې رښتيا او که نارښتيا دي.

ځیل ځواب مدلل کړئ.

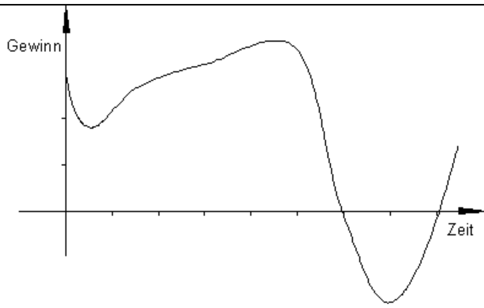
الف- د تابع ارزښتونه زیاتیز یا مثبت دي د ټول x – ارزښتونو لپاره.

ب- $f(x) < 0$ د ټولو $x€R$ لپاره.

پ- $f (x)$ د $x = 2$ لپاره منفي دی.

ت- یو ځای u شتون لري، چې د هغه لپاره $f (u) = f (u + 1)$ باور لري.

دویم: د رسم شوي تابعګراف تلنه تشریح کړئ. دلته هغه غوره ټکي په نخښخه کړئ. هغه ټکي، انتروالونه روښانه کړی یا تشریح کړئ په کومو کې چې ته اقتصادي پسمنظر(د شاته پراته دلیل) فرمولبندي کوې.



کواوردیناتسیستم کې : پروت: وخت. ولاړ: ګټه

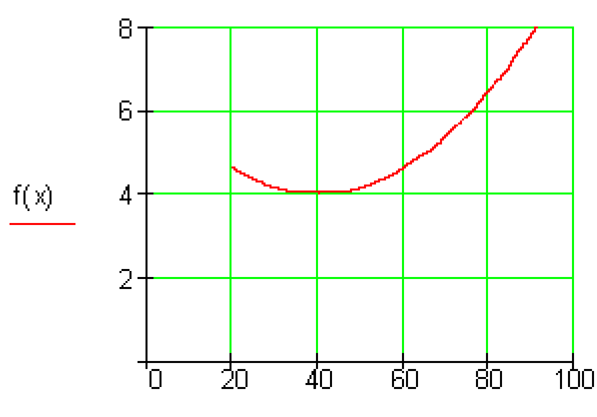
دریم: د یوه موټر د تیلو سوزول د چټکتیا په واک کې یا تابع دی. دا په ځنګ کې ښیره د تیلو سوزول ښایي په لیتر په سل کیلو متر کې او د چټکتیا په واکوالي کې، که سرې په څلورم ګیر Gang کې لاړ شي.

الف- کرِه یا منحني روښانه کړه.

ب- په کومه چټکتیا کې استعمال ۶ لیتره په سل کیلومتر کې دی؟

پ- په کومه چټکتیا کې د تیلو سوزښت خورا کم دی؟

ت- کرِه به څنګه وځغلي، که په دریم ګیر کې سرې لاړ شي؟



ځلورم: د لمبا په ډنډ کې 40 m^3 اوبه دي. دا اوبه د ډنډ د پاکوالي له امله د پمپ کولو سره وباسي، چې په دقيقه کې 350 Liter ليتره اوبه وځي.

الف- يو ترم د پاتې حجم يا ډکې لپاره په m^3 وټاکئ.

ب- څومره m^3 د ۲۰ دقيقو وروسته په لمباډنډ کې لا پاتې ي.

پوښتنې

توابع V

لومړی:د تابع f(x)ماکسيمال تعريفورشو D_{max} پيدا کړئ

الف- $f(x) = 2-3x$ ب - $f(x) = \sqrt{2x-3}$

ث- $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-1}$ ت - $f(x) = -x^2+1$

دويم: د تابع f(x) ارزښتورشو وټاکئ د $D = D_{max}$ سره.

الف- $f(x) = \dfrac{3}{2}x-4$ ب - $f(x) = 1+\sqrt{x+1}$

پ - $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ ت - $f(x) = x^2-5$

دريم: تابع f(x) ورکړ شوې ده. ماکسيمال تعريفورشو D_{max} وټاکئ. د f(x)گراف وکاږئ.

د $x \in \left\{k;-\dfrac{2}{k};k+1;k-4\right\}$ لپاره تابعارزښتونه وټاکئ.

الف- $f(x) = \dfrac{1}{2}x+1$ ب - $f(x) = 2x-\dfrac{2}{x}$ پ - $f(x) = x-x^2$

ت - $f(x)=\dfrac{1}{x+3}$ ټ - $f(x)=\sqrt{4-2x}$ ث - $f(x)=2^x-1$

خلورم: تابع $f(x)$ د $f(x)x^3$ سره ورکړشوې ده.

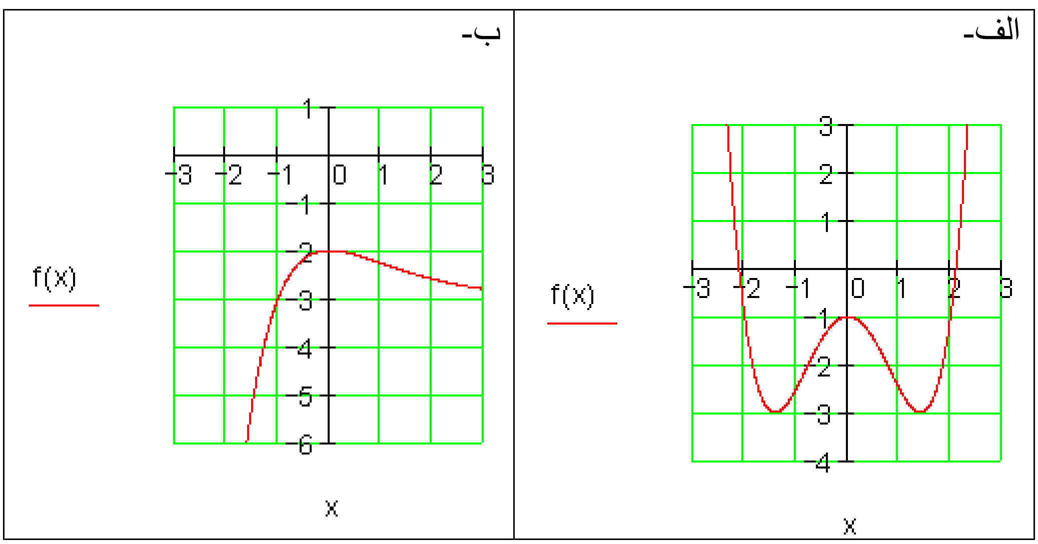
الف- ماکسيمال تعريفورشو D او ارزښتورشو W ورکړئ.

ب- د کوم $x\in D$ لپاره باور $f(x)=81$ لري؟

پ-د کوم $x\in D$ لپاره باور $f(x)\geq 9$لري؟

ت- و ښايئ: $f(x+1)=3.f(x)$ د ټولو $x\in D$ لپاره.

پنځم: تابع $f(x)$ د $D=IR$ لپاره تعريف ده. د رسمونو څخه ارزښت ډېرئ وښايئ.



پوښتنې

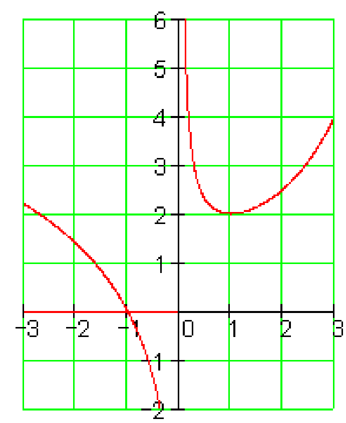
توابع VI

لومړی: د تابع$f(x)$ ارزښتښت د جبشميري سره وشميرئ

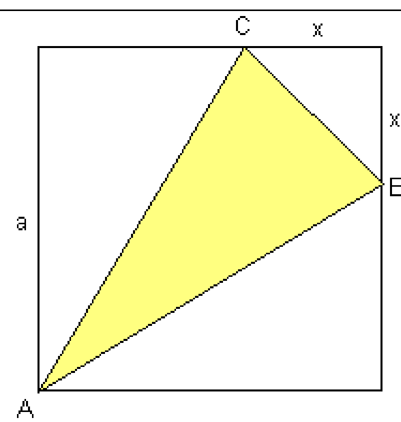
سرلیک

$$f(x)=\frac{1}{10}x^4-\frac{2}{5}x^3-2$$ د D=R سره.

دويم:

	دويم: ترڅنګ کړه د تابع f(x) ګراف دی؟ ايا f(x) د ټولو x€R لپاره تعريف دی؟ د x د کومو ارزښتونو لپاره تابع ارزښت - له 2 لوي دی؟ - له صفرکوچنی دی؟

دريم:

	يوه مربع يا خلوري د اړخ اوږدوالي a = 5 cm سره ورکړ شوي ده. د مثلث يا درېګوديABC د سطحي ترم A(x) وټاکئ

څلورم: د يوه مالک ټول لګښت K د يوه لاسته راوړني سټ x په واکوالي کي په سټ واحد يا ډېرئ يوون (ME) د ترم له لاري ليکل کيږي

$$K(x)=0{,}01x^3-x^2+100x+720$$

الف- د x -ارزښتونو لپاره تر 100 پورې ټول لګښت وشمیرئ. یو مناسبتلنلارې ډول وټاکئ او د ټول لګښت لیدخیره رسم کړئ.

ب- د هر سټ – یا ډېرې واحد خرڅلاو99 پیسپواحده دی. لاس ته راونې (د پیسو ځومره دي، که x(ME د سټ واحد) په بازار کې خرڅ شي؟

په لرلې کواوردیناتسیستم کې د خرڅلاو(پیسو) د لیدلو ځیره و کاږئ.

پ-د لیدخیرې څخه ولولئ:

په کومه ورشو یا ساحه کې ګټه منځ ته راځي؟ د کوم x –ارزښتونو سره به خورا لویه ګټه لاس ته راشي؟

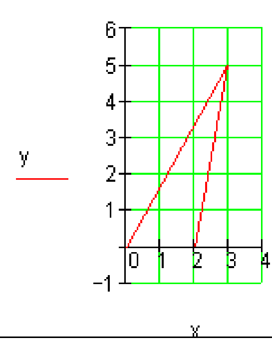
پوښتنې

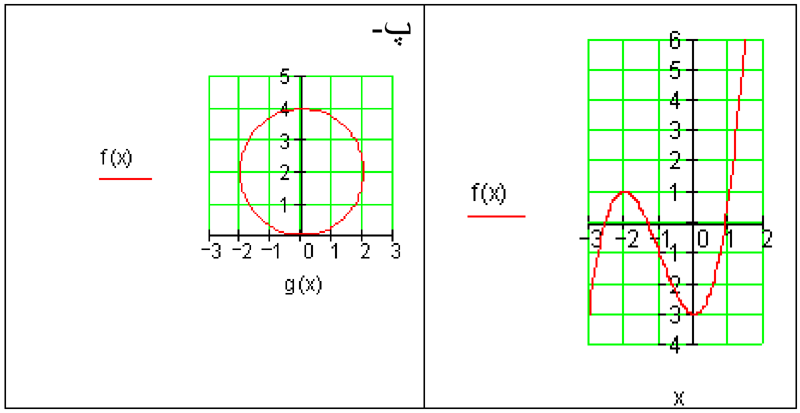
توابعVII

لومړی: توابع $f(x)$ ورکړشوي دي. یو مناسب ارزښت جدول جوړ کړئ. له دې سره اړوند ګراف وکاږئ.

الف- $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$ ب- $f(x) = x^2$

دویم: کوم ګراف په تابع $f : x \to f(x)$ پورې اړه لري؟ دلیل یې راوړئ.

الف-	ب –
	



دريم:د شميرپو هنيز لنډ ليکدود سره يې فرمولبندي کړئ.

الف- په ځای3 کې تابع $f(x)$ تابعارزښت 12 لري.

ب- د تابع $f(x)$ له لاري د x -ارزښت سره عدد 4- تنظيمېږي.

پ-ټکی $P (2 | 5)$ د $f(x)$ په ليدخيره باندې پروت دی.

ت- $f(x)$ د کومو ابسخيزا يا پراته ارزښتونو لپاره تابع ارزښت 4 لري.

ټ- د $f(x)$ تابع تابع ارزښت له 7لوی دی د ټول $x \in \mathbb{R}$. لپاره.

ث- تابع $f(x)$ د 17- ځای کې تا بع ارزښت 9 نيسي.

ج- توابع f او g د په ځای کې همغه ارزښت غوره کوي.

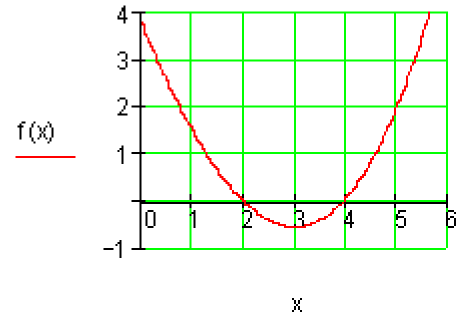
چ- په کوم ځای x کې fد تابعارزښت gد له تابعارزښت څخه کوچنی دی؟

ح- د تابع $f(x)$ د تابع ارزښت برابر 5 دی د ټولو $x \in \mathbb{R}$. لپاره.

خ- د يوه کړې ټکي K_f کواورديناتونه سره سر خوري.

څلورم: د يوه نظم لپاره د يوې روځنۍ بيلګې نوم واخلئ، چې هغه تابع وي يا تابع نه وي.

پنځم: دا ترڅنګ کره يا منحني د تابع $f(x)$ ګراف دی. له ګراف څخه ولولئ.



الف-د تابع ارزښت په ځای 5 کې

ب- یو ځای د $f(x)$ سره.

پ-په کوم ورشو $f(x) > 0$ باور

لري؟

شپږم:کوم ارزښت جدول یوه تابع پورې اړه لري؟

الف -

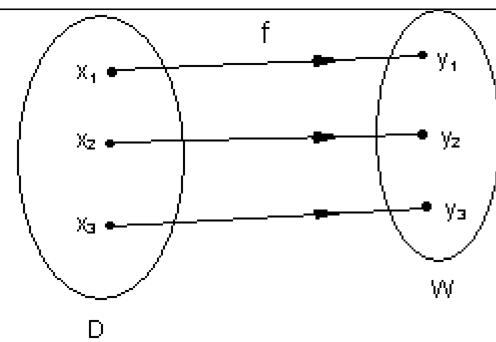
x	-1	0	1	2	3
y	4	0	-2	4	4

ب -

x	-1	0	3	3	4
y	8	7	2	4	5

توابع او په څټ - یا معکوس توابع

تولیز:



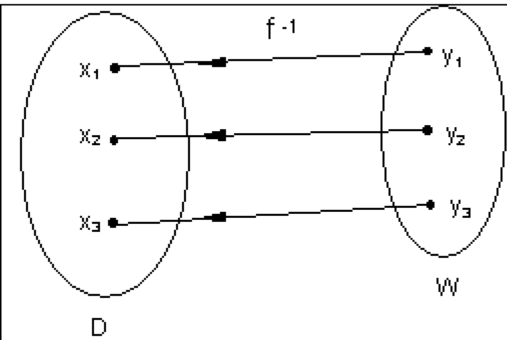
د f د نظم قانون د تابع مساوات له لارې افاده کیږي، لکه د بیلګې په توګه

$$f = \{(x \mid y) \mid y = f(x) = 2x + 3\}_{D \times W}$$

یا په لنډه توګه: $y=f(x)=2x+3$

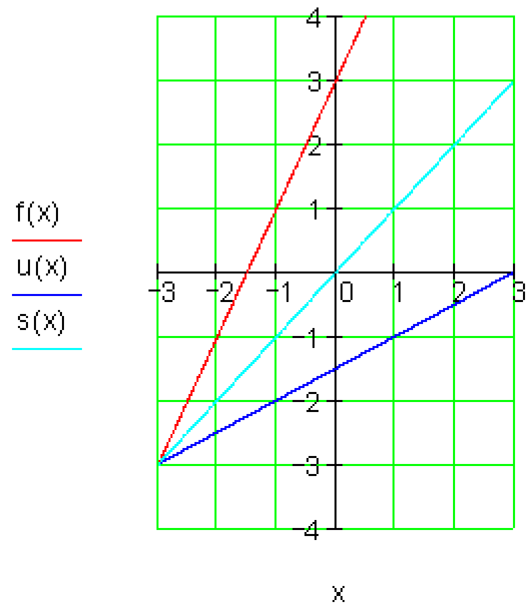
د یوه تابع د یو-یوا ځنوالي د f^{-1} یو-یواځنی نظم هم شتون لري.
دا نظم معکوس تابع یا په څټ تابع یا انورز inverse تابع بلل کیږي، لکه د بیلګې په توګه.

$$y = f^{-1}(x) = \frac{x}{2} - \frac{3}{2}$$



د کرښیز توابعو معکوس توابع

تابع: $y = f(x) = 2x + 3$ $x = f(y) \Leftrightarrow x = 2y + 3$ $\Leftrightarrow 2y + 3 = x \mid -3$ $\Leftrightarrow 2y = x - 3 \mid : 2$ $\Leftrightarrow y = \frac{x}{2} - \frac{3}{2}$ معکوس تابع: $y = f^{-1}(x) = \frac{x}{2} - \frac{3}{2}$	تابع $y = f(x) = 2x + 3$ ورکړ شوی غوښتنه معکوس تابع f^{-1} او د هغه ګراف ده تابع **f** جګوالی $m = 2$ لري. دا د خپل ګراف سره پروت محور په ټکي $P_x(-1,5 \mid 0)$ کې غوځوي او ولار محور یا اوردینات په ټکي $P_y(0 \mid 3)$ کې غوځوي. د هغه ګراف کرښه ده. که د تابع اووښتوني یا متحولي یو له بل سره بدلې شي او د y پسې په ورته توګه بڼه بدلون منځ ته راشي، نو سړی معکوس تابع لاس ته راوړي.

د معکوس تابع ګراف د تابع د ګراف هنداروته(انعکاس) ده په 45^0- محور باندې. په تولیزه توګه باور لري: تابع $y = f(x) = a_1 x + a_0$ معکوس تابع $y = f^{-1}(x) = \frac{1}{a_1}x + \frac{a_0}{a_1}$ د ساده والي له امله معکوس تابع u(x) بولو.	

مربع توابع

خلورى- يا مربع توابعو ته ننوتنه يا پيل

ننوتنه يا پيل

هرڅوک چې موټر زده کوي، بايد پوه وي، چې د بريک په وخت کې په پاخه سرک د بريک نيولو او د موټر دريدځای په منځ کې لار يا واټن څنګه سره يوځای کیدی شي يا جمعه کیدی شي..

د لاندې موټر قانون سره سم له چټکتیا(سرعت) v په km/h (کیلومتر په ساعت) د عکس العمل لار r د بریک لار b په متر شمیرلکیدی شي.

پام (خبراوسه) : د بیلګې په توګه د المان پخوانی او له څخه نوي قانون.

له څخه د تملار په وچ اسفالت شوي سرک د پل بریکلار سره شمیرل کیږي.

د بریک لار $b = \left(\frac{v}{10}\right)^2$ د عکس العمل لار $r = \frac{v}{10} \cdot 3$

یادونه: د څه وخت را په دې خوا په جرمني کې د بریکلار لپاره دا فرمول باور لري.:

$$b = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{v}{10}\right)^2$$

د بریک همدا ډول د عکس العمل لار په متر (m) راوځي، که چټکتیا یا سرعت په کیلومتر په ساعت (km/h)وي.

الف – د دواړو حالتونو لپاره د $s = f(v)$ تابع مساوات و ټاکی ، د کوم لپاره چې په هره تللي چټکتیا یا سرعت تملار شمیرل کیدی شي.

ب - د تابع مشاوات $s = f(v)$ د دواړو حالتونو لپاره د وهل شوی سرعت $v = 0$, $10, 20, 30, \dots 100$ km/h سره د ه یوه د ودرېد - یا توقف لار چې شمیرل کیږي.

پ : په کواوردیناتسیستم کې یا د وضعیه قیمتسیستم کې ګراف رسم کړی.

ت: ټوله لاس ته راوړې نتیجه تشریح کړی.

Problemlösung: د پرابلم حل:

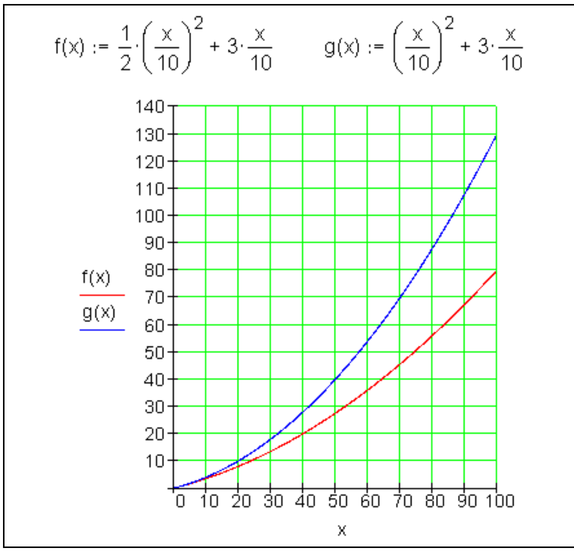
الف: د تابع مساوات:

زوړ قانون:	$f(v) = \left(\frac{v}{10}\right)^2 + \frac{v}{10} \cdot 3 = \frac{1}{100}v^2 + \frac{3}{10}v$
نوی قانون:	$f(v) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{v}{10}\right)^2 + \frac{v}{10} \cdot 3 = \frac{1}{200}v^2 + \frac{3}{10}v$

ب - : ارزښتجدول(په کيلو متر په ساعت کې)

v (in km/h)	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	
f(v) (in m)	0	4	10	18	28	40	54	70	88	108	130	alt
f(v) (in m)	0	3,5	8	13,5	20	27,5	36	45,5	56	67,5	80	neu

پ - ګرافونه



د x محور هر ه وهل شوې لار په km/h په ګوته کوي.

د y - محور د هر همغه د توقفلار په m په ګوته کوي.

ت – کومنتار

د نوي نظم وروسته د د چټکتيا(سرعت) زياتيدني توپير تل زياتيږي. د 50 km/h چټکتيا سره نوی د تم کيدلو لار 27,5 m ده، دا د زړې لارm 40 نږدې 69% ده. په 100 km/h دا نوې لار نوره فقط ده، دا د زړې   130 m لارېا نږدې 61% ده. د بريک نيولو لار کمېدنه د بريک ښه کيدو(ABS) سره موخه وره ده.

د تابع مساوات د ټيک پامورتيا او ګراف له امله موږ کره کوو، چې دا نه کرښيز مساوات دی او نه يوه کرښه. انځوروي.

د تابع مساوات لاندې بڼه لري:

$$f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$$

داسې تابع مربع تابع بولو او يا هم د2 –مې درجې ټول(تام) راشنل توابع.

ګرافونه يې پارابول بلل کيږي.

تمرينونه:

د لاندې پارابولونو ګرافونه وکاږۍ.

د دې لپاره ارزښت جدول وليکۍ

اول - $f(x) = x^2 + 4x - 5$ دويم $f(x) = x^2 + 2x + 5$

دريم - $f(x) = -x^2 + x + 6$ څلورم - $f(x) = x^2 - x$

پنځم - $f(x) = x^2 - \frac{1}{9}$ شپږم - $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 3$

اوم - $f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$ اتم - $f(x) = -2x^2 + 8x - 11$

نهم م- $f(x) = 3x^2 - 3x$ لسم - $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{11}{2}x + 10$

نورمال پارابل، بنه ځل يا - ضريب او راکښنې

د کار قرارداد:

د a2 د مختلفو ارزښتونو لپاره تابع $f(x) = a_2x^2$ وخيرۍ او ګراف په وضعيه قيمت سيستم کې وکاږۍ:

$$f_1(x) = x^2 \quad f_2(x) = \frac{3}{2}x^2 \quad f_3(x) = \frac{1}{4}x^2 \quad f_4(x) = -\frac{1}{4}x^2$$

د انځور شوي پارابل تابع مساوات یو له بل د x^2 ضریب a_2 له امله توپیروي.

$$f_1(x) = x^2$$

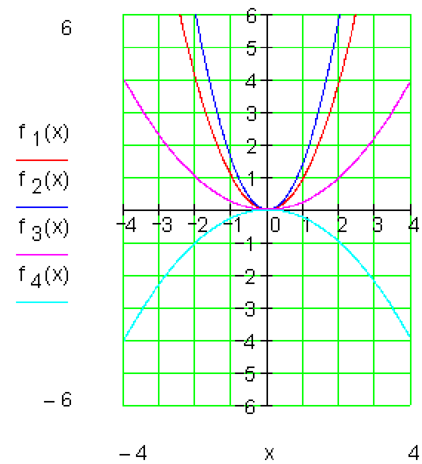
$$f_2(x) = \frac{3}{2}x^2$$

$$f_3(x) = \frac{1}{4}x^2$$

$$f_4(x) = -\frac{1}{4}x^2$$

دا ضریب a_2 د پارابل د بنې لپاره مسول او له دې امله د بنې ضریب بلل کیږي.

د تقاطع ټکی S وضعیه قیمتونه $S\ (0 \mid 0)$ لري.

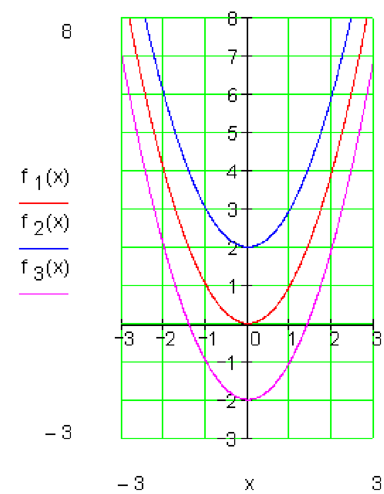


بڼه ضریب د پارابل قواري یا شکل ته څنګه تغیرورکوي؟

ضریب بنې		د پارابول په نخښه ونه
$a = 1$	$\rightarrow$	نورمال پارابو ل
$a > 1$	$\rightarrow$	غزېدلی پارابول
$0 < a < 1$	$\rightarrow$	کېکاږلی پارابول
$a = -1$	$\rightarrow$	په x محور هنداره شوی نورمال پارابول
$a < -1$	$\rightarrow$	غزېدلی پارابول، په x -محور هنداره شوی
$-1 < a < 0$	$\rightarrow$	کیکاږلی پاربول، په x –محور هنداره شوی

د کار قرارداد:

د a_0 د مختلفو ارزښتونو لپاره د $f(x) = x^2 + a_n$ تابع مطالع کړی او په وضعیه قیمتسیستم کې یې ګراف رسم کړی: $f_1(x) = x^2$ $f_2(x) = x^2 + 2$ $f_3(x) = x^2 - 2$

دا یو راکښلی نورمال پارابل دی، چې ککرئ ټکی(د ر آس نقطه) S دa_0 په واحدونو راکښل شوې ده. $f_1(x) = x^2$ $f_2(x) = x^2 + 2$ $f_3(x) = x^2 - 2$ راکښنه دy محور په اوږدوالي باندې صورت نیسي ، چېرته چې د راکښنې لور د a_0د مخنخښې له لارې ټاکل کیدی شي. د تقاطع ټکی S کواوردینات $S (0 \mid a_0)$ لري. $f_1(x) = x^2$ $f_2(x) = x^2 + 2$ $f_3(x) = x^2 - 2$	

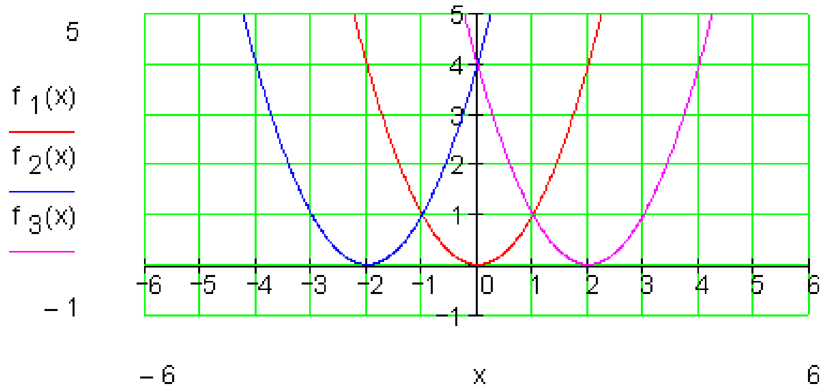
د کار ورکوني قرارداد:

د$f(x) = (x+u)^2$ تابع د u د مختلفو ارزښتونو لپاره راکښنه وڅیړی او ګراف یې په وضعیه قیمتسیستم کې x رسم کړی

$f_1(x) = x^2$ $f_2(x) = (x + 2)^2$ $f_3(x) = (x - 2)^2$

د ارزښت جدول:

f_1	x	−2	−1	0	1	2	f_2	x	−4	−3	−2	−1	0	f_3	x	0	1	2	3	4
	y	4	1	0	1	4		y	4	1	0	1	4		y	4	1	0	1	4

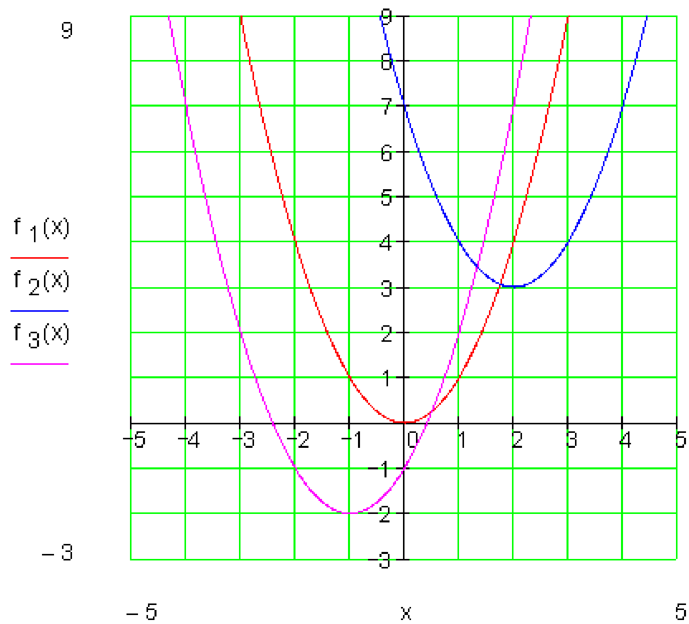


د ا یو راکښلی (چې ځای ته یې تغیر ورکړ شوی وي) نورمال پارابول دی، چې ککرۍ ټکی(د رأس نقطه) S یې د u په واحدونو(یوونونو) دx په محور راکښل یا کښول شوې ده. دS غوڅتکی(نقطه تقاطع) یې کواوردینات (0 | S(-u لري.

کیڼې لور ته ځرخون یا ځرخول، ککرۍ ټکیS په u واحدونو یا یوونوو د پیل یا سرچینې کیڼ لورت پروت دی.	u>0 =>
ښی ځرخون یا ځرخول، ککرټکی S په u واحدونو د پیل یا سرچینې ښيَ لورته پروت دی.	u<0 =>

د کار (ورکوني) قرارداد: د u او a0 دمختلفو ارزښتونو لپاره تابع f(x) = (x+u)² + a0 وخیرئ او ګراف یې په یوه کواوردینات(پروت ولاړ) سیستم کې انځور کړئ.

$$f_1(x) = x^2 \qquad f_2(x) = (x-2)^2 + 3 \qquad f_3(x) = (x+1)^2 - 2$$



د f_2 (x) ګراف بېرته يو نورمال پارابول دی، چې ککرئ ټکی S يې په دوه واحده ښی لور ته او په درې واحده پورته لور ته راکښلی دی.

د f_3 (x) ګراف هم يو نورمال پارابول دی، چې ککرټکی S (د رأسټکی) په يوه واحد(يوون) کيڼ او په درې واحده لاندې لور ته کښول شوی دی.

د $f(x) = (x + u)^2 + a_0$ ډول تابع د مربع تابع د ککرئ ټکي(رأس ټکي) بڼي تابع بلل کيږي.

د تابع ګراف نورمال پاربول دی، چې په u ارزښت دx محور په لور او په a_0 د yمحور په لور راکښل شوی دی.

که ککرټکی د $S(x_s \mid y_s)$ سره په نخښه کړو، نو د ککرټکي بڼي مربع تابع په دې ډول ده:

$$f(x) = (x - x_s)^2 + y_s$$

لنډه بڼه:	$S(x_s \mid y_s) \Leftrightarrow f(x) = (x - x_s)^2 + y_s$
بېلګه:	$S(3 \mid -1) \Leftrightarrow f(x) = (x-3)^2 - 1$

تر اوسه مو فقط نورمال پارابول راکښلي (را کش شوی) وو.

همدا يا برابره راکښنه کيدی شي د يوه په خوښه پارابول سره سرته ورسول شي.

دلته دې بيا فاکتور a_2 په پام کې ونيول شي.

په ټوليزه توګه باور لري:

$\text{Ist } f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ د يوه نورمال پارابول تابع (بلوان) دی، چې ککرتکی (د رأس ټکی) $S(x_s \mid y_s)$ لری، نو $f(x) = a_2(x - x_s)^2 + y_s$ د ککرتکي د تابع مساوات دي.

د خلوری تکميلوني له لارې د رآس ټکي(ککری ټکي) ټاکل

مورږ پوهيږو چې صدق کوي:

$$f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0 \Leftrightarrow a_2(x - x_s)^2 + y_s \Rightarrow S(x_s \mid y_s)$$

په ککرټکي کې د ټوليز تابع مساواتو د ترم تابع له لارې کيدی شي د يوه پارابول ککرټکی (د ککری ټکی) وشميرل شي.

بيلګه:

$F(x) = 3x^2 - 12x + 15$ دي په ککرئ ټکي مساوات واړول شي.

لوړمی پل(قدم) : د x^2 تر مخه ضريب دې له نوکانو راوه وېستل شي.

سرلیک

$\Rightarrow f(x) = 3[x^2-4x+5]$

دویم پل : مربع تکمیلونه [ ] او بنه بدلون

$\Rightarrow f(x) = 3.[x^2 - 4x +(2)^2 -(2)^2 +5] = 3.[(x-2)^2+1]=3.(x-2)^2 +3$
$\Rightarrow S(2;3)$

بیلگه:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 4 = \frac{1}{2}\left[x^2 - 6x + 8\right] = \frac{1}{2}\left[x^2 - 6x + 3^2 - 3^2 + 8\right]$$

$$\Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{2}\left[(x-3)^2 - 1\right] = \frac{1}{2}(x-3)^2 - \frac{1}{2} \Rightarrow \underline{\underline{S\left(3 \mid -\frac{1}{2}\right)}}$$

بیلگه:

$$f(x) = -\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{4} = -\frac{1}{3}\left[x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{9}{4}\right] = -\frac{1}{3}\left[x^2 + \frac{3}{2}x + \left(\frac{3}{4}\right)^2 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{9}{4}\right]$$

$$\Rightarrow f(x) = -\frac{1}{3}\left[\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{9}{16} + \frac{36}{16}\right] = -\frac{1}{3}\left[\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{27}{16}\right] = -\frac{1}{3}\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{9}{16}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{S\left(-\frac{3}{4} \mid -\frac{9}{16}\right)}}$$

تمرینونه: د مربع تکمیلوني له لارې د رآس ټکي(ککرۍ ټکي) ټاکل

د یوه پارابل تابع مساوات ورکړشوي دي(د دویمې درجې ټول راشنل تابع). د لاندې بارابولونو لپاره رآسټکو بڼه او رآسټکي پیدا کړی.

ګرافونه یې وکاږی:

لومړی: $f(x) = x^2 + 2x + 5$ دویم: $f(x) = x^2 + 4x + 1$

دریم: $f(x) = x^2 - 4x + 1$ څلورم: $f(x) = x^2 - 3x + 3,5$

پنځم: $f(x) = x^2 + x - 3$ شپږم: $f(x) = -x^2 + 2x + 1$

اووم: $f(x) = -x^2 + 5x - 5$ اتم: $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + 2$

نهم: $f(x) = -\frac{3}{4}x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{1}{6}$ لسم: $f(x) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$

بیلګه 1 :

د ټول راشنل تابع ګراف چې رسم کړای شو،په زیاتو حالتونو کې اړیند دی، چې ارزښتجدول وپیژنو. د دې لپاره جبشمیري له لارې کیدی شي. خو دا هم تل اړیین دی.

یو ه ساده بیلګه بې له جبشمیري څخه.

تابع مساوات : $f(x) = x^2 - 4x + 3$

موږ د متحولې $x = 0$ څخه پیل کوو

$$x=0: f(0)=0^2-4\cdot0+3=0-0+3=3$$
$$x=1: f(1)=1^2-4\cdot1+3=1-4+3=0$$
$$x=2: f(2)=2^2-4\cdot2+3=4-8+3=-1$$
$$x=3: f(3)=3^2-4\cdot3+3=9-12+3=0$$
$$x=4: f(4)=4^2-4\cdot4+3=16-16+3=3$$
$$x=5: f(5)=5^2-4\cdot5+3=25-20+3=8$$
$$x=6: f(6)=6^2-4\cdot6+3=36-24+3=15$$

تر هغې چې د تابع ارزښت له 10 $\pm$ لوی شي، کېدی شي چې پې کړي.

اوس د تابع ارزښتونه د منفي x ارزښتونو لپاره ټاکل کیږي.

$$x=-1: f(-1)=(-1)^2-4\cdot(-1)+3=1+4+3=8$$
$$x=-2: f(-2)=(-2)^2-4\cdot(-2)+3=4+8+3=15$$

اوس ټول ارزښتونه په یوه جدول کې کښل کیږي.

x	−2	−1	0	1	2	3	4	5	6
f (x)	15	8	3	0	−1	0	3	8	15

اوس له دې ارزښتونو سره کېدی شي د f(x) ګراف رسم شي.

که د رسمولو په وخت کې نور منځ ارزښتونه شته نه وي ، دا بیا پسې شمیرل کېدی شي

د بیلګې په توګه $x = \pm ½$

$$x=-\frac{1}{2}: f\left(-\frac{1}{2}\right)=\left(-\frac{1}{2}\right)^2-4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+3=\frac{1}{4}+4\cdot\frac{1}{2}+3=\frac{1}{4}+2+3=5\frac{1}{4}=5,25$$
$$x=\frac{1}{2}: f\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^2-4\cdot\frac{1}{2}+3=\frac{1}{4}-4\cdot\frac{1}{2}+3=\frac{1}{4}-2+3=1\frac{1}{4}=1,25$$

هر څوک له جبشميري سره بنه بلد نه دی. په دې حالت کې کړی شي دا کسان له شميروني يا کمپيوتر څخه کار واخلي.

په لاندې کې HN د اصلي ګډ مخرج (ماتلاندې) په معنا دی.

يوه غوره بيلګه، چې ځنې برخې يې د جبشميري په مرسته حل شوي دي

د تابع مساوات $f(x)=\frac{4}{5}x^2-\frac{3}{4}x-\frac{7}{2}$

يادونه: په لاندې زيات ځايونه HN راغلي، دا د اصلی مخرج په مانا دي.

موږ د $x=0$ سره پيل کوو

$$x=0: f(0)=\frac{4}{5}\cdot0^2-\frac{3}{4}\cdot0-\frac{7}{2}\ =0-0-\frac{7}{2}=-\frac{7}{2}=-3,5$$
$$x=1: f(1)=\frac{4}{5}\cdot1^2-\frac{3}{4}\cdot1-\frac{7}{2}\ =\frac{4}{5}-\frac{3}{4}-\frac{7}{2}\underset{HN=20}{\equiv}\frac{16}{20}-\frac{15}{20}-\frac{70}{20}=-\frac{69}{20}=-3,45$$
$$x=2: f(2)=\frac{4}{5}\cdot2^2-\frac{3}{4}\cdot2-\frac{7}{2}\ =\frac{16}{5}-\frac{3}{2}-\frac{7}{2}\underset{HN=10}{\equiv}\frac{32}{10}-\frac{15}{10}-\frac{35}{10}=-\frac{18}{10}=-\frac{9}{5}$$
$$=-1,8$$
$$x=3: f(3)=\frac{4}{5}\cdot3^2-\frac{3}{4}\cdot3-\frac{7}{2}\ =\frac{36}{5}-\frac{9}{4}-\frac{7}{2}\underset{HN=20}{\equiv}\frac{144}{20}-\frac{45}{20}-\frac{70}{20}=\frac{29}{20}=1,45$$
$$x=4: f(4)=\frac{4}{5}\cdot4^2-\frac{3}{4}\cdot4-\frac{7}{2}\ =\frac{64}{5}-3-\frac{7}{2}\underset{HN=10}{\equiv}\frac{128}{10}-\frac{30}{10}-\frac{35}{10}=\frac{63}{10}=6,3$$
$$x=5: f(5)=\frac{4}{5}\cdot5^2-\frac{3}{4}\cdot5-\frac{7}{2}\ =20-\frac{15}{4}-\frac{7}{2}\underset{HN=4}{\equiv}\frac{80}{4}-\frac{15}{4}-\frac{14}{4}=\frac{51}{4}=12,75$$

اوس د تابع ارزښتونه د منفي x ارزښتونو لپاره ټاکو.

$$x=-1:\ f(-1)=\frac{4}{5}\cdot(-1)^2-\frac{3}{4}\cdot(-1)-\frac{7}{2}=\frac{4}{5}+\frac{3}{4}-\frac{7}{2}\underset{HN=20}{=}\frac{16}{20}+\frac{15}{20}-\frac{70}{20}=-\frac{39}{20}=-1{,}95$$

$$x=-2:\ f(-2)=\frac{4}{5}\cdot(-2)^2-\frac{3}{4}\cdot(-2)-\frac{7}{2}=\frac{16}{5}+\frac{3}{2}-\frac{7}{2}\underset{HN=10}{=}\frac{32}{10}+\frac{15}{10}-\frac{35}{10}=\frac{12}{10}=\frac{6}{5}=1{,}2$$

$$x=-3:\ f(-3)=\frac{4}{5}\cdot(-3)^2-\frac{3}{4}\cdot(-3)-\frac{7}{2}=\frac{36}{5}+\frac{9}{4}-\frac{7}{2}\underset{HN=20}{=}\frac{144}{20}+\frac{45}{20}-\frac{70}{20}=\frac{119}{20}=5{,}95$$

$$x=-4:\ f(-4)=\frac{4}{5}\cdot(-4)^2-\frac{3}{4}\cdot(-4)-\frac{7}{2}=\frac{64}{5}+3-\frac{7}{2}\underset{HN=10}{=}\frac{128}{10}+\frac{30}{10}-\frac{35}{10}=\frac{123}{10}=12{,}3$$

اوس ټول ارزښتونه په یوه جدول کې لیکل کیږي.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	12,3	5,95	1,2	-1,95	-3,5	-3,45	-1,8	1,45	6,3	12,75

د دې ارزښتونو سره اوس د ګراف کښل کیدی شي.

که د رسمولو په وخت کې نور منځ ارزښتونه شته نه وي ، دا بیا پسي شمیرل کیدی شي

د بیلګې په توګه $x=\pm 5/2$

$$x=-\frac{5}{2}:\ f\left(-\frac{5}{2}\right)=\frac{4}{5}\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{3}{4}\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)-\frac{7}{2}=\frac{4}{5}\cdot\frac{25}{4}+\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{2}-\frac{7}{2}$$
$$=\frac{25}{5}+\frac{15}{8}-\frac{7}{2}=5+\frac{15}{8}-\frac{7}{2}\underset{HN=8}{=}\frac{40}{8}+\frac{15}{8}-\frac{28}{8}=\frac{27}{8}=3{,}375$$

$$x=\frac{5}{2}:\ f\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{4}{5}\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^2-\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{2}-\frac{7}{2}=\frac{4}{5}\cdot\frac{25}{4}-\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{2}-\frac{7}{2}$$
$$=\frac{25}{5}-\frac{15}{8}-\frac{7}{2}=5-\frac{15}{8}-\frac{7}{2}\underset{HN=8}{=}\frac{40}{8}-\frac{15}{8}-\frac{28}{8}=-\frac{3}{8}=-0{,}375$$

یادونه: په پورته کې (HN(Hauptnenner داصلې مخرج(ماتلاندې) یا مخرج مشترک په معنا دی.

د دې لپاره چې د یوه ټول ریښتوني یا تام راشنل تابع ګراف انځور کړای شو، په زیاتو حالتونو کې اړیین دی، چې ارزښت جدول وکاږو. د دې لپاره یو جبشمیروني ته اړتیا لرو.

یو ه ساده بیلګه بې له جبشمیري څخه.

تابع مساوات : $f(x) = x^2 - 4x + 3$

موږ د تحولې $x = 0$ څخه پیل کوو

$$
\begin{aligned}
x = 0 &: f(0) = 0^2 - 4 \cdot 0 + 3 = 0 - 0 + 3 = 3 \\
x = 1 &: f(1) = 1^2 - 4 \cdot 1 + 3 = 1 - 4 + 3 = 0 \\
x = 2 &: f(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 + 3 = 4 - 8 + 3 = -1 \\
x = 3 &: f(3) = 3^2 - 4 \cdot 3 + 3 = 9 - 12 + 3 = 0 \\
x = 4 &: f(4) = 4^2 - 4 \cdot 4 + 3 = 16 - 16 + 3 = 3 \\
x = 5 &: f(5) = 5^2 - 4 \cdot 5 + 3 = 25 - 20 + 3 = 8 \\
x = 6 &: f(6) = 6^2 - 4 \cdot 6 + 3 = 36 - 24 + 3 = 15
\end{aligned}
$$

تر هغې چې د تابع ارزښت له ± 10 لوی شي، کېدی شي چې پع کړي.

اوس د تابع ارزښتونه د منفي x ارزښتونو لپاره ټاکل کيږي.

$$
\begin{aligned}
x = -1 &: f(-1) = (-1)^2 - 4 \cdot (-1) + 3 = 1 + 4 + 3 = 8 \\
x = -2 &: f(-2) = (-2)^2 - 4 \cdot (-2) + 3 = 4 + 8 + 3 = 15
\end{aligned}
$$

اوس ټول ارزښتونه په یوه جدول کې کښل کيږي.

x	−2	−1	0	1	2	3	4	5	6
f(x)	15	8	3	0	−1	0	3	8	15

اوس له دې ارزښتونو سره کېدی شي د $f(x)$ ګراف رسم شي.

که د رسمولو په وخت کې نور منځ ارزښتونه شته نه وي ، دا بيا پسې شمېرل کيدی شي

د بېلګې په توګه $x = \pm ½$

$$x = -\frac{1}{2} : f\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) + 3 = \frac{1}{4} + 4\cdot\frac{1}{2} + 3 = \frac{1}{4} + 2 + 3 = 5\frac{1}{4} = 5{,}25$$

$$x = \frac{1}{2} : f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 4\cdot\frac{1}{2} + 3 = \frac{1}{4} - 4\cdot\frac{1}{2} + 3 = \frac{1}{4} - 2 + 3 = 1\frac{1}{4} = 1{,}25$$

هر څوک له جبشمېري سره ښه بلد نه دی. په دې حالت کې کړی شي دا کسان له شميروني يا کمپيوتر څخه کار واخلي.

يوه غوره بيلګه، چې ځنې برخې يې د جبشميري په مرسته حل شوي دي:

د تابع مساوات $f(x) = \frac{4}{5}x^2 - \frac{3}{4}x - \frac{7}{2}$

موږ د $x = 0$ سره بيل کوو

$$x = 0 : f(0) = \frac{4}{5}\cdot 0^2 - \frac{3}{4}\cdot 0 - \frac{7}{2} \quad = 0 - 0 - \frac{7}{2} = -\frac{7}{2} = -3{,}5$$

$$x = 1 : f(1) = \frac{4}{5}\cdot 1^2 - \frac{3}{4}\cdot 1 - \frac{7}{2} \quad = \frac{4}{5} - \frac{3}{4} - \frac{7}{2} \underset{HN=20}{=} \frac{16}{20} - \frac{15}{20} - \frac{70}{20} = -\frac{69}{20} = -3{,}45$$

$$x = 2 : f(2) = \frac{4}{5}\cdot 2^2 - \frac{3}{4}\cdot 2 - \frac{7}{2} \quad = \frac{16}{5} - \frac{3}{2} - \frac{7}{2} \underset{HN=10}{=} \frac{32}{10} - \frac{15}{10} - \frac{35}{10} = -\frac{18}{10} = -\frac{9}{5} = -1{,}8$$

$$x = 3 : f(3) = \frac{4}{5}\cdot 3^2 - \frac{3}{4}\cdot 3 - \frac{7}{2} \quad = \frac{36}{5} - \frac{9}{4} - \frac{7}{2} \underset{HN=20}{=} \frac{144}{20} - \frac{45}{20} - \frac{70}{20} = \frac{29}{20} = 1{,}45$$

$$x = 4 : f(4) = \frac{4}{5}\cdot 4^2 - \frac{3}{4}\cdot 4 - \frac{7}{2} \quad = \frac{64}{5} - 3 - \frac{7}{2} \underset{HN=10}{=} \frac{128}{10} - \frac{30}{10} - \frac{35}{10} = \frac{63}{10} = 6{,}3$$

$$x = 5 : f(5) = \frac{4}{5}\cdot 5^2 - \frac{3}{4}\cdot 5 - \frac{7}{2} \quad = 20 - \frac{15}{4} - \frac{7}{2} \underset{HN=4}{=} \frac{80}{4} - \frac{15}{4} - \frac{14}{4} = \frac{51}{4} = 12{,}75$$

اوس د تابع ارزښتونه د منفي x ارزښتونو لپاره ټاکو.

$$x=-1:\ f(-1)=\frac{4}{5}\cdot(-1)^2-\frac{3}{4}\cdot(-1)-\frac{7}{2}=\frac{4}{5}+\frac{3}{4}-\frac{7}{2}\underset{HN=20}{\equiv}\frac{16}{20}+\frac{15}{20}-\frac{70}{20}=-\frac{39}{20}=-1{,}95$$

$$x=-2:\ f(-2)=\frac{4}{5}\cdot(-2)^2-\frac{3}{4}\cdot(-2)-\frac{7}{2}=\frac{16}{5}+\frac{3}{2}-\frac{7}{2}\underset{HN=10}{\equiv}\frac{32}{10}+\frac{15}{10}-\frac{35}{10}=\frac{12}{10}=\frac{6}{5}=1{,}2$$

$$x=-3:\ f(-3)=\frac{4}{5}\cdot(-3)^2-\frac{3}{4}\cdot(-3)-\frac{7}{2}=\frac{36}{5}+\frac{9}{4}-\frac{7}{2}\underset{HN=20}{\equiv}\frac{144}{20}+\frac{45}{20}-\frac{70}{20}=\frac{119}{20}=5{,}95$$

$$x=-4:\ f(-4)=\frac{4}{5}\cdot(-4)^2-\frac{3}{4}\cdot(-4)-\frac{7}{2}=\frac{64}{5}+3-\frac{7}{2}\underset{HN=10}{\equiv}\frac{128}{10}+\frac{30}{10}-\frac{35}{10}=\frac{123}{10}=12{,}3$$

اوس ټول ارزښتونه په یوه جدول کې لیکل کیږي.

x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5
f (x)	12,3	5,95	1,2	-1,95	-3,5	-3,45	-1,8	1,45	6,3	12,75

د دې ارزښتونو سره اوس د ګراف کښل کیدی شي.

که د رسمولو په وخت کې نور منځ ارزښتونه شته نه وي ، دا بیا پسې شمیرل کیدی شي

د بیلګې په توګه $x=\pm 5/2$

$$x=-\frac{5}{2}:\ f\left(-\frac{5}{2}\right)=\frac{4}{5}\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{3}{4}\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)-\frac{7}{2}=\frac{4}{5}\cdot\frac{25}{4}+\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{2}-\frac{7}{2}$$
$$=\frac{25}{5}+\frac{15}{8}-\frac{7}{2}=5+\frac{15}{8}-\frac{7}{2}\underset{HN=8}{\equiv}\frac{40}{8}+\frac{15}{8}-\frac{28}{8}=\frac{27}{8}=3{,}375$$

$$x=\frac{5}{2}:\ f\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{4}{5}\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^2-\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{2}-\frac{7}{2}=\frac{4}{5}\cdot\frac{25}{4}-\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{2}-\frac{7}{2}$$
$$=\frac{25}{5}-\frac{15}{8}-\frac{7}{2}=5-\frac{15}{8}-\frac{7}{2}\underset{HN=8}{\equiv}\frac{40}{8}-\frac{15}{8}-\frac{28}{8}=-\frac{3}{8}=-0{,}375$$

پوښتني

بنسټونه مربع توابع II

لومړی ـ د لاندې پارابولونو د تابع مساوات ورکړی:

الف ـ $f(x)=x^2-4x+2$ ب ـ $f(x)=x^2+4x+2$

پ ـ $f(x)=-x^2-4x+3$ ت ـ $f(x)=-x^2+8x-9$

ټ ـ $f(x)=\frac{1}{2}x^2-4x+5$ ث ـ $f(x)=-\frac{1}{2}x^2-2x+6$

ج ـ $f(x)=\frac{1}{3}x^2-\frac{2}{3}x-2$ چ ـ $f(x)=-\frac{2}{3}x^2+\frac{3}{4}x+6$

ح ـ $f(x)=\frac{3}{4}x^2+\frac{1}{4}x-7$ خ ـ $f(x)=\frac{4}{5}x^2+\frac{3}{4}x-\frac{7}{2}$

(۱) د ککرۍ ټکي بڼه او ککرۍ ټکي وټاکی.

(۲) د محورونو غوڅټکي وشمیری.

(۳) پل په پل تشریح کړی، چې f(x) د نورمال پارابول حخه څنګه منځ ته راځي او دا څنګه واز دی.

(۴) په یوه مناسب پروتولاړسیستم کې د f(x) ګراف وکاږی

دویم – سړی کړی شي د نورمال پارابول څخه هر په خوښه پارابول د د غوڅټکي د راکښني له لارې او د پرسپدني یا غزوني له لارې منځ ته اوړي. که دا کښته لور ته واز وي، نو دا د x محور باندې هنداره کیږي یا منعکس کیږي.

د یوه پارابول په هکله لاندې ټکي پیژنو:

د y په لور راکښنه یا بدلون	د x په لور راکښنه یا ځای بدلون	Formfaktor بڼه ضریب	
په 2 واحدونو کښنه لور ته	په 2 واحدونو ښي لورته	$a_2 = 1$	a)
په 4 واحدونو پورته لور ته	په 3 واحدونو کیڼ لورته	$a_2 = -1$	b)
په 4 واحدونو کښته لور ته	په 2 واحدونو کیڼ لورته	$a_2 = \frac{1}{2}$	c)
په 5 واحدونو پورته لور ته	په 1 واحد ښي لورته	$a_2 = -2$	d)
په 3 واحدونو پورته لور ته	په 4 واحدونو کیڼ لورته	$a_2 = -\frac{1}{4}$	e)
په 6 واحدونو کښنه لور ته	په 2,5 واحدونو ښي لورته	$a_2 = \frac{3}{2}$	f)
په 3 واحدونو پورته لور ته	په 3 واحدونو کیڼ لورته	$a_2 = -\frac{3}{4}$	g)
په 4,5 واحدونو کښنه لور ته	په 3,5 واحدونو ښي لورته	$a_2 = 2$	h)
په 3 واحدونو یا یوونونو کښنه لور ته	په 2 واحدونو ښي لورته	$a_2 = \frac{1}{3}$	i)
په3 واحدونو پورته لور ته		$a_2 = -\frac{2}{3}$	j)

په 4 واحدونو ښي لورته

(۱) د ککرئ ټکي ښه او ککرئ ټکي وټاکی.

(۲) د محورونو غوځېټکي وشميری.

(۳) د تابع مساوات په پولينوم بڼه $f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$? ځنګه دي؟

(۴) په يو مناسب کواوردينات سيسم کې د $f(x)$ ګراف وکاږی.

پوښتني

د مربع توابعو ښستيونه IV

لومړی:

تابع $f(x)$ ورکړ شوی دی. د شمېرنې له لارې وښايی، چې ګراف تابع په x محور کې لمسوي. ګراف وکاږی.

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{9}{8} \quad x \in \mathbb{R}$$

دويم: د تابع مساوات$f(x)$ د محور غوځېټکي وشميری، او ککری ټکي. ګراف يې رسم کړی.

الف- $f(x) = -\frac{1}{8}x^2 + \frac{3}{4}x$ ب - $f(x) = -\frac{1}{2}(x-3)(x+2)$ پ- $f(x) = x^2 + 4x + 1$

ت - $f(x) = -0,25\left(4x^2 + 12x + 9\right)$ ټ _ $f(x) = 3x(1-x)$ ث-

$$f(x) = \frac{1}{3}x^2 - 2x + \frac{5}{3}$$

دريم: د$U = 18$ cm محيط سره کوم مستطيل(ولاړکوډيز) خورا لويه سطحه لري؟

ځلورم: د توابعو $f(x)$ او $g(x)$ ګرافونه چیرته د x محور غوڅوي؟ ککرۍ چیرته پرتي دي؟ د دواړو ګرافونو ترمنځ کومې اړیکې پرتې دي؟ د ارزښت جدول په مرسته پوښتنې ځواب کړئ.

الف –

x	–3	–2	–1	0	1	2
f(x)	–3,5	0,5	2,5	2,5	0,5	–3,5
g(x)	4	0	–2	–2	0	4

ب –

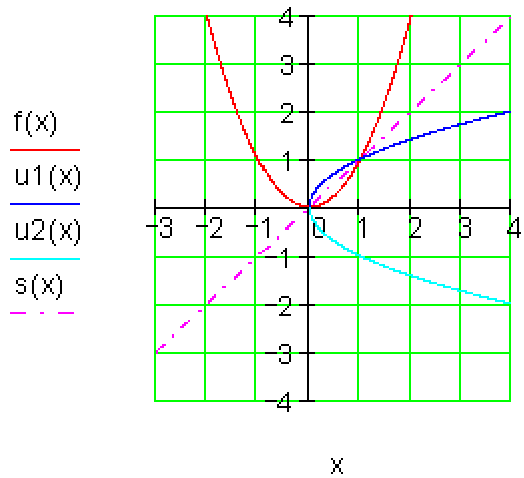
x	–2	–1	0	1	2	3
f(x)	–12	–5	0	3	4	3
g(x)	3,5	0	–2,5	–4	–4,5	–4

پنځم: د اړونده ګراف کوم خویونه د تابع مساوات څخه سیده لوستل کیدی شي؟

$$f(x) = -x^2 - x + 6; \quad g(x) = (2-x)(x+3); \quad h(x) = -(x+0,5)^2 + \frac{25}{4}$$

د مربع-یا څلورئ توابعو معکوس تابع

تلنلار (که غواړې: طریقه یا قانون) همداسې ده لکه پورته په کرښیزو توابعو کې چې وښوول شوه.



$y=(f(x)=x^2$

د متحولو x او y بدلول

$x=f(y)=y^2 \Leftrightarrow y^2=x$

ريښه نيونه:

له دې لاس ته راځي او برعکس

$\Leftrightarrow |y| = \sqrt{x} \Leftrightarrow y = \sqrt{x}$

يا $y = -\sqrt{x}$

نو دوه معکوس توابع شتون لري:

$y = u_1(x) = \sqrt{x}$

او

$y = u_2(x) = -\sqrt{x}$

د معکوس تابع جوړولو سره تعريفورشو محدوده شوه، د دې لپاره چې يواځنی نظم منځ ته راشي

کرښیزبرابرونسیستم د ۲ برابرونونو او ۲ متحولو سره.

داسي سیستم له دوه مساواتو څخه جوړ دی. غوښتونی د دواړو مساواتو ګډ حل دی. مختلفي تلنلارې شته، چې سرې حل ته ورسیږي

په لاندې einsetzen in = په ... کې ایښوول.

د جمعي تلنلار:

مساواتسیستم: (I) $5x - 2y = 1$ (II) $3x + 3y = 9$	د حل پل(قدم) غوښي(قطاع، که قطعه؟) د جمعي تلنلار ته لومړی امکان یا واریانت
(I) $5x - 2y = 1 \mid \cdot 1,5$ (II) $3x + 3y = 9$ (I) $7,5x - 3y = 1,5$ (II) $3x + 3y = 9$	لومړی: مساوات ورته داسي بڼه بدل کړئ، چې ضریبونه (ترمخ عددونه) د yمتحولې تر مخنخښي پورې سره سروخورې.
$\left.\begin{array}{l}\text{(I)}\ 7,5x - 3y = 1,5 \\ \text{(II)}\ 3x + 3y = 9\end{array}\right\} +$ $10,5x = 10,5 \mid : 10,5$ $\Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x = 1}}$	دویم: منځ ته راغلي مساوات سره جمعه کړې او د **x** - متحولې پسې یې حل کړئ
په $3x + 3y = 9$ کې ایښوونه: $x = 1$	دریم: د **x** لپاره میندل شوي ارزښتونه د دواړو څخه په یوه مساوات کې کیږدئ او **y** پسې یې حل کړې.

$3\cdot 1+3y=9$ $\Leftrightarrow 3+3y=9\,\vert -3$ $\Leftrightarrow \quad 3y=6\,\vert :3$ $\Leftrightarrow \quad \underline{\underline{y=2}}$	
$\underline{\underline{L=\{(1\vert 2)\}}}$	خلورم: حلسټ یا حلډېرئ ولیکئ

پنځم:

ازماېښت د اینووني له لارې

$$(I)\quad 5x-2y=1 \Rightarrow 5\cdot 1-2\cdot 2=1 \Leftrightarrow 5-4=1 \Leftrightarrow 1=1 \quad (w)$$

$$(II)\quad 3x+3y=9 \Rightarrow 3\cdot 1+3\cdot 2=9 \Leftrightarrow 3+6=9 \Leftrightarrow 9=9 \quad (w)$$

مساواتسیستم

$$(I)\quad 5x-2y=1$$
$$(II)\quad 3x+3y=9$$

د حل پلونه قدمونه د جمعي تلنلار لپاره

دویم واریانت

لومړی: مساوات داسي ورته بنهبدل کړئ، چي د **x** ضریبونه(ترمخعددونه) تر مخنخښي پورې سره یوغږیز شي.

$$\begin{array}{ll} (I) & 5x-2y=1\,\vert\cdot 3 \\ (II) & 3x+3y=9\,\vert\cdot(-5) \\ \hline (I) & 15x-6y=3 \\ (II) & -15x-15y=-45 \end{array}$$

دویم: منځ ته راغلی مساوات سره جمعه کړئ او متحولې **y** پسې یې حل کړئ.

$$\begin{array}{ll} (I) & 15x-6y=3 \\ (II) & -15x-15y=-45 \end{array}\Bigg\}+$$
$$\overline{\qquad -21y=-42\,\vert :(-21)}$$
$$\Leftrightarrow \quad \underline{\underline{y=2}}$$

دريم: بنې لورته المانې د اينوونې په مانا ده

$y = 2$ eingesetzt in (II): $3x + 3y = 9$

$$3x + 3 \cdot 2 = 9$$
$$\Leftrightarrow 3x + 6 = 9 \mid -6$$
$$\Leftrightarrow 3x = 3 \mid : 3$$
$$\Leftrightarrow \underline{\underline{x = 1}}$$

د x لپاره ميندل شوي ارزښتونه له دې دوه پهيوه مساوت کې کيږدئ او د متحولې x پسې يې حال کړئ.

څلروم: حلستې يا د حلډېرئ وليکئ

$$\underline{\underline{L = \{(1 \mid 2)\}}}$$

پنځم: د اينسوونې له لارې ازماېښت

$$\text{(I)} \quad 5x - 2y = 1 \Rightarrow 5 \cdot 1 - 2 \cdot 2 = 1 \Leftrightarrow 5 - 4 = 1 \Leftrightarrow 1 = 1 \quad (w)$$
$$\text{(II)} \quad 3x + 3y = 9 \Rightarrow 3 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 9 \Leftrightarrow 3 + 6 = 9 \Leftrightarrow 9 = 9 \quad (w)$$

د برابراينوونې تلنلار

د حل پل د برابراينوونې تلنلار ته

واريانت 1

مساواتسيستم

$$\text{(I)} \quad 5x - 2y = 1$$
$$\text{(II)} \quad 3x + 3y = 9$$

$$\begin{array}{lll}
(I) & 5x - 2y = 1 \mid +2y & \\
(II) & 3x + 3y = 9 \mid -3y & \\
\hline
(I) & 5x & = 1 + 2y \mid : 5 \\
(II) & 3x & = 9 - 3y \mid : 3 \\
\hline
(I) & x & = \frac{1+2y}{5} \\
(II) & x & = \frac{9-3y}{3} \\
\hline
(I) & x & = \frac{1+2y}{5} \\
(II) & x & = 3 - y
\end{array}$$

لومړی: دواړه مساوات د اووښتوني يا متحولې **x** پسې حل کيږي.

$$\begin{array}{lll}
& \frac{1+2y}{5} & = 3 - y \mid \cdot 5 \\
\Leftrightarrow & 1 + 2y & = 15 - 5y \mid +5y \\
\Leftrightarrow & 1 + 7y & = 15 \quad \mid -1 \\
\Leftrightarrow & 7y & = 14 \quad \mid : 7 \\
\Leftrightarrow & \underline{\underline{y = 2}} &
\end{array}$$

دويم: د مساوات بني ا ړخونه برابر اينوول کيږي او د متحولې **y** پسې حل کيږي.

دريم: (د کيڼ لور الماني په پښتو: اينسول په ..کې)

y = 2 eingesetzt in (II): $3x + 3y = 9$

$$\begin{array}{ll}
& 3x + 3 \cdot 2 = 9 \\
\Leftrightarrow & 3x + 6 = 9 \mid -6 \\
\Leftrightarrow & 3x = 3 \mid : 3 \\
\Leftrightarrow & \underline{\underline{x = 1}}
\end{array}$$

د **y** ميندل شوی ارزښت د دواړو څخه په يوه وتونمساوات کې اينسوول کيږي، او دا بيا د متحولې **x** پسې حل کيږي.

څلورم: حلسټ يا ـډېرئ وليکئ

$$\underline{\underline{L = \{(1 \mid 2)\}}}$$

پنځم: د ځا په ځای کولو یا ایښوولو له لارې ازماېښت

$$(I)\quad 5x - 2y = 1 \Rightarrow 5\cdot 1 - 2\cdot 2 = 1 \Leftrightarrow 5 - 4 = 1 \Leftrightarrow 1 = 1 \quad (w)$$

$$(II)\quad 3x + 3y = 9 \Rightarrow 3\cdot 1 + 3\cdot 2 = 9 \Leftrightarrow 3 + 6 = 9 \Leftrightarrow 9 = 9 \quad (w)$$

مساواتسیستم

د حل پل د برابرایښوولو له لارې

واریانت 2

$$(I)\quad 5x - 2y = 1$$

$$(II)\quad 3x + 3y = 9$$

$$(I)\quad 5x - 2y = 1 \mid -5x$$

$$(II)\quad 3x + 3y = 9 \mid -3x$$

$$(I)\quad -2y = 1 - 5x \mid : (-2)$$

$$(II)\quad 3y = 9 - 3x \mid : 3$$

لومړی: دواړه مساوت د اووښتونې یا متحولې **y** پسې حل کیږي.

$$(I)\quad y = \frac{1 - 5x}{-2}$$

$$(II)\quad y = \frac{9 - 3x}{3}$$

$$(I)\quad y = \frac{5x - 1}{2}$$

$$(II)\quad y = 3 - x$$

دويم: د دواړو مساواتو ښئ خوا برابره ليکل يا اينسوول کيږي او د متحولي **x** پسې حل کيږي.

$$\frac{5x-1}{2} = 3-x \;|\cdot 2$$
$$\Leftrightarrow 5x-1 = 6-2x \;|\;+2x$$
$$\Leftrightarrow 7x-1 = 6 \;|\;+1$$
$$\Leftrightarrow 7x = 7 \;|:7$$
$$\Leftrightarrow \underline{\underline{x = 1}}$$

درى(ښئ الماني: اينسوول په ...کي)

د **x** ميندل شوى ارزښت د دداړو وتونمساواتو څخه په يوه کې اينسوول کيږي، دا بيا د متحولي **y** پسې حل کيږي.

x = 1 eingesetzt in (II): $3x + 3y = 9$

$$3\cdot 1 + 3y = 9$$
$$\Leftrightarrow 3 + 3y = 9 \;|\;-3$$
$$\Leftrightarrow 3y = 6 \;|:3$$
$$\Leftrightarrow \underline{\underline{y = 2}}$$

څلورم: د حلسټ وليکئ

$$\underline{\underline{L = \{(1|\,2)\}}}$$

پنځم د اينووني له لارې ازماېښت

$$(I)\quad 5x-2y = 1 \Rightarrow 5\cdot 1 - 2\cdot 2 = 1 \Leftrightarrow 5-4 = 1 \Leftrightarrow 1 = 1 \quad (w)$$
$$(II)\quad 3x+3y = 9 \Rightarrow 3\cdot 1 + 3\cdot 2 = 9 \Leftrightarrow 3+6 = 9 \Leftrightarrow 9 = 9 \quad (w)$$

د اينسووني تلنلار: د اينسووني تلنلار لپاره د حل پلونه(قدمونه)

وارينت 1

مساواتسيستم

$$(I)\qquad 5x-2y = 1$$
$$(II)\qquad 3x+3y = 9$$

لومړی: مساوات**(I)** د **x** پسې خل کيږي.

$$\text{(I)}\quad 5x - 2y = 1 \mid +2y$$
$$\Leftrightarrow 5x = 2y + 1 \mid : 5$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{2}{5}y + \frac{1}{5}$$

$$x = \frac{2}{5}y + \frac{1}{5} \text{ eingesetzt in (II): } 3x + 3y = 9$$

$$3\left(\frac{2}{5}y + \frac{1}{5}\right) + 3y = 9$$

دويم: د بنې اړخ ميندل شوی ترم په مساوات **(II)** کې اينوول کيږي او د **y** پسې حل کيږي.

$$\Leftrightarrow \frac{6}{5}y + \frac{3}{5} + 3y = 9 \mid -\frac{3}{5}$$
$$\Leftrightarrow \frac{6}{5}y + 3y = 9 - \frac{3}{5}$$
$$\Leftrightarrow \frac{21}{5}y = \frac{42}{5} \mid \cdot 5$$
$$\Leftrightarrow 21y = 42 \mid : 21$$
$$\Leftrightarrow \quad y = 2$$

دريم: د **y** لپاره ميندل شوی ارزښت په يو د دې دوه وتونمساواتو کې اينوول کيږي، دا بيا په **x** پسې حل کيږي.

$$y = 2 \text{ eingesetzt in (II): } 3x + 3y = 9$$
$$3x + 3 \cdot 2 = 9$$
$$\Leftrightarrow 3x + 6 = 9 \mid -6$$
$$\Leftrightarrow 3x = 3 \mid : 3$$
$$\Leftrightarrow \quad x = 1$$

څلورم: د حل سټ وليکئ

$$L = \{(1 \mid 2)\}$$

پنځم: د اينوولو له لارې حل

$$(I)\quad 5x-2y=1 \Rightarrow 5\cdot 1-2\cdot 2=1 \Leftrightarrow 5-4=1 \Leftrightarrow 1=1 \quad (w)$$
$$(II)\quad 3x+3y=9 \Rightarrow 3\cdot 1+3\cdot 2=9 \Leftrightarrow 3+6=9 \Leftrightarrow 9=9 \quad (w)$$

د حل پلونه(قدمونه) د اينوولو تلنلار لپاره

واريانت 2

مساواتسيستم

$$(I)\qquad 5x-2y=1$$
$$(II)\qquad 3x+3y=9$$

لومړی: مساوات**(II)** د متحولي **y** پسې حل کيږي.

$$(II)\ 3x+3y=9\,|\,-3x$$
$$\Leftrightarrow \quad 3y=9-3x\,|:3$$
$$\Leftrightarrow \quad y=3-x$$

دويم: دښی لور ميندل سوی ترم په مساوات **(I)**کې کيږدئ او په **x** پسي يې حل کړئ.

$$y=3-x \text{ eingesetzt in } (I):\ 5x-2y=1$$
$$5x-2(3-x)=1$$
$$\Leftrightarrow 5x-6+2x \quad =1\,|+6$$
$$\Leftrightarrow 7x \quad =7\,|:7$$
$$\Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x=1}}$$

3. دريم: د **x** لپاره ميندل شوی ارزښت په يو د دې دوه وتونمساوتو کې اينوول کيږي، او دا بيا د متحولي **y** پسې حل کيږي.

$$x=1 \text{ eingesetzt in } (II):\ 3x+3y=9$$
$$3\cdot 1+3y=9$$
$$\Leftrightarrow 3+3y=9\,|-3$$
$$\Leftrightarrow \quad 3y=6\,|:3$$
$$\Leftrightarrow \quad \underline{\underline{y=2}}$$

څلورم: جلسټ ولیکئ

$$L = \{(1|\ 2)\}$$

پنځم: ازماېښت د اینوولو له لارې

$$\text{(I)}\quad 5x - 2y = 1 \Rightarrow 5\cdot 1 - 2\cdot 2 = 1 \Leftrightarrow 5 - 4 = 1 \Leftrightarrow 1 = 1 \quad (w)$$
$$\text{(II)}\quad 3x + 3y = 9 \Rightarrow 3\cdot 1 + 3\cdot 2 = 9 \Leftrightarrow 3 + 6 = 9 \Leftrightarrow 9 = 9 \quad (w)$$

ټولي درې تلنلارې د هغه د واریانتو سره په یوه ټکلي مساوتسیستم وکارول شو. که څوک یوګوني تلنلرې ټیک وګوري، پیژني، چې په واریانت ۲ کې لږ د شمیرلو کار غوښتونی دی.

په یوه ټاکلي تلنلار د شمیرلو کار د دې حل کوونکي مساوتسیستم په واک کې دی. له دې امله دې لومړی پام وشي، چې کومه تلنلار د لږ کار سره سرته رسیدی شي. د دې لپاره نو یو څو بیلګو ته اړ یو. لاندې بیګې دې د دې لپاره یوه کوچنۍ مرسته وي، چې مناسب د حل – یا ځواب تلنلار پیداشي.

د مناسب ځواب تلنلار لپاره بیلګې

بیلګه ۱ :

x1=-1 په (1) کې اینوونه y=7x+8 $y = 7\cdot(-1)+8$ $\Leftrightarrow y = -7+8$ $\Leftrightarrow \underline{\underline{y = 1}}$ حل: L={(-1|1)} ازماینت (I) $y = 7x+8 \Rightarrow y = 7\cdot(-1)+8$ $\Leftrightarrow y = -7+8 \Leftrightarrow y = 1$ (w) (II) $y = -2x-1 \Rightarrow y = -2\cdot(-1)-1$ $\Leftrightarrow y = 2-1 \Leftrightarrow y = 1$ (w)	(I) $y = 7x+8$ (II) $y = -2x-1$ د برابر اینووني لار $7x+8 = -2x-1 \mid +2x$ $\Leftrightarrow 9x+8 = -1 \mid -8$ $\Leftrightarrow 9x = -9 \mid :9$ $\Leftrightarrow \underline{\underline{x = -1}}$

بیلګه۲:

Y=3 اینوونه په (1) کې 2x+4y=8 حل: $2x-12 = 8 \mid +12$ $\Leftrightarrow 2x = 20 \mid :2$ $\Leftrightarrow \underline{\underline{x = 10}}$ ازماینت (I) $2x+4y = 8 \Rightarrow 2\cdot 10+4\cdot(-3) = 8$ $\Leftrightarrow 20-12 = 8 \Leftrightarrow 8 = 8$ (w) (II) $2x-5y = 35 \Rightarrow 2\cdot 10-5\cdot(-3) = 35$ $\Leftrightarrow 20+15 = 35 \Leftrightarrow 35 = 35$ (w)	(I) $2x+4y = 8$ (II) $2x-5y = 35$ د جمعي تلنلار: (II) $2x-5y = 35 \mid \cdot(-1)$ $\left.\begin{array}{ll}(I) & 2x+4y = 8\\ (II) & -2x+5y = -35\end{array}\right\}+$ $9y = -27 \mid 9$ $\Leftrightarrow \underline{\underline{y = -3}}$

بیلګه ۳ :

(I) $x + 2y = 5$ (II) $-x + y = 1$ د اینسوونې لار; (II) په y پسې حل کړئ $-x + y = 1 \mid +x$ $\Leftrightarrow \quad y = x + 1$ په (I) کې کیږدئ x+2y=5 $x + 2(x+1) = 5$ $\Leftrightarrow x + 2x + 2 = 5 \mid -2$ $\Leftrightarrow \quad 3x = 3 \mid : 3$ $\Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x = 1}}$	X=1 په (1) کې کیږدئ x+2y=5 $1 + 2y = 5 \mid -1$ $\Leftrightarrow 2y = 4 \mid : 2$ $\Leftrightarrow \underline{\underline{y = 2}}$ حل: L= {(1|2)} ازماېښت (I) $x + 2y = 5 \Rightarrow 1 + 4 = 5$ $\Leftrightarrow 5 = 5 \ (w)$ (II) $-x + y = 1 \Rightarrow -1 + 2 = 1 = 35$ $\Leftrightarrow 1 = 1 \ (w)$ wد رښتیا لپاره

بیلګه ۴ : په لاندې: einsetzen اینسوونه په (1)کې اوبیونه یا حل:Lösung
ازماېښتProbe د زیاتون یا جمعې
لار:

$$(I)\quad \frac{3}{x}-\frac{5}{2y}=2$$

$$(II)\quad \frac{12}{x}+\frac{10}{y}=4$$

Additionsverfahren:

$$(I)\quad \frac{3}{x}-\frac{5}{2y}=2\,|\cdot 2$$

$$(II)\quad \frac{12}{x}+\frac{10}{y}=4\,|:(-2)$$

$$\left.\begin{aligned}(I)\quad & \frac{6}{x}-\frac{5}{y}=4\\ (II)\quad & -\frac{6}{x}-\frac{5}{y}=-2\end{aligned}\right\}+$$

$$-\frac{10}{y}=2\,|\cdot y$$

$$\Leftrightarrow -10=2y\,|:2$$

$$\Leftrightarrow -5=y$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{y=-5}}$$

y = −5 eingesetzt in (I) $\frac{3}{x}-\frac{5}{2y}=2$

$$\frac{3}{x}-\frac{5}{2(-5)}=2$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{x}+\frac{1}{2}=2\,|-\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{x}=\frac{3}{2}\,|\cdot x$$

$$\Leftrightarrow 3=\frac{3}{2}x\,|\cdot\frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{x=2}}$$

Lösung: $L=\{(2\,|\,-5)\}\quad x,y\neq 0$

Probe:

$$(I)\quad \frac{3}{x}-\frac{5}{2y}=2 \Rightarrow \frac{3}{2}-\frac{5}{2(-5)}=2$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2}+\frac{1}{2}=2 \Leftrightarrow 2=2\ (w)$$

$$(II)\quad \frac{12}{x}+\frac{10}{y}=4 \Rightarrow \frac{12}{2}+\frac{10}{-5}=4$$

$$\Leftrightarrow 6-2=4 \Leftrightarrow 4=4\ (w)$$

$$\text{(I)}\quad \frac{3}{x}-\frac{5}{2y}=2$$

$$\text{(II)}\quad \frac{12}{x}+\frac{10}{y}=4$$

Additionsverfahren:

$$\text{(I)}\quad \frac{3}{x}-\frac{5}{2y}=2\,|\cdot 2$$

$$\text{(II)}\quad \frac{12}{x}+\frac{10}{y}=4\,|:(-2)$$

$$\left.\begin{aligned}\text{(I)}\quad & \frac{6}{x}-\frac{5}{y}=4\\ \text{(II)}\quad & -\frac{6}{x}-\frac{5}{y}=-2\end{aligned}\right\}+$$

$$-\frac{10}{y}=2\,|\cdot y$$

$$\Leftrightarrow -10=2y\,|:2$$

$$\Leftrightarrow -5=y$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{y=-5}}$$

$y=-5$ eingesetzt in (I) $\frac{3}{x}-\frac{5}{2y}=2$

$$\frac{3}{x}-\frac{5}{2(-5)}=2$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{x}+\frac{1}{2}=2\,|-\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{x}=\frac{3}{2}\,|\cdot x$$

$$\Leftrightarrow 3=\frac{3}{2}x\,|\cdot\frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{x=2}}$$

Lösung: $L=\{(2\,|-5)\}\quad x,y\neq 0$

Probe:

$$\text{(I)}\quad \frac{3}{x}-\frac{5}{2y}=2\Rightarrow \frac{3}{2}-\frac{5}{2(-5)}=2$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2}+\frac{1}{2}=2\Leftrightarrow 2=2\ (w)$$

$$\text{(II)}\quad \frac{12}{x}+\frac{10}{y}=4\Rightarrow \frac{12}{2}+\frac{10}{-5}=4$$

$$\Leftrightarrow 6-2=4\Leftrightarrow 4=4\ (w)$$

$$(I)\quad \frac{3}{x}-\frac{5}{2y}=2$$
$$(II)\quad \frac{12}{x}+\frac{10}{y}=4$$

Additionsverfahren:

$$(I)\quad \frac{3}{x}-\frac{5}{2y}=2\,|\cdot 2$$
$$(II)\quad \frac{12}{x}+\frac{10}{y}=4\,|:(-2)$$

$$\left.\begin{array}{ll}(I) & \frac{6}{x}-\frac{5}{y}=4\\ (II) & -\frac{6}{x}-\frac{5}{y}=-2\end{array}\right\}+$$

$$-\frac{10}{y}=2\,|\cdot y$$
$$\Leftrightarrow -10=2y\,|:2$$
$$\Leftrightarrow -5=y$$
$$\Leftrightarrow \underline{\underline{y=-5}}$$

$y=-5$ eingesetzt in (I) $\frac{3}{x}-\frac{5}{2y}=2$

$$\frac{3}{x}-\frac{5}{2(-5)}=2$$
$$\Leftrightarrow \frac{3}{x}+\frac{1}{2}=2\,|-\frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow \frac{3}{x}=\frac{3}{2}\,|\cdot x$$
$$\Leftrightarrow 3=\frac{3}{2}x\,|\cdot\frac{2}{3}$$
$$\Leftrightarrow \underline{\underline{x=2}}$$

Lösung: $L=\{(2\,|\,-5)\}\quad x,y\neq 0$

Probe:

$$(I)\quad \frac{3}{x}-\frac{5}{2y}=2\Rightarrow\frac{3}{2}-\frac{5}{2(-5)}=2$$
$$\Leftrightarrow \frac{3}{2}+\frac{1}{2}=2\Leftrightarrow 2=2\ (w)$$
$$(II)\quad \frac{12}{x}+\frac{10}{y}=4\Rightarrow\frac{12}{2}+\frac{10}{-5}=4$$
$$\Leftrightarrow 6-2=4\Leftrightarrow 4=4\ (w)$$

یادونه:

مساواتسیستم د کسرونو ترمونو څخه جوړ دی. دا چي مخرج دد صفر کیدو اجازه نه لري یا نه شي صفر کیدی، تعریفسټ باید ورکړ شي. داسئ مساواتسیستم کرښنیز نه دی.

د رسموني لار

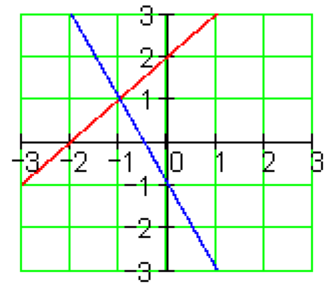
$$(I)\qquad x-y=-2\qquad L_I=\{(-2\,|\,0);(-1\,|\,1);(0\,|\,2);(1\,|\,3);\ldots\}$$
$$(II)\ \wedge\ -2x-y=1\qquad L_{II}=\{(-2\,|\,3);(-1\,|\,1);(0\,|\,-1);(1\,|\,-3);\ldots\}$$

دواړه مساوات د y پسي حل کیږي.

د هر مساوات لپاره ارزښتجوړي د حل سټ په ګوته کوي.

کا دا په یوه کواوردیناتسیستم کې وکښل شي، نو دوه کرښې ترې لاس ته راځي. د کرښو په غوښتکي یا نقطه تقاطع کې د دواړو مساواتو حلسټ پروت دی.

حلسټ یا-ډېرئ: L={(-1|1)}



$$
\begin{array}{lrcl}
(I) & x - y = -2 & | & +y \\
(II) & -2x - y = 1 & | & +y \\
\hline
(I) & x = -2 + y & | & +2 \\
(II) & -2x = 1 + y & | & -1 \\
\hline
(I) & x + 2 = y \Leftrightarrow y = x + 2 & & \\
(II) & -2x - 1 = y \Leftrightarrow y = -2x - 1 & & \\
\hline
\end{array}
$$

په هر مساوات کې د x لپاره عددونه اینسوول کیږي.

x	-2	-1	0	1
y_I	0	1	2	3
y_{II}	3	1	-1	-3

د رسموني لار د مساوات او کرښو ترمنځ هندسي(ځمککچیزې) اړیکې لیدوړ کوي. د حل لار په حیث زیات وخت مناسب نه دی، چې د ګډغوښتکي کواودینات په ګرفیک کې ناتیک لوستل کیدی شي.

برابرون – یا مساواتسیستم بې له یواځني حل خخه

رسمیزه حل یا درسم له لارې حل د مساوات او کرښې ترمنځ هندسي اړیکې لیدوړ کوي.

- دوه کرښې کیدی شي چې نسبت یو بل ته مختلف پروتځایونه ولري.

- دا کیدی چې په یو ټکي کې سره غوځي کړي، لکه پورته بیلګه چې لیدوړ کوي، د دواړو کرښیز مساوات لپاره ټک یو حل شتون لري.

- دا کیدی شي یو بل سره غبرګې وي، نو په دې حالت کې کوم ټکی نه شته، چې دواړه کربښې یې یو له بل سره ګډ ولري. له دې سره اړونده مساوات له دې امله حل نه لري.

- دا کیدی شي یو په بل پرتې وي، یعنې کټمټ وي، نو هر ټکی د یوې کربښې به د بلې کربښې ټکی هم وي. نو له دې امله به دااړونده مساوات ناپای زیات حلونه ولري.

مساوات سیستم حل نه لري چې دا د حل پیل مو یوه . لیدوړ دا په دې معنا دی، ې ځغلي او کوم ګډ ټکی نه لري.	$\text{(I)}\quad 10x + 4y = 4$ $\text{(II)}\quad 5x + 2y = 1 \mid \cdot(-2)$ $\left.\begin{array}{l}\text{(I)}\quad 10x + 4y = 4\\ \text{(II)}\ -10x - 4y = -2 \mid\end{array}\right\}+$ 0=2 نو دا ناټیک وینا ده، له دې لاس ته را ځي{}=L

دا مساواتسیستم ناپای ډېر ځوابونه یا حلونه لري

د ورته بڼه بدلون وروسته د مساوات (I) او مساوات (II) جمعه کونې یو بل سره پورته کوي یا له منځه وړي، دا په دې معنا چې مساوات ورته یا ایدنتیک دي. هره د اعدادو جوړه، چې مساوات (I) پوره کوي،دا مساوات (II)هم پوره کوي. لیدوړ دا په دې معنا دی، چې کربښې یو په بل پرتې دي.	$\text{(I)}\quad 10x + 4y = 2$ $\text{(II)}\quad 5x + 2y = 1 \mid \cdot(-2)$ $\left.\begin{array}{l}\text{(I)}\quad 10x + 4y = 2\\ \text{(II)}\ -10x - 4y = -2 \mid\end{array}\right\}+$ 0=0 له دې لاس ته راځي ربښتیا وینا

پوښتنې

مساواتسیستم I

مساوات سیستم ته د دوه متحولو سره ګډوله پوښتنې، کربښیزمساواتسیستم، سیستم د کسري ترمونو سره او شي پوښتنې(د متن سره پ،ښتنې)

لومړی: د لاندې مساواتسیستم حلسټ وټاکئ

سرلیک

الف- $\begin{cases} (I) & 5y - 3x = 1 \\ (II) & x = y + 1 \end{cases}$ ب - $\begin{cases} (I) & 4x + 5y = 32 \\ (II) & y = 5x - 11 \end{cases}$

پ- $\begin{cases} (I) & 15y - 4x = -50 \\ (II) & x = y + 7 \end{cases}$ ت - $\begin{cases} (I) & 3x = y + 15 \\ (II) & 2y - 10 = 2x \end{cases}$

د ویم: د لاندې مساواتسیستم حلسټ وټاکئ

الف- ب - پ - ت -

a) $\begin{cases} (I) & 2y = 2x - 40 \\ (II) & 3x = 10 - 2y \end{cases}$

b) $\begin{cases} (I) & \frac{x}{2} - \frac{3y}{5} = 3 \\ (II) & \frac{x}{4} + y = 8 \end{cases}$

c) $\begin{cases} (I) & \frac{2x}{15} + \frac{7y}{12} = 3 \\ (II) & \frac{7x}{25} - \frac{5y}{16} = \frac{3}{20} \end{cases}$

d) $\begin{cases} (I) & \frac{x+5}{y-7} = \frac{4}{3} \\ (II) & \frac{x+2}{y-5} = \frac{5}{8} \end{cases}$

دریم: د لاندې مساواتسیستم حلسټ وټاکئ

الف- ب - پ - ت -

a) $\begin{cases} (I) & \frac{4}{3x+1} = \frac{2}{3y-13} \\ (II) & \frac{2}{5x-10} = \frac{4}{7y-6} \end{cases}$

b) $\begin{cases} (I) & \frac{7}{x} - \frac{12}{y} = \frac{5}{6} \\ (II) & \frac{4}{y} + \frac{5}{2} = \frac{9}{x} \end{cases}$

c) (I) $\frac{4}{x}+\frac{8}{y}=\frac{5}{3}$ (II) $\frac{2}{x}-\frac{4}{y}=-\frac{1}{6}$

d) (I) $\frac{3}{2x-1}-\frac{8}{3y+2}=-\frac{1}{5}$ (II) $\frac{5}{2x-1}+\frac{4}{3y+2}=\frac{8}{15}$

څلورم: د لاندې مساواتسیستم حلسټ وټاکئ

(I) $\frac{7}{2x-5}-\frac{9}{7y+5}=\frac{10}{3}$ (II) $\frac{24}{2x-5}+\frac{15}{7y+5}=\frac{19}{3}$

پنځم: یو پلار په دې لحضه کې څلورواره دومره عمر لري لکه ځوي یې او په ۵ کاله کې به فقط درې واره دومره عمر ولري. دا دواړه همدا اوس څومره عمر لري؟

شپږم: په کوم وخا کې به یو (اوبه) ساتونی (بیلر؟) له دوه نلونو څخه نیمم ډک شي، چې لومړی نل د ټول ساتوني د ډکولو لپاره ۱۸ دقیقې اودویم د دې لپاره ۲۲ دقیقو ته اړتیا ولري یا په کار ولري؟

اوم: د یوه مستېیل یا ولاړکونجیزچاپیریال یا محیط ۱۸۰ سانتي متره دی. اړخa څومره اوږد دی، که اړخ b ۳۰ سانتي متره وي؟

اتم: که د دوه ارزښتځاییزه پرته جمعه یا پروت زیاتون عدد9 دی. که ارزښتونه بدل شي، نو نوی عدد لاس ته راځي چې د زاړه عدد 7/4 ده. دواړه ځا ارزښتونه څومره دي؟

توان- يا پوتنخ توابع

توان توابع

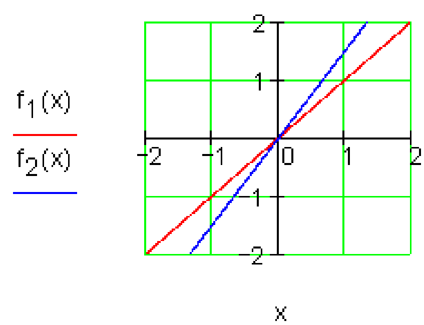
تعريف:

يوه تابع د تابع مساوات $f(x) = a_n x^n \quad ; n \in \mathbb{N} \quad ; a_n \in \mathbb{R}$ سره پوتنخ تابع بلل کيږي.

د n اکپوننت يا جګعدد د پوتنخ تابع درجه ټاکي او ضريب an دګراف بڼه يا فورم او هغه د بنې ضريب بلل کيږي.

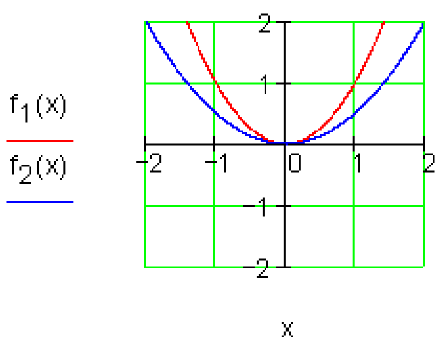
بيلګې:

$f_1(x) := x \qquad f_2(x) := \frac{3}{2} \cdot x$



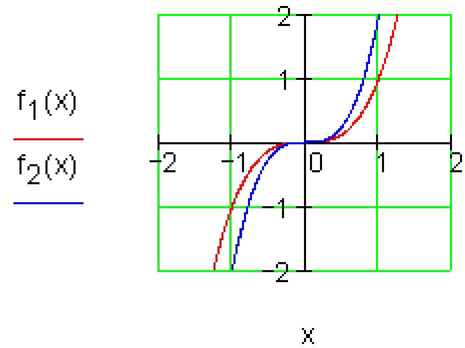
د لومړی دزجې توان تابع(کرښه)

$f_1(x) := x^2 \qquad f_2(x) := \frac{1}{2} \cdot x^2$



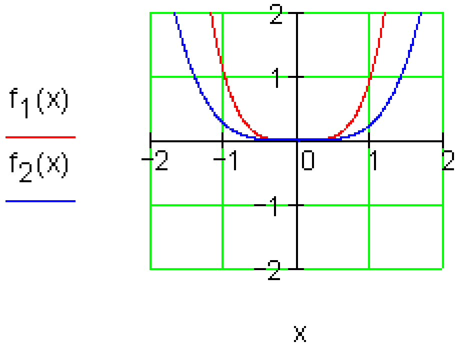
د دويمي درجي توان تابع (پارابول)

$f_1(x) := x^3$ $\quad f_2(x) := 2\cdot x^3$

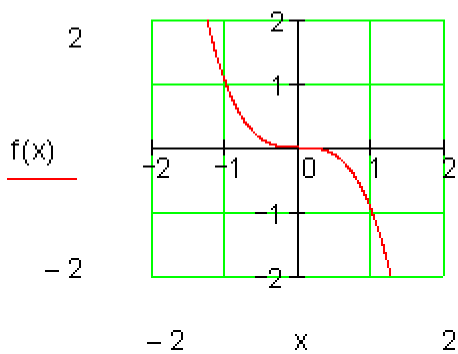


د دريمي درجې توانتابع

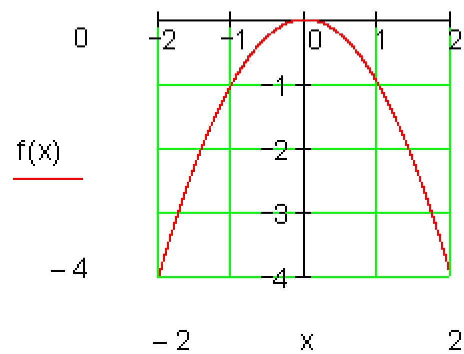
$f_1(x) := x^4$ $\quad f_2(x) := \frac{1}{4}\cdot x^4$



د څلورمي درجې توانتابع



تابع مساوات وليکی



تابع مساوات وليکی

لاندې پوښتنې ځواب کړی:

ب – د n درجه او د a_n مختخښه د ګراف په تلنه کومه اغيزه لري؟

پ – د پوتنځ تابع n درجه د ګراف په سيومتري کومه اغيزه لري؟

ت – د پوتنځ تابع د n په واکولي او د a_n مختخښي له امله کوم ارزښتسټ(ارزښتډپرى) لري؟

ټ - د a_n مطلق ارزښت د ګراف په تلنه کوم اِيز لري؟

ځوابونه لږ وروسته راځي.

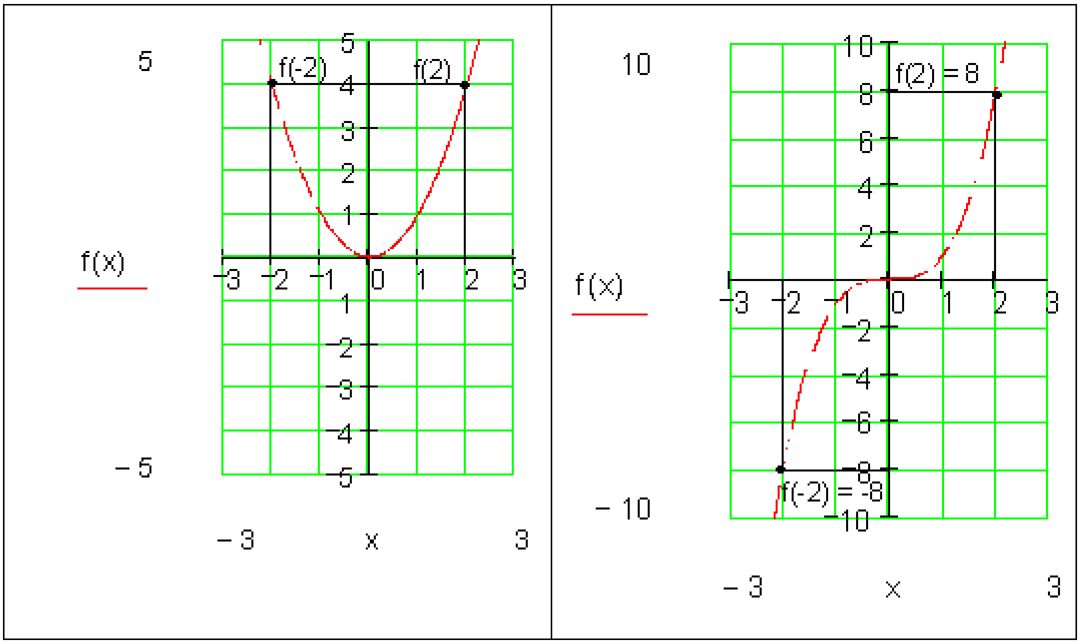
سيومتري

په سيومتري څنګه قضاوت کيدی شي، که څوک فقط د يوه توان(پوتنځ) تابع تابع مساوات پيژني؟

د دې لپاره د لاندې توابعو ګرافونه کاږو:

$f(x)=x^2$ او $f(x) = x^3$

او تابع د $x=-2$ او $x=2$ په ځايونو کې تر څېړنې لاندې نيسو.



ګومان مو نږدې دی چې لاندې باور لري:

دx د جوړه ځګعدد سره د تابع ارزښتونه برابر دي. دا په دې معنا چې :

محورسیمتریک، نو $f(-x) = f(x)$

د x ناجوړه(طاقو) ځګعددونو لپاره د تابع ارزښت برابر مطلق قیمت لري، مګر متضادې مختخښې لري.

دا په دې معنا چې:

ټکی سیومتریک، نو $f(-x) = -f(x)$

دا اړیکې د ټولو تانتوابعو لپاره باور لري (بې له ښوونې).

د یوه توان - یا طاقت تابع محورسیومتریک دی، که د ټولو $x \in D$ لپاره باور ولري: f(-x)=f(x)

د یوه توانتابع ګراف ټکی سیمتریک دی،که د ټولو $x \in D$ ؛ لپاره باور ولري $f(-x) = -f(x)$

ټولګه:

د $a_n > 0$ لپاره باور لري:

ټول توان توابع د جوړه جګعدد سره محور سیومتریک دي. دا له II د I. ثلورمې ته ځغلي(خوزي).

ټول توانتوابع د ناجوړه(طاق) جګعدد سره ټکیسیومتریک دي. دوی له III.او I. ثلورمې(ربع) ته ځغلي(خوزي).

د ټولو 0 > لپاره باور لري:

ټول توان توابع د جوړه جګعدد سره محور سیومتریک دي. دا له III د IV. ثلورمې ته ځغلي(خوزي).

ټول توانتوابع د ناجوړه(طاق) جګعدد سره ټکیسیومتریک دي. دوی له II.او IV. ثلورمې(ربع) ته ځغلي(خوزي).

تمرینونه:

د توان تابع خویونه.

د لاندې توانتوابعو درجه وټاکی، په سیمتریکي حالت، د ګراف په تلنه او او ارزښت دېرئ یې یوه وینا وکړئ د د هر ګراف یې په پروت ولاړسیستم (کواوردینات سیستم) کې رسم کړئ.

لومړی - $f(x) = -\frac{1}{2}x^2$ دویم - $f(x) = \frac{1}{4}x$

دریم - $f(x) = -\frac{1}{10}x^4$ خلورم - $f(x) = \frac{1}{5}x^3$

پنځم - $f(x) = -\frac{1}{10}x^5$ شپږم - $f(x) = -\frac{1}{2}x$

اوم - $f(x) = -\frac{1}{10}x^3$ اتم - $f(x) = 2x^2$

نهم - $f(x) = \frac{1}{5}x^4$ لسم - $f(x) = -\frac{2}{5}x^4$

کرښيز ي توابع د ورکړشوو شرايطو سره

. لومړی حالت : د P تکي څخه تيرې کرښې د a_1 د جګوالي سره

بيلګه:

يوه کرښه د a_1 د جګوالي سره د $P_1(x_1 \mid y_1)$ په تکي کې ځغلي.

د $f(x) = a_1x + a.$ تابع مساوات دې پيدا شي.

جګوالی: $a_1 = 1,5$: ټکی $P_1(-2|3)$

وتونمساوات $f(x) = a_1x + a_0$

جګوالی ځای په ځای کړی

$f(x) = 1,5 \cdot x + a_0$

د a_0 لپاره دي ارزښت وشمیرل شي.

د $P_1(-2|3)$: لپاره ازمایښت

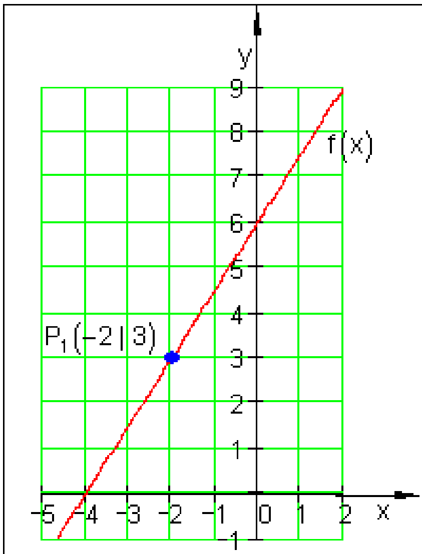
$$
\begin{aligned}
f(-2) = 3 \Leftrightarrow \quad 1,5 \cdot (-2) + a_0 &= 3 \\
\Leftrightarrow \quad -3 + a_0 &= 3 \,|+3 \\
\Leftrightarrow \quad a_0 &= 6
\end{aligned}
$$

د تابع مساوات $f(x) = 1,5 \cdot x + 6$

ازمایښت:

$P_1(-2|3) \Leftrightarrow f(-2) = 3$

$f(-2) = 1,5 \cdot (-2) + 6 = -3 + 6 = 3$



بیلګه:

د حیواناتو ساتونکی د وښو اوتومات څخه د روځې 7,5 kg خوراک شته. دولس روځې، وروسته له هغې چې زیرمه له غذايي موادو ډکه شوې وه، هلته نور 250 kg پاتې دي.

الف - یو تابع مساوات ولیکی، چې دا حالت تشریح کړي

ب - په څومره سټ یا ډېری به دا د وښو زیرمه دولس ورځې د مخه ډکه شوې وي.

حل و الف ته - دx محور: وخت په ورځو

y محور : د وښو زېرمه په کيلوګرامkg .

$$f(x) = -7{,}5x + a_0$$

$$P(12 \mid 250) \Rightarrow f(12) = 250 \Leftrightarrow -7{,}5 \cdot 12 + a_0 = 250$$

$$\Leftrightarrow -90 + a_0 = 250 \mid +90$$

$$\Leftrightarrow a_0 = 340 \Rightarrow \underline{\underline{f(x) = -7{,}5x + 340}}$$

حل و ب ته- د ډکيدنې وخت $x = 0$ دی.

$$\Rightarrow f(0) = -7{,}5 \cdot 0 + 340 = 340$$

د وښو شتون دولس12 ورځې د مخه په 340 kg ډک شوی .

لکه څنګه په لومړي حالت کې چې د يوې کرښې جګوالی او يو ټکی معلوم دي، شمېرنه په همغه ډول د ورکړشوو داتن يا داتا Daten سره مخ ته ځي.

په داسې حالت کې شمېرنه ټوېزه سرته رسيږي. دا مو بيا يو فرمول ته لاربنووده وي.

يوه کرښه دa_1 جګوالي سره د$P_1(x_1 \mid y_1)$ ټکي څخه تيريږي.

د کرښمساواتو ټوليز فرمول دی: $f(x) = a_1x + a_0$

$$P_1(x_1 \mid y_1) \Rightarrow f(x_1) = y_1 \Leftrightarrow a_1 \cdot x_1 + a_0 = y_1 \mid -a_1 \cdot x_1 \Leftrightarrow a_0 = y_1 - a_1 \cdot x_1$$

$$\Rightarrow f(x) = a_1 \cdot x + y_1 - a_1 \cdot x_1 = a_1 \cdot x - a_1 \cdot x_1 + y_1 = a_1(x - x_1) + y_1$$

$$f(x) = a_1(x - x_1) + y_1$$

دا د ټکی - جګوالي فرمول هم بلل کيږي.

بيلګه:

په $a_1 = -2 ; P_1(-3 \mid 4)$: $f(x) = a_1(x - x_1) + y_1$ کې ځا په ځای کړی

$$f(x) = -2(x-(-3)) + 4 = -2(x+3) + 4 = -2x - 6 + 4 = \underline{\underline{-2x - 2}}$$

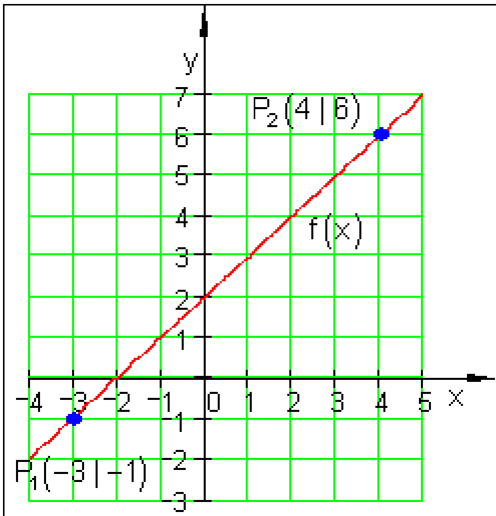
.

دويم حالت: کرښه له دوه ټکو تيرېږي

بيلګه:

دوه ټکی $P_1(x_1 \mid y_1)$ او $P_2(x_2 \mid y_2)$ په يوه کرښه پراته دي.

د $f(x) = a_1x + a_0$ تابع مساوات غواړو پيداکړو.



$P_1(-3|-1)$ $P_2(4|6)$

وتونمساوات: $f(x) = a_1x + a_0$

د جګوالي ټاکنه:

$$a_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{6-(-1)}{4-(-3)} = \frac{6+1}{4+3} = \frac{7}{7} = 1$$

جګوالی وضعه کړی $f(x) = 1 \cdot x + a_0$

وروسته له دې چې جګيدنه معلومه شوه، دا پوښتنه داسي حل کيږي لکه په لومړي حالت کې.

د ټکو ازمايښت لپاره بې پروا ده چې د دې لپاره کوم ټکي کارول کيږي، ځکه چې دواړه ټکي به په کرښه پراته وي.

د ټکو ازمايښت د $P_2(4|6)$ يا P_1 لپاره

$$P_2(4|6) \Rightarrow f(4) = 6 \Leftrightarrow 1 \cdot 4 + a_0 = 6 \,|\, -4 \Leftrightarrow a_0 = 2 \Rightarrow f(x) = x + 2$$

بيلګه:

د فزيک څخه پوهيږو چې د حرارت معلومولو (ګرمی کچوني) لپاره مختلفې دد حرارت سکالا کارول کيږي. د څلزيوس سکالاCelsiusskala او د فارنهايټ سکالا Fahrenheitskala

د دواړو ترمنځ کرښيزې اړيکې موجود دي.

$100\ ^0C$ برابری دي د $212\ ^0F$ سره . $0\ ^0C$ برابر د ی په $32\ ^0F$ سره.

د يوه تابع مساوات غواړو پيداکړو، چې د هغې په مرسته ^0C په ^0F اړول کيږي.

خپلواکه متحوله x په ^0C او بلواکه يا تابع متحوله $y = f(x)$ په ^0F .

ځګوالی:

$$a_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{212-32}{100-0} = \frac{180}{100} = \frac{9}{5} \Rightarrow f(x) = \frac{9}{5}x + a_0$$

$$P_1(0\,|\,32) \Rightarrow f(0) = 32 \Leftrightarrow \frac{9}{5}\cdot 0 + a_0 = 32 \Leftrightarrow a_0 = 32$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{9}{5}x + 32$$

په بدل شوی تابع x په C° کې کيږدی نتيجه يې ده.

د بيلګې په دول:

$$x = 20\,^0C : f(20) = \frac{9}{5}\cdot 20 + 32 = 68 \Rightarrow 20\,^0C \triangleq 68\,^0F$$

د دويم حالت لپاره هم کيدی شي شميرنه په ټوليزه توګه مخ ته بوتلی شی:

دوه ټکی $P_1(x_1\,|\,y_1)$ او $P_2(x_2\,|\,y_2)$ په يوه کرښه پراته دي.

د مساواتو عمومي بڼه ده:. $f(x) = a_1x + a_0$

جګوالی: $a_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \Rightarrow f(x) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x + a_0$

$$P_1(x_x \mid y_1) \Rightarrow f(x_1) = y_1 \Leftrightarrow \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x_1 + a_0 =$$

$$= y_1 \mid -\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x_1 \Leftrightarrow a_0 = y_1 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x_1$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x + y_1 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x_1 =$$

$$= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x_1 + y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1$$

$$f(x) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1$$

دا په دوه ټکو کې د کرښیزېږومساواتو یو تولیزه بڼه ده .

په زیاتو ادبیاتو کې په لاندې ډول ده:

$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \; ; x_1 \neq x_2$ چیرته چې $y = f(x)$ باور لري.

د عملي کاروني لپاره لاندې بڼه مساعده ده:

$$f(x) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1$$

بیلګه:

په $P_1(2 \mid -1); P_2(-3 \mid 2)$ $f(x) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1$ کې ځای په ځای کړی

$$f(x)=\frac{2-(-1)}{-3-2}(x-2)+(-1)=\frac{2+1}{-5}(x-2)-1=-\frac{3}{5}(x-2)-1=-\frac{3}{5}x+\frac{6}{5}-\frac{5}{5}$$
$$=-\frac{3}{5}x+\frac{1}{5}\Leftrightarrow f(x)=-\frac{3}{5}x+\frac{1}{5}$$

تمرين:

د ^0F په ^0C باندې شميرنې لپاره يو تابع مساوات وليکئ

2.2.3.تمرين: د تابعمساواتو شميرنه

يو کرښيز مساوات د a_1 جګوالی لري او د P له ټکي تيريږي.

د$f(x)$ تابعمساوات معلوم کړئ او د محورونو قاطع ټکي يا غوڅټکي او ګراف انځور کړئ

اول - $P(2|-2)$ $a_1=\frac{1}{2}$ دويم - $P(-1|3)$ $a_1=\frac{3}{4}$

دريم - $P(3|-1)$ $a_1=2$ څلورم - $P\left(\frac{3}{2}\middle|4\right)$ $a_1=\frac{4}{5}$

يوه کرښه له ټکو P_1 او P_2 تيريږي.

د$f(x)$ تابع مساوات پيدا کړئ او د محور قاطع ټکي او ګراف رسم کړئ.

پنځم - $P_2(5|4)$ $P_1(2|1)$ شپږم - $P_2(2|3)$ $P_1(-3|-2)$

اوم - $P_2(4|-1)$ $P_1(-2|3)$ اتم - $P_2(3|1)$ $P_1(-4|-1)$

نهم - $P_1\left(-3 \middle| \frac{9}{2}\right)$ $P_2(4 \mid -1)$ لسم - $P_1(-4 \mid -2)$ $P_2\left(\frac{7}{2} \middle| 4\right)$

. د کرښبرابروتو ځانګړی حالت:

د x- محور سره غبرګ کرښه:

$f(x) = a_0 ; a_0 \in \mathbb{R}$

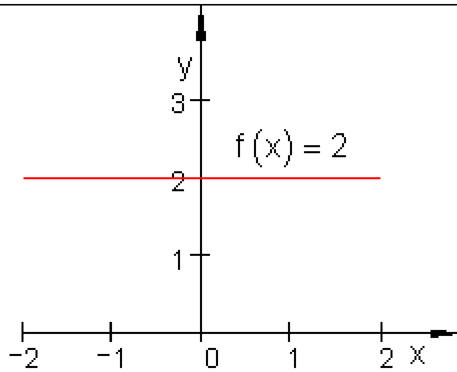
یو د 0 درجي تام راشنل تابع ده او

ثابته تابع هم بلل کيږي.

x- محور هم یوه ثابته تابع ده د

تابع مساوات $f(x) = 0$ سره.

د ثابتې تابع جګوالی تل صفر دی.



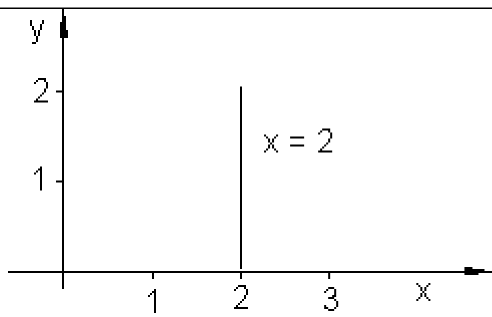
د y- محور سره غبرګه.

$x = a ; a \in \mathbb{R}$

کرښه د محور سره غبرګه (موازي) ځغلي.

دا د یوه تابع مساوات سره نه شي لیکل کیدی، ځکه چې یواځنۍ تنظیم نه شته یعني تابع نه ده.

$x = 0$ دy - محور مساوات دي.



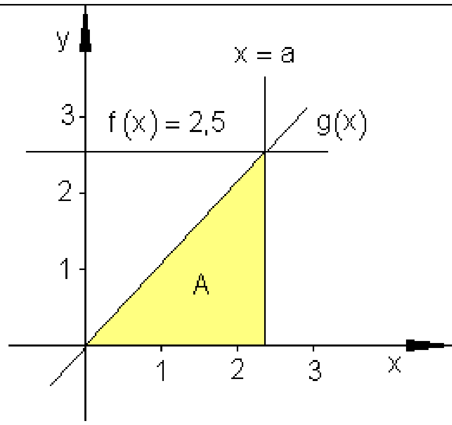
بيلګه:

يو $f(x) = 2,5$ ور کړ شوی او y- محور سره موازي دa واټن د $a > 0$ سره.

يوه سرچينييزه کربنه g د($P(a \mid f(x))$ ټکي ځخه تيريږي.

دا دx - محور او د y- محور سره غبرګې کربنې سره يو مثلث جوړوي.

a داسې وټاکی چې وسطحه د سطحې څلور واحدونه (يوونونهFE) جوړ کړي. د دې حالت لپاره د(g(x تابع مساوات ځنګه دي؟



$A = \frac{g \cdot h}{2}$ د $g = a$ او

$h=f(x) = 2,5$ سره

د مثلث سطه $\Rightarrow A = \frac{2,5 \cdot a}{2} = \frac{5}{4}a$

$A = 4 \Leftrightarrow \frac{5}{4}a = 4 \,|\cdot \frac{4}{5} \Leftrightarrow a = \frac{16}{5}$

(ځکه چې د سرچيني

کربنه $g(x) = a_1 x \ (a_0 = 0$

د جګېدو له مثلث

ځخه $a_1 = \frac{5}{2} : \frac{16}{5} = \frac{25}{32}$

د تابع مساوات : $g(x) = \frac{25}{32}x$

تمرین: د ^0F بدلون شمیرنه په ^0C لپاره د تابع مساوات ولیکئ

حل :

د ^0C اړونه یا بدلون په^0F د متحولې لپاره دا معنا لري:

x په ^0F مستقله یا خپلواکه متحوله ده او $y = f(x)$ په^0C بلواکه یا تابع متحوله ده.

$$212\,^0F \triangleq 100\,^0C \Rightarrow P_1(212\,|\,100) \quad \text{او} \quad 32\,^0F \triangleq 0\,^0C \Rightarrow P_1(32\,|\,0)$$

دا چې د حرارت الو ترمنځ یوه کرښیزه ا ړیکه پرته ده، نو ټکي P_1 اوP_2 په یوه کرښه پراته دي.

د کرښې عمومي کرښیزه بڼه په دې ډول ده:.$f(x) = a_1x + a_0$

دلته ضریبونه a_1 او a_0 د ټاکلو دي.

جګوالی: $a_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{100 - 0}{212 - 32} = \frac{100}{180} = \frac{10}{18} = \frac{5}{9} \Rightarrow f(x) = \frac{5}{9}x + a_0$

ټکي ازمایښت د $P_1(32\,|\,0)$ سره.

$$\Rightarrow f(32) = 0 \Leftrightarrow \frac{5}{9}\cdot 32 + a_0 = 0 \Leftrightarrow \frac{160}{8} + a_0 = 0\,|-\frac{160}{9} \Leftrightarrow a_0 = -\frac{160}{9}$$

$$\Rightarrow f(x) = f(x) = \frac{5}{9}x - \frac{160}{9} = \frac{5}{9}(x - 32)$$

د ^0F اړونې په ^0C لپاره باور لري.

$$^0F \text{ in } ^0C \text{ gilt: } f(x) = \frac{5}{9}(x - 32)$$

x په ^0F او y په ^0C .

پوښتنې:

کرښیزې توابع III

لومړی: د g کرښو مساوات وټاکئ

الف: $P_1(-4|-2)$ او $P_2(2|0)$ په g پراته دي،

ب- g په $P_1(-3|1)$ او $P_2\left(1|\frac{11}{3}\right)$ کې ځغلي

پ- $P_1(1|-2)$ او $P_2(-2|10)$ په g پراته دي

ت- g محورونه په $x = 2$ او $y = 6$ کې غوڅوي(قطع کوي)

ټ-g له P(-6;1)) تیریږي او له h سره غبرګ دی د $h(x) = -\frac{2}{3}x + 2$ مساوات سره

ث- g جګوالی $a_1 = -4,5$ لري او له P(1;1,5) څخه تیریږي.

ج- g جګوالی $a_1 = 3$ لري او له P(1;,1,5) څخه تیریږي

چ- g دx محور په $x = 3$ کې غوڅوي او د hکرښه د $h(x) = 4x - 2$ سره په $x = -1$ کې غوڅوي.

دویم: د دوه کرښو g او h کرښیز مساوات پیدا کړئ، چې له ټکی P(3;-2) تیرېږي.

دریم: یوه کرښه g د کرښیز تابع f(x) سره پیدا کړئ، چې له ټکو P_1 او P_2 تیریږي او تابع مساوات وټاکئ.

الف- $P_1(1{,}5\,|\,3);\ P_2(3\,|\,2{,}5)$ ب - $P_1(-3\,|\,5);\ P_2(1\,|\,2{,}5)$

پ- $P_1(4\,|\,0);\ P_2\left(-1\,|\,-\sqrt{2}\right)$ ت - $P_1(k\,|\,3);\ P_2(2k\,|\,-1)$

ټ - $P_1(1\,|\,0);\ P_2(-1\,|\,k+1)$ ث - $P_1\left(2\sqrt{k}\,|\,\sqrt{2k}\right);\ P_2\left(\sqrt{k}\,|\,0\right)$

څلورم: د f(x) کرښیزې تابع مساوات وټاکئ.که معلوم وي:

الف-کرښه د $a_1 = \frac{5}{4}$ جګیدني سره له P(4;-1) څخه تیریږي.

ب-کرښه له ټکو $P_1(-5\,|\,-3)$ او $P_2(0\,|\,3)$ څخه تیریږي.

پ-کرښه له P(4,5;2,7) ټکي تیریږي. او د x محور سره 45° مایله ده.

ت-کرښه له P(-1,5;0) تیریږي او دh(x) = 2x+2 سره غبرګه (موازي) ده.

پنځم: کر ښه g و کاږئ او کرښیز مساوات وټاکئ.

الف- $P(3\,|\,-1) \in g$ او g دy محور سره غبر؛(موازي) څغلي.

ب- $P(3{,}5\,|\,2{,}5) \in g$ او g دx محور سره موازي څغلي.

پ- g له P(-5;1)تېرېږي او د $h(x) = -\frac{1}{2}x + 4$ سره موازي ده.

ت- g له $P\left(1\,|\,\frac{3}{2}\right)$ تېرېږي او د کرښو سره چې له ټکو $P_1(-2\,|\,-3)$ او $P_2\left(\frac{3}{2}\,|\,-5\right)$ تېرېږي، موازي څغلي.

پوښتنې

کرښيز مساوات VI

لومړی –

د لاندې کرښيزو توابعو ګرافونه و کاږی او د ارزښت سټ يا – دېرې W و ټاکی

الف- $f(x) = -2x + 2 ; D = \{x | -3 \le x \le 5\}_{\mathbb{R}}$

ب - $f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{3}{4} ; D = \{x | -4 \le x \le 4\}_{\mathbb{R}}$

پ - $f(x) = \frac{3}{4}x - 3 ; D = \{x | -2 \le x \le 6\}_{\mathbb{R}}$

ت - $f(x) = 3x - 6 ; D = \{x | -1 \le x \le 3\}_{\mathbb{R}}$

دويم –

ټکی P_1 او P_2 ورکړ شوي، چې په کرښه پراته دي. د $f(x)$ تابعمساوات پيدا کړی او ګراف يې وکاږی

الف- $P_1(3 | 4) ; P_2(7 | -1) ; D = \{x | 0 \le x \le 7\}_{\mathbb{R}}$

ب - $P_1(-8 | 1) ; P_2(2 | -3) ; D = \{x | -8 \le x \le 2\}_{\mathbb{R}}$

پ - $P_1(4 | 3) ; P_2(-7 | -1) ; D = \{x | -7 \le x \le 4\}_{\mathbb{R}}$

ت - $P_1(-4 | -4) ; P_2(4 | 2) ; D = \{x | -4 \le x \le 4\}_{\mathbb{R}}$

دريم –

د لاندې مساواتو حلسټ یا حلډېرۍ پيداکړی. مساوات چې کسری راشنل ترمونه ولري، بايد د هغو تعريفورشو هم ورکړل شي.

الف- $x-5=9$ ب - $8+x=25$ پ - $x-\frac{2}{3}=\frac{3}{4}$ ت - $\frac{5}{9}=x-\frac{1}{3}$

ټ - $88=4x-16$ ث - $a+bx=3b+a$ ج - $8-(x+5)=2$

چ - $9+(5-x)=6$ ح = $(x-6)(x+3)=(x-5)(x-2)$ خ -

خ - $(x+3)(x+7)=(x+2)(x+9)$ $\frac{x}{4}+\frac{5x}{6}+\frac{5}{6}=\frac{x}{2}+x$

ځ - $\frac{3}{2x}+\frac{2}{3x}=\frac{1}{9}+\frac{7}{3x}$ د - $\frac{ax}{b}-\frac{b}{ac}=\frac{a}{bc}-\frac{bx}{a}$ ډ - $\frac{x}{a-b}+\frac{x}{a+b}=a$

ذ- $23a-\{5ax-[9ax+(12a-6ax)]-(3a-8ax)\}-15a=5ax-7a$

څلورم:د لاندې توابعو د محورونو سره د تقاطع ټکي هم پيدا کړی.

الف- $f(x)=2x-7$ ب - $f(x)=-2x+6$ پ - $f(x)=3x-3$

ت - $f(x)=2x+\frac{2}{3}$ ټ - $f(x)=\frac{3}{4}x+2$ ث - $f(x)=-\frac{3}{4}x+\frac{4}{5}$

ج - $f(x)=3{,}5x+\frac{1}{2}$ چ – $f(x)=-2{,}5x+2\frac{1}{2}$ ح - $f(x)=1\frac{3}{4}x-3\frac{2}{3}$

پنځم: د يوې کرښې دوه ټکي P_1 اوP_2 ورکړ شوي د لاندې توابعو له I تر IV لپاروه وټاکی:

I. $P_1(3 \mid 4);P_2(7 \mid -1);D=\{x \mid -2\le x\le 8\}_{\mathbb{R}}$

II. $P_1(-8 \mid 1);P_2(2 \mid -3);D=\{x \mid -8\le x\le 2\}_{\mathbb{R}}$

III. $P_1(4 \mid 3)\,;\, P_2(-7 \mid -1)\,;\, D=\{x \mid -8 \le x \le 4\}_{\mathbb{R}}$

IV. $P_1(4 \mid 2)\,;\, P_2(-4 \mid -4)\,;\, D=\{x \mid -4 \le x \le 4\}_{\mathbb{R}}$

الف- د جګیدنې ضریب.m

ب - د کرښې تابعمساوات

پ - دy محور سره د تقاطع ټکی P_y

ت - د تقاطع ټکی P_y د x محور سره

ټ - پهW باندې ارزښتډېری .W

ث - په D کې د تابع ګراف

شپږم: لاندې مساواتسیستمونه حل کړی:

الف- $\begin{cases} \text{I} & 5y-3x=1 \\ \text{II} & x=y+1 \end{cases}$ ب - $\begin{cases} \text{I} & 4x+5y=32 \\ \text{II} & y=5x-11 \end{cases}$ پ - $\begin{cases} \text{I} & 15y-4x=-50 \\ \text{II} & x=y+7 \end{cases}$

ت - $\begin{cases} \text{I} & 3x=y+15 \\ \text{II} & 2y-10=2x \end{cases}$ ټ - $\begin{cases} \text{I} & 2y=2x-40 \\ \text{II} & 3x=10-2y \end{cases}$ ث - $\begin{cases} \text{I} & x+y=a+b \\ \text{II} & x-y=a-b \end{cases}$

پوښتنې

کرښیز مساوات IX

لومړی:کرښه g له ټکو P1(4;-3,5) او(2,5;-1)P2 تیریږي.

کرښه h له ټکو $P_3(5|2,5)$ او $P_4\left(\frac{3}{2}\,|\,\frac{25}{3}\right)$. تیریږي.

کرښې یو بل ته څه موقعیت لري یا څنګه پرتې دي؟

دویم:د(x)f کرښیزې تابع د تابع ترم او ارزښتساحه(ارزښتورشو) و ټاکی، که صدق ولري:

الف- $f(0)=20\,;\,f(12)=32\,;\,x>0$ ب- $f(-3)=6\,;\,f(2)=-8\,;\,x\in[-3\,;\,3]$

دریم:

د (x)fکرښیزې تابع ګراف په 3 LE اوږدوالی واحده کینې لور

ته خوزیږي. د راکښل شوې کرښې د (x)*f مساوات څنګه دي؟

$$f(x)=\frac{5}{3}x-2 \quad D=\mathbb{R}$$

څلورم: د f(x) او g(x) توابع ورکړ شوې دي. د کوم ارزښت لپاره f(x) > g(x) صدق کوي؟

$f(x)=2x-3 \quad : \quad g(x)=-0{,}5x+1 \quad x\in\mathbb{R}$

پنځم: یوه (x)gکرښه ورکړ شوې.. دا د یوې کرښې h(x) له خوا قطع کیږي. د h(x)مساوات وټاکی، که باور ولري: $g(x)=-3x+2$

الف- قاطع یا غوڅی دx محور سره . ب - قاطع(غوڅی) په x = -5 کې

شپږم:

یوه د پیل کرښه د $a_1=-0{,}125$ جګوالي سره و داسې کښول کیږي. چې کرښه h د مساوات	؛ $h(x)=-1{,}5(x-2)$

سره د x په محور قطع کوي. راکښنه تشريح کړئ او د راکښل شوې کرښې ګراف و کاږئ.	

اوم: یوه $f(x)$کرښیزه تابع ورکړ شوې. کرښه د $x = u$ مساوات سره د $f(x)$ ګراف په P کې قطع کوي او د x محور په Q کې قطع کوي. یوه سکیڅې ترتیب کړئ.

الف- د P او Q کواوردینات وټاکئ، که $f (x) = 0,75x + 2$ وي.

ب- دu د کوم ارزښت لپاره P دx   محور پورته لور ته پرته ده.

ت- $P(u | f(u))$ په 1 څلورئ یا ربع کې پروت دی.$R (0 | 0)$, Q   اوP   د یوه مثلث رآسونه (ککرټکي)جوړوي. د دې مثلث د مساحت A لپاره ترم وټاکئ. u (محیط) داسې وټاکئ، چې $A(u) = 10$ صدق وکړي.

اتم: دg کرښې   ته موازي او عمود مساوات داسې وټاکئ، چې له P ټکي تیر شي.

الف- $g : x + 2 - 3y = 0 ; P(0 | 3)$ ب- $g(x) = \frac{2}{3}x - 3 ; P(1 | 4)$

پ - $g(x) = -1,5kx ; P(1 | 0)$

نهم: کرښه g له ټکوP₁   اوP₂   تیریږي. دh   کرښې ته یې ځای مطالعه کړئ او د امکان په حالت کې یې د قاطع ټکی معلوم کړئ.

$$P_1(-1 | 1,5) ; P_2(-2 | -2,5) \qquad h : \ -x - 6 - 4y = 0$$

لسم: و ښایئ: کرښه g او کرښه h عمود دي.

$$g : \ y - \sqrt{2}x = 1 \qquad h : -2y - \sqrt{2}x + 6 = 0$$

$$g(x) = -3x + 2$$

یولسم:

د A, B او C ټکي د یوه مثلث د رآس ټکي دي. د$k > 0$ د کوم ارزښت لپاره دا مثلث قایم الزاویه (ولاړګوډیز) دی؟ (ښی رآس په C پروت دی)	$A\left(\sqrt{3k}\mid\frac{k}{3}\right); B\left(-\sqrt{3k}\mid\frac{k}{3}\right); C(0\mid k)$

پوښتنې

کرښیز توابع XI

لومړی-

$$f_1(x)=\frac{1}{4}x+2\frac{1}{4}; f_2(x)=-4x-2; D=\{x\mid -9\leq x\leq 0\}_{\mathbb{R}}$$

کرښه له تابع f_1 (x) سره د دویمي کرښې د تابع(x) f_2 سره غوځیږي. وټاکی:

الف – د کواوردیناتونو x_s او y_s سره غوڅټکی S .

ب – د دواړو کرښو غوڅټکي د y محور سره .

پ – د دواړو کرښو غوڅټکي دx محور سره .

ت - د دواړو توابعو ګراف په D کې .

دویم –

$$f_1(x) = -\frac{2}{3}x + 4\,;\, D = \{x \mid 0 \le x \le 6\}_{\mathbb{R}}$$

کربښه له تابع $f_1(x)$ سره په ټکي $S(3 \mid y_s)$ کې د تابع $f_2(x)$ سره له کربښې څخه غوڅيږي.

وټاکئ:

الف-د S پوره کواودينات

ب-تابع .$f_2(x)$.

پ-د دواړو کربښو غوڅټکي د کواوردينات محورونو سره.

ت-په D کې د دواړو توابعو ګراف.

دريم:

$$f_1(x) = -\frac{3}{8}x + 1\,;\, D = \{x \mid -7 \le x \le 3\}_{\mathbb{R}}$$

کربښه د تابع $f_1(x)$ سره په ټکي $S(-4 \mid y_s)$ کې کې له کربښې څخه د تابع $f_2(x)$ سره ، چې پروتمحور په 7- کې غوڅوي، غوڅيږي.

وټاکئ:

الف – د S پوره کواوردينات.

ب – تابع $f_2(x)$.

پ – د دواړو کربښو غوڅټکي د کواودينات د محورونو سره.

ت – د واړو توابعو ګراف په D کې..

څلورم –

د يوه دربکوډي يا مثل ټکي P_1, P_2 او P_3 ورکړ شوي دي. د دربګوډي د اړخونو تابع وټاکئ. پخوا له دې يو پلان نقشه ترتيب کړئ.

الف-

$$[P_1P_2] \triangleq f_1 ; [P_2P_3] \triangleq f_2 ; [P_1P_3] \triangleq f_3$$
$$P_1\left(-6 \;\middle|\; \frac{3}{2}\right) ; P_2\left(-2 \;\middle|\; -\frac{3}{2}\right) ; P_3\left(-4 \mid 3\right)$$

ب –

$$[P_1P_2] \triangleq f_1 ; [P_2P_3] \triangleq f_2 ; [P_1P_3] \triangleq f_3$$
$$P_1\left(6 \;\middle|\; \frac{3}{2}\right) ; P_2\left(2 \;\middle|\; -\frac{3}{2}\right) ; P_3\left(4 \mid 3\right)$$

پنځم -

$$f_1(x) = \frac{1}{2}x + 3 ; P_2(-2 \mid -3) ; D = \{x \mid -6 \le x \le 0\}_{\mathbb{R}}$$

کرښه د تابع $f_1(x)$ سره د دويمې کرښې څخه د تابع $f_2(x)$ سره ، چې له ټکي P_2 تيريږي ، په ټکي S کې ولاړکونجيزه غوښيږي.

وټاکئ:

الف - د$f_2(x)$ جګوالی m_2 .

ب- تابع $f_2(x)$.

پ – د دواړو کرښو غوڅټکی S .

ت - د دواړ کرښو محورغوڅټکي.

ټ - د دواړو کرښو ګراف په D کې.

پوښتنې

کرښيز توابع XII

لومړی -

$$f_1(x) = -\frac{1}{2}x + 3\,;\, P_2(2\,|\,-3)\,;\, D = \{x \mid 0 \le x \le 6\}_{\mathbb{R}}$$

کرښه د تابع $f_1(x)$ سره له یوې دویمې کرښې د تابع $f_2(x)$ سره، چې له ټکي P_2 تیریږي په ټکي S کې ولاړکونجیزه غوځیږي.

وټاکی.

لومړی:

الف – د $f_2(x)$ جګوالی m_2 .

ب – تابع $f_2(x)$.

پ - د دواړو کرښو غوځټکی S .

ت - د دواړو کرښو د محورغوځټکي.

ټ - د دواړو کرښو ګراف په D کې.

دویم –

د کرښې تابع $f_2(x)$ وټاکی، چې پروتمحور په P_{x2} کې غوځوي او له کرښې څخه د تابع $f_1(x)$ سره په S کې غوځیږي. د واړو کرښو غوځټکي وشمیری او د دواړو کرښو ګراف په D کې رسم کړی.

الف- $f_1(x) = \frac{3}{2}x + 6\,;\, P_{x_2}(-6\,|\,0)$ ، $S\left(x_s \,\middle|\, \frac{3}{2}\right)\,;\, D = \{x \mid -6 \le x \le 1\}_{\mathbb{R}}$

ب - $f_1(x) = \frac{1}{2}x - 3\,;\, P_{x_2}(4\,|\,0)$ ، $S(3\,|\,y_s)\,;\, D = \{x \mid -1 \le x \le 6\}_{\mathbb{R}}$

دریم -

$$P_1(-5\,|\,5)\,;\, P_2(-1\,|\,-1)\,;\, S(x_s\,|\,2)\,;\, D = \{x \mid -6 \le x \le 0\}_{\mathbb{R}}$$

کرښه د تابع $f_1(x)$ سره له ټکو P_1 او P_2 تیریږي او په ټکي S کې ولاړکونجیز له کرښې څخه د تابع $f_2(x)$ سره غوځیږي.

وټاکی:

الف- د $f_1(x)$ جګوالی m_1 .

ب – تابع $f_1(x)$.

پ – دS پوره کواوردینات.

ت – د$f_2(x)$ جګوالی m_2 .

ټ – تابع$f_2(x)$.

ث – د $f_1(x)$ او$f_2(x)$ ګرافونه

څلورم -

$$P_1(5 \mid 5) ; P_2(1 \mid -1) ; S(3 \mid y_s) ; D = \{x \mid 0 \le x \le 6\}_{\mathbb{R}}$$

کرښه د تابع $f_1(x)$ سره له ټکو P_1 اوP_2 څخه تیریږي او په ټکي S کې ولاړکونجیزه له کرښې د تابع $f_2(x)$ سره غوځیږي.

وټاکی:

الف – د $f_1(x)$ جګوالی m_1 . ب - تابع $f_1(x)$.

پ - د S پوره کواوردیناتونه ت – د $f_2(x)$ جګوالی m_2 .

ټ - تابع $f_2(x)$. د $f_1(x)$ او $f_2(x)$ ګرافونه.

پنځم -

$$f_2(x) = 3x - 3 ; S\left(\frac{3}{2} \middle| \frac{3}{2}\right) ; D = \{x \mid 0 \le x \le 6\}_{\mathbb{R}}$$

د تابع $f_1(x)$ ګراف په ټکي S کې د تابع $f_2(x)$ له ګراف څخه ولاړکونجیزه غوځیږي.

وټاکی:

الف - تابع $f_1(x)$.

ب – د دواړو کربنو د محورونو غوښتکي.

پ – د دواړو توابعو ګراف په D کې.

پوښتنې

کربنيزې توابع برخه XIII

لومړی -

$$f_2(x)=\frac{4}{5}x+\frac{9}{10};S\left(2\left|\frac{5}{2}\right.\right);D=\{x\,|\,-1\le x\le 4\}_{\mathbb{R}}$$

د تابع$f_1(x)$ ګراف په ټکي S کې د تابع $f_2(x)$ له ګراف څخه ولاړکونجيز(قايم الزاويه) غوښتيري.

وټاکی:

الف: تابع $f_1(x)$.

ب – د دواړو کربنو د محورونو غوښتکي.

پ – د دواړو توابعو ګرافونه په D کې.

$$g:\quad y-\sqrt{2}x=1\qquad\Rightarrow g(x)=\sqrt{2}x+1$$

$$h:-2y-\sqrt{2}x+6=0\Rightarrow h(x)=-\frac{1}{2}\sqrt{2}x+3$$

د اورتوګوناليټي شرايط: $a_{1g}=-\dfrac{1}{a_{1h}}$

$$a_{1g} = -\frac{1}{-\frac{1}{2}\sqrt{2}} = \frac{\frac{1}{1}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1\cdot 2}{1\cdot\sqrt{2}} = \frac{2\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{2\cdot\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \quad q.e.d$$

دویم:

د دوه کرښنو توابع $f_1(x)$ او$f_2(x)$ ورکړشوي او د یوې دریمې کرښې جګوالی m_3 د تابع $f_3(x)$ سره. تابع $f_3(x)$ داسې وټاکئ، چې ګراف یې د نورو دواړو کرښنو غوښتکي څخه تیر شي. د دریواړو کرښنو محور غوښتکي وټاکئ او د دریواړو توابعو ګراف په D کې رسم کړئ.

الف-

$$f_1(x) = -4x - 2\,;\, m_3 = \frac{1}{4}$$
$$f_2(x) = 2x + 4\,;\;\; D = \{x \mid -9 \le x \le 0\}_{\mathbb{R}}$$

ب –

$$f_1(x) = \frac{1}{4}x + \frac{9}{4}\,;\, m_3 = -4$$
$$f_2(x) = 2x + 4\,;\;\; D = \{x \mid -9 \le x \le 0\}_{\mathbb{R}}$$

دریم: کرښه دتابع $f_1(x)$ سره له ټکيP_1 تیرېږي او له یوې دویمې کرښې چې له ټکي P_2 تیریږي په ټکي S کې غوځیږي. توابع $f_1(x)$او $f_2(x)$ وټاکئ د هغو محورغوښتکي اوپه D کې یې ګراف وکاږئ.

$$P_1\left(-2 \;\middle|\; \frac{3}{2}\right); P_2(3 \mid 5); S\left(2 \;\middle|\; \frac{5}{2}\right); D = \{x \mid -8 \le x \le 3\}_{\mathbb{R}}$$

څلورم:

$$P_1\left(-1 \;\middle|\; \frac{5}{2}\right); P_2\left(-3 \;\middle|\; \frac{11}{2}\right); D = \{x \mid -9 \le x \le 3\}_{\mathbb{R}}$$

کرښه د تابع $f_1(x)$ سره محور په 8- کې غوڅوي. $f_1(x)$ ته غبرګه یوه دویمه کرښه د تابع $f_2(x)$ سره پروت محور په 4- کې غوڅوي. دواړه کرښې له یوې دریمې کرښې چې تابع $f_3(x)$ لري او له ټکو P_1 او P_2 تیریږي په ټکو P_3 او P_4 کې ولاړکونجیزه(قایوم الزاویه) غوڅوي. وټاکئ:

الف- تابع $f_3(x)$ ب - تابع$f_1(x)$

پ – تابع $f_2(x)$ ت – د دریواړو توابعو ګراف په D کې.

پنځم:

$$A\left(-\frac{13}{2}\,\middle|\,-\frac{3}{2}\right); B(3\mid 2); D=\{x\mid -8\le x\le 4\}_{\mathbb{R}}$$

د یوه قایوم الزاویه مثلث(ولاړکونجیز درې ګوډي) څخه، چې ولاړ کونج(قایم الزاویه) یې پهC کې پرته ده، ټکي A اوB ورکړ شوي. د مثلث اړخ یا ضلع [BC] د تابع $f_3(x)$ سره د اوردینات یا ولاړ محور په 3 کې غوڅوي.

وټاکئ:

الف- د اړخ [AB] تابع $f_1(x)$ ب- د اړخ یا ضلعې [BC]تابع $f_3(x)$

پ- د اړخ [AC] تابع $f_2(x)$ ت- د ټکي C کواوردیناتونه

ټ په D کې ګرافونه.

پوښتنې

کرښیزې توابع **XIV**

لومړی: $A(-8|-6); C(-1|5); D=\{x\,|\,-8 \le x \le 2\}_{\mathbb{R}}$

له یوه قایمالزاویه مثلث، چې قایمه زاویه یې په B پرته ده، ټکی A او C ورکړ شوي دي. د مثلث ضلع (اړخ)[BC] د اوردینات محور (ولاړمحور) په 3کې قطع کوي.

دا وټاکی:

الف-

$[AB] = f_1$; $[BC] = f_2$; $[AC] = f_3$ د مثلث درې د ضلعو توابع.

ب- د B ټکي کواودینات یا وضعیه قیمت کې د ټکي B محورونه

پ -په D کې ګراف.

دویم:

$A(-4|-1); B(2|-4); D=\{x\,|\,-4 \le x \le 5\}_{\mathbb{R}}$

د یوه مثلث ټکيA او B ورکړ شوي دي. د مثلث [BC] ضلع دy محور په 12-کې قطع کوي; ضلع [AC] د x محور په 3- کې غوڅوي.

دا وټاکی:

الف-تابع $f_1(x)$ ضلع .[AB] قطع کوي

ب - تابع $f_2(x)$ ضلع [BC] غوڅوي.

پ - تابع $f_3(x)$ ضلع [AC]

ت - د C ټکي وضعیه قیمتونه

ټ - د D ټکي وضعیه قیمتونه

دريم: توابع $y = f(x) = 3x - 4$ او $g(x) = ax + 3$ ورکړ شوي.

د دواړو توابعو ګرافونه په ټکي $S(3 \mid 5)$ کې غوڅوي.

د $h(x)$ تابع مساوات داسې وکاږئ، چې ګراف په ټکي S عمود څغلي. په يوه وضيه قيمتسيستم کې دريواړه ګرافونه رسم کړئ.

څلورم:

$$f_1(x) = \frac{1}{4}x + 2\frac{1}{4}\,;\; f_2(x) = -4x - 2\,;\; D = \{x \mid -10 \le x \le 1\}_{\mathbb{R}}$$

د $f_1(x)$ تابع سره کرښه د دويمې کرښې د $f_2(x)$ تابع سره قطعه کوي.

دا وټاکئ:

الف- د S قاطع ټکی د x_s او y_s کواودينات سره.

ب - د دواړو کرښو د قاطع ټکي د x محور سره.

پ - د دواړو کرښو قاطع ټکي د x محو سره.

ت - د دواړو توابعو ګراف په D کې.

پنځم:

د $g(x)$ تابع ، چې په $f(x)$ عمود ده پيدا کړئ. د $g(x)$ ګراف د y محور په $P_y(0 \mid 3)$ ټکي قطع کوي. دواړه کرښې په يوه وضعيه قيمت سيستم(پروت ولاړ سيستم) کې رسم کړئ.

الف - $f(x) = -2x + 2$ ب - $f(x) = 3x - 6$

پ - $f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$ ت - $f(x) = \frac{3}{4}x - 3$

شپږم: د دواړو کرښو غوڅټکی (نقاط تقاطع) و ټاکئ او ګراف يې وکاږئ.

الف - $f_1(x)=\frac{1}{4}x+2\frac{1}{4}\,;\,f_2(x)=-4x-2\,;\,D=\{x\mid -10\le x\le 1\}_{\mathbb{R}}$

ب - $f_1(x)=-2x+2\,;\,f_2(x)=3x-6\,;\,D=\{x\mid -2\le x\le 4\}_{\mathbb{R}}$

پ - $f_1(x)=-\frac{2}{3}x+4\,;\,f_2(x)=\frac{3}{2}x-2\frac{1}{2}\,;\,D=\{x\mid -1\le x\le 7\}_{\mathbb{R}}$

ت - $f_1(x)=-\frac{3}{8}x+1\,;\,f_2(x)=\frac{5}{6}x+5\frac{5}{6}\,;\,D=\{x\mid -8\le x\le 4\}_{\mathbb{R}}$

n -مه درجه ټول مات- يا راشنل توابع

n -مه درجه ټول راشن لفنکشن

يو تابع $f(x)$د

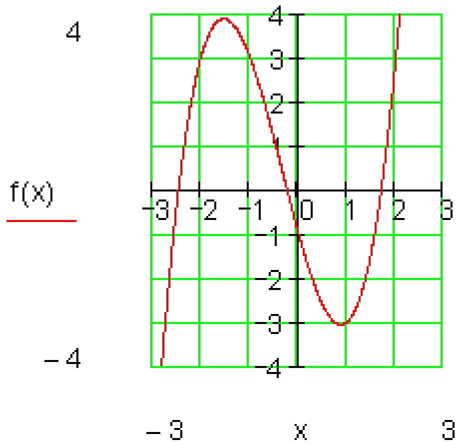
$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\ldots+a_2x^2+a_1x+a_0$$

سره n -مه درجه ټول راشنل تابع بلل کيږي.

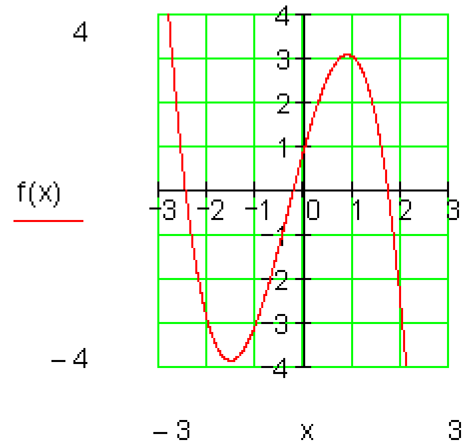
عددونه $a_n\,;\,a_{n-1}\,;\,a_{n-2}\,;\ldots a_2\,;\,a_1\,;\,a_0$ ضريبونه بلل کيږي.

ټول راشنل يا هوښيار توابع د توان توابعو يوځای اينوولو له لارې لاس ته راځي.

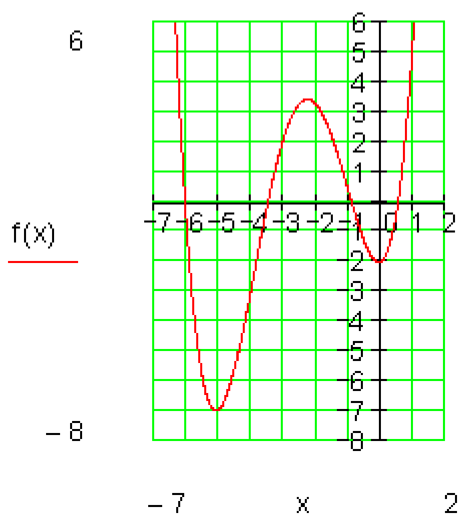
بيلګې:



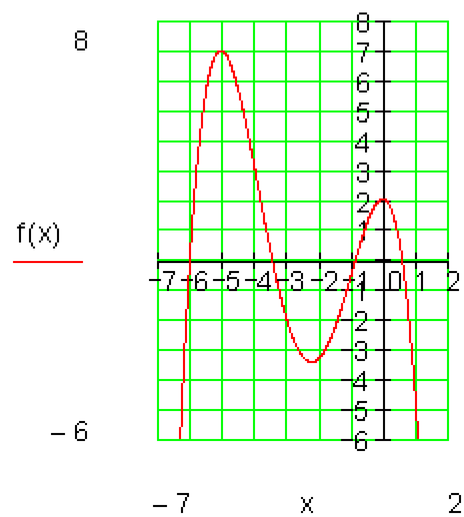
$f(x) = x^3 + x^2 - 4x - 1$



$f(x) = -x^3 - x^2 + 4x + 1$



$f(x) = 0,2x^4 + 2x^3 + 5x^2 + x - 2$



$f(x) = -0,2x^4 - 2x^3 - 5x^2 - x + 2$

د ګراف تلنه

جمله:
د ټول راشنل تابع ګراف تلنه د خورا جګ توان زیاته وونې (د جمعې غړي) سره تاکل کيږي.

	n جوړه	n ناجوړه(طاق)
$a_n>0$	تلنه له II و I ته.	تلنه له III و I ته.
$a_n<0$	تلنه له IIIو IV ته.	تلنه له II و IV ته.

بيلګه: د الماي پينتو: ناجوړه(طاق) جوړه (جفت) ناجوړه

$$f(x) = 4x^3 + 2x^2 - 7 \qquad n = 3\,(\text{ungerade}) \wedge a_n = 4 > 0 \Rightarrow \underline{\underline{III - I}}$$

$$f(x) = -2x^4 + 3x^2 - 4x + 7 \qquad n = 4\,(\text{gerade}) \wedge a_n = -2 < 0 \Rightarrow \underline{\underline{III - IV}}$$

$$f(x) = -5x^5 + 2x^4 + 9 \qquad n = 5\,(\text{ungerade}) \wedge a_n = -5 < 0 \Rightarrow \underline{\underline{II - IV}}$$

سيومتري

ګومان مو نږدې دی، هغه توابع، چې فقط د جوړه جګعددونو توانونو څخه يوځای شوي وي، محور سيومتريک دي او توابع چې فقط د ناجوړه(طاقو) جګعددونو توانونو څخه يوځای شوي وي، ټکی سيومتريک دي.

جمله

د يوه ټولراشنل تابع ګراف تيم هلته محورسيومتريک دی، که تابع مساوات فقط جوړه جګعددونه ولري.

د يوه ټولراشنل تابع ګراف ټيک هلته ټکيسيومتريک دی، که تابع مساوات فقط ناجوړه (طاق) جګعددونه ولري.

بيلګه:

$$f(x) = 2x^4 + 3x^2 + 1$$

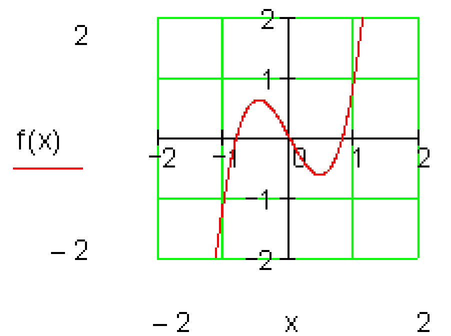
$$f(-x) = 2(-x)^4 + 3(-x)^2 + 1 = 2x^4 + 3x^2 + 1 = f(x) \Rightarrow$$

محورسیومتریک

$$f(x) = 3x^3 - 2x$$

$$f(-x) = 3(-x)^3 - 2(-x) = -3x^3 + 2x = -\left(3x^3 - 2x\right) = -f(x) \Rightarrow$$

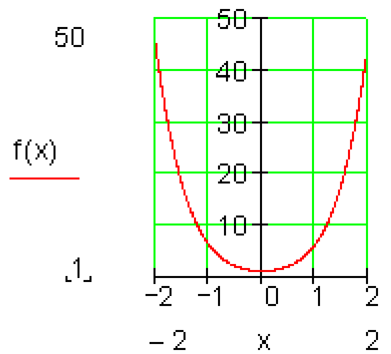
تکی سیومتریک



$$f(x) = 3x^3 - 2x$$

سرچیني ته سیومتریک دی

(تکی سیومتري)



$$f(x) = 2x^4 + 3x^2 + 1$$

yمحور ته سیومتریک دی

(محورسیومتریک)

تمرینونه:

د ټول هوښیارو توابعو خویونه.

د لاندې تاوبعو په سیمتری، ثلنه او د صفرځایونو تعداد یا ګنون باندي ویناوي وکړی.

لومړی - $f(x) = 2x^2 - 1$ دویم - $f(x) = -3x^3 + 2x^2 - 3x + 1$

- ريم - $f(x) = -\frac{1}{2}x^4 + 2x^2 + 2$ څلورم - $f(x) = -x^5 - x^3 + x$

- پنځم - $f(x) = x^6 - x^4 + 1$ شپږم - $f(x) = -\frac{1}{2}x^5 + x^2 - 2x$

- اوم - $f(x) = \frac{1}{10}x^7 + \frac{1}{8}x^5 - \frac{1}{6}x^3 + x$ اتم - $f(x) = \frac{1}{100}x^{10} - \frac{1}{50}x^6 + \frac{1}{10}x^2$

- نهم - $f(x) = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{2}{5}x - 1$ لسم - $f(x) = \frac{3}{4}x^5 - \frac{1}{2}x$

په يوه خوښه ټکي ته سيومتريک

که د يوه ټکي سيومستري تابع ګراف په خوښه راکښل شي، نو سيومتري سرچينې ته ځي، چې موږ يې ټکی سيومتري بولو له منځه ځي. نسبت و موخښتکی ته دا ساتلې پاتې کيږي.

بيلګه:

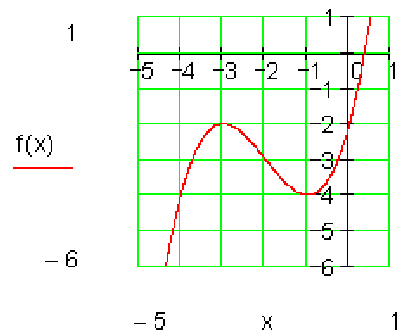
د $f(x)=0,5x^3-1,5x$ تابع ګراف ټکی سيومتريک دی، يعنې سرچينې ته سيومتريک.

دا ګراف دې په ۲ واحدونو يا يوونونو کيڼ لور ته او په ۳ يوونونو يا واحدونو کښته لور ته راکښل شي.

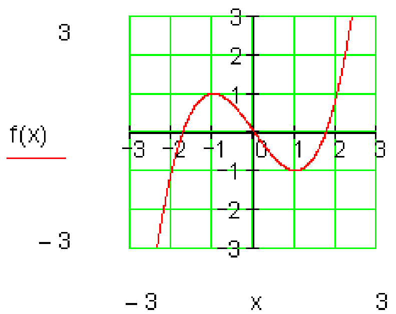
د راکښلشوي ګراف تابع مسساوات دي:

$$g(x) = 0,5(x+2)^3 - 1,5(x+2) - 3 = 0,5x^3 + 3x^2 + 4,5x - 2$$

$g(x)$ و ټکی $P_0(-2|-3)$ ته سيومتريک دی.



$f(x) = 0,5x^3 + 3x^2 + 4,5x - 2$



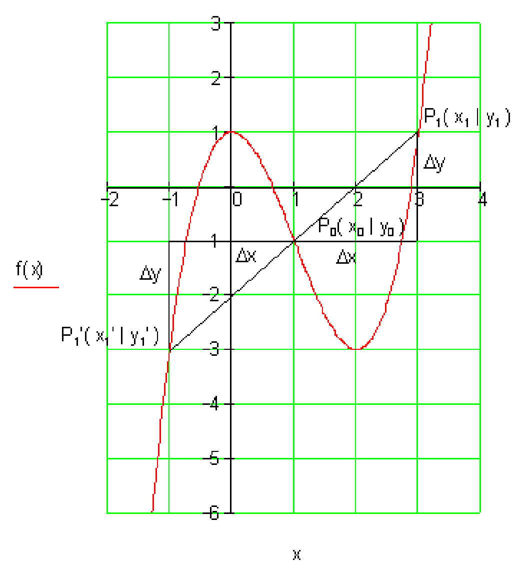
$f(x) = 0,5x^3 - 1,5x$

کواوردينانسيستم د ګراف په بڼه کوم رول نه لوبوي. تنها تابع مساواتوتغير خورلی.

د حالت بيلګه: بايد وازمايل شي، چې ايا د دريمې درجې د يوه ټول هوښيار تابع ګراف يوه ټاکلې ټکی ته ټکی سيومتريک دی.

ترمخ راوړنه.

چمتووالی:



د ټکو کواوردينات لپاره باور لري:

$$x_1 = x_0 + \Delta x$$
$$y_1 = y_0 + \Delta y$$
$$x_1' = x_0' - \Delta x$$
$$y_1' = y_0' - \Delta y$$
$$\Delta x = x_1 - x_0$$
$$\Delta y = y_1 - y_0$$

د هنداره-يا منعکس شوي ټکو کواوردیناتونه:

$$x_1' = x_0 - (x_1 - x_0) = \underline{\underline{2x_0 - x_1}}$$
$$y_1' = y_0 - (y_1 - y_0) = \underline{\underline{2y_0 - y_1}}$$

	د دې قاعدې یا لار سره تل کېدی شي په P_0 و P_1 ته یوه هنداورنه یا انعکاسونه کې اړونده هنداورنه P_1' وټاکل شي.

بیلګه:

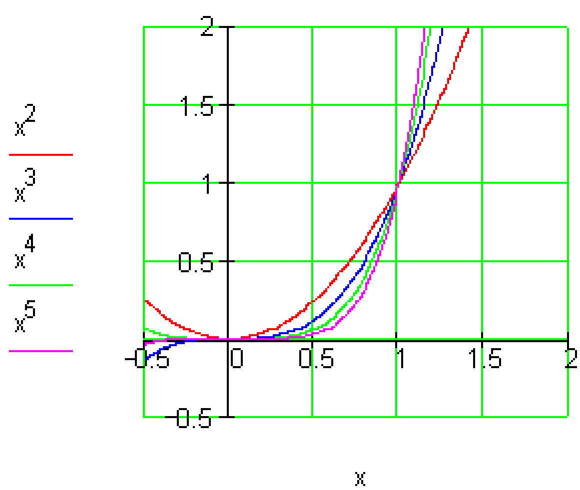
که هنداورنه په ګراف نه وي پرته ، نو ګراف وP_0 ته ټکی سیومتریک نه دی.

پوښتنې

تول مات- یا راشنل توابعI

د توانتوابعو خویونه

لومړی –

دا ترخنګ په 1 . خلورمه کې ګراف تر ځیرنې لاندې ونیسی د x ارزښتونو لپاره د 0 او 1 ترمنځ دجګو درجو یو د توان تابع ګراف پروت دی د یوه توان تابع د ګراف لاندې یا کښته د ټیټې درجې. د$x > 1$ لپاره دا ټیک برعکس کېدونکي دي. د دې حالت لپاره لایل راوړی.	

دویم – د دریمې درجې توان تابع کراف دې په دوه واحده کینې لور ته او ترلی په درې واحده پورته لور ته و کښل شي.

د دې راکښل شوې تابع مساوات لپاره دې د تابع مساوات ورکړ شي.

دریم –

د څلورمې درجې توان تابع گراف دې په درې واحده ښی لور ته او پسې ترلی دې په دوه ضریبه وغزول شي.

الف – د راکشل شوي گراف لپاره تابع مساوات ورکړئ

ب – وښایئ، چې گراف نه محور – او نه ټکی سیومتریک دی.

څلورم –

په کوم توان تابع $f(x) = x^n$ کې ټکی په گراف اړه لري؟

د دې توان توابعو مساوات ورکړئ.

الف - $P(-3 \mid -27)$ ب - $P(-2 \mid 16)$ پ - $P(0,5 \mid 0,25)$ ت - $P\left(\frac{1}{3} \middle| \frac{1}{27}\right)$

ټ - $P(0,1 \mid 0,0001)$ ث - $P(-1 \mid 1)$ ج - $P(-2 \mid 8)$ چ - $P\left(\frac{3}{4} \middle| \frac{81}{256}\right)$

پنځم –

د لاندې توان توابعو سیومتري او د گراف تلنه وټاکی او د هر یوه ارزښتدېرئ(ارزشتست) او درجه ورکړې.

الف - $f(x) = 4x^3$ ب - $f(x) = -160x^2$ پ - $f(x) = -1500x$

ت - $f(x) = \sqrt{2} \cdot x^6$ ټ- $f(x) = 5$ ث - $f(x) = -25x^5$

شپږم –

لاندې تابع مساوات د پولينوم په بنه انځور کړی.

هر ځل يې درجه ورکړی.

الف - $f(x) = (x-2)^2 - 4x^3$ ب- $f(x) = 4(x+5)^3 + (x-2)(x+2)$

پ- $f(x) = 2x^3 - (x-1)^2$ ت - $f(x) = (x-4)(x+1)^2$

ټ - $f(x) = (x^2-4)(x^3-x^2+4)$ ث - $f(x) = \frac{x-5}{8}(x-2) + \frac{3}{4}x^2$

اوم -

دليل راړی:

د یوه ناجوړه(طاق) درجې تولراشنل تابع ګراف دx محور لږ ترلږه په یوه ځل غوڅوي.

دا هلته هم باور لري که درجه حوړه يا جفتوي؟

پوښتنې

تول راشنل توابع II

سيومترى او تلنه

لومړی – و څېرى، چې ایا f(x) يو تولراشنل تابع دی. په ورکړشوي حالت کې د تابع ګراف، درجه او د ضریبونو $a_0; a_1; a_2; \ldots an$ ارزښتونه ورکړی.

الف ـ $f(x)=2$ ب ـ $f(x)=4x$ پ ـ $f(x)=2^x$ ت ـ $f(x)=\frac{x^3-4x}{8}$

ټ ـ $f(x)=\sqrt{3}x^4$ ث ـ $f(x)=\frac{1}{x}$ ج ـ $f(x)=\sqrt{x}$ چ ـ $f(x)=\left(x-\sqrt{3}\right)^2$

ح ـ $f(x)=\left(x+\sqrt{2}\right)\left(x-\sqrt{2}\right)$ خ ـ $f(x)=16x^3-2x^2+5x^2-4$

دویم – د لاندې ټولراشنل توابعو څخه کوم یې محور سیومتریک او کوم یې ټکی سیومتریک دي؟

الف ـ $f(x)=x^4-6x^2+5$ ب ـ $f(x)=x^3+3x+1$ پ ـ $f(x)=(x-2)(x+2)$

ت ـ $f(x)=x^6-6x^2+\sqrt{3}$ ټ ـ $f(x)=(x-2)^3(x-1)$ ث ـ $f(x)=x^4-\sqrt{5}x^2$

ج ـ $f(x)=\left(2x^4+2x^2+5\right)x$ چ ـ $f(x)=\left(x^2-2x+3\right)(x+1)(x-1)$

ح ـ $f(x)=1-3x^2+x^6$

دریم – د c متحوله داسې وټاکئ، چې د تابع ګراف ټکی سیومتریک او همداسې محورسیومتریک شي.

الف ـ $f(x)=x^3+4x+c$ ب ـ $f(x)=(x-c)(x+4)$ پ ـ $f(x)=x^5+x^c$

ت ـ $f(x)=x^3\left(x^2-cx\right)$ ټ ـ $f(x)=c+x^3$ ث ـ $f(x)=4x^3+x^2+cx^2+5x$

څلورم : د لاندې توابعو د ګراف تلنه معلومه کړئ.

الف ـ $f(x)=2x^5-6x^3$ ب ـ $f(x)=-4x^4+3$

پ ـ $f(x)=2x-5$ ت ـ $f(x)=-2x^2$

ټ - $f(x)=4x^4-3x^2+4x-5$ ث - $f(x)=-6x+3$

ج - $f(x)=4x^4+3x^3-6x^5$ چ - $f(x)=-2x^5+6x^3$

پنځم - د لاندې توابعو د ګراف تلنه او سیومتري ورکړی.

الف - $f(x)=\sqrt{3}x^2-\sqrt{5}x^4-2$ ب - $f(x)=x\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(8-\frac{1}{2}x\right)$

پ - $f(x)=5x^6-4x^4+5$ ت - $f(x)=x^5+x^3-2x$

ټ - $f(x)=5$ ث - $f(x)=\left(x^2-25\right)\left(x^2+6x+9\right)$

ج - $f(x)=x^5+4x^4+4x^3$ چ - $f(x)=\left(4x^2-4\right)\left(x^3+8x^2+16x\right)\left(x^3+27\right)$

ح - $f(x)=-3$ خ - $f(x)=-x^5+x^3-2$

شپږم : د لاندې تابعو صفرځیونه وشمېرئ:

الف - $f(x)=(x-4)(x-2)(x+1)$ ب - $f(x)=(x-4)(-x+2)$

پ - $f(x)=x(x+5)^2$ ت - $f(x)=3(x-4)^3(x+2)$

ټ - $f(x)=(2x-4)(x+3)x^3$ ث - $f(x)=x^3-2x^2$

د ټولراشنل توابعو محور غوځېټکي (د محور د تقاطع نقطی)

د ټولراسنل توابعو محور غوځېټکي (د محور د تقاطع نقطی)

د y محور سره غوڅتکی $P_y(0|y_s)$: $P_y(0|y_s)$ شرط: $y_s = f(0)$

بیلګه : د یا په معنا

$$f(x) = 3x^4 - 2x^2 - 3 \Rightarrow f(0) = 3\cdot 0^4 - 2\cdot 0^2 - 3 = 0 - 0 - 3 = -3$$
$$\Rightarrow P_y(0|-3) \text{ oder } P_y(0|f(0))$$

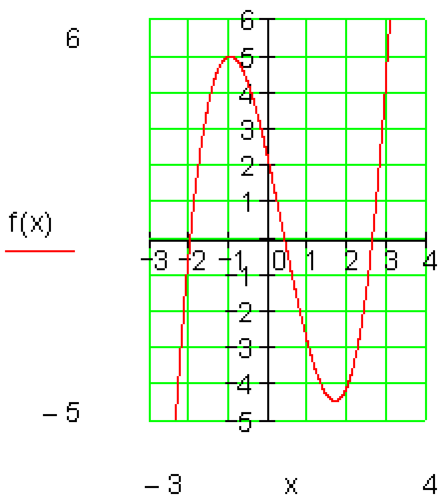
د P_y د y کواوردینات تل د ضریبونو a_0 سره کتمټ ده.

دا تل د تابع مساوات څخه لوستل کیدی شي.

د x-محور سره غوڅتکی $P_y(x_s|0)$ صفرځای : شرط: $f(x) = 0$

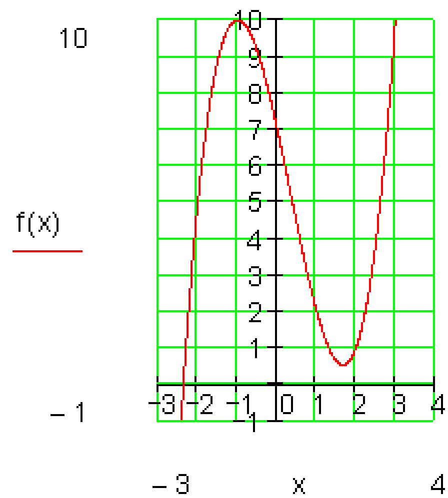
د مربع تابع (د دویمي درجې ټولراشنلتابع) څخه بوهیږو، چې دا دوه ، یو ، یا هیڅ صفرځایونه لرودی شي. دا د جګ درجو ټول راشنلتابع سره څنګه دی؟

بیلګه:



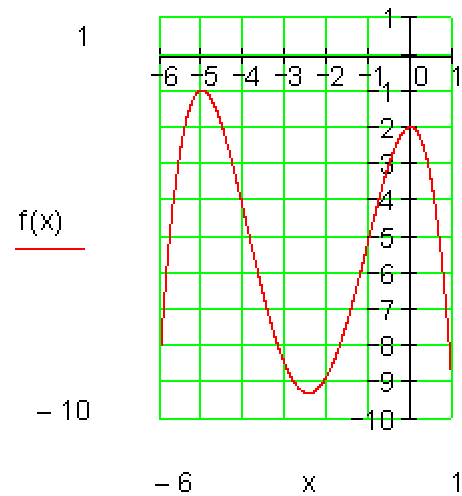
$f(x) = x^3 - x^2 - 5x + 2$

دري صفرځایونه لري



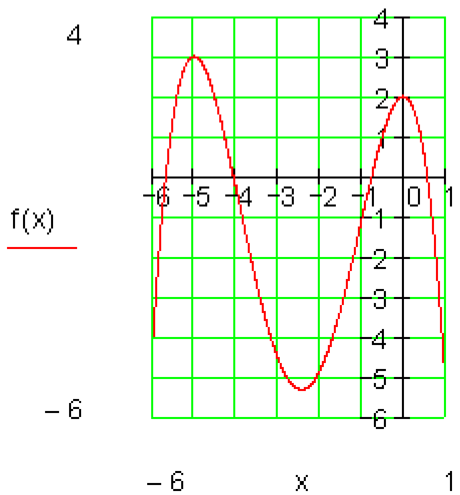
$f(x) = x^3 - x^2 - 5x + 7$

صفرځای نه لري



$$f(x) = -0,2x^4 - 2x^3 - 5x^2 - 0,2x - 2$$

د صفرځای نه شتون



$$f(x) = -0,2x^4 - 2x^3 - 5x^2 - 0,2x + 2$$

څلور صفرځایونه لري.

جمله:

یو د n -مي درجې تولراشنل تابع زیات له زیاته n صفرځایونه لري.

کهn جوړه وي، نو دا لږترلږه یو صفرځای لري.

د صفرځایونو شمیرني لار(تګلار)

د فکتوري کونو یا صربیونو تګلار:

$$f(x) = 2x^3 - 2x^2 - 4x = 0$$

فاکتور x له نوکانو راوتلی شي.

$$\Leftrightarrow x(2x^2 - 2x - 4) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

او په نوکانو کې افاده یا وییله صفر دی.

سرلیک

$$\Rightarrow 2x^2 - 2x - 4 = 0$$

مربع مساوات دی.

$$2x^2 - 2x - 4 = 0 \,|:2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0$$

$$p = -1;\ q = -2 \Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \frac{1}{4} + 2 = \frac{1}{4} + \frac{8}{4} = \frac{9}{4} \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$$

$$x_{2/3} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left| \begin{array}{l} x_2 = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = \frac{4}{2} = 2 \\ x_3 = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -\frac{2}{2} = -1 \end{array} \right.$$

صفرځایونه :

$$x_1 = 0;\ x_2 = 2;\ x_3 = -1$$

د x محور سره غوځتکی

$$P_{x1}(0|0);\ P_{x2}(2|0);\ P_{x3}(-1|0)$$

د تابع مساوات:

$$f(x) = \underbrace{2x(x+1)(x-2)}_{\text{Produkt aus Linearfaktoren}} \Leftrightarrow f(x) = 2x^3 - 2x^2 - 4x$$

(پورته) د کرښیز ضریبونو ضرب

د بدلون قانون substitution:

یادونه: په دې معنا چې د یوې اووښتونې یا متحولې لپاره بله متحوله ځا په ځای کوو.

بې مربعیز (بي ځلوریز) مساوات $f(x) = x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

بدلون: $x^2=z$

$$\Rightarrow f(z) = z^2 - 13z + 36 = 0 \quad p = -13 \quad q = 36$$

$$D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \left(\frac{13}{2}\right)^2 - 36 = \frac{169}{4} - \frac{144}{4} = \frac{25}{4} \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}$$

$$z_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \left| \begin{array}{l} z_1 = \frac{13}{2} + \frac{5}{2} = 9 \\ z_2 = \frac{13}{2} - \frac{5}{2} = 4 \end{array} \right.$$

بدلون په شا- یا بیرته ګرځوو:

$$\begin{array}{ll} x^2 = z_1 = 9 \,|\, \sqrt{\;} & x^2 = z_2 = 4 \,|\, \sqrt{\;} \\ \Rightarrow \ |x| = \sqrt{9} & |x| = \sqrt{4} \\ \Rightarrow x_1 = 3 \quad x_2 = -3 & x_3 = 2 \quad x_4 = -2 \end{array}$$

د x محور سره غوڅتکی

$$P_{x1}(3|0); P_{x2}(-3|0); P_{x3}(2|0); P_{x4}(-2|0)$$

د تابع مساوات:

$$f(x) = \underbrace{(x-3)(x+3)(x-2)(x+2)}_{\text{Produkt aus Linearfaktoren}} \Leftrightarrow f(x) = x^4 - 13x^2 + 36$$

د کرښیز ضریبونو ضرب

پوښتنې

محور غوڅتکي او د تولراشنل یا ماتتوابعو ګرافونه II

لومړی: د درېمي درجې يو تولهوښيار يا ـراشنل تابع سرچينې سره سيومتريک ده، که

الف- له ټکو $P_1(1|2)$ او $P_2(3|-2)$ څخه تيره شي.

ب- که کرښه g د $g(x)=3x$ سره پارابول په $P(0|0)$ کې لمس کړي.

دويم: تابع $f(x)$ د پيژندورشو يا تعريف ساحې $D = IR$ سره ورکړ شوي ده. تابع $f(x)$ په سيومتري وڅيړی، صفرځايونه وشميرئ او ګراف وکاږئ.

الف – $f(x)=\frac{1}{2}x^3-3x^2$ ب – $f(x)=x^3-\frac{4}{3}x^2+\frac{1}{3}x$

پ - $f(x)=\frac{1}{4}x^3-\frac{3}{4}x^2+5$ ت - $f(x)=\frac{1}{48}x^3-x$

ټ - $f(x)=\frac{1}{4}x^3-3x^2+9x$ ث - $f(x)=\frac{1}{5}x(3-x)(x+1)$

ج - $f(x)=\frac{1}{2}x\left(\frac{1}{4}x-1\right)^2$ چ = $f(x)=-\frac{1}{4}x^3+\frac{9}{4}x^2-6x+\frac{9}{2}$

دريم: تابع $f(x)=x^3-3x^2+6\,;\,D=\mathbb{R}$ ورکړشوې ده.

الف - وښايئ:

د $f(x)$ صفرځای د (1- ; 2-) ترمنځ پروت دی مدلل کړئ، چې $f(x)$ تيک يو صفرځای لري، دا ګراف بايد څنګه راکښل شي، چې له هغې سره دا تيک دوه صفرځايونه ولري؟

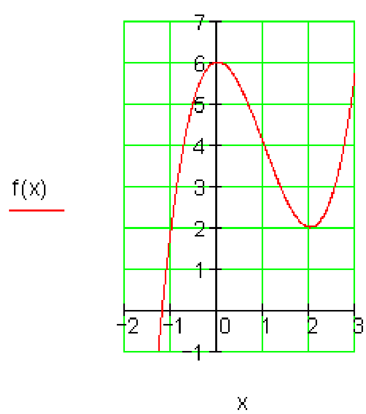
ب- کرښه $x = u$ د $f(x)$ ګراف په ټکي Q او د x محور په P کې غوڅوي.

د لاندې درېګوډي يا مثلث 0PQ سطحه د $u = 2$ لپاره وښايئ.

د مثلث د (خوندي) سطحې ترم د u په واکوالي کې د $u > 0$ لپاره ورکړئ.

$g(x)$ څومره صفرځايونه د $g(x)=3.f(x)$ سره لري؟

دلايل يې راوړئ.



څلورم: تابع $f(x)=5x^3-10{,}8x+4$ ورکړ شوي ده. وښاي: $x=0{,}4$ يو صفرځای دی. پسي نور صفرځايونه وشميرئ.

$$f(x)=5x^3-10{,}8x+4\,;\,D=\mathbb{R}$$

پنځم: د اووښتوني يا متحولې c په واکوالي کې د صفرځايونو تعداد وټاکئ.

$$f(x) = x^3 + 2x^2 + 2cx\,;\ D = \mathbb{R}$$

$$x^2 + 2x + 2c = 0 \Rightarrow p = 2\,;\ q = 2c \Rightarrow D = 1 - 2c$$
$$\text{für } D > 0 \Rightarrow 1 - 2c > 0 \Leftrightarrow c < 0{,}5$$
$$\text{für } D = 0 \Rightarrow 1 - 2c = 0 \Leftrightarrow c = 0{,}5 \Rightarrow x_{2/3} = -1$$
$$\text{für } D < 0 \Rightarrow 1 - 2c < 0 \Leftrightarrow c > 0{,}5$$
$$\text{für } c = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow x(x+2) = 0 \Rightarrow x_2 = 0\,;\ x_3 = -2$$

اړيکې:

د $c > 0{,}5$ لپاره $f(x)$ تيک يو صفرځای لري: $P_x(\,0 \mid 0\,)$

د $c = 0{,}5$ يا د $c = 0$ لباره $f(x)$ تيک دوه صفرځايونه لري.

د $c < 0{,}5$ او c د صفر سره نامساوي لپاره $f(x)$ تيک درې صفرځايونه لري.

پوښتنې

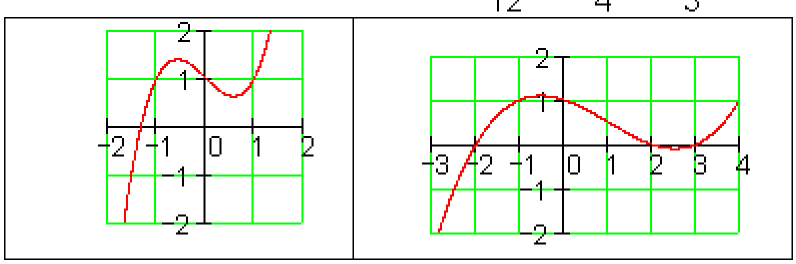
د ټول راشنل توابعو محور غوښتکي او ګرافونه III

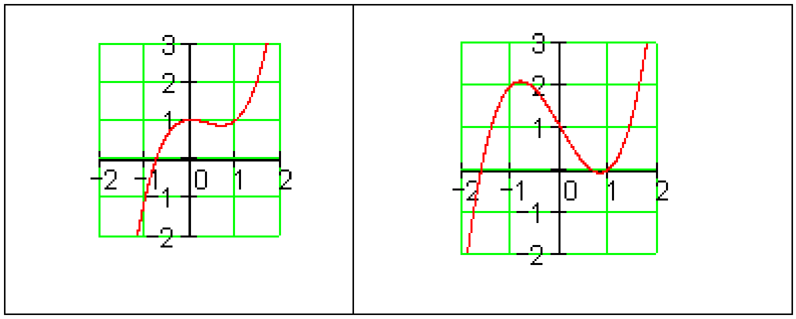
تابع په يوه ګراف تنظيميږي.

لومړی: هر د يوه تابع ترم سره تنظيم کړی او خپله پريکړه په دليل کلکه کړی.

$$f_1(x) = x^3 - x + 1;\ f_2(x) = x^3 - 2x + 1$$

$$f_3(x) = x^3 - x^2 + 1;\ f_4(x) = \frac{1}{12}x^3 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{3}x + 1$$





دويم: هر هغه څوک چې د لايسنس اخستلو لپاره ځان چمتو کوي، بايد وپوهيږي، چې د يوه بريک وهونکي موټر تمکيدني واټن په يوه وچ پاخه سرک)چې طبعاً بايد هوار وي) د عکسالعمل لار او د بريک لار څخه يوځای جوړه ده. د لاندې د موټې قانون يا لار(د درې گوتو) څخه کيدی شي د چټکتيا v په km/h د عکسالعمل لار r او د بريک لار b په متر وشميرل شي.

د بريک لار: $b = \left(\frac{v}{10}\right)^2$ همداسي $b = \frac{\left(\frac{v}{10}\right)^2}{2}$ ، د عکس العمل لار: $r = \frac{v}{10} \cdot 3$

د المان د3.3.04 راين اخبار د اول له جولای1. Juli 2004 په وچ سره د تمځای لار په بل بريکلار شميرل کيږي.(په افغانستن کې به داڅنگه وي ؟نه پوهيږم)

الف- تابع مساوات $s = f(v)$ وټاکی، د کوم سره چې د هرې تلنې د چټکتيا يا سرعت تملار شميرل کيدی شي.

ب – د لاندې تلل شوی چټکتيا$v = 0, 10, 20, 30, \ldots 50$ km/h لپاره په يوه ارزښت جدول کې د هغه هر يوه تمځای s سره يوځای کړی

پ – له دې سره د (60 ... 100 km/h) لپاره دs يو څونور ارزښتونه وشميرۍ او د دې تابع گراف وکاږۍ.

ت – د نوې بريک نيولو قانون(المانی) سره دا تراوسه شميرل شوي ارزښتونه وشميرۍ او دا په همغه کواودينات سيستم کې وکاږۍ او توله نتيجه په شننه يا کومنتار سره روښانه کړۍ.

دريم: داتابعورکړ شوی: $f(x) = x^3 - 0{,}5x^2 - 3x + 1{,}5 ; D = \mathbb{R}$

الف- وښايۍ: $f(x) = 0{,}5(2x-1)(x^2-3)$

ب –گراف د شوونتيا تر پولې ټيک وکاږۍ.

پ – د x د کوم ارزښتونو لپاره$f(x)>0$ باور لري؟

شننیزه ځمککچپوهنه یا تحلیلي هندسه:

تحلیلی هندسه(وکتورهندسه هم) د هندسې یوه برخه ده، چې د هندسې پرابلمونو د حل د پاره د الجبري مرستندوی موادو (په تولیزه توګه له کرښیز الجبر) څخه جمتو کوي. دا په ډېرو حالتونو کې ممکن کوي، چې ځمککچیزې پوښتنکونې سوچه شمیرنیز حل کړی شو، بې له دې چې لیدوني یې مرستې ته راوبولي یعنې چې شکل څنګه برېښي یا دی.

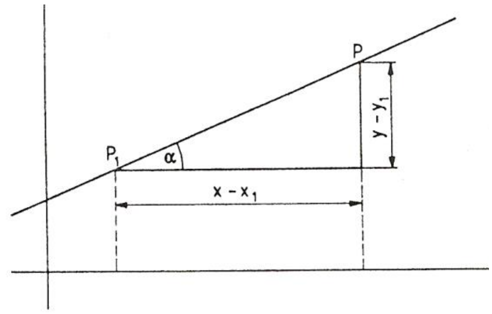
۱۶ - د سطحې شننیزه (تحلیلي) هندسه

په دې برخه کی یوڅود تحلیلي (شننیزې یا سپړنیزې) ځمککچپوهنې یا هندسي ټاکلي پرابلمونه څېړل کیږي.د تحلیلي هندسي بنسټیزه تګلار به څرګنده (وښول) شي، په نامه هندسي جوړښتونه، ددې هندسي شکلونو او ددې په شننیزې یا تحلیلي څرګندونویی د هندسي خویونو جوړښت ښایي.

۱۶ . ۱ کرښه

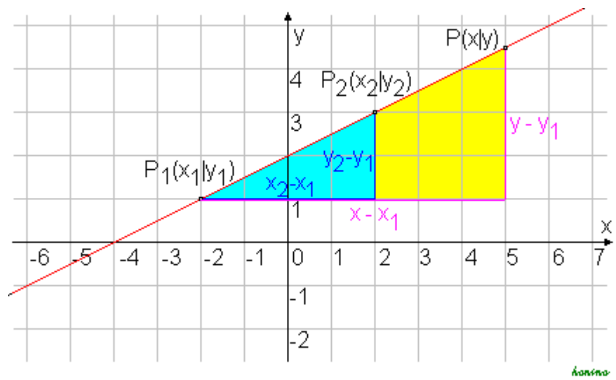
د هندسي ټاکندو ټوټو له لارې مختلف امکانات شته دی، چی یوه کرښه یواځنی کره تعین کړاي شو. ددې په لاس ته راوړنو له امله د کرښبرابرونونو یا - مساواتو مختلفی بڼی شته دي. یوه کرښه د یوه ټکي او د هغه د لور(سمت) له لارې ټاکل کیدي شي . (ټکی او د ټکی میلان معلوم دی) .

دلته دې($P1(x1\ ,\ y1$دا ټکي وي. $\alpha \neq \pm\frac{\pi}{2}$ دې د جګیدو کونج،وي، چی د کرښی لور ټاکي (خ ۱۶ . ۱) او($P(x,y$ په کرښه یو اووښتونی (واریابل) ټکی دی٠



نو د کرښې د میلان $\tan\alpha = m$ لپاره باور لري: $m = \dfrac{y - y_1}{x - x_1}$

(پورته ځیره دې وکتل شي(لاددې ځیره هم په همدې موخه کښل شوې ده))



له دې څخه لاندې لاس ته راځي:

$$y - y_1 = m(x - x_1);.....................(16,1)$$

پورته د کرښې ټکی لوربرابرون

که د y په محور P1وټاکل شي د کواوردیناتو x1= 0, y1 = b سره، نو له (۱۶ . ۱)سملاسي په لاس راځي: (y - b = m (x - 0 په همدې ډول(⇔)

$$y = mx + b \qquad (16.2)$$

دا پورته برابرون د کرښمساواتونورمال فورم (بڼه) بلل کیږي

یوه کرښه د دوه ټکو له لارې ټاکل شوې.

دا دوه ټکي دي(P1(x1 , y1 او(P2 (x2 , y2 وي، د x1|=x2 سره ، (څیره ش ۱۶ . ۲) د ځګیدونکی یا تنجنت $\tan\alpha = m$ لپاره داسی دي:

m = (y - y1) /(x -x1)

او

m = (y2-y1)/(x1-x2) = (y2-y1)/(x2-x1)

له کومو چی لاس ته راځي

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x \ - x_1};..................(16,3)$$

پورته د کربښی دوه ټکیزبرابرون

څیره ده

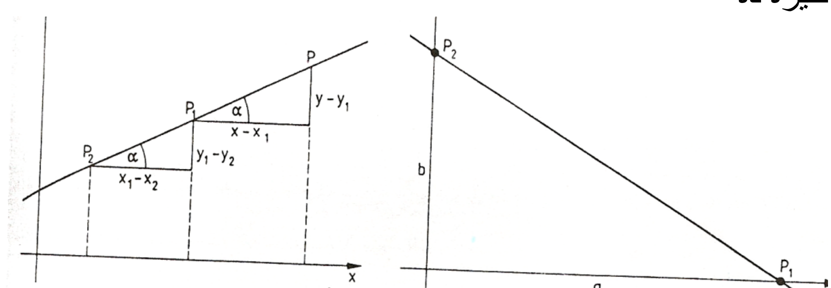


Bild 16.2 څیره

Bild 16.3 څیره

که د x - محور باندې د P1 ټکی ، د کواوردینات x1 = a |= 0 , y1 = 0 سره وټاکو او ټکیP2 دy- محور باندې د کواوردینات x1= 0, y2 = b|= 0

سره وټاکو، نو له (۱۶ . ۳) لاس ته راځي:

(y - 0) / (x - a) = (b - 0)/ (0 - a)

او له دې دا لاندې لاس ته راځي:

$$x/a+y/b = \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \qquad (16,4)$$

پورته د کربښو د غوځي برابرون

خلور پورتنی کربښمساوات ټول په x او y کی لاینیز دي.د مساوات عمومي فورم)یا ټولیزه بڼه (داسی دئ:

$$Ax + By + C = 0 \qquad (16 . 5)$$

د کرښبرابرونونو ټولیزه بڼه(عمومي فورم)
دا فورم په ځانګړې توګه دا برابرون هم خوندي لري یا په بر کی نیسي
y = y0 (A = 0 ,B|=0)
او(x=x0(A|=0,B=0 چی د x - محور اوپه همدې ډول د y - محور ته غبرګي کرښي دي، په داسی حال کی چی تراوسه دومه لا نه ده څېړل شوې

بیلګه ۱۶ . ۱:

د کرښی برابرون یا لاینیز برابرون، چی له(P(-2 , 3 ټکي تیریږي او د جګوالي کونج $\alpha = 30^\circ$ یی د $m = \tan\alpha \frac{1}{3}\sqrt{3}$ له امله، د (۱۶ . ۱) سره سم داسی لیکل کیږي $y - 3 = \frac{1}{3}\sqrt{3}(x+2)$

او نورمال فورم یي په لاندې ډول دی

$$y = \frac{1}{3}\sqrt{3}x + (3 + \frac{2}{3}\sqrt{3})$$

بیلګه ۱۶ . ۲ :

د لاینیزبرابرون یا دکرښوبرابرون په ټکو(P1 (3/2 ,-2 او(P2(1 , -4کی د (۱۶ . ۳)سره سم په لاندې ډول دي:

$$\frac{y+2}{x-\frac{3}{2}} = \frac{-y+2}{1-\frac{3}{2}}$$

له دې لاس ته راځي: $y + 2 = \frac{-2}{-\frac{1}{2}}(x - \frac{3}{2})$

نو نورمال فورم y=4x-8 لرو(**اته** ناسم، په ځای یې شپږ دي)

بیلګه ۱۶ . ۳ :

کرښه د y =-(3/2)x+1 برابرون سره د y - محور په(P1(0,1 ټکي کی غوڅوي او
جګوالی یی 2/3 - دی ، دا په دې مانا چی د x - ارزښت تغیریدل په یو دy - ارزښت
په 2/3 - تغیروي، په دې ډول دوم د کرښي ټکی لاس ته راځي. د بیلګی په توګه
p2 (0+1 , 1-(3/ 2)=p2(1,-1/2)

(ښیره ۱۶ . ۴ لاندې کښل شوې)

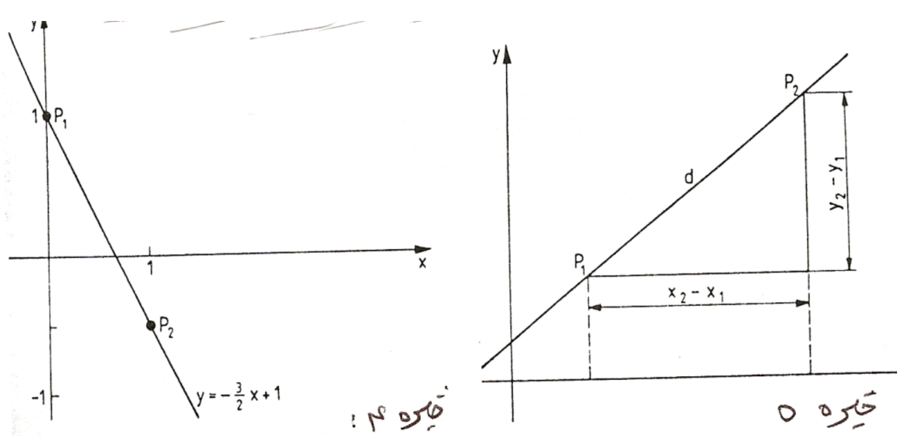
بیلګه ۱۶ . ۴ :

د کرښی د برابرونونو عمومي فورم x-2y-6 = 0 څخه دغوڅیدو فورم لاس ته راځي
x / 6 + y / 3 = 1
کرښه دکواوردینات محورونه په دې ټکو(P1(6 , 0), P2(o,-3 کې غوڅوي۰
په یوه کرښه د دوه ټکو(P1(xx,y1),P2(x2,y2ترمنځ فاصله (که د کرښي واټن P1P2
d = وي د پیتاګوراس(فیساغورس) له جملی (ښیره . ۱۶ . ۵) داسی ده

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2};.........................(16,6)$$

پورته د ټکو P1 او P2 ترمنځ واټن

ښیرې ۱۶ . ۴ او - ۵



بیلګه ۱۶ . ۵ :

د درېګوډي ABC د اړخونواوږدوالی، چی کونجتکي يی دادي(A(3,1),B(-1,1),C(2,5، په لاندې ډول دی

$$a = \overline{BC} = \sqrt{(2+1)^2+(5-1)^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$b = \overline{AC} = \sqrt{(2-3)^2+(5+1)^2} = \sqrt{37} = 6,08$$

$$c = \overline{AB} = \sqrt{(-1-3)^2+(1+1)^2} = \sqrt{20} = 4,47$$

دوه کرښي (نه کتمتی) چی (يو د بلی سره) غبرګي نه وي تيك يو غوځتکی لري. دا چی دا ټکی په دواړو کواور ديناتو پروت دی ، نو د دواړو کواورديناتو برابرون بايد پوره کړي . په دې حالت کي د غوځټکي کواورديناتو، د دوه لاينيزو برابرونونو سره چی دوه اوښتونې يا

ناپيژندونکی (مجهولی) ولري، د يوه سيستم يواځنی کره اوبيونه ترې لاس ته راځي. په ټوليزه توګه دا باور لري: که يو برابرونسيستم چی د دوه کرښو د برابرونونو څخه جوړ وي، او يو يواځنی ټاکلی حل لري، نو دواړه کرښي يو بل په دې ټکي کی سره پرې کوي.
که ناپای ډيرې اوبيونې شته وي، نو په دې حالت کی برابرون همغه يوه کرښه ښايي، که کوم اوبی ونه لري، نو کرښي يوبل سره غبرګي ځغلي (پرتله ۱۱ . ۱ . ۲)

بيلګه ۱۶ . ۶ :

د g1 : y = 3x-2 کرښی پروتځاي (موقعيت) د لاندې کرښو
الف) g2: -2x+y = 1,
ب) g3: 3x -y=5, ,
پ) g4 : -x+(1/3)y=-2/3
سره څيرو
اوبيونه : د g1 برابرونونو څيره داسی بدليږي : 3x-y=2
الف) د برابرونونو سيستم 3x-y=2، -2x+y=1
ټيك يوه اوبنونه لري: x1=3 , y1=7
ددې څخه څرګنديږي چی ټکی(S(3 , 7 د کرښو g1 او g2 غوځټکی دی .
ب) د برابرونونو سيستم

$$3x - y = 2$$

$$3x - y = 1$$

اوبی نه لري : برابرونونه يو بل ردوي يه نه زغمي . د g1 او g2 کربښی يو د بل سره غبرګي دي

پ) د برابرونونو سيستم 3x-y=2

-x+(1/3)y=-2/3

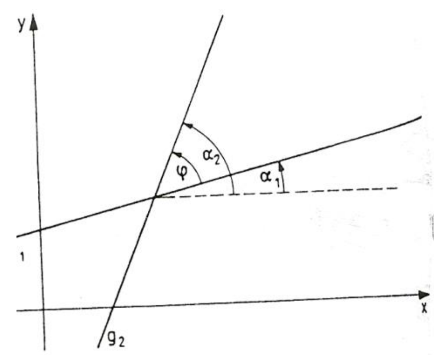
ناپای ډېر ې اوبيونې يا حلونه لري. برابرونونه يو بل سره برابر يا يو بل ته ورته دي. که په ۳ ضرب شي يو همغه پورته برابرون ترې لاس ته راځي .

g1 او g2 دوه کټ مټ برابرونونه دي ۰

که د دوه کربښو

g 1 :   y = m1x + b1   g2 : y = m2x + b2

غوڅکونج ϕ ټاکو، نو د دواړو کربښو ځګيد کونجونو $\alpha_1 \wedge \alpha_2$ کمون (کمښت يا توپير)جوړوو (خ ۱۶ . ۶)



څېره ۱۶ . ۶

د کربښی له برابرونونو پوهيږو $\tan\alpha_1 = m_1 \wedge \tan\alpha_2 = m_2$

د زياتون تيورم (بنسټيزه جمله) (برخه ۶ . ۵) څخه د $\tan(\alpha_2 - \alpha_1)$ لپاره (پر تله برخه ۴ . ۵) باوري ده

$$\tan\phi = \tan(\alpha_2 - \alpha_1) = (\tan\alpha_2 - \tan_1)/(1 + \tan\alpha_1 . \tan\alpha_2)$$

د کوم څخه چی د $\tan\alpha_1 = m_1 \wedge \tan\alpha_2 = m_2$ سره دا لاندې لاس ته راځي:

$$\tan\phi = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 . m_2};........................(16,7)$$

پورته د دوه کربښو غوڅکونج دير.

دا په دې پورې اړه لري چې ايا $\phi > 0 \vee \phi < 0$ د پورته خبرې ۱۶ . ۶ کونج پخ او که تيره دئ.

بيلګه ۱۶ . ۷ :

د دوه کرښو g1:y=x-1او g2:y=(7/4)x+1 غوڅکونج لپاره له (۱۶ ، ۷) څخه لاس ته راځي:

$$\tan\phi = \frac{\frac{7}{4}-1}{1+1.\frac{7}{4}} = \frac{3}{11}; \phi = 15,255°$$

د g1 او g2 ترمنځ پڅکونج په دې ډول دی : $180-\phi = 164,745°$

د دوه کرښو يو بل ته ځانګړي حالتونه:

۱ – کرښې يوبل سره غبرګې ځغلي. نو لرو:

$$\phi = 180° \vee \phi = 0 \Leftrightarrow$$

$$\tan\phi = \frac{m_1 - m_2}{1+m_1.m_2} = 0$$

ګورو چې د 0 = m2 - m1 لپاره باور لري، نو m2 = m1

(دلته باور لري : $m_1.m_2 = m_1^2 \neq -1$)

۲ - کرښې يو په بل (نيغې) ولاړې دي، نو لرو

$$\phi = 90° \Rightarrow \tan\phi = (m-m)/(1+m.m) = \infty$$

دا حالت د 0 = 1+m1.m2لپاره منځ ته راځي،

يعنی دm2= -1/m1 لپاره (m1|=0,m2|= 0)

په کرښه(y=y0 (m1=0 باندې کرښه(x=x0(m2=oe نيغه ولاړه ده

د غبرګوالی لپاره شرطونه

m2 = m1 (16, 8)

د اورتوګوناليټی Orthogonalität(يو په بل ولاړوالي) لپاره شرطونه:

m2 = -1 / m1 (16 . 9)

بيلګه ۱۶ . ۸ : دکرښی g2 برابرون دې وټاکل شي چی له ټکي(P (2,-1 تيريږي، او له کرښی g1 : y = -2x +1 سره الف (غبرګه او ب(اورتوګونال (نيغه) څغلي اوبيونه:

الف) د g2 کرښی ميلان (جګوالی m2 = m1 = -2)دی. پام (۱۶ . ۱) ته دکرښي g2برابرون لپاره باور لري : (y+1=-2(x-2 همداسی y = -2x +3

ب) د g2 کرښي ميلان ياجګيدنه ده m2=-1/m1=1/2 د(۱۶ . ۱) سره سم د g2 کرښي برابرون دی: y+1=(1/2)(x-2) <=> y=(1/2)x-2

بيلګه ۱۶ . ۹ :

د کرښی برابرون ټاکل کيږي چي د(P1(1/3,-1/6 ټکی تيريږي او په کرښه چی له ټکو(P2(-1,1 او(P3(-2,-1 تيريږي، ولاړه وي.

ځواب : کرښه چي له P2 ,P3 ټکو تيريږي، و (۱۶ . ۳) ته په پام لاندې برابرون لري (y-1)/(x+1)=(-1-1)/(-2+1) = 2 <=> y = 2x +3

په دې کرښی د (عمودي) ولاړې کرښی ميلان يا جګوالی داسی دی:

$$m_2 = -\frac{1}{m_1} = -\frac{1}{2}$$

د p_1 څخه تيريدونکی کرښي برابرون د m_2 ميلان سره د(۱۶ . ۱) له مخی دي:

y+(1/6)=-(1/2)(x-173) <=> y=-(1/2)x

بيلګه ۱۶ . ۱۰ :

د g1:2x-y-1=0او g2: 3x+2y=5 کرښو د غوڅتکي S واټن له ټکي(P(6,13څومره دی او د کرښي برابرون څنګه دی چي د کواوردينات له سرچينی تيريږي او د S او P څخه تيريدونکی کرښه باندې ولاړه کرښه وي؟

ځواب : د غوڅتکي کواوردينات د لاندې برابرونونو سيستم څخه لاس ته راځي

2x-y=1

3x+2y=5

يعنی: xS=1 , yS=1

د S او P ټکو ترمنځ واټن له (۱۶ . ۶) څخه لاس ته راځي

$$d = \sqrt{(1-6)+(1-13)^2} = 13$$

د (۱۶ . ۳) له مخې د کرښي برابرونونه چې له S او P تيريږي دي

(y-1)/(x-1)=(13-1)/(6-1)<=>y=(12/5)x-7/5

(جګوالی: (m = 12 / 5)

له S او P تګو تيريدونکی کرښه باندې د ولاړې کرښي ميلان

m2 = -1/m = -5/12

د (P0 (0,0ټخه تيريدونکی کرښه د m2 ميلان سره د (۱۶ . ۱) له مخې لاندې برابرون لري

y-0=-(5/12)(x-0)<=> y=-(5/12)x

۱۶ . ۷ تمرینونه

۱ – د هغو کرښو مساوات و ټاکئ، کومې چې له P_1 ټکي تیریږي او د x–محور سره کونج ∝ جوړوي

a) $P_1(2,-3)$, $= 30°$, b) $P_1(-3,2)$ $= 45°$

c) $P_1(-1,-4)$, $= 120°$, d) $P_1(4,4)$, $= 0°$

e) $P_1(0,0)$, $=150°$, f) $P_1(1,-1)$, $= 90°$

۲ –د ټولو هغو کرښو مساوات وټاکئ، کومې چې له ټکو P_1 او P_2 تیریږي

a) $P_1(0,0)$, $P_2(3,3)$, b) $P_1(-3,3)$, $P_2(0,0)$,

c) $P_1(1,4)$, $P_2(-3,-4)$, d) $P_1(1,2)$, $P_2(-1,1)$,

e) $P_1(0.1.-1)$, $P_2(-0,1,-3$, f) $P_1(1,-1)$, $P_2(4,-2)$!

۳ – د محورونو غوڅي (لنډ : محورغوڅي) a,b د کرښې مساوات په نورمالفورم وټاکئ او همداسې د غوڅټکو واټن d د محورغوڅټکو سره چې یو له بل یې لرې وټاکئ.

a) $a = 5$, $b = 2$, b) $a = -1$, $b = 3$, c) $a = 2$, $b = -3$, d) $a = -3$, $b = -3$

۴ – یو دریګوډی دا لاندې ګوډټکی لري $A(-4,-1)$, $B(2,-2)$, $C(1,3)$. د هغو کرښو مساوات څنګه دي، په کومو چې د دریګوډیو اړخونه پراته دي او معلوم کړئ چې د دریګوډي اړخونه څومره اوږده دي؟

۵ – د لاندې کرښمساواتو نورمالفورم او برخټوټېنه یا –فورم څنګه دی؟

a) $3x -5y +15 = 0$, b) $4x -3y -18 = 0$

c) $-4x +2y -10 = 0$, d) $-3x -4y +15 = 0$?

۶ – د کرښې $y = -(12 / 5)x +2$ پروتځای د کرښو

a) $y+2,4x - 6 = 0$, b) $28x +10y = 0$, c) $8x + 5y =2$,

d) $5y +12x -10 = 0$. e) $y +(12/5)x = 3$, f) $6x +2,5y = 5$

سره وښیئ.

۷ – د لاندې کرښو د غوڅتکو کواورديناتونه او غوڅکونج وټاکئ.

a) $2x + 3y = 7$ b) $y = (1/2)x + 1$ c) $y - x = 7$

$3x - y = 5$, $y = -2x + 6$, $y = 7$,

d) $x/3 - y/2 = 1$ e) $6x - 2y + 10 = 0$ f) $y = 4x - 1$

$-x/2 + y/3 = 1$, $y = 3x + 6$, $y = -3x + 5$!

۸ – کومه کرښه د کرښی $x - y = 4$ ، کرښی $3x + y = 8$ او برسیره پر دې له غوڅتکی $P(0,5)$ څخه تیریږي ؟

۹ – د لاندې گوډ ټکو $A(-4,-1), B(2,-2), C(1,3)$ سره د دریگوډي دننه کونجونه څومره لوي دی ؟ (پیلونه: دریکونجی وکاږی) یا (دریگوډی)

۱۰ – د ولاړپیریوتی کرښي یا زوړندې مساوات له ټکی $P(2,0)$ څخه په کرښه $y = 2x + 1$ څنگه دې؟

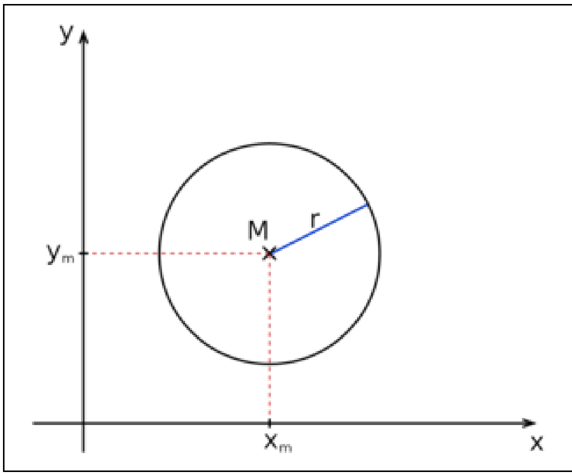
۱۱ – د ولاړکرښی مساوات په کرښه $y = 2x + 1$ باندې په ټکي $P(-1,-2)$ څنگه د

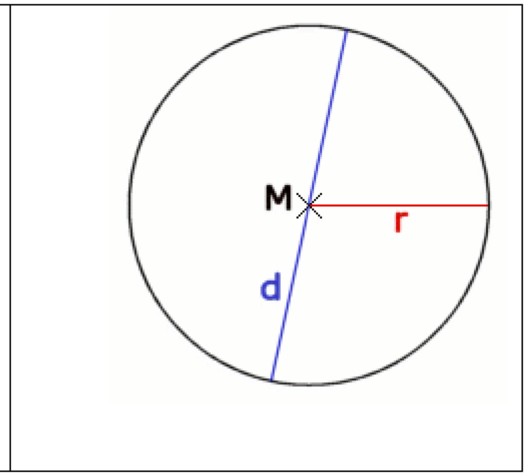
۱۲ – د کرښې $y = 2x + 1$ سره د غبرگلي کرښي مساوات چې له ټکي $P(-1,-3)$ تیریږي، څنگه دي؟

۱۶ . ۲ گردی (داېره)

داېره(گردی) د ټولو هغو ټکو ډیری(سټ) ده، چی د یوه کره ځای په ځاي ټکي ، داسي په نامه منځټکی څخه ، همغه واټن ولری. واټن ته یی وړانگه وایو او په r یی په نخښنه کوو. فورمال داسې ویل کیږي یا دا پیژند ورکوو، چې داېره (گردی) k د د سطحې (هوارې) E د ټولو ټکو ډیری(سټ) ده،د کومو لپاره چې باور لري:

$$k = \left\{ X \in E \mid |\overline{MX}| = r \right\}$$





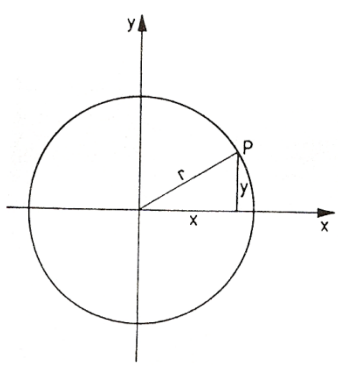


Bild 16.7 څېره ،

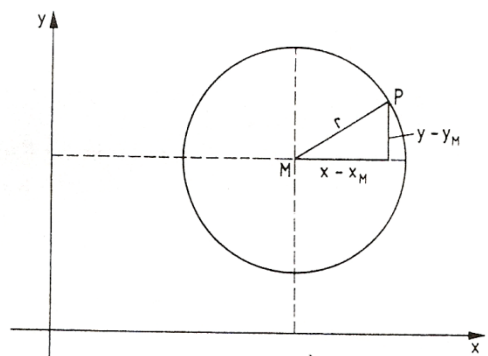


Bild 16.8 څېره

په شننيزه هندسه کې کيدی شي، چې ګردی د منځټکي $M(x_m, y_m)$ او وړانګې r سره (په هواره کې) د لاندې برابرون له مخي انځور شي.

$$(x - x_m)^2 + (y - y_m)^2 = r^2$$

پورته د ګردی ټولیز برابرون

دا برابرون د پېژند او پيتاګوراس له جملې سملاسي ورکوي
د يوې ګردی ځانګړي حالت او د کواورديناتسيستم سره، چې منځټکی يې د کواورډينات
په سرچينه پروت وي لاس ته راځي
$$x^2 + y^2 = r^2$$
که د ګردی منځ ټکی د کواورديناتسيستم (څېره ۱۶ . ۷) په سرچينه پروت وي، نو د
) پيوتاګوراس د جملی له مخی (د ګردي په خوښنه ټکي P(x,y) لپاره باور لري

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad (16 . 10)$$

د گردی منځټکي برابرون چی د گردي منځټکی(M(0,0او وړانګه r ده.

که د گردي منځټکی M کواوردینات (xM,yM) ولري (ځیره ۱۶ . ۸) نو د گردی د خوښی ټکي P(x) لپاره باور لري

$$(x - x_m)^2 + (y - y_m)^2 = r^2 \quad (16,11)$$

که د گردي د منځټکي برابرون وي د منځټکي $M(x_M,y_M)$ او وړانګي r سره

که په (۱۶ . ۱۱) کې د بینوم مربع وې شمیرو او برابرون په A|=0 فاکتور ځلوو (بی له دې چی د گردي برابرون تغیر ومومي) ، پس پیژندل کیږي چی د گردیبرابرون د څلوری یا مربع غړي په x اوy کی په فاکتور A لاینیز برابرون په x او y او ثابت غړي (چی یوه غړي په ځیري سره یوځاي شوي) لاس ته راوړو.

نو دا لاندې ټولیز(عمومي) جوړښت لري

$$Ax^2 + Ay^2+Cx+Dy+E = 0 . A |= 0 \quad (16 . 12)$$

د گردي برابرونونو(مساواتو) ټولیز فورم یا ټولیزه بڼه ٠
که د گردي برابرون په ټولیزه بڼه یا عمومي فورم ورکړشوي او که منځټکی او وړانګه یی څرګنده کوو یا معلوموو نو د گردي برابرون د منځټکي فورم باندې راوړو یا را اړوو. دا د څلوری پوره کولو یا مربع تکمیلولو په بنسټ صورت نیسي . دوه ځیرې پورته وګوری

بیلګه ۱۶ . ۱۱ :
د گردی برابرون دې په ټولیزه - یا عمومي توګه وي:
$2x^2+2y^2 +4x-12y = 0$
له دې لاس ته راځي، که په دوه وویشل شي $x^2+y^2+4x-6y-3=0$

(د څلوری پوره کونه یا مربع تکمیلونه) $x^2-4x+4+y^2-6y +9 = 3+4+9$

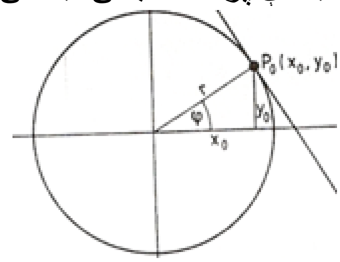
دبینوم د مربع له لارې انځورونه $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 16$
ګردی منځټکی $M(-2,3)$ او وړانګه $r=4$ لري.

بیلګه ۱۶ . ۱۲ :
د ګردی برابرون ولیکی چی منځټکی یی $M(2;0)$ وي او په کوم چې ټکی $P(6,4-3)$ روت دی؟
اوبیونه : د $M(2,0)$ سره (۱۶ . ۱۱) داسی دی
$$(x-2)^2 + y^2 = r^2$$
د P ټکی د ګردی برابرون پوره کوي $(6-2)^2 + (4-3)^2 = r^2$
له دې څخه د ګردی وړانګه په لاندې ډول لاس ته راځي: $r = 8$ او له دې سره د ګردی برابرون:
$$(x-2)^2 + y^2 = 64$$
ګردی او کرښه یو بل ته درې مختلف ځایونه لرودی شي
۱ - کرښه ګردی غوڅوي، نو له دې امله غوڅی ده(سیکانتې)
۲ – کرښه ګردی په یوه ټکي کی لمسوي یعنی مماس دی (تانجنت یا جګوالی)
۳ - کرښه ټوله له ګردی دباندې پرته ده (له ګردی تیریدونکی، لنډ : تیرېدونې)
د غوڅټکي(د تقاطع ټکي) کواوردینات باید د ګردی اوکرښی برابرون پوره کړي سرې د کرښي برابرون د ګردی په برابرونونو کی ږدي(y یا x پسی حل یا اوبی شوي) او په روښانه ډول یو مربع مساوات (څلوری برابرون) په x او y کی لاس ته راوړي، کوم چی په څرګند ډول (پرتله برخه ۱۲ . ۲) دوه ریل اوبیونې یا ځوابونه لري، یو رییل ډبل اوبی او یا هېڅ رییل اوبی کیدی شي ولري، کوم چی له حالتونو ۱ ، ۲ ، ۳ څخه عبارت دي.

بیلګه ۱۶ . ۱۳:
کوم پروت ځایونه ګردی k چی راکړشوی: $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 5$ اولاندې کرښی و یو بل ته لري؟
$$g1 : 2x+y=4 ,g2=2x+y=12 , g3: -x+y/2=3$$

اوبی: $g1: y=-2x+4$ که د ګردیبرابرون کی ځاي کړو نو دا برابرون لاس ته راځي
$$(x-2)^2+(-2x+4-3)^2=5 \Leftrightarrow 5x-8x=0$$
ددې ځوابونو $x=0 , y=4$ او $x=8/5 , y=4/5$ سره به $g1$ د ګردي غوڅوونی یا (Sekantسکانت) وي.
که $g2: y=-2x+12$ د ګردي مساواتو کی ځاي کړو نو لاندې لاس ته راځي
$$(x-2)^2+(-2x+12-3)^2=5 \Leftrightarrow x^2-8x+16=0$$

د ډبل اوبوني $x_{1,2} = 4$, $y_{1,2} = 4$ سره $g2$ يو تانجنت دی.
که $g3 : y=2x+6$ د ګردۍ مساوات کی ځاي کړو، نو لاندې لاس ته راځي:
$(x-2)^2+(2x+6-3)^2 <=> 5x^2+x+8=0$
دا څلورۍ برابرون یا مربعمساوات ځواب نه لري، نو له دې امله کرښه $g3$ له ګردۍ k دباندې پرته ده، یعنی دباندنی یا دباندونی ده.



په ګردي $x^2+y^2 = r^2$ (څېره ۱۶ . ۹) باندې د تنجنت برابرون په ټکی($P0(x0,y0$د مساوات $x0^2+y0^2 = r^2 > 0$ سره غوښتل کیږي. تنجنت د مماس په وړانګه نیغ ولاړ دی
د مماسوړانګه دا میلان یا جګوالی لري $\tan\phi = \frac{y_0}{x_0}$ او
له دې امله د (۱۶ . ۹) له مخی د تنجنت
$$m = 1/\tan\phi = -x_0/y_0; \ldots\ldots\ldots.(16,13)$$

د تنجنت یا جګي برابرون د (۱۶ . ۱) سره سم لاس ته راځي:
$y-y=-(x0/y0)(x-x0) <=> xx0+yy0=x0^2+y0^2=r^2$

$$xx_0+yy_0 = r^2 \qquad (16 . 14)$$

د ګردۍ تنجنت باربرون په ټکي $P_0(x_0,y_0)$ په ګردي
$x^2+y^2 = r^2$

(حالتونه($P0(\pm r,0$او($P0(0,\pm r$ په (۱۶ . ۱۴) کی ځاي (دننه) دي.
(څېره . ۱۶ . ۱۰)

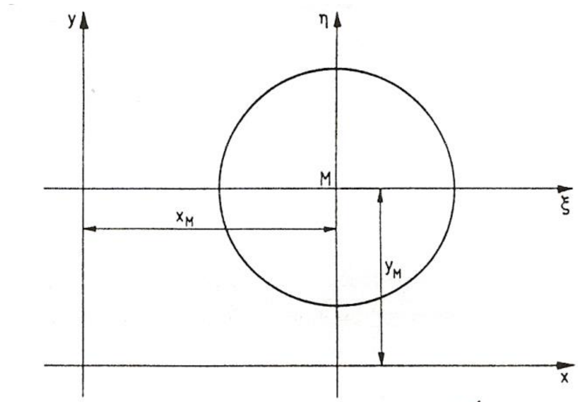


Bild 16.10 ځایه

یادونه : که له دې مخ ته یا وروسته x0,y0 یا xM,yMاو x_0, y_0 یا x_M, y_M ګورو نو کټمټ دي

بیلګه ۱۶ . ۱۴:

د دوه تنجنتو برابرون له ټکي(P1(-12,4 په ګردي $x^2+y^2=r^2$ په څه ډول دي؟
اوبیونه : لمړی د دواړو تنجنتو د مماس ټکی پیداکوو. دا باید دګردی برابرون پوره کړي . ټکی P1 باید په تنجنت پروت وي یعنی د تنجنت برابرون (۱۶ . ۱۴) باید پوره کړي.
نو باور لري

$$x_0^2+y_0^2 = 16 \text{ او } -12x_0 + 4y_0 = 16$$

که دا لاینیزبرابرون د y0 په لور حل شي ، نو په x0 کي یو څلوری برابرون یا مربع مساوات لاس ته راځي

$$x_0^2+(3x_0+4)^2 = 16$$

همداسي $5x_0^2+12x_0=0$ د اوبیونو $x_{01}=0 , x_{02}=-12/5$ سره. داهم په دې پورې اړه لري

$$y_{01}=4 , y_{02}=-16/5$$

د تنجنت مساوات په ګردې، په ټکو(P01(0,4 او(P02(-12/5,16/5 د (۱۶ . ۱۴) له مخی په لاندې ډول دي

$$0.x+4y=16 \iff y=4$$

او

$$(-12/5)x-(16/5)y=16 \iff y=(-3/4)x-5.$$

د گردۍ مساوات (۱۶ . ۱۱) د منځټکي ($M(x_M,y_M)$ سره د η,ζ -کواوردينات سيستم کی ، چی سرچينه يي په M کی پرته ده)(؟ څيره ش . ۱۶ . ۱۰) لاندې فورم لري.

$$\zeta^2+\eta^2=r^2$$

د تنجنت مساوات په ټکي $P_0(\zeta_0,\eta_0)$ کی داسی دي

$$\zeta\zeta_0+\eta\eta_0=r^2;.................................(16,15)$$

د η,ζ -کواورديناتسيستم د y,x - کواورديناتسيستم يو غبرگ کښوول (راکښل) دي، او د دواړو کواورديناتسيستم کی لاندې اړيکی پرتی دي .

$$\zeta=x-x_M,\eta=y-y_M;.........................(16,16)$$

که برابرون (۱۶ . ۱۶) د تنجنت مساواتو(۱۶. ۱۵)کی ځاي په ځاي شي، نو سړی بيا دا دy,x -کواوردينات سيستم ته ترانفورميرکوي(کشوي يا راکاږي) :

$$(x-x_M)(x_0-x_M)+(y-y_M)(y_0-y_M)=r^2 \quad (16.17)$$

په ټکي($P_o(x_0,y_0)$ کی د گردۍ تنجنت برابرو په گردۍ

$$(x-x_M)^2+(y-y_M)^2=r^2$$

بيلگه ۱۶ . ۱۵:

په گردۍ چی برابرن $x^2+y^2+16x+4y+43 = 0$ لري، دx - محور باندې، په ټکو

$$x_1 = x_2 =-5$$

سره تنجنت وکاږو(کيږدو). برابرون يی څنگه دي؟

اوبيونه : د گردۍ برابرون د منځټکي فورم (۱۶. ۱۱) باندې بدليږي:

$$x^2 +16x+64+y^2-4y+4 = -43+64+4$$

$$(x+8)^2 +(y-2)^2 = 25$$

او له دې لاس ته راځي

$$x_M = -8 , y_M = 2 , r = 5$$

د گردۍ د دواړو ټکو ارزښتونه

$$x_1 = x_2 = -5$$

د دواړو گردۍ ټکو په گرديبرابرون کی ځايوو:

$$(-5+8)^2+(y-2)^2=25$$

له دې داسی لاس ته راغلي دy لپاره څلوریبرابرون یا مربع مساواتو د دواړو اوردیناتو مماس ټکي لاس ته راځي : $y1 = 6$, $y2 = -2$

د (۱۶ . ۱۷) سره سم د تنجنت مساوات لاس ته راځي

$(x+8)(-5+8)+(y-2)(6-2)=25 \Leftrightarrow 3x+4y=9$

او

$(x+8)(-5+8)+(y-2)(-2-2)=25 \Leftrightarrow 3x-4y=-7$

تمرینونه:

۱۳ – د لاندې مساواتو سره گردیمنځټکی او وړانگه وټاکئ:

a) $x^2 + y^2 = 20$ b) $x^2+y^2 +2x -4y + 1 = 0$

c) $x^2+y^2 9y = 0$,   d) $4x^2 +4y^2+32x-8y+67 = 0$

e) $36x^2 +36y^2 -36x +24y -23 = 0$,   f) $x^2+2x+y^2+2y = 16$!

۱۴ – د لاندې گردیو مساوات وڅیړئ

الف) چی منځ ټکی $M(-2,-1)$ لری او له سرچینی تیریږي

ب) هغه چی دري ټکی ($P_1(3,0)$, $P_2(5, 5 -3)$, $P_3(5 ؛3,-1)$ یی د غاړو ټ

پ) چی وړانگه $r = 6$ لري او له ټکو ($P_1(-1,11)$,$P_2(5,5)$ څخه تیریږي.

ت) له ټکی $P_1(3,4)$ تیریږي او کرښه $y = -(4 / 3)x + 13$ په ټکي $P_2(4,3)$ لمسوي.

ټ) چي منځ ټکی $M(2,2)$ لري او کرښه $y = -(4 / 3)x +13$ لمسوي.

ث) چې د هغې منځټکی په کرښه $y = 3x -19$ پروت دی او له ټکی ($P_1(7,-2)$ او همداسی له ټکي $P_2(11,2)$ څخه تیریږي.

۱۵ – کوم پروتخایونه گردی k چي فرمول لري $x^2+y^2-8x = 0$ او لاندې کرښې یو له بل سره لري:

a) $g: y = 2x + 1$, b) $g: y = x$, c) $g: y = x - 1$,
d) $g: y = 4$, e) $g: y = -x - 3$, f) $g: y = x - 3$?

۱۶ – کوم پروتخاي کرښه $3x + 4y = 25$ ګردی $x^2 + y^2 = 25$ ته لري؟

۱۷ – د تنجنت مساوات څنګه دی
الف) په ټکي $P_0(5, y_0)$ چې په ګردی $x^2+y^2 = 169$ پروت دی،
ب) په ټکي $P_0(x_0, -2)$ چې په ګردی $(x - 1)^2 + (y-2)^2 = 25$ پروت دی؟
۱۸ – د هغو ګردیو منحنکي پیداکړی چې ورانګه یې $r = 5$ وي، کومی چې کرښه $3x + 4y = 9$ په ټکی $P_0(-1, 3)$ کی لمسوي!
۱۹ – په ګردی $x^2 + y^2 = 25/4$ د هغه تنجنت مساوات وټاکی، کوم چې د کرښي $y = (4/3)x + 2$ سره غبرګ څغلي؟

فنکشنونه(بلواك یا تابع)

د فنکشن کلیمه او د فنکشن انځورونه:

غواړم چی ددې برخی په پیل کی دی کلیمي ته د لوستونکو پام راوګرځوم: د فنکشن کلیمه کله د یواځنی څیرونی، چی په هندسه کی خورا ډیره کارول کیږي یا استعمالیږي ، کله د بلواك او بیا زیاته د فنکشن په نامه څموږ په دې کار کی بلل شوي چی موږ ورسره تراوسه د تابع د نامه لاندې هم بلد یو، څما په اند یا فکر که دا موږ څیرونه وبولو، نو موخه ور یا هدفمند به مو نومولی وي او تابع خوبي له هغي بلواک دی. په لاندې کي به وګور چی خپلواکی او بلواکی ناپیوندونکی څموږ د څیرلو متن جوړوی

پیژند ۱۵ . ۱:

د یوې رییلی واریابلی (اووښتونې یا متحولې) Rرییل ارزښته فنکشن(لنډ: فنکشن یا ځیرونه) د رییلو ګڼونو ډیری باندې ، د یوې ډیری $D \subseteq R$ یوه یواځنی ځیرونه ده. D دپیژند ډیری نومیږي .

د ټولو ارزښتونو ډیری چې y یی د ځان لپاره غوره کولی شي، که x د پیژندډیری یا تعریف ډیري په دننه کی وځغلي، د ارزښت ډیری W بلل کیږي .

د دې قانونمندی f له مخې هر $x \in M$یواځنې یوه $y \in W$ باندې تنظیمیږي یا ځیره کیږي :

$$y = f(x)$$

اوس نو x خپلواك واریابل یا اووښتونی یا مجهوله بلل کیږي یا نومیږي او y بلواك واریابل یا اووښتونی بلل کیږي، له دې امله تابع، چې موږوایو، د ځیرونې هغه ځیره شوې خوا ده. (د فنکشن یا ځیرونې او تابع یا بلواک توپیر)

د فنکشن مختلف انځورډولونو په منځ کې سړی توپیروي. د دې کلیمه انځورونه کې له ماتماتیکي یا شمیریز سومبولیك څخه تیرید شو،خو ، مګر ددې لپاره یو پیچلی، د تشریح شکل دی، چې

په لاندې کې به ورسره بلد شو.

بیلګه ۱۵ . ۱ : هر رییل ګڼ د همغه رییلګڼ په نیم ور زیات ۱ باندې تنظیمیدل یا ځیره کیدل..

بیلګه ۱۵ . ۲ : هر یو منفي ګڼ به د هغه په مطلقه ارزښت او هر یو مثبت ګڼ او صفر به د هغه په مربع تنظیم شي.

د شمیرپوهنی سومبولونو تر استعمال لاندې، تحلیلي (شننیزه) انځورونه د بلواک یا فنکشن تشریح ده. دلته x او y د نورو رییلو ګڼونو سره د بنستیزو کارونو یا عملیو ، زیاتون، کمون ، ځل ، ویش ، او د بنستیزو فنکشنونو له لارې تړل دي (پرتله برخه ۱۵ . ۴)

بیلګی ۱۵ . ۱ ته: y=(x/2)+1, D=R , W=R

بیلګی ۱۵ . ۲ ته :

y=|x|لپاره x<0 د

y=x² لپاره x>0 د

D=R,W = [0,oe)دلته

پام دې وي چې په داسې حالت کې له کیڼ و ښې لور ته یا ګډوډ لوستل کیږی یعنی داسی لولو:
x دy مطلقه ارزښت سره مساوي دی، که چیرې x له 0 کوچنی وي.

داسې لیکنو ته دې ګران لوستونکی پوره پام ولري او فکر کوم چی له اشتباه سره به نه مخامخ کیږو) . تحلیلي(شننیزه) انځورونه اکسپلیڅیت(واضح)روښانه و څرګند) explizit نومیږي، که د فنکشن برابرون ، لکه په بیلګو ۱۵ ، ۱ ۱و ۱۵ . ۲ چی په یوه د y په لور حلکیدونکي فورم مخ ته پروت وي: $y = f(x)$
که چیرې داسي نه وي نو د تحلیلي - یا شننیزې انځورونې شکل $F(x,y)=0$ دی او فنکشن ایمپلیڅیت (ورسره ځای شوي یا وراسره تړلی implizit) بلل کیږي یا نومیږي . د بیلګی په توګه به $2y-x-1=0$,D=R,W=R فنکشن د بیلګي ۱۵ . ۱ یو ایمپلیڅیت انځورونه وی. دیوه فنکشن نه هره ایمپلیڅیت شنینیزه بڼه (ایمپلیڅیت تحلیلي فورم) کیدی شي په اکسپلیڅیت شننیزه یا سپړنیزه بڼه (تحلیلي فورم) واړول شي.
د بیلګی په توګه:
که $x+y+y^5-1=0$ وي، نو دا د y په لور اکسپلیڅیت حل کیدونکی نه دی.
د یو فنکشن تحلیلي یا شننیزې انځورونی ځانګړې بڼه پارامتری څرګندونه ده. دلته تنظیم د یوه مرستندوي اووښتونې یا واریابلی t ، دا په نامه پارامتر، له لاري لارښودیږي. هر پارامتر (له یوه پارامتر ساحی څخه)
$x = \varphi(t)$, $y = \Psi(t)$

په یو ارزښتجوړې x,y تنظیمیږي.

بیلګه ۱۵ . ۱ ته: $x=2t$, $y=t+1$; $-oe< t <oe$ به یوه پارامتري انځورونه وی او $x = t$, $y = t/2 + 1$ به یوه بله پارامتري انځورونه وي.
زیات وخت فنکشنونه د جدول په څیر ورکول کیږي

بیلګي ۱۵ . ۱ته:

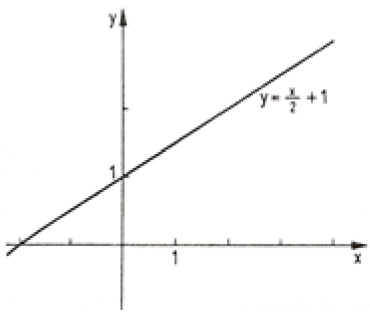
X	-2	-1	0	1	2	....
Y	2	0,5	1	1,5	2	.....

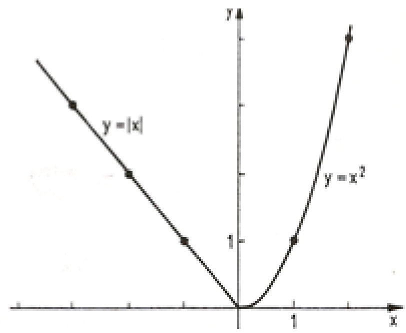
بیلګي ۱۵ ، ۲ ته:

X....	-3	2	-1	0	1	2	3	...

Y....3   2   1   0   1   4   9 ...

د فنکشن ګرافیکی انځورونه (د یوې ټوټې) په x,y- کواوردینات سیستم کی د یوې کرږې له لارې، د هغه فنکشن انځورونی څخه عبارت ده ، چې د واریابلو یا اووښتونوجوړې د x,y- هواره یا سطحه کی یواځني او یواځني ټکي باندې تنظیمیږي . ځیره ۱۵ . ۱ . او ۱۵ . ۲) بیلګي ۱۵ . ۲ته بیلګي ۱۵ . ۱ته





۱۵ . ۲ د فنکشنونو- یا بلواکو خویونه

پیژند ۱۵ . ۲: $y = f(x)$
په ایترووال]a,b [کی هلته او هلته یا ټیك هلته مونوتون جګیدونکی (مونوتون لویدونکی) دی، چیرته چې ددوه په زړه پورې ارزښتونو $x \in [a,b] \wedge y \in [a,b]$ لپاره د$x1<x2$ سره باور ولري:
$f(x1) \leq f(x2)$ $(f(x1)>f(x2))$
که د برابرونښنه باور ونه لري نو له کره یا کلکی مونوتوني غږیږو.

وبیلګي ۱۵ . ۱ ته: $y=(1/2)x+1$ په $D = R$ کی کلك مونوتون دی

و بیلګي ۱۵ . ۲ ته: $y=|x|$ د $x<0$ لپاره
او $y= x^2$ د $x>0$ لپاره
په اینتروال) [oe,0] کي مونوتون ټیټېدونکی یا -لویدونکی
او په اینتروال [oe,0) کی مونوتون جګیدونکی دی

پیژند یا تعریف ۱۵ . ۳ :

په یوه اینتروال [a,a-] کی یو تعریف شوی فنکشن $y = f(x)$ هلته او هلته جوړه (جفت) یا سیومتريك symetrisch,(ناجوړه (طاق) یا نا- یا انتيسيومتريكantisymetrisch بلل کيږي چی باوري وي

$$f(-x) = f(x) \qquad (f(-x) = -f(x))$$

د جوړه فنکشنونو ځيري اکسيال یا محوري سیومتريك و y - محور ته ځغلي) دلته هم ځيره شته ، نو تل به همغه څه لیکم؟ ۱۵ . ۳ (، طاق فنکشنونه و سرچینی ته منځني یا مرکزي سیومتريك ځغلي) بیا هم ځيره او ۰۰۰۰ش ۱۵ . ۴)

بيلګه ۱۵ . ۴

فنکشن $y= x^3 ,D= R$

یو ناجوړه یا طاق فنکشن دی :

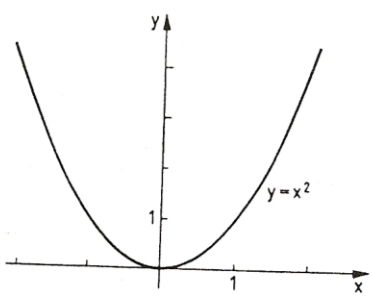
$$(-x^3) = -x^3$$

بيلګه ۱۵ . ۳ :

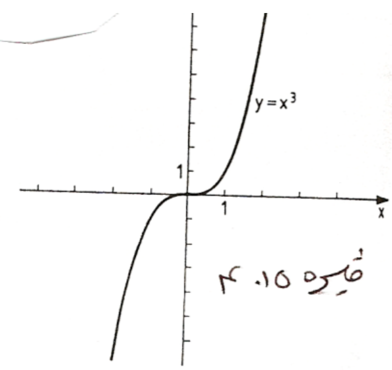
فنکشن $y=x^2,D=R$

یو جوړه یا جفت فنکشن دی:

$$(-x)^2 = x^2$$



ځیره ۱۵.۳



ځیره ۱۵.۴

د بیلګي ۱۵ . ۱ او ، ۱۵ . ۲ فنکشنونه نه جوړه یا جفت او نه ناجوړه یا طاق دي

پيژند ۱۵ . ۴:

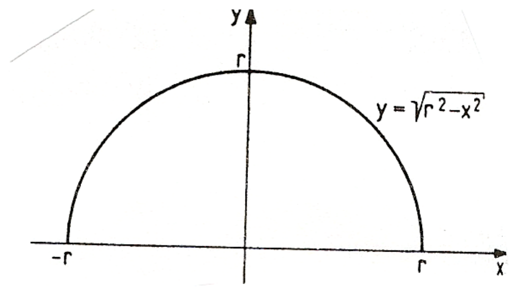
$y = f(x)$ تیك هلته په D (پيژندډيری ده) بند یا رابند(محدود)بلل کيږي که یو $k > 0$ داسی شته وي چي دا باور ولري:

$$|f(x)| < k \quad \forall x \in D$$

بيلګه ۱۵ . ۵:

فنکشن $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, $D = [-r , r]$
رابند یا راګیر(محدود» زه به دا له دې وروسته
بند وبولم) دی، ځکه چی لرو:نیم یوونګردی څیره ده(

ش . ۱۵ . ۵ $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2} \leq r$



پیژند ۱۵ . ۵:
$y = f(x)$ پریودیکي(دوراني یا بیرته- یا تل بیرته راګرځیدونکی periodical بلل کیږي د دوران یا راګرځیدونی p سره ، که باور ولري:

$$f(x + p)= f(x)$$

د دورانی یا تل راګځیدونکو (پریودیکي) فنکشنونو تیوپیکي بیلګي تریګونومتریکي فنکشنونه دي (پرتله برخه ۱۵ . ۳)

پیژند ۱۵ . ۶ :

ټول $x \in D$ د $f(x)=0$ سره، د فنکشن $f(x)$ صفر ځایونه بلل کیږي.

د فنکشن صفرځایونه د مساوات $f (x) = 0$ د حل له لارې پیدا کیږي. داحلونه د x- محور سره د فنکشن کرږې د غوڅېدلو x - ارزښتونه دي.

بیلګی ۱۵ . ۱ته:

د فنکشن $y = 1/2\ x + 1$ صفرځایونه د مساوات $x/2 + 1 = 0$ اوبی $x = -2$ دی (څیره ۱۵ . ۱)

بیلګه۰ ۱۵ . ۶:

فنکشن $y = x^2 - 4$ دوه صفرځایونه لري:

$$x^2 - 4 = 0 \iff x1 = 2 , \quad x2 = -2$$

فنکشن $y = x^2 + 4$ صفرځایونه نه لري.) بیا هم ځیر ۱۵ . ۶ (

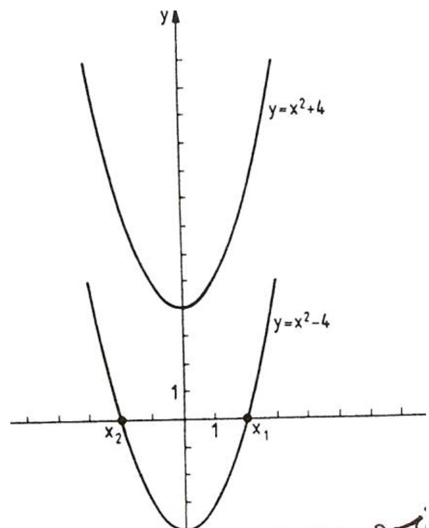


Bild 15.6

پیژند ۱۵ . ۷:

$x \in D \;\;,\;\; y \in W \;\; y = f(x),$

یویواځنی« یا یواځنی او یواځنی بلل کیږي، که هریو $y \in W$ د یوه $x \in D$ په واك کی وي
یا هر یو $y \in W$ ته یوه $x \in D$ ځیره شوی وي، د کوم لپاره چی باور ولري: (y =
f(xیو یویواځنی یایواځنی او یواځنی فنکشن په ښکیدونکی دی ، دا په دې مانا چي دا
یو فنکشن (x = g(y تعریفوي، یعني په ښت یا چپه فنکشن. که دلته د اووښتونو یا
واریابلو د نخښی(نخونی) سره بدلی شي، نو د په ښت فنکشن په توګه لرو y=g(x) دا
د فنکشن روڼنی یا وسره بده یا که غواړی مروجه ځیره ده، چی x خپلواك
اوyبلواك ، دلته د x په واك کی واریابل یامجهولی یا ناپیژندونکی دي د y=f(x) په
ښت یا برعکس فنکشن لپاره داسی هم لیکلی شو: $y = f^{-1}(x)$

فنکشن y = x د خپل په ښت فنکشن سره کټمټ(- ورته) identic دی۰ د په ښت یا
برعکس فنکشن $y = f^{-1}(x)$

کرافيکی څيره $y = x$ په کرښه د $y = f(x)$ هنداروبه) يعنی په هنداره کی څيرونه او لنډ يی: هنداروبه) ده۰

بيلګي ۱۵ ، ۱ ته :

د فنکشن $y = f(x)= x/2 +1$ چپه يا په ښې فنکشن داسی دی
$y = f^{-1}(x) = 2x - 2$
سږی $y = x/2 + 1$ د x په لور اوبی کوي: $x=2y-2$ او بالاخره x او y سره بدلوي .
(څيره. ۱۵ ۷ الف)
ډ

بيلګي ۱۵ . ۳ ته : فنکشن

$y = x^2$, $x \in D$
څيرره ش ۱۵ . ۳) په ښتکيدونکی دي يا په ښتکيدونکی نه دی.
هر $y \in W$ $=[0,oe]$ پوري دوه $[-oe,oe] =$ $x \in D$ اړه لري، يعنی $x=+y$او $x=-y$
مګر $y= x^2$کلك مونوتون جګيدونکی دی (او په دي ډول يواځنی او يواځنی).

د $x \geq 0$ لپاره او کلك مونوتون لويدونکی د $x < 0$ لپاره. $y=x^2,x\geq 0$
ته چپه- يا په ښت فنکشن $y=+ x$ دی، او $x < 0$, $y = x^2$ ته چپه- يا په ښت فنکشن - = y
xدی. (څيره ۱۵ . ۷ ب) .
په توليزه (عمومي) توګه لاندې جمله باور لري

جمله ۱۵ . ۱ :

که $y = f(x)$کلك مونوتون جګيدونکی) لويدونکی (وي ،نو په ښې فنکشن $y = f^{-1}(x)$
موجود دی او دا هم کلك مونوتون جګيدونکی (لويدونکی) دی.

۱۵ . ۳ . بنسټيز فنکشنونه

په دې برخه کي بنسټيز فنکشنونه تعريفيږي. دا ټول راشنل فنکشنونه، مات راشنل فنکشنونه، پوتنځ يا په توان فنکشنونه، ايکسپوننشل فنکشنونه او لوګاريتم فنکشنونه، تريګونومتري فنکشنونه او څيکلومتري فنکشنونه دي. دا بنسټيز فنکشنونه به د خپلوځانګړډوله خويونو له مخی وڅيړل شي. په برخه ۱۵ . ۴ که به دفنکشن فنکشنونه (ځنځيری - يا تړلي

فنکشنونه) وخیرل شي. د فنکشنونو خیرل به د هغو ځانګړدوله یا کرکتریستیکي خویونو له مخی هلته هم دوام ومومي، که د دیفرنشل شمیرنی کومکي مواد مو مخ ته پراته وي (برخه ۲۰ . ۴)

پیژند ۱۵ . ۸ :

فنکشن

$$y=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a^2x^2+a_1x+a_0, n\in N;\ a_i\in R, a_n\neq 0 \quad (15.1)$$

د ټولو $x\in R$ لپاره تعریف دی او n - مه درجه ټولریشنلفنکشن نومیږي.دي ډول فنکشنونو ته پولینوم فنکشنونه(یا لنډ : پولینوم) هم ویل کیږي

یو ساده ټول ریشنل - ۱ - امه درجه (n = 1) یالایني فنکشن په لاندې ډول دی:

$$y = mx + n \qquad (15.2)$$

دلته m او n په (۱۵ . ۱) کی پارامترونو a1 او a0 په مانا دي. د لایني فنکشنونو ځیره(ګراف) یوه کربنه ده چي په y = n کی y د - محور غوڅوي (x = 0) او جګوالی $m=\tan\alpha$

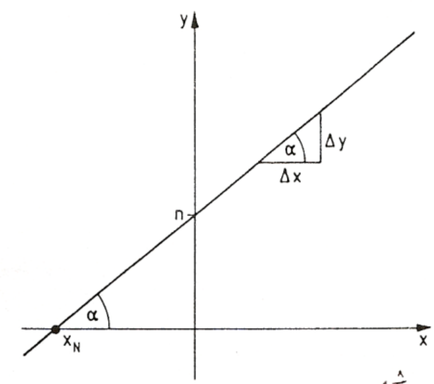


Bild 15.8 ځېره

لري (ځیره پورته . ۱۵ . ۸) جګوالی د y - ارزښت د تغیر د x - ارزښت تغیر سره متناسب دی: $m = \Delta y / \Delta x = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

کربنه جګیږي که $m > 0$ او لویږي یا ټیټیږي که $m < 0$ وي اوکه $m = 0$ وي،

د x - محور سره غبرګه ځغلي . کرښه ،که 0 =|m نیول شوی وي، ټیك یوصفرځاي (y =
0 لري: $x_N = -n/m$

که را په غاړه شي چی د یوې کرښی برابرون، چی له دوه ټکو (x1,y1) او (x2,y2)
تیریږي، پیدا کړو چي پو په بل نیغي نه وي ولاړې ، نو د هغو جګوالی m او د هغو پرنټکی یا
نوره ښه غوښتکی n په y - محور د برابرونسیستم

$$y1 = x1m + n , y2 = x2m + n$$

له مخی پیدا کوو او په دې توګه لاس ته راوړو

$$(y-y1)/(x-x1)=(y2-y1)/(x2-x1)$$

په بل پل)قدم(کی موږ ۲ -امه درجه ټولریشنل فنکشنونه یا مربع فنکشنونه رامنځ ته کوو
لکه په (۱ . ۱۵) کي $a_2 = a, a_1 = b, a_0 = c$

$$y=ax^2+bx+c , a |= 0 \qquad (15 .3)$$

د مربع فنکشنونو څیره) ګراف (پارابول دی چی د هغي سیومتري محور و y - محور ته
غبرګ ځغلي. کوایفیڅینت) ځله ووني یا ځلیدونکی (a,b,c) د پارابول د ککرې ځاي او
بڼه)فورم(ټاکی.
موږ د مربع فنکشن یو څو ځانګړي حالتونه تر څیړني لاندې نیسو.

1. $y=x^2(a=1 ,b=0,c=0) \qquad (15 . 4)$

نورمال پارابول، د ککرې کواوردینات: $x_s = 0 , y_s = 0$
(خ . ۱۵ . ۹)

2. $y=x^2+px+q \ (a=1 , b=p , c=q) \qquad (15 . 5)$

او $x^2 + px$ ته د څلورۍ - یا مربع تکمیلولو ورزیاتونی څخه لاس ته راځي:

$$y=x^2+px (p/2)^2+q-(p/2)^2=(x+p/2)^2+q-p^2/2 \qquad (15,5)$$

یو و (نسبت) (۱۵ . ۴) ته (مخامخ) د x - لور په p/2 - اودy - لور په
$q - p^2/4$ راکښل (رانښکل-یا راکش -) شوی نورمال پارابول د ی ، دا په دې مانا چی په (۱۵ . ۵) راکښل شوی پارابول دا ککره لرې:

$$x_s = -p/2 , y_s =q - p^2/4$$

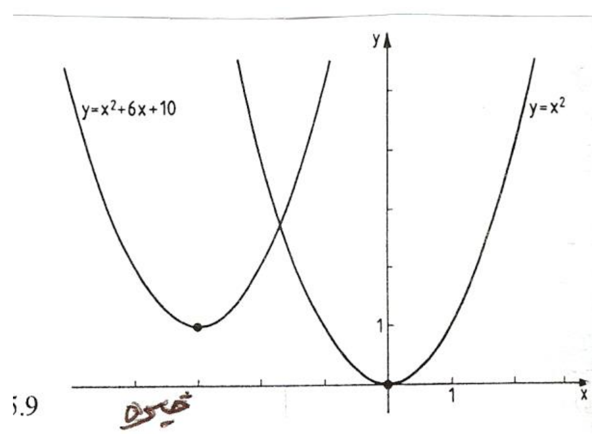
بیلګه ۱۵ . ۷:

$y=x^2+6x+10,\ x_s=-6/2=-3, y_s=10-6^2/2=1$
(خ،۱۵ . ۹)
3. $y = ax^2$ ($a|=0, b=0, c = 0$)
د ککرې (سر يا رآس) کواوردينات . $x_s = 0$, $y_s = 0$

پارابول د $|a| > 1$ لپاره خور، د $|a|<1$ لپاره پرسيدلی،د $a > 0$ لپاره پورته لور ته او د a $0 >$لپاره کښته لورته واز دی (خلاص دی)

بيلګه ۱۵ . ۸:
$y = 2x^2$, $y = (1/2)x^2$, $y = -2x^2$
(خ . ۱۵ . ۱۰)
4. $y=ax^2+bx+c=a[x^2+(b/a)x+c/a]$

د ککرې (رأس) کواوردينات داسی دی (لکه په ۱۵ . ۵ کی يی چی مخ ته تللي يو)
$x_s = -b/2a; y_s = a[(c/a)-(b^2/4a^2)] = c-b^2/4a^2$



بيلګه ۱۵ . ۹:

$y=-(1/2)x^2+x+4$,($a=-1/2$, $b=1$, $c=4$)
دککرې کواوردينات:
$x_s = -1/(2.(1/2)) = 1, y_s = 4-12/(4.(-1/2)) = 9/2$
دا چې $a = -1/2$ دی، نو پارابول پرسيدلی او لاندې لور ته واز دی (ش ۱۵ . ۱۱)

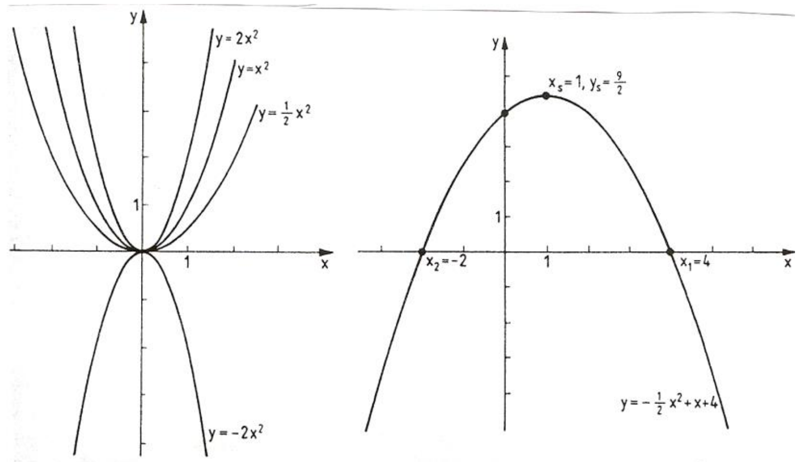


Bild 15.10 ځېره   Bild 15.11 ځاره

د فنکشن $y=ax^2+bx+c$ د صفرځایونه د برابرون $ax^2+bx+c=0$ اوبیونې دي.
وبیلګي ۱۵ . ۹ ته (ځ. ۱۵ . ۱) :
صفر ځایونه له دې لاس ته راځي : $-(1/2)x^2+x+4=0$ ، چې دلته $x_1=4, x_2=-2$ دي٠

و بیلګي ۱۵ . ۷ (ځیره ۱۵ . ۹) ته:
د $x^2+6x+10=0$ یاني $x_{1,2}=-3\pm\sqrt{9-10}=-3\pm\sqrt{-1}=-3\pm i$ څخه لاس ته راځي
چې برابرون رییل صفرځایونه نه لري.

فنکشن $y=x^2$ غبرګ یا جوړه(ډبل) صفرځایونه لري یاني $x_{1,2}=0$ دي

د ټولریشنل فنکشن دریمو او لوړو درجو لپاره به د بیلګي په توګه دټولریشنلفنکشنونو بیلګي له مخې، دریمه درجه ټولریشنل فنکشن راوړو
چې د فنکشن ارزښت شمیرلو یو ځانګړی لیدوړ فورم دی، د هورنرشیما(بنه) Hornerschema، معرفي شي. ددې لپاره به د(۱۵ . ۶) فورم بدل شي.
$y=[a_3x^2+a_2x+a_1]x+a_0=[(a_3x+a_2)x+a_1)x+a_0$ $x_{4,5}=-1\pm\sqrt{1-5}=-1\pm 2i$
هغه ورکړ شوي خپلواك x_1 پورې اړوند فنکشن ارزښت $y_1=f(x_1)$ کیدی شي له دې بڼې سره په لاندې ډول وشمیرل شي:
a3 له x1 سره ځل کیږي، دې سره a2 زیاتیږي، زیاتون یی له x1سره ځل، او a1 ور زیاتوو، زیاتون د x1 سره ځل او a0 ور زیاتوو. دا د عملیوپرلپسی په لاندې ډول د لاندې شیما (د هورنرشیما) له لارې په لیدوړ ډول مخ ته بیایو (څرګندوو)

خلونه يا ضريبونه		a_2	a_1	a_0
منحنی خلونه		a_3x_1	$(a_3x_1+a_2)x_1$	$[(a_3x_1+a_2)x_1+a_1]x_1$
منحنی زیاتون	a_3	$a_3x_1+a_2$	$(a_3x_1+a_2)x_1+a_1$	$[(a_3x_1+a_2)x_1+a_1]x_1+a_0 = f(x_1)$

ددې شيما پوهيدل لږ نابلد دی او څه فکر غواړي، خو پرې پوهيدل له نورو مساواتو څخه روښان دی.

بيلګه ۱۵ . ۱۰ : د فنکشن $y=x^3-3x^2-14x-5$ لپاره دفنکشن ارزښتونه له لاندې خپلواکو $x1 = -2$او $x2 = 5$ څخه شميرل کيږي.

اوبيونه) :

که چرې ددريمی درجې ريشنلفنکشن يو صفرځاي ولري، نو کړی شو چی د پولينوم ويش له لارې دا لاينی فاکتور بيل کړو(پرتله ۱۲ - امه برخه، جمله ۱۲ . ۴)

بيلګي ۱۵ . ۱۰ ته: $(x^3-2x-14x-5): (x-5) =x^2+3x+1$ له دې امله لرو:

$y = x^3-2x^2 -5 = (x^2 + 3x +1) (x-5)$

د ويش پولينومونو څلوونی ، يعنی 1 د(x^2) سره ، 3 د (x) سره او 1 د هورنرشيما په اخره ليکه کی ولاړ دی. د هورنرشيما له لاری د صفرځاي شميرلو سره په همغه وخت يا دمګړی کی د پولينوم ويش صورت نيسي. لرو:

$$[a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0):(x-x_1)=a_3x^2+(a_3x_1+a_2)x+[(a_2x_1+a_1)x_1+a_1]$$

او$f (x1) = 0$ چی د$(x-x_1)$سره د څلوني له لارې دا تصديقيدلی شي. پاتی صفر ځايونه د څلوری – يا مربع برابرنی د اوبيونې له لارې لاس ته راځي

$$x^2+3x+1=0; x_{2,3}=-\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}-1}=-(3\pm\sqrt{5})/2$$

په دې ډول د دريمی درجې فنکشن د درې لاينی فنکشنونو د څلونې په څير ليکل کيدی شي (پرتله: برخه ۱۲ جمله ۱۲ . ۵)

$$y=x^3-2x^2-14x-5 = (x-5)[x-\frac{-3+\sqrt{5}}{2}][x-\frac{-3-\sqrt{5}}{2}]$$

د جملی۱۲ . ۵ وینا په عمومي توگه د ټولوn- م درجو ریشنل ړرزرنړ
ړړطړتظدا غظطافنکشنونولپاره لاندېجمله باور ي کوي

جمله ۱۵ . ۲ :

هر n - م درجه ټول ریشنلفنکشن n صفرځایونه لري . کیدي شي دا ټول یو له بل توپیر ولري او یادا صفرځایونه څوځله هم رامنځ ته شي، رییل او یا جوړه کونجوگیري کملکس کیدی شي.

که $x_1, x_2, ..., x_n$ دلاندې فنکشن n صفر ځایونه وي

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

نو دا د لاینیز فاکتورونو د ځلونې په څیر په لاندې ډول لیکل کیدی شي:

$$y = (x - x_1)(x - x_2)...(x - x_n)a_n$$

د هورنرشیما په استعمال کی دې لاندې په پام کی ونیول شي:
که په یوه n - م درجه پولینوم کی یو x - پوتنځ نه وي ، نو د هغه د کوایفیڅینت یا ځله وونی لپاره دې صفر ولیکل شي.

بیلگه ۱۵ . ۱۱ :

5 - مه درجه ټول ریشنلفنکشن
$y = 2x^5 - 6x^3 - 20x^2 - 8x + 80$ درې صفرځایونه $x_1 = x_2 = 2, x_3 = -2$ لري. نور صفرځایونه دې پیداکړی شي او فنکشن دې د لاینیزو فاکتورونو د ځلونې په څیر ولیکل شي.

ځواب : د هورن جملی له لارې یو په بل پسی د پولینوم ویش یو پاتی 2 - مه درجه پولینوم لاس ته راکوي:

	2	0	-6	-20	-8	80
x_1 = 2		4	8	4	-32	-80
	2	4	5	-1	-40	0 = f(0
x_2 = 2		4	16	36	40	....
	2	8	18	20	0=f(2)	
x_3 = -2		-4	-8	-20		.
	2	4	10	0=f(-2)		

دا پاتی پولینوم $x^2+4x+10 = 2(x^2+2x+5)$ د $x^2+2x+5 = 0$ له امله
د $x_{4,5} = -1\pm\sqrt{1-5} = -1\pm 2i$

لپاره لاندې د ځل فورم لري $2x^2+4x+10 = 2(x+1-2i)(x+1+2i)$

په دې ډول ورکړشوی پولینوم په لاندې ډول لیکل کیږي
$y=2(x-2)^2(x+2)(x+1-2i)(x+1+2i)$

ددې لپاره چې د دریمي او جګو درجو د ټول ریشنلفنکشنونو یوه څیره یا تصویر ولرودی شو، نور کرکتریستیکی یا د خویونو ټکی یی د دیفرنځیالشمیرنې له لارې لاسته راوستی شو(برخه ۲۰ . ۴)

بي له دې چې د دفیرنځیالشمیر له مرستي کار واخلو ، کیدی شي چې د هغه د ناپای په هکله وینا وي وکړی شو. موږ په لیدیدونکی ډول د فنکشن د پولی کلیمه په کار اچوو، کومه به چې په برخه ۱۹ کی ټیك تعریف شي. دا د بیلګي په توګه دا مانا لري
چې $\lim_{x\to\infty} f(x) = g$ سره ($f(x)$ تل ارزښت g ته نزدې کیږي، که x د oe یانې ناپای په لور لاړشي. د

(۱۵ . ۱) لپاره باورلري:

$$\lim_{x\to\pm\infty} y = \lim_{x\to\pm\infty} x^n . \lim_{x\to\pm\infty}[a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \ldots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n}] = a_n \lim_{x\to\pm\infty} x^n$$

دا چې
xn -> oe

د x -> ± oe لپاره که n جوړه (جفت) وي
او xn ->±oe دx ->±oe لپاره که n ناجوړه (طاق) وي، او له دې لاس ته راځي

که n جوړه او a_n زياتيز يا مثبت وي، نو لرو $\lim_{x\to\infty} y=\infty; \lim_{x\to-\infty} y=\infty$
(کرِه له oe - څخه دoe په لور ځي) .
که n جوړه او a_nکميز يا منفي وي، نو لرو: $\lim_{x\to\infty} y=-\infty; \lim_{x\to-\infty} y=-\infty$
کرِه د oe - څخه د oe - په لور ځي).

که n ناجوړه او a_n کميز يا مثبت وي ، نو لرو: $\lim_{x\to\infty} y=\infty; \lim_{x\to-\infty} y=-\infty$
کرِه له oe - څخه د oe په لور ځي)

کهن n ناجوړه او a_nکميز وي ، نو لرو: $\lim_{x\to\infty} y=-\infty; \lim_{x\to-\infty} y=\infty$
کرِه لهoe څخه د oe - په لور ځي)

پيژند ۱۵ . ۹ :
فنکشن

$$y=\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+...+b_1x+b_0};..........(15,7)$$
$$n,m\in N_0; a_k, b_i\in R; Q_m\neq 0$$

مات ريشنلفنکشن بلل کيږي او د ټولو x د $Q_m(x)\neq 0$ لپاره تعريف دی.

فنکشن (۱۵ . ۷) اصلي مات نوميږي، که n<m وي او نااصلي مات دی
که n ≥ m ، نااصل مات فنکشن کيدی شي چي د پولينوم ويش له لارې تجزيه (ټوټه) شي او د يوه ټول ريشنلفنکشن او يوه ريښتونی ماتی برخی د زياتون په څير وليکل شي.

بيلګه ۱۵ . ۱۲:

فنکشن $y=\frac{2x^4-3x^3-6x^2+13x-6}{x^3-4x}$ اصل مات نه دی(n =4,m=3) په ماتلاندې فنکشن باندې دماتباندې فنکشن ويش څخه لاس ته راځي:

$$(2x^4-3x^3-6x^2+13x-6):(x^3-4x)=2x-3$$

د $2x^2+x-6$ پاتی (باقي) سره. پس لرو:

$y=2x-3+(2x^2+x-6)/(x^3-4x)$.

فنکشن (۱۵ . ۷) د $x = x0$ لپاره يو صفرځاي لري، که $x = x0$ وي نو باور لري:
$P_n(x_0) = 0$ مگر $Q_m(x) \neq 0$

دا د $x = x_L$ لپاره تشځاي (Lücke) لري،که وي: $P_n(x_0) = 0$ او $Q_m(x)=0$
د $x = x_P$ لپاره يو قطب pol لري که وي: $P_n(x_P) \neq 0$ مگر $Q_m(x_P)=0$

بيلګه ۱۵ . ۱۳ :
فنکشن ($y=(2x^2+x-6)/(x^3-4x$ د ماتباندي- او ماتلاندي فکشنونو توټي کولو وروسته په لاندې فورم د لايني فاکتورونوپه توګه ليکل کيږي.

$$y=\frac{2(x-\frac{3}{2})(x+2)}{x(x+2)(x-2)}$$

د $x = x_0 = 3/2$ لپاره ماتباندي صفر دی، مګر مات لاندې صفر نه دی (صفرځای)مات لاندې- او مات باندي فنکشنونه د $x = x; L = -2$ لپاره صفر دي (تشځای)
د $x = x_{P1} = 0$ او $x = x_{P2} = 0$ لپاره ماتلاندي صفر او مات باندې صفر نه دی (قطب)
که x سره د قطب ځاي ته نزدې شي، نو y د ناپاى په لور ځي چې د قطبځاى (تيك ناپاى ځاى بللکيږي) xpکی کره داسيمپتوټي کربښي $x = xP$ ته نزدې کيږي.د يوه تشځاى xL په حالت کی ماتفنکشن د نامعلومی افادې 0 / 0 شکل غوره کوي، له دې امله د $x = xL$ لپاره تعريف نه دی.

په ناپاى کی د فنکشن ځان نيونی ته:

د اصل ماتفنکشن (n<m) د x په جګ پوتنځ يعنی x^m د ماتباندي او ماتلاندي د ويش څخه لاس ته راځی:

$$y=\frac{\frac{a_n}{x^{-n+m}}+\frac{a_{n-1}}{x^{-n+1+m}}+\ldots+\frac{a_1}{x^{-1+m}}+\frac{a_0}{x^m}}{b_m+\frac{b_{m-1}}{x}+\ldots+\frac{b_1}{x^{m-1}}+\frac{b_0}{x^m}}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{0}{b_m}=0$$

داچی د x تول اکسپوننتونه مثبت دي، او د x تول پوتنځونه د ناپای په لور ځي ، نو د آصل مات فنکشن څیره د x->±oe لپاره د x - محور ته نزدې کیږي. فنکشنونه

چی آصل مات نه وي نو د x->±oe لپاره داسی ځانونه نیسي، چی اصل د ماتفنکشن برخه یی د صفر په لور ځي، لکه تولریشنل برخه.
د نااصل مات فنکشن څیره د x -> ±oe سره ، ځان خپل تولریشنلبرخی ته نزدې کوي.

بیلګه ۱۵ . ۱۴:

الف: $y = x/(x^2+1)$ د $x0 = 0$ په ځاي کی صفرځای لري. تشځاي او پول یا قطب نه لري رییل اوبیونه نه لري) او د$x -> \pm oe$ لپاره د-x محور ($y = 0$) د اسیمپتوتی په څیر لري (څیره. ۱۵ . ۱۲)

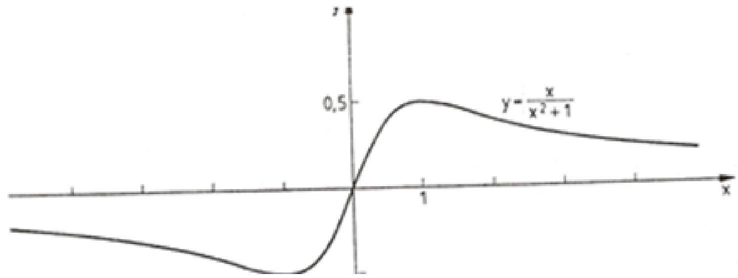
ب: $y=(x^2+2x-3)/(x+2)=x- 3/(x+2)$ صفرځایونه($x^2+2x-3 =0$) په $x1 =-3$ او $x1=1$کی لري . تشځای نه لري او په $x3 = -2$ کی قطب لري دا په دې مانا چی $x = 2$اسیمپتوتی دی، او د $x \rightarrow \pm oe$ لپاره فنکشن $y = x$ اسیمپتوتي کیږي)دا سیمپتوتی کلیمه دې په برخه ۱۶ . ۴ کی هم وکتل شي)

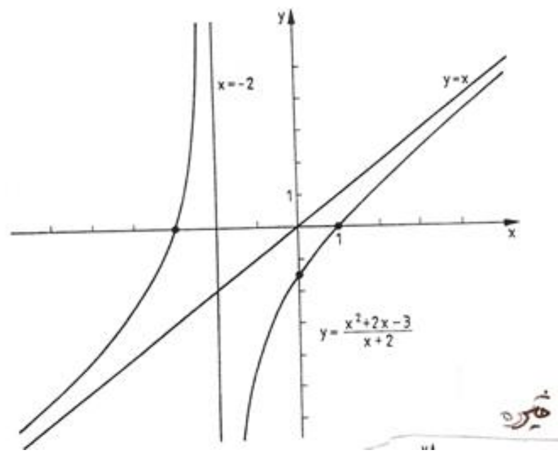
موږ په دې پسی ځانله شوي ځانګړي تول - یا مات ریشنلفنکشنونه راوړو:
فنکشن

$$y = x^n; n \in Z \setminus \{0,1\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (15,8_a)$$

یو ځانګړی پوتنځفنکشن دی(د پوتنځ پیژند 6 ۰ ۱)

(15.8)د زیړ اتـ یز زیاتیز یا مثبت تولګڼ n لپاره یو تولرشنل فنکشن دی. د جوړه تولګڼ nلپاره تولریشنل فنکشن دی. د تولګڼ n لپاره تولی کرېږ د تعریف ډیری(-) = D oe,oe، د ارزښت ډیری(W=(0,oeاو ګډ ټکی (1,1)، (0,0),(1,1) لري.
(څیره ١٤ الف ١٥) د ناجوړه ګڼ د n لپاره(D = (-oe,oe
او(W = (-oe,oe دي او (-1,-1) , (0,0). (1,1) ګډ ټکي دي (څیره ۱۵ . ۱۴ ب)۰





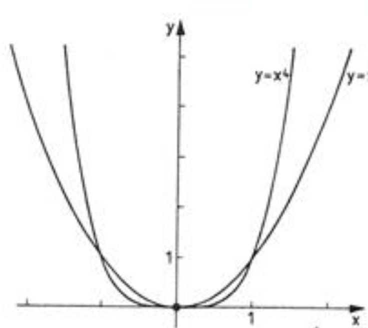


Bild 15.14a

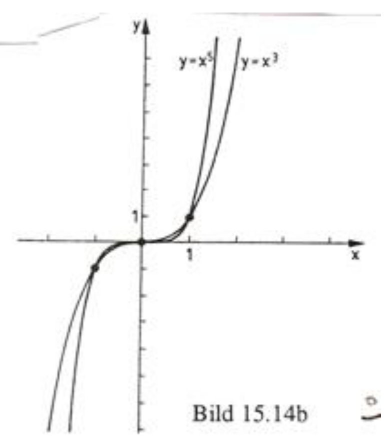


Bild 15.14b

(۱۵ ، ۸ الف) د ټول کمیز یا منفي ګڼ nلپاره یو مات ریشنل فنکشن دئ په $x = 0$ کی د یوه قطب او $y = 0$ کی یوې اسیمپتوتی په څیر. د جوړه ګڼون یا تعداد (کمیز) nلپاره ټولی کرږې د پیژند ډیري

د ارزښت ډيري($W = (0,oe)$ لري اوګډتکي $(1,1)$, $(-1,1)$ $D = (-oe,oe)\setminus\{0\}$
؟؟؟ ځيره ش. ۱۵/۱۵الف) .
د ناجوړه ګڼون (کميز n)لپاره$\{0\}$ $D = (-oe,oe)\setminus$ او($W=(-oe,oe)$ او(1-،1-) (1,1)
ګډ تکی دی (ځيره »۱۵ . ۱۵ ب) .
دوه ځيرې دي

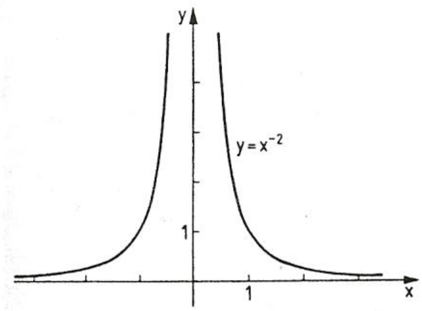


Bild 15.15a

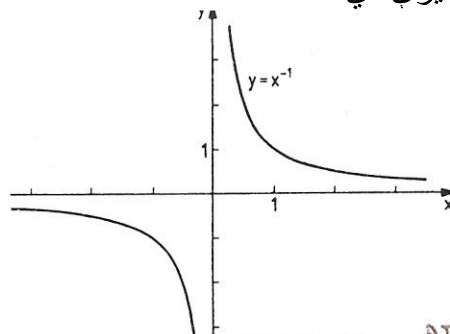


Bild 15.15b

د پوتنځ فنکشن پر ځښ بلواک لپاره دې د مونوتوني اينتروال په پام کی ونيول شي.(پرتله بيلګه(بيلګه ۱۵ .۳)
د فنکشن) لوستل له کيڼ وښي لور ته

$$y = x^n; n \in N^*\{1\}, D = [0,\infty), W = [0,\infty)$$

چپه- يا پر ځښ فنکشن په لاندې ډول دی.

$$y = \sqrt[n]{x}\ , n \in N \setminus\{1\}\ , D = [0,\infty), W=[0,\infty)...............(15,8_b)$$

او ريښه فنکشن نوميږي (پيژند ۶ . ۲ دې وکتل شي) پوتنځ فنکشن کيدی شي و ريشنل ايکسپوننت ته پراخه شي) دلته لرو $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}} (\sqrt[n]{x})^m = x^{\frac{n}{m}}$ (پرتله برخه ۴)

که پوتنځ فنکشنونه د ريشنل فنکشنونو لپاره راوړل شي:

$$y = x^n\ , a \in Q\ , x > 0 \qquad (15 . 8c)$$

نو د ريښي فنکشن (۱۵ . ۸ ب) دې د پوتنځ فنکشن په ځير وپوهيدی شي.

د پوتنځ فنکشن (۱۵ . ۸ ث) پرځښ بيرته پوتنځ فنکشن دی.
ټوليز پوتنځ فنکشن پيژند د رييل ايکسپوننت لپاره ورکړ شوی(د رييلګڼونو کليمه دې وکتل شي برخه ۳ ۰ ۱ . ۴ کی)

پيژند ۱۵ . ۱۰ : فنکشن

$y = x^{\alpha} \quad , \quad \alpha \in R \ , x > 0 \qquad (15.8d)$

پوتنځ فنکشن نوميري

بيلګه ۱۵ . ۱۵ : فنکشن $y = x^{\frac{3}{2}} = \sqrt{x^3} \ , x \geq 0$

لاندې چپه - يا پر ښۍ فنکشن لرو $y = x^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{x^2} \ , x \geq 0$

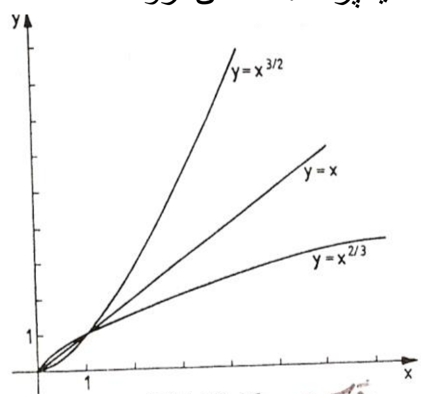


Bild 15.16a ځايره ب)

(ځيره ۱۵ . ۱۶ الف)

فنکشن لاندې چپه فنکشن لري: $y = x^{-1/2} = 1/\sqrt{x}, x > 0$

ځيره ۱۵ . ۱۶ ب)

$y = x^{-2} = 1/x^2 \ , x > 0$

يادونه : په پيژند ٤ . ۲ کی مو وويل چی يواځی د ناکميز راديکاندو ريښه ويستل کيدو اجازه لرو. دا کړنلار دي د پرښت فنکشن جوړولو برسيره د مونوتوني غوښتلو لپاره هم په پام کی وي.
د بيلګي په توګه فنکشن $y=x^3$ په ټول تعريفيدېري کي مونوتون پورته کيدونکی دی او له دې امله ټول په ښت کيدونکی وی، د $y = \sqrt[3]{x}$ فنکشن $y = x^3$ په پيژندېری ($D = [0,\infty$ کی پر ښت فنکشن دی، په داسی حال کی، چی د$y = x^3$ پرښت فنکشن د] $D = (-\infty,0$ سره په $y = -\sqrt[3]{-x} = -\sqrt[3]{|x|}$ فنکشن کی ورکړ شوی دی(ش. ۱۵ . ۱۷) .

پيژند ۱۵ . ۱۱: فنکشن

$$y=a^x, a>0, a\neq 1 \quad\text{.................................}(15,9)$$

ایکسپوننشلفنکشن یا په جګ(لنډ »جګ«) بلواك بلل کیږي۰

(د ایکسپوننت یا »جګ« کلیمی لپاره دی پېژند ۴ . ۱ وکتل شي)

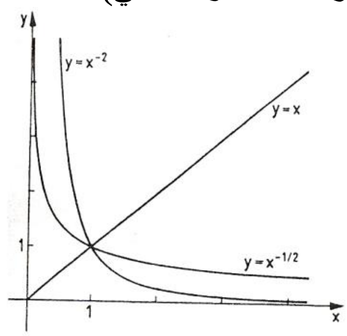


Bild 15.16b څېره

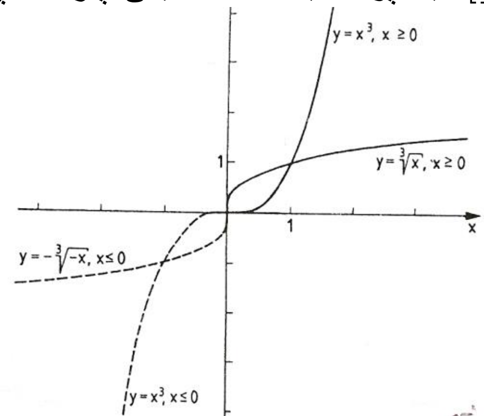
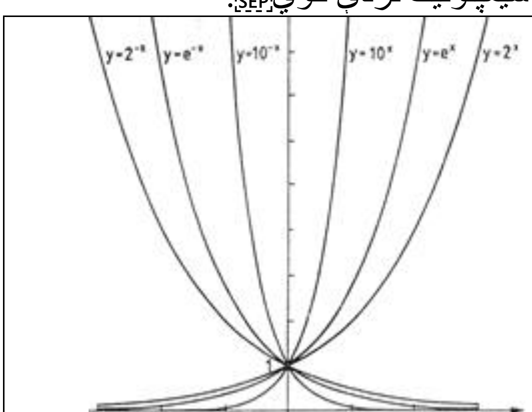


Bild 15.17 څېره

پورته دوه څیرې دې پام کې ونیول شي

فنکشن (۱۵ . ۹) لاندې پیژنددیری(D=(-oe,oe او ارزښتدیری(W=(o,oe لري. د $a^0=1$ له امله تکی(0,1 () د ټولو کرو ګډ تکی دی

د a>0 لپاره (۱۵ . ۹) په کلکهمونوتونجګیدونګی دی اود x->oe سرهد x - محور ته اسیمپوتیك ورنزدې کیږي.د 0<a<1 لپاره) ۱۵ . ۹ (په کلکه مونوتون لویږي او ځان د oe -> x سره د x -محور ته اسیمپتوتیك نزدې کوي.



کسپوننشل فنکشنونو یو څو بیلګګی
(a=2; e ; 10 ; 1 /2 ; 1/e ; 1/10
څیره ۱۵ . ۱۸ کی انځور شوي.

پيژند ۱۵ . ۱۲ :

لاندې فنکشن د ايکسپوننشل فنکشن په څېر فنکشن دی

$$y = \log_a x \,,\ a > 0 \,,\ a \neq 1 \qquad (15.10)$$

او لوګاريتم فنکشن بلل کيږي

د لوګاريتم کليمي لپاره پيژند ۵ . ۱ وګورئ) فنکشن (۱۵ . ۱۰) پيژنددېری $D = (0,\infty)$ او د ارزښتدېری $W=(-\infty,\infty)$ لري.

د $y = \log_a x$ کږې د ګرو $y=a^x$ هنداورنه ده، په کرښه $y=x$ ، تکی $(1,0)$ د ټولوکږو ګډ تکی دی (څيره شته دی)

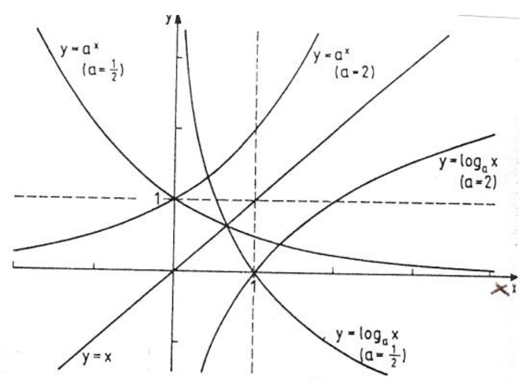


Bild 15.19 څيره

د $a>1$ لپاره(۱۵ . ۱۰) کلك مونوتونجګيدونکی او د $x \to 0$ لپاره اسيومپتوتيك د کميز - y محور ته نزدې کيږي. د $0<a<1$ لپاره (۱۵ . ۱۰) کلك مونوتون لويدونکی دی او د $x>0$ لپاره اسيمپتوتيك د زياتيز - y محور ته نزې کيږي. په شکل ۱۵ . ۱۹ کی $y=a^x$ او په څېر يی يعني $y = \log_a x$

د $a=2$ او $a=1/2$ لپاره انځوريږي.

په ځانګړې توګه ليکل کيږي $y = \log_{10} x = \lg x \,,\ y = \log_e x = \ln x$ ۰

پيژند ۱۵ . ۱۳:

د تریگونومتري فنکشنونو یا د کونجفنکشنونو لاندې(پرتله برخه ۶ . ۳) دا لاندني فنکشنونه په نخښه کیږي یا راوړل کیږي.

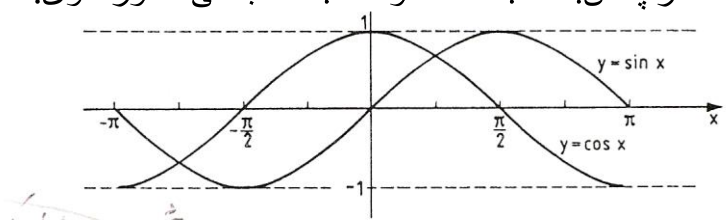
$$y=\sin x \;; D=R, W=[1,1] \ldots\ldots (15,11_a)$$

$$y=\cos x; D=R, W=[-1,1] \ldots\ldots (15,11_b)$$

$$y=\tan x=\sin x/\cos x; D=R\setminus\{\frac{\pi}{2}+k\pi\}, W=R, k\in Z \ldots (15,11_c)$$

$$y=\cot x=\cos x/\sin x; D=R\setminus\{k\pi\}, W=R, k\in Z \ldots\ldots (15,11_d)$$

د دې کړوتګلار په ش. ۱۵ .۲۰الف او ۱۵ . ۲۰ ب کی انځور شوی.



تریگونومتریکی فنکشنونه y = sin x, y = tan x , y = cotx ناجوړه فنکشنونه، او y = cos x یو جوړه فنکشن یا – بلواک دی.

تریگونومتریکي فنکشنونه پریودیکي فنکشنونه دي(مقایسه ۱۵ . ۵)

فنکشنونه y=sinx , y= cosx پریودې 2π لري، دا په دې مانا چی لرو:

$$\sin(x+2k\pi)=\sin x \;; \cos(x+2k\pi)=\cos x \,, k\in Z$$

لاندې فنکشنونه پریود π

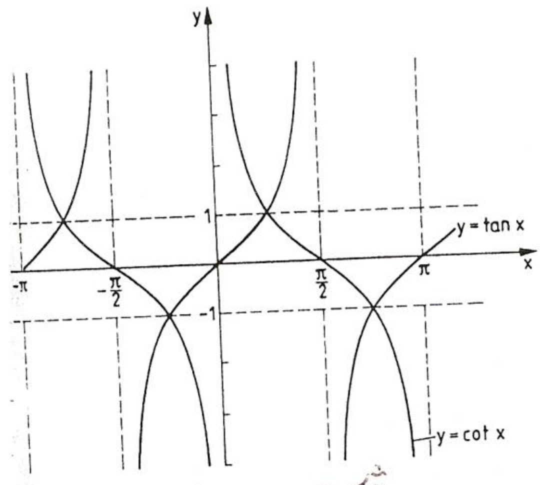


Bild 15.20b

لري y=tanx , y=cotx .دا په دې مانا چي

$\tan(x + k\pi) = \tan x, \ \cot(x + k\pi) = \cot x, k \in Z$

د ترېګونومتریکي فنکشنونو صفرځایونه دي $x_k = k\pi, k \in Z$

د y=tanx, $k \in Z$, $x_k = \frac{\pi}{2} + k\pi$ y=sinx لپاره او د y = cos

x, y = cot x لپاره تانجنت - او کوتنجنت فنکشنونه قطب ځایونه(ناپاځایونه) لري

یعني y = tan x په $k \in Z$, $x_k = \frac{\pi}{2} + k\pi$ او y = cot x په $k \in Z$, $x_k = k\pi$ کی.

د ترېګونومتریکی فنکشنونو لپاره دې د هغو مونوتوني خویونه په پام کی ونیول شي. د بیلګي په توګه

فنکشن y = sin x په ایتروال $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ کي مونوتون جګیدونکی دی او په

ایتروال $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$

کی مونوتون لویدونکی، او دا مونوتوني خویونه په یوه پوره پریودې کی تکراریږي. پس ویلی شو:

د y = sin x لپاره جګیدونکی یا پورته کیدونکی دی

د $\frac{\pi}{2}+2k\pi \le x \le \frac{3\pi}{2}+2k\pi$ لپاره لويدونکی دی، او په ورته توګه

د $-\pi+2k\pi \le x \le 0+2k\pi$ لپاره y = cos x پورته کيدونکی دی٠

د $0+2k\pi \le x \le \pi+2k\pi$ لپاره لويدونکی دی

د $-\frac{\pi}{2}+2k\pi \le x \le \frac{\pi}{2}+2k\pi$ لپاره y = tan x جګيدونکی دی

د $0+k\pi < x < \pi+k\pi; k \in Z$ لپاره y =cot x جګيدونکی دی ،

په تنجنت ـ او کوتنجنت فنکشنونو کی د قطب ځايونه د مونوتوني اينتروالونو ترمنځ پراته دي، له دې امله دا مونوتوني ايتروالونه واز اينتروالونه دي.د ساين فنکشنونه د بيلګي په توګه د وخت په پريوديکي انځور کی خپل استعمال مومي Schwingung (شوينګونګ: رپيدنه=. په عمومي ډول دلته خپلواك واريابل په t نخښنه کيږي.فنکشن

$$y = a \sin (\omega t + \varphi) \qquad (15 . 11e)$$

هارموني فنکشن بلل کيږي.

يادونه: فنکشن (۱۵ . ۱۱ت) د پيژند (۱۵ . ۱۵) له مخی تړلی يا ځنځيري فنکشن دی. موږ ترڅيرني لاندې نيسو چي د ساين فنکشن د مخه فاکتور a فاکتور د خپلواك واريابل t او زياتوونکی د ساين فنکشن په خپلواك)Argoment(د کږنځيره باندې څه تاسير اچوي.

۱ ـ د فاکتور a تاثير په فنکشن y = a . sin t د y = sin t فنکشن ارزښت باندې غزول يا راکشول دی که (|a| > 1)او يا پرسول دي که

|a| < 1)وي y= a.sin x فنکشن ارزښت a ـ ځله د فنکشن ارزښت y = sin t دی، چيرته چی برسيره پردې د a < 0 لپاره په t ـ محور يوه اينه ځيرونه هم منځ ته راولي (څره ش. ۱۵ ۲۱ الف .) (a = 2 , a = 1 / 2)

په فنکشن کی a امپليتودې Amplitude(جګوالی(نوميږي او د شوينګنګ Schwingung رپيدنی پراخوالی يا بنه : سور باندې تاثير اچوي.

څيره شته

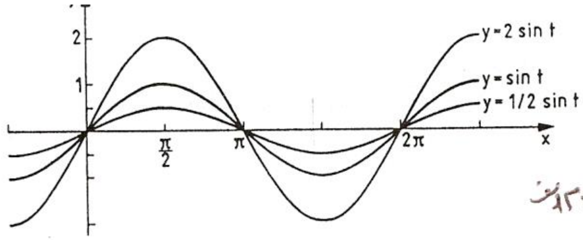


Bild 15.21a

۲ - په فنکشن $y = \sin\omega t$ کې فاکتور ω په فنکشن $y = \sin t$ باندې يو وختني غزول که $|\omega|>1$ يا پړسول که $|\omega|<1$ وي تاثير اچوي.چيرته چې د $\omega<0$ لپاره برسيره پردې يو په y- محور اينونه هم ده.

د يوه ټاکلي خپلواك $t = t_0$ لپاره په فنکشن $y = \sin\omega t$ يوه فنکشن ارزښت، د $y = \sin t$ خپلواك ω-ځله ، يعني $t = \omega t_0$ لپاره غوره کوي (څيره ؟؟ ش . ۱۵ . ۲۱ ب).

ګردی فرکونڅ (Kreisfrequenz) بلل کيږي، دا په پريودې تاثير اچوي

او $y = \omega t$ پريودې $P = \frac{2\pi}{\omega}$ لري.

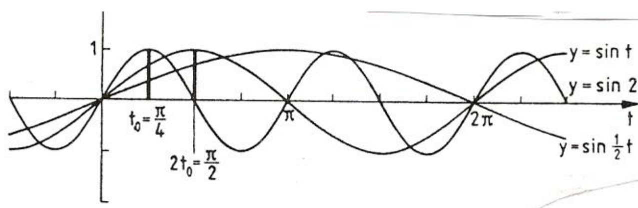


Bild 15.21b

۳ – زياتيدونکی φ په فنکشن $y = \sin(t+\varphi)$ کې د $y = \sin t$ باندې ديوې راکښنې تاثير په $|\varphi|$ له کينې لور $\varphi>0$ او يا له ښي لور $\varphi<0$ اچوي .

د يوه ټاکلي خپلواك $t = t0$ لپاره د فنکشن $y = \sin(t+\varphi)$ سره يو فنکشن ارزښت، چې د $y=\sin t$ لپاره۰

د φ په کچه راکښل شوی (يعنی د يوه ځاي څخه بل ځای ته وړل شوی) وي، يعني د $t = t_0+\varphi$ لپاره، غوره کوي.(څيره ، ۱۵ . ۲۱ پ)

$(\varphi = \frac{\pi}{2}, \varphi = -\frac{\pi}{2})$

په فنکشن

$$y = a.\sin(\omega t + \varphi) = a.\sin\omega\left(t + \frac{\varphi}{\omega}\right)$$

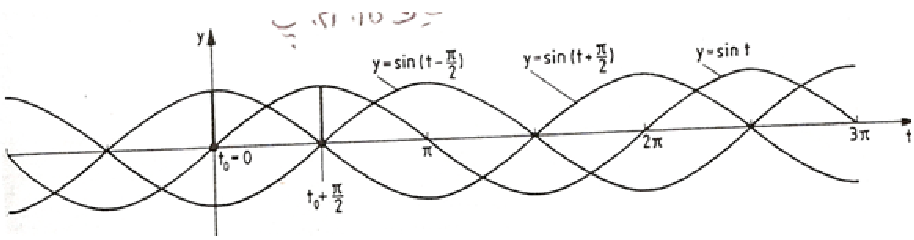
کی φ چی فازې نومیږي یو د راکښلو تاثیر په کږه $y = a.\sin\omega t$

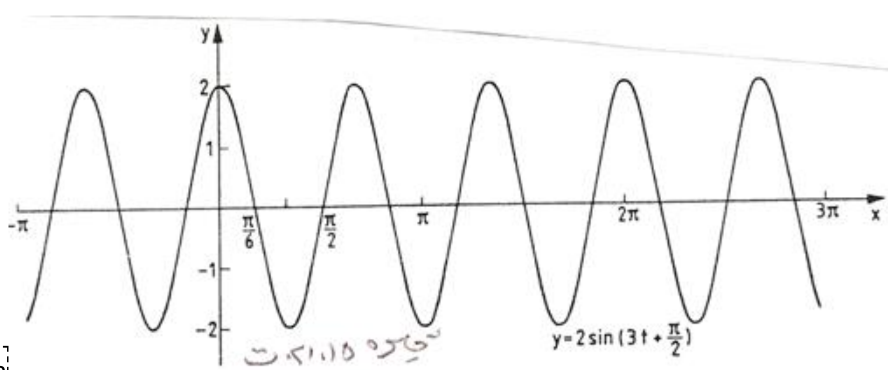
د $\frac{\varphi}{\omega}$ په اندازه اچوي.

په شکل ۱۵ .۲۱ ت کی هارموني فنکشن $y = 2.\sin\left(3t + \frac{\pi}{2}\right)$ انځوردی.

هغه امپلیتود $a = 2$ لري، پریودې یی $P = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2}{3}\pi$ او په $\frac{\varphi}{\omega} = \frac{\pi}{6}$
کي
د $\sin t$ و کینې لورته راکښل شوی دی.

خیره ۱۵ . ۲ پ $\varphi = \frac{\pi}{2}, \varphi = -\frac{\pi}{2}$





د تریګونومتري فنکشنونو(یوائځني) په معکوسوالي یا په څېوالي کی موږ په ځانګړو یوغږیزو یا مونوتوني اینتروالونو تکیه کوو، د لاندې تعریف سره مناسب

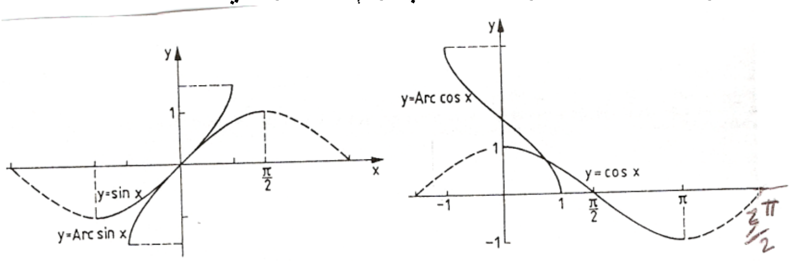
پېژند ۱۵. ۱۴ : د لاندې فنکشنونو

1. $y = \sin x,$	$D = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],$	$W = [-1, 1]$	(15.12a)
2. $y = \cos x,$	$D = [0, \pi]\,,$	$W = [-1, 1]$	(15.12b)
3. $y = \tan x\,,$	$D = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),$	$W = \mathbf{R}$	(15.12c)
4. $y = \cot x\,,$	$D = (0, \pi)\,,$	$W = \mathbf{R}$	(15.12d)

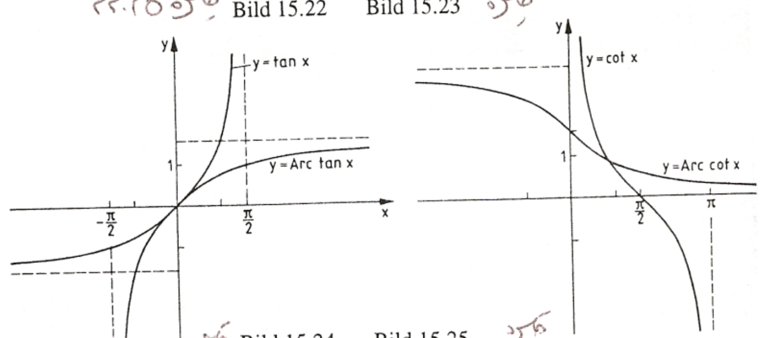
پرخښ يا چپه فنکشنونه لاندې ځيکلومتريکي فنکشنونه (ارکوس فنکشنونه) دي:

1. $y = \operatorname{Arc}\sin x\,,$	$D = [-1, 1]\,,$	$W = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$	(15.13a)
2. $y = \operatorname{Arc}\cos x\,,$	$D = [-1, 1]\,,$	$W = [0, \pi]$	(15.13b)
3. $y = \operatorname{Arc}\tan x\,,$	$D = \mathbf{R}\,,$	$W = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$	(15.13c)
4. $y = \operatorname{Arc}\cot x\,,$	$D = \mathbf{R}\,,$	$W = (0, \pi)$	(15.13d)

د تريګونومتري فنکشنونو برخې په مونوتوني ايتروالونو) ۱۵ .۱۲ الف(تر) ۱۵ . ۱۲ ت (او د هغوي چپه) ۱۵ . ۱۳ الف (تر) ۱۵ . ۱۳ ت (په ځيرو ۱۵ . ۲۲ تر ۱۵ ۲۵ پورې انځور دي.



انځور ۱۵.۲۲ Bild 15.22 Bild 15.23 انځور



انځور Bild 15.24 Bild 15.25 انځور

۱۵ . ۴ ځنځيري (تړلي) فنکشنونه

پيژند ۱۵ . ۱۵ :

د $x \in D$ لپاره يو فنکشن $z = g(x)$ د ارزښتديري W سره ورکړ شوی او برسيره
پر دې د $z \in W$ لپاره يو فنکشن $y= f(z)$ ورکړشوی، نو
$$y = f(g(x)) \qquad (15 . 14)$$
د x تړلی (ځنځيري) فنکشن بلل کيږي.

يادونه : يو تړلی فنکشن کيدی شي چې زياتو ځنځيرونو سره هم رامنځ ته شي: د بيلګي
په توګه $z = f(x)$
د $x \in D, z \in W$ لپاره او $w=h(z)$ د $z \in W, w \in W^*$ لپاره
او $y=f(w)$ د $W^* \in W$ لپاره لرو،
نو $y=f[h(g(x))]$ هم د x يو تړلی فنکشن دی

بيلګه ۱۵ . ۱۶ :

الف : د $z = 2x + 4$ او $y = e^z$ سره تړلی فنکشن $y = e^{2x+4}$ لاس ته راځي.

ب : په تړلي فنکشن $y = \sin x^2$ کې $z = x^2$ دننني - او $y = \sin z$ د باندنی فنکشن دی. په تړلي فنکشن $y = \sin^2 x= (\sin x)^2$ کې $z = \sin x$ د ننني - او $y=z^2$ دباندنی فنکشن دی

پ : د
$z = 2x + 4$, $w = \sqrt{z}$, $y = \cos w$,
سره تړلي فنکشن $y = \cos \sqrt{2x + 4}$ لاس ته راځي

ت : په تړلي فنکشن $y=\mathrm{Arctan}1/(x-1)$ کې $z=x-1$ دننني، $w=1/z$ منځنی او $y=\mathrm{Arctan}\ w$ دباندنی فنکشن دی.

يادونه : د يوه ورکړشوي x - ارزښت لپاره د ځنځيري فنکشنونو د فنکشن ارزښت شميرنی له » دننه « پيل کيږي.

بيلګي ۱۵ . ۱۶ ته:

ب) د $x = 0.5$ لپاره دی

$z=x^2=0,5^2=0,25; y=\sin x^2=\sin z=\sin 0,25=0,24740$
او

$z=\sin x=\sin 0,5=0,47942; y=\sin^2 x=z^2=0,47942^2=0,22984$

پ) د $x = 2$ لپاره دی $z=x-1=2-1=1$; $w=1/z=1/1=1$

$y=\mathrm{Arctan}w=\mathrm{Arctan}1=\frac{\pi}{4}$

روښانونه، تشریح:

$y=f(x)$ تحلیلي(شننیزه) وینا بلل کیږي، که $f(x)$ له رییل ګڼونواو بسټیزو فنکشنونوڅخه د زیاتون، کمون،ځل، ویش، له لارو تړلی یا ناتړلي(ځنځیري یا نا ځنځیري) جوړیږي

د بیلګي په توګه دې په پام کی وي، چي ماتلاندي فنکشن دې صفر نه وي د پوتنخ بنسټ او همداډول رادیکاند منفی نه شي کیدلی، او یا باید مثبت وي، چی د لوګاریتم نومروس باید مثبت وي او $\mathrm{Arc\,sin}\,f(x)$ همداډول $\mathrm{Arc\,cos}f(x)$ تیك د $x \in [-1,1]$ لپاره پیژند لري یا تعریف دي

بیلګه ۱۵ . ۱۷ :

د لاندې تحلیلي ویناو لپاره دې تعریفډیري پیداکړی شي.

الف $y = \sqrt{x^2 - 3}$

رادیکاند باید کمیز یا منفي نه وي، چی دا مان لري:

$x^2-3 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \geq 3 \Leftrightarrow |x| \geq 3$ $(x \geq \sqrt{3} \ \vee \ x \leq -\sqrt{3})$

نو لرو $D =(-oe , - 3]\cup[3 ,oe]$

ب) $y=\lg(x+2)+1/(3+2x-x^2)$ له لمړي زیاتونی کی باید Numerus > 0 نومروس وي دا په دې مانا چی : $x +2 >0 \Leftrightarrow x >-2$ ،

پس $D1=(-2,oe)$

په دوم زیاتوني کی باید مات لاندې په صفر برابر نه وي (=| 0) وي . د مات لاندې صفرځایونه

له $3-2x-x^2 = 0$ څخه لاس ته راځي او دي $x1=2,x2=-1$.

نو $D2=R\backslash(2;-1)$ دی

د فنکشن تعریفېدیری باید دا اول زیاتونی او همداسی د دوم زیاتونی تعریفېدیري وي یعنی د

D1 او D2

غوڅېدیری: $D=D_1 \cap D_2 = (2, \infty) \setminus \{2; -1\}$

پ) $y = \text{Arc}\sin((x-1)/5)$ د ارکوس ساین-فنکشن د تعریفېدیري په پام کی نیولو سره باید باور ولري-

$-1 \le (x-1)/5 \le 1 \Leftrightarrow -5 \le x-1 \le 5 \Leftrightarrow -4 \le x \le 6 \Rightarrow D=[-4,6]$

ت $\left(y = 1/\sqrt{(x^2-4)} \right)$

رادیکاند باید له صفر لوي وي او مات لاندې دصفرسره نامساوي، دا په دې مانا چی

$x^2-4>0 \Leftrightarrow x^2<4 \Leftrightarrow x>2$ یا $x<-2$

نو دی $D=(-\infty,-2) \cup (2,\infty)$

۱۵ . ۵ تمرینونه

۱ – د ایمپلیڅیت توابعو ایکسپلیڅیت انځورونه ورکړئ

الف - $6x-10y=15$ ب - $x+y/3 = 5$

پ - $2x^2 -3y +3 = 0$ ت – $x^2 -4x + 2y - 8 = 0$

۲ – لاندې فنکشنونه په پارامترانځورونی ورکړ شوي

a) $x=2t \quad y=-t^2+3t$ b) $x=\sqrt{t} \quad y=2t+1$

c) $x=1/t \quad y=2(t-3)$ d) $x(/2)t-1 \quad y=t^2$

پارامتر له منځه یوسی او په دې سره ورکړی $y=f(x)$

۳ – لاندې فنکشنونه په مونوتوني وڅیړی، او که ممکن وي نو مونوتونې اینتروالونه په تعریفېدیرو بیل (تجزیه) کړی یا لو نه کړی.

a) $y = 2x - 3$ b) $y = -2x + 3$ c) $y = x^2$

d) $y = -2x^2$ c) $y = 2x^2 + 1$ f) $y = |x|$

۴ – پریکړه وکړی چی لاندې فنکشنونه جفت، ناجفت او یا له دې دووکوم نه دي:

a) $y = x$ b) $y = x + 1$ c) $y = x - 1$

d) $y = 2x^2$ e) $y = 2x^2 + 1$ f) $y = (x-1)^2$

g) $y = x^2 /2$ h) $y = x^5$ i) $y = | x |$

۵ – د لاندې فنکشنونو د صفر ځایونه پیدا کړی

a) $y = -2x + 3$ b) $y = (x-1)(x+2)$ c) $y = x^2 - x - 2$

d) $y = 2x^2 - 12x + 18$ e) $y = x^2 + 1$ f) $y = x^3$

۶ – لاندېفنکشنونو ته په څټ فنکشونونه پیدا کړی

a) $y = -2x + 3$ b) $y = x^2 + 1$, D = [0 , œ), W = [o,œ)

c) $y = (x+1)^2$, D = [-1,œ), W = [0,œ), d) $y = x^3 /2$, D = [o,œ), W = [0,œ)

۷ – لاندې لاینې فنکشنونه ورکړ شوي دي

a) $y = 0,4x - 1,6$ b) $y = -x + 1$ c) $y = (1 /5)(3x + 1,5)$

d) $y = 2$ e) $3x - 3y - 7 = 0$ f) $4y + x = -1$

کرښې دې وکښل شي، جګوالي کونج ∝ دې پیدا شي، او صفرځایونه x_N و ګنی!

۸ – کومه کرښه له لاندې ټکو تیرېږي

a) (2,3)   (5,5)   b) (1 ,1) ›/ (3,7)   c) (-1,0) ›/ (-2,-3) ?

۹ – لاندې مربع بلواك یا فنکشنونه ورکړ شوي

a) $y = x^2 - 4x + 3$ b) $y = x^2 - 8x + 16$ c) $y = x^2 - 6x + 10$

d) $y = (x-5x)(x-1)$ e) $2x^2 - 10x + 12$ f) $y = 3x^2 + 6x$

g) $y = -\frac{x^2}{2} + x + 4$ h) $y = x^2 / 4 + x + 2$ i) $y = 5x^2 + 45$

د ککرې کواوردینات دې پیداشي، صفرځایونه دې وګنل شي او پارابول دې انځور شي

۱۰ - د لاندي تولریشنل فنکشنونه دي دورکړشوو x ارزښتونو سره د هورنرشیما د استعمال له لاري وګنل شي. فنکشنونه دګی د خلفورم باندګی انخور شي

a) $y = f(x) = x^3 - 6x + 5;\quad x_1 = 1,\ x_2 = -1$

b) $y = f(x) = (1/2)x^3 - x^2 - (13/2)x - 5;\ x_1 = 1/5 \quad x_2 = 5$

c) $y = f(x) = x^3 + 2x + 2x\quad ;\ x_1 = -2 \quad x_2 = 0,2$

d) $y = f(x) = x^4 - x^3 - 28x^2\ 32x + 40;\ x_1 = 2 \quad x_2 = 5$

e) $y = f(x) = 2x^4 - 3x^2 - 6x^2 + 5x + 6;\ x_1 = 1,5 \quad x_2 = 2$

۱۱ - مات ریشنل فنکشنونه ورکړی شي :

a) $y = \frac{x^2 + x - 2}{x^2 + 2x - 3}$ b) $y = \frac{x^4 - 3x^3 - 4x^2}{x^2 + 5x + 6}$

c) $y = \frac{x^3 + 2x^2 + x}{x^4 - 13x^2 + 36}$ d) $y = \frac{x}{(x^3 + 6x^2 + 9x)(x^2 - 4x + 4)}$

e) $y = \frac{2x^3 - x^2 + 6x - 3}{x^2 + 3}$.

صفرځایونه دي وګنل شي، پول. تشځایونه او د 8 ± <- x لپاره ځان نیونه!

۱۲ - لاندېفنکشنونو ته په ځټ فنکشنونه جوړ کړی

a) $y = 2^{x-1}$, D = R, W=(0,œ) b) $y = 2^x - 1$, D = R, W =(-1,œ)

c) $y = \log_3 x$, D = (0,œ), W = R d) $y = \ln(x-1)$, D =(1,œ), W = R

۱۳ - لاندي فنکشنونو ته مونوتوني اینتروالونه ورکړی او برخه په ځپ فنکشتونه:

a) $y = (x-1)^2$ b) $y = x^2 - 1$ c) $y = (x+1)^2 + 1$

d) $y = x^2 - 4x + 5$ e) $y = 4x^2$ f) $y = (1/4)x^2 + x/2 + 1$

۱۴ - تړلي فنکشنونه $y = f[h(g(x))]$ په دننه او دباندي فنکشنونو

$$y = f(w)\ ,\ w = h(z)\ ,\ z = g(x)$$

بیل (تجزیه) کړی(د تعریف-او ارزښتدیریوورکولو څخه کیدی شي تیرشو)

a) $y = e^{(x+1)^2}$ b) $y = \left(e^{x+1}\right)^2$ c) $y = \lg\sqrt{2x-3}$

d) $y = \sqrt{\lg(2x-3)}$ e) $y = \tan\sqrt{x-3}$ f) $y = \sqrt{\tan(x-3)}$

g) $y = \sqrt{\tan x - 3}$ h) $y = \tan\sqrt{x} - 3$ i) $y = \operatorname{Arc}\sin x^2 +$

j) $y = [\operatorname{Arc}\cos(3x-2)]^{\frac{1}{2}}$ k) $y = \ln\sin\frac{x}{3}$ l) $y = \sin\ln\left(x+\frac{1}{3}\right.$

m) $y = \sqrt{\frac{1}{\sin x}}$ n) $y = \frac{1}{\sqrt{\sin x}}$ o) $y = \frac{1}{\sin\sqrt{x}}$

p) $y = \operatorname{Arc}\cot e^{2x+1}$.

۱۵ – ترلي فنکشنونه $y = f[h\{g(k(x))\}]$ په دباندې او دننه فنکشنونو

$$y = f(v),\ v = h(w), w = (g(z)),\ z = k(x)$$

بیل کړی (د تعریف– او ارزښتدیري باندې تیرونه کیدی شي)

a) $y = \left[\operatorname{Arc}\cot\left(e^x+1\right)\right]^{\frac{1}{2}}$ b) $y = e^{\operatorname{Arccot}(2x+1)^{\frac{1}{2}}}$ c) $y = \sin\left[\cos\frac{x-4}{3}\right]^2$

d) $y = \sqrt{5 - \tan\sqrt{x}}$ e) $y = \cos\left[\ln\left(x^2-1\right)+1\right]$ f) $y = \log_3\left[\sqrt{2^x+1}\right]$

g) $y = e^{\tan\sqrt{7x-1}}$ h) $y = \tan e^{\sqrt{7x-1}}$.

۱۶ – د لاندې ښنیزویا سیږنیز (تحلیلي) افادو لپاره تعریفدیري پیدا کړی.

a) $y = \sqrt{x-3}$ b) $y = \sqrt{3-x^2}$ c) $y = \sqrt{x^2-9}$

d) $y = \frac{1}{\sqrt{x^2-9}}$ e) $y = \frac{1}{x^2+x-6}$ f) $y = \ln(2x+5)$

g) $y = \operatorname{Arc}\cos(2x-4)$ h) $y = \sqrt{x} + \frac{1}{x}$ i) $y = \ln x + \frac{1}{x-1}$.

دریګوډیکچ یا تریګونومتري Trigonometrie

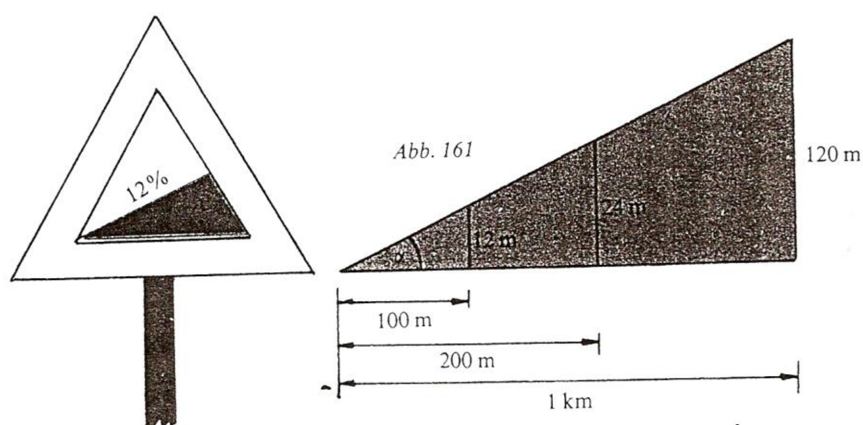
تعریفونه

د دریګوډیکچ یا تریګونومتري دنده ده چي په هواره یا په هوا کی دریګوډي کچ کړي ، د ځانګړوبلواکو له لارې، دې په نامه تریګونومتریبلواکو. برسیره پر دې د دې په مرسته پریودیکی یعنی په منظمه فاصله پرلپسی تکراریدونکی پیښې (موږ یی تل راګرځیدوني بللی شو) څیړل کیږي.
تریګونمتري تر هیپارچ (Hipparch ۱۶۰ – ۱۲۵ له م پخوا) پوري تعقیبیدی شي، وروسته له مصري پتولیمویس Patolemäus چي په ۱۶۸ م کال کی مړ شوی او بیا له هندې او عربو شمیرپوهانو له خوا پرمختګ ورکړ شو. له پیل دا د کاروني یا عملي کیدو د ستونځو سره مخامخ وه. دریګوډیکچ خپل کارونه په استرنومي او فزیك، د ځمککچ یا اندازه کولو، د ځمك اندازونی، نقشو علم، او ابادی او نوتیك Nautik (د کیشتیو د لارو نقشه ویستلو پوهنه) کی مومي.
د تریګونومتري مانا یا مهموالی په ځانګړي ډول په دې ریښتینوالی یا واقعیت کی نغښتی، چی د دې په مرسته د پایکرښبلواکوالی ، د کونجبلواکوالی سره تړلی شي(پام دې وي، چی دا تړاو شمیرپوهینیز مفهوم لري).

پیلبیلګه: د په مانایا مهم جګوالي یا لویدکرښو نخښه لوحی یا په بله عبارت د زوري او پیچومی لیکتختی(دې ته دې پام وي چی ما دا کلیمی هر چیرې د زوري او پیچومی په نامه نه دې بللی، خو دا به ښه وي ، چی په هغه مناسب ځای

کی ، که ما بیرته اصلاح نه کړې، نو په دې نومونو دې ونومول شي) وهل شوي

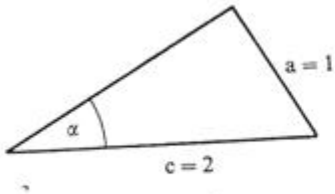
د دې له لارې کوم معلومات ورکول کیدی شي؟
پیچومی یا جګوال 12 % په دې مانا چی په راتلونکو سلو مترو کی یو جګوالی د ۱۲ مترو وهل کیږي، دا ۱۲ متره ټیك ۱۲ له سلو دي. په نورو سلو مترو کی نور ۱۲ متره پیچومی یا جګوالی تی کیږي، نو په عمومي ډول یا ټولیزه توګه له ۲۰۰ متره پراته اوږدوالي وروسته ۲۴ متره پیچومی یا جګوالی. له یو کیلومتر وروسته دا پیچومی یا جګوالي لیدیدونکي ۱۲۰ متره ته جګیږي. کتل کیري یا لیدل کیږي، چی په ورکړشوي پیچومي یا جګوالي کی د پیچومي توپیر متناسب یا په ځاننیونه و هوارې فاصلي ته تغیر خوري . د پایکرښو تناسب یا ځاننیونه تابث یا ځاي په ځاي پاتیږي او د په سلو کی ګڼ په لوحه ورکوي. د واقعي جګوالي اوږدوالي معلومات نه



خیره۱۹۴

د فنکشن لپاره ما بلواک لیکلی یعنې همغه د درې له تابع څخه مې را اخستي، چې نورو ژبو کې یې بلواک څیره ده، چې دې امله یې څیره نمونه سمه ده اوکارونه یې څیرونه ده.

ساینبلواک sinusfunktion: بلیګه:

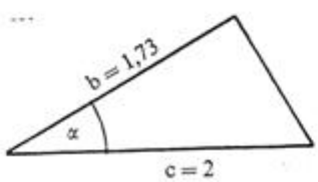


$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{\text{مخامخ کاتیت}}{\text{هیپوتینوزې}}$$

$\sin 30° = \frac{1}{2}$

څیره ۱۹۶

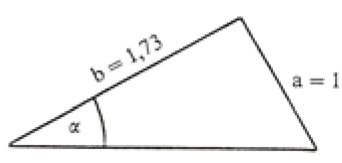
کوساینبلوک Cosinusfunktion بیلګه:



$$\cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{\text{پرته کتیت}}{\text{هیپوتینوزې}}$$

$\cos 30° = \frac{1,73}{2} = 0,8660$

تنجنتبلواك Tangensfunktion بیلګه:



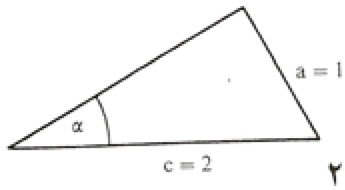
$$\tan\alpha = \frac{a}{b} = \frac{\text{مخامخ کاتیت}}{\text{پروتکاتیت}}$$

څیره ۱۹۸

$\tan 30° = \frac{1}{1,73} = 0,577$

د کونجونو د پینونوموونې (دا ټول شته، خو بیاهم اړیین دي.

کوسیکانسبلواك Kosekansfunktion بیلگه:



$$\operatorname{Cosec}\alpha = \frac{c}{a} = \frac{\text{هیپوتینوزي}}{\text{مخامخ کاتیت}}$$

خیره ۲۰۱

$$\cos ec\alpha = \frac{2}{1} = 2$$

موږ به زیات وخت لمړنی درې یا په همدې توګه لمړنی څلور بلواګه د کارونی لپاره راونیسو یا وکاروو.

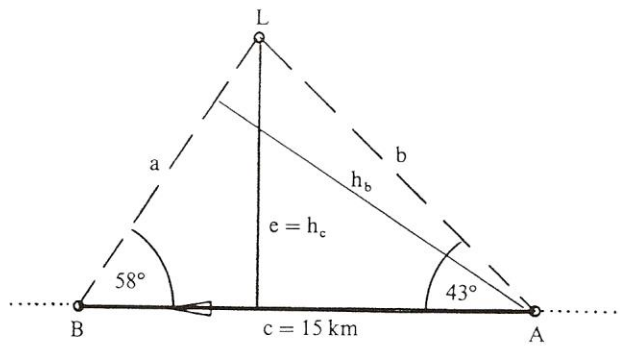
په څوبنه دریګوډیو کی شمیرنه

سره له دې چی کونجبلواکي یواځی په ولاړکونجیز دریګوډي کی باید تعریف کیږي، خو بیا هم برسیره پر دې استعمال یا کارونه مومي. د پیچومي یا جګوالی په جوړولو کی هر دریګوډی په ولاړو برخه دریګوډیو تجزیه یا ټوټه کیدی شي. په اخرني هنري، د مخکني مرستندوي، همدې منځ ته راوړو پایکرښي وینا وي د پیل دریګوډي باندې لاس ته راځي او په هغه کی د ورکړشوو کونجونو.

پیلبیلګه

یوه کیښتی د رڼاډزکړي(کله چی کښتی له ستونځو مخامخ شي او یا یوې بلی کښتی یا یو بل څه ته که یوه کښتی وغواړي خبر ورکړي، نو یوه توپانچه شته چی له هغی داسی ډز کیږي چی له لرې څرګندیږي او نورې خبر ورته لیږونکی په دې پوهیږي، چی څه پیښ شوي دي). دلته $43° = \alpha$ د تګ په لور اندازه کیږي او له

یوه تګ پایکربښي $c = 15\ km$ او کونج $\beta = 58°$ وروسته.
په دوم ډز کی کیبنتی له ډز رڼااور څخه څومره لرې ده؟
د A څخه و B ته د کیبنتی نزدې واټن e د ډزرڼااور څخه څومره لري دی؟
په A کی له اور څخه څومره لرې وه ؟



څیره ۲۰۲

اوبی یا حل:

$\gamma = 180° - \alpha - \beta = 79°$; $\sin\beta = h_b / c$ او $\sin\gamma = h_b / b$

د h_b په لور اوبی‌ول یا حلول او په همدې وخت کی لاس ته راځي:

$$h_b = c \cdot \sin\beta \quad \text{und} \quad h_b = b \cdot \sin\gamma$$
$$\Rightarrow c \cdot \sin\beta = b \cdot \sin\gamma \Leftrightarrow \frac{c}{b} = \frac{\sin\gamma}{\sin\beta}$$
$$\Rightarrow b = \frac{c \cdot \sin\beta}{\sin\gamma} = \frac{15 \cdot \sin 58°}{\sin 79°} = 12{,}959\ \text{km}$$

د لنډ واټن e لپاره باور لري:

$$\sin\alpha = \frac{e}{b} \Rightarrow e = b \cdot \sin\alpha = 12{,}959 \cdot \sin 43° = 8{,}838 \text{ km}$$

$$\sin\beta = \frac{e}{a} \Rightarrow a = \frac{e}{\sin\beta} = \frac{8{,}838}{\sin 58°} = 10{,}421 \text{ km}$$

لکه چی په یاد راوړل شو، د همغه دریګوډي اړخونوa او b په شمیرنه کی مرستندوي لويی له منځه ځي او باور لري:

د ساین جمله :

په خوښه دریګوډي کی د اړخونو ځاننیونه یاتناسب د اړخونو مخامخ کونجونو د ساین ځاننیونه یا تناسب دی.

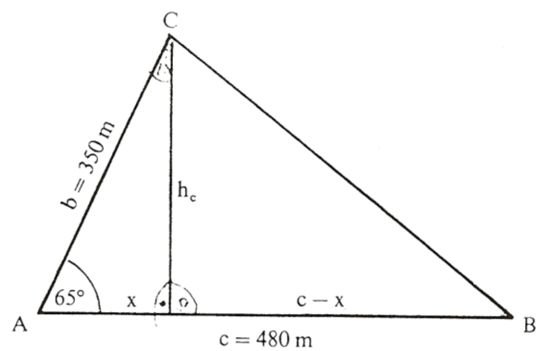
$\sin\alpha / \sin\beta = a / b$ $\sin\beta / \sin\gamma = b / c$

$\sin\gamma / \sin\alpha = c / a$

د ساین جمله په پڅ دریګوډي کي هم باورلري(تمرین دي وکتل شي). ددې سره په یوه دریګوډي کی نه موجودې توټې هلته شمیرل کیږي، چیرته چی دوه اړخونه او یو مخامخ کونج یا دوه کونجونه او یو مخامخ اړخ ورکړ شوی وي.

سړی بیا څه کوي که دریواړه اړخونه ورکړ شوي وي او یا دوه اړخونه او د هغوتر منځ راګیر کونج؟

پیلبیلګه : په یوه د ډبروسکرو کان کی دوه ستنی $b = 350\ m$
او $c = 480\ m$ دي او یو کونج $\alpha = 65°$ ښندوي.
د B ځخه و C ته به د نښلولو ستن یا تیر څومره لوي وي ؟



څیره ۲۰۳

اوبی یا حل :
جګوالی یا جګی h_c کرښه $AB = c$ په دوه ټوټو x او $c-x$ ویشي.
دلته دی $x = b.\cos\alpha$ ،
ځکه چی $\cos\alpha = x / b$ دی . د پیتاګوراس د جلی له مخی
لرو : $h_c^2 = b^2 - x^2$
او

$$a^2 = h_c^2 + (c-x)^2 .$$
$$a^2 = h_c^2 + c^2 + x^2 - 2cx$$
$$a^2 = b^2 - x^2 + c^2 + x^2 - 2cb\cos\alpha$$
$$\Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

د اړخونو اوږدوالی نومونی او کونج کیدی شي چي منظم بیرته راګرځیدونکی (ځیکلیکي یوناني کلیمه ده ګردی ډوله یا منظم بیرته راګرځیدونکی zyklisch) یو بل سره بدل شي» له دې امله باور لري

کوساین جمله

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos \alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac.\cos \beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\cos \gamma$$

په هر یوه دریګوډي کی د هر اړخ مربع مساوي ده، د نورو دواړو اړخونو د مربع زیاتون سره ترې کم دوه ځله د دې دوه اړخونو ځل او ددې دوه اړخونو رابند شوي کونج کوساین سره ځل.

د کوساین جمله د پیوتاګوراس د جملی عمومیت یا ټولیز ته هم وايي. (تمرین ۶ مخ دې وکتل شي)
د کونجبلواك له لارې یو بل متود، د ډیرګوډي شمیرلو لپاره ، تر څو دا په دریګوډیو ویشل کیدی شي چی پوره اړخونه او کونجونه یی څرګند وي، پیدا شو.
د دې ټولو سره د څلورګوډي یو وربرسیره بل د شمیر فرمول پیداشو:

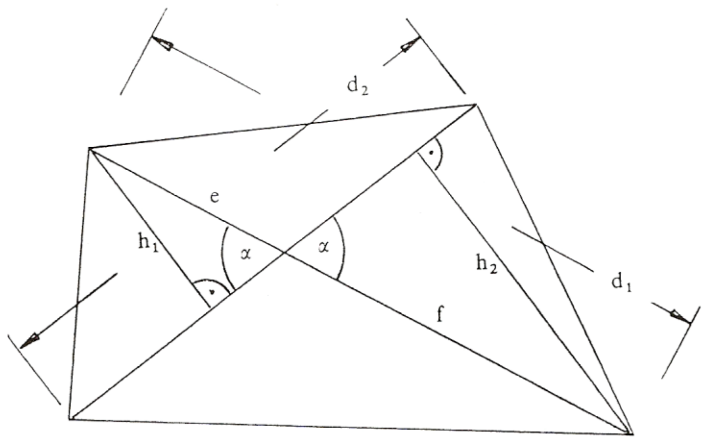
$$A = 0,5.d_1.d_2.\sin \alpha$$

چیرته چي $\alpha = w(d_1; d_2)$ وي.

اوبی یا حل : $A=0,5(d_2h_1 + d_2h_2)$

که d_1 په e او f ټوټه یا تجزیه شي ، نو لرو

$$h_1 = e \cdot \sin\alpha$$
$$h_2 = f \cdot \sin\alpha$$
$$\Rightarrow A = 0{,}5 \cdot d_2 (e + f) \sin\alpha$$
$$\Rightarrow A = 0{,}5 \cdot d_2\, d_1 \sin\alpha$$



ځیره۲۰۴

د په خوښه کونجونو تریګونومتریکي بلواکي

په اخره برخه کې مو وویل، چې کونجبلواک، نه یوائې د دننه لورته تیرو دریګوډیو لپاره ، بلکه د هغو کونجونو لپاره چې له ۹۰ درجو لوي وي ، هم هدفمند (موخور) تشریحوږ دي. له دې وروسته کونجبلواکو خپله پوره موخه یا هدف تر لاس کړ.

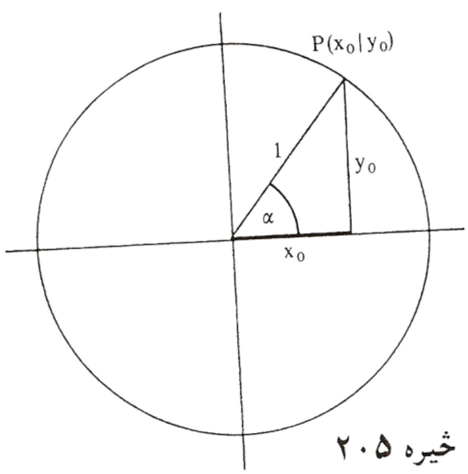
دا پراختیا څنګه تصور یا د خیالوړ کیدی شي ؟

په ښه توګه داسی کیدی شي چی په یوه ولاړ پروت سیستم یا کواوردیناتسیستم کی یوه ګردۍ ووهي چی وړانګه یي ۱ یعنی یو یوون یا واحد دی (دې ته یوونګردۍ ویل کیږي، ځکه چی وړانګه یی یو یوون دی) او د ګردۍ منځټکی او د پروت ولاړ سیستم کواوردېنات سرچینه یو په بل پریوځي . نو بیا هر دریګوډی، چی د هغی یو کونج د ګردۍ ښتریکونج دی، یعنی کونج یی د ګردې په منځ یا ښنتر پروت دی، (ښیره۲۰۴) کم له کمه یی یو اړخ ۱ یعنی یو یوون اوږدوالی لري. دا د دریګوډی په دننه کی شمیرنه او اړیکي اسانه کوي.

لمړی د یوه ولاړکونجیز دریګوډي ښخه پیل کوو، چی په لمړي لمړي ښلورمه یا کوادرانت (Quadrant) کی پروت د ی . نو هیپوتینوزې ۱ اوږدوالی لري، او په ګردۍ ،د کونجټکی $P(x_0|y_0)$ په پام کی نیولو سره، باور لري:

$$\sin\alpha = y_0 / 1 = y_0 , \quad \cos\alpha = x_0 / 1 = x_0$$

دا کرښی د پریوستون او یا د سیورېدرځونو په ښیر لاس ته راځي، که موږ وړانګه د یوه ټالوهونکی مړوند په ښیر ونیسو یعنی فرض کړو، کوم چی د محورغبرګي رڼا لاندې راشی.



ښیره ۲۰۵

په دې ولاړ کونجیز دریګوډي کی کیدی شي چی د پیتاګوراس جمله وکارول شي:

تریګونومتریکي پیتاګوراس:
$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

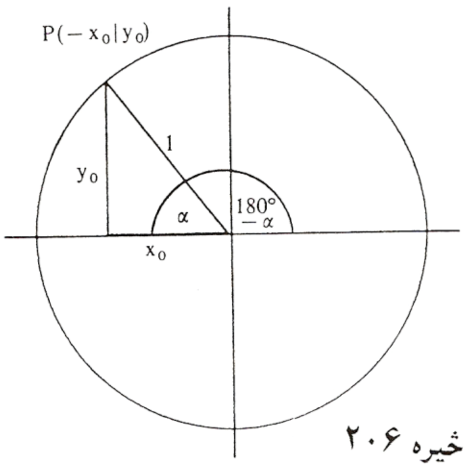
چیرته چی $\sin^2\alpha = \sin\alpha . \sin\alpha$ په مانا دی.

کيدی شي ، چی پوښتنه وشي چی همدا « سيوری » بيا کله لاس ته راتلی شي.
دا حالت بياهيك هلته لاس ته راځي، چی وړانګه د منفي x –محور سره يو
کونج α جوړ کړي، يعني ښتريکونج يی $180° - \alpha$ وي.
د « سيوروښيرو» ښخه لاس ته راځي:

$$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$$

$$\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$$

ځکه چی دا سيوری همغومره اوږد دی لکه د مخه، مګر اوس له صفر پيل مخامخ (منفی) لور ښايي.



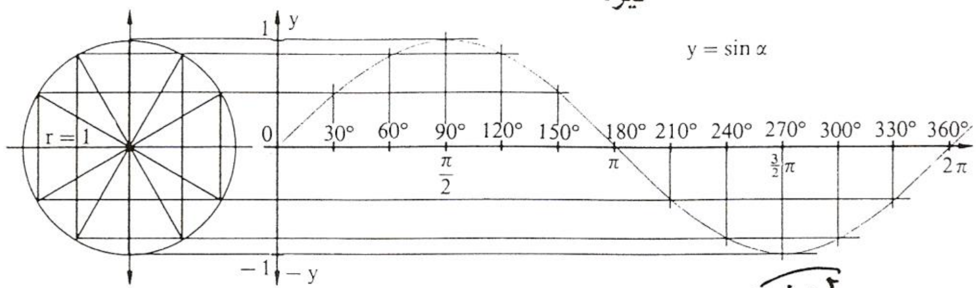
ښيره ۲۰۶

په ورته توګه لاس ته راځی :

$$\sin(180° + \alpha) = -\sin\alpha;$$
$$\cos(180° + \alpha) = -\cos\alpha$$
$$\sin(360° - \alpha) = \sin(-\alpha) = -\sin\alpha;$$
$$\cos(360° - \alpha) = \cos(-\alpha) = \cos\alpha$$

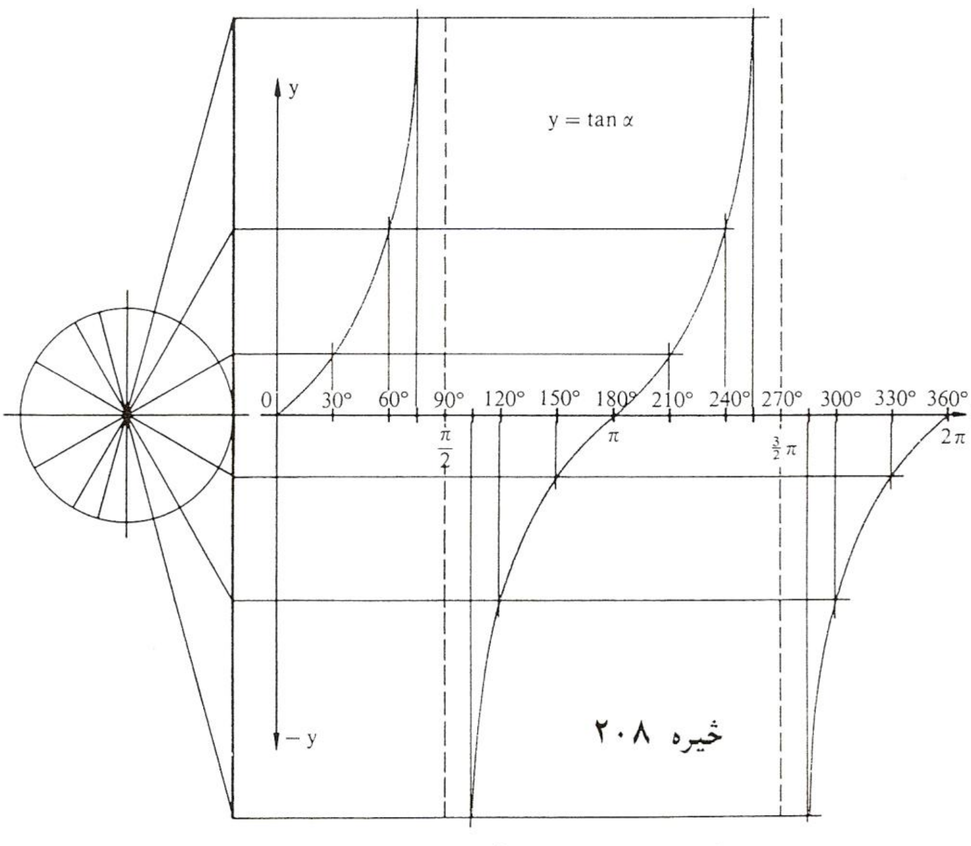
د کونج α+360° لپاره بيرته د سرچيني کونج اړيکی لاس ته راځي: همدا ډول
د α+720 لپاره اوهمداسی نور. په دې توګه د په ښوبنه کونجفنکشنونو يا
کونجبلواکو لپاره د ساين او کوساين بلواك تعريف دي.
د $\tan\alpha = \sin\alpha / \cos\alpha$ له امله (مقايسه مخ | ۱۵ |) دا د تنجنت بلواك لپاره
هم صدق کوي. له دې امله لاندې د بلواکګرافونه لاس ته راځی

شیره ۲۰۷



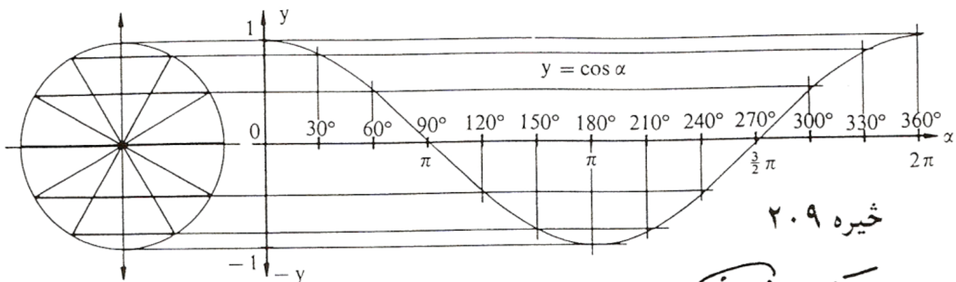
Die **Sinuskurve**: $y = \sin x;\ x \in \mathbb{R};\ y \in [-1; 1]$

د ساین کږه



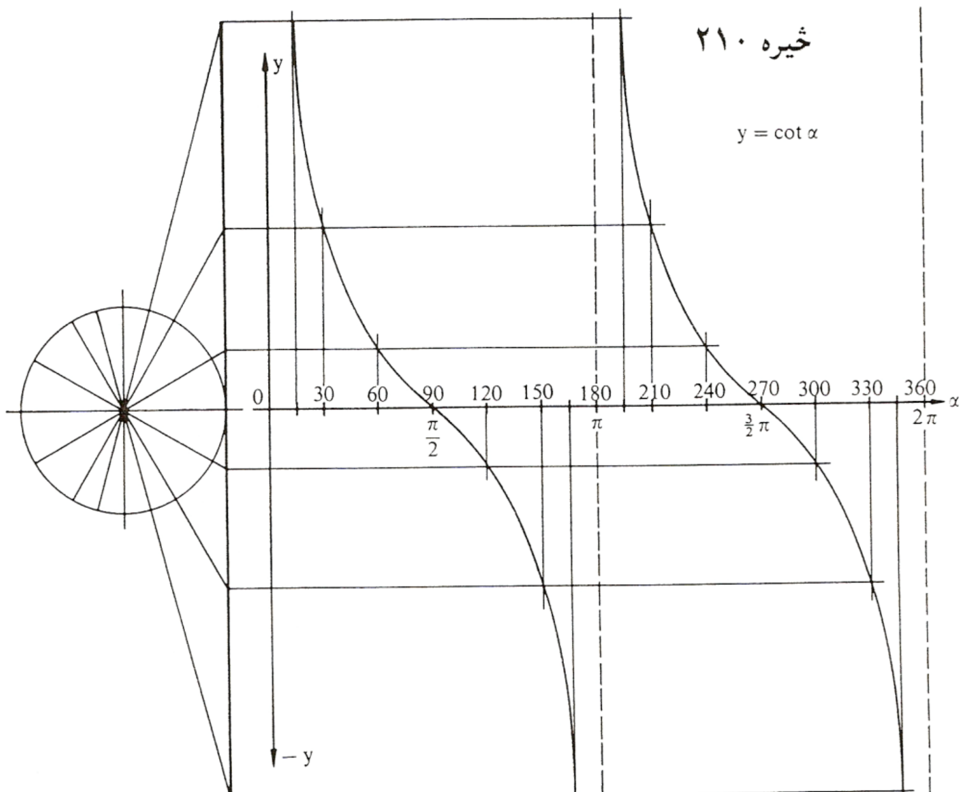
Die **Tangenskurve**: $y = \tan x;\ x \in \mathbb{R} \setminus \{x \mid x = (2z+1)\frac{\pi}{2} \wedge z \in \mathbb{Z}\};\ y \in \mathbb{R}$

د تنجنت کږه



Die **Kosinuskurve**: $y = \cos x$; $x \in \mathbb{R}$; $y \in [-1; 1]$

دکوساین کرو



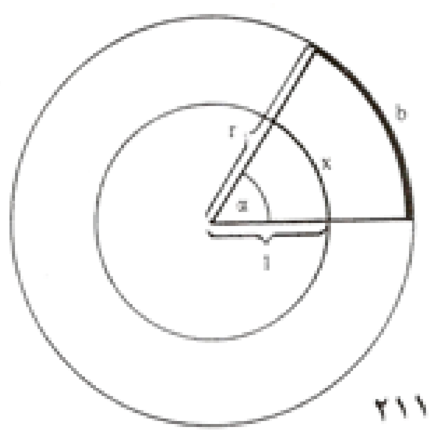
Die **Kotangenskurve**: $y = \cot x$; $x \in \mathbb{R} \setminus \{x | x = z \cdot \pi \wedge z \in \mathbb{Z}\}$; $y \in \mathbb{R}$

دکوتنجنت کرو

لینده اندازه (لینده کچ) Das Bogenmaß

په زره درجه د کونجکچ یا – اندازې سره بلد یو (دمخه ولیدل، چې ۳۶۰ درجې پوره ګردی بنایي. هغه، چې لږ ورسره بلد یو یا زیات ورسره بلد نه یو، هغه نوې درجه ده ، چې ګردی په ۴۰۰ مساوي برخو ویشل کیږي. دا په دوارو کچیوونونو یا کچواحدونو کې ګډ دي، چې په ګنونو اندازه کیږي، بې له کچ یوون ارزښتدیرې رییلګنونه دي، په داسې حال کې چې وتل ګنونه (= د تعریف ډیري ګنونه) یو یوون یا واحد (درجه یا ګون) لري. دا په کارونه یا عمل کې مونږ زیات وښت د خنډ سره مخامخ کوي. له دې امله د لیندې کچ سره د کونجکچ لپاره یو ور زیات امکان پیدا شو.

کونج لویې په واقعیت کې یوون «راد (rad) » لري، مګر دا په کارونه یا عمل کې کیدی ونه لیکل شي یا صرف نظر پرې وشي، که بدلون ته مو نه راهڅوي. دا کونجکچونه چې د کونج لپاره په تریګونومتریکی بلواکو کې ابنبودل کیږی (د بیلګې په توګه sin)



څیره ۲۱۱

ارګومنت (Argument تعریفډیری) بلل کیږي. په تعریفډیري کې کیدی شي چې نوې درجه ، زره درجه او یا لینده کچ وکارول شي. کاروونکی دې پام ولري چې په جیښمیري کې همغه مودوس په کار اچول شوي دي(راتلونکی دې وکتل شي)

په برخه ګردیبرخوکی وښوول شو (ګردیبرخی د مخه څیړل شوي دي) چی هر کونج پورې یوه ګردبرخه یا ګردۍ لینده اړه لري، نو ټولی ګردۍ پورې ۳۶۰ درجی کونج یا $2\pi r$ اړه لري، یوه کونج α پورې بیا یوه لینده b اړه لري، کومه چی په چاپیرۍ کی ځانګړی همداسی نیسي لکه په پیل کی α و ۳۶۰ درجو ته . دلته ګردیګڼ دی : $\pi = 3,14....$ (دا مو له دې پخوا لاس ته راوړی دی)

پیلبیلګه:

کونج $\alpha = 60°$ له ګردۍ د ۱۰ سانتیمتره وړانګي سره یوه په لاندې ډول ګردۍ لینده $b = 20\pi . 60° : 360° = 10,47$ cm غوځوي یا بیلوي. د ګردۍ چاپیری دی : $U = 20\pi = 62,83$ cm

همغه کونج α د ۵ سانتي متره وړانګی سره ګردیلینده

$$b = 10\pi .60° : 360° = 5,236 \text{ cm}$$

غوځوي. دا ګردۍ لاندې چاپیری لري: $U = 10 = 31,416$ cm .

له ګردۍ د وړانګي $r = 1$ cm سره ددې په څټ یا برعکس کونج ګردیلینده

$$b = 2\pi . 60°: 360° = 1,047 \text{ cm}$$

غوځوي» د دې ګردي چاپیری فقط $U = 2\pi = 6,283$ دی .

له بیلګي څرګندیږي، چی لینده اندازه په همغه اندازه زیاتیږي لکه وړانګه. له دې امله کیدی شي خپله شمیرنه په یوونګردي د وړانګي ۱ سره رابنده یا محدوده کړي او روښانه کړي:

تعریف: په یوونګردي د ګردیلیندی اوږدوالي کچګڼ، چی په څنتریکونج

باندې خيره شوي، لينده کچ بلل کيږي. لاندې شميراوړون باوري کوي:

$$x = (\alpha / 180^\circ).\pi \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = (x/\pi)\, 180^\circ = \frac{x}{\pi} \cdot 180^\circ$$

دا چې د وړانگي څرخون په پوره کونج هم وراوړيدی شي، نو له دې امله د لينده کچ لپاره په خوښه رييلگڼونه پرېښوول شوي.

بيلگی :

$$\alpha = 1^\circ \Leftrightarrow x = \frac{1^\circ}{180^\circ}\pi = 0{,}0175 \text{ (rad)} \qquad \alpha = 180^\circ \Leftrightarrow x = \frac{180^\circ}{180^\circ}\pi = \pi = 3{,}1416$$

$$\alpha = 30^\circ \Leftrightarrow x = \frac{30^\circ}{180^\circ}\pi = \frac{\pi}{6} = 0{,}5236 \qquad \alpha = 360^\circ \Leftrightarrow x = \frac{360^\circ}{180^\circ}\pi = 2\pi = 6{,}2832$$

$$\alpha = 45^\circ \Leftrightarrow x = \frac{45^\circ}{180^\circ}\pi = \frac{\pi}{4} = 0{,}7854 \qquad \alpha = 720^\circ \Leftrightarrow x = \frac{720^\circ}{360^\circ}\pi = 4\pi = 12{,}5664 \quad \text{usw.;}$$

$$\alpha = 60^\circ \Leftrightarrow x = \frac{60^\circ}{180^\circ}\pi = \frac{\pi}{3} = 1{,}0472$$

$$\alpha = 90^\circ \Leftrightarrow x = \frac{90^\circ}{180^\circ}\pi = \frac{\pi}{2} = 1{,}5708 \qquad \alpha = -75^\circ \Leftrightarrow x = \frac{-75^\circ}{180^\circ}\pi = \frac{-5}{12}\pi = -1{,}309$$

ارکوسبلواکي Arcusfunkrionen

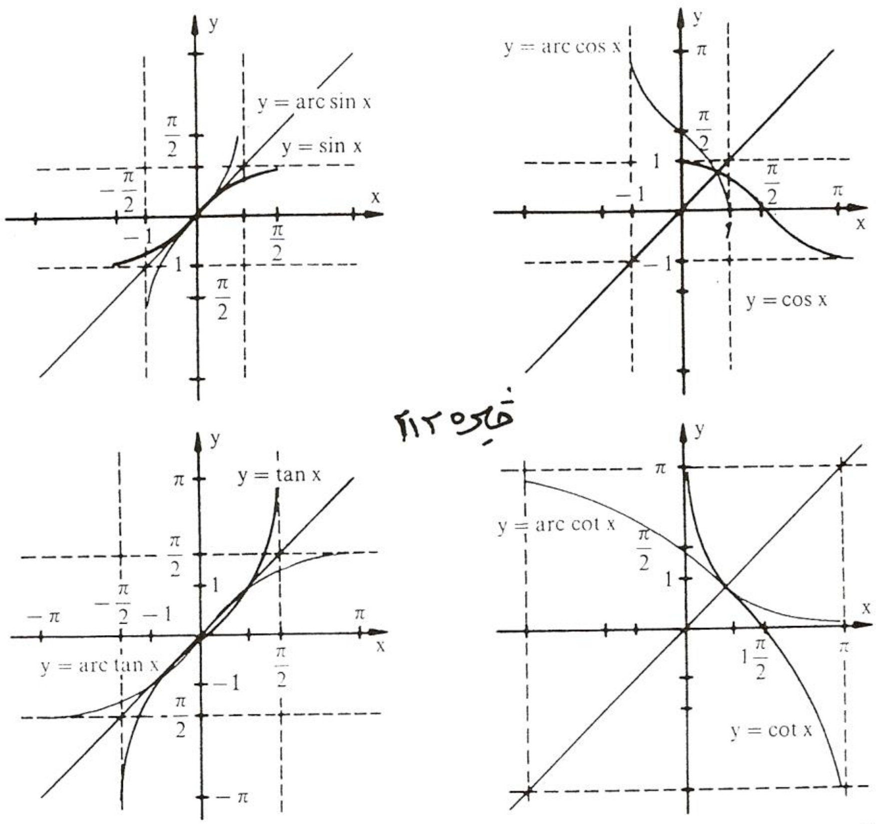
زيات وخت دا پوښتنه هم رامنځ ته کيږي ، چې لکه په ورکړشوو کرښځاننيونو راپيداشوې کونجونه څنگه معلوميږي يا څنگه راڅرگنديږی يا بهتره څنگه ځانونه نيسی. ددې لپاره چې دا پوښتنه ځواب شي، بايد امکانات ولټول شي، چې د کونجبلواك ارزښتونو څخه څنگه بيرته کونج يا په همدې توگه د هغه تعريفېږي ته، په لينده کچ راتلی شو. دا کونجبلواك پريوديکی يا تل بيرته راگرځيدونکي بلواك دی، دا په دې مانا ، چې د بلواك ارزښت په منظمه توگه د مختلفو کونجونولپاره يا .

مختلفو واټنونو وروسته، بلواك ارزښتونه تكراريږي. د دي لپاره چی په څټكيدنه ممكن شي، نو بايد د خپل تعريف ډيرى په يوه برخه ډيري رابند يا محدود شي.

تعريف : د يوه (رابند يا محدود) تريگونومتريكي بلواك په څټ بلواكونه اركوس بلواك Arcusfunktion بلل كيږي يا څيكلومتريكي بلواك (لاتين :اركوس Arcus = Bogen = لينده)

دلته (arc sin(x اركوس ساين. د كونجبلواك تعريفډيرى دلته x »دx لوستل كيږي اړونده اركوسبلواك ارزښتډيرى دى او په څټ ارگومنت يا تعريفډيرى دلته تل يو ريبلگڼ دى.

Trigonometrische Funktion تریگونومتریکی بلواک	Arcusfunktion ارکوسبلواک
f: $x \mapsto \sin(x)$ $\mathbb{D} = \left\{x \,\middle|\, -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}\right\}$ $\mathbb{W} = \{y \mid -1 \le y \le 1\}$	f^{-1}: $x \mapsto \arcsin(x)$ $\mathbb{D} = \{x \mid -1 \le x \le 1\}$ $\mathbb{W} = \left\{y \,\middle|\, -\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}\right\}$
f: $x \mapsto \cos(x)$ $\mathbb{D} = \{x \mid 0 \le x \le \pi\}$ $\mathbb{W} = \{y \mid -1 \le y \le 1\}$	f^{-1}: $x \mapsto \arccos(x)$ $\mathbb{D} = \{x \mid -1 \le x \le 1\}$ $\mathbb{W} = \{y \mid 0 \le y \le \pi\}$
f: $x \mapsto \tan(x)$ $\mathbb{D} = \left\{x \,\middle|\, -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right\}$ $\mathbb{W} = \{y \mid -\infty < y < \infty\}$	f^{-1}: $x \mapsto \arctan(x)$ $\mathbb{D} = \{x \mid -\infty < x < \infty\}$ $\mathbb{W} = \left\{y \,\middle|\, -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\right\}$
f: $x \to \cot(x)$ $\mathbb{D} = \{x \mid 0 < x < \pi\}$ $\mathbb{W} = \{y \mid -\infty < x < \infty\}$	f^{-1}: $x \to \text{arccot}(x)$ $\mathbb{D} = \{x \mid -\infty < x < \infty\}$ $\mathbb{W} = \{y \mid 0 < y < \pi\}$



شکل ۲۱۲

Beispiele: بېلګې:

1. $\arcsin(0{,}8) = 0{,}9273(\text{rad}) = 53{,}13°$

2. $\arccos(1) = 0(\text{rad}) = 0°$

3. $\arctan(-100) = -1{,}5608(\text{rad}) = -89{,}43°$

4. $\operatorname{arccot}(-70) = -0{,}0143(\text{rad}) = -0{,}82°$

۵ – دا چې کونجبلواك و ارکوسبلاك یو د بل په څټ بلواك دي نو باور لري.

$$\sin(\arcsin(y)) = y; \quad \arcsin(\sin(x)) = x$$
$$\cos(\arccos(y)) = y; \quad \arccos(\cos(x)) = x$$
$$\tan(\arctan(y)) = y; \quad \arctan(\tan(x)) = x$$
$$\cot(\operatorname{arccot}(y)) = y; \quad \operatorname{arccot}(\cot(x)) = x$$

یعنې په لاندې توګه هم

$$\sin(\arcsin(0{,}4)) = \sin(23{,}58°) = 0{,}4$$
$$\arccos(\cos(\pi/3)) = \arccos(0{,}5) = 1{,}0472$$
$$\tan(\arctan(-40)) = \tan(-88{,}5679°) = -39{,}9999$$
$$\operatorname{arccot}(\cot(60°)) = \operatorname{arccot}(0{,}5774) = 1{,}0472$$

د جبشمیري کارونی یا استعمال لپاره

داچی پخوا معمول جدولونه د بلواك تعريفېدیري او ارزښتېدیري شمیرلو لپاره له کاره غورځول شوي دی او دنده یی ایلکترونیکي ماشینونو نیولی ده، غواړو چي د جبشمیري استعمال په هکله هم څه ووایو
کورکمپیوتر زیات وخت داسی فنکشنونه یا بلواکي لري یا وظیفی په کلك اختیار کی لري، چی د درجي اوړون په لینده کچ او په څپ کوي، مګر شمیردرځ په توګه باید د شمیرونکی په پروګرام کی ځای په ځاي شوی وي.
پوره اسانتیاوې او زیاته کارونه د جبشمیرې په غاړه پرته ده، دلته دې توکمی د < .... > سره په نخښه شي:
په قاعده کی دریی بلواك ورکړشوي دي : < sin > ; < cos > ; < cot > کوتنجنت بیا داسی شمیرلکیدی شي، د < tan><1/x > . د < INV > – توکمي سره سړی ارکوسبلواك ته راځي: نو < INV><sin > ارکوس ساین دی. په عمومی توګه کونج – بي پروا که په لینده کچ او یا درجه کچ ورکړ شوي وي – باید د فنکشن له مخه ورکړ.

بیلګي

س
۱ لاندې جدول همغه د کارونی یا اتعمال لپاره د جبشمیري چمتووالی بنای :

Winkelmaß کونجګ	TR-Modus په تخنیونه	Beispiel بېلګه
Altgrad زړه درجه Neugrad نوې درجه Bogenmaß لیندۍ کچ	DEG GRAD RAD	$\sin 45° = 0{,}7071$ $\sin 50^g = 0{,}7071$ $\sin \frac{\pi}{4} = 0{,}7071$

2.

Zu ermitteln	Tastenfolge	Anzeige im Display	Modus
sin 45°	45⟨sin⟩	0.707106781	DEG
$\sin\frac{\pi}{6}$	⟨π⟩⟨:⟩6⟨sin⟩	0,5	RAD
cot 30°	30⟨tan⟩⟨1/x⟩	1.732050808	DEG
arccos 0,5	0.5⟨INV⟩⟨cos⟩	60(°)	DEG
arccos 0,5	0,5⟨INV⟩⟨cos⟩	$1{,}047=\frac{\pi}{3}$	RAD
arccot 2	2⟨1/x⟩⟨INV⟩⟨tan⟩	26.56505118°	DEG
sin 220^g	220⟨sin⟩	−0,3090	GRAD

دلته مهم دی، چی جبشميری په همغه ټاکلي يوون ترتيب شوی وي. يو «د مخه ټاکنه» (د «مودوس ټاکنه ») د زاړه – يا نوي درجې همدا ډول لينده کچ، د ډيرو جبشميريو مودلونو سره د تکمې <DRG> څخه لاس ته راځي يا د بيلګي په توګه < MODE >.

د ورکړشوي درجه ګڼ اوړون په لينده کچ د < <-- DRG > سره سورت نيسي. بيرته يا په ځتړ سړی داسی راځي- لکه چی لړل مو- د <INV > – تکمی سره.

بيلګی

60°	⟨DRG⟩	60(rad)
60	⟨DRG⟩	60(grad)
60°	⟨DRG →⟩	1.047197551(rad)
1.047197551	⟨DRG →⟩	66.66666667(grad)
66.66666667	⟨DRG →⟩	60°
60°	⟨INV⟩⟨DRG →⟩	66.66666667(grad)
66.66666667	⟨INV⟩⟨DRG →⟩	1.047197551(rad)
1.047197551	⟨INV⟩⟨DRG →⟩	60°

دلته ګراد نښونه (gard) نوی درجه ده يعنی ګون(gon).

ځنی جشميري په دې برسيره نور زيات امکانات هم لري ، نتيجی يی په ګراد دقيقی، ثانيي اويا لسيز سيستم ورکړ شوي دي. بدلون بيا د تکمی <DMS-Dd> سره صورت نيسی:

26°45′ 30.25°	⟨inv⟩⟨DMS − Dd⟩ ⟨DMS − Dd⟩	26.75° 30°15′

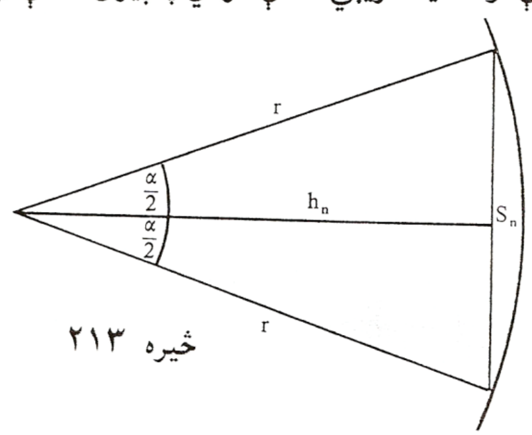
د " 15" °30 " ورکړه کيدی شي د جبشميري سره مختلف بدلون ولري دلته دې د جبشميری د لاس کتاب ځخه ګټه واخستل شي (يادونه: زه پوهيږم چی داسی شيان موږ متآسفانه په خپل هيواد کي نه لرو ، خو په هر صورت يي ليکل ضرور دي، دا پرمختګ موږ هم خپل شاته نه شي پريښوولی)

پيلبيلګه: دلته دې S_n د يوه منظم n– ګوټي د اړخ اوږدوالی وي، چی په يوه ګردی کی چی وړانګه يی $r = 5\ cm$ ده، راګير دی.

الف) وښايي چی

$$S_n = 2r \cdot \sin(180° : n)$$

ب) د يوه داسی n– ګوټي چاپيری U_n وشميری ، چی $n = 8;16;32;128$ وي، او په نزدې توګه يا تقريبي د دې ګردي چاپيری د دې وړانګې r سره وښايی .



خيره ۲۱۳

ب) په همدې ډول n– ګوډی له هوارو A_n څخه په نزدې توګه یا تقریبي د ګردي ـــ هواره A وښایی .

اوبی (حل : هر n– ګوډی کیدی شي په n مساوي دریګوډیو ټوټه کړی شي.
د هغو د څینتریکونج ∝ لپاره باور لري $\propto = 360° / n$. د جګی یا جګوالی h_c
د کښلو سره په هر مساوي پښيز دریګوډي کي ولاړکونجیزې نیایی د څنتریکونج
یا منځکونج سره لاس ته راځي :

$$\frac{\propto}{2} = 360° / 2n = 180° / n$$

بر سیره پر دې صدق کوي

$$(S_n /2) / r = \sin\frac{\propto}{2} \Rightarrow S_n = 2r \cdot \sin\frac{\propto}{2} = 2r \cdot \sin(180° / n)$$

b) $U = n.S_n = 2r.n.\sin(180°/n) = 10n.\sin(180° / n)$

د ارزښتشمیرنو د غلطی مخنیوی لپاره همدفمند یا موخه ور دی، که
په دغه همغه لړپیرلپسی تکمی وکارول شي یا استعمال شي .

$180° \langle STO \rangle \langle : \rangle \; 8 \langle = \rangle \langle SIN \rangle \langle \cdot \rangle \; 8 \langle \cdot \rangle 10 \langle = \rangle 30.614675$
$\langle RCL \rangle \langle : \rangle \; 16 \langle = \rangle \langle SIN \rangle \langle \cdot \rangle \; 16 \langle \cdot \rangle 10 \langle = \rangle 31.214452$
$\langle RCL \rangle \langle : \rangle \; 32 \langle = \rangle \langle SIN \rangle \langle \cdot \rangle \; 32 \langle \cdot \rangle 10 \langle = \rangle 31.365485$
$\langle RCL \rangle \langle : \rangle \; 64 \langle = \rangle \langle SIN \rangle \langle \cdot \rangle \; 64 \langle \cdot \rangle 10 \langle = \rangle 31.403312$
$\langle RCL \rangle \langle : \rangle \; 128 \langle = \rangle \langle SIN \rangle \langle \cdot \rangle \; 128 \langle \cdot \rangle 10 \langle = \rangle 31.412773$

پ) د ډیرګوډي هواره د دریګوډیو هوارو د یوځایوالی څخه لاس ته راځی
د هر دریګوډي هواره ده: $0,5 .S_n . h_n$. د

$$h_n = r.\cos(180° / n)$$

او

$$S_n = 2r \cdot \sin(180°/ n)$$

له امله داسی دی

$$A = n \cdot 0{,}5 \cdot s_n \cdot h_n = n \cdot \frac{1}{2} \cdot 2r \cdot \sin\left(\frac{180°}{n}\right) \cdot r \cdot \cos\left(\frac{180°}{n}\right).$$

$$A = r^2 \cdot n \cdot \sin\left(\frac{180°}{n}\right) \cos\left(\frac{180°}{n}\right) = r^2 \cdot n \cdot 0{,}5 \sin\left(\frac{360°}{n}\right)$$

له دې سره د نرې

360° ⟨STO⟩ ⟨ : ⟩ 8 ⟨ = ⟩ ⟨SIN⟩ ⟨ · ⟩ 8 ⟨ · ⟩ 12.5 ⟨ = ⟩ 70.710678
⟨RCL⟩ ⟨ : ⟩ 16 ⟨ = ⟩ ⟨SIN⟩ ⟨ · ⟩ 16 ⟨ · ⟩ 12.5 ⟨ = ⟩ 76.536686
⟨RCL⟩ ⟨ : ⟩ 32 ⟨ = ⟩ ⟨SIN⟩ ⟨ · ⟩ 32 ⟨ · ⟩ 12.5 ⟨ = ⟩ 78.036129
⟨RCL⟩ ⟨ : ⟩ 64 ⟨ = ⟩ ⟨SIN⟩ ⟨ · ⟩ 64 ⟨ · ⟩ 12.5 ⟨ = ⟩ 78.413712
⟨RCL⟩ ⟨ : ⟩ 128 ⟨ = ⟩ ⟨SIN⟩ ⟨ · ⟩ 128 ⟨ · ⟩ 12.5 ⟨ = ⟩ 78.508279

د یوه جشمیرې سره ، چې له یوې زخیرې زیاتی ولري ، لکه چی پام به مو ورته کړی وي ، د کونجونو برسیره نورې ثابتې هم زخیره کیدی شي» په یوه منظم پروګرامور ماشین سره کیدي شي چې د دا ډول شمیرنو لپاره د ګوډونو ګڼ شخه ت شو یا د ګوډونو ګڼ باند ې صرفنظر وشي .

د تریګونومتریکي بلواکو خویونه

دا چی کونجکچ په درجه کچ او هم په لینده کچ ورکول کیدی شي، کیدی شي چی یوه کونج بلواك تعریفیدیری یا α او یا x وي. ددې لپاره چی د یوه بلواك خوي باندې ټینګار وکړو، باید په لاندې په لینده کچ تکیه وکړو.

د لاندې خویونو لمړی ډله یوائي له تعریفمساوات (د مخه راغلی) او د پیتاګوراس له جملی لاس ته راځي (د مخه لوستل شوې) لاندې صدق کوي :

تعریف :

$$\tan(x) = \frac{\text{مخامخ کاتیت}}{\text{پرته کاتیت}} = \frac{\frac{\text{مخامخ کاتیت}}{\text{هیپوتینوزې}}}{\frac{\text{پرته کاتیت}}{\text{هیپوتینوزې}}} = \sin(x) / \cos(x)$$

ورته:

$$\cot(x) = \cos(x) / \sin(x) \quad = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

له دې لاس ته راځي

$$\cot(x) = 1 / \tan(x) \iff \tan(x) = 1 / \cot(x)$$

برسیره پر دې لرو:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

د دې سره لاس ته راځي:

$$1 / \cos^2 x = 1 + \tan^2 x \; ; \quad 1 / \sin^2 x = 1 + \cot^2 x$$

په تریګونومتریکي بلواکو کی هیله ده ، چی د پوتنځ لیکدود په پام کی ونیسی.
په لاندې پاملرنی سره :

$$\sin^2 x = (\sin x)^2 \neq \sin(x^2) = \sin x^2$$

په لاندې کې gegeben ورکړې او gesucht غوښتونې یا پلټونې په مانا دي

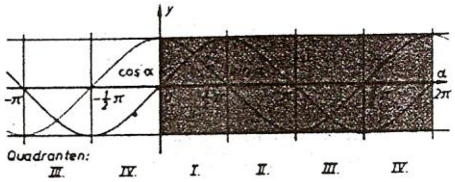
gegeben ورکړې / gesucht غوښتونې	sin x	cos x	tan x	cot x
sin x	$\sin x$	$\pm\sqrt{1-\cos^2 x}$	$\pm\frac{\tan x}{\sqrt{1+\tan^2 x}}$	$\pm\frac{1}{\sqrt{1+\cot^2 x}}$
cos x	$\pm\sqrt{1-\sin^2 x}$	$\cos x$	$\pm\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 x}}$	$\pm\frac{\cot x}{\sqrt{1+\cot^2 x}}$
tan x	$\pm\frac{\sin x}{\sqrt{1-\sin^2 x}}$	$\pm\frac{\sqrt{1-\cos^2 x}}{\cos x}$	$\tan x$	$\frac{1}{\cot x}$
cot x	$\pm\frac{\sqrt{1-\sin^2 x}}{\sin x}$	$\pm\frac{\cos x}{\sqrt{1-\cos^2 x}}$	$\frac{1}{\tan x}$	$\cot x$

لکه چې د مخه مو په ګوته کړل، کیدی شي چې ټریګونومتریکي بلواك د مختلفو ګونجونو لپاره روښانه شي. که لمړي ورکړ شوي بلواك ارزښتونه مقایسه شي، نو په کره توګه یا په کلکه توګه لاس ته راوړی شو

تعریف : ټریګونومتریکي بلواك ټول پریودیکي یعني بیرته راګرځیدونکی دی، دا په دې مانا، چې د بلواك ارزښتونه په منظمو واټنونو کې تکراریږي. په دې د ساین بلواك او د کوساین بلواك راګرځیدنه (یا ۳۶۰ درجې) لري، کوتنجنتبلواك راګرځیدنه (یا ۱۸۰ درجې (180°)) لري.

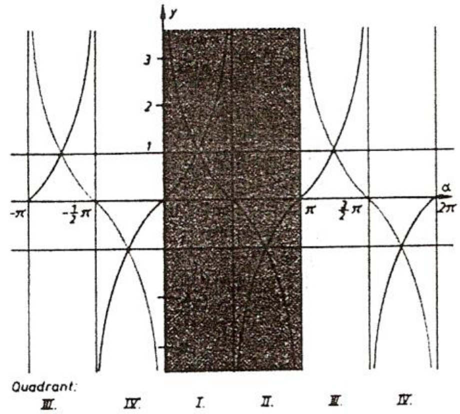
$$\left.\begin{array}{l}\sin(x \pm 2k\pi) = \sin x \\ \tan(x \pm k\pi) = \tan x\end{array}\right\} \quad k \in N$$

$$\left.\begin{array}{l}\cos(x \pm 2k\pi) = \cos x \\ \cot(x \pm k\pi) = \cot x\end{array}\right\} \quad k \in N$$



ځیره ۲۱۴

د ساین - او کوساین فنکشن پریودیایي راګرځېدنه



د تنجنت او کوتنجنت فنکشن پریود بیکښي :

$$
\begin{array}{lllll}
\sin 50^\circ & = \sin(50^\circ + 360^\circ) & = \sin(50^\circ - 720^\circ) & = 0{,}76604 & \\
\cos -30^\circ & = \cos(-30^\circ - 360^\circ) & = \cos(-30^\circ + 1080^\circ) & = 0{,}86603 & \\
\tan 2{,}5 & = \tan(2{,}5 - \pi) & = \tan(2{,}5 + 5\pi) & = -0{,}74702 & \\
\cot 10 & = \cot(10 + \pi) & = \cot(10 - \pi) & = 1{,}54235 & \\
\sin 35^\circ & = \sin(180^\circ - 35^\circ) & = -\sin(180^\circ + 35^\circ) & = -\sin(360^\circ - 35^\circ) & = 0{,}573576 \\
\cos 35^\circ & = -\cos 145^\circ & = -\cos 215^\circ & = \cos 325^\circ & = 0{,}81952 \\
\tan 0{,}6109 & = -\tan 2{,}5307 & = \tan 3{,}7525 & = -\tan 5{,}6723 & = 0{,}700208 \\
\cot 0{,}6109 & = -\cot 2{,}5307 & = \cot 3{,}7525 & = -\cot 5{,}6723 & = 1{,}428042
\end{array}
$$

که د فنکشن ګراف ته په ځیر شو نو په دې برسیره په ټینګه روښانیږي :

x	$\pi - x$	$\pi + x$	$2\pi - x$	
$\sin x =$	$\sin(\pi - x) =$	$-\sin(\pi + x) =$	$-\sin(2\pi - x)$	(Abb. 179)
$\cos x =$	$-\cos(\pi - x) =$	$-\cos(\pi + x) =$	$\cos(2\pi - x)$	(Abb. 179)
$\tan x =$	$-\tan(\pi - x) =$	$\tan(\pi + x) =$	$-\tan(2\pi - x)$	(Abb. 180)
$\cot x =$	$-\cot(\pi - x) =$	$\cot(\pi + x) =$	$-\cot(2\pi - x)$	(Abb. 180)

بیلګې:

	α	$180° - \alpha$	$180° + \alpha$	$360° - \alpha$
	35°	145°	215°	325°
sin	0,573576	0,573576	– 0,573576	– 0,573576
cos	0,819152	– 0,819152	– 0,819152	0,819152
tan	0,700208	– 0,700208	0,700208	– 0,700208
cot	1,428148	– 1,428148	1,428148	– 1,428148

که څه هم نن د کونجبلواکو شمیرلو لپاره، یواځې د جبشمیري یا کمپیوتر څخه کار اخستل کیږي ، هدفمند بولو، چې یو څو زیات د استعمال وړ ارزښتونه په لاندې ورکړو.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
α	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	270°	360°
sin x bzw. sin α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
cos x bzw. cos α	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	-1	0	1
tan x bzw. tan α	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	–	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0	–	0
cot x bzw. cot α	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	–	0	–

د دغه ساحو د هغوادول په مانا دي او کېدی شي زیات یا څو وي.

له دې جدول څخه کیدی شي په خیال کی یا ګوماني لاس ته راوړی شو

$$\sin x = \cos(\ /2 - x) \qquad \cos x = \sin(\ /2 - x)$$
$$\tan x = \cot(\ /2 - x) \qquad \cot x = \tan(\ /2 - x)$$

دا ګومان کیدی شي په ولاړکونجیز دریګوډي کي د تعریف په مرسته په ساده توګه وښوول شي. :

$\sin\ = a / c$ او $\cos ß = a / c$

د $ß = 90° -$ له امله لاس ته راځي :

$\sin\ = \cos(90° -\ )$

په ورته توګه نور ې غوښتني هم لاس ته راتلی شي.

دا له خیرو څخه هم لاس ته راوړل کیدی شي، څکه د ساین او کوساین بلواکو یا په همدې ډول د تانجنت او کوتنجنت بلواکو ګرافونه د $x = /2$ کرښی ته یو بل سره محورسیومتري ځغلي :

له څیرو او بیلګو څخه په دې برسیره لاس ته راځي:

تعریف: د کوساین بلواك جفت دی ، لرو:

$$\cos(x) = \cos(-x)$$

ساین – ، تنجنت – او کوتنجنت بلواك ناجفت دي» د دوي لپاره باور لري:

$$\sin(x) = -\sin(-x),\ \tan(x) = -\tan(-x)\ ;\ \cot(x) = -\cot(-x)$$

یادونه : په دې نلواکو کي کیدی شي چی x له نوکانو دباندې هم وي:

بیلګی:

$$\sin 60° = -\sin(-60°) = 0,86603$$
$$\cos 0,75 \quad = \cos(-0,75 \quad) = -0,70711$$
$$\tan 150° = -\tan(-150°) = -0,57735$$
$$\cot 1,3 = -\cot(-1,3) = o,27762$$

د زیاتون قضیي یا تیورمونه

دا چي کونجبلواك لاینی نه دي(د فنکشنګراف کرښه نه ده،بلکه کږه ده) ، نو ډېل تعریفېدیږي پورې ساده ډېل بلواك ارزښت اړه نه لري.
لکه

$\sin 30° = 0,5 \quad \sin 90° = 1 \quad \sin 180° = 0$

د داسی په نامه زیاتونمسئلی په مرسته ممکن کیږي، چی د بلواك ارزښت د کونج په دوه برابرولو یا په همدې ډول د دوه کونجونو یو په بل زیاتولو د یوګونو کونجونو لپاره ارزښتونه رابي کړی شو.

بیلګی :

1 . $\sin(x + y) = \sin x .\cos y + \cos x . \sin y$

1' . $\sin(x - y) = \sin x . \cos y - \cos x . \sin y$

2 . $\cos(x + y) \cos x . \cos y - \sin x . \sin y$

2 '. $\text{cis}(x - y) = \cos x . \cos y + \sin x . \sin y$

3 . $\sin 2x = 2.\sin x . \cos x$

4 . $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

5. $\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$

6. $\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$

7. $\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{0{,}5(1 - \cos x)}$

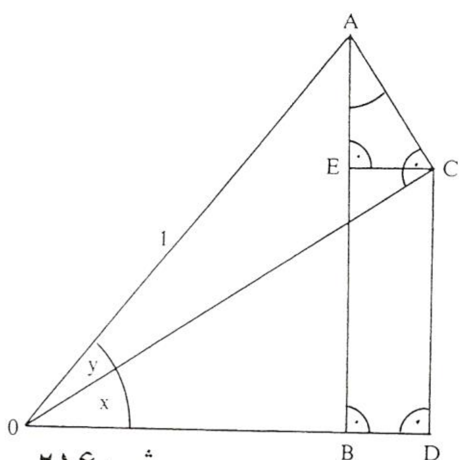
8. $\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{0{,}5(1 + \cos x)}$

9. $\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \cdot \tan y}$ mit $\tan x \cdot \tan y \neq 1$

9′. $\tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \cdot \tan y}$ mit $\tan x \cdot \tan y \neq 1$

10. $\cot(x+y) = \frac{\cot x \cdot \cot y - 1}{\cot x + \cot y}$ mit $\cot x \neq -\cot y$

10′. $\cot(x-y) = \frac{\cot x \cdot \cot y + 1}{\cot x - \cot y}$ mit $\cot x \neq \cot y$



خیره ۲۱۶

1. und **2.**:

$|OA| = 1$

$|AC| = \sin y$; $|OC| = \cos y$

$|AB| = \sin(x+y)$; $|OB| = \cos(x+y)$

$\frac{|EC|}{|AC|} = \sin x \Rightarrow |EC| = |AC| \cdot \sin x = \sin x \cdot \sin y$

$\frac{|OD|}{|OC|} = \cos x \Rightarrow |OD| = |OC| \cdot \cos x = \cos x \cdot \cos y$

$$\frac{|EA|}{|AC|} = \cos x \Rightarrow |EA| = |AC| \cdot \cos x = \cos x \cdot \cos y$$

$$\frac{|DC|}{|OC|} = \sin x \Rightarrow |DC| = |OC| \cdot \sin x = \sin x \cdot \sin y$$

بر سېره پر دې لرو :

$$|AB| = |AE| + |EB| = |AE| + |CD|$$
$$|OB| = |OD| - |BD| = |OD| - |EC|$$

د ګانې په ځای کولو څخه نبوونه په لاس راځي

$$\sin(x + y) = \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y$$
$$\cos(x + y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$$

1'. **2'.**:

3. t **4.**: $x = y$. ځای په ځای کړه

5.: Setze $z + t = x;\ z - t = y \Rightarrow z = \frac{x+y}{2};\ t = \frac{x-y}{2}$ کېږده

t $\sin x = \sin(z + t) = \sin z \cdot \cos t + \cos z \cdot \sin t$ پس کړو

$$= \sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} + \cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$

$$\sin y = \sin(z - t) = \sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} - \cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$ کړو

$$\Rightarrow \sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

6. نبوونه په ورته توګه څخه لاس ته راځي

7.: $x = y = z/2$ کېږده

$$\Rightarrow \cos(x + y) = \cos z = \cos 2 \cdot \frac{z}{2} = \cos^2\frac{z}{2} - \sin^2\frac{z}{2}$$

$$\Rightarrow \sin^2\frac{z}{2} = \cos^2\frac{z}{2} - \cos z = 1 - \sin^2\frac{z}{2} - \cos z \qquad (*)$$

$$\Rightarrow 2\sin^2\frac{z}{2} = 1 - \cos z \Rightarrow \sin^2\frac{z}{2} = \frac{1}{2}(1 - \cos z)$$

د دوهمې نبوونې له لارې نبوونه کړو
په (*) کې ولیکو او کېږده

8.: $(*)\ \sin^2\frac{z}{2}$ durch $1 - \cos^2\frac{z}{2}$.

9-10: دا پرېکړه له 1 او 2 او نښتت د تعریف څخه لاس ته راځي

بلواك يا فنكشن $y = a . \sin(bx+c) +d$

لكه چی په پيل کی مو وويل په طبيعت او تخنيك كي ډيري پيښي شته دی چي تل بيرته راكرځي يا لنډ: راګرځي، يعني پريوديكي دي. د دې د تشريح لپاره په خپل سوچه يا خالصه بڼه تل د ساين بلواك بسيا نه كوي.
دا زيات علتونه لري : لمړی د ساينبلواك د ١- او ١ ترمنځ ارزښت نيسي، له بلي لور داواقعي د كونج په واك کی نه دي بلكه د وخت په واك كي دي د يوې راګرځيدنی سره، چی دا په ساده توګه د 2 په ډول نه شي رانيولكيدی. له دې امله د ساين بلواك د دې كارونو د روښانوولو لپاره بايد موډيفيڅير شي يا يی بڼه واوړي. دا بڼه اوړون او د هغی تاثير په لاندې ليدنه کی راټول شويدي، ګراف يی ورزياتی څيرونی لپاره دی. په ورته ډول د نورو كونجبلواكو لپاره باور لري په عمل كي مګر يواځي د ساينبلواك (په همدې توګه د هغي مخامخ د كوساين بلواك چي په $\pi/2$ سره راكښل شوی وي) د مانا ډك دي. (لوستل: له ښي لور څخه)

بیلګی	دکارونی ساحه	تاثیر	بلواك
ځیره ۲۱۷	ټولی تلبیرته راګرځیدونی تعامولونه		$y = \sin (x)$
ځیره ۲۱۸	د دوه مساوي او برل شپیلونو لوبه بل برلوټل	د y- لور پر اوږدو راکښنه	$y = \sin(x) +d$

$y = \sin(x+c)$	د فاز تغییر یا ځای بدلون	په بدل بو ښنا جریان کې د بو ښتنا او شیانو تګ تخنیکي روښانوي	شیره ۲۱۹
$y = a \cdot \sin(x)$	د امپلیتود د ځای بدلون فاکتور -1 د $180°$ فاز ځای بدلون دی	دیوه پندول حوزبدنه	شیره ۲۲۰
$y = \sin(bx)$	د پیریود تغییر یا بدلون $b>1$ سرعت $0<b<1$ په کراره کیدل $b<0$ په منفي ګرځیدنه کم مخور دی	دیو بسیتونو ځوړې څپې نه پرته وخت د اوږدو ره ډهغې پورته لیمزه ګډه یې د منځ ... الو په او از ولوکي	د شیره ۲۲۱
$y = a \cdot \sin(bx+c)+d$	عمومي حالت	کمپلکس پریودیک جریان یا عمل	شیره ۲۲۲

تمرینونه

۱ – د لاندې ورکړې سره ښیره بله کړی

$4°6' = 4,1°$; $10°, 5' = 10°30$

a) $6,75° =$ b = $120,48° =$ c) $-75,65° =$

d) $52°16' =$ e) $97°13' =$ f) $44°44' 44'' =$

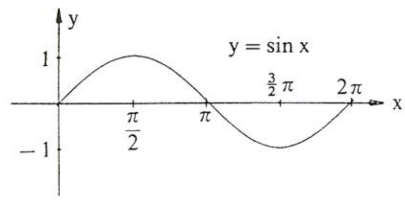
۲ – په درجه کچ ي ولیکی

a) $x = \pi/3$, b) $x = -\pi/4$, c) $x (2/3)\pi$

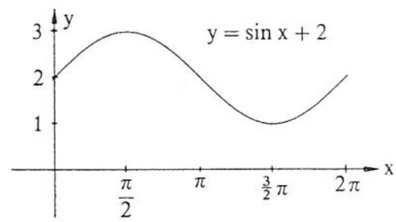
d) $x = 4$ e) $x = -3$ f) $x = 4,7$

۳ – په لینده کچ یی ولیکي

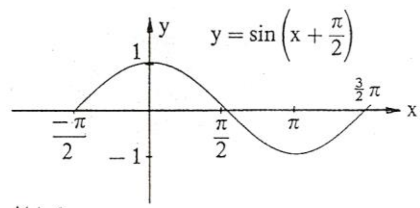
a) $15°$ b) $-60°$ c) $540°$ d) $20°15'$ e) $15,75°$



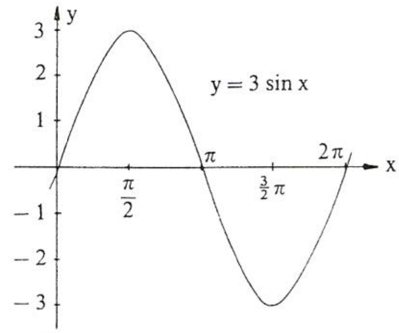
شیره ۲۱۷



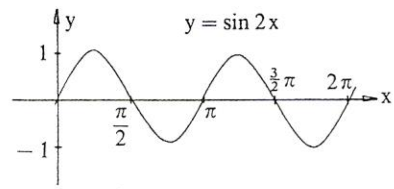
شیره ۲۱۸



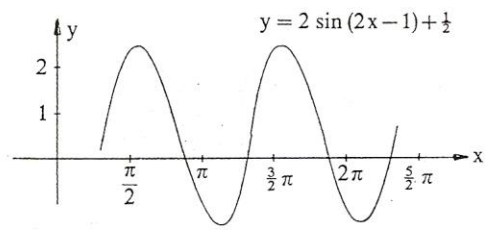
شیره ۲۱۹



شیره ۲۲۰



شیره ۲۲۱



شیره ۲۲۲

د دې بلواك ګراف د ساین کرېږ $y = \sin x$ څخه لکه چې ګورو لاس ته راځي:

۱ – د ارزښت دوه ځله کیدل

۲ – د نیمی راګرځید اوږدوالی باندې پرسیدنه

۳ – په یوه یوون د ښي لور ته راکښنه

۴ – په 1 / 2 پورته لورته 100% راکښنه

۴ – وټاکی

a) $\sin 20°$ b) $\sin(-30°)$ c) $\sin 172°$ d) din1°4'

e) $\cos 35°$ f) $\cos 380°$ g) $\cos(-27°)$ h) $\cos 47,9°$

i) $\tan 11°$ k) $\tan(-15°)$ l) $\tan 33,33°$ m) $\tan 13°13'$

n) $\cot 870°$ o) $\cot(-11°)$ p) $\cot 14°14'$

q) $\cot(-2°2')$

r) $\sin\alpha = 0,8$ s) $\cos\alpha = 0,9$ t) $\tan\alpha = 2,5$

u) $\cot\alpha = -1$ v) $\sin\varphi = 0,3$ w) $\cos\varphi = -0,13$

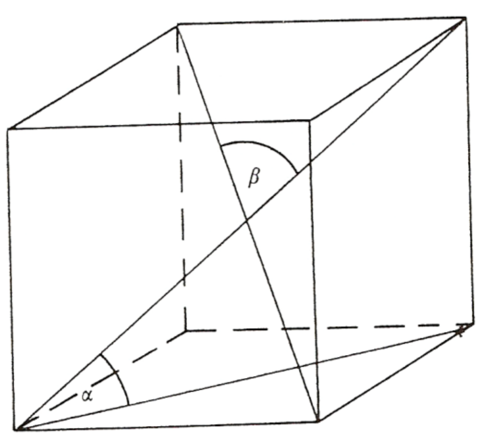
x) $\tan\varphi = -4$ y) $\cot\varphi = 0,3$ z) $\arcsin(x) = \pi/2$

۵ – په يوه ولاړکونجيز دريګوډي کی لرو $\gamma = 90°$ او په دي برسيره :

a) a = 7 cm; b = 6cm

b) a = 16cm; = 66°45'

c) c = 5cm; a = 3cm



شیره ۲۲۳

پاتی ټوټې وشميری

۶ – په مساوي پښيز دريګوډي کي (a = پښه ده) دی

a) a= 10cm ; α =80°40'

b) a= 12 cm ; h = 8cm

c) ß = 40°; a = 7cm

پاتی ټوټي وشميري

۷ – د یوه پڅکونجیز ($\alpha > 90°$) دريګوډي لپاره ساين وشميری

۸ الف) کوساين د یوه پڅ کونجیز دريګوډي لپاره وشميری ($\alpha > 90°$)

ب) په یوه ولاړکونجیز دریګوډي کوم فرمول لاس ته راځي؟

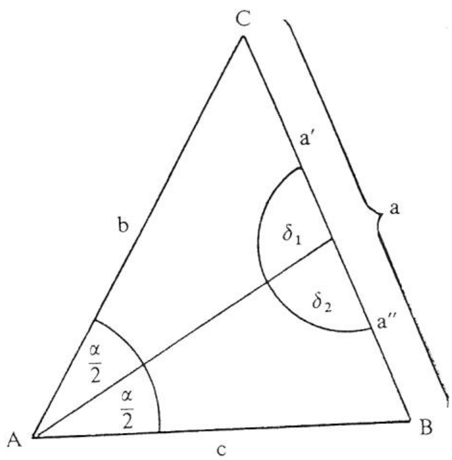
۹ – په یوه مکعب کې د یوه هوا نیمي او بنستهواري ترمنځ کونج څومره لوي دی ؟
څیره .د دواړو هوا یا فضا یا بدن نیمیو ترمنځ کونج څومره لوي دی ؟

۱۰ – د دوه ګردیو وړانګې

$r_1 = 5\text{ cm} \quad , r_2 = 4\text{ cm}$

دي او همداسې د منځټکو واټن $|M_1M_2| = 8\text{cm}$ ورکړ شوی دی.
دد دواړو ګردیو د تماس
مماسونو غوڅکونجي وټاکی
او د کلې غوڅونی اوږدوالی .

۱۱ – په یوه دریګوډي کې د یوه
کونجنیمی مخامخ اړخ په داسې
ځان نیونه یا تناسب غوڅوي لکه
په دې پرتي خواوې. دا غوښتنه د
ساین جملې په مرسته حل
(اوبې) کړی(څیره۲۲۴).



څیره ۲۲۴

۱۲ – که یوه بار ځای ته،
چې ۱،۵۰ متره جګ دی،
یوه زینه ورجګه شي
میلانکونج ← دې زیات ترزیات 33° وي، زینه دې څومره لویه وي؟

۱۳ – الف)د یوې پورته ختلی کوڅي جګوالي توپیردې څومره وي، که دا
کوڅه ۱۶۰۰ متره اوږده او 12% جګه وي؟
ب) د ۱۵۴۰ پرتې لارې وهلو وروسته د جګوالي توپیر څومره دی ؟
پ) د یوه زوړندې پټیلار، چې ۱۷۰۰ متره اوږده ده، په سلو کې څومره
لوي دی ، که دا د جګوالی توپیر ۵۰۰ متره ولري؟

۱۴ – یو د اوبو بیلر (کتله = ۱۰۰ کیلوګرامه) په یوه دړه پورته خیژول کیږي، چی میلانکونج $\measuredangle$ = $25°$ لري. د وزنزور په زوړندزور تختی سره غبرګ او نورمال یعنی ولاړ زور (د فشارزور) ولاړ تجزیه یا ټوټه کیږي، دواړه زوره څومره لوي دی ؟ (۱ کیلو ګرام = ۹ ، ۸۱ نیوټن $1\ kg = 9{,}81N$).

۱۵ – یو تلفونستن په څلور رسیو، چی هره یوه یی ۵۳ متره اوږده ده، درول کیږي. درسیو میلانکونج $60°$ دی په پښه باندې په کوم جګوالي باید رسی وړلی شي ؟

۱۶ – د یوې ۵۳ متره جګي ونی سیوری ۵ ، ۱۲ متره اوږد دی. په ځمکه لمروړانګي په کوم جګوالی یوبل سره مخامخ کیږي.؟

۱۷ – د یوه ۵ متره جګ کتونټکي (لکه د یوه کور، په دوم منځل کی کړکی) ، څخه د یوه برج څوکه لیدل کیږي چی جګیدونکوج یی $\measuredangle$ = $18{,}5°$ او پښیټکی یی $ß=8°$ لوید کونج ، برج څومره جګ دی ؟ د لیدټکي څخه یی پروت لریوالی څومره دی ؟

۱۸ – الف) د پیزا (Pisa) کوږ برج ۴۷ متره جګ دی، او څوکه یی د پښی ټکي څخه ۵۰ ،۴ متره ور اوړي. دا برج څومره مایل دی ؟

ب) د یوه جومات برج چی ۱۵۰ متره جګ وي، لیدونکی د کوم کونج لاندې دا برج کتلی شي، که دا برج په ځمکي ټکي (یعنی د سترګي جګوالی د برج بنسټټکي سره برابر وي)، څخه وکتل شي، چی د برج له بنسټ څخه ۵۰۰ متره واټن ولري؟

پ) د ۵، ۱ کیلو متره لریوالی څخه یو بل برج د کوم کونج لاندې لیدل کیږي

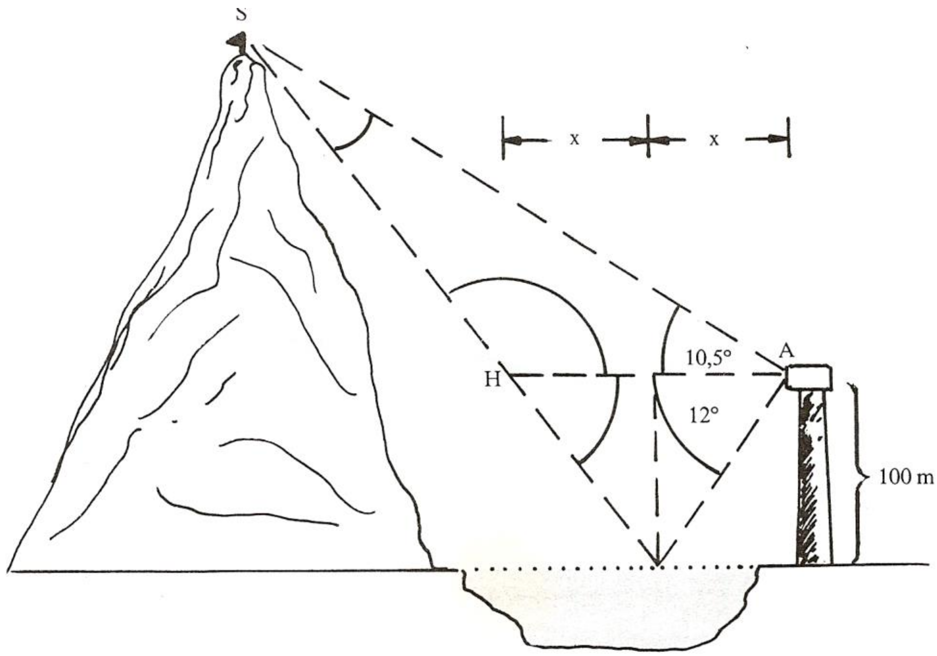
– که جګوالی یی ۱۶۰ متره وي؟

– که جګوالی یي ۱۳۷ متره وي ؟

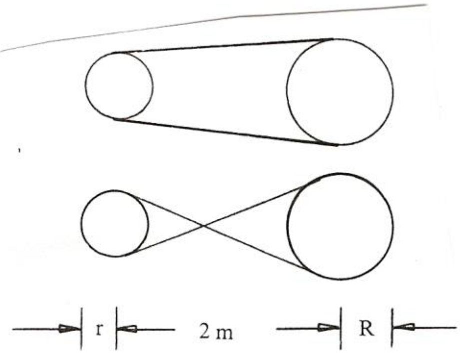
ت) د پراته کوم اوږدوالی لاندې د بنسټ څخه د ۱۲ درجی کونج لاندې

– د بل برج څوکه ښکاریږي چی جګوالی یي ۱۴۳ متره وي ؟

–د پاریس د ایفل برج ښکاریږي چی جګوالی یي ۳۰۰ متره دی ؟
۱۹ – د ښیپپس اهرام(CHeopspyramide) ۱۳۷ متره جګوالی لري او د بنسټ
د یوه اړخ اوږدوالی یی ۲۳۰ متره دی چی بنسټ یی مربع شکل لري
الف) د اړخهوارې میلانکونج څومره دی ؟
ب) د څنګهوارې دریواړه دننی کونجونه څومره لوي دي؟
۲۰ – یو ژوری یا قبر –۸ ، ۱ متره ژور دی، بنستهسور یی ۵ ، ۲ متره دی، د پورته
لور ته وازکونج ی دواړو لورو ته ۶۰ درجی دی
الف) دا کبر پخپل وازوالی یا سر کی څومره پراخ دی؟
ب) که ۱۰ متره اوږد وي، نو بیا دا څومره اوبه ځایکوي ، که جګوالی
یی ۵۰ ، ۱ متره وي؟
۲۱ – یو ډنډ په سر کی ۶ متره سرور دی او ۵ ، ۴ متره جګوالی لري د
بحیرې لور ته 14° میلان لري، د دننه لور ته 28° میلان لري. د ډنډ بنسټ
څومره سور لري؟ د هغی د نیمی هواره څومره ده؟
۲۲ – د ریفلډنډ Riffelsee څخه یو ښه لید د ماترهورن (ماترنښکر یا د ماترن د
غره څوکه Matterhorn) دواړه په زیرمات ، سویس Zermatt / Schweiz کی
دی) اچول کیږي که دا د یوه لیدټکي څخه چی ۱۰۰ متره جګ دی د ډنډ په
لور ښکته وکتل شي، نو د غره د څوکي هندارونه د 12° پریوتکونج لاندې
لیدل کیږي. د غره څوکه د یوپورته کونج 11° لاندې لیدل کیږي. د ریفلډنډ
باندې د ماترنښکر څوکه څومره جګه پروته ده؟
څیره



شیره ۲۲۵



شیره ۲۲۶

۲۳ - الف) یوه د کشولو کړۍ، چې په دوه دکښولو چیترو باندې راتاو ده، څومره اوږده ده، که لاندې اندازې ولري

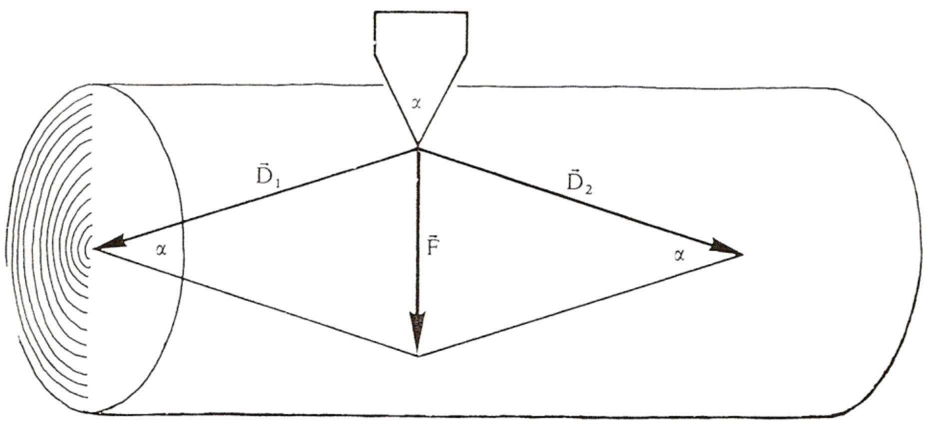
$r = 22\ cm\ ,\ R = 35\ cm\ ,$

$|M_1M_2| = 2m?$

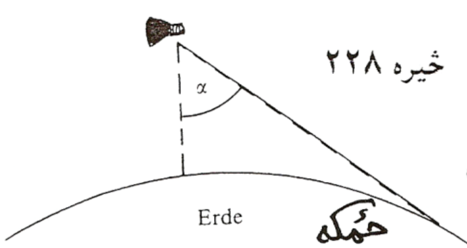
ب) دا کړۍ به څومره اوږدې وي که د اتیران په څیر له چیتروګانو یا تیکلیو را کې ځېدلې وي ؟

۲۴ الف) د ونی په ستېه یو کایل)موړی) په څټك د D زور سره وهل کیږي. د فشار هغه زورونه D څومره لوي دي، کوم چی د ستی درڅونه ، که د کایل یا تېرګي کونج $\alpha = 6°$ وي. (حیره ۱۹۴)؟

ب) په کومکایلکونج یا تېرګیکونج لرو: $|F|=|D|$ ؟



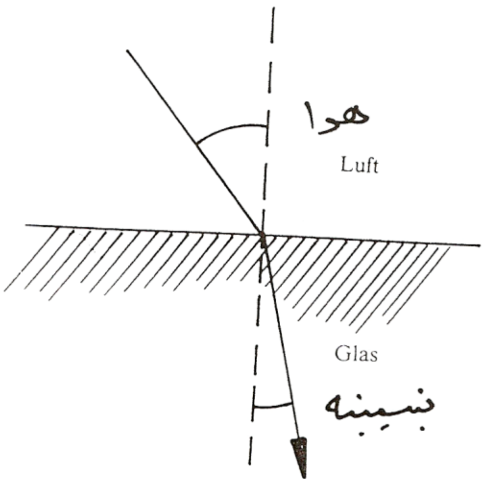
څیره ۲۲۷



څیره ۲۲۸

۲۵ – د یوه الوتماشین څخه ځمکه د یوه α کونج لاندې لیدل کیږي (څیره) دا الوتماشین څومره جګ الوزي ؟ (د ځمکی وړانګه : ۶۳۷۰ کیلومتره)

۲۶ – یو ګادی د $v_{\alpha} = 120km/h$ سرعت سره روان دی، نو د باران څاڅکی په پټلی د تلنلور باندې په $= 115°$ کونج



خيره ۲۲۹

د چيترو (مطلب د ګاډي د اوسپنې
ټير يا ګاډيل دى) مخامخ ځغلي.
له دې ورکړو څخه د باران د څاڅکو
د لويدلو سرعت v_g وټاکى ؟

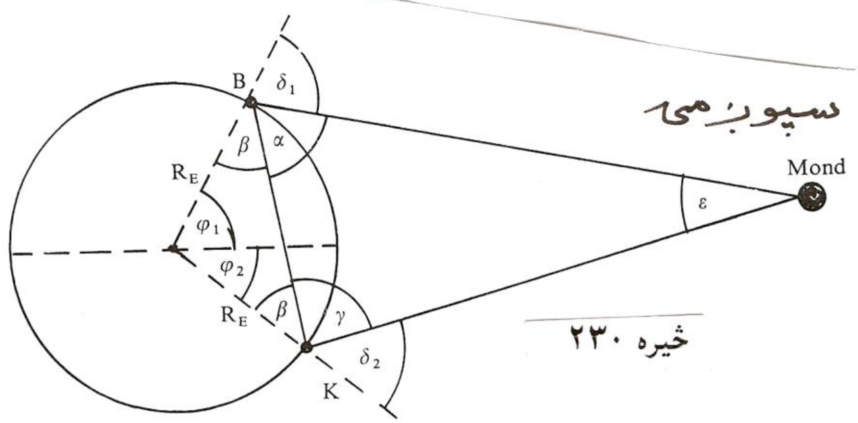
۲۷ – كه د لمروړانګه په دوه مختلفو طبقو ولوېږي، نو خپلې لور ته تغير يا بدلون ورکوي. د سنيليوس Snellius د ماتقاعدې له مخى کيدى شي چې د ماتيدو قانون وشميرل شي. دا قانون وايي، چې پروتوړانګه ، ماتوړانګه او ولاړکرښه يا عمود په بيليدونکى هوارې په يوه هواره پراته دي او برسيره پر دې لاندې اړيکې باور لري يا صدق کوي:

$$\sin \alpha \;/\; \sin \beta = n$$

كه د رڼاوړانګه په يوه ښيښه (اوبو) پريوزي، نو $n = 1,5\ (1,33)$ دى وښايي، چې ماتکونجونه څومره لوي دي، کوم چې په لاندې پروتکونجونو اړه لري:

؟ 10,5°, 15,8°, 27,3° , 41,2°,67,6°,, 72,4°, 81,9°

۲۸ – په ۱۸ ام ميلادي پيړى کې د سپوږمى لريوالى تريګومتريکي وټاکل شو. په برلين کې (جغرافيوي اوږدوالى $\varphi_1 = 52,52°$) او لکه د ښو هيلو په کونج کې ($\varphi_2 = -33,93°$)، کوم چې په همغه اوږدګراد پراته دي، د سپوږمى سره په همغه وخت کې تړل کيږي. له دې لاس ته راغلل:
$\delta_1 = 32,08°$ او $\delta_2 = 55,72°$.
وشميرى $|KM|$, β , $|BK|$ او له دې څخه d_{EM} .



خیره ۲۳۰

۲۹ – لړځیدنی Schwingungen تل د وخت په اړه شمیرل کیږي یعني د وخت t تړواك لاندې دي. دا د بلواك (y = a . (sin (2 π /T)) .t + k له لارې ورکړ شوي. دلته x = (2 π / T) t هغه کونج دی ، کوم چې په T وخت کی وهلکیږي. 1 / T = f د یوه څرخون پریود یا راگرځیدنی وخت په گوته کوي او د لړځیدنی دوام بلل کیږي» f فرکونځ frequenz بلل کیږي.

۷ ۰ ګډوله ګڼونه یا کمپلیکس اعداد Komplexe Zahlen

د مخه مو ولیدل، چې څنګه یوه ګنډیرۍ پر بله ګنډیرۍ ودانه شوې ده۰ که ولرو

$$x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \quad x^2 = -1 \qquad (7,1)$$

که پورته برابرون ته وګورو، نو څرګند لیدل کیږي، چې دا په رییلګڼونډیرۍ کې اوبی یا حل نه لري، نو له دې امله باید (7 , 1)د ګڼنو ډیرۍ وغزول شي۰ له

$$x_1 = \sqrt{-1}, x_2 = -\sqrt{-1}, ...(7,2)$$

د $\sqrt{-1}$ ګڼ، چې د لومړي حٔل لپاره د رییل مانانه لري، دا سومبول د $i = \sqrt{-1}$

ټاکل کیږي چیرته، چې لرو: $i^2 = -1$ د

$$x_1 = i, x_2 = -i \Leftrightarrow x_{12} = \pm i, ...(7,3)$$

لیکو : دا پورته د لاندې سره

$$i^2 = -1 \qquad (7,4)$$

د (7,1) ځاي نیسي، ځکه، چې باور لري

$$x_1^2 = i^2 = -1 \Leftrightarrow x_2^2 = i^2 = -1$$

دا چې i رییل مانا نه لري، نو دې سومبول ته ایماجینارګڼ imaginär(لاتین: فقط خیالي)یوون(واحد)وایو.

برابرون

سرلیک

$$x^2+a = 0 \Leftrightarrow x^2 = -a \quad , a > 0 \qquad (7,5)$$

کیدی شي په لاندې ډول ولیکل شي

$$x_1 = \sqrt{-a} = \sqrt{a}.\sqrt{-1} = \sqrt{a.i}, ...(7,6)$$
$$x_2 = -\sqrt{-a} = -\sqrt{a}.\sqrt{-1} = -\sqrt{a.i}$$

دلته د(7,4) له امله باور لري

$$x_1{}^2 = ai^2 = -a, x_2{}^2 = (-\sqrt{a})^2 i^2 = -a, ...(5,7)$$

اوس د ایماجینار ګڼ یوون(واحد) تولیز کوو

$$z = bi, b \in R, i^2 == -1, ...(5,8)$$

ایماجیناریوون(واحد) $z= i$ یو ځانګړی ایماجینارګڼ $b=1$ دی

د تولیزي څلوری (عمومي مربع) برابرون(مساوات) اوبی(حل) :

$$x^2 + px + q = 0, p, q \in R, ...(7,9)$$

په لاندې ډول د څلوری پوره کولو یا مربع تکمیلول له لارې

$$(x +p/2)^2 = x^2 + px +p^2 / 4$$

لاس ته راځی یالرو<=

$$x^2 +px + q = (x+ p/2)^2 = +(q-p^2/4) \qquad (7 , 10)$$

$$(x+p/2)^2 = p^2/4 - q \qquad (7 , 11)$$

او که فورمال پسی وګڼل شي

$$\pm\sqrt{p^2/4-q} = \quad {}_{1,2} \quad (x+p/2)$$

نو لرو

$$x_{12} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{p^2/4-q},......................(7,12)$$

د$p^2 = 4q$ لپاره رییل «دبل» اوبی یا حل لاس ته راځي

$$x_1 = x_2 = -\frac{p}{2}$$

که $p^2 > 4q$ وي نو(7,12) دوه مختلف رییل اوبیونې یا حلونه منځ ته راوړي.

که $P^2 < 4q$ وي، نو رییل اوبی نه شته دئ

د ایماجینار ګڼ په مرسته کیدی شي ولیکو

$$\sqrt{\frac{p^2}{4}-q} = \sqrt{[q-\frac{p^2}{4}](-1)} = \sqrt{q-\frac{p^2}{4}}.i$$

که اوس ځاي پر ځاي کړو

$$-\frac{p}{2} = a \in R, \sqrt{q-p^2/4} = b \in R$$

نو په لاندې بڼه دوه اوبیونې یا حلونه لاس ته راځي

$$x_{1,2} = a \pm bi; a,b \in R$$

د دې فورم یا بڼې ګڼونه کمپلکس ګڼونهKomplexe Zahlen (لاتین: پوره کوونکي - یا پوره کیدونکي-) بلل کیږي

$$z = a+bi\ ,\ i^2 =-1;\ a,b \in R \qquad (7,13)$$

د کمپلکس ګڼونوډیرئ په C سره په نخښه کوو

$$\bar{z} = a-bi,..................................(7,14)$$

دا پورته (7,14) و(7.13) ته کنجوګیري کمپلکس ګڼ بلل کیږي٠ لنډ کنجوګیري کمپلکس ګڼ یا اوښتی ګڼ

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5,15)$$

د دې مطلقه یا ساده ارزښت

$$a = re(z) \Leftrightarrow b = Im(z) \qquad (7,16)$$

د دې رییل همدا رنګه ایماجینار برخه

دوه کمپلکسګڼونه برابر بلل کیږي، که دوي په رییل او ایماجینار برخه کې یو له بل سره برابر وي:

$$a_1 + b_1 i = a_2 + b_2 i \Leftrightarrow a_1 = a_2, b_1 = b_2$$

موږ تل په پام کې لرو، چې $i^2 = -1$ اینبول شوی

ګډوله یا کمپلکس عدد کیدی شي په سطحه یا هاره کې د لاندې شکل سره سم(د ګاوس د اعدادوسطحه). سړی د کمپلکسو اعدادو سره همغسې شمیرنه کوي، لکه د حقیقي اعدادو سره او په پام کې نیسي چې: $i^2 = -1$

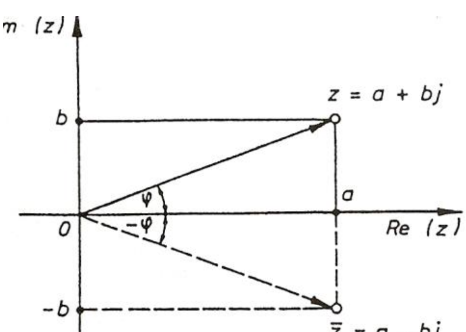


Bild 5.1

موږ دې سیستم ته پروت ولاړ سیستم وایو یا کواوردیناتسیستم Koordinaten systm

پورته څیره دې وکتل شي

پروتولاړ سیستم ته د (x,y) - سیستم هم وایي په پروتولاړ سیستم کې پروت څرخون(محور) د x - محور ته د هوارې یاسطڅې ریيلبرخه او ولاړ محور یا د y – محور ته یېایماجینار برخه وایې لکه ځنګه، انځور شوي دي٠ په دې توګه په پروتولاړ سیستم کې یو ټکی منځ ته ر ائې، چې کمپلکس ګڼ انځوروي٠(موږ دا اوس دا برخه نوره نه څیړو، خو دا د وکتورونو په ډول انځوریږي او کارونی یا عملي یې هم همداسې دي، لکه د ورسره بلدو وکتورونو) یادونه : هغه ګران هیوادوال، چې نوي د شمیرپوهنی د دې برخې سره بلدیږي، د هغو لپاره دې په دا لومړي ځل ځنې ویيونه یا لغاتونه یاکلمې په پام کې نه راځی، لکه د وکتور کلمه، خو دا پورته یا لاندې څیرو کې کتلی شو، چې د کمپلکس ګڼونو زیاتون او کمون ځنګه دی

۷ ۰ ۱ زیاتون او کمون:

لاندې څیرو ته دې پام وي او ګورو، چې ریيل برخه او ایماجینار برخه د Re(z) او Im(z) سره په نخښنه شوي دي

$$z_1 \pm z_2 = (a_1 + b_1 i) \pm (a_2 + b_2 i) = (a_1 \pm a_2) + (b_1 \pm b_2), \ldots\ldots.(7,17)$$

بیلګه ۷ ۰ ۱ ورکړ شي:

$$\begin{aligned}
& z_1 = 2 - 3i, z_2 = 3 + 2i \\
& \Rightarrow z_1 + z_2 = 5 - i, z_1 - z_2 = -1 - 5i \\
& \Rightarrow \\
& |z_1| = \sqrt{2^2 + 3} = \sqrt{13}, |z_1| = \sqrt{13} \\
& -z_1 = -2 + 3i, -z_2 = -3 - 2i
\end{aligned}$$

زیاتون یا جمعه (او په همدې توګه کمون یا تفریق یعني د(z2-) په زیاتون)کیدی شي د څېرې ۵ (په همدې توګه د څېرې ۷ . ۳) د ګراف له لارې هم ښوول شي.

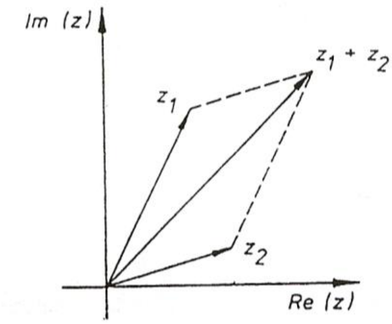


Bild 5.2 شکل 7.2

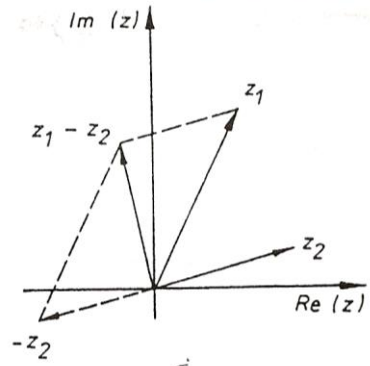
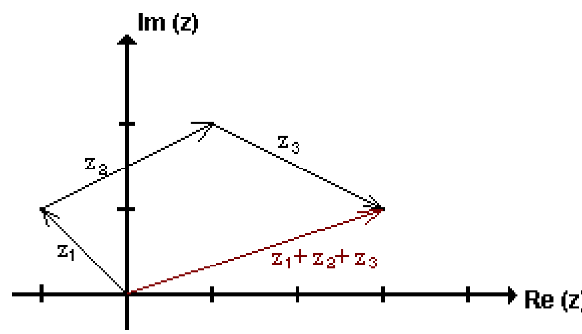
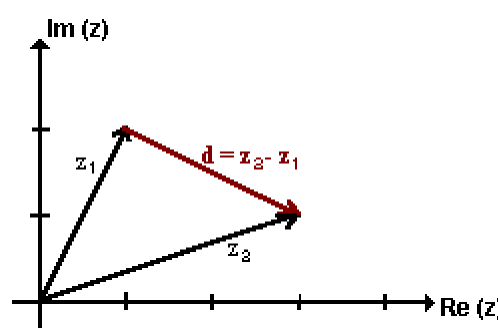


Bild 5.3 شکل 7.3

يا لاندې:



په پورته او لاندې څېرو کې د کملپکس ګڼونو د زياتون او کمون انځور ليدلکيږي٠



دکملپکس ګڼونو ارزښت

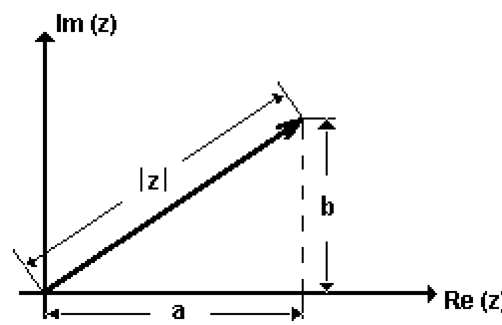
د وکتورz اوږدوالی د کملپکس ګڼونو ارزښت بلل کيږي٠

دا د په |z| سره ښايو او د پيتاګوراس(فئثاغورث) د جملې

سره ښوول کيږي، د دې لپاره دې پورته اخرنی ليکه

هم وکتل شي٠ مخامخ څيره موږ ته د کمپلکس ګڼ

د ارزښت انځور ښايي



$$|z| = |a+bi| = \sqrt{a^2+b^2}.$$

په درې ګوډي کې د اړخونو ځانتيونه يا تباسب له امله باور لري

$$||z_1|-|z_2|| \leq |z_1+z_2| \leq |z_1|+|z_2|, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7,18)$$

برسيره پر دې باور لري:

$$z_1 + z_2 = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$$

٧ . ٢ د کمپلکس ګڼونوځل:

د ورسره بلد نوک اينوولو له لارې لاس ته راځي

$$(a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = a_1 a_2 + a_1 b_2 i + b_1 a_2 i + b_1 b_2 i^2$$
$$= a_1 a_2 + a_1 b_2 i + b_1 a_2 i + b_1 b_2 (-1)$$
$$\Rightarrow$$

نو بارورل ري

$$(a_1+b_1 i)(a_2+b_2 i)=(a_1a_2 - b_1 b_2)+(a_1 b_2 + a_2 b_1)i \qquad (7, 20)$$

ګران لوستونکی به زما په ستونځو پوه شي، چې لاتین توري په بدل ډول لیکل شوي، چې دا هم زما تخنیکي ستونځې دي، دا که په هرځایکې وي،دا به راته ګران د شمیرپوهني مینه وال وبخښي٠ دا لاندې هم ساده ازمایل کیدی شي

$$\overline{z_1.z} = z_1.z_2 \quad , \quad |z_1 .z_2| = |z_1||z_2| \qquad (7,21)$$

بیلګه ۷ ٠ ۲

د $z.\bar{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2+b^2+(-ab + ab)i = a^2+b^2$

او (۷ ، ۱۵) له امله لاس ته راځي:

$$\Rightarrow \quad z.\bar{z} = |z|^2 \qquad (7, 22)$$

۷ ٠ ۳ ویش

$$z_1 : z_2 = (a_1+b_1 i):(a_2+b_2 i) = \frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1+b_1}{a_2+b_2}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\overline{\overline{z_2}}}{z_1\overline{\overline{z_2}}} = \frac{(a_1+b_1 i)(a_2-b_2 i)}{(a_2+b_2 i)(a_2-b_2 i)} =$$

$$= \frac{(a_1a_2+b_1b_2)+(a_2b_1-a_1b_2)i}{a_2^2+b_2^2}$$

$$z_1 : z_2 = \frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1+b_1 i}{a_2+b_2 i} = \qquad (7,23)$$

$$= \frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2} + \frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2} i$$

په دې پسې لاس ته راځي

$$\left|\frac{Z_1}{Z_2}\right| = \frac{|Z_1|}{|Z_2|}, \overline{\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)} = \frac{\overline{Z_1}}{\overline{Z_2}} \qquad (7,24)$$

بیلګه ۷ . ۳ :

د (۷ . ۲۴) د دوهمې برخې ښوونه:

$$\frac{\overline{Z_1}}{\overline{Z_2}} = \frac{\overline{Z}_1.Z_2}{\overline{Z}_2.Z_2} = \frac{(a_1 - b_1 i)(a_2 + b_2 i)}{(a_2 - b_2 i)(a_2 + b_2 i)} =$$

$$= \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + (a_1 b_2 - a_2 b_1) i}{a_2^2 + b_2^2} =$$

$$= \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} - \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} i = \overline{\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)}$$

بیلګه ۷ ۰ ٤ :د او Z1 لپاره له Z2 سره سم لاس ته راځي:

$$Z_1 : Z_2 = \frac{Z_1}{Z_2} = \frac{2-3i}{3+2i} = \frac{(2-3i)(3-2i)}{(+2i)(3-2i)} = \frac{(6-6)-(4+9)i}{3^2+2^2} = \frac{13}{13} i = -i$$

۷ . ۴ . تمرینونه

۱ - مېلق یا همغه ارزښتونه او انځورونه

۱ . ۱ – لاندې په اریتمیتیکي یا شمیرنیزه توګه ورکړ شوي ورکړ شوي کمپلکس عددونه په ګاوس سېحه کې انځور کړئ! د دې عددونو مېلقه ارزښتونه وشمیرئ.

a) $z = 1 - i$ b) $z = \sqrt{2} + \sqrt{2} i$

c) $z = 2(1 - \sqrt{3} i)$ d) $z = -1 - i$

۱ . ۲ – د ګاوس د عددونو سطحه کې د هغو لاندې مخلوط یا کمپلکس عددونو ځای ورکړئ، د کومو لپاره چې باور لري:

a) $|z| = \sqrt{2}$ b) $|z| < \sqrt{2}$ c) $|z| > \sqrt{2}$ d) $|z| = r$

٢ – جمعه او تفريق(زاتون او کمون)

٢ . ١ – د شميرنې او کارنې يا رسم کونې له لارې پيدا کړئ

a)(1+2i)+(2+i) b) (-2+i)+1-2i)

c) (1-2i)-(1-2i) d) (-1-2i)+(2-i)

٢ . ٢ - د شميرنې او کارنې يا رسم کونې له لارې پيدا کړئ

a) (22 + 5i) + (2 + i) b) (3 + 2i) - (5+2i)

c) (1+2i) - (1+2i) d) i -(1-2i)

٣ . ضرب(ځل) او وېش:

په لاندې کې a,b,c,d,x,y حقيقي ګڼونه دي.

٣ . ٢ – وشميرئ

a) $(2+\sqrt{3}\,i).(3-\sqrt{2}i)$ b) $(3+2\sqrt{2}\,i).(3-2\sqrt{2}\,i)$

c) $(1+\sqrt{5}\,i).(1-\sqrt{5}\,i).(13-12i))$ d) $\sqrt{3+\sqrt{7}i}.\sqrt{3-\sqrt{7}i}$

٣ . ٢ – وشميرئ

a) $(x+y\,i)\,(2x+yi)$ b) $(\sqrt{x}+\sqrt{y}\,i)(\sqrt{x}-\sqrt{y}\,i)$

c) $\left(\frac{2}{3}a-3bi\right)\cdot\left(\frac{4}{3}a+5bi\right)$ d) $(c-\sqrt{d}\,i)(-c-2\sqrt{d}\,i)$

٣ . ٣ – د لاندې ماتونو مخرج يا ماتلاندې حقيقي ورګرځوئ (a ، b حقيقي دي)

3.3.1. a) $\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}\,i}{\sqrt{3}+\sqrt{2}\,i}$ b) $\dfrac{1-20\sqrt{5}\,i}{7-2\sqrt{5}\,i}$

c) $\dfrac{56+33i}{12-5i}$ d) $\dfrac{63+16i}{4+3i}$

3.3.2. a) $\dfrac{5i}{\sqrt{2}-\sqrt{3}\,i}$ b) $\dfrac{3-27\sqrt{5}\,i}{7-3\sqrt{5}\,i}$

c) $\dfrac{i-\sqrt{3}}{\sqrt{3}\,i-2}$ d) $\dfrac{i}{8-i}(i+1)$

3.3.3. a) $\dfrac{3a+4bi}{4a-3bi}+\dfrac{4a-3bi}{4a+3bi}$ b) $\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}\,i}{\sqrt{a}-\sqrt{b}\,i}-\dfrac{\sqrt{b}+\sqrt{a}\,i}{\sqrt{b}-\sqrt{a}\,i}$

c) $\dfrac{\sqrt{1+a}+\sqrt{1-a}\,i}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}\,i}-\dfrac{\sqrt{1-a}+\sqrt{1+a}\,i}{\sqrt{1-a}-\sqrt{1+a}\,i}$

d) $(5-i)\,(6-i)+\dfrac{5-i}{6-i}$

۴ . سره رایوځی شوې پوښتنې

ګډوله ګڼونه یا اعداد ورکړ شوي.

$z_1=\frac{1}{2}\sqrt{3}-\frac{i}{2}$ او $z_2=-\frac{1}{4}-\sqrt{3}\frac{i}{4}.$

۳ - د لوګاریتم بنسټ فرمولونو استعمال. په لاندې تمرینونوکې x وشمرئ.

$z_1=\frac{1}{2}\sqrt{3}-\frac{i}{2}$ und $z_2=-\frac{1}{4}-\sqrt{3}\frac{i}{4}.$

وشمیرئ:

4.1. a) z_1+z_2 b) z_1-z_2 c) $z_1\cdot z_2$ d) $\dfrac{z_1}{z_2}$

4.2. a) $|z_1|$ b) $|z_2|$ c) $\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2$ d) $\dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$

4.3. a) $|z_1+z_2|$ b) $|z_1-z_2|$ c) $\bar{z}_1+\bar{z}_2$ d) $\bar{z}_1-\bar{z}_2$

4.4. a) $|z_1|\cdot|z_2|$ b) $\dfrac{|z_1|}{|z_2|}$ c) $|z_1\cdot z_2|$ d) $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|$

۴ . ۵ – د لاندې مربع مساواتو حلونه ورکړئ!

a) $x^2 + (1 + i)\,x - 2\,(1 - i) = 0$

b) $x^2 + (3 - 2i)\,x + 3\,(1 - i) = 0$

c) $x^2 - \frac{i}{2}\sqrt{2}\,x + 1 = 0$

d) $16\,x^2 + 8\,(i + 1)\,x + 2\,(i + \frac{9}{2}) = 0$

همدا موضوع له بلکتاب څخه

7 . ایماجینار او کمپلکس ګنونه

Inhaltsverzeichnisخونديونه

د ريیلګنونو بنستونه

د ریيلګڼونو ډیرۍ لکه د مخه مو ، چې ګوته ورته ونیوله د راشنل او ایراشنل ګڼونو له ډیریو جوړه ده (د ریيلګڼونو برخه دې وکتل شي).

ایماجینار ګڼونه Imaginäre Zahlen

د ریيل ګڼونو سیستم پوره نه دی، ګورو، چې د یوه ګڼ ځلورۍ یامربع، چې د کمیز ګڼ سره برابره وي، ریيله اوبیونه یا حل نه لري لکه لاندې

$$x^2 = -1$$

داسې یو ریيل ګڼ نه شته، چې پورته پوره کړي

یوه فورمال اوبیونه یې په لاندې ډول ده

$$x = \pm\sqrt{-1}\,,$$

چیرته ، چې $\sqrt{-1}$ ریيله اوبیونه نه ده.

دا ځلورۍ یا مربع ریښه د i سره په نخښه کوو، چې له دې پرابلم څخه ووتی شو او ځلورۍ یې په 1 - سره په نخښه کوو.

د دې i لپاره باور لري:

$$i^2 = -1$$

اوس کړی شو، چې ولیکو

$$x_{1,2} = \pm i\,.$$

که ګڼ i د ریيلګڼونو سره زیات ځل یا ضرب کړو، نو د ګڼونو یوه د نوو ګڼونو ډیرۍ ترې لاس ته راځي، د بیلګې په توګه :

$$2i,\ 3i,\ -i,\ 1+i,\ 2+i,\ 1+2i,\ -23+78i,\ 0.45-0.93i$$

او داسې نور.

تولیزه بڼه یې :

سرلیک

$$a + bi,$$

پورته ګڼ کمپلکس ګڼ دئ او a او b رييلګڼونه٠ له دې سره هم لکۀ د نورو ګڼونو سره ساده شميرل کيږي، چيرته، چې د i^2 په ځای 1 - ليکلی شو يا په ځټ: لاندې کې يې بيلګې ګورو

$$(1 + 2i) + (3 + 4i) = (1 + 3) + (2 + 4)i = 4 + 6i$$

په ټوليزه توګه:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$$

$$(a + bi) \cdot (c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

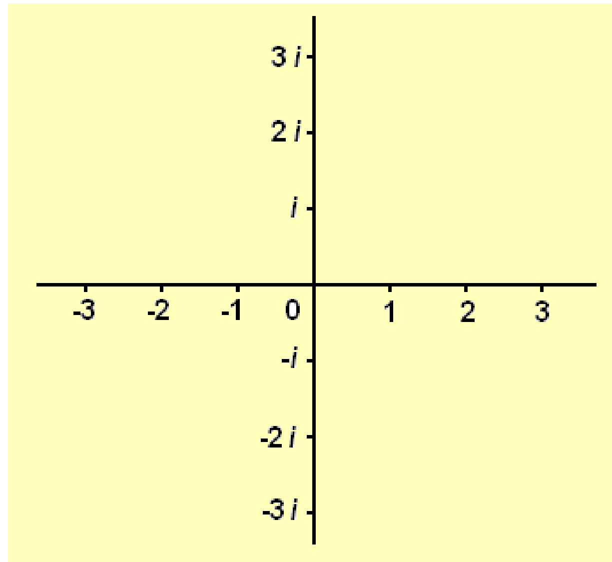
له دې سره ويش هم کړی شو، خودا ، چې ستونځمن دئ وروسته يې راوړو.

دا لاندې هم لرو

i.2i,i,0,-i,-2i,-3i٠٠٠3.....

دا ايماجينار ټولګڼونه بلل کيږ ي يا بولو ، چې دا هم صفرلري

موږ په لاندې کې د هوارې پروت محور لاندې د رييلګڼونو محور پوهيږو او ولاړ محور يا څرخونی يې د ايماجينار ګڼونو محور دی، چې د دواړو زياتون کمپلکس ګڼونه دي يا د کمپلکس ګڼونو هواره انځوروي٠.



په لاندې کې يو کپلکس ګڼ په يوه رييل ګڼ يا پيداينتي ګڼ ويشل کيږي

$$mi : n = \frac{m}{n} i \ .$$

په پورته کې m او n رييلګڼونه دي او ايماجينار

$$x^2 = -a^2$$

په پورته کې a رييلګڼ دی، خو x غواړو لاس ته راوړو، لاس ته راوړنه يې يو ايماجينار ګڼ دی.

د دوه ايماجينار ګڼونو زياتون او کمون::

$$a \, i \pm b \, i = (a \pm b) \ i \ .$$

ځل او ويش يې

$$\frac{i}{i} = 1 \ .$$

د دې سره لاس ته راځي

سرلیک

$$pi \cdot qi = -pq$$

او

$$\frac{pi}{qi} = \frac{p}{q} \,,$$

چیرته چي p او q ریللګڼونه دي.

لاس ته راوړنه : د دوه ایماجینار ګڼونو ځل یا ضرب او ویش څخه ریيلګڼ لاس ته راځي، چي په لاندي ډول یې ګورو ۰

$$i^2 = -1 \,, \quad i^3 = i^2 \cdot i = -i \,, \quad i^4 = i^3 \cdot i = 1 \,, \quad i^5 = i^4 \cdot i = i \,, \ldots$$

د ټولګڼ n لپاره لرو:

$$i^{-n} \equiv \frac{1}{i^n}$$

لاس ته راوړنی بي

Error!

$$i^{-1} = \frac{1}{i} = \frac{i}{i^2} = -i \,, \quad i^{-2} = \frac{1}{i^2} = \frac{1}{-1} = -1 \,, \quad i^{-3} = \frac{1}{i^3} = -\frac{1}{i} = i \,, \quad i^{-4} = \frac{1}{i^4} = 1 \,, \ldots$$

د سره شمیرل ورسته کیدونکي دي.

کملکس ګڼونه Komplexe Zahlen

ګډ یا مخطلت څلوری - یا مربع برابرون شمیرو

$$x^2 - 4x + 13 = 0 \,.$$

د ځلورۍ پوره کوونې يا تکميلوني له لارې ، چې ورسره بلد يو ، اوبيونه يا حل پيداکوو

$$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{-9} = 2 \pm 3\,i\ .$$

د دې برابرن اوبيونه نه رييل ګڼ دئ او نه ايماجينار ۰ دې ګڼ ته موږ کمپلکس ګڼ وايو   **komplexe Zahlen**.

د کمپلکس ګڼونو او د دې سره سره شميرنه ۰

موږ دا لاندې کمپلکس ګڼ لرو :

$$z = a + b\,i,$$

چيرته، چې a او b رييل ګڼونه دي

د کمپلکس ګڼونو په مرسته کړای شو، چې بې بنديزه ځلورۍ- يا مربع فرمولونه اوبې کړو

$$x^2 + p \cdot x + q = 0$$

لاس ته راځي.

دلته چې څه راځي هغه ګران لوستنکی پخپله هم پيدا کولی شي، زه به وهڅيږم، چې دا پرابلمونه پورته کړم يا لرې کړم ،

د لاندې لپاره

$$\frac{p^2}{4} - q \geq 0$$

يو يا دوه رييل اوبيونې لاس ته راځي۰

د

$$\frac{p^2}{4} - q < 0$$

لپاره اوبیوني په لاندې ډول ليکل کيږي

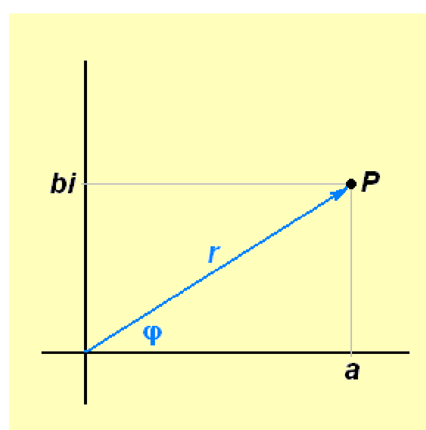
$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm i\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}\ .$$

اوبیوني کنجوګيري کمپلکس دي، دا په دې مانا، چې يو له بل د مختخښي له مخه توپير کيږي۰

په ګنونهواره یا ګنسطحه کې د کمپلکس ګنونو انځورونه

د کمپلکس ګنونو ګرافيکي انځورونې لپاره هواره ځان رامنځ ته کوي، چې د رییل او ایماجینارګنکرښو ځخه غزیدلې ده۰

کمپلکس ګنونه a + bi د ټاکنې له مخې(په بدل وار یا همغه وخت) د یوه ټکی P ، چې کواوردينات یا پروت ولاړ محورونه يې a او b ، چيرته، چې محور b ټکی bi په ایماجینار ګنکرښی باندې په ګوته کوي، یا د» ښوونکرښې « OP سره انځور کيدی شي۰ دا د يوې اوږ دې r سره ښايو او د رییلې محور سره کونج fi جوړوي۰ (دا همغه د ټکی P انځورول دې په پولار کواوردينات کې، r د کمپلکس ګڼ مطلق ارزښت دی، fi يې فاز بلل کيږي۰



د دواړو انځوربنې لپاره لاندې ترانفورمیشنبرابرون باور لري(له دې څخه نوج زده کوونکې تیریدلی شي، چې ترانسفورمیشن باندې نه پوهیږي)

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}\,, \quad \tan\varphi = \frac{b}{a}\,, \qquad a \neq 0$$

$$a = r\cos\varphi\,, \quad b = r\sin\varphi\,.$$

له $\tan\varphi = \frac{b}{a}$ لاس ته راځي

$$\varphi = \arctan\frac{b}{a} + k\cdot 2\pi, \quad \text{wobei} \quad -\frac{\pi}{2} < \arctan\frac{b}{a} < \frac{\pi}{2} \quad \text{und } k \text{ ganzzahlig ist.}$$

په پورته کې wobei د کوم سره یا چیرته چې په مانا دی او k ټولګڼ دی ۰

ارزښت

$$\varphi_0 = \arctan\frac{b}{a}$$

د فې φ اصلي ارزښت بلل کیږي۰ له دې نور ارزښتونه د k او 2π له زیاتون څخه لاس ته راځي۰

د دې له مخې کیدی شي، چې کمپلکس ګڼ په لاندې توګه ولیکل شي ۰

$$z = a + bi = r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)\,.$$

" وروسته د اویلر فرمول "Eulerschen Formel په مرسته ترې لاس ته راځی

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

دریمه انځورونه یې لاندې ده:

$$z = a + bi = r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right) = r\,e^{i\varphi}\,.$$

د کمپلکس ګڼ دا درې انځورونې په ترتيب داسي بلل کيږي اريتميتيکي بڼه کونومتريکي (يا تريګنومتريکي بڼه) او اکسپوننشل بڼه.

دا چي د اويلر فرمول وروسته ښوول کيږي، اکسپوننشل بڼۀ دي دلته راوړل شوي وي، خو د ښووني لپاره دي ترې کار نه اخستل ک يږي.

Rechnen mit komplexen Zahlen

د کملپکس ګڼونو سره شميرنه

دوه کملپکس ګڼونه دي ورکړ شوي وي

$$z_1 = a_1 + b_1 i\,, \quad z_2 = a_2 + b_2 i\,.$$

د کمپلکش ګڼونو زياتون او کمون

په زياتون او کمون کي د الجبر ي قوانينو له مخي i هم داسي په کار اچول کيږي لکه هره بله کومه د تورو لويه ، چي په کار اچول کيږي يا کارول کيږي

$$z_1 + z_2 = a_1 + b_1 i + a_2 + b_2 i = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\, i$$

$$z_1 - z_2 = a_1 + b_1 i - (a_2 + b_2 i) = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)\, i$$

د کمپلکس ګڼونو « ښوونکرښه» (دا هغه کرښه ده، چۀ د دواړو محورونو صفر ټکو څخه د هغه په هواره موخه ور ټکی په لور ګزيدلی وي، ياني د صفر ټکی څخه د هغه بل موخه ټکی په لور ، ځکه لوريزه ده)لکه وکتورونه سره زياتيدلی او کميدلی شي

Das Produkt komplexer Zahlen

د کمپلکس ګڼونو ځل

دی

$$z_1 z_2 = (a_1 + b_1 i)\,(a_2 + b_2 i) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)\, i.$$

دا ځل ترلی پيژند وړ ليدونکي مانا نه لري(ياني سملاسي ترې څه نه شو پوهيدلی). که د دې په ښت « پولارکواودينات » وکارول شي، نو لاس ته راځي

$$a_1a_2 - b_1b_2 = r_1r_2\left(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2\right) = r_1r_2\cos\left(\varphi_1+\varphi_2\right)$$

$$a_1b_2 + a_2b_1 = r_1r_2\left(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\cos\varphi_2\right) = r_1r_2\sin\left(\varphi_1+\varphi_2\right).$$

او له دې سرهt

$$z_1z_2 = r_1r_2\left[\cos\left(\varphi_1+\varphi_2\right) + i\sin\left(\varphi_1+\varphi_2\right)\right].$$

نو دی

$$|z_1z_2| = |z_1|\,|z_2| \quad \text{او} \quad \varphi\left(z_1z_2\right) = \varphi_1+\varphi_2.$$

د ځل – یا ضرب ارزښت د ارزښتونو ځل دی٠ د ځل یا ارگومنت یا فازې د ارگومنت یا فازې د زیاتون سره برابر دی٠

سملاسي پیژندل کیږي، چې دا د دوه فاکتورونو څخه زیاتو فاکتورو یا ځله وونو لپاره هم باور لري

$$|z_1\cdot z_2\cdot\ldots\cdot z_n| = |z_1|\cdot|z_2|\cdot\ldots\cdot|z_n| \quad \text{او} \quad \varphi = \varphi_1+\varphi_2+\ldots+\varphi_n.$$

د کمپلکس کښونو ویش Division komplexer Zahlen

په ورته توگه پیدا کیږی، که z_2 د صفر سره برابر نه وي

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \quad \text{او} \quad \varphi = \varphi_1 - \varphi_2.$$

که کیږدو $z_1 = 1$ او $z_2 = z$, نو لاس ته راځي:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{|z|}\left[\cos(0-\varphi) + i\sin(0-\varphi)\right] = \frac{1}{r}(\cos\varphi - i\sin\varphi),$$

او په ځانګړي ډول دi $z = i$

$$\frac{1}{i} = -i.$$

Ganzzahlige Potenzen einer komplexen Zahl

د کمپلکس ګڼونو توان (کپلکس ګڼ د یوه ناکمیز توان سره د رییل ګڼونو په څیر دی)

$$z^{-n} \equiv \frac{1}{z^n}.$$

د کمپلکس ګڼونو ځل دې وکتل شي

$$|z_1 \cdot z_2 \cdot \ldots \cdot z_n| = |z_1| \cdot |z_2| \cdot \ldots \cdot |z_n| \quad \text{und} \quad \varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_n.$$

د همغه ځله وون یا ضریب z لپاره ترپلاس ته راځي

$$z^n = |z|^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi).$$

مونږ لرو

$$z^p \cdot z^q = z^{p+q}, \quad (z^p)^q = z^{p \cdot q}, \quad z_1^p \cdot z_2^p = (z_1 \cdot z_2)^p, \quad \frac{z^p}{z^q} = z^{p-q}, \quad \frac{z_1^p}{z_2^p} = \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^p.$$

Der binomische Lehrsatz

د بینوم درسي جمله

د بینوم جملي لپاره هم لرو

د نوکانو د چاون قانون او ځل قانونو د زیاتیز جګ ګڼ لپاره د بینوم جمله همغسي باور لري

$$(z_1 + z_2)^n = \binom{n}{0} z_1^n + \binom{n}{1} z_1^{n-1} z_2 + \ldots + \binom{n}{k} z_1^{n-k} z_2^k + \ldots + \binom{n}{n} z_2^n.$$

له دې ځايه ښکته د ښوونځي زده کوونکو لپاره ستونځمن دی.

د موفری قانون Die Moivreschen Formeln

له برابرون څخه (پورته دې وکتلشي)

$$z^n = |z|^n \left(\cos n\varphi + i \sin n\varphi\right)$$

لاس ته راځي

$$|z| = 1: \qquad (\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi.$$

له بلې خوا د زیاتیز ټولګنیز جګګې یا اکسپوننت سره د بینوم جملې څخه لاس ته راځئ:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos^n\varphi + i\binom{n}{1}\cos^{n-1}\varphi\cdot\sin\varphi - \binom{n}{2}\cos^{n-2}\varphi\cdot\sin^2\varphi$$

$$-i\binom{n}{3}\cos^{n-3}\varphi\cdot\sin^3\varphi + \binom{n}{4}\cos^{n-4}\varphi\cdot\sin^4\varphi + \ldots + i^n\binom{n}{n}\sin^n\varphi.$$

که د برابرون دوا

ړه خواوې برابار کینول شي او بیا په پام کې ونیول شي، چې رییل او ایماجینار برخه دواړه باید برابر وینو د موفري برابرون ترې لاس ته راځي **Moivreschen Formeln**:

$$\cos n\varphi = \cos^n\varphi - \binom{n}{2}\cos^{n-2}\varphi\cdot\sin^2\varphi + \binom{n}{4}\cos^{n-4}\varphi\cdot\sin^4\varphi - + \ldots,$$

او

$$\sin n\varphi = n\cos^{n-1}\varphi\cdot\sin\varphi - \binom{n}{2}\cos^{n-3}\varphi\cdot\sin^3\varphi + \binom{n}{5}\cos^{n-5}\varphi\cdot\sin^5\varphi - + \ldots,$$

چیرته، چې ښی لور ترهغې پوره شي، تر څو چې څله وونی یا ضریب صفر شي.

د کمپلکس ګڼونو ریښه Wurzeln aus komplexen Zahlen

د برابرون اوبیونه

$$x^n = z \qquad \text{n positiv ganzzahlig}$$

پورته کی n زیاتیز ټولګڼ دی
د کمپلکس ګڼ z n -مه ریښه بلل کیږي :

$$x = \sqrt[n]{z}.$$

ږدو

$$z = r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)$$

او

$$x = \rho\left(\cos\psi + i\sin\psi\right),$$

د $z = x^n$ له امله لاس ته راځي

$$\rho^n = r \quad \text{und} \quad n\psi = \varphi$$

او د دې پسې

$$\rho = \sqrt[n]{r} \quad \text{und} \quad \psi = \frac{\varphi}{n}$$

دي

په ويشنه کې بايد په پام کې ونيول شي، چې ارگومنت يا پروتمحور φ پريودي يا تل بيرته راگرځيدونی دی د پريودې يا راگرځيدنی π2 سره ، نو

$$\varphi = \varphi_0 + k \cdot 2\pi \qquad k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

پسې د ψ لپاره تيک *n* مختلف ارزښتونه لاس ته راځي، ياني

$$\psi = \frac{\varphi}{n},\quad \frac{\varphi + 2\pi}{n},\quad \frac{\varphi + 2\cdot 2\pi}{n},\ \ldots\ \frac{\varphi + (n-1)\cdot 2\pi}{n}.$$

د $n = k$ ځانلۀ د مخه ارزښتونه (له دويم پسې) تکرارېږي، نو باور لري:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + k\cdot 2\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + k\cdot 2\pi}{n}\right) \qquad k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ (n-1)$$

هر له دې ارزښتونو د کمپلکس گڼ z د n-مې رېښه بلل کيږي

$$\sqrt[n]{z} \quad \text{oder} \quad z^{\frac{1}{n}}$$

دا ټول n ارزښتونه په گنهواره په يوې گردی په O په يوه منظم n - گوډي پرته ده , د څلوری ريښی لپاره له

$$i = i\sin\frac{\pi}{2}$$

لاندې ارزښتونه ترې لاس ته راځي

$$\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} \quad \text{und} \quad \cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4},$$

او د څلوری ريښي لپاره له

$$-i = i\sin\frac{3\pi}{2}$$

پيداکيږي

$$\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4} \quad \text{und} \quad \cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}.$$

که موږ ونيسو لکه د رييل ګڼونو لپاره

$$z^{\frac{m}{n}} = \left(z^{\frac{1}{n}}\right)^m = \left(\sqrt[n]{z}\right)^m$$

دې وي، چيرته چې n يو پيداينتج ګڼ او m يو په خوښه ټولګڼ دی، نو له دې سره د کمپلکس ګڼ سره جګګڼ يا کسپوننت وپيژندل شو يا تعريف شو۰ اوس نو اخرنی پل پاتې ، چې هغه د ايراشنلجګګڼ دی .

توان د په خوښه رييل جګګڼ سره

Potenzen mit beliebigen reellen Exponenten

اوس دې z له صفر مختلف په خوښه کمپلکس ګڼ وي .

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = r\left[\cos(\varphi + k\cdot 2\pi) + i\sin(\varphi + k\cdot 2\pi)\right],$$

چيرته چې

$$k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$$

دی ، نو د z^{ν} (ν رييلreell) لاندې هر دالاندې کمپلکس ګڼ پوهيږو:

$$r^{\nu}\left[\cos\nu(\varphi + k\cdot 2\pi) + i\sin\nu(\varphi + k\cdot 2\pi)\right].$$

لاربښود : د داسې په ټوليز پيژند يا تعريف سره د کمپلکس ګڼونو توان لپاره د د توان شميرنې بنسټيز قوانين باور لري ، يانې

$$z^{\mu}\cdot z^{\nu} = z^{\mu+\nu},\quad z_1^{\mu}\cdot z_2^{\mu} = (z_1\cdot z_2)^{\mu},\quad (z^{\mu})^{\nu} = z^{\mu\cdot\nu}$$

nicht mehrنور بس دی

۱۳ ترانسځندنت برابرونونه یه ـ مساوات

دلته يواځي هغه ترانسځندنت مساوات څېړل کيږي، کوم چی بيرته په الجبري مساواتو اړول کيدی شي. دا بيرته په الجبري مساواتو اړول، لکه څنګه په رېښه مساواتوکی، په خوښه په بل شکل اړول کيږي او په داسي ډول دي لکه هملته:

د فرمول په اړولو(فورم بدلون يا بڼه بدلون) سره کوم ځواب له منځه نه ځي، خو کيدی شي چی اړولی فرمول زياتي اوبيوني يا حلونه نسبت د پيل برابرون ته ولري. له دې امله بايد د اړول شوي برابرون ټولې اوبيونې په پيل برابرون کی ځاي په ځاي يا کيښوول شي او وکتل شي چی کوم له دې د پيل مساوات حلونه هم دي

لکه څنګه په ريښه يي برابرونونو يا مساواتو کی ، دلته هم يواځی رييل اوبيوني پلټل کيږي.

۱۳ . ۱ لوګاريتمي مساوات

د لوګاريتمي مساواتو او اکسپوننشل يا په جګ سماواتو د حل (اوبي) پيدا کولو لپاره اړيين يا ضرور(ضروري يا اړيين شرايط) دی، چی د يو عدد(ګڼ) aلوګاريتم، د b په بنسټ، معلوم کړو يا وڅيړو.

$$x = \log_b a; a > 0, b >, b \neq 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (13,1)$$

د بنسټ $b = 10$ لپاره(lga) او د بنسټ b=e لپاره (ln a) کيدی شي (۱۳ . ۱)

سيده د جبشميري له لارې پيداشي. په ځټ يا برعکس د 10 =| b =|e لپاره برابرونونه په دې ډول اړول کيږي

$$x = \log_b a = \lg a / \lg b = \ln a / \ln b ....(13.2)$$

د لوګاريتمي مساواتو يو ساده ډول يا شکل (تيپ) دا دی

$$l\,\mathrm{og}_b\, x = c ....(13.3)$$

دا برابرون د (7. ۱) ، (7. ۲) له مخی لاندې ته ورته دی:

$$x = b^c ....(13,4)$$

دا سی افاده هم د جبشميري سره شميرل کيدی شي.

بيلګه ۱۳ . ۱ : $\log_2 x = 1,5; x = 2^{1,5} = 2.8284$

په همدې ډول د (۱۳ . ۳) بڼي اوبيونه په لاندې تولیز شوي شکل هم ساده دی

$$\log_b\ f(x) = c ....(13,5)$$

دلته f(x) يوه الجبري وبينه يا افاده ده، د (۱۳ . ۵) سره الجبري برابرون کتمټ (ورته) دی

$$f(x) = b^c ....(13,6)$$

ټولې د (۱۳ . ۶) اوبيونې د (۱۳ . ۵) اوبيونې هم دي

بيلګه ۱۳ . ۲ : لوګاريتميز برابرون

$$\log_2(x^2 + x + 6) = 3$$

دلاندې مساواتوسره کتمټ دي

$x^2+x+6=2^3=8$ (همداسی) $\Leftrightarrow x^2+x-2=0$

او لاندې اوبيونې لري

$$x_{1,2}=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{8}{4}}=\frac{1}{2}\pm\frac{3}{2};x_1=-2;x_2=1$$

يو د (۱۳ . ۵) ډول (تيپ) برابرون هم مخ ته لرو، كه د هغه كينه لور (ارخ) ته يود لوگاريتم ريشنل لاينيز كمبينشن الجبري وبينه يا افاده موجوده وي

$$r_1.\log_b g_1(x)+r_2.\log_2(x)+r_3.\log_b g_3(x)+...=c.........(13,7)$$

دلته ځلوني ri راشنل ګڼونه دي. د لوګاريتم قوانينو (۷. ۷) ، (۷. ۹)كاروني يا استعمال څخه، ۷ برخه وګورئ، (۱۳ ، ۵) لاس ته راځي او دا د لاندې برابرونونو سره

$$f(x)=\{g_1(x)\}^{r_1}.\{g_2(x)\}^{r_2}..................................(13,8)$$

بيلګه ۱۳ . ۳:

لومړی له $\log_3(x-1)+\frac{1}{2}\log_3 x-\frac{1}{2}\log_3(x-1)=2$ څخه لاندې لاس ته راځي

$$\log[(x-1)(\frac{x}{x-1})^{\frac{1}{2}}]$$

اوله دې څخه رينبه برابرون $\sqrt{x}.\sqrt{x-1}=9$ ،

د كوم له څلوری يا مربع كولو څخه $x(x-1)=81$ يعني $x^2-x-81=0$

د لاندې ځواب سره

$$x_{1,2}=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{324}{4}}=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{325}{4}}=\frac{1}{2}\pm(\frac{1}{2}).18.03;$$

$$x_1=9,515;x_2=-8,515$$

تيك دا $x1=9,515$ پيل برابرون پوره كوي

. د $x=x2<0$ لپاره $\log x$ او په همدې ډول $\log(x-1)$ پيژند نه لري يا تعريف نه دي.

بېلګه ۱۳ . ۴:

له $\log_b(2x+3)=\log_b(x-1)-1$ څخه لاس ته راځي

$$\log_b[\,(2x+3)/(x-1)] = 1$$

او نور پسی $\frac{2x+3}{x-1} = b^1 = b$ پس

$$2x+3=bx-b$$
$$b+3=x(b-2)$$
$$x=(b+3)/b-1)$$

پيل وينه يا افاده د $x>1$ لپاره موخه وره يا هدفمنده ده، يعني که $(b+3)/b-2)>1$ وي.

د $b>2$يعنی $b-2>0$ څخه لاس ته راځ $b+3 > b-2$

له دې لرو $3>-2$دا د ټولو b لپاره پوره دی

د. $b \le 2$ لپاره د $b+3\le b-2$ $b+3 < b-2$ څخه $3\le 2$ لاس ته راځي

اودا د هيڅ b لپاره باور نه لري .

له دې امله کره د $b > 2$ لپاره اوبی شته دی. د $b \le 2$ لپاره اوبيونه نه شته دی.

د لاندې لوګاريتمي تيپ برابرون هم کيدی شي په الجبري مساواتو بيرته واړول شي

$$F(\log_b f(x)) = 0 \qquad (13 . 9)$$

چيرته چی F او هم f الجبريزې ويينې يا افادې دي. د بدلون کاروايي يا عمليه اجرا کوو

$$y=\log_b f(x)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(13,10)$$

او په لمړي پل کی الجبري برابرون اوبی کوو

$$F(y)=0 \qquad (13 . 11)$$

ددې اوبيونه ..y1,y2 په (۱۳/۱۰) کی ږدو، نو د هر yi لپاره د تيپ (۱۳/۵)

لوګاريتمي مساوات لاس ته راځي:

$$\log_b f(x) = y_i ; \quad i = 1,2,3,\ldots\ldots\ldots \qquad (13 . 12)$$

له دې څخه لاندې الجبري مساوات لاس ته راځي

$$f(x)=b^{y_i} \qquad (13 . 13)$$

ددې لپاره چې و ازمائيلى شو چې ايادا هم برابرون پوره کوي، نو ټول ددې برابرونونو اوبيونې يا ځوابونه بايد په پيل برابرون (۱۳/۹) کې کينوول شي يا ځاې په ځاى شي،

بيلګه ۱۳ . ۵ : برابرون $\log^2x-\lg x-2=0$ د سبستيځيوشن(بدلون) $y=\lg x$سره په څلورى برابرون $y^2-y-2=0$ بدليږي .
د $y1 = 2$ او $y 2 = -1$ ځوابونو سره
له. $\lg x=2$ او $\lg x=-1$ لاس ته راځي

$x1 = 10^2=100$ او $x_2=10^{-1}=\dfrac{1}{10}$

دواړه ځوابونه د پيل برابرون ځوابونه دي.

بيلګه ۱۳ . ۶ :

له برابرون $(6 /(\lg x +1)) + (8 / (\lg x -1)) = 3$
د,$x>0$ مګر $(x \neq 1/10,\ x \neq 10)$ چې د اصلي ماتلاندي $(\lg x+1)(\lg x-1)$ سره ځل شى، لاس ته ترې راځي

$$6(\lg x-1)+8(\lg x+1)=3(\lg^2 -1)$$
$$,\quad 6\lg x-6+8\lg x+8=3\lg^2x-3$$
$$0=3\lg^2x-14\lg x-5$$

او د بدلون $y = \lg x$ سره مو لاندې څلورى بڼې يا مربعفورم ته بيايي:

$$3y^2-14y-5=0 ,\ y^2-(14/3)y-5/3=0$$

د لاندې ځوابونو سره

$$y_{1,2}=\frac{7}{3}\pm\sqrt{\frac{49}{9}+\frac{15}{9}}=\frac{7}{3}\pm\frac{8}{3}; y_1=lox_1=5; y_2=\lg x_2=-\frac{1}{3}$$

$$x_1=10^5; x_2=x^{-\frac{1}{3}}=\frac{1}{\sqrt[3]{10}}$$

دواړه ارزښتونه پیل مساوات پوره کوي.
که په یوه برابرون کی لوګاریتمونه د مختلفو بنسټونو سره رامنځ ته شي، b
نو کیدی شي د (۱۳ . ۲) په مرسته په همغه برابر بنسټ واړول شي

بیلګه ۱۳ . ۷ :

له $\log_2(x-1)+\log_4(x-1)-1=0$

ځخه دلاندې برابرون په مرسته لاس ته راځي:

$$\log_4(x-1)=\frac{\log_2(x-1)}{\log_2 4}=\frac{1}{2}\log_2(x-1),$$

$$\log_2(x-1)+\frac{1}{2}\log_2(x-1)-1=0,\ \log_2(x-1)=\frac{2}{3},\ x-1=2^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{2^2}=\sqrt[3]{4},$$

$$x=1+\sqrt[3]{4}.$$

دا ارزښت د پیل برابرون اوبی یا ځواب هم دی:

$$\log_2\sqrt[3]{4}+\log_4\sqrt[3]{4}-1=\frac{1}{3}\log_2 4+\frac{1}{3}\log_4 4-1=\frac{1}{3}\cdot 2+\frac{1}{3}-1=0.$$

۱۳ . ۲ اکسپوننشل – یا په ځګګڼ برابرونونه

ساده اکسپوننشل برابرون(مساوات)

$$a^x=b; a>0, a\neq 1, b>0 \quad\text{..............................}(13{,}14)$$

کیدی شي چی د لوګاریتم نیولو سره سملاسي حل شي(ځواب شي)

$$x=\log_a b=\lg_b/\lg_a=\ln b/\ln a \qquad (13\,,15)$$

لاندني برابرونونه په ساده ډول په (۱۳ ، ۱۴) ډول (رقم (تيوپ) برابرونونو باندې اړول کيدی شي.

بيلګه ۱۳ . ۸:

$$2^x + 3^{x+2} - 2^{x+2} - 3^{x+1} = 0.$$

$$2^x(1-2^2) + 3^x(3^2-3) = 0, \text{ bzw. } 6\cdot 3^x = 3\cdot 2^x, \text{ bzw. } \left(\frac{2}{3}\right)^x = 2,$$

$$x = \frac{\lg 2}{\lg\frac{2}{3}} = \frac{\lg 2}{\lg 2 - \lg 3} = -1{,}7095.$$

که په (۱۳ . ۱۴) د الجبري وييني يا افادي(x) fاکسپوننتونه ياجګګنونه وي، نو:

$$af(x)=b, a>0, a|=1, b>0 \qquad (13.16)$$

په دې ډول د لوګاريتمولو له لارې يو الجبري برابرون لاس ته راځي

$$f(x)=\log_a b \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(13{,}17)$$

د کومو ځوابونه چې د (۱۳ . ۱۶) ځوابونه هم دی.

بيلګه ۱۳ . ۹ : مساوات $2^{x^2+x-4} = 4$

مو لاندې خلوری برابرون يا مربع مساوات ته بيايي (لاربنودوي)

$$(x^2+x-4)=\log_2 4 = 2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + x - 6 = 0$$

د $x_1 = 2, x_2 = -3$ ځوابونوسره ، کوم چې د پيل برابرون اوبيونې يا ځوابونه هم دي٠

بيلګه ۱۳ . ۱۰ : په برابرون $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \left(\frac{3}{2}\right)^{x+1}$ کی د يوه پوتنځ بنسټ د بل پوتنځ د بنسټ په څېر ارزښت دی. له دې امله باور لري

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{x+1} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-3}$$

له دې څخه لاس ته راځي

$$x_1 + 1 = -3 \,,\ x_2 = -4$$

بیلګه ۱۳ . ۱۱ : په مساوات $16^{(3^x)} = 4^{(6^x)}$

کې کیدی شي چې ناپیژندونکې د اکسپوننت یا په چګ څخه د دوه واره لوګاریتمولو له لارې لاس ته راشي (راحل شي):

$$3^x \cdot \lg 16 = 6^x \cdot \lg 4 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{6}\right)^x = \frac{\lg 4}{\lg 16} \Leftrightarrow x \cdot \lg 0{,}5 = \lg \frac{\lg 4}{\lg 16} = \lg \frac{2\lg 2}{4\lg 2},$$

$$x \cdot \lg 0{,}5 = \lg 0{,}5 \qquad \text{یا oder} \quad \left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{2},$$

$$x = 1 \qquad\qquad x = 1.$$

بیلګه ۱۳ . ۱۲ : $7\sqrt[x]{22} - 15\sqrt[x]{25} = 0$

یو د تیپ (۱۳ . ۱۶) مساوات دی، څکه چې باور لري

$$\frac{\sqrt[x]{22}}{\sqrt[x]{25}} = \frac{15}{7} \Leftrightarrow \sqrt[x]{\frac{22}{25}} = \frac{15}{7} \Leftrightarrow \left(\frac{22}{25}\right)^{\frac{1}{x}} = \frac{15}{7}$$

او له دې امله

$$\frac{1}{x} = \frac{\lg \frac{15}{7}}{\lg \frac{22}{25}} \Leftrightarrow x = \frac{\lg 22 - \lg 25}{\lg 15 - \lg 7} = 0{,}1677.$$

که د مساوات په کیڼ اړخ د اکسپوننشل افادو څلونه او یا ویشونه هم وي، د مختلفو بنسټونو او مختلفو الجبري اکسپوننتونو سره، کیدی شي چې د لوګاریتمولو له لارې الجبري مساوات لاس ته راشی.
له

$$\frac{a_1^{f_1(x)}.a_2^{f_2(x)}........}{b_1^{g_1(x)}.b_2^{g_2(x)}........} = c;..................................(13{,}18)$$

څخه لاس ته راځي:

$$f_1(x)\lg a_1 + f_2(x)\lg a_2 + ... - g_1(x)\lg b_1 - g_2(x)\lg b_2 - .... = \lg c \qquad (13.19)$$

که یو مساوات مو مخ ته پروت وي، په کوم کی چی د یوه اکسپوننشل افادې یوه الجبري وبینه یا افاده F د الجبري اکسپوننت(f(x سره رامنځ ته شي

$$F(a^{f(x)})=0 \;..................................(13,20$$

نو دا بدلونه کوو

$$y = a^{f(x)} \qquad (13.21)$$

د برابرون

$$F(y) \qquad (13.22)$$

د ټولواوبیونو $y_1, y_2, y_3;...............$ لپاره باید

$$a^{f(x)} = y_i; i=1,2,3....... \qquad (13.23)$$

په همدي ډول

$$f(x) = \log_a y_i \quad ; i = 1, 2, 3 .... \qquad (13.24)$$

اوبی شي

بیلګه ۱۳ . ۱۳:

برابرون $3^{2x} + 3^x = 2$ کیدی شي چی د بدلون $y = 3^x\,(y^2 = 3^{2x})$ سره په ځلوری

برابرون یا مربع مساوات $y^2+y-2=0$ بیرته واړول شي. لاس ته راځي

$$y_{1.2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{8}{4}} = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}; y_1 = 3^x = 1; y_2 = 3^x = -2$$

له دې څخه لاس ته راځي

$$x_1.\lg 3 = \lg 1 = 0,\ x_1 = 0$$

دا برابرون $x_2.\lg 3 = \lg(-2)$ اوبیونه نه لري

بیلگه ۱۳ . ۱۴ :

په برابرون

$$\sqrt{e^{x^2-1}}-\sqrt{e^{x^2-1}-1}=\sqrt{2e^{x^2-1}-1}.........................(13,25)$$

کې داسې بدلوو:

$$y=e^{x^2-1}......................................(13,26)$$

او لاس ته راوړو

$$\sqrt{y}-\sqrt{y-1}=\sqrt{2y-1};...............................(13,27)$$

له دې څخه د مربع کوولو له لارې لاس ته راځي:

$$y+y-1-2\sqrt{y(y-1)}=2y-1\Rightarrow -2\sqrt{y(y-1)}=0 => y(y-1)=0$$

$$y_1=0; y_2=1$$

تیك $y_2=1$ (۱۳ ، ۲۷) پوره کوي. له دې امله

$$e^{x^2-1}=1;..(13,28)$$

باید اوبی . د لوګاریتمولو څخه تعقیبیږي:

$x^2-1=\ln 1=0,$

$x1 = 1 , x2 =-1$

دواړه ارزښتونه پیلبرابرون پوره کوي۰

برسیره پر دې باید وښوول شي، چې په برخی ۱۳ . ۱ او ۱۳ ۲ کی انځور شوي متودونو سره یوه د مساواتو ټوله لړی حل کیدی شي، په کوم کی اکسپوننشل افادې او لوګاریتم یوځاي رامنځ ته کیږي.

بیلگه ۱۳ . ۱۵ :

له $2^{(\ln^2 x-\ln x+1)}=8$ څخه د بیلګي په توګه د بنسټ 2 لوګاریتموولو له لارې لاس ته راځي

$\ln^2 x - \ln x + 1 = \log_2 8 = 3$

که کیږدو $y = \ln x$ ، نو دا ځلوری برابرون یا مربع مساوات $y^2 - y - 2 = 0$

لاس ته راځي،د ځوابونو

$y1 = -1 , y2 = 2$

سره او له دې بیا لاس ته راځي:

$\ln x = -1 , \ln x = 2, x1 = e-1 = 1/e , x2 = e^2$

د ډاکتر ماخان شینواري لیکنې اوژباړې:

<u>1988 Vienna (Austria):</u>

<u>لومړی:</u>

H.K. Kaiser , M. Shinwari : Aproximation compact pological algebra : contributions to general algebra 6 ; Page 117 – 122

<u>1987 Vienna (Austria):</u>

<u>دویم:</u>

Diss . Uni. Interpolation und Aproximation durch Polynime in Universalen Algebren . Wien

Dissertation at the Interpolation and Aproximation by Polynome in universal Algebras, University of Vienna/Austria

لاندې د شمیرپوهنې پښتوټول کتابونه په المان کې د ،، افغانستان کلتوري ودې ټولنه،،له خوا چاپ شوي دي

<u>2000 Bonn (Germany):</u>

دريم: د شميرپوهنې ستر كتاب : د شميرپوهنې برسيره د انجنري، فزيک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونكو او زده كوونكو لپاره (دا كتاب   په ۹۰۰ مخونو كې چاپ او دا نوې ليكنه به يې ځنو ځايونو غزېدلې او ځنې ځايونه ترې لرې شوي دي)

2003 Bonn (Germany):

ځلورم: ځمككچپوهنه(هندسه) ، په سلو، زرو كې شميرنه، د ګټې – او كټې د كټې شميرنه ، د اختمالوالي شمېرنه كتاب د ښوونځي ټولې اړتياوې پوره كوي

2003 Bonn (Germany):

پنځم: الجبرونه (د الجبر بنسټونه دي)

2003 Bonn (Germany):

شپږم: د شميرپوهنې   انګريزي – پښتو ډكشنري.

2003 Bonn (Germany):

اووم: د شميرپوهنې الماني ـ پښتو- او پښتو الماني ډكشنري

Mathematical dictionary German/ Pashto and Pashto/German

2003 Bonn (Germany):

اتم: دفرنځيال برابرون (دا كتاب په دې ځانګه كې يو پيل   دی، ساده ليكل شوی)

Differential equation Translation; An Introduction

Bonn (Germany): 2003

نهم: د شمير پوهنې فرمولونو ټولګه

Mathematical Formulas

2003 Bonn (Germany):

لسم: شميرپوهنه له عربي په پښتو

1997 Bonn (Germany):

یوولسم: د افغانستان په هکله سپینې خبرې: په المان کې

،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو تولنه،، له خو

.یادونه: له ۲۰۰۰ کال دمخه ډاکتر ماخان شینواريد ،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خوا درې ساسي مجلې هم را وستلي.

د ډاکتر ماخان ،،میرې،، شینواري لیکنې او ژباړې چې په چاپیدو یې پیل کیږي. دا هم چاپ سوي.

2012 Bonn; Germany; Kabul Afghanistan

ژباړې:

: *Prof. Brinkmann. (From Brinkmann.du.de)*

لاندې د برینکمن لیکنې چې له پرینکمن ن ج څخه ژباړل شوي دي.

۱ - شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره لومړی ټوک

۲ – شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره دویم ټوک

۳ – شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره دریم ټوک

۴ - د احتمالوالي شمیرنه د ښوونځي لپاره

۵ – احصایه یا ستاتیستیک دښوونځي لپاره

لاندې کتابونه د شتوتګارت د پوهنتون د استادانو د لکچرونو څخه چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپاره شوي را ژباړل شوي.

۶ – انالیزی ۱

۷ – انالیزې ۲

۸ – کرښیز الجبر

۹ - د شمیرپوهنې بنسټونه

۱۰ - د فرمولونو ټولګه

۱۱ – فنکشنل انالیز

۱۲ – وکتور شمیرنه

نورې ژباړې

۱۳ – له www./grundstudium.info/linearealgebra څخه:کرښیز الجبر

۱۴ – Georg Gutenbrunner ګڼونپوهنه یا د اعدادو تیوري

زما لیکنې

Bonn (Germany):

۱۵ - د شمیرپوهنې ستر کتاب دویم چاپ د پوره تغیراتو سره : دا کتاب د شمیرپوهنې برخې برسیره د

انجنري، فزیک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زدهکوونکو لپاره پوره ګټور دی. په کتاب کې د اړتیا سره زیاتونه او کونه راغلې چاپ شوی

۱۶ - ځمککچپوهنه (هندسه) دویم چاپ د پوره تغیراتو سره

۱۷ – الجبر بنسټونه دویم چاپ له تغیراتو سره

۱۸ - ډېرۍ پوهنه یا سټ تیوري چاپ شوی

۱۹ – د شمیرپوهنې سم اند (منطق ریاضي) چاپ شوی

۲۰ - د یو څو شمیرپوهانو ژوندلیک

۲۱ – د شمیر پوهنې ګډې وډې لیکنې

۲۲- داهم ژباړه ده، خو لیکونکی یې متآسفانه راڅخه نابلد شوی: د مشتق او انتیګرال شمیرنو ته تمرینونه او اوبیونې یا حلونه یې

۲۳ – د شميرپوهنې انګريزي پښتو او عربي + دري ډکشنري

۲۴ – د شميرپوهنې پښتو انګرېزي ډکشنري

۲۵ – د شميرپوهنې پښتو ډکشنري د شميرپوهنيزو وييونو په پښتو روښانه ونه چاپ شوی

۲۶ - د زړه له کومې(دا هغه ليکنې دي، چې ځنې يې په نړيول جالونو کې خپرې شوي دي.)

۲۷ – د افغانستان په هکله سپيني خبرې، چې وبه غزيږي.

نوري ليکنې، چې په ژباړه يې پيل شوی، خو لا پوره نه دي

– د شتوتکارت پوهنتون لکچرنوټونو څخه ، چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپريږي:

د ګروپونو تيوري

- د ښوونځي لپاره فزيک د برينکمن ليکنه

له پنځم ټولګي څخه تر اووم ټولګې پورې ژباړل شوی (دا چې زما دويم مسلک فزيک دی، دا ليکنې ژباړم. دا هم د دې ليکوال يوه ډېره ښه ليکنه ده، چې -د شميرپوهنې په څير- دلته هم زيات تمرينونه د حل يا اوبيونې سره په کې راغلي او ماته زيات ګټور برېښي)

دا لاندې د ښوونځي کتابونه دا اوس پای ته ورسيدل:

شميرپوهنه د اوم ټولګي له پاره

شميرپوهنه د اتم ټولګي له پاره

شميرپوهنه د نهم ټولګي له پاره

شميرپوهنه د لسم ټولګي له پاره

شميرپوهنه د يولسم ټولګي له پاره

شمیرپوهنه د دولسم ټولګي له پاره

رياضي برای صنف دوازده

.

د ليکوال ژوند ته لنډه کتنه

	ماخان په اولني نوم ميرې شينواری د اروابنادې پستو او اروابناد نوررحمان زوي په ۱۳۲۰ ؟ ه لمريز کې د شينوارو هسکه مينه کې دې نړۍ ته سترګې راغړولي. د هسکې مينې د لومړنې ښوونځي (د لومړنيو زده کوونکو څخه) څخه وروسته د رحمان بابا ليسه له ۱۹۵۴ تر ۱۹۶۵ پورې(ښوونځي له لومړي ټولګي پيل او د دويم ټولګي څخه ګام او پای).

د ۱۹۶۶ تر سپتبر د کابل طب پوهنځی. له ۱۹۶۶ سپتمبر څخه د اتريش برس، چې هلته يې د شميرپوهنې ډاکتري په پوره ستونځو تر لاسه کړه.

د۱۹۹۸۷ ش ک تر ۱۹۸۸ د فبروري تر پای د دباندنيو چارو وزارت کې مامور.

د ۱۹۸۸ مارچ څخه تر ۱۹۹۲ جون پورې په بن کې د افغانستان جمهوريت سفارت شارژد افير(صفر نه وو).

له هغې وروسته په جرمني کې سياسي پناه. له ۲۰۰۸ مارچ څخه د ۲۰۰۹ دسمبر پورې د د رياضي څانګه کې د پوهنې وزارت درسي نساب کې دنده.

ماخان میرې په ۱۹۷۲ کې له لرې د میرمن ښاپیرۍ سره واده شوی، چې د واده خبر ورته اتریش ته راغی.

ده د میرمن ښاپیرۍ سره په ۱۹۶۳ ز ک کې کوزده کړې وه.

دوي ته لوي ښتن په اتریش ویانا کې د مای په شلم ۱۹۷۹ ز ک دوه بچیان وبخښل، چې څانګه او اباسین نومیږي. څانګه په المان کې د پوهنتون علمي همکاره وه او د حقوقو ډاکتره ده او اباسین ملي اقتصاد او ټولنیزه سایکولوژي لوستلې.