

شمير پوهنه ( رياضي )

ددولسم ټولگي لپاره

ډاکټر ماخان ( ميري ) شينواري

ليکونکي

2016

Ketabton.com

## نیولیک

- ۱ پوله ارزښت
- ۱۰ د پوله ارزښت خوږونه.....
- ۱۶ د کسري يا ماتو توابعو پوله.....
- ۲۱ د کلاسیک له لارې د کسري اعدادو .....
- ۲۳ د مثلثاتي توابعو پوله .....
- ۲۹ د  $x \rightarrow \pm\infty$  لپاره پوله ارزښت يا لیمیت
- ۳۱ ټولیز خوږونه: .....
- ۳۴ ناپربکيدنه .....
- ۴۰ د متمادي يا.....
- ۴۷ د لومړي څپرکي ټولگه
- ۵۰ د څپرکي تمرینونه .....
- ۵۷ د تابع منح ارزښت تغیر .....
- ۶۰ کمښت ویش یا د تفاضل ویش.....
- ۶۳ رابیلیدنه یا مشتقشمیرنه
- ۶۸ د  $x_0$  په ځای کې د تابع مشتق او د مشتق تابع
- ۷۳ د تانجنټ او عمود تعریفونه او خوږونه
- ۷۸ د مشتق شمیرني يا رابیلیدني قوانین
- ۸۱ د د الجبري توابعو مشتق
- ۸۶ د زنځیري(مرکب) توابعو مشتق

۹۰	د مثلثاتي توابعو مشتق
۹۵	د مشتق استعمال په طبيعي علومو
۹۹	د جگو درجو مشتق
۱۰۳	د اکسپوننشل توابعو مشتق
۱۰۷	د لوگارېتم مشتق
۱۱۷	د ايمپليڅيټ Implicit تابعو مشتق
۱۲۰	د فصل ټولگه
۱۲۲	د څپرکي تمرينونه
۱۲۸	درول قضيه .....
۱۳۲	همغږيزې توابع
۱۳۷	ځای اړونده افراطي ټکي
۱۴۳	ورنټکي
۱۵۳	د کړي يا منځني خبرې
۱۵۷	د ناتيکلو افدو پولې
۱۶۰	د ناتيکلو افدو پولې
۱۶۶	د تانجنټ له پاره.....
۱۶۷	د سترو گټو .....
۱۷۱	په توليد کي .....
۱۷۳	ټولگه
۱۷۶	زينټکي(د اس زين) .....
۱۷۷	د څپرکي تمرينونه:
۱۸۷	په ټوټه کسرونو ټوټه کونه
۱۹۷	انټيگرالشميرني ته پيل راورنه

۲۰۰	انتیگر الشمیره
۲۰۴	بنسټیز یا لومړنی تابع
۲۱۰	ناتاکلی انتیگرال .....
۲۱۲	د ټاکلی انتیگرال.....
۲۱۶	د ټاکلی انتیگرال څخه نا.....
۲۱۹	د انتیگرالونډا.....
۲۲۲	د لوگارېټمی.....
۲۲۴	د بدلون قانون
۲۳۱	ټوټه انتیگرالونه .....
۲۴۰	نډای انتیگرال .....
۲۴۴	ټولګه .....
۲۴۷	د څپرکي تمرینونه
۲۵۳	د اینټیگرال شمیرنی استعمال
۲۵۶	د دوه کرښو څخه رابنده
۲۶۴	څرخېدونکي تنونه:
۲۷۷	ټولګه
۲۷۹	تمرینونه:
	د لیکونکي ژند ته کتنه
	د نصاب د دولسم ټولګي ناسمونونه

## سريزه

گرانو هيوادوالو!

ما په کلونو کې د نصاب لېپاره دا د دولسم ټولګي د پښتو او دري کتابونه ليکلي وو، خو په هغه وخت کې دا کتابونه د پوهنې وزارت له خوا چاپ نه شو او په ډېره خواشيني سره بايد ووايم، چې په ځای يې کتابونه چاپ کړل، خو ناسم، چې نه يې ژبه سمه وه او نه يې شميرپو هڼيزه خونديونه.

دا زما له خوا ليکل شوي کتابونه د معيار (د نړۍ د معيار) سره سم ليکل شوي او دلته يې گرانو زده کوونکو ته وړاندې کوم، هيله ده، چې گټه به ترې واخلي.

د نصاب له پاره د چاپ شوي کتاب د بوي برخي ناسمون به د کتاب په اخر کې ځای په ځای کړم.

ما څو واره د افغانستان د پهنې وزارت څخه هيله کړې، چې اجازه راکړي، تول د بنوونځي کتابونه، چې ما ليکلي، دوی ته وړاندې او د سرهسم ولیم، خو د کتابونو د ناسمون مسؤليت او يا هيڅ څوک د څه مسؤليت په غاړه نه لري.

زه دا ټول د بنوونځي کتابونه گرانو لوستونکو ته وړاندې کوم، خو ځنو کتابونو کې به داسې راغلي وي، چې زما د ناتوانۍ له امله به مې د يوه کتاب ځنې برخې بل کتاب کې ځای په ځای کړې وي، چې له دې امله د گرانو لوستونکو څخه هيله، چې د هر څه له مخه دي، د کتاب سريزه وگوري.

ما چې ليکنې جمهوررييس او د پوهنې وزارت ته ليکلي، هم مل دي.

گرانو هيوادوالو!

ماته به بخښنه کړی، زه له دې نور زيات زور نه لرم، چې ښه سريزه او نور اړين څه وليکم. دا زما ليکنې نورې همداسې ومنی، چې څنگه درته وړاندې کيږي. په ليکنو کې به زما د ليکنيزو ناسمونو نور ناسمونونه نه وي. هيله ده، چې گټه به ترې پورته کړي.

## ۱ . پوله ارزښت

### ۱ . لیمیت یا حد (پوله ارزښت) "The Limit"

موږ لاندې د

اعدادو ترادف لرو:

$$(I) \quad \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}$$

$$(II) \quad \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \dots, \frac{n+1}{n}$$

$$(III) \quad 2, 4, 6, \dots, 2n$$

که  $n$  د ناپای په لور لار شي، نو د پورته ترادفونو څخه (I) د صفر په لور، (II) د یو په لور او (III) د ناپای په لور ځي.

د Limit (لاتین) معنا پوله یا حد دی. په پخواني روم کې د یوه ښار د کلا نوم هم Limit وو، چې په ریاضیاتو کې، د پولې مفهوم لري. د حد د کارونې مفهوم په دې کې پروت دی، چې د یوې تابع سلوک داسې وڅیړو لکه په افقي محور (د  $x$  محور یعنې "abscissa") باندې، چې د تابع د  $x$  قیمتونه یوه حد (پولې) ته ورنږدې کېږي. و به گورو، چې لیمیت په ریاضیاتو کې د مشتق د پیژندلو لپاره کارول کېږي.

فعالیتونه:

- ایا تاسو په ورځني ژوند کې د لیمیت یا پولې له کلمې سره بلد یاست؟
- ایا تاسو په ورځني ژوند کې یوه بیلگه راوړی شئ، چې یوه لیمیت ته له دواړو لورو، یعنې له بنی لوري څخه و کینې لوري ته او همدابول له کینې لوري څخه و بنی لوري ته نږدې شئ؟
- ایا د حیرتان او ترمز ترمخ پول د افغانستان او ازبکستان ترمخ له دواړو لورو پوله یا حد دی، که څنگه؟
- ایا دا په ټاکلي ځای کې پوله یا حد دی، که څنگه؟

د پورته فعالیتونو څخه دا لاندې د لاسه کوو:

پورته راوړل شوي د لیمیت بیلگې په یوه ټاکلي ځای کې د توابعو یا د ځنو عملي بیلگو لیمیتونه یا حدونه دي، چې مور یې په ریاضیاتو کې هم په یوه ټاکلي ځای کې لیمیت، پوله یا حد بولو.

مور اوس لاندې بیلگه د پایلزي روښانه ونې لپاره راوړو:

بیلگه ۱:

یوه د  $f(x)=2x$  تابع او د  $P_0$  یوټکی دې ورکړ شوی وي، چې د  $P_0$  ټکی د وضعیه کمیاتو په سیستم کې (3,6) وضعیه قیمتونه لري نو:

1- دتابع جدول وکارئ.

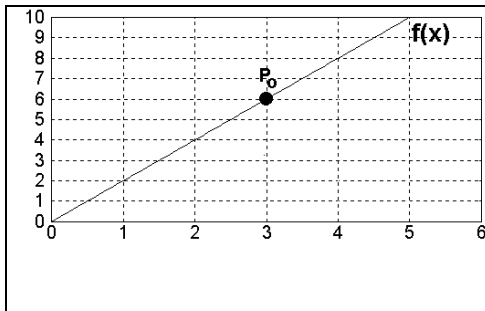
2- د تابع گراف یا څیره انځور کړئ.

3- د  $f(3)$  قیمت پیدا کړئ او د  $f(x)$  پر حرکت باندې بحث وکړئ که  $x$  و 3 ته نږدې شي.

4- په شکل کې د  $f(x)$  حد ته تله روښانه کړئ.

ښوونه:

1- د تابع جدول



2- د تابع شکل

3 - مور  $f(3) = 6$  لرو او غواړو د درې قیمتونو څخه چې له ښی او کیني لوري 3 ته ورنږدې کيږي، وگورو، چې په دې درې ارزښتونو کې تابع چیرته ځي.

ولار جدول:

$x_k$	$f(x_k)$	$x_k$	$f(x_k)$
2,98	5,96	3,001	6,002
2,99	5,98	3,01	6,02
2,999	5,998	3,02	6,04

په پورته جدول کې گورو، چې د  $f$  ارزښتونو سره له کیني لوري له پورته څخه وکښته لوري ته 6 ته نږدې کيږو او همداسې له ښی لوري له کښته څخه و پورته لوري ته هم 6 ته نږدې کيږو.



پروت جدول روړو:

له بنی لوري څخه کيڼي لوري ته      له کيڼي لوري څخه بنی لوري ته

→ 3 ←

<b>x</b>	2.98	2.99	2.999		3.001	3.01	3.02
<b>f(x)</b>	5.96	5.98	5.998		6.002	6.02	6.04

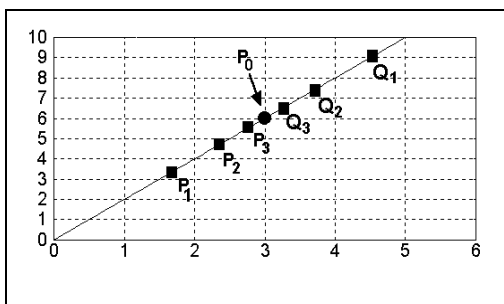
→ 6 ←

په درې پلونو يا قدمونو کې د  $f(3)$  قيمت د  $f(x)$  له قيمتونو سره پرتله کوو، که  $x$  و 3 ته ورنږدې شي.

دا حالت موږ ته په گوته کوي چې: که  $x$  و 3 ته ورنږدې شي، نو د  $f(x)$  ليميټ به په 6 برابر شي او داسې يې ليکو:  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 6$

او داسې يې لولو: د  $f(x)$  ليميټ يا پوله که  $x$  د درې په لور لاړ شي.

4- اوس گراف په لاندې توگه رسموو او کيڼي لوري ته هدفمند ټکي - لکه په پورته جدول کې- په نخښه کوو.



د مخامخ شکل له مخې  $P_1, P_2, P_3, \dots$  ټکي په پام کې نيسو، چې د  $P_0$  ټکي ته نل له کيڼي لوري نږدې کيږي.

او همداسې  $Q_1, Q_2, Q_3, \dots$  ټکي چې له بنی لوري  $P_0$  ټکي ته نږدې کيږي

کنل کیري: هرڅومره، چې پورته ټکي و  $P_0$  ټکي ته نږدې کیري په همغه کچه د تابع قېمتونه و 6 ته نږدې کیري (د  $P_0(3,6)$  ټکي قېمت له امله). که په گراف کې  $x=3$  ځای ته نږدې شو، نو د تابع قېمت و 6 قېمت ته نږدې کیري.

وايو: 6 د  $f(x)$  تابع لیمیت دی، د  $x \rightarrow 3$  (لوستل:  $x=3$  درې) په لورې ځي یا درې ته نږدې کیري) لپاره.

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 6 \text{ د لیمیت لپاره لیکنه په دې ډول تعریف شوی:}$$

د پورته فعالیتونو او بیلگو څخه دا تعریف لاس ته راوړو:

پیژند(تعریف): د  $f(x)$  تابع یو لیمیت (حد)  $L$  لري، د  $x$  لپاره که  $x$  د یوه حقیقي عدد  $c$

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L \text{ په لورې تړلی لار شي او داسې یې لیکو:}$$

لوستل: د  $f(x)$  لیمیت برابر په  $L$  دی، د  $x \rightarrow c$  لپاره.

په ځنو توابعو کې لیمیت، لکه چې ولیدل شو، په داسې سادګی لاس ته نه شو راوړي.

یوه بیلګه راوړو، چې دا لاندې پوښتنې په کې ځواب شوې وي:

- ایا یوه تابع په خپل ورګر شوي ځای کې لیمیت درلودی شي، چې هلته تعریف نه وي؟

- اودا کار که کدونکی وي، څنګه کیدی شي؟

بیلګه ۲: تابع  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}; x \neq 1$  راګر شوی.

د تابع جدول او گراف وکارئ.

$x$  له ښی لورې څخه 1 ته نږدې کیري  $x$  له کینې لورې 1 ته نږدې کیري

—————>1<—————

<b>x</b>	0.98	0.99	0.999		1.001	1.01	1.02
<b>f(x)</b>	1.98	1.99	1.999		2.001	2.01	2.02

—————> 2 <—————

<b>څېره کښل کيږي</b>	<p>د <math>f(x)</math> تابع حرکت تر بحث لاندې ونیسئ</p> <p>که <math>x</math> و 1 ته نږدې شي يعنې <math>x \rightarrow 1</math>.</p> <p>له دواړو يعنې له گراف او جدول څخه دا پایله لرو، چې <math>f(x)</math> د حقيقي عدد 2 په لور هڅيږي، يعنې:</p> $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$
----------------------	--

له پورته شکل څرگنديږي: تابع په هغه ټکي کې چې ليميت يې شميرل شوی، تعريف نه ده.

شميرنيزه بنوونه: که يوه تابع په صورت او مخرج کې دارونده قيمت لپاره صفر ولري او دا صفر ځايونه له منځه تللی شي- لکه زموږ په بيلگه کې- نو د ليميت يا بولي پيدا کولو لپاره داسې مخ ته ځو:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} x + 1 = 2$$

او وايو چې دا ډول تابع په صفر ځای کې تشيا (خالیگاه) لري يعنې په دې ځای کې تعريف نه ده .

	<p>فعالیت:</p> <p>د سرک بنی لوري ته دا مخامخ تخته لرو:</p> <p>- ووايي، چي دا تخته څه مفهوم لري؟</p> <p>په همدې توگه د سرک په سر کيڼي لوري ته هم همداسي يوه تخته ځړول شوي. دا هم په همغه مفهوم.</p>
---	--

دا پوښتنه مو دې لاندې روښانه ونې ته لابڼودوي:

بيلگه ۳: د  $x \neq 0$  ،  $f(x) = \frac{|x|}{x}$  تابع راکړ شوي.

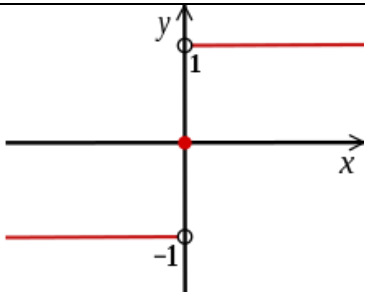
1- تابع وليکئ، بي له دې، چي د مطلقه قيمت نښه || استعمال کړئ.

2- د تابع گراف وکارئ.

3- که  $x$  له بنی لوري 1 ته نږدې شي، نو د  $f(x)$  قيمت پيدا کړئ.

4- که  $x$  له کيڼي لوري -1 ته نږدې شي، نو د  $f(x)$  قيمت پيدا کړئ.

5- وښايست چي پورته تابع يعني  $f(x)$  څو حدونه لري.

	<p>ښوونه: 1-تابع بي له سمبول ،،،،    په لاندې ډول ليکو</p> $f(x) = \begin{cases} 1; x > 0 \\ -1; x < 0 \end{cases}$ <p>2- د تابع گراف انځوروو: مخامخ</p>
---	--

3- که  $x$  له بني لور 1 ته نږدې شي، نود لرو:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -1$$

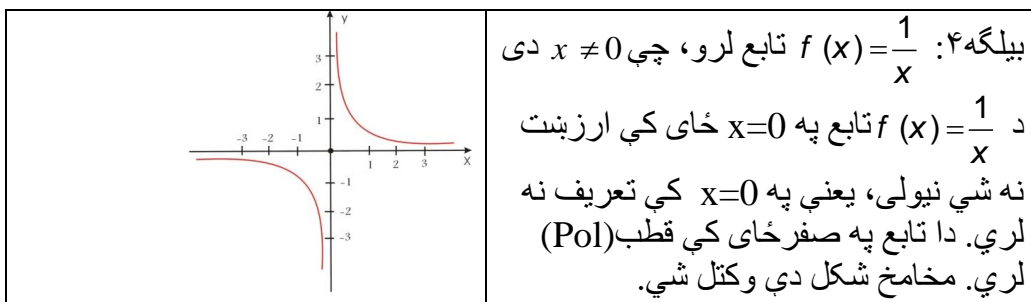
4- که  $x$  له کيني لور 1- ته نږدې شي، نو د  $f(x)$  ليميټ دی:  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -1$

5- گورو چې که  $x$  دوه قيمتونو 1 او 1- ته نږدې شي، نو  $f(x)$  دوه د ليميټ قيمتونه لري يعني  $\lim_{x \rightarrow \pm 1} f(x) = \pm 1$ ، نو له دې امله  $f(x)$  ليميټ نه لري.

له پورته بيلگي پايله:

په پورته بيلگه کې د  $x \rightarrow -1$  لپاره تابع بني ليميټ لري او د  $x \rightarrow 1$  لپاره کين ليميټ لري.

د دې لپاره دې د گراف پورته کښل شوی شکل هم وکتل شي.



يادونه: هغه تابع، چې مخرج يې صفر وي او صورت يې صفر نه وي، وايو چې تابع په دې د مخرج په صفرځای کې قطب Pol لري.

$x=0$  ته د نږدې کېدو لپاره ترادف  $(x_n) = \frac{1}{n}$ ، ټاکو.

د اړوندې تابع د قيمتونو ترادف  $(\frac{1}{\frac{1}{n}}) = n$  دی.

دا د  $n > 0$  لپاره یو نامحدود صعودي (جگېدونکی) ترادف دی. او د  $n < 0$  لپاره نزولي- یا متناقص (ټیټېدونکی) ترادف دی. دا په دې معنا، چې د  $f(x)$  تابع په صفرخای کې لیمیت نه لري. دا هلته یو قطب لري.

د توابعو د لیمیت لپاره دا لاندې پایله لرو:

د  $f(x), x \in D_f$  تابع د  $x_0$  په خای کې یو کین اړخیز لیمیت  $a_l = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x)$  لري، که د

هر ترادف  $(x_n)$  لپاره، چې  $n$  غړي یې د  $x_0$  کین لور ته پراته وي او د توابعو ارزښتونه  $f(x_n)$  د  $a_l$  په لور هڅیږي.

په ورته توگه بنی اړخیزه لیمیت: د  $f(x), x \in D_f$  تابع د  $x_0$  په خای کې یو بنی اړخیز لیمیت  $a_r = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x)$  لري، که د هر ترادف  $(x_n)$  لپاره، چې  $n$  غړي یې د  $x_0$  بنی لور ته

پراته وي او د توابعو ارزښتونه  $f(x_n)$  د  $a_r$  په لور وهڅیږي..

که تابع  $f(x)$  همغه لیمیت  $L$  ولري که  $x$  له بنی او یا کیني لوري و  $c$  ته نږدې شي، نو لیمیت شته دی او د  $L$  سره برابر دی.

دا داسې لیکو:  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$

تمرینونه :

د دې لاندې هرې تابع (پیژند ورسو) د تعریف ناحیه (domain او ارزښت ورسو) د قیمتونو ناحیه (range یا codomain پیدا کړئ. د توابعو گراف وکارئ او حدونه (پولي) یې پیدا کړئ.

$$1) \lim_{x \rightarrow -1} (x^2 + x) , 2) \lim_{x \rightarrow 4} (x^2 + x) , 3) \lim_{x \rightarrow 0} |x| , 4) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x}{x}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{\frac{x^2}{x}} , 6) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{x + 2} , 7) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{x^9 - 9}$$

$$f(x) = \begin{cases} 2+x; & x < 1 \\ x^2 & ; x \geq 1 \end{cases} \text{ -10 که وي:}$$

الف) د تابع گراف وکاري.

ب)  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$  پيدا کړئ.

۱. ۲ د لیمیتونو يا پوله ارزښت خویونه:

### " Properties of Limits "

پوهیږو: په ریاضیاتو کې ټول توابع چې لرو، د ساده توابعو ترکیب combination دی، لکه دتوابعو جمع، تفریق، ضرب، وېش (چې مخرج یې صفر نه وي) او زنجیرونه composition. مور دوه غوره او ساده توابع  $f(x) = c$  او  $g(x) = x$  لرو. که دواړه توابع سره یوځای کړو، نو لاس ته ترې راځي:

$$L(x) = cx, \text{ یا } h(x) = x + C, \text{ یا } m(x) = x \cdot x = x^2 \text{ او داسې نور.}$$

وبه گورو، چې دلته هم ټولې څلور عمليې همداسې اجرا کيږي، لکه د اعدادو په ترادفونو کې.

فعالیت:

په دې برخه کې د په خوښه د ثابتو توابعو او کټمټ یا ایډنټیک توابعو Identity function لیمیتونه د جمعې، تفریق، ضرب او همداسې د وېش (چې مخرج یې صفر نه وي) له لارې وشمیرئ (وروسته به وگورو، چې دا د لیمیت خویونو تر نامه څیرل کيږي).

- د په خوښه یوه پولینوم تابعو لیمیت پيدا کړئ.

- د  $f(x) = x$  او  $g(x) = x - 2$  توابعوڅخه کار واخلئ، چې درې نورې په خوبنه توابع ترې لاس ته راوړئ. د دې توابعو لیمیټونه پیدا کړئ. دا لیمیټونه جمع، تفریق، ضرب او تقسیم (چې مخرج صفر نه وي) کړئ.

- که شونې شي، چې د یوې تابع لیمیټ د تابع له حل څخه لاس ته راوړلای شو، یعنې که د بیلگې په توګه ولرو:  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} 3 = 3$  نو دا تابع به څنګه لیکو؟

- ایا د پورته عمليې په څیر دا عمليې د هرې ثابتې او کټمت تابع لپاره ریښتوني ده؟

موږ له پورته څخه دا لاندې پایله لرو:

که  $f(x) = x$  او  $g(x) = 2$  ولرو، نو لرو:  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 2$

2- که  $h(x) = f(x) + g(x)$  وي، نو لرو:  $h(x) = x + 2$

3- د  $h(x)$  ګراف وکارئ.

4- د تابع لیمیټ د جدول له لارې

← 1 →

0	.5	.8		1.2	1.5	2
2	2.5	2.8		3.2	3.5	4

→ 3 ←

په یاد ولرئ:  $\lim_{x \rightarrow 1} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1} g(x)$  او  $\lim_{x \rightarrow 1} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 2) = 3$

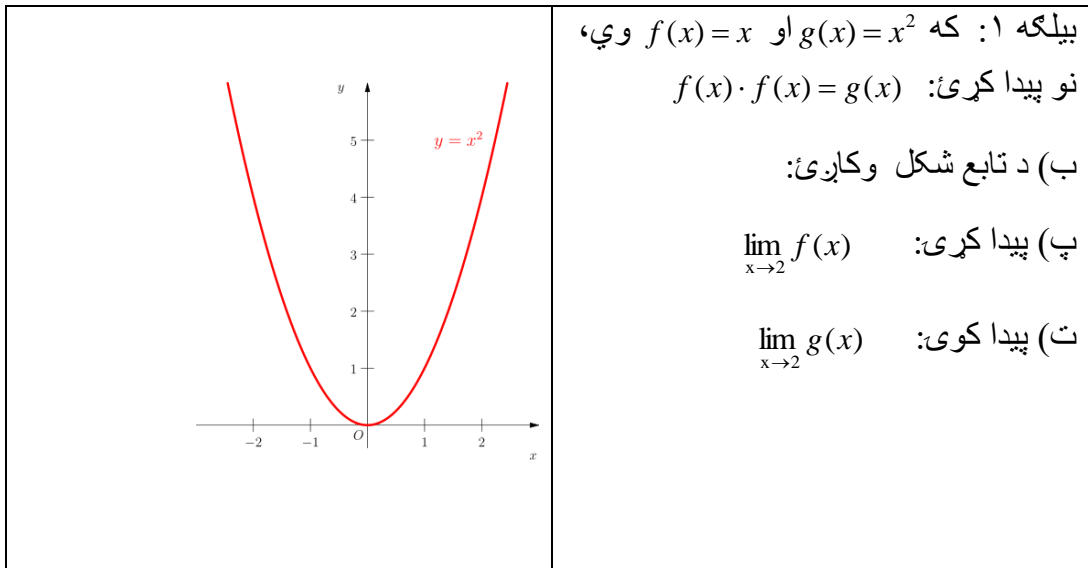
له پورته څخه د لیمیټ لومړی خوي لاس ته راځي:



لومړی: د لیمیټ د جمعې خوی: د دوه یا څو توابعو د جمعې لیمیټ د همغو اعدادو د

$$\lim_{x \rightarrow 1} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1} g(x) \quad \text{لیمیټ د جمعې سره برابر دی:}$$

دویم: د لیمیټ د تفریق خوی: دا د پورته سره ورته حل لري. دا کار دې گران زده کونکي سرته ورسوي.



حل: الف)  $f(x) \cdot f(x) = x \cdot x = x^2 = g(x)$

(ب)

<b>x</b>	-2	-1	0	1	2
<b>f(x)</b>	4	1	0	1	4

(پ)  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} x = 2$

(ت) له گراف څخه لاس ته راځي:  $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4$

له دې امله لرو:  $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = \lim_{x \rightarrow 2} (x \cdot x) = \lim_{x \rightarrow 2} x \cdot \lim_{x \rightarrow 2} x = 2 \cdot 2 = 4$

له پورته بیلگې څخه دا پایله لرو:

دریم: د لیمیټ د ضرب خوي:

د دوه یا ډیرو توابع د ضرب لیمیټ د هغو توابعو د لیمیټونو د ضرب سره برابر دی.

$$\lim_{x \rightarrow a} x^2 = \lim_{x \rightarrow a} (x \cdot x) = \lim_{x \rightarrow a} x \cdot \lim_{x \rightarrow a} x = a \cdot a = a^2$$

بیلگه:

که  $f(x) = x$  ,  $g(x) = x^2$  وي، دا لاندې لیمیټونه پیدا کړئ:

$$\begin{array}{ll} a) \lim_{x \rightarrow -1} f(x) , \lim_{x \rightarrow -1} g(x) & b) \lim_{x \rightarrow -1} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow -1} g(x) \\ c) h(x) = g(x) \cdot f(x) & d) \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} (x) = -1 \end{array}$$

پیدا کړئ:  $\lim_{x \rightarrow -1} h(x)$

$$a) f(x) \cdot f(x) = x \cdot x = x^2 = g(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1} x^2 = 1 \quad \text{حل: a)}$$

<b>x</b>	-2	-1	0	1	2
<b>f(x)</b>	4	1	0	1	4

$$b) \lim_{x \rightarrow -1} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow -1} g(x) = -1 \cdot 1 = -1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1} x^2 = 1$$

$$c) h(x) = x^2 \cdot x = x^3, \quad d) \lim_{x \rightarrow -1} h(x) = \lim_{x \rightarrow -1} x^3 = -1$$

بیلگه:

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 5}{2x^2 + 1} \text{ تابع لرو، } \lim_{x \rightarrow 3} f(x) \text{ پیدا کړی.}$$

حل:  $f(x)$  د دوه توابعو  $g(x) = x^2 - 2x + 5$  او  $L(x) = 2x^2 + 1$  وېش دی.

که  $x$  و 3 ته نږدې شي کیدای شي لیمیټ د تابع د حل له لارې په  $x = 3$  کې پیدا شي:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x + 5}{2x^2 + 1} \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 2x + 5)}{\lim_{x \rightarrow 3} (2x^2 + 1)} \\ &= \frac{3^2 - 2 \cdot 3 + 5}{2 \cdot 3^2 + 1} = \frac{8}{19} \end{aligned}$$

له پورته بیلگې څخه لاندې لاس ته راځي:

څلورم: د لیمیټ د ویش خوي (مخرج د صفر سره برابر نه دی):

دیوي کسري تابع لیمیټ (یعني یوه تابع، چې د دوه توابعو له وېش (مخرج له صفر سره برابر نه

دی) څخه لاس ته راغلي وي) د تابع د صورت لیمیټ او د مخرج لیمیټ (مخرج له صفر سره

نابرابر دی) د وېش سره برابر دی.

بیلگه:

د  $g(x) = \sqrt{3-x}$  گراف وکارئ او پیدا کړئ.

$$a) \lim_{x \rightarrow 2} g(x) \quad , \quad b) \lim_{x \rightarrow -1} g(x) \quad , \quad c) \lim_{x \rightarrow 3} g(x)$$

حل: په لاندې توگه مخ ته خو:

(الف)

$$\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{3-x} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow 2} (3-x)} = \sqrt{1} = 1$$

(ب) له گراف څخه:  $\lim_{x \rightarrow -1} g(x) = 2$ 

$$\lim_{x \rightarrow -1} \sqrt{3-x} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow -1} (3-x)} = 2\sqrt{4} \quad \text{یادونه:}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 3^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \sqrt{3-x} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow 3^-} (3-x)} = \sqrt{0} = 0$$

(د)  $f(x) \geq 0$  لپاره او د ټولو  $x$  قیمتونولپاره، چې  $c$  ته نږدې کيږي).

له پورته څخه لاس ته راوړنه:

پنځم: د لیمیت د جذر (ریښې) خوي: د یوې تابع چې د جذر (ریښې) لاندې وي لیمیت برابر دی، که چیرې تابع او لیمیت دواړه د جذر لاندې ونیول شي.

پوښتنه: که  $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 3$  وي، نو  $\lim_{x \rightarrow -2} (f(x))^n$  پیدا کړئ.

یادونه: د یوه پولینوم حد ټیک داسې شمیرل کیږي، لکه د یوې تابع حد. د مخه مو وویل، چې یو پولینوم د ساده توابعو د مختلو نښلونو څخه لاس ته راځي.

تمرینونه.

که  $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 5$  او  $\lim_{x \rightarrow 4} g(x) = 0$ ،  $\lim_{x \rightarrow 4} h(x) = -2$  نو پیدا کړئ:

$$1) \lim_{x \rightarrow 4} (f + g)(x) \quad , \quad 2) \lim_{x \rightarrow 4} \left( \frac{g}{f} \right)(x) \quad , \quad 3) \lim_{x \rightarrow 4} (fg)(x)$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 4} (h(x)) \quad , \quad 5) \lim_{x \rightarrow 4} \left( \frac{g}{f} \right)(x) \quad , \quad 6) \lim_{x \rightarrow 4} (2h - 3g)(x)$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 4} (f \cdot h(x)) \quad , \quad 8) \lim_{x \rightarrow 4} \left( \frac{2h}{3f - g} \right)(x) \quad , \quad 9) \lim_{x \rightarrow 4} (h(x) + f^2(x))$$

$$10) \lim_{x \rightarrow 2} (6x^3 - 2x + 5x - 3) \quad , \quad 11) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x - 2}{x^2 + 1}$$

د کسري - یا ماتو توابعو لیمیت "Limit of Rational functions"

مور د پولینومونو دا لاندې ویش لرو:

$$R(x) = \frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_0} ; P_m \neq 0$$

او د لیمیت په هکله یې فکر کوو، چې د  $b_0 \neq 0$  سره  $\frac{a_0}{b_0}$  ترې لاس ته راځي.

فعالیت:

مورن پولینوم  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  لرو. ددی پولینوم لیمیت د  $x$  د مختلفو قیمتونو لپاره څنگه پیدا کولای شو؟

- که  $x \rightarrow 0$  د صفر په لوري لار شي يا صفر ته ورنږدې شي.

- که  $x \rightarrow 1$  یوه تاکلي عدد ته ورنږدې شي.

- که  $x \rightarrow \infty$  د ناپای په لوري لار شي.

- که د دریمې درجې پولینوم  $P(x) = 5x^3 + 3x^2 + 3$  ولرو، نو ددی پولینوم لیمیت دڅلورو په خوښه قیمتونو لپاره پیدا کړئ.

پوهیږو، چې د پولینومي توابعو لیمیت د ورکړل شوو  $x$  قیمتونو لپاره، لکه د نورو ساده توابعو په څېر، چې د جمعې، تفریق، ضرب او وېش (چې مخرج صفر نه وي) په څېر ورکړل شوي دي، شمېرلای شو. غواړو د ناطقو توابعو یا کسري توابعو لیمیت پیدا کړو.

د ناطقو توابعو د لیمیتونو شمیرلو لپاره، که شته وي، له مختلفو لارو څخه کار اخلو:

که ولرو:  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$ ، نو د تابع خوښه د  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$  لپاره ساده کوو او د

پورته پولینوم وېش، چې کسري تابع ده، لیمیت شمیرو.

فعالیت: که  $\frac{x^2 - 4}{x + 2}$  ولرو د  $x \neq -2$  سره.

- ددی تابع حد د  $x > -2$  لپاره پیدا کړئ.

- ددی تابع حد د  $x \rightarrow 1$  لپاره پیدا کړئ.

- ددې تابع حد د  $x \rightarrow -1$  لپاره پيدا کړئ

- د تابع پيژندور شو وليکئ!

- دا تابع څنگه ساده کولی شئ، چې پوله يې د  $x \rightarrow -2$  لپاره وشميرلی شو؟

د پورته فعاليت په بنسټ کولای شو، چې د کسري توابعو حدونه د مختلفو اعدادو لپاره پيدا کړو او همداسې يوه کسري تابع که شوني وي، هغه ځايونو ته ورنږدې هم پيدا کړو، په کومو کې چې تابع تعريف نه وي.

ددې موضوع د روښانولو لپاره د مختلفو کسري توابعو څو بيلگي راوړو:

بيلگه ۱:

پيدا کړئ:  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x}{x + 2}$  که  $x = 1$  وي. دا تابع تعريف ده او لرو:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x}{x + 2} = \frac{(1)^2 + 1}{1 + 2} = \frac{2}{3}$$

که  $x = 1$  ځای په ځای کړو (Substitue) نو لاس ته راځي:  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$

بيلگه ۲: پيدا کړئ:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 1}{x + 3}$

حل: دا چې تابع په  $x = 0$  کې تعريف ده، نو لرو:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 1}{x + 3} = \frac{0 - 1}{0 + 3} = -\frac{1}{3}$

بيلگه ۳: پيدا کړئ:  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x + 1}$

حل: دا چې تابع په  $x=1$  کې تعريف ده، نو لرو:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x + 1} = \frac{1^2 + 1 - 2}{1 + 1} = \frac{0}{2} = 0$$

که په يوه ځای يا عدد کې تابع تعريف نه لري، نو د مختلفو لارو يا متودونو څخه کار اخلو، چې ليميت يې پيدا کړو، که شته وي.

بيلگه ۴: پيدا کړئ: 
$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 6x + 8}{x - 2}$$

حل: دا چې  $f(x)$  تابع په  $x=2$  کې تعريف نه لري، نو حد د تابع د حل له لارې نه شي پيدا کيدای. داکيدای شي داسې پيدا کړو، چې د تابع صورت په ضريبونو تجزيه کړو.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 6x + 8}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 4)(x - 2)}{(x - 2)}$$

د تابع ليميت که  $x$  و 2 ته نږدې شي، دا مانا لري، چې  $x \neq 2$  دی.

دا کسري تابع و  $\lim_{x \rightarrow 2} (x - 4)$  رالندېږي او لاندې ليميت لري:

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x - 4) = 2 - 4 = -2$$

بيلگه ۵: پيدا کړئ: 
$$\lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt{x} - 4}{x - 16}$$

گورو، چې تابع په  $x=16$  کې تعريف نه لري يعنې بايد  $x \neq 16$  وي.

په ياد ولرئ چې:  $\sqrt{b} - \sqrt{a}$  او  $\sqrt{b} + \sqrt{a}$  يو د بل مزدوج دي.

حل: د پورته تابع صورت او مخرج د  $\sqrt{x} - 4$  له مزدوج  $\sqrt{x} + 4$  سره ضرب کړئ.



$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt{x}-4}{x-16} &= \lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt{x}-4}{x-16} \cdot \frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}+4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 16} \frac{(x-16)}{(x-16)(\sqrt{x}+4)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 16} \frac{1}{\sqrt{x}+4} = \frac{1}{\sqrt{16}+4} = \frac{1}{8}\end{aligned}$$

بيلگه ۶: پيدا کړئ:  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3-x}{\sqrt{x+1}-2}$

حل: تابع په  $x=3$  کې تعريف نه لري، نو مخرج او صورت د مخرج په مزدوج ضربوو اولرو:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3-x}{\sqrt{x+1}-2} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3-x}{\sqrt{x+1}-2} \cdot \frac{\sqrt{x+1}+2}{\sqrt{x+1}+2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(3-x)(\sqrt{x+1}+2)}{(x+1-4)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} -1(\sqrt{x+1}+2) \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} -(\sqrt{3+1}+2) = -4\end{aligned}$$

بيلگه ۷:

پيدا کړئ:  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{5}{2x-3} + 5}{x^2-1}$

حل: تابع په  $x=1$  کې تعريف نه لري، نو په لاندې توگه مخ ته ځو:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 1} \frac{5}{2x-3} + 5 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5+10x-15}{2x-3} \\
&= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{10x-10}{(2x-3)(x^2-1)} \\
&= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{10(x-1)}{(2x-3)(x-1)(x+1)} \\
&= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{10}{(2x-3)(x+1)} = \frac{10}{(2(1)-3)(1+1)} \\
&= \frac{10}{-2} = -5
\end{aligned}$$

د کلاسیک لاری د کسري اعدادو لیمیت:

اوس یوه بله تابع د څیړني لاندې نیسو، چې  $g(x)$  یې بولو:  $g(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x - 1}$

دلته هم دا پوښتنه کوو، چې که  $x = 1$  ځای ته نږدې شي، نو د  $g(x)$  تابع د تابع کوم

مور قیمتونه غوره کوي:

بیا هغه ځای په پام کې نیسو، چې  $x = 1$  د مخ لوري (کیني لوري) ته خورا نږدې پروت

وي او هغه ځای، چې د  $x = 1$  وروسته یا ښی لوري ته خورا نږدې پروت وي:

$$\begin{aligned}
g(1-h) &= \frac{(1-h)^2 + (1-h) - 2}{(1-h) - 1} \\
&= \frac{(1-2h+h)^2 + (1-h) - 2}{-h} = \frac{-3h+h^2}{-h} = 3-h
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g(1+h) &= \frac{(1+h)^2 + (1+h) - 2}{(1+h) - 1} \\
&= \frac{(1+2h+h)^2 + (1+h) - 2}{h} = \frac{-3h+h^2}{h} = 3+h
\end{aligned}$$

دا دواړه لاس ته راوړنې یا پایلې اوس داسې تشریح کوو:

که  $h$  ناپای کوچنی وټاکو، یعنی هغه ځایونه راوښسو چې  $x=1$  ځای ته ناپای نږدې پراته وي، نو د تابع ارزښتونه به هم و 3 ته ناپای نږدې پراته وي. عدد 3 د  $x=1$  ځای لپاره د  $g(x)$  تابع د حد قیمت دی. ددې لپاره لیکو:  $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 3$

### تمرینونه:

د لاندې معادلو حدونه پیدا کړئ، که شته وي.

1)  $\lim_{x \rightarrow 2} (6x^3 - 2x^2 + 5x + 3)$

2)  $\lim_{x \rightarrow -1} (x^7 + 2x - 5)$

3)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+2)^2 - 4}{x}$

4)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x^2 + 7x}{(2x-3)^2 - 9}$

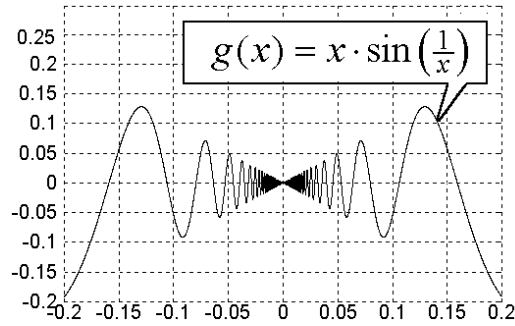
5)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+3} - \frac{1}{3}}{x}$

6)  $\lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{4}\right) \left(\frac{1}{x-4}\right)$

7)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{2x}{x^2+1} - \frac{4}{5}}{x-2}$

8)  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2}$

### د مثلثاتي توابعو حدونه Limit of trigometric function



فعالیت:

دساین پوله یعنی  $\lim_{x \rightarrow a} \sin x$  د  $x$  د مختلفو قیمتونو لپاره پیدا کړئ، که  $x \in [0; 2\pi]$

وي:

که  $x \rightarrow 0$  وي. که  $x \rightarrow 30$  وي. که  $x \rightarrow 45$  وي. که  $x \rightarrow 60$  وي.

که  $x \rightarrow 90$  وي. که  $x \rightarrow 135$  وي. که  $x \rightarrow 270$  وي. که  $x \rightarrow 2\pi$  وي.

- د پورته ورکړشو قیمتونو لپاره د کوساین  $\cos x$  لیمیت پیدا کړئ.

قضیه: که  $x$  په رادیان ورکړ شوی وي، نو  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$  دی.

بنسونه: د  $x=0$  لپاره تابع  $\frac{\sin x}{x}$  تعریف نه لري او ناتیاکلي بڼه  $\frac{0}{0}$  لري.

مورن غواړو، د  $x \rightarrow 0$  او  $\frac{\sin x}{x}$  لپاره په لاندې ډول یو جدول ولیکو (په پورته مساوات

کې  $x$  په رادیان اندازه کيږي):

$\frac{\sin x}{x}$	$\sin x$	$x$	
		په راديان	په درجه
0.9948	0.1736	0.1745	10°
0.9988	0.0872	0.0873	5°
0.9996	0.05233	0.05235	3°
0.9995	0.0174524	0.0174532	1°
0.99999	0.00872653	0.00872664	30'
≈ 1	0.00174532	0.00174532	6'
≈ 1	0.00087266	0.00087266	3'
≈ 1	0.000291	0.000291	1'
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.

په پورته جدول کې گورو، چه د  $x$  لپاره  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$  قيمت غوره کوي.

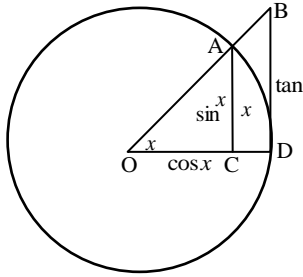
په شميرنيزه توگه د  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$  بنسونه په لاندي ډول مخ ته بيايو:

يوه دايره په پام کې نيسو چې د هغې مرکز (0) اوشعاع يې  $OD$  او  $\overline{OA} = \overline{OD} = 1$  ده (لاندي شکل وگورئ). د  $A$  له ټکي څخه پر  $\overline{OD}$  يو عمود رسموو، چې دا وړانگه په  $C$  ټکي کې غوڅوي.

د  $D$  په ټکي باندې پر دایرې یو مماس رسموو، دامماس له  $OA$  څخه غځېدلی کرښه د  $B$  په ټکي کې غوڅوي.

اوس  $A$  د  $D$  سره تړو:

مور لرو:



$$\sin x = \frac{\overline{AC}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{AC}}{1} = \overline{AC}$$

$$\cos x = \frac{\overline{OC}}{\overline{OA}} = \overline{OC}$$

$$\tan x = \frac{\overline{DB}}{\overline{OD}} = \overline{DB}$$

دا چې  $x$  په رادیان اندازه کېږي، نو لرو:  $\widehat{AD} = x$

له پورته شکل څخه لاندې نامساوات لرو:  $\angle OBD > \angle AOD > \angle AOC$

همداسې لرو:

$$\frac{1}{2} \cos x \cdot \sin x < \frac{1}{2} \overline{OD}^2 \cdot x < \frac{1}{2} \overline{OD} \cdot \tan x$$

په پورته نامساواتو کې  $\overline{OD} = 1$  ږدو او د نامساواتو ټولې خواوې په دوو کې ضربوو، نو

$$\cos x \cdot \sin x < x < \tan x \quad \text{لرو:}$$

یا په همدې ډول لیکلای شو:  $\cos x \cdot \sin x < x < \frac{\sin x}{\cos x}$

که د پورته نامساواتو ټولې خواوې پر  $\sin x$  ویشو، نو لرو:

## د مثلثاتي توابعو حدونه

$$\cos x < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

$$\frac{1}{\cos x} > \frac{\sin x}{x} > \cos x \quad \text{پا:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} > \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} > \lim_{x \rightarrow 0} \cos x$$

دا چې د  $x \rightarrow 0^+$  لپاره  $\cos x \rightarrow 1$  دی، نو لرو:

$$\frac{1}{1} > \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} > 1$$

$$1 > \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} > 1$$

گورو چې په عین وخت کې  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$  له 1 لوی او هم له یو 1 کوچنی دی، نو له دې

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \text{نامساواتو څخه دا لاندې مساوات لرو:}$$

پام: که  $-\frac{\pi}{2} < x < 0$  او  $x = -\alpha$  و لیکو، نو دا لاندې تری لاس ته راځي:

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{\sin(-\alpha)}{-\alpha} = \frac{-\sin \alpha}{-\alpha} = \frac{\sin \alpha}{\alpha}$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin \alpha}{\alpha}}$$

له پورته دواړو مساواتو څخه غوښتنه لاس ته راځي:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

بیلگه ۱:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x}$  پیدا کړئ.

حل: که  $2x = \alpha$  او که  $x \rightarrow 0$  وي، نو  $\alpha \rightarrow 0$  او  $\frac{\sin \alpha}{\alpha} = \frac{\sin 2x}{2x}$  لرو.

له پورته مساواتو څخه لاس ته راځي:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1 \Rightarrow 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} = 2 \cdot 1 = 2$$

بیلگه ۲:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{2x} \text{ وښایاست}$$

که  $y = 5x$  وي او  $x \rightarrow 0$ ، نو  $y \rightarrow 0$  هم لرو:

$$\begin{aligned} \frac{\sin 5x}{5x} \cdot \frac{5}{2} &= \frac{\sin 5x}{\frac{5}{2}(2x)} & \frac{5}{2} &= \frac{\sin 5x}{2x} \\ &= \frac{5 \sin y}{2y} \end{aligned}$$

له دې امله لرو:



$$\begin{aligned} \frac{5}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} \frac{5}{2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{2x} \\ &= \frac{5}{2} \cdot 1 = \frac{5}{2} \end{aligned}$$

تمرینونه: دا لاندې غوره قضیه وښایاست.

که  $x$  په رادین ورکړ شوی وي، نو لرو  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$  او لاندې اجرات وکړئ:

(الف) تانجنت  $\tan x$  د  $\sin x$  او  $\cos x$  په ترمونو ولیکئ.

(ب)  $\frac{\tan x}{x}$  د  $\sin x$  او  $\cos x$  په ترمونو ولیکئ.

(پ) دپورته قضیې لیمیت پیدا کړئ.

(ت) ایا قضیه رښتیا ده؟

لاندې لیمیتونه (حدونه) وشمېرئ.

- 1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x + \frac{\pi}{6})}{x + \frac{\pi}{6}}$  , 2)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x}$  , 3)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \tan^2 x}$  ,
- 4)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x}$  , 5)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{\sin 3x}$  , 6)  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin 5x \cos 3$
- 7)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(2x-1)}{4x^2-1}$  , 8)  $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{\cos 2x - \cos x + 1} + \sin^2 x$

### د $x \rightarrow \pm\infty$ لپاره پوله ارزښت یا لیمیت

د  $\frac{Q(x)}{P(x)}$  کسري توابعو لپاره مو لیمیتونه وشمیرل، چې  $x$  په خوښه وو.

اوس  $\frac{Q(x)}{P(x)}$  لپاره لیمیتونه غواړو و شمیرو، که  $x \rightarrow \pm\infty$  وي.

فعالیت:

زده کوونکي دې د هرې لاندې تابع د حد له شمېرلو د مخه، د توابعو گرافونه انځور کړي او په گرافونو کې دې یې دې ته پام وي، چې دا څنگه په تعریف شوي ورشوي کې ځغلي.

لومړی:  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{5}{x-2}$  پیدا کړئ.

د 5 وېشنه په یوه ډېر لوی (ناپای) مثبت (منفي) عدد باندې یو ډېر کوچنی مثبت (منفي)

عدد ورکوي یعنی  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{5}{x-2} = \frac{5}{\pm\infty} = 0^\pm$ .

گراف  $G_f$  یو پروت اسیمپتوت  $y = 0$  لري، چې له پورته او کښته گراف ته ور نږدې کیږي.

دویم:  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-3}{x+1}$  پیدا کړئ.

د 3- وېشنه په یوه ډېر لوی مثبت (منفي) عدد باندې یو ډېر کوچنی مثبت (منفي) عدد

ورکوي یانې  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-3}{x+1} = \frac{-3}{\pm\infty} = 0^\pm$ .

گراف  $G_f$  یو پروت اسیمپتوت  $y = 0$  لري، چې له پورته او کښته گراف ته ور نږدې کیږي.

دریم:  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{5}{x^2-2x}$  پیدا کړئ.

په مخرج کې یوازې  $x^2$  ستر رول لوبوي. د مربع کوني له لاري هر عدد مثبت

کیري. که 5 په یوه ډېر لوی مثبت عدد ووېشل شي، نو یو خورا کوچنی مثبت عدد ترې

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{5}{x^2 - 2x} = \frac{5}{+\infty} = 0^+ \text{ یعنی، راضي،}$$

گراف  $G_f$  یو پروت اسیمپتوت  $y = 0$  لري، یوازې له پورته لور ور نږدې کېدې سره.

$$\text{څلورم: } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-3}{x^2 - 2} \text{ پیدا کړئ.}$$

د مخرج مربع کوني سره منفي عددونه هم مثبت کیري. د  $-3$  وېشنه په یوه ډېر لوی

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-3}{x^2 - 2} = \frac{-3}{+\infty} = 0^- \text{ مثبت عدد باندې یو ډېر کوچنی منفي عدد ورکوي یانې}$$

گراف  $G_f$  یو پروت اسیمپتوت  $y = 0$  لري، یوازې له کښته گراف ته ور نږدې کیري.

د پرېښودنې- یا ترې صرف نظر کوني یا له ترې تیرېدنې اصول:

$$\text{لومړی: } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x-1}{x^2-2} \text{ پیدا کړئ.}$$

په صورت کې د  $x$  جگعدد (توان؟)، په مخرج کې د  $x^2$  توان په پام کې نیسو او همداسې له ټولو ثابتو تېرېږو (ټولې ثابتې پرېښول کیري، صرف نظر ترې کیري) او بیا  $x$  لندیري. که 1 په ډېر لوی مثبت (منفي) عدد ووېشل شي، نو

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x-1}{x^2-2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} = 0^\pm \text{ ترې لاس ته راضي.}$$

(څیره  $G_f$  پروت گاونډ (مجانې)  $y = 0$  لري، چی له پورته او کښته ورنږدې کیري.)

$$\text{دویم: غواړو د } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2-2}{x+2} \text{ تابع حل پیدا کړو.}$$

حل: په صورت کې د  $x^2$  او په مخرج کې د  $x$  له ټولو توانونو په پام کې نیولو او له ټولو ثابتو تیرېږو (صرف نظر ترې کوو) او بیا یې د  $x$  سره لنډوو. په روښانه توګه ټول حدونه  $\pm\infty$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2-2}{x+2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x = \pm\infty \text{ لاس ته راضي یعنی}$$

شکل  $G_f$  مائله اسیمپتوت راکوي، ځکه چې د صورت درجه له مخرج څخه د 1 په اندازه

ستره ده.

دریم:  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-2x^2 - 2}{3x^2 + 2x}$  پیدا کړئ.

په صورت او مخرج کې د  $x^2$  ټول توانونه په پام کې نیسو او له ټولو ثابتو تیرېزو او بیایي د  $x^2$  سره لنډوو.

ټولې پولې په روښانه توګه  $-\frac{2}{3}$  راګوي

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-2x^2 - 2}{3x^2 + 2x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-2x^2}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-2}{3} = -\frac{2}{3}$$

یعنې  $G_f$  پرته اسیمپتوت راګوي، چې  $y = -2/3$  ده.

څلورم:  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-2x^2 + 2x - 1}{3x^3 + 2x^2 - 3x + 2}$  پیدا کړئ

په صورت کې له  $x^2$  څخه کوچنیو ټولو توانونو او په مخرج کې د  $x^3$  له ټولو کوچنیو توانونو او همداسې له ثابتو تیریزو. که  $-2$  په  $\pm\infty$  ووبشل شي، نو یو کوچنی مثبت یا

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-2x^2 + 2x - 1}{3x^3 + 2x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-2x^2}{3x^3} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-2}{3x} = \frac{-2}{\pm\infty} = 0^\pm$$

منفي عدد یعنی  $0^\pm$  لاس ته راځي.

شکل (څیره)  $G_f$  یو پروت اسیمپتوت  $y = 0$  لري، چې له پورته او کښته لور ورنږدې

کیري.

**شمیرنیز حلونه (د شمیرنې له لارې حل):**

اول:  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x - 1}{x^2 - 2}$  وشمیرئ.

په صورت او مخرج  $x^2$  له نوکانو (لینده کیو یا قوسونو) راوستنې او بیا د  $x^2$  سره لنډونې وروسته مخرج د 1 په لور ځي او صورت د صفر په لور، یعنې صورت ترمونه صفر ته نږدې کیري.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x - 1}{x^2 - 2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right)}{x^2 \left( 1 - \frac{2}{x^2} \right)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{2}{x^2}} = \frac{0^\pm}{1} = 0^\pm$$

شکل  $G_f$  يوه مايله اسيمپتوت (مجانِب) لري، ځکه چې د صورت درجه د مخرج له درجي څخه په 1 کوچنی ده.

$$\text{دويم: وشميرئ: } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-2x^2 + 1}{x^4 - 2x^2 + 2}$$

په صورت او مخرج کې هغه د لوی توان  $x$  يعنی  $x^4$  له نوکانو يا ليندکيو بهر نيسو او بيا په ترتيب شميرنيزه عمليه مخ ته بيايو، نو لاس ته ترې راځي:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^4 \left( \frac{-2}{x^2} + \frac{1}{x^4} \right)}{x^4 \left( 1 - \frac{2}{x^2} + \frac{2}{x^4} \right)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{-2}{x^2} + \frac{1}{x^4}}{1 - \frac{2}{x^2} + \frac{2}{x^4}} = \frac{0^-}{1} = 0^-$$

## توليز خويونه:

$$\text{بيلگه ۱: پيدا کړئ: } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x^2 - 2}{x + 1}$$

په پورته بيلگه کې داسې مخ ته تللي يو، چې په صورت کې له ټولو عددونو څخه تيرېږو، چې د خپلواکي متحولې توان له 1 کوچنی يعنې صفر وي او په صورت کې له ټولو هغو خپلواک متحولو تيرېږو، چې توان يې له 2 څخه کوچنی وي. گورو، چې په صورت کې  $x$  له کوم ضريب سره پاتې کيږي، له دې امله پورته تابع د مثبت-منفي ناپای په لور ځي.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x^2 - 2}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x \left( 3x - \frac{2}{x} \right)}{x \left( 1 + \frac{1}{x} \right)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x - \frac{2}{x}}{1 + \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{+\infty}{1} = +\infty$$

$$\text{بيلگه ۲: پيدا کړئ: } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 2}$$

په پورته بيلگه کې په صورت کې له 1 او مخرج کې له 2 څخه تيرېږو او بيا صورت او مخرج په  $x$  ويشو. لاس ته راوړنه يې د  $x$  په يوه ثابت عدد وېشل دي. چې د  $x \rightarrow \infty$

$$\text{سره تابع } 0 \pm \text{ ته ځي، يعنې: } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 2} = 0 \pm$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-2x^2 - 2}{3x^2 + 2x} \text{ : بيلگه ۳: پيدا کړی:}$$

په صورت کې له 2 او مخرچ کې له  $2x$  څخه تيرېږو او د  $x^2$  سره يې لنډوو او په دې

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-2x^2 - 2}{3x^2 + 2x} = -\frac{2}{3} \text{ : ډول لاندې پايله لرو:}$$

تمرینونه:

د لاندې تمرینونو حدونه د پورته ورکړشو مختلفو لارو له لارې وشمیرئ:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{6}{x^2 - x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 + x^2 + x + 6}{x^3 - 3x + 4}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^5 + x^2 - x + 9}{x^4 + x^2 - x - 5}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + x^2 - x + 7}{x^3 - x + 5}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - 2}{x + 1}$$

## متمادیت (ناپړېکيدنه) "Continuity"

د درس په دې برخه کې لولو ، چې یوه تابع په یوه ټکي یا یوه اینتروال کې کوم حالت غوره کوي. ایا دا تابع په کوم ځای کې توپ وځي، یا پرې کيږي او که یا په متمادي یعنی نه پرېکيدني ډول د اینتروال په دننه کې ځلي.

مور په دې موضوع د تابع متماديت څيرو او متماديت تعريفوو

فعاليت:

لاندي توابع لرو:

$$f(x) = x^2 - 1, f(x) = \frac{1}{x}, f(x) = \frac{|x|}{x}$$

- د دې درې توابعو شکلونه وکارئ.

- وگورئ، چې د توابعو گرافونه څنگه ځغلي. په کومه تابع کې گراف ترلی ځغلی او چرته ماتيري، توپ وهي او ...

له پورته فعاليتونو څخه لاندي پايله لرو:

د توابعو متماديت Continuous functions

په دې موضوع کې مور د يوې تابع د متماديت په هکله څيړنه کوو او د متماديت پيژند(تعريف) ورکوو.

پيژند:

که  $b$  د  $f$  تابع تعريفو شو (- ساحه) کې يو حقيقي عدد وي. د  $f$  تابع په  $b$  متمادي بلل کيږي، که د ټکي  $(b, f(b))$  نږدې د  $f$  گراف داسې وکښلی شو، بي له دې چې د پنسل څوکه له کاغذ څخه پورته کړو.

له دې امله  $f(x) = x^2 - 1$  تابع او  $f(x) = \frac{1}{x}$  تابع د  $x = b$  په ټکي کې متمادي ده.

$f(x) = \frac{|x|}{x}$  تابع په  $x = 0$  متمادي نه ده يانې توپ وهي کيږي. (څيره په ۵ - م مخ کې)

تابع په  $x = a$  کي غیر متمادي ده، که پرې شي (تشيا ولري)، توپ ووهي او يا ماته شي.

لرو:  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = 1$  او  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = -1$  نو له دې امله  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x}$  په  $x = 0$  کي نشته يعني تابع د  $x = 0$  په ټکي کي متمادي نه ده.

بیلگه ۱:

که  $f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & ; x \geq 1 \\ 1 - x & ; x < 1 \end{cases}$  وي، نو:

الف) د تابع گراف وکاري.

ب) پيدا کړئ  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$

پ) پيدا کړئ:  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

که تابع په  $x = 3$  او  $x = 1$  کي متمادي وي.

حل:

الف) گراف دې د گرانو لوستونک دنده وي.

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = (2x + 1) = 7 \quad (\text{ب})$$

$$f(3) = 7$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (2x + 1) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (1 - x) = 0 \quad (\text{پ})$$

د ب) او پ) له مخي لرو:



$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$$

له دې امله تابع په  $x=3$  ناپربکيدونې او  $x=1$  کې پرېکيدونکې ده.

بيلگه ۲:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3+x}{x} & ; x \neq 0 \\ 3 & ; x = 0 \end{cases} \text{ که وي.}$$

الف) فنکشن رسم کړی

ب) وڅیړئ، چې تابع په  $x=2$  او  $x=0$  کې متمادي ده او که نه؟

حل: الف) د تابع گراف لپاره

$x$	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	5	2	3	2	5

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3+x}{x} = \lim_{x \rightarrow 2} (x^2+1) = 2^2+1 = 5 \quad \text{ب)}$$

$$f(2) = \frac{2^3+2}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

له دې امله د  $f$  ليميټ شته او  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$  دی، نو تابع متمادي دی که  $x=2$  وي.

وي دې  $x=0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^3+x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^3+x}{x} = 1$$

د دې معنا دا ده، چې  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$  او په دې معنا دی، چې  $f(0) = 3$

دا دا معنا لري، چې  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \neq f(0)$

تابع په  $x = 0$  کې غیرمتمادي ده.

**بیلگه ۳:** که  $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x + 3}$  ،  $x \neq -3$  وي.

ایا  $f(x)$  تابع په  $x = -3$  کې متمادي ده؟

حل: تابع  $f(-3)$  تعریف نه لري، نو له دې

امله تابع په  $x = -3$  کې متمادي نه ده.

له دې بیلگې او د تیرو درسونو څخه لرو:

تعریف (پیژند):

که  $f$  یوه تابع وي، چې د ټولو  $x$  لپاره په همغه واز اینټروال کې چې  $x = c$  لري تعریف وي، نو د  $f$  تابع په  $x = c$  کې متمادي بلل کېږي، که دا لاندې شرایط پوره وي:

1- که  $f(x)$  تعریف وي.

2- که  $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$  شته وي (موجود وي).

3- که  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$  رښتیا وي.

که تابع د ټولو  $x \in (a, b)$  لپاره متمادي وي، نو تابع په واز اینټروال  $(a, b)$  کې هم متمادي ده.

بيلگه ۴:

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 1 & ; x \leq 1 \\ 4 + x & ; x > 1 \end{cases} \text{ که وي.}$$

وگورئ، چي تابع چيرته متمادي او چيرته غيرمتمادي ده.

حل: په  $x=1$  کي تعريف لري

$$f(x) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (2x^2 + 1) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (4 + x) = 5$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$$

له دې امله تابع په  $x=1$  کي غيرمتمادي ده

بيلگه ۵:

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 1 & ; x < 2 \\ 3 & ; x = 2 \\ x + 3 & ; x > 2 \end{cases} \text{ که وي، نو د } f(x) \text{ تابع متماديت په } x=2 \text{ کي وڅيړئ.}$$

حل: تابع  $f(x)$  په  $x=2$  کي تعريف لري او لرو  $f(2) = 3$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x + 3) = 5$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 + 1) = 5 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 5$$

دا چي  $f(x) = 3$  دی، نو له دې امله  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \neq f(2)$ .

دا په دې معنا دی، چې تابع په  $x = 2$  کې غیرامتمادي ده.

بیلگه ۶:

$$\text{که } f(x) = \begin{cases} 2 \sin x & ; \quad x \leq \frac{\pi}{2} \\ ax^2 + \pi^2 & ; \quad x > \frac{\pi}{2} \end{cases} \text{ وي، نو:}$$

a داسې پیدا کړئ، چې f په  $x = \frac{\pi}{2}$  کې متمادي وي.

$$\text{حل: } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} f(x) = a \frac{\pi^4}{4} + \pi^2 ; \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x) = 2$$

f(x) متمادي ده، نو له دې څخه لاس ته راځي:

$$a \frac{\pi^4}{4} + \pi^2 = 2$$

و

$$= \frac{a}{4} \pi^4 = 2 - \pi^2$$

$$a \pi^4 = 8 - 4 \pi^2 \Rightarrow a = \frac{8}{\pi^4} - 4$$

تمرینونه:

1- یوه په خوښه تابع ولیکئ او د تابع گراف وکارئ او وگورئ، چې تابع چیرته تعریف ده او متمادیت یې وښایاست.

په لاندې پوښتنو کې وڅیړئ، چې تابع په ورکړ شوي ټکي کې متمادي يا غير متمادي دي.

$$2) f(x) = x^2 + 5(x - 2)^7 ; x = 3 \qquad 3) f(x) = \frac{x + 3}{(x^2 + 2x - 5)} ; x = -1$$

$$4) f(x) = \frac{\sqrt{8 - x^2}}{2x^2 - 5} ; x = -2 \qquad 5) f(x) = \frac{1}{(x - 3^3)} ; x = 3$$

$$6) f(x) = |x - 3| ; x = 3 \qquad 7) g(x) = \frac{|x|}{x} ; x = 0$$

### د متمادي يا ناپرېکيدونکو توابعو څيونه

دلته دا څيونه همغه د ليميټ څيونه دي.

#### فعاليت:

-1 د f او g توابعو جمع پيدا کړئ:  
 $(f + g)(x) = \dots\dots\dots$

-2 د f او g توابع په  $x = 2$  کې متمادي دي، نو:  
 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \dots\dots\dots$  &  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \dots\dots\dots$

-3 د ليميټ قيمتونه استعمال کړئ:  
 $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x)$   
 $= \dots\dots\dots$   
 $= \dots\dots\dots = (f + g)(a)$

له دې امله  $(f + g)$  په  $x = a$  کې متمادي ده.

که  $f$  او  $g$  توابع په  $x = c$  کې متمادي وي، نو د لاندې توابعو څخه يې هر ه يوه په  $x = c$  کې متمادي ده.

1- د توابعو جمع  $f + g$

2- د توابعو تفریق  $f - g$

3- د توابعو ضرب  $f \cdot g$

د توابعو وېش  $\frac{f}{g}$  ;  $g \neq 0$

بېلگه ۱:

که  $f(x) = \sin x + 1$  او  $g(x) = x^2 + 3x - 2$  وي، نو:

1-  $f$  او  $g$  په  $x = 1$  کې متمادي دي.

2- وڅیړئ، چې ایا

(الف)  $f(x) + g(x) = \sin x + x^2 + 3x - 1$  او

(ب)  $(\sin x + 1)(x^2 + x^2 + 3x - 1)$  په  $x = 1$  کې متمادي او که غیر متمادي دي.

**حل:** 1)  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = \sin 1 + 1$

نو  $f$  په  $x = 1$  کې متمادي دی.

$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = g(1) = 2$$

نو  $g$  په  $x = 1$  کې متمادي ده.

2- الف):

$$\begin{aligned} a) \sin x + x^2 + 3x - 1 &= (\sin x + 1) + (x^2 + 3x - 2) \\ &= f(x) + g(x) = (f + g)(x) \end{aligned}$$

د متمادي توابعو جمع په  $x = 1$  کې متمادي ده.

$$\begin{aligned} (\sin x + 1)(x^2 + 3x - 2) &= f(x) \cdot g(x) \\ &= (f \cdot g)(x) \end{aligned} \quad \text{ب):}$$

نو د متمادي توابعو ضرب په  $x = 1$  کې متمادي دی.

بیلگه ۲:

که  $f(x) = x + 1$ ،  $g(x) = 3x - 2$  وي، وڅیړئ، چې ایا  $f(x) \cdot g(x)$  په  $x = 2$  کې متمادي ده.

حل:

له پورته څخه لاس ته راځئ، چې  $f(x) \cdot g(x)$  متمادي

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 4 = g(2)$$

$$f(x) \cdot g(x) = 3x^2 + x - 2 \text{ ده.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \cdot g(x) = 3(4) + 2 - 2 = 12$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow 2} g(x) = f(2) \cdot g(2) = 3 \cdot 4 = 12$$

دکینې لوري بند انتروال په  $[a, b]$  کې گراف متمادي تابع په گوته کوي يا بنایي، هلته چې  $f(a) \neq f(b)$  دی.

که ولرو  $f(a) < k < f(b)$  گراف له  $(b, f(b))$

ټکي څخه نشي انځورېدلی تر څو افقي کرښه

$y = k$  د ثابتې  $k$  سره غوڅه نه کړي.

له پورته څخه دا لاندې غوره جمله لیکلی شو:

که تابع  $f$  په بند اینټروال  $[a, b]$  کې متمادي او  $k$  د  $a$  او  $b$  ترمنځ پروت وي، نو هلته لږ تر لږه یو عدد  $c$  د  $f(a)$  او  $f(b)$  ترمنځ شته، داسې چې  $f(c) = k$  دی.

**بیلگه ۳:** که  $f(x) = x^3 + 4x$ ,  $x \in [1, 2]$  وي، نو وښایئ، چې یو  $c \in (1, 2)$  شته، داسې چې  $f(c) = 11$  وي.

**حل:**  $f(x)$  یو پولینوم دی نو  $f$  په بند اینټروال  $[1, 2]$  کې متمادي دی.

لاندې لرو:

$$f(1) = 1^3 + 4(1) = 5 ; \quad f(2) = 8 + 4(2) = 16$$

$$5 < 11 < 16 , \quad f(1) \neq f(2)$$

له دې امله یو عدد  $c \in (1, 2)$  شته، داسې چې  $f(c) = 11$  دی.

**بیلگه ۴:**

$$\text{که } f(x) = \begin{cases} 2x+4 & ; -1 \leq x < 2 \\ |x-10| & ; 2 \leq x \leq 20 \end{cases} \text{ یو، نو:}$$

(الف) و آزمایئ، چې تابع متمادي ده.

(ب) و آزمایئ، چې یو  $c \in (-1, 20)$  شته داسې چې  $f(c) = 6$  دی او د  $c$  ارزښت پیدا کړئ.

**حل:**



$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 2x + 4 = 8$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 10 - 2 = 8$$

له دې امله لرو:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 8$$

$$f(x) = 10 - 2 = 8$$

گورو چې تابع په  $[-1, 20]$  کې متمادي ده.

$$b) f(-1) = 2(-1) + 4 = 2$$

$$f(20) = 10 - 20 = -10 \Rightarrow f(-1) \neq f(20)$$

په دې اساس لرو:  $2 < 6 < 10$

له دې امله لرو:  $c \in (-1, 20) : f(c) = 6$

$$2x + 4 = 6 \Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow x = 1 \in (-1, 2)$$

$$|x - 10| = 6$$

$$x - 10 = 6 \Rightarrow x = 16 \in (-2, 20)$$

$$10 - x = 6 \Rightarrow x = 4 \in (-2, 20)$$

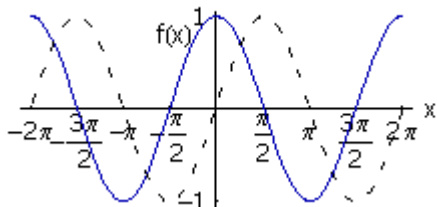
$$= 6 \quad |x - 10| \Rightarrow$$

د  $c$  ارزښتونه  $1, 4, 16$  دي.

بیلگه ۵ :

که وي:  $f(x) = 2 \sin x + 3; x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ، نو وښايي چې

نشاد دهيد که  $c \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  شته دی د کوم لپاره چې  $f(c)=4$  او  $c$  پيدا کړی.



ټکي ټکي د ساين گراف دی.

دا گراف که په ۳ کې ضرب کړی او ۳ ورزیات کړي د بيلگي گراف راکوي.

حل : تابع  $f$  د ساين تابع ددی ، نو له دي امله  $f$  متمادي دی.

$$f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 2 \sin -\frac{\pi}{2} + 3 = 2 (-1) + 3 = 1$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \sin \frac{\pi}{2} + 3 = 2 (1) + 3 = 5$$

$$f\left(-\frac{\pi}{2}\right) \neq f\left(\frac{\pi}{2}\right) \text{ مو، لرو :}$$

$$1 < 4 < 5 \text{ لرو : تابع متمادي دی او لرو :}$$

دا په دي معنا چې، که  $c \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$  موجود وي، د هغه لپاره  $f(c) = 4$  صدق کوي.

که د دي لپاره  $c$  پيدا کړو ، نو په لاس راځي:

$$f(c) = 2 \sin c + 3 = 4$$

$$2 \sin c = 1 \Rightarrow \sin c = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow c = \frac{\pi}{6}$$

له گراف څخه واضح ايدل کيږي، چې  $f$  په انټروال  $[a,b]$  کې متمادي دی، او  $f(a)$  او  $f(b)$  متضادي علامي لري، نو  $c$  د منځنۍ ارزښت قضیې په بنسټ د  $f(a)$  او  $f(b)$  په

منځ کې و  $K=0$  ته لږ تر لږه يو  $C$  د  $a$  او  $b$  په منځ کې داسې شتون لري، چې له هغې نتيجه  $f(c) = 0$  لاس ته راځي.

دا په دې معنا، چې  $x=c$  د برابرېون يا مساوات  $f(x) = 0$  يو حل دی.

**بيلگه ۶:**

که  $f(x) = x^3 + 5x - 23$  وي، نو وښايئ، چې د  $f$  تابع د  $x$ -محور په اينټروال (2.3) کې غوڅوي.

حل:  $f$  پولينوم تابع ده، نو  $f$  په اينټروال  $[2,3]$  کې متمادي دی.

$$f(2) = 2^3 + 5(2) - 23 = -5$$

$$f(3) = 3^3 + 5(3) - 23 = 19$$

$f(2) \neq f(3)$  او د متضادو منځښو(علامو) سره.

له دې امله د  $c \in (2,3)$  لپاره لرو چې  $f(c) = 0$  دی.

لنډ: غير متمادي توابع هغه دي، چې په يو کوم ځاي کې تعريف نه وي

**تمرینونه:**

وښايئ چې تابع په ورکړ شوي ټکي کې متمادي ده.

$$1) f(x) = x^3 - 2(x+1)^5 \quad ; \quad x = 2$$

$$2) g(x) = \frac{x^2 + 3}{(x^2 - x + 5)(x^2 + 2x)} \quad ; \quad x = -1$$

$$3) h(x) = \frac{x\sqrt{x+1}}{(x+2)^3} \quad ; \quad x = 4$$

4- تشریح کړئ، چې ولې تابع  $f(x) = \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{2}}{x}$  په  $x=0$  کې غیرمتمادي ده؟

5- که  $f(x) = \frac{18}{x} + 2$ ,  $x \in [2,3]$  وي، و بنایئ چې  $c \in (2,3)$  شته داسې چې

$$f(c) = 10 \text{ وي او } c \text{ پیدا کړئ.}$$

6- و بنایئ چې د لاندې مساوات لپاره یو حل شته:

$$x^3 - 4x + 1 = 0 \quad ; \quad x \in [1,2]$$

7- وي دې:  $f(x) = \sin x + \cos x$  ;  $x \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$  و بنایئ، چې مساوات  $\sin x + \cos x = 0$

په اینټروال  $(\frac{\pi}{2}, \pi)$  کې یو حل لري.

8- وي دې:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & ; \quad -1 \leq x \leq 3 \\ 13 - 2x & ; \quad 3 < x \leq 7 \end{cases}$$

(الف) ایا  $f$  په  $x=0$  کې یو متمادي تابع دی؟

(ب)  $c \in (-1,7)$  داسې پیدا کړئ، چې  $f(c) = 0$  وي.

## د لومړي څپرکي ټولګه " Chapter Summary "

پېژند:

د  $f(x)$  تابع یو لیمیت  $L$  لري، که  $x$  ترلی یو حقيقي عدد  $c$  ته لار شي. په دې معنا چې

$f(x)$  لپاره، چې ترلی  $L$  ته ځي دا دی، چې  $x$  ترلی  $c$  ته لار شي او داسې یې لیکو:

د  $f(x), x \in D_f$  تابع د  $x_0$  په ځای کې یو کین اړخیز لیمیت  $a_l = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x)$  لري،

که د هر ترادف  $(x_n)$  لپاره، چې  $n$  غړي یې د  $x_0$  کین لور ته پراته وي او د توابعو اړزبنتونه  $f(x_n)$  د  $a_l$  په لور هڅیږي.

په ورته توگه بنی اړخیزه لیمیت:

د  $f(x), x \in D_f$  تابع د  $x_0$  په ځای کې یو بنی اړخیز لیمیت  $a_r = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x)$  لري،

که د هر ترادف  $(x_n)$  لپاره، چې  $n$  غړي یې د  $x_0$  بنی لور ته پراته وي او د توابعو اړزبنتونه  $f(x_n)$  د  $a_r$  په لور وهڅیږي..

که تابع  $f(x)$  همغه لیمیت  $L$  ولري که  $x$  له بنی او یا کینې لوري و  $c$  ته نږدې شي، نو لیمیت شته دی او د  $L$  سره برابر دی.

دا داسې لیکو:  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$

د پولې یا حد خوږونه (خواص):

که  $f$  او  $g$  توابع وي،  $L, c$  او  $M$  حقیقي اعداد وي داسې چې  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$  او

$\lim_{x \rightarrow c} g(x) = M$ ، نو دا په لاندې توگه لیکلی شو:

$$1) \lim_{x \rightarrow c} (f + g)(x) = \lim_{x \rightarrow c} f(x) + \lim_{x \rightarrow c} g(x) = L + M$$

$$2) \lim_{x \rightarrow c} (f - g)(x) = \lim_{x \rightarrow c} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow c} f(x) - \lim_{x \rightarrow c} g(x) = L - M$$

$$3) \lim_{x \rightarrow c} (f \cdot g)(x) = \lim_{x \rightarrow c} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow c} g(x) = L \cdot M$$

$$4) \lim_{x \rightarrow c} \left( \frac{f}{g} \right) (x) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}; (M \neq 0)$$

$$5) \lim_{x \rightarrow c} \sqrt{f(x)} = \sqrt{L}$$

د  $f(x) \geq 0$  او  $x$  د ټولو قیمتونو لپاره، چې  $c$  ته ور نږدې کیږي.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1: \text{ قضیه: که } x \text{ په رادیان ورکړ شوی وي، نو لرو:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1: \text{ قضیه: که } x \text{ په رادیان ورکړ شوی وي، نو لرو:}$$

پېژند:  $f$  د یوه تابع وي او د ټولو  $x$  لپاره په یوه واز انټروال کې چې  $x = c$  وي،  
تعریف وي، نو وایو:  $f$  په  $x = c$  کې متمادي دی، د لاندې شرایطو سره:

$$2) \lim_{x \rightarrow c} f(x) \text{ 1) تعریف لري} \text{ شته دی}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$$

که تابع د ټولو  $x \in (a, b)$  لپاره متمادي وي، نو تابع په ټول انټروال  $(a, b)$  ې متمادي ده.

تعریف یا پېژند: وایو چې یو تابع په یوه بند انټروال  $[a, b]$  ې متمادي ده، که تابع له  
بنی لوري په  $x = a$  کې متمادي وي او له کیني لوري په  $x = b$  کې او د واز انټروال  $(a, b)$   
په هر قیمت کې متمادي وي.

د متمادي توابعو خویونه (خواص): که  $f$  او  $g$  په  $x = c$  کې متمادي وي، نو دا لاندې هره  
یوه تابع په  $x = c$  کې متمادي ده.

لومړی) د توابعو جمع یعنی  $f+g$  تابع

دویم) د توابع تفریق یعنی  $f-g$  تابع

دریم) د توابعو ضرب یعنی  $f.g$

څلورم) د توابعو ویش یعنی  $\frac{f(x)}{g(x)}$  ;  $g(x) \neq 0$

د منځني قیمت قضیه:

که تابع  $f$  په بند انتروال  $[a, b]$  کې متمادي وي او  $k$  د  $f(a)$  او  $f(b)$  ترمنځ یو عدد وي، نو لږ تر لږه د  $a$  او  $b$  ترمنځ یو عدد  $c$  شته، د کوم لپاره چې  $f(c)=k$  باور لري.

د څپرکي تمرینونه:

سم ځواب وټاکئ:

که  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$  وي، نو  $\lim_{x \rightarrow 2} (3x - 20)(x + 1)$  ی:

a) 5      b) -5      c) 4      d) 3

ب) پیدا کړئ  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 1}{x^2 + 3x - 2}$

a) 1      b) 2      c) 1      d)  $\frac{1}{2}$

1- لیمیت پیدا کړئ  $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{|x + 5|}{x^2 + 3x - 2}$

- d) -5                      c) -1                      b) 5                      a) 1

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} \text{ دى.} -2$$

- d) 2                      c) 1                      b) -1                      a) -2

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x - \sin x}{x} \text{ دى.} -3$$

- d) 3                      c) 1                      b) -2                      a) 2

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 + x - 2} \text{ دى.} -4$$

- a)  $-\frac{5}{3}$                       b)  $\frac{5}{3}$                       c) 0                      d) 1

$$\lim_{x \rightarrow 1.4} [2x + 0.3] \text{ دى.} -5$$

- d) نشته                      c) 0                      b) 3                      a) 1

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\tan 2x} \text{ دى.} -6$$

- a) 1                      b) 0                      c)  $\frac{3}{2}$                       d)  $\frac{2}{3}$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - 4}{\sqrt{x} - 2} \text{ دى.} -7$$

- a)  $2 + \sqrt{2}$                       b) 2                      c)  $\sqrt{2}$                       d) 4



$$-8 \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{1 + \cos 2x} \text{ دی.}$$

- a) 1                      b)  $\frac{1}{2}$                       c)  $\frac{1}{4}$                       d) 4

9- لاندی توابع سره جمع کریں.

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 5 \quad \& \quad \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = -2$$

10- کہ  $f(x) = x^2 + 1$  وي، پیدا کریں:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$$

11- تابع  $f(x) = \begin{cases} 3x - b & ; \quad x \leq 3 \\ 10 - x & ; \quad x > 3 \end{cases}$  پہ  $x = 3$  کی متمادي دی، b پیدا کریں.

12- وبنائی، چي تابع  $f(x) = 3x^2 - x - 5$  په اینتروال (1,2) کی حل لري.

۱۳ - د لاندی ۱ - ۹ توابعو لیمیٹونه وشمبری.

- |  |  |   |
|--|--|---|
| 1) $\lim_{x \rightarrow -1} (x^2 + x)$           | 2) $\lim_{x \rightarrow 4} (x^2 + x)$              | 3) $\lim_{x \rightarrow -2} 2x + 3$               |
| 4) $\lim_{x \rightarrow 0}  x $                  | 5) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x}{x}$            | 6) $\lim_{x \rightarrow 1} 7$                     |
| 7) $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{\frac{x^2}{x}}$ | 8) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{x + 2}$ | 9) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{x^9 - 9}$ |

$$f(x) = \begin{cases} 2+x; & x < 1 \\ x^2 & ; x \geq 1 \end{cases} \quad \text{۱۴ -- که وي:}$$

الف) د تابع گراف وکارئ.

ب)  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$  پیدا کړئ.

15: هغه توابع چې په یوه عدد د بېلگي په توگه صفر کې تعریف نه لري، څه بلل کېږي

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{5}{2x-3} + 5}{x^2 - 1} \quad \text{16 پیدا کړئ:}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-2x^2 + 1}{x^4 - 2x^2 + 2} \quad \text{--17 وشمېرئ.}$$

--18

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 1 & ; x < 2 \\ 3 & ; x = 2 \\ x + 3 & ; x > 2 \end{cases} \quad \text{که } f(x) \text{ وي، نود } f(x) \text{ تابع متمادیت په } x = 2 \text{ کې وڅېرئ.}$$

۱۹- یوه په خوښه تابع ولیکئ او د تابع گراف وکارئ او وگورئ، چې تابع چېرته تعریف ده او متمادیت یې وښایست.

۲۰- په لاندې له ۲ - ۷ پوښتنو کې څېرو، چې ایا تابع په ورکړشوي ټکي کې متمادی یا غیرمتمادی دي.

2)  $f(x) = x^2 + 5(x-2)^7$  ;  $x = 3$

3)  $f(x) = \frac{x+3}{(x^2+2x-5)}$  ;  $x = -1$

4)  $f(x) = \frac{\sqrt{8-x^2}}{2x^2-5}$  ;  $x = -2$

5)  $f(x) = \frac{1}{(x-3^3)}$  ;  $x = 3$

6)  $f(x) = |x-3|$  ;  $x = 3$

7)  $g(x) = \frac{|x|}{x}$  ;  $x = 0$

۲۱- تشریح کړئ، چې ولې تابع  $f(x) = \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{2}}{x}$  په  $x=0$  کې غیرمتماذي ده؟

۲۲- که  $f(x) = \frac{18}{x} + 2$ ,  $x \in [2,3]$  وي، وښایئ چې  $c \in (2,3)$  شته داسې چې  $f(c) = 10$  وي او  $c$  پیدا کړئ.

۲۳- وښایئ چې د لاندې مساوات لپاره یو حل شته:

$$x^3 - 4x + 1 = 0 ; x \in [1,2]$$

۲۴- وي دي:  $x \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$  ;  $f(x) = \sin x + \cos x$  وښایئ، چې

مساوات  $\sin x + \cos x = 0$  په اینټروال  $(\frac{\pi}{2}, \pi)$  کې یو حل لري.

۲۵ الف: وڅیړئ، چې ایا لاندې تابع د  $x_0$  په ځای کې ممفادي ده.

<p>a) <math>f(x) = \begin{cases} -2x \\ \sqrt{x} \end{cases}</math></p> <p>c) <math>f(x) = \begin{cases} \sin x \\ e^x \end{cases}</math></p>	<p><math>x \leq 0</math> د <math>x_0 = 0</math> لپاره</p> <p><math>x &gt; 0</math> د <math>x_0 = 0</math> لپاره</p> <p><math>x \leq 0</math> د <math>x_0 = 0</math> لپاره</p> <p><math>x &gt; 0</math> د <math>x_0 = 0</math> لپاره</p>	<p>b) <math>f(x) = \begin{cases} 2 \\ x^2 + 1 \end{cases}</math></p> <p>d) <math>f(x) = \begin{cases} -x + 1 \\ \ln x \end{cases}</math></p>	<p><math>x \leq 1</math> د <math>x_0 = 1</math> لپاره</p> <p><math>x &gt; 1</math> د <math>x_0 = 1</math> لپاره</p> <p><math>x \leq 1</math> د <math>x_0 = 1</math> لپاره</p> <p><math>x &gt; 1</math> د <math>x_0 = 1</math> لپاره</p>
---	---	--	---

۲۶- که  $f(x) = 2\sin x + 3$  ;  $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  وي، نو وښایئ چې  $c \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  شته،

د هغه لپاره چې رښتیا وي  $f(c) = 4$  او  $c$  پیدا کړئ.

۲۷: لاندې لیمیتونه وشمېرئ.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x + \frac{\pi}{6})}{x + \frac{\pi}{6}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \tan^2 x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{\sin 3x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin 5x \cot 3x$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{\tan(2x - 1)}{4x^2 - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \sqrt{\cos 2x - \cos x + 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (\cos^2 x + \sin^2 x)$$

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\theta}{\sin \frac{1}{2} \theta}$$

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin 2\theta}{\sin 3\theta}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos \frac{\pi}{2} x}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x - 1)}{\sqrt{x} - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(\sqrt{x} - 1)}{x - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - 2x}{x}$$

$$20) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \tan 2x}{\sin^2 x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{1-x} \cos \frac{\pi x}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^3 + 2x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$$

$$25) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x - \cos 7x}{x^2}$$

$$26) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x + \frac{\pi}{4})}{x + \frac{\pi}{4}}$$

$$27) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin(x - \frac{\pi}{4})}{x(x - \frac{\pi}{4})}$$

$$28) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x - x \cos 3x}{x}$$

$$29) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x}{\sin 3x - \sin 5x}$$

$$30) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|\sin x|}{x}$$

$$31) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\sin^2 x - 1}}{x}$$

$$32) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{2x - \pi}$$

$$33) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(3x - 3)}{1 - x^3}$$

$$34) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 + 5x}{\sin 2x}$$

## دویمه برخه: مشتق یا رابیلیدنه

په تیره برخه کې مو د پولې څیرنه وکړه. وبه گورو، چې دا د پولې درس د مشتق یا رابیلیدني لپاره اړین دی.

د تابع منح ارزښت تغیر Average rate of change  
دلته دې د سالنگ یا ماهیپر د سرک خیره راشي. (دلته څېره راځي)



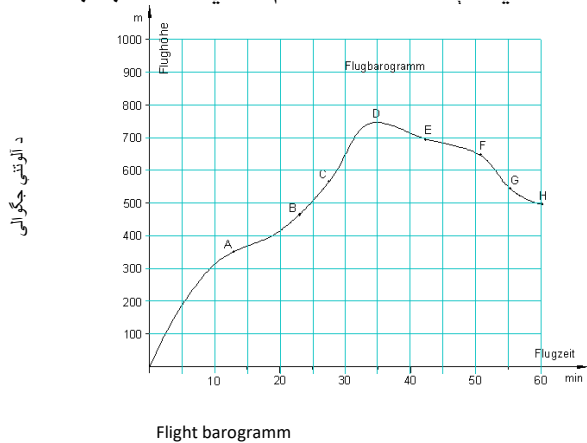
د کتاب په دې برخه کې مو د ریاضیاتو یوه غوره برخه، چې د ریاضیاتو زری ورته ویلی شو، تر څیرني لاندې نیسو، نو له دې امله لازم گڼم، چې په دې هکله داسې مهم څه

د یوه یادښت په څیر راوړم: که له یوه ځای څخه بل ځای ته د تابع د تغیر منح ارزښت  $Average\ of\ change$  څخه غږیږو، نو موخه ترې په یوه ټکي یا دوه ټکو کې د تابع جگوالی، میل او یا تانجنت دی او دا دريواره کلمې د ریاضیاتو له مخې په همغه یوه معنا دي او و به گورو، چې همداسې کمښتوېش یا د تفاضل وېش (Difference quotient) هم.

دې کلمو ته په انگرېزي کې **slop** وايي، چې زموږ ادبیتو د میل په نامه بلل کيږي.

### په یوه ټکي کې د تابع د گراف میل (جگینه)

الوتکو کې د الوتنې دلیک (الوتنلیک) الې (Flight barogramm) جوړې دي، چې تل الوتنې جگوالی د الوتنې د وخت په واک کې یا د وخت تابعیت کې رسموي او په هر جگوالي کې د هوا فشار هم لیکي. که دا په پښتو وروو، نو د لیک بکس به ورته ووايو.



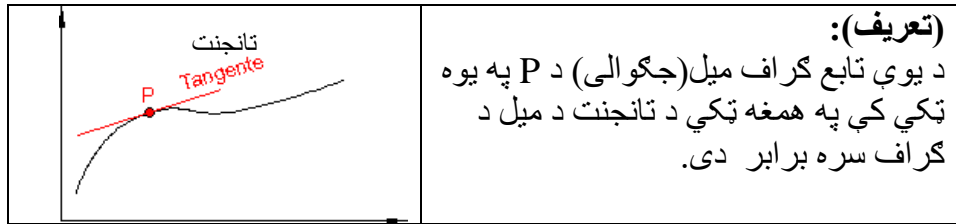
په پورته گراف کې د یوې الوتکې د الوتنې د بیلا بیلو وختونو جگوالی ښوول شوی. فعالیتونه:

- \_ په پورته څیره کې د گراف جگوالی د A په ټکي کې د B ټکي سره پرتله کړئ. په ورته توگه د گراف میل د E په ټکي کې د G ټکي سره پرتله کړئ.
- \_ روښانه کړئ، چې ولې په یوه ټکي کې باید له جگوالي، میل یا تانجنت څخه غږیږو؟
- \_ وهڅیږئ، چې په یوه ټکي کې د گراف جگوالي لپاره یو متود تعریف کړئ او له انځور څخه د A او B په ټکو کې جگوالی وټاکئ.
- \_ ایا فکر کوئ، چې په B ټکي کې نسبت و A ټکي ته جگوالی زیات دی؟
- \_ ایا فکر کوئ، چې د E او G په ټکو کې جگوالی منفي دی؟ دلته د E په ټکي کې د ارزښت له مخې جگوالی زیات دی نسبت د G ټکي ته؟

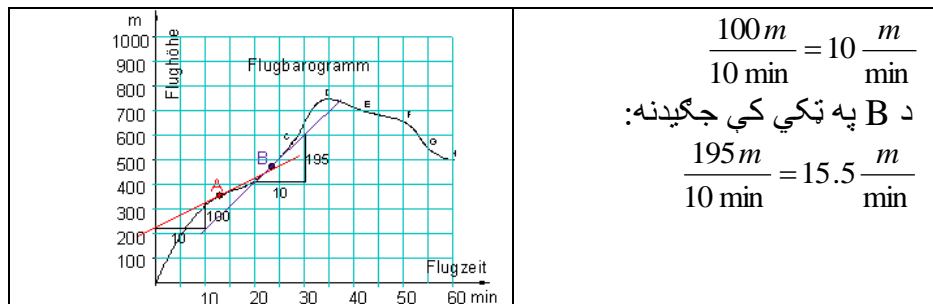
ایا د یوې کرښې جگوالی او په همدې ترتیب د یوې منحنی هر چیرته توپیر لري او که نه؟

لاس ته راوړنه:

گورو، چې په یوه منحنی کې د گراف جگوالی هر چیرته برابر نه دی، نو له دې امله باید ټکی په گوته کړو، چې هلته میل څیرل کېږي. په لاندې بیلگه کې به روښانه کړو، چې تنها د یوې (سیده) کرښې میل هر چیرته برابر دی، نو له دې امله دلته د یوې کرښې د میل یا جگوالی څخه غږیږو. بریښي چې لاندې پیژند یا تعریف عاقلانه دی.



لیدل کېږي چې دلته یو تانجنت د کرښې تعریف لري، چې د لمستکي (ماس) په چاپیریال کې د امکاناتو سره سم لمستکي (ماس) ته ښه وړ نږدې کېږي. ددې پیژند یا تعریف له مخې په یوه ټکي کې د یوه گراف میل د یوې کرښې میل دی. د گراف د جگپښي ټاکلو لپاره د A او B په ټکو هر یوه کې یوه کرښه (تانجنت) انځوروو، چې گراف ته خورا زیاته نږدې کېږي. د میل یا جگپښي مثلث په مرسته جگپښه په شل یا ساده ډول شمیرل کېدی شي: A په ټکي کې جگپښه:



زموږ د بیلگې لپاره میل یا جگپښه په یوه ټاکلي ټکي کې د لحظوي (سملاسي) میل سرعت په معنا دی.



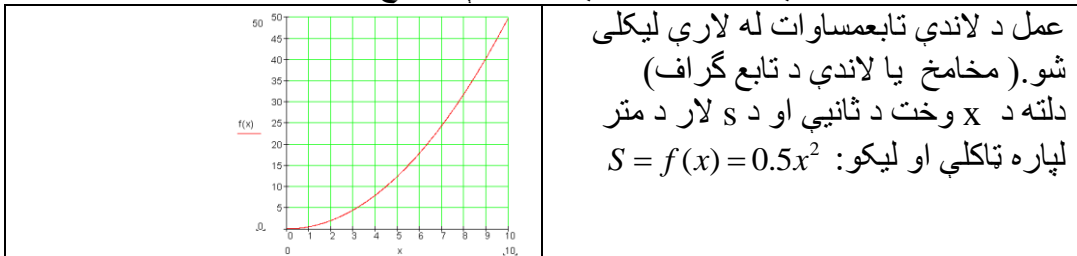
د A په ټکي کې: د الوتنې وخت نږدې 12.5 min، د میل یا جگیدني چټکتیا (سرعت) نږدې  $10 \frac{m}{min}$  ده.

د B په ټکي کې: د الوتنې وخت نږدې 23.0 min، د جگیدني سرعت نږدې  $19.5 \frac{m}{min}$

دی.

تانجنت تر اوسه فقط د لیدني له مخې تعریف شوی، چې د لمستکي چاپیریال ته خورا ډېر نږدې کیږي. له دې امله ممکن وه، چې د گراف میل د A او B په ټکو کې هم یواځې په نږدې ډول وټاکل شي، دا په عمل کې د قناعت وړ نه دی.

په یوه ټکي کې د تابع د گراف میل (جگیدنه):  
معلومه ده، چې یو ریلگاډی د تمخای څخه له خوزېدو (حرکت) وروسته خپله چټکتیا (سرعت) په کراره کراره زیاتوي. وهلی لار (د تمخای څخه لرېوالی) تل زیاتېږي. د تمخای څخه لرېوالی د چټکتیا یا سرعت په واک کې یا تابع دی.



فعالیت:

- 1- اوس دې منځنی تغیر ارزښت **Averagerat of change** (منځنی میل ارزښت) د 3- می او 7- می ثانیې ترمنځ وشمېرل شي.
- 2- ددې لپاره دې اړونده قاطع یا سیکانت انځور شي او د هغې جگوالی دې وشمیرل شي.
- 3- اوس دې د تغیر ارزښت (منځنی جگوالی) د 3- می او 7- می ثانیو ترمنځ وشمیرل شي.
- 4- وښایاست، چې په دریمه ثانیه کې د ارزښت تغیر یا جگوالی څومره دی؟

### کمښت ویش یا د تفاضل ویش Difference quotient

د یوې کرښې میل یا جگیدنه بې له مشتق نیونې ټاکل کېدی شي. کرښه  $y = f(x) = mx + a$  لرو.

د دې کرښې د جگړدني فرمول په لاندې ډول دی:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

قاطع (غوڅی second):

قاطع هغه کرښه ده، چې منحنی د  $P_0$  او  $P_1$  په دوه ټکو کې غوڅوي.

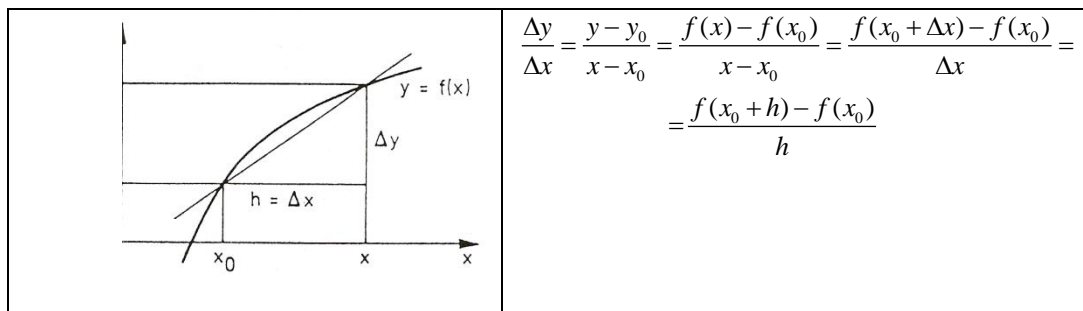
د قاطع میل یا جگړدنه (جگوالی secant):

دا چې قاطع هم یوه کرښه ده نو میل (جگوالی) یې هم د یوې کرښې میل په ډول شمیرل کېږي.

په لاندې کې  $m_s$  د جگوالي لپاره لیکل کېږي.

$$m_s = m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

(تعریف): د  $y = f(x)$  تابع دې د  $x_0$  په یوه چاپیریال او په  $x_0$  کې پخپله تعریف شوي تابع وي،  $x$  د  $x_0$  څخه بیل خو د چاپیریال په یوه خوښه یا په زړه پورې ځای دی (مخامخ څیره دې وکتل شي). نو د تفاضل یا کمښتویش Difference quotient د قاطع میل شته دی، چې په لاندې ډول یې لیکو:



د  $f$  تابع لپاره فرمول:  $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

دا فرمول د  $f$  په گراف باندې د دوه ټکو ترمنځ د قاطع د میل شمیرنه ده. د اټکي د  $-x$  محور باندې د  $x$  او  $x+h$  ټکي دي.

د کمښت وېش يا د تفاضلونو وېش د مشتق د تعریف لپاره په کار راځي.

بیلگه:

د  $y = f(x) = 3x^2 - 5x + 4$  تابع دې ورکړ شوی وي. د دې تابع کمینت ویش (د تفاضل ویش) پیدا کړئ.

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{3(x+h)^2 - 5(x+h) + 4 - (3x^2 - 5x + 4)}{h} \\ &= \frac{3x^2 + 6xh + 3h^2 - 5x - 5h + 4 - 3x^2 + 5x - 4}{h} \\ &= \frac{6xh + 3h^2 - 5h}{h} \\ &= 6x + 3h - 5 \end{aligned}$$

تمرینونه:

1 - کمینت ویش (د تفاضل ویش) ارزښت د P او Q په ټکو کې وټاکئ.

a)  $P(3,2)$  ,  $Q(5,4)$       b)  $P(2,4)$  ,  $Q(3,1)$

2- د  $x = x_0$  په ځای کې د f تابع د تانجنت جگوالی وټاکئ.

a)  $f(x) = x^2$  ,  $x_0 = 2$       b)  $f(x) = 0.5x^2$  ,  $x_0 = 3$

د کمینت ویش (د تفاضل ویش) او مشتق لاندې څه پوهیږو او د دوي ترمنځ توپیر څه دی؟

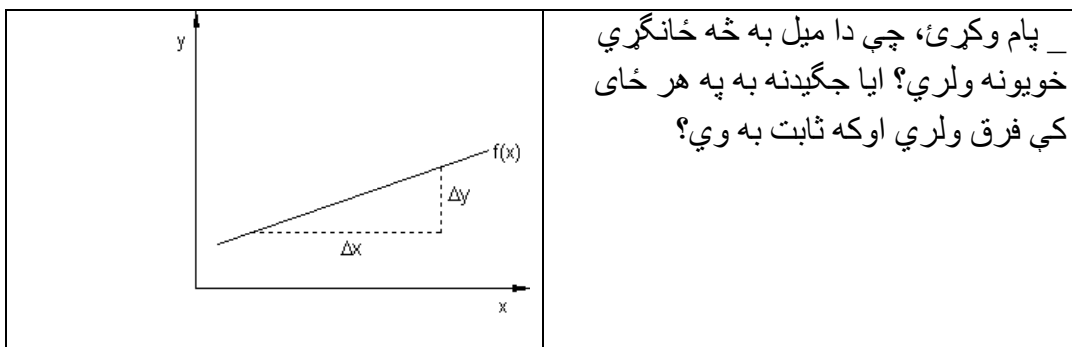
4 - د یوې تابع د سکانت (قاطع) لاندې څه پوهیږو او د تانجنت جگیدو لاندې څه

پوهیږو؟ او د دوي ترمنځ کومې اړیکې پرتې دي؟

## Differentialcalaculation رابیلیدنه یا مشتقشمیرنه

فعالیت:

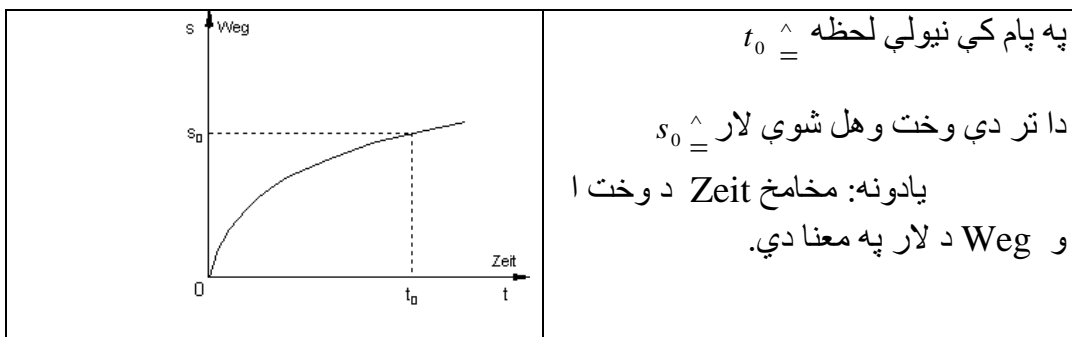
پام وکړئ، لکه په یوه ثابت میل  $a_1 = \frac{\Delta y}{\Delta x} = constant$  کې، د بیلگې په توګه په خطي یا لاینیز تابع کې د  $f(x) = a_1x + a_0$  سره میل شته او که نه؟

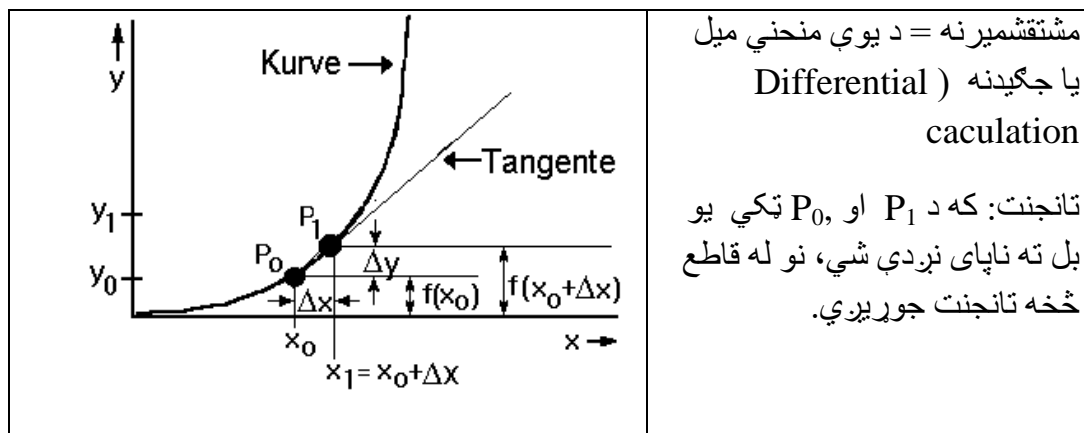


ایا په مختلفو وختونو کې اړین بولی، چې د تغیر حالت (د میل حالت) کې د تابع د تلني حالت و څیړئ؟

\_ او یا له دې امله لحظوی چټکتیا (سرعت)  $v(t_0)$  په لار- وخت- دیاګرام کې وڅیړئ؟

\_ ایا د مشتق شمیرني په مرسته دا پرابلم حل کیدی شي؟





مشتقشمیرنه = د یوې منحنی میل  
یا جگیدنه ( Differential  
caculation

تانجنت: که د  $P_1$  او  $P_0$  ټکي یو  
بل ته ناپای نږدې شي، نو له قاطع  
څخه تانجنت جوړیږي.

د تانجنت جگیدنه: د تانجنت جگیدنه د قاطع د جگیدني، لیمت، Limit، یا حد دی.

$$m_t = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

فعالیت:

1- له پورته څیري او اړونده شنني څخه د مشتق لپاره څه فکر کوی؟

2- د derivative (مشتق) کلمې لاندې څه پوهیږو؟

او دا په ساده پښتو څه معنی ورکوي؟

3- له کمښت وپش (د تفاضلونو ویش) څخه څنگه و مشتق ته راځو؟ په دې هکله د پورته څېرې څخه په گټه اخلوڅپل نظر وواياست.

4- له 2-م فعالیت څخه وواياست، چې ولې دا شمېرنه رابېلېدنه یا مشتق بلل کېږي؟  
پام: لکه د مخه مو چې گوته ورته ونيوله، د derivative کلمه نوې ده، نو له دې امله دا څو ټکي په پام کې نیسو: derivative د رابیلیدني په معنا دی، چې مور یې تراوسه مشتق بولو.

: که د تابع دا کمښتویش (د تفاضل وپش)  $x > x_0$  او (همداسې)  $x > 0$  او یا په

(همدې ډول)  $h > 0 \Leftrightarrow$  لپاره یو حد ولري، نو د  $y = f(x)$  تابع د  $x = x_0$  په ځای کې د

مشتق قابلیت لري او ددې لپاره لیکو:

۶۵ رابیلدنه یا مشتقشمیرنه

$$\begin{aligned} \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0} &= f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \\ \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}; \dots \\ \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0} &= f'(x) \text{ دا لیمیت داسی بنايو:} \end{aligned}$$

د  $x_0$  ځای کې د  $y = f(x)$  له مشتق (Derivativ) یا رابیلدني) څخه یوه بله سیده یا بل ډول کره لار رابیله وو.

د مشتق ساده شمیرني لپاره یوه بیلگه:

د  $f(x) = x^2 - 3x + 2$  مشتق غواړو پیدا کړو.

ددې کمښتوېش په لاندې ډول دی:

$$\begin{aligned} \frac{y - y_0}{x - x_0} &= \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \\ &= \frac{((x_0 + \Delta x)^2 - 3(x_0 + \Delta x) + 2) - (x_0^2 - 3x_0 + 2)}{\Delta x} \\ &= \frac{x_0^2 + 2x_0\Delta x + \Delta x^2 - 3x_0 - 3\Delta x + 2 - x_0^2 + 3x_0 - 2}{\Delta x} \\ &= \frac{2x_0\Delta x + \Delta x^2 - 3\Delta x}{\Delta x} \\ &= 2x_0 + \Delta x - 3 \end{aligned}$$

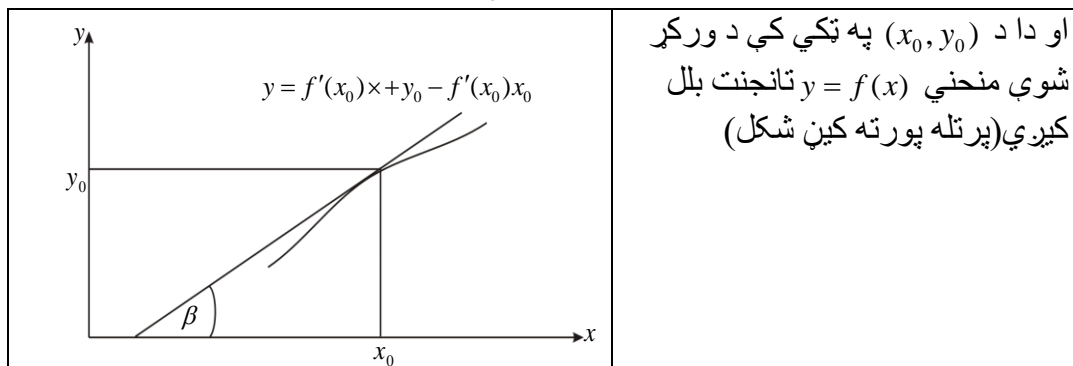
او د لیمیت  $\Delta x \rightarrow 0$  سره یې مشتق لاس ته راځي:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x_0 + \Delta x - 3) = 2x_0 - 3.$$

د دې لپاره دا لاندې تعریف (پېژند) ورکوو:

که یو د  $y = f(x)$  تابع د  $x_0$  په ځای کې مشتق ور وي، نو هغه لاندنی کرښه چې د  $(x_0, y_0)$  کې څخه تېرېږي او میل یا جگوالی یې  $f'(x) = \tan \beta$  دی او په لاندې ډول لیکو:

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = f'(x) \Leftrightarrow y = f'(x_0)x + y_0 - f'(x_0)x_0$$



مور اوس د څو بنسټيزو توابعو مشتق شميرنه تر څيرني لاندې نيسو.

بيلگه ۱:

د يوې ثابتې مشتق:

مور دالاندې تابع لرو، چي ارزښت يې يو ثابت دی.

ثابت  $y = f(x) = c = \text{Cons}$ ، نو د هر  $x_0$  ځای لپاره لرو:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{c - c}{h} = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0} = f'(x_0) = 0$$

بيلگه ۲:

يوه  $f(x) = x$  خطي (کربنيزه) تابع لرو، د  $x_0$  په ځای کې غواړو د دې تابع مشتق پيدا

کړو او د مشتق تابع هم:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} & \Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{\Delta x}{\Delta x} \\ \Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{(x_0 + \Delta x) - x_0}{\Delta x} & \Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} &= 1 \\ \Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{x_0 + \Delta x - x_0}{\Delta x} & \Leftrightarrow f'(x_0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1 = 1 \end{aligned}$$

نو  $f'(x_0) = 1$  د  $x_0$  په خای کې د تابع مشتق دی او  $f'(x_0) = 1$  د مشتق تابع ده یعنی یوه ثابتته ده.

بیلگه ۳ :

د  $y = f(x) = c \cdot u(x)$  ډوله تابع مشتق د  $c =$  ثابتې سره.

د ثابتې قانون:

د یوې تابع مشتق، چې له یوې ساده تابع او یوې ثابتې سره د ضرب له لارې منځ ته راغلی وي، برابر دی د ساده تابع د مشتق سره، چې د ثابتې  $c$  سره ضرب شوی وي. یعنی له  $y = f(x) = c \cdot u(x)$  څخه لرو:  $f'(x) = c \cdot u'(x)$

ثبوت:

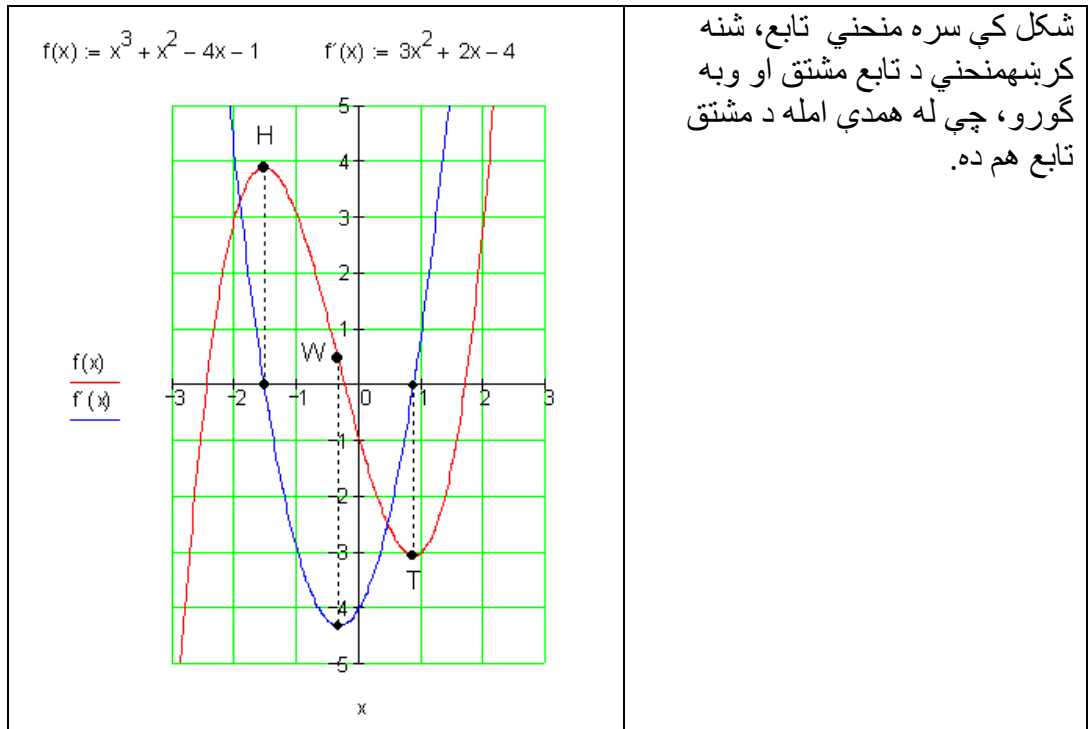
$$\begin{aligned} \Leftrightarrow f'(x_0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \underbrace{c}_{c} \cdot \underbrace{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x_0 + \Delta x) - u(x_0)}{\Delta x}}_{u'(x_0)} & \Rightarrow f(x_0) &= c \cdot u(x_0) \\ & & f'(x_0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{c \cdot u(x_0 + \Delta x) - c \cdot u(x_0)}{\Delta x} \\ \Leftrightarrow f'(x_0) &= \underline{\underline{c \cdot u'(x_0)}} & \Leftrightarrow f'(x_0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} c \cdot \frac{u(x_0 + \Delta x) - u(x_0)}{\Delta x} \end{aligned}$$

**تمرینونه:**

- 1- د تفاضل وېش او د مشتق لاندې څه پوهېږو؟
- 2- د دوی ترمنځ څه اړیکې (پرتې) دي؟
- 3- د قاطع (سکانت) او تانجنت جگېدنې لاندې څه پوهېږو؟



د  $x_0$  په ځای کې د تابع مشتق او د مشتق تابع



فعالیت:

- 1- د  $x_0$  په ځای کې د تابع مشتق یعنی څه؟
  - 2- د یوې تابع له مشتق نیونې وروسته دې مشتق ته څه ووايو؟
  - 3- که د تابع مشتق د مشتق تابع ونوموو، روښانه کړئ، چې ولې تابع ده او ددې تابع درجه، د لومړۍ تابع سره پرتله کړئ؟
- ایا له دې توپیر څخه د مشتق کلمه روښانه کولی شئ؟
- ددې د روښانه ونې لپاره د لاندې بیلگې څخه کار اخلو

بیلگه ۱: تابع  $y = f(x) = x^2$  دې ورکړ شوی وي. غواړو د  $x = x_0$  په ځای کې او په ځانگړې توگه د  $x_0 = 2$  په ځای کې د هر څه لومړۍ کمښتویش (د تفاضل وېش) پیداوو.

د  $x_0$  په ځای کې د تابع مشتق او د مشتق تابع ۶۹

$$\begin{aligned}
 x &= x_0 : \\
 \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \\
 \Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{(x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x} \\
 \Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{x_0^2 + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x} \\
 \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{2x_0\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x
 \end{aligned}$$

اوس د لیمیټ د لاس ته راوړلو له لارې د مشتق ضریب ته راځو:

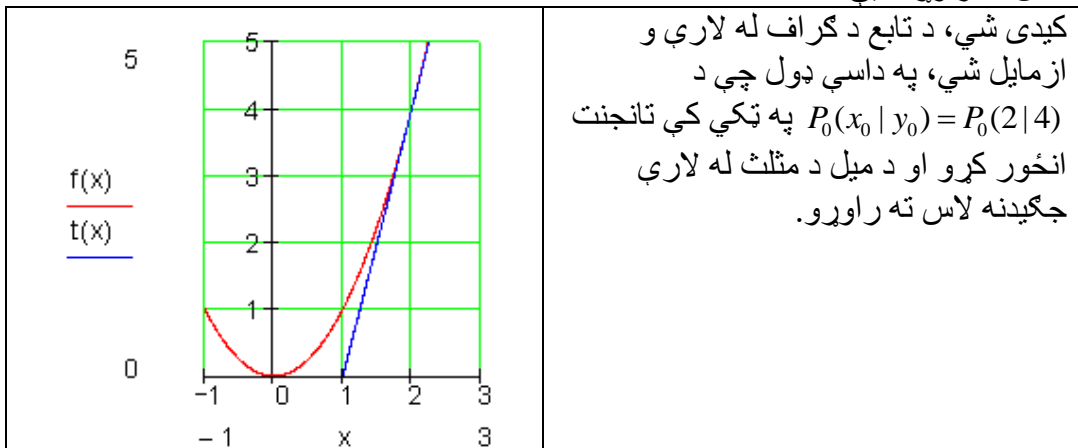
$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x_0 + \Delta x) = 2x_0$$

نو  $f'(x_0) = 2x_0$  لرو او د  $x_0 = 2$  لپاره  $f'(2) = 2 \cdot 2 = 4$  باور لري.

د  $x_0 = 2$  په ځای کې د تابع  $y = f(x) = x^2$  لومړی مشتق په 4 برابر دی، دا په دې معنی

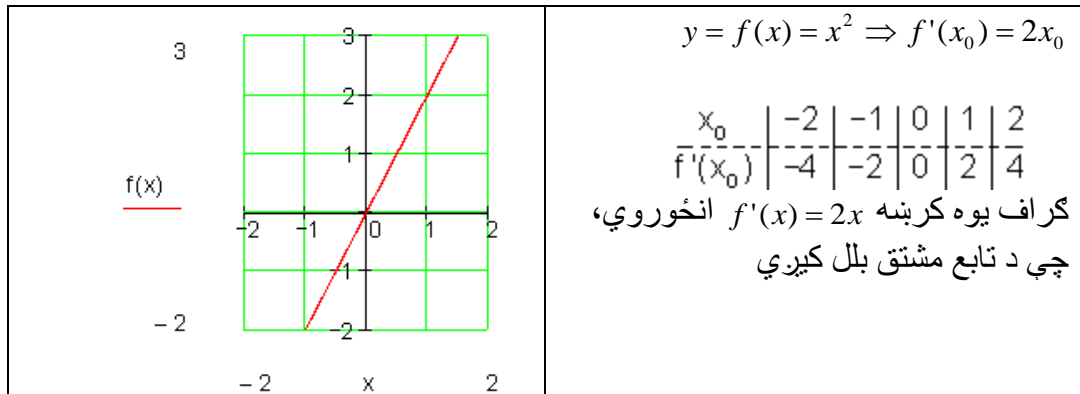
چې تابع د  $x_0 = 2$  په ځای کې میل یاجگوالی 4 لري.

لاس ته راوړنه یی:



پورته بیلگه کې:  $y = f(x) = x^2$  په هر خوښه ځای  $x_0$  کې تابع پیداوو:

د  $x_0$  په ځای کې د تابع مشتق او د مشتق تابع



پام: که د یوې تابع مشتق ونیول شي، نو بیرته هم یوه تابع ترې لاس ته راځي، چې دا د مشتق تابع بللکيږي. د مشتق تابع: د تابع ارزښتونه په هر ټکي کې بنسټ تابع انځوروي، له دې امله دا د میل تابع هم بلل کيږي.

بیلگه ۲:

د  $f(x) = x^3$  تابع دې ورکړ شوی وي. فعالیت: گران لوستونکي دې د  $f(x) = x^3$  تابع او د تابع د مشتق گراف وروسته له حله رسم کړي.

مور غواړو په  $x_0$  ټکي کې مشتق پیدا کړو او همداسې د مشتق تابع.

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \\ \Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{(x_0 + \Delta x)^3 - x_0^3}{\Delta x} \\ \Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{x_0^3 + 3x_0^2\Delta x + 3x_0(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - x_0^3}{\Delta x} \\ f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (3x_0^2 + 3x_0\Delta x + (\Delta x)^2) = 3x_0^2 \end{aligned} \quad \left\{ \begin{aligned} \Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{3x_0^2\Delta x + 3x_0(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3}{\Delta x} \\ \Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{\Delta x(3x_0^2 + 3x_0\Delta x + (\Delta x)^2)}{\Delta x} \\ \Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} &= 3x_0^2 + 3x_0\Delta x + (\Delta x)^2 \end{aligned} \right.$$

نو  $f'(x_0) = 3x_0^2$  د تابع  $f(x) = x^3$  مشتق دی په ځای یا ټکي  $x_0$  کې.

د مشتق تابع داسې ده:  $f'(x_0) = 3x_0^2$

د  $x_0$  په ځای کې د تابع مشتق او د مشتق تابع ۷۱

بیلگه ۳: یوه د  $f(x) = \frac{1}{x}$  تابع ورکړشوي. غوښتنې یا ثبوت:

الف: د تابع گراف په یاد راوړئ.

ب: په  $x_0$  ټکي کې د تابع مشتق پیدا کړئ.

پ: په  $x_0$  ټکي کې د مشتق تابع هم پیدا کړئ.

$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x_0 - x_0 - \Delta x}{x_0(x_0 + \Delta x)}$ $\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-\Delta x}{x_0(x_0 + \Delta x)}$ $\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-\Delta x}{\Delta x \cdot x_0(x_0 + \Delta x)}$ $\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-1}{x_0(x_0 + \Delta x)}$ $\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{1}{x_0^2 + x_0 \cdot \Delta x}$	$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ $\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{1}{x_0 + \Delta x} - \frac{1}{x_0}}{\Delta x}$ $\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{x_0 - (x_0 + \Delta x)}{x_0(x_0 + \Delta x)}}{\Delta x}$ $\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x_0 - (x_0 + \Delta x)}{x_0(x_0 + \Delta x) \Delta x}$ $\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-\Delta x}{x_0(x_0 + \Delta x) \Delta x}$
--	--

د پورته اخري مساوات لیمیت د  $\Delta x \rightarrow 0$  لپاره نیسو:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( -\frac{1}{x_0^2 + x_0 \cdot \Delta x} \right) = -\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{x_0^2 + x_0 \cdot \Delta x}$$

نو لرو:  $f'(x_0) = -\frac{1}{x_0^2}$ . دا د  $x_0$  په ځای کې د  $f$  مشتق دی.

$$\underline{\underline{f'(x) = -\frac{1}{x^2}}}$$

د  $x_0$  په ځای کې د تابع مشتق او د مشتق تابع

$f(x) := x^3 + x^2 - 4x - 1$        $f'(x) := 3x^2 + 2x - 4$

وضعيه کمياتو سيستم کې تابع او د تابع مشتق:

تابع (سور):  $f(x) = x^3 + x^2 - 4x - 1$

د تابع مشتق (شين):  $f'(x) = 3x^2 + 2x - 4$

د تابع مشتق هم تابع ددع. مور دا د مشتق يا د ميل تابع بللي.

تمرینونه:

په لاندې مساواتو کې د  $f$  تابع مشتق او د مشتق تابع وښايئ

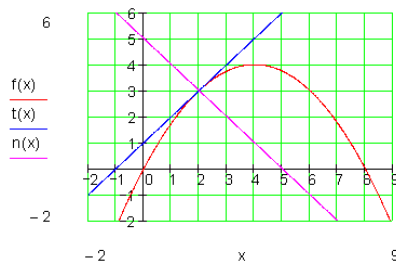
a)  $f(x) = 4x^4 - 3x^3 + x^2 - x - 1$

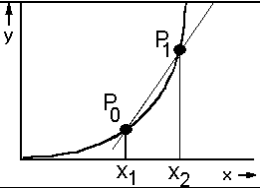
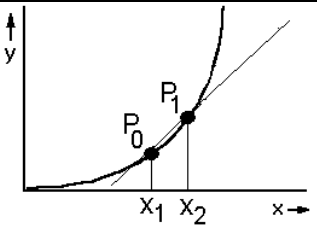
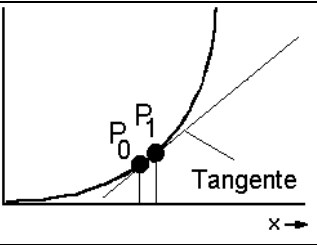
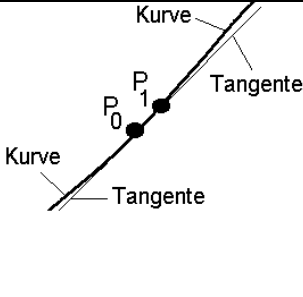
b)  $f(x) = x - \sqrt{x}$

c)  $f(x) = \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{x^3}$

d)  $f(x) = 3x^2 + 0.4x - 5$

د تانجنت او عمود تعريفونه او خويونه



	<p>لاندي يا مخاڅڅ څيره يو منحنی او یوه قاطع (غوڅی) په ټکو <math>P_0</math> او <math>P_1</math> کې ښايي.</p>
	<p>اوس غواړو، چې ټکی <math>P_0</math> د ټکي <math>P_1</math> په لور و خوڅيري. پام: ددې سره قاطع خپل ميل تغيروي</p>
	<p>بالاخره غواړو، چې <math>P_1</math> ټکی و <math>P_0</math> ټکي ته ناپای ډېر نږدې شي. په دې حالت کې قاطع داسې په نامه تانجنت ته ورنږدې کيږي.</p>
	<p>که پوره وپيژندلی شو، چې د ټکو <math>P_1</math> او <math>P_0</math> په شاوخوا غزوو يا لويوو: که د <math>P_1</math> ټکی و <math>P_0</math> ټکي ته ناپای نږدې شي، نو کتل کيږي، چې تانجنت په ټکي <math>P_0</math> کې همداسې حالت غوره کوي، لکه منحنی په <math>P_0</math> ټکي کې.</p>

د دې خوږونو غوره غوره والی يا پایله:

ومو ليدل، چې د تانجنت ميل په  $P_0$  ټکي کې په همدې ټکي کې د منحنی ميل هم دی. له دې دا پایله لرو، چې که څوک غواړي د منحنی ميل په  $P_0$  ټکي کې پيدا کړو، بسيا کوی، چې د تانجنت جگوالی يا ميل په  $P_0$  ټکي کې پيدا کړي.

فعالیتونه:

1- پورته شکلونه بيا سره پرتله کړئ. د ميل په هکله يې فکر وکړئ، چې کوم ميل زيات دی؟

2- تانجنت تعريف کړئ او په شکل کې يې وښايست.

3- قاطع (سيکانټ) تعريف کړئ او په څېره کې يې وښايست.

په لاندې کې د تانجنت او عمود عمومي فرمول راباسو:  
 پيل: تانجنت دې د  $f(x)$  گراف د  $P(x_0, f(x_0))$  په ټکي کې لمس کړي. عمود (نورمال)  
 دې د  $f(x)$  گراف د په  $P(x_0, f(x_0))$  ټکي کې عمود يا ولاړ غوڅ کړي.  
 د تانجنت مساوات:  $t(x) = m_t \cdot x + b_t$

$$t(x) = f'(x_0) \cdot x + b_t \quad (1) \quad \text{د } m_t = f'(x_0) \text{ سره لیکو:}$$

دا چې  $P(x_0, f(x_0))$  تانجنت يو ټکی دی، نو لاس ته راځي:

$$t(x_0) = f(x_0) \Leftrightarrow f'(x_0) \cdot x + b_t = f(x_0)$$

$$\Leftrightarrow b_t = f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0$$

په (1) کې ږدو، نو لږ:

$$\begin{aligned} t(x) &= f'(x_0) \cdot x + f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0 = f'(x_0) \cdot x + f(x_0) \\ &= f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0) \end{aligned}$$

عمود (نورمال): د منحنی سره په همغه ټکي کې چې تانجنت په پروت دی، عمود ځغلي.  
 د عمود ميل:

$$\begin{aligned} m_n &= -\frac{1}{m_t} = -\frac{1}{f'(x_0)} \\ \Rightarrow n(x) &= \underline{\underline{-\frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0) + f(x_0)}} \end{aligned}$$

بيلگه:

$$\text{د } f(x) = 2x - \frac{1}{4}x^2 \text{ تابع لرو.}$$

د تابع تانجنت او عمود (نورمال) پيدا کړئ:

حل: په لاندې توگه د تابع مشتق نيسو او گراف يې (څيره لاندې کښل شوي) کارو:

$$f(x) = 2x - \frac{1}{4}x^2 \Rightarrow f'(x) = 2 - \frac{1}{2}x \quad \text{نو لرو:}$$

د تانجنت ميل په ټکي  $x_0$  کې د ميل ارزښت 3 لري.

$$f'(x_0) = 3 \Leftrightarrow 2 - \frac{1}{2}x_0 = 3 \Leftrightarrow x_0 = -2$$

$$f(x) = f(-2) = 2 \cdot (-2) - \frac{1}{4}(-2)^2 = -5$$

د  $P(-2, -5)$  په ټکي کې تانجنت په  $f(x)$  باندې ارزښت 3 لري.

$$f(x) = 2x - \frac{1}{4}x^2 \Rightarrow f'(x) = 2 - \frac{1}{2}x, P(2, f(2))$$

$$t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

د  $x_0 = 2$  په ځای کې لرو:

$$t(x) = f'(2)(x - 2) + f(2)$$

$$f(2) = 2 \cdot 2 - \frac{1}{4} \cdot (2)^2 = 4 - 1 = 3 \quad f'(2) = 2 - \frac{1}{2} \cdot 2 = 2 - 1 = 1$$

$$\Rightarrow t(x) = 1(x - 2) + 3 = x - 2 + 3 = \underline{\underline{x + 1}}$$

د نورمال یا عمود پیدا کونه:

$$f(x) = 2x - \frac{1}{4}x^2 \Rightarrow f'(x) = 2 - \frac{1}{2}x, P(2 | f(2))$$

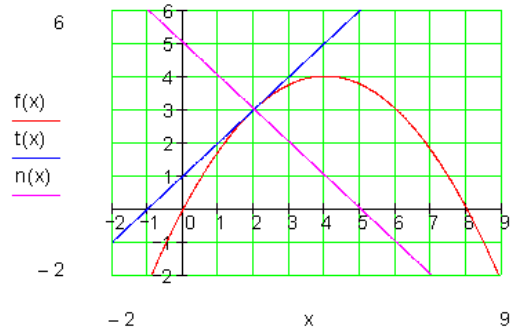
$$n(x) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) + f(x_0)$$

د  $x_0 = 2$  سره لاندې راځوي:

$$n(x) = \frac{1}{f'(2)}(x - 2) + f(2)$$

$$f(2) = 2 \cdot 2 - \frac{1}{4} \cdot (2)^2 = 4 - 1 = 3 \quad f'(2) = 2 - \frac{1}{2} \cdot 2 = 2 - 1 = 1$$

$$\Rightarrow n(x) = -\frac{1}{1}(x - 2) + 3 = -x + 2 + 3 = \underline{\underline{-x + 5}}$$





## د تانجنت او ولاړ یا عمود عمومي مساوات

بیلگه: تابع  $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + 1$  لرو.

د تانجنت میل:

د یوه تابع د گراف میل په ټکي  $P(x_0 | f(x_0))$  کې همغه معنی لري، لکه په دې ټکي د تانجنت میل.

مور  $f(x)$  تابع او د تابع مشتق ټیک په پام کې نیسو.

مور  $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + 1$  مربع تابع لرو

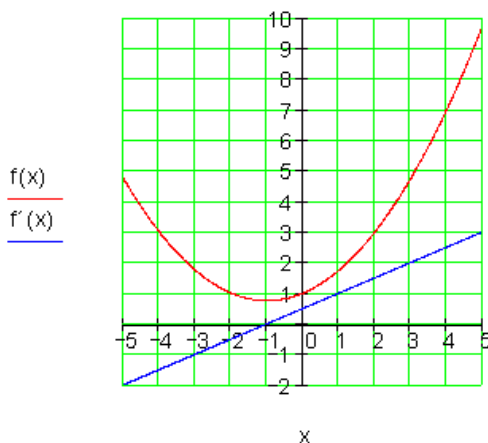
د تابع مشتق  $f'(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

ارزینتجدول:

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
f(x)	4,75	3	1,75	1	0,75	1	1,75	3	4,75	7	9,75
f'(x)	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3

$$f(x) := \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + 1$$

$$f'(x) := \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$



د  $f(x)$  ارزینتجدول څخه لوستلی شو

چې د پورته مربع تابع ککرټکی دی:

ارزینت لپاره  $x = -1$  د  $S(-1, 0.75)$

$f'(-1) = 0$  د میل تابع ارزینت دی:

دا دا معنی لري، چې په ککرټکي (د

رأس ټکی) کې د  $f'(x)$  میل صفر دی.

تانجنت په  $S$  کې هم دا معنی لري، چې

صفر دی، دا هلته پروت (افقي) ځغلي؛

یعنې د  $-x$  محور سره غبرگ ځغلي.

گرافونه:

بیلگه:

$$f(x) = 2x^3 + 7x^2 + x - 7 \text{ تابع لرو:}$$

تانجنت دې پیدا کړی شي، چې د  $f(x)$  گراف د  $P(-2, f(-2))$  په ټکي کې لمسوي،

$$f(x) = 2x^3 + 7x^2 + x - 7 \Rightarrow f'(x) = 6x^2 + 14x + 1 \quad P(-2 | f(2)) \Rightarrow x_0 = -2$$

$$t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

$$f'(x_0) = f'(-2) = 24 - 28 + 1 = -3$$

$$f(x_0) = f(-2) = -16 + 28 - 2 - 7 = 3$$

$$\Rightarrow t(x) = -3(x + 2) + 3 = -3x - 6 + 3 = \underline{\underline{-3x - 3}}$$

پایله:

د  $f(x)$  تابع گراف کې تانجنت او عمود په  $P(x_0, f(x_0))$  ټکي کې لاندې بڼه لري.

د تانجنت مساوات

د عمود مساوات

$$t(x) = \underbrace{f'(x_0)}_{\text{جگپښه}}(x - x_0) + f(x_0)$$

$$n(x) = -\frac{1}{\underbrace{f'(x_0)}_{\text{جگپښه}}}(x - x_0) + f(x_0); \quad f'(x_0) \neq 0$$

تمرینونه: د لاندې توابعو گرافونه وکارئ، د تانجنت او د عمود مساوات ولیکئ.

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x \quad x_0 = 2$$

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{x} + 3 \quad x_0 = 1$$

$$f(x) = x^3 - x^2 - 5x - 2 \quad x_0 = -\frac{3}{2}$$

## د مشتق شمیرني قوانین

د مشتق شمیرني شمیر قوانین، لک څنګه په اعدادو، ترادفونو او حدونو (پوله ارزښتونو) کې اجرا کيږي، په همدې ډول مشتق شمېر نه کې هم دا قوانین باوري دي.

وبه ښايو، چې د جمعې، ضرب او ... مشتقونه د مشتقونو جمع، ضرب او ... ده. (په وېش کې باید مخرج صفر نه وي).

فعالیت:

که  $f(x) = x^2 + x$  او  $g(x) = x^3 + 2$  ولرو،  $(f(x) + g(x))'$  د  $(f(x) - g(x))'$ ،  $(f(x) \cdot g(x))'$  او  $(\frac{f(x)}{g(x)})'$  د پیدا کولو په هکله فکر وکړئ.

قضیه (د جمعې قاعده):

که یو تابع  $f(x)$  د دوه توابعو  $u(x)$  او  $v(x)$  د جمعې څخه جوړ وي، نو مشتق یې هم د هر تابع د مشتق د جمعې څخه جوړ دی، یعنې:

$$f(x) = u(x) + v(x)$$

$$\Rightarrow f'(x) = u'(x) + v'(x)$$

ښوونه:

$$f(x_0) = u(x_0) + v(x_0)$$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[u(x_0 + \Delta x) - u(x_0)] + [v(x_0 + \Delta x) - v(x_0)]}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[u(x_0 + \Delta x) - u(x_0)]}{\Delta x} + \frac{[v(x_0 + \Delta x) - v(x_0)]}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow f'(x_0) = \underbrace{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ \frac{u(x_0 + \Delta x) - u(x_0)}{\Delta x} \right]}_{u'(x_0)} + \underbrace{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ \frac{v(x_0 + \Delta x) - v(x_0)}{\Delta x} \right]}_{v'(x_0)}$$

$$\Leftrightarrow f'(x) = \underline{\underline{u'(x_0) + v'(x_0)}}$$

بیلگه:

که توابعو  $f(x) = 5x^2 + 3x$  ,  $u(x) = 5x^2$  ,  $v(x) = 3x$  ولرو شتق وشمري.

بنونه:

$$\begin{aligned} f(x) &= 5x^2 + 3x & u(x) &= 5x^2 & v(x) &= 3x \\ \Rightarrow u'(x) &= 10x & v'(x) &= 3 \\ f'(x) &= u'(x) + v'(x) = \underline{10x + 3} \end{aligned}$$

فعالیت: که چيري  $f_1, f_2, \dots, f_n$  توابع او  $k_1, k_2, \dots, k_n$  ثابت عددونه وي نو لرو (پي له بنووني):

$$\begin{aligned} &[k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x) + \dots + k_n f_n(x)]' \\ &= k_1 f_1'(x) + k_2 f_2'(x) + \dots + k_n f_n'(x) \end{aligned}$$

قضيه (د ضرب قاعده): که  $f(x)$  او  $g(x)$  دوه توابع وي، نو بنايو:

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

$$\frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} \quad \text{بنونه:}$$

د مناسب فورم- يا بڼه بدلون يعني په صورت کې د  $-f(x_0)g(x) + f(x_0)g(x)$  ورزياتولو څخه دا لاندې لرو:

$$\begin{aligned} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} &= \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x) + f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} \\ &= \frac{(f(x) - f(x_0))g(x) + f(x_0)(g(x) - g(x_0))}{x - x_0} \end{aligned}$$

$$= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot g(x) + f(x_0) \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$$

له پورته څخه لاس راځي يعني د دواړو لورو ليميټ نيسو:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) + f(x_0) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \\ &= f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0) \end{aligned}$$

بیلگه:

که  $g(x) = x^2 - 1$  او  $h(x) = \sqrt{x}$  ولرو، نو د  $f(x) = g(x)h(x)$  مشتق غواړو پیدا کړو.

ښوونه:

په لاندې توگه مخ ته خو:

$$f(x) = (x^2 - 1)\sqrt{x}, f'(x) = 2x\sqrt{x} + (x^2 - 1)\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{5}{2}x\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

قضیه (د وېش قانون):  $f$  او  $g$  دې دوه توابع وي. غواړو وښايو:

$$\left[ \frac{f(x)}{g(x)} \right]' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

ثبوت: کولای شو، چې دا قضیه له دوه لارو یا طریقو وښايو (ثبوت کړو).  
لومړی لار یا طریقه یې په لاندې کې ښايو او دویمه لار دې گران زده کوونکي وښايي:

$$\begin{aligned} \left[ \frac{f(x)}{g(x)} \right]' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x+h) - f(x)}{g(x+h) - g(x)}}{h}, \quad g(x) \neq 0 \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x+h)}{g(x+h)g(x)h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{g(x+h)g(x)} \frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x+h)}{h} \right] \end{aligned}$$

غواړو  $f(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x)$  صورت ته ور زیات کړو، نو لرو:.

$$\begin{aligned} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{g(x+h)g(x)} \cdot \frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x) + f(x)g(x) - f(x)g(x+h)}{h} \\ &= \frac{1}{g(x)g(x)} \left[ \lim_{h \rightarrow 0} g(x) \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} f(x) \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right] \\ &= \frac{1}{[g(x)]^2} \left[ g(x) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f(x) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right] \\ &= \frac{1}{[g(x)]^2} [g(x) \cdot f'(x) - f(x) \cdot g'(x)] = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2} \end{aligned}$$

$$\left[ \frac{f(x)}{g(x)} \right]' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2} \quad \text{يعني لرو:}$$

بيلگه:

د  $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 4}$  تابع (د  $x^2 - 4 \neq 0$  سره) مشتق غواړو پيدا کړو.

حل: که چېرې  $g(x) = x^2$  او  $h(x) = x^2 - 4$

$$g'(x) = 2x$$

وضع شي نو لرو:

$$h'(x) = 2x$$

او د ويش قانون له مخي لرو:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left[ \frac{g(x)}{h(x)} \right]' = \frac{g'(x)h(x) - g(x)h'(x)}{[h(x)]^2} \\ &= \frac{2x(x^2 - 4) - x^2 \cdot 2x}{[x^2 - 4]^2} \\ &= \frac{-8x}{[x^2 - 4]^2} \end{aligned}$$

پوښتنې:

که  $f(x) = 3x^2 + 5x - 8$  او  $g(x) = 5x^3 - 3x + 4$  ولرو، نو:

- د توابعو د توابعو د جمعي مشتق، د ضرب مشتق د توابعو د وپس ( $f(x) \neq 0$ ) مشتق پيدا کړئ، که شونى وي له مختلفو لارو.

## د الجبري توابعو مشتق

الجبري او نورو توابعو بيژندونه (تعريفونه):

1- يو بنسټيز تابع الجبري بلل کيږي، که د ترتيب قانون يې د مساواتو له لارې ورکړ شوى وي، په هغو کې چې په ترمونو کې د مساواتو د متحولو سره فقط الجبري

عملی (جمع، تفریق، ضرب، تقسیم) چې مخرج یې صفر نه وي (توانکونه او جذرنیونه) د توان-اوربینی اکسپوننتونه مثبت او تام عددي دي) کارول شوي وي.

2- نالجبري توابع ترانسځنډنت بلل کيږي، لکه اکسپوننشل-ولوگاریمی- او د زاویو توابع.

3- یو الجبري تابع راشنل بلل کيږي، که د ترتیب قانون یې د یو مساوات سره ورکړ شوی وي، په کوم کې چې ناپای پیري راشنل د شمیر عملی ((جمع، تفریق، ضرب، تقسیم) چې مخرج یې صفر نه وي) توانکونه او جذرنیونه (د توان-اوربینی اکسپوننتونه مثبت او تام عددي دي) کارول شوي وي.

فعالیت:

په څېر د  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  یوه تابع د  $f(x)$  که د

سره لیکل شوی وي، څه بلل کيږي؟  $n \in \mathbb{N} \wedge a_1 \in \mathbb{R}$

په د ویش  $v$  او  $u$  د دوه توابعو تابع  $f$  د  $v(x) = 3x + 6$  او  $u(x) = x^2 + 4x + 4$  لرو:

سره ولیکئ  $v(x) \neq 0$  د  $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$  څېر لکه

تابع مشتق ونیسئ. پسي د  $v; u$  د تابع تعریف ساحه وینایاست او بیا د هرې یوې

مشتقونو وپش په نښه کولو پسي د مشتقونو وپش (چې مخرج صفر نه وي)، د

مشتق سره پرتله کړئ.

بیلگه:

د  $f(x) = \sqrt{x}$  تابع ورکړ شوی په  $x_0$  کې د تابع مشتق پیدا کړئ او د مشتق تابع په گوته کړئ.

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} & \Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{x_0 + \Delta x - x_0}{\Delta x(\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0})} \\ \Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{\sqrt{x_0 + \Delta x} - \sqrt{x_0}}{\Delta x} & \Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{\Delta x}{\Delta x(\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0})} \\ \Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{(\sqrt{x_0 + \Delta x} - \sqrt{x_0})(\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0})}{\Delta x(\sqrt{x_0 + \Delta x} - \sqrt{x_0})} & \Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{1}{\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}} \end{aligned}$$

$$f'(x_0) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}} \right) = \frac{1}{\sqrt{x_0} + \sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$$

نو د  $x_0$  په ځای کې  $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$  د تابع  $f(x) = \sqrt{x}$  مشتق دی.

د تېرو درسونو پر بنسټ  $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$  د مشتق تابع ده.

د  $f(x) = x^q$  ;  $q \in Q$  ډوله توابعو مشتق:

د شمیرني له مخې لاندې لاس ته را وړني لرو:

تابع	د مشتق تابع	
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$	$f'(x) = 1 \cdot x^0$
$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2 \cdot x$	$f'(x) = 2 \cdot x^1$
$f(x) = x^3$	$f'(x) = 3 \cdot x^2$	$f'(x) = 3 \cdot x^2$
$f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$f'(x) = -1 \cdot x^{-2}$
$f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}}$

که دا پورته پنځه مشتقونه یو د بل سره پرتله کړو، نو اټکل کيږي، چې لاندې جوړښتقانون باور لري:

د توان قانون (بي له بنوني)

(پونټخ) قانون:

1- مختني اکسپوننت د متحولي  $x$  د مخ د فاکتور په څیر لیکل کيږي.

2- نوی اکسپوننت همغه پخوانی اکسپوننت دی، چې په یو کم شوی.

$$f(x) = x^q \Rightarrow f'(x) = q \cdot x^{q-1} \text{ د } q \in Q \text{ سره}$$

بیلگه:



د  $f(x) = \frac{1}{x^2}$  مشتق پيدا کړئ.

بنوونه:

$$f(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2} \Rightarrow f'(x) = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$$

بيلگه:

د  $f(x) = 3x^4$  تابع مشتق پيدا کړئ.

بنوونه:

$$f(x) = 3x^4 \quad c = 3 \quad u(x) = x^4 \Rightarrow u'(x) = 4x^3$$

$$f'(x) = c \cdot u'(x) = 3 \cdot 4x^3 = \underline{\underline{12x^3}}$$

بيلگه:

غواړو د  $f(x)$  تابع مشتق د  $x = 2$  په ځای کې ونیسو:

$$f(x) = x^2 + 3$$

$$x = 2: \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(2 + \Delta x) - f(2)}{\Delta x} = 4 + \Delta x$$

$$f'(2) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (4 + \Delta x) = \underline{\underline{4}}$$

$$x = u: \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(u + \Delta x) - f(2)}{\Delta x} = 2u + \Delta x$$

$$f'(u) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2u + \Delta x) = \underline{\underline{2u}}$$

بيلگه:

د تابع  $f(x) = \frac{1}{x+1}$  مشتق د  $x = 2$  په ځای کې پيدا کړئ.

بنوونه:

$$f(x) = \frac{1}{x+1}$$

$$x = 2: \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(2 + \Delta x) - f(2)}{\Delta x} = \frac{1}{3(3 + \Delta x)}$$

$$f'(2) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{-1}{3(3 + \Delta x)} \right) = \underline{\underline{-\frac{1}{9}}}$$

$$x = u: \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(u + \Delta x) - f(2)}{\Delta x} = \frac{-1}{(u + \Delta x + 1)(u + 1)}$$

$$f'(u) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} = \frac{-1}{(u + \Delta x + 1)(u + 1)} = \underline{\underline{-\frac{1}{(u + 1)^2}}}$$

بیلگه:

(توان (Potence) مشتق، چی طبیعی جگ عدد یا اکسپوننت لري: مور د  $y(f(x) = x^n$  ,  $1, 2, 3, \dots$  تابع لرو او غوارو مشتق يي پيدا کړو: بنوونه: مور په لاندې توگه مخ ته خو.

د بېنوم جملی په بنسټ په هر  $x_0$  ځای کې دا لاندې باور لري.

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{(x_0 + h)^n - x_0^n}{h} \\ &= \frac{\binom{n}{0}x_0^n + \binom{n}{1}x_0^{n-1}h + \binom{n}{2}x_0^{n-2}h^2 + \dots + \binom{n}{n}h^n - x_0^n}{h} \\ &= \frac{1}{h} \left( x_0^n + nx_0^{n-2}h + \frac{n(n-1)}{2}x_0^{n-2}h^2 + \dots + h^n - x_0^n \right) \\ &= nx_0^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x_0^{n-2}h + \dots + h^{n-1} \end{aligned}$$

د  $h \rightarrow 0$  لپاره تابع  $y = x^n$  د  $x_0$  په هرځای کې، د لاندې مشتق سره، د مشتق قابلیت لري:

$$\left( \frac{dy}{dx} \right)_{x=x_0} = f'(x) = nx^{n-1}$$

ددې پورته بیلگې بل ډول بنوونه دي د پوښتنې په څېر وي.

تمرینونه: \_ که یو پولینوم  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  د  $n \in \mathbb{N} \wedge a_1 \in \mathbb{R}$  سره ورکړ شوی وي، مشتق یې پیدا کړئ.  
 - د توابعو مشتق د توان قانون له مخې پیدا کړئ.

a)  $f(x) = x^5$

b)  $f(x) = x^6$

c)  $f(x) = \frac{1}{x^2}$

d)  $f(x) = \frac{1}{x^5}$

e)  $f(x) = \sqrt{x}$

$f(x) = \sqrt[4]{x^3}$

g)  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

h)  $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$

## د زخیري (مرکب) توابعو مشتق

تابع کیدی شي د  $v$  تابع سره وتړل شي، که د د باندني تابع (خنځیروني قاعده)، پیژند ورشو (دتعریف ساحه)  $D(u)$  د دنني تابع د  $W(v)$  سره گډ توکي یا عناصر ولري.

ددې لپاره لیکو:  $u \circ v(x) = u(v(x))$ ، که د  $f$  تابع د  $y = f(x) = u(z)$  سره او  $Z = v(x)$  وي.

فعالیت:

\_ په زخیري تابع کې د  $f(g(x))$  پیژند ورشو او همداسې د تابع ورشو په هکله خپل نظر څرگند کړئ.

په ځای کې څه دی او  $x=3$  تابع ارزښت د  $f(g(x)) = (x^2 + 2x + 1)^2$  وویاست، چې د د تابع ساحې کومې دي او په مشتق نیولو کې یې فکر وکړئ.

\_ که یوه په خوښه زخیري تابع ولرو، نو د تابع ورشو په گوته کړئ او وهڅیږئ، چې مشتق یې پیدا کړئ.

اوس نو د  $x = x_0$  ځای کې د  $y = f(g(x))$  تړلي یا خنځیري تابع مشتق وروالی څیږو:

$$f(x) = f[g(x)] \\ \Rightarrow f'(x) = f'(g) \cdot g'(x)$$

د نننی مشتق د باندنی مشتق (دادې ورپورته شي) ددې لپاره نیسو چی:

1- د  $g(x)$  د نننی تابع د  $x = x_0$  په خای کې مشتقور ده. دانو بیا باید د  $x_0$  په یوه معلوم تعریف شوي چاپیریال کې متمادي (نه پریکیدونکی) وي.

مور لرو:  $g(x+h) \rightarrow g(x_0)$  د  $h \rightarrow 0$  لپاره.

همداسې  $g(x_0+h) = g(x_0) + k$  داسې، چې  $k \rightarrow 0$  د  $h \rightarrow 0$  لپاره.

2- که د  $y = f(z)$  د باندنی تابع په  $z = z_0 = g(x_0)$  کې د مشتق قابلیت ولري.

د  $y = f(g(x))$  کمبنتویش کیدی شي په لاندې ډول ورکړ شي او بڼه (فورم) یې هم بدله شي

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(g(x_0+h)) - f(g(x_0))}{h} = \frac{f(g(x_0+h)) - f(g(x_0))}{g(x_0+h) - g(x_0)} \\ = \frac{f(z_0+k) - f(z_0)}{k} \cdot \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h}$$

که  $h \rightarrow 0$  لاره شي (همداسې  $k \rightarrow 0$  خواته خي) نو دا اړیکې مشتق ته خي:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0} = \left(\frac{d(g(x))}{dx}\right)_{x=x_0} = \left(\frac{df(z)}{dz}\right)_{z=z_0=g(x_0)} \cdot \left(\frac{dg(x)}{dx}\right)_{x=x_0}; \dots\dots (*)$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0} = \left(\frac{d(g(x))}{dx}\right)_{x=x_0} = \left(\frac{df(z)}{dz}\right)_{z=z_0=g(x_0)} \cdot \left(\frac{dg(x)}{dx}\right)_{x=x_0}$$

که چیرې د خای په خای (فیکس) خای  $x = x_0$  لپار بیرته  $x$  نیسو، نو کیدی شي چې (\*) فرمول په لاندې لنډ ډول ورکړ شي او د  $z = g(x)$ ،  $y = (z)$  لپاره باور ولري:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} \dots\dots\dots (**)$$

په پام کې دې وي، چې  $\frac{dy}{dx}$  د  $z = g(x)$  په ځای کې باید ترتیب (تنظیم) شي. P  
SEP

دا (\*) فرمول ځنځيري قاعده(لار،قانون) بلل کېږي او د پورته نونو يا فرضيو سره باوري دی. دا په ساده ډول په یاد لرلی شو، ځکه چې ښی خوا د کيني خوا سره د فورمال دزياتيدلو له لاري منځ ته راغلي.

د پورته ښوونې لاس ته راوړنه دا لاندې جمله ده:

زنجيري يا مرکبه قاعده

لرو:  $f(z) = f(g(x))$ ، نو د  $z = g(x)$  تابع په  $x$  او د  $y = f(z)$  تابع په  $z = g(x)$  کې د مشتق قابليت لري يا مشتقور دی، نو ترلی ورکړ شوی د  $y = f(g(x))$  تابع هم په  $x$  کې د مشتق قابليت لري او دا باوري کېږي.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = \frac{df}{dz} \cdot \frac{dg}{dx} = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) \quad \text{لند:}$$

بيلگه:

د  $f(x) = (x^2 + 2)^2$  مشتق ونيسئ.

$$f(x) = (x^2 + 2)^2$$

$$\text{بدلون} \quad \text{چون: } z(x) = x^2 + 2 \quad f(z) = z^2 \Rightarrow f'(z) = 2z \quad z'(x) = 2x$$

$$f'(x) = f'(z) \cdot z'(x) = 2z \cdot 2x = 2(x^2 + 2) \cdot 2x = \underline{\underline{4x^3 + 8x}}$$

بیلگه:

د  $y = \sin x^2$  تابع یوه په لاندې توگه ورکړ شوی خنځیري تابع ده:

$$y = \sin z, \quad z = x^2$$

دا دواړه توابع په هرځای کې مشتق وړدي. له دې امله هر چیرته باور لري:

$$\frac{d \sin x^2}{dx} = \frac{d \sin z}{dz} \cdot \frac{dx^2}{dx} = \cos z \cdot 2x = 2x \cdot \cos x^2$$

بیلگه:

د  $y = \sin^2 x$  تابع په لاندې ډول تړلی ورکړ شوی.

$$y = z^2, \quad z = \sin x$$

دلته هم دواړه توابع هر چیرته مشتق وړ دي. نو له دې امله هر چیرته باور لري:

$$\frac{d \sin^2 x}{dx} = \frac{dz^2}{dz} \cdot \frac{d \sin x}{dx} = 2z \cdot \cos x = 2 \sin x \cdot \cos x = \sin 2x$$

بیلگه:

د  $f(x) = (x^5 + 4)^8$  تابع مشتق وشمېرئ!حل: هرکله چې  $g(x) = x^8$  او  $h(x) = x^5 + 4$  وضع کوو نو لرو:

$$f(x) = g(h(x))$$

$$f'(x) = (g(h(x)))' = g'(h(x)) \cdot h'(x)$$

$$h'(x) = 5x^4, \quad g'(x) = 8x^7$$

$$f'(x) = 8(h(x))^7 5x^4 = 40(x^5 + 4)^7 \cdot x^4$$

تمرینونه:

$$h(x) = \frac{1}{(x^3 - 4x^2 + 1)^2} \quad - ۱$$

$$۲ - \text{که چیرې } f(x) = (3 - 2x + x^2)^4 \text{ وي، نو } f' \text{ پیدا کړئ.}$$

د لاندې تابعو مشتقونه هم ونیسئ

د مثلثاتي توابعو مشتق

۹۰

$$f(x) = (1 - 2x^3)^4 \quad :1$$

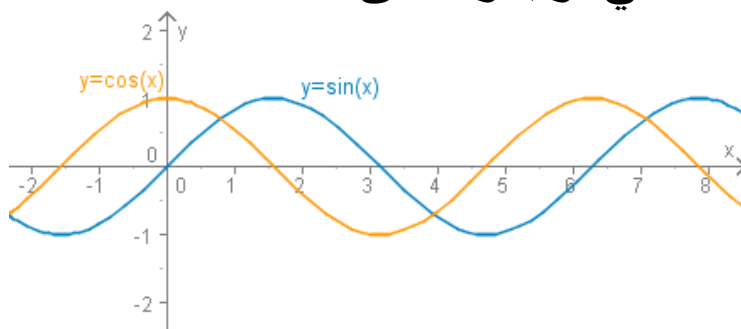
$$f(x) = (2x^2 + 1)^{-2} \quad :2$$

$$h(x) = \frac{1}{\sqrt{2+x^2+x^3}} \quad :3$$

$$h(z) = \sqrt{\frac{1-z}{1+z}} \quad :4$$

$$f(t) = \sqrt[3]{3t+1} \quad :5$$

د مثلثاتي توابعو مشتق



$$\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2} \quad \dots I$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2} \quad \dots II$$

فعاليت:

د لاندي توابعو مشتقونه وشميرئ:

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x \quad : a$$

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x \quad : b$$

$$f'(x) = \frac{d \tan x}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x} \quad c$$

مور په لاندې کې پورتنې درې حالتونه ښايو او د نورو درې حالتونو ښوونه گرانو زده کوونکو ته پرېږدو.

قضیه:

د ساين تابع مشتق غواړو وښايوو چې  $f'(x) = (\sin x)' = \cos x$  دی:  
 ددې قضیې د ښوولو لپاره پورتنې په ننوتنه کې دوه لومړني فرمولونه په کار راځي.  
 د  $y = f(x) = \sin x$  ساين تابع د هر  $x$  لپاره تعريف ده، نو د  $x_0$  په خوښه ټاکلوڅخه  
 لاس ته راځي:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{\sin(x_0 + h) - \sin x_0}{h} \\ &= \frac{2}{h} \cos \frac{2x_0 + h}{2} \cdot \sin \frac{h}{2} = \cos \left(x_0 + \frac{h}{2}\right) \cdot \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}. \end{aligned}$$

د لیمیت د برخې په پام کې لرلو سره لرو:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left( \cos \left(x_0 + \frac{h}{2}\right) \cdot \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \right) = \cos x_0.$$

د ساين تابع په هر ځای کې، د لاندې مشتق سره، د مشتق قابلیت لري يا مشتقور ده:

$$\left( \frac{d \sin x}{dx} \right)_{x=x_0} = f'(x_0) = \cos x_0, \quad (X \text{ په لينده کچ يا راديان})$$

⌈ P T P ⌋  
⌋ SEP SEP ⌋

قضیه:

همداسې ښوول کيږي چې کوساين تابع هم په هر ځای کې مشتقور ده، دلاندې مشتق سره:



$$\left(\frac{d \cos x}{dx}\right)_{x=x_0} = f'(x_0) = -\sin x_0, \quad \text{په لینده کچ یا رادیان}$$

د مثلثاتي توابعو مشتق ۹۲

---

ثبوت:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h) - f(x_0)}{h} = \frac{\cos(x+h) - \cos x_0}{h} \quad \text{لرو:}$$

په پورته ننوتنه کې د دویم فرمول له مخې لرو:

$$\begin{aligned} &= \frac{-2 \sin \frac{x+h+x}{2} \cdot \sin \frac{x+h-x}{2}}{h} \\ &= \frac{-2 \sin(x + \frac{h}{2}) \cdot \sin \frac{h}{2}}{h} \\ &= -\left[\sin(x + \frac{h}{2}) \cdot \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\right] \end{aligned}$$

د لیمیت او د لیمیت د ضرب قاعدې له مخې لاس ته راځي:

$$= -\lim_{h \rightarrow 0} \sin(x + \frac{h}{2}) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = -\sin x \cdot 1 = -\sin x$$

له پورته مساواتو څخه په لنډه توگه لیکو:

$$\frac{d \cos x}{dx} = -\sin x$$

قضیه:

غوارو و بنايو چي د تانجنت تابع  $f(x) = \tan x$  مشتقور ده او د مشتق تابع يې  
 $f'(x) = \frac{d \tan x}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}$  ده.

۹۳

د مثلثاتي توابعو مشتق

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(\tan x) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right) \\ &= \frac{\cos x \frac{d}{dx}(\sin x) - \sin x \frac{d}{dx}(\cos x)}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{1}{\cos^2 x} \end{aligned}$$

$$= 1 + \tan^2 x, x \neq (2k+1) \cdot \frac{\pi}{2}$$

فعاليت: گرا زده کونکي دې د  $f(x) = x^2 \sin x$  تابع مشتق پيدا کړي.  
 يادونه:  $g(x) = x^2$  او  $h(x) = \sin x$  دې خا په خا کړي.  
 بيلگه:

غوارو د  $y = \cos \frac{\pi x}{180}$  تابع مشتق پيدا کړو.

حل:

ردو:  $f(x) = \cos x$  او  $g(x) = \frac{\pi x}{180}$ ، نو  $y$  په لاندي توگه ليکلی شو:

$y = f(g(x))$  د زخيري قاعدي په بنسټ لرو:

$$\begin{aligned}
 y' &= f'(g(x)) \cdot g'(x) \\
 &= \cos'(g(x)) \cdot \left(\frac{\pi}{180} \cdot x\right)' \\
 &= -\sin(g(x)) \cdot \frac{\pi}{180} = -\frac{\pi}{180} \cdot \sin \frac{\pi x}{180}
 \end{aligned}$$

د مثلثاتي توابعو مشتق

۹۴

د لاندې توابعو مشتق پیدا کړی

$$\begin{array}{ll}
 \tan^4 x & : b \\
 \sin(3x-1) & : d \\
 \sec(\sec(x)) & : f \\
 \cos^2 2x & : a \\
 \sec x \cdot \cot ax & : c \\
 \sin^2 x - \cos x & : e
 \end{array}$$

حل a: د ځنځيري قاعدې په بنسټ او د توان يا طاقت يو فرمول په بنسټ لرو:

$$\begin{aligned}
 (\cos^2 2x)' &= 2 \cos(2x) \cdot \cos'(2x) \\
 &= 2 \cos(2x) (-\sin(2x)) \cdot 2 \\
 &= -4 \cos 2x \cdot \sin 2x
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\tan^4 x)' &= 4 \tan^3 x \cdot (\tan x)' & : b \\
 &= 4 \tan^3 x \cdot \sec^2 x
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\sec x \cdot \cot x)' &= (\sec x)' \cot x + (\cot x)' \sec x & : c \\
 &= (\sec x \cdot \tan x) \cot x + (-\csc^2 x) \sec x \\
 &= \sec x - \csc^2 x \cdot \sec x \\
 &= \sec x (1 - \csc^2 x)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 [\sin(3x-1)]' &= \cos(3x-1) \cdot (3x-1)' & : d \\
 &= \cos(3x-1) \cdot 3 = 3 \cos(3x-1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 [\sin^2 x - \cos x]' &= (\sin^2 x)' - (\cos x)' && : e \\
 &= 2 \sin x (\sin x)' - (-\sin x) \\
 &= 2 \sin x \cdot \cos x + \sin x \\
 &= \sin x (2 \cos x + 1)
 \end{aligned}$$

بیلگی:

-1 د  $f(x) = \sin x$  تابع لومړي څلور مشتقونه دې پیدا شي.

۹۵

د مثلثاتي توابعو مشتق

$$f''(x) = \cos x ; f'''(x) = -\sin x ; f''''(x) = -\cos x ; f^{(4)}(x) = -(-\sin x) = \sin x$$

-2 د  $f(x) = x \cdot \sin x$  تابع مشتق پیدا کړئ.

د ضرب قانون څخه کار واخلي.

$$f'(x) = 1 \cdot \sin x + x \cos x = \sin x + x \cdot \cos x$$

-3 د  $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ ;  $x \neq 0$  تابع مشتق پیدا کولو له پاره د ځنځير قانون څخه نار اخلو.

$$f'(x) = -\frac{2}{x^3} \cos \frac{1}{x^2} \quad \text{پروډو } z = \frac{1}{x^2} \text{ او } u(z) = \sin z \text{ ته راځي.}$$

تمرینونه:

-- د لاندې توابعو لومړی مشتق و ټاکئ.

a)  $f(x) = \sin 3x$

b)  $f(x) = \sin x \cdot \cos x$

c)  $f(x) = \sin^2 x$

d)  $f(x) = \tan x + 2 \sin 2x$

e)  $f(x) = \sin x^2$

f)  $f(x) = \sin \frac{x-1}{x+1}$

-- د  $f(x) = \sin^n x (n \in \mathbb{N})$  تابع د لومړي مشتق لپاره فرمول وښایاست یا وټاکئ.

-- د تانجنت تابع لپاره د ساین او کوساین قانون په مرسته د مشتق قانون وښایاست.

-- وښایاست چې د  $f(x) = \tan x$  لپاره  $f'(x) = 1 + \tan^2(x)$  هم باور لري.

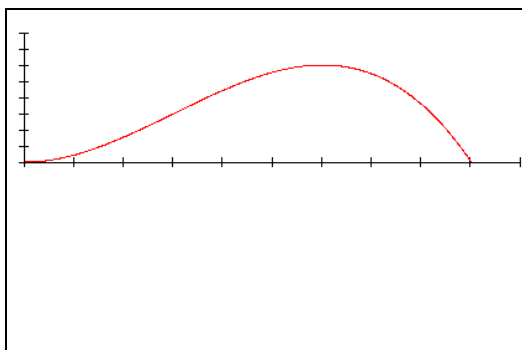
-- د ویش قانون له مخې د کوتانجنت قانون پیدا کړئ او هم د تانجنت قانون له مخې.

--- ولې د ساین تابع او د کوساین تابع په خوښه زیات مشتقور دي.

## د مشتق استعمال په پیداېښتي یا طبیعي علومو کې

د مشتق استعمال په طبیعي علومو

۹۶



په ریاضیاتو کې زیات وخت توابع راوړل کيږي، چې د یوې متحولې (اووښتونې)  $x$  په واک کې وي. په طبیعي پوهنو کې زیات وخت توابع څېړو، چې د وخت په واک کې وي. لکه په شکل کې د یوه توپ د غورځولو وهلي لار (دا وروسته روښانه کيږي)

فعالیت:

گران زده کوونکي دي د فزیک د درسونو له مخې د چټکتیا او بیړې تعریفونه ور کړي او د لار، وخت، چټکتیا او بیړې فرمولونه دي ولیکي.

بیلگه:

د یوه په برابر ډوله بیړه (تعییل) غورځول شوي شي لپاره د پیل چټکتیا (لومړنی سرعت)  $v_0 = 4 \frac{m}{s}$  او  $a = 1,8 \frac{m}{s^2}$  بیړې (تعییل) سره د لار-وخت- قانون په لاندې

ډول دی:

$$s(t) = \frac{1}{2} at^2 + v_0 t$$

پورته ورکړ شوي د  $v_0$  ارزښت لپاره باور لري:  $S(t) = 0,9t^2 + 4t$

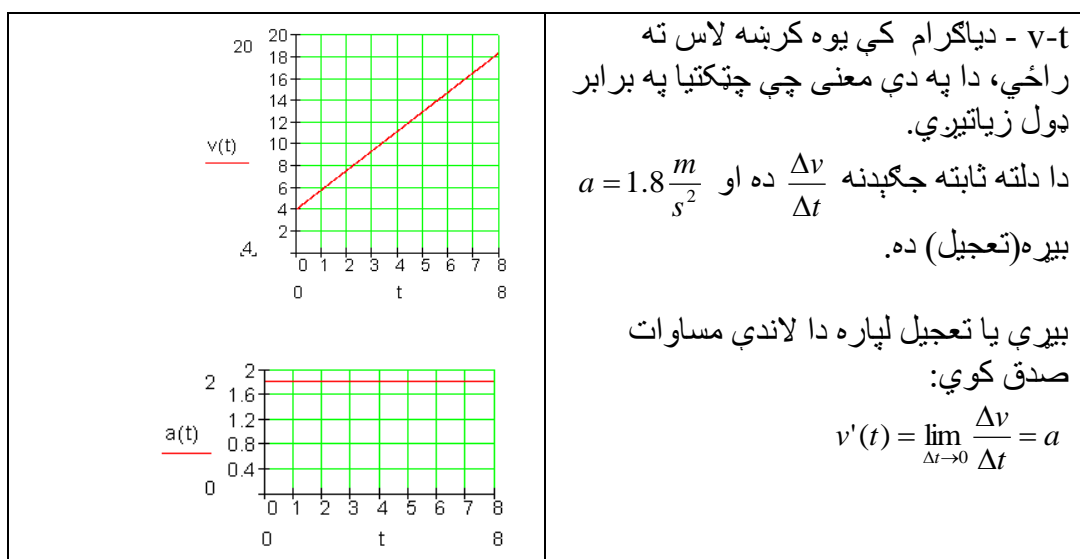
( $s$  په (ثانیه) ،  $s(t)$  په  $m$  (متر) )

منځنۍ چټکتیا (سرعت)  $\frac{\Delta s}{\Delta t}$  (ده)



۹۷

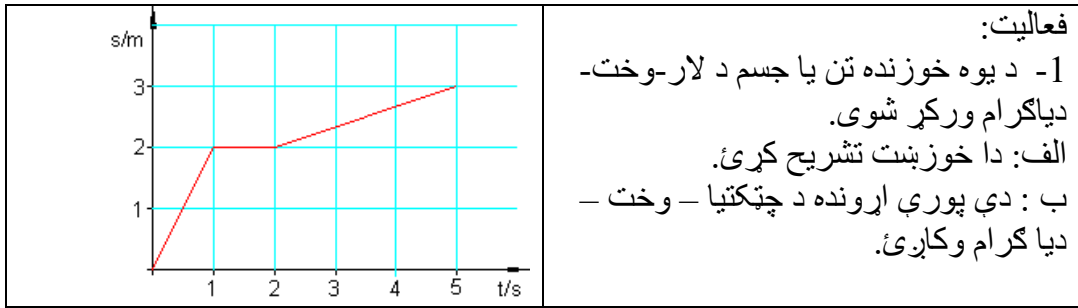
د مشتق استعمال په طبيعي علومو



پام : د يوه برابر ډوله په بېره (تعجيلي) خوزښت لپاره لاندې باور لري:

$$| s(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0t | \quad v(t) = s'(t) = at + v_0 \quad a(t) = v'(t) = a$$

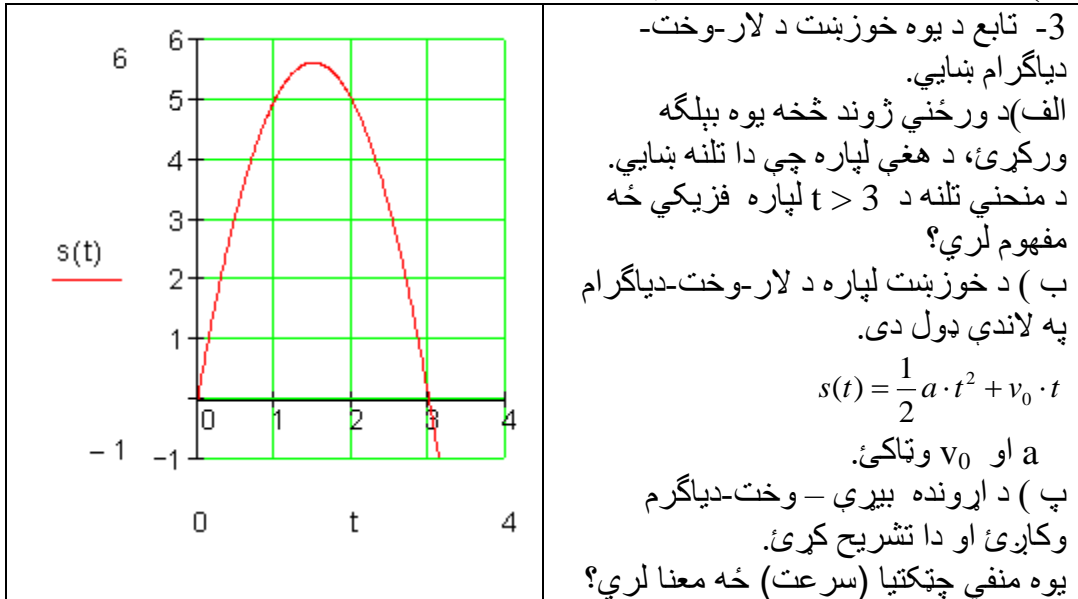
د يوي چټکتيا (سرعت)  $v$  لپاره د وخت پسې د لار مشتق لپاره  $v(t) = s'(t)$  لرو. د  $s'(t)$  لپاره داسې  $v(t) = s'(t)$  هم ليکو.



2- یوه تیره د پیل چټکتیا  $v_0 = 7 \frac{m}{s}$  سره عمودي (ولاره) پورته غورځول کېږي. د لار-وخت-قانون دی:  $s(t) = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2$  د  $g = 10 \frac{m}{s^2}$  (را ټولې؟؟) ګردې شوي (سره).

د مشتق استعمال په طبیعي علومو ۹۸

الف) د کوم وخت وروسته د تیرې چټکتیا (سرعت) صفر دی؟  
 ب) خورا جگ د میل جگوالنوشمېرئ



4- یوتن (جسم) په پورته ازاده غورځونه کې داسې حرکت کوي، چې د t وخت کې  $s(t) = 5 \cdot t^2$  لار وهي.

په وختونو  $t = 1, 2, 3$  کې لحظوي چټکتیا (سرعت) وښایی.  
حل: لحظوي چټکتیا د سملاسي تغیر ارزښت سره په دې لاندې معنا دی:

$$t = 1: \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{s(1 + \Delta x) - s(1)}{\Delta x} = 10 + 5\Delta x$$

د  $\Delta x \rightarrow 0$  لپاره باور لري:  $10 + 5\Delta x \rightarrow 10$

$$t = 2: \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{s(2 + \Delta x) - s(2)}{\Delta x} = 20 + \Delta x \Rightarrow 1$$

د  $\Delta x \rightarrow 0$  لپاره باور لري:  $20 + 5\Delta x \rightarrow 20$

$$t = 3: \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{s(3 + \Delta x) - s(3)}{\Delta x} = 30 + 5\Delta x \Rightarrow 1$$

د  $\Delta x \rightarrow 0$  لپاره باور لري  $20 + 5\Delta x \rightarrow 30$

د جگړو درجو مشتق

۹۹

	<p>تمرین:</p> $f(x) = -\frac{1}{288}x^3 + \frac{1}{16}x^2 ; x > 0$ <p>د لاندې تابع گراف او په ورنژدې توگه د فوټبال میدان کې د توپ الوتنې منحنی وښایی، چې لاندې څېره لري.</p>
--	--

لاندې پوښتنې ځواب کړئ:

الف: توپ کوم خورا جگ (ماکسیمال) جگوالی لري او د وهلتکي (شوت شوي ټکي) څخه کوم واټن لري؟

ب: د توپ وهلتکي (شوت شوي ټکي) څخه توپ څومره لرې بېرته ځمکې ته راځي؟

پ: د لوبې د دفاع دېوال د توپ وهني ځای څخه 9 متره لرې او 2 متره جگ دی. ایا توپ له دې څخه جگ الوزي؟

ت: توپ د تور (گول) لاین (د x محور) څخه په 2 متره جگوالي الوزي. له گول څخه په کوم لږوالي دا ازاده شوت وهل شوی دی؟



## د جگو درجو مشتق

د لومړي مشتق پرته د لوړو درجو مشتق کونه هم شته، چې د ورپسې مشتق له لارې لاس ته راځي. د  $f'(x)$  بيا مشتق نيونې سره د  $f''(x)$  مشتق تابع لاس ته راځي، چې د دويم مشتقتابع په نامه يادېږي.

بيلگه:

$$f(x) = x^3 + x^2 + x + 1 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2x + 1 \Rightarrow \underline{f''(x) = 6x + 2}$$

د  $f''(x)$  بيا مشتق نيونه و دريم مشتق ته اوداسې نور.

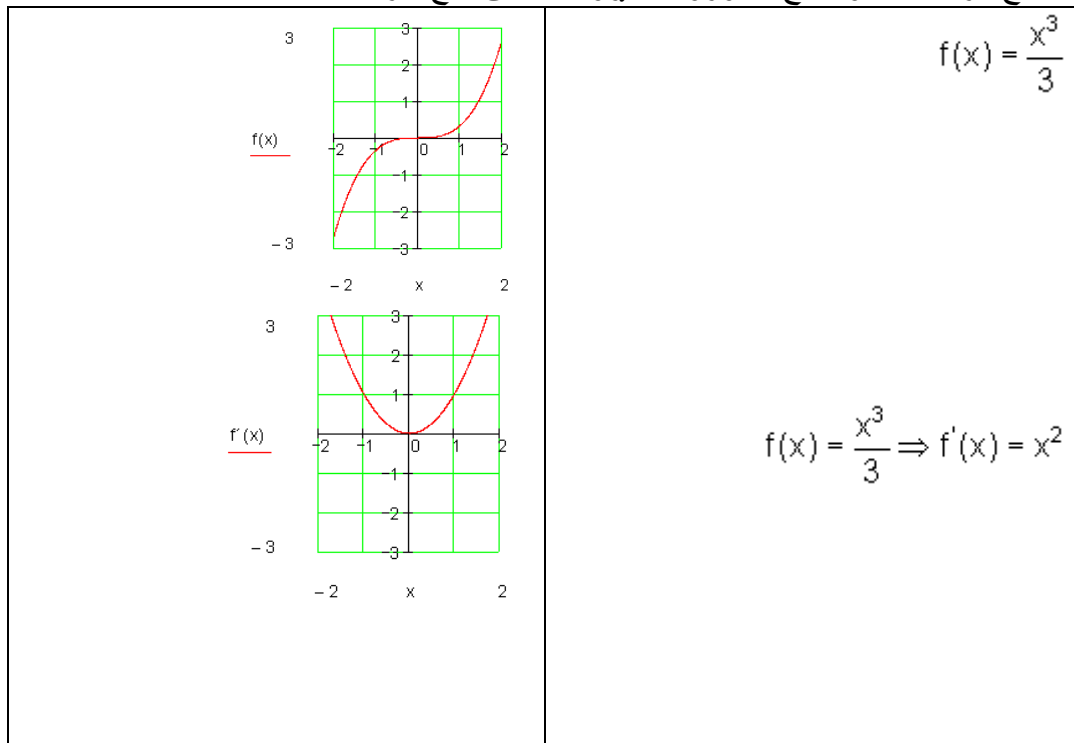
$$f(x) = x^3 + x^2 + x + 1 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2x + 1 \Rightarrow f''(x) = 6x + 2 \Rightarrow \underline{\underline{f'''(x) = 6}}$$

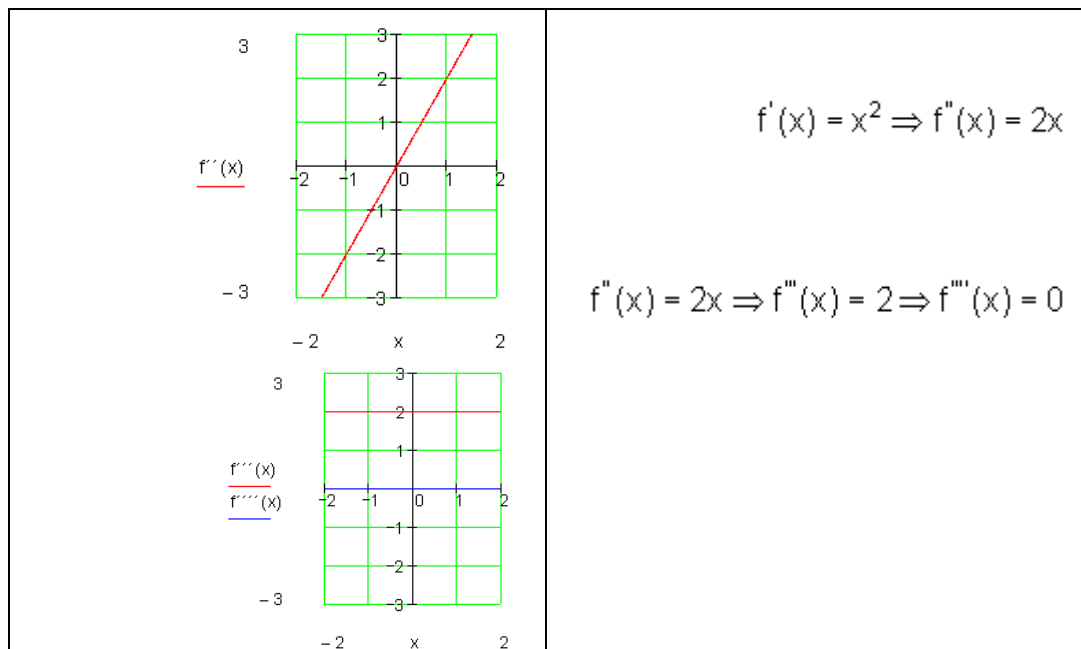
د  $f(x) = \frac{x^3}{3}$  تابع دې 4 واره مشتق ونيول شي:

د جگو درجو مشتق ۱۰۰

$$f(x) = \frac{x^3}{3} \Rightarrow f'(x) = \frac{3x^2}{3} = x^2 \Rightarrow f''(x) = 2x \Rightarrow f'''(x) = 2 \Rightarrow f^{(4)}(x) = 0$$

د تابع گراف: د يوه تابع انځورونه د اړونده مشتق تابع سره

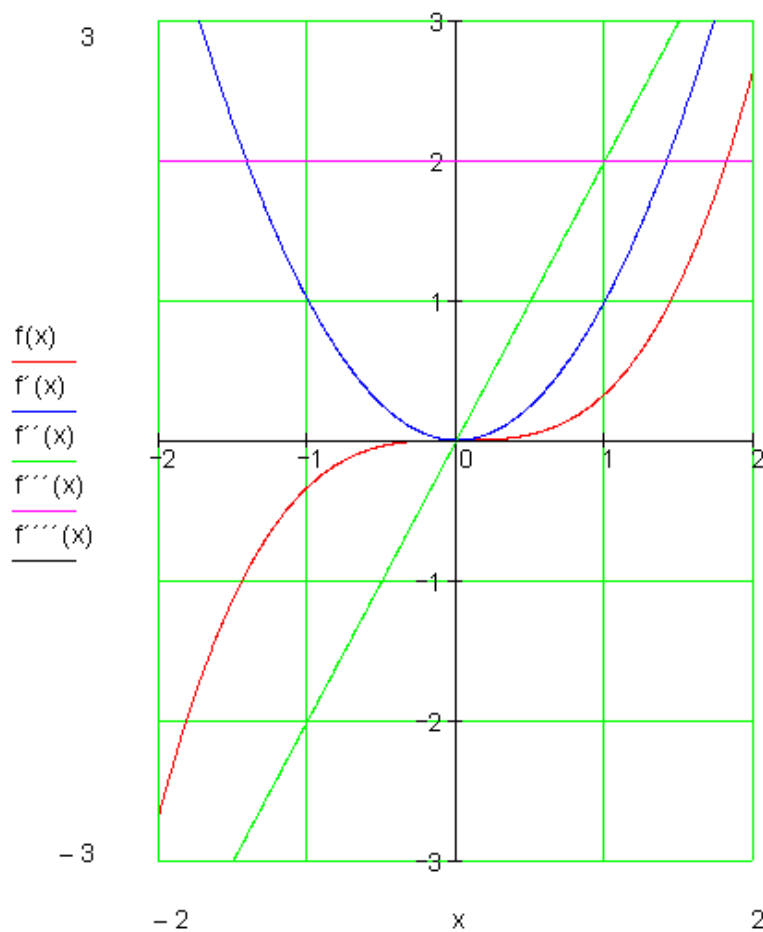




۱۰۱

د جگو درجو مشتق

پورته ټولو توابعو گراف په يوه پروت ولاړ سيستم کې



بیلگی:

اول: د تابع  $f(x) = 4x^3 - 2x^2 + x - 2$  مشتت درپواره پیدا کری

$$f(x) = 4x^3 - 2x^2 + x - 2$$

$$f'(x) = 12x^2 - 4x + 1$$

$$f''(x) = 24x - 4$$

$$f'''(x) = 24$$

د جگو درجو مشتق

۳-۱

---

دویم: د تابع  $f(x) = \frac{3}{4}x^3 - 12x^2 + \frac{1}{4}x$  مشتق درپواره پیدا کری

$$f(x) = \frac{3}{4}x^3 - 12x^2 + \frac{1}{4}x$$

$$f'(x) = \frac{9}{4}x^2 - 24x + \frac{1}{4}$$

$$f''(x) = \frac{9}{2}x - 24$$

$$f'''(x) = \frac{9}{2}$$

تولعه:

د  $f(x)$  لومړی مشتق د  $f(x)$  مشتق تابع  $f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$  ده:

د  $f(x)$  دویم مشتق د  $f'(x)$  مشتق تابع  $f''(x) = \frac{d^2f(x)}{dx^2}$  دی:

د  $f(x)$  دریم مشتق د  $f''(x)$  مشتق تابع  $f'''(x) = \frac{d^3f(x)}{dx^3}$  دی:

په ځانگړي ډول: یو په خوښه کسری یی تابع  $f(x)$  په خوښه د مشتق قابلیت لري.

تمرینونه:

د لاندې توابعو دريواره مشتق ونیسئ.

$$f(x) = 3x + 4 \quad -1$$

$$f(x) = 2x - 4 + x^3 - 5x + 4x^3 \quad -2$$

$$f(x) = 3x^3 + 2x^2 + x + 1 \quad -3$$

$$f(x) = (2x + 1)^3 \quad -4$$

$$f(x) = x - x^4 + 3 + x \quad -5$$

$$f(x) = 1 - 2x - 3x - 4x + x^4 \quad -6$$

$$f(x) = a + b + c^2 - x - ax - bx - cx^3 - c^3x \quad -7$$

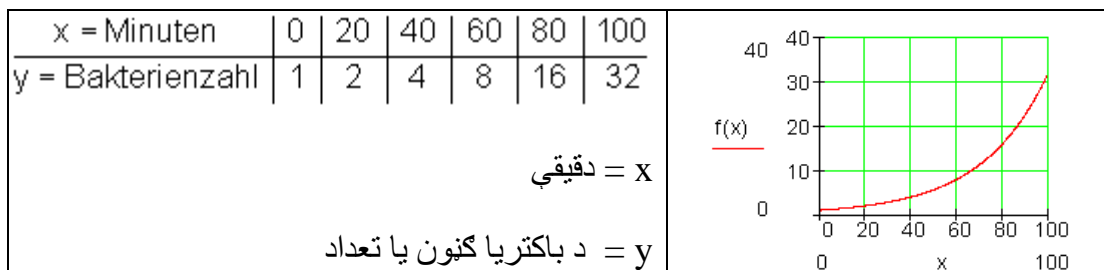
$$f(x) = 4x^3 - 2x^2 + 5x - 2 \quad -8$$

## د اکیوننشل توابعو مشتق

د تابع مساواتو جوړښت

کولي باکتریا Coli - Bakterien د انسان په کلمو کې کاره سرته رسوي. دوي د کوتي ویش ( حجره وېش) له لاري زیاتيري. و مساعدو شرایطو لاندې دوي په هرو ۲۰ دقیقو کې ځان تجزیه کوي. د غه عملیې لپاره یو ارزښت جدول :ار، او گراف یې کارو. دلته د  $x$  اووښتوني (متغیره) په دقیقو د وخت لپاره ده.

د  $y$  متغیره د باکتریا گانو د تعداد لپاره ده.



فعالیت: د دې لپراه تابع ولیکئ

قضیه: هر اکسپوننشل تابع د  $y = b^x, (b > 0)$  د ټولو ریلو اعدادو لپاره مشتقور دی او

صدق کوي:  $f' = b^x \ln b$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{y - y_0}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \quad f(x) = b^x$$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{b^x - b^{x_0}}{x - x_0} \quad \text{حل:}$$

$$= b^{x_0} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{b^{x-x_0} - 1}{x - x_0}, \quad x - x_0 = h$$

$$= b^{x_0} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{b^h - 1}{h}$$

له پورته لرو  $\begin{cases} b^h - 1 = k \\ h = \log_b(1+k) \end{cases}$  او لاس ته تري راځي

$$= b^{x_0} \cdot \lim_{k \rightarrow 0} \frac{k}{\log_b(1+k)}$$

$$= b^{x_0} \cdot \lim_{k \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{1}{k} \cdot \log_b(1+k)}$$

د لوگارېتم قانون څخه لرو:  $n \cdot \log x = \log x^n$  او لاس ته راځي

$$= b^{x_0} \cdot \lim_{k \rightarrow 0} \frac{k}{\log_b(1+k)}$$

$$= b^{x_0} \cdot \frac{1}{\log_b[\lim_{k \rightarrow 0} (1+k)^{\frac{1}{k}}]} , \lim_{k \rightarrow 0} (1+k)^{\frac{1}{k}} = e$$

له پورته لاس ته راځي

$$= b^{x_0} \cdot \frac{1}{\log_b e} , \log_b e = \frac{1}{\ln b}$$

$$= b^{x_0} \cdot \ln b ; x_0 \in \mathbb{R} ; b \in \mathbb{R}^{>0}$$

$$\Rightarrow f' : f'(x) = b^x \cdot \ln b ; D'(f) = \mathbb{R} ; b \in \mathbb{R}^{>0}$$

$$f'(x) = b^x \cdot \ln b$$

ضيه :

د  $y = f(x) = e^x$  مشتق پيدا كړئ.

حل:

$$y = f(x) = e^x$$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{x_0 + \Delta x} - e^{x_0}}{\Delta x}$$

مور دا لرلي په پام کې نيسو:  $e^{x_0 + \Delta x} = e^{x_0} \cdot e^{\Delta x}$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{x_0} \cdot e^{\Delta x} - e^{x_0}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{x_0} (e^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} e^{x_0} \cdot \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = e^{x_0} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$$

مور د تل کوچنيکيدونکي  $\Delta x$  ارزښت لپاره څيرو  $\frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$

	$\Delta x$				
$\Delta x$	1	0,1	0,01	0,001	0,0001
$\frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$	1,718...	1,051...	1,00501...	1,0005...	1,00005...

د دې په بنسټ مور لاس ته راوړو:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = 1$$

زموږ د شمېرنې په بنسټ دا دا معنا لري:

$$f'(x_0) = e^{x_0} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = e^{x_0} \cdot 1 = \underline{\underline{e^{x_0}}}$$

که د  $x_0$  په ځای  $x$  ځای په ځای کړو، نو لرو:

$$f'(x) = e^x \quad \text{او} \quad f(x) = e^x$$

اکسپوننشل فنکشن  $y = f(x) = e^x$  تیک  $y' = f'(x) = e^x$  مشتق لری  
یعنی د  $e^x$  تابع د مشتق خخه بپرته د  $e^x$  تابع لاس ته لاس ته راځي.

بیلگه:

$$f(x) = b^{3x^2 - 10}; D(f) = IR; b \in IR^{>0} \quad \text{لرو:}$$

د پورته تابع مشتق ونیسئ.

$$D'(f) = D(f) = IR \Rightarrow D(f') = IR$$

$$f(x) = b^{3x^2 - 10} = g[h(x)]$$

$$g(z) = b^z \Rightarrow f'(z) = \underline{b^z \cdot \ln b}; z \in IR$$

$$h(z) = 3x^2 - 10 \Rightarrow h'(x) = \underline{6x}; x \in IR$$

$$f'(x) = g'(x) \cdot h'(x)$$

$$= b^z \cdot \ln b \cdot 6x \Rightarrow z = 3x^2 - 10$$

$$= b^{3x^2 - 10} \cdot \ln b \cdot 6x; x \in IR$$

$$= \underline{\underline{\ln b \cdot 6x \cdot b^{3x^2}}}; D(f) = IR; b \in IR^{>0}$$



تمرینونه:

د لاندې توابعو لومړی مشتق وټاکئ.

a)  $f(x) = 3 \cdot e^{-2x+1}$

b)  $f(x) = e^{x^2+2x-1}$

c)  $f(x) = (x-1) \cdot e^x$

d)  $f(x) = \sqrt{e^x}$

e)  $f(x) = x^n \cdot e^e$

f)  $f(x) = e^{kx}$

g)  $f(x) = 2^{\frac{1}{2x}}$

h)  $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^{3x}$

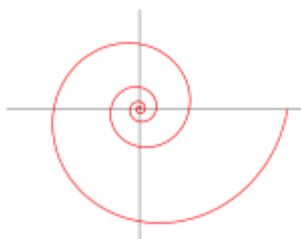
i)  $f(x) = x \cdot a^{\sqrt{x}}$

k)  $f(x) = \sqrt{e^x + 1}$

l)  $f(x) = \frac{e^x}{1-e^x}$

m)  $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

## د لوگارېتم مشتق



قعالیت:

- لوگارېتم تعريف
- اکسپوننت يا توان تعريف کړئ.
- د لوگارېتم او توان ترمنځ اړیکې وښایاست.

قضیه:

د لوگارېتم تابع مشتق:

۱۰۸

د لوگارېتم مشتق

---

قضیه: هر د لوگارېتم تابع  $y=f(x)=\log_b x$  د  $b > 0, b \neq 0, x > 0$  سره، مشتقور دی

$$f'(x) = \frac{1}{x} \log_e e = \frac{1}{x \cdot \ln b}$$

ثبوت: دا چې تابع  $y=f(x)=\log_b x$  یواځې د  $x > 0$  لپاره پیژندلري یا تعریف دی. په هر ځای کې چې  $x > 0$  وي، نو دا لاندې باوري دی:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \frac{\log_b(x_0+h) - \log_b x_0}{h} = \frac{1}{h} \log_b \frac{x_0+h}{x_0} = \log_b \left(1 + \frac{h}{x_0}\right)^{\frac{1}{h}}$$

د ( لومړۍ برخې ) له مخې دا لاس ته راځي:

$$\log_b \left(1 + \frac{h}{x_0}\right)^{\frac{1}{h}} = \left[ \left(1 + \frac{h}{x_0}\right)^{\frac{x_0}{h}} \right]^{\frac{1}{x_0}} \rightarrow e^{\frac{1}{x_0}}$$

او له دې امله

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0} = f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \log_b \left(1 + \frac{h}{x_0}\right)^{\frac{1}{h}} = \log_b e^{\frac{1}{x_0}} = \frac{1}{x_0} \log_b e$$

د لوگارېتم تابع په ورکړشوي مشتق سره د خپل ټول پیژند سټ کې د مشتق قابلیت لري.

$$f'(x) = \frac{1}{x} \log_b e \quad \text{همداسې} \quad f'(x) = \frac{1}{x} \cdot \frac{\ln e}{\ln b} \quad \text{داچې} \quad \ln e = 1 \quad \text{نو صدق کوي:}$$

$$f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln b} \quad \text{خه چې د بنوولو وو.}$$

په ځانگړي ډول دا لاندې باور لري:

$$\left(\frac{d(\ln x)}{dx}\right)_{x=x_0} = \frac{1}{x_0}$$

**بیلگه:**

$$f(x) = \log \sqrt{x^3} \quad \text{د مشتق وشمېرئ.}$$

بنوونه: په لاندې توگه مخ تخ خو:

$$\begin{aligned} f(x) &= \log \sqrt{x^3} = \log_{10} x^{3/2} = \frac{3}{2} \log_{10} x \\ \Rightarrow f'(x) &= \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{x \cdot \ln 10} \\ &= \underline{\underline{0.6514 \cdot \frac{1}{x}}}; D(f') = \underline{\underline{IR^{>0}}} \end{aligned}$$

بیلگه:

$$د \quad y = \ln \frac{x-2}{x+2} \quad \text{تابع مشتق پیدا کریں}$$

حل:

مورن لیکلای شو :

$$\begin{aligned} y &= \ln \frac{x-2}{x+2} \\ &= \ln(x-2) - \ln(x+2) \end{aligned}$$

$$دا چي \quad (\ln(x-2))' = \frac{1}{x-2} \quad \text{او} \quad (\ln(x+2))' = \frac{1}{x+2} \quad \text{دی، نو لرو:}$$

$$\begin{aligned} y' &= (\ln(x-2))' - (\ln(x+2))' \\ &= \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2} = \frac{x+2-x-2}{(x-2)(x+2)} \\ &= \frac{4}{x^2-4} \end{aligned}$$

بیلگه:

$$لرو: \quad f(x) = \log_2(x)$$

د لوگاریتم مشتق

غوارو پيدا ڪړو: ۱. مشتق  $f'(x)$

مشتق د  $x_0=16$  په ځاي کي

حل: د حل لپاره د پورته فرمول څخه کار اخلو:  $f'(x) = 1/(x \cdot \ln 2)$

اوس د  $x_0=16$  په ځاي کي مشتق ټاکو:

$$f'(x_0) = 1/(16 \cdot \ln 2) = 1/(16 \cdot 0.69) = \underline{0.09}$$

### تمرینونه:

د لاندې توابعو لومړی مشتق وټاکئ یا پيدا کړئ.

a)  $f(x) = \ln \sqrt{x}$

b)  $f(x) = \ln(x^2 - 4)$

c)  $f(x) = \ln \frac{2}{x^3}$

d)  $f(x) = \ln \frac{x+1}{x}$

e)  $f(x) = x \cdot \log_2 x^2$

f)  $f(x) = (x^4 - 1) \cdot \log$

g)  $f(x) = \frac{\ln}{x+2}$

h)  $f(x) = \frac{x^4}{\ln x}$

### د یوې تابع مشتقوالی یا - قابلیت

مور ولیدل، چی یوه تابع په هر ځاي کي تعريف نه ده، په هر ځاي کي حد نه لري او همداسي په هر ځاي کي متمادي نه ده. په همدې توگه یوه تابع هر چیرته د مشتق قابلیت هم نه لري.

تابع  $f(x) = |x|$  په 0 ځای کي تعريف نه ده:

د ټولو  $x > 0$  له پاره باور لري  $f(x) = x$

د لوگارېتم مشتق



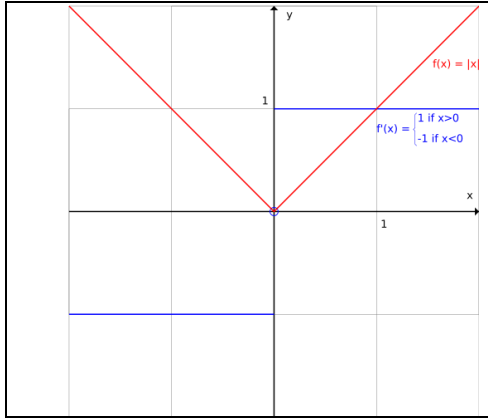
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - 0}{x - 0} = 1$$

او له دې سره  $x > 0$

د ټولو  $x < 0$  لپاره د پورته په برعکس  $f(x) = -x$  باور لري او له دې سره:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x - 0}{x - 0} = -1$$

دا چې کين- او بڼی اړخیز حد یو له بل سره سر نه خوري، حد(پوله) نه شته. تابع په دې راورل شوي ځای کې مشتقور نه ده.



د تابع مشتق کېدنه په نورو ټولو ځایونو کې تر اوسه تل ورکړ شوې.

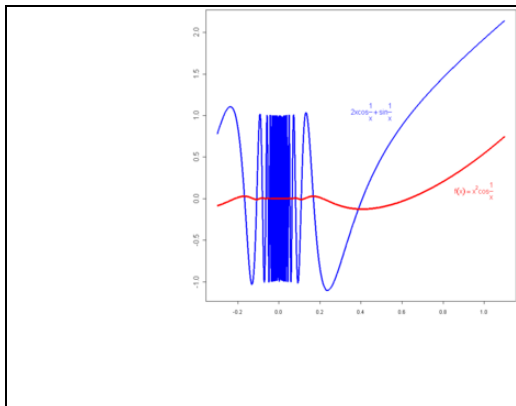
په صفر ځای کې سره له دې یو بڼی اړخیز مشتق ورکړ شوی، یعنې لرو:

$$f'_{+}(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x - 0}{x - 0} = 1$$

او یو کین اړخیز مشتق هم:

$$f'_{-}(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x - 0}{x - 0} = -1$$

که پورته گراف ته وگورو، نو وبه پوهیږو، چې یوه مشتقور تابع باید گوډه نه وي یا په کوم ځای کې ماته نه وي یا په بل عبارت کونج جوړ نه کړي.



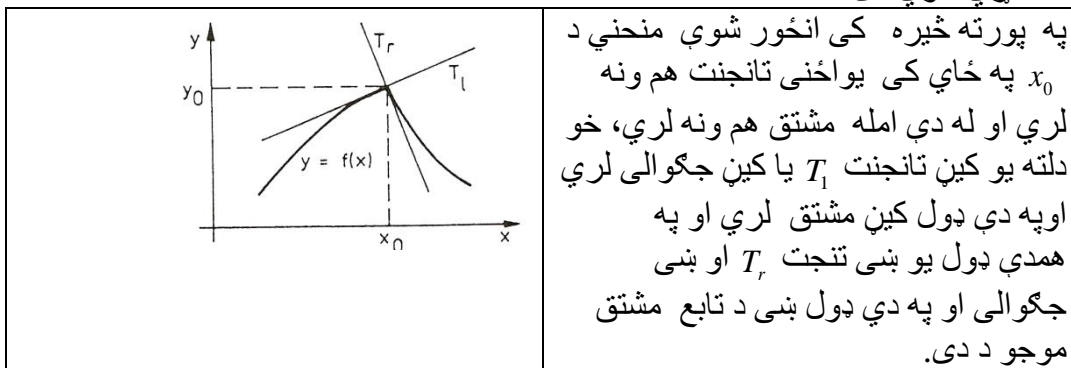
د یوه نه متمادي مشتقور تابع لپاره بېلگه: یو تابع متمادي مشتقور بلل کېږي، که د هغې مشتق متمادي وي. که یوه تابع هر چیرته مشتقور وي، باید نه دی چې مشتق دې یې هم متمادي وي. د بېلگې په توگه:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

تابع په هر ټکي کې حتی د  $x = 0$  سره مشتقور دی. مشتق د لوگاریتم مشتق ۱۱۲

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \cos\left(\frac{1}{x}\right) + \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

یې ددی په خلاف په 0 ځای کې متمدی نه دی  
 مشتق د ټاکلو نیونویا فرضیو لاندې ممکن او له دې امله هلته هدفمند دی، چېرته چې  
 لیمیت (پولی) ته تگ ممکن وي یعنی چیرته چې د تفاضل ویش یو لیمیت د  $x \rightarrow 0$  لپاره  
 ولري.  $\left[ \begin{smallmatrix} P \\ P \\ P \\ SEP \\ SEP \end{smallmatrix} \right]$   
 که کومه منحنی چیرته راماته وي (څېره 4)، گورو چې هلته تانجنت نه شته او همدارنگه  
 جگیدل او هم د تفاضل ویش نه شته. پس د مشتق قابلیت د متمدیت په څیر د یوې تابع  
 ځانگړي خوي دی.



په یوه نامتمدی تابع کې د تانجنت یا مشتق پوښتنه بی معناده.  
 دا دلته انځور شوی پرابلم یا مسأله اوس د شمیرني د ټیک فرمول لاندې راوړو.  
 ولیدل شو چې په یوه ځای  $x_0$  کې چې تابع متمدی نه وي د مشتق پوښتنه بی مانا ده. نیسو  
 چې دا دې ښوول شوی وی. دا څرگنده ده چې هره متمدی تابع باید ضرور مشتقورنه  
 وي. د بیلگې په توگه که تابع زاویه یا کونج ولري.  
 دې ته اړتیا ده چې وښایو، چې یواځي متمدی توابع د مشتق قابلیت لري، دا بیا دا معنا  
 لري چې هره تابع چې د مشتقور وي باید لږ تر لږه متمدی وي او په دې ډول مشتق  
 متمدیت په بر کې لري یا خوندي لري، په دې معنا چې متمدیت د مشتقوروالی لپاره  
 اړین یا ضروري شرطونه دي

جمله:

که د  $y = f(x)$  تابع د  $x_0$  په ځای کې مشتق وړ وي، نو هلته ضرور متمادي ده. بنوونه: د مشتق د تعریف څخه لاس ته راځي، چې حد شته دی.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

لیمیت یوای هله کیدی شي چې موجود وي، چې د  $x \rightarrow x_0$  لپاره د مخرج سره صورت هم صفر ته ولاړ شي یانې  $f(x) - f(x_0) \rightarrow 0$  لار شي. نو باور لري:  $f(x) \rightarrow f(x_0)$  د  $x \rightarrow x_0$  لپاره. داد متمادیت پیژند دی.

دا تفاضل وېش په یوه بله بڼه هم انځوریدلی شي که  $x = x_0 + \Delta x$  وکاروو: دلته مشتق  $f'(x)$  په لاندې توگه ورکړ شوي دی:

د یوه تابع د مشتق قابلیت د لومړي ځل لپاره یوای په ځای (lokal) پورې اړخوي دی یعنی په یو ځای  $x = x_0$  کې تعریف دی. لکه څنگه چې په متمادیت کې (لومړي څپرکي دي وکتل شي) کیدی شي چې د مشتق قابلیت او مشتق یوه واز یابند اینتروال ته وغزول شي.

تعریف:

د  $y = f(x)$  یوه تابع په واز اینتروال  $(a, b)$  کې، د اشتقاق قابل (مشتق وړ) بلل کېږي، د لاندې مشتق سره.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx} = f'(x) ; a < x < b$$

که داد  $x = x_0 \in (a, b)$  په هر ځای کې د مشتق قابلیت ولري د مشتق  $f'(x_0)$  سره. دا په بند اینتروال  $[a, b]$  کې مشتق وړ بلل کېږي، که دا سربېره پر دې د  $a$  په ځای کې بنی اړخیز اود  $b$  په ځای کې کین اړخیز مشتق وړ هم وي.

بیلگه ۲، ۶:

د توان تابع  $y = x^n$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$  په هر ځای کې د مشتق قابلیت لري د لاندې مشتق سره

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}$$

د ساين تابع  $y = \sin x$  او کوساين تابع  $y = \cos x$  په هرځاي کې مشتقورده، د لاندې مشتق سره

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\sin x}{dx} = \cos x, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{d\cos x}{dx} = -\sin x$$

په يوه واز انتروال کې  $y = f(x)$  مشتقور تابع مشتق بيرته  $y' = f'(x)$  تابع ده، نو په دې ډول يې د مشتق قابليت اود متماديت قابليت پوښتنه کيدی شي.

تعريف (پيژند) ۲.۴:

په يو د  $x = x_0$  چاپيريال کې د مشتق قابل تابع (رابيليدور بلواک)  $y = f(x)$  په  $x = x_0$  کې دوه واره د مشتق قابليت لري (رابيليدور دی)، که د هغې اشتقاق (رابيليدنه)  $y' = f'(x)$  هلته د مشتق قابليت لري (رابيليدور وي). سړی د  $f'(x)$  مشتق د تابع (رابيليدنه د بلواک)  $y = f(x)$  دويمه رابيليدنه بولي او ليکي:

$$\left( \frac{d^2 y}{dx^2} \right)_{x=x_0} = f''(x_0) = \left( \frac{df'(x)}{dx} \right)_{x=x_0}$$

يو په يوه واز اينتروال کې مشتق کېدونکي تابع  $y = f(x)$  هلته دوه واره مشتقور بلل کېږي، که د هغه مشتق  $y' = f'(x)$  په دې اينتروال کې مشتق وړ وي.  $\left[ \begin{smallmatrix} P \\ SEP \end{smallmatrix} \right]$  ددې لپاره ليکل کېږي:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = f''(x) = \frac{df'(x)}{dx}$$

تمرين:

وېسايي چې ايا دا توابع  $y = c$ ;  $y = x^n$ ;  $y = \cos x$  هر چيرته دوه واره مشتقور دي؟

د معکوس تابع مشتق



## فعالیتونه:

د یوې تابع معکوس تابع تعریف کړئ.

د  $f(x) = \frac{x^2+5x}{x^3-8}$  تابع د تعریف ساحه وښایاست.

د پورته تابع د مشتق مشتق وشمیرئ.

اوس دې معکوسه تابع تر څیرني لاندې ونيول شي . دلته دې ونيول شي، چې  $y = f(x)$  په  $x = x_0$  کې د  $f(x) = 0$  سره او په یوه د  $x_0$  چاپیریال کې جگیدونکی دی  $f'(x_0) > 0$  او یا په کلکه لوېدونکی  $f'(x_0) < 0$  او له دې امله معکوس کیدونکی هم دی، یعنې  $x = f^{-1}(y)$  ، نود کمښتویش لپاره معکوسه تابع لاس ته راځي:

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} = \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

او دا چې  $x > x_0$  او  $f(x)$  د متمادیت له امله هم  $y > y_0$  او باور لري.

$$\left(\frac{dx}{dy}\right)_{y=y_0=f(x_0)} = \left(\frac{df^{-1}(y)}{dy}\right)_{y=y_0=f(x_0)} = \frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0}} = \frac{1}{\left(\frac{df(x)}{dx}\right)_{x=x_0}}$$

که د لاندې ټکي ځای  $x = x_0$  لپاره ساده بیرته  $x$  ولیکو نو دا لاندې لنډ فورم لیکلی شي:

د  $y = f(x)$  لپاره باور لري.

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

د پورته ورکړ شوو نيو نوسره سرې بيرته يو د تفاضل ویش لاس ته راوړي چې د هغه سره د مروج ویش په څير شميرنه کيدی شي، لکه

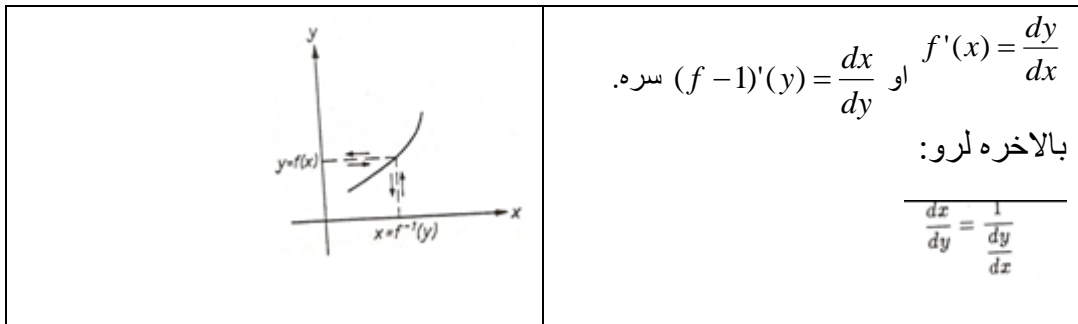
$$(f^{-1})'(y) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{f'(x)}$$

جمله ۲. ۷: د معکوس تابع مشتق: که  $dy = f(x)$  په يوه چاپيريال کې د  $x = f^{-1}(y)$  سره معکوس او هملته د  $|f'(x)| = 0$  سره مشتق وړ وي، نو معکوس تابع د

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} \quad (y = f(x) \text{ سره مشتق وړی او باوري})$$

حل: کيدی چې د  $f$  تابع د مشتق څخه د  $f^{-1}$  معکوس تابع مشتق لاس ته راوړو. له دې امله له  $x > 0$  او هم  $y > 0$  او معکوس څخه، د  $y = f(x) - f(x)$  سره، لاس ته راځي:

$$(f^{-1})'(y) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{f'(x)}$$



تمرینونه: د  $y = f(x) = x^n; n = 1, 2, 3, 4, \dots$  تابع لپاره که  $x \geq 0$  وټاکل شي او په دې  $x = \sqrt[n]{y} = y^{\frac{1}{n}}; y \geq 0$  توگه يې معکوس تابع وي، نو د معکوس تابع مشتق يې ونیسئ.

-- د  $y = x^{\frac{m}{n}}; m, n \in N$  تابع د معکوس تابع مشتق ونیسئ.

## د ایمپلیسیت Implicit تابعو مشتق

د یوې تابع هغه زیات د استعمال وړ انځورونه د تابع د مساوات له مخې او د  $f(x)$  تابع د ورشو ورکولو سره په اکسپلیسیت Explicit ډول، که تابع متحوله د برابرېون په یوه اړخ ځانله شوي وي:

$$Y = 3x^2 + 7x \quad \text{د بیلگې په توګه}$$

د یوې تابع هغه زیات د استعمال وړ انځورونه د تابع د مساوات له مخې دي، د تابع د ورشو ورکولو سره په ایمپلیسیت Implicit ډول د بیلگې په توګه  $Ex^2 + 7x + y = 0$  فعالیت:

که  $Ex^2 + 7x + y = 0$  ولرو، څنګه کولی شو، چې ددې تابع مشتق پیدا کړو؟  
قضیه:

یوه تابع په ایمپلیسیته بڼه  $x^2 + xy - y^2 = 1$  لرو، غواړو  $\frac{dy}{dx}$  پیدا کړو.:

بڼونه:

$$\frac{d}{dx}(x^2 + xy - y^2) = \frac{d}{dx}(1) \quad (1)$$

$$2x + (1 \cdot y + x \frac{dy}{dx}) - 2y \frac{dy}{dx} = 0$$

$$2x + y = \frac{dy}{dx} - x \frac{dy}{dx}$$

$$2x + y = \frac{dy}{dx} (2y - x)$$

$$\frac{2x + y}{2y - x} = \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x + y}{-x + 2y} \quad \vee \quad \frac{2x + y}{2y - x}$$

ایمپلیسیت مشتق د یوې تابع مشتق نیولو لپاره یو امکان دی، چې نه ایمپلیسیت یعنی د یوه ترم سره ورکړ شوی وي، بلکې د ایمپلیسیت یعنی د یوه مساوات له مخې ورکړ شوی وي. دا قاعده د دې لپاره هم کارول کیږي، چې تابع په اکسپلیسیت ډول ورکړ شوی وي، خو د دې مشتق نیول ستونځمن وي.

بیلگه :

د  $f(x) = x^x$  تابع مشتق په ورسره بلدو مشتقوانینو نه شي نیول کیدی، ځکه چی په بنسټ او جگ اکسپوننت کي یې متحولې پرتې دي. د لوگارېتم له لارې د اکسپوننت متحوله له منحه ورل کیدی شي:

$$\ln f(x) = x \ln x$$

اوس ایمپلیخیت دا حل کوو، داسې چې دواړو لورو ته یې د  $x$  پسې مشتق نیسو:

$$\frac{d(\ln f(x))}{dx} = \frac{d(x \ln x)}{dx}$$

د دې مساوات مشتق د ځنځیرقانون له لارې صورت نیسي:

$$\frac{d(\ln y)}{dy} f'(x) = \frac{d(x \ln x)}{dx}$$

دلته  $y = f(x)$  دی. د لوگارېتم او ضرب د مشتق قانون لاس ته راځي:

$$\frac{1}{y} f'(x) = \ln x + x \frac{1}{x}$$

که په  $f'(x)$  پسې حل شي او د  $y$  له پاره بېرته  $f(x) = x^x$  ځا په ځای کړو، نو دا حل لاس ته راځي:

$$f'(x) = y (\ln x + 1) = x^x (\ln x + 1)$$

تمرینونه:

- د  $r$  وړانگې سره د د ایرې مساوات  $x^2 + y^2 = r^2$  سره. دایمپلیخیت مشتق له لارې یې مشتق ونیسئ.

$E : x^2 + 3y^2 = 7$

سرره ورگر شوې الیپسی مشتق دې و نیول شي. د --

د بنسټیزو مشتقونو جدول

Nr.	$f(x)$	$f'(x)$	نیونه یا فرضیه
1	$c = konst$	0	
2	$X^n$	$n \cdot x^{n-1}$	$n = 1, 2, 3, \dots$
3	$X^n$	$n \cdot x^{n-1}$	$x$ ټول عدد او $x \neq 0$
4	$X^r$	$r \cdot x^{r-1}$	$r$ rational, $x > 0$
5	$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$	$\frac{1}{n} \cdot x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{n \cdot x} \sqrt[n]{x}$	$n = 1, 2, 3, \dots, x > 0$
6	$x^a$	$a \cdot x^{a-1}$	$x > 0, a$ reell
7	$a^x$	$a^x \ln a = \frac{a^x}{\log_a e}$	$x > 0, a \neq 1$
8	$e^x$	$e^x$	
9	$\log_a x$	$\frac{1}{x} \log_a e = \frac{1}{x \ln a}$	$a > 0, a \neq 1, x > 0$
10	$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$x > 0$
11	$\sin x$	$\cos x$	
12	$\cos x$	$-\sin x$	

$$13 \quad \tan x \quad \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x \quad x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

$$14 \quad \cot x \quad -\frac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \cot^2 x) \quad x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z} (Z)$$

د پورته جدول په مرسته كيدى شي چى كم له كمه په فورمال ډول ، په خوښه د هرې شننيزي يا سپرنيزې (تحليلي) ويښي يا افادي مشتق په شننيزه توگه لاس ته راوړى شي، سره له دې هم بايد سړى همغه نيونى په نظر كي ونيسي.

## د فصل ټولگه

كمښتويش **Differenzenquotient** ( د سيكانت جگيدنه) يا منځنى تغېر ارزښت

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

مشتق **Differetialquotient** ( د تانجنت چگوالى يا لحضوي تغېر ارزښت)

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

د ثابتى قانون

$$f(x) = c \cdot u(x) \text{ mit } c = \text{constant}$$

$$\Rightarrow f'(x) = c \cdot u'(x)$$

$$\boxed{f' = c \cdot u'}$$

د جمعې قانون

$$f(x) = u(x) + v(x)$$

$$\Rightarrow f'(x) = u'(x) + v'(x)$$

$$\boxed{f' = u' + v'}$$

د ضرب قانون

$$f(x) = u(x) \cdot v(x)$$

$$\Rightarrow f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

$$f' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

د وېش قانون

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2}$$

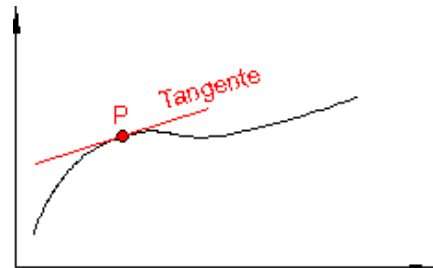
$$f' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

د ځنځير قانون

$$f(x) = f[z(x)]$$

$$\Rightarrow f'(x) = f'(z) \cdot z'(x)$$

(تعريف): د يوه تابع گراف ميل (جگوالي) په يوه ټکي P کې په همغه ټکي کې د تانجنت د ميل يا جگوالي گراف سره برابر دی



**د کمښت ویش یا د تفاضل ویش Difference quotient**

د یوې کرښې جگپښه بې له مشتق نیونې ټاکل کېدای شي:

کرښه  $y=f(x) = mx+a$  لرو

د دې کرښې د جگپښې فرمول په لاندې ډول دی:

د څپرکي تمرینونه ۱۲۲



$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

## د څپرکي تمرینونه:

(۱) کمبنتویش (د تفاضل ویش) ارزښت د P او Q په ټکو کې وټاکئ.

a)  $P(3,2)$  ,  $Q(5,4)$       b)  $P(2,4)$  ,  $Q(3,1)$

(۲) د  $x = x_0$  په ځای کې د f تابع د تانجنت جگوالی وټاکئ.

a)  $f(x) = x^2$  ,  $x_0 = 2$       b)  $f(x) = 0.5x^2$  ,  $x_0 = 3$

(۳) د کمبنتویش (د تفاضل ویش) او مشتق لاندې څه پوهیږو او د دوي تررنځ فوپیږ څه دی؟

(۴) د یوه تابع د سکانت ( ) لاندې څه پوهیږو او د تانجنت جگېدو لاندې څه پوهیږو؟ او دوي ترمنځ کومې اړیکې پرته دي؟

(۵) د تابع مشتق د توان قانون له مخې پیدا کړئ.

a)  $f(x) = x^5$       b)  $f(x) = x^6$

c)  $f(x) = \frac{1}{x^2}$       d)  $f(x) = \frac{1}{x^5}$

e)  $f(x) = \sqrt{x}$        $f(x) = \sqrt[4]{x^3}$

g)  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$       h)  $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$



(٦) د تابع مشتق د ثابت د قانون له مخې پیدا کړئ.

$$\begin{array}{ll}
 a) f(x) = 0.2x^5 - 3 & b) f(x) = 2x^4 + 1 \\
 c) f(x) = \frac{4}{x^2} & d) f(x) = \frac{3}{x^3} + 2 \\
 e) f(x) = 6\sqrt{x} & f) f(x) = \frac{8}{\sqrt{x}} - 5
 \end{array}$$

(٧) د تابع د گراف په مرسته وښايئ، چې ټول  $g(x) + c$  ترمونه همغه مشتق لري.

ياودونه: پابت عدد که هرکوم ارزښت ونيسي.

(٨) وښايئ، چې د  $a.g(x)$  د مشتق سره د  $a$  ضريب (خله وونی) ساتلی پاتي کيږي.

(٩) د  $f$  تابع مشتق د جمعي قانون سره وښايئ

$$\begin{array}{ll}
 a) f(x) = 4x^4 - 3x^3 + x^2 - x - 1 & b) f(x) = x - \sqrt{x} \\
 c) f(x) = \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{x^3} & d) f(x) = 3x^2 + 0.4x - 5
 \end{array}$$

(١٠) د  $f$  تابع مشتق د ضرب قانون سره وټاکئ.

$$\begin{array}{ll}
 a) f(x) = x^3(x^2 - 2x + 1) & b) f(x) = (2x^2 + 1)(x - 1) \\
 c) f(x) = (x^2 - 5)(2x^3 + x^2 + x) & d) f(x) = (4x^2 - x + 4)(3x + 2)
 \end{array}$$

(١١) د  $f$  تابع مشتق د ویش قانون له مخې وټاکئ.

$$\begin{array}{ll}
 a) f(x) = \frac{x^3 - 1}{4 - x^2} & b) f(x) = \frac{2x^2 + x + 3}{x + 1} \\
 c) f(x) = \frac{4 - x - x^3}{2x^2 + 3} & d) f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^3 - 2x^2 + x}
 \end{array}$$

(١٢) د ویش قانون له مخې په خټ ارزښت (پر عکس ارزښت) وټاکئ.

(۱۲ الف) د لاندې تابع مشتق وشمېرئ.

$$f(x) = \frac{1}{g(x)} \Rightarrow f'(x) = \frac{-g'(x)}{g(x) \cdot g(x)}$$

د  $g(x) \neq 0$  سره

(۱۳) د  $f$  تابع ارزښت د زنځير قانون له مخې وټاکئ.

$$\begin{array}{ll} a) f(x) = (4x^4 - x)^2 & b) f(x) = (3x^2 + 4x - 5)^2 \\ c) f(x) = (2x - 7)^3 & d) f(x) = (5 - 3x^3)^4 \end{array}$$

(۱۴) د لاندې توابعو مشتق وټاکئ.

$$\begin{array}{ll} a) f(x) = \frac{1}{(2x^2 + x)^3} & b) f(x) = \frac{1}{(x - 5)^4} \\ c) f(x) = (1 + \sqrt{x})^2 & d) f(x) = \sqrt{1 - x^3} \end{array}$$

(۱۵) د لاندې توابعو درې واړه مشتق ونیسئ.

$$\begin{array}{ll} a) f(x) = x^3 - 2x^2 + 1 & b) f(x) = 2x^4 + 3x^3 - x^2 + x - 5 \\ c) f(x) = \frac{3x - 4}{x} & d) f(x) = \frac{x^2 - 1}{2 - x} \end{array}$$

(۱۶) د يو  $n$ -م درجې تابع بايد څو واړه مشتق ونيول شي چې يوه ثابته ترې لاس ته راشي.

(۱۷) د لاندې توابعو لومړی مشتق وټاکئ.

$$\begin{array}{lll} a) f(x) = \sin 3x & b) f(x) = \sin x \cdot \cos x & c) f(x) = \sin^2 x \\ d) f(x) = \tan x + 2 \sin 2x & e) f(x) = \sin x^2 & f) f(x) = \sin \frac{x-1}{x+1} \end{array}$$

(۱۸) د  $f(x) = \sin^n x (n \in \mathbb{N})$  تابع د لومړي مشتق لپاره فرمول وښایاست یا وټاکئ.

(۱۹) د تانجنټ تابع لپاره د ساین او کوساین قانون په مرسته د مشتق قانون و ښایاست.

(۲۰) وښایاست چې د  $f(x) = \tan x$  لپاره  $f'(x) = 1 + \tan^2(x)$  هم باور لري.

(۲۱) د ویش قانون له مخې د کوتانجنټ قانون پیدا کړئ او هم د تانجنټ قانون له مخې.

(۲۲) ولې د ساین تابع او د کوساین تابع په خوښه زیات مشتقور دي.

(۲۳) د لاندې توابعو لومړی مشتق وټاکئ.

$$a) f(x) = 3 \cdot e^{-2x+1} \quad b) f(x) = e^{x^2+2x-1} \quad c) f(x) = (x-1) \cdot e^x$$

$$d) f(x) = \sqrt{e^x} \quad e) f(x) = x^n \cdot e^e \quad f) f(x) = e^{kx}$$

$$g) f(x) = 2^{\frac{1}{2x}} \quad h) f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^{3x} \quad i) f(x) = x \cdot a^{\sqrt{x}}$$

$$k) f(x) = \sqrt{e^x + 1} \quad l) f(x) = \frac{e^x}{1-e^x} \quad m) f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

(۲۴) د  $f(x) = (x^2 + 2) \cdot \lg x \quad (x > 0)$  مشتق دی پیدا شي.

مشتق یې وټاکئ یا پیدا کړئ.

$$a) f(x) = \ln \sqrt{x} \quad b) f(x) = \ln(x^2 - 4) \quad c) f(x) = \ln \frac{2}{x^3}$$

$$d) f(x) = \ln \frac{x+1}{x} \quad e) f(x) = x \cdot \log_2 x^2 \quad f) f(x) = (x^4 - 1) \cdot \log$$

$$g) f(x) = \frac{\ln}{x+2} \quad h) f(x) = \frac{x^4}{\ln x}$$

(۳۵) د لاندې توابعو لپاره خورا لویه تعریف ورشو (ساحه) ورکړئ او لومړی مشتق یې وټاکئ.

د تعريف سټ (ډېرې) هغه ورشو (ساحه) ورکړئ، په کومه کې چې توابع مشتقور دي.

$$a) f(x) = \sqrt{x+3}$$

$$b) f(x) = \sqrt{(x-2)(x-4)}$$

$$c) f(x) = x\sqrt{x}$$

$$d) f(x) = \sqrt{x^2+2}$$

(۳۶) ولې بايد د ټيک شمېرني لپاره لوگاريتمي توابعو ته همداسې سوچ وشي، لکه ريښه توابعو ته؟

(۳۷) ۹۰-مه پوښتنه د لوگاريتمي توابعو لپاره ځواب کړئ.

$$a) f(x) = \ln(x^4 - 1)$$

$$b) f(x) = \ln(2x+4)$$

(۳۸) د لاندي توابعو لومړی مشتق پيدا کړئ.

$$a) f(x) = \frac{2}{5}x^{10} - \frac{1}{5}x^5$$

$$b) f(x) = 3x^4 - 4x^3 + 11x^2 - 7x + 8$$

$$c) f(x) = 5x^8 - 3x^6 + \frac{10}{x^3} - \frac{8}{x^7}$$

$$d) f(x) = (2x-5)(x^2+11x-3)$$

$$e) f(x) = \cos x - 2x \sin x$$

$$f) f(x) = \sin^3 x$$

$$g) f(x) = e^x + \frac{1}{e^x}$$

$$h) f(x) = (x^2 - 2x + 2) \cdot e^x$$

$$i) f(x) = \frac{3e^x + 1}{2e^x - 1}$$

$$j) f(x) = \frac{2e^x(x^2 - 3)}{x}$$

$$k) f(x) = \frac{1}{x^2} \ln x^2$$

$$l) f(x) = \frac{x \cdot \ln x}{1-x}$$

$$m) f(x) = \frac{\sin x}{\ln x}$$

$$n) f(x) = 3x^2 \cdot \lg x$$

$$o) f(x) = \ln(\sin x)$$

$$p) f(x) = \sqrt{4x^2 + x + 1}$$

$$q) f(x) = \sqrt[n]{ax+b}$$

$$r) f(x) = (x^2 + 3)e^{-2x}$$

(۳۹) - لومری مشتق و تائی

a)  $f(x) = \sin^n$

b)  $f(x) = (\ln x)^n$

c)  $f(x) = s + \frac{1}{x}$

d)  $f(x) = (1 + \frac{1}{x})^n$

(۴۰) - د هرې تابع لومړي درې مشتقونه و تائی

a)  $f(x) = e^{x^2}$

b)  $f(x) = \sin x \cdot \cos x$

c)  $f(x) = x + \frac{1}{x}$

d)  $f(x) = x^2 \cdot e^x$

(۴۱) - په کوم تابع کې لومړی مشتق  $f$  د  $f$  سره برابر دی.

(۴۲) -

الف: د کوم  $f$  تابع لپاره  $f'(x) = 2f(x)$  دی؟

ب: د کوم  $f$  تابع لپاره  $f'(x) = -f(x)$  دی؟

(۴۳) - د  $f(x) = \sin x$  څوم مشتق د  $f$  سره سر خوري یا برابر دی؟

(۴۴) - د لاندې توابعو لپاره -م مشتق ته وده ورکړئ.

a)  $f(x) = e^{ax}$

b)  $f(x) = \ln(x+1)$

## د رول قضیه ( Theorem of Rolle )

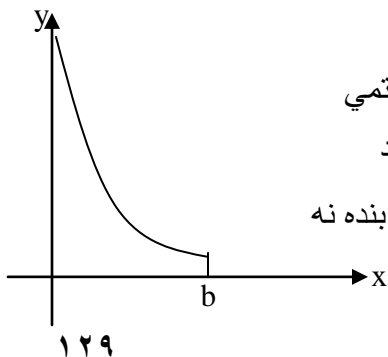
که د  $f$  یوه تابع په بند اینتروال  $[a, b]$  کې متمادي وي او  $k$  د  $a$  او  $b$  ترمنځ پروت وي، نو هلته لږ تر لږه یو عدد  $c$  د  $f(a)$  او  $f(b)$  ترمنځ شته، داسې چې  $f(c) = k$  دی.

فعالیت:

\_\_ که  $f$  تابع په یوه بند اینتروال  $[1, 3]$  کې ثابت وي، دا به د یوې تابع لپاره څه معنا ولري، چې تابع ځنګه ځغلي. ایا دا تابع به جگ ټکي یا ټیټ ټکي ولري او که ځنګه؟ دا روښانه کړئ او د اینتروال په خوبه درې منځ ټکو کې ارزښتونه یو له بل سره پرتله کړئ.  
\_\_ وښایاست، چې د  $f(x) = -x$  تابع په  $[-1, 1]$  انترول کې جگ او ټیټ ټکي چیرته لري او د یو او منفي یو تر منځ د درې  $x$  ارزښتونو لپاره په ګراف د  $f$  ارزښتونه وښایاست او وښایاست، چې یو له بل توپیر لري او که نه؟  
\_\_ د رسم له لارې وښایاست، چې  $x^2$  کوم جگ یا ټیټ ټکی لري او که ځنګه او که لري یې چیرته؟

## د وایر شتراس قضیه Theorem of Weierstrass

که د  $f$  یوه تابع په بند اینتروال  $[a, b]$  کې متمادي وي، نو  $f$  په دې اینتروال کې لږ تر لږه یو جگ ارزښت (اعظمي قیمت) او یو ټیټ ارزښت (اصغري قیمت) نیسی دلته شننیز یا تحلیلي ځواب نه ورکول کیري، دا وینا د لیدلو له مخې معقوله برېښي.



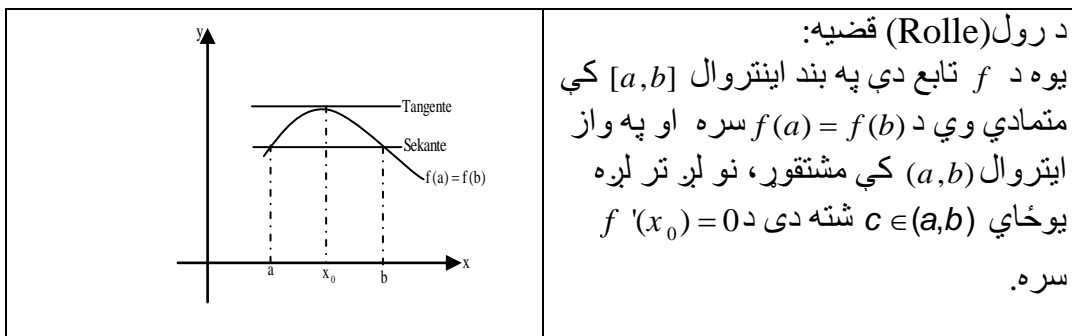
کیدې شي چې یو همغریز (monoton) مونوتون یا جګټیټ) ارزښت د اینتروال په غاړه هم پروت وي. د اینتروال محدودوالی (بندوالی) بی قید او شرطه حتمي دی. د بیلګې په توګه د  $y = f(x) = \frac{1}{x}$  تابع په نیم بند

اینتروال  $(0, b]$  کې متمادي ده، مګر پورته لور ته بنده نه ده، چې په دې توګه خورا جگ ټکی نه لري

## د رول قضیه

## د مشتق منح ارزښت قضیې

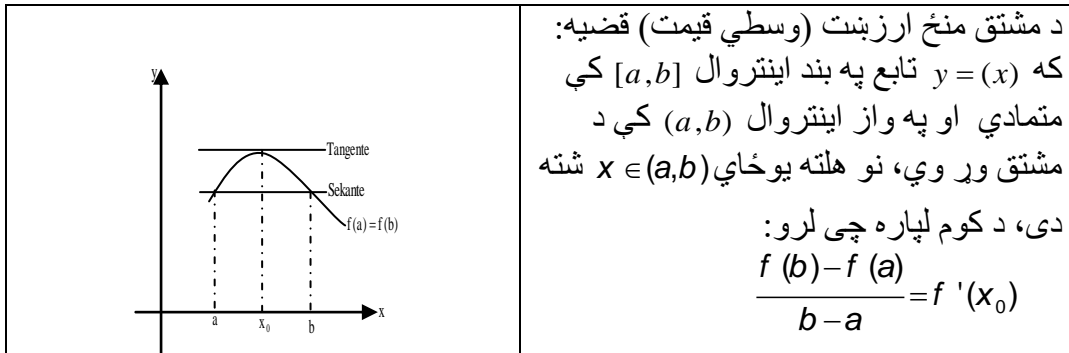
د تانجنت او قاطع ترمنځ او په همدې ډول د مشتق – او تفاضل ویش ترمنځ داسې نږدې اړیکې شتون لري، هغه چې د انالیوزې په منح ارزښت قضیو کې تشریح کېږي. د تابع او انحرافي ارزښتونو څخه لومړی پسی ترلې لاندې د رول قضیه لاس ته راځي



حل:

1. که  $f$  ثابت وي نو سملاسي لاس ته راځي:  $f'(x_0) = 0$
  2. که  $f$  ثابت نه وي، نو د وایر شتراس د قضی له مخی لږ تر لږه د تابع یوخورا لوي او یوخورا کوچنی ارزښت موجود دی. دا ارزښتونه توپیر لري، ځکه چې  $f$  ثابت نه دی. نو له دی کبله لږ تر لږه له دی ارزښتونو څخه د  $f(a) = f(b)$  سره نامساوي دی. په دې اساس د اینتروال په دننه کی یو مونوتون (جگتیټ) ځای  $x_0$  موجود دی. د مشتقور توابعو مونوتوني (جگتیټ ارزښت) شتون د اړین یا ضروري شرطونو قضی له مخی لاس ته راځي:  $f'(x_0) = 0$
- تر اوسه مو وښوول، چی د لازمو شرایطو لاندې یوې افقي قاطع ته یو افقي تانجنت هم شته دی.

دا هندسي پرابلم کیدی شي چی عمومي شي. پوښتنه رامنځ ته کېږي، چی ایا یوې مایثلی قاطع ته په هغه ډول تانجنت د هغه میل (جگوالي) سره جوړیدلی شي؟  
ځواب یی لاندې قضیه راکوي.



حل: دا پر اېنل په یوه مرستندوي تابع داسې تعریفیږي، چې د رول قضیه وکارول شي. د

دې لپاره د قاطع مساوات رامنځ ته کوو:

$$y = g(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a)$$

د مرستندوي تابع په څیر د مشتق تابع جوړیږي:

$$h: h(x) = f(x) - g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) - f(a),$$

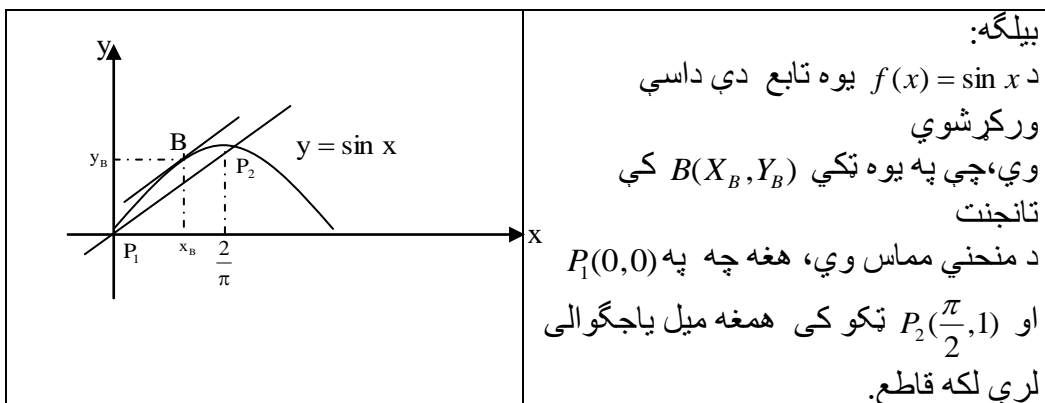
نو باور لري:  $h(a) = h(b) = 0$  برسیره پر دې  $h$  په  $(a, b)$  کې د مشتق وړوالی لري او په

$[a, b]$  کې متمادی دی. له دې سره د رول د قضیې وړاند نیونه (فرضیه) ورکړ شوي، دا

په دې معنا چې یوځایي  $x \in (a, b)$  شته دی د  $h'(x) = 0$  سره، چې له هغې لرو:

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \text{ یعنی } h'(x_0) = f'(x_0) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0,$$

پورته لاسته راوړنه به دا لاندې بیلگې نوره هم روښانه کيږي.





$$m = \frac{\sin \frac{\pi}{2} - \sin 0}{\frac{\pi}{2} - 0} = \frac{2}{\pi} \text{ :خواب: د قاطع (غوڅي) ميل ياجگوالی:}$$

$$f'(x_B) = \cos x_B = \frac{2}{\pi} \text{ په ټکی کې د } B(x_B : y_B) \text{ منحنی ميل د}$$

$$\text{له دې څخه لاس ته راځي: } x_B = \arccos \frac{2}{\pi} = 0,88 \text{ او } f(x_B) = f(0,88) = 0,77$$

لمس ټکی:  $B(0,88 : 0,77)$

$$\text{د تانجنت مساوات: } y = \frac{2}{\pi}(x - 0,88) + 0,77$$

د منځ قضی د عمومیت څخه لاس ته راځي:

پراخه شوي د منځ ارزښت قضیه:

که  $u = f(x)$  او  $v = g(f)$  په بند اینټروال  $[a, b]$  کې متمادي توابع وي او په واز اینټروال  $(a, b)$  کې مشتقور او  $g'(x) \neq 0$  باور ولري، نو د ټولو  $x \in (a, b)$  لپاره، کم له کمه یوځای  $x_0 \in (a, b)$  وجود لري چی لاس ته تری راځي:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

حل: د  $g'(x) \neq 0$  له امله  $g$  معکوس کېدونکی ده او  $v = g(x)$  مساوات د  $x$  په لور

معکوس کېدنه ورکوي، یعنی:  $x = g^{-1}(v)$

که د  $f$  په تابع کی هم نوې متحوله ځای پر ځای شي، نو یوه زنځیري تابع لاس ته تری راځي:

$$u = f(x) = f(g^{-1}(v)) = h(v)$$

د زنځیري قاعدې له مخې یی دا مشتق لاس ته راځي:

$$\text{که په } u = h(x) \text{ تابع د } v_1 = g(a) \text{ او } v_2 = g(b)$$

سره د وسطي قیمت قضیه استعمال شي، نو د  $v_0 \in (v_1, v_2)$  ځای په لاندې ډول موجود دی:

$$\frac{h(v_2) - h(v_1)}{v_2 - v_1} = h'(v_0)$$

له دې څخه د  $h(v)=f(x), v=g(x)$  او  $x_0 = g^{-1}(v_0)$  سره لاس ته راځي:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

### تمرینونه:

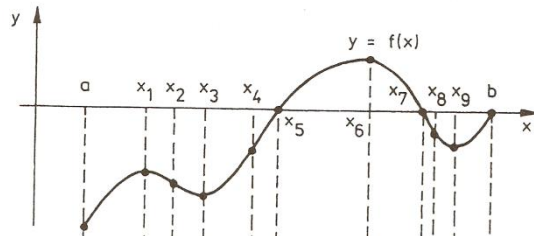
لاندې توابع دوه صفر ځایونه لري. هغه بحراني ارزښتونه پیدا کړئ، چې د دواړو صفر ځایونو تر منځ پراته وي.

a)  $f(x) = x^4 - 5x^3 + 7x - 5x + 6$

b)  $f(x) = x^4 + x^3 + 2x^2 + 2x$

### همغریزي توابع (Monotony (یوناني: یو غریز، برابر ډوله

جگېدونکي (متزايد)، ټیټېدونکي (متناقص) توابع (جگ-ټیټېدونکي توابع)



### فعالیتونه

- په پورته څېره کې ټول هغه ځایونه وښایاست، چې هلته تابع جگېږي.
- په پورته څېره کې ټول ځایونه وښایاست، چې هلته تابع ټیټیږي.
- په پورته څېره کې ټول هغه ځایونه په نڅښه کړئ، چې هلته د تانجنت میل افقي وي.

که د ټولو  $x_1 < x_2$  لپاره د  $f$  یوه تابع په یوه اینټروال کې  
 $(f(x_1) \geq f(x_2)) f(x_1) \leq f(x_2)$  وي، نو تابع په دې اینټروال کې مونوټون جگیدونکې  
 (- تیتیدونکې) بلل کېږي، که  $f(x_1) = f(x_2)$  په کې اجازه ونه لري، نو دا  
 $(f(x_1) > f(x_2)) f(x_1) < f(x_2)$  کره یا په زغرده همغریز جگیدونکې (همغریز  
 تیتیدونکې) بلل کېږي.  
 لاندې قواعد، چې له همغریزووالي څخه په لاس راځي، د همغریزووالي حالت لپاره گټور  
 دي.

د  $f$  یوه تابع ټیک هلته د تعریف په ورشو (ساحه)  $D$  کې همغریز جگیدونکې ده، که د  
 خوښې  $x_1$  او  $x_2$  لپاره، چې په  $D$  کې پراته دي، باور ولري:

$$x_1, x_2 \in D \wedge x_1 \neq x_2 \Rightarrow \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$$

د  $f$  یو تابع ټیک هلته په  $D$  کې همغریز تیتیدونکې ده، که د خوښې  $x_1$  او  $x_2$  لپاره،  
 چې په  $D$  کې پراته دي، باور ولري:

$$x_1, x_2 \in D \wedge x_1 \neq x_2 \Rightarrow \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$$

یو غریزووالی (یونواخت والی) Monotony جگیتووالی، د جگیتووالی جملې

دا  $f(x) = a_1x + a_0$  کرښیز (خطي) تابع

خوړا ساده تابع ده، چې انحنانه لري. ددې

لپاره مسؤل یې ثابته جگپښه یا ثابت میل

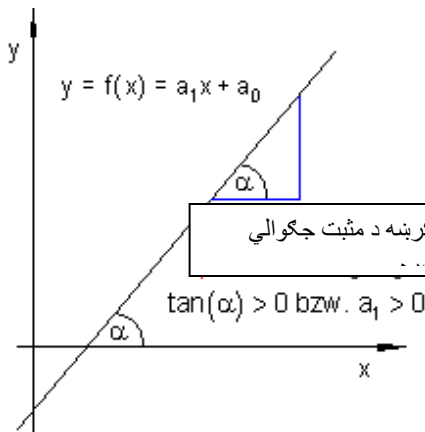
$a_1 = \tan(\alpha)$  ی، چېرته چې  $\alpha$  د کرښې او

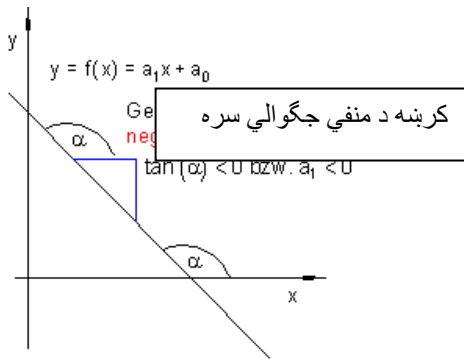
مثبت لوریز د  $x$ -محور ترمنځ

زاویه (کونج) ده.

په مخامخ شکل کې: کرښه د مثبت میل سره

$$a_1 > 0 \Leftrightarrow \tan \alpha > 0$$



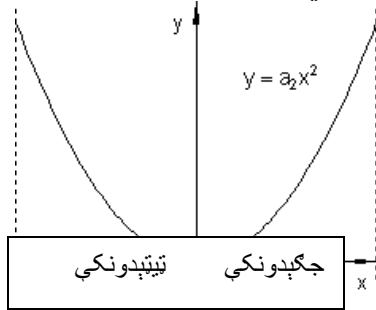


دایپورته داسی دی:  $\tan \alpha < 0$  همداسی  
 $a_1 < 0$

که  $0 < \alpha < 90^\circ$  یا  $0 < a_1 < \infty$  وي، دا په دې مانا چې  $0 < a_1 < \infty$  همداسی ( $\Leftrightarrow$ )، نو کربنه جگپړي. دا معنی لري، چې د جگپړونکي  $x$  سره د تابع  $f(x)$  ارزښت هم جگپړي. په مخامخ شکل کې: کربنه د منفي جگپړني سره:  $\tan \alpha < 0$  همداسی ( $\Leftrightarrow$ )  $a_1 < 0$

که  $90^\circ < \alpha < 180^\circ$  یا  $-\infty < a_1 < 0$  وي، دا په دې معنی، چې  $\alpha < 0$  همداسی  $a_1 < 0$ ، نو کربنه ټیټپړي یا لوړي. دا په دې معنی، چې د جگپړونکي  $x$  سره د تابع  $f(x)$  ارزښت کوچنی کيږي. په پورته دواړو حالتونو کې د همغږيزې تابع (یا د جگ-ټیټپړونکي تابع) غږیرو او له یوه همغږيز جگپړونکي تابع څخه، که  $a_1 > 0$  وي. له یوې مونوتون ټیټپړونکي تابع څخه، که  $a_1 < 0$  وي.

دا د مونوتوني کلمه په هغو توابعو هم کارول کيږي، چې د منحنیو تله راکوي، که فکر وشي، چې په ټولیزه توګه د منحنی د ګراف په هر ټکي باندې تانجنټ ایښول کیدی شي.



له دې امله د تابع  $f(x) = a_2x^2$  لپاره باور لري: په انټروال  $I_1 = \{x | -\infty < x < 0\}_R$  کې تابع  $f(x)$  مونوتون ټیټپړي. او په اینټروال  $I_2 = \{x | 0 < x < \infty\}_R$  کې مونوتون جگپړي.

لکه د کربني په ګراف کې، چې جگپړنه ثابته وه. اوس دا حالت مخ ته نه لرو، یعنې جگپړنه ثابته نه ده، بلکې دا د منحنی له یوه ټکي څخه بل ټکي ته تغیر خوري. د تانجنټ جگپړنه  $< 0$  منحنی مونوتون جگپړي. د تانجنټ جگپړنه  $> 0$  منحنی مونوتون ټیټپړي د تانجنټ جگپړنه، که صفر وي، ثابت پاتې کيږي.

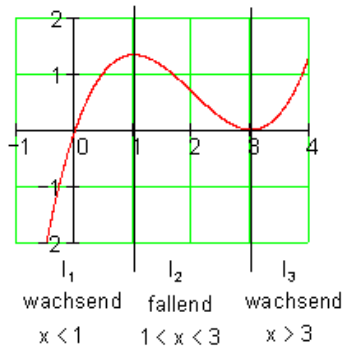
روبنانه ده چي د  $f(x)$  تابع لومړی مشتق  $f'(x)$  د تابع میل (جگوالی) ورکوي. ددی سره د مونوتونی قضیه په لاندې ډول فرمولوو.

قضیه:

- د  $f(x)$  تابع دې په اینتروال  $I$  کې مشتقور وي.
1. که د  $f(x)$  تابع په اینتروال  $I$  کې مونوتون جگېدونکي وي، نو باور لري:  $f'(x) \geq 0$  د ټولو  $x \in I$  لپاره
- که  $f(x)$  په اینتروال کې همغریز ټیټېدونکي وي، نو باور لري:  $f'(x) \leq 0$  د ټولو  $x \in I$  لپاره.
- که  $f'(x) \geq 0$  وي، د ټولو  $x \in I$  لپاره، نو  $f(x)$  په اینتروال  $I$  کې همغریز جگېدونکي ده.
- که  $f'(x) \leq 0$  وي د ټولو  $x \in I$  لپاره، نو  $f(x)$  په اینتروال  $I$  کې همغریز ټیټېدونکي ده.
- که  $f'(x) > 0$  وي، د ټولو  $x \in I$  لپاره، نو  $f(x)$  په اینتروال  $I$  کې په کلکه همغریز جگېدونکي ده.
- که  $f'(x) < 0$  وي د ټولو  $x \in I$  لپاره، نو  $f(x)$  په اینتروال  $I$  کې په کلکه مونوتون ټیټېدونکي ده.

د مونوتوني پیژند ورشو (تعریف ساحه) ټاکنه بیلگه: د تابع گراف څخه زیات وخت کیدی شي د مونوتوني ساحې لږ یا زیات ټیک و لوستل شي.

$$f(x) := \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x$$



د  $f(x)$  لپاره  $I_1 = \{-\infty < x < 1\}_R$  په

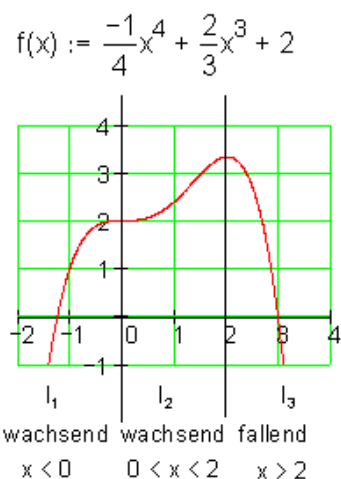
کلکه مونوتون جگېدونکي دی.

د  $f(x)$  لپاره  $I_2 = \{1 < x < 3\}_R$  یو غریز

ټیټېدونکي ده.

د  $f(x)$  لپاره  $I_3 = \{3 < x < \infty\}_R$  په کلکه

یو غریز جگېدونکي ده.



له گراف څخه لاندې مونوتوني ساحې لوستل کيږي.

د  $f(x)$  لپاره  $I_1 = \{-\infty < x < 1\}_R$  په کلکه مونوتونج گڼونکې ده.

د  $f(x)$  لپاره  $I_2 = \{1 < x < 3\}_R$  په کلکه مونوتونج گڼونکې ده.

د  $f(x)$  لپاره  $I_3 = \{3 < x < \infty\}_R$  په کلکه مونوتون ټيټېدونکې ده.

تمرینونه:

--- لاندې تام راشنل توابع په همغږيزوالي خويونو وڅيړئ.

a)  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 3$

b)  $f(x) = 2x^3 + 9x^2 - 12x$

c)  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 1$

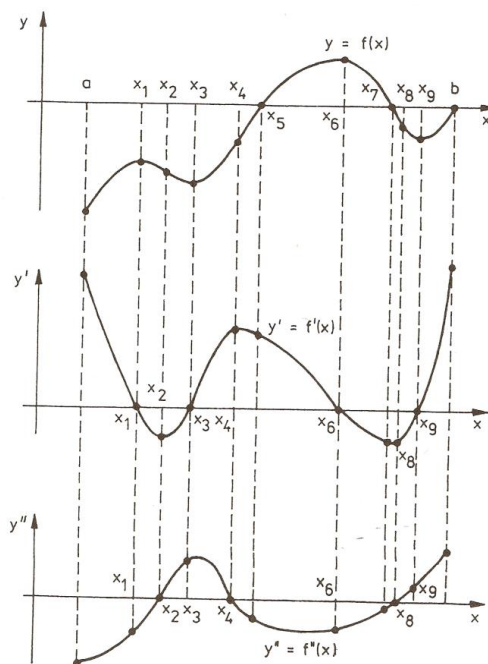
d)  $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + x^2 + 2x + 2$

--- د لاندې ماتراشنل توابعو د مونوتوني حالت د a په واکوالي کې وړکړئ.

a)  $f(x) = \frac{1}{ax+2}$

b)  $f(x) = \frac{1}{ax^2+1}$

## حای اړونده افراطي ټکي (local extrema)



یادونه: په لیکلو می کله کله د افراطي لپاره بحراني لیکلي، پام دي ورته وي.

فعالیتونه:

د مختلفو توابعو گرافونه او په هغې خبرې، چې چیرته افراطي ټکي پراته دي.

- په پورته څېره کې د تابع لپاره نسبي جگ ټکي او خورا جگ ټکي و بنایاست.

- په پورته څېره کې نسبي ټیټ او خورا ټیټ ټکي و بنایاست.

- په پورته څېره کې و بنایاست، چې د نسبي جگو ټکو همداسې خورا جگو ټکو، نسبي ټیټو

ټکو همداسې د خورا ټیټو ټکو دواړو لورو ته تابع څنگه ځغلي؟

- په پورته شکل کې هغو ټکو ته، چې بحراني ټکي دي ځیر شئ، چې تابع هلته څه خوي

لري؟

- د تابع همدې ټکي کې وگورئ، چې لومړی مشتق یې کوم ارزښت لري؟

مور ددې پورته فعالیتونوڅخه لاسته راوړو:

که د  $f(x)$  لپاره د  $x_0$  په خای کې  $f'(x) = 0$  ولرو نو یو نسبي ټیټ ټکی مو مخ ته پروت دی.

که د  $f(x)$  لپاره د  $x_0$  په خای کې  $f'(x) = 0$  او  $f''(x) > 0$  ولرو نو یو نسبي ټکی مو مخ ته پروت دی.

که ددې برعکس ولرو:  $f'(x) = 0$  او  $f''(x) < 0$ ، نو یو نسبي ماکسیموم مو مخ ته پروت دی.

د بحراني ټکي (ټیټ ټکي یا جگ ټکي) لپاره خوي ټاکونکی دی، چې  $f'(x) = 0$  وي او د  $f''(x)$  مخ نښه (+، -)، په دې پریکړه کوي چی ایا یو اصغري ټکی او که اعظمي ټکی مو مخ ته پروت دی.

د پورته اړیکو لپاره لاندې یادوني ضرور دي:

1. دا اړیکي یواځي د  $x_0$  لپاره ارزښت لري چی د تعریف سټ په دننه کی پروت وي او هلته د  $y = f(x)$  تابع پوره څو ځلي مشتقور وي، د غاړو (څنډو) او د هغوځایونو لپاره چې هلته  $f(x)$  تابع کم یا هیڅ مشتق وړ نه وي، ځانگړو څیرنو ته اړتیا ده.
2. شرایط چې  $f'(x) = 0$  وي (مشتقور تابع) یواځي د یوه انحرافي ارزښت لپاره ضرور دی (ضروري یا اړین شرایط).
3. شرایط  $f'(x) = 0$  او  $f''(x) \neq 0$  د بحراني ټکي لپاره یواځي پوره کېدونکی دی او نه ضروري).  
بیلگه:

د  $f(x) = x^2 + 2$  تابع گراف وکارئ او که بحراني ارزښتونه لري، هغه د گراف او

مشتق له لارې وټاکئ



حل: د بیلگې له گراف څخه روښانه ده، چې تابع د  $x=0$  په ځای کې خورا ټیټ ټکي (اصغري-) لري.

د ابحراني ټکي لپاره اړین شرطونه:

1. د تابع لومړي مشتق دی:  $f'(x) = 2x$  په دې مساوات کې د تابع مشتق د  $x_0$  لپاره صفر ځای لري، یعنی دلته یو بحراني ټکی پروت دی.  
 د- تابع دویم مشتق:  $f''(x) = 2$  دا چې  $f''(x) > 0$  دی، نو یو نسبي ټیټ ټکی مخ ته لرو. بیلگه:

د  $y = x^4$  تابع د  $x = x_0 = 0$  لپاره نسبي ټیټ ټکي لري او باوري دي:

$$f'(x) = 4x^3 \Rightarrow f'(0) = 0$$

$$f''(x) = 2x^2 \Rightarrow f''(0) = 0$$

گورو چې دوهم مشتق د صفر څخه نه کوچنی او نه لوی دی.

د پورته شنني څخه لاندې پیژند ته راځو

تعرف یا پیژند:

د  $x = x_0$  په چاپیریال کې د  $y = f(x)$  تعریف شوي تابع یونسبي جگ ټکی په همدې ډول نسبي ټیټ ټکی لري، که ټولو  $x_0$  ته پوره نږدی  $x$  لپاره باور ولري:

$$f(x) > f(x_0) \text{ په همدې ډول } (\Leftrightarrow) f(x) \leq f(x_0)$$

جمله:

(د یوه نسبي بحراني ټکي لپاره ضروري شرایط):

که په  $x_0$  کې مشتق وړ تابع  $y = f(x)$  انحرافي ټکی لري نو لرو:  $f'(x) = 0$

## همغريزي توابع

---

دا جمله مور ته وايي: چيرته چې  $f'(x) \neq 0$  وي نو هلته اکستريموم نه شته، د اکستريموم لپاره يواځې د  $x_0$  ځای په پوښتنه کې راځي، چې د هغې لپاره لرو  $f'(x) = 0$ ، خو حتمي نه ده چې  $y = f(x)$  دې يواکستريموم ولري.

جمله ۱۳۲: (د يوه بافراطي ټکي لپاره پوره کيدونکی شرايط):

که په  $x = x_0$  کې دوه واره مشتقور  $y = f(x)$  تابع لپاره ولرو:

$$f'(x) = 0, f''(x) \neq 0$$

نو تابع  $y = f(x)$  هلته يو بحراني ټکی لري.

خو راټيټ ټکی مخ ته لرو، که وي:  $f''(x) > 0$

خو را جگ ټکی مخ ته پروت دی، که وي:  $f''(x) < 0$

پوښتنې:

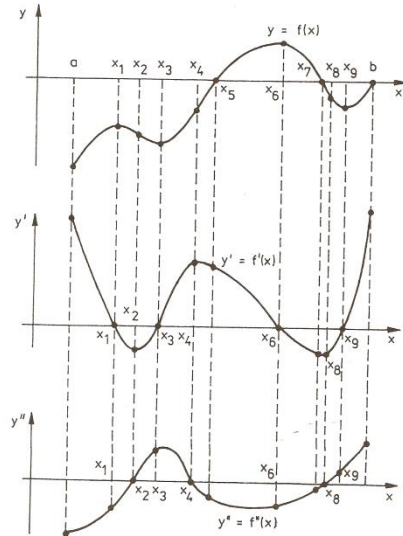
د لاندې توابعو انحرافي ټکي پيدا کړئ.

1)  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$

2)  $f(x) = x^4 - 3x^3 + x + 1$

3)  $f(x) = 7x^7 - 6x^6 + 4x^4 + 2x + 1$

## له بنی لور انحنا اوله کین لور انحنا(مقعر او محدب)



فعالیت:

- په پورته شکل کې مقعریت(ننوتوال) او محدبیت(وتنوالی) وښایاست.
  - په پورته شکل کې د مشتقونو له مخې مقعریت او محدبیت په گوته کړی.
- که په یوه اینتروال کې د مشتقوړ تابع  $f$  دویم مشتق  $f'' > 0$  وي، نو په دې اینتروال کې گراف کین کور شوی یا کینه انحنا لري او که دویم مشتق  $f'' < 0$  وي، نو د تابع گراف بنی کور یا بنی انحنا لري.

بیلگه:

ټول گونگ تابع(راشنل تابع)  $f$  د  $f(x) = x^3 - 2x^2 + 4x - 1$  سره په کومه ورشو(ساحه) کې کین کور دی (کینه انحنا لري (ننوتی یا مقعر دی)) او په کومه ورشو کې بنی کور دی ( بنی انحنا لري(محدب یا وتلی دی)؟

دویم مشتق: ( له لومړی مشتق څخه):

$$f'(x) = 3x^2 - 4x + 4$$

$$f''(x) = 6x - 4$$

$$6x - 4 > 0 \Rightarrow x > \frac{2}{3} \text{ د لپاره کین گوروال (کینه انحنا (ننوتی یا مقعر))}$$

$$6x - 4 < 0 \Rightarrow x < \frac{2}{3} \text{ د لپاره بنی کوروالی (بنی انحنا (وتلی یا محدب))}$$

بیلگه:

د مات راشنل تابع  $f(x) = \frac{1}{x+2}$  گراف یو های پارابول دی. د های پارابول کومه ځانگه کینه کړه ده یا کینه انحنا لري (مقعر)، او کومه یوه یې بنی کوروالی - یا بنی انحنا لري (محدب)؟

$$\text{دویم مشتق: } f''(x) = \frac{2}{(x+2)^3}; \quad f'(x) = \frac{1}{(x+2)^2} \text{ صورت تل مثبت دی.}$$

د  $x < -2$  لپاره د مخرج او همداسې د کسر ارزښت منفي دی. د های پارابول ځانگه بنی کوروالی یا انحنا لري (وتلی یا محدب).

د لپاره  $x > -2$  مخرج او همداسې ټول کسر (مات) مثبت دی.

های بارابول کینکور دی یا کینه انحنا لري (ننوتی یا مقعر).

بیلگه: د دواړو تابعو  $f(x) = \sqrt{x}$  او  $g(x) = \sqrt{x^3}$  کوروالی (انحنا) دې له دواړو لورو یو د بل سره پرتله شي. دواړه توابع د  $x > 0$  لپاره تعریف دي.

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad g'(x) = \frac{3\sqrt{x}}{2}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{4\sqrt{x^3}} \quad g''(x) = \frac{3}{4\sqrt{x}}$$

دویم مشتقونه د  $x \in R^+$  لپاره تعریف دي.

په دې ساحه کې  $f''(x) < 0$  دی. اړونده گراف بنی کوروالی یا انحنای لري، دا یو بنی لور ته واز پارابول بنایي.

په همدې ساحه کې  $g''(x) > 0$  دی. اړونده گراف کین کور دی یا کینه انحنای لري. اړونده گراف یو کین کوروالی یا کینه انحنای لري، دا پورته لور ته واز پارابول دی.

تمرینونه:

۱ -- و بنایاست، چې د لاندې توابعو مقعریت او محدبیت کوم دي؟

$$a) \quad f(x) = x^3 + 4x^2 + x$$

$$b) \quad g(x) = 2x^3 + 3x - 2$$

۲ -- په کومه ورشو کې لاندې تام راشنل توابع یو کین کوروالی لري او په کوم کې بنی کوروالی لري.

$$a) \quad f(x) = x^3 - 6x^2 + 5x + 2$$

$$b) \quad -2x^3 + 3x^2 - x - 4$$

۳ -- د لاندې مات توابعو گرافونه هایپاربول دي. د هایپاربول خانگی کوم کوروالی لري؟

$$a) \quad f(x) = \frac{1}{4x+1}$$

$$b) \quad f(x) = 3 - \frac{3}{x^2}$$

۴ -- په کومه ساحه کې لاندې ناراشنل توابع یو کین او په کوم کې یو بنی کوروالی لري؟

$$a) \quad f(x) = x \cdot e^{2-x}$$

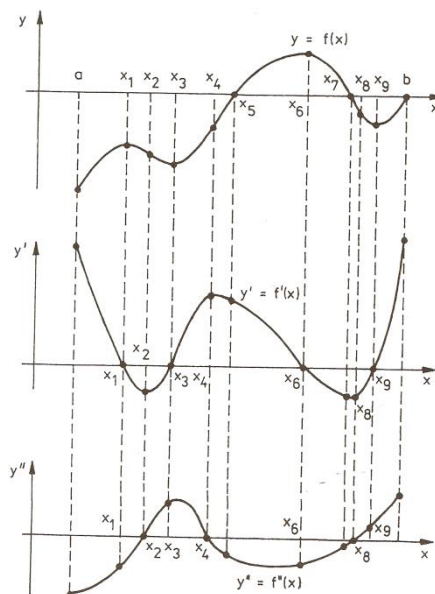
$$b) \quad f(x) = \ln x^2$$

۵ -- ولې د یوه دریمی درجې تام راشنل تابع گراف په تل تلنه کې یوه بنی انحنای (کوروالی) نه لري.

۶ -- ولې یو څلورمه درجه تامراشنل تابع د  $f(x) = ax^4 + dx + e$  سره یو نلتلونی کینه

انحنای (کوروالی) او بنی انحنای لري؟

### د انعطاف ټکي (اورونټيکي) Inflection Points



فعالیتونه:

- پورته څیره په څیر وگورئ او وښایاست، چې چیرته یا په کوم ټکي کې منحنی (له کین و ښي لور ته) خوزښت - یا خپله د حرکت لور بدلوي؟

- د انعطاف ټکو شاوخوا هم فکر وکړئ، چې کوم ټکي غوره ټکي دي او د هغو له خویونو هم د

انعطاف ټکو خویونه وټاکئ.

- په شکل کې فکر وکړئ چې د انعطاف ټکي شاوخوا منحنی څنگه ځغلي.

- د شکل په هکله په خپل فکر څه ووايي او د خپل فکر په بنسټ خپل دلایل روښانه کړئ. مور له پورته څیرې اټکل کولی شو چې: که د  $x_0$  ځای کې ولرو:  $f''(x) = 0$  او  $f'''(x) > 0$ ، نو یو ښی-کین- انعطاف ټکی (اورونټيکي) مو مخ ته پروت دی.

برعکس (په څټ): که وي:  $f''(x) = 0$  او  $f'''(x) < 0$  نو یو کین - بنی - د انعطاف ټکی مو مخ ته پروت دی.

دا نعطافتکي لپاره خوی ټاکونکی دی، چې  $f''(x) = 0$  وي، دا چې دا بنی - کین - او که کین - بنی - انعطاف ټکی (اورونټیکي) دی، د  $f'''(x)$  مخ نښه یی ټاکي.

- شرایط  $f''(x) = 0$  د انعطاف ټکي لپاره یواځی اړین یا ضروري دي.

د  $y = x^4$  لپاره  $f''(0) = 0$  دی، مگر اورونټیکي مو مخ ته نه دی پروت.

- شرایط  $f''(x_0) = 0$  او  $f'''(x_0) \neq 0$  د انعطافتکي لپاره پوره کیدونکي دي.

گورو چی  $y = f(x) = x^5$  تابع د  $x = x_0 = 0$  ځای کی یو انعطافتکی لري او باوري دي:

$$f'(x) = 5x^4, \quad f'(0) = 0$$

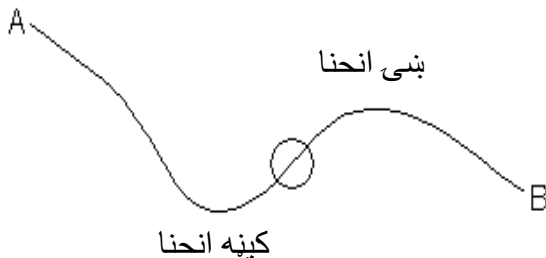
$$f''(x) = 20x^3, \quad f''(0) = 0$$

$$f'''(x) = 60x^2, \quad f'''(x) = 0$$

گورو چی دریم مشتق  $f'''(x)$  نه له صفر څخه کوچنی او نه لوي دی.

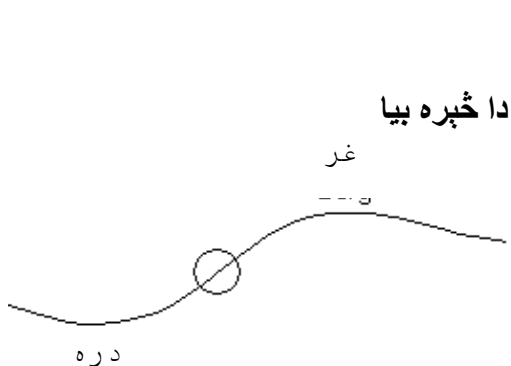
ترمخ راورنی او د کلمي روښانه ونی:

د دي کلمي د لا نوري روښانه کولو لپاره په لاندي توگه مخ ته ځو:



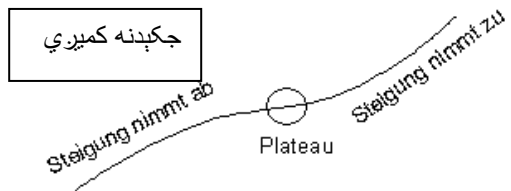
د بایسکل ځغاستي چې له A څخه ځغلي د منحنی څخه تېرېږي او B ته رسېږي. د همغه وخت د بایسکل ځغاستي د انډل حالت د ځغاستي په وخت کې په پام کې ولري. د کیني منحنی (د کین لوري د انډل حالت) څخه وروسته د بنی لوري منحنی کې ځغلي.

د کینې- او بنی منحنی (کزی) ترمنځ باید د باسکل انډل نېغ ولار وي (عمود وي)، چې دا د انډل بدلون دی له کینې لوري و بنی لوري ته. دا د کینې او بنی منحنی ترمنځ اوریدنه یاد **انعطاف ټکی** بلل کېږي.



تاسو له بایسکل سره په یوه غونډی ځغلی. وروسته له هغې، چې له تالی څخه تېرېږي، نو لار په جگېدو پیل کوي. په لومړي سر کې نرم او بیا په نیغه جگېږي، بیا په دې پسې جگوالی بېرته کمېږي، چې پاس د غونډی په څوکه صفر ارزښت غوره کړي. یو چېرته په غونډی پورته صفر ارزښت ته رسېږي. یو چېرته په لار جگېدنه خورا لویه وه. هلته د انعطاف ټکی پروت دی.

دا څیره د پښتو نومونو سره بیا کښل...



له کینې بنی لور ته ژباړه: **جگېدنه کيږي، هواره، جگېدنه زیاتېږي**

د بایکل ځغلوونکي بل حالت، چې له څنگ دیاگرام څخه یې رانیسو:

په غره د بایسکل ځغاستمیل یا جگېدنه لومړی کمېږي، چې له سره بېرته جگه شي. ددې ترمنځ یوه ساحه شته، د کم جگوالی سره (یوه نسبتاً هواره). دې نسبتاً هوار ځای کې د ټوټه کرښې جگېدنه نسبت بل ځای ته کمه ده. هلته اورونټکی (د انعطاف ټکی) پروت دی.

پوهنډو، چې د یوې تابع لومړی مشتق د تابع د جگوالی تابع دی، چې له گراف څخه یې جگوالی لوستل کېږي. دا چې د انعطاف ټکی خورا لوی یا خورا کوچنی ټکی کېدی شي، داسې پیدا کېږي، چې د مشتق تابع انحرافي ارزښتونه پیدا کړو.

دا تلنار همغسې ده، لکه د پیل تابع  $f(x)$  لپاره مو ټاکلي. اوس د مشتق تابع  $f'(x)$  باندې دا کار یا عمل اجرا کېږي.

مخکی له دې چې یو لړ جملې د پحراني ارزښتونو او د انعطاف ټکو په هکله څیړو، غواړو چې دا کلیمی تعریف کړو.

دواړه کلمې به د نسبي افراطي ټکي په بڼه کې سره را غونډې شي.



پېژند:

په یوه چاپیریال  $x = x_0$  کې مشتق وړ تابع  $y = f(x)$  یو کین-بنی-انعطاف‌تکی په همدې ډول بنی-کین-انعطاف‌تکی لري، که د هغه مشتق هلته یو نسبي جگتکی (عظمي نقطه) په همدې توگه یو نسبي ټیټ تکی ولري.

جمله: (د یوه نسبي بحراني تکی لپاره ضروري شرایط):

که په  $x_0$  کې مشتق وړ تابع  $y = f(x)$  اکستریموم لري نو لرو:  $f'(x) = 0$

دا جمله مور ته وایي: چیرته چې  $f'(x) \neq 0$  وي نو هلته بحراني تکی نه شته، د بحراني تکی لپاره یواځې د  $x_0$  ځای په پوښتنه کې راځي، چې د هغې لپاره  $f'(x) = 0$  وي، خو حتمي نه ده چې  $y = f(x)$  دې یو بحراني تکی ولري.

د پورته جملې استعمال په  $y' = f'(x)$  څخه لاندې جمله لاس ته راځي:

جمله: (د اوړونټکي (انعطاف تکی) لپاره اړین شرایط):

که په  $x = x_0$  کې دوه واره مشتق وړ تابع  $y = f(x)$  هلته یو انعطاف تکی ولري، نو لاس ته ترې راځي:  $f''(x) = 0$

دلته هم باور لري (یادونه ۴ دې پءتله شي): چیرته چې  $f''(x) \neq 0$  وي، نو هلته نه

شي کیدی چې د انعطاف تکی موجود وي. مگر چیرته چې  $f''(x) = 0$  وي، د انعطاف تکی شته کیدلی شي، خو اړین یا ضرور نه ده چې هلته انعطاف تکی شته وي.

له پورته څخه لاندې جمله لاس ته راځي.

جمله: (د انعطاف ټکی لپاره پوره کیدونکی شرطونه)

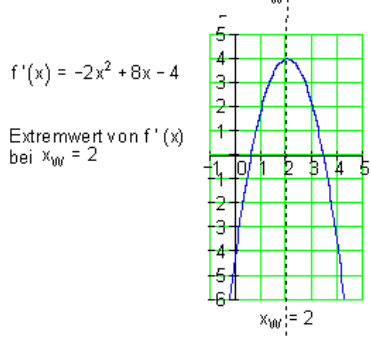
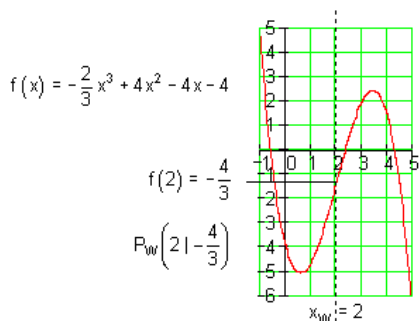
که په  $x = x_0$  کې د دريواره مشتقور تابع  $y = f(x)$  لپاره وي:  $f''(x) = 0$  او

$$f'''(x) \neq 0$$

نو هلته يو انعطاف ټکی مخ ته لرو. که  $f'''(x) < 0$  وي، نو يو کين-بني - انعطاف ټکی مخ ته پروت دی او د  $f'''(x) > 0$  لپاره يو بنی-کين-انعطاف ټکی مخ ته لرو.

شننيزه يا تحليلي بيلگه:

يادونه: مور د  $x_E$  سره افراطي ټکی په نښه کوو او د  $x_W$  سره د انعطاف ټکی په نښه کوو.



1- تابع مساوات د مشتق سره

$$f(x) = -\frac{2}{3}x^3 + 4x^2 - 4x - 4$$

$$f'(x) = -2x^2 + 8x - 4$$

$$f''(x) = -4x + 8$$

$$f'''(x) = -4$$

2- دويم مشتق صفر کړئ.

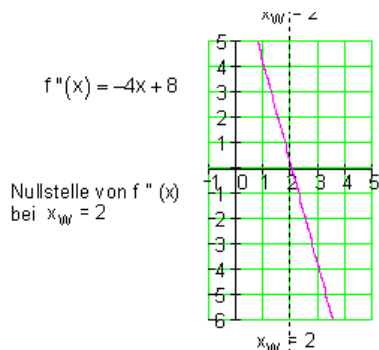
$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -4x + 8 = 0$$

$$\Rightarrow x_W = 2$$

3- د انعطاف ټکی له مخې بنوونه، چي ايا د انعطاف ټکی شته دی؟

$$f'''(x_W) = f'''(2) = -4$$

4- په  $f(x)$  د انعطاف ځايونه ځای په ځای کولو له لاري د انعطاف ټکي ټاکنه

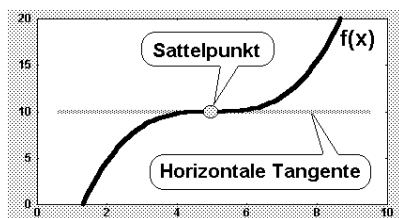


$$f(x_w) = f(2) = -\frac{2}{3}(2)^3 + 4(2)^2 - 4(2) - 4 = -\frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow P_w\left(2, -\frac{4}{3}\right)$$

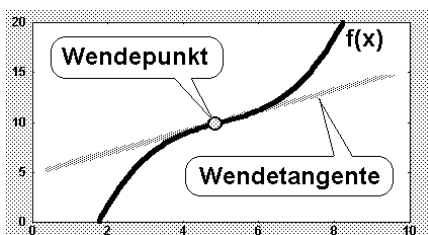
$$\underline{\underline{P_w(21-1.33)}}$$

پام: په انعطاف خای  $x_w$  کې د  $f(x)$  گراف کېږي.  
 په یوه په خوښه ټکي  $x_0$  کې د کږونې(انحنا) لپاره باور لري:  
 $f''(x) > 0$  په دې معني دی، چې  $f(x)$  کین لور ته کېږي (انحنا لري) دی.  
 $f''(x) < 0$  په دې معنی، چې تابع  $f(x)$  گراف بنی لور ته کېږي (انحنا کوي)  
 یو زینتکی Der Sattelpunkt څه شی دی؟

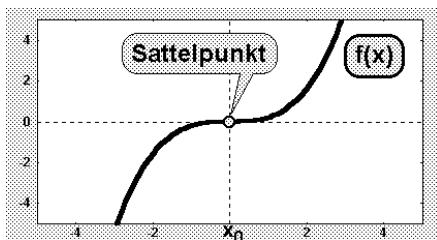


پېزند:

د زینتکي (کله کله برنډې ټکی هم بلل کېږي) لاندې د انعطافټکي ځانگړی حالت پوهیږو، داسې انعطافټکی چې تانجنت یې افقي (پروت) وي:



د پرتلي لپاره دې بیا یو ،،عادي،، انعطافټکی ورکړ شوی وي. دا یو ماثل (نه افقي) تانجنت لري

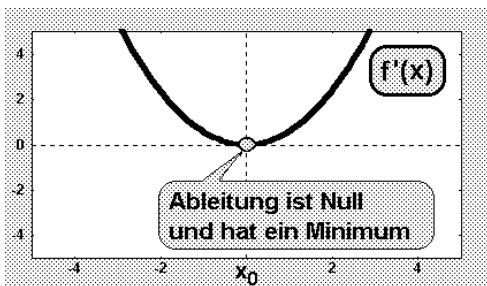


توضیح:

اوس فکر کوو، چي يو زینتکی څنگه د شمېرلو له مخې پېژندل کېدی شي. په دې برخه کې په ځانگړي توگه دا مخ ته لرو، چي يو زینتکی له بني – و کينه انحناء و شمېرو.

د دې لپاره د  $f(x)$  تابع جگوالی په پام کې نیسو، یعنی لومړی مشتق: د زینتکي د مخه د  $f(x)$  جگوالي کمیري، په زینتکي کې صفر ارزښت لري، او له زینتکي څخه وروسته بېرته جگیري.

يو زینتکی (د بني – کين – بدلون سره) په دې پېژندل کېږي، چي لومړی مشتق  $f'(x)$  یې هلته صفر شي او سربېره پر دې هلته یو نسبي ټیټکی (مینیموم) ولري.



د لومړي مشتق  $f'(x)$  شکل داسي برېښي:

لومړی شرط دی، چي مشتق یعنی  $f'(x)$  په زینتکي کې د صفر سره مساوي دی.

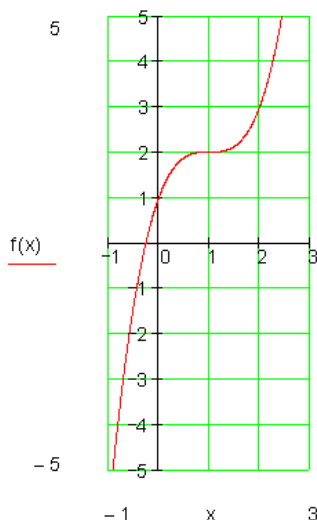
زینتکی (بني-کين-بدلون)  $f'(x_0) = 0$  دوم شرط دی، چي مشتق  $f'(x)$  هلته یو نسبي مینیموم لري.

دا په دې معنادی، چي بل جگ مشتق  $f''(x)$  باید په صفر مساوي وي او مخنښه له منفي و مثبت ته بدلېږي.

له دې سره سم د زینتکي لپاره پوره کېدونکي قضیه ومیندل شوه: د زینتکي لپاره جمله (خوي ټاکنه) (د بني – کين – انعطاف سره)

الف: د  $x_0$  ځا کې لومړی مشتق  $f'(x)$  صفر دی:  $f'(x_0) = 0$   
 ب: د  $x_0$  په ځا کې لومړی مشتق  $f'(x_0)$  یو مینیموم لري، دا په دې معنا، چې دوم  
 مشتق صفر دی، یعنې  $f''(x) = 0$  دوم مشتق مخخښه له منفي څخه و مثبت ته بدلوي.  
 بل بدیل (د گرانو دوستانو وړاندیز)

### زینټیکي Der Sattelpunkt



د انعطاف ټکي یو ځانگړی حالت زینټیکي دی. دا د  
 انعطاف ټکي دی د صفر جگپدني سره. که د کین لور  
 ورتزدي شو فکر کېږي، چې، نسبي جگټکی مو مخ ته  
 پروت دی  
 که څوک د بني لور ورتزدي شي فکر کوي، چې یو  
 نسبي ټیټیکي مخ ته لرو.  
 اوس دا حالت د ریاضیاتو له لوري څېړو:  
 مشتق:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 3$$

$$f''(x) = 6x - 6$$

$$f'''(x) = 6$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x + 3 = 0 \Rightarrow x_{1/2} = 1$$

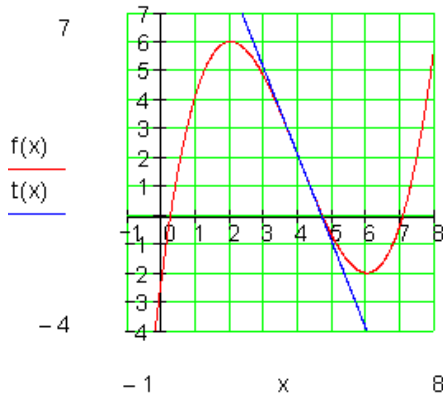
د $x=1$ سره $\leq 1$ زینټیکي	د $x=1$ سره د انعطاف ټکي	$f''(1) = 6 \cdot 1 - 6 = 0$ $f'''(1) = 6$
---------------------------------	-----------------------------	---

د انعطاف ټکي لپاره شرایط پوره دي.  
 دا چې د  $f''(1) = 0$  له امله د انعطاف ټکي مخ ته لرو، نو دا د انعطاف ټکي همغه زینټیکي  
 دی.

د انعطاف ټکي پیداکونه:

د تابع گراف باندې انعطاف ټکي کې تانجنت د انعطاف تانجنت بلل کېږي. د انعطاف  
 تانجنت هم

همداسې پیدا کېږي لکه د تابع دگراف په یوه ټکي کې تانجنت، چې تانجنت مساوات ټاکل  
 کېږي.



د انعطاف تانجنت د  $f(x)$  گراف د انعطاف په  
 ټکي  $P_w(4, 2)$  کي غوڅوي او دا لاندي مساوات  
 لري:

$$t(x) = -3x + 14$$

$$f(x) = \frac{1}{4}x^3 - 3x^2 + 9x - 2$$

$$f'(x) = \frac{3}{4}x^2 - 6x + 9$$

$$f''(x) = \frac{3}{2}x - 6 \quad f'''(x) = \frac{3}{2}$$

$$f''(x_w) = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{2}x - 6 = 0$$

$$د \quad f'''(x_w) = \frac{3}{2} \neq 0 \quad او \quad x_w = 4 \quad د$$

$$\text{تانجنت } f(x_w) = f(4) = 2 \Rightarrow P_w(4|2)$$

مساوات لپاره باور لري.

د  $x_w$  لپاره د تانجنت مساوات

$$t(x) = f'(x_w)(x - x_w) + f(x_w)$$

$$د \quad f'(x_w) = f'(4) = -3 \quad \text{سره په لاندي ډول}$$

$$دي \quad t(x) = -x(x + 4) + 2 = \underline{\underline{-3x + 14}}$$

د انعطاف ټکي تانجنت پيداکونه:

په انعطاف ټکي کي د تابع دگراف تانجنت د انعطاف تانجنت بلل کېږي.  
 د انعطاف تانجنت مساوات همداسي ټاکل کېږي، لکه د تانجنت مساوات د گراف په خوښه  
 ټکي باندې.

داسي حالتونه، لکه  $f'(x) = f''(x) = f'''(x) = 0$  دلته تر څيرنی لاندي نه نيول کېږي.

پوښتنې

$$1 \text{ -- د } f \text{ تابع د } x \neq 1, f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{(x - 1)^2} \text{ سره د انعطاف ټکي پيداکونه}$$

2 -- د لاندي توابعو د انعطاف ټکي پيدا کړئ.

$$a) f(x) = \frac{2x-2}{x^2}$$

$$b) f(x) = \frac{x}{x^2+3}$$

$$c) f(x) = \frac{x^3}{3(x-1)^2}$$

$$d) f(x) = \frac{x^3-8}{4x}$$

۳ -- و بنایئ، چي د  $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1} e$  تابع د انعطاف ټکي زینټکی دی.

۴ -- د لاندې توابعو د انعطاف ټکي (اورونټکي) پیدا کړئ.

$$a) f(x) = x \cdot e^{-x^2}$$

$$b) f(x) = \ln \frac{1}{x^2+1}$$

## د منحنی بحث (Kurven Diskussion) :

یوه تابع  $y = x^3 + x^2 - 3$  لرو. د دې تابع شکل رسم کړئ او بیا په دې رسم کې د تابع انحرافي ټکي او د انعطاف ټکي په نڅینه کړئ، رښانه کړئ، چي انحنای چیرته له کیني لور و بنی لوري ته او له بنی لوري و کیني لوري ته ده.

فعالیت:

- تناظر تعریف کړئ.

- لاندې توابع رسم کړئ، جگ ټکي، تیب ټکي او د انعطاف ټکي یې پیدا کړئ.

$$x^3 + x$$

$$3x^3 + x + 2$$

ددې لپاره چي یوه تابع رسم کړای شو، ساده ده که د تابع غوره ټکي و پیژنو. مور دې بحث ته د منحنی بحث وایو. مور په دا ډول خبرو اترو کې باید سیستماتیک مخ ته لاړ شو.

په لاندې ډول تلنه گټوره بلل شوي.

دتعریف ساحه: د تابع څیرنه یواځي په همدې ورشو کې موخه وره ده.

تناظر **Symetry** : باید وټاکل شي، چي تابع محوري متناظر او که مرکزي متناظر ده.

د محوري تناظر لپاره باور لري:  $f(-x) = f(x)$

د مرکزي تناظر لپاره باور لري.  $f(-x) = -f(x)$ .  
 په پورته دواړو حالتونو کې دې فقط  $x \geq 0$  وڅیړل شي.  
 په ټولیزه توګه که ټول ریل تابع په پام کې ونیسو، نو ګورو چې که توان (د پولینوم  
 درجه) یې جفت (جوړه) وي، نو پولینوم محوري متناظر دی او که توان (د پولینوم درجه)  
 طاق (ناجوړه) وي، نو پولینوم مرکزي متناظر دی.

انحرافي ټکي **Extrema** : د نسبي بحراني ټکو ټاکل (جګټکی، ټیټکی)  
 د جګټکی یا نسبي جګ ټکي پوره کېدونکي شرطونه:  
 $f'(x_1) = 0 \wedge f''(x_1) < 0$

انعطافټکی Inflection Point :

د انعطافټکو او همداسې زینټکي ټاکلو له پاره پوره کېدونکي شرطونه:

$$f''(x_w) = 0 \wedge f'''(x_w) \neq 0$$

زینټکی انعطافټکی دی د افقي تانجنت سره.

د تابع تقاطع د  $x$  او  $y$  محورونو سره (د محورونو غوڅټکی):

$$P_{xi}(x_i | 0) \Rightarrow (x) = 0$$

$$P_y(0 | y_s) \Rightarrow f(0)$$

د ګراف انځورونه: د ټولو تراوسه راټولو شوو معلوماتو سره کړی شو، چې ګراف انځور  
 کړو. ددې لپاره لومړی یو ارزښتجدول انځور یږي. دا راته په ګوته کوي، چې نور کوم  
 ارزښتونه شمیرل کېږي.

د انحنای حالت او یو غبریزوالی:

د انعطاف په ټکي  $X_w$  کې د  $f(x)$  ګراف تغیر خوري.

په خوښه یوه ټکي  $x_0$  کې د انحنای لپاره باور لري:

$$f''(x_0) > 0 \text{ په دې معنا، چې د } f(x) \text{ تابع ګراف کینه انحنای لري (کونوکس)}$$

$$f''(x_0) < 0 \text{ په دې معنا، چې د } f(x) \text{ تابع ګراف بنی انحنای لري (کونکاو)}$$

یو غبریزوالی

1- که د ټولو  $x \in I$  لپاره وي  $f'(x) \geq 0$ ، نو  $f(x)$  په انټروال  $I$  کې مونوټون جګیږي.

که د ټولو  $x \in I$  لپاره  $f'(x) \leq 0$  وي، نو  $f(x)$  په انټروال  $I$  کې مونوټون ټیټېدونکی

دی.



2- کہ د ټولو  $x \in I$  لپاره  $f'(x) > 0$  وي، نو  $f(x)$  تابع په انټروال  $I$  کې کره غښتلي مونتون جگېدونکی ده.

که د ټولو  $x \in I$  لپاره  $f'(x) < 0$  وي، نو  $f(x)$  تابع په انټروال  $I$  کې غښتلي مونتون جگېدونکی ده.

د پېژند وړشو ژی ټکي:

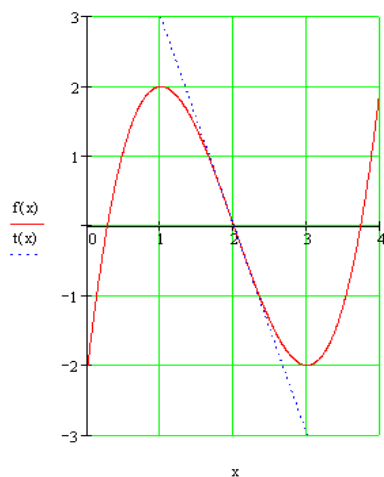
د تابع ژی ټکي کتنه په پېژند وړشو کې. که پېژند وړشو نامحدوده وي، نو لیمیت  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$  او  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  ټاکو.

بیلگه :

د  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$  تابع رسم کړئ.

مشتق کونه:

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2 \quad t(x) = -3x + 6$$



$$y = f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$$

$$y' = f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$$

$$y'' = f''(x) = 6x - 12$$

$$y''' = f'''(x) = 6 \quad D = \mathbb{R}$$

نسبي انحرافي ټکي

$$P_{\min}(3|-2) \quad P_{\max}(1|2)$$

انعطاف ټکي او تانجنت

$$P_W(2|0) \quad y = f_t(x) = -3x + 6$$

صفر خايونه:

$$P_{x_1}(2|0) \quad P_{x_2}(3.7|0) \quad P_{x_3}(0.3|0)$$

د  $-y$  محور سره غوڅټکی (دقاطع):  $P_y(0|-2)$

يوغريزو والی (مونوتوني ياجگ - تيئوالی) د تابع حالت په  $x \rightarrow -\infty$  او  $x \rightarrow \infty$  کی

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \left( 1 - \frac{6}{x} + \frac{9}{x^2} - \frac{2}{x^3} \right) = -\infty$$

$$I_1 = \{x \mid -\infty < x \leq 1\}_{\mathbb{R}} \text{ په}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^3 \left( 1 - \frac{6}{x} + \frac{9}{x^2} - \frac{2}{x^3} \right) = \infty$$

کی يوغريز جگيري.

سيومتري: نه لري

$$I_3 = \{x \mid 3 \leq x < \infty\}_{\mathbb{R}} \text{ په}$$

کی يوغريز جگيري.

د انحناء حالت:

$$I_4 = \{x \mid -\infty < x < 2\}_{\mathbb{R}} : \text{بني انحناء (محدب)}$$

$$I_5 = \{x \mid 2 < x < \infty\}_{\mathbb{R}} : \text{کينه انحناء (مقعر)}$$

تمرینونه:

په لاندې توابعو بحث وکړئ او غوره نقطې يې پيدا کړئ:

اول) د شمېرني له لارې وښايست.

دويم) په شکل کې په نخبه کړئ.

a)  $2x^3 + x^2 + 1$

b)  $x^3 + x^2 + 3x$

c)  $x^3 + 2x^2 + x + 3$

## د ناکلو افادو یا وینو=گ\پولی

$$0.\infty, \frac{0}{0}, 0^\infty, \frac{\infty}{\infty}, \dots$$

که و لرو  $x \neq 5$ ;  $\frac{x^2+3x+2}{x+5}$ ، ومو لیدل، چې د داسې توابعو لیمیټ په پیدا کولی شو. دا ډول تابع ته ټاکلې افادې وایې، ځکه چې مشتق یې نیول کېدی شي، یعنی د کمښتونو ویش (د تفاضلونو ویش) حد یې ټاکل کېدی شي.

که  $\frac{\sin 2x}{5x}$  توابع و لرو، نو د  $x=0$  لپاره د دې تابع مشتق په ورسره بلده توگه نه شو نیولی، چې له دې امله ناکلې افادې ورته وایو.

فعالیت:

- که تابع  $f(x) = \frac{\sin x}{x^2+x}$  ورکړ شوی وي.

اول - د تابع  $f(x) = \frac{\sin x}{x^2+x}$  پوله یعنی  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x^2+x}$  د پولې له درسه، چې په لومړۍ بره کې لوستل شوي، پیدا کړی.د.

- پورته په ننوتنه کې و هڅېږی، چې د توابعو مشتقونه پیدا کړی.

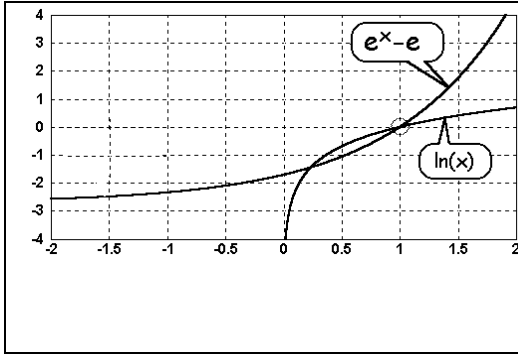
- که و لرو  $\frac{x^2-4x-5}{x-5}$ ، نو د تابع مشتق د چپړته نیول کېږي، که د  $x=5$  شونی وي، نو مشتق یې ونیسئ.

پیل څیرنه: د  $\frac{0}{0}$  حالت که پوله ارزښت جوړېدو کې یو کسر پیدا شي، چې صورت او

مخرج یې دواړه د صفر په لور لار شي یا صفر شي، نو دا پوله ارزښت، ناکلې افاده، بولو.

بیلگه:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - e}{\ln x} = \frac{\text{Zähler} \rightarrow 0}{\text{Nenner} \rightarrow 0}$$



په څېره کې برخه توابع رسم شوي دي،  
يعني د صورت او همداسې د مخرج  
گرافونه.  
گورو: د صورت او مخرج د توابعو  
ارزښتونه دواړه و صفر ته ځي. (که د ۱  
په لور لارشي)

ليکنود (ليکنډول): د افادي

$$\frac{\text{Zähler} \rightarrow 0}{\text{Nenner} \rightarrow 0}$$

$$\frac{0}{0}$$

لپاره په حدشمېرنه کې لنډ لیکو:

دا په حقيقت کې دقيق نه دی، مگر په ټوليزه توگه داسې معمول دی

روښانه ونه :

ناتاڪلي افاده څه شی دی؟

دا پوښتنه رامنځ ته کيږي، چې دا ناتاڪلي افاده خپل نوم له کومه ځايه اخلي. دا ،، ناتاڪلی،،  
بلل کيږي، ځکه چې حديي د عادي طريقو له لارې نه شي شمېرل کېدی. دا کار د لوري  
رياضي سره دا شمېرنه شونې شوه (د بېلگې په توگه د لو پيټال قانون له مخې، چې پسبه  
وڅېرل شي).

روښانه ونو ته تشریح:

اوس ښايو، چې د داسې توابعو شمېرل ولي ناشوني دي.

موږ بيا دا د تېر مخ بيلگه رانيسو:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - e}{\ln x} = \frac{\rightarrow 0}{\rightarrow 0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - e}{\ln x} = \frac{\text{Zähler} \rightarrow 0}{\text{Nenner} \rightarrow 0}$$

1- که هڅه وشي، چې حد پيدا کړو، داسې چې د  $x=1$  په کسر کې خای په خای کړو، نو افاده  $0:0$  به ترې لاس ته راشي. دا تعريف نه لري،  $u = f\left(\frac{1}{z}\right)$  ځکه په صفرويش اجازه نه شته.

2- ترمخه مو د ناپاکلو افادو د شمېرلو لپاره يعني د ناطق کسري توابعو پوله شمېرنه کې د چل يا د طريقي څخه کار واخسته. اوس دا چل نه شو کارلی، لکه په پورته بيلگه کې.

3- د حد اټکل هم ناشونی دی: په لومړي ليد کېدی شي په فکر راشو، چې که صورت او

مخرج د صفر په لور لاړ شي، نو کسر به د 1 په لور وخوزيږي:

$$\frac{0.000000001}{0.000000001} = 1$$

که صورت او مخرج و صفر ته نږدې شي، دا به فقط دا معني ولري، چې دواړه به د ارزښت له مخې نږدې برابر شي. دا دا معني نه لري، چې د صورت او مخرج نسبت سره مساوي شي:

$$\frac{0.0000000010 \ 0}{0.0000000010 \ 0} = 100$$

لکه چې گورو صورت او مخرج د ارزښت له مخې خورا نژدې برابر دي (دا په دې معنی، چې دواړه صفر په لور ځي)، مگر د دوی ترمنځ نسبت خورا لوی دی یعنې (100) دی،

د برنولي او د ل،Hospitale پیتالقاعده Brnoulli and de L،Hospitale

$$\frac{\sin 2x}{5x} \quad \text{او} \quad \frac{x^2 + 3x - 10}{x - 5}$$

د برنولي او د دو لو پیتال قاعدې د  $\frac{f(x)}{g(x)}$  ډوله توابعو حد شمېرلو کې ځانگړی رول لوبوي. دا حالت په ځانگړي ډول هلته رامنځ ته کېږي، چې مخرج او صورت همغه

$$\frac{f(x_0)}{g(x_0)} = \frac{0}{0}$$

صفر ځای  $x_0$  ولري. دا ناتیاکلی افاده

هدفمنده نه ده. کیدی شي چې د ویش حد  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$  وڅیړل شي، په کومو کې چې

صورت او مخرج د صفر لور ته ځي. ددې لپاره عمومي مناسب د توابعو ترمونه د

$$f: y = f(x) = \frac{x^2 + 4x + 4}{x + 2}$$

غوښتلو دي. د بیلگې په توگه تابع

صورت او مخرج همغه صفر ځای  $x_0 = -2$  ولري، سره له دې هم لیمیت شته دی.

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 4x + 4}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x + 2)^2}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2} (x + 2) = 0$$

دا ډول حدونه د مشتق په مرسته شمیرل کیدی شي، چې د صورت او مخرج توابعو له نتیجې څخه لاس ته راځي. دا ډول قاعده د پراخ شوي منځ ارزښتقضيي استعمال هم بلل کېږي.

د برنولي او د دو لو، پیتال قاعده:

**Bernoulli and de l'Hospital**

که توابع  $u = f(x)$  او  $v = g(x)$  د یوه  $U(x_0)$  چاپیریال د  $x_0$  په ځای کې مشتق وړ وي د

$g'(x) \neq 0$  سره او د ټولو  $x \in U(x)$  لپاره او  $f$  او  $g$  یوصفرځای وي،

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}, \quad \text{د } f(x_0) = g(x_0) = 0 \text{ سره، نو باور لري:}$$

ترڅو په بني لور حد شته وي.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad \text{په ورته توگه لاس ته راځي:}$$

حل: تابع د پراخه شوي منځ ارزښت قضي نیونی پوره کوي. د هر  $x \in U(x_0)$  لپاره

یو  $x_m \in (x_0, x)$  سره موجود دی، په داسی ډول چې لرو:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(x_m)}{g'(x_m)}$$

د  $g(x_0) = 0 \wedge f(x_0) = 0$  له امله لرو:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

داچې د  $x \rightarrow x_0$  سره  $x_m \rightarrow x_0$  هم هڅه کوي.

د  $x \rightarrow \infty$  په حالت کې  $x = 1/z$  ځای په ځای کوو. د زنجیري قضي په مرسته لاس ته راځي:

$$u = f(1/z)$$

د مشتق  $du/dz = f(1/z)(-1-z^2)$  او مشتق  $dv/dz = g'(1/z)(-1/z^2)$  سره، داسی چې لرو:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f\left(\frac{1}{z}\right)}{g\left(\frac{1}{z}\right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'\left(\frac{1}{z}\right) \cdot \left(-\frac{1}{z^2}\right)}{g'\left(\frac{1}{z}\right) \cdot \left(-\frac{1}{z^2}\right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'\left(\frac{1}{z}\right)}{g'\left(\frac{1}{z}\right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} \end{aligned}$$

یادونه: که په پورته حالت کې  $f'(x_0) = g'(x_0) = 0$  هم وي، نو په ویش بیاله سره دا قاعده استعمالیږي. که سړي د  $n$  - پلونو (قدمونو) وروسته بریالی وي نو دا قاعده لرو:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}$$

چيرته چې  $f^{(n)}$  او  $g^{(n)}$  د تابع  $n-m$  مستق په معنی دی.  
ډول يا تيپ:  $0/0$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4x + 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x - 4}{1} = \frac{0}{1} = 0 \quad \text{بيلگه:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = \frac{1}{1} = 1 \quad \text{بيلگه:}$$

بيلگه:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{1} = \frac{0}{1} = 1$$

تيپ يا ډول:  $\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha-1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\alpha x^\alpha} = 0 \quad \alpha > 0.$$

د يوه مثبت حقيقي توان (جگعدد)  $\alpha$  لپاره يو په خوبنه توان  $x^\alpha$  د  $x \rightarrow \infty$  لپاره په

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0 \quad \alpha > 0$$

غښتلي توگه جگپري، نسبت لوگاريتم تابع  $1/n$  ته  $\alpha > 0$

له دې  $f(x) = \frac{x^n}{e^x}$  تابع د لويپتال د قاعدې د بېرځله استعمال څخه لاس ته راځي:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{nx^{n-1}}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n(n-1)x^{n-2}}{e^x} = \dots = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n!}{e^x} = 0$$

اکسپوننشل تابع  $e^x$  د  $x$  په هر توان تابع څخه په غښتلي جگپري:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x} = 0 \quad n \in \mathbb{N}$$

نور حالتونه کيدی شی په بڼه يا تيپ  $\frac{0}{0}$  او يا  $\frac{\infty}{\infty}$  بېرته وارول شي



له تیپ یا بڼې  $\infty - \infty$  څخه و بڼې یا تیپ  $\frac{0}{0}$  ته ددې لپاره لاندې تابع بیلگه کیدی شي:

$$f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}$$

د  $x \rightarrow 0$  لپاره

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x \sin x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x \cos x + \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{2 \cos x - x \sin x} = \frac{0}{2} = 0 \end{aligned}$$

داچې دلته مشتق بیرته د بڼې تیپ  $\frac{0}{0}$  ده، نو د لویپیتال قاعده استعمالیدی شي.

له تیپ یا بڼې  $(\pm\infty) \cdot 0$  څخه بڼې  $\frac{\pm\infty}{\infty}$  ته:

د تیپ  $(-\infty) \cdot 0$  حالت د بیلگې په توگه تابع  $f(x) = x \cdot \ln x$  د  $x > 0$  لپاره ښایي. په کوم کی چي ضرب د ویش په څیر انځور کړي، نو د لویپیتال د قاعدې په استعمال دا لاندې لاس ته راځي:

$$\lim_{x \rightarrow +0} (x \cdot \ln x) = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{-\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +0} (-x) = 0$$

له بڼې  $0^0$  څخه و بڼې  $e^0$  ته:

دلته د بیلگې په توگه تابع  $f(x) = x^x$  د  $x > 0$  لپاره تر څېړني لاندې نیول کېږي. د بڼې بدلون یا فورم بدلون و بنسټ  $e$  ته د یوې انځورونې په مرسته په بریالی توگه لاس ته راځي:

$$\lim_{x \rightarrow +0} x^x = \lim_{x \rightarrow +0} e^{\ln(x^x)} = \lim_{x \rightarrow +0} e^{x \cdot \ln x} = e^0 = 1$$

له  $1^\infty$  بڼې څخه و  $e^{0 \cdot \infty}$  بڼې ته

د ښوونې، د بیلگې په توگه د تابع  $f(x) = \left(1 + \frac{\mu}{x}\right)^x$  پوله ده د  $\mu \in R^+$  لپاره او  $x \rightarrow \infty$  د

$x \in R^+$  سره:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\mu}{x}\right)^x &= \lim_{x \rightarrow \infty} e^{x \cdot \ln\left(1 + \frac{\mu}{x}\right)} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x \cdot \ln\left(1 + \frac{\mu}{x}\right)\right)} \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{\mu}{x}\right)}{\frac{1}{x}}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{1 + \frac{\mu}{x}} \cdot \left(-\frac{\mu}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\mu}{1 + \frac{\mu}{x}}} = e^{-\mu} \end{aligned}$$

د  $\mu = 1$  لپاره لاس ته راځي:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

له بني  $\infty^0$  و بڼې  $e^{0(\pm\infty)}$  ته دا کارونه په يوې بيلگې روښانه کوو:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +0} \left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x} &= \lim_{x \rightarrow +0} e^{\sin x \cdot \ln \frac{1}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow +0} (\sin x \cdot \ln \frac{1}{x})} \\ \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln \frac{1}{x}}{\sin x} &= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{x \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\cos x} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sin^2 x}{x \cdot \cos x} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{2 \sin x \cos x}{\cos x - x \cdot \sin x} = 0 \end{aligned}$$

$$\text{د سره } \lim_{x \rightarrow +0} \left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x} = 1$$

بايد لاندې جدول کي پام وشي.

لاندې جدول د پورته ښوول شوو بڼو يا ډولونو د بني بدلون ټوليزه کتنه ممکنوي

تڼپ (ډول)	$f(x) \rightarrow$	$g(x) \rightarrow$	بڼه بدلون يا لنډ: بدلون
$-\infty$	0	0	$\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{g(x)} = \frac{g(x) - f(x)}{f(x) \cdot g(x)} \rightarrow \frac{0}{0}$

$\infty$	$0$		$f(x) \cdot g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} \rightarrow \frac{0}{0}$ $\wedge (Or)$ $f(x) \cdot g(x) = \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}} \rightarrow \frac{\infty}{\infty}$
$\infty$	$0$ $1$ $0$	$0$  $0$	$(f(x))^{g(x)} = e^{\ln(f(x)g(x))} = e^{g(x) \cdot \ln f(x)} \rightarrow e^{0 \cdot \infty}$ <p>د <math>f(x) &gt; 0</math> سره.</p>

تمرینونه:

پورته کي دبري بيلگي حل شوي. له هغوباید څه تمرینونه راوړل شي.

( ۱ ) لاندې پوله ارزښتونه وشميرئ.

a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{2^x}$

b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$

c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[x]{x}$

d)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right)^x$

e)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x}}{e^x}$

f)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{\sin x}{x^2}\right)$

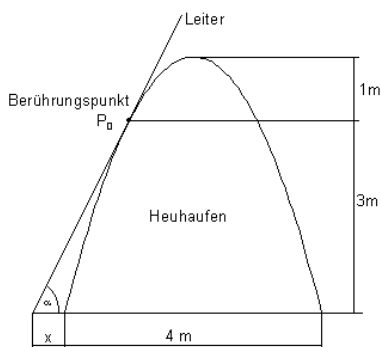
د  $x \rightarrow \infty$  لپاره د لاندې راشنل توابعو ليميټونه د دي لو پيټال قاعدې له مخي وشميرئ.

a)  $f(x) = \frac{2x^3 - x + 4}{3x^3 + 1}$

b)  $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{4x^3 + 3x^2 - 2x + 5}$

## د تانجنت لپاره د یوې تابع د استعمال بیلگې

له ځمکې څخه د وینو په توپۍ یوه زینه ایښول کیږي. دا زینه په درې متره جگوالي توپۍ لمسوي.

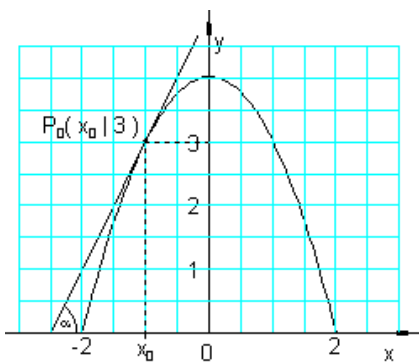


د وینو توپۍ دې د یوه کینیکودي پارابول څېره ولري، چې بنسټ یې 4 متره سرور دی او 4 متره جگوالی لري. غواړو په دې یوه زینه کړدو، چې د وینو توپۍ سره تانجنت جوړ کړي.

په کومه زاویه (کونج) باید دا زینه کښول شي؟

د وینو توپۍ له بیخ څخه دې په کوم لړپوالي په ځمکه دا زینه کښول شي؟

مور د  $y$  محور داسې کارو، چې د پارابول له ککړې (څوکې) څخه تېرېږي. پارابول دا لاندې د تابع مساوات لري:



$$f(x) = a_2 x^2 + 4$$

$$f(2) = 0 \Leftrightarrow 4a_2 + 4 = 0 \Leftrightarrow a_2 = -1$$

$$\Rightarrow f(x) = -x^2 + 4$$

مور د  $x_0$  لپاره ارزښت ټاکو:

$$f(x_0) = 3 \Leftrightarrow -x_0^2 + 4 = 3$$

$$\Leftrightarrow x_0^2 = 1 \Leftrightarrow x_{0,1/2} = \pm 1$$

شمېرنه:

د نورو شمېرنو لپاره ارزښت  $x_0 = -1$  کاروو. زینه توپۍ په  $P_0(-1, 3)$  ټکي کې

لمسوي. مور په  $P_0(-1, 3)$  ټکي کې د تانجنت مساوات ټاکو:

$$f(x) = -x^2 + 4 \quad P_0(-1 | 3) \Rightarrow x_0 = -1; f(x) = 3$$

$$t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

د  $f'(x) = -2x$  سره لاس ته راځي:

$$f'(x_0) = f'(-1) = -2 \cdot (-1) = 2$$

$$\Rightarrow t(x) = 2[x - (-1)] + 3 = \underline{\underline{2x + 5}}$$

جوړه زاویه:  $\tan \alpha = 2 \Leftrightarrow \alpha \approx 62.4^\circ$

د زینې او د وینو ټوپې تر منځ واټن د  $f(x)$  د صفر ځای او د تانجنت  $t(x)$  د صفر ځای تر منځ واټن دی.

صفر ځایونه:

لرو:

$$f(x) = -x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x_{1/2} = \pm 2$$

$$t(x) = 2x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = -2.5$$

د  $x$  ارزښتونو  $-2.5$  او  $-2$  تر منځ واټن  $0.5$  دی. زینه د وینو د ټوپې له پینو څخه باید نیم متر لرې کېښول شي. ددې پوښتنې څخه مو زده کړل، چې د تانجنت مساوات څنگه ټاکل کېږي، چې یو گراف په تعریف شوي ځای کې لمسوي.

د سترې گټې (غټو گټو) مسئله یا قضیه

دا د سترې گټې مسئله خورا ستره عملي مانا لري، چې په لاندې ډول به د یو څو بیلگو له لارې وڅیړل شي.

نزدې ټولو پروسو کې، چې په عمل کې کارول کېږي یا صورت نیسي، له تاثیر وونکو یا په همدې ډول د هغو ټاکلو لویو استعمال ته اړ دی، کومې چې مور په ځانگړو یا مخصوصو پولو کې په اختیار کې لږودی شو.

مور یواځې هغه پروسې تر څیړني لاندې نیسو چې د یوې واریابلی یا اووښتوني  $x$  په واک کې وي. دا د بل په واک کې د یوې تابع  $y = f(x)$ ،  $x \in D$  له لارې څرگندولی شو.

که  $y$  ټول لگښتونه یا مصارف په کوته کړي، نو  $x$  باید داسې وټاکل شي چې  $f(x)$  مینیمال یا خورا کم شي.

که په څټ يا برعکس  $y$  گټه وي يا گټور تاثیر وي، نو  $x$  بايد داسې لاس ته راوړل شي، چې  $f(x)$  ماکسیمال يا خورا لوی شي. په قاعده کې اغزمنه يا مؤثره لويه يا په بل عبارت، خپلواک وار يا بل يا اوښتونى  $x$  د  $-\infty$  او  $\infty$  پولو ترمنځ ازاده ټاکونکى نه ده، بلکه د تخنيک يا تخنيک پوهني له امله، يواځې په ټاکلو پولو کې:

$$a \leq x \leq b \quad (*)$$

له دې امله عملي په زړه پورې د گټې مسئلې، په دې پورې اړه لري، چې آیا دا گټه ده او که لگښت.

$$y = f(x) = \max! \quad (a \leq x \leq b) \quad ($$

$$y = f(x) = \min! \quad (a \leq x \leq b) \quad ($$

دا د افراطي ارزښتونو برخې پر اېلمونو سره خورا نژدې يا ټينگ تړلى دى. دلته زموږ علاقه په ځانگړې توگه د لاندې پر اېلم د کار کولو سره ده:

1- د بلواکيزو  $y = f(x)$  گډو اړيکو راپيدا کول، د دندې يا وظيفې ورکولو سره سم (موداليتي پر اېلم).

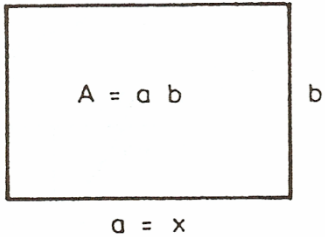
2- د تخنيک پوهني پولو په پام کې لرل (\*) دادې د دوه بيلگو له لارې وښول شي

بيلگه: يو د منډو (پټي ته په کلوکي د اغزو منډو کېښول کېږي، چې مالونه ور وا نه وړي) سيم لرو چې ټول اوږدوالى يې  $L$  دى. له دې سيم سره بايد يوه مربع سطحه (څلورگوديزه هواره)، چې د امکان تر حده بايد لويه وي، منډو شي. دا وظيفه شوه يا په بل عبارت غوښتنه.

اوس د موداليتي Art und Weise پر اېلم: غوښتنه مو د يوې څلور ضلعي (څلورگودى) پيدا کول دي. لکه چې معمول دي، ددې څلور ضلعي (څلور گودى) يو اړخ په  $a$  ښايو او بل اړخ يې په  $b$  ښايو، د څيرې 14.20 له مخې).

دا په سر کې دوه اغيزې لرونکې يا تاثير اچونکې لويې  $a$  او  $b$  دی.

$$L = 2a + 2b, \quad b = (L/2) - a$$

	<p>له امله يواځې يوې اغيزمنې (تاثير اچونکې) لويې</p> <p>ته اړيو د بيلگې په توگه <math>a = x</math>، دا گټه (سټحه <math>A</math>) داسې ده <math>A = ab = x((L/2) - x)</math> دا روښانه ده چې صدق کوي <math>0 \leq x \leq L/2</math> له دې امله د ستري گټې پرابلم داسې دی.</p>
---	--

$$y = f(x) = x((L/2) - x) = \text{Max!} \quad (0 < x < L/2)$$

د  $f(0) = f(L/2) = 0$  له امله بايد ماکس د  $0$  او  $L/2$  ترمنځ پروت وي.

د ماکس لپاره ضرور دي

$$y' = f'(x) = L/2 - 2x = 0$$

د ماکس لپاره يواځې  $x = L/4$  په پوښتنه کې راځي.

د دې لپاره  $y'' = f''(x) = -2 < 0$  دی.

په ريښتيا چې يو ماکس مو مخ ته پروت دی. دلته تخنيکپوهنيزې پولې  $0$  او  $L/2$  رول نه

لوبوي. نو صدق کوي.  $a = b = L/4$ .

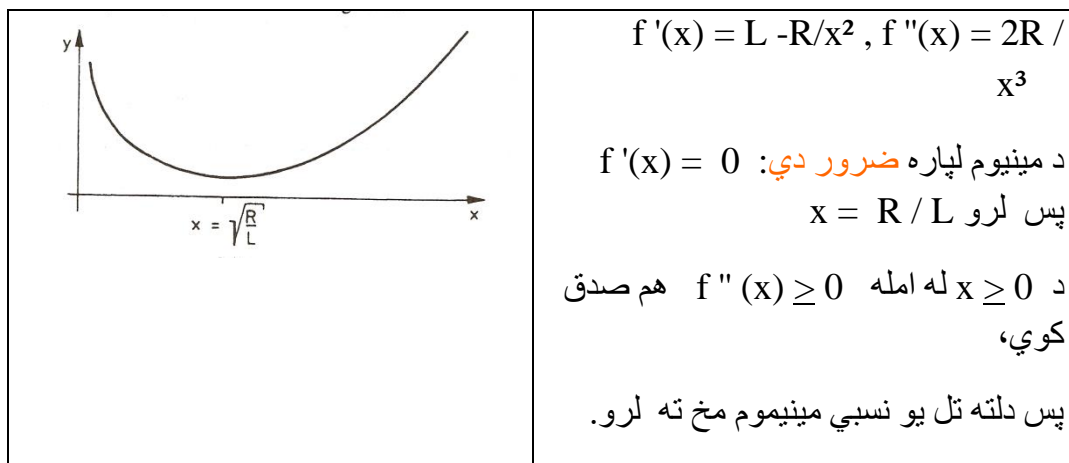
بيلگه: يوه بډای چې په يوه ټاکلي وخت کې ټولست (ټولډيري)  $M$  توليد کړي او دا تل اخستونکو ته ورسوي، نو له دې سره فيکس يا کره ټاکلی لگښتونه  $F$  ترلي دي. کيدې شي چې سملاسي د دې توليد په ټولست (ټولډيري)  $M$  کې توليد کړي، په يوه زخيره ځاي (زېرمتون؟) کې ځاي په ځاي کړي او اخستونکو ته يې سملاسي ورسوي. دلته

د زېمتون (زخیره کونې) لگښتونه راپید کیري (ددي د زخیرې لپاره ځاي او هلته بیا اچول او وړل). یا هم کیدی شي چی تولید په لږه کچه یا اندازه تولید شي او سملاسی اختونکو ته وروړل شي. دلته نو د زخیره کولو لگښتونه منځ ته نه راځي. مگر تل تولید په دي ډول تولید باندي درول، لگښتونه منځ ته راولي، چی د چمتووالی لگښتونه یی بولو. کومه ډیری  $x$  (ازاده لویه) باید تولید شي، چی د امکان تر پولي کم لگښتونه پري وشي؟ د زخیرې لگښت د چمتووالی لگښت سره متناسب دی، د خرابیدو ارزښت د چمتووالي یا تولید ارزښت سره یعنی چي خرڅلاو ته چمتو کیري، په څې متناسب دی. که  $x$  لوي وي نو چمتووالی ته کم اړتیا شته او که  $x$  کم وي نو چمتووالی بدلون تل باید تغیر وځوري یعنی. تول لگښتونه

د  $y = f(x) = F + Lx + R/x$  دي، چیرته چی  $F$  ثابت (همغه) یا په کلکه اینول شوي لگښتونه دي،  $L$  د زخیرې لگښتونه او  $R$  د چمتووالی لگښتونه دي. دا ازاده لویه  $x$  د تولیدډیری  $M$  څخه نه شي سترېدلی، لوییدلی یا غټیدلی. له دي امله صدق کوي  $0 \leq x \leq M$ . مخ ته پروت د ستریدلو مسئله له دي امله په لاندي ډول ده:

$$y = f(x) = F + Lx + R/x = \text{Min!} \quad (0 \leq x \leq M)$$

لومړی  $f(x)$  دوه واره دیفرنځیال کیري یا یی دوه واره رابیلیدنه نیول کیري:





د کبري (منحني) تگلار په شکل کې انځور شوي. څرگنده ده: که  $x = R/L < M$  صدق ولري، نو مينيموم مو مخته پروت دی، که  $x = R/L > M$  وي، نو يو مينيموم په څنډه  $x = M$  لرو. نامساوت  $x = R/L < M$  دا مانا لري  $R/L < M^2$  په همدې ډول  $R^2 < M^2 L$  پس مخ ته لرو:  $x = R/L < M^2 L$  لپاره او  $x = M$  د  $R > M^2 L$  لپاره؛ نو: که د چمتوالي لگښتونه  $R$ ، زخيري لگښتونه  $L$  څخه زيات لوي شي، نو سملاسي دي ټول توليد  $x = M$  صورت ونيس. که د زخيري لگښتونه د چمتوالي لگښت څخه کم وي، کيدی شي کوچنی ازاد  $x$  توليد شي.

ټاکلی بيلگه: د  $M = 10000, R = 1000, L = 10$  لپاره صدق کوي،  
 $R = 1000 < M^2 L = 108 \cdot 10 = 109$  ستر يا غټ ازاد لگښت دی  
 $x = R/L = 1000 / 10 = 100 = 10$  ازاد  $a$  دلته 10 يوونه بايد ورزيات شي، چی  
 10000 يوونه توليد کړي د  $M = 10, R = 1000, L = 1$  لپاره صدق کوي  
 $R = 1000 > M^2 L = 100$  غټ ازاده لويه له دې امله  $x = M = 10$  ده، يواځې يوه ازاده لويه دي تر توليد لاندې ونيوله شي.

## په توليد کې د مشتق استعمال

فعاليت:

يوه فابريکه  $x$  توليد کوي. په دې توليد لگښت کيږي، چې دا د توليد په واک کې دی، چې مور ورته د لگښت تابع وايو او په  $K(x)$  سره يې بنايو.  
 څنگه کولی شو، چې د زيات توليد لپاره لگښت را ټيټ کړو؟  
 د لگښت تابع  $K(x)$  د توليد سټ (ډېري) او ټول لگښت تر منځ تړاو انځوروي.  
 که توليد د  $\Delta x$  شاو خوا کې زيات شي، نو لگښت هم د  $\Delta K$  په شاو خوا کې زياتيږي.  
 کمښتویش (تقسيم تفاضل)  $\frac{\Delta K}{\Delta x}$  د منځني لگښت زياتوالي بنايي، د يوه  $\Delta x$  توليد تغير سره (منځنی تغير ارزښت)

د  $x_0$  ځای کې لحضوي تغير ارزښت د مشتق لگښت بلل کيږي. دا د پوله ارزښت

سره ټاکل کيږي، داپه دې معني، چې د لگښت د تابع  $K$  مشتق.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta K}{\Delta x}$$

پېژند: د لگښت تابع  $K(x)$  مشتق د مشتق ارزښت  $K(x)$  په نامه یادوو یا یې پوله لگښت  $K'(x)$  هم بولو.

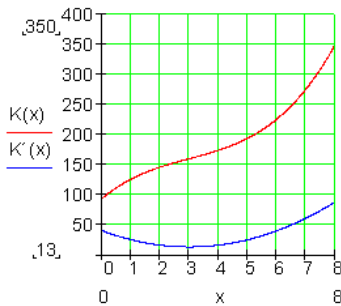
پبلگه: د لگښت تابع  $K(x) = x^3 - 9x^2 + 40x + 94$  دې ورکړ شوي وي.

الف: مشتق ارزښت وټاکي، یو ارزښت جدول د  $K(x)$  او  $K'(x)$  لپاره وکاروي او په پروتولار سیستم یا کوارډینات سیستم کې یې گراف وکاري.

پوله ارزښت د  $[6; 0] = 1$  لپاره په 1 پل (قدو) پراخوالي سره.

ب: د ډېر کم لگښت زیاتوالي وټاکي:

لاندي تابع



$$K(x) = x^3 - 9x^2 + 40x + 94$$

لرو

مشتق ارزښت

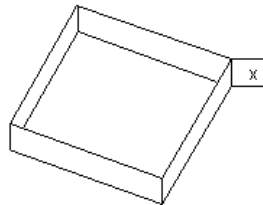
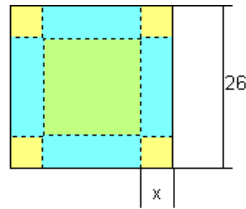
$$K'(x) = 3x^2 - 18x + 40$$

ارزښت جدول

x	0	1	2	3	4	5	6
K(x)	94	126	146	160	174	194	226
K'(x)	40	25	16	13	16	25	40

خوړا کم د لگښت زیاتوالي (لگښت جگپښه) د پارابول  $K'(x)$  په ککره (خوکه) کې پروت دی، یعنې هلته چې تانجنټ  $K'(x)$  پروت یا افقي دی

$$K'(x) = 3x^2 - 18x + 40 \Rightarrow K''(x) = 6x - 18$$



د تانجنټ د پروتوالي یا افقیت لپاره:

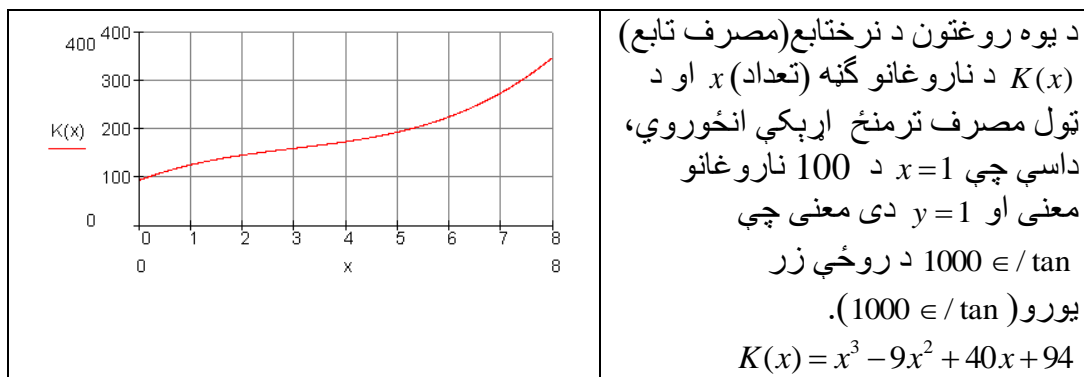
$$K''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - 18 = 0 \Rightarrow \underline{\underline{x = 3}}$$

پوښتنې: دي، مربع کارتون (د کلک کاغذ څخه جوړ) څخه، چې 26 سانتي متره د اړخ اوږدوالي لري یو بکس جوړوو بې له سرپوښ، چې د  $x$  جگوالی لري.

الف: د یوه تابع ترم وټاکي، چې د بگس حجم (ډکي) د  $x$  په واکوالي یا تابعیت کې

بنايي.

ب: گراف وکاري او په نردي توگه يي ماگسيما(خورا جگ) حجم و ټاکي.



الف: د مصرف تابع په خپله کتابچه کي وليکئ.

ب: د لگښت تابع مشتق د مشتق لگښت (-مصرف) يا دحدمصرف په نامه ياديږي. تاسو د لگښت زياتېدنه د ناروغانو په واکوالي يا تابعيت کي تشریح کړئ. (د  $K(x)$  جگېدونه).

$K'(x)$  وټاکئ او گراف يي په وضعيه سيستم (پروت- ولاړ-سيستم) کي انځور کړئ

پ: د ناروغانو د کوم تعداد سره د لگښت زياتوالي خورا کم دی؟ دا قېمتونه وشمېرئ.

## ټولگه:

د رول (Rolle) قضيه:

يوه د  $f$  تابع دې په بند اينتروال  $[a, b]$  کي متمادي وي د  $f(a) = f(b)$  سره او په واز اينتروال  $(a, b)$  کي مشتقور، نو لږ تر لږه يوځاي  $c \in (a, b)$  شته دی د  $f'(x_0) = 0$  سره.

د مشتق د منځني ارزښت (وسطي قيمت) قضيه:  $\frac{P}{SEP}$

که  $y = f(x)$  تابع په بند اينتروال  $[a, b]$  کي متمادي

### خیره په نوبت کې ده،

او په واز اینتروال  $(a, b)$  کې د مشتق وړ وي، نو هلته یوځای  $x \in (a, b)$  شته دی، د کوم لپاره چې

$$\text{لرو: } \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x_0)$$

پراخه شوي منځضیبه:

که  $u = f(x)$  او  $v = g(f)$  په بند اینتروال  $[a, b]$  کې متمادي توابع وي او په واز اینتروال  $(a, b)$  کې مشتقور او  $g'(x) \neq 0$  باور ولري، نو د ټولو  $x \in (a, b)$  لپاره، کم له کمه یوځای  $x_0 \in (a, b)$  وجود لري چې لاس ته ترې راځي:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

قضیه:

- د  $f(x)$  تابع دي په انتروال  $I$  کې مشتقور وي.
2. که د  $f(x)$  تابع په اینتروال  $I$  کې مونوټون جگېدونکي وي، نو باور لري:  $f'(x) \geq 0$  د ټولو  $x \in I$  لپاره
- که  $f(x)$  په اینتروال  $I$  کې همغریز ټیټېدونکي وي، نو باور لري:  $f'(x) \leq 0$  د ټولو  $x \in I$  لپاره.
  - که  $f'(x) \geq 0$  وي، د ټولو  $x \in I$  لپاره، نو  $f(x)$  په اینتروال  $I$  کې همغریز جگېدونکي ده.
  - که  $f'(x) \leq 0$  وي د ټولو  $x \in I$  لپاره، نو  $f(x)$  په اینتروال  $I$  کې همغریز ټیټېدونکي ده.
  - که  $f'(x) > 0$  وي، د ټولو  $x \in I$  لپاره، نو  $f(x)$  په اینتروال  $I$  کې په کلکه همغریز جگېدونکي ده.
  - که  $f'(x) < 0$  وي د ټولو  $x \in I$  لپاره، نو  $f(x)$  په اینتروال  $I$  کې په کلکه مونوټون ټیټېدونکي ده.

که د  $f(x)$  لپاره د  $x_0$  په ځای کې  $f'(x) = 0$  ولرو نو یو نسبي ټیټ ټکی مو مخ ته پروت دی.

که د  $f(x)$  لپاره د  $x_0$  په ځای کې  $f'(x) = 0$  او  $f''(x) > 0$  ولرو نو یو نسبي ټکی مو مخ ته پروت دی.

که ددی برعکس ولرو:  $f'(x) = 0$  او  $f'(x) < 0$  ، نو یو نسبي ماکسیموم مو مخ ته پروت دی.

د بحراني ټکي (ټيټ ټکي يا جگ ټکي) لپاره خوي ټاکونکی دی، چې  $f'(x) = 0$  وي، او د  $f''(x)$  مخ نښه ( $-$  ،  $+$ ) ، په دې پریکړه کوي چی ایا یو اصغري ټکی او که اعظمي ټکی مو مخ ته پروت دی.

پېژند: د  $x = x_0$  په چاپیریال کې د  $y = f(x)$  تعریف شوي تابع یو نسبي جگ ټکی په همدې ډول نسبي ټيټ ټکی لري، که ټولو  $x_0$  ته پوره نږدی  $x$  لپاره باور ولري:

$$f(x) > f(x_0) \text{ په همدې ډول } f(x) \leq f(x_0)$$

جمله: (د یوه نسبي بحراني ټکي لپاره ضروري شرایط):

که په  $x_0$  کې مشتق وړ تابع  $y = f(x)$  انحرافي ټکی لري نو لرو:  $f'(x) = 0$

دا جمله مور ته وایي: چیرته چې  $f'(x) \neq 0$  وي نو هلته اکستريموم نه شته، د اکستريموم لپاره یواځې د  $x_0$  ځای په پوښتنه کې راځي، چې د هغې لپاره لرو  $f'(x) = 0$  ، خو حتمي نه ده چې  $y = f(x)$  دې یواکستريموم ولري.

**جمله :** (د یوه بحراني ټکي لپاره پوره کیدونکی شرایط):

که په  $x = x_0$  کې دوه واره مشتق وړ تابع لپاره ولرو:  $f'(x) = 0$  ،  $f''(x) \neq 0$  ، نو تابع  $y = f(x)$  هلته یو بحراني ټکی لري.

خو را ټيټ ټکی مخ ته لرو، که وي:  $f''(x) > 0$

خو را جگ ټکی مخ ته پروت دی ، که وي:  $f''(x) < 0$

پېژند: په يوه چاپيريال  $x = x_0$  کې مشتق وړ تابع  $y = f(x)$  يو کين-بنی-انعطافتکی په همدې ډول بنی-کين-انعطافتکی لري، که د هغه مشتق هلته يو نسبي جگتکی (عظمي نقطه) په همدې توگه يو نسبي تيبت تکی ولري.

جمله: (د يوه نسبي بحراني تکی لپاره ضروري شرايط):

که په  $x_0$  کې مشتق وړ تابع  $y = f(x)$  اکستريموم لري نو لرو:  $f'(x) = 0$

دا جمله مور ته وايي: چيرته چې  $f'(x) \neq 0$  وي نو هلته بحراني تکی نه شته، د بحراني تکی لپاره يواځې د  $x_0$  ځای په پوښتنه کې راځي، چې د هغې لپاره  $f'(x) = 0$  وي، خو حتمي نه ده چې  $y = f(x)$  دې يو بحراني تکی ولري.

د پورته جملې استعمال

پېژند: د زينتيکي (کله کله برنډې تکی هم بلل کيږي) لاندې د انعطافتکي ځانگړی حالت پوهيږو، داسې انعطافتکی چې تانجنت يې افقي (پروت) وي:

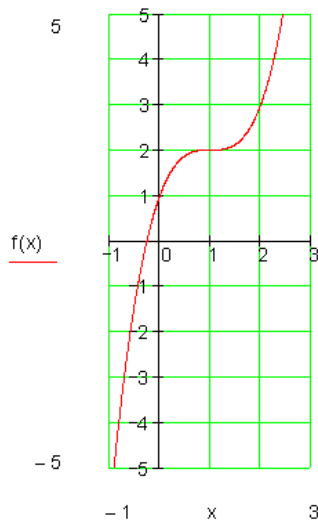
د پرتلي لپاره دې بيا يو،، عادي،، انعطافتکی ورکړ شوی وي. دا يو مائل (نه افقي) تانجنت لري

په  $y' = f'(x)$  څخه لاندې جمله لاس ته راځي:

جمله: (د اوږونتيکي (انعطاف تکی) لپاره اړين شرايط):

که په  $x = x_0$  کې دوه واره مشتق وړ تابع  $y = f(x)$  هلته يو انعطاف تکی ولري، نو لاس ته ترې راځي:  $f''(x) = 0$

Der Sattelpunkt (د اس زين) زينتيکي



د انعطاف ټکي یو ځانگړی حالت زینتکی دی. دا د انعطاف ټکی دی د صفر جگپدني سره که د کین لور ورتزدي شو فکر کېږي، چې، نسبي جگتکی مو مخ ته پروت دی که څوک د بنې لور ورتزدي شي فکر کوي، چې یو نسبي ټیټکی مخ ته لرو. اوس دا حالت د ریاضیاتو له لوري څېړو: مشتق:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 3$$

$$f''(x) = 6x - 6$$

$$f'''(x) = 6$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x + 3 = 0 \Rightarrow x_{1/2} = 1$$

د برنولي او د دي لو، پینال قاعده:

که توابع  $u = f(x)$  او  $v = g(x)$  د یوه  $U(x_0)$  چاپیریال د  $x_0$  په ځای کی مشتق وړ وي د  $g'(x) \neq 0$  سره او د  $\mathbb{R}$  ټولو  $x \in U(x)$  لپاره او  $f$  او  $g$  یوصفرځای وي،

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}, \quad \text{نو باور لري: } f(x_0) = g(x_0) = 0$$

ترڅو په بنې لور حد شته وي.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad \text{په ورته توگه لاس ته راځي:}$$

د څېړکي تمرینونه:

۱ -- د لاندې ماتراشنل توابعو د مونوتوني حالت د د  $a$  په واکوالي کې ورکړئ.

$$a) f(x) = \frac{1}{ax+2}$$

$$b) f(x) = \frac{1}{ax^2+1}$$

۲ -- و څېړئ، چې ایا لاندې توابع په خپله پېژند ورسو مونو ون او که په کلکه مونوتون دي.

$$a) f(x) = \frac{e^x}{2 + e^x}$$

$$b) f(x) = 2x^5 - 7$$

۳ -- لاندې ناراشنل توابع په یو غریزوالي خوینو وڅېر.

$$a) f(x) = e^{x^2}$$

$$b) f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 1}$$

۴ -- د لاندې توابعو ټول لوکال افراطي ټکي پیدا کړئ.

$$a) f(x) = e^{-4x^2}$$

$$b) f(x) = (x^2 - 3) \cdot e^x$$

$$c) f(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

$$d) f(x) = \ln(x^2 + 1)$$

۵ -- د تابع ټول لوکال افراطي ارزښتونه دې په دې په لاندې انټروال کې ولټول شي.

$$-2\pi \leq 2\pi.$$

$$a) f(x) = \sin^2 x$$

$$b) f(x) = \sin\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{2}\right)$$

۶ -- لاندې توابعو ټول لوکال او گلوبال افراطي ځایونه پیدا کړئ.

$$a) f(x) = \sqrt{x^2 + x}$$

$$b) f(x) = \sqrt{x^2 + 3}$$

$$c) f(x) = x - \sqrt{x}$$

$$d) f(x) = 3 + \sqrt[3]{x^2}$$

۷ -- لومړی دمطلق ارزښت وشمېرئ او پسي ټول افراطي ارزښتونه وټاکئ.

$$a) f(x) = |x| + x^2$$

$$b) f(x) = |x^2 + 2x - 8|$$

۸ -- د تابع  $f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{(x - 1)^2}$ ,  $x \neq 1$  د سره د انعطاف ټکي پیدا کونه

۹ -- د  $x_1 = 1$  او  $x_2 = 2$  لپاره تابع ارزښتونه وشمېرئ او هم د  $f$  تابع جگپښه د

$$f(x) = x^4 - 2x^3 - x + 1.$$

سره.



۱۰ -- په صفرځاي کې  $f(x) = x^3 - x^2 - 2x$  ټابع کومه جګېښه لري.

۱۱ -- د  $f(x) = 0,5x^4 - x^3 + 0,5x^2 + x - 4$  ګراف په کومو ټکو کې جګېښه لري؟

۱۲ ---- د  $x=0$  ځاي کې د  $f(x) = \frac{x^4 - 8x^2 + 16}{x - 1}$  ټابع ارزښت اود ګراف جګېښه غواړو پياکړو

۱۳ -- د لويپیتال قاعدې په مرسته د  $x \rightarrow \infty$  لپاره د لاندې مات ريښتوني ټابعو پوله ارزښتونه وشمړئ.

$$a) f(x) = \frac{2x^3 - x + 4}{3x^3 + 1}$$

$$b) f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{4x^3 + 3x^2 - 2x + 5}$$

۱۴ -- د لاندې ټابعو لپاره د منحنیو شننيز بحث وکړئ او ګرافونه يې وکارئ.

$$a) f(x) = -x^3 + x^2 + 4$$

$$b) f(x) = -\frac{1}{9}x^4 + \frac{2}{3}x^2$$

$$c) f(x) = x^3 + 3x^2 - 2x - 2$$

$$d) f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$$

۱۵ -- د لاندې ټابعو لپاره د پوره منحنیو مطالعه وکړئ او ګرافونه يې وکارئ.

$$a) f(x) = \frac{x}{4} - \frac{2}{x^2}$$

$$b) f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x - 3}$$

$$c) f(x) = \frac{3x^2 + 1}{x^2 - 1}$$

$$d) f(x) = \frac{9}{x^2 + 3}$$

۱۶ -- د لاندې ټابعو صفرځايونه وشمېرئ.

$$a) f(x) = x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{11}{2}x - 3$$

$$b) f(x) = x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 14x + 24$$

$$c) f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x$$

$$d) f(x) = x^3 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{1}{12}$$

$$e) f(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6$$

$$f) f(x) = x^4 + 6x^3 - 11x^2 - 60x + 100$$

۱۷ -- د دریمې درجې تام راشنل گراف د  $x$ -محور د  $x_1 = -2$ ,  $x_2 = 0$  او  $x_3 = 4$  په ټکو کې غوڅوي.

د تابع مساوات کوم دي، که سربېره پر دې گراف د  $P(2, -8)$  ټکي څخه هم تېر شي؟

۱۸ -- د یوه څلورمې درجې تام راشنل تابع د  $x$ -محور د  $x_1 = 0,5$  او  $x_2 = 3$  په ټکو کې غوڅوي. د تابع برابرېون څنگه دی، که پرسېره پردې گراف د  $y$ -محور د  $P(0,9)$  په ټکي کې هم لمس کړي.

۱۹ -- د څلورمې درجې د یو تام راشنل تابع گراف د وضعیه قیمت سیستم پیل او له

$P(\frac{1}{2}, -\frac{15}{8})$  ټکي تېرېږي. د تابع مساوات څنگه دي، که گراف د  $x$ -محور هم د

$x_1 = -1$  سره لمس کړي او په  $x_2 = 2$  کې غوڅ کړي.

۲۰ -- د لاندې توابعو صفرخایونه پیدا کړئ.

$$a) f(x) = \frac{x^2 + 2x - 15}{x + 4}$$

$$b) f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 - 4x - 8}{x}$$

$$c) f(x) = \frac{x^3 - x^2 - 5x - 3}{x - 0.5}$$

$$d) f(x) = \frac{x^4 - x^3 + 4x^2 - 4x}{x + 5}$$

۲۱ -- د یوه مات راشنل  $f$  تابع د  $f(x) = \frac{x^3 + ax^2 + bx + c}{x + d}$  سره ثابتې  $a, b, c$  او  $d$  پیدا کړئ، که د  $x_1 = -2, x_2 = -(1:2)$  او سره صفرخایونه پراته وي او تابع په  $x = 0$  کې یو تشخای ولري.

$$\text{it } f(x) = \frac{(x-1)^3}{x}, \quad (x \neq 0) \quad |$$

۲۳ -- مات یا کسري راشنل f تابع په  $x=1$  کې د سره درې ځله صفرځاي لري.

د یوې ساحې د ویش په مرسته وڅېړئ چې په همدې څلورمه (ربع) کې صفرځاي کې ځغلي او که صفرځاي څلورمه بدلوي.

۲۴ -- دا سي یو ترم وټاکئ، کوم چې د لاندې پریودی کې یا تل بېرته راگرځېدونې توابعو صفر ځایونه ورکوي.

$$-2\pi \leq x \leq 2\pi \quad |$$

د شمېرنې له لارې صفر ځایونه ونوموئ، چې په انټروال کې پراته وي.

$$a) f(x) = \frac{1}{2} \sin 3x$$

$$b) f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$c) f(x) = 1 - \sin^2 x$$

$$d) f(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$$

۲۶ -- ولې لاندې توابع صفر ځایونه نه لري؟

$$a) f(x) = \ln(x^2 + 3)$$

$$b) f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$$

$$c) f(x) = \frac{e^x}{x+1}$$

$$d) f(x) = 1 + \sin^2 x$$

۲۷ -- ولې کېدی شي چې یو تابع ډېر صفر ځایونه ولري، مگر د  $y$  - محور سره یواځې یو صفر ځاي ولري؟

۲۸ -- د صفر ځایونو د تعداد په هکله څه ویلای شئ، که د یو  $f$  تابع لپاره په تعریف کې ډېری) کې یو  $f^{-1}$  معکوس تابع هم شته وي؟

۲۹-- د  $y$  - محور سره د لاندې توابعو غوڅتکي وشمېری.

$$a) f(x) = x^3 + 2x - 1$$

$$b) f(x) = (x+1) \cdot \ln(x+1)$$

$$c) f(x) = \frac{x^4 - 3x^2 + x}{x+2}$$

$$d) f(x) = \frac{4}{\sqrt{x^2 + 9}}$$

$$e) f(x) = (x-2) \cdot e^{x-1}$$

$$f) f(x) = e^{\frac{2}{1-x}}$$

۳۰-- د یوه تام راشنل تابع  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$

د  $a_0 \neq 0$  سره کېدی شي د  $y$ -محور غوڅتکي د ساده لوستلو له لارې و ټاکل شي.

په دې هکله دلایل راوړی.

۳۱-- د  $x_1=1$  او  $x_2=2$  لپاره تابع ارزښتونه وشمېری او هم د  $f$  تابع جگېدنه د

$$f(x) = x^4 - 2x^3 - x + 1.$$

سره.

۳۲-- په صفر ځای کې  $f(x) = x^3 - x^2 - 2x$  تابع کومه جگېدنه لري.

۳۹-- په کومو ځایونو کې لاندې توابع پروت تانجنت لري؟

$$a) f(x) = x^2 e^{-x}$$

$$b) f(x) = \ln(x^2 + 1)$$

د گراف د  $x_0=0$   $f(x) = (x+a) \cdot e^x$

۴۰-- د  $a$  د کومو ارزښتونو لپاره د

په ځای کې ۲ جگوالی لري؟

۴۱ د لاندې توابعو ټول ځایزې (لوکال) خوراجگ ټکي وښایاست.

a)  $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 10$

b)  $f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x + 1$

c)  $f(x) = 4x^3 - 18x^2 + 15x + 7$

d)  $f(x) = x^4 - 4x^2 + 5$

e)  $f(x) = x^5 - 5x^3 - 20x$

f)  $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - \frac{10}{3}x^3 + 6x^2 - 2$

۴۳ -- د  $n$ -مې درجې یو تام رانشنل تابع خورا زیات څومره لوکال (ځایز) افراطي ځایونه لروډی شي؟

۴۴ -- ولي د جگتکي لپاره شرایط  $f''(x) < 0$  اړین نه دي؟

۴۵ -- د لاندې توابعو لوکال (ځایز) انحرافي (افراطي) ځایونه وټاکئ.

a)  $f(x) = \frac{2}{3}x^3 + 4x^2 + 8x - 1$

b)  $f(x) = \frac{1}{3}x^4 + 1$

c)  $f(x) = \frac{1}{3}x^4 - 2x^2 + \frac{8}{3}x$

d)  $f(x) = x^4 - 4$

۴۷ -- د  $f$  تابع ټول لوکال افراطي ارزښتونه دې په دې په لاندې انټروال کې ولټول شي.

$$-2\pi \leq 2\pi.$$

a)  $f(x) = \sin^2 x$

b)  $f(x) = \sin\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{2}\right)$

۴۸ -- لاندې توابعو ټول لوکال او گلوبال افراطي ځایونه پیدا کړئ.

a)  $f(x) = \sqrt{x^2 + x}$

b)  $f(x) = \sqrt{x^2 + 3}$

c)  $f(x) = x - \sqrt{x}$

d)  $f(x) = 3 + \sqrt[3]{x^2}$

--- د  $f$  تابع د  $x \neq 1$  سره  $f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{(x - 1)^2}$  د انعطاف ټکي پیدا کړئ.

۵۳-- په انټروال  $0 \leq x \leq 2\pi$  کې د انعطاف ځایونه پیدا کړئ.

a)  $f(x) = x + \sin x$       b)  $f(x) = 2(1 - \sin 2x)$

۵۴-- لاندې توابع په  $x_0$  کې په مشتقوړتیا باندې وڅېړئ.

a)  $f(x) = \begin{cases} \cos x & x \leq 0 \\ x^2 + 1 & x > 0 \end{cases}, x_0 = 0$

b)  $f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & x < 1 \\ x^2 & x \geq 1 \end{cases}, x_0 = 1$

c)  $f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & x < 1 \\ e^{x-1} & x \geq 1 \end{cases}, x_0 = 1$

d)  $f(x) = \begin{cases} \ln x & x \leq 1 \\ x - 1 & x > 1 \end{cases}, x_0 = 1$

۵۵-- ولې متمادیت د مشتقوړتیا لپاره اړین شرط، مگر مشتقوړوالی د متمادیت لپاره پوره کېدونکی شرط دی؟

۵۶-- په کوم دلیل تام راشنل توابع د  $x \in R$  لپاره مشتقوړ دي؟

۵۹-- و څېړئ، چې ایا لاندې توابع په خپله پېژند وړشو مونو ون او که په کلکه مونو تون دي.

a)  $f(x) = \frac{e^x}{2 + e^x}$

b)  $f(x) = 2x^5 - 7$

۶۱-- په کومه وړشو کې لاندې تام راشنل توابع یو کین کړوالی لري او په کون کې بنی کړوالی لري.

a)  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 5x + 2$

b)  $f(x) = -2x^3 + 3x^2 - x - 4$

۶۲-- لاندې مات توابعو ګرافونه هاپاربول دي. د هاپاربول څانګې کوم کړوالی لري؟

$$a) f(x) = \frac{1}{4x+1}$$

$$b) f(x) = 3 - \frac{3}{x^2}$$

۶۴ -- ولي د يوه دريمې درجې تام راشنل تابع گراف په تل تلنه کې يوه بڼې انخنا (کېوالی) نه لري.

۶۵ ولي يو څلورمه درجه تام راشنل تابع د  $f(x) = ax^4 + dx + e$  سره يو تلتلونی کينه انخنا (کېوالی) او بڼې انخنا لري؟

۱۵۸ (۱۰۳): څنگه کېدی شي، چې د يوې  $f$  تابع د ۱. درجې مشتق څخه د د گراف په انخنا قضاوت وکړو؟

۱۶۰ (۱۰۵): د لاندي توابعو حالت وڅېړئ، که  $|x| \rightarrow \infty$  په لور لار شي.

$$a) f(x) = x^3 - 4x^2 - 4x - 5$$

$$b) f(x) = -3x^4 + x^3 - 2x^2 + x$$

$$c) f(x) = \frac{1}{3}x^5 - x + 6$$

$$d) f(x) = -\frac{2}{5}x^2 - \frac{1}{5}x + \frac{4}{5}$$

$$e) f(x) = \frac{1}{2}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{2}$$

$$f) f(x) = -x^3 - x^2 - x - \frac{1}{3}$$

۱۶۳ (۱۰۸): ولي د  $x \rightarrow +\infty$  لپاره په ساده ډول د پولې په هکله وړاند وینه نه شي کېدای:

$$a) f(x) = x^3 \cdot \frac{1}{\ln x}$$

$$b) f(x) = x \cdot e^{-x}$$

۱۶۷ (۱۱۲): د جوړه (جفت) جگد (اکسپوننت) سره تام ريښتونی تابع کوم ډول سيومتري لري؟

۱۶۸ (۱۱۳): د نا جوړه (طاق) جگد (اکسپوننت) سره يو تام ريښتونی تابع ټيک هلته د سر چيني سره ټکی سيومتري دی، چې مطلق ارزښت صفر شي؟

۱۷۱ (۱۱۶): لاندي توابع په بنسټ کې لوستل شوي سيومتري خوبونه نه لري. وښايئ چې

دا سره له دې هم سیومتریک دي.

$$a) f(x) = (x+2)^2$$

$$b) f(x) = 1 + \frac{1}{x}$$

$$c) f(x) = -(x+1)^2 + 3$$

$$d) f(x) = 2 + \frac{1}{x-4}$$

۱۷۲۱۷): لاندې تام ریښتوني اعداد په محدودیت وڅېړئ.

$$a) f(x) = x^2 - 2x + 4$$

$$b) f(x) = 3x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 24x$$

$$c) f(x) = -(x+3)^2 + 1$$

$$d) f(x) = x^3 - 2x + 1$$

۱۷۶ (۱۲۱): د لویپیتال قاعدې په مرسته د  $x \rightarrow \infty$  لپاره د لاندې مات ریښتوني توابعو پوله ارزښتونه وشمړئ.

$$a) f(x) = \frac{2x^3 - x + 4}{3x^3 + 1}$$

$$b) f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{4x^3 + 3x^2 - 2x + 5}$$

۱۷۸ (۱۲۳): د لاندې توابعو لپاره د  $x=0$  په ځای کې د تانجنت مساوات وټاکئ

۱۷۹ (۱۲۴): په کومو ټکو کې د لاندې مساواتو لپاره د تانجنت مساوات د ورکړ شوي کرښې سره غبرگ دي؟

۱۸۸ (۱۳۳): د لاندې تام ریښتوني توابعو د انعطاف ټکي (اورونټکي) او د نورمالي مساوات ولیکئ.

$$a) f(x) = -\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3} \quad b) f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 2x + 10$$

۱۸۹ (۱۳۴): د  $f_t$  تابع د انعطاف ټکي مساوات ولیکئ.

$$f_t(x) = \frac{4}{3}t^2x^3 + 3tx^2 + 3x \quad (t \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$$



۱۹۲ (۱۳۷): د لاندې توابعو لپاره د منحنیو شننیز بحث وکړئ او گرافونه یې وکارئ.

$$a) f(x) = -x^3 + x^2 + 4$$

$$b) f(x) = -\frac{1}{9}x^4 + \frac{2}{3}x^2$$

$$c) f(x) = x^3 + 3x^2 - 2x - 2$$

$$d) f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$$

## په ټوټه ماتونو یا کسرونو ټوټه کونه

الف) اصلي کسرونه، چې مخرج یې مختلف لاینیز ضریبونه لري.

بنسټ: که د یوه اصلي پولینوموېش  $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$  مخرجپولینوم  $P_n(x)$  په مختلفو

کرښیزو (لاینی) ضریبونو  $P_n(x) = (x-x_1)(x-x_2) \dots (x-x_n)$  ټوټه کېدونکی وي،

نو پولینوم  $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$  په لاندې بڼه بدلېدی شي.

$$\frac{P_m(x)}{P_n(x)} = \frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{x-x_2} + \frac{C}{x-x_3} \dots \frac{N}{x-x_n}$$

داسې یوه بڼه په ټوټه کسرونو ټوټه کونه، بلل کېږي، چې  $A, B, C, \dots, N$  حقیقي عددونه دي.

فعالیت: په پورته ننوته کې و بنایاست، چې دا ټوټه کسرونه چېرته تعریف لري؟

-- د یوه په خوښه پولینوم کسر ټوټه ونه او د تعریف ساحې ورکړئ.

بیلگه: اصلي پولینوم کسر  $\frac{4x^2 - x - 39}{x^3 - 4x^2 - 7x + 10}$  په ټوټه کسر ټوټه کړئ.

حل: د مساوات  $x^3 - 4x^2 - 7x + 10 = 0$  لومړی حل  $x_1 = 1$  د ازمايښت له لارې څیرو .

د پولینوم ویش (لنډ: پولینومویش)  $(x-1) = x^2 - 3x - 10$ :  $(x^3 - 4x^2 - 7x + 10)$  مو ټوټه ونې ته بیایي  $x^3 - 4x^2 - 7x + 10 = (x^2 - 3x - 10)(x-1)$  مساوات  $x^2 - 3x - 10$  اوس  $x_2 = -2$  او  $x_3 = 5$  حلونه لري.

له دې امله  $x^3 - 4x^2 - 7x + 10 = (x-5)(x-1)(x+2)$  دی.

د اصلي کسر  $\frac{4x^2 - x - 39}{x^3 - 4x^2 - 7x + 10}$  په ټوټه کسرونو ټوټه کونه:

د کسرونو شمیرنو قاعدې له مخې کیدی شي ورکړ شوی پولینوم په درې جمعې برخو ټوټه شي، چې مخرجونه یې لاینیز ( کرښیز - ) ضریبونه دي:

$$\frac{4x^2 - x - 39}{x^3 - 4x^2 - 7x + 10} = \frac{A}{x-5} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+2}$$

د غزېدنې سره د ټوټه کسر جمعه:

اصلي مخرج د ټوټه کسر د پولینوم مخرج دی.

$$\frac{4x^2 - x - 39}{x^3 - 4x^2 - 7x + 10} = \frac{A(x-1)(x+2) + B(x-5)(x+2) + C(x-5)(x-1)}{(x-1)(x-5)(x+2)}$$

$$\frac{4x^2 - x - 39}{x^3 - 4x^2 - 7x + 10} = \frac{Ax^2 + Ax - 2A + Bx^2 - 3Bx - 10B + Cx^2 - 6Cx + 5C}{x^3 - 4x^2 - 7x + 10}$$

$$\frac{4x^2 - x - 39}{x^3 - 4x^2 - 7x + 10} = \frac{(A+B+C)x^2 + (A-3B-6C)x + (-2A-10B+5C)}{x^3 - 4x^2 - 7x + 10}$$

د صورتونو ارزښت  $A, B$  او  $C$  ټاکنه د ضریبونو د پرتلي له لارې:

د مساوي مخرجونو کسرکې بسيا کوي، چې صورتونه سره پرتله کړو. دلته باید د مساوي توانونو ضریبونه، دا په دې مانا چې د  $x, x^2$  او  $x_0$  باید مساوي وي.

$$A + B + C = 4 \quad \text{I}$$

$$A - 3B - 6C = -1 \quad \text{II}$$

$$-2A - 10B + 5C = 39 \quad \text{III}$$

د فاکتور 2 سره د I او II مساوات ضربونه او د هر یوه جمع د III سره پورته دري مساوات سیستم و دوه مساواتسیستم ته د دوه متحولو سره را لنډوي.

$$-8B = -72 \quad \text{V}$$

$$-16B - 7C = -41 \quad \text{IV}$$

د مساوات IV.V څخه لرو:  $B = 3$   $-24B = -72 \Rightarrow B = 3$

د  $B = 3$  په V کې ایښوونه:  $C = -1$   $-16.3 - 7C = -41 \Rightarrow C = -1$

د  $B = 3$  او  $C = -1$  په I کې ایښوونه:  $A = 2$   $A + 3 - 1 = 4 \Rightarrow A = 2$

په ټوټه کوني فرمول کې ایښووني سره غوښتونکی ټوټه کسر لاسته راځي:

$$\frac{4x^2 - x - 39}{x^3 - 4x^2 - 7x + 10} = \frac{2}{x-5} + \frac{3}{x-1} - \frac{1}{x+2}$$

ازماینت:

$$\frac{4x^2 - x - 39}{x^3 - 4x^2 - 7x + 10} =$$

$$= \frac{(x-1)(x+2) + 3(x-5)(x+2) - 1(x-5)(x-1)}{(x-5)(x+2)(x+2)} = \frac{4x^2 - x - 39}{x^3 - 4x^2 - 7x + 10}$$

تمرینونه:

د لاندې اصلي پولینوم کسرونو په توتې کسرونو توتې کړئ.

$$a) \frac{2x^2 + 20x + 12}{x^3 + 2x^2 - 5x + 6}, \quad b) \frac{x^2 + 1}{x^3 - x}, \quad c) \frac{4x + 10 + 12}{x^2 + 6x + 8}$$

ب) اصلي پولینوم کسرونه، چې مخرج یې مساوي لاینیز (کرنیز) فاکتورونه لري.

که د یوه اصلي پولینوم  $P_n(x)$  مخرج  $\frac{P(x)}{P_n(x)}$  د کرنیز فاکتور  $x - x_0$  توان  $\frac{A}{(x - x_0)} + \frac{B}{(x - x_0)^n} + \dots + \frac{N}{(x - x_0)^n}$  وي، نو ددې کرنیزو فاکتورونو له پاره پولینوم لاندې بڼه لري:

$$\frac{3x^2 - 6x + 2}{x^3 - 4x^2 + 5x - 2}$$

د نورو ټولو ساده منځ ته راغلو کرنیزو فاکتورونو توتې کسرونو په بلده بڼه ورکول کيږي.

بیلگه:

د اصلي پولینوم کسر  $\frac{3x^2 - 6x + 2}{x^3 - 4x^2 + 5x - 2}$  لپاره په توتې کسر توتې کونه ورکړئ.

د مخرج توتې ونه په کرنیزو فاکتورونو:

د پولینوم  $x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = 0$  لومړی حل  $x_1 = 1$  د ازمايننت له لارې پیدا کيږي.

پولینوم ویش  $(x-1) = x^2 + 3x + 2$ :  $(x^3 - 4x^2 + 4x - 2)$  مو لاندې ټوټه کونې ته لارښودوي:

$$x^3 - 4x^2 + 4x - 2 = (x^2 + 5x - 2)(x - 1)$$

مساوات  $x^2 - 3x + 2 = 0$  دا  $x_2 = 1$  او  $x_3 = 2$  حلونه لري. نو له دې سره د مخرج لپاره ډبل حل دی:

$$x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = (x - 2)(x - 1)^2$$

د ټوټه کسر پیل:

$$\frac{3x^2 - 6x + 2}{x^3 - 4x^2 + 5x - 2} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{(x - 1)} + \frac{C}{(x - 1)^2}$$

د ټوټه کسر جمع د غزونې له لارې:

$$\begin{aligned} \frac{3x^2 - 6x + 2}{x^3 - 4x^2 + 5x - 2} &= \frac{A(x - 1)^2 + B(x - 2)(x - 1) + C(x - 2)}{(x - 2)(x - 1)^2} \\ \frac{3x^2 - 6x + 2}{x^3 - 4x^2 + 5x - 2} &= \frac{(A + B)x^2 + (-2A - 3B + C)x + (A + 2B - 2C)}{x^3 - 4x^2 + 5x - 2} \end{aligned}$$

د  $A, B$  او  $C$  صورتونو ارزښت د ضریبونو پرتله کونې له لارې.

$$\begin{array}{ll} A + B = 3 & \text{I} \\ -2A - 3B + C = -6 & \text{II} \\ A + 2B - 2C = 2 & \text{III} \end{array}$$

د مساوات II د 2 سره ضرب او د III سره جمعه د I سره گډ د دوه مساوات د دوه متحولو سره.

$$\begin{array}{ll} A + B = 3 & \text{I} \\ -3A - 4B = -10 & \text{II} \end{array}$$

د ضرب له 4 سره او جمعه يې له IV سره :  $A = 2$

د  $A = 2$  اېښوونه په I کې:  $2 + B = 3 \Rightarrow B = 1$

د  $A = 2$  او  $B = 1$  اېښوونه په III کې:  $2 + 2.2 - 2C = 2 \Rightarrow C = 1$

د ټوټه کونې فرمول له لارې ټوټه مسر ټوټه ونه لاس ته راځي:

$$\frac{3x^2 - 6x + 2}{x^3 - 4x^2 + 5x - 2} = \frac{2}{x-2} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}$$

نمرېڼونه:

د لاندي اصلي پولینوم کسرونو په ټوټه کسرونو ټوټه کونه ورکړئ.

$$a) \frac{3x^2 + 5x + 10}{x^3 + 2x^2 - 4x - 8}$$

$$b) \frac{3x^2 - 18x + 36}{x^3 - 6x^2 + 9x}$$

$$c) \frac{x^2 + 3x + 4}{x^4 - 2x^2 + 1}$$

$$d) -\frac{x^2 + 13x + 10}{x^3 - 5x^2}$$

پ) اصلي پولینوم کسرونه، چې مخرج يې پوره په کرښيزو فاکتورونو نه ټوټه کېږي.

ښه نېټه:

که د يوه اصلي پولینوم کسر  $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$  مخرجپولینوم  $P_n(x)$  نور په يوه حقيقي ضريب

نه ټوټه کېدونکي ضريب  $ax^2 + bx + c$  مخ ته پروت وي، نو په ټوټه کېدو کې دې د يو

ټوټه کسر  $\frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c}$  په ښه دې کېښول شي يا راوړل شي

بیلگه:

د پولینوم کسر  $\frac{5x^2 + 8x + 9}{x^3 + 3x^2 + 6x + 4}$  له پاره دې په ټوټه کسر ټوټه ونه ورکړ شي.

د مخرچ ټوټه کونه په کرښیزو ضریبونو:

لومړی حل دې  $x_1 = -1$  وي مساوات  $x^3 + 3x^2 + 6x + 4 = 0$  د ازماښت له لارې پیدا کړي.

بولینوم وېش  $(x+1) = x^2 + 2x + 4$  :  $(x^3 + 3x^2 + 6x + 4)$  مو لاندې ټوټه کونې ته بیایي:

$$x^3 + 3x^2 + 6x + 4 = (x+1)(x^2 + 2x + 4)$$

دا چې مساوات  $x^2 + 2x + 4$  حقیقي حل نه لري، نو د حقیقي اعدادو په ورشو کې نوره ټوټه کونه ناشونې ده.

نو له دې امله پولینوم کسر لاندې بڼه لري:

$$\frac{Ax}{x^2 + 2x + 4}$$

د  $\frac{c}{x+1}$  بڼې کسر سره یوځای مو لاندې ټوټه کسر ټوټه کونې ته بیایي:

$$\frac{5x^2 + 8x + 9}{x^3 + 3x^2 + 6x + 4} = \frac{Ax + B}{x^2 + 2x + 4} + \frac{C}{x+1}$$

د غزوني له لارې د ټوټه کسرونو جمع

$$\frac{5x^2 + 8x + 9}{x^3 + 3x^2 + 6x + 4} = \frac{(Ax + B)(x+1) + C(x^2 + 2x + 4)}{x^3 + 3x^2 + 6x + 4}$$

$$\frac{5x^2 + 8x + 9}{x^3 + 3x^2 + 6x + 4} = \frac{(A+C)x^2 + (A+B+2C)x + (B+4C)}{x^3 + 3x^2 + 6x + 4}$$

د ضریبونو A, B, C ټاکنه د پرتله کولو له لارې:

$$A + C = 5 \quad \text{I}$$

$$A + B + 2C = 8 \quad \text{II}$$

$$B + 4C = 9 \quad \text{III}$$

د III کمښت (تفریق) له مساوات II څخه د I سره یې گډولو څخه مساوات لاس ته راځي، چې دوه اووښتونې یا متحولې لري:

$$A - 2C = 5 \quad \text{IV}$$

$$A + C = 5 \quad \text{I}$$

مساوات III منقې مساوات II:

$$C = 2 \quad \text{د I اېښوولو سره:}$$

$$C = 2 \quad \text{د III اېښوولو سره:}$$

که دا د ټوټه کونې فرمول کې کېږدو نو د ټوټه کسرونو ټوټه کونه لاس ته راځي

$$\frac{5x^2 + 8x + 9}{x^3 + 3x^2 + 6x + 4} = \frac{3x + 1}{x^2 + 2x + 4} + \frac{2}{x + 1}$$

تمرینونه:

د لاندې اصلي کسري پولینومونو په ټوټه کسرونو ټوټه کونه ورکړی:

$$a) \frac{-x^2 + 2x - 12}{x^3 + 2x^2 + 6x + 5}$$

$$b) \frac{4x^2 - 3x + 8}{x^3 - 2x + 4}$$

$$c) \frac{8x^2 - 16x + 10}{x^3 - 4x^2 + 5x}$$

$$d) \frac{x}{x^3 + 2x^2 + 2x + 1}$$



( ج ) نا اصلي پولینوم کسرونه:

که د یوه پولینوم  $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$  د صورت درجه د پولینوم د مخرج له درجې څخه لویه وي، نو دا د پولینومویش له لارې په ټولناطه کسر او یوه اصلي کسر ټوټه کېدی شي.

بیلگه:

کسري پولینوم  $\frac{3x^3 - 6x^2 - 20x - 1}{x^2 - 2x - 8}$  په ټوټه کسري پولینومونو ټوټه کړی .

د پولینوم د صورت درجه درې ده او د مخرج دوه . نو له دې امله مو یو نا اصلي پولینومکسر مخ ته پروت دی.

پولینوم وېش:

$$(3x^3 - 6x^2 - 20x - 1) : (x^2 - 2x - 8) = 3x + \frac{4x - 1}{x^2 - 2x - 8} - \frac{(3x^3 - 6x^2 - 24x)}{4x - 1}$$

د پاتې کسر  $\frac{4x - 1}{x^2 - 2x - 8}$  له پاره د ټوټه کسر ټوټه کونې کارونه (عملیه) مخ ته

بیایو. مخرج په کرښیزو ضریبونو ټوټه کړی:

د مساوات  $x^2 - 2x - 8 = 0$  له پاره حل  $x_1 = -2$  او  $x_2 = 4$  لرو.

نو  $x^2 - 2x - 8 = (x - 4)(x + 2)$  دی.

### په ټوټه کسرونو ټوټه کونه

$$\frac{4x-1}{x^2-2x-8} = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{x+2} \quad \text{د ټوټه کسر ټوټه کونې لپاره ځای په ځای کوو:}$$

د غزونې له لارې د ټوټه کسرونو جمعه کول:

$$\frac{4x-1}{x^2-2x-8} = \frac{A(x+2)+B(x-4)}{(x-4)(x+2)}$$

$$\frac{4x-1}{x^2-2x-8} = \frac{(A+B)x+(2A-4B)}{x^2-2x-8}$$

د ضربونو د پرتله کونې په مرسته د A او B ټاکل:

$$\begin{array}{ll} A+B=4 & \text{I} \\ 2A-4B=4 & \text{II} \end{array}$$

$$\text{د I ضرب له 2 سره او له II څخه یې تفریق یا کول } 6B=9 \Rightarrow B=\frac{3}{2}$$

$$\text{په II کې ایښوول: } 2A-4\frac{3}{2}=-1 \Rightarrow A=\frac{5}{2}$$

$$\frac{4x-1}{x^2-2x-8} = \frac{5}{2(x-4)} + \frac{3}{2(x+2)}$$

متحول (بستونکی) په ټوټه کسر ټوټه کونه لاندې بڼه غوره کوي:

$$\frac{3x^3-6x^2-20x-1}{x^2-2x-8} = 3x + \frac{5}{2(x-4)} + \frac{3}{2(x+2)}$$

پوښتنې د لاندې پولینومکسرونو په ټوټه کسر ټوټه کونه ورکړئ.

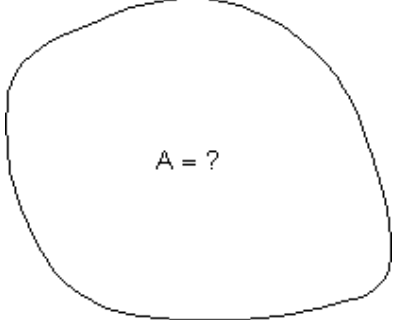
$$a) \frac{3x^2+7x^2+17x+17}{x^2+6x+8}$$

$$b) \frac{2x^4-8x^3+7x^2-3x+4}{x^2-4x+3}$$

$$c) \frac{2x^3+x^2}{x^3-1}$$

$$d) \frac{4x^3+16x^2-7x-49}{x^3+4x^2+x-6}$$

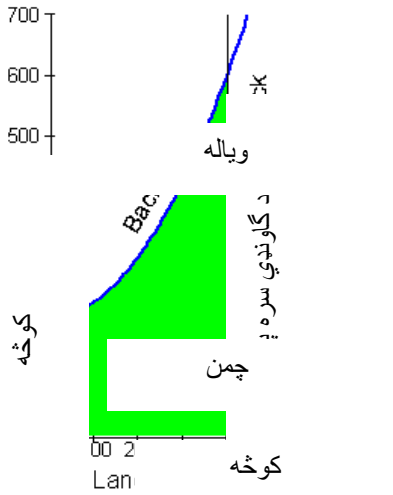
## د انتیگرالونې لپاره پیل راوړنې

	<p>پخوانیو یونانیانو ته دا د منحنی څخه رابندې سطحې شمېرلو اصول معلوم وو. دا د مشتق شمېرنه، چې مور ورسره اوس سر او کار لرو، ډېر وروسته (د اوه لسمې پېړۍ پای کې) د طبیعي علومو پوهانو د لایبنیچ او نیوتون له خوا رامنځ ته (اختراع) شو.</p>
---	--

### فعالیت:

- د پورته رابندې څېرې د سطحې د شمېرلو له پاره وړاندیزونه وکړئ.
- ایا تاسو د داسې سطحې شمېرلو سره بلد یاست؟
- ایا تاسو دې ته ورنږدې سطحې مساحت شمېرلی دی؟ او که هونو هغه ولیکئ.
- داپورته سطحه د وضعیه قیمت سیستم له لارې په څلورو نږدې برابر وېشئ او د انتیگرالونې په هکله یې فکر وکړئ.

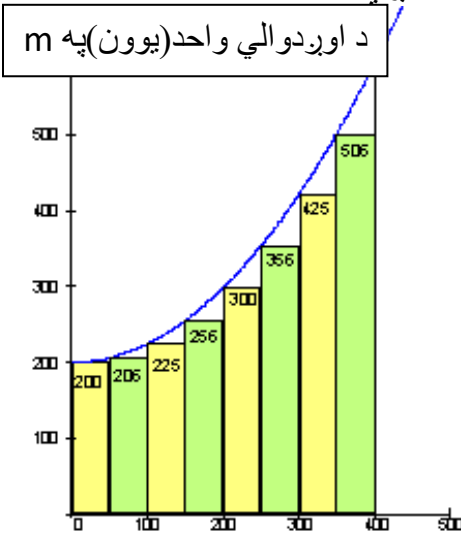
### بیلگه

	<p>دا څیره شوی چمن خرڅیږي. له پورته لور د ویالې را بند دی او له بنې لور د گاونډي ځمکه ده او کین لور ته کوڅه او له کینته لور هم د یوې کوڅې را بند دی.</p> <p>ددې لپاره چې چمن وپلورل شي، باید سطحه وپیژندل شي. د پلورونکې لپاره سطحه باید نږدې پوره مگر هیڅکله کمه ونه شمیرل شي. اخستونکې هم د ځان لپاره فکر کوي، چې پیسې باید ورکړي، خو هیڅکله ځمکه د اصل څخه زیات ونه شمېرل شو.</p>
---	--

وروسته له دې چې رانیوونکي او پلورونکي د چمن سطحه معلومه کړه، دواړه د پیسو په تادیه سره یوځای کیږي او په دې هکله موافقه کوي.

ویاله  $f(x) = \frac{1}{400}x^2 + 200$  د تابع مساوات لري.

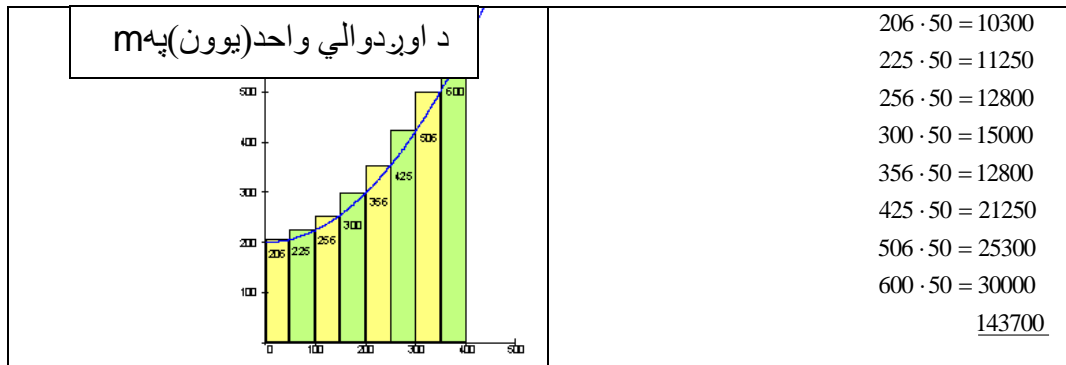
د اخستونکي له پاره ممکنه حل.

<p>ځمکه په لاندې ډول په اوږدو ټوټو (پټیو) ټوټه کیږي</p> <p>د اوږدوالي واحد (یون) په m</p> 	<p>هره ټوټه (مستطیل پټی) 50m سره وړه ده او په رسم کې ورکړ شوی جگوالی لري. د ټولو پټیو، سطحه یوځای شمیرو.</p> <p> <math>200 \cdot 50 = 10000</math>  <math>206 \cdot 50 = 10300</math>  <math>225 \cdot 50 = 11250</math>  <math>256 \cdot 50 = 12800</math>  <math>300 \cdot 50 = 15000</math>  <math>366 \cdot 50 = 18300</math>  <math>425 \cdot 50 = 21250</math>  <math>506 \cdot 50 = 25300</math>  <u>123700</u> </p>
--	---

د اخستونکي لپاره ټوله سطحه نژدې  $123700 m^2$  ده.

د پلورونکي له پاره ممکنه حل:

	<p>هره ټوټه (پټی) 50m سورلري او په رسم کې ورکړ شوی جگوالی لري. د ټولو پټیو سطحه یوځای شمیرو.</p>
--	--



د د پلورونکي له پاره د ټولې سطحې مساحت نږدې  $143700 m^2$  دی. اخستونکی او پلورونکی باید د دواړو قیمتونو ،،منځ،، ته راشي، دا په دې معنا چې دواړه د قیمتونو منځ ارزښت یو بل سره ومني. یعنې د سطحې منځ ارزښت، چې دی:

$$\frac{123700 + 143700}{2} = 133700 \text{ unt}^2$$

دا به وروسته د ټاکلي انټیګرال برخه (په منځ) کې وشمېرو، چې ریښتونی ارزښت یې  $133333.3m^2$  دی.

د اخستونکي په بېلګه کې دا ډول شمیرنه لاندنۍ ،،جمعي جوړول،، بلل کېږي.

د پلورونکي په بېلګه کې دا ډول شمیرنه،، پورتنۍ جمعي،، جوړول بلل کېږي.

دا د سطحې ریښتونی ارزښت یو چیرته په دا منځ کې پروت دی.

باید ددې له پاره یوه لار پیدا کړو، چې ریښتونی ارزښت ترې لاس ته راشي. ددې کار لپاره لږ نوره د چمتووالي لار شته.

پوښتنې

د  $3x^2+1$  تابع گراف وکارئ.

د انټروال  $[1,3]$  ترمنځ د تابع سطحه به نڅښه کړئ.

د دې ورکړ شوي سطحې پورته جمعه جوړه کړئ

د دې ورکړ شوي سطحې کښته جمعه جوړه کړئ

## انتیگرال شمیرنه Integralcalulation

د سطحې تابع له پاره تر مخ راوړنه:  
دا دانتيگرال هندسي مفهوم هم دی.  
په کار تيزي وضعيه قيمت سيستم کي د گراف په سرچينه کي يوه کرښه  
رسمو. غواړو سطحه پيدا کړو، چې د تابع دگراف او  $x$  - محور ترمنځ د  $x$  په واکوالي  
کي پرته وي.

### د ريمن (ټاکلی) انتگرال

دلته دي يوه څېره راوړل (د يوه ډنډ او يا....)

فعاليت:

- يوه په خوښه هندسي څيره وکارئ، چې په ترتيب له دري، پنځو او اوو کرښو رابنده وي. د دې څيرو سطحه په ورسره ډول وشميرئ.
- په يوه د وضعيه قيمت سيستم کي يوه کره (منحني) وکارئ او وهڅيرئ، چې سطحه يي په ورنژدي ډول پيدا کړئ چې د  $x$  محور او منحني ترمنځ پرته وي.

یادونه: انتیگرال څه شی دی؟

انتیگرال کونه Integration د ورگډېدلو په معنی دی، لکه چې یو څوک یوې پردی ټولني ته ورگډیږي یعنی ددې پردی ټولني خوږونه خپلوي، یعنی دی په دې ټولنه ورزیاتیږي. دا هم په همدې موخه دلته دا موضوع څیرلو ته وړاندې کیږي، چې څنگه د یوې کوچنی درجې تابع و یوه جگ درجې تابع ته ځي.

د انتیگرال هندسي تعريف:

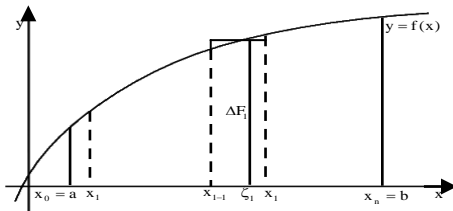
لوریزه سطحه-د انتیگرال تعريف:

که یوه  $f$  تابع ولرو، نو د  $x$  محور او تابع ترمنځ سطحې شمیرل د انتیگرال له لاري کیږي. په دې سطحه کې د  $x$  محور پورته لوري ته سطحه مثبتې مخنځینه لري او د  $x$  محور کښته لوري ته سطحه منفي مخنځینځ لري.

تحليلي تعريف:

تعريف: د  $f$  یوه تابع ورکړ شوي، چې په یوه انتروال  $[a, b]$  باندې تعريف دی، نو د  $a$  څخه تر  $b$  پوري د تابع د انتیگرال څخه د  $x$  په محور د  $f$  د گراف او د کرني  $x=a$  او  $x=b$  تر منځ یوه یوه لوریزه سطحه پوهیږو.

په دې برخه کې غواړو، چې د انتگرال کلیمې ته وده ورکړو. د سطحې کچوني یا اندازه کوني څخه کړی شو د انتگرال شمېرنې ته راشو، له دې امله انتگرال نیول د مشتق په څېټ یا برعکس کارونه یا عملیه ده.



یو تابع  $y = f(x)$  لرو. غواړو ددې تابع د گراف او د  $x$  - محور باندې پرتو ټکو او ترمنځ هواره (سطحه) وشمیرو داسې چې  $(f(x) > 0)$  وي. (څیره ۱.۱)

ددې دندې د حل لپاره د  $[a, b]$  اینتروال په  $n$  (نه اریبېن) برابر و برخو انتروالونو  $[x_{i-1}, x_i]$  توته کوو.

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_n = b$$

$$x_i - x_{i-1} = \Delta x_i$$

په اینتروال  $[x_{i-1}, x_i]$  کې په خوښه  $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$  ټاکو.

د  $x = x_{i-1}, x = x_i, y = f(x)$  تر منځ سطحه (هواره) دا لاندې د مستطیل سطحه (و لار کونجیزه هواره) ده:

$$\Delta F_i(x) = f(\xi_i) \Delta x_i; \dots \dots \dots (4,1)$$

د ټولو پورته مستطیل ډوله کوچنیو سطحو د جمعې (زیاتون) له لارې غوښتونکي، نزدې ټوله سطحه لاس ته راځي:

$$F_n = \sum_{i=1}^n \Delta F_i = \sum f(\xi) \Delta x_i; \dots \dots \dots (4,2)$$

دا نزدیوالی تر هغې ښه کیږي څومره چې د اینتروال  $[a, b]$  ویش نری شي یعنی  $\max \Delta x \rightarrow 0$ ، هر څومره چې د زیاتیدونکو شمیر  $n \rightarrow \infty$  (شي).

که (۲. ۴) تل همغه پوله ارزښت  $F$  ولري، په دې اړه نه چې اینتروال  $[a, b]$  څنګه ویشل شوی او  $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$  څنګه ټاکل شوي، نو  $f(x)$  په اینتروال  $[a, b]$  کې اینتیګرال وړ دی. دا د بیلګې په توګه د ټولو توته، متمادی او محدودو تابعو  $y = f(x)$  حالت دی.

پېژند (تعریف) ۴. ۱: که لیمیت

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx = F; (\max \Delta x \rightarrow 0), \dots \dots \dots (4,3)$$

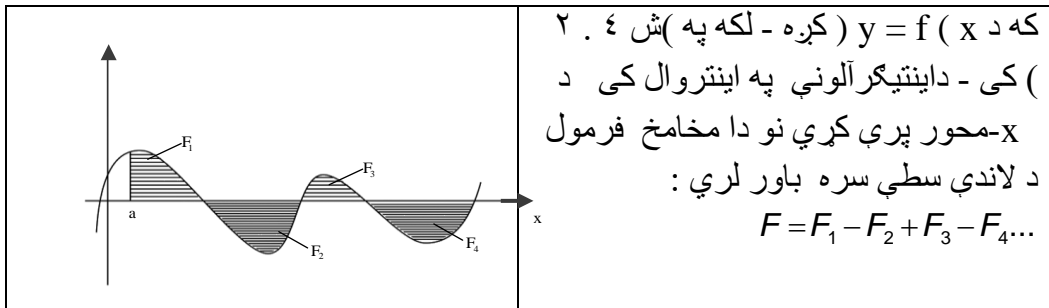


په اینټروال  $[a, b]$  کې موجود وي، نو دا د  $f(x)$  ټاکلی اینټیګرال بولو، یا د ریمن سطحه  $F$ - Riemann. دلته  $a$  د اینټیګرال کېدونکي لاندې (کښته) پوله او  $b$  د اینټیګرال کېدونکي پورته پوله بلل کېږي او  $[a, b]$  د اینټیګرال کېدونکي اینټروال او  $f(x)$  (اینټیګرال کېدونکی) او  $x$  د اینټیګرال کېدونکي متحول (Integrationsvariable) بلل کېږي

یادونه ۱: د اینټیګریشن واریابله یا اووښتونی کیدی شي په خپله خوښه په نڅښه شي (مخښه یا علامه یی په خوښه وټاکل شي).

$$\text{مور لرو: } \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(u) du$$

یادونه ۲: دا پورته تعریف ۴. ۱ کیدی شي هغه حالت ته پراخه شي، چېرته چې  $f(x) > 0$  باوري نه وي. که  $f(x) < 0$  وي نو دا ټاکلی اینټیګرال بیا د  $x$ -محور تر لاندې منفي هواره لري.



د تعریف ۴. ۱ پسي ترلي دا لاندې جمله لرو:

جمله ۴. ۱: که  $f(x)$  په  $[a, b]$  کې اینټیګرال وړ وي او  $c \in [a, b]$  وي، نو باور لري:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

ددې لپاره چې دا پورته مساوات د  $c$  ارزښتونو ته پراخه کړی شو، باید له اینتروال  $[a, b]$  د باندې نه وي پروت، یعنی ټکي  $a, b$  او  $c$  په یوه اینتروال کې باید پراته وي، په هغه کې چې تابع  $f(x)$  اینٹیگرالور دی.

مور دا لاندې تعریف (پیژند) لرو :

پیژند یا تعریف ۴. ۲:  $f(x)$  په یوه بند انتروال  $[a, b]$  کې اینٹیگرالور دی، نو باور لري:

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

د پیژند تعریف ۴. ۱ له مخې تل باور لري:  $\int_a^a f(x) dx = 0$

تمرینونه:

د لاندې توابعو گراف و کارئ او د گراف او  $x$  محور ترمنځ د سطحې مثبتې او منفي لور په نڅېنه کړئ.

الف:  $4x^3 + 5x^2 + x + 6$  ،

ب:  $x^2 - 4x + 16$  ،

پ:  $x^4 + 5x^2 - 2x - 7$

بنسټیز - یا لومړنۍ تابع

$$F'(x) = f(x)$$

## فعالیت

- په پورته مساوات کې به  $F(x)$  څنگه وليکلای شو؟

-  $F(x)$  نسبت و  $f(x)$  ته څه بلل کيږي او په څټ،  $f(x)$  د  $F(x)$  څه بلل کيږي؟

په پورته دواړو پوښتنو کې فکر وکړي، چې پایلې يې دا لاندې دي:

ددې لپاره چې د مشتقيولو او اينټيگرال نيولو ترمنځ اړيکې لاس ته راوړو، د لومړنی تابع کلمه په لاندې توگه تعريفوو:

پيژند (تعريف):

تابع  $y = f(x)$  دې په يوه واز اينټروال  $I$  کې تعريف وي. هر يوه هلته موجوده مشتقور  $F(x)$  تابع چې  $F'(x) = f(x)$  شرايط پوره کړي، د  $f(x)$  بنسټيز - ساده - يا لومړنی تابع بلل کيږي

په ساده توگه ليدل کيږي چې د يوې  $f(x)$  تابع لپاره نه يواځې يو بنسټيز تابع  $F(x)$  موجود دی، د بيلگې په توگه  $F_0(x) = x^2$ ,  $F_1(x) = x^2 + 1$ ,  $F_2(x) = x^2 + 2$  تابع، بلکې په عمومي ډول

$$F(x) = x^2 + C, \text{ چې دا ټول مساوي مشتقونه } f(x) = 2x \text{ لري.}$$

د پورته ښوونو پايله، چې څنگه سړی د يوه متمادي تابع  $f(x)$  لومړنی تابع پيدا کوي، په لاندې ډول ده:

جمله:

$y = f(x)$  دې په اينټروال  $I$  کې متمادي تابع وي، نو د  $a \in I$  لپاره

$$F_a(x) = \int_a^x f(t) dt, \text{ يوه لومړنی تابع ده، د ټولو } c \in I \text{ لپاره.}$$

د  $f(x)$  هره بله لومړنی (بنسټيزه) تابع لاندې بڼه لري:

$$F(x) = F_a(x) + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

ځواب: ښايو چې  $F_a(x)$  د  $f(x)$  بنسټيز تابع ده. ددې د ښوولو لپاره ښايو چې د  $F_a$  (لپاره) د پورته پېژند شرايط باور لري. د  $F_a(x)$  مشتق د  $x \in I$  او  $x \neq a$  لپاره په لاندې ډول ده.

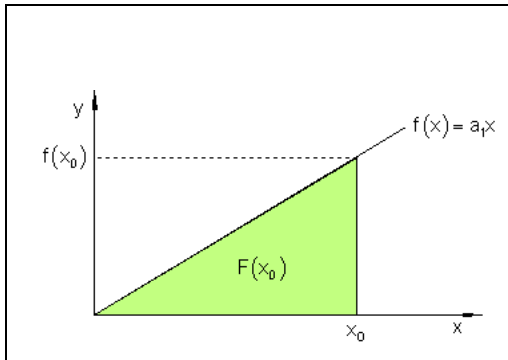
$$\begin{aligned} F'_a(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F_a(x+h) - F_a(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[ \int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \cdot \int_a^{x+h} f(t) dt \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \cdot h \cdot f(\xi), \quad \xi \in [x, x+h] \end{aligned}$$

د ليميت منځ ارزښت جملې له مخې داسې يوه  $\xi$  شته دی (د متماديت له امله  $f(\xi) \rightarrow f(x)$ )

$$= f(x)$$

سطحه او لومړنی تابع:

سطحي تابع ته ترمخ راوړنه:

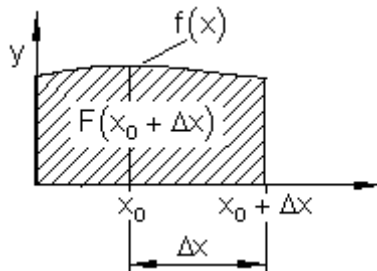
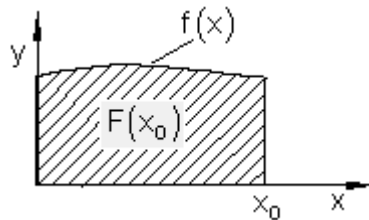
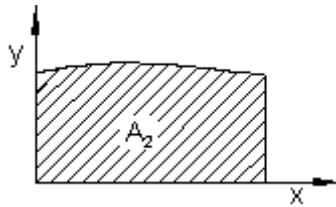
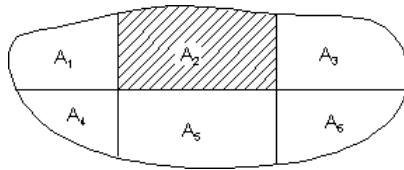


د تابع  $f(x) = a_1x$  گراف په کار تېزي وضعيه سيستم (پروت ولاړ سيستم) په سرچينه کې يوه کرښه انځوروي. يو تابع غواړو پيدا کړو، چې د گراف او  $x$ -محور ترمخ، د  $x_0$  په واکوالي يا تابعيت کې سطحه په گوته کوي. دا چې دا جوړه شوي سطحه يو مثلث دی، نو حل يې د مثلث د سطحي فرمول په مرسته

$F(x_0) = \frac{x_0 \cdot f(x_0)}{2}$ <p>د <math>f(x_0) = a_1 x_0</math> سره په لاندې ډول دی:</p> $F(x_0) = \frac{x_0 \cdot a_1 x_0}{2} = \frac{a_1}{2} x_0^2$	$A = \frac{g \cdot h}{2}$ <p>زموږ د مسالې لپاره متحوله داسې تغیروو:</p> $A \rightarrow F(x_0); g \rightarrow x_0; h \rightarrow f(x_0) = a_1 x_0$
--	---

تابع  $F(x_0)$  د گراف او د  $x$  - محور ترمنځ سطحه د  $x_0$  په واکوالي (تابعیت) کې تشریح کوي یا ښايي. موږ دا تابع د **سطحي تابع** بولو.

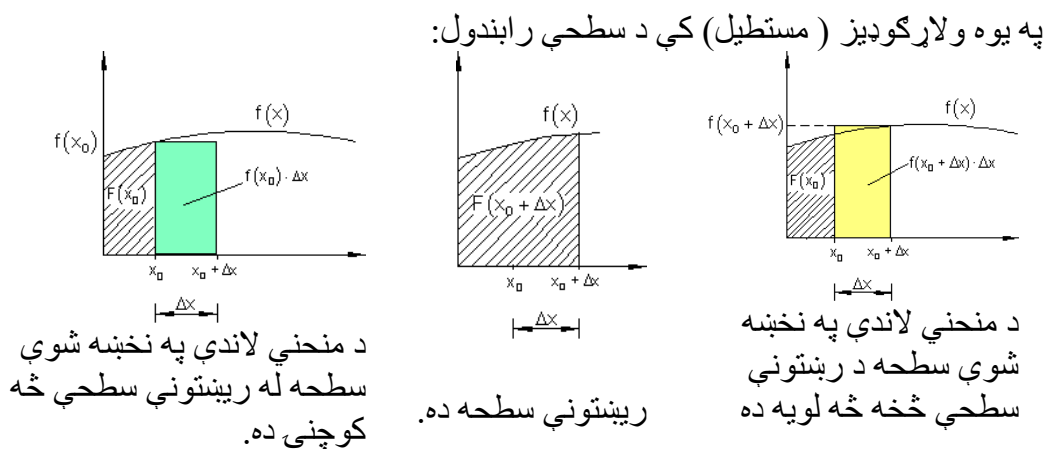
### د سطحې پرابلم:



هره له کړو کړنو رابنده سطحه په پای ډېرو پلونو (قدمونو)، چې په هغې کې فقط یوه یوه کره کرښه رامنځ ته کيږي. نورې ټولې رابندونې سپده کرښیزې دي. هره یوه د سطحې برخه (د بیلگې په توګه دلته  $A_2$ ) کېدای شي د وضعیه قیمتونو سیستم کې د یوې سطحې په څېر انځور شي، چې د کزې کرښې او پروت محور ترمنځ پرته وي.

که له کړو کړنو رابند گراف  $f(x)$  متمادي تابع وي، نو پوښتنه رامنځ ته کيږي، چې ایا یو تابع شته چې د افقي (پروت) محور ارزښت  $x_0$  په سطحه  $F(x_0)$  تنظیم کړي، لکه په پیلېلګه کې؟

که داسې یو تابع  $F$  شتون ولري، او سطحه  $F(x_0)$  چې د  $x_0$  افقي محور ارزښت تنظیم وي، نو باید د افقي (پروت) محور ارزښت  $(x_0 + \Delta x)$  په سطحه باندې تنظیم کړای شي.



که د سطحې پټي (یا کوچني مستطیلونه) هر څومره کوچني شي، په همغه اندازه د اصلي سطحې د مساحت څخه یې توپیر کميږي. دا اړودوالی د ریاضیاتو له مخې په لاندې توګه فرمول بندي کېدی شي:

$F(x_0) + f(x_0 + \Delta x) \cdot \Delta x$	$F(x_0 + \Delta x)$	$F(x_0) + f(x_0) \cdot \Delta x$
---	---------------------	----------------------------------

دا موږ دې لاندې نابرابرونو یا نامساواتو ته راڅڅوي

$$\begin{aligned}
 F(x_0) + f(x_0) \cdot \Delta x &\leq F(x_0 + \Delta x) \leq F(x_0) + f(x_0 + \Delta x) \cdot \Delta x \quad | F(x_0) \\
 \Leftrightarrow f(x_0) \cdot \Delta x &\leq F(x_0 + \Delta x) - F(x_0) \leq f(x_0 + \Delta x) \cdot \Delta x \quad | : \Delta x \\
 \Leftrightarrow f(x_0) &\leq \frac{F(x_0 + \Delta x) - F(x_0)}{\Delta x} \leq f(x_0 + \Delta x)
 \end{aligned}$$

لیمیت یې نیسو:

$$\begin{aligned}
 \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x_0) &\leq \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \leq \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x_0 + \Delta x) \\
 f(x_0) &\leq F'(x_0) \leq f(x_0) \\
 f(x_0) &= F'(x_0) = f(x_0) \\
 \underline{\underline{F'(x_0) = f(x_0)}} & \text{ نو لرو:}
 \end{aligned}$$

دا په دې معنا، چې د سطحې  $F(x)$  مشتق د کزې کړنې د تابع ارزښت  $f(x_0)$  سره په  $x_0$  ځای کې برابر دی.

$$\boxed{F'(x) = \frac{dF(x)}{dx} = f(x)} \quad \text{يا} \quad F'(x_0) = \frac{dF(x_0)}{dx} = f(x_0) \quad \text{مور لیکو:}$$

که مور بريالي شو، داسې يو تابع  $F(x)$  پيدا کړو چې مشتق يې د رابندې کزې  $f(x)$  تابع وي، نو  $F(x)$  د سطحې تابع دی. که مور يو تابع د لومرنې تابع څخه رابيل کړو، نو دا مشتق کول بولو. د يوې سطحې تابع پيدا کول په روښانه توگه ددې کړنلارې برعکس دی. سړی کړی شي فورمال ووايي: د يوې سطحې مساحت تابع، چې پيدا کړو، دا معنا لري چې ورگډول يا انټېگرالول يې شمېرو. د يوه ساده توان تابع په بېلگه د احساس له مخې يوه لار پيدا کېدی شي، چې دا څنگه اېنټېگرالوي.

توانتابع:  $f(x) = x^3 \Rightarrow f'(x) = 3 \cdot x^{3-1} = 3x^2$   
 مشتق په دې معنا چې: اکسپوننت په يو کميرې او پوتنختابع د زاړه پوتنخ سره ضربيري. انټېگرالونه (زياتونه يا ورگډونه) په دې معنا چې: اکسپوننت په يو جگيري او پوتنختابع په نوي اکسپوننت وپشل کيري. دا همدا اوس ازمايو:

$$f(x) = 3x^2 \Rightarrow F(x) = \frac{3}{2+1} x^{2+1} = \underline{x^3}$$

تابع  $F(x)$  د  $f(x)$  بنسټيز (لومرنی تابع يا ساده تابع) بلل کيري، ځکه چې  $f(x)$  له  $F(x)$  څخه لاس ته اړخي يا را پيدا کيري يا راځيري.

تمرینونه:

– و بنایئ، چې د  $F$  او د  $G$  توابع د  $f$  تابع لومرنی تابع وي ده.

- a)  $F(x) = x^3 + x + 4$  ,  $G(x) = x^3 + x + 1$   
 b)  $F(x) = (x-3)^2$  ,  $G(x) = x^2 - 6x + 4$   
 c)  $F(x) = \frac{x+1}{x+2}$  ,  $G(x) = \frac{3x+5}{x+2}$   
 d)  $F(x) = 1 + \sin x$  ,  $G(x) = \sin x$

## ناتاکلی انتیگرال

$$\int f(x) dx$$

فعالیتونه:

-- په پورته څیره کې  $\int$  په څه مفهوم دی  
 -- په تیره برخه کې مو  $F(x)$  د  $f(x)$  څه بللی وو او اوس به  $F(x) = \int f(x) dx$  د لومړنۍ تابع سره څه توپیر ولري؟

و به گورو، چې ناتاکلی انتیگرال د لومړنۍ تابع لپاره بل نوم دی.

که دیوې ورکړ شوې  $f(x)$  تابع  $F(x)$  لومړنۍ تابع، یعنې  $F(x)$  وپېژنو، نو دیوې ثابتې  $c$  د ور جمع کولو سره د  $f(x)$  د ټولو لومړنیو توابعو ست  $G$  لاسته راوړو (په  $c$  خوښه یو حقیقي عدد دی).

موږ د  $f(x)$  تابع د  $F(x)$  لومړنۍ تابع ټاکنه یا اینټگرالونه هم بولو او ددې له پاره لیکو:

$$\frac{dF}{dx} = f(x) \Leftrightarrow dF(x) = f(x)dx \Leftrightarrow F(x) = \int dF(x) = \int f(x)dx$$

$$F(x) = \int f(x) dx \text{ : نو لرو}$$

دا تراوسه فورمال لیکندود وو. اوس دا ژوند ته رابولو. موږ لومړنۍ توابع پلټو

بیلگه:

لومړنۍ تابع  $F(x)$  دی پیدا شي، چې مشتق یې  $f(x) = 2x$  دی.

$$F(x) = \int f(x)dx = \int 2x dx \text{ قاعده داسې ده}$$

موږ ازمايو:  $F(x) = x^2$  ځکه چې  $F'(x) = 2x = f(x)$

$F(x) = x^2 + 2$  ځکه چې  $F'(x) = 2x = f(x)$ . په ټولیزه توګه باور لري:

$$F(x) = x^2 + C \text{ ځکه چې په هر حالت کې لرو: } F'(x) = 2x = f(x)$$



دواړه توابع په ثابت غړي کې یو له بل توپیر لري. دوی همغه مشتق لري، ځکه چې د مشتق سره هغه ثابت عدد له منځه ځي. له دې امله باید دې خپلې لار ته تغیر ورکړو.

$$\int f(x) dx = F(x) + C \quad \text{قاعده (لار): باور لري:}$$

د لومړنیو توابعو سټ (ډېری): بیلگه بنایي، چې د تابع  $f(x)$  لپاره نه یواځې یو لومړنی تابع بلکې ناپای ډېر توابع شته، چې یواځې ثابت عدد کې یو له بل سره توپیر لري، چې دا د  $f(x)$  د لومړنیو توابعو سټ بولو.

بیلگه: یو لومړنی تابع  $F(x)$  دې پیدا شي، چې د هغه مشتق  $f(x) = 3x^2 + 2$  وي.

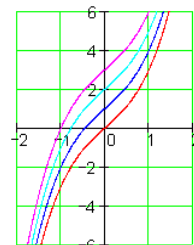
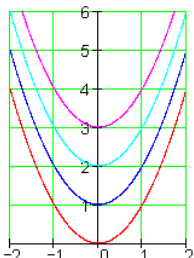
$$F'(x) = 3x^2 + 2 = f(x) \quad \text{، ځکه چې } F(x) = x^3 + 2x + C$$

د ټولو لومړنیو توابعو ډېری دې د منحیو ډلې په څېر انځور شي، چې فقط ثابتو عددونو کې یو له بل توپیر لري.

د دې لپاره دې د گرافونو لاندې دوه بېلگې وکتل شي.

$$F(x) = x^2 + C$$

$$F(x) = x^3 + 2x + C$$



تمرینونه:

د لاندې توابعو له پاره لومړني توابع پیدا کړئ او لاس ته راوړني يې د مشتق له لارې و ازمایئ.

a)  $f(x) = x^2$

b)  $f(x) = 2x^2$

c)  $f(x) = x$

d)  $f(x) = -2x$

e)  $f(x) = \frac{1}{2}x^2$

f)  $f(x) = -\frac{1}{4}x$

g)  $f(x) = x^3$

h)  $f(x) = 4x^3$

i)  $f(x) = 2$

j)  $f(x) = x + 1$

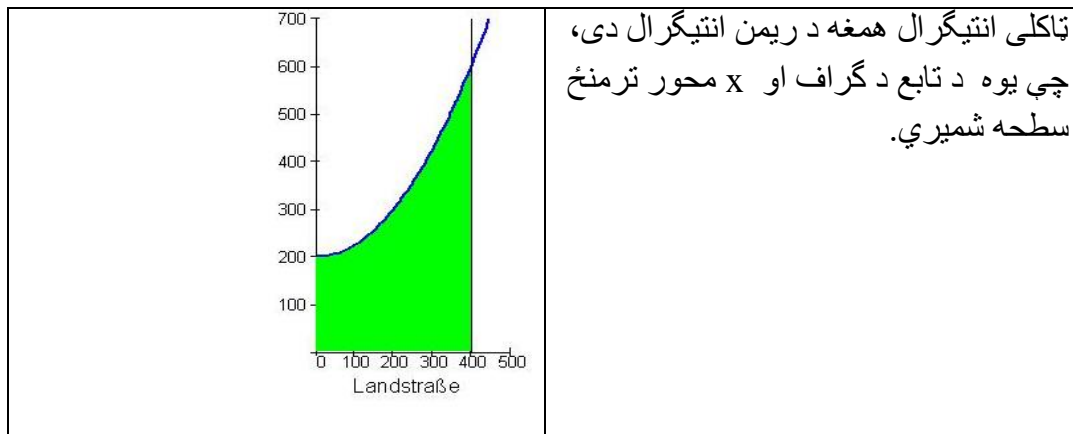
k)  $f(x) = x^2 + x - 3$

l)  $f(x) = x^n ; n \in \mathbb{N}$

m)  $f(x) = x^2$

n)  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + C$

## د ټاکلي انتیگرال شمیرنه



ټاکلي انتیگرال:

که  $f$  یو حقيقي تابع وي، نو د ټاکل انتیگرال  $\int_a^b f(x) dx$  (لوستل: د  $f(x)$  انتیگرال د پولې (حد)  $a$  تر پولې (حد)  $b$  پد  $a$  او  $b$  حدونو ترمنځ یا انتیگرال په  $f(x)$  باندې له  $a$  تر  $b$ ) لاندې یوه لوریزه سطحه پوهیږو د  $f$  گراف لاندې د  $a$  او  $b$  تر منځ.

فعالیت:

اول: ووايي چې په پورته انتیگرال کې  $f(x)$  څه نومیري؟

$G$  دې په بند انتروال  $a \leq x \leq b$  کې د  $g(x)$  لومړنی انتیگرال وي، د

$$g(x) = \int_a^x f(t) dt \text{ سره، نو}$$

$$\int_a^b f(t) dt = G(b) \text{ باور لري:}$$

دا چې د دوه لومړنیو توابعو  $F$  او  $G$  تر منځ یو ثابت  $C$  توپیر شته، نو  $G(x) = F(x) + C$  باور لري. د  $x=b$  لپاره لاسته راوړو:  $G(b) = F(b) + C$

دا چې  $G(x) = \int_a^x f(t) dt = 0$  دی او  $G(a) = F(a) + C$  دی، نو  $C = -F(a)$  ده.

دا په دې معنا، چې  $G(b) = F(b) - F(a)$  همداسې  $\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$ .

د متحولي د نوم بدلون څخه وروسته لاس ته راوړو  $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$

له دې سره مو د مشتق او انتیگرال جمله لاس ته راوړه

یا دا وینا د مشتق - او انتیگرال شمېرنې بنسټیزه جمله بلل کیري:

تعریف:

$f$  په انټروال  $a \leq x \leq b$  کې متمادي تابع ده او  $F$  د  $f$  لومړنی تابع ده، نو ټاکلی

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a). \quad \text{انتیگرال دی:}$$

د  $F(b) - F(a)$  لپاره زیات وخت  $[F(x)]_a^b$  لیکو. په دې توګه دی

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b$$

له دې سره مو د ټاکلي انتیگرال شمېرنه په لومړني انتیگرال بېرته واړوله او د مشتق او انتیگرال تر منځ مو اړیکې رامنځ ته کړې.

بیلګې:

$$a) \int_1^2 x^2 dx = \left[ \frac{x^3}{3} \right]_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

$$b) \int_2^4 \frac{1}{x^2} dx = \int_2^4 x^{-2} dx = \left[ \frac{x^{-1}}{-1} \right]_2^4 = \left[ -\frac{1}{x} \right]_2^4 = \frac{1}{4}$$

$$c) \int_1^3 \sqrt{x} dx = \int_1^3 x^{\frac{1}{2}} dx = \left[ \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_1^3 = \frac{2}{3} [\sqrt{x^3}]_1^3 (\sqrt{3^3} - \sqrt{1^3})$$

$$= \frac{2}{3} (3\sqrt{3} - 1) = 2(\sqrt{3} - \frac{1}{3})$$

د ټاکلو انتیګرالونو لپاره لاندې جملې رښتیا دي:

$$\int_a^b k \cdot f(x) dx = k \cdot \int_a^b f(x) dx$$

$$\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx +$$

تکمیلیدونکي بنسټونه:

د  $F(b) - F(a)$  له امله د انتګرالونې ثابته  $c$  له منځه ځي. له دې امله کولې شو د انتیګرال ثابتې ټاکلو لپاره  $c=0$  وليکو.

بیلګه:

د ټاکلي انتیګرال  $\int_1^3 x^2 dx$  ارزښت و ټاکي. د توان قانون له مخې لومړنی تابع

$$\text{يعني } F(x) = \frac{x^3}{3} + C \text{ پيدا کړی}$$

ښوونه: مور په دا لاندې ډول ښایو:

$$\int_1^3 x^2 dx = \left[ \frac{x^2}{3} + C \right]_1^3 = F(3) - F(1) = \frac{3^3}{3} + C - \left( \frac{1^3}{3} + C \right) = \frac{27}{3} + C - \frac{1}{3} - C$$

$$\int_1^3 x^2 dx = \frac{26}{3}$$

اساسات تکمیل کونده:

از د لیل  $F(b) - F(a)$  ثابت  $C$  انتگرال گرفتن از بین می‌رود. ازین بابت میتوانیم برای تعیین ثابت انتیگرال بنویسیم  $C = 0$ .

مثال :

قیمت انتیگرال معین  $\int_{-\pi}^{+0.5\pi} \cos x dx$  را تعیین نماید.

ثبوت: ما قرار زیل ثبوت می‌کنیم:

$$\int_{-\pi}^{+0.5\pi} \cos x dx = [\sin x]_{-\pi}^{+0.5\pi} = \sin \frac{\pi}{2} - \sin(-\pi) = 1 - 0 = 1$$

یادونه : دا چې په دې برخه کې یواځې د ټاکلي انتیگرال ارزښت غوښتل شوي دی او نه د یوې منحنی لاندې سطحه، نو باید نه دی چې صفر ځایونه په پام کې ونیول شي.

عوره یادونه: دادې په یاد وي، چې ناټاکلی انتیگرال تابع ده او ټاکلی انتیگرال یو عدد.

تمرینونه:

د لاندې ټاکلو انتیگرالونو ارزښتونه وشمیرئ

## د ټاکلي انتیګرال څخه نا.....

a)  $\int_0^3 4dx$

b)  $\int_{-3}^{-1} xdx$

c)  $\int_1^e \frac{1}{x} dx$

d)  $\int_1^e (2 + \frac{1}{x}) dx$

e)  $\int_{-1}^0 e^x dx$

f)  $\int_0^\pi \sin x dx$

i)  $\int_{\frac{1}{6}\pi}^{\frac{1}{4}\pi} \frac{1}{\cos^2 x} dx$

j)  $\int_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{1}{3}\pi} \frac{1}{\sin^2 x} dx$

k)  $\int_{-2}^2 x^3 dx$

l)  $\int_2^6 (1+x) dx$

m)  $\int_1^2 (x^2 - x^5) dx$

n)  $\int_{-2}^0 \left( \frac{x^3}{4} + \frac{x^2}{3} \right) dx$

## د ناتیګلي انتیګرال څخه و ټاکلي انتیګرال ته

تر مخ راوړنه یا وړاندر اوړنه

موږ ولیدل، چې څنگه یو تابع  $f(x)$  ته لومړنی تابع  $F(x)$  منځ ته راوړی شو، نو ناپای دېر لومړني توابع شته دی، چې فقط د یوې ورجمع کونکې ثابتې کې یو له بل توپیر لري.

فعالیت :

-- د  $\int_a^b f(x) dx$  او  $\int_a^b f(x) dx$  تر منځ توپیر باندې فکر وکړئ؟

-- د  $\int_a^b f(x) dx$  او  $\int_a^b f(x) dx$  پایله څه ده؟

- دا توپیر یې د یوې بیلګې په بنسټ روښانه کړئ.

بیلگه:

لرو: تابع  $f(x) = 3x^2 + 2$  او د دې د لومړنیو توابعو سټ  $f(x) = x^3 + 2x + C$

پیژند: د ټولو لومړنیو توابعو سټ و یوې تابع  $f(x)$  ته ،، ناټاکلی انتیگرال ،، بلل

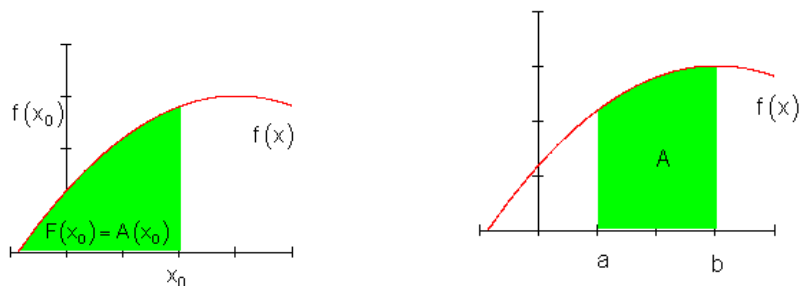
$$\int f(x) dx = F(x) + C \quad \text{کیري او دې له پاره لیکو:}$$

د مشتق- او انتیگرال شمېرنې ترمنځ اړیکې کېدې شي د لاندې جملې له لارې لاس ته راشي.

جمله (قضیه): د ناټاکلی انتیگرال شمېرنه د مشتق شمېرنې برعکس انځوروي

$$\frac{d[f(x)] + C}{dx} = [F(x) + C]' = f(x)$$

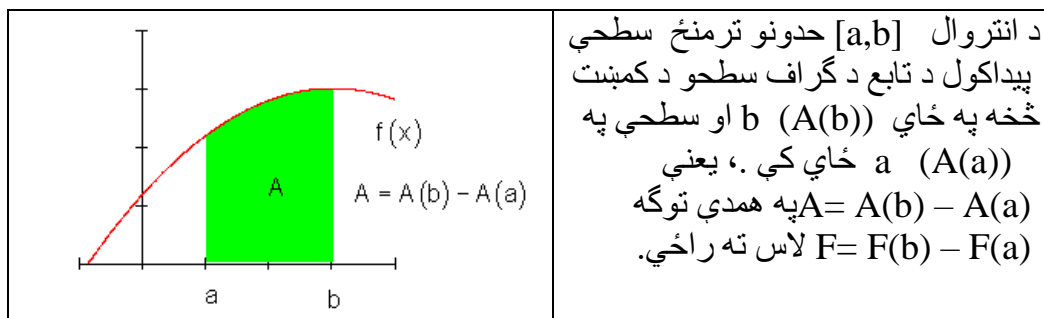
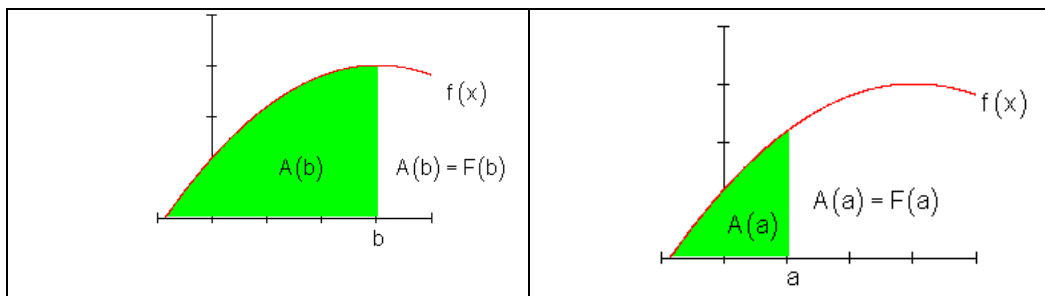
د تابع د گراف لاندې او د انټروال  $[a; b]$  تر منځ سطحه دې و ټاکل شي. زموږ په دې پرابلم موږ تر اوسه لاس ته راوړې زده کړې کاروو.



د یوې سطحې تابع شتون مو فکر دې لاندې پوهنې (زده کړې) ته لارښوده وي: د یوې سطحې، چې د یوې په پام کې نیولې  $f(x)$  تابع گراف لاندې ده تر  $x_0$  ځای پورې

د ټاکلی انتیگرال څخه نا.....

او یوې  $F'(x)$  تابع، چې د  $F(x)$  تابع مشتق د  $x_0$  ځای د  $f$  تابع د تابع ارزښت سره د  $x_0$  په ځای کې برابر وي، ترمنځ اړیکې شته دی، یعنې



په انټروال  $[a, b]$  کې د تابعگراف لاندې سطحه د لومړنیو توابعو تفریق دی:

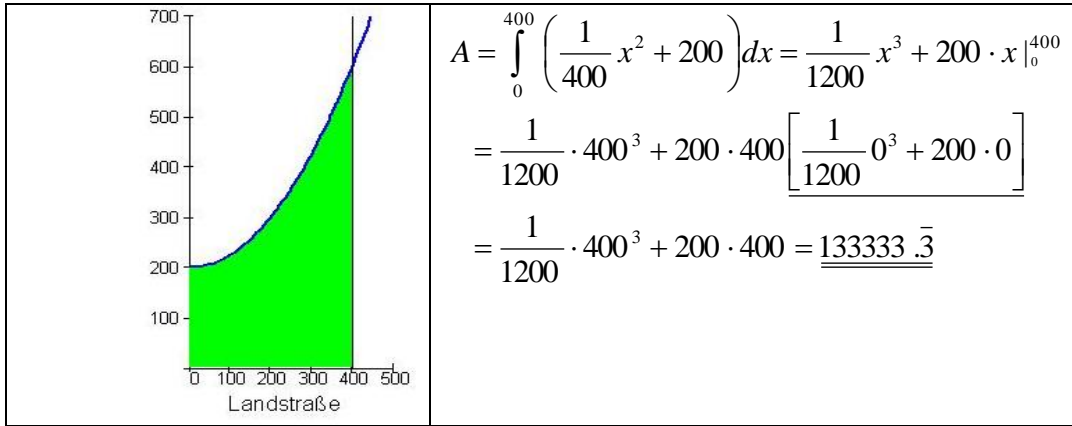
$$A = F(b) - F(a) := \int_a^b F(x) dx$$

دا انتیگرال ټاکلی انتیگرال هم بلل کیږي.

جمله :  
 دا تر اوسه لاس ته راوړو معلوماتو په بنسټ کړی شو، چې په پیل بېلگه کې راوړې د چمن سطحه وشمېرو.

ثابته له تفریق سره لرې کیږي. په عمل کې د دې مسألې د حل لپاره یوه بله لار گټوره راوستلې یا گټوره ښوولې:





تمرینونه: لاندې ټاکلي انتیگرالونه وشمېدی.

$$\int_1^3 x \, dx \quad , \quad \int_1^3 (x^2 - 1) \, dx \quad , \quad \int_{-2}^2 4 \, dx \quad , \quad \int_3^4 dx \quad ,$$

$$\int_0^4 (2x - 5) \, dx \quad , \quad \int_{-\sqrt{8}}^{\sqrt{8}} \left( \frac{1}{2} x^2 - 4 \right) dx$$

## د انتیگرالونې قاعدې

د ناټاکلي انتیگرال انتیگرالونې قاعدې: په لاندې اینتیگریشن قاعدو کې د اینتیگریشن ثابتې باندې صرف نظر کړي دلته مساوات تر یوې ورجمع شوې ثابتې C پورې مساوات دی ، په دې معنا چې د مساواتو تر منځ یواځې یوه ثابتې کیدی شي زیاته یا کمه وي. دا قاعده کیدی شي چې په ټاکلي انتیگرال کې بنوولي جملې سره سم ټاکلي انتیگرال ته نقل شي یعنې په ټاکلي انتیگرال استعمال شي . دا قاعدې کیدی شي چې د تیرو درسونو سره سم د دواړو خواوو د مشتق نیولو سره وپنول شي.

جمله :

د یوې ثابتې سره ضرب : که تابع  $f(x)$  په یوه اینتروال کې متمادي وي ، نو لاندې باور لري:

$$\int a \cdot f(x) dx = a \int f(x) dx, \quad a \in R$$

جمله: د جمعې (تفریق) قاعده که  $f_1(x)$  او  $f_2(x)$  په یوه ایتروال کې نه پرېکېدونکي وي ، نو باور لري

$$\int (f_1(x) \pm f_2(x)) dx = \int f_1(x) dx \pm \int f_2(x) dx$$

بیلگې:

لاندې ایتگرالونه کیدی شي چی د مخ ته تېرو جملو په استعمالیدو او ساده څیره بدلون بیرته په بنسټیزو ایتگرالونو بدلکړای شي

$$a) \int \frac{dx}{3x^4} = \frac{1}{3} \int x^{-4} dx = \frac{1}{3} \left( -\frac{1}{3} \right) x^{-3} + C = -\frac{1}{9x^3} + C,$$

$$b) \int (3x^2 + 4x - 1) dx = 3 \int x^2 dx + 4 \int x dx - \int dx = 3 \cdot \frac{1}{3} x^3 + 4 \cdot \frac{1}{2} x^2 - x + C \\ = x^3 + 2x^2 - x + C,$$

$$c) \int \frac{2x^3 - 3x}{\sqrt{x}} dx = 2 \int \frac{x^3}{\sqrt{x}} dx - 3 \int \frac{x}{\sqrt{x}} dx = 2 \int x^{\frac{5}{2}} dx - 3 \int x^{\frac{1}{2}} dx \\ = 2 \cdot \frac{2}{7} x^{\frac{7}{2}} - 3 \cdot \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + C = \frac{4}{7} x^3 \cdot \sqrt{x} - 2x \cdot \sqrt{x} + C$$

تمرینونه: د لاندې توابعو انتیگرال ونیسی:

$$a) \int \frac{2x^3 - 3x}{\sqrt{x}} dx, \quad b) \int_1^2 \frac{\sqrt{x} - 1}{x} dx$$

۲۲۱

د اکسپوننشل توابعو.....

د اکسپوننشل توابعو انټیگرالونه

بنسټ:

د طبیعي اکسپوننشل تابع  $f(x) = e^x$  لپاره لرو:د ټولیز اکسپوننشل تابع  $\int e^x dx = e^x + C$  ( $a \in \mathbb{R}^+, a \neq 1$ ) لپاره لرو:

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

بیلگه: دا ناټاکلی اکسپوننشل تابع  $\int 2^{x-3} dx$  غواړو پیدا کړو

$$2^{x-3} = \frac{2^x}{2^3} = \frac{1}{8} 2^x \quad \text{بڼه بدون: د توان قانون سره سم لرو}$$

$$\int \frac{1}{8} 2^x dx = \frac{1}{8} \int 2^x dx \quad \text{د فاکتوروني قانون سره سم لرو:}$$

$$\frac{1}{8} \int 2^x dx = \frac{1}{8} \cdot \frac{2^x}{\ln 2} + c = \frac{2^x}{8 \cdot \ln 2} + c = \frac{2^{x-3}}{\ln 2} + c \quad \text{انټیگرال یې ونیسئ:}$$

تمرینونه:

لاندې انټیگرالونه وشمیرئ

a)  $\int 3^{x+1} dx$

b)  $\int 2^{-x} dx$

c)  $\int a^{x+b} dx$

d)  $\int \frac{1}{a^x} dx$

e)  $\int 2^x \cdot 3^x dx$

f)  $\int \frac{2^x}{3^x} dx$

i)  $\int \frac{4^{x+3}}{2^x} dx$

j)  $\int \frac{5^x + 3^x}{2^x} dx$

k)  $\int (1 + 2^x) dx$

د لوگاریتمی.....

۲۲۲

### د لوگاریتمی توابعو انتیگرالونه

بنسټ: د طبیعي لوگاریتم تابع  $f(x) = \ln x (x \in \mathbb{R}^+)$  لپاره  $\int \ln x dx = x \cdot \ln x - x + c$  دی.

د تولیز لوگاریتم تابع  $f(x) = \log_a x, a \in \mathbb{R}^+, a \neq 1$

لپاره  $\int \log_a x dx = \frac{x \cdot \ln x - x}{\ln a} + c$  دی.

بیلگه:

ناتکلی انتیگرال  $\int \ln 3x dx$  غواړو پیدا کړو:

بڼه بدلون او د فاکتور قاعدې استعمال:

$$\int \ln 3x dx = \int (\ln 3 + \ln x) dx = \int \ln 3 dx + \int \ln x dx = x \cdot \ln 3 + x \cdot \ln x - x + c$$

$$\int \ln 3x dx = x \cdot (\ln 3 + \ln x - 1) + c$$

تمرینونه:

دا لاندې ناکلي انتېگرالونه پيدا کړئ

$$a) \int \ln 2x^3 dx$$

$$b) \int \ln \sqrt{x} dx$$

$$c) \int \log \frac{x}{2} dx$$

$$d) \int 3 \log \frac{1}{x} dx$$

۲۲۳

بنسټيز انتېگرالونه

## بنسټيز انتېگرالونه په يوه جدول کې

د انتېگرالولو او مشتق نيول د اړيکو په بنسټ کيدی شي چې د بنسټيزو انتېگرالونو يو جدول ترتيب شي. دا په مشتق جدول کې راوړل شوو بنسټيزو توابعو برعکس څرگندېږي.

Nr.	$f(x)$	$f(x) = \int f(x) dx$	نېونه يا فرضيه
1	$x^n$	$\frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$	$n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$
2	$\frac{1}{x}$	$\ln x  + C$	$x \neq 0$
3	$x^a$	$\frac{1}{a+1} x^{a+1} + C$	$a \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, x > 0$
4	$a^x$	$\frac{1}{\ln a} a^x + C$	$a > 0, a \neq 1$
5	$e^x$	$e^x + C$	
6	$\sin x$	$-\cos x + C$	

7	$\cos x$	$\sin x + C$	
8	$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\cot x + C$	$x \neq n \cdot \pi, \quad n \in Z$

## بنسټيز ايتنيگرا لونه

۲۲۴

بيلگي :

د جدول او تيرو جملو څخه په گټه لاندې ايتنيگرا لونه په لاندې ساده ډول په بنسټيز توابعو بدليدلی شي

$$a) \int \frac{1}{x^5} dx = \int x^{-5} dx = -\frac{1}{4} x^{-4} + C, \dots\dots\dots 1,$$

$$b) \int \frac{\sqrt{x}}{x} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \int x^{-\frac{1}{2}} dx = 2x^{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{x} + C \quad (x > 0), \dots\dots\dots 3,$$

$$c) \int \sqrt[3]{x \cdot \sqrt{x}} dx = \int \left( x \cdot x^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{3}} dx = \int x^{\frac{3 \cdot 1}{2 \cdot 3}} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + C \quad (x > 0), \dots\dots\dots 3,$$

$$d) \int \frac{\sin 2x}{2 \sin x} dx = \int \frac{2 \sin x \cos x}{2 \sin x} dx = \int \cos x dx = \sin x + C, \dots\dots\dots (4,21) \quad 6,$$

$$e) \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C \quad \left( x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi \right), \quad (4,11) \quad 9,$$

$$f) \int (1 + \cot^2 x) dx = \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\int \cot x + C \quad (x \neq n\pi) \quad (4,12) \quad 8,$$

$$g) \int \frac{(1+x)(1-x)}{x-x^3} dx = \int \frac{1-x^2}{x(1-x^2)} dx = \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C \quad (x \neq \pm 1, x \neq 0), \quad Nr.2,$$

$$h) \int_{-1}^0 e^x dx = e^x \Big|_{-1}^0 = e^0 - e^{-1} = 1 - \frac{1}{e}, \dots\dots\dots 5$$

د بدلون قانون Substitutionlaw

د ناکلې انټیګرال حل د بدلون له لارې (ننوتنه راځي)

$$\int f(x) dx = \int (x^2 + 4x - 5)^n dx$$

۲۲۵

د بدلون قانون

فعالیت:

$$- \int (x^2 - x) dx \text{ انټیګرال ونیسی}$$

$$- \int (x^2 + 5x)^3 dx \text{ د انټیګرال نیولو کې فکر وکړئ او که وتونډی انټیګرال یې ونیسی.}$$

تراوسه پورې مو فقط انټیګرالونه او جملې حل کړې، چې د لومړنیو توابعو په انټیګرال اړول کېدل. له دې لاس ته راغلو لومړنیو انټیګرالونو د نورو انټیګرالونو حل جملې لاس ته راځي. د لومړنی انټیګرالونې سیده استعمال تل ساده نه دی، لکه چې په لاندې کې به ولیدل شي.

جمله:

د ،، بدلون (قاعده) ،، ( Substitution لاتین د: یوه ارزښت په ځای د

همغه ارزښت بله لویه ایښوول (لنډ: بدلون) د فرضیو لاندې چې  $u = g(x)$

متمادي او مشتقوردی او  $y = f(u)$  متمادي، نو باور لري:

$$\int f[g(x)]g'(x)dx = \int f[f(u)]du$$

حل: د ښي اړخ مشتق د تیرو درسونو په بنسټ په لاندې ډول دی:

$$\frac{d}{dx} \int f(u) du = \frac{d}{du} \int f(u) du \cdot \frac{du}{dx} = f(u) \cdot u' = f[g(x)] \cdot g'(x),$$

دا د کین اړخ د مشتق سره سر خوري. قاعده د ضرب انټیګرالیدو لپاره مساعده ده، په کوم کې چې یو فاکتور زنجیري تابع  $f[g(x)]$  وي او دا بل فاکتور (ضریب) یی د دننه تابع مشتق  $g'(x)$  وي. سری د دننه تابع لپاره په دې توګه متحولي بدلوي یا

جوړوي په

$$u = g(x) \text{ مشتق}$$

ځاي په ځاي کويک:

$$du = g'(x) dx \text{ همدې ډول}$$

د بدلون قانون

۲۲۶

د بريالي انتيگرياليدو وروسته بدلون بيرته راگرځول كيږي.

بيلگه a:

$$I = \int 2 \cos(2x-1) dx \text{ د دې انتيگريال وشمېږئ. لرو:}$$

بدلون يا په ځاي کونه:  $2x-1 = u$

$$\text{مشتق } 2 = du/dx \text{ همداسې } 2dx = du$$

$$I = \int \cos u du = \sin u + C = \sin(2x-1) + C$$

$$\text{بيلگه b: لرو } I = \int 3 \cos(2x+1) dx$$

بدلوو:  $2x = u-1$ , مشتق  $2 = du/dx$  همداسې  $dx = (1/2) du$

$$I = \int 3 \cos u \cdot \frac{1}{2} du = \frac{3}{2} \int \cos u du = \frac{3}{2} \sin(2x-1) + C$$

وموليدل چې ځنځيري تابع د لايڼي دننه تابع سره د بدلونو قاعدې سره تل اينتيگريال كيږي شي، ځکه چې د لايڼي تابع مشتق ثابت ده او ثابت فاکتور د تيرې جملې سره سم د اينتيگريال تر مخ (موخه کين لور ده) ليکل كيږي.

بيلگه:

$$I = \int \sqrt{-3x+5} dx \text{ لرو}$$

$$\text{بدلون: } -3x+5 = u$$



را بیلیدنه:  $-3 = du/dx \Leftrightarrow dx = -1/3 \cdot du$

۲۲۷

د بدلون قانون

$$I = \int \sqrt{u} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) du = -\frac{1}{3} \int u^{\frac{1}{2}} du = -\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot u^{\frac{3}{2}} + C = -\frac{2}{9} \cdot \sqrt{(-3x+5)^3} + C.$$

$$b) I = \int \frac{1}{2} e^{-2x-3} dx.$$

$$-2x - 3 = u, \quad -2 = \frac{du}{dx} \quad dx = -\frac{1}{2} du,$$

$$I = \int \frac{1}{2} e^u \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) du = -\frac{1}{4} \int e^u du = -\frac{1}{4} e^u + C = -\frac{1}{4} e^{-2x-3} + C.$$

$$c) I = \int \frac{2dx}{x+2}.$$

$$x+2 = u, \quad 1 = \frac{du}{dx} \quad dx = du$$

$$I = \int \frac{2du}{u} = 2 \int \frac{du}{u} = 2 \ln|u| + C = 2 \ln|x+2| + C.$$

توابع، چې بې د بدلون له لارې حل کیري لکه لاندې بلگه:  
 بیلگه: عوارو د  $f(x) = e^x$  مشتق پیدا کرو. دا مشتق په ساده ډول پیدا کولی شو، یعنی لرو:

$$f(x) = e^x \Rightarrow F(x) = \int f(x) dx = \int e^x dx = e^x + C$$

گورو، چې  $F'(x) = e^x = f(x)$  دی.

که ولرو:  $f(x) = e^{2x}$  او د پورته په څېر لار شو، نو لاس ته به ترې راشي:

$$f(x) = e^{2x} \Rightarrow F(x) = \int f(x) dx = \int e^{2x} dx \neq e^{2x} + C$$

$$F(x) = e^{2x} + C \text{ دی، که } F'(x) = 2e^{2x} \neq f(x) \text{ وي}$$

په داسې حالتونو کې د بدلون قاعده مرسته کوي:

بیلگه:

د  $f(x) = e^{2x}$  تابع انتیگرال ونیسی

د بدلون قانون

۲۲۸

$$f(x) = e^{2x} \Rightarrow F(x) = \int f(x) dx = \int e^{2x} dx = ?$$

بدلون:  $u(x) = 2x = u$ 

$$u'(x) = \frac{du}{dx} = 2 \Rightarrow dx = \frac{du}{2}$$

$$\int f(x) dx = \int e^u \frac{du}{2} = \frac{1}{2} \int e^u du = \frac{1}{2} e^u + C$$

$$\frac{1}{2} e^u + C = \frac{1}{2} e^{2x} + C \quad \text{د بدلون برعکس:}$$

$$F(x) \int f(x) dx = \int e^{2x} dx = \frac{1}{2} e^{2x} + C \quad \text{نولرو:}$$

$$F(x) = \frac{1}{2} e^{2x} + C \Rightarrow F'(x) = \frac{1}{2} e^{2x} \cdot 2 = e^{2x} = f(x) \quad \text{ازمایینت:}$$

بیلگه:

$$f(x) = (x+1)^2 \Rightarrow F(x) = \int f(x) dx = \int (x+1)^2 dx \quad \text{وینایی چې باور لري.}$$

بدلون  $u(x) = x+1 = u$ 

جوړ کړی

$$u'(x) = \frac{du}{dx} = 1 \Rightarrow dx = \frac{du}{1}$$

$$\int f(x) dx = \int u^2 \frac{du}{1} = \int u^2 du = \frac{u^3}{3} + C$$

$$\frac{u^3}{3} + C = \frac{(x+1)^3}{3} + C \quad \text{بیرته بدلون:}$$

$$\int f(x) dx = \int (x+1)^2 dx = \frac{(x+1)^3}{3} + C \quad \text{نو:}$$

بیلگه:

و بنایي چې باور لري:  $f(x) = (3x + 6)^3 \Rightarrow F(x) = \int f(x) dx = \int (3x + 6)^3 dx$

بدلون:  $u(x) = 3x + 6 = u$

جوړوو:  $u'(x) = \frac{du}{dx} = 3 \Rightarrow dx = \frac{du}{3}$

$$\int f(x) dx = \int u^3 \frac{du}{3} = \frac{1}{3} \int u^3 du = \frac{u^4}{12} + C$$

بېرته بدلون:  $\frac{u^4}{12} (3x + 6)^4 + C$

$$\int f(x) dx = \int (3x + 6)^3 dx = \frac{1}{12} (3x + 6)^4 + C$$

تمرینونه: د  $f(x) = x \cdot \ln(x^2)$  تابع انټیگرال وشمیرئ.

د ټاکلو انټیگرالونو حل د بدلون له لارې

$$\int_3^8 (x^2 + 4x - 5)^n dx$$

فعالیت:

- د  $\int_a^b (x^2 - x) dx$  انټیگرال ونیسئ

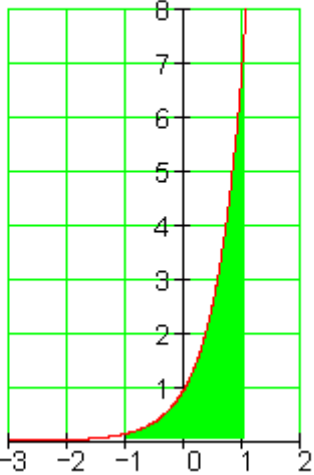
- د  $\int_1^5 (x^2 + 5x)^3 dx$  انټیگرال نیولو کې فکر وکړئ او که وتوانېدئ انټیگرال یې ونیسئ.

ټاکلي انټیگرالونه هم د بدلون له لارې حل کړئ.

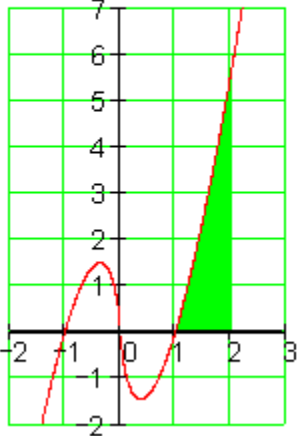
بیلگه:

و بنایست:  $f(x) = e^{2x} \Rightarrow F(x) = \int_{-1}^1 e^{2x} dx$

د انټیگرال حل د بدلون له لارې:

<p><math>f(x) := e^{2 \cdot x}</math></p> 	<p>۱ - بدلون <math>u(x) = 2x</math></p> <p>۲ - د <math>dx</math> په ځای کېږدی</p> $u'(x) = \frac{du}{dx} = 2 \Rightarrow dx = \frac{1}{2} du$ <p>۳ - د پولو بدلون</p> <p>- لاندې پوله <math>u(-1) = -2</math></p> <p>- پورته پوله</p> <p>۴ - په انټیګرال کې ځا په ځای کړی</p> $\frac{1}{2} \int_{-2}^2 e^u du = \frac{1}{2} [e^u]_{-2}^2 = \frac{1}{2} [e^2 - e^{-2}] = \underline{\underline{3.627}}$
---	--

بیلګه :

<p><math>f(x) := 2x \cdot \ln(x^2)</math></p> 	<p><math>f(x) = 2x \cdot \ln(x^2) \Rightarrow F(x) = \int_1^2 2x \cdot \ln(x^2) dx</math></p> <p>د انټیګرال حل د بدلون له لارې</p> <p>۱ - بدلون <math>u(x) = x^2</math></p> <p>۲ - د ځای په ځای کونه</p> $u'(x) = \frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{1}{2x} du$ <p>۳ - د پولې بدلون</p> <p>- لاندې پوله <math>u(1) = 1</math></p> <p>- پورته پوله <math>u(2) = 4</math></p> <p>۴ - په انټیګرال کې ځای په ځای کړی</p> $\int_1^4 2x \cdot \ln(u) \cdot \frac{1}{2x} du = \int_1^4 \ln(u) du = [u \cdot \ln(u) - u]_1^4$ $= [4 \cdot \ln(4) - 4] - [1 \cdot \ln(1) - 1] \approx \underline{\underline{2.545}}$
---	--

تمرین: لاندې انټیګرالونه وشمیری یا حل کړی

$$\begin{array}{ll}
\int_0^2 \frac{4}{4-x} dx & - ۲ \quad \int \frac{3}{4x+1} dx & - ۱ \\
\int \frac{6}{(2x-1)^3} dx & - ۴ \quad \int \frac{2}{(1-x)^2} dx & - ۳ \\
\int_{-2}^2 e^{1-x} dx & - ۶ \quad \int_{-2}^2 \frac{10}{(x-4)^5} dx & - ۵ \\
\int_1^2 e^{4-2x} dx & - ۸ \quad \int_0^4 e^{\frac{1}{2}x} dx & - ۷ \\
\int_0^2 \left( x - 1 - e^{-\frac{1}{2}x} \right) dx & - ۱۰ \quad \int_1^2 \frac{4}{e^{2x-4}} dx & - ۹
\end{array}$$

## توتیه انتیگرالونه

$$f(x) \cdot g(x) = x \cdot \ln(x^2)$$

توتیه انتیگرالونه، چي ضرب انتیگرالونه هم بلل کيږي، په انتیگرالشميرنه کي د لومړنيو توابعو ټاکلو يا شميرلو لپاره امکان دی. دا کيدی شي د مشتقشميرني د برعکسکونۍ په څير وگڼل شي.

فعاليت:

- څه بايد وشي، چي دا پورته په ننوتنه کي تابع انتیگرال نيونه شوني شي؟  
 \_\_\_ ايا دا پورته ننوتنه کي راغلي بوبښتنه دا تر اوسه ورسره بلدي لاري يعنې د (بني) بدلون له لاري حل دی؟  
 د توتیه انتیگرالوني له پاره لاندې قانون کاروي، چي د متمادي (نه پرېکيدونکي) توابعو  $f$  او  $g$  له پاره باور لري.:

$$\int_a^b f(x) \cdot g'(x) dx = [f(x) \cdot g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x) \cdot g(x) dx.$$

دا قانون تیک هلته گټور دی، که  $f$  مشتق کونۍ سره یو ساده تابع منح ته راځي. پیل

د ضرب قانون (د ضرب مشتق نیونی) څخه لرو:

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$u' \cdot v = (u \cdot v)' - u \cdot v'$$

له دې څخه لاس ته راځي:

$$\int u' \cdot v = \int (u \cdot v)' - \int u \cdot v'$$

$$\int u' \cdot v = u \cdot v - \int u \cdot v'$$

په دې پسې د ټاکلي انتیگرال لپاره باور لري:

$$\int_a^b f(x) \cdot g'(x) dx = f(b) \cdot g(b) - f(a) \cdot g(a) - \int_a^b f'(x) \cdot g(x) dx$$

یا همدغسې، لکه په زیاتو ریاضي کتابونو کې چې پیدا کیري.

$$\int_a^b f(x) \cdot g'(x) dx = [f(x) \cdot g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x) \cdot g(x) dx.$$

د دې مخ ته حدونو لپاره گټور دی، چې لومړۍ ځان په ناټاکلي انتیگرال محدود کړو، چې دا نا اړینو حدونو څخه چې لید مو رابندوي، ازاد یو.

بیلگه:

د بیلگې په توگه لاندې انتیگرال شمیرو.

$$\int x \cdot \ln(x) dx$$

یو ساده انتیگرال لپاره تابع  $g'(x)$  او همداسې یو ساده مشتقور تابع  $f(x)$  لټوو. نیسو چې

$f(x) = \ln(x)$  او  $g'(x) = x$ ، ځکه چې د  $\ln(x)$  انتیگرالونه نوې  $\ln(x)$

راکوي. اوس د  $f(x)$  مشتق نیسو او انتیگرالوو، نو لرو:

$$g(x) = \frac{x^2}{2} \quad \text{او} \quad f'(x) = \frac{1}{x}$$

له دې څخه اوس د لاندې فرمول لاس ته راځي:

$$\int x \cdot \ln(x) dx = \frac{x^2}{2} \cdot \ln(x) - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^2}{2} \cdot \ln(x) - \frac{x^2}{4}$$

بدیل لیکینه:

اوس دی  $u$  او  $v$  په خوښه توابع وي.  $U$  او  $V$  دې د  $u$  او  $V$  لومړني توابع وي، او همداسې دې  $u'$  او  $v'$  د  $u$  او  $v$  مشتقونه وي.  $u$  تابع ده، چې د مشتق نیولو له پاره لومړیتوب لري،  $v$  تابع ده چې د انتیگرالونې له پاره لومړیتوب لري. نو باور لري:

$$\begin{aligned} \int_a^b u(x) \cdot v(x) dx &= u(b) \cdot V(b) - u(a) \cdot V(a) - \int_a^b u'(x) \cdot V(x) dx \\ &= [u(x) \cdot V(x)]_a^b - \int_a^b u'(x) \cdot V(x) dx \end{aligned}$$

د توتیه انتیگرالونې لار (طریقه)  
د توتیه انتیگرالونې گټور استعمال له پاره مختلف معیاري چلول شته.

بیلگه :

کله کله کبیدی شي گټور وي، چې د مساوات بنی لور ته توتیه انتیگرال د خو واره انتیگرالونې وروسته بیرته راوگرځي، چې د په ورته بڼه د اصلي یا پخواني کین لور انتیگرال سره یوځای کولی شي.

$$\int \sin(x) \cdot \cos(x) dx$$

که کیردو  $f(x) = \cos(x)$  او  $g'(x) = \sin(x)$ ، نو ترې لرو:

$$f'(x) = -\sin(x) \text{ او } g(x) = -\cos(x)$$

او لاس ته ترې راځي

$$\int \sin(x) \cdot \cos(x) dx = [-\cos^2(x)] - \int \sin(x) \cdot \cos(x) dx.$$

که دواړو لورو ته وتون انتیگرال ورزیات کړو، نو راکوي:

$$2 \int \sin(x) \cdot \cos(x) dx = -\cos^2(x)$$

که دواړه لوري په 2 ووپشل شي، نو بالاخره لاس ته ترې راځي:

$$\int \sin(x) \cdot \cos(x) dx = -\frac{1}{2} \cos^2(x) + C$$

بیلگه ۲:

د ځنو انتیگرالونو سره داسې لاس ته راوړنه لرو، چې: که د  $g'(x)$  له پاره یو ترم وټاکو چې په انتیگرالونې کې هیڅ یا کو تغیر خوري، لکه د بیلگې په توگه اکسپوننشل تابع او یا مثلثاتي توابع. نو کیدای شي دا بل ترم، له منځه یووړل شي،.

$$\int e^x \cdot (2 - x^2) dx$$

که هر ځل  $g'(x) = e^x$  کیردو او د  $f(x)$  له پاره، د انتیگرال لاندې ترم، نو ترې لاس ته راځي:

$$\begin{aligned} \int e^x \cdot (2 - x^2) dx &= [e^x \cdot (2 - x^2)] - \int e^x \cdot (-2x) dx \\ &= [e^x \cdot (2 - x^2)] + [e^x \cdot 2x] - \int 2 \cdot e^x dx \\ &= [e^x \cdot (2 - x^2)] + [e^x \cdot 2x] - [2 \cdot e^x] \\ &= [e^x \cdot (2 - x^2 + 2x - 2)] \\ &= [e^x \cdot (2x - x^2)] + C \end{aligned}$$

بیلگه ۳:

که تر انتیگرال لاندې فقط یو ترم ولرو، چې د هغه لومړنی تابع بی له جدول ارزښت څخه پاي ته نه رسیږي (نه پایول کیري) (نه ختمیږي) کېدی شي کله کله د ورزیاتونې له لارې (ناڅرگند شته) ضرب "1" توتیه انتیگرال شي.

$$\int \ln(x) dx = \int 1 \cdot \ln(x) dx = \int g'(x) \cdot \ln(x) dx$$



که  $f(x) = \ln(x)$  او  $g'(x) = 1$  کيږدو، نو لاس ته ترې راوړی شو

$$\begin{aligned}\int 1 \cdot \ln(x) dx &= x \cdot \ln(x) - \int x \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= x \cdot \ln(x) - \int 1 dx \\ &= x \cdot \ln(x) - x + C\end{aligned}$$

**جمله :**

مور د دې لاندې انټيگرال نيسو:

$$\int x \cos(x) dx$$

ردو  $u = x$  ، نو لرو :  $du = dx$

ردو  $dv = \cos(x) dx$  ، نو  $v = \sin(x)$  لرو

په لاندې توگه مخ ته خو:

$$\begin{aligned}\int x \cos(x) dx &= \int u dv \\ &= uv - \int v du \\ &= x \sin(x) - \int \sin(x) dx \\ &= x \sin(x) + \cos(x) + C.\end{aligned}$$

C د انټيگرالونې يوه په خوښه ثابتې ده

$$\int x^3 \sin(x) dx$$

د ټوټه انټيگرالونې د استعمال سره د انټيگرالونو لکه

$$\int x^2 e^x dx$$

او کيده شي په همدې لار حل شي:

يوه په زړه پورې بيلگه دا لاندې ده :

$$\int e^x \cos(x) dx$$

که په پوره سختوالي ونيسو، نو په ورسره بلده لار اړين نه دی، چې دا دې حل ولري.

دا بيلگه د دوه واره توتيه انتيگرالونې استعمال له لارې حل کولى شو.

لومړى :  $u = \cos(x)$  داسې چې  $du = -\sin(x) dx$

داسې چې  $v = e^x$  نو لرو :

$$\int e^x \cos(x) dx = e^x \cos(x) + \int e^x \sin(x) dx.$$

اوس ، ددې له پاره چې پاتې انتيگرال حل شي، نو د توتيه انتيگرالونې قاعده بيا استعمالوو ، د دې لاندې سره :

$$u = \sin(x); du = \cos(x) dx$$

$$v = e^x; dv = e^x dx$$

نو لرو :

$$\int e^x \sin(x) dx = e^x \sin(x) - \int e^x \cos(x) dx$$

که دا سره يوځای کړو، نو لاس ته راځي:

$$\int e^x \cos(x) dx = e^x \cos(x) + e^x \sin(x) - \int e^x \cos(x) dx.$$

که فکر وکړو، نو پورته مساوات دواړو لورو ته همغه انتيگرال لرو (بي له مخ نڅېښي)، نو د ښې لور انتيگرال که کين لور ته يوسو ، لاس ته ترې راځي:

$$2 \int e^x \cos(x) dx = e^x (\sin(x) + \cos(x)) + C$$

$$\int e^x \cos(x) dx = \frac{e^x (\sin(x) + \cos(x))}{2} + C'$$

C د انتيگرالونې يوه په خوښه ثابته ده

تمرینونه: دا لاندی انتیگرالونه وشمرو.

اول:  $I = \int x \cos x \, dx$  ، دویم:  $I = \int x^2 \cdot e^x \, dx$

دریم:  $I = \int \ln x \, dx$  ، څلورم  $I = \int e^x \cdot \cos x \, dx$  :

د توتیه - ، یاراشنل کسرونو انتیگرال

د  $f(x) = \frac{x^2 + 2x}{x^3 + 4x^2 + 4x}$  تابع انتیگرال نیول

فعالیت:

-- د  $f(x) = \frac{x^2 + 2x}{x^3 + 4x^2 + 4x}$  انتیگرال نیول یعنی څه ؟

- د پورته تابع تعریف ورشو به نخبه کړئ.

د دې انتیگرال نیول تر واده په ورسره بلده لار شونی دی، که څنگه؟

بیلگه :

$$\int \left[ \frac{(7x-12)}{(x^2-6x+8)} \right] dx$$

په مخرج کې مربع تابع د خپل صفرځایونو  $x_1 = -2$  او  $x_2 = -4$  سره د کرښیزو توابعو په ضریبونو تجزیه کیري:

$$x^2 - 6x + 8 = (x-2)(x-4)$$

د توتیه کسرونو توتیه ونې له پاره لاندې توگه پیل کوو:

$$\int \left[ \frac{(7x-12)}{(x^2-6x+8)} \right] dx = \frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{(x-4)}$$

د جمعې له پاره په اصلي مخرج ورغزیري او لاس ته ترې راځي:

$$\frac{[(A+B)x - 4A - 2B]}{[(x-2)(x-4)]} = \frac{[A(x-4) + B(x-2)]}{[(x-2)(x-4)]} = \frac{[Ax - 4A + Bx - 2B]}{[(x-2)(x-4)]}$$

د ضربونو د پرتلی څخه لاس ته راځي، چې د  $x$  له مخه یعنی کین لور ته  $(A+B)$  افاده باید پرته وي

او  $(-4A-2B)$ ، چې  $۱۲ -$  ورکوي (وتون مساوات وگورئ):  $7x-12 = (A+B)x$   
 $(-4A-2B)$

له دې څخه لاندې مساوات سیستم لاس ته راځي:

$$7 = A + B$$

$$-12 = -4A - 2B$$

بدلون یې د  $A$  او  $B$  پسې:  $A = (7-B)$

$$-12 = -4(7-B) - 2B$$

$$-12 = -28 + 4B - 2B + 28$$

$$+16 = 2B$$

$$B = 8$$

$$A = (7-8) = -1$$

لیکلی شو:

$$\int \left[ \frac{(7x-12)}{(x^2-6x+8)} \right] dx = \int \left[ \frac{-1}{(x-2)} \right] dx + \int \left[ \frac{8}{(x-4)} \right] dx$$

لومړني تابع جوړه کړئ:  $F(x) = \ln x \rightarrow f(x) = \frac{1}{x}$ . دا چې طبیعي لوگایتم فقط له مثبت اعدادو شمیرل کیږي، نو یواځې ارزښتونه نیسو.

$$= -1 \ln |x-2| + 8 \ln |x-4| + c \int \left[ \frac{(7x-12)}{(x^2-6x+8)} \right] dx$$

نا اصلي ماتراشنل توابع باید لومړی په تول راشنل تابع او اصلي مات راشنل تابع توتیه شي. دا د توتیه کسرونو توتیه کوونې له لارې کیږي یا صورت نیسي.

بیلگه:

$$\int \left[ \frac{-5x+9}{x^2+x-6} \right] dx$$

په مخرجکې مربع تابع په صفرځایونو  $x_1 = -2$  او  $x_2 = +3$  کې په کښیزو فاکتورونو تجزیه کيږي:

$$x^2+x-6 = (x-2)(x+3)$$

د توټه کسرونو توټه کونې له پاره اصلي مخرج غزوو او بیا یې ضربوو:

$$\int \left[ \frac{-5x+9}{(x^2+x-6)} \right] dx = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+3}$$

د جمعې له پاره په اصلي مخرج غزیري او بیا سره ضربیږي:

$$\frac{[A(x+3) + B(x-2)]}{[(x-2)(x+3)]} = \frac{[Ax+3A + Bx-2B]}{[(x-2)(x+3)]} = \frac{[(A+B)x + 3A-2B]}{[(x-2)(x+3)]}$$

د ضریبونو پرتلې کونې له امله، چې د  $x$  ترمخه یعنی کین لور ته له  $(A+B)$  افادې څخه باید اوه لاس ته راشي او  $(+3A-2B)$  او یا ورته ۱۲ (وتون مساوات وگورئ):

$$-5x+9 = (A+B)x + (3A-2B)$$

لاندې مساوات سیستم لاس ته راځي:

$$-5 = A + B$$

$$9 = 3A - 2B$$

د  $A$  او  $B$  پسي یې حل کړئ:

$$9 = 3(-5-B) - 2B$$

$$9 = -15 - 3B - 2B \quad | +15$$

$$24 = -5B \quad | :(-5)$$

$$\underline{B = -4.8}$$

$$\underline{A = (-5 + 4.8) = -0.2}$$

نو لیکلی شو:

$$\int \left[ \frac{-5x+9}{x^2+x-6} \right] dx = \int \left[ \frac{-0.2}{x-2} \right] dx + \int \left[ \frac{-4.8}{x+3} \right] dx$$

لومړی تابع جوړ کړئ:

$$F(x) = \ln x \rightarrow f(x) = \frac{1}{x}$$

دا چې طبیعي لوگارېتم فقط د طبیعي اعدادو شمیرل کیدی شي، نو فقط مطلقه ارزښتونه نیسو.

$$\int \left[ \frac{-5x+9}{x^2+x-6} \right] dx = -0.2 \ln |x-2| - 4.8 \ln |x+3| + C$$

نمرينونه :

لاندي انتيگرالونه د توتيه كسرونو توتيه كوني له طريقي وشمبري

a)  $\int \frac{x+2}{x^3-3x^2-x+3}$

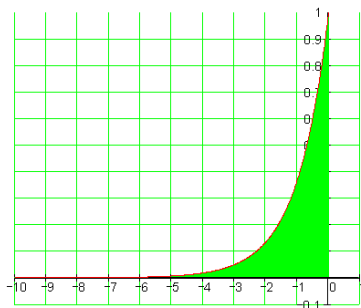
b)  $\int \frac{x-2}{x^2-6x+13}$

c)  $\int \frac{x^6}{x^4+3x^2+2}$

## ناپاي انتيگرال

تعريف : كه په يوه ټاكلي انتيگرال كې لږ تر لږه يو حد د مثبت يا منفي ناپاي لور ته لاړشي يا د انتيگرال ساحه ناپاي ځاي ته و غزول شو، نو دلته د ناپاي انتيگرال څخه غږيرو. په يوه مناسب ډول ناپاي انتيگرال د عادي انتيگرال د حد په څېر تعريفيري. په دې توگه په زړه پوري پوهيدني لاس ته راځي د بيلگي په توگه، چي څنگه د منفي توان د پوټنځ د گراف لاندي ناپاي ته رسيدونكي په زړه پوري سطحې. نو باور لري

$$\int_0^1 x^{-\frac{1}{2}} dx = 2 \quad \text{او} \quad \int_1^{\infty} x^{-2} dx = 1$$



هم او د دې معكوس انتيگرالونه

$$\int_1^{\infty} x^{-1} dx \quad \text{او}$$

$$\int_0^1 x^{-1} dx$$

اوري

يعني د ناپاي په لور ځي..

د  $f(x) = e^x$  گراف او  $x$ -محور ترمنځ دې په انټروال  $(-\infty; 0]$  کې ټوله سطحه و شمیرل شي، یعنی

$$A = \int_{-\infty}^0 f(x) dx = \int_{-\infty}^0 e^x dx$$

تراوسه د یوه ټاکلي انتیگرال د پورته همداسې کښته (لاندې) پولې عددونه وو. د انتیگرالونې ورشو یا ساحه محدود وه. په دې حالت کې یا اوس د انتیگرالولو ورشو محدوده نه ده، داسې انتیگرال یو نامحدود انتیگرال بولو، د انتیگرالونې نامحدودې ورشو سره. انتیگرالونه د دې لاندې بڼو څخه په یوې بڼې منځ ته راځي

$$\int_a^{\infty} f(x) dx \quad \int_{-\infty}^b f(x) dx \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$$

د دې انتیگرال شمیرني له پاره په لاندې توګه مخ ته ځو:

لومړی د یوه پای انټروال  $[a; b]$  له پاره انتیگرال  $\int_a^b f(x) dx$  شمېرو، بیا پسي د ورته افادو  $a \rightarrow -\infty$  یا  $a \rightarrow \infty$  همداسې،  $b \rightarrow -\infty$  یا  $b \rightarrow \infty$  له پاره پولې جوړوو.

فورمال دا په لاندې ډول برېښي:

$$\int_a^{\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx$$

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^{\infty} f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^c f(x) dx + \lim_{b \rightarrow \infty} \int_c^b f(x) dx$$

زموږ د سطحې شمیرلو له پاره دا په لاندې ډول برېښي:

$$f(x) = e^x$$

$$\begin{aligned} A &= \int_{-\infty}^0 e^x dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 e^x dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} [e^x]_a^0 \\ &= \lim_{a \rightarrow -\infty} [e^0 - e^a] = \lim_{a \rightarrow -\infty} \underbrace{e^0}_1 - \lim_{a \rightarrow -\infty} \underbrace{e^a}_0 = 1 \end{aligned}$$

بیلگه:

داد په محور هنداره شوي د  $e$  تابع دې د  $f(x) = e^{-x}$  سره په انټروال  $[0, \infty)$  کې د پورته سره برابره سطحه ولري.

$$A = \int_0^{\infty} e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-x} dx$$

بدلون:

$$u(x) = -x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -1 \Rightarrow dx = \frac{du}{-1}$$

$$u(0) = 0; u(b) = -b$$

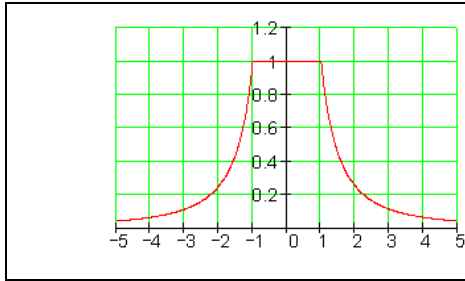
$$\begin{aligned} \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^u \frac{du}{-1} &= - \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^{-b} e^u du = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_{-b}^0 e^u du \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} [e^u]_{-b}^0 = \lim_{b \rightarrow \infty} [e^0 - e^{-b}] \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} e^0 - \lim_{b \rightarrow \infty} e^{-b} = 1 - 0 = 1 \end{aligned}$$

بیلگه:

د یوه یوځای ایښودل شوي یا یوځای شوي تابع بیلگه لرو:

$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} \\ 1 \\ \frac{1}{x^2} \end{cases} f$	د $x < -1$ لپاره
	د $-1 \leq x \leq 1$ لپاره
	د $x > 1$ لپاره
$A = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$	





د انتیگرال په برخو وېشنه یا توتیه کونه:  
لاندې د انتیگرالونو تمعه دي و شمیرل شي.

$$A = \int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2} dx + \int_{-1}^1 dx + \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$$

لومړنی اند یا تر مخه فکرکونه:  
د تناظر دلایلو له مخې لرو:

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2} dx = \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$$

داسې، چې دا انتیگرال باید فقط یوځل وشمیرل شي.

$$\int_{-1}^1 dx = [x]_{-1}^1 = [1] - [-1] = 1 + 1 = \underline{2}$$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{1}{x^2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ -\frac{1}{x} \right]_1^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ -\frac{1}{b} \right] - \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ -\frac{1}{1} \right] = 0 - (-1) = \underline{1}$$

$$A = \underbrace{\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2} dx}_1 + \underbrace{\int_{-1}^1 dx}_2 + \underbrace{\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx}_1 = 1 + 2 + 1 = \underline{4}$$

**تمرینونه:**

۱ -- د  $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$  تابع انتیگرال وشمیرئ، که د ناپايي په لور لارشي.

۲ -- وڅېړئ چې ایا لاندې ناکلي انتیگرالونه پوله ارزښت لري؟

a)  $\int_{-\infty}^0 e^x dx$

b)  $\int_0^{\infty} \frac{x}{x^2+1} dx$

c)  $\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$

d)  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{4x}{(x^2+2)^3} dx$

۳ -- د کومو توانونو p لپاره دا ناکلي انتیگرال  $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx$  پوله ارزښت لري.

۴ -- لاندې انتیگرالونه د یوه انتیگرال پولې لپاره تعریف نه دي، وڅېړئ، چې ایا دا

ټاکلی انتیگرال په دې انټروال کې پوله ارزښت لري.

$$\begin{array}{ll} \text{a) } f(x) = \frac{x^3 + 1}{x}, \quad I = [0;1] & \text{b) } f(x) = \ln x, \quad I = [0;1] \\ \text{c) } f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x-1}}, \quad I = [1;2] & \text{d) } f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad I = [-1;1] \\ \text{e) } f(x) = \frac{x^2}{x^3-8}, \quad I = [0;2] & \text{f) } f(x) = \frac{e^x}{1-e^x}, \quad I = [0;1] \end{array}$$

## ټولګه

د انتیگرال هندسي تعريف

لوريزه سطحه د انتیگرال تعريف: که يوه  $f$  تابع ولرو، نو د  $x$  محور او تابع ترمنځ سطحې شمېرل د انتیگرال له لارې کيږي. په دې سطحه کې د  $x$  محور پورته لورې ته سطحه مثبتېه مخښېنه لري او د  $x$  محور کښته لورې ته سطحه منفي مخښېنه لري.

تحليلي تعريف:

تعريف: د  $f$  يوه تابع ورکړ شوې، چې په يوه انټروال  $[a,b]$  باندې تعريف دی، نو د  $a$  څخه تر  $b$  پورې د تابع د انتیگرال څخه د  $x$  په محور د  $f$  د گراف او د کرښې  $x=a$  او  $x=b$  تر منځ يوه لوريزه سطحه پوهيږو.

پېژند (تعريف) ۴. ۱: ليميت

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx = F; (\max \Delta x \rightarrow 0), \dots \dots (4,3)$$

که په اينټروال  $[a, b]$  کې موجود وي، نو دا د  $f(x)$  ټاکلی اينټیگرال بولو، يا  $F$ -Riemann (د ريمن سطحه). دلته د  $a$  د اينټیگراله ونې لاندې (کښته) پوله او  $b$  د

اینتیگرالونې پورته پوله بلل کيږي او  $[a, b]$  د اینتیگرالونې اینتروال او (Integrand) )  
 $f(x)$  اینتیگرالېدونکی) او  $x$  اینتیگرالونې (Integrationsvariable) متحول بلل  
کيږي

**جمله ۴. ۱:** که  $f(x)$  په  $[a, b]$  کې اینتیگرالور وي او  $c \in [a, b]$  وي، نو باور  
لري:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

**پېژند یا تعریف ۴. ۲:**  $f(x)$  په یوه بند انتروال  $[a, b]$  کې اینتیگرالور دی، نو باور  
لري:

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

پېژند تعریف 3.2: تابع  $y = f(x)$  دې په یوه واز اینتروال  $I$  کې تعریف وي. هر یوه  
هلهته موجوده مشتقور  $F(x)$  تابع چې  $F'(x) = f(x)$  شرایط پوره کړي، د  $f(x)$   
(بنسټیز-، ساده- یا لومړنی تابع بلل کيږي)

ټاکلی انٹیگرال:

که  $f$  یو حقیقي تابع وي، نو د ټاکل انٹیگرال  $\int_a^b f(x) dx$  (لوسټل: د  $f(x)$  انٹیگرال د  $a$  تر  
 $b$  او په پولو یا حدونو یا انٹیگرال په  $f(x)$  باندې له  $a$  تر  $b$ ) لاندې یوه لوریزه سطحه  
پوهیږو د  $a$  او  $b$  تر منځ او د  $f$  گراف لاندې.

تعریف:

f په انټروال  $a \leq x \leq b$  کې متمادي تابع ده او F د f لومړنی تابع ده، نو ټاکلی

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a). \quad \text{انتیگرال دی :}$$

د  $F(b) - F(a)$  لپاره زیات وخت  $[F(x)]_a^b$  لیکو. په دې توګه دی

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b$$

جمله:

د یوې ثابتې سره ضرب : که تابع  $f(x)$  په یوه اینټروال کې متمادي وي ، نو لاندې باور لري:

$$\int a \cdot f(x) dx = a \int f(x) dx, \quad a \in R$$

جمله :

د جمعي (تفریق) قاعده که  $f_1(x)$  او  $f_2(x)$  په یوه اینټروال کې نه پریکیدونکي وي ، نو باور لري

$$\int (f_1(x) \pm f_2(x))dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx$$

جمله :

د ،، بدلون (قاعده) ،، ( Substitution لاتین د: یوه ارزښت په ځای د همغه ارزښت بله لویه ایښوول ، لاند: بدلون ) د نیونو لاندې چی  $u = g(x)$  متمادي اوو مشتقوردی او  $y = f(u)$  متمادي، نو باور لري:

$$\int f[g(x)]g'(x)dx = \int f[f(u)]du$$

د ضربونو انتیگرالونه  
که د دوه توابعو د ضرب انتیگرال د ورسره بلدو متودونو یا لارو شمیرو، نو زیات وخت  
دا ناشوني وي.

$$f(x) = x \cdot \ln(x^2) \Rightarrow F(x) = \int f(x) dx = \int (x \cdot \ln(x^2)) dx = ?$$

د څپرکي تمرینونه:

۱ - لاندې نااصلي پولینومونه دې د یوه ټول گویا عدد پولینومونو او یوه اصلي پولینوم د جمعې په څېر ولیکل شي.

$$a) \frac{x^3 + 7x^2 + 9x - 5}{x + 5}$$

$$b) \frac{x^4 - 3x^2 + 1}{x^2 - 2}$$

$$c) \frac{x^3 - 2x^2 + x - 5}{x^3 + 1}$$

$$d) \frac{x^4 - 1}{x^3 + x^2 + x + 1}$$

$$e) \frac{x^4 + 2x^3 - 6x^2 - 5x + 3}{x - 2}$$

$$f) \frac{x^5 - x^4 + 1}{x^2 + 2}$$

۲ - لاندې پولینومونه د جمعې په څېر ولیکئ

$$a) \frac{2x^2 + 20x + 12}{x^3 + 2x^2 - 5x - 6}$$

$$b) \frac{x^2 + 1}{x^3 - x}$$

$$c) \frac{4x + 10}{x^2 + 6x + 8}$$

$$d) \frac{-3x^2 + 19x - 10}{x^3 - 2x^2 - 5x + 6}$$

$$e) \frac{4x^2 + 6x - 20}{x^3 - 4x}$$

$$f) \frac{14}{x^2 + 20x + 51}$$

۳ - د لاندې اصلي پولینومونو په توپه کسرونو ټوته ونه وکاروئ.

$$a) \frac{3x^2 + 5x + 10}{x^3 + 2x^2 - 4x - 8}$$

$$b) \frac{3x^2 - 18x + 36}{x^3 - 6x^2 + 9x}$$

$$c) \frac{x^2 + 3x + 4}{x^4 - 2x^2 + 1}$$

$$d) -\frac{x^2 + 13x + 10}{x^3 - 5x^2}$$

۴ - د لاندې اصلي پولینومونو په ټوټه کسرونو ټوټه ګونه ورکړئ.

$$a) \frac{x^2 + 2x - 12}{x^3 + 2x^2 + 6x + 5}$$

$$b) \frac{4x^2 - 3x + 8}{x^3 - 2x + 4}$$

$$c) \frac{8x^2 - 16x + 10}{x^3 - 4x^2 + 5x}$$

$$d) \frac{x}{x^3 + 2x^2 + 2x + 1}$$

۵ - د لاندې پولینوم کسرونو په ټوټه کسرونو ټوټه ګونه پرکړئ.

$$a) \frac{x^3 + 7x^2 + 17x + 17}{x^2 + 6x + 8}$$

$$b) \frac{2x^4 - 8x^3 + 7x^2 - 3x + 4}{x^2 - 4x + 3}$$

$$c) \frac{2x^3 + x^2}{x^3 - 1}$$

$$d) \frac{4x^3 + 16x^2 - 7x - 49}{x^3 + 4x^2 + x - 6}$$

۶ - و بنایئ، چې د F تابع د f تابع لومړنی تابع ده.

$$a) f(x) = 2x^2 + 4x - 7, \quad f(x) = 4x + 4$$

$$b) F(x) = (x^2 - x)^3, \quad f(x) = 3 \cdot (2x - 1) \cdot (x^2 - x)^2$$

$$c) F(x) = \sqrt{2x + 1}, \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x + 1}}$$

$$d) F(x) = 1 + \sin x, \quad f(x) = 3x \cdot \cos 3x$$

$$e) F(x) = \frac{1}{3}x^3 \cdot \ln x - \frac{4}{9}x^3, \quad f(x) = x^2 \cdot (\ln x - 1)$$

۷ - وښايئ، چې د  $F$  او  $G$  توابع د هماغه  $f$  تابع لومړني توابع دي.

۲۴۹

ناپای انټیگرال

$$\begin{array}{ll} a) F(x) = x^3 + x + 4 & , \quad G(x) = x^3 + x + 1 \\ b) F(x) = (x-3)^2 & , \quad G(x) = x^2 - 6x + 4 \\ c) F(x) = \frac{x+1}{x+2} & , \quad G(x) = \frac{3x+5}{x+2} \\ d) F(x) = 1 + \sin x & , \quad G(x) = \sin x \end{array}$$

۱۳ - لاندې ناکلي انټیگرالونه پیدا کړئ او ټیکوالی یې و ازمایئ.

$$\begin{array}{llll} a) \int x^3 dx & b) \int 7 dx & c) \int x dx & d) \int (1-x^2) dx \\ e) \int (x + \frac{1}{x}) dx & f) \int (e^x + \cos x) dx & g) \int \frac{1}{\sin^2 x} dx & h) \int \frac{5}{\cos^2 x} dx \\ i) \int u dx & k) \int (2 + e^x) dx & l) \int (1 + \ln x) dx & m) \int (\sqrt{x} + \sin) dx \end{array}$$

۱۴ - د لاندې ټاکلو انټیگرالونو ارزښت وشمېرئ

$$\begin{array}{lll} a) \int_0^3 4 dx & b) \int_{-3}^{-1} x dx & c) \int_1^e \frac{1}{x} dx \\ d) \int_1^e (2 + \frac{1}{x}) dx & e) \int_{-1}^0 e^x dx & f) \int_0^{\pi} \sin x dx \\ g) \int_{\frac{1}{6}\pi}^{\frac{1}{4}\pi} 4 dx & h) \int_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{1}{3}\pi} \frac{1}{\sin^2 x} dx & i) \int_{-2}^2 x^3 dx \\ j) \int_2^6 (1+x) dx & k) \int_1^2 (x^2 - x^5) dx & l) \int_{-2}^2 (\frac{x^3}{4} + \frac{x^2}{3}) dx \end{array}$$

۱۶ = د لاندې ټاکلو انټیگرالونو ارزښت وشمېرئ او ارزښتونه پرتله کړئ.

$$a) \int_{-3}^1 3dx \text{ und } - \int_{-3}^1 3dx \qquad b) \int_0^1 (1+e^x)dx \quad \wedge \quad - \int_0^1 (1+e^x)dx$$

$$c) \int_{-\pi}^0 \sin x dx \quad \wedge \quad - \int_{-\pi}^0 \sin x dx$$

ناپای انتیگرال

۲۵۰

۱۷ - هر دوه انتیگرالونه د یوه انتیگرال سره انخور کړئ.

$$a) \int_0^{0.5\pi} \cos x dx + \int_{0.5\pi}^{\pi} \cos x dx \qquad b) \int_{-1}^0 (x+e^x) dx + \int_0^1 (x+e^x) dx$$

$$c) \int_2^3 3x^2 dx + \int_5^3 3x^2 dx \qquad d) \int_{-2}^1 (2+x) dx - \int_4^1 (2+x) dx$$

- د لاندې ټاکلو انتیگرالونو لپاره ارزښت تخمین کړئ.

$$a) \int_{-4}^{-2} e^{x+3} dx \qquad b) \int_0^8 \sqrt{1+x} dx$$

$$c) \int_3^5 2^{4-x} dx \qquad d) \int_0^{0.5\pi} \sin^2 x dx$$

۱۹ - د کومو  $x$  ارزښتونو لپاره لاندې انتیگرالونه ورکړشوي ارزښتونه لري؟

$$a) \int_1^x 5t^4 dt, \quad la(x) = 31 \qquad b) \int_0^x e^t dt, \quad la(x) = e - 1$$

۲۰ - لاندې انتیگراند توابع ته د انتیگرال توابع وټاکئ.

$$a) f(x) = x^2, \quad a = 3 \qquad b) f(x) = 2 + e^x, \quad a = 0$$

$$c) f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad a = 0 \qquad d) f(x) = 2, \quad a \in \mathbb{R}$$

۲۱ - د لومړني انتیگرال په استعمال سره لاندې انتیگرالونه وشمېرئ.



$$\begin{aligned}
 d) \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}} dx, & \quad e) \int \sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x} dx, & \quad f) \int (\sqrt[3]{x^4} + 1) dx, \\
 g) \int \sqrt[3]{x^{-3}} dx, & \quad h) \int \frac{ax^2 + bx + cx^{-1}}{x^4} dx, & \quad i) \int 3 \cdot 2^x dx, \\
 j) \int \frac{1}{2 \sin^2 x} dx, & \quad k) \int \frac{1}{3 + 3x^2} dx, & \quad l) \int \cos \varphi \cdot s \, ds,
 \end{aligned}$$

۲۵۱

نایای انتیگرال

$$m) \int \frac{dt}{(2t-3)^{-2}}, \quad n) \int \sqrt{t} \cdot \sqrt{t} \cdot \sqrt{t} dt, \quad o) \int (1-u^2)^{\frac{1}{2}} du.$$

۲۲ - د بیرته په بنسټیز اینتیگرال بدلون وروسته یې اینتیگرال ونیسی:

$$\begin{aligned}
 a) \int \frac{x^3 + 2x^2 + x}{x^2(1+x)^2} dx, & \quad b) \int \frac{2 \sin 2x}{3 \cos x} dx, & \quad c) \int \frac{7 \cos 2x}{\cos^2 x - \sin^2 x} dx, \\
 d) \int \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \cos^2 x} dx, & \quad e) \int (-2 - 2 \tan^2 x) dx, & \quad f) \int \frac{2t^3 - 8t}{(t-2)(t+2)} dt.
 \end{aligned}$$

۲۳ -- لاندې ټاکلی اینتیگرالونه وشمیری:

$$\begin{aligned}
 a) \int_0^1 \frac{1}{2} e^x dx, & \quad b) \int_{\pi}^{2\pi} \cos x dx, & \quad c) 2 \int_2^3 dt, \\
 d) \int_0^{\pi} \cos \pi \sin x dx, & \quad e) \int_0^1 \frac{4 du}{1+u^2}, & \quad f) \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x + 1}{\sin^2 x} dx, \\
 g) \int_{x_1}^{x_2} (2x-1) dx, & \quad h) \int_0^8 \left( \sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt{x} \right) dx, & \quad i) \int_{\ln 2}^{\ln 3} e \cdot e^t dt, \\
 j) \int \frac{(u+1)^2}{\sqrt{u}} du, & \quad k) \int_0^1 \frac{x^n}{x^{1-n}} dx, & \quad l) \int_a^b a^x dx.
 \end{aligned}$$

۲۴- د بدلون یا سیتیچوشن قاعدې استعمال له لارې یې اینتیگرال وشمیری:

$$\begin{aligned} \text{a) } & \int \sqrt[3]{2x-7} dx, & \text{b) } & \int \frac{dx}{-x+1}, & \text{c) } & \int 2^{3x+6} dx, \\ \text{d) } & \int \sin\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}\right) dx, & \text{e) } & \int \frac{dx}{1+(x+1)^2}, & \text{f) } & \int \frac{4}{\cos^2(4t-5)} dt, \\ \text{g) } & \int x \cdot \sqrt[3]{x^2-7} dx, & \text{h) } & \int \frac{3x dx}{-x^2+1}, & \text{i) } & \int x \cdot e^{2x^2+3} dx, \end{aligned}$$

ناپای اینتیگرال

۲۵۲

$$\begin{aligned} \text{a) } & \int \frac{dx}{1+4x^2}, & \text{b) } & \int \frac{dx}{2+4x^2}, & \text{c) } & \int \frac{dx}{3+5x^2}. \\ \text{d) } & \int \frac{dx}{\sqrt{1-3x^2}}, & \text{e) } & \int \frac{dx}{\sqrt{36-9x^2}}, & \text{f) } & \int \frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}}, \\ \text{g) } & \int \frac{dx}{x^2-10x+34}, & \text{h) } & \int \frac{dx}{3x^2-6x+30}, & \text{i) } & \int \frac{dx}{\sqrt{-3+4x-x^2}}. \end{aligned}$$

۲۵- د تر زیر نیونی فورم بدلون وروسته او په بنسټیز اینتیگرال 10 او 11 د بدلون له لارې یې اینتیگرال وشمیری

۲۶- لاندې ټاکلی اینتیگرالونه وشمیری:

$$\begin{aligned} \text{a) } & \int_{-1}^1 \frac{dx}{(4x-1)^3}, & \text{b) } & \int_{-1}^0 e^{3x} dx, & \text{c) } & \int_0^2 2^{2x+1} dx, \\ \text{d) } & \int_{-1}^1 \frac{4x^2}{(3+2x^3)^5}, & \text{e) } & \int_e^{e^x} \frac{1}{x} \ln x dx, & \text{f) } & \int_2^4 \frac{e^t}{1+e^t} dt, \\ \text{g) } & \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{\sin x} \cos x dx, & \text{h) } & \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{2+8x^2}, & \text{i) } & \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x \cdot \cos x dx. \end{aligned}$$

۲۷- لاندې ټوټه اینتیگرالونه وشمیری:

$$\begin{array}{lll}
 a) \int_0^1 2x \cdot \sin x \, dx, & b) \int 4x^3 \cdot \ln x \, dx, & c) \int \cos^2 x \, dx \\
 d) \int \cos x \cdot \sin x \, dx & e) \int x^2 \cdot \sin x \, dx & f) \int x \cdot (\cos x + 1) \, dx \\
 g) \int x^3 \cdot e^x \, dx, & h) \int x^{\frac{1}{2}} \cdot \ln x \, dx, & 
 \end{array}$$

۲۵۳

د اینتیگرال شمیرنی استعمال

## د اینتیگرال شمیرنی استعمال

د سطحو مساحت، چې د  $f(x)$  د گراف او  $x$  محور ترمنځ پرتي وي.

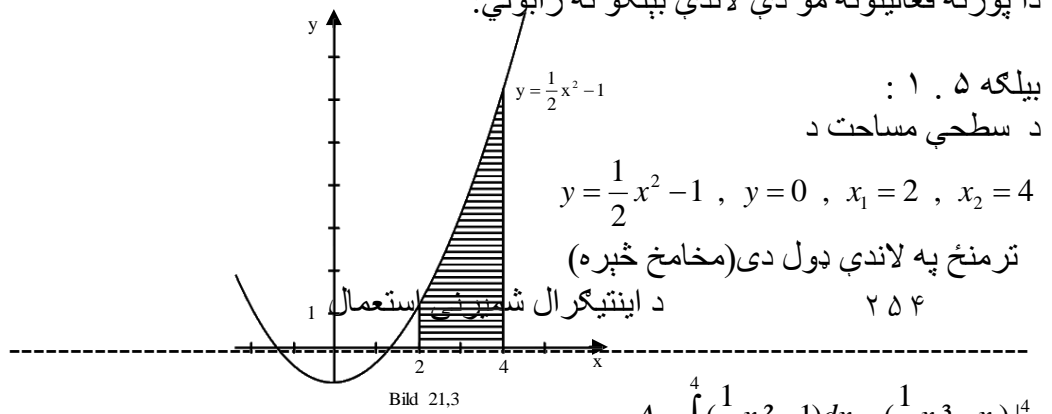
$$\int_a^b f(x) dx = f(b) - f(a) \quad \text{په څلورم څپرکي کې وویل شو چې ټاکلی اینتیگرال}$$

سطحي مساحت  $A$  بنایي، چې له منحنی  $y=f(x)$ ، د  $x$ -محور  $y=0$  او د کرښی  $x=a$  او  $x=b$  له خوا رابند وي. مور له دې څخه مخ ته تللي یو چې  $y=f(x)$  د اینتیگرال اینتروال په دننه کې د  $x$ -محور پورته لور ته ځي، خو دا کېدی شي د محور کښته لور ته هم لاړ شي..

## فعالیت:

- د یوې په خوښه تابع د منحنی یا کرښی او د  $x$  محور ترمنځ او یا د دوه توابعو د سطحی شمیرلو لپاره وړاندیزونه وکړئ.
- دا هم په پام کې د شمیرلو لپاره په پام کې ونیسئ، که منحنی یا د تابه کرښه د  $x$  د محور لاندې لور ته پراته وي.
- یوه په خوښه تابع ورکړئ، د تابع رسم وکارئ او د تابع اینتیگرال د  $x$  محور په ټاکلو پولو کې وشمېرئ.
- یوه په خوښه تابع ولیکئ، چې د انتروال په دننه کې د  $x$  محور کښته لور ته ځي. د تابع رسم و کارئ او دا تابع به کومه منحنیښه ولري؟ دا چې سطحه تل مثبت ده، نو د تابع د منحنی په ورکولو کې دا بیا وڅېړئ، چې ولې؟

یادونه: که مور د سطحی مساحت شمېرلو کې هغه عدد ولیکو، نو د هغې سره دې دا په پام کې ونیول شي، چې د سطحی واحد (یون) ور سره شته دی. که دا ور سره لیکل شوی نه وي، خو باید تل په پام کې وي. دا پورته فعالیتونه مو دې لاندې بېلگو ته رابولي:



بیلگه ۱.۵:

د سطحی مساحت د

$$y = \frac{1}{2}x^2 - 1, \quad y = 0, \quad x_1 = 2, \quad x_2 = 4$$

ترمنځ په لاندې ډول دی (مخامخ څېره)

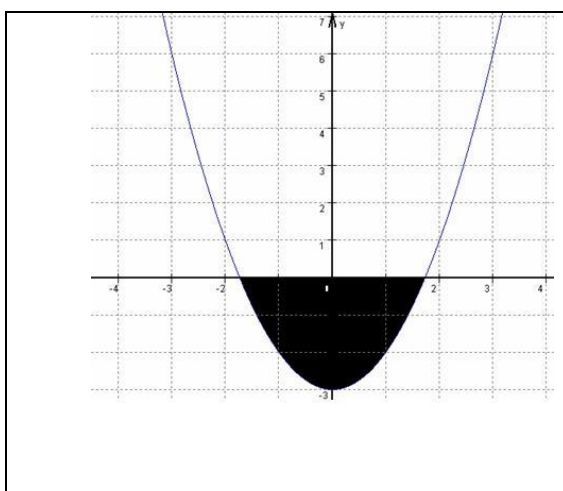
۲۵۴

$$A = \int_2^4 \left(\frac{1}{2}x^2 - 1\right) dx = \left(\frac{1}{6}x^3 - x\right) \Big|_2^4$$

$$= \frac{1}{6} \cdot 64 - 4 - \left(\frac{1}{6} \cdot 8 - 2\right)$$

$$= \frac{22}{3}$$

که د تابع  $y=f(x)$  سطحی د منحنی تلنه د  $-x$  محور لاندې لور ته وي، نو دا ټاکلی اینتیگرال به منفي وي. ددې لپاره چې د سطحی تل مثبت مساحت لاس ته راوړو، نو د اینتیگرال مطلقه ارزښت نیسو یعنی منفي اینتیگرال.



بیلگه ۲.۵:

د  $f(x)=x^2-3$  گراف د  $x$  محور سره یوه

سطحه رابندوي. د گراف او  $x$  محور ترمنځ

د ټولې سطحی مساحت وشمېرئ.

تگلار:

۱ - د دې لپاره چې دا مسئله راته بڼه روښانه شوي وي، نو دا پورته رسم کارو.

۲ - د دې لپاره چې د انټیگرال حدونه لاس ته اړورئ شو، باید صفرخایونه وشمېرو.

$$0 = x^2 - 3$$

$$x = \pm\sqrt{3}$$

۲۵۵

د اینټیگرال شمیرنی استعمال

۳ - اوس د سطحې د مساحت شمېرلو لپاره اړونده انټیگرال لیکو.

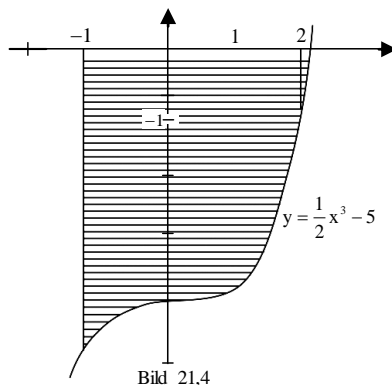
د تناظر پر بنسټ لومړی له 0 څخه تر  $\sqrt{3}$  پورې انټیگرال شمېرو او نتیجه یې له 2 سره ضربوو، نو لرو:

$$\int_0^{\sqrt{3}} (x^2 - 3) dx = \int_0^{\sqrt{3}} (x^2) dx - 3 \cdot \int_0^{\sqrt{3}} 1 dx = \frac{1}{3} x^3 \Big|_0^{\sqrt{3}} - 3x \Big|_0^{\sqrt{3}} = \sqrt{3} - 3 \cdot \sqrt{3} = -2 \cdot \sqrt{3}$$

$$A = 2 \cdot \sqrt{3} + 2 \cdot \sqrt{3} = 4 \cdot \sqrt{3}$$

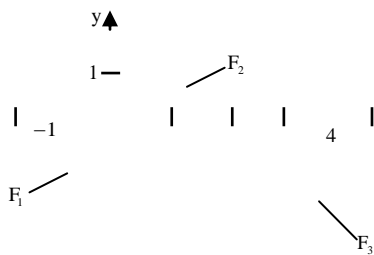
بیلګه ۵ ، ۲:

د سطحې مساحت د  $y = \frac{1}{2}x^3 - 5$ ،  $y = 0$ ،  $x_1 = -1$ ،  $x_2 = 2$  ترمنځ دی: (لاندي څېره)



$$\begin{aligned} A &= \left| \int_{-1}^2 \left( \frac{1}{2}x^3 - 5 \right) dx \right| \\ &= - \int_{-1}^2 \left( \frac{1}{2}x^3 - 5 \right) dx \\ &= \left( -\frac{1}{8}x^4 + 5x \right) \Big|_{-1}^2 \\ &= (-2 + 10 + 1/8 + 5) = \frac{105}{8} \end{aligned}$$

بیلګه ۵ ، ۳:



د لاندې پولو  $x_1 = -1$  تر

$x_2 = 4$  او د منحنی  $y = -x^2 + 2x$  او  $y = 0$

تر منځ د  $x$ -محور پورته او کښته پرته سطحه

(په مخامخ څېره کې نښانه شوي ده) دې

و شمیرل شي

$$y = -x^2 + 2x$$

حل : د تابع  $y = -x^2 + 2x$  د  $x_1 = 0$  د

صفر ځایونو  $x_1 = 0$  او  $x_2 = 2$  تر منځ پرته

د اینټیګرال شمیرنی استعمال

۲۵۶

غوښتونکي سطحه د  $x$ -محور پورته، نوره

کښته پرته ده. له دې امله لرو

$$A = -F_1 + F_2 - F_3$$

$$= \int_{-1}^0 (-x^2 + 2x) dx + \int_0^2 (-x^2 + 2x) dx - \int_2^4 (-x^2 + 2x) dx$$

$$= -\left(-\frac{1}{3}x^3 + x^2\right) \Big|_{-1}^0 - \left(-\frac{1}{3}x^3 + x^2\right) \Big|_0^2 - \left(-\frac{1}{3}x^3 + x^2\right) \Big|_2^4 = \frac{28}{3}$$

د لاندې پولو  $x = -1$  تر  $x = 4$  او د کرښې  $y = -x^2 + 2x$

او  $y = 0$  تر منځ (د  $x$ -محور پورته او کښته)

تمرینونه

: په ورګر شوي انټروال کې د ګراف او  $x$  محور تر منځ سطحه و شمېرئ.

a)  $f(x) = x - 2$  ,  $x \in [-2; 3]$

b)  $f(x) = x^2 - x - x$  ,  $x \in [1; 5]$

c)  $f(x) = x^2 - 8x + 12$  ,  $x \in [0; 8]$

له دوه ګرافونو څخه رابندې سطحې د مساحت شمیرنه



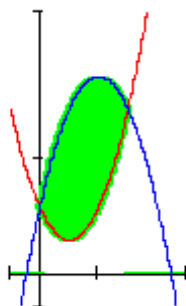
۲۵۷

د دوه کرښو څخه رابنده

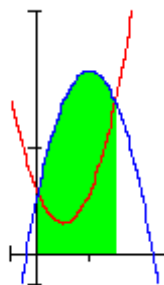
فعالیت:

- که داسې یو ډنډ ولرو، نو فکر وکړئ، چې د دې ډنډ مساحت څنګه وشمیرو؟

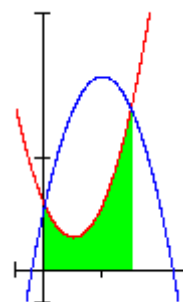
په ځنو پوښتنو کې د سطحې مساحت شمیرل کیږي، چې د دوه توابعو گرافونو ترمنځ پرته ده. دا ډول د سطحې مساحت کېدی شي د ټاکلو اینټګرالونو د کمښت له لارې و شمېرل شي. که دواړه گرافونه د  $x$ -محور پورته لور ته پراته وي، نو د لاندې شیمای څخه مخ ته ځو:



A

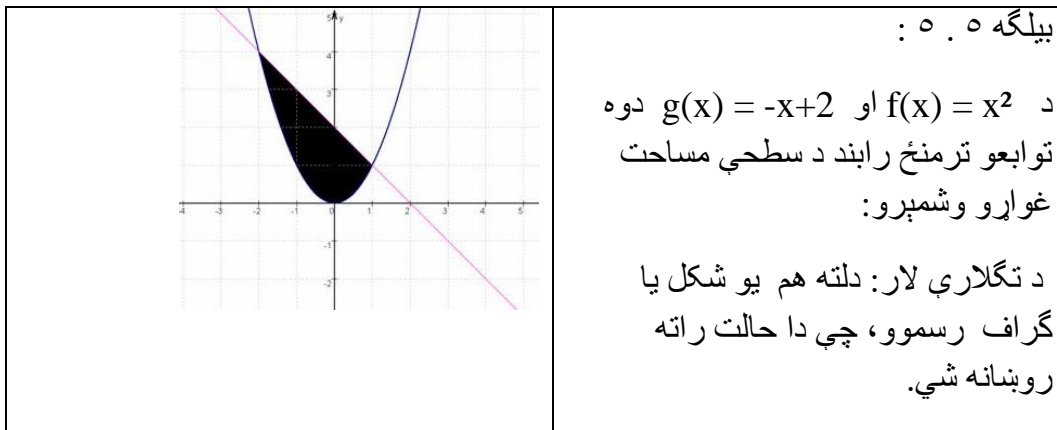


$A_1$



$A_2$

$$A = A_1 - A_2$$



د دوه کرښو څخه رابنده

۲۵۸

۲ - د دې لپاره چې انتیگرال وشمېرو، د گرافونو دقاطع ټکي ټاکو.

$$x^2 = -x+2$$

$$x^2+x-2=0$$

$$x_{(1,2)} = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}$$

$$x_1 = 1 \quad \text{P;q فرمول}$$

$$x_2 = -2$$

$$۳ - \text{په ساده توگه لیدل کیږي. } \int_{x_1}^{x_2} g(x) dx - \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx$$

پس باور لري



$$\begin{aligned}
 A &= \int_1^{-2} (-x+2)dx - \int_1^{-2} x^2 dx = \\
 &= -1 \cdot \left( \frac{2^2}{2} - \frac{1}{2} \right) - 6 - \left( \frac{(-2)^3}{3} \right) - \frac{1}{3} \\
 &= -1,5 - 6 + + = -4,5 \\
 A &= 4,5
 \end{aligned}$$

جمله :

که د ټولو  $x$  لپاره، د  $a < x < b$  سره  $f(x) > g(x)$  وي، دا په دې معنا چې د  $f$  گراف د  $a$  او  $b$  تر منځ د  $g$  پورته لور ته ځغلي، نو د دواړو گرافونو په انټروال کې رابندي سطحې مساحت لپاره بارور لري.

$$\boxed{A = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx}$$

۲۵۹

د دوه کرښو څخه رابنده

بیلگه ۶.۵ :

د توابعو  $f(x) = x^2 - 2x + 2$  او  $g(x) = -x^2 + 4x + 2$  گرافونو ترمنځ سطحې مساحت غواړو پیدا کړو.

د دواړو گرافونو د  $x$ -ارزښتونو غوڅتکي (د تقاطع ټکي) د اینټیگرال حدونه جوړوي.

د غوڅتکو د  $x$  - کواردیناتو ټاکل:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 - 2x + 2 = -x^2 + 4x + 2$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow$$

د  $x_1 = 0$  او  $x_2 = 3$  د اینټیگرال لیمیتونه یا پولې دي.

د اینټیگرال جوړونه:

$$\int_0^3 f(x) dx = \int_0^3 (x^2 - 2x + 2) dx = \left[ \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 2x \right]_0^3 = \frac{1}{3} \cdot 27 - 9 + 2 \cdot 3 = 9 - 9 + 6 = \underline{\underline{6}}$$

$$\int_0^3 g(x) dx = \int_0^3 (-x^2 + 4x + 2) dx = \left[ -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 2x \right]_0^3 = -\frac{1}{3} \cdot 27 + 2 \cdot 9 + 2 \cdot 3 = -9 + 18 + 6 = \underline{\underline{15}}$$

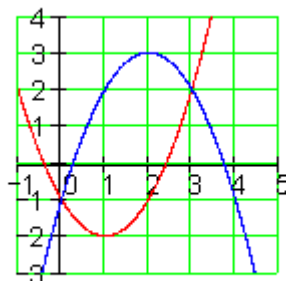
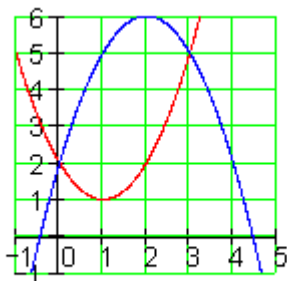
دا چې د دوه گرافونو ترمنځ سطحه بايد تل مثبت وي، نو له لوي ارزښت څخه کوچنی ارزښت بايد کم شي.

$$A = \int_0^3 g(x) dx - \int_0^3 f(x) dx = 15 - 6 = \underline{\underline{9}}$$

لکه چې پوهیږو، د یوې سطحې مخنښه ددی په واک کې ده، چې ایا سطحه د  $x$ -محور پورته لور ته پرته ده او که کښته لور ته. مورځې پرو، چې ایا دا تاثيرات په پورتنۍ بیلگه کې پراته دي او که نه. مور سطحه د  $y$ -محور په درې واحدونو (یوونونو) کښته لورته بیایو او سطحې نوې شمېرو.

د دوه کرښو څخه رابنده

۲۶۰



که د لید له مخې قضاوت وکړو، نو د ټولو لاس ته راوړنه به برابره وي.

د  $x$ -ارزښت غوڅتکي هم او له دې سره د انټيگرال حدونه بي تغيره پاتيري.

$$g(x) = -x^2 + 4x - 1 \quad \text{و} \quad f(x) = x^2 - 2x - 1$$

خای په خای کونه:

$$A = \int_0^3 f(x) dx - \int_0^3 g(x) dx = \int_0^3 (f(x) - g(x)) dx$$

د  $f(x) - g(x) = 2x^2 - 6x$  سره کیري:

$$A = \int_0^3 (2x^2 - 6x) dx = \left[ \frac{2}{3} x^3 - 3x^2 \right]_0^3 = \frac{2}{3} \cdot 27 - 3 \cdot 9 = 18 - 27 = \underline{\underline{-9}}$$

دا چې د دوه منحنیو ترمنځ سطحه فزیکي سطحه بنایي، باید لاس ته راوړنه یو مثبت عدد وي.

دا د مطلق ارزښت له لارې ترلاسه کوو.

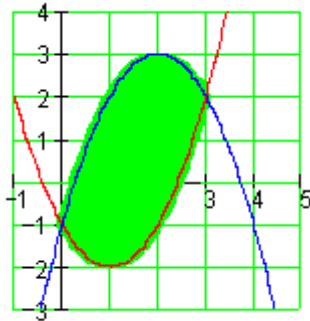
$$A = \left| \int_0^3 (2x^2 - 6x) dx \right| = \left| \left[ \frac{2}{3} x^3 - 3x^2 \right]_0^3 \right| = \left| \frac{2}{3} \cdot 27 - 3 \cdot 9 \right| = |18 - 27| = |-9| = 9$$

۲۶۱

د دوه کرښو څخه رابنده

د دې متود ټولیزه ونه (عمومیت):

د دوه گرافونو ترمنځ سطحه:



که یوه سطحه د یوې پورته او یوې کښته منحنی څخه رابنده وي، چې تابع  $f(x)$  او تابع  $g(x)$  پورې اړه ولري، نو دا له دې رابنده سطحه په لاندې ډول شمېرل کیري.

$$A = \left| \int_a^b [f(x) - g(x)] dx \right|$$

د انټیگرالونې حدونه  $a$  او  $b$  د  $x$  - محور د

دواړو گرافونو د وضعيه قيمتونو غوڅتکي دي،

$$y=f_2(x) \text{ او } y=f_1(x) \text{ د منحنيو}$$

تر منځ پرته سطحې مساحت په لاندې پولو کې له  $x=a$  تر  $x=b$  پورې او  $y=f_1(x)$  او  $y=f_2(x)$

y↑

A ↙

$$f_1(x) < f_2(x) \text{ او اينتيگرال وړ او}$$

په  $[a,b]$  اينتروال کې (ش ۱ . ۶) داسې لاس  $y=f_1(x)$  ته راورل کيږي چې دتابع  $y=f_2(x)$  لاندې سطحې مساحت څخه د  $y=f_1(x)$  تابع لاندې سطحې مساحت کم کړي.

a

b

→ x

$$A = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)] dx$$

Bild 21,6

سړی په ساده ډول خپل باور په دې راوستی شي چې ش ۲ . ۶ له دې خپلواک چې  $f_1(x)$  او  $f_2(x)$  په اينتروال  $[a,b]$  کومه يوه مخخښه ځان ته غوره کوي باوري دی. د دوه کرښو څخه رابنده ۲۶۲

بيلگه ۵ . ۷: د لاندې پارابولونو ترمنځ سطحه غواړو وشميرو  $y=x^2-1$  او  $y=x^2+1$

حل: د اينتيگرال پولې (حدونه) د افقي (پراته) محور غوڅتکي (د تقاطع ټکي) دي

$$x^2-1 = -x^2+1$$

$$2x^2=2$$

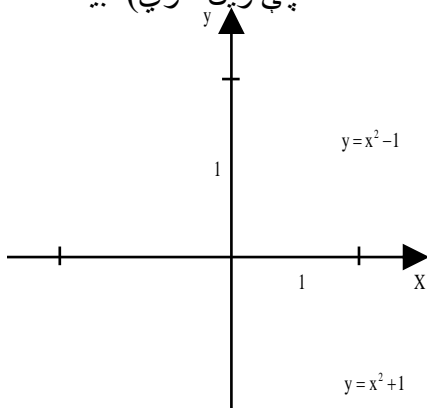
$$x^2=1$$

$$x_1 - a = 1, x_2 = b = -1$$

د اينتيگلولو په اينتروال  $[-1, 1]$  کې لرو  $-x^2+1 > x^2-1$

(که چيرې په اينتروال  $[a,b]$  او په (۱ . ۲) کې  $f_2(x) > f_1(x)$  په نظر کې ونه نيول

شي، نو د څرگند اينتيگرال به منفي شي او سړی (لکه د مخه چې وپل شوي) بيا داينتيگرال مطلقه ارزښت نيسي. له دې امله لرو:

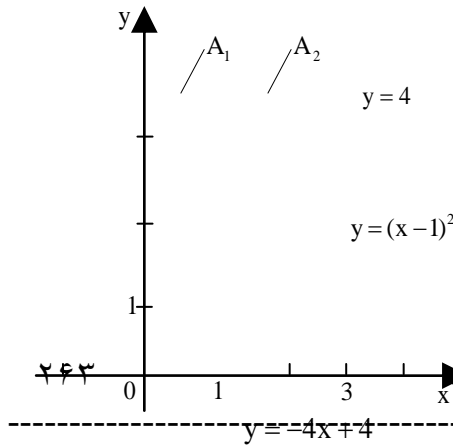


$$\begin{aligned}
 A &= \int_{-1}^1 [-x^2 + 1 - (x^2 - 1)] dx \\
 &= \int_{-1}^1 (-2x^2 + 2) dx \\
 &= \left(-\frac{2}{3}x^3 + 2x\right) \Big|_{-1}^1 = \frac{8}{3}
 \end{aligned}$$

بیلگه ۵ . ۸ :

د (ش. ۲ . ۸) سره سم د لاندې توابعو ترمنځ  
سطحه شمیرل کیري.

$$y=(x-1)^2, y=-4x+4, y=4$$



حل : دا د شمیرلو سطحه، د منحنیو ترمنځ د دوه  
سطحو A1 او A2 له یوځای کیدو څخه لاس  
ته راځي.

A1 د منحنیو  $y=4$  او  $y=-4x+4$  ترمنځ  
پروت دی. د اینتیگرال پولی ( - حدونه) د لومړي  
 $y=(x-1)^2$

Bild 21.8

کواور ینات (x - محور) غوڅتکی دی،  
د  $y=4$  او  $y=-4x+4$  ترمنځ.

لرو  $4 = -4x + 4, x_1 = 0$  په همدې ډول د

بني غوڅتکي لومړی وضعیه ارزښت (کواور دینات)

د  $y = -4x + 4$  او  $y = (x - 1)^2$  ترمنځ

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x + 1} = \frac{1^2 + 1 - 2}{1 + 1} = \frac{0}{2} = 0$$

$$x_{2,3} = -1 \pm 2, \quad x_3 = 1.$$

گورو چی  $A_2$  د  $y=-4$  او  $y=(x-1)^2$  تر منځ پرته ده ، د اینتیگرال حیونه (پولی)  $x=1$  او د لومړي وضعیه قېمت د بني غوڅټکي د  $y=4$  او  $y=(x-1)^2$  .

غوښتوني سطحه داسي ده:

$$\begin{aligned} A &= A_1 + A_2 = \int_0^1 [4 - (-4x + 4)] dx + \int_0^1 [4 - (x-1)^2] dx \\ &= \int_0^1 4x dx + \int_0^1 (-x^2 + 2x + 3) dx = 2x^2 \Big|_0^1 + (1/3x^3 + x + 3x) \Big|_0^1 = 7 \frac{1}{3} \end{aligned}$$

تمرینونه:

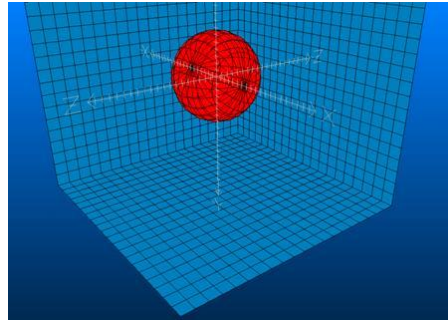
د لاندې توابعو ترمنځ سطحې و شمېرئ

د دوه کرښو څخه رابنده

۲۶۴

- 
- 1)  $f(x) = x^2 - x - 6$  ;  $g(x) = 4x - 10$       2)  $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{2}x + 3$  ;  $g(x) = 3x$
- 3)  $f(x) = 0.75(x^2 - 5x + 4)$  ;  $g(x) = 0.75x + 3$  , 4)  $f(x) = x^2 + 5x + \frac{9}{4}$  ;  $g(x) = -\frac{3}{2}x - \frac{21}{4}$
- 5)  $f(x) = (x - 2)^2 - 4$  ;  $g(x) = x - 1$       6)  $f(x) = x^2 - 4x + 1$  ;  $g(x) = -x^2 + 2x + 1$
- 7)  $f(x) = \frac{3}{2}x^2 - 6x + 3$  ;  $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x$       8)  $f(x) = x^2 + 3x$  ;  $g(x) = 0.5x^2$
- 9)  $f(x) = 0.5x^2 - 2x - 1$  ;  $g(x) = 2x^2 + 2x + 1$       10)  $f(x) = -0.5x^2 + 2$  ;  $g(x) = -\frac{1}{9}(x - 1)^2 + 1$

## د څرخيدونکو بدنونو (جسمونو) ډکي (حجم)



فعالیت:

- په ورسره بلده توگه د مستطیل حجم ولیکئ.

- د کرې، استوانې او د مخروط حجمونه، چې تراوسه مو لوستلي و لیکئ.

یادونه: دا دې تڼ په پام کې ونیول شي: که د انټیگرال شمېرنې له لارې کوم عدد لاس ته راځي، نو هغه عدد د یوه جسم حجم ښايي. مور ددې لپاره لیکو، چې د حجم مطلوبه واحد.

۲۶۵

څرخېدونکي تنونه:

## څرخېدونکي تنونه:

څرخېدونکي تنونه په هندسه کې هغه تنونه دي، چې په یوه څرخېدونکي محور باندې د یوې کرښې یا منحنې څرخېدنې له لارې منځ ته راځي. کرښه یا منحنې په یوه سطحه پرته ده او محور هم په همدې سطحه پروت دی. منحنې محور نه غوڅوي، او یا زیات له زیاته یې ممکن لمس کړي. چې غوره بېلگې به یې په لاندې کې و څېړل شي.

د x په محور څرخېدنه (څرخون)

لکه د مخه مو چې وویل، حجم هم یو انتیگرال دی. دا داسې منځ ته راځي، چې که یوه تابع د  $X$  په محور و څرخول شي.

د یوه څرخېدونکي جسم (بدن یا تن) حجم (دکی)

د یوه څرخېدونکي جسم لپاره، چې د سطحې په څرخېدنه د  $x$  په محور په انټروال  $[a, b]$  کې د  $f$  تابع له گراف، د  $x$  له محور او له دواړو کرښو  $x = a$  او  $x = b$  ترمنځ جوړیږي، رابنده وي.

د حجم شمېرل په لاندې ډول دی:

$$V = \pi \cdot \int_a^b (f(x))^2 dx$$

د  $y$  په محور څرخېدنه

د یوې سطحې په څرخېدنې (د  $y$  په محور)، چې په  $[a, b]$  انټروال د  $f$  تابع گراف د  $y$  محور او دواړو کرښو  $y = f(a)$  او  $y = f(b)$  له خوا رابند وي باید د  $y = f(x)$  بڼه بدله شي و  $x = f^{-1}(y)$  معکوس تابع ته. دا شتون لري، که  $f$  متمادي او غښتلي یو غږیز وي. که نه (لکه په پورته شي شکل کې) نو شاید ممکن وي، چې  $f$  په ټوټو ټوټه شي، په هغو کې چې متمادي او غښتلی یو غږیز وي. دا دلته منځ ته راغلي حجمونه بیا ځانله شمېرل کیږي او سره جمعه کیږي.

څرخېدونکي تنونه:

۲۶۶

$$V = \pi \cdot \int_{\min(f(a), f(b))}^{\max(f(a), f(b))} (f^{-1}(y))^2 dy$$

که دلته  $x = f^{-1}(y)$  بدل کړو، نو د  $x$  په محور په لاندې توگه حجم لاس ته راوړو:

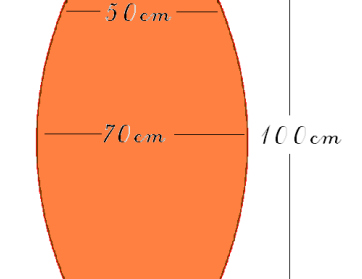
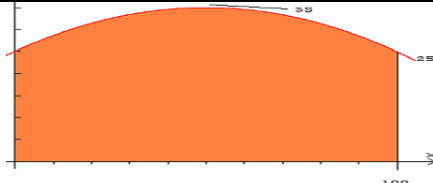
$$V = \pi \cdot \int_{\min(f(a), f(b))}^{\max(f(a), f(b))} x^2 dy = \pi \cdot \int_a^b x^2 \cdot |f'(x)| dx$$

د  $f'$  مطلق ارزښت او د انتیگرال په حدونو کې خورا جگ – تیب (min/max) توابع یو مثبت انتیگرال تضمینوي.



د سطحې په څرخولو (د  $y$  په محور)، چې د  $f$  تابع له گراف او دواړو کرښو  $x = a$  او  $x = b$  څخه رابنده وي، لاندې فرمول باور لري.

$$V = \pi \cdot \int_a^b (x \cdot f)^2 dx$$

	<p>د یوه مرتبان حجم:</p> <p>د یوه مرتبان حجم غواړو پیدا کړو چې جگوالی یې 1 متر، وړانګه یې 25 سنټي متره په پای او 35 سانتیمتره په منځ کې ده.</p>
	<p>که مرتبان په <math>90^\circ</math> درجو و څرخول شي، نو د مربع پارابول بڼه غوره کوي. د ژی تابع باید کښته لور ته واز پارابول وي، لکه دلته په شکل کې.</p>

حل: د پارابول د تابع لیکبڼه کېدی شي ساده په ککرټکي یا راس باندې ولیکل شي.

۲۶۷

څرخېدونکي تنونه:

ټوليز باور لري:

$$f(x) = -a \cdot (x-5)^2 + 3.5 \text{ ( dm )}$$
 ارزښت په ديسيمتر

په څرګند ډول 5- د راس راکښنه د  $x+$  په لور ورکوي او 3,5 د  $y+$  په لور. د غزوني ضریب  $a$  په لور اړین دی، چې کښته لور واز پارابول لاس ته راوړو. اوس فقط ضریب  $a$  نه شته. که په فرمول کې یو معلوم ټکی کيږدو، کېدی شي  $a$  وشمېرل شي. دا ټکی  $(0/2,5)$  دی.

$$f(x) = -a \cdot (x-5)^2 + 3.5$$

د  $x$  ارزښت  $x$  ا په  $x$ اي کونو لرو  $-a \cdot (0-5)^2 + 3.5$

$$\frac{2.5-3.5}{25} = -0.04 \quad \text{له دې امله } a \text{ دى:}$$

او مساوات پوره بلل کيږي.  $f(x) = -0.04 \cdot (x-5)^2 + 3.5$

د ساده والي لپاره د راس ټکي فرمول په نورمال يا عمودي فورم بدلوو:

$$f(x) = -0.04x^2 + 0.4x + 2.5$$

تابع مربع کړئ  $f(x) = (-0.04x^2 + 0.4x + 2.5)^2$

$$f(x) = 0.0016x^2 - 0.032x^3 - 0.04x^2 + 2x + 6.25 \quad \text{نو دى}$$

$$f(x) = \frac{0.0016x^2}{5} \cdot x^5 - \frac{0.032x^3}{4} \cdot \frac{-0.04x^2}{3} \cdot x^3 + x^2 + 6.25x \quad \text{لومړنى تابع}$$

د حجم شميرلو لپاره ټاکلى انټيگرال دى؛

خرخېدونکي ټټونه:

۲۶۸

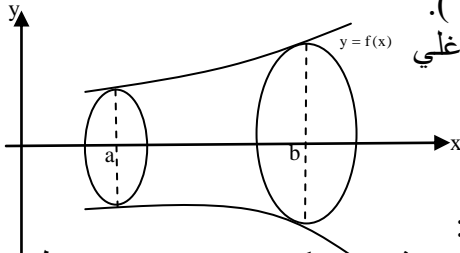
$$\begin{aligned} \pi \cdot \int_0^{10} (-0.04x^2 + 0.4x + 2.5)^2 dx &= \pi \cdot \int_0^{10} (-0.0016x^2 - 0.032x^3 - 2x + 6.25) dx \\ &= \pi \left[ \frac{0.0016}{5} \cdot 10^5 - \frac{0.032}{4} \cdot x^4 - \frac{0.04}{3} \cdot x^3 + x^2 + 6.25x \right]_0^{10} \\ &= \pi \left[ 32 - 80 - 13\frac{1}{3} + 100 + 62.5 \right]_0^{10} \\ &= \pi \cdot 101.167 \end{aligned}$$

د حجم واحدونه (يونونه يا يووالي)

دا چې مور له پيله په ديخيمتر شمېرنه کړي، نو طبعاً دا په ليتر شمېرل کيږي.

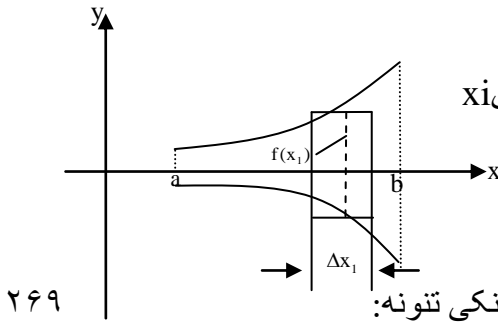
= 317.824 liter

د تابع  $y=f(x), y=0, x=a, x=b$  ترمنځ  
 سطحه چې د  $x$ -محور باندې څرخي (ش ۵ . ۹).  
 دلته غوښتنه، په دې ډول رامنځ ته شوي راغلي  
 د څرخيدونکي بدن ډکي (حجم) دی.  
 لاندې جمله باوري ده



جمله ۵ . ۸) د څرخيدونکي بدن ډکي (حجم):  
 په اينټروال  $[a,b]$  کې د  $y=f(x)$  متمادي وي، د څرخيدونکي بدن حجم چې د سطحو  
 $y=f(x), y=0, x=a, x=b$  ترمنځ، راپيدا کيږي داسی دی:

$$V = \pi \cdot \int_a^b [f(x)]^2 dx$$



بنونه:  $V$  د توتو (استوانو) د جمعي له  
 لاري چې وړانگه يې  $f(x_i)$ ، جگوالی يې  $x_i$   
 د  $i=1,2,3,\dots,n$  لپاره لری.  
 (ش: 10.5) د  $i$ -مې توتي  
 (سليندر ډکي) (حجم) دی.

۲۶۹

څرخيدونکي تنونه:

$$\Delta_i V = \pi \cdot [f(x_i)]^2 \cdot \Delta x_i$$

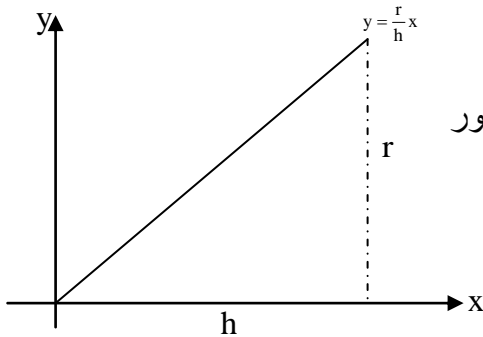
د ټولو  $n$  سليندرونو يا توتو زياتون

$$V_n = \sum_{i=1}^n \Delta V_i = \sum_{i=1}^n \pi [f(x_i)]^2 \cdot \Delta x_i$$

د پولی ارزښت جوړونه  $(n \rightarrow \infty, x_i \rightarrow 0)$  د بنسټ اينټيگرال د تعريف سره سم

$$V = \pi \cdot \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

حجم (ډکي) راکوي.



بیلگه ۵ . ۹ : ) دمخروط یا کیکل ډکی

(حجم) د  $y = \frac{r}{h}x$  کرښې ( د سرچینې

تیره کرښه د  $\frac{r}{h}$  جگوالي سره) او د  $x$ -محور

( $y=0$ ) د حدونو  $x=0$  تر  $x=h$

پورې (ش . ۱۱ )

$$V = \pi \cdot \int_0^h \left[ \frac{r}{h}x \right]^2 dx = \pi \cdot \frac{r^2}{h^2} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^h = \frac{1}{3} \pi r^2 h.$$

دا له بنسټیزې شمېرنې ( د اساساتو) څخه معلومه نتیجه ده.

بیلگه ۵ . ۱۰ :

$$y = \sqrt{2x}, y = 0, x = 0, x = 3$$

څرخېدونکي تنونه:

۲۷۰

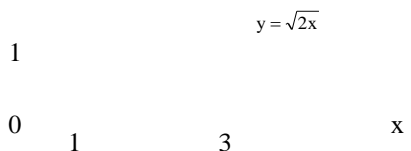
ترمنځ د  $x$ -محور باندې څرخېدلو جوړ (تولید) شوی جسم څرخېدلی پارابولویډ دی ( څ

۵ ږ ۱۲ )

$$V = \pi \cdot \int_0^3 \left[ \sqrt{2x} \right]^2 dx$$

$$= 2\pi \cdot \int_0^3 x dx$$

$$= 2\pi \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^3 = 9\pi.$$



د ارښمیدس جمله Archimedischer Satz

د توتې، غونډاري(کري) او مخروط د حجمونو ترمنځ تناسب:

$$V_{\text{توته(استوتنه)}} : V_{\text{غونډاري(کره)}} : V_{\text{مخروط}} = 3 : 2 : 1$$

د 1886 زک يوه درسي کتاب څخه



د پورته الماني پښتو:ارښيمېدس لومړی کس وو، چې دا پورته تناسب يې ومونده، له دې امله دا دلته راغلي جمله د ارښيمېدس جلي په نامه نومول شوي.

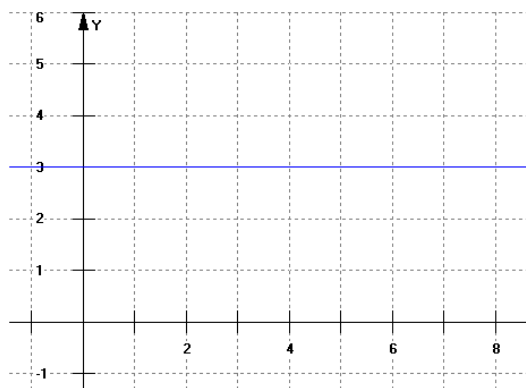
د څرخېدونکي بدن(حسم) حجم.

بيلگه ۵ . ۱۱:

۲۷۱

څرخېدونکي تنونه:

استوانه(توته):



استوانه د  $x$  په محور د  $f(x) = c$  یوې ثابتې تابع (په دې حالت کې  $f(x) = 3$  دی) د څرخېدو څخه لاس ته راځي.

د یوې استوانې حجم (ډکې) شمېرنه:

اوس دې په  $[0;5]$  انټروال کې د توتې حجم وشمېرل شي. د استوانې د حجم د شمېرلو لپاره  $V = \pi r^2 \cdot h$  عمومي فرمول دی. په دې حالت کې  $r=3$  او  $h=5$  دی. د هر ارزښت لپاره د تابع ارزښته هم دی.

لومړی له هرڅه غواړو  $V = \pi r^2 \cdot h$  څخه فقط  $r^2 \cdot h$  تر څېړنې لاندې ونیسو او غواړو یوه لار پیدا کړو، چې د هغې لارې د انټیګرال په مرسته حجم وشمېرلای شو. د سطحې مساحت د لاندې انټیګرال په مرسته وشمېرل شو:

$$\int_0^5 r dx = \int_0^5 f(x) dx$$

که د دې ناپايي ډېرو مستطیلونو (د  $f(x)$  د مربع مساحت او د صفر په لور ځغېلېدونکي پنډوالي  $dx$  سره) انټیګرال جوړ کړو، نو لاس ته ترې راځي:

$$\int_0^5 r dx = \int_0^5 [f(x)]^2 dx$$

څرخېدونکي تنونه:

۲۷۲

دا په دې معنا چې دا انټیګرال بل څه نه دی پرته له څخه، چې زموږ د پورتنی فرمول څخه د یوې توتې د حجم شمېرل دي. ز که دا له سره ضرب کړو، نو راکوي:

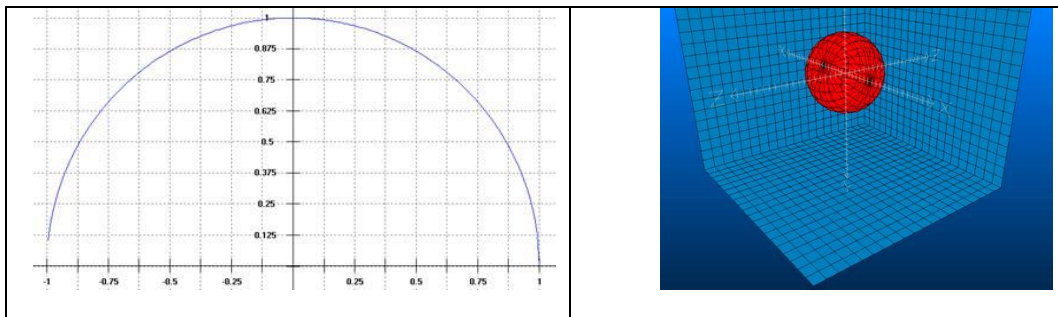
$$\pi r^2 h = \pi \int_0^5 [f(x)]^2 dx$$

د دې ورکړ شوي استوانې د حجم شمېرنه:

$$\pi \int_0^5 [f(x)]^2 dx = \pi \int_0^5 [9(x)]^2 dx = \pi \int_0^5 [45 - 0]^2 dx = 45\pi$$

د پرتلي لپاره:  $\pi r^2 h = 45\pi$

### کره (غونډاری یا غونډوسکه):



فعالیت:

- د کري حجم يې له انتیگراله وليکۍ.

- د توتي حجم وليکۍ

- د مخروط حجم وليکۍ.

۲۷۳

خرخېدونکي تنونه:

-دا درېواړه سره پرتله کړۍ.

د  $x$  په محور د  $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$  تابع خرخېدني څخه کره منح ته راځي(پورته د ننوتني شکل).

دا تابع هم کېدی شي په گردو توتو توتو شي، پرته غوڅوونکي تابع يې  $q(x) = \pi[f(x)]^2$  ده. د دې توتو د انتیگرالولو له لارې دې بيا حجم وشمېرل شي.

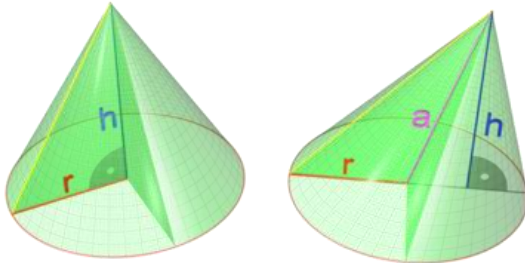
په دې بېلگه کې دې حجم وشمېرل شي، چې له صفر ځاي څخه و صفر ځاي ته د  $x$  په محور باندې

د  $f(x) = \sqrt{1^2 - x^2}$  تابع څرخېدونو له لارې منځ ته راځي ، يعنې په انټروال  $[-1;1]$  کې .

$$\pi \int_{-1}^1 [f(x)]^2 dx = \pi \left[ x - \frac{1}{3} x^3 \right] = \pi \left( \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \right) = \frac{4}{3} \pi$$

### Kegel (Geometrie) مخروط

دا هم ممکن ده، چې یو مخروط د یوه منظم  $n$  زاویو (ارڅیزې/کونجیز) څخه رابندې بنسټیزې سطحې (د  $n$  لپاره چې ناپای ته ځي) اهرام ته ور نژدې کړو.



د مخروط حجم:

د انټیگرال په مرسته د یوه مستقیم مخروط د حجم د شمېرلو یوه بله ۲۷۴

څرخېدونکي تنونه:

مرستندویه لار. یو د کارتیزې وضعیه ارزښت (قیمت) سیستم په کار اچول کيږي، د هغه سره چې د مخروط څوکه په سرچینه  $(0|0)$  او منځ ټکی په ټکي  $(h|0)$  کې پروت دی. اوس کېدی شي، چې مخروط ناپاي کوچنیو توتو (استوانو) رايوځاي شوی په پام کې ونیسو، چې جگوالی (پنډوالی) یې  $dx$  دی. داچې د داسې یوې توتې یا استوانې گردې توتې (کنزې) وائین د مخروط له څوکي د وضعیه قیمت سیستم په  $x$  سره ور کړ شوی دی، د وړانگې جملې له مخې (دلته په افغانستان کې دا د ... جملې په نامه بلل شوي) باور لري.

د یوه ناپاي کوچنی توتې (استوانې) وړانگه:



$$r z(h) = \frac{r}{h} \cdot x$$

د یوې ناپاي کوچنی توتی (استوتنی) حجم:

$$\left(\frac{r}{h} \cdot x\right)^2 \cdot \pi \cdot dx = \frac{r^2}{h^2} \cdot \pi \cdot x^2 dx$$

د ټول څرخېدونې مخروط د ټولو داسې کوچنیو توتو حجم دی. د شمېرلو لپاره یې ټاکلی انټیګرال جوړوو، د انټیګرال حدونو 0 او h سره:

$$V = \int_0^h \frac{r^2}{h^2} \cdot \pi \cdot x^2 dx = \frac{r^2 \cdot \pi}{h^2} \int_0^h x^2 dx$$

$$V = \frac{r^2 \cdot \pi}{h^2} \cdot \pi \cdot \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^h$$

$$V = \frac{r^2 \cdot \pi}{h^2} \cdot \pi \cdot \left( \frac{h^3}{3} - \frac{0^3}{3} \right)$$

$$V = \frac{r^2 \cdot \pi}{h^2} \cdot \frac{h^3}{3}$$

له دې سره هغه مشهور فرمول ته (چې لروده مو) راځو:

۲۷۵

څرخېدونکي تنونه:

$$V = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot h}{3} = \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot h$$

یو مخروط د x په محور د  $f(x) = mx$  یوې کرښیزې (خطي) تابع (د بېلګې په توګه  $f(x) = 0,5x$ ) څرخېدنه (څرخون) ده.

د یوه مخروط شمېرنه

دلته نه شو کولای چې لومړی د کوارډر حجم وشمېرو. دلته د دې ګراف لاندې په ډېرو کترو کترو کول دي د dx پندوالې سره. د دې کترو د سطحو مساحت وشمېرئ، چې

ورانگه  $f(x)$  لري داسې په نامه د پروت تقاطع تابع او بيا يې انټيگرال په ورکړ شوي  $[0;5]$  انټروال کې ونيسئ.

$$\pi \int_0^5 [f(x)]^2 dx = \pi \left[ \frac{1}{12} x^3 \right]_0^5 = 32.72$$

د پرتلي لپاره دى د يوه مخروط د حجم معياري (ستاندارد) بڼه وکتل شي.

$$\frac{1}{3} \pi r^2 h = 32.72$$

لنډ :

که يوه منحنې د  $x$  يا  $y$  په محور وڅرخول شي، يو جسم چې لاس ته راځي، چې موږ دا جسم په نړيو کترو يا زونونو توپه کوو، د پندوالي  $x$  همداسې  $y$  سره او دا په ورته نژدې توگه په استوانو بدلوو، نو په نژدې توگه لکه د مخه د حجمونو لپاره لاندې بڼه لاس ته راځي:

$$V_x = \pi \cdot \int_{x_1}^{x_2} y^2 dx \text{ : په محور څرخونه}$$

$$V_y = \pi \cdot \int_{y_1}^{y_2} x^2 dx \text{ : په محور څرخونه}$$

څرخېدونکي تنونه:

۲۷۶

بېلگه ۵ . ۱۲ :

د  $y = x^2/4$  تابع گراف په  $[0, 2]$  انټروال کې د وضعيه قيمتونو په محورونو څرخي. دا د منځ ته راغلي څرخېدلي جسم حجم څومره دى؟

د  $x$  په محور څرخېدنه:  $y^2 = x^4/16, x_1 = 0, x_2 = 2$

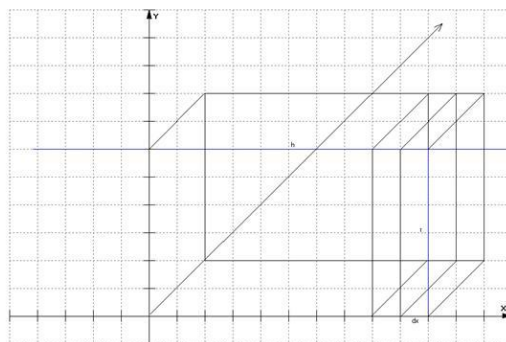
$$V_x = \pi \cdot \int_0^2 \frac{x^4}{16} dx = 0.4\pi$$

د  $y$  په محور څرخېدنه:  $x^2 = 4y, y_1 = 0, y_2 = 1$

$$V_y = \pi \cdot \int_0^1 4y dy = 2\pi$$

## د ناڅرخېدونکي جسم ډکي يا حجم.

مستطیل يا مربع المکعب (شپږ اړخيز جسم) Quader



دا ليد شکل د استوانې څخه راته معلوم دی، فقط دا ځل نه څرخي. حجم يې کېدی شي د عادي کواډر په څېر وشمېرل شي ( $V = r^2h$ ) او يا د صفر په لور تلونکي  $dx$  سرورې مربع وي ټوټه شي. د دې لپاره دې د پروت غوڅي (قاطع) سطحه وشمېرل څرخېدونکي تنونه:

۲۷۷

شي، يعنې  $q(x)$  د پروت قاطع تابع دې جوړه شي د دې بيا بايد انټيگرال ونيول شي. په

$$V = \int_a^b q(x) dx \text{ دا معنا لري:}$$

په دې بېلگه کې تصادفي د پروتقاطع تابع د ژی تابع مربع ده:  $q(x) = [f(x)]^2$

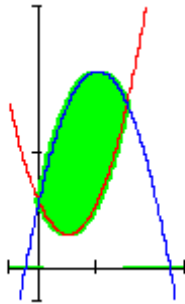
که موږ  $f(x) = 3$  تابع له 0 تر 5 انټروال کې د پروتقاطع تابع سره انټيگرال کړو،

$$\text{نو بايد } V = r^2h = 45 \text{ لاس ته راشي. } \int_0^5 q(x) dx = [9x]_0^5 = 45$$

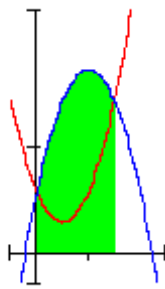
## تولگه

که د تابع  $y=f(x)$  سطحې د منحنی تلنه د  $x$ -محور لاندې لور ته وي، نو دا ټاکلی اینتیگرال به منفي وي. ددې لپاره چې د سطحې تل مثبت مساحت لاس ته راوړو، نو د اینتیگرال مطلقه ارزښت نیسو یعنی منفي اینتیگرال.

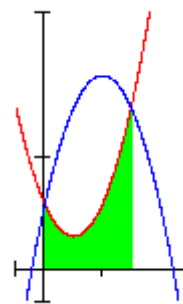
په ځنو پوښتنو کې د سطحې مساحت شمېرل کيږي، چې د دوه توابعو گرافونو ترمنځ پرته ده. دا ډول د سطحې مساحت کېدی شي د ټاکلو اینتگرالونو د کمښت له لارې و شمېرل شي. که دواړه گرافونه د  $x$ -محور پورته لور ته پراته وي، نو د لاندې شپا څخه مخ ته ځو:



A



A<sub>1</sub>



A<sub>2</sub>

$$A = A_1 - A_2$$

څرخېدونکي تنونه:

۲۷۸

د منحنیو  $y=f_1(x)$  او  $y=f_2(x)$  [P. 278]

تر منځ پرته سطحې مساحت په لاندې پولو کې

له  $x=a$  تر  $x=b$  پورې او  $y=f_1(x)$  او  $y=f_2(x)$ .

د یوه څرخېدونکي جسم لپاره، چې د سطحې په څرخیدنه د  $x$  په محور په انټروال  $[a, b]$  کې د  $f$  تابع له گراف، د  $x$  له محور او له دواړو کرښو  $x = a$  او  $x = b$  ترمنځ جوړیږي، رابنده وي.

د حجم شمیرل په لاندې ډول دی:

$$V = \pi \cdot \int_a^b (f(x))^2 dx$$

د  $y$  په محور څرخیدنه

د یوې سطحې په څرخېدنې (د  $y$  په محور)، چې په  $[a, b]$  انټروال  $f$  تابع گراف د  $y = f(x)$  محور او د دواړو کرښو  $y = f(a)$  او  $y = f(b)$  له خوا رابند وي باید د  $y = f(x)$  بڼه بدله شي و  $x = f^{-1}(y)$  معکوس تابع ته. دا شتون لري، که  $f$  متمادي او غښتلي یو غریز وي. که نه (لکه په پورته شي شکل کې) نو شاید ممکن وي، چې  $f$  په ټوټو ټوټه شي، په هغو کې چې متمادي او غښتلي یو غریز وي. دا دلته منځ ته راغلي حجمونه بیا ځانله شمېرل کېږي او سره جمعه کېږي.

$$V = \pi \cdot \int_{\min(f(a), f(b))}^{\max(f(a), f(b))} (f^{-1}(y))^2 dy$$

جمله ۵. ۸) د څرخېدونکي بدن ډکۍ (حجم):  
په اینټروال  $[a, b]$  کې دی  $y=f(x)$  متمادي وي، د څرخېدونکي بدن حجم چې د سطحو  $y=f(x), y=0, x=a, x=b$  ترمنځ، راپیدا کېږي داسی دی:

$$V = \pi \cdot \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

۲۷۹

څرخېدونکي تنونه:

د ټوټې، غونډارې (کرې) او مخروط د حجمونو ترمنځ تناسب:

$$V_{\text{ټوټه (استوتنه)}} : V_{\text{غونډارې (کره)}} : V_{\text{مخروط}} = 3 : 2 : 1$$

یو مخروط د  $x$  په محور د  $f(x) = mx$  یوې کرښېزي (خطي) تابع (د بیلگې په توگه  $f(x) = 0,5x$ ) څرخېدنه (څرخون) ده.

که یوه منحنی د  $x$  یا  $y$  په محور وڅرخول شي، یو جسم چې لاس ته راځي، چې مور د جسم په نریو کترو یا زونونو ټوټه کوو، د پندوالي  $x$  همداسی  $y$  سره او دا

په ورته نژدې توگه په استوانو بدلوو، نو په نژدې توگه لکه د مخه د حجمونو لپاره لاندې بڼه لاس ته راځي:

$$V_x = \pi \cdot \int_{x_1}^{x_2} y^2 dx \text{ د } x \text{ په محور څرخونه:}$$

$$V_y = \pi \cdot \int_{y_1}^{y_2} x^2 dx \text{ د } y \text{ په محور څرخونه:}$$

د  $x$  په محور د  $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$  تابع څرخيدني څخه کره منځ ته راځي (پورته د ننوتني شکل).

دا تابع هم کيدی شي په گردو ټوټو ټوټه شي، پرته غوڅونکي تابع يې  $q(x) = \pi[f(x)]^2$  ده. د دې ټوټو د انټيگرولو له لارې دې بيا حجم وشميرل شي.

تمرینونه:

۱ - د  $y = f(x) = x^2$  او د دې د معکوس تابع تر منځ سطحه وشميرئ.

۲ - د گراف او  $X$  محور ترمنځ سطحه وشميرئ.

څرخېدونکي تنونه:

۲۸۰

a)  $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{13}{4}x + 3$

b)  $f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 3x$

c)  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x$

d)  $f(x) = -x^2 + 6x - 5$

۳- د هغې سطحې مساحت وشميرئ، چې د وکر شوو مساواتو منحنيو څخه را بنده شوي وي:

a)  $y = e^{0.5x}$ ,  $y = 0$ ,  $x = -2$ ,  $x = 2$ :

b)  $y = \frac{1}{2}x^3$ ,  $y = 0$ ,  $x = -2$ ,  $x = 2$ :]

c)  $y = \frac{1}{x^2}$ ,  $y = 0$ ,  $x = 9$ ,  $x = -3$ ,  $x = 3$ :

d)  $y = \cos x$ ,  $y = 0$

e)  $y = \cos x$ ,  $y = 0$ ,  $x = \frac{\pi}{2}$ ,  $x = \frac{5\pi}{6}$ :

f)  $y = \frac{1}{x}$ ,  $y = 0$ ,  $x = 2$ ,  $x = 4$ :

g)  $y = \left(\frac{x^2}{4} - 1\right)^2$ ,  $y = 0$ ,  $x = -2$ ,  $x = 2$ :

h)  $y = x^3 + 7$ ,  $y = 0$ ,  $x = 1$ ,  $x = 2$ :

i)  $y = x^3 + 7$ ,  $y = x^3 - x^2 + 3x + 5$ :

j)  $y = 3 - \frac{1}{2}x^4$ ,  $y = 3 - 4x$ :

k)  $y = \frac{1}{x}$ ,  $3y + 3x = 10$ :

l)  $y = \cos x$ ,  $y = \sin x$

m)  $y = \sqrt{3x+1}$ ,  $y = 1$ ,  $x = 8$ :

n)  $y = \frac{x^2}{4}$ ,  $y = \frac{8}{4+x^2}$ :

۲۸۱

خرخېدونکي تنونه:

---

o)  $y = x^2$ ,  $x = y^2$ :

p)  $y = \frac{1}{6} \cdot \sqrt{x^3}$ ,  $y = 0$ ,  $x = 0$ ,  $x = 3$ :

۴- د ساين د منحنی گراف او د کوساين د منحنی گراف يو بل په انټروال  $0 \leq x \leq 2\pi$  کې غوڅوي.

د دواړو غوڅتکو تر منځ له دواړو منحنيو را بندي سطحې مساحت وشمېرئ.

۵- د اکسپوننشل منحنی  $g$  د  $y = e^x$  سره او په انټروال  $[0,1]$  د پارابول  $p$  د  $y = -x^2 - 1$  سره را بنده سطحه وشمېرئ.

۶- د کرني  $g$  د  $y = 2x^2 + 1$  سره او په انټروال  $[0, 2\pi]$  د ساين منحنی  $y = \sin x$  سره څخه را بنده سطحه وشمېرئ.

۷- پارابول  $p_1$  د  $y = x^2 - 3$  سره او  $p_2$  د  $y = 2x^2 + 1$  سره د  $[-1, 2]$  په انټروال يوه سطحه را بنده وي. د ا بنده سحه و شمېرئ.

۸- د پارابول  $P$  د  $y = \sqrt{x}$  سره او کرنيه  $g$  يې د  $y = -x - 1$  سره په انټروال را بنده سطحه لرو. دا را بنده سطحه وشمېرئ.

۹- په انټروال  $[-2, 1]$  د کرني  $g_1$  د  $y = x + 3$  سره او  $g_2$  د  $2x + 1$  سره څخه را بنده سطحه وشمېرئ.

۱۰- پارابول  $p$  د  $y = x^2 - 6x + 5$  سره او کرنيه  $g$  د  $y = -x + 1$  سره را بنده سطحه.

د دې سطحې مساحت وشمېرئ.

څرخېدونکي تنونه:

۲۸۲

---

۱۱- د  $g$  يوه کرنيه يو پارابول  $p$  د  $y = x^2 + 2$  سره په  $x_1 = -1$  او  $x_2 = 2$  کې غوڅوي.

د کرنيې او پارابول څخه را بندي سطحې مساحت وشمېرئ.



۱۲ - د  $g$  یوه کرښه یو پارابول  $p$  د  $y + 0,5x^2 + x + 4$  سره په  $x_1 = -2$  او  $x_2 = 4$  ټکو کې غوڅوي.

د دې کرښې او پارابول څخه رابندې سطحې مساحت وشمېرئ.

۱۳ - د ساين د منحنې گراف او د کوساين د منحنې گراف يو بل په انتروال  $0 \leq x \leq 2\pi$  کې غوڅوي.

د دواړو غوڅتکو تر منځ له واړو منحنو را بندې سطحې مساحت وشمېرئ.

۱۴ - د  $f$  تابع گراف د  $y = -\frac{1}{9}x^4 + \frac{2}{3}x^2$  سره د  $x$  محور سره سطحه پوره رابندوي.

د دې مساحت وشمېرئ.

۱۴ - د  $f$  تابع گراف د  $y = a \cdot (1 - \sin 2x)$ , ( $a > 0$ ) سره او د وضعیه قیمت په  $I$  (اوله) مربع کې ( قیمتونو څخه را بنده سطحه) پوره رابنده سطحه لرو.

د کومو ارزښتونو لپاره د سطحې مساحت  $(x-2)$  سطحې یوونونه ( واحدونه) دی.

۱۵ - د لاندې توابعو گرافونه هر یو د  $x$  په محور څرخي. د منځ ته راغلو څرخېدونکو جسمونو حجم وشمېرئ.

$$a) f(x) = 2 + \sqrt{x}, \quad I = [0; 4]$$

$$b) f(x) = \frac{1}{2}(x-2)^2 + 1, \quad I = [2; 4]$$

۱۶ - د لاندې توابعو گرافونه هر یو د  $x$  په محور څرخي. د منځ ته راغلو څرخېدونکو جسمونو حجم وشمېرئ او د ساده شمېرنو سره یې وازمایئ.

$$a) f(x) = -x + 5, \quad I = [0; 3]$$

$$b) f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}, \quad I = [1; 5]$$

۱۷- د لاندې توابعو گرافونه هر یو د  $y$  په محور څرخي. د منځ ته راغلو څرخېدونکو جسمونو حجم وشمېری.

$$a) f(x) = \sqrt{x}, \quad I = [0; 4]$$

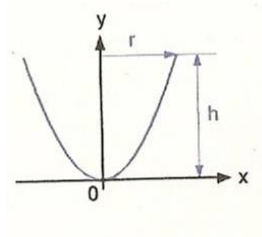
$$b) f(x) = (x-2)^2, \quad I = [1; 3]$$

۱۸- د لاندې توابعو گرافونه هر یو د  $y$  په محور څرخي. د منځ ته راغلو څرخېدونکو جسمونو حجم وشمېری او د ساده شمېرنو سره یې وازمایي.

$$a) f(x) = x + 1, \quad I = [1; 4]$$

$$b) f(x) = -\frac{1}{2}x + 2, \quad I = [0; 4]$$

۱۹- د پارابول په سیومتری محور  $y$  د پارابول د څرخیدو سره یو لوبنی منځ ته راځي. وښایی، چې دا  $v = \frac{\pi}{2} \cdot r^2 \cdot h$  حجم لري.



$$v = \frac{\pi}{2} \cdot r^2 \cdot h$$

۲۰- د ساين د منحنی گراف او د کوساين د منحنی گراف یو بل په انتروال  $0 \leq x \leq 2\pi$  کې غوڅوي.

څرخېدونکي تنونه:

۲۸۴

د دواړو غوڅتکو تر منځ له واړو منحننو را بندې سطحې مساحت وشمېری.

$$y = -\frac{1}{9}x^4 + \frac{2}{3}x^2$$

سره د  $x$  محور سره سطحه پوره

۲۱- د  $f$  تابع گراف د

رابندوي.

د دې مساحت وشمېرئ.

۲۲ - د  $f$  تابع گراف د  $y=a.(1-\sin 2x)$ , ( $a>0$ ) سره او د وضعیه قیمت په  $I$  (اوله) مربع کې (قیمتونو څخه را بنده سطحه) پوره رابنده سطحه لرو.

د کومو ارزښتونو لپاره د سطحې مساحت  $(x-2)$  سطحې یونونه (واحدونه) دی.

۲۳ ---- لاندې د څرخېدونکي بدنونو گراف په  $x$  محور څرخي. د داسې منځ ته راغلو څرخېدونو تنونو حجمونه (پکي) وشمېرئ.

$$a) f(x) = 2 + \sqrt{x}, \quad I = [0; 4] \quad b) f(x) = \frac{1}{2}(x-2)^2, \quad I = [2; 4]$$

۲۴ ---- د لاندې څرخېدونکو بدنونو گرافونه د  $x$  محور باندې څرخي داسې منځ ته راغلي حجمونه (پکي) وشمېرئ او په ساده حساب سره یې وشمېرئ.

$$a) f(x) = -x + 5, \quad I = [0; 3] \quad b) f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}, \quad I = [1; 5]$$

۲۵ ---- د لاندې توابعو د څرخون له لارې منځ ته راغلو تنونو حجم وشمېرئ.

$$a) f(x) = \sqrt{x}, \quad I = [0; 4] \quad b) f(x) = (x-2)^2, \quad I = [1; 3]$$

۲۸۵

څرخېدونکي تنونه:

۲۶ ---- د لاندې توابعو گراف د  $y$  په محور څرخي. داسې منځ ته راغلي تنونه وشمېرئ او په ساده شمېرنه سره یې هم وشمېرئ.

$$a) f(x) = x + 1, \quad I = [1; 4] \quad b) f(x) = -\frac{1}{2}x + 2, \quad I = [0; 4]$$

۲۷--- د لاندې توابعو گراف د  $y$  په محور څرخي. داسې منځ ته راغلي تنونه و شمېرئ او د ساده شمېرنې سره یې هم و شمېرئ

$$a) f(x) = \sqrt{x} \quad , \quad I = [0;4] \quad b) f(x) = (x-2)^2 \quad , \quad I = [1;3]$$

$$a) f(x) = x+1 \quad , \quad I = [1;4] \quad b) f(x) = -\frac{1}{2}x+2 \quad , \quad I = [0;4]$$

هغه ناتيکاوې، چې د نصاب په کتاب کې شته، داسې لږڅه به یې زه دلته له تاسو سره شریک کړم

د ډاکټر ماخان (میري) شینواري چاپ او ناچاپي لیکنې:

په ډېره مننه، چې زما کتابونه به ټول [www.ketabto.com](http://www.ketabto.com) ته پورته شي.

1988 Vienna (Austria):

لومړی:

H.K. Kaiser , M. Shinwari : Aproximation compact pological algebra :  
general algebra 6 ; Page 117 – 122 contributions to

1987 Vienna (Austria):

دویم:

Diss . Interpolation und Aproximation durch Polynime in Universalen Algebren .  
Uni. Wien

*Dissertation Interpolation and Aproximation by Polynome in universal Algebras,  
at the University of Vienna/Austria*

لاندي د شميرپوهني پښتوتول کتابونه په المان کې د ،، افغانستان کلتوري ودې ټولنه، له خوا چاپ شوي دي

2000 Bonn (Germany):

دریم: د شميرپوهني ستر کتاب : د شميرپوهني برسیره د انجنري، فزيک او اقتصاد لپاره ، همداسې د بنوونکو او زده کوونکو لپاره ( دا کتاب په ۹۰۰ مخونو کې چاپ او دا نوي ليکنه به يې ځنو ځايونو غزېدلې او ځني ځايونه ترې لرې شوي دي)

2003 Bonn (Germany):

څلورم: ځمکچپوهنه ( هندسه ) ، په سلو، زرو کې شميرنه، د گټې – او کټې د کټې شميرنه ، د احتمالي شميرنه کتاب د بنوونځي ټولي اړتياوي پوره کوي

2003 Bonn (Germany):

پنځم: الجبرونه ( د الجبر بنسټونه دي)

2003 Bonn (Germany):

شپږم: د شميرپوهني انگرېزي – پښتو ډکشنري.

2003 Bonn (Germany):

اووم: د شميرپوهني الماني - پښتو- او پښتو الماني ډکشنري

*Mathematical dictionary German/ Pashto and Pashto/German*

2003 Bonn (Germany):

اتم: دفرنځيال برابرون ( دا کتاب په دي څانگه کې يو پيل دی، ساده ليکل شوی)

*Differential equation Translation; An Introduction*

Bonn (Germany): 2003

نهم: د شمير پوهنې فرمولونو ټولگه

*Mathematical Formulas*

2003 Bonn (Germany):

لسم: شمير پوهنه له عربي په پښتو

1997 Bonn (Germany):

يوولسم: د افغانستان په هکله سپينې خبرې: په المان کې

،،د افغانستان روغي او بيا ابادولو ټولنه،، له خو

يادونه: له ۲۰۰۰ کال دمخه ډاکتر ماخان شينواري د ،،د افغانستان روغي او بيا

آبادولو ټولنه،، له خوا درې ساسي مجلې هم را وستلي.

د ډاکتر ماخان ،،ميري،، شينواري ليکنې او ژباړې چې په چاپيدو يې پيل کيږي

2012 Bonn; Germany; Kabul Afghanistan

ژباړې:

: Prof. Brinkmann. (From Brinkmann.du.de)

لاندې د برينکمن ليکنې چې له پرينکمن ن ج څخه ژباړل شوي دي.

۱ - شمير پوهنه د بنوونځي لپاره لومړی ټوک

۲ - شمير پوهنه د بنوونځي لپاره دويم ټوک

۳ - شمير پوهنه د بنوونځي لپاره دريم ټوک

۴ - د احتمالي شميرنه د بنوونځي لپاره

۵ - احصايه يا ستاتيستیک دبنوونځي لپاره

لاندي کتابونه د شتوتگارت د پوهنتون د استادانو د لکچرونو څخه چې د شتوتگارت پوهنتون ن ج څخه خپاره شوي را ژباړل شوي.

۶ - اناليزی ۱

۷ - اناليزي ۲

۸ - کرنييز الجبر

۹ - د شمير پوهني بنستونه

۱۰ - د فرمولونو ټولگه

۱۱ - فنکشنل اناليز

۱۲ - وکتور شميرنه

نوري ژباړي

۱۳ - له [www.grundstudium.info/linearealgebra](http://www.grundstudium.info/linearealgebra) څخه: کرنييز الجبر

۱۴ - Georg Guttenbrunner گڼوڼپوهنه يا د اعدادو تيوري

زما ليکني

Bonn (Germany):

۱۵ - د شمير پوهني ستر کتاب دويم چاپ د پوره تغيراتو سره : دا کتاب د شمير پوهني برخي برسیره د

انجنري، فزيک او اقتصاد لپاره ، همداسې د بنوونکو او زده‌کونکو لپاره پوره  
گټور دی. په

کتاب کې د اړتيا سره زياتونه او کونه راغلي

- ۱۶ - ځمکچپونه ( هندسه ) دويم چاپ د پوره تغيراتو سره
- ۱۷ - الجبر بنسټونه دويم چاپ له تغيراتو سره
- ۱۸ - ډېری پوهنه يا ست تيوري
- ۱۹ - د شمير پوهني سم اند ( منطق رياضي)
- ۲۰ - د يو څو شمير پوهانو ژوندليک
- ۲۱ - د شمير پوهني گډې ودې ليکنې
- ۲۲ - داهم ژباړه ده، خو ليکونکی يې متأسفانه راڅخه نابلد شوی: د مشتق او انتيگرال  
شميرنو ته تمرينونه او اوبيوني يا حلونه يې
- ۲۳ - د شمير پوهني انگريزي پښتو او عربي + درې ډکشنري
- ۲۴ - د شمير پوهني پښتو انگريزي ډکشنري
- ۲۵ - د شمير پوهني پښتو ډکشنري د شمير پوهنيزو ويونو په پښتو روښانه ونه
- ۲۶ - د زره له کومې ( دا هغه ليکنې دي، چې ځنې يې په نړيوال جالونو کې خپرې شوي  
دي. )
- ۲۷ - د افغانستان په هکله سپينې خبرې، چې وبه غزيرې.

نوري ليکنې، چې په ژباړه يې پيل شوی، خو لا پوره نه دي

- د شتوتکارت پوهنتون لکچرنوټونو څخه ، چې د شتوتکارت پوهنتون ن ج څخه  
خپريږي:



د گروپونو تيوري

- د بنوونځي لپاره فزيک د برينکمن ليکنه

له پنځم ټولگي څخه تر اووم ټولگي پورې ژباړل شوی ( دا چې زما دويم مسلک فزيک دی، دا ليکنې ژباړم. دا هم د دې ليکوال يوه ډېره بڼه ليکنه ده، چې -د شميرپوهنې په څير- دلته هم زيات تمرينونه د حل يا اوبيوني سره په کي راغلي او ماته زيات گټور برېشي)

د بنوودځي کتابونه له ۷-م لگي څخه تر ۱۲-م ټولگي پورې.

۱ - د دولسم ټولگي شميرپ، هغه

زما ليکونه:

ډاکتر ماخان شينواری

Dr. Makhan Shinwari

Smakhan1946@gmail.com

د افغانستان اسلامي جمهوريت جمهور ريس جلاتماب

ډاکتر محمد اشرف غني ته په ډېر درنښت.

له هر څه د مخه دې بڅبنه وي، چې ستاسو ډېر د ارزښت ډک وخت نيسم، خو دا راته ډېر اړين برينې او پرته له تاسو به يې څوک دومره جدي هم ونه نيسي.

پوهيرو، چې د پوهنې وزارت د ولس د پوهنې مغذ جوړوي، پوهه له همدې ځايه پيليري، چې بنسټ يې بايد سم وي. همداسې نصاب د يوه هيواد د پوهنې مغذ دی، نو بايد همداسې ورته د هره اړخه په درنه سترگه او غور وکتل شي.

زه خبره را لنډوم او د افغانستان د نصاب ستونځو ته په لنډ ډول گوته نيسم او په همدې ډول ستونځوبيو يا د ستونځو حل ته يې.

ما د ۱۲ -م ټولگي د پښتو او دري کتابونه وليکل او زه ترې المان ته لارم، قرارداد پای ته ورسيد. زما د کتابونو په ځای نور کتابونه چاپ شول، چې ناسم وو. په دې هکله د پوهنې وزارت ته زما ليکنه مل ده. دا کتابونه ما بيا له سره ترتيب کړل ( ليکنې مې يې

درلودلې) او چاپ ته مې چمتو کړل، خو دا مې باور نه کیده، چې دا به بیا بې زما له شتون چاپ شي.

ما د کتابونو د لیکلو لپاره پیسې اخستي او دا لیکنې هم دا دی لرم، چې چاپ ته چمتو دي

ما چې دا نور کتابونه وکتل، نو دا مې لازم وگنله، چې دا کتابونه هم زه له سره ولیکم، مواد یې لرم، ځکه چې ما ډېر د شمیرپوهنې یا ریاضي کتابونه لیکلي او ژباړلي (نږدې تر ۴۰ کتابونو پورې). د کتابونو منځپانگه د بنوونځي کتابونو لپاره هم پوره ده، تخنیکي کارونه یې باید له یوه مسلکي کس سره سرته ورسول شي.

اوس مې یې په لیکلو او د بنوونځي لپاره په سمون پیل کړي دی.

زما لیکنې مسلکي ناسمون نه لري، معیاري او د وخت د غوښتنو سره سمې دي، چې دا زما د اخرنیو اوولس کالو د هڅو په اساس باوري ده.

زه څه کولی شم؟

دا چې په دې هکله بل کوم هیوادوال څه نه دي ویلي یا لیکلي، نو باور لرم، چې زه یواځنی کس یم چې دې ته مې فکر را اوبنتی. زه دا څه چې لیکم دا په پوره مسؤلیت لیکم.

ما چې دا څومره لیکنې کړي، دا زما د ارمان د پوره کولو لپاره دي او په دې هکله ځان د ولس پوروی بولم.

که د دې کتابونو د لیکنې دنده راته وسپارل شوه، نو د کار میوه به مې وي او دا کار به په نړیوال معیار او بڼه توگه سرته ورسوم.

دا اخر یونیم کال مې یواځي د بنوونځي له کتابونو سره سر خورولی، چې د هر ځل لوستنې سره یې پوره زوریزم او د هر ځل لوستلو سره یې په ناسمون سر خوروم.

زه هیله لرم، چې دا وخت راته را کړئ، چې د افغانستان ریاضی معیاري کولو کې مرسته وکړم او نه دا چې مرسته وکړم بلکه معیاري یې کړم. دا کار مې لکه د مخه مې چې گوته ورته ونیوله هم کړی.

زه کړی شم، چې دا کار د المان څخه هم سرته ورسوم. که ماته دا وخت را کړ شو، نو زه به له حکومت څخه د معاش غوښتنه هم ونه کړم او دا کار زما له خوا ساده کیدونکی دی.

د ښوونځي د رياضي لپاره به يو بنسټ کينسول شي، چې په هغې د راتلونکي وخت شميرپوهنه يا رياضي ابادېدی شي. دا بنسټيز مسلک به په نړيواله کچه سم شي.

زما مسئوليت مي په دې ليکنه سرته ورساوه.

له هر څه د مخه ستاسو له ستونځو مننه

ستاسو ډاکټر ماخان شينواری

د نصاب د کتابونو د ناسمون په ځنو برخو د نموني لپاره لنډه څيړنه شوي، چې د دې ليک سره مل ده.

د پوهني محترم وزارت ته زما ليکنه هم مل ده.

د ۲۰۱۳ زک لومړۍ نيمايي

ډاکټر ماخان شينواری

Dr. Makhan Shinwari

Lansbergerstr.3

5311- Bonn

Germany

smakhan1946@gmail.com

د افغانستان اسلامي جمهوريت د پوهني محترم وزير صاحب ته په ډېر درنښت!

ډېرو درنو!

غواړم دا لاندې دوه ټکي د تاسو محترم سره شريک کړم:

لومړۍ: ما له مارچ ۲۰۰۸ ز کال څخه تر دسمبر ۲۰۰۹ ز ک پورې د درسي کتابونو ليکنه کې ونډه لرله او د ۱۲-م ټولگي د شمير پوهني يا رياضي کتابونه مې په پښتو او دري وليکل.

ما دا څه موده د مخه د پوهني وزارت په ن ج پانه کې د ۱۲-م ټولگي د شميرپوهني ( رياضي) کتاب ولوسته، چې گورم هلته په کې زما د نوم درک هم نه شته.

دويم: د کتاب خوندېونې يا متن ته چې ننوتم، گورم، چې هغه څه چې ما ليکلي وو هغه يا نه شته او يا تخريب شوي دي.

ما په ډېر زور او د زړه خوراک سره د کتاب لومړۍ برخه يعنې د ،، پولي ارزښت،، يا ليميت برخه وکتله، چې گورم، نو دا مې ترې لاس ته راوړه، چې دا نه رياضي ده او نه پښتو او هغه چا چې دا ليکلي نه دا چې په رياضي نه پوهيږي په پښتو هم نه پوهيږي.

زما په ليکنو کې نوبت:

دا بايد په گوته کړم، چې زما ليکنه په نړيوال معيار وه، چې منځپانگه يا متن يې طبعاً زه لرم.

لومړي: دا لومړي ځل دی، چې کتاب مې لومړی په پښتو او بيا په دري وليکه.

دويم: دا لومړی ليکنه وه، چې په ليکنه کې له ايراني کتابونو گټه نه وه اخستل شوې او ليکنه له الماني ادبياتو او داسې څه له انگرېزي ادبياتو رانيول شوې وه.

درېم: زما کتاب معياري ليکل شوی وو او ترې بڼه ليکنې يې شونتيا نه لرله.

په لاندې توگه مې غوښتنه او هيله :

اول - زه بايد پوه شم چې ولې داسې شوي، چې زما نوم له کتاب څخه وتلي؟

که يواځې يوه ليکنه هم په کې زما پاتې وي، نو بايد زما نوم په کې وي. دا ماته له ما سره او زما د دوه کاله په دې لار کې د ستونځو گاللو له امله او نه اخر زما د علمي کار سره هم تيری برېښي؟

تاسو پوهيرئ، چې د ۱۲ -م ټولگي کتاب ليکلو لپاره ماډېرې پېښې اخستي او لپاره مې يې ښه کار کړی وو، چې لاس ته راوړنه يې بايد داسې نه وي.

دويم- د کتاب دا ليکلي لومړی او هم داسې سرسري دويمه برخه، چې ما لوستلي، د ښوونځيو لپاره د زغم نه دي.

زما وړانديز: دا کتابونه بايد راټول شي او بيا وليکل شي، ځکه چې په دې خو ليکونکي نه پوهيرئ، نو له دې امله نه ښوونکي پرې پوهيدی شي او نه زده کوونکي او د پوهيدلو معقول څه هم نه لري. دې ته گوته نيسم، چې په دې نورو کتابونو کې به هم ورته ستونځې وي، خو زما يې کتنه اوس د لاسه نه کيرئ، ځکه چې .....

د داسې کتابونو ليکل او ښوونځيو ته وېشل د پوهني وزارت لپاره توهين دی.

زه له دې امله د کوچني اختر وروسته کابل ته درځم او هيله لرم، چې د هرچا لومړی له تاسو سره وگورم. زه به د اگست په ۱۷ يو ځل وزارت ته درشم.

يادونه: ما په دې اخرو څو ورځو کې د کتاب ډېر ځايونه داسې ځغلند وکتل، باور وکړی، چې د هرې موضوع د لوستلو سره زورېدلی يم.

زه به په دې هکله – که لوي څښتن کول- له تاسو سره په کابل کې وغږېږم.

له هر څه د مخه له تاسو ستاسو له ستونځو مننه

ستاسو ډاکټر ماخان شينواری

يوه هيله

زه د افغانستان د ټولون ج ، نورو پاڼو او راډيو ټلويزيونو څخه هيله لرم، چې دا زما ليکنه گرانو لوستونکو ته وړاندې او په نورو اړونده ليکنو هم همدا مرسته وکړي.

د رياضي کتابونو د چاپ مخه ونيول شي

ولي؟

په دې نږدې څو مياشتو کې د نصاب کتابونه بيا چاپ ته وړاندې کيږي او گومان مي دی، چې داسې د معيار سره سم سمون به په کې نه وي راغلی، نو له دې امله يې د چاپ مخنيوی اړيږي او په همدې ډول يې سمون هم اړين دی، چې په لاندې کې يې ستونځو او ستونځوبيو ( د ستونځو حل) ته هم گوته نيسم.

زه د شميرپوهنې ټول د نصاب پوهانو ته درناوی لرم او هيله ده، چې دا ليکنه شخصي وه نه نيسي.

-- ما له نږدې ۱۹۹۸ ز ک وروسته د شميرپوهنې په کتابونو پيل وکړ، چې تراوسه مي نږدې څه کم څلوېښت کتابونه ليکلي، چې له جملې يې له شلو ډېر چاپ او نور ناچاپ دي. د دې کتابونو ۱۴ غوره يې په [www.kitabtoon.com](http://www.kitabtoon.com) ( دې پاڼه کې داسې نه شته) کې خپاره شوي او همداسې له ما څخه شميرپوهنې ته ځانگړې شوې پاڼه کې تر

۲۵ کتابون ج ته پورته شوي او دا نور به هم په خپل وارن ج ته پورته شي. زما  
پاڼه [smakhan.wordpress.com](http://smakhan.wordpress.com)

دا زمان ج پاڼه په نا بنکلي ډول يواځي زما د شميرپوهني کتابونو ته ځانگړې شوې،  
چې زما زيات کتابونه په کې خپاره شوي او نور به هم په کې خواره شي. پاڼه بنکلي نه،  
خو خپله موخه پوره کولی شي او موږ ټولو سره مرسته کولی شي، چې شميرپوهنه په  
گډه سمه او معياري کړو.

گرانو هيوادوالو!

افغانستان دې اوږدې جگړې په هر اړخ کې بې ساری زيانمن کړی او همداسې په  
پوهنيز اړخ کې هم. د افغانستان نصاب هم له دې ناخوالو بې برخې نه دی پاتې شوی.  
لکه څنگه چې پوهنه د هيواد مغذ جوړوي، همداسې نصاب د پوهني مغذ دی، نو له دې  
امله زياته پامرنه هم غواړي.

ما په نصاب کې د دولسم ټولگي پښتو او دري کتابونه وليکل، د قرارداد وخت پوره شو،  
پيښې مې واخستلې او زه ترې لارم، چې متأسفانه له ما ليکلي کتابونه چاپ نه شول –  
علت يې دا وو، چې گران ليکونکي يا ليکونکي وښايي، چې دوي دا کار بنه کوي، نو  
ولې دا د هيواد دباندي افغانان دې کار ته راوبلل شي- او په ځای يې متأسفانه ناسم  
کتابونه چاپ شول. په دې هکله مې په ۲۰۱۲ ز ک کې پوهني وزارت ته يو ليک هم  
ليږلی وو، چې

ما متأسفانه چې پوره ناوخته دا نور د ښوونځي چاپ کتابونه وکتل او دې نتيجې ته  
ورسېدم، چې د رياضي کتابونه بايد سم او معياري چاپ شي او نه دا ناسم بيا چاپ شي.

دا وړانديز ولې ما په نصاب کې نه دی کړي؟

په خواشینی سره به ووايم، چې د کار په سر کې مسئلو چې په کار پوه نه وو، بل څوک هم کار ته نه پرېږدي او د چا خبره د چا غور ته هم نه رسيري. ما په همغه وخت کې هم د ټولو لیکنو لپاره وړاندیزونه لروده او هلته مې ورته چاپ او په میز ایښودلي وو، خو چا نه غوښتل گټه ترې واخلي او یا یې ترې د گټې اخستلو توان نه لاره.

ما ته د هغو د لیکنې متود ښه ونه برېښیده، ځکه چې استادان د دارنگه لیکنو سره بلد نه دي، نو له دې امله د پوهنې متن سره له هغې څو واره زیاتې ځنګیزې لیکنې کوي، چې موخه ور نه دي.

ما چې پتیل، چې د کتابونو د چاپ مخه باید ونیول شي، نو دې ته مې هم چمتووالی باید ښوولی وي، چې د کتابونو معیاري او سم لیکلو امکان هم باید شته وي.

دا امکان شته. ما دا کار سرته رسولی، کتابونه مې ټول داسې خام پوره کړي، چې زیاتو برخو ته یې، څو واره وړاندیزون هم شته.

که د کتابونو د چاپ کار باید ډېر په بیره وشي، نو دا کار هم کیدونکی دی، خو باید څو تخنیکي کسان د مرستې لپاره چمتو وي.

د چاپ کتابونو په ناسمون مې لیکنه کړې، چې گران لوستونکي یې په [smakhan.wordpress.com](http://smakhan.wordpress.com) کې لوستلی شي او که ن ج ته پورته نه شو، نو مینه وال او په دې هکله لیوال یې د برېښنا پټي له لارې لاس ته راوړی شي..  
ما د هر کتاب څخه لږ تر لږه یوه برخه داسې د نمونې په څیر څیرلې.



د دې لپاره چې د شمیرپوهنې مینه وال گران لوستونکي په ستونځو وپوهیږي، نو اړین بولم، چې د بنوونځي کتابونه هم وگوري او اړونده موضوعگانې زما د چاپ او ناچاپه لیکنو سره پرتله کړي (کتابونه په پورته ن ج کې شته دی، چې ځنې یې راکښته کیدی شي او هم یې هلته گران لوستونکي لوستلی شي).

زه په دولت کې او له دولت دباندې د ټولو اغیزمنو هیوادوالو څخه هیله کوم، چې په دې لار کې له ما او له دې لارې زموږ د ځوان راتلونکي سره مرسته وکړي او د شمیرپوهنې معیاري کولو او سمون امکانات راته چمتو شي.

زما د کار دوه امکانات شته:

لمړی: دا کار زه کړی شم، چې له امان څخه هم سرته ورسوم او په بڼه توگه، په دې حالت کې به زه د زحمت په مقابل کې له اجوري - د ځوانانو سره د مرستې له امله - تیر شم.

دویم: په افغانستان کې که دا کار سرته ورسیري، دا به گټور وي، ځکه چې په افغانستان کې به په ټولو خواوو کاروشي.

داڅه وروستی خبرې ما هم رامخ ته کړی.

په لاندې کې زما لیکنې د افغانستان اسلامي جمهوریت جمهورر ریس جلالتمآب اشرف غني او د پوهنې محترم وزارت ته لیک کې هم لوستلی شی او هیله مې ده، چې ویئ لولی.

ستاسو له گڼو مشورو به ډېر منندوی یم.

زما د برېښنا لیک پته: [smakhan1946@gmail.com](mailto:smakhan1946@gmail.com)

ستاسو ماخان

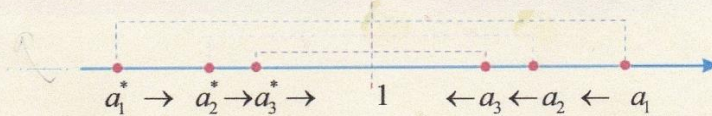
د نصاب د دولسم ټولگي کتاب ناسمونونو ته کتنه:

لومړي: په دولسم ټولګي کې پیل له ترادفونو شوی او په سر کې یې دوه ترادفونه راوړي او دا یې بیا په یوه ګراف یا کرښه د ښي او کښي لوري یوې پولې ته ځغولوي.

د کتاب ۳ - م مخ

**پایله:** لیدل کېږي، چې د  $a_n$  ترادف له ښي لوري څخه د 1 او د  $a_n^*$  ترادف له کښي لوري څخه د 1 عدد ته د  $n$  په زیاتېدو سره نږدې کېږي، یعنې:

- د  $a_n$  ترادف کله چې  $n$  بې نهایت ته تقرب وکړي، مساوي په (1) سره کېږي او همداشان د  $a_n^*$  د ترادف  $n$  - ام حد که  $n$  بې نهایت ته نږدې شي هم مساوي له (1) سره کېږي.



ددې لپاره چې د لېمیت مفهوم مو ښه څرګند کړی وي، په لومړي پړاو کې هغه په څو ترادفونو کې د ګراف په پام کې نیولو سره تر څیړنې لاندې نیسو.

زه پوهیږم، چې دا کار دې درنو لیکوالانو ولې کړی؟

له همدې پیله روښانیري، چې محترم لیکونکي د درس سره کومه بلدتیا نه لري.

په پورته کې دا دوه پرلپسې هیڅکله له ( ۱ ) « سره نه برابرېږي، لکه ښاغلی لیکوال چې لیکي.

پسې یې بیا د پرلپسې یا ردیفونو لپاره بیل بیل ګرافونه کښلي.

په پرلپسېو یا ردیفونو کې چې مور لیمېت راوړو، نو موخه ترې د پرلپسې کونورګنت او دیورګنت دي. په پرلپسې کې اړین نه ده، چې د کونورګنت حالت کې دې پرلپسې له دواړو لورو پولې ته لاړ شي، خو داسې پرلپسې شته او هغه یو ترادف دی نه دوه.

دویم: دا لاندې څه چې راغلي، هم کوم درس پورې اړوندوالی نه لري، همداسې څه یې لیکلي. دی د ناسم د ترادف درس څخه سملاسي داسې یوې موضوع ته راغلی او بیا د

بني او کين لوري ليميت ته راځي او که وکتل شي، نو په ليکنو کي کوم توپير نه شته. دلته د زده کړي څه نه ليدل کيږي او دا اخره کرښه يې داسې ده، چې په دې موضوع کي کومه پوهه هم نه لري.

که چيري دا ټيک هم وي، نو ځای يې بي ځايه ځکه راوړي، چې د بني او کيني لور ليمتونه، چې هلته هم ناسم دي، په اووم مخ کي څيرل (که چيري څيرنه يې وپولو)

په لاندې کي ،، د متحول تقرب،، يعني څه؟ دا هيڅ مفهوم يا تري پوهيدنه نه لري. که ... ترادف وي هم بايد د ترادف په ډول وليکل شي او که تابع وي هم بايد د تابع په ډول وليکل شي.

د متحول تقرب: ويل کيږي چې د  $x$  متحول د  $a$  عدد ته تقرب کوي، په داسې حال کي چې  $x$  په اختياري ډول د  $a$  عدد ته نږدی کيږي، يعني د  $x$  او  $a$  ترمنځ تفاوت له هر کوچني عدد ( $\delta > 0$ ) څخه کوچني دی يا په لاندې ډول:

$\forall \delta > 0: |x - a| < \delta$  يا  $\lim_{x \rightarrow a} x = a$  يا  $x \rightarrow a$  يا  $|x - a| \rightarrow 0$

له بني لوري د متحول تقرب: ( $x \rightarrow a^+$ ) که چيري د  $x$  د قيمتونو يو متناقص ترادف موجود وي په داسې حال کي چې په تدريجي ډول د  $a$  اختياري عدد ته نږدی شي.

$x: a + 0.1, a + 0.01, a + 0.001, a + 0.0001, \dots \rightarrow a^+$

له کين لوري د متحول تقرب: ( $x \rightarrow a^-$ ) که چيري د  $x$  د قيمتونو يو متزايد ترادف موجود وي په داسې حال کي چې په تدريجي ډول د  $a$  اختياري عدد ته نږدی شي.

$x: a - 0.1, a - 0.01, a - 0.001, a - 0.0001, \dots \rightarrow a^-$

نو د  $x$  د متحول تقرب د  $a$  عدد ته معادل دی د  $x$  د متحول تقرب له بني لوري او د  $x$  د متحول تقرب له چپ لوري؛ يعني:

$x \rightarrow a \Leftrightarrow (x \rightarrow a^+, x \rightarrow a^-)$

$$\forall \delta > 0: |x-a| < \delta \text{ يا } \lim_{x \rightarrow a} x = a \text{ يا } x \rightarrow a \text{ يا } |x-a| \rightarrow 0$$

ډول ليکنو سره گران ليکونکي بلدتيا نه لري او نه داسي څه د مخه راغلي، چي روښانه شوي وي

داسي ليکنې د بنوونځيو لپاره ستونځمنې دي. له دې امله ما هم په خپلو ليکنو کې نه وي راوړي. گورو چې د کتاب ناسمونکي هم دا څه ناسم يا بي له تشریح کارولي.

په دې هکله زما ليکنه په لاندې کې شته.

درېم: په لاندې تعريف کې د پوهيدلو څه نه شته او په دې رياضیکي تعريف خو نه پوهيري، ځکه چې په لاندې يې د پوښتنې د حل نتيجه راوستلې او دا بحث له دې سره په رښتيا کې هيڅ سر او کار نه لري.

تعريف: که چيرې د  $f(x)$  تابع په يوه غير ترلي انټروال کې چې د  $a$  عدد په هغې کې گڼون لري کيدای شي چې تابع په  $a$  کې نه وي تعريف شوی. که چيرې د  $x$  متحول د  $a$  عدد ته نږدی شي نو د  $f(x)$  تابع د  $l$  عدد ته نږدی کېږي، نو ويل کېږي چې د  $f(x)$  تابع لېميټ عبارت له  $l$  څخه دی، کله چې د  $x$  متحول د  $a$  عدد ته

تقرب وکړي نو داسې يې ليکو:  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$  يا  $f(x) \rightarrow l$   $x \rightarrow a$

$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-l| < \epsilon$

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \Leftrightarrow (|x-a| \rightarrow 0 \Rightarrow |f(x)-l| \rightarrow 0)$



دا سومبولونه  $\forall$  او  $\exists$  نه دي بنوول شوي، چې څه شی دی او څه بلل کيږي.

بناغلي لیکونکی په اووم مخ کې بیلگه راوړي او بیا دا بنایي، بنی او کیني لوري لیمیت یې شمیري.

باید د  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = 6$  لپاره  $x \neq 3$  ولیکي، چې هلته فنکشن تعریف نه دی. دی بیا په ناسمه توګه په جدول کې لیکي. دا چې دا باید څنګه ولیکل شي، زما په لیکنو کې شته.

دویمه بیلگه: وینئ چې  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = 6$  سره دی.

حل: د بنی او کیني خوا لیمیتونه تر څپرني لاندې نیسو:

x	3.5	3.1	3.01	3.001	...	3 <sup>+</sup>
f(x)	6.5	6.1	6.01	6.001	...	6

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = 6$

x	2.5	2.9	2.99	2.999	...	3 <sup>-</sup>
f(x)	5.5	5.9	5.99	5.999	...	6

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = 6$

لیدل کېږي چې د بنی خوا او کیني خوا لیمیتونه سره مساوي دي، نو  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = 6$  دي.

په پورته کې  $x$  د 3 قیمت نه شي اخستلی، هلته فنکشن تعریف نه دی، نو له دې امله په جدول کې، نه د بنی لوري او نه د کیني لوري دا ارزښت 3 اخستلی شي، هلته 3 ته ور نږدې کيږي.

د بیلګې حل یې هم بیا سم نه دی کړي، په هغه ورسره بلده لار.

دا هغه د کاغي او د زرکې خبره ده.....

**دویمه طریقه:** د لیمیت د تعریف په پام کې نیولو سره فرضوو چې د هر اختیاري کوچني عدد  $\epsilon$  لپاره یو  $\delta$  شتون لري داسې چې:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon$$

$$|x - 3| < \delta \Rightarrow \left| \frac{x^2 - 9}{x - 3} - 6 \right| = \left| \frac{(x - 3)(x + 3)}{x - 3} - 6 \right| = |x + 3 - 6| = |x - 3| < \epsilon$$

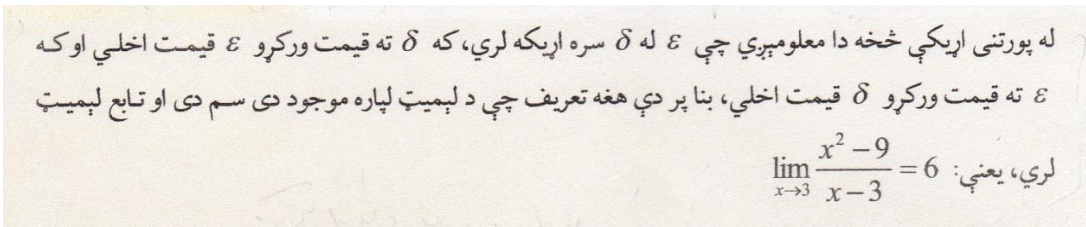
$$\Rightarrow \epsilon = \delta$$

د بیلګې د حل نتیجه

$$\varepsilon = \delta$$

دا د دی بحث سره سر او کار نه لري یعنی دا مو موخه نه ده، نو باید ووایم، چې دروند لیکونکي د موضوع څخه بوي هم نه وري. (بخښنه دې وي، که زما لیکني داسې لږ توندي برېښي)

او بي ځايه مخ ته ځي، چې څه تری پوهيدل کيږي هم نه.



دې پورته ته په لنډه توګه زما نوره لیکنه او تیکاوې:

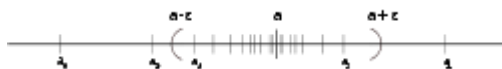
د کتاب په پیل کې راوړل شوي د مترادف یا پرلپسې موضوع باید د یوولسم ټولګي کتاب کې پوره څیړل شوي وي، مګر هلته یې یواځې دا نومونه راوړل شوي او نور لیکونکي — بي له دې، چې د موضوع اړین څه راوړي — له موضوع څخه تیر شوي.

د دې موضوع څخه موخه د مترادف پولي ته تلنه یا کونورګنت او له پولي اووښتنه یا ناپای ته تلنه یا ډیورګنت او... دي، چې بي له دې په رښتیا کې د مترادف یا پرلپسې څیړنه کوم غوره والی یا اهمیت نه لري، یعنی خپله موخه له لاسه ورکوي. دا د یوولسم ټوګي د مترادف درس، نو په رښتیا کې خپل غوره والی او اړینوالی له لاسه ورکوي. نور سموالي او ناسموالي ته یې ګوته نه نسیم، همدا بسیا کوي، چې څه په کې نه دي ویل شوي یا لیکل شوي.

د ۱۲ — ټولګي کتاب ته:

یادونه: دا چې گومان کيږي د داسې لیکنو سره به بلدتیا لږ وي، نو تشریح به راڅخه لږ ډېره شي.

د ،، پوله ارزښت،، په څیره کې بسوونه



که  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  د حقیقي اعدادو (ګڼونو) ترادف یا پرلپسې وي، نو عدد  $a \in \mathbb{R}$  د دې ترادف یا پرلپسې پوله ارزښت بلل کيږي او پرلپسې  $a$  ته کونورګیر کيږي یا  $a$  ته هڅیري یا نږدې کيږي، که د هر  $\varepsilon > 0$  لپاره په انټروال  $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$  کې له یوه اندکس یا پیژند نخښې اخوا یا وروسته یا پسي د پرلپسې یا ترادف ټول غړي (دوي یې حدونه یا جملې بولي، نه پوهیږم ولې؟) د انټروال په دننه کې او فقط پای ډېر غړي له انټروال څخه دباندې پراته وي.

( دنورې اوږدې روښانه ونکې شننې څخه تیريږم )

لنډ پیژند یې:

عدد  $a \in \mathbb{R}$  د ترادف  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  پوله بلل کيږي، که د ټولو  $\varepsilon > 0$  لپاره یو طبیعي یا پیداېښتي عدد  $N$  شتون ولري، داسې چې  $|a_n - a| < \varepsilon$  یا وړي، که  $n \geq N$ . وي.

دا پیژند راګوي، چې: د هر  $\varepsilon > 0$  لپاره یو ایندکس  $N$  شته، داسې چې له دې ایندکس یا پیژندنځښې وروسته د پرلپسې (ترادف) ټول غړي د  $\varepsilon$  څخه په کم واټن له  $a$  لري پراته دي یعنې له  $\varepsilon$  څخه چې  $a$  ته څومره نږدې دی دا نور هم  $a$  ته نږدې دي.

د  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  د پولې ارزښت لیکلو لپاره خپل ځانله سومبول لرو:  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$

د دې لیکدود سره سم د یوې پرلپسې پوله ارزښت تعریف داسې رالاندولی شو:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \iff \forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : |a_n - a| < \epsilon$$

د داسې ليکنو لپاره د  $\epsilon$  (لوسټل: ايپسيلون) توري ورځني يا مروج شوي.

**بيلگه:**

په يوه بيلگه کې يې روښانه کوو:

د دې لپاره چې د  $\frac{1}{n}$  پرلپسې يا رديف و 0 ته کونورگنت وښايو، يو د مخه ورکړ شوي  $\epsilon$  ته يوه په خوښه طبيعي عدد يا گڼ  $N$  ټاکو، چې له  $\frac{1}{\epsilon}$  لوی وي، نو د ټولو  $n > N$  لپاره باور لري:

$$|a_n - 0| = \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \epsilon$$

موضوع اوږدولی نه شم، ځکه چې دا يو درس نه دی، دا فقط په موضوع داسې لږ رڼا اچونه ده.

د فنکشن پوله ارزښت:

يادونه: د دې ۱۲ - م ټولگي د درس دا هغه اصلي موضوع ده.

د فنکشن پوله ارزښت په لاندې توگه پيژنو يا تعريفوو:

پيژند: د فنکشن  $f$  پوله ارزښت، د  $x$  لپاره چې  $p$  ته نږدې کيږي،  $L$  دی او داسې يې

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L$$

ليکو:

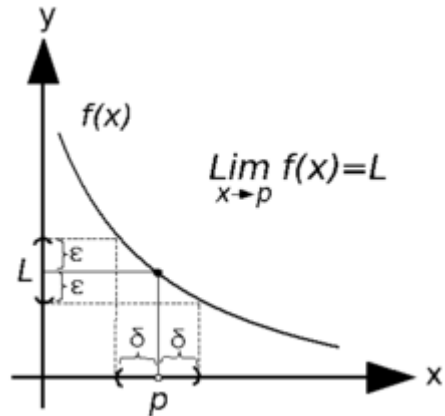
لوسټل يې هم همداسې دي لکه پورته تعريف

داسې يې شميرپوهنيز ليک دود باندې تعريفوو:



فنکشن  $f$  پوله ارزښت  $L$  لري، که د هر  $\varepsilon > 0$  لپاره یو  $\delta > 0$  شتون ولري، داسې چې د هر  $x$  لپاه د  $0 < |x-p| < \delta$  سره  $|f(x)-L| < \varepsilon$  هم باور ولري.

د پورته شمیرپوهنیز یا ریاضیکي فنکشن پوله ارزښت لپاره لاندې څیره



پورته دوه تعریفونه برابر ارزښته دي یعنې له یوه څخه بل لاس ته راځي او په څټ یا برعکس یعنې لیکو:

تعریف: د فنکشن  $f$  پوله ارزښت، چې  $x$  و  $p$  ته نږدې کیري،  $L$  دی، ټیک هلته یا هلته او هلته یا هلته او په څټ، یا له دې لاس ته راځي او په څټ یا برعکس چې د هر  $\varepsilon > 0$  لپاره یو  $\delta > 0$  شتون ولري، داسې چې د هر  $x$  لپاه د  $0 < |x-p| < \delta$  سره  $|f(x)-L| < \varepsilon$  هم باور ولري.

دلته هم په همدومره بسیا کوو، که څه هم روښانه کیدل نورې شننې ته هم اړتیا لري.

دې ته دلته په اخر کې بیا گوته نیسم، چې دا شمیرپوهنیز یا ریاضیکي ډول لیکني ستونځمنې دي او باید ترې تیر شو، د ترادفونو او فنکشنونو لپاره.

دا نور پاتې درس هم په همدې ترتیب گران لیکونکي لیکلی چې زه نور پرې نه غبریزم.

دا بسیا کوي، چې کتاب د بنوونځیو څخه راټول شي او له سره ولیکل شي.

ستاسو له سړې سينې څخه – که ومو لوسته- ډېره مننه.

ستاسو ډاکتر ماخان شينواری.

د ډاکتر ماخان شينواري ليکنې:

1988 Vienna (Austria):

لومړی:

H.K. Kaiser , M. Shinwari : Aproximation compact pological algebra : contributions to  
general algebra 6 ; Page 117 – 122

1987 Vienna (Austria):

دویم:

Diss . Uni. Interpolation und Aproximation durch Polynime in Universalen Algebren .  
Wien

*Dissertation at the Interpolation and Aproximation by Polynome in universal Algebras,  
University of Vienna/Austria*

لاندې د شميرپوهنې پښتوټول کتابونه په المان کې د ،، افغانستان کلتوري ودې ټولنه، له  
خوا چاپ شوي دي

2000 Bonn (Germany):

دریم: د شمیرپوهنې ستر کتاب : د شمیرپوهنې برسیره د انجنري، فزیک او اقتصاد لپاره ، همداسې د بنوونکو او زده کونکو لپاره ( دا کتاب په ۹۰۰ مخونو کې چاپ او دا نوې لیکنه به یې ځنو ځایونو غزېدلې او ځنې ځایونه ترې لرې شوي دي)

2003 Bonn (Germany):

څلورم: ځمکچپوهنه (هندسه) ، په سلو، زرو کې شمیرنه، د گټې – او کټې د کټې شمیرنه ، د احتمالي شمېرنه کتاب د بنوونځي ټولې اړتیاوې پوره کوي

2003 Bonn (Germany):

پنځم: الجبرونه ( د الجبر بنسټونه دي)

2003 Bonn (Germany):

شپږم: د شمیرپوهنې انگرېزي – پښتو ډکشنري.

2003 Bonn (Germany):

اووم: د شمیرپوهنې الماني - پښتو- او پښتو الماني ډکشنري

*Mathematical dictionary German/ Pashto and Pashto/German*

2003 Bonn (Germany):

اتم: دفرنځيال برابرېون ( دا کتاب په دې څانگه کې يو پيل دی، ساده ليکل شوی)

*Differential equation Translation; An Introduction*

Bonn (Germany): 2003

نهم: د شمیر پوهنې فرمولونو ټولگه

*Mathematical Formulas*

2003 Bonn (Germany):

لسم: شميرپوهنه له عربي په پښتو

1997 Bonn (Germany):

يوولسم: د افغانستان په هکله سپينې خبرې: په المان کې

،،د افغانستان روغي او بيا ابادولو ټولنه،، له خو

يادونه: له ۲۰۰۰ کال دمخه ډاکتر ماخان شينواري د ،،د افغانستان روغي او بيا ابادولو ټولنه،، له خوا درې ساسي مجلې هم را وستلي.

د ډاکتر ماخان ،،ميري،، شينواري ليکنې او ژباړې چې په چاپيدو يې پيل کيږي

2012 Bonn; Germany; Kabul Afghanistan

ژباړې:

: Prof. Brinkmann. (From Brinkmann.du.de)

لاندي د برينکمن ليکنې چې له پرينکمن ن ج څخه ژباړل شوي دي.

۱ - شميرپوهنه د بنوونځي لپاره لومړی ټوک

۲ - شميرپوهنه د بنوونځي لپاره دويم ټوک

۳ - شميرپوهنه د بنوونځي لپاره دريم ټوک

۴ - د احتمالي شميرنه د بنوونځي لپاره

۵ - احصايه يا ستاتيستيک د بنوونځي لپاره

لاندي کتابونه د شتوتگارت د پوهنتون د استادانو د لکچرونو څخه چې د شتوتگارت پوهنتون ن ج څخه خپاره شوي را ژباړل شوي.

۶ - انالیزی ۱

۷ - انالیزی ۲

۸ - کرنبیز الجبر

۹ - د شمیرپوهنی بنسټونه

۱۰ - د فرمولونو ټولګه

۱۱ - فنکشنل انالیز

۱۲ - وکتور شمیرنه

نورې ژباړې

۱۳ - له [www.grundstudium.info/linearealgebra](http://www.grundstudium.info/linearealgebra) څخه: کرنبیز الجبر

۱۴ - Georg Guttenbrunner گڼونپوهنه یا د اعدادو تیوري

زما لیکنې

Bonn (Germany):

۱۵ - د شمیرپوهنی ستر کتاب دویم چاپ د پوره تغیراتو سره : دا کتاب د شمیرپوهنی برخې برسیره د

انجنري، فزیک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زده‌کوونکو لپاره پوره ګټور دی. په کتاب کې د اړتیا سره زیاتونه او کونه راغلي

۱۶ - ځمکچپوهنه ( هندسه ) دویم چاپ د پوره تغیراتو سره

۱۷ - الجبر بنسټونه دویم چاپ له تغیراتو سره

۱۸ - ډېری پوهنه یا ست تیوري

۱۹ - د شمیرپوهنی سم اند ( منطق ریاضي)

- ۲۰ - د یو څو شمیر پوهانو ژوندلیک
- ۲۱ - د شمیر پوهني گډې وډې لیکنې
- ۲۲ - داهم ژباړه ده، خو لیکونکی یې متأسفانه راڅخه نابلد شوی: د مشتق او انتیگرال شمیرنو ته تمرینونه او اوبیوني یا حلونه یې
- ۲۳ - د شمیر پوهني انگریزي پښتو او عربي + درې ډکشنري
- ۲۴ - د شمیر پوهني پښتو انگریزي ډکشنري
- ۲۵ - د شمیر پوهني پښتو ډکشنري د شمیر پوهنیزو وییونو په پښتو روښانه ونه
- ۲۶ - د زره له کومې (دا هغه لیکنې دي، چې ځنې یې په نړیول جالونو کې خپرې شوي دي.)
- ۲۷ - د افغانستان په هکله سپینې خبرې، چې وبه غزیري.
- نوري لیکنې، چې په ژباړه یې پیل شوی، خو لا پوره نه دي
- د شتوتکارت پوهنتون لکچرنوتونو څخه ، چې د شتوتگارت پوهنتون ن ج څخه خپریري:
- د گروپونو تیوري
- د بنوونځي لپاره فزیک د برینکمن لیکنه
- له پنځم ټولگي څخه تر اووم ټولگي پورې ژباړل شوی ( دا چې زما دویم مسلک فزیک دی، دا لیکنې ژباړم. دا هم د دې لیکوال یوه ډېره بڼه لیکنه ده، چې د شمیر پوهني په څیر- دلته هم زیات تمرینونه د حل یا اوبیوني سره په کې راغلي او ماته زیات گټور برېښي)
- دا لاندې د بنوونځي کتابونه دا اوس پای ته ورسیدل:
- شمیر پوهنه د اوم ټولگي له پاره
- شمیر پوهنه د اتم ټولگي له پاره

شميرپوهنه د نهم ټولگي له پاره  
شميرپوهنه د لسم ټولگي له پاره  
شميرپوهنه د يولسم ټولگي له پاره  
شميرپوهنه د دولسم ټولگي له پاره  
رياضي برای صنف دوازده

## د ليکوال ژوند ته لنډه کتنه

ماخان په اولني نوم ميږي شينواری د ارواښادې پستو او ارواښاد نوررحمان زوي په ۱۳۲۰ هـ لمریز کي د شينواریو هسکه مينه کي دي نړۍ ته سترگي راغړولي.

د هسکي ميني د لومړني ښوونځي (د لومړنيو زده کوونکو څخه) څخه وروسته د رحمان بابا ليسه له ۱۹۵۴ تر ۱۹۶۵ پوري (ښوونځي له لومړي ټولگي پيل او د دويم ټولگي څخه گام او پای).



د ۱۹۶۶ تر سپټمبر د کابل طب پوهنځي. له ۱۹۶۶ سپټمبر څخه د اتریش برس، چي هلته يي د شميرپوهني ډاکټري په پوره ستونځو تر لاسه کړه.

د ۱۹۹۸۷ ش ک تر ۱۹۸۸ د فبروري تر پای د دباندنيو چارو وزارت کي مامور.

د ۱۹۸۸ مارچ څخه تر ۱۹۹۲ جون پوري په بن کي د افغانستان جمهوريت سفارت شارژد افير (صفر نه وو).

له هغي وروسته په جرمني کي سياسي پناه. له ۲۰۰۸ مارچ څخه د ۲۰۰۹ دسمبر پوري د د رياضي څانگه کي د پوهني وزارت درسي نساب کي دنده.

ماخان ميري په ۱۹۷۲ کې له لري د ميرمن بناپيري سره واده شوی، چې د واده خبر ورته اتریش ته راغی.

ده د ميرمن بناپيري سره په ۱۹۶۳ ز ک کې کوزده کړې وه.

دوي ته لوي څښتن په اتریش وينا کې د مای په شلم ۱۹۷۹ ز ک دوه بچيان وڅښل، چې ځانگه او اباسين نوميري. ځانگه په المان کې د پوهنتون علمي همکاره وه او د حقوقو ډاکتره ده او اباسين ملي اقتصاد او ټولنيزه سايکولوژي لوستلې.



**Get more e-books from [www.ketabton.com](http://www.ketabton.com)  
Ketabton.com: The Digital Library**