شمیرپوهنه (ریاضي)

ددولسم ټولګي لپاره

لیکونکی ډاکتر ماخان (میرې) شینواری

2016

Ketabton.com

(c) ketabton.com: The Digital Library

نیولیک

پوله ارزښت ۱

د پوله ارزښت خويونه................. ۱۰

د کسري يا ماتو توبعو پوله............. ۱۶

د کلاسیک له لارې د کسري اعدادو ۲۱

د مثلثاتي توابعو پوله ۲۳

د $x \to \pm\infty$ لپاره پوله ارزښت يا ليميټ ۲۹

تولیز خويونه: ۳۱

ناپرېکيدنه ۳۴

د متمادي يا................................ ۴۰

د لــومړي څپــرکي تولګه ۴۷

د څپرکي تمرينونه ۵۰

د تابع منځ ارزښت تغير ۵۷

کمښت ويش يا د تفاضل ويش...................... ۶۰

رابيليدنه يا مشتقشميرنه ۶۳

د x_0 په ځای کې د تابع مشتق او د مشتق تابع ۶۸

د تانجنت او عمود تعريفونه او خويونه ۷۳

د مشتق شميرني يا رابيليدني قوانين ۷۸

د د الجبري توابعو مشتق ۸۱

د زنځيري(مرکب) توابعو مشتق ۸۶

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مثلثاتي توابعو مشتق ۹۰

د مشتق استعمال په طبيعي علومو ۹۵

د جګو درجو مشتق ۹۹
د اکسپوننشل توابعو مشتق ۱۰۳

د لوګاريتم مشتق ۱۰۷

د ايمپليڅيت Implicit تابعو مشتق ۱۱۷
د فصل ټولګه ۱۲۰

د ځېرکي تمرينونه ۱۲۲

درول قضيه ۱۲۸
همغږيزې توابع ۱۳۲

ځای اړونده افراطي ټکي ۱۳۷

وړنټکی ۱۴۳

د کږې يا منحني خبرې ۱۵۳

د ناټاکلو افدو پولې ۱۵۷
د ناټاکلو افدو پولې ۱۶۰
د تانجنت له پاره............ ۱۶۶

د سترو ګټو ۱۶۷
په توليد کې ۱۷۱

ټولګه ۱۷۳

زينټکی(د اس زين) ۱۷۶

د ځېرکي تمرينونه: ۱۷۷

په ټوټه کسرونو ټوټه کونه ۱۸۷

انتيګرالشميرنې ته پيل راوړنه ۱۹۷

(c) ketabton.com: The Digital Library

انتیګرالشمیرنه ۲۰۰

بنستیز یا لومړنۍ تابع ۲۰۴

ناټاکلی انتیګرال ۲۱۰

د ټاکلی انتیګرال......... ...... ۲۱۲

د ټاکلی انتیګرال څخه نا......... ۲۱۶

د انتیګرالونپا......... ۲۱۹

د لوګاریتمي......... .... ۲۲۲

د بدلون قانون ۲۲۴

ټوټه انتیګرالونه ۲۳۱

ناپای انتیګرال ۲۴۰

ټولګه ۲۴۴

د څپرکي تمرینونه ۲۴۷

د اینتیګرال شمیرنی استعمال ۲۵۳
د دوه کرښو څخه رابنده ۲۵۶

څرخېدونکي تنونه: ۲۶۴

ټولګه ۲۷۷

تمرینونه: ۲۷۹

د لیکونکي ژند ته کتنه
د نصاب د دولسم ټولګي ناسمونونه

(c) ketabton.com: The Digital Library

سریزه

ګرنو هیوادوالو!

ما په کلونو کې د نصاب لهپاره دا د دولسم ټولګي د پښتو او دري کتابونه لیکلي وو، خو په هغه وخت کې دا کتابونه د پوهنې وزارت له خوا چاپ نه شو او په ډېره خواشینۍ سره باید ووایم، چې په ځای یې کتابونه چاپ کړل، خو ناسم، چې نه یې ژبه سمه وه او نه یې شمیرپوهنیزه خوندویونه.

دا زما له خوا لیکل شوي کتابونه د معیار (د نړۍ د معیار) سره سم لیکل شوي او د لته یې ګرانو زده کوونکو ته وړاندې کوم، هیله ده، چې ګټه به ترې واخلي.

د نصاب له پاره د چاپ شوي کتاب د بوې برخې ناسمون به د کتاب په اخر کې ځای په ځای کړم.

ما څو واره د افغانستان د پهنې وزارت څخه هیله کړې، چې اجازه راکړي، تول د ښوونځي کتابونه ، چې ما لیکلي، دوی ته وړاندې او د سرهسم ولیم، خو د کتابونو د ناسمون مسئولیت او یا هیڅ څوک د څه مسئولیت په غاړه نه لري.

زه دا ټول د ښوونځي کتابونه ګرانو لوستونکو ته وړاندې کوم، خو ځنو کتابونو کې به داسې راغلي وي، چې زما د ناتوانۍ له امله به مې د یوه کتاب ځنې برخې بل کتاب کې ځای په ځای کړې وي، چې له دې امله د ګرانو لوستونکو څخه هیله، چې د هر څه له مخه دې، د کتاب سریزه وګوري.

ما چې لیکنې جمهورریس او د پوهنې وزارت ته لیکلي، هم مل دي.

ګرانو هیوادوالو!

ماته به بخښنه کړۍ، زه له دې نور زیات زور نه لرم، چې ښه سریزه او نور اړین څه ولیکم. دا زما لیکنې نورې همداسې ومنۍ، چې څنګه درته وړاندې کیږي. په لیکنو کې به زما د لیکنیزو ناسمونو نور ناسمونونه نه وي. هیله ده، چې ګټه به ترې پورته کړي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱ . پوله ارزښت

۱ . لیمیت یا حـد(پوله ارزښت) "The Limit”

موږ لاندې د

اعدادو ترادف لرو:

$$(I)\quad \frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},...,\frac{1}{n}$$

$$(II)\quad \frac{3}{2},\frac{4}{3},...,\frac{n+1}{n}$$

$$(III)\quad 2,4,6,...,2n$$

که n د ناپای په لور لاړ شي، نو د پورته ترادفونو څخه (I)د صفر په لور، (II) د یو په لور او (III) د ناپاي په لور ځي.

د Limit (لاتین) معنا پوله یا حد دی. په پخواني روم کې د یوه ښار د کلا نوم هم Limit وو، چې په ریاضیاتوکې ، د پولې مفهوم لري. د حد د کاروني مفهوم په دې کې پروت دی، چې د یوې تابع سلوک داسې وڅیړو لکه په افقي محور(دx محور یعنې"abscissa ") باندې، چې د تابع د x قیمتونه یوه حد(پولې) ته ورنږدې کیږي.

وبه ګورو، چې لیمیټ په ریاضیاتو کې د مشتق د پیژندلو لپاره کارول کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیتونه:

- ایا تاسو په ورځني ژوند کې د لیمیټ یا پولې له کلمې سره بلد یاست؟

- ایا تاسو په ورځني ژوند کې یوه بیلګه راوړی شئ، چې یوه لیمیټ ته له دواړو لورو، یعنې له ښئ لورې څخه و کیڼې لورې ته او همداډول له کیڼې لورې څخه و ښئ لورې ته نږدې شئ؟

- ایا د حیرتان او ترمز ترمنځ پول د افغانستان او ازبکستان ترمنځ له دواړو لورو پوله یا حد دی، که څنګه؟

- ایا دا په ټاکلي ځاي کي پوله یاحد دی، که څنګه؟

د پورته فعالیتونو څخه دا لاندې د لاسه کوو:

پورته راوړل شوې د لیمیټ بیلګې په یوه ټاکلي ځای کې د توابعو یا د ځنو عملي بیلګو لیمیټونه یا حدونه دي، چې موږ یې په ریاضیاتو کې هم په یوه ټاکلي ځای کې لیمیټ، پوله یا حد بولو.

موږ اوس لاندې بیلګه د پایلیزې روښانه ونې لپاره راوړو:

بیلګه ۱:

یوه د $f(x)=2x$ تابع او د P_0 یوټکی دې ورکړ شوی وي، چې د P_0 ټکی د وضعیه کمیاتو په سیستم کې (3,6) وضعیه قیمتونه لري نو :

1- دتابع جدول وکاږئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

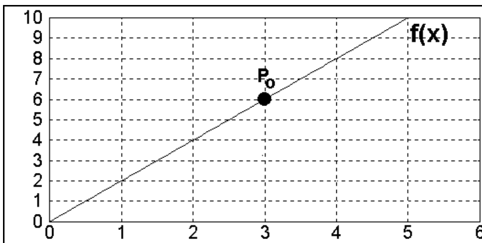
2- د تابع ګراف یا څیره انځور کړئ.

3- د$f(3)$ قیمت پیداکړئ او د$f(x)$ پرحرکت باندې بحث وکړئ که x و3 ته نږدې شي.

4- په شکل کې د $f(x)$ حد ته تلنه روښانه کړئ.

ښوونه:

1- د تابع جدول



2- د تابع شکل

3 - موږ $f(3) = 6$ لرو او غواړو د درې قیمتونوڅخه چې له ښۍ او کیڼې لورې 3 ته ورنږدې کیږي، و ګورو، چې په دې درې ارزښتونو کې تابع چیرته ځي.

ولاړ جدول:

x_k	$f(x_k)$	x_k	$f(x_k)$
2,98	5,96	3,001	6,002
2,99	5,98	3,01	6,02
2,999	5,998	3,02	6,04

په پورته جدول کې ګورو،چې د f ارزښتونو سره له کیڼې لورې له پورته څخه وکښته لورې ته 6 ته نږدې کیږو او همداسې له ښۍ لورې له کښته څخه و پورته لورې ته هم6 ته نږدې کیږو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

--- ------------

پروت جدول روړو:

له ښۍ لورې څخه کيڼې لورې ته   له کيڼې لورې څخه ښۍ لورې ته

$\longrightarrow$ 3 $\longleftarrow$

x	2.98	2.99	2.999		3.001	3.01	3.02
f(x)	5.96	5.98	5.998		6,002	6.02	6.04

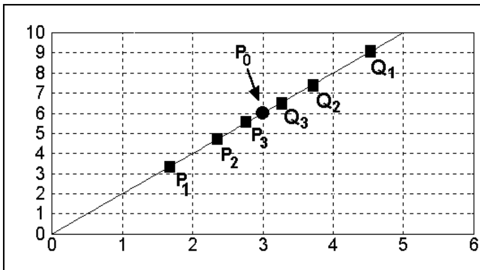
$\longrightarrow$ 6 $\longleftarrow$

په درې پلونو يا قدمونوکې د f(3) قيمت دf(x) له قيمتونو سره پرتله کوو، کهx و3 ته ورنږدې شي.

دا حالت موږ ته په ګوته کوي چې: که x و 3 ته ورنږدې شي، نو د f(x) ليميټ به په 6 برابر شي او داسې يې ليکو: $\lim_{x\to 3} f(x) = 6$

او داسې يې لولو: د f(x) ليميټ يا پوله که x د درې په لور لاړ شي.

4- اوس ګراف په لاندې توګه رسموو او کيڼې لورې ته هدفمند ټکي - لکه په پورته جدول کې- په نخښه کوو.



د مخامخ شکل له مخې... $P_1, P_2, P_3,$ ټکي په پام کې نيسو، چې د P_0ټکي ته تل له کيڼې لورې نږدې کيږي.

او همداسې ... $Q_1, Q_2, Q_3,$ ټکي چې له ښۍ لورې P_0 ټکي ته نږدې کيږي

(c) ketabton.com: The Digital Library

کتل کیږي: هرڅومره، چې پورته ټکي و P_0 ټکي ته نږدې کیږي په همغه کچه د تابع قېمتونه و 6 ته نږدې کیږي (د $P_0(3,6)$ ټکي قېمت له امله).که په ګراف کې x د x=3 ځای ته نږدې شو، نو د تابع قېمت و 6 قېمت ته نږدې کیږي.

وایو: 6 د f(x) تابع لیمیټ دی، د $x \to 3$ (لوستل: x د3 (درې) په لوري ځي یا درې ته نږدې کیږي) لپاره.

د لیمیټ لپاره لیکبڼه په دې ډول تعریف شوې: $\lim_{x\to 3} f(x) = 6$

د پورته فعالیتونو او بیلګو څخه دا تعریف لاس ته راوړو:

پیژند(تعریف): د f(x) تابع یو لیمیټ (حد)L لري، د x لپاره که x د یوه حقیقي عدد c په لوري تږلی لاړ شي او داسې یې لیکو: $\lim_{x\to c} f(x) = L$ لوستل: د f(x) لیمیټ برابر په L دی، د c <- x لپاره.

په ځنو توابعو کې لیمیټ، لکه چې ولیدل شو، په داسې سادګۍ لاس ته نه شو راوړي.

یوه بیلګه راوړو، چې دا لاندې پوښتنې په کې ځواب شوې وي:

- ایا یوه تابع په خپل ورکړ شوي ځای کې لیمیټ درلودی شي، چې هلته تعریف نه وي ؟

- اودا کار که کدونکی وي ، څنګه کیدی شي؟

بیلګه ۲ : تابع $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}; x \neq 1$ راکړ شوې.

د تابع جدول او ګراف وکاږئ.

x له ښی لوري څخه1ته نږدې کیږي x له کیڼې لوري 1 ته نږدې کیږي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$\longrightarrow 1 \longleftarrow$

x	0.98	0.99	0.999		1.001	1.01	1.02
f(x)	1.98	1.99	1.999		2.001	2.01	2.02

$\longrightarrow 2 \longleftarrow$

د f(x) تابع حرکت تر بحث لاندې ونيسئ که x و 1 ته نږدې شي يعنې $x \to 1$. له دواړو يعني له ګراف او جدول څخه دا پايله لرو، چې f(x) د حقيقي عدد 2 په لور هڅيږي، يعنې: $\lim_{x \to 1} f(x) = 2$	خبره کښل کيږي

له پورته شکل څرګنديږي: تابع په هغه ټکي کې چې ليميټ يې شميرل شوی، تعريف نه ده.

شميرنيزه بښوونه: که يوه تابع په صورت او مخرج کې داړونده قيمت لپاره صفر ولري او دا صفرځايونه له منځه تللی شي- لکه زموږ په بيلګه کې- نو د ليميټ يا بولې پيدا کولو لپاره داسې مخ ته ځو:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)}=\lim_{x\to 1}x+1=2$$

او وايو چې دا دول تابع په صفر ځای کې تشيا (خاليګاه) لري يعنې په دې ځای کې تعريف نه ده .

(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیت: د سرک ښی لورې ته دا مخامخ تخته لرو: - ووایئ، چې دا تخته څه مفهوم لري؟ په همدې توګه د سرک په سر کیڼې لورې ته هم همداسې یوه تخته ځړول شوې. دا هم په همغه مفهوم.	

دا پوښتنه مو دې لاندې روښانه ونې ته لاښودوي:

بیلګه ۳: د $x \neq 0$ ، $f(x) = \frac{|x|}{x}$ تابع راکړ شوې.

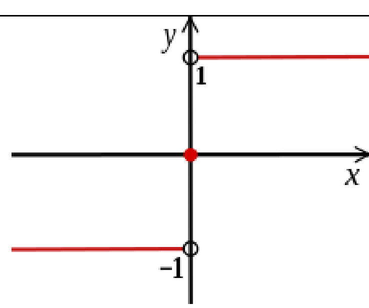
1- تابع ولیکئ، بې له دې، چې د مطلقه قیمت نښه | | استعمال کړئ.

2- د تابع ګراف وکاږئ.

3- که x له ښی لورې 1 ته نږدې شي، نو د f(x) قیمت پیدا کړئ.

4- که x له کیڼې لورې-1 ته نږدې شي، نو د f(x) قیمت پیدا کړئ.

5- وښایاست چې پورته تابع یعنې f(x) څو حدونه لري.

ښوونه: 1-تابع بې له سمبول ،، ،،| | په لاندې ډول لیکو $f(x) = \begin{cases} 1; x > 0 \\ -1; x < 0 \end{cases}$ 2- د تابع ګراف انځوروو: مخامخ	

(c) ketabton.com: The Digital Library

3- که x له ښي لور 1ته نږدې شي، نود لرو:

$$\lim_{x\to 1} f(x) = -1$$

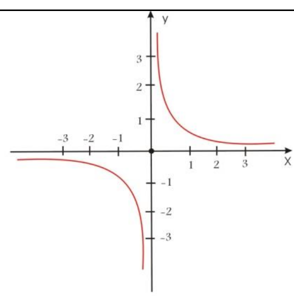
4- کهx له کيڼې لور 1- ته نزدې شي، نو دf(x) ليميټ دی: $\lim_{x\to -1} f(x) = -1$

5- ګورو چې که x دوه قيمتونو 1 او1- ته نږدې شي، نو f(x) دوه د ليميټ قيمتونه لري يعني$\lim_{x\to \pm 1} f(x) = \pm 1$ ، نو له دې امله f(x) ليميټ نه لري.

له پورته بيلګې پايله:

په پورته بيلګه کې د$-1 \to x$ لپاره تابع ښی ليميټ لري او د $1 \to x$ لپاره کيڼ ليميټ لري.

د دې لپاره دې د ګراف پورته کښل شوی شکل هم وکتل شي.

بيلګه۴: $f(x)=\frac{1}{x}$ تابع لرو، چې $x\neq 0$ دی د $f(x)=\frac{1}{x}$تابع په x=0 ځای کې ارزښت نه شي نيولی، يعني په x=0 کې تعريف نه لري. دا تابع په صفرځای کې قطب(Pol) لري. مخامخ شکل دې وکتل شي.	

يادونه: هغه تابع، چې مخرج يې صفر وي او صورت يې صفر نه وي، وايو چې تابع په دې د مخرج په صفرځای کی قطب Pol لري.

$x=0$ته د نږدې کېدو لپاره ترادف $(x_n)=\frac{1}{n}$ ، ټاکو.

د اړوندې تابع د قيمتونوترادف $n = \left(\frac{1}{\frac{1}{n}}\right) = (x_n)$دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا د $n>0$ لپاره یو نامحدود صعودي(جګېدونکی) ترادف دی.
او د $n<0$ لپاره نزولي- یا متناقص(ټیټېدونکی) ترادف دی.
دا په دې معنا، چې د f(x) تابع په صفرځای کې لیمیټ نه لري. دا هلته یو قطب لري.

د توابعو د لیمیټ لپاره دا لاندې پایله لرو:
د $f(x), x\in D_f$ تابع د x_0 په ځای کې یو کیڼ اړخیز لیمیټ $a_l=\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x)$ لري، که د هر ترادف (x_n) لپاره، چې n غړي یې د x_0 کیڼ لور ته پراته وي او د توابعو ارزښتونه $f(x_n)$ د a_l په لور هڅیږي.

په ورته توګه ښی اړخیزه لیمیټ: د $f(x), x\in D_f$ تابع د x_0 په ځای کې یو ښی اړخیز لیمیټ $a_r=\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f(x)$ لري، که د هر ترادف (x_n) لپاره، چې n غړي یې د x_0 ښي لور ته پراته وي او د توابعو ارزښتونه $f(x_n)$ د a_r په لور وهڅیږي..

که تابع f(x) همغه لیمیټ L ولري که x له ښی اویا کیڼي لورې و c ته نږدې شي، نو **لیمیټ** شته دی او د L سره برابر دی.

دا داسې لیکو: $\lim\limits_{x\to c} f(x)=L$

تمرینونه :

د دې لاندې هرې تابع (پیژند ورشو(د تعریف ناحیه) domain اوارزښت ورشو(د قېمتونو ناحیه)) range یا codomainپیدا کړئ. د توابعو ګراف وکاږئ او حدونه (پولې) یې پیداکړئ.

$$1)\ \lim_{x\to -1}(x^2+x)\ ,\ 2)\ \lim_{x\to 4}(x^2+x)\ ,\ 3)\ \lim_{x\to 0}|x|\ ,\ 4)\ \lim_{x\to 2}\frac{x}{x}$$

$$5)\ \lim_{x\to 1}\sqrt{\frac{x^2}{x}}\ ,\quad 6)\ \lim_{x\to -2}\frac{x^2-4}{x+2}\ ,\quad 7)\ \lim_{x\to 3}\frac{x-3}{x^9-9}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

10- که وي: $f(x)=\begin{cases}2+x; x<1\\ x^2 \quad ; x\geq 1\end{cases}$

الف) د تابع ګراف وکاږئ.

ب) $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ پیدا کړئ.

۱. ۲ د لیمیټونو یا پوله ارزښت خویونه:

" Properties of Limits "

پوهیږو: په ریاضیاتو کې ټول توابع چې لرو، د ساده توابعو ترکیب combination دی، لکه دتوابعو جمع، تفریق، ضرب، وېش (چې مخرج یې صفر نه وي) او زنځیرونه compositon . موږ دوه غوره او ساده توابع f(x) = c او g (x) = x لرو.که دواړه توابع سره یوځای کړو، نو لاس ته ترې راځي:

$h(x) = x + C$, یا $L(x) = cx$, یا $m(x) = x.x= x^2$ او داسې نور.

وبه ګورو،چې دلته هم ټولې څلور عملیې همداسې اجراکیږي، لکه د اعدادو په ترادفونوکې.

فعالیت:

په دې برخه کې د په خوښه د ثابتو توابعواو کتمټ یا ایدنتیک توابعو Identity function لیمیټونه د جمعې، تفریق، ضرب او همداسې د ویش(چې مخرج یې صفر نه وي) له لارې وشمیرئ (وروسته به وګورو، چې دا د لیمیټ خویونو تر نامه څیړل کیږي).

- د په خوښه یوه پولینوم تابعو لیمیټ پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

- د f(x) = x او g(x) = x - 2 توابعوڅخه کار واخلئ، چې درې نورې په خوښه توابع ترې لاس ته راوړئ. د دې توابعو لیمیټونه پیداکړئ. دا لیمیټونه جمع ، تفریق، ضرب او تقسیم(چې مخرج صفر نه وي) کړئ.

- که شونې شي، چې د یوې تابع لیمیټ د تابع له حل څخه لاس ته راوړلای شو، یعنې که د بیلګې په توګه ولرو: $\lim_{x\to2} f(x) = \lim_{x\to2} 3 = 3$ نودا تابع به څنګه لیکو؟

- ایا د پورته عملیې په څیر دا عملیه د هرې ثابتې او کثمت تابع لپاره ریښتونې ده؟

موږ له پورته څخه دا لاندې پایله لرو:

که $f(x) = x$ او $g(x) = 2$ ولرو، نو لرو: $\lim_{x\to1} f(x) = 1 , \lim_{x\to1} g(x) = 2$

2- که $h(x) = f(x) + g(x)$ وي، نو لرو: $h(x) = x + 2$

3- د h(x) ګراف وکاږئ.

4- د تابع لیمیټ د جدول له لارې

$\longrightarrow 1 \longleftarrow$

0	.5	.8		1.2	1.5	2
2	2.5	2.8		3.2	3.5	4

$\longrightarrow 3 \longleftarrow$

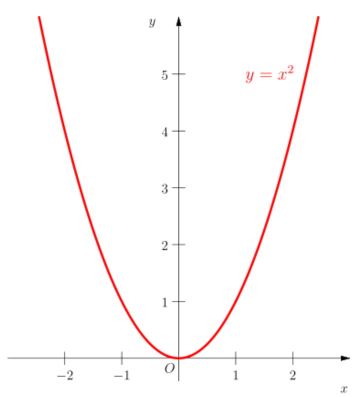
په یاد ولرئ: $\lim_{x\to1} h(x) = \lim_{x\to1}(x+2) = 3$ او $\lim_{x\to1} h(x) = \lim_{x\to1} f(x) + \lim_{x\to1} g(x)$

له پورته څخه د لیمیټ لومړی خوي لاس ته راځي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی: د لیمیټ د جمعي خوي: د د وه یا څو توابعو د جمعي لیمیټ د همغو اعدادو د لیمیټ د جمعي سره برابر دی: $\lim_{x\to 1} h(x) = \lim_{x\to 1} f(x) + \lim_{x\to 1} g(x)$

دویم: د لیمیټ د تفریق خوي: دا د پورته سره ورته حل لري. دا کار دې ګران زده کوونکي سرته ورسوي.

بیلګه ۱: که $g(x) = x^2$ او $f(x) = x$ وي، نو پیدا کړئ: $f(x) \cdot f(x) = g(x)$ ب) د تابع شکل وکاږئ: پ) پیدا کړئ: $\lim_{x\to 2} f(x)$ ت) پیدا کوئ: $\lim_{x\to 2} g(x)$	

حل: الف) $f(x) \cdot f(x) = x \cdot x = x^2 = g(x)$

ب)

x	-2	-1	0	1	2
f (x)	4	1	0	1	4

پ) $\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} x = 2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ت) له ګراف څخه لاس ته راځي: $\lim\limits_{x\to 2} g(x)=\lim\limits_{x\to 2} x^2=4$

له دې امله لرو: $\lim\limits_{x\to 2} x^2=\lim\limits_{x\to 2}(x\cdot x)=\lim\limits_{x\to 2} x\cdot\lim\limits_{x\to 2} x=2\cdot 2=4$

له پورته بیلګې څخه دا پایله لرو:

دریم: د لیمیټ د ضرب خوي:

د دوه یا ډیرو توابع د ضرب لیمیټ د هغو توابعو د لیمیټونو د ضرب سره برابر دی.

$$\lim_{x\to a} x^2=\lim_{x\to a}(x\cdot x)=\lim_{x\to a} x\cdot\lim_{x\to a} x=a\cdot a=a^2$$

بیلګه:

که $f(x)=x$, $g(x)=x^2$ وي، دا لاندې لیمیټونه پیدا کړئ:

$a)\ \lim\limits_{x\to -1} f(x)\ ,\ \lim\limits_{x\to -1} g(x)$ $\qquad b)\ \lim\limits_{x\to -1} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to -1} g(x)$

$c)\ h(x)=g(x)\cdot f(x)$ $\qquad d)\ \lim\limits_{x\to -1} f(x)=\lim\limits_{x\to -1}(x)=-1$

پیدا کړئ: $\lim\limits_{x\to -1} h(x)$

حلa: $a)\ f(x)\cdot f(x)=x\cdot x=x^2=g(x)\ \Rightarrow \lim\limits_{x\to -1} x^2=1$

x	-2	-1	0	1	2
f (x)	4	1	0	1	4

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$b)\ \lim_{x\to -1} f(x)\cdot \lim_{x\to -1} g(x) = -1\cdot 1 = -1 \ \Rightarrow \ \lim_{x\to -1} x^2 = 1$$

$$c)\ h(x) = x^2\cdot x = x^3 \quad ,\ d)\ \lim_{x\to -1} h(x) = \lim_{x\to -1} x^3 = -1$$

بیلګه:

$f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 5}{2x^2+1}$ تابع لرو، $\lim_{x\to 3} f(x)$ پیدا کړئ.

حل: $f(x)$ د دوه توابعو $g(x) = x^2 - 2x + 5$ او $L(x) = 2x^2 + 1$ وېش دی.

که x او 3 ته نږدې شي کیدای شي لیمیټ د تابع د حل له لارې په $x = 3$ کې پیدا شي:

$$\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3} \frac{x^2 - 2x + 5}{2x^2 + 1}$$
$$= \frac{\lim_{x\to 3}(x^2 - 2x + 5)}{\lim_{x\to 3}(2x^2 + 1)}$$
$$= \frac{3^2 - 2\cdot 3 + 5}{2\cdot 3^2 + 1} = \frac{8}{19}$$

له پورته بیلګې ښخه لاندې لاس ته راځي:

څلورم: د لیمیټ د ویش خوي(مخرج د صفر سره برابر نه دی):

دیوې کسرې تابع لیمیټ(یعني یوه تابع، چې د دوه توابعو له وېش(مخرج له صفر سره برابر نه

دی) ښخه لاس ته راغلې وي) د تابع د صورت لیمیټ او د مخرج لیمیټ (مخرج له صفر سره

نابرابر دی) د وېش سره برابر دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بېلګه:

د $g(x)=\sqrt{3-x}$ ګراف وکاږئ او پیدا کړئ.

$$a)\ \lim_{x\to 2} g(x)\quad ,\ b)\ \lim_{x\to -1} g(x)\ ,\ c)\ \lim_{x\to 3} g(x)$$

حل: په لاندې توګه مخ ته ځو:

الف)

$$\lim_{x\to 2} g(x)=1$$
$$\lim_{x\to 2}\sqrt{3-x}=\sqrt{\lim_{x\to 2}(3-x)}=\sqrt{1}=1$$

ب) له ګراف څخه: $\lim_{x\to -1} g(x)=2$

یادونه: $\lim_{x\to -1}\sqrt{3-x}=\sqrt{\lim_{x\to -1}(3-x)}=2\sqrt{4}$

$$c)\ \lim_{x\to 3^-} g(x)=\lim_{x\to 3^-}\sqrt{3-x}=\sqrt{\lim_{x\to 3^-}(3-x)}=\sqrt{0}=0$$

(د $f(x)\geq 0$ لپاره او د ټولو x قیمتونولپاره، چې c ته نږدې کیږي).

له پورته څخه لاس ته راوړنه:

پنځم: د لیمیټ د جذر (ریښې)خوې: د یوې تابع چې د جذر (ریښې) لاندې وي لیمیټ برابر دی، که چیرې تابع او لیمیټ دواړه د جذر لاندې ونیول شي.

پوښتنه: که $\lim_{x\to -2} f(x)=3$ وي، نو $\lim_{x\to -2}(f(x))^n$ پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

یادونه: د یوه پولینوم حد تیک داسې شمیرل کیږي، لکه د یوې تابع حد. د مخه مو وویل،چې یو پولینوم د ساده توابعو د مختلو نښلونو څخه لاس ته راځي.

تمرینونه.

که $\lim_{x\to4} h(x)=-2$, $\lim_{x\to4} g(x)=0$ او $\lim_{x\to4} f(x)=5$ وي، نو پیدا کړئ:

1) $\lim_{x\to4}(f+g)(x)$, 2) $\lim_{x\to4}\left(\frac{g}{f}\right)(x)$, 3) $\lim_{x\to4}(fg)(x)$

4) $\lim_{x\to4}(h(x))$, 5) $\lim_{x\to4}\left(\frac{g}{f}\right)(x)$, 6) $\lim_{x\to4}(2h-3g)(x)$

7) $\lim_{x\to4}(f\cdot h(x)$, 8) $\lim_{x\to4}\left(\frac{2h}{3f-g}\right)(x)$, 9) $\lim_{x\to4}(h(x)+f^2(x))$

10) $\lim_{x\to2}(6x^3-2x+5x-3)$, 11) $\lim_{x\to-2}\frac{3x-2}{x^2+1}$

د کسري - یا ماتو توابعو لیمیټ" Lmit of Rational functions

موږ د پولینومونو دا لاندې ویش لرو:

$$R(x)=\frac{Q(x)}{P(x)}=\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_0}{b_mx^m+b_{n-1}x^{m-1}+...+b_0};P_m\neq0$$

او د لیمیټ په هکله یې فکر کوو، چې د $b_0\neq0$ سره $\frac{a_0}{b_0}$ ترې لاس ته راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

فعاليت:

مورږ پولينوم $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$ لرو. ددې پولينوم ليميټ دx د مختلفو قيمتونو لپاره څنګه پيداکولای شو؟

- که $x\to 0$ د صفر په لورې لاړ شي يا صفر ته ورنږدې شي.

- که $x\to 1$ يوه ټاکلي عدد ته ور نږدې شي.

- که $x\to\infty$ د ناپای په لورې لاړ شي.

-که د دريمې درجې پولينوم $P(x)=5x^3+3x^2+3$ ولرو، نو ددې پولينوم ليميټ دځلورو په خوښه قيمتونو لپاره پيداکړئ.

پو هيږو، چې د پولينومي توابعو ليميټ د ورکړل شوو x قيمتونو لپاره، لکه د نورو ساده توابعو په څېر، چې د جمعې، تفريق،ضرب او وېش(چې مخرج صفر نه وي) په څير ورکړل شوي دي، شمېرلای شو. غواړو د ناطقو توابعويا کسري توابعو ليميټ پيداکړو.

د ناطقو توابعو د ليميټونوشميرلو لپاره،که شته وي، له مختلفو لاروڅخه کار اخلو:

که ولرو: $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to a}f(x)}{\lim_{x\to a}g(x)}$، نو د تابع خويونه د $\lim_{x\to a}g(x)\neq 0$ لپاره ساده کوو او د پورته پولينوم وېش، چې کسري تابع ده، ليميټ شميرو.

فعاليت: که $\frac{x^2-4}{x+2}$ ولرود $x\neq -2$ سره.

- ددې تابع حد د$x->-2$ لپاره پيدا کړئ.

- ددې تابع حد د $x\to 1$ لپاره پيدا کړئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

- ددې تابع حد د $x \to -1$ لپاره پیدا کړئ

- د تابع پیژندورشو ولیکی!

- دا تابع څنګه ساده کولی شئ، چې پوله یې د $x \to -2$ لپاره وشمیرلی شو؟

د پورته فعالیت په بنسټ کولای شو، چې دکسري توابعو حدونه د مختلفو اعدادو لپاره پیداکړو او همداسې یوه کسري تابع که شوني وي، هغه ځایونه ته ورنږدې هم پیدا کړو، په کومو کې چې تابع تعریف نه وي.

ددې موضوع د روښانولو لپاره د مختلفو کسري توابعو څو بیلګې راوړو:

بیلګه ۱:

پیداکړئ: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x}{x+2}$ که $x=1$ وي. دا تابع تعریف ده او لرو:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x}{x+2}=\frac{(1)^2+1}{1+2}=\frac{2}{3}$$

که $x=1$ ځای په ځای کړو(Substitue) نو لاس ته راځي: $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)$

بیلګه ۲: پیدا کړئ: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-1}{x+3}$

حل: دا چې تابع په $x=0$ کې تعریف ده، نو لرو: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-1}{x+3}=\dfrac{0-1}{0+3}=-\dfrac{1}{3}$

بیلګه ۳: پیدا کړئ: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{x+1}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل: دا چې تابع په $x=1$ کې تعریف ده، نو لرو:

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2+x-2}{x+1}=\frac{1^2+1-2}{1+1}=\frac{0}{2}=0$$

که په یوه ځای یا عدد کې تابع تعریف نه لري، نو د مختلفو لارو یا متودونو څخه کار اخلو، چې لیمیټ یې پیداکړو، که شته وي.

بیلګه ۴: پیداکړئ: $\lim_{x\to2}\frac{x^2-6x+8}{x-2}$

حل: دا چې $f(x)$ تابع په $x=2$ چې تعریف نه لري، نو حد د تابع د حل له لارې نه شي پیداکیدای. داکیدای شي داسې پیدا کړو، چې د تابع صورت په ضریبونو تجزیه کړو.

$$\lim_{x\to2}\frac{x^2-6x+8}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{(x-4)(x-2)}{(x-2)}$$

د تابع لیمیټ که x و 2 ته نږدې شي، دا مانا لري، چې $x\neq2$ دی.

دا کسري تابع و $\lim_{x\to2}(x-4)$ رالنډیږي او لاندې لیمیټ لري:

$$\lim_{x\to2}(x-4)=2-4=-2$$

بیلګه ۵: پیداکړئ: $\lim_{x\to16}\frac{\sqrt{x}-4}{x-16}$

ګورو، چې تابع په $x=16$ کې تعریف نه لري یعنې باید $x\neq16$ وي.

په یاد ولرئ چې: $\sqrt{b}-\sqrt{a}$ او $\sqrt{b}+\sqrt{a}$ یو د بل مزدوج دي.

حل: د پورته تابع صورت او مخرج د $\sqrt{x}-4$ له مزدوج $\sqrt{x}+4$ سره ضرب کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lim_{x\to16}\frac{\sqrt{x}-4}{x-16}=\lim_{x\to16}\frac{\sqrt{x}-4}{x-16}\cdot\frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}+4}$$
$$=\lim_{x\to16}\frac{(x-16)}{(x-16)(\sqrt{x}+4)}$$
$$=\lim_{x\to16}\frac{1}{\sqrt{x}+4}=\frac{1}{\sqrt{16}+4}=\frac{1}{8}$$

بیلګه ۶: پیدا کړئ: $\lim_{x\to3}\frac{3-x}{\sqrt{x+1}-2}$

حل: تابع په $x=3$ کې تعریف نه لري، نو مخرج او صورت د مخرج په مزدوج ضربوو اولرو:

$$\lim_{x\to3}\frac{3-x}{\sqrt{x+1}-2}=\lim_{x\to3}\frac{3-x}{\sqrt{x+1}-2}\cdot\frac{\sqrt{x+1}+2}{\sqrt{x+1}+2}$$
$$=\lim_{x\to3}\frac{(3-x)(\sqrt{x+1}+2)}{(x+1-4)}$$
$$=\lim_{x\to3}-1(\sqrt{x+1}+2)$$
$$=\lim_{x\to3}-(\sqrt{3+1}+2=-4$$

بیلګه ۷:

پیدا کړئ: $\lim_{x\to1}\frac{\frac{5}{2x-3}+5}{x^2-1}$

حل: تابع په $x=1$ کې تعریف نه لري، نو په لاندې توګه مخ ته ځو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lim_{x\to1}\frac{\frac{5}{2x-3}+5}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{\frac{5+10x-15}{2x-3}}{x^2-1}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{10x-10}{(2x-3)(x^2-1)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{10(x-1)}{(2x-3)(x-1)(x+1)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{10}{(2x-3)(x+1)}=\frac{10}{(2(1)-3)(1+1)}$$

$$=\frac{10}{-2}=-5$$

د کلاسيک لارې د کسري اعدادو ليميټ:

اوس يوه بله تابع د ځيرنې لاندې نيسو، چې $g(x)$ يې بولو: $g(x)=\dfrac{x^2+x-2}{x-1}$

دلته هم دا پوښتنه کوو، چې که $x=1$ ځای ته نږدې شي، نو د $g(x)$ تابع د تابع کوم قيمتونه غوره کوي: مونږ

بيا هغه ځای په پام کې نيسو، چې $x=1$ د مخ لورې(کيڼې لورې) ته خورا نږدې پروت وي او هغه ځای، چې د $x=1$ وروسته يا ښۍ لورې ته خورا نږدې پروت وي:

$$g(1-h)=\frac{(1-h)^2+(1-h)-2}{(1-h)-1}$$

$$=\frac{(1-2h+h)^2+(1-h)-2}{-h}=\frac{-3h+h^2}{-h}=3-h$$

$$g(1+h)=\frac{(1+h)^2+(1+h)-2}{(1+h)-1}$$

$$=\frac{(1+2h+h)^2+(1+h)-2}{h}=\frac{-3h+h^2}{h}=3+h$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا دواړه لاس ته راوړني یا پایلې اوس داسې تشریح کوو:

که h ناپای کوچنی وټاکو، یعني هغه ځایونه راونیسو چې $x=1$ ځای ته ناپای نږدې پراته وي، نو د تابع ارزښتونه به هم و 3 ته ناپای نږدې پراته وي. عدد 3 د $x=1$ ځای لپاره د $g(x)$ تابع د حد قیمت دی. ددې لپاره لیکو: $\lim_{x\to 1} g(x)=3$

تمرینونه:

د لاندې معادلو حدونه پیدا کړئ، که شته وي.

1) $\lim_{x\to 2}(6x^3-2x^2+5x+3)$

2) $\lim_{x\to -1}(x^7+2x-5)$

3) $\lim_{x\to 0}\dfrac{(x+2)^2-4}{x}$

4) $\lim_{x\to 0}\dfrac{5x^2+7x}{(2x-3)^2-9}$

5) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{x+3}-\frac{1}{3}}{x}$

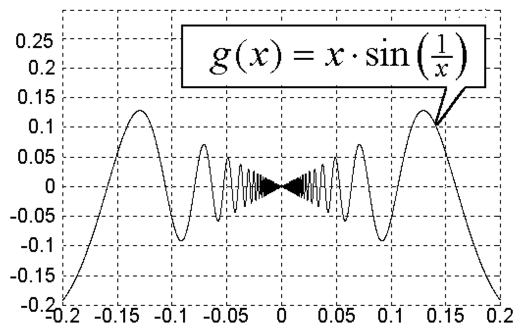
6) $\lim_{x\to 4}(\frac{1}{x}-\frac{1}{4})(\frac{1}{x-4})$

7) $\lim_{x\to 2}\dfrac{\frac{2x}{x^2+1}-\frac{4}{5}}{x-2}$

8) $\lim_{x\to 4}\dfrac{x-4}{\sqrt{x}-2}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مثلثاتي توابعو حدونه Limit of trigometric function



فعاليت:

_ دساین پوله یعنې $\lim_{x \to a} \sin x$ د x د مختلفوقیمتونولپاره پیدا کړئ،که $x \in [0;2\pi]$ وي:

_ که $x \to 0$ وي. _ که $x \to 30$ وي. _ که $x \to 45$ وي._ که $x \to 60$ وي.

_ که $x \to 90$ وي.- که $x \to 135$ وي.- که $x \to 270$ وي._ که $x -> 2\pi$ وي.

- د پورته ورکړشوو قیمتونولپاره د کوساین $\cos x$ لیمیټ پیدا کړئ.

قضیه: که x په رادیان ورکړ شوی وي، نو $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ دی.

ښوونه: دx=0 لپاره تابع $\frac{\sin x}{x}$ تعریف نه لري او ناټاکلې بڼه $\frac{0}{0}$ لري.

موږ غواړو، د$x \to 0$ او $\frac{\sin x}{x}$ لپاره په لاندې ډول یو جدول ولیکو(په پورته مساوات کې x په رادیان اندازه کیږي):

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

x په درجه	x په راديان	$\sin x$	$\frac{\sin x}{x}$
10°	0.1745	0.1736	0.9948
5°	0.0873	0.0872	0.9988
3°	0.05235	0.05233	0.9996
1°	0.0174532	0.0174524	0.9995
30'	0.00872664	0.00872653	0.99999
6'	0.00174532	0.00174532	≈ 1
3'	0.00087266	0.00087266	≈ 1
1'	0.000291	0.000291	≈ 1
. . .	. . .	. . .	. . .

په پورته جدول کې ګورو، چه د x لپاره $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ قيمت غوره کوي.

په شميرنيزه توګه د $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ ښوونه په لاندې ډول مخ ته بيايو:

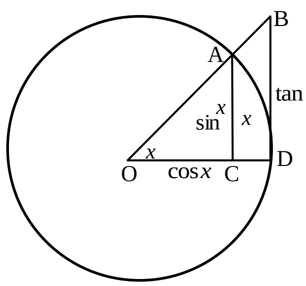
يوه دايره په پام کې نيسو چې د هغې مرکز (0) اوشعاع يې OD او 1 ده $\overline{OA}=\overline{OD}=1$ (لاندې شکل وګورئ). دA له ټکي څخه پر $\overline{OD}$ يو عمود رسموو، چې دا وړانګه په C ټکي کې غوڅوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د D په ټکي باندې پر دايرې يو مماس رسموو، داممماس له $\overline{OA}$ څخه غځيدلي کر ښه د B په ټکي کې غوڅوي.

اوس A د D سره تړو:

موږ لرو :



$$\sin x = \frac{\overline{AC}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{AC}}{1} = \overline{AC}$$

$$\cos x = \frac{\overline{OC}}{\overline{OA}} = \overline{OC}$$

$$\tan x = \frac{\overline{DB}}{\overline{OD}} = \overline{DB}$$

دا چې x په راديان اندازه کيږي، نو لرو: $\overset{\frown}{AD} = x$

له پورته شکل څخه لاندې نا مساوات لرو: $\overset{\Delta}{OBD} > \overset{\angle}{AOD} > \overset{\Delta}{AOC}$

همداسې لرو:

$$\frac{1}{2}\cos x.\sin x < \frac{1}{2}\overline{OD^2}.x < \frac{1}{2}\overline{OD}.\tan x$$

په پورته نامساواتو کې $\overline{OD} = 1$ ږدو او د نامساواتو ټولې خواوې په دوو کې ضربوو، نو لرو: $\cos x.\sin x < x < \tan x$

يا په همدې ډول ليکلای شو: $\cos x.\sin x < x < \frac{\sin x}{\cos x}$

که د پورته نامساواتو ټولې خواوې پر $\sin x$ وويشو، نو لرو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\cos x < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

یا: $$\frac{1}{\cos x} > \frac{\sin x}{x} > \cos x$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x} > \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} > \lim_{x\to 0}\cos x$$

دا چي د $x \to 0^+$ لپاره $\cos x \to 1$ دی، نو لرو:

$$\frac{1}{1} > \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} > 1$$

$$1 > \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} > 1$$

گورو چي په عین وخت کې $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ له 1 لوی او هم له یو 1 کوچنی دی، نو له دې نامساواتو څخه دا لاندې مساوات لرو: $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$

پام: که $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ او $x = -\alpha$ و لیکو، نو دا لاندې ترې لاس ته راځي:

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{\sin(-\alpha)}{-\alpha} = \frac{-\sin\alpha}{-\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\alpha}$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0^-}\frac{\sin\alpha}{\alpha}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له پورته دواړو مساواتو څخه غوښتنه لاس ته راځي:

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1}$$

بیلگه ۱: $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}$ پیدا کړئ.

حل: که $2x=\alpha$ اوکه $x\to 0$ وي، نو $\alpha\to 0$ او $\frac{\sin 2x}{2x}=\frac{\sin\alpha}{\alpha}$ لرو.

له پورته مساواتو څخه لاس ته راځي:

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=1\Rightarrow 2\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}=2\cdot 1=2$$

بیلگه ۲:

وښایاست $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{2x}$

که $y=5x$ وي او $x\to 0$ ، نو $y->0$ هم لرو:

$$\frac{\sin 5x}{5x}\quad\frac{5}{2}=\frac{\sin 5x}{\frac{5}{2}(2x)}\quad\frac{5}{2}=\frac{\sin 5x}{2x}$$

$$=\frac{5}{2}\frac{\sin y}{y}$$

له دې امله لرو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{5}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin y}{y}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin y}{y}\frac{5}{2}=\lim_{x\to 0}\frac{5x}{2x}$$
$$=\frac{5}{2}\cdot 1=\frac{5}{2}$$

تمرینونه: دا لاندې غوره قضیه وښایاست.

که x په رادیان ورکړ شوی وي، نو لرو $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1$ او لاندې اجرات وکړئ:

الف) تانجنت $\tan x$ د $\sin x$ او $\cos x$ په ترمونو ولیکئ.

ب) $\frac{\tan x}{x}$ د $\sin x$ او $\cos x$ په ترمونو و لیکئ.

پ) دپورته قضیې لیمیټ پیدا کړئ.

ت) ایا قضیه رښتیا ده؟

لاندې لیمیټونه (حدونه)وشمېرئ.

$$1)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x+\frac{\pi}{6})}{x+\frac{\pi}{6}}\ ,\ 2)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x},\ 3)\ \lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\tan^2 x}\ ,$$

$$4)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x}\ ,\ 5)\ \lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{\sin 3x}\ ,\ 6)\ \lim_{x\to 0}\sin 5x\ \cos 3$$

$$7)\ \lim_{x\to 0}\frac{\tan(2x-1)}{4x^2-1}\ ,\ 8)\ \lim_{x\to 0}\sqrt{\cos 2x-\cos x+1}+\sin^2 x)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $x\to\pm\infty$ لپاره پوله ارزښت یا لیمیټ

د $\frac{Q(x)}{P(x)};\ P(x)\neq 0$ کسري توابعو لپاره مو لیمیټونه وشمیرل، چې x په خوښه وو.

اوس $\frac{Q(x)}{P(x)};\ P(x)\neq 0$ لپاره لیمیټونه غواړو و شمیرو، که $x\to\pm\infty$ وي.

فعالیت:

زده کوونکي دې د هرې لاندې تابع د حد له شمېرلو د مخه، د توابعو ګرافونه انځور کړي او په ګرافونو کې دې یې دې ته پام وي،چې دا ښنګه په تعریف شوې ورشوې کې ځغلي.

لومړی: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{5}{x-2}$ پیدا کړئ.

د 5 وېشنه په یوه ډېر لوی (ناپای) مثبت(منفي) عدد باندې یو ډېر کوچنی مثبت(منفي) عدد ورکوي یعنې $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{5}{x-2}=\frac{5}{\pm\infty}=0^{\pm}$.

ګراف G_f یو پروت اسیمپتوت $y=0$ لري، چې له پورته او کښته ګراف ته ور نږدې کیږي.

دویم: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{-3}{x+1}$ پیدا کړئ.

د -3 وېشنه په یوه ډېر لوی مثبت(منفي) عدد باندې یو ډېر کوچنی مثبت(منفي) عدد ورکوي یانې $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{-3}{x+1}=\frac{-3}{\pm\infty}=0^{\pm}$.

ګراف G_f یو پروت اسیمپتوت $y=0$ لري، چې له پورته او کښته ګراف ته ور نزدې کیږي.

دریم: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{5}{x^2-2x}$ پیدا کړئ.

په مخرج کې یوازې x^2 ستر رول لوبوي. د مربع کونې له لارې هر عدد مثبت

(c) ketabton.com: The Digital Library

کیږي.که 5 په یوه ډېر لوی مثبت عدد وویشل شي، نو یو خورا کوچنی مثبت عدد تري لاس ته راځي، یعنې $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{5}{x^2-2x}=\frac{5}{+\infty}=0^+$

ګراف G_f یو پروت اسیمپتوت $y=0$ لري، یوازې له پورته لور ور نږدې کېدنې سره.

څلورم: $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-3}{x^2-2}$ پیدا کړئ.

د مخرج مربع کونې سره منفي عددونه هم مثبت کیږي.د -3 وېشنه په یوه ډېر لوی مثبت عدد باندې یو ډېر کوچنی منفي عدد ورکوي یانې $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-3}{x^2-2}=\frac{-3}{+\infty}=0^-$.

ګراف G_f یو پروت اسیمپتوت $y=0$ لري، یوازې له کښته ګراف ته ور نږدې کیږي.

د پرېښودنې- یا ترې صرفنظر کونې یا له ترې تیرېدنې اصول:

لومړی: $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x-1}{x^2-2}$ پیدا کړئ.

په صورت کې د x جګعدد(توان؟)، په مخرج کې د x^2 توان په پام کې نیسو او همداسې له ټولو ثابتو تېرېږو (ټولې ثابتې پرېښول کیږي،صرف نظر ترې کیږي) او بیا x لنډیږي.
که 1 په ډېر لوی مثبت(منفي) عدد وویشل شي، نو
$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x-1}{x^2-2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x^2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x}=0^\pm$ ترې لاس ته راځي.

(څیره G_f پروت ګاونډ(مجانب) $y=0$ لري، چې له پورته او کښته ورنزدې کیږي.

دویم: غواړو د $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-2}{x+2}$ تابع حل پیدا کړو.

حل: په صورت کې د x^2 او په مخرج کې د x له ټولو توانونو په پام کې نیولو او له ټولو ثابتو تریږو(صرفنظر ترې کوو) او بیا یې د x سره لنډوو. په روښانه توګه ټول حدونه$\pm\infty$ لاس ته راځي یعنې $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-2}{x+2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}x=\pm\infty$.

شکل G_f مائله اسیمپتوت راکوي، ځکه چې د صورت درجه له مخرج څخه د 1 په اندازه ستره ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دریم: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{-2x^2-2}{3x^2+2x}$ پیدا کړئ.

په صورت او مخرج کې د x^2 ټول توانونه په پام کې نیسو او له ټولو ثابتو تیرېږو او بیایې د x^2 سره لنډوو.

ټولې پولې په روښانه توګه $\frac{2}{3}$-راکوي

یعني $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{-2x^2-2}{3x^2+2x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{-2x^2}{3x^2}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{-2}{3}=-\dfrac{2}{3}$

شکل G_f پرته اسیمپټوت راکوي، چې $y=-2/3$ ده.

څلورم: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{-2x^2+2x-1}{3x^3+2x^2-3x+2}$ پیداکړئ

په صورت کې له x^2 څخه کوچنیو ټولو توانونو او په مخرج کې د x^3 له ټولو کوچنیو توانونو او همداسې له ثابتو تیرېږو. که -2 په $\pm\infty$ ووېشل شي، نو یو کوچنی مثبت یا منفي عدد یعنې $0^{\pm}$ $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{-2x^2+2x-1}{3x^3+2x^2-3x+2}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{-2x^2}{3x^3}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{-2}{3x}=\dfrac{-2}{\pm\infty}=0^{\pm}$ ترې لاس ته راځي.

شکل(څیره) G_f یو پروت اسیمټوت $y=0$ لري، چې له پورته او کښته لور ورنږدې کیږي.

شمیرنیز حلونه(د شمیرنې له لارې حل):

اول: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x-1}{x^2-2}$ وشمیرئ.

په صورت او مخرج x^2 له نوکانو(لینده کیو یاقوسونو) راوستنې او بیا د x^2 سره لنډونې وروسته مخرج د 1 په لور ځي او صورت دصفر په لور، یعنې صورت ترمونه صفر ته نژدې کیږي.

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x-1}{x^2-2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\frac{2}{x^2}\right)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}{1-\frac{2}{x^2}}=\frac{0^{\pm}}{1}=0^{\pm}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

شکل G_f یوه مایله اسیومپټوت(مجانب) لري، ځکه چې د صورت درجه د مخرج له درجې څخه په 1 کوچنی ده.

دویم: وشمیرئ: $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2x^2+1}{x^4-2x^2+2}$

په صورت او مخرج کې هغه د لوی توان x یعنې x^4 له نوکانو یا لینډکیوبهر نیسو او بیا په ترتیب شمیرنیزه عملیه مخ ته بیایو ، نو لاس ته ترې راځي:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^4\left(\frac{-2}{x^2}+\frac{1}{x^4}\right)}{x^4\left(1-\frac{2}{x^2}+\frac{2}{x^4}\right)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{-2}{x^2}+\frac{1}{x^4}}{1-\frac{2}{x^2}+\frac{2}{x^4}}=\frac{0^-}{1}=0^-$$

ټولیز خویونه:

بیلګه۱: پیداکړئ: $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x^2-2}{x+1}$

په پورته بیلګه کې داسې مخ ته تللي یو،چې په صورت کې له ټولو عددونو څخه تیرېږو، چې د خپلواکي متحولي توان له 1 کوچنی یعنې صفر وي او په صورت کې له ټولو هغو خپلواک متحولو تیرېږو، چې توان یې له 2 څخه کوچنی وي.. ګورو، چې په صورت کې x له کوم ضریب سره پاتې کیږی، له دې امله پورته تابع د مثبت-منفي ناپای په لور ځي.

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x^2-2}{x+1}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x\left(3x-\frac{2}{x}\right)}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x-\frac{2}{x}}{1+\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{+\infty}{1}=+\infty$$

بیلګه ۲: پیدا کړئ: $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-1}{x^2-2}$

په پورته بیلګه کې په صورت کې له 1 او مخرج کې له 2 څخه تېرېږو او بیا صورت او مخرج په x ویشو. لاس ته راوړنه یې د x په یوه ثابت عدد وېشل دي. چې د $x\to\infty$ سره تابع ± 0 ته ځي، یعنې: $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-1}{x^2-2}=0\pm$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلگه ۳: پیدا کړئ: $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2x^2-2}{3x^2+2x}$

په صورت کې له 2 او مخرج کې له $2x$ څخه تیرېږو او د x^2 سره یې لنډوو او په دې ډول لاندې پایله لرو: $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2x^2-2}{3x^2+2x}=-\frac{2}{3}$

تمرینونه:

د لاندې تمرینونو حدونه د پورته ورکړشوو مختلفو لارو له لارې وشمیرئ:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{6}{x^2-x}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^4+x^2+x+6}{x^3-3x+4}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^5+x^2-x+9}{x^4+x^2-x-5}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+x^2-x+7}{x^3-x+5}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2-2}{x+1}$$

متمادیت(ناپرېکیدنه)"Continuity"

د درس په دې برخه کې لولو ، چې یوه تابع په یوه ټکي یا یوه انټروال کې کوم حالت غوره کوي. ایا دا تابع په کوم ځای کې ټوپ وهي، یا پرې کیږي او که یا په متمادي یعنې نه پرېکیدنې ډول د اینتروال په دننه کې ځغلي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

موږ په دې موضوع د تابع متمادیت څیړو او متمادیت تعریفوو

فعالیت:

لاندې توابع لرو:

$$f(x) = x^2 - 1 \ , \ f(x) = \frac{1}{x} \ , \ f(x) = \frac{|x|}{x}$$

- د دې درې توابعو شکلونه وکاږئ.

- وګورئ، چې د توابعو ګرافونه څنګه ځغلي. په کومه تابع کې ګراف ترړلی ځغلي او چرته ماتیږي، ټوپ وهي او ...

له پورته فعالیتونو څخه لاندې پایله لرو:

د توابعو متمادیت Continuous functions

په دې موضوع کې موږ د یوې تابع د متمادیت په هکله څیړنه کوو او د متمادیت پیژند(تعریف) ورکوو.

پیژند:

که b د f تابع تعریفورشو (- ساحه) کې یو حقیقي عدد وي. د f تابع په b متمادي بلل کیږي، که د ټکي (b.f(b)) نږدې د f ګراف داسې وکښلی شو، بې له دې چې د پنسل څوکه له کاغذ څخه پورته کړو.

له دې امله $f(x) = x^2 - 1$ تابع او $f(x) = \frac{1}{\text{x}}$ تابع د $x = b$ په ټکي کې متمادي ده.

$f(x) = \frac{|x|}{x}$ تابع په $x = 0$ متمادي نه ده یانې ټوپ وهي کیږي.(څیره په ۵ –م مخ کې)

(c) ketabton.com: The Digital Library

تابع په $x = a$ کې غیر متمادي ده، که پرې شي(تشیا ولري)، ټوپ ووهي او یا ماته شي.

لرو: $\lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = 1$ او $\lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = -1$ نو له دې امله $\lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x}$ په $x = 0$ کې نشته یعني تابع د $x = 0$ په ټکي کې متمادي نه ده.

بیلګه ۱:

که $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & ; \quad x \geq 1 \\ 1-x & ; \quad x < 1 \end{cases}$ وي، نو:

الف) د تابع ګراف وکاږئ.

ب) پیدا کړئ $\lim_{x\to 3} f(x)$

پ) پیداکړئ: $\lim_{x\to 1} f(x)$

که تابع په $x = 3$ او $x = 1$ کې متمادي وي.

حل:

الف) ګراف دې د ګرانو لوستونک دنده وي.

ب)
$$\lim_{x\to 3} f(x) = (2x+1) = 7$$
$$f(3) = 7$$

پ)
$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (2x+1) = 3$$
$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (1-x) = 0$$

د ب) او پ) له مخې لرو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) \neq \lim_{x\to 1^-} f(x)$$

له دې امله تابع په $x=3$ ناپرېکيدونې او $x=1$ کې پرېکيدونکې ده.

بيلګه ۲:

که $f(x)=\begin{cases}\frac{x3+x}{x} & ; x\neq 0\\ 3 & ; x=0\end{cases}$ **وي.**

الف) فنکشن رسم کړئ

ب) و څيرئ، چې تابع په $x=2$ او $x=0$ کې متمادي ده او که نه؟

حل: الف) د تابع ګراف لپاره

x	-2	-1	0	1	2
f(x)	5	2	3	2	5

ب) $\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2}\frac{x^3+x}{x} = \lim_{x\to 2}(x^2+1) = 2^2+1 = 5$

$$f(2) = \frac{2^3+2}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

له دې امله د f ليميټ شته او $\lim_{x\to 2} f(x) = f(2)$ دی، نو تابع متمادي دی که $x=2$ وي.

وي دې $x = 0$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\frac{x^3+x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}\frac{x^3+x}{x} = 1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دې معنا دا ده، چې $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$ او په دې معنا دی، چې $f(0) = 3$

دا دا معنا لري، چې $\lim_{x\to 0} f(x) \neq f(0)$

تابع په $x = 0$ کې غیرمتمادي ده.

بېلګه۳: که $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x + 3}$, $x \neq -3$ وي.

ایا $f(x)$ تابع په $x = -3$ کې متمادي ده؟

حل: تابع $f(-3)$ تعریف نه لري، نوله دې

امله تابع په $x = -3$ کې متمادي نه ده.

له دې بېلګې او د تېرو درسونو څخه لرو:

تعریف (پېژند):

که f یوه تابع وي، چې د ټولو x لپاره په همغه واز اینتروال کې چې $x = c$ لري تعریف وي،نو د f تابع په $x = c$ کې متمادي بلل کېږي، که دا لاندې شرایط پوره وي:

1- که $f(x)$ تعریف وي.

2- که $\lim_{x\to c} f(x)$ شته وي (موجود وي).

3- که $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$ رښتیا وي.

که تابع د ټولو $x \in (a,b)$ لپاره متمادي وي، نو تابع په واز اینتروال (a,b) کې هم متمادي ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بيلګه ۴:

که $f(x)=\begin{cases}2x^2+1 & ; & x\le 1\\ 4+x & ; & x>1\end{cases}$ وي.

وګورئ، چې تابع چيرته متمادي او چيرته غيرمتمادي ده.

حل: په $x=1$ کې f تعريف لري

$$f(x)=3$$
$$\lim_{x\to -1} f(x)=\lim_{x\to -1}(2x^2+1)=3$$
$$\lim_{x\to -1} f(x)=\lim_{x\to -1}(4+x)=5$$
$$\lim_{x\to -1} f(x)\neq \lim_{x\to -1} f(x)$$

له دې امله تابع په$\text{x} = 1$ کې غيرمتمادي ده

بيلګه ۵:

که $f(x)=\begin{cases}2x^2+1 & ; & x<2\\ 3 & ; & x=2\\ x+3 & ; & x>2\end{cases}$ وي، نود $f(x)$ تابع متماديت په $x=2$ کې وڅيړئ.

حل: تابع $f(x)$ په $x=2$ کې تعريف لري او لرو $f(2)=3$

$$\lim_{x\to 2^+} = \lim_{x\to 2^+}(x+3)=5$$
$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^-} f(x)$$
$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}(x^2+1)=5 \Rightarrow \lim_{x\to 2} f(x)=5$$

دا چې $f(x)=3$ دی، نو له دې امله $\lim_{x\to 2} f(x)\neq f(2)$.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا په دې معنا دی، چې تابع په $x = 2$ کې غیرامتمادي ده.

بیلګه ۶:

که $f(x) = \begin{cases} 2\sin x & ; \quad x \le \frac{\pi}{2} \\ ax^2 + \pi^2 & ; \quad x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$ وي، نو:

a داسې پیدا کړئ، چې f په $x = \frac{\pi}{2}$ کې متمادي وي.

حل: $\lim\limits_{x \to \frac{\pi^-}{2}} f(x) = 2 \quad ; \quad \lim\limits_{x \to \frac{\pi^+}{2}} f(x) = a\frac{\pi^4}{4} + \pi$

$f(x)$ متمادي ده، نو له دې څخه لاس ته راځي:

$$a\frac{\pi^2}{4} + \pi^2 = 2$$

و

$$= \frac{a}{4}\pi^2 = 2 - \pi^2$$

$$a\pi^2 = 8 - 4\pi^2 \Rightarrow a = \frac{8}{\pi^2} - 4$$

تمرینونه:

1- یوه په خوښه تابع ولیکئ او د تابع ګراف وکاږئ او وګورئ، چې تابع چېرته تعریف ده او متمادیت یې وښایاست.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په لاندې پوښتنو کې وڅیړی، چې تابع په ورکړشوي ټکي کې متمادي یا غیرمتمادي دي.

2) $f(x)=x^2+5(x-2)^7$; $x=3$ 3) $f(x)=\dfrac{x+3}{(x^2+2x-5}$; $x=-1$

4) $f(x)\dfrac{\sqrt{8-x^2}}{2x^2-5}$; $x=-2$ 5) $f(x)=\dfrac{1}{(x-3^3)}$; $x=3$

6) $f(x)=|x-3|$; $x=3$ 7) $g(x)=\dfrac{|x|}{x}$; $x=0$

د متمادي یا ناپرېکیدونکو توابعو خویونه

دلته دا خویونه همغه د لیمیټ خویونه دي.

فعالیت:

-1 د f او g توابعو جمع پیداکړئ:

$(f+g)(x)=$...........

-2 د f او g توابع په $x=2$ کې متمادي دي، نو:

$\lim_{x\to a} f(x)=$........... & $\lim_{x\to a} g(x)=$

-3 د لیمیټ قیمتونه استعمال کړئ:

$\lim_{x\to a}(f(x)+g(x))=\lim_{x\to a}(f+g)(x)$

$=$.................:...

$=$......................:...$=(f+g)(a)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له دې امله $(f+g)$ په $x=a$ کې متمادي ده.

که f او g توابع په $x=c$ کې متمادي وي، نو د لاندې توابعو څخه یې هره یوه په $x=c$ کې متمادي ده.

1- د توابعو جمع $f+g$

2- د توابعو تفریق $f-g$

3- د توابعو ضرب $f\cdot g$

د توابعو وېش $\dfrac{f}{g}\ ;\ g\neq 0$

بیلگه۱:

که $f(x)=\sin x+1$ **او** $g(x)=x^2+3x-2$ **وي، نو:**

1- f او g په $x=1$ کې متمادي دي.

2- وښیئ، چې ایا

الف) $f(x)+g(x)=\sin x+x^2+3x-1$ او

ب) $(\sin x+1)(x^2+x^2+3x-1)$ په $x=1$ کې متمادي او که غیرمتمادي دي.

حل: $1)\ \lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)=\sin 1+1$

نو f په $x=1$ کې متمادي دی.

$$\lim_{x\to 1} g(x)=g(1)=2$$

نو g په $x=1$ کې متمادي ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

2- الف):

$$a)\ \sin x + x^2 + 3x - 1 = (\sin x + 1) + (x^2 + 3x - 2)$$
$$= f(x) + g(x) = (f+g)(x)$$

د متمادي توابعو جمع په $x = 1$ کې متمادي ده.

ب) :
$$(\sin x + 1)(x^2 + 3x - 2) = f(x) \cdot g(x)$$
$$= (f \cdot g)(x)$$

نو د متمادي توابعو ضرب په $x = 1$ کې متمادي دی.

بیلگه ۲:

که $g(x) = 3x - 2$, $f(x) = x + 1$ وي، وښیئ، چې ایا $f(x) \cdot g(x)$ په $x = 2$ کې متمادي ده.

حل:

له پورته څخه لاس ته راځئ، چې $f(x) \cdot g(x)$ متمادي

$$\lim_{x \to 2} f(x) = f(2) = 3$$
$$\lim_{x \to 2} g(x) = 4 = g(2)$$
ده. $f(x) \cdot g(x) = 3x^2 + x - 2$
$$\lim_{x \to 2} f(x) \cdot g(x) = 3(4) + 2 - 2 = 12$$
$$= \lim_{x \to 2} f(x) \cdot \lim_{x \to 2} g(x) = f(2) \cdot g(2) = 3.4 = 12$$

دکینې لورې بند انتروال په [a,b] کې گراف متمادي تابع په گوته کوي یا ښایي، هلته چې $f(a) \neq f(b)$ دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

که ولرو $f(a) < k < f(b)$ ګراف له $(b, f(b))$

ټکي ځخه نشي انځورېدلی تر څو افقي کرښه

$y = k$ د ثابتې k سره غوځه نه کړي.

له پورته څخه دا لاندې غوره جمله لیکلی شو:

که تابع f په بند اینتروال [a,b] کې متمادي اوk د a اوb ترمنځ پروت وي، نو هلته لږ تر لږه یو عددc د f(a) اوf(b) ترمنځ شته، داسې چې f(c) = k دی.

بیلګه ۳: که $f(x) = x^3 + 4x$, $x \in [1,2]$ وي، نو **وښایئ، چې یو** $c \in (1,2)$ **شته، داسې چې** $f(c) = 11$ **وي.**

حل: $f(x)$ یو پولینوم دی نو f په بند اینتروال [1,2] کې متمادي دی.

لاندې لرو:

$$f(1) = 1^3 + 4(1) = 5 \quad ; \quad f(2) = 8 + 4(2) = 16$$
$$5 < 11 < 16 \quad , \quad f(1) \neq f(2)$$

له دې امله یو عدد $c \in (1,2)$ شته، داسې چې $f(c) = 11$ دی.

بیلګه ۴:

که $f(x) = \begin{cases} 2x + 4 & ; \ -1 \le x < 2 \\ |x - 10| & ; \ 2 \le x \le \mathbf{20} \end{cases}$ ي ، نو:

الف) وآزمایئ، چې تابع متمادي ده.

ب) وآزمایئ، چې یو $c \in (-1, 20)$ شته داسې چې $f(c) = 6$ دی او د c ارزښت پیدا کړئ.

حل:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = 2x+4 = 8$$
$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = 10-2 = 8$$

له دې امله لرو:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2} f(x) = 8$$
$$f(x) = 10-2 = 8$$

ګورو چې تابع په [-1, 20] کې متمادي ده.

$$b)\ f(-1)2x\ -1+4 = 2$$
$$f(20)|20-10| = 10 \Rightarrow f(-1) \neq f(20)$$

په دې اساس لرو: $2 < 6 < 10$

له دې امله لرو: $c \in (-1, 20) : f(c) = 6$

$$2x+4 = 6 \Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow x = 1 \in (-1,\ 2)$$
$$|x-10| = 6$$
$$x-10 = 6 \Rightarrow x = 16 \in (-2, 20)$$
$$10-x = 6 \Rightarrow x = 4 \in (-2, 20)$$

$$= 6 \qquad |x-10| \Rightarrow$$

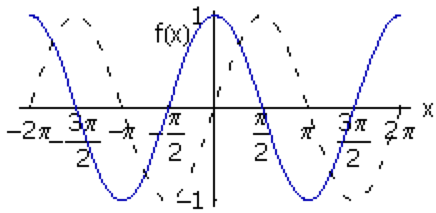
د c ارزښتونه 1, 4, 16 دي.

بیلګه ۵ :

که وي: $f(x) = 2\sin x + 3;\ x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}],$ ، نو وښایئ چې

(c) ketabton.com: The Digital Library

نشاد دهید که $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ $c\in$ شته دی د کوم لپاره چې $f(c)=4$ او c پیدا کړی.

حل : تابع f د ساین تابع ددی ، نو له دې امله f متمادي دی. $f(-\frac{\pi}{2}) = 2\sin -\frac{\pi}{2} + 3 = 2(-1) + 3 = 1$ $f(\frac{\pi}{2}) = 2\sin \frac{\pi}{2} + 3 = 2(1) + 3 = 5$ $f(-\frac{\pi}{2}) \neq f(\frac{\pi}{2})$ مو، لرو : تابع fمتمادي دی او لرو: $1 < 4 < 5$	 ټکي ټکي د ساین ګراف دی. دا ګراف که په ۳ کې ضرب کړی او ۳ ورزیات کړي د بیلګې ګراف راکوي.

دا په دې معنا چې، که $c \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ موجود وي، د هغه لپاره $f(c) = 4$ صدق کوي.

که د دې لپاره c پیدا کړو ، نو په لاس راځي:

$$f(c) = 2\sin c + 3 = 4$$

$$2\sin c = 1 \Rightarrow \sin c = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow c = \frac{\pi}{6}$$

له ګراف څخه واضح ایدل کیږي،، چې f په انتروا ل $[a,b]$ کې متمادي دی، $f(a)$ او $f(b)$ متضادي علامې لري، نو c د منځنی ارزښت قضیې په بنسټ د $f(a)$ او$f(b)$ په

(c) ketabton.com: The Digital Library

منځ کې و K=0 ته لږ تر لږه یو C د a او b په منځ کې داسې شتون لري، چې له هغې نتیجه f(c) = 0 لاس ته راځي.

دا په دې معنا، چې x=c د برابرون یا مساوات f(x) = 0 یو حل دی.

بیلګه۶ :

که $f(x)=x^3+5x-23$ **وي، نو وښایئ،چې د** f **تابع د** x **-محور په اینټروال** (2.3) **کې غوڅوي.**

حل: f **پولینوم تابع ده ، نو** f **په اینټروال** [2,3] **کې متمادي دی.**

$$f(2)=2^3+5(2)-23=-5$$
$$f(3)3^3+5(3)-23=19$$

$f(2)\neq f(3)$ **او د متضادو مخنخښو(علامو) سره.**

له دې امله د $c\in(2,3)$ لپاره لرو چې $f(c)=0$ دی.

لنډ: غیرمتمادي توابع هغه دي، چې په یو کوم ځای کې تعریف نه وي

تمرینونه:

وښایئ چې تابع په ورکړ شوي ټکي کې متمادي ده.

1) $f(x)=x^3-2(x+1)^5 \qquad ; \quad x=2$

2) $g(x)=\dfrac{x^2+3}{(x^2-x+5)(x^2+2x} \qquad ; \quad x=-1$

3) $h(x)=\dfrac{x\sqrt{x}+1}{(x+2)^3} \qquad ; \quad x=4$

(c) ketabton.com: The Digital Library

4- تشريح کړئ، چې ولې تابع $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+3} - \sqrt{2}}{x}$ په $x = 0$ کې غيرمتمادي ده؟

5- که $f(x) = \dfrac{18}{x} + 2\ ,\ \ x \in [2,3]$ وي، و ښايئ چې $c \in (2,3)$ شته داسې چې $f(c) = 10$ وي او c پيدا کړئ.

6- وښايئ چې د لاندې مساوات لپاره يوحل شته:

$$x^3 - 4x + 1 = 0 \quad ; \quad x \in [1,2]$$

7- وي دې: $x \in (\frac{\pi}{2}, \pi) \quad ; \quad f(x) = \sin x + \cos x$ وښايئ، چې مساوات $\sin x + \cos x = 0$ په اينتروال $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ کې يو حل لري.

8- وي دې:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & ; \quad -1 \le x \le 3 \\ 13 - 2x & ; \quad 3 < x \le 7 \end{cases}$$

الف) ايا f په $x = 0$ کې يو متمادي تابع دی؟

ب) $c \in (-1,7)$ داسې پيدا کړئ، چې $f(c) = 0$ وي.

د لـــومړي څپـــرکي ټولګه " Chapter Summary "

پيژند:

د $f(x)$ تابع يو ليميټ L لري، که x ترلی يو حقيقي عدد c ته لاړ شي. په دې معنا چې $f(x)$ لپاره، چې ترلیLته ځي دا دی، چې x ترلی c ته لاړشي او داسې يې ليکو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $f(x), x \in D_f$ تابع د x_0 په ځاي کې يو کيڼ اړخيز ليميټ $a_l = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x)$ لري،
که د هر ترادف (x_n) لپاره، چې n غړي يې د x_0 کيڼ لور ته پراته و ي او د توابعو ارزښتونه $f(x_n)$ د a_l په لور هڅيږي.

په ورته توګه ښی اړخيزه ليميټ:

د $f(x), x \in D_f$ تابع د x_0 په ځاي کې يو ښی اړخيز ليميټ $a_r = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x)$ لري،
که د هر ترادف (x_n) لپاره، چې n غړي يې د x_0 ښي لور ته پراته و ي او د توابعو ارزښتونه $f(x_n)$ د a_r په لور وهڅيږي..

که تابع f(x) همغه ليميټ L ولري که x له ښی اويا کيڼي لورې و c ته نږدې شي، نو ليميټ شته دی او د L سره برابر دی.

دا داسې ليکو: $\lim_{x \to c} f(x) = L$

د پولې يا حد خويونه(خواص) :

که f او g توابع وي، c;Lاو M حقيقي اعداد وي داسې چې $\lim_{x\to c} f(x) = L$ او $\lim_{x\to c} g(x) = M$، نو دا په لاندې توګه ليکلی شو:

1) $\lim_{x\to c}(f+g)(x) = \lim_{x\to c} f(x) + \lim_{x\to c} g(x) = L + M$

2) $\lim_{x\to c}(f-g)(x) = \lim_{x\to c}(f(x) - g(x)) = \lim_{x\to c} f(x) - \lim_{x\to c} g(x) = L - M$

3) $\lim_{x\to c}(f \cdot g)(x) = \lim_{x\to c} f(x) \cdot \lim_{x\to c} g(x) = L \cdot M$

(c) ketabton.com: The Digital Library

--------------------- --

$$4)\ \lim_{x\to c}\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M};\ (M \neq 0)$$

$$5)\ \lim_{x\to c}\sqrt{f(x)} = \sqrt{L}$$

(د $f(x) \geq 0$ او د x د ټولو قیمتونو لپاره، چې c ته ور نږدې کیږي.

قضیه: که x په رادیان ورکړ شوی وي، نو لرو: $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$

قضیه: که x په رادیان ورکړ شوی وي، نو لرو: $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x} = 1$

پیژند: f دې یوه تابع وي او د ټولو x لپاره په یوه واز انټروال کې چې $x = c$ وي ،تعریف وي، نو وایو: f په $x = c$ کې متمادي دی، د لاندې شرایطو سره:

1) $f(x)$ تعریف لري 2) $\lim_{x\to c} f(x)$ شته دی

$$3)\ \lim_{x\to c} f(x) = f(c)$$

که تابع د ټولو $x \in (a, b)$ لپاره متمادي وي، نو تابع په ټول انټروال (a, b) ې متمادي ده.

تعریف یا پیژند : وایو چې یو تابع په یوه بند انټروال $[a, b]$ ې متمادي ده، که تابع له ښئ لورې په $x = a$ کې متمادي وي او له کینې لورې په $x = b$ کې او د واز انټروال (a, b) په هر قیمت کې متمادي وي.

د متمادي توابعو خویونه(خواص): که f او g په $x = c$ کې متمادي وي، نو دا لاندې هره یوه تابع په $x = c$ کې متمادي ده.

لومړی) د توابعو جمع یعني $f+g$ تابع

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم) د توابع تفریق یعنې f-g تابع

دریم) د توابعو ضرب یعنی f.g

څلورم) د توابعو ویش یعنې $g(x) \neq 0$; $\frac{f(x)}{g(x)}$

د منځني قیمت قضیه:

که تابع f په بند انتروال [a,b] کې متمادي وي او k د f(a) او f(b)ترمنځ یو عدد وي، نو لږ تر لږه د a او b ترمنځ یو عدد c شته، د کوم لپاره چې f(c)=k باور لري.

د ځېرکي تمرینونه:

سم ځواب وټاکئ:

که $\lim_{x \to 2} f(x) = 4$ وي، نو $\lim_{x \to 2}(3x - 20)(x + 1)$ ی:

a) 5 b) -5 c) 4 d) 3

ب) پیدا کړئ $\lim_{x \to 1} \frac{x2 + 1}{x2 + 3x - 2}$

a) 1 b) 2 c) 1 d) $\frac{1}{2}$

1- لیمیت پیداکړئ $\lim_{x \to 5} \frac{|x+5|}{x^2 + 3x - 2}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

d) -5 c) -1 b) 5 a) 1

-2 $\lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x}$ دی.

d) 2 c) 1 b) -1 a) -2

-3 $\lim_{x \to 0} \frac{3x - \sin x}{x}$ دی.

d) 3 c) 1 b) -2 a) 2

-4 $\lim_{x \to -2} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 + x - 2}$ دی.

a) $-\frac{5}{3}$ b) $\frac{5}{3}$ c) 0 d) 1

-5 $\lim_{x \to 1.4} [2x + 0.3]$ دی.

d)نشته c) 0 b) 3 a) 1

-6 $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{\tan 2x}$ دی.

a) 1 b) 0 c) $\frac{3}{2}$ d) $\frac{2}{3}$

-7 $\lim_{x \to 4} \frac{x - 4}{\sqrt{x} - 2}$ دی.

a) $2 + \sqrt{2}$ b) 2 c) $\sqrt{2}$ d) 4

(c) ketabton.com: The Digital Library

-8 $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin}{1+\cos 2x}$ دی.

a) 1   b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{4}$ d) 4

-9 لاندې توابع سره جمع کړئ.

$\lim_{x \to 3} f(x) = 5 \quad \& \quad \lim_{x \to 3} (x) = -2$

-10 که $f(x) = x^2 + 1$ وي، پيداکړئ:

$\lim_{x \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$

-11 تابع $f(x) = \begin{cases} 3x - b & ; \quad x \le 3 \\ 10 - x & ; \quad x > 3 \end{cases}$ په $x = 3$ کې متمادي دی، b پيدا کړئ.

-12 وښايئ، چې تابع $f(x) = 3x^2 - x - 5$ په اينتروال $(1,2)$ کې حل لري.

۱۳ - د لاندې ۱ – ۹ توابعو ليميتونه وشمېرئ.

1) $\lim_{x \to -1} (x^2 + x)$ 2) $\lim_{x \to 4} (x^2 + x)$ 3) $\lim_{x \to -2} 2x + 3$

4) $\lim_{x \to 0} |x|$ 5) $\lim_{x \to 2} \frac{x}{x}$ 6) $\lim_{x \to 1} 7$

7) $\lim_{x \to 1} \sqrt{\frac{x^2}{x}}$ 8) $\lim_{x \to -2} \frac{x^2 - 4}{x + 2}$ 9) $\lim_{x \to 3} \frac{x - 3}{x^9 - 9}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱٤-- که وي: $f(x)=\begin{cases}2+x; x<1\\ x^2 \quad ; x\geq 1\end{cases}$

الف) د تابع ګراف وکاږئ.

ب) $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ پيدا کړئ.

15: هغه توابع چې په یوه عدد د بېلګې په توګه صفر کې تعریف نه لري ، څه بلل کیږي

16 پيدا کړئ: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\dfrac{5}{2x-3}+5}{x^2-1}$

17-- $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{-2x^2+1}{x^4-2x^2+2}$ وشمېرئ.

18--

که $f(x)=\begin{cases}2x^2+1 & ; \quad x<2\\ 3 & ; \quad x=2\\ x+3 & ; \quad x>2\end{cases}$ وي، نود $f(x)$ تابع متمادیت په $x=2$ کې وڅېړئ.

۱۹- یوه په خوښه تابع ولیکئ او د تابع ګراف وکاږئ او وګورئ، چې تابع چېرته تعریف ده او متمادیت یې وښایاست.

۲۰ - په لاندې له ۲ – ۷ پوښتنو کې څېړو، چې ایا تابع په ورکړشوي ټکي کې متمادي یا غیرمتمادي دي.

2) $f(x)=x^2+5(x-2)^7 \;;\; x=3$

3) $f(x)=\dfrac{x+3}{(x^2+2x-5} \;;\; x=-1$

4) $f(x)\dfrac{\sqrt{8-x^2}}{2x^2-5} \;;\; x=-2$

5) $f(x)=\dfrac{1}{(x-3^3)} \;;\; x=3$

6) $f(x)=|x-3| \;;\; x=3$

7) $g(x)=\dfrac{|x|}{x} \;;\; x=0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---------------------- --

۲۱- تشريح کړئ، چې ولې تابع $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt{2}}{x}$ په $x=0$ کې غيرمتمادي ده؟

۲۲- که $f(x)=\dfrac{18}{x}+2\ ,\ x\in[2,3]$ وي، و ښايئ چې $c\in(2,3)$ شته داسې چې $f(c)=10$ وي او c پيدا کړئ.

۲۳- وښايئ چې د لاندې مساوات لپاره يوحل شته:

$$x^3-4x+1=0 \quad ; \quad x\in[1,2]$$

۲٤- وي دې: $x\in(\dfrac{\pi}{2},\pi)$; $f(x)=\sin x+\cos x$ وښايئ، چې مساوات $\sin x+\cos x=0$ په اينتروال $(\dfrac{\pi}{2},\pi)$ کې يو حل لري.

۲۵ الف: وښيئ، چې ايا لاندې تابع د x_0 په ځاي کې مفمادي ده.

a) $f(x)=\begin{cases}-2x\\ \sqrt{x}\end{cases}$ c) $f(x)=\begin{cases}\sin x\\ e^x\end{cases}$	د $x_0=0$ $x\le 0$ لپاره د $x_0=0$ ، $x>0$ لپاره د $x_0=0$ $x\le 0$ لپاره د $x_0=0$ ، $x>0$ لپاره	b) $f(x)=\begin{cases}2\\ x^2+1\end{cases}$ d) $f(x)=\begin{cases}-x+1\\ \ln x\end{cases}$	$x_0=1$ د $x\le 1$ لپاره $x_0=1$ د $x>1$ لپاره $x_0=1$ د $x\le 1$ لپاره $x_0=1$ د $x>1$ لپاره

۲٦-- که $f(x)=2\sin x+3\ ;\ x\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ وي، نو وښايئ چې $c\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ شته،

(c) ketabton.com: The Digital Library

--------------------- ---

د هغه لپاره چې ربنتيا وي $f(c) = 4$ او c پيداکړئ.

۲۷: لاندې ليميټونه وشمېرئ.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x+\frac{\pi}{6})}{x+\frac{\pi}{6}} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{1+\tan^2 x} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan 2x}{\sin 3x} \qquad \lim_{x\to 0} \sin 5x \cot 3x$$

$$\lim_{x\to \frac{1}{2}} \frac{\tan(2x-1)}{4x^2-1} \qquad \lim_{x\to \pi} \sqrt{\cos 2x - \cos x + 1}$$

$$\lim_{x\to 1} (\cos^2 x + \sin^2 x) \qquad \lim_{\theta\to 0} \frac{\theta}{\sin\frac{1}{2}\theta}$$

$$\lim_{\theta\to 0} \frac{\sin 2\theta}{\sin 3\theta} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\cos\frac{\pi}{2}x}{x}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x^2}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sin(x-1)}{\sqrt{x}-1} \qquad \lim_{x\to 1} \frac{\sin\left(\sqrt{x}-1\right)}{x-1}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-2x}{x}$

20) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{1-\cos x}$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\tan 2x}{\sin^2 x}$

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{1-x}\cos\dfrac{\pi x}{2}$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^2 x}{x^3+2x^2}$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$

25) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x-\cos 7x}{x^2}$

26) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan(x+\frac{\pi}{4})}{x+\frac{\pi}{4}}$

27) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin(x-\frac{\pi}{4})}{x(x-\frac{\pi}{4})}$

28) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x-x\cos 3x}{x}$

29) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x}{\sin 3x-\sin 5x}$

30) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|\sin x|}{x}$

31) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{\sin^2 x-1}}{x}$

32) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{2x-\pi}$

33) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(3x-3)}{1-x^3}$

34) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2+5x}{\sin 2x}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویمه برخه: مشتق یا رابیلیدنه

په تیره برخه کې مو د پولې ځیرنه وکړه. وبه ګورو، چې دا د پولې درس د مشتق یا رابیلیدنې لپاره اړیین دی.

د تابع منځ ارزښت تغیر Average rate of change

دلته دې د سالنګ یا ماهیپر د سړک خیره راشي.(دلته ځېره راځي)

دکتاب په دې برخه کې موږ د ریاضیاتو یوه غوره برخه، چې د ریاضیاتو زړی ورته ویلی شو، تر ځیړنې لاندې نیسو، نو له دې امله لازم ګڼم، چې په دې هکله داسې مهم څه

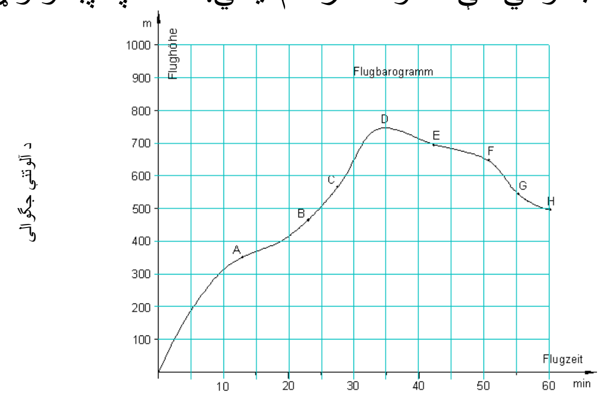
(c) ketabton.com: The Digital Library

د یوه یادښت په څیر راوړم: که له یوه ځای څخه وبل ځای ته د تابع د تغیر منځ ارزښت Averagerate of change څخه غږیږو ، نو موخه تري په یوه ټکي یا دوه ټکو کې د تابع جګوالی، میل اویا تانجنت دی او دا دریواړه کلمې د ریاضیاتو له مخې په همغه یوه معنا دي او وبه ګورو، چې همداسې کمښتوېش یا د تفاضل وېش(Difference (quotient هم.

دې کلمو ته په انګرېزي کې **slop** وايي، چې زموږ ادبیتو د میل په نامه بلل کیږي.

په یوه ټکي کې د تابع د ګراف میل(جګیدنه)

الوتکوکې د الوتنې دلیک(الوتنلیک) الې (Flight barogramm) جوړې دي، چې تل الوتنې جګوالی د الوتنې د وخت په واک کې یا د وخت تابعیت کې رسموي او په هر جګوالي کې د هوا فشار هم لیکي. که دا په پښتو واړوو، نو د لیک بکس به ورته ووایو.



Flight barogramm

په پورته ګراف کې د یوې الوتکې د الوتنې د بیلا بیلو وختونوجګوالی ښوول شوی.

فعالیتونه:

_ په پورته څیره کې د ګراف جګوالی د A په ټکي کې د B ټکې سره پرتله کړئ. په ورته توګه دګراف میل د E په ټکي کې د G ټکي سره پرتله کړئ.

_ روښانه کړئ، چې ولې په یوه ټکي کې باید له جګوالي، میل یا تانجنت څخه غږیږو؟

_ وهڅیږئ، چې په یوه ټکي کې د ګراف جګوالي لپاره یو متود تعریف کړئ او له انځور څخه د A او B په ټکو کې جګوالی وټاکئ.

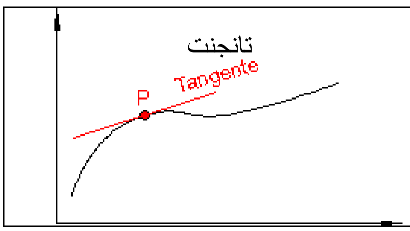
_ ایا فکر کوئ، چې په B ټکي کې نسبت و A ټکي ته جګوالی زیات دی؟

_ ایا فکر کوئ، چې د E او G په ټکو کې جګوالی منفي دی؟ دلته د E په ټکي کې د ارزښت له مخې جګوالی زیات دی نسبت د G ټکي ته؟

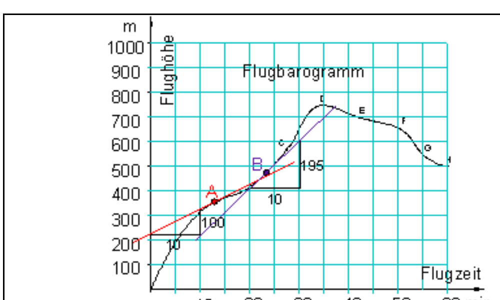
(c) ketabton.com: The Digital Library

_ ایا د یوې کرښې جګوالی او په همدې ترتیب د یوې منحنې هرچیرته توپیر لري او که نه ؟

لاس ته راوړنه:
ګورو، چې په یوه منحني کې د ګراف جګوالی هرچیرته برابر نه دی، نو له دې امله باید ټکی په ګوته کړو، چې هلته میل څېړل کيږي.
په لاندې بیلګه کې به روښانه کړو، چې تنها د یوې (سیده)کرښې میل هرچیرته برابر دی، نو له دې امله دلته د یوې کرښې د میل یا جګوالي څخه غږیږو.
بریښي چې لاندې پیژند یا تعریف عاقلانه دی.

(تعریف): د یوې تابع ګراف میل(جګوالی) د P په یوه ټکي کې په همغه ټکي د تانجنت د میل د ګراف سره برابر دی.	

لیدل کیږي چې دلته یو تانجنت د کرښې تعریف لري، چې د لمستکي(مماس) په چاپیریال کې د امکاناتو سره سم لمستکي(مماس) ته ښه ور نږدې کیږي.
ددې پیژند یا تعریف له مخې په یوه ټکي کې د یوه ګراف میل د یوې کرښې میل دی.
د ګراف د جګېدنې ټاکلو لپاره د A او B په ټکو هر یوه کې یوه کرښه (تانجنت) انځوروو، چې ګراف ته خورا زیاته نږدې کیږي.
د میل یا جګېدنې مثلث په مرسته جګېدنه په شدل یا ساده ډول شمیرل کیدی شي:
A په ټکي کې جګیدنه:



$$\frac{100\,m}{10\min}=10\frac{m}{\min}$$

د B په ټکي کې جګیدنه:

$$\frac{195\,m}{10\min}=15.5\frac{m}{\min}$$

زموږ د بیلګې لپاره میل یا جګیدنه په یوه ټاکلي ټکي کې د لحظوي(سملاسي) میل سرعت په معنا دی.

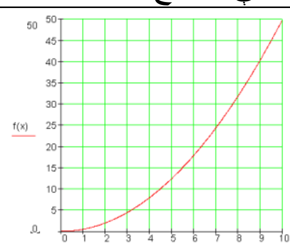
(c) ketabton.com: The Digital Library

د A په ټکي کې: د الوتنې وخت نږدې $12.5\min$، د میل یاجګیدنې چټکتیا (سرعت) نږدې $10\frac{m}{\min}$ ده.

د B په ټکي کې: د الوتنې وخت نږدې $23.0\min$، د جګیدنې سرعت نږدې $19.5\frac{m}{\min}$ دی.

تانجنت تر اوسه فقط د لیدنې له مخې تعریف شوی، چې د لمسټکي چاپیریال ته خورا ډېر نږدې کیږي. له دې امله ممکن وه، چې د ګراف میل د A او B په ټکو کې هم یوازې په نږدې ډول وټاکل شي، دا په عمل کې د قناعت وړ نه دی.

په یوه ټکي کې د تابع دګراف میل (جګیدنه):
معلومه ده، چې یو ریلګاډی د تمځای ځخه له خوزېدو(حرکت) وروسته خپله چټکتیا(سرعت) په کراره کراره زیاتوي. وهلی لار(د تمځای ځخه لرېوالی) تل زیاتیږي. د تمځای ځخه لرېوالی د چټکتیا یا سرعت په واک کې یا تابع دی.

عمل د لاندې تابعمساوات له لارې لیکلی شو.(مخامخ یا لاندې د تابع ګراف) دلته د x وخت د ثانیې او د s لار د متر لپاره ټاکلې او لیکو: $S = f(x) = 0.5x^2$	

فعالیت:
1- اوس دې منځنی تغیر ارزښت Averagerat of change(منځنی میل ارزښت) د $3-$ مې او $7-$ مې ثانیې ترمنځ وشمېرل شي.
2- ددې لپاره دې اړونده قاطع یا سیکانت انځور شي او د هغې جګوالی دې وشمیرل شي.
3- اوس دې د تغیر ارزښت(منځنی جګوالی) د $3-$ مې او $7-$ مې ثانیو ترمنځ وشمیرل شي.
4- وښایاست، چې په دریمه ثانیه کې د ارزښت تغیر یا جګوالی څومره دی؟

کمښت ویش یا د تفاضل ویش Difference quotient

د یوې کرښې میل یا جګیدنه بې له مشتق نیونې ټاکلکیدی شي.
کرښه $y = f(x) = mx + a$ لرو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

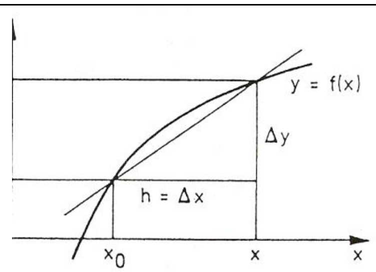
د دې کربنې د جګیدنې فرمول په لاندې ډول دی:

$$m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_1-y_0}{\Delta x}=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

قاطع(غوڅی seconce):
قاطع هغه کرښه ده، چې منحني د P_0 او P_1 په دوه ټکو کې غوڅوي.
د قاطع میل یا جګیدنه(جګوالی secant):
دا چې قاطع هم یوه کرښه ده نو میل(جګوالی) یې هم د یوې کرښې میل په ډول شمیرل کیږي.
په لاندې کې m_S د جګوالي لپاره لیکل کیږي.

$$m_s=m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_1-y_0}{\Delta x}=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

(تعریف): د $y=f(x)$ تابع دې د x_0 په یوه چاپیریال او په x_0 کې پخپله تعریف شوې تابع وي، x د x_0 څخه بیل خو د چاپیریال په یوه خوښه یا په زړه پورې ځای دی(مخامخ خیره دې وکتل شي). نو د تفاضل یا کمبنتویش Difference qutient د قاطع میل شته دی، چې په لاندې ډول یې لیکو:



$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y-y_0}{x-x_0}=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=$$
$$=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

د f تابع لپاره فرمول: $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.
دا فرمول د f په ګراف باندې د دوه ټکو ترمنځ د قاطع د میل شمیرنه ده. د ا ټکي د $x-$ محور باندې د x او $x+h$ ټکي دي.
د کمبنت وېش یا د تفاضلونو ویش د مشتق د تعریف لپاره په کار راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بېلګه:

د $y = f(x) = 3x^2 - 5x + 4$ تابع دې ورکړ شوې وي. د دې تابع کمښت ویش(دتفاضل وېش) پیدا کړئ.

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{3(x+h)^2 - 5(x+h) + 4 - (3x^2 - 5x + 4)}{h}$$
$$= \frac{3x^2 + 6xh + 3h^2 - 5x - 5h + 4 - 3x^2 + 5x - 4}{h}$$
$$= \frac{6xh + 3h^2 - 5h}{h}$$
$$= 6x + 3h - 5$$

تمرينونه:

1 - کمښتویش (د تفاضل وېش) ارزښت د P او Q په ټکو کې وټاکئ.

a) P(3,2) , Q(5,4)   b) P(2,4) , Q(3,1)

2- د $x = x_0$ په ځاي کې د f تابع د تانجنت جګوالی وټاکئ.

$a)\ f(x) = x^2\ ,\ x_0 = 2$ $b)\ f(x) = 0.5x^2\ ,\ x_0 = 3$

د کمښتویش(د تفاضل ویش) او مشتق لاندې څه پوهیږو او د دوي ترمنځ توپیر څه دی؟

4 - د یوې تابع د سکانت(قاطع) لاندې څه پوهیږو او د تانجنت جګیدو لاندې څه پوهیږو؟ او د دوي ترمنځ کومې اړیکې پرتې دي؟

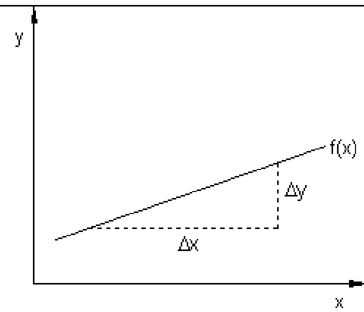
(c) ketabton.com: The Digital Library

رابیلیدنه یا مشتقشمیرنه Diffrentialcaculation

فعالیت:

پام وکړئ، لکه په یوه ثابت میل $a_1 = \frac{\Delta y}{\Delta x} = constant$ کې، د بیلګې په توګه په خطي یا لاینیز تابع کې د $f(x) = a_1 x + a_0$ سره میل شته او که نه؟

_ پام وکړئ، چې دا میل به څه ځانګړي خویونه ولري؟ ایا جګیدنه به په هر ځای کې فرق ولري اوکه ثابت به وي؟



ایا په مختلفو وختونوکې اړین بولی، چې د تغیرحالت(د میل حالت) کې د تابع د تلنې حالت و څیړئ؟

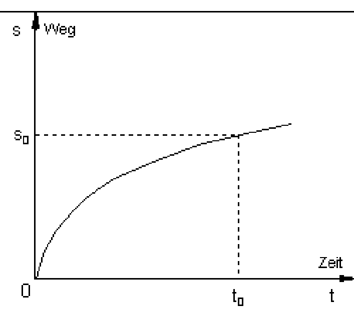
_ او یا له دې امله لحظوی چټکتیا(سرعت) $v(t_0)$ په لار- وخت- دیاګرام کې وڅیړئ؟

_ ایا د مشتق شمیرنې په مرسته دا پرابلم حل کیدی شي؟

په پام کې نیولې لحظه $\hat{=}\ t_0$

دا تر دې وخت وهل شوې لار $\hat{=}\ s_0$

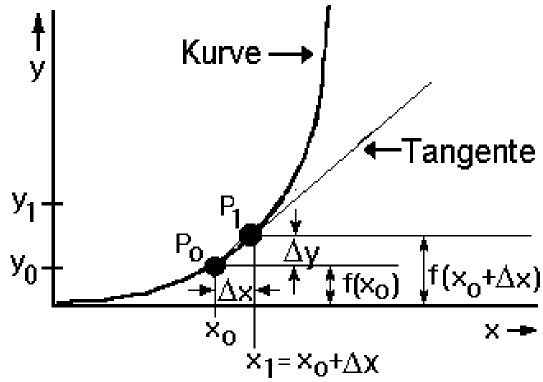
یادونه: مخامخ Zeit د وخت ا و Weg د لار په معنا دي.



(c) ketabton.com: The Digital Library

مشتقشمیرنه = د یوې منحنې میل یا جګیدنه (Differential caculation

تانجنت: که د P_1 او P_0, ټکي یو بل ته ناپای نږدې شي، نو له قاطع څخه تانجنت جوړیږي.



د تانجنت جګیدنه: د تانجنت جګیدنه د قاطع د جګیدنې،، لیمت ،Limit,, یا حد دی.

$$m_t = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_1)-f(x_0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

فعالیت:

1- له پورته څیړې او اړونده شننې څخه د مشتق لپاره څه فکر کوئ؟

2- د derivative (مشتق) کلمې لاندې څه پوهیږو؟

او دا په ساده پښتو څه معنی ورکوي؟

3- له کمښت وېش(د تفاضلونو ویش) څخه ځنګه و مشتق ته راځو؟ په دې هکله د پورته څېړې څخه په ګټه اخسلوخپل نظر وواياست.

4- له 2 – م فعالیت څخه وواياست، چې ولې دا شمېرنه رابیلېدنه یا مشتق بلل کیږي؟

پام: لکه د مخه مو چې ګوته ورته ونیوله، د derivative کلمه نوې ده، نو له دې امله دا څو ټکي په پام کې نیسو: derivative د رابیلیدنې په معنا دی، چې موږ یې تراوسه مشتق بولو.

: که د تابع دا کمښتویش(د تفاضل وېش) او(همداسې) $x->x_0$ $\Leftrightarrow$ $x->0$ او یا په (همدې ډول) $h->0 \Leftrightarrow$ لپاره یو حد ولري, نو د $y=f(x)$ تابع د $x=x_0$ په ځای کې د مشتق قابلیت لري او ددې لپاره لیکو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(\frac{dy}{dx})_{x=x_0} = f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h};...$$

دا لیمیټ داسې ښایو: $(\frac{dy}{dx})_{x=x_0} = f'(x)$

د x_0 ځای کې د $y = f(x)$ له مشتق(Derivativ,) یا رابیلدنې) ښخه یوه بله سیده یا بل ډول کړه لار رابیله وو.

د مشتق ساده شمیرنې لپاره یوه بیلګه:

د $f(x) = x^2 - 3x + 2$ مشتق غواړو پیدا کړو.
ددې کمښتوپش په لاندې ډول دی:

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$= \frac{((x_0 + \Delta x)^2 - 3(x_0 + \Delta x) + 2) - (x_0^2 - 3x_0 + 2)}{\Delta x}$$

$$= \frac{x_0^2 + 2x_0\Delta x + \Delta x^2 - 3x_0 - 3\Delta x + 2 - x_0^2 + 3x_0 - 2}{\Delta x}$$

$$= \frac{2x_0\Delta x + \Delta x^2 - 3\Delta x}{\Delta x}$$

$$= 2x_0 + \Delta x - 3$$

او د لیمیټ $\Delta x \to 0$ سره یې مشتق لاس ته راځي:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0}(2x_0 + \Delta x - 3) = 2x_0 - 3.$$

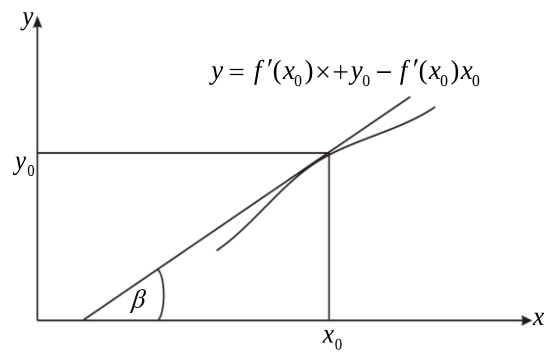
د دې لپاره دا لاندې تعریف(پیژند) ورکوو:

که یو د $y = f(x)$ تابع د x_0 په ځای کې مشتق وړ وي، نو هغه لاندنی کرښه چې د (x_0, y_0) کې ښخه تېریږي او میل یا جګوالی یې $f'(x) = \tan\beta$ دې او په لاندې ډول لیکو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{y-y_0}{x-x_0}=f^{'}(x)\Leftrightarrow y=f'(x_0)x+y_0-f'(x_0)x_0$$

او دا د (x_0,y_0) په ټکي کې د وركړ شوي منحني $y=f(x)$ تانجنت بلل كيږي(پرتله پورته كيڼ شكل)



مورږ اوس د څو بنستيزو توابعو مشتق شميرنه تر څيرنې لاندې نيسو.

بیلګه۱ :

د يوې ثابتې مشتق:

مورږ دالاندې تابع لرو،چې ارزښت يې يوثابت دی.

ثابت $y=f(x)=c=Cons$ ، نو د هر x_0 ځای لپاره لرو:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\frac{c-c}{h}=0$$

$$\Rightarrow(\frac{dy}{dx})_{x=x_0}=f'(x_0)=0$$

بیلګه۲ :

يوه $f(x)=x$ خطي(كرښيزه) تابع لرو، د x_0 په ځای كې غواړو د دې تابع مشتق پيدا كړو او د مشتق تابع هم:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta y}$$
$$\Leftrightarrow\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{(x_0+\Delta x)-x_0}{\Delta y}$$
$$\Leftrightarrow\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{x_0+\Delta x-+x_0}{\Delta x}$$
$$\Leftrightarrow\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta x}{\Delta x}$$
$$\Leftrightarrow\frac{\Delta y}{\Delta x}=1$$
$$\Leftrightarrow f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=1=\underline{\underline{1}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو $f'(x_0)=1$ د x_0 په ځای کې د تابع مشتق دی او $f'(x_0)=1$ د مشتق تابع ده یعنې یوه ثابته ده.

بیلګه ۳ :

د $y=f(x)=c.u(x)$ دوله تابع مشتق د c =ثابتې سره.

د ثابتې قانون:

د یوې تابع مشتق، چې له یوې ساده تابع او یوې ثابتې سره د ضرب له لارې منځ ته راغلی وي، برابر دی د ساده تابع د مشتق سره، چې د(ثابتې $=c$) سره ضرب شوی وي. یعنې له $y=f(x)=c.u(x)$ څخه لرو: $f'(x)=c.u'(x)$ $\Rightarrow$

ثبوت:

$$\Rightarrow\ f(x_0)=c.u(x_0)$$

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{c\cdot u(x_0+\Delta x)-c\cdot u(x_0)}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0} c\cdot\frac{u(x_0+\Delta x)-u(x_0)}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow f'(x_0)=\underbrace{\lim_{\Delta x\to 0} c}_{c}\cdot\underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x_0+\Delta x)-u(x_0)}{\Delta x}}_{u'(x_0)}$$

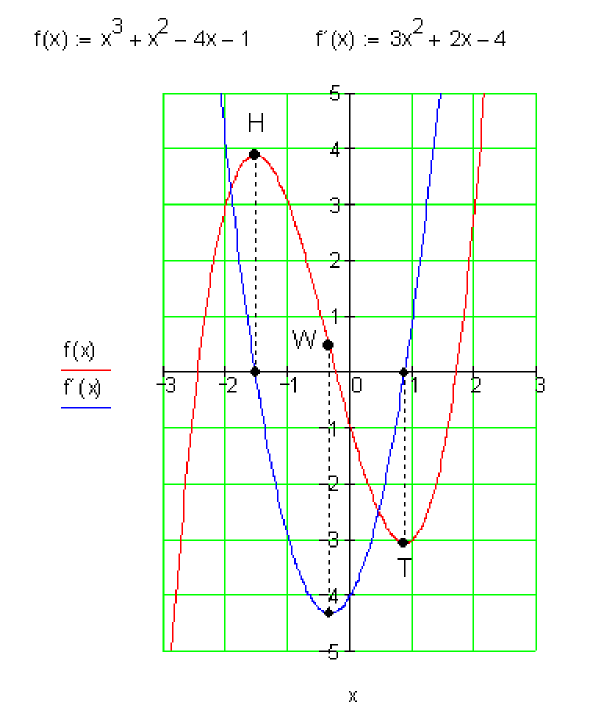
$$\Leftrightarrow f'(x_0)=\underline{\underline{c\cdot u'(x_0)}}$$

تمرینونه:

1- د تفاضل وېش او د مشتق لاندې څه پوهېږو؟
2- د دوی ترمنځ څه اړیکې (پرتې) دي؟
3- د قاطع (سکانت) او تانجنت جګېدنې لاندې څه پوهېږو؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

د x_0 په ځای کې د تابع مشتق او د مشتق تابع

	شکل کې سره منحني تابع، شنه کرښهمنحني د تابع مشتق او وبه گورو، چې له همدې امله د مشتق تابع هم ده.

فعالیت:

1- د x_0 په ځای کې د تابع مشتق یعنې څه؟
2- د یوې تابع له مشتق نیونې وروسته دې مشتق ته څه وایو؟
3- که د تابع مشتق د مشتق تابع ونومو، روښانه کړئ، چې ولې تابع ده او ددې تابع درجه، د لومړی تابع سره پرتله کړئ.؟
• ایا له دې توپیر څخه د مشتق کلمه روښانه کولی شئ؟
ددې د روښانه ونې لپاره د لاندې بیلګې څخه کار اخلو

بیلګه۱: تابع $y = f(x) = x^2$ دې ورکړ شوې وي. غواړو د $x = x_0$ په ځای کې او په ځانګړې توګه د $x_0 = 2$ په ځای کې د هر څه لومړی کمښتویش(د تفاضل وېش) پیداکوو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x = x_0 :$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$
$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x}$$
$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x_0^2 + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x_0\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x$$

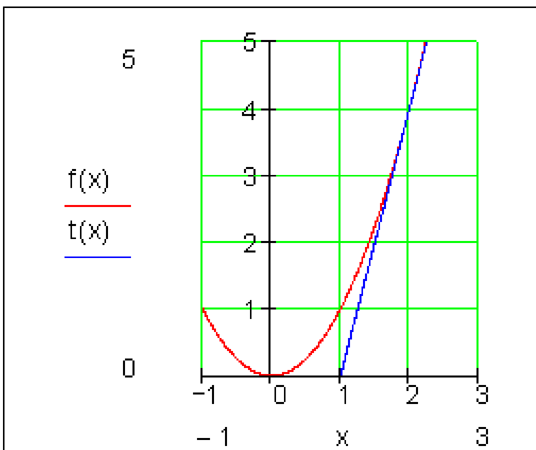
اوس د لیمیټ د لاس ته راوړلو له لارې د مشتق ضریب ته راځو:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}(2x_0 + \Delta x) = 2x_0$$

نو $f'(x_0) = 2x_0$ لرو او د $x_0 = 2$ لپاره $f'(2) = 2 \cdot 2 = 4$ باور لري.

د $x_0 = 2$ په ځای کې د تابع $y = f(x) = x^2$ لومړی مشتق په 4 برابر دی، دا په دې معنی چې تابع د $x_0 = 2$ په ځای کې میل یاجګوالی 4 لري.

لاس ته راوړنه یې:



کیدی شي، د تابع د ګراف له لارې و ازمایل شي، په داسې ډول چې د $P_0(x_0 | y_0) = P_0(2|4)$ په ټکي کې تانجنت انځور کړو او د میل د مثلث له لارې جګیدنه لاس ته راوړو.

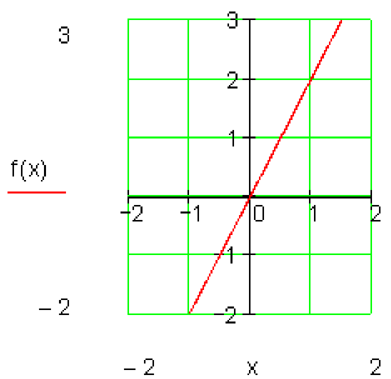
پورته بیلګه کې: $y = f(x) = x^2$ په هر خوښه ځای x_0 کې تابع پیداکوو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y = f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x_0) = 2x_0$$

x_0	-2	-1	0	1	2
$f'(x_0)$	-4	-2	0	2	4

ګراف یوه کرښه $f'(x) = 2x$ انځوروي، چې د تابع مشتق بلل کیږي



پام: که د یوې تابع مشتق ونیول شي، نو بیرته هم یوه تابع ترې لاس ته راځي، چې دا د مشتق تابع بللکیږي.
د مشتق تابع: د تابع ارزښتونه په هر ټکي کې بنست تابع انځوروي، له دې امله دا د میل تابع هم بلل کیږي.

بیلګه ۲:
د $f(x) = x^3$ تابع دې ورکړ شوی وي.
فعالیت: ګران لوستونکي دې د $f(x) = x^3$ تابع او د تابع د مشتق ګراف وروسته له حله رسم کړي.

موږ غواړو په x_0 ټکي کې مشتق پیدا کړو او همداسې د مشتق تابع.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x_0+\Delta x)^3 - x_0{}^3}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x_0{}^3 + 3x_0^2\Delta x + 3x_0(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - x_0{}^3}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3x_0^2\Delta x + 3x_0(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta x(3x_0^2 + 3x_0\Delta x + (\Delta x^2))}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x_0^2 + 3x_0\Delta x + (\Delta x^2)$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}(3x_0^2 + 3x_0\Delta x + (\Delta x)^2 = 3x_0^2$$

نو $f'(x_0) = 3x_0^2$ د $f(x) = x^3$ تابع مشتق دی په ځای یا ټکي x_0 کې.

د مشتق تابع داسې ده: $f'(x_0) = 3x_0^2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۳: یوه د $f(x)=\frac{1}{x}$ تابع ورکړشوې.
غوښتنې یا ثبوت:

الف: د تابع ګراف په یاد راوړئ.

ب: په x_0 تکي کې د تابع مشتق پیداکړئ.

پ: په x_0 تکي کې د مشتق تابع هم پیدا کړئ.

$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ $\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\frac{1}{x_0+\Delta x}-\frac{1}{x_0}}{\Delta x}$ $\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\frac{x_0}{x_0(x_0+\Delta x)}-\frac{(x_0+\Delta x)}{x_0(x_0+\Delta x)}}{\Delta x}$ $\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\frac{x_0-(x_0+\Delta x)}{x_0(x_0+\Delta x)}}{\Delta x}$	$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\frac{x_0-x_0-\Delta x}{x_0(x_0+\Delta x)}}{\Delta x}$ $\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\frac{-\Delta x}{x_0(x_0+\Delta x)}}{\Delta x}$ $\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{-\Delta x}{\Delta x\cdot x_0(x_0+\Delta x)}$ $\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{-1}{x_0(x_0+\Delta x)}$ $\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=-\frac{1}{x_0^2+x_0\cdot\Delta x}$

د پورته اخري مساوات لیمیټ د $\Delta x\to 0$ لپاره نیسو:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(-\frac{1}{x_0^2+x_0\cdot\Delta x}\right)=-\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{x_0^2+x_0\cdot\Delta x}$$

نو لرو: $f'(x_0)=-\frac{1}{x_0^2}$. دا د x_0 په ځای کې د f مشتق دی.

د مشتق تابع هم دی: $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

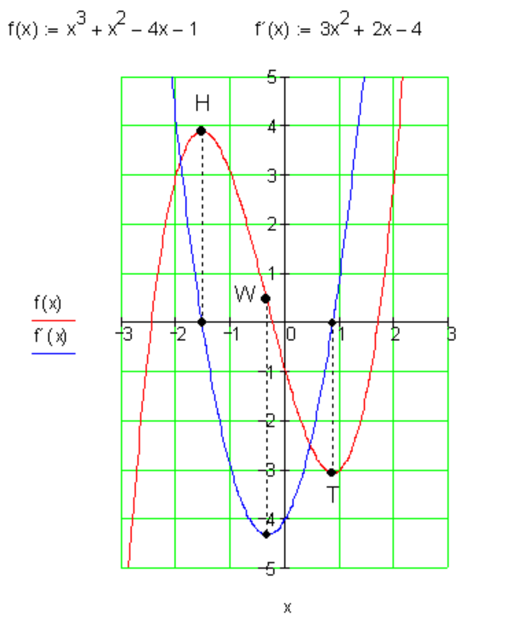
وضعیه کمیاتو سیستم کې تابع او د تابع مشتق:

تابع(سور): $f(x) = x^3 + x^2 - 4x - 1$

د تابع مشتق(شین):

$f'(x) = 3x^2 + 2x - 4$

د تابع مشتق هم تابع دځ. موږ دا د مشتق یا د میل تابع بللې.



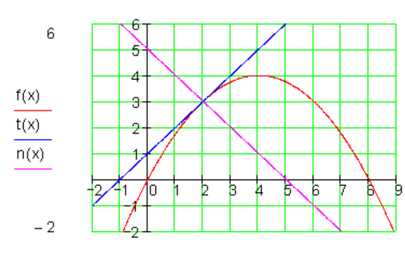
تمرینونه:

په لاندې مساواتو کې د f تابع مشتق او د مشتق تابع وښایئ

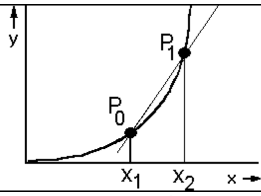
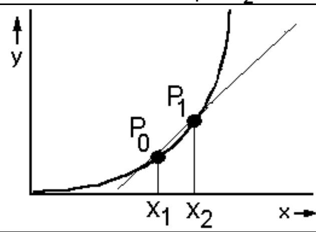
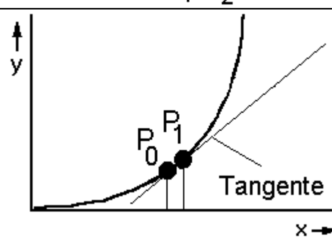
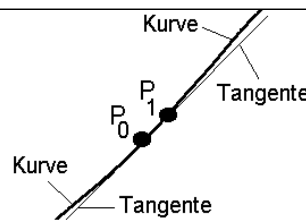
$a)\ \ f(x) = 4x^4 - 3x^3 + x^2 - x - 1$ $\qquad b)\ \ f(x) = x - \sqrt{x}$

$c)\ \ f(x) = \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{x^3}$ $\qquad d)\ \ f(x) = 3x^2 + 0.4x - 5$

د تانجنت او عمود تعریفونه او خویونه



(c) ketabton.com: The Digital Library

لاندې يا مخاکخ ښيره يو منحني او يوه قاطع(غوڅی) په ټکو P_0 او P_1 کې ښايي.	
اوس غواړو، چې ټکی P_0 د ټکي P_1په لور و خوځيږي. پام: ددې سره قاطع خپل ميل تغيروي	
بالاخره غواړو، چېP_1 ټکی وP_0 ټکي ته ناپای ډېر نږدې شي. په دې حالت کې قاطع داسې په نامه تانجنت ته ورنږدې کيږي.	
که پوره وپيژندلی شو، چې د ټکو P_1 او P_0په شاو خوا غزوو يا لويوو : که د P_1 ټکی و P_0 ټکي ته ناپای نږدې شي، نو کتل کيږي، چې تانجنت په ټکي P_0 کې همداسې حالت غوره کوي، لکه منحني په P_0 ټکي کې.	

د دې خويونو غوره غوره والی يا پايله:
ومو ليدل، چې د تانجنت ميل پهP_0 ټکي کې په همدې ټکي کې د منحني ميل هم دی. له دې دا پايله لرو، چې که څوک غواړي د منحني ميل په P_0 ټکي کې پيدا کړو، بسيا کوی، چې د تانجنت جګوالی يا ميل په P_0 ټکي کې پيدا کړي.

فعاليتونه:
1- پورته شکلونه بيا سره پرتله کړئ. د ميل په هکله يې فکر وکړئ، چې کوم ميل زيات دی؟
2- تانجنت تعريف کړئ او په شکل کې يې وښاياست.
3- قاطع (سيکانت) تعريف کړئ او په ښېره کې يې وښاياست.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په لاندې کې د تانجنت او عمود عمومي فرمول راباسو:

پيل: تانجنت دې د $f(x)$ ګراف د $P(x_0, f(x_0))$ په ټکي کې لمس کړي. عمود (نورمال) دې د $f(x)$ ګراف د په $P(x_0, f(x_0))$ ټکي کې عمود یا ولاړ غوڅ کړي.

د تانجنت مساوات: $t(x) = m_t \cdot x + b_t$:

د $m_t = f'(x_0)$ سره لیکو: $t(x) = f'(x_0) \cdot x + b_t \qquad (1)$

دا چې $P(x_0), f(x_0))$ تانجنت یو ټکی دی، نو لاس ته راځي:

$$t(x_0) = f(x_0) \Leftrightarrow f'(x_0) \cdot x + b_t = f(x_0)$$
$$\Leftrightarrow b_t = f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0$$

په (1) کې ږدو، نو لر:

$$t(x) = f'(x_0) \cdot x + f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0 = f'(x_0) \cdot x_0 + f(x_0)$$
$$= f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

عمود (نورمال): د منحني سره په همغه ټکي کې چې تانجنت په پروت دی، عمود څغلي.

د عمود میل:

$$m_n = -\frac{1}{m_t} = -\frac{1}{f'(x_0)}$$
$$\Rightarrow n(x) = -\frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

بیلګه:

د $f(x) = 2x - \frac{1}{4}x^2$ تابع لرو.

د تابع تانجنت او عمود(نورمال) پیدا کړئ:

حل:په لاندې توګه د تابع مشتق نیسو او ګراف یې(ځیره لاندې کښل شوې) کاږو:

نو لرو: $f(x) = 2x - \frac{1}{4}x^2 \Rightarrow f'(x) = 2 - \frac{1}{2}x$

د تانجنت میل **په ټکي** x_0 **کې د میل ارزښت** 3 **لري.**

$$f'(x_0) = 3 \Leftrightarrow 2 - \frac{1}{2}x_0 = 3 \Leftrightarrow x_0 = -2$$

$$f(x) = f(-2) = 2 \cdot (-2) - \frac{1}{4}(-2)^2 = -5$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $P(-2,-5)$ په ټکي کې تانجنت په $f(x)$ باندې ارزښت 3 لري.

$$f(x)=2x-\frac{1}{4}x^{2}\Rightarrow f'(x)=2-\frac{1}{2}x \qquad ,P(2,f(2))$$

$$t(x)=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$$

د $x_0=2$ په ځای کې لرو:

$$t(x)=f'(2)(x-2)+f(2)$$

$$f(2)=2\cdot 2-\frac{1}{4}\cdot(2)^{2}=4-1=3 \qquad f'(2)-\frac{1}{2}\cdot 2=2-1=1$$

$$\Rightarrow t(x)=1(x-2)+3=x-2+3=\underline{\underline{x+1}}$$

د نورمال یا عمود پیدا کونه:

$$f(x)=2x-\frac{1}{4}x^{2}\Rightarrow f'(x)=2-\frac{1}{2}x\ ,\quad P(2\,|\,f(2))$$

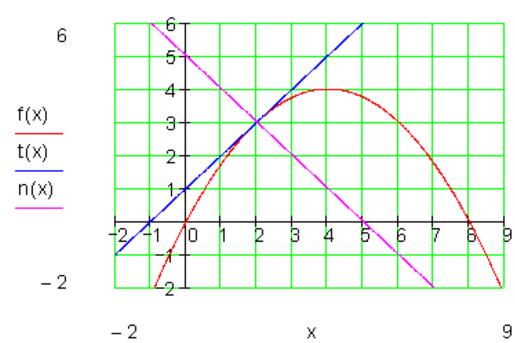
$$n(x)=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)+f(x_0)$$

د $x_0=2$ سره لاندې راکوي:

$$n(x)=\frac{1}{f'(2)}(x-2)+f(2)$$

$$f(2)=2\cdot 2-\frac{1}{4}\cdot(2)^{2}=4-1=3 \qquad f'(2)-\frac{1}{2}\cdot 2=2-1=1$$

$$\Rightarrow n(x)=-\frac{1}{1}(x-2)+3=-x+2+3=\underline{\underline{-x+5}}$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

د تانجنت او ولاړ یا عمود عمومي مساوات

بیلګه: تابع $f(x)=\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x+1$ لرو.

د تانجنت میل:

د یوه تابع د ګراف میل په ټکي $P(x_0\,|\,f(x_0))$ کې همغه معنی لري، لکه په دې ټکي د تانجنت میل.

موږ $f(x)$ تابع او د تابع مشتق ټیک په پام کې نیسو.

موږ $f(x)=\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x+1$ مربع تابع لرو

د تابع مشتق $f'(x)=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$

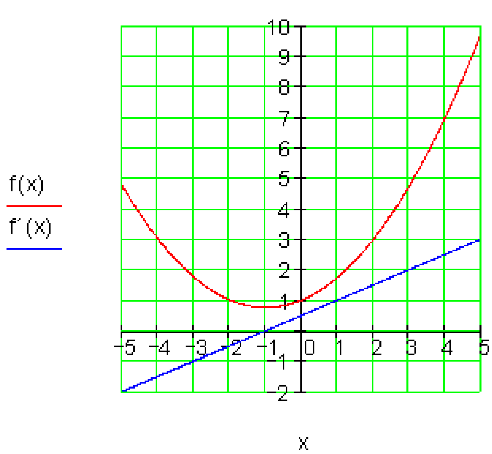
ارزښتجدول:

x	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5
f(x)	4,75	3	1,75	1	0,75	1	1,75	3	4,75	7	9,75
f'(x)	−2	−1,5	−1	−0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3

د $f(x)$ ارزښتجدول څخه لوستلی شو چې د پورته مربع تابع ککرټکی دی: $S(-1,\,0.75)$ د $x=-1$ ارزښت لپاره $f'(-1)=0$ د میل تابع ارزښت دی: دا معنی لري، چې په ککرټکي(د رآس ټکی) کې د $f'(x)$ میل صفر دی. تانجنت په S کې هم دا معنی لري، چې صفر دی، دا هلته پروت(افقي) ځغلي؛ یعني د $x-$ محور سره غبرګ ځغلي.

ګرافونه:

$f(x) := \frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x+1$ $\qquad$ $f'(x) := \frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$



(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه:

$f(x)=2x^3+7x^2+x-7$ تابع لرو:

تانجنت دې پيداکړی شي، چې د $f(x)$ ګراف د $P(-2,\ f(-2))$ په ټکي کې لمسوي،

$$f(x)=2x^3+7x^2+x-7\ \Rightarrow\ f'(x)=6x^2+14x+1\quad P(-2\,|\,f(2))\ \Rightarrow x_0=-2$$

$$t(x)=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$$

$$f'(x_0)\,f'(-2)=24-28+1=-3$$

$$f(x_0)=f(-2)=-16+28-2-7=3$$

$$\Rightarrow t(x)=-3(x+2)+3=-3x-6+3=\underline{\underline{-3x-3}}$$

پایله:

د $f(x)$ تابع ګراف کې تانجنت او عمود په $P(x_0\,,f(x_0))$ ټکي کې لاندې بڼه لري.

د عمود مساوات

$$n(x)=-\frac{1}{\underbrace{f'(x_0)}_{\text{جګيدنه}}}(x-x_0)+f(x_0)\ ;\quad f'(x_0)\neq 0$$

د تانجنت مساوات

$$t(x)=\underbrace{f'(x_0)}_{\text{جګېدنه}}(x-x_0)+f(x_0)$$

تمرينونه: د لاندې توابعو ګرافونه وکاږئ، د تانجنت او د عمود مساوات وليکئ.

$$f(x)=x^3-6x^2+9x \qquad x_0=2$$

$$f(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{2}x^2-\frac{5}{x}+3 \qquad x_0=1$$

$$f(x)=x^3-x^2-5x-2 \qquad x_0=-\frac{3}{2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مشتق شميرنې قوانين

د مشتقشميرنې شميرقوانين، لکه څنګه په اعدادو، ترادفونو او حدونو(پوله ارزښتونو) کې اجرا کيږي،په همدې ډول مشتقشميرنه کې هم دا قوانين باوري دي.

وبه ښايو، چې د جمعې، ضرب او ... مشتقونه د مشتقونو جمع، ضرب او ... ده. (په وېش کې بايد مخرج صفر نه وي).

فعاليت:

که $f(x)=x^2+x$ او $g(x)=x^3+2$ ولرو، $(f(x)+f(x))'$ د $(f(x)-g(x)),(f(x)\cdot g(x))'$ او $g(x)\neq 0,(\dfrac{f(x)}{g(x)})'$ د پيدا کولو په هکله فکر وکړئ.

قضيه (د جمعې قاعده):

که يو تابع $f(x)$ د دوه توابعو $u(x)$ او $v(x)$ د جمعې څخه جوړ وي، نو مشتق يې هم د هر تابع د مشتق د جمعې څخه جوړ دی، يعنې:

$$f(x)=u(x)+v(x)$$
$$\Rightarrow f'(x)=u'(x)+v'(x)$$

ښوونه:

$$f(x_0)=u(x_0)+v(x_0)$$
$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{[u(x_0+\Delta x)-u(x_0)]+[v(x_0+\Delta x)]-v(x_0)}{\Delta x}$$
$$\Leftrightarrow f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{[u(x_0+\Delta x)-u(x_0)]}{\Delta x}+\frac{[v(x_0+\Delta x)]-v(x_0)}{\Delta x}$$
$$\Leftrightarrow f'(x_0)=\underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{u(x_0+\Delta x)-u(x_0)}{\Delta x}\right]}_{u'(x_0)}+\underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{v(x_0+\Delta x)-v(x_0)}{\Delta x}\right]}_{v'(x_0)}$$
$$\Leftrightarrow f'(x)=\underline{\underline{u'(x_0)+v'(x_0)}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بېلګه:

که توابعو $f(x)=5x^2+3x\ ,\ u(x)=5x^2\ ,v(x)=3x$ ولرو شتق وشمرئ.

ښوونه:

$$f(x)=5x^2+3x \quad u(x)=5x^2 \quad v(x)=3x$$
$$\Rightarrow u'(x)=10x \qquad v'(x)=3$$
$$f'(x)=u'(x)+v'(x)=\underline{\underline{10x+3}}$$

فعالیت: که چیرې f_1،f_2،..... ،f_n توابع او k_1،k_2،.... ،k_n ثابت عددونه وي نو لرو(پې له ښوونې):

$$[k_1 f_1(x)+k_2 f_2(x)+.....+k_n f_n(x)]'$$
$$=k_1 f_1'(x)+k_2 f_2'(x)+.....+k_n f_n'(x)$$

قضیه (د ضرب قاعده): که $f(x)$ او $g(x)$ دوه توابع وي، نو ښایو:

$$(f(x)\cdot g(x)'=f(x)'\cdot g(x)\cdot g(x)'$$

ښوونه: $\dfrac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}$

د مناسب فورم- یا بڼه بدلون یعنې په صورت کې د $-f(x_0)g(x)+f(x_0)g(x)$ ورزیاتولو ځخه دا لاندې لرو:

$$\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x)+f(x_0)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}$$
$$=\frac{(f(x)-f(x_0))g(x)+f(x_0)(g(x)-g(x_0))}{x-x_0}$$
$$=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot g(x)+f(x_0)\cdot\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$$

له پورته ځخه لاس راځي یعنې د دواړو لورو لیمیټ نیسو:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}$$
$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot\lim_{x\to x_0}g(x)+f(x_0)\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$$
$$=f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه:
که $g(x)=x^2-1$ او $h(x)=\sqrt{x}$ ولرو، نو د $f(x)=g(x)h(x)$ مشتق غواړو پیدا کړو.
ښوونه:
په لاندې توګه مخ ته ځو:

$$f(x)=(x^2-1)\sqrt{x},\ f'(x)=2x\sqrt{x}+(x^2-1)\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{5}{2}x\sqrt{x}-\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

قضیه (د وېش قانون): f او g دې دوه توابع وي. غواړو وښایو:

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]'=\frac{f'(x)\,g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

ثبوت: کولای شو، چې دا قضیه له دوه لارو یا طریقو وښایو(ثبوت کړو).
لومړی لار یا طریقه یې په لاندې کې ښایو او دویمه لار دې ګران زده کوونکي وښايي:

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]'=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{f(x+h)}{g(x+h)}-\dfrac{f(x)}{g(x)}}{h}\quad,\quad g(x)\neq 0$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x)-f(x)g(x+h)}{g(x+h)g(x)h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left[\frac{1}{g(x+h)g(x)}\frac{f(x+h)g(x)-f(x)g(x+h)}{h}\right]$$

غواړو $f(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g(x)$ صورت ته ور زیات کړو، نو لرو:.

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{g(x+h)g(x)}\cdot\frac{f(x+h)g(x)-f(x)g(x)+f(x)g(x)-f(x)g(x+h)}{h}$$

$$=\frac{1}{g(x)g(x)}[\lim_{h\to 0}g(x)\ \frac{f(x+h)-f(x)}{h}-\lim_{h\to 0}f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}]$$

$$=\frac{1}{[g(x)]^2}\left[g(x)\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-f(x)\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right]$$

$$=\frac{1}{[g(x)]^2}[g(x).f'(x)-f(x).g'(x)]=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

يعني لرو: $\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)\,g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$

بيلګه:

د $f(x) = \frac{x^2}{x^2-4}$ تابع (د $x^2-4 \neq 0$ سره) مشتق غواړو پيدا کړو.

حل: که چېرې $g(x) = x^2$ او $h(x) = x^2 - 4$

وضع شي نو لرو: $g'(x) = 2x$

$h'(x) = 2x$

او د ويش قانون له مخي لرو:

$$f'(x) = \left[\frac{g(x)}{h(x)}\right]' = \frac{g'(x)h(x) - g(x)h'(x)}{[h(x)]^2}$$

$$= \frac{2x(x^2-4) - x^2.2x}{[x^2-4]^2}$$

$$= \frac{-8x}{[x^2-4]^2}$$

پوښتنې:

که $f(x) = 3x^2 + 5x - 8$ او $g(x) = 5x^3 - 3x + 4$ ولرو، نو :

- د توابعو د توابعو د جمعي مشتق، د ضرب مشتق د توابعو د وېش($f(x) \neq 0$) مشتق پيداکړئ، که شونی وي له مختلفو لارو.

د الجبري توابعو مشتق

الجبري او نورو توابعو پيژندونه(تعريفونه):

1- يو بنستيز تابع الجبري بلل کيږي، که د ترتيب قانون يې د مساواتو له لارې ورکړ شوی وي،په هغو کې چې په ترمونو کې د مساواتو د متحولو سره فقط الجبري

(c) ketabton.com: The Digital Library

عمليی(جمع،تفريق، ضرب، تقسيم(چې مخرج يې صفر نه وي)توانکونه او جذرنيونه(د توان-اوريښې اکسپوننتونه مثبت او تام عددي دي) کارول شوي وي.

2- ناالجبري توابع ترانسڅندنت بلل کيږي، لکه اکسپوننشل-ولوګاريمی- او د زاويو توابع.

3- يو الجبري تابع راشنل بللکيږ ي، که د ترتيب قانون يې د يو مساوات سره ورکړ شوی وي، په کوم کې چې ناپای ډيرې راشنل د شمير عمليی ((جمع،تفريق، ضرب، تقسيم(چې مخرج يې صفر نه وي)توانکونه او جذرنيونه(د توان-اوريښې اکسپوننتونه مثبت او تام عددي دي)) کارول شوي وي.

فعاليت:

په څېر د $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots a_1 x + a_0$ يوه تابع د $f(x)$ _ که د $n \in N \quad \wedge \quad a_1 \in R$ سره ليکل شوې وي، څه بلل کيږي؟

په د ويش v او u د دوه توابعو تابع f د $v(x) = 3x + 6$ او $u(x)x^2 + 4x + 4$ _ لرو:

سره وليکئ $v(x) \neq 0$ د $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ څېر لکه

تابع مشتق ونيسئ. پسې د $v;u$ _ د تابع تعريف ساحه وښاياست او بيا د هرې يوې مشتقونو وېش په نښه کولو پسې د مشتقونو وېش(چې مخرج صفر نه وي)، د مشتق سره پرتله کړئ.

بيلګه:

د $f(x) = \sqrt{x}$ تابع ورکړ شوې په x_0 کې د تابع مشتق پيدا کړئ او د مشتق تابع په ګوته کړئ.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt{x_0 + \Delta x} - \sqrt{x_0}}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(\sqrt{x_0 + \Delta x} - \sqrt{x_0})(\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0})}{\Delta x(\sqrt{x_0 + \Delta x} - \sqrt{x_0})}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x_0 + \Delta x - x_0}{\Delta x(\sqrt{x_0 + \Delta x + \sqrt{x_0}})}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta x}{\Delta x(\sqrt{x_0 + \Delta x + \sqrt{x_0}})}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\sqrt{x_0 + \Delta x + \sqrt{x_0}}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f'(x_0)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{1}{\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0}}\right)=\frac{1}{\sqrt{x_0}+\sqrt{x_0}}=\frac{1}{2\sqrt{x_0}}$$

نو د x_0 په ځای کې $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x_0}}$ د تابع $f(x)=\sqrt{x}$ مشتق دی.

د تېرو درسونو پر بنسټ $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ د مشتق تابع ده.

د $q\in Q \;;\; f(x)=x^q$ ډوله توابعو مشتق:

د شمیرنې له مخې لاندې لاس ته را وړنې لرو:

	د مشتق تابع	تابع
$f'(x)=1\cdot x^0$	$f'(x)=1$	$f(x)=x$
$f'(x)=2\cdot x^1$	$f'(x)=2\cdot x$	$f(x)=x^2$
$f'(x)=3\cdot x^2$	$f'(x)=3\cdot x^2$	$f(x)=x^3$
$f'(x)=-1.x^{-2}$	$f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$	$f(x)=\dfrac{1}{x}=x^{-1}$
$f'(x)=\dfrac{1}{2}.x^{-\frac{1}{2}}$	$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$f(x)=\sqrt{x}=x\dfrac{1}{2}$

که دا پورته پنځه مشتقونه یو د بل سره پرتله کړو، نو اټکل کیږي، چې لاندې جوړښتقانون باور لري:

د توان قانون (بې له بنونې)
(پونتخ) قانون:
1- مختني اکسپوننت د متحولي x د مخ د فاکتور په څیر لیکل کیږي.

2- نوی اکسپوننت همغه پخوانی اکسپوننت دی، چې په یو کم شوی.

$f'(x)=q\cdot x^{q-1} \;\Rightarrow\; f(x)=x^q$ **د** $q\in Q$ **سره**

بیلګه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $f(x)=\frac{1}{x^2}$ مشتق پیدا کړئ.

ښوونه:

$$f(x)=\frac{1}{x^2}=x^{-2} \Rightarrow f'(x)=-2x^{-3}=-\frac{2}{x^3}$$

بیلګه:

د $f(x)=3x^4$ تابع مشتق پیدا کړئ.

ښوونه:

$$f(x)=3x^4 \qquad c=3 \qquad u(x)=x^4 \Rightarrow u'(x)=4x^3$$
$$f'(x)=c\cdot u'(x)=3\cdot 4x^3=12x^3$$

بیلګه:

غواړو د $f(x)$ تابع مشتق د $x=2$ په ځای کې ونیسو:

$$f(x)=x^2+3$$
$$x=2:\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}=4+\Delta x$$
$$f'(2)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(4+\Delta x)=4$$
$$x=u:\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(u+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}=2u+\Delta x$$
$$f'(u)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(2u+\Delta x)=2u$$

بیلګه:

د تا بع $f(x)=\frac{1}{x+1}$ مشتق د $x=2$ په ځای کې پیداکړئ.

ښوونه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x)=\frac{1}{x+1}$$

$$x=2:\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}=\frac{1}{3(3+\Delta x)}$$

$$f'(2)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{-1}{3(3+\Delta x)}\right)=-\frac{1}{9}$$

$$x=u:\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(u+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}=\frac{-1}{(u+\Delta x+1)(u+1)}$$

$$f'(u)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}=\frac{-1}{(u+\Delta x+1)(u+1)}=-\frac{1}{(u+1)^2}$$

بیلګه:

(توان(Potence) مشتق، چی طبیعي جګ عدد یا اکسپوننت لري:

موږ د $1, 2, 3,...$, $y(f(x)=x^n$ تابع لرو او غواړو مشتق یې پیداکړو:

ښوونه: موږ په لاندې توګه مخ ته ځو.

د بینوم جملی په بنسټ په هر x_0 ځای کې دا لاندې باورلري.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\frac{(x_0+h)^n-x_0^n}{}$$

$$=\frac{\binom{n}{0}x_0^n+\binom{n}{1}x_0^{n-1}h+\binom{n}{2}x_0^{n-2}h^2+...+\binom{n}{n}h^n-x_0^n}{h}$$

$$=\frac{1}{h}\left(x_0^n+nx_0^{n-2}h+\frac{n(n-1)}{2}x_0^{n-2}h^2+...+h^n-x_0^n\right)$$

$$=nx_0^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2}x_0^{n-2}h+...+h^{n-1}$$

د $h\to 0$ لپاره تابع $y=x^n$ د x_0 په هرځای کې، د لاندې مشتق سره، د مشتق قابلیت لري:

$$(dy/dx)_{x=x_0}=f'(x)=nx^{n-1}$$

ددې پورته بیلګې بل ډول ښوونه دې د پوښتنې په څېر وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

تمرينونه: _ که يو پولينوم $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...a_1x+a_0$
د $a_1\in R \quad \wedge \quad n\in N$ سره ورکړ شوی وي، مشتق يې پيداکړئ.
- د توابع مشتق د توان قانون له مخې پيداکړئ.

$a)\ f(x)=x^5 \qquad b)\ f(x)=x^6$

$c)\ f(x)=\frac{1}{x^2} \qquad d)\ f(x)=\frac{1}{x^5}$

$e)\ f(x)=\sqrt{x} \qquad f(x)=\sqrt[4]{x^3}$

$g)\ f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}} \qquad h)\ f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$

د زنځيري(مرکب) توابعو مشتق

تابع کيدی شي د v تابع سره وتړل شي، که د د باندني تابع(ځنځيرونې قاعده)، پيژند ورشو (دتعريف ساحه) $D(u)$ د دنني تابع د $W(v)$ سره ګډ توکي يا عناصر ولري.

ددې لپاره ليکو: $u\circ v(x)=u(v(x))$، که د f تابع د $y=f(x)=u(z)$ سره او $Z=v(x)$ وي.

فعاليت:
_ په زنځيري تابع کې د $f(g(x))$ پيژند ورشو او همداسې د تابع ورشو په هکله خپل نظر ښرګند کړئ.
په ځاي کې څه دی او $x=3$ تابع ارزښت د $f(g(x))=(x^2+2x+1)^2$ _ وواياست، چې د د تابع ساحې کومې دي او په مشتق نيولو کې يې فکر وکړئ.
_ که يوه په خوښه زنځيري تابع ولرو، نو د تابع ورشو په ګوته کړئ او وهڅېږئ، چې مشتق يې پيدا کړئ.

اوس نو د $x=x_0$ ځای کې د $y=f(g(x))$ تړلي يا ځنځيري تابع مشتقوړوالی څيرو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) = f\left[g(x)\right]$$
$$\Rightarrow f\,'(x) = \quad f\,'(g) \quad . \quad g\,'(x)$$

دننني مشتق د باندنی مشتق(دادې ورپورته شي)
ددې لپاره نيسو چې:

1- د $g(x)$ دننني تابع د $x = x_0$ په ځای کې مشتقوړ ده. دانو بيا بايد د x_0 په يوه معلوم تعريف شوي چاپيريال کی متمادي(نه پريکيدونکی) وي.

موږ لرو : $g(x+h) -> g(x_0)$ د $h -> 0$ لپاره.

همداسې $g(x_0+h) = g(x_0) + k$ داسې، چې $k -> 0$ د $h -> 0$ لپاره.

2- که د $y = f(z)$ دباندنی تابع په $z = z_0 g(x_0)$ کې د مشتق قابليت ولري.

د $y = f(g(x))$ کمبنتويش کيدی شي په لاندې ډول ورکړ شي او بڼه(فورم) يې هم بدله شي

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(g(x_0+h)) - f(g(x_0))}{h} = \frac{f(g(x_0+h)) - f(g(x_0))}{g(x_0+h) - g(x_0)}$$
$$= \frac{f(z_0+k) - f(z_0)}{k} . \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h}$$

که $h -> 0$ لاړه شي (همداسې $k -> 0$ خواته ځي) نو دا اړيکی مشتق ته ځي:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0} = \left(\frac{d(g(x))}{dx}\right)_{x=x_o} = \left(\frac{df(z)}{dz}\right)_{z=z_o=g(x_0)} . \left(\frac{dg(x)}{dx}\right)_{x=x_0} \quad ;........(*)$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0} = \left(\frac{d(g(x))}{dx}\right)_{x=x_o} = \left(\frac{df(z)}{dz}\right)_{z=z_o=g(x_0)} . \left(\frac{dg(x)}{dx}\right)_{x=x_0}$$

که چيرې د ځای په ځای(فيکس) ځای $x = x_0$ لپار بيرته x نيسو، نو کيدی شي چې (*) فرمول په لاندې لنډ ډول ورکړشي او د $y = (z)$, $z = g(x)$ لپاره باور ولري:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dz}}{\frac{dx}{dz}}=\frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx};\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(**)$$

په پام کې دې وي، چې $\frac{dy}{dx}$ د $z=g(x)$ په ځای کې باید ترتیب(تنظیم) شي.

دا (*) فرمول ځنځیري قاعده(لار،قانون) بلل کیږي او د پورته نیونو یا فرضیو سره باوري دی. دا په ساده ډول په یاد لرلی شو، ځکه چې ښۍ خوا د کیڼې خوا سره د فورمال dzزیاتیدلو له لارې منځ ته راغلي.

د پورته ښوونې لاس ته راوړنه دا لاندې جمله ده:

زنځیري یا مرکبه قاعده

لرو : $f(z)=f(g(x))$ ، نود $z=g(x)$ تابع په x او د $y=f(z)$ تابع په $z=g(x)$ کې د مشتق قابلیت لري یا مشتقوړ دی، نوترلی ورکړ شوی د $y=f(g(x))$ تابع هم په x کې د مشتق قابلیت لري او دا باوري کیږي.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dz}}{\frac{dx}{dz}}=\frac{\frac{df}{dg}}{\frac{dx}{dg}}==f\ '(g(x)).g\ '(x)$$

لنډ: $(fog)'(x)=f(g(x))'$

بېلګه:

د $f(x)=(x^2+2)^2$ مشتق ونیسئ.

$$f(x)=\left(x^2+2\right)^2$$

بدلون ...tion: $z(x)=x^2+2 \quad f(z)=z^2 \Rightarrow f'(z)=2z \quad z'(x)=2x$

$$f'(x)=f'(z)\cdot z'(x)=2z\cdot 2x=2\left(x^2+2\right)\cdot 2x=\underline{\underline{4x^3+8x}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه:

د $y = \sin x^2$ تابع يوه په لاندې توګه ورکړ شوی ځنځيري تابع ده:

$$y = \sin z \quad , \quad z = x^2$$

دا دواړه توابع په هرځای کې مشتق وړدي. له دې امله هر چيرته باور لري:

$$\frac{d \sin x^2}{dx} = \frac{d \sin z}{dz} \cdot \frac{dx^2}{dx} = \cos z . 2x = 2x . \cos x^2$$

بیلګه:

د $y = \sin^2 x$ تابع په لاندې ډول ترلی ورکړ شوی.

$$y = z^2 \ , \ z = \sin x$$

دلته هم دواړه توابع هرچيرته مشتقوړ دي. نو له دې امله هرچيرته باور لري:

$$\frac{d \sin^2 x}{dx} = \frac{dz^2}{dz} \cdot \frac{d \sin x}{dx} = 2z . \cos x = 2 \sin x . \cos x = \sin 2x$$

بیلګه:

د $f(x) = (x^5 + 4)^8$ تابع مشتق وشمېرئ!

حل: هرکله چې $g(x) = x^8$ او $h(x) = x^5 + 4$ وضع کوو نو لرو:

$$f(x) = g(h(x))$$

$$f'(x) = (g(h(x))' = g'(h(x)).h'(x)$$

$g'(x) = 8x^7$ $h'(x) = 5x^4$ دی، نو لرو:

$$f(x) = 8(h(x))^7 5x^4 = 40(x^5 + 4)^7 . x^4$$

تمرينونه:

۱ - $h(x) = \dfrac{1}{(x^3 - 4x^2 + 1)^2}$

۲ - که چيرې $f(x) = (3 - 2x + x^2)^4$ وي، نو f' پيداکړئ.

د لاندې تابعو مشتقونه هم ونيسئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

$f(x)=(1-2x^3)^4$:1

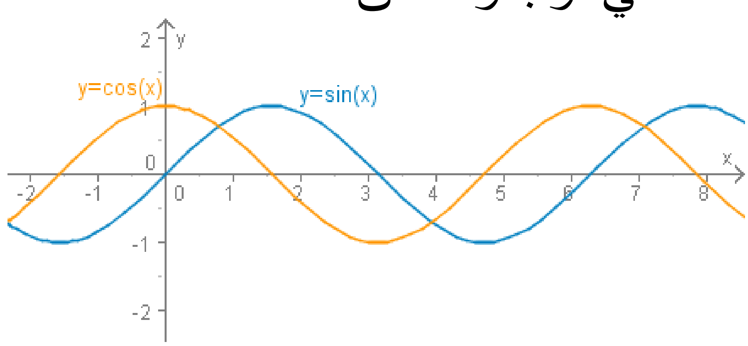
$f(x)=(2x^2+1)^{-2}$:2

$h(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2+x^2+x^3}}$:3

$h(z)=\sqrt{\dfrac{1-z}{1+z}}$:4

$f(t)=\sqrt[3]{3t+1}$:5

د مثلثاتي توابعو مشتق



$$\sin x-\sin y=2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2} \quad .... \ I$$

$$\cos x-\cos y=-2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2} \quad .... \ II$$

فعاليت:

د لاندې توابعو مشتقونه وشميرئ:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x \qquad :a$$

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x \qquad :b$$

$$f\ '(x) = \frac{d\ \tan x}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x} \qquad c$$

موږ په لاندې کې پورتني درې حالتونه ښايو او د نورو درې حالتونوښوونه ګرانو زده کوونکو ته پرېږدو.

قضيه:

د ساين تابع مشتق غواړو وښايوو چې $f'(x) = (\sin x)' = \cos x$ دی:

ددې قضيې د ښوولو لپاره پورتني په ننوتنه کې دوه لومړني فرمولونه په کار راځي.

د $y = f(x) = \sin x$ ساين تابع د هر x لپاره تعريف ده، نو د x_0 په خوښه ټاکلوڅخه لاس ته راځي:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{\sin(x_0+h)-\sin x_0}{h}$$

$$= \frac{2}{h}\cos\frac{2x_0+h}{2}\cdot\sin\frac{h}{2} = \cos\left(x_0+\frac{h}{2}\right)\cdot\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\ .$$

د ليميټ د برخې په پام کی لرلو سره لرو:

$$\lim_{h\to 0}\left(\cos\left(x_0+\frac{h}{2}\right)\cdot\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\right) = \cos x_0.$$

د ساين تابع په هر ځاي کی، د لاندې مشتق سره، د مشتق قابليت لري يا مشتقوړ ده:

$$\left(\frac{d\sin x}{dx}\right)_{x=x_0} = f\ '(x_0) = \cos x_0\ ,$$ (Xپه لينده کچ يا راديان)

قضيه:

همداسي ښوول کيږي چی کوساين تابع هم په هرځاي کی مشتقوړ ده، دلاندې مشتق سره:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$\left(\frac{d\cos x}{dx}\right)_{x=x_0} = f'(x_0) = -\sin x_0,$ په لینده کچ یا رادیانx

---

ثبوت:

لرو: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h) - f(x_0)}{h} = \frac{\cos(x+h) - \cos x_0}{h}$

په پورته ننوتنه کې د دویم فرمول له مخې لرو:

$$= \frac{-2\sin\frac{x+h+x}{2}.\sin\frac{x+h-x}{2}}{h}$$

$$= \frac{-2\sin(x+\frac{h}{2}).\sin\frac{h}{2}}{h}$$

$$= -[\sin(x+\frac{h}{2}).\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}]$$

د لیمیټ او د لیمیټ د ضرب قاعدې له مخې لاس ته راځي :

$$= -\lim_{h\to 0}\sin(x+\frac{h}{2}) \ . \ \lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = -\sin x \cdot 1 = -\sin x$$

له پورته مساواتو څخه په لنده توګه لیکو:

$$\frac{d\cos x}{dx} = -\sin x$$

قضیه :

(c) ketabton.com: The Digital Library

غواړو وښايو چې د تانجنت تابع f(x) = tanx مشتقوړ ده او د مشتق تابع يې

$f\ '(x) = \dfrac{d \tan x}{dx} = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ ده.

$$\frac{d}{dx}(\tan x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)$$

$$= \frac{\cos x \dfrac{d}{dx}(\sin x) - \sin x \dfrac{d}{dx}(\cos x)}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos x . \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$= 1 + \tan^2 x \ , x \neq (2k+1).\frac{\pi}{2}$$

فعاليت: ګرا زده کوونکي دې د $f(x) = x^2 \sin x$ تابع مشتق پيدا کړي.

يادونه: $g(x) = x^2$ او $h(x) = \sin x$ دې ځا په ځای کړي.

بيلګه:

غواړو د $y = \cos \dfrac{\pi x}{180}$ تابع مشتق پيدا کړو.

حل:

ږدو : $f(x) = \cos x$ او $g(x) = \dfrac{\pi x}{180}$ ، نو y په لاندي توګه ليکلی شو:

$y = f(g(x))$. د زنځيري قاعدې په بنسټ لرو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y' = f'(g(x))\cdot g'(x)$$
$$= \cos'(g(x))\cdot(\frac{\pi}{180}\cdot x)'$$
$$= -\sin(g(x))\cdot\frac{\pi}{180} = -\frac{\pi}{180}\cdot\sin\frac{\pi x}{180}$$

د لاندې توتبعو مشتق پیدا کړئ

$\tan^4 x$	$:b$	$\cos^2 2x$	$:a$
$\sin(3x-1)$	$:d$	$\sec x\cdot\cot anx$	$:c$
$\sec(\sec(x))$	$:f$	$\sin^2 x-\cos x$	$:e$

حل a: د ځنځيري قاعدې په بنسټ او د توان یا طاقت یو فرمول په بنسټ لرو:

$$(\cos^2 2x)' = 2\cos(2x)\cdot\cos'(2x)$$
$$= 2\cos(2x)(-\sin(2x)).2$$
$$= -4\cos 2x\cdot\sin 2x$$

$:b$
$$(\tan^4 x)' = 4\tan^3 x\cdot(\tan x)'$$
$$= 4\tan^3 x\cdot\sec^2 x$$

$:c$
$$(\sec x.\cot x)' = (\sec x)'\cot x + (\cot x)'\sec x$$
$$= (\sec x.\tan x)\cot x + (-\csc^2 x)\sec x$$
$$= \sec x - \csc^2 x\cdot\sec x$$
$$= \sec x(1-\csc^2 x)$$

$:d$
$$[\sin(3x-1)]' = \cos(3x-1).(3x-1)'$$
$$= \cos(3x-1)\cdot 3 = 3\cos(3x-1)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$[\sin^2 x-\cos x]'=(\sin^2 x)'-(\cos x)' \qquad :e$$
$$=2\sin x(\sin x)'-(-\sin x)$$
$$=2\sin x\cdot\cos x+\sin x$$
$$=\sin x(2\cos x+1)$$

بيلګي:

1- د f(x) = sinx تابع لومړي څلور مشتقونه دې پيدا شي.

$f'(x) = \cos x$; $f''(x) = -\sin x$; $f'''(x) = -\cos x$; $f^{(4)}(x) = -(-\sin x) = \sin x$

2- د (x) = x.sinx تابع مشتق پيداکړئ.
د ضرب قانون څخه کار واخلئ.
$f'(x) = 1.\sin x+x\cos x=\sin x+ x.\cos x$

3- د $f(x)=\sin\frac{1}{x};x\neq 0$ تابع مشتق پيداکولو له پاره د ځنځير قونو ن څخه نار اخلو.

پردو $z=\frac{1}{x^2}$ ***او $u(z) = \sin z$ لا س ته راځي:*** $f'(x)=-\frac{2}{x^3}\cos\frac{1}{x^2}$

تمرينونه:

-- د لاندې توابعو لومړی مشتق و ټاکئ.

$a)\ f(x)=\sin 3x$ $\quad b)\ f(x)\sin x\cdot\cos x$ $\quad c)\ f(x)=\sin^2 x$

$d)\ f(x)=\tan x+2\sin 2x$ $\quad e)\ f(x)=\sin x^2$ $\quad f)\ f(x)=\sin\frac{x-1}{x+1}$

-- د $f(x)=\sin^n x(n\in IN)$ تابع د لومړي مشتق لپاره فرمول وښاياست يا وټاکئ.

-- د تانجنت تابع لپاره د ساين او کوساين قانون په مرسته د مشتق قانون و ښاياست.

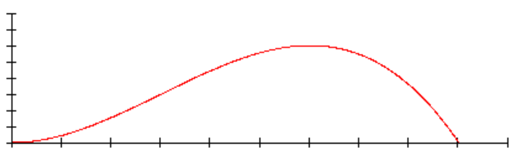
-- وښاياست چې د f(x) = tanx لپاره $f'(x)=1+\tan^2(x)$ هم باور لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

-- د ویش قانون له مخې د کوتانجنت قانون پیداکړئ او هم د تانجنت قانون له مخې.

--- ولې د ساین تابع او د کوساین تابع په خوښه زیات مشتقوړ دي.

د مشتق استعمال په پیداښتي یا طبیعي علومو کې

	په ریاضیاتو کې زیات وخت توابع راوړل کیږي، چې د یوې متحولې(اووښتونې) x په واک کې وي. په طبیعي پوهنو کې زیات وخت توابع څېړو، چې د وخت په واک کې وي. لکه په شکل کې د یوه توپ د غورځولو وهلې لار (دا وروسته روښانه کیږي)

فعالیت:
ګران زده کوونکي دې د فزیک د درسونو له مخې د چټکتیا او بیړې تعریفونه ور کړي او د لار، وخت، چټکتیا او بیړې فرمولونه دې ولیکي.

بیلګه:
د یوه په برابرډوله بیړه (تعجیل) غورځول شوي شي لپاره د پیل چټکتیا (لومړنی سرعت) $v_0=4\frac{m}{s}$ او $a=1,8\frac{m}{s^2}$ بیړې(تعجیل) سره د لار-وخت- قانون په لاندې ډول دی:

$$s(t)=\frac{1}{2}at^2+v_0t$$

پورته ورکړشوي د v_0 ارزښت لپاره باور لري: $S(t) = 0,9t^2+4t$

(t په (ثانیه) s ، s(t) په m (متر))

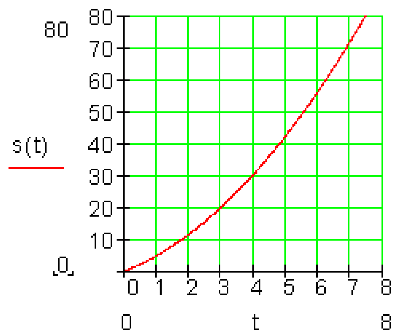
منځنی چټکتیا (سرعت) $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ ده)

(c) ketabton.com: The Digital Library

لحظوی(سملاسي) چټکتيا په لاندې ډول ده:

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{ds}{dt}=v$$

$$v=s'(t)=1,8t+4$$

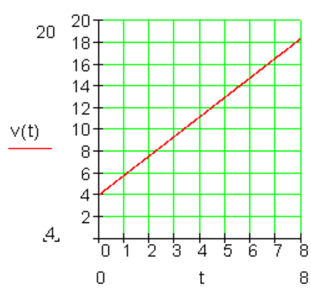


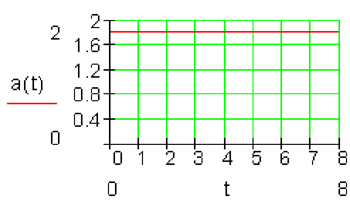
v-t - دیاګرام کې یوه کرښه لاس ته راځي، دا په دې معنی چې چټکتیا په برابر ډول زیاتیږي.

دا دلته ثابته چګېدنه $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ ده او $a=1.8\frac{m}{s^2}$ بيړه(تعجيل) ده.

بيړي يا تعجيل لپاره دا لاندې مساوات صدق کوي:

$$v'(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta t}=a$$





پام : د یوه برابرډوله په بیړه (تعجیلي) خوزښت لپاره لاندې باور لري:

$$|\,s(t)=\frac{1}{2}at^2+v_0t\,| \qquad v(t)=s'(t)=at+v_0 \qquad a(t)=v'(t)=a$$

د یوې چټکتیا (سرعت) v لپاره د وخت پسې د لار مشتق لپاره $v(t)=s'(t)$ لرو. د $s'(t)$ لپاره داسې $v(t)=s'(t)$ هم لیکو.

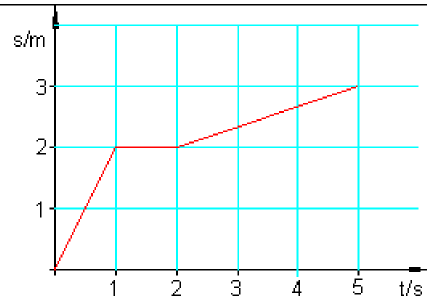
(c) ketabton.com: The Digital Library

فعاليت:

1- د یوه خوزنده تن یا جسم د لار-وخت-دیاګرام ورکړ شوی.

الف: دا خوزښت تشریح کړئ.

ب : دې پورې اړونده د چټکتیا – وخت – دیا ګرام وکاږئ.



2- یوه تیره د پیل چټکتیا $v_0 = 7\frac{m}{s}$ سره عمودي (ولاړه)پورته غورځول کیږي.

د لار-وخت-قانون دی: $s(t) = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2$ د $g = 10\frac{m}{s^2}$ (را ټولي (؟؟کردي شوې)سره.

الف) د کوم وخت وروسته د تیرې چټکتیا (سرعت) صفر دی؟

ب) خورا جګ د میل جګوالوشمیرئ

3- تابع د یوه خوزښت د لار-وخت-دیاګرام ښایي.

الف)د ورځني ژوند څخه یوه بېلګه ورکړئ، د هغې لپاره چې دا تلنه ښایي.

د منحني تلنه د $t > 3$ لپاره فزیکي څه مفهوم لري؟

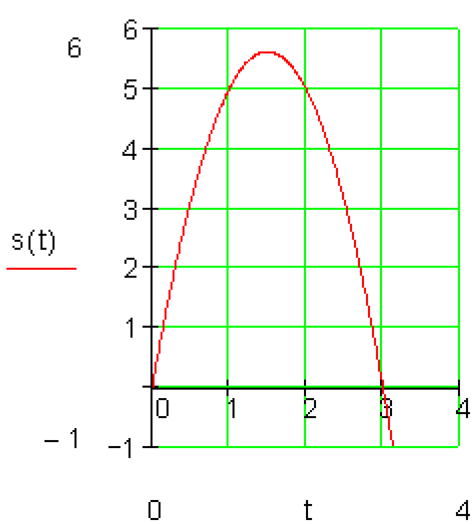
ب) د خوزښت لپاره د لار-وخت-دیاګرام په لاندي ډول دی.

$$s(t) = \frac{1}{2} a \cdot t^2 + v_0 \cdot t$$

a او v_0 وټاکئ.

پ) د اړونده بیړې – وخت-دیاګرم وکاږئ او دا تشریح کړئ.

یوه منفي چټکتیا (سرعت) څه معنا لري؟



4- یوتن(جسم) په پورته ازاده غورځونه کې داسې حرکت کوي ،چې د t وخت کې $s(t) = 5 \cdot t^2$ لار وهي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په وختونو $t=1,2,3$ کې لحظوي چټکتیا(سرعت) وښایی.

حل: لحضوي جټکتيا د سملاسي تغيرارزښت سره په دې لاندې معنا دی:

$$t=1:\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{s(1+\Delta x)-s(1)}{\Delta x}=10+5\Delta x$$

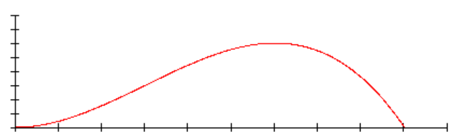
د $\Delta x\to 0$ لپاره باور لري: $10+5\Delta x\to 10$

$$t=2:\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{s(2+\Delta x)-s(2)}{\Delta x}=20+\Delta x\Rightarrow 1$$

د $\Delta x\to 0$ لپاره باور لري: $20+5\Delta x\to 20$

$$t=3:\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{s(3+\Delta x)-s(3)}{\Delta x}=30+5\Delta x\Rightarrow 1$$

د $\Delta x\to 0$ لپاره باور لري $20+5\Delta x\to 30$

	تمرين: د $f(x)=-\frac{1}{288}x^3+\frac{1}{16}x^2\;;\;x>0$ لاندې تابع ګراف او په ورنزدي توګه د فوټبال میدان کې د توپ الوتني منحني ښايي، چې لاندې څېره لري.

لاندې پوښتنې ځواب کړئ:

الف:توپ کوم خورا جګ(ماکسیمال) جګوالی لري او د وهلټکي(شوټ شوي ټکي) څخه کوم واټن لري؟

ب : د توپ وهلټکي (شوټ شوي ټکي)څخه توپ څومره لرې بېرته ځمکي ته راځي؟

پ : د لوبې د دفاع دېوال د توپ وهنې ځای څخه 9 متره لرې او 2 متره جګ دی. ایا توپ له دې څخه جګ الوزي؟

ت : توپ د تور(ګول) لاین(د x محور) څخه په 2 متره جګوالي الوزي. له ګول څخه په کوم لرېوالي دا ازاده شوټ وهل شوی دی؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ځکو درجو مشتق

د لومړي مشتق پرته د لوړو درجو مشتق کونه هم شته، چې د ورپسې مشتق له لارې لاس ته راځي. د $f'(x)$ بیا مشتق نیونې سره د $f''(x)$ مشتق تابع لاس ته راځي، چې د دویم مشتقتابع په نامه یادیږي.

بېلګه:

$$f(x)=x^3+x^2+x+1 \Rightarrow f'(x)3x^2+2x+1 \Rightarrow \underline{\underline{f''(x)=6x+2}}$$

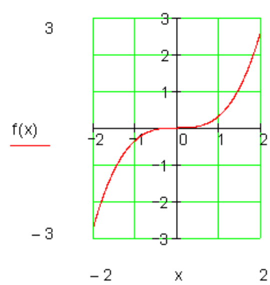
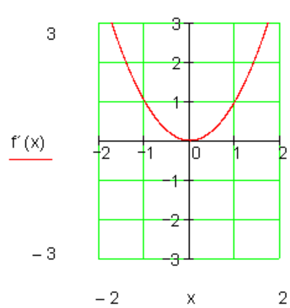
د $f''(x)$ بیا مشتق نیونه و دریم مشتق ته اوداسې نور.

$$f(x)=x^3+x^2+x+1 \Rightarrow f'(x)3x^2+2x+1 \Rightarrow f''(x)=6x+2 \Rightarrow \underline{\underline{f'''(x)=6}}$$

د $f(x)\frac{x^3}{3}$ تابع دې 4 واره مشتق ونیول شي:

$$f(x)=\frac{x^3}{3} \Rightarrow f'(x)=\frac{3x^2}{3}=x^2 \Rightarrow f''(x)=2x \Rightarrow f'''(x)=2 \Rightarrow f''''(x)=0$$

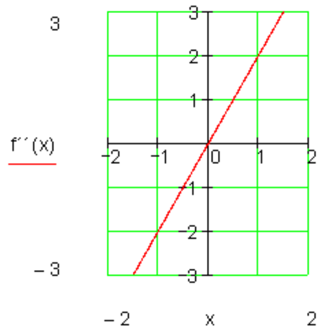
د تابع ګراف: د یوه تابع انځورونه د اړونده مشتق تابع سره

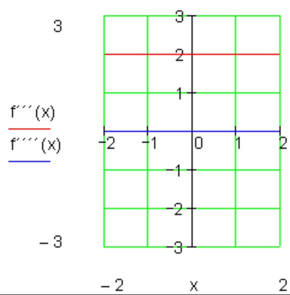
$f(x)=\frac{x^3}{3}$	
$f(x)=\frac{x^3}{3} \Rightarrow f'(x)=x^2$	

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f'(x) = x^2 \Rightarrow f''(x) = 2x$$

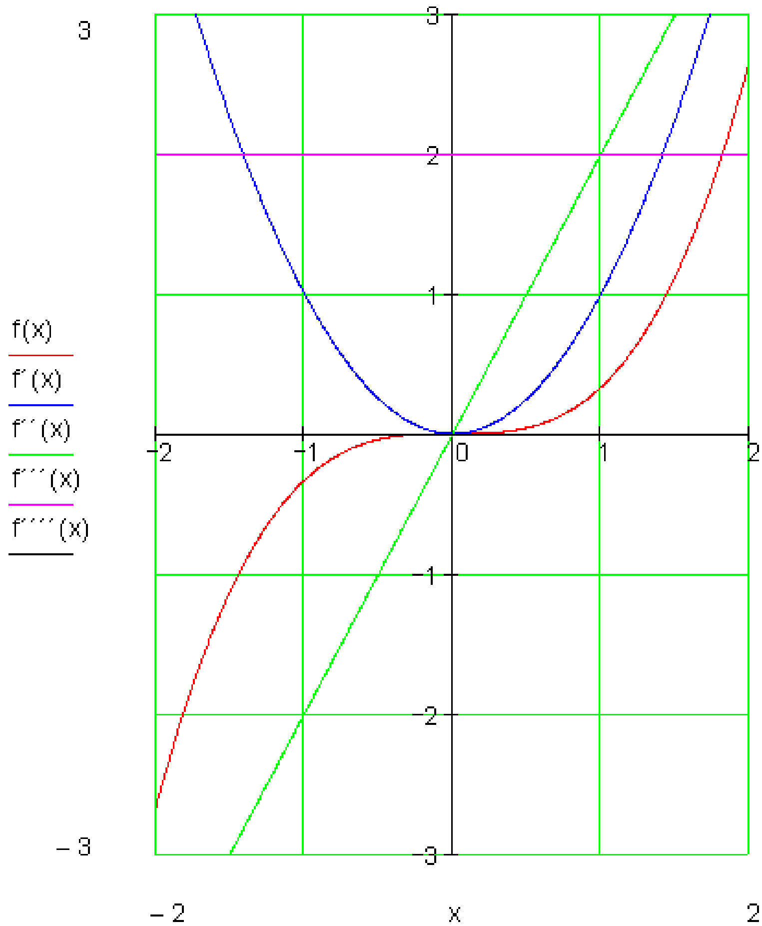
$$f''(x) = 2x \Rightarrow f'''(x) = 2 \Rightarrow f''''(x) = 0$$





پورته تولو توابعو ګراف په یوه پروت ولاړ سیستم کې

(c) ketabton.com: The Digital Library



بیلګې:

اول: د تابع $f(x) = 4x^3 - 2x^2 + x - 2$ مشت درپواره پیدا کړی

$$f(x) = 4x^3 - 2x^2 + x - 2$$
$$f'(x) = 12x^2 - 4x + 1$$
$$f''(x) = 24x - 4$$
$$f'''(x) = 24$$

۱-۳ د جګو درجو مشتق

دویم: د تابع $f(x) = \frac{3}{4}x^3 - 12x^2 + \frac{1}{4}x$ **مشتق درپواره پیدا کړی**

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x)=\frac{3}{4}x^3-12x^2+\frac{1}{4}x$$

$$f'(x)\frac{9}{4}x^2-24x+\frac{1}{4}$$

$$f''(x)=\frac{9}{2}x-24$$

$$f'''(x)=\frac{9}{2}$$

تولګه:

د $f(x)$ لومړی مشتق د $f(x)$ مشتق تابع $f'(x)=\frac{df(x)}{dx}$ ده :

د $f(x)$ دویم مشتق د $f'(x)$ مشتق تابع $f''(x)=\frac{d^2f(x)}{dx^2}$ دی:

د $f(x)$ دریم مشتق د $f''(x)$ مشتق تابع $f'''(x)=\frac{d^3f(x)}{dx^3}$ دی:

په ځانګړي ډول: یو په خوښه کسرۍي تابع $f(x)$ په خوښه د مشتق قابلیت لري.

تمرینونه:

د لاندې توابعو دریواره مشتق ونیسئ.

1− $f(x)=3x+4$

2− $f(x)=2x-4+x^3-5x+4x^3$

3− $f(x)=3x^3+2x^2+x+1$

4− $f(x)=(2x+1)^3$

5− $f(x)=x-x^4+3+x$

6− $f(x)=1-2x-3x-4x+x^4$

7− $f(x)=a+b+c^2-x-ax-bx-cx^3-c^3x$

8− $f(x)=4x^3-2x^2+5x-2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د اکپوننشل توابعو مشتق

د تابع مساواتو جوړښت

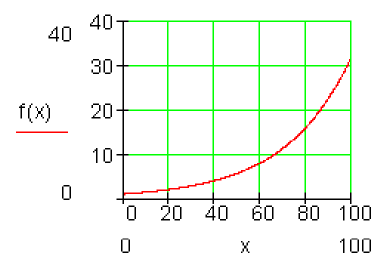
کولي باکتريا Coli - Bakterien د انسان په کلمو کي کاره سرته رسوي. دوي د کوتي ويش (حجره ويش) له لارې زياتيږي. و مساعدو شرايطو لاندې دوي په هرو ۲۰ دقيقو کي ځان تجزيه کوي. د غه عمليي لپاره يو ارزښت جدول :اړ، او گراف يي کاږو. دلته د x اووښتوني (متغيره) په دقيقو د وخت لپاره ده.

د y متغيره د باکتريا ګانو د تعداد لپاره ده.

x = Minuten	0	20	40	60	80	100
y = Bakterienzahl	1	2	4	8	16	32

x = دقيقي

y = د باکتريا ګنون يا تعداد



فعاليت: د دې لپراه تابع وليکئ

قضيه : هر اکسپوننشل تابع د $y = b^x, (b > 0)$ د تولو ريلو اعدادو لپاره مشتقوړ دی او صدق کوي: $f' = b^x \ln b$

حل:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{y - y_0}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \qquad , \; f(x) = b^x$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{b^x - b^{x_0}}{x - x_0}$$

$$= b^{x_0} \cdot \lim_{x \to x_0} \frac{b^{x - x_0} - 1}{x - x_0} \qquad , \; x - x_0 = h$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$=b^{x_0}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{b^h-1}{h}$$

له پورته لرو $\begin{cases} b^h-1=k \\ h=\log_b(1+k) \end{cases}$ او لا س ته تري راځي

$$=b^{x_0}\cdot\lim_{k\to 0}\frac{k}{\log_b(1+k)}$$

$$=b^{x_0}\cdot\lim_{k\to 0}\frac{1}{\frac{1}{k}\cdot\log_b(1+k)}$$

د لوګاريتم قانون څخه لرو: $n\cdot\log x=\log x^n$ او لاس ته راځي

$$=b^{x_0}\cdot\lim_{k\to 0}\frac{k}{\log_b(1+k)}$$

$$=b^{x_0}\cdot\frac{1}{\log_b[\lim_{k\to 0}(1+k)^{\frac{1}{k}}]}\ ,\lim_{k\to 0}(1+k)^{\frac{1}{k}}=e$$

له پورته لاس ته راځي

$$=b^{x_0}\cdot\frac{1}{\log_b e}\quad ,\ \log_b e=\frac{1}{\ln b}$$

$$=b^{x_0}\cdot\ln b\ ;\quad x_0\in IR\ ;\ b\in IR^{>0}$$

$$\Rightarrow f\ ':f\ '(x)=b^x\cdot\ln b\ ;\ D\ '(f)=IR\ ;b\in IR^{>0}$$

$$f\ '(x)=b^x\cdot\ln b$$

ضيه :

د $y=f(x)=e^x$ مشتق پيدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل:

$$y = f(x) = e^{x}$$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x_0 + \Delta x} - e^{x_0}}{\Delta x}$$

موږ دا لرلي په پام کې نيسو: $e^{x_0 + \Delta x} = e^{x_0} . e^{\Delta x}$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x_0} \cdot e^{\Delta x} - e^{x_0}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x_0}\left(e^{\Delta x} - 1\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} e^{x_0} \cdot \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = e^{x_0} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$$

موږ د تل کوچنيکيدونکي Δx ارزښت لپاره څيړو $\frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$

Δx	1	0,1	0,01	0,001	0,0001
$\frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$	1,718...	1,051...	1,00501...	1,0005...	1,00005...

د دې په بنسټ موږ لاس ته راوړو:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = 1$$

زموږ د شمېرنې په بنسټ دا دا معنا لري:

$$f'(x_0) = e^{x_0} \cdot \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}}_{1} = e^{x_0} \cdot 1 = \underline{\underline{e^{x_0}}}$$

که د x_0 په ځای x ځای په ځای کړو، نو لرو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$f'(x) = e^x$ او $f(x) = e^x$

اکسپوننشل فنکشن $y = f(x) = e^x$ تیک $y' = f'(x) = e^x$ مشتق لري

یعني د e^x تابع د مشتق څخه ببرته د e^x تابع لاس ته راځي.

بیلګه:

لرو : $f(x) = b^{3x^2} - 10;\ D(f) = IR;\ b \in IR^{>0}$

د پورته تابع مشتق ونیسئ.

$$D'(f) = D(f) = IR \quad \Rightarrow D(f') = IR$$

$$f(x) = b^{3x^2-10} = g[h(x)]$$
$$g(z) = b^z \ \Rightarrow f'(z) = \underline{b^z \cdot \ln b}; z \in IR$$
$$h(z) = 3x^2 - 10 \ \Rightarrow h'(x) = \underline{6x}; x \in IR$$
$$f'(x) = g'(x) \cdot h'(x)$$
$$= b^z \cdot \ln b \cdot 6x \ \Rightarrow z = 3x^2 - 10$$
$$= b^{3x^2-10} \cdot \ln b \cdot 6x;\ x \in IR$$
$$= \underline{\underline{\ln b \cdot 6x \cdot b^{3x^2}; D(f) = IR;\ b \in IR^{>0}}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

تمرينونه:

د لاندې توابعو لومړی مشتق وټاکئ.

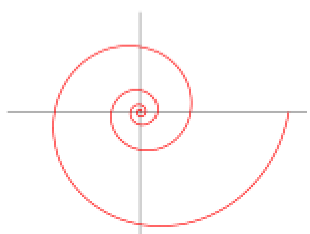
$a)\ f(x)=3\cdot e^{-2x+1}$ $b)\ f(x)=e^{x^2+2x-1}$ $c)\ f(x)=(x-1)\cdot e^{x}$

$d)\ f(x)=\sqrt{e^{x}}$ $e)\ f(x)=x^{n}\cdot e^{e}$ $f)\ f(x)=e^{kx}$

$g)\ f(x)=2^{\frac{1}{2x}}$ $h)\ f(x)=(\frac{1}{4})^{3x}$ $i)\ f(x)=x\cdot a^{\sqrt{x}}$

$k)\ f(x)=\sqrt{e^{x}+1}$ $l)\ f(x)=\frac{e^{x}}{1-e^{x}}$ $m)\ f(x)=\frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}$

د لوګاريتم مشتق



فعاليت:
- لوګاريتم تعريف
- اکسپوننت يا توان تعريف کړئ.
- د لوګاريتم او توان ترمنځ اړيکې وښاياست.

قضيه :
د لوګاريتم تابع مشتق:

(c) ketabton.com: The Digital Library

قضيه: هر د لوگاریتم تابع $y=f(x)=\log_b x$ د $b>0, b\neq 0, x>0$ سره، مشتقوړ دی

او صدق کوي: $f'(x)=\frac{1}{x}\log e=\frac{1}{x.\ln b}$

ثبوت: دا چې تابع $y=f(x)=\log_b x$ یوائې د $x>0$ لپاره پيژند لري یا تعریف دی. په هر ځاي کی چی $x>0$ وي، نودا لاندې باوري دی :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\frac{\log_b(x_0+h)-\log_b x_0}{h}=\frac{1}{h}\log_b\frac{x_0+h}{x_0}=\log_b(1+\frac{h}{x_0})^{\frac{1}{h}}$$

د (لومړی برخې) له مخی دا لاس ته راځي:

$$\log_b(1+\frac{h}{x_0})^{\frac{1}{h}}=\left[\left(1+\frac{h}{x_0}\right)^{\frac{x_0}{h}}\right]^{\frac{1}{x_0}}\to e^{\frac{1}{x_0}}$$

او له دې امله

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0}=f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\log_b(1+\frac{h}{x_0})^{\frac{1}{h}}=\log_b e^{\frac{1}{x_0}}=\frac{1}{x_0}\log_b e$$

د لوگاریتم تابع په ورکړشوي مشتق سره د خپل ټول پيژند سټ کی د مشتق قابليت لري.

$f'(x)=\frac{1}{x}\log_b e$ همداسې $f'(x)=\frac{1}{x}.\frac{\ln e}{\ln b}$ داچې $\ln e = 1$ نو صدق کوي:

$f'(x)=\frac{1}{x.\ln b}$. خه چې د ښوولو وو.

په ځانگړي ډول دا لاندې باور لري:

$$\left(\frac{d(\ln x)}{dx}\right)_{x=x_0}=\frac{1}{x_0}$$

بيلگه:

د $f(x)=\log\sqrt{x^3}$ مشتق وشمېرئ.

ښوونه: په لاندې توگه مخ تخ ځو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) = \log\sqrt{x^3} = \log_{10} x^{3/2} = \frac{3}{2}\log_{10} x$$

$$\Rightarrow\ f'(x) = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x\cdot\ln 10}$$

$$= 0.6514\cdot\frac{1}{x};\ D(f') = IR^{>0}$$

بیلگه:

د $y = \ln\frac{x-2}{x+2}$ تابع مشتق پیداکړئ

حل:

موږ لیکلاي شو :

$$y = \ln\frac{x-2}{x+2}$$
$$= \ln(x-2) - \ln(x+2)$$

دا چې $(\ln(x-2))' = \frac{1}{x-2}$ او $(\ln(x+2))' = \frac{1}{x+2}$ دی، نو لرو:

$$y' = (\ln(x-2))' - (\ln(x+2))'$$
$$= \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2} = \frac{x+2-x+2}{(x-2)(x+2)}$$
$$= \frac{4}{x^2-4}$$

بیلگه:

لرو: $f(x) = \log_2(x)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

غواړو پيدا کړو: ۱.   مشتق f '(x)
مشتق د $x_0=16$ په ځاي کې
حل: د حل لپاره د پورته فرمول څخه کار اخلو: f '(x) = 1/(x·ln2
اوس د $x_0=16$ په ځاي کې مشتق ټآکو:
$f'(x_0)= 1/(16\cdot\ln2)= 1/(16\cdot0.69)= \underline{0.09}$

تمرينونه:

د لاندې توابعو لومړی مشتق وټاکئ يا پيدا کړئ.

$a)\ f(x)=\ln\sqrt{x}$ $\quad b)\ f(x)=\ln(x^2-4)$ $\quad c)\ f(x)=\ln\frac{2}{x^3}$

$d)\ f(x)=\ln\frac{x+1}{x}$ $\quad e)\ f(x)=x\cdot\log_2 x^2$ $\quad f)\ f(x)=(x^4-1)\cdot\log$

$g)\ f(x)=\frac{\ln}{x+2}$ $\quad h)\ f(x)=\frac{x^4}{\ln x}$

د يوې تابع مشتقوړوالی يا - قابليت

موږ وليدل، چې يوه تابع په هر ځاي کې تعريف نه ده، په هر ځاي کې حد نه لري او همداسې په هرځاي کې متمادي نه ده. په همدې توګه يوه تابع هر چيرته د مشتق قابليت هم نه لري.
تابع $f(x)=|x|$ په 0 ځای کې تعريف نه ده:
د ټولو $x>0$ له پاره باور لري $f(x)=x$

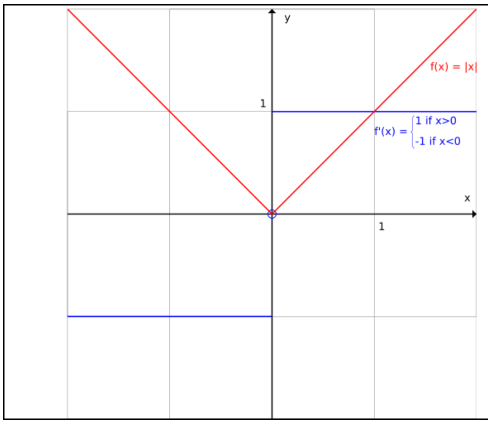
(c) ketabton.com: The Digital Library

او له دې سره $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x-0}{x-0}=1$

د تولو $x<0$ لپاره د پورته په برعکس $f(x)=-x$ باور لري او له دې سره:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{-x-0}{x-0}=-1$$

دا چې کيڼ- او ښی اړخيز حد يو له بل سره سر نه خوري، حد(پوله) نه شته. تابع په دې راولړل شوي ځای کې مشتقوړ نه ده.



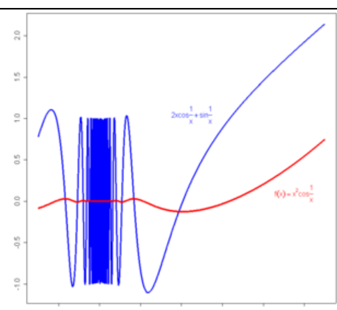
د تابع مشتق کېدنه په نورو تولو ځايونو کې تر اوسه تل ورکړ شوي.
په صفر ځای کې سره له دې يو ښي اړخيز مستق ورکړ شوی، يعني لرو:

$$f'+(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{-x-0}{x-0}=1$$

او يو کيڼ اړخيز مشتق هم:

$$f'-(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{-x-0}{x-0}=-1$$

که پورته ګراف ته وګورو، نو وبه پوهيږو، چې يوه مشتقوړ تابع بايد ګوډه نه وي يا په کوم ځای کې ماته نه وي يا په بل عبارت کونج جوړ نه کړي.



د يوه نه متمادي مشتقوړ تابع لپاره بېلګه:
يو تابع متمادي مشتقوړ بلل کيږي، که د هغې مشتق متمادي وي. که يوه تابع هرچېرته مشتقوړ وي، بايد نه دی چې مشتق دې يې هم متمادي وي.
د بيلګې په توګه:

$$f(x)=\begin{cases}x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right) & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

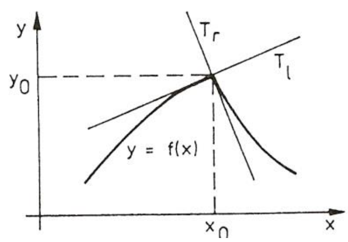
تابع په هر ټکي کې حتي د $x=0$ سره مستقوړ دی. مشتق

۱۱۲ د لوګاريتم مشتق

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f'(x)=\begin{cases}2x\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)+\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

يې ددې په خلاف په 0 ځای کې متمادي نه دی
مشتق د ټاکلو نيونويا فرضيو لاندې ممکن او له دې امله هلته هدفمند دی، چېرته چې ليميټ (پولی) ته تګ ممکن وي يعنې چيرته چې د تفاضل ويش يو ليميټ د $x\to 0$ لپاره ولري. [SEP][SEP]
که کومه منحني چيرته راماته وي (ځېره 4)، ګورو چې هلته تانجنت نه شته او همدارنګه جګيدل او هم د تفاضل ويش نه شته. پس د مشتق قابليت د متماديت په ځير د يوې تابع ځانګړې خوي دی.

په پورته ځيره کې انځور شوې منحني د x_0 په ځاي کې يواځنی تانجنت هم ونه لري او له دې امله مشتق هم ونه لري، خو دلته يو کيڼ تانجنت T_1 يا کيڼ جګوالی لري اوپه دې ډول کيڼ مشتق لري او په همدې ډول يو ښی تنجت T_r او ښی جګوالی او په دي ډول ښی د تابع مشتق موجو د دی.	

په يوه نامتمادي تابع کې د تانجنت يا مشتق پوښتنه بی معناده.
دا دلته انځور شوی پرابلم يا مسأله اوس د شميرنې د ټيك فرمول لاندې راوړو.
وليدل شو چې په يوه ځای x_0 کی چی تابع متمادي نه وي د مشتق پوښتنه بی مانا ده. نيسو چی دا دې ښوول شوی وی. دا څرګنده ده چی هره متمادي تابع بايد ضرور مشتقوړنه وي. د بيلګي په توګه که تابع زاويه يا کونج ولري.
دې ته اړتيا ده چی وښايو، چی يواځې متمادي توابع د مشتق قابليت لري، دا بيا دا معنا لري چی هره تابع چې د مشتقوړ وي بايد لږ تر لګه متمادي وي او په دې ډول مشتق متماديت په بر کی لري يا خوندي لري، په دې معنا چی متماديت د مشتقوړوالی لپاره اړيين يا ضروري شرطونه دي

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله:
که د $y = f(x)$ تابع د x_0 په ځاي کی مشتقوړ وي، نو هلته ضرور متمادي ده.
ښوونه : د دمشتق د تعریف څخه لاس ته راځي، چی حد شته دی.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

لیمیټ یواځی هلته کیدی شي چی موجود وي، چی د $x \to x_0$ لپاره د مخرج سره صورت هم صفر ته ولاړ شي یانې $f(x) - f(x_0) -> 0$ لاړ شي.
نو باور لري: $f(x) -> f(x_0)$ د $x \to x_0$ لپاره.
دا د متمادیت پیژند دی.

دا تفاضل وېش په یوه بله بڼه هم انځوریدلی شي که $x = x_0 + \Delta x$ وکاروو:
دلته مشتق $f'(x)$ په لاندې توګه ورکړ شوي دی:
د یوه تابع د مشتق قابلیت د لومړي ځل لپاره یواځی په ځای (lokal) پورې اړ خوي دی یعنی په یو ځاي x=x0 کی تعریف دی. لکه څنګه چی په متمادیت کی(لومړي څېرکی دې وکتل شي) کیدی شي چی د مشتق قابلیت او مشتق یوه واز یابند اینتروال ته وغزول شي.

تعریف:
د $y = (x)$ یوه تابع په واز اینتروال (a,b) کې، د اشتقاق قابل(مشتقوړ) بلل کېږي، د لاندې مشق سره.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx} = f'(x) \ ; \ a < x < b$$

که داد $x = x_0 \in (a,b)$ په هر ځای کې د مشتق قابلیت ولري د مشتق $f'(x_0)$ سره. دا په بند اینتروال $[a,b]$ کې مشتق وړ بلل کېږي، که دا سربېره پر دې د a په ځاي کی ښی اړخیز اود b په ځاي کي کيڼ اړخیز مشتق وړ هم وي.

بیلګه ۲ ، ۶:
د توان تابع $y = x^n,\ n = 1, 2, 3, ...$ په هرځاي کی د مشتق قابلیت لري د لاندې مشتق سره

د لوګاریتم مشتق ۱۱۴
-- ------------------

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dx^{n}}{dx}=nx^{n-1}$$

د ساین تابع $y=\sin x$ او کوساین تابع $y=\cos x$ په هرځاي کی مشتقوړده، د لاندي مشتق سره

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d\sin x}{dx}=\cos x,\ \frac{dy}{dx}=\frac{d\cos x}{dx}=-\sin x$$

په یوه واز انتروال کی $y=f(x)$ مشتقوړ تابع مشتق بیرته $y'=f'(x)$ تابع ده ، نو په دې ډول یې د مشتق قابلیت اود متمادیت قابلیت پوښتنه کیدی شي.

تعریف (پیژند) ۲. ۴:

په یو د $x=x_0$ چاپیریال کې د مشتق قابل تابع (رابیلیدوړ بلواك) $y=f(x)$ په $x=x_0$ کې دوه واره د مشتق قابلیت لري(رابیلیدوړ دی)، که د هغي اشتقاق(رابیلیدنه) $y'=f'(x)$ هلته د مشتق قابلیت لري(رابیلیدوړ وي). سړی د $f'(x)$ مشتق د تابع(رابیلیدنه د بلواك) $y=f(x)$ دویمه رابیلیدنه بولي او لیکي:

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=x_0}=f''(x_0)=\left(\frac{df'(x)}{dx}\right)_{x=x_0}$$

یو په یوه واز اینتروال کې مشتق کېدونکي تابع $y=f(x)$ هلته دوه واره مشتقوړ بلل کیږي، که د هغه مشتق $y'=f'(x)$ په دې اینتروال کې مشتق وړ وي.
ددې لپاره لیکل کیږي:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=f''(x)=\frac{df'(x)}{dx}$$

تمرین:

وښایئ چې ایا دا توابع $y=\cos x$; $y=x^n$; $y=c$ هر چیرته دوه واره مشتقوړ دي؟

د معکوس تابع مشتق

(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیتونه:

د یوې تابع معکوس تابع تعریف کړئ.

د $f(x) = \frac{x^2+5x}{x^3-8}$ تابع د تعریفساحه وښایاست.

د پورته تابع د مشتق مشتق وشمیرئ.

اوس دې معکوسه تابع تر څیړنې لاندې ونیول شي . دلته دې ونیول شي،چې $y = f(x)$ په $x = x_0$ کې د $f(x) = 0$ سره او په یوه د x_0 چاپیریال کې جګیدونکی دی $f'(x_0) > 0$ او یا په کلکه لوېدونکی $f'(x_0 < 0$ او له دې امله معکوس کیدونکی هم دی، یعني $x = f^{-1}(y)$ ، نود کمښتویش لپاره معکوسه تابع لاس ته راځي:

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} = \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

او دا چې $x -> x_0$ او $f(x)$ د متمادیت له امله هم $y -> y_0$ او باورلري.

$$\left(\frac{dx}{dy}\right)_{y=y_0=f(x_0)} = \left(\frac{df^{-1}(y)}{dy}\right)_{y=y_0=f(x_0)} = \frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0}} = \frac{1}{\left(\frac{df(x)}{dx}\right)_{x=x_0}}$$

که د لاندې ټکي ځای $x = x_0$ لپاره ساده بیرته x ولیکو نو دا لاندې لنډ فورم لیکلی شي:

د $y = f(x)$ لپاره باور لري.

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

۱۱۶ د لوګاریتم مشتق

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پورته ورکړ شوو نیونوسره سړی بیرته یو د تفاضل ویش لاس ته راوړي چی د هغه سره د مروج ویش په څیر شمیرنه کیدی شي، لکه

$$(f^{-1})`(y)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}=\frac{1}{\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}}=\frac{1}{f`(x)}$$

جمله ۲ . ۷: د معکوس تابع مشتق : که y = f(x) د x په یوه چاپیریال کی د $x=f^{-1}(y)$ سره معکوس او هملته د f’ (x) |= 0 سره مشتقوړ وي، نو معکوس تابع د y = f (x) سره مشتقوړ دی او باوري $\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}$

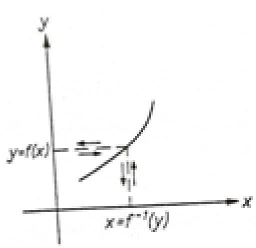
حل: کیدی چی د f تابع د مشتق څخه د f^{-1} معکوس تابع مشتق لاس ته راوړو. له دې امله له 0<- x او هم 0<-y او معکوس څخه، د y = f(x+ x)-f(x) سره، لاس ته راځي:

$$(f^{-1})`(y)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}=\frac{1}{\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}}=\frac{1}{f`(x)}$$

$f'(x)=\frac{dy}{dx}$ او $(f-1)'(y)=\frac{dx}{dy}$ سره.

بالاخره لرو:

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$



تمرینونه: د $y=f(x)=x^n; n=1,2,3,4......$ تابع لپاره که $x\geq 0$ وټاکل شي او په دې $x=\sqrt[n]{y}=y^{\frac{1}{n}}; y\geq 0$ توګه یې معکوس تابع وي، نو د معکوس تابع مشتق یې ونیسئ.

-- د $y=x^{\frac{m}{n}}, m,n\in N$ تابع د معکوس تابع مشتق ونیسئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ایمپلیڅیت Implicit تابعو مشتق

د یوې تابع هغه زیات د استعمال وړ انځورونه د تابع د مساوات له مخې او د f(x) تابع د ورشو ورکولو سره په اکسپلیڅیتExplicit ډول، که تابع متحوله د برابرون په یوه اړخ ځانله شوې وي:

د بیلګې په توګه $Y = 3x^2+7x$

د یوې تابع هغه زیات د استعمال وړ انځورونه د تابع د مساوات له مخې دی، د تابع د ورشو ورکولو سره په ایمپلیځیت Implicit دول د بیلګې په توګه $Ex^2+7x+y=0$

فعالیت:

که $Ex^2+7x+y=0$ولرو، څنګه کولی شو، چې ددې تابع مشتق پیدا کړو؟

قضیه:

یوه تابع په ایمپلیڅیته بڼه $x^2+xy-y^2 = 1$ لرو، غواړو $\frac{dy}{dx}$ پیدا کړو.:

ښوونه:

$$\frac{d}{dx}(x^2+xy-y^2)=\frac{d}{dx}(1)$$

$$2x+(1\cdot y+x\frac{dy}{dx})-2y\frac{dy}{dx}=0$$

$$2x+y=\frac{dy}{dx}-x\frac{dy}{dx}$$

$$2x+y=\frac{dy}{dx}(2y-x)$$

$$\frac{2x+y}{2y-x}=\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2x+y}{-x+2y} \quad \vee \quad \frac{2x+y}{2y-x}$$

ایمپلیڅیټ مشتق د یوې تابع مشتقنیولو لپاره یو امکان دی، چې نه ایمپلیڅیت یعني د یوه ترم سره ورکړ شوی وي، بلکې د ایمپلیڅیت یعنې د یوه مساوات له مخې ورکړ شوی وي. دا قاعده د دې لپاره هم کارول کیږي، چې تابع په اکسپلیڅیت ډول ورکړ شوې وې، خو د دې مشتقنیول ستونځمن وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بېلګه :

د $f(x) = x^x$ تابع مشتق په ورسره بلدو مشتققوانینو نه شي نیول کیدی، ځکه چې په بنسټ او جګ االکسپوننت کې يې متحولې پرتې دي. د لوګاریتم له لارې د اکسپوننت متحوله له منحه وړل کیدی شي:

$$\ln f(x) = x \ln x$$

اوس ایمپلځیت دا حل کوو، داسې چې دواړو لورو ته يې د x پسې مشتق نیسو:

$$\frac{\mathrm{d}(\ln f(x))}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}(x \ln x)}{\mathrm{d}x}$$

د دې مساوات مشتق د ځنځیرقانون له لارې صورت نیسي:

$$\frac{\mathrm{d}(\ln y)}{\mathrm{d}y} f'(x) = \frac{\mathrm{d}(x \ln x)}{\mathrm{d}x}$$

دلته $y = f(x)$. دی. د لوګاریتم او ضرب د مشتق قانون لاس ته راځي:

$$\frac{1}{y} f'(x) = \ln x + x\frac{1}{x}$$

که په $f'(x)$ پسې حل شي او د y له پاره بېرته $f(x) = x^x$ ځا په ځای کړو، نو دا حل لاس ته راځي:

$$f'(x) = y\left(\ln x + 1\right) = x^x\left(\ln x + 1\right)$$

تمرینونه:

- د r وړانګې سره د د ایرې مساوات $x^2 + y^2 = r^2$ سره. دایمپلیخیټ مشتق له لارې يې مشتق ونیسئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

-- د $E:\ x^2 + 3y^2 = 7$ سره ورګړ شوي اليپسي مشتق دې ونيول شي.

د بنستيزو مشتقونو جدول

Nr.	$f(x)$	$f'(x)$	نيونه يا فرضيه
1	$c = konst$	0	
2	X^n	$n.x^{n-1}$	$n = 1,2,3.......$
3	X^n	$n.x^{n-1}$	x تول عدد او $x \neq 0$
4	X^r	$r\,x^{r-1}$	$r \quad rational, \quad x > 0$
5	$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$	$\frac{1}{n}.x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{nx}\sqrt[n]{x}$	$n = 1,2,3......x > 0$
6	x^a	$a.x^{a-1}$	$x > 0, \ a \ \ reell$
7	a^x	$a^x \ln a = \frac{a^x}{\log_a e}$	$x > 0, \ a \neq 1$
8	e^x	e^x	
9	$\log_a x$	$\frac{1}{x}\log_a e = \frac{1}{x \ln a}$	$a > 0, \ a \neq 1, \ x > 0$
10	$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$x > 0$
11	$\sin \ x$	$\cos x$	
12	$\cos x$	$-\sin x$	

(c) ketabton.com: The Digital Library

13	$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in z$
14	$\cot x$	$-\frac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \cot^2 x)$	$x \neq k\pi,\ k\ \ k \in z\ (Z)$

د پورته جدول په مرسته کیدی شي چی کم له کمه په فورمـال ډول ، په خوښه د هرې شننيزې يا سپړنيزېې(تحليلي) وييني يا افادې مشتق په شننيزه توګه لاس ته راوړی شي، سره له دې هم بايد سړی همغه نيونی په نظر کي ونيسي.

د فصل تولګه

کمبنتويش Differenzenquotient (د سيکانت جګيدنه) يا منځنی تغير ارزښت

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(fx_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

مشتق Differetialquotient (د تانجنت چګوالی يا لحضوي تغير ارزښت)

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

د ثابتي قانون

$$f(x) = c \cdot u(x) mit\ c = constant$$

$$\Rightarrow f'(x) = c \cdot u'(x)$$

$$\boxed{f' = c \cdot u'}$$

د جمعي قانون

$$f(x) = u(x) + v(x)$$

$$\Rightarrow\ f'(x) = u'(x) + v(x)$$

$$\boxed{f' = u' + v'}$$

د ضرب قانو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) = u(x) \cdot v(x)$$
$$\Rightarrow f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$
$$\boxed{f' = u' \cdot v + u \cdot v'}$$

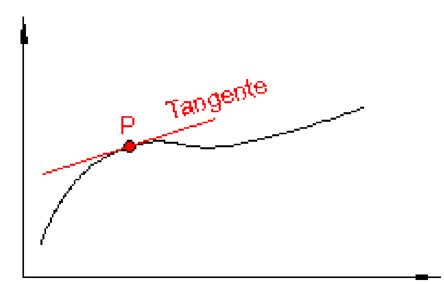
د وېش قانون

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$$
$$\Rightarrow f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v(x)}{[v(x)]^2}$$
$$\boxed{f = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}}$$

د ځنځير قانون

$$f(x) = f[z(x)]$$
$$\Rightarrow f'(x) = f'(z) \quad \cdot \quad z'(x)$$

(تعريف): د يوه تابع ګراف ميل (جګوالی) په يوه ټکي P کې په همغه ټکي کې د تانجنت د ميل يا جګوالي ګراف سره برابر دی



د کمبنت ويش يا د تفاضل ويش Difference quotient

د يوې کربنې جګېدنه بې له مشتق نيونې ټاکلکېدی شي:

کربنه $y=f(x) = mx+a$ لرو

د دې کربنې د جګېدنې فرمول په لاندې ډول دی:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_1-y_0}{\Delta x}=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

د ځېرکي تمرينونه:

(۱) کمښتويش (د تفاضل وېش) ارزښت د P او Q په ټکو کې وټاکئ.

a) P(3,2) , Q(5,4)　　b) P(2,4) , Q(3,1)

(۲) د $x = x_0$ په ځاي کې د f تابع د تانجنت جګوالی وټاکئ.

$a)\ f(x)=x^2\ ,\ x_0=2$　　$b)\ f(x)=0.5x^2\ ,\ x_0=3$

(۳) د کمښتويش(د تفاضل ويش) او مشتق لاندې څه پوهيږو او د دوي ترږنځ فوپير څه دی؟

(٤) د يوه تابع د سکانت(　) لاندې څه پوهيږو او د تانجنت جګېدو لاندې څه پوهيږو؟ او دوي ترمنځ کومې اړيکې پرتې دي؟

(٥) د تابع مشتق د توان قانون له مخې پيداکړئ.

$a)\ f(x)=x^5$　　$b)\ f(x)=x^6$

$c)\ f(x)=\frac{1}{x^2}$　　$d)\ f(x)=\frac{1}{x^5}$

$e)\ f(x)=\sqrt{x}$　　$f(x)=\sqrt[4]{x^3}$

$g)\ f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$　　$h)\ f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(٦) د تابع مشتق د ثابت د قانون له مخې پیداکړئ.

$a)\ f(x)=0.2x^5-3$ $\quad b)\ f(x)2x^4+1$

$c)\ f(x)=\dfrac{4}{x^2}$ $\quad d)\ f(x)=\dfrac{3}{x^3}+2$

$e)\ f(x)=6\sqrt{x}$ $\quad f)\ f(x)\dfrac{8}{\sqrt{x}}-5$

(٧) د تابع د گراف په مرسته وښایئ، چې ټول g(x) + c ترمونه همغه مشتق لري.

یاودونه: پابت عدد که هرکوم ارزښت ونیسي.

(٨) وښایئ، چې د a.g(x) د مشتق سره د a ضریب (ځله وونی) ساتلی پاتې کیږي.

(٩) د f تابع مشتق د جمعې قانون سره وښایئ

$a)\ f(x)=4x^4-3x^3+x^2-x-1$ $\quad b)\ f(x)=x-\sqrt{x}$

$c)\ f(x)=\dfrac{1}{2}x^3+\dfrac{1}{x^3}$ $\quad d)\ f(x)=3x^2+0.4x-5$

(١٠)د f تابع مشتق د ضرب قانون سره وټاکئ.

$a)\ f(x)=x^3(x^2-2x+1)$ $\quad b)\ f(x)=(2x^2+1)(x-1)$

$c)\ f(x)=(x^2-5)(2x^3+x^2+x)$ $\quad d)\ f(x)=(4x^2-x+4)(3x+2)$

(١١) د f تابع مشتق د ویش قانون له مخې وټاکئ.

$a)\ f(x)=\dfrac{x^3-1}{4-x^2}$ $\quad b)\ f(x)=\dfrac{2x^2+x+3}{x+1}$

$c)\ f(x)=\dfrac{4-x-x^3}{2x^2+3}$ $\quad d)\ f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^3-2x^2+x}$

(١٢) د ویش قانون له مخې په څټ ارزښت(پرعکس ارزښت) وټاکئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

(۱۲ الف) د لاندې تابع مشتق وشمېرئ.

$$f(x)=\frac{1}{g(x)} \Rightarrow f'(x)=\frac{-g'(x)}{g(x)\cdot g(x)}$$

د $g(x)\neq 0$ سره

(۱۳) د f تابع ارزښت د زنځیر قانون له مخې وټاکئ.

$a)\ f(x)=(4x^4-x)^2$ $\quad b)\ f(x)=(3x^2+4x-5)^2$

$c)\ f(x)=(2x-7)^3$ $\quad d)\ f(x)=(5-3x^3)^4$

(۱٤) د لاندې توابعو مشتق وټاکئ.

$a)\ f(x)=\frac{1}{(2x^2+x)^3}$ $\quad b)\ f(x)=\frac{1}{(x-5)^4}$

$c)\ f(x)=(1+\sqrt{x})^2$ $\quad d)\ f(x)=\sqrt{1-x^3}$

(۱٥) د لاندې توابعو درې واره مشتق ونیسئ.

$a)\ f(x)=x^3-2x^2+1$ $\quad b)\ f(x)2x^4+3x^3-x^2+x-5$

$c)\ f(x)\frac{3x-4}{x}$ $\quad d)\ f(x)=\frac{x^2-1}{2-x}$

(۱٦) د یو n-م درجې تابع باید څو واره مشتق ونیول شي چې یوه ثابته ترې لاس ته راشي.

(۱۷) د لاندې توابعو لومړی مشتق و ټاکئ.

$a)\ f(x)=\sin 3x$ $\quad b)\ f(x)\sin x\cdot\cos x$ $\quad c)\ f(x)=\sin^2 x$

$d)\ f(x)=\tan x+2\sin 2x$ $\quad e)\ f(x)=\sin x^2$ $\quad f)\ f(x)=\sin\frac{x-1}{x+1}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(۱۸) د $f(x)=\sin^n x(n\in IN)$ تابع د لومړي مشتق لپاره فرمول وښایاست یا وټاکئ.

(۱۹) د تانجنت تابع لپاره د ساین او کوساین قانون په مرسته د مشتق قانون و ښایاست.

(۲۰) وښایاست چې د f(x) = tanx لپاره $f'(x)=1+\tan^2(x)$ هم باور لري.

(۲۱) د ویش قانون له مخې د کوتانجنت قانون پیداکړئ او هم د تانجنت قانون له مخې.

(۲۲) ولې د ساین تابع او د کوساین تابع په خوښه زیات مشتقوړ دي.

(۲۳) د لاندې توابعو لومړی مشتق وټاکئ.

$a)\ f(x)=3\cdot e^{-2x+1}$ $b)\ f(x)=e^{x^2+2x-1}$ $c)\ f(x)=(x-1)\cdot e^x$

$d)\ f(x)=\sqrt{e^x}$ $e)\ f(x)=x^n\cdot e^e$ $f)\ f(x)=e^{kx}$

$g)\ f(x)=2^{\frac{1}{2x}}$ $h)\ f(x)=(\frac{1}{4})^{3x}$ $i)\ f(x)=x\cdot a^{\sqrt{x}}$

$k)\ f(x)=\sqrt{e^x+1}$ $l)\ f(x)=\frac{e^x}{1-e^x}$ $m)\ f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$

(۲٤)د $f(x)=(x^2+2)\cdot \lg x \quad (x>0).$ مشتق دې پیدا شي.

مشتق یې وټاکئ یا پیدا کړئ.

$a)\ f(x)=\ln\sqrt{x}$ $b)\ f(x)=\ln(x^2-4)$ $c)\ f(x)=\ln\frac{2}{x^3}$

$d)\ f(x)=\ln\frac{x+1}{x}$ $e)\ f(x)=x\cdot\log_2 x^2$ $f)\ f(x)=(x^4-1)\cdot\log$

$g)\ f(x)=\frac{\ln}{x+2}$ $h)\ f(x)=\frac{x^4}{\ln x}$

(۳۵) د لاندې توابعو لپاره خورا لویه تعریف ورشو(ساحه) ورکړئ او لومړی مشتق یې وټاکئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د تعریف سټ(ډېرى) هغه ورشو(ساحه) ورکړئ، په کومه کې چې توابع مشتقوړ دي.

$a)\ f(x)=\sqrt{x+3}$ $\quad b)\ f(x)=\sqrt{(x-2)(x-4)}$

$c)\ f(x)=x\sqrt{x}$ $\quad d)\ f(x)=\sqrt{x^2+2}$

(۳٦) ولې باید د ټیک شمېرنې لپاره لوګاریتمي توابعو ته همداسې سوچ وشي، لکه رېښنه توابعو ته ؟

(۳۷) ۹۰ –مه پوښتنه د لوګاریتمي توابعو لپاره ځواب کړئ.

$a)\ f(x)=\ln(x^4-1)$ $\quad b)\ f(x)=\ln(2x+4)$

(۳۸) – د لاندې توابعو لومړى مشتق پیداکړئ.

$a)\ f(x)=\frac{2}{5}x^{10}-\frac{1}{5}x^5$ $\quad b)\ f(x)=3x^4-4x^3+11x^2-7x+8$

$c)\ f(x)=5x^8-3x^6+\frac{10}{x^3}-\frac{8}{x^7}$ $\quad d)\ f(x)(2x-5)(x^2+11x-3)$

$e)\ f(x)\cos x-2x\sin x$ $\quad f)\ f(x)=\sin^3 x$

$g)\ f(x)=e^x+\frac{1}{e^x}$ $\quad h)\ f(x)=(x^2-2x+2)\cdot e^x$

$i)\ f(x)=\frac{3e^x+1}{2e^x-1}$ $\quad j)\ f(x)=\frac{2e^x(x^2-3)}{x}$

$k)\ f(x)=\frac{1}{x^2}\ln x^2$ $\quad l)\ f(x)=\frac{x\cdot\ln x}{1-x}$

$m)\ f(x)=\frac{\sin x}{\ln x}$ $\quad n)\ f(x)=3x^2\cdot\lg x$

$o)\ f(x)=\ln(\sin)\ x$ $\quad p)\ f(x)=\sqrt{4x^2+x+1}$

$q)\ f(x)=\sqrt[n]{ax+b}$ $\quad r)\ f(x)=(x^2+3)e^{-2x}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(۳۹) - لومړی مشتق وټاکئ

$a)\quad f(x)=\sin^{n}$ $\qquad b)\quad f(x)=(\ln x)^{n}$

$c)\quad f(x)=s+\frac{1}{x}$ $\qquad d)\quad f(x)=(1+\frac{1}{x})^{n}$

(٤٠)– د هرې تابع لومړي درې مشتقونه وټاکئ

$a)\quad f(x)=e^{x^{2}}$ $\qquad b)\quad f(x)=\sin x\cdot\cos x$

$c)\quad f(x)=x+\frac{1}{x}$ $\qquad d)\quad f(x)=x^{2}\cdot e^{x}$

(٤١)– په کوم تابع کې لومړی مشتق f د f سره برابر دی.

(٤٢)–

الف: د کو fتابع لپاره $f'(x)=2f(x)$ دی؟

ب: د کو fتابع لپاره $f'(x)=-f(x)$ دی؟

(٤٣)- د f(x)=sinx څوم مشتق د f سره سر خوري یا برابر دی؟

(٤٤)– د لاندې توابعو لپاره -م مشتق ته وده ورکړئ.

$a)\quad f(x)=e^{ax}$ $\qquad b)\quad f(x)=\ln(x+1)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د رول قضيه (Theorem of Rolle)

که د f يوه تابع په بند اينتروال $[a,b]$ کې متمادي او k د a او b ترمنځ پروت وي، نو هلته لږ تر لږه يو عدد c د $f(a)$ او $f(b)$ ترمنځ شته، داسې چې $f(c)=k$ دی.

فعاليت:

_ که f تابع په يوه بند اينتروال $[1,3]$ کې ثابته وي، دا به د يوې تابع لپاره څه معنا ولري، چې تابع څنګه ځغلي. ايا دا تابع به جګ ټکي يا ټيټ ټکي ولري او که څنګه؟ دا روښانه کړئ او د انتروال په خوښه درې منځ ټکو کې ارزښتونه يو له بل سره پرتله کړئ.

_ وښاياست، چې د $f(x)=-x$ تابع په $[-1,1]$ انترول کې جګ او ټيټ ټکي چيرته لري او د يو او منفي يو تر منځ د درې x ارزښتونو لپاره په ګراف د f ارزښتونه وښاياست او وښاياست، چې يو له بل توپير لري او که نه؟

_ د رسم له لارې وښاياست، چې x^2 کوم جګ يا ټيټ ټکی لري او که څنګه او که لري يې چيرته؟

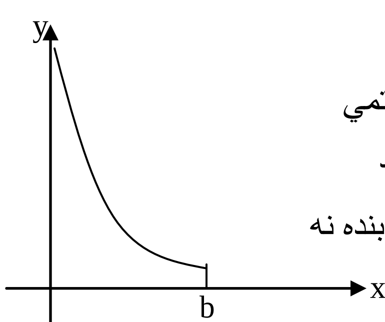
دوايرشتراس قضيه Theorem of Weierstrass

که د f يوه تابع په بند اينتراوال $[a,b]$ کې متمادي وي، نو f په دې اينتراوال کی لږ تر لږه يو جګ ارزښت(اعظمي قيمت) او يو ټيټ ارزښت(اصغري قيمت) نيسی

دلته شننيز يا تحليلي ځواب نه ورکول کيږي، دا وينا د ليدلو له مخې معقوله برېښي.

کيدی شي چی يو همغږيز (monoton مونوتون يا جګټيټ) ارزښت د اينتروال په غاړه هم پروت وي.

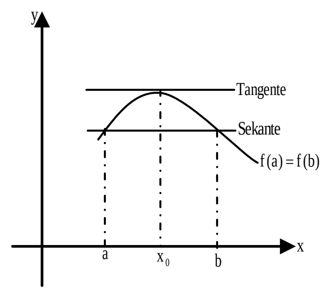
د اينتروال محدودوالی (بندوالی) بی قيد او شرطه حتمي دی. د بيلګي په توګه د $y=f(x)=\dfrac{1}{x}$ تابع په نيم بند اينتروال $(0,b]$ کې متمادي ده، مګر پورته لور ته بنده نه ده، چی په دې توګه خورا جګ ټکی نه لري



(c) ketabton.com: The Digital Library

د مشتق منځ ارزښت قضيي

د تانجنت او قاطع ترمنځ او په همدې ډول د مشتق – اوتفاضل ويش ترمنځ داسې نږدې اړيکي شتون لري، هغه چې د اناليوزې په منځ ارزښت قضيو کې تشريح کيږي.
د تابع او انحرافي ارزښتونوخويونو څخه لومړی پسې تړلې لاندې د رول قضيه لاس ته راځي

د رول(Rolle) قضيه: يوه د f تابع دې په بند اينټروال $[a,b]$ کې متمادي وي د $f(a)=f(b)$ سره او په واز ايټروال (a,b) کې مشتقوړ، نو لږ تر لږه يوځاي $c\in(a,b)$ شته دی د $f'(x_0)=0$ سره.	

حل:

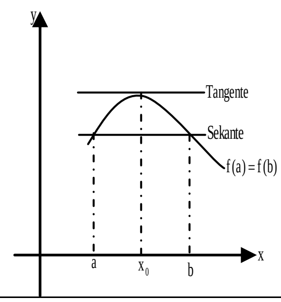
1. که f ثابت وي نو سملاسي لاس ته راځي: $f'(x_0)=0$
2. که f ثابت نه وي، نو د وايرشتراس د قضی له مخی لږ تر لږه د تابع يوخورا لوي او يوخورا کوچنی ارزښت موجود دی. دا ارزښتونه توپير لري، ځکه چې f ثابت نه دی. نو له دی کبله لږ تر لږه له دې ارزښتونو څخه د $f(a)=f(b)$ سره نامساوي دی . په دې اساس د اينټروال په دننه کی يو مونوتون (جګټيټ) ځای x_0 موجود دی. د مشتقوړ توابعو مونوتوني (جګټيټ ارزښت) شتون د اړيين يا ضروري شرطونوقضي له مخی لاس ته راځي: $f'(x_0)=0$

تر اوسه مو وښوول، چې د لازمو شرايطو لاندې يوې افقي قاطع ته يو افقي تانجنت هم شته دی.
دا هندسي پرابلم کيدی شي چی عمومي شي.
پوښتنه رامنځ ته کيږي، چی ايا يوې مايئلی قاطع ته په همغه ډول تانجنت د همغه ميل (جګوالي) سره جوړيدلی شي؟
ځواب يی لاندې قضيه راکوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مشتق منځ ارزښت (وسطي قيمت) قضيه:
که $y=(x)$ تابع په بند اینټروال $[a,b]$ کې متمادي او په واز اینټروال (a,b) کې د مشتق وړ وي، نو هلته یوځاي $x\in(a,b)$ شته دی، د کوم لپاره چې لرو:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(x_0)$$



حل: دا پرابلم په یوه مرستندوې تابع داسې تعریفیږي، چې د رول قضیه وکارول شي. د دې لپاره د قاطع مساوات رامنځ ته کوو: $y=g(x)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)$
د مرستندوې تابع په څیر د مشتق تابع جوړیږي:

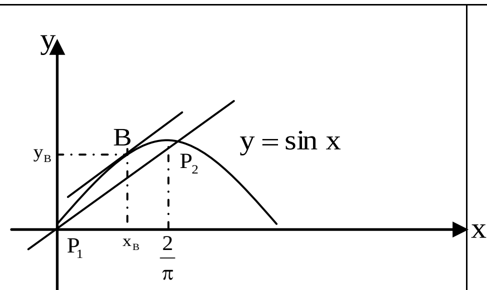
$$h:\ h(x)=f(x)-g(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)-f(a),$$

نو باور لري: $h(a)=h(b)=0$ برسیره پر دې h په (a,b)کې د مشتق وړوالی لري او په $[a,b]$ کې متمادي دی. له دې سره د رول د قضیې وړاند نیونه(فرضیه) ورکړ شوې، دا په دې معنا چې یو ځاي $x\in(a,b)$ شته دی د $h'(x)=0$ سره، چې له هغې لرو:

$$h'(x_0)=f'(x_0)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0, \text{ یعني } f'(x_0)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

پورته لاسته راوړنه به دا لاندې بیلګې نوره هم روښانه کیږي.

بیلګه:
د $f(x)=\sin x$ یوه تابع دې داسې ورکړشوي وي،چې په یوه ټکي $B(X_B,Y_B)$ کې تانجنت د منحني مماس وي، هغه چه په $P_1(0,0)$ او $P_2(\frac{\pi}{2},1)$ ټکو کی همغه میل یاجګوالی لري لکه قاطع.



(c) ketabton.com: The Digital Library

ځواب: د قاطع (غوڅي) میل یاجگوالی: $m=\dfrac{\sin\frac{\pi}{2}-\sin 0}{\frac{\pi}{2}-0}=\dfrac{2}{\pi}$

د منحني میل د $B(x_B:y_B)$ په ټکی کې $f'(x_B)=\cos x_B=\dfrac{2}{\pi}$

له دې ځخه لاس ته راځي: $x_B=\arccos\dfrac{2}{\pi}=0{,}88ı$ او $f(x_B)=f(0{,}88)=0{,}77$

لمس ټکی: $B(0{,}88:0{,}77)$

د تانجنت مساوات: $y=\dfrac{2}{\pi}(x-0{,}88)+0{,}77$

د منځ قضی د عمومیت ځخه لاس ته راځي:

پراخه شوې د منځ ارزښت قضیه:
که $u=f(x)$ او $v=g(f)$ په بند اینتروال $[a,b]$ کې متمادي توابع وي او په واز اینتروال (a,b) کې مشتقوړاو $g'(x)\neq 0$ باور ولري، نو د ټولو $x\in(a,b)$ لپاره، کم له کمه یوځای $x_0\in(a,b)$ وجودلري چی لاس ته ترې راځي:

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

حل: د $g'(x)\neq 0$ له امله g معکوس کېدونکی ده او $v=g(x)$ مساوات د x په لور معکوس کیدنه ورکوي، یعنې: $x=g^{-1}(v)$

که د f په تابع کی هم نوې متحوله ځاي پر ځاي شي، نو یوه زنځیري تابع لاس ته ترې راځي:

$$u=f(x)=f(g^{-1}(v))=h(v)$$

د زنځیري قاعدې له مخې یی دا مشتق لاس ته راځي:

که په $u=h(x)$ تابع د $v_1=g(a)$ او $v_2=g(b)$

سره د وسطي قیمت قضیه استعمال شي، نو د $v_0\in(v_1;v_2)$ ځای په لاندې ډول موجود دی:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{h(v_2)-h(v_1)}{v_2-v_1}=h'(v_0)$$

له دې ځخه د $h(v)=f(x), v=g(x)$ او $x_0=g^{-1}(v_0)$ سره لاس ته راځي:

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

تمرینونه:

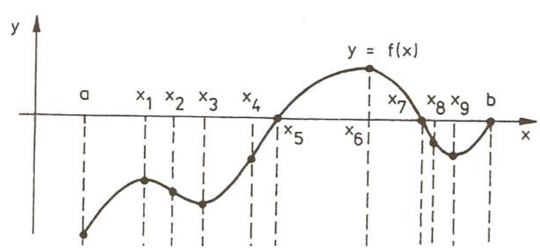
لاندې توابع دوه صفرځایونه لري. هغه بحراني ارزښتونه پیدا کړئ، چې د دواړو صفرځایونو تر منځ پراته وي.

$a)\ f(x)=x^4-5x^3+7x-5x+6$

$b)\ f(x)=x^4+x^3+2x^2+2x$

همغږیزې توابع(Monotony (یوناني: یوغریز، برابرډوله)

جګېدونکې(متزاید)، ټیټېدونکې(متناقص) توابع(جګ-ټیټېدونکې توابع)



فعالیتونه

- په پورته ځېره کې ټول هغه ځایونه وښایاست، چې هلته تابع جګېږي.
- په پورته ځېره کې ټول ځایونه وښایاست، چې هلته تابع ټیټېږي.
- په پورته ځېره کې ټول هغه ځایونه په نخښه کړئ، چې هلته د تانجنت میل افقي وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

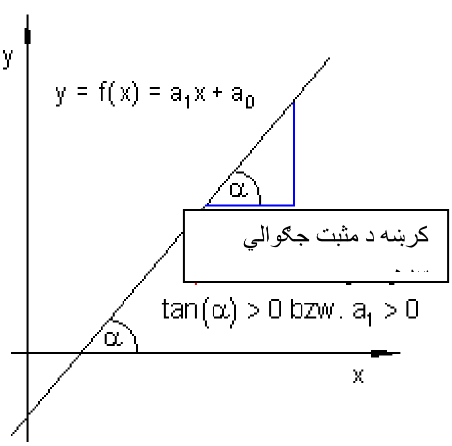
که د ټولو $x_1 < x_2$ لپاره د f یوه تابع په یوه اینټروال کې
($f(x_1) \leq f(x_2)$ ($f(x_1) \geq f(x_2)$ وي، نوتابع په دې اینټروال کې مونوټون جګیدونکې
(- ټیټیدونکې) بلل کیږي،که $f(x_1) = f(x_2)$ په کې اجازه ونه لري،نو دا
($f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$ کره یا په زغرده همغږیزجګیدونکې (همغږیز
ټیټیدونکې) بلل کیږي.
لاندې قواعد، چې له همغږیزوالي څخه په لاس راځي، د همغږیزوالي حالت لپاره ګټور
دي.
د f یوه تابع ټیک هلته د تعریف په ورشو(ساحه) D کې همغږیزجګیدونکې ده، که د
خوښې x_1 او x_2 لپاره، چې په D کې پراته دي، باور ولري:

$$x_1, x_2 \in D \wedge x_1 \neq x_2 \Rightarrow \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$$

د f یو تابع ټیک هلته په D کې همغږیزټیټېدونکې ده، که د خوښې x_1 او x_2 لپاره،
چې په D کې پراته دي، باور ولري:

$$x_1, x_2 \in D \wedge x_1 \neq x_2 \Rightarrow \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$$

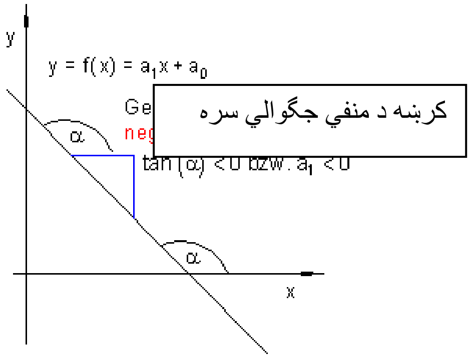
یوغږیزوالی (یونواخت والی) Monotony جګټیټوالی، د جکټیټوالی جملې
دا $f(x) = a_1 x + a_0$ کرښیز(خطي) تابع



خورا ساده تابع ده، چې انحنا نه لري. ددې
لپاره مسئول یې ثابته جګېدنه یا ثابت میل
ی، $a_1 = \tan(\alpha)$ چېرته چې α د کرښې او
مثبت لوریز د $x-$محور ترمنځ
زاویه(کونج) ده.
په مخامخ شکل کې: کرښه د مثبت میل سره
$a_1 > 0 \Leftrightarrow \tan\alpha > 0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

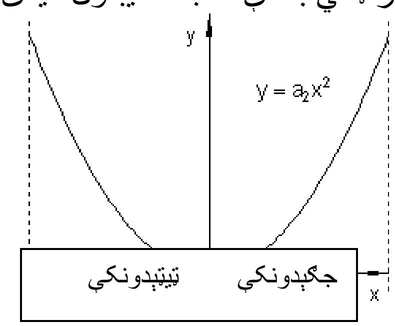
که $0 < \alpha < 90^{\circ}$ یا $0 < a_1 < \infty$ وي، دا په دې مانا چې $\alpha > 0 \vee a_1 > 0$ همداسې$(\Leftrightarrow)$، نو کرښه جګېږي. دا معنی لري، چې د جګېدونکي x سره د تابع $f(x)$ ارزښت هم جګېږي.
په مخامخ شکل کې: کرښه د منفي جګېدنې سره: $\tan\alpha < 0$ همداسې $(\Leftrightarrow) a_1 < 0$



داپورته داسې دی: $tan\alpha < 0$ همداسې $a_1 < 0$

که $90^{\circ} < \alpha < 180^{\circ}$ یا $-\infty < a_1 < 0$ وي، دا په دې معنی، چې $\alpha < 0$ همداسې $a_1 < 0$، نو کرښه ټیټېږي یا لویږي. دا په دې معنی، چې د جګېدونکي x سره د تابع ارزښت $f(x)$ کوچنی کیږي.
په پورته دواړو حالتونو کې د همغږیزې تابع (یا د جګ-ټیټېدونکي تابع) غږیږو او له یوه همغږیزجګیدونکې تابع ښخه، که $a_1 > 0$ وي. له یوې مونوتون ټیټیدونکې تابع ښخه، که $a_1 < 0$ وي.
دا د مونوتوني کلمه په هغو توابعو هم کارول کیږي، چې د منحنیو تلنه راکوي، که فکر وشي، چې په ټولیزه توګه د منحنی د ګراف په هر ټکي باندې تانجنت اینول کیدی شي.

له دې امله د تابع $f(x) = a_2x^2$ لپاره باور لري:
په اننتروال $|_1 = \{x \mid -\infty < x < 0\}_R$ کې تابع $f(x)$ مونوتون ټیټیږي. او $f(x)$ په اینتروال $|_2 = \{x \mid 0 < x < \infty\}_R$ کې مونوتون جګیږي.



لکه د کرښې په ګراف کې، چې جګیدنه ثابته وه. اوس دا حالت مخ ته نه لرو، یعنې جګیدنه ثابته نه ده، بلکې دا د منحني له یوه ټکي ښخه بل ټکي ته تغیر خوري.
د تانجنت جګیدنه $> 0 \leftarrow$ منحني مونوتون جګیږي. د تانجنت جګیدنه$< 0 \leftarrow$ منحني مونوتون ټیټیږي
د تانجنت جګیدنه، که صفر وي، ثابت پاتې کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

روښانه ده چي د $f(x)$ تابع لومړى مشتق $f'(x)$ د تابع ميل (جګوالى) ورکوي. ددې سره د مونوتونى قضيه په لاندې ډول فرمولوو.

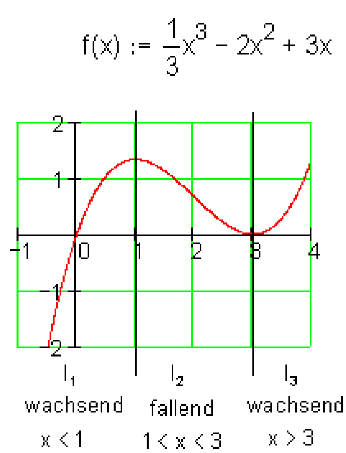
قضيه:

د $f(x)$ تابع دې په انتروال Iکي مشتقوړ وي.

1. که د $f(x)$ تابع په اينتروال Iکي مونوتون جګېدونکې وي، نو باور لري: $f'(x) \geq 0$ د ټولو $x \in 1$ لپاره
- که $f(x)$ په اينتروال کي همغږيزټيټېدونکي وي، نو باور لري: $f'(x) \leq 0$ د ټولو $x \in 1$ لپاره.
- که $f'(x) \geq 0$ وي، دټولو $x \in 1$ لپاره، نو $f(x)$ په اينتروال I کي همغږيز جګېدونکي ده.
- که $f'(x) \leq 0$ وي د ټولو $x \in 1$ لپاره، نو $f(x)$ په ايتروالIکي همغږيز ټيټېدونکي ده.
- که $f'(x) > 0$ وي ، د ټولو $x \in 1$ لپاره، نو $f(x)$ په اينتروال I کي په کلکه همغږيزجګيدونکي ده.
- که $f'(x) < 0$ وي د ټولو $x \in 1$ لپاره،نو $f(x)$ په اينتروال Iکي په کلکه مونوتون ټيټېدونکي ده.

د مونوتوني پيژند ورشو (تعريفساحه) ټاکنه

بيلګه: د تابع ګراف څخه زيات وخت کيدى شي د مونوتوني ساحې لړ يا زيات ټيک و لوستل شي.

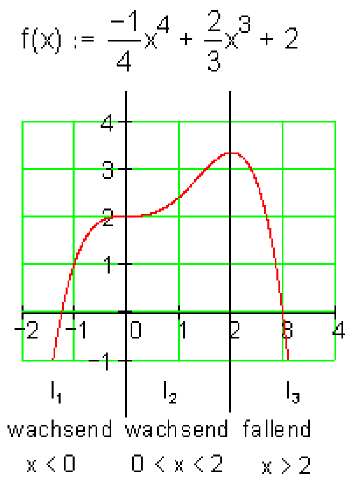


د $I_1 = \{-\infty < x < 1\}_R$ لپاره $f(x)$ په کلکه مونوتون جګېدونکى دى.

د $I_2 = \{1 < x < 3\}_R$ لپاره $f(x)$ يوغږيز ټيټېدونکي ده.

د $r\, I_3 < x < \infty\}_R$ لپاره $f(x)$ په کلکه يوغږز جګېدونکي ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library



له گراف څخه لاندې مونوتوني ساحې لوستل کیږي.

د $I_1=\{-\infty<x<1\}_R$ لپاره $f(x)$ په کلکه مونوتونج گېدونکي ده.

د $I_2=\{1<x<3\}_R$ لپاره $f(x)$ په کلکه مونوتونجگېدونکي ده.

د $r\ I_3< x<\infty\}_R$ لپاره $f(x)$ په کلکه مونوتون تیټېدونکي ده.

تمرینونه:

--- لاندې تام راشنل توابع په همغږېزوالي خویونو وڅیرئ.

$a)\ f(x)=x^3-6x^2+9x+3$

$b)\ f(x)=2x^3+9x^2-12x$

$c)\ f(x)=x^3-6x^2+1$

$d)\ f(x)=\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3+x^2+2x+2$

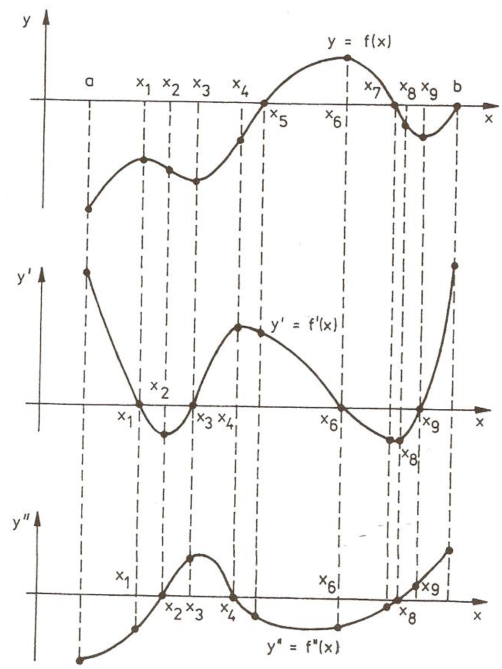
--- د لاندې ماتراشنل توابعو د مونوتوني حالت د a په واکوالي کې ورکړئ.

$a)\ f(x)=\frac{1}{ax+2}$

$b)\ f(x)=\frac{1}{ax^2+1}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځای اړونده افراطي ټکي (local extrema)



یادونه: په لیکلو مې کله کله د افراطي لپاره بحراني لیکلي، پام دې ورته وي.

فعالیتونه:

د مختلفو توابعو ګرافونه او په هغې خبرې، چې چیرته افراطي ټکي پراته دي.

- په پورته څېره کې د تابع لپاره نسبي جګ ټکي اوخورا جګ ټکي و ښایاست.

- په پورته څېره کې نسبي ټیټ او خورا ټیټ ټکي وښایاست.

- په پورته څېره کې وښایاست، چې د نسبي جګو ټکو همداسې خورا جګو ټکو، نسبي ټیټو ټکو همداسې د خورا ټیټو ټکو دواړو لورو ته تابع څنګه ځغلي؟

- په پورته شکل کې هغو ټکو ته، چې بحراني ټکي دي ځیر شئ، چې تابع هلته څه خوي لري؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

- د تابع همدې ټکي کې وګورئ، چې لومړی مشتق یې کوم ارزښت لري؟

موږ ددې پورته فعالیتونوڅخه لاسته راوړو:

که د $f(x)$ لپاره د x_0 په ځای کې $f'(x)=0$ ولرو نو یو نسبي ټیټ ټکی مو مخ ته پروت دی.

که د $f(x)$ لپاره د x_0 په ځای کې $f'(x)=0$ او $f''(x)>0$ ولرو نو یو نسبي ټکی مو مخ ته پروت دی.

که ددې برعکس ولرو: $f'(x)=0$ او $f''(x)<0$ ، نو یو نسبي ماکسیموم مو مخ ته پروت دی.

د بحراني ټکي(ټیټ ټکي یا جګ ټکي) لپاره خوي ټاکونکی دی، چې $f'(x)=0$ وي او د $f''(x)$ مخ نښه (+ ، -)، په دې پریکړه کوي چې ایا یو اصغري ټکی او که اعظمي ټکی مو مخ ته پروت دی.

د پورته اړیکو لپاره لاندې یادوني ضرور دي:

1. دا اړیکي یواځې د x_0 لپاره ارزښت لري چې د تعریف سټ په دننه کی پروت وي او هلته د $y=f(x)$ تابع پوره څو ځلې مشتقوړ وي، د غاړو(څنډو) او د هغوځایونو لپاره چې هلته $f(x)$ تابع کم یا هیڅ مشتق وړ نه وي، ځانګړو څیړنو ته اړتیا ده.
2. شرایط چې $f'(x)=0$ وي(مشتقوړ تابع) یواځې د یوه انحرافي ارزښت لپاره ضرور دی(ضروري یا اړین شرایط).
3. شرایط $f'(x)=0$ او $f''(x)\neq 0$ د بحراني ټکي لپاره یواځې پوره کېدونکی دی او نه ضروري).

بیلګه:

د $f(x)=x^2+2$ تابع ګراف وکاږئ او که بحراني ارزښتونه لري، هغه د ګراف او مشتق له لارې وټاکئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل: د بيلګې له ګراف څخه روښانه ده، چې تابع د $x=0$ په ځای کې خورا ټيټ ټکي(اصغري-) لري.

د ابحراني ټکي لپاره اړيين شرطونه:

1. د تابع لومړي مشتق دی: $f'(x)=2x$ په دې مساوات کې د تابع مشتق د x_0 لپاره صفرځای لري، يعنې دلته يو بحراني ټکی پروت دی.
-د تابع دويم مشتق: $f''(x)=2$ دا چې $f''(x)>0$ دی، نو يو نسبي ټيټ ټکی مخ ته لرو.
بيلګه:

د $y=x^4$ تابع د $x=x_0=0$ لپاره نسبي ټيټ ټکي لري او باوري دي:

$$f'(x)=4x^3 \;\Rightarrow\; f'(0)=0$$
$$f''(x)=2x^2 \;\Rightarrow\; f''(0)=0$$

ګورو چی دوهم مشتق د صفر څخه نه کوچنی او نه لوي دی.

د پورته شننې څخه لاندې پيژند ته راځو

تعرف يا پيژند: د $x=x_0$ په چاپيريال کې د $y=f(x)$ تعريف شوې تابع يونسبي جګ ټکی په همدې ډول نسبي ټيټ ټکی لري، که ټولو x_0 ته پوره نږدی x لپاره باور ولري: $f(x)\le f(x_0)$ ($\Leftrightarrow$) په همدې ډول $f(x)>f(x_0)$
جمله: (د يوه نسبي بحراني ټکي لپاره ضروري شرايط): که په x_0 کې مشتق وړ تابع $y=f(x)$ انحرافي ټکی لري نو لرو: $f'(x)=0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

همغږيزې توابع

دا جمله موږ ته وايي: چيرته چې $f'(x) \neq 0$ وي نو هلته اکستريموم نه شته، د اکستريموم لپاره يواځې د x_0 ځای په پوښتنه کی راځي، چې د هغي لپاره لرو $f'(x) = 0$ ، خو حمتي نه ده چې $y = f(x)$ دې يواکستريموم و لري.

جمله ۲ ۱۳ : (د يوه بافراطي ټکي لپاره پوره کيدونکی شرايط):
که په $x = x_0$ کی دوه واره مشتقوړ $y = f(x)$ تابع لپاره ولرو:
$f'(x) = 0 \ , \ f''(x) \neq 0$
نو تابع $y = f(x)$ هلته يو بحراني ټکی لري.
خورا ټيټ ټکی مخ ته لرو، که وي: $f''(x) > 0$
خورا جگ ټکی مخ ته پروت دی ، که وي: $f''(x) < 0$

پوښتنې:

د لاندې توابعو انحرافي ټکي پيدا کړئ.

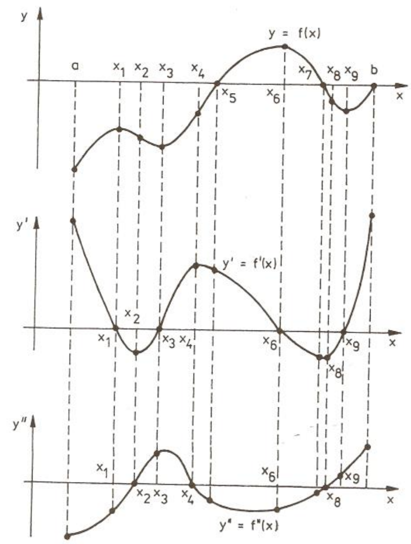
1) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$

2) $f(x) = x^4 - 3x^3 + x + 1$

3) $f(x) = 7x^7 - 6x^6 6 + 4x^4 x^3 + 2x + 1$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له ښۍ لور انحنا اوله کیڼ لور انحنا(مقعر او محدب)



فعالیت:

- په پورته شکل کې مقعریت(ننوتوال) او محدبیت(وتنوالی) وښایاست.

- په پورته شکل کې د مشتقونو له مخې مقعریت او محدبیت په ګوته کړی.

که په یوه اینټروال کې د مشتقوړ تابع f دویم مشتق $f''>0$ وي، نو په دې اینټروال کې ګراف کیڼ کوږ شوی یا کینه انحنا لري او که دویم مشتق $f''<0$ وي، نو د تابع ګراف ښی کوږ یا ښی انحنا لري.

بیلګه:

ټول ګونګ تابع(راشنل تابع) د f $f(x)=x^3-2x^2+4x-1$ سره په کومه ورشو(ساحه)کې کیڼ کوږدی (کینه انحنا لري (ننوتی یا مقعر دی)) او په کومه ورشوکې ښی کوږ دی (ښۍ انحنا لري(محدب یا وتلی دی))؟

دویم مشتق: (له لومړی مشتق څخه):

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f'(x) = 3x^2 - 4x + 4$$
$$f''(x) = 6x - 4$$

د $x > \frac{2}{3} \Rightarrow 6x - 4 > 0$ لپاره کېن ګوړوال(کینه انحنا (ننوتی یامقعر)

د $x < \frac{2}{3} \Rightarrow 6x - 4 < 0$ لپاره ښی کوږوالی(ښی انحنا(وتلی یامحدب))

بیلګه:

د مات راشنل تابع $f(x) = \frac{1}{x+2}$ ګراف یو های پاررابول دی. د های پارابول کومه څانګه کینه کږه ده یا کینه انحنا لري(مقعر)، او کومه یوه یې ښی کوږوالی - یا ښی انحنا لري(محدب)؟

دویم مشتق: $f''(x) = \frac{2}{(x+2)^3}$; $f'(x) = \frac{1}{(x+2)^2}$ صورت تل مثبت دی.

د $x < -2$ لپاره د مخرج او همداسې د کسر ارزښت منفي دی. د هایپارابول ښانګه ښی کوږوالی یا انحنا لري(وتلی یا مخدب).

د لپاره $x > -2$ مخرج او همداسې ټول کسر(مات) مثبت دی.

های بارابول کینکوږ دی یا کینه انحنا لري(ننوتی یامقعر).

بیلګه: د دواړو توابعو $f(x) = \sqrt{x}$ او $g(x) = \sqrt{x^3}$ کوږوالی(انحنا) دې له دواړو لورو یو د بل سره پرتله شي. دواړه توابع د x>0 لپاره تعریف دي.

$$g'(x) = \frac{3\sqrt{x}}{2} \qquad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$
$$g'' = \frac{3}{4\sqrt{x}} \qquad f''(x) = -\frac{1}{4\sqrt{x^3}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دويم مشتقونه د $x \in R^+$ لپاره تعريف دي.

په دي ساحه کې $f''(x) < 0$ دی. اړونده ګراف ښی کوږوالی يا انحنا لري، دا يو ښي لور ته واز پارابول ښايي.

په همدې ساحه کې $g''(x) > 0$ دی. اړونده ګراف کيڼ کوږ دی يا کينه انحنا لري. اړونده ګراف يو کيڼ کوږوالی يا کينه انحنا لري، دا پورته لور ته واز پارابول دی.

تمرينونه:

۱ -- و ښاياست، چې د لاندې توابعو مقعريت او محدبيت کوم دي؟

$a)\quad f(x) = x^3 + 4x^2 + x$

$b)\quad g(x) = 2x^3 + 3x - 2$

۲ -- په کومه ورشو کې لاندې تام راشنل توابع يو کيڼ کږوالی لري او په کوم کې ښی کږوالی لري.

$a)\ f(x) = x^3 - 6x^2 + 5x + 2 \qquad b)\ -2x^3 + 3x^2 - x - 4$

۳ -- د لاندې مات توابعو ګرافونه هايپاربول دي. د هاپارابول ښانګې کوم کږوالی لري؟

$a)\ f(x) = \dfrac{1}{4x+1} \qquad b)\ f(x) = 3 - \dfrac{3}{x^2}$

٤ -- په کومه ساحه کې لاندې ناراشنل توابع يو کيڼ او په کوم کې يو ښئ کږوالی لري؟

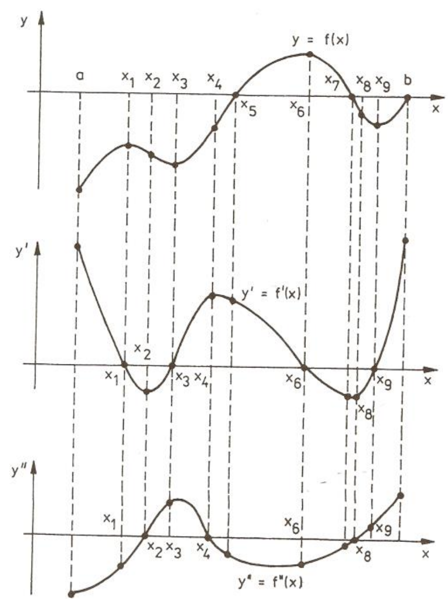
$a)\ f(x) = x \cdot e^{2-x} \qquad b)\ f(x) = \ln x^2$

٥ -- ولې د يوه دريمې درجې تام راشنل تابع ګراف په ټل تلنه کې يوه ښئ انخنا(کږوالی) نه لري.

٦-- ولې يو څلورمه درجه تامراشنل تابع د $f(x) = ax^4 + dx + e$ سره يو تلتلونی کينه انخنا(کږوالی) او ښئ انحنا لري؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

د انعطاف ټکي(اوړ ونټکي) Inflection Points



فعالیتونه:

- پورته څیره په ځیر وګورئ او وښایاست، چې چیرته یا په کوم ټکي کې منحني(له کینې و ښي لور ته) خوزښت - یا خپله د حرکت لور بدلوي؟

- د انعطاف ټکو شاوخوا هم فکر وکړئ، چې کوم ټکي غوره ټکي دي او د هغو له خویونو هم د

انعطاف ټکو خویونه وټاکئ.

- په شکل کې فکر وکړئچې د انعطافټکي شاوخوا منحني څنګه ځغلي.

- د شکل په هکله په خپل فکر څه ووایئ او د خپل فکر په بنسټ خپل دلایل روښانه کړئ. موږ له پورته څیرې اټکل کولی شو چې: که د x_0 ځای کې ولرو: $f''(x) = 0$ او $f'''(x) > 0$ ، نو یو ښی-کینې- انعطاف ټکی (اوړونټکی) مو مخ ته پروت دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

برعکس(په څټ): که وي: $f''(x)=0$ او $f'''(x)<0$ نو یو کینږ - بنی- د انعطاف ټکی مو مخ ته پروت دی.

دا نعطافټکي لپاره خوی ټاکونکی دی، چې $f''(x)=0$ وي، دا چې دا بنی -کینږ - او که کینږ- بنی – انعطاف ټکی(اوړونټکي) دی، د $f'''(x)$ مخ نښه یی ټاکي.

- شرایط $f''(x)=0$ د انعطاف ټکي لپاره یواځی اړیین یاضروري دي.

د $y=x^4$ لپاره $f''(0)=0$ دی، مگر اوړونټکی مو مخ ته نه دی پروت.

- شرایط $f''(x_0)=0$ او $f'''(x_0)\neq 0$ د انعطافټکي لپاره پوره کیدونکي دي.

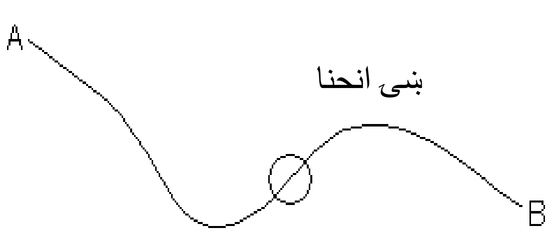
گورو چی $y=f(x)=x^5$ تابع د $x=x_0=0$ ځاي کی یو انعطافټکی لري او باوري دي:

$$f'(x)=5x^4 \quad , \quad f'(0)=0$$
$$f''(x)=20x^3 \quad , \quad f''(0)=0$$
$$f'''(x)=60x^2 \quad , \quad f'''(x)=0$$

گورو چې دریم مشتق $f'''(x)$ نه له صفرڅخه کوچنی او نه لوي دی.

ترمخ راوړني او د کلمې روښانه ونې:

د دې کلمې د لا نورې روښانه کولو لپاره په لاندې توگه مخ ته ځو:



د بایسکل ځغاستي چې له A څخه ځغلي د منحنی څخه تېرېږي او B ته رسیږي. د همغه وخت د بایسکل ځغاستي د انډل حالت د ځغاستې په وخت کې په پام کې ولري. د کینې منحني(د کینږ لورې د انډل حالت) څخه وروسته د بنی لورې منحني کې ځغلي.

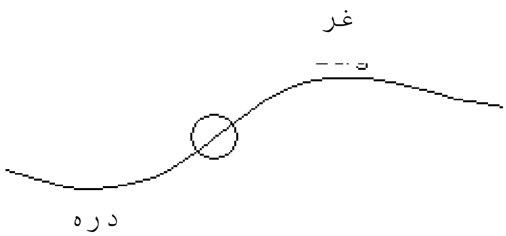
.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کينې- او ښی منحني(کرږې) ترمنځ باید د باسکل انډل نېغ ولاړ وي(عمود وي)، چې دا د انډل بدلون دی له کينې لورې و ښی لورې ته. دا د کينې او ښی منحني ترمنځ اوړيدنه ياد انعطاف ټکی بلل کيږي.

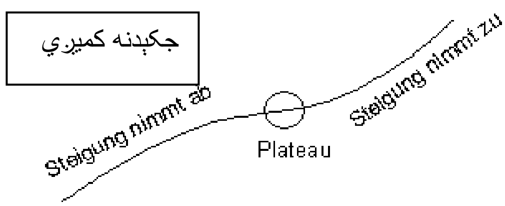
تاسو له بايسکل سره په يوه غونډۍ ځغلی. وروسته له هغې، چې له تالي څخه تېرېږي، نو لار په جګېدو پيل کوي. په لومړي سر کې نرم او بيا په نيغه جګيږي، بيا په دې پسې جګوالی بېرته کميږي، چې پاس د غونډۍ په څوکه صفر ارزښت غوره کړي. يو چېرته په غونډۍپورته صفرارزښت ته رسيږي. يو چېرته په لار جګېدنه خورا لويه وه. هلته د انعطاف ټکی پروت دی.

دا څېره بيا



د بايکل ځغلونکي بل حالت، چې له څنګ دياګرام څخه يې رانيسو:
په غره د بايسکل ځغاستميل ياجګېدنه لومړی کميږي، چې له سره بېرته جګه شي.
ددې ترمنځ يوه ساحه شته، د کم جګوالي سره (يوه نسبتآهواره). دې نسبتآ هوار ځای کې د ټوټه کرښې جګيدنه نسبت بل ځای ته کمه ده. هلته اوړونټکی(د انعطاف ټکی) پروت دی.

دا څيره د ښښتو نومونو سره بيا کښل...



له کيڼ ښي لور ته ژباړه: جګيدنه کيږي، هواره، جګيدنه زياتيږي

پوهيږو، چې د يوې تابع لومړی مشتق د تابع د جګوالی تابع دی، چې له ګراف څخه يې جګوالی لوستل کيږي. دا چې د انعطاف ټکی خورا لوي يا خورا کوچنی ټکی کېدی شي، داسې پيدا کيږي، چې د مشتق تابع انحرافي ارزښتونه پيدا کړو.
دا تلنلار همهغسې ده، لکه د پيل تابع $f(x)$ لپاره مو ټاکلي. اوس د مشتق تابع $f'(x)$ باندې دا کار يا عمل اجرا کيږي.
مخکی له دې چې يو لړ جملې د بحراني ارزښتونو او د انعطاف ټکو په هکله څيرو، غواړو چې دا کليمی تعريف کړو.

دواړه کلمې به د نسبي افراطي ټکي په بڼه کی سره را غونډې شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پیژند:

په یوه چاپیریال $x = x_0$ کې مشتق وړ تابع $y = f(x)$ یو کېڼ- ښی- انعطافټکی په همدې ډول ښی- کیڼ- انعطافټکی لري، که د هغه مشتق هلته یو نسبي جګټکی(عظمي نقطه) په همدې توګه یو نسبي ټیټ ټکی ولري.

جمله: (د یوه نسبي بحراني ټکي لپاره ضروري شرایط):

که په x_0 کې مشتق وړ تابع $y = f(x)$ اکستریموم لري نو لرو: $f'(x) = 0$

دا جمله موږ ته وایي: چیرته چې $f'(x) \neq 0$ وي نو هلته بحراني ټکی نه شته، د بحراني ټکو لپاره یوائې د x_0 ځای په پوښتنه کې راځي، چې د هغې لپاره $f'(x) = 0$ وي ، خو حمتي نه ده چې $y = f(x)$ دې یوبحراني ټکی ولري.

د پورته جملی استعمال په $y' = f'(x)$ څخه لاندې جمله لاس ته راځي:

جمله : (د اوړونټکي(انعطاف ټکي) لپاره اړیین شرایط):

که په $x = x_0$ کی دوه واره مشتق وړ تابع $y = f(x)$ هلته یو انعطاف ټکی ولري، نو لاس ته ترې راځي: $f''(x) = 0$

دلته هم باور لري(یادونه ۴ دې پ‌ءتله شي) : چیرته چی $f''(x) \neq 0$ وي ، نو هلته نه شي کیدی چي د انعطاف ټکي موجود وي. مګرچیرته چی $f''(x) = 0$ وي ، د انعطاف ټکی شته کیدلی شي، خو اړیین یا ضرور نه ده چی هلته انعطاف ټکی شته وي.

له پورته څخه لاندې جمله لاس ته راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

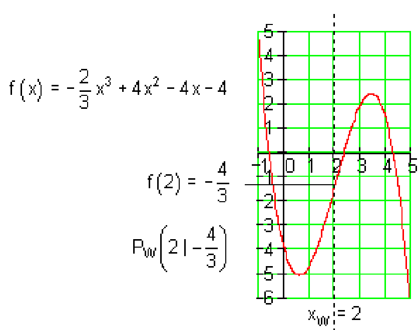
جمله: (د انعطافټکي لپاره پوره کېدونکی شرطونه)

که په $x = x_0$ کی د دریواره مشتقوړ تابع $y = f(x)$ لپاره وي: $f''(x) = 0$ او $f'''(x) \neq 0$

نو هلته یو انعطاف ټکی مخ ته لرو. که $f'''(x) < 0$ وي، نو یو کیڼ- ښي – انعطاف ټکي مخ ته پروت دی او د $f'''(x) > 0$ لپاره یو ښی-کیڼ-انعطاف ټکی مخ ته لرو.

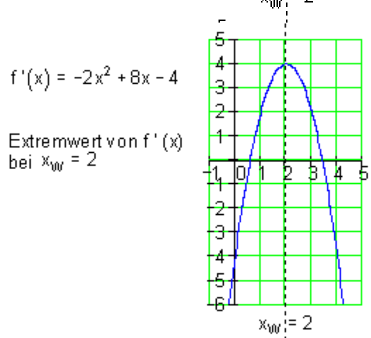
شننیزه یا تحلیلي بیلګه:

یادونه: موږ د x_E سره افراطي ټکی په نښه کوو او د x_W سره د انعطاف ټکی په نښه کوو.



1- تابع مساوات د مشتق سره

$$f(x) = -\frac{2}{3}x^3 + 4x^2 - 4x - 4$$
$$f'(x) = -2x^2 + 8x - 4$$
$$f''(x) = -4x + 8$$
$$f'''(x) = -4$$



2- دویم مشتق صفر کړئ.

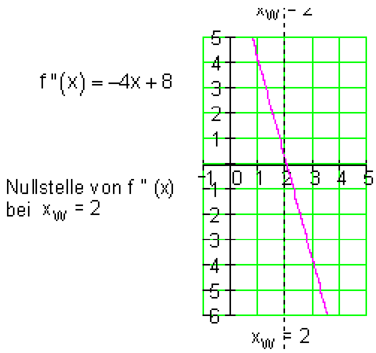
$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -4x + 8 = 0$$
$$\Rightarrow x_W = 2$$

3- د انعطاف ټکي له مخې ښوونه، چې ایا د انعطاف ټکی شته دی؟

$$f'''(x_W) = f'''(2) = -4$$

4- په $f(x)$ د انعطاف ځایونه ځای په ځای کولو له لارې د انعطاف ټکي ټاکنه

(c) ketabton.com: The Digital Library

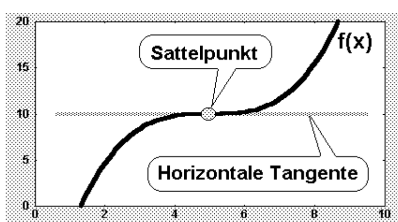


$$f(x_W) = f(2) = -\frac{2}{3}(2)^3 + 4(2)^2 - 4(2) - 4 = -\frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow P_{W\left(2|-\frac{4}{3}\right)}$$

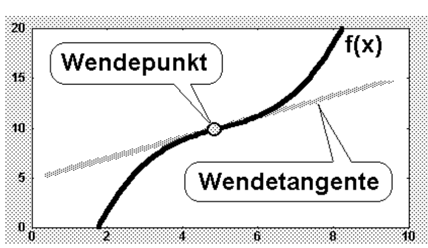
$$P_W(21 - 1.33)$$

پام: په انعطاف ځای x_W کې د $f(x)$ گراف کږیږي.
په یوه په خوښه ټکي x_0 کې د کږوني(انحنا) لپاره باور لري:
$f''(x) > 0$ په دې معني دی،چې $f(x)$ کيڼ لور ته کږیږي(انحنا لري) دی.
$f''(x) < 0$ په دې معنی، چې تابع $f(x)$ گراف ښی لور ته کږیږي(انحنا کوي)
یو زینټکی <u>Der Sattelpunkt</u> څه شی دی؟



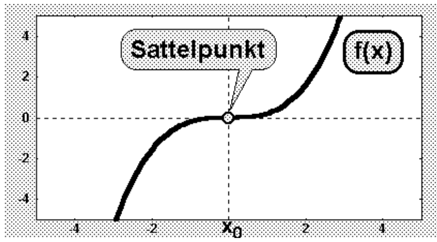
پیژند:

د زینټکي(کله کله برنډې ټکی هم بلل کیږي)لاندې د انعطافټکي ځانگړی حالت پوهیږو، داسې انعطافټکی چې تانجنت یې افقي (پروت) وي:



د پرتلې لپاره دې بیا یو ،،عادي،، انعطافټکی ورکړ شوی وي.دا یو مائل(نه افقي) تانجنت لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

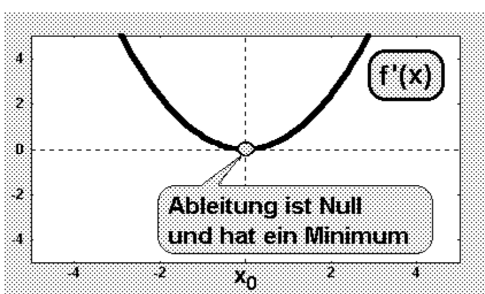


توضيح:

اوس فکر کوو، چې يو زينټکی څنګه د شمېرلو له مخې پېژندل کېدی شي. په دې برخه کې په ځانګړي توګه دا مخ ته لرو، چې يو زينټکی له ښي – و کينه انحنا و شمېرو.

د دې لپاره د $f(x)$ تابع جګوالی په پام کې نيسو، يعنې لومړی مشتق: د زينټکي د مخه د $f(x)$ جګوالي کميږي، په زينټکي کې صفر ارزښت لري، او له زينټکي څخه وروسته بېرته جګيږي.

يو زينټکی (د ښي – کيڼ – بدلون سره) په دې پېژندل کيږي، چې لومړی مشتق $f'(x)$ يې هلته صفر شي او سربېره پر دې هلته يو نسبي ټيټکی (مينيموم) ولري.



د لومړي مشتق $f'(x)$ شکل داسې برېښي:

لومړی شرط دی، چې مشتق يعنې $f'(x)$ په زينټکي کې د صفر سره مساوي دی.

زينټکی(ښی-کيڼ-بدلون) $f'(x_0)=0$ دوم شرط دی، چې مشتق $f'(x)$ هلته يو نسبي مينيموم لري.

دا په دې معنادی، چې بل جګ مشتق $f''(x)$ بايد په صفر مساوي وي او مخښنه له منفي و مثبت ته بدليږي.

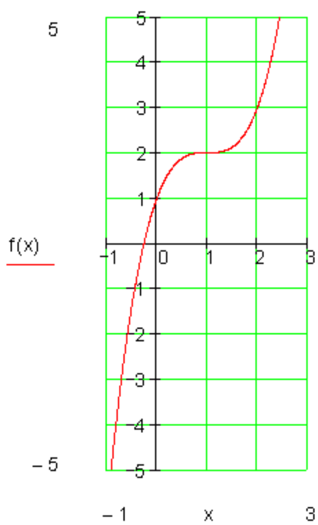
له دې سره سم د زينټکي لپاره پوره کېدونکي قضيه وميندل شوه:

د زينټکي لپاره جمله(خوي ټاکنه)(د ښي –کيڼ- انعطاف سره)

(c) ketabton.com: The Digital Library

الف:د x_0 ځا کې لومړی مشتق $f'(x)$ صفر دی: $f'(x_0)=0$
ب : د x_0 په ځا ي کې لومړی مشتق $f'(x_0)$ يو مينيموم لري، دا په دې معنا، چې دوم مشتق صفر دی، يعني $f''(x)=0$ دوم مشتق مختخښه له منفي څخه و مثبت ته بدلوي.
بل بديل(د ګرانو دوستانو وړانديز)

زينټکی **Der Sattelpunkt**



د انعطاف ټکي يو ځانګړی حالت زينټکی دی. دا د انعطاف ټکی دی د صفر جګېدني سره.که د کين لور ورتزدې شو فکر کېږي، چې، نسبي جګټکی مو مخ ته پروت دی
که څوک د ښي لور ور نزدې شي فکر کوي، چې يو نسبي ټيټټکی مخ ته لرو.
اوس دا حالت د رياضياتو له لوري څېړو:
مشتق:

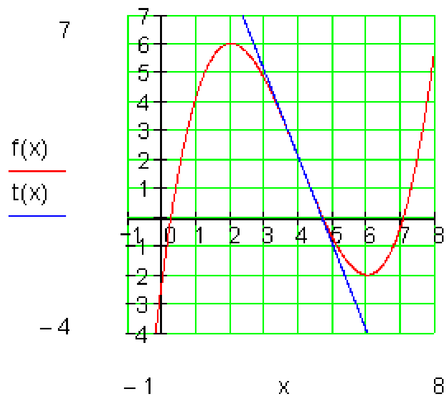
$$f(x)=x^3-3x^2+3x+1$$
$$f'(x)=3x^2-6x+3$$
$$f''(x)=6x-6$$
$$f'''(x)=6$$

$$f'(x)=0 \quad \Leftrightarrow \quad 3x^2-6x+3=0 \;\Rightarrow\; x_{1/2}=1$$

$f''(1)=6\cdot1-6=0$ $f'''(1)=6$	1=> د $x=1$ سره د انعطاف ټکی	1=> د $x=1$ سره زينټکی

د انعطاف ټکي لپاره شرايط پوره دي.
دا چې د $f''(1)=0$ له امله د انعطاف ټکی مخ ته لرو، نو دا د انعطاف ټکی همغه زينټکی دی.
د انعطاف ټکي پيداکونه:
د تابع ګراف باندې انعطاف ټکي کې تانجنت د انعطاف تانجنت بلل کيږي. د انعطاف تانجنت هم
همداسې پيدا کيږي لکه د تابع دګراف په يوه ټکي کې تانجنت، چې تانجنت مساوات تاکل کيږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$f(x)=\frac{1}{4}x^3-3x^2+9x-2$$

$$f'(x)=\frac{3}{4}x^2-6x+9$$

$$f''(x)\frac{3}{2}x-6 \qquad f'''(x)=\frac{3}{2}$$

$$f''(x_W)=0 \Leftrightarrow \frac{3}{2}x-6=0$$

د $x_W=4$ او $f'''(x_W)=\frac{3}{2}\neq 0$ د

تانجنت $f(x_W)=f(4)=2\Rightarrow \underline{P_W(4|2)}$

مساوات لپاره باور لري.

د x_W لپاره د تانجنت مساوات

$$t(x)=f'(x_W)(x-x_W)+f(x_W)$$

د $f'(x_W)=f'(4)=-3$ سره په لاندې ډول

دي $t(x)=-x(x+4)+2=\underline{\underline{-3x+4}}$

د انعطاف تانجنت د $f(x)$ ګراف د انعطاف په ټکي $P_W(4,2)$ کې غوڅوي او دا لاندې مساوات لري:

$$t(x)=-3x+14$$

د انعطاف ټکي تانجنت پیداکونه:

په انعطاف ټکي کې د تابع دګراف تانجنت د انعطاف تانجنت بلل کیږي.
د انعطاف تانجنت مساوات همداسې تاکل کیږي، لکه د تانجنت مساوات د ګراف په خوښه ټکي باندې.

داسې حالتونه، لکه $f'(x)=f''(x)=f'''(x)=0$ دلته تر څېړنې لاندې نه نیول کیږي.

پوښتنې

۱ -- د تابع f د $f(x)=\dfrac{x^2-x-2}{(x-1)^2}, x\neq 1$ سره د انعطاف ټکي پیداکونه

۲ -- د لاندې توابعو د انعطاف ټکي پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$a)\ f(x)=\frac{2x-2}{x^2}$ $b)\ f(x)=\frac{x}{x^2+3}$

$c)\ f(x)=\frac{x^3}{3(x-1)^2}$ $d)\ f(x)=\frac{x^3-8}{4x}$

۳ -- و ښايئ، چې د $f(x)=\frac{x^3}{x^2-1}e$ تابع د انعطاف ټکی زینتکی دئ.

۴ -- د لاندې توابعو د انعطاف ټکي (اوړونټکي) پيداکړئ.

$a)\ f(x)-=x\cdot e^{-x^2}$ $b)\ f(x)=\ln\frac{1}{x^2+1}$

د منحني بحث (Kurven Diskusion) :

يوه تابع $y=x^3+x^2-3$ لرو. د دې تابع شکل رسم کړئ او بيا په دې رسم کې د تابع انحرافي ټکي او د انعطاف ټکي په نخښه کړئ، رښانه کړئ، چې انحنا چيرته له کيڼې لور و ښۍ لورې ته او له ښۍ لورې و کيڼې لورې ته ده.

فعاليت:

- تناظر تعريف کړئ.
- لاندې توابع رسم کړئ، جګ ټکي، ټيټ ټکي او د انعطاف ټکي يې پيدا اکړئ.
- x^3+x
- $3x^3+x+2$

ددې لپاره چې يوه تابع رسم کړای شو، ساده ده که د تابع غوره ټکی و پيژنو. موږ دې بحث ته د منحني بحث وايو. موږ په دا ډول خبرو اترو کې بايد سيستماتيک مخ ته لاړ شو.

په لاندې ډول تلنه ګټوره بلل شوې.

دتعريف ساحه: د تابع ځيړنه يواځې په همدې ورشو کې موخه وره ده.

تناظر **Symetry** : بايد وټاکل شي، چې تابع محوري متناظر او که مرکزي متناظر ده.

د محوري تناظر لپاره باور لري: $f(-x)=f(x)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مرکزي تناظر لپاره باور لري. $f(-x) = -f(x)$
په پورته دواړو حالتونو کې دې فقط $x \geq 0$ وڅیړل شي.
په ټولیزه توګه که ټول ریل تابع په پام کې ونیسو، نو ګورو چې که توان(د پولینوم درجه)یې جفت(جوړه) وي، نو پولینوم محوري متناظر دی او که توان(د پولینوم درجه) طاق(ناجوړه) وي، نو پولینوم مرکزي متناظر دی.

انحرافي ټکي **Extrema** : د نسبي بحراني ټکو ټاکل(جګټکی، ټیټټکی)
د جګټکی یا نسبي جګ ټکي پوره کېدونکي شرطونه:
$f'(x_1) = 0 \ \wedge \ f''(x_1) < 0$

انعطافټکی Inflection Point :
د انعطافټکو او همداسې زینټکي ټاکلو له پاره پوره کېدونکي شرطونه:
$f''(x_W) = 0 \quad \wedge \quad f'''(x_W) \neq 0$
زینټکی انعطافټکی دی د افقي تانجنت سره.
د تابع تقاطع د x او y محورونوسره(د محورونوِغوڅټکی):
د $x-$ محور سره ِغوڅټکی: $P_{xi}(x_i \mid 0) \ \Rightarrow \ (x) = 0$
د y محور سره غوڅټکی(صفرځای) ټاکي $P_y(0 \mid y_s) \ \Rightarrow \ f(0)$
دګراف انځورونه: د ټولو تراوسه راټولو شوو معلوماتو سره کړی شو، چې ګراف انځور کړو. ددې لپاره لومړی یو ارزښتجدول انځوریږي. دا راته په ګوته کوي، چې نور کوم ارزښتونه شمیرل کیږي.

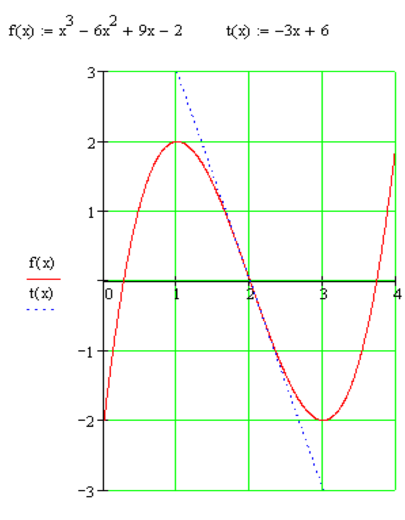
د انحنا حالت او یوغږیزوالی:
د انعطاف په ټکي X_w کې د $f(x)$ ګراف تغیر خوري.
په خوښه یوه ټکي x_0 کې د انحنا لپاره باور لري:
$f''(x_0) > 0$ په دې معنا، چې د $f(x)$ تابع ګراف کینه انحنا لري (کونوکس)
$f''(x_0) < 0$ په دې معنا، چې د $f(x)$ تابع ګراف ښی انحنا لري (کونکاو)
یوغږیزوالی
1- که د ټولو $x \in I$ لپاره وي $f'(x) \geq 0$ ، نو $f(x)$ په انتروال I کې مونوتون جګیږي.
که د ټولو $x \in I$ لپاره $f'(x) \leq 0$ وي, نو $f(x)$ په انتروال I کې مونوتون ټیټېدونکی دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

2- که د ټولو $x \in I$ لپاره $f'(x) > 0$ وي، نو $f(x)$ تابع په انټروال I کې کره غښتلې مونوټون جګېدونکی ده.
که د ټولو $x \in I$ لپاره $f'(x) < 0$ وي، نو $f(x)$ تابع په انټروال I کې غښتلې مونوټون جګېدونکی ده.
د پېژند ورشو ژی ټکي:
د تابع ژی ټکي کتنه په پېژند ورشوکې. که پېژند ورشو نامحدوده وي، نو لیمیټ $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ او $\lim_{x\to\infty} f(x)$ ټاکو.

بیلګه :
د $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$ تابع رسم کړئ.

مشتق کونه:



$$y = f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$$
$$y' = f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$$
$$y'' = f''(x) = 6x - 12$$
$$y''' = f'''(x) = 6 \qquad D = IR$$

نسبي انحرافي ټکي

$$P_{\min}(3|-2) \qquad P_{\max}(1|2)$$

انعطاف ټکی او تانجنت

$$P_W(2|0) \quad y = f_t(x) = -3x + 6$$

صفرځایونه:

$$P_{x1}(2|0) \quad P_{x2}(3.7|0) \quad P_{x3}(0.3|0)$$

د y– محور سره غوځېکی(دقاطع): $P_y(0|-2)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

یوغړیزوالی(مونوتوني یاجگ - تیټوالی)   د تابع حالت په $x \to -\infty$ او $x \to \infty$ کې

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^3\left(1-\frac{6}{x}+\frac{9}{x^2}-\frac{2}{x^3}\right) = -\infty$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^3\left(1-\frac{6}{x}+\frac{9}{x^2}-\frac{2}{x^3}\right) = \infty$$

په $I_1 = \{x \mid -\infty < x \leq 1\}_{\mathbb{R}}$ کې یوغړیز جگیږي.

په $I_3 = \{x \mid 3 \leq x < \infty\}_{\mathbb{R}}$ کې یوغړیز جگیږي.

سیومتري: نه لري

د انحنا حالت:

ښې انحنا(محدب) : $I_4 = \{x \mid -\infty < x < 2\}_{IR}$

کینه انحنا (مقعر) : $I_5 = \{x \mid 2 < x < \infty\}_{IR}$

تمرینونه:

په لاندې توابعو بحث وکړئ او غوره نقطې یې پیدا کړئ:

اول) د شمېرنې له لارې وښایاست.

دویم) په شکل کې په نخښه کړئ.

$a)\quad 2x^3+x^2+1$

$b)\quad x^3+x^2+3x$

$c)\quad x^3+2x^2+x+3$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ناټاکلو افادو یا وییینو=ګ\پولې

$$0.\infty \ , \ \frac{0}{0} \ , \ 0^{\infty} \ . \frac{\infty}{\infty}, ...$$

که و لرو $x \neq 5$; $\frac{x^2+3x+2}{x+5}$ ، ومو لیدل، چې د داسې توابعو لیمیټ په پیداکولی شو. دا ډول تابع ته ټاکلې افادې وایې، ځکه چې مشتق یې نیول کېدی شي، یعنې د کمښتونو ویش(د تفاضلونو ویش) حد یې ټاکل کیدی شي.

که $\frac{\sin 2x}{5x}$ توابع ولرو،نود $x=0$ لپاره د دې تابع مشتق په ورسره بلده توګه نه شو نیولی، چې له دې امله ناټاکلې افادې ورته وایو.

فعالیت:

- که تابع $f(x)=\frac{\sin x}{x^2+x}$ ورکړشوې وي.

اول - د تابع $f(x)=\frac{\sin x}{x^2+x}$ پوله یعني $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x^2+x}$ د پولې له درسه ، چې په لومړۍ بره کې لوستل شوي، پیدا کړۍ.د.

- پورته په ننوتنه کې و هڅېږۍ، چې د توابعو مشتقونه پیدا کړۍ.
- که ولرو $\frac{x^2-4x-5}{x-5}$ ، نو د تابع مشتق د چېرته نیول کیږي، که د x=5شونی وي، نو مشتق یې ونیسئ.

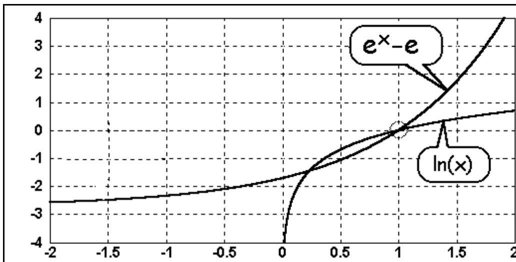
پیل ښیرنه: د $\frac{0}{0}$ حالت که پوله ارزښت جوړېدو کې یو کسر پیدا شي، چې صورت او

مخرج یې دواړه د صفر په لور لاړ شي یا صفر شي، نو دا پوله ارزښت،، ناټاکلې افاده،، بولو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه:

$$\lim_{x \to 1} \frac{e^x - e}{\ln x} = \frac{Zähler \to 0}{Nenner \to 0}$$

په څېره کې برخه توابع رسم شوي دي، یعني د صورت او همداسې د مخرج ګرافونه. ګورو: د صورت او مخرج د توابعو ارزښتونه دواړه و صفر ته ځي. (که د ۱ په لور لاړشي)	

لیکندود(لیکندول): د افادې

$$\frac{\text{Zähler} \to 0}{\text{Nenner} \to 0}$$

لپاره په حدشمېرنه کې لنډ لیکو: $\frac{0}{0}$

دا په حقیقت کې دقیق نه دی، مګر په ټولېزه توګه داسې معمول دی

روښانه ونه :

ناټاکلې افاده څه شی دی؟

دا پوښتنه رامنځ ته کیږي، چې دا ناټاکلې افاده خپل نوم له کومه ځایه اخلي. دا ،، ناټاکلی،، بلل کیږي، ځکه چې حدیې د عادي طریقو له لارې نه شي شمېرل کېدی. دا کار د لوړې ریاضي سره دا شمېرنه شونی شوه(دبېلګې په توګه د لو پیتال قانون له مخې، چې پسبه وڅېړل شي).

(c) ketabton.com: The Digital Library

روښانه ونو ته تشریح:

اوس ښایو، چې د داسې توابعو شمېرل ولې ناشوني دي.

موږ بیا دا د تېر مخ بیلګه رانیسو:

$$\lim_{x\to 1} \frac{e^x - e}{\ln x} = \frac{\to 0}{\to 0}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{e^x - e}{\ln x} = \frac{Zähler \to 0}{Nenner \to 0}$$

1- که هڅه وشي، چې حد پیدا کړو، داسې چې د $x = 1$ په کسر کې ځای په ځای کړو، نو افاده $0:0$ به ترې لاس ته راشي. دا تعریف نه لري، $u = f(\frac{1}{z})$ ځکه په صفرویش اجازه نه شته.

2- ترمخه مو د ناټاکلو افادو د شمېرلو لپاره یعني د ناطق کسري توابعو پوله شمېرنه کې د چل یا د طریقې څخه کار واخسته. اوس دا چل نه شو کارلی، لکه په پورته بیلګه کې.

3- د حد اټکل هم ناشونی دی: په لومړي لید کېدی شي په فکر راشو، چې که صورت او مخرج د صفر په لور لاړ شي، نو کسر به د 1 په لور وخوزیږي:

$$\frac{0.000000001}{0.000000001} = 1$$

که صورت او مخرج و صفر ته نږدې شي، دا به فقط دا معني ولري، چې دواړه به د ارزښت له مخې نږدې برابر شي.دا دا معني نه لري، چې د صورت او مخرج نسبت سره مساوي شي:

$$\frac{0.0000000010\ 0}{0.0000000010\ 0} = 100$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لکه چې گورو صورت او مخرج د ارزښت له مخې خورا نزدې برابردي(دا په دې معنی، چې دواړه صفر په لور ځي)، مگر د دوی ترمنځ نسبت خورا لوی دی یعني (100) دی،

د برنولي او د دې لو، پیتالقاعده Brnoulli and de L,Hospital

$$\frac{\sin 2x}{5x} \quad \text{او} \quad \frac{x^2+3x-10}{x-5}$$

د برونولي او د دو لو پیتال قاعدې د $\frac{f(x)}{g(x)}$ ډوله توابعو حد شمېرلو کې ځانگړی رول لوبوي. داحالت په ځانگړي ډول هلته رامنځ ته کیږي، چې مخرج او صورت همغه صفرځاي x_0 ولري. دا ناټاکلی افاده $\frac{f(x_0)}{g(x_0)}=\frac{0}{0}$ هدفمنده نه ده. کیدی شي چې د ویش حد $\lim \frac{f(x)}{g(x)}$ وڅیړل شي، په کومو کی چې صورت او مخرج د صفر لور ته ځي. ددې لپاره عمومي مناسب د توابعو ترمونه د غوښتلو دي. د بیلگې په توگه تابع $f: \quad y=f(x)=\frac{x^2+4x+4}{x+2}$ صورت او مخرج همغه صفرځاي x0=-2لري، سره له دې هم لیمیټ شته دی.

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2+4x+4}{x+2}=\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)^2}{x+2}=\lim_{x\to -2}(x+2)=0$$

دا ډول حدونه د مشتق په مرسته شمیرل کیدی شي، چې د صورت او مخرج توابعو له نتیجې څخه لاس ته راځي. دا ډول قاعده د پراخ شوې منځ ارزښتقضیې استعمال هم بلل کیږي.

د برنولي او د دو لو، پیتال قاعده:

Bernoulli and de l'Hospital

که توابع $u=f(x)$ او $v=g(x)$ د یوه $U(x_0)$ چاپیریال د x_0 په ځاي کی مشتقوړ وي د

(c) ketabton.com: The Digital Library

$g'(x) \neq 0$ سره او د ټولو $x \in U(x)$ لپاره او x_0 د f او g یوصفرځاي وي،

د $f(x_0)=g(x_0)=0$ سره، نو باور لري: $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$,

ترڅو په ښي لور حد شته وي.

په ورته توګه لاس ته راځي: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

حل: تابع د پراخه شوې منځ ارزښت قضيي نيونی پوره کوي. د هر $x \in U(x_0)$ لپاره

یو x_m د $x_m \in (x_0, x)$ سره موجود دی، په داسی ډول چې لرو:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}=\frac{f'(x_m)}{g'(x_m)}$$

د $f(x_0)=0 \wedge g(x_0)=0$ له امله لرو:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

داچې د $x->x_0$ سره $xm->x_0$ هم هڅه کوي.

د $x->oe$ په حالت کې $x=1/z$ ځای په ځای کوو. د زنځيري قضيي په مرسته لاس ته راځي:

$$\boldsymbol{u = f(1/z)}$$

د مشتق $du/dz=f(1/z)(-1-z^2)$ او مشتق $\frac{dv}{dz}=g'(\frac{1}{z})(\frac{-1}{z^2})$ سره، داسې چې لرو:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f\left(\frac{1}{z}\right)}{g\left(\frac{1}{z}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'\left(\frac{1}{z}\right)\cdot\left(-\frac{1}{z^2}\right)}{g'\left(\frac{1}{z}\right)\cdot\left(-\frac{1}{z^2}\right)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{f'\left(\frac{1}{z}\right)}{g'\left(\frac{1}{z}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

يادونه : که په پورته حالت کې $f'(x_0)=g'(x_0)=0$ هم وي، نو په ويش بياله سره دا قاعده استعماليږي. که سړي د $n-$ پلونو(قدمونو) وروسته بريالی وي نو دا قاعده لرو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}$$

چیرته چې $f^{(n)}$ او $g^{(n)}$ د تابع $n-$م مستق په معنی دی.

ډول یا تیپ: $0/0$

بیلگه:
$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4x+4}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{2x-4}{1}=\frac{0}{1}=0$$

بیلگه:
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}=\frac{1}{1}=1$$

بیلگه:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{1}=\frac{0}{1}=1$$

تیپ یا ډول: $\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^{\infty}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha-1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\alpha x^{\alpha}}=0\qquad \alpha>0.$$

د یوه مثبت حقیقي توان(جگعدد) α لپاره یو په خوښه توان x^{α} د $x->oe$ لپاره په غښتلې توگه جگیږي، نسبت لوگاریتم تابع $1n$ ته $\alpha>0$ $\quad \lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^{\alpha}}=0$

له دې $f(x)=\frac{x^n}{e^x}$ تابع د لوپیتال د قعاعدې د ډیرځله استعمال څخه لاس ته راځي:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{nx^{n-1}}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{n(n-1)x^{n-2}}{e^x}=\ldots=\lim_{x\to\infty}\frac{n!}{e^x}=0$$

اکسپوننشل تابع e^x د x په هرتوان تابع څخه په غښتلې جگیږي:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x}=0\qquad n\in N$$

نور حالتونه کیدی شی په بڼه یا تیپ $\frac{0}{0}$ او یا $\frac{\infty}{\infty}$ بیرته واړول شي

(c) ketabton.com: The Digital Library

له تيپ يا بڼې ∞-∞ څخه و بڼې يا تيپ $\frac{0}{0}$ ته ددې لپاره لاندې تابع بيلګه کيدی شي:

$$f(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}$$

د $x \to 0$ لپاره

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)=\lim_{x\to0}\frac{\sin x-x}{x\sin x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1}{x\cos x+\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{-\sin x}{2\cos x-x\sin x}=\frac{0}{2}=0$$

داچې دلته مشتق بيرته د بڼې تيپ $\frac{0}{0}$ ده، نو د لوپيتال قاعده استعماليدی شي.

له تيپ يا بڼې $0.(\pm\infty)$ څخه بڼې $\frac{\pm\infty}{\infty}$ ته:

د تيپ $0.(-\infty)$ حالت د بيلګي په توګه تابع $f(x)=x.\ln x$ د0<-x لپاره ښايي. په کوم کی چي ضرب د ويش په څير انځور کړي، نو د لوپيتال د قاعدې په استعمال دا لاندې لاس ته راځي:

$$\lim_{x\to+0}(x\cdot\ln x)=\lim_{x\to+0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+0}(-x)=0$$

له بڼې 0^0 څخه وبڼې e^0ته:

دلته د بيلګي په توګه تابع $f(x)=x^x$ د $x->0$ لپاره تر څيړنې لاندې نيول کيږي.

د بڼې بدلون يا فورم بدلون و بنسټ e ته د يوې انځورونی په مرسته په بريالی توګه لاس ته راځي:

$$\lim_{x\to+0}x^x=\lim_{x\to+0}e^{\ln(x^x)}=\lim_{x\to+0}e^{x\cdot\ln x}=e^0=1$$

له 1^∞ بڼې څخه و $e^{0.\infty}$ بڼې ته

د ښوونې، د بيلګې په توګه د تابع $f(x)=(1+\frac{\mu}{x})^x$ پوله ده د $\mu\in R^+$ لپاره او $x\to\infty$ د $x\in R^+$ سره:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\mu}{x}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}e^{x\cdot\ln(1+\frac{\mu}{x})}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}(x\cdot\ln(1+\frac{\mu}{2}))}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{\eta}{2}\right)}{\frac{1}{x}}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{1+\frac{\mu}{2}}\cdot\frac{-\mu}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\mu}{1+\frac{\mu}{x}}}=e^{\mu}$$

د $\mu=1$ لپاره لاس ته راځي:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$$

له بڼې ∞^0 و بڼې $e^{0.(\pm\infty)}$ ته دا کارونه په یوې بیلګې روښانه کوو:

$$\lim_{x\to+0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x}=\lim_{x\to+0}e^{\sin x\cdot\ln\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to+0}(\sin x\cdot\ln\frac{1}{x})}$$

$$\lim_{x\to+0}\frac{\ln\frac{1}{x}}{\frac{1}{\sin x}}=\lim_{x\to+0}\frac{x\cdot(\frac{-1}{x^2}}{\frac{-\cos x}{\sin^2 x}}=\lim_{x\to+0}\frac{\sin^2 x}{x\cdot\cos x}=\lim_{x\to+0}\frac{2\sin x\cos x}{\cos x-x\cdot\sin x}=0$$

د $\lim\limits_{x\to+0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x}=1$ سره

باید لاندې جدول کې پام وشي.

لاندې جدول د پورته ښوول شوو ښویا ډولونو د بڼې بدلون تولیزه کتنه ممکنوي

تیپ(ډول)	$f(x)\to$	$g(x)\to$	بڼه بدلون یا لنډ: بدلون
$-\infty$	0	0	$\frac{1}{f(x)}-\frac{1}{g(x)}=\frac{g(x)-f(x)}{f(x)\cdot g(x)}\to\frac{0}{0}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

∞	0		$f(x)\cdot g(x)=\dfrac{f(x)}{\dfrac{1}{g(x)}}\to\dfrac{0}{0}$ $\wedge(Or)$ $f(x)\cdot g(x)=\dfrac{g(x)}{\dfrac{1}{f(x)}}\to\dfrac{\infty}{\infty}$
∞	0 1 0	0 0	$(f(x))^{g(x)}=e^{\ln(f(x)^{g(x)})}=e^{g(x)\cdot \ln f(x)}\to e^{0\cdot\infty}$ د f(x)>0 سره.

تمرينونه:

پورته کې دېرې بيلګې حل شوې. له هغوبايد څه تمريونونه راوړل شي.

۱) لاندې پوله ارزښتونه وشميرئ.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{2^x}$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[x]{x}$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{2}{x}\right)^x$

e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x}}{e^x}$

f) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{\sin x}{x^2}\right)$

د $\infty\to x$ لپاره د لاندې راشنل توابعو ليميتونه د دې لو پيتال قاعدې له مخې وشمېرئ.

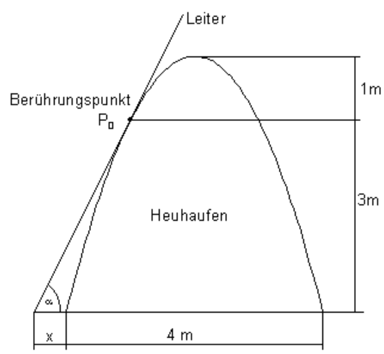
a) $f(x)=\dfrac{2x^3-x+4}{3x^3+1}$

b) $f(x)=\dfrac{x^2+2x-3}{4x^3+3x^2-2x+5}$

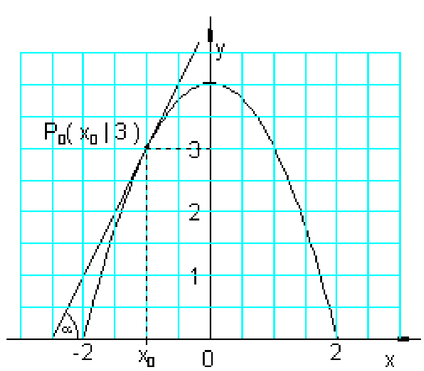
(c) ketabton.com: The Digital Library

د تانجنت لپاره د يوې تابع د استعمال بيلګې

له ځمکې څخه د وښو په ټوپۍ يوه زينه ايښول کيږي. دا زينه په درې متره جګوالي ټوپۍ لمسوي.



د وښو توپۍ دې د يوه کينکودي پارابول څېره ولري، چې بنسټ يې 4 متره سرور دی او 4 متره جګوالی لري. غواړو په دې يوه زينه کيږدو، چې د وښو ټوپۍ سره تانجنت جوړ کړي.
په کومه زاويه(کونج)بايد دا زينه کېښول شي؟
د وښو ټوپۍ له بيخ څخه دې په کوم لرېوالي په ځمکه دا زينه کېښول شي؟



موږ د y محور داسې کا ږو،چې د پارابول له ککرۍ(څوکې) څخه تېرېږي.
پارابول دا لاندې د تابع مساوات لري:

$$f(x) = a_2x^2 + 4$$
$$f(2) = 0 \Leftrightarrow 4a_2 + 4 = 0 \Leftrightarrow a_2 = -1$$
$$\Rightarrow f(x) = -x^2 + 4$$

موږ د x_0 لپاره ارزښت ټاکو:

$$f(x_0) = 3 \Leftrightarrow -x_0^2 + 4 = 3$$
$$\Leftrightarrow x_0^2 = 1 \Leftrightarrow x_{01/2} = \pm 1$$

شمېرنه:
د نورو شمېرنو لپاره ارزښت $x_0 = -1$ کاروو. زينه ټوپۍ په $P_0(-1,3)$ ټکي کې لمسوي.موږ په $P_0(-1,3)$ ټکي کې د تانجنت مساوات ټاکو:

$$f(x) = -x^2 + 4 \quad P_0(-1|3) \Rightarrow x_0 = -1;\ f(x) = 3$$
$$t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $f'(x)=-2x$ سره لاس ته راځي:

$$f'(x_0)=f'(-1)=-2\cdot(-1)=2$$

$$\Rightarrow t(x)=2[x-(-1)]+3=\underline{\underline{2x+5}}$$

جوړه زاویه: $\tan\alpha=2\Leftrightarrow\alpha\approx 62.4^\circ$

د زینې او د وښو ټوپی تر منځ واټن د $f(x)$ د صفرځای او د تانجنت $t(x)$ د صفرځای ترمنځ واټن دی.

صفرځایونه:
لرو:

$$f(x)=-x^2+4=0 \;\Leftrightarrow\; x^2=4 \;\Rightarrow\; x_{1/2}=\pm 2$$

$$t(x)=2x+5=0 \;\Leftrightarrow\; x=-2.5$$

د x ارزښتونو -2.5 او -2 ترمنځ واټن 0.5 دی.
زینه د وښو د ټوپۍ له پښو څخه باید نیم متر لرې کېښول شي.
ددې پوښتنې څخه مو زده کړل، چې د تانجنت مساوات څنګه ټاکل کېږي، چې یو ګراف په تعریف شوي ځای کې لمسوي.

د سترې ګټې(غټو ګټو) مسئله یا قضیه

دا د سترې ګټې مسئله خورا ستره عملي مانا لري، چې په لاندې ډول به د یو څو بیلګو له لارې وڅیړل شي.

نږدې ټولو پروسو کې ، چې په عمل کې کارول کیږي یا صورت نیسي، له تاثیروونکو یا په همدې ډول د هغو ټاکلو لویو استعمال ته اړ دی، کومې چې موږ په ځانګړو یا مخصوصو پولو کې په اختیار کې لرودی شو.

موږ یوائې هغه پروسې تر څیړنې لاندې نیسو چې د یوې واریابلې یا اووښتونې x په واک کې وي. دا د بل په واک کې د یوې تابع $y=f(x)\;,x\in D$ له لارې څرګندولی شو.

که y ټول لګښتونه یا مصارف په کوته کړي، نو x باید داسې وټاکل شي چې $f(x)$ مینیمال یا خورا کم شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

که په ځنډ یا برعکس y ګټه وي یا ګټور تاثیر وي، نو x باید داسې لاس ته راوړل شي، چې $f(x)$ ماکسیمال یا خورا لوی شي. په قاعده کې اغزمنه یا مؤثره لویه یا په بل عبارت، خپلواك وار یا بل یا اووښتونی x د $-\infty$ او ∞ پولو ترمنځ ازاده ټاکونکی نه ده، بلکه د تخنیك یا تخنیك پوهنې له امله، یواځې په ټاکلو پولو کې:

$$a \le x \le b \qquad (*)$$

له دې امله عملي په زړه پورې د ګټې مسئلې، په دې پورې اړه لري، چې آیا دا ګټه ده او که لګښت.

$$y = f(x) = \max! \qquad (a \le x \le b \qquad ($$

$$y = f(x) = \min! \quad (a \le x \le b) \qquad ($$

دا د افراطي ارزښتونو برخې پرابلمونو سره خورا نژدی یا ټینګ تړلی دی. دلته زموږ علاقه په ځانګړې توګه د لاندې پرابلم د کارکولو سره ده:

1- د بلواکیزو $y = f(x)$ ګډو اړیکو راپیداکول، د دندې یا وظیفې ورکولو سره سم(مودالیټي پرابلم).

2- د تخنیك پوهنې پولو په پام کې لرل (*) دادې د دوه بیلګو له لارې وښول شي

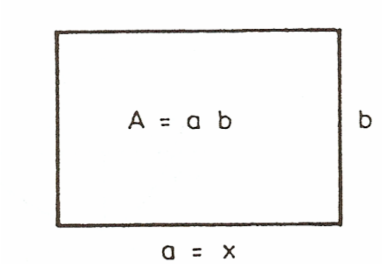
بیلګه: یو د منډو(پټي ته په کلوکې د اغزو منډو کېښول کېږي، چې مالونه ور وا نه وړ ي) سیم لرو چې ټول اوږدوالی یې L دی. له دې سیم سره باید یوه مربع سطحه(څلورګوډیزه هواره)، چې د امکان ترحده باید لویه وي، منډو شي. دا وظیفه شوه یا په بل عبارت غوښتنه.

اوس د مودالیټيArt und Weise پرابلم: غوښتنه مو د یوې څلور ضلعي(څلورګوډۍ) پیداکول دي. لکه چې معمول دي، ددې څلورضلعي(څلور ګوډۍ) یو اړخ په a ښایو او بل اړخ یې په b ښایو، د څېرې 14.20 له مخې).

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا په سر کې دوه اغیزې لرونکې یا تاثیر اچونکې لویېa او b دی.

د $L = 2a + 2b$, $b = (L/2) - a$

له امله یوائې یوې اغیزمنې(تاثیراچوونکې) لویې ته اړیو د بیلګې په توګه $a = x$، دا ګټه (ستحهA)داسې ده $A = ab = x((L/2) - x)$ دا روښانه ده چې صدق کوي $0 \le x \le L/2$ له دې امله د سترې ګټې پرابلم داسې دی.	

$$y = f(x) = x((L/2)-x)=Max! \qquad (0 < x < L/2)$$

د $f(0) = f(L/2) = 0$ له امله باید ماکس د 0 او L /2 ترمنځ پروت وي.

د ماکس لپاره ضرور دي

$$y' = f'(x) = L/2 - 2x = 0$$

د ماکس لپاره یوائې x = L /4 په پوښتنه کې راځي.

د دې لپاره $y'' = f''(x) = -2 < 0$ دی.

په رېښتیا چې یو ماکس مو مخ ته پروت دی. دلته تخنیکپوهنیزې پولې 0 او L / 2 رول نه لوبوي. نو صدق کوي. a = b = L /4

بیلګه: یوه بډای چې په یوه ټاکلي وخت کې تولسټ (تولدېدیرۍ) M تولید کړي او دا تل اخستونکو ته ورسوي، نو له دې سره فیکس یا کره ټاکلې لګښتونه F تړلي دي.
کیدې شي چې سملاسی د دې تولید په ټولسټ (ټولډیرۍ) M کې تولید کړي، په یوه زخیره ځاي(زېرمتون؟) کې ځاي په ځاي کړي او اخستونکو ته یې سملاسي ورسوي. دلته

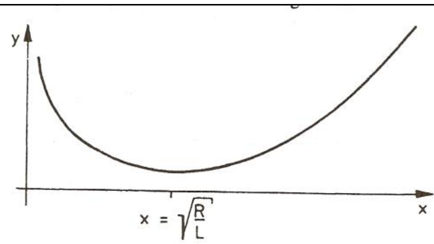
(c) ketabton.com: The Digital Library

د زېمتون(زخيره کوني) لګښتونه راپيد کيږي(ددې د زخيرې لپاره ځاي او هلته بيا اچول او وړل). يا هم کيدی شي چی توليد په لږه کچه يا اندازه توليد شي او سملاسی اخستونکو ته ورووړل شي. دلته نو د زخيره کولو لګښتونه منځ ته نه راځي. مګر تل توليد په دې ډول توليد باندې دروړل، لګښتونه منځ ته راولي، چی د چمتووالی لګښتونه يی بولو. کومه ډيری x (ازاده لويه) بايد توليد شي، چی د امکان تر پولي کم لګښتونه پرې وشي؟ د زخيرې لګښت د چمتووالی لګښت سره متناسب دی ، د خرابيدو ارزښت د چمتووالي يا توليد ارزښت سره يعنی چي خرڅلاو ته چمتو کيږي، په ځټ متناسب دی. که x لوي وي نو چمووالی ته کم اړتيا شته او که x کم وي نو چمتووالی بدلون تل بايد تغير وخوري يعني. ټول لګښتونه

$y = f(x) = F + Lx + R/x$ دي ، چيرته چی F ثابت(همغه) يا په کلکه ايښول شوي لګښتونه دي، Lد زخيرې لګښتونه او R د چمتووالی لګښتونه دي. دا ازاده لويه x د توليدډيری M څخه نه شي سترېدلی ، لوئيدلی يا غتيدلی. له دې امله صدق کوي $0 \le x \le M$ مخ ته پروت د ستريدلو مسئله له دې امله په لاندې ډول ده :

$$y = f(x) = F + Lx + R/x = Min! \; (0 \le x \le M)$$

لومړی $f(x)$ دوه واره ديفرنځيال کيږي يا يي دوه واره رابيليدنه نيول کيږي:

$f'(x) = L - R/x^2$, $f''(x) = 2R/x^3$ د مينيوم لپاره ضرور دي: $f'(x) = 0$ پس لرو $x = R/L$ د $x \ge 0$ له امله $f''(x) \ge 0$ هم صدق کوي، پس دلته تل يو نسبي مينيموم مخ ته لرو.	

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کږې(منحني) تګلار په شکل کې انځور شوې. څرګنده ده: که $x = R/L < M$ صدق ولري، نو مينيموم مو مخته پروت دی.که $x = R/L > M$ وي، نو يو منيموم په څنډه $x = M$ لرو. نامساوت $x = R/L < M$ دا مانا لري $R/L < M^2$ په همدې ډول $R^2 < M^2 L$ پس مخ ته لرو: $x = R/L$ د $R < M^2 L$ لپاره او $x = M$ د $R > M^2 L$ لپاره؛ نو : که د چمتوالي لګښتونه , R زخيرې لګښتونو L څخه زيات لوي شي، نو سملاسی دې ټول توليد x = M صورت ونيس. که د ذخيرې لګښتونه د چمتووالی لګښت څخه کم وي، کيدی شي کوچنی ازاد x توليد شي.

ټاکلی بيلګه: د $M = 10000, R = 1000, L = 10$ لپاره صدق کوي،
$R = 1000 < M^2 L = 108 \cdot 10 = 109$ ستر يا غټ ازاد لګښت دی
$x = R/L = 1000/10 = 100 = 10$ ازاد a دلته 10 يوونه بايد ورزيات شي ، چې 10000 يوونه توليد کړي د $M = 10, R = 1000, L = 1$ لپاره صدق کوي
$R = 1000 > M^2 L = 100$ غټ ازاده لويه له دې امله $x = M = 10$ ده، يواځې يوه ازاده لويه دې تر توليد لاندې ونيوله شي.

په توليد کې د مشتق استعمال

فعاليت:
يوه فابريکه x توليد کوي. په دې توليد لګښت کيږي، چې دا د توليد په واک کې دی، چې موږ ورته د لګښت تابع وايو او په $K(x)$ سره يې ښايو.
څنګه کولی شو، چې د زيات توليد لپاره لګښت را ټيټ کړو؟
د لګښت تابع $K(x)$ د توليد سټ(ډېری) او ټول لګښت تر منځ تړاو انځوروي.
که توليد د Δx شاو خوا کې زيات شي، نو لګښت هم د ΔK په شاو خوا کې زياتيږي.
کمښتويش (تقسيم تفاضل) $\frac{\Delta K}{\Delta x}$ د منځنې لګښت زياتوالی ښايي، د يوه Δx توليد تغير سره(منځنی تغير ارزښت)
د x_0 ځای کې لحضوي تغير ارزښت د مشتق لګښت بلل کيږي. دا د پوله ارزښت $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta K}{\Delta x}$ سره ټاکل کيږي، داپه دې معني، چې د لګښت د تابع K مشتق.

(c) ketabton.com: The Digital Library

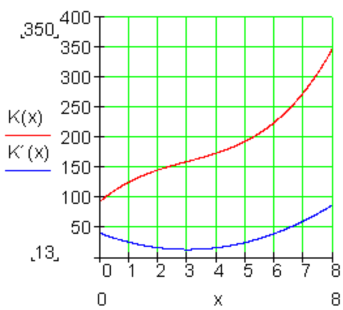
پيژند: د لګښت تابع $K(x)$ مشتق د مشتفارزښت $K(x)$ په نامه يادوو يا يي پوله لګشت $K'(x)$ هم بولو.

بېلګه: د لګښت تابع $K(x)=x^3-9x^2+40x+94$ دي ورکړ شوي وي.

الف: مشتق ارزښت وټاکی، يو ارزښت جدول د $K(x)$ او $K'(x)$ لپاره وکاږیاو په پروتولاړ سيستم يا کواوردیناتسيستم کي يي ګراف وکاږئ.

پوله ارزښت د $[0\ ;\ 6]=1$ لپاره په1پل(قدو) پراخوالي سره.

ب: د ډېر کم لګښت زياتوالی و ټاکی:



لاندي تابع

$$K(x)=x^3-9x^2+40x+94$$

لرو

مشتف ارزښت

$$K'(x)=3x^2-18x+40$$

ارزښت جدول

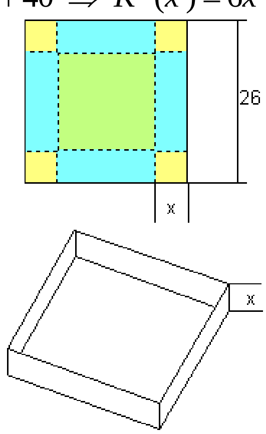
x	0	1	2	3	4	5	6
K(x)	94	126	146	160	174	194	226
K'(x)	40	25	16	13	16	25	40

خورا کم د لګښتزياتوالی(لګښتجګېدنه) د پارابول $K'(x)$ په ککره(څوکه) کي پروت دی، يعني هلته چي تانجنت $K'(x)$ پروت يا افقي دی

$$K'(x)=3x^2-18x+40 \Rightarrow K''(x)=6x-18$$

دد تانجنت د پروتوالي يا افقيت لپاره:

$$K''(x)=0 \Leftrightarrow 6x-18=0 \Rightarrow \underline{\underline{x=3}}$$



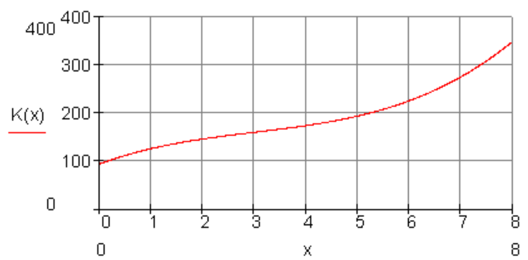
پوښتنې: دي، مربع کارتون(د کلک کاغذ ټوټه جوړ)څخه، چي 26 سانتيمتره د اړخ اوږدوالی لري يو بکس جوړوو بي له سرپوښ، چي د x جګوالی لري.

الف: د يوه تابع ترم وټاکئ، چي د بګس حجم(ډکی) v د x په واکوالي يا تابعيت کي

(c) ketabton.com: The Digital Library

ښايي.

ب: ګراف وکاږئ او په نردې توګه يې ماګسيما(خورا جګ) حجم و ټاکئ.

د يوه روغتون د نرختابع(مصرف تابع) $K(x)$ د ناروغانو ګڼه (تعداد) x او د ټول مصرف ترمنځ اړيکي انځوروي، داسې چې $x=1$ د 100 ناروغانو معنی او $y=1$ دی معنی چې $1000\in/\tan$ د روځې زر يورو ($1000\in/\tan$). $K(x)=x^3-9x^2+40x+94$	

الف: د مصرف تابع په خپله کتابچه کې وليکئ.

ب: د لګښت تابع مشتق د مشتق لګښت (-مصرف) يا دحدمصرف په نامه ياديږي. تاسو د لګښت زياتېدنه د ناروغانو په واکوالي يا تابعيت کې تشريح کړئ.(د $K(x)$ جګېدونه).
$K'(x)$ وټاکئ او ګراف يې په وضعيه سيستم (پروت- ولاړ-سيستم) کې انځور کړئ)

پ: د ناروغانو د کوم تعداد سره د لګښت زياتوالی خورا کم دی؟ دا قېمتونه وشمېرئ.

ټولګه:

د رول(Rolle) قضيه:
يوه د f تابع دې په بند اينټروال $[a,b]$ کې متمادي وي د $f(a)=f(b)$ سره او په واز اينټروال (a,b) کې مشتقوړ، نو لږ تر لږه يوځای $c\in(a,b)$ شته دی د $f'(x_0)=0$ سره.

د مشتق د منځني ارزښت (وسطي قيمت) قضيه:
که $y=(x)$ تابع په بند اينټروال $[a,b]$ کې متمادي

(c) ketabton.com: The Digital Library

او په واز اينټروال (a,b) کې د مشتق وړ وي، نو   ځيره په نوټ کې ده،
هلته يوځاي $x\in(a,b)$ شته دی، د کوم لپاره چې

لرو: $f'(x_0)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

پراخه شوې منځقضيه:
که $u=f(x)$ او $v=g(f)$ په بند اينټروال $[a,b]$ کې متمادي توابع وي او په واز اينټروال (a,b) کې مشتقوړاو $g'(x)\neq 0$ باور ولري، نو د ټولو $x\in(a,b)$ لپاره، کم له کمه يوځای $x_0\in(a,b)$ وجودلري چې لاس ته ترې راځي: $\dfrac{f'(x_0)}{g'(x_0)}=\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$

قضيه:
د $f(x)$ تابع دې په انټروال Iکې مشتقوړ وي.

2. که د $f(x)$ تابع په اينټروال Iکې مونوټون جګېدونکې وي، نو باور لري: $f'(x)\geq 0$ د ټولو $x\in 1$لپاره
- که $f(x)$ په اينټروال کې همغږيزټيټېدونکې وي، نو باور لري: $f'(x)\leq 0$ د ټولو $x\in 1$ لپاره.
- که $f'(x)\geq 0$ وي، دټولو $x\in 1$ لپاره، نو $f(x)$ په اينټروال I کې همغږيز جګېدونکې ده.
- که $f'(x)\leq 0$ وي د ټولو $x\in 1$ لپاره، نو $f(x)$ په اينټروالI کې همغږيز ټيټېدونکې ده.
- که $f'(x)>0$ وي ، د ټولو $x\in 1$ لپاره، نو $f(x)$ په اينټروال I کې په کلکه همغږيزجګېدونکې ده.
- که $f'(x)<0$ وي د ټولو $x\in 1$ لپاره،نو $f(x)$ په اينټروال Iکې په کلکه مونوټون ټيټېدونې ده.

که د $f(x)$ لپاره د x_0په ځای کې $f'(x)=0$ ولرو نو يو نسبي ټيټ ټکی مو مخ ته پروت دی.

که د $f(x)$ لپاره د x_0په ځای کې $f'(x)=0$ او $f''(x)>0$ ولرو نو يو نسبي ټکی مو مخ ته پروت دی.

•

(c) ketabton.com: The Digital Library

که ددې برعکس ولرو: $f'(x)=0$ او $f''(x)<0$ ، نو يو نسبي ماکسيموم مو مخ ته پروت دی.

د بحراني ټکي(ټيټ ټکي يا جګ ټکي) لپاره خوي ټاکونکی دی، چې $f'(x)=0$ وي، او د $f''(x)$ مخ نښه (+ ، -)، په دې پريکړه کوي چې ايا يو اصغري ټکی او که اعظمي ټکی مو مخ ته پروت دی.

پېژند: د $x=x_0$ په چاپيريال کې د $y=f(x)$ تعريف شوې تابع يونسبي جګ ټکی په همدې ډول نسبي ټيټ ټکی لري، که ټولو x_0 ته پوره نږدې x لپاره باور ولري: $f(x)\le f(x_0)$ په همدې ډول $f(x)>f(x_0)$

جمله: (د يوه نسبي بحراني ټکي لپاره ضروري شرايط): که په x_0 کې مشتق وړ تابع $y=f(x)$ انحرافي ټکی لري نو لرو: $f'(x)=0$

دا جمله موږ ته وايي: چېرته چې $f'(x)\neq 0$ وي نو هلته اکستريموم نه شته، د اکستريموم لپاره يوازې د x_0 ځای په پوښتنه کې راځي، چې د هغي لپاره لرو $f'(x)=0$ ، خو حمتي نه ده چې $y=f(x)$ دې يواکستريموم و لري.

جمله : (د يوه بحراني ټکي لپاره پوره کېدونکی شرايط):

که په $x=x_0$ کې دوه واره مشتقوړ $y=f(x)$ تابع لپاره ولرو: $f''(x)\neq 0$, $f'(x)=0$
نو تابع $y=f(x)$ هلته يو بحراني ټکی لري.

خورا ټيټ ټکی مخ ته لرو، که وي: $f''(x)>0$

خورا جګ ټکی مخ ته پروت دی ، که وي: $f''(x)<0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پېژند: په یوه چاپېریال $x = x_0$ کې مشتق وړ تابع $y = f(x)$ یو کېڼ- ښی- انعطافټکی په همدې ډول ښی- کېڼ- انعطافټکی لري، که د هغه مشتق هلته یو نسبي جګټکی(عظمي نقطه) په همدې توګه یو نسبي ټیټ ټکی ولري.

جمله: (د یوه نسبي بحراني ټکي لپاره ضروري شرایط):
که په x_0 کې مشتق وړ تابع $y = f(x)$ اکستریموم لري نو لرو: $f'(x) = 0$

دا جمله موږ ته وایي: چیرته چې $f'(x) \neq 0$ وي نو هلته بحراني ټکی نه شته، د بحراني ټکو لپاره یوائې د x_0 ځای په پوښتنه کې راځي، چې د هغې لپاره $f'(x) = 0$ وي ، خو حمتي نه ده چې $y = f(x)$ دې یوبحراني ټکی ولري.

د پورته جملی استعمال

پېزند: د زینټکي(کله کله برندې ټکی هم بلل کیږي)لاندې د انعطافټکي ځانګړی حالت پوهیږو، داسې انعطافټکی چې تانجنت یې افقي (پروت) وي:

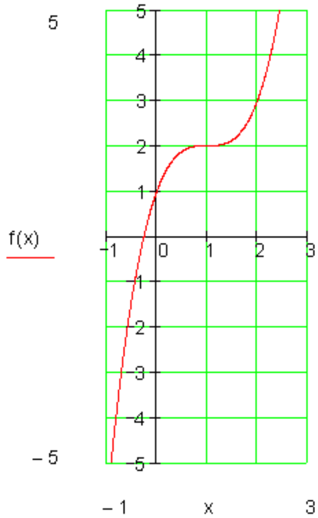
د پرتلي لپاره دې بیا یو ،،عادي،، انعطافټکی ورکړ شوی وي.دا یو مائل(نه افقي) تانجنت لري

په $y' = f'(x)$ څخه لاندې جمله لاس ته راځي:

جمله : (د اوړونټکي(انعطاف ټکي) لپاره اړیین شرایط):
که په $x = x_0$ کی دوه واره مشتق وړ تابع $y = f(x)$ هلته یو انعطاف ټکی ولري، نو لاس ته ترې راځي: $f''(x) = 0$

زینټکی(د اس زین) **<u>Der Sattelpunkt</u>**

(c) ketabton.com: The Digital Library



د انعطاف ټکي يو ځانګړی حالت زينټکی دی. دا د انعطاف ټکی دی د صفر جګېدني سره.که د کيڼ لور ورتزدې شو فکر کېږي، چې، نسبي جګټکی مو مخ ته پروت دی
که ښوک د ښي لور ور نزدې شي فکر کوي، چې يو نسبي ټيټکی مخ ته لرو.
اوس دا حالت د رياضياتو له لورې ځېږو:
مشتق:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 3$$

$$f''(x) = 6x - 6$$

$$f'''(x) = 6$$

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3x^2 - 6x + 3 = 0 \;\Rightarrow\; x_{1/2} = 1$$

د برنولي او د دې لو، پيټال قاعده:
که توابع $u = f(x)$ او $v = g(x)$ د يوه $U(x_0)$ چاپيريال د x_0 په ځاي کی مشتقوړ وي د $g'(x) \neq 0$ سره او دټولو $x \in U(x)$ لپاره او x_0 د f او g يوصفرځاي وي،
د $f(x_0) = g(x_0) = 0$ سره، نو باور لري: $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$,
ترڅو په ښي لور حد شته وي.
په ورته توګه لاس ته راځي: $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

د ځيرکي تمرينونه:

١ -- د لاندې ماتراشنل توابعو د مونوتوني حالت د د a په واکوالي کې ورکړئ.

$a)\;\; f(x) = \frac{1}{ax + 2}$ $\qquad\qquad$ $b)\;\; f(x) = \frac{1}{ax^2 + 1}$

٢ -- و ځيرېږئ، چې ايا لاندې توابع په خپله پېژند ورشو مونو ون او که په کلکه مونوتون دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$a)\ f(x)=\frac{e^x}{2+e^x} \qquad b)\ f(x)=2x^5-7$$

۳ -- لاندې ناراشنل توابع په یوغږېزوالي خویونو وڅېړۍ.

$$a)\ f(x)=e^{x^2} \qquad b)\ f(x)=\sqrt[3]{x^2+1}$$

٤ -- د لاندې توابعو ټول لوکال افراطي ټکي پیداکړئ.

$$a)\ f(x)=e^{-4x^2} \qquad b)\ f(x)=(x^2-3)\cdot e^x$$

$$c)\ f(x)=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x}) \qquad d)\ f(x)=\ln(x^2+1)$$

٥ -- د تابع ټول لوکال افراطي ارزښتونه دې په دې په لاندې انتروال کې ولټول شي.

$$-2\pi \le 2\pi.$$

$$a)\ f(x)=\sin^2 x \qquad b)\ f(x)=\sin(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{2})$$

٦ -- لاندې توابعو ټول لوکال او ګلوبال افراطي ځایونه پیدا کړئ.

$$a)\ f(x)=\sqrt{x^2+x} \qquad b)\ f(x)=\sqrt{x^2+3}$$

$$c)\ f(x)=x-\sqrt{x} \qquad d)\ f(x)=3+\sqrt[3]{x^2}$$

۷ -- لومړی دمطلق ارزښت وشمېرئ او پسې ټول افراطي ارزښتونه وټاکئ.

$$a)\ f(x)=|x|+x^2 \qquad b)\ f(x)=|x^2+2x-8|$$

۸ -- د f تابع د $f(x)=\frac{x^2-x-2}{(x-1)^2}, x\neq 1$ سره د انعطاف ټکي بیداکونه

۹ -- د x1=1 او x2=2 لپاره تابع ارزښتونه وشمېرئ او هم د f تابع جګېدنه د $f(x) = x^4 - 2x^3 - x + 1.$ سره.

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۱۰ -- په صفرځاي کي $f(x) = x^3 - x^2 - 2x$ تابع کومه جګېدنه لري.

۱۱ -- د $f(x) = 0{,}5x^4 - x^3 + 0{,}5x^2 + x - 4$ ګراف په کومو ټکو کې جګېدنه لري.؟

۱۲---- د $x0=-1$ ځاي کې د $f(x) = \dfrac{x^4 - 8x^2 + 16}{x - 1}, \quad (x \neq 1)$ تابع ارزښت او د ګراف جګېدنه غواړو پیاکړو

۱۳ -- د لوپیتال قاعدې په مرسته د $x \to \infty$ لپاره د لاندې مات ریښتوني توابعو پوله ارزښتونه وشمرئ.

$$a)\ \ f(x) = \frac{2x^3 - x + 4}{3x^3 + 1} \qquad\qquad b)\ \ f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{4x^3 + 3x^2 - 2x + 5}$$

۱٤ -- د لاندې توابعو لپاره د منحنیو شننیز بحث وکړئ او ګرافونه یې و کاږئ.

$$a)\ \ f(x) = -x^3 + x^2 + 4 \qquad\qquad b)\ \ f(x) = -\frac{1}{9}x^4 + \frac{2}{3}x^2$$

$$c)\ \ f(x) = x^3 + 3x^2 - 2x - 2 \qquad\qquad d)\ \ f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$$

۱٥ -- د لاندې توابعو لپاره د پوره منحنیو مطالعه وکړئ او ګرافونه یې و کاږئ.

$$a)\ \ f(x) = \frac{x}{4} - \frac{2}{x^2} \qquad\qquad b)\ \ f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x - 3}$$

$$c)\ \ f(x) = \frac{3x^2 + 1}{x^2 - 1} \qquad\qquad d)\ \ f(x) = \frac{9}{x^2 + 3}$$

۱٦ -- د لاندې توابعو صفرځایونه وشمېرئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$a)\ f(x)=x^3+\frac{3}{2}x^2-\frac{11}{2}x-3$ $b)\ f(x)=x^4-2x^3-13x^2+14x+24$

$c)\ f(x)=x^3-6x^2+8x$ $d)\ f(x)=x^3-\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{4}x+\frac{1}{12}$

$e)\ f(x)=x^4-x^3-7x^2+x+6$ $f)\ f(x)=x^4+6x^3-11x^2-60x+100$

۱۷ -- د دريمې درجې تام راشنل ګراف د x -محور د x1=-2 , x2 = 0 او x3=4 په ټکو کې غوڅوي.

د تابع مساوات کوم دي، که سربېره پر دې ګراف د P(2,-8) ټکي څخه هم تېر شي؟

۱۸ -- د يوه څلورمې درجې تام راشنل تابع د x - محور د x1=0,5 او x2=3 په ټکو کې غوڅوي. د تابع برابرون څنګه دی، که پرسېره پردې ګراف د y - محور د P(0,9) په ټکي کې هم لمس کړي.

۱۹ -- د څلورمې درجې د يو تام راشنل تابع ګراف د وضعيه قيمت سيستم پيل او له $P(\frac{1}{2}/-\frac{15}{8})$. ټکي تېريږي. د تابع مساوات څنګه دي، که ګراف د x– محور هم د x1=-1 سره لمس کړي او په x2 = 2 کې غوڅ کړي.

۲۰ -- د لاندې توابعو صفرځايوه پيدا کړئ.

$a)\ f(x)=\frac{x^2+2x-15}{x+4}$ $b)\ f(x)=\frac{x^3+2x^2-4x-8}{x}$

$c)\ f(x)=\frac{x^3-x^2-5x-3}{x-0.5}$ $d)\ f(x)\frac{x^4-x^3+4x^2-4x}{x+5}$

۲۱ -- د يوه مات راشنل f تابع د $f(x)=\frac{x^3+ax^2+bx+c}{x+d}$, ' سره ثابتې a,b,c او d پيداکړئ، که د x1=-2,x2=-(1:2) او سره صفرځايونه پراته وي او تابع په x=0 کې يو تشځای ولري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

it $f(x) = \frac{(x-1)^3}{x}, \quad (x \neq 0)$ l

۲۳ -- مات یا کسري راشنل f تابع په x1=1 کې د سره درې ځله صفرځاي لري.

د یوې ساحې د ویش په مرسته وښیئ چې په همدې څلورمه(ربع) کې صفرځاي کې ځغلي او که صفرځاي څلورمه بدلوي.

۲٤ -- دا سې یو ترم وټاکئ، کوم چې د لاندې پریودیکي یا تل بېرته راګرځېدوني توابعو صفر ځایونه ورکوي.

$-2\pi \leq x \leq 2\pi$ l

د شمېرنې له لارې صفرځایونه ونوموئ، چې په انټروال 1 کې پراته وي.

$$a)\quad f(x)=\frac{1}{2}\sin 3x \qquad\qquad b)\quad f(x)=\sin(x+\frac{\pi}{4})$$

$$c)\quad f(x)=1-\sin^2 x \qquad\qquad d)\quad f(x)=\sin(2x-\frac{\pi}{3})$$

۲٦ -- ولې لاندې توابع صفرځایونه نه لري؟

$$a)\quad f(x)=\ln(x^2+3) \qquad\qquad b)\quad f(x)=\frac{x^2+1}{x}$$

$$c)\quad f(x)=\frac{e^x}{x+1} \qquad\qquad d)\quad f(x)=1+\sin^2 x$$

۲۷ -- ولې کېدی شي چې یو تابع ډېر صفرځایونه ولري، مګر د y - محور سره یواځې یو صفرځاي ولري؟

۲۸-- د صفرځایونو د تعداد په هکله څه ویلاي شئ، که د یو f تابع لپاره په تعریفستې(- ډېرئ) کې یو f^{-1} معکوس تابع هم شته وي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲۹-- د y - محور سره د لاندې توابعو غوختکي وشمېرئ.

$a)\ f(x)=x^3+2x-1$ $b)\ f(x)=(x+1)\cdot\ln(x+1)$

$c)\ f(x)=\dfrac{x^4-3x^2+x}{x+2}$ $d)\ f(x)=\dfrac{4}{\sqrt{x^2+9}}$

$e)\ f(x)=(x-2)\cdot e^{x-1}$ $f)\ f(x)=e^{\frac{2}{1-x}}$

۳۰-- د یوه تام راشنل تابع $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ د $a_0\neq 0$ سره کېدی شي د y-محور غوختکي د ساده لوستلو له لارې و ټاکل شي.

په دې هکله دلایل راوړئ.

۳۱-- د x1=1 او x2=2 لپاره تابع ارزښتونه وشمېرئ او هم د f تابع جگېدنه د $f(x)=x^4-2x^3-x+1.$ سره.

۳۲--په صفرځاي کې $f(x)=x^3-x^2-2x$ تابع کومه جگېدنه لري.

۳۹-- په کومو ځایونو کې لاندې توابع پروت تانجنت لري؟

a) $f(x)=x^2e^{-x}$ b) $f(x)=\ln(x^2+1)$

۴۰-- د a د کومو ارزښتونو لپاره د $f(x)=(x+a)\cdot e^x$ د گراف د $x_0=0$ په ځاي کې ۲ جگوالی لري؟

۴۱د لاندې توابعو ټول ځایزي(لوکال) خوراجگ ټکي وښایاست.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$a)\ f(x)=x^3-3x^2-9x+10$ $\qquad b)\ f(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2-6x+1$

$c)\ f(x)=4x^3-18x^2+15x+7$ $\qquad d)\ f(x)=x^4-4x^2+5$

$e)\ f(x)=x^5-5x^3-20x$ $\qquad f)\ f(x)=\frac{1}{2}x^4-\frac{10}{3}x^3+6x^2-2$

٤٣-- د n-مې درجې یو تام راشنل تابع خورا زیات څومره لوکال (ځایز) افراطي ځایونه لرودی شي؟

٤٤-- ولې د جګتکي لپاره شرایط $f''(x)<0$ و اړیین نه دي؟

٤٥-- د لاندې توابعو لوکال(ځایز) انحرافي(افراطي) ځایونه وټاکئ.

$a)\ f(x)=\frac{2}{3}x^3+4x^2+8x-1$ $\qquad b)\ f(x)=\frac{1}{3}x^4+1$

$c)\ f(x)=\frac{1}{3}x^4-2x^2+\frac{8}{3}x$ $\qquad d)\ f(x)=x^4-4$

٤٧-- د f تابع ټول لوکال افراطي ارزښتونه دې په دې په لاندې انتروال کې ولټول شي.

$-2\pi\le 2\pi.$

$a)\ f(x)=\sin^2 x$ $\qquad b)\ f(x)=\sin(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{2})$

٤٨-- لاندې توابعو ټول لوکال او ګلوبال افراطي ځایونه پیدا کړئ.

$a)\ f(x)=\sqrt{x^2+x}$ $\qquad b)\ f(x)=\sqrt{x^2+3}$

$c)\ f(x)=x-\sqrt{x}$ $\qquad d)\ f(x)=3+\sqrt[3]{x^2}$

--- د fتابع د $f(x)=\frac{x^2-x-2}{(x-1)^2},x\neq 1$ سره د انعطاف ټکي بیداکړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۵۳-- په انتروال $0 \le x \le 2\prod$ کې د انعطاف ځایونه پیداکړئ.

a) f(x) = x + sinx   b) f(x) = 2(1-sin2x)

٥٤-- لاندې توابع په x_0 کې په مشتقوړتیا باندې وڅېړئ.

$$a)\ f(x)=\begin{cases}\cos x & x\le 0\\ x^2+1 & x>0\ ,\quad x_0=0\end{cases}\qquad b)\ f(x)=\begin{cases}2x-1 & x<1\\ x^2 & x\ge 1,\ \ x_0=1\end{cases}$$

$$c)\ f(x)=\begin{cases}2x-1 & x<1\\ e^{x-1} & x\ge 1\ ,\ \ x_0=1\end{cases}\qquad d)\ f(x)=\begin{cases}\ln x & x\le 1\\ x-1 & x>1\ ,\ \ x_0=1\end{cases}$$

٥٥-- ولې متمادیت د مشتقوړتیا لپاره اړین شرط، مګر مشتقوړوالی د متمادیت لپاره پوره کېدونکی شرط دی؟

٥٦-- په کوم دلیل تام راشنل توابع د $x \in R$ لپاره مشتقوړ دي؟

٥٩-- و څېړړئ، چې ایا لاندې توابع په خپله پېژند ورشو مونو ون او که په کلکه مونوتون دي.

$$a)\ f(x)=\frac{e^x}{2+e^x}\qquad b)\ f(x)=2x^5-7$$

٦١-- په کومه ورشو کې لاندې تام راشنل توابع یو کېن کږوالی لري او په کون کې بنی کږوالی لري.

$$a)\ f(x)=x^3-6x^2+5x+2\qquad b)\ f(x)=-2x^3+3x^2-x-4$$

٦٢--د لاندې مات توابعو ګرافونه هایپاربول دي. د هاپارابول څانګې کوم کږوالی لري؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$a)\ \ f(x)=\frac{1}{4x+1} \qquad b)\ \ f(x)=3-\frac{3}{x^2}$$

٦٤-- ولې د يوه دريمې درجې تام راشنل تابع گراف په تل تلنه کې يوه ښئ انخنا(کږوالی) نه لري.

٦٥ ولې يو څلورمه درجه تامراشنل تابع د $f(x)=ax^4+dx+e$ سره يو تلتلونی کينه انخنا(کږوالی) او ښئ انحنا لري؟

۱۵۸(۱۰۳): ښنگه کېدی شي، چې د يوې f تابع د ۱ . درجې مشتق څخه د د گراف په انخنا قضاوت وکړو؟

۱٦۰(۱۰۵): د لاندې توابعو حالت وڅېړئ، که $|x|\to\infty$ په لور لاړ شي.

$$a)\ \ f(x)=x^3-4x^2-4x-5 \qquad b)\ \ f(x)=-3x^4+x^3-2x^2+x$$

$$c)\ \ f(x)=\frac{1}{3}x^5-x+6 \qquad d)\ \ f(x)=-\frac{2}{5}x^2-\frac{1}{5}x+\frac{4}{5}$$

$$e)\ \ f(x)=\frac{1}{2}x^4-\frac{3}{2}x^2+\frac{5}{2} \qquad f)\ \ f(x)=-x^3-x^2-x-\frac{1}{3}$$

۱٦۳(۱۰۸):ولې د $x\to+\infty$ لپاره په ساده ډول د پولې په هکله وړاند وينه نه شي کېداي:

$$a)\ \ f(x)=x^3\cdot\frac{1}{\ln x} \qquad b)\ \ f(x)=x\cdot e^{-x}$$

۱٦۷(۱۱۲): د جوړه(جفت) جگعدد(اکسپوننت) سره تام رينتونی تابع کوم ډول سيومتري لري؟

۱٦۸(۱۱۳): د ناجوړه(طاق) جگعدد(اکسپوننت) سره يو تام رينتونی تابع ټيک هلته د سر چيني سره ټکی سيومتري دی، چې مطلق ارزښت صفر شي؟

۱۷۱(۱۱٦): لاندې توابع په بنسټ کې لوستل شوي سيومتري خويونه نه لري. وښايئ چې

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا سره له دې هم سیومتریک دي.

$$a)\ f(x)=(x+2)^2 \qquad b)\ f(x)=1+\frac{1}{x}$$

$$c)\ f(x)=-(x+1)^2+3 \qquad d)\ f(x)=2+\frac{1}{x-4}$$

۱۷۲۱۷): لاندې تام ریښتوني اعداد په محدودیت وڅېړئ.

$$a)\ f(x)=x^2-2x+4 \qquad b)\ f(x)=3x^4-4x^3+12x^2-24x$$

$$c)\ f(x)=-(x+3)^2+1 \qquad d)\ f(x)=x^3-2x+1$$

۱۷٦(۱۲۱): د لوپیتال قاعدې په مرسته د $x\to\infty$ لپاره د لاندې مات ریښتوني توابعو پوله ارزښتونه وشمرئ.

$$a)\ f(x)=\frac{2x^3-x+4}{3x^3+1} \qquad b)\ f(x)=\frac{x^2+2x-3}{4x^3+3x^2-2x+5}$$

۱۷۸(۱۲۳): د لاندې توابعو لپاره د x=x0 په ځاي کې د تانجنت مساوات وټاکئ

۱۷۹(۱۲٤): په کومو ټکو کې د لاندې مساواتو لپاره د تانجنت مساوات د ورکړ شوې کربښې سره غبرګ دي؟

۱۸۸(۱۳۳):د لاندې تام ریښتوني توابعو د انعطاف ټکي(اوړونټکي) او د نورمالي مساوات ولیکئ.

$$a)\ f(x)=-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2}x^2+\frac{2}{3} \qquad b)\ f(x)=\frac{1}{3}x^3-3x^2+2x+10$$

۱۸۹(۱۳٤) د f_t تابع د انعطاف ټکي مساوات ولیکئ.

$$f_t(x)=\frac{4}{3}t^2x^3+3tx^2+3x \qquad (t\in\mathbb{R}\setminus\{0\})$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۹۲(۱۳۷): د لاندې توابعو لپاره د منحنیو شننیز بحث وکړئ او ګرافونه يې و کاږئ.

$a)\ f(x) = -x^3 + x^2 + 4$ $\qquad b)\ f(x) = -\frac{1}{9}x^4 + \frac{2}{3}x^2$

$c)\ f(x) = x^3 + 3x^2 - 2x - 2$ $\qquad d)\ f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$

په ټوټه ماتونو يا کسرونو ټوټه کونه

الف) اصلي کسرونه، چې مخرج يې مختلف لاينيز ضريبونه لري.

بنسټ: که د يوه اصلي پولينوموېش $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$ مخرجپولينوم $P_n(x)$ په مختلفو

کربنيزو(لايني) ضريبونو $P_n(x) = (x - x_1)(x - x_2)\ ...\ (x - x_n)$ ټوټه کېدونکی وي،

نو پولينوم $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$ په لاندې بڼه بدلېدی شي.

$$\frac{P_m(x)}{P_n(x)} = \frac{A}{x - x_1} + \frac{B}{x - x_2} + \frac{C}{x - x_3}\ ...\ \frac{N}{x - x_n}$$

داسې يوه بڼه په ټوټه کسرونو ټوټه کونه،، بلل کيږي، چې A,B,C,...,N حقيقي عددونه دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیت: په پورته ننوتنه کي و ښایاست، چي دا ټوټه کسرونه چېرته تعریف لري؟

-- د یوه په خوښه پولینوم کسر ټوټه ونه او د تعریف ساحي ورکړئ.

بیلګه: اصلي پولینوم کسر $\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}$ په ټوټه کسر ټوټه کړئ.

حل: د مساوات $x^3-4x^2-7x+10=0$ لومړی حل $x_1=1$ د ازمایښت له لارې ځیرو .

د پولینوم ویش(لنډ: پولینوموېش) $(x^3-4x^2-7x+10):(x-1)=x^2-3x-10$ مو ټوټه ونې ته بیایي $x^3-4x^2-7x+10=(x^2-3x-10)(x-1)$ مساوات $x^2-3x-10$ اوس $x_2=-2$ او $x_3=5$ حلونه لري.

له دې امله $x^3-4x^2-7x+10=(x-5)(x-1)(x+2)$ دی.

د اصلي کسر $\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}$ په ټوټه کسرونو ټوټه کونه:

د کسرونو شمیرنو قاعدې له مخې کیدی شي ورکړ شوی پولینوم په درې جمعی برخو ټوټه شي، چي مخرجونه يې لاینیز (کرښیز-)ضریبونه دي:

$$\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}=\frac{A}{x-5}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+2}$$

د غزېدنې سره د ټوټه کسر جمعه:

اصلي مخرج د ټوټه کسر د پولینوم مخرج دی.

$$\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}=\frac{A(x-1)(x+2)+B(x-5)(x+2)+C(x-5)(x-1)}{(x-1)(x-5)(x+2)}$$

$$\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}=\frac{Ax^2+Ax-2A+Bx^2-3Bx-10B+Cx^2-6Cx+5C}{x^3-4x^2-7x+10}$$

$$\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}=\frac{(A+B+C)x^2+(A-3B-6C)x+(-2A-10B+5C)}{x^3-4x^2-7x+10}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

-- -------

دصورتونو ارزښت A ,B او C ټاکنه د ضریبونو د پرتلي له لارې:

د مساوي مخرجونو کسرکې بسیا کوي، چې صورتونه سره پرتله کړو. دلته باید د مساوي توانونو ضریبونه، دا په دې مانا چې د x^2, x او x_0 باید مساوي وي.

$$A + B + C = 4 \qquad \text{I}$$
$$A - 3B - 6C = -1 \qquad \text{II}$$
$$-2A - 10B + 5C = 39 \qquad \text{III}$$

د فاکتور 2 سره د I او II مساوات ضربونه او د هر یوه جمع د III سره پورته درې مساوات سیستم و دوه مساواتسیستم ته د دوه متحولو سره را لنډوي.

$$-8B = -72 \qquad \text{V}$$
$$-16B - 7C = -41 \qquad \text{IV}$$

د مساوات IV.V څخه لرو: $-24B = -72 \;\Rightarrow\; B = 3$

د $B = 3$ په V کې اېښوونه: $-16.3 - 7C = -41 \;\Rightarrow\; C = -1$

د$B = 3$ او $C = -1$ په I کې اېښوونه: $A + 3 - 1 = 4 \;\Rightarrow\; A = 2$

په ټوټه کوني فرمول کې اېښووني سره غوښتونکی ټوټه کسر لاسته راځي:

$$\frac{4x^2 - x - 39}{x^3 - 4x^2 - 7x + 10} = \frac{2}{x-5} + \frac{3}{x-1} - \frac{1}{x+2}$$

ازمایښت:

$$\frac{4x^2 - x - 39}{x^3 - 4x^2 - 7x + 10} =$$

$$= \frac{(x-1)(x+2) + 3(x-5)(x+2) - 1(x-5)(x-1)}{(x-5)(x+2)(x+2)} = \frac{4x^2 - x - 39}{x^3 - 4x^2 - 7x + 10}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

تمرینونه:

د لاندې اصلي پولینومکسرونو په ټوټه کسرونو ټوټه کړئ.

$$a)\ \frac{2x^2+20x+12}{x^3+2x^2-5x+6}\ ,\ b)\ \frac{x^2+1}{x^3-x}\ ,\ c)\ \frac{4x+10+12}{x^2+6x+8}$$

ب) اصلي پولینوم کسرونه، چې مخرج يې مساوي لاينيز(کربنيز) فاکتورونه لري.

که د یوه اصلي پولینوم $P_n(x)$ مخرج $\frac{P(x)}{P_n(x)}$ د کربنیز فاکتور $x-x_0$ توان $\frac{A}{(x-x_0)}+\frac{B}{(x-x_0)^n}+...+\frac{N}{(x-x_0)^n}$ وي، نو ددې کربنیزو فاکتورونو له پاره پولینوم لاندې بڼه لري:

$$\frac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2}$$

د نورو ټولو ساده منځ ته راغلو کربنیزو فاکتورونو ټوټه کسرونو په بلده بڼه ورکول کیږي.

بیلګه:

د اصلي پولینوم کسر $\frac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2}$ لپاره په ټوټه کسر ټوټه کونه ورکړئ.

د مخرج ټوټه ونه په کربنیزو فاکتورونو:

د پولینوم $x^3-4x^2+5x-2=0$ لومړی حل $x_1=1$ د ازمایښت له لارې پیدا کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پولینوم ویش $(x^3-4x^2+4x-2):(x-1)=x^2+3x+2$ مو لاندې ټوټه کوني ته لاربنودوي:

$$x^3-4x^2+4x-2=(x^2+5x-2)(x-1)$$

مساوات $x^2-3x+2=0$ دا $x_2=1$ او $x_3=2$ حلونه لري. نو له دې سره د مخرج لپاره ډبل حل دی:

$$x^3-4x^2+5x-2)=(x-2)(x-1)^2$$

د ټوټه کسر پیل:

$$\frac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{(x-1)}+\frac{C}{(x-1)^2}$$

د ټوټه کسر جمع د غزوني له لارې:

$$\frac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2}=\frac{A(x-1)^2+B(x-2)(x-1)+C(x-2)}{(x-2)(x-1)^2}$$

$$\frac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2}=\frac{(A+B)x^2+(-2A-3B+C)x+(A+2B-2C)}{x^3-4x+5x-2}$$

د A,B او C صورتونو ارزښت د ضریبونو پرتله کوني له لارې.

$$A+B=3 \qquad \text{I}$$
$$-2A-3B+C=-6 \qquad \text{II}$$
$$A+2B-2C=2 \qquad \text{III}$$

د مساوات II د 2 سره ضرب او د III سره جمعه د I سره ګډ د دوه مساوات د دوه متحولو سره.

$$A+B=3 \qquad \text{I}$$
$$-3A-4B=-10 \qquad \text{II}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دI ضرب له 4 سره او جمعه يې له IV سره : A = 2

د A = 2 ايښوونه په I کې: $2+B=3 \Rightarrow B=1$

د A = 2 او B = 1 ايښونه په III کې: $2+2.2-2C=2 \Rightarrow C=1$

د ټوټه کونې فرمول له لارې ټوټه مسر ټوټه ونه لاس ته راځي:

$$\frac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2}=\frac{2}{x-2}+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}$$

تمرينونه:

د لاندې اصلي پولينوم کسرونو په ټوټه کسرونو ټوټه کونه ورکړئ.

$a)\ \frac{3x^2+5x+10}{x^3+2x^2-4x-8}$ $\quad b)\ \frac{3x^2-18x+36}{x^3-6x^2+9x}$

$c)\ \frac{x^2+3x+4}{x^4-2x^2+1}$ $\quad d)\ -\frac{x^2+13x+10}{x^3-5x^2}$

پ) اصلي پولينوم کسرونه، چې مخرج يې پوره په کرښيزو فاکتورونو نه ټوټه کيږي.

بنسټ:

که د يوه اصلي پولينوم کسر $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$ مخرجپولينوم $P_n(x)$ نور په يوه حقيقي ضريب نه ټوټه کيدونکي ضريب ax^2+bx+c مخ ته پروت وي، نو په ټوټه کيدو کې دې د يو ټوټه کسر $\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$ په بڼه دې کينول شي يا راوړل شئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه:

د پولینوم کسر $\frac{5x^2+8x+9}{x^3+3x^2+6x+4}$ له پاره دې په ټوټه کسر ټوټه ونه ورکړ شي.

د مخرج ټوټه کونه په کرښیزو ضریبونو:

لومړی حل دې $x_1=-1$ وي مساوات $x^3+3x^2+6x+4=0$ د ازمابښت له لارې پیدا کیږي.

بولینوم وېش $(x^3+3x^2+6x+4):(x+1)=x^2+2x+4$ مو لاندې ټوټه کوني ته بیایي:

$$x^3+3x^2+6x+4=(x+1)(x^2+2x+4)$$

دا چي مساوات x^2+2x+4 حقیقي حل نه لري، نو د حقیقي اعدادو په ورشو کي نوره ټوټه کونه ناشوني ده.

نو له دې امله پولینوم کسر لاندې بڼه لري:

$$\frac{Ax}{x^2+2x+4}$$

د $\frac{c}{x+1}$ بڼي کسر سره یوځاي مو لاندې ټوټه کسر ټوټه کوني ته بیایي:

$$\frac{5x^2+8x+9}{x^3+3x^2+6x+4}=\frac{Ax+B}{x^2+2x+4}+\frac{C}{x+1}$$

د غزوني له لارې د ټوټه کسرونو جمع

$$\frac{5x^2+8x+9}{x^3+3x^2+6x+4}=\frac{(Ax+B)(x+1)+C(x^2+2x+4)}{x^3+3x^2+6x+4}$$

$$\frac{5x^2+8x+9}{x^3+3x^2+6x+4}=\frac{(A+C)x^2+(A+B+2C)x+(B+4C)}{x^3+3x^2+6x+4}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ضریبونو A,B,C تاکنه د پرتله کولو له لارې:

$A+C = 5$ I

$A + B + 2C = 8$ II

$B + 4C = 9$ III

د III کمښت (تفریق) له مساوات II څخه د I سره یې ګډولو څخه مساوات لاس ته راځي، چې دوه اووښتوني یا متحولې لري:

$A - 2C = 5$ IV

$A + C = 5$ I

مساواتIII منفي مساواتII :

د $C = 2$ په Iائښوولو سره :

د $C = 2$ په III ایښوولو سره:

که دا د ټوټه کونې فرمول کې کېږدو نو د ټوټهکسر ټوټه کونه لاس ته راځي

$$\frac{5x^2+8x+9}{x^3+3x^2+6x+4} = \frac{3x+1}{x^2+2x+4} + \frac{2}{x+1}$$

تمرینونه:

د لاندې اصلي کسري پولینومونو په ټوټه کسرونو ټوټه کونه ورکړی:

$a)\ \frac{-x^2+2x-12}{x^3+2x^2+6x+5}$ $b)\ \frac{4x^2-3x+8}{x^3-2x+4}$

$c)\ \frac{8x^2-16x+10}{x^3-4x^2+5x}$ $d)\ \frac{x}{x^3+2x^2+2x+1}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ج) نا اصلي پولینوم کسرونه:

که د یوه پولینوم $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$ د صورت درجه د پولینوم د مخرج له درجې څخه لویه وي، نو دا د پولینومویش له لارې په ټولناطق کسر او یوه اصلي کسر ټوټه کېدی شي.

بیلګه:

کسري پولینوم $\frac{3x^3-6x^2-20x-1}{x^2-2x-8}$ په ټوټه کسري پولینومونو ټوټه کړئ .

د پولینوم د صورت درجه درې ده او د مخرج دوه . نو له دې امله مو یو نا اصلي پولینومکسر مخ ته پروت دی.

پولینوم وېش:

$$(3x^3-6x^2-20x-1):\ (x^2-2x-8)=3x+\frac{4x-1}{x^2-2x-8}$$

$$\frac{-(3x^3-6x^2-24x)}{4x-1}$$

د پاتې کسر $\frac{4x-1}{x^2-2x-8}$ له پاره د ټوټه کسر ټوټه کونې کارونه (عملیه) مخ ته بیایو.مخرج په کرښیزو ضریبونو ټوټه کړی:

د مساوات $x^2 - 2x - 8 = 0$ له پاره حل $x_1=-2$ او $x_2=4$ لرو.

نو $x^2-2x-8=(x-4)(x+2)$ دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په ټوټه کسرونو ټوټه کونه

د ټوټه کسر ټوټه کونې لپاره ځای په ځاي کوو: $\frac{4x-1}{x^2-2x-8}=\frac{A}{x-4}+\frac{B}{x+2}$

د غزونې له لارې د ټوټه کسرونو جمعه کول:

$$\frac{4x-1}{x^2-2x-8}=\frac{A(x+2)+B(x-4)}{(x-4)(x+2)}$$
$$\frac{4x-1}{x^2-2x-8}=\frac{(A+B)x+(2A-4B)}{x^2-2x-8}$$

د ضريبونو د پرتله کوونې په مرسته د A او B ټاکل:

$$A+B=4 \qquad \text{I}$$
$$2A-4B=4 \qquad \text{II}$$

د I ضرب له 2 سره او له II څخه يې تفريق يا كول $6B=9 \Rightarrow B=\frac{3}{2}$

په II کې ايښوول: $2A-4\frac{3}{2}=-1 \Rightarrow A=\frac{5}{2}$

منځنی لاس ته راوړنه $\frac{4x-1}{x^2-2x-8}=\frac{5}{2(x-4)}+\frac{3}{(2(x+2)}$

متحول (ښتونکی) په ټوټه کسر ټوټه کونه لاندی بڼه غوره کوي:

$$\frac{3x^3-6x^2-20x-1}{x^2-2x-8}=3x+\frac{5}{2(x-4)}+\frac{3}{2(x+2)}$$

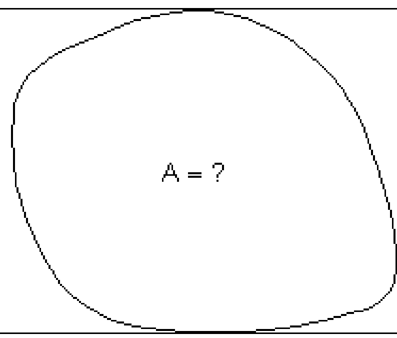
پوښتنې د لاندې پولينومکسرونو په ټوټه کسر ټوټه کونه ورکړئ.

$a)\ \frac{3x^2+7x^2+17x+17}{x^2+6x+8}$ $\qquad b)\ \frac{2x^4-8x^3+7x^2-3x+4}{x^2-4x+3}$

$c)\ \frac{2x^3+x^2}{x^3-1}$ $\qquad d)\ \frac{4x^3+16x^2-7x-49}{x^3+4x^2+x-6}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د انتیګرالشمیرنې لپاره پیل راوړنې

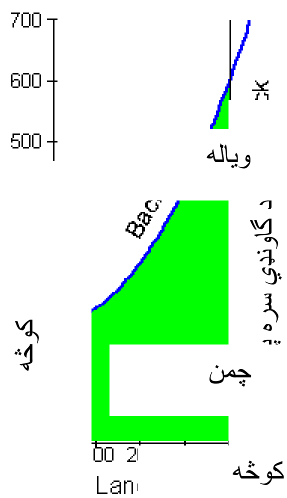


پخوانیو یونانیانو ته دا د منحني څخه رابندې سطحې شمېرلو اصول معلوم وو.
دا دمشتق شمیرنه، چې موږ ورسره اوس سر او کار لرو، ډېر وروسته (د اوه لسمې پیړۍپاي کې) د طبیعي علومو پوهانو د لایبنیخ او نیوټون له خوا رامنځ ته (اختراع) شو.

فعالیت:

- د پورته رابندې څېرې د سطحې د شمېرلو له پاره وړاندیزونه وکړئ.
- ایا تاسو د داسې سطحې شمېرلو سره بلد یاست ؟
- ایا تاسو دې ته ورنږدې سطحې مساحت شمېرلی دی؟ او که هو نو هغه ولیکئ.
- داپورته سطحه د وضعیه قیمت سیستم له لارې په څلورو نږدې برابرو برخو وویشئ او د انتیګرالونې په هکله یې فکر وکړئ.

بیلګه



دا څیره شوی چمن خرڅیږي. له پورته لور د ویالې را بند دی او له ښي لور د ګاونډي ځمکه ده او کیڼ لور ته کوخه او له کښته لور هم د یوې کوڅې را بند دی.

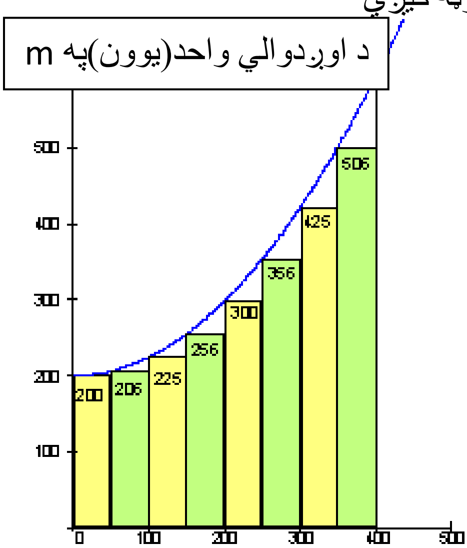
ددې لپاره چې چمن وپلورل شي، باید سطحه وپیژندل شي. د پلورونکي لپاره سطحه باید نږدې پوره مګر هیڅکله کمه ونه شمیرل شي. اخستونکی هم د ځان لپاره فکر کوي، چې پیسې باید ورکړي، خو هیڅکله ځمکه د اصل څخه زیات ونه شمپيل شو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

وروسته له دې چې رانیوونکي او پلورونکي د چمن سطحه معلومه کړه، دواړه د پیسو په تادیه سره یوځای کیږي او په دې هکله موافقه کوي.

ویاله $f(x) = \frac{1}{400}x^2 + 200$ د تابع مساوات لري.

د اخستونکي له پاره ممکنه حل.

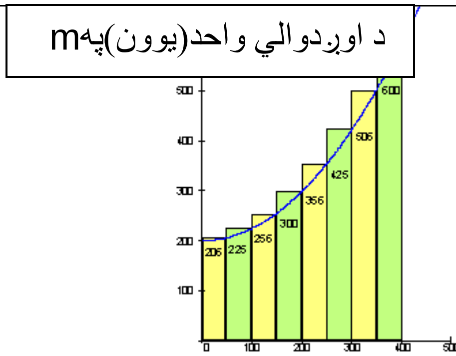
هره ټوټه(مستطیل پټی) 50m سره وره ده او په رسم کې ورکړشوی جګوالی لري. د ټولو پټیو، سطحه یو ځای شمیرو. $200 \cdot 50 = 10000$ $206 \cdot 50 = 10300$ $225 \cdot 50 = 11250$ $256 \cdot 50 = 12800$ $300 \cdot 50 = 15000$ $256 \cdot 50 = 12800$ $425 \cdot 50 = 21250$ $506 \cdot 50 = 25300$ $\underline{123700}$	ځمکه په لاندې ډول په اوږدو ټوټو(پټیو) ټوټه کیږي 

د اخستونکي لپاره ټوله سطحه نږدې $123700\ m^2$ ده.

د پلورونکي له پاره ممکنه حل:

هره ټوټه(پټی) 50m سورلري او په رسم کې ورکړشوی جګوالی لري. د ټولو پټیو سطحه یوځای شمېرو.	

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$206 \cdot 50 = 10300$$
$$225 \cdot 50 = 11250$$
$$256 \cdot 50 = 12800$$
$$300 \cdot 50 = 15000$$
$$356 \cdot 50 = 12800$$
$$425 \cdot 50 = 21250$$
$$506 \cdot 50 = 25300$$
$$600 \cdot 50 = 30000$$
$$\underline{143700}$$

د د پلورونکي له پاره د تولي سطحي مساحت نزدې $\boldsymbol{143700\ m^2}$ دی.
اخستونکی او پلورونکی باید د دواړو قېمتونو ،،منځ،، ته راشي، دا په دې معنا چې دواړه
د قیمتونو منځ ارزښت یو بل سره ومني. یعني د سطحې منځ ارزښت، چې دی:

$$\frac{123700 + 143700}{2} = 133700\ unt^2$$

دا به وروسته د ټاکلي انتيگرال برخه (په مخ) کې وشمېرو، چې رينتونی ارزښت
يې $133333.\bar{3}m^2$ دی.
د اخستونکي په بيلګه کې دا ډول شميرنه **لاندنی** ،،**جمعي جوړول**،، بلل کيږي.
د پلورونکي په بېلګه دا ډول شميرنه،، **پورتنی جمعي**،، **جوړول** بلل کيږي.
دا د سطحې رينتونی ارزښت يو چيرته په دا منځ کې پروت دی.
باید ددې له پاره يوه لار پيدا کړو، چې رښتونی ارزښت ترې لاس ته راشي. ددې کار
لپاره لږ نوره د چمتووالي لار شته.

پوښتني

د $3x^2+1$ تابع گراف وکاږئ.

د انتروال [1,3] ترمنځ د تابع سطحه په نخښنه کړئ.

د دې ورکړ شوې سطحې پورته جمعه جوړه کړئ

د دې ور کړ شوې سطحې کښته جمعه جوړه کړئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

انتیګرالشمیرنه Integralcalculation

د سطحې تابع له پاره تر مخ راوړنه: دا دانتیګرال هندسي مفهوم هم دئ. په کارتيزي وضعيه قېمت سيستم کې د ګراف په سرچينه کې يوه کربښه رسموو.غواړو سطحه پيداکړو، چې د تابع دګراف او x - محور ترمنځ د x په واکوالي کې پرته وي.

د ريمن (ټاکلی) انتلګرال

دلته دې يوه څېره راوړل (د يوه ډنډ او يا.....)

فعاليت:

- يوه په خوښه هندسي څيره وکاږئ، چې په ترتيب له درې، پنځو او اوو کربښو رابنده وي. د د ې څيرو سطحه په ورسره بلد ډول وشميرئ.
- په يوه د وضعيه قيمت سيستم کې يوه کږه(منحني) وکاږئ او وهڅيرئ، چې سطحه يې په ورنزدي ډول پيدا کړی چې د x محور او منحني ترمنځ پرته وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

یادونه: انتیګرال څه شی دی؟

آنتیګرال کونه Integration د ورګډېدلو په معنی دی ، لکه چې یو څوک یوې پردۍ ټولنې ته ورګډېږي یعنې ددې پردۍ ټولنې خویونه خپلوي، یعنې دی په دې ټولنه ورزیاتیږي. دا هم په همدې موخه دلته دا موضوع څیړلو ته وړاندې کیږي، چې څنګه د یوې کوچنی درجې تابع و یوه جګ درجې تابع ته ځي.

د انتیګرال هندسي تعریف:

لوریزه سطحه-د انتیګرال تعریف:

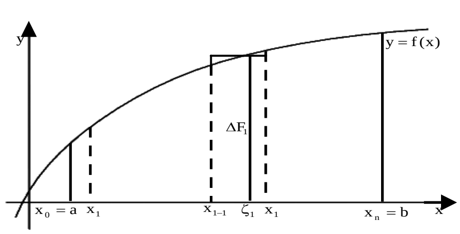
که یوه f تابع ولرو، نو دx مخور او تابع ترمنځ سطحې شمیرل د انتیګرال له لارې کیږي. په دې سطحه کې د x محور پورته لورې ته سطحه مثبته مخنخښه لري او د x محور کښته لورې ته سطحه منفي مخنخښخ لري.

تحلیلي تعریف:

تعریف: د f یوه تابع ورکړ شوې، چې په یوه انتروال [a,b] باندې تعریف دی، نو د aڅخه تر b پورې د تابع د انتیګرال څخه د x په محور د f د ګراف او د کرښې x=aاو x=b تر منځ یوه یوه لوریزه سطحه پو هیږو.

په دې برخه کې غواړو، چې د انتګرال کلیمې ته وده ورکړو. د سطحې کچونې یا اندازه کوونې څخه کړی شو د انتګرال شمېرنې ته راشو، له دې امله انتګرالنیول د مشتق په څټ یا برعکس کارونه یا عملیه ده.

یو تابع y = f(x) لرو. غواړو ددې تابع د ګراف او د x – محور باندې پرتو ټکو او ترمنځ هواره (سطحه) وشمیرو داسې چې (f(x)>0) وي. (څیره ۱ . ۱)



(c) ketabton.com: The Digital Library

ددې دندې د حل لپاره د [a,b] اینټروال په n (نه اړینې) برابرو برخو انټروالونو $[x_{i-1}, x_i]$ټوټه کوو.

$$a = x_0 < x_1 < ... < x_{i-1} x_i < ... < x_n = b$$
$$x_i - x_{i-1} = \Delta x_i$$

په اینټروال $[x_{i-1}, x_i]$ کې په خوښه $\xi_l \in [x_{i-1}, x_i]$ ټاکو.

د $x = x_{i-1}, x = x_i, y = f(x)$ تر منځ سطحه (هواره) دا لاندې د مستطیل سطحه (و لاړکونجیزه هواره) ده:

$$\Delta F_i(x) = f(\xi_l).\Delta x_i ;............................(4,1)$$

د ټولو پورته مستطیل ډوله کوچنیو سطحو د جمعې (زیاتون) له لارې غوښتونکې، نږدې ټوله سطحه لاس ته راځي:

$$F_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta F_i = \sum f(\xi)\Delta x_i ;..............................(4,2)$$

دا نزدیوالی تر هغې ښه کیږي څومره چې د اینټروال [a , b] ویش نری شي یعنې $\max \Delta x \to 0$، هرڅومره چې د زیاتیدونکو شمیر ($n \to \infty$) شي.

که (٤ . ٢) تل همغه پوله ارزښت F ولري، په دې اړه نه چې اینټروال [a , b]څنګه ویشل شوی او $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ څنګه ټاکل شوي، نو f (x) په اینټروال [a,b] کې اینټیګرالوړ دی. دا د بیلګې په توګه د ټولو ټوټه، متمادی او محدودو توابعو y = f (x) حالت دی .

پیژند (تعریف) ٤ . ١ : که لیمیټ

$$\lim_{x \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx = F ; (\max \Delta x \to 0),........(4,3)$$

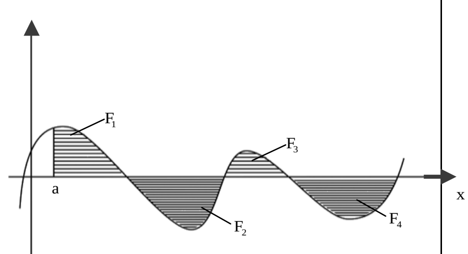
(c) ketabton.com: The Digital Library

په اينتروال [a , b] کی موجود وي، نو دا د f (x) ټاکلی اینتیګرال بولو، یا د ریمن سطحه F- Riemann . دلته a د اینتیګرال کیدونکي لاندې(کښته)پوله او b د ایتیګرال کیدونکي پورته پوله بلل کيږي او [a,b] د ایتیګرال کیدونکي اینتروال او f (x) (Integrand) (اينتیګراليدونکی) او x د اینتیګرال کېدونکې متحول (Integrationsvariable) بلل کيږي

یادونه ۱ : د ایتیګریشن واریابله یا اووښتونی کیدی شي په خپله خوښه په نخښه شي(مخښه یا علامه یی په خوښه وټاکل شي).

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(u)\,du$$ موږ لرو:

یادونه ۲ : دا پورته تعریف ٤ . ۱ کیدی شي هغه حالت ته پراخه شي، چیرته چی f (x) $0 >$ باوري نه وي . که $f(x) < 0$ وي نو دا ټاکلی اینتیګرال بیا د x -محور تر لاندې منفي هواره لري .

	که د y = f (x) کږه - لکه په)ش ٤ . ۲) کی - داینتیګرآلونی په اینتروال کی د x-محور پرې کړي نو دا مخامخ فرمول د لاندې سطې سره باور لري : $F = F_1 - F_2 + F_3 - F_4 \ldots$

د تعریف ٤ . ۱ پسې تړلې دا لاندې جمله لرو:

جمله٤ . ۱ : که f (x) په [a , b] کې اینتیګرالوړ وي او $c \in [a,b]$ وي، نو باور لري:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ددې لپاره چې دا پورته مساوات د c ارزښتونو ته پراخه کړی شو، بایدc له اینتروال [a,b]د باندې نه وي پروت، یعني ټکي a,b او c په یوه اینتروال کی باید پراته وي، په هغه کی چې تابع f (x) اینتیګرالوړ دی.

موږ دا لاندې تعریف(پیژند) لرو :

پیژند یا تعریف ٤ . ۲ : f (x) په یوه بند انتروال[a, b] کې اینتیګرالوړ دی، نو باور لري: $\int_{a}^{b} f(x)\,dx = -\int_{b}^{a} f(x)\,dx$

د پیژند تعریف ٤ . ۱ له مخی تل باور لري: $\int_{a}^{a} f(x)\,dx = 0$

تمرینونه:

د لاندې توابعو ګراف و کاږئ او د ګراف او x محور ترمنځ د سطحې مثبته او منفي لور په نخښه کړئ.

الف : $4x^3 + 5x^2 + x + 6$ ،

ب: $x^2-4x-+16$ ،

پ: $x^4 + 5x^2 - 2x - 7$

بنستیز- یا لومړنی تابع

$$F'(x) = f(x)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیت

- په پورته مساوات کې به F (x) څنګه ولیکلای شو؟

- F (x) نسبت و f (x) ته څه بلل کیږي او په څټ، f (x) د F (x) څه بلل کیږي؟

په پورته دوارو پوښتنو کې فکر وکړي، چې پایلې یې دا لاندې دي:

ددې لپاره چې د مشتقنیولو او اینتیګرال نیولو ترمنځ اړیکی لاس ته راوړو، د لومړنی تابع کلمه په لاندې توګه تعریفوو:

پیژند (تعریف): تابع y = f (x) دې په یوه واز اینتروال I کی تعریف وي. هر یوه هلته موجوده مشتقوړ F (x) تابع چی F' (x) = f (x) شرایط پوره کړي، د f (x) بنسټیز- ، ساده – یا لومړنی تابع بلل کیږي

په ساده توګه لیدل کیږي چی د یوې f (x) تابع لپاره نه یواځې یو بنسټیز تابع F (x) موجود دی، د بیلګي په توګه $F_0(x) = x^2,\ F_1(x) = x^2 + 1,\ F_2(x) = x^2 + 2$ تابع، بلکي په عمومي ډول

F (x) = x² + C، چې دا ټول مساوي مشتقونه f (x) = 2x لري.

د پورته ښوونو پایله، چی څنګه سړی د یوه متمادي تابع f (x) لومړنیتابع پیدا کوي، په لاندې ډول ده:

جمله:

y = f (x) دې په اینتروال I کی متمادي تابع وي، نو د a ∈ I لپاره

$F_a(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ د f (x)، یوه لومړنیتابع ده، دټولو c∈I لپاره .

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $f(x)$ هره بله لومړنۍ(بنستيزه) تابع لاندې بڼه لري:

$$F(x)=F_a(x)+C,\quad C\in R$$

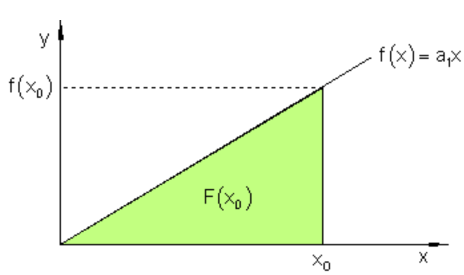
ځواب : ښايو چې $Fa(x)$ د $f(x)$ بنستيز تابع ده. ددې د ښوولو لپاره ښايو چې د $Fa(x)$لپاره د پورته پيژند شرايط باور لري. د $Fa(x)$ مشتق د $x\in I$ او $x\neq a$ لپاره په لاندې ډول ده.

$$\begin{aligned}F_a^{'}(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{F_a(x+h)-F_a(x)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot\left[\int_a^{x+h} f(t)dt-\int_a^{x} f(t)dt\right]\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot\int_a^{x+h} f(t)dt\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot h\cdot f(\xi),\quad \xi\in[x,x+h]\end{aligned}$$

د ليميټ منځ ارزښت جملې له مخې داسې يوه ξ شته دی)
(د متماديت له امله $(f(\xi)\to f(x))$ $= f(x)$

سطحه او لومړنی تابع:

سطحې تابع ته ترمخ راوړنه:

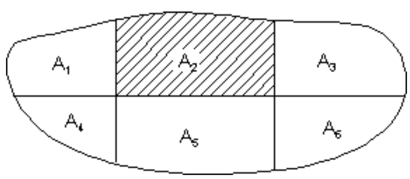
د تابع $f(x)=a_1x$ ګراف په کارتيزي وضعيه سيستم (پروت ولاړسيستم) په سرچينه کې يوه کرښه انځوروي. يو تابع غواړو پيدا کړو، چې د ګراف او x -محور ترمنځ، د x_0 په واکوالي يا تابعيت کې سطحه په ګوته کوي. دا چې دا جوړه شوې سطحه يو مثلث دی، نو حل يې د مثلث د سطحې فرمول په مرسته	

(c) ketabton.com: The Digital Library

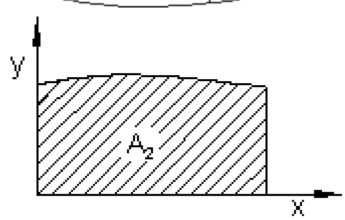
$F(x_0)=\dfrac{x_0\cdot f(x_0)}{2}$ د $f(x_0)=a_1x_0$ سره په لاندې ډول دی: $F(x_0)=\dfrac{x_0\cdot a_1x_0}{2}=\dfrac{a_1}{2}x_0^2$	$A=\dfrac{g\cdot h}{2}$ ساده پیدا کیږي: زموږ د مسألي لپاره متحوله داسي تغیروو: $A\to F(x_0);\ g\to x_0\,;\ h\to f(x_0)=a_1x_0$

تابع $F(x_0)$ د ګراف او د x - محور ترمنځ سطحه د x_0 په واکوالي(تابعیت) کې تشریح کوي یا ښایي. موږ دا تابع د **سطحې تابع** بولو.

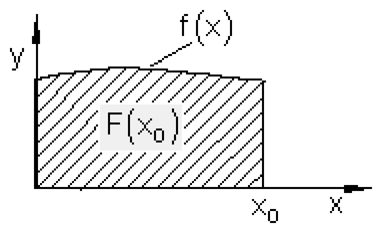
د سطحې پرابلم:



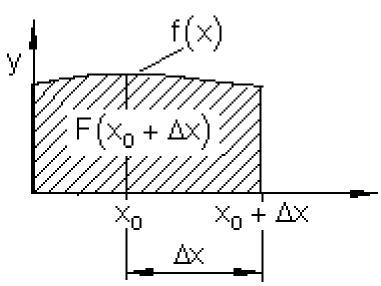
هره له کږوکرښو رابنده سطحه په پای ډېرو پلونو(قدمونو)، چې په هغې کې فقط یوه یوه کږه کرښه رامنځ ته کیږي.
نورې ټولې رابندوني سیده کرښیزې دي.
هره یوه د سطحې برخه(د بیلګې په توګه دلته $\mathbf{A_2}$) کېدی شي د وضعیه قیمتونو سیستم کې د یوې سطحی په څېر انځور شي، چې د کږې کرښې او پروت محور ترمنځ پرته وي.



که له کږوکرښو رابند ګراف د f(x) متمادي تابع وي، نو پوښتنه رامنځ ته کیږي، چې ایا یو تابع شته چې د افقي(پروت) محورارزښت x_0 په سطحه $F(x_0)$ تنظیم کړي، لکه په پیلبیلګه کې؟

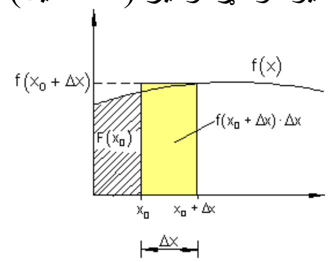


که داسې یو تابعF شتون ولري، او سطحه $F(x_0)$ چې د x_0 افقي محورارزښت تنظیم وي، نو باید د افقي(پروت) محور ارزښت $(x_0+\Delta x)$په سطحه باندې تنظیم کړای شي.

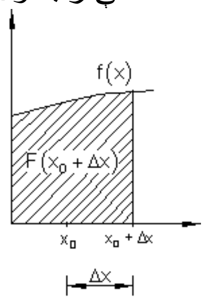


(c) ketabton.com: The Digital Library

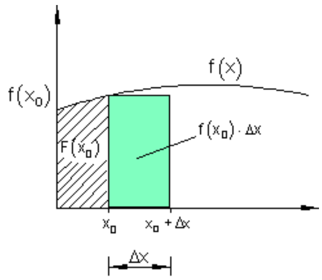
په یوه ولاړګوډیز (مستطیل) کې د سطحې رابندول:



د منحني لاندې په نخښه شوې سطحه د ربنتوني سطحې څخه لویه ده



ریښتوني سطحه ده.



د منحني لاندې په نخښه شوې سطحه له ریښتوني سطحې څخه کوچنی ده.

که د سطحې پټي (یا کوچني مستطیلونه)هرڅومره کوچني شي، په همغه اندازه د اصلي سطحې د مساحت څخه یې توپیر کمیږي.
دا اړودوالی د ریاضیاتو له مخې په لاندې توګه فرمول بندي کېدی شي:

$F(x_0)+f(x_0+\Delta x)\cdot\Delta x$	$F(x_0+\Delta x)$	$F(x_0)+f(x_0)\cdot\Delta x$

دا مو دې لاندې نابرابرونونویا نامساواتو ته راهڅوي

$$F(x_0)+f(x_0)\cdot\Delta x \quad\le\quad F(x_0+\Delta x) \quad\le\quad F(x_0)+f(x_0+\Delta x)\cdot\Delta x \quad |F(x_0)$$

$$\Leftrightarrow f(x_0)\cdot\Delta x \quad\le\quad F(x_0+\Delta x)-F(x_0) \quad\le\quad f(x_0+\Delta x)\cdot\Delta x \quad |:\Delta x$$

$$\Leftrightarrow f(x_0) \quad\le\quad \frac{F(x_0+\Delta x)-F(x_0)}{\Delta x} \quad\le\quad f(x_0+\Delta x)$$

لیمیټ يې نیسو:

$$\lim_{\Delta x\to 0} f(x_0) \quad\le\quad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \quad\le\quad \lim_{\Delta x\to 0} f(x_0+\Delta x)$$

$$f(x_0) \quad\le\quad F'(x_0) \quad\le\quad f(x_0)$$

$$f(x_0) \quad=\quad F'(x_0) \quad=\quad f(x_0)$$

نو لرو: $\underline{\underline{F'(x_0)=f(x_0)}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا په دې معنا، چې د سطحې F(x) مشتق د کړې کرښې د تابع ارزښت $f(x_0)$ سره په x_0 ځای کې برابر دی.

مونږ ليکو: $F'(x_0)=\dfrac{dF(x_0)}{dx}=f(x_0)$ يا $\boxed{F'(x)=\dfrac{dF(x)}{dx}=f(x)}$

که مونږ بريالي شو، داسې يو تابع F(x) پيداکړو چې مشتق يې د رابندې کړې f(x)تابع وي، نو F(x) د سطحې تابع دی.

که مونږ يو تابع د لومړني تابع ځخه رابيل کړو، نو دا مشتق کول بولو. د يوې سطحې تابع پيدا کول په روښانه توګه ددې کړنلارې برعکس دی. سړی کړی شي فورمال ووايي:

د يوې سطحې مساحت تابع، چې پيداکړو، دا معنا لري چې ورګډول يا انتيګرالول يې شمېرو.

د يوه ساده توان تابع په بېلګه د احساس له مخې يوه لار پيداکېدی شي، چې دا څنګه ايتېګرالوي.

توانتابع : $f(x)=x^3 \quad \Rightarrow f'(x)=3\cdot x^{3-1}=3x^2$

مشتق په دې معنا چې: اکسپوننت په يو کميږي او پوتنځتابع د زاړه پوتنځ سره ضربيږي.

انتيګرالونه (زياتونه ياورګډونه) په دې معنا چې: اکسپوننت په يو جګيږي اوپوتنځتابع په نوي اګسپوننت وېشل کيږي.

دا همدا اوس ازمايو:

توانتابع: $f(x)=3x^2 \quad \Rightarrow F(x)=\dfrac{3}{2+1}x^{2+1}=\underline{\underline{x^3}}$

تابع F(x) د f(x) بنسټتابع (لومړنی تابع يا ساده تابع) بلل کيږي، ځکه چې f(x) له F(x) ځخه لاس ته ارځي يا را پيداکيږي يا راځيږي.

تمرينونه:

– و ښايئ، چې د F او دG توابع د f تابع لومړنی تابع وې ده.

$a)\ \ F(x)=x^3+x+4 \quad , \quad G(x)=x^3+x+1$

$b)\ \ F(x)=(x-3)^2 \quad , \quad G(x)=x^2-6x+4$

$c)\ \ F(x)=\dfrac{x+1}{x+2} \quad , \quad G(x)=\dfrac{3x+5}{x+2}$

$d)\ \ F(x)=1+\sin x \quad , \quad G(x)=\sin x$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ناټاکلی انتیګرال

$$\int f\,(x)\,d\,x$$

فعالیتونه:

-- په پورته څیره کې $\int$ په څه مفهوم دی

-- په تیر ه برخه کې مو $F(x)$ د $f(x)$څه بللی وو او اوس به $F(x)=\int f(x)\,d\,x$ د لومړنئ تابع سره څه توپیر ولري؟

و به ګورو، چې نا ټاکلی انتیګرال د لومړنی تابع لپاره بل نوم دی.

که دیوې ورکړ شوي $f(x)$ تابع $F(x)$ لومړنی تابع، یعني $F(x)$ وپیژنو، نو د یوې ثابتې c د ور جمع کولوسره د $f(x)$ د ټولو لومړنیو توابعو سټ G لاسته راوړو(c په خوښه یو حقیقي عدد دئ).

مونږ د $f(x)$ تابع د $F(x)$ لومړنی تابع ټاکنه یا اینتګرلونه هم بولو او ددې له پاره لیکو:

$$\frac{dF}{dx}=f\,(x) \quad\Leftrightarrow\quad dF\,(x)=f\,(x)dx \quad\Leftrightarrow\quad F\,(x)=\int dF\,(x)=\int f\,(x)dx$$

نو لرو : $F(x)=\int f(x)\,d\,x$

دا تراوسه فورمال لیکندود وو. اوس دا ژوند ته رابولو.

مونږ لومړنی توابع پلټو

بیلګه: لومړنی تابع $F(x)$ دې پیدا شي، چې مشتق یې $f(x) = 2x$ دی. قاعده داسې ده $F(x)=\int f(x)dx=\int 2x\,dx$

مونږ ازمایو: $F(x)=x^2$ ځکه چې $F'(x)=2x=f(x)$

$F(x)=x^2+2$ ځکه چې $F'(x)=2x=f(x)$. په ټولیزه توګه باور لري:

$F(x)=x^2+C$ ځکه چې په هرحالت کې لرو: $F'(x)=2x=f(x)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دواړه توابع په ثابت غړي کې یو له بل توپیر لري. دوی همغه مشتق لري، ځکه چې د مشتق سره هغه ثابت عدد له منځه ځي. له دې امله باید دې خپلې لار ته تغیر ورکړو.

قاعده(لار): باور لري: $\boxed{\int f(x)d\,x = F(x)+C}$

د لومړنیو توابعو سټ(ډېرۍ): بیلګه ښایي، چې د تابع f(x) لپاره نه یواځې یو لومړنی تابع بلکې ناپای ډېر توابع شته، چې یواځې ثابت عدد کې یو له بل سره توپیر لري، چې دا د f(x) د لومړنییو توابعو سټ بولو.

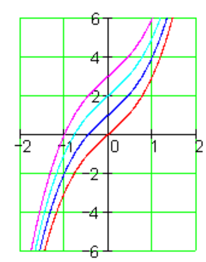
بیلګه: یو لومړنی‌تابع F(x) دې پیدا شي، چې د هغه مشتق $f(x) = 3x^2 + 2$ وي.

$F(x)=x^3+2x+C$ ، ځکه چې $F'(x)=3x^2+2=f(x)$

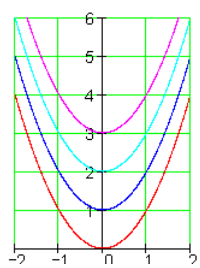
د ټولو لومړنیو توابعو ډېرۍ دې د منحنیو ډلې په څېر انځور شي، چې فقط ثابتو عددونو کې یو له بل توپیر لري.

ددې لپاره دې د ګرافونو لاندې دوه بیلګې وکتل شي.

$F(x)=x^3+2x+C$



$F(x)=x^2+C$



تمرینونه:

د لاندې توابعو له پاره لومړني توابع پیدا کړئ او لاس ته راوړني یې د مشتق له لارې و ازمایئ.

$a)\ f(x)=x^2$ $\quad b)\ f(x)=2x^2$ $\quad c)\ f(x)=x$

$d)\ f(x)=-2x$ $\quad e)\ f(x)=\frac{1}{2}x^2$ $\quad f)\ f(x)=-\frac{1}{4}x$

$g)\ f(x)=x^3$ $\quad h)\ f(x)=4x^3$ $\quad i)\ f(x)=2$

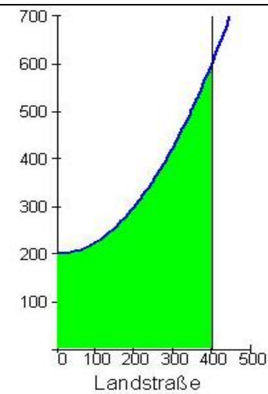
$j)\ f(x)=x+1$ $\quad k)\ f(x)=x^2+x-3$ $\quad l)\ f(x)=x^n\,;\ n\in N$

$m)\ f(x)=x^2$ $\quad n)\ f(x)=\frac{1}{3}x^3+C$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ټاکلي انتیګرال شمیرنه

ټاکلی انتیګرال همغه د ریمن انتیګرال دی، چې یوه د تابع د ګراف او x محور ترمنځ سطحه شمیري.



ټاکلی انتیګرال:

که f یو حقیقي تابع وي، نو د ټاکل انتیګرال $\int_a^b f(x)dx$ (لوستل: د $f(x)$ انتیګرال د پولي(حد) a تر پولي(حد) b یا د a او b حدونو ترمنځ یا انتیګرال په $f(x)$ باندې له a تر b) لاندې یوه لوریزه سطحه پوهیږو د f ګراف لاندې د a او b تر منځ.

فعالیت:

اول: ووایئ چې په پورته انتیګرال کې $f(x)$ څه نومیږي؟

G دې په بند انتروال $a \le x \le b$ کې د $g(x)$ لومړنی انتیګرال وي، د $g(x)=\int_a^x f(t)dt$ سره، نو

باور لري: $\int_a^t f(t)dt = G(b)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا چې د دوه لومړنيو توابعو F او G تر منځ يو ثابت C توپير شته، نو G(x) = F(x) + C باور لري. د x=b لپاره لاسته راوړو: G(b) = F(b) + C

دا چې $G(x) = \int_a^a f(t)dt = 0$ دی او G(a)=F(a)+ C دی، نو C = -F(a) ده.

دا په دې معنا، چې G(b) = F(b) – F(a) همداسې $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$.

د متحولې د نوم بدلون څخه وروسته لاس ته راوړو $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

له دې سره مو د مشتق او انتیګرال جمله لاس ته راوړه

یا دا وینا د مشتق - او انتیګرالشمېرنې بنسټیزه جمله بلل کیږي:

تعريف:

f په انتروال $a \le x \le b$ کې متمادي تابع ده او F د f لومړنی تابع ده، نو ټاکلی انتیګرال دی : $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$

د F(b) – F(a) لپاره زيات وخت $[F(x)]_a^b$ ليکو. په دې توګه دی

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b$$

له دې سره مو د ټاکي انتیګرال شمېرنه په لومړني انتیګرال بېرته واړوله او د مشتق او انتیګرال تر منځ مو اړيکي رامح ته کې.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بيلګي:

$$a)\ \int_1^2 x^2dx=\left[\frac{x^3}{x}\right]_1^2=\frac{8}{3}-\frac{1}{3}=\frac{7}{3}$$

$$b)\ \int_2^4 \frac{1}{x^2}dx=\int_2^4 x^{-2}dx=\left[\frac{x^{-1}}{-1}\right]_2^4=\left[-\frac{1}{x}\right]_2^4=\frac{1}{4}$$

$$c)\ \int_1^3 \sqrt{x}\,dx=\int_1^3 x^{\frac{1}{2}}\,dx=\left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]=\frac{2}{3}[\sqrt{x^3}]_1^3(\sqrt{3^3}-\sqrt{1^3}$$

$$=\frac{2}{3}(3\sqrt{3}-1)=2(\sqrt{3}-\frac{1}{3})$$

د ټاکلو انتيګرالونو لپاره لاندې جملې رښتيا دي:

$$\int_a^b k\cdot f(x)dx=k\cdot\int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^b[f(x)+g(x)dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx+$$

تکميليدونکي بنسټونه:

د F(b) – F(a) له امله د انتګرالوني ثابته c له منځه ځي. له دې امله کولي شو د انتيګرال ثابتي ټاکلو لپاره c=0 وليکو.

بيلګه :

د ټاکلي انتيګرال $\int_1^3 x^2dx$ ارزښت و ټاکی. د توان قانون له مخې لومړنی تابع

يعني $F(x)=\frac{x^3}{3}+C$ پيدا کړی

(c) ketabton.com: The Digital Library

ښوونه: موږ په دا لاندې ډول ښایو:

$$\int_1^3 x^2dx = \left[\frac{x^2}{3}+C\right]_1^3 = F(3)-F(1) = \frac{3^3}{3}+C-\left(\frac{1^3}{3}+C\right) = \frac{27}{3}+C-\frac{1}{3}-C$$
$$\int_1^3 x^2dx = \frac{26}{3}$$

اساسات تکمیل کننده:

از د لیل F(b) – F(a) ثابت C انتګرال ګرفتن از بین میرود. ازین بابت میتوانیم براي تعین ثابت انتیګرال بنویسیم C =0 .

مثال :

قیمت انتیګرال معین $\int_{-\pi}^{+0,5\pi} \cos x dx$ را تعیین نمایید.

ثبوت: ما قرار زیل ثبوت میکنیم:

$$\int_{-\pi}^{+0.5\pi} \cos x\, dx = [\sin x]_{-\pi}^{0.5\pi} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin(-\pi) = 1-0 = 1$$

یادونه : دا چې په دې برخه کې یواځې د ټاکلي انتیګرال ارزښت غوښتل شوي دی او نه د یوې منحني لاندې سطحه، نو باید نه دی چې صفرځایونه په پام کې ونیول شي.

عوره یادونه: دادې په یاد وي، چې ناټاکلی انتیګرال تابع ده او ټاکلی انتیګرال یو عدد.

تمرینونه:

د لاندې ټاکلو انتیګرالونو ارزښتونه وشمیرئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

$a)\ \int_0^3 4dx$ $\quad b)\ \int_{-3}^{-1} xdx$ $\quad c)\ \int_1^e \frac{1}{x}dx$

$d)\ \int_1^e (2+\frac{1}{x})dx$ $\quad e)\ \int_{-1}^0 e^x dx$ $\quad f)\ \int_0^\pi \sin x\, dx$

$i)\ \int_{\frac{1}{6}\pi}^{\frac{1}{4}\pi} \frac{1}{\cos^2 x}dx$ $\quad j)\ \int_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{1}{3}\pi} \frac{1}{\sin^2 x}dx$ $\quad k)\ \int_{-2}^2 x^3 dx$

$l)\ \int_2^6 (1+x)dx$ $\quad m)\ \int_1^2 (x^2-x^5)dx$ $\quad n)\ \int_{-2}^0 \left(\frac{x^3}{4}+\frac{x^2}{3}\right)dx$

د ناټکلي انتیګرال څخه و ټاکلي انتیګرال ته

ترمخ راوړنه یا وړاندراوړنه

موږ ولیدل، چې څنګه یو تابع f(x) ته لومړنۍ تابع F(x) منځ ته راوړی شو، نو ناپای ډېر لومړني توابع شته دی، چې فقط د یوې ورجمع کوونکي ثابتې کې یو له بل توپیر لري.

فعالیت :

-- د $\int f(x)dx$ او $\int_a^b f(x)dx$ تر منځ توپیر باندې فکر وکړئ؟

-- د $\int f(x)dx$ او $\int_a^b f(x)dx$ پایله څه ده ؟

- دا توپیر یې د یوې بیلګې په بنسټ روښانه کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بېلګه:

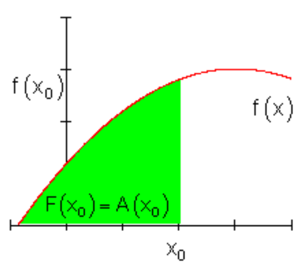
لرو: تابع $f(x)=3x^2+2$ او د دې د لومړنیو توابعو سټ $f(x)=x^3+2x+C$

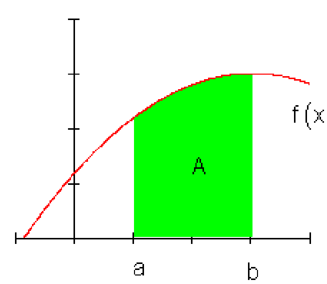
پیژند : د ټولو لومړنیو توابعو سټ و یوې تابع f(x) ته ،،ناټاکلی انټیګرال ،، بلل کیږي او ددې له پاره لیکو: $\int f(x)dx=F(x)+C$

د مشتق- او انټیګرالشمېرنې ترمنځ اړیکې کېدی شي د لاندې جملې له لارې لاس ته راشي.

جمله(قضیه) : د ناټاکلی انټیګرالشمېرنه د مشتقشمېرنې برعکس انځوروي $$\frac{d[f(x)]+C}{dx}=[F(x)+C]'=f(x)$$

د تابع د ګراف لاندې او د انټروال [a ; b] تر منځ سطحه دې و ټاکل شي. زموږ په دې پرابلم موږ تر اوسه لاس ته راوړې زده کړې کاروو.

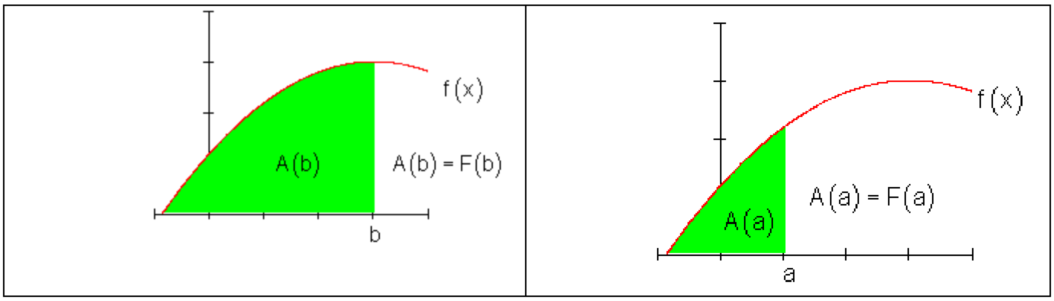


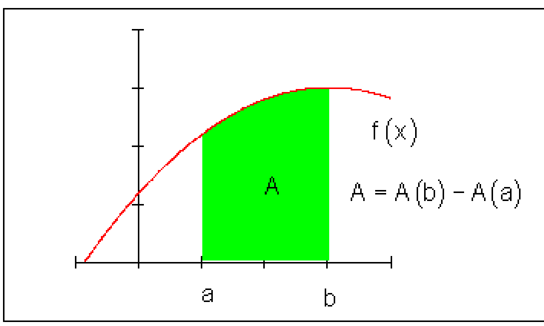


د یوې سطحې تابع شتون مو فکر دې لاندې پوهنې (زده کړې) ته لاربشوده وي:
د یوې سطحې، چې د یوې په پام کې نیولې f(x) تابع ګراف لاندې ده تر x_0 ځای پورې

(c) ketabton.com: The Digital Library

او يوې $F'(x)$ تابع، چې د $F(x)$ تابع مشتق د x_0 ځاي د f تابع د تابع ارزښت سره د x_0 په ځاي کې برابر وي، ترمنځ اړيکې شته دی، يعنې





د انتروال $[a,b]$ حدونو ترمنځ سطحې پيداکول د تابع د گراف سطحو د کمښت څخه په ځاي $(A(b))$ b او سطحې په $(A(a))$ a ځاي کې ،. يعنې په همدې توگه $A= A(b) – A(a)$ $F= F(b) – F(a)$ لاس ته راځي.

په انتروال $[a,b]$ کې د تابعګراف لاندې سطحه د لومړنيو توابعو تفريق دی:

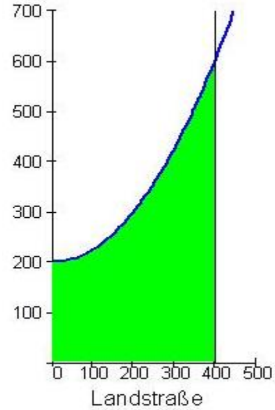
$$A = F(b) - F(a) := \int_a^b F(x)dx$$

دا انتيګرال ټاکلی انتيګرال هم بلل کيږي.

جمله :
دا تر اوسه لاس ته راوړو معلوماتو په بنسټ کړی شو، چې په پيل ببلګه کې راوړې د چمن سطحه وشميرو.

ثابته له تفريق سره لرې کيږي. په عمل کې د دې مسآلې د حل لپاره يوه بله لار ګتوره راوستلې يا ګټوره بنوولې:

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$A=\int_0^{400}\left(\frac{1}{400}x^2+200\right)dx=\frac{1}{1200}x^3+200\cdot x\Big|_0^{400}$$

$$=\frac{1}{1200}\cdot 400^3+200\cdot 400\left[\frac{1}{1200}0^3+200\cdot 0\right]$$

$$=\frac{1}{1200}\cdot 400^3+200\cdot 400=133333.\bar{3}$$

تمرينونه: لاندې ټاکلي انتيګرالونه وشمېرى.

$$\int_1^3 x\,dx\ ,\ \int_1^3 (x^2-1)dx\ ,\ \int_{-2}^{2} 4dx\ ,\ \int_3^4 dx\ ,$$

$$\int_0^4 (2x-5)dx\ ,\ \int_{-\sqrt{8}}^{\sqrt{8}}\left(\frac{1}{2}x^2-4\right)dx$$

د انتيګرالونې قاعدې

د ناټاکلي ايتيګرال انتيګرالونې قاعدې: په لاندې اينتيګريشن قاعدوکي د اينتيګريشن ثابته باندې صرف نظر کيږيدلته مساوات تر يوې ورجمع شوې ثابتې C پورې مساوات دى ، په دې معنا چې دمساواتو تر منځ يواځې يوه ثابته کيدى شي زياته يا کمه وي. دا قاعده کيدى شي چې په ټاکلې انتيګرال کې ښوولې جملى سره سم ټاکلي ايتيګرال ته نقل شي يعني په ټاکلي ايتيګرال استعمال شي . دا قاعدې کيدى شي چې د تيرو درسونو سره سم د دوارو خواو د مشتق نيولو سره وښول شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله :

د یوې ثابتي سره ضرب : که تابع (f (x په یوه اینتروال کی متمادي وي ، نو لاندې باور لري:

$$\int a \cdot f(x)\, dx = a\int f(x)\, dx, \qquad a \in R$$

جمله: د جمعي (تفریق) قاعده که $f_1(x)$ او $f_2(x)$ په یوه ایتروال کی نه پرېکېدونکي وي ، نو باور لري

$$\int (f_1(x) \pm f_2(x))dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx$$

بیلګې:

لاندې ایتیګرالونه کیدی شي چی د مخ ته تېرو جملو په استعمالیدو او ساده څیره بدلون بیرته په بنسټیزو اینتیګرالونو بدلګړای شي

$$a) \quad \int \frac{dx}{3x^4} = \frac{1}{3}\int x^{-4}dx = \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)x^{-3} + C = -\frac{1}{9x^3} + C,$$

$$b) \quad \int 3x^2 + 4x - 1)\, dx = 3\int x^2dx + 4\int xdx - \int dx = 3\cdot\frac{1}{3}x^3 + 4\cdot\frac{1}{2}x^2 - x + C$$

$$= x^3 + 2x^2 - x + C,$$

$$c) \quad \int \frac{2x^3 - 3x}{\sqrt{x}}dx = 2\int \frac{x^3}{\sqrt{x}}\, dx - 3\int \frac{x}{\sqrt{x}}\, dx = 2\int x^{\frac{5}{2}}dx - 3\int x^{\frac{1}{2}}dx$$

$$= 2\cdot\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}} - 3\cdot\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C = \frac{4}{7}x^3\cdot\sqrt{x} - 2x\cdot\sqrt{x} + C$$

تمرینونه: د لاندې توابعو انتیګرال ونیسئ:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$a)\quad \int \frac{2x^3-3x}{\sqrt{x}}dx \quad , \; b)\int_1^2 \frac{\sqrt{x}-1}{x}dx$$

د اکسپوننشل توابعو انتیګرالونه

بنسټ :

د طبیعي اکسپوننشل تابع $f(x)=e^x$ لپاره لرو:

د ټولیز اکسپوننشل تابع $\int e^x dx = e^x + C$ $(a \in IR^+ , a \neq 1)$ لپاره لرو:

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

بیلګه : دا ناټاکلی اکسپوننشل تابع $\int 2^{x-3} dx$ غواړو پیداکړو

بنه بدون:د توان قانون سره سم لرو $2^{x-3} = \frac{2^x}{2^3} = \frac{1}{8}2^x$

د فاکتوروني قانون سره سم لرو: $\int \frac{1}{8}2^x dx = \frac{1}{8}\int 2^x dx$

انتیګرال یې ونیسئ: $\frac{1}{8}\int 2^x dx = \frac{1}{8}\cdot\frac{2^x}{\ln 2} + c = \frac{2^x}{8\cdot\ln 2} + c = \frac{2^{x-3}}{\ln 2} + c$

تمرینونه:

لاندې انتیګرالونه وشمیرئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

$a)\ \int 3^{x+1}dx$ $b)\ \int 2^{-x}dx$ $c)\ \int a^{x+b}dx$

$d)\ \int \frac{1}{a^x}dx$ $e)\ \int 2^x \cdot 3^x dx$ $f)\ \int \frac{2^x}{3^x}dx$

$i)\ \int \frac{4^{x+3}}{2^x}dx$ $j)\ \int \frac{5^x+3^x}{2^x}dx$ $k)\ \int (1+2^x)dx$

د لوګاريتمي توابعو انتيګرالونه

بنسټ: د طبيعي لوګاريتم تابع $f(x)=\ln x (x\in IR^+)$ لپاره $\int \ln x dx = x\cdot \ln x - x + c$ دی .

د ټوليز لوګاريتم تابع $f(x)=\log_a x\ ,a\in IR^+, a\neq 1)$ لپاره $\int \log_a x dx = \frac{x\cdot \ln x - x}{\ln a}+c$ دی.

بيلګه :

ناټاکلی انتيګرال $\int \ln 3x dx$ غواړو پيدا کړو:

بڼه بدلون او د فاکتور قاعدې استعمال:

$$\int \ln 3xdx = \int (\ln 3 + \ln x)dx = \int \ln 3xdx \div \int \ln xdx = x\cdot \ln 3 + x\cdot \ln x - x + c$$

$$\int \ln 3xdx = x\cdot(\ln 3 + \ln x - 1) + c$$

تمرينونه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا لاندې ناټاکلي انتېګرالونه پيداکړئ

$a)\ \int \ln 2x^3 dx$ $\qquad$ $b)\ \int \ln \sqrt{x} dx$

$c)\ \int \log \frac{x}{2} dx$ $\qquad$ $d)\ \int 3\log \frac{1}{x} dx$

بنسټيز اينتيګرالونه په يوه جدول کې

د اينتيګرالولو او مشتق نيول د اړيکو په بنسټ کيدی شي چې د بنسټيزو اينتيګرالونو يو جدول ترتيب شي. دا په مشتق جدول کی راوړل شوو بنسټيزو توابعوبرعکس څرګنديږي.

Nr.	$f(x)$	$f(x)=\int f(x)dx$	نيونه يا فرضيه
1	x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C$	$n \in Z \setminus \{-1\}$
2	$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert+C$	$x \neq 0$
3	x^a	$\frac{1}{a+1}x^{a+1}+C$	$a \in R \setminus \{-1\},\ x>0$
4	a^x	$\frac{1}{\ln a}a^x+C$	$a>0,\ a\neq 1$
5	e^x	e^x+C	
6	$\sin x$	$-\cos x+C$	

(c) ketabton.com: The Digital Library

7	$\cos x$	$\sin x + C$	
8	$\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$-\cot x + C$	$x \neq n \cdot \pi, \quad n \in Z$

بیلګې :

د جدول او تیرو جملو څخه په ګټه لاندې اینتیګرالونه په لاندې ساده ډول په بنستیز توابعو بدلیدلی شي .

$$a)\quad \int \frac{1}{x^5}dx = \int x^{-5}dx = -\frac{1}{4}x^{-4} + C \text{ ,................................1,}$$

$$b)\quad \int \frac{\sqrt{x}}{x}dx = \int \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x}dx = \int x^{-\frac{1}{2}}dx = 2x^{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{x} + C \quad (x > 0), \text{ ....3,}$$

$$c)\quad \int \sqrt[3]{x \cdot \sqrt{x}}\,dx = \int \left(x \cdot x^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{3}} dx = \int x^{\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3}} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C \quad (x > 0), \text{ ....3,}$$

$$d)\quad \int \frac{\sin 2x}{2\sin x}dx = \int \frac{2\sin x \cos x}{2\sin x}dx = \int \cos x\, dx = \sin x + C \text{ , ...(4,21)} \quad 6,$$

$$e)\quad \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x}dx = \int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \tan x + C \quad (x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi), \qquad (4,11) \quad 9,$$

$$f)\quad \int (1 + \cot^2 x)\, dx = \int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\int \cot x + C \quad (x \neq n\pi) \quad (4,12) \qquad 8,$$

$$g)\quad \int \frac{(1+x)(1-x)}{x - x^3}dx = \int \frac{1-x^2}{x(1-x^2)}dx = \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C \quad (x \neq \pm 1,\ x \neq 0), \quad Nr.2,$$

$$h)\quad \int_{-1}^{0} e^x dx = e^x \Big|_{-1}^{0} = e^0 - e^{-1} = 1 - \frac{1}{2}, \text{ ....5}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د بدلون قانون Substitutionlaw

د ناټاکلي انتیګرال حل د بدلون له لارې(ننوتنه راځي)

$$\int f(x)dx = \int (x^2+4x-5)^n dx$$

فعالیت:

- د $\int (x^2 - x)dx$ انتیګرال ونیسی

- د $\int (x^2 + 5x)^3 dx$ انتیګرال نیولو کې فکر وکړئ او که وتونېدی انتیګرال یې ونیسی.

تراوسه پورې مو فقط انتیګرالونه او جملې حل کړې، چې د لومړنیو توابعو په انتیګرال اړول کېدل. له دې لاس ته راغلو لومړنیو انتېګرالونو د نورو انتېګرالولو حل جملې لاس ته راځي. د لومړنۍ انتېګرالونې سیده استعمال تل ساده نه دی، لکه چې په لاندې کې به ولیدل شي.

جمله :

د ،،بدلون (قاعده)،، (Substitution لاتین :د یوه ارزښت په ځاي د همغه ارزښت بله لویه اینوول (لنډ: بدلون) د فرضیو لاندې چې u = g (x) متمادي او مشتقوړدی او y = f (u) متمادي، نو باور لري:

$$\int f[g(x)]g'(x)dx = \int f[f(u)]du$$

حل : د ښي اړخ مشتق د تیرو درسونو په بنسټ په لاندې ډول دی:

$$\frac{d}{dx}\int f(u)\,du = \frac{d}{du}\int f(u)\,du \cdot \frac{du}{dx} = f(u)\cdot u' = f[g(x)]\cdot g'(x),$$

دا د کیڼ اړخ د مشتق سره سر خوري. قاعده د ضرب انتیګرالیدو لپاره مساعده ده، په کوم کی چې یو فاکتور زنځیري تابع [f [g (x) وي او دا بل فاکتور (ضریب) یی د دننه تابع مشتق g ' (x) وي. سرِی د دننه تابع لپاره په دې توګه متحولې بدلوي یا

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځاي په ځاي کويک: $u = g(x)$ مشتق جوړوي په

همدې ډول $du = g'(x)\,dx$

۲۲۶ د بدلون قانون

د بريالي انتيګراليدو وروسته بدلون بيرته راګرځول کيږي.

بيلګه a :

لرو : $I = \int 2\cos(2x-1)dx$. د دې اتنيګرال وشمېرئ.

بدلون يا په ځای کونه: $2x-1=u$

مشتق $2 = du/dx$ همداسی $2dx = du$

$$I = \int \cos u\, du = \sin u + C = \sin(2x-1) + C$$

بيلګه b : لرو $I = \int 3\cos(2x+1)dx$

بدلوو : $2x = u-1$, مشتق $2 = du/dx$ همداسی $dx = (1/2)\,du$

$$I = \int 3\cos u \cdot \frac{1}{2}du = \frac{3}{2}\int \cos u\, du = \frac{3}{2}\sin(2x-1) + C$$

ومولیدل چی ځنځيري تابع د لايني دننه تابع سره د بدلونو قاعدې سره تل اينتيګرال کيدی شي، ځکه چی د لايني تابع مشتق ثابت ده او ثابت فاکتور د تيرې جملی سره سم د اينتيګرال تر مخ (موخه کينې لور ده) ليکل کيږي.

بيلګه:

لرو $I = \sqrt{-3x+5}\ dx$

بدلون: $-3x+5=u$

(c) ketabton.com: The Digital Library

را بیلیدنه: $-3 = du/dx \Leftrightarrow dx = -1/3 \cdot du$

$$I = \int \sqrt{u} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) du = -\frac{1}{3}\int u^{\frac{1}{2}} du = -\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot u^{\frac{3}{2}} + C = -\frac{2}{9}\cdot\sqrt{(-3x+5)^3} + C.$$

$$b)\quad I = \int \frac{1}{2} e^{-2x-3} dx.$$

$$-2x - 3 = u, \qquad -2 = \frac{du}{dx} \qquad dx = -\frac{1}{2} du,$$

$$I = \int \frac{1}{2} e^{u} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) du = -\frac{1}{4}\int e^{u} du = -\frac{1}{4} e^{u} + C = -\frac{1}{4} e^{-2x-3} + C.$$

$$c)\quad I = \int \frac{2dx}{x+2}.$$

$$x + 2 = u, \qquad 1 = \frac{du}{dx} \qquad dx = du$$

$$I = \int \frac{2du}{u} = 2\int \frac{du}{u} = 2\ln|u| + C = 2\ln|x+2| + C.$$

توابع، چې بې د بدلون له لارې حل کیږي لکه لاندې بلګه:
بیلګه: عواړو د $f(x) = e^{x}$ مشتق بیدا کړو. دا مشتق په ساده ډول پیدا کولي شو، یعنې لرو:

$$f(x) = e^{x} \Rightarrow F(x) = \int f(x)dx = \int e^{x} dx = e^{x} + C$$

ګورو، چې $F'(x) = e^{x} = f(x)$ دی.

که ولرو: $f(x) = e^{2x}$ او د پورته په څېر لاړ شو، نو لاس ته به ترې راشي:

$$f(x) = e^{2x} \Rightarrow F(x) = \int f(x)dx = \int e^{2x} dx \neq e^{2x} + C$$

وي $F(x) = e^{2x} + C$ **دی، که** $F'(x) = 2e^{2x} \neq f(x)$

په داسې حالتونو کې د بدلون قاعده مرسته کوي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

بېلګه:
د $f(x)=e^{2x}$ تابع انتيګرال ونيسی

۲۲۸ د بدلون قانون

$$f(x)=e^{2x} \Rightarrow F(x)=\int f(x)dx=\int e^{2x}dx=?$$

بدلون : $u(x)=2x=u$

جوړ کړئ: $u'(x)=\frac{du}{dx}=2 \Rightarrow dx=\frac{du}{2}$

$$\int f(x)dx=\int e^u\frac{du}{2}=\frac{1}{2}\int e^u du=\frac{1}{2}e^u+C$$

د بدلون برعکس: $\frac{1}{2}e^u+C=\frac{1}{2}e^{2x}+C$

نو لرو: $F(x)\int(x)dx=\int e^{2x}dx=\frac{1}{2}e^{2x}+C$

ازمايښت: $F(x)=\frac{1}{2}e^{2x}+C \Rightarrow F'(x)=\frac{1}{2}e^{2x}\cdot 2=e^{2x}=f(x)$

بېلګه :
وښايی چې باور لري. $f(x)=(x+1)^2 \Rightarrow F(x)=\int f(x)dx=\int(x+1)^2dx$.

بدلون $u(x)=x+1=u$

جوړ کړئ

$$u'(x)=\frac{du}{dx}=1 \Rightarrow dx=\frac{du}{1}$$

$$\int f(x)dx=\int u^2\frac{du}{1}=\int u^2du=\frac{u^3}{3}+C$$

بيرته بدلون: $\frac{u^3}{3}+C=\frac{(x+1)^3}{3}+C$

نو: $\int(x)dx=\int(x+1)^2dx=\frac{(x+1)^2}{3}+C$

بېلګه :

(c) ketabton.com: The Digital Library

و ښايي چې باور لري: $f(x)=(3x+6)^3 \quad \Rightarrow F(x)=\int f(x)dx=\int (3x+6)^3 dx$
بدلون: $u(x)=3x+6=u$
جوړوو: $u'(x)=\frac{du}{dx}=3 \quad \Rightarrow dx=\frac{du}{3}$
$\int f(x)dx=\int u^3\frac{du}{3}=\frac{1}{3}\int u^3 du=\frac{u^4}{12}+C$
بېرته بدلون: $\frac{u^4}{12}(3x+6)^4+C$
نو لرو: $\int (x)dx=\int (3x+6)^3 dx=\frac{1}{12}(3x+6)^4+C$

تمرينونه: د $f(x)=x\cdot\ln(x^2)$ تابع انتيگرال وشميرئ.

د ټاکلو انتيګرالونو حل د بدلون له لارې

$$\int_3^8 (x^2+4x-5)^n dx$$

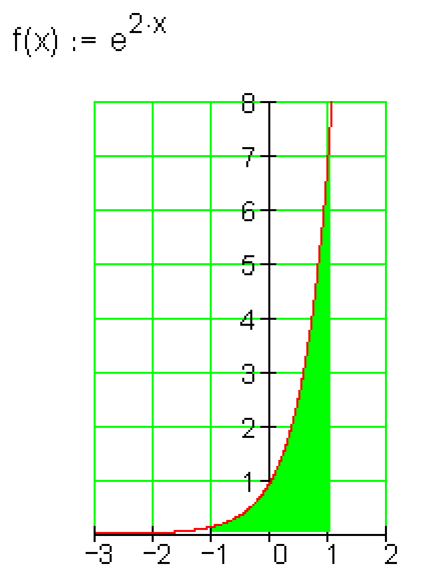
فعاليت:

- د $\int_a^b (x^2-x)dx$ انتيگرال ونيسى
- د $\int_1^5 (x^2+5x)^3 dx$ انتيگرال نيولو کې فکر وکړئ او که وتوانېدى انتيگرال يې ونيسى.

ټاکلي انتيګرالونه هم د بدلون له لارې حل کيږي.

بيلګه : وښاياست: $f(x)=e^{2x} \quad \Rightarrow F(x)=\int_{-1}^{1} e^{2x}dx$ د انتيګرال حل د بدلون له لارې:	

(c) ketabton.com: The Digital Library



۱ – بدلون $u(x)=2x$

۲ – د dx په ځای کېږدی

$$u'(x)=\frac{du}{dx}=2 \quad \Rightarrow dx=\frac{1}{2}du$$

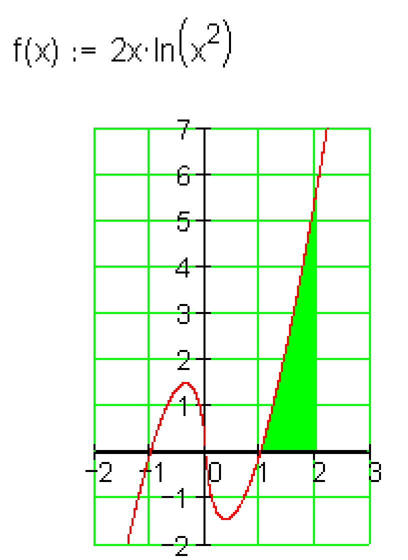
۳ – د پولو بدلون

- لاندې پوله $u(-1)=-2$
- پورته پوله

۴ - په انتيګرال کې ځا په ځای کړی

$$\frac{1}{2}\int_{-2}^{2} e^{u}du=\frac{1}{2}\left[e^{u}\right]_{-2}^{2}=\frac{1}{2}\left[e^{2}-e^{-2}\right]=\underline{\underline{3.627}}$$

بیلګه :



$$f(x)=2x\cdot\ln(x^{2}) \quad \Rightarrow F(x)=\int_{1}^{2}2x\cdot\ln(x^{2})dx$$

د انتيګرال حل د بدلون له لارې

۱ – بدلون $u(x)=x^{2}$

۲ – د ځای په ځای کونه

$$u'(x)=\frac{du}{dx}=2x \quad \Rightarrow dx=\frac{1}{2x}du$$

۳ – د پولې بدلون

- لاندې پوله $u(1)=1$
- پورته پوله $u(2)=4$

۴ – په انتيګرال کې ځای په ځای کړی

$$\int_{1}^{4}2x\cdot\ln(u)\cdot\frac{1}{2x}du=\int_{1}^{4}\ln(u)du=\left[u\cdot\ln(u)-u\right]_{1}^{4}$$

$$=\left[4\cdot\ln(4)-4\right]-\left[1\cdot\ln(1)-1\right]\approx\underline{\underline{2.545}}$$

تمرین: لاندې انتيګرالونه وشميرى يا حل کړی

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱ - $\int \frac{3}{4x+1}\,dx$ ۲ - $\int_0^2 \frac{4}{4-x}\,dx$

۳ - $\int \frac{2}{(1-x)^2}\,dx$ ۴ - $\int \frac{6}{(2x-1)^3}\,dx$

۵ - $\int_{-2}^{2} \frac{10}{(x-4)^5}\,dx$ ۶ - $\int_{-2}^{2} e^{1-x}\,dx$

۷ - $\int_0^4 e^{\frac{1}{2}x}\,dx$ ۸ — $\int_1^2 e^{4-2x}\,dx$

۹ - $\int_1^2 \frac{4}{e^{2x-4}}\,dx$ ۱۰ - $\int_0^2 \left(x-1-e^{-\frac{1}{2}x}\right)dx$

ټوټه انتيګرالونه

$$f(x).g(x) = x.\ln(x^2)$$

ټوټه انتيګرالونه، چې ضرب انتيګرالونه هم بلل کيږي، په انتيګرالشميرنه کې د لومړنيو توابعو ټاکلو يا شميرلو لپاره امکان دی. دا کيدی شي د مشتقشميرنې د برعکسکونی په څير وګڼل شي.

فعاليت:

- څه بايد وشي، چې دا پورته په ننوتنه کې تابع انتيګرال نيونه شونې شي؟

___ ايا دا پورته ننوتنه کې راغلې بوښتنه دا تر اوسه ورسره بلدې لارې يعنې د (بڼې) بدلون له لارې حل دی؟

د ټوټه انتيګرالونې له پاره لاندې قانون کاروي، چې د متمادي (نه پرېکيدونکي) توابعو f او g له پاره باور لري.:

$$\int_a^b f(x)\cdot g'(x)\,\mathrm{d}x = [f(x)\cdot g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)\cdot g(x)\,\mathrm{d}x.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا قانون ټیک هلته ګټور دی، که د f مشتقکونی سره یو ساده تابع منح ته راځي.
پیل
د ضرب قانون (د ضرب مشتقنیونې) څخه لرو:

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$u' \cdot v = (u \cdot v)' - u \cdot v'$$

له دې څخه لاس ته راځي:

$$\int u' \cdot v = \int (u \cdot v)' - \int u \cdot v'$$

$$\int u' \cdot v = u \cdot v - \int u \cdot v'$$

په دې پسې د ټاکلي انتیګرال لپاره باور لري:

$$\int_a^b f(x) \cdot g'(x)\, \mathrm{d}x = f(b) \cdot g(b) - f(a) \cdot g(a) - \int_a^b f'(x) \cdot g(x)\, \mathrm{d}x$$

یا همدغسې، لکه په زیاتو ریاضي کتابونو کې چې پیداکیږي.

$$\int_a^b f(x) \cdot g'(x)\, \mathrm{d}x = [f(x) \cdot g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x) \cdot g(x)\, \mathrm{d}x.$$

د دې مخ ته حدونو لپاره ګتور دی، چې لومړی ځان په ناټاکلي انتیګرال محدود کړو، چې دا نا اړینو حدونو څخه چې لید مو رابندوي، ازاد یو.

بیلګه:
د بیلګې په توګه لاندی انتیګرال شمیرو.

$$\int x \cdot \ln(x)\, \mathrm{d}x$$

یو ساده انتیګرالړ تابع $g'(x)$ او همداسې یو ساده مشتقوړ تابع $f(x)$ لټوو. نیسو چې $f(x) = \ln(x)$ او $g'(x) = x$ ، ځکه چې د ln(x) انتیګرالونه نوې ln(x) راکوي. اوس د $f(x)$ مشتق نیسو او انتیګرالوو، نو لرو:

$$f'(x) = \frac{1}{x} \quad \text{او} \quad g(x) = \frac{x^2}{2}.$$

له دې څخه اوس دالاندې فرمول لاس ته راځي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int x \cdot \ln(x)\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} \cdot \ln(x) - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} \cdot \ln(x) - \frac{x^2}{4}$$

بديل ليکبنه:

اوس دی u اوv په خوښه توابع وي.U او V دې د u اوV لومړني توابع وي ، او همداسې دې u' او v' دu او v مشتقونه وي.

u تابع ده، چې د مشتق نيولو له پاره لومړيتوب لري، v تابع ده چې د انتيګرالونې له پاره لومړيتوب لري. نو باورلري:

$$\int_a^b u(x) \cdot v(x)\,\mathrm{d}x = u(b) \cdot V(b) - u(a) \cdot V(a) - \int_a^b u'(x) \cdot V(x)\,\mathrm{d}x$$

$$= [u(x) \cdot V(x)]_a^b - \int_a^b u'(x) \cdot V(x)\,\mathrm{d}x$$

د ټوټه انتيګرالونې لار(طريقه)

د ټوټه انتيګرالونې ګټور استعمال له پاره مختلف معياري چلول شته.

بيلګه :

کله کله کېيدی شي ګټور وي، چی د مساوات ښۍ لور ته ټوته انتيګرال د څو واره انتيګرالونې وروسته بيرته راوګرځي، چې د په ورته بڼه د اصلي يا پخواني کيڼ لور انتيګرال سره يوځای کولی شي.

$$\int \sin(x) \cdot \cos(x)\,\mathrm{d}x$$

که کيږدو f(x) = cos(x) او g'(x) = sin(x) ، **نو ترې لرو:**

$$f'(x) = -\sin(x) \text{ او } g(x) = -\cos(x)$$

او لاس ته ترې راځي

$$\int \sin(x) \cdot \cos(x)\,\mathrm{d}x = [-\cos^2(x)] - \int \sin(x) \cdot \cos(x)\,\mathrm{d}x.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که دواړو لورو ته وتون انټیګرال ورزیات کړو، نو راکوي:

$$2\int \sin(x)\cdot\cos(x)\,\mathrm{d}x = -\cos^2(x)$$

که دواړه لورې په 2 ووېشل شي، نو بالاخره لاس ته ترې راځي:

$$\int \sin(x).\cos(x)dx = -\frac{1}{2}\cos^2(x) + C$$

بیلګه ۲ :

د ځنو انټیګرالونو سره داسې لاس ته راوړنه لرو، چې: که د g'(x) **له پاره یو ترم وټاکو چې په انټیګرالونې کې هیڅ یا کو تغیر خوري، لکه د بیلګې په توګه اکسپوننشل تابع او یا مثلثاتي توابع. نو کیدی شي دا بل ترم ،،له منځه یووړل شي،،.**

$$\int e^x\cdot(2-x^2)\,\mathrm{d}x$$

که هر ځل g'(x) = ex کیږدو او د f(x) له پاره، **د انټیګرال لاندی ترم ، نو تری لاس ته راځي:**

$$\int e^x\cdot(2-x^2)\,\mathrm{d}x = [e^x\cdot(2-x^2)] - \int e^x\cdot(-2x)\,\mathrm{d}x$$
$$= [e^x\cdot(2-x^2)] + [e^x\cdot 2x] - \int 2\cdot e^x\,\mathrm{d}x$$
$$= [e^x\cdot(2-x^2)] + [e^x\cdot 2x] - [2\cdot e^x]$$
$$= [e^x\cdot(2-x^2+2x-2)]$$
$$= [e^x\cdot(2x-x^2)] + C$$

بیلګه ۳ :

که تر انټیګرال لاندې فقط یو ترم ولرو، چې د هغه لومړنی تابع بې له جدول ارزښت ځخه پاي ته نه رسیږي(نه پایول کیږي)(نه ختمیږي) کېدی شي کله کله د ورزیاتونې له لارې(ناڅرګند شته) ضریب "1" ټوټه انټیګرال شي.

$$\int \ln(x)\,\mathrm{d}x = \int 1\cdot\ln(x)\,\mathrm{d}x = \int g'(x)\cdot\ln(x)\,\mathrm{d}x$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که $f(x) = \ln(x)$ او $g'(x) = 1$ کېږدو، نو لاس ته ترې راوړی شو

$$\begin{aligned}\int 1 \cdot \ln(x)\,\mathrm{d}x &= x \cdot \ln(x) - \int x \cdot \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\ &= x \cdot \ln(x) - \int 1\,\mathrm{d}x \\ &= x \cdot \ln(x) - x + C\end{aligned}$$.

جمله :

موږ د دې لاندې انتیګرال نیسو:

$$\int x \cos(x)\, dx$$

ږدو $u = x$ ، نو لرو : $du = dx$

ږدو $dv = \cos(x)\, dx$ ، نو $v = \sin(x)$ لرو

په لاندې توګه مخ ته ځو:

$$\begin{aligned}\int x \cos(x)\, dx &= \int u\, dv \\ &= uv - \int v\, du \\ &= x \sin(x) - \int \sin(x)\, dx \\ &= x \sin(x) + \cos(x) + C.\end{aligned}$$

C د انتیګرالونې یوه په خوښه ثابته ده

د ټوټه انتیګرالونې د استعمال سره د انتیګرالونو لکه $\int x^3 \sin(x)\, dx$

او $\int x^2 e^x\, dx$ کیده شي په همدې لار حل شي:

یوه په زړه پورې بېلګه دا لاندې ده :

$$\int e^x \cos(x)\, dx$$

که په پوره سختوالي ونیسو، نو په ورسره بلده لار اړین نه دی، چې دا دې حل ولري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا بيلګه د دوه واره ټوټه انتيګرالونې استعمال له لارې حل کولی شو.

لومړی : $u = \cos(x)$ داسې چې $du = -\sin(x)\,dx$

$dv = e^x\,dx$ داسې چې $v = e^x$ نو لرو :

$$\int e^x \cos(x)\,dx = e^x \cos(x) + \int e^x \sin(x)\,dx.$$

اوس ، ددې له پاره چې پاتې انتيګرال حل شي، نو د ټوټه انتيګرالونې قاعده بيا استعمالوو ، د دې لاندې سره :

$u = \sin(x);\ du = \cos(x)\,dx$

$v = e^x;\ dv = e^x\,dx$

نو لرو :

$$\int e^x \sin(x)\,dx = e^x \sin(x) - \int e^x \cos(x)\,dx$$

که دا سره يوځای کړو، نو لاس ته راځي:

$$\int e^x \cos(x)\,dx = e^x \cos(x) + e^x \sin(x) - \int e^x \cos(x)\,dx.$$

که فکر وکړو، نو پورته مساوات دواړو لورو ته همغه انتيګرال لرو(بې له مخ نخښې)، نو د ښي لور انتيګرال که کيڼ لور ته يوسو ، لاس ته ترې راځي:

$$2\int e^x \cos(x)\,dx = e^x(\sin(x) + \cos(x)) + C$$

$$\int e^x \cos(x)\,dx = \frac{e^x(\sin(x) + \cos(x))}{2} + C'$$

C د انتيګرالونې يوه په خوښه ثابته ده

(c) ketabton.com: The Digital Library

تمرینونه: دا لاندې انتیګرالونه وشمرئ.

اول: $I = \int x \cos x \, dx$ ، دویم: $I = \int x^2 \cdot e^x \, dx$

دریم: $I = \int \ln x \, dx$, څلورم $I = \int e^x \cdot \cos x \, dx$:

د ټوټه ـ ، یاراشنل کسرونو انتیګرال

د $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x}{x^3 + 4x^2 + 4x}$ تابع انتیګرال نیول

فعالیت:

-- د $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x}{x^3 + 4x^2 + 4x}$ انتیګرال نیول یعنې څه ؟

- د پورته تابع تعریف ورشو به نخښنه کړئ.

د دې انتیګرال نیول تر واسه په ورسره بلده لار شونی دی، که څنګه؟

بیلګه :

$$\int [\frac{(7x-12)}{(x^2-6x+8)}]dx$$

په مخرج کې مربع تابع د خپل صفرځایونو $x1 = -2$ او $x2 = -4$ سره د کرښیزو توابعو په ضریبونو تجزیه کیږي:

$$x^2-6x+8 = (x-2)\ (x-4)$$

د ټوټه کسرونو ټوټه ونې له پاره لاندې توګه پیل کوو:

$$\int [\frac{(7x-12)}{(x^2-6x+8)}]dx = \frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{(x-4)}$$

د جمعې له پاره په اصلي مخرج ورغزیږي او لاس ته ترې راځي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{[Ax-4A + Bx-2B]}{[(x-2)(x-4)]} = \frac{[A(x-4) + B(x-2)]}{[(x-2)(x-4)]} = \frac{[(A+B)x -4A-2B]}{[(x-2)(x-4)]}$$

د ضريبونو د پرتلې ځخه لاس ته راځي، چې د x له مخه يعني کينې لور ته (A+B) افاده باید پرته وي

او (-4A-2B) ، چې ۱۲ - ورکوي (وتون مساوات وګورئ) : $7x-12 = (A+B)x$ (-4A-2B)

له دې ځ**خه لاندې مساواتسيستم لاس ته راځي:**

7= A+ B

-12=-4A-2B

بدلون يې دA او B پسې : **A= (7-B)**

-12=-4(7-B)-2B

-12=-28 +4B -2B |+28

+16= 2B

B=8

A= **(7-8)= -1**

ليکلی شو :

$$\int [\frac{(7x-12)}{(x^2-6x+8)}]dx = \int [\frac{-1}{(x-2)}]dx + \int [\frac{8}{(x-4)}]dx$$

لومړني تابع جوړه کړی: $F(x)=\ln x \rightarrow f(x)=\frac{1}{x}$. دا چې طبيعي لوګايتم فقط له مثبت اعدادو شميرل کيږي، نو يواځې ارزښتونه نيسو.

$$\int [\frac{(7x-12)}{(x^2-6x+8)}]dx = -1 \ln |x-2| +8 \ln |x-4| +c$$

نا اصلي ماتراشنل توابع باید لومړی په تول راشنل تابع او اصلي مات راشنل تابع تو ټه شي. دا د تو ټه کسرونو تو ټه کوونې له لارې کيږي يا صورت نيسي.

بيلګه :

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int [\frac{(-5x+9)}{(x^2+x-6)}]dx$$

په مخرجکي مربع تابع په صفرځايونو **x1 = -2** او **x2 = +3** کي په کښيزو فاکتورونو تحزيه کيږي :

$$x^2+x-6 = (x-2)\ (x+3)$$

د ټوټه کسرونو ټوټه کوني له پاره اصلي مخرج غزوو او بيا يې ضربوو :

$$\int [\frac{(-5x+9)}{(x^2+x-6)}]dx = \frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{(x+3)}$$

د جمعي له پاره په اصلي مخرج غزيږي او بيا سره ضربيږي:

$$\frac{[A(x+3)\ +\ B(x-2)]}{[(x-2)(x+3)]} = \frac{[Ax+3A\ +\ Bx-2B]}{[(x-2)(x+3)]} = \frac{[(A+B)x\ +3A-2B]}{[(x-2)(x+3)]}$$

د ضريبونو پرتلې کوني له امله، چې د x ترمخه يعني کيڼ لور ته له (A+B) افادې ځخه بايد اوه لاس ته راشي او (+3A-2B) او يا ورته ۱۲ (وتونمساوات وګورئ) :

-5x+9 = (A+B)x (+3A-2B)

لاندې مساواتسيستم لاس ته راځي:

-5= A+ B

9= 3A-2B

د A او B پسې يې حل کړئ:

9= 3(-5-B)-2B

9=-15 -3B -2B |+15

24=-5B |:(-5)

<u>B=-4.8</u>

<u>A= (-5+4.8)= -0.2</u>

نو ليکلی شو :

$$\int [\frac{(-5x+9)}{(x^2+x-6)}]dx = \int [\frac{-0.2}{(x-2)}]dx + \int [\frac{-4.8}{(x+6)}]dx$$

لومړی تابع جوړ کړئ :

$$F(x) = \ln x \rightarrow f(x) = \frac{1}{2}$$

دا چې طبيعي لوګاريتم فقط د طبيعي اعدادو شميرل کيدی شي، نو فقط مطلقه ارزښتونه نيسو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int [\frac{(-5x+9)}{(x^2+x-6)}]dx = -0.2\ln|x-2| - 4.8\ln|x+3| + C$$

تمرينونه :

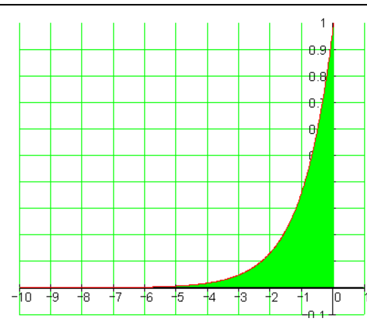
لاندې انتيګرالونه د ټوټه کسرونو ټوټه کوني له طريقې وشمېرئ

$$a)\ \int \frac{x+2}{x^3-3x^2-x+3} \qquad b)\ \int \frac{x-2}{x^2-6x+13} \qquad c)\ \int \frac{x^6}{x^4+3x^2+2}$$

ناپاي انتيګرال

تعريف : که په يوه ټاکلي انتيګرال کې لږ تر لږه يو حد د مثبت يا منفي ناپاي لور ته لاړشي يا د انتيګرال ساحه ناپاي ځاي ته و غزول شو، نو دلته د ناپاي انتيګرال څخه غږېږو. په يوه مناسب ډول ناپای انتيګرال د عادي انتګيګرال د حد په څير تعرفيږي. په دې توګه په زړه پورې پوهيدنې لاس ته راځي د بيلګې په توګه، چې څنګه د منفي توان د پوتنخ د ګراف لاندې ناپاي ته رسيدونکې په زړه پورې سطحې. نو باور لري

$$\int_0^1 x^{-\frac{1}{2}}dx = 2 \quad \text{او} \quad \int_1^\infty x^{-2}dx = 1$$

	**هم او د دې معکوس انتيګارلونه** $\int_1^\infty x^{-1}dx$ **او** $\int_0^1 x^{-1}dx$ **ناپاي ته ځي يا له ټولو حدونو اوړي** **يعنې د ناپای په لور ځي..**

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $f(x) = e^x$ ، گراف او x-محور ترمنځ دې په انتروال $(-\infty ; 0]$ کې ټوله سطحه و شمیرل شي، یعني

$$A = \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} e^x\,dx$$

تراوسه د یوه ټاکلي انتیگرال د پورته همداسې کښته(لاندې) پولې عددونه وو.
د انتیگرالونې ورشو یاا ساحه محدود وه.
په دې حالت کې یا اوس د انتېگرالولو ورشو محدوده نه ده،
داسې انتیگرال یو نامحدود انتیگرال بولو، د انتیگرالونی نامحدودې ورشو سره.
انتیگرالونه د دې لاندې بڼو څخه په یوې بڼې منځ ته راځي

$$\int_{a}^{\infty} f(x)\,dx \qquad \int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx \qquad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$$

د دې انتیگرال شمیرنې له پاره په لاندې توگه مخ ته ځو:

لومړی د یوه پای انتروال $[a ; b]$ له پاره انتیگرال $\int_{a}^{b} f(x)\,dx$ شمېرو، بیا پسې د ورته افادو $a \to -\infty$ یا $a \to \infty$ همداسې، $b \to -\infty$ یا $b \to \infty$ له پاره پولې جوړوو.

فورمال دا په لاندې ډول بریښي:

$$\int_{a}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_{a}^{b} f(x)\,dx$$

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{b} f(x)\,dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{x} f(x)\,dx + \lim_{b\to\infty} \int_{c}^{b} f(x)\,dx$$

زموږ د سطحې شمیرلو له پاره دا په لاندې ډول بریښي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) = e^x$$

$$A = \int_{-\infty}^{0} e^x\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0} e^x\,dx = \lim_{a\to-\infty}\left[e^x\right]_a^0$$

$$= \lim_{a\to-\infty}\left[e^0 - e^a\right] = \underbrace{\lim_{a\to-\infty} e^0}_{1} - \underbrace{\lim_{a\to-\infty} e^a}_{0} = \underline{\underline{1}}$$

بیلګه:

دا د y په محور هنداره شوې د e تابع دې د $f(x)=e^{-x}$ سره په انتروال $[0,\infty)$ کې د پورته سره برابره سطحه ولري.

$$A = \int_{0}^{\infty} e^{-x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_{0}^{b} e^{-x}\,dx$$

بدلون:

$$u(x) = -x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -1 \Rightarrow dx = \frac{du}{-1}$$

$$u(0) = 0\,;\,u(b) = -b$$

$$\lim_{b\to\infty}\int_{0}^{-b} e^u\,\frac{du}{-1} = -\lim_{b\to\infty}\int_{0}^{-b} e^u\,du = \lim_{b\to\infty}\int_{-b}^{0} e^u\,du$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left[e^u\right]_{-b}^{0} = \lim_{b\to\infty}\left[e^0 - e^{-b}\right]$$

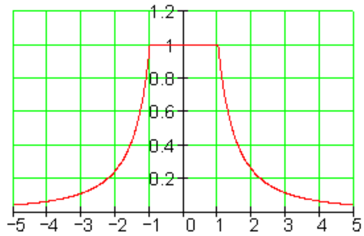
$$= \lim_{b\to\infty} e^0 - \lim_{b\to\infty} e^{-b} = 1 - 0 = \underline{\underline{1}}$$

بیلګه:

د یوه یوځاي ایښول شوې یا یو ځاي شوې تابع بیلګه لرو:

د x<-1 لپاراه د -1≤ x 1 لپاره د x > 1 لپاره	$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} \\ 1 \quad f \\ \frac{1}{x^2} \end{cases}$ $A = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$

(c) ketabton.com: The Digital Library



د انټيګرال په برخو وېشنه يا ټوټه کونه:
لاندې د انټيګرالونو تمعه دې و شميرل شي.

$$A=\int_{-\infty}^{-1}\frac{1}{x^2}\,dx+\int_{-1}^{1}dx+\int_{1}^{\infty}\frac{1}{x^2}\,dx$$

لومړنی اند يا تر مخه فکرکونه:
د تناظر دلايلو له مخې لرو :

$$\int_{-\infty}^{-1}\frac{1}{x^2}\,dx=\int_{1}^{\infty}\frac{1}{x^2}\,dx$$

داسې، چې دا انټيګرال بايد فقط يوځل وشميرل شي.

$$\int_{-1}^{1}dx=[x]_{-1}^{1}=[1]-[-1]=1+1=\underline{\underline{2}}$$

$$\int_{1}^{\infty}\frac{1}{x^2}\,dx=\lim_{b\to\infty}\int_{1}^{b}\frac{1}{x^2}\,dx=\lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_1^b=\underbrace{\lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{b}\right]}_{0}-\underbrace{\lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{1}\right]}_{-1}=0-(-1)=\underline{\underline{1}}$$

$$A=\underbrace{\int_{-\infty}^{-1}\frac{1}{x^2}\,dx}_{1}+\underbrace{\int_{-1}^{1}dx}_{2}+\underbrace{\int_{1}^{\infty}\frac{1}{x^2}\,dx}_{1}=1+2+1=\underline{\underline{4}}$$

تمرينونه:

١ -- د $f(x)=\dfrac{1}{(x-1)^2}$ تابع انټيګرال وشميرئ، که د ناپاي په لور لاړشي.

٢ – و څېرئ چې ايا لاندې ناتاکلي انټيګرالونه پوله ارزښت لري؟

a) $\int_{-\infty}^{0} e^x\,dx$ b) $\int_{0}^{\infty}\frac{x}{x^2+1}\,dx$

c) $\int_{1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}$ d) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{4x}{(x^2+2)^3}\,dx$

٣ – د کومو توانونو p لپاره دا نا ټاکلی انټيګرال $\int_1^\infty \frac{1}{x^p}dx$ پوله ارزښت لري.

٤ – لاندې انټيګرالونه د يوه انټيګرال پولې لپاره تعريف نه دي، و څېرئ، چې ايا دا

(c) ketabton.com: The Digital Library

ټاکلی انتیګرال په دې انټروال کې پوله ارزښت لري.

a) $f(x)=\frac{x^3+1}{x}$, $I=[0;1]$ b) $f(x)=\ln x$, $I=[0;1]$

c) $f(x)=\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$, $I=[1;2]$ d) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $I=[-1;1]$

e) $f(x)=\frac{x^2}{x^3-8}$, $I=[0;2]$ f) $f(x)=\frac{e^x}{1-e^x}$, $I=[0;1]$

ټولګه

د انتیګرال هندسي تعریف

لوریزه سطحه-د انتیګرال تعریف:که یوه f تابع ولرو، نو دx محور او تابع ترمنځ سطحې شمېرل د انتیګرال له لارې کیږي. په دې سطحه کې د x محور پورته لورې ته سطحه مثبته مخنښه لري او د x محور کښته لورې ته سطحه منفي مخنښخ لري.

تحلیلي تعریف:

تعریف: د f یوه تابع ورکړ شوې، چې په یوه انټروال [a,b] باندې تعریف دی، نو د aڅخه تر b پورې د تابع د انتیګرال څخه د x په محور د f د ګراف او د کرښې x=aاو x=b تر منځ یوه یوه لوریزه سطحه پوهیږو.

پیژند (تعریف) ٤ . ١ : لیمیټ

$$\lim_{x\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i=\int_a^b f(x)dx=F;(\max\Delta x\to 0),........(4,3)$$

که په اینټروال [a , b] کی موجود وي، نو دا د f (x) ټاکلی اینټیګرال بولو، یا F- Riemann (د ریمن سطحه). دلته a د اینټیګراله ونې لاندې(کښته)پوله او د b

(c) ketabton.com: The Digital Library

ایتیګرالوني پورته پوله بلل کیږي او [a,b] د ایتیګرالوني اینتروال او(Integrand) (f (x)اینتیګرالپدونکی) او dx اینتیګرالوني (Integrationsvariable) متحول بلل کیږي

جمله٤ . ١ : که f (x) په [a , b] کې اینتیګرالوړ وي او $c \in [a,b]$ وي، نو باور لري:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

پیژند یا تعریف ٤ . ٢ : f (x) په یوه بند انتروال[a, b] کې اینتیګرالوړ دی، نو باور لري:

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

پیژند تعریف 3.2: تابع y = f (x) دې په یوه واز اینتروال I کی تعریف وي. هر یوه هلته موجوده مشتقوړ F (x) تابع چې F' (x) = f (x) شرایط پوره کړي، د f (x (بنسټیز- ، ساده – یا لومړنی تابع بلل کیږي

تاکلی انتیګرال:

که f یو حقیقي تابع وي، نو د ټاکل انتیګرال $\int_a^b f(x)dx$ (لوستل: د $f(x)$ انتیګرال د a تر b او په پولو یا حدونو یا انتیګرال په $f(x)$ باندې له a تر b) لاندې یوه لوریزه سطحه پوهیږو د a او b تر منځ او د f ګراف لاندې.

تعریف:

(c) ketabton.com: The Digital Library

f په انتروال $a \le x \le b$ کې متمادي تابع ده او F د f لومړنی تابع ده، نو ټاکلی انتیگرال دی :

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

د F(b) – F(a) لپاره زيات وخت $[F(x)]_a^b$ ليکو. په دې توگه دی

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b$$

جمله:

د يوې ثابتي سره ضرب : که تابع f (x) په يوه اينتروال کی متمادي وي ، نو لاندې باور لري:

$$\int a \cdot f(x)\,dx = a\int f(x)\,dx\,, \qquad a \in R$$

جمله :

د جمعي (تفريق) قاعده که f1 (x) او f 2 (x) په يوه ايتروال کی نه پريکيدونکي وي ، نو باور لري

$$\int (f_1(x) \pm f_2(x))dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx$$

جمله :

د ،،بدلون (قاعده) ،، (Substitution لاتين :د يوه ارزښت په ځاي د همغه ارزښت بله لويه ايښوول ، لنډ: بدلون) د نيونو لاندې چی u = g (x) متمادي اوو مشتقوړدی او y = f (u) متمادي، نو باور لري:

$$\int f[g(x)]g'(x)dx = \int f[f(u)]du$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ضربونو انتيګرالونه
که د دوه توابعو د ضرب انتيګرال د ورسره بلدو متودونو يا لارو شميرو، نو زيات وخت دا ناشوني وي.

$$f(x) = x \cdot \ln\left(x^2\right) \Rightarrow F(x) = \int f(x)\,dx = \int \left(x \cdot \ln\left(x^2\right)\right) dx = ?$$

د څېرکي تمرينونه:

۱ - لاندې نااصلي پولينومونه دې د يوه ټول ګويا عدد پولينومونو او يوه اصلي پولينوم د جمعې په څېر وليکل شي.

$a)\ \dfrac{x^3+7x^2+9x-5}{x+5}$ $\quad b)\ \dfrac{x^4-3x^2+1}{x^2-2}$

$c)\ \dfrac{x^3-2x^2+x-5}{x^3+1}$ $\quad d)\ \dfrac{x^4-1}{x^3+x^2+x+1}$

$e)\ \dfrac{x^4+2x^3-6x^2-5x+3}{x-2}$ $\quad f)\ \dfrac{x^5-x^4+1}{x^2+2}$

۲ - لاندې پولينومونه دد جمعې په څېر وليکئ

$a)\ \dfrac{2x^2+20x+12}{x^3+2x^2-5x-6}$ $\quad b)\ \dfrac{x^2+1}{x^3-x}$

$c)\ \dfrac{4x+10}{x^2+6x+8}$ $\quad d)\ \dfrac{-3x^2+19x-10}{x^3-2x^2-5x+6}$

$e)\ \dfrac{4x^2+6x-20}{x^3-4x}$ $\quad f)\ \dfrac{14}{x^2+20x+51}$

۳ – د لاندې اصلي پولينومونو په ټوټه کسرونو ټوټه ونه وکاروئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$a)\ \frac{3x^2+5x+10}{x^3+2x^2-4x-8} \qquad b)\ \frac{3x^2-18x+36}{x^3-6x^2+9x}$$

$$c)\ \frac{x^2+3x+4}{x^4-2x^2+1} \qquad d)\ -\frac{x^2+13x+10}{x^3-5x^2}$$

٤ ـ د لاندې اصلي پولینومونو په ټوټه کسرونو ټوټه ګونه ورکړئ.

$$a)\ \frac{x^2+2x-12}{x^3+2x^2+6x+5} \qquad b)\ \frac{4x^2-3x+8}{x^3-2x+4}$$

$$c)\ \frac{8x^2-16x+10}{x^3-4x^2+5x} \qquad d)\ \frac{x}{x^3+2x^2+2x+1}$$

٥ ـ د لاندې پولینوم کسرونو په ټوټه کسرونو ټوټه کونه ړرکړئ.

$$a)\ \frac{x^3+7x^2+17x+17}{x^2+6x+8} \qquad b)\ \frac{2x^4-8x^3+7x^2-3x+4}{x^2-4x+3}$$

$$c)\ \frac{2x^3+x^2}{x^3-1} \qquad d)\ \frac{4x^3+16x^2-7x-49}{x^3+4x^2+x-6}$$

٦ ـ و ښایئ، چې د F تابع د f تابع لومړنی تابع ده.

$$a)\ f(x)=2x^2+4x-7 \quad , \qquad f(x)=4x+4$$

$$b)\ F(x)=(x^2-x)^3 \quad , \qquad f(x)=3\cdot(2x-1)\cdot(x^2-x)^2$$

$$c)\ F(x)=\sqrt{2x+1} \quad , \qquad f(x)=\frac{1}{\sqrt{2x+1}}$$

$$d)\ F(x)=1+\sin x \quad , \qquad f(x)=3x\cdot\cos 3x$$

$$e)\ F(x)=\frac{1}{3}x^3\cdot\ln x-\frac{4}{9}x^3 \quad , \qquad f(x)=x^2\cdot(\ln x-1)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۷ - وښايئ، چې د F او G توابع د همغه f تابع لومړني توابع دي.

$$a)\ F(x)=x^3+x+4 \quad , \quad G(x)=x^3+x+1$$
$$b)\ F(x)=(x-3)^2 \quad , \quad G(x)=x^2-6x+4$$
$$c)\ F(x)=\frac{x+1}{x+2} \quad , \quad G(x)=\frac{3x+5}{x+2}$$
$$d)\ F(x)=1+\sin x \quad , \quad G(x)=\sin x$$

۱۳ – لاندې ناټاکلي انتيګرالونه پيداکړئ او ټيکوالی يې و ازمايي.

$a)\ \int x^3dx$ $\quad b)\ \int 7dx$ $\quad c)\ \int xdx$ $\quad d)\ \int (1-x^2)dx$

$e)\ \int (x+\frac{1}{x})dx$ $\quad f)\ \int (e^x+\cos x)dx$ $\quad g)\ \int \frac{1}{\sin^2 x}dx$ $\quad h)\ \int \frac{5}{\cos^2 x}dx$

$i)\ \int udx$ $\quad k)\ \int (2+e^x)dx$ $\quad l)\ \int (1+\ln x)dx$ $\quad m)\ \int (\sqrt{x}+\sin)\,dx$

۱٤ – د لاندې ټاکلو انتيګرالونو ارزښت وشمېرئ

$a)\ \int_0^3 4dx$ $\quad b)\ \int_{-3}^{-1} xdx$ $\quad c)\ \int_1^e \frac{1}{x}dx$

$d)\ \int_1^e (2+\frac{1}{x})dx$ $\quad e)\ \int_{-1}^0 e^xdx$ $\quad f)\ \int_0^\pi \sin xdx$

$g)\ \int_{\frac{1}{6}\pi}^{\frac{1}{4}\pi} 4dx$ $\quad h)\ \int_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{1}{3}\pi} \frac{1}{\sin^2 x}dx$ $\quad i)\ \int_{-2}^2 x^3dx$

$j)\ \int_2^6 (1+x)dx$ $\quad k)\ \int_1^2 (x^2-x^5)dx$ $\quad l)\ 0\int_{-2}^2 (\frac{x^3}{4}+\frac{x^2}{3})dx$

۱٦ = د لاندې ټاکلو انتيګرالونو ارزښت وشميرئ او ارزښتونه پرتله کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$a)\ \int_{-3}^{1} 3dx und - \int_{-3}^{1} 3dx \qquad b)\ \int_{0}^{1}(1+e^{x})dx \ \wedge \ -\int_{0}^{1}(1+e^{x})dx$$

$$c)\ \int_{-\pi}^{0}\sin x dx \ \wedge \ -\int_{-\pi}^{0}\sin x dx$$

---

۱۷ ــ هر دوه انتیګرالونه د یوه انتیګرال سره انځور کړئ.

$$a)\ \int_{0}^{0.5\pi}\cos x dx + \int_{0.5\pi}^{\pi}\cos x dx \qquad b)\ \int_{-1}^{0}(x+e^{x})dx + \int_{0}^{1}(x+e^{x})dx$$

$$c)\ \int_{2}^{3}3x^{2}dx + \int_{5}^{3}3x^{2}dx \qquad d)\ \int_{-2}^{1}(2+x)dx - \int_{4}^{1}(2+x)dx$$

- د لاندې ټاکلو انتیګرالونو لپاره ارزښت تخمین کړئ.

$$a)\ \int_{-4}^{-2}e^{x+3} \qquad b)\ \int_{0}^{8}\sqrt{1+x}\,dx$$

$$c)\ \int_{3}^{5}2^{4-x}dx \qquad d)\ \int_{0}^{0.5\pi}\sin^{2}x dx$$

۱۹ ــ د کوموx ارزښتونو لپاره لاندې انتیګرالونه ورکړشوي ارزښتونه لري؟

$$a)\ \int_{1}^{x}5t^{4}dt \ , \quad la(x)=31 \qquad b)\ \int_{0}^{x}e^{t}dt \ , \quad la(x)=e-1$$

۲۰ - لاندې انتیګراند توابع ته د انتیګرال توابع وټاکئ.

$$a)\ f(x)=x^{2} \ , \ a=3 \qquad b)\ f(x)=2+e^{x} \ , \ a=0$$

$$c)\ f(x)\frac{1}{\cos^{2}x} \ , \ a=0 \qquad d)\ f(x)=2 \ , \ a\in IR$$

۲۱ - د لومړني انتیګرال په استعمال سره لاندې انتیګرالونه وشمیرئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$d)\ \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}dx, \qquad e)\ \int \sqrt{x\cdot\sqrt[3]{x}}\,dx, \qquad f)\ \int (\sqrt[3]{x^4}+1)\ dx,$$

$$g)\ \int \sqrt[3]{x^{-3}}dx, \qquad h)\ \int \frac{ax^2+bx+cx^{-1}}{x^4}dx, \qquad i)\ \int 3\cdot 2^x\,dx,$$

$$j)\ \int \frac{1}{2\sin^2 x}dx, \quad k)\ \int \frac{1}{3+3x^2}dx, \qquad l)\ \int \cos\varphi\cdot s \quad ds,$$

$$m)\ \int \frac{dt}{(2t-3)^{-2}}, \qquad n)\ \int \sqrt{t\cdot\sqrt{t\cdot\sqrt{t}}}\,dt, \qquad o)\ \int (1-u^2)^{-\frac{1}{2}}du.$$

۲۲ - د بیرته په بنسټیز اینتیګرال بدلون وروسته یي اینتیګرال ونیسی:

$$a)\ \int \frac{x^3+2x^2+x}{x^2(1+x)^2}dx, \qquad b)\ \int \frac{2\sin 2x}{3\cos x}dx, \qquad c)\ \int \frac{7\cos 2x}{\cos^2 x-\sin^2 x}dx,$$

$$d)\ \int \sqrt{\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\cos^2 x}\ dx, \qquad e)\ \int (-2-2\tan^2 x)dx, \quad f)\ \int \frac{2t^3-8t}{(t-2)(t+2)}dt.$$

۲۳-- لاندې ټاکلی اینتیګرالونه وشمیری:

$$a)\ \int_0^1 \frac{1}{2}e^x dx, \qquad b)\ \int_\pi^{2\pi} \cos x\ dx, \qquad c)\ 2\int_2^3 dt,$$

$$d)\ \int_0^\pi \cos\pi \sin x\ dx, \quad e)\ \int_0^1 \frac{4du}{1+u^2}, \qquad f)\ \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x+1}{\sin^2 x}dx,$$

$$g)\ \int_{x_1}^{x_2} (2x-1)\,dx, \qquad h)\ \int_0^8 \left(\sqrt[3]{x^2+2\sqrt{x}}\right)dx, \quad i)\ \int_{\ln 2}^{\ln 3} e\cdot e^t\ dt,$$

$$j)\ \int \frac{(u+1)^2}{\sqrt{u}}du, \qquad k)\ \int_0^1 \frac{x^n}{x^{1-n}}dx, \qquad l)\ \int_a^b a^x\ dx.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲٤- د بدلون یا سیتیچیوشن قاعدې استعمال له لارې يي اینتیګرال وشميري:

$$a)\ \int \sqrt[3]{2x-7}\,dx,\quad b)\ \int \frac{dx}{-x+1},\quad c)\ \int 2^{3x+6}\,dx,$$

$$d)\ \int \sin\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}\right)dx,\ e)\ \int \frac{dx}{1+(x+1)^2},\ f)\ \int \frac{4}{\cos^2(4t-5)}dt,$$

$$g)\ \int x\cdot\sqrt[3]{x^2-7}\,dx,\quad h)\ \int \frac{3xdx}{-x^2+1},\quad i)\ \int x\cdot e^{2x^2+3}\,dx,$$

$$a)\ \int \frac{dx}{1+4x^2},\quad b)\ \int \frac{dx}{2+4x^2},\quad c)\ \int \frac{dx}{3+5x^2}.$$

$$d)\ \int \frac{dx}{\sqrt{1-3x^2}},\quad e)\ \int \frac{dx}{\sqrt{36-9x^2}},\quad f)\ \int \frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}},$$

$$g)\ \int \frac{dx}{x^2-10x+34},\quad h)\ \int \frac{dx}{3x^2-6x+30},\quad i)\ \int \frac{dx}{\sqrt{-3+4x-x^2}}.$$

۲٥- د تر زیرنیوني فورمبدلون وروسته او په بنستیز اینتیګرال 10 او 11 د بدلون له لارې يي اینتیګرال وشیمرئ

۲٦- لاندې ټاکلی اینتیګرالونه وشميري:

$$a)\ \int_{-1}^{1} \frac{dx}{(4x-1)^3},\quad b)\ \int_{-1}^{0} e^{3x}dx,\quad c)\ \int_{0}^{2} 2^{2x+1}dx,$$

$$d)\ \int_{-1}^{1} \frac{4x^2}{(3+2x^3)^5},\quad e)\ \int_{e}^{e^x} \frac{1}{x}\ln x\,dx,\quad f)\ \int_{2}^{4} \frac{e^t}{1+e^t}dt,$$

$$g)\ \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{\sin x}\cos x\ dx,\quad h)\ \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{2+8x^2},\quad i)\ \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \sin x\cdot\cos x\ dx.$$

۲۷-- لاندې ټوټه اینتیګرالونه اینتیګرال کړي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$a)\ \int 0,2x \cdot \sin x\ dx, \qquad b)\ \int 4x^3 \cdot \ln x\ dx, \qquad c)\ \int \cos^2 x\ dx$$

$$d)\ \int \cos x \cdot \sin x\ dx \qquad e)\ \int x^2 \cdot \sin x\ dx \qquad f)\ \int x \cdot (\cos x + 1)\ dx$$

$$g)\ \int x^3 \cdot e^x\ dx, \qquad h)\ \int x^{\frac{1}{2}} \cdot \ln x\ dx,$$

د اینتیګرال شمیرنی استعمال

د سطحومساحت، چې د f(x) دګراف او x محور ترمنځ پرتې وي.

په ځلورم څپرکي کی وویل شو چی ټاکلی اینتیګرال $\int_a^b f(x)dx = f(b) - f(a)$ د سطحې مساحتA ښايي ، چي له منحنيy=f(x)، د x- محور y=(0) او د کرښیx=a اوx=b له خوا رابند وي. موږ له دې څخه مخ ته تللي یو چي y=f(x) د اینتیګرال اینتروال په دننه کی دx-محور پورته لور ته ځي، خو دا کېدی شي د محور کښته لور ته هم لاړ شي..

فعالیت:

--د یوې په خوښه تابع د منحني یا کرښې او د x محور ترمنځ او یا د دوه توابعو د سطحې شمیرلو لپاره وړاندیزونه وکړئ.

- دا هم په پام کې د شمرلو لپاره په پام کې ونیسئ، که منحني یا د تابه کرښه د x د محور لاندې لور ته پراته وي.

- یوه په خوښه تابع ورکړئ، د تابع رسم وکاږئ او د تابع انتیګرال د x محور په ټاکلو پولو کې وشمېرئ.

- یوه په خوښه تابع ولیکئ، چې د انتروال په دننه کې د x محور کښته لور ته ځي. د تابع رسم و کاږئ او دا تابع به کومه محنخښه ولري؟ دا چې سطحه تل مثبت ده، نو د تابع د محنښې په ورکولو کې دا بیا وڅېړئ، چې ولې؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

یادونه: که موږ د سطحې مساحت شمېرلو کې هغه عدد ولیکو، نو د هغې سره دې دا په پام کې ونیول شي، چې د سطحې واحد(یوون) ور سره شته دی. که دا ورسره لیکل شوی نه وي، خو باید تل په پام کې وي.
دا پورته فعالیتونه مو دې لاندې بېلګو ته رابولي:

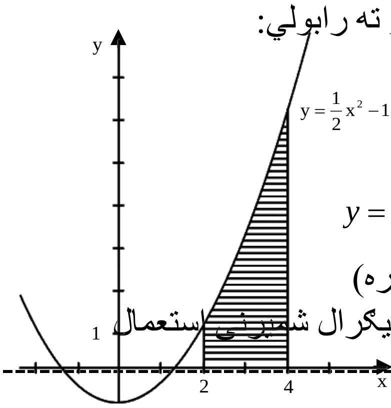


Bild 21,3

بېلګه ۵ . ۱ :
د سطحې مساحت د

$$y=\frac{1}{2}x^2-1 \;,\; y=0 \;,\; x_1=2 \;,\; x_2=4$$

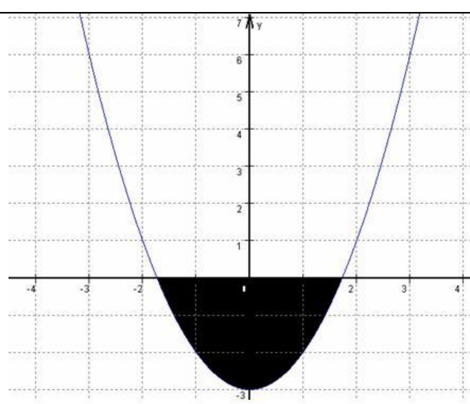
ترمنځ په لاندې ډول دی(مخامخ ځېره)

$$A=\int_2^4(\frac{1}{2}x^2-1)dx=(\frac{1}{6}x^3-x)|_2^4$$

$$=\frac{1}{6}.64-4-\frac{1}{6}.8+2$$

$$=\frac{22}{3}$$

که د تابع $y=f(x)$ سطحې د منحني تلنه د x- محور لاندې لور ته وي، نودا ټاکلی اینتیګرال به منفي وي. ددې لپاره چې د سطحې تل مثبت مساحت لاس ته راوړو، نو د اینتیګرال مطلقه ارزښت نیسو یعني منفي اینتیګرال.



بdلګه ۵ . ۲ :

د $f(x)=x^2-3$ ګراف د x محور سره یوه

سطحه رابندوي.د ګراف او x محور ترمنځ

د ټولې سطحې مساحت وشمېرئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

تګلار:	

۱ - د دې لپاره چې دا مسئله راته ښه روښانه شوي وي، نو دا پورته رسم کاږو.

۲ - د دې لپاره چې د انتیګرال حدونه لاس ته اروړی شو، باید صفرځایونه وشمېرو.

$$0 = x^2 - 3$$
$$x = \pm\sqrt{3}$$

۳ – اوس د سطحې د مساحت شمېرلو لپاره اړونده انتیګرال لیکو.

د تناظر پر بنسټ لومړی له 0 څخه تر $\sqrt{3}$ پورې انتیګرال شمېرو او نتیجه یې له 2 سره ضربوو، نو لرو:

$$\int_0^{\sqrt{3}}(x^2-3)dx = \int_0^{\sqrt{3}}(x^2)dx - 3\cdot\int_0^{\sqrt{3}}1dx = \frac{1}{3}x^3\Big|_0^{\sqrt{3}} - 3.x\Big|_0^{\sqrt{3}} = \sqrt{3} - 3\cdot\sqrt{3} = |-2\cdot\sqrt{3}|$$

$$A = 2\cdot\sqrt{3} + 2\cdot\sqrt{3} = 4\cdot\sqrt{3}$$

بیلګه ۵ ، ۲:

د سطحې مساحت د $x_2 = 2$, $x_1 = -1$, $y = 0$, $y = \frac{1}{2}x^3 - 5$ ترمنځ دی: (لاندې ځېره)

$$A = |\int_{-1}^{2}\frac{1}{2}x^3 - 5)dx\,|$$
$$= -\int_{-1}^{2}\frac{1}{2}x^3 - 5)dx$$
$$= (-\frac{1}{8}x^4 + 5x)\,|_{-1}^{2}$$
$$= (-2 + 10 + 1/8 + 5) = \frac{105}{8}$$

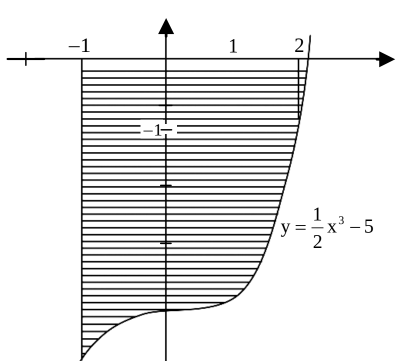
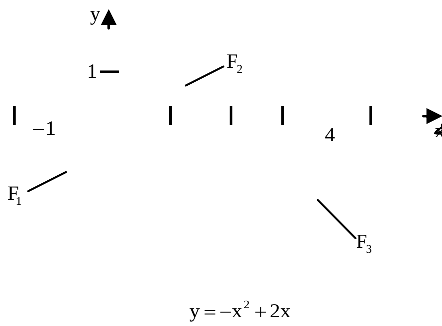


Bild 21,4

بیلګه ۵ . ۳:

(c) ketabton.com: The Digital Library



د لاندې پولو $x_1=-1$ تر
$x_2=4$ اودمنحني $y=-x^2+2x$ او $y=0$
ترمنځ د x- محور پورته او کښته پرته سطحه
(په مخامخ ځېره کي نښانه شوې ده) دې
وشمیرل شي

حل : د تابع $y=-x^2+2x$, د $x1=0$ د
صفرځایونو $x_1=0$ او $x_2=2$ تر منځ پرته

غوښتونکي سطحه د x-محور پورته، نوره
کښته پرته ده. له دې امله لرو

$$A=-F_1+F_2-F_3$$
$$=\int_{-1}^{0}(-x^2+2x)dx+\int_{0}^{2}(-x^2+2x)dx-\int_{2}^{4}(-x^2+2x)dx$$
$$=-\left(-\frac{1}{3}x^3+x^2\right)\Bigg|_{-1}^{0}\left(-\frac{1}{3}x^3+x^2\right)\Bigg|_{0}^{2}-\left(-\frac{1}{3}x^3+x^2\right)\Bigg|_{2}^{4}=\frac{28}{3}$$

د لاندې پولو $x=-1$ تر $x=4$ او د کږې $y=-x^2+2x$

او $y=0$ ترمنځ (د $x-$ محور پورته او کښته)

تمرینونه

: - په ورکړ شوي انتروال کي د گراف او x محور ترمنځ سطحه وشمېرئ.

$a)\ f(x)=x-2 \quad , \quad x\in[-2;3]$

$b)\ f(x)=x^2-x-x \quad , \quad x\in[1;5]$

$c)\ f(x)=x^2-8x+12 \quad , \quad x\in[0;8]$

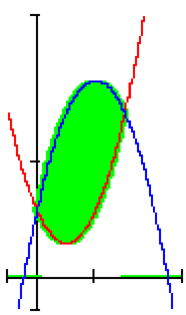
له دوه گرافونو څخه رابندې سطحې د مساحت شمیرنه

(c) ketabton.com: The Digital Library

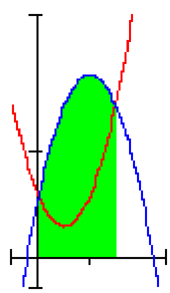
فعالیت:

- که داسې یو ډنډ ولرو، نو فکر وکړئ، چې د دې ډنډ مساحت څنګه وشمیرو؟

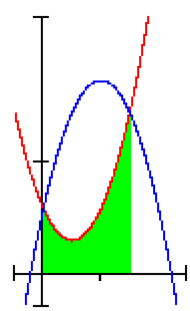
په ځنو پوښتنو کې د سطحې مساحت شمیرل کیږي، چې د دوه توابعو ګرافونو ترمنځ پرته ده. دا ډول د سطحې مساحت کېدی شي د ټاکلو اینتګرالونو د کمښت له لارې و شمېرل شي. که دواړه ګرافونه د x-محور پورته لور ته پراته وي،نو د لاندې شیما څخه مخ ته ځو :



A



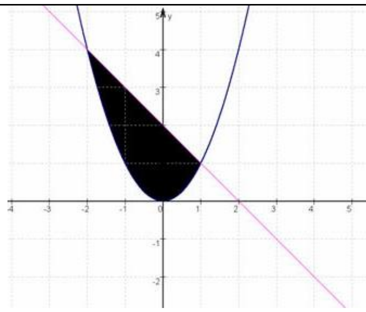
A_1



A_2

$$A = A_1 - A_2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلگه ٥ . ٥ : د $f(x) = x^2$ او $g(x) = -x+2$ دوه توابعو ترمنځ رابند د سطحي مساحت غواړو وشمېرو: د تگلارې لار: دلته هم یو شکل یا گراف رسموو، چې دا حالت راته روښانه شي.	

---

۲ - د دې لپاره چې انتيگرال وشمېرو، د گرافونو دقاطع ټکي ټاکو.

$x^2 = -x+2$

$x^2+x-2= 0$

$$x_{(1,2)} = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}$$

فرمول - P;q

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = -2$$

۳ – په ساده توگه ليدل کيږي. $\int_{x_1}^{x_2} g(x)\,dx - \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx$

پس باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$A=\int_{1}^{-2}(-x+2)dx-\int_{1}^{-2}x^{2}dx=$$
$$-1\cdot\left(\frac{2^{2}}{2}-\frac{1}{2}\right)-6-\left(\frac{(-2)^{3}}{3}\right)-\frac{1}{3}$$
$$=-1,5-6++=-4.5$$
$$A=4,5$$

جمله :

که د ټولو x لپاره ، د a<x<b سره f(x)>g(x) وي، دا په دې معنا چې د f گراف د a او b تر منځ دg پورته لور ته ځغلي, نو د دواړو گرافونو په انتروال کې رابندې سطحې مساحت لپاره بارور لري.

$$A=\int_{a}^{b}(f(x)-g(x))\,dx$$

بېلگه ۵ . ٦ :

د توابعو f(x) = x² -2x +2 او g(x) = -x²+4x +2 گرافونو ترمنځ سطحې مساحت غواړو پيداکړو.
د دواړو گرافونو د x–ارزښتونو غوښتکي(د تقاطع ټکي) د اينتيگرال حدونه جوړوي.

د غوښتکو د x - کواوردیناتو ټاکل:

$$f(x)=g(x)\Leftrightarrow x^{2}-2x+2=-x^{2}+4x+2$$

$$\Leftrightarrow 2x^{2}-6x=0\quad\Leftrightarrow$$

$x_1=0$ او $x_2=3$ د اينتېكرال ليميټونه يا پولې دي.

د اينتګرال جوړونه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

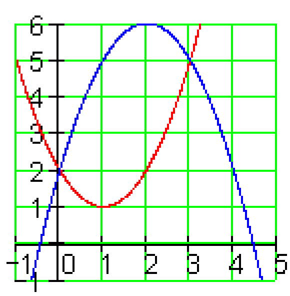
$$\int_0^3 f(x)dx = \int_0^3 (x^2-2x+2)dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 2x\right]_0^3 = \frac{1}{3}\cdot 27 - 9 + 2\cdot 3 = 9 - 9 + 6 = \underline{\underline{6}}$$

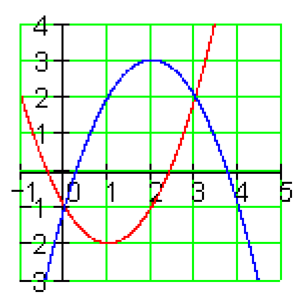
$$\int_0^3 g(x)dx = \int_0^3 (-x^2+4x+2)dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 2x\right]_0^3 = -\frac{1}{3}\cdot 27 + 2\cdot 9 + 2\cdot 3 =$$
$$= -9 + 18 + 6 = \underline{\underline{15}}$$

دا چې د دوه گرافونو ترمنځ سطحه باید تل مثبت وي،نو له لوي ارزښت ځخه کووچنی ارزښت باید کم شي.

$$A = \int_0^3 g(x)dx - \int_0^3 f(x)dx = 15 - 6 = \underline{\underline{9}}$$

لکه چې پوهیږو، د یوې سطحې مخنخښه ددې په واک کې ده، چې ایا سطحه د **x** -محور پورته لور ته پرته ده او که کښته لور ته. موږ څېړو، چې ایا دا تاثیرات په پورتنی بیلگه کې پراته دي او که نه. موږ سطحه د **y** -محور په درې واحدونو(یوونونو) کښته لورته بیایو او سطحې نوې شمېرو.





که د لید له مخې قضاوت وکړو،نو د ټولو لاس ته راوړنه به برابره وي.

د x–ارزښت غوښتکي هم او له دې سره د انتیکرال حدونه بې تغیره پاتیږي.

$f(x) = x^2 - 2x - 1$ و $g(x) = -x^2 + 4x - 1$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځای په ځای کونه:

$$A=\int_0^3 f(x)dx-\int_0^3 g(x)dx=\int_0^3 (f(x)-g(x))\,dx$$

د $f(x)-g(x)=2x^2-6x$ سره کيږي:

$$A=\int_0^3 (2x^2-3x^2)\,dx=\left[\frac{2}{3}x^3-3x^2\right]_0^3=\frac{2}{3}\cdot 27-3\cdot 9=18-27=\underline{\underline{-9}}$$

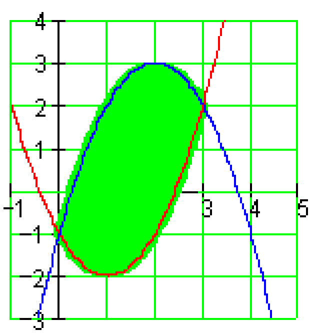
دا چې د دوه منحنيو ترمنځ سطحه فزيکي سطحه ښايي، بايد لاس ته راوړنه يو مثبت عدد وي.

دا د مطلق ارزښت له لارې ترلاسه کوو.

$$A=\left|\int_0^3 (2x^2-6x)\,dx\right|=\left|\left[\frac{2}{3}x^3-3x^2\right]_0^3\right|=\left|\frac{2}{3}\cdot 27-3\cdot 9\right|=\left|18-27\right|=\left|-9\right|=\underline{\underline{9}}$$

د دې متود تولیزه ونه(عموميت) :

د دوه گرافونو ترمنځ سطحه:



که يوه سطحه د يوې پورته او يوې کښته منحني ښخه رابنده وي، چې تابع f(x) او تابع g(x) پورې اړه و لري، نو دا له دې رابنده سطحه په لاندې ډول شمېرل کيږي.

$$A=\left|\int_a^b [f(x)-g(x)]dx\right|$$

د انتيکرالوني حدونه a او b د x – محور د

(c) ketabton.com: The Digital Library

دواړو ګرافونو د وضعیه قېمتونو غوڅېکي دي،

د منحنیو $y=f_1(x)$ او $y=f_2(x)$

تر منځ پرتي سطحې مساحت په لاندې پولو کې
له$x=a$ تر $x=b$ پورېاو $y=f_1(x)$ او $y=f_2(x)$

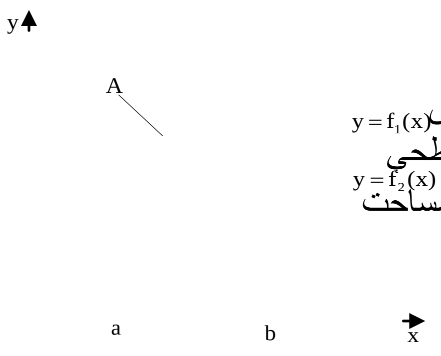


Bild 21,6

اینتیګرالوړاو $f_1(x)<f_2(x)$
په$[a,b]$ اینتروال کی (ش ۱ . ۶) داسی لاس
ته راوړل کیږي چی دتابع $y=f_2(x)$ لاندې سطحې
مساحت څخه د $y=f_1(x)$ تابع لاندې سطحې مساحت
کم کړئ.

$$A=\int_a^b [f_2(x)-f_1(x)]dx$$

سړی په ساده ډول خپل باور په دې راوستی شي چې ش ۲ . ۶ له دې خپلواك
چی $f_1(x)$ او $f_2(x)$ په اینتروال [a,b] کومه یوه مخنخښه ځان ته غوره کوي باوري دی.

د دوه کرښو څخه رابنده ۲۶۲

بیلګه ۵ . ۷: د لاندې پارابولونو ترمنځ سطحه غواړو وشمیرو $y=x^2-1$ او $y=-x^2+1$)

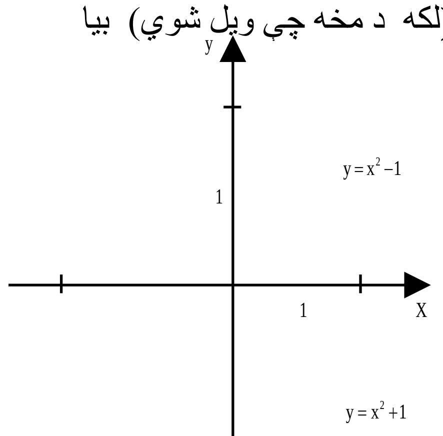
حل : د اینیګرال پولې(حدونه) د افقي(پراته) محور غوڅېکي(د تقاطع ټکي) دي

$$x^2-1=-x^2+1$$

$$2x^2=2$$

$$x^2=1 \qquad x_1-a=1\,,\ x_2=b=-1$$

د اینتیګرلولو په اینتروال [1 , 1 -] کی لرو$-x^2+1>x^2-1$
(که چیرې په اینتروال [a,b] او په (۲ . ۱) کی $f2(x)>f1(x)$ په نظر کي ونه نیول
شي، نو د څرګند اینتیګرال به منفی شي او سړی(لکه د مخه چې ویل شوي) بیا
داینتیګرال مطلقه ارزښت نیسي. له دې امله لرو:



(c) ketabton.com: The Digital Library

$$A = \int_{-1}^{1} \left[-x^2 + 1 - (x^2 - 1) \right] dx$$

$$= \int_{-1}^{1} (-2x^2 + 2)\, dx$$

$$= (-\frac{2}{3}x^3 + 2x)\Big|_{-1}^{1} = \frac{8}{3}$$

بیلګه ۵ . ۸ :

د (ش. ۲ . ۸) سره سم د لاندې توابعو ترمنځ
سطحه شمیرل کیږي.

y=(x-1)²,y=-4x+4,y=4

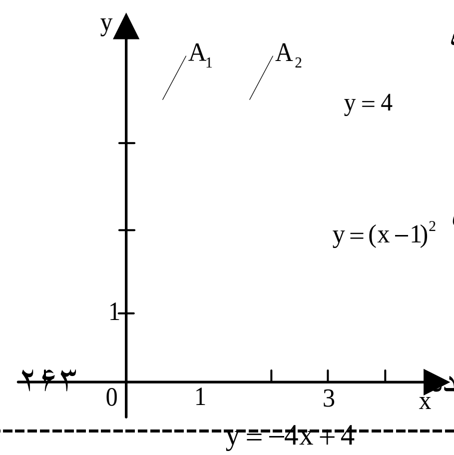


Bild 21.8

حل : دا د شمیرلو سطحه، د منحنیو ترمنځ د دوه
سطحوA1 او A2 له یوځاي کیدو څخه لاس
ته راځي.

A1د منحنیو y=4 او y=-4x+4 ترمنځ
پروت دی. د اینتیګرال پولی(- حدونه) د لومړي

د دوه کرښو څخه رابند

کواور ینات(x –محور) غوځښکی دی،
د y=4 او y=-4x+4 ترمنځ.

لرو $4 = -4x + 4,\ \ x_1 = 0$ په همدې ډول د

ښي غوځښکي لومړی وضعیه ارزښت (کواور دینات)

د $y = -4x + 4$ او $y = (x-1)^2$ ترمنځ

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + x - 2}{x + 1} = \frac{1^2 + 1 - 2}{1 + 1} = \frac{0}{2} = 0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x_{2,3} = -1 \pm 2,\ x_3 = 1.$$

ګورو چې$A2$د y=-4 او$y=(x-1)^2$ تر
منځ پرته ده ، د اینتیګرال حدونه(پولی)x1=1 او د لومړي
وضعیه قیمت د بني غوڅتکي د y=4 او $y=(x-1)^2$.

غوښتوني سطحه داسې ده:

$$A = A_1 + A_2 = \int_0^1 [4-(-4x+4)]dx + \int_0^1 \left[4-(x-1)^2\right]dx$$

$$= \int_0^1 4x\,dx + \int_0^1 (-x^2+2x+3)\,dx = 2x^2\Big|_0^1 + (1/3x^3+x+3x)\Big|_4^3 = 7\frac{1}{3}$$

تمرینونه:

د لاندې توابعو ترمنځ سطحې و شمېرئ

---

1) $f(x) = x^2 - x - 6$; $g(x) = 4x - 10$

2) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{2}x + 3$; $g(x) = 3x$

3) $f(x) = 0.75(x^2 - 5x + 4)$; $g(x) = 0.75x + 3$,

4) $f(x) = x^2 + 5x + \frac{9}{4}$; $g(x) = -\frac{3}{2}x - \frac{21}{4}$

5) $f(x) = (x-2)^2 - 4$; $g(x) = x - 1$

6) $f(x) = x^2 - 4x + 1$; $g(x) = -x^2 + 2x + 1$

7) $f(x) = \frac{3}{2}x^2 - 6x + 3$; $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x$

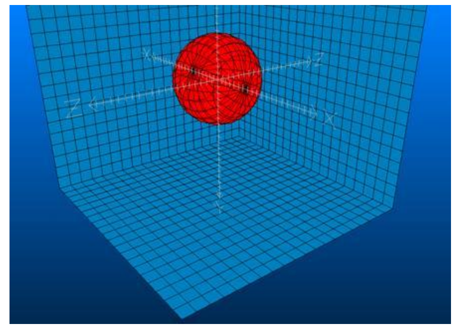
8) $f(x) = x^2 + 3x$; $g(x) = 0.5x^2$

9) $f(x)0.5x^2 - 2x - 1$; $g(x) = 2x^2 + 2x + 1$

10) $f(x) = -0.5x^2 + 2$; $g(x) = -\frac{1}{9}(x-1)^2 + 1$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ځرخيدونکو بدنونو(جسمونو) ډکي(حجم)



فعاليت:

- په ورسره بلده توګه د مستطيل حجم وليکئ.

- د کرې، استوانې او د مخروط حجومونه، چې تراوسه مو لوستلي و ليکئ.

يادونه: دا دې تل په پام کې ونيول شي: که د انتيګرال شمېرنې له لارې کوم عدد لاس ته راځي، نو هغه عدد د يوه جسم حجم ښايي. موږ ددې لپاره ليکو، چې د حجم مطلوبه واحد.

ځرخيدونکي تنونه:

ځرخېدونکي تنونه په هندسه کې هغه تنونه دي، چې په يوه ځرخېدونکي محور باندې د يوې کرښې يا منحني ځرخېدنې له لارې منځ ته راځي. کرښه يا منحني په يوه سطحه پرته ده او محور هم په همدې سطحه پروت دی. منحني محور نه غوځوي، اويا زيات له زياته يې ممکن لمس کړي. چې غوره بېلګې به يې په لاندې کې و ځېړل شي.

د xپه محور ځرخيدنه(ځرخون)

(c) ketabton.com: The Digital Library

لکه د مخه مو چې وویل، حجم هم یو انتیګرال دی. دا داسې منځ ته راځي، چې که یوه تابع د X په محور و څرخول شي.

د یوه څرخېدونکي جسم (بدن یا تن) حجم(ډکی)

د یوه څرخېدونکي جسم لپاره، چې د سطحې په څرخېدنه د x په محور په انتروال [a,b] کې د f تابع له ګراف ، د x له محور او له دواړو کرښو $x = a$ او $x = b$ ترمنځ جوړېږي، رابنده وي.

د حجم شمېرل په لاندې ډول دی:

$$V = \pi \cdot \int_a^b (f(x))^2 \, dx$$

د y په محور څرخېدنه

د یوې سطحې په څرخېدنې (د y په محور)، چې په [a,b] انتروال دf تابع ګراف د y محور او د دواړو کرښو $y = f(a)$ او $y = f(b)$ له خوا رابند وي باید د $y = f(x)$ بڼه بدله شي و $x = f^{-1}(y)$ معکوس تابع ته . دا شتون لري، که f متمادي او غښتلي یوغږیز وي. که نه(لکه په پورته شي شکل کې) نو شاید ممکن وي،چې f په ټوټو ټوټه شي، په هغو کې چې متمادي او غښتلی یوغږیز وي. دا دلته منځ ته راغلي حجمونه بیا ځانله شمېرل کیږي او سره جمعه کیږي.

$$V = \pi \cdot \int_{\min(f(a),\ f(b))}^{\max(f(a),\ f(b))} (f^{-1}(y))^2 \ dy$$

که دلته $x = f^{-1}(y)$ بدل کړو، نو د x په محور په لاندې توګه حجم لاس ته راوړو:

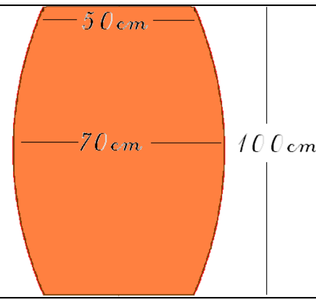
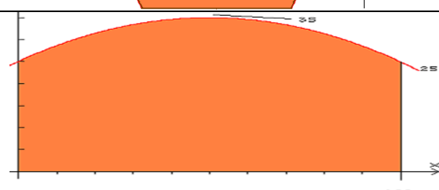
$$V = \pi \cdot \int_{\min(f(a),\ f(b))}^{\max(f(a),\ f(b))} x^2 dy = \pi \cdot \int_a^b x^2 \cdot \left| f'(x) \right| dx$$

د f' مطلق ارزښت او د انتیګرال په حدونو کې خورا جګ – ټیټ(min/max) توابع یو مثبت انتیګرال تظمینوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د سطحي په ځرخولو(د y په محور)، چې د f تابع له ګراف او دواړو کرښو $x = a$ او $x = b$ څخه رابنده وي، لاندې فرمول باور لري.

$$V = \pi \cdot \int_a^b (x \cdot f))^2 \, dx$$

د یوه مرتبان حجم: د یوه مرتبان حجم غواړو پیدا کړو چې جګوالی يې 1 متر، وړانګه يې 25 سنتي متره په پاي او 35 سانتیمتره په منځ کې ده.	
که مرتبان په 90° درجو و ځرخول شي، نو د مربع پارابول بڼه غوره کوي. د ژی تابع باید کښته لور ته واز پارابول وي، لکه دلته په شکل کې.	

حل: د پارابول د تابع لیکبنه کېدی شي ساده په ککرتکي یا راس باندې ولیکل شي.

تولیز باور لري:

$f(x) - a \cdot (x-5)^2 + 3.5$ (dm ارزښت په دیسیمتر)

په ځرګند دول 5- د رآس راکښنه د x+ په لور ورکوي او 3,5 د y+ په لور. د غزوني ضریب a په لور اړین دی، چې کښته لور واز پارابول لاس ته راوړو. اوس فقط ضریب a نه شته. که په فرمول کې یو معلوم ټکی کیږدو، کېدی شي a وشمېرل شي. دا ټکی (0/2,5) دی.

$$f(x) = -a \cdot (x-5)^2 + 3.5$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د x ارزښت ځا په ځاي کوونو لرو $-a\cdot(0-5)^2+3.5$

له دې امله a دی: $\frac{2.5-3.5}{25}=-0.04$

او مساوات پوره بلل کيږي. $f(x)=-0.04\cdot(x-5)^2+3.5$

د ساده والي لپاره د رآس ټکي فرمول په نورمال يا عمودي فورم بدلوو:
$f(x)=-0.04x^2+0.4x+2.5$

تابع مربع کړئ $f(x)=(-0.04x^2+0.4x+2.5)^2$

نو دی $f(x)=0.0016x^2-0.032x^3-0.04x^2+2x+6.25$

لومړنی تابع $f(x)=\frac{0.0016x^2}{5}\cdot x^5-\frac{0.032x^3}{4}\cdot\frac{-0.04x^2}{3}\cdot x^3+x^2+6.25x$

د حجم شميرلو لپاره ټاکلی انتيګرال دی؛

$$\pi\cdot\int_0^{10}(-0.04x^2+0.4x+2.5)^2\,dx=\pi\cdot\int_0^{10}(-0.0016x^2-0.032x^3-2x+6.25)\;dx$$

$$=\pi\left[\frac{0.0016}{5}\cdot 10^5-\frac{0.032}{4}\cdot x^4-\frac{0.04}{3}\cdot x^3+x^2+6.25x\right]_0^{10}$$

$$=\pi\left[32-80-13\frac{1}{3}+100+62.5\right]_0^{10}$$

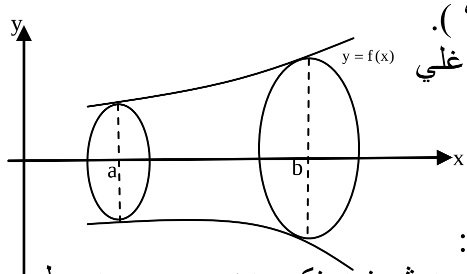
$$=\pi\ \cdot 101.167$$

د حجم واحدونه (يوونونه يا يووالي)

دا چي موږ له پيله په ديڅيمتر شمېرنه کړې، نو طبعآ دا په ليتر شمېرل کيږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

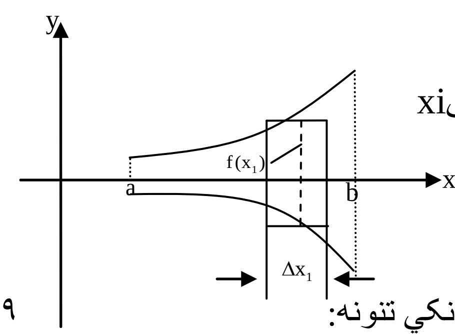
$= 317.824\ liter$



د تابع y=f(x),y=0,x=a,x=b ترمنځ سطحه چی دx-محورباندې څرخي(ش ۵ . ۹). دلته غوښتنه، په دې ډول رامنځ ته شوې راغلي دڅرخيدونکي بدن ډکی(حجم) دی.
لاندېجمله باوري ده

جمله ۵ . ۸) د څرخيدونکي بدن ډکی(حجم):
په اينتروال[a,b]کي دی y=f(x) متمادي وي، د څرخيدونکي بدن حجم چی د سطحو y=f(x),y=0,x=a,x=bترمنځ ، راپيداکيږي داسی دئ:

$$V = \pi \cdot \int_a^b [f(x)]^2\, dx$$



ښونه: V د توتو(استوانو)د جمعې له لارې چی وړانګه يې(f(xi، جګوالی يېxi د i=1,2,3,...n لپاره لری. (ش: 5. 10) دi-مې توتې (سليندر ډکی(حجم) دی.
څرخېدونکي تنونه:

-------------------------------- --

$$\Delta_i V = \pi \cdot [f(x_i)]^2 \cdot \Delta x_i$$

د ټولو n سليندرونو يا توتو زياتون

$$V_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta V_i = \sum_{i=1}^{n} \pi [f(x_i)]^2 \cdot \Delta x_i$$

د پولی ارزښت جوړونه) n->oe, xi->0 (د بنسټ اينتيګرال د تعريف سره سم

$V = \pi \cdot \int_a^b [f(x)]^2\, dx$ حجم (ډکی) راکوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

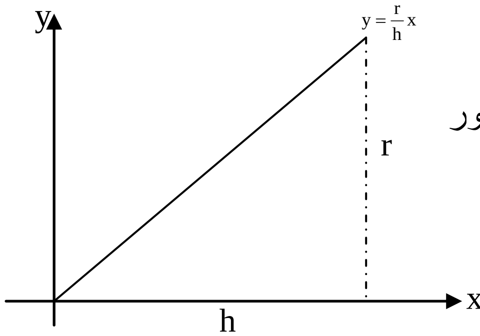
بیلګه ۵ . ۹ :) دمخروط یا کیګل ډکی

(حجم) د $y=\frac{r}{h}x$ کربښي (د سرچیني

تیره کربنه د $\frac{r}{h}$ جګوالي سره) او دx- محور

(y =0) د حدونو x=0 تر x=h

پورې(ش . ۱۱)



$$V=\pi\cdot\int_0^h\left[\frac{r}{h}x\right]^2dx=\pi\cdot\frac{r^2}{h^2}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^h=\frac{1}{3}\pi r^2h.$$

دا له بنستیزې شمېرنې(د اساساتو) ځخه معلومه نتیجه ده.

بیلګه ۵ . ۱۰:

د $y=\sqrt{2x},\ y=0,\ x=0,\ x=3$

ترمنځ د x-محور باندې ځرخېدلو جوړ(تولید) شوی جسم ځرخېدلی پارابولویید دی (ځ ۵ ې ۱۲)

$$V=\pi\cdot\int_0^3\left[\sqrt{2x}\right]^2dx$$

$$=2\pi\cdot\int_0^3 xdx$$

$$=2\pi\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^3=9\pi.$$

y

$y=\sqrt{2x}$

1

0 1 3 x

د ارښیمد س جمله Archimedischer Satz

(c) ketabton.com: The Digital Library

د توتې، غونډاري(کرې) او مخروط د حجمونو ترمنځ تناسب:

$V_{\text{توته(استوانه)}} : V_{\text{غونداری(کره)}} : V_{\text{مخروط}} = 3 : 2 : 1$

د 1886 زکـ یوه درسي کتاب څخه

Figur 120.

Die Volumen der drei Körper verhalten sich wie die Ausdrücke unter 1), 2) und 3); man hat somit die Proportion:

$$Cyl. : Kugel : Kegel = 2r^3\pi : \frac{4}{3}\pi r^3 : \frac{2r^3\pi}{3}$$

$$\text{oder: } \;„ : „ : „ = 2 : \frac{4}{3} : \frac{2}{3}$$

$$„ : „ : „ = 6 : 4 : 2$$

$$„ : „ : „ = 3 : 2 : 1$$

Archimedes war der erste, welcher dieses Verhältnis fand, daher heisst der hierdurch ausgedrückte Satz der Archimedische Satz.

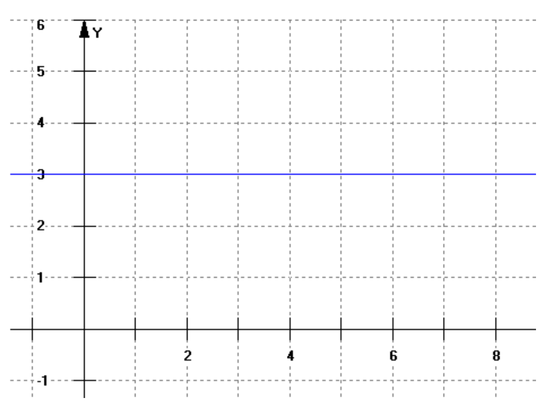
د پورته الماني پښتو:ارښيمېډس لومړی کس وو، چې دا پورته تناسب يې ومونده، له دې امله دا دلته راغلې جمله د ارښيمېډس جلې په نامه نومول شوې.

د څرخېدونکي بدن(حسم) حجم.

بیلگه ۵ . ۱۱:

ځرخېدونکي تنونه: ۲۷۱

استوانه(توته):



(c) ketabton.com: The Digital Library

استوانه د x په محور د $f(x) = c$ یوې ثابتې تابع(په دې حالت کې $f(x) = 3$ دی) د څرخېدو څخه لاس ته راځي.

د یوې استوانې حجم (ډکې) شمېرنه:

اوس دې په $[0;5]$ انتروال کې د توتې حجم وشمېرل شي. د استوانې د حجم د شمېرلو لپاره $V = \pi r^2 \cdot h$ عمومي فرمول دی. په دې حالت کې $r=3$ او $h=5$ دی. د x هر ارزښت لپاره د تابع ارزښته هم دی.

لومړی له هرڅه غواړو $V = \pi r^2 \cdot h$ څخه فقط $r^2 \cdot h$ تر څېړنې لاندې و نیسو او غواړو یوه لار پیدا کړو ، چې د هغې لارې د انتیګرال په مرسته حجم وشمېرلای شو. د سطحې مساحت د لاندې انتیګرال په مرسته وشمېرل شو :

$$\int_0^5 r dx = \int_0^5 f(x)\, dx$$

که د دې ناپاي ډېرو مستطیلونو(د $f(x)$ د مربع مساحت ا د صفر په لور ځغېلېدونکې پنډوالي dx سره) انتیګرال جوړ کړو، نو لاس ته ترې راځي:

$$\int_0^5 r dx = \int_0^5 \left[f(x)\right]^2 dx$$

څرخېدونکي تنونه: ۲۷۲

دا په دې معنا چې دا انتیګرال بل څه نه دی پرته له څخه، چې زموږ د پورتني فرمول څخه دد یوې توتې د حجم شمېرل دي. ز که دا له سره ضرب کړو، نو راکوي:

$$\pi r^2 h = \pi \int_0^5 \left[f(x)\right]^2 dx$$

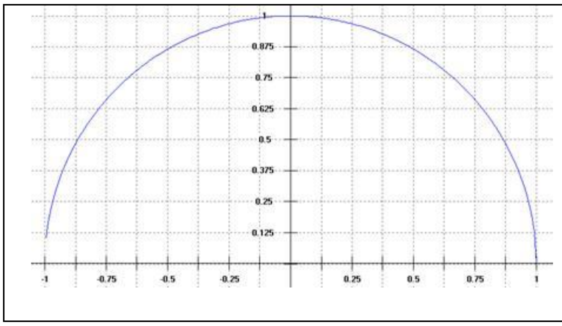
د دې ورکړ شوې استوانې د حجم شمېرنه:

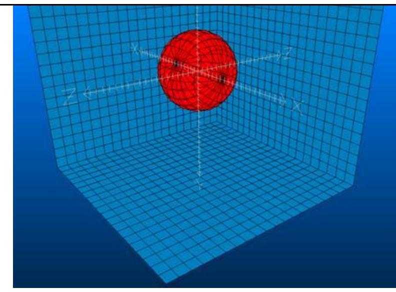
$$\pi \int_0^5 \left[f(x)\right]^2 dx = \pi \int_0^5 \left[9(x)\right]_0^5 = \pi \int_0^5 \left[45-0\right]_0^5 = 45\pi$$

د پرتلې لپاره: $\pi r^2 h = 45\pi$

(c) ketabton.com: The Digital Library

کره (غونډارى يا غونډوسکه):





فعاليت:

- د کري حجم بې له انتيګراله وليکئ.

- د توتې حجم وليکئ

- د مخروط حجم وليکئ.

ځرخېدونکي تنونه: ۲۷۳

-دا درېواړه سره پرتله کړئ.

د x په محور د $f(x)=\sqrt{r^2-x^2}$ تابع ځرخېدني ځخه کره منځ ته راځي(پورته د ننوتني شکل.

دا تابع هم کېدى شي په ګردو ټوټو ټوټه شي، پرته غوځوونکي تابع يي $q(x) = \pi[f(x)]^2$ ده. د دې ټوټو د انتيګرلولو له لارې دې بيا حجم وشمېرل شي.

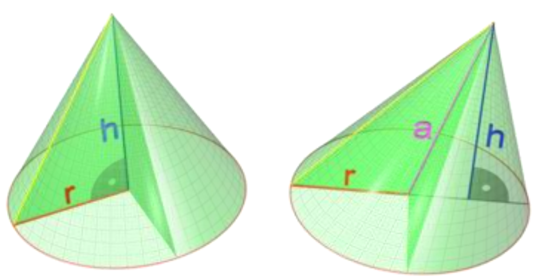
په دې بېلګه کې دې حجم وشمېرل شي، چې له صفر ځاي ځخه و صفر ځاي ته د x په محور باندې

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $f(x)=\sqrt{1^2-x^2}$ تابع ځرخېدنو له لارې منځ ته راځي ، يعني په انتروال [-1;1] کې .

$$\pi\int_{-1}^{1}[f(x)]^2dx=\pi\left[x-\frac{1}{3}x^3\right]=\pi\left(\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\right)=\frac{4}{3}\pi$$

مخروطKegel (Geometrie)



دا هم ممکن ده، چې يو مخروط د يوه منظمn زاويو (اړخيزې(کونجيز) څخه رابندې بنسټيزې سطحې(د n لپاره چې ناپا ي ته ځي) اهرام ته ور نږدې کړو.

د مخروط حجم:

د انتيگرال په مرسته د يوه مستقيم مخروط د حجم د شمېرلو يوه بله

٢٧۴

ځرخېدونکي تنونه: ----------------------------

مرستندويه لار. يو د کارتيزي وضعيه ارزښت (قيمت) سيستم په کار اچول کيږي، د هغه سره چې د مخروط څوکه په سرچينه (0|0) او منځ ټکی په ټکي $(h|0)$کې پروت دی. اوس کېدی شي، چې مخروط ناپاي کوچنيو توتو(استوانو) رايوځاي شوی په پام کې ونيسو، چې جگوالی(پنډوالی) يې dx دی. داچې د داسې يوې توتې يا استوانې گردې ټوټې(کترې) واټن د مخروط له څوکې د وضعيه قېمت سيستم په x سره ور کړ شوی دی، د وړانگې جملې له مخې(دلته په افغانستان کې دا د ... جملې په نامه بلل شوې باور لري.

د يوه ناپاي کوچنی توتې(استوانې) وړانگه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$r\,z\,(h) = \frac{r}{h} \cdot x$$

د يوې ناپاي کوچنۍ توتې(استوتنې) حجم:

$$(\frac{r}{h} \cdot x)^2 \cdot \pi \cdot dx = \frac{r^2}{h^2} \cdot \pi \cdot x^2\, dx$$

دټول څرخېدوني مخروط د ټولو داسې کوچنيو توتو حجم دی. د شمېرلو لپاره يې ټاکلی انتيګرال جوړوو، د انتيګرال حدونو 0 او h سره:

$$V = \int_0^h \frac{r^2}{h^2} \cdot \pi \cdot x^2 dx = \frac{r^2 \cdot \pi}{h^2} \int_0^h x^2 dx$$

$$V = \frac{r^2 \cdot \pi}{h^2} \cdot \pi \cdot \left[\frac{x^3}{3}\right]^h$$

$$V = \frac{r^2 \cdot \pi}{h^2} \cdot \pi \cdot \left(\frac{h^3}{3} - \frac{0^3}{3}\right)$$

$$V = \frac{r^2 \cdot \pi}{h^2} \cdot \frac{h^3}{3}$$

له دې سره هغه مشهور فرمول ته (چې لروده مو) راځو:

$$V = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot h}{3} = \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot h$$

يو مخروط د x په محور د f(x) = mx يوې کرښيزې (خطي) تابع(د بېلګې په توګه f(x) = 0,5x) څرخېدنه(څرخون) ده.

د يوه مخروط شمېرنه

دلته نه شو کولای چې لومړی د کوادر حجم وشمېرو. دلته د دې ګراف لاندې په ډېرو کترو کتره کول دي د dx پنډوالې سره . د دې کترو د سطحو مساحت وشمېرئ، چې

(c) ketabton.com: The Digital Library

وړانګه f(x) لري داسې په نامه د پروت تقاطع تابع او بيا يې انتيګرال په ورکړ شوي [0;5] انتروال کې ونيسئ.

$$\pi \int_0^5 [f(x)]^2 dx = \pi \left[\frac{1}{12} x^3 \right]_0^5 = 32.72$$

د پرتلې لپاره دې د يوه مخروط د حجم معياري (ستاندارد) بنه وکتل شي.

$$\frac{1}{3} \pi r^2 h = 32.72$$

لنډ :

که يوه منحني د x يا y په محور وڅرخول شي، يو جسم چې لاس ته راځي، چې موږ دا جسم په نريو کترو يا زونونو ټوټه کوو، د پنډوالي x همداسې y سره او دا په ورته نزدې توګه په استوانو بدلوو، نو په نزدې توګه لکه د مخه د حجمونو لپاره لاندې بڼه لاس ته راځي:

د x په محور څرڅونه: $V_x = \pi \cdot \int_{x_1}^{x_2} y^2 dx$

د y په محور څرخونه: $V_y = \pi \cdot \int_{y_1}^{y_2} x^2 dx$

بېلګه ۵ . ۱۲:

د $y = x^2/4$ تابع ګراف په *[0, 2]* انتروال کې د وضعيه قيمتونو په محورونو څرخي. دا د منځ ته راغلي څرخېدلي جسم حجم څومره دی؟

د x په محور څرخېدنه: $y^2 = x^4/16, x_1 = 0, x_2 = 2$

$$V_x = \pi \cdot \int_0^2 \frac{x^4}{16} dx = 0.4\pi$$

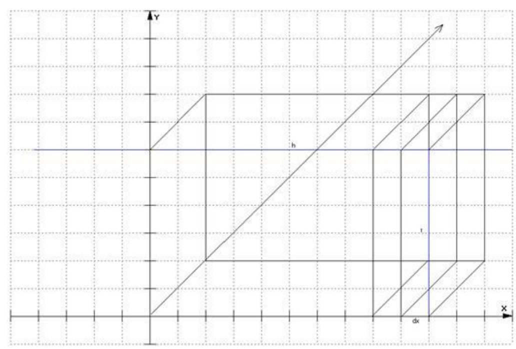
(c) ketabton.com: The Digital Library

د y په محور څرخېدنه: $x^2 = 4y, y_1 = 0, y_2 = 1$

$$V_y = \pi \cdot \int_0^1 4y\,dy = 2\pi$$

د ناڅرخیدونکي جسم ډکی یا حجم.

مستطیل یا بربع المکعب (شپږ اړخیز جسم) Quader



دا لید شکل د استواني څخه راته معلوم دی، فقط دا ځل نه څرخي. حجم یې کېدی شي د عادي کوادر په څېر وشمېرل شي $(V = r^2h)$ او یا د صفر په لور تلونکې dx سرورې مربع وې ټوټه شي. د دې لپاره دې د پروت غوڅي (قاطع) سطحه وشمېرل څرخېدونکي تنونه:

شي، یعني q(x) د پروت قاطع تابع دې جوړه شي د دې بیا باید انتیګرال ونیول شي. په ټولیزه توګه دا معنا لري: $V = \int_a^b q(x)dx$

په دې بېلګه کې تصادفي د پروتقاطع تابع د ژی تابع مربع ده: $q(x) = [f(x)]^2$

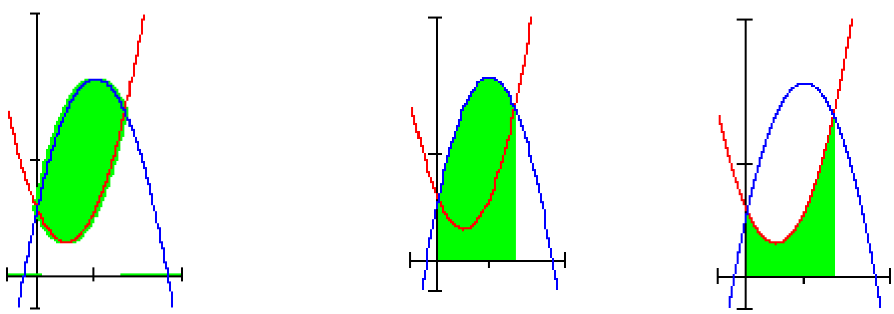
که موږ $f(x) = 3$ تابع له 0 تر 5 انتروال کې د پروتقاطع تابع سره انتیګرال کړو، نو باید $V = r^2h = 45$ لاس ته راشي. $\int_0^5 q(x)dx = [9x]_0^5 = 45$

(c) ketabton.com: The Digital Library

تبصره

که د تابع $y=f(x)$ سطحې د منحني تلنه دx- محور لاندې لور ته وي، نودا ټاکلی اینتیګرال به منفي وي. ددې لپاره چی د سطحې تل مثبت مساحت لاس ته راوړو، نو د اینتیګرال مطلقه ارزښت نیسو یعني منفي اینتیګرال.

په ځنو پوښتنو کې د سطحې مساحت شمېرل کیږي، چې د دوه توابعو ګرافونو ترمنځ پرته ده. دا ډول د سطحې مساحت کېدی شي د ټاکلو اینتګرالونو د کمښت له لارې و شمېرل شي. که دواړه ګرافونه د x-محور پورته لور ته پراته وي،نو د لاندې شیما څخه مخ ته ځو :



A A₁ A₂

$$A = A_1 - A_2$$

ځرخېدونکي تنونه: ٢٧٨

د منحنیو $y=f_1(x)$ او $y=f_2(x)$

تر منځ پرتي سطحې مساحت په لاندې پولو کې

له $x=a$ تر $x=b$ پورې او $y=f_1(x)$ او $y=f_2(x)$.

د یوه ځرخېدونکي جسم لپاره، چې د سطحې په ځرخېدنه د x په محور په انتروال $[a,b]$ کې د f تابع له ګراف ، د x له محور او له دواړو کرښو $x = a$ او $x = b$ ترمنځ جوړیږي، رابنده وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د حجم شمیرل په لاندې ډول دی:

$$V = \pi \cdot \int_a^b (f(x))^2 \, dx$$

د y په محور څرخیدنه

د یوې سطحې په څرخېدنې (د y په محور)، چې په [a,b] انتروال دf   تابع ګراف د y محور او د دواړو کرښو $y = f(a)$ او $y = f(b)$ له خوا رابند وي باید د $y = f(x)$ بڼه بدله شي و $x = f^{-1}(y)$ معکوس تابع ته . دا شتون لري، که f متمادي او غښتلي یو غرېز وي. که نه(لکه په پورته شي شکل کې) نو شاید ممکن وي،چې f   په ټوټو ټوټه شي، په هغو کې چې   متمادي او غښتلی یو غرېز وي. دا دلته منځ ته راغلي حجمونه بیا ځانله شمېرل کیږي او سره جمعه کیږي.

$$V = \pi \cdot \int_{\min(f(a),\ f(b))}^{\max(f(a),\ f(b))} (f^{-1}(y))^2 \ dy$$

جمله ۵ . ۸) د څرخیدونکي بدن ډکی(حجم):
په اینتروال[a,b]کې دی y=f(x) متمادي وي، د څرخیدونکي بدن حجم چې د سطحو y=f(x),y=0,x=a,x=bترمنځ ، راپیداکیږي داسی دی:

$$V = \pi \cdot \int_a^b [f(x)]^2 \, dx$$

د توتې، غونډاري(کرې) او مخروط د حجمونو ترمنځ تناسب:

$V_{توته(استوتنه)} : V_{غونداری(کره)} : V_{مخروط} = 3 : 2 : 1$

یو مخروط د x په محور د f(x) = mx یوې کرښیزې (خطي) تابع(د بیلګې په توګه f(x) = 0,5x) څرخیدنه(څرخون) ده.

که یوه منحني د x یا y په محور وڅرخول شي، یو جسم چې لاس ته راځي، چې موږ دا جسم په نریو کترو یا زونونو ټوټه کوو، د پنډوالي x همداسې y سره او دا

(c) ketabton.com: The Digital Library

په ورته نزدې توګه په استوانو بدلوو، نو په نزدې توګه لکه د مخه د حجمونو لپاره لاندې بڼه لاس ته راځي:

د x په محور څرخونه: $V_x = \pi \cdot \int_{x_1}^{x_2} y^2 dx$

د y په محور څرخونه: $V_y = \pi \cdot \int_{y_1}^{y_2} x^2 dx$

د x په محور د $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ تابع څرخیدنې څخه کره منځ ته راځي(پورته د ننوتنې شکل.

دا تابع هم کیدی شي په ګردو ټوټو ټوټه شي، پرته غوڅوونکې تابع یې
$q(x) = \pi[f(x)]^2$ ده. د دې ټوټو د انتیګرلولو له لارې دې بیا حجم وشمیرل شي.

تمرینونه:

۱ - د $y = f(x) = x^2$ او د دې د معکوس تابع تر منځ سطحه وشمیرئ.

۲ - د ګراف او X محور ترمنځ سطحه وشمېرئ.

څرخېدونکې تنونه: ۲۸۰

$a)\ f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{13}{4}x + 3$ $b)\ f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 3x$

$c)\ f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x$ $d)\ f(x) = -x^2 + 6x - 5$

۳- د هغې سطحې مساحت وشمیرئ، چې د وکړ شوو مساواتو منحنیو څخه را بنده شوي وي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

a) $y = e^{0,5x}, \quad y = 0, \quad x = -2, \quad x = 2:$

b) $y = \frac{1}{2}x^3, \quad y = 0, \quad x - 2, \quad x = 2:]$

c) $y = \frac{1}{x^2}, \quad y = 0 \quad x = 9, \quad x = -3, \quad x = 3:$

d) $y = \cos x, \quad y = 0$

e) $y = \cos x, \quad y = 0, \quad x = \frac{\pi}{2}, \quad x = \frac{5\pi}{6}:$

$f)\ y = \frac{1}{x}, \quad y = 0, \quad x = 2, \quad x = 4:$

$g)\ y = \left(\frac{x^2}{4} - 1\right)^2, \quad y = 0, \quad x = -2, \quad x = 2:$

$h)\ y = x^3 + 7, \quad y = 0, \quad x = 1, \quad x = 2:$

$i)\ y = x^3 + 7, \quad y = x^3 - x^2 + 3x + 5:$

$j)\ y = 3 - \frac{1}{2}x^4, \quad y = 3 - 4x:$

$k)\ y = \frac{1}{x}, \quad 3y + 3x = 10:$

$l)\ y = \cos x, \quad y = \sin x$

$m)\ y = \sqrt{3x+1}, \quad y = 1, \quad x = 8:$

$n)\ y = \frac{x^2}{4}, \quad y = \frac{8}{4 + x^2}:$

$o)\ y = x^2, \quad x = y^2:$

$p)\ y = \frac{1}{6} \cdot \sqrt{x^3}, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 3:$

٤-- - د ساين د منحني گراف او د كوساين د منحني گراف يو بل په انټروال $0 \le x \le 2\pi$ كې غوځوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دواړو غوڅېدونکو تر منځ له دواړو منحنيو را بندې سطحې مساحت وشمېرئ.

۵- د اکسپوننشل منحني g د $y=e^x$ سره او په انتروال $[0,1]$ دp پارابول د $y=-x^2-1$ سره را بنده سطحه وشمېرئ.

۶ - د کربنې g د $y=2x^2+1$ سره او په اينتروال $[0,2\pi]$ د ساين منحني د y=sin x سره څخه رابنده سطحه وشمېرئ.

۷ - پارابول p_1 د $y=x^2-3$ سره او p_2 د $y=2x^2+1$ سره د $[-1,2]$ په اينتروال يوه سطحه را بنده وي.

د ا بنده سحه و شمېرئ.

۸ – د پارابول P د $y=\sqrt{x}$ سره او کربنه g يې د y = -x-1 سره په اينتروال رابنده سطحه لرو. دا را بنده سطحه وشمېرئ.

۹ - په اينتروال $[-2,1]$ د g_1 کربنې د $y=x+3$ سره او g_2 د 2x+1 سره څخه را بنده سطحه وشمېرئ.

۱۰ - – پارابول $y=x^2-6x+5$ د p سره او کربنهg د y+-x+1 سره رابنده سطحه.

د دې سطحې مساحت وشمېرئ.

۱۱-- د g يوه کربنه يو پارابولp د $y=x^2+2$ سره په $x_1=-1$ او $x_2=2$ کې غوڅوي.

د کربنې او پارابول څخه رابندې سطحې مساحت وشمېرئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۲ – د g یوه کرښه یو پارابول p د $y + 0,5x^2 + x + 4$ سره په د $x_1 = -2$ او $x_2 = 4$ ټکو کې غوځوي.

د دې کرښې او پارابول څخه رابندې سطحې مساحت وشمېرئ.

۱۳ - د ساین د منحني ګراف او د کوساین د منحني ګراف یو بل په انټروال $0 \leq x \leq 2\pi$ کې غوځوي.

د دواړوغوڅټکو تر منځ له واړو منحنئو را بندې سطحې مساحت وشمېرئ.

۱٤ - د f تابع ګراف د $t\ y = -\frac{1}{9}x^4 + \frac{2}{3}x^2$ سره د x محور سره سطحه پوره رابندوي.

د دې مساحت وشمېرئ.

۱٤ - د f تابع ګراف د y=a.(1-sin2x), (a>0) سره او د وضعیه قیمت په I (اوله) مربع کې (قیمتونو څخه را بنده سطحه) پوره رابنده سطحه لرو.

د کومو ارزښتونو لپاره د سطحې مساحت (x-2) سطحې یوونونه (واحدونه) دی.

۱۵- د لاندې توبعو ګرافونه هر یو د x په محور څرخي. د منځ ته راغلو څرخېدونکو جسمونو حجم وشمېرئ.

$a)\ \ f(x) = 2 + \sqrt{x}\,,\quad |= [0;4]$ $\qquad b)\ \ f(x) = \frac{1}{2}(x-2)^2 + 1\,,\quad |[2;4]$

۱٦ - د لاندې توبعو ګرافونه هر یو د x په مخور څرخي. د منځ ته راغلو څرخېدوکو جسمونو حجم وشمېرئ او د ساده شمېرنو سره یې و ازمایئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$a)\ f(x) = -x + 5, \quad | = [0;3]$ $\qquad b)\ f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}, \quad |[1;5]$

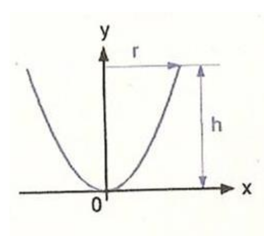
۱۷--د لاندې توابعو گرافونه هر یو د y په مخور ځرخي. د منځ ته راغلو ځرخېدوکو جسمونو حجم وشمېرئ.

$a)\ f(x) = \sqrt{x}\ ,\ 1 = [0;4]$ $\qquad b)\ f(x) = (x-2)^2\ ,\ 1 = [1;3]$

۱۸- د لاندې توبعو گرافونه هر یو دy په محور ځرخي. د منځ ته راغلو ځرخېدونکو جسمونو حجم وشمېرئ او د ساده شمېرنو سره يې و ازمايئ.

$a)\ f(x) = x + 1\ \ ,\ 1 = [1;4]$ $\qquad b)\ f(x) = -\frac{1}{2}x + 2\ ,\ 1 = [0;4]$

۱۹ د پارابول په سیومتري محور yد پارابول د ځرخیدو سره یو لوښی منځ ته راځي. وښایئ، چې دا $v = \frac{\pi}{2} \cdot r^2 \cdot h$ حجم لري.



$$v = \frac{\pi}{2} \cdot r^2 \cdot h$$

۲۰ - د ساین د منحني گراف او د کوساین د منحني گراف یو بل په انتروال $0 \le x \le 2\pi$ کې غوڅوي.

د دواړو غوڅتکو تر منځ له واړو منحنئو را بندې سطحې مساحت وشمېرئ.

۲۱ - د f تابع گراف د $t\ y = -\frac{1}{9}x^4 + \frac{2}{3}x^2$ سره د x محور سره سطحه پوره رابندوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دې مساحت وشمېرئ.

۲۲ - د f تابع ګراف د y=a.(1-sin2x), (a>0) سره او د وضعیه قیمت په I (اوله) مربع کې (قیمتونو څخه را بنده سطحه) پوره رابنده سطحه لرو.

د کومو ارزښتونو لپاره د سطحې مساحت (x-2) سطحې یونونه (واحدونه) دی.

۲۳---- لاندې د څرخیدونکې بدنونو ګراف په x محور څرخي. د داسې منځ ته راغلو څرخېدونو تتونو حجمونه(ډکې) وشمېرئ.

$a)\ f(x)=2+\sqrt{x} \quad , \quad I=[0;4] \qquad b)\ f(x)=\frac{1}{2}(x-2)^2 \quad , \quad I=[2;4]$

۲٤---د لاندې څرخېدونکو بدنونو ګرافونه د x محور باندې څرخي داسې منځ ته راغلي حجمونه(ډکې) وشمېرئ او په ساده حساب سره یې وشمېرئ.

$a)\ f(x)=-x+5 \quad , \quad I=[0;3] \qquad b)\ f(x)=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2} \quad , \quad I=[1;5]$

۲۵--- د لاندې توابعو د څرخون له لارې منځ ته راغلو تتونو حجم وشمېرئ.

$a)\ f(x)=\sqrt{x} \quad , \quad |=[0;4] \qquad b)\ f(x)=(x-2)^2 \quad , \quad I\ |=[1;3]$

۲٦---- د لاندې توابعو ګراف د y په محور څرخي. داسې منځ ته راغلي تتونه و شمېرئ او په ساده شمېرنه سره یې هم و شمېرئ.

$a)\ f(x)=x+1 \quad , \quad |=[1;4] \qquad b)\ f(x)=-\frac{1}{2}x+2 \quad , \quad |=[0;4]$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲۷--- د لاندې توابعو گراف د y په محور څرخي. داسې منځ ته راغلي تنونه و شمېرئ او د ساده شمېرنې سره یې هم و شمېرئ

$a)\ f(x)=\sqrt{x}\quad ,\quad |=[0;4] \qquad b)\ f(x)=(x-2)^2\quad ,\quad |=[1;3]$

$a)\ f(x)=x+1\quad ,\quad |=[1;4] \qquad b)\ f(x)=-\frac{1}{2}x+2\quad ,\quad |=[0;4]$

هغه ناټیکاوي، چې د نصاب په کتاب کې شته، داسې لړڅه به یې زه دلته له تاسو سره شریک کړم

د ډاکتر ماخان (میرزي) شینواري چاپ او ناچاپي لیکنې:

په ډېره مننه، چې زما کتابونه به ټول www.ketabto.com ته پورته شي.

<u>1988 Vienna (Austria):</u>

<u>لومړی:</u>

H.K. Kaiser , M. Shinwari : Aproximation compact pological algebra : general algebra 6 ; Page 117 – 122 contributions to

<u>1987 Vienna (Austria):</u>

<u>دویم:</u>

Diss . Interpolation und Aproximation durch Polynime in Universalen Algebren . Uni. Wien

Dissertation Interpolation and Aproximation by Polynome in universal Algebras, at the University of Vienna/Austria

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاندې د شميرپوهنې پښتوټول کتابونه پـه المان کې د ،، افغانستان کلتوري ودې ټولنه،،له خوا چاپ شوي دي

2000 Bonn (Germany):

دريم: د شميرپوهنې ستر کتاب : د شميرپوهنې برسيره د انجنري، فزيک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زده کوونکو لپاره (دا کتاب پـه ۹۰۰ مخونو کې چاپ او دا نوې ليکنه بـه يې ځنو ځايونو غزېدلې او ځنې ځايونه ترې لرې شوي دي)

2003 Bonn (Germany):

څلورم: ځمککچپوهنه(هندسه) ، پـه سلو، زرو کې شميرنه، د ګټې – او کټې د کټې شميرنه ، د اختمالوالي شمېرنـه کتاب د ښوونځي ټولې اړتياوې پوره کوي

2003 Bonn (Germany):

پنځم: الجبرونه (د الجبر بنسټونه دي)

2003 Bonn (Germany):

شپږم: د شميرپوهنې انګرېزي – پښتو ډکشنري.

2003 Bonn (Germany):

اووم: د شميرپوهنې الماني ـ پښتو ـ او پښتو الماني ډکشنري

Mathematical dictionary German/ Pashto and Pashto/German

2003 Bonn (Germany):

اتم: دفرنځيال برابرون (دا کتاب پـه دې ځانګه کې يو پيل دی، ساده ليکل شوی)

Differential equation Translation; An Introduction

Bonn (Germany): 2003

(c) ketabton.com: The Digital Library

نهم: د شمیر پوهنې فرمولونو ټولګه

Mathematical Formulas

2003 Bonn (Germany):

لسم: شمیرپوهنه له عربي په پښتو

1997 Bonn (Germany):

یوولسم: د افغانستان په هکله سپیني خبرې: په المان کې

،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خو

یادونه: له ۲۰۰۰ کال دمخه ډاکتر ماخان شینواري د ،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خوا درې ساسي مجلې هم را وستلي.

د ډاکتر ماخان ،،میرې،، شینواري لیکنې او ژباړې چې په چاپیدو یې پیل کیږي

2012 Bonn; Germany; Kabul Afghanistan

ژباړې:

: *Prof. Brinkmann. (From Brinkmann.du.de)*

لاندې د برینکمن لیکنې چې له پرینکمن ن ج څخه ژباړل شوي دي.

۱ - شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره لومړی ټوک

۲ – شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره دویم ټوک

۳ – شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره دریم ټوک

۴ - د احتمالوالي شمیرنه د ښوونځي لپاره

(c) ketabton.com: The Digital Library

۵ – احصایه یا ستاتیستیک   دښوونځي لپاره

لاندې کتابونه د شتوتګارت د پوهنتون د استادانو د لکچرونو څخه چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپاره شوي را ژباړل شوي.

۶ – انالیزی   ۱

۷ – انالیزې   ۲

۸ – کرښیز الجبر

۹ - د شمیرپوهنې بنسټونه

۱۰ - د فرمولونو ټولګه

۱۱ – فنکشنل انالیز

۱۲ – وکتور شمیرنه

نورې ژباړې

۱۳ – له www./grundstudium.info/linearealgebra څخه:کرښیز الجبر

۱۴ – Georg Gutenbrunner ګڼونپوهنه یا د اعدادو تیوري

زما لیکنې

Bonn (Germany):

۱۵ - د شمیرپوهنې ستر کتاب دویم چاپ د پوره تغیراتو سره : دا کتاب د شمیرپوهنې برخې برسیره د

(c) ketabton.com: The Digital Library

انجنري، فزيک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زدهکوونکو لپاره پوره ګټور دی. په

کتاب کې د اړتیا سره زیاتونه او کونه راغلي

۱۶ - ځمککچپوهنه (هندسه) دویم چاپ د پوره تغیراتو سره

۱۷ – الجبر بنسټونه دویم چاپ له تغیراتو سره

۱۸ - ډېرۍ پوهنه یا سټ تیوري

۱۹ – د شمیرپوهنې سم اند (منطق ریاضي)

۲۰ - د یو څو شمیرپوهانو ژوندلیک

۲۱ – د شمیر پوهنې ګډې وډې لیکنې

-۲۲ داهم ژباړه ده، خو لیکونکی یې متآسفانه راڅخه نابلد شوی: د مشتق او انتیګرال شمیرنو ته تمرینونه او اوبیونې یا حلونه یې

۲۳ – د شمیرپوهنې انګریزې پښتو او عربي + درې ډکشنري

۲۴ – د شمیرپوهنې پښتو انګرېزي ډکشنري

۲۵ – د شمیرپوهنې پښتو ډکشنري د شمیرپوهنیزو وییونو په پښتو روښانه ونه

۲۶ - د زړه له کومې(دا هغه لیکنې دي، چې ځنې یې په نړیول جالونو کې خپرې شوي دي.)

۲۷ – د افغانستان په هکله سپیني خبرې، چې وبه غزیږي.

نوري لیکنې، چې په ژباړه یې پیل شوی، خو لا پوره نه دي

– د شتوتکارت پوهنتون لکچرنوټونو څخه ، چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپریږي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ګروپونو تیوري

- د ښوونځي لپاره فزیک د برینکمن لیکنه

له پنځم ټولګي څخه تر اووم ټولګي پورې ژباړل شوی (دا چې زما دویم مسلک فزیک دی، دا لیکنې ژباړم. دا هم د دې لیکوال یوه ډېره ښه لیکنه ده، چې -د شمیرپوهنې په څیر- دلته هم زیات تمرینونه د حل یا اوبیونې سره په کې راغلي او ماته زیات ګټور برېښي)

د ښوودځي کتابونه له ۷-م لګي څخه تر ۱۲-م ټولګي پورې.

۱ – د دولسم ټولګی شمیرپ،هنه

زما لیکونه:

Dr. Makhan Shinwari ډاکتر ماخان شینواری

Smakhan1946@gmail.com

د افغانستان اسلامي حمهوریت جمهور ریس جلاتمآب

ډاکتر محمد اشرف غني ته په ډېر درنښت.

له هر څه د مخه دې بخښنه وي، چې ستاسو ډېر د ارزښت ډک وخت نیسم، خو دا راته ډېر اړیین برېښي او پرته له تاسو به یې څوک دومره جدي هم ونه نیسي.

پوهیږو، چې د پوهنې وزارت د ولس د پوهنې مغذ جوړوي، پوهه له همدې ځایه پیلیږي، چې بنسټ یې باید سم وي. همداسې نصاب د یوه هیواد د پوهنې مغذ دی، نو باید همداسې ورته د هره اړخه په درنه سترګه او غور وکتل شي.

زه خبره را لنډوم او د افغانستان د نصاب ستونځو ته په لنډ ډول ګوته نیسم او په همدې ډول ستونځوبیو یا د ستونځو حل ته یې.

ما د ۱۲ –م ټولګي د پښتو او دري کتابونه ولیکل او زه ترې المان ته لاړم، قرارداد پای ته ورسید. زما د کتابونو په ځای نور کتابونه چاپ شول، چې ناسم وو. په دې هکله د پوهنې وزارت ته زما لیکنه مل ده. دا کتابونه ما بیا له سره ترتیب کړل(لیکنې مې یې

(c) ketabton.com: The Digital Library

درلودلي) او چاپ ته مې چمتو کړل، خو دا مې باور نه کيده، چې دا به بيا بې زما له شتون چاپ شي.

ما د کتابونو د ليکلو لپاره پيسې اخستي او دا ليکنې هم دا دی لرم، چې چاپ ته چمتو دي

ما چې دا نور کتابونه وکتل، نو دا مې لازم وګڼله، چې دا کتابونه هم زه له سره وليکم، مواد يې لرم، ځکه چې ما ډېر د شميرپوهنې يا رياضي کتابونه ليکلي او ژباړلي(نږدې تر ۴۰ کتابونو پورې). د کتابونو منځپانګه د ښوونځي کتابونو لپاره هم پوره ده، تخنيکي کارونه يې بايد له يوه مسلکي کس سره سرته ورسول شي.

اوس مې يې په ليکلو او د ښوونځي لپاره په سمون پيل کړي دی.

زما ليکنې مسلکي ناسمون نه لري، معياري او د وخت د غوښتنو سره سمې دي، چې دا زما د اخرنيو اوولس کالو د هڅو په اساس باوري ده.

زه څه کولی شم؟

دا چې په دې هکله بل کوم هيوادوال څه نه دي ويلي يا ليکلي، نو باور لرم، چې زه يواځنی کس يم چې دې ته مې فکر را اوښتی. زه دا څه چې ليکم دا په پوره مسئوليت ليکم.

ما چې دا څومره ليکنې کړي، دا زما د ارمان د پوره کولو لپاره دي او په دې هکله ځان د ولس پوروړی بولم.

که د دې کتابونو د ليکنې دنده راته وسپارل شوه، نو د کار ميوه به مې وي او دا کار به په نړيوال معيار او ښه توګه سرته ورسوم.

دا اخر يونيم کال مې يواځې د ښوونځي له کتابونو سره سر خوږولی، چې د هر ځل لوستنې سره يې پوره زوريږم او د هر ځل لوستلو سره يې په ناسمون سر خوږوم.

زه هيله لرم، چې دا وخت راته راکړئ، چې د افغانستان رياضی معياري کولو کې مرسته وکړم او نه دا چې مرسته وکړم بلکه معياري يې کړم. دا کار مې لکه د مخه مې چې ګوته ورته ونيوله هم کړی.

زه کړی شم، چې دا کار د المان څخه هم سرته ورسوم. که ماته دا وخت راکړ شو، نو زه به له حکومت څخه د معاش غوښتنه هم ونه کړم او دا کار زما له خوا ساده کيدونکی دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ښوونځي د رياضي لپاره به يو ښسټ کېښوول شي، چې په هغې د راتلونکی وخت شمیرپوهنه یا ریاضي ابادېدی شي. دا ښنستيز مسلک به په نړیواله کچه سم شي.

زما مسئولیت مې په دې لیکنه سرته ورساوه.

له هر څه د مخه ستاسو له ستونځو مننه

ستاسو ډاکتر ماخان شینواری

د نصاب د کتابونو د ناسمون په څنو برخو د نموني لپاره لنډه څیړنه شوې، چې د دې لیک سره مل ده.

د پوهنې محترم وزارت ته زما لیکنه هم مل ده.

ډاکتر ماخان شینواری د ۲۰۱۳ زکک لومړی نیمايي

Dr. Makhan Shinwari

Lansbergerstr.3

5311- Bonn

Germany

smakhan1946@gmail.com

د افغانستان اسلامي جمهوریت د پوهنې محترم وزیر صاحب ته په ډېر درنښت!

(c) ketabton.com: The Digital Library

ډېرو درنو!

غواړم دا لاندې دوه ټکي د تاسو محترم سره شریک کړم:

لومړی: ما له مارچ ۲۰۰۸ ز کال څخه تر دسمبر ۲۰۰۹ ز ک پورې د درسي کتابونو لیکنه کې ونډه لرله او د ۱۲ ـــم ټولګي د شمیر پوهنې یا ریاضي کتابونه مې په پښتو او درې ولیکل.

ما دا څه موده د مخه د پوهنې وزارت په ن ج پاڼه کې د ۱۲ ـــم ټولګي د شمیرپوهنې (ریاضي)کتاب ولوسته، چې ګورم هلته په کې زما د نوم درک هم نه شته.

دویم : د کتاب خوندېوني یا متن ته چې ننوتم، ګورم، چې هغه څه چې ما لیکلي ووهغه یا نه شته او یا تخریب شوي دي.

ما په ډېر زور او د زړه خوراک سره د کتاب لومړۍ برخه یعنې د ،، پولي ارزښت،، یا لیمیټ برخه وکتله، چې ګورم، نو دا مې ترې لاس ته راوړه، چې دا نه ریا ضي ده او نه پښتو او هغه چا چې دا لیکلې نه دا چې په ریاضي نه پوهیږي په پښتو هم نه پوهیږي.

زما په لیکنو کې نوښت:

دا باید په ګوته کړم، چې زما لیکنه په نړیوال معیار وه، چې منځپانګه یا متن یې طبعاً زه لرم.

لومړي: دا لومړي ځل دی، چې کتاب مې لومړی په پښتو او بیا په درې ولیکه.

دویم: دا لومړۍ لیکنه وه، چې په لیکنه کې له ایراني کتابونو ګټه نه وه اخستل شوې او لیکنه له الماني ادبیاتو او داسې څه له انګرېزي ادبیاتو رانیول شوي وه.

دریم: زما کتاب معیاري لیکل شوی وو او ترې ښه لیکنې یې شونتیا نه لرله.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په لاندې توګه مې غوښتنه او هیله :

اول - زه باید پوه شم چې ولې داسې شوي، چې زما نوم له کتاب څخه وتلي؟

که یواځې یوه لیکنه هم په کې زما پاتې وي، نو باید زما نوم په کې وی. دا ماته له ما سره او زما د دوه کاله په دې لار کې د ستونځو ګاللو له امله او نه اخر زما د علمي کار سره هم تیری بریښي؟

تاسو پوهیږی، چې د ۱۲ ــم ټولګي کتاب لیکلو لپاره ماډېرې پیسې اخستي او لپاره مې یې ښه کار کړی وو، چې لاس ته راوړنه یې باید داسې نه وی.

دویم- د کتاب دا لیکلي لومړۍ او هم داسې سرسري دویمه برخه، چې ما لوستلې، د ښوونځیو لپاره د زغم نه دي.

زما وړاندیز: دا کتابونه باید راټول شي او بیا ولیکل شي، ځکه چې په دې خو لیکونکي نه پوهیږي ، نو له دې امله نه ښوونکي پرې پوهیدی شي او نه زده کوونکي او د پوهیدلو معقول څه هم نه لري. دې ته ګوته نیسم، چې په دې نورو کتابونوکې به هم ورته ستونځې وي، خو زما یې کتنه اوس د لاسه نه کیږي، ځکه چې .....

د داسې کتابونو لیکل او ښوونځیو ته وېشل د پوهنې وزارت لپاره توهین دی.

زه له دې امله د کوچنې اختر وروسته کابل ته درځم او هیله لرم، چې د هرچا لومړی له تاسو سره وګورم. زه به د اګست په ۱۷ یو ځل وزارت ته درشم.

یادونه: ما په دې اخرو څو ورځو کې د کتاب ډېر ځایونه داسې ځغلند وکتل، باور وکړی، چې د هرې موضوع د لوستلو سره زوربېدلی یم.

(c) ketabton.com: The Digital Library

زه به په دې هکله – که لوي څښتن کول- له تاسو سره په کابل کې وغږیږم.

له هر څه د مخه له تاسو ستاسو له ستونځو مننه

ستاسو ډاکتر ماخان شینواری

یوه هیله

زه د افغانستان د ټولو ن ج ، نورو پاڼو او رادیو تلویزیونو څخه هیله لرم، چې دا زما لیکنه ګرانو لوستونکو ته وړاندې او په نورو اړونده لیکنو هم همدا مرسته وکړي.

د ریاضي کتابونو د چاپ مخه ونیول شي

ولې؟

په دې نږدې څو میاشتو کې د نصاب کتابونه بیا چاپ ته وړاندې کیږي او ګومان مې دی، چې داسې د معیار سره سم سمون به په کې نه وي راغلی، نو له دې امله یې د چاپ مخنیوی اړیین او په همدې ډول یې سمون هم اړین دی، چې په لاندې کې یې ستونځو او ستونځوبیو (د ستونځو حل) ته هم ګوته نیسم.

زه د ښمیرپوهنې ټول د نصاب پوهانو ته درناوی لرم او هیله ده، چې دا لیکنه شخصي وه نه نیسي.

-- ما له نږدې ۱۹۹۸ ز ک وروسته د ښمیرپوهنې په کتابونو پیل وکړ، چې تراوسه مې نږدې څه کم څلوېښت کتابونه لیکلي، چې له جملې یې له شلو ډېر چاپ او نور ناچاپ دي. د دې کتابونو ۱۴ ګوره یې په www.kitabtoon.com (دې پاڼه کېاوس نه شته) کې خپاره شوي او همداسې له ما څخه ښمیرپوهنې ته ځانګړې شوې پاڼه کې تر

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲۵ کتابونو ن ج ته پورته شوي او دا نور به هم په خپل وار ن ج ته پورته شي. زما پاڼه smakhan.wordpress.com

دا زما ن ج پاڼه په نا ښکلي ډول یواځې زما د شمیرپوهنې کتابونو ته ځانګړې شوې، چې زما زیات کتابونه په کې خپاره شوي او نور به هم په کې خواره شي. پاڼه ښکلې نه، خو خپله موخه پوره کولی شي او موږ ټولو سره مرسته کولی شي، چې شمیرپوهنه په ګډه سمه او معیاري کړو.

ګرانو هیوادوالو!

افغانستان دې اوږدې جګړې په هر اړخ کې بې ساری زیانمن کړی او همداسې په پوهنیز اړخ کې هم. د افغانستان نصاب هم له دې ناخوالو بې برخې نه دی پاتې شوی.

لکه څنګه چې پوهنه د هیواد مغز جوړوي، همداسې نصاب د پوهنې مغز دی، نو له دې امله زیاته پامرنه هم غواړي.

ما په نصاب کې د دولسم ټولګي پښتو او دري کتابونه ولیکل، د قرارداد وخت پوره شو، پیسې مې واخستلې او زه تري لاړم، چې متآسفانه له ما لیکلي کتابونه چاپ نه شول – علت یې دا وو، چې ګران لیکونکي یا لیکونکي وښایي، چې دوي دا کار ښه کوي، نو ولې دا د هیواد دباندې افغانان دې دې کار ته راوبلل شي- او په ځای یې متآسفانه ناسم کتابونه چآپ شول. په دې هکله مې په ۲۰۱۲ ز ک کې پوهنې وزارت ته یو لیک هم لیږلی وو، چې

ما متآسفانه چې پوره ناوخته دا نور د ښوونځي چاپ کتابونه وکتل او دې نتیجې ته ورسیدم، چې د ریاضي کتابونه باید سم او معیاري چاپ شي او نه دا ناسم بیا چاپ شي.

دا وړاندیز ولې ما په نصاب کې نه دی کړي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

په خواشینۍ سره به ووایم، چې د کار په سر کې مسئولو چې په کار پوه نه وو، بل څوک هم کار ته نه پرېږدي او د چا خبره د چا غوږ ته هم نه رسیږي. ما په همغه وخت کې هم د ټولو لیکنو لپاره وړاندیزونه لروده او هلته مې ورته چاپ او په میز ایښودلي وو، خو چا نه غوښتل ګټه ترې واخلي او یا یې ترې د ګټې اخستلو توان نه لاره.

ما ته د هغو د لیکنې متود ښه ونه برېښیده، ځکه چې استادان د دارنګه لیکنو سره بلد نه دي، نو له دې امله د پوهنې متن سره له هغې څو واره زیاتې څنګیزې لیکنې کوي، چې موخه ور نه دي.

ما چې پتیل، چې د کتابونو د چاپ مخه باید ونیول شي، نو دې ته مې هم چمتووالی باید ښوولی وي، چې د کتابونو معیاري او سم لیکلو امکان هم باید شته وي.

دا امکان شته. ما دا کار سرته رسولی، کتابونه مې ټول داسې خام پوره کړې، چې زیاتو برخو ته یې ، څو واره وړاندیزون هم شته.

که د کتابونو د چاپ کار باید ډېر په بیړه وشي، نو دا کار هم کیدونکی دی، خو باید څو تخنیکي کسان د مرستې لپاره چمتو وي.

د چاپ کتابونو په ناسمون مې لیکنه کړې، چې ګران لوستونکي یې په smakhan.wordpress.com کې لوستلی شي او که ن ج ته پورته نه شو، نو مینه وال او په دې هکله لیوال یې د برېښنا پتې له لارې لاس ته راوړی شي..

ما د هرکتاب څخه لږ ترلږه یوه برخه داسې د نمونې په څیر څیړلې.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دې لپاره چې د ښمیرپوهنې مینه وال ګران لوستونکي په ستونځو وپوهیږي، نو اړیین بولم، چې د ښوونځي کتابونه هم وګوري او اړونده موضوعګانې زما د چاپ او ناچاپه لیکنو سره پرتله کړي(کتابونه په پورته ن ج کې شته دی، چې ځنې یې راکښته کیدی شي او هم یې هلته ګران لوستونکي لوستلی شي).

زه په دولت کې او له دولت دباندې د ټولو اغیزمنو هیوادوالو څخه هیله کوم، چې په دې لار کې له ما او له دې لارې زموږ د ځوان راتلونکي سره مرسته وکړي او د شمیرپوهنې معیاري کولواو سمون امکانات راته چمتو شي.

زما د کار دوه امکانات شته:
لمړی: دا کار زه کړی شم، چې له المان څخه هم سرته ورسوم او په ښه توګه، په دې حالت کې به زه د زحمت په مقابل کې له اجورې - د ځوانانو سره د مرستې له امله - تیر شم.

دویم: په افغانستان کې که دا کار سرته ورسیږي، دا به ګټور وي، ځکه چې په افغانستان کې به په ټولو خواوو کاروشي.

داخه وروستی خبرې ما هم رامخ ته کړې.

په لاندې کې زما لیکنې د افغانستان اسلامې جمهوریت جمهورر ریس جلالتمآب اشرف غني او د پوهنې محترم وزارت ته لیک کې هم لوستلی شی او هیله مې ده، چې ویئ لولۍ.

ستاسو له ګټو مشورو به ډیر مننددوی یم.

زما د برېښنا لیک پته: smakhan1946@gmail.com

ستاسو ماخان

د نصاب د دولسم ټولګي کتاب ناسمونونو ته کتنه:

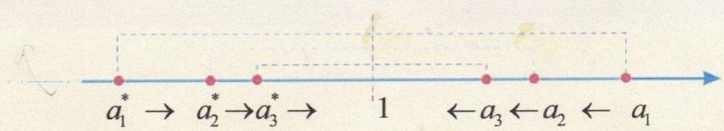
(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړي: په دولسم ټولګي کې پیل له ترادفونو شوی او په سر کې یې دوه ترادوفونه راوړي او دا یې بیا په یوه ګراف یا کرښه د ښي او کیڼې لورې یوې پولې ته څغلولي.

د کتاب ۳ ـــم مخ

پایله:لیدل کېږي، چې د a_n ترادف له ښي لوري څخه د 1 او د a_n^* ترادف له کیڼ لوري څخه د 1 عدد ته د n په زیاتېدو سره نږدې کېږي، یعنې:

ـ د a_n ترادف کله چې n بې نهایت ته تقرب وکړي، مساوي په(1) سره کېږي او همداشان د a_n^* د ترادف $n-$ام حد که n بې نهایت ته نږدې شي هم مساوي له (1) سره کېږي.



ددې لپاره چې د لېمیټ مفهوم مو ښه څرګند کړی وي، په لومړی پړاو کې هغه په څو ترادفونو کې د ګراف په پام کې نیولو سره تر څېړنې لاندې نیسو.

زه پوهیږم، چې دا کار دې درنو لیکوالانو ولې کړی؟

له همدې پیله روښانیږي، چې محترم لیکونکي د درس سره کومه بلدتیا نه لري.

په پورته کې دا دوه پرلپسې هیڅکله له) ۱ « سره نه برابریږي، لکه ښاغلی لیکوال چې لیکي.

پسې یې بیا د پرلپسي یا ردیفونو لپاره بیل بیل ګرافونه کښلي.

په پرلپسیو یا ردیفونوکې چې موږ لیمټ راوړو، نو موخه ترې د پرلپسې کونورګنت او ډیورګنت دي. په پرلپسې کې اړین نه ده، چې د کونورګنت حالت کې دې پرلپسې له دواړو لورو پولې ته لاړ شي، خو داسې پرلپسې شته او هغه یو ترادف دی نه دوه.

دویم: دا لاندې څه چې راغلي، هم کوم درس پورې اړوندوالی نه لري، همداسې څه یې لیکلي. دی د ناسم د ترادف درس څخه سملاسې داسې یوې موضوع ته راغلی او بیا د

(c) ketabton.com: The Digital Library

ښي او کيڼ لوري ليميټ ته راځي او که وکتل شي، نو په ليکنو کې کوم توپير نه شته.
دلته د زده کړې څه نه ليدل کيږي او دا اخره کرښه يې داسې ده، چې په دې موضوع کې کومه پوهه هم نه لري.

که چيرې دا ټيک هم وي، نو ځای يې بې ځايه ځکه راوړي، چې د ښی او کيڼي لور ليمټونه، چې هلته هم ناسم دې، په اووم مخ کې څيرل(که چيرې ځيرنه يې وبولو)

په لاندې کې ،، د متحول تقرب،، يعنې څه؟ دا هيڅ مفهوم يا ترې پوهيدنه نه لري. که ... ترادف وي هم بايد د ترادف په ډول وليکل شي او که تابع وي هم بايد د تابع په ډول وليکل شي.

د متحول تقرب: ويل کېږي چې د x متحول د a عدد ته تقرب کوي، په داسې حال کې چې x په اختياري ډول د a عدد ته نږدې کېږي، يعنې د x او a ترمنځ تفاوت له هر کوچني عدد($\delta > 0$) څخه کوچنی دی يا په لاندې ډول:

$$\forall \delta > 0 : |x-a| < \delta \quad \text{يا} \quad \lim_{x \to a} x = a \quad \text{يا} \quad x \to a \quad \text{يا} \quad |x-a| \to 0$$

له ښي لوري د متحول تقرب: ($x \to a^+$) که چيرې د x د قيمتونو يو متناقص ترادف موجود وي په داسې حال کې چې په تدريجي ډول د a اختياري عدد ته نږدې شي.

$$x:\ a+0.1,\ a+0.01\ ,\ a+0.001\ ,\ a+0.0001\ ,\ \ldots \to a^+$$

له کيڼ لوري د متحول تقرب: ($x \to a^-$) که چيرې د x د قيمتونو يو متزايد ترادف موجود وي په داسې حال کې چې x په تدريجي ډول د a اختياري عدد ته نږدې شي.

$$x:\ a-0.1,\ a-0.01\ ,\ a-0.001\ ,\ a-0.0001\ ,\ \ldots \to a^-$$

نو د x د متحول تقرب د a عدد ته معادل دی د x د متحول تقرب له ښي لوري او د x د متحول تقرب له چپ لوري؛ يعنې:

$$x \to a \iff (x \to a^+\ ,\ x \to a^-)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$\forall\delta>0:|x-a|<\delta$ يا $\lim_{x\to a} x=a$ يا $x\to a$ يا $|x-a|\to 0$

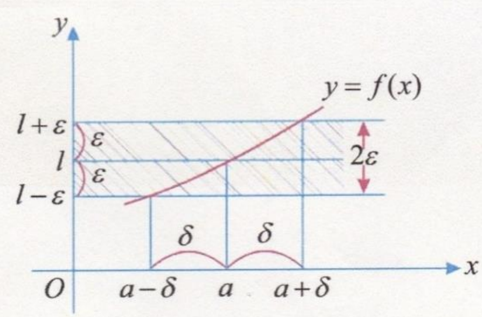
ډول ليكنو سره ګران ليكونكي بلدتيا نه لري او نه داسې څه د مخه راغلي، چې روښانه شوې وي

داسې ليكنې د ښوونځيو لپاره ستونځمنې دي. له دې امله ماهم په خپلو ليكنو كې نه وې راوړې. ګورو چې د كتاب ناسموونكي هم دا څه ناسم يا بې له تشريح كارولي.

په دې هكله زما ليكنه په لاندې كې شته.

دريم: په لاندې تعريف كې د پوهيدلو څه نه شته او په دې رياضيكي تعريف خو نه پوهيږي، ځكه چې په لاندې يې د پوښتنې د حل نتيجه راوستلې او دا بحث له دې سره په رښتيا كې هيڅ سر او كارنه لري.

تعريف: كه چيرې د $f(x)$ تابع په يوه غير تړلي انټروال كې چې د a عدد په هغې كې ګډون لري كيداى شي چې تابع په a كې نه وي تعريف شوى. كه چيرې د x متحول د a عدد ته نږدې شي نو د $f(x)$ تابع د l عدد ته نږدې كيږي، نو ويل كيږي چې د $f(x)$ تابع ليميټ عبارت له l څخه دى، كله چې د x متحول د a عدد ته تقرب وكړي نو داسې يې ليكو: $\lim_{x\to a} f(x)=l$ يا $\begin{matrix} x\to a \\ f(x)\to l\end{matrix}$



$$\forall\varepsilon>0\quad \exists\delta>0\ :|x-a|<\delta\ \Rightarrow\ |f(x)-l|<\varepsilon$$
$$\lim_{x\to a} f(x)=l\ \Leftrightarrow\ (|x-a|\to 0\Rightarrow\ |f(x)-l|\to 0)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا سومبولونه $\forall$ او $\exists$ نه دي ښوول شوي، چې څه شی دی او څه بلل کيږي.

ښاغلي ليکونکی په اووم مخ کې بيلګه راوړي او بيا دا ښايي، ښي او کيڼې لورې ليميټ يې شميري.

بايد د $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=6$، لپاره $x \neq 3$ وليکي،چې هلته فنکشن تعريف نه دی. دی بيا په ناسمه توګه په جدول کې ليکي. دا چې دا بايد څنګه وليکل شي، زماپه ليکنو کې شته.

دویمه بېلګه: و ښيئ چې $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=6$ سره دی.

حل: د ښي او کيڼې خوا لېميتونه تر څېړنې لاندې نيسو:

x	3.5	3.1	3.01	3.001	...	3^+
$f(x)$	6.5	6.1	6.01	6.001	...	6

$$\Rightarrow \lim_{x\to 3^+}\frac{x^2-9}{x-3}=6$$

x	2.5	2.9	2.99	2.999	...	3^-
$f(x)$	5.5	5.9	5.99	5.999	...	6

$$\Rightarrow \lim_{x\to 3^-}\frac{x^2-9}{x-3}=6$$

ليدل کېږي چې د ښی خوا او کيڼې خوا لېميتونه سره مساوي دي، نو $\lim_{x\to 3}=\frac{x^2-9}{x-3}=6$ دي.

په پورته کې xد 3 قيمت نه شي اخستلی، هلته فنکشن تعريف نه دی، نو له دې امله په جدول کې، نه د ښی لورې او نه د کيڼې لورې دا ارزښت 3 اخستلی شي، هلته 3 ته ور نږدې کيږي.

د بيلګې حل يې هم بيا سم نه دی کړي، په هغه ورسره بلده لار.

دا هغه د کاغي او د زرکې خبره ده.........

دویمه طریقه: د لېمیټ د تعریف په پام کې نیولو سره فرضوو چې د هر اختیاري کوچني عدد ε لپاره یو δ شتون لري داسې چې:

$$\forall \varepsilon>0 \quad \exists \delta>0 : \ |x-a|<\delta \ \Rightarrow \ |f(x)-l|<\varepsilon$$

$$|x-3|<\delta \ \Rightarrow \left|\frac{x^2-9}{x-3}-6\right|=\left|\frac{(x-3)(x+3)}{x-3}-6\right|=|x+3-6|=|x-3|<\varepsilon$$

$$\Rightarrow \varepsilon=\delta$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د بیلګې د حل نتیجه

$\varepsilon = \delta$

دا د دی بحث سره سر او کار نه لري یعنې دا مو موخه نه ده، نو باید ووایم، چې دروند لیکونکي د موضوع څخه بوي هم نه وړي.(بخښنه دې وي، که زما لیکنې داسې لړ. توندې برېښي)

او بې ځایه مخ ته ځي، چې څه ترې پوهیدل کیږي هم نه.

له پورتنی اړیکې څخه دا معلومیږي چې ε له δ سره اړیکه لري، که δ ته قیمت ورکړو ε قیمت اخلي او که ε ته قیمت ورکړو δ قیمت اخلي، بنا پر دې هغه تعریف چې د لیمیټ لپاره موجود دی سم دی او تابع لیمیټ لري، یعنې: $\lim_{x\to3}\frac{x^2-9}{x-3}=6$

دې پورته ته په لنډه توګه زما نوره لیکنه او ټیکاوی:

د کتاب په پیل کې راوړل شوې د ترادف یا پرلپسې موضوع باید د یوولسم ټولګي کتاب کې پوره څیړل شوې وی، مګر هلته یې یواځې دا نومونه راوړل شوي او نور لیکونکي – بې له دې، چې د موضوع اړیین څه راوړي - له موضوع څخه تیر شوی.

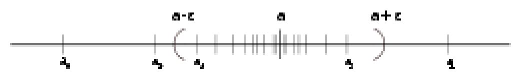
د دې موعوع څخه موخه د ترادف پولې ته تلنه یا کونورګنت او له پولې اووښتنه یا ناپای ته تلنه یا ډیورګنت او... دي، چې بې له دې په رښتیا کې د ترادف یا پرلپسې څیړنه کوم غوره والی یا اهمیت نه لري، یعنې خپله موخه له لاسه ورکوي. دا د یوولسم ټوګي د ترادف درس، نو په رښتیا کې خپل غوره والی او اړیینوالی له لاسه ورکوي. نور سموالي او ناسموالي ته یې ګوته نه نسم، همدا بسیا کوي، چې څه په کې نه دي ویل شوي یا لیکل شوي.

د ۱۲ ـــم ټولګي کتاب ته:

(c) ketabton.com: The Digital Library

یادونه: دا چې ګومان کيږي د داسې ليکنو سره به بلدتيا لږ وي، نو تشريح به راځخه لږ ډېره شي.

د ،، پوله ارزښت،، په څيره کې ښوونه



که $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ د حقيقي اعدادو (ګنونو) ترادف يا پرلپسي وي، نو عدد $a\in\mathbb{R}$ د دې ترادف يا پرلپسي پوله ارزښت بلل کيږي او پرلپسي a ته کونورګير کيږي يا a ته هڅيږي يا نږدې کيږي، که د هر $\varepsilon>0$ لپاره په انتروال $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ کې له يوه اندکس يا پيژند نخښې اخوا يا وروسته يا پسې د پرلپسي يا ترادف ټول غړي(دوي يې حدونه يا جملې بولي، نه پوهيږم ولې؟) د انتروال په دننه کې او فقط پاى ډېر غړي له انتروال څخه دباندې پراته وي.

(دنورې اوږدې روښانه ونکي شننې څخه تيريږم)

لنډ پيژند يې:

عدد $a\in\mathbb{R}$ د ترادف $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ پوله بلل کيږي، که د ټولو $\varepsilon>0$ لپاره يو طبيعي يا پيداښتي عدد N شتون ولري، داسې چې $|a_n-a|<\varepsilon$ باور ولري، که $n\geq N.$ وي.

دا پيژند راکوي، چې: د هر $\varepsilon>0$ لپاره يو ايندکس N شته، داسې چې له دې ايندکس يا پيژندنخښې وروسته د پرلپسې(ترادف) ټول غړې د ε څخه په کم واټن له a لرې پراته دي يعنې له ε څخه چې a ته څومره نږدې دی دا نور هم a ته نږدې دي.

د $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ د پولې ارزښت ليکلو لپاره خپل ځانله سومبول لرو: $\lim_{n\to\infty} a_n = a$

د دې ليکدود سره سم د يوې پرلپسې پوله ارزښت تعريف داسې راالنډولی شو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \iff \quad \forall\varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N:\ |a_n - a| < \varepsilon$$

د داسې لیکنو لپاره د ε (لوستل: اپیسیلون) توری ورځنی یا مروج شوی.

بیلګه:

په یوه بیلګه کې یې روښانه کوو:

د دې لپاره چې د$\frac{1}{n}$ پرلپسي یا ردیف و 0 ته کونورګنت وښایو، یو د مخه ورکړ شوي ε ته یوه په خوښه طبیعي عدد یا ګڼN ټاکو، چې له $\frac{1}{\varepsilon}$ لوی وی، نو د ټولو $n > N$ لپاره باور لري:

$$|a_n - 0| = \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \varepsilon$$

موضوع اوږدولی نه شم، ځکه چې دا یو درس نه دی، دا فقط په موضوع داسې لږ رڼا اچونه ده.

د فنکشن پوله ارزښت:

یادونه: د دې ۱۲ – م ټولګي د درس دا هغه اصلي موضوع ده.

د فنکشن پوله ارزښت په لاندې توګه پیژنو یا تعریفوو:

پیژند: د فنکشن f پوله ارزښت، د x لپاره چې p ته نږدې کیږي، L دی او داسې یې لیکو: $\lim_{x\to p} f(x)=L$

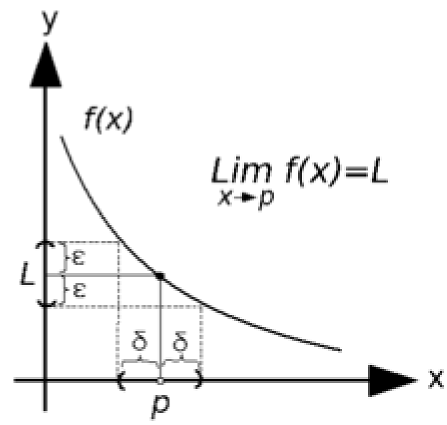
لوستل یې هم همداسې دي لکه پورته تعریف

داسې یې شمیرپوهنیز لیک دود باندې تعریفوو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

فنکشن f پوله ارزښت L لري، که د هر 0 < ε لپاره يو 0 < δ شتون ولري، داسې چې د هر x لپاه د δ > |x-p|<0 سره ε > |f(x)-L| هم باور ولري.

د پورته شميرپوهنيز يا رياضيکي فنکشن پوله ارزښت لپاره لاندې څيره



پورته دوه تعريفونه برابر ارزښته دي يعنې له يوه څخه بل لاس ته راځي او په ځټ يا برعکس يعنې ليکو:

تعريف: د فنکشن f پوله ارزښت، چې x و p ته نږدې کيږي، L دی، ټيک هلته يا هلته او هلته يا هلته او په ځټ، يا له دې لاس ته راځي او په ځټ يا برعکس چې د هر ε < 0 لپاره يو 0 < δ شتون ولري، داسې چې د هر x لپاه د δ > |x-p|<0 سره |f(x)- L| < ε هم باور ولري.

دلته هم په همدومره بسيا کوو، که څه هم روښانه کيدل نورې شننې ته هم اړتيا لري.

دې ته دلته په اخر کې بيا ګوته نيسم، چې دا شميرپوهنيز يا رياضيکي ډول ليکنې ستونځمنې دي او بايد ترې تير شو، د ترادفونو او فنکشنونو لپاره.

دا نور پاتې درس هم په همدې ترتيب ګران ليکونکي ليکلی چې زه نور پرې نه غږيږم.

دا بسيا کوي، چې کتاب د ښوونځيو څخه راټول شي او له سره وليکل شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ستاسو له سرې سينې څخه – که ومو لوسته- ډېره مننه.

ستاسو ډاکتر ماخان شينوارى.

د ډاکتر ماخان شينواري ليکنې:

<u>1988 Vienna (Austria):</u>

<u>لومړى:</u>

H.K. Kaiser , M. Shinwari : Aproximation compact pological algebra : contributions to general algebra 6 ; Page 117 – 122

<u>1987 Vienna (Austria):</u>

<u>دويم:</u>

Diss . Uni. Interpolation und Aproximation durch Polynime in Universalen Algebren . Wien

Dissertation at the Interpolation and Aproximation by Polynome in universal Algebras, University of Vienna/Austria

لاندې د شميرپوهنې پښتوټول کتابونه په المان کې د ،، افغانستان کلتوري ودې ټولنه،،له خوا چاپ شوي دي

<u>2000 Bonn (Germany):</u>

(c) ketabton.com: The Digital Library

دريم: د شميرپوهنې ستر کتاب : د شميرپوهنې برسيره د انجنري، فزيک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زده کوونکو لپاره (دا کتاب   په ۹۰۰ مخونو کې چاپ او دا نوې ليکنه به يې ځنو ځايونو غزېدلې او ځنې ځايونه ترې لرې شوي دي)

2003 Bonn (Germany):

څلورم: ځمککچپوهنه(هندسه) ، په سلو، زرو کې شميرنه، د ګټې – او کټې د کټې شميرنه ، د اختمالوالي شمېرنه کتاب د ښوونځي ټولې اړتياوې پوره کوي

2003 Bonn (Germany):

پنځم: الجبرونه (د الجبر بنسټونه دي)

2003 Bonn (Germany):

شپږم: د شميرپوهنې   انګرېزي – پښتو ډکشنري.

2003 Bonn (Germany):

اووم: د شميرپوهنې الماني ـ پښتو- او پښتو الماني ډکشنري

Mathematical dictionary German/ Pashto and Pashto/German

2003 Bonn (Germany):

اتم: دفرنڅيال برابرون (دا کتاب په دې ځانګه کې يو پيل   دی، ساده ليکل شوی)

Differential equation Translation; An Introduction

Bonn (Germany): 2003

نهم: د شمير پوهنې فرمولونو ټولګه

Mathematical Formulas

2003 Bonn (Germany):

(c) ketabton.com: The Digital Library

لسم: شمیرپوهنه له عربي په پښتو

1997 Bonn (Germany):

یوولسم: د افغانستان په هکله سپیني خبرې: په المان کې

،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خو

یادونه: له ۲۰۰۰ کال دمخه ډاکتر ماخان شینواري د ،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خوا درې ساسي مجلې هم را وستلي.

د ډاکتر ماخان ،،میرې،، شینواري لیکنې او ژباړې چې په چاپیدو یې پیل کیږي

2012 Bonn; Germany; Kabul Afghanistan

ژباړې:

: *Prof. Brinkmann. (From Brinkmann.du.de)*

لاندې د برینکمن لیکنې چې له پرینکمن ن ج ښخه ژباړل شوي دي.

۱ - شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره لومړی ټوک

۲ – شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره دویم ټوک

۳ – شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره دریم ټوک

۴ - د احتمالوالي شمیرنه د ښوونځي لپاره

۵ – احصایه یا ستاتیستیک دښوونځي لپاره

لاندې کتابونه د شتوتګارت د پوهنتون د استادانو د لکچرونو ښخه چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج ښخه خپاره شوي را ژباړل شوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۶ – انالیزی ۱

۷ – انالیزې ۲

۸ – کربنیز الجبر

۹ - د شمیرپوهنې بنسټونه

۱۰ - د فرمولونو ټولګه

۱۱ – فنکشنل انالیز

۱۲ – وکتور شمیرنه

نورې ژباړې

۱۳ – له www./grundstudium.info/linearealgebra څخه:کربنیز الجبر

۱۴ – Georg Gutenbrunner ګڼونپوهنه یا د اعدادو تیوري

زما لیکنې

Bonn (Germany):

۱۵ - د شمیرپوهنې ستر کتاب دویم چاپ د پوره تغیراتو سره : دا کتاب د شمیرپوهنې برخې برسیره د

انجنري، فزیک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زدهکوونکو لپاره پوره ګټور دی. په کتاب کې د اړتیا سره زیاتونه او کونه راغلې

۱۶ - ځمککچپوهنه (هندسه) دویم چاپ د پوره تغیراتو سره

۱۷ – الجبر بنسټونه دویم چاپ له تغیراتو سره

۱۸ - ډېرۍ پوهنه یا سټ تیوري

۱۹ – د شمیرپوهنې سم اند (منطق ریاضي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲۰ - د یو څو شمیرپوهانو ژوندلیک

۲۱ – د شمیر پوهنې ګډې وډې لیکنې

-۲۲ داهم ژباړه ده، خو لیکونکی یې متآسفانه راڅخه نابلد شوی: د مشتق او انتیګرال شمیرنو ته تمرینونه او اوبیونې یا حلونه یې

۲۳ – د شمیرپوهنې انګریزې پښتو او عربي + درې ډکشنري

۲۴ – د شمیرپوهنې پښتو انګرېزي ډکشنري

۲۵ – د شمیرپوهنې پښتو ډکشنري د شمیرپوهنیزو ویپونو په پښتو روښانه ونه

۲۶ - د زړه له کومې(دا هغه لیکنې دي، چې ځنې یې په نړیول جالونو کې خپرې شوي دي.)

۲۷ – د افغانستان په هکله سپینې خبرې، چې وبه غزیږي.

نوري لیکنې، چې په ژباړه یې پیل شوی، خو لا پوره نه دي

– د شتوتکارت پوهنتون لکچرنوټونو څخه ، چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپریږي:

د ګروپونو تیوري

- د ښوونځي لپاره فزیک د برینکمن لیکنه

له پنځم ټولګي څخه تر اووم ټولګې پورې ژباړل شوی (دا چې زما دویم مسلک فزیک دی، دا لیکنې ژباړم. دا هم د دې لیکوال یوه ډېره ښه لیکنه ده، چې -د شمیرپوهنې په څیر- دلته هم زیات تمرینونه د حل یا اوبیونې سره په کې راغلي او ماته زیات ګټور برېښي)

دا لاندې د ښوونځي کتابونه دا اوس پای ته ورسیدل:

شمیرپوهنه د اوم ټولګي له پاره

شمیرپوهنه د اتم ټولګې له پاره

(c) ketabton.com: The Digital Library

شمیرپوهنه د نهم ټولګي له پاره

شمیرپوهنه د لسم ټولګي له پاره

شمیرپوهنه د یولسم ټولګي له پاره

شمیرپوهنه د دولسم ټولګي له پاره

ریاضي برای صنف دوازده

د لیکوال ژوند ته لنډه کتنه

ماخان په اولني نوم میړي شینواری د اروابنادې پستو او اروابناد نوررحمان زوي په ۱۳۲۰ ؟ ه لمریز کې د شینوارو هسکه مینه کې دې نړۍ ته سترګې راغړولي.

د هسکې مینې د لومړنې ښوونځي (د لومړنیو زده کوونکو څخه) څخه وروسته د رحمان بابا لیسه له ۱۹۵۴ تر ۱۹۶۵ پورې(ښوونځي له لومړي ټولګې پیل او د دویم ټولګې څخه ګام او پای).

د ۱۹۶۶ تر سپتبر د کابل طب پوهنځی. له ۱۹۶۶ سپتمبر څخه د اتریش برس، چې هلته یې د شمیرپوهنې ډاکټري په پوره ستونځو تر لاسه کړه.

د۱۹۹۸۷ ش ک تر ۱۹۸۸ د فبروري تر پای د دباندنیو چارو وزارت کې مامور.

د ۱۹۸۸ مارچ څخه تر ۱۹۹۲ جون پورې په بن کې د افغانستان جمهوریت سفارت شارژد افیر(صفر نه وو).

له هغې وروسته په جرمنې کې سیاسي پناه. له ۲۰۰۸ مارچ څخه د ۲۰۰۹ دسمبر پورې د د ریاضي څانګه کې د پوهنې وزارت درسي نساب کې دنده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ماخان میرې په ۱۹۷۲ کې له لرې د میرمن ښاپیرۍ سره واده شوی، چې د واده خبر ورته اتریش ته راغی.

ده د میرمن ښاپیرۍ سره په ۱۹۶۳ ز ک کې کوزده کړې وه.

دوي ته لوي څښتن په اتریش ویانا کې د مای په شلم ۱۹۷۹ ز ک دوه بچیان وبخښل، چې څانګه او اباسین نومیږي. څانګه په المان کې د پوهنتون علمي همکاره وه او د حقوقو ډاکتره ده او اباسین ملي اقتصاد او ټولنیزه سایکولوژي لوستلې.

Get more e-books from www.ketabton.com
Ketabton.com: The Digital Library