شمیرپوهنه (ریاضي)

ددولسم ټولګي لپاره

لیکونکی ډاکتر ماخان (میرزی) شینواری

2016

Ketabton.com

(c) ketabton.com: The Digital Library

نیولیک

پوله ارزښت ۱

د پوله ارزښت خویونه................. ۱۰

د کسري یا ماتو توبعو پوله............. ۱۶

د کلاسیک له لارې د کسري اعدادو ۲۱

د مثلثاتي توابعو پوله ۲۳

د $\pm\infty \rightarrow x$ لپاره پوله ارزښت یا لیمیټ ۲۹

تولیز خویونه: ۳۱

ناپرېکیدنه ۳۴

د متمادي یا................................. ۴۰

د لـــومړي څپـــرکي ټولګه ۴۷

د څپرکي تمرینونه ۵۰

د تابع منځ ارزښت تغیر ۵۷

کمښت ویش یا د تفاضل ویش...................... ۶۰

رابیلیدنه یا مشتقشمیرنه ۶۳

د x_0 په ځای کې د تابع مشتق او د مشتق تابع ۶۸

د تانجنت او عمود تعریفونه او خویونه ۷۳

د مشتق شمیرني یا رابیلیدني قوانین ۷۸

د د الجبري توابعو مشتق ۸۱

د زنځیري(مرکب) توابعو مشتق ۸۶

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مثلثاتي توابعو مشتق ۹۰

د مشتق استعمال په طبیعي علومو ۹۵

د جګو درجو مشتق ۹۹
د اکسپوننشل توابعو مشتق ۱۰۳

د لوګاریتم مشتق ۱۰۷

د ایمپلیځیت Implicit تابعو مشتق ۱۱۷
د فصل ټولګه ۱۲۰

د ځېرکي تمرینونه ۱۲۲

درول قضیه ۱۲۸
همغږیزې توابع ۱۳۲

ځای اړونده افراطي ټکي ۱۳۷

وړنټکی ۱۴۳

د کږې یا منحني خبرې ۱۵۳

د ناټاکلو افدو پولې ۱۵۷
د ناټاکلو افدو پولې ۱۶۰
د تانجنت له پاره............ ۱۶۶

د سترو ګټو ۱۶۷
په تولید کې ۱۷۱

ټولګه ۱۷۳

زینټکی(د اس زین) ۱۷۶

د ځېرکي تمرینونه: ۱۷۷

په ټوټه کسرونو ټوټه کونه ۱۸۷

انتیګرالشمیرنې ته پیل راوړنه ۱۹۷

(c) ketabton.com: The Digital Library

انتیګرالشمیرنه ۲۰۰

بنستیز یا لومړنی تابع ۲۰۴

ناټاکلی انتیګرال ۲۱۰

د ټاکلی انتیګرال......... ...... ۲۱۲

د ټاکلی انتیګرال څخه نا......... ۲۱۶

د انتیګرالونپا......... ۲۱۹

د لوګاریتمي......... .... ۲۲۲

د بدلون قانون ۲۲۴

ټوټه انتیګرالونه ۲۳۱

ناپای انتیګرال ۲۴۰

ټولګه ۲۴۴

د څېرکي تمرینونه ۲۴۷

د اینتیګرال شمیرنی استعمال ۲۵۳
د دوه کربنو څخه رابنده ۲۵۶

څرخېدونکي تنونه: ۲۶۴

ټولګه ۲۷۷

تمرینونه: ۲۷۹

د لیکونکي ژند ته کتنه
د نصاب د دولسم ټولګي ناسمونونه

(c) ketabton.com: The Digital Library

سریزه

ګرنو هیوادوالو!

ما په کلونو کې د نصاب لهپاره دا د دولسم ټولګي د پښتو او دری کتابونه لیکلي وو، خو په هغه وخت کې دا کتابونه د پوهنې وزارت له خوا چاپ نه شو او په ډېره خواشینۍ سره باید ووایم، چې په ځای یې کتابونه چاپ کړل، خو ناسم، چې نه یې ژبه سمه وه او نه یې شمیرپوهنیزه خوندویونه.

دا زما له خوا لیکل شوي کتابونه د معیار (د نړۍ د معیار) سره سم لیکل شوي او د لته یې ګرانو زده کوونکو ته وړاندې کوم، هیله ده، چې ګټه به ترې واخلي.

د نصاب له پاره د چاپ شوي کتاب د بوې برخې ناسمون به د کتاب په اخر کې ځای په ځای کړم.

ما څو واره د افغانستان د پهنې وزارت څخه هیله کړې، چې اجازه راکړي، تول د ښوونځي کتابونه ، چې ما لیکلي، دوی ته وړاندې او د سرهسم ولیم، خو د کتابونو د ناسمون مسئولیت او یا هیڅ څوک د څه مسئولیت په غاړه نه لري.

زه دا ټول د ښوونځي کتابونه ګرانو لوستونکو ته وړاندې کوم، خو ځنو کتابونو کې به داسې راغلي وي، چې زما د ناتوانۍ له امله به مې د یوه کتاب ځنې برخې بل کتاب کې ځای په ځای کړې وي، چې له دې امله د ګرانو لوستونکو څخه هیله، چې د هر څه له مخه دې، د کتاب سریزه وګوري.

ما چې لیکنې جمهورریس او د پوهنې وزارت ته لیکلي، هم مل دي.

ګرانو هیوادوالو!

ماته به بخښنه کړۍ، زه له دې نور زیات زور نه لرم، چې ښه سریزه او نور اړین څه ولیکم. دا زما لیکنې نورې همداسې ومنۍ، چې څنګه درته وړاندې کیږي. په لیکنو کې به زما د لیکنیزو ناسمونو نور ناسمونونه نه وي. هیله ده، چې ګټه به ترې پورته کړي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱ . پوله ارزښت

۱ . لیمیت یا حـد(پوله ارزښت) "The Limit"

موږ لاندې د

اعدادو ترادف لرو:

$$(I) \quad \frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},...,\frac{1}{n}$$
$$(II) \quad \frac{3}{2},\frac{4}{3},...,\frac{n+1}{n}$$
$$(III) \quad 2,4,6,...,2n$$

که n د ناپای په لور لاړ شي، نو د پورته ترادفونو څخه (I)د صفر په لور، (II) د یو په لور او (III) د ناپاي په لور ځي.

د Limit (لاتین) معنا پوله یا حد دی. په پخواني روم کې د یوه ښار د کلا نوم هم Limit وو، چې په ریاضیاتوکې ، د پولې مفهوم لري. د حد د کاروني مفهوم په دې کې پروت دی، چې د یوې تابع سلوک داسې وڅیړو لکه په افقي محور(دx محور یعنې"abscissa ") باندې، چې د تابع د x قیمتونه یوه حد(پولې) ته ورنږدې کیږي.

وبه ګورو، چې لیمیټ په ریاضیاتو کې د مشتق د پیژندلو لپاره کارول کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیتونه:

- ایا تاسو په ورځني ژوند کې د لیمیټ یا پولې له کلمې سره بلد یاست؟

- ایا تاسو په ورځني ژوند کې یوه بیلگه راوړی شئ، چې یوه لیمیټ ته له دواړو لورو، یعنې له ښئ لورې څخه و کیڼې لورې ته او همداډول له کیڼې لورې څخه و ښئ لورې ته نږدې شئ؟

- ایا د حیرتان او ترمز ترمنځ پول د افغانستان او ازبکستان ترمنځ له دواړو لورو پوله یا حد دی، که څنگه؟

- ایا دا په ټاکلې ځاي کې پوله یاحد دی، که څنگه؟

د پورته فعالیتونو څخه دا لاندې د لاسه کوو:

پورته راوړل شوې د لیمیټ بیلگې په یوه ټاکلې ځای کې د توابعو یا د ځنو عملي بیلگو لیمیټونه یا حدونه دي، چې موږ یې په ریاضیاتو کې هم په یوه ټاکلي ځای کې لیمیټ، پوله یا حد بولو.

موږ اوس لاندې بیلگه د پایلیزې روښانه ونې لپاره راوړو:

بیلگه ۱:

یوه د $f(x)=2x$ تابع او د P_0 یوټکی دې ورکړ شوی وي، چې د P_0 ټکی د وضعیه کمیاتو په سیستم کې (3,6) وضعیه قیمتونه لري نو :

1- دتابع جدول وکاږئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوله ۳

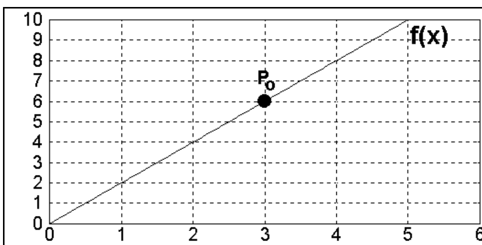
2- د تابع گراف يا ځيره انځور کړئ.

3- د f(3) قيمت پيداکړئ او د f(x) پرحرکت باندې بحث وکړئ که x و3 ته نږدې شي.

4- په شکل کې د f(x) حد ته تلنه روښانه کړئ.

ښوونه:

1- د تابع جدول

2- د تابع شکل 3 - موږ $f(3) = 6$ لرو او غواړو د درې قيمتونوځخه چې له ښۍ او کيڼې لورې 3 ته ورنږدې کيږي، و ګورو، چې په دې درې ارزښتونو کې تابع چېرته ځي.	

ولاړ جدول:

x_k	$f(x_k)$	x_k	$f(x_k)$
2,98	5,96	3,001	6,002
2,99	5,98	3,01	6,02
2,999	5,998	3,02	6,04

په پورته جدول کې ګورو،چې د f ارزښتونو سره له کيڼې لورې له پورته ځخه وکښته لورې ته 6 ته نږدې کيږو او همداسې له ښۍ لورې له کښته ځخه و پورته لورې ته هم6 ته نږدې کيږو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۴ پوله

پروت جدول روړو:

له ښی لوري څخه کیڼي لوري ته   له کیڼي لوري څخه ښی لوري ته

$\longrightarrow 3 \longleftarrow$

x	2.98	2.99	2.999		3.001	3.01	3.02
f(x)	5.96	5.98	5.998		6,002	6.02	6.04

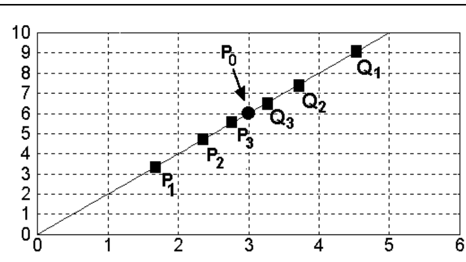
$\longrightarrow 6 \longleftarrow$

په دريې پلونو یا قدمونوکي د f(3) قیمت دf(x) له قیمتونو سره پرتله کوو، کهx و3 ته ورنږدې شي.

دا حالت موږ ته په ګوته کوي چې: که x و 3 ته ورنږدې شي، نو د f(x) لیمیټ به په 6 برابر شي او داسې یې لیکو: $\lim_{x \to 3} f(x) = 6$

او داسې یې لولو: د f(x) لیمیټ یا پوله که x د دريې په لور لاړ شي.

4- اوس ګراف په لاندې توګه رسموو او کیڼې لورې ته هدفمند ټکي - لکه په پورته جدول کې- په نخښه کوو.



د مخامخ شکل له مخې... P_1, P_2, P_3 ټکي په پام کې نیسو، چې د P_0 ټکي ته تل له کیڼي لوري نږدې کیږي.

او همداسې ... Q_1, Q_2, Q_3 ټکي چې له ښی لورې P_0 ټکي ته نږدې کیږي

(c) ketabton.com: The Digital Library

کتل کيږي: هرڅومره، چې پورته ټکي و P_0 ټکي ته نږدې کيږي په همغه کچه د تابع قيمتونه و 6 ته نږدې کيږي (د $P_0(3,6)$ ټکي قيمت له امله).که په ګراف کې x د x=3 ځای ته نږدې شو، نو د تابع قيمت و 6 قيمت ته نږدې کيږي.

وايو: 6 د f(x) تابع ليميټ دی، د $x \to 3$ (لوستل: x د3 (درې) په لورې ځي يا درې ته نږدې کيږي) لپاره.

د ليميټ لپاره ليکښه په دې ډول تعريف شوې: $\lim_{x\to 3} f(x) = 6$

د پورته فعاليتونو او بيلګو څخه دا تعريف لاس ته راوړو:

پيژند(تعريف): د f(x) تابع يو ليميټ (حد)L لري، د x لپاره که x د يوه حقيقي عدد c په لورې تږلی لاړ شي او داسې يې ليکو: $\lim_{x\to c} f(x) = L$
لوستل: د f(x) ليميټ برابر په L دی، د c <- x لپاره.

په ځنو توابعو کې ليميټ، لکه چې وليدل شو، په داسې سادګی لاس ته نه شو راوړي.

يوه بيلګه راوړو، چې دا لاندې پوښتنې په کې ځواب شوې وي:

- ايا يوه تابع په خپل ورکړ شوي ځای کې ليميټ درلودی شي، چې هلته تعريف نه وي ؟

- اودا کار که کدونکی وي ، څنګه کيدی شي؟

بيلګه ۲: تابع $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}; x\neq 1$ راکړ شوې.

د تابع جدول او ګراف وکاږئ.

x له ښی لورې څخه1ته نږدې کيږي x له کيڼې لورې 1 ته نږدې کيږي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$\longrightarrow 1 \longleftarrow$

x	0.98	0.99	0.999		1.001	1.01	1.02
f(x)	1.98	1.99	1.999		2.001	2.01	2.02

$\longrightarrow 2 \longleftarrow$

د f(x) تابع حرکت تر بحث لاندې ونیسئ که x و 1 ته نږدې شي یعني $x \to 1$. له دواړو یعني له ګراف او جدول څخه دا پایله لرو، چې f(x) د حقیقي عدد 2 په لور هڅیږي، یعنې: $\lim_{x \to 1} f(x) = 2$	خبره کښل کیږي

له پورته شکل څرګندیږي: تابع په هغه ټکي کې چې لیمیټ یې شمیرل شوی، تعریف نه ده.

شمیرنیزه ښوونه: که یوه تابع په صورت او مخرج کې داړونده قیمت لپاره صفر ولري او دا صفرځایونه له منځه تللی شي- لکه زموږ په بیلګه کې- نو د لیمیټ یا بولي پیدا کولو لپاره داسي مخ ته ځو:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)} = \lim_{x \to 1} x + 1 = 2$$

او وایو چې دا ډول تابع په صفر ځای کې تشیا (خالیګاه) لري یعني په دې ځای کې تعریف نه ده .

(c) ketabton.com: The Digital Library

-- ----------------------

فعاليت: د سرک ښی لورې ته دا مخامخ تخته لرو: - ووايئ، چې دا تخته څه مفهوم لري؟ په همدې توګه د سرک په سر کيڼې لورې ته هم همداسې يوه تخته ځړول شوې. دا هم په همغه مفهوم.	

دا پوښتنه مو دې لاندې روښانه ونې ته لاښودوي:

بيلګه ۳: د $x \neq 0$, $f(x) = \frac{|x|}{x}$ تابع راکړ شوې.

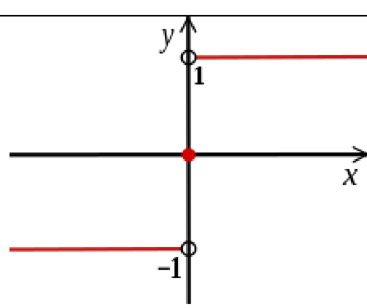
1- تابع وليکئ، بې له دې، چې د مطلقه قيمت نښه | | استعمال کړئ.

2- د تابع ګراف وکاږئ.

3- که x له ښی لورې 1 ته نږدې شي، نو د f(x) قيمت پيدا کړئ.

4- که x له کيڼې لورې1- ته نږدې شي، نو دf(x) قيمت پيدا کړئ.

5- وښاياست چې پورته تابع يعنې f(x) څو حدونه لري.

ښوونه: 1-تابع بې له سمبول ،، ،،| | په لاندې ډول ليکو $f(x) = \begin{cases} 1; x > 0 \\ -1; x < 0 \end{cases}$ 2-د تابع ګراف انځوروو: مخامخ	

(c) ketabton.com: The Digital Library

3- که x له ښي لور 1ته نږدې شي، نود لرو:

$$\lim_{x \to 1} f(x) = -1$$

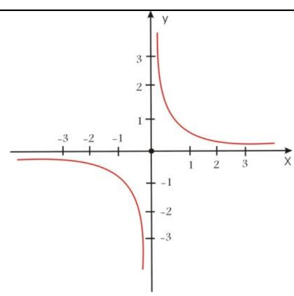
4- کهx له کيڼې لور 1- ته نزدې شي، نو دf(x) ليميټ دی: $\lim_{x \to -1} f(x) = -1$

5- ګورو چې که x دوه قيمتونو 1 او1- ته نږدې شي، نو f(x) دوه د ليميټ قيمتونه لري يعني $\lim_{x \to \pm 1} f(x) = \pm 1$، نو له دې امله f(x) ليميټ نه لري.

له پورته بيلګې پايله:

په پورته بيلګه کې د$x \to -1$ لپاره تابع ښی ليميټ لري او د $x \to 1$ لپاره کيڼ ليميټ لري.

د دې لپاره دې د ګراف پورته کښل شوی شکل هم وکتل شي.

بيلګه۴: $f(x) = \frac{1}{x}$ تابع لرو، چې $x \neq 0$ دی د $f(x) = \frac{1}{x}$تابع په x=0 ځای کې ارزښت نه شي نيولی، يعني په x=0 کې تعريف نه لري. دا تابع په صفرځای کې قطب(Pol) لري. مخامخ شکل دې وکتل شي.	

يادونه: هغه تابع، چې مخرج يې صفر وي او صورت يې صفر نه وي، وايو چې تابع په دې د مخرج په صفرځای کی قطب Pol لري.

$x = 0$ته د نږدې کېدو لپاره ترادف $(x_n) = \frac{1}{n}$، ټاکو.

د اړوندې تابع د قيمتونوترادف $= n$ $(x_n) = \left(\frac{1}{\frac{1}{n}} \right)$دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا د $n>0$ لپاره یو نامحدود صعودي(جګېدونکی) ترادف دی.
او د $n<0$ لپاره نزولي- یا متناقص(ټیټېدونکی) ترادف دی.
دا په دې معنا، چې د f(x) تابع په صفرځای کې لیمیټ نه لري. دا هلته یو قطب لري.

د توابعو د لیمیټ لپاره دا لاندې پایله لرو:
د $f(x), x \in D_f$ تابع د x_0 په ځای کې یو کیڼ اړخیز لیمیټ $a_l = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x<x_0}} f(x)$ لري، که د هر ترادف (x_n) لپاره، چې n غړي یې د x_0 کیڼ لور ته پراته وي او د توابعو ارزښتونه $f(x_n)$ د a_l په لور هڅیږي.

په ورته توګه ښی اړخیزه لیمیټ: د $f(x), x \in D_f$ تابع د x_0 په ځای کې یو ښی اړخیز لیمیټ $a_r = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x>x_0}} f(x)$ لري، که د هر ترادف (x_n) لپاره، چې n غړي یې د x_0 ښي لور ته پراته وي او د توابعو ارزښتونه $f(x_n)$ د a_r په لور وهڅیږي..

که تابع f(x) همغه لیمیټ L ولري که x له ښی اویا کیڼي لورې و c ته نږدې شي، نو **لیمیټ** شته دی او د L سره برابر دی.

دا داسې لیکو: $\lim\limits_{x \to c} f(x) = L$

تمرینونه :

د دې لاندې هرې تابع (پیژند ورشو(د تعریف ناحیه) domain اوارزښت ورشو(د قېمتونو ناحیه)) range یا codomainپیدا کړئ. د توابعو ګراف وکاږئ او حدونه (پولې) یې پیداکړئ.

$$1)\ \lim_{x\to -1}(x^2+x)\ ,\ 2)\ \lim_{x\to 4}(x^2+x)\ ,\ 3)\ \lim_{x\to 0}|x|\ ,\ 4)\ \lim_{x\to 2}\frac{x}{x}$$

$$5)\ \lim_{x\to 1}\sqrt{\frac{x^2}{x}}\ ,\quad 6)\ \lim_{x\to -2}\frac{x^2-4}{x+2}\ ,\quad 7)\ \lim_{x\to 3}\frac{x-3}{x^9-9}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

10- که وي: $f(x)=\begin{cases}2+x; x<1\\ x^2 \quad ; x\geq 1\end{cases}$

الف) د تابع ګراف وکاږئ.

ب) $\lim_{x\to -1} f(x)$ پیدا کړئ.

۱. ۲ د لیمیټونو یا پوله ارزښت خویونه:

" Properties of Limits "

پوهیږو: په ریاضیاتو کې ټول توابع چې لرو، د ساده توابعو ترکیب combination دی، لکه دتوابعو جمع، تفریق، ضرب، ویش (چې مخرج یې صفر نه وي) او زنځیرونه compositon . موږ دوه غوره او ساده توابع $f(x) = c$ او $g(x) = x$ لرو.که دواړه توابع سره یوځای کړو، نو لاس ته ترې راځي:

$h(x) = x + C$, یا $L(x) = cx$, یا $m(x) = x.x= x^2$ او داسې نور.

وبه ګورو،چې دلته هم ټولې ځلور عملیې همداسې اجراکیږي، لکه د اعدادو په ترادفونوکې.

فعالیت:

په دې برخه کې د په خوښه د ثابتو توابعواو کټمټ یا ایدنتیک توابعو Identity function لیمیټونه د جمعې، تفریق، ضرب او همداسې د ویش(چې مخرج یې صفر نه وي) له لارې وشمیرئ (وروسته به وګورو، چې دا د لیمیټ خویونو تر نامه څیړل کیږي).

- د په خوښه یوه پولینوم تابعو لیمیټ پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

- د $f(x) = x$ او $g(x) = x - 2$ توابعوڅخه کار واخلئ، چې درې نورې په خوښه توابع ترې لاس ته راوړئ. د دې توابعو لیمیټونه پیداکړئ. دا لیمیټونه جمع ، تفریق، ضرب او تقسیم(چې مخرج صفر نه وي) کړئ.

- که شوني شي، چې د یوې تابع لیمیټ د تابع له حل څخه لاس ته راوړلای شو، یعني که د بیلګې په توګه ولرو: $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} 3 = 3$ نودا تابع به څنګه لیکو؟

- ایا د پورته عملیې په څیر دا عملیه د هرې ثابتې او کټمټ تابع لپاره ریښتوني ده؟

مونږ له پورته څخه دا لاندې پایله لرو:

که $f(x) = x$ او $g(x) = 2$ ولرو، نو لرو: $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 1 , \lim\limits_{x \to 1} g(x) = 2$

2- که $h(x) = f(x) + g(x)$ وي، نو لرو: $h(x) = x + 2$

3- د h(x) ګراف وکاږئ.

4- د تابع لیمیټ د جدول له لارې

$\longrightarrow 1 \longleftarrow$

0	.5	.8		1.2	1.5	2
2	2.5	2.8		3.2	3.5	4

$\longrightarrow 3 \longleftarrow$

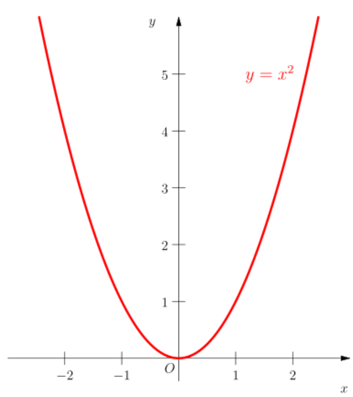
په یاد ولرئ: $\lim\limits_{x \to 1} h(x) = \lim\limits_{x \to 1}(x + 2) = 3$ او $\lim\limits_{x \to 1} h(x) = \lim\limits_{x \to 1} f(x) + \lim\limits_{x \to 1} g(x)$

له پورته څخه د لیمیټ لومړی خوي لاس ته راځي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی: د لیمیټ د جمعي خوي: د د وه یا څو توابعو د جمعي لیمیټ د همغو اعدادو د لیمیټ د جمعي سره برابر دی: $\lim_{x\to1} h(x) = \lim_{x\to1} f(x) + \lim_{x\to1} g(x)$

دویم: د لیمیټ د تفریق خوي: دا د پورته سره ورته حل لري. دا کار دې ګران زده کوونکي سرته ورسوي.

بیلګه ۱: که $g(x) = x^2$ او $f(x) = x$ وي، نو پیدا کړی: $f(x)\cdot f(x) = g(x)$ ب) د تابع شکل وکاږئ: پ) پیدا کړی: $\lim_{x\to2} f(x)$ ت) پیدا کوی: $\lim_{x\to2} g(x)$	

حل: الف) $f(x)\cdot f(x) = x\cdot x = x^2 = g(x)$

ب)

x	-2	-1	0	1	2
f (x)	4	1	0	1	4

پ) $\lim_{x\to2} f(x) = \lim_{x\to2} x = 2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ت) له گراف څخه لاس ته راځي: $\lim_{x\to 2} g(x) = \lim_{x\to 2} x^2 = 4$

له دې امله لرو: $\lim_{x\to 2} x^2 = \lim_{x\to 2}(x \cdot x) = \lim_{x\to 2} x \cdot \lim_{x\to 2} x = 2\cdot 2 = 4$

له پورته بیلگې څخه دا پایله لرو:

دریم: د لیمیټ د ضرب خوي:

د دوه یا ډیرو توابع د ضرب لیمیټ د هغو توابعو د لیمیټونو د ضرب سره برابر دی.

$$\lim_{x\to a} x^2 = \lim_{x\to a}(x\cdot x) = \lim_{x\to a} x \cdot \lim_{x\to a} x = a\cdot a = a^2$$

بیلگه:

که $f(x) = x$, $g(x) = x^2$ وي، دا لاندې لیمیټونه پیدا کړئ:

$a)\ \lim_{x\to -1} f(x)\ ,\ \lim_{x\to -1} g(x)$ $\qquad b)\ \lim_{x\to -1} f(x)\cdot \lim_{x\to -1} g(x)$

$c)\ h(x) = g(x)\cdot f(x)$ $\qquad d)\ \lim_{x\to -1} f(x) = \lim_{x\to -1}(x) = -1$

$\lim_{x\to -1} h(x)$ پیدا کړئ:

حل:a $a)\ f(x)\cdot f(x) = x\cdot x = x^2 = g(x) \Rightarrow \lim_{x\to -1} x^2 = 1$

x	-2	-1	0	1	2
f (x)	4	1	0	1	4

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$b)\ \lim_{x\to -1} f(x)\cdot \lim_{x\to -1} g(x) = -1\cdot 1 = -1 \Rightarrow \lim_{x\to -1} x^2 = 1$$

$$c)\ h(x) = x^2\cdot x = x^3 \quad , \ d)\ \lim_{x\to -1} h(x) = \lim_{x\to -1} x^3 = -1$$

بیلګه:

$f(x)=\dfrac{x^2-2x+5}{2x^2+1}$ تابع لرو، $\lim_{x\to 3} f(x)$ پیدا کړئ.

حل: $f(x)$ د دوه توابعو $g(x)=x^2-2x+5$ او $L(x)=2x^2+1$ وېش دی.

که x و3 ته نږدې شي کیدای شي لیمیټ د تابع د حل له لارې په $x=3$ کې پیدا شي:

$$\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3}\frac{x^2-2x+5}{2x^2+1}$$
$$= \frac{\lim_{x\to 3}(x^2-2x+5)}{\lim_{x\to 3}(2x^2+1)}$$
$$= \frac{3^2-2\cdot 3+5}{2\cdot 3^2+1} = \frac{8}{19}$$

له پورته بیلګې څخه لاندې لاس ته راځي:

څلورم: د لیمیټ د ویش خوي(مخرج د صفر سره برابر نه دی):

دیوې کسرې تابع لیمیټ(یعنې یوه تابع، چې د دوه توابعو له وېش(مخرج له صفر سره برابر نه

دی) څخه لاس ته راغلې وي) د تابع د صورت لیمیټ او د مخرج لیمیټ (مخرج له صفر سره

نابرابر دی) د وېش سره برابر دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه:

د $g(x)=\sqrt{3-x}$ ګراف وکاږئ او پیدا کړئ.

$a)\ \lim_{x\to 2} g(x)\ ,\ b)\ \lim_{x\to -1} g(x)\ ,\ c)\ \lim_{x\to 3} g(x)$

حل: په لاندې توګه مخ ته ځو:

الف)

$$\lim_{x\to 2} g(x)=1$$
$$\lim_{x\to 2}\sqrt{3-x}=\sqrt{\lim_{x\to 2}(3-x)}=\sqrt{1}=1$$

ب) له ګراف څخه: $\lim_{x\to -1} g(x)=2$

یادونه: $\lim_{x\to -1}\sqrt{3-x}=\sqrt{\lim_{x\to -1}(3-x)}=2\sqrt{4}$

$$c)\ \lim_{x\to 3^-} g(x)=\lim_{x\to 3^-}\sqrt{3-x}=\sqrt{\lim_{x\to 3^-}(3-x)}=\sqrt{0}=0$$

(د $f(x)\geq 0$ لپاره او د ټولو x قیمتونولپاره، چې c ته نږدې کیږي).

له پورته څخه لاس ته راوړنه:

پنځم: د لیمیټ د جذر (ریښې)خوي: د یوې تابع چې د جذر (ریښې) لاندې وي لیمیټ برابر دی، که چیرې تابع او لیمیټ دواړه د جذر لاندې ونیول شي.

پوښتنه: که $\lim_{x\to -2} f(x)=3$ وي، نو $\lim_{x\to -2}(f(x))^n$ پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

یادونه: د یوه پولینوم حد تیک داسې شمیرل کیږي، لکه د یوې تابع حد. د مخه مو وویل،چې یو پولینوم د ساده توابعو د مختلو نښلونو څخه لاس ته راځي.

تمرینونه.

که $\lim\limits_{x\to4} h(x)=-2$, $\lim\limits_{x\to4} g(x)=0$ او $\lim\limits_{x\to4} f(x)=5$ وي، نو پیدا کړئ:

1) $\lim\limits_{x\to4}(f+g)(x)$, 2) $\lim\limits_{x\to4}\left(\frac{g}{f}\right)(x)$, 3) $\lim\limits_{x\to4}(fg)(x)$

4) $\lim\limits_{x\to4}(h(x))$, 5) $\lim\limits_{x\to4}\left(\frac{g}{f}\right)(x)$, 6) $\lim\limits_{x\to4}(2h-3g)(x)$

7) $\lim\limits_{x\to4}(f\cdot h(x)$, 8) $\lim\limits_{x\to4}\left(\frac{2h}{3f-g}\right)(x)$, 9) $\lim\limits_{x\to4}(h(x)+f^2(x))$

10) $\lim\limits_{x\to2}(6x^3-2x+5x-3)$, 11) $\lim\limits_{x\to-2}\frac{3x-2}{x^2+1}$

د کسري - یا ماتو توابعو لیمیټ" Lmit of Rational functions

موږ د پولینومونو دا لاندې ویش لرو:

$$R(x)=\frac{Q(x)}{P(x)}=\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_0}{b_mx^m+b_{n-1}x^{m-1}+...+b_0};P_m\neq0$$

او د لیمیټ په هکله یې فکر کوو، چې د $b_0\neq0$ سره $\frac{a_0}{b_0}$ ترې لاس ته راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

فعاليت:

موږ پولينوم $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$ لرو. ددې پولينوم ليميټ دx د مختلفو قيمتونو لپاره څنگه پيداکولای شو؟

- که $x\to 0$ د صفر په لورې لاړ شي يا صفر ته ورنږدې شي.

- که $x\to 1$ يوه ټاکلي عدد ته ور نږدې شي.

- که $x\to\infty$ د ناپای په لورې لاړ شي.

-که د دريمې درجې پولينوم $P(x)=5x^3+3x^2+3$ ولرو، نو ددې پولينوم ليميټ دځلورو په خوښه قيمتونو لپاره پيداکړئ.

پوهيږو، چې د پولينومي توابعو ليميټ د ورکړل شوو x قيمتونو لپاره، لکه د نورو ساده توابعو په څېر، چې د جمعې، تفريق،ضرب او وېش(چې مخرج صفر نه وي) په څير ورکړل شوي دي، شمېرلای شو. غواړو د ناطقو توابعويا کسري توابعو ليميټ پيداکړو.

د ناطقو توابعو د ليميټونوشميرلو لپاره،که شته وي، له مختلفو لاروڅخه کار اخلو:

که ولرو: $\dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$، نو د تابع خويونه د $\lim\limits_{x\to a} g(x)\neq 0$ لپاره ساده کوو او د پورته پولينوم وېش، چې کسري تابع ده، ليميټ شميرو.

فعاليت: که $\dfrac{x^2-4}{x+2}$ ولرود $x\neq -2$ سره.

- ددې تابع حد د$x->-2$ لپاره پيدا کړئ.

- ددې تابع حد د $x\to 1$ لپاره پيدا کړئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

- ددې تابع حد د $x \to -1$ لپاره پیدا کړئ

- د تابع پیژندورشو ولیکئ!

- دا تابع څنګه ساده کولی شئ، چې پوله یې د $x \to -2$ لپاره وشمیرلی شو؟

د پورته فعالیت په بنسټ کولای شو، چې دکسري توابعو حدونه د مختلفو اعدادو لپاره پیداکړو او همداسې یوه کسري تابع که شوني وي، هغه ځایونو ته ورنږدې هم پیدا کړو، په کومو کې چې تابع تعریف نه وي.

ددې موضوع د روښانولو لپاره د مختلفو کسري توابعو څو بیلګې راوړو:

بیلګه ۱:

پیداکړئ: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x}{x+2}$ که $x=1$ وي. دا تابع تعریف ده او لرو:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x}{x+2}=\frac{(1)^2+1}{1+2}=\frac{2}{3}$$

که $x=1$ ځای په ځای کړو(Substitue) نو لاس ته راځي: $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)$

بیلګه ۲: پیدا کړئ: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-1}{x+3}$

حل: دا چې تابع په $x=0$ کې تعریف ده، نو لرو: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-1}{x+3}=\dfrac{0-1}{0+3}=-\dfrac{1}{3}$

بیلګه ۳: پیدا کړئ: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{x+1}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل: دا چې تابع په $x=1$ کې تعریف ده، نو لرو:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x+1}=\frac{1^2+1-2}{1+1}=\frac{0}{2}=0$$

که په یوه ځای یا عدد کې تابع تعریف نه لري، نو د مختلفو لارو یا متودونو څخه کار اخلو، چې لیمیټ یې پیداکړو، که شته وي.

بیلگه ۴: پیداکړئ: $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-6x+8}{x-2}$

حل: دا چې $f(x)$ تابع په $x=2$ چې تعریف نه لري، نو حد د تابع د حل له لارې نه شي پیداکیدای. داکیدای شي داسې پیدا کړو، چې د تابع صورت په ضریبونو تجزیه کړو.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-6x+8}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-4)(x-2)}{(x-2)}$$

د تابع لیمیټ که x و 2 ته نږدې شي، دا مانا لري، چې $x\neq 2$ دی.

دا کسري تابع و $\lim_{x\to 2}(x-4)$ رالنډیږي او لاندې لیمیټ لري:

$$\lim_{x\to 2}(x-4)=2-4=-2$$

بیلگه ۵: پیداکړئ: $\lim_{x\to 16}\frac{\sqrt{x}-4}{x-16}$

گورو، چې تابع په $x=16$ کې تعریف نه لري یعنې باید $x\neq 16$ وي.

په یاد ولرئ چې: $\sqrt{b}-\sqrt{a}$ او $\sqrt{b}+\sqrt{a}$ یو د بل مزدوج دي.

حل: د پورته تابع صورت او مخرج د $\sqrt{x}-4$ له مزدوج $\sqrt{x}+4$ سره ضرب کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lim_{x\to16}\frac{\sqrt{x}-4}{x-16}=\lim_{x\to16}\frac{\sqrt{x}-4}{x-16}\cdot\frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}+4}$$
$$=\lim_{x\to16}\frac{(x-16)}{(x-16)(\sqrt{x}+4)}$$
$$=\lim_{x\to16}\frac{1}{\sqrt{x}+4}=\frac{1}{\sqrt{16}+4}=\frac{1}{8}$$

بیلګه ۶: پیدا کړئ: $\lim_{x\to3}\frac{3-x}{\sqrt{x+1}-2}$

حل: تابع په $x=3$ کې تعریف نه لري، نو مخرج او صورت د مخرج په مزدوج ضربوو اولرو:

$$\lim_{x\to3}\frac{3-x}{\sqrt{x+1}-2}=\lim_{x\to3}\frac{3-x}{\sqrt{x+1}-2}\cdot\frac{\sqrt{x+1}+2}{\sqrt{x+1}+2}$$
$$=\lim_{x\to3}\frac{(3-x)(\sqrt{x+1}+2)}{(x+1-4)}$$
$$=\lim_{x\to3}-1(\sqrt{x+1}+2)$$
$$=\lim_{x\to3}-(\sqrt{3+1}+2=-4$$

بیلګه ۷:

پیدا کړئ: $\lim_{x\to1}\frac{\frac{5}{2x-3}+5}{x^2-1}$

حل: تابع په $x=1$ کې تعریف نه لري، نو په لاندې توګه مخ ته ځو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lim_{x\to1}\frac{\frac{5}{2x-3}+5}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{\frac{5+10x-15}{2x-3}}{x^2-1}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{10x-10}{(2x-3)(x^2-1)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{10(x-1)}{(2x-3)(x-1)(x+1)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{10}{(2x-3)(x+1)}=\frac{10}{(2(1)-3)(1+1)}$$

$$=\frac{10}{-2}=-5$$

د کلاسيک لارې د کسري اعدادو لیمیټ:

اوس یوه بله تابع د څېړنې لاندې نیسو، چې $g(x)$ یې بولو: $g(x)=\dfrac{x^2+x-2}{x-1}$

دلته هم دا پوښتنه کوو، چې که $x=1$ ځای ته نږدې شي، نو د $g(x)$ تابع د کوم قیمتونه غوره کوي:

مونږ بیا هغه ځای په پام کې نیسو، چې $x=1$ د مخ لورې(کیڼې لورې) ته خورا نږدې پروت وي او هغه ځای، چې د $x=1$ وروسته یا ښۍ لورې ته خورا نږدې پروت وي:

$$g(1-h)=\frac{(1-h)^2+(1-h)-2}{(1-h)-1}$$

$$=\frac{(1-2h+h)^2+(1-h)-2}{-h}=\frac{-3h+h^2}{-h}=3-h$$

$$g(1+h)=\frac{(1+h)^2+(1+h)-2}{(1+h)-1}$$

$$=\frac{(1+2h+h)^2+(1+h)-2}{h}=\frac{-3h+h^2}{h}=3+h$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا دواړه لاس ته راوړنې یا پایلې اوس داسې تشریح کوو:

که h ناپای کوچنی وټاکو، یعنې هغه ځایونه راونیسو چې $x=1$ ځای ته ناپای نږدې پراته وي، نو د تابع ارزښتونه به هم و 3 ته ناپاي نږدې پراته وي. عدد 3 د $x=1$ ځای لپاره د $g(x)$ تابع د حد قیمت دی. ددې لپاره لیکو: $\lim\limits_{x\to 1} g(x)=3$

تمرینونه:

د لاندې معادلو حدونه پیدا کړئ، که شته وي.

1) $\lim\limits_{x\to 2}(6x^3-2x^2+5x+3)$ 2) $\lim\limits_{x\to -1}(x^7+2x-5)$

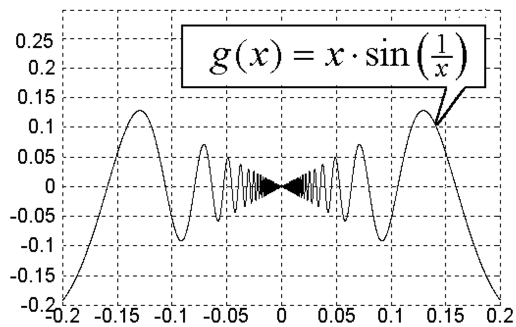
3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x+2)^2-4}{x}$ 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x^2+7x}{(2x-3)^2-9}$

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{x+3}-\frac{1}{3}}{x}$ 6) $\lim\limits_{x\to 4}(\frac{1}{x}-\frac{1}{4})(\frac{1}{x-4})$

7) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\frac{2x}{x^2+1}-\frac{4}{5}}{x-2}$ 8) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x-4}{\sqrt{x}-2}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مثلثاتي توابعو حدونه Limit of trigometric function



فعاليت:

_ دساين پوله يعني $\lim_{x\to a} \sin x$ د x د مختلفوقيمتونولپاره پيدا کړئ،که $x \in [0;2\pi]$ وي:

_ که $x\to 0$ وي. _ که $x\to 30$ وي. _ که $x\to 45$ وي._ که $x\to 60$ وي.

_ که $x\to 90$ وي.- که $x\to 135$ وي.- که $x\to 270$ وي._ که $x->2\pi$ وي.

- د پورته ورکړشوو قيمتونولپاره د کوساين $\cos x$ ليميټ پيدا کړئ.

قضيه: که x په راديان ورکړ شوی وي، نو $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ دی.

ښوونه: دx=0 لپاره تابع $\frac{\sin x}{x}$ تعريف نه لري او ناټاکلي بڼه $\frac{0}{0}$ لري.

موږ غواړو، د$x\to 0$ او $\frac{\sin x}{x}$ لپاره په لاندې ډول يو جدول وليکو(په پورته مساوات کې x په راديان اندازه کيږي):

(c) ketabton.com: The Digital Library

په درجه	په راديان	$\sin x$	$\frac{\sin x}{x}$
10°	0.1745	0.1736	0.9948
5°	0.0873	0.0872	0.9988
3°	0.05235	0.05233	0.9996
1°	0.0174532	0.0174524	0.9995
$30'$	0.00872664	0.00872653	0.99999
$6'$	0.00174532	0.00174532	≈ 1
$3'$	0.00087266	0.00087266	≈ 1
$1'$	0.000291	0.000291	≈ 1
. . .	. . .	. . .	. . .

(لومړی ستون او دوهم ستون د x لاندې دي.)

په پورته جدول کې گورو، چه د x لپاره $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ قيمت غوره کوي.

په شميرنيزه توگه د $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ ښوونه په لاندې ډول مخ ته بیایو:

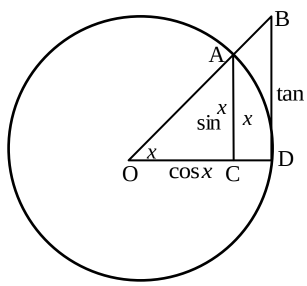
یوه دايره په پام کې نيسو چې د هغې مرکز (0) اوشعاع يې OD او 1 $\overline{OA}=\overline{OD}=1$ ده (لاندې شکل وگورئ). د A له ټکی څخه پر $\overline{OD}$ يو عمود رسموو، چې دا ورانګه په C ټکي کې غوځوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د D په ټکي باندې پر دایرې یو مماس رسموو، داmmاس له $\overline{OA}$ څخه غځیدلي کر ښه د B په ټکي کې غوڅوي.

اوس A د D سره تړو:

موږ لرو :



$$\sin x = \frac{\overline{AC}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{AC}}{1} = \overline{AC}$$

$$\cos x = \frac{\overline{OC}}{\overline{OA}} = \overline{OC}$$

$$\tan x = \frac{\overline{DB}}{\overline{OD}} = \overline{DB}$$

دا چې x په رادیان اندازه کیږي، نو لرو: $\overset{\frown}{AD} = x$

له پورته شکل څخه لاندې نا مساوات لرو: $\overset{\Delta}{OBD} > \overset{\angle}{AOD} > \overset{\Delta}{AOC}$

همداسې لرو:

$$\frac{1}{2}\cos x.\sin x < \frac{1}{2}\overline{OD^2}.x < \frac{1}{2}\overline{OD}.\tan x$$

په پورته نامساواتو کې $\overline{OD} = 1$ ږدو او د نامساواتو ټولې خواوې په دوو کې ضربوو، نو لرو: $\cos x.\sin x < x < \tan x$

یا په همدې ډول لیکلای شو: $\cos x.\sin x < x < \dfrac{\sin x}{\cos x}$

که د پورته نامساواتو ټولې خواوې پر $\sin x$ وویشو، نو لرو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\cos x < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

یا:
$$\frac{1}{\cos x} > \frac{\sin x}{x} > \cos x$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x} > \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} > \lim_{x\to 0}\cos x$$

دا چې د $x \to 0^{+}$ لپاره $\cos x \to 1$ دی، نو لرو:

$$\frac{1}{1} > \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} > 1$$

$$1 > \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} > 1$$

گورو چې په عین وخت کې $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ له 1 لوی او هم له یو 1 کوچنی دی، نو له دې نامساواتو څخه دا لاندې مساوات لرو: $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$

پام: که $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ او $x = -\alpha$ و لیکو، نو دا لاندې ترې لاس ته راځي:

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{\sin(-\alpha)}{-\alpha} = \frac{-\sin\alpha}{-\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\alpha}$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0^{-}}\frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0^{-}}\frac{\sin\alpha}{\alpha}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له پورته دواړو مساواتو څخه غوښتنه لاس ته راځي:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

بیلگه ۱: $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}$ پیدا کړئ.

حل: که $2x=\alpha$ اوکه $x\to 0$ وي، نو $\alpha\to 0$ او $\frac{\sin 2x}{2x}=\frac{\sin\alpha}{\alpha}$ لرو.

له پورته مساواتو څخه لاس ته راځي:

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=1\Rightarrow 2\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}=2\cdot 1=2$$

بیلگه ۲:

وښنایاست $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{2x}$

که $y=5x$ وي او $x\to 0$، نو $y->0$ هم لرو:

$$\frac{\sin 5x}{5x}\ \frac{5}{2}=\frac{\sin 5x}{\frac{5}{2}(2x)}\ \frac{5}{2}=\frac{\sin 5x}{2x}$$

$$=\frac{5}{2}\frac{\sin y}{y}$$

له دې امله لرو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{5}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin y}{y}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin y}{y}\frac{5}{2}=\lim_{x\to 0}\frac{5x}{2x}$$
$$=\frac{5}{2}\cdot 1=\frac{5}{2}$$

تمرینونه: دا لاندې غوره قضیه وښایاست.

که x په رادیان ورکړ شوی وي، نو لرو $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1$ او لاندې اجرات وکړئ:

الف) تانجنت $\tan x$ د $\sin x$ او $\cos x$ په ترمونو ولیکئ.

ب) $\frac{\tan x}{x}$ د $\sin x$ او $\cos x$ په ترمونو و لیکئ.

پ) دپورته قضیې لیمیټ پیدا کړئ.

ت) ایا قضیه رښتیا ده؟

لاندې لیمیټونه (حدونه)وشمېرئ.

$$1)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x+\frac{\pi}{6})}{x+\frac{\pi}{6}}\ ,\ 2)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x},\ 3)\ \lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\tan^2 x}\ ,$$

$$4)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x}\ ,\ 5)\ \lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{\sin 3x}\ ,\ 6)\ \lim_{x\to 0}\sin 5x\cos 3$$

$$7)\ \lim_{x\to 0}\frac{\tan(2x-1)}{4x^2-1}\ ,\ 8)\ \lim_{x\to 0}\sqrt{\cos 2x-\cos x+1}+\sin^2 x)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $x \to \pm\infty$ لپاره پوله ارزښت یا لیمیټ

د $\frac{Q(x)}{P(x)};\ P(x)\neq 0$ کسري توابعو لپاره مو لیمیټونه وشمیرل، چې x په خوښه وو.

اوس $\frac{Q(x)}{P(x)};\ P(x)\neq 0$ لپاره لیمیټونه غواړو و شمیرو، که $x\to\pm\infty$ وي.

فعالیت:
زده کوونکي دې د هرې لاندې تابع د حد له شمېرلو د مخه، د توابعو ګرافونه انځور کړې او په ګرافونو کې دې یې دې ته پام وي،چې دا څنګه په تعریف شوې ورشوې کې ځغلي.

لومړی: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{5}{x-2}$ پیدا کړئ.

د 5 وېشنه په یوه ډېر لوی (ناپای) مثبت(منفي) عدد باندې یو ډېر کوچنی مثبت(منفي) عدد ورکوي یعنې $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{5}{x-2}=\frac{5}{\pm\infty}=0^{\pm}$.
ګراف G_f یو پروت اسیمپتوت $y=0$ لري، چې له پورته او کښته ګراف ته ور نږدې کیږي.

دویم: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{-3}{x+1}$ پیدا کړئ.

د -3 وېشنه په یوه ډېر لوی مثبت(منفي) عدد باندې یو ډېر کوچنی مثبت(منفي) عدد ورکوي یانې $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{-3}{x+1}=\frac{-3}{\pm\infty}=0^{\pm}$.
ګراف G_f یو پروت اسیمپتوت $y=0$ لري، چې له پورته او کښته ګراف ته ور نزدې کیږي.

دریم: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{5}{x^2-2x}$ پیدا کړئ.

په مخرج کې یوازې x^2 ستر رول لوبوي. د مربع کوني له لاري هر عدد مثبت

(c) ketabton.com: The Digital Library

کیږي.که 5 په یوه ډېر لوی مثبت عدد وویشل شي، نو یو خورا کوچنی مثبت عدد ترې
لاس ته راځي، یعنې $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{5}{x^2-2x}=\dfrac{5}{+\infty}=0^+$
ګراف G_f یو پروت اسیمپتوت $y=0$ لري، یوازې له پورته لور ور نږدې کېدني سره.

څلورم: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{-3}{x^2-2}$ پیدا کړئ.

د مخرج مربع کونې سره منفي عددونه هم مثبت کیږي.د -3 وېشنه په یوه ډېر لوی
مثبت عدد باندې یو ډېر کوچنی منفي عدد ورکوي یانې $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{-3}{x^2-2}=\dfrac{-3}{+\infty}=0^-$.
ګراف G_f یو پروت اسیمپتوت $y=0$ لري، یوازې له کښته ګراف ته ور نږدې کیږي.

د پرېښودنې- یا ترې صرفنظر کونې یا له ترې تیرېدنې اصول:

لومړی: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x-1}{x^2-2}$ پیدا کړئ.

په صورت کې د x جګعدد(توان؟)، په مخرج کې د x^2 توان په پام کې نیسو او همداسې
له ټولو ثابتو تېرېږو (ټولې ثابتې پرېښول کیږي،صرف نظر ترې کیږي) او بیا x لنډیږي.
که 1 په ډېر لوی مثبت(منفي) عدد وویشل شي، نو
$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x-1}{x^2-2}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x}{x^2}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1}{x}=0^\pm$ ترې لاس ته راځي.

(څېره G_f پروت ګاونډ(مجانب) $y=0$ لري، چې له پورته او کښته ورنزدې کیږي.

دویم: غواړو د $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2-2}{x+2}$ تابع حل پیدا کړو.

حل: په صورت کې د x^2 او په مخرج کې د x له ټولو توانونو په پام کې نیولو او له ټولو
ثابتو ترېږو(صرفنظر ترې کوو) او بیا یې د x سره لنډوو. په روښانه توګه ټول حدونه$\pm\infty$
لاس ته راځي یعنې $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2-2}{x+2}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}x=\pm\infty$.
شکل G_f مائله اسیمپتوت راکوي، ځکه چې د صورت درجه له مخرج څخه د 1 په اندازه
ستره ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دریم: $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2x^2-2}{3x^2+2x}$ پیدا کړئ.

په صورت او مخرج کې د x^2 ټول توانونه په پام کې نیسو او له ټولو ثابتو تیریږو او بیایې د x^2 سره لنډوو.

ټولې پولې په روښانه توګه $-\frac{2}{3}$ راکوي

یعنې $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2x^2-2}{3x^2+2x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2x^2}{3x^2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2}{3}=-\frac{2}{3}$

شکل G_f پرته اسیمپټوت راکوي، چې $y=-2/3$ ده.

څلورم: $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2x^2+2x-1}{3x^3+2x^2-3x+2}$ پیداکړئ

په صورت کې له x^2 څخه کوچنیو ټولو توانونو او په مخرج کې د x^3 له ټولو کوچنیو توانونو او همداسې له ثابتو تیریږو. که -2 په $\pm\infty$ وویشل شي، نو یو کوچنی مثبت یا منفي عدد یعنې $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2x^2+2x-1}{3x^3+2x^2-3x+2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2x^2}{3x^3}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2}{3x}=\frac{-2}{\pm\infty}=0^{\pm}$ ترې لاس ته راځي.

شکل(څیره) G_f یو پروت اسیمتوت $y=0$ لري، چې له پورته او کښته لور ورنږدې کیږي.

شمیرنیز حلونه(د شمیرنې له لارې حل):

اول: $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x-1}{x^2-2}$ وشمیرئ.

په صورت او مخرج x^2 له نوکانو(لینده کیو یاقوسونو) راوستنې او بیا د x^2 سره لنډونې وروسته مخرج د 1 په لور ځي او صورت دصفر په لور، یعنې صورت ترمونه صفر ته نژدې کیږي.

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x-1}{x^2-2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\frac{2}{x^2}\right)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}{1-\frac{2}{x^2}}=\frac{0^{\pm}}{1}=0^{\pm}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

شکل G_f یوه مایله اسیومپټوت(مجانب) لري، ځکه چې د صورت درجه د مخرج له درجې څخه په 1 کوچنۍ ده.

دویم: وشمیرئ: $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2x^2+1}{x^4-2x^2+2}$

په صورت او مخرج کې هغه د لوی توان x یعنې x^4 له نوکانو یا لیندکیوبهر نیسو او بیا په ترتیب شمیرنیزه عملیه مخ ته بیایو ، نو لاس ته ترې راځي:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^4\left(\frac{-2}{x^2}+\frac{1}{x^4}\right)}{x^4\left(1-\frac{2}{x^2}+\frac{2}{x^4}\right)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{-2}{x^2}+\frac{1}{x^4}}{1-\frac{2}{x^2}+\frac{2}{x^4}}=\frac{0^-}{1}=0^-$$

ټولیز خویونه:

بیلگه۱: پیداکړئ: $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x^2-2}{x+1}$

په پورته بیلگه کې داسې مخ ته تللي یو،چې په صورت کې له ټولو عددونو څخه تیرېږو، چې د خپلواکې متحولې توان له 1 کوچنی یعنې صفر وي او په صورت کې له ټولو هغو خپلواک متحولو تیریږو، چې توان یې له 2 څخه کوچنی وي.. گورو، چې په صورت کې x له کوم ضریب سره پاتې کیږي، له دې امله پورته تابع د مثبت-منفي ناپای په لور ځي.

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x^2-2}{x+1}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x\left(3x-\frac{2}{x}\right)}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x-\frac{2}{x}}{1+\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{+\infty}{1}=+\infty$$

بیلگه ۲: پیدا کړئ: $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-1}{x^2-2}$

په پورته بیلگه کې په صورت کې له 1 او مخرج کې له 2 څخه تېرېږو او بیا صورت او مخرج په x ویشو. لاس ته راوړنه یې د x په یوه ثابت عدد وېشل دي. چې د $x\to\infty$ سره تابع ± 0 ته ځي، یعنې: $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-1}{x^2-2}=0\pm$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بيلگه ۳: پيدا کړئ: $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2x^2-2}{3x^2+2x}$

په صورت کې له 2 او مخرج کې له $2x$ څخه تيرېږو او د x^2 سره يې لنډوو او په دې ډول لاندې پايله لرو: $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2x^2-2}{3x^2+2x}=-\frac{2}{3}$

تمرينونه:

د لاندې تمرينونو حدونه د پورته ورکړشوو مختلفو لارو له لارې وشميرئ:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{6}{x^2-x}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^4+x^2+x+6}{x^3-3x+4}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^5+x^2-x+9}{x^4+x^2-x-5}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+x^2-x+7}{x^3-x+5}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2-2}{x+1}$$

متماديت(ناپرېکيدنه)"Continuity"

د درس په دې برخه کې لولو ، چې يوه تابع په يوه ټکي يا يوه اېنتروال کې کوم حالت غوره کوي. ايا دا تابع په کوم ځای کې ټوپ وهي، يا پرې کيږي او که يا په متمادي يعنې نه پرېکيدنې ډول د اينتروال په دننه کې ځغلي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

موږ په دې موضوع د تابع متمادیت څېړو او متمادیت تعریفوو

فعالیت:

لاندې توابع لرو:

$$f(x)=x^2-1 \ , \ f(x)=\frac{1}{x} \ , \ f(x)=\frac{|x|}{x}$$

- د دې درې توابعو شکلونه وکاږئ.

- وګورئ، چې د توابعو ګرافونه څنګه ځغلي. په کومه تابع کې ګراف تړلی ځغلي او چرته ماتیږي، ټوپ وهي او ...

له پورته فعالیتونو څخه لاندې پایله لرو:

د توابعو متمادیت Continuous functions

په دې موضوع کې موږ د یوې تابع د متمادیت په هکله څېړنه کوو او د متمادیت پیژند(تعریف) ورکوو.

پیژند:

که b د f تابع تعریفورشو (- ساحه) کې یو حقیقي عدد وي. د f تابع په b متمادي بلل کیږي، که د ټکي (b.f(b)) نږدې د f ګراف داسې وکښلی شو، بې له دې چې د پنسل څوکه له کاغذ څخه پورته کړو.

له دې امله $f(x)=x^2-1$ تابع او $f(x)=\frac{1}{\mathrm{x}}$ تابع د $x=b$ په ټکي کې متمادي ده.

$f(x)=\frac{|x|}{x}$ تابع په $x=0$ متمادي نه ده یانې ټوپ وهي کیږي.(څیره په ۵ –م مخ کې)

(c) ketabton.com: The Digital Library

تابع په $x = a$ کې غیر متمادي ده، که پرې شي(تشیا ولري)، ټوپ ووهي او یا ماته شي.

لرو: $\lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = 1$ او $\lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = -1$ نو له دې امله $\lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x}$ په $x = 0$ کې نشته یعنې تابع د $x = 0$ په ټکي کې متمادي نه ده.

بیلګه ۱:

که $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & ; \quad x \geq 1 \\ 1-x & ; \quad x < 1 \end{cases}$ وي، نو:

الف) د تابع ګراف وکاږئ.

ب) پیدا کړئ $\lim_{x\to 3} f(x)$

پ) پیداکړئ: $\lim_{x\to 1} f(x)$

که تابع په $x = 3$ او $x = 1$ کې متمادي وي.

حل:

الف) ګراف دې د ګرانو لوستونک دنده وي.

ب)
$$\lim_{x\to 3} f(x) = (2x+1) = 7$$
$$f(3) = 7$$

پ)
$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (2x+1) = 3$$
$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (1-x) = 0$$

د ب) او پ) له مخې لرو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lim_{x\to1^+} f(x) \neq \lim_{x\to1^-} f(x)$$

له دې امله تابع په $x=3$ ناپرېکیدونې او $x=1$ کې پرېکیدونکې ده.

بیلګه ۲:

که $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x3+x}{x} & ; \ x\neq0\\ 3 & ; \ x=0\end{cases}$ **وي.**

الف) فنکشن رسم کړئ

ب) و څیرئ، چې تابع په $x=2$ او $x=0$ کې متمادي ده او که نه؟

حل: الف) د تابع ګراف لپاره

x	-2	-1	0	1	2
f(x)	5	2	3	2	5

ب) $\lim_{x\to2} f(x) = \lim_{x\to2} \dfrac{x^3+x}{x} = \lim_{x\to2} (x^2+1) = 2^2+1 = 5$

$$f(2) = \frac{2^3+2}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

له دې امله د f لیمیټ شته او $\lim_{x\to2} f(x) = f(2)$ دی، نو تابع متمادي دی که $x=2$ وي.

وي دې $x=0$

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} \frac{x^3+x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^-} \frac{x^3+x}{x} = 1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دې معنا دا ده، چې $\lim_{x\to 0} f(x)=1$ او په دې معنا دی، چې $f(0)=3$

دا دا معنا لري، چې $\lim_{x\to 0} f(x)\neq f(0)$

تابع په $x=0$ کې غیرمتمادي ده.

بیلګه۳: که $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x+3}$, $x\neq -3$ وي.

ایا $f(x)$ تابع په $x=-3$ کې متمادي ده؟

حل: تابع $f(-3)$ تعریف نه لري، نوله دې

امله تابع په $x=-3$ کې متمادي نه ده.

له دې بیلګې او د تیرو درسونو څخه لرو:

تعریف (پیژند):

که f یوه تابع وي، چې د ټولو x لپاره په همغه واز اینتروال کې چې $x=c$ لري تعریف وي،نو د f تابع په $x=c$ کې متمادي بلل کیږي، که دا لاندې شرایط پوره وي:

1- که $f(x)$ تعریف وي.

2- که $\lim_{x\to c} f(x)$ شته وي (موجود وي).

3- که $\lim_{x\to c} f(x)=f(c)$ رښتیا وي.

که تابع د ټولو $x\in(a,b)$ لپاره متمادي وي، نو تابع په واز اینتروال (a,b) کې هم متمادي ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلگه ۴:

که $f(x)=\begin{cases}2x^2+1 & ; \ x\le 1\\ 4+x & ; \ x>1\end{cases}$ وي.

وګورئ، چې تابع چیرته متمادي او چیرته غیرمتمادي ده.

حل: په $x=1$ کې f تعریف لري

$$f(x)=3$$
$$\lim_{x\to -1} f(x)=\lim_{x\to -1}(2x^2+1)=3$$
$$\lim_{x\to -1} f(x)=\lim_{x\to -1}(4+x)=5$$
$$\lim_{x\to -1} f(x)\ne \lim_{x\to -1} f(x)$$

له دې امله تابع په $x = 1$ کې غیرمتمادي ده

بیلگه ۵:

که $f(x)=\begin{cases}2x^2+1 & ; \ x<2\\ 3 & ; \ x=2\\ x+3 & ; \ x>2\end{cases}$ وي، نود $f(x)$ تابع متمادیت په $x=2$ کې وڅیرئ.

حل: تابع $f(x)$ په $x=2$ کې تعریف لري او لرو $f(2)=3$

$$\lim_{x\to 2^+} = \lim_{x\to 2^+}(x+3)=5$$
$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^-} f(x)$$
$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}(x^2+1)=5 \Rightarrow \lim_{x\to 2} f(x)=5$$

دا چې $f(x)=3$ دی، نو له دې امله $\lim_{x\to 2} f(x)\ne f(2)$.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا په دې معنا دی، چې تابع په $x=2$ کې غیرامتمادي ده.

بیلگه ۶:

که $f(x)=\begin{cases} 2\sin x & ; \quad x \le \frac{\pi}{2} \\ ax^2+\pi^2 & ; \quad x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$ وي، نو:

a داسې پیدا کړئ، چې f په $x = \frac{\pi}{2}$ کې متمادي وي.

حل: $\lim_{x\to\frac{\pi^-}{2}} f(x)=2 \quad ; \quad \lim_{x\to\frac{\pi^+}{2}} f(x)=a\frac{\pi^4}{4}+\pi$

$f(x)$ متمادي ده، نو له دې څخه لاس ته راځي:

$$a\frac{\pi^2}{4}+\pi^2=2$$

و

$$=\frac{a}{4}\pi^2=2-\pi^2$$

$$a\pi^2=8-4\pi^2 \Rightarrow a=\frac{8}{\pi^2}-4$$

تمرینونه:

1- یوه په خوښه تابع ولیکئ او د تابع گراف وکاږئ او وگورئ، چې تابع چیرته تعریف ده او متمادیت یې وښایاست.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په لاندې پوښتنو کې وڅیړئ، چې تابع په ورکړشوي ټکي کې متمادي یا غیرمتمادي دي.

2) $f(x)=x^2+5(x-2)^7 \;;\; x=3$

3) $f(x)=\dfrac{x+3}{(x^2+2x-5} \;;\; x=-1$

4) $f(x)\dfrac{\sqrt{8-x^2}}{2x^2-5} \;;\; x=-2$

5) $f(x)=\dfrac{1}{(x-3^3)} \;;\; x=3$

6) $f(x)=|x-3| \;;\; x=3$

7) $g(x)=\dfrac{|x|}{x} \;;\; x=0$

د متمادي یا ناپرېکیدونکو توابعو خویونه

دلته دا خویونه همغه د لیمیټ خویونه دي.

فعالیت:

-1 د f او g توابعو جمع پیداکړئ:

$(f+g)(x)=$...........

-2 د f او g توابع په $x=2$ کې متمادي دي، نو:

$\lim_{x\to a} f(x)=$........... & $\lim_{x\to a} g(x)=$

-3 د لیمیټ قیمتونه استعمال کړئ:

$$\lim_{x\to a}(f(x)+g(x))=\lim_{x\to a}(f+g)(x)$$

$=$.................:...

$=$......................:...$=(f+g)(a)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له دې امله $(f+g)$ په $x=a$ کې متمادي ده.

که f او g توابع په $x=c$ کې متمادي وي، نو د لاندې توابعو څخه یې هره یوه په $x=c$ کې متمادي ده.

1- د توابعو جمع $f+g$

2- د توابعو تفریق $f-g$

3- د توابعو ضرب $f \cdot g$

د توابعو وېش $\frac{f}{g}\ ;\ g \neq 0$

بیلګه۱:

که $f(x)=\sin x+1$ **او** $g(x)=x^2+3x-2$ **وي، نو:**

1- f او g په $x=1$ کې متمادي دي.

2- وښیږئ، چې ایا

الف) $f(x)+g(x)=\sin x+x^2+3x-1$ او

ب) $(\sin x+1)(x^2+x^2+3x-1)$ په $x=1$ کې متمادي او که غیرمتمادي دي.

حل: $1)\ \lim\limits_{x \to 1} f(x)=f(1)=\sin 1+1$

نو f په $x=1$ کې متمادي دی.

$$\lim_{x \to 1} g(x)=g(1)=2$$

نو g په $x=1$ کې متمادي ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

2- الف):

$$a)\ \sin x + x^2 + 3x - 1 = (\sin x + 1) + (x^2 + 3x - 2)$$
$$= f(x) + g(x) = (f+g)(x)$$

د متمادي توابعو جمع په $x=1$ کې متمادي ده.

ب) :
$$(\sin x + 1)(x^2 + 3x - 2) = f(x)\cdot g(x)$$
$$= (f\cdot g)(x)$$

نو د متمادي توابعو ضرب په $x=1$ کې متمادي دی.

بیلگه ۲:

که $g(x) = 3x - 2$, $f(x) = x + 1$ وي، وښیئ، چې ایا $f(x)\cdot g(x)$ په $x = 2$ کې متمادي ده.

حل:

له پورته ښخه لاس ته راځئ، چې $f(x)\cdot g(x)$ متمادي

$$\lim_{x\to 2} f(x) = f(2) = 3$$
$$\lim_{x\to 2} g(x) = 4 = g(2)$$
$$f(x)\cdot g(x) = 3x^2 + x - 2$$ ده.
$$\lim_{x\to 2} f(x)\cdot g(x) = 3(4) + 2 - 2 = 12$$
$$= \lim_{x\to 2} f(x)\cdot \lim_{x\to 2} g(x) = f(2)\cdot g(2) = 3.4 = 12$$

دکینې لورې بند انتروال په [a,b] کې گراف متمادي تابع په گوته کوي یا ښایي، هلته چې $f(a) \neq f(b)$ دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

که ولرو $f(a) < k < f(b)$ گراف له $(b, f(b))$

ټکي څخه نشي انځورېدلی تر څو افقي کرښه

$y = k$ د ثابتې k سره غوڅه نه کړي.

له پورته څخه دا لاندې غوره جمله لیکلی شو:

که تابع f په بند اینتروال [a,b] کې متمادي او k د a او b ترمنځ پروت وي، نو هلته لږ تر لږه یو عدد c د f(a) او f(b) ترمنځ شته، داسې چې f(c) = k دی.

بیلگه ۳: که $f(x) = x^3 + 4x\ ,\ x \in [1,2]$ وي، نو **وښایئ، چې یو** $c \in (1,2)$ **شته، داسې چې** $f(c) = 11$ **وي.**

حل: $f(x)$ یو پولینوم دی نو f په بند اینتروال [1,2] کې متمادي دی.

لاندې لرو:

$$f(1) = 1^3 + 4(1) = 5 \quad ; \quad f(2) = 8 + 4(2) = 16$$
$$5 < 11 < 16 \quad , \quad f(1) \neq f(2)$$

له دې امله یو عدد $c \in (1,2)$ شته، داسې چې $f(c) = 11$ دی.

بیلگه ۴:

که $f(x) = \begin{cases} 2x + 4 & ; \ -1 \le x < 2 \\ |x - 10| & ; \ 2 \le x \le \mathbf{20} \end{cases}$ ي ، نو:

الف) وآزمایئ، چې تابع متمادي ده.

ب) وآزمایئ، چې یو $c \in (-1,20)$ شته داسې چې $f(c) = 6$ دی او د c ارزښت پیدا کړئ.

حل:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = 2x+4 = 8$$
$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = 10-2 = 8$$

له دې امله لرو:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2} f(x) = 8$$
$$f(x) = 10-2 = 8$$

ګورو چې تابع په [-1, 20] کې متمادي ده.

$$b)\ f(-1) 2x\ -1+4 = 2$$
$$f(20) |20-10| = 10 \ \Rightarrow\ f(-1) \neq f(20)$$

په دې اساس لرو: $2 < 6 < 10$

له دې امله لرو: $c \in (-1, 20) : f(c) = 6$

$$2x+4 = 6 \Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow x = 1 \in (-1,\ 2)$$
$$|x-10| = 6$$
$$x-10 = 6 \ \Rightarrow x = 16 \in (-2, 20)$$
$$10-x = 6 \ \Rightarrow x = 4 \in (-2, 20)$$

$$= 6 \qquad |x-10| \Rightarrow$$

د c ارزښتونه 1, 4, 16 دي.

بیلګه ۵ :

که وي: $f(x) = 2\sin x + 3;\ x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}],$ ، نو وښایی چې

(c) ketabton.com: The Digital Library

نشاد دهید که -] $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$[$c \in$ شته دی د کوم لپاره چې $f(c)=4$ او c پیدا کړی.

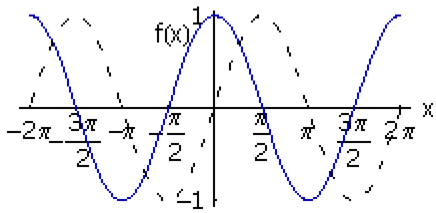
حل : تابع f د ساین تابع ددی ، نو له دې امله f متمادي دی.

$$f(-\frac{\pi}{2}) = 2 \sin -\frac{\pi}{2} + 3 = 2\,(-1) + 3 = 1$$

$$f(\frac{\pi}{2}) = 2 \sin \frac{\pi}{2} + 3 = 2\,(1) + 3 = 5$$

مو، لرو : $f(-\frac{\pi}{2}) \neq f(\frac{\pi}{2})$

تابع fمتمادي دی او لرو: $1 < 4 < 5$



ټکي ټکي د ساین ګراف دی.

دا ګراف که په ۳ کې ضرب کړی او ۳ ورزیات کړي د بیلګې ګراف راکوي.

دا په دې معنا چې، که $c \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ موجود وي، د هغه لپاره $f(c) = 4$ صدق کوي.

که د دې لپاره c پیدا کړو ، نو په لاس راځي:

$$f(c) = 2 \sin c + 3 = 4$$

$$2 \sin c = 1 \Rightarrow \sin c = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow c = \frac{\pi}{6}$$

له ګراف څخه واضح ایدل کیږي،، چې f په انتروا ل $[a,b]$ کې متمادي دی، $f(a)$ او $f(b)$ متضادي علامې لري، نو c د منځنی ارزښت قضیې په بنسټ د $f(a)$ او$f(b)$ په

(c) ketabton.com: The Digital Library

منځ کې و K=0 ته لږ تر لږه یو C د a او b په منځ کې داسې شتون لري، چې له هغې نتیجه f(c) = 0 لاس ته راځي.

دا په دې معنا، چې x=c د برابرون یا مساوات f(x) = 0 یو حل دی.

بیلگه۶ :

که $f(x)=x^3+5x-23$ **وي، نو وښایئ،چې د f تابع د x -محور په اینتروال** (2.3) **کې غوڅوي.**

حل: f **پولینوم تابع ده ، نو f په اینتروال** [2,3] **کې متمادي دی.**

$$f(2)=2^3+5(2)-23=-5$$
$$f(3)3^3+5(3)-23=19$$

$f(2)\neq f(3)$ **او د متضادو مخنخښو(علامو) سره.**

له دې امله د $c\in(2,3)$ لپاره لرو چې $f(c)=0$ دی.

لنډ: غیرمتمادي توابع هغه دي، چې په یو کوم ځاي کې تعریف نه وي

تمرینونه:

وښایئ چې تابع په ورکړ شوي ټکي کې متمادي ده.

1) $f(x)=x^3-2(x+1)^5$; $x=2$

2) $g(x)=\dfrac{x^2+3}{(x^2-x+5)(x^2+2x}$; $x=-1$

3) $h(x)=\dfrac{x\sqrt{x}+1}{(x+2)^3}$; $x=4$

(c) ketabton.com: The Digital Library

4- تشریح کړئ، چې ولې تابع $f(x) = \frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{2}}{x}$ په $x=0$ کې غیرمتمادي ده؟

5- که $x \in [2,3]$ ، $f(x) = \frac{18}{x} + 2$ وي، و ښایئ چې $c \in (2,3)$ شته داسې چې $f(c) = 10$ وي او c پیدا کړئ.

6- وښایئ چې د لاندې مساوات لپاره یوحل شته:

$$x^3 - 4x + 1 = 0 \quad ; \quad x \in [1,2]$$

7- وي دې: $x \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$; $f(x) = \sin x + \cos x$ وښایئ، چې مساوات $\sin x + \cos x = 0$ په اینتروال $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ کې یو حل لري.

8- وي دې:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & ; \quad -1 \le x \le 3 \\ 13 - 2x & ; \quad 3 < x \le 7 \end{cases}$$

الف) ایا f په $x=0$ کې یو متمادي تابع دی؟

ب) $c \in (-1,7)$ داسې پیدا کړئ، چې $f(c) = 0$ وي.

د لـــومړي څپـــرکي تولګه " Chapter Summary "

پیژند:

د $f(x)$ تابع یو لیمیټ L لري، که x ترڅنګ یو حقیقي عدد c ته لاړ شي. په دې معنا چې $f(x)$ لپاره، چې ترڅنګ L ته ځي دا دی، چې x ترڅنګ c ته لاړشي او داسې یې لیکو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $f(x), x \in D_f$ تابع د x_0 په ځاي کې يو کيڼ اړخيز ليميټ $a_l = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x)$ لري،
که د هر ترادف (x_n) لپاره، چې n غړي يې د x_0 کيڼ لور ته پراته و ي او د توابعو ارزښتونه $f(x_n)$ د a_l په لور هڅيږي.

په ورته توګه ښی اړخيزه ليميټ:

د $f(x), x \in D_f$ تابع د x_0 په ځاي کې يو ښی اړخيز ليميټ $a_r = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x)$ لري،
که د هر ترادف (x_n) لپاره، چې n غړي يې د x_0 ښي لور ته پراته و ي او د توابعو ارزښتونه $f(x_n)$ د a_r په لور وهڅيږي..

که تابع f(x) همغه ليميټ L ولري که x له ښی اويا کيڼې لورې و c ته نږدې شي، نو ليميټ شته دی او د L سره برابر دی.

دا داسې ليکو: $\lim\limits_{x \to c} f(x) = L$

د پولې يا حد خويونه(خواص) :

که f او g توابع وي، c;Lاو M حقيقي اعداد وي داسې چې $\lim\limits_{x \to c} f(x) = L$ او $\lim\limits_{x \to c} g(x) = M$، نو دا په لاندې توګه ليکلی شو:

1) $\lim\limits_{x \to c} (f + g)(x) = \lim\limits_{x \to c} f(x) + \lim\limits_{x \to c} g(x) = L + M$

2) $\lim\limits_{x \to c} (f - g)(x) = \lim\limits_{x \to c} (f(x) - g(x)) = \lim\limits_{x \to c} f(x) - \lim\limits_{x \to c} g(x) = L - M$

3) $\lim\limits_{x \to c} (f \cdot g)(x) = \lim\limits_{x \to c} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to c} g(x) = L \cdot M$

(c) ketabton.com: The Digital Library

--------------------- --

$$4)\ \lim_{x\to c}\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M};\ (M \neq 0)$$

$$5)\ \lim_{x\to c}\sqrt{f(x)} = \sqrt{L}$$

(د $f(x) \geq 0$ او د x د ټولو قیمتونو لپاره، چې c ته ور نږدې کیږي.

قضیه: که x په رادیان ورکړ شوی وي، نو لرو: $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$

قضیه: که x په رادیان ورکړ شوی وي، نو لرو: $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x} = 1$

پیژند: f دې یوه تابع وي او د ټولو x لپاره په یوه واز انتروال کې چې $x = c$ وي ،تعریف وي، نو وایو: f په $x = c$ کې متمادي دی، د لاندې شرایطو سره:

1) $f(x)$ تعریف لري 2) $\lim_{x\to c} f(x)$ شته دی

$$3)\ \lim_{x\to c} f(x) = f(c)$$

که تابع د ټولو $x \in (a, b)$ لپاره متمادي وي، نو تابع په ټول انتروال (a, b) ې متمادي ده.

تعریف یا پیژند : وایو چې یو تابع په یوه بند انتروال $[a, b]$ ې متمادي ده، که تابع له ښئ لورې په $x = a$ کې متمادي وي او له کینې لورې په $x = b$ کې او د واز انتروال (a, b) په هر قیمت کې متمادي وي.

د متمادي توابعو خویونه(خواص): که f او g په $x = c$ کې متمادي وي، نو دا لاندې هره یوه تابع په $x = c$ کې متمادي ده.

لومړی) د توابعو جمع یعني $f+g$ تابع

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم) د توابع تفریق یعنې f-g تابع

دریم) د توابعو ضرب یعنی f.g

ځلورم) د توابعو ویش یعنې $\frac{f(x)}{g(x)}\ ;\ g(x) \neq 0$

د منځني قیمت قضیه:

که تابع f په بند انټروال [a,b] کې متمادي وي او k د f(a) او f(b) ترمنځ یو عدد وي، نو لږ تر لږه د a او b ترمنځ یو عدد c شته، د کوم لپاره چې f(c)=k باور لري.

د ځپرکي تمرینونه:

سم ځواب وټاکئ:

که $\lim_{x \to 2} f(x) = 4$ وي، نو $\lim_{x \to 2}(3x-20)(x+1)$ ی:

a) 5   b) -5   c) 4   d) 3

ب) پیدا کړئ $\lim_{x \to 1} \frac{x2+1}{x2+3x-2}$

a) 1   b) 2   c) 1   d) $\frac{1}{2}$

1- لیمیت پیداکړئ $\lim_{x \to 5} \frac{|x+5|}{x^2+3x-2}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

a) 1 b) 5 c) -1 d) -5

-2 $\lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x}$ دی.

a) -2 b) -1 c) 1 d) 2

-3 $\lim_{x \to 0} \frac{3x - \sin x}{x}$ دی.

a) 2 b) -2 c) 1 d) 3

-4 $\lim_{x \to -2} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 + x - 2}$ دی.

a) $-\frac{5}{3}$ b) $\frac{5}{3}$ c) 0 d) 1

-5 $\lim_{x \to 1.4} [2x + 0.3]$ دی.

a) 1 b) 3 c) 0 d) نشته

-6 $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{\tan 2x}$ دی.

a) 1 b) 0 c) $\frac{3}{2}$ d) $\frac{2}{3}$

-7 $\lim_{x \to 4} \frac{x - 4}{\sqrt{x} - 2}$ دی.

a) $2 + \sqrt{2}$ b) 2 c) $\sqrt{2}$ d) 4

(c) ketabton.com: The Digital Library

--------------------- ---

-8 $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin}{1+\cos 2x}$ دی.

a) 1 b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{4}$ d) 4

-9 لاندې توابع سره جمع کړئ.

$\lim_{x \to 3} f(x) = 5 \quad \& \quad \lim_{x \to 3}(x) = -2$

-10 که $f(x) = x^2 + 1$ وي، پيداکړئ:

$\lim_{x \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$

-11 تابع $f(x) = \begin{cases} 3x - b & ; \quad x \le 3 \\ 10 - x & ; \quad x > 3 \end{cases}$ په $x = 3$ کې متمادي دی، b پيدا کړئ.

-12 وښايئ، چې تابع $f(x) = 3x^2 - x - 5$ په اينتروال $(1,2)$ کې حل لري.

۱۳ - د لاندې ۱ – ۹ توابعو ليميتونه وشمېرئ.

1) $\lim_{x \to -1} (x^2 + x)$ 2) $\lim_{x \to 4} (x^2 + x)$ 3) $\lim_{x \to -2} 2x + 3$

4) $\lim_{x \to 0} |x|$ 5) $\lim_{x \to 2} \frac{x}{x}$ 6) $\lim_{x \to 1} 7$

7) $\lim_{x \to 1} \sqrt{\frac{x^2}{x}}$ 8) $\lim_{x \to -2} \frac{x^2 - 4}{x + 2}$ 9) $\lim_{x \to 3} \frac{x - 3}{x^9 - 9}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱٤-- که وي: $f(x)=\begin{cases}2+x; x<1\\ x^2 \quad ; x\geq 1\end{cases}$

الف) د تابع ګراف وکاږئ.

ب) $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ پيدا کړئ.

15: هغه توابع چې په يوه عدد د بېلګې په توګه صفر کې تعريف نه لري ، څه بلل کيږي

16 پيدا کړئ: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\dfrac{5}{2x-3}+5}{x^2-1}$

17-- $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{-2x^2+1}{x^4-2x^2+2}$ وشمېرئ.

18--

که $f(x)=\begin{cases}2x^2+1 & ; \quad x<2\\ 3 & ; \quad x=2\\ x+3 & ; \quad x>2\end{cases}$ وي، نود $f(x)$ تابع متماديت په $x=2$ کې وڅېړئ.

۱۹- يوه په خوښه تابع وليکئ او د تابع ګراف وکاږئ او وګورئ، چې تابع چېرته تعريف ده او متماديت يې وښاياست.

۲۰ - په لاندې له ۲ – ۷ پوښتنو کې څېړو، چې ايا تابع په ورکړشوي ټکي کې متمادي يا غيرمتمادي دي.

2) $f(x)=x^2+5(x-2)^7 \ ; \ x=3$

3) $f(x)=\dfrac{x+3}{(x^2+2x-5} \ ; \ x=-1$

4) $f(x)\dfrac{\sqrt{8-x^2}}{2x^2-5} \ ; \ x=-2$

5) $f(x)=\dfrac{1}{(x-3^3)} \ ; \ x=3$

6) $f(x)=|x-3| \ ; \ x=3$

7) $g(x)=\dfrac{|x|}{x} \ ; \ x=0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲۱- تشريح کړئ، چې ولې تابع $f(x) = \frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{2}}{x}$ په $x=0$ کې غيرمتمادي ده؟

۲۲- که $f(x)=\frac{18}{x}+2\ ,\ x\in[2,3]$ وي، و ښايئ چې $c\in(2,3)$ شته داسې چې $f(c)=10$ وي او c پيدا کړئ.

۲۳- وښايئ چې د لاندې مساوات لپاره يوحل شته:

$$x^3-4x+1=0 \quad ; \quad x\in[1,2]$$

۲٤- وي دې: $x\in(\frac{\pi}{2},\pi)$; $f(x)=\sin x+\cos x$ وښايئ، چې مساوات $\sin x+\cos x=0$ په اينتروال $(\frac{\pi}{2},\pi)$ کې يو حل لري.

۲۵ الف: وښيئ، چې ايا لاندې تابع د x_0 په ځاي کې مفمادي ده.

a) $f(x)=\begin{cases}-2x\\ \sqrt{x}\end{cases}$ c) $f(x)=\begin{cases}\sin x\\ e^x\end{cases}$	$x_0=0$ د $x\le 0$ لپاره $x_0=0$ د $x>0$ لپاره $x_0=0$ د $x\le 0$ لپاره $x_0=0$ د $x>0$ لپاره	b) $f(x)=\begin{cases}2\\ x^2+1\end{cases}$ d) $f(x)=\begin{cases}-x+1\\ \ln x\end{cases}$	$x_0=1$ د $x\le 1$ لپاره $x_0=1$ د $x>1$ لپاره $x_0=1$ د $x\le 1$ لپاره $x_0=1$ د $x>1$ لپاره

۲٦-- که $f(x)=2\sin x+3\ ;\ x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ وي، نو وښايئ چې $c\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ شته،

(c) ketabton.com: The Digital Library

د هغه لپاره چې ربښتیا وي $f(c)=4$ او c پیداکړئ.

۲۷: لاندې لیمیټونه وشمېرئ.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x+\frac{\pi}{6})}{x+\frac{\pi}{6}} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\tan^2 x} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{\sin 3x} \qquad \lim_{x\to 0}\sin 5x\cot 3x$$

$$\lim_{x\to \frac{1}{2}}\frac{\tan(2x-1)}{4x^2-1} \qquad \lim_{x\to \pi}\sqrt{\cos 2x-\cos x+1}$$

$$\lim_{x\to 1}(\cos^2 x+\sin^2 x) \qquad \lim_{\theta\to 0}\frac{\theta}{\sin\frac{1}{2}\theta}$$

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin 2\theta}{\sin 3\theta} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\cos\frac{\pi}{2}x}{x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sin(x-1)}{\sqrt{x}-1} \qquad \lim_{x\to 1}\frac{\sin\left(\sqrt{x}-1\right)}{x-1}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - 2x}{x}$$

20) $$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{1-\cos x}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\tan 2x}{\sin^2 x}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{1}{1-x}\cos\frac{\pi x}{2}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x}{x^3+2x^2}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$$

25) $$\lim_{x\to 0} \frac{\cos 3x - \cos 7x}{x^2}$$

26) $$\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x+\frac{\pi}{4})}{x+\frac{\pi}{4}}$$

27) $$\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\sin(x-\frac{\pi}{4})}{x(x-\frac{\pi}{4})}$$

28) $$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x - x\cos 3x}{x}$$

29) $$\lim_{x\to 0} \frac{4x}{\sin 3x - \sin 5x}$$

30) $$\lim_{x\to 0} \frac{|\sin x|}{x}$$

31) $$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{\sin^2 x - 1}}{x}$$

32) $$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{2x-\pi}$$

33) $$\lim_{x\to 1} \frac{\sin(3x-3)}{1-x^3}$$

34) $$\lim_{x\to 0} \frac{3x^2+5x}{\sin 2x}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویمه برخه: مشتق یا رابیلیدنه

په تیره برخه کې مو د پولي څیړنه وکړه. وبه ګورو، چې دا د پولي درس د مشتق یا رابیلیدنې لپاره اړیین دی.

د تابع منځ ارزښت تغیر Average rate of change

دلته دې د سالنګ یا ماهیپر د سړک خیره راشي.(دلته ځېره راځي)

دکتاب په دې برخه کې موږ د ریاضیاتو یوه غوره برخه، چې د ریاضیاتو زړی ورته ویلی شو، تر څیړنې لاندې نیسو، نو له دې امله لازم ګڼم، چې په دې هکله داسې مهم څه

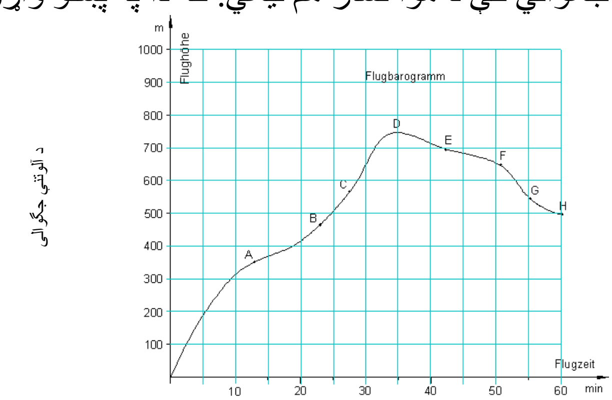
(c) ketabton.com: The Digital Library

د یوه یادښت په څیر راوړم: که له یوه ځای څخه وبل ځای ته د تابع د تغیر منځ ارزښت Averagerate of change څخه غږېږو ، نو موخه ترې په یوه ټکي یا دوه ټکو کې د تابع جګوالی، میل اویا تانجنت دی او دا درېواړه کلمې د ریاضیاتو له مخې په همغه یوه معنا دي او وبه ګورو، چې همداسې کمښتوېش یا د تفاضل وېش(Difference quotient) هم.

دې کلمو ته په انګرېزي کې **slop** وایي، چې زموږ ادبیتو د میل په نامه بلل کیږي.

په یوه ټکي کې د تابع د ګراف میل(جګیدنه)

الوتکوکې د الوتنې دلیک(الوتنلیک) الې (Flight barogramm) جوړې دي، چې تل الوتنې جګوالی د الوتنې د وخت په واک کې یا د وخت تابعیت کې رسموي او په هر جګوالي کې د هوا فشار هم لیکي. که دا په پښتو واړوو، نو د لیک بکس به ورته ووایو.



Flight barogramm

په پورته ګراف کې د یوې الوتکې د الوتنې د بیلا بیلو وختونوجګوالی ښوول شوی.

فعالیتونه:

_ په پورته څیره کې د ګراف جګوالی د A په ټکي کې د B ټکې سره پرتله کړئ. په ورته توګه دګراف میل د E په ټکي کې د G ټکي سره پرتله کړئ.

_ روښانه کړئ، چې ولې په یوه ټکي کې باید له جګوالي، میل یا تانجنت څخه غږېږو؟

_ وهڅیږئ، چې په یوه ټکي کې د ګراف جګوالي لپاره یو متود تعریف کړئ او له انځور څخه د A او B په ټکو کې جګوالی وټاکئ.

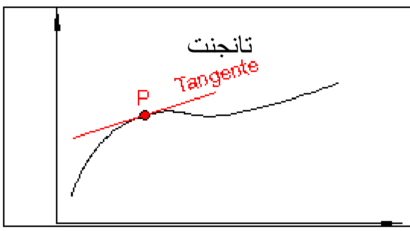
_ ایا فکر کوئ، چې پهB ټکي کې نسبت وA ټکي ته جګوالی زیات دی؟

_ ایا فکر کوئ، چې د E او G په ټکو کې جګوالی منفي دی؟ دلته د E په ټکي کې د ارزښت له مخې جګوالی زیات دی نسبت د G ټکي ته؟

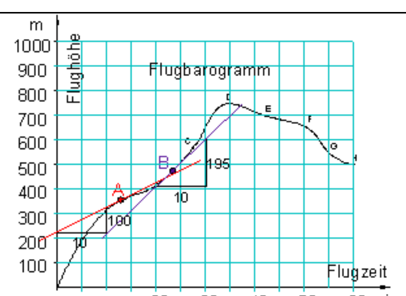
(c) ketabton.com: The Digital Library

_ ایا د یوې کرښې جګوالی او په همدې ترتیب د یوې منحني هرچیرته توپیر لري او که نه ؟

لاس ته راوړنه:
ګورو، چې په یوه منحني کې د ګراف جګوالی هرچیرته برابر نه دی، نو له دې امله باید ټکی په ګوته کړو، چې هلته میل څېړل کیږي.
په لاندې بیلګه کې به روښانه کړو، چې تنها د یوې (سیده)کرښې میل هرچیرته برابر دی، نو له دې امله دلته د یوې کرښې د میل یا جګوالي ځخه غږیږو.
بریښي چې لاندې پیژند یا تعریف عاقلانه دی.

(تعریف): د یوې تابع ګراف میل(جګوالی) د P په یوه ټکي کې په همغه ټکي د تانجنت د میل د ګراف سره برابر دی.	

لیدل کیږي چې دلته یو تانجنت د کرښې تعریف لري، چې د لمستکي(مماس) په چاپیریال کې د امکاناتو سره سم لمستکي(مماس) ته ښه ور نږدې کیږي.
ددې پیژند یا تعریف له مخې په یوه ټکي کې د یوه ګراف میل د یوې کرښې میل دی.
د ګراف د جګېدنې ټاکلو لپاره د A اوB په ټکو هر یوه کې یوه کرښه (تانجنت) انځوروو، چې ګراف ته خورا زیاته نږدې کیږي.
د میل یا جګېدنې مثلث په مرسته جګېدنه په شډل یا ساده ډول شمیرل کیدی شي:
A په ټکي کې جګیدنه:



$$\frac{100\,m}{10\text{ min}} = 10\,\frac{m}{\text{min}}$$

د B په ټکي کې جګیدنه:

$$\frac{195\,m}{10\text{ min}} = 15.5\,\frac{m}{\text{min}}$$

زموږ د بیلګې لپاره میل یا جګیدنه په یوه ټاکلي ټکي کې د لحظوي(سملاسي) میل سرعت په معنا دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د A په ټکي کې: د الوتنې وخت نږدې $12.5\,\text{min}$، د میل یاجګیدنې چټکتیا (سرعت) نږدې $10\,\frac{m}{\text{min}}$ ده.

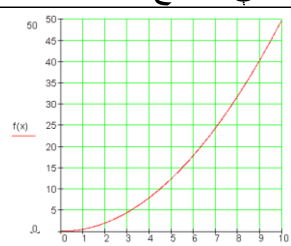
د B په ټکي کې: د الوتنې وخت نږدې $23.0\,\text{min}$، د جګیدنې سرعت نږدې $19.5\,\frac{m}{\text{min}}$ دی.

تانجنت تر اوسه فقط د لیدنې له مخې تعریف شوی، چې د لمسټکې چاپیریال ته خورا ډېر نږدې کیږي. له دې امله ممکن وه، چې د ګراف میل د A او B په ټکو کې هم یوازې په نږدې ډول وټاکل شي، دا په عمل کې د قناعت وړ نه دی.

په یوه ټکي کې د تابع دګراف میل (جګیدنه):

معلومه ده، چې یو ریلګاډی د تمځای څخه له خوزېدو(حرکت) وروسته خپله چټکتیا(سرعت) په کراره کراره زیاتوي. وهلی لار(د تمځای څخه لرېوالی) تل زیاتیږي. د تمځای څخه لرېوالی د چټکتیا یا سرعت په واک کې یا تابع دی.

عمل د لاندې تابعمساوات له لارې لیکلی شو.(مخامخ یا لاندې د تابع ګراف) دلته د x وخت د ثانیې او د s لار د متر لپاره ټاکلې او لیکو: $S = f(x) = 0.5x^2$



فعالیت:

1- اوس دې منځنی تغیر ارزښت Averagerat of change(منځنی میل ارزښت) د 3 – مې او 7 –مې ثانیې ترمنځ وشمېرل شي.

2- ددې لپاره دې اړونده قاطع یا سیکانت انځور شي او د هغې جګوالی دې وشمیرل شي.

3- اوس دې د تغیر ارزښت(منځنی جګوالی) د 3 –مې او 7 –مې ثانیو ترمنځ وشمیرل شي.

4- وښایاست، چې په دریمه ثانیه کې د ارزښت تغیر یا جګوالی څومره دی؟

کمښت ویش یا د تفاضل ویش Difference quotient

د یوې کرښې میل یا جګیدنه بې له مشتق نیونې ټاکلکیدی شي.

کرښه $y = f(x) = mx + a$ لرو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دې کربښې د جګیدنې فرمول په لاندې ډول دی:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

قاطع(غوڅی seconce):

قاطع هغه کربښه ده، چې منحني د P_0 او P_1 په دوه ټکو کې غوڅوي.

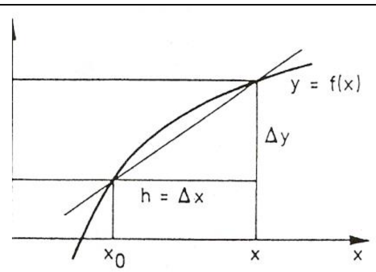
د قاطع میل یا جګیدنه(جګوالیsecant):

دا چې قاطع هم یوه کربښه ده نو میل(جګوالی) یې هم د یوې کربښې میل په ډول شمیرل کیږي.

په لاندې کې m_S د جګوالي لپاره لیکل کیږي.

$$m_s = m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

(تعریف): د $y = f(x)$ تابع دې د x_0 په یوه چاپیریال او په x_0 کې پخپله تعریف شوې تابع وي، x د x_0 څخه بیل خو د چاپیریال په یوه خوښه یا په زړه پورې ځای دی(مخامخ څیره دې وکتل شي). نو د تفاضل یا کمبنتویش Difference qutient د قاطع میل شته دی، چې په لاندې ډول یې لیکو:

	$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$

د f تابع لپاره فرمول: $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$.

دا فرمول د f په ګراف باندې د دوه ټکو ترمنځ د قاطع د میل شمیرنه ده. د ا ټکي د $x-$ محور باندې د x او $x+h$ ټکي دي.

د کمبنت وېش یا د تفاضلونو ویش د مشتق د تعریف لپاره په کار راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه:

د $y = f(x) = 3x^2 - 5x + 4$ تابع دې ورکړ شوې وي. د دې تابع کمښت ویش(دتفاضل وېش) پیدا کړئ.

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{3(x+h)^2 - 5(x+h) + 4 - (3x^2 - 5x + 4)}{h}$$

$$= \frac{3x^2 + 6xh + 3h^2 - 5x - 5h + 4 - 3x^2 + 5x - 4}{h}$$

$$= \frac{6xh + 3h^2 - 5h}{h}$$

$$= 6x + 3h - 5$$

تمرینونه:

1 - کمښتویش (د تفاضل وېش) ارزښت د P او Q په ټکو کې وټاکئ.

a) P(3,2) , Q(5,4) b) P(2,4) , Q(3,1)

2- د $x = x_0$ په ځاي کې د f تابع د تانجنت جګوالی وټاکئ.

$a)\ f(x) = x^2\ ,\ x_0 = 2$ $b)\ f(x) = 0.5x^2\ ,\ x_0 = 3$

د کمښتویش(د تفاضل ویش) او مشتق لاندې څه پوهیږو او د دوي ترمنځ توپیر څه دی؟

4 - د یوې تابع د سکانت(قاطع) لاندې څه پوهیږو او د تانجنت جګیدو لاندې څه پوهیږو؟ او د دوي ترمنځ کومې اړیکې پرتې دي؟

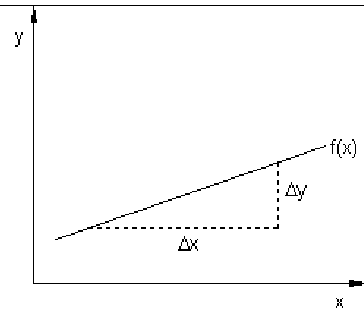
(c) ketabton.com: The Digital Library

رابیلیدنه یا مشتقشمیرنه **Diffrentialcaculation**

فعالیت:

پام وکړئ، لکه په یوه ثابت میل $a_1 = \frac{\Delta y}{\Delta x} = constant$ کې، د بیلګې په توګه په خطي یا لاینیز تابع کې د $f(x) = a_1 x + a_0$ سره میل شته او که نه؟

_ پام وکړئ، چې دا میل به څه ځانګړي خویونه ولري؟ ایا جګیدنه به په هر ځای کې فرق ولري اوکه ثابت به وي؟



ایا په مختلفو وختونوکې اړین بولی، چې د تغیرحالت(د میل حالت) کې د تابع د تلنې حالت و څیړئ؟

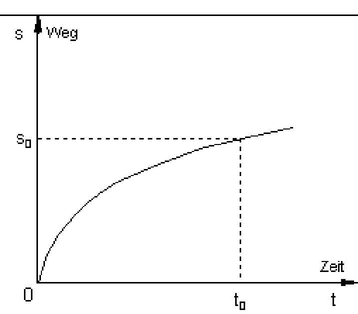
_ او یا له دې امله لحظوی چټکتیا(سرعت) $v(t_0)$ په لار- وخت- دیاګرام کې وڅیړئ؟

_ ایا د مشتق شمیرنې په مرسته دا پرابلم حل کیدی شي؟

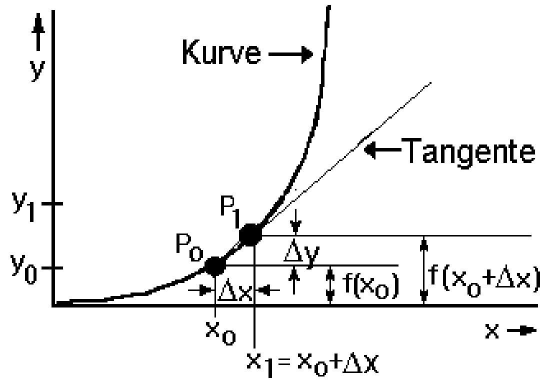
په پام کې نیولې لحظه $t_0 \,\hat{=}$

دا تر دې وخت وهل شوې لار $s_0 \,\hat{=}$

یادونه: مخامخ Zeit د وخت ا و Weg د لار په معنا دي.



(c) ketabton.com: The Digital Library



مشتقشمیرنه = د یوې منحني میل یا جګیدنه (Differential caculation

تانجنت: که د P_1 او P_0, ټکي یو بل ته ناپای نږدې شي، نو له قاطع څخه تانجنت جوړیږي.

د تانجنت جګیدنه: د تانجنت جګیدنه د قاطع د جګیدنې،، لیمت ،Limit,, یا حد دی.

$$m_t = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

فعالیت:

1- له پورته څیړې او اړونده شننې څخه د مشتق لپاره څه فکر کوئ؟

2- د derivative (مشتق) کلمې لاندې څه پوهیږو؟

او دا په ساده پښتو څه معنی ورکوي؟

3- له کمښت وېش(د تفاضلونو ویش) څخه څنګه و مشتق ته راځو؟ په دې هکله د پورته څېړې څخه په ګټه اخسلوخپل نظر وواياست.

4- له 2-م فعالیت څخه وواياست، چې ولې دا شمېرنه رابیلېدنه یا مشتق بلل کیږي؟

پام: لکه د مخه مو چې ګوته ورته ونیوله، د derivative کلمه نوې ده، نو له دې امله دا څو ټکي په پام کې نیسو: derivative د رابیلیدنې په معنا دی، چې موږ یې تراوسه مشتق بولو.

: که د تابع دا کمښتویش(د تفاضل وېش) $x->x_0$ او(همداسې) $\Leftrightarrow x->0$ او یا په (همدې ډول) $\Leftrightarrow h->0$ لپاره یو حد ولري, نو د $y=f(x)$ تابع د $x=x_0$ په ځای کې د مشتق قابلیت لري او ددې لپاره لیکو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(\frac{dy}{dx})_{x=x_0} = f'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} =$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h};...$$

دا لیمیټ داسې ښایو: $(\frac{dy}{dx})_{x=x_0} = f'(x)$

د x_0 ځای کې د $y = f(x)$ له مشتق(Derivativ,) یا رابیلدنې) څخه یوه بله سیده یا بل ډول کړه لار رابیله وو.

د مشتق ساده شمیرنې لپاره یوه بیلګه:

د $f(x) = x^2 - 3x + 2$ مشتق غواړو پیدا کړو.
ددې کمښتوېش په لاندې ډول دی:

$$\frac{y-y_0}{x-x_0} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

$$= \frac{((x_0+\Delta x)^2 - 3(x_0+\Delta x)+2)-(x_0^2-3x_0+2)}{\Delta x}$$

$$= \frac{x_0^2 + 2x_0\Delta x + \Delta x^2 - 3x_0 - 3\Delta x + 2 - x_0^2 + 3x_0 - 2}{\Delta x}$$

$$= \frac{2x_0\Delta x + \Delta x^2 - 3\Delta x}{\Delta x}$$

$$= 2x_0 + \Delta x - 3$$

او د لیمیټ $\Delta x \to 0$ سره یې مشتق لاس ته راځي:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0}(2x_0 + \Delta x - 3) = 2x_0 - 3.$$

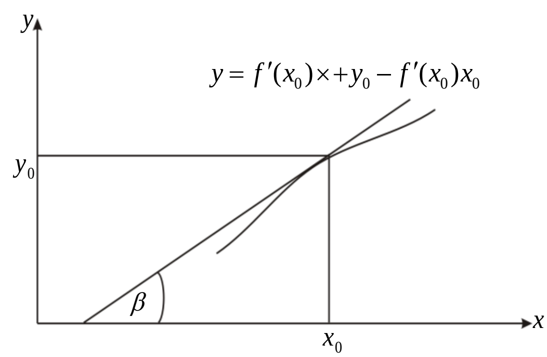
د دې لپاره دا لاندې تعریف(پیژند) ورکوو:

که یو د $y = f(x)$ تابع د x_0 په ځای کې مشتق وړ وي، نو هغه لاندنی کرښه چې د (x_0, y_0) کې څخه تېرېږي او میل یا جګوالی یې $f'(x) = \tan\beta$ دې او په لاندې ډول لیکو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{y-y_0}{x-x_0}=f^{'}(x)\Leftrightarrow y=f\,'(x_0)x+y_0-f\,'(x_0)x_0$$

او دا د (x_0,y_0) په ټکي کې د ورکړ شوې منحني $y=f(x)$ تانجنت بلل کيږي(پرتله پورته کيڼ شکل)



موږ اوس د څو بنسټيزو توابعو مشتق شمیرنه تر څیړنې لاندې نیسو.

بیلګه۱ :

د یوې ثابتې مشتق:

موږ دالاندې تابع لرو،چې ارزښت یې یوثابت دی.

ثابت $y=f(x)=c=Cons$ ، نو د هر x_0 ځای لپاره لرو:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\frac{c-c}{h}=0$$

$$\Rightarrow(\frac{dy}{dx})_{x=x_0}=f\,'(x_0)=0$$

بیلګه۲ :

یوه $f(x)=x$ خطي(کرښیزه) تابع لرو، د x_0 په ځای کې غواړو د دې تابع مشتق پیدا کړو او د مشتق تابع هم:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta y}$$

$$\Leftrightarrow\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{(x_0+\Delta x)-x_0}{\Delta y}$$

$$\Leftrightarrow\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{x_0+\Delta x-+x_0}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta x}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow\frac{\Delta y}{\Delta x}=1$$

$$\Leftrightarrow f\,'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=1=1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو $f'(x_0)=1$ د x_0 په ځای کې د تابع مشتق دی او $f'(x_0)=1$ د مشتق تابع ده یعنې یوه ثابته ده.

بیلګه ۳ :
د $y=f(x)=c.u(x)$ ډوله تابع مشتق د c =ثابتې سره.

د ثابتې قانون:
د یوې تابع مشتق، چې له یوې ساده تابع او یوې ثابتې سره د ضرب له لارې منځ ته راغلی وي، برابر دی د ساده تابع د مشتق سره، چې د(ثابتې $= c$) سره ضر ب شوی وي. یعنې له $y=f(x)=c.u(x)$ څخه لرو: $f'(x)=c.u'(x)$ $\Rightarrow$

ثبوت:

$$\Rightarrow f(x_0)=c.u(x_0)$$

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{c\cdot u(x_0+\Delta x)-c\cdot u(x_0)}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0} c\cdot\frac{u(x_0+\Delta x)-u(x_0)}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow f'(x_0)=\underbrace{\lim_{\Delta x\to 0} c}_{c}\cdot\underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x_0+\Delta x)-u(x_0)}{\Delta x}}_{u'(x_0)}$$

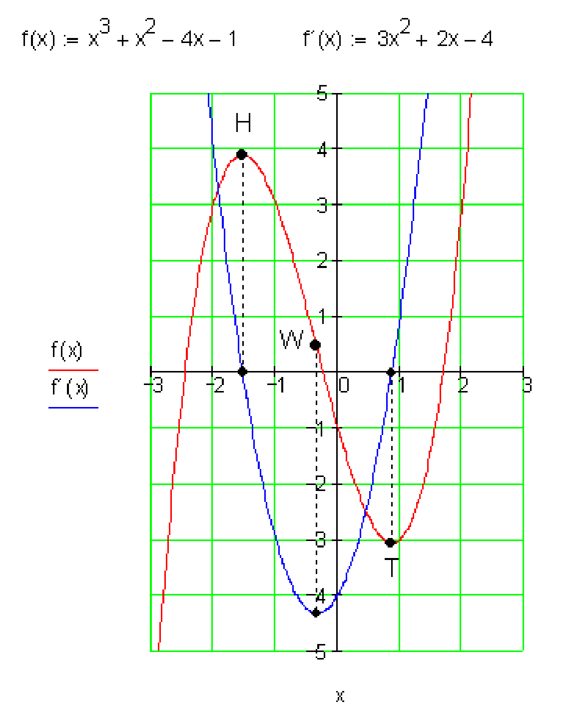
$$\Leftrightarrow f'(x_0)=\underline{\underline{c\cdot u'(x_0)}}$$

تمرینونه:

1- د تفاضل وېش او د مشتق لاندې څه پوهېږو؟
2- د دوی ترمنځ څه اړیکې (پرتې) دي؟
3- د قاطع (سکانت) او تانجنت جګېدنې لاندې څه پوهېږو؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

د x_0 په ځای کې د تابع مشتق او د مشتق تابع

شکل کې سره منحني تابع، شنه کرښهمنحني د تابع مشتق او وبه ګورو، چې له همدې امله د مشتق تابع هم ده.	

فعالیت:

1- د x_0 په ځای کې د تابع مشتق یعنې څه؟

2- د یوې تابع له مشتق نیونې وروسته دې مشتق ته څه وو ایو؟

3- که د تابع مشتق د مشتق تابع ونوموو، روښانه کړئ، چې ولې تابع ده او ددې تابع درجه، د لومړۍ تابع سره پرتله کړئ.؟

• ایا له دې توپیر څخه د مشتق کلمه روښانه کولی شئ؟

ددې د روښانه ونې لپاره د لاندې بیلګې څخه کار اخلو

بیلګه۱: تابع $y = f(x) = x^2$ دې ورکړ شوې وي. غواړو د $x = x_0$ په ځای کې او په ځانګړې توګه د $x_0 = 2$ په ځای کې د هر څه لومړی کمښتویش(د تفاضل وېش) پیداکوو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x = x_0:$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$
$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x_0+\Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x}$$
$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x_0^2 + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x_0\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x$$

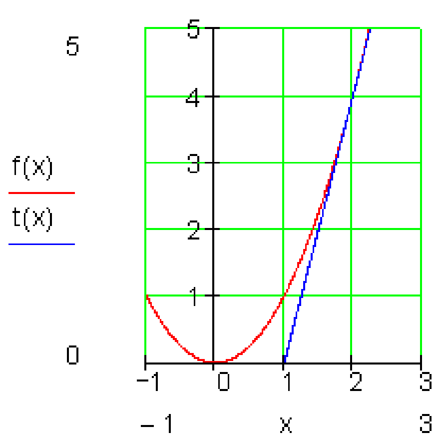
اوس د لیمیټ د لاس ته راوړلو له لارې د مشتق ضریب ته راځو:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}(2x_0 + \Delta x) = 2x_0$$

نو $f'(x_0) = 2x_0$ لرو او د $x_0 = 2$ لپاره $f'(2) = 2 \cdot 2 = 4$ باور لري.

د $x_0 = 2$ په ځای کې د تابع $y = f(x) = x^2$ لومړی مشتق په 4 برابر دی، دا په دې معنی چې تابع د $x_0 = 2$ په ځای کې میل یاجګوالی 4 لري.

لاس ته راوړنه یې:



کیدی شي، د تابع د ګراف له لارې و ازمایل شي، په داسې ډول چې د $P_0(x_0 | y_0) = P_0(2|4)$ په ټکي کې تانجنت انځور کړو او د میل د مثلث له لارې جګیدنه لاس ته راوړو.

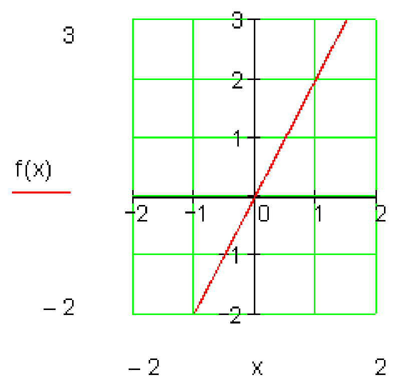
پورته بیلګه کې: $y = f(x) = x^2$ په هر خوښه ځای x_0 کې تابع پیداکوو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$y = f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x_0) = 2x_0$

x_0	-2	-1	0	1	2
$f'(x_0)$	-4	-2	0	2	4

ګراف يوه کرښه $f'(x) = 2x$ انځوروي،
چې د تابع مشتق بلل کيږي



پام: که د يوې تابع مشتق ونيول شي، نو بيرته هم يوه تابع ترې لاس ته راځي، چې دا د مشتق تابع بللکيږي.
د مشتق تابع: د تابع ارزښتونه په هر ټکي کې بنسټ تابع انځوروي، له دې امله دا د ميل تابع هم بلل کيږي.

بيلګه ۲:
د $f(x) = x^3$ تابع دې ورکړ شوی وي.
فعاليت: ګران لوستونکي دې د $f(x) = x^3$ تابع او د تابع د مشتق ګراف وروسته له حله رسم کړي.

موږ غواړو په x_0 ټکي کې مشتق پيدا کړو او همداسي د مشتق تابع.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x_0+\Delta x)^3 - x_0^{\ 3}}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x_0^{\ 3} + 3x_0^2\Delta x + 3x_0(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - x_0^{\ 3}}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3x_0^2\Delta x + 3x_0(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta x(3x_0^2 + 3x_0\Delta x + (\Delta x^2))}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x_0^2 + 3x_0\Delta x + (\Delta x^2)$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (3x_0^2 + 3x_0\Delta x + (\Delta x)^2 = 3x_0^2$$

نو $f'(x_0) = 3x_0^2$ د $f(x) = x^3$ تابع مشتق دی په ځای يا ټکي x_0 کې.

د مشتق تابع داسي ده: $f'(x_0) = 3x_0^2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۳: یوه د $f(x)=\frac{1}{x}$ تابع ورکړشوې.
غوښتنې یا ثبوت:

الف: د تابع ګراف په یاد راوړئ.

ب: په x_0 تکي کې د تابع مشتق پیداکړئ.

پ: په x_0 تکي کې د مشتق تابع هم پیدا کړئ.

$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ $\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\frac{1}{x_0+\Delta x}-\frac{1}{x_0}}{\Delta x}$ $\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\frac{x_0}{x_0(x_0+\Delta x)}-\frac{(x_0+\Delta x)}{x_0(x_0+\Delta x)}}{\Delta x}$ $\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\frac{x_0-(x_0+\Delta x)}{x_0(x_0+\Delta x)}}{\Delta x}$	$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\frac{x_0-x_0-\Delta x}{x_0(x_0+\Delta x)}}{\Delta x}$ $\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\frac{-\Delta x}{x_0(x_0+\Delta x)}}{\Delta x}$ $\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{-\Delta x}{\Delta x\cdot x_0(x_0+\Delta x)}$ $\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{-1}{x_0(x_0+\Delta x)}$ $\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=-\frac{1}{x_0^2+x_0\cdot\Delta x}$

د پورته اخري مساوات لیمیټ د $\Delta x\to 0$ لپاره نیسو:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(-\frac{1}{x_0^2+x_0\cdot\Delta x}\right)=-\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{x_0^2+x_0\cdot\Delta x}$$

نو لرو: $f'(x_0)=-\frac{1}{x_0^2}$. دا د x_0 په ځای کې د f مشتق دی.

د مشتق تابع هم دی: $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

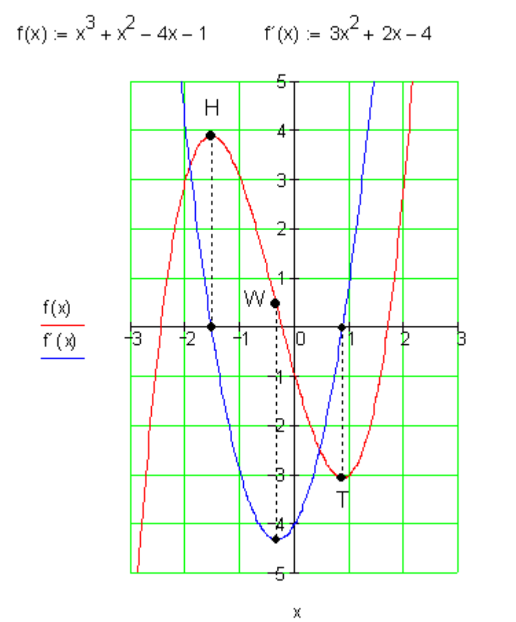
وضعیه کمیاتو سیستم کې تابع او د تابع مشتق:

تابع(سور): $f(x)=x^3+x^2-4x-1$

د تابع مشتق(شین):

$f'(x)=3x^2+2x-4$

د تابع مشتق هم تابع دع. موږ دا د مشتق یا د میل تابع بللې.



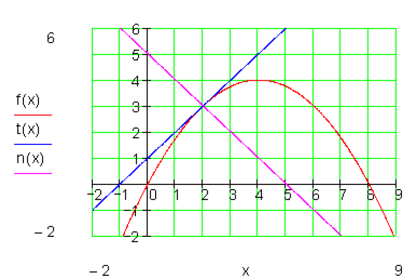
تمرینونه:

په لاندې مساواتو کې د f تابع مشتق او د مشتق تابع وښایئ

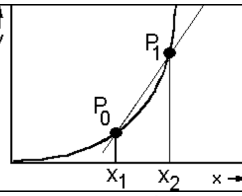
$a)\ \ f(x)=4x^4-3x^3+x^2-x-1$ $\qquad b)\ \ f(x)=x-\sqrt{x}$

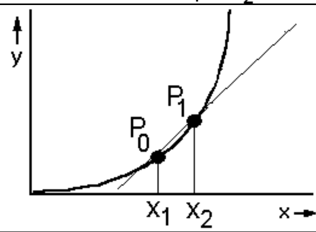
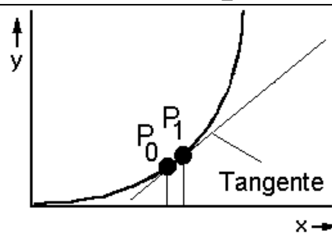
$c)\ \ f(x)=\dfrac{1}{2}x^3+\dfrac{1}{x^3}$ $\qquad d)\ \ f(x)=3x^2+0.4x-5$

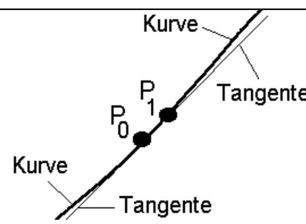
د تانجنت او عمود تعریفونه او خویونه



(c) ketabton.com: The Digital Library

<table>
<tr><td>لاندې یا مخاکخ ښیره یو منحني او یوه قاطع(غوڅی) په ټکو P_0 اوP_1 کې ښایي.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>اوس غواړو، چې ټکی P_0 د ټکي P_1په لور و خوځیږي.

پام: ددې سره قاطع خپل میل تغیروي</td><td>
</td></tr>
<tr><td>بالاخره غواړو، چېP_1 ټکی وP_0 ټکي ته ناپای ډېر نږدې شي. په دې حالت کې قاطع داسې په نامه تانجنت ته ورنږدې کیږي.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>که پوره وپیژندلی شو، چې د ټکو P_1 او P_0په شاو خوا غزوو یا لویوو :

که د P_1 ټکی و P_0 ټکي ته ناپای نږدې شي، نو کتل کیږي، چې تانجنت په ټکي P_0 کې همداسې حالت غوره کوي، لکه منحني په P_0 ټکي کې.</td><td>
</td></tr>
</table>

د دې خویونو غوره غوره والی یا پایله:
ومو لیدل، چې د تانجنت میل پهP_0 ټکي کې په همدې ټکي کې د منحني میل هم دی. له دې دا پایله لرو، چې که څوک غواړي د منحني میل په P_0 ټکي کې پیدا کړو، بسیا کوی، چې د تانجنت جګوالی یا میل په P_0 ټکي کې پیدا کړي.

فعالیتونه:

1- پورته شکلونه بیا سره پرتله کړئ. د میل په هکله یې فکر وکړئ، چې کوم میل زیات دی؟

2- تانجنت تعریف کړئ او په شکل کې یې وښایاست.

3- قاطع (سیکانت) تعریف کړئ او په ښېره کې یې وښایاست.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په لاندې کې د تانجنت او عمود عمومي فرمول راباسو:

ییل: تانجنت دې د $f(x)$ ګراف د $P(x_0, f(x_0))$ په ټکي کې لمس کړي. عمود (نورمال) دې د $f(x)$ ګراف د په $P(x_0, f(x_0))$ ټکي کې عمود یا ولاړ غوځ کړي.

د تانجنت مساوات: $t(x) = m_t \cdot x + b_t$:

د $m_t = f\,'(x_0)$ سره لیکو: $t(x) = f\,'(x_0) \cdot x + b_t$ (1)

دا چې $P(x_0), f(x_0))$ تانجنت یو ټکی دی، نو لاس ته راځي:

$$t(x_0) = f(x_0) \Leftrightarrow f\,'(x_0) \cdot x + b_t = f(x_0)$$
$$\Leftrightarrow b_t = f(x_0) - f\,'(x_0) \cdot x_0$$

په (1) کې ږدو، نو لر:

$$t(x) = f\,'(x_0) \cdot x + f(x_0) - f\,'(x_0) \cdot x_0 = f\,'(x_0) \cdot x_0 + f(x_0)$$
$$= f\,'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

عمود (نورمال): د منحني سره په همغه ټکي کې چې تانجنت په پروت دی، عمود څغلي.

د عمود میل:

$$m_n = -\frac{1}{m_t} = -\frac{1}{f\,'(x_0)}$$

$$\Rightarrow n(x) = -\frac{1}{f\,'(x_0)} \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

بیلګه:

د $f(x) = 2x - \frac{1}{4}x^2$ تابع لرو.

د تابع تانجنت او عمود(نورمال) پیدا کړئ:

حل:په لاندې توګه د تابع مشتق نیسو او ګراف یې(ښیره لاندې کښل شوې) کاږو:

نو لرو: $f(x) = 2x - \frac{1}{4}x^2 \;\Rightarrow\; f\,'(x) = 2 - \frac{1}{2}x$

د تانجنت میل **په ټکي** x_0 **کې د میل ارزښت** 3 **لري.**

$$f\,'(x_0) = 3 \Leftrightarrow 2 - \frac{1}{2}x_0 = 3 \Leftrightarrow x_0 = -2$$

$$f(x) = f(-2) = 2 \cdot (-2) - \frac{1}{4}(-2)^2 = -5$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $P(-2,-5)$ په ټکي کې تانجنت په $f(x)$ باندې ارزښت 3 لري.

$$f(x)=2x-\frac{1}{4}x^{2}\Rightarrow f'(x)=2-\frac{1}{2}x \qquad ,P(2,f(2))$$

$$t(x)=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$$

د $x_0=2$ په ځای کې لرو:

$$t(x)=f'(2)(x-2)+f(2)$$

$$f(2)=2\cdot 2-\frac{1}{4}\cdot(2)^{2}=4-1=3 \qquad f'(2)-\frac{1}{2}\cdot 2=2-1=1$$

$$\Rightarrow t(x)=1(x-2)+3=x-2+3=\underline{\underline{x+1}}$$

د نورمال یا عمود پیدا کونه:

$$f(x)=2x-\frac{1}{4}x^{2}\Rightarrow f'(x)=2-\frac{1}{2}x \ , \quad P(2\,|\,f(2))$$

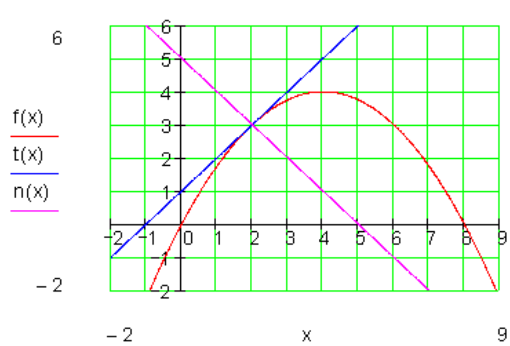
$$n(x)=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)+f(x_0)$$

د $x_0=2$ سره لاندې راکوي:

$$n(x)=\frac{1}{f'(2)}(x-2)+f(2)$$

$$f(2)=2\cdot 2-\frac{1}{4}\cdot(2)^{2}=4-1=3 \qquad f'(2)-\frac{1}{2}\cdot 2=2-1=1$$

$$\Rightarrow n(x)=-\frac{1}{1}(x-2)+3=-x+2+3=\underline{\underline{-x+5}}$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

د تانجنت او ولاړ يا عمود عمومي مساوات

بيلګه: تابع $f(x)=\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x+1$ لرو.

د تانجنت ميل:

د يوه تابع د ګراف ميل په ټکي $P(x_0 \mid f(x_0))$ کې همغه معنى لري، لکه په دې ټکي د تانجنت ميل.

موږ $f(x)$ تابع او د تابع مشتق ټيک په پام کې نيسو.

موږ $f(x)=\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x+1$ مربع تابع لرو

د تابع مشتق $f'(x)=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$

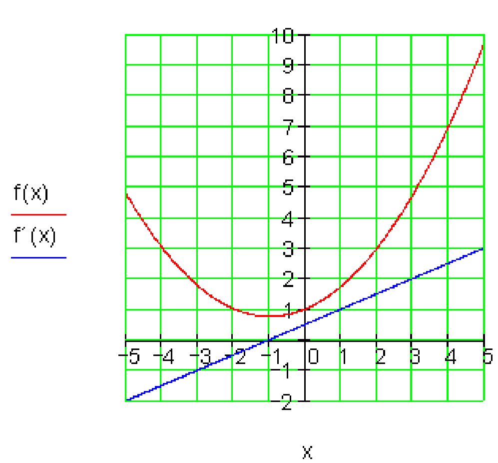
ارزښتجدول:

x	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5
f(x)	4,75	3	1,75	1	0,75	1	1,75	3	4,75	7	9,75
f '(x)	−2	−1,5	−1	−0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3

د $f(x)$ ارزښتجدول څخه لوستلى شو چې د پورته مربع تابع ککرټکى دى: $S(-1,\ 0.75)$ د $x=-1$ ارزښت لپاره $f'(-1)=0$ د ميل تابع ارزښت دى: دا دا معنى لري، چې په ککرټکي(د رآس ټکى) کې د $f'(x)$ ميل صفر دى. تانجنت په S کې هم دا معنى لري، چې صفر دى، دا هلته پروت(افقي) ځغلي؛ يعني د $x-$ محور سره غبرګ ځغلي.

ګرافونه:

$f(x) := \frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x+1$ $\qquad f'(x) := \frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$



(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه:

$f(x) = 2x^3 + 7x^2 + x - 7$ تابع لرو:

تانجنت دې پیداکړی شي، چې د $f(x)$ ګراف د $P(-2,\ f(-2))$ په ټکي کې لمسوي،

$$f(x) = 2x^3 + 7x^2 + x - 7 \ \Rightarrow\ f'(x) = 6x^2 + 14x + 1 \quad P(-2 \,|\, f(2)) \ \Rightarrow x_0 = -2$$

$$t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

$$f'(x_0)\, f'(-2) = 24 - 28 + 1 = -3$$

$$f(x_0) = f(-2) = -16 + 28 - 2 - 7 = 3$$

$$\Rightarrow t(x) = -3(x+2) + 3 = -3x - 6 + 3 = \underline{\underline{-3x - 3}}$$

پایله:

د $f(x)$ تابع ګراف کې تانجنت او عمود په $P(x_0, f(x_0))$ ټکي کې لاندې بڼه لري**.**

د تانجنت مساوات	د عمود مساوات
$t(x) = \underbrace{f'(x_0)}_{\text{جګېدنه}}(x - x_0) + f(x_0)$	$n(x) = -\dfrac{1}{\underbrace{f'(x_0)}_{\text{جګیدنه}}}(x - x_0) + f(x_0)\ ;\ \ f'(x_0) \neq 0$

تمرینونه: د لاندې توابعو ګرافونه وکاږئ، د تانجنت او د عمود مساوات ولیکئ.

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x \qquad x_0 = 2$$

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{x} + 3 \qquad x_0 = 1$$

$$f(x) = x^3 - x^2 - 5x - 2 \qquad x_0 = -\frac{3}{2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مشتق شميرني قوانين

د مشتقشميرنې شميرقوانين، لک څنګه په اعدادو، ترادفونو او حدونو(پوله ارزښتونو) کې اجرا کيږي،په همدې ډول مشتقشمېرنه کې هم دا قوانين باوري دي.

وبه ښايو، چې د جمعې، ضرب او ... مشتقونه د مشتقونو جمع، ضرب او ... ده. (په وېش کې بايد مخرج صفر نه وي).

فعاليت:

که $f(x)=x^2+x$ او $g(x)=x^3+2$ ولرو، $(f(x)+f(x))'$ د $(f(x)-g(x)),(f(x)\cdot g(x))'$ او $(\frac{f(x)}{g(x)})'$ $g(x)\neq 0,$ د پيدا کولو په هکله فکر وکړئ.

قضيه (د جمعې قاعده):

که يو تابع $f(x)$ د دوه توابعو $u(x)$ او $v(x)$ د جمعې څخه جوړ وي، نو مشتق يې هم د هر تابع د مشتق د جمعې څخه جوړ دی، يعنې:

$$f(x)=u(x)+v(x)$$
$$\Rightarrow f'(x)=u'(x)+v'(x)$$

ښوونه:

$$f(x_0)=u(x_0)+v(x_0)$$
$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{[u(x_0+\Delta x)-u(x_0)]+[v(x_0+\Delta x)]-v(x_0)}{\Delta x}$$
$$\Leftrightarrow f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{[u(x_0+\Delta x)-u(x_0)]}{\Delta x}+\frac{[v(x_0+\Delta x)]-v(x_0)}{\Delta x}$$
$$\Leftrightarrow f'(x_0)=\underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{u(x_0+\Delta x)-u(x_0)}{\Delta x}\right]}_{u'(x_0)}+\underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{v(x_0+\Delta x)-v(x_0)}{\Delta x}\right]}_{v'(x_0)}$$
$$\Leftrightarrow f'(x)=\underline{\underline{u'(x_0)+v'(x_0)}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه:

که توابعو $f(x)=5x^2+3x\ ,\ u(x)=5x^2\ ,v(x)=3x$ ولرو شتق وشمرئ.

ښوونه:

$$f(x)=5x^2+3x \quad u(x)=5x^2 \quad v(x)=3x$$
$$\Rightarrow u'(x)=10x \qquad v'(x)=3$$
$$f'(x)=u'(x)+v'(x)=\underline{\underline{10x+3}}$$

فعالیت: که چیرې $f_1, f_2, \ldots\ldots, f_n$ توابع او $k_1, k_2, \ldots, k_n$ ثابت عددونه وي نو لرو(پې له ښوونې):

$$[k_1 f_1(x)+k_2 f_2(x)+\ldots\ldots+k_n f_n(x)]'$$
$$=k_1 f_1'(x)+k_2 f_2'(x)+\ldots\ldots+k_n f_n'(x)$$

قضیه (د ضرب قاعده): که $f(x)$ او $g(x)$ دوه توابع وي، نو ښایو:

$$(f(x)\cdot g(x))'=f(x)'\cdot g(x)\cdot g(x)'$$

ښوونه: $\dfrac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}$

د مناسب فورم- یا ښه بدلون یعنې په صورت کې د $-f(x_0)g(x)+f(x_0)g(x)$ ورزیاتولو څخه دا لاندې لرو:

$$\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x)+f(x_0)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}$$
$$=\frac{(f(x)-f(x_0))g(x)+f(x_0)(g(x)-g(x_0))}{x-x_0}$$
$$=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot g(x)+f(x_0)\cdot\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$$

له پورته څخه لاس راځي یعنې د دواړو لورو لیمیټ نیسو:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}$$
$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot\lim_{x\to x_0}g(x)+f(x_0)\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$$
$$=f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بيلګه:

که $g(x)=x^2-1$ او $h(x)=\sqrt{x}$ ولرو، نو د $f(x)=g(x)h(x)$ مشتق غواړو پيدا کړو.

ښوونه:

په لاندې توګه مخ ته ځو:

$$f(x)=(x^2-1)\sqrt{x},\ f'(x)=2x\sqrt{x}+(x^2-1)\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{5}{2}x\sqrt{x}-\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

قضيه (د وېش قانون): f او g دې دوه توابع وي. غواړو وښايو:

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]'=\frac{f'(x)\,g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

ثبوت: کولای شو، چې دا قضيه له دوه لارو يا طريقو وښايو(ثبوت کړو).

لومړی لار يا طريقه يې په لاندې کې ښايو او دويمه لار دې ګران زده کوونکي وښايي:

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]'=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{f(x+h)}{g(x+h)}-\dfrac{f(x)}{g(x)}}{h}\quad,\quad g(x)\neq 0$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x)-f(x)g(x+h)}{g(x+h)g(x)h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left[\frac{1}{g(x+h)g(x)}\frac{f(x+h)g(x)-f(x)g(x+h)}{h}\right]$$

غواړو $f(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g(x)$ صورت ته ور زيات کړو، نو لرو:.

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{g(x+h)g(x)}\cdot\frac{f(x+h)g(x)-f(x)g(x)+f(x)g(x)-f(x)g(x+h)}{h}$$

$$=\frac{1}{g(x)g(x)}[\lim_{h\to 0}g(x)\ \frac{f(x+h)-f(x)}{h}-\lim_{h\to 0}f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}]$$

$$=\frac{1}{[g(x)]^2}\left[g(x)\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-f(x)\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right]$$

$$=\frac{1}{[g(x)]^2}\left[g(x).f'(x)-f(x).g'(x)\right]=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

يعني لرو: $\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)\,g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$

بیلگه:

د $f(x) = \frac{x^2}{x^2-4}$ تابع (د $x^2-4\neq 0$ سره) مشتق غواړو پیدا کړو.

حل: که چېرې $g(x) = x^2$ او $h(x) = x^2 - 4$

وضع شي نو لرو:
$$g'(x) = 2x$$
$$h'(x) = 2x$$

او د ویش قانون له مخي لرو:

$$f'(x) = \left[\frac{g(x)}{h(x)}\right]' = \frac{g'(x)h(x) - g(x)h'(x)}{[h(x)]^2}$$
$$= \frac{2x(x^2-4) - x^2.2x}{[x^2-4]^2}$$
$$= \frac{-8x}{[x^2-4]^2}$$

پوښتنې:

که $f(x) = 3x^2 + 5x - 8$ او $g(x) = 5x^3 - 3x + 4$ ولرو، نو :

- د توابعو د توابعو د جمعي مشتق، د ضرب مشتق د توابعو د وېش($f(x)\neq 0$) مشتق پیداکړئ، که شونی وي له مختلفو لارو.

د الجبري توابعو مشتق

الجبري او نورو توابعو پیژندونه(تعریفونه):

1- یو بنستیز تابع الجبري بلل کیږي، که د ترتیب قانون یې د مساواتو له لارې ورکړ شوی وي،په هغو کې چې په ترمونو کې د مساواتو د متحولو سره فقط الجبري

(c) ketabton.com: The Digital Library

عمليی(جمع،تفريق، ضرب، تقسيم(چې مخرج يې صفر نه وي)توانکونه او جذرنيونه(د توان-اوريښې اکسپوننتونه مثبت او تام عددي دي) کارول شوي وي.

2- ناالجبري توابع ترانسڅندنت بلل کيږي، لکه اکسپوننشل-ولوګاريمی- او د زاويو توابع.

3- يو الجبري تابع راشنل بللکيږ ي، که د ترتيب قانون يې د يو مساوات سره ورکړ شوی وي، په کوم کې چې ناپای ډيرې راشنل د شمير عمليی ((جمع،تفريق، ضرب، تقسيم(چې مخرج يې صفر نه وي)توانکونه او جذرنيونه(د توان-اوريښې اکسپوننتونه مثبت او تام عددي دي)) کارول شوي وي.

فعاليت:

په څېر د $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots a_1 x + a_0$ يوه تابع د $f(x)$ _ که د $n \in N \quad \wedge \quad a_1 \in R$ سره ليکل شوې وي، څه بلل کيږي؟

په د ويش v او u د دوه توابعو تابع f د $v(x) = 3x + 6$ او $u(x)x^2 + 4x + 4$ _ لړو:

سره وليکئ $v(x) \neq 0$ د $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ څېر لکه

تابع مشتق ونيسئ. پسې د $v;u$ _ د تابع تعريف ساحه وښاياست او بيا د هرې يوې مشتقونو وېش په نښه کولو پسې د مشتقونو وېش(چې مخرج صفر نه وي)، د مشتق سره پرتله کړئ.

بيلګه:

د $f(x) = \sqrt{x}$ تابع ورکړ شوې په x_0 کې د تابع مشتق پيدا کړئ او د مشتق تابع په ګوته کړئ.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt{x_0 + \Delta x} - \sqrt{x_0}}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(\sqrt{x_0 + \Delta x} - \sqrt{x_0})(\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0})}{\Delta x(\sqrt{x_0 + \Delta x} - \sqrt{x_0})}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x_0 + \Delta x - x_0}{\Delta x(\sqrt{x_0 + \Delta x + \sqrt{x_0}})}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta x}{\Delta x(\sqrt{x_0 + \Delta x + \sqrt{x_0}})}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\sqrt{x_0 + \Delta x + \sqrt{x_0}}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f'(x_0)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{1}{\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0}}\right)=\frac{1}{\sqrt{x_0}+\sqrt{x_0}}=\frac{1}{2\sqrt{x_0}}$$

نو د x_0 په ځای کې $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x_0}}$ د تابع $f(x)=\sqrt{x}$ مشتق دی.

د تېرو درسونو پر بنسټ $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ د مشتق تابع ده.

د $q\in Q \;;\; f(x)=x^q$ ډوله توابعو مشتق:

د شمیرنې له مخې لاندې لاس ته را وړنې لرو:

تابع	د مشتق تابع	
$f(x)=x$	$f'(x)=1$	$f'(x)=1\cdot x^0$
$f(x)=x^2$	$f'(x)=2\cdot x$	$f'(x)=2\cdot x^1$
$f(x)=x^3$	$f'(x)=3\cdot x^2$	$f'(x)=3\cdot x^2$
$f(x)=\frac{1}{x}=x^{-1}$	$f'(x)=-\frac{1}{x^2}$	$f'(x)=-1.x^{-2}$
$f(x)=\sqrt{x}=x\frac{1}{2}$	$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$f'(x)=\frac{1}{2}.x^{-\frac{1}{2}}$

که دا پورته پنځه مشتقونه یو د بل سره پرتله کړو، نو اټکل کیږي، چې لاندې جوړښتقانون باور لري:

د توان قانون (بې له بنونې)
(پونتخ) قانون:
1- مختني اکسپوننت د متحولي x د مخ د فاکتور په څیر لیکل کیږي.

2- نوی اکسپوننت همغه پخوانی اکسپوننت دی، چې په یو کم شوی.

سره $q\in Q$ **د** $f(x)=x^q \;\Rightarrow\; f'(x)=q\cdot x^{q-1}$

بیلګه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $f(x)=\frac{1}{x^2}$ مشتق پیدا کړئ.

ښوونه:

$$f(x)=\frac{1}{x^2}=x^{-2} \Rightarrow f'(x)=-2x^{-3}=-\frac{2}{x^3}$$

بیلګه:

د $f(x)=3x^4$ تابع مشتق پیدا کړئ.

ښوونه:

$$f(x)=3x^4 \qquad c=3 \qquad u(x)=x^4 \Rightarrow u'(x)=4x^3$$
$$f'(x)=c\cdot u'(x)=3\cdot 4x^3=12x^3$$

بیلګه:

غواړو د $f(x)$ تابع مشتق د $x=2$ په ځای کې ونیسو:

$$f(x)=x^2+3$$
$$x=2:\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}=4+\Delta x$$
$$f'(2)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(4+\Delta x)=4$$
$$x=u:\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(u+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}=2u+\Delta x$$
$$f'(u)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(2u+\Delta x)=2u$$

بیلګه:

د تا بع $f(x)=\frac{1}{x+1}$ مشتق د $x=2$ په ځای کې پیداکړئ.

ښوونه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x)=\frac{1}{x+1}$$
$$x=2:\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}=\frac{1}{3(3+\Delta x)}$$
$$f'(2)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{-1}{3(3+\Delta x)}\right)=-\frac{1}{9}$$
$$x=u:\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(u+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}=\frac{-1}{(u+\Delta x+1)(u+1)}$$
$$f'(u)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}=\frac{-1}{(u+\Delta x+1)(u+1)}=-\frac{1}{(u+1)^2}$$

بیلګه:

(توان((Potence) مشتق، چی طبیعي جګ عدد یا اکسپوننت لري:

موږ د $1, 2, 3,...$, $y(f(x)=x^n$ تابع لرو او غواړو مشتق یې پیداکړو:

ښوونه: موږ په لاندې توګه مخ ته ځو.

د بینوم جملی په بنسټ په هر x_0 ځای کې دا لاندې باورلري.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\frac{(x_0+h)^n-x_0^n}{h}$$
$$=\frac{\binom{n}{0}x_0^n+\binom{n}{1}x_0^{n-1}h+\binom{n}{2}x_0^{n-2}h^2+...+\binom{n}{n}h^n-x_0^n}{h}$$
$$=\frac{1}{h}\left(x_0^n+nx_0^{n-2}h+\frac{n(n-1)}{2}x_0^{n-2}h^2+...+h^n-x_0^n\right)$$
$$=nx_0^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2}x_0^{n-2}h+...+h^{n-1}$$

د $h\to 0$ لپاره تابع $y=x^n$ د x_0 په هرځای کي، د لاندي مشتق سره، د مشتق قابلیت لري:

$$(dy/dx)_{x=x_0}=f'(x)=nx^{n-1}$$

ددې پورته بیلګې بل ډول ښوونه دې د پوښتنې په څېر وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

تمرينونه: _ که يو پولينوم $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...a_1x+a_0$
د $a_1\in R \quad \wedge \quad n\in N$ سره ورکړ شوی وي، مشتق يې پيداکړئ.
- د توابع مشتق د توان قانون له مخې پيداکړئ.

$a)\ f(x)=x^5$ $\qquad b)\ f(x)=x^6$

$c)\ f(x)=\frac{1}{x^2}$ $\qquad d)\ f(x)=\frac{1}{x^5}$

$e)\ f(x)=\sqrt{x}$ $\qquad f(x)=\sqrt[4]{x^3}$

$g)\ f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ $\qquad h)\ f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$

د زنځيري(مرکب) توابعو مشتق

تابع کيدی شي د v تابع سره وتړل شي، که د د باندني تابع(ځنځيروني قاعده)، پيژند ورشو (دتعريف ساحه) $D(u)$ د دنني تابع د $W(v)$ سره ګډ توکي يا عناصر ولري.

ددې لپاره ليکو: $u^\circ v(x)=u(v(x))$، که د f تابع د $y=f(x)=u(z)$ سره او $Z=v(x)$ وي.

فعاليت:
_ په زنځيري تابع کې د $f(g(x))$ پيژند ورشو او همداسې د تابع ورشو په هکله خپل نظر څرګند کړئ.
په ځاي کې څه دی او $x=3$ تابع ارزښت د $f(g(x))=(x^2+2x+1)^2$ _ وواياست، چې د د تابع ساحې کومې دي او په مشتق نيولو کې يې فکر وکړئ.
_ که يوه په خوښه زنځيري تابع ولرو، نو د تابع ورشو په ګوته کړئ او وهڅېږئ، چې مشتق يې پيدا کړئ.

اوس نو د $x=x_0$ ځای کې د $y=f(g(x))$ تړلي يا ځنځيري تابع مشتقوړوالی څيړو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x)=f\left[g(x)\right]$$
$$\Rightarrow f'(x)=\quad f'(g)\quad .\quad g'(x)$$

دننني مشتق د باندنی مشتق(دادې ورپورته شي)
ددې لپاره نيسو چې:

1- د $g(x)$ دننني تابع د $x=x_0$ په ځای کې مشتقوړ ده. دانو بيا بايد د x_0 په يوه معلوم تعريف شوي چاپيريال کی متمادي(نه پريکيدونکی) وي.

موږ لرو : $g(x+h)->g(x_0)$ د $h->0$ لپاره.

همداسې $g(x_0+h)=g(x_0)+k$ داسې، چې $k->0$ د $h->0$ لپاره.

2- که د $y=f(z)$ دباندنی تابع په $z=z_0 g(x_0)$ کې د مشتق قابليت ولري.

د $y=f(g(x))$ کمبنتويش کيدی شي په لاندې ډول ورکړ شي او بڼه(فورم) يې هم بدله شي

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(g(x_0+h))-f(g(x_0))}{h}=\frac{f(g(x_0+h))-f(g(x_0))}{g(x_0+h)-g(x_0)}$$
$$=\frac{f(z_0+k)-f(z_0)}{k}.\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}$$

که $h->0$ لاړه شي (همداسې $k->0$ خواته ځي) نو دا اړيکی مشتق ته ځي:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0}=\left(\frac{d(g(x))}{dx}\right)_{x=x_o}=\left(\frac{df(z)}{dz}\right)_{z=z_o=g(x_0)}.\left(\frac{dg(x)}{dx}\right)_{x=x_0}\quad ;........(*)$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0}=\left(\frac{d(g(x))}{dx}\right)_{x=x_o}=\left(\frac{df(z)}{dz}\right)_{z=z_o=g(x_0)}.\left(\frac{dg(x)}{dx}\right)_{x=x_0}$$

که چيرې د ځای په ځای(فيکس) ځای $x=x_0$ لپار بيرته x نيسو، نو کيدی شي چې (*) فرمول په لاندې لنډ ډول ورکړشي او د $y=(z)\ ,\ z=g(x)$ لپاره باور ولري:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dz}}{\frac{dx}{dz}}=\frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx};\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(**)$$

په پام کې دې وي، چې $\frac{dy}{dx}$ د $z=g(x)$ په ځای کې باید ترتیب(تنظیم) شي.

دا $(*)$ فرمول ځنځيري قاعده(لار،قانون) بلل کيږي او د پورته نيونو يا فرضيو سره باوري دی. دا په ساده ډول په ياد لرلی شو، ځکه چې ښی خوا د کيڼې خوا سره د فورمال dzزياتيدلو له لارې منځ ته راغلي.

د پورته ښوونې لاس ته راوړنه دا لاندې جمله ده:

زنځيري يا مرکبه قاعده

لرو : $f(z)=f(g(x))$ ، نود $z=g(x)$ تابع په x او د $y=f(z)$ تابع په $z=g(x)$ کې د مشتق قابليت لري يا مشتقوړ دی، نوترلی ورکړ شوی د $y=f(g(x))$ تابع هم په x کې د مشتق قابليت لري او دا باوري کيږي.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dz}}{\frac{dx}{dz}}=\frac{\frac{df}{dg}}{\frac{dx}{dg}}==f\ '(g(x)).g\ '(x)$$

لنډ: $(fog)'(x)=f(g(x))'$

بيلګه:

د $f(x)=(x^2+2)^2$ مشتق ونيسئ.

$$f(x)=\left(x^2+2\right)^2$$

بدلون tion: $z(x)=x^2+2 \quad f(z)=z^2\Rightarrow f'(z)=2z \quad z'(x)=2x$

$$f'(x)=f'(z)\cdot z'(x)=2z\cdot 2x=2\left(x^2+2\right)\cdot 2x=\underline{\underline{4x^3+8x}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بيلګه:

د $y=\sin x^2$ تابع يوه په لاندې توګه ورکړ شوی ځنځيري تابع ده:

$y=\sin z \quad , \quad z=x^2$

دا دواړه توابع په هرځای کې مشتق وړدي. له دې امله هر چيرته باور لري:

$$\frac{d\sin x^2}{dx}=\frac{d\sin z}{dz}\cdot\frac{dx^2}{dx}=\cos z.2x=2x.\cos x^2$$

بيلګه:

د $y=\sin^2 x$ تابع په لاندې ډول ترلی ورکړ شوی.

$y=z^2 \quad , z=\sin x$

دلته هم دواړه توابع هرچيرته مشتقوړ دي. نو له دې امله هرچيرته باور لري:

$$\frac{d\sin^2 x}{dx}=\frac{dz^2}{dz}\cdot\frac{d\sin x}{dx}=2z.\cos x=2\sin x.\cos x=\sin 2x$$

بيلګه:

د $f(x)=(x^5+4)^8$ تابع مشتق وشمېرئ!

حل: هرکله چې $g(x)=x^8$ او $h(x)=x^5+4$ وضع کوو نو لرو:

$$f(x)=g(h(x))$$

$$f'(x)=(g(h(x))'=g'(h(x)).h'(x)$$

$g'(x)=8x^7$ $h'(x)=5x^4$ دی، نو لرو:

$$f(x)=8(h(x))^7 5x^4=40(x^5+4)^7.x^4$$

تمرينونه:

۱ - $h(x)=\dfrac{1}{(x^3-4x^2+1)^2}$

۲ - که چيرې $f(x)=(3-2x+x^2)^4$ وي، نو f' پيداکړئ.

د لاندې تابعو مشتقونه هم ونيسئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x)=(1-2x^3)^4$$:1

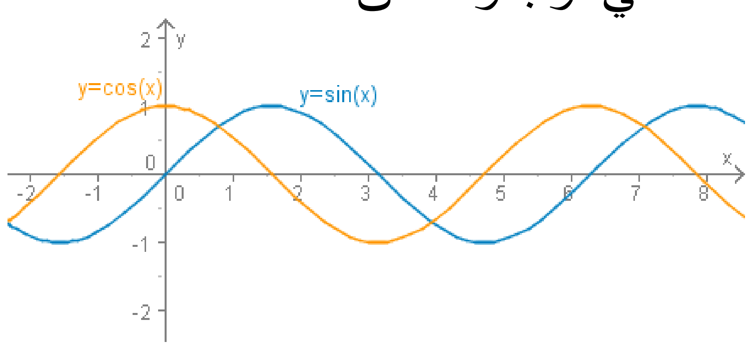
$$f(x)=(2x^2+1)^{-2}$$:2

$$h(x)=\frac{1}{\sqrt{2+x^2+x^3}}$$:3

$$h(z)=\sqrt{\frac{1-z}{1+z}}$$:4

$$f(t)=\sqrt[3]{3t+1}$$:5

د مثلثاتي توابعو مشتق



$$\sin x-\sin y=2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}\quad \ldots.\ I$$

$$\cos x-\cos y=-2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}\quad \ldots.\ II$$

فعاليت:

د لاندې توابعو مشتقونه وشميرئ:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x \qquad :a$$

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x \qquad :b$$

$$f\,'(x) = \frac{d\,\tan x}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x} \qquad c$$

موږ په لاندې کې پورتني درې حالتونه ښايو او د نورو درې حالتونوښوونه ګرانو زده کوونکو ته پرېږدو.

قضيه:

د ساين تابع مشتق غواړو وښايوو چې $f\,'(x) = (\sin x)' = \cos x$ دی:

ددې قضيې د ښوولو لپاره پورتني په ننوتنه کې دوه لومړني فرمولونه په کار راځي.

د $y = f(x) = \sin x$ ساين تابع د هر x لپاره تعريف ده، نو د x_0 په خوښه ټاکلوڅخه لاس ته راځي:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{\sin(x_0+h)-\sin x_0}{h}$$

$$= \frac{2}{h}\cos\frac{2x_0+h}{2}\cdot\sin\frac{h}{2} = \cos\left(x_0+\frac{h}{2}\right)\cdot\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\ .$$

د ليميټ د برخې په پام کې لرلو سره لرو:

$$\lim_{h\to 0}\left(\cos\left(x_0+\frac{h}{2}\right)\cdot\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\right) = \cos x_0.$$

د ساين تابع په هر ځاي کی، د لاندې مشتق سره، د مشتق قابليت لري يا مشتقوړ ده:

$$\left(\frac{d\sin x}{dx}\right)_{x=x_0} = f\,'(x_0) = \cos x_0\,,$$ (Xپه لينده کچ يا راديان)

قضيه:

همداسي ښوول کيږي چی کوساين تابع هم په هرځاي کی مشتقوړ ده، دلاندې مشتق سره:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\left(\frac{d\cos x}{dx}\right)_{x=x_0} = f'(x_0) = -\sin x_0,$$ xپه لینده کچ یا رادیان

ثبوت:

لرو:
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h)-f(x_0)}{h} = \frac{\cos(x+h)-\cos x_0}{h}$$

په پورته ننوتنه کې د دویم فرمول له مخې لرو:

$$= \frac{-2\sin\frac{x+h+x}{2}.\sin\frac{x+h-x}{2}}{h}$$

$$= \frac{-2\sin(x+\frac{h}{2}).\sin\frac{h}{2}}{h}$$

$$= -[\sin(x+\frac{h}{2}).\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}]$$

د لیمیټ او د لیمیټ د ضرب قاعدې له مخې لاس ته راځي :

$$= -\lim_{h\to 0}\sin(x+\frac{h}{2}) \;.\; \lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = -\sin x \cdot 1 = -\sin x$$

له پورته مساواتو څخه په لنده توګه لیکو:

$$\frac{d\cos x}{dx} = -\sin x$$

قضیه :

(c) ketabton.com: The Digital Library

غواړو وښایو چې د تانجنت تابع $f(x) = \tan x$ مشتقوړ ده او د مشتق تابع يې $f\,'(x) = \dfrac{d \tan x}{dx} = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ ده.

$$\frac{d}{dx}(\tan x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)$$

$$= \frac{\cos x \dfrac{d}{dx}(\sin x) - \sin x \dfrac{d}{dx}(\cos x)}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos x . \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$= 1 + \tan^2 x \;, x \neq (2k+1).\frac{\pi}{2}$$

فعاليت: ګرا زده کوونکي دې د $f(x) = x^2 \sin x$ تابع مشتق پيدا کړي.

يادونه: $g(x) = x^2$ او $h(x) = \sin x$ دې ځا په ځای کړي.

بيلګه:

غواړو د $y = \cos \dfrac{\pi x}{180}$ تابع مشتق پيدا کړو.

حل:

ږدو : $f(x) = \cos x$ او $g(x) = \dfrac{\pi x}{180}$، نو y په لاندي توګه ليکلی شو:

$y = f(g(x))$. د زنځيري قاعدې په بنسټ لرو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$
$$= \cos'(g(x)) \cdot (\frac{\pi}{180} \cdot x)'$$
$$= -\sin(g(x)) \cdot \frac{\pi}{180} = -\frac{\pi}{180} \cdot \sin\frac{\pi x}{180}$$

د لاندې توتبعو مشتق پیدا کړئ

$\tan^4 x$	$:b$	$\cos^2 2x$	$:a$
$\sin(3x-1)$	$:d$	$\sec x \cdot \cot anx$	$:c$
$\sec(\sec(x))$	$:f$	$\sin^2 x - \cos x$	$:e$

حل a: د ځنځیري قاعدې په بنسټ او د توان یا طاقت یو فرمول په بنسټ لرو:

$$(\cos^2 2x)' = 2\cos(2x) \cdot \cos'(2x)$$
$$= 2\cos(2x)(-\sin(2x)).2$$
$$= -4\cos 2x \cdot \sin 2x$$

$:b$
$$(\tan^4 x)' = 4\tan^3 x \cdot (\tan x)'$$
$$= 4\tan^3 x \cdot \sec^2 x$$

$:c$
$$(\sec x.\cot x)' = (\sec x)'\cot x + (\cot x)'\sec x$$
$$= (\sec x.\tan x)\cot x + (-\csc^2 x)\sec x$$
$$= \sec x - \csc^2 x \cdot \sec x$$
$$= \sec x(1 - \csc^2 x)$$

$:d$
$$[\sin(3x-1)]' = \cos(3x-1).(3x-1)'$$
$$= \cos(3x-1) \cdot 3 = 3\cos(3x-1)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$:e \quad [\sin^2 x - \cos x]' = (\sin^2 x)' - (\cos x)'$$
$$= 2\sin x(\sin x)' - (-\sin x)$$
$$= 2\sin x \cdot \cos x + \sin x$$
$$= \sin x(2\cos x + 1)$$

بيلګې:

1- د f(x) = sinx تابع لومړي څلور مشتقونه دې پيدا شي.

---

f’(x) = cosx ; f’’(x) = -sinx ; f’’’(x) = -cosx ; $f^{(4)}(x)$ = -(-sinx) = sinx

2- د (x) = x.sinx تابع مشتق پيداکړئ.
د ضرب قانون څخه کار واخلئ.
f’(x) = 1.sinx+xcosx=sinx+ x.cosx

3- د $f(x) = \sin\frac{1}{x}; x \neq 0$ تابع مشتق پيداکولو له پاره د ځنځير قونو ن څخه نار اخلو.

پردو $z = \frac{1}{x^2}$ ***او*** **sinz = u(z)** ***لا س ته راځي:*** $f'(x) = -\frac{2}{x^3}\cos\frac{1}{x^2}$

تمرينونه:

-- د لاندې توابعو لومړی مشتق و ټاکئ.

$a)\ f(x) = \sin 3x \qquad b)\ f(x)\sin x \cdot \cos x \qquad c)\ f(x) = \sin^2 x$

$d)\ f(x) = \tan x + 2\sin 2x \qquad e)\ f(x) = \sin x^2 \qquad f)\ f(x) = \sin\frac{x-1}{x+1}$

-- د $f(x) = \sin^n x (n \in IN)$ تابع د لومړي مشتق لپاره فرمول وښاياست يا وټاکئ.

-- د تانجنت تابع لپاره د ساين او کوساين قانون په مرسته د مشتق قانون و ښاياست.

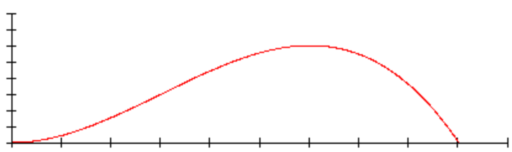
-- وښاياست چې د f(x) = tanx لپاره $f'(x) = 1 + \tan^2(x)$ هم باور لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

-- د ویش قانون له مخې د کوتانجنت قانون پیداکړئ او هم د تانجنت قانون له مخې.

--- ولې د ساین تابع او د کوساین تابع په خوښه زیات مشتقوړ دي.

د مشتق استعمال په پیداښتي یا طبیعي علومو کې

په ریاضیاتو کې زیات وخت توابع راوړل کیږي، چې د یوې متحولې(اووښتونې) x په واک کې وي. په طبیعي پوهنو کې زیات وخت توابع څېړو، چې د وخت په واک کې وي. لکه په شکل کې د یوه توپ د غورځولو وهلې لار (دا وروسته روښانه کیږي)	

فعالیت:
ګران زده کوونکي دي د فزیک د درسونو له مخې د چټکتیا او بیړې تعریفونه ور کړي او د لار، وخت، چټکتیا او بیړې فرمولونه دي ولیکي.

بیلګه:
د یوه په برابرډوله بیړه (تعجیل) غورځول شوي شي لپاره د پیل چټکتیا (لومړنی سرعت) $v_0=4\frac{m}{s}$ او $a=1{,}8\frac{m}{s^2}$ بیړې(تعجیل) سره د لار-وخت- قانون په لاندې ډول دی:

$$s(t)=\frac{1}{2}at^2+v_0t$$

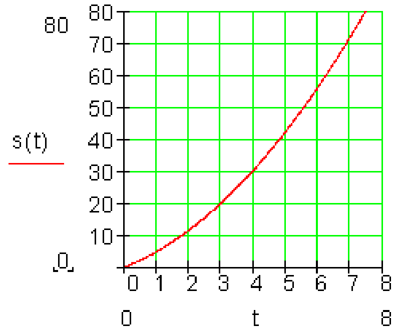
پورته ورکړشوي د v_0 ارزښت لپاره باور لري: $S(t) = 0{,}9t^2+4t$
(t په (ثانیه) s ، s(t) په m (متر))
منځنی چټکتیا (سرعت) $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ ده)

(c) ketabton.com: The Digital Library

لحظوی(سملاسي) چټکتیا په لاندې ډول ده:

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{ds}{dt}=v$$

$$v=s'(t)=1{,}8t+4$$

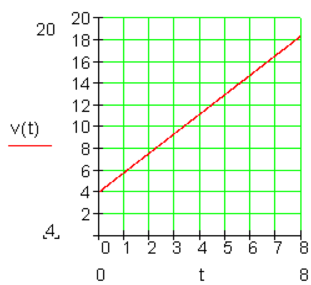


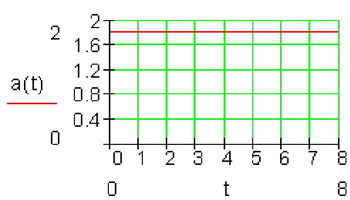
v-t - دیاګرام کې یوه کرښه لاس ته راځي، دا په دې معنی چې چټکتیا په برابر ډول زیاتیږي.

دا دلته ثابته جګېدنه $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ ده او $a=1.8\frac{m}{s^2}$ بیره(تعجیل) ده.

بیرې یا تعجیل لپاره دا لاندې مساوات صدق کوي:

$$v'(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta t}=a$$





پام : د یوه برابرډوله په بیره (تعجیلي) خوزښت لپاره لاندې باور لري:

$$|\, s(t)=\frac{1}{2}at^2+v_0t \,| \qquad v(t)=s'(t)=at+v_0 \qquad a(t)=v'(t)=a$$

د یوې چټکتیا (سرعت) v لپاره د وخت پسې د لار مشتق لپاره $v(t)=s'(t)$ لرو. د $s'(t)$ لپاره داسې $v(t)=s'(t)$ هم لیکو.

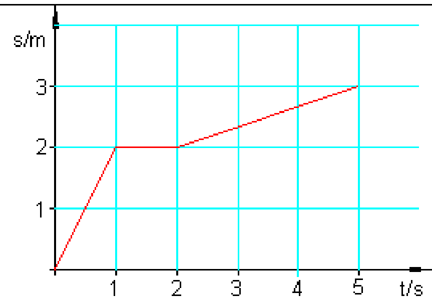
(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیت:

1- د یوه خوزنده تن یا جسم د لار-وخت-دیاګرام ورکړ شوی.

الف: دا خوزښت تشریح کړئ.

ب : دې پورې اړونده د چټکتیا – وخت – دیا ګرام وکاږئ.



2- یوه تیره د پیل چټکتیا $v_0 = 7\frac{m}{s}$ سره عمودي (ولاړه)پورته غورځول کیږي.

د لار-وخت-قانون دی: $s(t) = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2$ د $g = 10\frac{m}{s^2}$ (را ټولې (؟؟کردې شوې)سره.

الف) د کوم وخت وروسته د تیرې چټکتیا (سرعت) صفر دی؟

ب) خورا جګ د میل جګوالوشمیرئ

3- تابع د یوه خوزښت د لار-وخت-دیاګرام ښایي.

الف)د ورځنې ژوند څخه یوه بېلګه ورکړئ، د هغې لپاره چې دا تلنه ښایي.

د منحنې تلنه د $t > 3$ لپاره فزیکي څه مفهوم لرې؟

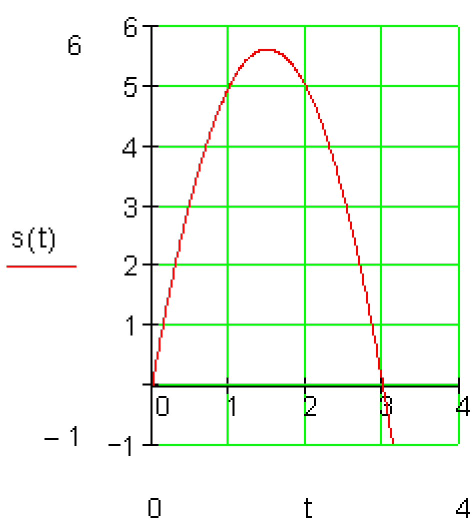
ب) د خوزښت لپاره د لار-وخت-دیاګرام په لاندې ډول دی.

$$s(t) = \frac{1}{2} a \cdot t^2 + v_0 \cdot t$$

a او v_0 وټاکئ.

پ) د اړونده بیړې – وخت-دیاګرم وکاږئ او دا تشریح کړئ.

یوه منفي چټکتیا (سرعت) څه معنا لرې؟



4- یوتن(جسم) په پورته ازاده غورځونه کې داسې حرکت کوي ،چې د t وخت کې $s(t) = 5 \cdot t^2$ لار وهي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په وختونو $t=1,2,3$ کې لحظوي چټکتيا(سرعت) وښايی.

حل: لحضوي چټکتيا د سملاسي تغيرارزښت سره په دې لاندې معنا دی:

$$t=1: \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{s(1+\Delta x)-s(1)}{\Delta x}=10+5\Delta x$$

د $\Delta x \to 0$ لپاره باور لري: $10+5\Delta x \to 10$

$$t=2: \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{s(2+\Delta x)-s(2)}{\Delta x}=20+\Delta x \Rightarrow 1$$

د $\Delta x \to 0$ لپاره باور لري: $20+5\Delta x \to 20$

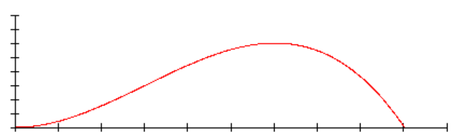
$$t=3: \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{s(3+\Delta x)-s(3)}{\Delta x}=30+5\Delta x \Rightarrow 1$$

د $\Delta x \to 0$ لپاره باور لري $20+5\Delta x \to 30$

تمرين:

د $f(x)=-\frac{1}{288}x^3+\frac{1}{16}x^2 \; ; \; x>0$

لاندې تابع ګراف او په ورنزدې توګه د فوټبال ميدان کې د توپ الوتني منحني ښايي، چې لاندې څېره لري.



لاندې پوښتنې ځواب کړئ:

الف:توپ کوم خورا جګ(ماکسيمال) جګوالی لري او د وهلټکي(شوټ شوي ټکي) څخه کوم واټن لري؟

ب : د توپ وهلټکي (شوټ شوي ټکي)څخه توپ څومره لرې بېرته ځمکې ته راځي؟

پ : د لوبې د دفاع دېوال د توپ وهنې ځای څخه 9 متره لرې او 2 متره جګ دی. ايا توپ له دې څخه جګ الوزي؟

ت : توپ د تور(ګول) لاين(د x محور) څخه په 2 متره جګوالي الوزي. له ګول څخه په کوم لرېوالي دا ازاده شوټ وهل شوی دی؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

د جګو درجو مشتق

د لومړي مشتق پرته د لوړو درجو مشتق کونه هم شته، چې د ورپسې مشتق له لارې لاس ته راځي. د $f'(x)$ بیا مشتق نیونې سره د $f''(x)$ مشتق تابع لاس ته راځي، چې د دویم مشتقتابع په نامه یادیږي.

بیلګه:

$$f(x)=x^3+x^2+x+1 \Rightarrow f'(x)3x^2+2x+1 \Rightarrow \underline{\underline{f''(x)=6x+2}}$$

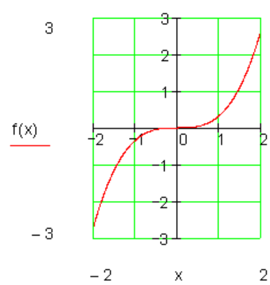
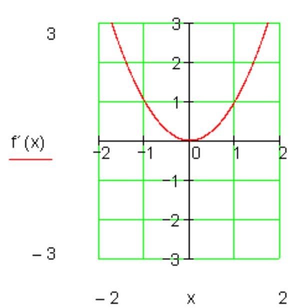
د $f''(x)$ بیا مشتق نیونه و دریم مشتق ته اوداسې نور.

$$f(x)=x^3+x^2+x+1 \Rightarrow f'(x)3x^2+2x+1 \Rightarrow f''(x)=6x+2 \Rightarrow \underline{\underline{f'''(x)=6}}$$

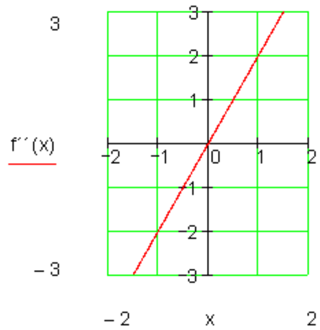
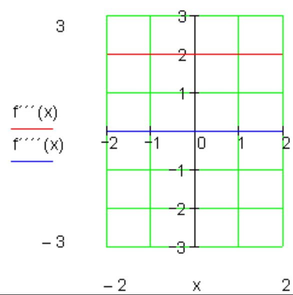
د $f(x)\frac{x^3}{3}$ تابع دې 4 واره مشتق ونیول شي:

$$f(x)=\frac{x^3}{3} \Rightarrow f'(x)=\frac{3x^2}{3}=x^2 \Rightarrow f''(x)=2x \Rightarrow f'''(x)=2 \Rightarrow f''''(x)=0$$

د تابع ګراف: د یوه تابع انځورونه د اړونده مشتق تابع سره

$f(x)=\frac{x^3}{3}$	
$f(x)=\frac{x^3}{3} \Rightarrow f'(x)=x^2$	

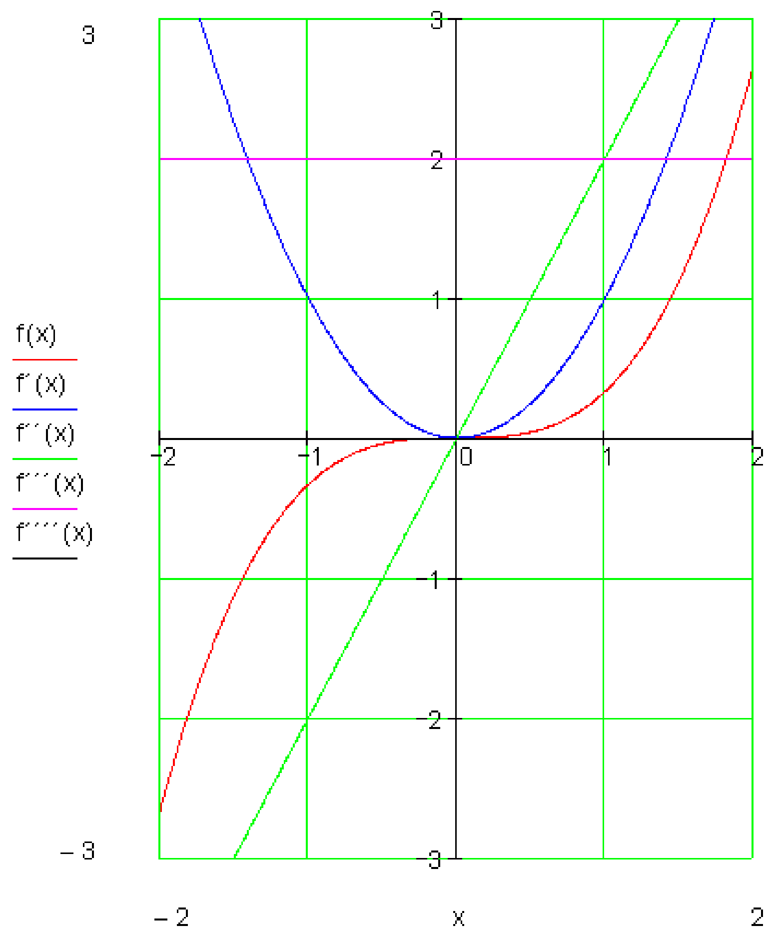
(c) ketabton.com: The Digital Library

 	$f'(x) = x^2 \Rightarrow f''(x) = 2x$ $f''(x) = 2x \Rightarrow f'''(x) = 2 \Rightarrow f''''(x) = 0$

--- -----------

پورته تولو توابعو گراف په یوه پروت ولاړ سیستم کې

(c) ketabton.com: The Digital Library



بیلګې:

اول: د تابع $f(x)=4x^3-2x^2+x-2$ مشت درپواره پیدا کړی

$$f(x)=4x^3-2x^2+x-2$$
$$f'(x)=12x^2-4x+1$$
$$f''(x)=24x-4$$
$$f'''(x)=24$$

۳-۱ د جګو درجو مشتق

دویم: د تابع $f(x)=\frac{3}{4}x^3-12x^2+\frac{1}{4}x$ **مشتق درپواره پیدا کړی**

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x)=\frac{3}{4}x^3-12x^2+\frac{1}{4}x$$

$$f'(x)\frac{9}{4}x^2-24x+\frac{1}{4}$$

$$f''(x)=\frac{9}{2}x-24$$

$$f'''(x)=\frac{9}{2}$$

ټولګه:

د $f(x)$ لومړی مشتق د $f(x)$ مشتق تابع $f'(x)=\frac{df(x)}{dx}$ ده :

د $f(x)$ دویم مشتق د $f'(x)$ مشتق تابع $f''(x)=\frac{d^2f(x)}{dx^2}$ دی:

د $f(x)$ دریم مشتق د $f''(x)$ مشتق تابع $f'''(x)=\frac{d^3f(x)}{dx^3}$ دی:

په ځانګړي ډول: یو په خوښه کسرۍ تابع $f(x)$ په خوښه د مشتق قابلیت لري.

تمرینونه:

د لاندې توابعو دریواره مشتق ونیسئ.

$f(x)=3x+4$ -1

$f(x)=2x-4+x^3-5x+4x^3$ -2

$f(x)=3x^3+2x^2+x+1$ -3

$f(x)=(2x+1)^3$ -4

$f(x)=x-x^4+3+x$ -5

$f(x)=1-2x-3x-4x+x^4$ -6

$f(x)=a+b+c^2-x-ax-bx-cx^3-c^3x$ -7

$f(x)=4x^3-2x^2+5x-2$ -8

(c) ketabton.com: The Digital Library

د اکپوننشل توابعو مشتق

د تابع مساواتو جوړښت

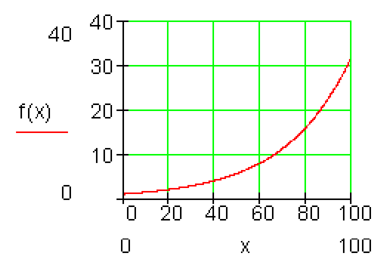
کولي باکتريا Coli - Bakterien د انسان په کلمو کې کاره سرته رسوي. دوي د کوټي ویش (حجره ویش) له لارې زیاتیږي. و مساعدو شرایطو لاندې دوي په هرو ۲۰ دقیقو کې ځان تجزیه کوي. د غه عملیيي لپاره یو ارزښت جدول :اړ، او ګراف یي کاړو. دلته د x اووښتوني (متغیره) په دقیقو د وخت لپاره ده.

د y متغیره د باکتریا ګانو د تعداد لپاره ده.

x = Minuten	0	20	40	60	80	100
y = Bakterienzahl	1	2	4	8	16	32

x = دقیقې

y = د باکتریا ګنون یا تعداد



فعالیت: د دې لپراه تابع ولیکئ

قضیه : هر اکسپوننشل تابع د $y = b^x, (b > 0)$ د ټولو ریلو اعدادو لپاره مشتقوړ دی او صدق کوي: $f' = b^x \ln b$

حل:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{y - y_0}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad , \; f(x) = b^x$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{b^x - b^{x_0}}{x - x_0}$$

$$= b^{x_0} \cdot \lim_{x \to x_0} \frac{b^{x - x_0} - 1}{x - x_0} \quad , \; x - x_0 = h$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$=b^{x_0}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{b^h-1}{h}$$

له پورته لرو $\begin{cases} b^h-1=k \\ h=\log_b(1+k) \end{cases}$ او لا س ته تري راځي

$$=b^{x_0}\cdot\lim_{k\to 0}\frac{k}{\log_b(1+k)}$$

$$=b^{x_0}\cdot\lim_{k\to 0}\frac{1}{\frac{1}{k}\cdot\log_b(1+k)}$$

د لوګاريتم قانون څخه لرو: $n\cdot\log x=\log x^n$ او لاس ته راځي

$$=b^{x_0}\cdot\lim_{k\to 0}\frac{k}{\log_b(1+k)}$$

$$=b^{x_0}\cdot\frac{1}{\log_b[\lim_{k\to 0}(1+k)^{\frac{1}{k}}]}\quad ,\lim_{k\to 0}(1+k)^{\frac{1}{k}}=e$$

له پورته لاس ته راځي

$$=b^{x_0}\cdot\frac{1}{\log_b e}\quad ,\ \log_b e=\frac{1}{\ln b}$$

$$=b^{x_0}\cdot\ln b\ ;\quad x_0\in IR\ ;\ b\in IR^{>0}$$

$$\Rightarrow f':f'(x)=b^x\cdot\ln b\ ;\ D'(f)=IR\ ;b\in IR^{>0}$$

$$f'(x)=b^x\cdot\ln b$$

ضيه :

د $y=f(x)=e^x$ مشتق پيدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل:

$$y = f(x) = e^x$$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x_0 + \Delta x} - e^{x_0}}{\Delta x}$$

موږ دا لرلي په پام کې نیسو: $e^{x_0 + \Delta x} = e^{x_0} . e^{\Delta x}$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x_0} \cdot e^{\Delta x} - e^{x_0}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x_0}\left(e^{\Delta x} - 1\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} e^{x_0} \cdot \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = e^{x_0} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$$

موږ د تل کوچنیکیدونکي Δx ارزښت لپاره څیړو $\frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$

Δx

Δx	1	0,1	0,01	0,001	0,0001
$\frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$	1,718...	1,051...	1,00501...	1,0005...	1,00005...

د دې په بنسټ موږ لاس ته راوړو:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = 1$$

زموږ د شمېرنې په بنسټ دا دا معنا لري:

$$f'(x_0) = e^{x_0} \cdot \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}}_{1} = e^{x_0} \cdot 1 = \underline{\underline{e^{x_0}}}$$

که د x_0 په ځای x ځای په ځای کړو، نو لرو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$f'(x) = e^x$ او $f(x) = e^x$

اکسپوننشل فنکشن $y = f(x) = e^x$ تیک $y' = f'(x) = e^x$ مشتق لري

یعني د e^x تابع د مشتق څخه بېرته د e^x تابع لاس ته راځي.

بیلګه:

لرو : $f(x) = b^{3x^2} - 10;\ D(f) = IR;\ b \in IR^{>0}$

د پورته تابع مشتق ونیسئ.

$$D'(f) = D(f) = IR \quad \Rightarrow D(f') = IR$$

$$f(x) = b^{3x^2-10} = g[h(x)]$$
$$g(z) = b^z \ \Rightarrow f'(z) = \underline{b^z \cdot \ln b};\ z \in IR$$
$$h(z) = 3x^2 - 10 \ \Rightarrow h'(x) = \underline{6x};\ x \in IR$$
$$f'(x) = g'(x) \cdot h'(x)$$
$$= b^z \cdot \ln b \cdot 6x \ \Rightarrow z = 3x^2 - 10$$
$$= b^{3x^2-10} \cdot \ln b \cdot 6x;\ x \in IR$$
$$= \underline{\underline{\ln b \cdot 6x \cdot b^{3x^2};\ D(f) = IR;\ b \in IR^{>0}}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

تمرينونه:

د لاندې توابعو لومړی مشتق وټاکئ.

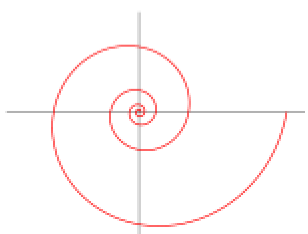
$a)\ f(x)=3\cdot e^{-2x+1}$ $b)\ f(x)=e^{x^2+2x-1}$ $c)\ f(x)=(x-1)\cdot e^{x}$

$d)\ f(x)=\sqrt{e^{x}}$ $e)\ f(x)=x^{n}\cdot e^{e}$ $f)\ f(x)=e^{kx}$

$g)\ f(x)=2^{\frac{1}{2x}}$ $h)\ f(x)=(\frac{1}{4})^{3x}$ $i)\ f(x)=x\cdot a^{\sqrt{x}}$

$k)\ f(x)=\sqrt{e^{x}+1}$ $l)\ f(x)=\frac{e^{x}}{1-e^{x}}$ $m)\ f(x)=\frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}$

د لوګاريتم مشتق



فعاليت:
- لوګاريتم تعريف
- اکسپوننت يا توان تعريف کړئ.
- د لوګاريتم او توان ترمنځ اړيکې وښاياست.

قضيه :
د لوګاريتم تابع مشتق:

(c) ketabton.com: The Digital Library

قضیه: هر د لوګاریتم تابع $y=f(x)=\log_b x$ د $b>0, b\neq 0,\ x>0$ سره، مشتقوړ دی

او صدق کوي: $f'(x)=\frac{1}{x}\log e=\frac{1}{x.\ln b}$

ثبوت: دا چې تابع $y=f(x)=\log_b x$ یواځي د$x>0$ لپاره پیژند لري یا تعریف دی. په هر

ځاي کی چی$x>0$ وي، نودا لاندې باوري دی :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\frac{\log_b(x_0+h)-\log_b x_0}{h}=\frac{1}{h}\log_b\frac{x_0+h}{x_0}=\log_b(1+\frac{h}{x_0})^{\frac{1}{h}}$$

د (لومړۍ برخې) له مخی دا لاس ته راځي:

$$\log_b(1+\frac{h}{x_0})^{\frac{1}{h}}=\left[\left(1+\frac{h}{x_0}\right)^{\frac{x_0}{h}}\right]^{\frac{1}{x_0}}\rightarrow e^{\frac{1}{x_0}}$$

او له دې امله

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0}=f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\log_b(1+\frac{h}{x_0})^{\frac{1}{h}}=\log_b e^{\frac{1}{x_0}}=\frac{1}{x_0}\log_b e$$

د لوګاریتم تابع په ورکړشوي مشتق سره د خپل ټول پیژند سټ کی د مشتق قابلیت لري.

$f'(x)=\frac{1}{x}\log_b e$ همداسې $f'(x)=\frac{1}{x}.\frac{\ln e}{\ln b}$ داچې $\ln e=1$ نو صدق کوي:

$f'(x)=\frac{1}{x.\ln b}$. خه چې د ښوولو وو.

په ځانګړي ډول دا لاندې باور لري:

$$\left(\frac{d(\ln x)}{dx}\right)_{x=x_0}=\frac{1}{x_0}$$

بیلګه:

د $f(x)=\log\sqrt{x^3}$ **مشتق وشمېرئ.**

ښوونه: په لاندې توګه مخ تخ ځو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x)=\log\sqrt{x^3}=\log_{10}x^{3/2}=\frac{3}{2}\log_{10}x$$
$$\Rightarrow\ f'(x)=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x\cdot\ln 10}$$
$$=0.6514\cdot\frac{1}{x};\ D(f')=IR^{>0}$$

بیلګه:

د $y=\ln\frac{x-2}{x+2}$ تابع مشتق پیداکړئ

حل:

موږ لیکلاي شو :

$$y=\ln\frac{x-2}{x+2}$$
$$=\ln(x-2)-\ln(x+2)$$

دا چې $(\ln(x-2))'=\frac{1}{x-2}$ او $(\ln(x+2))'=\frac{1}{x+2}$ دی، نو لرو:

$$y'=(\ln(x-2))'-(\ln(x+2))'$$
$$=\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}=\frac{x+2-x+2}{(x-2)(x+2)}$$
$$=\frac{4}{x^2-4}$$

بیلګه:

لرو: $f(x)=\log_2(x)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

غواړو پيدا کړو: ۱. مشتق $f'(x)$
مشتق د $x_0=16$ په ځاي کې
حل: د حل لپاره د پورته فرمول څخه کار اخلو: $f'(x) = 1/(x\cdot \ln 2)$
اوس د $x_0=16$ په ځاي کې مشتق ټاکو:
$f'(x_0)= 1/(16\cdot\ln 2)= 1/(16\cdot 0.69)= \underline{0.09}$

تمرينونه:

د لاندې توابعو لومړی مشتق وټاکئ يا پيدا کړئ.

$a)\ f(x) = \ln\sqrt{x}$ $b)\ f(x) = \ln(x^2-4)$ $c)\ f(x) = \ln\frac{2}{x^3}$

$d)\ f(x) = \ln\frac{x+1}{x}$ $e)\ f(x) = x\cdot\log_2 x^2$ $f)\ f(x) = (x^4-1)\cdot\log$

$g)\ f(x) = \frac{\ln}{x+2}$ $h)\ f(x) = \frac{x^4}{\ln x}$

د يوې تابع مشتقوړوالی يا - قابليت

موږ وليدل، چې يوه تابع په هر ځاي کې تعريف نه ده، په هر ځاي کې حد نه لري او همداسې په هرځاي کې متمادي نه ده. په همدې توګه يوه تابع هر چيرته د مشتق قابليت هم نه لري.
تابع $f(x) = |x|$ په 0 ځای کې تعريف نه ده:
د ټولو $x > 0$ له پاره باور لري $f(x) = x$

(c) ketabton.com: The Digital Library

او له دې سره $=1$ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-0}{x-0}$

د تولو $x<0$ لپاره د پورته په برعکس $f(x)=-x$ باور لري او له دي سره:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{-x-0}{x-0}=-1$$

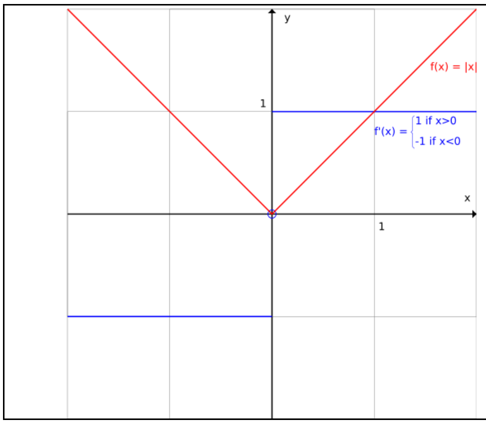
دا چي کيڼ- او ښی اړخيز حد يو له بل سره سر نه خوري، حد(پوله) نه شته. تابع په دې راوړل شوي ځای کې مشتقوړ نه ده.

د تابع مشتق کېدنه په نورو ټولو ځايونو کې تر اوسه تل ورکړ شوي.
په صفر ځای کې سره له دې يو ښي اړخيز مستق ورکړ شوی، يعني لرو:

$$f'+(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{-x-0}{x-0}=1$$

او يو کيڼ اړخيز مشتق هم:

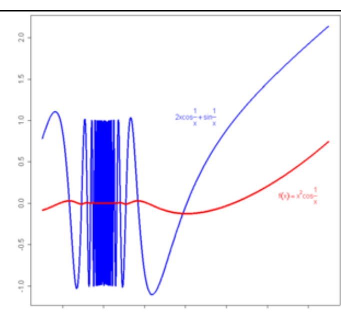
$$f'-(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{-x-0}{x-0}=-1$$



که پورته گراف ته وگورو، نو وبه پوهيږو، چي يوه مشتقوړ تابع بايد گوډه نه وي يا په کوم ځای کې ماته نه وي يا په بل عبارت کونج جوړ نه کړي.

د يوه نه متمادي مشتقوړ تابع لپاره بېلگه:
يو تابع متمادي مشتقوړ بلل کيږي، که د هغې مشتق متمادي وي. که يوه تابع هرچيرته مشتقوړ وي، بايد نه دی چي مشتق دې يې هم متمادي وي.
د بيلگې په توگه:

$$f(x)=\begin{cases}x^2\cos\left(\dfrac{1}{x}\right) & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$



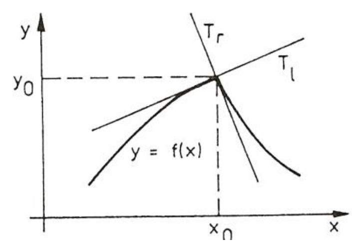
تابع په هر ټکي کې حتي د $x=0$ سره مستقوړ دی. مشتق
د لوگاريتم مشتق

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f'(x)=\begin{cases}2x\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)+\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

يې ددې په خلاف په 0 ځای کې متمادي نه دی
مشتق د ټاکلو نيونويا فرضيو لاندې ممکن او له دې امله هلته هدفمند دی، چېرته چې لیمیټ (پولی) ته تګ ممکن وي يعني چيرته چې د تفاضل ويش يو لیمیټ د $x\to 0$ لپاره ولري.
که کومه منحني چيرته راماته وي (ځبره 4)، ګورو چې هلته تانجنت نه شته او همدارنګه جګيدل او هم د تفاضل ويش نه شته. پس د مشتق قابليت د متماديت په ځير د يوې تابع ځانګړي خوي دی.

په پورته ځیره کی انځور شوې منحني د x_0 په ځاي کی یواځنی تانجنت هم ونه لري او له دې امله مشتق هم ونه لري، خو دلته يو کيڼ تانجنت T_1 يا کيڼ جګوالی لري اوپه دې ډول کيڼ مشتق لري او په همدې ډول يو ښی تنجت T_r او ښی جګوالی او په دي ډول ښی د تابع مشتق موجو د دی.



په يوه نامتمادي تابع کی د تانجنت يا مشتق پوښتنه بی معناده.
دا دلته انځور شوی پرابلم يا مسأله اوس د شميرنې د ټيك فرمول لاندې راوړو.
وليدل شو چې په يوه ځای x_0 کی چی تابع متمادي نه وي د مشتق پوښتنه بی مانا ده. نيسو چی دا دې ښوول شوی وی. دا ځرګنده ده چی هره متمادي تابع بايد ضرور مشتقوړنه وي. د بيلګي په توګه که تابع زاويه يا کونج ولري.
دې ته اړتيا ده چی وښايو، چی يواځي متمادي توابع د مشتق قابليت لري، دا بيا دا معنا لري چی هره تابع چې د مشتقوړ وي بايد لږ تر لګه متمادي وي او په دې ډول مشتق متماديت په بر کی لري يا خوندي لري، په دې معنا چی متماديت د مشتقوړوالی لپاره اړيين يا ضروري شرطونه دي

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله:

که د $y = f(x)$ تابع د x_0 په ځاي کی مشتقوړ وي، نو هلته ضرور متمادي ده.

ښوونه : د دمشتق د تعریف څخه لاس ته راځي، چی حد شته دی.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

لیمیټ یواځی هلته کیدی شي چی موجود وي، چی د $x \to x_0$ لپاره د مخرج سره صورت هم صفر ته ولاړ شي یانې $f(x) - f(x_0) -> 0$ لاړ شي.

نو باور لري: $f(x) -> f(x_0)$ د $x \to x_0$ لپاره.

دا د متمادیت پیژند دی.

دا تفاضل وېش په یوه بله بڼه هم انځوریدلی شي که $x = x_0 + \Delta x$ وکاروو:

دلته مشتق $f'(x)$ په لاندې توګه ورکړ شوي دی:

د یوه تابع د مشتق قابلیت د لومړي ځل لپاره یواځی په ځای (lokal) پورې اړ خوي دی یعنی په یو ځاي x=x0 کی تعریف دئ. لکه څنګه چی په متمادیت کی(لومړي څېرکی دې وکتل شي) کیدی شي چی د مشتق قابلیت او مشتق یوه واز یابند اینتروال ته وغزول شي.

تعریف:

د $y = (x)$ یوه تابع په واز اینتروال (a, b) کې، د اشتقاق قابل(مشتقوړ) بلل کېږي، د لاندې مشق سره.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx} = f'(x) \;\; ; \;\; a < x < b$$

که داد $x = x_0 \in (a, b)$ په هر ځای کې د مشتق قابلیت ولري د مشتق $f'(x_0)$ سره. دا په بند اینتروال $[a, b]$ کې مشتق وړ بلل کېږي، که دا سربېره پر دې د a په ځاي کی ښی اړخیز اود b په ځاي کي کیڼ اړخیز مشتق وړ هم وي.

بیلګه ۲ ، ۶:

د توان تابع $y = x^n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ په هرځاي کی د مشتق قابلیت لري د لاندې مشتق سره

۱۱۴ د لوګاریتم مشتق

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dx^n}{dx}=nx^{n-1}$$

د ساین تابع $y=\sin x$ او کوساین تابع $y=\cos x$ په هرځاي کی مشتقوړده، د لاندي مشتق سره

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d\sin x}{dx}=\cos x,\ \frac{dy}{dx}=\frac{d\cos x}{dx}=-\sin x$$

په یوه واز انتروال کی $y=f(x)$ مشتقوړ تابع مشتق بیرته $y'=f'(x)$ تابع ده ، نو په دې ډول یې د مشتق قابلیت اود متمادیت قابلیت پوښتنه کیدی شي.

تعریف (پیژند) ۲ . ۴:

په یو د $x=x_0$ چاپیریال کې د مشتق قابل تابع (رابیلیدوړ بلواك) $y=f(x)$ په $x=x_0$ کې دوه واره د مشتق قابلیت لري(رابیلیدوړ دی)، که د هغي اشتقاق(رابیلیدنه) $y'=f'(x)$ هلته د مشتق قابلیت لري(رابیلیدوړ وي). سرې د $f'(x)$ مشتق د تابع(رابیلیدنه د بلواك) $y=f(x)$ دویمه رابیلیدنه بولي او لیکي:

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=x_0}=f''(x_0)=\left(\frac{df'(x)}{dx}\right)_{x=x_0}$$

یو په یوه واز اینتروال کي مشتق کېدونکې تابع $y=f(x)$ هلته دوه واره مشتقوړ بلل کیږي، که د هغه مشتق $y'=f'(x)$ په دې اینتروال کې مشتق وړ وي. ددې لپاره لیکل کیږي:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=f''(x)=\frac{df'(x)}{dx}$$

تمرین:

وښایئ چې ایا دا توابع $y=\cos x$; $y=x^n$; $y=c$ هر چیرته دوه واره مشتقوړ دي؟

د معکوس تابع مشتق

(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیتونه:

د یوې تابع معکوس تابع تعریف کړئ.

د $f(x) = \frac{x^2+5x}{x^3-8}$ تابع د تعریفساحه وښایاست.

د پورته تابع د مشتق مشتق وشمیرئ.

اوس دې معکوسه تابع تر څیړنې لاندې ونیول شي . دلته دې ونیول شي،چې $y = f(x)$ په $x = x_0$ کې د $f(x) = 0$ سره او په یوه د x_0 چاپیریال کې جګیدونکی دی $f'(x_0) > 0$ او یا په کلکه لوېدونکی $f'(x_0 < 0$ او له دې امله معکوس کیدونکی هم دی، یعني $x = f^{-1}(y)$ ، نود کمښتویش لپاره معکوسه تابع لاس ته راځي:

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} = \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

او دا چې $x -> x_0$ او $f(x)$ د متمادیت له امله هم $y -> y_0$ او باورلري.

$$\left(\frac{dx}{dy}\right)_{y=y_0=f(x_0)} = \left(\frac{df^{-1}(y)}{dy}\right)_{y=y_0=f(x_0)} = \frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0}} = \frac{1}{\left(\frac{df(x)}{dx}\right)_{x=x_0}}$$

که د لاندې ټکي ځای $x = x_0$ لپاره ساده بیرته x ولیکو نو دا لاندې لنډ فورم لیکلی شي:

د $y = f(x)$ لپاره باور لري.

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

د لوګاریتم مشتق ۱۱۶

(c) ketabton.com: The Digital Library

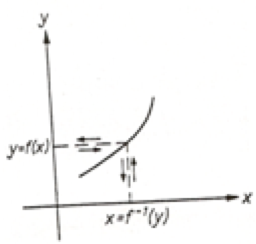
د پورته ورکړ شوو نیونوسره سرې بیرته یو د تفاضل ویش لاس ته راوړي چې د هغه سره د مروج ویش په څیر شمیرنه کیدی شي، لکه

$$(f^{-1})`(y)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}=\frac{1}{\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}}=\frac{1}{f`(x)}$$

جمله ۲ . ۷: د معکوس تابع مشتق : که y = f(x) د x په یوه چاپیریال کی د $x=f^{-1}(y)$ سره معکوس او همله د f’ (x) |= 0 سره مشتقوړ وي، نو معکوس تابع د y = f (x) سره مشتقوړ دی او باوري $\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}$

حل: کیدی چی د f تابع د مشتق څخه د f^{-1} معکوس تابع مشتق لاس ته راوړو. له دې امله له 0<- x او هم 0<-y او معکوس څخه، د y = f(x+ x)-f(x) سره، لاس ته راځي:

$$(f^{-1})`(y)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}=\frac{1}{\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}}=\frac{1}{f`(x)}$$

$f'(x)=\frac{dy}{dx}$ او $(f-1)'(y)=\frac{dx}{dy}$ سره. بالاخره لرو: $\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}$	

تمرینونه: د $y=f(x)=x^n; n=1,2,3,4......$ تابع لپاره که x ≥ 0 وټاکل شي او په دې $x=\sqrt[n]{y}=y^{\frac{1}{n}}; y\geq 0$ توګه یې معکوس تابع وي، نو د معکوس تابع مشتق یې ونیسئ.

-- د $y=x^{\frac{m}{n}}, m,n\in N$ تابع د معکوس تابع مشتق ونیسئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ایمپلیڅیت Implicit تابعو مشتق

د یوې تابع هغه زیات د استعمال وړ انځورونه د تابع د مساوات له مخې او د f(x) تابع د ورشو ورکولو سره په اکسپلیڅیتExplicit ډول، که تابع متحوله د برابرون په یوه اړخ ځانله شوې وي:

د بیلګې په توګه $Y = 3x^2+7x$

د یوې تابع هغه زیات د استعمال وړ انځورونه د تابع د مساوات له مخې دی، د تابع د ورشو ورکولو سره په ایمپلیځیت Implicit دول د بیلګې په توګه $Ex^2+7x+y=0$

فعالیت:

که $Ex^2+7x+y=0$ولرو، څنګه کولی شو، چې ددې تابع مشتق پیدا کړو؟

قضیه:

یوه تابع په ایمپلیڅیته بڼه $x^2+xy-y^2 = 1$ لرو، غواړو $\frac{dy}{dx}$ پیدا کړو.:

ښوونه:

$$\frac{d}{dx}(x^2+xy-y^2)=\frac{d}{dx}(1)$$

$$2x+(1\cdot y+x\frac{dy}{dx})-2y\frac{dy}{dx}=0$$

$$2x+y=\frac{dy}{dx}-x\frac{dy}{dx}$$

$$2x+y=\frac{dy}{dx}(2y-x)$$

$$\frac{2x+y}{2y-x}=\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2x+y}{-x+2y} \quad \vee \quad \frac{2x+y}{2y-x}$$

ایمپلیڅیټ مشتق د یوې تابع مشتقنیولو لپاره یو امکان دی، چې نه ایمپلیڅیت یعنې د یوه ترم سره ورکړ شوی وي، بلکې د ایمپلیڅیت یعنې د یوه مساوات له مخې ورکړ شوی وي. دا قاعده د دې لپاره هم کارول کیږي، چې تابع په اکسپلیڅیت ډول ورکړ شوې وې، خو د دې مشتقنیول ستونځمن وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بيلګه :

د $f\left(x\right)=x^{x}$ تابع مشتق په ورسره بلدو مشتققوانينو نه شي نيول کيدی، ځکه چی په بنسټ او جګ االکسپونئنت کي يي متحولې پرتي دي. د لوګاريتم له لارې د اکسپوننت متحوله له منحه وړل کيدی شي:

$$\ln f(x)=x\ln x$$

اوس ايمپلځيت دا حل کوو، داسي چي دواړو لورو ته يي د x پسې مشتق نيسو:

$$\frac{\mathrm{d}(\ln f(x))}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}(x\ln x)}{\mathrm{d}x}$$

د دې مساوات مشتق د ځنځيرقانون له لارې صورت نيسي:

$$\frac{\mathrm{d}(\ln y)}{\mathrm{d}y}\,f'(x)=\frac{\mathrm{d}(x\ln x)}{\mathrm{d}x}$$

دلته $y=f(x)$. دی. د لوګاريتم او ضرب د مشتق قانون لاس ته راځي:

$$\frac{1}{y}\,f'(x)=\ln x+x\frac{1}{x}$$

که په $f'(x)$ پسې حل شي او د y له پاره ببرته $f(x)=x^{x}$ ځا په ځای کړو، نو دا حل لاس ته راځي:

$$f'(x)=y\left(\ln x+1\right)=x^{x}\left(\ln x+1\right)$$

تمرينونه:

- د r وړانګي سره د د ايرې مساوات $x^2+y^2=r^2$ سره. دايمپليخيټ مشتق له لارې يې مشتق ونيسئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

-- د $E: \; x^2 + 3y^2 = 7$ سره ورګړ شوې الیپسې مشتق دې ونیول شي.

د بنسټيزو مشتقونو جدول

Nr.	$f(x)$	$f'(x)$	نیونه یا فرضیه
1	$c = konst$	0	
2	X^n	$n.x^{n-1}$	$n = 1,2,3.......$
3	X^n	$n.x^{n-1}$	x تول عدد او $x \neq 0$
4	X^r	$r\,x^{r-1}$	$r \quad rational, \quad x > 0$
5	$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$	$\frac{1}{n}.x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{nx}\sqrt[n]{x}$	$n = 1,2,3......x > 0$
6	x^a	$a.x^{a-1}$	$x > 0, \; a \; reell$
7	a^x	$a^x \ln a = \frac{a^x}{\log_a e}$	$x > 0, \; a \neq 1$
8	e^x	e^x	
9	$\log_a x$	$\frac{1}{x}\log_a e = \frac{1}{x \ln a}$	$a > 0, \; a \neq 1, \; x > 0$
10	$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$x > 0$
11	$\sin x$	$\cos x$	
12	$\cos x$	$-\sin x$	

(c) ketabton.com: The Digital Library

13	$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in z$
14	$\cot x$	$-\frac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \cot^2 x)$	$x \neq k\pi,\ k\ \ k \in z\ (Z)$

د پورته جدول په مرسته کیدی شي چی کم له کمه په فورمـال ډول ، په خوښه د هرې شننيزې يا سپړنيزې(تحليلي) ويينې يا افادې مشتق په شننيزه توګه لاس ته راوړی شي، سره له دې هم بايد سړی همغه نيونی په نظر کې ونيسي.

د فصل تولـګه

کمبنتويش Differenzenquotient (د سيکانت جګيدنه) يا منځنی تغير ارزښت

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(fx_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

مشتق Differetialquotient (د تانجنت چګوالی يا لحضوي تغير ارزښت)

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

د ثابتي قانون

$$f(x) = c \cdot u(x) mit\ c = constant$$

$$\Rightarrow f'(x) = c \cdot u'(x)$$

$$\boxed{f' = c \cdot u'}$$

د جمعي قانون

$$f(x) = u(x) + v(x)$$

$$\Rightarrow f'(x) = u'(x) + v(x)$$

$$\boxed{f' = u' + v'}$$

د ضرب قانو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) = u(x) \cdot v(x)$$
$$\Rightarrow f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$
$$\boxed{f' = u' \cdot v + u \cdot v'}$$

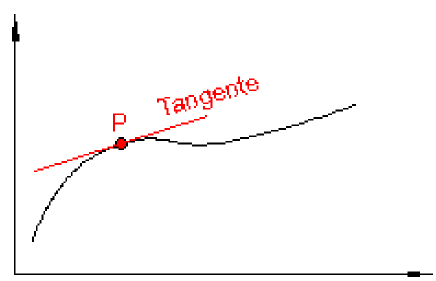
د وېش قانون

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$$
$$\Rightarrow f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v(x)}{[v(x)]^2}$$
$$\boxed{f = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}}$$

د ځنځير قانون

$$f(x) = f[z(x)]$$
$$\Rightarrow f'(x) = f'(z) \quad \cdot \quad z'(x)$$

(تعريف): د يوه تابع ګراف ميل (جګوالی) په يوه ټکي P کې په همغه ټکي کې د تانجنت د ميل يا جګوالي ګراف سره برابر دی



د کمبنت ويش يا د تفاضل ويش Difference quotient

د يوې کربنې جګېدنه بې له مشتق نيونې ټاکلکېدی شي:

کربنه $y=f(x) = mx+a$ لرو

د دې کربنې د جګېدنې فرمول په لاندې ډول دی:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_1-y_0}{\Delta x}=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

د ځېرکي تمرينونه:

(۱) کمښتويش (د تفاضل وېش) ارزښت د P او Q په ټکو کې وټاکئ.

a) P(3,2) , Q(5,4)   b) P(2,4) , Q(3,1)

(۲) د $x = x_0$ په ځاي کې د f تابع د تانجنت جګوالی وټاکئ.

$a)\ f(x)=x^2\ ,\ x_0=2$ $b)\ f(x)=0.5x^2\ ,\ x_0=3$

(۳) د کمښتويش(د تفاضل ويش) او مشتق لاندې څه پوهيږو او د دوي ترړنځ فوپير څه دی؟

(٤) د يوه تابع د سکانت(   ) لاندې څه پوهيږو او د تانجنت جګېدو لاندې څه پوهيږو؟ او دوي ترمنځ کومې اړيکې پرتې دي؟

(٥) د تابع مشتق د توان قانون له مخې پيداکړئ.

$a)\ f(x)=x^5$ $b)\ f(x)=x^6$

$c)\ f(x)=\frac{1}{x^2}$ $d)\ f(x)=\frac{1}{x^5}$

$e)\ f(x)=\sqrt{x}$ $f(x)=\sqrt[4]{x^3}$

$g)\ f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ $h)\ f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(٦) د تابع مشتق د ثابت د قانون له مخې پيداکړئ.

$a)\ \ f(x)=0.2x^5-3$ $\qquad b)\ \ f(x)2x^4+1$

$c)\ \ f(x)=\frac{4}{x^2}$ $\qquad d)\ \ f(x)=\frac{3}{x^3}+2$

$e)\ \ f(x)=6\sqrt{x}$ $\qquad f)\ \ f(x)\frac{8}{\sqrt{x}}-5$

(٧) د تابع د گراف په مرسته وښايئ، چې ټول g(x) + c ترمونه همغه مشتق لري.

ياودونه: پابت عدد كه هركوم ارزښت ونيسي.

(٨) وښايئ، چې د a.g(x) د مشتق سره د a ضريب (ځله وونى) ساتلى پاتې كيږي.

(٩) د f تابع مشتق د جمعي قانون سره وښايئ

$a)\ \ f(x)=4x^4-3x^3+x^2-x-1$ $\qquad b)\ \ f(x)=x-\sqrt{x}$

$c)\ \ f(x)=\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{x^3}$ $\qquad d)\ \ f(x)=3x^2+0.4x-5$

(١٠)د f تابع مشتق د ضرب قانون سره وټاكئ.

$a)\ \ f(x)=x^3(x^2-2x+1)$ $\qquad b)\ \ f(x)=(2x^2+1)(x-1)$

$c)\ \ f(x)=(x^2-5)(2x^3+x^2+x)$ $\qquad d)\ \ f(x)=(4x^2-x+4)(3x+2)$

(١١) د f تابع مشتق د ويش قانون له مخې وټاكئ.

$a)\ \ f(x)=\frac{x^3-1}{4-x^2}$ $\qquad b)\ \ f(x)=\frac{2x^2+x+3}{x+1}$

$c)\ \ f(x)=\frac{4-x-x^3}{2x^2+3}$ $\qquad d)\ \ f(x)=\frac{x^2+1}{x^3-2x^2+x}$

(١٢) د وېش قانون له مخې په څټ ارزښت(پرعكس ارزښت) وټاكئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

(۱۲ الف) د لاندې تابع مشتق وشمېرئ.

$$f(x)=\frac{1}{g(x)}\Rightarrow f'(x)=\frac{-g'(x)}{g(x)\cdot g(x)}$$

د $g(x)\neq 0$ سره

(۱۳) د f تابع ارزښت د زنځير قانون له مخې وټاکئ.

$a)\ f(x)=(4x^4-x)^2$ $\quad b)\ f(x)=(3x^2+4x-5)^2$

$c)\ f(x)=(2x-7)^3$ $\quad d)\ f(x)=(5-3x^3)^4$

(۱٤) د لاندې توابعو مشتق وټاکئ.

$a)\ f(x)=\frac{1}{(2x^2+x)^3}$ $\quad b)\ f(x)=\frac{1}{(x-5)^4}$

$c)\ f(x)=(1+\sqrt{x})^2$ $\quad d)\ f(x)=\sqrt{1-x^3}$

(۱٥) د لاندې توابعو درې واره مشتق ونيسئ.

$a)\ f(x)=x^3-2x^2+1$ $\quad b)\ f(x)2x^4+3x^3-x^2+x-5$

$c)\ f(x)\frac{3x-4}{x}$ $\quad d)\ f(x)=\frac{x^2-1}{2-x}$

(۱٦) د يو n-م درجې تابع بايد څو واره مشتق ونيول شي چې يوه ثابته ترې لاس ته راشي.

(۱۷) د لاندې توابعو لومړی مشتق و ټاکئ.

$a)\ f(x)=\sin 3x$ $\quad b)\ f(x)\sin x\cdot\cos x$ $\quad c)\ f(x)=\sin^2 x$

$d)\ f(x)=\tan x+2\sin 2x$ $\quad e)\ f(x)=\sin x^2$ $\quad f)\ f(x)=\sin\frac{x-1}{x+1}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(۱۸) د $f(x)=\sin^n x (n\in IN)$ تابع د لومړي مشتق لپاره فرمول وښایاست یا وټاکئ.

(۱۹) د تانجنت تابع لپاره د ساین او کوساین قانون په مرسته د مشتق قانون و ښایاست.

(۲۰) وښایاست چې د f(x) = tanx لپاره $f'(x)=1+\tan^2(x)$ هم باور لري.

(۲۱) د ویش قانون له مخې د کوتانجنت قانون پیداکړئ او هم د تانجنت قانون له مخې.

(۲۲) ولې د ساین تابع او د کوساین تابع په خوښه زیات مشتقوړ دي.

(۲۳) د لاندې توابعو لومړی مشتق وټاکئ.

$a)\ f(x)=3\cdot e^{-2x+1}$ $b)\ f(x)=e^{x^2+2x-1}$ $c)\ f(x)=(x-1)\cdot e^x$

$d)\ f(x)=\sqrt{e^x}$ $e)\ f(x)=x^n\cdot e^e$ $f)\ f(x)=e^{kx}$

$g)\ f(x)=2^{\frac{1}{2x}}$ $h)\ f(x)=(\frac{1}{4})^{3x}$ $i)\ f(x)=x\cdot a^{\sqrt{x}}$

$k)\ f(x)=\sqrt{e^x+1}$ $l)\ f(x)=\frac{e^x}{1-e^x}$ $m)\ f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$

(۲٤)د $f(x)=(x^2+2)\cdot \lg x \quad (x>0).$ مشتق دې پیدا شي.

مشتق يې وټاکئ یا پیدا کړئ.

$a)\ f(x)=\ln\sqrt{x}$ $b)\ f(x)=\ln(x^2-4)$ $c)\ f(x)=\ln\frac{2}{x^3}$

$d)\ f(x)=\ln\frac{x+1}{x}$ $e)\ f(x)=x\cdot\log_2 x^2$ $f)\ f(x)=(x^4-1)\cdot\log$

$g)\ f(x)=\frac{\ln}{x+2}$ $h)\ f(x)=\frac{x^4}{\ln x}$

(۳۵) د لاندې توابعو لپاره خورا لویه تعریف ورشو(ساحه) ورکړئ او لومړی مشتق يې وټاکئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د تعریف سټ(ډېرى) هغه ورشو(ساحه) ورکړئ، په کومه کې چې توابع مشتقوړ دي.

$a)\ \ f(x)=\sqrt{x+3}$ $\qquad b)\ \ f(x)=\sqrt{(x-2)(x-4)}$

$c)\ \ f(x)=x\sqrt{x}$ $\qquad d)\ \ f(x)=\sqrt{x^2+2}$

(۳٦) ولې باید د ټیک شمېرنې لپاره لوګاریتمي توابعو ته همداسې سوچ وشي، لکه رېښه توابعو ته ؟

(۳۷) ۹۰ –مه پوښتنه د لوګاریتمي توابعو لپاره ځواب کړئ.

$a)\ \ f(x)=\ln(x^4-1)$ $\qquad b)\ \ f(x)=\ln(2x+4)$

(۳۸) – د لاندې توابعو لومړى مشتق پیداکړئ.

$a)\ \ f(x)=\frac{2}{5}x^{10}-\frac{1}{5}x^5$ $\qquad b)\ \ f(x)=3x^4-4x^3+11x^2-7x+8$

$c)\ \ f(x)=5x^8-3x^6+\frac{10}{x^3}-\frac{8}{x^7}$ $\qquad d)\ \ f(x)(2x-5)(x^2+11x-3)$

$e)\ \ f(x)\cos x-2x\sin x$ $\qquad f)\ \ f(x)=\sin^3 x$

$g)\ \ f(x)=e^x+\frac{1}{e^x}$ $\qquad h)\ \ f(x)=(x^2-2x+2)\cdot e^x$

$i)\ \ f(x)=\frac{3e^x+1}{2e^x-1}$ $\qquad j)\ \ f(x)=\frac{2e^x(x^2-3)}{x}$

$k)\ \ f(x)=\frac{1}{x^2}\ln x^2$ $\qquad l)\ \ f(x)=\frac{x\cdot\ln x}{1-x}$

$m)\ \ f(x)=\frac{\sin x}{\ln x}$ $\qquad n)\ \ f(x)=3x^2\cdot\lg x$

$o)\ \ f(x)=\ln(\sin)\ x$ $\qquad p)\ \ f(x)=\sqrt{4x^2+x+1}$

$q)\ \ f(x)=\sqrt[n]{ax+b}$ $\qquad r)\ \ f(x)=(x^2+3)e^{-2x}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(۳۹) - لومړی مشتق وټاکئ

$a)\ f(x) = \sin^n$ $\qquad b)\ f(x) = (\ln x)^n$

$c)\ f(x) = s + \frac{1}{x}$ $\qquad d)\ f(x) = (1 + \frac{1}{x})^n$

(٤٠)– د هرې تابع لومړي درې مشتقونه وټاکئ

$a)\ f(x) = e^{x^2}$ $\qquad b)\ f(x) = \sin x \cdot \cos x$

$c)\ f(x) = x + \frac{1}{x}$ $\qquad d)\ f(x) = x^2 \cdot e^x$

(٤١)– په کوم تابع کې لومړی مشتق f د f سره برابر دی.

(٤٢)–

الف: د کو fتابع لپاره $f'(x) = 2f(x)$ دی؟

ب: د کو fتابع لپاره $f'(x) = -f(x)$ دی؟

(٤٣)- د f(x)=sinx څوم مشتق د f سره سر خوري یا برابر دی؟

(٤٤)– د لاندې توابعو لپاره -م مشتق ته وده ورکړئ.

$a)\ f(x) = e^{ax}$ $\qquad b)\ f(x) = \ln(x+1)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د رول قضیه (Theorem of Rolle)

که د f یوه تابع په بند اینتروال $[a,b]$ کې متمادي او k د a او b ترمنځ پروت وي، نو هلته لږ تر لږه یو عدد c د $f(a)$ او $f(b)$ ترمنځ شته، داسې چې $f(c)=k$ دی.

فعالیت:

_ که f تابع په یوه بند اینتروال $[1,3]$ کې ثابته وي، دا به د یوې تابع لپاره څه معنا ولري، چې تابع څنګه ځغلي. ایا دا تابع به جګ ټکي یا ټیټ ټکي ولري او که څنګه؟ دا روښانه کړئ او د انتروال په خوښه درې منځ ټکو کې ارزښتونه یو له بل سره پرتله کړئ.

_ وښایاست، چې د $f(x)=-x$ تابع په$[-1,1]$ انترول کې جګ او ټیټ ټکي چیرته لري او د یو او منفي یو تر منځ د درې x ارزښتونو لپاره په ګراف د f ارزښتونه وښایاست او وښایاست، چې یو له بل توپیر لري او که نه؟

_ د رسم له لارې وښایاست، چې x^2 کوم جګ یا ټیټ ټکی لري او که څنګه او که لري یې چیرته؟

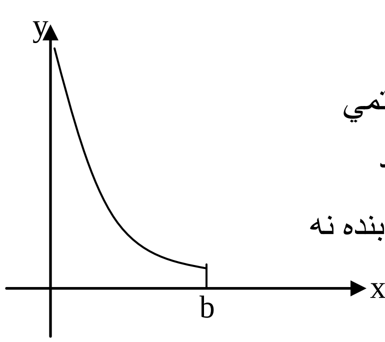
دوایرشتراس قضیه Theorem of Weierstrass

که د f یوه تابع په بند اینتراوال$[a,b]$ کې متمادي وي، نو f په دې‌اینتراوال کې لږ تر لږه یو جګ ارزښت(اعظمي قیمت) او یو ټیټ ارزښت(اصغري قیمت) نیسی

دلته شننیز یا تحلیلي ځواب نه ورکول کیږي، دا وینا د لیدلو له مخې معقوله برېښي.

کیدی شي چې یو همغږیز (monoton مونوتون یا جګټیټ) ارزښت د اینتروال په غاړه هم پروت وي.

د اینتروال محدودوالی (بندوالی) بی قید او شرطه حتمي دی. د بیلګي په توګه د $y=f(x)=\dfrac{1}{x}$ تابع په نیم بند اینتروال $(0,b]$ کې متمادي ده، مګر پورته لور ته بنده نه ده، چی په دې توګه خورا جګ ټکی نه لري

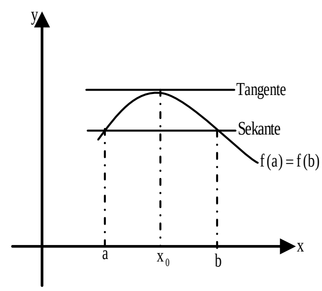


(c) ketabton.com: The Digital Library

د مشتق منځ ارزښت قضيي

د تانجنت او قاطع ترمنځ او په همدې ډول د مشتق – اوتفاضل ويش ترمنځ داسی نږدې اړيکي شتون لري، هغه چی د انالیوزې په منځ ارزښت قضيو کی تشريح کيږي.
د تابع او انحرافي ارزښتونوخويونو څخه لومړی پسی تړلې لاندې د رول قضيه لاس ته راځي

د رول(Rolle) قضيه:
يوه د f تابع دې په بند اينټروال $[a,b]$ کې متمادي وي د $f(a)=f(b)$ سره او په واز اينټروال (a,b) کې مشتقوړ، نو لږ تر لږه يوځاي $c\in(a,b)$ شته دی د $f'(x_0)=0$ سره.



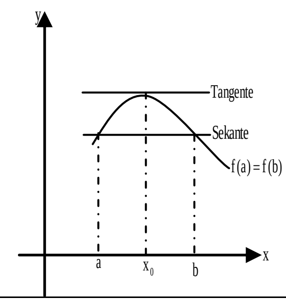
حل:
1. که f ثابت وي نو سملاسي لاس ته راځي: $f'(x_0)=0$
2. که f ثابت نه وي، نو د وايرشتراس د قضی له مخی لږ تر لږه د تابع يوخورا لوي او يوخورا کوچنی ارزښت موجود دی. دا ارزښتونه توپير لري، ځکه چی f ثابت نه دی. نو له دی کبله لږ تر لږه له دې ارزښتونو څخه د $f(a)=f(b)$ سره نامساوي دی . په دې اساس د اينټروال په دننه کی يو مونوتون (جګتيټ) ځای x_0 موجود دی. د مشتقوړ توابعو مونوتوني (جګتيټ ارزښت) شتون د اړيين يا ضروري شرطونوقضي له مخی لاس ته راځي: $f'(x_0)=0$

تر اوسه مو وښوول، چی د لازمو شرايطو لاندې يوې افقي قاطع ته يو افقي تانجنت هم شته دی.
دا هندسي پرابلم کيدی شي چی عمومي شي.
پوښتنه رامنځ ته کيږي، چی ايا يوې مايئلی قاطع ته په همغه ډول تانجنت د همغه ميل (جګوالي) سره جوړيدلی شي؟
ځواب يی لاندې قضيه راکوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مشتق منځ ارزښت (وسطي قيمت) قضيه:
که $y=(x)$ تابع په بند اينتروال $[a,b]$ کې متمادي او په واز اينتروال (a,b) کې د مشتق وړ وي، نو هلته يوځاي $x\in(a,b)$ شته دی، د کوم لپاره چې لرو:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(x_0)$$



حل: دا پرابلم په يوه مرستندوې تابع داسی تعريفيږي، چې د رول قضيه وکارول شي. د دې لپاره د قاطع مساوات رامنځ ته کوو: $y=g(x)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)$

د مرستندوې تابع په څير د مشتق تابع جوړيږي:

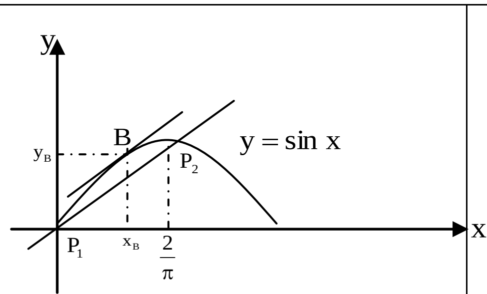
$$h:\ h(x)=f(x)-g(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)-f(a),$$

نو باور لري: $h(a)=h(b)=0$ برسيره پر دې h په (a,b) کې د مشتق وړوالی لري او په $[a,b]$ کې متمادي دی. له دې سره د رول د قضيې وړاند نيونه(فرضيه) ورکړ شوې، دا په دې معنا چې يو ځاي $x\in(a,b)$ شته دی د $h'(x)=0$ سره، چې له هغې لرو:

$$h'(x_0)=f'(x_0)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0, \text{ يعني } f'(x_0)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

پورته لاسته راوړنه به دا لاندې بيلګې نوره هم روښانه کيږي.

بيلګه:
د $f(x)=\sin x$ يوه تابع دې داسې ورکړشوي وي،چې په يوه ټکي $B(X_B,Y_B)$ کې تانجنت د منحني مماس وي، هغه چه په $P_1(0,0)$ او $P_2(\frac{\pi}{2},1)$ ټکو کی همغه ميل ياجګوالی لري لکه قاطع.



(c) ketabton.com: The Digital Library

ځواب: د قاطع (غوځي) میل یاجګوالی: $m = \dfrac{\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0}{\frac{\pi}{2} - 0} = \dfrac{2}{\pi}$

د منحني میل د $B(x_B : y_B)$ په ټکی کې $f'(x_B) = \cos x_B = \dfrac{2}{\pi}$

له دې څخه لاس ته راځي: $x_B = \arccos\dfrac{2}{\pi} = 0{,}88\iota$ او $f(x_B) = f(0{,}88) = 0{,}77$

لمس ټکی: $B(0{,}88 : 0{,}77)$

د تانجنت مساوات: $y = \dfrac{2}{\pi}(x - 0{,}88) + 0{,}77$

د منځ قضی د عمومیت څخه لاس ته راځي:

> پراخه شوې د منځ ارزښت قضیه:
> که $u = f(x)$ او $v = g(f)$ په بند اینتروال $[a,b]$ کې متمادي توابع وي او په واز اینتروال (a,b) کې مشتقوړاو $g'(x) \neq 0$ باور ولري، نو د ټولو $x \in (a,b)$ لپاره، کم له کمه یوځای $x_0 \in (a,b)$ وجودلري چی لاس ته ترې راځي:
> $$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

حل: د $g'(x) \neq 0$ له امله g معکوس کېدونکی ده او $v = g(x)$ مساوات د x په لور معکوس کیدنه ورکوي، یعني: $x = g^{-1}(v)$

که د f په تابع کی هم نوې متحوله ځای پر ځاي شي، نو یوه زنځیري تابع لاس ته ترې راځي:

$$u = f(x) = f(g^{-1}(v)) = h(v)$$

د زنځیري قاعدې له مخې یی دا مشتق لاس ته راځي:

که په $u = h(x)$ تابع د $v_1 = g(a)$ او $v_2 = g(b)$

سره د وسطي قیمت قضیه استعمال شي، نو د $v_0 \in (v_1; v_2)$ ځای په لاندې ډول موجود دی:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{h(v_2)-h(v_1)}{v_2-v_1}=h'(v_0)$$

له دې ځخه د $h(v)=f(x),v=g(x)$ او $x_0=g^{-1}(v_0)$ سره لاس ته راځي:

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

تمرینونه:

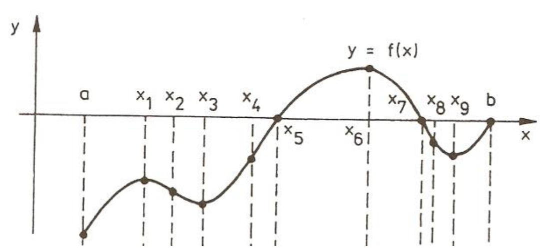
لاندې توابع دوه صفرځایونه لري. هغه بحراني ارزښتونه پیدا کړئ، چې د دواړو صفرځایونو تر منځ پراته وي.

$a)\ f(x)=x^4-5x^3+7x-5x+6$

$b)\ f(x)=x^4+x^3+2x^2+2x$

همغږېزې توابع(Monotony (یوناني: یوغږیز، برابرډوله)

جګېدونکې(متزاید)، ټیټېدونکې(متناقص) توابع(جګ-ټیټېدونکې توابع)



فعالیتونه

- په پورته ځېره کې ټول هغه ځایونه وښایاست، چې هلته تابع جګېږي.
- په پورته ځېره کې ټول ځایونه وښایاست، چې هلته تابع ټیټېږي.
- په پورته ځېره کې ټول هغه ځایونه په نخښه کړئ، چې هلته د تانجنت میل افقي وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

که د ټولو $x_1 < x_2$ لپاره د f یوه تابع په یوه اینتروال کې
$f(x_1) \le f(x_2)$ ($f(x_1) \ge f(x_2)$) وي، نوتابع په دې اینتروال کې مونوتون جګیدونکې
(- ټيټيدونکې) بلل کيږي،که $f(x_1) = f(x_2)$ په کې اجازه ونه لري،نو دا
$f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$) کره یا په زغرده همغږیزجګیدونکې (همغږیز ټيټيدونکې) بلل کيږي.

لاندې قواعد، چې له همغږیزوالي څخه په لاس راځي، د همغږیزوالي حالت لپاره ګټور دي.

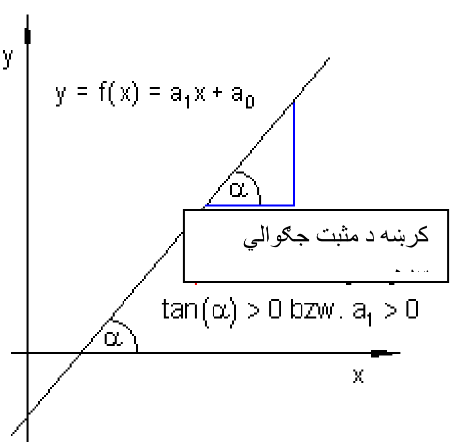
د f یوه تابع ټیک هلته د تعریف په ورشو(ساحه) D کې همغږیزجګیدونکې ده، که د خوښې x_1 او x_2 لپاره، چې په D کې پراته دي، باور ولري:

$$x_1, x_2 \in D \ \wedge\ x_1 \neq x_2 \ \Rightarrow \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$$

د f یو تابع ټیک هلته په D کې همغږیزټيټيدونکې ده، که د خوښې x_1 او x_2 لپاره، چې په D کې پراته دي، باور ولري:

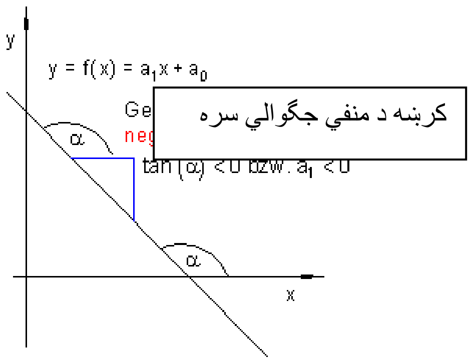
$$x_1, x_2 \in D \wedge x_1 \neq x_2 \ \Rightarrow \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$$

یوغږیزوالی (یونواخت والی) Monotony جګټيټوالی، د جګټيټوالی جملې دا $f(x) = a_1 x + a_0$ کرښیز(خطي) تابع



خورا ساده تابع ده، چې انحنا نه لري. ددې لپاره مسئول یې ثابته جګېدنه یا ثابت میل ی، $a_1 = \tan(\alpha)$ چېرته چې α د کرښې او مثبت لوریز د $x-$محور ترمنځ زاویه(کونج) ده.
په مخامخ شکل کې: کرښه د مثبت میل سره
$a_1 > 0 \ \Leftrightarrow\ \tan\alpha > 0$

(c) ketabton.com: The Digital Library



داپورته داسې دی: $tan\alpha < 0$ همداسې $a_1 < 0$

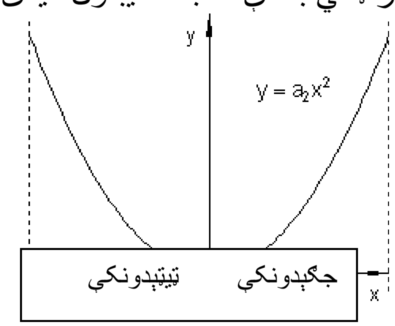
که $0 < \alpha < 90^\circ$ یا $0 < a_1 < \infty$ وي، دا په دې مانا چې $\alpha > 0 \vee a_1 > 0$ همداسې$(\Leftrightarrow)$، نو کربنه جګېږي. دا معنی لري، چې د جګېدونکي x سره د تابع $f(x)$ ارزښت هم جګېږي.

په مخامخ شکل کې: کربنه د منفي جګېدنې سره: $\tan\alpha < 0$ همداسې $a_1 < 0(\Leftrightarrow)$

که $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ یا $-\infty < a_1 < 0$ وي، دا په دې معنی، چې $\alpha < 0$ همداسې $a_1 < 0$، نو کربنه ټیټېږي یا لوېږي. دا په دې معنی، چې د جګېدونکي x سره د تابع ارزښت $f(x)$ کوچنی کیږي.

په پورته دواړو حالتونو کې د همغږیزې تابع (یا د جګ-ټیټېدونکي تابع) غږیږو او له یوه همغږیزجګیدونکې تابع ځخه، که $a_1 > 0$ وي. له یوې مونوتون ټیټیدونکې تابع ځخه، که $a_1 < 0$ وي.

دا د مونوټوني کلمه په هغو توابعو هم کارول کیږي، چې د منحنیو تلنه راکوي، که فکر وشي، چې په ټولیزه توګه د منحنی د ګراف په هر ټکي باندې تانجنت اینول کیدی شي.



له دې امله د تابع $f(x) = a_2x^2$ لپاره باور لري:

په اننتروال $|_1 = \{x \mid -\infty < x < 0\}_R$ کې تابع $f(x)$ مونوتون ټیټیږي. او $f(x)$ په اینتروال $|_2 = \{x \mid 0 < x < \infty\}_R$ کې مونوتون جګیږي.

لکه د کربښې په ګراف کې، چې جګیدنه ثابته وه. اوس دا حالت مخ ته نه لرو، یعنې جګیدنه ثابته نه ده، بلکې دا د منحني له یوه ټکې ځخه بل ټکي ته تغیر خوري.

د تانجنت جګیدنه $> 0 \rightarrow$ منحني مونوتون جګیږي. د تانجنت جګیدنه$< 0 \rightarrow$ منحني مونوتون ټیټیږي

د تانجنت جګیدنه، که صفر وي، ثابت پاتې کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

روښانه ده چې د $f(x)$ تابع لومړی مشتق $f'(x)$ د تابع ميل (جګوالى) ورکوي. ددې سره د مونوتونى قضيه په لاندې ډول فرمولوو.

قضيه:

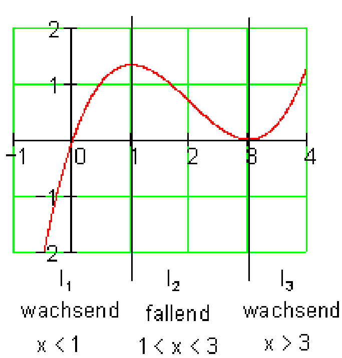
د $f(x)$ تابع دې په انتروال Iکې مشتقوړ وي.

1. که د $f(x)$ تابع په اينتروال Iکې مونوتون جګېدونکې وي، نو باور لري: $f'(x) \geq 0$ د ټولو $x \in 1$ لپاره

- که $f(x)$ په اينتروال کې همغږيزټيټېدونکې وي، نو باور لري: $f'(x) \leq 0$ د ټولو $x \in 1$ لپاره.
- که $f'(x) \geq 0$ وي، دټولو $x \in 1$ لپاره، نو $f(x)$ په اينتروال I کې همغږيز جګېدونکې ده.
- که $f'(x) \leq 0$ وي د ټولو $x \in 1$ لپاره، نو $f(x)$ په ايتروالIکې همغږيز ټيټېدونکې ده.
- که $f'(x) > 0$ وي ، د ټولو $x \in 1$ لپاره، نو $f(x)$ په اينتروال I کې په کلکه همغږيزجګيدونکې ده.
- که $f'(x) < 0$ وي د ټولو $x \in 1$ لپاره،نو $f(x)$ په اينتروال Iکې په کلکه مونوتون ټيټېدونکې ده.

د مونوتوني پيژند ورشو (تعريفساحه) ټاکنه بيلګه: د تابع ګراف څخه زيات وخت کيدی شي د مونوتوني ساحې لږ يا زيات ټيک و لوستل شي.

$$f(x) := \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x$$



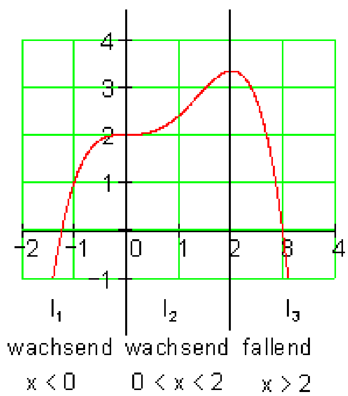
د $I_1 = \{-\infty < x < 1\}_R$ لپاره $f(x)$ په کلکه مونوتون جګېدونکې دی.

د $I_2 = \{1 < x < 3\}_R$ لپاره $f(x)$ يوغږيز ټيټېدونکې ده.

د $r\, I_3 < x < \infty\}_R$ لپاره $f(x)$ په کلکه يوغږز جګېدونکې ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) := \frac{-1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + 2$$



له گراف څخه لاندې مونوتوني ساحې لوستل کيږي.

د $I_1 = \{-\infty < x < 1\}_R$ لپاره $f(x)$ په کلکه مونوتونج ګېدونکې ده.

د $I_2 = \{1 < x < 3\}_R$ لپاره $f(x)$ په کلکه مونوتونجګېدونکې ده.

د $r\, I_3 < x < \infty\}_R$ لپاره $f(x)$ په کلکه مونوتون ټيټېدونکې ده.

تمرينونه:

--- لاندې تام راشنل توابع په همغږيزوالي خويونو وڅيړئ.

$a)\ f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 3$

$b)\ f(x) = 2x^3 + 9x^2 - 12x$

$c)\ f(x) = x^3 - 6x^2 + 1$

$d)\ f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + x^2 + 2x + 2$

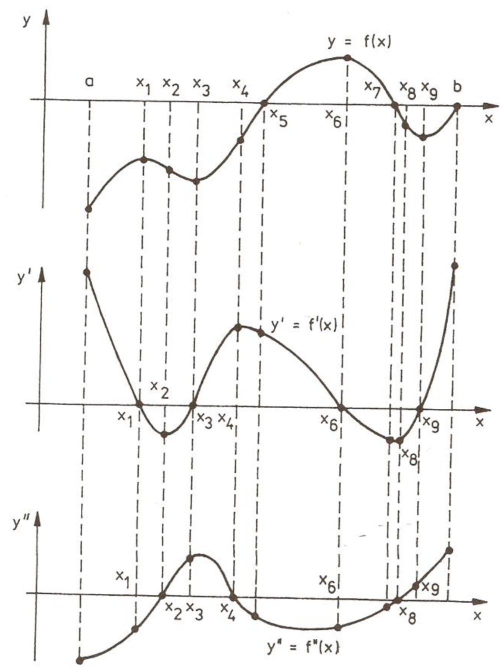
--- د لاندې ماتراشنل توابعو د مونوتوني حالت د a په واکوالي کې ورکړئ.

$a)\ f(x) = \frac{1}{ax+2}$

$b)\ f(x) = \frac{1}{ax^2+1}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځای اړونده افراطي ټکي (local extrema)



یادونه: په لیکلو مې کله کله د افراطي لپاره بحراني لیکلي، پام دې ورته وي.

فعالیتونه:

د مختلفو توابعو ګرافونه او په هغې خبرې، چې چیرته افراطي ټکي پراته دي.

- په پورته څېره کې د تابع لپاره نسبي جګ ټکي اوخورا جګ ټکي و ښایاست.

- په پورته څېره کې نسبي ټیټ او خورا ټیټ ټکي وښایاست.

- په پورته څېره کې وښایاست، چې د نسبي جګو ټکو همداسې خورا جګو ټکو، نسبي ټیټو ټکو همداسې د خورا ټیټو ټکو دواړو لورو ته تابع څنګه ځغلي؟

- په پورته شکل کې هغو ټکو ته، چې بحراني ټکي دي ځیر شئ، چې تابع هلته څه خوي لري؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

- د تابع همدې ټکي کې وګورئ، چې لومړی مشتق یې کوم ارزښت لري؟

موږ ددې پورته فعالیتونوڅخه لاسته راوړو:

که د $f(x)$ لپاره د x_0 په ځای کې $f'(x)=0$ ولرو نو یو نسبي ټیټ ټکی مو مخ ته پروت دی.

که د $f(x)$ لپاره د x_0 په ځای کې $f'(x)=0$ او $f''(x)>0$ ولرو نو یو نسبي ټکی مو مخ ته پروت دی.

که ددې برعکس ولرو: $f'(x)=0$ او $f''(x)<0$ ، نو یو نسبي ماکسیموم مو مخ ته پروت دی.

د بحراني ټکي(ټیټ ټکي یا جګ ټکي) لپاره خوي ټاکونکی دی، چې $f'(x)=0$ وي او د $f''(x)$ مخ نښه (+ ، -)، په دې پریکړه کوي چې ایا یو اصغري ټکی او که اعظمي ټکی مو مخ ته پروت دی.

د پورته اړیکو لپاره لاندې یادوني ضرور دي:

1. دا اړیکي یواځې د x_0 لپاره ارزښت لري چې د تعریف سټ په دننه کی پروت وي او هلته د $y=f(x)$ تابع پوره څو ځلې مشتقوړ وي، د غاړو(څنډو) او د هغوځایونو لپاره چې هلته $f(x)$ تابع کم یا هیڅ مشتق وړ نه وي، ځانګړو څیړنو ته اړتیا ده.
2. شرایط چې $f'(x)=0$ وي(مشتقوړ تابع) یواځې د یوه انحرافي ارزښت لپاره ضرور دی(ضروري یا اړین شرایط).
3. شرایط $f'(x)=0$ او $f''(x)\neq 0$ د بحراني ټکي لپاره یواځې پوره کېدونکی دی او نه ضروري).

بیلګه:

د $f(x)=x^2+2$ تابع ګراف وکاږئ او که بحراني ارزښتونه لري، هغه د ګراف او مشتق له لارې وټاکئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل: د بیلګې له ګراف څخه روښانه ده، چې تابع د $x = 0$ په ځای کې خورا ټیټ ټکي(اصغري-) لري.

د ابحراني ټکي لپاره اړیین شرطونه:

1. د تابع لومړي مشتق دی: $f'(x) = 2x$ په دې مساوات کې د تابع مشتق د x_0 لپاره صفرځای لري، یعنې دلته یو بحراني ټکی پروت دی.
-د تابع دویم مشتق: $f''(x) = 2$ دا چې $f''(x) > 0$ دی، نو یو نسبي ټیټ ټکی مخ ته لرو.
بیلګه:

د $y = x^4$ تابع د $x = x_0 = 0$ لپاره نسبي ټیټ ټکي لري او باوري دي:

$$f'(x) = 4x^3 \Rightarrow f'(0) = 0$$
$$f''(x) = 2x^2 \Rightarrow f''(0) = 0$$

ګورو چې دوهم مشتق د صفر څخه نه کوچنی او نه لوي دی.

د پورته شننې څخه لاندې پیژند ته راځو

تعرف یا پیژند: د $x = x_0$ په چاپیریال کې د $y = f(x)$ تعریف شوې تابع یونسبي جګ ټکی په همدې ډول نسبي ټیټ ټکی لري، که ټولو x_0 ته پوره نږدی x لپاره باور ولري: $f(x) \leq f(x_0)$ ($\Leftrightarrow$) په همدې ډول $f(x) > f(x_0)$
جمله: (د یوه نسبي بحراني ټکي لپاره ضروري شرایط): که په x_0 کې مشتق وړ تابع $y = f(x)$ انحرافي ټکی لري نو لرو: $f'(x) = 0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

همغږیزې توابع

دا جمله موږ ته وایي: چیرته چې $f'(x) \neq 0$ وي نو هلته اکستریموم نه شته، د اکستریموم لپاره یواځې د x_0 ځای په پوښتنه کې راځي، چې د هغي لپاره لرو $f'(x)=0$ ، خو حمتي نه ده چې $y=f(x)$ دې یواکستریموم و لري.

جمله ۲ ۱۳ : (د یوه بافراطي ټکي لپاره پوره کیدونکی شرایط):

که په $x=x_0$ کی دوه واره مشتقوړ $y=f(x)$ تابع لپاره ولرو:

$$f'(x)=0 \ , \ f''(x)\neq 0$$

نو تابع $y=f(x)$ هلته یو بحراني ټکی لري.

خورا ټیټ ټکی مخ ته لرو، که وي: $f''(x)>0$

خورا جګ ټکی مخ ته پروت دی ، که وي: $f''(x)<0$

پوښتنې:

د لاندې توابعو انحرافي ټکي پیدا کړئ.

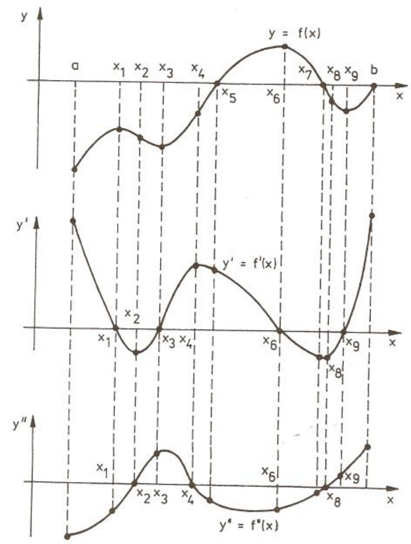
1) $f(x)=x^3-3x^2+1$

2) $f(x)=x^4-3x^3+x+1$

3) $f(x)=7x^7-6x^6 6+4x^4x^3+2x+1$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له ښیٔ لور انحنا اوله کیڼ لور انحنا(مقعر او محدب)



فعالیت:

- په پورته شکل کې مقعریت(ننوتوال) او محدبیت(وتنوالی) وښایاست.
- په پورته شکل کې د مشتقونو له مخې مقعریت او محدبیت په ګوته کړی.

که په یوه اینټروال کې د مشتقوړ تابع f دویم مشتق $f''>0$ وي، نو په دې اینټروال کې ګراف کیڼ کوږ شوی یا کیڼه انحنا لري او که دویم مشتق $f''<0$ وي، نو د تابع ګراف ښی کوږ یا ښی انحنا لري.

بیلګه:

ټول ګونګ تابع(راشنل تابع) f د $f(x)=x^3-2x^2+4x-1$ سره په کومه ورشو(ساحه)کې کیڼ کوږدی (کیڼه انحنا لري (ننوتی یا مقعر دی)) او په کومه ورشوکې ښی کوږ دی (ښیٔ انحنا لري(محدب یا وتلی دی)؟

دویم مشتق: (له لومړی مشتق څخه):

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f'(x) = 3x^2 - 4x + 4$$
$$f''(x) = 6x - 4$$

د $x > \frac{2}{3} \Rightarrow 6x - 4 > 0$ لپاره کيږ ګوروال(کینه انحنا (ننوتی یامقعر)

د $x < \frac{2}{3} \Rightarrow 6x - 4 < 0$ لپاره ښی کوروالی(ښی انحنا(وتلی یامحدب))

بیلګه:

د مات راشنل تابع $f(x) = \frac{1}{x+2}$ ګراف یو های پاررابول دی. د های پارابول کومه څانګه کینه کږه ده یا کینه انحنا لري(مقعر)، او کومه یوه یې ښی کوږوالی - یا ښی انحنا لري(محدب)؟

دویم مشتق: $f''(x) = \frac{2}{(x+2)^3}$; $f'(x) = \frac{1}{(x+2)^2}$ صورت تل مثبت دی.

د $x < -2$ لپاره د مخرج او همداسې د کسر ارزښت منفي دی. د های‌پارابول څانګه ښی کوږوالی یا انحنا لري(وتلی یا مخدب).

د لپاره $x > -2$ مخرج او همداسې ټول کسر (مات) مثبت دی.

های بارابول کینکوږ دی یا کینه انحنا لري(ننوتی یامقعر).

بیلګه: د دواړو توابعو $f(x) = \sqrt{x}$ او $g(x) = \sqrt{x^3}$ کوږوالی(انحنا) دې له دواړو لورو یو د بل سره پرتله شي. دواړه توابع د x>0 لپاره تعریف دي.

$$g'(x) = \frac{3\sqrt{x}}{2} \qquad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$
$$g'' = \frac{3}{4\sqrt{x}} \qquad f''(x) = -\frac{1}{4\sqrt{x^3}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دويم مشتقونه د $x \in R^+$ لپاره تعريف دي.

په دې ساحه کې $f''(x) < 0$ دی. اړونده ګراف ښی کوږوالی يا انحنا لري، دا يو ښي لور ته واز پارابول ښايي.

په همدې ساحه کې $g''(x) > 0$ دی. اړونده ګراف کيڼ کوږ دی يا کيڼه انحنا لري. اړونده ګراف يو کيڼ کوږوالی يا کيڼه انحنا لري، دا پورته لور ته واز پارابول دی.

تمرينونه:

۱ -- و ښاياست، چې د لاندې توابعو مقعريت او محدبيت کوم دي؟

$$a) \quad f(x) = x^3 + 4x^2 + x$$
$$b) \quad g(x) = 2x^3 + 3x - 2$$

۲ -- په کومه ورشو کې لاندې تام راشنل توابع يو کيڼ کږوالی لري او په کوم کې ښی کږوالی لري.

$$a) \ f(x) = x^3 - 6x^2 + 5x + 2 \qquad b) \ -2x^3 + 3x^2 - x - 4$$

۳ -- د لاندې مات توابعو ګرافونه هايپاربول دي. د هاپارابول ځانګې کوم کږوالی لري؟

$$a) \ f(x) = \frac{1}{4x+1} \qquad b) \ f(x) = 3 - \frac{3}{x^2}$$

٤ -- په کومه ساحه کې لاندې ناراشنل توابع يو کيڼ او په کوم کې يو ښئ کږوالی لري؟

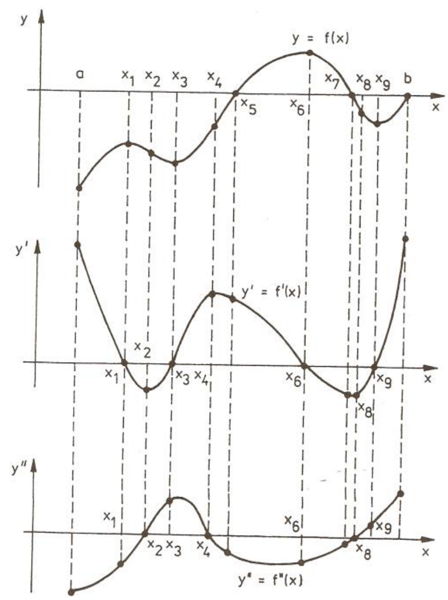
$$a) \ f(x) = x \cdot e^{2-x} \qquad b) \ f(x) = \ln x^2$$

٥ -- ولې د يوه دريمې درجې تام راشنل تابع ګراف په ټل تلنه کې يوه ښئ انخنا(کږوالی) نه لري.

٦-- ولې يو څلورمه درجه تامراشنل تابع د $f(x) = ax^4 + dx + e$ ، سره يو تلتلونی کينه انخنا(کږوالی) او ښئ انحنا لري؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

د انعطاف ټکي(اوړونټکي) Inflection Points



فعالیتونه:

- پورته ځیره په ځیر وګورئ او وښایاست، چې چیرته یا په کوم ټکي کې منحني(له کینې و ښي لور ته) خوزښت - یا خپله د حرکت لور بدلوي؟

- د انعطاف ټکو شاوخوا هم فکر وکړئ، چې کوم ټکي غوره ټکي دي او د هغو له خویونو هم د

انعطاف ټکو خویونه وټاکئ.

- په شکل کې فکر وکړئ‌چې د انعطافټکي شاوخوا منحني ځنګه ځغلي.

- د شکل په هکله په خپل فکر څه ووایئ او د خپل فکر په بنسټ خپل دلایل روښانه کړئ. موږ له پورته ځیرې اټکل کولی شو چې: که د x_0 ځای کې ولرو: $f''(x)=0$ او $f'''(x)>0$ ، نو یو ښی-کینې- انعطاف ټکی (اوړونټکی) مو مخ ته پروت دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

برعکس(په ځنې): که وي: $f''(x)=0$ او $f'''(x)<0$ نو یو کینږ - بنی- د انعطاف ټکی مو مخ ته پروت دی.

دا نعطافټکي لپاره خوی ټاکونکی دی، چې $f''(x)=0$ وي، دا چې دا بنی -کینږ - او که کینږ- بنی – انعطاف ټکی(اوړونټکي) دی، د $f'''(x)$ مخ نښه یی ټاکي.

- شرایط $f''(x)=0$ د انعطاف ټکي لپاره یواځی اړیین یاضروري دي.

د $y=x^4$ لپاره $f''(0)=0$ دی، مګر اوړونټکی مو مخ ته نه دی پروت.

- شرایط $f''(x_0)=0$ او $f'''(x_0)\neq 0$ د انعطافټکي لپاره پوره کیدونکي دي.

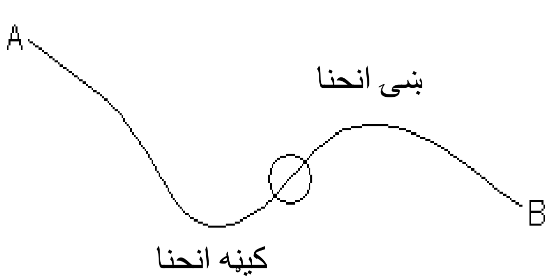
ګورو چی $y=f(x)=x^5$ تابع د $x=x_0=0$ ځاي کی یو انعطافټکی لري او باوري دي:

$$f'(x)=5x^4 \quad , \quad f'(0)=0$$
$$f''(x)=20x^3 \quad , \quad f''(0)=0$$
$$f'''(x)=60x^2 \quad , \quad f'''(x)=0$$

ګورو چې دریم مشتق $f'''(x)$ نه له صفرڅخه کوچنی او نه لوي دی.

ترمخ راوړني او د کلمې روښانه ونې:

د دې کلمې د لا نورې روښانه کولو لپاره په لاندې توګه مخ ته ځو:



د بایسکل ځغاستي چې له A څخه ځغلي د منحنی څخه تیرېږي او B ته رسیږي. د همغه وخت د بایسکل ځغاستي د اندل حالت د ځغاستې په وخت کې په پام کې ولري. د کینې منحني(د کینې لورې د اندل حالت) څخه وروسته د بنی لورې منحني کې ځغلي.

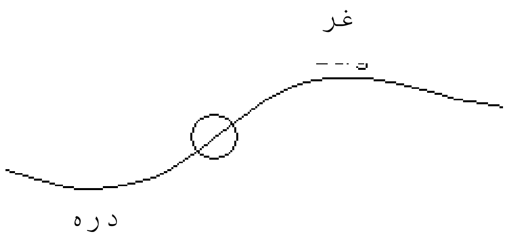
•

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کيني- او ښی منحني(کږې) ترمنځ باید د باسکل انډل نېغ ولاړ وي(عمود وي)، چې دا د انډل بدلون دی له کيني لورې و ښی لورې ته. دا د کيني او ښی منحني ترمنځ اوړيدنه ياد انعطاف ټکی بلل کيږي.

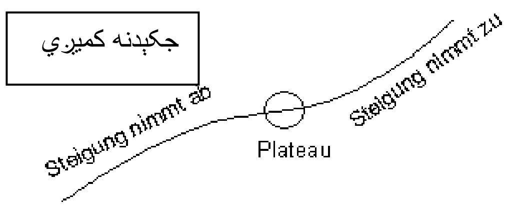
تاسو له بایسکل سره په يوه غونډۍ ځغلی.
وروسته له هغې، چې له تالي څخه تېرېږي، نو لار په جګېدو پيل کوي. په لومړي سر کې نرم او بيا په نيغه جګيږي، بيا په دې پسې جګوالی بېرته کميږي، چې پاس د غونډۍ په څوکه صفر ارزښت غوره کړي. يو چېرته په غونډۍپورته صفرارزښت ته رسيږي. يو چېرته په لار جګېدنه خورا لويه وه. هلته د انعطاف ټکی پروت دی.

دا څېره بيا



د بايکل ځغلونکي بل حالت، چې له څنګ دياګرام څخه يې رانيسو:
په غره د بايسکل ځغاستميل ياجګېدنه لومړی کميږي، چې له سره بېرته جګه شي.
ددې ترمنځ يوه ساحه شته، د کم جګوالي سره (يوه نسبتآهواره). دې نسبتآ هوار ځای کې د ټوټه کږښې جګيدنه نسبت بل ځای ته کمه ده. هلته اوړونتېکی(د انعطاف ټکی) پروت دی.

دا څيره د ښنتو نومونو سره بيا کښل...



له کيڼ ښي لور ته ژباړه: جګيدنه کيږي، هواره، جګيدنه زياتيږي

پوهيږو، چې د يوې تابع لومړی مشتق د تابع د جګوالی تابع دی، چې له ګراف څخه يې جګوالی لوستل کيږي. دا چې د انعطاف ټکی خورا لوي يا خورا کوچنی ټکی کېدی شي، داسې پيدا کيږي، چې د مشتق تابع انخرافي ارزښتونه پيدا کړو.
دا تلنلار همهغسې ده، لکه د پيل تابع $f(x)$ لپاره مو ټاکلې. اوس د مشتق تابع $f'(x)$ باندې دا کار يا عمل اجرا کيږي.
مخکی له دې چی يو لړ جملی د بحراني ارزښتونو او د انعطاف ټکو په هکله څيړو، غواړو چې دا کليمی تعريف کړو.

دواړه کلمي به د نسبي افراطي ټکي په بنه کی سره را غونډې شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پيژند:

په يوه چاپيريال $x = x_0$ کې مشتق وړ تابع $y = f(x)$ يو کيڼ- ښی- انعطافټکی په همدې ډول ښی- کيڼ- انعطافټکی لري، که د هغه مشتق هلته يو نسبي جګټکی(عظمي نقطه) په همدې توګه يو نسبي ټيټ ټکی ولري.

جمله: (د يوه نسبي بحراني ټکي لپاره ضروري شرايط):

که په x_0 کې مشتق وړ تابع $y = f(x)$ اکستريموم لري نو لرو: $f'(x) = 0$

دا جمله موږ ته وايي: چيرته چې $f'(x) \neq 0$ وي نو هلته بحراني ټکی نه شته، د بحراني ټکو لپاره يوائې د x_0 ځای په پوښتنه کې راځي، چې د هغي لپاره $f'(x) = 0$ وي ، خو حمتي نه ده چې $y = f(x)$ دې يوبحراني ټکی ولري.

د پورته جملی استعمال په $y' = f'(x)$ ځخه لاندې جمله لاس ته راځي:

جمله : (د اوړونټکي(انعطاف ټکي) لپاره اړيين شرايط):

که په $x = x_0$ کی دوه واره مشتق وړ تابع $y = f(x)$ هلته يو انعطاف ټکی ولري، نو لاس ته ترې راځي: $f''(x) = 0$

دلته هم باور لري(يادونه ۴ دې پ‌ءتله شي) : چيرته چی $f''(x) \neq 0$ وي ، نو هلته نه شي کيدی چي د انعطاف ټکي موجود وي. مګرچيرته چی $f''(x) = 0$ وي ، د انعطاف ټکی شته کيدلی شي، خو اړيين يا ضرور نه ده چی هلته انعطاف ټکی شته وي.

له پورته ځخه لاندې جمله لاس ته راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

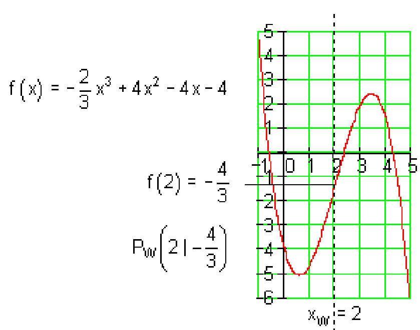
جمله: (د انعطافټکي لپاره پوره کيدونکی شرطونه)

که په $x = x_0$ کی د درېواره مشتقوړ تابع $y = f(x)$ لپاره وي: $f''(x) = 0$ او $f'''(x) \neq 0$

نو هلته یو انعطاف ټکی مخ ته لرو. که $0 < f'''(x)$ وي، نو یو کيڼ- ښي – انعطاف ټکي مخ ته پروت دی او د $f'''(x) > 0$ لپاره یو ښی-کيڼ-انعطاف ټکی مخ ته لرو.

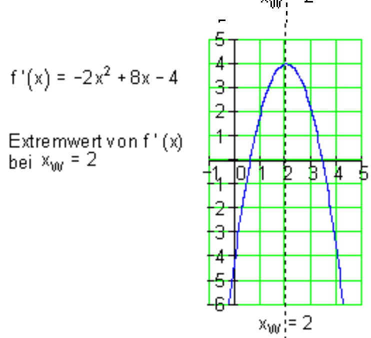
شننيزه يا تحليلي بيلګه:

يادونه: موږ د x_E سره افراطي ټکی په نښه کوو او د x_W سره د انعطاف ټکی په نښه کوو.



1- تابع مساوات د مشتق سره

$$f(x) = -\frac{2}{3}x^3 + 4x^2 - 4x - 4$$
$$f'(x) = -2x^2 + 8x - 4$$
$$f''(x) = -4x + 8$$
$$f'''(x) = -4$$



2- دويم مشتق صفر کړئ.

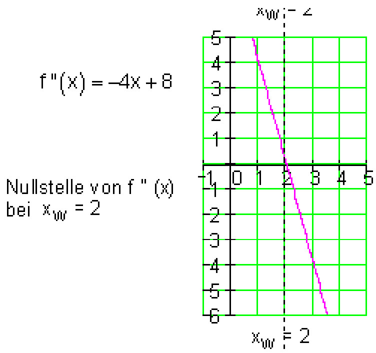
$$f''(x) = 0 \iff -4x + 8 = 0$$
$$\Rightarrow x_W = 2$$

3- د انعطاف ټکي له مخي ښوونه، چې ايا د انعطاف ټکی شته دی؟

$$f'''(x_W) = f'''(2) = -4$$

4- په $f(x)$ د انعطاف ځايونه ځای په ځای کولو له لارې د انعطاف ټکي ټاکنه

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$f(x_W) = f(2) = -\frac{2}{3}(2)^3 + 4(2)^2 - 4(2) - 4 = -\frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow P_{W\left(2|-\frac{4}{3}\right)}$$

$$P_W(21-1.33)$$

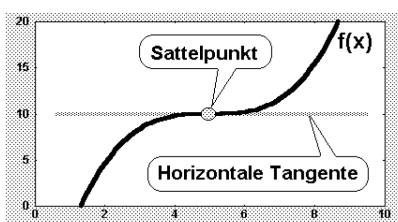
پام: په انعطاف ځای x_W کې د $f(x)$ گراف کږېږي.

په يوه په خوښه ټکي x_0 کې د کږوني(انحنا) لپاره باور لري:

$f''(x) > 0$ په دې معني دی،چې $f(x)$ کيڼ لور ته کږېږي(انحنا لري) دی.

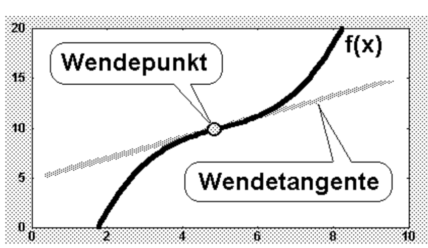
$f''(x) < 0$ په دې معنی، چې تابع $f(x)$ گراف ښی لور ته کږېږي(انحنا کوي)

يو زينتکی Der Sattelpunkt څه شی دی؟



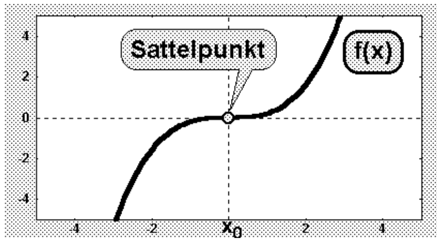
پېژند:

د زينتکي(کله کله برنډې ټکی هم بلل کيږي)لاندې د انعطافتکي ځانگړی حالت پوهيږو، داسې انعطافتکی چې تانجنت يې افقي (پروت) وي:



د پرتلې لپاره دې بيا يو ،،عادي،، انعطافټکی ورکړ شوی وي.دا يو مائل(نه افقي) تانجنت لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

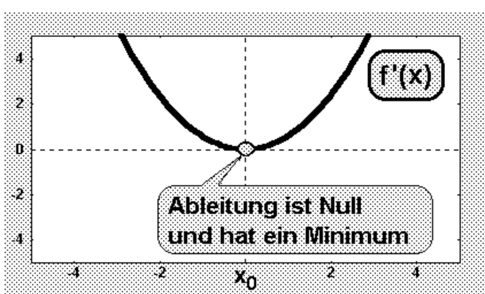


توضیح:

اوس فکر کوو، چې یو زینتکی ځنګه د شمېرلو له مخې پېژندل کېدی شي. په دې برخه کې په ځانګړي توګه دا مخ ته لرو، چې یو زینتکی له ښي – و کینه انحنا و شمېرو.

د دې لپاره د $f(x)$ تابع جګوالی په پام کې نیسو، یعنې لومړی مشتق: د زینتکي د مخه د $f(x)$ جګوالي کمیږي، په زینتکي کې صفر ارزښت لري، او له زینتکي څخه وروسته بېرته جګیږي.

یو زینتکی (د ښي – کیڼ – بدلون سره) په دې پېژندل کیږي، چې لومړی مشتق $f'(x)$ یې هلته صفر شي او سربېره پر دې هلته یو نسبي ټيټکی (مینیموم) ولري.



د لومړي مشتق $f'(x)$ شکل داسې برېښي:

لومړی شرط دی، چې مشتق یعنې $f'(x)$ په زینتکي کې د صفر سره مساوي دی.

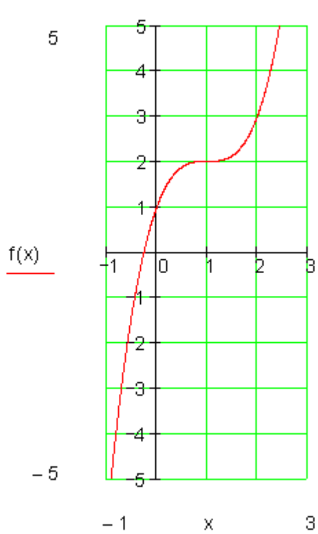
زینتکی(ښی-کیڼ-بدلون) $f'(x_0)=0$ دوم شرط دی، چې مشتق $f'(x)$ هلته یو نسبي مینیموم لري.

دا په دې معنادی، چې بل جګ مشتق $f''(x)$ باید په صفر مساوي وي او مخښنه له منفي و مثبت ته بدلیږي.
له دې سره سم د زینتکي لپاره پوره کېدونکي قضیه ومیندل شوه:
د زینتکي لپاره جمله(خوي ټاکنه)(د ښي –کیڼ- انعطاف سره)

(c) ketabton.com: The Digital Library

الف:د x_0 ځا کې لومړی مشتق $f'(x)$ صفر دی: $f'(x_0)=0$
ب : د x_0 په ځا ي کې لومړی مشتق $f'(x_0)$ یو مینیموم لري، دا په دې معنا، چې دوم مشتق صفر دی، یعنې $f''(x)=0$ دوم مشتق مخنخښه له منفي ښخه و مثبت ته بدلوي.
بل بدیل(د ګرانو دوستانو وړاندیز)

زینټکی **Der Sattelpunkt**



د انعطاف ټکي یو ځانګړی حالت زینټکی دی. دا د انعطاف ټکی دی د صفر جګښدنې سره.که د کین لور ورتزدې شو فکر کېږي، چې، نسبې جګټکی مو مخ ته پروت دی
که ښوک د ښې لور ور نزدې شي فکر کوي، چې یو نسبې ټیټټکی مخ ته لرو.
اوس دا حالت د ریاضیاتو له لوري ځېړو:
مشتق:

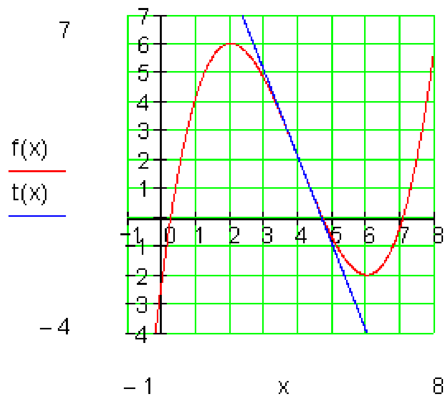
$$f(x)=x^3-3x^2+3x+1$$
$$f'(x)=3x^2-6x+3$$
$$f''(x)=6x-6$$
$$f'''(x)=6$$

$$f'(x)=0 \iff 3x^2-6x+3=0 \Rightarrow x_{1/2}=1$$

$f''(1)=6\cdot1-6=0$ $f'''(1)=6$	1=> د $x=1$ سره د انعطاف ټکی	1=> د $x=1$ سره زینټکی

د انعطاف ټکي لپاره شرایط پوره دي.
دا چې د $f''(1)=0$ له امله د انعطاف ټکی مخ ته لرو، نو دا د انعطاف ټکی همغه زینټکی دی.
د انعطاف ټکي پیداکونه:
د تابع ګراف باندې انعطاف ټکي کې تانجنت د انعطاف تانجنت بلل کېږي. د انعطاف تانجنت هم
همداسې پیدا کېږي لکه د تابع دګراف په یوه ټکي کې تانجنت، چې تانجنت مساوات ټاکل کېږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$f(x) = \frac{1}{4}x^3 - 3x^2 + 9x - 2$$

$$f'(x) = \frac{3}{4}x^2 - 6x + 9$$

$$f''(x)\frac{3}{2}x - 6 \qquad f'''(x) = \frac{3}{2}$$

$$f''(x_W) = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{2}x - 6 = 0$$

د $x_W = 4$ او $f'''(x_W) = \frac{3}{2} \neq 0$ د

تانجنت $f(x_W) = f(4) = 2 \Rightarrow \underline{P_W(4|2)}$

مساوات لپاره باور لري.

د x_W لپاره د تانجنت مساوات

$$t(x) = f'(x_W)(x - x_W) + f(x_W)$$

د $f'(x_W) = f'(4) = -3$ سره په لاندې ډول

دي $t(x) = -x(x+4) + 2 = \underline{\underline{-3x+4}}$

د انعطاف تانجنت د $f(x)$ گراف د انعطاف په تکي $P_W(4,2)$ کې غوڅوي او دا لاندې مساوات لري:

$$t(x) = -3x + 14$$

د انعطاف ټکي تانجنت پیداکونه:

په انعطاف ټکي کې د تابع دگراف تانجنت د انعطاف تانجنت بلل کیږي.
د انعطاف تانجنت مساوات همداسې ټاکل کیږي، لکه د تانجنت مساوات د گراف په خوښه ټکي باندې.

داسې حالتونه، لکه $f'(x) = f''(x) = f'''(x) = 0$ دلته تر څېړنې لاندې نه نیول کیږي.

پوښتنې

۱ -- د f تابع د $f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{(x-1)^2}, x \neq 1$ سره د انعطاف ټکي پیداکونه

۲ -- د لاندې توابعو د انعطاف ټکي پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$a)\ f(x)=\dfrac{2x-2}{x^2}$ $\qquad$ $b)\ f(x)=\dfrac{x}{x^2+3}$

$c)\ f(x)=\dfrac{x^3}{3(x-1)^2}$ $\qquad$ $d)\ f(x)=\dfrac{x^3-8}{4x}$

۳ -- و ښایئ، چې د $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-1}e$ تابع د انعطاف ټکی زینتکی دئ.

۴ -- د لاندې توابعو د انعطاف ټکي (اوړونټکي) پیداکړئ.

$a)\ f(x)-=x\cdot e^{-x^2}$ $\qquad$ $b)\ f(x)=\ln\dfrac{1}{x^2+1}$

د منحني بحث (Kurven Diskusion) :

یوه تابع $y=x^3+x^2-3$ لرو. د دې تابع شکل رسم کړئ او بیا په دې رسم کې د تابع انحرافي ټکي او د انعطاف ټکي په نخښه کړئ، رښانه کړئ، چې انحنا چیرته له کینې لور و ښۍ لورې ته او له ښۍ لورې و کینې لورې ته ده.

فعالیت:

- تناظر تعریف کړئ.
- لاندې توابع رسم کړئ، جګ ټکي، ټیټ ټکي او د انعطاف ټکي یې پیدا اکړئ.
- x^3+x
- $3x^3+x+2$

ددې لپاره چې یوه تابع رسم کړای شو، ساده ده که د تابع غوره ټکی و پیژنو. موږ دې بحث ته د منحني بحث وایو. موږ په دا ډول خبرو اترو کې باید سیستماتیک مخ ته لاړ شو.

په لاندې ډول تلنه ګټوره بلل شوې.

دتعریف ساحه: د تابع څیړنه یوائې په همدې ورشو کې موخه وره ده.

تناظر **Symetry** : باید وټاکل شي، چې تابع محوري متناظر او که مرکزي متناظر ده.

د محوري تناظر لپاره باور لري: $f(-x)=f(x)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مرکزي تناظر لپاره باور لري. $f(-x) = -f(x)$
په پورته دواړو حالتونو کې دې فقط $x \geq 0$ وڅېړل شي.
په ټولیزه توګه که ټول ریل تابع په پام کې ونیسو، نو ګورو چې که توان(د پولینوم درجه)یې جفت(جوړه) وي، نو پولینوم محوري متناظر دی او که توان(د پولینوم درجه) طاق(ناجوړه) وي، نو پولینوم مرکزي متناظر دی.

انحرافي ټکي**Extrema** : د نسبي بحراني ټکو ټاکل(جګټکی، ټیټټکی)
د جګټکی یا نسبي جګ ټکي پوره کېدونکي شرطونه:
$f'(x_1) = 0 \;\wedge\; f''(x_1) < 0$

انعطافټکیInflection Point :
د انعطافټکواو همداسې زینټکي ټاکلو له پاره پوره کېدونکي شرطونه:
$f''(x_W) = 0 \quad \wedge \quad f'''(x_W) \neq 0$
زینټکی انعطافټکی دی د افقي تانجنت سره.
د تابع تقاطع د x او y محورونوسره(د محورونوِغوڅټکی):
د $x-$ محور سره ِغوڅټکی: $P_{xi}(x_i \mid 0) \;\Rightarrow\; (x) = 0$
د y محور سره غوڅټکی(صفرځای) ټاکي $P_y(0 \mid y_s) \;\Rightarrow\; f(0)$
دګراف انځورونه: د ټولو تراوسه راټولو شوو معلوماتو سره کړی شو، چې ګراف انځور کړو. ددې لپاره لومړی یو ارزښتجدول انځوریږي. دا راته په ګوته کوي، چې نور کوم ارزښتونه شمیرل کیږي.

د انحنا حالت او یوغږیزوالی:
د انعطاف په ټکي X_w کې د $f(x)$ ګراف تغیر خوري.
په خوښه یوه ټکي x_0 کې د انحنا لپاره باور لري:
$f''(x_0) > 0$ په دې معنا، چې د $f(x)$ تابع ګراف کینه انحنا لري (کونوکس)
$f''(x_0) < 0$ په دې معنا، چې د $f(x)$ تابع ګراف ښی انحنا لري (کونکاو)
یوغږیزوالی
1- که د ټولو $x \in I$ لپاره وي $f'(x) \geq 0$ ، نو $f(x)$ په انتروال I کې مونوتون جګیږي.
که د ټولو $x \in I$ لپاره $f'(x) \leq 0$ وي, نو $f(x)$ په انتروال I کې مونوتون ټیټېدونکی دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

2- که د ټولو $x \in I$ لپاره $f'(x) > 0$ وي، نو $f(x)$ تابع په انتروال I کې کره غښتلي مونوتون جګېدونکی ده.

که د ټولو $x \in I$ لپاره $f'(x) < 0$ وي، نو $f(x)$ تابع په انتروال I کې غښتلي مونوتون جګېدونکی ده.

د پېژند ورشو ژی ټکي:

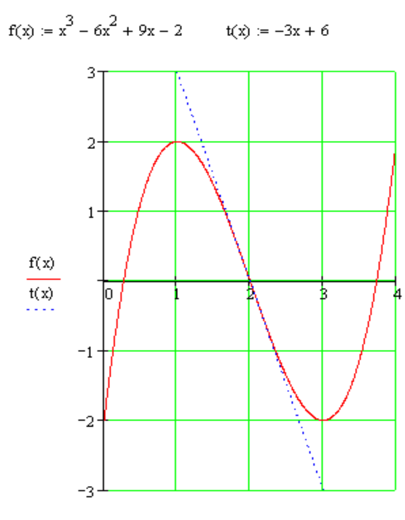
د تابع ژی ټکي کتنه په پېژند ورشوکې. که پېژند ورشو نامحدوده وي، نو لیمیټ $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ او $\lim_{x\to\infty} f(x)$ ټاکو.

بیلګه :

د $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$ تابع رسم کړئ.

مشتق کونه:

$$y = f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$$
$$y' = f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$$
$$y'' = f''(x) = 6x - 12$$
$$y''' = f'''(x) = 6 \qquad D = IR$$



نسبي انحرافي ټکي

$P_{min}(3|-2) \qquad P_{max}(1|2)$

انعطاف ټکی او تانجنت

$P_W(2|0) \qquad y = f_t(x) = -3x + 6$

صفرځایونه:

$P_{x1}(2|0) \quad P_{x2}(3.7|0) \quad P_{x3}(0.3|0)$

د y– محور سره غوڅټکی(دقاطع): $P_y(0|-2)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

یوغږیزوالی(مونوټوني یاجګ - ټیټوالی)   د تابع حالت په $x \to -\infty$ او $x \to \infty$ کې

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^3\left(1-\frac{6}{x}+\frac{9}{x^2}-\frac{2}{x^3}\right) = -\infty$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^3\left(1-\frac{6}{x}+\frac{9}{x^2}-\frac{2}{x^3}\right) = \infty$$

سیومتري: نه لري

په $I_1 = \{x \mid -\infty < x \le 1\}_{\mathbb{R}}$ کې یوغږیز جګیږي.

په $I_3 = \{x \mid 3 \le x < \infty\}_{\mathbb{R}}$ کې یوغږیز جګیږي.

د انحنا حالت:

ښی انحنا(محدب) : $I_4 = \{x \mid -\infty < x < 2\}_{IR}$

کینه انحنا (مقعر) : $I_5 = \{x \mid 2 < x < \infty\}_{IR}$

تمرینونه:

په لاندې توابعو بحث وکړئ او غوره نقطې یې پیدا کړئ:

اول) د شمېرنې له لارې وښایاست.

دویم) په شکل کې په نخښه کړئ.

$a)\quad 2x^3+x^2+1$

$b)\quad x^3+x^2+3x$

$c)\quad x^3+2x^2+x+3$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ناټاکلو افادو یا وییینو=ګ\پولې

$$0.\infty \ , \ \frac{0}{0} \ , \ 0^{\infty} \ .\frac{\infty}{\infty},.....$$

که و لرو $x \neq 5$; $\frac{x^2+3x+2}{x+5}$ ، ومو لیدل، چې د داسې توابعو لیمیټ په پیداکولی شو. دا ډول تابع ته ټاکلې افادې وايې، ځکه چې مشتق يې نیول کېدی شي، یعنې د کمښتونو ویش(د تفاضلونو ویش) حد یې ټاکل کیدی شي.

که $\frac{\sin 2x}{5x}$ توابع ولرو،نود $x=0$ لپاره د دې تابع مشتق په ورسره بلده توګه نه شو نیولی، چې له دې امله ناټاکلې افادې ورته وایو.

فعالیت:

- که تابع $f(x)=\frac{\sin x}{x^2+x}$ ورکړشوې وي.

اول - د تابع $f(x)=\frac{\sin x}{x^2+x}$ پوله یعني $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x^2+x}$ د پولې له درسه ، چې په لومړۍ بره کې لوستل شوي، پیدا کړئ.د.

- پورته په ننوتنه کې و هڅېږئ، چې د توابعو مشتقونه پیدا کړئ.
- که ولرو $\frac{x^2-4x-5}{x-5}$ ، نو د تابع مشتق د چېرته نیول کیږي، که د x=5شونی وي، نو مشتق یې ونیسئ.

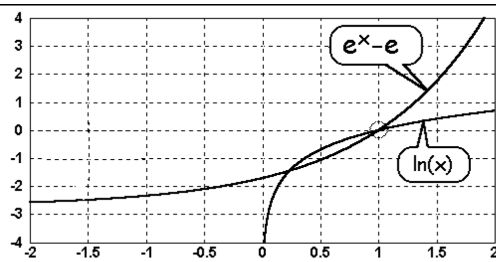
پیل ښېرنه: د $\frac{0}{0}$ حالت که پوله ارزښت جوړېدو کې یو کسر پیدا شي، چې صورت او

مخرج یې دواړه د صفر په لور لاړ شي یا صفر شي، نو دا پوله ارزښت،، ناټاکلې افاده،، بولو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بېلګه:

$$\lim_{x \to 1} \frac{e^x - e}{\ln x} = \frac{Zähler \to 0}{Nenner \to 0}$$

په ځېره کې برخه توابع رسم شوي دي، یعني د صورت او همداسې د مخرج ګرافونه. ګورو: د صورت او مخرج د توابعو ارزښتونه دواړه و صفر ته ځي. (که د ۱ په لور لاړشي)	

لیکندود(لیکنډول): د افادې

$$\frac{\text{Zähler} \to 0}{\text{Nenner} \to 0}$$

لپاره په حدشمېرنه کې لنډ لیکو: $\frac{0}{0}$

دا په حقیقت کې دقیق نه دی، مګر په ټولېزه توګه داسې معمول دی

روښانه ونه :

ناټاکلې افاده څه شی دی؟

دا پوښتنه رامنځ ته کیږي، چې دا ناټاکلې افاده خپل نوم له کومه ځایه اخلي. دا ،، ناټاکلی،، بلل کیږي، ځکه چې حدیې د عادي طریقو له لارې نه شي شمېرل کېدی. دا کار د لوړې ریاضي سره دا شمېرنه شونی شوه(دبېلګې په توګه د لو پیتال قانون له مخې، چې پسبه وڅېړل شي).

(c) ketabton.com: The Digital Library

روښانه ونو ته تشریح:

اوس ښایو، چې د داسې توابعو شمېرل ولې ناشوني دي.

موږ بیا دا د تېر مخ بیلګه رانیسو:

$$\lim_{x\to 1} \frac{e^x - e}{\ln x} = \frac{\to 0}{\to 0}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{e^x - e}{\ln x} = \frac{Z\ddot{a}hler \to 0}{Nenner \to 0}$$

1- که هڅه وشي، چې حد پیدا کړو، داسې چې د $x=1$ په کسر کې ځای په ځای کړو، نو افاده $0{:}0$ به ترې لاس ته راشي. دا تعریف نه لري، $u = f(\frac{1}{z})$ ځکه په صفرویش اجازه نه شته.

2- ترمخه مو د ناټاکلو افادو د شمېرلو لپاره یعني د ناطق کسري توابعو پوله شمېرنه کې د چل یا د طریقې څخه کار واخسته. اوس دا چل نه شو کارلی، لکه په پورته بیلګه کې.

3- د حد اټکل هم ناشونی دی: په لومړي لید کېدی شي په فکر راشو، چې که صورت او مخرج د صفر په لور لاړ شي، نو کسر به د 1 په لور وخوزیږي:

$$\frac{0.000000001}{0.000000001} = 1$$

که صورت او مخرج و صفر ته نږدې شي، دا به فقط دا معني ولري، چې دواړه به د ارزښت له مخې نژدې برابر شي.دا دا معني نه لري، چې د صورت او مخرج نسبت سره مساوي شي:

$$\frac{0.0000000010\ \ 0}{0.0000000010\ \ 0} = 100$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لکه چې ګورو صورت او مخرج د ارزښت له مخې خورا نږدې برابردي(دا په دې معنی، چې دواړه صفر په لور ځي)، مګر د دوی ترمنځ نسبت خورا لوی دی یعنې (100) دی،

د برنولي او د دې لو، پیتالقاعده Brnoulli and de L,Hospital

$$\frac{\sin 2x}{5x} \quad \text{او} \quad \frac{x^2+3x-10}{x-5}$$

د برونولي او د دو لو پیتال قاعدې د $\frac{f(x)}{g(x)}$ ډوله توابعو حد شمېرلو کې ځانګړی رول لوبوي. داحالت په ځانګړي ډول هلته رامنځ ته کیږي، چې مخرج او صورت همغه صفرځاي x_0 ولري. دا ناټاکلی افاده $\frac{f(x_0)}{g(x_0)}=\frac{0}{0}$ هدفمنده نه ده. کیدی شي چې د ویش حد $\lim\frac{f(x)}{g(x)}$ وخېړل شي، په کومو کی چې صورت او مخرج د صفر لور ته ځي. ددې لپاره عمومي مناسب د توابعو ترمونه د غوښتلو دي. د بیلګي په توګه تابع $f: \quad y=f(x)=\frac{x^2+4x+4}{x+2}$ صورت او مخرج همغه صفرځاي x0=-2لري، سره له دې هم لیمیټ شته دی.

$$\lim_{x\to-2}\frac{x^2+4x+4}{x+2}=\lim_{x\to-2}\frac{(x+2)^2}{x+2}=\lim_{x\to-2}(x+2)=0$$

دا ډول حدونه د مشتق په مرسته شمیرل کیدی شي، چې د صورت او مخرج توابعو له نتیجي څخه لاس ته راځي. دا ډول قاعده د پراخ شوې منځ ارزښتقضیيي استعمال هم بلل کیږي.

د برنولي او د دو لو، پیتال قاعده:

Bernoulli and de l'Hospital

که توابع $u=f(x)$ او $v=g(x)$ د یوه $U(x_0)$ چاپیریال د x_0 په ځاي کی مشتقوړ وي د

(c) ketabton.com: The Digital Library

$g'(x) \neq 0$ سره او د ټولو $x \in U(x)$ لپاره او x_0 د f ا و g یوصفرځاي وي،

د $f(x_0) = g(x_0) = 0$ سره، نو باور لري: $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)},$

ترڅو په ښي لور حد شته وي.

په ورته توګه لاس ته راځي: $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

حل: تابع د پراخه شوې منځ ارزښت قضي نیونی پوره کوي. د هر $x \in U(x_0)$ لپاره

یو x_m د $x_m \in (x_0, x)$ سره موجود دی، په داسی ډول چې لرو:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(x_m)}{g'(x_m)}$$

د $f(x_0) = 0 \wedge g(x_0) = 0$ له امله لرو:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

داچې د $x -> x_0$ سره $xm -> x_0$ هم هڅه کوي.

د $x -> oe$ په حالت کې $x = 1/z$ ځای په ځای کوو. د زنځیري قضي په مرسته لاس ته راځي:

$$\boldsymbol{u = f(1/z)}$$

د مشتق $du/dz = f(1/z)(-1 - z^2)$ او مشتق $\frac{dv}{dz} = g'(\frac{1}{z})(\frac{-1}{z^2})$ سره، داسې چې لرو:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{f\left(\frac{1}{z}\right)}{g\left(\frac{1}{z}\right)} = \lim_{x \to \infty} \frac{f'\left(\frac{1}{z}\right) \cdot \left(-\frac{1}{z^2}\right)}{g'\left(\frac{1}{z}\right) \cdot \left(-\frac{1}{z^2}\right)}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{f'\left(\frac{1}{z}\right)}{g'\left(\frac{1}{z}\right)} = \lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

یادونه : که په پورته حالت کې $f'(x_0) = g'(x_0) = 0$ هم وي، نو په ویش بیاله سره دا قاعده استعمالیږي. که سړي د $n-$ پلونو(قدمونو) وروسته بریالی وي نو دا قاعده لرو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}$$

چیرته چې $f^{(n)}$ او $g^{(n)}$ د تابع $n-$م مستق په معنی دی.

ډول یا تیپ: $0/0$

بیلګه:
$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4x+4}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{2x-4}{1}=\frac{0}{1}=0$$

بیلګه:
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}=\frac{1}{1}=1$$

بیلګه:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{1}=\frac{0}{1}=1$$

تیپ یا ډول: $\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^{\infty}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha-1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\alpha x^{\alpha}}=0 \qquad \alpha>0.$$

د یوه مثبت حقیقي توان(جګعدد) α لپاره یو په خوښه توان x^{α} د $x->oe$ لپاره په غښتلې توګه جګیږي، نسبت لوګاریتم تابع $1n$ ته $\alpha>0$ $\qquad \lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^{\alpha}}=0$

له دې $f(x)=\frac{x^n}{e^x}$ تابع د لوپیتال د قعاعدې د ډیرځله استعمال څخه لاس ته راځي:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{nx^{n-1}}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{n(n-1)x^{n-2}}{e^x}=\ldots=\lim_{x\to\infty}\frac{n!}{e^x}=0$$

اکسپوننشل تابع e^x د x په هرتوان تابع څخه په غښتلې جګیږي:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x}=0 \qquad n\in N$$

نور حالتونه کیدی شی په بڼه یا تیپ $\frac{0}{0}$ او یا $\frac{\infty}{\infty}$ بیرته واړول شي

(c) ketabton.com: The Digital Library

له تیپ یا بڼي ∞-∞ څخه و بڼې یا تیپ $\frac{0}{0}$ ته ددې لپاره لاندې تابع بیلګه کیدی شي:

$$f(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}$$

د $x\to 0$ لپاره

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x\sin x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x\cos x+\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{2\cos x-x\sin x}=\frac{0}{2}=0$$

داچې دلته مشتق بیرته د بڼې تیپ $\frac{0}{0}$ ده، نو د لوپیتال قاعده استعمالیدی شي.

له تیپ یا بڼي $0.(\pm\infty)$ څخه بڼي $\frac{\pm\infty}{\infty}$ ته:

د تیپ $0.(-\infty)$ حالت د بیلګي په توګه تابع $f(x)=x.\ln x$ د0<-x لپاره ښایي. په کوم کی چي ضرب د ویش په څیر انځور کړي، نو د لوپیتال د قاعدې په استعمال دا لاندي لاس ته راځي:

$$\lim_{x\to +0}(x\cdot\ln x)=\lim_{x\to +0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to +0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to +0}(-x)=0$$

له بڼې 0^0 څخه وبڼې e^0ته:

دلته د بیلګي په توګه تابع $f(x)=x^x$ د $x->0$ لپاره تر څېړنې لاندې نیول کېږي.

د بڼي بدلون یا فورم بدلون و بنسټ e ته د یوې انځورونی په مرسته په بریالی توګه لاس ته راځي:

$$\lim_{x\to +0}x^x=\lim_{x\to +0}e^{\ln(x^x)}=\lim_{x\to +0}e^{x\cdot\ln x}=e^0=1$$

له 1^∞ بڼي څخه و $e^{0.\infty}$ بڼي ته

د ښوونې، د بیلګي په توګه د تابع $f(x)=(1+\frac{\mu}{x})^x$ پوله ده د $\mu\in R^+$ لپاره او $x\to\infty$ د $x\in R^+$ سره:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\mu}{x}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}e^{x\cdot\ln(1+\frac{\mu}{x})}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}(x\cdot\ln(1+\frac{\mu}{2}))}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{\eta}{2}\right)}{\frac{1}{x}}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{1+\frac{\mu}{2}}\cdot\frac{-\mu}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\mu}{1+\frac{\mu}{x}}}=e^{\mu}$$

د $\mu=1$ لپاره لاس ته راځي:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$$

له بنې ∞^0 و بنې $e^{0.(\pm\infty)}$ ته دا کارونه په یوې بیلګې روښانه کوو:

$$\lim_{x\to+0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x}=\lim_{x\to+0}e^{\sin x\cdot\ln\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to+0}(\sin x\cdot\ln\frac{1}{x})}$$

$$\lim_{x\to+0}\frac{\ln\frac{1}{x}}{\frac{1}{\sin x}}=\lim_{x\to+0}\frac{x\cdot(\frac{-1}{x^2}}{\frac{-\cos x}{\sin^2 x}}=\lim_{x\to+0}\frac{\sin^2 x}{x\cdot\cos x}=\lim_{x\to+0}\frac{2\sin x\cos x}{\cos x-x\cdot\sin x}=0$$

د $\lim\limits_{x\to+0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x}=1$ سره

باید لاندې جدول کې پام وشي.

لاندې جدول د پورته ښوول شوو بڼویا ډولونو د بنې بدلون تولیزه کتنه ممکنوي

تیپ(ډول)	$f(x)\to$	$g(x)\to$	بڼه بدلون یا لنډ: بدلون
$-\infty$	0	0	$\frac{1}{f(x)}-\frac{1}{g(x)}=\frac{g(x)-f(x)}{f(x)\cdot g(x)}\to\frac{0}{0}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

∞	0		$f(x)\cdot g(x)=\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}\to\frac{0}{0}$ $\wedge(Or)$ $f(x)\cdot g(x)=\frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}\to\frac{\infty}{\infty}$
∞	0 1 0	0 0	$(f(x))^{g(x)}=e^{\ln(f(x)^{g(x)})}=e^{g(x)\cdot\ln f(x)}\to e^{0\cdot\infty}$ د f(x)>0 سره.

تمرینونه:

پورته کې دېرې بیلګې حل شوې. له هغوبايد څه تمریونونه راوړل شي.

١) لاندي پوله ارزښتونه وشمیرئ.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{2^x}$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[x]{x}$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^x$

e) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x}}{e^x}$

f) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{\sin x}{x^2}\right)$

د $x\to\infty$ لپاره د لاندې راشنل توابعو لیمیټونه د دې لو پیتال قاعدې له مخې وشمېرئ.

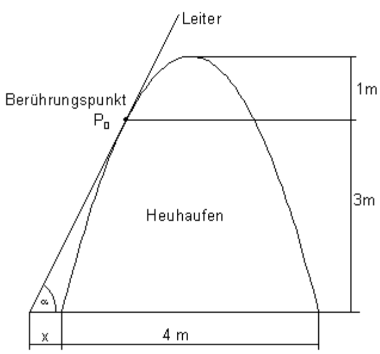
a) $f(x)=\frac{2x^3-x+4}{3x^3+1}$

b) $f(x)=\frac{x^2+2x-3}{4x^3+3x^2-2x+5}$

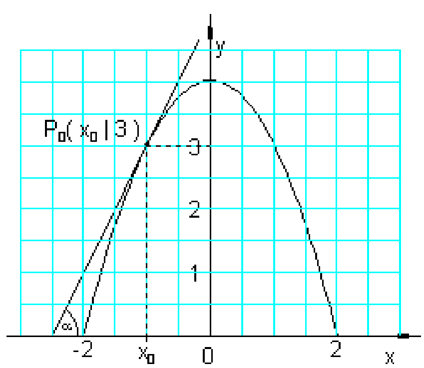
(c) ketabton.com: The Digital Library

د تانجنت لپاره د یوې تابع د استعمال بیلګې

له ځمکې څخه د وښو په ټوپۍ یوه زینه ایښول کیږي. دا زینه په درې متره جګوالي ټوپۍ لمسوي.



د وښو توپۍ دې د یوه کینکودي پارابول څېره ولري، چې بنسټ یې 4 متره سرور دی او 4 متره جګوالی لري. غواړو په دې یوه زینه کیږدو، چې د وښو ټوپۍ سره تانجنت جوړ کړي.
په کومه زاویه(کونج)باید دا زینه کېښول شي؟
د وښو ټوپۍ له بیخ څخه دې په کوم لرېوالي په ځمکه دا زینه کېښول شي؟



موږ د y محور داسې کاږو،چې د پارابول له ککرې(څوکې) څخه تېرېږي.
پارابول دا لاندې د تابع مساوات لري:

$$f(x) = a_2x^2 + 4$$
$$f(2) = 0 \Leftrightarrow 4a_2 + 4 = 0 \Leftrightarrow a_2 = -1$$
$$\Rightarrow f(x) = -x^2 + 4$$

موږ د x_0 لپاره ارزښت ټاکو:

$$f(x_0) = 3 \Leftrightarrow -x_0^2 + 4 = 3$$
$$\Leftrightarrow x_0^2 = 1 \Leftrightarrow x_{01/2} = \pm 1$$

شمېرنه:
د نورو شمېرنو لپاره ارزښت $x_0 = -1$ کاروو. زینه ټوپۍ په $P_0(-1,3)$ ټکي کې لمسوي.موږ په $P_0(-1,3)$ ټکي کې د تانجنت مساوات ټاکو:

$$f(x) = -x^2 + 4 \quad P_0(-1|3) \Rightarrow x_0 = -1;\ f(x) = 3$$
$$t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $f'(x) = -2x$ سره لاس ته راځي:

$$f'(x_0) = f'(-1) = -2 \cdot (-1) = 2$$
$$\Rightarrow t(x) = 2[x-(-1)] + 3 = \underline{\underline{2x+5}}$$

جوړه زاویه: $\tan\alpha = 2 \Leftrightarrow \alpha \approx 62.4^\circ$

د زینې او د وښو ټوپې تر منځ واټن د $f(x)$ د صفرځای او د تانجنت $t(x)$ د صفرځای ترمنځ واټن دی.

صفرځایونه:

لرو:

$$f(x) = -x^2 + 4 = 0 \;\;\Leftrightarrow x^2 = 4 \;\;\Rightarrow\;\; x_{1/2} = \pm 2$$
$$t(x) = 2x + 5 = 0 \;\;\;\Leftrightarrow\;\; x = -2.5$$

د x ارزښتونو -2.5 او -2 ترمنځ واټن 0.5 دی.

زینه د وښو د ټوپې له پښو څخه باید نیم متر لرې کېښول شي.

ددې پوښتنې څخه مو زده کړل، چې د تانجنت مساوات څنګه ټاکل کیږي، چې یو ګراف په تعریف شوي ځای کې لمسوي.

د ستریې ګټې(غټو ګټو) مسئله یا قضیه

دا د ستریې ګټې مسئله خورا ستره عملي مانا لري، چې په لاندې ډول به د یو څو بیلګو له لارې وڅیړل شي.

نږدې ټولو پروسو کې ، چې په عمل کې کارول کیږي یا صورت نیسي، له تاثیروونکو یا په همدې ډول د هغو ټاکلو لویو استعمال ته اړ دی، کومې چې موږ په ځانګړو یا مخصوصو پولو کې په اختیار کې لرودی شو.

موږ یوائې هغه پروسې تر څیړنې لاندې نیسو چې د یوې واریابلې یا اووښتونې x په واک کې وي. دا د بل په واک کې د یوې تابع $y = f(x) \;\; ,x \in D$ له لارې څرګندولی شو.

که y ټول لګښتونه یا مصارف په کوته کړي، نو x باید داسې وټاکل شي چې $f(x)$ مینیمال یا خورا کم شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

که په څټ یا برعکس y ګټه وي یا ګټور تاثیر وي، نو x باید داسي لاس ته راوړل شي، چې $f(x)$ ماکسیمال یا خورا لوی شي. په قاعده کې اغزمنه یا مؤثره لویه یا په بل عبارت، خپلواك وار یا بل یا اووښتونی x د $-\infty$ او ∞ پولو ترمنځ ازاده ټاکونکی نه ده، بلکه د تخنیك یا تخنیك پوهنې له امله، یواځې په ټاکلو پولو کې:

$$a \le x \le b \qquad (*)$$

له دې امله عملي په زړه پورې د ګټې مسئلې، په دې پورې اړه لري، چې آیا دا ګټه ده او که لګښت.

$$y = f(x) = \max! \qquad (a \le x \le b \qquad ($$

$$y = f(x) = \min! \quad (a \le x \le b) \qquad ($$

دا د افراطي ارزښتونو برخې پرابلمونو سره خورا نزدی یا ټینګ تړلی دی. دلته زموږ علاقه په ځانګړې توګه د لاندې پرابلم د کارکولو سره ده:

1- د بلواکیزو $y = f(x)$ ګډو اړیکو راپیداکول، د دندې یا وظیفې ورکولو سره سم(مودالیټي پرابلم).

2- د تخنیك پوهنې پولو په پام کې لرل $(*)$ دادې د دوه بیلګو له لارې وښول شي

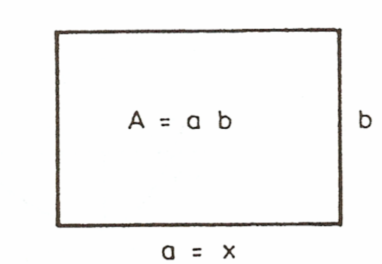
بیلګه: یو د منډو(پټي ته په کلوکې د اغزو منډو کېښول کیږي، چې مالونه ور وا نه وړي) سیم لرو چې ټول اوږدوالی یې L دی. له دې سیم سره باید یوه مربع سطحه(څلورګوډیزه هواره)، چې د امکان ترحده باید لویه وي، منډو شي. دا وظیفه شوه یا په بل عبارت غوښتنه.

اوس د مودالیټيArt und Weise پرابلم: غوښتنه مو د یوې ځلور ضلعي(څلورګوډی) پیداکول دي. لکه چې معمول دي، ددې څلورضلعي(څلور ګوډی) یو اړخ په a ښایو او بل اړخ یې په b ښایو، د څیرې 14.20 له مخې).

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا په سر کي دوه اغيزې لرونکي يا تاثير اچونکي لويې a او b دی.

د $L = 2a + 2b$, $b = (L/2) - a$

له امله يواځي يوې اغيزمنې(تاثيراچوونکي) لويي ته اړيو د بيلګي په توګه $a = x$ ، دا ګټه (ستحه A)داسي ده $A = ab = x((L/2) - x)$ دا روښانه ده چې صدق کوي $0 \le x \le L/2$ له دې امله د سترې ګټې پرابلم داسې دی.	

$$y = f(x) = x((L/2)-x)=Max! \qquad (0 < x < L/2)$$

د $f(0) = f(L/2) = 0$ له امله بايد ماکس د 0 او L /2 ترمنځ پروت وي.

د ماکس لپاره ضرور دي

$$y' = f'(x) = L/2 - 2x = 0$$

د ماکس لپاره يواځي x = L /4 په پوښتنه کی راځي.

د دې لپاره y "=f "(x) = -2< 0 دی.

په ريښتيا چی يو ماکس مو مخ ته پروت دی. دلته تخنيکپوهنيزې پولی 0 او L / 2 رول نه لوبوي. نو صدق کوي. a = b = L /4

بيلګه: يوه بډای چی په يوه ټاکلي وخت کی تولسټ (تولډيری) M توليد کړي او دا ټل اخستونکو ته ورسوي، نو له دې سره فيکس يا کره ټاکلی لګښتونه F تړلي دي.
کيدې شي چي سملاسی د دې توليد په تولسټ (تولډيری) M کي توليد کړي، په يوه زخيره ځاي(زېرمتون؟) کی ځاي په ځاي کړي او اخستونکو ته يی سملاسي ورسوي. دلته

(c) ketabton.com: The Digital Library

د زېمتون(زخيره کوني) لګښتونه راپيد کيږي(ددې د زخيرې لپاره ځاي او هلته بيا اچول او وړل). يا هم کيدی شي چی توليد په لږه کچه يا اندازه توليد شي او سملاسی اخستونکو ته ورورل شي. دلته نو د زخيره کولو لګښتونه منځ ته نه راځي. مګر تل توليد په دي ډول توليد باندې درول، لګښتونه منځ ته راولي، چی د چمتووالی لګښتونه يی بولو.
کومه ډيری x (ازاده لويه) بايد توليد شي، چی د امکان تر پولي کم لګښتونه پرې وشي؟ د زخيرې لګښت د چمتووالی لګښت سره متناسب دی ، د خرابيدو ارزښت د چمتووالي يا توليد ارزښت سره يعنی چي خرځلاو ته چمتو کيږي، په څټ متناسب دی. که x لوي وي نو چمووالی ته کم اړتيا شته او که x کم وي نو چمتووالی بدلون تل بايد تغير وخوري يعني. ټول لګښتونه

$y = f(x) = F + Lx + R/x$ دي ، چيرته چی F ثابت(همغه) يا   په کلکه ايښول شوي لګښتونه دي، Lد زخيرې لګښتونه او R د چمتووالی لګښتونه دي. دا ازاده لويه x د توليدديری M څخه نه شي سترېدلی ، لوئيدلی يا غتيدلی. له دې امله صدق کوي $0 \le x \le M$. مخ ته پروت د ستريدلو مسئله له دې امله په لاندې ډول ده :

$$y = f(x) = F + Lx + R/x = Min! \; (0 \le x \le M)$$

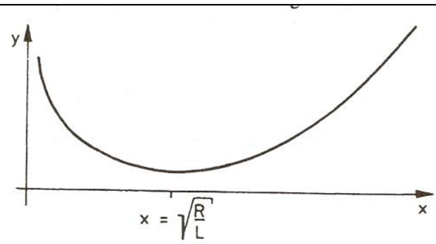
لومړی $f(x)$ دوه واره ديفرنځيال کيږي يا يي دوه واره رابيليدنه نيول کيږي:

$f'(x) = L - R/x^2 \; , \; f''(x) = 2R / x^3$

د مينيوم لپاره ضرور دي: $f'(x) = 0$
پس لرو $x = \sqrt{R / L}$

د $x \ge 0$ له امله $f''(x) \ge 0$ هم صدق کوي،

پس دلته تل يو نسبي مينيموم مخ ته لرو.



(c) ketabton.com: The Digital Library

د کږې(منحني) تګلار په شکل کې انځور شوې. څرګنده ده: که $x=R/L<M$ صدق ولري، نو مينيموم مو مخته پروت دی.که $x=R/L>M$ وي، نو يو منيموم په څنډه $x=M$ لرو. نامساوت $x=R/L<M$ دا مانا لري $R/L<M^2$ په همدې ډول $R^2<M^2L$ پس مخ ته لرو: $x=R/L$ د $R<M^2L$ لپاره او $x=M$ د $R>M^2L$ لپاره؛ نو : که د چمتوالي لګښتونه , R زخيرې لګښتونو L څخه زيات لوي شي، نو سملاسی دې ټول توليد x = M صورت ونيس. که د ذخيرې لګښتونه د چمتووالی لګښت څخه کم وي، کيدی شي کوچنی ازاد x توليد شي.

ټاکلی بيلګه: د $M=10000, R=1000, L=10$ لپاره صدق کوي،

$R=1000<M^2L=108\cdot 10=109$ ستر يا غټ ازاد لګښت دی

$x=R/L=1000/10=100=10$ ازاد a دلته 10 يوونه بايد ورزيات شي ، چې 10000 يوونه توليد کړي د $M=10, R=1000, L=1$ لپاره صدق کوي

$R=1000>M^2L=100$ غټ ازاده لويه له دې امله $x=M=10$ ده، يواځې يوه ازاده لويه دې تر توليد لاندې ونيوله شي.

په توليد کې د مشتق استعمال

فعاليت:

يوه فابريکه x توليد کوي. په دې توليد لګښت کيږي، چې دا د توليد په واک کې دی، چې موږ ورته د لګښت تابع وايو او په $K(x)$ سره يې ښايو.

څنګه کولی شو، چې د زيات توليد لپاره لګښت را ټيټ کړو؟

د لګښت تابع $K(x)$ د توليد سټ(ډېرې) او ټول لګښت تر منځ تړاو انځوروي.

که توليد د Δx شاو خوا کې زيات شي، نو لګښت هم د ΔK په شاو خوا کې زياتيږي.

کمښتويش (تقسيم تفاضل) $\frac{\Delta K}{\Delta x}$ د منځنې لګښت زياتوالی ښايي، د يوه Δx توليد تغير سره(منځنی تغير ارزښت)

د x_0 ځای کې لحضوي تغير ارزښت د مشتق لګښت بلل کيږي. دا د پوله ارزښت $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta K}{\Delta x}$ سره ټاکل کيږي، داپه دې معني، چې د لګښت د تابع K مشتق.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پېژند: د لګښت تابع $K(x)$ مشتق د مشتفارزښت $K(x)$ په نامه یادوو یا یې پوله لګښت $K'(x)$ هم بولو.

بېلګه: د لګښت تابع $K(x) = x^3 - 9x^2 + 40x + 94$ دي ورکړ شوې وي.

الف: مشتق ارزښت وټاکی، یو ارزښت جدول د $K(x)$ او $K'(x)$ لپاره وکاږیاو په پروتولاړ سیستم یا کواوردیناتسیستم کې یې ګراف وکاږئ.

پوله ارزښت د $[0\ ;\ 6] = 1$ لپاره په1پل(قدو) پراخوالي سره.

ب: د ډېر کم لګښت زیاتوالی و ټاکی:

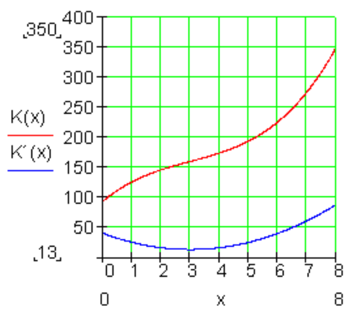
لاندي تابع

$$K(x) = x^3 - 9x^2 + 40x + 94$$

لرو

مشتف ارزښت

$$K'(x) = 3x^2 - 18x + 40$$



ارزښت جدول

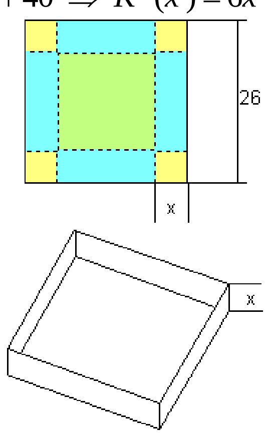
x	0	1	2	3	4	5	6
K(x)	94	126	146	160	174	194	226
K'(x)	40	25	16	13	16	25	40

خورا کم د لګښتزیاتوالی(لګښتجګېدنه) د پارابول $K'(x)$ په ککره(څوکه) کې پروت دی، یعني هلته چې تانجنت $K'(x)$ پروت یا افقي دی

$$K'(x) = 3x^2 - 18x + 40 \Rightarrow K''(x) = 6x - 18$$

دد تانجنت د پروتوالي یا افقیت لپاره:

$$K''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - 18 = 0 \Rightarrow \underline{\underline{x = 3}}$$



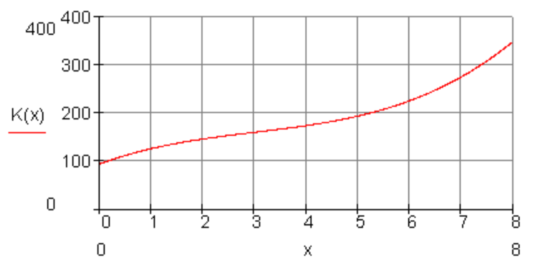
پوښتنې: دي، مربع کارتون(د کلک کاغذ څخه جوړ)څخه، چې 26 سانتیمتره د اړخ اوږدوالی لري یو بکس جوړوو بې له سرپوښ، چې د x جګوالی لري.

الف: د یوه تابع ترم وټاکئ، چې د بګس حجم(ډکی) v د x په واکوالي یا تابعیت کې

(c) ketabton.com: The Digital Library

ښايي.

ب: ګراف وکاږئ او په نردې توګه یې
ماګسیما(خورا جګ) حجم و ټاکئ.

د یوه روغتون د نرختابع(مصرف تابع) $K(x)$ د ناروغانو ګڼه (تعداد) x او د ټول مصرف ترمنځ اړیکې انځوروي، داسې چې $x=1$ د 100 ناروغانو معنی او $y=1$ دی معنی چې $1000 \in / \tan$ د روځې زر یورو($1000 \in / \tan$). $K(x)=x^3-9x^2+40x+94$	

الف: د مصرف تابع په خپله کتابچه کې ولیکئ.

ب: د لګښت تابع مشتق د مشتق لګښت (-مصرف) یا دحدمصرف په نامه یادیږي. تاسو د لګښت زیاتېدنه د ناروغانو په واکوالي یا تابعیت کې تشریح کړئ.(د $K(x)$ جګېدونه).
$K'(x)$ وټاکئ او ګراف یې په وضعیه سیستم (پروت- ولاړ-سیستم) کې انځور کړئ)

پ: د ناروغانو د کوم تعداد سره د لګښت زیاتوالی خورا کم دی؟ دا قېمتونه وشمېرئ.

ټولګه:

د رول(Rolle) قضیه:
یوه د f تابع دې په بند اینتروال $[a,b]$ کې متمادي وي د $f(a)=f(b)$ سره او په واز ایتروال (a,b) کې مشتقوړ، نو لږ تر لږه یوځاي $c\in(a,b)$ شته دی د $f'(x_0)=0$ سره.

د مشتق د منځني ارزښت (وسطي قیمت) قضیه: [P SEP]
که $y=(x)$ تابع په بند اینتروال $[a,b]$ کې متمادي

(c) ketabton.com: The Digital Library

او په واز اینټروال (a,b) کې د مشتق وړ وي، نو هلته یوځاي $x\in(a,b)$ شته دی، د کوم لپاره چې   ځیره په نوټ کې ده،

لرو: $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(x_0)$

پراخه شوې منځقضیه:

که $u=f(x)$ او $v=g(f)$ په بند اینټروال $[a,b]$ کې متمادي توابع وي او په واز اینټروال (a,b) کې مشتقوړ او $g'(x)\neq 0$ باور ولري، نو د ټولو $x\in(a,b)$ لپاره، کم له کمه یوځای $x_0\in(a,b)$ وجودلري چې لاس ته ترې راځي: $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$

قضیه:

د $f(x)$ تابع دې په انټروال Iکې مشتقوړ وي.

2. که د $f(x)$ تابع په اینټروال Iکې مونوتون جګېدونکې وي، نو باور لري: $f'(x)\geq 0$ د ټولو $x\in 1$ لپاره

- که $f(x)$ په اینټروال کې همغږیزټیټېدونکې وي، نو باور لري: $f'(x)\leq 0$ د ټولو $x\in 1$ لپاره.

- که $f'(x)\geq 0$ وي، دټولو $x\in 1$ لپاره، نو $f(x)$ په اینټروال I کې همغږیز جګېدونکې ده.

- که $f'(x)\leq 0$ وي د ټولو $x\in 1$ لپاره، نو $f(x)$ په انټروالI کې همغږیز ټیټېدونکې ده.

- که $f'(x)>0$ وي ، د ټولو $x\in 1$ لپاره، نو $f(x)$ په اینټروال I کې په کلکه همغږیز جګېدونکې ده.

- که $f'(x)<0$ وي د ټولو $x\in 1$ لپاره،نو $f(x)$ په اینټروال Iکې په کلکه مونوتون ټیټېدونې ده.

که د $f(x)$ لپاره د x_0 په ځای کې $f'(x)=0$ ولرو نو یو نسبي ټیټ ټکی مو مخ ته پروت دی.

که د $f(x)$ لپاره د x_0 په ځای کې $f'(x)=0$ او $f''(x)>0$ ولرو نو یو نسبي ټکی مو مخ ته پروت دی.

•

(c) ketabton.com: The Digital Library

که ددې برعکس ولرو: $f'(x)=0$ او $f''(x)<0$ ، نو یو نسبي ماکسیموم مو مخ ته پروت دی.

د بحراني ټکي(ټیټ ټکي یا جګ ټکي) لپاره خوي ټاکونکی دی، چې $f'(x)=0$ وي، او د $f''(x)$ مخ نښه (+ ، -)، په دې پریکړه کوي چې ایا یو اصغري ټکی او که اعظمي ټکی مو مخ ته پروت دی.

پېژند: د $x=x_0$ په چاپېریال کې د $y=f(x)$ تعریف شوې تابع یونسبي جګ ټکی په همدې ډول نسبي ټیټ ټکی لري، که ټولو x_0 ته پوره نږدی x لپاره باور ولري:
$f(x)\le f(x_0)$ په همدې ډول $f(x)>f(x_0)$

جمله: (د یوه نسبي بحراني ټکي لپاره ضروري شرایط):
که په x_0 کې مشتق وړ تابع $y=f(x)$ انحرافي ټکی لري نو لرو: $f'(x)=0$

دا جمله موږ ته وایي: چېرته چې $f'(x)\ne 0$ وي نو هلته اکستریموم نه شته، د اکستریموم لپاره یواځې د x_0 ځای په پوښتنه کې راځي، چې د هغې لپاره لرو $f'(x)=0$ ، خو حمتي نه ده چې $y=f(x)$ دې یواکستریموم و لري.

جمله : (د یوه بحراني ټکي لپاره پوره کیدونکی شرایط):

که په $x=x_0$ کې دوه واره مشتقوړ $y=f(x)$ تابع لپاره ولرو: $f''(x)\ne 0$, $f'(x)=0$
نو تابع $y=f(x)$ هلته یو بحراني ټکی لري.

خورا ټیټ ټکی مخ ته لرو، که وي: $f''(x)>0$

خورا جګ ټکی مخ ته پروت دی ، که وي: $f''(x)<0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پېژند: په یوه چاپېریال $x = x_0$ کې مشتق وړ تابع $y = f(x)$ یو کېڼ- ښی- انعطافټکی په همدې ډول ښی- کېڼ- انعطافټکی لري، که د هغه مشتق هلته یو نسبي جګټکی(عظمي نقطه) په همدې توګه یو نسبي ټیټ ټکی ولري.

جمله: (د یوه نسبي بحراني ټکي لپاره ضروري شرایط): که په x_0 کې مشتق وړ تابع $y = f(x)$ اکستریموم لري نو لرو: $f'(x) = 0$

دا جمله موږ ته وایي: چېرته چې $f'(x) \neq 0$ وي نو هلته بحراني ټکی نه شته، د بحراني ټکو لپاره یوائې د x_0 ځای په پوښتنه کې راځي، چې د هغې لپاره $f'(x) = 0$ وي ، خو حمتي نه ده چې $y = f(x)$ دې یوبحراني ټکی ولري.

د پورته جملی استعمال

پېزند: د زینټکي(کله کله برندې ټکی هم بلل کیږي)لاندې د انعطافټکي ځانګړی حالت پوهیږو، داسې انعطافټکی چې تانجنت یې افقي (پروت) وي:

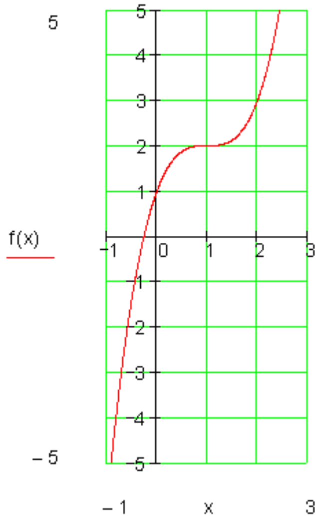
د پرتلې لپاره دې بیا یو ،،عادي،، انعطافټکی ورکړ شوی وي.دا یو مائل(نه افقي) تانجنت لري

په $y' = f'(x)$ څخه لاندې جمله لاس ته راځي:

جمله : (د اوړونټکي(انعطاف ټکي) لپاره اړیین شرایط): که په $x = x_0$ کی دوه واره مشتق وړ تابع $y = f(x)$ هلته یو انعطاف ټکی ولري، نو لاس ته ترې راځي: $f''(x) = 0$

زینټکی(د اس زین) **<u>Der Sattelpunkt</u>**

(c) ketabton.com: The Digital Library



د انعطاف ټکي یو ځانګړی حالت زینتکی دی. دا د
انعطاف ټکی دئ د صفر جګېدني سره.که د کیڼ لور
ورتږدې شو فکر کیږي، چې، نسبي جګتکی مو مخ ته
پروت دی
که ښوک د ښي لور ور نږدې شي فکر کوي، چې یو
نسبي ټیټکی مخ ته لرو.
اوس دا حالت د ریاضیاتو له لوري څیړو:
مشتق:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 3$$

$$f''(x) = 6x - 6$$

$$f'''(x) = 6$$

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3x^2 - 6x + 3 = 0 \;\Rightarrow\; x_{1/2} = 1$$

د برنولي او د دې لو، پیتال قاعده:
که توابع $u = f(x)$ او $v = g(x)$ د یوه $U(x_0)$ چاپیریال د x_0 په ځاي کی مشتقوړ وي د
$g'(x) \neq 0$ سره او د ټولو $x \in U(x)$ لپاره او x_0 د f ا و g یوصفرځاي وي،
د $f(x_0) = g(x_0) = 0$ سره، نو باور لري: $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$,
ترڅو په ښي لور حد شته وي.
په ورته توګه لاس ته راځي: $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

د څیړکي تمرینونه:

۱ -- د لاندې ماتراشنل توابعو د مونوتوني حالت د د a په واکوالي کې ورکړئ.

$a)\;\; f(x) = \frac{1}{ax + 2}$ $\qquad b)\;\; f(x) = \frac{1}{ax^2 + 1}$

۲ -- و څیړئ، چې ایا لاندې توابع په خپله پیژند ورشو مونو ون او که په کلکه
مونوتون دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$a)\ f(x)=\frac{e^x}{2+e^x}$ $b)\ f(x)=2x^5-7$

۳ -- لاندې ناراشنل توابع په یوغږیزوالي خویونو وڅیړۍ.

$a)\ f(x)=e^{x^2}$ $b)\ f(x)=\sqrt[3]{x^2+1}$

٤ -- د لاندې توابعو ټول لوکال افراطي ټکي پیداکړئ.

$a)\ f(x)=e^{-4x^2}$ $b)\ f(x)=(x^2-3)\cdot e^x$

$c)\ f(x)=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$ $d)\ f(x)=\ln(x^2+1)$

٥ -- د تابع ټول لوکال افراطي ارزښتونه دې په دې په لاندې انتروال کې ولټول شي.

$-2\pi\le 2\pi.$

$a)\ f(x)=\sin^2 x$ $b)\ f(x)=\sin(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{2})$

٦ -- لاندې توابعو ټول لوکال او ګلوبال افراطي ځایونه پیدا کړئ.

$a)\ f(x)=\sqrt{x^2+x}$ $b)\ f(x)=\sqrt{x^2+3}$

$c)\ f(x)=x-\sqrt{x}$ $d)\ f(x)=3+\sqrt[3]{x^2}$

۷ -- لومړی دمطلق ارزښت وشمېرئ او پسې ټول افراطي ارزښتونه وټاکئ.

$a)\ f(x)=|x|+x^2$ $b)\ f(x)=|x^2+2x-8|$

۸ -- د f تابع د $f(x)=\frac{x^2-x-2}{(x-1)^2}, x\neq 1$ سره د انعطاف ټکي بیداکونه

۹ -- د x1=1 او x2=2 لپاره تابع ارزښتونه وشمېرئ او هم د f تابع جګېدنه د

$f(x)=x^4-2x^3-x+1.$

سره.

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۱۰ -- په صفرځاي کې $f(x) = x^3 - x^2 - 2x$ تابع کومه جګېدنه لري.

۱۱ -- د $f(x) = 0,5x^4 - x^3 + 0,5x^2 + x - 4$ ګراف په کومو ټکو کې جګېدنه لري.؟

۱۲---- د $x0=-1$ ځاي کې د $f(x) = \frac{x^4 - 8x^2 + 16}{x - 1}, \quad (x \neq 1)$ تابع ارزښت او د ګراف جګېدنه غواړو پیاکړو

۱۳ -- د لوپیتال قاعدې په مرسته د $x \to \infty$ لپاره د لاندې مات ریښتوني توابعو پوله ارزښتونه وشمرئ.

$$a)\ f(x) = \frac{2x^3 - x + 4}{3x^3 + 1} \qquad b)\ f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{4x^3 + 3x^2 - 2x + 5}$$

۱٤ -- د لاندې توابعو لپاره د منحنیو شننیز بحث وکړئ او ګرافونه یې و کاږئ.

$$a)\ f(x) = -x^3 + x^2 + 4 \qquad b)\ f(x) = -\frac{1}{9}x^4 + \frac{2}{3}x^2$$

$$c)\ f(x) = x^3 + 3x^2 - 2x - 2 \qquad d)\ f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$$

۱۵ -- د لاندې توابعو لپاره د پوره منحنیو مطالعه وکړئ او ګرافونه یې و کاږئ.

$$a)\ f(x) = \frac{x}{4} - \frac{2}{x^2} \qquad b)\ f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x - 3}$$

$$c)\ f(x) = \frac{3x^2 + 1}{x^2 - 1} \qquad d)\ f(x) = \frac{9}{x^2 + 3}$$

۱٦ -- د لاندې توابعو صفرځایونه وشمېرئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$a)\ f(x)=x^3+\frac{3}{2}x^2-\frac{11}{2}x-3$ $b)\ f(x)=x^4-2x^3-13x^2+14x+24$

$c)\ f(x)=x^3-6x^2+8x$ $d)\ f(x)=x^3-\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{4}x+\frac{1}{12}$

$e)\ f(x)=x^4-x^3-7x^2+x+6$ $f)\ f(x)=x^4+6x^3-11x^2-60x+100$

۱۷ -- د دریمې درجې تام راشنل ګراف د x -محور د x1=-2 , x2 = 0 او x3=4 په ټکو کې غوڅوي.

د تابع مساوات کوم دي، که سربېره پر دې ګراف د P(2,-8) ټکي څخه هم تېر شي؟

۱۸ -- د یوه څلورمې درجې تام راشنل تابع د x - محور د x1=0,5 او x2=3 په ټکو کې غوڅوي. د تابع برابرون څنګه دی، که پرسېره پردې ګراف د y - محور د P(0,9) په ټکي کې هم لمس کړي.

۱۹ -- د څلورمې درجې د یو تام راشنل تابع ګراف د وضعیه قیمت سیستم پیل او له $P(\frac{1}{2}/-\frac{15}{8})$. ټکي تېرېږي. د تابع مساوات څنګه دي، که ګراف د x– محور هم د x1=-1 سره لمس کړي او په x2 = 2 کې غوڅ کړي.

۲۰ -- د لاندې توابعو صفرځایوه پیدا کړئ.

$a)\ f(x)=\frac{x^2+2x-15}{x+4}$ $b)\ f(x)=\frac{x^3+2x^2-4x-8}{x}$

$c)\ f(x)=\frac{x^3-x^2-5x-3}{x-0.5}$ $d)\ f(x)\frac{x^4-x^3+4x^2-4x}{x+5}$

۲۱ -- د یوه مات راشنل f تابع د $f(x)=\frac{x^3+ax^2+bx+c}{x+d}$ ، سره ثابتې a,b,c او d پیداکړئ، که د x1=-2,x2=-(1:2) او سره صفرځایونه پراته وي او تابع په x=0 کې یو تشځای ولري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

it $f(x) = \frac{(x-1)^3}{x}, \quad (x \neq 0)$

۲۳ -- مات یا کسري راشنل f تابع په x1=1 کې د سره درې ځله صفرځاي لري.

د یوې ساحې د ویش په مرسته وښیئ چې په همدې څلورمه(ربع) کې صفرځاي کې ځغلي او که صفرځاي څلورمه بدلوي.

۲٤ -- دا سي یو ترم وټاکئ، کوم چې د لاندې پریودیکي یا تل بېرته راګرځېدوني توابعو صفر ځایونه ورکوي.

$-2\pi \le x \le 2\pi$

د شمېرنې له لارې صفرځایونه ونوموئ، چې په انټروال $-2\pi \le x \le 2\pi$ کې پراته وي.

$$a) \quad f(x) = \frac{1}{2}\sin 3x \qquad b) \quad f(x) = \sin(x + \frac{\pi}{4})$$

$$c) \quad f(x) = 1 - \sin^2 x \qquad d) \quad f(x) = \sin(2x - \frac{\pi}{3})$$

۲٦ -- ولې لاندې توابع صفرځایونه نه لري؟

$$a) \quad f(x) = \ln(x^2 + 3) \qquad b) \quad f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$$

$$c) \quad f(x) = \frac{e^x}{x + 1} \qquad d) \quad f(x) = 1 + \sin^2 x$$

۲۷ -- ولې کېدی شي چې یو تابع ډېر صفرځایونه ولري، مګر د y - محور سره یواځې یو صفرځاي ولري؟

۲۸-- د صفرځایونو د تعداد په هکله څه ویلاي شئ، که د یو f تابع لپاره په تعریفستې(- ډېرئ) کې یو f^{-1} معکوس تابع هم شته وي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲۹-- د y - محور سره د لاندې توابعو غوځتکي وشمېرئ.

$a)\ f(x) = x^3 + 2x - 1$ $b)\ f(x) = (x+1)\cdot \ln(x+1)$

$c)\ f(x) = \dfrac{x^4 - 3x^2 + x}{x+2}$ $d)\ f(x) = \dfrac{4}{\sqrt{x^2+9}}$

$e)\ f(x) = (x-2)\cdot e^{x-1}$ $f)\ f(x) = e^{\frac{2}{1-x}}$

۳۰-- د یوه تام راشنل تابع $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$
د $a_0 \neq 0$ سره کېدی شي د y-محور غوځتکي د ساده لوستلو له لارې و ټاکل شي.

په دې هکله دلایل راوړئ.

۳۱-- د x1=1 او x2=2 لپاره تابع ارزښتونه وشمېرئ او هم د f تابع جگېدنه د $f(x) = x^4 - 2x^3 - x + 1.$ سره.

۳۲--په صفرځاي کې $f(x) = x^3 - x^2 - 2x$ تابع کومه جگېدنه لري.

۳۹-- په کومو ځایونو کې لاندې توابع پروت تانجنت لري؟

$a)\ f(x) = x^2 e^{-x}$ $b)\ f(x) = \ln(x^2+1)$

۴۰-- د a د کومو ارزښتونو لپاره د $f(x) = (x+a)\cdot e^x$ د گراف د $x_0 = 0$ په ځاي کې ۲ جگوالی لري؟

۴۱د لاندې توابعو ټول ځايزې(لوکال) خوراجگ ټکي وښایاست.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$a)\ f(x)=x^3-3x^2-9x+10$ $\quad b)\ f(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2-6x+1$

$c)\ f(x)=4x^3-18x^2+15x+7$ $\quad d)\ f(x)=x^4-4x^2+5$

$e)\ f(x)=x^5-5x^3-20x$ $\quad f)\ f(x)=\frac{1}{2}x^4-\frac{10}{3}x^3+6x^2-2$

۴۳-- د n-مې درجې يو تام راشنل تابع خورا زيات څومره لوکال (ځايز) افراطي ځايونه لرودی شي؟

۴۴-- ولې د ځګتکي لپاره شرايط $f''(x)<0$ و اړيين نه دي؟

۴۵-- د لاندې توابعو لوکال(ځايز) انحرافي(افراطي) ځايونه وټاکئ.

$a)\ f(x)=\frac{2}{3}x^3+4x^2+8x-1$ $\quad b)\ f(x)=\frac{1}{3}x^4+1$

$c)\ f(x)=\frac{1}{3}x^4-2x^2+\frac{8}{3}x$ $\quad d)\ f(x)=x^4-4$

۴۷-- د f تابع ټول لوکال افراطي ارزښتونه دې په دې په لاندې انتروال کې ولټول شي.

$-2\pi\le 2\pi.$

$a)\ f(x)=\sin^2 x$ $\quad b)\ f(x)=\sin(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{2})$

۴۸-- لاندې توابعو ټول لوکال او ګلوبال افراطي ځايونه پيدا کړئ.

$a)\ f(x)=\sqrt{x^2+x}$ $\quad b)\ f(x)=\sqrt{x^2+3}$

$c)\ f(x)=x-\sqrt{x}$ $\quad d)\ f(x)=3+\sqrt[3]{x^2}$

--- د fتابع د $f(x)=\dfrac{x^2-x-2}{(x-1)^2},x\neq 1$ سره د انعطاف ټکي بيداکړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

٥٣-- په انتروال $0 \le x \le 2\prod$ کې د انعطاف ځایونه پیداکړئ.

a) f(x) = x + sinx b) f(x) = 2(1-sin2x)

٥٤-- لاندې توابع په x_0 کې په مشتقوړتیا باندې وڅېړئ.

$$a)\ f(x)=\begin{cases}\cos x & x\le 0\\ x^2+1 & x>0\end{cases},\quad x_0=0 \qquad b)\ f(x)=\begin{cases}2x-1 & x<1\\ x^2 & x\ge 1\end{cases},\quad x_0=1$$

$$c)\ f(x)=\begin{cases}2x-1 & x<1\\ e^{x-1} & x\ge 1\end{cases},\quad x_0=1 \qquad d)\ f(x)=\begin{cases}\ln x & x\le 1\\ x-1 & x>1\end{cases},\quad x_0=1$$

٥٥-- ولې متمادیت د مشتقوړتیا لپاره اړین شرط، مګر مشتقوړوالی د متمادیت لپاره پوره کېدونکی شرط دی؟

٥٦-- په کوم دلیل تام راشنل توابع د $x \in R$ لپاره مشتقوړ دي؟

٥٩-- و څېړرئ، چې ایا لاندې توابع په خپله پېژند ورشو مونو ون او که په کلکه مونوتون دي.

$$a)\ f(x)=\frac{e^x}{2+e^x} \qquad b)\ f(x)=2x^5-7$$

٦١-- په کومه ورشو کې لاندې تام راشنل توابع یو کېن کږوالی لري او په کون کې ښی کږوالی لري.

$$a)\ f(x)=x^3-6x^2+5x+2 \qquad b)\ f(x)=-2x^3+3x^2-x-4$$

٦٢--د لاندې مات توابعو ګرافونه هایپاربول دي. د هاپارابول څانګې کوم کږوالی لري؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

$a)\ \ f(x)=\dfrac{1}{4x+1}$ $\qquad b)\ \ f(x)=3-\dfrac{3}{x^2}$

٦٤-- ولې د یوه دریمې درجې تام راشنل تابع گراف په تل تلنه کې یوه بنۍ انخنا(کږوالی) نه لري.

٦٥ ولې یو څلورمه درجه تامراشنل تابع د $f(x) = ax^4 + dx + e$ سره یو تلتلونی کینه انخنا(کږوالی) او بنۍ انحنا لري؟

۱۵۸(۱۰۳): څنگه کېدی شي، چې د یوې f تابع د ۱ . درجې مشتق څخه د د گراف په انخنا قضاوت وکړو؟

۱٦۰(۱۰۵): د لاندې توابعو حالت وڅېړئ، که $|x| \to \infty$ په لور لاړ شي.

$a)\ \ f(x)=x^3-4x^2-4x-5$ $\qquad b)\ \ f(x)=-3x^4+x^3-2x^2+x$

$c)\ \ f(x)=\dfrac{1}{3}x^5-x+6$ $\qquad d)\ \ f(x)=-\dfrac{2}{5}x^2-\dfrac{1}{5}x+\dfrac{4}{5}$

$e)\ \ f(x)=\dfrac{1}{2}x^4-\dfrac{3}{2}x^2+\dfrac{5}{2}$ $\qquad f)\ \ f(x)=-x^3-x^2-x-\dfrac{1}{3}$

۱٦۳(۱۰۸):ولې د $x \to +\infty$ لپاره په ساده ډول د پولې په هکله وړاند وینه نه شي کېداي:

$a)\ \ f(x)=x^3\cdot\dfrac{1}{\ln x}$ $\qquad b)\ \ f(x)=x\cdot e^{-x}$

۱٦۷(۱۱۲): د جوړه(جفت) جگعدد(اکسپوننت) سره تام رینتونی تابع کوم ډول سیومتري لري؟

۱٦۸(۱۱۳): د ناجوړه(طاق) جگعدد(اکسپوننت) سره یو تام رینتونی تابع ټیک هلته د سر چینې سره ټکی سیومتري دی، چې مطلق ارزښت صفر شي؟

۱۷۱(۱۱٦): لاندې توابع په بنسټ کې لوستل شوي سیومتري خویونه نه لري. وښایئ چې

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا سره له دې هم سیومتریک دي.

$a)\ f(x) = (x+2)^2 \qquad b)\ f(x) = 1 + \frac{1}{x}$

$c)\ f(x) = -(x+1)^2 + 3 \qquad d)\ f(x) = 2 + \frac{1}{x-4}$

۱۷۲۱۷): لاندې تام ریښتوني اعداد په محدودیت وڅېړئ.

$a)\ f(x) = x^2 - 2x + 4 \qquad b)\ f(x) = 3x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 24x$

$c)\ f(x) = -(x+3)^2 + 1 \qquad d)\ f(x) = x^3 - 2x + 1$

۱۷٦(۱۲۱): د لوپیتال قاعدې په مرسته د $x \to \infty$ لپاره د لاندې مات ریښتوني توابعو پوله ارزښتونه وشمرئ.

$a)\ f(x) = \frac{2x^3 - x + 4}{3x^3 + 1} \qquad b)\ f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{4x^3 + 3x^2 - 2x + 5}$

۱۷۸(۱۲۳): د لاندې توابعو لپاره د x=x0 په ځاي کې د تانجنت مساوات وټاکئ

۱۷۹(۱۲٤): په کومو ټکو کې د لاندې مساواتو لپاره د تانجنت مساوات د ورکړ شوې کربښې سره غبرگ دي؟

۱۸۸(۱۳۳):د لاندې تام ریښتوني توابعو د انعطاف ټکي(اوړونټکي) او د نورمالي مساوات ولیکئ.

$a)\ f(x) = -\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3} \qquad b)\ f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 2x + 10$

۱۸۹(۱۳٤) د f_t تابع د انعطاف ټکي مساوات ولیکئ.

$$f_t(x) = \frac{4}{3}t^2x^3 + 3tx^2 + 3x \quad (t \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۹۲(۱۳۷): د لاندې توابعو لپاره د منحنيو شننيز بحث وکړئ او ګرافونه يې و کاږئ.

$a)\ f(x) = -x^3 + x^2 + 4 \qquad b)\ f(x) = -\frac{1}{9}x^4 + \frac{2}{3}x^2$

$c)\ f(x) = x^3 + 3x^2 - 2x - 2 \qquad d)\ f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$

په ټوټه ماتونو يا کسرونو ټوټه کونه

الف) اصلي کسرونه، چې مخرج يې مختلف لاينيز ضريبونه لري.

بنسټ: که د يوه اصلي پولينوموېش $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$ مخرجپولينوم $P_n(x)$ په مختلفو کرښيزو(لايني) ضريبونو $P_n(x) = (x - x_1)(x - x_2)\ ...\ (x - x_n)$ ټوټه کېدونکی وي، نو پولينوم $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$ په لاندې بڼه بدلېدی شي.

$$\frac{P_m(x)}{P_n(x)} = \frac{A}{x - x_1} + \frac{B}{x - x_2} + \frac{C}{x - x_3}\ ...\ \frac{N}{x - x_n}$$

داسې يوه بڼه په ټوټه کسرونو ټوټه کونه،، بلل کيږي، چې A,B,C,...,N حقيقي عددونه دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیت: په پورته ننوتنه کې و ښایاست، چې دا ټوټه کسرونه چېرته تعریف لري؟

-- د یوه په خوښه پولینوم کسر ټوټه ونه او د تعریف ساحې ورکړئ.

بیلګه: اصلي پولینوم کسر $\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}$ په ټوټه کسر ټوټه کړئ.

حل: د مساوات $x^3-4x^2-7x+10=0$ لومړی حل $x_1=1$ د ازمایښت له لارې څیرو .

د پولینوم ویش(لنډ: پولینوموېش) $(x^3-4x^2-7x+10):(x-1)=x^2-3x-10$ مو ټوټه ونې ته بیایي $x^3-4x^2-7x+10=(x^2-3x-10)(x-1)$ مساوات $x^2-3x-10$ اوس $x_2=-2$ او $x_3=5$ حلونه لري.

له دې امله $x^3-4x^2-7x+10=(x-5)(x-1)(x+2)$ دی.

د اصلي کسر $\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}$ په ټوټه کسرونو ټوټه کونه:

د کسرونو شمیرنو قاعدې له مخې کیدی شي ورکړ شوی پولینوم په درې جمعی برخو ټوټه شي، چې مخرجونه یې لاینیز (کرښیز-)ضریبونه دي:

$$\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}=\frac{A}{x-5}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+2}$$

د غزېدنې سره د ټوټه کسر جمعه:

اصلي مخرج د ټوټه کسر د پولینوم مخرج دی.

$$\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}=\frac{A(x-1)(x+2)+B(x-5)(x+2)+C(x-5)(x-1)}{(x-1)(x-5)(x+2)}$$

$$\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}=\frac{Ax^2+Ax-2A+Bx^2-3Bx-10B+Cx^2-6Cx+5C}{x^3-4x^2-7x+10}$$

$$\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}=\frac{(A+B+C)x^2+(A-3B-6C)x+(-2A-10B+5C)}{x^3-4x^2-7x+10}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دصورتونو ارزښت A ,B او C ټاکنه د ضريبونو د پرتلې له لارې:

د مساوي مخرجونو کسرکې بسيا کوي، چې صورتونه سره پرتله کړو. دلته بايد د مساوي توانونو ضريبونه، دا په دې مانا چې د x^2, x او x_0 بايد مساوي وي.

$$\begin{aligned} A + B + C &= 4 && \text{I} \\ A - 3B - 6C &= -1 && \text{II} \\ -2A - 10B + 5C &= 39 && \text{III} \end{aligned}$$

د فاکټور 2 سره د I او II مساوات ضربونه او د هر يوه جمع د III سره پورته درې مساوات سيستم و دوه مساواتسيستم ته د دوه متحولو سره را لنډوي.

$$\begin{aligned} -8B &= -72 && \text{V} \\ -16B - 7C &= -41 && \text{IV} \end{aligned}$$

د مساوات IV.V څخه لرو: $-24B = -72 \;\Rightarrow\; B = 3$

د $B = 3$ په V کې ايښوونه: $-16.3 - 7C = -41 \;\Rightarrow\; C = -1$

د$B = 3$ او $C = -1$ په I کې ايښوونه: $A + 3 - 1 = 4 \;\Rightarrow\; A = 2$

په ټوټه کونې فرمول کې ايښووني سره غوښتونکی ټوټه کسر لاسته راځي:

$$\frac{4x^2 - x - 39}{x^3 - 4x^2 - 7x + 10} = \frac{2}{x-5} + \frac{3}{x-1} - \frac{1}{x+2}$$

ازمايښت:

$$\frac{4x^2 - x - 39}{x^3 - 4x^2 - 7x + 10} =$$

$$= \frac{(x-1)(x+2) + 3(x-5)(x+2) - 1(x-5)(x-1)}{(x-5)(x+2)(x+2)} = \frac{4x^2 - x - 39}{x^3 - 4x^2 - 7x + 10}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

تمرینونه:

د لاندې اصلي پولینومکسرونو په ټوټه کسرونو ټوټه کړئ.

$$a)\ \frac{2x^2+20x+12}{x^3+2x^2-5x+6}\ ,\ b)\ \frac{x^2+1}{x^3-x}\ ,\ c)\ \frac{4x+10+12}{x^2+6x+8}$$

ب) اصلي پولینوم کسرونه، چې مخرج يې مساوي لاینیز(کرښیز) فاکتورونه لري.

که د یوه اصلي پولینوم $P_n(x)$ مخرج $\frac{P(x)}{P_n(x)}$ د کرښیز فاکتور $x-x_0$ توان $\frac{A}{(x-x_0)}+\frac{B}{(x-x_0)^n}+...+\frac{N}{(x-x_0)^n}$ وي، نو ددې کرښیزو فاکتورونو له پاره پولینوم لاندې بڼه لري:

$$\frac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2}$$

د نورو ټولو ساده منځ ته راغلو کرښیزو فاکتورونو ټوټه کسرونو په بلده بڼه ورکول کیږي.

بیلګه:

د اصلي پولینوم کسر $\frac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2}$ لپاره په ټوټه کسر ټوټه کونه ورکړئ.

د مخرج ټوټه ونه په کرښیزو فاکتورونو:

د پولینوم $x^3-4x^2+5x-2=0$ لومړی حل $x_1=1$ د ازمایښت له لارې پیدا کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پولینوم ویش $(x^3-4x^2+4x-2):(x-1)=x^2+3x+2$ مو لاندې ټوټه کوني ته لاربښودوي:

$$x^3-4x^2+4x-2=(x^2+5x-2)(x-1)$$

مساوات $x^2-3x+2=0$ دا $x_2=1$ او $x_3=2$ حلونه لري. نو له دې سره د مخرج لپاره ډبل حل دی:

$$x^3-4x^2+5x-2)=(x-2)(x-1)^2$$

د ټوټه کسر پیل:

$$\frac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{(x-1)}+\frac{C}{(x-1)^2}$$

د ټوټه کسر جمع د غزوني له لارې:

$$\frac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2}=\frac{A(x-1)^2+B(x-2)(x-1)+C(x-2)}{(x-2)(x-1)^2}$$

$$\frac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2}=\frac{(A+B)x^2+(-2A-3B+C)x+(A+2B-2C)}{x^3-4x+5x-2}$$

د A,B او C صورتونو ارزښت د ضریبونو پرتله کوني له لارې.

$$\begin{aligned} A+B&=3 && \text{I}\\ -2A-3B+C&=-6 && \text{II}\\ A+2B-2C&=2 && \text{III}\end{aligned}$$

د مساوات II د 2 سره ضرب او د III سره جمعه د I سره ګډ د دوه مساوات د دوه متحولو سره.

$$\begin{aligned} A+B&=3 && \text{I}\\ -3A-4B&=-10 && \text{II}\end{aligned}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دI ضرب له 4 سره او جمعه یې له IV سره : A = 2

د A = 2 ایښوونه په I کې: $2+B=3 \Rightarrow B=1$

د A = 2 او B = 1 ایښونه په III کې: $2+2.2-2C=2 \Rightarrow C=1$

د ټوټه کوني فرمول له لارې ټوټه مسر ټوټه ونه لاس ته راځي:

$$\frac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2}=\frac{2}{x-2}+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}$$

تمرینونه:

د لاندې اصلي پولینوم کسرونو په ټوټه کسرونو ټوټه کونه ورکړئ.

$a)\ \frac{3x^2+5x+10}{x^3+2x^2-4x-8}$ $b)\ \frac{3x^2-18x+36}{x^3-6x^2+9x}$

$c)\ \frac{x^2+3x+4}{x^4-2x^2+1}$ $d)\ -\frac{x^2+13x+10}{x^3-5x^2}$

پ) اصلي پولینوم کسرونه، چې مخرج یې پوره په کرښیزو فاکتورونو نه ټوټه کیږي.

بنسټ:

که د یوه اصلي پولینوم کسر $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$ مخرجپولینوم $P_n(x)$ نور په یوه حقیقی ضریب نه ټوټه کیدونکي ضریب ax^2+bx+c مخ ته پروت وي، نو په ټوټه کیدو کې دې د یو ټوټه کسر $\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$ په بڼه دې کینول شي یا راوړل شئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

بېلګه:

د پولینوم کسر $\frac{5x^2+8x+9}{x^3+3x^2+6x+4}$ له پاره دې په توټه کسر توټه ونه ورکړ شي.

د مخرج توټه کونه په کرښیزو ضریبونو:

لومړی حل دې $x_1=-1$ وي مساوات $x^3+3x^2+6x+4=0$ د ازماېښت له لارې پیدا کیږي.

بولینوم وېش $(x^3+3x^2+6x+4):(x+1)=x^2+2x+4$ مو لاندې توټه کونې ته بیايي:

$$x^3+3x^2+6x+4=(x+1)(x^2+2x+4)$$

دا چې مساوات x^2+2x+4 حقیقي حل نه لري، نو د حقیقي اعدادو په ورشو کې نوره توټه کونه ناشونې ده.

نو له دې امله پولینوم کسر لاندې بڼه لري:

$$\frac{Ax}{x^2+2x+4}$$

د $\frac{c}{x+1}$ بڼې کسر سره یوځاي مو لاندې توټه کسر توټه کونې ته بیايي:

$$\frac{5x^2+8x+9}{x^3+3x^2+6x+4}=\frac{Ax+B}{x^2+2x+4}+\frac{C}{x+1}$$

د غزونې له لارې د توټه کسرونو جمع

$$\frac{5x^2+8x+9}{x^3+3x^2+6x+4}=\frac{(Ax+B)(x+1)+C(x^2+2x+4)}{x^3+3x^2+6x+4}$$

$$\frac{5x^2+8x+9}{x^3+3x^2+6x+4}=\frac{(A+C)x^2+(A+B+2C)x+(B+4C)}{x^3+3x^2+6x+4}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ضریبونو A,B,C تاکنه د پرتله کولو له لارې:

A+C = 5 I

A + B + 2C = 8 II

B + 4C = 9 III

د III کمښت (تفریق) له مساوات II څخه د I سره یې ګډولو څخه مساوات لاس ته راځي، چې دوه اووښتوني یا متحولې لري:

A – 2C = 5 IV

A + C = 5 I

مساواتIII منفي مساواتII :

د C = 2 په Iاﺋښوولو سره :

د C = 2 په III ایښوولو سره:

که دا د ټوټه کوني فرمول کې کېږدو نو د ټوټهکسر ټوټه کونه لاس ته راځي

$$\frac{5x^2+8x+9}{x^3+3x^2+6x+4}=\frac{3x+1}{x^2+2x+4}+\frac{2}{x+1}$$

تمرینونه:

د لاندې اصلي کسري پولینومونو په ټوټه کسرونو ټوټه کونه ورکړی:

$$a)\ \frac{-x^2+2x-12}{x^3+2x^2+6x+5} \qquad b)\ \frac{4x^2-3x+8}{x^3-2x+4}$$

$$c)\ \frac{8x^2-16x+10}{x^3-4x^2+5x} \qquad d)\ \frac{x}{x^3+2x^2+2x+1}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ج) نا اصلي پولینوم کسرونه:

که د یوه پولینوم $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$ د صورت درجه د پولینوم د مخرج له درجې څخه لویه وي، نو دا د پولینومویش له لارې په ټولناطق کسر او یوه اصلي کسر ټوټه کېدی شي.

بیلګه:

کسري پولینوم $\frac{3x^3-6x^2-20x-1}{x^2-2x-8}$ په ټوټه کسري پولینومونو ټوټه کړئ .

د پولینوم د صورت درجه درې ده او د مخرج دوه . نو له دې امله مو یو نا اصلي پولینومکسر مخ ته پروت دی.

پولینوم وېش:

$$(3x^3-6x^2-20x-1):\ (x^2-2x-8)=3x+\frac{4x-1}{x^2-2x-8}$$

$$\frac{-(3x^3-6x^2-24x)}{4x-1}$$

د پاتې کسر $\frac{4x-1}{x^2-2x-8}$ له پاره د ټوټه کسر ټوټه کونې کارونه (عملیه) مخ ته بیایو.مخرج په کرښیزو ضریبونو ټوټه کړی:

د مساوات $x^2 - 2x - 8 = 0$ له پاره حل $x_1=-2$ او $x_2=4$ لرو.

نو $x^2-2x-8=(x-4)(x+2)$ دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په ټوټه کسرونو ټوټه کونه

د ټوټه کسر ټوټه کوني لپاره ځای په ځاي کوو: $\dfrac{4x-1}{x^2-2x-8}=\dfrac{A}{x-4}+\dfrac{B}{x+2}$

د غزوني له لارې د ټوټه کسرونو جمعه کول:

$$\frac{4x-1}{x^2-2x-8}=\frac{A(x+2)+B(x-4)}{(x-4)(x+2)}$$
$$\frac{4x-1}{x^2-2x-8}=\frac{(A+B)x+(2A-4B)}{x^2-2x-8}$$

د ضريبونو د پرتله کووني په مرسته د A او B تاکل:

$$A+B=4 \qquad \text{I}$$
$$2A-4B=4 \qquad \text{II}$$

د I ضرب له 2 سره او له II څخه يې تفريق يا کول $6B=9 \Rightarrow B=\dfrac{3}{2}$

په II کې اينوول: $2A-4\dfrac{3}{2}=-1 \Rightarrow A=\dfrac{5}{2}$

منځنی لاس ته راوړنه $\dfrac{4x-1}{x^2-2x-8}=\dfrac{5}{2(x-4)}+\dfrac{3}{(2(x+2)}$

متحول (بنتونکی) په ټوټه کسر ټوټه کونه لاندی بڼه غوره کوي:

$$\frac{3x^3-6x^2-20x-1}{x^2-2x-8}=3x+\frac{5}{2(x-4)}+\frac{3}{2(x+2)}$$

پوښتنې د لاندې پولينومکسرونو په ټوټه کسر ټوټه کونه ورکړئ.

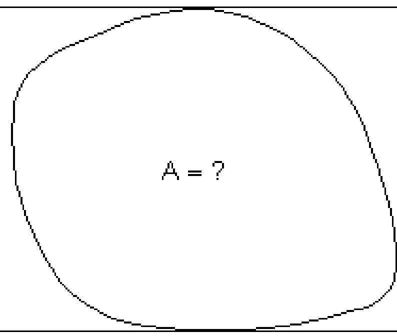
$a)\ \dfrac{3x^2+7x^2+17x+17}{x^2+6x+8}$ $\qquad$ $b)\ \dfrac{2x^4-8x^3+7x^2-3x+4}{x^2-4x+3}$

$c)\ \dfrac{2x^3+x^2}{x^3-1}$ $\qquad$ $d)\ \dfrac{4x^3+16x^2-7x-49}{x^3+4x^2+x-6}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د انتیګرالشمیرنې لپاره پیل راوړنې

پخوانیو یونانیانو ته دا د منحني څخه رابندې سطحې شمېرلو اصول معلوم وو.
دا دمشتق شمیرنه، چې موږ ورسره اوس سر او کار لرو، ډېر وروسته (د اوه لسمې پیړۍپاي کې) د طبیعي علومو پوهانو د لایبنیڅ او نیوټون له خوا رامنځ ته (اختراع) شو.



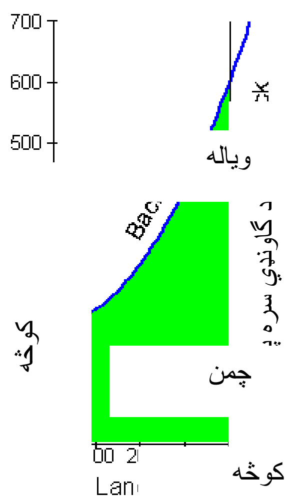
فعالیت:

- د پورته رابندې څېرې د سطحې د شمېرلو له پاره وړاندیزونه وکړئ.
- ایا تاسو د داسې سطحې شمېرلو سره بلد یاست ؟
- ایا تاسو دې ته ورنږدې سطحې مساحت شمېرلی دی؟ او که هو نو هغه ولیکئ.
- داپورته سطحه د وضعیه قیمت سیستم له لارې په څلورو نږدې برابرو برخو وویشئ او د انتیګرالونې په هکله یې فکر وکړئ.

بېلګه

دا څیره شوی چمن خرځیږي. له پورته لور د ویالې را بند دی او له ښي لور د ګاونډي ځمکه ده او کیڼ لور ته کوڅه او له کښته لور هم د یوې کوڅې را بند دی.

ددی لپاره چې چمن وپلورل شي، باید سطحه وپیژندل شي. د پلورونکی لپاره سطحه باید نږدې پوره مګر هیڅکله کمه ونه شمیرل شي. اخستونکی هم د ځان لپاره فکر کوي، چې پیسې باید ورکړي، خو هیڅکله ځمکه د اصل څخه زیات ونه شمېیل شو.

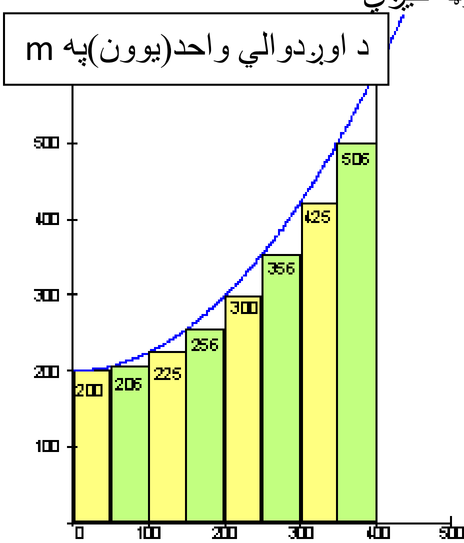


(c) ketabton.com: The Digital Library

وروسته له دې چي رانیوونکي او پلورونکي د چمن سطحه معلومه کړه، دواړه د پیسو په تادیه سره یوځای کیږي او په دې هکله موافقه کوي.

ویاله $f(x) = \frac{1}{400}x^2 + 200$ د تابع مساوات لري.

د اخستونکي له پاره ممکنه حل.

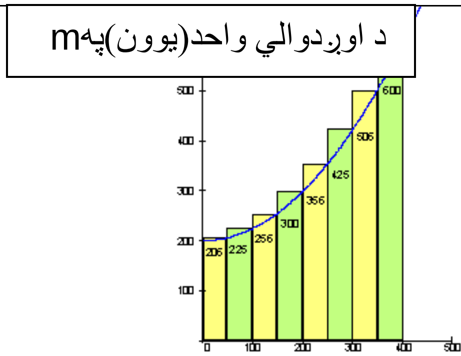
هره ټوټه(مستطیل پټی) 50m سره ورده او په رسم کي ورکړشوی جګوالی لري. د ټولو پټیو، سطحه یو ځای شمیرو. $200 \cdot 50 = 10000$ $206 \cdot 50 = 10300$ $225 \cdot 50 = 11250$ $256 \cdot 50 = 12800$ $300 \cdot 50 = 15000$ $256 \cdot 50 = 12800$ $425 \cdot 50 = 21250$ $506 \cdot 50 = 25300$ $\underline{123700}$	ځمکه په لاندې ډول په اوږدو ټوټو(پټیو) ټوټه کیږي 

د اخستونکي لپاره ټوله سطحه نزدې ***123700 m²*** ده.

د پلورونکي له پاره ممکنه حل:

هره ټوټه(پټی) 50m سورلري او په رسم کې ورکړشوی جګوالی لري. د ټولو پټیو سطحه یوځای شمېرو.	

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$206\cdot 50=10300$$
$$225\cdot 50=11250$$
$$256\cdot 50=12800$$
$$300\cdot 50=15000$$
$$356\cdot 50=12800$$
$$425\cdot 50=21250$$
$$506\cdot 50=25300$$
$$600\cdot 50=30000$$
$$\underline{143700}$$

د د پلورونکي له پاره د تولي سطحي مساحت نزدې $\boldsymbol{143700\ m^2}$ دی.
اخستونکی او پلورونکی باید د دواړو قېمتونو ،،منځ،، ته راشي، دا په دې معنا چې دواړه د قیمتونو منځ ارزښت یو بل سره ومني. یعني د سطحې منځ ارزښت، چې دی:

$$\frac{123700+143700}{2}=133700\ unt^2$$

دا به وروسته د ټاکلي انتیګرال برخه (په مخ) کې وشمېرو، چې رینتونی ارزښت یې $133333.\bar{3}m^2$ دی.
د اخستونکي په بیلګه کې دا ډول شمیرنه **لاندنی** ،،**جمعي جوړول**،، بلل کیږي.
د پلورونکي په بېلګه دا ډول شمیرنه،، **پورتنی جمعي**،، **جوړول** بلل کیږي.
دا د سطحې رینتونی ارزښت یو چیرته په دا منځ کې پروت دی.
باید ددې له پاره یوه لار پیدا کړو، چې رښتونی ارزښت ترې لاس ته راشي. ددې کار لپاره لږ نوره د چمتووالي لار شته.

پوښتني

د $3x^2+1$ تابع ګراف وکاږئ.

د انتروال [1,3] ترمنځ د تابع سطحه به نخښنه کړئ.

د دې ورکړ شوي سطحې پورته جمعه جوړه کړئ

د دې ور کړ شوي سطحې کښته جمعه جوړه کړئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

انتيګرالشميرنه Integralcalculation

د سطحي تابع له پاره تر مخ راوړنه: دا دانتيګرال هندسي مفهوم هم دئ. په کارتيزي وضعيه قېمت سيستم کې د ګراف په سرچينه کې يوه کربنه رسمووـغواړو سطحه پيداکړو، چې د تابع دګراف او x - محور ترمنځ د x په واکوالي کې پرته وي.

د ريمن (ټاکلی) انتلګرال

دلته دې يوه ځېره راوړل (د يوه ډنډ او يا.....)

فعاليت:

- يوه په خوښه هندسي ځيره وکاږئ، چې په ترتيب له درې، پنځو او اوو کربښو رابنده وي. د د ې ځيرو سطحه په ورسره بلد ډول وشميرئ.
- په يوه د وضعيه قيمت سيستم کې يوه کږه(منحني) وکاږئ او وهځيرئ، چې سطحه يې په ورنزدي ډول پيدا کړی چې د x محور او منحني ترمنځ پرته وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

یادونه: انتیګرال څه شی دی؟

آنتیګرال کونه Integration د ورګډېدلو په معنی دی ، لکه چې یو څوک یوې پردۍ ټولنې ته ورګډېږي یعنې ددې پردۍ ټولنې خویونه خپلوي، یعنې دی په دې ټولنه ورزیاتیږي. دا هم په همدې موخه دلته دا موضوع څېړلو ته وړاندې کیږي، چې څنګه د یوې کوچنی درجې تابع و یوه جګ درجې تابع ته ځي.

د انتیګرال هندسي تعریف:

لوریزه سطحه-د انتیګرال تعریف:

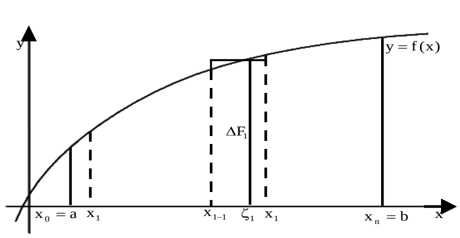
که یوه f تابع ولرو، نو د x مخور او تابع ترمنځ سطحې شمیرل د انتیګرال له لارې کیږي. په دې سطحه کې د x محور پورته لورې ته سطحه مثبته مخنخښه لري او د x محور کښته لورې ته سطحه منفي مخنخښ لري.

تحلیلي تعریف:

تعریف: د f یوه تابع ورکړ شوې، چې په یوه انتروال [a,b] باندې تعریف دی، نو د a څخه تر b پورې د تابع د انتیګرال څخه د x په محور د f د ګراف او د کرښې x=a او x=b تر منځ یوه یوه لوریزه سطحه پوهیږو.

په دې برخه کې غواړو، چې د انتګرال کلیمې ته وده ورکړو. د سطحې کچونې یا اندازه کوونې څخه کړی شو د انتګرال شمېرنې ته راشو، له دې امله انتګرالنیول د مشتق په څټ یا برعکس کارونه یا عملیه ده.

یو تابع $y = f(x)$ لرو. غواړو ددې تابع د ګراف او د x – محور باندې پرتو ټکو او ترمنځ هواره (سطحه) وشمیرو داسې چې $(f(x)>0)$ وي. (څیره ۱ . ۱)



(c) ketabton.com: The Digital Library

ددې دندې د حل لپاره د [a,b] اینتروال په n (نه اړینې) برابرو برخو انتروالونو $[x_{i-1},x_i]$ټوټه کوو.

$$a=x_0<x_1<...<x_{i-1}x_i<...<x_n=b$$
$$x_i-x_{i-1}=\Delta x_i$$

په اینتروال $[x_{i-1},x_i]$ کې په خوښه$\xi_l\in[x_{i-1},x_i]$ ټاکو.

د $x=x_{i-1},x=x_i,y=f(x)$ تر منځ سطحه (هواره) دا لاندې د مستطیل سطحه (و لاړکونجیزه هواره) ده:

$$\Delta F_i(x)=f(\xi_l).\Delta x_i;............................(4,1)$$

د ټولو پورته مستطیل ډوله کوچنیو سطحو د جمعې (زیاتون) له لارې غوښتونکې، نزدې ټوله سطحه لاس ته راځي:

$$F_n=\sum_{i=1}^{n}\Delta F_i=\sum f(\xi)\Delta x_i;..............................(4,2)$$

دا نزدیوالی تر هغې ښه کیږي خومره چې د اینتروال [a , b] ویش نری شي یعني $\max\Delta x\to 0$، هرڅومره چې د زیاتیدونکو شمیر ($n\to\infty$) شي.

که (٤ . ٢) تل همغه پوله ارزښت F ولري، په دې اړه نه چې اینتروال [a , b]څنګه ویشل شوی او $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$ څنګه ټاکل شوي، نو f (x) په اینتروال [a,b] کی اینتیګرالوړ دی. دا د بیلګې په توګه د ټولو ټوټه، متمادی او محدودو توابعو y = f (x) حالت دی .

پیژند (تعریف) ٤ . ١ : که لیمیټ

$$\lim_{x\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i=\int_a^b f(x)dx=F;(\max\Delta x\to 0),........(4,3)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په اینتروال [a , b] کی موجود وي، نو دا د f (x) ټاکلی اینتیګرال بولو، یا د ریمن سطحه F- Riemann . دلته a د اینتیګرال کیدونکې لاندې(کښته)پوله او b د ایتیګرال کیدونکې پورته پوله بلل کیږي او [a,b] د ایتیګرال کیدونکې اینتروال او f (x) (Integrand) (اینتیګرالیدونکی) او xد اینتیګرال کېدونکې متحول (Integrationsvariable) بلل کیږي

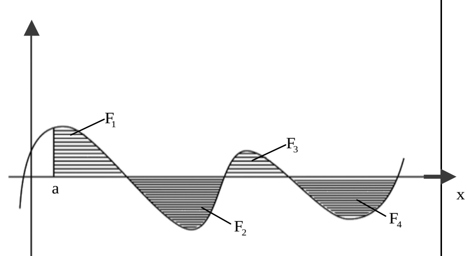
یادونه ۱ : د ایتیګریشن واریابله یا اووښتونی کیدی شي په خپله خوښه په نخښه شي(مخښه یا علامه یی په خوښه وټاکل شي).

موږ لرو: $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(u)\,du$

یادونه ۲ : دا پورته تعریف ٤ . ۱ کیدی شي هغه حالت ته پراخه شي، چیرته چی f (x) > 0 باوري نه وي . که f (x) < 0 وي نو دا ټاکلی اینتیګرال بیا د x -محور تر لاندې منفي هواره لري .

که د y = f (x) (کږه - لکه په)ش ٤ . ۲) کی - داینتیګرآلوني په اینتروال کی د x-محور پرې کړي نو دا مخامخ فرمول د لاندې سطې سره باور لري :

$F = F_1 - F_2 + F_3 - F_4 \ldots$



د تعریف ٤ . ۱ پسې تړلې دا لاندې جمله لرو:

جمله٤ . ۱ : که f (x) په [a , b] کې اینتیګرالوړ وي او $c \in [a,b]$ وي، نو باور لري:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ددې لپاره چې دا پورته مساوات د c ارزښتونو ته پراخه کړی شو، بایدc له اینتروال [a,b]د باندې نه وي پروت، یعنې ټکي a,b او c په یوه اینتروال کی باید پراته وي، په هغه کی چې تابع f (x) اینتیګرالوړ دی.

موږ دا لاندې تعریف(پیژند) لرو :

پیژند یا تعریف ٤ . ۲ : f (x) په یوه بند انتروال[a, b] کې اینتیګرالوړ دی، نو باور لري: $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

د پیژند تعریف ٤ . ۱ له مخی تل باور لري: $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

تمرینونه:

د لاندې توابعو ګراف و کاږئ او د ګراف او x محور ترمنځ د سطحې مثبته او منفي لور په نخښه کړئ.

الف : $4x^3 + 5x^2 + x + 6$ ،

ب: $x^2-4x-+16$ ،

پ: $x^4 + 5x^2 - 2x - 7$

بنسټیز- یا لومړنی تابع

$$F'(x) = f(x)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

فعاليت

- په پورته مساوات کې به $F(x)$ څنګه وليکلاي شو؟

- $F(x)$ نسبت و $f(x)$ ته څه بلل کيږي او په څټ، $f(x)$ د $F(x)$ څه بلل کئږي؟

په پورته دواړو پوښتنو کې فکر وکړي، چې پايلې يې دا لاندې دي:

ددې لپاره چې د مشتقنيولو او اينتيګرال نيولو ترمنځ اړيکی لاس ته راوړو، د لومړنی تابع کلمه په لاندې توګه تعريفوو:

> پيژند (تعريف):
>
> تابع $y = f(x)$ دې په يوه واز اينتروال I کی تعريف وي. هر يوه هلته موجوده مشتقوړ $F(x)$ تابع چی $F'(x) = f(x)$ شرايط پوره کړي، د $f(x)$ بنسټيز- ، ساده – يا لومړنی تابع بلل کيږي

په ساده توګه ليدل کيږي چی د يوې $f(x)$ تابع لپاره نه يواځي يو بنسټيز تابع $F(x)$ موجود دی، د بيلګې په توګه $F_0(x) = x^2,\ F_1(x) = x^2 + 1,\ F_2(x) = x^2 + 2$ تابع، بلکې په عمومي ډول

$F(x) = x^2 + C$، چې دا ټول مساوي مشتقونه $f(x) = 2x$ لري.

د پورته ښوونو پايله، چی څنګه سرې د يوه متمادي تابع $f(x)$ لومړنیتابع پيدا کوي، په لاندې ډول ده:

جمله:

$y = f(x)$ دې په اينتروال I کی متمادي تابع وي، نو د $a \in I$ لپاره

$F_a(x) = \int_a^x f(t)\, dt$ د $f(x)$، يوه لومړنیتابع ده، دټولو $c \in I$ لپاره .

(c) ketabton.com: The Digital Library

د f (x) هره بله لومړنی(بنسټيزه) تابع لاندې بڼه لري:

$$F(x)=F_a(x)+C,\ \ C\in R$$

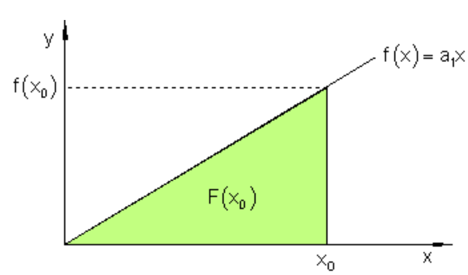
ځواب : ښايو چې Fa (x) د f (x) بنسټيز تابع ده. ددې د ښوولو لپاره ښايو چې د Fa (x)لپاره د پورته پېژند شرايط باور لري. د Fa (x) مشتق د $x\in I$ او $x\neq a$ لپاره په لاندې ډول ده.

$$\begin{aligned}F_a^{'}(x)&=\lim_{h\to 0}\frac{F_a(x+h)-F_a(x)}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot\left[\int_a^{x+h}f(t)dt-\int_a^{x}f(t)dt\right]\\&=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot\int_a^{x+h}f(t)dt\\&=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot h\cdot f(\xi),\ \ \xi\in[x,x+h]\end{aligned}$$

د ليميټ منځ ارزښت جملې له مخې داسې يوه ξ شته دی)
(د متماديت له امله $(f(\xi)\to f(x))$ = f(x)

سطحه او لومړنی تابع:

سطحې تابع ته ترمخ راوړنه:

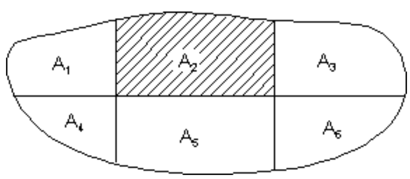
د تابع $f(x)=a_1x$ ګراف په کارتېزي وضعيه سيستم (پروت ولاړسيستم) په سرچينه کې يوه کرښه انځوروي. يو تابع غواړو پيدا کړو، چې د ګراف او x -محور ترمنځ، د x_0 په واکوالي يا تابعيت کې سطحه په ګوته کوي. دا چې دا جوړه شوې سطحه يو مثلث دی، نو حل يې د مثلث د سطحې فرمول په مرسته	

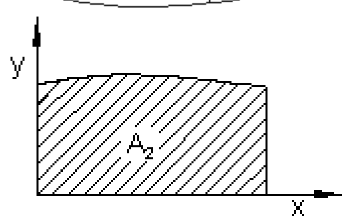
(c) ketabton.com: The Digital Library

ساده پیدا کیږي: $A=\frac{g\cdot h}{2}$ زموږ د مسألې لپاره متحوله داسې تغیروو: $A\to F(x_0);\ g\to x_0;\ h\to f(x_0)=a_1x_0$	$F(x_0)=\frac{x_0\cdot f(x_0)}{2}$ د $f(x_0)=a_1x_0$ سره په لاندې ډول دی: $F(x_0)=\frac{x_0\cdot a_1x_0}{2}=\frac{a_1}{2}x_0^2$

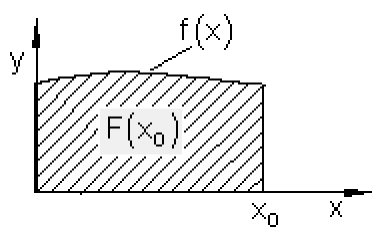
تابع $F(x_0)$ د ګراف او د x - محور ترمنځ سطحه د x_0 په واکوالي(تابعیت) کې تشریح کوي یا ښایي. موږ دا تابع د **سطحې تابع** بولو.

د سطحې پرابلم:

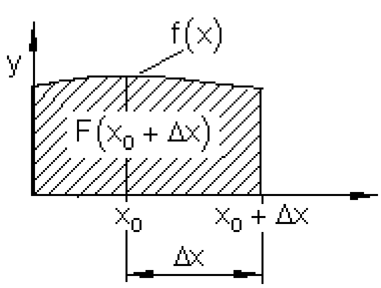




هره له کږوکږښو رابنده سطحه په پای ډېرو پلونو(قدمونو)، چې په هغې کې فقط یوه یوه کږه کرښه رامنځ ته کیږي.
نورې ټولې رابندونې سیده کرښیزې دي.
هره یوه د سطحې برخه(د بیلګې په توګه دلته $\mathbf{A_2}$) کېدی شي د وضعیه قیمتونو سیستم کې د یوې سطحې په څېر انځور شي، چې د کږې کرښې او پروت محور ترمنځ پرته وي.
که له کږوکرښو رابند ګراف د(f(x متمادي تابع وي، نو پوښتنه رامنځ ته کیږي، چې ایا یو تابع شته چې د افقي(پروت) محورارزښت x_0 په سطحه $F(x_0)$ تنظیم کړي، لکه په پیلبیلګه کې؟

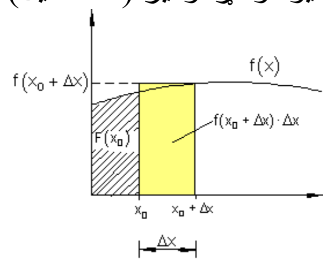


که داسې یو تابعF شتون ولري، او سطحه $F(x_0)$ چې د x_0 افقي محورارزښت تنظیم وي، نو باید د افقي(پروت) محور ارزښت $(x_0+\Delta x)$په سطحه باندې تنظیم کړای شي.

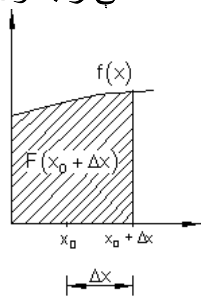


(c) ketabton.com: The Digital Library

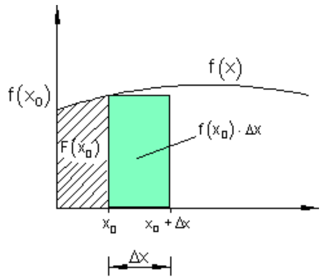
په يوه ولاړګوډيز (مستطيل) کې د سطحې رابندول:



د منحني لاندې په نخښه شوې سطحه د رښتوني سطحې څخه لويه ده



ريښتوني سطحه ده.



د منحني لاندې په نخښه شوې سطحه له ريښتوني سطحې څه کوچنی ده.

که د سطحې پټې (يا کوچنې مستطيلونه)هرڅومره کوچنې شي، په همغه اندازه د اصلي سطحې د مساحت څخه يې توپير کميږي.

دا اړودوالی د رياضياتو له مخې په لاندې توګه فرمول بندي کېدی شي:

$F(x_0)+f(x_0)\cdot\Delta x$	$F(x_0+\Delta x)$	$F(x_0)+f(x_0+\Delta x)\cdot\Delta x$

دا مو دی لاندې نابرابرونونويا نامساواتو ته راهڅوي

$$F(x_0)+f(x_0)\cdot\Delta x \le F(x_0+\Delta x) \le F(x_0)+f(x_0+\Delta x)\cdot\Delta x \quad |F(x_0)$$

$$\Leftrightarrow f(x_0)\cdot\Delta x \le F(x_0+\Delta x)-F(x_0) \le f(x_0+\Delta x)\cdot\Delta x \quad |:\Delta x$$

$$\Leftrightarrow f(x_0) \le \frac{F(x_0+\Delta x)-F(x_0)}{\Delta x} \le f(x_0+\Delta x)$$

ليميټ يې نيسو:

$$\lim_{\Delta x\to 0} f(x_0) \le \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \le \lim_{\Delta x\to 0} f(x_0+\Delta x)$$

$$f(x_0) \le F'(x_0) \le f(x_0)$$

$$f(x_0) = F'(x_0) = f(x_0)$$

نو لرو: $F'(x_0)=f(x_0)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا په دې معنا، چې د سطحې F(x) مشتق د کړې کرښې د تابع ارزښت $f(x_0)$ سره په x_0 ځای کې برابر دی.

موږ ليکو: $F'(x_0)=\frac{dF(x_0)}{dx}=f(x_0)$ يا $\boxed{F'(x)=\frac{dF(x)}{dx}=f(x)}$

که موږ بريالي شو، داسې يو تابع F(x) پيداکړو چې مشتق يې د رابندې کړې f(x)تابع وي، نو F(x) د سطحې تابع دی.
که موږ يو تابع د لومړني تابع څخه رابيل کړو، نو دا مشتق کول بولو. د يوې سطحې تابع پيدا کول په روښانه توګه ددې کړنلارې برعکس دی. سړی کړی شي فورمال ووايي:
د يوې سطحې مساحت تابع، چې پيداکړو، دا معنا لري چې ورګډول يا انتيګرالول يې شمېرو.
د يوه ساده توان تابع په بېلګه د احساس له مخې يوه لار پيداکېدی شي، چې دا څنګه ايتېګرالوي.

توانتابع : $f(x)=x^3 \Rightarrow f'(x)=3\cdot x^{3-1}=3x^2$
مشتق په دې معنا چې: اکسپوننت په يو کميږي او پوتنځتابع د زاړه پوتنځ سره ضربيږي.
انتيګرالونه (زياتونه ياورګډونه) په دې معنا چې: اکسپوننت په يو جګيږي اوپوتنځتابع په نوي اګسپوننت وېشل کيږي.
دا همدا اوس ازمايو:

توانتابع: $f(x)=3x^2 \Rightarrow F(x)=\frac{3}{2+1}x^{2+1}=\underline{\underline{x^3}}$

تابع F(x) د f(x) بنسټتابع (لومړنۍ تابع يا ساده تابع) بلل کيږي، ځکه چې f(x) له F(x) څخه لاس ته ارځي يا را پيداکيږي يا راځيږي.

تمرينونه:
– و ښايئ، چې د F او دG توابع د f تابع لومړنۍ تابع وې ده.

$a)\ F(x)=x^3+x+4 \quad , \quad G(x)=x^3+x+1$

$b)\ F(x)=(x-3)^2 \quad , \quad G(x)=x^2-6x+4$

$c)\ F(x)=\frac{x+1}{x+2} \quad , \quad G(x)=\frac{3x+5}{x+2}$

$d)\ F(x)=1+\sin x \quad , \quad G(x)=\sin x$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ناټاکلی انتيګرال

$$\int f\ (x\ )d\ x$$

فعاليتونه:

-- په پورته څيره کې $\int$ په څه مفهوم دی

-- په تير ه برخه کې مو $F(x)$ د $f(x)$ څه بللی وو او اوس به $F(x)=\int f(x)\,d\,x$ د لومړنۍ تابع سره څه توپير ولري؟

و به ګورو، چې نا ټاکلی انتيګرال د لومړنی تابع لپاره بل نوم دی.

که ديوې ورکړ شوې $f(x)$ تابع $F(x)$ لومړنی تابع، يعني $F(x)$ وپيژنو، نو د يوې ثابتې c د ور جمع کولوسره د $f(x)$ د ټولو لومړنيو توابعو سټ G لاسته راوړو(c په خوښه يو حقيقي عدد دئ).

موږ د $f(x)$ تابع د $F(x)$ لومړنۍ تابع ټاکنه يا اينتګرلونه هم بولو او ددې له پاره ليکو:

$$\frac{dF}{dx}=f\ (x\ )\quad\Leftrightarrow\quad dF\,(x\ )=f\ (x\ )dx\quad\Leftrightarrow\quad F\,(x\ )=\int dF\,(x\ )=\int f\ (x\ )dx$$

نو لرو : $F(x)=\int f(x)\,d\,x$

دا تر اوسه فورمال ليکندود وو. اوس دا ژوند ته رابولو.

موږ لومړنی توابع پلټو

بيلګه:

لومړنی تابع $F(x)$ دې پيدا شي، چې مشتق يې $f(x) = 2x$ دی.

قاعده داسې ده $F(x)=\int f(x)dx=\int 2x\,dx$

موږ ازمايو: $F(x)=x^2$ ځکه چې $F'(x)=2x=f(x)$

$F(x)=x^2+2$ ځکه چې $F'(x)=2x=f(x)$. په ټوليزه توګه باور لري:

$F(x)=x^2+C$ ځکه چې په هرحالت کې لرو: $F'(x)=2x=f(x)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دواړه توابع په ثابت غړي کې يو له بل توپير لري. دوی همغه مشتق لري، ځکه چې د مشتق سره هغه ثابت عدد له منځه ځي. له دې امله بايد دې خپلې لار ته تغير ورکړو.

قاعده(لار): باور لري: $\int f(x)dx = F(x) + C$

د لومړنيو توابعو سټ(ډېری): بيلګه ښايي، چې د تابع f(x) لپاره نه يواځې يو لومړنی تابع بلکې ناپای ډېر توابع شته، چې يواځې ثابت عدد کې يو له بل سره توپير لري، چې دا د f(x) د لومړنييو توابعو سټ بولو.

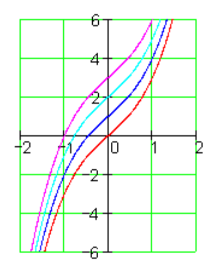
بيلګه: يو لومړنیتابع F(x) دې پيدا شي، چې د هغه مشتق $f(x) = 3x^2 + 2$ وي.

$F(x) = x^3 + 2x + C$ ، ځکه چې $F'(x) = 3x^2 + 2 = f(x)$

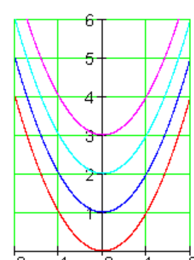
د ټولو لومړنيو توابعو ډېری دې د منحنيو ډلې په څېر انځور شي، چې فقط ثابتو عددونو کې يو له بل توپير لري.

ددې لپاره دې د ګرافونو لاندې دوه بېلګې وکتل شي.

$F(x) = x^3 + 2x + C$



$F(x) = x^2 + C$



تمرينونه:

د لاندې توابعو له پاره لومړني توابع پيدا کړئ او لاس ته راوړنې يې د مشتق له لارې و ازمايئ.

$a)\ f(x) = x^2$ $\quad b)\ f(x) = 2x^2$ $\quad c)\ f(x) = x$

$d)\ f(x) = -2x$ $\quad e)\ f(x) = \frac{1}{2}x^2$ $\quad f)\ f(x) = -\frac{1}{4}x$

$g)\ f(x) = x^3$ $\quad h)\ f(x) = 4x^3$ $\quad i)\ f(x) = 2$

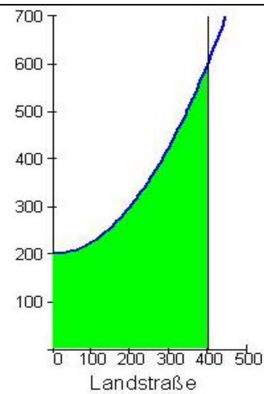
$j)\ f(x) = x + 1$ $\quad k)\ f(x) = x^2 + x - 3$ $\quad l)\ f(x) = x^n\ ;\ n \in N$

$m)\ f(x) = x^2$ $\quad n)\ f(x) = \frac{1}{3}x^3 + C$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ټاکلي انتيګرال شميرنه

ټاکلی انتيګرال همغه د ريمن انتيګرال دی، چې يوه د تابع د ګراف او x محور ترمنځ سطحه شميري.



ټاکلی انتيګرال:

که f يو حقيقي تابع وي، نو د ټاکل انتيګرال $\int_a^b f(x)dx$ (لوستل: د $f(x)$ انتيګرال د پولي(حد) a تر پولي(حد) b يا د a او b حدونو ترمنځ يا انتيګرال په $f(x)$ باندې له a تر b) لاندې يوه لوريزه سطحه پوهيږو د f ګراف لاندې د a او b تر منځ.

فعاليت:

اول: ووايئ چې په پورته انتيګرال کې $f(x)$ څه نوميږي؟

G دې په بند انتروال $a \le x \le b$ کې د $g(x)$ لومړنی انتيګرال وي، د $g(x)=\int_a^x f(t)dt$ سره، نو

باور لري: $\int_a^t f(t)dt = G(b)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا چې د دوه لومړنیو توابعو F او G تر منځ یو ثابت C توپیر شته، نو $G(x) = F(x) + C$ باور لري. د $x=b$ لپاره لاسته راوړو: $G(b) = F(b) + C$

دا چې $G(x) = \int_a^a f(t)dt = 0$ دی او $G(a)=F(a)+C$ دی، نو $C = -F(a)$ ده.

دا په دې معنا، چې $G(b) = F(b) - F(a)$ همداسې $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$.

د متحولې د نوم بدلون څخه وروسته لاس ته راوړو $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

له دې سره مو د مشتق او انتیګرال جمله لاس ته راوړه

یا دا وینا د مشتق - او انتیګرالشمېرنې بنسټیزه جمله بلل کیږي:

تعریف:

f په انټروال $a \le x \le b$ کې متمادي تابع ده او F د f لومړنی تابع ده، نو ټاکلی انتیګرال دی : $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$

د $F(b) - F(a)$ لپاره زیات وخت $[F(x)]_a^b$ لیکو. په دې توګه دی

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b$$

له دې سره مو د ټاکي انتیګرال شمېرنه په لومړني انتیګرال بېرته واړوله او د مشتق او انتیګرال تر منځ مو اړیکي رامخ ته کې.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګې:

$$a)\ \int_1^2 x^2dx = \left[\frac{x^3}{x}\right]_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

$$b)\ \int_2^4 \frac{1}{x^2}dx = \int_2^4 x^{-2}dx = \left[\frac{x^{-1}}{-1}\right]_2^4 = \left[-\frac{1}{x}\right]_2^4 = \frac{1}{4}$$

$$c)\ \int_1^3 \sqrt{x}\,dx = \int_1^3 x^{\frac{1}{2}}\,dx = \left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right] = \frac{2}{3}[\sqrt{x^3}\,]_1^3(\sqrt{3^3} - \sqrt{1^3}$$

$$= \frac{2}{3}(3\sqrt{3} - 1) = 2(\sqrt{3} - \frac{1}{3})$$

د ټاکلو انتیګرالونو لپاره لاندې جملې ربښتیا دي:

$$\int_a^b k \cdot f(x)dx = k \cdot \int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^b [f(x) + g(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx +$$

تکمیلیدونکي بنسټونه:

د F(b) – F(a) له امله د انتګرالوني ثابته c له منځه ځي. له دې امله کولي شو د انتیګرال ثابتي ټاکلو لپاره c=0 ولیکو.

بیلګه :

د ټاکلي انتیګرال $\int_1^3 x^2dx$ ارزښت و ټاکی. د توان قانون له مخې لومړنی تابع

یعنې $F(x) = \frac{x^3}{3} + C$ پیدا کړی

(c) ketabton.com: The Digital Library

ښوونه: موږ په دا لاندې ډول ښایو:

$$\int_1^3 x^2dx = \left[\frac{x^2}{3}+C\right]_1^3 = F(3)-F(1) = \frac{3^3}{3}+C-\left(\frac{1^3}{3}+C\right) = \frac{27}{3}+C-\frac{1}{3}-C$$

$$\int_1^3 x^2dx = \frac{26}{3}$$

اساسات تکمیل کننده:

از د لیل F(b) – F(a) ثابت C انتگرال گرفتن از بین میرود. ازین بابت میتوانیم براي تعین ثابت انتیگرال بنویسیم C =0 .

مثال :

قیمت انتیگرال معین $\int_{-\pi}^{+0,5\pi} \cos x dx$ را تعیین نمایید.

ثبوت: ما قرار زیل ثبوت میکنیم:

$$\int_{-\pi}^{+0.5\pi} \cos x\, dx = [\sin x]_{-\pi}^{0.5\pi} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin(-\pi) = 1 - 0 = 1$$

یادونه : دا چې په دې برخه کې یواځې د ټاکلي انتیګرال ارزښت غوښتل شوي دی او نه د یوې منحني لاندې سطحه، نو باید نه دی چې صفرځایونه په پام کې ونیول شي.

عوره یادونه: دادې په یاد وي، چې ناټاکلی انتیګرال تابع ده او ټاکلی انتیګرال یو عدد.

تمرینونه:

د لاندې ټاکلو انتیګرالونو ارزښتونه وشمیرئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$a)\ \int_0^3 4dx \qquad b)\ \int_{-3}^{-1} xdx \qquad c)\ \int_1^e \frac{1}{x}dx$$

$$d)\ \int_1^e (2+\frac{1}{x})dx \qquad e)\ \int_{-1}^{0} e^x dx \qquad f)\ \int_0^{\pi} \sin x\, dx$$

$$i)\ \int_{\frac{1}{6}\pi}^{\frac{1}{4}\pi} \frac{1}{\cos^2 x}dx \qquad j)\ \int_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{1}{3}\pi} \frac{1}{\sin^2 x}dx \qquad k)\ \int_{-2}^{2} x^3 dx$$

$$l)\ \int_2^6 (1+x)dx \qquad m)\ \int_1^2 (x^2 - x^5)dx \qquad n)\ \int_{-2}^{0}\left(\frac{x^3}{4}+\frac{x^2}{3}\right)dx$$

د ناټاکلي انتیګرال څخه و ټاکلي انتیګرال ته

ترمخ راوړنه یا وړاندراوړنه

موږ ولیدل، چې څنګه یو تابع f(x) ته لومړنی تابع F(x) منځ ته راوړی شو، نو ناپای ډېر لومړني توابع شته دی، چې فقط د یوې ورجمع کوونکي ثابتي کې یو له بل توپیر لري.

فعالیت :

-- د $\int f(x)dx$ او $\int_a^b f(x)dx$ تر منځ توپیر باندې فکر وکړئ؟

-- د $\int f(x)dx$ او $\int_a^b f(x)dx$ پایله څه ده ؟

- دا توپیر یې د یوې بیلګې په بنسټ روښانه کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه:

لرو: تابع $f(x)=3x^2+2$ او د دې د لومړنیو توابعو سټ $f(x)=x^3+2x+C$

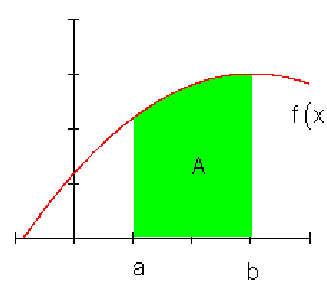
پیژند : د ټولو لومړنیو توابعو سټ و یوې تابع f(x) ته ،،ناټاکلی انتیګرال ،، بلل کیږي او ددې له پاره لیکو: $\int f(x)dx=F(x)+C$

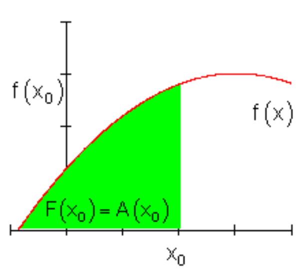
د مشتق- او انتیګرالشمیرنې ترمنځ اړیکې کېدی شي د لاندې جملې له لارې لاس ته راشي.

جمله(قضیه) : د ناټاکلی انتیګرالشمیرنه د مشتقشمیرنې برعکس انځوروي

$$\frac{d[f(x)]+C}{dx}=[F(x)+C]'=f(x)$$

د تابع د ګراف لاندې او د انتروال [a ; b] تر منځ سطحه دې و ټاکل شي. زموږ په دې پرابلم موږ تر اوسه لاس ته راوړې زده کړې کاروو.

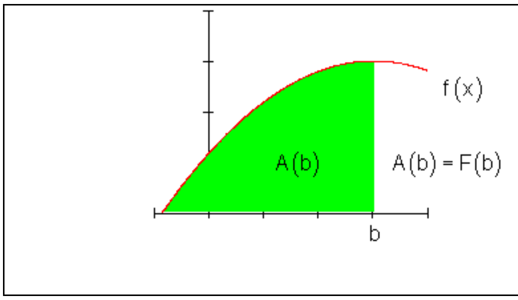


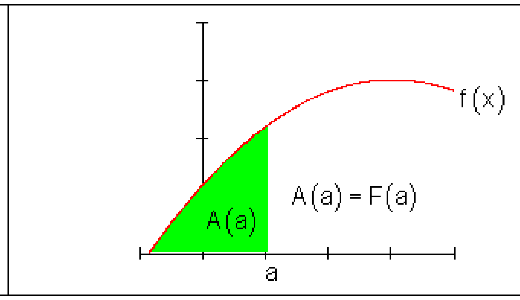


د یوې سطحې تابع شتون مو فکر دې لاندې پوهنې (زده کړې) ته لاربنوده وي:
د یوې سطحې، چې د یوې په پام کې نیولې f(x) تابع ګراف لاندې ده تر x_0 ځای پورې

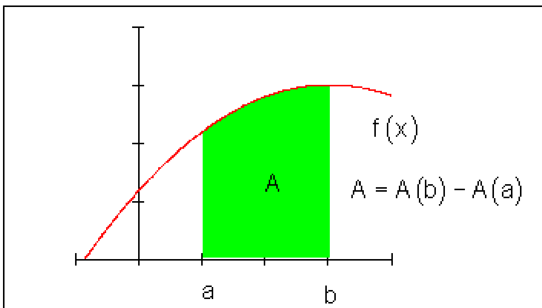
(c) ketabton.com: The Digital Library

او يوې $F'(x)$ تابع، چې د $F(x)$ تابع مشتق د x_0 ځاي د f تابع د تابع ارزښت سره د x_0 په ځاي کې برابر وي، ترمنځ اړيکې شته دی، يعني





د انټروال [a,b] حدونو ترمنځ سطحې پيداکول د تابع د ګراف سطحو د کمښت څخه په ځاي (A(b)) b او سطحې په (A(a)) a ځاي کې .، يعني $A= A(b) – A(a)$ په همدې توګه $F= F(b) – F(a)$ لاس ته راځي.



په انټروال [a,b] کې د تابعګراف لاندې سطحه د لومړنيو توابعو تفريق دی:

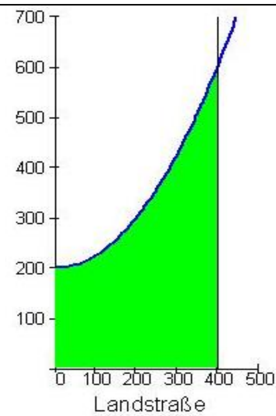
$$A = F(b) - F(a) := \int_a^b F(x)dx$$

دا انټيګرال ټاکلی انټيګرال هم بلل کيږي.

جمله :
دا تر اوسه لاس ته راوړو معلوماتو په بنسټ کړی شو، چې په پيل بېلګه کې راوړې د چمن سطحه وشمېرو.

ثابته له تفريق سره لرې کيږي. په عمل کې د دې مسآلې د حل لپاره يوه بله لار ګتوره راوستلې يا ګټوره بنوولې:

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$A=\int_0^{400}\left(\frac{1}{400}x^2+200\right)dx=\frac{1}{1200}x^3+200\cdot x\Big|_0^{400}$$

$$=\frac{1}{1200}\cdot 400^3+200\cdot 400\underline{\left[\frac{1}{1200}0^3+200\cdot 0\right]}$$

$$=\frac{1}{1200}\cdot 400^3+200\cdot 400=\underline{\underline{133333.\bar{3}}}$$

تمرینونه: لاندې ټاکلي انتیګرالونه وشمېرئ.

$$\int_1^3 x\,dx\ ,\ \int_1^3 (x^2-1)dx\ ,\ \int_{-2}^{2} 4dx\ ,\ \int_3^4 dx\ ,$$

$$\int_0^4 (2x-5)dx\ ,\ \int_{-\sqrt{8}}^{\sqrt{8}}\left(\frac{1}{2}x^2-4\right)dx$$

د انتیګرالونې قاعدې

د ناټاکلي ایتیګرال انتیګرالونې قاعدې: په لاندې اینتیګریشن قاعدوکي د اینتیګریشن ثابته باندې صرف نظر کیږيدلته مساوات تر یوې ورجمع شوې ثابتې C پورې مساوات دی ، په دې معنا چې دمساواتو تر منځ یواځې یوه ثابته کیدی شي زیاته یا کمه وي. دا قاعده کیدی شي چی په ټاکلې انتیګرال کې ښوولې جملی سره سم ټاکلي ایتیګرال ته نقل شي یعني په ټاکلي ایتیګرال استعمال شي . دا قاعدې کیدی شي چی د تیرو درسونو سره سم د دواړو خواو د مشتق نیولو سره وښول شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله :

د یوې ثابتي سره ضرب : که تابع (f (x په یوه اینتروال کی متمادي وي ، نو لاندې باور لري:

$$\int a\cdot f\,(x)\,dx = a\int f\,(x)\,dx\,, \qquad a\in R$$

جمله: د جمعي (تفریق) قاعده که $f_1(x)$ او $f_2(x)$ په یوه ایتروال کی نه پرېکېدونکي وي ، نو باور لري

$$\int (f_1(x)\pm f_2(x))dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx$$

بیلګې:

لاندې ایتیګرالونه کیدی شي چی د مخ ته تېرو جملو په استعمالیدو او ساده ځیره بدلون بیرته په بنستیزو اینتیګرالونو بدلګړای شي

$$a)\quad \int \frac{dx}{3x^4} = \frac{1}{3}\int x^{-4}dx = \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)x^{-3} + C = -\frac{1}{9x^3} + C,$$

$$b)\quad \int 3x^2 + 4x - 1)\,dx = 3\int x^2dx + 4\int xdx - \int dx = 3\cdot\frac{1}{3}x^3 + 4\cdot\frac{1}{2}x^2 - x + C$$
$$= x^3 + 2x^2 - x + C,$$

$$c)\quad \int \frac{2x^3 - 3x}{\sqrt{x}}dx = 2\int \frac{x^3}{\sqrt{x}}\,dx - 3\int \frac{x}{\sqrt{x}}\,dx = 2\int x^{\frac{5}{2}}dx - 3\int x^{\frac{1}{2}}dx$$
$$= 2\cdot\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}} - 3\cdot\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C = \frac{4}{7}x^3\cdot\sqrt{x} - 2x\cdot\sqrt{x} + C$$

تمرینونه: د لاندې توابعو انتیګرال ونیسئ:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$a)\quad \int \frac{2x^3-3x}{\sqrt{x}}dx \quad , \quad b)\int_1^2 \frac{\sqrt{x}-1}{x}dx$$

د اکسپوننشل توابعو انتیگرالونه

بنسټ :

د طبیعي اکسپوننشل تابع $f(x)=e^x$ لپاره لرو:

د ټولیز اکسپوننشل تابع $\int e^x dx = e^x + C \quad (a\in IR^+, a\neq 1)$ لپاره لرو:

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

بیلګه : دا ناټاکلی اکسپوننشل تابع $\int 2^{x-3}dx$ غواړو پیداکړو

بڼه بدون:د توان قانون سره سم لرو $2^{x-3}=\frac{2^x}{2^3}=\frac{1}{8}2^x$

د فاکتوروني قانون سره سم لرو: $\int \frac{1}{8}2^x dx = \frac{1}{8}\int 2^x dx$

انتیګرال یې ونیسئ: $\frac{1}{8}\int 2^x dx = \frac{1}{8}\cdot\frac{2^x}{\ln 2}+c = \frac{2^x}{8\cdot \ln 2}+c = \frac{2^{x-3}}{\ln 2}+c$

تمرینونه:

لاندې انتیګرالونه وشمیرئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

$a)\ \int 3^{x+1}dx$ $b)\ \int 2^{-x}dx$ $c)\ \int a^{x+b}dx$

$d)\ \int \frac{1}{a^x}dx$ $e)\ \int 2^x \cdot 3^x dx$ $f)\ \int \frac{2^x}{3^x}dx$

$i)\ \int \frac{4^{x+3}}{2^x}dx$ $j)\ \int \frac{5^x+3^x}{2^x}dx$ $k)\ \int (1+2^x)dx$

د لوګاریتمي توابعو انتیګرالونه

بنسټ: د طبیعي لوګاریتم تابع $f(x)=\ln x (x\in IR^+)$ لپاره $\int \ln xdx = x\cdot\ln x - x + c$ دی .

د ټولیز لوګاریتم تابع $f(x)=\log_a x\ ,a\in IR^+, a\neq 1)$

لپاره $\int \log_a xdx = \frac{x\cdot\ln x - x}{\ln a}+c$ دی.

بیلګه :

ناټاکلی انتیګرال $\int \ln 3xdx$ غواړو پیدا کړو:

بڼه بدلون او د فاکتور قاعدې استعمال:

$$\int \ln 3xdx = \int (\ln 3 + \ln x)dx = \int \ln 3xdx \div \int \ln xdx = x\cdot\ln 3 + x\cdot\ln x - x + c$$

$$\int \ln 3xdx = x\cdot(\ln 3 + \ln x - 1) + c$$

تمرینونه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا لاندې ناټاکلي انتېګرالونه پيداکړئ

$a)\ \int \ln 2x^3 dx$ $\qquad$ $b)\ \int \ln \sqrt{x} dx$

$c)\ \int \log \frac{x}{2} dx$ $\qquad$ $d)\ \int 3\log \frac{1}{x} dx$

بنسټيز اينتيګرالونه په يوه جدول کې

د اينتيګرالولو او مشتق نيول د اړيکو په بنسټ کيدی شي چی د بنسټيزو اينتيګرالونو يو جدول ترتيب شي. دا په مشتق جدول کی راوړل شوو بنسټيزو توابعوبرعکس څرګنديږي.

Nr.	$f(x)$	$f(x) = \int f(x)dx$	نيونه يا فرضيه
1	x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$	$n \in Z \setminus \{-1\}$
2	$\frac{1}{x}$	$\ln\|x\| + C$	$x \neq 0$
3	x^a	$\frac{1}{a+1}x^{a+1} + C$	$a \in R \setminus \{-1\},\ x > 0$
4	a^x	$\frac{1}{\ln a}a^x + C$	$a > 0,\ a \neq 1$
5	e^x	$e^x + C$	
6	$\sin x$	$-\cos x + C$	

(c) ketabton.com: The Digital Library

7	$\cos x$	$\sin x + C$	
8	$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\cot x + C$	$x \neq n \cdot \pi, \quad n \in Z$

بیلګي :

د جدول او تیرو جملو څخه په ګټه لاندې اینتیګرالونه په لاندي ساده ډول په بنسټیز توابعو بدلیدلی شي .

a) $\int \frac{1}{x^5} dx = \int x^{-5} dx = -\frac{1}{4} x^{-4} + C$,................................1,

b) $\int \frac{\sqrt{x}}{x} dx = \int \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x} dx = \int x^{-\frac{1}{2}} dx = 2x^{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{x} + C \quad (x > 0)$, ...3,

c) $\int \sqrt[3]{x \cdot \sqrt{x}} dx = \int \left(x \cdot x^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{3}} dx = \int x^{\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3}} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + C \quad (x > 0)$, ...3,

d) $\int \frac{\sin 2x}{2\sin x} dx = \int \frac{2\sin x \cos x}{2\sin x} dx = \int \cos x \, dx = \sin x + C$, ...(4,21) 6,

e) $\int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C \quad (x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi)$, (4,11) 9,

f) $\int (1 + \cot^2 x) \, dx = \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\int \cot x + C \quad (x \neq n\pi)$ (4,12) 8,

g) $\int \frac{(1+x)(1-x)}{x - x^3} dx = \int \frac{1-x^2}{x(1-x^2)} dx = \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C \quad (x \neq \pm 1, \, x \neq 0)$, $Nr.2$,

h) $\int_{-1}^{0} e^x dx = e^x \Big|_{-1}^{0} = e^0 - e^{-1} = 1 - \frac{1}{2}$, ...5

(c) ketabton.com: The Digital Library

د بدلون قانون Substitutionlaw

د ناټاکلې انتيګرال حل د بدلون له لارې(ننوتنه راځي)

$$\int f(x)dx = \int (x^2+4x-5)^n dx$$

فعاليت:

- د $\int (x^2-x)dx$ انتيګرال ونيسى
- د $\int (x^2+5x)^3 dx$ انتيګرال نيولو کې فکر وکړئ او که وتونېدی انتيګرال يې ونيسى.

تراوسه پورې مو فقط انتيګرالونه او جملې حل کړې، چې د لومړنيو توابعو په انتيګرال اړول کېدل. له دې لاس ته راغلو لومړنيو انتېګرالونو د نورو انتېګرالولو حل جملې لاس ته راځي. د لومړنۍ انتېګرالونې سيده استعمال تل ساده نه دی، لکه چې په لاندې کې به وليدل شي.

جمله :

د ،،بدلون (قاعده)،، (Substitution لاتين :د يوه ارزښت په ځاي د همغه ارزښت بله لويه ايښوول (لنډ: بدلون) د فرضيو لاندې چې u = g (x) متمادي او مشتقوړدی او y = f (u) متمادي، نو باور لري:

$$\int f[g(x)]g'(x)dx = \int f[f(u)]du$$

حل : د ښي اړخ مشتق د تيرو درسونو په بنسټ په لاندې ډول دی:

$$\frac{d}{dx}\int f(u)\,du = \frac{d}{du}\int f(u)\,du \cdot \frac{du}{dx} = f(u)\cdot u' = f[g(x)]\cdot g'(x),$$

دا د کيڼ اړخ د مشتق سره سر خوري. قاعده د ضرب انتيګراليدو لپاره مساعده ده، په کوم کی چی يو فاکتور زنځيري تابع [f [g (x) وي او دا بل فاکتور (ضريب) يی د دننه تابع مشتق g ' (x) وي. سرې د دننه تابع لپاره په دې توګه متحولې بدلوي يا

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځاي په ځاي کويک: $u = g(x)$ مشتق جوړوي په

همدې ډول $du = g'(x)\,dx$

۲۲۶ د بدلون قانون

د بريالي انتيګراليدو وروسته بدلون بيرته راګرځول کيږي.

بيلګه a :

لرو : $I = \int 2\cos(2x-1)dx$. د دې اتنيګرال وشمپيرئ.

بدلون يا په ځای کونه: $2x-1=u$

مشتق $2 = du/dx$ همداسی $2dx = du$

$$I = \int \cos u\, du = \sin u + C = \sin(2x-1) + C$$

بيلګه b : لرو $I = \int 3\cos(2x+1)dx$

بدلوو : , $2x = u-1$ مشتق $2= du / dx$ همداسی $dx = (1/2)\, du$

$$I = \int 3\cos u \cdot \frac{1}{2}du = \frac{3}{2}\int \cos u\, du = \frac{3}{2}\sin(2x-1) + C$$

ومولیدل چی ځنځيري تابع د لايني دننه تابع سره د بدلونو قاعدې سره تل اينتيګرال کيدی شي، ځکه چی د لايني تابع مشتق ثابت ده او ثابت فاکتور د تيری جملی سره سم د اينتيګرال تر مخ (موخه کيږ لور ده) ليکل کيږي.

بيلګه:

لرو $I = \sqrt{-3x+5}\;dx$

بدلون: $-3x+5=u$

(c) ketabton.com: The Digital Library

را بیلیدنه: $-3 = du/dx \Leftrightarrow dx = -1/3 \cdot du$

$$I = \int \sqrt{u} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) du = -\frac{1}{3}\int u^{\frac{1}{2}} du = -\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot u^{\frac{3}{2}} + C = -\frac{2}{9} \cdot \sqrt{(-3x+5)^3} + C.$$

$$b)\quad I = \int \frac{1}{2} e^{-2x-3} dx.$$

$$-2x - 3 = u, \qquad -2 = \frac{du}{dx} \qquad dx = -\frac{1}{2} du,$$

$$I = \int \frac{1}{2} e^{u} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) du = -\frac{1}{4}\int e^{u} du = -\frac{1}{4} e^{u} + C = -\frac{1}{4} e^{-2x-3} + C.$$

$$c)\quad I = \int \frac{2dx}{x+2}.$$

$$x + 2 = u, \qquad 1 = \frac{du}{dx} \qquad dx = du$$

$$I = \int \frac{2du}{u} = 2\int \frac{du}{u} = 2\ln|u| + C = 2\ln|x+2| + C.$$

توابع، چې بې د بدلون له لارې حل کيږي لکه لاندې بلګه:
بیلګه: عواړو د $f(x) = e^{x}$ مشتق بیدا کړو. دا مشتق په ساده ډول پیدا کولي شو، یعنې لرو:

$$f(x) = e^{x} \Rightarrow F(x) = \int f(x) dx = \int e^{x} dx = e^{x} + C$$

ګورو، چې $F'(x) = e^{x} = f(x)$ دی.

که ولرو: $f(x) = e^{2x}$ او د پورته په څېر لاړ شو، نو لاس ته به ترې راشي:

$$f(x) = e^{2x} \Rightarrow F(x) = \int f(x) dx = \int e^{2x} dx \neq e^{2x} + C$$

$F'(x) = 2e^{2x} \neq f(x)$ **دی، که** $F(x) = e^{2x} + C$ **وي**

په داسې حالتونو کې د بدلون قاعده مرسته کوي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه:
د $f(x)=e^{2x}$ تابع انتیګرال ونیسی

۲۲۸ د بدلون قانون

$$f(x)=e^{2x} \Rightarrow F(x)=\int f(x)dx=\int e^{2x}dx=?$$

بدلون : $u(x)=2x=u$

جوړ کړئ: $u'(x)=\frac{du}{dx}=2 \Rightarrow dx=\frac{du}{2}$

$$\int f(x)dx=\int e^{u}\frac{du}{2}=\frac{1}{2}\int e^{u}du=\frac{1}{2}e^{u}+C$$

د بدلون برعکس: $\frac{1}{2}e^{u}+C=\frac{1}{2}e^{2x}+C$

نو لرو: $F(x)\int(x)dx=\int e^{2x}dx=\frac{1}{2}e^{2x}+C$

ازمايښت: $F(x)=\frac{1}{2}e^{2x}+C \Rightarrow F'(x)=\frac{1}{2}e^{2x}\cdot 2=e^{2x}=f(x)$

بیلګه :
وښایی چې باور لري. $f(x)=(x+1)^2 \Rightarrow F(x)=\int f(x)dx=\int(x+1)^2dx$.

بدلون $u(x)=x+1=u$

جوړ کړی

$$u'(x)=\frac{du}{dx}=1 \Rightarrow dx=\frac{du}{1}$$

$$\int f(x)dx=\int u^2\frac{du}{1}=\int u^2du=\frac{u^3}{3}+C$$

بیرته بدلون: $\frac{u^3}{3}+C=\frac{(x+1)^3}{3}+C$

نو: $\int(x)dx=\int(x+1)^2dx=\frac{(x+1)^2}{3}+C$

بیلګه :

(c) ketabton.com: The Digital Library

و ښايي چې باور لري: $f(x)=(3x+6)^3 \Rightarrow F(x)=\int f(x)dx=\int(3x+6)^3dx$
بدلون: $u(x)=3x+6=u$
جوړوو: $u'(x)=\dfrac{du}{dx}=3 \Rightarrow dx=\dfrac{du}{3}$
$\int f(x)dx=\int u^3\dfrac{du}{3}=\dfrac{1}{3}\int u^3du=\dfrac{u^4}{12}+C$
بېرته بدلون: $\dfrac{u^4}{12}(3x+6)^4+C$
نو لرو: $\int(x)dx=\int(3x+6)^3dx=\dfrac{1}{12}(3x+6)^4+C$

تمرينونه: د $f(x)=x\cdot\ln(x^2)$ تابع انتيګرال وشميرئ.

د ټاکلو انتيګرالونو حل د بدلون له لارې

$$\int_3^8(x^2+4x-5)^n dx$$

فعاليت:

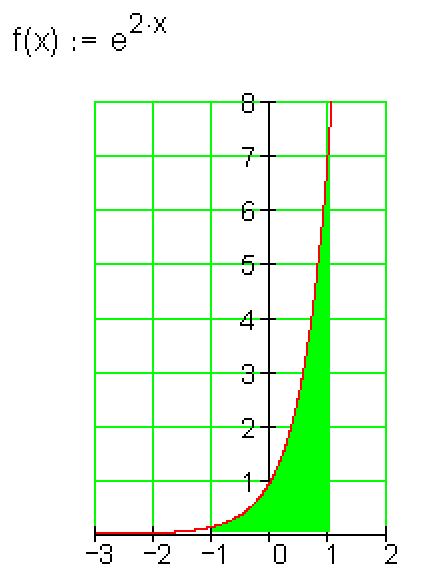
- د $\int_a^b(x^2-x)dx$ انتيګرال ونيسی

- د $\int_1^5(x^2+5x)^3dx$ انتيګرال نيولو کې فکر وکړئ او که وتوانېدی انتيګرال يې ونيسی.

ټاکلي انتيګرالونه هم د بدلون له لارې حل کيږي.

بېلګه : **وښاياست:** $f(x)=e^{2x} \Rightarrow F(x)=\int_{-1}^{1}e^{2x}dx$ د انتيګرال حل د بدلون له لارې:	

(c) ketabton.com: The Digital Library



۱ – بدلون $u(x) = 2x$

۲ – د dx په ځای کيږدی

$$u'(x) = \frac{du}{dx} = 2 \quad \Rightarrow dx = \frac{1}{2}du$$

۳ – د پولو بدلون

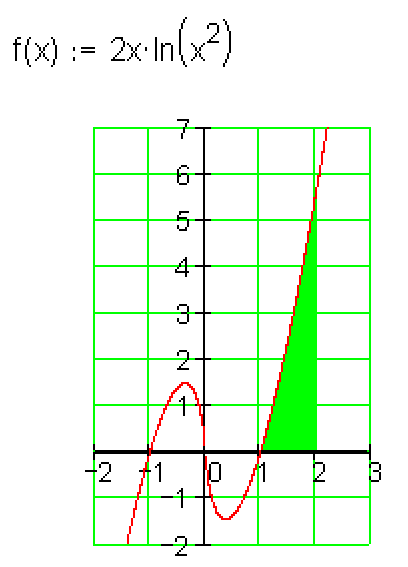
- لاندې پوله $u(-1) = -2$

- پورته پوله

۴ - په انتيګرال کې ځا په ځای کړی

$$\frac{1}{2}\int_{-2}^{2} e^u du = \frac{1}{2}\left[e^u\right]_{-2}^{2} = \frac{1}{2}\left[e^2 - e^{-2}\right] = \underline{\underline{3.627}}$$

بيلګه :



$$f(x) = 2x \cdot \ln(x^2) \quad \Rightarrow F(x) = \int_1^2 2x \cdot \ln(x^2)dx$$

د انتيګرال حل د بدلون له لارې

۱ – بدلون $u(x) = x^2$

۲ – د ځای په ځای کونه

$$u'(x) = \frac{du}{dx} = 2x \quad \Rightarrow dx = \frac{1}{2x}du$$

۳ – د پولې بدلون

- لاندې پوله $u(1) = 1$

- پورته پوله $u(2) = 4$

۴ – په انتيګرال کې ځای په ځای کړی

$$\int_1^4 2x \cdot \ln(u) \cdot \frac{1}{2x}du = \int_1^4 \ln(u)du = \left[u \cdot \ln(u) - u\right]_1^4$$

$$= \left[4 \cdot \ln(4) - 4\right] - \left[1 \cdot \ln(1) - 1\right] \approx \underline{\underline{2.545}}$$

تمرين: لاندې انتيګرالونه وشميرئ يا حل کړئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱ - $\int \frac{3}{4x+1}\,dx$ ۲ - $\int_0^2 \frac{4}{4-x}\,dx$

۳ - $\int \frac{2}{(1-x)^2}\,dx$ ۴ - $\int \frac{6}{(2x-1)^3}\,dx$

۵ - $\int_{-2}^{2} \frac{10}{(x-4)^5}\,dx$ ۶ - $\int_{-2}^{2} e^{1-x}\,dx$

۷ - $\int_0^4 e^{\frac{1}{2}x}\,dx$ ۸ — $\int_1^2 e^{4-2x}\,dx$

۹ - $\int_1^2 \frac{4}{e^{2x-4}}\,dx$ ۱۰ - $\int_0^2 \left(x-1-e^{-\frac{1}{2}x}\right)dx$

ټوټه انتيګرالونه

$$f(x).g(x) = x.\ln(x^2)$$

ټوټه انتيګرالونه، چې ضرب انتيګرالونه هم بلل کيږي، په انتيګرالشميرنه کې د لومړنيو توابعو ټاکلو يا شميرلو لپاره امکان دی. دا کيدی شي د مشتقشميرنې د برعکسکونې په څير وګڼل شي.

فعاليت:

- څه بايد وشي، چې دا پورته په ننوتنه کې تابع انتيګرال نيونه شونې شي؟

___ ايا دا پورته ننوتنه کې راغلې بوښتنه دا تر اوسه ورسره بلدې لارې يعنې د (بنې) بدلون له لارې حل دی؟

د ټوټه انتيګرالونې له پاره لاندې قانون کاروي، چې د متمادي (نه پرېکيدونکي) توابعو f او g له پاره باور لري.:

$$\int_a^b f(x)\cdot g'(x)\,\mathrm{d}x = [f(x)\cdot g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)\cdot g(x)\,\mathrm{d}x.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا قانون ټیک هلته ګټور دی، که د f مشتقکونی سره یو ساده تابع منح ته راځي.

پیل

د ضرب قانون (د ضرب مشتقنیونې) څخه لرو:

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$u' \cdot v = (u \cdot v)' - u \cdot v'$$

له دې څخه لاس ته راځي:

$$\int u' \cdot v = \int (u \cdot v)' - \int u \cdot v'$$

$$\int u' \cdot v = u \cdot v - \int u \cdot v'$$

په دې پسې د ټاکلي انتیګرال لپاره باور لري:

$$\int_a^b f(x) \cdot g'(x) \, \mathrm{d}x = f(b) \cdot g(b) - f(a) \cdot g(a) - \int_a^b f'(x) \cdot g(x) \, \mathrm{d}x$$

یا همدغسې، لکه په زیاتو ریاضي کتابونو کې چې پیداکیږي.

$$\int_a^b f(x) \cdot g'(x) \, \mathrm{d}x = [f(x) \cdot g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x) \cdot g(x) \, \mathrm{d}x.$$

د دې مخ ته حدونو لپاره ګټور دی، چې لومړی ځان په ناټاکلي انتیګرال محدود کړو، چې دا نا اړینو حدونو څخه چې لید مو رابندوي، ازاد یو.

بیلګه:

د بیلګې په توګه لاندی انتیګرال شمیرو.

$$\int x \cdot \ln(x) \, \mathrm{d}x$$

یو ساده انتیګرالړ تابع $g'(x)$ او همداسی یو ساده مشتقوړ تابع $f(x)$ لټوو. نیسو چې $f(x) = \ln(x)$ او $g'(x) = x$ ، ځکه چې د ln(x) انتیګرالونه نوې ln(x) راکوي. اوس د $f(x)$ مشتق نیسو او انتیګرالوو، نو لرو:

$$f'(x) = \frac{1}{x} \quad \text{او} \quad g(x) = \frac{x^2}{2}.$$

له دې څخه اوس دالاندې فرمول لاس ته راځي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int x \cdot \ln(x)\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} \cdot \ln(x) - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} \cdot \ln(x) - \frac{x^2}{4}$$

بديل ليکبنه:
اوس دی u اوv په خوبنه توابع وي.U او V دې د u اوV لومړني توابع وي ، او همداسې دې u' او v' دu او v مشتقونه وي.
u تابع ده، چې د مشتق نيولو له پاره لومړيتوب لري، v تابع ده چې د انتيګرالونې له پاره لومړيتوپ لري. نو باورلري:

$$\int_a^b u(x) \cdot v(x)\,\mathrm{d}x = u(b) \cdot V(b) - u(a) \cdot V(a) - \int_a^b u'(x) \cdot V(x)\,\mathrm{d}x$$

$$= [u(x) \cdot V(x)]_a^b - \int_a^b u'(x) \cdot V(x)\,\mathrm{d}x$$

د ټوټه انتيګرالونې لار(طريقه)
د ټوټه انتيګرالونې ګټور استعمال له پاره مختلف معياري چلول شته.

بيلګه :
کله کله کېيدی شي ګټور وي، جی د مساوات بنی لور ته ټوته انتيګرال د څو واره انتيګرالونې وروسته بيرته راوګرځي، چې د په ورته بڼه د اصلي يا پخواني کيڼ لور انتيګرال سره يوځای کولی شي.

$$\int \sin(x) \cdot \cos(x)\,\mathrm{d}x$$

که کيږدو $f(x) = \cos(x)$ او $g'(x) = \sin(x)$ ، **نو ترې لرو:**

$$f'(x) = -\sin(x) \text{ او } g(x) = -\cos(x)$$

او لاس ته ترې راځي

$$\int \sin(x) \cdot \cos(x)\,\mathrm{d}x = [-\cos^2(x)] - \int \sin(x) \cdot \cos(x)\,\mathrm{d}x.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که دواړو لورو ته وتون انتيګرال ورزيات کړو، نو راکوي:

$$2\int \sin(x)\cdot\cos(x)\,\mathrm{d}x = -\cos^2(x)$$

که دواړه لورې په 2 ووېشل شي، نو بالاخره لاس ته ترې راځي:

$$\int \sin(x).\cos(x)dx = -\frac{1}{2}\cos^2(x)+C$$

بيلګه ۲ :

د ځنو انتيګرالونو سره داسې لاس ته راوړنه لرو، چې: که د g'(x) له پاره يو ترم وټاکو چې په انتيګرالونې کې هيڅ يا کو تغير خوري، لکه د بيلګې په توګه اکسپوننشل تابع او يا مثلثاتي توابع. نو کيدی شي دا بل ترم ،،له منځه يووړل شي،،.

$$\int e^x\cdot(2-x^2)\,\mathrm{d}x$$

که هر ځل g'(x) = ex کيږدو او د f(x) له پاره، **د انتيګرال لاندی ترم ، نو ترې لاس ته راځي:**

$$\begin{aligned}\int e^x\cdot(2-x^2)\,\mathrm{d}x &= [e^x\cdot(2-x^2)] - \int e^x\cdot(-2x)\,\mathrm{d}x\\ &= [e^x\cdot(2-x^2)] + [e^x\cdot 2x] - \int 2\cdot e^x\,\mathrm{d}x\\ &= [e^x\cdot(2-x^2)] + [e^x\cdot 2x] - [2\cdot e^x]\\ &= [e^x\cdot(2-x^2+2x-2)]\\ &= [e^x\cdot(2x-x^2)] + C\end{aligned}$$

بيلګه ۳ :

که تر انتيګرال لاندې فقط يو ترم ولرو، چې د هغه لومړنی تابع بې له جدول ارزښت ځخه پاي ته نه رسيږي(نه پايول کيږي)(نه ختميږي) کېدی شي کله کله د ورزياتونې له لارې(ناڅرګند شته) ضريب "1" ټوټه انتيګرال شي.

$$\int \ln(x)\,\mathrm{d}x = \int 1\cdot\ln(x)\,\mathrm{d}x = \int g'(x)\cdot\ln(x)\,\mathrm{d}x$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که $f(x) = \ln(x)$ او $g'(x) = 1$ کيږدو، نو لاس ته ترې راوړی شو

$$\begin{aligned}\int 1 \cdot \ln(x)\,\mathrm{d}x &= x \cdot \ln(x) - \int x \cdot \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\ &= x \cdot \ln(x) - \int 1\,\mathrm{d}x \\ &= x \cdot \ln(x) - x + C\end{aligned}$$
.

جمله :

مونږ د دې لاندې انتيګرال نيسو:

$$\int x\cos(x)\,dx$$

ږدو $u = x$ ، نو لرو : $du = dx$

ږدو $dv = \cos(x)\,dx$ ، نو $v = \sin(x)$ لرو

په لاندې توګه مخ ته ځو:

$$\begin{aligned}\int x\cos(x)\,dx &= \int u\,dv \\ &= uv - \int v\,du \\ &= x\sin(x) - \int \sin(x)\,dx \\ &= x\sin(x) + \cos(x) + C.\end{aligned}$$

C د انتيګرالونې يوه په خوښه ثابته ده

د ټوټه انتيګرالونې د استعمال سره د انتيګرالونو لکه $\int x^3 \sin(x)\,dx$ او $\int x^2 e^x\,dx$ کيده شي په همدې لار حل شي:

يوه په زړه پورې بېلګه دا لاندې ده :

$$\int e^x \cos(x)\,dx$$

که په پوره سختوالي ونيسو، نو په ورسره بلده لار اړين نه دی، چې دا دې حل ولري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا بيلګه د دوه واره ټوټه انتيګرالونې استعمال له لارې حل کولی شو.

لومړی : $u = \cos(x)$ داسې چې $du = -\sin(x)\,dx$

$dv = e^x\,dx$ داسې چې $v = e^x$ نو لرو :

$$\int e^x \cos(x)\,dx = e^x \cos(x) + \int e^x \sin(x)\,dx.$$

اوس ، ددې له پاره چې پاتې انتيګرال حل شي، نو د ټوټه انتيګرالونې قاعده بيا استعمالوو ، د دې لاندې سره :

$u = \sin(x);\ du = \cos(x)\,dx$

$v = e^x;\ dv = e^x\,dx$

نو لرو :

$$\int e^x \sin(x)\,dx = e^x \sin(x) - \int e^x \cos(x)\,dx$$

که دا سره يوځای کړو، نو لاس ته راځي:

$$\int e^x \cos(x)\,dx = e^x \cos(x) + e^x \sin(x) - \int e^x \cos(x)\,dx.$$

که فکر وکړو، نو پورته مساوات دواړو لورو ته همغه انتيګرال لرو(بې له مخ نخښې)، نو د ښي لور انتيګرال که کيڼ لور ته يوسو ، لاس ته ترې راځي:

$$2\int e^x \cos(x)\,dx = e^x(\sin(x) + \cos(x)) + C$$

$$\int e^x \cos(x)\,dx = \frac{e^x(\sin(x) + \cos(x))}{2} + C'$$

C د انتيګرالونې يوه په خوښه ثابته ده

(c) ketabton.com: The Digital Library

تمرینونه: دا لاندې انتیګرالونه وشمرئ.

اول: $I = \int x \cos x \, dx$ ، دویم: $I = \int x^2 \cdot e^x \, dx$

دریم: $I = \int \ln x \, dx$, څلورم $I = \int e^x \cdot \cos x \, dx$:

د ټوټه - ، یاراشنل کسرونو انتیګرال

د $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x}{x^3 + 4x^2 + 4x}$ تابع انتیګرال نیول

فعالیت:

-- د $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x}{x^3 + 4x^2 + 4x}$ انتیګرال نیول یعنې څه ؟

- د پورته تابع تعریف ورشو به نخښه کړئ.

د دې انتیګرال نیول تر واسه په ورسره بلده لار شونی دی، که څنګه؟

بیلګه :

$$\int [\frac{(7x-12)}{(x^2-6x+8)}]dx$$

په مخرج کې مربع تابع د خپل صفرځایونو 2- = x1 او 4- = x2 سره د کرښیزو توابعو په ضربیونو تجزیه کیږي:

$$x^2-6x+8 = (x-2)\ (x-4)$$

د ټوټه کسرونو ټوټه ونې له پاره لاندې توګه پیل کوو:

$$\int [\frac{(7x-12)}{(x^2-6x+8)}]dx = \frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{(x-4)}$$

د جمعې له پاره په اصلي مخرج ورغزیږي او لاس ته ترې راځي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{[Ax-4A + Bx-2B]}{[(x-2)(x-4)]} = \frac{[A(x-4) + B(x-2)]}{[(x-2)(x-4)]} = \frac{[(A+B)x -4A-2B]}{[(x-2)(x-4)]}$$

د ضریبونو د پرتلې ځخه لاس ته راځي، چې د x له مخه یعني کیڼ لور ته (A+B) افاده باید پرته وي
او (-4A-2B) ، چې ۱۲ - ورکوي (وتون مساوات وګورئ) : 7x-12 = (A+B)x (-4A-2B)

له دې ځخه لاندې مساواتسیستم لاس ته راځي:

7= A+ B

-12=-4A-2B

بدلون یې دA او B پسې : **A= (7-B)**

-12=-4(7-B)-2B

-12=-28 +4B -2B |+28

+16= 2B

B=8

A= **(7-8)= -1**

لیکلی شو :

$$\int [\frac{(7x-12)}{(x^2-6x+8)}]dx = \int [\frac{-1}{(x-2)}]dx + \int [\frac{8}{(x-4)}]dx$$

لومړني تابع جوړه کړئ: $f(x)=\frac{1}{x} \rightarrow F(x)=\ln x$. دا چې طبیعي لوګایتم فقط له مثبت اعدادو شمیرل کیږي، نو یوازې ارزښتونه نیسو.

$$\int [\frac{(7x-12)}{(x^2-6x+8)}]dx = \mathbf{-1 \ln |x-2| +8 \ln |x-4| +c}$$

نا اصلي ماتراشنل توابع باید لومړی په تول راشنل تابع او اصلي مات راشنل تابع توټه شي. دا د توټه کسرونو توټه کووني له لارې کیږي یا صورت نیسي.

بیلګه :

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int [\frac{(-5x+9)}{(x^2+x-6)}]dx$$

په مخرجکي مربع تابع په صفرځايونو **x1 = -2** او **x2 = +3** کې په کښيزو فاکتورونو تحزيه کيږي :

$$x^2+x-6 = (x-2)\ (x+3)$$

د ټوټه کسرونو ټوټه کوني له پاره اصلي مخرج غزوو او بيا يې ضربوو :

$$\int [\frac{(-5x+9)}{(x^2+x-6)}]dx = \frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{(x+3)}$$

د جمعي له پاره په اصلي مخرج غزيږي او بيا سره ضربيږي:

$$\frac{[A(x+3)\ +\ B(x-2)]}{[(x-2)(x+3)]} = \frac{[Ax+3A\ +\ Bx-2B]}{[(x-2)(x+3)]} = \frac{[(A+B)x\ +3A-2B]}{[(x-2)(x+3)]}$$

د ضريبونو پرتلې کونې له امله، چې د x ترمخه يعني کينې لور ته له (A+B) افادې ځخه بايد اوه لاس ته راشي او (+3A-2B) او يا ورته ۱۲ (وتونمساوات وګورئ) :

-5x+9 = (A+B)x (+3A-2B)

لاندې مساواتسيستم لاس ته راځي:

-5= A+ B

9= 3A-2B

د A او B پسې يې حل کړئ:

9= 3(-5-B)-2B

9=-15 -3B -2B |+15

24=-5B |:(-5)

<u>B=-4.8</u>

<u>A= (-5+4.8)= -0.2</u>

نو ليکلی شو :

$$\int [\frac{(-5x+9)}{(x^2+x-6)}]dx = \int [\frac{-0.2}{(x-2)}]dx + \int [\frac{-4.8}{(x+6)}]dx$$

لومړی تابع جوړ کړئ :

$$F(x) = \ln x \rightarrow f(x) = \frac{1}{2}$$

دا چې طبيعي لوګاريتم فقط د طبيعي اعدادو شميرل کيدی شي، نو فقط مطلقه ارزښتونه نيسو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int [\frac{(-5x+9)}{(x^2+x-6)}]dx = -0.2\ln|x-2| - 4.8\ln|x+3| + C$$

تمرينونه :

لاندې انتيګرالونه د ټوټه کسرونو ټوټه کونې له طريقې وشمېرئ

$a)\ \int \frac{x+2}{x^3-3x^2-x+3}$ $\quad b)\ \int \frac{x-2}{x^2-6x+13}$ $\quad c)\ \int \frac{x^6}{x^4+3x^2+2}$

ناپاي انتيګرال

تعريف : که په يوه ټاکلي انتيګرال کې لږ تر لږه يو حد د مثبت يا منفي ناپاي لور ته لاړشي يا د انتيګرال ساحه ناپاي ځاي ته و غزول شو، نو دلته د ناپاي انتيګرال څخه غږېږو. په يوه مناسب ډول ناپای انتيګرال د عادي انتګيګرال د حد په څير تعرفيږي. په دې توګه په زړه پورې پوهيدنې لاس ته راځي د بيلګې په توګه، چې څنګه د منفي توان د پوتنځ د ګراف لاندې ناپاي ته رسيدونکې په زړه پورې سطحې. نو باور لري

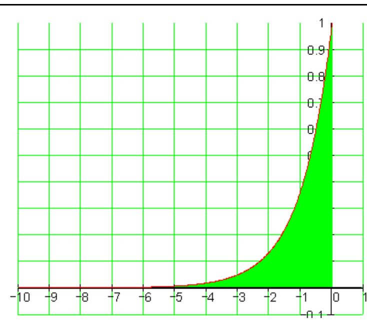
$$\int_0^1 x^{-\frac{1}{2}}dx = 2 \text{ او } \int_1^{\infty} x^{-2}dx = 1$$

هم او د دې معکوس انتيګارلونه

$\int_1^{\infty} x^{-1}dx$ **او**

$\int_0^1 x^{-1}dx$ **ناپاي ته ځي يا له ټولو حدونو اوړي**

يعنې د ناپای په لور ځي..



(c) ketabton.com: The Digital Library

د $f(x) = e^x$ ، ګراف او x-محور ترمنځ دې په انتروال $(-\infty ; 0]$ کې ټوله سطحه و شمیرل شي، یعنې

$$A = \int_{-\infty}^{0} f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{0} e^x\, dx$$

تر اوسه د یوه ټاکلي انتیګرال د پورته همداسې کښته(لاندې) پولې عددونه وو.
د انتیګرالونې ورشو یاا ساحه محدود وه.
په دې حالت کې یا اوس د انتېګرالولو ورشو محدوده نه ده،
داسې انتیګرال یو نامحدود انتیګرال بولو، د انتیګرالونی نامحدودې ورشو سره.
انتیګرالونه د دې لاندې بڼو څخه په یوې بڼې منځ ته راځي

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx \qquad \int_{-\infty}^{b} f(x)\, dx \qquad \int_{a}^{\infty} f(x)\, dx$$

د دې انتیګرال شمیرنې له پاره په لاندې توګه مخ ته ځو:

لومړی د یوه پای انتروال $[a ; b]$ له پاره انتیګرال $\int_{a}^{b} f(x)\, dx$ شمېرو، بیا پسې د ورته افادو $a \to -\infty$ یا $a \to \infty$ همداسې $b \to -\infty$. یا $b \to \infty$ له پاره پولې جوړوو.

فورمال دا په لاندې ډول بربښي:

$$\int_{a}^{\infty} f(x)\, dx = \lim_{b \to \infty} \int_{a}^{b} f(x)\, dx$$

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\, dx = \lim_{a \to -\infty} \int_{a}^{b} f(x)\, dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\, dx + \int_{c}^{\infty} f(x)\, dx = \lim_{a \to -\infty} \int_{a}^{x} f(x)\, dx + \lim_{b \to \infty} \int_{c}^{b} f(x)\, dx$$

زموږ د سطحې شمیرلو له پاره دا په لاندې ډول بربښي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) = e^x$$

$$A = \int_{-\infty}^{0} e^x\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0} e^x\,dx = \lim_{a\to-\infty}\left[e^x\right]_a^0$$

$$= \lim_{a\to-\infty}\left[e^0 - e^a\right] = \underbrace{\lim_{a\to-\infty} e^0}_{1} - \underbrace{\lim_{a\to-\infty} e^a}_{0} = \underline{\underline{1}}$$

بیلګه:

دا د y په محور هنداره شوې د e تابع دې د $f(x)=e^{-x}$ سره په انتروال $[0,\infty)$ کې د پورته سره برابره سطحه ولري.

$$A = \int_{0}^{\infty} e^{-x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_{0}^{b} e^{-x}\,dx$$

بدلون:

$$u(x) = -x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -1 \Rightarrow dx = \frac{du}{-1}$$

$$u(0) = 0\,;\,u(b) = -b$$

$$\lim_{b\to\infty}\int_{0}^{-b} e^u\,\frac{du}{-1} = -\lim_{b\to\infty}\int_{0}^{-b} e^u\,du = \lim_{b\to\infty}\int_{-b}^{0} e^u\,du$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left[e^u\right]_{-b}^{0} = \lim_{b\to\infty}\left[e^0 - e^{-b}\right]$$

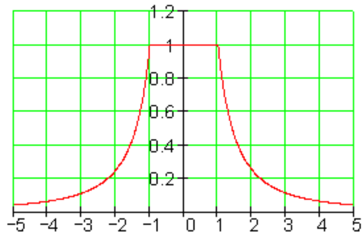
$$= \lim_{b\to\infty} e^0 - \lim_{b\to\infty} e^{-b} = 1 - 0 = \underline{\underline{1}}$$

بیلګه:

د یوه یوځاي ایښول شوې یا یو ځاي شوې تابع بیلګه لرو:

د $x<-1$ لپاراه د $1\ x \le 1-$ لپاره د $x > 1$ لپاره	$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} \\ 1 \quad f \\ \frac{1}{x^2} \end{cases}$ $A = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$

(c) ketabton.com: The Digital Library



د انتیګرال په برخو وېشنه یا ټوټه کونه:
لاندې د انتیګرالونو تمعه دې و شمیرل شي.

$$A=\int_{-\infty}^{-1}\frac{1}{x^2}\,dx+\int_{-1}^{1}dx+\int_{1}^{\infty}\frac{1}{x^2}\,dx$$

لومړنی اند یا تر مخه فکرکونه:
د تناظر دلایلو له مخې لرو :

$$\int_{-\infty}^{-1}\frac{1}{x^2}\,dx=\int_{1}^{\infty}\frac{1}{x^2}\,dx$$

داسې، چې دا انتیګرال باید فقط یوځل وشمیرل شي.

$$\int_{-1}^{1}dx=[x]_{-1}^{1}=[1]-[-1]=1+1=\underline{\underline{2}}$$

$$\int_{1}^{\infty}\frac{1}{x^2}\,dx=\lim_{b\to\infty}\int_{1}^{b}\frac{1}{x^2}\,dx=\lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_1^b=\underbrace{\lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{b}\right]}_{0}-\underbrace{\lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{1}\right]}_{-1}=0-(-1)=\underline{\underline{1}}$$

$$A=\underbrace{\int_{-\infty}^{-1}\frac{1}{x^2}\,dx}_{1}+\underbrace{\int_{-1}^{1}dx}_{2}+\underbrace{\int_{1}^{\infty}\frac{1}{x^2}\,dx}_{1}=1+2+1=\underline{\underline{4}}$$

تمرینونه:

١ -- د $f(x)=\frac{1}{(x-1)^2}$ تابع انتیګرال وشمیرئ، که د ناپای په لور لاړشي.

٢ – و څېرئ چې ایا لاندې ناټاکلي انتیګرالونه پوله ارزښت لري؟

a) $\int_{-\infty}^{0}e^x\,dx$

b) $\int_{0}^{\infty}\frac{x}{x^2+1}\,dx$

c) $\int_{1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}$

d) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{4x}{(x^2+2)^3}\,dx$

٣ – د کومو توانونو p لپاره دا نا ټاکلی انتیګرال $\int_1^\infty \frac{1}{x^p}dx$ پوله ارزښت لري.

٤ – لاندې انتیګرالونه د یوه انتیګرال پولې لپاره تعریف نه دي، و څېرئ، چې ایا دا

(c) ketabton.com: The Digital Library

ټاکلی انتیګرال په دې انتروال کې پوله ارزښت لري.

a) $f(x) = \frac{x^3+1}{x}$, $I=[0;1]$ b) $f(x) = \ln x$, $I=[0;1]$

c) $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$, $I=[1;2]$ d) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $I=[-1;1]$

e) $f(x) = \frac{x^2}{x^3-8}$, $I=[0;2]$ f) $f(x) = \frac{e^x}{1-e^x}$, $I=[0;1]$

ټولګه

د انتیګرال هندسي تعریف

لوریزه سطحه-د انتیګرال تعریف:که یوه f تابع ولرو، نو دx محور او تابع ترمنځ سطحې شمېرل د انتیګرال له لارې کیږي. په دې سطحه کې د x محور پورته لورې ته سطحه مثبته مخنښه لري او د x محور کښته لورې ته سطحه منفي مخنښخ لري.

تحلیلي تعریف:

تعریف: د f یوه تابع ورکړ شوې، چې په یوه انتروال [a,b] باندې تعریف دی، نو د aڅخه تر b پورې د تابع د انتیګرال څخه د x په محور د f د ګراف او د کرښې x=aاو x=b تر منځ یوه یوه لوریزه سطحه پوهیږو.

پېژند (تعریف) ٤ . ١ : لیمیټ

$$\lim_{x\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx = F;(\max\Delta x\to 0),........(4,3)$$

که په اینتروال [a , b] کی موجود وي، نو دا د f (x) ټاکلی اینتیګرال بولو، یا F- Riemann (د ریمن سطحه). دلته a د اینتیګراله ونې لاندې(کښته)پوله او د b

(c) ketabton.com: The Digital Library

ایتیګرالوني پورته پوله بلل کیږي او [a,b] د ایتیګرالوني اینټروال او(Integrand)) f (x اینټیګرالپدونکی) او x د اینټیګرالوني (Integrationsvariable) متحول بلل کیږي

جمله٤ . ۱ : که f (x) په [a , b] کې اینټیګرالوړ وي او $c \in [a,b]$ وي، نو باور لري:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

پیژند یا تعریف ٤ . ۲ : f (x) په یوه بند انټروال[a, b] کې اینټیګرالوړ دی، نو باور لري:

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

پیژند تعریف 3.2: تابع y = f (x) دې په یوه واز اینټروال I کې تعریف وي. هر یوه هلته موجوده مشتقوړ F (x) تابع چې F' (x) = f (x) شرایط پوره کړي، د f (x (بنستیز - ، ساده – یا لومړنی تابع بلل کیږي

ټاکلی انتیګرال:

که f یو حقیقي تابع وي، نو د ټاکل انتیګرال $\int_a^b f(x)dx$ (لوستل: د $f(x)$ انتیګرال د a تر b او په پولو یا حدونو یا انتیګرال په $f(x)$ باندې له a تر b) لاندې یوه لوریزه سطحه پوهیږو د a او b تر منځ او د f ګراف لاندې.

تعریف:

(c) ketabton.com: The Digital Library

f په انتروال $a \le x \le b$ کې متمادي تابع ده او F د f لومړنی تابع ده، نو ټاکلی انتيگرال دی :
$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)_a^b = F(b) - F(a).$$

د $F(b) - F(a)$ لپاره زيات وخت $[F(x)]_a^b$ ليکو. په دې توگه دی

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b$$

جمله:

د يوې ثابتي سره ضرب : که تابع $f(x)$ په يوه اينتروال کی متمادي وي ، نو لاندې باور لري:

$$\int a \cdot f(x)\,dx = a\int f(x)\,dx\,, \qquad a \in R$$

جمله :

د جمعي (تفريق) قاعده که $f1(x)$ او $f2(x)$ په يوه ايتروال کی نه پريکيدونکي وي ، نو باور لري

$$\int (f_1(x) \pm f_2(x))dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx$$

جمله :

د ،،بدلون (قاعده)،، (Substitution لاتين :د يوه ارزښت په ځاي د همغه ارزښت بله لويه اينوول ، لنډ: بدلون) د نيونو لاندې چی $u = g(x)$ متمادي اوو مشتقوړدی او $y = f(u)$ متمادي، نو باور لري:

$$\int f[g(x)]g'(x)dx = \int f[f(u)]du$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ضربونو انتيګرالونه
که د دوه توابعو د ضرب انتيګرال د ورسره بلدو متودونو يا لارو شميرو، نو زيات وخت دا ناشوني وي.

$$f(x) = x \cdot \ln(x^2) \Rightarrow F(x) = \int f(x)\,dx = \int \left(x \cdot \ln(x^2)\right) dx = ?$$

د ښېرکي تمرينونه:

١ - لاندې نااصلي پولينومونه دې د يوه ټول ګويا عدد پولينومونو او يوه اصلي پولينوم د جمعې په ښېر وليکل شي.

$$a)\ \frac{x^3+7x^2+9x-5}{x+5} \qquad b)\ \frac{x^4-3x^2+1}{x^2-2}$$

$$c)\ \frac{x^3-2x^2+x-5}{x^3+1} \qquad d)\ \frac{x^4-1}{x^3+x^2+x+1}$$

$$e)\ \frac{x^4+2x^3-6x^2-5x+3}{x-2} \qquad f)\ \frac{x^5-x^4+1}{x^2+2}$$

٢ - لاندر پولينومونه دد جمعې په ځېر وليکئ

$$a)\ \frac{2x^2+20x+12}{x^3+2x^2-5x-6} \qquad b)\ \frac{x^2+1}{x^3-x}$$

$$c)\ \frac{4x+10}{x^2+6x+8} \qquad d)\ \frac{-3x^2+19x-10}{x^3-2x^2-5x+6}$$

$$e)\ \frac{4x^2+6x-20}{x^3-4x} \qquad f)\ \frac{14}{x^2+20x+51}$$

٣ – د لاندې اصلي پولينومونو په ټوټه کسرونو ټوټه ونه وکاروئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$a)\ \dfrac{3x^2+5x+10}{x^3+2x^2-4x-8}$ $b)\ \dfrac{3x^2-18x+36}{x^3-6x^2+9x}$

$c)\ \dfrac{x^2+3x+4}{x^4-2x^2+1}$ $d)\ -\dfrac{x^2+13x+10}{x^3-5x^2}$

٤ ـ د لاندې اصلي پولینومونو په ټوټه کسرونو ټوټه ګونه ورکړئ.

$a)\ \dfrac{x^2+2x-12}{x^3+2x^2+6x+5}$ $b)\ \dfrac{4x^2-3x+8}{x^3-2x+4}$

$c)\ \dfrac{8x^2-16x+10}{x^3-4x^2+5x}$ $d)\ \dfrac{x}{x^3+2x^2+2x+1}$

٥ ـ د لاندې پولینوم کسرونو په ټوټه کسرونو ټوټه کونه ږرکړئ.

$a)\ \dfrac{x^3+7x^2+17x+17}{x^2+6x+8}$ $b)\ \dfrac{2x^4-8x^3+7x^2-3x+4}{x^2-4x+3}$

$c)\ \dfrac{2x^3+x^2}{x^3-1}$ $d)\ \dfrac{4x^3+16x^2-7x-49}{x^3+4x^2+x-6}$

٦ – و ښایئ، چې د F تابع د f تابع لومړنی تابع ده.

$a)\ f(x)=2x^2+4x-7 \quad , \quad f(x)=4x+4$

$b)\ F(x)=(x^2-x)^3 \quad , \quad f(x)=3\cdot(2x-1)\cdot(x^2-x)^2$

$c)\ F(x)=\sqrt{2x+1} \quad , \quad f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2x+1}}$

$d)\ F(x)=1+\sin x \quad , \quad f(x)=3x\cdot\cos 3x$

$e)\ F(x)=\dfrac{1}{3}x^3\cdot\ln x-\dfrac{4}{9}x^3 \quad , \quad f(x)=x^2\cdot(\ln x-1)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۷ - وښايئ، چې د F او G توابع د همغه f تابع لومړني توابع دي.

$a)\ F(x) = x^3 + x + 4 \quad , \quad G(x) = x^3 + x + 1$

$b)\ F(x) = (x-3)^2 \quad , \quad G(x) = x^2 - 6x + 4$

$c)\ F(x) = \frac{x+1}{x+2} \quad , \quad G(x) = \frac{3x+5}{x+2}$

$d)\ F(x) = 1 + \sin x \quad , \quad G(x) = \sin x$

۱۳ – لاندې ناټاکلي انتيګرالونه پيداکړئ او ټيکوالى يې و ازمايى.

$a)\ \int x^3 dx \qquad b)\ \int 7dx \qquad c)\ \int xdx \qquad d)\ \int (1-x^2)dx$

$e)\ \int (x+\frac{1}{x})dx \qquad f)\ \int (e^x + \cos x)dx \qquad g)\ \int \frac{1}{\sin^2 x}dx \qquad h)\ \int \frac{5}{\cos^2 x}dx$

$i)\ \int udx \qquad k)\ \int (2+e^x)dx \qquad l)\ \int (1+\ln x)dx \qquad m)\ \int (\sqrt{x} + \sin)\, dx$

۱٤ – د لاندې ټاکلو انتيګرالونو ارزښت وشميرئ

$a)\ \int_0^3 4dx \qquad b)\ \int_{-3}^{-1} xdx \qquad c)\ \int_1^e \frac{1}{x}dx$

$d)\ \int_1^e (2+\frac{1}{x})dx \qquad e)\ \int_{-1}^0 e^x dx \qquad f)\ \int_0^\pi \sin xdx$

$g)\ \int_{\frac{1}{6}\pi}^{\frac{1}{4}\pi} 4dx \qquad h)\ \int_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{1}{3}\pi} \frac{1}{\sin^2 x}dx \qquad i)\ \int_{-2}^2 x^3 dx$

$j)\ \int_2^6 (1+x)dx \qquad k)\ \int_1^2 (x^2 - x^5)dx \qquad l)\ 0\int_{-2}^2 (\frac{x^3}{4} + \frac{x^2}{3})dx$

۱٦ = د لاندې ټاکلو انتيګرالونو ارزښت وشميرئ او ارزښتونه پرتله کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$a)\ \int_{-3}^{1} 3dx und -\int_{-3}^{1} 3dx \qquad b)\ \int_{0}^{1}(1+e^{x})dx \ \wedge\ -\int_{0}^{1}(1+e^{x})dx$$

$$c)\ \int_{-\pi}^{0} \sin x dx \ \wedge\ -\int_{-\pi}^{0} \sin x dx$$

---

۱۷ – هر دوه انتیگرالونه د یوه انتیگرال سره انځور کړئ.

$$a)\ \int_{0}^{0.5\pi} \cos x dx + \int_{0.5\pi}^{\pi} \cos x dx \qquad b)\ \int_{-1}^{0}(x+e^{x})dx + \int_{0}^{1}(x+e^{x})dx$$

$$c)\ \int_{2}^{3} 3x^{2}dx + \int_{5}^{3} 3x^{2}dx \qquad d)\ \int_{-2}^{1}(2+x)dx - \int_{4}^{1}(2+x)dx$$

- د لاندې ټاکلو انتیگرالونو لپاره ارزښت تخمین کړئ.

$$a)\ \int_{-4}^{-2} e^{x+3} \qquad b)\ \int_{0}^{8}\sqrt{1+x}\,dx$$

$$c)\ \int_{3}^{5} 2^{4-x}dx \qquad d)\ \int_{0}^{0.5\pi}\sin^{2} x dx$$

۱۹ – د کوموx ارزښتونو لپاره لاندې انتیگرالونه ورکړشوي ارزښتونه لري؟

$$a)\ \int_{1}^{x} 5t^{4}dt\ ,\quad la(x)=31 \qquad b)\ \int_{0}^{x} e^{t}dt\ ,\quad la(x)=e-1$$

۲۰ - لاندې انتیگراند توابع ته د انتیگرال توابع وټاکئ.

$$a)\ f(x)=x^{2}\ ,\ a=3 \qquad b)\ f(x)=2+e^{x}\ ,\ a=0$$

$$c)\ f(x)\frac{1}{\cos^{2} x}\ ,\ a=0 \qquad d)\ f(x)=2\ ,\ a\in IR$$

۲۱ - د لومړني انتیگرال په استعمال سره لاندې انتیگرالونه وشمېرئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$d)\ \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}dx, \quad e)\ \int \sqrt{x\cdot\sqrt[3]{x}}\,dx, \quad f)\ \int (\sqrt[3]{x^4}+1)\ dx,$$

$$g)\ \int \sqrt[3]{x^{-3}}dx, \quad h)\ \int \frac{ax^2+bx+cx^{-1}}{x^4}dx, \quad i)\ \int 3\cdot 2^x dx,$$

$$j)\ \int \frac{1}{2\sin^2 x}dx, \quad k)\ \int \frac{1}{3+3x^2}dx, \quad l)\ \int \cos\varphi\cdot s\quad ds,$$

$$m)\ \int \frac{dt}{(2t-3)^{-2}}, \quad n)\ \int \sqrt{t\cdot\sqrt{t\cdot\sqrt{t}}}\,dt, \quad o)\ \int (1-u^2)^{-\frac{1}{2}}du.$$

۲۲ - د بیرته په بنسټیز اینتیګرال بدلون وروسته یي اینتیګرال ونیسئ:

$$a)\ \int \frac{x^3+2x^2+x}{x^2(1+x)^2}dx, \quad b)\ \int \frac{2\sin 2x}{3\cos x}dx, \quad c)\ \int \frac{7\cos 2x}{\cos^2 x-\sin^2 x}dx,$$

$$d)\ \int \sqrt{\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\cos^2 x}\ dx, \quad e)\ \int (-2-2\tan^2 x)dx, \quad f)\ \int \frac{2t^3-8t}{(t-2)(t+2)}dt.$$

۲۳-- لاندې ټاکلی اینتیګرالونه وشمیرئ:

$$a)\ \int_0^1 \frac{1}{2}e^x dx, \quad b)\ \int_\pi^{2\pi} \cos x\ dx, \quad c)\ 2\int_2^3 dt,$$

$$d)\ \int_0^\pi \cos\pi\sin x\ dx, \quad e)\ \int_0^1 \frac{4du}{1+u^2}, \quad f)\ \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x+1}{\sin^2 x}dx,$$

$$g)\ \int_{x_1}^{x_2} (2x-1)\,dx, \quad h)\ \int_0^8 \left(\sqrt[3]{x^2+2\sqrt{x}}\right)dx, \quad i)\ \int_{\ln 2}^{\ln 3} e\cdot e^t\ dt,$$

$$j)\ \int \frac{(u+1)^2}{\sqrt{u}}du, \quad k)\ \int_0^1 \frac{x^n}{x^{1-n}}dx, \quad l)\ \int_a^b a^x\ dx.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲٤- د بدلون یا سیتیچیوشن قاعدې استعمال له لارې يي اينتيگرال وشميري:

$$a)\ \int \sqrt[3]{2x-7}\,dx,\quad b)\ \int \frac{dx}{-x+1},\quad c)\ \int 2^{3x+6}\,dx,$$

$$d)\ \int \sin\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}\right)dx,\ e)\ \int \frac{dx}{1+(x+1)^2},\ f)\ \int \frac{4}{\cos^2(4t-5)}dt,$$

$$g)\ \int x\cdot\sqrt[3]{x^2-7}\,dx,\quad h)\ \int \frac{3xdx}{-x^2+1},\quad i)\ \int x\cdot e^{2x^2+3}\,dx,$$

$$a)\ \int \frac{dx}{1+4x^2},\quad b)\ \int \frac{dx}{2+4x^2},\quad c)\ \int \frac{dx}{3+5x^2}.$$

$$d)\ \int \frac{dx}{\sqrt{1-3x^2}},\quad e)\ \int \frac{dx}{\sqrt{36-9x^2}},\quad f)\ \int \frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}},$$

$$g)\ \int \frac{dx}{x^2-10x+34},\quad h)\ \int \frac{dx}{3x^2-6x+30},\quad i)\ \int \frac{dx}{\sqrt{-3+4x-x^2}}.$$

۲۵- د تر زيرنيوني فورمبدلون وروسته او په بنستيز اينتيگرال 10 او 11 د بدلون له لارې يي اينتيگرال وشيمرئ

۲٦- لاندې ټاکلی اينتيگرالونه وشميري:

$$a)\ \int_{-1}^{1} \frac{dx}{(4x-1)^3},\quad b)\ \int_{-1}^{0} e^{3x}dx,\quad c)\ \int_{0}^{2} 2^{2x+1}dx,$$

$$d)\ \int_{-1}^{1} \frac{4x^2}{(3+2x^3)^5},\quad e)\ \int_{e}^{e^x} \frac{1}{x}\ln\times dx,\quad f)\ \int_{2}^{4} \frac{e^t}{1+e^t}dt,$$

$$g)\ \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{\sin x}\cos x\ dx,\quad h)\ \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{2+8x^2},\quad i)\ \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \sin x\cdot\cos x\ dx.$$

۲۷-- لاندې ټوټه اينتيگرالونه اينتيگرال کړي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$a)\ \int 0,2x \cdot \sin x\ dx, \qquad b)\ \int 4x^3 \cdot \ln x\ dx, \qquad c)\ \int \cos^2 x\ dx$$

$$d)\ \int \cos x \cdot \sin x\ dx \qquad e)\ \int x^2 \cdot \sin x\ dx \qquad f)\ \int x \cdot (\cos x + 1)\ dx$$

$$g)\ \int x^3 \cdot e^x\ dx, \qquad h)\ \int x^{\frac{1}{2}} \cdot \ln x\ dx,$$

د اینتیگرال شمیرنی استعمال

د سطحومساحت، چې د f(x) دگراف او x محور ترمنځ پرتې وي.

په ځلورم څپرکي کی وویل شو چی ټاکلی اینتیګرال $\int_a^b f(x)dx = f(b) - f(a)$ د سطحې مساحتA ښايي ، چي له منحنيy=f(x)، د x- محور y=(0) او د کرښیx=a اوx=b له خوا رابند وي. موږ له دې څخه مخ ته تللي يو چي y=f(x) د اینتیګرال اینتروال په دننه کی دx-محور پورته لور ته ځي، خو دا کېدی شي د محور کښته لور ته هم لاړ شي..

فعالیت:

--د یوې په خوښه تابع د منحني یا کرښې او د x محور ترمنځ او یا د دوه توابعو د سطحې شمیرلو لپاره وړاندیزونه وکړئ.

- دا هم په پام کې د شمرلو لپاره په پام کې ونیسئ، که منحني یا د تابه کرښه د x د محور لاندې لور ته پراته وي.

- یوه په خوښه تابع ورکړئ، د تابع رسم وکاږئ او د تابع انتیګرال د x محور په ټاکلو پولو کې وشمېرئ.

- یوه په خوښه تابع ولیکئ، چې د انتروال په دننه کې د x محور کښته لور ته ځي. د تابع رسم و کاږئ او دا تابع به کومه محنخښه ولري؟ دا چې سطحه تل مثبت ده، نو د تابع د محنښې په ورکولو کې دا بیا وڅېړئ، چې ولې؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

یادونه: که موږ د سطحې مساحت شمېرلو کې هغه عدد ولیکو، نو د هغې سره دې دا په پام کې ونیول شي، چې د سطحې واحد(یوون) ور سره شته دی. که دا ورسره لیکل شوی نه وي، خو باید تل په پام کې وي.
دا پورته فعالیتونه مو دې لاندې بېلګو ته رابولي:

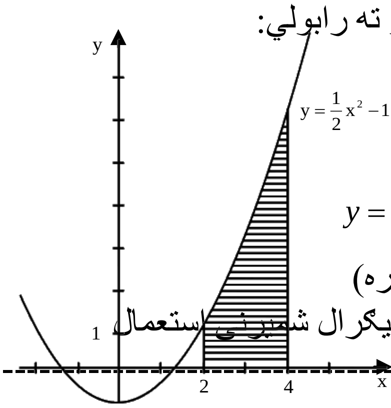


Bild 21,3

بېلګه ۵ . ۱ :
د سطحې مساحت د

$$y = \frac{1}{2}x^2 - 1 \;,\; y = 0 \;,\; x_1 = 2 \;,\; x_2 = 4$$

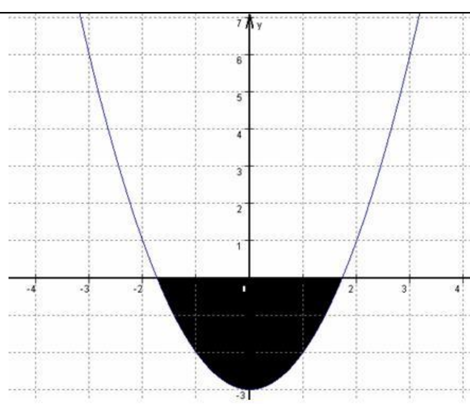
ترمنځ په لاندې ډول دی(مخامخ څېره)

$$A = \int_2^4 (\frac{1}{2}x^2 - 1)dx = (\frac{1}{6}x^3 - x)\Big|_2^4$$

$$= \frac{1}{6}.64 - 4 - \frac{1}{6}.8 + 2$$

$$= \frac{22}{3}$$

که د تابع y=f(x) سطحې د منحني تلنه دx- محور لاندې لور ته وي، نودا ټاکلی اینتیګرال به منفي وي. ددې لپاره چې د سطحې تل مثبت مساحت لاس ته راوړو، نو د اینتیګرال مطلقه ارزښت نیسو یعني منفي اینتیګرال.

بdلګه ۵ . ۲ : د f(x)=x²-3 ګراف د x محور سره یوه سطحه رابندوي.د ګراف او x محور ترمنځ د ټولې سطحې مساحت وشمېرئ.	

(c) ketabton.com: The Digital Library

تګلار:	

۱ - د دي لپاره چې دا مسئله راته ښه روښانه شوي وي، نو دا پورته رسم کاږو.

۲ - د دي لپاره چې د انتیګرال حدونه لاس ته اروړی شو، باید صفرځایونه وشمېرو.

$$0 = x^2 - 3$$

$$x = \pm\sqrt{3}$$

۳ – اوس د سطحي د مساحت شمېرلو لپاره اړونده انتیګرال لیکو.

د تناظر پر بنسټ لومړی له 0 څخه تر $\sqrt{3}$ پوري انتیګرال شمېرو او نتیجه یې له 2 سره ضربوو، نو لرو:

$$\int_0^{\sqrt{3}} (x^2-3)dx = \int_0^{\sqrt{3}} (x^2)dx - 3\cdot\int_0^{\sqrt{3}} 1dx = \frac{1}{3}x^3 \Big|_0^{\sqrt{3}} - 3.x \Big|_0^{\sqrt{3}} = \sqrt{3}-3\cdot\sqrt{3} = |-2\cdot\sqrt{3}|$$

$$A = 2\cdot\sqrt{3} + 2\cdot\sqrt{3} = 4\cdot\sqrt{3}$$

بیلګه ۵ ، ۲:

د سطحي مساحت د $x_2 = 2$ ، $x_1 = -1$ ، $y = 0$ ، $y = \frac{1}{2}x^3 - 5$ ترمنځ دی: (لاندي ځېره)

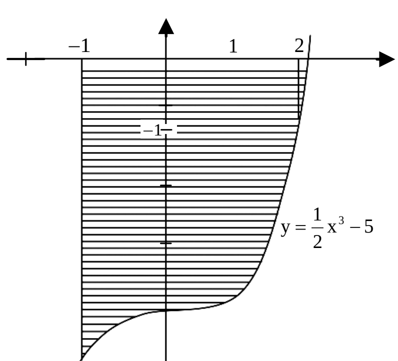


Bild 21,4

$$A = \left|\int_{-1}^{2} \frac{1}{2}x^3 - 5)dx\right|$$

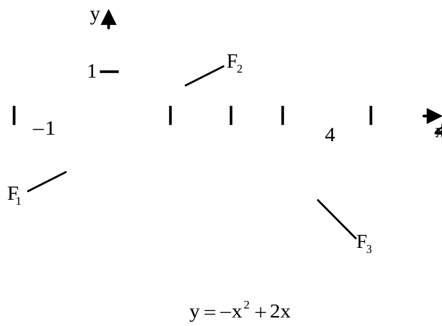
$$= -\int_{-1}^{2} \frac{1}{2}x^3 - 5)dx$$

$$= (-\frac{1}{8}x^4 + 5x)\Big|_{-1}^{2}$$

$$= (-2 + 10 + 1/8 + 5) = \frac{105}{8}$$

بیلګه ۵ . ۳:

(c) ketabton.com: The Digital Library



د لاندې پولو $x_1=-1$ تر
$x_2=4$ اودمنحني $y=-x^2+2x$ او $y=0$
ترمنځ د x- محور پورته او کښته پرته سطحه
(په مخامخ ډېره کي نښانه شوې ده) دې
وشميرل شي

حل : د تابع $y=-x^2+2x$, د $x1=0$ د
صفرځايونو $x_1=0$ او $x_2=2$ تر منځ پرته

غوښتونکي سطحه د x-محور پورته، نوره
کښته پرته ده. له دې امله لرو

$$A=-F_1+F_2-F_3$$

$$=\int_{-1}^{0}(-x^2+2x)dx+\int_{0}^{2}(-x^2+2x)dx-\int_{2}^{4}(-x^2+2x)dx$$

$$=-\left(-\frac{1}{3}x^3+x^2\right)\Bigg|_{-1}^{0}\left(-\frac{1}{3}x^3+x^2\right)\Bigg|_{0}^{2}-\left(-\frac{1}{3}x^3+x^2\right)\Bigg|_{2}^{4}=\frac{28}{3}$$

د لاندې پولو $x=-1$ تر $x=4$ او د کږې $y=-x^2+2x$

او $y=0$ ترمنځ (د x − محور پورته او کښته)

تمرينونه

: - په ورکړ شوي انتروال کي د ګراف او x محور ترمنځ سطحه وشميرئ.

$a)\ f(x)=x-2 \qquad , \quad x\in[-2;3]$

$b)\ f(x)=x^2-x-x \qquad , \quad x\in[1;5]$

$c)\ f(x)=x^2-8x+12 \qquad , \quad x\in[0;8]$

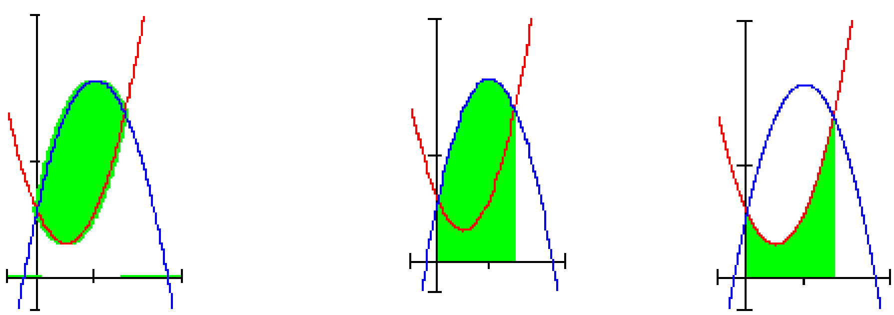
له دوه ګرافونو څخه رابندې سطحې د مساحت شميرنه

(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیت:

- که داسې یو ډنډ ولرو، نو فکر وکړئ، چې د دې ډنډ مساحت ځنګه وشمیرو؟

په ځنو پوښتنو کې د سطحې مساحت شمیرل کیږي، چې د دوه توابعو ګرافونو ترمنځ پرته ده. دا ډول د سطحې مساحت کېدی شي د ټاکلو اینتګرالونو د کمښت له لارې و شمېرل شي. که دواړه ګرافونه د x-محور پورته لور ته پراته وي،نو د لاندې شیما ځخه مخ ته ځو :



A $\quad A_1 \quad A_2$

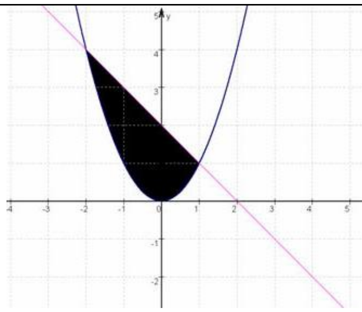
$$A = A_1 - A_2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلگه ۵ . ۵ :

د $f(x) = x^2$ او $g(x) = -x+2$ دوه توابعو ترمنځ رابند د سطحي مساحت غواړو وشمېرو:

د تگلارې لار: دلته هم یو شکل یا گراف رسموو، چې دا حالت راته روښانه شي.



---

۲ - د دې لپاره چې انتیگرال وشمېرو، د گرافونو دقاطع ټکي ټاکو.

$$x^2 = -x+2$$

$$x^2+x-2= 0$$

$$x_{(1,2)} = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}$$

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = -2$$

P;q - فرمول

۳ – په ساده توگه لیدل کیږي. $\int_{x_1}^{x_2} g(x)\,dx - \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx$

پس باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$A=\int_{1}^{-2}(-x+2)dx-\int_{1}^{-2}x^{2}dx=$$
$$-1\cdot\left(\frac{2^{2}}{2}-\frac{1}{2}\right)-6-\left(\frac{(-2)^{3}}{3}\right)-\frac{1}{3}$$
$$=-1,5-6++=-4.5$$
$$A=4,5$$

جمله :

که د ټولو x لپاره ، د a<x<b سره f(x)>g(x) وي، دا په دې معنا چې د f گراف د a او b تر منځ دg پورته لور ته ځغلي, نو د دواړو گرافونو په انتروال کې رابندې سطحې مساحت لپاره بارور لري.

$$A=\int_{a}^{b}(f(x)-g(x))\,dx$$

بیلگه ۵ . ٦ :

د توابعو f(x) = x² -2x +2 او g(x) = -x²+4x +2 گرافونو ترمنځ سطحې مساحت غواړو پیداکړو.
د دواړو گرافونو د x–ارزښتونو غوښتکي(د تقاطع ټکي) د اینتیگرال حدونه جوړوي.

د غوښتکو د x - کواوردیناتو ټاکل:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 -2x+2 = -x^2 +4x + 2$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 6x =0 \quad \Leftrightarrow$$

$x_1=0$ او $x_2=3$ د اینتبکرال لیمیتونه یا پولې دي.

د اینتکرال جوړونه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

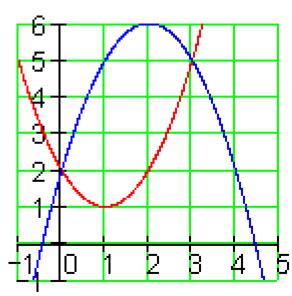
$$\int_0^3 f(x)dx = \int_0^3 (x^2 - 2x + 2)dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 2x\right]_0^3 = \frac{1}{3}\cdot 27 - 9 + 2\cdot 3 = 9 - 9 + 6 = \underline{\underline{6}}$$

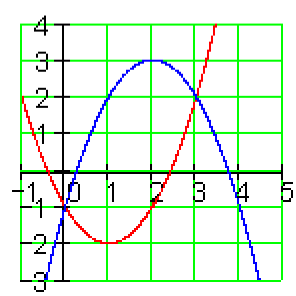
$$\int_0^3 g(x)dx = \int_0^3 (-x^2 + 4x + 2)dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 2x\right]_0^3 = -\frac{1}{3}\cdot 27 + 2\cdot 9 + 2\cdot 3 =$$
$$= -9 + 18 + 6 = \underline{\underline{15}}$$

دا چې د دوه ګرافونو ترمنځ سطحه باید تل مثبت وي،نو له لوي ارزښت څخه کووچنی ارزښت باید کم شي.

$$A = \int_0^3 g(x)dx - \int_0^3 f(x)dx = 15 - 6 = \underline{\underline{9}}$$

لکه چې پوهیږو، د یوې سطحې مخنخښنه ددې په واک کې ده، چې ایا سطحه د **x** -محور پورته لور ته پرته ده او که کښته لور ته. موږ څېړو، چې ایا دا تاثیرات په پورتنی بیلګه کې پراته دي او که نه. موږ سطحه د **y** -محور په درې واحدونو(یوونونو) کښته لورته بیایو او سطحې نوې شمېرو.





که د لید له مخې قضاوت وکړو،نو د ټولو لاس ته راوړنه به برابره وي.

د x–ارزښت غوښتکي هم او له دې سره د انتیکرال حدونه بې تغیره پاتیږي.

$$g(x) = -x^2 + 4x - 1 \text{ و } f(x) = x^2 - 2x - 1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځای په ځای کونه:

$$A=\int_0^3 f(x)dx-\int_0^3 g(x)dx=\int_0^3 (f(x)-g(x))\,dx$$

د $f(x)-g(x)=2x^2-6x$ سره کیږي:

$$A=\int_0^3 (2x^2-3x^2)\,dx=\left[\frac{2}{3}x^3-3x^2\right]_0^3=\frac{2}{3}\cdot 27-3\cdot 9=18-27=\underline{\underline{-9}}$$

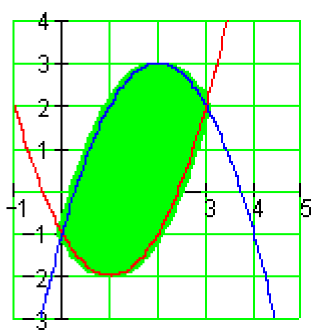
دا چې د دوه منحنیو ترمنځ سطحه فزیکي سطحه ښایي، باید لاس ته راوړنه یو مثبت عدد وي.

دا د مطلق ارزښت له لارې ترلاسه کوو.

$$A=\left|\int_0^3 (2x^2-6x)\,dx\right|=\left|\left[\frac{2}{3}x^3-3x^2\right]_0^3\right|=\left|\frac{2}{3}\cdot 27-3\cdot 9\right|=|18-27|=|-9|=\underline{\underline{9}}$$

د دې متود تولیزه ونه(عمومیت) :

د دوه ګرافونو ترمنځ سطحه:



که یوه سطحه د یوې پورته او یوې کښته منحني ښخه رابنده وي، چې تابع(x)f او تابع g(x) پورې اړه و لري، نو دا له دې رابنده سطحه په لاندې ډول شمېرل کیږي.

$$A=\left|\int_a^b [f(x)-g(x)]dx\right|$$

د انتیکرالوني حدونه a اوb دx – محور د

(c) ketabton.com: The Digital Library

دواړو ګرافونو د وضعیه قیمتونو غوښتکي دي،

د منحنیو $y=f_1(x)$ او $y=f_2(x)$

تر منځ پرتي سطحې مساحت په لاندې پولو کې
له $x=a$ تر $x=b$ پورې او $y=f_1(x)$ او $y=f_2(x)$

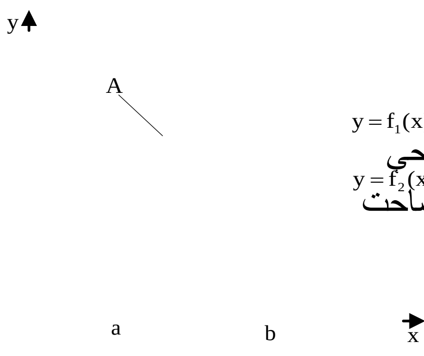


Bild 21,6

اینتیګرالوړاو $f_1(x)<f_2(x)$
په $[a,b]$ اینتروال کی (ش ۱ . ۶) داسی لاس
ته راوړل کیږي چی دتابع $y=f_2(x)$ لاندې سطحې
مساحت ښخه د $y=f_1(x)$ تابع لاندې سطحې مساحت
کم کړئ.

$$A=\int_a^b [f_2(x)-f_1(x)]dx$$

سرړی په ساده ډول خپل باور په دې راوستی شي چې ش ۲ . ۶ له دې خپلواک
چی $f_1(x)$ او $f_2(x)$ په اینتروال [a,b] کومه یوه مخنخښه ځان ته غوره کوي باوري دی.

بیلګه ۵ . ۷: د لاندې پارابولونو ترمنځ سطحه غواړو وشمیرو $y=x^2-1$ او $y=-x^2+1$)

حل : د ایتیګرال پولې(حدونه) د افقي(پراته) محور غوښتکي(د تقاطع ټکي) دي

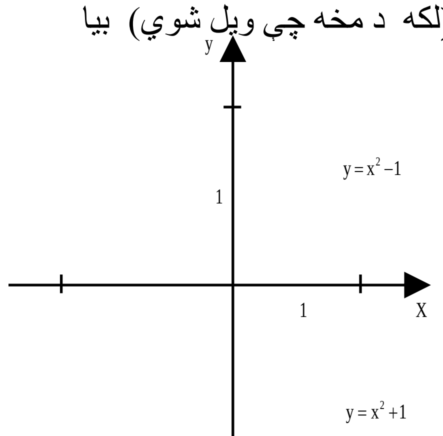
$x^2-1=-x^2+1$

$2x^2=2$

$x^2=1$ $\quad x_1-a=1\,,\ x_2=b=-1$

د اینتیګرلولو په اینتروال [1 , 1 -] کی لرو $-x^2+1>x^2-1$

(که چیرې په اینتروال [a,b] او په (۲ . ۱) کی $f2(x)>f1(x)$ په نظر کي ونه نیول
شي، نو د څرګند اینتیګرال به منفی شي او سرړی(لکه د مخه چې ویل شوي) بیا
داینتیګرال مطلقه ارزښت نیسي. له دې امله لرو:



$$A=\int_{-1}^{1}\left[-x^{2}+1-(x^{2}-1)\right]dx$$

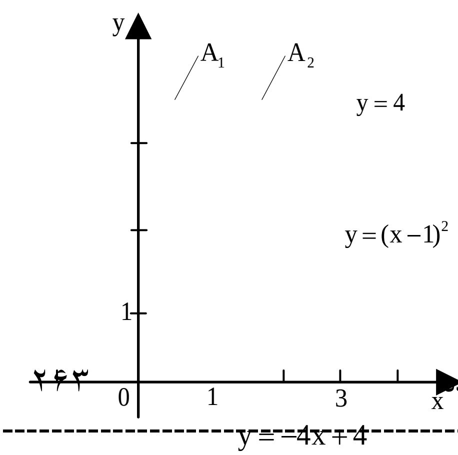
$$=\int_{-1}^{1}(-2x^{2}+2)\,dx$$

$$=(-\frac{2}{3}x^{3}+2x)\Big|_{-1}^{1}=\frac{8}{3}$$

بیلګه ۵ . ۸ :

د (ش. ۲ . ۸) سره سم د لاندې توابعو ترمنځ سطحه شمیرل کیږي.

$y=(x-1)^2, y=-4x+4, y=4$



حل : دا د شمیرلو سطحه، د منحنیو ترمنځ د دوه سطحو A1 او A2 له یوځاي کیدو څخه لاس ته راځي.

A1د منحنیو $y=4$ او $y=-4x+4$ ترمنځ پروت دی. د اینتیګرال پولی(- حدونه) د لومړي

د دوه کرښو څخه رابند

Bild 21.8

کواور ینات(x –محور) غوښتکی دی،

د $y=4$ او $y=-4x+4$ ترمنځ.

لرو $x_1=0$ $4=-4x+4,$ په همدې ډول د

بني غوښتکي لومړی وضعیه ارزښت (کواور دینات)

د $y=-4x+4$ او $y=(x-1)^2$ ترمنځ

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x+1}=\frac{1^2+1-2}{1+1}=\frac{0}{2}=0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x_{2,3}=-1\pm 2,\ x_3=1.$$

ګورو چیA2د y=-4 او y=(x-1)² تر
منځ پرته ده ، د اینتیګرال حدونه(پولی)x1=1 او د لومړي
وضعیه قیمت د بني غوځتکي د y=4 او y=(x-1)² .

غوښتوني سطحه داسې ده:

$$A=A_1+A_2=\int_0^1[4-(-4x+4)]dx+\int_0^1\left[4-(x-1)^2\right]dx$$

$$=\int_0^1 4x\,dx+\int_0^1(-x^2+2x+3)\,dx=2x^2\Big|_0^1+(1/3x^3+x+3x)\Big|_4^3=7\frac{1}{3}$$

تمرینونه:

د لاندې توابعو ترمنځ سطحې و شمېرئ

---

1) $f(x)=x^2-x-6\ ;\ \ g(x)=4x-10$

2) $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{2}x+3\ ;\ \ g(x)=3x$

3) $f(x)=0.75(x^2-5x+4)\ ;\ \ g(x)=0.75x+3$,

4) $f(x)=x^2+5x+\frac{9}{4}\ ;\ \ g(x)=-\frac{3}{2}x-\frac{21}{4}$

5) $f(x)=(x-2)^2-4\ ;\ \ g(x)=x-1$

6) $f(x)=x^2-4x+1\ ;\ \ g(x)=-x^2+2x+1$

7) $f(x)=\frac{3}{2}x^2-6x+3\ ;\ \ g(x)=\frac{1}{2}x^2-2x$

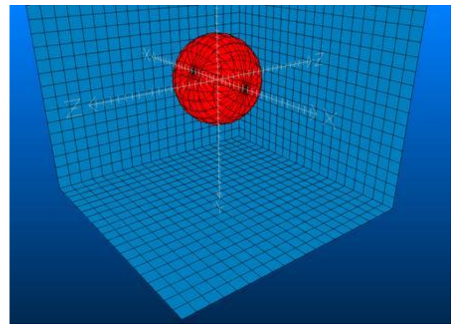
8) $f(x)=x^2+3x\ ;\ \ g(x)=0.5x^2$

9) $f(x)0.5x^2-2x-1\ ;\ \ g(x)=2x^2+2x+1$

10) $f(x)=-0.5x^2+2\ ;\ \ g(x)=-\frac{1}{9}(x-1)^2+1$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د څرخيدونکو بدنونو(جسمونو) ډکي(حجم)



فعاليت:

- په ورسره بلده توګه د مستطيل حجم وليکئ.

- د کرې، استوانې او د مخروط حجومونه، چې تراوسه مو لوستلي و ليکئ.

يادونه: دا دې تل په پام کې ونيول شي: که د انتيګرال شمېرنې له لارې کوم عدد لاس ته راځي، نو هغه عدد د يوه جسم حجم ښايي. موږ ددې لپاره ليکو، چې د حجم مطلوبه واحد.

څرخيدونکي تنونه:

څرخېدونکي تنونه په هندسه کې هغه تنونه دي، چې په يوه څرخېدونکي محور باندې د يوې کرښې يا منحني څرخېدنې له لارې منځ ته راځي. کرښه يا منحني په يوه سطحه پرته ده او محور هم په همدې سطحه پروت دی. منحني محور نه غوڅوي، اويا زيات له زياته يې ممکن لمس کړي. چې غوره بېلګې به يې په لاندې کې و څېړل شي.

د xپه محور څرخيدنه(څرخون)

(c) ketabton.com: The Digital Library

لکه د مخه مو چې وویل، حجم هم یو انتیګرال دی. دا داسې منځ ته راځي، چې که یوه تابع د X په محور و څرخول شي.

د یوه څرخېدونکي جسم (بدن یا تن) حجم(ډکی)

د یوه څرخېدونکي جسم لپاره، چې د سطحې په څرخېدنه د x په محور په انتروال [a,b] کې د f تابع له ګراف ، د x له محور او له دواړو کرښو $x = a$ او $x = b$ ترمنځ جوړېږي، رابنده وي.

د حجم شمېرل په لاندې ډول دی:

$$V = \pi \cdot \int_a^b (f(x))^2 \, dx$$

د y په محور څرخېدنه

د یوې سطحې په څرخېدنې (د y په محور)، چې په [a,b] انتروال دf تابع ګراف د y محور او د دواړو کرښو $y = f(a)$ او $y = f(b)$ له خوا رابند وي باید د $y = f(x)$ بڼه بدله شي و $x = f^{-1}(y)$ معکوس تابع ته . دا شتون لري، که f متمادي او غښتلي یوغږیز وي. که نه(لکه په پورته شي شکل کې) نو شاید ممکن وي،چې f په ټوټو ټوټه شي، په هغو کې چې متمادي او غښتلی یوغږیز وي. دا دلته منځ ته راغلي حجمونه بیا ځانله شمېرل کیږي او سره جمعه کیږي.

څرخېدونکي تنونه: ۲۶۶

$$V = \pi \cdot \int_{\min(f(a),\ f(b))}^{\max(f(a),\ f(b))} (f^{-1}(y))^2 \ dy$$

که دلته $x = f^{-1}(y)$ بدل کړو، نو د x په محور په لاندې توګه حجم لاس ته راوړو:

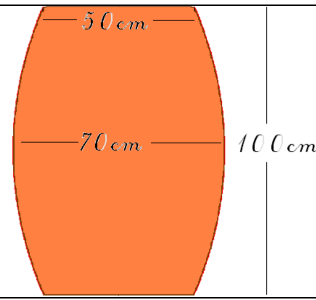
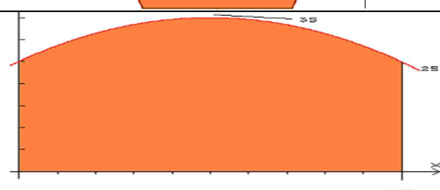
$$V = \pi \cdot \int_{\min(f(a),\ f(b))}^{\max(f(a),\ f(b))} x^2 dy = \pi \cdot \int_a^b x^2 \cdot |f'(x)| \, dx$$

د f' مطلق ارزښت او د انتیګرال په حدونو کې خورا جګ – ټیټ(min/max) توابع یو مثبت انتیګرال تظمینوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د سطحي په ځرخولو(د y په محور)، چې د f تابع له ګراف او دواړو کرښو $x = a$ او $x = b$ ځخه رابنده وي، لاندې فرمول باور لري.

$$V = \pi \cdot \int_a^b (x \cdot f))^2 \, dx$$

د يوه مرتبان حجم: د يوه مرتبان حجم غواړو پيدا کړو چې جګوالی يې 1 متر، وړانګه يې 25 سنتي متره په پاي او 35 سانتيمتره په منځ کې ده.	
که مرتبان په 90° درجو و ځرخول شي، نو د مربع پارابول بڼه غوره کوي. د ژی تابع بايد کښته لور ته واز پارابول وي، لکه دلته په شکل کې.	

حل: د پارابول د تابع ليکښه کېدی شي ساده په ککرتکي يا راس باندې وليکل شي.

-- -----------------------------------

تولېز باور لري:

$f(x) - a \cdot (x-5)^2 + 3.5$ (dm ارزښت په ديسيمتر)

په ځرګند دول 5- د رآس راکښنه د x+ په لور ورکوي او 3,5 د y+ په لور. د غزونې ضريب a په لور اړين دی، چې کښته لور واز پارابول لاس ته راوړو. اوس فقط ضريب a نه شته. که په فرمول کې يو معلوم تکی کيږدو، کېدی شي a وشمېرل شي. دا تکی (0/2,5) دی.

$$f(x) = -a \cdot (x-5)^2 + 3.5$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د x ارزښت ځا په ځاي کوونو لرو $-a\cdot(0-5)^2+3.5$

له دې امله a دی: $\frac{2.5-3.5}{25}=-0.04$

او مساوات پوره بلل کيږي. $f(x)=-0.04\cdot(x-5)^2+3.5$

د ساده والي لپاره د رآس ټکي فرمول په نورمال يا عمودې فورم بدلوو:
$f(x)=-0.04x^2+0.4x+2.5$

تابع مربع کړئ $f(x)=(-0.04x^2+0.4x+2.5)^2$

نو دی $f(x)=0.0016x^2-0.032x^3-0.04x^2+2x+6.25$

لومړنۍ تابع $f(x)=\frac{0.0016x^2}{5}\cdot x^5-\frac{0.032x^3}{4}\cdot\frac{-0.04x^2}{3}\cdot x^3+x^2+6.25x$

د حجم شميرلو لپاره ټاکلی انتيګرال دی؛

$$\pi\cdot\int_0^{10}(-0.04x^2+0.4x+2.5)^2\,dx=\pi\cdot\int_0^{10}(-0.0016x^2-0.032x^3-2x+6.25)\,dx$$
$$=\pi\left[\frac{0.0016}{5}\cdot10^5-\frac{0.032}{4}\cdot x^4-\frac{0.04}{3}\cdot x^3+x^2+6.25x\right]_0^{10}$$
$$=\pi\left[32-80-13\frac{1}{3}+100+62.5\right]_0^{10}$$
$$=\pi\cdot101.167$$

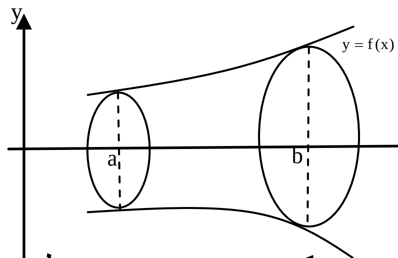
د حجم واحدونه (يوونونه يا يووالي)

دا چې موږ له پيله په ډيخيمتر شمېرنه کړې، نو طبعآ دا په ليتر شمېرل کيږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= 317.824 \ liter$$

د تابع $y=f(x),y=0,x=a,x=b$ ترمنځ سطحه چې دx-محورباندې ځرخي(ش ۵ . ۹).



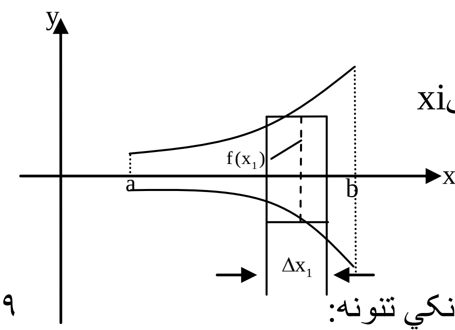
دلته غوښتنه، په دې ډول رامنځ ته شوې راغلي دځرخيدونکي بدن ډکی(حجم) دی.

لاندېجمله باوري ده

جمله ۵ . ۸) د ځرخيدونکي بدن ډکی(حجم):

په اينتروال[a,b]کي دی $y=f(x)$ متمادي وي، د ځرخيدونکي بدن حجم چې د سطحو $y=f(x),y=0,x=a,x=b$ترمنځ ، راپيداکيږي داسی دئ:

$$V = \pi \cdot \int_a^b \left[f(x) \right]^2 dx$$



ښونه: V د توتو(استوانو)د جمعې له لارې چې وړانګه يې$f(x_i)$، جګوالی يېx_i د $i=1,2,3,...n$ لپاره لری. (ش: 5. 10) دi-مې توتې (سليندر ډکی(حجم) دی.

ځرخېدونکي تنونه:

$$\Delta_i V = \pi \cdot \left[f(x_i) \right]^2 \cdot \Delta x_i$$

د ټولو n سليندرونو يا توتو زياتون

$$V_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta V_i = \sum_{i=1}^{n} \pi \left[f(x_i) \right]^2 \cdot \Delta x_i$$

د پولی ارزښت جوړونه) n->oe, xi->0 (د بنسټ اينتيګرال د تعريف سره سم

$V = \pi \cdot \int_a^b \left[f(x) \right]^2 dx$ حجم (ډکی) راکوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

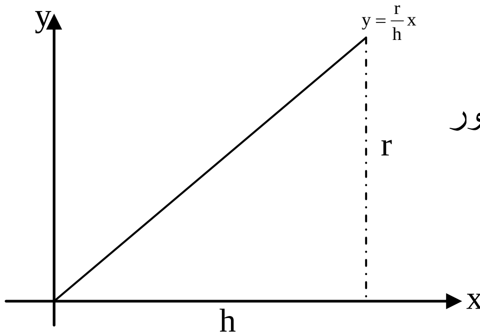
بیلګه ۵ . ۹ :) دمخروط یا کیګل ډکی

(حجم) د $y = \frac{r}{h}x$ کرښي (د سرچیني

تیره کربنه د $\frac{r}{h}$ جګوالي سره) او دx- محور

(y =0) د حدونو x=0 تر x=h

پورې(ش . ۱۱)



$$V = \pi \cdot \int_0^h \left[\frac{r}{h}x\right]^2 dx = \pi \cdot \frac{r^2}{h^2} \cdot \frac{x^3}{3}\Big|_0^h = \frac{1}{3}\pi r^2 h.$$

دا له بنستیزې شمېرنې(د اساساتو) څخه معلومه نتیجه ده.

بیلګه ۵ . ۱۰:

د $y = \sqrt{2x},\ y = 0,\ x = 0,\ x = 3$

--- ----------

ترمنځ د x-محور باندې څرخېدلو جوړ(تولید) شوی جسم څرخېدلی پارابولویید دی (څ ۵ ېز ۱۲)

y

$y = \sqrt{2x}$

1

0 1 3 x

$$V = \pi \cdot \int_0^3 \left[\sqrt{2x}\right]^2 dx$$

$$= 2\pi \cdot \int_0^3 x dx$$

$$= 2\pi \cdot \frac{x^2}{2}\Big|_0^3 = 9\pi.$$

د ارښیمد س جمله Archimedischer Satz

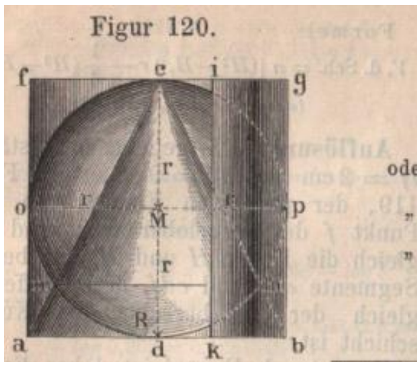
(c) ketabton.com: The Digital Library

د توتې، غونډاري(کرې) او مخروط د حجمونو ترمنځ تناسب:

$$V_{\text{توته(استوانه)}} : V_{\text{غونداری(کره)}} : V_{\text{مخروط}} = 3 : 2 : 1$$

د 1886 زکړ یوه درسي کتاب څخه

Figur 120.



Die Volumen der drei Körper verhalten sich wie die Ausdrücke unter 1), 2) und 3); man hat somit die Proportion:

$$Cyl. : Kugel : Kegel = 2r^3\pi : \frac{4}{3}\pi r^3 : \frac{2r^3\pi}{3}$$

$$\text{oder: } \text{„} : \text{„} : \text{„} = 2 : \frac{4}{3} : \frac{2}{3}$$

$$\text{„} : \text{„} : \text{„} = 6 : 4 : 2$$

$$\text{„} : \text{„} : \text{„} = 3 : 2 : 1$$

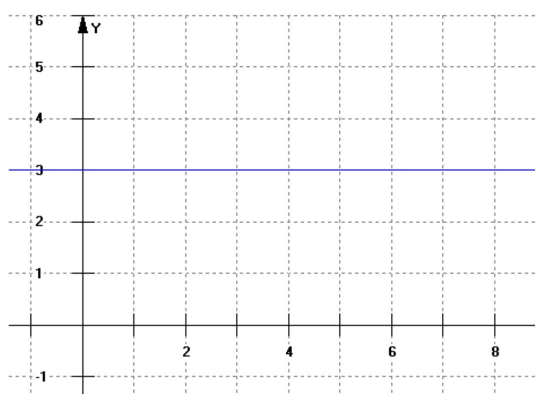
Archimedes war der erste, welcher dieses Verhältnis fand, daher heisst der hierdurch ausgedrückte Satz der Archimedische Satz.

د پورته الماني پښتو:ارښیمېدس لومړی کس وو، چې دا پورته تناسب یې ومونده، له دې امله دا دلته راغلې جمله د ارښیمېدس جلې په نامه نومول شوې.

د ځرخېدونکي بدن(حسم) حجم.

بیلګه ۵ . ۱۱:

استوانه(توته):



(c) ketabton.com: The Digital Library

استوانه د x په محور د$f(x) = c$ یوې ثابتې تابع(په دې حالت کې $f(x) = 3$ دی) د څرخېدو څخه لاس ته راځي.

د یوې استوانې حجم (ډکی) شمېرنه:

اوس دې په $[0;5]$ انتروال کې د توتې حجم وشمېرل شي. د استوانې د حجم د شمېرلو لپاره $V = \pi r^2 \cdot h$ عمومي فرمول دی. په دې حالت کې $r=3$ او $h=5$ دی. دx هر ارزښت لپاره د تابع ارزښته هم دی.

لومړی له هرڅه غواړو $V = \pi r^2 \cdot h$ څخه فقط $r^2 \cdot h$ تر څېړنې لاندې و نیسو او غواړو یوه لار پیدا کړو ، چې د هغې لارې د انتیگرال په مرسته حجم وشمېرلای شو. د سطحې مساحت د لاندې انتیگرال په مرسته وشمېرل شو :

$$\int_0^5 r dx = \int_0^5 f(x)\, dx$$

که د دې ناپاې ډېرو مستطیلونو(د $f(x)$ د مربع مساحت ا د صفر په لور ځغېلېدونکې پنډوالي dx سره) انتیگرال جوړ کړو، نو لاس ته ترې راځي:

$$\int_0^5 r dx = \int_0^5 [f(x)]^2\, dx$$

څرخېدونکي تنونه: ۲۷۲

دا په دې معنا چې دا انتیگرال بل څه نه دی پرته له څخه، چې زموږ د پورتني فرمول څخه دد یوې توتې د حجم شمېرل دي. ز که دا له سره ضرب کړو، نو راکوي:

$$\pi r^2 h = \pi \int_0^5 [f(x)]^2\, dx$$

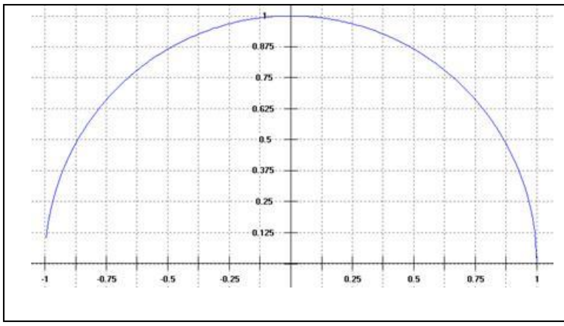
د دې ورکړ شوې استوانې د حجم شمېرنه:

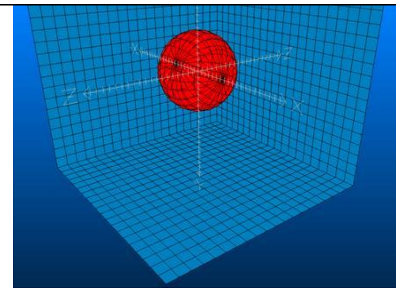
$$\pi \int_0^5 [f(x)]^2\, dx = \pi \int_0^5 [9(x)]_0^5 = \pi \int_0^5 [45 - 0]_0^5 = 45\pi$$

د پرتلې لپاره: $\pi r^2 h = 45\pi$

(c) ketabton.com: The Digital Library

کره (غونډاری یا غونډوسکه):





فعاليت:

- د کري حجم بې له انتيګراله وليکئ.

- د توتي حجم وليکئ

- د مخروط حجم وليکئ.

-دا درېواړه سره پرتله کړئ.

د x په محور د $f(x)=\sqrt{r^2-x^2}$ تابع ځرخېدني ځخه کره منځ ته راځي(پورته د ننوتني شکل.

دا تابع هم کېدی شي په ګردو ټوټو ټوټه شي، پرته غوځوونکي تابع يي $q(x) = \pi[f(x)]^2$ ده. د دې ټوټو د انتيګرلولو له لارې دې بيا حجم وشمېرل شي.

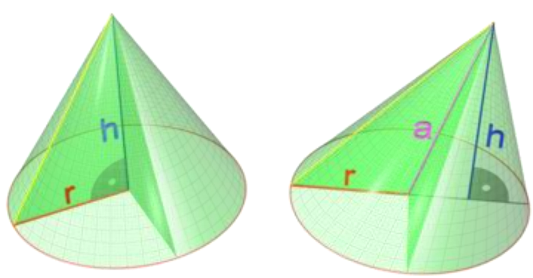
په دې بېلګه کې دې حجم وشمېرل شي، چې له صفر ځاي ځخه و صفر ځاي ته د x په محور باندې

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $f(x)=\sqrt{1^2-x^2}$ تابع ځرخېدنو له لارې منځ ته راځي ، يعني په انتروال [1;1-] کې .

$$\pi\int_{-1}^{1}[f(x)]^2dx=\pi\left[x-\frac{1}{3}x^3\right]=\pi\left(\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\right)=\frac{4}{3}\pi$$

مخروطKegel (Geometrie)



دا هم ممکن ده، چې يو مخروط د يوه منظمn زاويو (اړخيزې(کونجيز) څخه رابندې بنسټيزې سطحې(د n لپاره چې ناپا ي ته ځي) اهرام ته ور نږدې کړو.

د مخروط حجم:

د انتيګرال په مرسته د يوه مستقيم مخروط د حجم د شمېرلو يوه بله

٢٧۴

ځرخېدونکي تنونه: ----------------------------

مرستندويه لار. يو د کارتيزي وضعيه ارزښت (قيمت) سيستم په کار اچول کيږي، د هغه سره چې د مخروط څوکه په سرچينه (0|0) او منځ ټکی په ټکي $(h|0)$کې پروت دی. اوس کېدی شي، چې مخروط ناپاي کوچنيو توتو(استوانو) رايوځاي شوی په پام کې ونيسو، چې جګوالی(پنډوالی) يې dx دی. داچې د داسې يوې توتې يا استوانې ګردې ټوټې(کترې) واټن د مخروط له څوکې د وضعيه قېمت سيستم په x سره ور کړ شوی دی، د وړانګې جملې له مخې(دلته په افغانستان کې دا د ... جملې په نامه بلل شوې باور لري.

د يوه ناپاي کوچنی توتې(استوانې) وړانګه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$r\,z\,(h) = \frac{r}{h} \cdot x$$

د يوې ناپاي کوچنۍ توټې(استوتنې) حجم:

$$(\frac{r}{h} \cdot x)^2 \cdot \pi \cdot dx = \frac{r^2}{h^2} \cdot \pi \cdot x^2\,dx$$

دټول څرخېدوني مخروط د ټولو داسې کوچنيو توټو حجم دی. د شمېرلو لپاره يې ټاکلی انتيگرال جوړوو، د انتيگرال حدونو 0 او h سره:

$$V = \int_0^h \frac{r^2}{h^2} \cdot \pi \cdot x^2 dx = \frac{r^2 \cdot \pi}{h^2} \int_0^h x^2 dx$$

$$V = \frac{r^2 \cdot \pi}{h^2} \cdot \pi \cdot \left[\frac{x^3}{3}\right]^h$$

$$V = \frac{r^2 \cdot \pi}{h^2} \cdot \pi \cdot \left(\frac{h^3}{3} - \frac{0^3}{3}\right)$$

$$V = \frac{r^2 \cdot \pi}{h^2} \cdot \frac{h^3}{3}$$

له دې سره هغه مشهور فرمول ته (چې لروده مو) راځو:

$$V = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot h}{3} = \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot h$$

يو مخروط د x په محور د f(x) = mx يوې کرښيزې (خطي) تابع(د بېلگې په توگه (f(x) = 0,5x څرخېدنه(څرخون) ده.

د يوه مخروط شمېرنه

دلته نه شو کولاي چې لومړی د کوادر حجم وشمېرو. دلته د دې گراف لاندې په ډېرو کترو کتره کول دي د dx پنډوالې سره . د دې کترو د سطحو مساحت وشمېرئ، چې

(c) ketabton.com: The Digital Library

وړانګه f(x) لري داسې په نامه د پروت تقاطع تابع او بيا يې انتيګرال په ورکړ شوي [0;5] انتروال کې ونيسئ.

$$\pi\int_{0}^{5}[f(x)]^2dx=\pi\left[\frac{1}{12}x^3\right]_0^5=32.72$$

د پرتلې لپاره دئ د يوه مخروط د حجم معياري (ستاندارد) بنه وکتل شي.

$$\frac{1}{3}\pi r^2h=32.72$$

لنډ :

که يوه منحني د x يا y په محور وڅرخول شي، يو جسم چې لاس ته راځي، چې موږ دا جسم په نريو کترو يا زونونو ټوټه کوو، د پنډوالي x همداسې y سره او دا په ورته نژدې توګه په استوانو بدلوو، نو په نژدې توګه لکه د مخه د حجمونو لپاره لاندې بڼه لاس ته راځي:

د x په محور څرخونه: $V_x=\pi\cdot\int_{x_1}^{x_2}y^2dx$

د y په محور څرخونه: $V_y=\pi\cdot\int_{y_1}^{y_2}x^2dx$

بېلګه ۵ ـ ۱۲:

د $y = x^2/4$ تابع ګراف په $[0, 2]$ انتروال کې د وضعيه قيمتونو په محورونو څرخي. دا د منځ ته راغلي څرخېدلي جسم حجم څومره دی؟

د x په محور څرخېدنه: $y^2 = x^4/16, x_1 = 0, x_2 = 2$

$$V_x=\pi\cdot\int_{0}^{2}\frac{x^4}{16}dx=0.4\pi$$

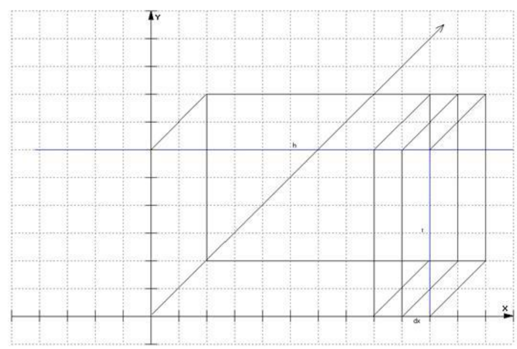
(c) ketabton.com: The Digital Library

د y په محور څرخېدنه: $x^2 = 4y, y_1 = 0, y_2 = 1$

$$V_y = \pi \cdot \int_0^1 4y\,dy = 2\pi$$

د ناڅرخیدونکي جسم ډکی یا حجم.

مستطیل یا بربع المکعب (شپږ اړخیز جسم) Quader



دا لید شکل د استواني څخه راته معلوم دی، فقط دا ځل نه څرخي. حجم یې کېدی شي د عادي کوادر په څېر وشمېرل شي $(V = r^2h)$ او یا د صفر په لور تلونکي dx سرورې مربع وې ټوټه شي. د دې لپاره دې د پروت غوڅي (قاطع) سطحه وشمېرل څرخېدونکي تنونه:

شي، یعنې q(x) د پروت قاطع تابع دې جوړه شي د دې بیا باید انتیګرال ونیول شي. په ټولیزه توګه دا معنا لري: $V = \int_a^b q(x)dx$

په دې بېلګه کې تصادفي د پروتقاطع تابع د ژئ تابع مربع ده: $q(x) = [f(x)]^2$

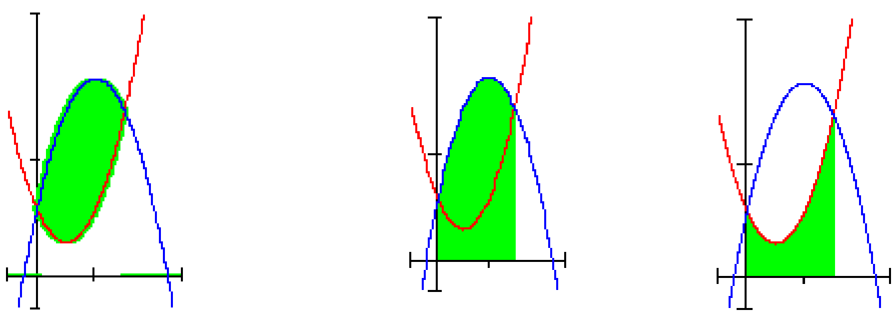
که موږ $f(x) = 3$ تابع له 0 تر 5 انتروال کې د پروتقاطع تابع سره انتیګرال کړو، نو باید $V = r^2h = 45$ لاس ته راشي. $\int_0^5 q(x)dx = [9x]_0^5 = 45$

(c) ketabton.com: The Digital Library

تړولګه

که د تابع $y=f(x)$ سطحې د منحني تلنه دx- محور لاندې لور ته وي، نودا ټاکلی اینتیګرال به منفي وي. ددې لپاره چی د سطحې تل مثبت مساحت لاس ته راوړو، نو د اینتیګرال مطلقه ارزښت نیسو یعني منفي اینتیګرال.

په ځنو پوښتنو کې د سطحې مساحت شمېرل کیږي، چې د دوه توابعو ګرافونو ترمنځ پرته ده. دا ډول د سطحې مساحت کېدی شي د ټاکلو اینتګرالونو د کمښت له لارې و شمېرل شي. که دواړه ګرافونه د x-محور پورته لور ته پراته وي،نو د لاندې شیما ځخه مخ ته ځو :



A A₁ A₂

$$A = A_1 - A_2$$

ځرخېدونکي تنونه: ۲۷۸

د منحنیو $y=f_1(x)$ او $y=f_2(x)$

تر منځ پرتي سطحې مساحت په لاندې پولو کې

له $x=a$ تر $x=b$ پورې او $y=f_1(x)$ او $y=f_2(x)$.

د یوه ځرخېدونکي جسم لپاره، چې د سطحې په ځرخېدنه د x په محور په انتروال $[a,b]$ کې د f تابع له ګراف ، د x له محور او له دواړو کرښو $x = a$ او $x = b$ ترمنځ جوړیږي، رابنده وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د حجم شمیرل په لاندې ډول دی:

$$V = \pi \cdot \int_a^b (f(x))^2 \, dx$$

د y په محور څرخیدنه

د یوې سطحې په څرخېدنې (د y په محور)، چې په [a,b] انتروال دf   تابع ګراف د y محور او د دواړو کرښو $y = f(a)$ او $y = f(b)$ له خوا رابند وي باید د $y = f(x)$ بڼه بدله شي و $x = f^{-1}(y)$ معکوس تابع ته . دا شتون لري، که f متمادي او غښتلي یوغږیز وي. که نه(لکه په پورته شي شکل کې) نو شاید ممکن وي،چې f   په ټوټو ټوټه شي، په هغو کې چې متمادي او غښتلی یوغږیز وي. دا دلته منځ ته راغلي حجمونه بیا ځانله شمېرل کیږي او سره جمعه کیږي.

$$V = \pi \cdot \int_{\min(f(a),\ f(b))}^{\max(f(a),\ f(b))} (f^{-1}(y))^2 \, dy$$

جمله ۵ . ۸) د څرخیدونکي بدن ډکی(حجم):
په اینتروال[a,b]کې دی y=f(x) متمادي وي، د څرخیدونکي بدن حجم چې د سطحو y=f(x),y=0,x=a,x=bترمنځ ، راپیداکیږي داسی دی:

$$V = \pi \cdot \int_a^b [f(x)]^2 \, dx$$

د توتې، غونډاري(کرې) او مخروط د حجمونو ترمنځ تناسب:

$V_{توته(استوتنه)} : V_{غونداری(کره)} : V_{مخروط} = 3 : 2 : 1$

یو مخروط د x په محور د f(x) = mx یوې کرښیزې (خطي) تابع(د بیلګې په توګه f(x) = 0,5x) څرخیدنه(څرخون) ده.

که یوه منحني د x یا y په محور وڅرخول شي، یو جسم چې لاس ته راځي، چې موږ دا جسم په نریو کترو یا زونونو ټوټه کوو، د پنډوالي x همداسې y سره او دا

(c) ketabton.com: The Digital Library

په ورته نزدې توګه په استوانو بدلوو، نو په نزدې توګه لکه د مخه د حجمونو لپاره لاندې بڼه لاس ته راځي:

د x په محور څرڅونه: $V_x = \pi \cdot \int_{x_1}^{x_2} y^2 dx$

د y په محور څرخونه: $V_y = \pi \cdot \int_{y_1}^{y_2} x^2 dx$

د x په محور د $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ تابع څرخيدني څخه کره منځ ته راځي(پورته د ننوتنې شکل.

دا تابع هم کيدی شي په ګردو ټوټو ټوټه شي، پرته غوڅوونکې تابع يي $q(x) = \pi[f(x)]^2$ ده. د دې ټوټو د انتيګرلولو له لارې دې بيا حجم وشميرل شي.

تمرينونه:

۱ - د $y = f(x) = x^2$ او د دې د معکوس تابع تر منځ سطحه وشميرئ.

۲ - د ګراف او X محور ترمنځ سطحه وشمېرئ.

$a)\ f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{13}{4}x + 3$ $b)\ f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 3x$

$c)\ f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x$ $d)\ f(x) = -x^2 + 6x - 5$

۳- د هغې سطحې مساحت وشميرئ، چې د وکړ شوو مساواتو منحنيو څخه را بنده شوي وي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

a) $y = e^{0,5x}, \quad y = 0, \quad x = -2, \quad x = 2:$

b) $y = \frac{1}{2}x^3, \quad y = 0, \quad x - 2, \quad x = 2:]$

c) $y = \frac{1}{x^2}, \quad y = 0 \quad x = 9, \quad x = -3, \quad x = 3:$

d) $y = \cos x, \quad y = 0$

e) $y = \cos x, \quad y = 0, \quad x = \frac{\pi}{2}, \quad x = \frac{5\pi}{6}:$

f) $y = \frac{1}{x}, \quad y = 0, \quad x = 2, \quad x = 4:$

g) $y = \left(\frac{x^2}{4} - 1\right)^2, \quad y = 0, \quad x = -2, \quad x = 2:$

h) $y = x^3 + 7, \quad y = 0, \quad x = 1, \quad x = 2:$

i) $y = x^3 + 7, \quad y = x^3 - x^2 + 3x + 5:$

j) $y = 3 - \frac{1}{2}x^4, \quad y = 3 - 4x:$

k) $y = \frac{1}{x}, \quad 3y + 3x = 10:$

l) $y = \cos x, \quad y = \sin x$

m) $y = \sqrt{3x+1}, \quad y = 1, \quad x = 8:$

n) $y = \frac{x^2}{4}, \quad y = \frac{8}{4 + x^2}:$

---

o) $y = x^2, \quad x = y^2:$

p) $y = \frac{1}{6} \cdot \sqrt{x^3}, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 3:$

٤-- - د ساين د منحني گراف او د کوساين د منحني گراف يو بل په انتروال $0 \le x \le 2\pi$ کې غوڅوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دواړو غوڅېکو تر منځ له دواړو منحنيو را بندې سطحې مساحت وشمېرئ.

۵- د اکسپوننشل منحني g د $y=e^x$ سره او په انتروال $[0,1]$ دp پارابول د $y=-x^2-1$ سره را بنده سطحه وشمېرئ.

۶ - د کرښې g د $y=2x^2+1$ سره او په اينتروال $[0,2\pi]$ د ساين منحني د y=sin x سره څخه رابنده سطحه وشمېرئ.

۷ - پارابول p_1 د $y=x^2-3$ سره او p_2 د $y=2x^2+1$ سره د $[-1,2]$ په اينتروال يوه سطحه را بنده وي.

د ا بنده سحه و شمېرئ.

۸ – د پارابول P د $y=\sqrt{x}$ سره او کرښه g يې د y = -x-1 سره په اينتروال رابنده سطحه لرو. دا را بنده سطحه وشمېرئ.

۹ - په اينتروال $[-2,1]$ د g_1 کرښې د $y=x+3$ سره او g_2 د 2x+1 سره څخه را بنده سطحه وشمېرئ.

۱۰ - – پارابول $y=x^2-6x+5$ د p سره او کرښهg د y+-x+1 سره رابنده سطحه.

د دې سطحې مساحت وشمېرئ.

۱۱-- د g يوه کرښه يو پارابولp د $y=x^2+2$ سره په $x_1=-1$ او $x_2=2$ کې غوڅوي.

د کرښې او پارابول څخه رابندې سطحې مساحت وشمېرئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۲ – د g یوه کرښه یو پارابول p د $y+0,5x^2+x+4$ سره په د $x_1=-2$ او $x_2=4$ ټکو کې غوځوي.

د دې کرښې او پارابول څخه رابندې سطحې مساحت وشمېرئ.

۱۳ - د ساین د منحني گراف او د کوساین د منحني گراف یو بل په انتروال $0\le x\le 2\pi$ کې غوځوي.

د دواړو غوځټکو تر منځ له واړو منحنئو را بندې سطحې مساحت وشمېرئ.

۱٤ - د f تابع گراف د $y=-\frac{1}{9}x^4+\frac{2}{3}x^2$ سره د x محور سره سطحه پوره رابندوي.

د دې مساحت وشمېرئ.

۱٤ - د f تابع گراف د y=a.(1-sin2x), (a>0) سره او د وضعیه قیمت په I (اوله) مربع کې (قیمتونو څخه را بنده سطحه) پوره رابنده سطحه لرو.

د کومو ارزښتونو لپاره د سطحې مساحت (x-2) سطحې یوونونه (واحدونه) دی.

۱۵- د لاندې توبعو گرافونه هر یو د x په محور څرخي. د منځ ته راغلو څرخېدونکو جسمونو حجم وشمېرئ.

$a)\ \ f(x)=2+\sqrt{x},\ \ |=[0;4]$

$b)\ \ f(x)=\frac{1}{2}(x-2)^2+1,\ \ |[2;4]$

۱٦ - د لاندې توبعو گرافونه هر یو د x په مخور څرخي. د منځ ته راغلو څرخېدوکو جسمونو حجم وشمېرئ او د ساده شمېرنو سره یې و ازمایئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$a)\ \ f(x)=-x+5,\quad |=[0;3]$ $\qquad b)\ \ f(x)=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\ ,\ \ |[1;5]$

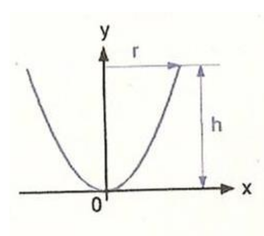
۱۷--د لاندې توابعو ګرافونه هر یو د y په مخور څرخي. د منځ ته راغلو څرخېدوکو جسمونو حجم وشمېرئ.

$a)\ \ f(x)=\sqrt{x}\ ,\ 1=[0;4]$ $\qquad b)\ \ f(x)=(x-2)^2\ ,\ 1=[1;3]$

۱۸- د لاندې توبعو ګرافونه هر یو دy په محور څرخي. د منځ ته راغلو څرخېدونکو جسمونو حجم وشمېرئ او د ساده شمېرنو سره یې و ازمایی.

$a)\ \ f(x)=x+1\ \ ,\ 1=[1;4]$ $\qquad b)\ \ f(x)=-\frac{1}{2}x+2\ ,\ 1=[0;4]$

۱۹ د پارابول په سیومتري محور yد پارابول د څرخیدو سره یو لوښی منځ ته راځي. وښایئ، چې دا $v=\frac{\pi}{2}\cdot r^2\cdot h$ حجم لري.



$$v=\frac{\pi}{2}\cdot r^2\cdot h$$

۲۰ - د ساین د منحني ګراف او د کوساین د منحني ګراف یو بل په انتروال $0\le x\le 2\pi$ کې غوڅوي.

ځرخېدونکي تنونه: ۲۸۴

د دواړو غوڅتکو تر منځ له واړو منحنئو را بندې سطحې مساحت وشمېرئ.

۲۱ - د f تابع ګراف د $t\ \ y=-\frac{1}{9}x^4+\frac{2}{3}x^2$ سره د x محور سره سطحه پوره رابندوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دې مساحت وشمېرئ.

۲۲ - د f تابع گراف د y=a.(1-sin2x), (a>0) سره او د وضعیه قیمت په I (اوله) مربع كې (قیمتونو څخه را بنده سطحه) پوره رابنده سطحه لرو.

د كومو ارزښتونو لپاره د سطحې مساحت (x-2) سطحې یونونه (واحدونه) دی.

۲۳---- لاندې د څرخیدونكي بدنونو گراف په x محور څرخي. د داسې منځ ته راغلو څرخېدونو تتونو حجمونه(ډكي) وشمېرئ.

$a)\ f(x)=2+\sqrt{x}\quad ,\quad I=[0;4] \qquad b)\ f(x)=\frac{1}{2}(x-2)^2\quad ,\quad I=[2;4]$

۲٤---د لاندې څرخېدونكو بدنونو گرافونه د x محور باندې څرخي داسې منځ ته راغلي حجمونه(ډكي) وشمېریئ او په ساده حساب سره یې وشمېرئ.

$a)\ f(x)=-x+5\quad ,\quad I=[0;3] \qquad b)\ f(x)=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\quad ,\quad I=[1;5]$

۲۵--- د لاندې توابعو د څرخون له لارې منځ ته راغلو تتونو حجم وشمېرئ.

$a)\ f(x)=\sqrt{x}\quad ,\quad |=[0;4] \qquad b)\ f(x)=(x-2)^2\quad ,\quad I\,|=[1;3]$

۲٦---- د لاندې توابعو گراف د y په محور څرخي. داسې منځ ته راغلي تتونه و شمېرئ او په ساده شمېرنه سره یې هم و شمېرئ.

$a)\ f(x)=x+1\quad ,\quad |=[1;4] \qquad b)\ f(x)=-\frac{1}{2}x+2\quad ,\quad |=[0;4]$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲۷--- د لاندې توابعو گراف د y په محور څرخي. داسې منځ ته راغلي تنونه و شمېرئ او د ساده شمېرنې سره يې هم و شمېرئ

$a)\ f(x)=\sqrt{x}\quad , \quad | = [0;4] \qquad b)\ f(x)=(x-2)^2 \quad , \quad | = [1;3]$

$a)\ f(x)=x+1 \quad , \quad | = [1;4] \qquad b)\ f(x)=-\frac{1}{2}x+2 \quad , \quad | = [0;4]$

هغه ناټيکاوي، چې د نصاب په کتاب کې شته، داسې لړڅه به يې زه دلته له تاسو سره شريک کړم

د ډاکتر ماخان (ميرزي) شينواري چاپ او ناچاپي ليکنې:

په ډېره مننه، چې زما کتابونه به ټول www.ketabto.com ته پورته شي.

<u>1988 Vienna (Austria):</u>

<u>لومړی:</u>

H.K. Kaiser , M. Shinwari : Aproximation compact pological algebra : general algebra 6 ; Page 117 – 122 contributions to

<u>1987 Vienna (Austria):</u>

<u>دويم:</u>

Diss . Interpolation und Aproximation durch Polynime in Universalen Algebren . Uni. Wien

Dissertation Interpolation and Aproximation by Polynome in universal Algebras, at the University of Vienna/Austria

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاندې د شميرپوهنې پښتوټول کتابونه په المان کې د ،، افغانستان کلتوري ودې ټولنه،،له خوا چاپ شوي دي

2000 Bonn (Germany):

دريم: د شميرپوهنې ستر کتاب : د شميرپوهنې برسيره د انجنري، فزيک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زده کوونکو لپاره (دا کتاب   په ۹۰۰ مخونو کې چاپ او دا نوې ليکنه به يې څنو ځايونو غزېدلې او څنې ځايونه ترې لرې شوي دي)

2003 Bonn (Germany):

څلورم: ځمککچپوهنه(هندسه) ، په سلو، زرو کې شميرنه، د ګټې – او کټې د کټې شميرنه ، د اختمالوالي شمېرنه کتاب د ښوونځي ټولې اړتياوې پوره کوي

2003 Bonn (Germany):

پنځم: الجبرونه (د الجبر بنسټونه دي)

2003 Bonn (Germany):

شپږم: د شميرپوهنې   انګرېزي – پښتو ډکشنري.

2003 Bonn (Germany):

اووم: د شميرپوهنې الماني ـ پښتو- او پښتو الماني ډکشنري

Mathematical dictionary German/ Pashto and Pashto/German

2003 Bonn (Germany):

اتم: دفرنځيال برابرون (دا کتاب په دې ځانګه کې يو پيل   دی، ساده ليکل شوی)

Differential equation Translation; An Introduction

Bonn (Germany): 2003

(c) ketabton.com: The Digital Library

نهم: د شمیر پوهنې فرمولونو ټولګه

Mathematical Formulas

2003 Bonn (Germany):

لسم: شمیرپوهنه له عربي په پښتو

1997 Bonn (Germany):

یوولسم: د افغانستان په هکله سپیني خبرې: په   المان کې

،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خو

.یادونه: له ۲۰۰۰ کال دمخه ډاکتر ماخان شینواري د ،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خوا درې ساسي مجلې هم را وستلې.

د ډاکتر ماخان ،،میرې،، شینواري لیکنې او ژباړې چې په چاپیدو یې پیل کیږي

2012 Bonn; Germany; Kabul Afghanistan

ژباړې:

:   *Prof. Brinkmann. (From Brinkmann.du.de)*

لاندې د برینکمن لیکنې چې له پرینکمن ن ج څخه ژباړل شوي دي.

۱ -   شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره   لومړی ټوک

۲ – شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره   دویم ټوک

۳ – شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره   دریم ټوک

۴ - د احتمالوالي شمیرنه   د ښوونځي لپاره

(c) ketabton.com: The Digital Library

۵ – احصایه یا ستاتیستیک دښوونځي لپاره

لاندې کتابونه د شتوتګارت د پوهنتون د استادانو د لکچرونو څخه چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپاره شوي را ژباړل شوي.

۶ – انالیزی ۱

۷ – انالیزې ۲

۸ – کرښیز الجبر

۹ - د شمیرپوهنې بنسټونه

۱۰ - د فرمولونو ټولګه

۱۱ – فنکشنل انالیز

۱۲ – وکتور شمیرنه

نورې ژباړې

۱۳ – له www./grundstudium.info/linearealgebra څخه:کرښیز الجبر

۱۴ – Georg Gutenbrunner ګڼونپوهنه یا د اعدادو تیوري

زما لیکنې

Bonn (Germany):

۱۵ - د شمیرپوهنې ستر کتاب دویم چاپ د پوره تغیراتو سره : دا کتاب د شمیرپوهنې برخې برسیره د

(c) ketabton.com: The Digital Library

انجنري، فزيک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زدهکوونکو لپاره پوره ګټور دی. په

کتاب کې د اړتيا سره زياتونه او کونه راغلي

۱۶ - ځمککچپوهنه (هندسه) دويم چاپ د پوره تغيراتو سره

۱۷ – الجبر بنسټونه دويم چاپ له تغيراتو سره

۱۸ - ډېرۍ پوهنه يا سټ تيوري

۱۹ – د شميرپوهنې سم اند (منطق رياضي)

۲۰ - د يو څو شميرپوهانو ژوندليک

۲۱ – د شمير پوهنې ګډې وډې ليکنې

-۲۲ داهم ژباړه ده، خو ليکونکی يې متآسفانه راڅخه نابلد شوی: د مشتق او انتيګرال شميرنو ته تمرينونه او اوبيونې يا حلونه يې

۲۳ – د شميرپوهنې انګريزې پښتو او عربي + درې ډکشنري

۲۴ – د شميرپوهنې پښتو انګرېزي ډکشنري

۲۵ – د شميرپوهنې پښتو ډکشنري د شميرپوهنيزو وييونو په پښتو روښانه ونه

۲۶ - د زړه له کومې(دا هغه ليکنې دي، چې ځنې يې په نړيول جالونو کې خپرې شوي دي.)

۲۷ – د افغانستان په هکله سپيني خبرې، چې وبه غزيږي.

نوري ليکنې، چې په ژباړه يې پيل شوی، خو لا پوره نه دي

– د شتوتګارت پوهنتون لکچرنوټونو څخه ، چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپريږي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ګروپونو تیوري

- د ښوونځي لپاره فزیک د برینکمن لیکنه

له پنځم ټولګي څخه تر اووم ټولګي پورې ژباړل شوی (دا چې زما دویم مسلک فزیک دی، دا لیکنې ژباړم. دا هم د دې لیکوال یوه ډېره ښه لیکنه ده، چې -د شمیرپوهنې په څیر- دلته هم زیات تمرینونه د حل یا اوبیونې سره په کې راغلي او ماته زیات ګټور برېښي)

د ښوودځي کتابونه له ۷-م لګي څخه تر ۱۲-م ټولګي پورې.

۱ – د دولسم ټولګی شمیرپ،هنه

زما لیکونه:

Dr. Makhan Shinwari ډاکتر ماخان شینواری

Smakhan1946@gmail.com

د افغانستان اسلامي حمهوریت جمهور ریس جلاتمآب

ډاکتر محمد اشرف غني ته په ډېر درنښت.

له هر څه د مخه دې بخښنه وي، چې ستاسو ډېر د ارزښت ډک وخت نیسم، خو دا راته ډېر اړیین برېښي او پرته له تاسو به یې څوک دومره جدي هم ونه نیسي.

پوهیږو، چې د پوهنې وزارت د ولس د پوهنې مغذ جوړوي، پوهه له همدې ځایه پیلیږي، چې بنسټ یې باید سم وي. همداسې نصاب د یوه هیواد د پوهنې مغذ دی، نو باید همداسې ورته د هره اړخه په درنه سترګه او غور وکتل شي.

زه خبره را لنډوم او د افغانستان د نصاب ستونځو ته په لنډ ډول ګوته نیسم او په همدې ډول ستونځوبیو یا د ستونځو حل ته یې.

ما د ۱۲ –م ټولګي د پښتو او دري کتابونه ولیکل او زه تر یې المان ته لاړم، قرارداد پای ته ورسید. زما د کتابونو په ځای نور کتابونه چاپ شول، چې ناسم وو. په دې هکله د پوهنې وزارت ته زما لیکنه مل ده. دا کتابونه ما بیا له سره ترتیب کړل(لیکنې مې یې

(c) ketabton.com: The Digital Library

درلودلي) او چاپ ته مې چمتو کړل، خو دا مې باور نه کيده، چې دا به بيا بې زما له شتون چاپ شي.

ما د کتابونو د ليکلو لپاره پيسې اخستې او دا ليکنې هم دا دی لرم، چې چاپ ته چمتو دي

ما چې دا نور کتابونه وکتل، نو دا مې لازم وګڼله، چې دا کتابونه هم زه له سره وليکم، مواد يې لرم، ځکه چې ما ډېر د شميرپوهنې يا رياضي کتابونه ليکلي او ژباړلي(نږدې تر ۴۰ کتابونو پورې). د کتابونو منځپانګه د ښوونځي کتابونو لپاره هم پوره ده، تخنيکي کارونه يې بايد له يوه مسلکي کس سره سرته ورسول شي.

اوس مې يې په ليکلو او د ښوونځي لپاره په سمون پيل کړی دی.

زما ليکنې مسلکي ناسمون نه لري، معياري او د وخت د غوښتنو سره سمې دي، چې دا زما د اخرنيو اوولس کالو د هڅو په اساس باوري ده.

زه څه کولی شم؟

دا چې په دې هکله بل کوم هيوادوال څه نه دي ويلي يا ليکلي، نو باور لرم، چې زه يواځنی کس يم چې دې ته مې فکر را اوښتی. زه دا څه چې ليکم دا په پوره مسئوليت ليکم.

ما چې دا څومره ليکنې کړي، دا زما د ارمان د پوره کولو لپاره دي او په دې هکله ځان د ولس پوروړی بولم.

که د دې کتابونو د ليکنې دنده راته وسپارل شوه، نو د کار ميوه به مې وي او دا کار به په نړيوال معيار او ښه توګه سرته ورسوم.

دا اخر يونيم کال مې يواځې د ښوونځي له کتابونو سره سر خوږولی، چې د هر ځل لوستنې سره يې پوره زوريږم او د هر ځل لوستلو سره يې په ناسمون سر خوږوم.

زه هيله لرم، چې دا وخت راته راکړئ، چې د افغانستان رياضی معياري کولو کې مرسته وکړم او نه دا چې مرسته وکړم بلکه معياري يې کړم. دا کار مې لکه د مخه مې چې ګوته ورته ونيوله هم کړی.

زه کړی شم، چې دا کار د المان څخه هم سرته ورسوم. که ماته دا وخت راکړ شو، نو زه به له حکومت څخه د معاش غوښتنه هم ونه کړم او دا کار زما له خوا ساده کيدونکی دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ښوونځي د رياضي لپاره به يو ښنستې کېښوول شي، چې په هغې د راتلونکی وخت شميرپوهنه يا رياضي ابادېدی شي. دا ښنستيز مسلک به په نړيواله کچه سم شي.

زما مسئوليت مې په دې ليکنه سرته ورساوه.

له هر څه د مخه ستاسو له ستونځو مننه

ستاسو ډاکتر ماخان شينواری

د نصاب د کتابونو د ناسمون په ځنو برخو د نموني لپاره لنډه څيړنه شوې، چې د دې ليک سره مل ده.

د پوهنې محترم وزارت ته زما ليکنه هم مل ده.

ډاکتر ماخان شينواری

Dr. Makhan Shinwari

Lansbergerstr.3

5311- Bonn

Germany

smakhan1946@gmail.com

د ۲۰۱۳ زکـ لومړی نيمايي

د افغانستان اسلامي جمهوريت د پوهنې محترم وزير صاحب ته په ډېر درنښت!

(c) ketabton.com: The Digital Library

ډېرو درنو!

غواړم دا لاندې دوه ټکي د تاسو محترم سره شريک کړم:

لومړی: ما له مارچ ۲۰۰۸ ز کال څخه تر دسمبر ۲۰۰۹ ز ک پورې د درسي کتابونو ليکنه کې ونډه لرله او د ۱۲ ـــم ټولګي د شمير پوهنې يا رياضي کتابونه مې په پښتو او درې وليکل.

ما دا څه موده د مخه د پوهنې وزارت په ن ج پاڼه کې د ۱۲ ـــم ټولګي د شميرپوهنې (رياضي)کتاب ولوسته، چې ګورم هلته په کې زما د نوم درک هم نه شته.

دويم : د کتاب خوندېوني يا متن ته چې ننوتم، ګورم، چې هغه څه چې ما ليکلي ووهغه يا نه شته او يا تخريب شوي دي.

ما په ډېر زور او د زړه خوراک سره د کتاب لومړۍ برخه يعنې د ،، پولي ارزښت،، يا ليميټ برخه وکتله، چې ګورم، نو دا مې ترې لاس ته راوړه، چې دا نه ريا ضي ده او نه پښتو او هغه چا چې دا ليکلې نه دا چې په رياضي نه پوهيږي په پښتو هم نه پوهيږي.

زما په ليکنو کې نوښت:

دا بايد په ګوته کړم، چې زما ليکنه په نړيوال معيار وه، چې منځپانګه يا متن يې طبعآ زه لرم.

لومړي: دا لومړي ځل دی، چې کتاب مې لومړی په پښتو او بيا په درې وليکه.

دويم: دا لومړۍ ليکنه وه، چې په ليکنه کې له ايراني کتابونو ګټه نه وه اخستل شوې او ليکنه له الماني ادبياتو او داسې څه له انګرېزي ادبياتو رانيول شوي وه.

دريم: زما کتاب معياري ليکل شوی وو او ترې ښه ليکنې يې شونتيا نه لرله.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په لاندې توګه مې غوښتنه او هیله :

اول - زه باید پوه شم چې ولې داسې شوي، چې زما نوم له کتاب څخه وتلي؟

که یوائې یوه لیکنه هم په کې زما پاتې وي، نو باید زما نوم په کې وی. دا ماته له ما سره او زما د دوه کاله په دې لار کې د ستونځو ګاللو له امله او نه اخر زما د علمي کار سره هم تیری بریښي؟

تاسو پوهیږی، چې د ۱۲ ـم ټولګي کتاب لیکلو لپاره ماډېرې پیسې اخستي او لپاره مې یې ښه کار کړی وو، چې لاس ته راوړنه یې باید داسې نه وی.

دویم- د کتاب دا لیکلي لومړۍ او هم داسې سرسري دویمه برخه، چې ما لوستلې، د ښوونځیو لپاره د زغم نه دي.

زما وړاندیز: دا کتابونه باید راټول شي او بیا ولیکل شي، ځکه چې په دې خو لیکونکي نه پوهیږي ، نو له دې امله نه ښوونکي پرې پوهیدی شي او نه زده کوونکي او د پوهیدلو معقول څه هم نه لري. دې ته ګوته نیسم، چې په دې نورو کتابونوکې به هم ورته ستونځې وي، خو زما یې کتنه اوس د لاسه نه کیږي، ځکه چې .....

د داسې کتابونو لیکل او ښوونځیو ته وېشل د پوهنې وزارت لپاره توهین دی.

زه له دې امله د کوچني اختر وروسته کابل ته درځم او هیله لرم، چې د هرچا لومړی له تاسو سره وګورم. زه به د اګست په ۱۷ یو ځل وزارت ته درشم.

یادونه: ما په دې اخرو څو ورځو کې د کتاب ډېر ځایونه داسې ځغلند وکتل، باور وکړۍ، چې د هرې موضوع د لوستلو سره زوربېدلی یم.

(c) ketabton.com: The Digital Library

زه به په دې هکله – که لوی ښتن کول- له تاسو سره په کابل کې وغږیږم.

له هر څه د مخه له تاسو ستاسو له ستونځو مننه

ستاسو ډاکتر ماخان شینواری

یوه هیله

زه د افغانستان د ټولو ن ج ، نورو پانو او رادیو تلویزیونو څخه هیله لرم، چې دا زما لیکنه ګرانو لوستونکو ته وړاندې او په نورو اړونده لیکنو هم همدا مرسته وکړي.

د ریاضي کتابونو د چاپ مخه ونیول شي

ولې؟

په دې نږدې څو میاشتو کې د نصاب کتابونه بیا چاپ ته وړاندې کیږي او ګومان مې دی، چې داسې د معیار سره سم سمون به په کې نه وي راغلی، نو له دې امله یې د چاپ مخنیوی اړیین او په همدې ډول یې سمون هم اړین دی، چې په لاندې کې یې ستونځو او ستونځوبیو (د ستونځو حل) ته هم ګوته نیسم.

زه د ښمیرپوهنې ټول د نصاب پوهانو ته درناوی لرم او هیله ده، چې دا لیکنه شخصي وه نه نیسي.

-- ما له نږدې ۱۹۹۸ ز ک وروسته د ښمیرپوهنې په کتابونو پیل وکړ، چې تراوسه مې نږدې څه کم څلوېښت کتابونه لیکلي، چې له جملې یې له شلو ډېر چاپ او نور ناچاپ دي. د دې کتابونو ۱۴ غوره یې په www.kitabtoon.com (دې پاڼه کېاوس نه شته) کې خپاره شوي او همداسې له ما څخه ښمیرپوهنې ته ځانګړې شوې پاڼه کې تر

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲۵ کتابونو ن ج ته پورته شوي او دا نور به هم په خپل وار ن ج ته پورته شي. زما پاڼه smakhan.wordpress.com

دا زما ن ج پاڼه په نا ښکلي ډول یواځې زما د شمیرپوهنې کتابونو ته ځانګړې شوې، چې زما زیات کتابونه په کې خپاره شوي او نور به هم په کې خواره شي. پاڼه ښکلې نه، خو خپله موخه پوره کولی شي او موږ ټولو سره مرسته کولی شي، چې شمیرپوهنه په ګډه سمه او معیاري کړو.

ګرانو هیوادوالو!

افغانستان دې اوږدې جګړې په هر اړخ کې بې سارې زیانمن کړی او همداسې په پوهنیز اړخ کې هم. د افغانستان نصاب هم له دې ناخوالو بې برخې نه دی پاتې شوی.

لکه څنګه چې پوهنه د هیواد مغز جوړوي، همداسې نصاب د پوهنې مغز دی، نو له دې امله زیاته پامرنه هم غواړي.

ما په نصاب کې د دولسم ټولګي پښتو او درې کتابونه ولیکل، د قرارداد وخت پوره شو، پیسې مې واخستلې او زه ترې لاړم، چې متآسفانه له ما لیکلي کتابونه چاپ نه شول – علت یې دا وو، چې ګران لیکونکي یا لیکونکي وښایي، چې دوي دا کار ښه کوي، نو ولې دا د هیواد دباندې افغانان دې دې کار ته راوبلل شي- او په ځای یې متآسفانه ناسم کتابونه چآپ شول. په دې هکله مې په ۲۰۱۲ ز ک کې پوهنې وزارت ته یو لیک هم لیږلی وو، چې

ما متآسفانه چې پوره ناوخته دا نور د ښوونځي چاپ کتابونه وکتل او دې نتیجې ته ورسیدم، چې د ریاضي کتابونه باید سم او معیاري چاپ شي او نه دا ناسم بیا چاپ شي.

دا وړاندیز ولې ما په نصاب کې نه دی کړي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

په خواشينۍ سره به ووايم، چې د کار په سر کې مسئولو چې په کار پوه نه وو، بل څوک هم کار ته نه پرېږدي او د چا خبره د چا غوږ ته هم نه رسيږي. ما په همغه وخت کې هم د ټولو ليکنو لپاره وړانديزونه لروده او هلته مې ورته چاپ او په ميز ايښودلي وو، خو چا نه غوښتل ګټه ترې واخلي او يا يې ترې د ګټې اخستلو توان نه لاره.

ما ته د هغو د ليکنې متود ښه ونه برېښيده، ځکه چې استادان د دارنګه ليکنو سره بلد نه دي، نو له دې امله د پوهنې متن سره له هغې څو واره زياتې څنګيزې ليکنې کوي، چې موخه ور نه دي.

ما چې پتيل، چې د کتابونو د چاپ مخه بايد ونيول شي، نو دې ته مې هم چمتووالی بايد ښوولی وي، چې د کتابونو معياري او سم ليکلو امکان هم بايد شته وي.

دا امکان شته. ما دا کار سرته رسولی، کتابونه مې ټول داسې خام پوره کړې، چې زياتو برخو ته يې ، څو واره وړانديزون هم شته.

که د کتابونو د چاپ کار بايد ډېر په بيړه وشي، نو دا کار هم کيدونکی دی، خو بايد څو تخنيکي کسان د مرستې لپاره چمتو وي.

د چاپ کتابونو په ناسمون مې ليکنه کړې، چې ګران لوستونکي يې په smakhan.wordpress.com کې لوستلی شي او که ن ج ته پورته نه شو، نو مينه وال او په دې هکله ليوال يې د برېښنا پتې له لارې لاس ته راوړی شي..

ما د هرکتاب څخه لږ ترلږه يوه برخه داسې د نمونې په څير څيرلې.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دې لپاره چې د ښوونځي مینه وال ګران لوستونکي په ستونځو وپوهیږي، نو اړیین بولم، چې د ښوونځي کتابونه هم وګوري او اړونده موضوعګانې زما د چاپ او ناچاپه لیکنو سره پرتله کړي(کتابونه په پورته ن ج کې شته دی، چې ځنې یې راکښته کیدی شي او هم یې هلته ګران لوستونکي لوستلی شي).

زه په دولت کې او له دولت دباندې د ټولو اغیزمنو هیوادوالو څخه هیله کوم، چې په دې لار کې له ما او له دې لارې زموږ د ځوان راتلونکي سره مرسته وکړي او د ښمیرپوهنې معیاري کولواو سمون امکانات راته چمتو شي.

زما د کار دوه امکانات شته:
لمړی: دا کار زه کړی شم، چې له المان څخه هم سرته ورسوم او په ښه توګه، په دې حالت کې به زه د زحمت په مقابل کې له اجورې - د ځوانانو سره د مرستې له امله - تیر شم.

دویم: په افغانستان کې که دا کار سرته ورسیږي، دا به ګټور وي، ځکه چې په افغانستان کې به په ټولو خواوو کاروشي.

داخه وروستی خبرې ما هم رامخ ته کړې.

په لاندې کې زما لیکنې د افغانستان اسلامې جمهوریت جمهورر ریس جلالتمآب اشرف غنې او د پوهنې محترم وزارت ته لیک کې هم لوستلی شی او هیله مې ده، چې ویئ لولئ.

ستاسو له ګټو مشورو به ډیر مننوی یم.

زما د برېښنا لیک پته: smakhan1946@gmail.com

ستاسو ماخان

د نصاب د دولسم ټولګي کتاب ناسمونونو ته کتنه:

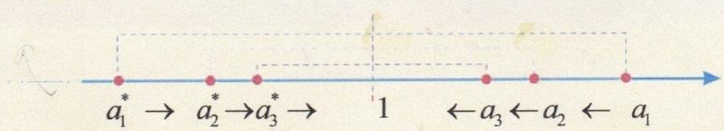
(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړي: په دولسم ټولګي کې پیل له ترادفونو شوی او په سر کې یې دوه ترادوفونه راوړي او دا یې بیا په یوه ګراف یا کرښه د ښي او کیڼې لوري یوې پولې ته ځغلولي.

د کتاب ۳ ـــم مخ

پایله:لیدل کېږي، چې د a_n ترادف له ښي لوري څخه د 1 او د a_n^* ترادف له کیڼ لوري څخه د 1 عدد ته د n په زیاتېدو سره نږدې کېږي، یعنې:

ـ د a_n ترادف کله چې n بې نهایت ته تقرب وکړي، مساوي په(1) سره کېږي او همداشان د a_n^* د ترادف $n-$ام حد که n بې نهایت ته نږدې شي هم مساوي له (1) سره کېږي.



ددې لپاره چې د لېمیټ مفهوم مو ښه څرګند کړی وي، په لومړی پړاو کې هغه په څو ترادفونو کې د ګراف په پام کې نیولو سره تر څېړنې لاندې نیسو.

زه پوهیږم، چې دا کار دې درنو لیکوالانو ولې کړی؟

له همدې پیله روښانیږي، چې محترم لیکونکي د درس سره کومه بلدتیا نه لري.

په پورته کې دا دوه پرلپسې هیڅکله له) ۱ « سره نه برابریږي، لکه ښاغلی لیکوال چې لیکي.

پسې یې بیا د پرلپسي یا ردیفونو لپاره بیل بیل ګرافونه کښلي.

په پرلپسیو یا ردیفونوکې چې موږ لیمټ راوړو، نو موخه ترې د پرلپسې کونورګنت او ډیورګنت دي. په پرلپسې کې اړین نه ده، چې د کونورګنت حالت کې دې پرلپسې له دواړو لورو پولې ته لاړ شي، خو داسې پرلپسې شته او هغه یو ترادف دی نه دوه.

دویم: دا لاندې څه چې راغلي، هم کوم درس پورې اړوندوالی نه لري، همداسې څه یې لیکلي. دی د ناسم د ترادف درس څخه سملاسې داسې یوې موضوع ته راغلی او بیا د

(c) ketabton.com: The Digital Library

ښي او کيڼ لورې لیمیټ ته راځي او که وکتل شي، نو په لیکنو کې کوم توپیر نه شته. دلته د زده کړې څه نه لیدل کیږي او دا اخره کرښه يې داسې ده، چې په دې موضوع کې کومه پوهه هم نه لري.

که چیرې دا تیک هم وي، نو ځای يې بې ځایه ځکه راوړي، چې د ښی او کیڼي لور لیمټونه، چې هلته هم ناسم دې، په اووم مخ کې څیرل(که چیرې څیرنه يې وبولو)

په لاندې کې ،، د متحول تقرب،، یعنې څه؟ دا هیڅ مفهوم یا ترې پوهیدنه نه لري. که ... ترادف وي هم باید د ترادف په ډول ولیکل شي او که تابع وي هم باید د تابع په ډول ولیکل شي.

د متحول تقرب: ویل کېږي چې د x متحول د a عدد ته تقرب کوي، په داسې حال کې چې x په اختیاري ډول د a عدد ته نږدې کېږي، یعنې د x او a ترمنځ تفاوت له هر کوچني عدد($\delta > 0$) څخه کوچني دی یا په لاندې ډول:

$\forall \delta > 0 : |x-a| < \delta$ یا $\lim\limits_{x \to a} x = a$ یا $x \to a$ یا $|x-a| \to 0$

له ښي لوري د متحول تقرب: ($x \to a^+$) که چیرې د x د قیمتونو یو متناقص ترادف موجود وي په داسې حال کې چې په تدریجي ډول د a اختیاري عدد ته نږدی شي.

$x: a+0.1,\ a+0.01\ ,\ a+0.001\ ,\ a+0.0001\ ,\ \ldots \to a^+$

له کیڼ لوري د متحول تقرب: ($x \to a^-$) که چیرې د x د قیمتونو یو متزاید ترادف موجود وي په داسې حال کې چې x په تدریجي ډول د a اختیاري عدد ته نږدی شي.

$x: a-0.1,\ a-0.01\ ,\ a-0.001\ ,\ a-0.0001\ ,\ \ldots \to a^-$

نو د x د متحول تقرب د a عدد ته معادل دی د x د متحول تقرب له ښي لوري او د x د متحول تقرب له چپ لوري؛ یعنې:

$x \to a \;\Leftrightarrow\; (x \to a^+\ ,\ x \to a^-)$

د

(c) ketabton.com: The Digital Library

$\forall \delta > 0 : |x-a| < \delta$ یا $\lim_{x \to a} x = a$ یا $x \to a$ یا $|x-a| \to 0$

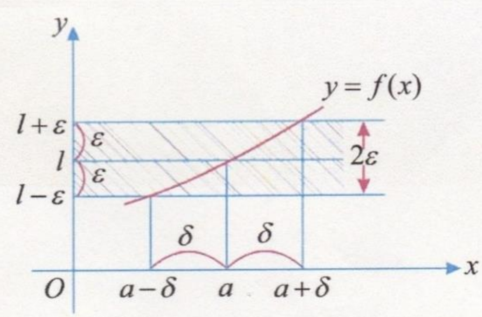
ډول ليکنو سره ګران ليکونکي بلدتيا نه لري او نه داسې څه د مخه راغلي، چې روښانه شوې وي

داسې ليکنې د ښوونځيو لپاره ستونځمنې دي. له دې امله ماهم په خپلو ليکنو کې نه وې راوړې. ګورو چې د کتاب ناسموونکي هم دا څه ناسم يا بې له تشريح کارولي.

په دې هکله زما ليکنه په لاندې کې شته.

درېيم: په لاندې تعريف کې د پوهيدلو څه نه شته او په دې رياضيکي تعريف خو نه پوهيږي، ځکه چې په لاندې يې د پوښتنې د حل نتيجه راوستلې او دا بحث له دې سره په ربښتيا کې هيڅ سر او کارنه لري.

تعريف: که چيرې د $f(x)$ تابع په يوه غير تړلي انټروال کې چې د a عدد په هغې کې ګډون لري کيداى شي چې تابع په a کې نه وي تعريف شوى. که چيرې د x متحول د a عدد ته نږدې شي نو د $f(x)$ تابع د l عدد ته نږدې کېږي، نو ويل کېږي چې د $f(x)$ تابع لېميټ عبارت له l څخه دى، کله چې د x متحول د a عدد ته تقرب وکړي نو داسې يې ليکو: $\lim_{x \to a} f(x) = l$ يا $\begin{matrix} x \to a \\ f(x) \to l \end{matrix}$



$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-l| < \varepsilon$$

$$\lim_{x \to a} f(x) = l \Leftrightarrow (|x-a| \to 0 \Rightarrow |f(x)-l| \to 0)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا سومبولونه ∀ او ∃ نه دي ښوول شوي، چې څه شی دی او څه بلل کیږي.

ښاغلي ليکونکی په اووم مخ کې بيلګه راوړي او بيا دا ښايي، ښي او کيڼې لورې ليميټ يې شميري.

بايد د $\lim_{x\to3}\frac{x^2-9}{x-3}=6$، لپاره $x \neq 3$ وليکي،چې هلته فنکشن تعريف نه دی. دی بيا په ناسمه توګه په جدول کې ليکي. دا چې دا بايد څنګه وليکل شي، زماپه ليکنو کې شته.

دويمه بېلګه: و ښيئ چې $\lim_{x\to3}\frac{x^2-9}{x-3}=6$ سره دی.

حل: د ښي او کيڼي خوا لېميتونه تر څېړنې لاندې نيسو:

x	3.5	3.1	3.01	3.001	...	3^+
$f(x)$	6.5	6.1	6.01	6.001	...	6

$$\Rightarrow \lim_{x\to3^+}\frac{x^2-9}{x-3}=6$$

x	2.5	2.9	2.99	2.999	...	3^-
$f(x)$	5.5	5.9	5.99	5.999	...	6

$$\Rightarrow \lim_{x\to3^-}\frac{x^2-9}{x-3}=6$$

ليدل کېږي چې د ښی خوا او کيڼي خوا لېميتونه سره مساوي دي، نو $\lim_{x\to3}=\frac{x^2-9}{x-3}=6$ دي.

په پورته کې xد 3 قيمت نه شي اخستلی، هلته فنکشن تعريف نه دی، نو له دې امله په جدول کې، نه د ښئ لورې او نه د کيڼې لورې دا ارزښت 3 اخستلی شي، هلته 3 ته ور نږدې کيږي.

د بيلګې حل يې هم بيا سم نه دیٰ کړي، په هغه ورسره بلده لار.

دا هغه د کاغي او د زرکې خبره ده.........

دويمه طريقه: د لېميټ د تعريف په پام کې نيولو سره فرضوو چې د هر اختياري کوچني عدد ε لپاره يو δ شتون لري داسې چې:

$$\forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0 : \ |x-a|<\delta \ \Rightarrow \ |f(x)-l|<\varepsilon$$

$$|x-3|<\delta \ \Rightarrow \left|\frac{x^2-9}{x-3}-6\right|=\left|\frac{(x-3)(x+3)}{x-3}-6\right|=|x+3-6|=|x-3|<\varepsilon$$

$$\Rightarrow \varepsilon=\delta$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د بیلګې د حل نتیجه

$$\varepsilon = \delta$$

دا د دی بحث سره سر او کار نه لري يعنې دا مو موخه نه ده، نو باید ووایم، چې دروند لیکونکي د موضوع څخه بوي هم نه وړي.(بخښنه دې وي، که زما لیکنې داسې لږ توندې برېښي)

او بې ځایه مخ ته ځي، چې څه ترې پوهیدل کیږي هم نه.

له پورتنی اړیکې څخه دا معلومیږي چې ε له δ سره اړیکه لري، که δ ته قیمت ورکړو ε قیمت اخلي او که ε ته قیمت ورکړو δ قیمت اخلي، بنا پر دې هغه تعریف چې د لیمیټ لپاره موجود دی سم دی او تابع لیمیټ لري، یعنې: $\lim_{x\to3}\frac{x^2-9}{x-3}=6$

دې پورته ته په لنډه توګه زما نوره لیکنه او تیکاوی:

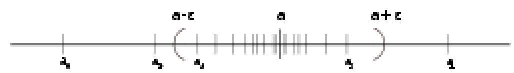
د کتاب په پیل کې راوړل شوې د ترادف یا پرلپسې موضوع باید د یوولسم ټولګي کتاب کې پوره څیړل شوې وی، مګر هلته یې یواځې دا نومونه راوړل شوي او نور لیکونکي – بې له دې، چې د موضوع اړیین څه راوړي - له موضوع څخه تیر شوی.

د دې موعوع څخه موخه د ترادف پولې ته تلنه یا کونورګنت او له پولې اووښتنه یا ناپای ته تلنه یا ډیورګنت او... دي، چې بې له دې په ربښتیا کې د ترادف یا پرلپسې څیړنه کوم غوره والی یا اهمیت نه لري، یعنې خپله موخه له لاسه ورکوي. دا د یوولسم ټوګي د ترادف درس، نو په ربښتیا کې خپل غوره والی او اړیینوالی له لاسه ورکوي. نور سموالي او ناسموالي ته یې ګوته نه نسم، همدا بسیا کوي، چې څه په کې نه دي ویل شوي یا لیکل شوي.

د ۱۲ ـــم ټولګي کتاب ته:

یادونه: دا چې ګومان کیږي د داسې لیکنو سره به بلدتیا لږ وي، نو تشریح به راڅخه لږ ډېره شي.

د ،، پوله ارزښت،، په څیره کې ښوونه



که $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ د حقیقي اعدادو (ګڼونو) ترادف یا پرلپسي وي، نو عدد $a \in \mathbb{R}$ د دې ترادف یا پرلپسي پوله ارزښت بلل کیږي او پرلپسي a ته کونورګیر کیږي یا a ته هڅیږي یا نږدې کیږي، که د هر $\varepsilon > 0$ لپاره په انتروال $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ کې له یوه اندکس یا پیژند نخښې اخوا یا وروسته یا پسې د پرلپسي یا ترادف ټول غړي(دوي یې حدونه یا جملې بولي، نه پوهیږم ولې؟) د انتروال په دننه کې او فقط پای ډېر غړي له انتروال څخه دباندې پراته وي.

(دنورې اوږدې روښانه ونکي شننې څخه تیریږم)

لنډ پیژند یې:

عدد $a \in \mathbb{R}$ د ترادف $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ پوله بلل کیږي، که د ټولو $\varepsilon > 0$ لپاره یو طبیعي یا پیداښتي عدد N شتون ولري، داسې چې $|a_n - a| < \varepsilon$ باور ولري، که $n \geq N.$ وي.

دا پیژند راکوي، چې: د هر $\varepsilon > 0$ لپاره یو ایندکس N شته، داسې چې له دې ایندکس یا پیژندنخښې وروسته د پرلپسې(ترادف) ټول غړې د ε څخه په کم واټن له a لرې پراته دي یعنې له ε څخه چې a ته څومره نږدې دی دا نور هم a ته نږدې دي.

د $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ د پولې ارزښت لیکلو لپاره خپل ځانله سومبول لرو: $\lim_{n\to\infty} a_n = a$

د دې لیکدود سره سم د یوې پرلپسې پوله ارزښت تعریف داسې رالنډولی شو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad\iff\quad \forall\varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N:\ |a_n - a| < \varepsilon$$

د داسې ليکنو لپاره د ε (لوستل: اپيسيلون) توری ورځنی يا مروج شوی.

بيلګه:

په يوه بيلګه کې يې روښانه کوو:

د دې لپاره چې د$\frac{1}{n}$ پرلپسې يا رديف و 0 ته کونورګنت وښايو، يو د مخه ورکړ شوي ε ته يوه په خوښه طبيعي عدد يا ګڼN ټاکو، چې له $\frac{1}{\varepsilon}$ لوی وی، نو د ټولو $n > N$ لپاره باور لري:

$$|a_n - 0| = \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \varepsilon$$

موضوع اوږدولی نه شم، ځکه چې دا يو درس نه دی، دا فقط په موضوع داسې لږ رڼا اچونه ده.

د فنکشن پوله ارزښت:

يادونه: د دې ۱۲ – م ټولګي د درس دا هغه اصلي موضوع ده.

د فنکشن پوله ارزښت په لاندې توګه پيژنو يا تعريفوو:

پيژند: د فنکشن f پوله ارزښت، د x لپاره چې p ته نږدې کيږي، L دی او داسې يې ليکو: $\lim_{x\to p} f(x)=L$

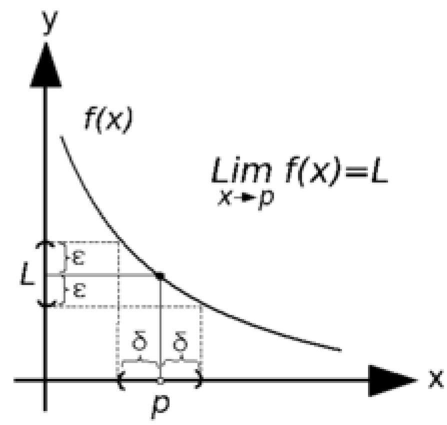
لوستل يې هم همداسې دي لکه پورته تعريف

داسې يې شميرپوهنيز ليک دود باندې تعريفوو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

فنکشن f پوله ارزښت L لري، که د هر 0 < ε لپاره یو 0 < δ شتون ولري، داسې چې د هر x لپاه د δ > |x-p|<0 سره ε > |f(x)-L| هم باور ولري.

د پورته شمیرپوهنیز یا ریاضیکي فنکشن پوله ارزښت لپاره لاندې څیره



پورته دوه تعریفونه برابر ارزښته دي یعنې له یوه څخه بل لاس ته راځي او په څټ یا برعکس یعنې لیکو:

تعریف: د فنکشن f پوله ارزښت، چې x و p ته نږدې کیږي، L دی، ټیک هلته یا هلته او هلته یا هلته او په څټ، یا له دې لاس ته راځي او په څټ یا برعکس چې د هر ε < 0 لپاره یو 0 < δ شتون ولري، داسې چې د هر x لپاه د δ > |x-p|<0 سره |f(x)- ε > |L هم باور ولري.

دلته هم په همدومره بسیا کوو، که څه هم روښانه کیدل نورې شننې ته هم اړتیا لري.

دې ته دلته په اخر کې بیا ګوته نیسم، چې دا شمیرپوهنیز یا ریاضیکې ډول لیکنې ستونځمنې دي او باید ترې تیر شو، د ترادفونو او فنکشنونو لپاره.

دا نور پاتې درس هم په همدې ترتیب ګران لیکونکي لیکلی چې زه نور پرې نه غځیږم.

دا بسیا کوي، چې کتاب د ښوونځیو څخه راټول شي او له سره ولیکل شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ستاسو له سرې سينې څخه – كه ومو لوسته- ډېره مننه.

ستاسو ډاکتر ماخان شينواری.

د ډاکتر ماخان شينواري ليکنې:

1988 Vienna (Austria):

لومړی:

H.K. Kaiser , M. Shinwari : Aproximation compact pological algebra : contributions to general algebra 6 ; Page 117 – 122

1987 Vienna (Austria):

دويم:

Diss . Uni. Interpolation und Aproximation durch Polynime in Universalen Algebren . Wien

Dissertation at the Interpolation and Aproximation by Polynome in universal Algebras, University of Vienna/Austria

لاندې د شميرپوهنې پښتوټول کتابونه په المان کې د ،، افغانستان کلتوري ودې ټولنه،،له خوا چاپ شوي دي

2000 Bonn (Germany):

(c) ketabton.com: The Digital Library

دریم: د شمیرپوهنې ستر کتاب : د شمیرپوهنې برسیره د انجنري، فزیک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زده کوونکو لپاره (دا کتاب په ۹۰۰ مخونو کې چاپ او دا نوې لیکنه به یې ځنو ځایونو غزېدلې او ځنې ځایونه ترې لرې شوي دي)

2003 Bonn (Germany):

څلورم: ځمککچپوهنه(هندسه) ، په سلو، زرو کې شمیرنه، د ګټې – او کټې د کټې شمیرنه ، د اختمالوالي شمېرنه کتاب د ښوونځي ټولي اړتیاوې پوره کوي

2003 Bonn (Germany):

پنځم: الجبرونه (د الجبر بنسټونه دي)

2003 Bonn (Germany):

شپږم: د شمیرپوهنې انګرېزي – پښتو ډکشنري.

2003 Bonn (Germany):

اووم: د شمیرپوهنې الماني ـ پښتو- او پښتو الماني ډکشنري

Mathematical dictionary German/ Pashto and Pashto/German

2003 Bonn (Germany):

اتم: دفرنڅیال برابرون (دا کتاب په دې ځانګه کې یو پیل دی، ساده لیکل شوی)

Differential equation Translation; An Introduction

Bonn (Germany): 2003

نهم: د شمیر پوهنې فرمولونو ټولګه

Mathematical Formulas

2003 Bonn (Germany):

(c) ketabton.com: The Digital Library

لسم: شميرپوهنه له عربي په پښتو

1997 Bonn (Germany):

یوولسم: د افغانستان په هکله سپيني خبرې: په   المان کې

،،د افغانستان روغې او بيا ابادولو تولنه،، له خو

.يادونه: له ۲۰۰۰ کال دمخه ډاکټر ماخان شينواري د ،،د افغانستان روغې او بيا ابادولو ټولنه،، له خوا درې ساسي مجلې هم را وستلې.

د ډاکتر ماخان ،،ميرې،، شينواري ليکنې او ژباړې چې په چاپيدو يې پيل کيږي

2012 Bonn; Germany; Kabul Afghanistan

ژباړې:

:   *Prof. Brinkmann. (From Brinkmann.du.de)*

لاندې د برينکمن ليکنې چې له پرينکمن ن ج څخه ژباړل شوي دي.

۱ -   شميرپوهنه د ښوونځي لپاره لومړی ټوک

۲ – شميرپوهنه د ښوونځي لپاره   دويم ټوک

۳ – شميرپوهنه د ښوونځي لپاره   دريم ټوک

۴ - د احتمالوالي شميرنه   د ښوونځي لپاره

۵ – احصايه يا ستاتيستيک   دښوونځي لپاره

لاندې کتابونه د شتوتګارت د پوهنتون د استادانو د لکچرونو څخه چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپاره شوي را ژباړل شوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۶ – انالیزی ۱

۷ – انالیزې ۲

۸ – کرښیز الجبر

۹ - د شمیرپوهنې بنسټونه

۱۰ - د فرمولونو ټولګه

۱۱ – فنکشنل انالیز

۱۲ – وکتور شمیرنه

نورې ژباړې

۱۳ – له www./grundstudium.info/linearealgebra څخه:کرښیز الجبر

۱۴ – Georg Gutenbrunner ګڼونپوهنه یا د اعدادو تیوري

زما لیکنې

Bonn (Germany):

۱۵ - د شمیرپوهنې ستر کتاب دویم چاپ د پوره تغیراتو سره : دا کتاب د شمیرپوهنې برخې برسیره د

انجنري، فزیک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زدهکوونکو لپاره پوره ګټور دی. په کتاب کې د اړتیا سره زیاتونه او کونه راغلي

۱۶ - ځمککچپوهنه (هندسه) دویم چاپ د پوره تغیراتو سره

۱۷ – الجبر بنسټونه دویم چاپ له تغیراتو سره

۱۸ - ډېرۍ پوهنه یا سټ تیوري

۱۹ – د شمیرپوهنې سم اند (منطق ریاضي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲۰ - د یو څو شمیرپوهانو ژوندلیک

۲۱ – د شمیر پوهنې ګډې وډې لیکنې

-۲۲ داهم ژباړه ده، خو لیکونکی یې متآسفانه راڅخه نابلد شوی: د مشتق او انتیګرال شمیرنو ته تمرینونه او اوبیونې یا حلونه یې

۲۳ – د شمیرپوهنې انګریزي پښتو او عربي + دري ډکشنري

۲۴ – د شمیرپوهنې پښتو انګرېزي ډکشنري

۲۵ – د شمیرپوهنې پښتو ډکشنري د شمیرپوهنیزو ویېونو په پښتو روښانه ونه

۲۶ - د زړه له کومې(دا هغه لیکنې دي، چې ځنې یې په نړیول جالونو کې خپرې شوي دي.)

۲۷ – د افغانستان په هکله سپینې خبرې، چې وبه غزیږي.

نوري لیکنې، چې په ژباړه یې پیل شوی، خو لا پوره نه دي

– د شتوتکارت پوهنتون لکچرنوټونو څخه ، چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپریږي:

د ګروپونو تیوري

- د ښوونځي لپاره فزیک د برینکمن لیکنه

له پنځم ټولګي څخه تر اووم ټولګې پورې ژباړل شوی (دا چې زما دویم مسلک فزیک دی، دا لیکنې ژباړم. دا هم د دې لیکوال یوه ډېره ښه لیکنه ده، چې -د شمیرپوهنې په څیر- دلته هم زیات تمرینونه د حل یا اوبیونې سره په کې راغلي او ماته زیات ګټور برېښي)

دا لاندې د ښوونځي کتابونه دا اوس پای ته ورسیدل:

شمیرپوهنه د اوم ټولګي له پاره

شمیرپوهنه د اتم ټولګې له پاره

(c) ketabton.com: The Digital Library

شمیرپوهنه د نهم ټولګي له پاره

شمیرپوهنه د لسم ټولګي له پاره

شمیرپوهنه د یولسم ټولګي له پاره

شمیرپوهنه د دولسم ټولګي له پاره

ریاضي برای صنف دوازده

د لیکوال ژوند ته لنډه کتنه

ماخان په اولني نوم میرڼي شینواری د اروابنادي پستو او اروابناد نوررحمان زوي په ۱۳۲۰ ؟ ه لمریز کي د شینوارو هسکه مینه کې دې نړۍ ته سترګې راغړولي.

د هسکې مینې د لومړنې ښوونځي (د لومړنیو زده کوونکو څخه) څخه وروسته د رحمان بابا لیسه له ۱۹۵۴ تر ۱۹۶۵ پورې(ښوونځي له لومړي ټولګې پیل او د دویم ټولګې څخه ګام او پای).

د ۱۹۶۶ تر سپتبر د کابل طب پوهنځی. له ۱۹۶۶ سپتمبر څخه د اتریش برس، چې هلته یې د شمیرپوهنې ډاکتري په پوره ستونځو تر لاسه کړه.

د۱۹۹۸۷ ش ک تر ۱۹۸۸ د فبروري تر پای د دباندنیو چارو وزارت کې مامور.

د ۱۹۸۸ مارچ څخه تر ۱۹۹۲ جون پورې په بن کې د افغانستان جمهوریت سفارت شارژد افیر(صفر نه وو).

له هغې وروسته په جرمنې کې سیاسي پناه. له ۲۰۰۸ مارچ څخه د ۲۰۰۹ دسمبر پورې د د ریاضي څانګه کې د پوهنې وزارت درسي نساب کې دنده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ماخان میرې په ۱۹۷۲ کې له لرې د میرمن ښاپیرۍ سره واده شوی، چې د واده خبر ورته اتریش ته راغی.

ده د میرمن ښاپیرۍ سره په ۱۹۶۳ ز ک کې کوژده کړې وه.

دوي ته لوي څښتن په اتریش ویانا کې د مای په شلم ۱۹۷۹ ز ک دوه بچیان وبخښل، چې څانګه او اباسین نومیږي. څانګه په المان کې د پوهنتون علمي همکاره وه او د حقوقو ډاکتره ده او اباسین ملي اقتصاد او ټولنیزه سایکولوژي لوستلي.

Get more e-books from www.ketabton.com
Ketabton.com: The Digital Library