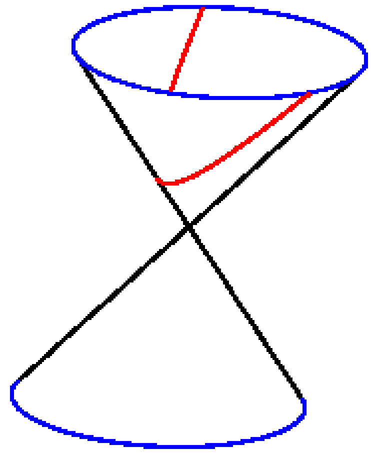
الجبر (كرنيز) لاينيز

Lineare Algebra

Ketabton.com

(c) ketabton.com: The Digital Library





ډاکتر ماخان(میرزی) شینواری

(c) ketabton.com: The Digital Library



لاينيز(كرښيز) الجبر ۱

بنسټيزجوړښتونه / ګروپونه او تنونه ۱

ګروپ ۱

لاندې ګروپونه ۳

ګڼونډېرۍ یا د اعدادو سټ ۳

پرموتيشونونه ( (د توکو يا اعدادو) ځای بدلون) ۴

د ځای بدلنون (پرموتيشن) څيوکليکي يا تل ۵

مودولوس ۸

لومړني تنونه يا پټي يا ورشو ۱۱

ګالويز– بدن ۱۳

په ګروبونو ياډلو کې تورنی ۱۴

وکتورفضا يا وکتوري فضا ۱۶

د n - ګوني وکتورفضا ۱۹

لاندې فضا يا برخه فضا ۲۰

ګرښيز کمبينيشن ۲۲

کرښيزه هيولې يا سپاين يا سمڅ ۲۳

(c) ketabton.com: The Digital Library



ننوتی – یا محدب کمبینیشن ۲۵
حقيقي- یاریینتونی سکالار ضرب ۲۶
سکالار ضرب ۲۷
مایل سیومتریک ۲۸
د کوشي-شوارڅ – نامساوات ۳۰
نورم ۳۱
هوموګینیوالی ۳۱
د سکالار ضرب نورم ۳۲
ماکسیموم – نورم ۳۳
د حقيقي- یا ریل وکتورونو سکالار ضرب ۳۴
د کمپلکس وکتورونو سکالار ضرب ۳۵
د دوه وکتورونو ترمنځ کونج ۳۶
د پیتاګوراس(فیثاغورث) جمله ۳۷
کرښیز نابلواکوالی یا ۳۹
بنسټ Basis ۴۲
بعد یا پراخیدونی Dimension ۴۴
اورتوګونال یا ولاړ بنسټ ۴۶
اورتوګونال پروجکشن ۴۹
د ګرام-شمیت تګلار یا قانون ۵۱
کرښيزه ځیرونه (فنکشن یا تابع) ۵۴

(c) ketabton.com: The Digital Library



د کربنیزو توابعو کمپوزیشن ۵۷
ماتریکس ۵۸
یو کربنیز فنکشن یا تابع ۶۱
یو کربنیز فنکشن یا تابع ۶۳
Bild او Kern معنا ځیره یا شکل او زړي ۶۵
معکوس یا په څټ تابع (ځیرونه یا فنکشن ۶۷
د ماتریکسونو وکتورفضا ۶۹
د ستراسن( وبینه: شتراس) الګوریتم ۷۱
کوموتاتور ۷۲
په څټ یا معکوس ماتریکسونه ۷۴
تراسپوني او ادجونګیري ماتریکسونه ۷۶
شپور Spur ۷۸
د یوه ماتریکس رانګ ۷۸
د یوه ماتریکس نورم ۸۰
هوموحنیتي: ۸۱
هوموحنیتي: ۸۳
د ماتریکس د ډکوني جوړښت ۸۴
اورتوګونال او یونیتار ماتریکسونه ۸۴
د هادامارد – ماتریکسونه ۸۵

(c) ketabton.com: The Digital Library



د فوریر (وبینه: فوریې) ماتریکسونه ۸۶

نورم ریښتونې یا - وفاداره اورتوګونال ا و یونیتار ۸۷

څیوکلیکي ( تلبیرته راګرځېدوني) ماتریکسونه ۸۹

ستوښاستیکي ماتریکسونه ۹۰

دیترمینانت د انتیسیومتري کرښیزفورم په حیث ۹۱

2 - لیکیزه دیترمینانت ۹۴

د ساروس شیما یا شکل ۹۵

لوریز حجمونه ( ډکي) ۹۶

د دیترمینانتونو لپاره قاعدې ۹۸

د ځانګړو ماتریکسونو دیترمئناتونه ۱۰۱

د دیترمینانتو بڼه بدلون ۱۰۴

د دیترمینانتو ودیزیینه ۱۰۵

د 3 ټکو له لارې د یوې سطحې ۱۰۸

د واندرموند – دیترمینانتونه ۱۱۱

کرښیز مساوات سیستم ۱۱۲

برېښنایي جریاندایره ۱۱۴

د یوه کرښیز مساوات سیستم حلوړوالی ۱۱۵

دیترمینانت او د یوه مساوات سیستم حلوړوالی ۱۱۸

د کرامر قاعده ۱۲۰

(c) ketabton.com: The Digital Library



په ځښ لور ځای په ځای کول ۱۲۳
د ګاوس ترانفورميشن ۱۲۵
د ګاوس د له منځه وړنه ۱۲۶
د ايښيلون بڼه ۱۲۹
د ايښلون- بڼه د يوه ل م س (کرښيز مساواتسستم)حل ۱۳۱
رانګ او د ک م س(کرښيز مساواتسيستم) حلوړوالی ۱۳۴
د انډول کرښه( انډولکرښه) ۱۳۵
د برابرونې حل يو بل سره يوغړيز........ ۱۳۷
الجبر - کرښيز مساوات سيستم-برابرونې پرابلم ۱۳۸
نورمالمساواتونه ۱۳۸
توموګرافي ۱۴۱
آيګن-ارزښت او آيګو-وکتور ۱۴۳
ورته والي – ترانفورمېشن ۱۴۵
کرکتريستکي پولينوم ۱۴۷
الجبری او هندسي ډېرځلوالی ۱۵۰
د آيګن –ارزښتونو جمعه او ضرب ۱۵۲
د ماتريکسونو رينتونی توابع ۱۵۴
د آيګن – وکتورونو بنسټ ۱۵۵
د ځيوکليکي ماتريکسونو دياګونالونه ۱۵۷

(c) ketabton.com: The Digital Library



د ماتريکسونو توان ۱۶۰

د فيبوناچي پرلپسې يا – ترادف ۱۶۲

نورمال ماتريکسونه ۱۶۴

نورمال ماتريکسونه... ۱۶۵

مثبت ديفينيت ماتريکسونه ۱۷۰

ريلا ي – ويش ۱۷۰

مثلث بڼه ۱۷۱

اصلي وکتورونه ۱۷۳

د اصلفضا څيوکليکي بنسټ ۱۷۵

د جوردان بڼه ۱۷۹

د (4x4) -ماتيکسونو جوردان-بڼې ۱۸۶

په زيګولار ارزښت توټه کونه ۱۸۹

فاسد معکوس ۱۹۱

د توپوګرافيکي کچونداتنونو ټيکاوی يا اصلاح ۱۹۶

د مور-پينروز-شرطونه ۱۹۷

اورتوګونال او ځانګړي اورتوګونال ګروپونه ۱۹۸

هندارونه ۱۹۹

څرخون ۲۰۰

څرخونمحور او څرخونکونج ۲۰۱

(c) ketabton.com: The Digital Library




| | |
|---|---|
| د يو خرخون په ضربيونو توته كونه | ۲۰۵ |
| څرخونماتريكس | ۲۰۸ |
| مربعيزه فورم(بڼه) | ۲۱۰ |
| كوادريكونه | ۲۱۱ |
| د كوادريكونو شډله توته ونه | ۲۱۲ |
| اصلي- محور –ترانفورميشن | ۲۱۴ |
| مخروط غوڅی | ۲۱۸ |
| د دوه بعدې كوادريكونو د اوكليدي نورمال بڼه | ۲۲۰ |
| د ډاكتر ماخان شينواري ليكنې | ۲۳۲ |

(c) ketabton.com: The Digital Library



# سریزه

زه د سریزې په هکله ډېر څه نه لیکم، خو دې ته ګوته نیسم، چې ما د دې سرلیک لاندې دوه لیکنې کړي. دا مخ ته پرته د هغو لوستونکو لپاره ده، چې د شمیرپوهنې سره داسې لږڅه بلدتیا ولري، دا به ښه وي، خو اړینه هم نه ده.

دا لیکنه خورا مفصله ده نسبت هغې بلې ته

تر مخ راوړنه: فنکشن که په نورو ژبو کې وکورو، نو په پښتو ژباړه به یې څیره کونه ( لنډ : څیره ونه) وي. په فنکشن کې یو څه په یو بل څه یا خپل ځان څیره کیږي. چې لومړی یې څیره کوونکی او دویم یې څیره ده یعنې دوه مجهولې یا واریابلې دي، چې یوه په بله څیره کیږي. لومړی خپلواک دئ او دویم یې د لومړي په واک کې دی، نو له دې امله م عربي تابع بللې، یعنې دا د فنکشن تابع ده، چې موږ به یې هم دا ناسم نوم وکاروو، چې ګران شمیرپوهان راته په قهر نه شي.

که زما په دې لیکنه کې څیرونه راځي، نو هغه یې زموږ په ناسمه توګه همغه تابع ده. دا مو مو پوهیږم، چې له پامه نه لویږي.

ما په یو ځل ډېر ةتابونه وژباړل او ولیکل، چې لیکنیز تاتیکاوي به ولري. د هغې به راته بخښنه وکړئ. دا څه چې تاسو ته وړاندې کیږي، پوره :تور دي او دې ته دې ریاته پامرنه وشي.

دا زما ټولې لیکنې به تر یوې اندازې ستونځې ولري، خو باور وکړئ، چې غوټې پسې وهئ په لاس درځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



مننه: د    ټولنې او په ځانګړي ډول د هغې د مشر ښاغلي ډاکتر یحی وردګ څخه زیاته مننه، نه داچې زما کتابونه یې [اپ ته ورسول بلکه په دې کار کې یې بط سارې هڅې کړي او بې له شکه یې خپلو یوادوالو ته ستر خدمت کړي، کور دې ودان وي، لوي څښتن دې ورته اجرونه ورکړي او د لا ډېرې بریاوو په هیله دې زموږ دعا ورسره مل وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



# لاينيز(کرښيز يا خطي) الجبر

# بنسټيزجوړښتونه / ګروپونه او تنونه

# Grups and fields

## ګروپ

د يوه ګروپ $(G,\diamond)$ لاندې يوه ډېرى $G$ پوهيږو، په هغې چې يو دوه ييزه کارونه يا عمليه $\diamond$ داسې پيژندل ولري يا تعريف شوي.

$$\diamond : G \times G \longmapsto G \,,$$

دا په دې مانا، چې هره جوړه $(a,b)$ د $a,b \in G$ سره د $a \diamond b \in G$ يو توکى باندې تنظيم دى. برسيره پردې لاندې خويونه بايد باور ولري:

Assoziativität: اسوښياتيو والی يا اسوښياتيو قانون

$$(a \diamond b) \diamond c = a \diamond (b \diamond c) \qquad \forall a,b,c \in G$$

neutrale Element نابيلي توکى: يو يواځنى ټاکلى ناپيلى توکى $e \in G$ شته دا په دې مانا ، چې

$$e \diamond a = a \diamond e = a \qquad \forall a \in G$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



Inverses Element مخامخ یا په ضد توکی یا برعکس توکی: هر توکي $a \in G$ ته یو یوائخنی ټاکلی مخامخ یا په څټ یا برعکس توکی $a^{-1} \in G$ شته د $a \diamond a^{-1} = a^{-1} \diamond a = e$ سره

ګروپ کموتاتيو یا د ابل ( ابل Abelد شميرپوه نوم دی) ګروپ بلل کيږي، که کارونه $\diamond$ کموتاتيو وي:

$$a \diamond b = b \diamond a \qquad \forall a, b \in G .$$

له اړوندتوب څخه ليدل کيږي، چې کومه کارونه کارول کيږي، نو زيات وخت د $(G, \diamond)$ په ځای فقط $G$ ليکل کيږي.

په باندې(بيجکتيو) رييل فنکشنونه یا توابع(بلواک) bijective real Functions
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ د $\circ$ یو په بل پسې کارونې له مخې یو ګروپ جوړوي.

ساده ازمايل کیدی شي، چې یو په بل پسې اينونه اسوځياتيو ده :

$$((f \circ g) \circ h)(x) = f(g(h(x))) = (f \circ (g \circ h))(x) .$$

ناپیلی توکه په روښانه توګه لاندې فنکشن دی

$$e : \quad x \to x$$

بالاخره هر په باندې بلواک لپاره یو په څټ بلواک شته دی

$$f^{-1} : \quad f(x) \to x .$$

یو په بل پسې ترنه کموتاتيو نه ده : د بیلګې په توګه لاندې لرو :

$$f : \; x \to 2x , \quad g : \; x \to x + 1$$

$$f \circ g \neq g \circ f .$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$f(g(x)) = 2(x+1) \neq 2x+1 = g(f(x)) \,.$$

## لاندې ګروپونه

د یوه ګروپ $(G,\diamond)$ لپاره $(U,\diamond)$ لاندې ګروپ بلل کیږي، که $U$ د $G$ برخدېرۍ وي او $(U,\diamond)$ پخپله یو کروپ جوړ کړي

ددې لپاره ، چې و ازمایو ، چې ایا $U$ و ترڼې $\diamond$ ته یو ګروپ جوړوي ، که نه، نو ازمایو ، چې $U$ و نښلونې $\diamond$ ته او د په ښې جوړښت ته بنده ده. یانې باور لري:

$a, b \in U \;\Rightarrow\; a \diamond b \in U$ او $a \in U \;\Rightarrow\; a^{-1} \in U$

## ګڼوندېرۍ یا د اعدادو سټ the set of numbers

$$\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

Z و جمعې(زیاتون) ته یوکموتاتیو ګروپ دی، خوندي لرنې یا اینکلوزیون ته ټول ګڼونه و $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ او $\mathbb{C}$ ته یو لاندې ګروپ جوړوي او راشنل ګڼونه و $\mathbb{R}$ او $\mathbb{C}$ ته او ریبل ګڼونه وکمپلکس ګڼونو ته یو لاندې ګروپ جوړوي.

که چیرې صفر لرې شي، نو ضرب یا ځله ونه هم یو ګروپ جوړښت تعریفوي:

$$\mathbb{Q}\backslash\{0\} \subset \mathbb{R}\backslash\{0\} \subset \mathbb{C}\backslash\{0\} \,.$$

## تړاو جدول یا تړاوتخته

کارونه $\diamond$ په پاې ګروپ $G = \{g_1, \ldots, g_n\}$ باندې کیدی شي د تړاوماتریکس

$$A: \quad a_{i,j} = g_i \diamond g_j$$

له لارې روښانه شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



لاندې ځېرونه ( بې له پرموتېشن یا بدلون څخه) آول تړاوجوړښتونه ښايي د يوه ګروپ لپاره د $n \leq 4$ سره :

$n = 2$

| $\diamond$ | $e$ | $a$ |
|---|---|---|
| $e$ | $e$ | $a$ |
| $a$ | $a$ | $e$ |

$n = 3$

| $\diamond$ | $e$ | $a$ | $b$ |
|---|---|---|---|
| $e$ | $e$ | $a$ | $b$ |
| $a$ | $a$ | $b$ | $e$ |
| $b$ | $b$ | $e$ | $a$ |

$n = 4$

| $\diamond$ | $e$ | $a$ | $b$ | $c$ |
|---|---|---|---|---|
| $e$ | $e$ | $a$ | $b$ | $c$ |
| $a$ | $a$ | $e$ | $c$ | $b$ |
| $b$ | $b$ | $c$ | $e$ | $a$ |
| $c$ | $c$ | $b$ | $a$ | $e$ |

$n = 4$

| $\diamond$ | $e$ | $a$ | $b$ | $c$ |
|---|---|---|---|---|
| $e$ | $e$ | $a$ | $b$ | $c$ |
| $a$ | $a$ | $e$ | $c$ | $b$ |
| $b$ | $b$ | $c$ | $a$ | $e$ |
| $c$ | $c$ | $b$ | $e$ | $a$ |

دا ګروپونه ټول ابل ګروپونه دي، لکه د ماتريکس $A$ د سیومتري ( $a_{i,j} = a_{j,i}$ )چې لیدل کيږي.

لومړی نابل ګروپ شپږ توکي لري او د $\{1, 2, 3\}$ توکو د پروتېشن له مخې پېژندل کېدی شي

Permutations پرموتيشونونه ( (د توکو یا اعدادو) ځای بدلون)

د په خوښه ډېری M لپاره د بیجکشن ( په کې ځيرونه یا په کې فنکشن) لاندې له M په Mکې ، چې کمپوزیشن کارونه یا ځیرونه یی د کارونې په ځیر وي، یو ګروپ پوهیږوو داسې په نامه د M سیومتري ګروپ.

لنډ : د M په M کې ځيرونې ته پرموتېشن یا بدلون وایو.

که $M = \{1, 2, \ldots, n\}$ وي، نو د سیومتري ګروپ $S_n$ څخه غربيږو، چې ګراد یا درجه يې n وي.

د $S_n$ ډېری د $\pi$ توکي $n!$ پرموتيشن یا بدلون بلل کيږي او داسې يې ليکو

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ \pi(1) & \pi(2) & \pi(3) & \ldots & \pi(n) \end{pmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



پرمېرتيشنګروپ په ټوليزه توګه کموتاتيو نه دئ، لکه د لاندې بيلګې څخه  ليدل کيږي

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

د ځای بدلنون (پرموتيشن)  څيوکليکي يا تل بيرته راګرځيدونی  ليکندود:

پرموتيشنونه داسې په نامه څيوکليکي ليکندود له لارې  هم ورکول کيږي..يو څيکلوس يا تل بيرته راګرځيدنه د يوه توکي او د  هغه له څېرو، چې ډيرځله د بدلون يا پرموتيشن  له لارې  منځ ته راځي،  جوړه ده، تر څو چې بيرته هغه  پيل توکي يا وتونتوکي ته ورسيږي.   د  هغو توکو څخه، چې  په لومړي  تلبېرته راګځيدني کې منځ ته نه راځي، نور څيوکلونه جوړيږي ، تر څو ټول  توکي رامنځ ته شي. څيکلونه د توکو د ګڼون(تعداد) ټيټيدونکي يا لوېدونکي ډول تنظيم  کيږي او په  کرو نوکانوکې يو پر بل پسې ليکل کيږي. هغه څيوکلونه يا تلبيرته راګرځيدوني ، چې اوږدوالی يې ١ وي نه ليکلکيږي.

د بيلګې په توګه دئ

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 3 & 2 & 6 & 5 & 1 \end{pmatrix} \equiv (1\,4\,6)\ (2\,3)\ (5)$$

همداسې

$$\pi = (1\,4\,6)\ (2\,3)\ .$$

د پرموتيشن   ترانسپوني کوونه يا په بل ډول ليکنه او سيګنوم

يو ترانسپوزيشن (ځای بدلون)

$$\tau = (j\ k)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



د j او k بدلون دی. ددې ساده یا بنسټیز پرموټیشن ترڼې سره دا پرموټیشن $\pi$ داسې انځورېدی شي:

$$\pi = \tau_1 \circ \cdots \circ \tau_m \,.$$

دلته برابرازښتوالی ( جوړه یا ناجوړه m ) یوائځنی ټاکلی دی، او

$$\sigma(\pi) = (-1)^m$$

د پرموټیشن مخ نخښې یا د پرموټاشن زیګنوم $\pi$ په څیر $\pi$ ټاکو یا تعریفوو.

د

$$\tau_1 \circ \cdots \circ \tau_m = \pi \in S_n$$

لپاره او د $k = \pi(n)$ سره دی

$$\tilde{\pi} = (k, n) \circ \pi \in S_{n-1} \,,$$

ځکه چې د ترانسپوزیشن کمپوزیشن سره n کره په ځای نیول کیږي یا ځای په ځای پاتیږي. ایندوکتیوInduktiv ( د ځانګړي په تولیز پایونه) کیدی شي و نیول شي یا فرض شي، چې برابرارزښتوالی یا پاریټي د $\tilde{\pi}$ په ایندوڅیري توټه ونه کې یوائځنی ټاکلې ، پسې د $(-1)^m$ مخنخښه.

ددې لپاره، چې د پرموټیشن

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

سیګنوم و ټاکو، نو

$$(\pi(1), \ldots, \pi(6)) = (6, 5, 3, 1, 2, 4)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



د ترانسپوزیشن سوکڅیسیو( sukzessiv) پل په پل یو بل پسې) د کانوني لړۍ پرلپسې په څیر لیکنې ته بیایو:

$$(1\ 6):\qquad (1\ 5\ 3\ 6\ 2\ 4)$$

$$(2\ 5):\qquad (1\ 2\ 3\ 6\ 5\ 4)$$

$$(4\ 6):\qquad (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6)\,.$$

په دې پسې یا له دې امله

$$(4\ 6)\circ(2\ 5)\circ(1\ 6)\circ\pi$$

کټمټوالی یا ایدنټیک ده، همداسې

$$\pi=(1\ 6)\circ(2\ 5)\circ(4\ 6)$$

او

$$\sigma(\pi)=(-1)^3$$

الترناتیو یا بدیلي سرې کړی شي څویکلیکي لیکډوله وکارول شي:

$$\pi=(1\ 6\ 4)\ \ (2\ 5)\ \ (3)\ .$$

ځکه چې د k اوږدوالي یوه څیوکلوس $\tau$ لپاره $\sigma(\tau)=(-1)^{k-1}$, دی

$$\sigma(\pi)=(-1)^2\cdot(-1)^1\cdot(-1)^0=-1\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



## مودولوس Modulus

(که دوه ګڼونه ۱۳ او ۵ ولرو او ۱۳ په ۵ وویشو، نو لاس ته ۲ راځي د ۳ پاتې سره. دا داسې ليکو:

13 : 5 = 2

پاتې 3

ليکلی شو 0 = 5 : ( 13-3) دا په دې مانا چې ګڼ ۵ ګڼ3-13 وېشي

پيژند (ټاکونکی یا تعریف ) که تولګنونهx او y او یو طبيعي عدد يا پيداښتي ګڼ a ولرو ، نو وايو ،، x کونګروانيځ y مودولو a (mod a) ده،، په نخښنه x≡ymod a ، که x≡ymoda نه وي، نو واي چې : x د y سره کونګروانيځ مودولو a(moda) نه ده ،،يعني x≢ymod a

مودولوس Modulus

لرو a > 0 او $x \in \mathbb{R}$ . د $x \bmod a$ ( لوستل : x مودولو a )لاندې په a باندې د x وېشنې پاتې پوهيږو، دا په دې مانا، چې

$$x \bmod a = x - na \in [0, a)$$

د يوه تولګڼn لپاره . که باور ولري

$$x \bmod a = y \bmod a\,,$$

نو x او y کونګروانيځ مودولو a بلل کيږي.

پاتيتولګی(باقي-)( مودولو) modulo n

(c) ketabton.com: The Digital Library



ډېرئ $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ د ابل ګروپ جوړوي د زياتون يا جمعې

او د $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z} \bmod n$ سره په نخښنه کيږي.

پام دې وي، چې ضرب modulo $n$ په $\mathbb{Z}_n$ د ګروپ جوړښت نه تعريفوي، خکه چې 0 په څېټ توکی نه لري.

د دې روښانه بيلګې $\mathbb{Z}_4 = \{0, 1, 2, 3\}$ په بنسټ اسان ارماېښت کيدی شي، چې زياتون يا جمعې، همداسې کمون يا تفرق د مودول – کاروني يا عمليې سره زغموږ دي.

د بيلګې په توګه دی

$$1 + 3 \bmod 4 = 0, \quad 0 - 2 \bmod 4 = 2$$

او داسې نور

سره له دې څل مودولو ۴ (modulo $4$ )مو د ګروپ تيوري ته نه لاربنودوي، خکه چې

$$1 \cdot 2 \bmod 4 = 3 \cdot 2 \bmod 4 = 2\,.$$

دا د ناپيلي توکې د يواځيوالي سره په مخامخوالي يا تضادګې پروت دی

## بدن( جسم يا تن يا پټی Field)

يوه ډېرئ ( سټ) چې په هغه کې يوه جمعه ``+,, او يو ضرب ``· ,,تعريف وي، بدن يا پټی يا ورشو بلل کيږي، که لاندې خويونه په کې باور ولري:

اول – د ګروپ د جمعې يا زياتيز جوړښت: $(K, +)$ يو ابل ګروپ دی د توکی( سفرتوکي) سره.

(c) ketabton.com: The Digital Library



دا په دې معنا چې د ټولو $a, b \in K$ لپاره باور لري.

| | | |
|---|---|---|
| $a+b$ | $=$ | $b+a$ |
| $(a+b)+c$ | $=$ | $a+(b+c)$ |
| $a+0$ | $=$ | $a$ |
| $a+(-a)$ | $=$ | $0\,,$ |

دويم – دلته $(-a)$ د $a$ په څېر يا معکوس توکی دی.

دريم – د ضرب ګروپي جوړښت: $(K\backslash\{0\},\cdot)$ يو د ابل ګروپ دی د ناپيلي توکي 1 سره( يوي توکی يا که غواړئ واحد توکی) دا په دې معنا چې د ټولو $a, b, c \in K\backslash\{0\}$ لپاره باور لري:

چيرته چې $(-a)$ و $a$ ته په څېر يا پرعکس توګی دی.

د ضرب ګروپي جزړښت : $(K\backslash\{0\},\cdot)$ يو ابلګروپ دی د ناپيلي توکي ( يوي توکی)، دا په دې معنا چې د تولو $a, b, c \in K\backslash\{0\}$ لپاره صدق کوي

a.b=ba

(a,b).c=a.(b.c)

a.1=a

1=$a \cdot a^{-1}$

(c) ketabton.com: The Digital Library



د کوم سره چې $a^{-1}$ د $a$ په څټ يا برعکس توکی دی.

ديستريبيوتيو قانون: $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$ د ټول $a,b,c\in K$ لپاره.

د ريښتونو اعدادو $\mathbb{Q}$ ډېرۍ، د حقيقي اعدادو $\mathbb{R}$ ډېرۍ او د کمپلکس اعدادو $\mathbb{C}$ ډېرۍ

د شميرنې قاعده يې سملاسي د اړونده تړنې له لارې لاس ته راځي. صفرتوکی يې 0 او يويتوکی يې 1.

همداسې يې د کمپلکس عدد $z=x+\mathrm{i}y\neq 0$ يوې توکی نسبت و ضرب ته $w=\frac{x}{x^2+y^2}+\mathrm{i}\,\frac{-y}{x^2+y^2}$, دی، ځکه چې لرو:

$$z\cdot w=(x+\mathrm{i}y)\left(\frac{x}{x^2+y^2}+\mathrm{i}\,\frac{-y}{x^2+y^2}\right)=\frac{x^2-\mathrm{i}^2y^2}{x^2+y^2}+\mathrm{i}\,\frac{-xy+yx}{x^2+y^2}=1+\mathrm{i}0\,.$$

## لومړني تنونه يا پټي يا ورشو

د هر لومړني عدد $p$ لپاره $\mathbb{Z}_p=\{0,1,\ldots,p-1\}$ د ډېريو يو تن دی د د جمعې او ضرب موډولو $p$ سره.

د په څټ – يا برعکس توکي شتون پورې ، نسبت و ضرب ته د تنونو لپاره همدا اوس په ټول اعدادو کې او د باقيتولګيو لپاره به ميراث پاتي شي.

د $a\in\{2,\ldots,p-1\}$ لپاره کيدی شي $a^{-1}$ په لاندې توګه جوړ شي. لومړی سړی په پام کې نيسي چې، $a^i\neq 0 \bmod p \quad \forall i\in\mathbb{N}\,.$

(c) ketabton.com: The Digital Library



که $a^i = np$ وی، نو د لومړي تن تجزيې څخه به ولرو، چې په $p$ ویشل کیږي، څه چې د $a < p$ له امله ناشونی دی. که اوس پرلپسې $a^i \bmod p, \quad i = 0, \ldots, p-1$ , په پام کې ونیسو

، نو باید کم له کمه یو پاتې دوه واره رامنځ ته شي، یعنې

$$a^{i_1} = a^{i_2} \bmod p\,, \quad i_1 < i_2$$

به ضدق وکړي. له دې سره به وي:

$$a^{i_2 - i_1} = a^{i_2 - i_1 - 1} a = 1 \bmod p\,,$$

له کوم سره به چې $a$ ته په برعکس توکی پیدا شوی وي.

په لومړني تن $\mathbb{Z}_5$ کې برعکس توکي دي

| | | |
|---|---|---|
| $2^{-1}$ | $=$ | $3 \bmod 5$ |
| $3^{-1}$ | $=$ | $2 \bmod 5$ |
| $4^{-1}$ | $=$ | $4 \bmod 5\,.$ |

که $a^i = np$ وی، نو د لومړني ضریب تجزيې څخه به مو لرودی، چې $p$ وېشي، څه چې د $a < p$ له امله ناشوني دي. که اوس پرلپسي یا $a^i \bmod p, \quad i = 0, \ldots, p-1\,,$ په پام کې ونیسو، نو باید کم له کمه یو باقي دوه واره رامنځ ته شي، پس $a^{i_2 - i_1} = a^{i_2 - i_1 - 1} a = 1 \bmod p\,,$ به صدق وکړي د کوم سره به چې د $a$ برعکس توکی پیدا شوی وي.

په لومړني تن $\mathbb{Z}_5$ کې په ځټ – یا برعکس توکي دي:

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$2^{-1} = 3 \bmod 5$$

$$3^{-1} = 2 \bmod 5$$

$$4^{-1} = 4 \bmod 5\,.$$

د دې سره د بيلګې په توګه $\frac{(2+4)}{3} \bmod 5 = \frac{1}{3} \bmod 5 = 2$ همغږيز دی له دې لاندې سره.

$$\frac{2}{3} + \frac{4}{3} \bmod 5 = 2 \cdot 2 + 4 \cdot 2 \bmod 5$$

$$= 4 + 3 \bmod 5$$

$$= 2\,.$$

## ګالويز– بدن Galois-Körper

تن$GF[2^2]$ د 4 توکو سره د جمعي او ضرب د ترنو له لارې کيدی شی ورکړل شي:

| + | 0 | 1 | $a$ | $b$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | $a$ | $b$ |
| 1 | 1 | 0 | $b$ | $a$ |

| $\cdot$ | 0 | 1 | $a$ | $b$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | $a$ | $b$ |

(c) ketabton.com: The Digital Library



| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a$ | $a$ | $b$ | 0 | 1 | $a$ | 0 | $a$ | $b$ | 1 |
| $b$ | $b$ | $a$ | 1 | 0 | $b$ | 0 | $b$ | 1 | $a$ |

دا مخ ته پروت جوړښت اصول داسې ساده نه دی، لکه په لومړنیو تنونو $\mathbb{Z}_p$ کې او د ګالویز له خوا پیدا شوي دي. دا په تړلیړه توګه کېدی شي د تنړنړ ځخه د $p^\ell$ توکو سره $\ell \in \mathbb{N}$ ، د په خوښه $p$ لپاره لومړنی عدد لپاره اجرا کړي یا سرته ورسوي، او کېدی شي و ښوول شي چې په دې توګه ټول تنونه لاس ته راوړي.

په ګروبونو کې تورنی ( لکه د مسابقې لپاره جمتو کیدو ګروپ)

به کابل، غزني او ننګرهار کې په څلورو مهالویش( وختونو) د نهو ډلو په منځ کې مسابقه بیل کیږي. د لته دي ،، هر یو د هر یو په مقابل کې،، لوبه وکړي. دا یه دې معنا چې په هر مهالویش دې درې ګروپونه د هر درې ډلو څخه لوبه وکړي، چې په هرو دې درې ځایونو کې دې لوبه وشي. ستونځی په دې کې پرتې دي، چې یو بل باید سره غوځ یا قطعه نه کړي، هره جوړه د $3 \cdot 4$ ګروپونو کې باید یو ځل رامنځ ته شی

د شمیرپوهنې له مخې دا مسأله په لاندې ډول فرمولولی شو: دا $3$ توکیزې ډېری

$$S_{0,k} \cup S_{1,k} \cup S_{2,k} = \{1, \ldots, 9\}, \quad k = 0, \ldots, 3$$

دې وټاکل شي، چې د دوه ډېریو غوڅی ماکسیمال یو توکی خوندي ولري.

د دې شرایطو سره د دې مخه نیول کیږي، چې د ګروپونو ډېرې چې د لوبو ورځې یې مختلفې دي، ګډه د لوبدلو جوړه خوندي ولري..

(c) ketabton.com: The Digital Library



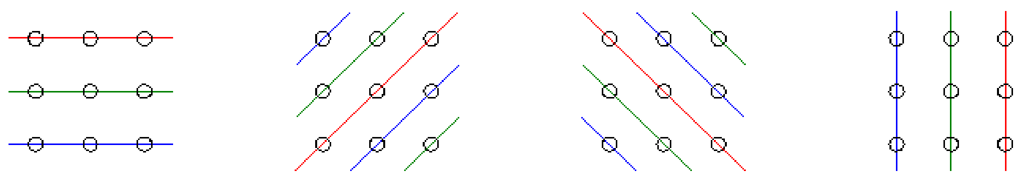
د $S_{j,k}$ ډېرى د لومړنی تن $\mathbb{Z}_3$ په مرسته جوړ بدلاى شی.. د لته د لوبډلي نمرې $(\alpha,\beta), \quad \alpha,\beta\in\mathbb{Z}_3$
$1,\ldots,9$ د نهه توکیزه ،، پاى سطحي،، دټکو سره په نخښنه کېدی شي او دا په نخښنه شوي ،، پاى سطحه،، ډېرى د دې سطحې د کرښوسره په نخښنه کېدی شي:

$$S_{j,k} = \{(\alpha, k\cdot\alpha + j \bmod 3) : \alpha = 0,1,2\}, \quad ($$

کرښه د $k = 0,1,2)$ جګېدنې( سره

$$S_{j,3} = \{(j,\alpha) : \alpha = 0,1,2\} \quad (\ \text{ولاړه یا عمود کرښه}\ ).$$

داګروپ وېشنه په لاندې شکل کې ليدوړ ده:



همدا مسأله د 16 ټيمونو سره ده ، 4 ښارونو او پنځه مهالوېش سره په ورته ډول حل کېدی شي. سرى 4-توکیزه ګالويز تن $GF[2^2]$ او لاندې ګروپ وېش لاس ته راوړو:

| | لوبځاى1 | لوبځاى2 | لوبځاى3 | لوبځاى4 |
|---|---|---|---|---|
| لومړى لوبورځ | 1,2,3,4 | 5,6,7,8 | 9,10,11,12 | 13,14,15,16 |
| 2-مه لوبورځ | 1,6,11,16 | 5,2,15,12 | 9,14,3,8 | 13,10,7,4 |
| 3 -مه لوبورځ | 1,10,15,8 | 5,14,11,4 | 9,2,7,16 | 13,6,3,12 |
| 4 -مه لوبورځ | 1,14,7,12 | 5,10,3,16 | 9,6,15,4 | 13,2,11,8 |

(c) ketabton.com: The Digital Library



| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 4,8,12,16 | 3,7,11,15 | 2,6,10,14 | 1,5,9,13 | 5 -مه لوبورځ |

په ټولیزه توګه د لیل د $q^2$ لوبډلو او q ښارونو لپاره دلیل شوونی دی، هلته چې q د یوه لومړني عدد توان دی، ځکه چې د داسې یوه عدد q لپاره تن GF(q) شتون لری.

## وکتورفضا یا وکتوري فضا

یو ابل ګروپ $(V, +)$ وکتورفضا په یوه تن $K$ یا $K$ -وکتورفضا بلل کیږی، که یو سکالار ضرب ``·,, تعریف وي، چې $(\lambda, v) \in K \times V$ په ضرب $\lambda \cdot v \in V$ تنظیم او لاندې خویونه ولری..

د ټولو سکالار $\lambda, \lambda_1, \lambda_2 \in K$ او ټولو وکتورونو $v$، $v_2 \in V$، $v_1$ لپاره صدق کوی:

$$(\lambda_1 + \lambda_2) \cdot v = \lambda_1 \cdot v + \lambda_2 \cdot v$$

$$\lambda \cdot (v_1 + v_2) = \lambda \cdot v_1 + \lambda \cdot v_2$$

$$(\lambda_1 \cdot \lambda_2) \cdot v = \lambda_1 \cdot (\lambda_2 \cdot v)$$

$$1 \cdot v = v .$$

که $K = \mathbb{R}$ یا $K = \mathbb{C}$ وی، نو سړی د یوه حقیقي همداسې کمپلکس وکتورفضا غږیږو او په ټولیزه توګه د سکالار ضرب لپاره ټکي څخه تېرېږو.

(c) ketabton.com: The Digital Library



پام دې وي، چې د حمعي علامه د $V$ په همداسي په $K$ کې کارول کيږي. همداسې ضرب هم په $K$ کې د ضرب لپاره کارول کيږي. پای

د تعريف سره سم په ځانګړي ډول په وکتورفضا کې د ګروپ اکسيومونه ضدق کوی:

اسوشياتيو قانون:

$$(v_1 + v_2) + v_3 = v_1 + (v_2 + v_3)$$

ضفر توکی( صفروکتور) : تيک يو توکی $0 \in V$ د $v + 0 = v$ سره شتون لري ، د ټول $v \in V$ لپاره.

نسبت و جمعي ته په څېر – يا معکوس توکی: د ټولو $v \in V$ لپاره ټيک يو $-v \in V$ شتون لري د لاندې سره:

$$v + (-v) = 0$$

د جمعي بدلون قانو:

$$v_1 + v_2 = v_2 + v_1$$

غوښتونکی شرايط تنظيموي، چې جمعه، کمون يا تفريق او ضرب دا ورسره بلد شميرقوانين پوره کوي.. سړی داسې کړی شي چې ضرب سر ته ورسوي:

$$\left(\sum_i \lambda_i\right) \cdot \left(\sum_j v_j\right) = \sum_i \sum_j \lambda_i \cdot v_j \,.$$

سربيره پردې د مخ نخښې قانون صدق کوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$-(-v) = (-1)\cdot(-v) = v, \quad -\left(\sum_i v_i\right) = \sum_i -v_i \, .$$

د Gard ≤ n (درجې) پولينوم

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n, \quad a_i \in \mathbb{R} \quad (a_i \in \mathbb{C}),$$

يو حقيقي ( کمپلکس) وکتور فضا جوړوي،، د کوم سره چې جمعه او سکالار ضرب په ورته نږدې ډول تعريف دي:

$$(p+q)(x) = p(x) + q(x), \quad (\lambda p)(x) = \lambda p(x) \, .$$

د وکتورفضا خويونه ساده تصديق کيدلی شي.

په پام کې لرو چې پولينوم د $n$ درجې سره، دا په دې معنا چې د $a_n \neq 0$ سره وکتورفضا نه جوړوی. د جمعي جوړول کيدی شي د درجې کموالی ته لاربنود کړي. د بيلګې په توګه دی:

$$(2x - x^2) + (3 + x^2) = 3 + 2x \, .$$

پای

حقيقي پرلپسي $(a_n)$ د $n \in \mathbb{N}$ سره يوه حقيقي وکتورفضا د عمليې سره جوړوي

$$(a_n) + (b_n) = (a_n + b_n), \quad \lambda(a_n) = (\lambda a_n) \, .$$

که سربيره پردې و غوښتل شي، چې ايا د وکتور سترکچر يا جوړښت خرابيدلی شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



د بېلګې په توګه یوغړیزې پرلپسې وکتور فضا نه جوړوی. د مونوتون پرلپسیو جمعه اړیین نه ده یوغړیز وی، لکه دا لاندې بېلګه ښایي:

$$(4n) + (-n^2)$$

برعکس به بندوالی یا محدودیت یو منل شوی خوی وی..

پای

## د n - ګوني وکتورفضا

د $K$ تن لپاره $n$ -ګوني یا $n$-وکتورونو

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \quad a_i \in K$$

فضا دا $K$ وکتورفضا $K^n$ د کمپوننت ډوله تعریف شوي جمعي او سکالار ضرب سره، دا په دې معنا چې

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}$$

او

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot a_1 \\ \vdots \\ \lambda \cdot a_n \end{pmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



د ټولو $a_i, b_i, \lambda \in K$ لپاره .

په زیاتو حالاتو کې ساده دی چې $n$ ګونی یا $n$ توپل د لیکې وکتور په څېر

$$a = (a_1, \ldots, a_n)^t$$

همداسې

$$a^t = (a_1, \ldots, a_n)$$

ولیکل شي. د ترانسپوزیشن سیومبول ``$t$ ,, سره د ستاندارد قرارداد څخه د متو وکتور په حیث توپیریږي.

پای

## لاندې فضا یا برخه فضا sub space

د یوه $K$ -وکتورفضا $V$ پیرخه ډېری $U$، چې د په $V$ کې تعریف شوې جمعې او سکالار ضرب سره پخپله وکتورفضا جوړوی، د $V$ لاندې فضا یا برخه فضا بلل کیږي.

برخه فضا $U$ زیات وخت د $V$ توکو شرایطو سره تعریفیږی:

$$U = \{v \in V : A(v)\},$$

د کوم سره چې $A$ یوه په نخبنه کوی، چې د ټولو $v \in V$ لپاره باید پوره وی.

د دې لپاره چې و ازمایو چې ایا $U$ د $V$ لاندې فضا ده، کفایت کوي چې وښایو چې $U$ نسبت د جمعې او سکالار ضرب سره تړلې ده:

$$u, v \in U \quad \Longrightarrow \quad u + v \in U$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$\lambda \in K, u \in U \quad \Longrightarrow \quad \lambda \cdot u \in U\,.$$

$$u, v \in U \implies u + v \in U$$

$$\lambda \in K, u \in U \implies \lambda \cdot u \in U\,.$$

ليکونکي اپپ، کيمرلې

برخفضاوې زيات وخت د ورزياتو(برعلاوه؟) ځانګړ شوو خويونو له لارې منځ ته راځي. که د حقيقي توابعو $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,,$ وکتورفضا په پام کې ونيسو، نو د بېلګې په توګه جوړه توابع $f(x) = f(-x)$ د ټولو $x \in \mathbb{R}$ لپاره يوه برخفضا جوړوی.
نورې بيلګې همداسې معکوسې بېلګې په لاندې جدول کې ورکړې شوې دی.

| لاندې فضا | خويونه |
|---|---|
| هو | ناجوړه |
| ja هو | بند يا مخدود |
| نه | يوغږيز |
| هو | نابرېکيدونکي |
| نه | مثبت |
| هو | ګربنيز |

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

(c) ketabton.com: The Digital Library



د يوه $K$ -وکتورفضا د هر وکتور $d \neq 0$ لپاره د صفر څخه تيرېدونکي کرښه $v = \lambda d, \quad \lambda \in K$ يوه لاندې – يا برخفضا جوړوي.

په هر حالت يوه کرښه چې له صفر0 نه تيريږي، لاندې يا برخفضا نه ده. د بېلګې په توګه

$$g : x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mu \in \mathbb{R},$$

$(1,0)^t$ په کرښه

پرته ده، مګر $(2,0)^t$ نه.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

## ګرښيز کمبينيشنLinearkombination

په يوه $K$ - وکتورفضا $V$ وکتورونو $v_1, v_2, \ldots, v_m$ لپاره سړی

$$\lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 + \cdots + \lambda_m \cdot v_m = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot v_i$$

د سکالارو $\lambda_i \in K$ سره د وکتورونو $v_i$ ګرښيز کمبينيشن بولي يا نوموي.

په ټوليزه توګه د $W \subset V$ لپاره د $W$ څخه کرښيز کمبينېشن لاندې ، د $W$ څخه د ناپای ډېرو وکتورونو يو کرښيز کمبينېشن پوهيږو.

ليکونکي: اپپ، کيمرلې

(c) ketabton.com: The Digital Library



وکتور $v = (1,2,3)^t$ د وکتورونو $v_1 = (3,4,5)^t,\ v_2 = (1,1,1)^t,$ يو کرښيز کمبينېشن دی، ځکه چې $v = v_1 - 2v_2$ .

د دې برعکس $v = (1,0)^t$ د وکتورونو $v_1 = (0,1)^t,\ v_2 = (0,2)^t,$ کرښيز کمبينېشن نه دی.،ځکه چې د $v_1$ او $v_2$ کرښيز پولينوم بڼه $(0,*)^t$ لری..

بالاخره کېدی شي $v = (0,0,0,0)^t$ په مختلفو ډولونو د وکتورونو

$$v_1 = (1,1,0,0)^t,\ v_2 = (0,2,2,0)^t,\ v_3 = (0,0,3,3)^t,\ v_4 = (4,0,0,4)^t$$

کرښيز کمبينيشن په څير انځور شي:

$$v = \lambda(12v_1 - 6v_2 + 4v_3 - 3v_4)$$

د $\lambda \in \mathbb{R}$ سره.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

## کرښيزه هيولې يا سپاين يا سمڅ Lineare Hülle( span)

يادونه: د په يوه فضا کې د خوندې شيانو او د باندې په منځ کې يو ديوال جوړوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



د $K$ - وکتورفضا $V$ د وکتورونو $v_1, \dots, v_n$ ټولو ګرښيزو کمبينېشنونو ډېرۍ د وکتورونو $v_i$ کرښيزه سپاين يا هيولې(يو څه يا کوتۍ يا ...و چې په فضا کې يو ځا رابندوي (ژباړی)) بلل کيږي او داسې يې په نخښه کوو:

$$\text{span}(v_1, \dots, v_n) = \{\sum_{i=0}^{n} \lambda_i \cdot v_i : \lambda_i \in K\}.$$

په ورته توګه سرې د $\text{span}(U)$ وکتورونو د يوې ډېرۍ $U$ لپاره د $U$ د ټولو کرښيزوکمبينېشنونو ډېرۍ تعريفوی..

د هرې برخډېرۍ $U \in V$ $\text{span}(U)$ لپاره د $V$ يو برخفضا ده.

ليکونکي: اپ، کيمرلې

که په $\mathbb{R}^3$ کې دوه مختلفې د سرچينې کرښې $g_1$ او $g_2$ په پام کې ونيسو، د بېلګې په توګه

$$g_1 : x = \lambda_1(1,0,0)^t,\ g_2 : x = \lambda_2(0,1,0)^t, \quad \lambda_i \in \mathbb{R},$$

دا هريو د لوريزو وکتورونو کرښيزه سپاين يا ګرښيزه هيولې دي، دلته

$$v_1 = (1,0,0)^t,\ v_2 = (0,1,0)^t.$$

نو د وکتورونو $v_1$ او $v_2$ کرښيزه هيولې يا سپاين يوه سطحه $E = \text{span}(v_1, v_2)$ ده، چې کرښې $g_1$ او $g_2$ خوندي لري، پس دلته

$$E : x = \lambda_1(1,0,0)^t + \lambda_2(0,1,0)^t, \quad \lambda_i \in \mathbb{R},$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



همداسې

$$E = \{x : x_3 = 0\}$$

ليکونکي اپ، هيوليګ

## ننوتی – يا محدب کمبينيشن Konvexkombination

په يوه حقيقي وکتورفضا $V$ کې يو کرښيز کمبينيشن

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_m v_m$$

د $\lambda_i \geq 0, \quad \sum_i \lambda_i = 1$ سره د وکتورونو $v_i \in V$ کنوکسکمبينيشن بلل کيږي.

ليکونکي اپ، هيوليګ

## ننوتی يا محدبه هيبولې يا سپاين( المانی وبينه :شپاين)Konvexe Hülle

د يوه حقيقي وکتورفضا $V$ د يوې برخډېری $M$ محدبه هيولې د ټولو محدب کمبېشنونو

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_m v_m \qquad (\lambda_i \geq 0, \sum_i \lambda_i = 1)$$

ډېری ده د $v_i \in M$ سره او د $\operatorname{conv}(M)$ سره ليکل کيږي.

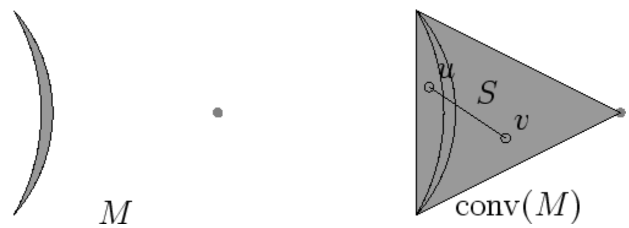
(c) ketabton.com: The Digital Library



ځمککچيز يا هندسي $\operatorname{conv}(M)$ خورا کوچنی ډېری ده، چې $M$ خوندی لري، کومه چې د هرو دوه توکو $u, v$ لپاره د هغو تړنکرښه

$$S = \{\lambda u + (1-\lambda)v : 0 \leq \lambda \leq 1\}$$

هم خوندی لري




ليکونکي اپ، هيوليک

حقيقي- ياريښتونی سکالار ضرب Reelles Skalarprodukt

په يوه حقيقي وکتور فضا $V$ باندې يو سکالارضرب يو تابع

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$$

ده، دلاندې خويونو سره:

مثبتوالی :

$v \neq 0$ د $\langle v, v \rangle > 0$ لپاره.

سيومتري:

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$$

کرښيزوالی:

$$\langle \lambda u + \varrho v, w \rangle = \lambda \langle u, w \rangle + \varrho \langle v, w \rangle$$

دلته $u, v, w \in V$ او $\lambda, \varrho \in \mathbb{R}$ په خوښه وکتورونه هرداسي سکالار.

د سيومتري په بنسټ يو حقيقي سکالار ضرب د دويم دليل په بنسټ هم کرښيز دی، يعنې په $V$ يو بي کرښيزه Bilinearform بڼه.

ليکونکي اپ، هيوليګ، کرايخ

## سکالار ضرب Skalarprodukt

په يو کمپلکس وکتورفضا $V$ يو سکالار ضرب يو فنکشن

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{C}$$

دی، د لاندې خويونو سره:

مثبتوالی:

$\langle v, v \rangle > 0$ د $v \neq 0$ لپاره.

مائل سيومتري:

$$\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



كربنيزوالى:

$$\langle \lambda u + \varrho v, w \rangle = \lambda \langle u, w \rangle + \varrho \langle v, w \rangle$$

له دې سره $u, v, w \in V$ همداسې $\lambda, \varrho \in \mathbb{C}$ په خوبنه وكتورونه همداسي سكالار دي.

## مايل سيومتريکSchiefsymmetrie :

كربنيزوالى:

$$\langle \lambda u + \varrho v, w \rangle = \lambda \langle u, w \rangle + \varrho \langle v, w \rangle$$

له دې سره $u, v, w \in V$ او $\lambda, \varrho \in \mathbb{C}$ په خوبنه وكت.ورونه همداسې سكلار دي

د مائل سيومتري په اساس يو كمپلكس سكالارضرپ نسبت و دويمي متحولې ته گربنيز نه دی:

$$\langle u, \lambda v + \varrho w \rangle = \overline{\lambda} \langle u, v \rangle + \overline{\varrho} \langle u, w \rangle \,.$$

فقط د حقيقي سكالار لپاره كمپلكس كونجوګېشن بې مفهومه دی.

ليكونكي اپ، هيوليک، كرايخ

دا ترې لاس ته راغلې اسيومتري اړيين ده، چې د كمپلكس سكالارضرب مثبتوالى تضمينوي. د بېلګې په توګه دی:

$$\langle \mathrm{i}v, \mathrm{i}v \rangle \neq \mathrm{i}^2 \langle v, v \rangle = -\langle v, v \rangle < 0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



د $v \neq 0$ لپاره.

له دی زیات صدق کوي:

$$\langle \mathrm{i}v, \mathrm{i}v \rangle = (\mathrm{i}\bar{\mathrm{i}})\langle v, v \rangle = \langle v, v \rangle > 0 .$$

مثبتوالی اړیين دو چی له $|v| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$ لارې ئو نورم تعریف کړاي شو.

ليکونکي هیولیګ، هیورنر

د وکتورونو $x, y \in \mathbb{R}^2$ لپاره یوه دحقيقي سکالار ضربونو د ممکنه تعریفونو لړی تر څېړنې نيسو. په لاندې جدول ورکړ شوي، چې کوم خویونه پوره دي.

| خویونه | سکالار ځل |
|---|---|
| ټول | $10x_1y_1 + x_2y_2$ |
| کرښيزوالی | $x_1y_2$ |
| مثبتوالی، سیومتري | $\lvert x_1y_1\rvert + \lvert x_2y_2\rvert$ |
| سیومتري | $x_1x_2 + y_1y_2$ |

فقط لومړی تعریف ټول غوښتوني شرایط پوره کوي. په کملکس وکتورفضا $\mathbb{C}^2$ کې په هر ډول دا حالت نه دی، هم مثبتوالی او هم مائل سیومتري پوره نه دي:

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$\langle (\mathrm{i},0),(\mathrm{i},0)\rangle = \qquad 10\mathrm{i}^2 = -10 < 0$$

$$\langle (\mathrm{i},0),(1,0)\rangle = 10\mathrm{i} \neq \overline{\langle (1,0),(\mathrm{i},0)\rangle} = -10\mathrm{i}$$

په داسې حالت کې چې د دویم Arguments اجزا وې یا کمپوننتونه کمپلمس کنجوګیرت کړي، پرابلک له منځه تلاي شي. تعریف

$$\langle x,y\rangle = 10x_1\bar{y}_1 + x_2\bar{y}_2$$

په کمپلکس حالت غزونه راکوي.

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

## د کوشي-شوارڅ – نامساوات( نابرابرون)

Cauchy-Schwarz-Ungleichung

سکالار ضرب کېدی شي د اسوڅیاتیو قانون له مخې تخمین شي:

$$|\langle u,v\rangle| \le |u||v|, \quad |w| = \sqrt{\langle w,w\rangle}\,.$$

مساوات تیک هلته صدق کوي، که صدق ولري $u \parallel v$ .

که $v = \lambda u$ وي، لکه څنګه چې غوښتل کیږي مساوات صدق کوي.

د $u$ همداسې د $v$ ضرب د یوه سکالار سره نامساوات تغیر نه خوري. کېدی شي ونیسو(فرض کړو) چې صدق کوي:

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$|u|^2 = |v|^2 = 1\,.$$

که د سکالار ضرب سره ( دليل حقيقي حالت په بر کې نيسي) دي

$$\langle u, v\rangle = r\exp(\mathrm{i}\varphi)\,, \quad r > 0\,,$$

د $\lambda = \exp(\mathrm{i}\varphi)$ سره د ناغبرګو( ناموازي) وکتورونو لپاره لاس ته راځي

$$\begin{aligned} 0 &< \langle u - \lambda v, u - \lambda v\rangle \\ &= 1 + \lambda\bar{\lambda} - \lambda r\overline{\exp(\mathrm{i}\varphi)} - \bar{\lambda} r\exp(\mathrm{i}\varphi) \\ &= 1 + 1 - r - r\,. \end{aligned}$$

له دې سرره $r = |\langle u, v\rangle| < 1$ باور لري، ده په دې معنا چې غوښتنه مو.

## نورم Normر ډوليزوال

په يوه حقيقي يا کمپلکس وکتورفضا $V$ نورم يا تابع $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ ده

د لاندې خويونو سره:

مثبتوالی:

$\|v\| > 0$ د $v \neq 0$ لپاره.

هوموګينيوالی يا برابيرډوليزوالی Homogenität :

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$$

درېګوډي ( مثلث-) نامساوات:

$$\|u+v\| \le \|u\| + \|v\|$$

د لته $u, v$ په خوښه وکتورونه دي او $\lambda$ یو په خوښه سکالار.

دد نورم $d(u,v) = \|u-v\|$ په مرسته کېدی شي د دوه وکتورونو ترمنځ واټن تعریف شي.

د سکالار ضرب نورم Skalarprodukt - Norm

په یوه حقیقي یا کمپلکس وکتورفضا $V$ د یوه سکالار ضرب سره ، نورم له

$$|v| = \sqrt{\langle v, v \rangle}, \quad v \in V$$

سره په یوه معنا دی.

مثبتوالی او هوموګینیتي (ورته والی) تړلي د سکالارضرب د ورته خویونو څخه لاس ته راځي. د مثلث مساوات له

$$|u+v|^2 = \langle u+v, u+v \rangle$$

$$= \langle u, u \rangle + \underbrace{\langle u, v \rangle + \overline{\langle u, v \rangle}}_{\in \mathbb{R}} + \langle v, v \rangle$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$\leq |u|^2 + 2|\langle u, v\rangle| + |v|^2$$

$$\overset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} |u|^2 + 2|u||v| + |v|^2$$

$$= (|u| + |v|)^2$$

څخه د ریښي نیوني له لارې لاس ته راځي.

لیکونکي: هیولیک، هیورنر

## ماکسیموم - نورمMaximum-Norm

د وکتورونو فضاو $\mathbb{R}^n$ او $\mathbb{C}^n$ لپاره

$$\|z\|_\infty = \max_i |z_i|$$

ماسکیموم – نورم په نخښنه کوي.

درېګودي نامساوات پوره دي، ځکه چې د $z = x + y$ لپاره باور لري

$$\max_i |z_i| = \max_i |x_i + y_i| \leq \max_i \left(|x_i| + |y_i|\right) \leq \max_i |x_i| + \max_i |y_i| \,.$$

ماکسیموم-نورم کېدی شي د وزنونو $w_i \in \mathbb{R}_+$ د پیل کولو یا رامنځ ته کولو سره تولیز شي:

$$\|z\|_{\infty,w} = \max_i (w_i |z_i|) \,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



د حقيقي- يا ريل وكتورونو سکالار ضربSkalarprodukt reeller Vektoren

د وکتورونو $v=(v_1,\ldots,v_n)^{\mathrm{t}}, w=(w_1,\ldots,w_n)^{\mathrm{t}}\in\mathbb{R}^n$ لپاره کانونيکي ضرب د

$$v^{\mathrm{t}}w=\sum_{i=1}^{n}v_iw_i=v_1w_1+\cdots+v_nw_n$$

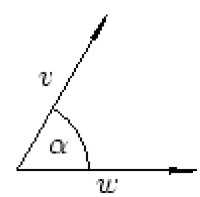
سره تعريف دی د ورکډشوي assoziierten نورم

$$|v|=\sqrt{v_1^2+\cdots+v_n^2}\,.$$

سره.

$$v^{\mathrm{t}}w=|v||w|\cos\alpha$$

هندسي کېدی شي دا نورم د له لارې تعريف شي، د $v$ او $w$ ترمنځ کوچنی زاويه يا کونج $\alpha$ په نخښه کوي، چې د $u$ او $v$ څخه غزيدلې سطحې کې اندازه کيږي.




د سکالار ضرب خويونه ساده ازمايل کيږي.

د هدسي تعريف ورته والی د کوساين جلې سره تصديقيږي(لومړی د $n=2$ لپاره ).

دې پسې د $v=(v_1,v_2)^{\mathrm{t}}$ او $w=(w_1,w_2)^{\mathrm{t}}$ سره باور لري، چې

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$|v-w|^2 = |v|^2 + |w|^2 - 2|v||w|\cos\alpha \ .$$

که ځاي په ځاي کړو، نو ترې لاس ته راځي

$$(v_1 - w_1)^2 + (v_2 - w_2)^2 = v_1^2 + v_2^2 + w_1^2 + w_2^2 - 2|v||w|\cos\alpha$$

او د بنه بدلو سره ښونه یا ثبوت.

د $n \geq 2$ لپاره $v$ او $w$ په $\mathbb{R}^n$ کې یوه سطحه اواره(هواروي) وي یا غزوي. ورته شمېرنه په دې سطحه کې ښايي، چې د په خوښه ډیمنزیونون ( ابعادو یا پراخېدونو) $n \geq 2$ لپاره ټیک دی.

د کمپلکس وکتورونو سکالار ضربSkalarprodukt komplexer Vektoren

د وکتورونو $x=(x_1,\dots,x_n)^{\mathrm{t}}, y=(y_1,\dots,y_n)^{\mathrm{t}} \in \mathbb{C}^n$ لپاره کانونیکي

سکالار ضرب د $$y^*x = \sum_{j=1}^{n} x_j\bar{y}_j$$ له خوا تعریف دی د شسوخیري نورمونو

$$|z| = \sqrt{|z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2}\,.$$

سره.

دا سوپرسکریپت له دې سره د یوه وکتور ترانسپوزیشن او کمپلکس کنجوکېشن په ګوته کوي.

دا تعریف حقیقي حالت خوندي لري، چې په هغو کې کمپلکس کنجوګیري حالت پوره وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$x = \begin{pmatrix} 1+2\mathrm{i} \\ -2-\mathrm{i} \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 2 \\ 2\mathrm{i} \end{pmatrix}$$

که له $\mathbb{C}^2$ څخه د وکتورونو
سکالارضرب جوړوو، نو لاس ته راځي:

$$\langle x, y\rangle = (1+2\mathrm{i})\cdot 2 + (-2-\mathrm{i})\cdot \overline{2\mathrm{i}} = 2+4\mathrm{i}+4\mathrm{i}+2\mathrm{i}^2 = 2+8\mathrm{i}-2 = 8\mathrm{i}\,.$$

پس د دوه کمپلکس وکتورونو سکالار ضرب اړيين نه دی چې حقيقي وي.

د اسوڅييري نورم سره د دويم وکتور کنجوګيري کونه غوره رول لري. بې له کنجوګيري کونې څخه به په ضرب کې لومړي وکتور لاندې نورم لرودی

$$\sqrt{(1+2\mathrm{i})^2 + (-2-\mathrm{i})^2} = \sqrt{1+4\mathrm{i}-4+4+4\mathrm{i}-1} = \sqrt{8\mathrm{i}} \notin \mathbb{R}\,,$$

او د دويم وکتور لپاره به په همدې ډول نورم نامثبت وی:

$$\sqrt{2^2 + (2\mathrm{i})^2} = \sqrt{4-4} = 0 \not> 0\,.$$

د دوه وکتورونو ترمنځ کونج Winkel zwischen Vektoren

$$\cos\sphericalangle(u,v) = \frac{\langle u, v\rangle}{|u||v|}$$

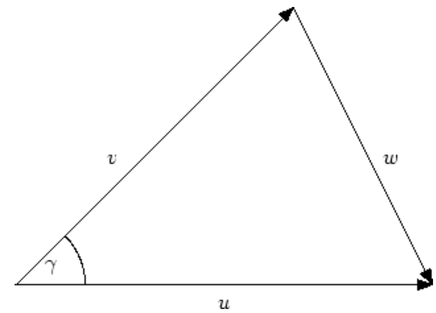
د يوه حقيقي سکالار ضرب لپاره د لخوا

په $[0,\pi]$ کې د $u$ او $v$ ترمنځ يوکونج تعريفوي. په ځانګړې توګه $u$ او $v$ اورتوګونال، $u \perp v$ ، بولو که $\langle u, v\rangle = 0$ ولرو.

د کونج تعريف په $\mathbb{R}^2$ کې د وکتورونو لپاره د کوساين له مخې رابولي:

(c) ketabton.com: The Digital Library






په یوه درېګوټي یا مثلث کې د اړخونو $|u|, |v|, |w|$ اوږدوالي لپاره اړیکې باور لري:

$$|w|^2 = |u|^2 + |v|^2 - 2|u||v| \cos \sphericalangle(u, v) .$$

له بلې خوا د سکالار ضرب له تعریف څخه

$$|w|^2 = |v - u|^2 = |v|^2 + |u|^2 - 2\langle u, v\rangle ,$$

د کونج تعریف د پرتلې له لارې لاس ته راځي.

د په خوښه حقیقي سکالارضرب لپاره د کوشي-شورڅ-مساوات په بنسټ لرو:

$$\frac{\langle u, v\rangle}{|u||v|} \in [-1, 1] .$$

وېش کېدی شي په $[0, \pi]$ کې د یوه کونج د کوساین سره برابر کېښوول شي یا ځاي په ځاي شي.

## د پیتاګوراس(فیثاغورث) جمله Satz des Pythagoras

د یوه سکالارضرب-نورم د اورتوګونال یا عکود وکتورونو $u$ او $v$ لپاره

$$|u + v|^2 = |u|^2 + |v|^2 .$$

باور لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library



باور لري

$$|u+v|^2=\langle u+v,u+v\rangle=\langle u,u\rangle+\underbrace{\langle u,v\rangle}_{=0,\ \text{da}\ u\perp v}+\underbrace{\langle v,u\rangle}_{=0,\ \text{da}\ v\perp u}+\langle v,v\rangle=$$

$$=|u|^2+|v|^2.$$

دا حمله د پيتاګوراس جملې تر نامه شهرت لري(569-475 v. Chr)، سره له دې چې دا له دې 1000 کاله د مخه بابليانو پېژندله.

امکان لري، چې پيتاګوراس به لومړنی وو، چې دا جمله يې ثبوت کړې.

## د پيتاګوراس درېګونيPythagoräisches Tripel

د پيتاګوراس درېګونو سره درې طبيعي اعداد $l,m,n$ بلل کيږي، د $l^2+m^2=n^2$, سره، د بېلګې په توګه $(3,4,5)$.

يو مثلث چې د اړخونو اوږدوالي نسبت يې د پيتاګوراس درېګونې پوره کوي، د پيتاګوراس جمله پوره کوي او له دې امله دا ولارګوډيز يا ولاړکونجيز او که غواړی قايم االزاويه دي.

مصريانو ممکن دا د ولاړګوډ د لاس ته راوړلو لپاره کارولی وي: دوي د يوې رسی يا پړي څخه کار رخسته، چې رابند او ١٢ ګنډې د برابر يون (واحد)اوږدوالي سره درلودې. که دې رسی يو درېګوډی داسي جوړ شي، چې اخونه يې درې، څلور، پنځه يوونه يا واحده اوږده وي، نو د لنډو اړخونو ترمنځ پروت کوج ولاړ يا عمود دی.

هر ناجوړه يا طاق عدد $l\geq 3$ کېدی شي د عددونو $m=(l^2-1)/2$ او $n=(l^2+1)/2$ سره د يو پيتاګوراس درېګوني ته پوره يا مکمل شي، ځکه چې

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$l^2 + \frac{l^4 - 2l^2 + 1}{4} = \frac{l^4 + 2l^2 + 1}{4} = \left(\frac{l^2 + 1}{2}\right)^2 .$$

د دې درېګوني له $2$ سره ضرب له لارې يو درېګونی لاس ته راځي، د هر تول عدد $l \geq 6$ لپاره.

دا ورکړ شوی جوړخت اصول د يوې طريقې ځانګړی حالت دی، کزمه چې د ؛بينوم د دريم فرمول څخه لاس ته راحي، [که چې له

$$c^2 - b^2 = (c - b)(c + b) = a^2$$

لاس ته راځي، که $a^2$ په دوه مختلفو ضريبونو تجزيه کېدی شي، چې يو يې جوړه کمښت يا تفريق $(= 2b)$ ولري. د ناجوړه يا طاق $a = l$ لپاره دا توته کونه $a^2 = a^2 \cdot 1$ پوره ده. لاس ته راوړو:

$$b = \frac{a^2 - 1}{2} , \quad c = \frac{a^2 + 1}{2}$$

او له دې سره دا پورته ځانګړی حالت.

کرښيز نابلواکوالی يا خپلواکوالی يا نا تابعيت Lineare Unabhängigkeit

وکتورونه $v_1, \ldots, v_m$ کرښيز بلواک بللکيږي، که سکالار $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ شتون ولري د $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_m v_m = 0$

او لږ تر لږه يوه $\alpha_i \neq 0$ سره. په بل حالت کې کرښيز خپلواک بلل کيږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



په ټولېږه توګه د وکتورونو يوه ډېرۍ $M$ کرښيز نا بلوک يا خپواکه بلل کيږي، که د $M$ هره پاي برخډېرۍ د کرښيز نا بلوک يا خپلواکه وکتورونو څخه جوړه وي. په بل حالت کې $M$ کرښيزه بلواکه پلل کيږي.

په پام کې دې وي، چې د کرښيز الجبر په موخه په حقيقت کې ناپاي ډېريو ته اجازه ورکړ شوې، مګر فقط ناپاي کرښيوېو کمپينيشنونو ته. د بېلګې په توګه د پرلپسيو وکتورفضا ډېريو کې

$$e = (1,1,\ldots)^t,\ e_1 = (1,0,0,\ldots)^t,\ e_2 = (0,1,0,\ldots)^t,\ \ldots$$

کرښيز خپلواک دی، سره له دې چې

$$e = \sum_{n\in\mathbb{N}} e_n\,.$$

دي.

د ثابتو پرلپسيو يا ترادفونو د کانونيکي يوون- يا واحدوکتورونو سره پاي انځورونه نه شته.

په $\mathbb{R}^2$ کې دوه وکتورونه تيک هلته کرښيز خپلواک دي، که يو هم د بل ډېر واره نه وي، د بيلګې په توګه ړکتورونه $(1,0)^t$ او $(1,1)^t$ کرښيز خپلواک دي، ځکه چې ايښوونه

$$\alpha(1,0)^t + \quad \beta(1,1)^t = (0,0)^t$$

راکوي

$$\beta = \qquad \alpha = 0\,.$$

همداسې

(c) ketabton.com: The Digital Library



برعکس وکتورونه $(0,0)^t$ او $(2,3)^t$ کرښيز بلواک دي، که

$$0(2,3)^t = (0,0)^t$$

همداسي:

$$1(0,0)^t + 0(2,3)^t = (0,0)^t;$$

پس د صفر وکتور يو ،،نه ترېويال،، يا ساده انځورونه شتون لري.

په $\mathbb{R}^2$ کې د رې وکتورونه $u, v, w$ تل کرښيزبلواک يا تابع دي، ځکه چې لاندې ځاي په ځاي کونه

$$\alpha u + \beta v + \gamma w = 0$$

کښته ټاکلي لاينيز هوموجين سيستم ته مو لاربښودوي

$$\alpha u_1 + \beta v_1 + \gamma w_1 = 0$$

$$\alpha u_2 + \beta v_2 + \gamma w_2 = 0$$

د $\alpha, \beta, \gamma$ لپاره، چې تل يو ناساده حل لري

لکه په دوه بعدي همداسي په $\mathbb{R}^3$ کې دوه بعدي وکتورونه کرښيز بلواک دي، که دا غبرګ( موازي) وي، دا په دې معنا چې که يو وکتور د بل وکتور څو ځله وي.

درې وکتورونه کرښيز بلواک دي، که دوه وکتورونه غبرګ يا موازي وي يا که يو وکتور له دې نورو دوه وکتورونو غزېدلي سطحه کي پروت وي. د بېلګې په توګه د لاندې لپاره باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$u = (1, 2, -3)^t,\ v = (4, -6, 2)^t,\ w = (-9, 3, 6)^t$$

لپاره باور لري

$$6u + 3v + 2w = (0, 0, 0)^t$$

، پس وکتورونه کرښيز بلواک دي.

د تعریف سره سم د کرښيز بلواکوالي لپاره ازمایښت ورته دئ یوه هوموجېن کرښيز مساواتسيستم سره

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \cdots + \lambda_n \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

د سکالار $\lambda_i$ لپاره. دا په ځانګړي توګه ښايي، چې څلور وکتورونه په $\mathbb{R}^3$ کې تل ګرښيز بلواک يا تابع دي.

## بنسټ Basis

د یوه وکتور فضا $V$ برخډېری $B$ د وکتور $V$ یو بنسټ بلل کيږی، که $B$ کرښيز خپلواکه وي او د $V$ یو توليدېدونکی يا جړوېدوکی سيستم وي، دا په دې معناچې که

هر وکتور $v \in V$ يو يواځنی انځورونه د یوه پای کمبينېشن $v = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i b_i$ د $b_i \in B$ سره لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library



که $B$ پای $(|B| = n)$ وي ، نو هر وکتور کېدی شي د يوه وضعيه قېمت له لارې سره نسبت و بنستې ته وليکي:

$$v \leftrightarrow v_B = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)^t.$$

## د وضعيه قيمت انځورونې

$$v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i \leftrightarrow v_B = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)^t,$$

سره ، دا په نامه کانونيکي ايزومورفيزم، سرې کړی شي يو پای بعدي $K$ -وکتورفضا $V$ د $n$–ګونی وکتور فضا $K^n$ سره په نخښه کړی شي يا وپيژندلی شي. په ځاګړې توګه کېدی شي چې د پای حقيقي او کمپلکس وکتوري فضا د د لوستلو سره په پروتو تيوپ $\mathbb{R}^n$ او $\mathbb{C}^n$ ځان محدود يا رابند کړي.

لکه د بېلګې په توګه د پولينومونو وکتور فضا يدلکيږي، اړيين نه ده چې وکتورفضا دې پای بنستې ولري. مګر د د کرښيز الجب په ساحه کې پای کرښيز کمپېشنونه تر ځېړنې لاندې نيول کيږي. د دې لاس ته رځي، چې پرلپسي

$$e_1 = (1, 0, 0, \ldots)^t,\ e_2 = (0, 1, 0, \ldots)^t, \ldots$$

د پرلپسيو د وکتورفضا لپاره بنستې نه جوړوي. دا د ناپای کرښيز کمبينېشن مطالعه يا راوړنه ، لکه دا چې ځنګه په فوريي لړيو کې رامنځ ته کيږي، په لاس لرو، خو يوه کونورکنځ يا پولې ته يوه تګ کليمه غواړي، يعني د فقط وکتورفضاجوړښت ځخه زيات.

## بعد يا پراخيدونی Dimension

(c) ketabton.com: The Digital Library



که یو وکتورفضا $V$ یو پاي بنسټ $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ ولری، نو د بنسټ وکتورونو ګڼون یا تعداد یواځنی ټاکلی او د $V$ بعد یاپراخېدونی بلل کيږي:

$$n = \dim V \ .$$

د $V = \{0\}$ لپاره لیکو $\dim V = 0$ او $\dim V = \infty$ د یو ناپای بنسټ وکتورفضا لپاره.

د ټولیز بنسټ جملې له مخې هر وکتورفضا یو بسټ لری.

د دې لپاره چې وښایو، چې بعدونه یا پراخیدوني یواځني ټاکلی دي، بسیا کوی، چې لاندې وبینه وښایو:

که یوه وکتورفضا $n$-توکیزه بنسټ

$$b_1, \ldots, b_n \ ,$$

ولري، نو $n+1$ وکتورونه

$$v_1, \ldots, v_{n+1}$$

( او له دې سره د $n+1$ څخه زیات وکتورونه هم ) کرښيز بلواک دي.

که دوه بنسټونه د مختلفو ډېرو وکتورونو سره شته وي، نو د بنشټوکتورونه به کرښیز خپلواکوالی ته یو تضاد لاس ته راشي.

پورتنی غوښتنه یا ثبوت کیدی شي د $n$ پسې د ایندکشن له لارې و ښوول شي.

د ایندکشن پل لپاره ( اندکشن پیل $n = 1$ ساده دی) که د وکتورونو $v_i$ بنسټ انځورونه راواخلو:

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$v_i = \sum_{j=1}^{n} \gamma_{i,j} b_j, \quad i = 1, \ldots, n+1 .$$

.

باور لري:

$$\gamma_{i,1} = \cdots = \gamma_{i,n} = 0,$$

،

نو دی ، او کرښیزبلواکوالی همدا اوس و ښوول شو. نو کیدی شي د مناسب نمره کولو له لارې ونیسي، چې $\gamma_{n+1,n} \neq 0$ . له پورته مساوات څخه په راوتنې یا پیل سړی اوس ومتورونه تعریفوي، کوم چې د $n-1$ وکتورونو $b_1, \ldots, b_{n-1}$ څخه د کرښیز کمبینیشن په څیر انځوریدلای شي:

$$v'_i = v_i - \frac{\gamma_{i,n}}{\gamma_{n+1,n}} v_{n+1}, \quad i = 1, \ldots, n .$$

دا چې د $b_n$ ضریب یا ځلوونی ورکیږي، ساده کتل کیږي. دا چې

$$v'_1, \ldots, v'_n \in V' = \text{Span}\{b_1, \ldots, b_{n-1}\},$$

کیی شي سړی د ایندکشن نیونې(فرضیی) وکاروي او نه ساده کرښیز کمبینیشن لاس ته راوړي

$$\lambda_1 v'_1 + \cdots + \lambda_n v'_n = 0 .$$

د بنه بدلون پسي د کرښیز کمبینیشن لاس ته راځي، نو له دې سره غوښتنونی بلواکوالی یا تابعیت.

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

(c) ketabton.com: The Digital Library



## اورتوګونال يا ولاړ بنسټ Orthogonale Basis

يو بنسټ $B = \{u_1, \ldots, u_n\}$ اورتوګونال بلل کيږي، که وي:

$$\langle u_i, u_j \rangle = 0, \quad i \neq j \, .$$

که بنسټوکتورونه نورمي وي، دا په دې معنا چې $|u_i| = 1$ دي، نو د اورتوګونال سيستم يا اورتوګونال بنسټ څخه غږيږو.

يو وکتور $v$ نسبت و يوه اورتوکونال بنسټ $u_1, \ldots, u_n$ ته انځورونه

$$v = \sum_{j=1}^{n} c_j u_j \, , \quad c_j = \frac{\langle v, u_j \rangle}{|u_j|^2} \, .$$

لري.

د ضريبونو $c_j$ لپاره پاور لري

$$|c_1|^2 |u_1|^2 + \cdots + |c_n|^2 |u_n|^2 = |v|^2 \, .$$

د يوه نورمي پنسټ لپاره ترمونه $|u_j|^2$ له منځه ځي. او له دې سره لاس ته راځي:

$$c_j = \langle v, u_j \rangle \, , \quad |c_1|^2 + \cdots + |c_n|^2 = |v|^2 \, .$$

ليکونکي: اپپ، هيوليګ، کيمرلې

دا چې $u_1, \ldots, u_n$ يو بنسټ جوړوي، نو سکالا $c_1, \ldots, c_n$ د

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$v = \sum_{j=1}^{n} c_j u_j \ .$$

سره شتون لري.

که د پورتني مساوات لپاره په خوښه سکالار ضرب د $u_k$ سره جوړ کړو او د بنسټ دد اورتوګوناليټي څخه کار واخستل شي، نو لاس ته راځي

$$\langle v, u_k \rangle = c_k \langle u_k, u_k \rangle$$

همداسې

$$c_k = \frac{\langle v, u_k \rangle}{\langle u_k, u_k \rangle} \ .$$

د ضريبونو لپاره کټمټوالی د پيتاګوراس د جملې ($n = 2$) ټوليزونه ده. دا تړلې د

$$|v|^2 = \langle c_1 u_1 + \cdots + c_n u_n, c_1 u_1 + \cdots + c_n u_n \rangle ,$$

ضربولو څخه لاس ته راځي، که دې ته پام وشي، چې مخلوط ترمونه

$$\langle c_j u_j, c_k u_k \rangle, \quad j \neq k$$

د بنسټ وکتورونو د اورتوګوناليټي له امله ورکيږي

(c) ketabton.com: The Digital Library



نسبت و اورتوګونال بنسټ

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix},\ u_2 = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

ته $v = (8,4)^t$ دا لاندې انځورونه لري

$$v = \frac{\langle v, u_1\rangle}{\langle u_1, u_1\rangle} u_1 + \frac{\langle v, u_2\rangle}{\langle u_2, u_2\rangle} u_2 = \frac{8+12}{1+9} u_1 + \frac{-48+8}{36+4} u_2 = 2u_1 - u_2 \ .$$

د ضريبونو لپاره باور لري:

$$|2|^2 \ \left|\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right|^2 + |-1|^2 \ \left|\begin{pmatrix} -6 \\ 2 \end{pmatrix}\right|^2 = 4\cdot 10 + 1\cdot 40 = \left|\begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}\right|^2 .$$

نسپت و اورتوګونال پنسټ

$$u_1 = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix},\ u_2 = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix},\ u_3 = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ته $v = (-1,1,3)^t$ لاندې انځورونه لري:

$$v = \langle v, u_1\rangle u_1 + \langle v, u_2\rangle u_2 + \langle v, u_1\rangle u_1 = 3u_1 - u_2 - u_3 \ .$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



د ضريبونو لپاره باور لري

$$|3|^2 + |-1|^2 + |-1|^2 = \left| \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right|^2 .$$

ليکونکي: اپپ، هيوليک

## اورتوګونال پروجکشن يا - پرپوستون Orthogonale Projektion

په يوه برخفضا $U$ اورتوګونال پرپوستون

$$v \mapsto P_U(v) \in U$$

داورتوګوناليټي شرايط

$$\langle v - P_U(v), u \rangle = 0, \quad \forall u \in U$$

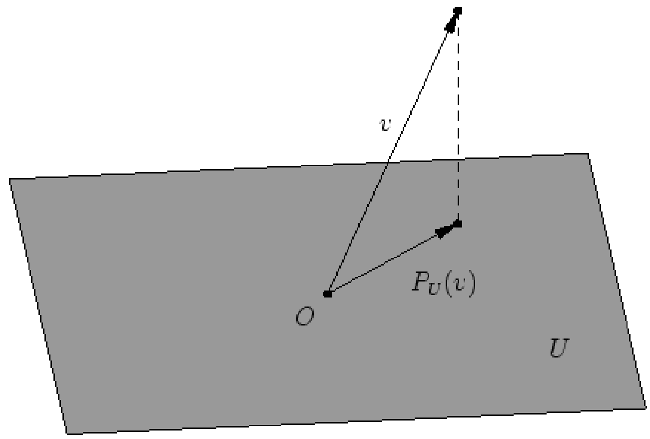
سره پيژندل شوی دی.

.

(c) ketabton.com: The Digital Library








که $u_1, \ldots, u_j$ د $U$ یو اوتوګونال پنسټ وي، نو دی

$$P_U(v) = \sum_{k=1}^{j} \frac{\langle v, u_k \rangle}{\langle u_k, u_k \rangle} u_k \, .$$

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

له $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$ سره یوه هایپرسطحه $H \subset \mathbb{R}^4$ تعریف کیږي. د اوروتوګونال بنسټ لپاره کېدی شي لاندې وکتورونه وکارول شي:

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

نو د وکتور $x = (1, 2, 3, 4)^t$ د اورتوګونال پروجکشن لپارره لاندې باور لري:

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$P_H x = \frac{x^t u}{|u|^2}u + \frac{x^t v}{|v|^2}v + \frac{x^t w}{|w|^2}w = \frac{-4}{4}u + \frac{-2}{4}v + \frac{0}{4}w$$

ليکونکي: هيوليک، کرايخ

## د ګرام-شميت تکلار يا قانون Verfahren von Gram-Schmidt

د يوه بنسټ $b_1, \ldots, b_n$ څخه کېدی شي، لکه په لاندې توګه، يو اورتوګونال بسټ $u_1, \ldots, u_n$ جوړ شي. دا سړی د $j = 1, \ldots, n$ لپاره سوکڅيسيو تعريفوي:

$$u_j = b_j - \sum_{k<j} \frac{\langle b_j, u_k \rangle}{\langle u_k, u_k \rangle} u_k,$$

د $j = 1, \ldots, n$ لپاره.

دا رکورزيو ساده کيږي، که بنسټوکتور له هر پل(قدم) ورسته نورمي شي:

$$u_j \leftarrow \frac{u_j}{|u_j|}.$$

په دې خالت دي: $\langle u_k, u_k \rangle = 1$

ليکونکي: اپپ، هيوليک

سړی ايندوکتيو( له يوه څخه توليز ته) ښايي، چې $u_1, \ldots, u_l$ د $\operatorname{span}(b_1, \ldots, b_l)$ لپاره يو اورتوکونال بنسټ جوړزي.

د $l = 1$ لپاره دا روښانه دی: $u_1 = b_1$

(c) ketabton.com: The Digital Library



د ایندکشن پل $(l \to l+1)$ لپاره په پام کې نیسو، جې د $j \leq l$ لپاره لرو

$$\langle u_{l+1}, u_j \rangle = \langle b_{l+1}, u_j \rangle - \sum_{k \leq l} \frac{\langle b_{l+1}, u_k \rangle}{\langle u_k, u_k \rangle} \underbrace{\langle u_k, u_j \rangle}_{\delta_{k,j}|u_k|^2} = 0 \,.$$

له دې امله $u_1, \ldots, u_{l+1}$ اورتوګونال دي. بالاخره

$$b_{l+1} - u_{l+1} \in \operatorname{span}(u_1, \ldots, u_l) = \operatorname{span}(b_1, \ldots, b_l) \,,$$

دي، له کوم سره چې و ښوول شو، دواړه فضا همغه لاندې فضا غېوي يا خوروي.

لیکونکي: هیولیک، کرایخ

د دې لپاره چې نسبت سکالار ضرب یا ځل

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x) g(x)\, dx$$

ته د پولینومونو $p_0, p_1, \ldots$ اورتوګونال پرلپسې(ترادف) جوړه کړو ِکیدی شنلار سرهي سړی د مونوم $q_j(x) = x^j$ ځخه مخ ته لاړشي. د کرامشمیت د تلنلار سره لاس ته راوړي.

$$p_0 = q_0$$

$$p_1 = q_1 - \frac{\int_{-1}^{1} x \cdot 1\, dx}{\int_{-1}^{1} 1 \cdot 1\, dx} \cdot 1 = x - 0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$p_2 = q_2 - \frac{\int_{-1}^{1} x^2 \cdot x \, dx}{\int_{-1}^{1} x \cdot x \, dx} \cdot x - \frac{\int_{-1}^{1} x^2 \cdot 1 \, dx}{\int_{-1}^{1} 1 \cdot 1 \, dx} \cdot 1 = x^2 - 0 \cdot x - \frac{1}{3}.$$

تولیزه بڼه

$$p_{n+1} = q_{n+1} - \sum_{j=0}^{n} \frac{\langle q_{n+1}, p_j}{p_j, p_j} \cdot p_j$$

کيدی شي کره نازکه يا نرمه شي، که سرې د $q_{n+1}(x) = x^{n+1}$ په ځای پولينوم $\tilde{q}_{n+1}(x) = x \cdot p_n(x)$ وکاروي. د

$$\operatorname{span}\{p_1, \ldots, p_n, q_{n+1}\} = \operatorname{span}\{p_1, \ldots, p_n, \tilde{q}_{n+1}\}$$

له امله دا قانوني دی. په دې حالت کې دې فقط زياتوونی يا د جمعي غړی د $j = n - 1$ سره د صفر سره نا برابره وي.

د سيمتري په بنسټ د $j = n$ لپاره $\langle \tilde{q}_{n+1}, q_n \rangle = \int_{-1}^{1} x \, q_n(x) \, q_n(x) \, dx$ ورکيږي.د $j < n - 1$ لپاره $[x \, p_j(x)]$ د $p_k(x), k < n$ يوکرښيز کمبينيشن دی.

د $\langle p_n, p_n \rangle = 0$ له امله له دې سره

$$\langle \tilde{q}_{n+1}, p_j \rangle = \int_{-1}^{1} p_n(x) \, [x \, p_j(x)] \, dx$$

هم صفر دی.

په دې توګه لاس ته راوړل شوي پولينومونه د لجندر Legendre پولينومونه بلل کيږي. د يوه بل نومالي کونې سره

(c) ketabton.com: The Digital Library





$$p_n(x) = \alpha_n x^n + \ldots$$

د لاندې بڼې د دوه ترمونو ريکورزيون لري

$$p_{n+1}(x) = \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}(x - \beta_n)p_n(x) - \gamma_n p_{n-1}(x)$$

د $\beta_n = \frac{\langle xp_n, p_n \rangle}{\varrho_n}, \gamma_n = \frac{\alpha_{n+1}\alpha_{n-1}\varrho_n}{\alpha_n^2 \varrho_{n-1}}$ او $\varrho_n = \langle p_n, p_n \rangle$ سره

## كرښيزه څيرونه (فنكشن يا تابع) Lineare Abbildung

د $K$–وکتور فضا $V$ او $W$ ترمنځ فنکشن $L : V \longmapsto W$ ګرښيز بلل کيږی، که دا لاندې خوبونه ولري:

- مثبتوالی

$$L(u + v) = L(u) + L(v)$$

-هوموګيپينوالی:

$$L(\lambda v) = \lambda L(v)$$

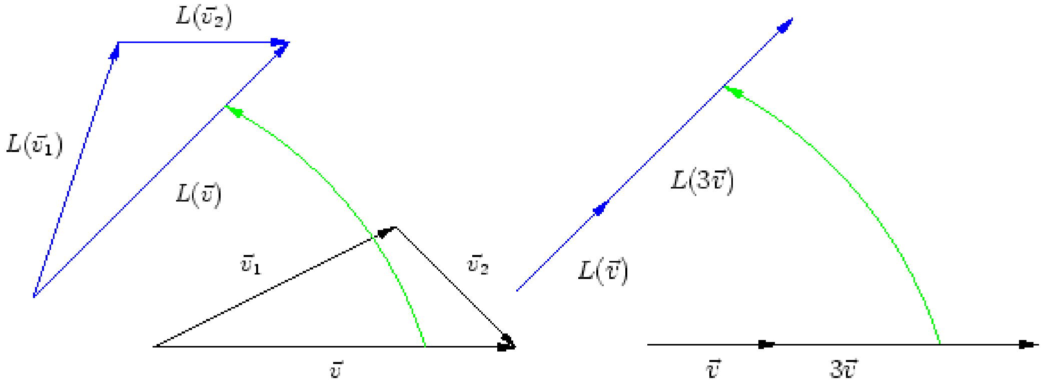
له دې سره $u, v \in V$ او $\lambda \in K$ په خوښه وکتورونه همداسې سکالار دي.

په ځانګړې توګه $L(0_V) = 0_W$ او $L(-v) = -L(v)$ باور لري.

لكه په لاندې بيلګه كې به چې ښوول شي، يو څرخون كرښيز دی.

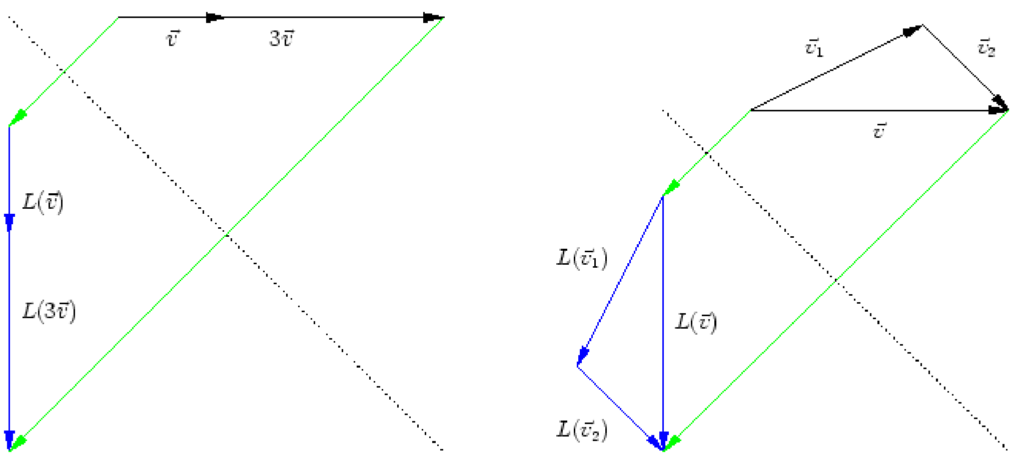
(c) ketabton.com: The Digital Library






لکه جمعه یا زیاتون $v = v_1 + v_2$ د دواړو وکتورونو $v_i$ سره یو مثلث یا درېګوډی جوړوي، چې د ده بڼه د څرخون سره بې تغیره باتیږي، دا په دې معنا چې جمعه د مخه یا د څرخون سره جوړه شي. دا چې د ضریب $\lambda$ سره غزونه د څرخون سره بدلیږي، بسې تړلی لیدل کیږي.

په ورته توګه ښوول کیږي چې هندارونه هم کربنیزه ده.




په سطحه کې د ټکو یوه راکښنه کربنیزه نه ده.

نه زاتونوالی یا جمعه کیدنه او هم نه هوموجینیتي پوره دي. د

$$T: \ (x_1, x_2) \mapsto (x_1 + 1, x_2)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



او

$$v_1 = (1,0),\ v_2 = (0,1),\ \lambda = 2$$

لپاره د بيلګي به توګه باور لري

$$T(v_1 + v_2) = (2,1) \neq (3,1) = T(v_1) + T(v_2)$$

$$T(\lambda v) = (3,0) \neq \qquad (4,0) = \lambda T(v)\,.$$

ليکونکي: هيورليک، هيورنر

يو ځو بيلګي لاندي د حقيقي توابعو يا فنکشنونو جدول ښايى. دلته هرچېرته ورکړ شوي، چې د کربنيزوالي لپاره کوم شرطونه پوره دي.

| ځيرونه يا فنکشن mapping | جمعى Additive | هوموجين homogen |
|---|---|---|
| $f \mapsto f'$ | X | X |
| $f \mapsto \|f\|$ | - | - |
| $f \mapsto \int_0^1 f$ | X | X |
| $f \mapsto \max f$ | - | - |

(c) ketabton.com: The Digital Library



| | | |
|---|---|---|
| $f \mapsto f(0)$ | X | X |
| $f \mapsto (\max f + \min f)/2$ | - | X |

د یوه فنکشن لپاره یوه بیلګه، زیاتیز (مثبت) مګر هوموجېن نه دی، دادی، چې یو فنکشن $T$ ، چې یو کمپلکس ارزښتیزه تابع د هغې حقیقي برخه په ګوته کړي یا وښایی یا په هغې څېره شي. دلته باور لري: $T(\mathrm{i}f) \neq \mathrm{i}T(f)$

لیکونکي: هیورلیګ، هیورنر

## د کرښیزو توابعو کمپوزیشنKomposition linearer Abbildungen

د دوه کرښیزو توابعو

$$S : U \to V\,, \qquad T : V \to W\,.$$

لپاره سړی کمپوزیشن تعریفوي( چې یوبل پسې تړاو یا ځنزیرونه هم بلل کیږي)

$$T \circ S : \quad U \to W$$

دا د لاندې لارې

$$(T \circ S)(u) = T(S(u))\,,$$

دا په دې معنا چې په $u \in U$ باندې فنکشن $S$ او په نتیجه باندې فنکشن $T$ کارول کیږي، فنکشن $T$ د فنکشن $S$ پسې کارول کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



د دوه کرښيزو فنکشنونو کمپوزيشن بېرته کرښيز دی.

## ماتريکس Matrix

په يوه تن يا جسم باندې د يوه $(m \times n)$ -ماتريکس تر نامه لاندې ( $m, n \in \mathbb{N}$ ) دا لاندې يوه ولاړکډيزه - يا قام الزاويه شکل پوهيږو:

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} .$$

دلته دا د $A$ وکتورونه $(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$ د $i$ –مې ليکې – او $(a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj})^t$ د $j$ –مې مټې( ستن يا پرته ليکه يا درځ...) وکتورونه بلل کيږي. په ځانګړي توګه $(n \times 1)$ - ماتريکس يو د ليکې - او $(1 \times n)$ - ماتريکس يو د مټې يا ستني وکتور دي..

د ټولو $(n \times m)$ - ماتريکسونو ټولګه په $K^{n \times m}$ سره په نخښه کيږي، حقيقي ( کمپلکس) ماتريکسونه د $\mathbb{R}^{n \times m}$ ( $\mathbb{C}^{n \times m}$ ) سره په نخښه کيږي.

لاندې بيلګې د مختلف د ماتريکس بعدونه يا پراخېدونی ښايي.

$$\begin{pmatrix} 31 \\ 57 \\ 97 \end{pmatrix}, \quad (\mathrm{i}, 1+\mathrm{i}, -1, 3\mathrm{i}), \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \mathrm{i} & 1+\mathrm{i} & -\mathrm{i} \\ \sqrt{3}+3\mathrm{i} & 7543 & 17 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 11 & 12 \\ 21 & 22 \\ 31 & 32 \end{pmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



لومړي دوه ماتريکسونه د ليکو – همداسي د مټووکتورونه دي، دا په دې معنا چې د کومو څخه چې د يوې ديمنزيون 1 دی. بني لور ته يو ځلوريځ يا مربع ماتريکس او يو يو ولاړګوډيز- يا مستطيلي ماتريکس دی.

ليکونکي: هيورليګ، هيورنر

د يوه کربنيز فنکشن ماتريکس Matrix einer linearen Abbildung

د دوه $K$ - وکتوروفضاو ترمنځ د بنسټونو $E = \{e_1, \ldots, e_n\}$ او $F = \{f_1, \ldots, f_m\}$ سره يو کربنيز فنکشن $L : V \longmapsto W$ دبنسټوکتورونو د $L(e_j) = a_{1,j} f_1 + \cdots + a_{m,j} f_m$ عکسونو يا ارزښت قيمتونو سره يواځني ټاکلي دي. دا لاندې دماتريکس انځورونه لری:

$$w_F = A v_E \longleftrightarrow w_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} v_j, \quad i = 1, \ldots, m,$$

د کومو سره چې $v_j$ او $w_i$ د $v$ او $w = L(v)$ وضعييه قيمتونه (کواورديناتونه) به نخښه کيږي نسبت و بنسټ $E$ او $F$ ته. د ماتريکس $A$ په $j$-مه مټه کې د $L(e_j)$ کواورديناتونه يا وضعيه قيمتونه نسبت د $F$ بنسټ ته ځا په ځای دي.

دا چې $L$ د يوه بنسټ د عکسونو يا ارزښتونو سره يواځنی ټاکلي، تړلي د کربنيزوالي لپاره شرايطو څخه ورکول کيږي:

$$w = L(v) = L\left(\sum_j v_j e_j\right) = \sum_j v_j L(e_j) = \sum_j \sum_i v_j a_{i,j} f_i \,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



ليکو

$$w = \sum_i w_i f_i$$

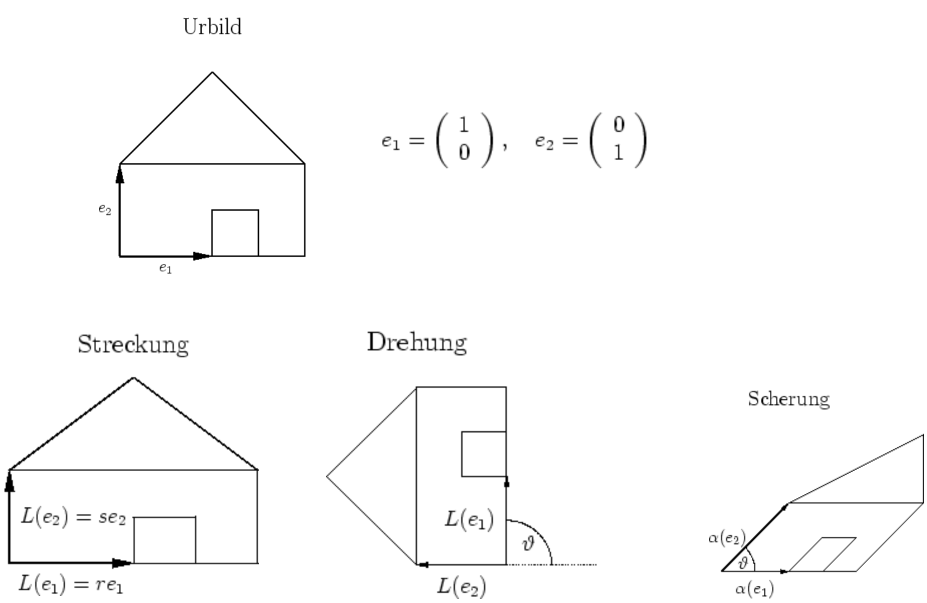
او د بنسټ وکتورونو $w_i$ کواوردينات پرتله کيږي، داسې هم سړی غوښتل شوي د ماتريکسونو انځورونه لاس ته روړي.

ليکونکي: هيوليګ، هيورن

په لاندې کې يو څو د سطحې کرښيزې تابع

$$L:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

انځور شوي دي، چې د يوون – يا واحد وکتورونو شکلونو يا بهتره ارزښتونو $e_i$ (غوړ) له لارې کره شوي دي.



(c) ketabton.com: The Digital Library



$$A = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & \cot\vartheta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

سړی کړی شي چې د ماتریکس $A$ انځورونه نسبت کانونیکي بنسټونو $e_1, e_2$ ته تړلی معلومیږی یا لوستل کیږي. د ماتریکس متې هره یوه ځانله د وکتورونو $L(e_i)$ ، $i = 1, 2$ کواوردیناتونه خوندی لري.

لیکونکي: هیولیګ، هیورن

یو کربنیز فنکشن یا تابع

$$x \mapsto p(x) = a_0 + a_1 x$$

په ټکو $x = 0, 1$ باندې د هغو ارزښتونو سره ټاکلي. فنکشن

$$L : p \mapsto \begin{pmatrix} p(0) \\ p(1) \end{pmatrix}$$

کربنیز دی او کېدی شي نسبت د ضریب وکتورونو

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

له لارې تعریف شوي مونومبنسټ سره

(c) ketabton.com: The Digital Library



رکربنیز الج

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

له لارې انځور شي

که بنسټ

$$p_1(x) = 1 - x, p_2(x) = x$$

استعمال شي، نو ماتريکس

$$\begin{pmatrix} p_1(0) & p_2(1) \\ p_1(0) & p_2(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ترې لاس ته راځي.

ټوليز د $\leq n$ درجې په $m$ تکيه ځايون $x = x_1, \ldots, x_m$ کې د يوه پولينوم

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

ارزښتونه يا قيمت ټاکنه د واندرموند –ماتريکس Vandermonde-Matrix

$$V = \begin{pmatrix} x_1^0 & x_1^1 & \cdots & x_1^n \\ x_2^0 & x_2^1 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_m^0 & x_m^1 & \cdots & x_m^n \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} p(x_1) \\ \vdots \\ p(x_m) \end{pmatrix} = V \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

سره تشريح شوې يا ورکړل شوې.

(c) ketabton.com: The Digital Library



## کواورديناتونو ترانسفورميشن د بنسټ بدلون سره

## Koordinatentransformation bei Basiswechsel

د يوه بنسټبدلون $E \to E'$ سره د يوه وکتور $v$ کواورديناتونه د

$$v_E = A v_{E'} \quad \Leftrightarrow \quad v_{E'} = A^{-1} v_E \,,$$

سره سم ترانسفورمي کوي، د کوم سره چې د مربع ماتريکس $A$ متې د بنسټ وکتورونو $e'_i$ ضريبونه نسبت و بنسټ ته خوندي لري:

$$e'_i = \sum_j a_{j,i} e_j \,.$$

ليکونکي: هيوليګ، هيورن

وکتور $v$ نسبت و بنسټ وکتور $E$ او $E'$ ته لاندې انځورونه لري:

$$\sum_k \lambda_k e_k = v = \sum_k \lambda'_k e'_k \,.$$

د $e'_k$ د انځوروني په مرسته نسبت و بنسټ $E$ ته لرو:

$$v = \sum_k \lambda'_k e'_k = \sum_k \lambda'_k \left( \sum_j a_{j,k} e_j \right)$$

$$= \sum_j \left( \sum_k a_{j,k} \lambda'_k \right) e_j = \sum_j \lambda_j e_j \,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



د کواوردينات پرتلې سره لاس ته راځي: $v_E = Av_{E'}$

ليکونکی:ويپر

## Bild او Kern معنا څيره يا شکل او زړي

د يوه کربنيز تابع $L : V \to W$ لپاره د

$$\ker L = \{v \in V : \; L(v) = 0\} \; \subseteq V$$

سره سړی کرن يا زړی په نخښه کوي او د

$$\text{Bild}\, L = \{w \in W : \; \exists v \in V$$

$$L(v) = w\} \; \subseteq W$$

د سره د $L$ ارزښت يا شکل ښوول کيږي يا په نخښه کيږي. دواړه ډېری( ستونه) لاندي – يا برخه فضاوې دي.

ليکونکی: کيمرلې

ثبوتوو چې د K –وکتورفضا $V$ همداسې $W$ نسبت و کربنيزو عملياتو ته تړلي يا رابند دي يعنی دا عمليات په کې بې بنديزه اجراکېدی شي.

اول - $\ker L$ د $V$ لاندې فضا ده: د $u, v \in \ker(L), \; \lambda \in K$ لپاره، د کربنيزوالي په بنسټ باور لري:

$$L(\lambda\, u) = \lambda\, L(u) = \lambda\, 0 = 0$$

او

$$L(u+v) = L(u) + L(v) = 0 + 0 = 0\;.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



د دې په تعقيب $\lambda u$ او $u+v$ هم د $\ker(L)$ توکي دي.

دويم - $\operatorname{Bild} L$ د $W$ لاندېفضا ده: د $u, v \in \operatorname{Bild} L$ لپاره د $u = L(x), v = L(y)$ او $\lambda \in K$ سره د $L$ کرښيزوالي په بنسټ لاندې صدق کوي:

$$\lambda u = \lambda L(x) = L(\lambda x)$$

او

$$u + v = L(x) + L(y) = L(x+y) \ .$$

دا چې $V$ يوه وکتورفضا ده، نو اړونده له مخ ښېروني يا عکسونه يا تابع وې هم شته او په تعقيب $\lambda u$ او $u+v$ هم د $\operatorname{Bild} L$ توکي دي.

ليکونکی: ويپر

## د Bild او Kern ابعاد يا براخيدوني Dimension von Bild und Kern

د يوه کرښيز فنکشن $L : V \to W$ لپاره باور لري

$$\dim V = \dim \ker(L) + \dim \operatorname{Bild}(L) \ ,$$

که وي: $\dim V < \infty$

د دې لپاره چې د بعد کتمتوالی وښايو، نو د $\ker L$ لپاره يو بنسټ $E' = \{e_1, \ldots, e_m\}$ ټاکو او دا د $\{e_{m+1}, \ldots, e_n\}$ سره د $V$ و بنسټ $E$ ته پوره کوو. دا چې

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$L\left(\sum_{i=1}^{n} v_i e_i\right) = \sum_{i=m+1}^{n} v_i L(e_i),$$

نو لرو:

$$\mathrm{Bild}\, L = \mathrm{span}\, F, \quad F = \{L(e_{m+1}), \ldots, L(e_n)\}.$$

دا چې پسې $F$ کرښیز خپلواک دی، یعنې د $\mathrm{Bild}\, L$ بنسټ، نو له

$$\sum_{i=m+1}^{n} v_i L(e_i) = 0$$

لاس ته راځي $\sum_{i=m+1}^{n} v_i e_i \in \ker L$ او له دې سره $v_i = 0$.

دا غوښتونی د بعدفرمول اوس د بنسټوکتورونو تعداد څخه لاس ته راحي.

لیکونکي: هیولیک، هیورن

د بعدفرمول د ښوونې لپاره د پولینومونو - چې له $\leq n$ درجه لري- په فضا باندې $k$-م مشتق څېړل کیږي.

لومړی دې $k = 1$ او $n = 2$ وي. د پولینومونو د فضا لپاره چې درجه یې $\leq 2$ ده $\{1, x, x^2\}$ بنسټ جوړوي، دا فضا پس بعد 3 لري. د $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ لپاره

$p'(x) = a_1 + 2a_2 x$ یو پولینوم دی چې درجه یې $\leq 1$ ده. بیلدفضا نو بعد 2 لري.

د مشتقنیولو سره ثابته له منځه ځي یا ورکیږي. دا یوه یو بعدې لاندې - برخفضا جوړوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



د تابع ګرن يا زړی بعد 1 لري او له دې سره د $3 = 1 + 2$ سره د بعدفرمول پوره دی يا بنول شوی.

په توليزه توګه پولينوم لاندې فرمول لري:

$$p(x) = \sum_{l=0}^{n} a_l x^l$$

او $k$ -م مشتق

$$p^{(k)}(x) = \sum_{l=k}^{n} \frac{l!}{(l-k)!} a_l x^{l-k} .$$

بيلد يا ځېره يا ارزښت د $\leq n-k$ درجې پولينوم دی او پولينومونه چې $< k$ درجه لري له منځه وړل کيږي. پس د بعدفرمول لاندې بڼه لري:

$$n + 1 = \underbrace{((n-k)+1)}_{\dim \text{Bild}} + \underbrace{k}_{\dim \ker} .$$

•

ليکونکي: هيوليګ، هيورن

## معکوس يا په څټ تابع (ځيرونه يا فنکشن)Inverse Abbildung

يوه کرښيزه تابع $L : V \to W$ تيک هلته انجکتيو يا په کې ده، که $\ker L = 0_V$ وي. په دې حالت کې د

$$w \mapsto v, \quad w = L(v) ,$$

له مخې يو معکوس تابع $L^{-1} : \text{Bild}\, L \to V$ تعريف شوې، چې دا هم کرښيزه ده

(c) ketabton.com: The Digital Library



په ځانګړي توګه باور لري

$$L^{-1} \circ L(v) = v\,, \quad L \circ L^{-1}(w) = w$$

د ټولو $v \in V$ او $w \in \text{Bild}\, L$ لپاره

ليکونکي: هيوليک، هيورن

د $L$ د ګربنيزوالي په دليل صدق کوي

$$L(v_1) - L(v_2) = L(v_1) + L(-v_2) = L(v_1 - v_2)\,,$$

او له دې اړيکو لاس ته راځي:

$$L(v_1) = L(v_2) \Leftrightarrow v_1 - v_2 \in \ker L\,.$$

د يوه انجکتيو ( په کې) کربنيزې تابع لپاره کېدی شي چې کرن يازړی فقط صفروکتور خوندي ولري.

دا معکوس تابع کربنيزه ده له لاندې لاس ته راځي

$$L^{-1}(L(v_1) + L(v_2)) = L^{-1}(L(v_1 + v_2)) = v_1 + v_2 = L^{-1}(L(v_1)) + L^{-1}(L(v_2))\,,$$

$$L^{-1}(\lambda L(v_1)) = L^{-1}(L(\lambda v_1)) = \lambda v_1 = \lambda L^{-1}(L(v_1))\,.$$

ليکونکي: هيوليک، هيورن

## د ماتريکسونو وکتورفضا Vektorraum der Matrizen

(c) ketabton.com: The Digital Library



د $(m \times n)$ -ماتريکسونه يو وکتورفضا جوړوي، دا په دې معنا چې دا کېدی شي سره جمعه شي او د سکالار سره ضرب شي. دا کارونې یا عمليې په لاندې توګه کمپوننتډوله تعريف دي:

$$C = A + B \Leftrightarrow \qquad c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j},$$

$$B = \lambda A \Leftrightarrow \qquad b_{i,j} = \lambda a_{i,j} \, .$$

ليکونکي: هيوليګ، هيورن

د ماتريکسونو ضرب Matrix-Multiplikation

د يوه $(n \times m)$ -ماتريکس $A$ او يوه $(m \times s)$ -ماتريکس $B$ ضرب لاندې د $(n \times s)$ –ماتريکس دی:

$$C = AB \, , \qquad c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj} \, ,$$

دا په دې معنا چې د $c_{ij}$ دتعريف لپاره د $A$ د $i$ ليکې توکي او د $B$ د $j$ متې توکي سره جمعه کيږي:

$$\begin{pmatrix} & & \\ & c_{ij} & \\ & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{i1} & \cdots & a_{ik} & \cdots & a_{im} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{kj} \\ \vdots \\ b_{mj} \end{pmatrix} .$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



پام دې وي، چې له دې سره باید د $A$ د متو تعداد ( ګڼون) د $B$ د لیکو تعداد( ګڼون) سره برابر وي.

د ماتریکس ضرب همغه د کرښیزو توابعو کمپوزیشن دی

$$T : u \mapsto v = Bu, \quad S : v \mapsto w = Av\,,$$

دا په دې معنا چې $C$ د $T \circ S$ ماتریکس انځورونه ده.

د کمپوزیشن لپاره د

$$w_i = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} v_k\,, \quad v_k = \sum_{j=1}^{s} b_{kj} u_j$$

له مخې تعریف شوي تابع په لاندې ډول لاس ته راوړي.

$$w_i = \sum_k \sum_j a_{ik} b_{kj} u_j = \sum_j \left[ \sum_k a_{ik} b_{kj} \right] u_j\,.$$

په ګوډیزه یا کونجیزه نوکانو یا که غواړی قوسونو کې افاده د ماتریکسونو ضرب دی او کمپوزیشن توابعو د ماتریکس $C$ سره سرخوري( یا باربر دی).

لیکونکي: هیولیګ، هیورن

په لاندې یو څو معلوم د ماتریکسونو ضربونه ورکړشوي دي:

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$\begin{pmatrix} 1 & 10 & 100 \\ 100 & 10 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 321 & 213 & 132 \\ 123 & 312 & 231 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 13 \\ 14 & 26 \\ 21 & 39 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 25$$

$$\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2i \end{pmatrix}$$

## د ستراسن( ویینه: شتراس) الګوریتم Strassens Algorithmus

که په ورسره بلد ډول د دوه $(2 \times 2)$ -ماتریکسونو $A$ او $B$ ضرب $C = AB$ تر څیړنې لاندې ونیسو، نو سړی اته ضربونو ته اړتیا لري. په ډېر هکبکوالي( چې د څه انتظار نه کیږي او پیښ شي) شتراسن وښوول چې اوه ضربونه بسیا کوي

[V. Strassen: Gaussian elimination is not optimal, Numer. Math. 13 (1969). 357-361]. Man berechnet die Produkte

سړی ضربونې شمیري

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$\begin{aligned} p_1 &= (a_{1,2} - a_{2,2})(b_{2,1} + b_{2,2}) \\ p_2 &= (a_{1,1} + a_{2,2})(b_{1,1} + b_{2,2}) \\ p_3 &= (a_{1,1} - a_{2,1})(b_{1,1} + b_{1,2}) \\ p_4 &= (a_{1,1} + a_{1,2})b_{2,2} \\ p_5 &= a_{1,1}(b_{1,2} - b_{2,2}) \\ p_6 &= a_{2,2}(b_{2,1} - b_{1,1}) \\ p_7 &= (a_{2,1} + a_{2,2})b_{1,1} \end{aligned}$$

او د $C$ ضرب د زياتون يا جمعي جوړولو له لارې لاس ته راځي.

$$\begin{aligned} c_{1,1} &= a_{1,1}b_{1,1} + a_{1,2}b_{2,1} &= p_1 + p_2 - p_4 + p_6 \\ c_{1,2} &= a_{1,1}b_{1,2} + a_{1,2}b_{2,2} &= p_4 + p_5 \\ c_{2,1} &= a_{2,1}b_{1,1} + a_{2,2}b_{2,1} &= p_6 + p_7 \\ c_{2,2} &= a_{2,1}b_{1,2} + a_{2,2}b_{2,2} &= p_2 - p_3 + p_5 - p_7. \end{aligned}$$

## كوموتاتور Kommutator

د دوه $(n \times n)$ - ماتريكسونو كموتاتور د $[A, B] = AB - BA$ په حيث تعريف شوی او په ټوليزه توګه ناصفر. د $[A, B] = 0$ په حالت كې ماتريكسونه $A$ او $B$ كموتي كيدونكی ماتريكسونه بلل كيږي.

ليكونكي: هيوليګ، هيورن

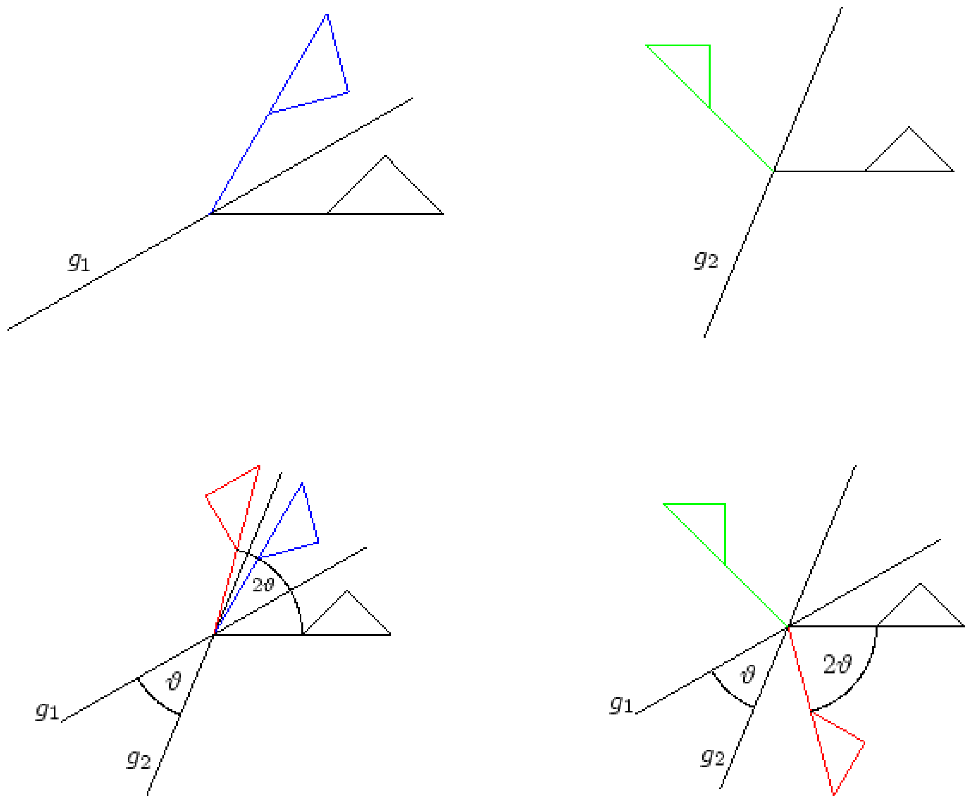
په مختلفو محورونو $g_1$ او $g_2$ د دوه وكتوررونو $S_1$ او $S_2$ دهنداروني ( كه غواړی انغكاس) يو په بل پسې راوړنه كې د لړی پرلپسي رول نه لري.

دا پورته خيره يا عكس د يوګونو هنداررونو شكلونه ښايی. په لاندې لړی كې كېږ ډبله هندارونه $S_2 \circ S_1$ انځور ده اوښي لور ته ډبله يا دوه واره هندارونه $S_1 \circ S_2$. د هر

(c) ketabton.com: The Digital Library



ځله  نتیجې یې د کرښو ترمنځ په دوه برابره کونج څرخون دی، په هر حالت په مختلو لورو.




که $g_1$ د لومړی کونجنیمي په ځیر ونیسو او د $g_2$ د $y$ -محور نو توابع د ماتریکس انځورونه لري.

$$v = S_1 u = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} u \, ,$$

$$v = S_2 u = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} u \, .$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



ډبل هندارونه يا ا نعکاسونه لاندې انځورونه لري

$$w = S_2 S_1 u \;=\; \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} u$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} u\,,$$

$$w = S_1 S_2 u \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} u$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} u\,.$$

په دې حالت کې کوموتاتور په لاندې ډول دی

$$[S_1, S_2] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}\,.$$

ليکونکي: هيوليک، هيورنر

## په څټ يا معکوس ماتريکسونه Inverse Matrix

د يوه معکوس کېدونکي کرښيز تابع $Av \mapsto v$ لپاره $A^{-1}$ د $A$ معکوس ماتريکس په نخښنه کوي، دا په دې معنا چې

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



د

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

يون – واحد ماتريکس سره؟

ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

معکوس کېدونکي په همدې ډول رېګولار ماتريکسونه $A \in K^{n\times n}$ نسبت و ضرب ته يو ګروپ جوړوي، کرښيز ګروپ چې د $\mathrm{GL}(n,K)$ سره په نخښه کيږي.

باور لري

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

د $A, B \in \mathrm{GL}(n,K)$ لپاره .

باور لري

$$B^{-1}A^{-1}AB = B^{-1}EB = B^{-1}B = E\ ,$$

او له دې سره $B^{-1}A^{-1}$ و $AB$ ته معکوس دی

ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

(c) ketabton.com: The Digital Library



د دیاګونال ماتریکس معکوس داسې لاس ته راځي، چې د دیاګونال توکو معکوس یا په ځنډ ارزښت جوړیږي،، د بېلګې په توګه:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1/7 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

د درېګودئ – یا مثلث متاریکس لپاره په معکوسوني کې د مثلث بڼه ساتلې پاتيې کیږي، د بېلګې په توګه:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

په ټولیزه توګه د ماتریکس په ځنډ یا معکوس پوره ځاي نیولی یا ډک دی، د بېلګې په توګه:

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

لیکنې باید د یوه کرښیز مساواتسیتم له لارې و ټاکمل شي.

لیکونکي: هیولیک، هیورنر

## تراسپوني او ادجونګیري ماتریکسونه

### Transponierte und adjungierte Matrix

که د یوه ماتریکس $A$ لیکي اوو متې سره بدلې شي، نو د ترانپوني ماتریکس $B = A^t$ ځخه غږیږو، دا په دې معنا چې

$$b_{i,j} = a_{j,i}\,.$$

که د یوه کمپلکس ماتریکس $A$ سربېره پر دې لیکنې کنجوګیر شي، نو ادیونګیري ماتریکس ترې لاس ته راځي، دا په دې معنا چې

(c) ketabton.com: The Digital Library



$c_{i,j} = \bar{a}_{j,i}$ .

یو ماتریکس د $A = A^{t}$ سره سیومتریک بلل کیږي، یوه ماتریکس د $A = A^{*}$ سره د پخپله ادیونګیري په څېر ده یا هرمیتیکي Hermitesch ده. د حقیقي ماتریکسونو لپاره کلیمي سیومتریک او هرمیتیکي همغه (یوه) معنا لري.

لاندي قانون باور لري:

- $(AB)^{t} = B^{t}A^{t}$ او $(AB)^{*} = B^{*}A^{*}$

- $(A^{t})^{-1} = (A^{-1})^{t}$ او $(A^{*})^{-1} = (A^{-1})^{*}$

د یوې لیکنې لپاره په $C^{t} = (AB)^{t}$ کې باور لري

$$c^{t}_{ji} = c_{ij} = \sum_{k} a_{ik}b_{kj} = \sum_{k} a^{t}_{ki}b^{t}_{jk} = \sum_{k} b^{t}_{jk}a^{t}_{ki}$$

او له دې سره $C^{t} = B^{t}A^{t}$ . دا چې $\overline{a+b} = \bar{a} + \bar{b}$ او $\overline{ab} = \bar{a}\bar{b}$ باور لري، نو دا د ادیونګیري لپاره هم تیک دی.

له

$$E = E^{t} = \left(AA^{-1}\right)^{t} = \left(A^{-1}\right)^{t} A^{t}$$

لاس $\left(A^{-1}\right)^{t} = \left(A^{t}\right)^{-1}$ ته راځي. په ورته توګه د ادجونګیري لپاره هم صدق کوي.

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

(c) ketabton.com: The Digital Library



## شپور Spur

( د ا لماني ژبې ځخه د شپور پښتو معنا: نخښه يا علامه)

شپور د يوه $n \times n$-ماتريکس $A$ اصلي دوه کونټړې توکو( وتر) جمع د $A$ شپور بلل کيږي،

$$\operatorname{Spur}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}\ .$$

که $A, B$ په خوښه $(n \times n)$ - ماتريکسونه وي، نو باور لري:

$$\operatorname{Spur}(AB) = \operatorname{Spur}(BA).$$

له دې لاس ته راځي، د يوه رېګولار ماتريکس $T$ او يوه په خوښه ماتريکس $A$ لپاره صدق کوي:

$$\operatorname{Spur}(T^{-1}AT) = \operatorname{Spur}(A).$$

دا دا معنا لري، چې شپور يا سپور د کواورديناټ ترانفورميشن لاندېinvariant ( نسبت يوې کچونې يا اندازه کوني ته بې تغيره پتتې کيدل) يا بې تغيره پاتيږي.

## د يوه ماتريکس رانګ Rang einer Matrix

د يوه $(m \times n)$-ماتريکس لپاره د کرښيز خپلواکو متو ماکسيمال ګڼون ياتعداد د ماکسيمالو ګرښيزو خپلواکو کيلو سره يو په بل پريوحي يا يو بل سره مساوي دي او د رانګ $A$ په لکنيز ډول $\operatorname{Rang} A$ بلل کيږي،

په ځانګړي ډول باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$\operatorname{Rang} A \leq \max\{m, n\}.$$

د ماکسیمال کرښیز خپلواکو متو $v_1, \ldots, v_n$ تعداد د وکتورفضا پعد به گوته کوي

$$V = \operatorname{span}\{v_1, \ldots, v_n\},$$
،

ځکه چې سړی کړی شي د مټو څخه بنسټ وټاکي. په ورته توګه وينا د ليکو $w_1, \ldots, w_m$ څخه غزيدلي وکتورفضا $W$ لپاره هم صدق کوي.

غوښتنه $\dim V = \dim W$ د $n$ پسې اندکشن له لارې وښوول شي.

ساده ښوول کيږي، چې $\dim V$ او $\dim W$ د لاندې عمليو يا کارونو سره بې تغيره پاتيږي:

- د مټو يا ليکو بدلېدنه يا پرموتيشن

- د يوه سکالار جمعه دېرځله يا د يوه دېرځله سکالار سره د يوې متې ( ليکې)حمعه د يوه بلې متې (ليکې ) سره.

که $A \neq 0$ وي، سړی کړی شي دا عمليه په لاندې بڼۀ

$$B = \begin{pmatrix} b_{1,1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & A' & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

راوړي.

د پرموتيشن سره لومړی $b_{1,1} \neq 0$ لاس ته راځي او بيا د لومړی ليکې يا کيلې او متې پاتې توکي د مناسب جمعې له لارې له منځه وړي. په ټيک ډول لومړي د لومړی متې

(c) ketabton.com: The Digital Library



$(-b_{1,j}/b_{1,1})$ -ځله و $j$ -مې متې ( $j = 2, \ldots, n$ ) ته جمعه کوي او په ورته توګه د ليکو وکتورونو سره هم دا عمل وخ ته بيولاي شو . که د $V'$ او $W'$ سره ْوښتونې وکتورفضاوې د $(m-1) \times (n-1)$ - ماتريکس $A'$ لپاره ، نو لاس ته راځي

$$\dim V = \dim V' + 1, \quad \dim W = \dim W' + 1$$

او د ايندکشن له لارې غوښتنه.

ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

يو څو تيپيکي حالتونه د درې $(3 \times 2)$ -متريکسونو سره دليدلو شوي يا ورکړ شوي دي

$$\text{Rang}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{Rang}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = 2, \quad \text{Rang} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \\ 9 & 12 \end{pmatrix} = 1\,.$$

د دريم ماتريکس لپاره صدق کوي $4S_1 = 3S_2$ د متو $S_1$ او $S_2$ لپاره او د ليکو $2Z_3 = 3Z_2 = 6Z_1$ $Z_1, Z_2$ او $Z_3$ لپاره. په دواړو حالتونو کې نو د غوښتوني وکتورفضا ديمنژن يا بعد برابر په $1$ دی.

ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

## د يوه ماتريکس نورم Norm einer Matrix

د يوه وکتور نورم د ماتريکس نورم

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$\|A\| = \sup_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \max_{\|x\|=1}\|Ax\|$$

ته بنسټ ووي د نورم خويونو سربېره ( مثبتوالى، هوموچىنيتي، مثلثنمساوات)

$$\|AB\| \leq \|A\|\|B\|,$$

باور لري، دا په دئ کعنا چې د ورسره تنظيم شوئ ماتريکس نورم سبضريبي submultiplikativ دی.

ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

په لاندې کې به يوګوني خويونه د ازمايښ له لارې ښوول شي:

مثبتوالى: د وکتور فضا تعريف له لارې تظمين دی، چې $\|A\| \geq 0$ دی. که $A$ صفرمآتريکس وي، نو فقط صفروکتور 0د څېرې په څېر مخ ته لرو. که له بلې خوا نورم صفر وي، نو فقط صفروکتور د څېرې په څېر رامنځ ته کيږي، او تابع يا فنکشن د صفرماتريکس سره تشريح کيږي.

## Homogenitätهوموحنيتي:

$$\max_{\|x\|=1}\|\lambda Ax\| = \max_{\|x\|=1}|\lambda|\|Ax\| = \|\lambda A\|$$

$$= |\lambda|\max_{\|x\|=1}\|Ax\| = |\lambda|\|A\|\,.$$

$$\|\lambda A\| = \max_{\|x\|=1}\|\lambda Ax\| = \max_{\|x\|=1}|\lambda|\|Ax\|$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$= \quad |\lambda| \max_{\|x\|=1} \|Ax\| = |\lambda| \|A\| .$$

Dreiecksungleichungمثلثات برابرون :

$$\|A+B\| = \max_{\|x\|=1} \|(A+B)x\| = \max_{\|x\|=1} \|Ax+Bx\|$$

$$\leq \max_{\|x\|=1} (\|Ax\| + \|Bx\|)$$

$$\leq \max_{\|x\|=1} \|Ax\| + \max_{\|x\|=1} \|Bx\| = \|A\| + \|B\| .$$

Submultiplikativitätسب ضریبوالی:

د $B = 0$ لپاره $AB = 0$ دي او له دې سره نامساوات پوره دی. د $B \neq 0$ لپاره دی:

$$\|AB\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|ABx\|}{\|x\|} = \sup_{x:Bx \neq 0} \frac{\|A(Bx)\|}{\|Bx\|} \frac{\|Bx\|}{\|x\|}$$

$$\leq \sup_{y \neq 0} \frac{\|Ay\|}{\|y\|} \sup_{x \neq 0} \frac{\|Bx\|}{\|x\|} = \|A\| \|B\| .$$

د لومړي بنې بدلون سره ، چې په حقیقت کی ډېری یا سټ په یوه سوپرېموم Supremumڅېره کیږي محدودیږي، مګر فقط وکتورونه ترې لرې کیږي، چې صفروکتور دڅېرې په ډول لري او له دې سره سوپرېموم نه اغیزمن کوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



ليکونکي: هيوليګ ، کرايخ

## د ليکو د جمعې نورم Zeilensummen-Norm

د وکتورونو لپاره ماکسيمومو نورم $\|v\|_\infty = \max_i |v_i|$ د ماتريکسونو لپاره د ليکوجمعي نورم

$$\|A\|_\infty = \max_i \sum_j |a_{ij}|$$

تنظيم دی.

ليکونکي: هيوليګ ، کرايخ

د $\|x\|_\infty = \max_j |x_j| = 1$ لپاره

$$\|Ax\|_\infty = \max_i \left| \sum_j a_{ij} x_j \right| \leq \max_i \sum_j |a_{ij}| ,$$

دی

او سړی لاس ته راوړي

$$\|A\|_\infty = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|_\infty \leq \max_i \sum_j |a_{ij}| .$$

که سړی ونيسي يا فرض کړي، چې ماکسيموم د $i = k$ لپاره فرض شوی يا نيول شوي، نو مساوات د

$$x_j = \operatorname{sign} a_{kj}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



انتخاب له لارې لاس ته راځي، څکه چې دی:

$$\left|\sum_j a_{kj} x_j\right| = \sum_j \| a_{kj}| \ .$$

ليکونکي: هيوليک ، کرايخ

## د ماتريکس د ډکوني جوړښت Belegungsstruktur von Matrizen

د صفر سره مختلف ماتريکس توکو $a_{i,j}$ د تنظيم سره سم د لاندې ترمنځ توپير کوي

اول – دياګونالماتريکس: $a_{i,j} = 0$ د $i \neq j$ لپاره،

باند ماتريکسونه Bandmatrizen: د لپاره د سره د صفر نه مختلفو ماتريکسونو د دياګونالو شمېر، چې د باند سور په څېر په نخښه کيږي يا نومول کيږي،

پورته ( کښته) مثلث ماتريکسونه: $a_{i,j} = 0$ د $i < j$ ($i > j$) لپاره.

په توليزه توګه يو $(m \times n)$ - ماتريکس ضعيف ډکشوی، که فقط توکي $c \max(m,n)$ د صفي سره نامساوي وي، د يوې نه ډېرې لوی ثابتې $c$ سره.

ليکونکي: اپپ، هيوليک

## اورتوګونال او يونيتار ماتريکسونه Orthogonale und unitäre Matrizen

(c) ketabton.com: The Digital Library



يو کمپلکس $(n \times n)$ - ماتريکس $A$ يونيتار بلل کيږي، که ولرو

$$A^{-1} = \overline{A}^t = A^*,$$

دا په دې معنا چې که د $A$ متې د $\mathbb{C}^n$ يو اورتوګونال بنسټ جوړ کړي.

د حقيقي ماتريکسونو لپاره ( لکه په سکالار ضرب کې) کمپلکس کنجګيشن،

$$A^{-1} = A^t,$$

او سړی د يوه اورتوګونال ماتريکس څخه غږيږي.

اورتوګونال ( يونيتار) ماتريکسونه د( $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ ) يو لاندې – برخګروپ جوړوي

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

## د هادامارد – ماتريکسونه Hadamard-Matrizen

د $n = 2^k$ لپاره تر سکالار کېدنوپورې اورتوګونال ماتريسکونه شتون لري د $H_k$

د $n \times n$ بعد په $\{-1, 1\}$ کې د ليکنو سره داسې په نامه هادامارد ماتريکسونه.

د هاداماد لومړی ماتيکسونه دي:

$$H_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad H_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



په ټوليزه توګه ماتريسونه د ريکورزيون

$$H_{2k} = \begin{pmatrix} H_k & H_k \\ H_k & -H_k \end{pmatrix}$$

سره جوړکړي.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

## د فورير (وپينه: فوريې) ماتريکسونه Fourier-Matrizen

د توان جوړولو له لارې د يوون - يا واحد ريښې

$$w_n = \exp(2\pi \mathrm{i}/n)$$

سړی داسې په نامه فوريې ماتري:س لاس ته راوړي

$$W_n = \begin{pmatrix} w_n^{0\cdot 0} & \cdots & w_n^{0\cdot(n-1)} \\ \vdots & & \vdots \\ w_n^{(n-1)\cdot 0} & \cdots & w_n^{(n-1)\cdot(n-1)} \end{pmatrix}.$$

دا د نورمي کولو( $W_n \to W_n/\sqrt{n}$ ) پسې يونيتار دي، دا په دې معنا چې $W_n^* W_n/n$ يوون – يا واحد ماتريکس دی.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

(c) ketabton.com: The Digital Library



د متو اورتوګوناليټي ساده ازمايل کيږي. د $(j+1)$ ـمو او $(k+1)$ -مو متو سکالار ضرب

$$\sum_{\ell=0}^{n-1} w_n^{\ell j}\overline{w_n^{\ell k}} = \sum_{\ell} w_n^{(j-k)\ell} = \frac{w_n^{(j-k)n}-1}{w_n^{j-k}-1},$$

دی، او داچې $w_n^n = 1$ دی، نو صورت يا ماتباندې صفر دی.

ليکونکي: اېپ، هيوليک

د $n = 4$ لپاره $w_4 = \exp(2\pi\mathrm{i}/4) = \mathrm{i}$ دی، او سرى لاس ته راوړي

$$W_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \mathrm{i} & -1 & -\mathrm{i} \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -\mathrm{i} & -1 & \mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

په 2 د وېشنې وروسته $W_4$ يونيتار دی، دا په دې معنا چې

$$\left(\frac{1}{2}W_4^*\right)\left(\frac{1}{2}W_4\right) = E.$$

له دې امله د فوريې ماتريکسونو د سيومترى والى له امله $W_4^* = \overline{W_4}^t = \overline{W_4}$ دی.

ليکونکي: اېپ، هيوليک

## نورم ريښتونې يا - وفاداره اورتوګونال ا و يونيتار ماتريکونه

## Normtreue orthogonaler und unitärer Matrizen

(c) ketabton.com: The Digital Library



یو حقیقي ( کمپلکس) ماتریکس $A$ ټیک هلته اوتوگونال ( یونیتار ) دی، که دا د هر وکتور اوکلید( اقلیدس euklidische ) نورم انواریانت پریږ دی:

$$|Av| = |v| .$$

لیکونکي: اېپ، هیولیګ

بسیا کوي، چې کمپلکس حالت وڅیړو، چې حقیقي حالت په بر کې نیسي.

اول - $A$ یونیتار ده، نو باور لري

$$(Ay)^*(Ax) = y^*A^*Ax = y^*x$$

پس په ټولیزه توګه د کمپلکس وکتورونو سکالار ضرب لاس ته راځي، چې د نورمریښتونوالی په بر کې لري.

دویم – د نورم ریښنونوالي څخه لومړی لاس ته راځي، چې د $A$ د متې وکتور $v_j$ د یوون وکتورونو $e_j$ د عکسونو نورم یوی خوندي لري. د دې لپاره چې وښایو چې مختلفې متې اوتوګونال دي،نو $\lambda = \exp(i\vartheta)$ ټاکو، داسې چې لرو:

$$(\lambda v_k)^* v_j \in \mathbb{R} .$$

پسې د نورریښتونوالی او اقلیدس نورم تعریف په بنسټ لرو

$$2 = |e_j + \lambda e_k|^2 = |v_j + \lambda v_k|^2 = |v_j|^2 + |\lambda|^2 |v_k|^2 + 2\,\mathrm{Re}(\lambda v_k)^* v_j = 2 + 2\overline{\lambda} v_k^* v_j ,$$

په تعقیب باید په ښی لور سکالار ضرب ورک شي.

لیکونکي: اېپ، هیولیګ

(c) ketabton.com: The Digital Library



## ځيوکليکي ( تلبيرته راګرځېدوني) ماتريکسونه Zyklische Matrizen

د ځيکليکي $(n \times n)$-ماتريکسونو متې د لومړی متې د ځيوکليکي راکښنې له لارې جوړيږي:

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots \\ a_1 & a_0 & a_{n-1} & \cdots \\ a_2 & a_1 & a_0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}.$$

د ماتريکسونو ضرب سره ځيوکليکي جوړښت ساتلی يا خوندي پاتې کيږي.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

د يوه ځيوکليکي ماتريکس-ضرب $C = AB$ توکی دي:

$$c_{i,k} = \sum_{j=1}^{n} a_{i-j \bmod n} b_{j-k \bmod n}.$$

د اچي

$$\{0, \ldots, n-1\} = k + \{0, \ldots, n-1\} \bmod n,$$

کېدی شي سری په زياتوونو ( د جمعي اجزاوو ) د $j$ په ځای $j + k$ ځای په ځای کړي، کوم چې ښايي، چې $c_{i,k}$ فقط د $i - k \bmod n$ په واک کې دي.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

د ځيوکليکي ماتريکسونو

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 1 \\ 1 & -3 & 4 \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 5 \\ 5 & 0 & -2 \\ -2 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

ضرب دا لاندې څيوکليکي ماتريک دی:

$$C = AB = \begin{pmatrix} 18 & 11 & -23 \\ -23 & 18 & 11 \\ 11 & -23 & 18 \end{pmatrix}.$$

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

## ستوښاستيکي ماتريکسونه

يو $(n \times n)$-ماتريکس ستوښايتيکي بلل کيږي، که $p_{i,j} \geq 0$ وي او

$$\sum_{j=1}^{n} p_{i,j} = 1, \quad i = 1, \ldots, n.$$

ستوښاستيکي ماتريکس د احتمالوالو $x_i$ تغير ښايي د لاندې له مخې:

$$x'_j = \sum_i x_i p_{i,j}.$$

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

د $P$ د ښويونو په بنسټ $x'$ هم يو د احتمالوالي وکتور دی، دا په دې معنا چې

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$x'_j \geq 0, \quad \sum_j x'_j = 1\,.$$

دا نه کمښتوالی یا نه منفیوالی څرګند دی او د جمعي انواریانت له لاندې ښخه تعقیبیږي:

$$\sum_j \sum_i x_i p_{i,j} = \sum_i x_i \underbrace{\sum_j p_{i,j}}_{=1}\,.$$

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

## دیترمینانت د انتیسیومتري کرښیزفورم په حیث

## Determinante als antisymmetrische Multilinearform

د یوه مربع ماتریکس $A$ دیترمینانت

$$\det A = \det(a_1, \ldots, a_n)$$

د متې $a_j$ سره کېدی شي د لاندې خویونو له لارې تعریف شي.

اول – ډېرکرښیزوالی

$$\det(\ldots, \alpha a_j + \beta b_j, \ldots) = \alpha \det(\ldots, a_j, \ldots) + \beta \det(\ldots, b_j, \ldots)\,.$$

دویم - انتیسیومتري:

$$\det(\ldots, a_j, \ldots, a_k, \ldots) = -\det(\ldots, a_k, \ldots, a_j, \ldots)\,.$$

دریم – نورمي کونه

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$\det(e_1,\dots,e_n)=1\,,(e_k)_\ell=\delta_{k\ell}\,.$$

د دې قانون سره ديترمينانت د $n$–ځله ضرب سره وده کولی شي:

$$\det A=\sum_{i\in S_n}\sigma(i)a_{i_1,1}\cdots a_{i_n,n}\,,$$

د کوم سره چې د $(1,\dots,n)$ په ټولو ځای بدلونو $(i_1,\dots,i_n)$ سره جمعه کړې او $\sigma$ د ځاې بدلونون سره مخنخښه ښايو.

سړی دا لاندې ليکدود هم استعمالوي

$$\det A=|A|=\begin{vmatrix}a_{1,1}&\cdots&a_{1,n}\\ \vdots&&\vdots\\ a_{n,1}&\cdots&a_{n,n}\end{vmatrix}\,.$$

ليکونکي: هيوليگ، هيونر

د زياتيدونو ( د جمعې اجزاوو) د تعداد د جګيدو له امله($n!$ ځای بدلونونه شتون لري) د ديترمينانت د عملي آنځورونو لپاره ښه مساعدنه دی. مګر دا تړلی د تعريف شوو خويونو تړلی ( د عمليو له لارې) دا د ښووني او د نوروو خويونو د لاس ته راوړلو لپاره اړيين دي. له دې امله دا د ورته (برابر ازښته) تعريف لپاره ورکړشوی دی.

لومړ ی ښايو، چې غوښتل شوي خويونه مو اړيين د ديترمينانت وديزوني ته بيايي، په اړيينه توګه د برموتيشن په مرستې .

د دې سره د $A$ متې د يوون – يا واحد وکتورونو $e_i$ د کرښيز کمبينيشنونو په حيث انځوروي:

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$a_j = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} e_i \, .$$

د ډېرکربنيزوالي په بنسټ باور لري:

$$\det A = \sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_n=1}^{n} a_{i_1,1} \cdots a_{i_n,n} \underbrace{\det(e_{i_1}, \ldots, e_{i_n})}_{=: d_i} \, .$$

دا جمعه لکه چې لاس ته راځي کيدی شي ساده شي.  که له دې دوه يوون - يا واحدوکتورونه برابر وي، نو د انتيسيومتري په بنسټ $d_i$ صفر دی:

$$\det(\ldots, e_k, \ldots, e_k, \ldots) = -\det(\ldots, e_k, \ldots, e_k, \ldots) \, .$$

که ټول $i_\nu$ مختلف وي، دا په دې معنا چې

$$(i_1, \ldots, i_n)$$

يو پرموتيشن دی د $(1, \ldots, n)$ ، نو صدق کوي

$$d_i = (-1)^{\tau(i)} \, ,$$

د کوم سره چې $\tau(i)$ مودولو $2$ د بدلونونو يواځنی ټاکلی تعداد(ګڼون) په نخښه کوي ، د کوم لپاره چې واحدوکتور په کانونيکي لړی پرلپسې راوړی شو. ځای بدلون د مخنخښې تعريف پسې دی:

$$\det(e_{i_1}, \ldots, e_{i_n}) = \sigma(i) \det(e_1, \ldots, e_n) = \sigma(i) \, ,$$

دا په دې معنا چې سړی ورکړ شوې وديزينه لاس ته راوړي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



برعکس کېدی شي و ازمايو، چې وديزينه د غوښتوني قانون سره ټړلي ده. ډېرکرښيز والی باور لري، خکه چې په ضرب

$$a_{i_1,1}\cdots a_{i_n,n}$$

کې د هرې متې تيک يو توکی منځ ته راځي. انتی سيومتری لاس ته راځي، ځکه چې د متو له پدلون دبدلولو تعداد کانونيکي لړی پرلپسي په يو تغير خوري، بالاخره په واحد ماتريکس کې جمعه په يوه زياتووني ( د جمعې غړي) کميږي

$$a_{1,1}\cdots a_{n,n}=1\cdots 1=1$$

.

ليکونکي: هيوليک، هيونر

## 2 - ليکيزه ديترمينانت 2-reihige Determinante

د يوه -ماتريکس ديترمينانت

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad-bc.$$

دی.

دا د برموتيشن وديزيني پسي په ساده ډول ليدل کيږي، ځکه چې $2$ زياتيدونی شتون لري.

دبديل په توګه کېدی شي ديترميناتونه د تعريف شوو خويونو له مخې هم و شمېرل شي.

که متې د کانونيکي واحد وکتور(يوون-) $e_k$ کرښيز کمبينيشن په څېر انځور شي، نو د مولتی (ډېر-)کرښيزوالي له امله لاس ته راځي

$$\det(ae_1+ce_2,be_1+de_2) = a\det(e_1,be_1+de_2)+c\det(e_2,be_1+de_2)$$

$$= ab\det(e_1,e_1)+ad\det(e_1,e_2)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



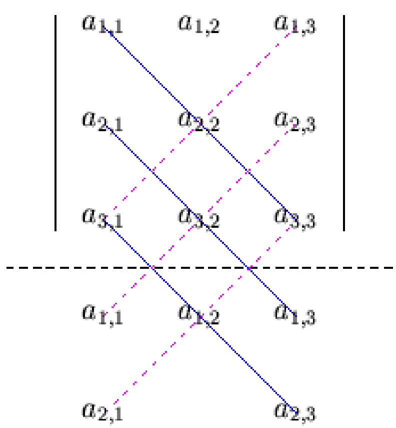
$$+ cb\det(e_2, e_1) + cd\det(e_2, e_2)$$

$$= ab\cdot 0 + ad\cdot 1 + cb\cdot(-1) + cd\cdot 0 = ad - bc\,.$$

لیکونکي:  هیولیک، هیونر

## د ساروس شیما یا شکلSarrus-Schema

د یوه $(3 \times 3)$ - ماتریکس دیترمینانت لکه ځنګه چې په تابع یا فنکشن کې ښوول شوې د ضربونو جمعه ده، چې مختلف دیاګونالونه ( دوه کونجترې) په ګوته کوي:




$$= a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} + a_{2,1}a_{3,2}a_{1,3} + a_{3,1}a_{1,2}a_{2,3}$$
$$- a_{3,1}a_{2,2}a_{1,3} - a_{1,1}a_{3,2}a_{2,3} - a_{2,1}a_{1,2}a_{3,3}$$

دې د ساروس په نامه یادې شوې شیما ته ورته د $n$ جګ بعدي لپاره شتون نه لري.
سملاسي د $n = 4$ دیترمینانت د $24$ ضربونه یوه جمعه لري.

د ساروس –شیما په ساده توګه د ځای بدلون ودیزیېنه پسې په ساده توګه و ازمایي. لاندې جدول ټول زیاتوونې یا جمعی اجزاوې ښایي همداسې دا د ځایبدلون $i$ سره اسوځییري بدلونې، له کومو چې دا مخنخبنه $\sigma$ لاس ته راځي.

| $i$ | بدلونونه | $\sigma(i)$ | Summand |
|---|---|---|---|

(c) ketabton.com: The Digital Library



| | Vertauschungen | | زياتيدونې يا د جمعې اجزا |
|---|---|---|---|
| $(1,2,3)$ | | $+$ | $+a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3}$ |
| $(2,3,1)$ | $\rightarrow (3,2,1) \rightarrow (1,2,3)$ | $+$ | $+a_{2,1}a_{3,2}a_{1,3}$ |
| $(3,1,2)$ | $\rightarrow (2,1,3) \rightarrow (1,2,3)$ | $+$ | $+a_{3,1}a_{1,2}a_{2,3}$ |
| $(3,2,1)$ | $\rightarrow (1,2,3)$ | $-$ | $-a_{3,1}a_{2,2}a_{1,3}$ |
| $(1,3,2)$ | $\rightarrow (1,2,3)$ | $-$ | $-a_{1,1}a_{3,2}a_{2,3}$ |
| $(2,1,3)$ | $\rightarrow (1,2,3)$ | $-$ | $-a_{2,1}a_{1,2}a_{3,3}$ |

ليکونکي: هيوليګ، هيونر

## لوريز حجمونه ( ډکي) Orientiertes Volumen

د يوه حقيقي ماتريکس $A$ ديترمينانت مطلق ارزښت د ـبعدي سره چې له متو ځخه غزيدلی شپات(Spats ) سره پراپر دی يا يو په بل پرېوځي:

$$|\det A| = \operatorname{vol}\left\{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i :\ 0 \leq \alpha_i \leq 1\right\} = \operatorname{vol}\left(A[0,1]^n\right) \ .$$

ليکونکي: هيوليګ، هيونر

(c) ketabton.com: The Digital Library



ساده ازمایل کیدی شي، چې لوریز حجمونه یا ډکي

$$\mathrm{vol}_* A := \mathrm{sign}(\det A)\,\mathrm{vol}(A[0,1]^n)$$

ټول درې د دیترمیناتونو تعریف شوي خویونه ( مولتی کربنیزوالی، انتي سیومتري، نورمي ونه) لري، له دې امله باید باور ولري:

$$\mathrm{vol}_* A = \det A$$

لیکونکي: هیولیګ، هیونر

په $\mathbb{R}^3$ کې د وکتورونو $u,\ v,\ w$ لپاره دیترمینانتونه د شپات ضرب سره سر خوري یا برابر دی:

$$\det(u,v,w) = [u,v,w]\,.$$

د بدیل په قسم دا کېدی شي د $\varepsilon$ -تنځور $\varepsilon$ Tensors- سره افاده شي:

$$\det(u,v,w) = \sum_i \sum_j \sum_k \varepsilon_{i,j,k} u_i v_j w_k\,.$$

که وکتورونه د بېلګې په توګه و ټاکل شي

$$u = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



نو شپات ضرب لاس ته راځي.

$$(2,1,1)\left(\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\right)=(2,1,1)\begin{pmatrix}3\\-1\\-1\end{pmatrix}=6-1-1=4\,.$$

د $\varepsilon$ - تنځور سره لاندې انځورونه لاس ته راځي

$$\begin{aligned}\det(u,v,w) \;=\;& \varepsilon_{1,2,3}\cdot 2\cdot 2\cdot 2+\varepsilon_{1,3,2}\cdot 2\cdot 1\cdot 1+\varepsilon_{2,1,3}\cdot 1\cdot 1\cdot 2\\ &+\varepsilon_{2,3,1}\cdot 1\cdot 1\cdot 1+\varepsilon_{3,1,2}\cdot 1\cdot 1\cdot 1+\varepsilon_{3,2,1}\cdot 1\cdot 2\cdot 1\\ =\;& 8-2-2+1+1-2=4\,.\end{aligned}$$

ليکونکي: هيوليک، هيونر

## د ديترمينانتونو لپاره قاعدې Regeln für Determinanten

د $(n\times n)$ - ماتريکسونو $A$ او $B$ لپاره صدق کوي:

- $\det A=\det A^{t},\quad \det A^{*}=\overline{\det A}$
- $\det(AB)=(\det A)(\det B)$ .
- $A$ تيک هلته انورتير وړ يا معکوسکېدونکي ده، که او $\det A\neq 0$ وي،

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$$

ليکونکي: هيوليګ، هيونر

اول – د سيومتري خويونه د ځای بدلون پسې وديزوني څخه لاس ته راځي:

$$\det A^{t} = \sum_{i \in S_n} \sigma(i) a_{1,i_1} \cdots a_{n,i_n} .$$

که د جمعۍ اجزا سره اندکسونه يا پيژند نخښې $\{1, \ldots, n\}$ هر يو په لړۍ پرلپسې و $i$ ته معکوس ځاي بدلون $j$ سره و وځغلوو، نو د تابع يو تغير شوی نظم لاس ته راوړو:

$$a_{j_1,i_{j_1}} \cdots a_{j_n,i_{j_n}} = a_{j_1,1} \cdots a_{j_n,n} .$$

داچې $\sigma(i) = \sigma(j)$ دی، نو مساوي وديزينه لاس ته راځي، لکه د $\det A$ لپاره.

د بيلګې په توګه

$$i = (1\ 2\ 3) \leftrightarrow j = (1\ 3\ 2)$$

يو بل ته معکوس ځاي پلونونه دي په څيکليکي ليکډول او

$$a_{1,i_1} a_{2,i_2} a_{3,i_3} = a_{1,2} a_{2,3} a_{3,1} = a_{3,1} a_{1,2} a_{2,3} = a_{j_1,1} a_{j_2,2} a_{j_3,3} .$$

که د زياتيدونو يا د جمعي د اجزاو ا ينکسونو يا پيژندنخښو $\{1, \ldots, n\}$ کې وځغلي هر يو په لړۍ پرلپسي و $i$ ته په څټ يا برعکس بدلونونه يا پرموتيشنونه $j$ ته ، نو فنکشن يو تغير شوي نظم راکوي.

$$a_{j_1,i_{j_1}} \cdots a_{j_n,i_{j_n}} = a_{j_1,1} \cdots a_{j_n,n} .$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



دا چې $\sigma(i)=\sigma(j)$ دی، نو سرب مساوي يا باربه وده لاس ته راولي لکه $\det A$ .

د بيلګې په توګه

$$i=(1\ 2\ 3)\leftrightarrow j=(1\ 3\ 2)$$

يو بل ته په ځيکليکي لکندود په څټ يا معکوس پرموتيشنونه يا ځای بدليدنې دي، او

$$a_{1,i_1}a_{2,i_2}a_{3,i_3}=a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1}=a_{3,1}a_{1,2}a_{2,3}=a_{j_1,1}a_{j_2,2}a_{j_3,3}\,.$$

مخنخښنه$\sigma$ مثبت ده او هرځل ، ځکه چې

$$i=(1\ 3)\circ(1\ 2),\quad j=i^{-1}=(1\ 2)\circ(1\ 3)\,,$$

دا په دې معنا چې د پدلونون شميره (ګڼون) هر ځل $2$ دی.

دويم – که معکوسوړ نه وي، نو ضرپوالی د دريم خوي څخه لاس ته راځي.

د $\det A\neq 0$ لپاره ښوول کيږي، چې تابع

$$B\mapsto f(B):=\det(AB)/\det(A)$$

تو د ديترمينانت ک ټاکونکي خويونه لري، په تعقيب د $\det B$ سره بايد برابر وي.
نورمي کونه $f(E_n)=1$ څرکنده ده. د ډېرکرښيزوالي او انتيسيومتري لپاره په پام کې نيسو، چې فنکشن(تابع) $B\mapsto AB$ کرښيزه ده د $B$ په متو کې او دا چې د دوه متو بدلون د $AB$ د اړونده متو بدلون په ګوته کوي.

دريم – يو مربع ماتريکس$A$ تيک هلته نامعکوسوړ ده، که د يوه نه ساده وکتور $x$ لپاره $Ax=0$ وي، دا په دې معنا چې که د $A$ د متو يو نه ساده کرښيو کمپينيشن $a_j$ شتون ولري:

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$x_1 a_1 + \cdots + x_n a_n = 0 \,.$$

$$x_1 a_1 + \cdots + x_n a_n = 0 \,.$$

په ورکړشوي حالتکې د متووکتور ځاپیدلون څه کېدی شي $x_1 \neq 0$ ونیسو، دا په دې معنا چې

$$a_1 = y_2 a_2 + \cdots + y_n a_n \,, \quad y_j = -x_j / x_1 \,.$$

د ضرییوالي څخه لاس ته راځي

$$\det A = \sum_{j=2}^{n} y_j \det(a_j, a_2, \ldots, a_n) = 0 \,,$$

ځکه چې ټولې په ښي لور دیترمیناټونه دوه برابرې متې خوندي لري، باید د انتی سیومتري له امله ورکې شي یا له منځه ولاړې شي.

دا چې د انورتیر وړ invertierbaren (په ښتوړ) ماتریکس دیترمینانت د صفرسره برابر نه دی، د یوه له متو خواره شوي غبرګ اړخیز لوریز حجم په حیث دیترمینانت د هندسي تشریح څخه لاس ته راځي . بالاخره دا همدااوس د $\det(A^{-1})$ . لپاره ښوول شوي ضربوالي څخه لاس ته راځي.

لیکونکي : هیولیک، هیورنر

## د ځانګړو ماتریکسونو دیترمئناتونه

### Determinanten spezieller Matrizen

د یوه $(n \times n)$ - ماتریکس $A$ لپاره دیترمینانتونه ترلي ورکول کیږي

(c) ketabton.com: The Digital Library



- مثلث ماتريکس: که $a_{i,j}=0$ د $i<j$ لپاره يا $i>j$ لپاره وي، نو باور لري

$$\det A = a_{1,1}\cdots a_{n,n}\,.$$

- بلوک دياګونال ماتريکس: که ماتريکس $B$ بلوک جوړښت د $A_{i,j}=0$ , $i\neq j$ سره ولري اومربع دياګونال بلوکونه $A_{i,i}$ ، نو باور لري

$$\det B = \prod_{i=1}^{k}\det A_{i,i}\,.$$

- اورتوګونا او يونيتار ماتريکسونه: د يوه يونيتارمياتريکس $U$ لپاره باور لري

$$|\det U| = 1\,.$$

د يوه اورتوګونال ماتريکس $(u_{i,j}\in\mathbb{R})$ لپاره ځانګړی دی

$$\det U \in \{-1,1\}\,.$$

ليکونکي : هيوليک، هيورنر

مثلثماتريکس : دا چې $\det A = \det A^{t}$ دی، بسيا کوي چې پورته مثلث ماتريکس وڅېړو. د $(1,\ldots,n)$ دځای بدلون $i$ لپاره، کوم چې کتمتوال( ايدنتيتي) نه دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library



، لاس ته ارځي، چې لږ تر لږه يو توکی $i_k$ د $i_k > k$ سره بايد ورکړ شوی وي، دا په دې معنا چې $a_{i_k,k} = 0$ . داسې جمعه راکمېږي، د کټمتوالي ورکړه ، او ديترمينانت د دياګونال توکو د ضرب څخه ورکول کيږي.

بلوکدياګونال ماتريکسونه : لومړی فقط يو وېش په 2 دياګونالبلوکونو راړړو چې لويې $n_1$ او $n_2$ لري، نو دا بسيا کوي، چې په ځاي بدلون چې ور جمعه کړو يا ورېيات کړو، کوم چې لومړي توکي د خپل ځانونو ترمنځ او له دې سره هم اکر توکي د خپل ځانونو ترمنځ بدل کړي، څکه چې نور مو پاتېدونو يا د جمعې اجزاوو 0 ته بيايي. دا د جمعې پاتې اجزاوې د لومړيو $n_1$ توکو يوه ځايبدلون $k$ او د اخرو $n_2$ توکو يو ځاي بدلون $l$ د ضرب په څير ليکل کيږي:

$$\det B = \sum_{i\in S_n} \sigma(i)\left(a_{i_1,1}\cdots a_{i_{n_1},n_1}\right)\left(a_{i_{n_1+1},n_1+1}\cdots a_{i_n,n}\right)$$
$$= \left(\sum_{k\in S_{n_1}} \sigma(k)\left(a_{k_1,1}\cdots a_{k_{n_1},n_1}\right)\right)\left(\sum_{l\in S_{n_2}} \sigma(l)\left(a_{n_1+l_1,n_1+1}\cdots a_{n_1+l_{n_2},n}\right)\right)$$
$$= \det A_{1,1} \det A_{2,2}\,.$$

ايندوکتيو له دې څخه يوه وينا لاس ته رورل کيږي له دوه بلوکونو څخه په ډېرو يوې ويشنې لپاره.

اورتوګونال او يونيتار ماتريکسونه: دا چې کمپلکس کنجوګيشن په جمعې ضرب سره منځ ته کوي او $\det U = \det U^t$ صدق کوي، نو د ديترمينانت د ضربوالي څخه لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$1 = \det E = \det(U^*U) = \det U^* \det U$$

$$= \overline{\det U^t} \det U = \overline{\det U} \det U = |\det U|.$$

په حقيقي حالت کې ديترمينانت حقيقي ده او له دې امله فقط $1$ او $-1$ ممکن دي.

ليکونکي : هيوليک، هيورنر

## د ديترمينانتو بڼه بدلون Umformung von Determinanten

د يو ماتريکس ديترمينانتونه د د دوه برابرو متو او يا دوه برابرو ليکو سره صفر دي.له دې په ځانګړې توګه لاس ته راځيو چې ديترمينانتونه تغير نه خوري، که که سړی د يوې متې (ليکې) يوې بلې متې (ليکې) ته ورزيات کړي يا ورجمعه کړي ليکونکي : هيوليک، هيورنر

دا چې د ترانپوني حالت کې د يوه ماتريکس متې په ليکې بدليږي او $\det A = \det A^t$ صدق کوي،دنو بسيا کوي، چې متو حالت وڅيړو.

د دوه متو د پدلولو سره بايد ديترمينانت د تعريف له مخې مخنخښه بدله کړي. که دواړه کټمټ متې يو د بل سره بدلې کړی شي ماتريکسونه ځان نه بدلوي او ديترمينانتونه بايد صفر وي.

که $\lambda$ - ځله د متې $a_j$ و متې $i \neq j$ , $a_i$ ته ور زياته يا جمعه شي، نو لاندې ماتريکس لاس ت ه راځي

$$A' = (a_1, \ldots, a_i + \lambda a_j, \ldots, a_j, \ldots, a_n) .$$

د کرښيز کمبينيشن په بنسټ کېدی شي ديترمينانت و وېشل شي يا ټوټه شي په

$$\det A' = \det(a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_j, \ldots, a_n) + \lambda \det(a_1, \ldots, a_j, \ldots, a_j, \ldots, a_n) .$$

دويم ماتريکس دوه کټمټي متې لري او له دې امله دا ديترمينانت صفر لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library



لیکونکي : هیولیګ، هیورنر

د یوه ماتریکس د یوې لیکې ډیرواره د ماتریکس د بلې لیکې سره زیاتولو یا جمعه کولو له لارې کېدی شي ماتریکس په مثلث بڼه باندې واړول شي او دیترمینانت بیا د دیاګونال توکو د ضرب له لارې وګټل شي یا لاس ته راړل شي.

که د متو یا لیکو بدلون صورت ونیسي، مخنخښه تغیر خوري.

د بیلګې په توګه کېدی شي

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 8 & 0 & 4 \\ 3 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 6 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

لکه چې تعقیبوي وشمېرل شي.

دریمه لیکه ترې کم یا منفی د لومړۍ لیکې درې ځله راکوي :

$$\det A = \det \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 8 & 0 & 4 \\ 0 & -9 & 3 & -4 \\ 0 & 6 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

د دویمې متې او څلورمې متې بدلون:

$$\det A = -\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 & 8 \\ 0 & -4 & 3 & -9 \\ 0 & 4 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

دریمه لیکه ورزیات دویمه لیکه، څلورمه لیکه ترې کم دویمه لیکه راکوي:

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$\det A = -\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = -(1 \cdot 4 \cdot 3 \cdot (-2)) = 24\,.$$

ليكونكي : هيوليګ، هيورنر

## د ديترمينانتو وديزيينه Entwicklung von Determinanten

د يوه $(n \times n)$ - ماتريكس $A$ ديترمينانت کېدی شي د يوې په خوښه متي يا ليکي پسي وديزيينه کړي.:

| | |
|---|---|
| $\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{k,j} \det \tilde{A}_{k,j}$ | د ليکي k پسي وديزيينه |
| $= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+l} a_{i,l} \det \tilde{A}_{i,l}$ | د درز يا متي l پسي وديزيينه |

چيرته چي $\tilde{A}_{i,j}$ هغه ماتريکس په ګوته کوي، کومه چي د $A$ د $i$ -مي ليکي ، $j$ - مي متي د کرښي کولو (په کرښه کولو له منځه وړني) له لارې منځ ته راځي.

ليکونکي : هيوليګ، هيورنر

د $\det A = \det A^t$ له امله بسيا کوي، چي وديزيينه د يوې متي پسي تر څېړني لاندي ونيسو.

- مه متِه په متو

$$a_l = \sum_{i=1}^{n} a_{i,l} e_i$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



ټوټه کوو، د ديترمينانتونو د ډېرکرښيزوالي په اساس لاس ته راځي

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{i,l} \det \underbrace{(a_1, \ldots, a_{l-1}, e_i, a_{l+1}, \ldots, a_n)}_{=B_i} .$$

يو ماتريکس $B_i$ ترځېړني لاندې نيسو، نو کېدی شي د دې لپاره د $n-l$ متېه بدلونونو له لارې $l$ ــمه متېه اخر ته راوړل شي، بې له دې چې د نورو متېو لړېپرلپسي په خپلو منځونوکې تغير شي.

په ورته توګه کېدی شي $i$ ــمه ليکه د $n-l$ ليکه بدلونونو سره اخرې ليکې ته راوړل شي:

$$\det B_i = (-1)^{n-l}(-1)^{n-i} \det \begin{pmatrix} & & \tilde{A}_{i,l} & & & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,l-1} & a_{i,l+1} & \cdots \quad a_{i,n} & 1 \end{pmatrix}$$

د ښي اړخ ديترمينانت کې فقط د $S_n$ ځاي بدلونونه ونډه اخلي، چې د $n$ ــمې ليکنې په خيث $n$ لري. دا د $S_{n-1}$ ځای بدلون ښايي او له دې سره دی

$$\det \begin{pmatrix} & & \tilde{A}_{i,l} & & & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,l-1} & a_{i,l+1} & \cdots \quad a_{i,n} & 1 \end{pmatrix} = \det \tilde{A}_{i,l} .$$

د زياتونو د جمعي اجزاوو ضرب د $1 = (-1)^{2l+2i-2n}$ سره د ورکړ شوي وديزېينې فرمول ورکوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



که د ماتریکس

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

لپاره ديترمينانت د لومړی ليکي پسي وديزبينه شي، نو لاس ته ترې راځي

$$\begin{aligned} \det A &= (-1)^2 \cdot 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &+ (-1)^3 \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &+ (-1)^4 \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= 2(4-1) - 1(2-1) + 1(1-2) = 6 - 1 - 1 = 4\,. \end{aligned}$$

ليکونکي : هيوليګ، هيورنر

## د 3 ټکو له لارې د يوې سطحې ايمپليځيت(ساده) انځورونه

### Implizite Darstellung einer Ebene durch 3 Punkte

په $\mathbb{R}^3$ کې يوه سطحه چې د درې ټکو

$P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ , $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ او $P_3 = (x_3, y_3, z_3)$

(c) ketabton.com: The Digital Library



له لاري ورکړ شوي وي، کېدی شي په ايمپليڅيت فرمول له

$$E : \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

له انځور شي. د لومړی ليکې پسې وديزيينې سره لاس ته راځي

$$E : ax + by + cz = d$$

د لاندې سره

$$a = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}, \quad b = -\begin{vmatrix} x_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}, \quad c = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}, \quad d = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

ليکونکي: هيوليګ، شترايت

## بنسټ ازمايښت Basistest

وکتورونه $a_1, \ldots, a_n \in K^n$ ټيک هلته يو بنسټ جوړوي، که د ماتريکس $A = (a_1, \ldots, a_n)$ ديترمينانتونه ورک نه شي.

ليکونکي : هيوليګ، هيورنر

که د $A$ لومړی ليکه صفر وي، نو غوښتنه ( ثبوت) روښانه ده.

په بل حالت کې کېدی شي د متې يوه ځاي بدلون پسې ونيسو يا فرض کړو، چې $a_{1,1} \neq 0$ اومتې $a_j$ لکه ښنګه لرو بڼه بدل کړو:

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$a_j \to a'_j = a_j - \frac{a_{1,j}}{a_{1,1}}\, a_1, \quad j = 2, \ldots, n\,.$$

دا د مټو عمليو کارولو له لارې کېدی شي د مټو ديترمينانت او هم د بنسټ خويونه بې تغيره پاتې شي. دا ښه بدل شوی ماتريکس لاندې ښه لري

$$A' = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ c & & B & \end{pmatrix}.$$

د وديزيښي جملې پسې لرو

$$\det A' = a_{1,1} \det B\,,$$

او دا چې $a_{1,1} \neq 0$ د $A'$ متې تيک هلته يو د $K^n$ بنسټ دي، که د $B$ متې يوه د $K^{n-1}$ بنسټ دي. دا غوښتنه کېدی شي اندوکتيو و ښوول شي.

ليکونکي : هيوليګ، هيورنر

د بيلګې په توګه له

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

کېدی شي د بنسټ ازماېښت روښانه شي.

که د مټو يا ليکو څخه يو يې فقط له صفر جوړ وي، نو د ديترمينانت لپاره 0 ترې لاس ته راځي. په دې حالت کې د ماتريکس رانګ ماکسيمال $1$ دی او له دې امله متې بنسټ نه جوړوي.

په بل حالت کې له $ad = bc$ لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$a\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} - b\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ab-ba \\ ad-bc \end{pmatrix} = 0$$

او له دې سره متې کرښيز بلواک دي.

که د متې کرښيز بلواک وي، نو صدق کوي:

$$\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix},$$

ديترمينانت شمېرل کي.ي و ته:

$$\det A = ad - bc = a\lambda c - \lambda ac = 0\,.$$

ليکونکي : هيوليک، هيورنر

## د واندرموند – ديترمينانتونه Vandermonde-Determinante

په $n$ ټکو $x_i$ کي ارزښت شوي مونومونو $1, x, \dots x^{n-1}$ ديترمينانت دی

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{i>j}(x_i - x_j)\,.$$

ليکونکي : هيوليک، هيورنر

د $n = 2$ لپاره د واندرمود – ماتريکس ديترمينانت دی

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$\det\begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{pmatrix} = x_2 - x_1 \,.$$

د یوه ټولیز $n$ لپاره د ټولو نورو لیکو څخه لومړۍ لیکه کمیږي:

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & \ldots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \ldots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \ldots & x_1^{n-1} \\ 0 & x_2 - x_1 & \ldots & x_2^{n-1} - x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & x_n - x_1 & \ldots & x_n^{n-1} - x_1^{n-1} \end{vmatrix} .$$

د لومړۍ متې پسې ودیزیېنې سره راکوي

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & \ldots & x_2^{n-1} - x_1^{n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ x_n - x_1 & \ldots & x_n^{n-1} - x_1^{n-1} \end{vmatrix} ,$$

د کوم سره چې له $k$ -مې لیکې څخه ضریب $x_k - x_1$ رادباندې کیدی شي:

$$\left(\prod_{k=2}^{n}(x_k - x_1)\right) \begin{vmatrix} 1 & x_2 + x_1 & x_2^2 + x_2x_1 + x_1^2 & \ldots & \sum_{i=0}^{n-2} x_2^{n-2-i}x_1^i \\ 1 & x_3 + x_1 & x_3^2 + x_3x_1 + x_1^2 & \ldots & \sum_{i=0}^{n-2} x_3^{n-2-i}x_1^i \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n - x_1 & x_n^2 + x_nx_1 + x_1^2 & \ldots & \sum_{i=0}^{n-2} x_n^{n-2-i}x_1^i \end{vmatrix} .$$

که د هرې متې څخه دا د مخه تېرې شوې متې دا $x_1$ – ځله کم کړو، نو بېرته پیل بنې دیترمینانت لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$\left(\prod_{k=2}^{n}(x_k - x_1)\right)\begin{vmatrix} 1 & x_2 & \dots & x_2^{n-2} \\ 1 & x_3 & \dots & x_3^{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

، او فرمول د اندکشن له لارې ښوول کېدی شي.

ليکونکي : هيوليک، هيورنر

## کرښيز مساوات سيستم Lineares Gleichungssystem

په يوه تن يا جسم $K$ کرښيز مساوات سيستم دا لاندې بڼه لري

$$\begin{matrix} a_{1,1}x_1 & + & \cdots & + & a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1}x_1 & + & \cdots & + & a_{m,n}x_n & = & b_m \end{matrix} \quad \Leftrightarrow \quad Ax = b$$

د يوه ضريبونو د ماتريکس $A = (a_{i,j}) \in K^{m\times n}$ سره، د نامعلومو $x_j \in K$ او يو ښی اړخ $b \in K^m$ سره.

دا کرښيز مساوانسيستم هوموجېن بلل کيږي، که $b = 0$ وي، پرته له دې ناهوموجېن inhomogen بلل کيږي.

د يوه حقيقي ($K = \mathbb{R}$) يا کمپلکس ($K = \mathbb{C}$) کرښيز سيستم لپاره $K$ اکسپليڅيت explizit نه شي ورکول کېدی. دا چې کوم حالت مخ ته لرو د اړوندوالي له مخې ليدل کيږي يا روښانه دی.

که کرښيز مساوات سيستم کوم حل نه لري ( په ټوليزه د $m > n$ لپاره)، نو دا باندې-ټاکلی بلل کيږي. په دې حالت کې له اندولپرابلم څخه غږيږو. يو کرښيز مساوات سيستم د

(c) ketabton.com: The Digital Library



نا يواحني حل سره ( په تولېزه توګه د $m < n$ لپاره) کښته - – يا لاندې- تکلی بلل کيږي.

يوه تابع $f(x)$ کيدی شي له داتن

$$(x_i, f_i), \quad i = 1, \ldots, n\,,$$

څخه د انترپوليشن له لارې په نږدې توګه بيا جوړه rekonstruiert شي. که يوه کرښيزه ځاي په ځاي کونه يا اينوونه

$$f(x) \approx p(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j p_j(x)$$

د مناسب بنسټتوابعو $p_j$ سره، نو د انترپوليشن شرايطو څخه

## برېښنايي جريانداېره Elektrischer Schaltkreis

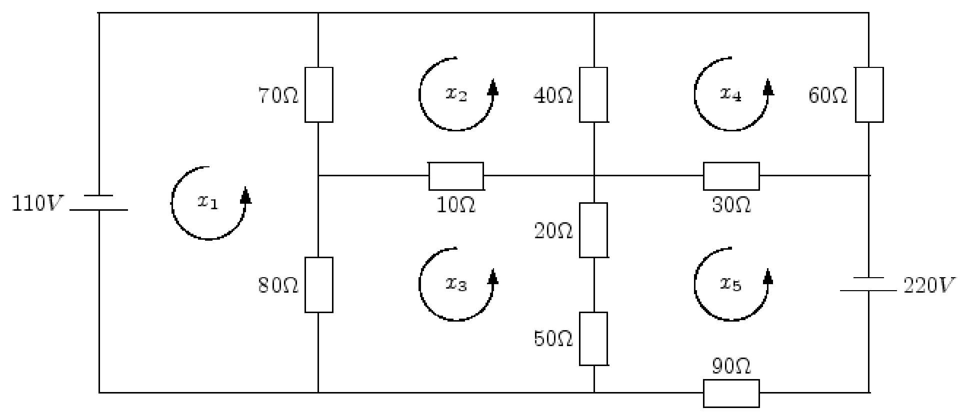
که په يوه برېناجريان دايره (ګردی)کې د $x_i$ سره د دايرې برېښناجريان وبنايو د جريانلور د ساعتتنځبنه ووني ( عقربک) مخامخ يعني معکوس، د سره د $i$ - مي او $j$ – مي پټی ګسره دډ يا مشترک مقاومت، د $R_{i,j}$ سره او د $U_i$ سره اينوولی Spannungen ، نود اومOhm او کيرښهوف Kirchhoff قانون څخه دا کرښيز مساوات سيستم لرو

$$\sum_{i\sim 0} x_i R_{i,0} + \sum_{i\sim j} (x_i - x_j) R_{i,j} = U_i.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



دلته $i \sim j$ معنا ورکوي، چې $i$ -م او $j$ –م د برېښناپټۍ يو ګډ مقاومت لري.
$x_i - x_j$ د دې مقاومت له لارې برېښناجريان دی. د $i \sim 0$ , $R_{i,0}$ سره مقاومت
ښوول کيږي چې هغه فقط په $i$ –مې پټۍ کې پروت دی.




د بيلګې په توګه د ځېره شوې جريان دابرې(ګردی) لپاره کربنيز مساوات سيستم

$$\begin{pmatrix} 150 & -70 & -80 & 0 & 0 \\ -70 & 120 & -10 & -40 & 0 \\ -80 & -10 & 160 & 0 & -70 \\ 0 & -40 & 0 & 130 & -30 \\ 0 & 0 & -70 & -30 & 190 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 110 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -220 \end{pmatrix}.$$

د ضريبونو ماتريکس په دياګونال کې د يوې پټۍ پورې اړونده مقاومت او ځاې يا
$(i, j)$ Position د $i$ او $j$ ګميز يا منفي ګډ مقاومت . د دې راوړل شوې بېلګې حل
دی:

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$x \approx \begin{pmatrix} 1.0157 \\ 0.5641 \\ 0.0358 \\ -0.0940 \\ -1.1595 \end{pmatrix}.$$

ليکونکي: اېپ، هيوليګ

## د يوه کرښيز مساوات سيستم حلوړوالى

## Lösbarkeit eines linearen Gleichungssystems

په يوه تن يا جسم $K$ د يوه هموجېن کرښيز مساوات سيستم حلډېرى

$$Ax = 0,$$

د يوه $m \times n$ ضريبونو ماتريکس $A$ يوه د $K^n$ لاندې – يا برخډېرى $U$ ده.

که دا هموجېن کرښيز سيستم

$$Ax = b$$

يو حل $v$ ولري، نو د توليز حل لپاره باور لري

$$x \in v + U,$$

دا په دې معنا چې حللډېرى د $K^n$ يو افين affin لاندې – يا برخډېرى ده. په ځانګړې

(c) ketabton.com: The Digital Library



توګه کېدی شي هوموجېن کرښيز مساوات سيستم هيڅ ، يو $U=\emptyset$ يا ناپای ډېر زيات $\dim U>0$ حلونه ولږي.

ليکونکي: اپپ، هیولیګ، کیمرلي

که $x,y$ د هوموجېن کرښيز مساوت سيستم حلونه وي او $\lambda\in K$ ، نو لاس ته راوړو:

$$A(x+y) \;=\; Ax+Ay=0+0=0$$

همداسي

$$A(\lambda x) \;=\lambda Ax=\lambda 0=0\,,$$

دا په دې معنا چې د هوموجېن کرښيز مساوات سيستم د حلونو ډېری يوه لاندې- يا برخفضا $U$ جوړوي.

که $v$ د هوموجېن کرښيز مساوات سيستم يو حل وي او $u\in U$ ، نو $x=v+u$ د

$$Ax=A(v+u)=Av+Au=b+0=b$$

له امله هم د دې هوموجېن کرښيز مساوات سيستم يو حل دی.

برعکس د ناهوموجېن کرښيز مساوات سيستم د دوه حلونو $v$ او $w$ سره کمښت يا تفريق $v-w$ د

$$A(v-w)=Av-Aw=b-b=0$$

له امله هوموجېن کرښيز مساوات سيستم يو حل دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library



له دې سره د يوه ناهوموجېن کرښيز مساوات سيستم ټول حلونه لاس ته راځي، داسې چې د ناهموجېن کرښيز مساوات سيستم د خوښې حلونو لپاره د ټولو هوموجېن کرښيز مساوات سيستم حلونو جمعه جوړه کړو، يعې سره جمعه کړو.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

دا لاندې ساده حالتونه د کرښيزو مساواتو مختلف ډولونه د ليدنې کوي:

لومړی – کرښيز مساوات سيستم

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29 \\ 60 \end{pmatrix}$$

يواځني حلونه لري: $x_1 = 8$ , $x_2 = 1$ .

دويم – کرښيز مساوات سيستم

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

يواځنی حل نه لري. که $x_3 = t$ په خوښه وټاکو، نو $x_1 = 2$ , $x_2 = 2t$ د حلونو په څېر لاس ته راځي.

دريم - کرښيز مساوات سيستم

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



کوم حل نه لري. اخرنی ليکه $x_2 = 4$ راکوي، که دا په یوه ليکه کې کېښوول شي، د لومړۍ ليکې څخه $x_1 = 2$ لاس ته راځي، له دويمي څخه برعکس $x_1 = 1$ .

ليکونکي: اپپ، هيوليک

## ديترمينانت او د یوه مساوات سيستم حلوړوالی

## Determinante und Lösbarkeit eines linearen Gleichungssystems

یو کرښيز مساوات سيستم

$$Ax = b$$

د مربع ضريبونو ماتريکس $A$ سره تيک هلته یو یواځنی حل لري، هر ښي لوريزې $b$ سره، که همداسې دا هوموجېن سيستم $Ax = 0$ فقط یو ساده حل $x = 0$ ورلري.

که $\det A = 0$ وي، نو یو حل فقط د ښی لورې $b$ لپاره شتون لري په هغه د $A$ د متو څخه غزېدلې لاندې – یا برخفضا ده. په دې حالت کې حل یواځنی نه دی.

ليکونکي: کرايخ، هيوليک

غوښتنه د ديترمينانت د خویونو څخه په لاس راځي.

و $\det A \neq 0$ ته ورته لرو، چې د $A$ متې $a_1, \dots, a_n$ کرښيز خپلواکې دي. د تعريف سره سم دا په دې معنا دی چې

$$x_1 a_1 + \ldots + x_n a_n = 0 \Leftrightarrow x_1 = \cdots = x_n = 0,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



همداسې

$$Ax = 0 \Leftrightarrow x = 0\,.$$

د دې لپاره چې د ناهوموجېن سیستم یوائنې حلوړوالي ته ورته لاس ته راوړای شو، له دې کار اخلو چې متې یو بنسټ جوړ کړي، دا په دې معنا چې هر ښی اړخ $b$ د کرښیزکمبینېشن په حیث $x_1a_1 + \ldots + x_na_n = b \Leftrightarrow Ax = b$

یواځنی انځوروړ دی.

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

دا کرښیز مساوات سیستم

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

تیک هلته یو یوائنی حل لري، که دیترمینانت $ad - bc \neq 0$ وي. په دې حالت کې حل په لاندې ډول دی

$$x = \frac{du - bv}{ad - bc}\,, \qquad y = \frac{av - cu}{ad - bc}\,.$$

که دیترملنانت $ad - bc$ برابر 0 وي، په ټوپیزه توګه کرښیز مساوات سیستم حل نه لري. په دې حالات حلونه فقط هلته شتون لري، که

$$av \qquad\qquad = cu$$

او

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$bv \qquad = du$$

صدق ولري. که د بېلګې په توګه $a \neq 0$ وي، نو کېدی شي $y$ په خوښه وټاکو او د $x$ لپاره لاس ته راوړو

$$x = \frac{u - by}{a}\,.$$

لیکونکي: پپ، اهیولیک

## د کرامر قاعده Cramersche Regel

د یوه مربع کرښیز مساوات سیستم $Ax = b$ لپاره

$$x_i \det A = \det(a_1, \ldots, a_{i-1}, b, a_{i+1}, \ldots, a_n)\,,$$

دی، د کوم $a_j$ سره چې د متوضریبونو ماتریکس $A$ په نخښه کیږي.

په ځانګړې توګه کېدی شي د $\det A \neq 0$ لپاره په څټ یا معکوس $C = A^{-1}$ د

$$c_{i,j} = \frac{\det(a_1, \ldots, a_{i-1}, e_j, a_{i+1}, \ldots, a_n)}{\det A}$$

له لارې ټاکل کېدی شي.

لیکونکي: هیولیک، شترایت

(c) ketabton.com: The Digital Library



د ديترمينانت د ډېركرښيزوالي او سيومتري له امله لاس ته راځي:

$$\det(a_1,\ldots,a_{i-1},b,a_{i+1},\ldots,a_n) = \det(a_1,\ldots,a_{i-1},\sum_{j=1}^{n} a_i x_i, a_{i+1},\ldots,a_n)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} x_j \det(a_1,\ldots,a_{i-1},a_j,a_{i+1},\ldots,a_n)$$

$$= x_i \det(a_1,\ldots,a_{i-1},a_i,a_{i+1},\ldots,a_n)$$

په ځانګړي توکه د $b = e_j$ سره د معکوسي $j$ ـمه مټه $x = (c_{i,j},\ldots,c_{n,j})^{\mathrm{t}}$ راکوي

ليکونکي: هيوليک، شترايت

ديوه $(2\times 2)$ - ماتريکس

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

د معکوس $C$ لپاره د کرام قاعدې سره لرو

$$c_{1,1} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & b \\ 0 & d \end{vmatrix}}{\det A} = \frac{d}{\det A}, \qquad c_{1,2} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & b \\ 1 & d \end{vmatrix}}{\det A} = \frac{-b}{\det A},$$

$$c_{2,1} = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 \\ c & 0 \end{vmatrix}}{\det A} = \frac{-c}{\det A}, \qquad c_{2,2} = \frac{\begin{vmatrix} a & 0 \\ c & 1 \end{vmatrix}}{\det A} = \frac{a}{\det A},$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



همداسې د $\det A = ad - cb$ سره دا لاندې لرو

$$\det A = ad - cb$$

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-cb}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

لیکونکي: هیولیګ، شترایت

د $(3 \times 3)$ - ماتریکس

$$(3 \times 3)$$

د معکوس $G$ لپاره د کرامر د قانون له مخې لرو

$$c_{1,1} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 3 \end{vmatrix}} = -\frac{3}{25}, \qquad c_{1,3} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 3 \end{vmatrix}} = -\frac{2}{25},$$

$$c_{3,2} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{3}{25}, \qquad \ldots$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



ټول داسې دي

$$A^{-1} = \frac{1}{25} \begin{pmatrix} -3 & 6 & -2 \\ 12 & 1 & 8 \\ -14 & 3 & -1 \end{pmatrix} .$$

ليکونکي: هيوليګ، شترايت

## په څټ لور ځای په ځای کول Rückwärts-Einsetzen

په يوه کربنيز مساوات سيستم کې د پورته مثلث -بڼې سره

$$\underbrace{\begin{pmatrix} r_{1,1} & \cdots & r_{1,n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & r_{n,n} \end{pmatrix}}_{R} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} ,$$

د $\det R = r_{1,1} \cdots r_{n,n} \neq 0$ سره کړی شو ناټاکلې $x_n, \ldots, x_1$ يو پر بل پسې وټاکو:

$$r_{n,n} x_n = b_n \to x_n = b_n / r_{n,n}$$

او د $\ell = n-1, \ldots 1$ لپاره ،

$$r_{\ell,\ell} x_\ell + \cdots + r_{\ell,n} x_n = b_\ell, \to x_\ell = \left(b_\ell - r_{\ell,\ell+1} x_{\ell+1} - \cdots - r_{\ell,n} x_n\right) / r_{\ell,\ell} .$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



له دي سره به هر يو دا اوس معلوم شمېل شوي ارزښتونه $x_{\ell+1}, \ldots, x_n$ و کارول شي.

په يوه مساوات سيستم کې د يوه لاندې مثلث ماتريکس کې کېدی شي په ورته توګه يو په بل پسې $x_1, \ldots, x_n$ و ټاکل شي.

د کربنيز مساوات سيستم

$$\begin{array}{rcrcrcr} 4x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 6 \\ & & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 0 \\ & & & & 7x_3 & = & 7 \end{array}$$

لپاره په ملث بنې کې د په خټ ايښووني له لارې حلونه لاس ته اځي

$$x_3 = 1$$

$$x_2 = (0-2)/2 = -1$$

$$x_1 = (6-3(-1)-1) = 2\,.$$

ليکونکي: هيوليګ، شترايت

## د ګاوس ترانفورميشن Gauß-Transformationen

لاندې عمليې د کربنيز مساوات سيستم د حلونو ډېرۍ بې تغيره پريږدي:

(c) ketabton.com: The Digital Library



- د دوه مساوتو بدلونه
- یوه مساوات ضربونه د یوه ضریب $\neq 0$ سره.
- د یوه مساوات کمول له یوه بل مساوات څخه

د اخرو دوه عملیو د کمبینېشن له لارې د یوې لیکې ډېرواره زیاتول یا جمعه کول و بلې لیکې ته عملیې دي چې اجازه لري یا پرېښوول شوې عملیې دي.

د داسې په نامه ګاوس ترانسفورمېشن په مسته کزدی شي sukzessive یا یو په بل پسې ناټاکلي له منځه یووړل شي او یو کرښیز مساوات سیستم په مثلثفورم تراسفورمه کړو یا په بله بڼه واړوو او بیا یې په څټ ایښوونې له لارې حل کړو.

لیکونکي: هیولیګ، شترایت

د کرښیز مساوات سیستم

$$\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & - & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 11 \\ x_1 & + & 7x_2 & + & 4x_3 & = & 6 \\ 6x_1 & - & x_2 & - & 5x_3 & = & -8 \end{array}$$

حل ځان ته تغیر نه ورکوي له

- د لومړي او دویم مساوات بدلونه

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 7x_2 & + & 4x_3 & = & 6 \\ 3x_1 & - & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 11 \\ 6x_1 & - & x_2 & - & 5x_3 & = & -8 \end{array}$$

- د دویم مساوات ضربونه د 2 ضریب سره

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 7x_2 & + & 4x_3 & = & 6 \\ 6x_1 & - & 4x_2 & + & 4x_3 & = & 22 \\ 6x_1 & - & x_2 & - & 5x_3 & = & -8 \end{array}$$

- د دریم مساوات کمول یا تفریقول له دویم مساوات څخه

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 7x_2 & + & 4x_3 & = & 6 \\ 6x_1 & - & 4x_2 & + & 4x_3 & = & 22 \\ & & -3x_2 & + & 9x_3 & = & 30 \end{array}$$

لیکونکي: هیولیک، شترایت

## د ګاوس د له منځه وړنه Gauß-Elimination

د ګاوس – بڼه بدلون له لارې کېدی شي یو کربنيز مساوات سیستم د انعکاس وړ $(n \times n)$ -ضربیماتریکس په ماکسیمال $n-1$ پلونو (قدمونو) په پورته مثلثبڼه باندې واړول شي یا راوړو. د دې لپاره یو په بل پسې د دیاګونال لاندې کښته ضریبونه له منځه یوسو دا په دې معنا چې له $\ell-1$ پلونو (قدمونو) وروسته دا ک م س ( کربنيز مساوات سیستم) لاندې بڼه غوره کوي :

$$\begin{array}{cccccccccccccc} a_{1,1} & x_1 & + & a_{1,2} & x_2 & + & \dots & + & a_{1,\ell} & x_\ell & + & \dots & + & a_{1,n} & x_n & = & b_1 \\ & & & a_{2,2} & x_2 & + & \dots & + & a_{2,\ell} & x_\ell & + & \dots & + & a_{2,n} & x_n & = & b_2 \\ & & & & & & & & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots & \\ & & & & & & & & a_{\ell,\ell} & x_\ell & + & \dots & + & a_{\ell,n} & x_n & = & b_\ell \\ & & & & & & & & a_{\ell+1,\ell} & x_\ell & + & \dots & + & a_{\ell+1,n} & x_n & = & b_{\ell+1} \\ & & & & & & & & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots & \\ & & & & & & & & a_{n,\ell} & x_\ell & + & \dots & + & a_{n,n} & x_n & = & b_n \end{array}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



په يوګوني ډول $\ell$-م له منځه وړنې پل داسې ځغلي لکه لاندې .

- که دا –م دياګونال توکی، داسې په نامه د پيوټ-تونی -Pivot Element، صفر دی، نو $\ell$ -م به د يوه دې لاندې مساواتو سره بدل شي، داسې چې $a_{\ell,\ell} \neq 0$ به باور ولري...
- د $i > \ell$ لپاره به د $i$ –م مساوات څخه د $\ell$ –م مساوات ډېر واره کم شي، داسې چې $a_{i,\ell}$ صفر شي:

$$a_{i,j} \leftarrow a_{i,j} - q_i a_{\ell,j}, \quad b_i \leftarrow b_i - q_i b_\ell \quad (q_i = a_{i,\ell}/a_{\ell,\ell})$$

د ټولو $j \geq \ell$ لپاره..

ليکونکي: هيوليګ، شترايت

د کرښيز مساوات لپاره

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -2 & 1 \\ 6 & 4 & -1 & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

د ګاوس الګوريتم په لاندې تو؛ه ځغلي:

- د لومړی او دويمې ليکې پډلول:

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -2 & 1 \\ 6 & 4 & -1 & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- (3 لیکه ) – (1 لیکه) او (4 لیکه) - (1 لیکه)·2

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- (.لیکه2) + ( لیکه·2 3):

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- (لیکه3 )- (لیکه4)·3 :

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

لیکونکي: هیولیګ، شترایت

د ایښیلون بڼه Echelon-Form

(c) ketabton.com: The Digital Library



یو کربنیز مساوات سیستم د یوه $(m \times n)$ - ضریب ماتریکس سره کېدی شي د ګاوس –ترانفورمیشن سره د ایښپلون-فورم باندې یې بڼ بدله یا واړول شي:

$$Ax = b \to \underbrace{\begin{pmatrix} 0\ldots0 & p_1 & *\ldots* & & & & & \\ & & 0 & 0\ldots0 & p_2 & *\ldots* & & \\ & & & & 0 & 0\ldots0 & p_3 & *\ldots* \\ & & & & & & & \ddots \end{pmatrix}}_{A'} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}.$$

له دې سره داسې په نامه پیووت

$$p_1 = a'_{1,j_1}, \ldots, p_k = a'_{k,j_k}, \quad k \leq m, \quad 1 \leq j_1 < \cdots < j_k \leq n,$$

د صفر سره نابرابرې دي او $k$ د $A$ رانګ ی.

د $k$ –م ترانفورمیشن پل په لاندې ډول ځغلي:

- یو له صفر مختلف متریکس توکی $p_k$ د خورا کوچنی متې ایندکس( پیژندنخښې ) سره او $\geq k$ لیکې اندکس( د لیکې پیژند نخښه) د پیووت توکی په حیث ټاکل کیږي او د لیکو بدلون له لارې پوزیشن $(k, j_k)$ ته راوړل کیږي. که پیووت توکی شتون نه لري، نو د ایښلون پېه مو لاس ته راوړې ده.

- د $k$ لیکې ډېرواره کمون یا تفریق له لارې د پیووت لاندې لور ته د ماتریکس توکی له منځه ځي.

لیکونکي: هیولیګ، شترایت

د ماتریکس

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & -3 & 0 & 9 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & -1 & 4 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & 6 & 1 & 3 & 5 & 2 & -5 \\ 0 & -2 & -3 & 1 & 6 & -7 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & -3 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

لپاره ترنفورمیشن د ایښلون-فورم باندې په لاندې ډول ځغلي

1. د لومړۍ او دویمې لیکې پډلون:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 0 & -1 & 4 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & -3 & 0 & 9 \\ 0 & 4 & 6 & 1 & 3 & 5 & 2 & -5 \\ 0 & -2 & -3 & 1 & 6 & -7 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & -3 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

2. (3.لیکهZeile) - 2·(1.لیکهZeile) und (4.لیکهZeile) او (4.لیکه Zeile) + (1.لیکه Zeile):

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 0 & -1 & 4 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & -3 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & -3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & -3 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

3. (3.Zeile) - (2.Zeile), (4.Zeile) - (2.Zeile)

او (5.Zeile) - (2.Zeile)

په پورته کې Zeile د لیکې یا میلې په معنا دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 0 & -1 & 4 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & -3 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

.4 (4. Zeile) - $\frac{1}{2}\cdot$ (3.Zeile):

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 0 & -1 & 4 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & -3 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

د اينبلون – فورم لري نا ساده ليکي د پيووت –توکو $p_1 = 2$ , $p_2 = 1$ او $p_3 = -10$ سره.

ليکونکي: هيوليګ، شترايت

## د اينبلون- بڼه د يوه ل م س (کربنيز مساواتسستم)حل

### Lösung eines LGS in Echelon-Form

يو کربنيز مساوات سيستم $Dx = c$ د اينبلون په بڼه،

$$\begin{pmatrix} 0\ldots0 & p_1 & *\ldots* & & & & & \\ & 0 & 0\ldots0 & p_2 & *\ldots* & & & \\ & & & 0 & 0\ldots0 & p_3 & *\ldots* & \\ & & & & & & \ddots & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



د پیووت $p_1, \dots, p_k$ سره تیک هلته حلوږ دی، که $c_{k+1} = \cdots = c_m = 0$ وي.

حل یواځنی دی، که $k = n$ وي. د $k < n$ لپاره د هوموجین کرښیز مساوات سیستم ($c_i = 0$)تیک $n - k$ کرښیز خپلواک حلونه شته .

نا معلومې، چې بې له پیووت یې متې په ګوته کوي. کېدی شي ازادې یا په خوښه و ټاکل شي.

لیکونکي: هیولیګ، شترایت

په لاندې کې به زیات تیوپیکي حالتونه تر بحث لاندې راوړل شي.

- $k = n = 4$

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix}$$

د په ځېډ اینسووني له لارې ریکورزیو یواځنی حل لاس ته راوړی شو.

$$x = (1, -1, -1, 1)^t.$$

- $3 = k < n = 5$ ، $c_4 \neq 0$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



په اخرنۍ لیکه کې $0 \cdot x = 1$ ترې لرو، له دې سره کربنیز مساوات سیستم کوم حل نه لري.

- $3 = k < n = 5$ ، $c_4 = 0$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

دا چې $c_{k+1} = 0$ ، نو کربنیز مساوات سیستم $Dx = c$ حلوړ دی

د $\operatorname{Rang} D = 3 = n - 2$ له امله حل $x$ یواځنی نه دی. دلته د دوه کربنیز خپلواک حلونه $v_i$ شتون لري د هوموجېن سیستم او د تولیز حل لاندې بڼه

$$x = x_s + \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 \, , \alpha_j \in \mathbb{R}$$

لري د هوموجین سیستم یو ځانګړی حل $x_s$ سره.

وکتورونه $v_i$ د پیووت پورې نه اړه لرونکو نامعلومو د کانونیکي ( بڼه یز: کنوني) ټاکنې له لارې معلوموي یا ټاکي او پاتې ضریبونه په هوموجېن سیستم باندې:

$$r_{\ell,\ell} x_\ell + \cdots + r_{\ell,n} x_n = b_\ell, \rightarrow x_\ell = \left(b_\ell - r_{\ell,\ell+1} x_{\ell+1} - \cdots - r_{\ell,n} x_n\right) / r_{\ell,\ell} \, .$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



يو ځانګړی حل

$$x_s = \begin{pmatrix} 5/4 \\ -6 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

د $x_3 = x_5 = 0$ اينووني له لارې لاس ته راځي.

ليکونکي: هيوليک، شترايت

## رانګ او د ک م س(کربنيز مساواتسيستم) حلوړوالی

## Rang und Lösbarkeit von LGS

وي دې $A \in \mathbb{R}^{m\times n}, b \in \mathbb{R}^m.$ .

Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}, b \in \mathbb{R}^m.$

- کربنيز مساوات سيستم $Ax = b$ يو حل لري

$$\Longleftrightarrow \text{Rang } A = \text{Rang}(A, b).$$

- کربنيز مساوات سيستم $Ax = b$ يواځنی حلوړ دی

$$\Longleftrightarrow \text{Rang } A = \text{Rang}(A, b) = n.$$

- کربنيز مساوات سيستم $Ax = b$ ډېر حلونه لري

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$\Longleftrightarrow \mathrm{Rang}\, A = \mathrm{Rang}(A, b) = k < n.$$

دلته په پام کې ولرئ، چې د $A$ رانګ او د غزېدلي ماتریکس $(A,$ اينواريانت دي د ساده بنې بدلون سره. له دې امله کېدی شي و نيول شی يا فرض شي کرښيز مساوات سيستم به ايښلون-بڼه دی. به دې بڼه کېدی شي نتيجې ترلې ولوستل شي.

## د انډول کرښه( انډولکرښه) Ausgleichsgerade

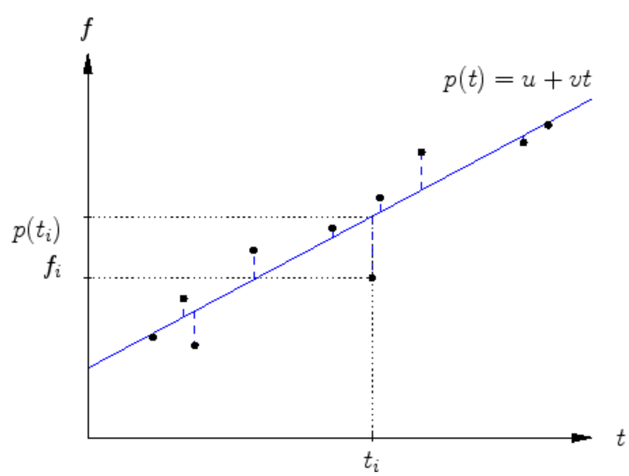
يوه کرښه

$$p(t) = u + vt\,,$$

، چې داتنونه $i = 1, \ldots, n$ ، به خورا ښه توګه approximiert کوي، کېدی شي د ناتيکاوي مربع جمعي کمښت

$$\sum_{i=1}^{n} (f_i - p(t_i))^2$$

له لارې پيدا کړی شي.



(c) ketabton.com: The Digital Library



د محوربرخې $u$ او جګېدنې $v$ لپاره لاندې فرمولونه راکوي

$$u = \frac{(\sum t_i^2)(\sum f_i) - (\sum t_i)(\sum t_i f_i)}{n(\sum t_i^2) - (\sum t_i)^2}$$

$$v = \frac{n(\sum t_i f_i) - (\sum t_i)(\sum f_i)}{n(\sum t_i^2) - (\sum t_i)^2},$$

که لږ تر لږه دوه پراته ارزښتونه یا قیمتونه $t_i$ ورکـ شي یعني صفر وي.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

د مينيموم سره بايدد غلطی مربع جمعي مشتق هم د $u$ او $v$ هم د پسي صفر وي:

$$0 = 2\sum_i (u + vt_i - f_i)$$

$$0 = 2\sum_i t_i(u + vt_i - f_i)\,.$$

دواړه مساوات د ماتريکس په بڼه په لاندې ډول دي

$$\begin{pmatrix} n & \sum t_i \\ \sum t_i & \sum t_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum f_i \\ \sum t_i f_i \end{pmatrix}.$$

که لږ ترلږه دوه $t_i$ مختلفي وي، نو ديترمينانت ده:

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$\underbrace{(1+\cdots+1)}_{n\,\mathrm{mal}}|(t_1,\ldots,t_n)^{\mathrm{t}}|_2^2-\left(\sum_i 1\cdot t_i\right)^2>0\,,$$

او سړی د کرامر د قاعدې سره ورکړ شوی حل لاس ته راوړي

ليکونکي: اپپ، هيوليک

## د برابروني حل يو بل سره يوغږيز کيدل يا يو په بل پريوتلو، کربنيزو مساوات سيستم

## Ausgleichslösung überbestimmter, linearer Gleichungssysteme

که د يوه کربنيز مساوات سيستم $Ax=b$ ښی خوا $b$ وي د $(m\times n)$ - اتريکس $A$ متو کربنيزې هيولي ياسپاين کې خوندي نه وي ( په تيپيکي دول د $m>n$ لپاره)، دا په دې معنا چې وي

$$\mathrm{Rang}\,A<\mathrm{Rang}\,(A,b)\,,$$

نو مساوات سيستم حل نه لري. سړی د يوه د پاسه ټاکلي سيستم څخه خبرې کوي. په دې حالت کې کېدی شي يو اپروکسيميشن د برابروالي پرابلم

$$|Ax-b|\to\min$$

له لارې و ټاکل شي.

د برابروالي حل شمېرل د نورمالومساوات يا سينګولارارزښتتوته کونې په مرسته ممکن يا شونی دی

ليکونکي: اپپ، هيوليک

(c) ketabton.com: The Digital Library



# الجبر - کربنيز مساوات سيستم-برابروني پرابلم

## Algebra - Lineare Gleichungssysteme – Ausgleichsprobleme

### نورمالمساواتونه Normalengleichungen

د يوه په خوښه $m \times n$ – ماتريکس A لپاره هر د برابروني پرابلم

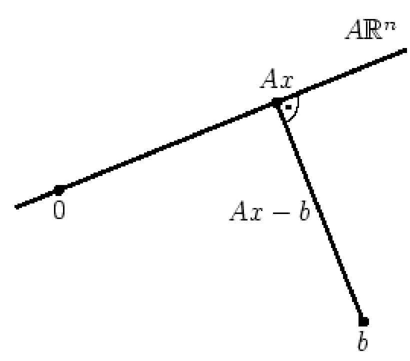
$$|Ax - b| \to \min$$

هر حل $x$ نورماليز –مساواتونه

$$A^{t}Ax = A^{t}b\,,$$

پوره کوي، دا په دې معنا چې

ريزيدووم $r = Ax - b$ Residuum اورتوګونال دی د $A$ د متو څخه غزېدلي لانديفضا $\text{Bild}\,A$ سره




ځمککچيز يا هندسي مساوات معنا لري، چې ريزيدووم $r = Ax - b$ د ماتريکس $A$ په متو نيغ ولاړ دی يعني عمود دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library



ماتریکس $A^{\mathrm{t}}A$ مربعیزه ده او پراخېدونی یا بعد $n$ لري. دا ټیک هلته معکوسوړ ده کله چې $\operatorname{Rang} A = n$ وي، دا په دی معنا چې کله د $A$ متې کرښیز خپلواکې وي.
نورمالیز-مساوات د سینګولار حالت کې هم حلوړ دی، خو حل یې یواځنی نه دی.

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

له

$$|A(x+ty)-b|^2 \geq |Ax-b|^2$$

د

$$(Ax-b)^{\mathrm{t}}y = y^{\mathrm{t}}(Ax-b), \quad r = Ax-b$$

سره برابر ارزښته نامساوات

$$2ty^{\mathrm{t}}A^{\mathrm{t}}r + t^2y^{\mathrm{t}}A^{\mathrm{t}}Ay \geq 0$$

لاس ته راځي د ټولو $t \in \mathbb{R}$ او وکتورونو $y$ لپاره. که د نابرابرون کیڼ اړخ په $t$ کې د پارابول په څېر ونیول شي، نو نه منفیوال( نه کمیزوالي) د

$$y^{\mathrm{t}}(A^{\mathrm{t}}r) = 0 .$$

سره به یوه معنا دي.

دا ټیک هلته د ټولو وکتورونو $y$ لپاره صدق کوي، که په نوکانو کې افاده ( وبینه) صفروکتور وي.

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

د

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

لپاره نورمالمساوات لاس ته راځي

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

لاس ته راځي

دا کربنيز مساوات سيستم ئواځني حل $x = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^t$ لري.ريزيدووم $r = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}^t$ دي.

که $A$ کربنيز بلواکي متې ولري، لکه په بېلګه کې

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix},$$

نو نورمالو-مساوات سيستم سينګولار دي:

$$\begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

حل

$$x = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} - t \\ t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R},$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



په دې حالت کې يواځني نه دي، مګر ريزيدووم

$$r = \begin{pmatrix} \frac{6}{5} & -\frac{12}{5} & 0 \end{pmatrix}^t$$

.

ليکونکي: اپپ، هيوليک

## توموګرافيTomographie

لکه څنګه په فنکشن يا څيرونه (mappingتابع) کې ښوول شوي دي، په کمپيوتر-توموګرافي Computer-Tomographie کې د حجروغړو ټينګوالي (غلظت) $x(u,v)$ بيا جوړيږي ، په کومه کې چې د ګڼوالي يا ټينګوالي بايليدنه(کمښت) Intensitätsverlust د رونتګن وړانګو د $k$ کودې له $\ell$ غبرګو کرښو

$$\mathcal{R}_i: \quad (u_i, v_i) + \mathbb{R}(\cos\vartheta_i, \sin\vartheta_i), \quad i = 1, \ldots, m = k\ell,$$

کچ کيږي. سړي د ټينګوالي وېش د يوه ټوټه ډوله ثابتي تابع approximiert کوي

سړی د ټينګواليخورونه د يوه ټوټه ډوله يا ټوټه په ټوټه ثابتو له لارې اپروکسيمي کوي د مربعو $Q_j$ په پاتې شونو او ګڼوالي کچه ونو د نږدې ونې له لارې کټلي کرښيز ا نټيګرال څخه.

$$b_i = \int_{\mathbb{R}} x(u_i + t\cos\vartheta_i, v_i + t\sin\vartheta_i)\, dt \approx \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j\,,$$

چيرته چې $x_j$ د $x(u,v)$ يو اپروکسيميشن دی په $Q_j$ او

$$a_{i,j} = |\mathcal{R}_i \cap Q_j|$$

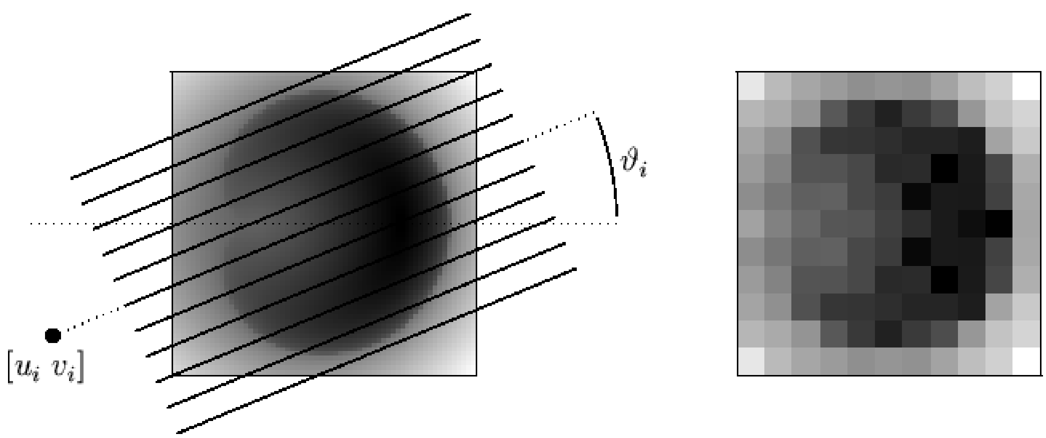
(c) ketabton.com: The Digital Library



د کربنو $\mathcal{R}_i$ د $Q_j$ سره غوڅ ي یا تقاطع ا وړدوالی په ګوته کوي. دا چې د کچوونو تعداد یا ګڼون په ټولیزه توګه ډېر لوي دي نسبت د راستر (هغه تخته چې ځیره پرې کښل کیږي) څلوریو او شنتیګرالونه چې ټیک نه شي شمیرل کیدی، د داتا $b$ څخه د $x$ ټاکلوته سړی یو برابروالیز یا د انډول پرابلم سره مخامخ کیږي.

دالاندې ژباړې دلته راکاپي کړي( دا لاندې دې همداسي په انګرېزي پاتې وي):

›› The word "raster" has its origins in the Latin *rastrum* (a rake), which is derived from *radere* (to scrape). It originally referred to the raster scan of cathode ray tube (CRT) video monitors, which paints the image line by line by magnetically steering a focused electron beam. By association, it came also to refer to a rectangular grid of pixels. See also rastrum, a device for drawing musical staff lines پای‹‹




پورته ښي لور ته ځیره په یوه $11 \times 11$ راستر شمیرلی نږدیوالی ښایي کیڼ ځیره شوی ټینګوالي خورونه(غلظت-) ښایي. له دې سره د کونج

$$\vartheta = 0, \pi/16, \pi/8, \ldots$$

لپاره $11$ غبرګ سکن-لورې د راستر مربع سور باندې کارول شوي.

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

(c) ketabton.com: The Digital Library



## آيګن-ارزښت او آيګو-وکتور Eigenwert und Eigenvektor

يو سکالار $\lambda$ د يوه مرئع ماتريکس $A$ آيګو-ارزښت بلل کيږي، که وي:

$$Av = \lambda v, \quad v \neq 0.$$

وکتورونه $v \neq 0$ د $Av = \lambda v$ سره و آيګن-ارزښته $\lambda$ ته آيګن-وکتورونه بلل کيږي.
آيګن-وکتورونه و آيګن-ارزښت ته د صفر وکتور سره يوځاي يوه کرښيزه فضا جوړوي،
داسې په نامه د $\lambda$ آيګن-فضا

$$V_\lambda = \ker(A - \lambda E)$$

ليکونکي: هيوليک،هيورنر، کيمرلي

ماتريکسونه

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

آيګن-ارزښتونه $\lambda_1 = 0$ او $\lambda_2 = 2$ لري، ځکه

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

او

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

لیکونکي: هیولیگ،هیورنر

لاندې بېلګې د $(2 \times 2)$ ـماتریکسونو لپاره ممکنه حالتونه ښایي

- دوه حقیقي آیګن-ارزښتونه:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} , \quad \lambda_1 = -1 , v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} , \quad \lambda_2 = 3 , v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

- یو حقیقي آیګن- ارزښت، دوه کربنیز خپلواک آیګن-زکتورونه:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} , \quad \lambda = 2 , v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} , v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

- یو حقیقي آیګن-ارزښت، یو آیګن-وکتور:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} , \quad \lambda = 1 , v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

- دوه کنجوګیري کمپلکس آیګن-ارزښتونه او آیګن-وکتورونه:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} , \quad \lambda_{1,2} = 1 \mp \mathrm{i} , v_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 \\ \pm\mathrm{i} \end{pmatrix} .$$

لیکونکي: هیولیگ،هیورنر

(c) ketabton.com: The Digital Library



لاندې بېلګې د کمپلکس $(2 \times 2)$ – متريکسونو لپاره ممکنه حالتونه ښيي.

- دوه آيګن-ارزښتونه اودوه آيګن-وکتورونه:

$$A = \begin{pmatrix} i & 2 \\ 2 & i \end{pmatrix}, \quad \lambda_1 = 2 + i, v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = -2 + i, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

- يو آيګن-ارزښت، دوه کرښيز خپلواک آيګن-وکتورونه:

$$A = \begin{pmatrix} 2i & 0 \\ 0 & 2i \end{pmatrix}, \quad \lambda = 2i, v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- يو آيګن-ارزښت، يو آيګن-وکتور:

$$A = \begin{pmatrix} i & -1 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \quad \lambda = i, v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

ليکونکي: هيوليک،هيوررنر

## ورته والي - ترانفورميشن Ähnlichkeitstransformation

د يوه مربعيز ماتريکس $A$ په ورته والي تراسفورميشن

$$A \rightarrow B = Q^{-1} A Q,$$

کې آيګن-ارزښتونه ساتلي پاتيږي. آيګن-وکتورونه د اينورتيروړ ماتريکس $Q$ له لارې
تشريح شوې بنسټ بدلون سره سم ترانسفورمي کيږي، دا په دې معنا، چې د $A$ آيګن-

(c) ketabton.com: The Digital Library



وکتور $v$ و آيګن- ارزښت $\lambda$ ته و همهغسي د $B$ آيګن-وکتور $w = Q^{-1}v$ په ګوته کوي و همغه بنسټ ته.

ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

که $v$ د $A$ يو آيګن-وکتور وي و آيګن-ارزښت $\lambda$ ته، يعنې $Av = \lambda v$ ، نو د $w = Q^{-1}v$ لپاره لاس ته

$$Bw = Q^{-1}AQw = Q^{-1}AQQ^{-1}v = Q^{-1}Av = Q^{-1}\lambda v = \lambda Q^{-1}v = \lambda w\,.$$

ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

لاندې مربع ماتريکس دې ورکړ شوی وي

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

د آيکن-ارزښت $\lambda_1 = 2$ او $\lambda_2 = 3$ او د لاندې اړونده آيګن-وکتور سره:

$$v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

يو ورته والي ترانسفورميشن د

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$B = Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}.$$

سره راکوي.

د $B$ آيګن-وکتورونه $w_1$ او $w_2$ د

$$w_1 = Q^{-1}v_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ -\frac{5}{3} \end{pmatrix}$$

سره، همداسي

$$w_2 = Q^{-1}v_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

سره شميرل کيږي.

ليکونکي: هيوليک، کرايخ

## کرکتريستکي پولينوم Charakteristisches Polynom

د $(n \times n)$ – ماتريکس $A$ آيګن-ارزښتونه د کرکتريستيکي پولينوم صفرونه دي

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}.$$

په ځانګړې توګه د ماتريکس آيګن – ارزښونه د ترانسبوزيشن سره اينواريانت پاتې کيږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



ليکونکي: هيوليک، هيورنر، کيمرلي

يو سکالار $\lambda$ تيک هلته د $(n \times n)$-ماتريکس $A$ آيګن-ارزښت دی، که ولرو

$$Av = \lambda v\,, \quad v \neq 0,$$

دا په د ې معنا چې که دا هوموجېن کرښيز مساوات سيستم $(A - \lambda E)v = 0$ يو له صفر مختلف حل ولري. دا حالت تيک هلته لرو، که $(A - \lambda E)$ زينګولار وي يعنې که وي:

$$\det(A - \lambda E) = 0.$$

ليکونکي: هيوليک، هيورنر

## د آيګن – ارزښتونو او - - وکتوونوشميرنه

د دې لپاره چې د مربع ماتريکس $A$ لپاره د آيګن-ارزښت پرابلم حل کړو، لومړی د کرکتريستيکي پولينومونو آيګن-ارزښتونه $\lambda$ د صفرځايونو په حيث ټاکي

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda E)\,.$$

د هر آيګن – ارزښت $\lambda$ لپاره له دې سره اړوند آيګن – وکتور $v$ لاس ته راوړو د هوموجېن کرښيز مساوات سيستم د يوه ناترېويال په څېر

$$(A - \lambda E)v = 0\,.$$

د دې لپاره چې د آيګن-فضا $V_\lambda$ لپاره يو بنسټ لاس ته راوړو، سړی کړی شي دا سيستم په اپسيلون-فرمول ترنسفورمی کړو.

(c) ketabton.com: The Digital Library



په ټوليزه توګه $\dim V_\lambda = 1$ دی. دا تر يوه سکالار ضيب يواځنی ټاکلی آيګن-وکتور $v$ کېدی شي هلته وټاکل شي ، په کوم کې چې د وکتورونو $v$ مناسب کمپوننتونه له مخه ورکړي

ليکونکي: هيوليګ، کرايخ

د ماتريکس

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

د آيګن –ارزښت د ټالکو لپاره کرکتيستيکی پولينوم جوړوو

$$\det(A-\lambda E) = \begin{vmatrix} -\lambda & -2 & -1 \\ 2 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(2-\lambda)^2 - 4 + 8 - 2\lambda = -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 6\lambda + 4 \,.$$

او د ده صفرځايونه ټاکي. د ګومان له مخې ( د مطلق ارزښت غړي پروېشونی يا مقسوم عليه) د لومړي صفرځای په څېر $\lambda_1 = 2$ لاس ته راځي. د دې صفرځای وېشنه

$$(-\lambda^3 + 4\lambda^2 - 6\lambda + 4)/(\lambda - 2) = -\lambda^2 + 2\lambda - 2,$$

او په لانې فرمول (دنيمې شپې فرمول په نامه بلل شوی) کې يې ځای په ځای کوو ترې لرو

$$\lambda_{2,3} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{-2} = 1 \pm \mathrm{i} \,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



یو آیګن – وکتور و آیګن – ارزښت $2$ ته کیدی شي د هوموجین مساوات سیستم

$$(A-2E)v=\begin{pmatrix}-2 & -2 & -1\\ 2 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0\end{pmatrix}v=0$$

حلونو له لارې وټاکل شی. حل $v=(1,0,-2)^t$ ساده لیدل کیږي

یوه آیګن-ارزښته $1+\mathrm{i}$ ته یو آیګن – وکتور $w_1$ له دې لاندې لاس ته راوړو:

$$(A-(1+\mathrm{i})E)w_1=\begin{pmatrix}-1-\mathrm{i} & -2 & -1\\ 2 & 1-\mathrm{i} & 1\\ 0 & 2 & 1-\mathrm{i}\end{pmatrix}w_1=0\,.$$

او داسې د پزلګز به تګه $w_1=(-1-\mathrm{i},-1+\mathrm{i},2)^t$. دا $A$ چې حقیقي ده، کېدی شي و $\lambda=1-\mathrm{i}$ ته آیګن-وکتور د کمبلکس کنجوګیشن له لارې جوړ شي:

$$w_2=\overline{w_1}=(-1+\mathrm{i},-1-\mathrm{i},2)^t$$

.

لیکونکي: هیولیک، هیوررنر

## الجبری او هندسي ډېرځلوالی

## Algebraische und geometrische Vielfachheit

(c) ketabton.com: The Digital Library



که $\lambda$ د $(n \times n)$ – ماتریکس $A$ آیګن –ارزښت وي، نو دکرکتریستیکي پولینوم

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda E_n)$$

د صفرځای په حیث د $\lambda$ ډېرځلوالی د آیګن-ارزښت $\lambda$

الجبري $m_\lambda$ ډېرځلوالی بللګیږي

د یوه آیګن – ارزښت $\lambda$ د آیګن-فضا $V_\lambda$ بعد یا پراخېدونی $d_\lambda$ د $\lambda$ هندسي ډېرځلوالی بلل کیږي. . ابور لري

$$d_\lambda \leq m_\lambda \,, \qquad \sum_\lambda m_\lambda = n \,,$$

همداسې

$$d_\lambda = n - \mathrm{Rang}(A - \lambda E) \,.$$

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر، کیمرلي

ماتریکسونه

$$A_1 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} , \quad A_2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} , \quad A_3 = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & 6 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

ټول لاندې کرکتریستیکي پولینوم لري:

$$(4-\lambda)^3 = (4-\lambda)(5-\lambda)(3-\lambda) + 4 - \lambda = (4-\lambda)^3 + 12(4-\lambda) - 12(4-\lambda)$$

او له دې سره هوار $m_4 = 3$ دی. د ماتریکس

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$(A_1 - 4E) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (A_2 - 4E) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$(A_3 - 4E) = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 6 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

د رانګ په لرودو سره $d_4 = 3$ د $A_1$ لپاره، $d_4 = 2$ د $A_2$ لپاره او $d_4 = 1$ د $A_3$ لپاره پېژني

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

## د آیګن –ارزښتونو جمعه او ضرب

Summe und Produkt von Eigenwerten

د یوه $(n \times n)$-ماتریکس $A$ د آیګن – ارزښت $\lambda_i$ لپاره صدق کوي

Für die Eigenwerte $\lambda_i$ einer $(n \times n)$-Matrix $A$ gilt

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \operatorname{Spur} A, \quad \prod_{i=1}^{n} \lambda_i = \det A,$$

د کوم سره چې ډېرځله آیګن – ارزښتونه د الجبري ډېرځلوالی سره سم شمېرل کیږي.

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

(c) ketabton.com: The Digital Library



د ديترمينانت د مولتی کربنيزوالی په اساس د کرکتريستيکي پولينوم لپاره لاس ته راځي

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda E) = (-\lambda)^n + \operatorname{Spur} A(-\lambda)^{n-1} + \cdots + \det A\,.$$

بلې لور ته پولينوم په لاندې بڼه

$$p_A(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} (\lambda_i - \lambda)$$

انځوريدلای شي. د دويم فرمول په ضربونه او د ضريبونو پرتله کونه دا ورکړ شوی کتمتوالی يا ايدنتيتي راکوي.

ليکونکي: هيوليک، هيورنر

ماتريکس

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

کرکتريتيکي بولينوم

$$p_A(\lambda) = \lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - bc)$$

لي د لاندې صفرځايونو سره:

$$\lambda_{1,2} = \frac{(a+d) \pm \sqrt{(a+d)^2 - 4(ad-bc)}}{2}\,.$$

که د آيګن – ارزښتونو جمعه تشکيل شي، دا ريښې افاده له ةنځه ځي، او لاس ته راځي:

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \frac{(a+d) + (a+d)}{2} = a + d = \operatorname{Spur} A\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



که آيګن – ارزښتونه سره ضرب شي، نو د دريم بېنوم فرمول سره لرو:

$$\lambda_1\lambda_2 = \frac{(a+d)^2-(a+d)^2+4(ad-bc)}{4} = ad-bc = \det A\,.$$

ليکونکي: هيوليک، هيوررنر

## د ماتريکسونو ريښتونی فنکشنونه يا توابع

### Rationale Funktionen von Matrizen

که د يوه ماتريکس $A$ يو آيګن-ارزښت $\lambda$ د ريښتوني فنکشن

$$r(t) = \frac{p(t)}{q(t)} = \frac{a_0+a_1t+\cdots}{b_0+b_1t+\cdots}\,,$$

قطبځای نه وي ، نو $r(\lambda)$ د

$$r(A) = q(A)^{-1}p(A) = p(A)q(A)^{-1}\,.$$

آيګن – ارزښت دی.

په ځانګړي توګه $\lambda^k$ د توان-ماتريکس $A^k$ آيګن – ارزښت دی او $1/\lambda$ د معکوس کېدونکي ماتريکس $A^{-1}$ يو آيګن-ارزښت دی.

ليکونکي: هيوليک، هيوررنر

(c) ketabton.com: The Digital Library



له $Av = \lambda v$ د $k \geq 0$ لپاره لاس ته راځي چې $A^k v = \lambda^k v$ او په تړلیزه توګه

$$\left(\sum_k c_k A^k\right) v = \left(\sum_k c_k \lambda^k\right) v \,.$$

پسې صدق کوي

$$Av = \lambda v \Leftrightarrow v = \lambda A^{-1} v \,,$$

که $A$ معکوسوړ وي

که $\lambda$ د صورت پولینوم $q$ صفرځای نه وي. نو صدق کوي

$$q(A)v = q(\lambda)v, \quad q(A)^{-1}v = q(\lambda)^{-1}v \,,$$

پس

$$q(A)^{-1}p(A)v = q(\lambda)^{-1}p(\lambda)v = p(A)q(A)^{-1}v$$

لکه څه مو چې غوښتل .

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

## د آیګن – وکتورونو بنسټ Basis aus Eigenvektoren

که یوه ماتریکس $A$ ته د آیګن – وکتورونو $v_j$ څخه یو بنسټ شتون ولري د آیګن – ارزښت $\lambda_j$ سره ، نو دی

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$V^{-1}AV = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n), \quad V = (v_1, \ldots, v_n)\,,$$

دا په دې معنا چې $A$ نسبت و بنسټ $\{v_1, \ldots, v_n\}$ ته دیاګونال بنه لري.

لیکونکي: هیولی، اپپ

د ښوولو دی، چې

$$V^{-1}AV = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$$

باور لری، د لاندې سره ورته ( برابر ارزښته)دی

$$AV = V \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = (\lambda_1 v_1, \ldots, \lambda_n v_n)\,.$$

دا چې $v_j$ د $V$ مټه و $\lambda_j$ ته د آیګن-وکتورونه دي، دا سملاسي لیدل کیږي

لیکونکي: هیولی، اپپ

ماتریکسونه

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -6 & 6 \\ 1 & -5 & 1 \\ 5 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$

آیګن- ارزښتونه $-2$ , $-2$ او $3$ لري. اړونده آئګن-وکتورونه دپی‌لګی به توګه دئ:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



د $V = (v_1, v_2, v_3)$ سره لاس ته راځئ

$$V^{-1}AV = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

ليكونكي: هيولى، اپپ

# د ځيوكليكي ماتريكسونو دياګونالونه

## Diagonalisierung zyklischer Matrizen

يو ځيوكليكي $(n \times n)$ – ماتريكس $A$ كېدى شي د پورير-ماتريكس

$$W = (w^{jk})_{j,k=0,\ldots,n-1}, \quad w = \exp(2\pi \mathrm{i}/n),$$

په مرسته دياګونالي شي.

$$\frac{1}{n}\overline{W}\begin{pmatrix} a_0 & a_{n-1} & \cdots & a_1 \\ a_1 & a_0 & \cdots & a_2 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_0 \end{pmatrix} W = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

د

$$\lambda_\ell = \sum_{k=0}^{n-1} a_k w^{-k\ell}, \quad \ell = 0, \ldots, n-1,$$

سره د $A$ آيګن – ارزښت دى.

ليكونكي: هيولى، اپپ

(c) ketabton.com: The Digital Library



سړی ساده بسې شمېرلی شي، چې د $W$ $\ell$ -مه متِه د $A$ يو آيګن – وکتور دی. د $Aw_\ell$ د $j$ –م کمپوننت لپاره سړی لاس ته راوړي:

$$\sum_{k=0}^{n-1} a_{j-k \bmod n} w^{(k-j)\ell} w^{j\ell} = w^{j\ell} \sum_{k'=j-n+1}^{j} a_{k' \bmod n} w^{-k'\ell}.$$

دا اندکس يا پېژند نخښه موډولو سره ښوول کيږي، کېدی شي د جمعي کېدنې ورشو د $k' = 0, \ldots, n-1$ سره ځاي په ځاي شي يا بدله شي. په تعقيب سره يې زياتون يا جمعه برابر په $\lambda_\ell$ ده ،لکه جې غوښتل مو. له دې مو و ښوول چې لرو:

$$AW = W \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

دا چې $\frac{1}{\sqrt{n}} W$ يوتيتار دی،دا په دې معنا چې $\frac{1}{\sqrt{n}} W^* = \left(\frac{1}{\sqrt{n}} W\right)^{-1}$ ، سړی غوښتونکی ترانسفورمېشن په دياګونال بڼه لاس ته راوړي

ليکونکي: هيولی، اپپ

د عمومي تيوري سره سم کيدی شي څيوکليکي ماتريکس

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

د فورير- ماتريکس

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$W = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \mathrm{i} & -1 & -\mathrm{i} \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -\mathrm{i} & -1 & \mathrm{i} \end{pmatrix}$$

سره په دیاګونال بڼه واړول شي(ترانسفورمي شي)

$$\frac{1}{4}\overline{W}AW = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

د $2$ ,$2$ ,0 او $4$ سره د $A$ آیګن – ارزښت. دا چي $A$ حقیقي دی باید کمپلکس آیګن-وکتورونه

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \\ -1 \\ -\mathrm{i} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -\mathrm{i} \\ -1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix}$$

( د $W$ دویمه او څلورمه متېه ) یو کڼ آیګن-ارزښت ولري. داسې کېدی شي د کرښیز کمبینېشن له لارې د آیګن-وکتورونو لپاره یو حقیقي بنسټ تشکیل شي:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \\ -1 \\ -\mathrm{i} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -\mathrm{i} \\ -1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{i}\begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \\ -1 \\ -\mathrm{i} \end{pmatrix} - \mathrm{i}\begin{pmatrix} 1 \\ -\mathrm{i} \\ -1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

لیکونکي : اپپ، هیولیګ

(c) ketabton.com: The Digital Library



## د ماتريکسونو توان Potenzen von Matrizen

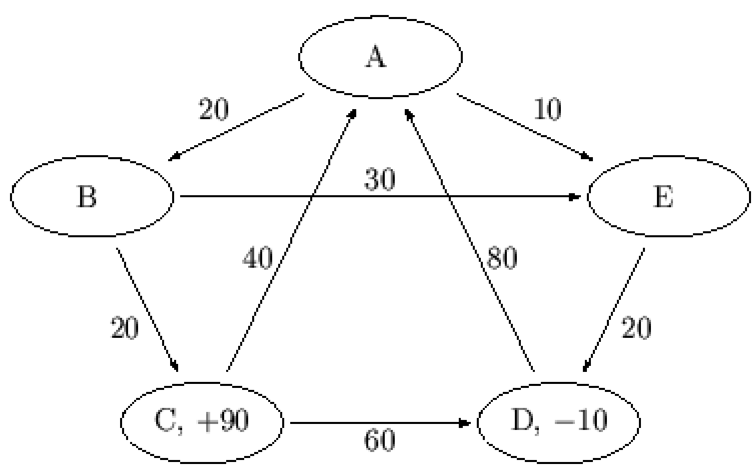
که $A$ د مطلق ارزښت سره سم يا - - ډوله خورا لوي آيګن- ارزښت $\lambda$ د آيګن – وکتور $v$ سره ولري،نو صدق کوي:

$$A^n x = \lambda^n (cv + o(1)), \quad n \to \infty ,$$

که $x$ يو ناترويال کمپوننت د $\lambda$ په آيګن-فضا کې ولري، دا په دې معنا چې $x = cv + w$ د $c \neq 0$ او $v \nparallel w$ سره.

ليکونکي : اپپ، هيوليګ

دا تابع د مارکيټپرخي $x_i$ د رقابت د فيرما ګانو کلنی تغير ښايي.په دې ترتيب فيرماA د $80\%$ بېلګې په توګه د فيرما D د مارکيټ برخه ګټي او د فيرما C خپله د مرکيټ برخه د $90\%$ په شاوخوا کې لويه وي د نوي خرڅلاو امکانات پيداکولو سره ، په همدې وخت کې د مارکيټ برخې A او D ته له لاسه ورکوي.




د ليدخيرې څخه د مارکيټ نوې برخې(ونډه) رانيسو:

(c) ketabton.com: The Digital Library



$A_{neu}$ نوي $= 0.7A + 0.4C + 0.8D$

$B_{neu}$ نوي $= 0.5B + 0.2A$

$C_{neu}$ نوي $= 0.9C + 0.2B$

$D_{neu}$ نوي $= 0.1D + 0.6C + 0.2E$

$E_{neu}$ نوي $= 0.8E + 0.3B + 0.1A\,.$

له $x = (A, B, C, D, E)^t$ سره لاس ته راځي:

$$x_{neu} \text{ نوی } = \begin{pmatrix} 0.7 & 0 & 0.4 & 0.8 & 0 \\ 0.2 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0.9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.6 & 0.1 & 0.2 \\ 0.1 & 0.3 & 0 & 0 & 0.8 \end{pmatrix} x\,.$$

د ایتراشن ماتریکس د $n$ –توان سره ضربولو د $n$ کلونو وروسته د مرکت ونډه راکوي.

نورمیري شوي وکتورونه $x^0$ د یوه آیګن- وکتور $v_{max}$ (ماکس) پولې ته ځي( کونورګیریګي) د ماتر یکس د ارزښت له مخې لوی ا یګن ارزښت$\lambda_{max}$ ته. سړی لاس ته راوړي $\lambda_{max} = 1.1$ او دې ته اړوند ایګنوکتور

$$v_{max} = (0.75, 0.25, 0.25, 0.25, 0.5)^t\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



د اوږده وخت لپاره بازار یا مارکیټ د $A$ ه خوا تاکل کيږي یا تعينيږي. په سلو کې برخې د max $v$ د نورمي کولو له لارې لاس ته راځي یعنې , $v/\|v\|_1$ max په دې توګه

$$A:\ 37.5\%,\ \ B,C,D:\ 12.5\%,\ \ E:\ 25\%\,.$$

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

## د فيبوناچي پرلپسې یا - ترادف Fibonacci-Folge

د فيبوناچي پرلپسي یا ترادفونه داسې پيژند لري یا تعریف دي:

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 1,$$

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1}\,, \quad \text{د } n \geq 1\,, \text{ لپاره}$$

دا په دې معنا چې هره فيبوناچي پرلپسې د دواړو ترمخ غړو زیاتونن یا جمعه ده.

د فيبوناچي لومړي عددونه دي:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765, \ldots\,.$$

سرې د پيل ارزښت $a_1 = 1$ او $a_2 = 3$ ټاکي نو داسې په نامه لوکاس - $a_2 = 3$ Lucas- عدد:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765, \ldots\,.$$

که دوه یو په بل پسې د فيبوناچي عددونه یوه وکتور

$$x_n = (a_n, a_{n-1})^t$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



ته سره یوځاي شي، نو ریکوررزیون د

$$x_{n+1} \qquad = Ax_n$$

په څیر د لاندې سره ولیکو:

$$A \quad = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

د ماتریکسلیکنې په مرسته کېدی شي د فیبوناچي عدد دا اسیمپتوتیکي حالت وټاکل شي. د دې لپاره سړی د $A$ آیګن-ارزښتونه او آیګن-وکتورونه شمېري:

$$\lambda_\pm = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}, \quad v_\pm = \begin{pmatrix} \lambda_\pm \\ 1 \end{pmatrix}.$$

که سړی د ریکوررزیون وکتورونه د $v_+$ کرښیز کمبینېشن په حیث انځور کړي،

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} v_+ - \frac{1}{\sqrt{5}} v_- ,$$

، نو لاس ته راځي:

$$a_n = \qquad \frac{1}{\sqrt{5}} \lambda_+ \lambda_+^{n-1} - \frac{1}{\sqrt{5}} \lambda_- \lambda_-^{n-1}$$

$$= \quad \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \right)^n + o(\lambda_-^n) .$$

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

(c) ketabton.com: The Digital Library



## نورمال ماتریکسونه Normale Matrizen

یو کمپلکس ماتریکس $A$ نورمال بلل کیږي، که

$$AA^* = A^*A\,,$$

وي، د $A^* = \bar{A}^{\mathrm{t}}$ سره. په ځانګړې توګه یونیتار او هرمییتیکي ماتریکسونه نورمال دي.

د حقیقي نورمال ماتریکسونو لپاره دی:

$$AA^{\mathrm{t}} = A^{\mathrm{t}}A\,,$$

کوم چې په ځانګړې توګه د اورتوګونال او سیومتري ماتریکسونو لپاره پوره دی.

لیکونکي: اپپ، هیولیک،کیمرلي

د یونیتارو او هرمیتیکي ماتریکسونو نورمالوالی ترلی له تعریف څخه لاس ته راځي.

د ئوه یونیتار ماتریکس لپاره دی:

$$AA^* = AA^{-1} = E = A^{-1}A = A^*A\,.$$

د یوه هرمېتیکي ماتریکس لپاره دی:

$$AA^* = AA = A^*A\,.$$

لیکونکي: اپپ، هیولیک

(c) ketabton.com: The Digital Library



## د نورمالو ماتريکسونو يونيتار دياګونالي – يا دوه کونجتړي کول

## Unitäre Diagonalisierung normaler Matrizen

يو ماتريکس $A$ تيک هلته نورمال دی، که $A$ يونيتار دياګوناوړ وي، دا په دې معنا چې ، که وي:

$$U^{-1}AU = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)\,,$$

د کوم سره چې د $U$ متې يو اورتونورمال بنسټ و آيګن – ارزښت $\lambda_j$ ته له آيګن-وکتورونو تشکيل کړي.

ليکونکي: اپپ، هيوليک، کيمرلي

که

$$A = UDU^*, \quad U^* = U^{-1}\,,$$

وي، نو نورمال دی، ځکه چې لرو:

$$\begin{aligned} AA^* = \quad & (UDU^*)(UDU^*)^* = UD(U^*U)D^*U^* \\ = \quad & U(D^*D)U^* = (UD^*U^*)(UDU^*) \\ = \quad & A^*A\,. \end{aligned}$$

د دې معکوس کېدی شي د يوه اورتوکونال بنسټ شتون نسبت بعد ته د ايندکشن له لارې وښايي. د ايندکشن پل لپاره يو يونيتار ماتريکس $V$ جوړوو د لاندې سره:

$$V^*AV = \left(\begin{array}{c|c} \lambda & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right).$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



د اينکشن نيونې يا فرضيې له مخې کېدی شي $B$ د يونتارماتريکس $W$ له لارې په دياګونال بڼه ترنسفورمي شي، داسې چې سړی ځاي په ځاي کولی شي:

$$U = V \left( \begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & W \end{array} \right)$$

.

د $V$ دجوړښت يا کنسترکشن ته د يوه نورمي آيګن – وکتور $v$ څخه و آيګن- ارزښت $\lambda$ ته ځي او ړدي

$$V = (v|\tilde{V}),$$

د کوم سره چې د $\tilde{V}$ متې وکتور $v$ و اورتوګونال بنسټ ته پوره کوي. لاس ته راځي:

$$V^* A V = \left( \begin{array}{c} v^* \\ \hline \tilde{V}^* \end{array} \right) \left( \begin{array}{c|c} \lambda v & A\tilde{V} \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c|c} \lambda & c^* \\ \hline 0 & B \end{array} \right) .$$

ښوولو تهدومره پاتيږي، چې $B$ نورمال او $c = 0$ دی. دواړه د $A$ د نوپماليټي څخه لاس ته راځي. دا د ورته والي ترنسفورميشن سره ساتلي پاتې کيږيو ، پس د پورته مساوات د ښي اړخ $\tilde{D}$ لپاره هم صدق کوي.

که

$$\tilde{D}\tilde{D}^* = \left( \begin{array}{c|c} |\lambda|^2 + |c|^2 & c^* B^* \\ \hline Bc & BB^* \end{array} \right)$$

$$\tilde{D}^*\tilde{D} = \left( \begin{array}{c|c} |\lambda|^2 & \overline{\lambda} c^* \\ \hline \lambda c & B^* B \end{array} \right),$$

تشکيل کړو، نو غوښتونی خويونه د پورته ماتريکسونو د دياګونال بلوکونو د پرتلې له لارې لاس ته راځي. ليکونکي: اپپ،هيوليګ

(c) ketabton.com: The Digital Library



ماتريکسونه

$$A=\begin{pmatrix}3+2i & 3-2i\\ 3-2i & 3+2i\end{pmatrix}$$

نورمال دي، چې د سيده شمېرنې له لارې تصديق کېدی شي.

$$AA^*=\begin{pmatrix}26 & 10\\ 10 & 26\end{pmatrix}=A^*A$$

د دې په تعقيب  بايد $A$ يونيتار دياګونالوړ وي. سړی آيګن – ارزښتونه $6$ او $4i$ لاس ته راوړي او اړونده نورمي آيګن-وکتورونه د بېلګې په توګه دي:

$$v_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix},\quad v_2=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}.$$

د انتظار سره سم $v_1 \perp v_2$ دی، او د يونيتار ماتريکس $U=(v_1,v_2)$ سره دياګونال ماتريکس  لاس ته راځي:

$$\begin{pmatrix}6 & 0\\ 0 & 4i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3+2i & 3-2i\\ 3-2i & 3+2i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}.$$

ليکونکي: اپپ،هيوليګ

## د هرميتيکي ماتريکسونو دياګونال بڼه Diagonalform hermitescher Matrizen

ديوه هوموجېن ماتريکس $A\ (A=A^*)$ آيګن-ارزښتونه $\lambda_i$ حقيقي دي او د آيګن-وکتورونو $v_i$ خخه يو اورتوګونال بنسټ شتون لري.  په تعقيب

(c) ketabton.com: The Digital Library



ده د يونيتارماتريکس سره

$$U^*AU = \text{diag}\,(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)\,,$$

ده د يونيتارماتريکس $U = (v_1, \ldots, v_n)$ سره.

په ځانګړې حالت کې حقيقي سيومتريکي ماتريکسونو $(A = A^t)$ آيګن-وکتورونه هم حقيقي دي.

ليکونکي: هيوليګ، ربل

يونيتار دياګوناوړوالی په نورمالو ماتريکسونو د اړونده ټوليزې نتيجې څخه لاس ته راځي، هغه چې هرميتيکي حالت خوندي لري. د ښولو دا پاتې دی چې آيګن – ارزښت $\lambda$ حقيقي دی. که په ورته توګه $v$ آيګن- وکتور وي، نو دا له لاندې لاس ته راځي:

$$\lambda v^* v = \quad v^*(\lambda v) = v^*(Av) = (A^* v)^* v$$

$$= \quad (Av)^* v = (\lambda v)^* v = \overline{\lambda} v^* v\,,$$

ځکه چې $\lambda = \overline{\lambda} \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$ لرو.

ليکونکي: هيوليګ، ربل

هرميتيکي ماتريکس

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1-\mathrm{i} \\ -1+\mathrm{i} & 1 \end{pmatrix}$$

ديترمينانت 0 لري. پسې $\lambda = 0$ يو آيګن – ارزښت دی او سړی تړلی ګوري، چې

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-\mathrm{i} \end{pmatrix}$$

يو اړونده آيګن-وکتور دی. له $\mathrm{Spur}\, A = 3 = \lambda + \varrho$ څخه د ويم آيګن – ارزښت په حيث $\varrho = 3$ لاسته راځي. يو اړونده آيګن-وکتور نسبت و کمپلکس سکالار ضرب ته هغه و $v$ ته لاندې اورتوګونال وکتور دی:

$$w = \begin{pmatrix} 1+\mathrm{i} \\ -1 \end{pmatrix}.$$

د نورمي کولو له لارې يونيتار ماتريکس لاس ته راځي

$$U = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1+\mathrm{i} \\ 1-\mathrm{i} & -1 \end{pmatrix}.$$

په تعقيب باور لري:

$$A = U \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} U^*,$$

د

$$U^* = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1-\mathrm{i} \\ 1+\mathrm{i} & -1 \end{pmatrix}$$

سره، هغه و $U$ ته معکوس.

ليکونکي: هيوليګ، کرايخ

(c) ketabton.com: The Digital Library



## مثبت ديفينيت ماتريکسونه Positiv definite Matrizen

يو مربع ماتريکس $A$ مثبت ديفينيت بلل کيږي، که وي:

$$v^*Av > 0 \quad \forall v \neq 0.$$

که $v^*Av$ يواځې نامنفي وي، نو $A$ مثبت سيمي (نيم – يا برخه-) ديفينيت بولو.

يو مثبت ديفينيت ماتريکس $A$ فقط مثبت دياګونالتوکي لري او آيګن-ارزښتونه. په ځنګړي توګه $A$ معکوسوړ ده او معکوس يې هم مثبت ديفينيتدی.

ليکونکي: هيوليک، ربل

## ريلا ي – ويش (هعني هغه د وېش تيجه) Rayleigh-Quotient

د يوه هرميتيکی مثبت ديفينيت ماتريکس $S$ لپاره د داسې په نامه ريلای-وېش اکسترم – ارزښتونه

$$r_S(x) = \frac{x^*Sx}{x^*x}, \quad x \neq 0,$$

خورا کوچنی او خورا لوي د $S$ آيګن – ارزښت دی.

ليکونکي: اپپ، هيوليک

ماتريکس $S$ کېدی شي ا يونيتار ماتريکس $U$ له لارې دياګونال فروم ته واړول شي:

$$U^*SU = D, \quad D = \text{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n),$$

د کوم سره چې

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$Sv_i = \lambda_i v_i \Rightarrow \lambda_i = \frac{v_i^* S v_i}{v_i^* v_i} > 0$$

او $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n$ نيول يا فرض کېدی شي.

که سړی $S = UDU^*$ او $x = Uy$ بدل کړي، نو دی

.

$$r_S(y) = \frac{y^* D y}{y^* (U^* U) y} = \frac{\sum_i \lambda_i |y_i|^2}{\sum_i |y_i|^2} .$$

دا بنايي چې

$$\lambda_{\min} \leq r_S(y) \leq \lambda_{\max} ,$$

چېرته چې د مطلوب آيګن-وکتورونو لپاره $y = e_n$ او $y = e_1$ لپاره صدق کوي.

ليکونکي: اپپ، هيوليک

## مثلث بڼه Dreiecksform

يو کمپلکس مربع ماتريکس $A$ کېدی شي د يوه ورته ترانسفورميشن له لارې په پورته مثلث بڼه

$$R = \begin{pmatrix} \lambda_1 & r_{1,2} & \cdots & r_{1,n} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & r_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} = Q^{-1} A Q$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



ترانفورمي شي، چېرته چي دياګونالي د $A$ آيګن-ارزښتونه $\lambda_i$ خوندي لري.

ليکونکي: هيوليګ،هيورنر

ښوونه د ماترريکس په بعد $n$ باندې د اينډکشن له لارې کيدی شي صورت ونيسي، د يوه $(1 \times 1)$-ماتريکس د ترېويال حالت څخه په پيل.

يو $(n \times n)$-ماتريکس $A$ تر څېړنې لاندې نيسو، نو دا لږترلږه يو ايګنوکتور $v$ لري.
دا د نورمي کيدلو وروسته يوه اورتوګونال بنسټ $\{v, w_1, \ldots, w_{n-1}\}$ ته ورپوره کيدی شي. په دې بنسټ کې څېرونه( فنکشن-که غواړې تابع) لاندې بڼه لري:

$$\tilde{A} = T^* A T = \begin{pmatrix} \lambda & x^* \\ 0 & B \end{pmatrix}.$$

د $((n-1) \times (n-1))$-ماتريکس لپاره د اينډکشن نيونې يا فرضيې له مخې يو يونيتار ترانفورميشن $\tilde{Q}$ شتون لری د $\tilde{Q}^* B \tilde{Q} = R_{n-1}$ سره. له دې امله د

$$Q = T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tilde{Q} \end{pmatrix}$$

سره لاس ته راځي، چې

$$Q^* A Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tilde{Q}^* \end{pmatrix} T^* A T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tilde{Q} \end{pmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tilde{Q}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & x^* \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tilde{Q} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tilde{Q}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & x^*\tilde{Q} \\ 0 & B\tilde{Q} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda & x^*\tilde{Q} \\ 0 & \tilde{Q}^*B\tilde{Q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & x^*\tilde{Q} \\ 0 & R_{n-1} \end{pmatrix} = R\,.$$

ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

## اصلي وکتورونه Hauptvektoren

که $\lambda$ د کمپلکس $(n \times n)$ - ماتريکس $A$ يو آيګن-ارزښت وي، د الجبرى ډېرځلوالى سره، نو يو وکتور $v$ د $m$

$$(A - \lambda E)^m v = 0\,, \quad v \neq 0$$

سره اصلى وکتور بلل کيږي و آيګن-ارزښت $\lambda$ ته.

ټول اصلي وکتورونه و آئګن – ارزښت ته د صفر وکتور سره يوځاي د بعد $m$ يو لاندې- يا برخوکتور جوړوي، دا اصليفضا $H_\lambda$ و آيګن – ارزښت $\lambda$ ته. دا کرښيزې ځېروني يا فنکشن $A$ ته انواريانت دى.

ټوله فضا د اصلي فضاو سيده جمعه يا زيتون دى:

$$\mathbb{C}^n = \bigoplus_\lambda H_\lambda$$

ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

(c) ketabton.com: The Digital Library



ښوونه يې له ډېرو برخپلونو يا-قدمونو رايوځای کيږي.

اول - داچې يوونماتريکس يا واحد ماتريکس د هر ماتريکس سره بدلپډونکی دی يوه وکتور $v \in H_\lambda$ د خپرې( عکس ؟؟) $Av$ لپاره صدق کوي:

$$(A-\lambda E)^m Av = \left(A^{m+1}+\cdots+\lambda^m E^m A\right)v = A\left(A^m+\cdots+\lambda^m E^m\right)v$$

$$= \qquad A(A-\lambda E)^m v = A\cdot 0 = 0 .$$

په تعقيب $Av \in H_\lambda$ دی.

دويم- د دې لپاره چې بعد وټاکو، ماتريکس $A$ په پورتني مثلثبنه ترانفورمي کوو:

$$A \to B = Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} \lambda & & * & * & * \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda & * & * \\ & 0 & & R & \\ & & & & \end{pmatrix} .$$

دا چې د $v \in H_\lambda$ لپاره

$$0 = Q^{-1}(A-\lambda E)^m Q(Q^{-1}v) = (B-\lambda E)^m (Q^{-1}v) ,$$

دی، اصلي وکتورونه د $v \to w = Q^{-1}v$ سره سم اصلي وکتور ته ترانفورمي کيږي.

مکر د $B$ له بڼې روښانه دی، چې يوون – يا واحدوکتورونه د $e_i$ $i \le m$ لپاره د $B$

په اصليفضا $Q^{-1}H_\lambda$ کې پراته دي. پسې يو وکتور $v$ د $v_i \neq 0$ $i > m$ سره د يوه

(c) ketabton.com: The Digital Library



لپاره د $(B-\lambda E)^m$ له لارې په 0 نه څېره کيږي يا فنکشن 0نه دی. په تعقيب $\dim H_\lambda = m$ لرو.

دريم – دا چې $\sum_\lambda \dim H_\lambda$ د الجبري د ډېرواره جمعي سره برابر دی، يعني برابر په $n$ دی، ښسيا کوي، چې د بنسټ خويونو لپاره د اصلي فضا کربنيز خپلواکوالی وښودل شي يا وښايو. دې ته استعماليږي، چې د $\varrho \neq \lambda$ لپاره لرو:

$$(A-\varrho E)v = 0 \wedge v \in H_\lambda \Rightarrow v = 0.$$

که د مختلو اصلي فضاو څخه يوه د وکتورونو جمعه ورکه شي،

$$v_\lambda + v_\varrho + v_\sigma + \ldots = 0,$$

، نو لاس ته راځي:

$$((A-\varrho E)^{m_\varrho}(A-\sigma E)^{m_\sigma}\ldots)\, v_\lambda = 0.$$

دا چې يوګونی ضريبونه $H_\lambda$ انواريانت دي، په پورته يادونه استعمالوږ دی، او لاس ته ترې $v_\lambda = 0$ راځي. په ورته توګه $v_\varrho = v_\sigma = \ldots = 0$ ترې لاس ته راځي او له دې سره صفروکتور فقط په ساده ډول انځوروږ دی.

ليکونکي: هيليک، هيورنر

## د اصلفضا څيوکليکي بنسټ Zyklische Basen von Haupträumen

د يوه کمپلکس مربع ماتريکس $A$ يو اصلفضا (اصلي فضا) کېدی شي د څيکليکي برخفضاو په يوه سيده جمعي تجزيه شي:

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$H_\lambda = V_1 \oplus \cdots \oplus V_\ell \,,$$

دا په دې معنا چې هر برخفضا $V_i$ د لاندې بنې يو بنسټ لري

$$B^{k_i} v_i,\, \ldots,\, Bv_i,\, v_i, \quad B = A - \lambda E,$$

د $w_i = B^{k_i} v_i$ سره يوه آيګن-وکتور و آيګن-ارزښت $\lambda$ ته.

ماتريکس $A$ برخفضا $V_i$ اينواريانت پرېږدياو هلته لاندې ماتريکس-انځورونه لري:

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix} .$$

ليکونکي:هيوليک،هيورنر

د تعريف سره سم $H_\lambda$ له وکتورونو $v$ څخه د $B^{k+1} v = 0$ سره جوړه ده، د کوم سره چې $k$ کوچنۍ ده د $\lambda$ د الجبري ډېرڅلوالي $m$ څخه. د بنسټ ټاکلې بڼه له دې امله نږدېوالی لري. د دې لپاره چې وکتورونه

$$w_i \in \ker B \,,$$

چې بنسټ کره کوې ، وټاکو ، نو د ايګنوکتورونو $\ker B$ و $\lambda$ ته برخفضاوې

$$U_j = \ker B \,\cap\, \mathrm{Bild}\, B^j$$

تر څېرنې لاندې نيسو. په روښانه توګه دی

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$\emptyset = U_m \subset U_{m-1} \subset \cdots \subset U_0 = \ker B\,.$$

وکتورونه $w_i$ به اوس ، له تشدېرۍ سره په پيل، ايندوکتي، جوړيږي. که $w_1,\ldots,w_{i-1}$ همدا اوس کره شوي وي ، نو سړی لويوالی دا لوي $k_i$ داسې، د هغه لپاره داسې چې $U_{k_i}$ په کرښيزه هيولې $W_{i-1}$ کې نه وی پروت، دا په دې معنا چې $v_i \neq 0$ باور لری د $B^{k_i}v_i = w_i \notin W_{i-1}, \quad Bw_i = 0\,.$ سره .

په دې ډول باالاخره د ټول آيګن-فضا $\ker B$ لپاره يو بنسټ $\{w_1,\ldots,w_\ell\}$ جوړيږي او اړونده ځيوکليکي بنسټونه د $V_i$ لپاره.

د فضاو $V_i$ د $B$ سره ( همداسې $A$ ) د ضرب له لارې روښانه دی. د غوښتل شوې ماتريکس انځورنه له اندې څخه لاس ته ارځي

$$A(B^j v_i) = (\lambda E + B)B^j v_i = \lambda B^j v_i + B^{j+1} v_i\,,$$

، که د بنسټ وکتورونه ، لکه څنګه چې ورکړ شوي دي، د کښته کېدونکي توان سره تنظيم کړي.

د جوړښت د ټيکوالي لپاره بايد برسېره پر دې د وکتورنو $B^j v_i$ بنسټ خويونه هم وښوول شي. دا د دوه پلونو (قدمونو ) سره صورت نيسي.

اول - لومړی کرښي. خپلواکوالی ښوول کيږي. دا تخنيکي دلايل کزدی شي د دوه ځيکليکي ځنځيرونو د بېلګې

$$B^2v_1,\, Bv_1,\, v_1, \quad Bv_2,\, v_2\,,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



له لارې لیدوړ شي. نیسو چې

$$\alpha_{2,1}B^2v_1+\alpha_{1,1}Bv_1+\alpha_{0,1}v_1+\alpha_{1,2}Bv_2+\alpha_{0,2}v_2=0,$$

دی، نو د $B^2$ سره د ضرب له لارې لرو

$$\alpha_{0,1}w_1=0 \implies \alpha_{0,1}=0\,,$$

د $B^3v_1=Bw_1=0$ او $B^2v_2=Bw_2=0$ له امله . د $B$ سره د ضرب له لارې اوس لرو

$$\alpha_{1,1}w_1+\alpha_{0,2}w_2=0 \implies \alpha_{1,1}=\alpha_{0,2}=0$$

د جوړښت سره سم د آیګن-وکتورونو $w_i$ کرښیز خپلواکوالی له امله. بالاخره لرو

$$\alpha_{2,1}=\alpha_{1,2}=0$$

بیا هم د آیګن-وکتور $w_i$ د کرښیز خپلواکوالی له امله.

په ټولیز حالت په ورته توګه مخ ته ځو. د یوه کرښیز کمبینیشن د تحلیل په هکله بسټوکتور د $B$ د مناسب توان سره ضربوي، تر څو د آیګن-وکتورونو ټول ترمونه له منځه ولاړ شي.

دویم - همدومرهښایو، چې هر وکتور $u \in H_\lambda$ د بنسټوکتورونو سره انځوروړ دی.
پس وي دې $B^k u=0\,,$ د $k \le m$ ، سره. د $k=1$ لپاره یې نه ښایو، ځکه چې وکتورونه $w_i$ د جوړښت له امله د آیګن – فضا $\ker B$ لپاره یو بنسټ جوړوي.
اندوکتیو سړی نیوی شي یا فرض کولی شي، چې په کې وکتورونه انځوروړ دي.

همداسې آیګن-وکتور $B^{k-1}u$ انځوروړ دی:

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$B^{k-1}u = \sum_i \alpha_i w_i .$$

له دې لاس ته راځی، چې

$$B^{k-1}\underbrace{(u - \sum_i \alpha_i B^{k_i - k+1} v_i)}_{u'} = 0 \, .$$

د دې په تعقیب $u'$ انځورونه دی او له دې سره $u$ هم .

ليکونکي:هيوليک،هيورنر

## د جوردان بڼه Jordan-Form

يو کمپلکس مربعماتريکس کېدی شي د يوه ورته والي ترانفورمېشن له لارې د بلوک دیاګونال بڼه باندې تراسفورم شي

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_k \end{pmatrix} = Q^{-1}AQ$$

باندې تراسفورم شي. له دې سره د جوردانبلکونه دا لاندې بڼه لري

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda_i & 1 \\ 0 & & & & \lambda_i \end{pmatrix} ,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



د $A$ یوه آیګن – ارزښت $\lambda_i$ سره

تر ځای بدلون پورې د جوردان بنه یواځنۍ ده.

لیکونکي:هیولیګ،هیورنر

دا چې اصلي فضاوې $H_\lambda$ د فنکشن $A$ لاندې انواریانت دي، کیدی شي د اصلي وکتورونو بلوکبنې پورې یوه بنسټ په نسبت لاس ته راوړل شي. د ځانګړو ځیوکلیکي بسټونو

$$B^{k_i}v_i, \ldots, Bv_i, v_i, \quad B = A - \lambda_i E\,,$$

استعمال له لارې بلوکونه غوښتوني بڼه غوره کوي

لیکونکي: خیولیګ، هیورنر

ماتریکس

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

کرکتریستیکي بولینوم

$$p_A(\lambda) = (-1-\lambda)^3 + 4(4 - 3(-1-\lambda)) = -\lambda^3 - 3\lambda^2 + 9\lambda + 27$$

لري د ډبل صفرځایونو $\lambda = -3$ او ساده صفځایونو $\varrho = 3$ سره.

دا چې د ماتریکس

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$(A-\lambda E)=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

رانګ 2 دی، و ته فقط یو آیګن-وکتور شتون لري. د دې په تعقیب $A$ د جوردان بڼه لري.

$$Q^{-1}AQ=J=\begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, Q=(w,v,\tilde{w}) .$$

د کرښیز و مساواتشیستمونو د حل له لارې

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

او

$$\begin{pmatrix} -4 & 0 & 4 \\ 2 & -4 & 0 \\ 3 & 2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tilde{w}_1 \\ \tilde{w}_2 \\ \tilde{w}_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

سړی لاندې آیګن-وکتورونه لاس ته راوړي:

$$w=\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{w}=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} .$$

اصلي ډیاګونال پوره کوي

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix},$$

دا په دې معنا چې د بېلګې $v = (-3, 4, 1)^t$ په توګه . له دې سره دی

$$Q = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

څه چې د ازمايښت له لارې $A = QJQ^{-1}$ تصديق کيږي.

ليکونکي: خيوليګ، هيورنر

د يوه کمپلکس $(2 \times 2)$-ماتريکس $A$ لپاره 3 څرنګواليز ( د کواليټي له مخې) مختلف جوردان-نورمالبڼې شتون لري:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \varrho \end{pmatrix}, (\lambda \neq \varrho).$$

په لومړي حالت کې $\lambda$ يو ډبل آيګن – ارزښت دی د فقط يوه ( تر سکالار ضرب پورې) آيګن-وکتور $w$ سره، دا په ې معا چې

$$\text{Rang}(A - \lambda E) = 1.$$

يو په دې پورې اړونده اصلي وکتور $v$ او له دې سره دې سره ترانسفورميشن ماتريکس $Q = (w, v)$ د

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$w = (A - \lambda E)v$$

د حل له  لارې لاس ته روارړي ، همداسې د $\ker(A - \lambda E)^2$ ټاکلو له لارې.

د دې لپاره يو ځرګنده بېلګه

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -9 & 8 \end{pmatrix}$$

کرکتريستيکی پولينوم

$$P_A(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 4$$

دی، د  ډبل صفرځای $\lambda = 2$ سره. د

$$\begin{pmatrix} -6 & 4 \\ -9 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

حل له راې سړی $w = (2,3)^t$ لاس  ته راوړي او له دې  سره

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 4 \\ -9 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

يو اړونده اصلي وکتور $v = (1,2)^t$ . دا د ازمايښت سره تصديق کيږي:

$$A = QJQ^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

سره تصديق کيږي.         ليکونکي: خيوليګ، کرايڅ

(c) ketabton.com: The Digital Library



د یوه کملکس $(3 \times 3)$ - ماتریکس $A$ لپاره لاندې کولتاتیو مختلف جوردان –نورمالبڼې $J = Q^{-1}AQ$ شتون لرى:

اول – جوړه دوله مختلف آیګن-ارزښتونه $\lambda, \varrho, \sigma$ :

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \varrho & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{pmatrix}.$$

دویم – یو ډبل آیګن – ازښت $\lambda$ :

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \varrho \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \varrho \end{pmatrix}.$$

په دویم حالت کې

$$\text{Rang}(A - \lambda E) = 2$$

او $Q = (w, v, \tilde{w})$ دي له آیګن وکتورونو $w$ او $\tilde{w}$ یوه اصلي وکتور $v$ سره، هغه چې د مساوات سیستم د حل له لارې

$$(A - \lambda E)w = 0, \quad w = (A - \lambda E)v, \quad (A - \varrho E)\tilde{w} = 0$$

د حل له لارې ټاکل کېدی شي.

دریم – یو دریواره آیګن –ارزښت:

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

په دويم حالت کې

$$\mathrm{Rang}(A-\lambda E)=1$$

دی او سړی يو اصلي وکتور $v$ د

$$(A-\lambda E)^2 v = 0\,, \quad (A-\lambda E)v \neq 0.$$

حل له لارې لاس ته راوړي.

اړونده آيګن – وکتور $w=(A-\lambda E)v$ دی، او يو غزېدلی کرښيز خپلواک آيګن – وکتور $\tilde{w}$ دا لاندې پوره کوي:

$$(A-\lambda E)\tilde{w} = 0, \quad w \perp \tilde{w}\,.$$

بالاخره $Q=(w,v,\tilde{w})$ دی.

په دريم حالت کې

$$\mathrm{Rang}(A-\lambda E)=2$$

دی او دی $Q=(w,v,u)$ له

$$(A-\lambda E)w = 0\,, \quad w=(A-\lambda E)v\,, \quad v=(A-\lambda E)u\,.$$

سره. ليکونکی: ويپر

(c) ketabton.com: The Digital Library



## د (4x4) -ماتيکسونو جوردان-بڼې

## Jordan-Formen von (4x4)-Matrizen

لاندې توابع ټول 14 ممکن $(4 \times 4)$ - ماتريکسونو د جوردان – بڼې ځای نيوني جوړښتونه ښايي .

- ځلور مختلف آيګن – ارزښتونه $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{pmatrix}$$

- يو دوه ځله آيګن – ازښت $\lambda_1$ او دوه دوه ځله آيګن -ارزښتونه $\lambda_2, \lambda_3$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

- يو درې واره آيګن – ارزښت $\lambda_1$ او يو يوواره آيګن – ارزښت $\lambda_2$ .

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



- دوه دوه واره آيګن – ارزښت $\lambda_1, \lambda_2$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

- يو څلورواره آيګن – ارزښت $\lambda_1$ .

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$$

ليکونکي: خيوليک، هيوررنر

## د ماتريکسونو توانونه Potenzen vonMatrixen

د يو کمپلکس ماتريکس توانونه $A^n$ ، $n = 0, 1, \ldots$ تيک هلته صفر ماتريکس پولي ته تلونکي دي، که د ټولوآيګن-ارزښتونو $\lambda$ مطلق ارزښت له $1$ کوچنی دی.

پرلپسي $(A^n)$ محدوده پاتې کيږي، که $|\lambda| \leq 1$ او د آيګن – ارزښت لپاره د ارزښت $1$ سره

ليکونکي: خيوليک، هيوررنر

(c) ketabton.com: The Digital Library



د $A$ د جوردان – بڼې $J = Q^{-1}AQ$ سره کېدی شي د ماتريکس – توانونه په لاندې بڼه و ليکل شي:

$$A^n = (QJQ^{-1})(QJQ^{-1})\cdots(QJQ^{-1}) = QJ^nQ^{-1}$$

دلته يواځې دې ته اړتيا ده چې د $J$ پولې ته تلنه(ليميټ) تر ځېړنې لاندې و نيل شي. د $J$ د بلوکفورم (- بڼې) کېدی شي هر بلوک $J_i$ ځانله تر ځېړنې ونيل شي. د دې لپاره ليکو

$$J_i = (\lambda_i E) + D\,,$$

، د کوم سره چې $D$ ګاوندی دیاګونال د يو سره خوندي لري. لکه چې په ساده توګه ښوول کيږي، د بعد $m$ د يوه بلوک لپاره $D^m = 0$ دی. پسې صدق کوي

$$(J_i)^n = \lambda_i^n E + \binom{n}{1}\lambda_i^{n-1}D + \cdots + \binom{n}{m-1}\lambda_i^{n-m+1}D^{m-1}\,.$$

له دې کټمټوالي څخه کېدی شي د پرلبسپپولې ته تلنه(ليميټ کونورګنت) و لوستل شي.

د $|\lambda_i| < 1$ لپاره دی

$$\lim_{n\to\infty}\binom{n}{j}\lambda_i^{n-j} = 0\,,$$

دی، ځکه چې $\binom{n}{j}$ فقط پولينوميال يعنې پولينومي لوييږي، د دې معکوس $\lambda_i^{n-j}$ اکپوننشک ټيټيږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



که $|\lambda_i| = 1$ وي پرلپسي محدوده يا راپنده پاتيږي، که $m = 1$ وي، دا په دې معنا، چې ګاونډی دياګونال د يوه سره شتون نه لري.

ليکونکي: خيوليک، هيورنر

## په زيګولار ارزښت ټوټه کونه Singulärwert-Zerlegung

هر يوه کمپلکس $(m \times n)$ ـماتريکس $A$ ته يونيتار ماتريکسونه $U$ او $V$ شتون لري د

$$U^* A V = S = \begin{pmatrix} s_1 & & 0 \\ & s_2 & \\ 0 & & \ddots \end{pmatrix}.$$

سره.

زينګولار ارزښتونه

$$s_1 \geq s_2 \geq \cdots \geq s_k > s_{k+1} = \cdots = 0$$

د $A^* A$ د آئګن – ارزښتونو ريښې دي او $k$ د $A$ رانګ دی.

د $U$ متې $u_j$ او د $V$ متې $v_j$ د $AA^*$ همداسې $A^* A$ د آيګن-وکتورونو اورتوګونال بنسټونه جوړوي او لاندې صدق کوي:

$$A v_j = s_j u_j,$$

د $1 \leq j \leq k$ لپاره.

(c) ketabton.com: The Digital Library



د سينګولارارزښت توپه کوني له لارې کېدی شي کربنيزه څېرونه يا فنکشن
$$x \mapsto y = Ax$$

په لاندې بڼه انځور شي:

$$y = \sum_{i=1}^{k} s_i (v_i^* x) u_i$$

له دې لاس ته راځي ، چې

$$\operatorname{Kern} A = \operatorname{span}\{v_{k+1}, \dots, v_n\}, \quad \operatorname{Bild} A = \operatorname{span}\{u_1, \dots, u_k\}.$$

ذاالاخره $\|A\|_2 = s_1$ او $\|A\|_F^2 = \sum_{j,k} |a_{j,k}|^2 = s_1^2 + \cdots + s_k^2$ دي.

ليکونکي: اپپ.هيوليک

د هرمېتيکي ماتريکس $A^*A$ د دياګونالي کوني له لارې لاس ته

$$V^*A^*AV = \operatorname{diag}(s_1^2, \dots, s_k^2, 0, \dots, 0) = S^t S,$$

راځي، له هغې سره چې سرې نيولی شي، چې آيګن – ارزښتونه د خپلې لويې پسې منظم دي. دا چې $A^*A$ مثبت ديفينيت دي، کېدی شي چې فقط نامنفي آيګن-ارزښتونه د مربع په څېر وليکي او په دې توګه د $m \times n$ دياګونالماتريکس $S$ تعريف کړي.

د پورته مساوات څخه لرو ، چې د $AV$ متې اورتوګونال دي او نورم $s_i$ لري:

$$AV = \begin{pmatrix} s_1 u_1 & \cdots & s_k u_k & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = US$$

د يوه يونيتارماتريکس $U$ سره.

(c) ketabton.com: The Digital Library



وروسته له دې چې غوښتونې انځورونه

$$A = USV^*$$

منځ ته ارغله، کېدی شئ پسې راتلونکي وينا ساده پسې وازمائل شي.

دا چې يونيتار ترانسفورميشن د يوه ماتريکس رانګ نه تغيروي، صدق کوي

$$\text{Rang } A = \text{Rang } S = k\,.$$

پسې لرو

$$AA^*u_j = U(SS^t)U^*u_j = u_j(s_j)^2$$

او

$$A^*Av_j = V(S^tS)V^*v_j = v_j(s_j)^2\,.$$

باالاخره $Av_j$ د $US$ د $j$ ــمي متې سره برابر دی، يعني د $u_js_j$ سره برابر.

ليکونکي: اپپ.هيوليګ

## فاسد معکوس Pseudo-Inverse

يو کمپلکس $(m \times n)$-ماتريکس $A$ د سينګولار-ارزښت-توټه کوني $USV^*$ سره کيدی شي د اندولوني پرابلم(مسئله $|Ax - b| \to \min$ د مينيمال نورم سره په بڼه

$$x = A^+b, \quad A^+ = VS^+U^*,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



وليکل شي، د کوم سره چې $A^+$ د $A$ فاسد-معکوس بلل کيږي، او

$$S^+ = \mathrm{diag}(1/s_1, \ldots, 1/s_k, 0, \ldots, 0), \quad k = \mathrm{Rang}\, A\,,$$

د $(n \times m)$ - دياګونال ماتريکس د مثبت سينګولار ارزښت دی

د په څټ ارزښتونو سره.

که $\{u_1, \ldots, u_m\}$ او $\{v_1, \ldots, v_n\}$ د $U$ همداسې $V$ ، د مټو اورتوګونال بنسټونه وي، نو کېدی شي کرښيز فنکشن $b \mapsto x = A^+b$ په ضريبونو بڼه

$$x = \sum_{\ell=1}^{k} \frac{1}{s_\ell}\,(u_\ell^* b) v_\ell$$

انځور شي. له دې څخه په ځانګړي ډول لاس ته راځي، چې

$$\mathrm{Kern}\, A^+ = \mathrm{span}\{u_{k+1}, \ldots, u_m\}, \quad \mathrm{Bild}\, A^+ = \mathrm{span}\{v_1, \ldots, v_k\}$$

او $\|A^+\|_2 = 1/s_k$ .

ليکونکي: اېپ.هيوليګ

د د $2-$ نورم انواريانت له امله د يونيتار ترانفورميشن له لارې کېدی شي $Ax - b$ له کيڼ د $U^*$ سره ضرب کړي. د

$$c = U^* b, \quad y = V^* x$$

سره ترې ورته د مينيمال کولو پرابلم لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$|Sy - c| = \left| \begin{pmatrix} s_1 y_1 - c_1 \\ \vdots \\ s_k y_k - c_k \\ -c_{k+1} \\ \vdots \\ -c_m \end{pmatrix} \right| \to \min .$$

مينيموم سږی د لومړیو $k$ مساواواتو د حل له لارې لاس ته راوړي:

$$y_i = c_i / s_i, \;\; i = 1 : k .$$

د یونیتار میاتریکس $V$ $(|x| = |y|)$ نورم ته ریښتینوالي له امله د مینیمال نورم د حل لپاره دی:

$$y_{k+1} = \cdots = y_n = 0 .$$

په ټولیزه توګه ترې لاس ته راځي

$$y = S^+ c, \quad s^+_{i,j} = \begin{cases} 1/s_i & \text{für } i = j \le k \\ 0 & \text{sonst} . \end{cases}$$

لیکونکي: اپپ.هیولیګ

د

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 5 \\ 6 & 0 & 3 \\ 2 & -4 & 5 \\ 6 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



لپاره دې د انډولوالي پرابلم حل شي

د زیګولار- ارزښت ټوټه کونې ( تجزیه کونې) شمېرنې لپاره لومړی د

$$A^tA = \begin{pmatrix} 80 & -16 & 56 \\ -16 & 32 & -40 \\ 56 & -40 & 68 \end{pmatrix}$$

آیګن-ارزښتونه او آیګن-وکتورونه ټاکل کیږي او ترې لاس ته راځي

$$s_1^2 = 144,\ s_2^2 = 36,\ s_3^2 = 0, \quad V = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

له دې لرو

$$S = \begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad AV = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 0 \\ 6 & 3 & 0 \\ 6 & -3 & 0 \\ 6 & 3 & 0 \end{pmatrix} = US.$$

د $U$ دوه لومړنی متې د $AV$ د اړنده متو سره د ویش له لارې لاس ته راځي او د سیګولار ارزښتونو ( له دې شره باید ئوون- یا واحد وکتورونه منح ته شي) له لارې، پاتې متې ( نه یواځنی ټاکلې) و اورتونورمال بنسټ ته د پوره کونې له لارې لاس ته راځي:

$$U = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



له دې سره فاسد- معکوسيت

$$A^{+} = V \begin{pmatrix} \frac{1}{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} U^{t} = \frac{1}{72} \begin{pmatrix} -2 & 6 & -2 & 6 \\ -5 & 3 & -5 & 3 \\ 4 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

دی او

$$x = A^{+}b = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

د مينيمال نورم حل.

ليکونکي: اپپ.هيوليګ

## د توپوګرافيکي کچونداتنونو تيکاوی يا اصلاح

### Korrektur topografischer Meßdaten

د توپګرافي جګوال $h_i$ داتنونه يا اعداد چې کچونې له لارې لاس ته راړنې ته د جګوالو کمبنتونه $d_{i,j}$ کچ کيږي. د کچونې ناتيکاوي په بنسټ د قانون له مخې صدق کوي $d_{i,j} \neq h_i - h_j$

مناسب د جګوالي تيکاوي $x_i$ کېدی شي د اندولونې پرابلم

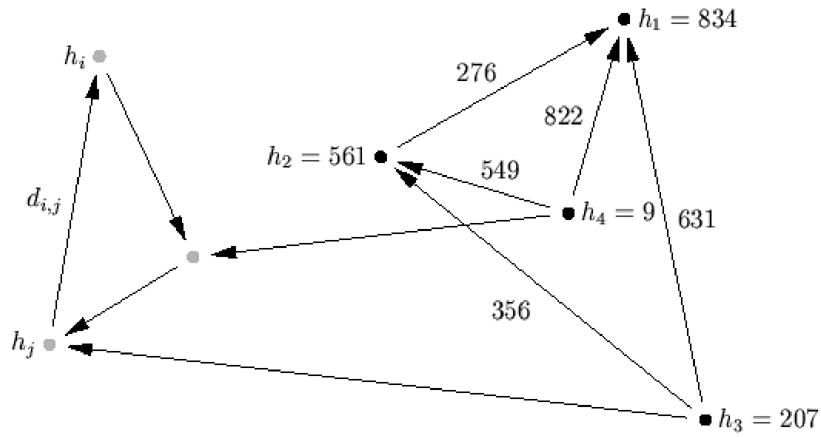
$$\sum_{(i,j)} \Big(d_{i,j} - \big((h_i + x_i) - (h_j + x_j)\big)\Big)^2 \longrightarrow \min \; .$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



له لارې حل شي.

د تلنلارې د ښوولو لپاره د کمو داتن سره یو مودل-پرابلم حل کیږي.




د جګوالي او کمښت ارزښتونو

$$h = (834, 561, 207, 9)^t, \quad d = (276, 631, 822, 356, 549)^t$$

لپاره، د $d = (d_{1,2}, d_{1,3}, d_{1,4}, d_{2,3}, d_{2,4})^t$ سره ، دا لاندې له ټاکلو اخوا (پورته، زیات) سیستم لاس ته راځي

F

$$A(h + x) = d, \quad A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

د مینیمال نورم غ،ښتونی حل دی:

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$x = A^+(d - Ah) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

د مینیمال – نورم – حل د څېړل شوي استعمال لپاره مخه ور دی، څکه چې باید د ډېر امکان سره کوچنی تیکاوی وتاکل شي.

لیکونکی : ویپر

## د مور-پینروز-شرطونه Moore-Penrose-Bedingungen

فاسد-معکوس به د لاندې کتمتوالي له لارې یواځنی کرکتریستیک شي:

- $AA^+A = A$
- $A^+AA^+ = A^+$
- $(AA^+)^* = AA^+$
- $(A^+A)^* = A^+A$
- لیکونکي: اپپ.هیولیک

ساده بنوول کیدی شي، چې د

$$A^+ = VS^+U^*, \quad A = USV^*$$

له لارې تعریف شوی فاسد-معکوس ورکړ شوي شرایط پوره کوي.

د بیلګې په توګه لومړی کتمتوالی د لاندې څخه لاس ته ارځي

$$(USV^*)(VS^+U^*)(USV^*) = U[SS^+S]V^*,$$

څکه چې په کونجیزو نوکانو یا قوسونو کې د تولیز شوو دیاګونال ماتریکسونو (دوه کونجتړو – یا قطبي ماتریکسونو) ضرب به د دیاګونال توکو د ضربوني له لارې جوړېږ شي او لرو:

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$s^+_{i,i} = 1/s_{i,i}, \quad i \le \mathrm{Rang}\, A\,.$$

نور ټول کټمټوالي هم دسېده پسي- شمېرني له لاري لاس ته راځي.

د دې ښوونه چې وښايو $A^+$ يواځنی کرکتريستيک شوی دی د ورکړ شوو شرايطو له لارې، نور هم خوراستونځمن دی، له دې امله يې دلته له څېړنې تېرېږو.

ليکونکي: اېپ.هيوليک

## اورتوګونال او ځانګړي اورتوګونال ګروپونه

Orthogonale und spezielle orthogonale Gruppe

د ټولو اورتوګونالو $(n \times n)$ - ماتريکسونو $Q$ ډېرى(سټ) د اورتوګونال ګروپ $O(n)$ سره ښايو يا په نخښنه کوو يا بول.

د $Q \in O(n)$ لپاره صدق کوي

$$Q^{-1} = Q^{\mathrm{t}}\,, \quad |\det Q| = 1$$

او د يوه کواوردينات ترانسفورميشن

$$x \to x' = Qx$$

سره اوږدوالی اوسکلار ضرب ساتلی پاتې کيږي.

د ټول اورتوګونال $(n \times n)$ - ماتريکسونو $Q$ ډېرى د $\det Q = 1$ سره د څرخونګروپ يا ځانګړي اورتوګونال ګروپ

$$SO(n) \subset O(n)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



بلل کيږي.

## هندارونه Spiegelung

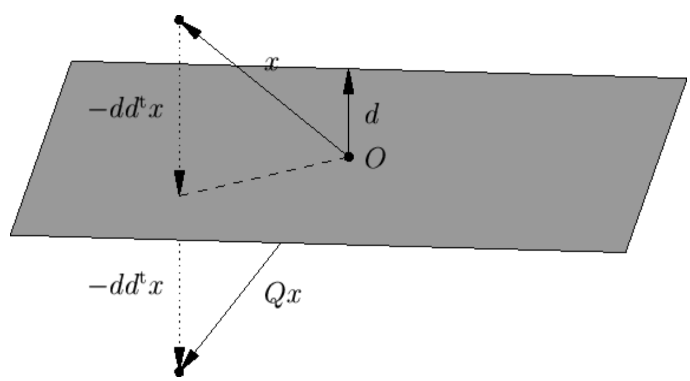
په $\mathbb{R}^n$ کې هندارونه ( په هنداره انعکاسونه) و يوه يوونوکتور(واحد-) $d \neq 0$ ته اورتوګونال هايپرسطحه( Hyperebene)

$$H: \; d^t x = 0$$

باندې هندارونه د سيوم ترې اورتوګونال ماتريکس

$$Q = E - 2dd^t$$

له لارې د يوونماتريکس (واحد-) $E$ سره په نښه کيږي




پکي يا ميلې په معنا ده

د $Q$ سيومتري روښانه ده. له دې سره لرو :

$$QQ^t = Q^2 = (E - 2dd^t)^2 = E^2 - 4dd^t + 4dd^t dd^t = E\,,$$

دا په دې معنا چې $Q$ اورتوګونال ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library



د هنداروني خويونو  ښوولز لپاره لومړی په پامکې نیسو، چې وکتور

$$x - Qx = x - x + 2dd^t x = 2(d^t x)d$$

و $d$ ته غبرګ دی، او منځټکی د $x$ او $Qx$ ترمنځ په هايپرهواره کې پروت دی:

$$d^t(x + Qx) = d^t x + d^t x - 2d^t d d^t x = 0\,.$$

له دې سره $Qx$ په هايپرهواره د $x$ هنداروونه ده په سرچينه کې، هغه چې د $d$ سره اورتوګونا ده.

لیکونکي: اپپ.هيولیګ

## ځرخون Drehung

آورتوګونال $(n \times n)$ - مآتریکس

$$\begin{array}{l} \\ \\ \text{Zeile } i \;\; \longrightarrow \\ \\ \text{Zeile } j \;\; \longrightarrow \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & \\ & & c & & -s & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & s & & c & & \\ & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

په پورته کې Zeile د لیکي یا کیلې په معنا ده

د $c = \cos\varphi$ او $s = \sin\varphi$ سره یوه ځرخون په $\varphi$ په $\mathbb{R}^n$ کې پرته د $x_i x_j$ - سطحه کې  په ګوته کوي( تحلیلوي).           لیکونکي: اپپ.هيولیګ

(c) ketabton.com: The Digital Library



ساده شمیرنه او د

$$\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$$

په پام کې نیولو سره تصدیقیږي، چې څرخونماتریکس $R$ اورتوګونال دی:

$$RR^{t} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & c^2+s^2 & & -sc+sc & \\ & & & \ddots & & \\ & & -sc+sc & & c^2+s^2 & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & 1 \end{pmatrix} = E\,.$$

- لیکونکي: اپپ.هیولیک

## څرخونمحور او څرخونکونج Drehachse und Drehwinkel

هر په $\mathbb{R}^3$ کې څرخون $Q$ یو څرخون محور لري، دا پهدې معنا چې یو یوونوکتور $u$ اینواریانت پریږدي،او په یوه کونج $\varphi$ یو څرخون بنايي په هغه هواره کې چې $u$ ته(باندې) اورتوګونال ده.

نسبت و یوه اورتوګونال ولاړسیستم $u, v, w$ ته Q لاندې د ماتریکس آنځورونه لري:

$$\tilde{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}\,.$$

او د څرخونکونج لپاره په ځانګړې توګه صدق کوي

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$\cos\varphi = \frac{1}{2}\left(\mathrm{Spur}\, Q - 1\right) .$$

- ليکونکي: هيوليګ، ربل

د يوه څرخونماتريکس $Q$ لپاره لرو:

$$Q^{-1} = Q^{t}, \quad |\det Q| = 1 .$$

دا چې د يوه اورتوګونالماتريکس آيګن –ارزښت $\lambda_i$ مطلق ارزښت $1$ لري او $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = \det Q = 1$ دی، لرو، چې لږ تر لږه يو آيګن – ارزښت $1$ دی. د مناسب په ګڼه کزلز يا نمرهکولو سره يا

$$\lambda_1 = \overline{\lambda_2}, \quad \lambda_1\lambda_2 = 1$$

دی او يا

$$\lambda_i \in \{-1, 1\} .$$

دا نورمي شوی ايګن- وکتور $u$ د آيګن – ارزښت $1$ څرخونمحور ټټکي.

د يوه اورتوګونالولاړسيستم $u, v, w$ لپاره باور لري:

$$Qu = u$$

$$Qv = \alpha v + \beta w$$

$$Qw = \gamma v + \delta w .$$

دا چې $Qv, Qw$ کوم د $u$ - کومپوننت نه لري، له لاندې له کونجساتونکو اورتوګونال مارتيکسونو څخه لاس ته راځي:

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$x \perp u \Rightarrow Qx \perp Qu = u\,.$$

كه پورته مساوات د ماتريكس بنه باندې

$$Q(\underbrace{u,v,w}_{P}) = (u,v,w)\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \gamma \\ 0 & \beta & \delta \end{pmatrix}}_{\tilde{Q}},$$

باندې وليكل شي، له $\tilde{Q} = P^{-1}QP$ لاس ته ارځي، چې

$$\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix}$$

يو څرخون ماتريكس دی. په همدې ډول د شپور د انوريانت له امله لاس ته راځي:

$$\operatorname{Spur} Q = \operatorname{Spur} \tilde{Q} = 1 + 2\cos\varphi$$

- ليكونكي: هيوليګ، ربل

ماتريكس

$$Q = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$$

يو دياګونال ماتريكس دی، څكه چې لرو:

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$Q^tQ = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = E \Rightarrow Q^t = Q^*$$

او

$$\det Q = \det \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} = +1\,.$$

څرخونمحور د آئګن- وکتور $u$ په حیث ټاکل کیږي و آیګن – ارزښت $\lambda = 1$ ته:

$$\underbrace{\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & -2 & -\sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} & -1 \end{pmatrix}}_{Q-E}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow u = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

څرخونکونج $\varphi$ له

$$\cos\varphi = \frac{1}{2}(\mathrm{Spur}\,Q - 1) = \frac{1}{2}(1-1) = 0$$

څخه لاس ته ارځي، د $\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$ په حیث .

د $\varphi$ مخنخښه د څرخونلور $u$ د لوریزوالي په واک کې ده او کېدی شي د یوه ولاړسیستم(کواوردینات سیستم) $\{u, v, w\}$ وټاکپ شي:

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$w^tQv = w^t(\cos\varphi v + \sin\varphi w) = \sin\varphi\,.$$

د

$$v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

سره د راوړل شوي بېلګې لپاره لرو:

$$\sin\varphi = (-\frac{1}{\sqrt{2}} \quad 0 \quad \frac{1}{\sqrt{2}}) \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = 1$$

نو لرو: $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ليکونی: ويپر

## د يو ځرخون په ضرپپونو توټه کونه Faktorisierung einer Drehung

يو ځرخون $Q$ په $\mathbb{R}^3$ کي په کواورد يناتمخور د د کواوردځرخونونو د ضرب په ځېر کېدی انځور شي:

$$Q = D_z D_y D_x\,.$$

- ليکونکي: هيوليک، ربل

ځرخون $D$ کېدی شي و ټاکل شي، دا سي چي يو په بل پسي sukzessive د $Q$ توکي $q_{21}, q_{31}, q_{32}$ له منځه يوړل شي:

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$D_z^{-1}Q = \begin{pmatrix} \star & \star & \star \\ 0 & \star & \star \\ \star & \star & \star \end{pmatrix}$$

$$D_y^{-1}D_z^{-1}Q = \begin{pmatrix} 1 & \star & \star \\ 0 & \star & \star \\ 0 & \star & \star \end{pmatrix}$$

$$D_x^{-1}D_y^{-1}D_z^{-1}Q = \begin{pmatrix} 1 & \star & \star \\ 0 & 1 & \star \\ 0 & 0 & \star \end{pmatrix} = R\,.$$

له دې سره داسې کار اخستل شوی يا مخ ته تللي يو، چې يو په خوښه آيګن-وکتور $(v_1, v_2)^t$

په $(1,0)^t$ باندې د يوې سطحې د څرخون $D$ له لارې ځان ځېره کړی شي ( يعني د تابع په ځېر وليکل شي). دا چې $\det R = 1$ دی $r_{33} = 1$ لرو او د مټو د نورمي کولو له امله بايد $R$ يوونماتريکس ( واحدماتريمس) وي. له دې سره غوښتونې انځورونه لاس ته راځي.

- ليکونکي: هيوليګ، ربل

د دې لپاره چې د ماتريکس

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$Q = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{\sqrt{6}}{4} & -\frac{\sqrt{4}}{8} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{6}}{8} \end{pmatrix}$$

په ضریبونو ټوټه کول لاس ته راوړو، نو لومړی توکی $q_{2,1}$ له منځه وړو د $\frac{\pi}{2}$ په کچه څرخون د $z$ – محور باندې:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{6}}{8} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{6}}{8} \end{pmatrix} .$$

داسې پای کوو چې د $y$-محور باندې د $\frac{\pi}{4}$ په کچه څرخوو:

:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} D_z^* Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} .$$

لاس ته راغلی ماتریکس یوو څرخون $D_x$ دی د $x$ -محور باندې. په ټولیزه توګه لاندې په ضریبونو ټوټه کونه لاس ته راوړو:

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



$D_x$ $D_y$ $D_z$

- ليکونکي: هيوليګ، کرايخ

## څرخونماتريکس Drehmatrix

په $\mathbb{R}^3$ کې يو څرخون د نورمي شوي څرخون محورلور $u$ او څرخونکونج $\varphi$ سره ، داسې لوريزه لکه ښی پيچي ميخ ، د يو وکتور $x$ فنکشن جوړوي

$$Qx = \cos\varphi\, x + (1-\cos\varphi)\, uu^{\mathrm{t}} x + \sin\varphi\, u \times x$$

، چيرته چې $v \times x$ د $u$ او $x$ صليب ضرب(وکتوري ضرب، چې x سره په نخښه کيږي) په نخښه کوي. اړونده څرخونماتريکس دی:

$$Q: \quad q_{ik} = \cos\varphi\,\delta_{ik} + (1-\cos\varphi)\, u_i u_k + \sin\varphi \sum_j \varepsilon_{ijk} u_j\,.$$

د کرونيکرسومبول $\delta_{ik}$ او $\varepsilon$ -تنزور $\varepsilon_{ijk}$ سره.

- ليکونکي: هيوليګ، ربل

دا بسيا کوي پسې وښايو، چې $Qu = u$ او يو و $u$ ته اورتوګونال وکتور $v$ په يوه کونج $\varphi$ د $u$ په محور باندې وڅرخي. لومړی غوښتنه ترلړ کتل کيږي. د $v$ څېرې يا تابع ارزښت په څېر لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$Qv = \cos\varphi\, v + \sin\varphi\, u \times v\,,$$

څه چې په $\varphi$ د څرخون سره د $v$ او $u \times v$ څخه غزېدلي سطحه په ګوته کوي.

- ليکونکي: هيوليک، ربل

د تولیز فرمول سره سم د $u = \frac{1}{\sqrt{3}}(1\ 1\ 1)^{\mathrm{t}}$ په محرړر په $\varphi = \frac{\pi}{3}$ يو د څرخون ماتريکس $Q$ له 3ترمونو څخه په لاندې ډول يوځاي کيږي:

په توليزه توګه لاس ته راوړ

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\cos\varphi\ \delta_{ik}: \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$(1-\cos\varphi)u_i u_k: \quad \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- ليکونکي: هيوليک، کرايځ

$$\sin\varphi \sum_j \varepsilon_{ijk} u_j: \quad \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

## مربعيزه فورم(څلورى يي بنه)
## Quadratische Form

د يوه حقيقي سيموتريک ماتريکس $A$ لپاره دا لاندې

$$\alpha(x) = x^{\mathrm{t}} A x$$

مربعيزه فورم نوموو.

د $A$ د آيګن – ارزښت د مخنخبني بدلون له مخې لاندې درې تيوپه( ډولونه) توپيروو:

(c) ketabton.com: The Digital Library



- الیپتیکي (بیضوي ډوله) بڼه: ټول آیګن – ارزښتونه همغه مخنخښه لري.
- پارابولیک : لږ تر لږه یو آیګن – ارزښت صفر دی او نور آیګن ارزښتونه همه یابرابرې وخنخښي لري.
- های پارابولیکي : د مختلفو مخنخښو سره آیګن – ارزښتونه شتون لري.

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

د $A$ سیومتري اړیین نه ده چې مخ له مخه ونیول شي( فرض شي)، د ټولیز ماتریکس لپاره کېدی شي مربع بڼه په لاندې ډول ولیکل شي:

$$x^{\mathrm{t}}Ax = \sum_{j,k} x_j a_{j,k} x_k = \sum_j a_{j,j} x_j^2 + \sum_{j<k} (a_{j,k} + a_{k,j}) x_j x_k$$

پس کېدی شي هر ځل دوه ترمونه سره یوځای کړو او مربع بڼه سیومتري کړو یا په سیمتري واړوو:

$$x^{\mathrm{t}}Ax = \frac{1}{2} x^{\mathrm{t}}(A + A^{\mathrm{t}})x\,.$$

مربع بڼې د بېلګې په توګه د یوه سکالارتابع $f$ د تیلور- ودې د لومړي ترم په څېر رامنځ ته کیږي:

$$f(x) = f(0) + \operatorname{grad} f(0)^{\mathrm{t}}\, x + \frac{1}{2} x^{\mathrm{t}}(\mathrm{H}\, f(0))\, x\,.$$

په دې حالت کې $\mathrm{H}\,f$ د دویم ټوټه ( partiellen - ) مشتق د هسې-ماتریکس دی، د بدلونوالي په بنسټ سیومتري دی. لیکونکي: اپپ، هیولیګ

سیومتریک ماتریکس

$$A = \begin{pmatrix} 1+\lambda & 1-\lambda \\ 1-\lambda & 1+\lambda \end{pmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



آيګن – ارزښتونه $2$ او $2\lambda$ لري.

مربعي بڼه

$$\alpha(x) = x^{t}Ax$$

د $\lambda > 0$ لپاره بيضوي( هګۍ ډوله) ده، د $\lambda = 0$ لپاره پارابوليک او د $\lambda < 0$ لپاره هايپارابوليک دی.

- ليکونکي: اپپ، هيوليک

## کوادريک Quadrik

تکي

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^{n} : \alpha(x) + 2\beta(x) + \gamma = 0\}$$

کوادريک بلل کيږي، چېرته چې $\alpha$ يو مربعيزه بڼه، $\beta$ يوه کرښوزه بڼه او $\gamma$ يوه ثابته ده.

د $Q$ د ماتريکس ليکدود په ډول ليکل په لاندې ډول ليکل کيږي

$$Q : \quad x^{t}Ax + 2b^{t}x + c = 0$$

د $\alpha(x) = x^{t}Ax$ او $\beta(x) = b^{t}x$ سره.

د $Q$ انځورونه يواځنی نه ده. د بېلګې په توګه کېدی شي د تعريف مساوات د يوه په خوښه ثابتي سره ضرب شي.

- ليکونکي: اپپ، هيوليک

(c) ketabton.com: The Digital Library



## د کوادريکونو شډله ټوټه ونه Grobeinteilung der Quadriken

د يوه کوادريک د مساوات څخه په پيل

$$Q: \quad x^t A x + 2b^t x + c = 0$$

ليکو

$$\tilde{A} = \left( \begin{array}{c|c} c & b^t \\ \hline b & A \end{array} \right).$$

د $\tilde{x}^t = (1, x_1, \ldots, x_n)$ سره کېدی شي $Q$ هم په لاندې هوموجين بڼه وليکل شي:

$$Q: \quad \tilde{x}^t \tilde{A} \tilde{x} = 0$$

لاندې ډولونه يا تيوپونه توپيروو:

- مخروطي کوادريک $\operatorname{Rang} \tilde{A} = \operatorname{Rang} A$
- منځتکي کوادريک $\operatorname{Rang} \tilde{A} = \operatorname{Rang} A + 1$
- پارابوليکي کوادريک $\operatorname{Rang} \tilde{A} = \operatorname{Rang} A + 2$
- ليکونکي: اېپ، هيوليګ

کوادريک

(c) ketabton.com: The Digital Library



یا دونه(ژباړی): په سطحه کې یوه کره(کرښه)، په دریې بعدیزه ( درېپراخیدونې) فضا کې یوه سطحه ده، د ډېرو اووښتونو یا متحولو له لارې تشریح یا ښوول کیدی شي.پای

$$Q: \quad x_1^2 + \lambda x_2^2 + 2x_2 + \lambda = 0$$

دې د $\lambda \in \mathbb{R}$ سره ورکړ شوي وي، همداسې د ماتریکس لکیندود

$$Q: \quad x^t A x + 2b^t x + c = 0$$

د

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c = \lambda, \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

،

سره ورکړ شوي وي.

د $\lambda = 0$ لپاره $\operatorname{Rang} A = 1$ دی، پرته له دې $\operatorname{Rang} A = 2$ دی. د $\lambda = \pm 1$ لپاره $\operatorname{Rang} \tilde{A} = 2$ دی، پرته له دې $\operatorname{Rang} \tilde{A} = 3$ دی. له دی سره $Q$ د $\lambda = 0$ لپاره یو پارابول ، د $\lambda = \pm 1$ لپاره مخروطي دوله کوادریک او د نورو ټول ارزښتونو لپاره یو منځټکي کوادریک دی.

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

## اصلي- محور –ترانفورمیشن Hauptachsentransformation

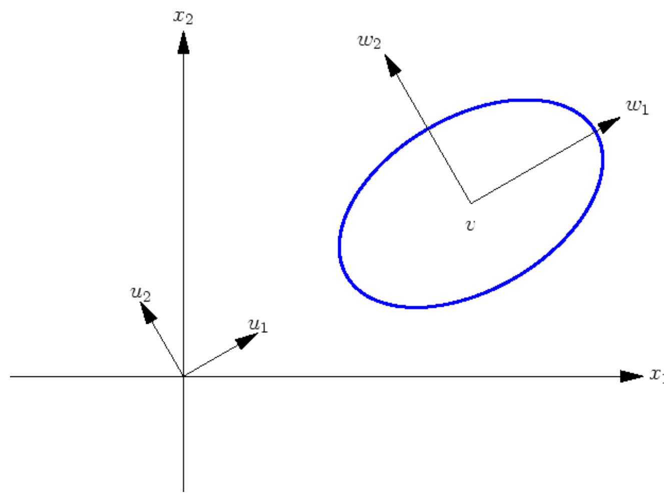
د څرخون او راکښنی له لارې په $\mathbb{R}^n$ کې کېدی شي یو کوادریک په نورمال بڼه ترانسفورمي شي:

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$x^t A x + 2b^t x + c = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i w_i^2 + 2\beta w_{m+1} + \gamma\,, \quad x = Uw + v\,,$$

چيرته چې $m = \mathrm{Rang}\, A$ او $\beta\gamma = 0$ صدق کوي.




له دې سره د څرخون ماتريکس $U$ متې د $A$ آيګن –ارزښتونو $\lambda_i$ ته آيګن-وکتورونه $u_i$ خوندي لري، چې د هغې لور اصلي محور بلل کيږي. د راکښني وکتور ( راکښونوکتور) $v$ د کوادريک منځټکی دی. ليکونکي: اپپ، هيوليګ

سيومتري مارتيکس $A$ ته له آيګن –وکتورونو $u_i$ څخه د $\det(u_1, \ldots, u_n) = 1$ سره يو اروتوګونال بنسټ شتون لري، د کومو سره چې لومړی و آيګن –ارزښتونو $\lambda_i \neq 0$ ته آيګن – وکتورونه نئول کيږي. د لومړي ځای بدلون $x = Uy = (u_1, \ldots, u_n)y$ پسې له دې سره لاندې دياګونال بڼه لاس ته راځي

$$y^t \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_m, 0, \ldots, 0) y + 2(\underbrace{U^t b}_{\tilde{b}})^t y + c\,.$$

له صفر څخه مختلف آيګن-ارزښتونو $\lambda_i \neq 0$ لپاره د نورو ورپسې ځای بدلون له لارې

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$y_i = z_i - \tilde{b}_i/\lambda_i$$

کیدی شیکرښیز ترمونه له ځایه یوړل شي ( مربعي پوره کونه). ثابتې د

$$c \to \gamma = c - \sum_{i=1}^{m} \tilde{b}_i^2/\lambda_i \, .$$

سره سم تغير خوري،نو اوس له دې سره اوس دا بڼه لرو

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i z_i^2 + \sum_{i=m+1}^{n} 2\tilde{b}_i z_i + \gamma \, .$$

که اوس یو $\tilde{b}_i \neq 0$ د $i \geq m+1$ سره شتون ولري، نو د یو ه بل څرخون پسي د

$$z_i' = z_i \, , \quad i \leq m$$

$$z_{m+1}' = (1/\beta) \sum_{m+1}^{n} \tilde{b}_i z_i \, , \quad \beta = \pm|\tilde{b}|$$

او په اړونده اورتوګونال د $z_{m+2}', \ldots, z_n'$ سره تکمي شوی

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i (z_i')^2 + 2\beta z_{m+1}' + \gamma \, .$$

لاس ته راځي.

له دې سره د $\beta$ سره مخ نخښه ډاسې ټاکل کیږي، چې د $\beta$ سره ویش وروسته لږ تر لمه دومره مثبت لکه منفي ترمونه $\lambda_i/\beta$ رامنځ ته شي.

اخرنی راکښنه

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$w_{m+1} = z'_{m+1} + \gamma/(2\beta)$$

$$w_i = z'_i, \quad i \neq m+1$$

ثابته له منځه وړي او باالاخرخ راکوي:

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i w_i^2 + 2\beta w_{m+1} .$$

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

کوادریکونه

یا دونه(ژباړی): په سطحه کې یوه کره(کرښه)، په درې بعدیزه ( درپپراخیدونې) فضا کې یوه سطحه ده، د ډېرو اووښتونو یا متحولو له لارې تشریح یا ښوول کیدی شي.پای

$$Q: \quad 8x_1^2 + 17x_2^2 + 20x_3^2 + 20x_1x_2 + 8x_1x_3 + 28x_2x_3 - 48x_1 - 114x_2 - 78x_3 + 207 = 0$$

$$Q: \quad 8x_1^2 + 17x_2^2 + 20x_3^2 + 20x_1x_2 + 8x_1x_3 + 28x_2x_3 - 48x_1 - 114x_2 - 78x_3 + 207 = 0$$

دې په نورمال فورم یا – پنې ترانسفورمي شي.

د ماتریکس لکندود سره لاس ته راځي

$$Q: \quad x^t A x + 2b^t x + c = 0$$

د

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 10 & 4 \\ 10 & 17 & 14 \\ 4 & 14 & 20 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -24 \\ -57 \\ -39 \end{pmatrix}, \quad c = 207 .$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



سره.

ماتريکس $A$ آيګن – ارزښتونه $36$ ، $9$ او $0$ لري، په دې اړونده نورمي شوي آيګن- وکتورونه $u_i$ د $\det(u_1, u_2, u_3) = 1$ سره د بېلګې په توګه دي:

$$u_1 = \frac{1}{3}(1,2,2)^t\,, \quad u_2 = \frac{1}{3}(2,1,-2)^t\,, \quad u_3 = \frac{1}{3}(2,-2,1)^t\,.$$

د ترانسفورميشن $x = Uy$ پسې د $U = (u_1, u_2, u_3)$ سره لاس ته راځي

$$Q: \quad 36y_1^2 + 9y_2^2 - 144y_1 - 18y_2 + 18y_3 + 207 = 0\,.$$

د مربعيزې تکميلونې له لارې

$$z_1 = y_1 - 2\,,\ z_2 = y_2 - 1\,,\ z_3 = y_3$$

لاس ته راحي

$$Q: \quad 36z_1^2 + 9z_2^2 + 18z_3 + 54 = 0\,.$$

راکښنه

$$w_1 = z_1\,,\ w_2 = z_2\,,\ w_3 = z_3 + 3$$

باالاحره نورمالفورم (- بڼه ) راکوي

$$Q: \quad 36w_1^2 + 9w_2^2 + 18w_3 = 0\,.$$

په ټوليزه توګه ترانسفورميشن لاندې فورم يابنه راکوي

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$x = Uy = Uz + U\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = Uw + U\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + U\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

پس راکښنه ده

$$v = U\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 \\ 11 \\ -1 \end{pmatrix}$$

او د د کوادریک منځ ټکی په ګوته کوي.

ليکونکي: اپپ، هيوليک

## مخروط غوڅی Kegelschnitt

د يوه دېلمخروط غوڅی

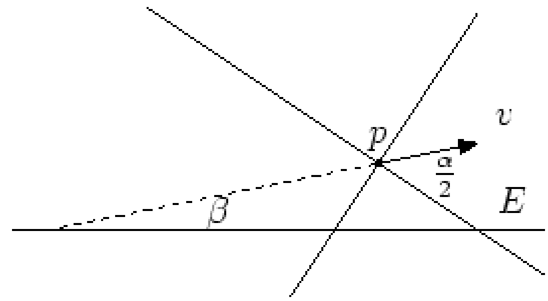
$$K: \ (x-p)^t v = \pm \cos\frac{\alpha}{2}\, |x-p||v|$$

د څوکي $p$ ( $p_3 \neq 0$ )، لور $v$ سره او وازولو کونج $\alpha$ د سطحې $E: \ x_3 = 0$ سره يوه مربعيزه کړه ده

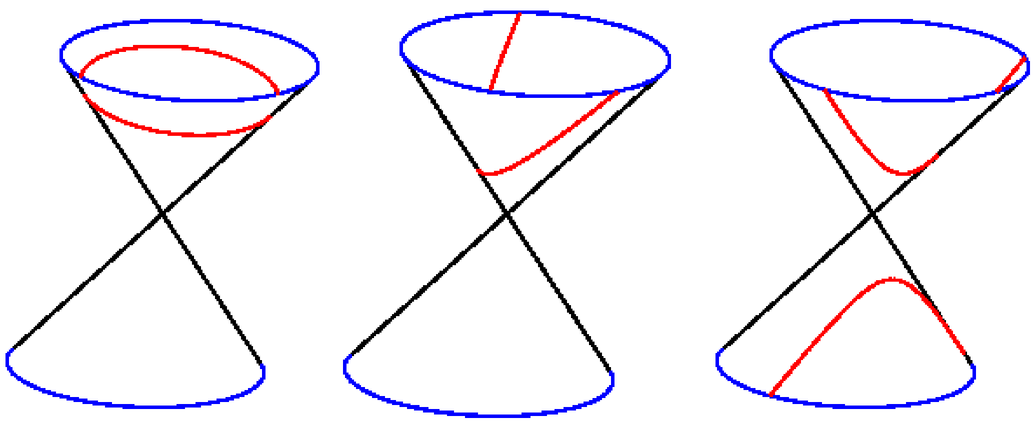
$$K \cap E: \ a_{1,1}x_1^2 + 2a_{1,2}x_1x_2 + a_{2,2}x_2^2 + 2b_1x_1 + 2b_2x_2 + c = 0\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library






د مخروط غوځي تيوب يا ډول د $E$ او کرښې , $t \in \mathbb{R}$ , $p + tv$ ترمنځ کونج $\beta$ د لويوالي په واک کې دی



Hyperbel: های پارابول
$\beta < \alpha/2$

Parabel: پارابول
$\beta = \alpha/2$

Ellipse: بيضوي يا هګښ
$\beta > \alpha/2$

ليکونکي: اپپ، هيوليک

## د دوه بعدي کوادريکونو د اوکليدي نورمال بڼه

## Euklidische Normalform der zweidimensionalen Quadriken

د سطحيزو کوادريکونو مختلف ډولونه شتون لري، د لاندې نورمال فورمونو سره:

(c) ketabton.com: The Digital Library



- مخروطي کوادریکونه

| Normalform<br>نورمال بڼه | Bezeichnung<br>نومونه |
|---|---|
| $\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} = 0$ | Punktټکی |
| $\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} = 0$ | schneidendes Geradenpaar<br>د غوڅوونکو کرښو جوړه |
| $\frac{x_1^2}{a_1^2} = 0$ | Doppelgerade<br>دېلي کرښې |

- منځټکي کوادریکونه

| Normalform<br>نورما بڼه | Bezeichnung<br>نومونه |
|---|---|
| $\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + 1 = 0$ | (تش ډېری)leere Menge |
| $\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} + 1 = 0$ | Hyperbelهای پارابول |

(c) ketabton.com: The Digital Library



| | |
|---|---|
| $-\frac{x_1^2}{a_1^2}-\frac{x_2^2}{a_2^2}+1=0$ | بیضوي(هګۍ)Ellipse |
| $\frac{x_1^2}{a_1^2}+1=0$ | تش ډېرى(leere Menge( |
| $-\frac{x_1^2}{a_1^2}+1=0$ | paralleles Geradenpaar<br>د کرښو غبرګه جوړه |

- پارابولیکي کوادریکونه

| Normalform<br>نورمال بڼه | Bezeichnung<br>نومونه |
|---|---|
| $\frac{x_1^2}{a_1^2}+2x_2=0$ | پارابول Parabel |

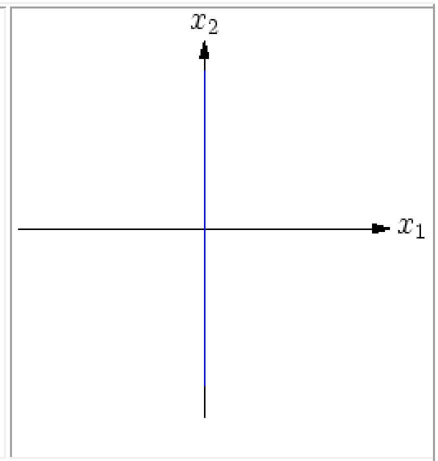
نورمالفورمونه یواځني دي، د ایندکسونو یا پېژند نخښنو تر ځای بدلون پورې او د مخروطي کوادریکونو د یوې ثابتې $c \neq 0$ سره د ضرب پورې.

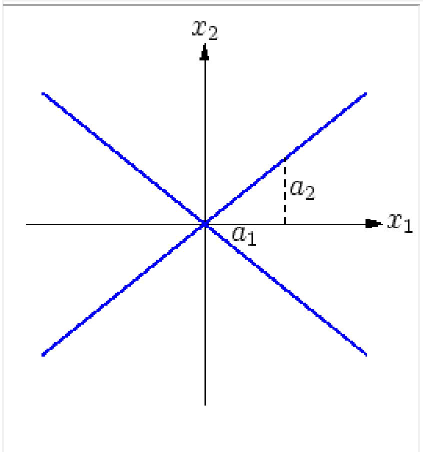
لویې $a_i$ مثبت اینول کیږي او د کوادریکونو داصلي محور اوږدوالی بلل کیږي

| | |
|---|---|
| schneidendes Geradenpaar<br>د غوڅیدونکو کرښو جوړه | Doppelgerade<br>ډبل کرښې |

(c) ketabton.com: The Digital Library

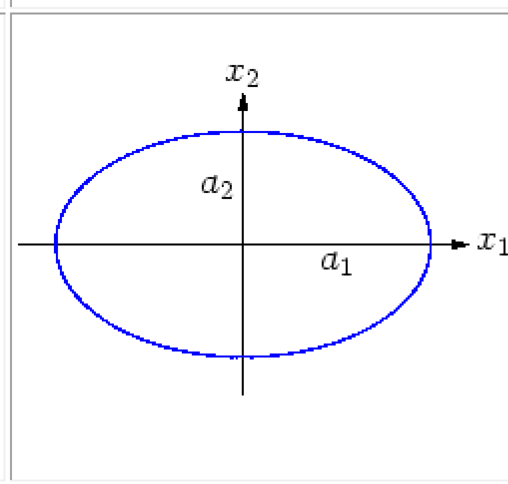


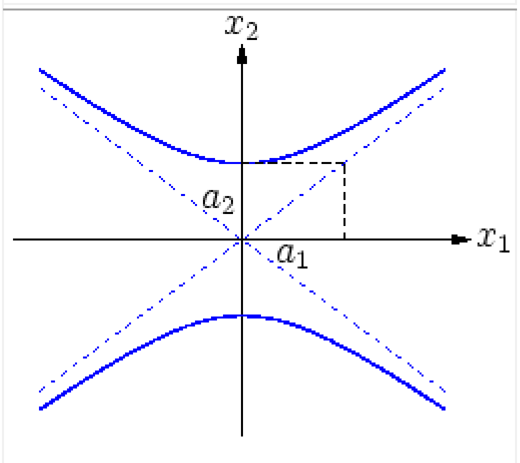



Ellipse بيضوي يا هکی

Hyperbel های پارابول



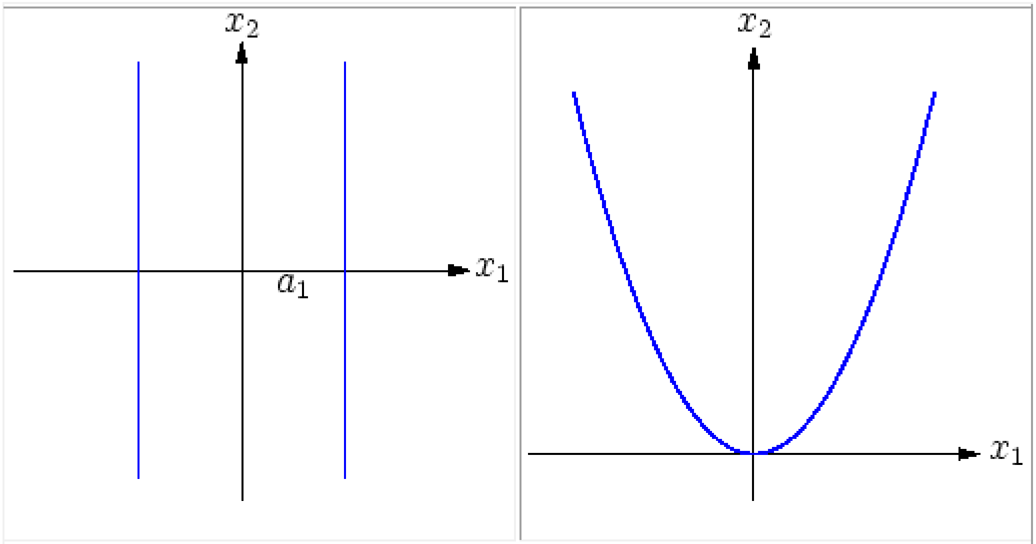

Parabel پارابول

paralleles Geradenpaar

غبرګه(موازي) کرښجوړه

(c) ketabton.com: The Digital Library






ليكونكي: اپپ، هيوليک

اوس دې د لاندې كوادريكونو نورمالفورم( - بنه ) او تيوپ وټاكل شي

$$_{د}Q: \quad 3x_1^2 + 3x_2^2 + 10x_1x_2 - 12\sqrt{2}x_1 - 4\sqrt{2}x_2 - 8 = 0$$

ماتريكسفورم د مربعيز فورم  څخه په پيل،

$$x^t Ax + 2b^t x + c = x^t \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} x + 2\sqrt{2}\,(-6,-2)\,x - 8$$

لومړی سرې د ماتريكس $A$ آيګن – ارزښتونه او آيګن – وكتورونه ټاكي.

كركتريتيكي پولينوم دی:

$$(3-\lambda)^2 - 25 = 9 - 6\lambda + \lambda^2 - 25 = \lambda^2 - 6\lambda - 16$$

او لاندې صفرځايونه لري

$$\lambda_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36+64}}{2} = 3 \pm 5$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



و $\lambda_1 = -2$ ته یو نورمي شوی آیگن-وکتور د لاندې کربنیز مساوات د حل څخه لاس ته راوړل کیږي

$$\begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} v_1 = 0$$

نو $v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)^t$ دی. دا چې دویم آیگن-وکتور په په لومړي باید عمود (ولاړ) وي، نو لاس ته راځي $v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)^t$ ، د کوم سره چې مخنخښه داسي باید ټاکل شوي وي، چې د لاندې ورکړ شوې ترانفورمیشن ماتریکس دیترمینانت مثبت وي:

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

د $x = Uy$ سره تراسفورمي شوي مساوات لاندې بڼه لري:

$$\begin{aligned} 0 &= y^t \tilde{A} y + 2\tilde{b}^t y + c \\ &= y^t U^t A U y + 2\left(b^t U\right) y + c \\ &= -2y_1^2 + 8y_2^2 - 8y_1 - 16y_2 - 8\,. \end{aligned}$$

د مربعیزې پوره ونه یا تکمیلونه راکوي

$$0 = -2y_1^2 + 8y_2^2 - 8y_1 - 16y_2 - 8$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$= \quad -2(y_1-2)^2+8(y_2-1)^2-8$$

$$= \quad -2z_1^2+8z_2^2-8$$

په همدې ډول

$$\frac{z_1^2}{2^2}-\frac{z_2^2}{1^2}+1=0.$$

نو مساوات يو های پارابول انځوروي.

(Autoren: Höllig/Hörner)

## د درې بعدي کوادريکونو د اقليدس (اويکليد) نورمالفورم

## Euklidische Normalform der dreidimensionalen Quadriken

د فضايي کوادريکونو 17 مختلف ډولونه شتون لري د لاندې نورمالفورمونو سره:

- مخروطي کوادريکونه

| Normalform<br>نورمال بڼه | Bezeichnung<br>نومونه |
|---|---|
| $\frac{x_1^2}{a_1^2}+\frac{x_2^2}{a_2^2}+\frac{x_3^2}{a_3^2}=0$ | Punktتکی |

(c) ketabton.com: The Digital Library



| | |
|---|---|
| (Doppel-)Kegel(دبل )مخروط | $\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} - \frac{x_3^2}{a_3^2} = 0$ |
| Geradeکرښه | $\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} = 0$ |
| Schneidende Ebenenغوڅونکي سطحې | $\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} = 0$ |
| Doppelebeneدبل سطحې | $\frac{x_1^2}{a_1^2} = 0$ |

- منځټکي کوادريکونه

| په نخښه ونه<br>Bezeichnung | نورمال بڼه<br>Normalform |
|---|---|
| (leere Menge)<br>(تشدپړی) | $\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2} + 1 = 0$ |
| دوه پوښيز های پرابولوئيد<br>zweischaliges Hyperboloid | $\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} - \frac{x_3^2}{a_3^2} + 1 = 0$ |
| يوپوښيز های پرابولوئيد<br>einschaliges Hyperboloid | $\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} - \frac{x_3^2}{a_3^2} + 1 = 0$ |

(c) ketabton.com: The Digital Library



| | |
|---|---|
| $-\frac{x_1^2}{a_1^2}-\frac{x_2^2}{a_2^2}-\frac{x_3^2}{a_3^2}+1=0$ | Ellipsoid<br>ايليبسوېيد |
| $\frac{x_1^2}{a_1^2}+\frac{x_2^2}{a_2^2}+1=0$ | (leere Menge)<br>تشډپرى |
| $\frac{x_1^2}{a_1^2}-\frac{x_2^2}{a_2^2}+1=0$ | hyperbolischer Zylinder<br>هايپربوليکي توته |
| $-\frac{x_1^2}{a_1^2}-\frac{x_2^2}{a_2^2}+1=0$ | elliptischer Zylinder<br>ايليپتيکي توته |
| $\frac{x_1^2}{a_1^2}+1=0$ | (leere Menge)<br>تشډپرى |
| $-\frac{x_1^2}{a_1^2}+1=0$ | parallele Ebenen<br>غبرګې سطحې يا ۰ هوارئ |

- پارابوليکي کوادريکونه

| نورمال بڼه | نومونه |
|---|---|
| $\frac{x_1^2}{a_1^2}+\frac{x_2^2}{a_2^2}+2x_3=0$ | هګى ډوله ايليپميکي پارابولوئيد |
| $\frac{x_1^2}{a_1^2}-\frac{x_2^2}{a_2^2}+2x_3=0$ | هاي پارابوليکي پارابولوئيد |

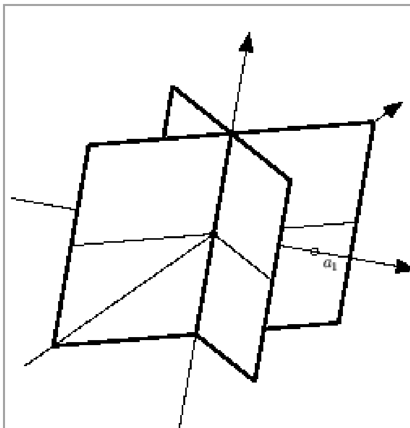
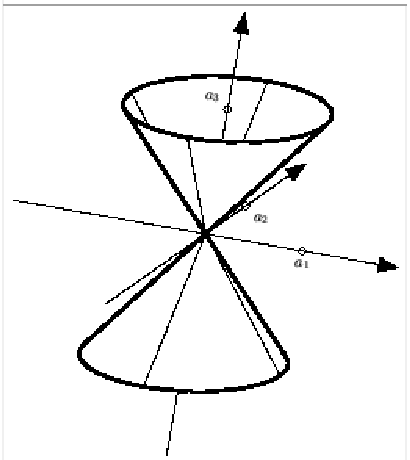
(c) ketabton.com: The Digital Library



| | |
|---|---|
| پارابوليكي توته | $\frac{x_1^2}{a_1^2} + 2x_2 = 0$ |
| | |

نورمال بڼې د ايندكسونو يا پېژند نخښو پورې يو اځني ټاكلي او مخروطئ كوادريكونه د ثابتې $c \neq 0$ سره د ضرب پورې يو اځني ټاكلي.

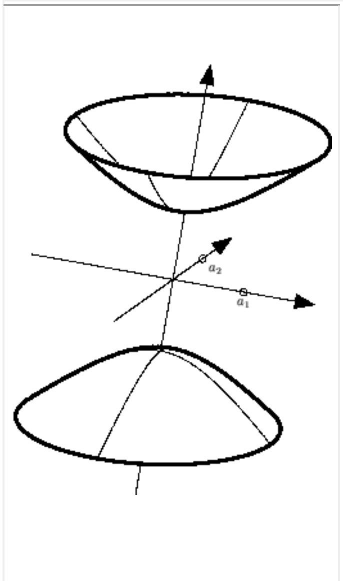
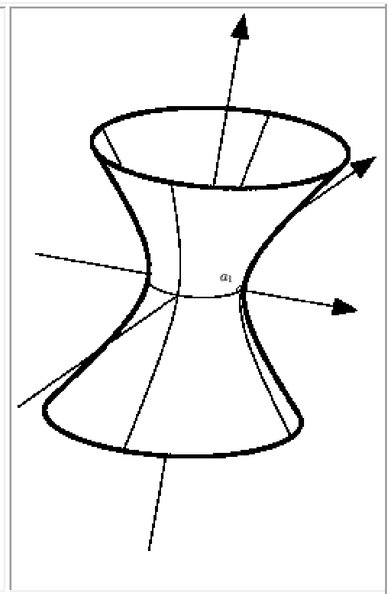
لويې $a_i$ مثبت اينول كيږي او د كوادريكونو د اصلي محور اوږدوالى بلل كيږي.

| | |
|---|---|
| غوڅوونكي سطحې | (ډبل) مخروط |
| | |
|  |  |

| | |
|---|---|
| يو پوښيز هاى پارابول | دوه پوښيز هاى پارابول |
| | |

(c) ketabton.com: The Digital Library

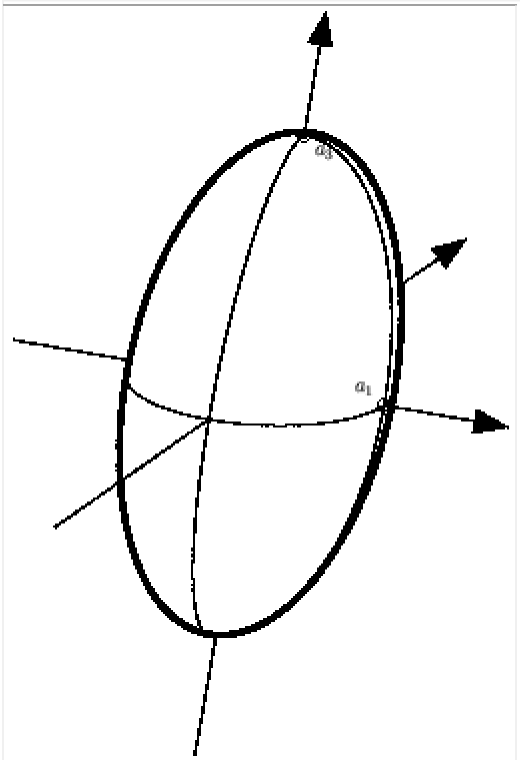
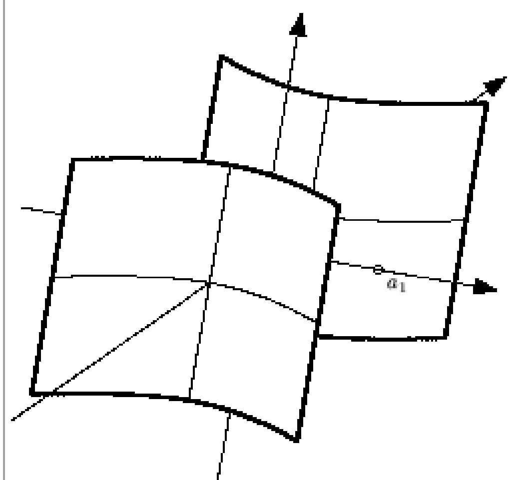


| | |
|---|---|
|  |  |

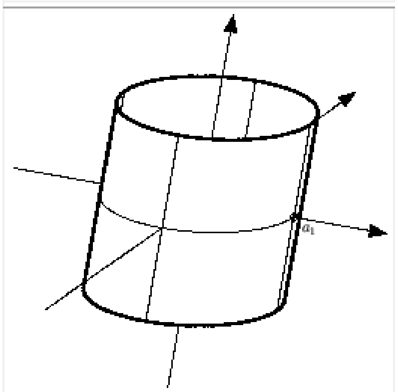
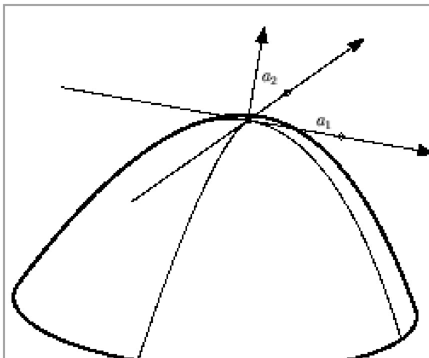
| | |
|---|---|
| Ellipsoidهکی دوله یا بیضوي دوله | های پارابولیکي توته<br>hyperbolischer Zylinder |
| | |

(c) ketabton.com: The Digital Library



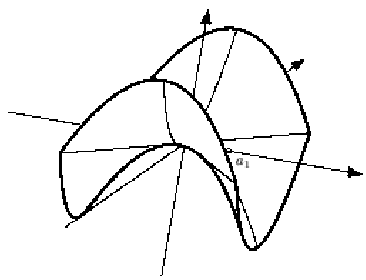
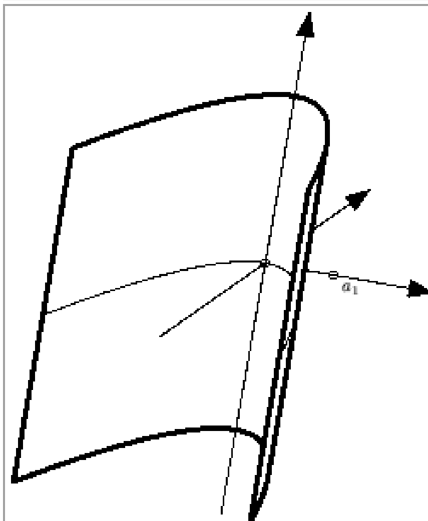
 

| | |
|---|---|
| elliptischer Zylinder<br>بیضوي توته | elliptisches Paraboloid<br>بیضوي پارابولوئید |
| | |

(c) ketabton.com: The Digital Library



| hyperbolisches Paraboloid | parabolischer Zylinder |
|---|---|
| های پارابولیکي پارابولوئید | پارابولیکي توته یا - استوانه |
| | |
|  |  |

لیکونکي: هیولیگ، هیرنر

اوس دې د لاندې کوادریکونو نورمال بڼه او تیوپ (ډول) و ټاکل شي:

$$Q: \quad x^t \begin{pmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 4 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} x + 2\,(-2, 1, 2)\, x + 2 = 0$$

د ماتریکس کرکتریستیکي یا ټاټونکی پولینوم

$$p(\lambda) = \lambda^3 - 9\lambda^2 - 9\lambda + 81\,,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



لاندې صفرځاي لري:

$$\lambda_1 = 9\,, \quad \lambda_2 = 3\,, \quad \lambda_3 = -3\,.$$

و آيګن – ارزښتونو $\lambda_i$ ته اړونده نورمي آيګن-وکتورونه دي:

$$v_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix},$$

جېرته چې مخنخښه داسې ټاکل کيږي، چې ولاړسيستم منځ ته راځي.

د اورتوګونال ترانسفورميشن ماتريکس په حېث منځ ته راځي:

$$U = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

دا د $x = Uy$ سره ترانسفورمي مساوات لاندې بڼه لري:

$$y^t \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} y + 2\,(0,3,0)\,y + 2 = 0\,.$$

مربعيزه پوره کونه راکوي

$$\begin{aligned} 0 &= 9y_1^2 + 3y_2^2 - 3y_3^2 + 6y_2 + 2 \\ &= 9y_1^2 + 3(y_2+1)^2 - 6y_2 - 3 - 3y_3^2 + 6y_2 + 2 \end{aligned}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$= \quad 9z_1^2 + 3z_2^2 - 3z_3^2 - 1$$

په همدې توګه

$$\frac{z_3^2}{\frac{1}{3}} - \frac{z_1^2}{\frac{1}{9}} - \frac{z_2^2}{\frac{1}{3}} + 1 = 0\,.$$

نور مساوات يوپوښيز های پارابول انځوروي

ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

چې غوټې پسې وهي په لاس به درشي

چا وې دا چې په درياب کې ګور نه شته

برى د خداى (ج) سره دى.

## د ډاکتر ماخان شينواري چاپ شوې ليکنې:

<u>1988 Vienna (Austria):</u>

<u>لومړى:</u>

H.K. Kaiser , M. Shinwari : Aproximation compact pological algebra : general algebra 6 ; Page 117 – 122 contributions to

<u>1987 Vienna (Austria):</u>

<u>دويم:</u>

Diss . Interpolation und Aproximation durch Polynime in Universalen Algebren . Uni. Wien

(c) ketabton.com: The Digital Library



*Dissertation Interpolation and Aproximation by Polynome in universal Algebras, at the University of Vienna/Austria*

لاندې د شمیرپوهنې پښتوټول کتابونه په المان کې د ،، افغانستان کلتوري ودې ټولنه،،له خوا چاپ شوي دي

<u>2000 Bonn (Germany):</u>

دریم: د شمیرپوهنې ستر کتاب : د شمیرپوهنې برسیره د انجنري، فزیک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زده کوونکو لپاره ( دا کتاب په ۹۰۰ مخونو کې چاپ او دا نوې لیکنه به یې ځنو ځایونو غزېدلې او ځنې ځایونه ترې لرې شوي دي)

<u>2003 Bonn (Germany):</u>

څلورم: ځمککچپوهنه( هندسه) ، په سلو، زرو کې شمیرنه، د ګټې – او کټې د کټې شمیرنه ، د اختمالوالي شمېرنه کتاب د ښوونځي ټولې اړتیاوې پوره کوي

<u>2003 Bonn (Germany):</u>

پنځم: الجبرونه ( د الجبر بنستونه دي)

<u>2003 Bonn (Germany):</u>

شپږم: د شمیرپوهنې انګرېزي – پښتو ډکشنري.

<u>2003 Bonn (Germany):</u>

اووم: د شمیرپوهنې الماني ـ پښتو ـ او پښتو الماني ډکشنري

*Mathematical dictionary German/ Pashto and Pashto/German*

<u>2003 Bonn (Germany):</u>

(c) ketabton.com: The Digital Library



اتم: دفرنځیال برابرون ( دا کتاب په دې ځانګه کې یو پیل دی، ساده لیکل شوی)

*Differential equation Translation; An Introduction*

Bonn (Germany): 2003

نهم: د شمیر پوهنې فرمولونو ټولګه

*Mathematical Formulas*

2003 Bonn (Germany):

لسم: شمیرپوهنه له عربي په پښتو

1997 Bonn (Germany):

یوولسم: د افغانستان په هکله سپیني خبرې: په المان کې

،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خو

.یادونه: له ۲۰۰۰ کال دمخه ډاکتر ماخان شینواري د ،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خوا درې ساسي مجلې هم را وستلې.

د ډاکتر ماخان ،،میرې،، شینواري لیکنې او ژباړې چې په چاپیدو یې پیل کیږي

2012 Bonn; Germany; Kabul Afghanistan

ژباړې:

: *Prof. Brinkmann. (From Brinkmann.du.de)*

لاندې د برینکمن لیکنې چې له پرینکمن ن ج څخه ژباړل شوي دي.

۱ - شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره لومړی ټوک

۲ – شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره دویم ټوک

۳ – شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره دریم ټوک

(c) ketabton.com: The Digital Library



۴ - د احتمالوالي شميرنه          د ښوونځي لپاره

۵ – احصايه يا ستاتيستيک          دښوونځي لپاره

لاندې کتابونه د شنوتګارت د پوهنتون د استادانو د لکچرونو څخه چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپاره شوي را ژباړل شوي.

۶ – انالیزی ۱

۷ – انالیزې ۲

۸ – کرښيز الجبر

۹ - د شمیرپوهنې بنسټونه

۱۰ - د فرمولونو ټولګه

۱۱ – فنکشنل انالیز

۱۲ – وکتور شميرنه

نورې ژباړې

۱۳ – له www./grundstudium.info/linearealgebra څخه:کرښيز الجبر

۱۴ – Georg Gutenbrunner ګڼونپوهنه یا د اعدادو تیوري

زما لیکنې

Bonn (Germany):

۱۵ - د شمیرپوهنې ستر کتاب دويم چاپ د پوره تغيراتو سره : دا کتاب د شمیرپوهنې برخې برسيره د

انجنري، فزیک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زدهکوونکو لپاره پوره ګټور دی. په

کتاب کې د اړتیا سره زياتونه او کونه راغلي

(c) ketabton.com: The Digital Library



۱۶ - ځمککچپوهنه ( هندسه) دويم چاپ د پوره تغيراتو سره

۱۷ – الجبر بنسټونه دويم چاپ له تغيراتو سره

۱۸ - ډېرۍ پوهنه يا سټ تيوري

۱۹ – د شميرپوهنې سم اند ( منطق رياضي)

۲۰ - د يو څو شميرپوهانو ژوندليک

۲۱ – د شمير پوهنې ګډې وډې ليکنې

-۲۲ داهم ژباړه ده، خو ليکونکی يې متآسفانه راڅخه نابلد شوی: د مشتق او انتيګرال شميرنو ته تمرينونه او اوبيونې يا حلونه يې

۲۳ – د شميرپوهنې انګريزې پښتو او عربي + درې ډکشنري

۲۴ – د شميرپوهنې پښتو انګرېزي ډکشنري

۲۵ – د شميرپوهنې پښتو ډکشنري د شميرپوهنيزو وييونو په پښتو روښانه ونه

۲۶ - د زړه له کومې

۲۷ – د افغانستان په هکله سپينې خبرې، چې وبه غزيږي.

نوري ليکنې، چې په ژباړه يې پيل شوی، خو لا پوره نه دي

– د شتوتکارت پوهنتون لکچرنوټونو څخه ، چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپريږي:

د ګروپونو تيوري

- د ښوونځي لپاره فزيک د برينکمن ليکنه

له پنځم ټولګي څخه تر اووم ټولګې پورې ژباړل شوی ( دا چې زما دويم مسلک فزيک دی، دا ليکنې ژباړم. دا هم د دې ليکوال يوه ډېره ښه ليکنه ده، چې -د شميرپوهنې په څير- دلته هم زيات تمرينونه د حل يا اوبيونې سره په کې راغلي او ماته زيات ګټور برېښي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

**Get more e-books from www.ketabton.com**
**Ketabton.com: The Digital Library**