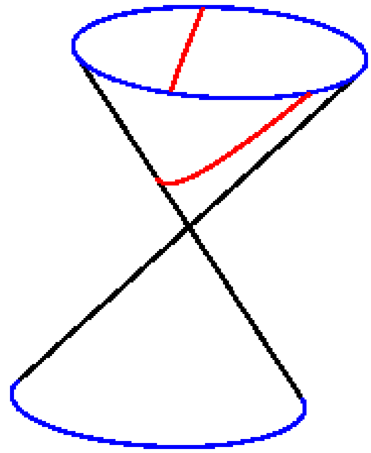
الجبر (كرنيز) لاينيز

Lineare Algebra

Ketabton.com

(c) ketabton.com: The Digital Library



ډاکتر ماخان(میرزی) شینواری

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاينيز(كرښيز) الجبر ۱
بنسټيزجوړښتونه / ګروپونه او تنونه ۱
ګروپ ۱
لاندې ګروپونه ۳
ګڼونډېرۍ يا د اعدادو سټ ۳
پرموتيشونونه ((د توكو يا اعدادو) ځای بدلون) ۴
د ځای بدلنون (پرموتيشن) څيوكليكي يا تل ۵
مودولوس ۸

لومړني تنونه يا پټي يا ورشو ۱۱
ګالويز– بدن ۱۳
په ګروبونو ياډلو كې تورنی ۱۴
وكتورفضا يا وكتوري فضا ۱۶
د n - ګوني وكتورفضا ۱۹
لاندې فضا يا برخه فضا ۲۰
ګرښيز كمبينيشن ۲۲
كرښيزه هيولې يا سپاين يا سمڅ ۲۳

(c) ketabton.com: The Digital Library

ننوتی – یا محدب کمبینیشن ۲۵

حقيقي- ياريښتونی سکالار ضرب ۲۶

سکالار ضرب ۲۷

مایل سیومتریک ۲۸

د کوشي-شوارځ – نامساوات ۳۰

نورم ۳۱

هوموګینیوالی ۳۱

د سکالار ضرب نورم ۳۲

ماکسیموم – نورم ۳۳

د حقيقي- يا ریل وکتورونو سکالار ضرب ۳۴

د کمپلکس وکتورونو سکالار ضرب ۳۵

د دوه وکتورونو ترمنځ کونج ۳۶

د پیتاګوراس(فيثاغورث) جمله ۳۷

کرښیز نابلواکوالی یا ۳۹

بنسټ Basis ۴۲

بعد یا پراخیدونی Dimension ۴۴

اورتوګونال یا ولاړ بنسټ ۴۶

اورتوګونال پروجکشن ۴۹

د ګرام-شمیت تګلار یا قانون ۵۱

کرښیزه څیرونه (فنکشن یا تابع) ۵۴

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کرښيزو توابعو کمپوزيشن ۵۷
ماتريکس ۵۸
يو کرښيز فنکشن يا تابع ۶۱
يو کرښيز فنکشن يا تابع ۶۳
Bild او Kern معنا ښيره يا شکل او زړي ۶۵
معکوس يا په ښت تابع (ښيرونه يا فنکشن ۶۷
د ماتريکسونو وکتورفضا ۶۹
د ستراسن(وبينه: شتراس) الګوريتم ۷۱
کوموتاتور ۷۲
په ښت يا معکوس ماتريکسونه ۷۴
تراسپوني او ادجونګيري ماتريکسونه ۷۶
شپور Spur ۷۸
د يوه ماتريکس رانګ ۷۸
د يوه ماتريکس نورم ۸۰
هوموحنيتي: ۸۱
هوموحنيتي: ۸۳
د ماتريکس د ډکوني جوړښت ۸۴
اورتوګونال او يونيتار ماتريکسونه ۸۴
د هادامارد – ماتريکسونه ۸۵

(c) ketabton.com: The Digital Library

د فوریر (ویینه: فوریې) ماتریکسونه ۸۶
نورم ریښتونې یا - وفاداره اورتوګونال ا و یونیتار ۸۷
څیوکلیکي (تلبیرته راګرځېدوني) ماتریکسونه ۸۹
ستوښاستیکي ماتریکسونه ۹۰
دیترمینانت د انتیسیومتري کرښیزفورم په حیث ۹۱
2 - لیکیزه دیترمینانت ۹۴
د ساروس شیما یا شکل ۹۵
لوریز حجمونه (ډکي) ۹۶
د دیترمینانتونو لپاره قاعدې ۹۸
د ځانګړو ماتریکسونو دیترمئناتونه ۱۰۱
د دیترمینانتو بڼه بدلون ۱۰۴
د دیترمینانتو ودیزیینه ۱۰۵
د 3 ټکو له لارې د یوې سطحې ۱۰۸
د واندرموند – دیترمینانتونه ۱۱۱
کرښیز مساوات سیستم ۱۱۲
برېښنایي جریاندایره ۱۱۴
د یوه کرښیز مساوات سیستم حلوړوالی ۱۱۵
دیترمینانت او د یوه مساوات سیستم حلوړوالی ۱۱۸
د کرامر قاعده ۱۲۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

په څښ لور ځای په ځای کول ۱۲۳

د ګاوس ترانفورميشن ۱۲۵

د ګاوس د له منځه وړنه ۱۲۶

د ايښيلون بڼه ۱۲۹

د ايښلون- بڼه د يوه ل م س (کربنيز مساواتسستم)حل ۱۳۱

رانګ او د ک م س(کربنيز مساواتسيستم) حلوړوالی ۱۳۴

د انډول کربڼه(انډولکربڼه) ۱۳۵

د برابرونې حل يو بل سره يوغږيز........ ۱۳۷

الجبر - کربنيز مساوات سيستم-برابرونې پرابلم ۱۳۸

نورمالمساواتونه ۱۳۸

توموګرافي ۱۴۱

آيګن-ارزښت او آيګو-وکتور ۱۴۳

ورته والي – ترانفورمېشن ۱۴۵

کرکتريستکي پولينوم ۱۴۷

الجبری او هندسي ډېرځلوالی ۱۵۰

د آيګن –ارزښتونو جمعه او ضرب ۱۵۲

د ماتريکسونو ريښتونی توابع ۱۵۴

د آيګن – وکتورونو بنسټ ۱۵۵

د ځيوکليکي ماتريکسونو دياګونالونه ۱۵۷

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ماتريکسونو توان ۱۶۰
د فيبوناچي پرلپسې يا – ترادف ۱۶۲
نورمال ماتريکسونه ۱۶۴
نورمال ماتريکسونه... ۱۶۵
مثبت ديفينيت ماتريکسونه ۱۷۰
ريلا ي – ويش ۱۷۰
مثلث بڼه ۱۷۱
اصلي وکتورونه ۱۷۳
د اصلفضا ځيوکليکي بنسټ ۱۷۵
د جوردان بڼه ۱۷۹
د (4x4) -ماتيکسونو جوردان-بڼې ۱۸۶
په زيګولار ارزښت ټوټه کونه ۱۸۹
فاسد معکوس ۱۹۱
د توپوګرافيکي کچونداتنونو ټيکاوی يا اصلاح ۱۹۶
د مور-پينروز-شرطونه ۱۹۷
اورتوګونال او ځانګړي اورتوګونال ګروپونه ۱۹۸
هندارونه ۱۹۹
څرخون ۲۰۰
څرخونمحور او څرخونکونج ۲۰۱

(c) ketabton.com: The Digital Library

د یو خرخون په ضربيپونو ټوټه كونه ۲۰۵

څرخونماتريكس ۲۰۸

مربعيزه فورم(بڼه) ۲۱۰

كوادريكونه ۲۱۱

د كوادريكونو شډله ټوټه ونه ۲۱۲

اصلي- محور –ترانفورميشن ۲۱۴

مخروط غوڅی ۲۱۸

د دوه بعدې كوادريكونو د اوكليدي نورمال بڼه ۲۲۰

د ډاكتر ماخان شينواري ليكنې ۲۳۲

(c) ketabton.com: The Digital Library

سریزه

زه د سریزې په هکله ډېر څه نه لیکم، خو دې ته ګوته نیسم، چې ما د دې سرلیک لاندې دوه لیکنې کړي. دا مخ ته پرته د هغو لوستونکو لپاره ده، چې د شمیرپوهنې سره داسې لږڅه بلدتیا ولري، دا به ښه وي، خو اړینه هم نه ده.

دا لیکنه خورا مفصله ده نسبت هغې بلې ته

تر مخ راوړنه: فنکشن که په نورو ژبو کې وکورو، نو په پښتو ژباړه به یې ځیره کونه (لنډ : ځیره ونه) وي. په فنکشن کې یو څه په یو بل څه یا خپل ځان ځیره کیږي. چې لومړی یې ځیره کوونکی او دویم یې ځیره ده یعنې دوه مجهولې یا واریابلې دي، چې یوه په بله ځیره کیږي. لومړی خپلواک دئ او دویم یې د لومړي په واک کې دی، نو له دې امله م عربي تابع بللې، یعني دا د فنکشن تابع ده، چې موږ به یې هم دا ناسم نوم وکاروو، چې ګران شمیرپوهان راته په قهر نه شي.

که زما په دې لیکنه کې ځیرونه راځي، نو هغه یې زموږ په ناسمه توګه همغه تابع ده. دا مو مو پوهیږم، چې له پامه نه لویږي.

ما په یو ځل ډېر ةتابونه وژباړل او ولیکل، چې لیکنیز تاتیکاوي به ولري. د هغې به راته بخښنه وکړئ. دا څه چې تاسو ته وړاندې کیږي، پوره :تور دي او دې ته دې ریاته پامرنه وشي.

دا زما ټولې لیکنې به تر یوې اندازې ستونځې ولري، خو باور وکړئ، چې غوټې پسې وهئ په لاس درځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

مننه: د   ټولنې او په ځانګړي ډول د هغې د مشر ښاغلي ډاکټر يحی وردګ څخه زياته مننه، نه داچې زما کتابونه يې [اپ ته ورسول بلکه په دې کار کې يې بط سارې هڅې کړي او بې له شکه يې خپلو يوادوالو ته ستر خدمت کړي، کور دې ودان وي، لوي څښتن دې ورته اجرونه ورکړي او د لا ډېرې برياوو په هيله دې زموږ دعا ورسره مل وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاينيز(کرښيز يا خطي) الجبر

بنسټيزجوړښتونه / ګروپونه او تنونه

Grups and fields

ګروپ

د يوه ګروپ $(G,\diamond)$ لاندې يوه ډېرى G پوهيږو، په هغې چې يو دوه ييزه کارونه يا عمليه $\diamond$ داسې پيژندل ولري يا تعريف شوي.

$$\diamond : G \times G \longmapsto G\,,$$

دا په دې مانا، چې هره جوړه (a, b) د $a, b \in G$ سره د $a \diamond b \in G$ يو توکى باندې تنظيم دى. برسيره پردې لاندې خويونه بايد باور ولري:

:Assoziativitätاسوښياتيو والى يا اسوښياتيو قانون

$$(a \diamond b) \diamond c = a \diamond (b \diamond c) \qquad \forall a, b, c \in G$$

neutrale Element ناپيلى توکى: يو يواځنى ټاکلى ناپيلى توکى $e \in G$ شته دا په دې مانا ، چې

$$e \diamond a = a \diamond e = a \qquad \forall a \in G$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

Inverses Element مخامخ یا په ضد توکی یا برعکس توکی: هر توکي $a \in G$ ته یو یواځنی ټاکلی مخامخ یا یه څټ یا برعکس توکی $a^{-1} \in G$ شته د $a \diamond a^{-1} = a^{-1} \diamond a = e$ سره

ګروپ کموتاتیو یا د ابل (ابل Abelد شمیرپوه نوم دی) ګروپ بلل کیږي، که کارونه $\diamond$ کموتاتیو وي:

$$a \diamond b = b \diamond a \qquad \forall a, b \in G\,.$$

له اړوندتوب څخه لیدل کیږي، چې کومه کارونه کارول کیږي، نو زیات وخت د $(G, \diamond)$ په ځای فقط G لیکل کیږي.

په باندي(بیجکتیو) رییل فنکشنونه یا توابع(بلواک) bijective real Functions

د $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ د $\circ$ یو په بل پسې کاروني له مخې یو ګروپ جوړوي.

ساده ازمایل کیدی شي، چې یو په بل پسې اینونه اسوشیاتیو ده :

$$((f \circ g) \circ h)(x) = f(g(h(x))) = (f \circ (g \circ h))(x)\,.$$

ناپیلی توکه په روښانه توګه لاندې فنکشن دی

$$e: \quad x \to x$$

بالاخره هر په باندي بلواک لپاره یو په څټ بلواک شته دی

$$f^{-1}: \quad f(x) \to x\,.$$

یو په بل پسې ترنه کموتاتیو نه ده : د بیلګې په توګه لاندې لرو :

$$f: \; x \to 2x\,, \quad g: \; x \to x+1$$

$$f \circ g \neq g \circ f\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(g(x)) = 2(x+1) \neq 2x+1 = g(f(x))\,.$$

لاندې ګروپونه

د يوه ګروپ $(G,\diamond)$ لپاره $(U,\diamond)$ لاندې ګروپ بلل کيږي، که U د G برخدېرى وي او $(U,\diamond)$ پخپله يو کروپ جوړ کړي

ددې لپاره ، چې و ازمايو ، چې ايا U و ترڼي $\diamond$ ته يو ګروپ جوړوي ، که نه، نو ازمايو ، چې U و نښلوني $\diamond$ ته او د په څټ جوړښت ته بنده ده. ياني باور لري:

$$a \in U \;\Rightarrow\; a^{-1} \in U \quad \text{او} \quad a,b \in U \;\Rightarrow\; a \diamond b \in U$$

ګڼوندېرى يا د اعدادو سټ the set of numbers

$$\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

Z و جمعې(زياتون) ته يوکموتاتيو ګروپ دى، خوندي لرنې يا اينکلوزيون ته ټول ګڼونه و $\mathbb{Q},\mathbb{R}$ او $\mathbb{C}$ ته يو لاندې ګروپ جوړوي او راشنل ګڼونه و $\mathbb{R}$ او $\mathbb{C}$ ته او رييل ګڼونه وکمپلکس ګڼونو ته يو لاندې ګروپ جوړوي.

که چيرې صفر لرې شي، نو ضرب يا ځله ونه هم يو ګروپ جوړښت تعريفوي:

$$\mathbb{Q}\backslash\{0\} \subset \mathbb{R}\backslash\{0\} \subset \mathbb{C}\backslash\{0\}\,.$$

تړاو جدول يا تړاوتخته

کارونه$\diamond$ په پاې ګروپ $G = \{g_1, \ldots, g_n\}$ باندې کيدى شي د تړاوماتريکس

$$A: \quad a_{i,j} = g_i \diamond g_j$$

له لارې روښانه شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاندې ځيرونه (بې له پرموتېشن يا بدلون څخه) آول تړاوجوړښتونه ښايي د يوه ګروپ لپاره د $n \le 4$ سره :

$n=2$

$\diamond$	e	a
e	e	a
a	a	e

$n=3$

$\diamond$	e	a	b
e	e	a	b
a	a	b	e
b	b	e	a

$n=4$

$\diamond$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

$n=4$

$\diamond$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	a	e
c	c	b	e	a

دا ګروپونه ټول ابل ګروپونه دي، لکه د ماتريکس A د سيومتري ($a_{i,j} = a_{j,i}$)چې ليدل کيږي.

لومړی نااېل ګروپ شپږ توکي لري او د $\{1,2,3\}$ توکو د پروتېشن له مخې پېژندل کېدی شي

Permutations پرموتيشونونه ((د توکو يا اعدادو) ځای بدلون)

د په خوښه ډېرۍ M لپاره د بيجکشن (په کې ځيرونه يا په کې فنکشن) لاندې له M په Mکې ، چې کمپوزيشن کارونه يا ځيرونه يی د کاروني په ځير وي، يو ګروپ پوهيږوو داسې په نامه د M سيومتري ګروپ.

لنډ : د M په M کې ځيروني ته پرموتېشن يا بدلون وايو.

که $M=\{1,2,\ldots,n\}$ وي، نو د سيومتري ګروپ S_n څخه غربيږو، چې ګراد يا درجه يې n وي.

د S_n ډېرۍ د π توکي $n!$ پرموتيشن يا بدلون بلل کيږي او داسې يې ليکو

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ \pi(1) & \pi(2) & \pi(3) & \ldots & \pi(n) \end{pmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پرمېټیشنګروپ په ټولیزه توګه کموتاتیو نه دی، لکه د لاندې بیلګې څخه لیدل کیږي

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

د ځای بدلنون (پرموتیشن) څیوکلیکي یا تل بیرته راګرځیدونی لیکندود:

پرموتیشنونه داسې په نامه څیوکلیکي لیکندود له لارې هم ورکول کیږي..یو څیکلوس یا تل بیرته راګرځیدنه د یوه توکي او د هغه له څېرو، چې ډیرځله د بدلون یا پرموتیشن له لارې منځ ته راځي، جوړه ده، تر څو چې بیرته هغه پیل توکي یا وتونتوکي ته ورسیږي. د هغو توکو څخه، چې په لومړي تلبېرته راګځیدنې کې منځ ته نه راځي، نور څیوکلونه جوړیږي ، تر څو ټول توکي رامنځ ته شي. څیکلونه د توکو د ګڼون(تعداد) ټیټیدونکي یا لوېدونکي ډول تنظیم کیږي او په کږو نوکانوکې یو پر بل پسې لیکل کیږي. هغه څیوکلونه یا تلبیرته راګرځیدوني ، چې اوږدوالی یې ۱ وي نه لیکلکیږي.

د بیلګې په توګه دی

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 3 & 2 & 6 & 5 & 1 \end{pmatrix} \equiv (1\,4\,6)\ (2\,3)\ (5)$$

همداسې

$$\pi = (1\,4\,6)\ (2\,3)\ .$$

د پرموتیشن ترانسپوني کوونه یا په بل ډول لیکنه او سیګنوم

یو ترانسپوزیشن (ځای بدلون)

$$\tau = (j\ k)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د j او k بدلون دی. ددې ساده یا بنسټیز پرموتیشن ترڼې سره دا پرموتیشن π داسې انځورېدی شي:

$$\pi = \tau_1 \circ \cdots \circ \tau_m \, .$$

دلته برابرازښتوالی (جوړه یا ناجوړه m) یواځنی ټاکلی دی، او

$$\sigma(\pi) = (-1)^m$$

د پرموتیشن مخ نخښې یا د پرموتاشن زیګنوم π په څیر π ټاکو یا تعریفوو.

د

$$\tau_1 \circ \cdots \circ \tau_m = \pi \in S_n$$

لپاره او د $k = \pi(n)$ سره دی

$$\tilde{\pi} = (k, n) \circ \pi \in S_{n-1} \, ,$$

څکه چې د ترانسپوزیشن کمپوزیشن سره n کره په ځای نیول کیږي یا ځای په ځای پاتیږي. ایندوکتیوInduktiv (د ځانګړي په تولیز پایونه) کیدی شي و نیول شي یا فرض شي، چې برابرارزښتوالی یا پاریټي د $\tilde{\pi}$ په ایندوڅیري ټوټه ونه کې یواځنی ټاکلې ، پسې د $(-1)^m$ مخنخښه.

ددې لپاره، چې د پرموتیشن

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

سیګنوم و ټاکو، نو

$$(\pi(1), \ldots, \; \pi(6)) = (6, \; 5, \; 3, \; 1, \; 2, \; 4)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ټرانسپوزيشن سوکځيسيو (sukzessiv) پل په پل يو بل پسې) د کانوني لړۍ پرلپسې په ځير ليکنې ته بيايو:

$$(1\ 6):\qquad (1\ 5\ 3\ 6\ 2\ 4)$$

$$(2\ 5):\qquad (1\ 2\ 3\ 6\ 5\ 4)$$

$$(4\ 6):\qquad (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6)\,.$$

په دې پسې يا له دې امله

$$(4\ 6)\circ(2\ 5)\circ(1\ 6)\circ\pi$$

کټمټوالی يا ايدنټيک ده، همداسې

$$\pi=(1\ 6)\circ(2\ 5)\circ(4\ 6)$$

او

$$\sigma(\pi)=(-1)^3$$

الترناتيو يا بديلې سرۍ کړۍ شي ځويکليکي ليکډوله وکارول شي:

$$\pi=(1\ 6\ 4)\ \ (2\ 5)\ \ (3)\ .$$

ځکه چې د k اوږدوالي يوه ځيوکلوس τ لپاره $\sigma(\tau)=(-1)^{k-1},$ دی

$$\sigma(\pi)=(-1)^2\cdot(-1)^1\cdot(-1)^0=-1\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

مودولوس Modulus

(كه دوه ګڼونه ١٣ او ٥ ولرو او ١٣ په ٥ وويشو، نو لاس ته ٢ راځي د ٣ ياتې سره. دا داسې ليکو:

13 : 5 = 2

ياتې 3

ليکلی شو 0 = 5 : (3-13) دا په دې مانا چې ګڼ ٥ ګڼ3-13 وېشي

پيژند (تاكونكى يا تعريف) كه تولګڼونهx او y او يو طبيعي عدد يا پيداښتي ګڼ a ولرو ، نو وايو ،، x كونګروانېڅy مودولو a (mod a) دە،، په نخښنه x≡ymod a ، که x≡ymoda نه وي، نو واي چې : x د y سره كونګروانېځ مودولو a(moda) نه ده ،،يعني x≢ymod a

مودولوس Modulus

لرو a > 0 او $x \in \mathbb{R}$. د $x \bmod a$ (لوستل : x مودولو a)لاندې په a باندې د x وېشنې پاتې پوهيږو، دا په دې مانا، چې

$$x \bmod a = x - na \in [0, a)$$

د يوه تولګڼn لپاره . كه باور ولري

$$x \bmod a = y \bmod a\,,$$

نو x او y كونګروانېڅ مودولو a بلل کيږي.

پاتيتولګى(باقي-)(مودولو) modulo n

(c) ketabton.com: The Digital Library

ډېرۍ $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ د ابل ګروپ جوړوي د زیاتون یا جمعې

او د $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z} \bmod n$ سره په نخښنه کیږي.

پام دې وي، چې ضرب modulo n په $\mathbb{Z}_n$ د ګروپ جوړښت نه تعریفوي، خکه چې 0 په څټ توکی نه لري.

د دې روښانه بیلګې $\mathbb{Z}_4 = \{0, 1, 2, 3\}$ په بنسټ اسان ارماېښت کیدی شي، چې زیاتون یا جمعې، همداسې کمون یا تفرق د مودول – کارونې یا عملیې سره زغموږ دي.

د بیلګې په توګه دی

$$1 + 3 \bmod 4 = 0, \quad 0 - 2 \bmod 4 = 2$$

او داسې نور

سره له دې خل مودولو ۴ (modulo 4) مو د ګروپ تیوري ته نه لارښودوي، خکه چې

$$1 \cdot 2 \bmod 4 = 3 \cdot 2 \bmod 4 = 2.$$

دا د ناپیلي توکې د یواځیوالي سره په مخامخوالي یا تضادګې پروت دی

بدن(جسم یا تن یا پټی Field)

یوه ډېرۍ (سټ) چې په هغه کې یوه جمعه ``+,, او یو ضرب ``٠,, تعریف وي، بدن یا پټی یا ورشو بلل کیږي، که لاندې خویونه په کې باور ولري:

اول – د ګروپ د جمعې یا زیاتیز جوړښت: $(K, +)$ یو ابل ګروپ دی د توکی(سفرتوکي) سره.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا په دې معنا چې د ټولو $a, b \in K$ لپاره باور لري.

$b+a$	$=$	$a+b$
$a+(b+c)$	$=$	$(a+b)+c$
a	$=$	$a+0$
$0\,,$	$=$	$a+(-a)$

دويم – دلته $(-a)$ د a په څېر يا معکوس توکی دی.

دريم – د ضرب ګروپي جوړښت: $(K\backslash\{0\},\cdot)$ يو د ابل ګروپ دی د ناپيلي توکي 1 سره(يوي توکی يا که غواړئ واحد توکی) دا په دې معنا چې د ټولو $a, b, c \in K\backslash\{0\}$ لپاره باور لري:

چيرته چې $(-a)$ و a ته په څېر يا پرعکس توکی دی.

د ضرب ګروپي جزړښت : $(K\backslash\{0\},\cdot)$ يو ابلګروپ دی د ناپيلي توکي (يوي توکی)، دا په دې معنا چې د تولو $a, b, c \in K\backslash\{0\}$ لپاره صدق کوي

a.b=ba

(a,b).c=a.(b.c)

a.1=a

1= $a \cdot a^{-1}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کوم سره چې a^{-1} د a په څټ يا برعکس توکی دی.

ديستريبيوتيو قانون: $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$ د ټول $a, b, c \in K$ لپاره.

د ريښتونو اعدادو $\mathbb{Q}$ ډېری، د حقيقي اعدادو $\mathbb{R}$ ډېری او د کمپلکس اعدادو $\mathbb{C}$ ډېری

د شميرني قاعده يې سملاسي د اړونده تړني له لارې لاس ته راځي. صفرتوکی يې 0 او يويتوکی يې 1.

همداسې يې د کمپلکس عدد $z = x + \mathrm{i}y \neq 0$ يوي توکی نسبت و ضرب ته $w = \frac{x}{x^2+y^2} + \mathrm{i}\,\frac{-y}{x^2+y^2}\,,$ دی، ځکه چې لرو:

$$z \cdot w = (x + \mathrm{i}y)\left(\frac{x}{x^2+y^2} + \mathrm{i}\,\frac{-y}{x^2+y^2}\right) = \frac{x^2 - \mathrm{i}^2 y^2}{x^2+y^2} + \mathrm{i}\,\frac{-xy+yx}{x^2+y^2} = 1 + \mathrm{i}0\,.$$

لومړني تنونه يا پټي يا ورشو

د هر لومړني عدد p لپاره $\mathbb{Z}_p = \{0, 1, \ldots, p-1\}$ د ډېريو يو تن دی د د جمعې او ضرب موډولو p سره.

د په څټ – يا برعکس توکي شتون پورې ، نسبت و ضرب ته د تنونو لپاره همدا اوس په ټول اعدادو کې او د باقيتولګيو لپاره به ميراث پاتي شي.

د $a \in \{2, \ldots, p-1\}$ لپاره کيدی شي a^{-1} په لاندې توګه جوړ شي. لومړی سړی په پام کې نيسي چې، $a^i \neq 0 \bmod p \quad \forall i \in \mathbb{N}\,.$.

(c) ketabton.com: The Digital Library

که $a^i = np$ وی، نو د لومړي تن تجزيې څخه به ولرو، چې په p ويشل کيږي، څه چې د $a < p$ له امله ناشونی دی. که اوس
پرلپسې $a^i \bmod p, \quad i = 0, \ldots, p-1$, په پام کې ونيسو

، نو بايد کم له کمه يو پاتې دوه واره رامنځ ته شي، يعني
$a^{i_1} = a^{i_2} \bmod p\,, \quad i_1 < i_2$
به ضدق وکړي. له دې سره به وي:
$$a^{i_2 - i_1} = a^{i_2 - i_1 - 1} a = 1 \bmod p\,,$$

له کوم سره به چې a ته په برعکس توکی پيدا شوی وي.

په لومړني تن $\mathbb{Z}_5$ کې برعکس توکي دي

2^{-1}	$=$	$3 \bmod 5$
3^{-1}	$=$	$2 \bmod 5$
4^{-1}	$=$	$4 \bmod 5\,.$

که $a^i = np$ وی، نو د لومړني ضريب تجزيې څخه به مو لرودی، چې p وېشي، څه چې د $a < p$ له امله ناشوني دي. که اوس پرلپسي يا
$a^i \bmod p, \quad i = 0, \ldots, p-1$, په پام کې ونيسو، نو بايد کم له کمه يو باقي دوه واره رامنځ ته شي، پس $a^{i_2 - i_1} = a^{i_2 - i_1 - 1} a = 1 \bmod p\,,$ به صدق وکړي د کوم سره به چې د a برعکس توکی پيدا شوی وي.

په لومړني تن $\mathbb{Z}_5$ کې په څټ – يا برعکس توکي دي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$2^{-1} = 3 \bmod 5$$

$$3^{-1} = 2 \bmod 5$$

$$4^{-1} = 4 \bmod 5\,.$$

د دې سره د بېلګې په توګه $\frac{(2+4)}{3} \bmod 5 = \frac{1}{3} \bmod 5 = 2$ همغږيز دی له دې لاندې سره.

$$\frac{2}{3} + \frac{4}{3} \bmod 5 = 2 \cdot 2 + 4 \cdot 2 \bmod 5$$

$$= 4 + 3 \bmod 5$$

$$= 2\,.$$

ګالويز– بدن Galois-Körper

تن$GF[2^2]$ د 4 توکو سره د جمعي او ضرب د ترنو له لارې کيدی شی ورکړل شي:

+	0	1	a	b
0	0	1	a	b
1	1	0	b	a

$\cdot$	0	1	a	b
0	0	0	0	0
1	0	1	a	b

(c) ketabton.com: The Digital Library

a	a	b	0	1	a	0	a	b	1
b	b	a	1	0	b	0	b	1	a

دا مخ ته پروت جوړښت اصول داسې ساده نه دی، لکه په لومړنيو تتونو $\mathbb{Z}_p$ کې او د گالويز له خوا پيدا شوي دي. دا په تړليږه توگه کېدی شي د تنړنړ ځخه د p^ℓ توکو سره $\ell \in \mathbb{N}$، د په خوښه لپاره لومړنی عدد p لپاره اجرا کړي يا سرته ورسوي، او کېدی شي و ښوول شي چې په دې توگه ټول تتونه لاس ته راوړي.

په گروبونو کې تورنی (لکه د مسابقې لپاره جمتو کيدو گروپ)

به کابل، غزني او ننگرهار کې په څلورو مهالوبش(وختونو) د نهو ډلو په منځ کې مسابقه بيل کيږي. د لته دي ،، هر يو د هر يو په مقابل کې،، لوبه وکړي. دا يه دې معنا چې په هر مهالوبش دې درې گروپونه د هر درې ډلو څخه لوبه وکړي، چې په هرو دې درې ځايونو کې دې لوبه وشي. ستونځې په دې کې پرتې دي، چې يو بل بايد سره غوځ يا قطعه نه کړي، هره جوړه د $3 \cdot 4$ گروپونو کې بايد يو ځل رامنځ ته شی

د شميرپوهنې له مخې دا مسأله په لاندې ډول فرمولولی شو: دا 3 توکيزې ډېری

$$S_{0,k} \cup S_{1,k} \cup S_{2,k} = \{1, \ldots, 9\}, \quad k = 0, \ldots, 3$$

دې وټاکل شي، چې د دوه ډېريو غوڅې ماکسيمال يو توکی خوندي ولري.

د دې شرايطو سره د دې مخه نيول کيږي، چې د گروپونو ډېری چې د لوبو ورځې يې مختلفې دي، گډه د لوبدلو جوړه خوندي ولري..

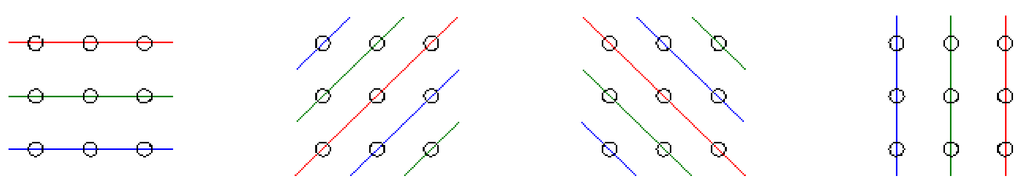
(c) ketabton.com: The Digital Library

د $S_{j,k}$ ډېرى د لومړنى تن $\mathbb{Z}_3$ په مرسته جوړ ېدلاى شى.. د لته د لوبډلې نمرې $1,\ldots,9$ د نهه توکیزه ،، پاى سطحې،، دټکو $(\alpha,\beta), \quad \alpha,\beta \in \mathbb{Z}_3$ سره په نخښه کېدى شي او دا په نخښه شوى ،، پاى سطحه،، ډېرى د دې سطحې د کرښوسره په نخښه کېدى شي:

$$S_{j,k} = \{(\alpha, k \cdot \alpha + j \bmod 3):\ \alpha = 0,1,2\},$$ (کرښه د $k = 0,1,2)$ جګېدني سره)

$$S_{j,3} = \{(j,\alpha):\ \alpha = 0,1,2\}$$ (ولاړه یا عمود کرښه).

داګروپ وېشنه په لاندې شکل کې لیدوړ ده:



همدا مسأله د 16 تیمونو سره ده ، 4 ښارونو او پنځه مهالوېش سره په ورته ډول حل کېدى شي. سرى 4-توکیزه ګالویز تن $GF[2^2]$ او لاندې ګروپ وېش لاس ته راوړو:

	لوبځاى1	لوبځاى2	لوبځاى3	لوبځاى4
لومړى لوبورځ	1,2,3,4	5,6,7,8	9,10,11,12	13,14,15,16
2-مه لوبورځ	1,6,11,16	5,2,15,12	9,14,3,8	13,10,7,4
3 -مه لوبورځ	1,10,15,8	5,14,11,4	9,2,7,16	13,6,3,12
4 -مه لوبورځ	1,14,7,12	5,10,3,16	9,6,15,4	13,2,11,8

(c) ketabton.com: The Digital Library

4,8,12,16	3,7,11,15	2,6,10,14	1,5,9,13	5 -مه لوبورځ

په ټولیزه توګه د لیل د q^2 لوبډلو او q بنارونو لپاره دلیل شوونی دی، هلته چې q د یوه لومړني عدد توان دی، ځکه چې د داسي یوه عدد q لپاره تن GF(q) شتون لری.

وکتورفضا یا وکتوري فضا

یو ابل ګروپ $(V, +)$ وکتورفضا په یوه تن K یا K -وکتورفضا بلل کیږی، که یو سکالار ضرب ``·,, تعریف وي، چې $(\lambda, v) \in K \times V$ په ضرب $\lambda \cdot v \in V$ تنظیم او لاندې خویونه ولری..

د ټولو سکالار $\lambda, \lambda_1, \lambda_2 \in K$ او ټولو وکتورونو ، v ، $v_2 \in V$ ، v_1 لپاره صدق کوی:

$$(\lambda_1 + \lambda_2) \cdot v = \lambda_1 \cdot v + \lambda_2 \cdot v$$

$$\lambda \cdot (v_1 + v_2) = \lambda \cdot v_1 + \lambda \cdot v_2$$

$$(\lambda_1 \cdot \lambda_2) \cdot v = \lambda_1 \cdot (\lambda_2 \cdot v)$$

$$1 \cdot v = v .$$

که $K = \mathbb{R}$ یا $K = \mathbb{C}$ وی، نو سږی د یوه حقیقي همداسي کمپلکس وکتورفضا غږیږو او په ټولیزه توګه د سکالار ضرب لپاره ټکي ځخه تېرېږو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پام دې وي، چې د حمعې علامه د V په همداسې په K کې کارول کیږي. همداسې ضرب هم په K کې د ضرب لپاره کارول کیږي. پای

د تعریف سره سم په ځانګړي ډول په وکتورفضا کې د ګروپ اکسیومونه ضدق کوی:

اسوشیاتیو قانون:

$$(v_1 + v_2) + v_3 = v_1 + (v_2 + v_3)$$

ضفر توکی(صفروکتور) : تیک یو توکی $0 \in V$ د $v + 0 = v$ سره شتون لري ، د ټول $v \in V$ لپاره.

نسبت و جمعې ته په څټ – یا معکوس توکی: د ټولو $v \in V$ لپاره تیک یو $-v \in V$ شتون لري د لاندې سره:

$$v + (-v) = 0$$

د جمعې بدلون قانو:

$$v_1 + v_2 = v_2 + v_1$$

غوښتونکی شرایط تنظیموي، چې جمعه، کمون یا تفریق او ضرب دا ورسره بلد شمیرقوانین پوره کوي.. سړی داسې کړی شي چې ضرب سر ته ورسوي:

$$\left(\sum_i \lambda_i\right) \cdot \left(\sum_j v_j\right) = \sum_i \sum_j \lambda_i \cdot v_j \,.$$

سربیره پردې د مخ نخښې قانون صدق کوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$-(-v) = (-1)\cdot(-v) = v, \quad -\left(\sum_i v_i\right) = \sum_i -v_i \,.$$

د $\text{Gard} \le n$ (درجې) پولینوم

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n, \quad a_i \in \mathbb{R} \quad (a_i \in \mathbb{C}),$$

یو حقیقي (کمپلکس) وکتور فضا جوړوي،، د کوم سره چې جمعه او سکالار ضرب په ورته نږدې ډول تعریف دي:

$$(p+q)(x) = p(x) + q(x), \quad (\lambda p)(x) = \lambda p(x)\,.$$

د وکتورفضا خویونه ساده تصدیق کیدلی شي.

په پام کې لرو چې پولینوم د n درجې سره، دا په دې معنا چې د $a_n \neq 0$ سره وکتورفضا نه جوړوی. د جمعې جوړول کیدی شي د درجې کموالی ته لاربنود کړي. د بیلګې په توګه دی:

$$(2x - x^2) + (3 + x^2) = 3 + 2x\,.$$

پای

حقیقي پرلپسي (a_n) د $n \in \mathbb{N}$ سره یوه حقیقي وکتورفضا د عملیې سره جوړوي

$$(a_n) + (b_n) = (a_n + b_n), \quad \lambda(a_n) = (\lambda a_n)\,.$$

که سربیره پردې و غوښتل شي، چې ایا د وکتور سترکچر یا جوړښت خرابیدلی شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د بېلګې په توګه يوغږيزې پرلپسې وکتور فضا نه جوړوی. د مونوتون پرلپسيو جمعه اړيين نه ده يوغږيز وی، لکه دا لاندې بېلګه ښايي:

$$(4n) + (-n^2)$$

برعکس به بندوالی يا محدوديت يو منل شوی خوی وی..

پای

د n - ګوني وکتورفضا

د K تن لپاره n -ګوني يا n-وکتورونو

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \quad a_i \in K$$

فضا دا K وکتورفضا K^n د کمپوننت ډوله تعريف شوي جمعي او سکالار ضرب سره، دا په دې معنا چې

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}$$

او

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot a_1 \\ \vdots \\ \lambda \cdot a_n \end{pmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ټولو $a_i, b_i, \lambda \in K$ لپاره .

په زياتو حالاتو کې ساده دی چې n ګونی يا n توپل د ليکې وکتور په څېر

$$a = (a_1, \ldots, a_n)^t$$

همداسې

$$a^t = (a_1, \ldots, a_n)$$

وليکل شي. د ترانسپوزيشن سيومبول ``t,, سره د ستاندارد قرارداد څخه د متو وکتور په حيث توپيريږي.

پای

لاندې فضا يا برخه فضا sub space

د يوه K -وکتورفضا V پيرخه ډېرى U، چې د په V کې تعريف شوې جمعې او سکالار ضرب سره پخپله وکتورفضا جوړوی، د V لاندې فضا يا برخه فضا بلل کيږي.

برخه فضا U زيات وخت د V توکو شرايطو سره تعريفيږی:

$$U = \{v \in V : A(v)\},$$

د کوم سره چې A يوه په نخښنه کوی، چې د ټولو $v \in V$ لپاره بايد پوره وی.

د دې لپاره چې و ازمايو چې ايا U د V لاندې فضا ده، کفايت کوي چې وښايو چې U نسبت د جمعې او سکالار ضرب سره تړلې ده:

$$u, v \in U \implies u + v \in U$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lambda \in K, u \in U \implies \lambda \cdot u \in U .$$

$$u, v \in U \implies u + v \in U$$

$$\lambda \in K, u \in U \implies \lambda \cdot u \in U .$$

ليکونکي اپپ، کيمرلې

برخفضاوې زيات وخت د ورزياتو(برعلاوه؟) ځانګړ شوو خويونو له لارې منځ ته راځي. که د حقيقي توابعو $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} ,$ وکتورفضا په پام کې ونيسو، نو د بېلګې په توګه جوړه توابع $f(x) = f(-x)$ د ټولو $x \in \mathbb{R}$ لپاره يوه برخفضا جوړوی. نورې بيلګې همداسې معکوسې بېلګې په لاندې جدول کې ورکړې شوي دی.

لاندې فضا	خويونه
هو	ناجوړه
ja هو	بند يا مخدود
نه	يوغږيز
هو	نابرېکيدونکي
نه	مثبت
هو	ګربنيز

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

(c) ketabton.com: The Digital Library

د يوه K -وکتورفضا د هر وکتور $d \neq 0$ لپاره د صفر څخه تيرېدونکي کربښه $v = \lambda d, \quad \lambda \in K$ يوه لاندې – يا برخفضا جوړوي.

په هر حالت يوه کربښه چې له صفر 0 نه تيريږي، لاندې يا برخفضا نه ده. د بېلګې په توګه

$$g : x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mu \in \mathbb{R},$$

$(1,0)^t$ په کربښه

پرته ده، مګر $(2,0)^t$ نه.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

ګربنيز کمبينيشن Linearkombination

په يوه K - وکتورفضا V وکتورونو $v_1, v_2, \ldots, v_m$ لپاره سړی

$$\lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 + \cdots + \lambda_m \cdot v_m = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot v_i$$

د سکالارو $\lambda_i \in K$ سره د وکتورونو v_i ګربنيز کمبينيشن بولي يا نوموي.

په ټوليزه توګه د $W \subset V$ لپاره د W څخه کربنيز کمبينېشن لاندې ، د W څخه د ناپاى ډېرو وکتورونو يو کربنيز کمبينېشن پوهيږو.

ليکونکي: اپپ، کيمرلې

(c) ketabton.com: The Digital Library

وکتور $v = (1,2,3)^t$ د وکتورونو $v_1 = (3,4,5)^t,\ v_2 = (1,1,1)^t,$ یو کرښیز کمبینېشن دی، ځکه چې $v = v_1 - 2v_2$.

د دې برعکس $v = (1,0)^t$ د وکتورونو $v_1 = (0,1)^t,\ v_2 = (0,2)^t,$ کرښیز کمبینېشن نه دی.ځکه چې د v_1 او v_2 کرښیز پولینوم بڼه $(0,*)^t$ لری..

بالاخره کېدی شي $v = (0,0,0,0)^t$ په مختلفو ډولونو د وکتورونو

$$v_1 = (1,1,0,0)^t,\ v_2 = (0,2,2,0)^t,\ v_3 = (0,0,3,3)^t,\ v_4 = (4,0,0,4)^t$$

کرښیز کمبینیشن په څیر انځور شي:

$$v = \lambda(12v_1 - 6v_2 + 4v_3 - 3v_4)$$

د $\lambda \in \mathbb{R}$ سره.

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

کرښیزه هیولې یا سپاین یا سمڅ Lineare Hülle(span)

یادونه: د په یوه فضا کې د خوندې شیالنو او د باندې په منځ کې یو دیوال جوړوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د K - وکتورفضا V د وکتورونو $v_1, \dots, v_n$ ټولو ګرښيزو کمبينېشنونو ډېرۍ د وکتورونو v_i کرښيزه سپاين يا هيولې(يو څه يا کوټی يا ...و چې په فضا کې يو ځا رابندوي (ژباړی)) بلل کيږي او داسې يې په نخښه کوو:

$$\operatorname{span}(v_1, \dots, v_n) = \{\sum_{i=0}^{n} \lambda_i \cdot v_i : \lambda_i \in K\}.$$

په ورته توګه سرۍ د $\operatorname{span}(U)$ وکتورونو د يوې ډېرۍ U لپاره د U د ټولو کرښيزوکمبينېشنونو ډېرۍ تعريفوی..

$\operatorname{span}(U)$ د هرې برخډېرۍ $U \in V$ لپاره د V يو برخفضا ده.

ليکونکي: اپ، کيمرلې

که په $\mathbb{R}^3$ کې دوه مختلفې د سرچينې کرښې g_1 او g_2 په پام کې ونيسو، د بېلګې په توګه

$$g_1 : x = \lambda_1(1,0,0)^t,\ g_2 : x = \lambda_2(0,1,0)^t, \quad \lambda_i \in \mathbb{R},$$

دا هريو د لوريزو وکتورونو کرښيزه سپاين يا ګرښيزه هيولې دي، دلته

$$v_1 = (1,0,0)^t,\ v_2 = (0,1,0)^t\,.$$

نو د وکتورونو v_1 او v_2 کرښيزه هيولې يا سپاين $E = \operatorname{span}(v_1, v_2)$ يوه سطحه ده، چې کرښې g_1 او g_2 خوندي لري، پس دلته

$$E : x = \lambda_1(1,0,0)^t + \lambda_2(0,1,0)^t, \quad \lambda_i \in \mathbb{R}\ ,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

همداسې

$$E = \{x : x_3 = 0\}$$

لیکونکي اپ، هیولیک

ننوتی – یا محدب کمبینیشن Konvexkombination

په یوه حقیقي وکتورفضا V کې یو کربنیز کمبینیشن

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_m v_m$$

د $\lambda_i \geq 0, \quad \sum_i \lambda_i = 1$ سره د وکتورونو $v_i \in V$ کنوکسکمبینیشن بلل کیږي.

لیکونکي اپ، هیولیک

ننوتی یا محدبه هییولې یا سپاین(المانی وبینه :شپاین)Konvexe Hülle

د یوه حقیقي وکتورفضا V د یوې برخډېرۍ M محدبه هیولې د ټولو محدب کمبېشنونو

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_m v_m \qquad (\lambda_i \geq 0, \sum_i \lambda_i = 1)$$

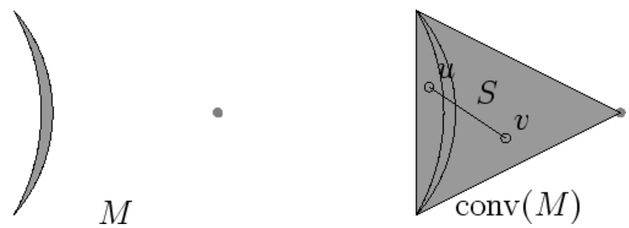
ډېرۍ ده د $v_i \in M$ سره او د $\operatorname{conv}(M)$ سره لیکل کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځمککچيز يا هندسي $\text{conv}(M)$ خورا کوچنی ډېری ده، چې M خوندی لري، کومه چې د هرو دوه توکو u, v لپاره د هغو ترنکرښه

$$S = \{\lambda u + (1-\lambda)v : 0 \leq \lambda \leq 1\}$$

هم خوندی لري



ليکونکي اپ، هيوليک

حقيقي- ياريښتونی سکالار ضرب Reelles Skalarprodukt

په يوه حقيقي وکتور فضا V باندې يو سکالارضرب يو تابع

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$$

ده، دلاندې خويونو سره:

مثبتوالی :

$v \neq 0$ د $\langle v, v \rangle > 0$ لپاره.

سيومتري:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\langle u,v\rangle = \langle v,u\rangle$$

کرښیزوالی:

$$\langle \lambda u + \varrho v, w\rangle = \lambda\langle u,w\rangle + \varrho\langle v,w\rangle$$

دلته $u,v,w \in V$ او $\lambda,\varrho \in \mathbb{R}$ په خوښه وکتورونه هړداسي سکالار.

د سیومتري په بنسټ یو حقیقي سکالار ضرب د دویم دلیل په بنسټ هم کرښیز دی، یعنې په V یو بي کرښیزه Bilinearform بڼه.

لیکونکي اپ، هیولیک، کرایخ

سکالار ضرب Skalarprodukt

په یو کمپلکس وکتورفضا V یو سکالار ضرب یو فنکشن

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times V \to \mathbb{C}$$

دی، د لاندې خویونو سره:

مثبتوالی:

$\langle v,v\rangle > 0$ د $v \neq 0$ لپاره.

مائل سیومتري:

$$\langle u,v\rangle = \overline{\langle v,u\rangle}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

كرښيزوالی:

$$\langle \lambda u + \varrho v, w\rangle = \lambda\langle u, w\rangle + \varrho\langle v, w\rangle$$

له دې سره $u, v, w \in V$ همداسې $\lambda, \varrho \in \mathbb{C}$ په خوښه وکتورونه همداسې سکالار دي.

مایل سیومتریکSchiefsymmetrie :

كرښيزوالی:

$$\langle \lambda u + \varrho v, w\rangle = \lambda\langle u, w\rangle + \varrho\langle v, w\rangle$$

له دې سره $u, v, w \in V$ او $\lambda, \varrho \in \mathbb{C}$ په خوښه وكت.ورونه همداسې سكلار دي

د مائل سیومتري په اساس یو کمپلکس سکالارضرب نسبت و دویمي متحولې ته ګرښيز نه دی:

$$\langle u, \lambda v + \varrho w\rangle = \overline{\lambda}\langle u, v\rangle + \overline{\varrho}\langle u, w\rangle\,.$$

فقط د حقیقي سکالار لپاره کمپلکس کونجوګېشن بې مفهومه دی.

ليکونکي اپ، هیولیک، کرایخ

دا ترې لاس ته راغلې اسیومتري اړیین ده، چې د کمپلکس سکالارضرب مثبتوالی تضمینوي. د بېلګې په توګه دی:

$$\langle \mathrm{i}v, \mathrm{i}v\rangle \neq \mathrm{i}^2\langle v, v\rangle = -\langle v, v\rangle < 0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $v \neq 0$ لپاره.

له دی زیات صدق کوي:

$$\langle \mathrm{i}v, \mathrm{i}v \rangle = (\mathrm{i}\bar{\mathrm{i}})\langle v, v \rangle = \langle v, v \rangle > 0 .$$

مثبتوالی اړیین دو چی له $|v| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$ لارې ئو نورم تعریف کړاي شو.

لیکونکي هیولیک، هیورنر

د وکتورونو $x, y \in \mathbb{R}^2$ لپاره یوه دحقیقي سکالار ضربونو د ممکنه تعریفونو لړی تر څېړنې نیسو. په لاندې جدول ورکړ شوي، چې کوم خویونه پوره دي.

خویونه	سکالار ځل
ټول	$10x_1y_1 + x_2y_2$
کربنیزوالی	x_1y_2
مثبتوالی، سیومتري	$\lvert x_1y_1 \rvert + \lvert x_2y_2 \rvert$
سیومتري	$x_1x_2 + y_1y_2$

فقط لومړی تعریف ټول غوښتوني شرايط پوره کوي. په کملکس وکتورفضا $\mathbb{C}^2$ کې په هر ډول دا حالت نه دی، هم مثبتوالی او هم مائل سیومتري پوره نه دي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\langle(\mathrm{i},0),(\mathrm{i},0)\rangle = \qquad 10\mathrm{i}^2 = -10 < 0$$

$$\langle(\mathrm{i},0),(1,0)\rangle = 10\mathrm{i} \neq \overline{\langle(1,0),(\mathrm{i},0)\rangle} = -10\mathrm{i}$$

په داسې حالت کې چې د دويم Arguments اجزا وې يا کمپوننتونه کمپلمس کنجوګيرت کړي، پرابلک له منځه تلاي شي. تعريف

$$\langle x,y\rangle = 10x_1\bar{y}_1 + x_2\bar{y}_2$$

په کمپلکس حالت غزونه راکوي.

ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

د کوشي-شوارڅ – نامساوات(نابرابرون)

Cauchy-Schwarz-Ungleichung

سکالار ضرب کېدی شي د اسوڅياتيو قانون له مخې تخمين شي:

$$|\langle u,v\rangle| \leq |u||v|, \quad |w| = \sqrt{\langle w,w\rangle}\,.$$

مساوات ټيک هلته صدق کوي، که صدق ولري $u \parallel v$.

که $v = \lambda u$ وي، لکه څنګه چې غوښتل کيږي مساوات صدق کوي.

د u همداسې د v ضرب د يوه سکالار سره نامساوات تغير نه خوري. کېدی شي ونيسو(فرض کړو) چې صدق کوي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$|u|^2 = |v|^2 = 1\,.$$

که د سکالار ضرب سره (دليل حقيقي حالت په بر کې نيسي) دي

$$\langle u, v\rangle = r\exp(\mathrm{i}\varphi)\,, \quad r > 0\,,$$

د $\lambda = \exp(\mathrm{i}\varphi)$ سره د ناغبرګو(ناموازي) وکتورونو لپاره لاس ته راځي

$$\begin{aligned} 0 &< \langle u - \lambda v, u - \lambda v\rangle \\ &= 1 + \lambda\bar{\lambda} - \lambda r\overline{\exp(\mathrm{i}\varphi)} - \bar{\lambda} r\exp(\mathrm{i}\varphi) \\ &= 1 + 1 - r - r\,. \end{aligned}$$

له دې سرره $r = |\langle u, v\rangle| < 1$ باور لري، ده په دې معنا چې غوښتنه مو.

نورم Normر ډوليزوال

په يوه حقيقي يا کمپلکس وکتورفضا V نورم يا تابع $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ ده

د لاندې خويونو سره:

مثبتوالی:

$\|v\| > 0$ د $v \neq 0$ لپاره.

هوموګينيوالی يا برابيرډوليزوالی Homogenität :

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\|\lambda v\| = |\lambda|\|v\|$$

درېګوډې (مثلث-) نامساوات:

$$\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$$

د لته u, v په خوښه وکتورونه دي او λ يو په خوښه سکالار.

دد نورم $d(u,v) = \|u-v\|$ په مرسته کېدی شي د دوه وکتورونو ترمنځ واټن تعریف شي.

د سکالار ضرب نورم Skalarprodukt - Norm

په یوه حقیقي یا کمپلکس وکتورفضا V د یوه سکالار ضرب سره ، نورم له

$$|v| = \sqrt{\langle v, v\rangle}, \quad v \in V$$

سره په یوه معنا دی.

مثبتوالی او هوموګینیتي (ورته والی) تړلې د سکالارضرب د ورته خویونو څخه لاس ته راځي. د مثلث مساوات له

$$|u+v|^2 = \langle u+v, u+v\rangle$$

$$= \langle u,u\rangle + \underbrace{\langle u,v\rangle + \overline{\langle u,v\rangle}}_{\in\mathbb{R}} + \langle v,v\rangle$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\leq |u|^2 + 2|\langle u,v\rangle| + |v|^2$$

$$\overset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} |u|^2 + 2|u||v| + |v|^2$$

$$= (|u| + |v|)^2$$

ثخه د ریښې نیونې له لارې لاس ته راځي.

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

ماکسیموم - نورمMaximum-Norm

د وکتورونو فضاو $\mathbb{R}^n$ او $\mathbb{C}^n$ لپاره

$$||z||_\infty = \max_i |z_i|$$

ماسکیموم – نورم په نخښنه کوي.

دریګوډي نامساوات پوره دي، ځکه چې د $z = x + y$ لپاره باور لري

$$\max_i |z_i| = \max_i |x_i + y_i| \leq \max_i (|x_i| + |y_i|) \leq \max_i |x_i| + \max_i |y_i| \, .$$

ماکسیموم-نورم کېدی شي د وزنونو $w_i \in \mathbb{R}_+$ د پیل کولو یا رامنځ ته کولو سره تولیز شي:

$$||z||_{\infty,w} = \max_i (w_i |z_i|) \, .$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د حقيقي- يا ريل وكتورونو سكالار ضربSkalarprodukt reeller Vektoren

د وكتورونو $v = (v_1, \ldots, v_n)^{\mathsf{t}}, w = (w_1, \ldots, w_n)^{\mathsf{t}} \in \mathbb{R}^n$ لپاره كانونيكي ضرب د

$$v^{\mathsf{t}}w = \sum_{i=1}^{n} v_i w_i = v_1 w_1 + \cdots + v_n w_n$$

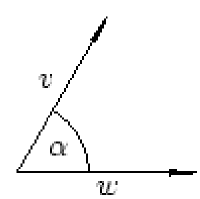
سره تعريف دی د وركډشوي assoziierten نورم

$$|v| = \sqrt{v_1^2 + \cdots + v_n^2}\,.$$

سره.

$$v^{\mathsf{t}}w = |v||w| \cos \alpha$$

هندسي كېدی شي دا نورم د له لارې تعريف شي، د v او w ترمنځ كوچنی زاويه يا كونج α په نخښه كوي، چې د u او v څخه غزيدلې سطحې كې اندازه كيږي.



د سكالار ضرب خويونه ساده ازمايل كيږي.

د هدسي تعريف ورته والی د كوساين جلې سره تصديقيږي(لومړی د $n = 2$ لپاره).

دې پسې د $v = (v_1, v_2)^{\mathsf{t}}$ او $w = (w_1, w_2)^{\mathsf{t}}$ سره باور لري، چې

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$|v-w|^2 = |v|^2 + |w|^2 - 2|v||w|\cos\alpha\ .$$

که ځاي په ځاي کړو، نو ترې لاس ته راځي

$$(v_1-w_1)^2 + (v_2-w_2)^2 = v_1^2 + v_2^2 + w_1^2 + w_2^2 - 2|v||w|\cos\alpha$$

او د بنه بدلو سره ښونه يا ثبوت.

د $n \geq 2$ لپاره v او w په $\mathbb{R}^n$ کې يوه سطحه اواره(هواروي) وي يا غزوي. ورته شمېرنه په دې سطحه کې ښايي، چې د په خوښه ډيمنزيونون (ابعادو يا پراخېدونو) $n \geq 2$ لپاره تيک دی.

د کمپلکس وکتورونو سکالار ضرب Skalarprodukt komplexer Vektoren

د وکتورونو $x=(x_1,\ldots,x_n)^t, y=(y_1,\ldots,y_n)^t \in \mathbb{C}^n$ لپاره کانونيکي

سکالار ضرب د $y^*x = \sum_{j=1}^{n} x_j\bar{y}_j$ له خوا تعريف دی د شسوخيري نورمونو

$$|z| = \sqrt{|z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2}\,.$$

سره.

دا سوپرسکريپت له دې سره د يوه وکتور ترانسپوزيشن او کمپلکس کنجوکېشن په ګوته کوي.

دا تعريف حقيقي حالت خوندي لري، چې په هغو کې کمپلکس کنجوګيري حالت پوره وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x = \begin{pmatrix} 1+2\mathrm{i} \\ -2-\mathrm{i} \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 2 \\ 2\mathrm{i} \end{pmatrix}$$

که له $\mathbb{C}^2$ څخه د وکتورونو
سکالارضرب جوړوو، نو لاس ته راځي:

$$\langle x, y\rangle = (1+2\mathrm{i})\cdot 2 + (-2-\mathrm{i})\cdot \overline{2\mathrm{i}} = 2+4\mathrm{i}+4\mathrm{i}+2\mathrm{i}^2 = 2+8\mathrm{i}-2 = 8\mathrm{i}\,.$$

پس د دوه کمپلکس وکتورونو سکالار ضرب اړیین نه دی چې حقیقي وي.

د اسوڅییري نورم سره د دویم وکتور کنجوګیري کونه غوره رول لري. بې له کنجوګیري کونې څخه به په ضرب کې لومړي وکتور لاندې نورم لرودی

$$\sqrt{(1+2\mathrm{i})^2 + (-2-\mathrm{i})^2} = \sqrt{1+4\mathrm{i}-4+4+4\mathrm{i}-1} = \sqrt{8\mathrm{i}} \notin \mathbb{R}\,,$$

او د دویم وکتور لپاره به په همدې ډول نورم نامثبت وی:

$$\sqrt{2^2+(2\mathrm{i})^2} = \sqrt{4-4} = 0 \not> 0\,.$$

د دوه وکتورونو ترمنځ کونج Winkel zwischen Vektoren

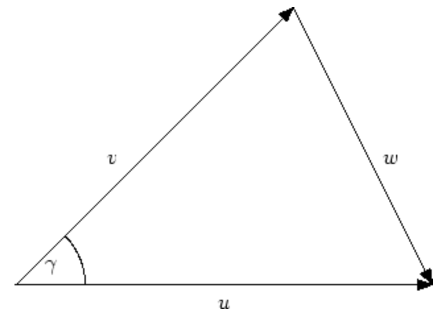
$$\cos\sphericalangle(u,v) = \frac{\langle u, v\rangle}{|u||v|}$$

د یوه حقیقي سکالار ضرب لپاره د لخوا

په $[0,\pi]$ کې د u او v ترمنځ یوکونج تعریفوي. په ځانګړې توګه u او v اورتوګونال، $u \perp v$ ، بولو که $\langle u, v\rangle = 0$ ولرو.

د کونج تعریف په $\mathbb{R}^2$ کې د وکتورونو لپاره د کوساین له مخې رابولي:

(c) ketabton.com: The Digital Library



په یوه درېګوډي یا مثلث کې د اړخونو $|u|, |v|, |w|$ اوږدوالي لپاره اړیکې باور لري:

$$|w|^2 = |u|^2 + |v|^2 - 2|u||v| \cos \sphericalangle(u, v) \, .$$

له بلې خوا د سکالار ضرب له تعریف څخه

$$|w|^2 = |v - u|^2 = |v|^2 + |u|^2 - 2\langle u, v\rangle \, ,$$

د کونج تعریف د پرتلې له لارې لاس ته راځي.

د په خوښه حقیقي سکالارضرب لپاره د کوشي-شورڅ-مساوات په بنسټ لرو:

$$\frac{\langle u, v\rangle}{|u||v|} \in [-1, 1] \, .$$

وښ کېدی شي په $[0, \pi]$ کې د یوه کونج د کوساین سره برابر کېښوول شي یا ځای په ځاي شي.

د پیتاګوراس(فیثاغورث) جمله Satz des Pythagoras

د یوه سکالارضرب-نورم د اورتوګونال یا عکود وکتورونو u او v لپاره

$$|u + v|^2 = |u|^2 + |v|^2 \, .$$

باور لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

باور لري

$$|u+v|^2 = \langle u+v, u+v\rangle = \langle u,u\rangle + \underbrace{\langle u,v\rangle}_{=0,\ \text{da}\ u\perp v} + \underbrace{\langle v,u\rangle}_{=0,\ \text{da}\ v\perp u} + \langle v,v\rangle =$$

$$= |u|^2 + |v|^2 .$$

دا حمله د پيتاګوراس جملې تر نامه شهرت لري(569-475 v. Chr)، سره له دې چې دا له دې 1000 کاله د مخه بابليانو پېژندله.

امکان لري، چې پيتاګوراس به لومړنی وو، چې دا جمله يې ثبوت کړې.

د پيتاګوراس درېګونيPythagoräisches Tripel

د پيتاګوراس درېګونو سره درې طبيعي اعداد l, m, n بلل کيږي، د $l^2 + m^2 = n^2$, سره، د بېلګې په توګه $(3,4,5)$.

يو مثلث چې د اړخونو اوږدوالي نسبت يې د پيتاګوراس درېګونې پوره کوي، د پيتاګوراس جمله پوره کوي او له دې امله دا ولارګوډيز يا ولاړکونجيز او که غواړی قايم االزاويه دي.

مصريانو ممکن دا د ولاړګوډ د لاس ته راوړلو لپاره کارولی وي: دوي د يوې رسی يا پړي څخه کار رخسته، چې رابند او ۱۲ ګنډې د برابر يون (واحد)اوږدوالي سره درلودې. که دې رسی يو درېګوډی داسې جوړ شي، چې اخونه يې درې، څلور، پنځه يوونه يا واحده اوږده وي، نو د لنډو اړخونو ترمنځ پروت کوج ولاړ يا عمود دی.

هر ناجوړه يا طاق عدد $l \geq 3$ کېدی شي د عددونو $m = (l^2-1)/2$ او $n = (l^2+1)/2$ سره د يو پيتاګوراس درېګوني ته پوره يا مکمل شي، ځکه چې

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$l^2 + \frac{l^4 - 2l^2 + 1}{4} = \frac{l^4 + 2l^2 + 1}{4} = \left(\frac{l^2 + 1}{2}\right)^2 .$$

د دې درېګوني له 2 سره ضرب له لارې يو درېګونی لاس ته راځي، د هر ټول عدد $l \geq 6$ لپاره.

دا ورکړ شوی جوړخت اصول د يوې طريقې ځانګړی حالت دی، کزمه چې د ؛بينوم د دريم فرمول خڅه لاس ته راحي، [که چې له

$$c^2 - b^2 = (c - b)(c + b) = a^2$$

لاس ته راځي، که a^2 په دوه مختلفو ضريبونو تجزيه کېدی شي، چې يو يې جوړه $(= 2b)$
کمښت يا تفريق ولري. د ناجوړه يا طاق $a = l$ لپاره دا ټوټه کونه
$a^2 = a^2 \cdot 1$ پوره ده. لاس ته راوړو:

$$b = \frac{a^2 - 1}{2}\ , \quad c = \frac{a^2 + 1}{2}$$

او له دې سره دا پورته ځانګړی حالت.

کربنيز نابلواکوالی يا خپلواکوالی يا نا تابعيت Lineare Unabhängigkeit

وکتورونه $v_1, \ldots, v_m$ کربنيز بلواک بللکيږي، که سکالار $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ شتون ولري د
$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_m v_m = 0$

او لږ تر لږه يوه $\alpha_i \neq 0$ سره. په بل حالت کې کربنيز خپلواک بلل کيږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په ټولېږه توګه د وکتورونو يوه ډېری M کرښيز نا بلوک يا خپواکه بلل کيږي، که د M هره پاي برخډېرۍ د کرښيز نا بلوک يا خپلواکه وکتورونو څخه جوړه وي. په بل حالت کې M کرښيزه بلواکه پلل کيږي.

په پام کې دې وې، چې د کرښيز الجبر په موخه په حقيقت کې ناپاي ډېريو ته اجازه ورکړ شوې، مګر فقط ناپاي کرښيوږو کمپينيشنونو ته. د بېلګې په توګه د پرلپسيو وکتورفضا ډېريو کې

$$e=(1,1,\ldots)^t,\ e_1=(1,0,0,\ldots)^t,\ e_2=(0,1,0,\ldots)^t,\ \ldots$$

کرښيز خپلواک دی، سره له دې چې

$$e=\sum_{n\in\mathbb{N}} e_n\ .$$

دي.

د ثابتو پرلپسيو يا ترادفونو د کانونيکي يوون- يا واحدوکتورونو سره پاي انځورونه نه شته.

په $\mathbb{R}^2$ کې دوه وکتورونه تيک هلته کرښيز خپلواک دي، که يو هم د بل ډېر واره نه وي، د بيلګې په توګه ږکتورونه $(1,0)^t$ او $(1,1)^t$ کرښيز خپلواک دي، ځکه چې ايښوونه

$$\alpha(1,0)^t+\quad\beta(1,1)^t=(0,0)^t$$

راکوي

$$\beta= \qquad\qquad \alpha=0\ .$$

همداسې

(c) ketabton.com: The Digital Library

برعکس وکتورونه $(0,0)^t$ او $(2,3)^t$ کرښيز بلواک دي، که

$$0(2,3)^t = (0,0)^t$$

همداسې:

$$1(0,0)^t + 0(2,3)^t = (0,0)^t;$$

پس د صفر وکتور يو ،،نه ترېويال،، يا ساده انځورونه شتون لري.

په $\mathbb{R}^2$ کې د رې وکتورونه u, v, w تل کرښيزبلواک يا تابع دي، ځکه چې لاندې ځاي په ځاي کونه

$$\alpha u + \beta v + \gamma w = 0$$

کښته ټاکلي لاينيز هوموجين سيستم ته مو لاربښودوي

$$\alpha u_1 + \beta v_1 + \gamma w_1 = 0$$

$$\alpha u_2 + \beta v_2 + \gamma w_2 = 0$$

د α, β, γ لپاره، چې تل يو ناساده حل لري

لکه په دوه بعدي همداسې په $\mathbb{R}^3$ کې دوه بعدي وکتورونه کرښيز بلواک دي، که دا غبرګ(موازي) وي، دا په دې معنا چې که يو وکتور د بل وکتور څو ځله وي.

درې وکتورونه کرښيز بلواک دي، که دوه وکتورونه غبرګ يا موازي وي يا که يو وکتور له دې نورو دوه وکتورونو غزېدلې سطحه کې پروت وي. د بېلګې په توګه د لاندې لپاره باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$u = (1, 2, -3)^t,\ v = (4, -6, 2)^t,\ w = (-9, 3, 6)^t$$

لپاره باور لري

$$6u + 3v + 2w = (0, 0, 0)^t$$

، پس وکتورونه کرښيز بلواک دي.

د تعريف سره سم د کرښيز بلواکوالي لپاره ازمايښت ورته دی يوه هوموجېن کرښيز مساواتسيستم سره

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \cdots + \lambda_n \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

د سکالار λ_i لپاره. دا په ځانګړي توګه ښايي، چې څلور وکتورونه په $\mathbb{R}^3$ کې تل ګرښيز بلواک يا تابع دي.

بنسټ Basis

د يوه وکتور فضا V برخډېری B د وکتور V يو بنسټ بلل کيږی، که B کرښيز خپلواکه وي او د V يو توليدېدونکی يا جړوېدوکی سيستم وي، دا په دې معناچې که هر وکتور $v \in V$ يو يواځنی انځورونه د يوه پای کمبينېشن د $v = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i b_i$ $b_i \in B$ سره لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

که B پای $(|B| = n)$ وي ، نو هر وکتور کېدی شي د يوه وضعيه قېمت له لارې سره نسبت و بنسټ ته وليکي:

$$v \leftrightarrow v_B = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)^t .$$

د وضعيه قيمت انځوروني

$$v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i \leftrightarrow v_B = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)^t ,$$

سره ، دا په نامه کانونيکي ايزومورفيزم، سرې کړی شي يو پای بعدي K -وکتورفضا V د n–ګونی وکتور فضا K^n سره په نخښه کړی شي يا وپېژندلی شي. په ځانګړې توګه کېدی شي چې د پای حقيقي او کمپلکس وکتوري فضا د د لوستلو سره په پروتو تيوپ $\mathbb{R}^n$ او $\mathbb{C}^n$ ځان محدود يا رابند کړي.

لکه د بېلګې په توګه د پولينومونو وکتور فضا يدلکيږي، اړيين نه ده چې وکتورفضا دې پای بنسټ ولري. مګر د د کرښيز الجبر په ساحه کې پای کرښيز کمپېشنونه تر څېړنې لاندې نيول کيږي. د دې لاس ته رځي، چې پرلپسې

$$e_1 = (1, 0, 0, \ldots)^t,\ e_2 = (0, 1, 0, \ldots)^t, \ldots$$

د پرلپسيو د وکتورفضا لپاره بنسټ نه جوړوي. دا د ناپای کرښيز کمبينېشن مطالعه يا راوړنه ، لکه دا چې څنګه په فوريې لړيو کې رامنځ ته کيږي، په لاس لرو، خو يوه کونورکنځ يا پولې ته يوه تګ کليمه غواړي، يعني د فقط وکتورفضاجوړښت څخه زيات.

بعد يا پراخيدونی Dimension

(c) ketabton.com: The Digital Library

که یو وکتورفضا V یو پاي بنسټ $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ ولری، نو د بنسټ وکتورونو ګڼون یا تعداد یواځنی ټاکلی او د V بعد یاپراخېدونی بلل کیږي:

$$n = \dim V \ .$$

د $V = \{0\}$ لپاره لیکو $\dim V = 0$ او $\dim V = \infty$ د یو ناپای بنسټ وکتورفضا لپاره.

د ټولیز بنسټ جملې له مخې هر وکتورفضا یو بسټ لری.

د دې لپاره چې وښایو، چې بعدونه یا پراخیدوني یواځني ټاکلی دي، بسیا کوی، چې لاندې وبینه وښایو:

که یوه وکتورفضا n-توکیزه بنسټ

$$b_1, \ldots, b_n \ ,$$

ولري، نو $n+1$ وکتورونه

$$v_1, \ldots, v_{n+1}$$

(او له دې سره د $n+1$ څخه زیات وکتورونه هم) کرښیز بلواک دي.

که دوه بنسټونه د مختلفو ډېرو وکتورونو سره شته وي، نو د بنشټوکتورونه به کرښیز خپلواکوالی ته یو تضاد لاس ته راشي.

پورتنۍ غوښتنه یا ثبوت کیدی شي د n پسې د ایندکشن له لارې و ښوول شي.

د ایندکشن پل لپاره (اندکشن پیل $n = 1$ ساده دی) که د وکتورونو v_i بنسټ انځورونه راواخلو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$v_i = \sum_{j=1}^{n} \gamma_{i,j} b_j, \quad i = 1, \ldots, n+1 .$$

.

باور لري:

$$\gamma_{i,1} = \cdots = \gamma_{i,n} = 0,$$

،

نو دی ، او کرښيزبلواکوالی همدا اوس و ښوول شو. نو کيدی شي د مناسب نمره کولو له لارې ونيسي، چې $\gamma_{n+1,n} \neq 0$. له پورته مساوات څخه په راوتنې يا پيل سرې اوس ومتورونه تعريفوي، کوم چې د $n-1$ وکتورونو $b_1, \ldots, b_{n-1}$ څخه د کرښيز کمبينيشن په څير انځوريدلای شي:

$$v_i' = v_i - \frac{\gamma_{i,n}}{\gamma_{n+1,n}} v_{n+1}, \quad i = 1, \ldots, n .$$

دا چې د b_n صريب يا ځلونی ورکيږي، ساده کتل کيږي. دا چې

$$\mathrm{Span}\{b_1, \ldots, b_{n-1}\}, \quad v_1', \ldots, v_n' \in V' =$$

کيې شي سرې د ايندکشن نيونې(فرضيی) وکاروي او نه ساده کرښيز کمبينيشن لاس ته راوړي

$$\lambda_1 v_1' + \cdots + \lambda_n v_n' = 0 .$$

د بنه بدلون پسي د کرښيز کمبينيشن لاس ته راځي، نو له دې سره غوښتنونی بلواکوالی يا تابعيت.

ليکونکي: اپپ، هيوليک

(c) ketabton.com: The Digital Library

اورتوګونال یا ولاړ بنسټ Orthogonale Basis

یو بنسټ $B = \{u_1, \ldots, u_n\}$ اورتوګونال بلل کیږي، که وي:

$$\langle u_i, u_j \rangle = 0, \quad i \neq j\,.$$

که بنسټوکتورونه نورمي وي، دا په دې معنا چې $|u_i| = 1$ دي، نو د اورتوګونال سیستم یا اورتوګونال بنسټ څخه غږیږو.

یو وکتور v نسبت و یوه اورتوکونال بنسټ $u_1, \ldots, u_n$ ته انځورونه

$$v = \sum_{j=1}^{n} c_j u_j\,, \quad c_j = \frac{\langle v, u_j \rangle}{|u_j|^2}\,.$$

لري.

د ضریبونو c_j لپاره پاور لري

$$|c_1|^2 |u_1|^2 + \cdots + |c_n|^2 |u_n|^2 = |v|^2\,.$$

د یوه نورمي پنسټ لپاره ترمونه $|u_j|^2$ له منځه ځي. او له دې سره لاس ته راځي:

$$c_j = \langle v, u_j \rangle\,, \quad |c_1|^2 + \cdots + |c_n|^2 = |v|^2\,.$$

لیکونکي: اپپ، هیولیګ، کیمرلې

دا چې $u_1, \ldots, u_n$ یو بنسټ جوړوي، نو سکالا $c_1, \ldots, c_n$ د

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$v = \sum_{j=1}^{n} c_j u_j \ .$$

سره ښتون لري.

که د پورتني مساوات لپاره په خوښه سکالار ضرب د u_k سره جوړ کړو او د بنسټ دد اورتوګوناليټي څخه کار واخستل شي، نو لاس ته راځي

$$\langle v, u_k \rangle = c_k \langle u_k , u_k \rangle$$

همداسې

$$c_k = \frac{\langle v , u_k \rangle}{\langle u_k , u_k \rangle} \ .$$

د ضريبونو لپاره کټمټوالی د پيتاګوراس د جملي ($n = 2$) ټوليزونه ده. دا تړلې د

$$|v|^2 = \langle c_1 u_1 + \cdots + c_n u_n , c_1 u_1 + \cdots + c_n u_n \rangle \, ,$$

ضربولو څخه لاس ته راځي، که دې ته پام وشي، چې مخلوط ترمونه

$$\langle c_j u_j , c_k u_k \rangle , \quad j \neq k$$

د بنسټ وکتورونو د اورتوګوناليټي له امله ورکيږي

(c) ketabton.com: The Digital Library

ليكونكي: اپپ، هيوليګ

نسبت و اورتوګونال بنسټ

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \; u_2 = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

ته $v = (8,4)^t$ دا لاندې انځورونه لري

$$v = \frac{\langle v, u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} u_1 + \frac{\langle v, u_2 \rangle}{\langle u_2, u_2 \rangle} u_2 = \frac{8+12}{1+9} u_1 + \frac{-48+8}{36+4} u_2 = 2u_1 - u_2 \, .$$

د ضريبونو لپاره باور لري:

$$|2|^2 \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right|^2 + |-1|^2 \left| \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \end{pmatrix} \right|^2 = 4 \cdot 10 + 1 \cdot 40 = \left| \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix} \right|^2 .$$

نسپت و اورتوګونال پنسټ

$$u_1 = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}, \; u_2 = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix}, \; u_3 = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ته $v = (-1,1,3)^t$ لاندې انځورونه لري:

$$v = \langle v, u_1 \rangle u_1 + \langle v, u_2 \rangle u_2 + \langle v, u_1 \rangle u_1 = 3u_1 - u_2 - u_3 \, .$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ضريبونو لپاره باور لري

$$|3|^2 + |-1|^2 + |-1|^2 = \left| \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right|^2 .$$

ليکونکي: اپپ، هيوليک

اورتوګونال پروجکشن يا - پرپوستون Orthogonale Projektion

په يوه برخفضا U اورتوګونال پرپوستون

$$v \mapsto P_U(v) \in U$$

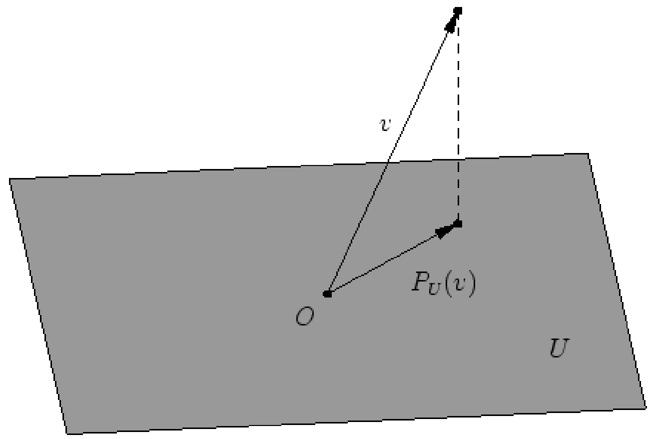
داورتوګوناليټي شرايط

$$\langle v - P_U(v), u \rangle = 0, \quad \forall u \in U$$

سره پيژندل شوی دی.

.

(c) ketabton.com: The Digital Library



که $u_1, \ldots, u_j$ د U یو اوتوګونال پنسټ وي، نو دی

$$P_U(v) = \sum_{k=1}^{j} \frac{\langle v, u_k \rangle}{\langle u_k, u_k \rangle} u_k \, .$$

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

له $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$ سره یوه هایپرسطحه $H \subset \mathbb{R}^4$ تعریف کیږي. د اوروتوګونال بنسټ لپاره کېدی شي لاندې وکتورونه وکارول شي:

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

نو د وکتور $x = (1, 2, 3, 4)^t$ د اورتوګونال پروجکشن لپاره لاندې باور لري:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$P_H x = \frac{x^t u}{|u|^2} u + \frac{x^t v}{|v|^2} v + \frac{x^t w}{|w|^2} w = \frac{-4}{4} u + \frac{-2}{4} v + \frac{0}{4} w$$

ليکونکي: هيوليک، کرايخ

د گرام-شميت تکلار يا قانون Verfahren von Gram-Schmidt

د يوه بنسټ $b_1, \ldots, b_n$ څخه کېدی شي، لکه په لاندې توگه، يو اورتوگونال بسټ $u_1, \ldots, u_n$ جوړ شي. دا سړی د $j = 1, \ldots, n$ لپاره سوکځيسيو تعريفوي:

$$u_j = b_j - \sum_{k<j} \frac{\langle b_j, u_k \rangle}{\langle u_k, u_k \rangle} u_k,$$

د $j = 1, \ldots, n$ لپاره.

دا رکورزيو ساده کيږي، که بنسټوکتور له هر پل(قدم) ورسته نورمي شي:

$$u_j \leftarrow \frac{u_j}{|u_j|}.$$

په دې خالت دي: $\langle u_k, u_k \rangle = 1$

ليکونکي: اپپ، هيوليک

سړی ايندوکتيو(له يوه څخه توليز ته) ښايي، چې $u_1, \ldots, u_l$ د $\operatorname{span}(b_1, \ldots, b_l)$ لپاره يو اورتوکونال بنسټ جوړزي.

د $l = 1$ لپاره دا روښانه دی: $u_1 = b_1$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ایندکشن پل $(l \to l+1)$ لپاره په پام کې نیسو، جې د $j \le l$ لپاره لرو

$$\langle u_{l+1}, u_j \rangle = \langle b_{l+1}, u_j \rangle - \sum_{k \le l} \frac{\langle b_{l+1}, u_k \rangle}{\langle u_k, u_k \rangle} \underbrace{\langle u_k, u_j \rangle}_{\delta_{k,j} |u_k|^2} = 0 \,.$$

له دې امله $u_1, \ldots, u_{l+1}$ اورتوګونال دي. بالاخره

$$b_{l+1} - u_{l+1} \in \mathrm{span}(u_1, \ldots, u_l) = \mathrm{span}(b_1, \ldots, b_l)\,,$$

دي، له کوم سره چې و ښوول شو، دواړه فضا همغه لاندې فضا غېږي یا خوروي.

لیکونکي: هیولیک، کرایخ

د دې لپاره چې نسبت سکالار ضرب یا څل

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x) g(x)\, dx$$

ته د پولینومونو $p_0, p_1, \ldots$ اورتوګونال پرلپسې(ترادف) جوړه کړو ٫کیدی شنلار

سرهي سړی د مونوم $q_j(x) = x^j$ څخه مخ ته لاړشي. د ګرامشمیت د تلنلار سره لاس ته راوړي.

$$p_0 = q_0$$

$$p_1 = q_1 - \frac{\int_{-1}^{1} x \cdot 1\, dx}{\int_{-1}^{1} 1 \cdot 1\, dx} \cdot 1 = x - 0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$p_2 = q_2 - \frac{\int_{-1}^{1} x^2 \cdot x\, dx}{\int_{-1}^{1} x \cdot x\, dx} \cdot x - \frac{\int_{-1}^{1} x^2 \cdot 1\, dx}{\int_{-1}^{1} 1 \cdot 1\, dx} \cdot 1 = x^2 - 0 \cdot x - \frac{1}{3}.$$

تولیزه بڼه

$$p_{n+1} = q_{n+1} - \sum_{j=0}^{n} \frac{\langle q_{n+1}, p_j}{p_j, p_j} \cdot p_j$$

کیدی شي کره نازکه یا نرمه شي، که سرې د $q_{n+1}(x) = x^{n+1}$ په ځای پولینوم $\tilde{q}_{n+1}(x) = x \cdot p_n(x)$ وکاروي. د

$$\text{span}\{p_1, \ldots, p_n, q_{n+1}\} = \text{span}\{p_1, \ldots, p_n, \tilde{q}_{n+1}\}$$

له امله دا قانوني دی. په دې حالت کې دې فقط زیاتوونی یا د جمعي غړی د $j = n - 1$ سره د صفر سره نا برابره وي.

د سیمتري په بنسټ د $j = n$ لپاره $\langle \tilde{q}_{n+1}, q_n \rangle = \int_{-1}^{1} x\, q_n(x)\, q_n(x)\, dx$

ورکيږي.د $j < n - 1$ لپاره $[x\, p_j(x)]$ د $p_k(x), k < n$ یوکرښیز کمبینیشن دی.

د $\langle p_n, p_n \rangle = 0$ له امله له دې سره

$$\langle \tilde{q}_{n+1}, p_j \rangle = \int_{-1}^{1} p_n(x)\, [x\, p_j(x)]\, dx$$

هم صفر دی.

په دې توګه لاس ته راوړل شوي پولینومونه د لجندر Legendre پولینومونه بلل کیږي. د یوه بل نومالي کوني سره

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$p_n(x) = \alpha_n x^n + \dots$$

د لاندې بڼې د دوه ترمونو ريکورزيون لرئ

$$p_{n+1}(x) = \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}(x - \beta_n)p_n(x) - \gamma_n p_{n-1}(x)$$

د $\beta_n = \frac{\langle xp_n, p_n \rangle}{\varrho_n}, \gamma_n = \frac{\alpha_{n+1}\alpha_{n-1}\varrho_n}{\alpha_n^2 \varrho_{n-1}}$ او $\varrho_n = \langle p_n, p_n \rangle$ سره

کرښيزه څيرونه (فنکشن يا تابع)Lineare Abbildung

د K–وکتور فضا V او W ترمنځ فنکشن $L : V \longmapsto W$ ګرښيز بلل کيږی، که دا لاندې خوبونه ولري:

- مثبتوالی

$$L(u+v) = L(u) + L(v)$$

-هوموګيپينوالی:

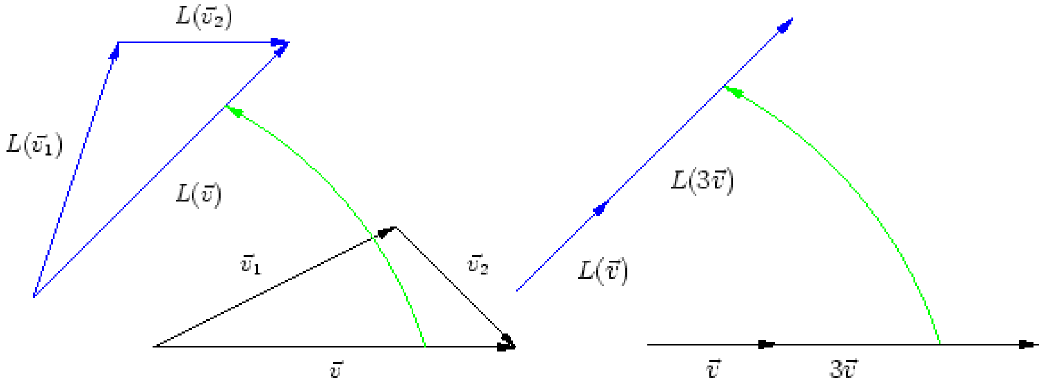
$$L(\lambda v) = \lambda L(v)$$

له دې سره $u, v \in V$ او $\lambda \in K$ په خوښه وکتورونه همداسې سکالار دي.

په ځانګړې توګه $L(0_V) = 0_W$ او $L(-v) = -L(v)$ باور لري.

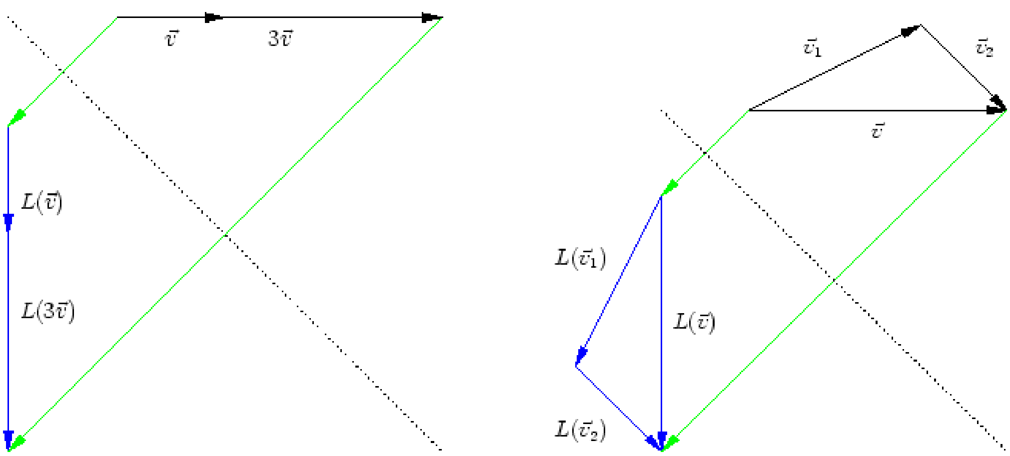
لکه په لاندې بيلګه کې به چې ښوول شي، يو څرخون کرښيز دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library



لکه جمعه یا زیاتون $v = v_1 + v_2$ د دواړو وکتورونو v_i سره یو مثلث یا درېګوډی جوړوي، چې د ده بڼه د څرخون سره بې تغیره پاتېږي، دا په دې معنا چې جمعه د مخه یا د څرخون سره جوړه شي. دا چې د ضریب λ سره غزونه د څرخون سره بدلیږي، بسي تړلی لیدل کیږي.

په ورته توګه ښوول کیږي چې هندارونه هم کرښیزه ده.



په سطحه کې د ټکو یوه راکښنه کرښیزه نه ده.

نه زاتونوالی یا جمعه کیدنه او هم نه هوموجینیتي پوره دي. د

$$T:\ (x_1, x_2) \mapsto (x_1 + 1, x_2)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

او

$$v_1 = (1, 0),\ v_2 = (0, 1),\ \lambda = 2$$

لپاره د بيلګي به توګه باور لري

$$T(v_1 + v_2) = (2, 1) \neq (3, 1) = T(v_1) + T(v_2)$$

$$T(\lambda v) = (3, 0) \neq \qquad (4, 0) = \lambda T(v)\ .$$

ليکونکي: هيورليک، هيوررنر

يو څو بيلګې لاندې د حقيقي توابعو يا فنکشنونو جدول ښايي. دلته هرچيرته ورکړ شوي، چې د کرښيزوالي لپاره کوم شرطونه پوره دي.

څيرونه يا فنکشن mapping	جمعي Additive	هوموجين homogen
$f \mapsto f'$	X	X
$f \mapsto \lvert f \rvert$	-	-
$f \mapsto \int_0^1 f$	X	X
$f \mapsto \max f$	-	-

(c) ketabton.com: The Digital Library

$f \mapsto f(0)$	X	X
$f \mapsto (\max f + \min f)/2$	-	X

د يوه فنکشن لپاره يوه بيلګه، زياتيز (مثبت) مګر هوموجېن نه دی، دادی، چې يو فنکشن T، چې يو کمپلکس ارزښتيزه تابع د هغې حقيقي برخه په ګوته کړي يا وښايی يا په هغې څېره شي. دلته باور لري: $T(\mathrm{i}f) \neq \mathrm{i}T(f)$

ليکونکي: هيورليګ، هيورنر

د کرښيزو توابعو کمپوزيشن Komposition linearer Abbildungen

د دوه کرښيزو توابعو

$$S : U \to V\,, \qquad T : V \to W\,.$$

لپاره سړی کمپوزيشن تعريفوي(چې يوبل پسې تړاو يا ځنزيرونه هم بلل کيږي)

$$T \circ S : \quad U \to W$$

دا د لاندې لاری

$$(T \circ S)(u) = T(S(u))\,,$$

دا په دې معنا چې په $u \in U$ باندې فنکشن S او په نتيجه باندې فنکشن T کارول کيږي، فنکشن T د فنکشن S پسې کارول کيږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دوه کربنیزو فنکشنونو کمپوزیشن بېرته کربنیز دی.

ماتریکس Matrix

په یوه تن یا جسم باندې د یوه $(m \times n)$ -ماتریکس تر نامه لاندې ($m, n \in \mathbb{N}$) دا لاندې یوه ولاړکډیزه - یا قام الزاویه شکل پوهیږو:

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} .$$

دلته دا د A وکتورونه $(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$ د i –مې لیکې – او $(a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj})^t$ د j –مې متې(ستن یا پرته لیکه یا درځ...) وکتورونه بلل کیږي. په ځانګړي توګه $(n \times 1)$ - ماتریکس یو د لیکې - او $(1 \times n)$ - ماتریکس یو د متې یا ستني وکتور دي..

د ټولو $(n \times m)$ - ماتریکسونو ټولګه په $K^{n \times m}$ سره په نخښه کیږي، حقیقي (کمپلکس) ماتریکسونه د $\mathbb{R}^{n \times m}$ ($\mathbb{C}^{n \times m}$) سره په نخښه کیږي.

لاندې بیلګې د مختلف د ماتریکس بعدونه یا پراخېدونی ښايي.

$$\begin{pmatrix} 31 \\ 57 \\ 97 \end{pmatrix} , \quad (\mathrm{i}, 1 + \mathrm{i}, -1, 3\mathrm{i}) , \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \mathrm{i} & 1 + \mathrm{i} & -\mathrm{i} \\ \sqrt{3} + 3\mathrm{i} & 7543 & 17 \end{pmatrix} , \quad \begin{pmatrix} 11 & 12 \\ 21 & 22 \\ 31 & 32 \end{pmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړي دوه ماتريکسونه د ليکو – همداسې د مټووکتورونه دي، دا په دې معنا چې د کومو څخه چې د يوې ديمنزيون 1 دی. بنې لور ته يو څلوريځ يا مربع ماتريکس او يو يو ولاړګوډيز- يا مستطيلي ماتريکس دی.

ليکونکي: هيورليګ، هيورنر

د يوه کرښيز فنکشن ماتريکس Matrix einer linearen Abbildung

د دوه K - وکتوروفضاو ترمنځ د بنسټونو $E = \{e_1, \dots, e_n\}$ او $F = \{f_1, \dots, f_m\}$ سره يو کرښيز فنکشن $L : V \longmapsto W$ دبنسټوکتورونو د $L(e_j) = a_{1,j} f_1 + \cdots + a_{m,j} f_m$ عکسونو يا ارزښت قيمتونو سره يواځني ټاکلي دي. دا لاندې دماتريکس انځورونه لری:

$$w_F = A v_E \longleftrightarrow w_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} v_j, \quad i = 1, \dots, m,$$

د کومو سره چې v_j او w_i د v او $w = L(v)$ وضعييه قيمتونه (کواورديناتونه) به نخښه کيږي نسبت و بنسټ E او F ته. د ماتريکس A په j-مه مټه کې د $L(e_j)$ کواورديناتونه يا وضعيه قېمتونه نسبت د F بنسټ ته ځا په ځای دي.

دا چې L د يوه بنسټ د عکسونو يا ارزښتونو سره يواځنی ټاکلي، تړلي د کرښيزوالي لپاره شرايطو څخه ورکول کيږي:

$$w = L(v) = L\left(\sum_j v_j e_j\right) = \sum_j v_j L(e_j) = \sum_j \sum_i v_j a_{i,j} f_i \,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ليکو

$$w = \sum_i w_i f_i$$

او د بنسټ وکتورونو w_i کواوردينات پرتله کيږي، داسې هم سړی غوښتل شوي د ماتريکسونو انځورونه لاس ته روړي.

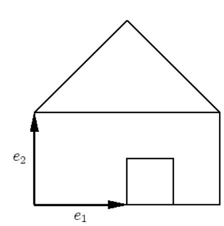
ليکونکي: هيوليګ، هيورن

په لاندې کې يو ځو د سطحې کرښيزې تابع

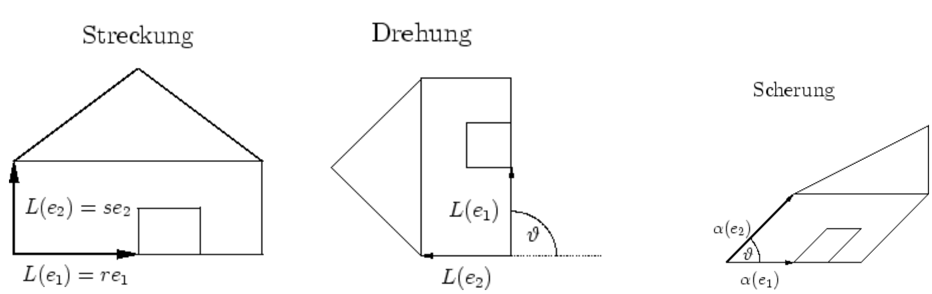
$$L:\ \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

انځور شوي دي، چې د يوون – يا واحد وکتورونو شکلونو يا بهتره ارزښتونو e_i (غوړ) له لارې کره شوي دي.

Urbild



$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

$$A = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & \cot\vartheta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

سړی کړی شي چې د ماتریکس A انځورونه نسبت کانونیکي بنسټونو e_1, e_2 ته ترلی معلومیږی یا لوستل کیږي. د ماتریکس متې هره یوه ځانله د وکتورونو $L(e_i)$ $i = 1,2$ ، کواوردیناتونه خوندی لري.

لیکونکي: هیولیګ، هیورن

یو کرښیز فنکشن یا تابع

$$x \mapsto p(x) = a_0 + a_1 x$$

په ټکو $x = 0, 1$ باندې د هغو ارزښتونو سره تاکلي. فنکشن

$$L : p \mapsto \begin{pmatrix} p(0) \\ p(1) \end{pmatrix}$$

کرښیز دی او کېدی شي نسبت د ضریب وکتورونو

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

له لارې تعریف شوي مونومبنسټ سره

(c) ketabton.com: The Digital Library

ركربنيز الج

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

له لارې انځور شي

كه بنسټ

$$p_1(x) = 1 - x, p_2(x) = x$$

استعمال شي، نو ماتريكس

$$\begin{pmatrix} p_1(0) & p_2(1) \\ p_1(0) & p_2(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ترې لاس ته راځي.

ټوليز د $\leq n$ درجې په m تكيه ځايون $x = x_1, \ldots, x_m$ كې د يوه پولينوم

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

ارزښتونه يا قيمت ټاكنه د واندرموند –ماتريكس Vandermonde-Matrix

$$V = \begin{pmatrix} x_1^0 & x_1^1 & \cdots & x_1^n \\ x_2^0 & x_2^1 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_m^0 & x_m^1 & \cdots & x_m^n \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} p(x_1) \\ \vdots \\ p(x_m) \end{pmatrix} = V \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

سره تشريح شوې يا وركړل شوې.

(c) ketabton.com: The Digital Library

کواورديناتونو ترانسفورميشن د بنسټ بدلون سره

Koordinatentransformation bei Basiswechsel

د يوه بنسټبدلون $E \to E'$ سره د يوه وکتور v کواورديناتونه د

$$v_E = Av_{E'} \quad \Leftrightarrow \quad v_{E'} = A^{-1}v_E \,,$$

سره سم ترانسفورمي کوي، د کوم سره چې د مربع ماتريکس A متې د بنسټ وکتورونو e_i' ضريبونه نسبت و بنسټ ته خوندي لري:

$$e_i' = \sum_j a_{j,i} e_j \,.$$

ليکونکي: هيوليګ، هيورن

وکتور v نسبت و بنسټ وکتور E او E' ته لاندې انځورونه لري:

$$\sum_k \lambda_k e_k = v = \sum_k \lambda_k' e_k' \,.$$

د e_k' د انځوروني په مرسته نسبت و بنسټ E ته لرو:

$$v = \sum_k \lambda_k' e_k' = \sum_k \lambda_k' \left(\sum_j a_{j,k} e_j \right)$$

$$= \sum_j \left(\sum_k a_{j,k} \lambda_k' \right) e_j = \sum_j \lambda_j e_j \,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د كواوردينات پرتلي سره لاس ته راځي: $v_E = A v_{E'}$

ليكونكی:ويپر

Bild او Kern معنا ځيره يا شكل او زړي

د يوه كرښيز تابع $L : V \to W$ لپاره د

$$\ker L = \{v \in V : \; L(v) = 0\} \; \subseteq V$$

سره سړی كرن يا زړی په نخښه كوي او د

$$\mathrm{Bild}\, L = \{w \in W : \; \exists v \in V$$

$$L(v) = w\} \; \subseteq W$$

د سره د L ارزښت يا شكل ښوول كيږي يا په نخښه كيږي.
دواړه ډېری(ستونه) لاندې – يا برخه فضاوې دي.

ليكونكی: كيمرلې

ثبوتوو چې د K –وكتورفضا V همداسې W نسبت و كرښيزو عملياتو ته تړلي يا رابند دي يعنی دا عمليات په كې بې بنديزه اجراكېدی شي.

اول - $\ker L$ د V لاندې فضا ده: د $u, v \in \ker(L), \; \lambda \in K$ لپاره، د كرښيزوالي په بنسټ باور لري:

$$L(\lambda\, u) = \lambda\, L(u) = \lambda\, 0 = 0$$

او

$$L(u+v) = L(u) + L(v) = 0 + 0 = 0\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دې په تعقيب λu او $u+v$ هم د $\ker(L)$ توکي دي.

دويم - $\operatorname{Bild} L$ د W لاندېفضا ده: د $u, v \in \operatorname{Bild} L$ لپاره د $u = L(x), v = L(y)$ او $\lambda \in K$ سره د L کرښيزوالي په بنسټ لاندې صدق کوي:

$$\lambda u = \lambda L(x) = L(\lambda x)$$

او

$$u+v = L(x) + L(y) = L(x+y) .$$

دا چې V يوه وکتورفضا ده، نو اړونده له مخ ښېروني يا عکسونه يا تابع وې هم شته او په تعقيب λu او $u+v$ هم د $\operatorname{Bild} L$ توکي دي.

ليکونکی: ويپر

د Bild او Kern ابعاد يا براخېدوني Dimension von Bild und Kern

د يوه کرښيز فنکشن $L : V \to W$ لپاره باور لري

$$\dim V = \dim \ker(L) + \dim \operatorname{Bild}(L) ,$$

که وي: $\dim V < \infty$

د دې لپاره چې د بعد کټمټوالی وښايو، نو د $\ker L$ لپاره يو بنسټ $E' = \{e_1, \ldots, e_m\}$ ټاکو او دا د $\{e_{m+1}, \ldots, e_n\}$ سره د V و بنسټ E ته پوره کوو. دا چې

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$L\left(\sum_{i=1}^{n} v_i e_i\right) = \sum_{i=m+1}^{n} v_i L(e_i),$$

نو لرو:

$$\operatorname{Bild} L = \operatorname{span} F, \quad F = \{L(e_{m+1}), \ldots, L(e_n)\}.$$

دا چې پسې F كرښيز خپلواک دی، يعني د $\operatorname{Bild} L$ بنسټ، نو له

$$\sum_{i=m+1}^{n} v_i L(e_i) = 0$$

لاس ته راځي $\sum_{i=m+1}^{n} v_i e_i \in \ker L$ او له دې سره $v_i = 0$.

دا غوښتونی د بعدفرمول اوس د بنسټوکتورونو تعداد څخه لاس ته راحي.

ليکونکي: هيوليک، هيورن

د بعدفرمول د ښوونې لپاره د پولينومونو - چې له $\leq n$ درجه لري- په فضا باندې k-م مشتق څېړل کيږي.

لومړی دې $k = 1$ او $n = 2$ وي. د پولينومونو د فضا لپاره چې درجه يې ≤ 2 ده $\{1, x, x^2\}$ بنسټ جوړوي، دا فضا پس بعد 3 لري. د $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ لپاره

$p'(x) = a_1 + 2a_2 x$ يو پولينوم دی چې درجه يې ≤ 1 ده. بيلدفضا نو بعد 2 لري.

د مشتقنيولو سره ثابته له منځه ځي يا ورکيږي. دا يوه يو بعدې لاندې - برخفضا جوړوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د تابع ګرن يا زړی بعد 1 لري او له دې سره د $3 = 1 + 2$ سره د بعدفرمول پوره دی يا بنول شوی.

په توليزه توګه پولينوم لاندې فرمول لري:

$$p(x) = \sum_{l=0}^{n} a_l x^l$$

او k -م مشتق

$$p^{(k)}(x) = \sum_{l=k}^{n} \frac{l!}{(l-k)!} a_l x^{l-k}\,.$$

بيلد يا څېره يا ارزښت د $\leq n-k$ درجې پولينوم دی او پولينومونه چې $< k$ درجه لري له منځه ورل کيږي. پس د بعدفرمول لاندې بڼه لري:

$$n+1 = \underbrace{((n-k)+1)}_{\dim \mathrm{Bild}} + \underbrace{k}_{\dim \ker}\,.$$

•

ليکونکي: هيوليک، هيورن

معکوس يا په څټ تابع (څيرونه يا فنکشن)Inverse Abbildung

يوه کرښيزه تابع $L : V \to W$ ټيک هلته انجکتيو يا په کې ده، که $\ker L = 0_V$ وي. په دې حالت کې د

$$w \mapsto v, \quad w = L(v)\,,$$

له مخې يو معکوس تابع $L^{-1} : \mathrm{Bild}\, L \to V$ تعريف شوې، چې دا هم کرښيزه ده

(c) ketabton.com: The Digital Library

په ځانګړي توګه باور لري

$$L^{-1} \circ L(v) = v\,, \quad L \circ L^{-1}(w) = w$$

د ټولو $v \in V$ او $w \in \mathrm{Bild}\, L$ لپاره

ليکونکي: هيوليک، هيورن

د L د ګرښيزوالي په دليل صدق کوي

$$L(v_1) - L(v_2) = L(v_1) + L(-v_2) = L(v_1 - v_2)\,,$$

او له دې اړيکو لاس ته راځي:

$$L(v_1) = L(v_2) \Leftrightarrow v_1 - v_2 \in \ker L\,.$$

د يوه انجکتيو (په کې) کرښيزې تابع لپاره کېدی شي چې کرن يازړی فقط صفروکتور خوندي ولري.

دا معکوس تابع کرښيزه ده له لاندې لاس ته راځي

$$L^{-1}(L(v_1) + L(v_2)) = L^{-1}(L(v_1 + v_2)) = v_1 + v_2 = L^{-1}(L(v_1)) + L^{-1}(L(v_2))\,,$$

$$L^{-1}(\lambda L(v_1)) = L^{-1}(L(\lambda v_1)) = \lambda v_1 = \lambda L^{-1}(L(v_1))\,.$$

ليکونکي: هيوليک، هيورن

د ماتريکسونو وکتورفضا Vektorraum der Matrizen

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $(m \times n)$ -ماتریکسونه یو وکتورفضا جوړوي، دا په دې معنا چې دا کېدی شي سره جمعه شي او د سکالار سره ضرب شي. دا کارونې یا عملیې په لاندې توګه کمپوننتېوله تعریف دي:

$$C = A + B \Leftrightarrow \qquad c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j},$$

$$B = \lambda A \Leftrightarrow \qquad b_{i,j} = \lambda a_{i,j} \, .$$

لیکونکي: هیولیګ، هیورن

د ماتریکسونو ضرب Matrix-Multiplikation

د یوه $(n \times m)$ -ماتریکس A او یوه $(m \times s)$ -ماتریکس B ضرب لاندې د $(n \times s)$ –ماتریکس دی:

$$C = AB \, , \qquad c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj} \, ,$$

دا په دې معنا چې د c_{ij} دتعریف لپاره د A د i لیکې توکي او د B د j متې توکي سره جمعه کیږي:

$$\begin{pmatrix} & & \\ & c_{ij} & \\ & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{i1} & \cdots & a_{ik} & \cdots & a_{im} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{kj} \\ \vdots \\ b_{mj} \end{pmatrix} .$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پام دې وي، چې له دې سره باید د A د متو تعداد (ګڼون) د B د لیکو تعداد(ګڼون) سره برابر وي.

د ماتریکس ضرب همغه د کرښیزو توابعو کمپوزیشن دی

$$T : u \mapsto v = Bu, \quad S : v \mapsto w = Av\ ,$$

دا په دې معنا چې C د $T \circ S$ ماتریکس انځورونه ده.

د کمپوزیشن لپاره د

$$w_i = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} v_k\,, \quad v_k = \sum_{j=1}^{s} b_{kj} u_j$$

له مخې تعریف شوي تابع په لاندې ډول لاس ته راوړې.

$$w_i = \sum_k \sum_j a_{ik} b_{kj} u_j = \sum_j \left[\sum_k a_{ik} b_{kj} \right] u_j\ .$$

په ګوډیزه یا کونجیزه نوکانو یا که غواړی قوسونو کې افاده د ماتریکسونو ضرب دی او کمپوزیشن توابعو د ماتریکس C سره سرخوري(یا باربر دی).

لیکونکي: هیولیګ، هیورن

په لاندې یو څو معلوم د ماتریکسونو ضربونه ورکړشوي دي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\begin{pmatrix} 1 & 10 & 100 \\ 100 & 10 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 321 & 213 & 132 \\ 123 & 312 & 231 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 13 \\ 14 & 26 \\ 21 & 39 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 25$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\mathrm{i} \end{pmatrix}$$

د ستراسن(وییینه: شتراس) الګوریتم Strassens Algorithmus

که په ورسره بلد ډول د دوه (2×2) -ماتریکسونو A او B ضرب $C = AB$ تر څېړنې لاندې ونیسو، نو سړی اته ضربونو ته اړتیا لري. په ډېر هکبکوالي(چې د څه انتظار نه کېږي او پېښ شي) شتراسن وښوول چې اوه ضربونه بسیا کوي

[V. Strassen: Gaussian elimination is not optimal, Numer. Math. 13 (1969). 357-361]. Man berechnet die Produkte

سړی ضربونې شمیري

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\begin{aligned} p_1 &= (a_{1,2} - a_{2,2})(b_{2,1} + b_{2,2}) \\ p_2 &= (a_{1,1} + a_{2,2})(b_{1,1} + b_{2,2}) \\ p_3 &= (a_{1,1} - a_{2,1})(b_{1,1} + b_{1,2}) \\ p_4 &= (a_{1,1} + a_{1,2})b_{2,2} \\ p_5 &= a_{1,1}(b_{1,2} - b_{2,2}) \\ p_6 &= a_{2,2}(b_{2,1} - b_{1,1}) \\ p_7 &= (a_{2,1} + a_{2,2})b_{1,1} \end{aligned}$$

او د C ضرب د زياتون يا جمعي جوړولو له لارې لاس ته راځي.

$$\begin{aligned} c_{1,1} &= a_{1,1}b_{1,1} + a_{1,2}b_{2,1} &= p_1 + p_2 - p_4 + p_6 \\ c_{1,2} &= a_{1,1}b_{1,2} + a_{1,2}b_{2,2} &= p_4 + p_5 \\ c_{2,1} &= a_{2,1}b_{1,1} + a_{2,2}b_{2,1} &= p_6 + p_7 \\ c_{2,2} &= a_{2,1}b_{1,2} + a_{2,2}b_{2,2} &= p_2 - p_3 + p_5 - p_7. \end{aligned}$$

کوموتاتور Kommutator

د دوه $(n \times n)$ - ماتريکسونو کموتاتور د $[A, B] = AB - BA$ په حيث تعريف شوی او په ټوليزه توګه ناصفر. د $[A, B] = 0$ په حالت کې ماتريکسونه A او B کموتي کيدونکی ماتريکسونه بلل کيږي.

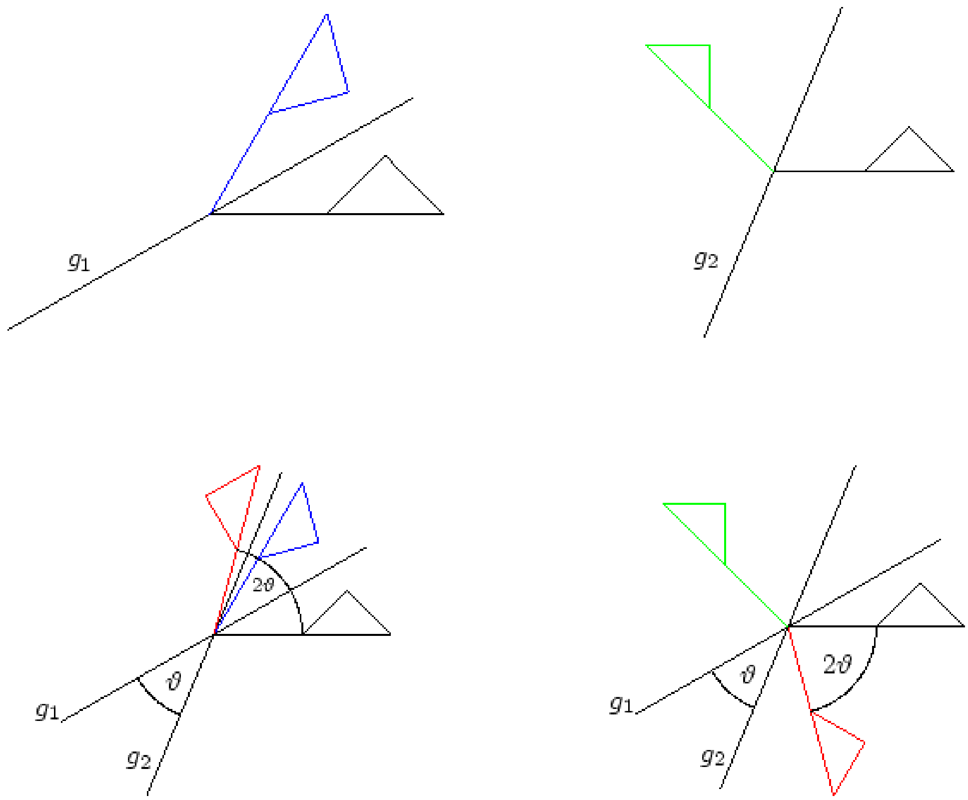
ليکونکي: هيوليک، هيورن

په مختلفو محورونو g_1 او g_2 د دوه وکتوررونو S_1 او S_2 دهندارونې (که غواړی انعکاس) يو په بل پسې راوړنه کې د لړی پرلپسي رول نه لري.

دا پورته خيره يا عکس د يوګونو هندارونو شکلونه ښايی. په لاندې لړی کې کيښ ډبله هندارونه $S_2 \circ S_1$ انځور ده اوښي لور ته ډبله يا دوه واره هندارونه $S_1 \circ S_2$. د هر

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځله نتيجې يې د کرښو ترمنځ په دوه برابره کونج څرخون دی، په هر حالت په مختلو لورو.



که g_1 د لومړی کونجنيمي په ښير ونيسو او د g_2 د y -محور نو توابع د ماتريکس انځورونه لري.

$$v = S_1 u = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} u\,,$$

$$v = S_2 u = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} u\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ډبل هندارونه يا ا نعکاسونه لاندې انځورونه لري

$$w = S_2 S_1 u = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} u$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} u \,,$$

$$w = S_1 S_2 u = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} u$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} u \,.$$

په دې حالت کې کوموتاتور په لاندې ډول دی

$$[S_1, S_2] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} .$$

ليکونکي: هيوليک، هيورنر

په څټ يا معکوس ماتريکسونه Inverse Matrix

د يوه معکوس کېدونکي کرښيز تابع $Av \mapsto v$ لپاره A^{-1} د A معکوس ماتريکس په نخښنه کوي، دا په دې معنا چې

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

يون – واحد ماتريکس سره؟

ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

معکوس کېدونکي په همدې ډول رېګولار ماتريکسونه $A \in K^{n\times n}$ نسبت و ضرب ته يو ګروپ جوړوي، کرښيز ګروپ چې د $\mathrm{GL}(n, K)$ سره په نخښه کيږي.

باور لري

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

د $A, B \in \mathrm{GL}(n, K)$ لپاره .

باور لري

$$B^{-1}A^{-1}AB = B^{-1}EB = B^{-1}B = E\ ,$$

او له دې سره $B^{-1}A^{-1}$ و AB ته معکوس دی

ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دياګونال ماتريکس معکوس داسې لاس ته راځي، چې د دياګونال توکو معکوس يا په ځټ ارزښت جوړيږي،، د بېلګې په توګه:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1/7 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

د درېګودئ – يا مثلث متاريکس لپاره په معکوسوني کي د مثلث بڼه ساتلي پاتيې کيږي، د بېلګي په توګه:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

په ټوليزه توګه د ماتريکس په ځټ يا معکوس پوره ځاي نيولی يا ډک دی، د بېلګې په توګه:

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

ليکني بايد د يوه کرښيز مساواتسيتم له لارې و ټاکمل شي.

ليکونکي: هيوليک، هيورنر

تراسپوني او ادجونګيري ماتريکسونه

Transponierte und adjungierte Matrix

که د يوه ماتريکس A ليکي اوو متې سره بدلې شي، نو د ترانپوني ماتريکس $B = A^t$ ځخه غږيږو، دا په دې معنا چې

$$b_{i,j} = a_{j,i}.$$

که د يوه کمپلکس ماتريکس A سربېره پر دې ليکني کنجوګير شي، نو اديونګيري ماتريکس ترې لاس ته راځي، دا په دې معنا چې

(c) ketabton.com: The Digital Library

$c_{i,j} = \bar{a}_{j,i}$.

يو ماتريکس د $A = A^{\mathrm{t}}$ سره سيومتريک بلل کيږي، يوه ماتريکس د $A = A^*$ سره د پخپله اديونګيري په ځبر ده يا هرميتيکي Hermitesch ده. د حقيقي ماتريکسونو لپاره کليمي سيومتريک او هرميتيکي همغه (يوه) معنا لري.

لاندي قانون باور لري:

- $(AB)^{\mathrm{t}} = B^{\mathrm{t}} A^{\mathrm{t}}$ او $(AB)^* = B^* A^*$

- $(A^{\mathrm{t}})^{-1} = (A^{-1})^{\mathrm{t}}$ او $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$

د يوې ليکنې لپاره په $C^{\mathrm{t}} = (AB)^{\mathrm{t}}$ کې باور لري

$$c^{\mathrm{t}}_{ji} = c_{ij} = \sum_k a_{ik} b_{kj} = \sum_k a^{\mathrm{t}}_{ki} b^{\mathrm{t}}_{jk} = \sum_k b^{\mathrm{t}}_{jk} a^{\mathrm{t}}_{ki}$$

او له دې سره $C^{\mathrm{t}} = B^{\mathrm{t}} A^{\mathrm{t}}$. دا چې $\overline{a+b} = \bar{a} + \bar{b}$ او $\overline{ab} = \bar{a}\bar{b}$ باور لري، نو دا د اديونګيري لپاره هم تيک دی.

له

$$E = E^{\mathrm{t}} = \left(AA^{-1}\right)^{\mathrm{t}} = \left(A^{-1}\right)^{\mathrm{t}} A^{\mathrm{t}}$$

لاس $\left(A^{-1}\right)^{\mathrm{t}} = \left(A^{\mathrm{t}}\right)^{-1}$ ته راځي. په ورته توګه د ادجونګيري لپاره هم صدق کوي.

ليکونکي: هيوليک، هيورنر

(c) ketabton.com: The Digital Library

شپور Spur

(د ا لماني ژبې ځخه د شپور پښتو معنا: نخښه یا علامه)

شپور د یوه $n \times n$ -ماتریکس A اصلي دوه کونټرې توکو(وتر) جمع د A شپور بلل کیږي،

$$\mathrm{Spur}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \,.$$

که A, B په خوښه $(n \times n)$ - ماتریکسونه وي، نو باور لري:

$$\mathrm{Spur}(AB) = \mathrm{Spur}(BA).$$

له دې لاس ته راځي، د یوه رېګولار ماتریکس T او یوه په خوښه ماتریکس A لپاره صدق کوي:

$$\mathrm{Spur}(T^{-1}AT) = \mathrm{Spur}(A).$$

دا دا معنا لري، چې شپور یا سپور د کواوردینات ترانفورمیشن لاندېinvariant (نسبت یوې کچونې یا اندازه کونې ته بې تغیره پتتې کیدل) یا بې تغیره پاتیږي.

د یوه ماتریکس رانګ Rang einer Matrix

د یوه $(m \times n)$ -ماتریکس لپاره د کرښیز خپلواکو متو ماکسیمال ګڼون یاتعداد د ماکسیمالو ګرښیزو خپلواکو کیلو سره یو په بل پریوحي یا یو بل سره مساوي دي او د رانګ A په لکنیز ډول $\mathrm{Rang}\, A$ بلل کیږي،

په ځانګړي ډول باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\operatorname{Rang} A \leq \max\{m, n\}.$$

د ماکسیمال کرښیز خپلواکو متو $v_1, \ldots, v_n$ تعداد د وکتورفضا پعد به ګوته کوي

$$V = \operatorname{span}\{v_1, \ldots, v_n\},$$

ځکه چې سړی کړی شي د متو څخه بنسټ وټاکي. په ورته توګه وینا د لیکو $w_1, \ldots, w_m$ څخه غزیدلي وکتورفضا W لپاره هم صدق کوي.

غوښتنه $\dim V = \dim W$ د n پسي اندکشن له لارې وښوول شي.

ساده ښوول کیږي، چې $\dim V$ او $\dim W$ د لاندې عملیو یا کارونو سره بې تغیره پاتیږي:

- د متو یا لیکو بدلېدنه یا پرموتیشن

- د یوه سکالار جمعه ډېرځله یا د یوه ډېرځله سکالار سره د یوې متې (لیکې)حمعه د یوه بلې متې (لیکې) سره.

که $A \neq 0$ وي، سړی کړی شي دا عملیه په لاندې بڼۀ

$$B = \begin{pmatrix} b_{1,1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & A' & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

راوړي.

د پرموتیشن سره لومړی $b_{1,1} \neq 0$ لاس ته راځي او بیا د لومړی لیکې یا کیلې او متې پاتې توکي د مناسب جمعې له لارې له منځه وړي. په ټیک ډول لومړي د لومړی متې

(c) ketabton.com: The Digital Library

$(-b_{1,j}/b_{1,1})$-ځله و j-مي متې ($j = 2, \dots, n$) ته جمعه کوي او په ورته توګه د ليکو وکتورونو سره هم دا عمل وخ ته بيولاي شو . که د V' او W' سره ْوښتوني وکتورفضاوې د $(m-1) \times (n-1)$ - ماتريکس A' لپاره ، نو لاس ته راځي

$$\dim V = \dim V' + 1, \quad \dim W = \dim W' + 1$$

او د ايندکشن له لارې غوښتنه.

ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

يو څو تيپيکي حالتونه د درې (3×2)-متريکسونو سره دليدلو شوي يا ورکړ شوي دي

$$\text{Rang}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{Rang}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = 2, \quad \text{Rang} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \\ 9 & 12 \end{pmatrix} = 1 \,.$$

د دريم ماتريکس لپاره صدق کوي $4S_1 = 3S_2$ د متو S_1 او S_2 لپاره او د ليکو $2Z_3 = 3Z_2 = 6Z_1$ Z_1, Z_2 او Z_3 لپاره. په دواړو حالتونو کې نو د غوښتوني وکتورفضا ديمنژن يا بعد برابر په 1 دی.

ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

د يوه ماتريکس نورم Norm einer Matrix

د يوه وکتور نورم د ماتريکس نورم

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\|A\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|$$

ته بنسټ ووي د نورم خویونو سربېره (مثپتوالی، هوموچېنیتي، مثلثنمساوات)

$$\|AB\| \leq \|A\|\|B\|,$$

باور لري، دا په دی کعنا چی د ورسره تنظیم شوی ماتریکس نورم سبضریبي submultiplikativ دی.

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

په لاندې کې به یوګوني خویونه د ازمایښ له لارې ښوول شي:

مثبتوالی: د وکتور فضا تعریف له لارې تظمین دی، چې $\|A\| \geq 0$ دی. که A صفرمآتریکس وي، نو فقط صفروکتور 0د څېرې په څېر مخ ته لرو. که له بلې خوا نورم صفر وي، نو فقط صفروکتور د څېرې په څېر رامنځ ته کیږي، او تابع یا فنکشن د صفرماتریکس سره تشریح کیږي.

Homogenitätهوموحنیتي:

$$\max_{\|x\|=1} \|\lambda Ax\| = \max_{\|x\|=1} |\lambda|\|Ax\| = \|\lambda A\|$$

$$= |\lambda| \max_{\|x\|=1} \|Ax\| = |\lambda|\|A\|.$$

$$\|\lambda A\| = \max_{\|x\|=1} \|\lambda Ax\| = \max_{\|x\|=1} |\lambda|\|Ax\|$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \quad |\lambda| \max_{\|x\|=1} \|Ax\| = |\lambda| \|A\| .$$

Dreiecksungleichungمثلثات برابرون :

$$\|A+B\| = \max_{\|x\|=1} \|(A+B)x\| = \max_{\|x\|=1} \|Ax + Bx\|$$

$$\leq \max_{\|x\|=1} (\|Ax\| + \|Bx\|)$$

$$\leq \max_{\|x\|=1} \|Ax\| + \max_{\|x\|=1} \|Bx\| = \|A\| + \|B\| .$$

Submultiplikativitätسب ضریبوالی:

د $B = 0$ لپاره $AB = 0$ دي او له دې سره نامساوات پوره دی. د $B \neq 0$ لپاره دی:

$$\|AB\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|ABx\|}{\|x\|} = \sup_{x:\, Bx \neq 0} \frac{\|A(Bx)\|}{\|Bx\|} \frac{\|Bx\|}{\|x\|}$$

$$\leq \sup_{y \neq 0} \frac{\|Ay\|}{\|y\|} \sup_{x \neq 0} \frac{\|Bx\|}{\|x\|} = \|A\| \|B\| .$$

د لومړي بڼې بدلون سره ، چې په حقیقت کې ډېرى يا سټ په يوه سوپرېموم Supremumڅېره کیږي محدودیږي، مګر فقط وکتورونه ترې لرې کیږي، چې صفروکتور دڅېرې په ډول لري او له دې سره سوپرېموم نه اغیزمن کوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لیکونکي: هیولیګ ، کرایځ

د لیکو د جمعي نورم Zeilensummen-Norm

د وکتورونو لپاره ماکسیمومو نورم $\|v\|_\infty = \max_i |v_i|$ د ماتریکسونو لپاره د لیکوجمعي نورم

$$\|A\|_\infty = \max_i \sum_j |a_{ij}|$$

تنظیم دی.

لیکونکي: هیولیګ ، کرایځ

د $\|x\|_\infty = \max_j |x_j| = 1$ لپاره

$$\|Ax\|_\infty = \max_i \left| \sum_j a_{ij} x_j \right| \le \max_i \sum_j |a_{ij}| ,$$

دی

او سړی لاس ته راوړي

$$\|A\|_\infty = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|_\infty \le \max_i \sum_j |a_{ij}| .$$

که سړی ونیسي یا فرض کړي، چې ماکسیموم د $i = k$ لپاره فرض شوی یا نیول شوي، نو مساوات د

$$x_j = \operatorname{sign} a_{kj}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

انتخاب له لارې لاس ته راځي، څکه چې دی:

$$\left|\sum_j a_{kj}x_j\right| = \sum_j \|a_{kj}| \ .$$

ليکونکي: هيوليک ، کرايخ

د ماتريکس د ډکوني جوړښت Belegungsstruktur von Matrizen

د صفر سره مختلف ماتريکس توکو $a_{i,j}$ د تنظيم سره سم د لاندې ترمنځ توپير کوي

اول – دياګونالماتريکس: $a_{i,j} = 0$ د $i \neq j$ لپاره،

باند ماتريکسونه Bandmatrizen: د لپاره د سره د صفر نه مختلفو ماتريکسونو د دياګونالو شمېر، چې د باند سور په څېر په نخښه کيږي يا نومول کيږي،

پورته (کښته) مثلث ماتريکسونه: $a_{i,j} = 0$ د $i < j$ ($i > j$) لپاره.

په توليزه توګه يو $(m \times n)$ - ماتريکس ضعيف ډکشوی، که فقط توکي $c \max(m,n)$ د صفي سره نامساوي وي، د يوې نه ډيرې لوې ثابتې c سره.

ليکونکي: اپپ، هيوليک

اورتوګونال او يونيتار ماتريکسونه Orthogonale und unitäre Matrizen

(c) ketabton.com: The Digital Library

يو کمپلکس $(n \times n)$ - ماتريکس A يونيتار بلل کيږي، که ولرو

$$A^{-1} = \overline{A}^{t} = A^{*} ,$$

دا په دې معنا چې که د A متې د $\mathbb{C}^{n}$ يو اورتوګونال بنسټ جوړ کړي.

د حقيقي ماتريکسونو لپاره (لکه په سکالار ضرب کې) کمپلکس کنجګيشن،

$$A^{-1} = A^{t} ,$$

او سړی د يوه اورتوګونال ماتريکس څخه غږيږي.

اورتوګونال (يونيتار) ماتريکسونه د($\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$) يو لاندې – برخګروپ جوړوي

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

د هادامارد – ماتريکسونه Hadamard-Matrizen

د $n = 2^{k}$ لپاره تر سکالار کېدنوپورې اورتوګونال ماتريسکونه شتون لري د H_k

د $n \times n$ بعد په $\{-1, 1\}$ کې د ليکنو سره داسې په نامه هادامارد ماتريکسونه.

د هاداماد لومړی ماتيکسونه دي:

$$H_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad H_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} .$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په ټولیزه توګه ماتریسونه د ریکورزیون

$$H_{2k} = \begin{pmatrix} H_k & H_k \\ H_k & -H_k \end{pmatrix}$$

سره جوړکړي.

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

د فوریر (وینه: فوریې) ماتریکسونه Fourier-Matrizen

د توان جوړولو له لارې د یوون - یا واحد ریښې

$$w_n = \exp(2\pi i/n)$$

سړی داسې په نامه فوریې ماتري:س لاس ته راوړي

$$W_n = \begin{pmatrix} w_n^{0\cdot 0} & \cdots & w_n^{0\cdot(n-1)} \\ \vdots & & \vdots \\ w_n^{(n-1)\cdot 0} & \cdots & w_n^{(n-1)\cdot(n-1)} \end{pmatrix}.$$

دا د نورمي کولو($W_n \to W_n/\sqrt{n}$) پسې یونیتار دي، دا په دې معنا چې $W_n^* W_n/n$ یوون – یا واحد ماتریکس دی.

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

(c) ketabton.com: The Digital Library

د متِو اورتوګوناليټي ساده ازمايل کيږي. د $(j+1)$ ـمو او $(k+1)$ ـمو متِو سکالار ضرب

$$\sum_{\ell=0}^{n-1} w_n^{\ell j}\overline{w_n^{\ell k}} = \sum_{\ell} w_n^{(j-k)\ell} = \frac{w_n^{(j-k)n}-1}{w_n^{j-k}-1},$$

دی، او داچې $w_n^n = 1$ دی، نو صورت يا ماتباندې صفر دی.

ليکونکي: اېپ، هيوليک

د $n=4$ لپاره $w_4 = \exp(2\pi\mathrm{i}/4) = \mathrm{i}$ دی، او سرې لاس ته راوړي

$$W_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \mathrm{i} & -1 & -\mathrm{i} \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -\mathrm{i} & -1 & \mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

په 2 د وېشنې وروسته W_4 يونيتار دی، دا په دې معنا چې

$$\left(\frac{1}{2}W_4^*\right)\left(\frac{1}{2}W_4\right) = E.$$

له دې امله د فوريې ماتريکسونو د سيومترى والى له امله $W_4^* = \overline{W_4}^{t} = \overline{W_4}$ دی.

ليکونکي: اېپ، هيوليک

نورم ريښتونې يا - وفاداره اورتوګونال ا و يونيتار ماتريکونه

Normtreue orthogonaler und unitärer Matrizen

(c) ketabton.com: The Digital Library

يو حقيقي (كمپلكس) ماتريكس A ټيک هلته اوتوګونال (يونيتار) دی، که دا د هر وکتور اوکليد(اقليدسeuklidische) نورم انواريانت پريږدی:

$$|Av| = |v|.$$

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

بسيا کوي، چې کمپلکس حالت وڅيړو، چې حقيقي حالت په بر کې نيسي.

اول - A يونيتار ده، نو باور لري

$$(Ay)^*(Ax) = y^*A^*Ax = y^*x$$

پس په ټوليزه توګه د کمپلکس وکتورونو سکالار ضرب لاس ته راځي، چې د نورمريښتونوالی په بر کې لري.

دويم – د نورم ريښونوالي څخه لومړی لاس ته راځي، چې د A د متې وکتور v_j د يوون وکتورونو e_j د عکسونو نورم يوی خوندي لري. د دې لپاره چې وښايو چې مختلفې متې اوتوګونال دي،نو $\lambda = \exp(i\vartheta)$ ټاکو، داسې چې لرو:

$$(\lambda v_k)^* v_j \in \mathbb{R}.$$

پسې د نورريښتونوالی او اقليدس نورم تعريف په بنسټ لرو

$$2 = |e_j + \lambda e_k|^2 = |v_j + \lambda v_k|^2 = |v_j|^2 + |\lambda|^2|v_k|^2 + 2\,\mathrm{Re}(\lambda v_k)^* v_j = 2 + 2\overline{\lambda} v_k^* v_j,$$

په تعقيب بايد په ښی لور سکالار ضرب ورک شي.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځيوکليکي (تلبيرته راګرځېدوني) ماتريکسونه Zyklische Matrizen

د ځيکليکي $(n \times n)$-ماتريکسونو متې د لومړی متې د ځيوکليکي راکښنې له لارې جوړيږي:

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots \\ a_1 & a_0 & a_{n-1} & \cdots \\ a_2 & a_1 & a_0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}.$$

د ماتريکسونو ضرب سره ځيوکليکي جوړښت ساتلی يا خوندي پاتې کيږي.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

د يوه ځيوکليکي ماتريکس-ضرب $C = AB$ توکی دي:

$$c_{i,k} = \sum_{j=1}^{n} a_{i-j \bmod n} b_{j-k \bmod n}.$$

د اچې

$$\{0, \ldots, n-1\} = k + \{0, \ldots, n-1\} \bmod n,$$

کېدی شي سری په زياتوونو (د جمعي اجزاوو) د j په ځای $j+k$ ځای په ځای کړي، کوم چې ښايي، چې $c_{i,k}$ فقط د $i - k \bmod n$ په واک کې دي.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

د ځيوکليکي ماتريکسونو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 1 \\ 1 & -3 & 4 \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 5 \\ 5 & 0 & -2 \\ -2 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

ضرب   دا لاندې څیوکلیکي ماتریک دی:

$$C = AB = \begin{pmatrix} 18 & 11 & -23 \\ -23 & 18 & 11 \\ 11 & -23 & 18 \end{pmatrix}.$$

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

ستوښاستیکي ماتریکسونه

یو $(n \times n)$-ماتریکس   ستوښایتیکي بلل کیږي، که $p_{i,j} \geq 0$ وي او

$$\sum_{j=1}^{n} p_{i,j} = 1, \quad i = 1, \ldots, n.$$

ستوښاستیکي ماتریکس د احتمالوالو x_i تغیر ښایي د لاندې له مخې:

$$x'_j = \sum_i x_i p_{i,j}.$$

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

د P د ښویونو په بنسټ x' هم یو د احتمالوالي وکتور دی، دا په دې معنا چې

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x'_j \geq 0, \quad \sum_j x'_j = 1\,.$$

دا نه کمښتوالی یا نه منفیوالی ښرګند دی او د جمعي انواریانت له لاندې ښخه تعقیبیږي:

$$\sum_j \sum_i x_i p_{i,j} = \sum_i x_i \underbrace{\sum_j p_{i,j}}_{=1}\,.$$

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

ديترمينانت د انتيسيومتري کرښيزفورم په حيث

Determinante als antisymmetrische Multilinearform

د یوه مربع ماتریکس A ديترمينانت

$$\det A = \det(a_1, \ldots, a_n)$$

د متې a_j سره کېدی شي د لاندې خويونو له لارې تعريف شي.

اول – ډېرکرښيزوالی

$$\det(\ldots, \alpha a_j + \beta b_j, \ldots) = \alpha \det(\ldots, a_j, \ldots) + \beta \det(\ldots, b_j, \ldots)\,.$$

دويم - انتيسيومتري:

$$\det(\ldots, a_j, \ldots, a_k, \ldots) = -\det(\ldots, a_k, \ldots, a_j, \ldots)\,.$$

دريم – نورمي کونه

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\det(e_1, \ldots, e_n) = 1\,, (e_k)_\ell = \delta_{k\ell}\,.$$

د دې قانون سره ديترمينانت د n –ځله ضرب سره وده کولی شي:

$$\det A = \sum_{i \in S_n} \sigma(i) a_{i_1,1} \cdots a_{i_n,n}\,,$$

د کوم سره چې د $(1, \ldots, n)$ په ټولو ځای بدلونو $(i_1, \ldots, i_n)$ سره جمعه کېږي او σ د ځاي بدلونون سره مخنخښه ښايو.

سرې دا لاندې ليکدود هم استعمالوي

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}\,.$$

ليکونکي: هيوليګ، هيونر

د زياتيدونو (د جمعې اجزاوو) د تعداد د جګيدو له امله($n!$ ځای بدلونونه شتون لري) د ديترمينانت د عملي آنځورونو لپاره ښه مساعدنه دی. مګر دا تړلی د تعريف شوو خويونو تړلی (د عمليو له لارې) دا د ښووني او د نوروو خويونو د لاس ته راوړلو لپاره اړيين دي. له دې امله دا د ورته (برابر ازښته) تعريف لپاره ورکړشوی دی.

لومړ ی ښايو، چې غوښتل شوي خويونه مو اړيين د ديترمينانت وديزوني ته بيايي، په اړيينه توګه د برموتيشن په مرستې .

د دې سره د A متي د يوون – يا واحد وکتورونو e_i د کرښيز کمبينيشنونو په حيث انځوروي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$a_j = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} e_i \,.$$

د ډېرکرښيزوالي په بنسټ باور لري:

$$\det A = \sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_n=1}^{n} a_{i_1,1} \cdots a_{i_n,n} \underbrace{\det(e_{i_1}, \ldots, e_{i_n})}_{=: d_i} \,.$$

دا جمعه لکه چې لاس ته راځي کیدی شي ساده شي. که له دې دوه یوون - یا واحدوکتورونه برابر وي، نو د انتیسیومتري په بنسټ d_i صفر دی:

$$\det(\ldots, e_k, \ldots, e_k, \ldots) = -\det(\ldots, e_k, \ldots, e_k, \ldots) \,.$$

که ټول i_ν مختلف وي، دا په دې معنا چې

$$(i_1, \ldots, i_n)$$

یو پرموتیشن دی د $(1, \ldots, n)$ ، نو صدق کوي

$$d_i = (-1)^{\tau(i)} \,,$$

د کوم سره چې $\tau(i)$ مودولو 2 د بدلونونو یواځنی ټاکلی تعداد(ګڼون) په نخښه کوي ، د کوم لپاره چې واحدوکتور په کانونیکي لړی پرلپسې راوړی شو. ځای بدلون د مخنخښې تعریف پسې دی:

$$\det(e_{i_1}, \ldots, e_{i_n}) = \sigma(i) \det(e_1, \ldots, e_n) = \sigma(i) \,,$$

دا په دې معنا چې سړی ورکړ شوې ودیزینه لاس ته راوړي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

برعکس کېدی شي و ازمايو، چې وديزينه د غوښتوني قانون سره تړلې ده. ډېرکرښيز والی باور لري، ځکه چې په ضرب

$$a_{i_1,1}\cdots a_{i_n,n}$$

کې د هرې متې تيک يو توکی منځ ته راځي. انتی سيومتری لاس ته راځي، ځکه چې د متو له پدلون دبدلولو تعداد کانونيکي لړی پرلپسي په يو تغير خوري، بالاخره په واحد ماتريکس کې جمعه په يوه زياتووني (د جمعې غړي) کميږي

$$a_{1,1}\cdots a_{n,n}=1\cdots 1=1$$

.

ليکونکي: هيوليک، هيونر

2 - ليکيزه ديترمينانت 2-reihige Determinante

د يوه -ماتريکس ديترمينانت

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

دی.

دا د برموتيشن وديزيني پسي په ساده ډول ليدل کيږي، ځکه چې 2 زياتيدونی شتون لري.

دبديل په توگه کېدی شي ديترميناتونه د تعريف شوو خويونو له مخې هم و شمېرل شي.

که متې د کانونيکي واحد وکتور(يوون-) e_k کرښيز کمبينيشن په څېر انځور شي، نو د مولتی (ډېر-)کرښيزوالي له امله لاس ته راځي

$$\det(ae_1+ce_2,be_1+de_2) = a\det(e_1,be_1+de_2)+c\det(e_2,be_1+de_2)$$

$$= ab\det(e_1,e_1)+ad\det(e_1,e_2)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

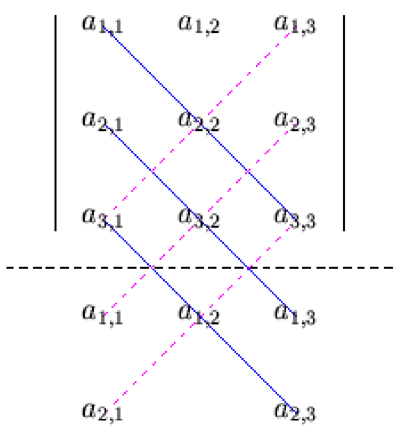
$$+\, cb \det(e_2, e_1) + cd \det(e_2, e_2)$$

$$= ab \cdot 0 + ad \cdot 1 + cb \cdot (-1) + cd \cdot 0 = ad - bc\,.$$

لیکونکي: هیولیک، هیونر

د ساروس شیما یا شکلSarrus-Schema

د یوه (3×3) - ماتریکس دیترمینانت لکه څنګه چې په تابع یا فنکشن کې ښوول شوي د ضربونو جمعه ده، چې مختلف دیاګونالونه (دوه کونجتړې) په ګوته کوي:



$$= \begin{array}{l} a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} + a_{2,1}a_{3,2}a_{1,3} + a_{3,1}a_{1,2}a_{2,3} \\ -a_{3,1}a_{2,2}a_{1,3} - a_{1,1}a_{3,2}a_{2,3} - a_{2,1}a_{1,2}a_{3,3} \end{array}$$

دې د ساروس په نامه یادې شوې شیما ته ورته د n جګ بعدي لپاره شتون نه لري. سملاسي د $n = 4$ دیترمینانت د 24 ضربونه یوه جمعه لري.

د ساروس –شېما په ساده توګه د ځاي بدلون ودیزیېنه پسي په ساده توګه و ازمايي. لاندې جدول ټول زیاتووني یا جمعی اجزاوې ښايي همداسې دا د ځايبدلون i سره اسوځییري بدلوني، له کومو چې دا مخنخښه σ لاس ته راځي.

i	بدلونونه	$\sigma(i)$	Summand

(c) ketabton.com: The Digital Library

زياتيدوني يا د جمعي اجزا		Vertauschungen	
$+a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3}$	$+$		$(1,2,3)$
$+a_{2,1}a_{3,2}a_{1,3}$	$+$	$\to (3,2,1) \to (1,2,3)$	$(2,3,1)$
$+a_{3,1}a_{1,2}a_{2,3}$	$+$	$\to (2,1,3) \to (1,2,3)$	$(3,1,2)$
$-a_{3,1}a_{2,2}a_{1,3}$	$-$	$\to (1,2,3)$	$(3,2,1)$
$-a_{1,1}a_{3,2}a_{2,3}$	$-$	$\to (1,2,3)$	$(1,3,2)$
$-a_{2,1}a_{1,2}a_{3,3}$	$-$	$\to (1,2,3)$	$(2,1,3)$

ليکونکي: هيوليک، هيونر

لوريز حجمونه (ډکي) Orientiertes Volumen

د يوه حقيقي ماتريکس A ديترمينانت مطلق ارزښت د ـبعدي سره چې له متو څخه غزيدلی شپاټ(Spats) سره پر اپر دی يا يو په بل پرېوځي:

$$|\det A| = \operatorname{vol}\left\{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i :\ 0 \le \alpha_i \le 1\right\} = \operatorname{vol}\left(A[0,1]^n\right) .$$

ليکونکي: هيوليک، هيونر

(c) ketabton.com: The Digital Library

ساده ازمایل کیدی شي، چې لوریز حجمونه يا ډکي

$$\mathrm{vol}_* A := \mathrm{sign}(\det A)\,\mathrm{vol}(A[0,1]^n)$$

ټول درې د دیترمیناتونو تعریف شوي خویونه (مولتی کرښیزوالی، انتي سیومتري، نورمي ونه) لري، له دې امله باید باور ولري:

$$\mathrm{vol}_* A = \det A$$

لیکونکي: هیولیګ، هیونر

په $\mathbb{R}^3$ کې د وکتورونو $u,\ v,\ w$ لپاره دیترمینانتونه د شپات ضرب سره سر خوري یا برابر دی:

$$\det(u,v,w) = [u,v,w]\,.$$

د بدیل په قسم دا کېدی شي د ε -تنځور ε Tensors- سره افاده شي:

$$\det(u,v,w) = \sum_i \sum_j \sum_k \varepsilon_{i,j,k} u_i v_j w_k\,.$$

که وکتورونه د بېلګې په توګه و ټاکل شي

$$u = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو شپاټ ضرب لاس ته راځي.

$$(2,1,1)\left(\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\right)=(2,1,1)\begin{pmatrix}3\\-1\\-1\end{pmatrix}=6-1-1=4\,.$$

د ε - تنځور سره لاندې انځورونه لاس ته راځي

$$\begin{aligned}\det(u,v,w) &= \varepsilon_{1,2,3}\cdot 2\cdot 2\cdot 2+\varepsilon_{1,3,2}\cdot 2\cdot 1\cdot 1+\varepsilon_{2,1,3}\cdot 1\cdot 1\cdot 2\\ &\quad +\varepsilon_{2,3,1}\cdot 1\cdot 1\cdot 1+\varepsilon_{3,1,2}\cdot 1\cdot 1\cdot 1+\varepsilon_{3,2,1}\cdot 1\cdot 2\cdot 1\\ &= 8-2-2+1+1-2=4\,.\end{aligned}$$

ليکونکي: هيوليک، هيونر

د ديترمينانټونو لپاره قاعدې Regeln für Determinanten

د $(n\times n)$ - ماتريکسونو A او B لپاره صدق کوي:

- $\det A=\det A^{t},\quad \det A^{*}=\overline{\det A}$
- $\det(AB)=(\det A)(\det B)$.
- A تيک هلته انورتير وړ يا معکوسکېدونکي ده، که او $\det A\neq 0$ وي،

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$$

ليکونکي: هيوليګ، هيونر

اول – د سيومتري خويونه د ځای بدلون پسې وديزوني ښخه لاس ته راځي:

$$\det A^{t} = \sum_{i \in S_n} \sigma(i) a_{1,i_1} \cdots a_{n,i_n} .$$

که د جمعۍ اجزا سره اندکسونه يا پيژند نخښې $\{1, \ldots, n\}$ هر يو په لړۍ پرلپسې و i ته معکوس ځاي بدلون j سره و وځغلوو، نو د تابع يو تغير شوی نظم لاس ته راوړو:

$$a_{j_1, i_{j_1}} \cdots a_{j_n, i_{j_n}} = a_{j_1,1} \cdots a_{j_n,n} .$$

داچې $\sigma(i) = \sigma(j)$ دی، نو مساوي وديزينه لاس ته راځي، لکه د $\det A$ لپاره.

د بيلګي په توګه

$$i = (1\ 2\ 3) \leftrightarrow j = (1\ 3\ 2)$$

يو بل ته معکوس ځاي پلونونه دي په ځيکليکي ليکډول او

$$a_{1,i_1} a_{2,i_2} a_{3,i_3} = a_{1,2} a_{2,3} a_{3,1} = a_{3,1} a_{1,2} a_{2,3} = a_{j_1,1} a_{j_2,2} a_{j_3,3} .$$

که د زياتيدونو يا د جمعي د اجزاو ا ينکسونو يا پيژندنخښو $\{1, \ldots, n\}$ کې وځغلي هر يو په لړۍ پرلپسي و i ته په ځټ يا برعکس بدلونونه يا پرموتيشنونه j ته ، نو فنکشن يو تغير شوي نظم راکوي.

$$a_{j_1, i_{j_1}} \cdots a_{j_n, i_{j_n}} = a_{j_1,1} \cdots a_{j_n,n} .$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا چې $\sigma(i) = \sigma(j)$ دی، نو سرب مساوي يا باربه وده لاس ته راولي لکه $\det A$.

د بيلګې په توګه

$$i = (1\ 2\ 3) \leftrightarrow j = (1\ 3\ 2)$$

يو بل ته په ځيکليکي لکندود په ځت يا معکوس پرموتيشنونه يا ځای بدليدنې دي، او

$$a_{1,i_1}a_{2,i_2}a_{3,i_3} = a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1} = a_{3,1}a_{1,2}a_{2,3} = a_{j_1,1}a_{j_2,2}a_{j_3,3} \, .$$

مخنخښنه σ مثبت ده او هرځل ، ځکه چې

$$i = (1\ 3) \circ (1\ 2), \quad j = i^{-1} = (1\ 2) \circ (1\ 3) \, ,$$

دا په دې معنا چې د پدلونون شميره (ګنون) هر ځل 2 دی.

دويم – که معکوسوړ نه وي، نو ضرپوالی د دريم خوي څخه لاس ته راځي.

د $\det A \neq 0$ لپاره ښوول کيږي، چې تابع

$$B \mapsto f(B) := \det(AB)/\det(A)$$

تو د ديترمينانت ک ټاکونکي خويونه لري، په تعقيب د $\det B$ سره بايد برابر وي.
نورمي کونه $f(E_n) = 1$ څرکنده ده. د ډېرکربنيزوالي او انتيسيومتري لپاره په پام کې نيسو، چې فنکشن(تابع) $B \mapsto AB$ کربنيزه ده د B په متو کې او دا چې د دوه مټو بدلون د AB د اړونده متو بدلون په ګوته کوي.

دريم – يو مربع ماتريکس A ټيک هلته نامعکوسوړ ده، که د يوه نه ساده وکتور x لپاره $Ax = 0$ وي، دا په دې معنا چې که د A د د متو يو نه ساده کربنيو کمپينيشن a_j شتون ولري:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x_1 a_1 + \cdots + x_n a_n = 0 .$$

$$x_1 a_1 + \cdots + x_n a_n = 0 .$$

په ورکړشوي حالتکې د متووکتور ځاېپدلون څه کېدی شي $x_1 \neq 0$ ونیسو، دا په دې معنا چې

$$a_1 = y_2 a_2 + \cdots + y_n a_n , \quad y_j = -x_j / x_1 .$$

د ضرېپوالي څخه لاس ته راځي

$$\det A = \sum_{j=2}^{n} y_j \det(a_j, a_2, \ldots, a_n) = 0 ,$$

ځکه چې ټولې په ښي لور دیترميناتونه دوه برابرې متې خوندي لري، باید د انتی سیومتري له امله ورکې شي یا له منځه ولاړې شي.

دا چې د انورتیر وړinvertierbaren (په ښتوړ) ماتریکس دیترمینانت د صفرسره برابر نه دی، د یوه له متو خواره شوي غبرګ اړخیز لوریز حجم په حیث دیترمینانت د هندسي تشریح څخه لاس ته راځي . بالاخره دا همدااوس د $\det(A^{-1})$. لپاره ښوول شوي ضربوالي څخه لاس ته راځي.

لیکونکي : هیولیګ، هیورنر

د ځانګړو ماتریکسونو دیترمئناتونه

Determinanten spezieller Matrizen

د یوه $(n \times n)$ - ماتریکس A لپاره دیترمینانتونه ترلې ورکول کیږي

(c) ketabton.com: The Digital Library

- مثلث ماتريکس: که $a_{i,j}=0$ د $i<j$ لپاره يا $i>j$ لپاره وي، نو باور لري

$$\det A = a_{1,1}\cdots a_{n,n}\,.$$

- بلوک دياګونال ماتريکس: که ماتريکس B بلوک جوړښت د $A_{i,j}=0$ $i\neq j$, سره ولري اومربع دياګونال بلوکونه $A_{i,i}$ ، نو باور لري

$$\det B = \prod_{i=1}^{k}\det A_{i,i}\,.$$

- اورتوګونا او يونيتار ماتريکسونه: د يوه يونيتارمياتريکس U لپاره باور لري

$$|\det U| = 1\,.$$

د يوه اورتوګونال ماتريکس $(u_{i,j}\in\mathbb{R})$ لپاره ځانګړې دی

$$\det U \in \{-1,1\}\,.$$

ليکونکي : هيوليک، هيورنر

مثلثماتريکس : دا چې $\det A = \det A^{t}$ دی، بسيا کوي چې پورته مثلث ماتريکس وڅېړو. د $(1,\ldots,n)$ دځای بدلون i لپاره، کوم چې کتمتوال(ايدنتيتي) نه دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

، لاس ته ارځي، چې لږ تر لږه یو توکی i_k د $i_k > k$ سره باید ورکړ شوی وي، دا په دې معنا چې $a_{i_k,k} = 0$. داسې جمعه راکمیږي، د کټمټوالي ورکړه ، او دیترمینانت د دیاګونال توکو د ضرب څخه ورکول کیږي.

بلوکدیاګونال ماتریکسونه : لومړی فقط یو وېش په 2 دیاګونالبلوکونو راړړو چې لویې n_1 او n_2 لري، نو دا بسیا کوي، چې په ځاي بدلون چې ور جمعه کړو یا ورېیات کړو، کوم چې لومړي توکي د خپل ځانونو ترمنځ او له دې سره هم اکر توکي د خپل ځانونو ترمنځ بدل کړي، څکه چې نور مو پاتېدونو یا د جمعې اجزاوو 0 ته بيايي. دا د جمعې پاتې اجزاوې د لومړیو n_1 توکو یوه ځايبدلون k او د اخرو n_2 توکو یو ځاي بدلون l د ضرب په څیر لیکل کیږي:

$$\begin{aligned}
\det B &= \sum_{i\in S_n} \sigma(i)\left(a_{i_1,1}\cdots a_{i_{n_1},n_1}\right)\left(a_{i_{n_1+1},n_1+1}\cdots a_{i_n,n}\right) \\
&= \left(\sum_{k\in S_{n_1}} \sigma(k)\left(a_{k_1,1}\cdots a_{k_{n_1},n_1}\right)\right)\left(\sum_{l\in S_{n_2}} \sigma(l)\left(a_{n_1+l_1,n_1+1}\cdots a_{n_1+l_{n_2},n}\right)\right) \\
&= \det A_{1,1}\det A_{2,2}\,.
\end{aligned}$$

ایندوکتیو له دې څخه یوه وینا لاس ته رواړل کیږي له دوه بلوکونو څخه په ډېرو یوې ویشنې لپاره.

اورتوګونال او یونیتار ماتریکسونه: دا چې کمپلکس کنجوګیشن په جمعې ضرب سره منځ ته کوي او $\det U = \det U^{\mathrm{t}}$ صدق کوي، نو د دیترمینانت د ضربوالي څخه لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$1 = \det E = \det\left(U^* U\right) = \det U^* \det U$$

$$= \overline{\det U^{t}} \det U = \overline{\det U} \det U = \left|\det U\right|.$$

په حقيقي حالت کې ديترمينانت حقيقي ده او له دې امله فقط 1 او -1 ممکن دي.

ليکونکي : هيوليک، هيورنر

د ديترمينانتو بڼه بدلون Umformung von Determinanten

د يو ماتريکس ديترمينانتونه د د دوه برابرو متو او يا دوه برابرو ليکو سره صفر دي.له دې په ځانګړې توګه لاس ته راځيو چې ديترمينانتونه تغير نه خوري، که که سړی د يوې متې (ليکې) يوې بلې متې (ليکې) ته ورزيات کړي يا ورجمعه کړي ليکونکي : هيوليک، هيورنر

دا چې د ترانپوني حالت کې د يوه ماتريکس مته په ليکې بدليږي او $\det A = \det A^{t}$ صدق کوي،دنو بسيا کوي، چد متو حالت وڅيرو.

د دوه متو د پدلولو سره بايد ديترمينانت د تعريف له مخې مخنخبنه بدله کړي. که دواړه کتمټ متې يو د بل سره بدلې کړی شي ماتريکسونه ځان نه بدلوي او ديترمينانتونه بايد صفر وي.

که λ - ځله د متې a_j و متې $i \neq j$, a_i ته ور زياته يا جمعه شي، نو لاندې ماتريکس لاس ت ه راځي

$$A' = (a_1, \ldots, a_i + \lambda a_j, \ldots, a_j, \ldots, a_n) .$$

د کرښيز کمبينيشن په بنسټ کېدی شي ديترمينانت و وېشل شي يا ټوټه شي په

$$\det A' = \det\left(a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_j, \ldots, a_n\right) + \lambda \det\left(a_1, \ldots, a_j, \ldots, a_j, \ldots, a_n\right) .$$

دويم ماتريکس دوه کتمتي متې لري او له دې امله دا ديترمينانت صفر لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ليکونکي : هيوليګ، هيورنر

د يوه ماتريکس د يوې ليکې ډيرواره د ماتريکس د بلې ليکې سره زياتولو يا جمعه کولو له لارې کېدی شي ماتريکس په مثلث بڼه باندې واړول شي او ديترمينانت بيا د دياګونال توکو د ضرب له لارې وګټل شي يا لاس ته راړل شي.

که د متو يا ليکو بدلون صورت ونيسي، مخنخښه تغير خوري.

د بيلګې په توګه کېدی شي

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 8 & 0 & 4 \\ 3 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 6 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

لکه چې تعقيبوي وشمېرل شي.

دريمه ليکه ترې کم يا منفی د لومړۍ ليکې درې ځله راکوي :

$$\det A = \det \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 8 & 0 & 4 \\ 0 & -9 & 3 & -4 \\ 0 & 6 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

د دويمې متې او څلورمې متې بدلون:

$$\det A = -\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 & 8 \\ 0 & -4 & 3 & -9 \\ 0 & 4 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

دريمه ليکه ورزيات دويمه ليکه، څلورمه ليکه ترې کم دويمه ليکه راکوي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\det A = -\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = -(1\cdot 4\cdot 3\cdot(-2)) = 24\,.$$

ليکونکي : هيوليک، هيورنر

د ديترمينانتو وديزيينه Entwicklung von Determinanten

د يوه $(n\times n)$ - ماتريکس A ديترمينانت کېدی شي د يوې په خوښه متې يا ليکې پسې وديزيينه کړي.:

$\det A = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{k+j}a_{k,j}\det \tilde{A}_{k,j}$	د ليکې k پسې وديزيينه
$= \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+l}a_{i,l}\det \tilde{A}_{i,l}$	د درز يا متې l پسې وديزيينه

چيرته چې $\tilde{A}_{i,j}$ هغه ماتريکس په ګوته کوي، کومه چې د A د i -مې ليکې ، j - مې متې د کرښې کولو (په کرښه کولو له منځه وړني) له لارې منځ ته راځي.

ليکونکي : هيوليک، هيورنر

د $\det A = \det A^{t}$ له امله بسيا کوي، چې وديزيينه د يوې متې پسې تر ثېرنې لاندې ونيسو.

- مه متِه په متو

$$a_l = \sum_{i=1}^{n} a_{i,l}e_i$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ټوټه کوو، د ديترمينانتونو د ډېرکرښيزوالي په اساس لاس ته راځي

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{i,l} \det \underbrace{\left(a_1, \ldots, a_{l-1}, e_i, a_{l+1}, \ldots, a_n\right)}_{=B_i} .$$

يو ماتريکس B_i ترخپېړني لاندې نيسو، نو کېدی شي د دې لپاره د $n-l$ مته بدلونونو له لارې l ـمه مته اخر ته راوړل شي، بې له دې چې د نورو متو لړېپرلپسي په خپلو منځونوکې تغير شي.

په ورته توګه کېدی شي i ـمه ليکه د $n-l$ ليکه بدلونونو سره اخرې ليکې ته راوړل شي:

$$\det B_i = (-1)^{n-l}(-1)^{n-i} \det \begin{pmatrix} & & \tilde{A}_{i,l} & & & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,l-1} & a_{i,l+1} & \cdots \; a_{i,n} & 1 \end{pmatrix}$$

د ښي اړخ ديترمينانت کې فقط د S_n ځاي بدلونونه ونډه اخلي، چې د n ـمې ليکنې په خيث n لري. دا د S_{n-1} ځای بدلون ښايي او له دې سره دی

$$\det \begin{pmatrix} & & \tilde{A}_{i,l} & & & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,l-1} & a_{i,l+1} & \cdots \; a_{i,n} & 1 \end{pmatrix} = \det \tilde{A}_{i,l} .$$

د زياتونو د جمعي اجزاوو ضرب د $1 = (-1)^{2l+2i-2n}$ سره د ورکړ شوي وديزېينې فرمول ورکوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

که د ماتریکس

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

لپاره دیترمینانت د لومړی لیکې پسې ودیزبینه شي، نو لاس ته ترې راځي

$$\begin{aligned} \det A &= (-1)^2 \cdot 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &+ (-1)^3 \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &+ (-1)^4 \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= 2(4-1) - 1(2-1) + 1(1-2) = 6 - 1 - 1 = 4\,. \end{aligned}$$

لیکونکي : هیولیګ، هیورنر

د 3 ټکو له لارې د یوې سطحې ایمپلیڅیت(ساده) انځورونه

Implizite Darstellung einer Ebene durch 3 Punkte

په $\mathbb{R}^3$ کې یوه سطحه چې د درې ټکو

$P_2 = (x_2, y_2, z_2)$, $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ او $P_3 = (x_3, y_3, z_3)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له لارې ورکړ شوې وي، کېدی شي په ایمپلیځیت فرمول له

$$E:\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}=0$$

له انځور شي. د لومړی لیکې پسې ودیزیینې سره لاس ته راځي

$$E: ax+by+cz=d$$

د لاندې سره

$$a=\begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix},\ b=-\begin{vmatrix} x_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix},\ c=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix},\ d=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

لیکونکي: هیولیک، شترایت

بنسټ ازمایښت Basistest

وکتورونه $a_1,\ldots,a_n\in K^n$ ټیک هلته یو بنسټ جوړوي، که د ماتریکس $A=(a_1,\ldots,a_n)$ دیترمینانتونه ورک نه شي.

لیکونکي : هیولیک، هیورنر

که د A لومړی لیکه صفر وي، نو غوښتنه (ثبوت) روښانه ده.

په بل حالت کې کېدی شي د متې یوه ځای بدلون پسې ونیسو یا فرض کړو، چې $a_{1,1}\neq 0$ اومتې a_j لکه ښنګه لرو بڼه بدل کړو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$a_j \to a'_j = a_j - \frac{a_{1,j}}{a_{1,1}}\, a_1, \quad j = 2, \ldots, n\,.$$

دا د متو عمليو کارولو له لارې کېدی شي د متو ديترمينانت او هم د بنسټ خويونه بې تغيره پاتې شي. دا بڼه بدل شوی ماتريکس لاندې بڼه لري

$$A' = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ c & & B & \end{pmatrix}.$$

د وديزيېني جملې پسې لرو

$$\det A' = a_{1,1} \det B\,,$$

او دا چې $a_{1,1} \neq 0$ د A' متې تيک هلته يو د K^n بنسټ دي، که د B متې يوه د K^{n-1} بنسټ دي. دا غوښتنه کېدی شي اندوکتيو و ښوول شي.

ليکونکي : هيوليګ، هيورنر

د بيلګې په توګه له

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

کېدی شي د بنسټ ازماېښت روښانه شي.

که د متو يا ليکو څخه يو يې فقط له صفر جوړ وي، نو د ديترمينانت لپاره 0 ترې لاس ته راځي. په دې حالت کې د ماتريکس رانګ ماکسيمال 1 دی او له دې امله متې بنسټ نه جوړوي.

په بل حالت کې له $ad = bc$ لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$a\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} - b\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ab - ba \\ ad - bc \end{pmatrix} = 0$$

او له دې سره متې کربنیز بلواک دي.

که د متې کربنیز بلواک وي، نو صدق کوي:

$$\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix},$$

دیترمینانت شمېرل کې.ي و ته:

$$\det A = ad - bc = a\lambda c - \lambda ac = 0\,.$$

لیکونکي : هیولیک، هیورنر

د واندرموند – دیترمینانتونه Vandermonde-Determinante

په n ټکو x_i کې ارزښت شوي مونومونو $1, x, \ldots x^{n-1}$ دیترمینانت دی

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & \ldots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \ldots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{i>j}(x_i - x_j)\,.$$

لیکونکي : هیولیک، هیورنر

د $n = 2$ لپاره د واندرمود – ماتریکس دیترمینانت دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\det\begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{pmatrix} = x_2 - x_1 \,.$$

د یوه ټولیز n لپاره د ټولو نورو لیکو څخه لومړۍ لیکه کمیږي:

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} \\ 0 & x_2 - x_1 & \dots & x_2^{n-1} - x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & x_n - x_1 & \dots & x_n^{n-1} - x_1^{n-1} \end{vmatrix} \,.$$

د لومړۍ متې پسې وديزيېنې سره راکوي

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & \dots & x_2^{n-1} - x_1^{n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ x_n - x_1 & \dots & x_n^{n-1} - x_1^{n-1} \end{vmatrix} \,,$$

د کوم سره چې له k -مې لیکې څخه ضریب $x_k - x_1$ رادباندې کیدی شي:

$$\left(\prod_{k=2}^{n}(x_k - x_1)\right) \begin{vmatrix} 1 & x_2 + x_1 & x_2^2 + x_2x_1 + x_1^2 & \dots & \sum\limits_{i=0}^{n-2} x_2^{n-2-i}x_1^i \\ 1 & x_3 + x_1 & x_3^2 + x_3x_1 + x_1^2 & \dots & \sum\limits_{i=0}^{n-2} x_3^{n-2-i}x_1^i \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n - x_1 & x_n^2 + x_nx_1 + x_1^2 & \dots & \sum\limits_{i=0}^{n-2} x_n^{n-2-i}x_1^i \end{vmatrix} \,.$$

که د هرې متې څخه دا د مخه تېرې شوې متې دا x_1 – ځله کم کړو، نو بېرته پیل بڼې دیترمینانت لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\left(\prod_{k=2}^{n}(x_k - x_1)\right)\begin{vmatrix} 1 & x_2 & \dots & x_2^{n-2} \\ 1 & x_3 & \dots & x_3^{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

، او فرمول د اندکشن له لارې ښوول کېدی شي.

ليکونکي : هيوليک، هيورنر

کرښيز مساوات سيستم Lineares Gleichungssystem

په يوه تن يا جسم K کرښيز مساوات سيستم دا لاندې بڼه لري

$$\begin{matrix} a_{1,1}x_1 & + & \cdots & + & a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1}x_1 & + & \cdots & + & a_{m,n}x_n & = & b_m \end{matrix} \quad \Leftrightarrow \quad Ax = b$$

د يوه ضريبونو د ماتريکس $A = (a_{i,j}) \in K^{m\times n}$ سره، د نامعلومو $x_j \in K$ او يو ښى اړخ $b \in K^m$ سره.

دا کرښيز مساوانسيستم هوموجېن بلل کيږي، که $b = 0$ وي، پرته له دې ناهوموجېن inhomogen بلل کيږي.

د يوه حقيقي ($K = \mathbb{R}$) يا کمپلکس ($K = \mathbb{C}$) کرښيز سيستم لپاره K اکسپليڅيت explizit نه شي ورکول کېدی. دا چې کوم حالت مخ ته لرو د اړوندوالي له مخې ليدل کيږي يا روښانه دی.

که کرښيز مساوات سيستم کوم حل نه لري (په ټوليزه د $m > n$ لپاره)، نو دا باندي-ټاکلی بلل کيږي. په دې حالت کې له اندولپرابلم څخه غږيږو. يو کرښيز مساوات سيستم د

(c) ketabton.com: The Digital Library

نا يواحني حل سره (په توليزه توګه د $m < n$ لپاره) کښته - – يا لاندې- تکلی بلل کيږي.

يوه تابع $f(x)$ کيدی شي له داتن

$$(x_i, f_i), \quad i = 1, \ldots, n\,,$$

څخه د انترپوليشن له لارې په نږدې توګه بيا جوړه rekonstruiert شي. که يوه کرښيزه ځاي په ځاي کونه يا اينوونه

$$f(x) \approx p(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j p_j(x)$$

د مناسب بنسټتوابعو p_j سره، نو د انترپوليشن شرايطو څخه

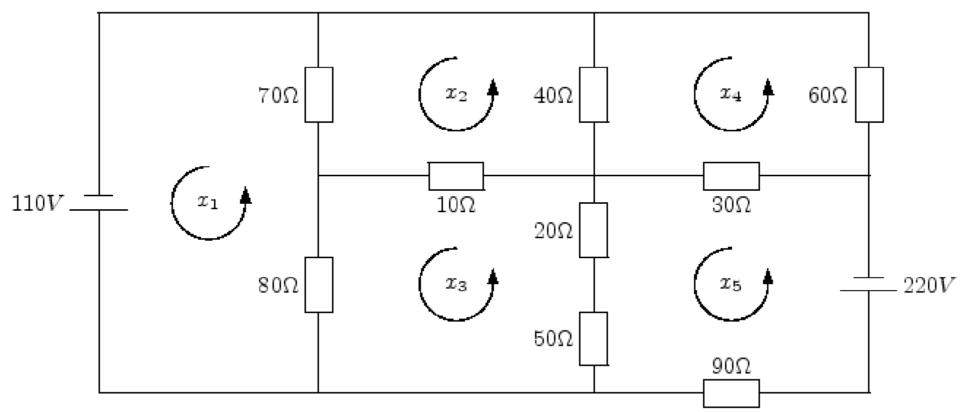
برېښنايي جرياندايره Elektrischer Schaltkreis

که په يوه بريناجريان دايره (ګردی)کې د x_i سره د دايرې برېښناجريان وښايو د جريانلور د ساعتتنخښه ووني (عقربک) مخامخ يعني معکوس، د سره د i - مي او j – مي پټی ګسره دډ يا مشترک مقاومت، د $R_{i,j}$ سره او د U_i سره اينوولی Spannungen ، نود اومOhm او کيرښهوف Kirchhoff قانون څخه دا کرښيز مساوات سيستم لرو

$$\sum_{i\sim 0} x_i R_{i,0} + \sum_{i\sim j} (x_i - x_j) R_{i,j} = U_i.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دلته $i \sim j$ معنا ورکوي، چې i -م او j —م د برېښناپټۍ یو ګډ مقاومت لري.
$x_i - x_j$ د دې مقاومت له لارې برېښناجریان دی. د $i \sim 0$, $R_{i,0}$ سره مقاومت
ښوول کېږي چې هغه فقط په i —مې پټۍ کې پروت دی.



د بېلګې په توګه د ځېره شوې جریان دایرې(ګردی) لپاره کرښیز مساوات سیستم

$$\begin{pmatrix} 150 & -70 & -80 & 0 & 0 \\ -70 & 120 & -10 & -40 & 0 \\ -80 & -10 & 160 & 0 & -70 \\ 0 & -40 & 0 & 130 & -30 \\ 0 & 0 & -70 & -30 & 190 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 110 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -220 \end{pmatrix}.$$

د ضریبونو ماتریکس په دیاګونال کې د یوې پټۍ پورې اړونده مقاومت او ځاي یا
(i, j) Position د i او j ګمیز یا منفي ګډ مقاومت . د دې راوړل شوې بېلګې حل
دی:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x \approx \begin{pmatrix} 1.0157 \\ 0.5641 \\ 0.0358 \\ -0.0940 \\ -1.1595 \end{pmatrix}.$$

ليکونکي: اپپ، هيوليک

د يوه کرښيز مساوات سيستم حلوړوالی

Lösbarkeit eines linearen Gleichungssystems

په يوه تن يا جسم K د يوه هوجېن کرښيز مساوات سيستم حلډېری

$$Ax = 0,$$

د يوه $m \times n$ ضريبونو ماتريکس A يوه د K^n لاندې – يا برخدېری U ده.

که دا هوجېن کرښيز سيستم

$$Ax = b$$

يو حل v ولري، نو د توليز حل لپاره باور لري

$$x \in v + U \,,$$

دا په دې معنا چې حللډېری د K^n يو افين affin لاندې – يا برخډېری ده. په ځانګړې

(c) ketabton.com: The Digital Library

توګه کېدی شي هوموجېن کرښيز مساوات سيستم هيڅ ، يو $U = \emptyset$ يا ناپای ډېر زيات حلونه ولې. $\dim U > 0$

ليکونکي: اپپ، هيوليګ، کيمرلي

که x, y د هوموجېن کرښيز مساوت سيستم حلونه وي او $\lambda \in K$ ، نو لاس ته راوړو:

$$A(x+y) \;=\; Ax + Ay = 0 + 0 = 0$$

همداسي

$$A(\lambda x) \;=\; \lambda Ax = \lambda 0 = 0\,,$$

دا په دې معنا چې د هوموجېن کرښيز مساوات سيستم د حلونو ډېرۍ يوه لاندې- يا برخفضا U جوړوي.

که v د هوموجېن کرښيز مساوات سيستم يو حل وي او $u \in U$ ، نو $x = v + u$ د

$$Ax = A(v+u) = Av + Au = b + 0 = b$$

له امله هم د دې هوموجېن کرښيز مساوات سيستم يو حل دی.

برعکس د ناهوموجېن کرښيز مساوات سيستم د دوه حلونو v او w سره کمښت يا تفريق $v - w$ د

$$A(v-w) = Av - Aw = b - b = 0$$

له امله هوموجېن کرښيز مساوات سيستم يو حل دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

له دې سره د يوه ناهوموجېن کرښيز مساوات سيستم ټول حلونه لاس ته راځي، داسې چې د ناهموجېن کرښيز مساوات سيستم د خوښې حلونو لپاره د ټولو هوموجېن کرښيز مساوات سيستم حلونو جمعه جوړه کړو، يعې سره جمعه کړو.

ليکونکي: اېپ، هيوليگ

دا لاندې ساده حالتونه د کرښيزو مساواتو مختلف ډولونه د ليدنې کوي:

لومړی – کرښيز مساوات سيستم

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29 \\ 60 \end{pmatrix}$$

يواځني حلونه لري: $x_1 = 8$, $x_2 = 1$.

دويم – کرښيز مساوات سيستم

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

يواځنی حل نه لري. که $x_3 = t$ په خوښه وټاکو، نو $x_1 = 2$, $x_2 = 2t$ د حلونو په څېر لاس ته راځي.

دريم - کرښيز مساوات سيستم

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

کوم حل نه لري. اخرنی لیکه $x_2 = 4$ راکوي، که دا په یوه لیکه کې کېښوول شي، د لومړۍ لیکې څخه $x_1 = 2$ لاس ته راځي، له دویمې څخه برعکس $x_1 = 1$.

لیکونکي: اېپ، هیولیګ

دیترمینانت او د یوه مساوات سیستم حلوړوالی

Determinante und Lösbarkeit eines linearen Gleichungssystems

یو کرښیز مساوات سیستم

$$Ax = b$$

د مربع ضریبونو ماتریکس A سره تیک هلته یو یواځنی حل لري، هر ښي لوریزې b سره، که همداسې دا هوموجېن سیستم $Ax = 0$ فقط یو ساده حل $x = 0$ ورلري.

که $\det A = 0$ وي، نو یو حل فقط د ښی لورې b لپاره شتون لري په هغه د A د متو څخه غزېدلي لاندې – یا برخفضا ده. په دې حالت کې حل یواځنی نه دی.

لیکونکي: کرایخ، هیولیګ

غوښتنه د دیترمینانت د خویونو څخه په لاس راځي.

و $\det A \neq 0$ ته ورته لرو، چې د A متې $a_1, \ldots, a_n$ کرښیز خپلواکې دي. د تعریف سره سم دا په دې معنا دی چې

$$x_1 a_1 + \ldots + x_n a_n = 0 \Leftrightarrow x_1 = \cdots = x_n = 0,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

همداسې

$$Ax = 0 \Leftrightarrow x = 0\,.$$

د دې لپاره چې د ناهوموجېن سيستم يوائځنې حلوړوالي ته ورته لاس ته راوړای شو، له دې کار اخلو چې متې يو بنسټ جوړ کړي، دا په دې معنا چې هر بنی اړخ b د
$$x_1a_1 + \ldots + x_na_n = b \Leftrightarrow Ax = b$$
کربنيزکمبېنېشن په حيث

يوائځنی انځوروړ دی.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

دا کربنيز مساوات سيستم

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

تيک هلته يو يوائځنی حل لري، که ديترمينانت $ad - bc \neq 0$ وي. په دې حالت کې حل په لاندې ډول دی

$$x = \frac{du - bv}{ad - bc}\,, \qquad y = \frac{av - cu}{ad - bc}\,.$$

که ديترملنانت $ad - bc$ برابر 0 وي، په ټوپيزه توګه کربنيز مساوات سيستم حل نه لري. په دې حلات حلونه فقط هلته شتون لري، که

$$av \qquad = cu$$

او

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$bv \qquad = du$$

صدق ولري. که د بېلګې په توګه $a \neq 0$ وي، نو کېدی شي y په خوښه وټاکو او د x لپاره لاس ته راوړو

$$x = \frac{u - by}{a}\,.$$

ليکونکي: پپ، اهيوليک

د کرامر قاعده Cramersche Regel

د يوه مربع کرښيز مساوات سيستم $Ax = b$ لپاره

$$x_i \det A = \det(a_1, \ldots, a_{i-1}, b, a_{i+1}, \ldots, a_n)\,,$$

دی، د کوم a_j سره چې د متوضريبونو ماتريکس A په نخښه کيږي.

په ځانګړې توګه کېدی شي د $\det A \neq 0$ لپاره په ښت يا معکوس $C = A^{-1}$ د

$$c_{i,j} = \frac{\det(a_1, \ldots, a_{i-1}, e_j, a_{i+1}, \ldots, a_n)}{\det A}$$

له لارې ټاکل کېدی شي.

ليکونکي: هيوليک، شترايت

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ديترمينانت د ډېركربنيزوالي او سيومتري له امله لاس ته راځي:

$$\det(a_1,\ldots,a_{i-1},b,a_{i+1},\ldots,a_n) = \det(a_1,\ldots,a_{i-1},\sum_{j=1}^{n} a_i x_i, a_{i+1},\ldots,a_n)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} x_j \det(a_1,\ldots,a_{i-1},a_j,a_{i+1},\ldots,a_n)$$

$$= x_i \det(a_1,\ldots,a_{i-1},a_i,a_{i+1},\ldots,a_n)$$

په ځانګړي توکه د $b = e_j$ سره د معکوسي j ـمه مټه $x = (c_{i,j},\ldots,c_{n,j})^{\mathrm{t}}$ راکوي

ليکونکي: هيوليګ، شترايت

ديوه (2×2) - ماتريکس

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

د معکوس C لپاره د کرام قاعدې سره لرو

$$c_{1,1} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & b \\ 0 & d \end{vmatrix}}{\det A} = \frac{d}{\det A}, \qquad c_{1,2} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & b \\ 1 & d \end{vmatrix}}{\det A} = \frac{-b}{\det A},$$

$$c_{2,1} = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 \\ c & 0 \end{vmatrix}}{\det A} = \frac{-c}{\det A}, \qquad c_{2,2} = \frac{\begin{vmatrix} a & 0 \\ c & 1 \end{vmatrix}}{\det A} = \frac{a}{\det A},$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

همداسې د $\det A = ad - cb$ سره دا لاندې لرو

$$\det A = ad - cb$$

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - cb}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

لیکونکي: هیولیګ، شترایت

د (3×3) - ماتریکس

$$(3 \times 3)$$

د معکوس G لپاره د کرامر د قانون له مخې لرو

$$c_{1,1} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 3 \end{vmatrix}} = -\frac{3}{25}, \qquad c_{1,3} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 3 \end{vmatrix}} = -\frac{2}{25},$$

$$c_{3,2} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{3}{25}, \qquad \ldots$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ټول داسې دي

$$A^{-1} = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} -3 & 6 & -2 \\ 12 & 1 & 8 \\ -14 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

ليکونکي: هيوليګ، شترايت

په څټ لور ځای په ځای کول Rückwärts-Einsetzen

په يوه کرښيز مساوات سيستم کې د پورته مثلث -بڼې سره

$$\underbrace{\begin{pmatrix} r_{1,1} & \cdots & r_{1,n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & r_{n,n} \end{pmatrix}}_{R} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

د $\det R = r_{1,1} \cdots r_{n,n} \neq 0$ سره کېږی شو ناټاکلې $x_n, \ldots, x_1$ يو پر بل پسې وټاکو:

$$r_{n,n}x_n = b_n \to x_n = b_n / r_{n,n}$$

او د $\ell = n-1, \ldots 1$ لپاره ،

$$r_{\ell,\ell}x_\ell + \cdots + r_{\ell,n}x_n = b_\ell, \to x_\ell = \left(b_\ell - r_{\ell,\ell+1}x_{\ell+1} - \cdots - r_{\ell,n}x_n\right)/r_{\ell,\ell}.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له دې سره به هر یو دا اوس معلوم شمېل شوي ارزښتونه $x_{\ell+1}, \ldots, x_n$ و کارول شي.

په یوه مساوات سیستم کې د یوه لاندې مثلث ماتریکس کې کېدی شي په ورته توګه یو په بل پسې $x_1, \ldots, x_n$ و ټاکل شي.

د کرښیز مساوات سیستم

$$\begin{array}{rcrcrcr} 4x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 6 \\ & & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 0 \\ & & & & 7x_3 & = & 7 \end{array}$$

لپاره په ملث بنې کې د په څټ ایښوونې له لارې حلونه لاس ته احې

$$x_3 = 1$$

$$x_2 = (0-2)/2 = -1$$

$$x_1 = (6-3(-1)-1) = 2\,.$$

لیکونکي: هیولیګ، شترایت

د ګاوس ترانفورمیشن Gauß-Transformationen

لاندې عملیې د کرښیز مساوات سیستم د حلونو ډېرۍ بې تغیره پرېږدي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

- د دوه مساوتو بدلونه
- یوه مساوات ضربونه د یوه ضریب $\neq 0$ سره.
- د یوه مساوات کمول له یوه بل مساوات څخه

د اخرو دوه عملیو د کمبینېشن له لارې د یوې لیکې ډېرواره زیاتول یا جمعه کول و بلې لیکې ته عملیې دي چې اجازه لري یا پریښوول شوې عملیې دي.

د داسي په نامه ګاوس ترانسفورمېشن په مسته کزدی شي sukzessive یا یو په بل پسي ناټاکلي له منځه یووړل شي او یو کرښیز مساوات سیستم په مثلثفورم تراسفورمه کړو یا په بله بڼه واړوو او بیا یې په څټ اېښوونې له لارې حل کړو.

لیکونکي: هیولیګ، شترایت

د کرښیز مساوات سیستم

$$\begin{array}{ccccccc} 3x_1 & - & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 11 \\ x_1 & + & 7x_2 & + & 4x_3 & = & 6 \\ 6x_1 & - & x_2 & - & 5x_3 & = & -8 \end{array}$$

حل ځان ته تغیر نه ورکوي له

- د لومړي او دویم مساوات بدلونه

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & 7x_2 & + & 4x_3 & = & 6 \\ 3x_1 & - & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 11 \\ 6x_1 & - & x_2 & - & 5x_3 & = & -8 \end{array}$$

- د دویم مساوات ضربونه د 2 ضریب سره

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 7x_2 & + & 4x_3 & = & 6 \\ 6x_1 & - & 4x_2 & + & 4x_3 & = & 22 \\ 6x_1 & - & x_2 & - & 5x_3 & = & -8 \end{array}$$

- د دريم مساوات کمول يا تفريقول له دويم مساوات څخه

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 7x_2 & + & 4x_3 & = & 6 \\ 6x_1 & - & 4x_2 & + & 4x_3 & = & 22 \\ & & -3x_2 & + & 9x_3 & = & 30 \end{array}$$

ليکونکي: هيوليک، شترايت

د ګاوس د له منځه وړنه Gauß-Elimination

د ګاوس – بنه بدلون له لارې کېدی شي يو کربنيز مساوات سيستم د انعکاس وړ $(n \times n)$-ضربيماتريکس به ماکسيمال $n-1$ پلونو (قدمونو) په پورته مثلثبنه باندې واړول شي يا راوړو. د دې لپاره يو په بل پسې د دياګونال لاندې کښته ضريبونه له منځه يوسو دا په دې معنا چې له $\ell-1$ پلونو (قدمونو) وروسته دا ک م س (کربنيز مساوات سيستم) لاندې بنه غوره کوي :

$$\begin{array}{cccccccccccccc} a_{1,1} & x_1 & + & a_{1,2} & x_2 & + & \dots & + & a_{1,\ell} & x_\ell & + & \dots & + & a_{1,n} & x_n & = & b_1 \\ & & & a_{2,2} & x_2 & + & \dots & + & a_{2,\ell} & x_\ell & + & \dots & + & a_{2,n} & x_n & = & b_2 \\ & & & & & & & & & \vdots & & \vdots & & & & & \vdots \\ & & & & & & & & a_{\ell,\ell} & x_\ell & + & \dots & + & a_{\ell,n} & x_n & = & b_\ell \\ & & & & & & & & a_{\ell+1,\ell} & x_\ell & + & \dots & + & a_{\ell+1,n} & x_n & = & b_{\ell+1} \\ & & & & & & & & & \vdots & & \vdots & & & & & \vdots \\ & & & & & & & & a_{n,\ell} & x_\ell & + & \dots & + & a_{n,n} & x_n & = & b_n \end{array}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په یوګوني ډول ℓ-م له منځه وړنې پل داسې ځغلي لکه لاندې .

- که دا –م دیاګونال توکی، داسې په نامه د پیوټ-تونی Pivot-Element، صفر دی، نو ℓ -م به د یوه دې لاندې مساواتو سره بدل شي، داسې چې $a_{\ell,\ell} \neq 0$ به باور ولري...
- د $i > \ell$ لپاره به د i –م مساوات څخه د ℓ –م مساوات ډېر واره کم شي، داسې چې $a_{i,\ell}$ صفر شي:

$$a_{i,j} \leftarrow a_{i,j} - q_i a_{\ell,j}, \quad b_i \leftarrow b_i - q_i b_\ell \quad (q_i = a_{i,\ell}/a_{\ell,\ell})$$

د ټولو $j \geq \ell$ لپاره..

لیکونکي: هیولیګ، شترایت

د کربنیز مساوات لپاره

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -2 & 1 \\ 6 & 4 & -1 & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

د ګاوس الګوریتم په لاندې تو؛ه ځغلي:

- د لومړی او دویمي لیکي پډلول:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -2 & 1 \\ 6 & 4 & -1 & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- (3 لیکه) – (1 لیکه) او (4 لیکه) - (1 لیکه)·2

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- (.لیکه2) + (لیکه·2 3):

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- (لیکه3)- (لیکه4)·3 :

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

ليکونکي: هيوليگ، شترايت

د ايښيلون بڼه Echelon-Form

(c) ketabton.com: The Digital Library

یو کرښیز مساوات سیستم د یوه $(m \times n)$ - ضریب ماتریکس سره کېدی شي د ګاوس
–ترانفورمیشن سره د ایښېلون-فورم باندې یې بڼّ بدله یا واړول شي:

$$Ax = b \rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 0\ldots0 & p_1 & *\ldots* & & & & & \\ & & 0 & 0\ldots0 & p_2 & *\ldots* & & \\ & & & & 0 & 0\ldots0 & p_3 & *\ldots* \\ & & & & & & & \ddots \end{pmatrix}}_{A'} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}.$$

له دې سره داسې په نامه پیووت

$$p_1 = a'_{1,j_1}, \ldots, p_k = a'_{k,j_k}, \quad k \leq m, \quad 1 \leq j_1 < \cdots < j_k \leq n,$$

د صفر سره نابرابرې دي او k د A رانګ ی.

د k –م ترانفورمیشن پل په لاندې ډول ځغلي:

- یو له صفر مختلف متریکس توکی p_k د خورا کوچنی متې ایندکس(پېژندنخښې) سره او $\geq k$ لیکې اندکس(د لیکې پېژند نخښه) د پیووت توکی په حیث ټاکل کیږي او د لیکو بدلون له لارې پوزیشن (k, j_k) ته راوړل کیږي. که پیووت توکی شتون نه لري، نو د ایښلون پڼه مو لاس ته راوړې ده.

- د k لیکې ډېرواره کمون یا تفریق له لارې د پیووت لاندې لور ته د ماتریکس توکی له منځه ځي.

لیکونکي: هیولیګ، شترایت

د ماتریکس

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & -3 & 0 & 9 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & -1 & 4 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & 6 & 1 & 3 & 5 & 2 & -5 \\ 0 & -2 & -3 & 1 & 6 & -7 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & -3 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

لپاره ترنفورمیشن د ایښلون-فورم باندې په لاندې ډول ځغلي

1. د لومړۍ او دویمې لیکې پډلون:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 0 & -1 & 4 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & -3 & 0 & 9 \\ 0 & 4 & 6 & 1 & 3 & 5 & 2 & -5 \\ 0 & -2 & -3 & 1 & 6 & -7 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & -3 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

2. (3.لیکه Zeile) - $2\cdot$(1.لیکه Zeile) und او (4.لیکه Zeile) + (1.لیکه Zeile):

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 0 & -1 & 4 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & -3 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & -3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & -3 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

3. (3.Zeile) - (2.Zeile), (4.Zeile) - (2.Zeile)

او (5.Zeile) - (2.Zeile)

په پورته کې Zeile د لیکې یا میلې په معنا دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 0 & -1 & 4 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & -3 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

.4 (4. Zeile) - $\frac{1}{2}\cdot$ (3.Zeile):

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 0 & -1 & 4 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & -3 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

د ایښلون – فورم لري نا ساده ليکي د پيووټ –توکو $p_1 = 2$, $p_2 = 1$ او $p_3 = -10$ سره.

ليکونکي: هيوليګ، شترايت

د ایښلون- بڼه د یوه ل م س (کرښيز مساواتسستم)حل

Lösung eines LGS in Echelon-Form

يو کرښيز مساوات سيستم $Dx = c$ د ایښلون په بڼه،

$$\begin{pmatrix} 0\ldots0 & p_1 & *\ldots* & & & & & \\ & & 0 & 0\ldots0 & p_2 & *\ldots* & & \\ & & & & 0 & 0\ldots0 & p_3 & *\ldots* \\ & & & & & & & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پیووټ $p_1, \dots, p_k$ سره تیک هلته حلوږ دی، که $c_{k+1} = \cdots = c_m = 0$ وي.

حل یواځنی دی، که $k = n$ وي. د $k < n$ لپاره د هوموجین کربنیز مساوات سیستم ($c_i = 0$)تیک $n - k$ کربنیز خپلواک حلونه شته .

نا معلومې، چې بې له پیووټ یې متې په ګوته کوي. کېدی شي ازادې یا په خوښه و ټاکل شي.

لیکونکي: هیولیګ، شترایت

په لاندې کې به زیات تیوپیکي حالتونه تر بحث لاندې راوړل شي.

- $k = n = 4$

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix}$$

د په څټ اینسوونې له لارې ریکورزیو یواځنی حل لاس ته راوړی شو.

$$x = (1, -1, -1, 1)^t.$$

- $3 = k < n = 5$، $c_4 \neq 0$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په اخرنۍ لیکه کې $0 \cdot x = 1$ ترې لرو، له دې سره کربنیز مساوات سیستم کوم حل نه لري.

- $c_4 = 0$ ، $3 = k < n = 5$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

دا چې $c_{k+1} = 0$ ، نو کربنیز مساوات سیستم $Dx = c$ حلوړ دی

د $\operatorname{Rang} D = 3 = n - 2$ له امله حل x یواځنی نه دی. دلته د دوه کربنیز خپلواک حلونه v_i شتون لري د هوموجېن سیستم او د ټولیز حل لاندې بڼه

$$x = x_s + \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 \,, \alpha_j \in \mathbb{R}$$

لري د هوموجین سیستم یو ځانګړی حل x_s سره.

وکتورونه v_i د پیووت پورې نه اړه لرونکو نامعلومو د کانونیکي (بڼه یز: کنوني) ټاکنې له لارې معلوموي یا ټاکي او پاتې ضریبونه په هوموجېن سیستم باندې:

$$r_{\ell,\ell} x_\ell + \cdots + r_{\ell,n} x_n = b_\ell, \to x_\ell = \left(b_\ell - r_{\ell,\ell+1} x_{\ell+1} - \cdots - r_{\ell,n} x_n\right) / r_{\ell,\ell} \,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

يو ځانګړی حل

$$x_s = \begin{pmatrix} 5/4 \\ -6 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

د $x_3 = x_5 = 0$ اينوونې له لارې لاس ته راځي.

ليکونکي: هيوليک، شترايت

رانګ او د ک م س(کرښيز مساواتسيستم) حلوړوالی

Rang und Lösbarkeit von LGS

وي دې $A \in \mathbb{R}^{m\times n}, b \in \mathbb{R}^m.$.

Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}, b \in \mathbb{R}^m.$

- کرښيز مساوات سيستم $Ax = b$ يو حل لري

$$\iff \text{Rang } A = \text{Rang}(A, b).$$

- کرښيز مساوات سيستم $Ax = b$ يواځنی حلوړ دی

$$\iff \text{Rang } A = \text{Rang}(A, b) = n.$$

- کرښيز مساوات سيستم $Ax = b$ ډېر حلونه لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\Longleftrightarrow \text{Rang}\, A = \text{Rang}(A, b) = k < n.$$

دلته په پام کې ولرئ، چې د A رانک او د غزېدلي ماتريکس $(A,$ اینواریانت دي د ساده بني بدلون سره. له دې امله کېدی شي و نيول شی يا فرض شي کرښيز مساوات سيستم به ايښلون-بڼه دی. به دې بڼه کېدی شي نتيجې ترلې ولوستل شي.

د انډول کرښه(انډولکرښه) Ausgleichsgerade

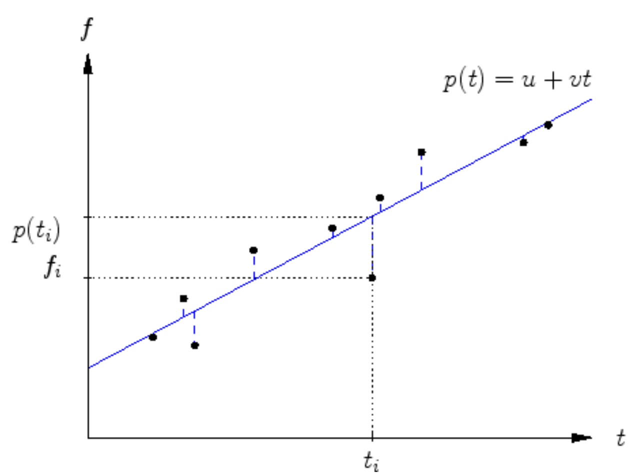
يوه کرښه

$$p(t) = u + vt\,,$$

، چې داتتونه $i = 1, \dots, n$ ، به خورا ښه توکه approximiert کوي، کېدی شي د ناتيکاوي مربع جمعي کمښت

$$\sum_{i=1}^{n} (f_i - p(t_i))^2$$

له لارې پيدا کړی شي.



(c) ketabton.com: The Digital Library

د محوربرخې u او جګېدنې v لپاره لاندې فرمولونه راکوي

$$u = \frac{(\sum t_i^2)(\sum f_i) - (\sum t_i)(\sum t_i f_i)}{n(\sum t_i^2) - (\sum t_i)^2}$$

$$v = \frac{n(\sum t_i f_i) - (\sum t_i)(\sum f_i)}{n(\sum t_i^2) - (\sum t_i)^2},$$

که لږ تر لږه دوه پراته ارزښتونه یا قیمتونه t_i ورک شي یعني صفر وي.

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

د مینیموم سره بایدد غلطی مربع جمعي مشتق هم د u او v هم د پسې صفر وي:

$$0 = 2\sum_i (u + vt_i - f_i)$$

$$0 = 2\sum_i t_i(u + vt_i - f_i).$$

دواړه مساوات د ماتریکس په بڼه په لاندې ډول دي

$$\begin{pmatrix} n & \sum t_i \\ \sum t_i & \sum t_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum f_i \\ \sum t_i f_i \end{pmatrix}.$$

که لږ ترلږه دوه t_i مختلفي وي، نو دیترمینانت ده:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\underbrace{(1+\cdots+1)}_{n\,\mathrm{mal}}|(t_1,\ldots,t_n)^{\mathrm{t}}|_2^2 - \left(\sum_i 1\cdot t_i\right)^2 > 0\,,$$

او سرى د كرامر د قاعدې سره وركړ شوى حل لاس ته راوړي

ليكونكي: اپپ، هيوليک

د برابروني حل يو بل سره يوغږيز كيدل يا يو په بل پريوتلو، كربنيزو مساوات سيستم

Ausgleichslösung überbestimmter, linearer Gleichungssysteme

كه د يوه كربنيز مساوات سيستم $Ax = b$ ښى خوا b وي د $(m \times n)$ - اتريكس A متو كربنيزې هيولي ياسپاين كې خوندي نه وي (په تيپيكي دول د $m > n$ لپاره)، دا په دې معنا چې وي

$$\mathrm{Rang}\, A < \mathrm{Rang}\,(A, b)\,,$$

نو مساوات سيستم حل نه لري. سرى د يوه د پاسه ټاكلي سيستم څخه خبرې كوي. په دې حالت كې كيدى شي يو اپروكسيميشن د برابروالي پرابلم

$$|Ax - b| \to \min$$

له لارې و ټاكل شي.

د برابروالي حل شمېرل د نورمالومساوات يا سينګولارارزښتتوته كوني په مرسته ممكن يا شوني دى

ليكونكي: اپپ، هيوليک

(c) ketabton.com: The Digital Library

الجبر - كرښيز مساوات سيستم-برابروني پرابلم

Algebra - Lineare Gleichungssysteme – Ausgleichsprobleme

نورمالمساواتونه Normalengleichungen

د يوه په خوښه $m \times n$ – ماتريکس A لپاره هر د برابروني پرابلم

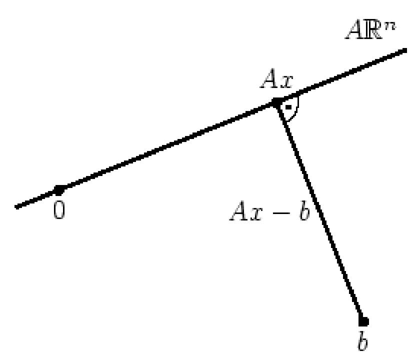
$$|Ax - b| \to \min$$

هر حل x نورماليز –مساواتونه

$$A^{\mathrm{t}}Ax = A^{\mathrm{t}}b\,,$$

پوره کوي، دا په دې معنا چې

ريزيدووم $r = Ax - b$ Residuum اورتوگونال دی د A د متو څخه غزېدلي لانديفضا $\operatorname{Bild} A$ سره



ځمککچيز يا هندسي مساوات معنا لري، چې ريزيدووم $r = Ax - b$ د ماتريکس A په متو نيغ ولاړ دی يعني عمود دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ماتريكس $A^t A$ مربعيزه ده او پراخېدونی يا بعد n لري. دا ټيک هلته معکوسوړ ده کله چې $\operatorname{Rang} A = n$ وي، دا په دی معنا چې کله د A متې کرښيز خپلواکي وي.
نورماليز-مساوات د سينګولار حالت کې هم حلوړ دی، خو حل يې يوائځنی نه دی.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

له

$$|A(x+ty)-b|^2 \geq |Ax-b|^2$$

د

$$(Ax-b)^t y = y^t (Ax-b), \quad r = Ax-b$$

سره برابر ارزښته نامساوات

$$2ty^t A^t r + t^2 y^t A^t A y \geq 0$$

لاس ته راځي د ټولو $t \in \mathbb{R}$ او وکتورونو y لپاره. که د نابرابرون کيڼ اړخ په t کې د پارابول په څېر ونيول شي، نو نه منفيوال(نه کميزوالي) د

$$y^t (A^t r) = 0 .$$

سره به يوه معنا دي.

دا ټيک هلته د ټولو وکتورونو y لپاره صدق کوي، که په نوکانو کې افاده (ويينه) صفروکتور وي.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

د

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

لپاره نورمالمساوات لاس ته راځي

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

لاس ته راځي

دا کربنيز مساوات سيستم ئواځني حل $x = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^t$ لري.ريزيدووم $r = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}^t$ دي.

که A کربنيز بلواکې متې ولري، لکه په بېلګه کې

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix},$$

نو نورمالو-مساوات سيستم سينګولار دي:

$$\begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

حل

$$x = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} - t \\ t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R},$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په دې حالت کې يواځني نه دي، مګر ريزيدووم

$$r = \left(\tfrac{6}{5} \quad -\tfrac{12}{5} \quad 0 \right)^t$$

.

ليکونکي: اېپ، هيوليګ

توموګرافيTomographie

لکه څنګه په فنکشن يا څېرونه (mappingتابع) کې ښوول شوي دي، په کمپيوتر- توموګرافي Computer-Tomographie کې د حجروغړو ټينګوالي (غلظت) $x(u,v)$ بيا جوړيږي ، په کومه کې چې د ګڼوالي يا ټينګوالي بايليدنه(کمښت) Intensitätsverlust د رونتګن وړانګو د k کوديې له ℓ غبرګو کرښو

$$\mathcal{R}_i: \quad (u_i,v_i) + \mathbb{R}(\cos\vartheta_i, \sin\vartheta_i), \quad i = 1,\ldots,m = k\ell\,,$$

کچ کيږي. سړي د ټينګوالي وېش د يوه ټوټه ډوله ثابتې تابع approximiert کوي

سړی د ټينګواليخورونه د يوه ټوټه ډوله يا ټوټه په ټوټه ثابتو له لارې اپروکسيمي کوي د مربعو Q_j په پاتې شونو او ګڼوالي کچه ونو د نږدې ونې له لارې کټلي کرښيز ا نتيګرال څخه.

$$b_i = \int_{\mathbb{R}} x(u_i + t\cos\vartheta_i, v_i + t\sin\vartheta_i)\,dt \approx \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j\,,$$

چيرته چې x_j د $x(u,v)$ يو اپروکسيميشن دی په Q_j او

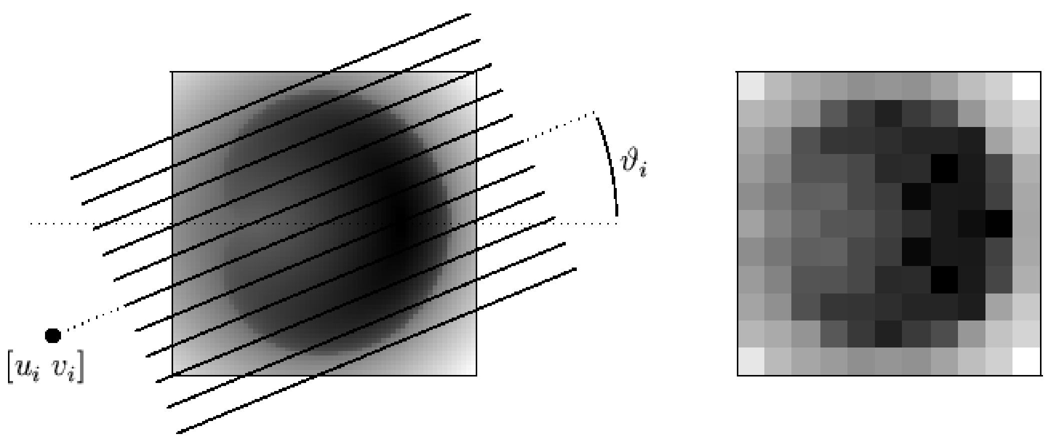
$$a_{i,j} = |\mathcal{R}_i \cap Q_j|$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کربنو $\mathcal{R}_i$ د Q_j سره غوڅ ي یا تقاطع ا وړدوالی په ګوته کوي. دا چې د کچوونو تعداد یا ګڼون په ټولیزه توګه ډېر لوي دي نسبت د راستر (هغه تخته چې ځیره پرې کښل کیږي) ځلوریو او شنتیګرالونه چې ټیک نه شي شمیرل کیدی، د داتا b ځخه د x ټاکلوته سړی یو برابروالیز یا د انډول پرابلم سره مخامخ کیږي.

دالاندې ژباړې دلته راکاپي کړې(دا لاندې دې همداسې په انګرېزي پاتې وي):

›› The word "raster" has its origins in the Latin *rastrum* (a rake), which is derived from *radere* (to scrape). It originally referred to the raster scan of cathode ray tube (CRT) video monitors, which paints the image line by line by magnetically steering a focused electron beam. By association, it came also to refer to a rectangular grid of pixels. See also rastrum, a device for drawing musical staff lines پای››



پورته ښې لور ته ځیره په یوه 11×11 راستر شمیرلی نړدیوالی ښایي کېڼ ځیره شوی ټینګوالي خورونه(غلظت-) ښایي. له دې سره د کونج

$$\vartheta = 0, \pi/16, \pi/8, \ldots$$

لپاره 11 غبرګ سکن-لورې د راستر مربع سور باندې کارول شوي.

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

(c) ketabton.com: The Digital Library

آيګن-ارزښت او آيګو-وکتور Eigenwert und Eigenvektor

يو سکالار λ د يوه مرئع ماتريکس A آيګو-ارزښت بلل کيږي، که وي:

$$Av = \lambda v, \quad v \neq 0.$$

وکتورونه $v \neq 0$ د $Av = \lambda v$ سره و آيګن-ارزښته λ ته آيګن-وکتورونه بلل کيږي.
آيګن-وکتورونه و آيګن-ارزښت ته د صفر وکتور سره يوځاي يوه کرښيزه فضا جوړوي،
داسې په نامه د λ آيګن-فضا

$$V_\lambda = \ker(A - \lambda E)$$

ليکونکي: هيوليک،هيورنر، کيمرلي

ماتريکسونه

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

آيګن-ارزښتونه $\lambda_1 = 0$ او $\lambda_2 = 2$ لري، ځکه

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

او

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

ليکونکي: هيوليګ،هيورنر

لاندې بېلګې د (2×2) ــماتريکسونو لپاره ممکنه حالتونه ښايي

- دوه حقيقي آيګن-ارزښتونه:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} , \quad \lambda_1 = -1 \, , \, v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} , \quad \lambda_2 = 3 , \, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

- يو حقيقي آيګن- ارزښت، دوه کرښيز خپلواک آيګن-زکتورونه:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} , \quad \lambda = 2 \, , \, v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

- يو حقيقي آيګن-ارزښت، يو آيګن-وکتور:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} , \quad \lambda = 1 \, , \, v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

- دوه کنجوګيري کمپلکس آيګن-ارزښتونه او آيګن-وکتورونه:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} , \quad \lambda_{1,2} = 1 \mp \mathrm{i} \, , \, v_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 \\ \pm \mathrm{i} \end{pmatrix} .$$

ليکونکي: هيوليګ،هيورنر

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاندې بېلګې د کمپلکس (2×2) – متريکسونو لپاره ممکنه حالتونه ښيي.

- دوه آيګن-ارزښتونه اودوه آيګن-وکتورونه:

$$A = \begin{pmatrix} \mathrm{i} & 2 \\ 2 & \mathrm{i} \end{pmatrix}, \quad \lambda_1 = 2 + \mathrm{i}\,,\, v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = -2 + \mathrm{i}\,,\, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

- يو آيګن-ارزښت، دوه کرښيز خپلواک آيګن-وکتورونه:

$$A = \begin{pmatrix} 2\mathrm{i} & 0 \\ 0 & 2\mathrm{i} \end{pmatrix}, \quad \lambda = 2\mathrm{i}\,,\, v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- يو آيګن-ارزښت، يو آيګن-وکتور:

$$A = \begin{pmatrix} \mathrm{i} & -1 \\ 0 & \mathrm{i} \end{pmatrix}, \quad \lambda = \mathrm{i}\,,\, v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

ليکونکي: هيوليک،هيوررنر

ورته والي - ترانفورميشن Ähnlichkeitstransformation

د يوه مربعيز ماتريکس A په ورته والي تراسفورميشن

$$A \to B = Q^{-1} A Q\,,$$

کې آيګن-ارزښتونه ساتلي پاتيږي. آيګن-وکتورونه د اينورتيروړ ماتريکس Q له لارې تشريح شوي بنسټ بدلون سره سم ترانسفورمي کيږي، دا په دې معنا، چې د A آيګن-

(c) ketabton.com: The Digital Library

وکتور v و آيګن- ارزښت λ ته و همهغسي د B آيګن-وکتور $w = Q^{-1}v$ په ګوته کوي و همغه بنسټ ته.

ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

که v د A يو آيګن-وکتور وي و آيګن-ارزښت λ ته، يعنې $Av = \lambda v$ ، نو د $w = Q^{-1}v$ لپاره لاس ته

$$Bw = Q^{-1}AQw = Q^{-1}AQQ^{-1}v = Q^{-1}Av = Q^{-1}\lambda v = \lambda Q^{-1}v = \lambda w\,.$$

ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

لاندې مربع ماتريکس دې ورکړ شوی وي

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

د آيکن-ارزښت $\lambda_1 = 2$ او $\lambda_2 = 3$ او د لاندې اړونده آيګن-وکتور سره:

$$v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

يو ورته والي ترانسفورميشن د

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$B = Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}.$$

سره راکوي.

د B آيګن-وکتورونه w_1 او w_2 د

$$w_1 = Q^{-1}v_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ -\frac{5}{3} \end{pmatrix}$$

سره، همداسي

$$w_2 = Q^{-1}v_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

سره شميرل کيږي.

ليکونکي: هيوليک، کرايخ

کرکتريستکي پولينوم Charakteristisches Polynom

د $(n \times n)$ – ماتريکس A آيګن-ارزښتونه د کرکتريستيکي پولينوم صفرونه دي

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix}.$$

په ځانګړې توګه د ماتبريکس آيګن – ارزښونه د ترانسبوزيشن سره اينواريانت پاتي کيږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ليکونکي: هيوليک، هيورنر، کيمرلې

يو سکالار λ تيک هلته د $(n \times n)$-ماتريکس A آيګن-ارزښت دی، که ولرو

$$Av = \lambda v\,, \quad v \neq 0,$$

دا په د ې معنا چې که دا هوموجېن کرښيز مساوات سيستم $(A - \lambda E)v = 0$ يو له صفر مختلف حل ولري. دا حالت تيک هلته لرو، که $(A - \lambda E)$ زينګولار وي يعنې که وي:

$$\det(A - \lambda E) = 0.$$

ليکونکي: هيوليک، هيورنر

د آيګن – ارزښتونو او - - وکتوونوشميرنه

د دې لپاره چې د مربع ماتريکس A لپاره د آيګن-ارزښت پرابلم حل کړو، لومړی د کرکتريستيکي پولينومونو آيګن-ارزښتونه λ د صفرځايونو په حيث ټاکي

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda E)\,.$$

د هر آيګن – ارزښت λ لپاره له دې سره اړوند آيګن – وکتور v لاس ته راوړو د هوموجېن ګرښيز مساوات سيستم د يوه ناترپويال په څېر

$$(A - \lambda E)v = 0\,.$$

د دې لپاره چې د آيګن-فضا V_λ لپاره يو بنسټ لاس ته راوړو، سړی کړی شي دا سيستم په اپښيلون-فرمول ترنسفورمی کړو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په ټوليزه توګه $\dim V_\lambda = 1$ دی. دا تر يوه سکالار ضيب يواځنی ټاکلی آيګن-وکتور v کېدی شي هلته وټاکل شي ، په کوم کې چې د وکتورونو v مناسب کمپوننتونه له مخه ورکړي

ليکونکي: هيوليک، کرايخ

د ماتريکس

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

د آيګن –ارزښت د ټالکو لپاره کرکتيستيکی پولينوم جوړوو

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -\lambda & -2 & -1 \\ 2 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(2-\lambda)^2 - 4 + 8 - 2\lambda = -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 6\lambda + 4\,.$$

او د ده صفرځايونه ټاکي. د ګومان له مخې (د مطلق ارزښت غړي پروېشونی يا مقسوم عليه) د لومړي صفرځای په څېر $\lambda_1 = 2$ لاس ته راځي. د دې صفرځای وېشنه

$$(-\lambda^3 + 4\lambda^2 - 6\lambda + 4)/(\lambda - 2) = -\lambda^2 + 2\lambda - 2,$$

او په لانې فرمول (دنيمې شپې فرمول په نامه بلل شوی) کې يې ځای په ځای کوو ترې لرو

$$\lambda_{2,3} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{-2} = 1 \pm \mathrm{i}\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

یو آیګن – وکتور و آیګن – ارزښت 2 ته کیدی شي د هوموجین مساوات سیستم

$$(A-2E)v = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} v = 0$$

حلونو له لارې وټاکل شی. حل $v=(1,0,-2)^t$ ساده لیدل کیږي

یوه آیګن-ارزښته $1+\mathrm{i}$ ته یو آیګن – وکتور w_1 له دې لاندې لاس ته راوړو:

$$(A-(1+\mathrm{i})E)w_1 = \begin{pmatrix} -1-\mathrm{i} & -2 & -1 \\ 2 & 1-\mathrm{i} & 1 \\ 0 & 2 & 1-\mathrm{i} \end{pmatrix} w_1 = 0\,.$$

او داسې د پزلګز به تګه $w_1=(-1-\mathrm{i},-1+\mathrm{i},2)^t$. دا A چې حقیقي ده، کېدی شي و $\lambda=1-\mathrm{i}$ ته آیګن-وکتور د کمبلکس کنجوګیشن له لارې جوړ شي:

$$w_2=\overline{w_1}=(-1+\mathrm{i},-1-\mathrm{i},2)^t$$

.

لیکونکي: هیولیک، هیورنر

الجبری او هندسي ډېرځلوالی

Algebraische und geometrische Vielfachheit

(c) ketabton.com: The Digital Library

که λ د $(n \times n)$ – ماتريکس A آيګن –ارزښت وي، نو دکرکتريستيکي پولينوم

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda E_n)$$

د صفرځای په حيث د λ ډېرځلوالی د آيګن-ارزښت λ

الجبري m_λ ډېرځلوالی بللکيږي

د يوه آيګن – ارزښت λ د آيګن-فضا V_λ بعد يا پراخپدونی d_λ د λ هندسي ډېرځلوالی بلل کيږي. . ابور لري

$$d_\lambda \leq m_\lambda \,, \qquad \sum_\lambda m_\lambda = n \,,$$

همداسي

$$d_\lambda = n - \mathrm{Rang}(A - \lambda E) \,.$$

ليکونکي: هيوليګ، هيورنر، کيمرلي

ماتريکسونه

$$A_1 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \,, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \,, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & 6 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

ټول لاندې کرکتريستيکي پولينوم لري:

$$(4-\lambda)^3 = (4-\lambda)(5-\lambda)(3-\lambda) + 4 - \lambda = (4-\lambda)^3 + 12(4-\lambda) - 12(4-\lambda)$$

او له دې سره هوار $m_4 = 3$ دی. د ماتريکس

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(A_1 - 4E) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (A_2 - 4E) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$(A_3 - 4E) = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 6 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

د رانګ په لرودو سره $d_4 = 3$ د A_1 لپاره، $d_4 = 2$ د A_2 لپاره او $d_4 = 1$ د A_3 لپاره پيژني

ليکونکي: هيوليک، هيورنر

د آيګن –ارزښتونو جمعه او ضرب

Summe und Produkt von Eigenwerten

د يوه $(n \times n)$-ماتريکس A د آيګن – ارزښت λ_i لپاره صدق کوي

Für die Eigenwerte λ_i einer $(n \times n)$-Matrix A gilt

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \operatorname{Spur} A, \quad \prod_{i=1}^{n} \lambda_i = \det A,$$

د کوم سره چې ډېرځله آيګن – ارزښتونه د الجبري ډېرځلوالی سره سم شمېرل کيږي.

ليکونکي: هيوليک، هيورنر

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ديترمينانت د مولتی کرښيزوالی په اساس د کرکتريستيکي پولينوم لپاره لاس ته راځي

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda E) = (-\lambda)^n + \operatorname{Spur} A(-\lambda)^{n-1} + \cdots + \det A\,.$$

بلې لور ته پولينوم په لاندې بڼه

$$p_A(\lambda) = \prod_{i=1}^{n}(\lambda_i - \lambda)$$

انځوريدلای شي. د دويم فرمول په ضربونه او د ضريبونو پرتله کونه دا ورکړ شوی کټمټوالی يا ايدنتيتي راکوي.

ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

ماتريکس

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

کرکتريتيکي بولينوم

$$p_A(\lambda) = \lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - bc)$$

لي د لاندې صفرځايونو سره:

$$\lambda_{1,2} = \frac{(a+d) \pm \sqrt{(a+d)^2 - 4(ad-bc)}}{2}\,.$$

که د آيګن – ارزښتونو جمعه تشکيل شي، دا ريښې افاده له ةنځه ځي، او لاس ته راځي:

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \frac{(a+d) + (a+d)}{2} = a + d = \operatorname{Spur} A\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که آيګن – ارزښتونه سره ضرب شي، نو د دريم بپنوم فرمول سره لرو:

$$\lambda_1\lambda_2 = \frac{(a+d)^2 - (a+d)^2 + 4(ad-bc)}{4} = ad - bc = \det A\,.$$

ليکونکي: هيوليک، هيوررنر

د ماتريکسونو رينتونی فنکشنونه يا توابع

Rationale Funktionen von Matrizen

که د يوه ماتريکس A يو آيګن-ارزښت λ د رينتوني فنکشن

$$r(t) = \frac{p(t)}{q(t)} = \frac{a_0 + a_1 t + \cdots}{b_0 + b_1 t + \cdots}\,,$$

قطبځای نه وي ، نو $r(\lambda)$ د

$$r(A) = q(A)^{-1}p(A) = p(A)q(A)^{-1}\,.$$

آيګن – ارزښت دی.

په ځانګړي توګه λ^k د توان-ماتريکس A^k آيګن – ارزښت دی او $1/\lambda$ د معکوس کېدونکي ماتريکس A^{-1} يو آيګن-ارزښت دی.

ليکونکي: هيوليک، هيوررنر

(c) ketabton.com: The Digital Library

له $Av = \lambda v$ د $k \geq 0$ لپاره لاس ته راځي چې $A^k v = \lambda^k v$ او په ټوليزه توګه

$$\left(\sum_k c_k A^k\right) v = \left(\sum_k c_k \lambda^k\right) v \; .$$

پسې صدق کوي

$$Av = \lambda v \Leftrightarrow v = \lambda A^{-1} v \; ,$$

که A معکوسوړ وي

که λ د صورت پولينوم q صفرځای نه وي. نو صدق کوي

$$q(A)v = q(\lambda)v, \quad q(A)^{-1}v = q(\lambda)^{-1}v \; ,$$

پس

$$q(A)^{-1}p(A)v = q(\lambda)^{-1}p(\lambda)v = p(A)q(A)^{-1}v$$

لکه څه مو چې غوښتل .

ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

د آيګن – وکتورونو بنسټ Basis aus Eigenvektoren

که يوه ماتريکس A ته د آيګن – وکتورونو v_j څخه يو بنسټ شتون ولري د آيګن – ارزښت λ_j سره ، نو دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$V^{-1}AV = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n), \quad V = (v_1, \dots, v_n),$$

دا په دې معنا چې A نسبت و بنسټ $\{v_1, \dots, v_n\}$ ته دیاګونال بڼه لري.

لیکونکي: هیولی، اپپ

د ښوولو دی، چې

$$V^{-1}AV = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

باور لری، د لاندې سره ورته (برابر ارزښته)دی

$$AV = V\,\mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = (\lambda_1 v_1, \dots, \lambda_n v_n).$$

دا چې v_j د V مټه و λ_j ته د آیګن-وکتورونه دي، دا سملاسي لیدل کیږي

لیکونکي: هیولی، اپپ

ماتریکسونه

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -6 & 6 \\ 1 & -5 & 1 \\ 5 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$

آیګن- ارزښتونه -2, -2 او 3 لري. اړونده آئګن-وکتورونه دپیلګی به توګه دئ:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $V=(v_1,v_2,v_3)$ سره لاس ته راځئ

$$V^{-1}AV=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}.$$

ليکونکي: هيولی، اپپ

د ځيوکليکي ماتريکسونو دياګونالونه

Diagonalisierung zyklischer Matrizen

يو ځيوکليکي $(n\times n)$ – ماتريکس A کېدی شي د پورير-ماتريکس

$$W=(w^{jk})_{j,k=0,\ldots,n-1},\quad w=\exp(2\pi\mathrm{i}/n)\,,$$

په مرسته دياګونالي شي.

$$\frac{1}{n}\overline{W}\begin{pmatrix}a_0 & a_{n-1} & \cdots & a_1\\ a_1 & a_0 & \cdots & a_2\\ \vdots & & \ddots & \vdots\\ a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_0\end{pmatrix}W=\begin{pmatrix}\lambda_1 & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & \lambda_n\end{pmatrix},$$

د

$$\lambda_\ell=\sum_{k=0}^{n-1}a_k w^{-k\ell},\quad \ell=0,\ldots,n-1\,,$$

سره د A آيګن – ارزښت دی.

ليکونکي: هيولی، اپپ

(c) ketabton.com: The Digital Library

سړی ساده بسي شمېرلی شي، چې د W ℓ -مه مته د A يو آيګن – وکتور دی. د Aw_ℓ د j –م کمپوننت لپاره سړی لاس ته راوړي:

$$\sum_{k=0}^{n-1} a_{j-k \bmod n} w^{(k-j)\ell} w^{j\ell} = w^{j\ell} \sum_{k'=j-n+1}^{j} a_{k' \bmod n} w^{-k'\ell} .$$

دا اندکس يا پيژند نخښه مودولو سره ښوول کيږي، کېدی شي د جمعي کېدنې ورشو د $k' = 0, \ldots, n-1$ سره ځاي په ځاي شي يا بدله شي. په تعقيب سره يې زياتون يا جمعه برابر په λ_ℓ ده ،لکه جې غوښتل مو. له دې مو و ښوول چې لرو:

$$AW = W \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} .$$

دا چې $\frac{1}{\sqrt{n}} W$ يوتيتار دی،دا په دې معنا چې $\frac{1}{\sqrt{n}} W^* = \left(\frac{1}{\sqrt{n}} W\right)^{-1}$ ، سړی غوښتونکی ترانسفورمېشن په دياګونال بڼه لاس ته راوړي

ليکونکي: هيولی، اپپ

د عمومي تيوري سره سم کيدی شي ځيوکليکي ماتريکس

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

د فورير- ماتريکس

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$W = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{pmatrix}$$

سره په دیاګونال بڼه واړول شي(ترانسفورمي شي)

$$\frac{1}{4}\overline{W}AW = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

د 2, 2, 0 او 4 سره د A آیګن – ارزښت. دا چي A حقیقي دی باید کمپلکس آیګن-وکتورونه

$$\begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -1 \\ -i \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ -1 \\ i \end{pmatrix}$$

(د W دویمه او څلورمه متڼه) یو کډ آیګن-ارزښت ولري. داسې کېدی شي د کرښیز کمبینېشن له لارې د آیګن-وکتورونو لپاره یو حقیقي بنسټ تشکیل شي:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -1 \\ -i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ -1 \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad i\begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -1 \\ -i \end{pmatrix} - i\begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ -1 \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

لیکونکي : اپپ، هیولیګ

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ماتريکسونو توان Potenzen von Matrizen

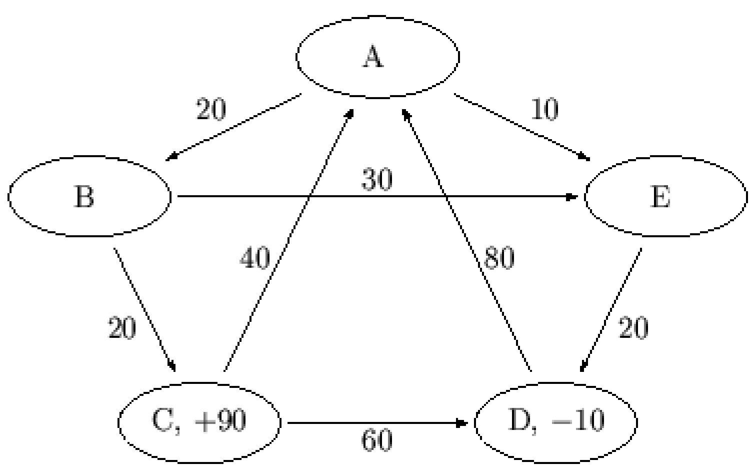
که A د مطلق ارزښت سره سم يا - - ډوله خورا لوي آيګن- ارزښت λ د آيګن – وکتور v سره ولري،نو صدق کوي:

$$A^n x = \lambda^n (cv + o(1)), \quad n \to \infty ,$$

که x يو ناترويوال کمپوننت د λ په آيګن-فضا کې ولري، دا په دې معنا چې $x = cv + w$ د $c \neq 0$ او $v \nparallel w$ سره.

ليکونکي : ايپ، هيوليګ

دا تابع د مارکيټپرخي x_i د رقابت د فيرما ګانو کلنی تغير ښايي.په دې ترتيب فيرماA د 80% بېلګې په توګه د فيرما D د مارکيټ برخه ګټي او د فيرما C خپله د مرکيټ برخه د 90% په شاوخوا کې لويه وي د نوي خرڅلاو امکانات پيداکولو سره ، په همدې وخت کې د مارکيټ برخي A او D ته له لاسه ورکوي.



د ليدخيرې څخه د مارکيټ نوې برخي(ونډه) رانيسو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

A_{neu} نوې $= 0.7A + 0.4C + 0.8D$

B_{neu} نوې $= 0.5B + 0.2A$

C_{neu} نوې $= 0.9C + 0.2B$

D_{neu} نوې $= 0.1D + 0.6C + 0.2E$

E_{neu} نوې $= 0.8E + 0.3B + 0.1A\,.$

له $x = (A, B, C, D, E)^t$ سره لاس ته راځي:

$$x_{\text{neu}} \text{ نوی } = \begin{pmatrix} 0.7 & 0 & 0.4 & 0.8 & 0 \\ 0.2 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0.9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.6 & 0.1 & 0.2 \\ 0.1 & 0.3 & 0 & 0 & 0.8 \end{pmatrix} x\,.$$

د ایتراشن ماتریکس د n–توان سره ضربولو د n کلونو وروسته د مرکت ونډه راکوي.

نورميري شوي وکتورونه x^0 د يوه آيګن- وکتور $v_{\max}$ (ماکس) پولې ته ځي(کونورګيريګي) د ماتر يکس د ارزښت له مخې لوی ا يګن ارزښت $\lambda_{\max}$ ته. سړی لاس ته راوړي $\lambda_{\max} = 1.1$ او دې ته اړوند ايګنوکتور

$$v_{\max} = (0.75, 0.25, 0.25, 0.25, 0.5)^t\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د اوږده وخت لپاره بازار يا مارکيټ د A ه خوا ټاکل کيږي يا ټعينيږي. په سلو کې برخې د $\max v$ د نورمي کولو له لارې لاس ته راځي يعني , $\max v / \|v\|_1$ په دې توګه

$$A:\ 37.5\%,\ \ B,C,D:\ 12.5\%,\ \ E:\ 25\%\,.$$

ليکونکي: اپپ، هيوليک

د فيبوناچي پرلپسې يا - ترادف Fibonacci-Folge

د فيبوناچي پرلپسي يا ترادفونه داسې پيژند لري يا تعريف دي:

$$a_0 = 0,\quad a_1 = 1,$$

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1}\,, \quad \text{لپاره د}\ n \geq 1\,,$$

دا په دې معنا چې هره فيبوناچي پرلپسې د دواړو ترمخ غړو زياتونن يا جمعه ده.

د فيبوناچي لومړي عددونه دي:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765, \ldots\,.$$

سرې د پيل ارزښت $a_1 = 1$ او $a_2 = 3$ ټاکي نو داسې په نامه لوکاس - $a_2 = 3$ Lucas- عدد:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765, \ldots\,.$$

که دوه يو په بل پسې د فيبوناچي عددونه يوه وکتور

$$x_n = (a_n, a_{n-1})^t$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ته سره یوځاي شي، نو ریکورزیون د

$$x_{n+1} = Ax_n$$

په څیر د لاندې سره ولیکو:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

د ماتریکسلیکني په مرسته کېدی شي د فیبوناچي عدد دا اسیمپتوتیکي حالت وټاکل شي. د دې لپاره سږی د A آیګن-ارزښتونه او آیګن-وکتورونه شمېري:

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}, \quad v_{\pm} = \begin{pmatrix} \lambda_{\pm} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

که سږی د ریکورزیون وکتورونه د v_+ کرښیز کمبینېشن په حیث انځور کړي،

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} v_+ - \frac{1}{\sqrt{5}} v_- ,$$

، نو لاس ته راځي:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \lambda_+ \lambda_+^{n-1} - \frac{1}{\sqrt{5}} \lambda_- \lambda_-^{n-1}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \right)^n + o(\lambda_-^n).$$

لیکونکي: اپپ، هیولیک

(c) ketabton.com: The Digital Library

نورمال ماتريکسونه Normale Matrizen

يو کمپلکس ماتريکس A نورمال بلل کيږي، که

$$AA^* = A^*A\,,$$

وي، د $A^* = \bar{A}^t$ سره. په ځانګړې توګه يونيتار او هرميتيکي ماتريکسونه نورمال دي.

د حقيقي نورمال ماتريکسونو لپاره دی:

$$AA^t = A^tA\,,$$

کوم چې په ځانګړې توګه د اورتوګونال او سيومتري ماتريکسونو لپاره پوره دی.

ليکونکي: اپپ، هيوليک،کيمرلي

د يونيتارو او هرميتيکي ماتريکسونو نورمالوالی ترلی له تعريف څخه لاس ته راځي.

د ئوه يونيتار ماتريکس لپاره دی:

$$AA^* = AA^{-1} = E = A^{-1}A = A^*A\,.$$

د يوه هرمېتيکي ماتريکس لپاره دی:

$$AA^* = AA = A^*A\,.$$

ليکونکي: اپپ، هيوليک

(c) ketabton.com: The Digital Library

د نورمالو ماتريکسونو يونيتار دياګونالي – يا دوه کونجتړي کول

Unitäre Diagonalisierung normaler Matrizen

يو ماتريکس A تيک هلته نورمال دی، که A يونيتار دياګوناوړ وي، دا په دې معنا چې ، که وي:

$$U^{-1}AU = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)\,,$$

د کوم سره چې د U متې يو اورتونورمال بنسټ و آيګن – ارزښت λ_j ته له آيګن- وکتورونو تشکيل کړي.

ليکونکي: اپپ، هيوليک، کيمرلې

که

$$A = UDU^*, \quad U^* = U^{-1}\,,$$

وي، نو نورمال دی، ځکه چې لرو:

$$\begin{aligned} AA^* &= (UDU^*)(UDU^*)^* = UD(U^*U)D^*U^* \\ &= U(D^*D)U^* = (UD^*U^*)(UDU^*) \\ &= A^*A\,. \end{aligned}$$

د دې معکوس کېدی شي د يوه اورتوکونال بنسټ شتون نسبت بعد ته د ايندکشن له لارې وښايي. د ايندکشن پل لپاره يو يونيتار ماتريکس V جوړوو د لاندې سره:

$$V^*AV = \left(\begin{array}{c|c} \lambda & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right).$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د اینکشن نیونې یا فرضیې له مخې کېدی شي B د یونتارماتریکس W له لارې په دیاګونال بڼه ترنسفورمي شي، داسې چې سړی ځای په ځای کولی شي:

$$U = V \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & W \end{array} \right)$$

.

د V دجوړښت یا کنسترکشن ته د یوه نورمي آیګن – وکتور v څخه و آیګن-ارزښت λ ته ځي او بړدي

$$V = (v|\tilde{V}),$$

د کوم سره چې د $\tilde{V}$ متې وکتور v و اورتوګونال بنسټ ته پوره کوي. لاس ته راځي:

$$V^*AV = \left(\frac{v^*}{\tilde{V}^*} \right) \left(\ \lambda v \mid A\tilde{V} \ \right) = \left(\begin{array}{c|c} \lambda & c^* \\ \hline 0 & B \end{array} \right) .$$

ښوولو تهدومره پاتېږي، چې B نورمال او $c = 0$ دی. دواړه د A د نوپمالیټي څخه لاس ته راځي. دا د ورته والي ترنسفورمیشن سره ساتلي پاتې کیږیو ، پس د پورته مساوات د بڼي اړخ $\tilde{D}$ لپاره هم صدق کوي.

که

$$\tilde{D}\tilde{D}^* = \left(\begin{array}{c|c} |\lambda|^2 + |c|^2 & c^*B^* \\ \hline Bc & BB^* \end{array} \right)$$

$$\tilde{D}^*\tilde{D} = \left(\begin{array}{c|c} |\lambda|^2 & \overline{\lambda}c^* \\ \hline \lambda c & B^*B \end{array} \right),$$

تشکیل کړو، نو غوښتونی خویونه د پورته ماتریکسونو د دیاګونال بلوکونو د پرتلې له لارې لاس ته راځي. لیکونکي: اپپ،هیولیګ

(c) ketabton.com: The Digital Library

ماتريکسونه

$$A = \begin{pmatrix} 3+2i & 3-2i \\ 3-2i & 3+2i \end{pmatrix}$$

نورمال دي، چې د سيده شمېرنې له لارې تصديق کېدی شي.

$$AA^* = \begin{pmatrix} 26 & 10 \\ 10 & 26 \end{pmatrix} = A^*A$$

د دې په تعقيب بايد A يونيتار دياګونالوړ وي. سرې آيګن – ارزښتونه6 او $4i$ لاس ته راوړي او اړونده نورمي آيګن-وکتورونه د بېلګې په توګه دي:

$$v_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

د انتظار سره سم $v_1 \perp v_2$ دی، او د يونيتار ماتريکس $U = (v_1, v_2)$ سره دياګونال ماتريکس لاس ته راځي:

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 4i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3+2i & 3-2i \\ 3-2i & 3+2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

ليکونکي: اېپ،هيولېک

د هرميتيکي ماتريکسونو دياګونال بڼه Diagonalform hermitescher Matrizen

ديوه هوموجېن ماتريکس $A\ (A = A^*)$ آيګن-ارزښتونه λ_i حقيقي دي او د آيګن-وکتورونو v_i خخه يو اورتوګونال بنسټ شتون لري. په تعقيب

(c) ketabton.com: The Digital Library

ده د یونیتارماتریکس سره

$$U^*AU = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n),$$

ده د یونیتارماتریکس $U = (v_1, \ldots, v_n)$ سره.

په ځنګړې حالت کې حقیقي سیومتریکي ماتریکسونو $(A = A^t)$ آیګن-وکتورونه هم حقیقي دي.

لیکونکي: هیولیک، ربل

یونیتار دیاګوناوړوالی په نورمالو ماتریکسونو د اړونده ټولیزې نتیجې څخه لاس ته راځي، هغه چې هرمیتیکي حالت خوندي لري. د ښولو دا پاتې دی چې آیګن – ارزښت λ حقیقي دی. که په ورته توګه v آیګن- وکتور وي، نو دا له لاندې لاس ته راځي:

$$\begin{aligned} \lambda v^* v &= v^*(\lambda v) = v^*(Av) = (A^* v)^* v \\ &= (Av)^* v = (\lambda v)^* v = \overline{\lambda} v^* v\,, \end{aligned}$$

ځکه چې $\lambda = \overline{\lambda} \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$ لرو.

لیکونکي: هیولیک، ربل

هرمیتیکي ماتریکس

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 - \mathrm{i} \\ -1 + \mathrm{i} & 1 \end{pmatrix}$$

دیترمینانت 0 لري. پسې $\lambda = 0$ یو آیګن – ارزښت دی او سړی تړلی ګوري، چې

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 - \mathrm{i} \end{pmatrix}$$

یو اړونده آیګن-وکتور دی. له $\mathrm{Spur}\, A = 3 = \lambda + \varrho$ څخه د ویم آیګن – ارزښت په حیث $\varrho = 3$ لاسته راځي. یو اړونده آیګن-وکتور نسبت و کمپلکس سکالار ضرب ته هغه و v ته لاندې اورتوګونال وکتور دی:

$$w = \begin{pmatrix} 1 + \mathrm{i} \\ -1 \end{pmatrix}.$$

د نورمي کولو له لارې یونیتار ماتریکس لاس ته راځي

$$U = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 + \mathrm{i} \\ 1 - \mathrm{i} & -1 \end{pmatrix}.$$

په تعقیب باور لري:

$$A = U \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} U^*,$$

د

$$U^* = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 - \mathrm{i} \\ 1 + \mathrm{i} & -1 \end{pmatrix}$$

سره، هغه و U ته معکوس.

ليکونکي: هيوليک، کرايخ

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثبت ديفينيت ماتريکسونه Positiv definite Matrizen

يو مربع ماتريکس A مثبت ديفينيت بلل کيږي، که وي:

$$v^*Av > 0 \quad \forall v \neq 0.$$

که v^*Av يواځې نامنفي وي، نو A مثبت سيمي (نيم – يا برخه-) ديفينيت بولو.

يو مثبت ديفينيت ماتريکس A فقط مثبت دياګونالتوکي لري او آيګن-ارزښتونه. په ځنګړي توګه A معکوسوړ ده او معکوس يي هم مثبت ديفينيتدی.

ليکونکي: هيوليک، ربل

ريلا ي – ويش (هعني هغه د وېش تيجه) Rayleigh-Quotient

د يوه هرميتيکی مثبت ديفينيت ماتريکس S لپاره د داسې په نامه ريلای-وېش اکسترم – ارزښتونه

$$r_S(x) = \frac{x^*Sx}{x^*x}, \quad x \neq 0,$$

خورا کوچنی او خورا لوي د S آيګن – ارزښت دی.

ليکونکي: اپپ، هيوليک

ماتريکس S کېدی شي ا يونيتار ماتريکس U له لارې دياګونال فروم ته واړول شي:

$$U^*SU = D, \quad D = \text{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n),$$

د کوم سره چې

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$Sv_i = \lambda_i v_i \Rightarrow \lambda_i = \frac{v_i^* S v_i}{v_i^* v_i} > 0$$

او $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n$ نيول يا فرض کېدی شي.

که سړی $S = UDU^*$ او $x = Uy$ بدل کړي، نو دی

.

$$r_S(y) = \frac{y^* D y}{y^* (U^* U) y} = \frac{\sum_i \lambda_i |y_i|^2}{\sum_i |y_i|^2} .$$

دا بنايي چې

$$\lambda_{\min} \leq r_S(y) \leq \lambda_{\max} ,$$

چېرته چې د مطلوب آيګن-وکتورونو لپاره $y = e_n$ او $y = e_1$ لپاره صدق کوي.

ليکونکي: اېپ، هيوليک

مثلث بڼه Dreiecksform

يو کمپلکس مربع ماتريکس A کيدی شي د يوه ورته ترانسفورميشن له لارې په پورته مثلث بڼه

$$R = \begin{pmatrix} \lambda_1 & r_{1,2} & \cdots & r_{1,n} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & r_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} = Q^{-1} A Q$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ترانفورمي شي، چېرته چي دیاګونالي د A آیګن-ارزښتونه λ_i خوندي لري.

لیکونکي: هیولیګ،هیورنر

ښوونه د ماترریکس په بعد n باندې د ایندکشن له لارې کیدی شي صورت ونیسي، د یوه (1×1)-ماتریکس د تریویال حالت څخه په پیل.

یو $(n \times n)$-ماتریکس A تر څیرنې لاندې نیسو، نو دا لږترلږه یو ایګنوکتور v لري.

دا د نورمي کیدلو وروسته یوه اورتوګونال بنسټ $\{v, w_1, \ldots, w_{n-1}\}$ ته ورپوره کیدی شي. په دې بنسټ کې څیرونه(فنکشن-که غواړی تابع) لاندې بڼه لري:

$$\tilde{A} = T^* A T = \begin{pmatrix} \lambda & x^* \\ 0 & B \end{pmatrix}.$$

د $((n-1) \times (n-1))$-ماتریکس لپاره د ایندکشن نیونې یا فرضیې له مخې یو یونیتار ترانفورمیشن $\tilde{Q}$ شتون لری د $\tilde{Q}^* B \tilde{Q} = R_{n-1}$ سره. له دې امله د

$$Q = T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tilde{Q} \end{pmatrix}$$

سره لاس ته راځي، چې

$$Q^* A Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tilde{Q}^* \end{pmatrix} T^* A T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tilde{Q} \end{pmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tilde{Q}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & x^* \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tilde{Q} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tilde{Q}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & x^*\tilde{Q} \\ 0 & B\tilde{Q} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda & x^*\tilde{Q} \\ 0 & \tilde{Q}^*B\tilde{Q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & x^*\tilde{Q} \\ 0 & R_{n-1} \end{pmatrix} = R\,.$$

ليکونکي: هيوليک، هيورنر

اصلي وکتورونه Hauptvektoren

که λ د کمپلکس $(n \times n)$ - ماتريکس A يو آيګن-ارزښت وي، د الجبرى ډېرخلوالى m سره، نو يو وکتور v د

$$(A - \lambda E)^m v = 0\,, \quad v \neq 0$$

سره اصلى وکتور بلل کيږي و آيګن-ارزښت λ ته.

ټول اصلي وکتورونه و آئګن – ارزښت ته د صفر وکتور سره يوځاي د بعد m يو لاندې- يا برخوکتور جوړوي، دا اصليفضا H_λ و آيګن – ارزښت λ ته. دا کرښيزې څېروني يا فنکشن A ته انواريانت دى.

ټوله فضا د اصلي فضاو سيده جمعه يا زيتون دى:

$$\mathbb{C}^n = \bigoplus_\lambda H_\lambda$$

ليکونکي: هيوليک، هيورنر

(c) ketabton.com: The Digital Library

ښوونه یې له ډېرو برخپلونو یا-قدمونو رایوځای کیږي.

اول - داچې یوونماتریکس یا واحد ماتریکس د هر ماتریکس سره بدلېدونکی دی یوه وکتور $v \in H_\lambda$ د ځېرې(عکس ؟؟) Av لپاره صدق کوي:

$$(A-\lambda E)^m Av = \left(A^{m+1} + \cdots + \lambda^m E^m A\right) v = A\left(A^m + \cdots + \lambda^m E^m\right) v$$

$$= \qquad A(A-\lambda E)^m v = A \cdot 0 = 0 .$$

په تعقیب $Av \in H_\lambda$ دی.

دویم- د دې لپاره چې بعد وټاکو، ماتریکس A په پورتني مثلثبنه ترانفورمي کوو:

$$A \to B = Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} \lambda & & * & * & * \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda & * & * \\ & 0 & & R & \\ & & & & \end{pmatrix} .$$

دا چې د $v \in H_\lambda$ لپاره

$$0 = Q^{-1}(A-\lambda E)^m Q(Q^{-1}v) = (B-\lambda E)^m (Q^{-1}v) ,$$

دی، اصلي وکتورونه د $v \to w = Q^{-1}v$ سره سم اصلي وکتور ته ترانفورمي کیږي.

مکر د B له بنې روښانه دی، چې یوون – یا واحدوکتورونه e_i د $i \le m$ لپاره د B

په اصلیفضا $Q^{-1}H_\lambda$ کې پراته دي. پسې یو وکتور v د $v_i \neq 0$ سره د یوه $i > m$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لپاره د $(B-\lambda E)^m$ له لارې په 0 نه ځېره کيږي يا فنکشن 0نه دی. په تعقيب $\dim H_\lambda = m$ لرو.

دريم – دا چې $\sum_\lambda \dim H_\lambda$ د الجبري د ډېرواره جمعې سره برابر دی، يعنې برابر په n دی، ښيا کوي، چې د بنسټ خويونو لپاره د اصلي فضا کرښيز خپلواکوالی وښودل شي يا وښايو. دې ته استعماليږي، چې د $\varrho \neq \lambda$ لپاره لرو:

$$(A-\varrho E)v = 0 \wedge v \in H_\lambda \Rightarrow v = 0.$$

که د مختلو اصلي فضاو څخه يوه د وکتورونو جمعه ورکه شي،

$$v_\lambda + v_\varrho + v_\sigma + \ldots = 0,$$

، نو لاس ته راځي:

$$\left((A-\varrho E)^{m_\varrho}(A-\sigma E)^{m_\sigma}\ldots\right)v_\lambda = 0.$$

دا چې يوګونی ضريبونه H_λ انواريانت دي، په پورته يادونه استعمالېږ دی، او لاس ته ترې $v_\lambda = 0$ راځي. په ورته توګه $v_\varrho = v_\sigma = \ldots = 0$ ترې لاس ته راځي او له دې سره صفروکتور فقط په ساده ډول انځورېږ دی.

ليکونکي: هيليک، هيورنر

د اصلفضا څيوکليکي بنسټ Zyklische Basen von Haupträumen

د يوه کمپلکس مربع ماتريکس A يو اصلفضا (اصلي فضا) کېدی شي د څيکليکي برخفضاو په يوه سيده جمعې تجزيه شي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$H_\lambda = V_1 \oplus \cdots \oplus V_\ell ,$$

دا په دې معنا چې هر برخفضا V_i د لاندې بنې يو بنسټ لري

$$B^{k_i}v_i, \ldots, Bv_i, v_i, \quad B = A - \lambda E,$$

د $w_i = B^{k_i}v_i$ سره يوه آيګن-وکتور و آيګن-ارزښت λ ته.

ماتريکس A برخفضا V_i اينواريانت پرېږدياو هلته لاندې ماتريکس-انځورونه لري:

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix} .$$

ليکونکي:هيوليک،هيورنر

د تعريف سره سم H_λ له وکتورونو v څخه د $B^{k+1}v = 0$ سره جوړه ده، د کوم سره چې k کوچنۍ ده د λ د الجبري دېرځلوالي m څخه. د بنسټ ټاکلې بڼه له دې امله نږدېوالی لري. د دې لپاره چې وکتورونه

$$w_i \in \ker B \,,$$

چې بنسټ کره کوي ، وټاکو ، نو د ايګنوکتورونو و $\ker B$ و λ ته برخفضاوې

$$U_j = \ker B \,\cap\, \mathrm{Bild}\ B^j$$

تر څېرنې لاندې نيسو. په روښانه توګه دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\emptyset = U_m \subset U_{m-1} \subset \cdots \subset U_0 = \ker B\,.$$

وکتورونه w_i به اوس ، له تشدېرۍ سره په پيل، اينډوکتي، جوړيږي. که $w_1, \ldots, w_{i-1}$ همدا اوس کره شوي وي ، نو سړۍ لويوالی دا لوي k_i داسې، د هغه لپاره داسې چې U_{k_i} په کرښيزه هيولې w_j د دغه W_{i-1} کې نه وی پروت، دا په دې معنا چې $v_i \neq 0$ باور لری د $B^{k_i} v_i = w_i \notin W_{i-1}, \quad Bw_i = 0\,.$ سره .

په دې ډول باالاخره د ټول آيګن-فضا $\ker B$ لپاره يو بنسټ $\{w_1, \ldots, w_\ell\}$ جوړيږي او اړونده ځيوکليکي بنسټونه د V_i لپاره.

د فضاو V_i د B سره (همداسې A) د ضرب له لاري روښانه دی. د غوښتل شوې ماتريکس انځورنه له اندې څخه لاس ته ارځي

$$A(B^j v_i) = (\lambda E + B) B^j v_i = \lambda B^j v_i + B^{j+1} v_i\,,$$

، که د بنسټ وکتورونه ، لکه څنګه چې ورکړ شوي دي، د کښته کېدونکي توان سره تنظيم کړي.

د جوړښت د ټيکوالي لپاره بايد برسېره پر دې د وکتورنو $B^j v_i$ بنسټ خويونه هم وښوول شي. دا د دوه پلونو (قدمونو) سره صورت نيسي.

اول - لومړی کرښي. خپلواکوالی ښوول کيږي. دا تخنيکي دلايل کزدی شي د دوه ځيکليکي ځنځيرونو د بېلګې

$$B^2 v_1,\, Bv_1,\, v_1, \quad Bv_2,\, v_2\,,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له لارې لیدوړ شي. نیسو چې

$$\alpha_{2,1}B^2v_1+\alpha_{1,1}Bv_1+\alpha_{0,1}v_1+\alpha_{1,2}Bv_2+\alpha_{0,2}v_2=0,$$

دی، نو د B^2 سره د ضرب له لارې لرو

$$\alpha_{0,1}w_1=0 \implies \alpha_{0,1}=0\,,$$

د $B^3v_1=Bw_1=0$ او $B^2v_2=Bw_2=0$ له امله . د B سره د ضرب له لارې اوس لرو

$$\alpha_{1,1}w_1+\alpha_{0,2}w_2=0 \implies \alpha_{1,1}=\alpha_{0,2}=0$$

د جوړښت سره سم د آیګن-وکتورونو w_i کرښیز خپلواکوالی له امله. بالاخره لرو

$$\alpha_{2,1}=\alpha_{1,2}=0$$

بیا هم د آیګن-وکتور w_i د کرښیز خپلواکوالی له امله.

په ټولیز حالت په ورته توګه مخ ته ځو. د یوه کرښیز کمبینیشن د تحلیل په هکله بسټوکتور د B د مناسب توان سره ضربوي، تر څو د آیګن-وکتورونو ټول ترمونه له منځه ولاړ شي.

دویم - همدومرهښایو، چې هر وکتور $u\in H_\lambda$ د بنسټوکتورونو سره انځوروړ دی. پس وي دې $B^ku=0\,,$ $k\le m$، د سره. د $k=1$ لپاره یې نه ښایو، ځکه چې وکتورونه w_i د جوړښت له امله د آیګن – فضا $\ker B$ لپاره یو بنسټ جوړوي. اندوکتیو سړی نیوی شي یا فرض کولی شي، چې په کې وکتورونه انځوروړ دي.

همداسې آیګن-وکتور $B^{k-1}u$ انځوروړ دی:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$B^{k-1}u = \sum_i \alpha_i w_i .$$

له دې لاس ته راځي، چې

$$B^{k-1}\underbrace{(u - \sum_i \alpha_i B^{k_i-k+1} v_i)}_{u'} = 0 \, .$$

د دې په تعقيب u' انځوروړ دی او له دې سره u هم .

ليکونکي:هيوليک،هيورنر

د جوردان بڼه Jordan-Form

يو کمپلکس مربعماتريکس کېدی شي د يوه ورته والي ترانفورمېشن له لارې د بلوک دياګونال بڼه باندې تراسفورم شي

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_k \end{pmatrix} = Q^{-1}AQ$$

باندې تراسفورم شي. له دې سره د جوردانبلکونه دا لاندې بڼه لري

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda_i & 1 \\ 0 & & & & \lambda_i \end{pmatrix} ,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د A يوه آيګن – ارزښت λ_i سره

تر ځای بدلون پورې د جوردان بنه يو اځنۍ ده.

ليکونکي:هيوليګ،هيورنر

دا چې اصلي فضاوې H_λ د فنکشن A لاندې انواريانت دي، کيدی شي د اصلي وکتورونو بلوکبڼې پورې يوه بنسټ په نسبت لاس ته راوړل شي. د ځانګړو ځيوکليکي بسټونو

$$B^{k_i}v_i, \ldots, Bv_i, v_i, \quad B = A - \lambda_i E,$$

استعمال له لارې بلوکونه غوښتونې بڼه غوره کوي

ليکونکي: خيوليګ، هيورنر

ماتريکس

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

کرکتريستيکي بولينوم

$$p_A(\lambda) = (-1-\lambda)^3 + 4(4 - 3(-1-\lambda)) = -\lambda^3 - 3\lambda^2 + 9\lambda + 27$$

لري د ډبل صفرځايونو $\lambda = -3$ او ساده صفځايونو $\varrho = 3$ سره.

دا چې د ماتريکس

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(A-\lambda E)=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

رانګ 2 دی، و ته فقط يو آيګن-وکتور شتون لري. د دې په تعقيب A د جوردان بنه لري.

$$Q^{-1}AQ=J=\begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, Q=(w,v,\tilde{w}) .$$

د كرښيز و مساواتشيستمونو د حل له لارې

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

او

$$\begin{pmatrix} -4 & 0 & 4 \\ 2 & -4 & 0 \\ 3 & 2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tilde{w}_1 \\ \tilde{w}_2 \\ \tilde{w}_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

سړی لاندې آيګن-وکتورونه لاس ته راوړي:

$$w=\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{w}=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} .$$

اصلي ډياګونال پوره کوي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix},$$

دا په دې معنا چې د بېلګې $v = (-3, 4, 1)^t$ په توګه . له دې سره دی

$$Q = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

څه چې د ازماېښت له لارې $A = QJQ^{-1}$ تصدیق کیږي.

لیکونکي: خیولیګ، هیورنر

د یوه کمپلکس (2×2)-ماتریکس A لپاره 3 څرنګوالیز (د کوالیټي له مخې) مختلف جوردان-نورمالبڼې شتون لري:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \varrho \end{pmatrix}, (\lambda \neq \varrho).$$

په لومړي حالت کې λ یو ډبل آیګن – ارزښت دی د فقط یوه (تر سکالار ضرب پورې) آیګن-وکتور w سره، دا په ی معا چې

$$\mathrm{Rang}(A - \lambda E) = 1.$$

یو په دې پورې اړونده اصلي وکتور v او له دې سره دې سره ترانسفورمیشن ماتریکس د $Q = (w, v)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$w = (A - \lambda E)v$$

د حل له لارې لاس ته روارې ، همداسې د $\ker(A - \lambda E)^2$ ټاکلو له لارې.

د دې لپاره يو ځرګنده بېلګه

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -9 & 8 \end{pmatrix}$$

كركتريستيكى پولينوم

$$P_A(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 4$$

دى، د دبل صفرځاى $\lambda = 2$ سره. د

$$\begin{pmatrix} -6 & 4 \\ -9 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

حل له راې سرى $w = (2,3)^t$ لاس ته راوري او له دې سره

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 4 \\ -9 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

يو اړونده اصلي وكتور $v = (1,2)^t$. دا د ازمايښت سره تصديق كيږي:

$$A = QJQ^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

سره تصديق كيږي.   ليكونكي: خيوليګ، كرايخ

(c) ketabton.com: The Digital Library

د يوه کملکس (3×3) - ماتريکس A لپاره لاندې کولتاتيو مختلف جوردان –نورمالبڼې $J = Q^{-1}AQ$ شتون لرى:

اول – جوړه دوله مختلف آيګن-ارزښتونه λ, ϱ, σ :

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \varrho & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{pmatrix}.$$

دويم – يو ډبل آيګن – ازښت λ :

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \varrho \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \varrho \end{pmatrix}.$$

په دويم حالت کې

$$\operatorname{Rang}(A - \lambda E) = 2$$

او $Q = (w, v, \tilde{w})$ دي له آيګن وکتورونو w او $\tilde{w}$ يوه اصلي وکتور v سره، هغه چې د مساوات سيستم د حل له لارې

$$(A - \lambda E)w = 0, \quad w = (A - \lambda E)v, \quad (A - \varrho E)\tilde{w} = 0$$

د حل له لارې ټاکل کېدی شي.

دريم – يو دريواره آيګن –ارزښت:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

په دويم حالت کې

$$\mathrm{Rang}(A - \lambda E) = 1$$

دی او سړی یو اصلي وکتور v د

$$(A - \lambda E)^2 v = 0\,, \quad (A - \lambda E)v \neq 0.$$

حل له لارې لاس ته راوړي.

اړونده آيګن – وکتور $w = (A - \lambda E)v$ دی، او یو غزېدلی کربنیز خپلواک آیګن – وکتور $\tilde{w}$ دا لاندې پوره کوي:

$$(A - \lambda E)\tilde{w} = 0, \quad w \perp \tilde{w}\,.$$

بالاخره $Q = (w, v, \tilde{w})$ دی.

په دريم حالت کې

$$\mathrm{Rang}(A - \lambda E) = 2$$

دی او $Q = (w, v, u)$ دی له

$$(A - \lambda E)w = 0\,, \quad w = (A - \lambda E)v\,, \quad v = (A - \lambda E)u\,.$$

سره. ليکونکی: ويپر

(c) ketabton.com: The Digital Library

د (4x4) -ماتيکسونو جوردان-بڼي

Jordan-Formen von (4x4)-Matrizen

لاندې توابع ټول 14 ممکن (4×4) - ماتريکسونو د جوردان – بڼي ځای نيوني جوړښتونه ښايي .

- ځلور مختلف آيګن – ارزښتونه $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{pmatrix}$$

- يو دوه ځله آيګن – ازښت λ_1 او دوه دوه ځله آيګن -ارزښتونه λ_2, λ_3

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

- يو درې واره آيګن – ارزښت λ_1 او يو يوواره آيګن – ارزښت λ_2 .

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

- دوه دوه واره آيګن – ارزښت λ_1, λ_2

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

- يو څلورواره آيګن – ارزښت λ_1.

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$$

ليکونکي: خيولیګ، هيورنر

د ماتريکسونو توانونه Potenzen vonMatrixen

د يو کمپلکس ماتريکس توانونه A^n، $n = 0, 1, \ldots$ تيک هلته صفر ماتريکس پولې ته تلونکي دي، که د ټولوآيګن-ارزښتونو λ مطلق ارزښت له 1 کوچنی دی.

پرلپسي (A^n) محدوده پاتې کيږي، که $|\lambda| \leq 1$ او د آيګن – ارزښت لپاره د ارزښت 1 سره

ليکونکي: خيولیګ، هيورنر

(c) ketabton.com: The Digital Library

د A د جوردان – بڼې $J = Q^{-1}AQ$ سره کېدی شي د ماتریکس – توانونه په لاندې بڼه و لیکل شي:

$$A^n = (QJQ^{-1})(QJQ^{-1})\cdots(QJQ^{-1}) = QJ^nQ^{-1}$$

دلته یواځې دې ته اړتیا ده چې د J پولې ته تلنه(لیمیټ) تر څېړنې لاندې و نیل شي. د J د بلوکفورم (- بڼې) کېدی شي هر بلوک J_i ځانله تر څېړنې ونیل شي. د دې لپاره لیکو

$$J_i = (\lambda_i E) + D\,,$$

، د کوم سره چې D ګاوندی دیاګونال د یو سره خوندي لري. لکه چې په ساده توګه ښوول کیږي، د بعد m د یوه بلوک لپاره $D^m = 0$ دی. پسې صدق کوي

$$(J_i)^n = \lambda_i^n E + \binom{n}{1}\lambda_i^{n-1} D + \cdots + \binom{n}{m-1}\lambda_i^{n-m+1} D^{m-1}\,.$$

له دې کتمېوالي څخه کېدی شي د پرلبسپپولې ته تلنه(لیمیټ کونورګنت) و لوستل شي.

د $|\lambda_i| < 1$ لپاره دی

$$\lim_{n\to\infty}\binom{n}{j}\lambda_i^{n-j} = 0\,,$$

دی، ځکه چې $\binom{n}{j}$ فقط پولینومیال یعنې پولینومي لوییږي، د دې معکوس λ_i^{n-j} اکپوننشک ټیټیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

که $|\lambda_i| = 1$ وي پرلپسي محدوده يا راپنده پاتيږي، که $m = 1$ وي، دا په دې معنا، چې ګاوندی دياګونال د يوه سره شتون نه لري.

ليکونکي: خيوليک، هيورنر

په زيګولار ارزښت ټوټه کونه Singulärwert-Zerlegung

هر يوه کمپلکس $(m \times n)$ ــماتريکس A ته يونيتار ماتريکسونه U او V شتون لري د

$$U^* A V = S = \begin{pmatrix} s_1 & & 0 \\ & s_2 & \\ 0 & & \ddots \end{pmatrix}.$$

سره.

زينګولار ارزښتونه

$$s_1 \geq s_2 \geq \cdots \geq s_k > s_{k+1} = \cdots = 0$$

د $A^* A$ د آئګن – ارزښتونو ريښې دي او k د A رانګ دی.

د U متې u_j او د V متې v_j د AA^* همداسې $A^* A$ د آيګن-وکتورونو اورتوګونال بنسټونه جوړوي او لاندې صدق کوي:

$$A v_j = s_j u_j,$$

د $1 \leq j \leq k$ لپاره.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د سينګولارارزښت توټه کونې له لارې کېدی شي کرښيزه څېرونه یا فنکشن

$$x \mapsto y = Ax$$

په لاندې بڼه انځور شي:

$$y = \sum_{i=1}^{k} s_i (v_i^* x) u_i$$

له دې لاس ته راځي ، چې

$$\operatorname{Kern} A = \operatorname{span}\{v_{k+1}, \ldots, v_n\}, \quad \operatorname{Bild} A = \operatorname{span}\{u_1, \ldots, u_k\}.$$

ذاالاخره $\|A\|_2 = s_1$ او $\|A\|_F^2 = \sum_{j,k} |a_{j,k}|^2 = s_1^2 + \cdots + s_k^2$ دي.

ليکونکي: اېپ.هيوليګ

د هرمېتيکي ماتريکس A^*A د دياګونالي کونې له لارې لاس ته

$$V^* A^* A V = \operatorname{diag}(s_1^2, \ldots, s_k^2, 0, \ldots, 0) = S^t S,$$

راځي، له هغې سره چې سرې نيولی شي، چې آيګن – ارزښتونه د خپلې لويې پسې منظم دي. دا چې A^*A مثبت ديفينيت دي، کېدی شي چې فقط نامنفي آيګن-ارزښتونه د مربع په څېر وليکي او په دې توګه د $m \times n$ دياګونالماتريکس S تعريف کړي.

د پورته مساوات څخه لرو ، چې د AV متې اورتوګونال دي او نورم s_i لري:

$$AV = \begin{pmatrix} s_1 u_1 & \cdots & s_k u_k & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = US$$

د يوه يونيتارماتريکس U سره.

(c) ketabton.com: The Digital Library

وروسته له دې چې غوښتونې انځورونه

$$A = USV^*$$

منځ ته ارغله، کېدی شئ پسې راتلونکې وينا ساده پسې وازمائل شي.

دا چې يونيتار ترانسفورميشن د يوه ماتريکس رانګ نه تغيروي، صدق کوي

$$\text{Rang } A = \text{Rang } S = k\,.$$

پسې لرو

$$AA^*u_j = U(SS^t)U^*u_j = u_j(s_j)^2$$

او

$$A^*Av_j = V(S^tS)V^*v_j = v_j(s_j)^2\,.$$

باالاخره Av_j د US د j ـمې متې سره برابر دی، يعنې د u_js_j سره برابر.

ليکونکې: اپپ.هيوليک

فاسد معکوس Pseudo-Inverse

يو کمپلکس $(m \times n)$ -ماتريکس A د سينګولار-ارزښت-تو‌ټه کونې USV^* سره کيدی شي د اندولونې پرابلم(مسئله $|Ax - b| \to \min$ د مينيمال نورم سره په بڼه

$$x = A^+b, \quad A^+ = VS^+U^*,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

وليکل شي، د کوم سره چې A^+ د A فاسد-معکوس بلل کيږي، او

$$S^+ = \operatorname{diag}(1/s_1, \ldots, 1/s_k, 0, \ldots, 0), \quad k = \operatorname{Rang} A,$$

د $(n \times m)$ - دياګونال ماتريکس د مثبت سينګولار ارزښت دی

د په څټ ارزښتونو سره.

که $\{u_1, \ldots, u_m\}$ او $\{v_1, \ldots, v_n\}$ د U همداسې V ، د متو اورتوګونال بنسټونه وي، نو کېدی شي کرښيز فنکشن $b \mapsto x = A^+b$ په ضريبونو بڼه

$$x = \sum_{\ell=1}^{k} \frac{1}{s_\ell} (u_\ell^* b) v_\ell$$

انځور شي. له دې څخه په ځانګړي ډول لاس ته راځي، چې

$$\operatorname{Kern} A^+ = \operatorname{span}\{u_{k+1}, \ldots, u_m\}, \quad \operatorname{Bild} A^+ = \operatorname{span}\{v_1, \ldots, v_k\}$$

او $\|A^+\|_2 = 1/s_k$.

ليکونکي: اپپ.هيوليګ

د د $2-$ نورم انواريانت له امله د يونيتار ترانفورميشن له لارې کېدی شي $Ax - b$ له کيڼ د U^* سره ضرب کړي. د

$$c = U^* b, \quad y = V^* x$$

سره ترې ورته د مينيمال کولو پرابلم لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$|Sy - c| = \left| \begin{pmatrix} s_1 y_1 - c_1 \\ \vdots \\ s_k y_k - c_k \\ -c_{k+1} \\ \vdots \\ -c_m \end{pmatrix} \right| \to \min .$$

مينيموم سړی د لومړيو k مساواواتو د حل له لارې لاس ته راوړي:

$$y_i = c_i / s_i,\ i = 1 : k .$$

د يونيتار مياتريکس V $(|x| = |y|)$ نورم ته ريښتينوالي له امله د مينيمال نورم د حل لپاره دی:

$$y_{k+1} = \cdots = y_n = 0 .$$

په ټوليزه توګه ترې لاس ته راځي

$$y = S^+ c, \quad s^+_{i,j} = \begin{cases} 1/s_i & \text{für } i = j \le k \\ 0 & \text{sonst .} \end{cases}$$

ليکونکي: اپپ.هيوليګ

د

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 5 \\ 6 & 0 & 3 \\ 2 & -4 & 5 \\ 6 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لپاره دې د انډولوالي پرابلم حل شي

د زيګولار- ارزښت ټوټه کونې (تجزيه کونې) شمېرنې لپاره لومړی د

$$A^tA = \begin{pmatrix} 80 & -16 & 56 \\ -16 & 32 & -40 \\ 56 & -40 & 68 \end{pmatrix}$$

آيګن-ارزښتونه او آيګن-وکتورونه ټاکل کيږي او ترې لاس ته راځي

$$s_1^2 = 144,\ s_2^2 = 36,\ s_3^2 = 0, \quad V = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

له دې لرو

$$S = \begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad AV = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 0 \\ 6 & 3 & 0 \\ 6 & -3 & 0 \\ 6 & 3 & 0 \end{pmatrix} = US.$$

د U دوه لومړنی متې د AV د اړنده متو سره د ويش له لارې لاس ته راځي او د سيګولار ارزښتونو (له دې شره بايد ئوون- يا واحد وکتورونه منح ته شي) له لارې، پاتې متې (نه يواځنی ټاکلې) و اورتونورمال بنسټ ته د پوره کونې له لارې لاس ته راځي:

$$U = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له دې سره فاسد- معکوسيت

$$A^+ = V \begin{pmatrix} \frac{1}{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} U^t = \frac{1}{72} \begin{pmatrix} -2 & 6 & -2 & 6 \\ -5 & 3 & -5 & 3 \\ 4 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

دی او

$$x = A^+ b = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

د مينيمال نورم حل.

ليکونکي: اپپ.هيوليک

د توپوګرافيکي کچونداتنونو تيکاوی يا اصلاح

Korrektur topografischer Meßdaten

د توپګرافي جګوال h_i داتنونه يا اعداد چې کچونې له لارې لاس ته راړنې ته د جګوالو کمښتونه $d_{i,j}$ کچ کيږي. د کچونې ناتيکاوي په بنسټ د قانون له مخې صدق $d_{i,j} \neq h_i - h_j$ کوي

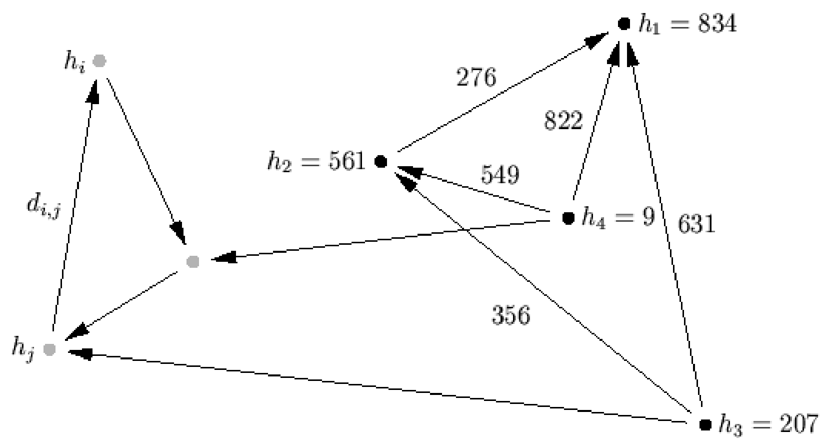
مناسب د جګوالي تيکاوي x_i کېدی شي د انډولوني پرابلم

$$\sum_{(i,j)} \Big(d_{i,j} - \big((h_i + x_i) - (h_j + x_j) \big) \Big)^2 \longrightarrow \min \; .$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له لارې حل شي.

د تلنلارې د ښوولو لپاره د کمو داتن سره يو مودل-پرابلم حل کيږي.



د جګوالي او کمښت ارزښتونو

$$h = (834, 561, 207, 9)^t, \quad d = (276, 631, 822, 356, 549)^t$$

لپاره، د $d = (d_{1,2}, d_{1,3}, d_{1,4}, d_{2,3}, d_{2,4})^t$ سره ، دا لاندې له ټاکلو اخوا (پورته، زيات) سيستم لاس ته راځي

F

$$A(h+x) = d, \quad A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

د مينيمال نورم غ،ښتونی حل دی:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x = A^+(d - Ah) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

د مینیمال – نورم – حل د څېړل شوي استعمال لپاره مخه ور دی، ځکه چې باید د ډېر امکان سره کوچنی ټیکاوی وټاکل شي.

لیکونکی : ویپر

د مور-پینروز-شرطونه Moore-Penrose-Bedingungen

فاسد-معکوس به د لاندې کټمټوالي له لارې يواځنی کرکتریستیک شي:

- $AA^+A = A$
- $A^+AA^+ = A^+$
- $(AA^+)^* = AA^+$
- $(A^+A)^* = A^+A$
- لیکونکي: اپپ.هیولیک

ساده ښوول کیدی شي، چې د

$$A^+ = VS^+U^*, \quad A = USV^*$$

له لارې تعریف شوی فاسد-معکوس ورکړ شوي شرایط پوره کوي.

د بېلګې په توګه لومړی کټمټوالی د لاندې څخه لاس ته ارځي

$$(USV^*)(VS^+U^*)(USV^*) = U[SS^+S]V^*,$$

ځکه چې په کونجیزو نوکانو یا قوسونو کې د تولیز شوو دیاګونال ماتریکسونو (دوه کونجتړو – یا قطبي ماتریکسونو) ضرب به د دیاګونال توکو د ضربوني له لارې جوړېږ شي او لرو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$s^{+}_{i,i} = 1/s_{i,i}, \quad i \le \text{Rang}\, A\,.$$

نور ټول کټمټوالي هم دسېده پسي- شمېرني له لارې لاس ته راځي.

د دې ښوونه چې وښایو A^{+} یواځنی کرکتریستیک شوی دی د ورکړ شوو شرایطو له لارې، نور هم خوراستونځمن دی، له دې امله يې دلته له څېړني تېرېږو.

لیکونکي: اپپ.هیولیک

اورتوګونال او ځانګړي اورتوګونال ګروپونه

Orthogonale und spezielle orthogonale Gruppe

د ټولو اورتوګونالو $(n \times n)$ - ماتریکسونو Q ډېری(سټ) د اورتوګونال ګروپ $O(n)$ سره ښایو یا په نخښنه کوو یا بول.

د $Q \in O(n)$ لپاره صدق کوي

$$Q^{-1} = Q^{t}\,, \quad |\det Q| = 1$$

او د یوه کواوردینات ترانسفورمیشن

$$x \to x' = Qx$$

سره اوږدوالی اوسکلار ضرب ساتلی پاتې کیږي.

د ټول اورتوګونال $(n \times n)$ - ماتریکسونو Q ډېری د $\det Q = 1$ سره د ځرخونګروپ یا ځانګړی اورتوګونال ګروپ

$$SO(n) \subset O(n)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بلل کيږي.

هندارونه Spiegelung

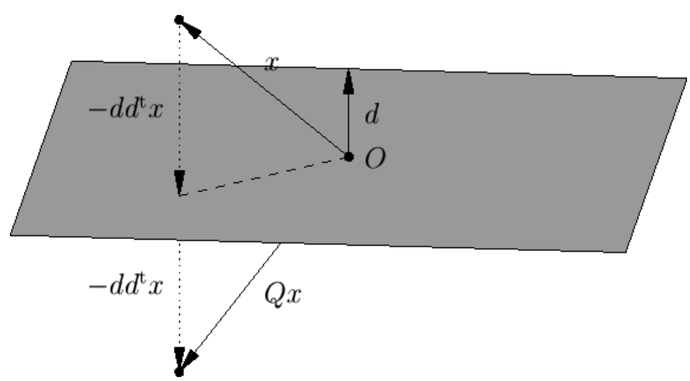
په $\mathbb{R}^n$ کې هندارونه (په هنداره انعکاسونه) و يوه يوونوکتور(واحد-) $d \neq 0$ ته اورتوګونال هايپرسطحه(Hyperebene)

$$H: \; d^t x = 0$$

باندې هندارونه د سيوم تري اورتوګونال ماتريکس

$$Q = E - 2dd^t$$

له لارې د يوونماتريکس (واحد-) E سره په نښه کيږي



پکي يا ميلي په معنا ده

د Q سيومتري روښانه ده. له دې سره لرو :

$$QQ^t = Q^2 = (E - 2dd^t)^2 = E^2 - 4dd^t + 4dd^t dd^t = E \,,$$

دا په دې معنا چې Q اورتوګونال ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د هنداروني خويونو ښوولز لپاره لومړی په پامکې نيسو، چې وکتور

$$x - Qx = x - x + 2dd^t x = 2(d^t x)d$$

و d ته غبرگ دی، او منځټکی د x او Qx ترمنځ په هايپرهواره کې پروت دی:

$$d^t(x + Qx) = d^t x + d^t x - 2d^t dd^t x = 0\,.$$

له دې سره Qx په هايپرهواره د x هندارونه ده په سرچينه کې، هغه چې د d سره اورتوگونا ده.

ليکونکي: اپپ.هيوليگ

څرخون Drehung

آورتوگونال $(n \times n)$ - مآتريکس

$$\begin{array}{r} \\ \\ \text{Zeile } i \;\; \longrightarrow \\ \\ \text{Zeile } j \;\; \longrightarrow \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & \\ & & c & & -s & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & s & & c & & \\ & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

په پورته کې Zeile د ليکي يا کيلې په معنا ده

د $c = \cos\varphi$ او $s = \sin\varphi$ سره يوه څرخون په φ په $\mathbb{R}^n$ کې پرته د $x_i x_j$ - سطحه کې په گوته کوي(تحليلوي). ليکونکي: اپپ.هيوليگ

(c) ketabton.com: The Digital Library

ساده شميرنه او د

$$\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$$

په پام کې نيولو سره تصديقيږي، چې ځرخونماتريکس R اورتوګونال دی:

$$RR^{\mathrm{t}} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & c^2+s^2 & & -sc+sc & \\ & & & \ddots & & \\ & & -sc+sc & & c^2+s^2 & \\ & & & & & \ddots \\ 0 & & & & & 1 \end{pmatrix} = E\,.$$

- ليکونکي: اپپ.هيوليک

ځرخونمحور او ځرخونکونج Drehachse und Drehwinkel

هر په $\mathbb{R}^3$ کې ځرخون Q يو ځرخون محور لري، دا پهدې معنا چې يو يوونوکتور u اينواريانت پريږدي،او په يوه کونج φ يو ځرخون ښايي په هغه هواره کې چې u ته(باندې) اورتوګونال ده.

نسبت و يوه اورتوګونال ولاړسيستم u, v, w ته Q لاندې د ماتريکس آنځورونه لري:

$$\tilde{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

او د ځرخونکونج لپاره په ځانګړې توګه صدق کوي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\cos\varphi = \frac{1}{2}\left(\mathrm{Spur}\,Q - 1\right) .$$

- لیکونکي: هیولیک، ربل

د یوه څرخونماتریکس Q لپاره لرو:

$$Q^{-1} = Q^{t}, \quad |\det Q| = 1 .$$

دا چې د یوه اورتوګونالماتریکس آیګن –ارزښت λ_i مطلق ارزښت 1 لري او $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = \det Q = 1$ دی، لرو، چې لږ تر لږه یو آیګن – ارزښت 1 دی. د مناسب په ګڼه کزلز یا نمرهکولو سره یا

$$\lambda_1 = \overline{\lambda_2}, \quad \lambda_1\lambda_2 = 1$$

دی او یا

$$\lambda_i \in \{-1, 1\} .$$

دا نورمي شوی ایګن- وکتور u د آیګن – ارزښت 1 څرخونمحور ټټکي.

د یوه اورتوګونالولاړسیستم u, v, w لپاره باور لري:

$$Qu = u$$

$$Qv = \alpha v + \beta w$$

$$Qw = \gamma v + \delta w .$$

دا چې Qv, Qw کوم د u - کومپوننت نه لري، له لاندې له کونجساتونکو اورتوګونال مارتیکسونو څخه لاس ته راځي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x \perp u \Rightarrow Qx \perp Qu = u\,.$$

که پورته مساوات د ماتریکس بڼه باندې

$$Q(\underbrace{u,v,w}_{P}) = (u,v,w)\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \gamma \\ 0 & \beta & \delta \end{pmatrix}}_{\tilde{Q}},$$

باندې ولیکل شي، له $\tilde{Q} = P^{-1}QP$ لاس ته ارځي، چې

$$\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix}$$

یو څرخون ماتریکس دی. په همدې ډول د شپور د انواریانت له امله لاس ته راځي:

$$\operatorname{Spur} Q = \operatorname{Spur} \tilde{Q} = 1 + 2\cos\varphi$$

- لیکونکي: هیولیګ، ربل

ماتریکس

$$Q = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$$

یو دیاګونال ماتریکس دی، څکه چې لرو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$Q^{t}Q = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = E \Rightarrow Q^{t} = Q^{*}$$

او

$$\det Q = \det \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} = +1\,.$$

څرخونمحور د آئګن- وکتور u په حيث ټاکل کيږي و آيګن – ارزښت $\lambda = 1$ ته:

$$\underbrace{\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & -2 & -\sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} & -1 \end{pmatrix}}_{Q-E}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow u = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

څرخونکونج φ له

$$\cos\varphi = \frac{1}{2}(\operatorname{Spur} Q - 1) = \frac{1}{2}(1-1) = 0$$

څخه لاس ته ارځي، د $\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$ په حيث .

د φ مخنخښه د څرخونلور u د لوريزوالي په واک کې ده او کېدی شي د يوه ولاړسيستم(کواوردينات سيستم) $\{u, v, w\}$ وټاکپ شي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$w^{t}Qv = w^{t}(\cos\varphi v + \sin\varphi w) = \sin\varphi\,.$$

د

$$v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

سره د راوړل شوي بېلګې لپاره لرو:

$$\sin\varphi = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \quad 0 \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = 1$$

نو لرو: $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ليکونی: ويپر

د يو خرخون په ضريبونو توټه کونه Faktorisierung einer Drehung

يو خرخون Q په $\mathbb{R}^3$ کې په کواورد يناتمخور د د کواوردخرخونونو د ضرب په څېر کېدی انځور شي:

$$Q = D_z D_y D_x\,.$$

- ليکونکي: هيوليک، ربل

خرخون D کېدی شي و ټاکل شي، دا سې چې يو په بل پسې sukzessive د Q توکي q_{21}, q_{31}, q_{32} له منځه يووړل شي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$D_z^{-1}Q = \begin{pmatrix} \star & \star & \star \\ 0 & \star & \star \\ \star & \star & \star \end{pmatrix}$$

$$D_y^{-1}D_z^{-1}Q = \begin{pmatrix} 1 & \star & \star \\ 0 & \star & \star \\ 0 & \star & \star \end{pmatrix}$$

$$D_x^{-1}D_y^{-1}D_z^{-1}Q = \begin{pmatrix} 1 & \star & \star \\ 0 & 1 & \star \\ 0 & 0 & \star \end{pmatrix} = R\,.$$

له دې سره داسې کار اخستل شوی یا مخ ته تللي یو، چې یو په خوښه آیګن-وکتور $(v_1, v_2)^t$

په $(1, 0)^t$ باندې د یوې سطحې د څرخون D له لارې ځان ځېره کړی شي (یعنې د تابع په ځېر ولیکل شي). دا چې $\det R = 1$ دی $r_{33} = 1$ لرو او د متو د نورمي کولو له امله باید R یوونماتریکس (واحدماتریمس) وي. له دې سره غوښتونې انځورونه لاس ته راځي.

- لیکونکي: هیولیګ، ربل

د دې لپاره چې د ماتریکس

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{\sqrt{6}}{4} & -\frac{\sqrt{4}}{8} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{6}}{8} \end{pmatrix}$$

په ضریبونو ټوټه کول لاس ته راوړو، نو لومړی توکی $q_{2,1}$ له منځه وړو د $\frac{\pi}{2}$ په کچه څرخون د z – محور باندې:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{6}}{8} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{6}}{8} \end{pmatrix}.$$

داسې پای کوو چې د y -محور باندې د $\frac{\pi}{4}$ په کچه څرخوو:

:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} D_z^* Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

لاس ته راغلی ماتریکس یوو څرخون D_x دی د x -محور باندې. په ټولیزه توګه لاندې په ضریبونو ټوټه کونه لاس ته راوړو:

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

D_x D_y D_z

- ليکونکي: هيوليګ، کرايخ

څرخونماتريکس Drehmatrix

په $\mathbb{R}^3$ کې يو څرخون د نورمي شوي څرخون محورلور u او څرخونکونج φ سره ، داسې لوريزه لکه ښی پيچي ميخ ، د يو وکتور x فنکشن جوړوي

$$Qx = \cos\varphi\, x + (1-\cos\varphi)\, uu^{t}x + \sin\varphi\, u \times x$$

، چيرته چې $v \times x$ د u او x صليب ضرب(وکتوري ضرب، چې x سره په نخښه کيږي) په نخښه کوي. اړونده څرخونماتريکس دی:

$$Q: \quad q_{ik} = \quad \cos\varphi\, \delta_{ik} + (1-\cos\varphi)\, u_i u_k + \sin\varphi \sum_j \varepsilon_{ijk} u_j\,.$$

د کرونيکرسومبول δ_{ik} او ε -تنزور ε_{ijk} سره.

- ليکونکي: هيوليګ، ربل

دا بسيا کوي پسې وښايو، چې $Qu = u$ او يو و u ته اورتوګونال وکتور v په يوه کونج φ د u په محور باندې وڅرخي. لومړی غوښتنه ترلر کتل کيږي. د v څېرې يا تابع ارزښت په څېر لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$Qv = \cos\varphi\, v + \sin\varphi\, u \times v\,,$$

څه چې په φ د څرخون سره د v او $u \times v$ څخه غزېدلي سطحه په ګوته کوي.

- ليکونکي: هيوليک، ربل

د ټوليز فرمول سره سم د $u = \frac{1}{\sqrt{3}}(1\ 1\ 1)^t$ په محرړر په $\varphi = \frac{\pi}{3}$ يو د څرخون ماتريکس Q له 3ترمونو څخه په لاندې ډول يوځاي کيږي:

په ټوليزه توګه لاس ته راوړ

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\cos\varphi\ \delta_{ik}: \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$(1-\cos\varphi)u_i u_k: \quad \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sin\varphi \sum_j \varepsilon_{ijk}u_j: \quad \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- ليکونکي: هيوليک، کرايځ

مربعيزه فورم(څلورى يې بڼه)

Quadratische Form

د يوه حقيقي سيموتريک ماتريکس A لپاره دا لاندې

$$\alpha(x) = x^t A x$$

مربعيزه فورم نوموو.

د A د آيګن – ارزښت د مخنخښې بدلون له مخې لاندې درې تيوپه(ډولونه) توپيروو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

- الیپتیکي (بیضوي ډوله) بڼه: ټول آیګن – ارزښتونه همغه مخنښه لري.
- پارابولیک : لږ تر لږه یو آیګن – ارزښت صفر دی او نور آیګن ارزښتونه همه یابرابرې وخنخښې لري.
- های پارابولیکي : د مختلفو مخنخښو سره آیګن – ارزښتونه شتون لري.

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

د A سیومتري اړیین نه ده چې مخ له مخه ونیول شي(فرض شي)، د ټولیز ماتریکس لپاره کېدی شي مربع بڼه په لاندې ډول ولیکل شي:

$$x^{\mathrm{t}}Ax=\sum_{j,k}x_ja_{j,k}x_k=\sum_j a_{j,j}x_j^2+\sum_{j<k}(a_{j,k}+a_{k,j})x_jx_k$$

پس کېدی شي هر ځل دوه ترمونه سره یوځای کړو او مربع بڼه سیومتري کړو یا په سیمتري واړوو:

$$x^{\mathrm{t}}Ax=\frac{1}{2}x^{\mathrm{t}}(A+A^{\mathrm{t}})x\,.$$

مربع بڼې د بېلګې په توګه د یوه سکالارتابع f د تیلور- ودې د لومړي ترم په څېر رامنځ ته کیږي:

$$f(x)=f(0)+\operatorname{grad}f(0)^{\mathrm{t}}\,x+\frac{1}{2}x^{\mathrm{t}}(\mathrm{H}\,f(0))\,x\,.$$

په دې حالت کې $\mathrm{H}\,f$ د دویم ټوټه (partiellen -) مشتق د هسې-ماتریکس دی، د بدلونوالي په بنسټ سیومتري دی. لیکونکي: اپپ، هیولیګ

سیومتریک ماتریکس

$$A=\begin{pmatrix}1+\lambda & 1-\lambda\\ 1-\lambda & 1+\lambda\end{pmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

آيګن – ارزښتونه 2 او 2λ لري.

مربعي بڼه

$$\alpha(x) = x^t Ax$$

د $\lambda > 0$ لپاره بيضوي(هګۍ ډوله) ده، د $\lambda = 0$ لپاره پارابوليک او د $\lambda < 0$ لپاره هايپارابوليک دی.

- ليکونکي: اپپ، هيوليک

کوادريک Quadrik

تکي

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^n : \alpha(x) + 2\beta(x) + \gamma = 0\}$$

کوادريک بلل کيږي، چيرته چي α يو مربعيزه بڼه، β يوه کرښوزه بڼه او γ يوه ثابته ده.

Q د ماتريکس ليکدود په ډول ليکل په لاندې ډول ليکل کيږي

$$Q: \quad x^t Ax + 2b^t x + c = 0$$

د $\alpha(x) = x^t Ax$ او $\beta(x) = b^t x$ سره.

د Q انځورونه يواځنی نه ده. د بېلګي په توګه کېدی شي د تعريف مساوات د يوه په خوښه ثابتي سره ضرب شي.

- ليکونکي: اپپ، هيوليک

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کوادریکونو شډله تړته ونه Grobeinteilung der Quadriken

د یوه کوادریک د مساوات څخه په پیل

$$Q: \quad x^t A x + 2b^t x + c = 0$$

لیکو

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{c|c} c & b^t \\ \hline b & A \end{array} \right) .$$

د $\tilde{x}^t = (1, x_1, \ldots, x_n)$ سره کېدی شي Q هم په لاندې هوموجين بڼه ولیکل شي:

$$Q: \quad \tilde{x}^t \tilde{A} \tilde{x} = 0$$

لاندې ډولونه یا تیوپونه توپیروو:

- مخروطي کوادریک $\operatorname{Rang} \tilde{A} = \operatorname{Rang} A$
- منځتکي کوادریک $\operatorname{Rang} \tilde{A} = \operatorname{Rang} A + 1$
- پارابولیکي کوادریک $\operatorname{Rang} \tilde{A} = \operatorname{Rang} A + 2$
- لیکونکي: اپپ، هیولیګ

کوادریک

(c) ketabton.com: The Digital Library

يا دونه(ژباړی): په سطحه کې يوه کره(کرښه)، په درې بعديزه (درېپراخيدونې) فضا کې يوه سطحه ده، د ډېرو اووښتونو يا متحولو له لارې تشريح يا ښوول کيدی شي.پای

$$Q: \quad x_1^2 + \lambda x_2^2 + 2x_2 + \lambda = 0$$

دې د $\lambda \in \mathbb{R}$ سره ورکړ شوي وي، همداسې د ماتريکس لکيندود

$$Q: \quad x^t A x + 2b^t x + c = 0$$

د

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c = \lambda, \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

،

سره ورکړ شوي وي.

د $\lambda = 0$ لپاره $\operatorname{Rang} A = 1$ دی، پرته له دې $\operatorname{Rang} A = 2$ دی. د $\lambda = \pm 1$ لپاره $\operatorname{Rang} \tilde{A} = 2$ دی، پرته له دې $\operatorname{Rang} \tilde{A} = 3$ دی. له دی سره Q د $\lambda = 0$ لپاره يو پارابول ، د $\lambda = \pm 1$ لپاره مخروطي ډوله کوادريک او د نورو ټول ارزښتونو لپاره يو منځټکي کوادريک دی.

ليکونکي: اېپ، هيوليک

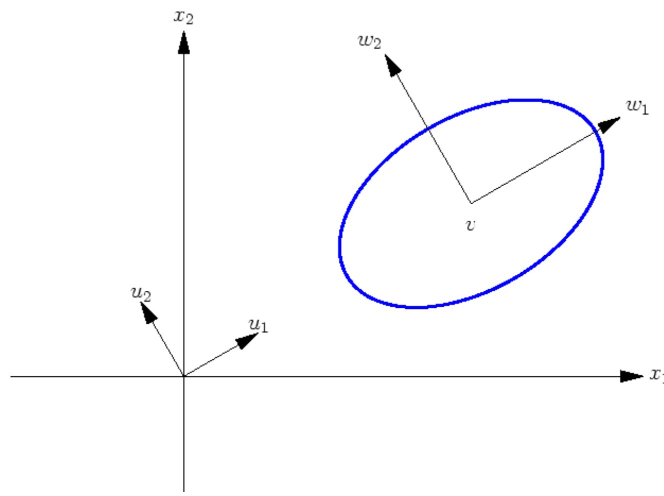
اصلي- محور –ترانفورميشن Hauptachsentransformation

د څرخون او راکښنی له لارې په $\mathbb{R}^n$ کې کېدی شي يو کوادريک په نورمال بڼه ترانسفورمي شي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x^{t}Ax + 2b^{t}x + c = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i w_i^2 + 2\beta w_{m+1} + \gamma\,, \quad x = Uw + v\,,$$

چیرته چې $m = \mathrm{Rang}\,A$ او $\beta\gamma = 0$ صدق کوي.



له دې سره د ځرخون ماتریکس U متې د A آیګن –ارزښتونو λ_i ته آیګن-وکتورونه u_i خوندي لري، چې د هغې لور اصلي محور بلل کیږي. د راکښني وکتور (راکښونوکتور) v د کوادریک منځتکی دی. لیکونکي: اپپ، هیولیګ

سیومتري مارتیکس A ته له آیګن –وکتورونو u_i ځخه د $\det(u_1, \ldots, u_n) = 1$ سره یو اروتوګونال بنسټ شتون لري، د کومو سره چې لومړی و آیګن – ارزښتونو $\lambda_i \neq 0$ ته آیګن – وکتورونه نئول کیږي. د لومړي ځای بدلون $x = Uy = (u_1, \ldots, u_n)y$ پسې له دې سره لاندې دیاګونال بنه لاس ته راځي

$$y^{t}\,\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_m, 0, \ldots, 0)y + 2(\underbrace{U^{t}b}_{\tilde{b}})^{t}y + c\,.$$

له صفر ځخه مختلف آیګن-ارزښتونو $\lambda_i \neq 0$ لپاره د نورو ورپسې ځای بدلون له لارې

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y_i = z_i - \tilde{b}_i/\lambda_i$$

کيدی شيکربنيز ترمونه له ځايه يوړل شي (مربعي پوره کونه). ثابتې د

$$c \to \gamma = c - \sum_{i=1}^{m} \tilde{b}_i^2/\lambda_i \,.$$

سره سم تغير خوري،نو اوس له دې سره اوس دا بنه لرو

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i z_i^2 + \sum_{i=m+1}^{n} 2\tilde{b}_i z_i + \gamma \,.$$

که اوس يو $\tilde{b}_i \neq 0$ د $i \geq m+1$ سره شتون ولري، نو د يو ه بل ځرخون پسي د

$$z_i' = z_i \,, \quad i \leq m$$

$$z_{m+1}' = (1/\beta) \sum_{m+1}^{n} \tilde{b}_i z_i \,, \quad \beta = \pm|\tilde{b}|$$

او په اړونده اورتوګونال د $z_{m+2}', \ldots, z_n'$ سره تکمي شوی

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i (z_i')^2 + 2\beta z_{m+1}' + \gamma \,.$$

لاس ته راځي.

له دې سره د β سره مخ نخبنه ډاسي ټاکل کيږي، چې د β سره ويش وروسته لږ تر لمه دومره مثبت لکه منفي ترمونه λ_i/β رامنځ ته شي.

اخرنی راکبنه

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$w_{m+1} = z'_{m+1} + \gamma/(2\beta)$$

$$w_i = z'_i\,, \quad i \neq m+1$$

ثابته له منځه وړي او باالاخرخ راکوي:

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i w_i^2 + 2\beta w_{m+1}\,.$$

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

کوادريکونه

يا دونه(ژباړی): په سطحه کې يوه کره(کرښه)، په درې بعديزه (درېپراخيدونې) فضا کې يوه سطحه ده، د ډېرو اووښتونو يا متحولو له لارې تشريح يا ښوول کيدی شي.پای

$$Q: \quad 8x_1^2 + 17x_2^2 + 20x_3^2 + 20x_1x_2 + 8x_1x_3 + 28x_2x_3 - 48x_1 - 114x_2 - 78x_3 + 207 = 0$$

$$Q: \quad 8x_1^2 + 17x_2^2 + 20x_3^2 + 20x_1x_2 + 8x_1x_3 + 28x_2x_3 - 48x_1 - 114x_2 - 78x_3 + 207 = 0$$

دې په نورمال فورم يا – پنې ترانسفورمي شي.

د ماتريکس لکندود سره لاس ته راځي

$$Q: \quad x^{t}Ax + 2b^{t}x + c = 0$$

د

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 10 & 4 \\ 10 & 17 & 14 \\ 4 & 14 & 20 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -24 \\ -57 \\ -39 \end{pmatrix}, \quad c = 207\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

سره.

ماتريكس A آيګن – ارزښتونه 36، 9 او 0 لري، په دې اړونده نورمي شوي آيګن-وکتورونه u_i د $\det(u_1,u_2,u_3)=1$ سره د بېلګې په توګه دي:

$$u_1=\frac{1}{3}(1,2,2)^t\,,\quad u_2=\frac{1}{3}(2,1,-2)^t\,,\quad u_3=\frac{1}{3}(2,-2,1)^t\,.$$

د ترانسفورمیشن $x=Uy$ پسې د $U=(u_1,u_2,u_3)$ سره لاس ته راځي

$$Q:\quad 36y_1^2+9y_2^2-144y_1-18y_2+18y_3+207=0\,.$$

د مربعيزې تكميلوني له لارې

$$z_1=y_1-2,\ z_2=y_2-1,\ z_3=y_3$$

لاس ته راحي

$$Q:\quad 36z_1^2+9z_2^2+18z_3+54=0\,.$$

راكښنه

$$w_1=z_1,\ w_2=z_2,\ w_3=z_3+3$$

بالاحره نورمالفورم (- بڼه) راكوي

$$Q:\quad 36w_1^2+9w_2^2+18w_3=0\,.$$

په ټوليزه توګه ترانسفورمیشن لاندې فورم يابنه راكوي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x = Uy = Uz + U\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = Uw + U\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + U\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

پس راکښنه ده

$$v = U\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 \\ 11 \\ -1 \end{pmatrix}$$

او د د کوادریک منځ ټکی په ګوته کوي.

ليکونکي: اېپ، هیولیک

مخروط غوڅی Kegelschnitt

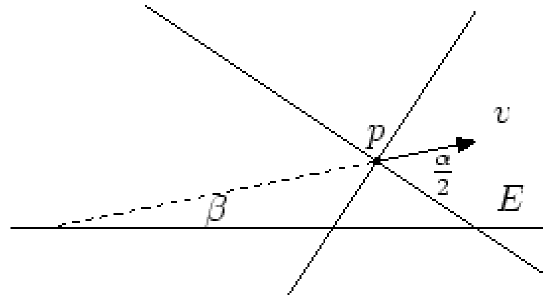
د یوه دېلمخروط غوڅی

$$K:\ (x-p)^{t}v = \pm\cos\frac{\alpha}{2}\,|x-p||v|$$

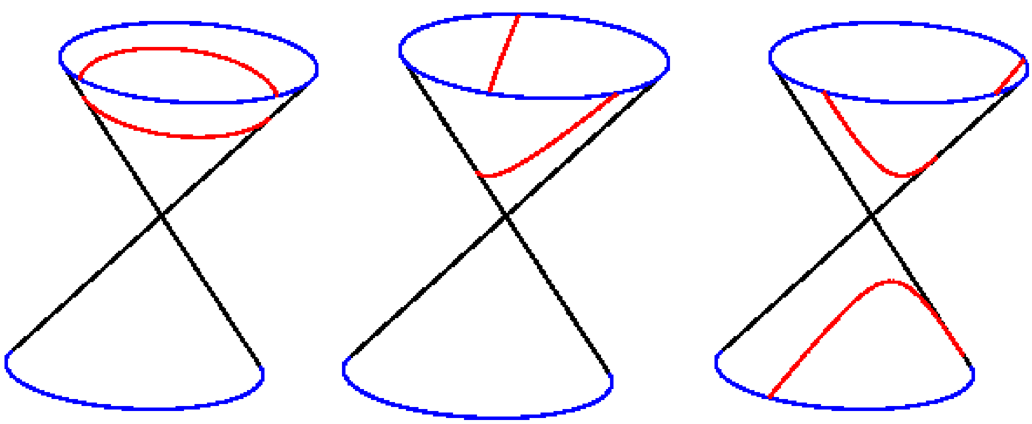
د ځوکي p ($p_3 \neq 0$)، لور v سره او وازولو کونج α د سطحې $E:\ x_3 = 0$ سره یوه مربعیزه کړه ده

$$K \cap E:\ a_{1,1}x_1^2 + 2a_{1,2}x_1x_2 + a_{2,2}x_2^2 + 2b_1x_1 + 2b_2x_2 + c = 0\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



د مخروط غوڅي تيوپ يا ډول د E او کرښې $p+tv$, $t\in\mathbb{R}$, ترمنځ کونج β د لويوالي په واک کې دی



Hyperbel: های پارابول
$\beta < \alpha/2$

Parabel: پارابول
$\beta = \alpha/2$

Ellipse: بيضوي يا هګټ
$\beta > \alpha/2$

ليکونکي: اپپ، هيوليک

د دوه بعدي کوادريکونو د اوکليدي نورمال بڼه

Euklidische Normalform der zweidimensionalen Quadriken

د سطحيزو کوادريکونو مختلف ډولونه شتون لري، د لاندې نورمال فورمونو سره:

(c) ketabton.com: The Digital Library

- مخروطي کوادريکونه

Normalform نورمال بڼه	Bezeichnung نومونه
$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} = 0$	ټکیPunkt
$\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} = 0$	schneidendes Geradenpaar د غوڅوونکو کرښو جوړه
$\frac{x_1^2}{a_1^2} = 0$	Doppelgerade دبلي کرښې

- منځټکي کوادريکونه

Normalform نورما بڼه	Bezeichnung نومونه
$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + 1 = 0$	)تش ډېرى(leere Menge
$\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} + 1 = 0$	های پارابولHyperbel

(c) ketabton.com: The Digital Library

$-\frac{x_1^2}{a_1^2}-\frac{x_2^2}{a_2^2}+1=0$	بيصوي(هګی)Ellipse
$\frac{x_1^2}{a_1^2}+1=0$	تش ډېری)leere Menge(
$-\frac{x_1^2}{a_1^2}+1=0$	paralleles Geradenpaar د کرښو غبرګه جوړه

- پارابوليکي کوادريکونه

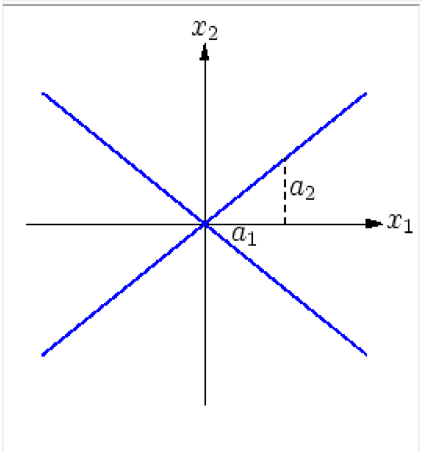
Normalform نورمال بڼه	Bezeichnung نومونه
$\frac{x_1^2}{a_1^2}+2x_2=0$	پارابول Parabel

نورمالفورمونه يواځني دي، د ايندکسونو يا پيژند نخښنو تر ځای بدلون پورې او د مخروطي کوادريکونو د يوې ثابتې $c \neq 0$ سره د ضرب پورې.

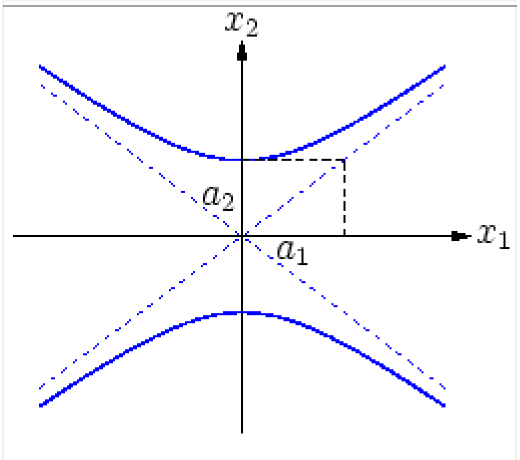
لويې a_i مثبت اينول کيږي او د کوادريکونو داصلي محور اوږدوالی بلل کيږي

schneidendes Geradenpaar د غوڅيدونکو کرښو جوړه	Doppelgerade دبل کرښې

(c) ketabton.com: The Digital Library

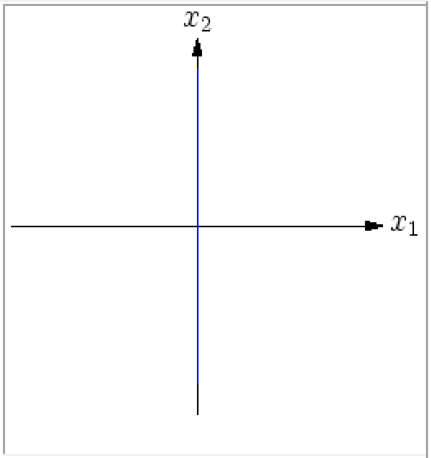


Hyperbel های پارابول

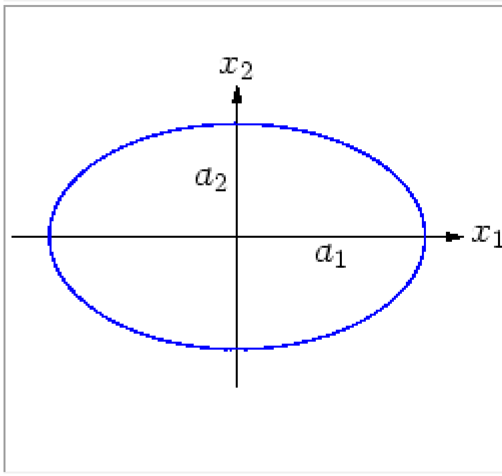


paralleles Geradenpaar

غبرگه(موازي) کرښجوره

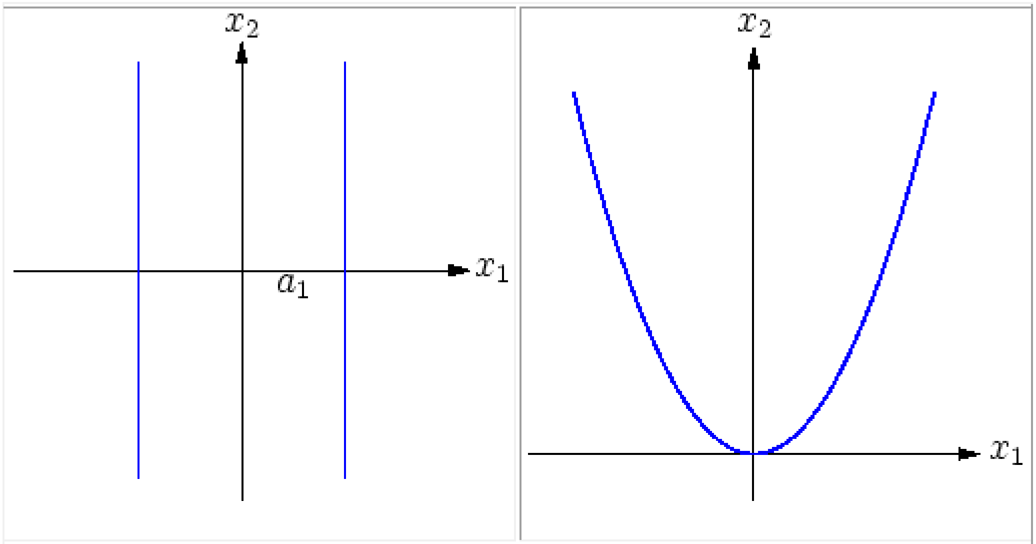


Ellipse بيضوي يا هکی



Parabel پارابول

(c) ketabton.com: The Digital Library



ليکونکي: اپپ، هيوليګ

اوس دې د لاندې کوادريکونو نورمالفورم(- بڼه) او تيوپ وټاکل شي

$$Q: \quad 3x_1^2 + 3x_2^2 + 10x_1x_2 - 12\sqrt{2}x_1 - 4\sqrt{2}x_2 - 8 = 0$$ د

ماتريکسفورم د مربعيز فورم ځخه په پيل،

$$x^t A x + 2b^t x + c = x^t \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} x + 2\sqrt{2}\,(-6,-2)\,x - 8$$

لومړی سړی د ماتريکس A آيګن – ارزښتونه او آيګن – وکتورونه ټاکي.

کرکتريتيکي پولينوم دی:

$$(3-\lambda)^2 - 25 = 9 - 6\lambda + \lambda^2 - 25 = \lambda^2 - 6\lambda - 16$$

او لاندې صفرځايونه لري

$$\lambda_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36+64}}{2} = 3 \pm 5$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

و $\lambda_1 = -2$ ته يو نورمي شوى آيگن-وکتور د لاندې کربنيز مساوات د حل څخه لاس ته راوړل کيږي

$$\begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} v_1 = 0$$

نو $v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)^t$ دی. دا چې دويم آيگن-وکتور په په لومړي بايد عمود (ولاړ) وي، نو لاس ته راځي $v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)^t$ ، د کوم سره چې مخنخښنه داسي بايد ټاکل شوي وي، چې د لاندې ورکړ شوې ترانفورميشن ماتريکس ديترمينانت مثبت وي:

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

د $x = Uy$ سره تراسفورمي شوي مساوات لاندې بڼه لري:

$$\begin{aligned} 0 &= y^t \tilde{A} y + 2\tilde{b}^t y + c \\ &= y^t U^t A U y + 2\left(b^t U\right) y + c \\ &= -2y_1^2 + 8y_2^2 - 8y_1 - 16y_2 - 8\,. \end{aligned}$$

د مربعيزې پوره ونه يا تکميلونه راکوي

$$0 = -2y_1^2 + 8y_2^2 - 8y_1 - 16y_2 - 8$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \quad -2(y_1-2)^2+8(y_2-1)^2-8$$

$$= \quad -2z_1^2+8z_2^2-8$$

په همدې ډول

$$\frac{z_1^2}{2^2}-\frac{z_2^2}{1^2}+1=0\,.$$

نو مساوات يو های پارابول انځوروي.

(Autoren: Höllig/Hörner)

د درې بعدي کوادريکونو د اقليدس (اويکليد) نورمالفورم

Euklidische Normalform der dreidimensionalen Quadriken

د فضايي کوادريکونو 17 مختلف ډولونه شتون لري د لاندي نورمالفورمونو سره:

- مخروطي کوادريکونه

Bezeichnung نومونه	Normalform نورمال بڼه
Punktټکی	$\frac{x_1^2}{a_1^2}+\frac{x_2^2}{a_2^2}+\frac{x_3^2}{a_3^2}=0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(Doppel-)Kegel(دبل)مخروط	$\frac{x_1^2}{a_1^2}+\frac{x_2^2}{a_2^2}-\frac{x_3^2}{a_3^2}=0$
Geradeکرښه	$\frac{x_1^2}{a_1^2}+\frac{x_2^2}{a_2^2}=0$
Schneidende Ebenenغوڅونکي سطحې	$\frac{x_1^2}{a_1^2}-\frac{x_2^2}{a_2^2}=0$
Doppelebeneدبل سطحې	$\frac{x_1^2}{a_1^2}=0$

- منځټکي کوادريکونه

په نخښه ونه Bezeichnung	نورمال بڼه Normalform
(leere Menge) (تشډېرۍ)	$\frac{x_1^2}{a_1^2}+\frac{x_2^2}{a_2^2}+\frac{x_3^2}{a_3^2}+1=0$
دوه پوښيز های پرابولوئيد zweischaliges Hyperboloid	$\frac{x_1^2}{a_1^2}+\frac{x_2^2}{a_2^2}-\frac{x_3^2}{a_3^2}+1=0$
يوپوښيز های پرابولوئيد einschaliges Hyperboloid	$\frac{x_1^2}{a_1^2}-\frac{x_2^2}{a_2^2}-\frac{x_3^2}{a_3^2}+1=0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$-\frac{x_1^2}{a_1^2}-\frac{x_2^2}{a_2^2}-\frac{x_3^2}{a_3^2}+1=0$	Ellipsoid ايليپسوپيد
$\frac{x_1^2}{a_1^2}+\frac{x_2^2}{a_2^2}+1=0$	(leere Menge) تشدپرى
$\frac{x_1^2}{a_1^2}-\frac{x_2^2}{a_2^2}+1=0$	hyperbolischer Zylinder هايپربوليکي توته
$-\frac{x_1^2}{a_1^2}-\frac{x_2^2}{a_2^2}+1=0$	elliptischer Zylinder ايليپتيکي توته
$\frac{x_1^2}{a_1^2}+1=0$	(leere Menge) تشدپرى
$-\frac{x_1^2}{a_1^2}+1=0$	parallele Ebenen غبرګې سطحې يا ٠ هوارئ

- پارابوليکي کوادريکونه

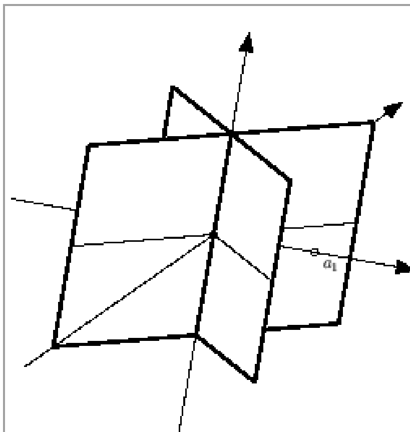
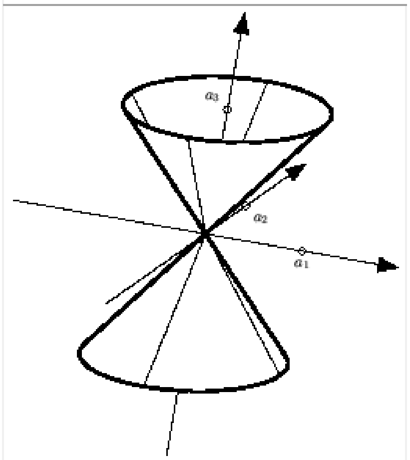
نورمال بڼه	نومونه
$\frac{x_1^2}{a_1^2}+\frac{x_2^2}{a_2^2}+2x_3=0$	هکى ډوله ايليپميکي پارابولوئيد
$\frac{x_1^2}{a_1^2}-\frac{x_2^2}{a_2^2}+2x_3=0$	هاي پارابوليکي پارابولوئيد

(c) ketabton.com: The Digital Library

پارابوليکي توته	$\frac{x_1^2}{a_1^2} + 2x_2 = 0$

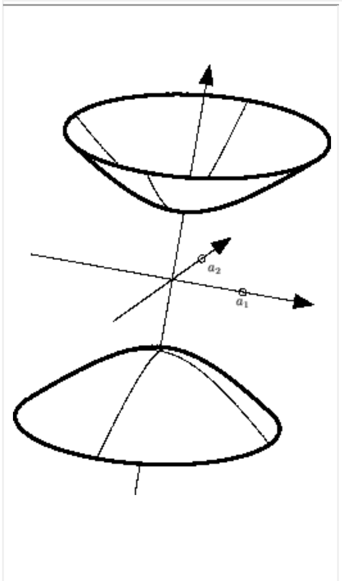
نورمال بڼې د ايندکسونو يا پيژند نخښو پورې پواځني تاکلي او مخروطئ کوادريکونه د ثابتې $c \neq 0$ سره د ضرب پورې يواځني تاکلي.

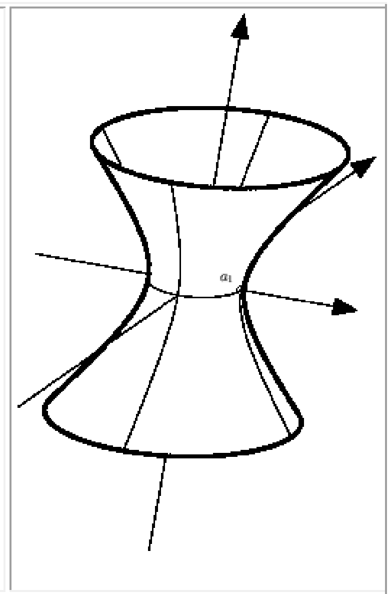
لويي a_i مثبت اينسول کيږي او د کوادريکونو د اصلي محور اوږدوالی بلل کيږي.

غوڅوونکي سطحې	(ډبل) مخروط
	

يو پوښيز های پارابول	دوه پوښيز های پارابول

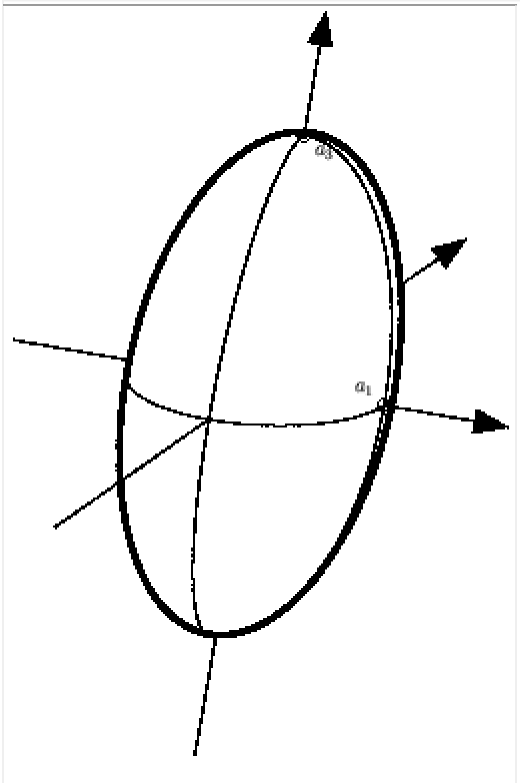
(c) ketabton.com: The Digital Library

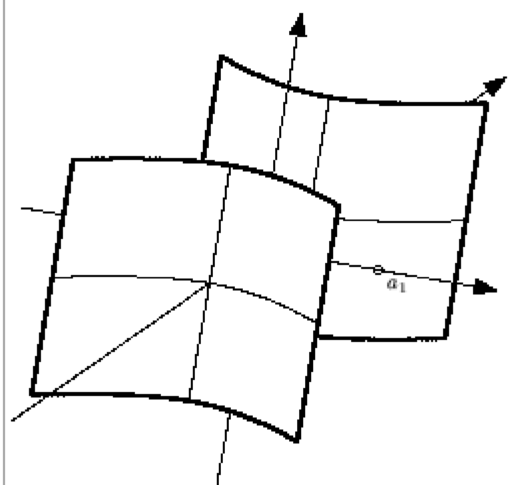




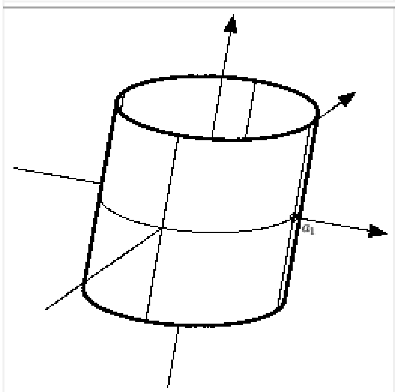
Ellipsoidهکی ډوله یا بیضوي ډوله	های پارابولیکي توته hyperbolischer Zylinder

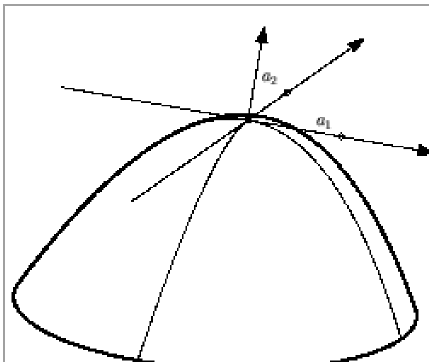
(c) ketabton.com: The Digital Library



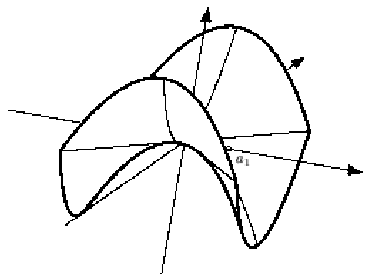
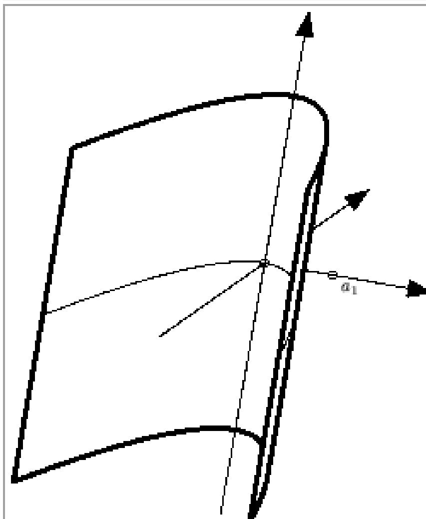


elliptischer Zylinder بيضوي توته	elliptisches Paraboloid بيضوي پارابولوئيد





(c) ketabton.com: The Digital Library

hyperbolisches Paraboloid های پارابوليکي پارابولوئيد	parabolischer Zylinder پارابوليکي توته يا - استوانه
	

ليکونکي: هيوليګ، هيرنر

اوس دې د لاندې کوادريکونو نورمال بڼه او تيوپ (ډول) و ټاکل شي:

$$Q: \quad x^t \begin{pmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 4 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} x + 2\,(-2,1,2)\,x + 2 = 0$$

د ماتريکس کرکتريستيکي يا ټاټونکی پولينوم

$$p(\lambda) = \lambda^3 - 9\lambda^2 - 9\lambda + 81\,,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاندې صفرځاي لري:

$$\lambda_1 = 9\,, \quad \lambda_2 = 3\,, \quad \lambda_3 = -3\,.$$

و آیګن – ارزښتونو λ_i ته اړونده نورمي آیګن-وکتورونه دي:

$$v_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\,, \quad v_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\,, \quad v_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}\,,$$

جېرته چې مخنخښه داسې ټاکل کیږي، چې و لاړسیستم منځ ته راځي.

د اورتوګونال ترانسفورمیشن ماتریکس په حېث منځ ته راځي:

$$U = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}\,.$$

دا د $x = Uy$ سره ترانسفورمي مساوات لاندې بڼه لري:

$$y^t \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} y + 2\,(0,3,0)\,y + 2 = 0\,.$$

مربعیزه پوره کونه راکوي

$$\begin{aligned} 0 &= 9y_1^2 + 3y_2^2 - 3y_3^2 + 6y_2 + 2 \\ &= 9y_1^2 + 3(y_2+1)^2 - 6y_2 - 3 - 3y_3^2 + 6y_2 + 2 \end{aligned}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$9z_1^2 + 3z_2^2 - 3z_3^2 - 1 \quad =$$

په همدې توګه

$$\frac{z_3^2}{\frac{1}{3}} - \frac{z_1^2}{\frac{1}{9}} - \frac{z_2^2}{\frac{1}{3}} + 1 = 0\,.$$

نور مساوات يوپوښيز های پارابول انځوروي

ليکونکي: هيوليک، هيورنر

چې غوتې پسې وهې په لاس به درشي

چا وې دا چې په درياب کې ګور نه شته

برى د خداى (ج) سره دى.

د ډاکتر ماخان شينواري چاپ شوې ليکنې:

<u>1988 Vienna (Austria):</u>

<u>لومړى:</u>

H.K. Kaiser , M. Shinwari : Aproximation compact pological algebra : general algebra 6 ; Page 117 – 122 contributions to

<u>1987 Vienna (Austria):</u>

<u>دويم:</u>

Diss . Interpolation und Aproximation durch Polynime in Universalen Algebren . Uni. Wien

(c) ketabton.com: The Digital Library

Dissertation Interpolation and Aproximation by Polynome in universal Algebras, at the University of Vienna/Austria

لاندې د شميرپوهنې پښتوټول کتابونه په المان کې د ،، افغانستان کلتوري ودې ټولنه،،له خوا چاپ شوي دي

2000 Bonn (Germany):

دريم: د شميرپوهنې ستر کتاب : د شميرپوهنې برسيره د انجنري، فزيک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زده کوونکو لپاره (دا کتاب په ۹۰۰ مخونو کې چاپ او دا نوې ليکنه به يې ځنو ځايونو غزېدلې او ځنې ځايونه ترې لرې شوي دي)

2003 Bonn (Germany):

څلورم: ځمککچپوهنه(هندسه) ، په سلو، زرو کې شميرنه، د ګټې – او کټې د کټې شميرنه ، د اختمالوالي شمېرنه کتاب د ښوونځي ټولې اړتياوې پوره کوي

2003 Bonn (Germany):

پنځم: الجبرونه (د الجبر بنسټونه دي)

2003 Bonn (Germany):

شپږم: د شميرپوهنې انګرېزي – پښتو ډکشنري.

2003 Bonn (Germany):

اووم: د شميرپوهنې الماني ـ پښتو- او پښتو الماني ډکشنري

Mathematical dictionary German/ Pashto and Pashto/German

2003 Bonn (Germany):

(c) ketabton.com: The Digital Library

اتم: دفرنځیال برابرون (دا کتاب په دې ځانګه کې یو پیل دی، ساده لیکل شوی)

Differential equation Translation; An Introduction

Bonn (Germany): 2003

نهم: د شمیر پوهنې فرمولونو ټولګه

Mathematical Formulas

2003 Bonn (Germany):

لسم: شمیرپوهنه له عربي په پښتو

1997 Bonn (Germany):

یوولسم: د افغانستان په هکله سپیني خبرې: په المان کې

،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خوا

.یادونه: له ۲۰۰۰ کال دمخه ډاکتر ماخان شینواري د ،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خوا درې ساسي مجلې هم را وستلي.

د ډاکتر ماخان ،،میرې،، شینواري لیکنې او ژباړې چې په چاپیدو یې پیل کیږي

2012 Bonn; Germany; Kabul Afghanistan

ژباړې:

Prof. Brinkmann. (From Brinkmann.du.de) :

لاندې د برینکمن لیکنې چې له پرینکمن ن ج ځخه ژباړل شوي دي.

۱ - شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره لومړی ټوک

۲ – شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره دویم ټوک

۳ – شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره دریم ټوک

(c) ketabton.com: The Digital Library

۴ - د احتمالوالي شميرنه   د ښوونځي لپاره

۵ – احصايه يا ستاتيستيک   دښوونځي لپاره

لاندې کتابونه د شنوتګارت د پوهنتون د استادانو د لکچرونو څخه چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپاره شوي را ژباړل شوي.

۶ – اناليزی ۱

۷ – اناليزې ۲

۸ – کرښيز الجبر

۹ - د شميرپوهنې بنسټونه

۱۰ - د فرمولونو ټولګه

۱۱ – فنکشنل اناليز

۱۲ – وکتور شميرنه

نورې ژباړې

۱۳ – له www./grundstudium.info/linearealgebra څخه:کرښيز الجبر

۱۴ – Georg Gutenbrunner ګڼونپوهنه يا د اعدادو تيوري

زما ليکنې

Bonn (Germany):

۱۵ - د شميرپوهنې ستر کتاب دويم چاپ د پوره تغيراتو سره : دا کتاب د شميرپوهنې برخې برسيره د

انجنري، فزيک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زدهکوونکو لپاره پوره ګټور دی. په

کتاب کې د اړتيا سره زياتونه او کونه راغلې

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۶ - ځمککچپوهنه (هندسه) دويم چاپ د پوره تغيراتو سره

۱۷ – الجبر بنسټونه دويم چاپ له تغيراتو سره

۱۸ - ډېرۍ پوهنه يا سټ تيوري

۱۹ – د شميرپوهنې سم اند (منطق رياضي)

۲۰ - د يو څو شميرپوهانو ژوندليک

۲۱ – د شمير پوهنې ګډې وډې ليکنې

۲۲- داهم ژباړه ده، خو ليکونکی يې متآسفانه راڅخه نابلد شوی: د مشتق او انتيګرال شميرنو ته تمرينونه او اوبيونې يا حلونه يې

۲۳ – د شميرپوهنې انګريزې پښتو او عربي + درې ډکشنري

۲۴ – د شميرپوهنې پښتو انګرېزي ډکشنري

۲۵ – د شميرپوهنې پښتو ډکشنري د شميرپوهنيزو وييونو په پښتو روښانه ونه

۲۶ - د زړه له کومې

۲۷ – د افغانستان په هکله سپينې خبرې، چې وبه غزيږي.

نوري ليکنې، چې په ژباړه يې پيل شوی، خو لا پوره نه دي

– د شتوتکارت پوهنتون لکچرنوټونو څخه ، چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپريږي:

د ګروپونو تيوري

- د ښوونځي لپاره فزيک د برينکمن ليکنه

له پنځم ټولګي څخه تر اووم ټولګي پورې ژباړل شوی (دا چې زما دويم مسلک فزيک دی، دا ليکنې ژباړم. دا هم د دې ليکوال يوه ډېره ښه ليکنه ده، چې -د شميرپوهنې په څير- دلته هم زيات تمرينونه د حل يا اوبيونې سره په کې راغلي او ماته زيات ګټور برېښي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

Get more e-books from www.ketabton.com
Ketabton.com: The Digital Library