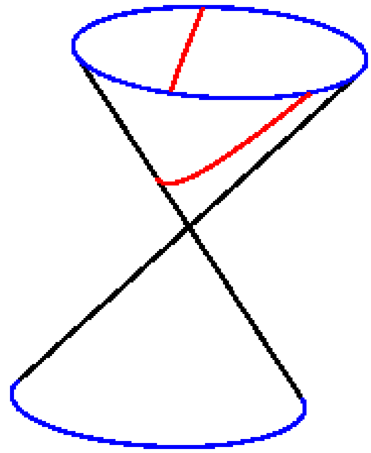
الجبر (كرنيز) لاينيز

Lineare Algebra

Ketabton.com

(c) ketabton.com: The Digital Library



ډاکتر ماخان(میرې) شینواری

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاینیز(کرښیز) الجبر ۱
بنسټیزجوړښتونه / ګروپونه او تنونه ۱
ګروپ ۱
لاندې ګروپونه ۳
ګڼوندېږي یا د اعدادو سټ ۳
پرموتیشونونه ((د توکو یا اعدادو) ځای بدلون) ۴
د ځای بدلنون (پرموتیشن) څیوکلیکي یا تل ۵
مودولوس ۸

لومړني تنونه یا پټي یا ورشو ۱۱
ګالویز– بدن ۱۳
په ګروبونو یاډلو کې تورنی ۱۴
وکتورفضا یا وکتوري فضا ۱۶
د n - ګوني وکتورفضا ۱۹
لاندې فضا یا برخه فضا ۲۰
ګرښیز کمبینیشن ۲۲
کرښیزه هیولې یا سپاین یا سمڅ ۲۳

(c) ketabton.com: The Digital Library

ننوتی – یا محدب کمبینیشن ۲۵
حقیقي- یارینتونی سکالار ضرب ۲۶
سکالار ضرب ۲۷
مایل سیومتریک ۲۸
د کوشي-شوارڅ – نامساوات ۳۰
نورم ۳۱
هوموګینیوالی ۳۱
د سکالار ضرب نورم ۳۲
ماکسیموم – نورم ۳۳
د حقیقي- یا ریل وکتورونو سکالار ضرب ۳۴
د کمپلکس وکتورونو سکالار ضرب ۳۵
د دوه وکتورونو ترمنځ کونج ۳۶
د پیتاګوراس(فیثاغورث) جمله ۳۷
کرښیز نابلواکوالی یا ۳۹
بنسټ Basis ۴۲
بعد یا پراخیدونی Dimension ۴۴
اورتوګونال یا ولاړ بنسټ ۴۶
اورتوګونال پروجکشن ۴۹
د ګرام-شمیت تګلار یا قانون ۵۱
کرښیزه څیرونه (فنکشن یا تابع) ۵۴

(c) ketabton.com: The Digital Library

د كربنيزو توابعو كمپوزيشن ۵۷
ماتريكس ۵۸
يو كربنيز فنكشن يا تابع ۶۱
يو كربنيز فنكشن يا تابع ۶۳
Bild او Kern معنا ځيره يا شكل او زړي ۶۵
معكوس يا په څټ تابع (ځيرونه يا فنكشن ۶۷
د ماتريكسونو وكتورفضا ۶۹
د ستراسن(وېينه: شتراس) الګوريتم ۷۱
كوموتاتور ۷۲
په څټ يا معكوس ماتريكسونه ۷۴
تراسپوني او ادجونګيري ماتريكسونه ۷۶
شپور Spur ۷۸
د يوه ماتريكس رانګ ۷۸
د يوه ماتريكس نورم ۸۰
هوموحنيتي: ۸۱
هوموحنيتي: ۸۳
د ماتريكس د ډكوني جوړښت ۸۴
اورتوګونال او يونيتار ماتريكسونه ۸۴
د هادامارد – ماتريكسونه ۸۵

(c) ketabton.com: The Digital Library

د فوریر (وبینه: فوریې) ماتریکسونه ۸۶

نورم ریښتونې یا - وفاداره اورتوګونال ا و یونیتار ۸۷

ځیوکلیکي (تلبیرته راګرځېدوني) ماتریکسونه ۸۹

ستوښاستیکي ماتریکسونه ۹۰

دیترمینانت د انتیسیومتري کرښیزفورم په حیث ۹۱

2 - لیکیزه دیترمینانت ۹۴

د ساروس شیما یا شکل ۹۵

لوریز حجمونه (ډکي) ۹۶

د دیترمینانتونو لپاره قاعدې ۹۸

د ځانګړو ماتریکسونو دیترمئناتونه ۱۰۱

د دیترمینانتو بڼه بدلون ۱۰۴

د دیترمینانتو ودیزیینه ۱۰۵

د 3 ټکو له لارې د یوې سطحې ۱۰۸

د واندرموند – دیترمینانتونه ۱۱۱

کرښیز مساوات سیستم ۱۱۲

برېښنایي جریاندایره ۱۱۴

د یوه کرښیز مساوات سیستم حلوړوالی ۱۱۵

دیترمینانت او د یوه مساوات سیستم حلوړوالی ۱۱۸

د کرامر قاعده ۱۲۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

په څټ لور ځای په ځای کول ۱۲۳

د ګاوس ترانفورميشن ۱۲۵

د ګاوس د له منځه وړنه ۱۲۶

د اپنسيلون بڼه ۱۲۹

د اپنسلون- بڼه د يوه ل م س (كربنيز مساواتسستم)حل ۱۳۱

رانګ او د ک م س(كربنيز مساواتسيستم) حلوړوالی ۱۳۴

د انډول كربڼه(انډولكربڼه) ۱۳۵

د برابرونې حل يو بل سره يوغږيز........ ۱۳۷

الجبر - كربنيز مساوات سيستم-برابرونې پرابلم ۱۳۸

نورمالمساواتونه ۱۳۸

توموګرافي ۱۴۱

آيګن-ارزښت او آيګو-وكتور ۱۴۳

ورته والي – ترانفورمېشن ۱۴۵

كركتريستكي پولينوم ۱۴۷

الجبری او هندسي ډېرځلوالی ۱۵۰

د آيګن –ارزښتونو جمعه او ضرب ۱۵۲

د ماتريكسونو ريښتونی توابع ۱۵۴

د آيګن – وكتورونو بنسټ ۱۵۵

د ځيوكليكي ماتريكسونو دياګونالونه ۱۵۷

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ماتریکسونو توان ۱۶۰
د فیبوناچي پرلپسې یا – ترادف ۱۶۲
نورمال ماتریکسونه ۱۶۴
نورمال ماتریکسونه... ۱۶۵
مثبت دیفینیت ماتریکسونه ۱۷۰
ریلا ي – ویش ۱۷۰
مثلث بڼه ۱۷۱
اصلي وکتورونه ۱۷۳
د اصلفضا ځیوکلیکي بنسټ ۱۷۵
د جوردان بڼه ۱۷۹
د (4x4) -ماتیکسونو جوردان-بڼې ۱۸۶
په زیګولار ارزښت توټه کونه ۱۸۹
فاسد معکوس ۱۹۱
د توپوګرافیکي کچونداتنونو ټیکاوی یا اصلاح ۱۹۶
د مور-پینروز-شرطونه ۱۹۷
اورتوګونال او ځانګړي اورتوګونال ګروپونه ۱۹۸
هندارونه ۱۹۹
څرخون ۲۰۰
څرخونمحور او څرخونکونج ۲۰۱

(c) ketabton.com: The Digital Library

د يو خرخون په ضربيپونو ټوټه کونه ۲۰۵

ځرخونماتريکس ۲۰۸

مربعيزه فورم(بڼه) ۲۱۰

کوادريکونه ۲۱۱

د کوادريکونو شډله ټوټه ونه ۲۱۲

اصلي- محور –ترانفورميشن ۲۱۴

مخروط غوڅی ۲۱۸

د دوه بعدي کوادريکونو د اوکليدي نورمال بڼه ۲۲۰

د ډاکتر ماخان شينواري ليکنې ۲۳۲

(c) ketabton.com: The Digital Library

سریزه

زه د سریزې په هکله ډېر څه نه لیکم، خو دې ته ګوته نیسم، چې ما د دې سرلیک لاندې دوه لیکنې کړي. دا مخ ته پرته د هغو لوستونکو لپاره ده، چې د شمیرپوهنې سره داسې لږڅه بلدتیا ولري، دا به ښه وي، خو اړینه هم نه ده.

دا لیکنه خورا مفصله ده نسبت هغې بلې ته

تر مخ راوړنه: فنکشن که په نورو ژبو کې وکورو، نو په پښتو ژباړه به یې ځیره کونه (لنډ : ځیره ونه) وي. په فنکشن کې یو څه په یو بل څه یا خپل ځان ځیره کیږي. چې لومړی یې ځیره کوونکی او دویم یې ځیره ده یعنې دوه مجهولې یا واریابلې دي، چې یوه په بله ځیره کیږي. لومړی خپلواک دی او دویم یې د لومړي په واک کې دی، نو له دې امله م عربي تابع بللې، یعنې دا د فنکشن تابع ده، چې موږ به یې هم دا ناسم نوم وکاروو، چې ګران شمیرپوهان راته په قهر نه شي.

که زما په دې لیکنه کې ځیرونه راځي، نو هغه یې زموږ په ناسمه توګه همغه تابع ده. دا مو مو پوهیږم، چې له پامه نه لویږي.

ما په یو ځل ډېر ةتابونه وژباړل او ولیکل، چې لیکنیز تاټیکاوې به ولري. د هغې به راته بخښنه وکړئ. دا څه چې تاسو ته وړاندې کیږي، پوره :تور دي او دې ته دې ریاته پامرنه وشي.

دا زما ټولې لیکنې به تر یوې اندازې ستونځې ولري، خو باور وکړئ، چې غوټې پسې وهئ په لاس درځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

مننه: د   ټولنې او په ځانګړي ډول د هغې د مشر ښاغلي ډاکټر يحی وردګ څخه زياته مننه، نه داچې زما کتابونه يې [اپ ته ورسول بلکه په دې کار کې يې بط سارې هڅې کړي او بې له شکه يې خپلو يوادوالو ته ستر خدمت کړي، کور دې ودان وي، لوي څښتن دې ورته اجرونه ورکړي او د لا ډېرې برياوو په هيله دې زموږ دعا ورسره مل وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاينيز(کرښيز يا خطي) الجبر

بنسټيزجوړښتونه / ګروپونه او تنونه

Grups and fields

ګروپ

د يوه ګروپ $(G,\diamond)$ لاندې يوه ډېرى G پوهيږو، په هغې چې يو دوه ييزه کارونه يا عمليه $\diamond$ داسې پيژندل ولري يا تعريف شوې.

$$\diamond : G \times G \longmapsto G\,,$$

دا په دې مانا، چې هره جوړه (a,b) د $a,b \in G$ سره د $a \diamond b \in G$ يو توکی باندې تنظيم دی. برسيره پردې لاندې خويونه بايد باور ولري:

Assoziativität:اسوښياتيو والی يا اسوښياتيو قانون

$$(a \diamond b) \diamond c = a \diamond (b \diamond c) \qquad \forall a,b,c \in G$$

neutrale Element ناپيلی توکی: يو يواځنی ټاکلی ناپيلی توکی $e \in G$ شته دا په دې مانا ، چې

$$e \diamond a = a \diamond e = a \qquad \forall a \in G$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

Inverses Element مخامخ یا په ضد توکی یا برعکس توکی: هر توکي $a \in G$ ته یو یواځنی ټاکلی مخامخ یا یه څټ یا برعکس توکی $a^{-1} \in G$ شته د سره $a \diamond a^{-1} = a^{-1} \diamond a = e$

ګروپ کموتاتيو یا د ابل (ابل Abelد شمیرپوه نوم دی) ګروپ بلل کيږي، که کارونه $\diamond$ کموتاتيو وي:

$$a \diamond b = b \diamond a \qquad \forall a, b \in G\,.$$

له اړوندتوب څخه لیدل کيږي، چې کومه کارونه کارول کيږي، نو زيات وخت د $(G, \diamond)$ په ځای فقط G لیکل کيږي.

په باندي(بیجکتیو) ریيل فنکشنونه یا توابع(بلواک) bijective real Functions
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ د $\circ$ یو په بل پسې کاروني له مخې یو ګروپ جوړوي.

ساده ازمایل کیدی شي، چې یو په بل پسې اینونه اسوشیاتیو ده :

$$((f \circ g) \circ h)(x) = f(g(h(x))) = (f \circ (g \circ h))(x)\,.$$

ناپیلی توکه په روښانه توګه لاندې فنکشن دی

$$e: \quad x \to x$$

بالاخره هر په باندي بلواک لپاره یو په څټ بلواک شته دی

$$f^{-1}: \quad f(x) \to x\,.$$

یو په بل پسې ترنه کموتاتيو نه ده : د بیلګې په توګه لاندې لرو :

$$f: \; x \to 2x\,, \quad g: \; x \to x+1$$

$$f \circ g \neq g \circ f\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(g(x)) = 2(x+1) \neq 2x+1 = g(f(x))\,.$$

لاندې ګروپونه

د یوه ګروپ $(G,\diamond)$ لپاره $(U,\diamond)$ لاندې ګروپ بلل کیږي، که U د G برخدېرۍ وي او $(U,\diamond)$ پخپله یو کروپ جوړ کړي

ددې لپاره ، چې و ازمایو ، چې ایا U و ترنې $\diamond$ ته یو ګروپ جوړوي ، که نه، نو ازمایو ، چې U و نښلونې $\diamond$ ته او د په ځتې جوړښت ته بنده ده. یانې باور لري:

$$a,b \in U \;\Rightarrow\; a \diamond b \in U \quad \text{او} \quad a \in U \;\Rightarrow\; a^{-1} \in U$$

ګڼوندېرۍ یا د اعدادو سټ the set of numbers

$$\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

Z و جمعې(زیاتون) ته یوکموتاتیو ګروپ دی، خوندي لرنې یا اینکلوزیون ته ټول ګڼونه و $\mathbb{Q},\mathbb{R}$ او $\mathbb{C}$ ته یو لاندې ګروپ جوړوي او راشنل ګڼونه و $\mathbb{R}$ او $\mathbb{C}$ ته او رییل ګڼونه وکمپلکس ګڼونو ته یو لاندې ګروپ جوړوي.

که چیرې صفر لرې شي، نو ضرب یا ځله ونه هم یو ګروپ جوړښت تعریفوي:

$$\mathbb{Q}\backslash\{0\} \subset \mathbb{R}\backslash\{0\} \subset \mathbb{C}\backslash\{0\}\,.$$

تړاو جدول یا تړاوتخته

کارونه$\diamond$ په پاې ګروپ $G = \{g_1, \ldots, g_n\}$ باندې کیدی شي د تړاوماتریکس

$$A: \quad a_{i,j} = g_i \diamond g_j$$

له لارې روښانه شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاندې ځیرونه (بې له پرموتېشن یا بدلون څخه) آول تړاوجوړښتونه ښایي د یوه ګروپ لپاره د $n \leq 4$ سره :

$n = 2$

$\diamond$	e	a
e	e	a
a	a	e

$n = 3$

$\diamond$	e	a	b
e	e	a	b
a	a	b	e
b	b	e	a

$n = 4$

$\diamond$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

$n = 4$

$\diamond$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	a	e
c	c	b	e	a

دا ګروپونه ټول ابل ګروپونه دي، لکه د ماتریکس A د سیومتري ($a_{i,j} = a_{j,i}$)چې لیدل کیږي.

لومړی ناابل ګروپ شپږ توکي لري او د $\{1, 2, 3\}$ توکو د پروتېشن له مخې پېژندل کېدی شي

Permutations پرموتیشونونه ((د توکو یا اعدادو) ځای بدلون)

د په خوښه ډېرى M لپاره د بیجکشن (په کې ځیرونه یا په کې فنکشن) لاندې له M په Mکې ، چې کمپوزیشن کارونه یا ځیرونه یی د کارونې په ځیر وي، یو ګروپ پوهیږوو داسې په نامه د M سیومتري ګروپ.

لنډ : د M په M کې ځیروني ته پرموتېشن یا بدلون وایو.

که $M = \{1, 2, \ldots, n\}$ وي، نو د سیومتري ګروپ S_n څخه غږیږو، چې ګراد یا درجه یې n وي.

د S_n ډېرى د π توکي $n!$ پرموتیشن یا بدلون بلل کیږي او داسې یې لیکو

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ \pi(1) & \pi(2) & \pi(3) & \ldots & \pi(n) \end{pmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پرمېرتیشنګروپ په ټولیزه توګه کموتاتیو نه دی، لکه د لاندې بیلګې څخه لیدل کیږي

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

د ځای بدلنون (پرموتیشن) څیوکلیکي یا تل بیرته راګرځیدونی لیکندود:

پرموتیشنونه داسې په نامه څیوکلیکي لیکندود له لارې هم ورکول کیږي..یو څیکلوس یا تل بیرته راګرځیدنه د یوه توکي او د هغه له څېرو، چې ډیرځله د بدلون یا پرموتیشن له لارې منځ ته راځي، جوړه ده، تر څو چې بیرته هغه پیل توکي یا وتونتوکي ته ورسیږي. د هغو توکو څخه، چې په لومړي تلبېرته راګځیدنې کې منځ ته نه راځي، نور څیوکلونه جوړیږي ، تر څو ټول توکي رامنځ ته شي. څیکلونه د توکو د ګڼون(تعداد) ټیټیدونکي یا لوېدونکي ډول تنظیم کیږي او په کړو نوکانوکې یو پر بل پسې لیکل کیږي. هغه څیوکلونه یا تلبیرته راګرځیدوني ، چې اوږدوالی یې ۱ وي نه لیکلکیږي.

د بیلګې په توګه دی

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 3 & 2 & 6 & 5 & 1 \end{pmatrix} \equiv (1\,4\,6)\ (2\,3)\ (5)$$

همداسې

$$\pi = (1\,4\,6)\ (2\,3)\ .$$

د پرموتیشن ترانسپوني کوونه یا په بل ډول لیکنه او سیګنوم

یو ترانسپوزیشن (ځای بدلون)

$$\tau = (j\ k)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د j او k بدلون دی. ددې ساده یا بنسټیز پرموتیشن ترڼې سره دا پرموتیشن π داسې انځورېدی شي:

$$\pi = \tau_1 \circ \cdots \circ \tau_m \,.$$

دلته برابرازښتوالی (جوړه یا ناجوړه m) یواځنی ټاکلی دی، او

$$\sigma(\pi) = (-1)^m$$

د پرموتیشن مخ نخښې یا د پرموتاشن زیګنوم π په څیر π ټاکو یا تعریفوو.

د

$$\tau_1 \circ \cdots \circ \tau_m = \pi \in S_n$$

لپاره او د $k = \pi(n)$ سره دی

$$\tilde{\pi} = (k, n) \circ \pi \in S_{n-1} \,,$$

ځکه چې د ترانسپوزیشن کمپوزیشن سره n کره په ځای نیول کیږي یا ځای په ځای پاتیږي. ایندوکتیوInduktiv (د ځانګړي په تولیز پایونه) کیدی شي و نیول شي یا فرض شي، چې برابرارزښتوالی یا پاریټي د $\tilde{\pi}$ په ایندوڅیري توټه ونه کې یواځنی ټاکلې ، پسې د $(-1)^m$ مخنخښه.

ددې لپاره، چې د پرموتیشن

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

سیګنوم و ټاکو، نو

$$(\pi(1), \ldots, \pi(6)) = (6, 5, 3, 1, 2, 4)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ترانسپوزیشن سوکڅیسیو(sukzessiv) پل په پل یو بل پسې) د کانوني لړۍ پرلپسې په څیر لیکنې ته بیایو:

$$(1\ 6):\qquad (1\ 5\ 3\ 6\ 2\ 4)$$

$$(2\ 5):\qquad (1\ 2\ 3\ 6\ 5\ 4)$$

$$(4\ 6):\qquad (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6)\,.$$

په دې پسې یا له دې امله

$$(4\ 6)\circ(2\ 5)\circ(1\ 6)\circ\pi$$

کېمتوالی یا ایدنتیک ده، همداسې

$$\pi=(1\ 6)\circ(2\ 5)\circ(4\ 6)$$

او

$$\sigma(\pi)=(-1)^3$$

الترناتیو یا بدیلي سرۍ کړۍ شي څویکلیکي لیکډوله وکارول شي:

$$\pi=(1\ 6\ 4)\ \ (2\ 5)\ \ (3)\ .$$

څکه چې د k اوږدوالي یوه څیوکلوس τ لپاره $\sigma(\tau)=(-1)^{k-1},$ دی

$$\sigma(\pi)=(-1)^2\cdot(-1)^1\cdot(-1)^0=-1\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

مودولوس Modulus

(كه دوه ګڼونه ۱۳ او ۵ ولرو او ۱۳ په ۵ ووېشو، نو لاس ته ۲ راځي د ۳ ياتې سره. دا داسې ليكو:

13 : 5 = 2

ياتې 3

ليكلى شو 0 = 5 : (13-3) دا په دې مانا چې ګڼ ۵ ګڼ3-13 وېشي

پيژند (ټاكونكى يا تعريف) كه تولګنونهx او y او يو طبيعي عدد يا پيداښتي ګڼ a ولرو ، نو وايو ،، x كونګروانيځy مودولو a (mod a) دە،، په نخښنه x≡ymod a ، كه x≡ymoda نه وي، نو واي چې : x د y سره كونګروانيځ مودولو a(moda) نه دە ،،يعني x≢ymod a

مودولوس Modulus

لرو a > 0 او $x \in \mathbb{R}$. د $x \bmod a$ (لوستل : x مودولو a)لاندې په a باندې د x وېشني ياتې پوهيږو، دا په دې مانا، چې

$$x \bmod a = x - na \in [0, a)$$

د يوه تولګڼn لپاره . كه باور ولري

$$x \bmod a = y \bmod a \,,$$

نو x او y كونګروانيڅ مودولو a بلل كيږي.

پاتيتولګى(باقي-)(مودولو) modulo n

(c) ketabton.com: The Digital Library

ډېرئ $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ د ابل ګروپ جوړوي د زياتون يا جمعې

او د $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z} \bmod n$ سره په نخښه کيږي.

پام دې وي، چې ضرب modulo n په $\mathbb{Z}_n$ د ګروپ جوړښت نه تعريفوي، خکه چې 0 په څټ توکی نه لري.

د دې روښانه بيلګې $\mathbb{Z}_4 = \{0, 1, 2, 3\}$ په بنسټ اسان ارماېښت کيدی شي، چې زياتون يا جمعې، همداسې کمون يا تفرق د مودول – کاروني يا عمليې سره زغمور دي.

د بيلګې په توګه دی

$$1 + 3 \bmod 4 = 0, \quad 0 - 2 \bmod 4 = 2$$

او داسې نور

سره له دې ځل مودولو ۴ ($\text{modulo } 4$)مو د ګروپ تيوري ته نه لاربنودوي، خکه چې

$$1 \cdot 2 \bmod 4 = 3 \cdot 2 \bmod 4 = 2\,.$$

دا د ناپيلي توکې د يواځيوالي سره په مخامخوالي يا تضادګې پروت دی

بدن(جسم يا تن يا پټی Field)

يوه ډېرئ (سټ) چې په هغه کې يوه جمعه ``+,, او يو ضرب ``· ,,تعريف وي، بدن يا پټی يا ورشو بلل کيږي، که لاندې خويونه په کې باور ولري:

اول – د ګروپ د جمعې يا زياتيز جوړښت: $(K, +)$ يو ابل ګروپ دی د توکی(سفرتوکي) سره.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا په دې معنا چې د ټولو $a, b \in K$ لپاره باور لري.

$a+b$	$=$	$b+a$
$(a+b)+c$	$=$	$a+(b+c)$
$a+0$	$=$	a
$a+(-a)$	$=$	$0\,,$

دویم – دلته $(-a)$ د a په ځټ یا معکوس توکی دی.

دریم – د ضرب ګروپي جوړښت: $(K\backslash\{0\},\cdot)$ یو د ابل ګروپ دی د ناپیلي توکي 1 سره(یوي توکی یا که غواړئ واحد توکی) دا په دې معنا چې د ټولو $a, b, c \in K\backslash\{0\}$ لپاره باور لري:

چیرته چې $(-a)$ و a ته په ځټ یا پرعکس توکی دی.

د ضرب ګروپي جزړښت : $(K\backslash\{0\},\cdot)$ یو ابلګروپ دی د ناپیلي توکي (یوي توکی)، دا په دې معنا چې د تولو $a, b, c \in K\backslash\{0\}$ لپاره صدق کوي

a.b=ba

(a,b).c=a.(b.c)

a.1=a

1= $a \cdot a^{-1}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کوم سره چې a^{-1} د a په څټ يا برعکس توکی دی.

ديستربيبوتيو قانون: $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$ د ټول $a,b,c\in K$ لپاره.

د ريښتونو اعدادو $\mathbb{Q}$ ډېرۍ، د حقيقي اعدادو $\mathbb{R}$ ډېرۍ او د کمپلکس اعدادو $\mathbb{C}$ ډېرۍ

د شميرني قاعده يې سملاسي د اړونده تړني له لارې لاس ته راځي. صفرتوکی يې 0 او يويتوکی يې 1.

همداسې يې د کمپلکس عدد $z=x+\mathrm{i}y\neq 0$ يوي توکی نسبت و ضرب ته $w=\frac{x}{x^2+y^2}+\mathrm{i}\,\frac{-y}{x^2+y^2}\,,$ دی، ځکه چې لرو:

$$z\cdot w=(x+\mathrm{i}y)\left(\frac{x}{x^2+y^2}+\mathrm{i}\,\frac{-y}{x^2+y^2}\right)=\frac{x^2-\mathrm{i}^2y^2}{x^2+y^2}+\mathrm{i}\frac{-xy+yx}{x^2+y^2}=1+\mathrm{i}0\,.$$

لومړني تنونه يا پټي يا ورشو

د هر لومړني عدد p لپاره $\mathbb{Z}_p=\{0,1,\ldots,p-1\}$ د ډېريو يو تن دی د د جمعې او ضرب موډولو p سره.

د په څټ – يا برعکس توکي شتون پورې ، نسبت و ضرب ته د تنونو لپاره همدا اوس په ټول اعدادو کې او د باقيتولګيو لپاره به ميراث پاتي شي.

د $a\in\{2,\ldots,p-1\}$ لپاره کيدی شي a^{-1} په لاندې توګه جوړ شي. لومړی سړی په پام کې نيسي چې، $a^i\neq 0 \bmod p\quad \forall i\in\mathbb{N}\,.$.

(c) ketabton.com: The Digital Library

که $a^i = np$ وی، نو د لومړي تن تجزیې څخه به ولرو، چې په p ویشل کیږي، څه چې د $a < p$ له امله ناشونی دی. که اوس پرلپسې $a^i \bmod p, \quad i = 0, \dots, p-1$, په پام کې ونیسو

، نو باید کم له کمه یو پاتې دوه واره رامنځ ته شي، یعني

$$a^{i_1} = a^{i_2} \bmod p\,, \quad i_1 < i_2$$

به ضدق وکړي. له دې سره به وي:

$$a^{i_2 - i_1} = a^{i_2 - i_1 - 1} a = 1 \bmod p\,,$$

له کوم سره به چې a ته په برعکس توکی پیدا شوی وي.

په لومړني تن $\mathbb{Z}_5$ کې برعکس توکي دي

2^{-1}	$=$	$3 \bmod 5$
3^{-1}	$=$	$2 \bmod 5$
4^{-1}	$=$	$4 \bmod 5\,.$

که $a^i = np$ وی، نو د لومړني ضریب تجزیې څخه به مو لرودی، چې p وېشي، څه چې د $a < p$ له امله ناشوني دي. که اوس پرلپسې یا $a^i \bmod p, \quad i = 0, \dots, p-1\,,$ په پام کې ونیسو، نو باید کم له کمه یو باقي دوه واره رامنځ ته شي، پس $a^{i_2 - i_1} = a^{i_2 - i_1 - 1} a = 1 \bmod p\,,$ به صدق وکړي د کوم سره به چې د a برعکس توکی پیدا شوی وي.

په لومړني تن $\mathbb{Z}_5$ کې په ځټ – یا برعکس توکي دي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$2^{-1} = 3 \bmod 5$$

$$3^{-1} = 2 \bmod 5$$

$$4^{-1} = 4 \bmod 5\,.$$

د دې سره د بيلګې په توګه $\frac{(2+4)}{3} \bmod 5 = \frac{1}{3} \bmod 5 = 2$ همغږيز دی له دې لاندې سره.

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} + \frac{4}{3} \bmod 5 &= 2 \cdot 2 + 4 \cdot 2 \bmod 5 \\ &= 4 + 3 \bmod 5 \\ &= 2\,. \end{aligned}$$

ګالويز – بدن Galois-Körper

تن$GF[2^2]$ د 4 توکو سره د جمعي او ضرب د ترڼو له لارې کيدی شی ورکړل شي:

$+$	0	1	a	b
0	0	1	a	b
1	1	0	b	a

$\cdot$	0	1	a	b
0	0	0	0	0
1	0	1	a	b

(c) ketabton.com: The Digital Library

a	a	b	0	1	a	0	a	b	1
b	b	a	1	0	b	0	b	1	a

دا مخ ته پروت جوړښت اصول داسې ساده نه دی، لکه په لومړنيو تنونو $\mathbb{Z}_p$ کې او د ګالويز له خوا پيدا شوي دي. دا په تړليږه توګه کېدی شي د تنړنړ ځخه د p^ℓ توکو سره $\ell \in \mathbb{N}$، د په خوښه p لپاره لومړنی عدد لپاره اجرا کړي يا سرته ورسوي، او کېدی شي و ښوول شي چې په دې توګه ټول تنونه لاس ته راوړي.

په ګروبونو کې تورنی (لکه د مسابقې لپاره جمتو کيدو ګروپ)

به کابل، غزني او ننګرهار کې په څلورو مهالوېش(وختونو) د نهو ډلو په منځ کې مسابقه بيل کيږي. د لته دي ،، هر يو د هر يو په مقابل کې،، لوبه وکړي. دا يه دې معنا چې په هر مهالوېش دې درې ګروپونه د هر درې ډلو څخه لوبه وکړي، چې په هرو دې درې ځايونو کې دې لوبه وشي. ستونځی په دې کې پرتې دي، چې يو بل بايد سره غوځ يا قطعه نه کړي، هره جوړه د $3 \cdot 4$ ګروپونو کې بايد يو ځل رامنځ ته شی

د شميرپوهنې له مخې دا مسأله په لاندې ډول فرمولولی شو: دا 3 توکيزې ډېری

$$S_{0,k} \cup S_{1,k} \cup S_{2,k} = \{1, \ldots, 9\}, \quad k = 0, \ldots, 3$$

دې وټاکل شي، چې د دوه ډېريو غوڅی ماکسيمال يو توکی خوندي ولري.

د دې شرايطو سره د دې مخه نيول کيږي، چې د ګروپونو ډېری چې د لوبو ورځې يې مختلفې دي، ګډه د لوبدلو جوړه خوندي ولري..

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $S_{j,k}$ ډېرى د لومړنى تن $\mathbb{Z}_3$ په مرسته جوړ بدلاى شى.. د لته د لوبډلي نمرې $(\alpha, \beta), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_3$ سره په $1, \ldots, 9$ د نهه توكيزه ،، پاى سطحي،، دټكو نخښنه كېدى شي او دا په نخښنه شوي ،، پاى سطحه،، ډېرى د دې سطحي د كربنوسره په نخښنه كېدى شي:

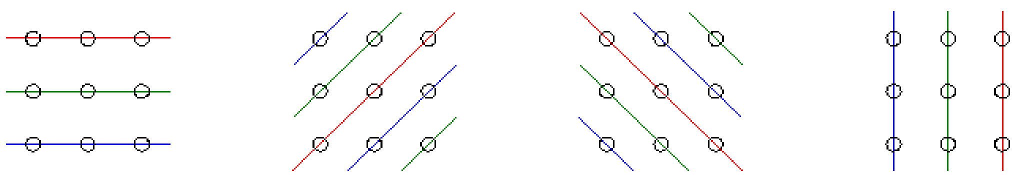
$$S_{j,k} = \{(\alpha, k \cdot \alpha + j \bmod 3) : \alpha = 0,1,2\}, \quad ($$

كربنه د $k = 0,1,2)$ جګېدني(سره

$$S_{j,3} = \{(j, \alpha) : \alpha = 0,1,2\} \quad ($$

ولاړه يا عمود كربنه) .

داګروپ وېشنه په لاندې شكل كي ليدوړ ده:



همدا مسأله د 16 تيمونو سره ده ، 4 ښارونو او پنځه مهالوېش سره په ورته ډول حل كېدى شي. سرى 4-توكيزه ګالويز تن $GF[2^2]$ او لاندې ګروپ وېش لاس ته راوړو:

	لوبځاى1	لوبځاى2	لوبځاى3	لوبځاى4
لومړى لوبورځ	1,2,3,4	5,6,7,8	9,10,11,12	13,14,15,16
2-مه لوبورځ	1,6,11,16	5,2,15,12	9,14,3,8	13,10,7,4
3 -مه لوبورځ	1,10,15,8	5,14,11,4	9,2,7,16	13,6,3,12
4 -مه لوبورځ	1,14,7,12	5,10,3,16	9,6,15,4	13,2,11,8

(c) ketabton.com: The Digital Library

4,8,12,16	3,7,11,15	2,6,10,14	1,5,9,13	5 -مه لوبورځ

په ټولیزه توګه د لیل د q^2 لوبډلو او q بناروونو لپاره دلیل شوونی دی، هلته چې q د یوه لومړني عدد توان دی، ځکه چې د داسې یوه عدq لپاره تن GF(q) شتون لری.

وکتورفضا یا وکتوري فضا

یو ابل ګروپ $(V,+)$ وکتورفضا په یوه تن K یا K -وکتورفضا بلل کیږی، که یو سکالار ضرب ``·,, تعریف وي، چې $(\lambda, v) \in K \times V$ په ضرب $\lambda \cdot v \in V$ تنظیم او لاندې خویونه ولری..

د ټولو سکالار $\lambda, \lambda_1, \lambda_2 \in K$ او ټولو وکتوروونو v، v_1، $v_2 \in V$ لپاره صدق کوی:

$$(\lambda_1 + \lambda_2) \cdot v = \lambda_1 \cdot v + \lambda_2 \cdot v$$

$$\lambda \cdot (v_1 + v_2) = \lambda \cdot v_1 + \lambda \cdot v_2$$

$$(\lambda_1 \cdot \lambda_2) \cdot v = \lambda_1 \cdot (\lambda_2 \cdot v)$$

$$1 \cdot v = v\,.$$

که $K = \mathbb{R}$ یا $K = \mathbb{C}$ وی، نو سړی د یوه حقیقي همداسې کمپلکس وکتورفضا غږیږو او په ټولیزه توګه د سکالار ضرب لپاره ټکي څخه تیریږو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پام دې وي، چې د حمعي علامه د V په همداسې په K کې کارول کیږي. همداسې ضرب هم په K کې د ضرب لپاره کارول کیږي. پای

د تعریف سره سم په ځانګړي ډول په وکتورفضا کې د ګروپ اکسیومونه ضدق کوی:

اسوشیاتیو قانون:

$$(v_1 + v_2) + v_3 = v_1 + (v_2 + v_3)$$

ضفر توکی(صفروکتور) : تیک یو توکی $0 \in V$ د $v + 0 = v$ سره شتون لري ، د ټول $v \in V$ لپاره.

نسبت و جمعي ته په څټ – یا معکوس توکی: د ټولو $v \in V$ لپاره تیک یو $-v \in V$ شتون لري د لاندې سره:

$$v + (-v) = 0$$

د جمعي بدلون قانو:

$$v_1 + v_2 = v_2 + v_1$$

غوښتونکی شرایط تنظیموي، چې جمعه، کمون یا تفریق او ضرب دا ورسره بلد شمیرقوانین پوره کوي.. سړی داسې کړی شي چې ضرب سر ته ورسوي:

$$\left(\sum_i \lambda_i\right) \cdot \left(\sum_j v_j\right) = \sum_i \sum_j \lambda_i \cdot v_j .$$

سربیره پردې د مخ نخښې قانون صدق کوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$-(-v) = (-1)\cdot(-v) = v, \quad -\left(\sum_i v_i\right) = \sum_i -v_i \,.$$

د Gard ≤ n (درجې) پولينوم

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n, \quad a_i \in \mathbb{R} \quad (a_i \in \mathbb{C}),$$

يو حقيقي (کمپلکس) وکتور فضا جوړوي،، د کوم سره چې جمعه او سکالار ضرب په ورته نږدې ډول تعريف دي:

$$(p+q)(x) = p(x) + q(x), \quad (\lambda p)(x) = \lambda p(x)\,.$$

د وکتورفضا خويونه ساده تصديق کيدلی شي.

په پام کې لرو چې پولينوم د n درجې سره، دا په دې معنا چې د $a_n \neq 0$ سره وکتورفضا نه جوړوی. د جمعي جوړول کيدی شي د درجې کموالی ته لاربنود کړي. د بيلګې په توګه دی:

$$(2x - x^2) + (3 + x^2) = 3 + 2x\,.$$

پای

حقيقي پرلپسي (a_n) د $n \in \mathbb{N}$ سره يوه حقيقي وکتورفضا د عمليې سره جوړوي

$$(a_n) + (b_n) = (a_n + b_n), \quad \lambda(a_n) = (\lambda a_n)\,.$$

که سربيره پردې و غوښتل شي، چې ايا د وکتور سترکچر يا جوړښت خرابيدلی شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د بېلګې په توګه يوغږېزې پرلپسې وکتور فضا نه جوړوی. د مونوتون پرلپسيو جمعه اړيين نه ده يوغږېز وی، لکه دا لاندې بېلګه ښايي:

$$(4n) + (-n^2)$$

برعکس به بندوالی يا محدوديت يو منل شوی خوی وی..

پای

د n - ګوني وکتورفضا

د K تن لپاره n -ګوني يا n-وکتورونو

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \quad a_i \in K$$

فضا دا K وکتورفضا K^n د کمپوننت ډوله تعريف شوي جمعي او سکالار ضرب سره، دا په دې معنا چې

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}$$

او

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot a_1 \\ \vdots \\ \lambda \cdot a_n \end{pmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ټولو $a_i, b_i, \lambda \in K$ لپاره .

په زياتو حالاتو کې ساده دی چې n ګونی يا n توپل د ليکې وکتور په څېر

$$a = (a_1, \ldots, a_n)^{\mathrm{t}}$$

همداسې

$$a^{\mathrm{t}} = (a_1, \ldots, a_n)$$

وليکل شي. د ترانسپوزيشن سيومبول ``$\mathtt{t}$,, سره د ستاندارد قرارداد څخه د متو وکتور په حيث توپيريږي.

پای

لاندې فضا يا برخه فضا sub space

د يوه K -وکتورفضا V پيرخه ډېری U، چې د په V کې تعريف شوې جمعې او سکالار ضرب سره پخپله وکتورفضا جوړوی، د V لاندې فضا يا برخه فضا بلل کيږي.

برخه فضا U زيات وخت د V توکو شرايطو سره تعريفيږی:

$$U = \{v \in V : A(v)\},$$

د کوم سره چې A يوه په نخښنه کوی، چې د ټولو $v \in V$ لپاره بايد پوره وی.

د دې لپاره چې و ازمايو چې ايا U د V لاندې فضا ده، کفايت کوي چې وښايو چې U نسبت د جمعې او سکالار ضرب سره تړلې ده:

$$u, v \in U \quad \Longrightarrow \quad u + v \in U$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lambda \in K, u \in U \implies \lambda \cdot u \in U .$$

$$u, v \in U \implies u + v \in U$$

$$\lambda \in K, u \in U \implies \lambda \cdot u \in U .$$

ليکونکي اېپ، کيمرلې

برخفضاوې زيات وخت د ورزياتو(برعلاوه؟) ځانګړ شوو خويونو له لارې منځ ته راځي. که د حقيقي توابعو $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} ,$ وکتورفضا په پام کې ونيسو، نو د بېلګې په توګه جوړه توابع $f(x) = f(-x)$ د ټولو $x \in \mathbb{R}$ لپاره يوه برخفضا جوړوی.
نورې بيلګې همداسې معکوسې بېلګې په لاندې جدول کې ورکړې شوې دی.

لاندې فضا	خويونه
هو	ناجوړه
ja هو	بند يا مخدود
نه	يوغړيز
هو	نابرېکيدونکي
نه	مثبت
هو	ګربنيز

ليکونکي: اېپ، هيوليګ

(c) ketabton.com: The Digital Library

د يوه K -وکتورفضا د هر وکتور $d \neq 0$ لپاره د صفر څخه تيرېدونکي کرښه $v = \lambda d, \quad \lambda \in K$ يوه لاندې – يا برخفضا جوړوي.

په هر حالت يوه کرښه چې له صفر 0 نه تيريږي، لاندې يا برخفضا نه ده. د بېلګې په توګه

$$g : x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mu \in \mathbb{R},$$

$(1,0)^t$ په کرښه

پرته ده، مګر $(2,0)^t$ نه.

ليکونکي: اېپ، هيوليګ

ګرښيز کمبينيشن Linearkombination

په يوه K - وکتورفضا V وکتورونو $v_1, v_2, \ldots, v_m$ لپاره سړی

$$\lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 + \cdots + \lambda_m \cdot v_m = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot v_i$$

د سکالارو $\lambda_i \in K$ سره د وکتورونو v_i ګرښيز کمبينيشن بولي يا نوموي.

په ټوليزه توګه د $W \subset V$ لپاره د W څخه کرښيز کمبينېشن لاندې ، د W څخه د ناپای ډېرو وکتورونو يو کرښيز کمبينېشن پوهيږو.

ليکونکي: اېپ، کيمرلې

(c) ketabton.com: The Digital Library

وکتور $v = (1,2,3)^t$ د وکتورونو $v_1 = (3,4,5)^t,\ v_2 = (1,1,1)^t,$ يو کرښيز کمبينېشن دی، ځکه چې $v = v_1 - 2v_2$.

د دې برعکس $v = (1,0)^t$ د وکتورونو $v_1 = (0,1)^t,\ v_2 = (0,2)^t,$ کرښيز کمبينېشن نه دی.ځکه چې د v_1 او v_2 کرښيز پولينوم بڼه $(0,*)^t$ لری..

بالاخره کېدی شي $v = (0,0,0,0)^t$ په مختلفو ډولونو د وکتورونو

$$v_1 = (1,1,0,0)^t,\ v_2 = (0,2,2,0)^t,\ v_3 = (0,0,3,3)^t,\ v_4 = (4,0,0,4)^t$$

کرښيز کمبينيشن په څير انځور شي:

$$v = \lambda(12v_1 - 6v_2 + 4v_3 - 3v_4)$$

د $\lambda \in \mathbb{R}$ سره.

ليکونکي: اپپ، هيوليگ

کرښيزه هيولې يا سپاين يا سمخ Lineare Hülle(span)

يادونه: د په يوه فضا کې د خونديې شيانو او د بانديې په منځ کې يو ديوال جوړوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د K - وکتورفضا V د وکتورونو $v_1, \dots, v_n$ ټولو ګرښيزو کمبينېشنونو ډېرۍ د وکتورونو v_i کرښيزه سپاين يا هيولې(يو څه يا کوټی يا ...و چې په فضا کې يو ځا رابندوي (ژباړی)) بلل کيږي او داسې يې په نخښه کوو:

$$\operatorname{span}(v_1, \dots, v_n) = \{\sum_{i=0}^{n} \lambda_i \cdot v_i : \lambda_i \in K\}.$$

په ورته توګه سږی د $\operatorname{span}(U)$ وکتورونو د يوې ډېرۍ U لپاره د U د ټولو کرښيزوکمبينېشنونو ډېرۍ تعريفوی..

د هرې برخډېرۍ $U \in V$ لپاره د V يو برخفضا ده. $\operatorname{span}(U)$

ليکونکي: اپ، کيمرلې

که په $\mathbb{R}^3$ کې دوه مختلفې د سرچينې کرښې g_1 او g_2 په پام کې ونيسو، د بېلګې په توګه

$$g_1 : x = \lambda_1(1,0,0)^t,\ g_2 : x = \lambda_2(0,1,0)^t, \quad \lambda_i \in \mathbb{R},$$

دا هريو د لوريزو وکتورونو کرښيزه سپاين يا ګرښيزه هيولې دي، دلته

$$v_1 = (1,0,0)^t,\ v_2 = (0,1,0)^t.$$

نو د وکتورونو v_1 او v_2 کرښيزه هيولې يا سپاين يوه سطحه $E = \operatorname{span}(v_1, v_2)$ ده، چې کرښې g_1 او g_2 خوندي لري، پس دلته

$$E : x = \lambda_1(1,0,0)^t + \lambda_2(0,1,0)^t, \quad \lambda_i \in \mathbb{R}\ ,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

همداسې

$$E = \{x : x_3 = 0\}$$

لیکونکي اپ، هیولیګ

ننوتی – یا محدب کمبینیشن Konvexkombination

په یوه حقیقي وکتورفضا V کې یو کرښیز کمبینیشن

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_m v_m$$

د $\lambda_i \geq 0, \quad \sum_i \lambda_i = 1$ سره د وکتورونو $v_i \in V$ کنوکسکمبینیشن بلل کیږي.

لیکونکي اپ، هیولیګ

ننوتی یا محدبه هیبولې یا سپاین(المانی وبینه :شپاین)Konvexe Hülle

د یوه حقیقي وکتورفضا V د یوې برخډېرې M محدبه هیولې د ټولو محدب کمبېشنونو

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_m v_m \qquad (\lambda_i \geq 0, \sum_i \lambda_i = 1)$$

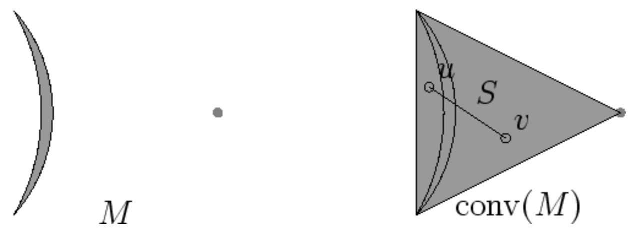
ډېرۍ ده د $v_i \in M$ سره او د $\mathrm{conv}(M)$ سره لیکل کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځمككچيز يا هندسي $\operatorname{conv}(M)$ خورا كوچنى ډېرى ده، چې M خوندى لري، كومه چې د هرو دوه توكو u, v لپاره د هغو تړنكربښه

$$S = \{\lambda u + (1-\lambda)v : 0 \leq \lambda \leq 1\}$$

هم خوندى لري



ليكونكي اپ، هيوليګ

حقيقي- ياربينتونى سكالار ضرب Reelles Skalarprodukt

په يوه حقيقي وكتور فضا V باندې يو سكالارضرب يو تابع

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$$

ده، دلاندې خويونو سره:

مثبتوالى :

$v \neq 0$ د $\langle v, v \rangle > 0$ لپاره.

سيومتري:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$$

کرښيزوالی:

$$\langle \lambda u + \varrho v, w\rangle = \lambda\langle u, w\rangle + \varrho\langle v, w\rangle$$

دلته $u, v, w \in V$ او $\lambda, \varrho \in \mathbb{R}$ په خوښه وکتورونه هرداسي سکالار.

د سيومتري په بنسټ يو حقيقي سکالار ضرب د دويم دليل په بنسټ هم کرښيز دی، يعنې په V يو بي کرښيزه Bilinearform بڼه.

ليکونکي اپ، هيوليک، کرايخ

سکالار ضرب Skalarprodukt

په يو کمپلکس وکتورفضا V يو سکالار ضرب يو فنکشن

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times V \to \mathbb{C}$$

دی، د لاندې خويونو سره:

مثبتوالی:

$\langle v, v\rangle > 0$ د $v \neq 0$ لپاره.

مائل سيومتري:

$$\langle u, v\rangle = \overline{\langle v, u\rangle}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

كرښيزوالی:

$$\langle \lambda u + \varrho v, w \rangle = \lambda \langle u, w \rangle + \varrho \langle v, w \rangle$$

له دې سره $u, v, w \in V$ همداسې $\lambda, \varrho \in \mathbb{C}$ په خوښه وکتورونه همداسې سکالار دي.

مایل سیومتریکSchiefsymmetrie :

كرښيزوالی:

$$\langle \lambda u + \varrho v, w \rangle = \lambda \langle u, w \rangle + \varrho \langle v, w \rangle$$

له دې سره $u, v, w \in V$ او $\lambda, \varrho \in \mathbb{C}$ په خوښه وکت.ورونه همداسې سکلار دي

د مائل سیومتري په اساس یو کمپلکس سکالارضرپ نسبت و دویمي متحولې ته کرښیز نه دی:

$$\langle u, \lambda v + \varrho w \rangle = \overline{\lambda} \langle u, v \rangle + \overline{\varrho} \langle u, w \rangle .$$

فقط د حقیقي سکالار لپاره کمپلکس کونجوګېشن بې مفهومه دی.

ليکونکي اپ، هیولیک، کرایخ

دا ترې لاس ته راغلې اسیومتري اړیین ده، چې د کمپلکس سکالارضرب مثبتوالی تضمینوي. د بېلګې په توګه دی:

$$\langle \mathrm{i}v, \mathrm{i}v \rangle \neq \mathrm{i}^2 \langle v, v \rangle = -\langle v, v \rangle < 0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $v \neq 0$ لپاره.

له دې زيات صدق کوي:

$$\langle \mathrm{i}v, \mathrm{i}v \rangle = (\mathrm{i}\bar{\mathrm{i}})\langle v, v \rangle = \langle v, v \rangle > 0 .$$

مثبتوالی اړيين دو چې له $|v| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$ لارې ئو نورم تعريف کړاي شو.

ليکونکي هيوليګ، هيورنر

د وکتورونو $x, y \in \mathbb{R}^2$ لپاره يوه دحقيقي سکالار ضربونو د ممکنه تعريفونو لړۍ تر څېړني نيسو. په لاندې جدول ورکړ شوي، چې کوم خويونه پوره دي.

خويونه	سکالار ځل
ټول	$10x_1y_1 + x_2y_2$
کرښيزوالی	x_1y_2
مثبتوالی، سيومتري	$\|x_1y_1\| + \|x_2y_2\|$
سيومتري	$x_1x_2 + y_1y_2$

فقط لومړی تعريف ټول غوښتوني شرايط پوره کوي. په کملکس وکتورفضا $\mathbb{C}^2$ کې په هر ډول دا حالت نه دی، هم مثبتوالی او هم مائل سيومتري پوره نه دي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\langle(\mathrm{i},0),(\mathrm{i},0)\rangle = \qquad 10\mathrm{i}^2 = -10 < 0$$

$$\langle(\mathrm{i},0),(1,0)\rangle = 10\mathrm{i} \neq \overline{\langle(1,0),(\mathrm{i},0)\rangle} = -10\mathrm{i}$$

په داسې حالت کې چې د دويم Arguments اجزا وې يا کمپوننتونه کمپلمس کنجوګيرت کړي، پرابلک له منځه تلاي شي. تعريف

$$\langle x,y\rangle = 10x_1\bar{y}_1 + x_2\bar{y}_2$$

په کمپلکس حالت غزونه راکوي.

ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

د کوشي-شوارخ – نامساوات(نابرابرون)

Cauchy-Schwarz-Ungleichung

سکالار ضرب کېدی شي د اسوخياتيو قانون له مخې تخمين شي:

$$|\langle u,v\rangle| \leq |u||v|, \quad |w| = \sqrt{\langle w,w\rangle}\,.$$

مساوات ټيک هلته صدق کوي، که صدق ولري $u \parallel v$.

که $v = \lambda u$ وي، لکه څنګه چې غوښتل کيږي مساوات صدق کوي.

د u همداسې د v ضرب د يوه سکالار سره نامساوات تغير نه خوري. کېدی شي ونيسو(فرض کړو) چې صدق کوي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$|u|^2 = |v|^2 = 1\,.$$

که د سکالار ضرب سره (دلیل حقیقي حالت په بر کي نیسي) دي

$$\langle u, v\rangle = r\exp(\mathrm{i}\varphi)\,, \quad r > 0\,,$$

د $\lambda = \exp(\mathrm{i}\varphi)$ سره د ناغبرګو(ناموازي) وکتورونو لپاره لاس ته راځي

$$\begin{aligned} 0 &< \langle u - \lambda v, u - \lambda v\rangle \\ &= 1 + \lambda\bar{\lambda} - \lambda\overline{r\exp(\mathrm{i}\varphi)} - \bar{\lambda}r\exp(\mathrm{i}\varphi) \\ &= 1 + 1 - r - r\,. \end{aligned}$$

له دې سرره $r = |\langle u, v\rangle| < 1$ باور لري، ده په دې معنا چې غوښتنه مو.

نورم Normر ډولیزوال

په یوه حقیقي یا کمپلکس وکتورفضا V نورم یا تابع $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ ده

د لاندې خویونو سره:

مثبتوالی:

$\|v\| > 0$ د $v \neq 0$ لپاره.

هوموګینیوالی یا برابیرډولیزوالی Homogenität :

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$$

درېګوډي (مثلث-) نامساوات:

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$$

د لته u, v په خوښه وکتورونه دي او λ یو په خوښه سکالار.

دد نورم $d(u, v) = \|u - v\|$ په مرسته کېدی شي د دوه وکتورونو ترمنځ واټن تعریف شي.

د سکالار ضرب نورم Skalarprodukt - Norm

په یوه حقيقي یا کمپلکس وکتورفضا V د یوه سکالار ضرب سره ، نورم له

$$|v| = \sqrt{\langle v, v \rangle}, \quad v \in V$$

سره په یوه معنا دی.

مثبتوالی او هوموګينيتي (ورته والی) تېرلې د سکالارضرب د ورته خويونو څخه لاس ته راځي. د مثلث مساوات له

$$|u + v|^2 = \langle u + v, u + v \rangle$$

$$= \langle u, u \rangle + \underbrace{\langle u, v \rangle + \overline{\langle u, v \rangle}}_{\in \mathbb{R}} + \langle v, v \rangle$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\leq |u|^2 + 2|\langle u, v\rangle| + |v|^2$$

$$\overset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} |u|^2 + 2|u||v| + |v|^2$$

$$= (|u| + |v|)^2$$

څخه د ريښې نيونې له لارې لاس ته راځي.

ليکونکي: هيوليک، هيورنر

ماکسيموم - نورم Maximum-Norm

د وکتورونو فضاو $\mathbb{R}^n$ او $\mathbb{C}^n$ لپاره

$$\|z\|_\infty = \max_i |z_i|$$

ماسکيموم – نورم په نخښنه کوي.

درېګوډي نامساوات پوره دي، ځکه چې د $z = x + y$ لپاره باور لري

$$\max_i |z_i| = \max_i |x_i + y_i| \leq \max_i (|x_i| + |y_i|) \leq \max_i |x_i| + \max_i |y_i| \,.$$

ماکسيموم-نورم کېدی شي د وزنونو $w_i \in \mathbb{R}_+$ د پيل کولو يا رامنځ ته کولو سره تولېز شي:

$$\|z\|_{\infty,w} = \max_i (w_i |z_i|) \,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د حقيقي- يا ريل وكتورونو سكالار ضربSkalarprodukt reeller Vektoren

د وکتورونو $v = (v_1, \dots, v_n)^t, w = (w_1, \dots, w_n)^t \in \mathbb{R}^n$ لپاره كانونيكي ضرب د

$$v^t w = \sum_{i=1}^{n} v_i w_i = v_1 w_1 + \cdots + v_n w_n$$

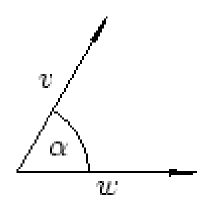
سره تعريف دى د وركډشوي assoziierten نورم

$$|v| = \sqrt{v_1^2 + \cdots + v_n^2}\,.$$

سره.

$$v^t w = |v||w| \cos\alpha$$

هندسي کېدى شي دا نورم د له لارې تعريف شي، د v او w ترمنځ کوچنی زاويه يا کونج α په نخښه کوي، چې د u او v څخه غزيدلې سطحې کې اندازه کيږي.



د سکالار ضرب خويونه ساده ازمايل کيږي.

د هدسي تعريف ورته والی د کوساين جلې سره تصديقيږي(لومړی د $n = 2$ لپاره).

دې پسې د $v = (v_1, v_2)^t$ او $w = (w_1, w_2)^t$ سره باور لري، چې

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$|v-w|^2 = |v|^2 + |w|^2 - 2|v||w|\cos\alpha \ .$$

که ځاي په ځاي کړو، نو ترې لاس ته راځي

$$(v_1-w_1)^2 + (v_2-w_2)^2 = v_1^2 + v_2^2 + w_1^2 + w_2^2 - 2|v||w|\cos\alpha$$

او د بنه بدلو سره ښونه یا ثبوت.

د $n \geq 2$ لپاره v او w په $\mathbb{R}^n$ کې یوه سطحه اواره(هواروي) وي یا غزوي. ورته شمېرنه په دې سطحه کې ښایي، چې د په خوښه ډیمنزیونون (ابعادو یا پراخپدونو) $n \geq 2$ لپاره تیک دی.

د کمپلکس وکتورونو سکالار ضرب Skalarprodukt komplexer Vektoren

د وکتورونو $x = (x_1, \ldots, x_n)^t, y = (y_1, \ldots, y_n)^t \in \mathbb{C}^n$ لپاره کانونیکي سکالار ضرب د

$$y^* x = \sum_{j=1}^{n} x_j \bar{y}_j$$

له خوا تعریف دی د شسوخیري نورمونو

$$|z| = \sqrt{|z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2} \, .$$

سره.

دا سوپرسکریپت له دې سره د یوه وکتور ترانسپوزیشن او کمپلکس کنجوګېشن په ګوته کوي.

دا تعریف حقیقي حالت خوندي لري، چې په هغو کې کمپلکس کنجوګیري حالت پوره وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x = \begin{pmatrix} 1+2\mathrm{i} \\ -2-\mathrm{i} \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 2 \\ 2\mathrm{i} \end{pmatrix}$$

که له $\mathbb{C}^2$ څخه د وکتورونو
سکالارضرب جوړوو، نو لاس ته راځي:

$$\langle x, y\rangle = (1+2\mathrm{i})\cdot 2 + (-2-\mathrm{i})\cdot \overline{2\mathrm{i}} = 2+4\mathrm{i}+4\mathrm{i}+2\mathrm{i}^2 = 2+8\mathrm{i}-2 = 8\mathrm{i}\,.$$

پس د دوه کمپلکس وکتورونو سکالار ضرب اړیین نه دی چې حقیقي وي.

د اسوڅییري نورم سره د دویم وکتور کنجوګیري کونه غوره رول لري. بې له کنجوګیري کونې څخه به په ضرب کې لومړي وکتور لاندې نورم لرودی

$$\sqrt{(1+2\mathrm{i})^2 + (-2-\mathrm{i})^2} = \sqrt{1+4\mathrm{i}-4+4+4\mathrm{i}-1} = \sqrt{8\mathrm{i}} \notin \mathbb{R}\,,$$

او د دویم وکتور لپاره به په همدې ډول نورم نامثبت وی:

$$\sqrt{2^2 + (2\mathrm{i})^2} = \sqrt{4-4} = 0 \not> 0\,.$$

د دوه وکتورونو ترمنځ کونج Winkel zwischen Vektoren

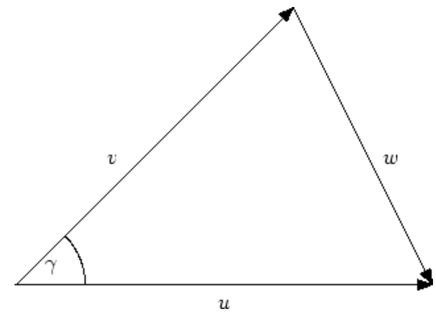
$$\cos\sphericalangle(u,v) = \frac{\langle u,v\rangle}{|u||v|}$$

د یوه حقیقي سکالار ضرب لپاره د لخوا

په $[0,\pi]$ کې د u او v ترمنځ یوکونج تعریفوي. په ځانګړې توګه u او v اورتوګونال، $u \perp v$ ، بولو که $\langle u,v\rangle = 0$ ولرو.

د کونج تعریف په $\mathbb{R}^2$ کې د وکتورونو لپاره د کوساین له مخې رابولي:

(c) ketabton.com: The Digital Library



په يوه درېګوډي يا مثلث کې د اړخونو $|u|, |v|, |w|$ اوږدوالي لپاره اړيکې باور لري:

$$|w|^2 = |u|^2 + |v|^2 - 2|u||v| \cos \sphericalangle(u, v) \,.$$

له بلې خوا د سکالار ضرب له تعريف څخه

$$|w|^2 = |v - u|^2 = |v|^2 + |u|^2 - 2\langle u, v \rangle \,,$$

د کونج تعريف د پرتلې له لارې لاس ته راځي.

د په خوښه حقيقي سکالارضرب لپاره د کوشي-شورڅ-مساوات په بنسټ لرو:

$$\frac{\langle u, v \rangle}{|u||v|} \in [-1, 1] \,.$$

وښودل کېدی شي په $[0, \pi]$ کې د يوه کونج د کوساين سره برابر کيښوول شي يا ځاي په ځاي شي.

د پيتاګوراس(فيثاغورث) جمله Satz des Pythagoras

د يوه سکالارضرب-نورم د اورتوګونال يا عکود وکتورونو u او v لپاره

$$|u + v|^2 = |u|^2 + |v|^2 \,.$$

باور لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

باور لري

$$|u+v|^2 = \langle u+v, u+v\rangle = \langle u,u\rangle + \underbrace{\langle u,v\rangle}_{=0,\ \mathrm{da}\ u\perp v} + \underbrace{\langle v,u\rangle}_{=0,\ \mathrm{da}\ v\perp u} + \langle v,v\rangle =$$

$$= |u|^2 + |v|^2 .$$

دا حمله د پيتاګوراس جملې تر نامه شهرت لري(569-475 v. Chr)، سره له دې چې دا له دې 1000 کاله د مخه بابليانو پېژندله.

امکان لري، چې پيتاګوراس به لومړنی وو، چې دا جمله يې ثبوت کړې.

د پيتاګوراس درېګونيPythagoräisches Tripel

د پيتاګوراس درېګونو سره درې طبيعي اعداد l, m, n بلل کيږي، د $l^2 + m^2 = n^2$, سره، د بېلګې په توګه $(3, 4, 5)$.

يو مثلث چې د اړخونو اوږدوالي نسبت يې د پيتاګوراس درېګونې پوره کوي، د پيتاګوراس جمله پوره کوي او له دې امله دا ولارګوډيز يا ولاړکونجيز او که غواړی قايم االزاويه دي.

مصريانو ممکن دا د ولاړګوډ د لاس ته راوړلو لپاره کارولی وي: دوي د يوې رسی يا پړي څخه کار رخسته، چې رابند او ۱۲ ګندې د برابر يون (واحد)اوږدوالي سره درلودې. که دې رسی يو درېګوډی داسي جوړ شي، چې اخونه يې درې، څلور، پنځه يوونه يا واحده اوږده وي، نو د لندو اړخونو ترمنځ پروت کوج ولاړ يا عمود دی.

هر ناجوړه يا طاق عدد $l \geq 3$ کېدی شي د عددونو $m = (l^2-1)/2$ او $n = (l^2+1)/2$ سره د يو پيتاګوراس درېګوني ته پوره يا مکمل شي، ځکه چې

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$l^2 + \frac{l^4 - 2l^2 + 1}{4} = \frac{l^4 + 2l^2 + 1}{4} = \left(\frac{l^2+1}{2}\right)^2 .$$

د دې درېګوني له 2 سره ضرب له لارې يو درېګونی لاس ته راځي، د هر تول عدد $l \geq 6$ لپاره.

دا ورکړ شوی جوړخت اصول د يوې طريقې ځانګړی حالت دی، کزمه چې د ؛بينوم د دريم فرمول خڅه لاس ته راحي، [که چې له

$$c^2 - b^2 = (c-b)(c+b) = a^2$$

لاس ته راځي، که a^2 په دوه مختلفو ضريبونو تجزيه کېدی شي، چې يو يې جوړه $(=2b)$ کمښت يا تفريق ولري. د ناجوړه يا طاق $a = l$ لپاره دا تو‌ته کونه $a^2 = a^2 \cdot 1$ پوره ده. لاس ته راوړو:

$$b = \frac{a^2-1}{2}\ , \quad c = \frac{a^2+1}{2}$$

او له دې سره دا پورته ځانګړی حالت.

کرښيز نابلواکوالی يا خپلواکوالی يا نا تابعيت Lineare Unabhängigkeit

وکتورونه $v_1, \ldots, v_m$ کرښيز بلواک بللکيږي، که سکالار $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ شتون ولري د $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_m v_m = 0$

او لږ تر لږه يوه $\alpha_i \neq 0$ سره. په بل حالت کې کرښيز خپلواک بلل کيږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په ټولېزه توګه د وکتورونو يوه ډېرۍ M کربنيز نا بلوک يا خپواکه بلل کيږي، که د M هره پاي برخډېرۍ د کربنيز نا بلوک يا خپلواکه وکتورونو څخه جوړه وي. په بل حالت کې M کربنيزه بلواکه پلل کيږي.

په پام کې دې وي، چې د کربنيز الجبر په موخه په حقيقت کې ناپاي ډېريو ته اجازه ورکړ شوې، مګر فقط ناپاي کربنيوېو کمپينيشنونو ته. د بېلګې په توګه د پرلپسيو وکتورفضا ډېريو کې

$$e = (1,1,\ldots)^t,\ e_1 = (1,0,0,\ldots)^t,\ e_2 = (0,1,0,\ldots)^t,\ \ldots$$

کربنيز خپلواک دی، سره له دې چې

$$e = \sum_{n\in\mathbb{N}} e_n\ .$$

دي.

د ثابتو پرلپسيو يا ترادفونو د کانونيکي يوون- يا واحدوکتورونو سره پاي انځورونه نه شته.

په $\mathbb{R}^2$ کې دوه وکتورونه تيک هلته کربنيز خپلواک دي، که يو هم د بل ډېر واره نه وي، د بيلګې په توګه ږکتورونه $(1,0)^t$ او $(1,1)^t$ کربنيز خپلواک دي، ځکه چې اينسوونه

$$\alpha(1,0)^t + \quad \beta(1,1)^t = (0,0)^t$$

راکوي

$$\beta = \qquad \alpha = 0\ .$$

همداسې

(c) ketabton.com: The Digital Library

برعکس وکتورونه $(0,0)^t$ او $(2,3)^t$ کربنيز بلواک دي، که

$$0(2,3)^t = \quad (0,0)^t$$

همداسي:

$$1(0,0)^t + \quad 0(2,3)^t = (0,0)^t;$$

پس د صفر وکتور يو ،،نه ترېويال،، يا ساده انځورونه شتون لري.

په $\mathbb{R}^2$ کې د رې وکتورونه u, v, w تل کربنيزبلواک يا تابع دي، ځکه چې لاندې ځاي په ځاي کونه

$$\alpha u + \quad \beta v + \gamma w = 0$$

کښته ټاکلي لاينيز هوموجين سيستم ته مو لاربنودوي

$$\alpha u_1 + \quad \beta v_1 + \gamma w_1 = 0$$

$$\alpha u_2 + \quad \beta v_2 + \gamma w_2 = 0$$

د α, β, γ لپاره، چې تل يو ناساده حل لري

لکه په دوه بعدي همداسي په $\mathbb{R}^3$ کې دوه بعدي وکتورونه کربنيز بلواک دي، که دا غبرګ(موازي) وي، دا په دې معنا چې که يو وکتور د بل وکتور څو ځله وي.

درې وکتورونه کربنيز بلواک دي، که دوه وکتورونه غبرګ يا موازي وي يا که يو وکتور له دې نورو دوه وکتورونو غزېدلې سطحه کې پروت وي. د بېلګې په توګه د لاندې لپاره باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$u = (1,2,-3)^t,\ v = (4,-6,2)^t,\ w = (-9,3,6)^t$$

لپاره باور لري

$$6u + 3v + 2w = (0,0,0)^t$$

، پس وکتورونه کرښيز بلواک دي.

د تعريف سره سم د کرښيز بلواکوالي لپاره ازمايښت ورته دئ يوه هوموجېن کرښيز مساواتسيستم سره

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \cdots + \lambda_n \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

د سکالار λ_i لپاره. دا په ځانګړي توګه ښايي، چې څلور وکتورونه په $\mathbb{R}^3$ کې تل ګرښيز بلواک يا تابع دي.

بنسټ Basis

د يوه وکتور فضا V برخدېرئ B د وکتور V يو بنسټ بلل کيږی، که B کرښيز خپلواکه وي او د V يو توليدېدونکی يا جړوېدوکی سيستم وي، دا په دې معناچې که هر وکتور $v \in V$ يو يوائځنی انځورونه د يوه پای کمبينېشن $v = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i b_i$ د $b_i \in B$ سره لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

که B پای $(|B| = n)$ وي ، نو هر وکتور کېدی شي د یوه وضعیه قیمت له لارې سره نسبت و بنسټ ته وليکي:

$$v \leftrightarrow v_B = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)^{t}.$$

د وضعیه قیمت انځورونې

$$v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i \leftrightarrow v_B = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)^{t},$$

سره ، دا په نامه کانونیکي ایزومورفیزم، سرې کړی شي یو پای بعدي K -وکتورفضا V د n–ګونی وکتور فضا K^n سره په نخښنه کړی شي یا وپېژندلی شي. په ځانګړې توګه کېدی شي چې د پای حقيقي او کمپلکس وکتوري فضا د د لوستلو سره په پروتو تیوپ $\mathbb{R}^n$ او $\mathbb{C}^n$ ځان محدود یا رابند کړي.

لکه د بېلګې په توګه د پولینومونو وکتور فضا يدلکيږي، اړيين نه ده چې وکتورفضا دې پای بنسټ ولري. مګر د د کرښيز الجب په ساحه کې پای کرښيز کمپیشنونه تر څېړنې لاندې نیول کيږي. د دې لاس ته رځي، چې پرلپسي

$$e_1 = (1, 0, 0, \ldots)^{t},\ e_2 = (0, 1, 0, \ldots)^{t}, \ldots$$

د پرلپسيو د وکتورفضا لپاره بنسټ نه جوړوي. دا د ناپای کرښيز کمبينېشن مطالعه یا راوړنه ، لکه دا چې ځنګه په فوريي لړيو کې رامنځ ته کيږي، په لاس لرو، خو یوه کونورکنځ یا پولې ته یوه تګ کلیمه غواړي، یعني د فقط وکتورفضاجوړښت څخه زیات.

بعد یا پراخیدونی Dimension

(c) ketabton.com: The Digital Library

که يو وکتورفضا V يو پاي بنسټ $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ ولرى، نو د بنسټ وکتورونو ګڼون يا تعداد يواځنى ټاکلى او د V بعد ياپراخېدونى بلل کيږي:

$$n = \dim V \ .$$

د $V = \{0\}$ لپاره ليکو $\dim V = 0$ او $\dim V = \infty$ د يو ناپاى بنسټ وکتورفضا لپاره.

د ټوليز بنسټ جملې له مخې هر وکتورفضا يو بسټ لرى.

د دې لپاره چې وښايو، چې بعدونه يا پراخيدوني يواځني ټاکلى دي، بسيا کوى، چې لاندې وبينه وښايو:

که يوه وکتورفضا n-توکيزه بنسټ

$$b_1, \ldots, b_n \ ,$$

ولري، نو $n + 1$ وکتورونه

$$v_1, \ldots, v_{n+1}$$

(او له دې سره د $n + 1$ څخه زيات وکتورونه هم) کربنيز بلواک دي.

که دوه بنسټونه د مختلفو ډېرو وکتورونو سره شته وي، نو د بنشټوکتورونه به کربنيز خپلواکوالى ته يو تضاد لاس ته راشي.

پورتنى غوښتنه يا ثبوت کيدى شي د n پسې د ايندکشن له لارې و ښوول شي.

د ايندکشن پل لپاره (اندکشن پيل $n = 1$ ساده دى) که د وکتورونو v_i بنسټ انځورونه راواخلو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$v_i = \sum_{j=1}^{n} \gamma_{i,j} b_j, \quad i = 1, \ldots, n+1 .$$

.

باور لري:

$$\gamma_{i,1} = \cdots = \gamma_{i,n} = 0,$$

،

نو دی ، او کرښيزبلواکوالی همدا اوس و ښوول شو. نو کيدی شي د مناسب نمره کولو له لارې ونيسي، چې $\gamma_{n+1,n} \neq 0$. له پورته مساوات څخه په راوتنې يا پيل سړی اوس ومتورونه تعريفوي، کوم چې د $n-1$ وکتورونو $b_1, \ldots, b_{n-1}$ څخه د کرښيز کمبينيشن په څير انځوريدلای شي:

$$v_i' = v_i - \frac{\gamma_{i,n}}{\gamma_{n+1,n}} v_{n+1}, \quad i = 1, \ldots, n .$$

دا چې د b_n ضريب يا ځلونی ورکيږي، ساده کتل کيږي. دا چې

$$\text{Span}\{b_1, \ldots, b_{n-1}\}, \;\; v_1', \ldots, v_n' \in V' =$$

کيی شي سړی د ايندکشن نيونې(فرضيی) وکاروي او نه ساده کرښيز کمبينيشن لاس ته راوړي

$$\lambda_1 v_1' + \cdots + \lambda_n v_n' = 0 .$$

د بنه بدلون پسي د کرښيز کمبينيشن لاس ته راځي، نو له دې سره غوښتنونی بلواکوالی يا تابعيت.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

(c) ketabton.com: The Digital Library

اورتوګونال يا ولاړ بنسټ Orthogonale Basis

يو بنسټ $B=\{u_1,\ldots,u_n\}$ اورتوګونال بلل کيږي، که وي:

$$\langle u_i,u_j\rangle = 0, \quad i\neq j\,.$$

که بنسټوکتورونه نورمي وي، دا په دې معنا چې $|u_i| = 1$ دي، نو د اورتوګونال سيستم يا اورتوګونال بنسټ څخه غږيږو.

يو وکتور v نسبت و يوه اورتوکونال بنسټ $u_1,\ldots,u_n$ ته انځورونه

$$v=\sum_{j=1}^{n} c_j u_j\,,\quad c_j=\frac{\langle v,u_j\rangle}{|u_j|^2}\,.$$

لري.

د ضريبونو c_j لپاره پاور لري

$$|c_1|^2|u_1|^2+\cdots+|c_n|^2|u_n|^2 = |v|^2\,.$$

د يوه نورمي پنسټ لپاره ترمونه $|u_j|^2$ له منځه ځي. او له دې سره لاس ته راځي:

$$c_j=\langle v,u_j\rangle\,,\quad |c_1|^2+\cdots+|c_n|^2=|v|^2\,.$$

ليکونکي: اپپ، هيوليک، کيمرلې

دا چې $u_1,\ldots,u_n$ يو بنسټ جوړوي، نو سکالا $c_1,\ldots,c_n$ د

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$v = \sum_{j=1}^{n} c_j u_j \ .$$

سره شتون لري.

که د پورتني مساوات لپاره په خوښه سکالار ضرب د u_k سره جوړ کړو او د بنسټ دد اورتوګوناليټي څخه کار واخستل شي، نو لاس ته راځي

$$\langle v, u_k \rangle = c_k \langle u_k , u_k \rangle$$

همداسې

$$c_k = \frac{\langle v , u_k \rangle}{\langle u_k , u_k \rangle} \ .$$

د ضريبونو لپاره کټمټوالی د پيتاګوراس د جملې ($n = 2$) ټوليزونه ده. دا تړلې د

$$|v|^2 = \langle c_1 u_1 + \cdots + c_n u_n , c_1 u_1 + \cdots + c_n u_n \rangle \, ,$$

ضربولو څخه لاس ته راځي، که دې ته پام وشي، چې مخلوط ترمونه

$$\langle c_j u_j , c_k u_k \rangle, \quad j \neq k$$

د بنسټ وکتورونو د اورتوګوناليټي له امله ورکيږي

(c) ketabton.com: The Digital Library

ليكونكي: اپپ، هيوليګ

نسبت و اورتوګونال بنسټ

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix},\ u_2 = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

ته $v = (8,4)^t$ دا لاندې انځورونه لري

$$v = \frac{\langle v, u_1\rangle}{\langle u_1, u_1\rangle}u_1 + \frac{\langle v, u_2\rangle}{\langle u_2, u_2\rangle}u_2 = \frac{8+12}{1+9}u_1 + \frac{-48+8}{36+4}u_2 = 2u_1 - u_2\ .$$

د ضريبونو لپاره باور لري:

$$|2|^2\ \left|\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right|^2 + |-1|^2\ \left|\begin{pmatrix} -6 \\ 2 \end{pmatrix}\right|^2 = 4\cdot 10 + 1\cdot 40 = \left|\begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}\right|^2\ .$$

نسپت و اورتوګونال پنسټ

$$u_1 = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix},\ u_2 = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix},\ u_3 = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ته $v = (-1,1,3)^t$ لاندې انځورونه لري:

$$v = \langle v, u_1\rangle u_1 + \langle v, u_2\rangle u_2 + \langle v, u_1\rangle u_1 = 3u_1 - u_2 - u_3\ .$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ضربيونو لپاره باور لري

$$|3|^2 + |-1|^2 + |-1|^2 = \left| \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right|^2 .$$

ليکونکي: اپپ، هيوليک

اورتوګونال پروجکشن يا - پرپوستون Orthogonale Projektion

په يوه برخفضا U اورتوګونال پرپوستون

$$v \mapsto P_U(v) \in U$$

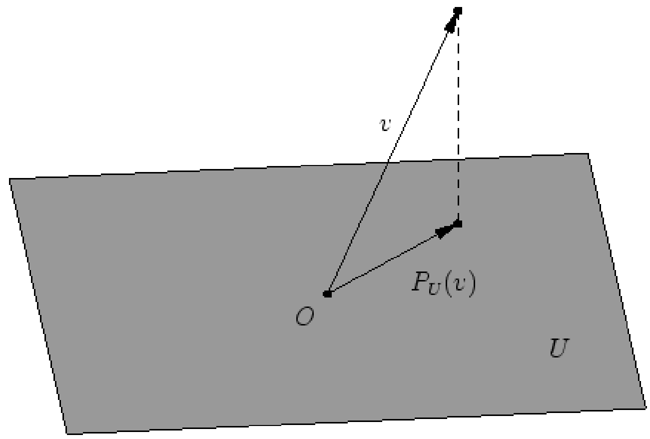
داورتوګوناليتي شرايط

$$\langle v - P_U(v), u \rangle = 0, \quad \forall u \in U$$

سره پيژندل شوی دی.

.

(c) ketabton.com: The Digital Library



که $u_1, \ldots, u_j$ د U يو اوتوګونال پنسټ وي، نو دی

$$P_U(v) = \sum_{k=1}^{j} \frac{\langle v, u_k \rangle}{\langle u_k, u_k \rangle} u_k \,.$$

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

له $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$ سره يوه هايپرسطحه $H \subset \mathbb{R}^4$ تعريف کيږي. د اوروتوګونال بنسټ لپاره کېدی شي لاندې وکتورونه وکارول شي:

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

نو د وکتور $x = (1, 2, 3, 4)^t$ د اورتوګونال پروجکشن لپارره لاندې باور لري:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$P_H x = \frac{x^t u}{|u|^2}u + \frac{x^t v}{|v|^2}v + \frac{x^t w}{|w|^2}w = \frac{-4}{4}u + \frac{-2}{4}v + \frac{0}{4}w$$

ليکونکي: هيوليګ، کرايخ

د ګرام-شميت تکلار يا قانون Verfahren von Gram-Schmidt

د يوه بنسټ $b_1, \ldots, b_n$ څخه کېدی شي، لکه په لاندې توګه، يو اورتوګونال بسټ $u_1, \ldots, u_n$ جوړ شي. دا سړی د $j = 1, \ldots, n$ لپاره سوکڅيسيو تعريفوي:

$$u_j = b_j - \sum_{k<j} \frac{\langle b_j, u_k\rangle}{\langle u_k, u_k\rangle} u_k,$$

د $j = 1, \ldots, n$ لپاره.

دا رکورزيو ساده کيږي، که بنستوکتور له هر پل(قدم) ورسته نورمي شي:

$$u_j \leftarrow \frac{u_j}{|u_j|}.$$

په دې حالت دي: $\langle u_k, u_k\rangle = 1$

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

سړی ايندوکتيو(له يوه څخه توليز ته) ښايي، چې $u_1, \ldots, u_l$ د $\mathrm{span}\,(b_1, \ldots, b_l)$ لپاره يو اورتوکونال بنسټ جوړزي.

د $l = 1$ لپاره دا روښانه دی: $u_1 = b_1$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ایندکشن پل $(l \to l+1)$ لپاره په پام کې نيسو، جې د $j \le l$ لپاره لرو

$$\langle u_{l+1}, u_j \rangle = \langle b_{l+1}, u_j \rangle - \sum_{k \le l} \frac{\langle b_{l+1}, u_k \rangle}{\langle u_k, u_k \rangle} \underbrace{\langle u_k, u_j \rangle}_{\delta_{k,j}|u_k|^2} = 0 \,.$$

له دې امله $u_1, \ldots, u_{l+1}$ اورتوګونال دي. بالاخره

$$b_{l+1} - u_{l+1} \in \operatorname{span}(u_1, \ldots, u_l) = \operatorname{span}(b_1, \ldots, b_l) \,,$$

دي، له کوم سره چې و ښوول شو، دواړه فضا همغه لاندې فضا غېوي یا خوروي.

ليکونکي: هيوليک، کرایخ

د دې لپاره چې نسبت سکالار ضرب یا ځل

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x) g(x) \, dx$$

ته د پولینومونو $p_0, p_1, \ldots$ اورتوګونال پرلپسې(ترادف) جوړه کړو ,کیدی شنلار سرهي سړی د مونوم $q_j(x) = x^j$ څخه مخ ته لاړشي. د ګرامشمیت د تلنلار سره لاس ته راوړي.

$$p_0 = q_0$$

$$p_1 = q_1 - \frac{\int_{-1}^{1} x \cdot 1 \, dx}{\int_{-1}^{1} 1 \cdot 1 \, dx} \cdot 1 = x - 0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$p_2 = q_2 - \frac{\int_{-1}^{1} x^2 \cdot x\,dx}{\int_{-1}^{1} x \cdot x\,dx} \cdot x - \frac{\int_{-1}^{1} x^2 \cdot 1\,dx}{\int_{-1}^{1} 1 \cdot 1\,dx} \cdot 1 = x^2 - 0 \cdot x - \frac{1}{3}.$$

تولیزه بڼه

$$p_{n+1} = q_{n+1} - \sum_{j=0}^{n} \frac{\langle q_{n+1}, p_j}{p_j, p_j} \cdot p_j$$

کیدی شي کره نازکه یا نرمه شي، که سرړی د $q_{n+1}(x) = x^{n+1}$ په ځای پولینوم $\tilde{q}_{n+1}(x) = x \cdot p_n(x)$ وکاروي. د

$$\mathrm{span}\{p_1, \ldots, p_n, q_{n+1}\} = \mathrm{span}\{p_1, \ldots, p_n, \tilde{q}_{n+1}\}$$

له امله دا قانوني دی. په دې حالت کې دې فقط زیاتوونی یا د جمعي غړی د $j = n - 1$ سره د صفر سره نا برابره وي.

$\langle \tilde{q}_{n+1}, q_n \rangle = \int_{-1}^{1} x\, q_n(x)\, q_n(x) dx$

د سیمتري په بنسټ د $j = n$ لپاره

ورکیږي.د $j < n - 1$ لپاره $[x\, p_j(x)]$ د $p_k(x), k < n$ یوکرښیز کمبینیشن دی.

د $\langle p_n, p_n \rangle = 0$ له امله له دې سره

$$\langle \tilde{q}_{n+1}, p_j \rangle = \int_{-1}^{1} p_n(x)\, [x\, p_j(x)]\, dx$$

هم صفر دی.

په دې توګه لاس ته راوړل شوي پولینومونه د لجندر Legendre پولینومونه بلل کیږي. د یوه بل نومالي کونې سره

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$p_n(x) = \alpha_n x^n + \ldots$$

د لاندې بڼې د دوه ترمونو ريکورزيون لرئ

$$p_{n+1}(x) = \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}(x-\beta_n)p_n(x) - \gamma_n p_{n-1}(x)$$

د $\beta_n = \frac{\langle xp_n, p_n \rangle}{\varrho_n}, \gamma_n = \frac{\alpha_{n+1}\alpha_{n-1}\varrho_n}{\alpha_n^2 \varrho_{n-1}}$ او $\varrho_n = \langle p_n, p_n \rangle$ سره

کرښيزه څيرونه (فنکشن يا تابع)Lineare Abbildung

د K–وکتور فضا V او W ترمنځ فنکشن $L : V \longmapsto W$ ګرښيز بلل کيږی، که دا لاندې خوېونه ولري:

- مثبتوالی

$$L(u+v) = L(u) + L(v)$$

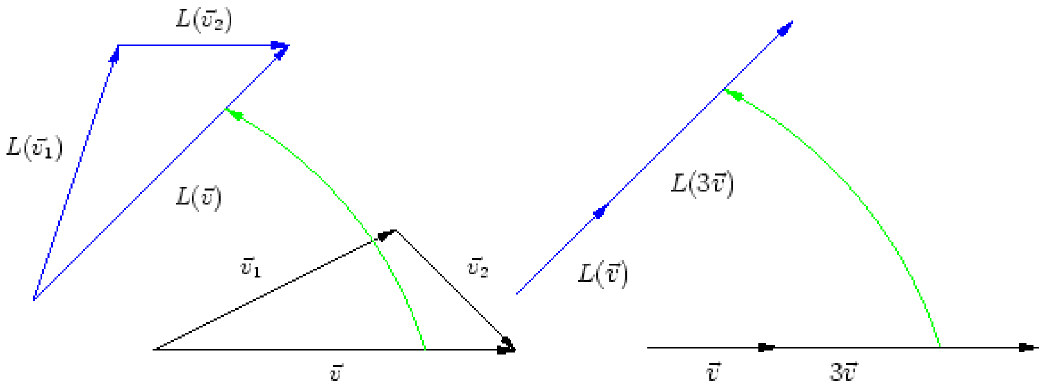
-هوموګيپينوالی:

$$L(\lambda v) = \lambda L(v)$$

له دې سره $u, v \in V$ او $\lambda \in K$ په خوښه وکتورونه همداسې سکالار دي.

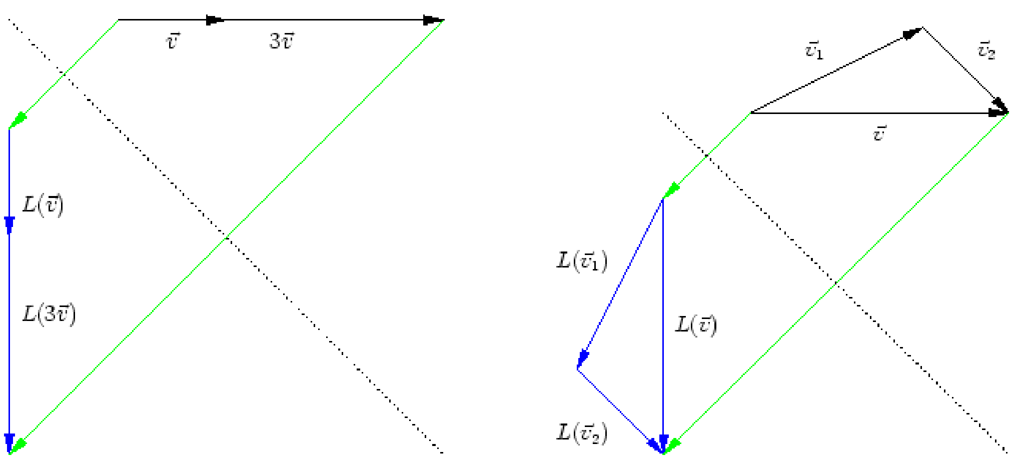
په ځانګړې توګه $L(0_V) = 0_W$ او $L(-v) = -L(v)$ باور لري.

لکه په لاندې بيلګه کې به چې ښوول شي، يو څرخون کرښيز دی.



لکه جمعه یا زیاتون $v = v_1 + v_2$ د دواړو وکتورونو v_i سره یو مثلث یا درېکوډی جوړوي، چې د ده بنه د څرخون سره بې تغیره باتیږي، دا په دې معنا چې جمعه د مخه یا د څرخون سره جوړه شي. دا چې د ضریب λ سره غزونه د څرخون سره بدلیږي، بسې تړلی لیدل کیږي.

په ورته توګه ښوول کیږي چې هنداورنه هم کرښیزه ده.



په سطحه کې د تکو یوه راکښنه کرښیزه نه ده.

نه زاتونوالی یا جمعه کیدنه او هم نه هوموجینیتي پوره دي. د

$$T: \ (x_1, x_2) \mapsto (x_1 + 1, x_2)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

او

$$v_1 = (1,0),\ v_2 = (0,1),\ \lambda = 2$$

لپاره د بېلګې به توګه باور لري

$$T(v_1 + v_2) = (2,1) \neq (3,1) = T(v_1) + T(v_2)$$

$$T(\lambda v) = (3,0) \neq \qquad (4,0) = \lambda T(v)\ .$$

ليکونکي: هيورليک، هيورنر

يو څو بېلګې لاندې د حقيقي توابعو يا فنکشنونو جدول ښايي. دلته هرچېرته ورکړ شوي، چې د کرښيزوالي لپاره کوم شرطونه پوره دي.

ځيرونه يا فنکشن mapping	جمعي Additive	هوموجين homogen
$f \mapsto f'$	X	X
$f \mapsto \|f\|$	-	-
$f \mapsto \int_0^1 f$	X	X
$f \mapsto \max f$	-	-

(c) ketabton.com: The Digital Library

$f \mapsto f(0)$	X	X
$f \mapsto (\max f + \min f)/2$	-	X

د يوه فنکشن لپاره يوه بيلګه، زياتيز (مثبت) مګر هوموجېن نه دی، دادی، چې يو فنکشن T، چې يو کمپلکس ارزښتيزه تابع د هغې حقيقي برخه په ګوته کړي يا وښايی يا په هغې څېره شي. دلته باور لري: $T(\mathrm{i}f) \neq \mathrm{i}T(f)$

ليکونکي: هيورليګ، هيورنر

د کرښيزو توابعو کمپوزيشن Komposition linearer Abbildungen

د دوه کرښيزو توابعو

$$S: U \to V\,, \qquad T: V \to W\,.$$

لپاره سړی کمپوزيشن تعريفوي(چې يوبل پسې تړاو يا ځنځيرونه هم بلل کيږي)

$$T \circ S: \quad U \to W$$

دا د لاندې لاری

$$(T \circ S)(u) = T(S(u))\,,$$

دا په دې معنا چې په $u \in U$ باندې فنکشن S او په نتيجه باندې فنکشن T کارول کيږي، فنکشن T د فنکشن S پسې کارول کيږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دوه کرښیزو فنکشنونو کمپوزیشن بېرته کرښیز دی.

ماتریکس Matrix

په یوه تن یا جسم باندې د یوه $(m \times n)$ -ماتریکس تر نامه لاندې ($m, n \in \mathbb{N}$) دا لاندې یوه ولاړکېدېزه - یا قام الزاویه شکل پوهیږو:

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} .$$

دلته دا د A وکتورونه $(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$ د i –مې لیکې – او $(a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj})^t$ د j –مې متې(ستن یا پرته لیکه یا درځ...) وکتورونه بلل کیږي. په ځانګړي توګه $(n \times 1)$ - ماتریکس یو د لیکې - او $(1 \times n)$ - ماتریکس یو د متې یا ستني وکتور دي..

د ټولو $(n \times m)$ - ماتریکسونو ټولګه په $K^{n \times m}$ سره په نخښه کیږي، حقیقي (کمپلکس) ماتریکسونه د $\mathbb{R}^{n \times m}$ ($\mathbb{C}^{n \times m}$) سره په نخښه کیږي.

لاندې بیلګې د مختلف د ماتریکس بعدونه یا پراخېدونی ښایي.

$$\begin{pmatrix} 31 \\ 57 \\ 97 \end{pmatrix} , \quad (\mathrm{i}, 1+\mathrm{i}, -1, 3\mathrm{i}) , \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \mathrm{i} & 1+\mathrm{i} & -\mathrm{i} \\ \sqrt{3}+3\mathrm{i} & 7543 & 17 \end{pmatrix} , \quad \begin{pmatrix} 11 & 12 \\ 21 & 22 \\ 31 & 32 \end{pmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړي دوه ماتریکسونه د لیکو – همداسې د مټووکتورونه دي، دا په دې معنا چې د کومو څخه چې د یوې دیمنزیون 1 دی. بنې لور ته یو ځلوریځ یا مربع ماتریکس او یو یو ولاړګوډیز- یا مستطیلي ماتریکس دی.

لیکونکي: هیورلیګ، هیورنر

د یوه کربنیز فنکشن ماتریکس Matrix einer linearen Abbildung

د دوه K - وکتوروفضاو ترمنځ د بنسټونو $E = \{e_1, \ldots, e_n\}$ او $F = \{f_1, \ldots, f_m\}$ سره یو کربنیز فنکشن $L : V \longmapsto W$ دبنسټوکتورونو د $L(e_j) = a_{1,j}f_1 + \cdots + a_{m,j}f_m$ عکسونو یا ارزښت قیمتونو سره یواځني ټاکلي دي. دا لاندې دماتریکس انځورونه لری:

$$w_F = Av_E \longleftrightarrow w_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}v_j, \quad i = 1, \ldots, m,$$

د کومو سره چې v_j او w_i د v او $w = L(v)$ وضعییه قیمتونه (کواوردیناتونه) به نخښه کیږي نسبت و بنسټ E او F ته. د ماتریکس A په j-مه مټه کې د $L(e_j)$ کواوردیناتونه یا وضعیه قېمتونه نسبت د F بنسټ ته ځا په ځای دي.

دا چې L د یوه بنسټ د عکسونو یا ارزښتونو سره یواځنی ټاکلي، تړلي د کربنیزوالي لپاره شرایطو څخه ورکول کیږي:

$$w = L(v) = L\left(\sum_j v_j e_j\right) = \sum_j v_j L(e_j) = \sum_j \sum_i v_j a_{i,j} f_i \,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ليكو

$$w = \sum_i w_i f_i$$

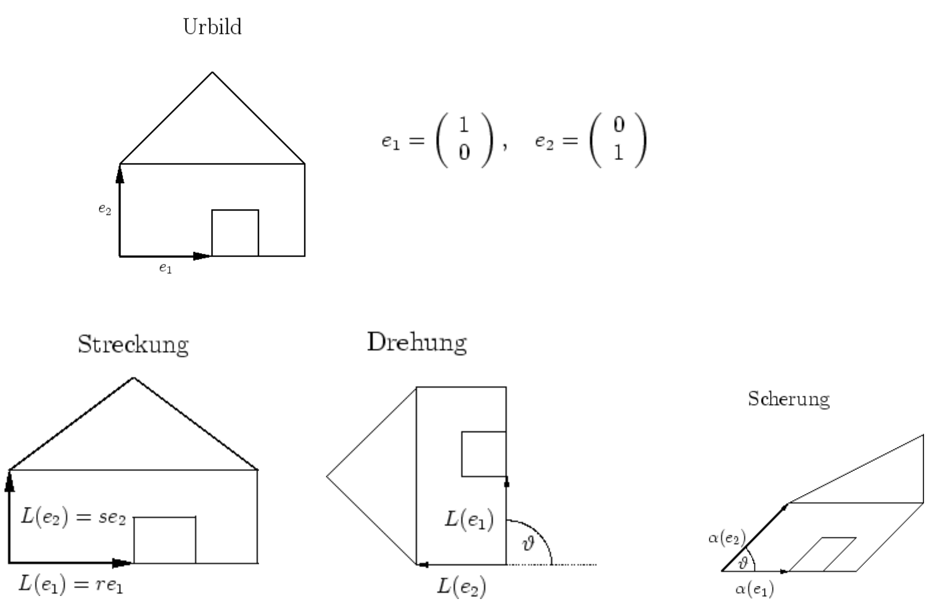
او د بنسټ وکتورونو w_i کواوردينات پرتله کيږي، داسې هم سړی غوښتل شوي د ماتريکسونو انځورونه لاس ته روړي.

ليکونکي: هيوليګ، هيورن

په لاندې کې يو څو د سطحې کرښيزې تابع

$$L:\ \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

انځور شوي دي، چې د يوون – يا واحد وکتورونو شکلونو يا بهتره ارزښتونو e_i (غوړ) له لارې کره شوي دي.



(c) ketabton.com: The Digital Library

$$A = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & \cot\vartheta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

سړی کړی شي چې د ماتریکس A انځورونه نسبت کانونیکي بنسټونو e_1, e_2 ته تړلی معلومیږی یا لوستل کیږي. د ماتریکس متې هره یوه ځانله د وکتورونو $L(e_i)$ $i = 1,2$ ، کواوردیناتونه خوندی لري.

لیکونکي: هیولیګ، هیورن

یو کرښیز فنکشن یا تابع

$$x \mapsto p(x) = a_0 + a_1 x$$

په ټکو $x = 0, 1$ باندې د هغو ارزښتونو سره تاکلې. فنکشن

$$L : p \mapsto \begin{pmatrix} p(0) \\ p(1) \end{pmatrix}$$

کرښیز دی او کېدی شي نسبت د ضریب وکتورونو

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

له لارې تعریف شوي مونومبنسټ سره

(c) ketabton.com: The Digital Library

ركربنيز الج

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

له لارې انځور شي

که بنسټ

$$p_1(x) = 1 - x, p_2(x) = x$$

استعمال شي، نو ماتريکس

$$\begin{pmatrix} p_1(0) & p_2(1) \\ p_1(0) & p_2(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ترې لاس ته راځي.

ټوليز د $\leq n$ درجې په m تکيه ځايون $x = x_1, \ldots, x_m$ کې د يوه پولينوم

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

ارزښتونه يا قيمت ټاکنه د واندرموند –ماتريکس Vandermonde-Matrix

$$V = \begin{pmatrix} x_1^0 & x_1^1 & \cdots & x_1^n \\ x_2^0 & x_2^1 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_m^0 & x_m^1 & \cdots & x_m^n \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} p(x_1) \\ \vdots \\ p(x_m) \end{pmatrix} = V \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

سره تشريح شوې يا ورکړل شوې.

(c) ketabton.com: The Digital Library

کواوردیناتونو ترانسفورمیشن د بنسټ بدلون سره

Koordinatentransformation bei Basiswechsel

د یوه بنسټبدلون $E \to E'$ سره د یوه وکتور v کواوردیناتونه د

$$v_E = A v_{E'} \quad \Leftrightarrow \quad v_{E'} = A^{-1} v_E \,,$$

سره سم ترانسفورمي کوي، د کوم سره چې د مربع ماتریکس A متې د بنسټ وکتورونو e'_i ضریبونه نسبت و بنسټ ته خوندي لري:

$$e'_i = \sum_j a_{j,i} e_j \,.$$

لیکونکي: هیولیګ، هیورن

وکتور v نسبت و بنسټ وکتور E او E' ته لاندې انځورونه لري:

$$\sum_k \lambda_k e_k = v = \sum_k \lambda'_k e'_k \,.$$

د e'_k د انځوروني په مرسته نسبت و بنسټ E ته لرو:

$$v = \sum_k \lambda'_k e'_k = \sum_k \lambda'_k \left(\sum_j a_{j,k} e_j \right)$$

$$= \sum_j \left(\sum_k a_{j,k} \lambda'_k \right) e_j = \sum_j \lambda_j e_j \,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کواوردينات پرتلي سره لاس ته راځي: $v_E = Av_{E'}$

ليکونکی:ويپېر

Bild او Kern معنا خيره يا شکل او زړي

د يوه کربنيز تابع $L : V \to W$ لپاره د

$$\ker L = \{v \in V : \ L(v) = 0\} \ \subseteq V$$

سره سړی کرن يا زړی په نخښه کوي او د

$$\text{Bild}\, L = \{w \in W : \ \exists v \in V$$

$$L(v) = w\} \ \subseteq W$$

د سره د L ارزښت يا شکل ښوول کيږي يا په نخښه کيږي.
دواړه ډېرى(ستونه) لاندي – يا برخه فضاوې دي.

ليکونکی: کيمرلې

ثبوتوو چې د K –وکتورفضا V همداسې W نسبت و کربنيزو عملياتو ته تړلي يا رابند دي يعنی دا عمليات په کې بې بنديزه اجراکېدی شي.

اول - $\ker L$ د V لاندې فضا ده: د $u, v \in \ker(L), \ \lambda \in K$ لپاره، د کربنيزوالي په بنسټ باور لري:

$$L(\lambda\, u) = \lambda\, L(u) = \lambda\, 0 = 0$$

او

$$L(u + v) = L(u) + L(v) = 0 + 0 = 0\ .$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دې په تعقيب λu او $u+v$ هم د $\ker(L)$ توکي دي.

دويم - $\operatorname{Bild} L$ د W لاندیفضا ده: د $u, v \in \operatorname{Bild} L$ لپاره د $u = L(x), v = L(y)$ او $\lambda \in K$ سره د L کرښيزوالي په بنسټ لاندې صدق کوي:

$$\lambda u = \lambda L(x) = L(\lambda x)$$

او

$$u + v = L(x) + L(y) = L(x+y) \ .$$

دا چې V يوه وکتورفضا ده، نو اړونده له مخ څېروني يا عکسونه يا تابع وې هم شته او په تعقيب λu او $u+v$ هم د $\operatorname{Bild} L$ توکي دي.

ليکونکی: ويپر

د Bild او Kern ابعاد يا براخيدوني Dimension von Bild und Kern

د يوه کرښيز فنکشن $L : V \to W$ لپاره باور لري

$$\dim V = \dim \ker(L) + \dim \operatorname{Bild}(L) \ ,$$

که وي: $\dim V < \infty$

د دې لپاره چې د بعد کټمتوالی وښايو، نو د $\ker L$ لپاره يو بنسټ $E' = \{e_1, \ldots, e_m\}$ ټاکو او دا د $\{e_{m+1}, \ldots, e_n\}$ سره د V و بنسټ E ته پوره کوو. دا چې

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$L\left(\sum_{i=1}^{n} v_i e_i\right) = \sum_{i=m+1}^{n} v_i L(e_i),$$

نو لرو:

$$\mathrm{Bild}\, L = \mathrm{span}\, F, \quad F = \{L(e_{m+1}), \ldots, L(e_n)\}.$$

دا چې پسې F كربنيز خپلواک دی، يعني د $\mathrm{Bild}\, L$ بنسټ، نو له

$$\sum_{i=m+1}^{n} v_i L(e_i) = 0$$

لاس ته راځي $\sum_{i=m+1}^{n} v_i e_i \in \ker L$ او له دې سره $v_i = 0$.

دا غوښتونی د بعدفرمول اوس د بنسټوکتورونو تعداد څخه لاس ته راحي.

ليكونكي: هيوليک، هيورن

د بعدفرمول د ښوونې لپاره د پولينومونو - چې له $\leq n$ درجه لري- په فضا باندې k-م مشتق څېړل كيږي.

لومړی دې $k = 1$ او $n = 2$ وي. د پولينومونو د فضا لپاره چې درجه يې ≤ 2 ده $\{1, x, x^2\}$ بنسټ جوړوي، دا فضا پس بعد 3 لري. د $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ لپاره

$p'(x) = a_1 + 2a_2 x$ يو پولينوم دی چې درجه يې ≤ 1 ده. بيلدفضا نو بعد 2 لري.

د مشتقنيولو سره ثابته له منځه ځي يا وركيږي. دا يوه يو بعدې لاندې - برخفضا جوړوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د تابع ګرن يا زړی بعد 1 لري او له دې سره د $3 = 1 + 2$ سره د بعدفرمول پوره دی يا بنول شوی.

په توليزه توګه پولينوم لاندې فرمول لري:

$$p(x) = \sum_{l=0}^{n} a_l x^l$$

او k -م مشتق

$$p^{(k)}(x) = \sum_{l=k}^{n} \frac{l!}{(l-k)!} a_l x^{l-k} \,.$$

بيلد يا څېره يا ارزښت د $\leq n-k$ درجې پولينوم دی او پولينومونه چې $< k$ درجه لري له منځه ورل کيږي. پس د بعدفرمول لاندې بڼه لري:

$$n+1 = \underbrace{((n-k)+1)}_{\dim \mathrm{Bild}} + \underbrace{k}_{\dim \ker} \,.$$

•

ليکونکي: هيوليګ، هيورن

معکوس يا په څټ تابع (څېرونه يا فنکشن)Inverse Abbildung

يوه کرښيزه تابع $L : V \to W$ تيک هلته انجکتيو يا په کې ده، که $\ker L = 0_V$ وي. په دې حالت کې د

$$w \mapsto v, \quad w = L(v) \,,$$

له مخې يو معکوس تابع $L^{-1} : \mathrm{Bild}\, L \to V$ تعريف شوې، چې دا هم کرښيزه ده

(c) ketabton.com: The Digital Library

په ځانګړي توګه باور لري

$$L^{-1} \circ L(v) = v\,, \quad L \circ L^{-1}(w) = w$$

د ټولو $v \in V$ او $w \in \text{Bild}\, L$ لپاره

ليکونکي: هيوليک، هيورن

د L د ګرښيزوالي په دليل صدق کوي

$$L(v_1) - L(v_2) = L(v_1) + L(-v_2) = L(v_1 - v_2)\,,$$

او له دې اړيکو لاس ته راځي:

$$L(v_1) = L(v_2) \Leftrightarrow v_1 - v_2 \in \ker L\,.$$

د يوه انجکتيو (په کې) ګرښيزې تابع لپاره کېدی شي چې کرن يازړی فقط صفروکتور خوندي ولري.

دا معکوس تابع کرښيزه ده له لاندې لاس ته راځي

$$L^{-1}(L(v_1) + L(v_2)) = L^{-1}(L(v_1 + v_2)) = v_1 + v_2 = L^{-1}(L(v_1)) + L^{-1}(L(v_2))\,,$$

$$L^{-1}(\lambda L(v_1)) = L^{-1}(L(\lambda v_1)) = \lambda v_1 = \lambda L^{-1}(L(v_1))\,.$$

ليکونکي: هيوليک، هيورن

د ماتريکسونو وکتورفضا Vektorraum der Matrizen

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $(m \times n)$ -ماتریکسونه یو وکتورفضا جوړوي، دا په دې معنا چې دا کېدی شي سره جمعه شي او د سکالار سره ضرب شي. دا کارونې یا عملیې په لاندې توګه کمپوننتېوله تعریف دي:

$$C = A + B \Leftrightarrow \qquad c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j},$$

$$B = \lambda A \Leftrightarrow \qquad b_{i,j} = \lambda a_{i,j} .$$

لیکونکي: هیولیګ، هیورن

د ماتریکسونو ضرب Matrix-Multiplikation

د یوه $(n \times m)$ -ماتریکس A او یوه $(m \times s)$ -ماتریکس B ضرب لاندې د $(n \times s)$ —ماتریکس دی:

$$C = AB \ , \qquad c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj} \ ,$$

دا په دې معنا چې د c_{ij} دتعریف لپاره د A د i لیکې توکي او د B د j متې توکي سره جمعه کیږي:

$$\begin{pmatrix} & & \\ & c_{ij} & \\ & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{i1} & \cdots & a_{ik} & \cdots & a_{im} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{kj} \\ \vdots \\ b_{mj} \end{pmatrix} .$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پام دې وي، چې له دې سره باید د A د منو تعداد (ګڼون) د B د لیکو تعداد(ګڼون) سره برابر وي.

د ماتریکس ضرب همغه د کرښيزو توابعو کمپوزیشن دی

$$T : u \mapsto v = Bu, \quad S : v \mapsto w = Av\ ,$$

دا په دې معنا چې C د $T \circ S$ ماتریکس انځورونه ده.

د کمپوزیشن لپاره د

$$w_i = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} v_k, \quad v_k = \sum_{j=1}^{s} b_{kj} u_j$$

له مخې تعریف شوي تابع په لاندې ډول لاس ته راوړي.

$$w_i = \sum_k \sum_j a_{ik} b_{kj} u_j = \sum_j \left[\sum_k a_{ik} b_{kj} \right] u_j\ .$$

په ګوډیزه یا کونجیزه نوکانو یا که غواړی قوسونو کې افاده د ماتریکسونو ضرب دی او کمپوزیشن توابعو د ماتریکس C سره سرخوري(یا باربر دی).

لیکونکي: هیولیګ، هیورن

په لاندې یو څو معلوم د ماتریکسونو ضربونه ورکړشوي دي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\begin{pmatrix} 1 & 10 & 100 \\ 100 & 10 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 321 & 213 & 132 \\ 123 & 312 & 231 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 13 \\ 14 & 26 \\ 21 & 39 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 25$$

$$\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2i \end{pmatrix}$$

د ستراسن(وبينه: شتراس) الګوريتم Strassens Algorithmus

که په ورسره بلد ډول د دوه (2×2) -ماتريکسونو A او B ضرب $C = AB$ تر څيرنې لاندې ونيسو، نو سړی اته ضربونو ته اړتيا لري. په ډېر هکبکوالي(چې د څه انتظار نه کيږي او پيښ شي) شتراسن وښوول چې اوه ضربونه بسيا کوي

[V. Strassen: Gaussian elimination is not optimal, Numer. Math. 13 (1969). 357-361]. Man berechnet die Produkte

سړی ضربونې شميري

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$
\begin{aligned}
p_1 &= (a_{1,2} - a_{2,2})(b_{2,1} + b_{2,2}) \\
p_2 &= (a_{1,1} + a_{2,2})(b_{1,1} + b_{2,2}) \\
p_3 &= (a_{1,1} - a_{2,1})(b_{1,1} + b_{1,2}) \\
p_4 &= (a_{1,1} + a_{1,2})b_{2,2} \\
p_5 &= a_{1,1}(b_{1,2} - b_{2,2}) \\
p_6 &= a_{2,2}(b_{2,1} - b_{1,1}) \\
p_7 &= (a_{2,1} + a_{2,2})b_{1,1}
\end{aligned}
$$

او د C ضرب د زياتون يا جمعي جوړولو له لارې لاس ته راځي.

$$
\begin{aligned}
c_{1,1} &= a_{1,1}b_{1,1} + a_{1,2}b_{2,1} &= p_1 + p_2 - p_4 + p_6 \\
c_{1,2} &= a_{1,1}b_{1,2} + a_{1,2}b_{2,2} &= p_4 + p_5 \\
c_{2,1} &= a_{2,1}b_{1,1} + a_{2,2}b_{2,1} &= p_6 + p_7 \\
c_{2,2} &= a_{2,1}b_{1,2} + a_{2,2}b_{2,2} &= p_2 - p_3 + p_5 - p_7.
\end{aligned}
$$

كوموتاتور Kommutator

د دوه $(n \times n)$ - ماتريکسونو کموتاتور د $[A, B] = AB - BA$ په حيث تعريف شوی او په ټوليزه توګه ناصفر. د $[A, B] = 0$ په حالت کې ماتريکسونه A او B کموتي کيدونکی ماتريکسونه بلل کيږي.

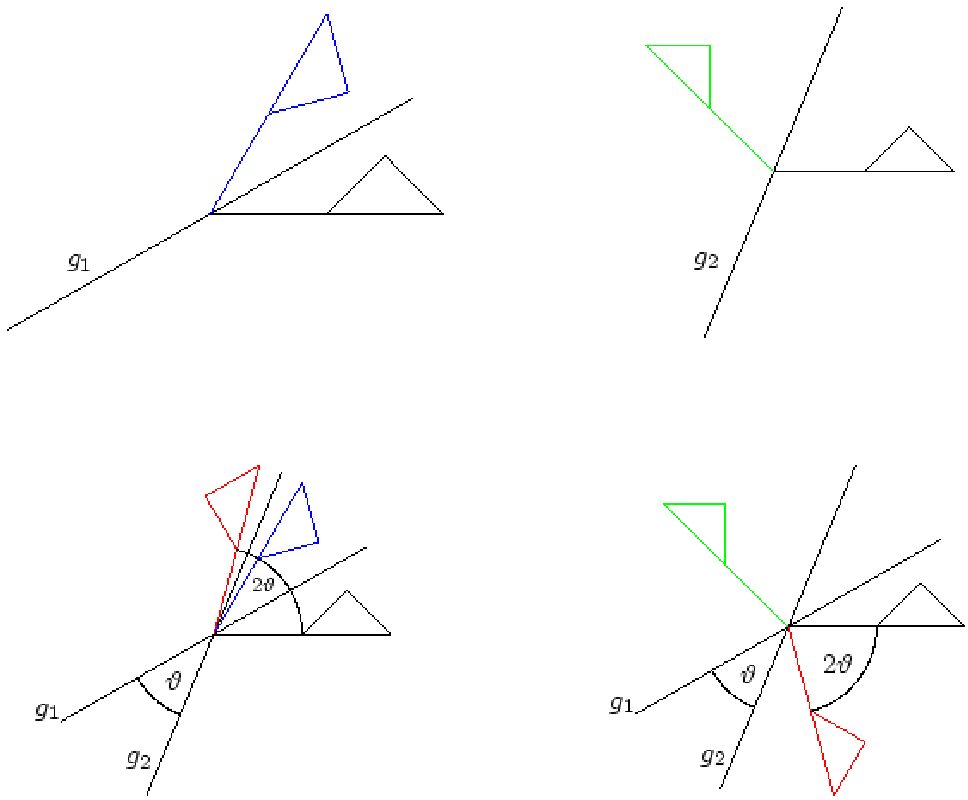
ليکونکي: هيوليک، هيورن

په مختلفو محورونو g_1 او g_2 د دوه وکتوروونو S_1 او S_2 دهنداروني (که غواړی انغکاس) يو په بل پسي راوړنه کې د لړی پرلپسي رول نه لري.

دا پورته ځيره يا عکس د يوګونو هنداررونو شکلونه ښايی. په لاندې لړی کې کيڼ ډبله هنداررونه $S_2 \circ S_1$ انځور ده اوښي لور ته ډبله يا دوه واره هنداررونه $S_1 \circ S_2$. د هر

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځله نتيجې يې د کرښو ترمنځ په دوه برابره کونج څرخون دی، په هر حالت په مختلو لورو.



که g_1 د لومړی کونجنيمي په څېر ونيسو او د g_2 د y -محور نو توابع د ماتريکس انځورونه لري.

$$v = S_1 u = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} u\,,$$

$$v = S_2 u = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} u\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ډبل هندارونه يا ا نعكاسونه لاندې انځورونه لري

$$w = S_2 S_1 u = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} u$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} u \, ,$$

$$w = S_1 S_2 u = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} u$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} u \, .$$

په دې حالت کې کوموتاتور په لاندې ډول دی

$$[S_1, S_2] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \, .$$

ليکونکي: هيوليک، هيورنر

په ځپ يا معکوس ماتريکسونه Inverse Matrix

د يوه معکوس کېدونکي کرښيز تابع $Av \mapsto v$ لپاره A^{-1} د A معکوس ماتريکس په نخښنه کوي، دا په دې معنا چې

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

یون – واحد ماتریکس سره؟

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

معکوس کېدونکي په همدې ډول رېګولار ماتریکسونه $A \in K^{n\times n}$ نسبت و ضرب ته یو ګروپ جوړوي، کرښیز ګروپ چې د $\mathrm{GL}(n,K)$ سره په نخښه کيږي.

باور لري

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

د $A, B \in \mathrm{GL}(n,K)$ لپاره .

باور لري

$$B^{-1}A^{-1}AB = B^{-1}EB = B^{-1}B = E\ ,$$

او له دې سره $B^{-1}A^{-1}$ و AB ته معکوس دی

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دياګونال ماتريکس معکوس داسې لاس ته راځي، چې د دياګونال توکو معکوس يا په ځنې ارزښت جوړيږي،، د بېلګې په توګه:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1/7 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

د دريګودئ – يا مثلث متاريکس لپاره په معکوسوني کې د مثلث بڼه ساتلې پاتيې کيږي، د بېلګې په توګه:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

په ټوليزه توګه د ماتريکس په ځنې يا معکوس پوره ځاي نيولی يا ډک دی، د بېلګې په توګه:

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

ليکنې بايد د يوه کرښيز مساواتسيتم له لارې و ټاکمل شي.

ليکونکي: هيوليک، هيورنر

تراسپوني او ادجونګيري ماتريکسونه

Transponierte und adjungierte Matrix

که د يوه ماتريکس A ليکې اوو متې سره بدلې شي، نو د ترانپوني ماتريکس $B = A^t$ ځخه غږيږو، دا په دې معنا چې

$$b_{i,j} = a_{j,i}.$$

که د يوه کمپلکس ماتريکس A سربېره پر دې ليکنې کنجوګير شي، نو اديونګيري ماتريکس ترې لاس ته راځي، دا په دې معنا چې

(c) ketabton.com: The Digital Library

$c_{i,j} = \bar{a}_{j,i}$.

يو ماتريکس د $A = A^{\mathsf{t}}$ سره سيومتريک بلل کيږي، يوه ماتريکس د $A = A^*$ سره د پخپله اديونګيري په ځبر ده يا هرميتيکي Hermitesch ده. د حقيقي ماتريکسونو لپاره کليمي سيومتريک او هرميتيکي همغه (يوه) معنا لري.

لاندي قانون باور لري:

- $(AB)^{\mathsf{t}} = B^{\mathsf{t}}A^{\mathsf{t}}$ او $(AB)^* = B^*A^*$

- $(A^{\mathsf{t}})^{-1} = (A^{-1})^{\mathsf{t}}$ او $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$

د يوې ليکنې لپاره په $C^{\mathsf{t}} = (AB)^{\mathsf{t}}$ کې باور لري

$$c^{\mathsf{t}}_{ji} = c_{ij} = \sum_k a_{ik}b_{kj} = \sum_k a^{\mathsf{t}}_{ki}b^{\mathsf{t}}_{jk} = \sum_k b^{\mathsf{t}}_{jk}a^{\mathsf{t}}_{ki}$$

او له دې سره $C^{\mathsf{t}} = B^{\mathsf{t}}A^{\mathsf{t}}$. دا چې $\overline{a+b} = \bar{a} + \bar{b}$ او $\overline{ab} = \bar{a}\bar{b}$ باور لري، نو دا د اديونګيري لپاره هم تيک دی.

له

$$E = E^{\mathsf{t}} = \left(AA^{-1}\right)^{\mathsf{t}} = \left(A^{-1}\right)^{\mathsf{t}} A^{\mathsf{t}}$$

لاس $\left(A^{-1}\right)^{\mathsf{t}} = \left(A^{\mathsf{t}}\right)^{-1}$ ته راځي. په ورته توګه د ادجونګيري لپاره هم صدق کوي.

ليکونکي: هيوليک، هيورنر

(c) ketabton.com: The Digital Library

شپور Spur

(د ا لماني ژبې څخه د شپور پښتو معنا: نخښه يا علامه)

شپور د يوه $n \times n$ -ماتريکس A اصلي دوه کونترې توکو(وتر) جمع د A شپور بلل کيږي،

$$\mathrm{Spur}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}\ .$$

که A, B په خوښه $(n \times n)$ - ماتريکسونه وي، نو باور لري:

$$\mathrm{Spur}(AB) = \mathrm{Spur}(BA).$$

له دې لاس ته راځي، د يوه رېګولار ماتريکس T او يوه په خوښه ماتريکس A لپاره صدق کوي:

$$\mathrm{Spur}(T^{-1}AT) = \mathrm{Spur}(A).$$

دا دا معنا لري، چې شپور يا سپور د کواوردينات ترانفورميشن لاندېinvariant (نسبت يو ې کچونې يا اندازه کوني ته بې تغيره پتې کيدل) يا بې تغيره پاتيږي.

د يوه ماتريکس رانګ Rang einer Matrix

د يوه $(m \times n)$ -ماتريکس لپاره د کربنيز خپلواکو متو ماکسيمال ګڼون ياتعداد د ماکسيمالو ګربنيزو خپلواکو کيلو سره يو په بل پريوحي يا يو بل سره مساوي دي او د رانګ A په لکنيز ډول $\mathrm{Rang}\,A$ بلل کيږي،

په ځانګړي ډول باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\operatorname{Rang} A \leq \max\{m, n\}.$$

د ماکسیمال کرښیز خپلواکو متو $v_1, \ldots, v_n$ تعداد د وکتورفضا پعد به ګوته کوي

$$V = \operatorname{span}\{v_1, \ldots, v_n\},$$
،

ځکه چې سرې کړی شي د متو څخه بنسټ وټاکي. په ورته توګه وینا د لیکو $w_1, \ldots, w_m$ څخه غزیدلي وکتورفضا W لپاره هم صدق کوي.

غوښتنه $\dim V = \dim W$ د n پسي اندکشن له لارې وښوول شي.

ساده ښوول کیږي، چې $\dim V$ او $\dim W$ د لاندې عملیو یا کارونو سره بې تغیره پاتیږي:

- د متو یا لیکو بدلېدنه یا پرموتیشن

- د یوه سکالار جمعه ذېرځله یا د یوه ذېرځله سکالار سره د یوې متې (لیکې)حمعه د یوه بلې متې (لیکې) سره.

که $A \neq 0$ وي، سرې کړی شي دا عملیه په لاندې بڼهٔ

$$B = \begin{pmatrix} b_{1,1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & A' & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

راوړي.

د پرموتیشن سره لومړی $b_{1,1} \neq 0$ لاس ته راځي او بیا د لومړی لیکې یا کیلې او متې پاتې توکي د مناسب جمعې له لارې له منځه وړي. په ټیک ډول لومړي د لومړی متې

(c) ketabton.com: The Digital Library

$(-b_{1,j}/b_{1,1})$ -ځله و j -مې متې ($j = 2, \ldots, n$) ته جمعه کوي او په ورته توګه د ليکو وکتورونو سره هم دا عمل وخ ته بيولاي شو . که د V' او W' سره ْوښتوني وکتورفضاوې د $(m-1)\times(n-1)$ - ماتريکس A' لپاره ، نو لاس ته راځي

$$\dim V = \dim V' + 1, \quad \dim W = \dim W' + 1$$

او د ايندکشن له لارې غوښتنه.

ليکونکي: هيوليګ، هيوررنر

يو څو تيپيکي حالتونه د درې (3×2) -متريکسونو سره دليدلو شوي يا ورکړ شوي دي

$$\mathrm{Rang}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \quad \mathrm{Rang}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = 2, \quad \mathrm{Rang} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \\ 9 & 12 \end{pmatrix} = 1\,.$$

د دريم ماتريکس لپاره صدق کوي $4S_1 = 3S_2$ د متو S_1 او S_2 لپاره او د ليکو $2Z_3 = 3Z_2 = 6Z_1$ Z_1, Z_2 او Z_3 لپاره. په دواړو حالتونو کې نو د غوښتوني وکتورفضا ديمنژن يا بعد برابر په 1 دی.

ليکونکي: هيوليګ، هيوررنر

د يوه ماتريکس نورم Norm einer Matrix

د يوه وکتور نورم د ماتريکس نورم

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\|A\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|$$

ته بنسټ ووي د نورم خویونو سربېره (مثپتوالی، هوموچی‌نیتي، مثلثنمساوات)

$$\|AB\| \leq \|A\|\|B\|,$$

باور لري، دا په دی کعنا چی د ورسره تنظیم شوی ماتریکس نورم سبضریبي submultiplikativ دی.

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

په لاندې کې به یوګوني خویونه د ازمایني له لارې زښوول شي:

مثبتوالی: د وکتور فضا تعریف له لارې تظمین دی، چې $\|A\| \geq 0$ دی. که A صفرمآتریکس وي، نو فقط صفروکتور 0د څېرې په څېر مخ ته لرو. که له بلې خوا نورم صفر وي، نو فقط صفروکتور د څېرې په څېر رامنځ ته کیږي، او تابع یا فنکشن د صفرماتریکس سره تشریح کیږي.

Homogenitätهوموحنیتي:

$$\max_{\|x\|=1} \|\lambda Ax\| = \max_{\|x\|=1} |\lambda|\|Ax\| = \|\lambda A\|$$

$$|\lambda| \max_{\|x\|=1} \|Ax\| = |\lambda|\|A\|. =$$

$$\|\lambda A\| = \max_{\|x\|=1} \|\lambda Ax\| = \max_{\|x\|=1} |\lambda|\|Ax\|$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \quad |\lambda| \max_{\|x\|=1} \|Ax\| = |\lambda| \|A\| \, .$$

Dreiecksungleichungمثلثات برابرون :

$$\begin{aligned} \|A+B\| &= \max_{\|x\|=1} \|(A+B)x\| = \max_{\|x\|=1} \|Ax+Bx\| \\ &\le \max_{\|x\|=1} \left(\|Ax\| + \|Bx\|\right) \\ &\le \max_{\|x\|=1} \|Ax\| + \max_{\|x\|=1} \|Bx\| = \|A\| + \|B\| \, . \end{aligned}$$

Submultiplikativitätسب ضريبوالی:

د $B = 0$ لپاره $AB = 0$ دي او له دې سره نامساوات پوره دی. د $B \neq 0$ لپاره دی:

$$\begin{aligned} \|AB\| &= \sup_{x\neq 0} \frac{\|ABx\|}{\|x\|} = \sup_{x:Bx\neq 0} \frac{\|A(Bx)\|}{\|Bx\|} \frac{\|Bx\|}{\|x\|} \\ &\le \sup_{y\neq 0} \frac{\|Ay\|}{\|y\|} \sup_{x\neq 0} \frac{\|Bx\|}{\|x\|} = \|A\| \|B\| \, . \end{aligned}$$

د لومړي بڼې بدلون سره ، جې په حقيقت کې ډېری یا سټ په یوه سوپرېموم Supremumڅېره کيږي محدوديږي، مګر فقط وکتورونه ترې لرې کيږي، چې صفروکتور دڅېرې په ډول لري او له دې سره سوپرېموم نه اغيزمن کوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ليکونکي: هيوليک ، کرايخ

د ليکو د جمعې نورم Zeilensummen-Norm

د وکتورونو لپاره ماکسيمومو نورم $\|v\|_\infty = \max_i |v_i|$ د ماتريکسونو لپاره د ليکوجمعي نورم

$$\|A\|_\infty = \max_i \sum_j |a_{ij}|$$

تنظيم دی.

ليکونکي: هيوليک ، کرايخ

د $\|x\|_\infty = \max_j |x_j| = 1$ لپاره

$$\|Ax\|_\infty = \max_i \left| \sum_j a_{ij} x_j \right| \le \max_i \sum_j |a_{ij}| ,$$

دی

او سړی لاس ته راوړي

$$\|A\|_\infty = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|_\infty \le \max_i \sum_j |a_{ij}| .$$

که سړی ونيسي يا فرض کړي، چې ماکسيموم د $i = k$ لپاره فرض شوی يا نيول شوي، نو مساوات د

$$x_j = \operatorname{sign} a_{kj}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

انتخاب له لارې لاس ته راځي، څکه چې دی:

$$\left|\sum_j a_{kj} x_j\right| = \sum_j \|a_{kj}| \,.$$

ليکونکي: هيوليک ، کرايخ

د ماتريکس د ډکونې جوړښت Belegungsstruktur von Matrizen

د صفر سره مختلف ماتريکس توکو $a_{i,j}$ د تنظيم سره سم د لاندې ترمنځ توپير کوي

اول – دياګونالماتريکس: $a_{i,j} = 0$ د $i \neq j$ لپاره،

باند ماتريکسونه Bandmatrizen: د لپاره د سره د صفر نه مختلفو ماتريکسونو د دياګونالو شمېر، چې د باند سور په څېر په نخښه کيږي يا نومول کيږي،

پورته (کښته) مثلث ماتريکسونه: $a_{i,j} = 0$ د $i < j$ ($i > j$) لپاره.

په توليزه توګه يو $(m \times n)$ - ماتريکس ضعيف ډکشوی، که فقط توکي $c\max(m,n)$ د صفي سره نامساوي وي، د يوې نه ډېرې لوې ثابتې c سره.

ليکونکي: اپپ، هيوليک

اورتوګونال او يونيتار ماتريکسونه Orthogonale und unitäre Matrizen

(c) ketabton.com: The Digital Library

يو کمپلکس $(n \times n)$ - ماتريکس A يونيتار بلل کيږي، که ولرو

$$A^{-1} = \overline{A}^t = A^* ,$$

دا په دې معنا چې که د A متې د $\mathbb{C}^n$ يو اورتوګونال بنسټ جوړ کړي.

د حقيقي ماتريکسونو لپاره (لکه په سکالار ضرب کې) کمپلکس کنجګيشن،

$$A^{-1} = A^t ,$$

او سړی د يوه اورتوګونال ماتريکس څخه غږيږي.

اورتوګونال (يونيتار) ماتريکسونه د($\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$) يو لاندې – برخګروپ جوړوي

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

د هادامارد – ماتريکسونه Hadamard-Matrizen

د $n = 2^k$ لپاره تر سکالار کېدنوپورې اورتوګونال ماتريسکونه شتون لري د H_k
د $n \times n$ بعد په $\{-1, 1\}$ کې د ليکنو سره داسې په نامه هادامارد ماتريکسونه.

د هاداماد لومړی ماتيکسونه دي:

$$H_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad H_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په ټوليزه توګه ماتريسونه د ريکورزيون

$$H_{2k} = \begin{pmatrix} H_k & H_k \\ H_k & -H_k \end{pmatrix}$$

سره جوړکړي.

ليکونکي: اېپ، هيوليګ

د فورير (وېينه: فورېي) ماتريکسونه Fourier-Matrizen

د توان جوړولو له لارې د يوون - يا واحد ريښې

$$w_n = \exp(2\pi\mathrm{i}/n)$$

سړی داسې په نامه فورېي ماتري:س لاس ته راوړي

$$W_n = \begin{pmatrix} w_n^{0\cdot 0} & \cdots & w_n^{0\cdot(n-1)} \\ \vdots & & \vdots \\ w_n^{(n-1)\cdot 0} & \cdots & w_n^{(n-1)\cdot(n-1)} \end{pmatrix}.$$

دا د نورمي کولو($W_n \to W_n/\sqrt{n}$) پسې يونيتار دي، دا په دې معنا چې $W_n^* W_n/n$ يوون – يا واحد ماتريکس دی.

ليکونکي: اېپ، هيوليګ

(c) ketabton.com: The Digital Library

د متو اورتوګوناليټي ساده ازمايل کيږي. د $(j+1)$ ـمو او $(k+1)$ ـمو متو سکالار ضرب

$$\sum_{\ell=0}^{n-1} w_n^{\ell j}\overline{w_n^{\ell k}} = \sum_{\ell} w_n^{(j-k)\ell} = \frac{w_n^{(j-k)n}-1}{w_n^{j-k}-1},$$

دی، او داچې $w_n^n = 1$ دی، نو صورت يا ماتباندې صفر دی.

ليکونکي: اپپ، هيوليک

د $n=4$ لپاره $w_4 = \exp(2\pi\mathrm{i}/4) = \mathrm{i}$ دی، او سرى لاس ته راوړي

$$W_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \mathrm{i} & -1 & -\mathrm{i} \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -\mathrm{i} & -1 & \mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

په 2 د وېشنې وروسته W_4 يونيتار دی، دا په دې معنا چې

$$\left(\frac{1}{2}W_4^*\right)\left(\frac{1}{2}W_4\right) = E.$$

له دې امله د فوريي ماتريکسونو د سيومترى والى له امله $W_4^* = \overline{W_4}^{\mathrm{t}} = \overline{W_4}$ دی.

ليکونکي: اپپ، هيوليک

نورم ريښتونې يا ـ وفاداره اورتوګونال ا و يونيتار ماتريکونه

Normtreue orthogonaler und unitärer Matrizen

(c) ketabton.com: The Digital Library

يو حقيقي (كمپلكس) ماتريكس A ټيک هلته اوتوګونال (يونيتار) دی، که دا د هر وکتور اوکليد(اقليدسeuklidische) نورم انواريانت پرېږدي:

$$|Av| = |v| .$$

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

بسيا کوي، چې کمپلکس حالت وڅېړو، چې حقيقي حالت په بر کې نيسي.

اول - A يونيتار ده، نو باور لري

$$(Ay)^*(Ax) = y^*A^*Ax = y^*x$$

پس په ټوليزه توګه د کمپلکس وکتورونو سکالار ضرب لاس ته راځي، چې د نورمريښتونوالی په بر کې لري.

دويم – د نورم ريښونوالي څخه لومړی لاس ته راځي، چې د A د متې وکتور v_j د يوون وکتورونو e_j د عکسونو نورم يوی خوندي لري. د دې لپاره چې وښايو چې مختلفې متې اوتوګونال دي،نو $\lambda = \exp(i\vartheta)$ ټاکو، داسې چې لرو:

$$(\lambda v_k)^* v_j \in \mathbb{R} .$$

پسې د نورريښتونوالی او اقليدس نورم تعريف په بنسټ لرو

$$2 = |e_j + \lambda e_k|^2 = |v_j + \lambda v_k|^2 = |v_j|^2 + |\lambda|^2 |v_k|^2 + 2\,\mathrm{Re}(\lambda v_k)^* v_j = 2 + 2\overline{\lambda} v_k^* v_j ,$$

په تعقيب بايد په بنۍ لور سکالار ضرب ورک شي.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځيوکليکي (تلبيرته راګرځېدوني) ماتريکسونه Zyklische Matrizen

د ځيکليکي $(n \times n)$-ماتريکسونو متې د لومړی متې د ځيوکليکي راکښني له لارې جوړيږي:

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots \\ a_1 & a_0 & a_{n-1} & \cdots \\ a_2 & a_1 & a_0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}.$$

د ماتريکسونو ضرب سره ځيوکليکي جوړښت ساتلی يا خوندي پاتي کيږي.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

د يوه ځيوکليکي ماتريکس-ضرب $C = AB$ توکی دي:

$$c_{i,k} = \sum_{j=1}^{n} a_{i-j \bmod n} b_{j-k \bmod n}\,.$$

د اچي

$$\{0,\ldots,n-1\} = k + \{0,\ldots,n-1\} \bmod n\,,$$

کېدی شي سری په زياتوونو (د جمعي اجزاوو) د j په ځای $j+k$ ځای په ځای کړي، کوم چې ښايي، چې $c_{i,k}$ فقط د $i-k \bmod n$ په واک کې دي.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

د ځيوکليکي ماتريکسونو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 1 \\ 1 & -3 & 4 \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 5 \\ 5 & 0 & -2 \\ -2 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

ضرب   دا لاندې څیوکلیکي ماتریک دی:

$$C = AB = \begin{pmatrix} 18 & 11 & -23 \\ -23 & 18 & 11 \\ 11 & -23 & 18 \end{pmatrix}.$$

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

ستوښاستيکي ماتریکسونه

یو $(n \times n)$ -ماتریکس   ستوښایتیکي بلل کیږي، که $p_{i,j} \geq 0$ وي او

$$\sum_{j=1}^{n} p_{i,j} = 1, \quad i = 1, \ldots, n.$$

ستوښاستيکي ماتریکس د احتمالوالو x_i تغیر ښايي د لاندې له مخې:

$$x'_j = \sum_i x_i p_{i,j}.$$

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

د P د ښویونو په ښنسټ x' هم یو د احتمالوالي وکتور دی، دا په دې معنا چې

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x'_j \geq 0, \quad \sum_j x'_j = 1\,.$$

دا نه کمښتوالی یا نه منفیوالی ښرګند دی او د جمعي انواریانت له لاندې ښخه تعقیبیږي:

$$\sum_j \sum_i x_i p_{i,j} = \sum_i x_i \underbrace{\sum_j p_{i,j}}_{=1}\,.$$

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

دیترمینانت د انتیسیومتري کرښیزفورم په حیث

Determinante als antisymmetrische Multilinearform

د یوه مربع ماتریکس A دیترمینانت

$$\det A = \det(a_1, \dots, a_n)$$

د متي a_j سره کېدی شي د لاندې خویونو له لارې تعریف شي.

اول – ډېرکرښیزوالی

$$\det(\dots, \alpha a_j + \beta b_j, \dots) = \alpha \det(\dots, a_j, \dots) + \beta \det(\dots, b_j, \dots)\,.$$

دویم - انتیسیومتري:

$$\det(\dots, a_j, \dots, a_k, \dots) = -\det(\dots, a_k, \dots, a_j, \dots)\,.$$

دریم – نورمي کونه

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\det(e_1, \dots, e_n) = 1\,, (e_k)_\ell = \delta_{k\ell}\,.$$

د دې قانون سره دیترمینانت د n –ځله ضرب سره وده کولی شي:

$$\det A = \sum_{i \in S_n} \sigma(i) a_{i_1,1} \cdots a_{i_n,n}\,,$$

د کوم سره چې د $(1, \dots, n)$ په ټولو ځای بدلونو $(i_1, \dots, i_n)$ سره جمعه کړي او σ د ځاي بدلونون سره مخنخښه ښایو.

سړی دا لاندې لیکدود هم استعمالوي

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}\,.$$

لیکونکي: هیولیګ، هیونر

د زیاتیدونو (د جمعې اجزاوو) د تعداد د جګیدو له امله($n!$ ځای بدلونونه شتون لري) د دیترمینانت د عملي آنځورونو لپاره ښه مساعدنه دی. مګر دا ترلی د تعریف شوو خویونو ترلی (د عملیو له لارې) دا د ښووني او د نوروو خویونو د لاس ته راوړلو لپاره اړیین دي. له دې امله دا د ورته (برابر ازښته) تعریف لپاره ورکړشوی دی.

لومړ ی ښایو، چې غوښتل شوي خویونه مو اړیین د دیترمینانت ودیزوني ته بیایي، په اړیینه توګه د برموتیشن په مرستې .

د دې سره د A متې د یوون – یا واحد وکتورونو e_i د کربنیز کمبینیشنونو په حیث انځوروي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$a_j = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} e_i \,.$$

د ډېرکربنيزوالي په بنسټ باور لري:

$$\det A = \sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_n=1}^{n} a_{i_1,1} \cdots a_{i_n,n} \underbrace{\det(e_{i_1}, \ldots, e_{i_n})}_{=:d_i} \,.$$

دا جمعه لکه چې لاس ته راځي کيدی شي ساده شي. که له دې دوه يوون - يا واحدوکتورونه برابر وي، نو د انتيسيومتري په بنسټ d_i صفر دی:

$$\det(\ldots, e_k, \ldots, e_k, \ldots) = -\det(\ldots, e_k, \ldots, e_k, \ldots) \,.$$

که ټول i_ν مختلف وي، دا په دې معنا چې

$$(i_1, \ldots, i_n)$$

يو پرموتيشن دی د $(1, \ldots, n)$، نو صدق کوي

$$d_i = (-1)^{\tau(i)} \,,$$

د کوم سره چې $\tau(i)$ مودولو 2 د بدلونونو يواځنی ټاکلی تعداد(ګڼون) په نخښنه کوي ، د کوم لپاره چې واحدوکتور په کانونيکي لړی پرلپسې راوړی شو. ځای بدلون د مخنخښې تعريف پسې دی:

$$\det(e_{i_1}, \ldots, e_{i_n}) = \sigma(i) \det(e_1, \ldots, e_n) = \sigma(i) \,,$$

دا په دې معنا چې سړی ورکړ شوې وديزينه لاس ته راوړي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

برعکس کېدی شي و ازمايو، چې وديزينه د غوښتوني قانون سره تړلي ده. ډېرکرښيز والی باور لري، ځکه چې په ضرب

$$a_{i_1,1} \cdots a_{i_n,n}$$

کې د هرې متې تيک يو توکی منځ ته راځي. انتی سيومتری لاس ته راځي، ځکه چې د متو له پدلون دبدلولو تعداد کانونيکي لړی پرلپسي په يو تغير خوري، بالاخره په واحد ماتريکس کې جمعه په يوه زياتووني (د جمعې غړي) کمېږي

$$a_{1,1} \cdots a_{n,n} = 1 \cdots 1 = 1$$

.

ليکونکي: هيوليک، هيونر

2 - ليکيزه ديترمينانت 2-reihige Determinante

د يوه -ماتريکس ديترمينانت

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

دی.

دا د برموتيشن وديزيني پسي په ساده ډول ليدل کيږي، ځکه چې 2 زياتيدونی شتون لري.

دبديل په توګه کېدی شي ديترميناتونه د تعريف شوو خويونو له مخې هم و شمېرل شي.

که متې د کانونيکي واحد وکتور(يوون-) e_k کرښيز کمبينيشن په څېر انځور شي، نو د مولتی (ډېر-)کرښيزوالي له امله لاس ته راځي

$$\det(ae_1 + ce_2, be_1 + de_2) = a\det(e_1, be_1 + de_2) + c\det(e_2, be_1 + de_2)$$

$$= ab\det(e_1, e_1) + ad\det(e_1, e_2)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

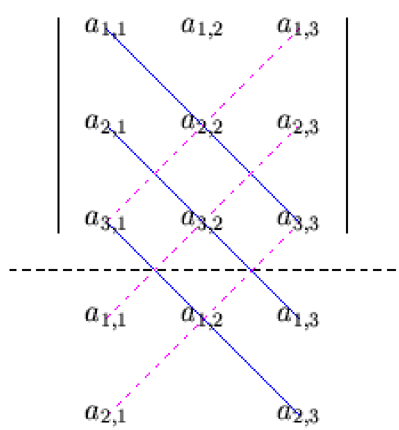
$$+\,cb\det(e_2,e_1)+cd\det(e_2,e_2)$$

$$=ab\cdot 0+ad\cdot 1+cb\cdot(-1)+cd\cdot 0=ad-bc\,.$$

ليکونکي: هيوليک، هيونر

د ساروس شيما يا شکل Sarrus-Schema

د يوه (3×3) - ماتريکس ديترمينانت لکه څنګه چې په تابع يا فنکشن کې ښوول شوې د ضربونو جمعه ده، چې مختلف دياګونالونه (دوه کونجترې) په ګوته کوي:



$$=\begin{array}{l} a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3}+a_{2,1}a_{3,2}a_{1,3}+a_{3,1}a_{1,2}a_{2,3} \\ -a_{3,1}a_{2,2}a_{1,3}-a_{1,1}a_{3,2}a_{2,3}-a_{2,1}a_{1,2}a_{3,3} \end{array}$$

دې د ساروس په نامه يادې شوې شيما ته ورته د n جګ بعدي لپاره شتون نه لري. سملاسي د $n=4$ ديترمينانت د 24 ضربونه يوه جمعه لري.

د ساروس –شېما په ساده توګه د ځاي بدلون وديزيينه پسي په ساده توګه و ازمايي. لاندې جدول ټول زياتووني يا جمعی اجزاوې ښايي همداسې دا د ځايبدلون i سره اسوځييري بدلونې، له کومو چې دا مخنخښه σ لاس ته راځي.

i	بدلونونه	$\sigma(i)$	Summand

(c) ketabton.com: The Digital Library

	Vertauschungen		زياتيدوني يا د جمعي اجزا
$(1,2,3)$		$+$	$+a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3}$
$(2,3,1)$	$\to (3,2,1) \to (1,2,3)$	$+$	$+a_{2,1}a_{3,2}a_{1,3}$
$(3,1,2)$	$\to (2,1,3) \to (1,2,3)$	$+$	$+a_{3,1}a_{1,2}a_{2,3}$
$(3,2,1)$	$\to (1,2,3)$	$-$	$-a_{3,1}a_{2,2}a_{1,3}$
$(1,3,2)$	$\to (1,2,3)$	$-$	$-a_{1,1}a_{3,2}a_{2,3}$
$(2,1,3)$	$\to (1,2,3)$	$-$	$-a_{2,1}a_{1,2}a_{3,3}$

ليكونكي: هيوليک، هيونر

لوريز حجمونه (ډکي) Orientiertes Volumen

د يوه حقيقي ماتريکس A ديترمينانت مطلق ارزښت د ـبعدي سره چې له متو ځخه غزيدلی شپاټ(Spats) سره پراپر دی يا يو په بل پرېوځي:

$$|\det A| = \operatorname{vol}\left\{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i :\ 0 \leq \alpha_i \leq 1\right\} = \operatorname{vol}\left(A[0,1]^n\right)\ .$$

ليكونكي: هيوليک، هيونر

(c) ketabton.com: The Digital Library

ساده ازمایل کیدی شي، چې لوریز حجمونه یا ډکي

$$\operatorname{vol}_* A := \operatorname{sign}(\det A)\operatorname{vol}(A[0,1]^n)$$

ټول درې د دیترميناتونو تعريف شوي خويونه (مولتی کربنيزوالی، انتي سيومتري، نورمي ونه) لري، له دې امله بايد باور ولري:

$$\operatorname{vol}_* A = \det A$$

ليکونکي: هيوليګ، هيونر

په $\mathbb{R}^3$ کې د وکتورونو $u,\ v,\ w$ لپاره دیترمینانتونه د شپات ضرب سره سر خوري يا برابر دی:

$$\det(u,v,w) = [u,v,w]\,.$$

د بديل په قسم دا کېدی شي د ε -تنځور ε Tensors- سره افاده شي:

$$\det(u,v,w) = \sum_i \sum_j \sum_k \varepsilon_{i,j,k} u_i v_j w_k\,.$$

که وکتورونه د بېلګې په توګه و ټاکل شي

$$u = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},\quad w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو شپات ضرب لاس ته راځي.

$$(2,1,1)\left(\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\right)=(2,1,1)\begin{pmatrix}3\\-1\\-1\end{pmatrix}=6-1-1=4\,.$$

د ε - تنځور سره لاندې انځورونه لاس ته راځي

$$\begin{aligned}\det(u,v,w) &= \varepsilon_{1,2,3}\cdot 2\cdot 2\cdot 2+\varepsilon_{1,3,2}\cdot 2\cdot 1\cdot 1+\varepsilon_{2,1,3}\cdot 1\cdot 1\cdot 2\\ &\quad+\varepsilon_{2,3,1}\cdot 1\cdot 1\cdot 1+\varepsilon_{3,1,2}\cdot 1\cdot 1\cdot 1+\varepsilon_{3,2,1}\cdot 1\cdot 2\cdot 1\\ &= 8-2-2+1+1-2=4\,.\end{aligned}$$

ليکونکي: هيوليک، هيونر

د ديترمينانتونو لپاره قاعدې Regeln für Determinanten

د $(n\times n)$ - ماتريکسونو A او B لپاره صدق کوي:

- $\det A=\det A^{\mathrm{t}},\quad \det A^{*}=\overline{\det A}$
- $\det(AB)=(\det A)(\det B)$.
- A تيک هلته انورتير وړ يا معکوسکېدونکي ده، که او $\det A\neq 0$ وي،

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$$

لیکونکي: هیولیگ، هیونر

اول – د سیومتري خويونه د ځای بدلون پسې وديزوني څخه لاس ته راځي:

$$\det A^{t} = \sum_{i \in S_n} \sigma(i) a_{1,i_1} \cdots a_{n,i_n} .$$

که د جمعې اجزا سره اندکسونه یا پیژند نخښې $\{1, \ldots, n\}$ هر یو په لړی پرلپسې و i ته معکوس ځاي بدلون j سره و وځغلوو، نو د تابع یو تغیر شوی نظم لاس ته راوړو:

$$a_{j_1,i_{j_1}} \cdots a_{j_n,i_{j_n}} = a_{j_1,1} \cdots a_{j_n,n} .$$

داچې $\sigma(i) = \sigma(j)$ دی، نو مساوي وديزينه لاس ته راځي، لکه د $\det A$ لپاره.

د بیلګې په توګه

$$i = (1\ 2\ 3) \leftrightarrow j = (1\ 3\ 2)$$

یو بل ته معکوس ځاي پلونونه دي په څیکلیکي لیکډول او

$$a_{1,i_1} a_{2,i_2} a_{3,i_3} = a_{1,2} a_{2,3} a_{3,1} = a_{3,1} a_{1,2} a_{2,3} = a_{j_1,1} a_{j_2,2} a_{j_3,3} .$$

که د زیاتیدونو یا د جمعي د اجزاو ا ينکسونو یا پیژندنخښو $\{1, \ldots, n\}$ کې وځغلي هر یو په لړی پرلپسي و i ته په څټ یا برعکس بدلونونه یا پرموتیشنونه j ته ، نو فنکشن یو تغیر شوي نظم راکوي.

$$a_{j_1,i_{j_1}} \cdots a_{j_n,i_{j_n}} = a_{j_1,1} \cdots a_{j_n,n} .$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا چې $\sigma(i) = \sigma(j)$ دی، نو سرب مساوي يا باربه وده لاس ته راولي لکه $\det A$.

د بيلګې په توګه

$$i = (1\ 2\ 3) \leftrightarrow j = (1\ 3\ 2)$$

يو بل ته په ځيکليکي لکندود په ښت يا معکوس پرموتيشنونه يا ځای بدليدنې دي، او

$$a_{1,i_1}a_{2,i_2}a_{3,i_3} = a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1} = a_{3,1}a_{1,2}a_{2,3} = a_{j_1,1}a_{j_2,2}a_{j_3,3} \,.$$

مخنخښنهσ مثبت ده او هرځل ، ځکه چې

$$i = (1\ 3) \circ (1\ 2), \quad j = i^{-1} = (1\ 2) \circ (1\ 3)\,,$$

دا په دې معنا چې د پدلونون شميره (ګښون) هر ځل 2 دی.

دويم – که معکوسوړ نه وي، نو ضرپوالی د دريم خوي څخه لاس ته راځي.

د $\det A \neq 0$ لپاره ښوول کيږي، چې تابع

$$B \mapsto f(B) := \det(AB)/\det(A)$$

تو د ديترمينانت ک تاکونکي خويونه لري، په تعقيب د $\det B$ سره بايد برابر وي.
نورمي کونه $f(E_n) = 1$ څرکنده ده. د ډېرکرښيزوالي او انتيسيومتري لپاره په پام کې نيسو، چې فنکشن(تابع) $B \mapsto AB$ کرښيزه ده د B په متو کې او دا چې د دوه متو بدلون د AB د اړونده متو بدلون په ګوته کوي.

دريم – يو مربع ماتريکسA تيک هلته نامعکوسوړ ده، که د يوه نه ساده وکتور x لپاره $Ax = 0$ وي، دا په دې معنا چې که د A د د متو يو نه ساده کرښيو کمپينيشن a_j شتون ولري:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x_1 a_1 + \cdots + x_n a_n = 0 .$$

$$x_1 a_1 + \cdots + x_n a_n = 0 .$$

په ورکړشوي حالتکي د متووکتور ځاپيدلون څه کېدی شي $x_1 \neq 0$ ونيسو، دا په دې معنا چې

$$a_1 = y_2 a_2 + \cdots + y_n a_n , \quad y_j = -x_j / x_1 .$$

د ضريپوالي څخه لاس ته راځي

$$\det A = \sum_{j=2}^{n} y_j \det(a_j, a_2, \ldots, a_n) = 0 ,$$

ځکه چې ټولې په ښي لور ديترميناتونه دوه برابرې متې خوندي لري، بايد د انتی سيومتري له امله ورکې شي يا له منځه ولاړې شي.

دا چې د انورتير وړ invertierbaren (په ښتوړ) ماتريکس ديترمينانت د صفرسره برابر نه دی، د يوه له متو خواره شوي غبرګ اړخيز لوريز حجم په حيث ديترمينانت د هندسي تشريح څخه لاس ته راځي . بالاخره دا همدااوس د $\det(A^{-1})$. لپاره ښوول شوي ضربوالي څخه لاس ته راځي.

ليکونکي : هيوليګ، هيورنر

د ځانګړو ماتريکسونو ديترمئناتونه

Determinanten spezieller Matrizen

د يوه $(n \times n)$ - ماتريکس A لپاره ديترمينانتونه ترلي ورکول کيږي

(c) ketabton.com: The Digital Library

- مثلث ماتريکس: که $a_{i,j} = 0$ د $i < j$ لپاره يا $i > j$ لپاره وي، نو باور لري

$$\det A = a_{1,1} \cdots a_{n,n} \,.$$

- بلوک دياګونال ماتريکس: که ماتريکس B بلوک جوړښت د $A_{i,j} = 0$, $i \neq j$ سره ولري اومربع دياګونال بلوکونه $A_{i,i}$ ، نو باور لري

$$\det B = \prod_{i=1}^{k} \det A_{i,i} \,.$$

- اورتوګونا او يونيتار ماتريکسونه: د يوه يونيتارمياتريکس U لپاره باور لري

$$|\det U| = 1 \,.$$

د يوه اورتوګونال ماتريکس $(u_{i,j} \in \mathbb{R})$ لپاره ځانګړى دى

$$\det U \in \{-1, 1\} \,.$$

ليکونکي : هيوليګ، هيورنر

مثلثماتريکس : دا چې $\det A = \det A^{t}$ دى، بسيا کوي چې پورته مثلث ماتريکس وڅېړو. د $(1, \ldots, n)$ دخاى بدلون i لپاره، کوم چې کتمتوال(ايدنتيتي) نه دى.

(c) ketabton.com: The Digital Library

، لاس ته ارځي، چې لږ تر لږه یو توکی i_k د $i_k > k$ سره باید ورکړ شوی وي، دا په دې معنا چې $a_{i_k,k} = 0$. داسې جمعه راکمېږي، د کټمتوالي ورکړه ، او دیترمینانت د دیاګونال توکو د ضرب څخه ورکول کیږي.

بلوکدیاګونال ماتریکسونه : لومړی فقط یو وېش په 2 دیاګونالبلوکونو راړرو چې لویې n_1 او n_2 لري، نو دا بسیا کوي، چې په ځای بدلون چې ور جمعه کړو یا وربیات کړو، کوم چې لومړي توکي د خپل ځانونو ترمنځ او له دې سره هم اکر توکي د خپل ځانونو ترمنځ بدل کړي، څکه چې نور مو پاتېدونو یا د جمعې اجزاوو 0 ته بیایي. دا د جمعې پاتې اجزاوې د لومړیو n_1 توکو یوه ځایبدلون k او د اخرو n_2 توکو یو ځای بدلون l د ضرب په څیر لیکل کیږي:

$$\det B = \sum_{i\in S_n} \sigma(i)\left(a_{i_1,1}\cdots a_{i_{n_1},n_1}\right)\left(a_{i_{n_1+1},n_1+1}\cdots a_{i_n,n}\right)$$

$$= \left(\sum_{k\in S_{n_1}}\sigma(k)\left(a_{k_1,1}\cdots a_{k_{n_1},n_1}\right)\right)\left(\sum_{l\in S_{n_2}}\sigma(l)\left(a_{n_1+l_1,n_1+1}\cdots a_{n_1+l_{n_2},n}\right)\right)$$

$$= \det A_{1,1}\det A_{2,2}\,.$$

ایندوکتیو له دې څخه یوه وینا لاس ته روړل کیږي له دوه بلوکونو څخه په ډېرو یوې ویشنې لپاره.

اورتوګونال او یونیتار ماتریکسونه: دا چې کمپلکس کنجوګیشن په جمعې ضرب سره منځ ته کوي او $\det U = \det U^{t}$ صدق کوي، نو د دیترمینانت د ضربوالي څخه لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$1 = \det E = \det(U^*U) = \det U^* \det U$$

$$= \overline{\det U^t} \det U = \overline{\det U} \det U = |\det U| .$$

په حقيقي حالت کې ديترمينانت حقيقي ده او له دې امله فقط 1 او -1 ممکن دي.

ليکونکي : هيوليک، هيورنر

د ديترمينانتو بڼه بدلون Umformung von Determinanten

د يو ماتريکس ديترمينانتونه د د دوه برابرو متو او يا دوه برابرو ليکو سره صفر دي.له دې په ځانګړې توګه لاس ته راځيو چې ديترمينانتونه تغير نه خوري، که که سړی د يوې متې (ليکې) يوې بلې متې (ليکي) ته ورزيات کړي يا ورجمعه کړي ليکونکي : هيوليک، هيورنر

دا چې د ترانپوني حالت کې د يوه ماتريکس متې په ليکي بدليږي او $\det A = \det A^t$ صدق کوي،دنو بسيا کوي، چد متو حالت وڅيرو.

د دوه متو د پدلولو سره بايد ديترمينانت د تعريف له مخې مخنخښه بدله کړي. که دواړه کتمتې متې يو د بل سره بدلې کړی شي ماتريکسونه ځان نه بدلوي او ديترمينانتونه بايد صفر وي.

که λ - ځله د متې a_j و متې $i \neq j$, a_i ته ور زياته يا جمعه شي، نو لاندې ماتريکس لاس ت ه راځي

$$A' = (a_1, \ldots, a_i + \lambda a_j, \ldots, a_j, \ldots, a_n) .$$

د کرښيز کمبينيشن په بنسټ کېدی شي ديترمينانت و وېشل شي يا ټوټه شي په

$$\det A' = \det(a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_j, \ldots, a_n) + \lambda \det(a_1, \ldots, a_j, \ldots, a_j, \ldots, a_n) .$$

دويم ماتريکس دوه کتمتي متې لري او له دې امله دا ديترمينانت صفر لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ليکونکي : هيوليګ، هيورنر

د يوه ماتريکس د يوې ليکي ډېرواره د ماتريکس د بلې ليکې سره زياتولو يا جمعه کولو له لارې کېدی شي ماتريکس په مثلث بڼه باندې واړول شي او ديترمينانت بيا د دياګونال توکو د ضرب له لارې وګټل شي يا لاس ته راړل شي.

که د متو يا ليکو بدلون صورت ونيسي، مخنخښه تغير خوري.

د بيلګې په توګه کېدی شي

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 8 & 0 & 4 \\ 3 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 6 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

لکه چې تعقيبوي وشمېرل شي.

دريمه ليکه ترې کم يا منفی د لومړۍ ليکې درې ځله راکوي :

$$\det A = \det \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 8 & 0 & 4 \\ 0 & -9 & 3 & -4 \\ 0 & 6 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

د دويمې متې او څلورمې متې بدلون:

$$\det A = -\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 & 8 \\ 0 & -4 & 3 & -9 \\ 0 & 4 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

دريمه ليکه ورزيات دويمه ليکه، څلورمه ليکه ترې کم دويمه ليکه راکوي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\det A = -\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = -(1\cdot 4\cdot 3\cdot(-2)) = 24\,.$$

ليکونکي : هيوليک، هيورنر

د ديترمينانتو وديزيينه Entwicklung von Determinanten

د يوه $(n\times n)$ - ماتريکس A ديترمينانت کېدی شي د يوې په خوښه متي يا ليکې پسې وديزيينه کړي.:

$\det A = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{k+j}a_{k,j}\det\tilde{A}_{k,j}$	د ليکې k پسې وديزيينه
$= \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+l}a_{i,l}\det\tilde{A}_{i,l}$	د درز يا متې l پسې وديزيينه

چيرته چې $\tilde{A}_{i,j}$ هغه ماتريکس په ګوته کوي، کومه چې د A د i -مې ليکې ، j - مې متې د کرښې کولو (په کرښه کولو له منځه وړنې) له لارې منځ ته راځي.

ليکونکي : هيوليک، هيورنر

د $\det A = \det A^t$ له امله بسيا کوي، چې وديزيينه د يوې متې پسې تر څېړنې لاندې ونيسو.

- مه متې په متو

$$a_l = \sum_{i=1}^{n} a_{i,l}e_i$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ټوټه کوو، د ديترمينانتونو د ډېرکرښيزوالي په اساس لاس ته راځي

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{i,l} \det \underbrace{(a_1, \ldots, a_{l-1}, e_i, a_{l+1}, \ldots, a_n)}_{=B_i} .$$

يو ماتريکس B_i ترځېړنې لاندې نيسو، نو کېدی شي د دې لپاره د $n-l$ متېه بدلونونو له لارې l ــمه متېه اخر ته راوړل شي، بې له دې چې د نورو متېو لړېپرلپسې په خپلو منځونوکې تغير شي.

په ورته توګه کېدی شي i ــمه ليکه د $n-l$ ليکه بدلونونو سره اخرې ليکې ته راوړل شي:

$$\det B_i = (-1)^{n-l}(-1)^{n-i} \det \begin{pmatrix} & & \tilde{A}_{i,l} & & & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,l-1} & a_{i,l+1} & \cdots & a_{i,n} & 1 \end{pmatrix}$$

د ښي اړخ ديترمينانت کې فقط د S_n ځاي بدلونونه ونډه اخلي، چې د n ــمې ليکنې په خيث n لري. دا د S_{n-1} ځای بدلون ښايي او له دې سره دی

$$\det \begin{pmatrix} & & \tilde{A}_{i,l} & & & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,l-1} & a_{i,l+1} & \cdots & a_{i,n} & 1 \end{pmatrix} = \det \tilde{A}_{i,l} .$$

د زياتونو د جمعي اجزاوو ضرب د $1 = (-1)^{2l+2i-2n}$ سره د ورکړ شوي وديزېينې فرمول ورکوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

که د ماتریکس

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

لپاره دیترمینانت د لومړی لیکي پسي وديزبینه شي، نو لاس ته ترې راځي

$$\begin{aligned} \det A &= (-1)^2 \cdot 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &+ (-1)^3 \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &+ (-1)^4 \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= 2(4-1) - 1(2-1) + 1(1-2) = 6 - 1 - 1 = 4\,. \end{aligned}$$

لیکونکي : هیولیګ، هیورنر

د 3 ټکو له لارې د یوې سطحې ایمپلیڅیت(ساده) انځورونه

Implizite Darstellung einer Ebene durch 3 Punkte

په $\mathbb{R}^3$ کې یوه سطحه چې د درې ټکو

$P_2 = (x_2, y_2, z_2)$, $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ او $P_3 = (x_3, y_3, z_3)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له لاري ورکړ شوي وي، کېدی شي په ایمپلیڅیت فرمول له

$$E:\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}=0$$

له انځور شي. د لومړی لیکې پسې ودیزیینې سره لاس ته راځي

$$E: ax+by+cz=d$$

د لاندې سره

$$a=\begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix},\ b=-\begin{vmatrix} x_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix},\ c=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix},\ d=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

لیکونکي: هیولیک، شترایت

بنسټ ازمایښت Basistest

وکتورونه $a_1,\ldots,a_n\in K^n$ تیک هلته یو بنسټ جوړوي، که د ماتریکس $A=(a_1,\ldots,a_n)$ دیترمینانتونه ورک نه شي.

لیکونکي : هیولیک، هیورنر

که د A لومړۍ لیکه صفر وي، نو غوښتنه (ثبوت) روښانه ده.

په بل حالت کې کېدی شي د متې یوه ځاي بدلون پسې ونیسو یا فرض کړو، چې $a_{1,1}\neq 0$ اومتې a_j لکه ښکه لرو بڼه بدل کړو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$a_j \to a'_j = a_j - \frac{a_{1,j}}{a_{1,1}}\, a_1, \quad j = 2, \ldots, n\,.$$

دا د متو عملیو کارولو له لارې کېدی شي د متو دیترمینانت او هم د بنسټ خویونه بې تغیره پاتې شي. دا بڼه بدل شوی ماتریکس لاندې بڼه لري

$$A' = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ c & & B & \end{pmatrix}.$$

د ودیزیېنې جملې پسې لرو

$$\det A' = a_{1,1} \det B\,,$$

او دا چې $a_{1,1} \neq 0$ د A' متې تیک هلته یو د K^n بنسټ دي، که د B متې یوه د K^{n-1} بنسټ دي. دا غوښتنه کېدی شي اندوکتیو و ښوول شي.

لیکونکي : هیولیګ، هیورنر

د بیلګې په توګه له

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

کېدی شي د بنسټ ازماېښت روښانه شي.

که د متو یا لیکو څخه یو یې فقط له صفر جوړ وي، نو د دیترمینانت لپاره 0 ترې لاس ته راځي. په دې حالت کې د ماتریکس رانګ ماکسیمال 1 دی او له دې امله متې بنسټ نه جوړوي.

په بل حالت کې له $ad = bc$ لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$a\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} - b\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ab-ba \\ ad-bc \end{pmatrix} = 0$$

او له دې سره متې کرښيز بلواک دي.

که د متې کرښيز بلواک وي، نو صدق کوي:

$$\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix},$$

ديترمينانت شمېرل کي.ي و ته:

$$\det A = ad - bc = a\lambda c - \lambda ac = 0\,.$$

ليکونکي : هيوليک، هيورنر

د واندرموند – ديترمينانتونه Vandermonde-Determinante

په n تکو x_i کي ارزښت شوي مونومونو $1, x, \ldots x^{n-1}$ ديترمينانت دی

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & \ldots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \ldots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{i>j}(x_i - x_j)\,.$$

ليکونکي : هيوليک، هيورنر

د $n=2$ لپاره د واندرمود – ماتريکس ديترمينانت دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\det\begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{pmatrix} = x_2 - x_1 .$$

د یوه ټولیز n لپاره د ټولو نورو لیکو څخه لومړی لیکه کمیږي:

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} \\ 0 & x_2 - x_1 & \dots & x_2^{n-1} - x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & x_n - x_1 & \dots & x_n^{n-1} - x_1^{n-1} \end{vmatrix} .$$

د لومړی متې پسې ودیزیېنې سره راکوي

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & \dots & x_2^{n-1} - x_1^{n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ x_n - x_1 & \dots & x_n^{n-1} - x_1^{n-1} \end{vmatrix} ,$$

د کوم سره چې له k -مې لیکې څخه ضریب $x_k - x_1$ رادباندې کیدی شي:

$$\left(\prod_{k=2}^{n}(x_k - x_1)\right) \begin{vmatrix} 1 & x_2 + x_1 & x_2^2 + x_2x_1 + x_1^2 & \dots & \sum_{i=0}^{n-2} x_2^{n-2-i}x_1^i \\ 1 & x_3 + x_1 & x_3^2 + x_3x_1 + x_1^2 & \dots & \sum_{i=0}^{n-2} x_3^{n-2-i}x_1^i \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n - x_1 & x_n^2 + x_nx_1 + x_1^2 & \dots & \sum_{i=0}^{n-2} x_n^{n-2-i}x_1^i \end{vmatrix} .$$

که د هرې متې څخه دا د مخه تېرې شوې متې دا x_1 – ځله کم کړو، نو بېرته پیل بڼې دیترمینانت لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\left(\prod_{k=2}^{n}(x_k - x_1)\right)\begin{vmatrix} 1 & x_2 & \dots & x_2^{n-2} \\ 1 & x_3 & \dots & x_3^{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

، او فرمول د اندکشن له لارې ښوول کېدی شي.

ليکونکي : هيوليک، هيورنر

کرښيز مساوات سيستم Lineares Gleichungssystem

په يوه تن يا جسم K کرښيز مساوات سيستم دا لاندې بڼه لري

$$\begin{matrix} a_{1,1}x_1 & + & \cdots & + & a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1}x_1 & + & \cdots & + & a_{m,n}x_n & = & b_m \end{matrix} \quad \Leftrightarrow \quad Ax = b$$

د يوه ضريبونو د ماتريکس $A = (a_{i,j}) \in K^{m\times n}$ سره، د نامعلومو $x_j \in K$ او يو ښی اړخ $b \in K^m$ سره.

دا کرښيز مساوانسيستم هوموجېن بلل کيږي، که $b = 0$ وي، پرته له دې ناهوموجېن inhomogen بلل کيږي.

د يوه حقيقي $(K = \mathbb{R})$ يا کمپلکس $(K = \mathbb{C})$ کرښيز سيستم لپاره K اکسپليڅيټ explizit نه شي ورکول کېدی. دا چې کوم حالت مخ ته لرو د اړوندوالي له مخې ليدل کيږي يا روښانه دی.

که کرښيز مساوات سيستم کوم حل نه لري (په ټوليزه د $m > n$ لپاره)، نو دا باندې- ټاکلی بلل کيږي. په دې حالت کې له اندولپرابلم څخه غږيږو. يو کرښيز مساوات سيستم د

(c) ketabton.com: The Digital Library

نا يواحني حل سره (په تولیزه توګه د $m < n$ لپاره) کښته - – يا لاندې- تکلی بلل کیږي.

يوه تابع $f(x)$ کیدی شي له داتن

$$(x_i, f_i), \quad i = 1, \ldots, n,$$

ځخه د انترپولیشن له لارې په نږدې توګه بیا جوړه rekonstruiert شي. که یوه کرښیزه ځاي په ځاي کونه يا اینوونه

$$f(x) \approx p(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j p_j(x)$$

د مناسب بنسټتوابعو p_j سره، نو د انترپولیشن شرايطو ځخه

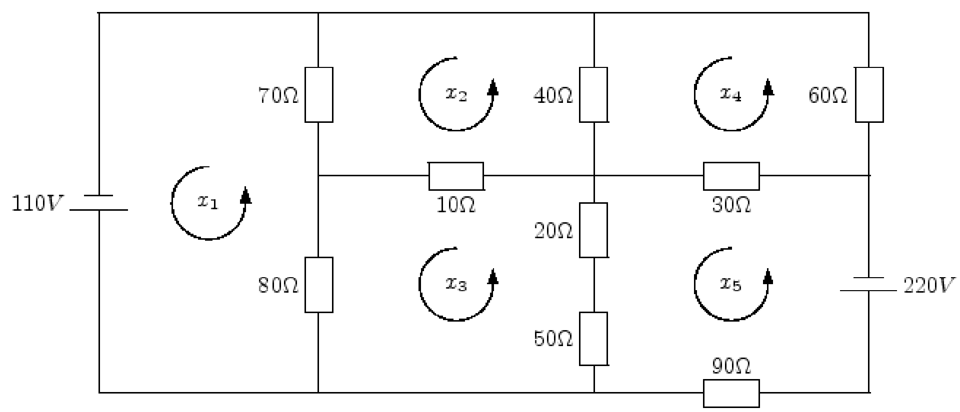
برېښنايي جریاندایره Elektrischer Schaltkreis

که په یوه بریناجریان دایره (ګردی)کې د x_i سره د دايرې برېښناجريان وښايو د جريانلور د ساعتتنځبنه ووني (عقربک) مخامخ يعنې معکوس، د سره د i - مې او j – مې پټی ګسره ډډ يا مشترک مقاومت، د $R_{i,j}$ سره او د U_i سره اینوولی Spannungen ، نود اومOhm او کیرښهوف Kirchhoff قانون ځخه دا کرښيز مساوات سیستم لرو

$$\sum_{i\sim 0} x_i R_{i,0} + \sum_{i\sim j} (x_i - x_j) R_{i,j} = U_i.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دلته $i \sim j$ معنا ورکوي، چې i -م او j –م د برېښناپټی یو ګډ مقاومت لري.
$x_i - x_j$ د دې مقاومت له لارې برېښناجریان دی. د $0 \sim i$, $R_{i,0}$ سره مقاومت
شوول کیږي چې هغه فقط په i –مې پټۍ کې پروت دی.



د بیلګې په توګه د ځېره شوې جریان دابرې(ګردی) لپاره کربنیز مساوات سیستم

$$\begin{pmatrix} 150 & -70 & -80 & 0 & 0 \\ -70 & 120 & -10 & -40 & 0 \\ -80 & -10 & 160 & 0 & -70 \\ 0 & -40 & 0 & 130 & -30 \\ 0 & 0 & -70 & -30 & 190 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 110 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -220 \end{pmatrix}.$$

د ضریبونو ماتریکس په دیاګونال کې د یوې پټۍ پورې اړونده مقاومت او ځاي یا
(i,j) Position د i او j ګمیز یا منفي ګډ مقاومت . د دې راوړل شوې بېلګې حل
دی:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x \approx \begin{pmatrix} 1.0157 \\ 0.5641 \\ 0.0358 \\ -0.0940 \\ -1.1595 \end{pmatrix}.$$

ليکونکي: اپپ، هيوليک

د يوه کرښيز مساوات سيستم حلوړوالى

Lösbarkeit eines linearen Gleichungssystems

په يوه تن يا جسم K د يوه هموجين کرښيز مساوات سيستم حلدېرى

$$Ax = 0,$$

د يوه $m \times n$ ضريبونو ماتريکس A يوه د K^n لاندې – يا برخدېرى U ده.

که دا هموجين کرښيز سيستم

$$Ax = b$$

يو حل v ولري، نو د توليز حل لپاره باور لري

$$x \in v + U,$$

دا په دي معنا چې حللدېرى د K^n يو افين affin لاندې – يا برخدېرى ده. په ځانګړې

(c) ketabton.com: The Digital Library

توګه کېدی شي هوموجېن کرښيز مساوات سيستم هيڅ ، يو $U = \emptyset$ يا ناپای ډېر زيات $\dim U > 0$ حلونه ولږي.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ، کيمرلي

که x, y د هوموجېن کرښيز مساوت سيستم حلونه وي او $\lambda \in K$ ، نو لاس ته راوړو:

$$A(x+y) \;=\; Ax + Ay = 0 + 0 = 0$$

همداسي

$$A(\lambda x) \;=\; \lambda Ax = \lambda 0 = 0\,,$$

دا په دې معنا چې د هوموجېن کرښيز مساوات سيستم د حلونو ډېرۍ يوه لاندې- يا برخفضا U جوړوي.

که v د هوموجېن کرښيز مساوات سيستم يو حل وي او $u \in U$ ، نو $x = v + u$ د

$$Ax = A(v+u) = Av + Au = b + 0 = b$$

له امله هم د دې هوموجېن کرښيز مساوات سيستم يو حل دی.

برعکس د ناهوموجېن کرښيز مساوات سيستم د دوه حلونو v او w سره کمښت يا تفريق $v - w$ د

$$A(v-w) = Av - Aw = b - b = 0$$

له امله هوموجېن کرښيز مساوات سيستم يو حل دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

له دې سره د یوه ناهوموجېن کرښیز مساوات سیستم ټول حلونه لاس ته راځي، داسې چې د ناهوموجېن کرښیز مساوات سیستم د خوښې حلونو لپاره د ټولو هوموجېن کرښیز مساوات سیستم حلونو جمعه جوړه کړو، یعې سره جمعه کړو.

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

دا لاندې ساده حالتونه د کرښیزو مساواتو مختلف ډولونه د لیدنې کوي:

لومړی – کرښیز مساوات سیستم

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29 \\ 60 \end{pmatrix}$$

یواځني حلونه لري: $x_1 = 8$, $x_2 = 1$.

دویم – کرښیز مساوات سیستم

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

یواځنی حل نه لري. که $x_3 = t$ په خوښه وټاکو، نو $x_1 = 2$, $x_2 = 2t$ د حلونو په څېر لاس ته راځي.

دریم - کرښیز مساوات سیستم

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

کوم حل نه لري. اخرنی ليکه $x_2 = 4$ راکوي، که دا په يوه ليکه کې کېښوول شي، د لومړی ليکې څخه $x_1 = 2$ لاس ته راځي، له دويمې څخه برعکس $x_1 = 1$.

ليکونکي: اپپ، هيوليگ

ديترمينانت او د يوه مساوات سيستم حلوړوالی

Determinante und Lösbarkeit eines linearen Gleichungssystems

يو کرښيز مساوات سيستم

$$Ax = b$$

د مربع ضريبونو ماتريکس A سره ټيک هلته يو يواځنی حل لري، هر ښي لوريزې b سره، که همداسې دا هوموجېن سيستم $Ax = 0$ فقط يو ساده حل $x = 0$ ورلري.

که $\det A = 0$ وي، نو يو حل فقط د ښی لورې b لپاره شتون لري په هغه د A د متو څخه غزېدلي لاندې – يا برخفضا ده. په دې حالت کې حل يواځنی نه دی.

ليکونکي: کرايخ، هيوليگ

غوښتنه د ديترمينانت د خويونو څخه په لاس راځي.

و $\det A \neq 0$ ته ورته لرو، چې د A متې $a_1, \ldots, a_n$ کرښيز خپلواکې دي. د تعريف سره سم دا په دې معنا دی چې

$$x_1a_1 + \ldots + x_na_n = 0 \Leftrightarrow x_1 = \cdots = x_n = 0,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

همداسې

$$Ax = 0 \Leftrightarrow x = 0\,.$$

د دې لپاره چې د ناهوموجېن سيستم يواځني حلورالي ته ورته لاس ته راوړای شو، له دې کار اخلو چې متې يو بنسټ جوړ کړي، دا په دې معنا چې هر ښی اړخ b د
$$x_1a_1 + \ldots + x_na_n = b \Leftrightarrow Ax = b$$
کرښيزکمبېنېشن په حيث

يواځنی انځوروړ دی.

ليکونکي: اېپ، هيوليګ

دا کرښيز مساوات سيستم

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

تيک هلته يو يواځنی حل لري، که ديترمينانت $ad - bc \neq 0$ وي. په دې حالت کې حل په لاندې ډول دی

$$x = \frac{du - bv}{ad - bc}\,, \qquad y = \frac{av - cu}{ad - bc}\,.$$

که ديترملنانت $ad - bc$ برابر 0 وي، په ټوپيزه توګه کرښيز مساوات سيستم حل نه لري. په دې حلات حلونه فقط هلته شتون لري، که

$$av \qquad = cu$$

او

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$bv \qquad = du$$

صدق ولري. که د بېلګې په توګه $a \neq 0$ وي، نو کېدی شي y په خوښه وټاکو او د x لپاره لاس ته راوړو

$$x = \frac{u - by}{a} .$$

ليکونکي: پپ، اهيوليک

د کرامر قاعده Cramersche Regel

د يوه مربع کرښيز مساوات سيستم $Ax = b$ لپاره

$$x_i \det A = \det(a_1, \ldots, a_{i-1}, b, a_{i+1}, \ldots, a_n) ,$$

دی، د کوم a_j سره چې د متوضريبونو ماتريکس A په نخښه کيږي.

په ځانګړې توګه کېدی شي د $\det A \neq 0$ لپاره په ښت يا معکوس $C = A^{-1}$ د

$$c_{i,j} = \frac{\det(a_1, \ldots, a_{i-1}, e_j, a_{i+1}, \ldots, a_n)}{\det A}$$

له لارې ټاکل کېدی شي.

ليکونکي: هيوليک، شترايت

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ديترمينانت د ډېركربنيزوالي او سيومتري له امله لاس ته راځي:

$$\det(a_1,\ldots,a_{i-1},b,a_{i+1},\ldots,a_n) = \det(a_1,\ldots,a_{i-1},\sum_{j=1}^{n} a_i x_i, a_{i+1},\ldots,a_n)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} x_j \det(a_1,\ldots,a_{i-1},a_j,a_{i+1},\ldots,a_n)$$

$$= x_i \det(a_1,\ldots,a_{i-1},a_i,a_{i+1},\ldots,a_n)$$

په ځانګړي توکه د $b = e_j$ سره د معکوسې j ــمه مټه $x = (c_{i,j},\ldots,c_{n,j})^{\mathrm{t}}$ راکوي

ليکونکي: هيوليک، شترايت

ديوه (2×2) - ماتريکس

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

د معکوس C لپاره د کرام قاعدې سره لرو

$$c_{1,1} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & b \\ 0 & d \end{vmatrix}}{\det A} = \frac{d}{\det A}, \qquad c_{1,2} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & b \\ 1 & d \end{vmatrix}}{\det A} = \frac{-b}{\det A},$$

$$c_{2,1} = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 \\ c & 0 \end{vmatrix}}{\det A} = \frac{-c}{\det A}, \qquad c_{2,2} = \frac{\begin{vmatrix} a & 0 \\ c & 1 \end{vmatrix}}{\det A} = \frac{a}{\det A},$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

همداسې د $\det A = ad - cb$ سره دا لاندې لرو

$$\det A = ad - cb$$

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - cb}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

ليکونکي: هيوليګ، شترايت

د (3×3) - ماتريکس

$$(3 \times 3)$$

د معکوس G لپاره د کرامر د قانون له مخې لرو

$$c_{1,1} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 3 \end{vmatrix}} = -\frac{3}{25}, \qquad c_{1,3} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 3 \end{vmatrix}} = -\frac{2}{25},$$

$$c_{3,2} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{3}{25}, \qquad \ldots$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ټول داسې دي

$$A^{-1} = \frac{1}{25} \begin{pmatrix} -3 & 6 & -2 \\ 12 & 1 & 8 \\ -14 & 3 & -1 \end{pmatrix} .$$

ليکونکي: هيوليګ، شترايت

په څټ لور ځاى په ځاى کول Rückwärts-Einsetzen

په يوه کرښيز مساوات سيستم کې د پورته مثلث -بڼې سره

$$\underbrace{\begin{pmatrix} r_{1,1} & \cdots & r_{1,n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & r_{n,n} \end{pmatrix}}_{R} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} ,$$

د $\det R = r_{1,1} \cdots r_{n,n} \neq 0$ سره کېږى شو ناټاکلې $x_n, \ldots, x_1$ يو پر بل پسې وټاکو:

$$r_{n,n} x_n = b_n \rightarrow x_n = b_n / r_{n,n}$$

او د $\ell = n-1, \ldots 1$ لپاره ،

$$r_{\ell,\ell} x_\ell + \cdots + r_{\ell,n} x_n = b_\ell, \rightarrow x_\ell = (b_\ell - r_{\ell,\ell+1} x_{\ell+1} - \cdots - r_{\ell,n} x_n) / r_{\ell,\ell} .$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له دې سره به هر يو دا اوس معلوم شمېل شوي ارزښتونه $x_{\ell+1}, \ldots, x_n$ و کارول شي.

په يوه مساوات سيستم کې د يوه لاندې مثلث ماتريکس کې کېدى شي په ورته توګه يو په بل پسې $x_1, \ldots, x_n$ و ټاکل شي.

د کربنيز مساوات سيستم

$$\begin{array}{rcrcrcl} 4x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 6 \\ & & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 0 \\ & & & & 7x_3 & = & 7 \end{array}$$

لپاره په ملث بنې کې د په څټ ايښووني له لارې حلونه لاس ته اځي

$$x_3 = 1$$

$$x_2 = (0-2)/2 = -1$$

$$x_1 = (6-3(-1)-1) = 2\,.$$

ليکونکي: هيوليګ، شترايت

د ګاوس ترانفورميشن Gauß-Transformationen

لاندې عمليې د کربنيز مساوات سيستم د حلونو ډېرى بې تغيره پرېږدي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

- د دوه مساوتو بدلونه
- یوه مساوات ضربونه د یوه ضریب $\neq 0$ سره.
- د یوه مساوات کمول له یوه بل مساوات څخه

د اخرو دوه عملیو د کمبینېشن له لارې د یوې لیکې ډېرواره زیاتول یا جمعه کول و بلې لیکې ته عملیې دي چې اجازه لري یا پریښوول شوې عملیې دي.

د داسې په نامه ګاوس ترانسفورمېشن په مسته کزدی شي sukzessive یا یو په بل پسې ناټاکلي له منځه یووړل شي او یو کربنیز مساوات سیستم په مثلثفورم تراسفورمه کړو یا په بله بڼه واړوو او بیا یې په څټ اېښوونې له لارې حل کړو.

لیکونکي: هیولیګ، شترایت

د کربنیز مساوات سیستم

$$\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & - & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 11 \\ x_1 & + & 7x_2 & + & 4x_3 & = & 6 \\ 6x_1 & - & x_2 & - & 5x_3 & = & -8 \end{array}$$

حل ځان ته تغیر نه ورکوي له

- د لومړي او دویم مساوات بدلونه

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 7x_2 & + & 4x_3 & = & 6 \\ 3x_1 & - & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 11 \\ 6x_1 & - & x_2 & - & 5x_3 & = & -8 \end{array}$$

- د دویم مساوات ضربونه د 2 ضریب سره

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 7x_2 & + & 4x_3 & = & 6 \\ 6x_1 & - & 4x_2 & + & 4x_3 & = & 22 \\ 6x_1 & - & x_2 & - & 5x_3 & = & -8 \end{array}$$

- د دريم مساوات کمول يا تفريقول له دويم مساوات څخه

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 7x_2 & + & 4x_3 & = & 6 \\ 6x_1 & - & 4x_2 & + & 4x_3 & = & 22 \\ & & -3x_2 & + & 9x_3 & = & 30 \end{array}$$

ليکونکي: هيوليک، شترايت

د ګاوس د له منځه وړنه Gauß-Elimination

د ګاوس – بڼه بدلون له لارې کېدی شي يو کرښيز مساوات سيستم د انعکاس وړ $(n \times n)$ -ضربيماتريکس به ماکسيمال $n-1$ پلونو (قدمونو) په پورته مثلثبڼه باندې واړول شي يا راوړو. د دې لپاره يو په بل پسې د دياګونال لاندې کښته ضريبونه له منځه يوسو دا په دې معنا چې له $\ell - 1$ پلونو (قدمونو) وروسته دا ک م س (کرښيز مساوات سيستم) لاندې بڼه غوره کوي :

$$\begin{array}{cccccccccccccc} a_{1,1} & x_1 & + & a_{1,2} & x_2 & + & \ldots & + & a_{1,\ell} & x_\ell & + & \ldots & + & a_{1,n} & x_n & = & b_1 \\ & & & a_{2,2} & x_2 & + & \ldots & + & a_{2,\ell} & x_\ell & + & \ldots & + & a_{2,n} & x_n & = & b_2 \\ & & & & & & & & & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots \\ & & & & & & & & a_{\ell,\ell} & x_\ell & + & \ldots & + & a_{\ell,n} & x_n & = & b_\ell \\ & & & & & & & & a_{\ell+1,\ell} & x_\ell & + & \ldots & + & a_{\ell+1,n} & x_n & = & b_{\ell+1} \\ & & & & & & & & & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots \\ & & & & & & & & a_{n,\ell} & x_\ell & + & \ldots & + & a_{n,n} & x_n & = & b_n \end{array}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په یوګوني ډول ℓ-م له منځه وړنې پل داسې ځغلي لکه لاندې .

- که دا ℓ-م دیاګونال توکی، داسې په نامه د پیوټ-تونی Pivot-Element، صفر دی، نو ℓ-م به د یوه دې لاندې مساواتو سره بدل شي، داسې چې $a_{\ell,\ell} \neq 0$ به باور ولري...
- د $i > \ell$ لپاره به د i-م مساوات څخه د ℓ-م مساوات ډېر واره کم شي، داسې چې $a_{i,\ell}$ صفر شي:

$$a_{i,j} \leftarrow a_{i,j} - q_i a_{\ell,j}, \quad b_i \leftarrow b_i - q_i b_\ell \quad (q_i = a_{i,\ell}/a_{\ell,\ell})$$

د ټولو $j \geq \ell$ لپاره..

لیکونکي: هیولیګ، شترایت

د کربنیز مساوات لپاره

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -2 & 1 \\ 6 & 4 & -1 & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

د ګاوس الګوریتم په لاندې تو؛ه ځغلي:

- د لومړی او دویمې لیکې پدلول:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -2 & 1 \\ 6 & 4 & -1 & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- (3 ليکه) – (1 ليکه) او (4 ليکه) - (1 ليکه)·2

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- (.ليکه2) + (ليکه·2 3):

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- (ليکه3)- (ليکه4)·3 :

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

ليکونکي: هيوليګ، شترايت

د ايښيلون بڼه Echelon-Form

(c) ketabton.com: The Digital Library

يو کرښيز مساوات سيستم د يوه $(m \times n)$ - ضريب ماتريکس سره کېدی شي د ګاوس –ترانفورميشن سره د اينښپلون-فورم باندې يې بڼ بدله يا واړول شي:

$$Ax = b \rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 0\ldots0 & p_1 & *\ldots* & & & & & \\ & & 0 & 0\ldots0 & p_2 & *\ldots* & & \\ & & & & 0 & 0\ldots0 & p_3 & *\ldots* \\ & & & & & & & \ddots \end{pmatrix}}_{A'} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix} .$$

له دې سره داسې په نامه پيووت

$$p_1 = a'_{1,j_1}, \ldots, p_k = a'_{k,j_k}, \quad k \leq m, \quad 1 \leq j_1 < \cdots < j_k \leq n\,,$$

د صفر سره نابرابرې دي او k د A رانګ ی.

د k –م ترانفورميشن پل په لاندې ډول ځغلي:

- يو له صفر مختلف متريکس توکی p_k د خورا کوچنی متې ايندکس(پيژندنخښې) سره او $\geq k$ ليکې اندکس(د ليکې پيژند نخښه) د پيووت توکی په حيث ټاکل کيږي او د ليکو بدلون له لارې پوزيشن (k, j_k) ته راوړل کيږي. که پيووت توکی شتون نه لري، نو د اينښلون پنه مو لاس ته راوړې ده.

- د k ليکې ډېرواره کمون يا تفريق له لارې د پيووت لاندې لور ته د ماتريکس توکی له منځه ځي.

ليکونکي: هيوليګ، شترايت

د ماتريکس

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & -3 & 0 & 9 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & -1 & 4 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & 6 & 1 & 3 & 5 & 2 & -5 \\ 0 & -2 & -3 & 1 & 6 & -7 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & -3 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

لپاره ترنفورمیشن د ایبنلون-فورم باندې په لاندې ډول ځغلي

1. د لومړۍ او دویمې لیکې پدلون:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 0 & -1 & 4 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & -3 & 0 & 9 \\ 0 & 4 & 6 & 1 & 3 & 5 & 2 & -5 \\ 0 & -2 & -3 & 1 & 6 & -7 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & -3 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

2. (3.لیکه Zeile) - 2·(1.لیکه Zeile) und او (4.لیکه Zeile) + (1.لیکه Zeile):

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 0 & -1 & 4 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & -3 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & -3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & -3 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

3. (3.Zeile) - (2.Zeile), (4.Zeile) - (2.Zeile)

او (5.Zeile) - (2.Zeile)

په پورته کې Zeile د لیکې یا میلې په معنا دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 0 & -1 & 4 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & -3 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

.4 (4. Zeile) - $\frac{1}{2}\cdot$ (3.Zeile):

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 0 & -1 & 4 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & -3 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

د ايښلون – فورم لري نا ساده ليکي د پيووټ –توکو $p_1 = 2$, $p_2 = 1$ او $p_3 = -10$ سره.

ليکونکي: هيوليگ، شترايت

د ايښلون- بڼه د يوه ل م س (كرښيز مساواتسستم)حل

Lösung eines LGS in Echelon-Form

يو کرښيز مساوات سيستم $Dx = c$ د ايښلون په بڼه،

$$\begin{pmatrix} 0\ldots0 & p_1 & *\ldots* & & & & & \\ & 0 & 0\ldots0 & p_2 & *\ldots* & & & \\ & & & 0 & 0\ldots0 & p_3 & *\ldots* & \\ & & & & & & \ddots & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پيووت $p_1,\dots,p_k$ سره تيک هلته حلوړ دی، که $c_{k+1}=\cdots=c_m=0$ وي.

حل يواځنی دی، که $k=n$ وي. د $k<n$ لپاره د هوموجين کرښيز مساوات سيستم ($c_i=0$)تيک $n-k$ کرښيز خپلواک حلونه شته .

نا معلومې، چې بې له پيووت يې متې په ګوته کوي. کېدی شي ازادې يا په خوښه و ټاکل شي.

ليکونکي: هيوليګ، شترايت

په لاندې کې به زيات تيوپيکي حالتونه تر بحث لاندې راوړل شي.

- $k=n=4$

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix}$$

د په ځې اينسوونې له لارې ريکورزيو يواځنی حل لاس ته راوړی شو.

$$x=(1,-1,-1,1)^t.$$

- $3=k<n=5$ ، $c_4\neq 0$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په اخرنۍ لیکه کې $0 \cdot x = 1$ ترې لرو، له دې سره کرښیز مساوات سیستم کوم حل نه لري.

- $c_4 = 0$ ، $3 = k < n = 5$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

دا چې $c_{k+1} = 0$ ، نو کرښیز مساوات سیستم $Dx = c$ حلوړ دی

د $\operatorname{Rang} D = 3 = n - 2$ له امله حل x یواځنی نه دی. دلته د دوه کرښیز خپلواک حلونه v_i شتون لري د هوموجېن سیستم او د ټولیز حل لاندې بڼه

$$x = x_s + \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 \,, \alpha_j \in \mathbb{R}$$

لري د هوموجین سیستم یو ځانګړی حل x_s سره.

وکتورونه v_i د پیووت پورې نه اړه لرونکو نامعلومو د کانونیکي (ښه یز: کنوني) ټاکنې له لارې معلوموي یا ټاکي او پاتې ضریبونه په هوموجېن سیستم باندې:

$$r_{\ell,\ell} x_\ell + \cdots + r_{\ell,n} x_n = b_\ell, \rightarrow x_\ell = \left(b_\ell - r_{\ell,\ell+1} x_{\ell+1} - \cdots - r_{\ell,n} x_n\right) / r_{\ell,\ell} .$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

يو ځانګړی حل

$$x_s = \begin{pmatrix} 5/4 \\ -6 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

د $x_3 = x_5 = 0$ اینسوونې له لارې لاس ته راځي.

لیکونکي: هیولیک، شترایت

رانګ او د ک م س(کربنیز مساواتسیستم) حلوړوالی

Rang und Lösbarkeit von LGS

وي دې $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m.$.

Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m.$

- کربنیز مساوات سیستم $Ax = b$ يو حل لري

$$\Longleftrightarrow \text{Rang}\, A = \text{Rang}(A, b).$$

- کربنیز مساوات سیستم $Ax = b$ یواځنی حلوړ دی

$$\Longleftrightarrow \text{Rang}\, A = \text{Rang}(A, b) = n.$$

- کربنیز مساوات سیستم $Ax = b$ ډېر حلونه لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\Longleftrightarrow \text{Rang}\, A = \text{Rang}(A, b) = k < n.$$

دلته په پام کې ولرئ، چې د A رانګ او د غزېدلې ماتريکس (A, b) اينواريانت دي د ساده بڼې بدلون سره. له دې امله کېدی شي و نيول شی يا فرض شي کرښيز مساوات سيستم به اپيلون-بڼه دی. به دې بڼه کېدی شي نتيجې ترلې ولوستل شي.

د انډول کرښه(انډولکرښه) Ausgleichsgerade

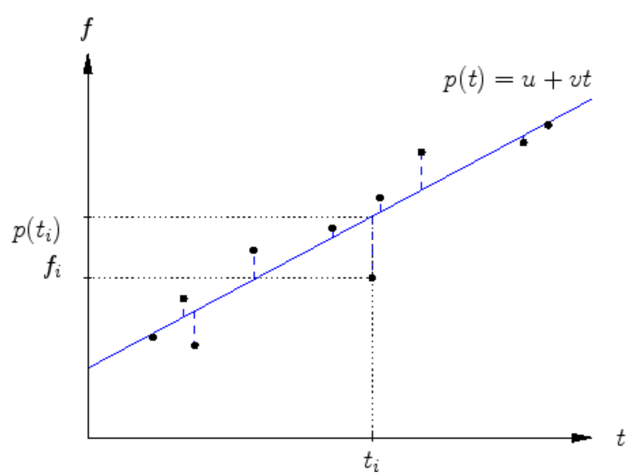
يوه کرښه

$$p(t) = u + vt\,,$$

، چې داتونه $i = 1, \ldots, n$ ، به خورا ښه توکه approximiert کوي، کېدی شي د ناتيکاوي مربع جمعي کمښت

$$\sum_{i=1}^{n} (f_i - p(t_i))^2$$

له لارې پيدا کړی شي.



(c) ketabton.com: The Digital Library

د محوربرخې u او جګېدنې v لپاره لاندې فرمولونه راکوي

$$u = \frac{(\sum t_i^2)(\sum f_i) - (\sum t_i)(\sum t_i f_i)}{n(\sum t_i^2) - (\sum t_i)^2}$$

$$v = \frac{n(\sum t_i f_i) - (\sum t_i)(\sum f_i)}{n(\sum t_i^2) - (\sum t_i)^2},$$

که لږ تر لږه دوه پراته ارزښتونه يا قيمتونه t_i ورکړ شي يعنې صفر وي.

ليکونکې: اپپ، هيوليګ

د مينيموم سره بايدد غلطۍ مربع جمعي مشتق هم د u او v هم د پسې صفر وي:

$$0 = 2\sum_i (u + vt_i - f_i)$$

$$0 = 2\sum_i t_i(u + vt_i - f_i).$$

دواړه مساوات د ماتريکس په بڼه په لاندې ډول دي

$$\begin{pmatrix} n & \sum t_i \\ \sum t_i & \sum t_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum f_i \\ \sum t_i f_i \end{pmatrix}.$$

که لږ ترلږه دوه t_i مختلفې وي، نو ديترمينانت ده:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\underbrace{(1+\cdots+1)}_{n\,\mathrm{mal}}|(t_1,\ldots,t_n)^{\mathrm{t}}|_2^2 - \left(\sum_i 1\cdot t_i\right)^2 > 0\,,$$

او سړی د کرامر د قاعدې سره ورکړ شوی حل لاس ته راوړي

ليکونکي: اپپ، هيوليگ

د برابروني حل يو بل سره يوغړيز کيدل يا يو په بل پريوتلو، کرښيزو مساوات سيستم

Ausgleichslösung überbestimmter, linearer Gleichungssysteme

که د يوه کرښيز مساوات سيستم $Ax=b$ ښی خوا b وي د $(m\times n)$ - اتريکس A متو کرښيزي هيولي ياسپاين کې خوندي نه وي (په تيپيکي دول د $m>n$ لپاره)، دا په دې معنا چې وي

$$\mathrm{Rang}\,A < \mathrm{Rang}\,(A,b)\,,$$

نو مساوات سيستم حل نه لري. سړی د يوه د پاسه ټاکلي سيستم ځخه خبرې کوي. په دې حالت کې کېدی شي يو اپروکسيميشن د برابروالي پرابلم

$$|Ax-b| \to \min$$

له لارې و ټاکل شي.

د برابروالي حل شمېرل د نورمالومساوات يا سينگولارارزښتتوته کوني په مرسته ممکن يا شوني دی

ليکونکي: اپپ، هيوليگ

(c) ketabton.com: The Digital Library

الجبر - کربنيز مساوات سيستم-برابروني پرابلم

Algebra - Lineare Gleichungssysteme – Ausgleichsprobleme

نورمالمساواتونه Normalengleichungen

د يوه په خوښه $m \times n$ – ماتريکس A لپاره هر د برابروني پرابلم

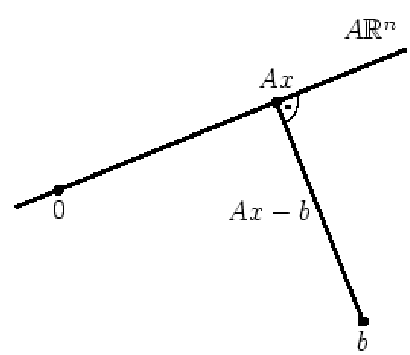
$$|Ax - b| \to \min$$

هر حل x نورمالميز –مساواتونه

$$A^{\mathrm{t}}Ax = A^{\mathrm{t}}b\,,$$

پوره کوي، دا په دې معنا چې

ريزيدووم $r = Ax - b$ Residuum اورتوګونال دی د A د متو څخه غزېدلي لانديفضا $\operatorname{Bild} A$ سره



ځمککچيز يا هندسي مساوات معنا لري، چې ريزيدووم $r = Ax - b$ د ماتريکس A په متو نيغ ولاړ دی يعني عمود دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ماتریکس $A^{t}A$ مربعیزه ده او پراخېدونی یا بعد n لري. دا ټیک هلته معکوسوړ ده کله چې $\mathrm{Rang}\, A = n$ وي، دا په دئ معنا چې کله د A متې کرښیز خپلواکې وي.
نورمالیز-مساوات د سینګولار حالت کې هم حلوړ دی، خو حل یې یواځنی نه دی.

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

له

$$|A(x+ty)-b|^2 \geq |Ax-b|^2$$

د

$$(Ax-b)^{t}y = y^{t}(Ax-b), \quad r = Ax-b$$

سره برابر ارزښته نامساوات

$$2ty^{t}A^{t}r + t^2y^{t}A^{t}Ay \geq 0$$

لاس ته راځي د ټولو $t \in \mathbb{R}$ او وکتورونو y لپاره. که د نابرابرون کیڼ اړخ په t کې د پارابول په څېر ونیول شي، نو نه منفیوال(نه کمیزوالي) د

$$y^{t}(A^{t}r) = 0\,.$$

سره به یوه معنا دي.

دا ټیک هلته د ټولو وکتورونو y لپاره صدق کوي، که په نوکانو کې افاده (وبینه) صفروکتور وي.

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

د

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

لپاره نورمالمساوات لاس ته راځي

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

لاس ته راځي

دا کرښيز مساوات سيستم ئواځني حل $x = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^t$ لري.ريزيدووم $r = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}^t$ دي.

که A کرښيز بلواکې متې ولري، لکه په بېلګه کې

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix},$$

نو نورمالو-مساوات سيستم سينګولار دي:

$$\begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

حل

$$x = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} - t \\ t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R},$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په دې حالت کې يوا ځني نه دي، مګر ريزيدووم

$$r = \begin{pmatrix} \frac{6}{5} & -\frac{12}{5} & 0 \end{pmatrix}^t$$

.

ليکونکي: اپپ، هيوليک

توموګرافيTomographie

لکه څنګه په فنکشن يا څيرونه (mappingتابع) کې ښوول شوي دي، په کمپيوتر- توموګرافي Computer-Tomographie کې د حجروغړو ټينګوالي (غلظت) $x(u,v)$ بيا جوړيږي ، په کومه کې چې د ګڼوالي يا ټينګوالي بايليدنه(کمښت) Intensitätsverlust د رونتګن وړانګو د k کودې له ℓ غبرګو کرښو

$$\mathcal{R}_i: \ (u_i, v_i) + \mathbb{R}(\cos\vartheta_i, \sin\vartheta_i), \quad i = 1, \dots, m = k\ell,$$

کچ کيږي. سړي د ټينګوالي وېش د يوه ټوټه ډوله ثابتي تابع approximiert کوي

سړی د ټينګواليخورونه د يوه ټوټه ډوله يا ټوټه په ټوټه ثابتو له لارې اپروکسيمي کوي د مربعو Q_j په پاتي شونو او ګڼوالي کچه ونو د نږدې ونې له لارې کټلي کرښيز ا نتيګرال څخه.

$$b_i = \int_{\mathbb{R}} x(u_i + t\cos\vartheta_i, v_i + t\sin\vartheta_i)\, dt \approx \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j\,,$$

چيرته چې x_j د $x(u,v)$ يو اپروکسيميشن دی په Q_j او

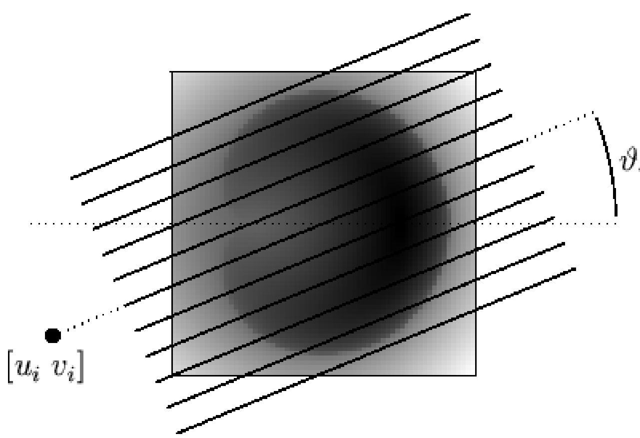
$$a_{i,j} = |\mathcal{R}_i \cap Q_j|$$

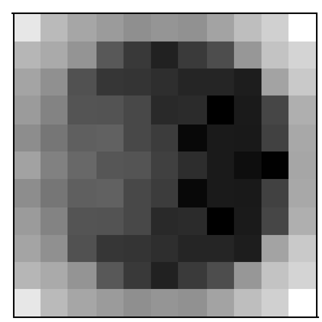
(c) ketabton.com: The Digital Library

د کربنو $\mathcal{R}_i$ د Q_j سره غوڅ ي يا تقاطع ا وړدوالی په ګوته کوي. دا چې د کچوونو تعداد یا ګڼون په ټولیزه توګه ډېر لوي دي نسبت د راستر (هغه تخته چې ځيره پرې کښل کيږي) څلوريو او شنتيګرالونه چې ټيک نه شي شميرل کيدی، د داتا b ځخه د x ټاکلوته سرې يو برابروالیز يا د انډول پرابلم سره مخامخ کيږي.

دالاندې ژباړي دلته راکاپي کړي(دا لاندې دې همداسي په انګرېزي پاتې وي):

» The word "raster" has its origins in the Latin *rastrum* (a rake), which is derived from *radere* (to scrape). It originally referred to the raster scan of cathode ray tube (CRT) video monitors, which paints the image line by line by magnetically steering a focused electron beam. By association, it came also to refer to a rectangular grid of pixels. See also rastrum, a device for drawing musical staff lines پای«





پورته ښي لور ته ځيره په يوه 11×11 راستر شميرلی نړديوالی ښايي کيڼ ځيره شوی ټينګوالي خورونه(غلظت-) ښايي. له دې سره د کونج

$$\vartheta = 0, \pi/16, \pi/8, \ldots$$

لپاره 11 غبرګ سکن-لورې د راستر مربع سور باندې کارول شوي.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

(c) ketabton.com: The Digital Library

آيګن-ارزښت او آيګو-وکتور Eigenwert und Eigenvektor

يو سکالار λ د يوه مرئع ماتريکس A آيګو-ارزښت بلل کيږي، که وي:

$$Av = \lambda v, \quad v \neq 0.$$

وکتورونه $v \neq 0$ د $Av = \lambda v$ سره و آيګن-ارزښته λ ته آيګن-وکتورونه بلل کيږي.
آيګن-وکتورونه و آيګن-ارزښت ته د صفر وکتور سره يوځاي يوه کرښيزه فضا جوړوي،
داسې په نامه د λ آيګن-فضا

$$V_\lambda = \ker(A - \lambda E)$$

ليکونکي: هيوليک،هيورنر، کيمرلي

ماتريکسونه

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

آيګن-ارزښتونه $\lambda_1 = 0$ او $\lambda_2 = 2$ لري، ځکه

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

او

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

ليکونکي: هيوليګ،هيورنر

لاندې بېلګې د (2×2) ـماتريکسونو لپاره ممکنه حالتونه ښايي

- دوه حقيقي آيګن-ارزښتونه:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} , \quad \lambda_1 = -1 , v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} , \quad \lambda_2 = 3 , v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

- يو حقيقي آيګن- ارزښت، دوه کرښيز خپلواک آيګن-زکتورونه:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} , \quad \lambda = 2 , v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} , v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

- يو حقيقي آيګن-ارزښت، يو آيګن-وکتور:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} , \quad \lambda = 1 , v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

- دوه کنجوګيري کمپلکس آيګن-ارزښتونه او آيګن-وکتورونه:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} , \quad \lambda_{1,2} = 1 \mp \mathrm{i} , v_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 \\ \pm \mathrm{i} \end{pmatrix} .$$

ليکونکي: هيوليګ،هيورنر

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاندې بېلګې د کمپلکس (2×2) – متريکسونو لپاره ممکنه حالتونه ښيي.

- دوه آيګن-ارزښتونه اودوه آيګن-وکتورونه:

$$A = \begin{pmatrix} i & 2 \\ 2 & i \end{pmatrix}, \quad \lambda_1 = 2 + i\,, v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = -2 + i\,, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

- يو آيګن-ارزښت، دوه کربنيز خپلواک آيګن-وکتورونه:

$$A = \begin{pmatrix} 2i & 0 \\ 0 & 2i \end{pmatrix}, \quad \lambda = 2i\,, v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- يو آيګن-ارزښت، يو آيګن-وکتور:

$$A = \begin{pmatrix} i & -1 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \quad \lambda = i\,, v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

ليکونکي: هيوليک،هيوررنر

ورته والي - ترانفورميشن Ähnlichkeitstransformation

د يوه مربعيز ماتريکس A په ورته والي تراسفورميشن

$$A \to B = Q^{-1} A Q\,,$$

کې آيګن-ارزښتونه ساتلي پاتيږي. آيګن-وکتورونه د اينورتيروړ ماتريکس Q له لارې تشريح شوې بنسټ بدلون سره سم ترانسفورمي کيږي، دا په دې معنا، چې د A آيګن-

(c) ketabton.com: The Digital Library

وکتور v و آيګن- ارزښت λ ته و همهغسي د B آيګن-وکتور $w = Q^{-1}v$ په ګوته کوي و همغه بنسټ ته.

ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

که v د A يو آيګن-وکتور وي و آيګن-ارزښت λ ته، يعنې $Av = \lambda v$ ، نو د $w = Q^{-1}v$ لپاره لاس ته

$$Bw = Q^{-1}AQw = Q^{-1}AQQ^{-1}v = Q^{-1}Av = Q^{-1}\lambda v = \lambda Q^{-1}v = \lambda w\,.$$

ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

لاندې مربع ماتريکس دې ورکړ شوی وي

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

د آيګن-ارزښت $\lambda_1 = 2$ او $\lambda_2 = 3$ او د لاندې اړونده آيګن-وکتور سره:

$$v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

يو ورته والي ترانسفورميشن د

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$B = Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}.$$

سره راکوي.

د B آيگن-وکتورونه w_1 او w_2 د

$$w_1 = Q^{-1}v_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ -\frac{5}{3} \end{pmatrix}$$

سره، همداسې

$$w_2 = Q^{-1}v_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

سره شمیرل کیږي.

لیکونکي: هیولیک، کرایخ

کرکتریستکي پولینوم Charakteristisches Polynom

د $(n \times n)$ – ماتریکس A آيگن-ارزښتونه د کرکتریستیکي پولینوم صفرونه دي

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix}.$$

په ځانګړې توګه د ماتبریکس آيگن – ارزښونه د ترانسبوزيشن سره اينواريانت پاتې کيږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ليکونکي: هيوليک، هيورنر، کيمرلې

يو سکالار λ تيک هلته د $(n \times n)$-ماتريکس A آيګن-ارزښت دی، که ولرو

$$Av = \lambda v\,, \quad v \neq 0,$$

دا په د ې معنا چې که دا هوموجېن کرښيز مساوات سيستم $(A - \lambda E)v = 0$ يو له صفر مختلف حل ولري. دا حالت تيک هلته لرو، که $(A - \lambda E)$ زينګولار وي يعنې که وي:

$$\det(A - \lambda E) = 0.$$

ليکونکي: هيوليک، هيورنر

د آيګن – ارزښتونو او - - وکتوونوشميرنه

د دې لپاره چې د مربع ماتريکس A لپاره د آيګن-ارزښت پرابلم حل کړو، لومړی د کرکتريستيکي پولينومونو آيګن-ارزښتونه λ د صفرځايونو په حيث ټاکي

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda E)\,.$$

د هر آيګن – ارزښت λ لپاره له دې سره اړوند آيګن – وکتور v لاس ته راوړو د هوموجېن کرښيز مساوات سيستم د يوه ناتريويال په څېر

$$(A - \lambda E)v = 0\,.$$

د دې لپاره چې د آيګن-فضا V_λ لپاره يو بنسټ لاس ته راوړو، سړی کړی شي دا سيستم په اپښيلون-فرمول ترنسفورمی کړو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په ټوليزه توګه $\dim V_\lambda = 1$ دی. دا تر يوه سکالار ضيب يواځنی ټاکلی آيګن-وکتور v کېدی شي هلته وټاکل شي ، په کوم کې چې د وکتورونو v مناسب کمپوننتونه له مخه ورکړي

ليکونکي: هيوليګ، کرايخ

د ماتريکس

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

د آيګن –ارزښت د ټالکو لپاره کرکتيستيکی پولينوم جوړوو

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -\lambda & -2 & -1 \\ 2 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(2-\lambda)^2 - 4 + 8 - 2\lambda = -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 6\lambda + 4\,.$$

او د ده صفرځايونه ټاکي. د ګومان له مخې (د مطلق ارزښت غړي پروېشونی يا مقسوم عليه) د لومړي صفرځای په څېر $\lambda_1 = 2$ لاس ته راځي. د دې صفرځای وېشنه

$$(-\lambda^3 + 4\lambda^2 - 6\lambda + 4)/(\lambda - 2) = -\lambda^2 + 2\lambda - 2,$$

او په لانې فرمول (دنيمې شپې فرمول په نامه بلل شوی) کې يې ځای په ځای کوو ترې لرو

$$\lambda_{2,3} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{-2} = 1 \pm \mathrm{i}\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

يو آيګن – وکتور و آيګن – ارزښت 2 ته کيدی شي د هوموجين مساوات سيستم

$$(A-2E)v = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} v = 0$$

حلونو له لارې وټاکل شی. حل $v=(1,0,-2)^t$ ساده ليدل کيږي

يوه آيګن-ارزښته $1+\mathrm{i}$ ته يو آيګن – وکتور w_1 له دې لاندې لاس ته راوړو:

$$(A-(1+\mathrm{i})E)w_1 = \begin{pmatrix} -1-\mathrm{i} & -2 & -1 \\ 2 & 1-\mathrm{i} & 1 \\ 0 & 2 & 1-\mathrm{i} \end{pmatrix} w_1 = 0\,.$$

او داسې د پزلګز به تګه $w_1=(-1-\mathrm{i},-1+\mathrm{i},2)^t$. دا A چې حقيقي ده، کېدی شي و $\lambda=1-\mathrm{i}$ ته آيګن-وکتور د کمبلکس کنجوګيشن له لارې جوړ شي:

$$w_2=\overline{w_1}=(-1+\mathrm{i},-1-\mathrm{i},2)^t$$
.

ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

الجبری او هندسي ډېرځلوالی

Algebraische und geometrische Vielfachheit

(c) ketabton.com: The Digital Library

که د λ د $(n \times n)$ – ماتریکس A آیګن –ارزښت وي، نو دکرکتریستیکي پولینوم

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda E_n)$$

د صفرځای په حیث د λ ډېرځلوالی د آیګن-ارزښت λ

الجبري m_λ ډېرځلوالی بللګیږي

د یوه آیګن – ارزښت λ د آیګن-فضا V_λ بعد یا پراخپدونی d_λ د λ هندسي ډېرځلوالی بلل کیږي. . ابور لري

$$d_\lambda \leq m_\lambda \,, \qquad \sum_\lambda m_\lambda = n \,,$$

همداسي

$$d_\lambda = n - \mathrm{Rang}(A - \lambda E) \,.$$

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر، کیمرلي

ماتریکسونه

$$A_1 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & 6 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

ټول لاندې کرکتریستیکي پولینوم لري:

$$(4-\lambda)^3 = (4-\lambda)(5-\lambda)(3-\lambda) + 4 - \lambda = (4-\lambda)^3 + 12(4-\lambda) - 12(4-\lambda)$$

او له دې سره هوار $m_4 = 3$ دی. د ماتریکس

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(A_1 - 4E) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (A_2 - 4E) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$(A_3 - 4E) = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 6 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

د رانګ په لرودو سره $d_4 = 3$ د A_1 لپاره، $d_4 = 2$ د A_2 لپاره او $d_4 = 1$ د A_3 لپاره پېژني

لیکونکي: هیولیک، هیورنر

د آیګن –ارزښتونو جمعه او ضرب

Summe und Produkt von Eigenwerten

د یوه $(n \times n)$-ماتریکس A د آیګن – ارزښت λ_i لپاره صدق کوي

Für die Eigenwerte λ_i einer $(n \times n)$-Matrix A gilt

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \operatorname{Spur} A, \quad \prod_{i=1}^{n} \lambda_i = \det A,$$

د کوم سره چې ډېرځله آیګن – ارزښتونه د الجبري ډېرځلوالی سره سم شمېرل کیږي.

لیکونکي: هیولیک، هیورنر

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ديترمينانت د مولتی كرښيزوالی په اساس د كركتريستيكي پولينوم لپاره لاس ته راځي

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda E) = (-\lambda)^n + \operatorname{Spur} A(-\lambda)^{n-1} + \cdots + \det A\,.$$

بلې لور ته پولينوم په لاندې بڼه

$$p_A(\lambda) = \prod_{i=1}^{n}(\lambda_i - \lambda)$$

انځوريدلای شي. د دويم فرمول په ضربونه او د ضريبونو پرتله كونه دا وركړې شوی كټمټوالی يا ايدنتيتي راكوي.

ليكونكي: هيوليگ، هيورنر

ماتريكس

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

كركتريتيكي بولينوم

$$p_A(\lambda) = \lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - bc)$$

لي د لاندې صفرځايونو سره:

$$\lambda_{1,2} = \frac{(a+d) \pm \sqrt{(a+d)^2 - 4(ad-bc)}}{2}\,.$$

كه د آيگن – ارزښتونو جمعه تشكيل شي، دا ريښې افاده له ةنځه ځي، او لاس ته راځي:

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \frac{(a+d) + (a+d)}{2} = a + d = \operatorname{Spur} A\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که آيګن – ارزښتونه سره ضرب شي، نو د دريم بېنوم فرمول سره لرو:

$$\lambda_1\lambda_2 = \frac{(a+d)^2-(a+d)^2+4(ad-bc)}{4} = ad-bc = \det A\,.$$

ليکونکي: هيوليک، هيوررنر

د ماتريکسونو ريښتونی فنکشنونه يا توابع

Rationale Funktionen von Matrizen

که د يوه ماتريکس A يو آيګن-ارزښت λ د ريښتوني فنکشن

$$r(t) = \frac{p(t)}{q(t)} = \frac{a_0+a_1t+\cdots}{b_0+b_1t+\cdots}\,,$$

قطبځای نه وي ، نو $r(\lambda)$ د

$$r(A) = q(A)^{-1}p(A) = p(A)q(A)^{-1}\,.$$

آيګن – ارزښت دی.

په ځانګړي توګه λ^k د توان-ماتريکس A^k آيګن – ارزښت دی او $1/\lambda$ د معکوس کېدونکي ماتريکس A^{-1} يو آيګن-ارزښت دی.

ليکونکي: هيوليک، هيوررنر

(c) ketabton.com: The Digital Library

له $Av = \lambda v$ د $k \geq 0$ لپاره لاس ته راځي چې $A^k v = \lambda^k v$ او په تولیزه توګه

$$\left(\sum_k c_k A^k\right) v = \left(\sum_k c_k \lambda^k\right) v \, .$$

پسې صدق کوي

$$Av = \lambda v \Leftrightarrow v = \lambda A^{-1} v \, ,$$

که A معکوسوړ وي

که λ د صورت پولینوم q صفرځای نه وي. نو صدق کوي

$$q(A)v = q(\lambda)v, \quad q(A)^{-1}v = q(\lambda)^{-1}v \, ,$$

پس

$$q(A)^{-1}p(A)v = q(\lambda)^{-1}p(\lambda)v = p(A)q(A)^{-1}v$$

لکه څه مو چې غوښتل .

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

د آیګن – وکتورونو بنسټ Basis aus Eigenvektoren

که یوه ماتریکس A ته د آیګن – وکتورونو v_j څخه یو بنسټ شتون ولري د آیګن – ارزښت λ_j سره ، نو دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$V^{-1}AV = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n), \quad V = (v_1, \ldots, v_n),$$

دا په دې معنا چې A نسبت و بنسټ $\{v_1, \ldots, v_n\}$ ته دیاګونال بڼه لري.

لیکونکي: هیولی، اپپ

د ښوولو دی، چې

$$V^{-1}AV = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$$

باور لری، د لاندې سره ورته (برابر ارزښته)دی

$$AV = V\,\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = (\lambda_1 v_1, \ldots, \lambda_n v_n).$$

دا چې v_j د V مټه و λ_j ته د آیګن-وکتورونه دي، دا سملاسي لیدل کیږي

لیکونکي: هیولی، اپپ

ماتریکسونه

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -6 & 6 \\ 1 & -5 & 1 \\ 5 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$

آیګن- ارزښتونه -2 , -2 او 3 لري. اړونده آئګن-وکتورونه دپیلګی به توګه دئ:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $V = (v_1, v_2, v_3)$ سره لاس ته راځئ

$$V^{-1}AV = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

ليکونکي: هيولی، اپپ

د ځيوکليکي ماتريکسونو دياګونالونه

Diagonalisierung zyklischer Matrizen

يو ځيوکليکي $(n \times n)$ – ماتريکس A کېدی شي د پورير-ماتريکس

$$W = (w^{jk})_{j,k=0,\ldots,n-1}, \quad w = \exp(2\pi \mathrm{i}/n),$$

په مرسته دياګونالي شي.

$$\frac{1}{n}\overline{W}\begin{pmatrix} a_0 & a_{n-1} & \cdots & a_1 \\ a_1 & a_0 & \cdots & a_2 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_0 \end{pmatrix} W = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

د

$$\lambda_\ell = \sum_{k=0}^{n-1} a_k w^{-k\ell}, \quad \ell = 0, \ldots, n-1,$$

سره د A آيګن – ارزښت دی.

ليکونکي: هيولی، اپپ

(c) ketabton.com: The Digital Library

سړی ساده بسې شمېرلی شي، چې د W ℓ -مه متِه د A یو آیګن – وکتور دی. د Aw_ℓ
د j ـم کمپوننت لپاره سړی لاس ته راوړي:

$$\sum_{k=0}^{n-1} a_{j-k \bmod n} w^{(k-j)\ell} w^{j\ell} = w^{j\ell} \sum_{k'=j-n+1}^{j} a_{k' \bmod n} w^{-k'\ell} .$$

دا اندکس یا پېژند نخښه مودولو سره ښوول کیږي، کېدی شي د جمعي کېدنې ورشو د $k' = 0, \ldots, n-1$
سره ځاي په ځاي شي یا بدله شي. په تعقیب سره يې زیاتون یا

جمعه برابر په λ_ℓ ده ،لکه چې غوښتل مو. له دې مو و ښوول چې لرو:

$$AW = W \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} .$$

دا چې $\frac{1}{\sqrt{n}} W$ یوتیتار دی،دا په دې معنا چې $\frac{1}{\sqrt{n}} W^* = \left(\frac{1}{\sqrt{n}} W \right)^{-1}$ ، سړی
غوښتونکی ترانسفورمېشن په دیاګونال بڼه لاس ته راوړي

لیکونکي: هیولی، ایپ

د عمومي تیوري سره سم کیدی شي څیوکلیکي ماتریکس

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

د فوریر- ماتریکس

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$W = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{pmatrix}$$

سره په دياګونال بڼه واړول شي(ترانسفورمي شي)

$$\frac{1}{4}\overline{W}AW = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

د 2 ,2 ,0 او 4 سره د A آيګن – ارزښت. دا چي A حقيقي دی بايد کمپلکس آيګن-وکتورونه

$$\begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -1 \\ -i \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ -1 \\ i \end{pmatrix}$$

(د W دويمه او څلورمه متړه) يو کړ آيګن-ارزښت ولري. داسې کېدی شي د کرښيز کمبينېشن له لارې د آيګن-وکتورونو لپاره يو حقيقي بنسټ تشکيل شي:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -1 \\ -i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ -1 \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad i\begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -1 \\ -i \end{pmatrix} - i\begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ -1 \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

ليکونکي : اپپ، هيوليګ

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ماتريکسونو توان Potenzen von Matrizen

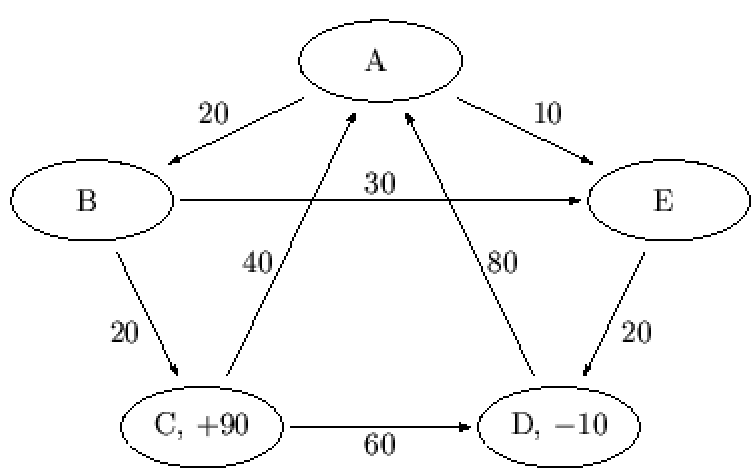
که A د مطلق ارزښت سره سم يا - - ډوله خورا لوي آيګن- ارزښت λ د آيګن – وکتور v سره ولري،نو صدق کوي:

$$A^n x = \lambda^n(cv + o(1)), \quad n \to \infty ,$$

که x يو ناترېويال کمپوننت د λ په آيګن-فضا کې ولري، دا په دې معنا چې $x = cv + w$ د $c \neq 0$ او $v \nparallel w$ سره.

ليکونکي : اپپ، هيوليګ

دا تابع د مارکيټپرخي x_i د رقابت د فيرما ګانو کلنی تغير ښايي.په دې ترتيب فيرماA د 80% بېلګې په توګه د فيرما D د مارکيټ برخه ګټي او د فيرما C خپله د مرکيټ برخه د 90% په شاوخوا کې لوېه وي د نوي خرڅلاو امکانات پيداکولو سره ، په همدې وخت کې د مارکيټ برخي A او D ته له لاسه ورکوي.



د ليدڅيرې څخه د مارکيټ نوې برخي(ونډه) رانيسو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

A_{neu} نوې $= 0.7A + 0.4C + 0.8D$

B_{neu} نوې $= 0.5B + 0.2A$

C_{neu} نوې $= 0.9C + 0.2B$

D_{neu} نوې $= 0.1D + 0.6C + 0.2E$

E_{neu} نوې $= 0.8E + 0.3B + 0.1A\,.$

له $x = (A, B, C, D, E)^t$ سره لاس ته راځي:

$$x_{neu}\ \text{نوی} = \begin{pmatrix} 0.7 & 0 & 0.4 & 0.8 & 0 \\ 0.2 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0.9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.6 & 0.1 & 0.2 \\ 0.1 & 0.3 & 0 & 0 & 0.8 \end{pmatrix} x\,.$$

د ايتراشن ماتريکس د n –توان سره ضربولو د n کلونو وروسته د مرکت ونډه راکوي.

نورميري شوي وکتورونه x^0 د يوه آيګن- وکتور v_{max} (ماکس) پولې ته ځي(کونورګيريګي) د ماتر يکس د ارزښت له مخې لوی ا يګن ارزښت λ_{max} ته. سړی لاس ته راوړي $\lambda_{max} = 1.1$ او دې ته اړوند ايګنوکتور

$$v_{max} = (0.75, 0.25, 0.25, 0.25, 0.5)^t\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د اوږده وخت لپاره بازار يا مارکيټ د A ه خوا ټاکل کيږي يا ټعينيږي. په سلو کې برخې د v_{max} د نورمي کولو له لارې لاس ته راځي يعني , $v_{max}/\|v_{max}\|_1$ په دې توګه

$$A:\ 37.5\%,\ \ B,C,D:\ 12.5\%,\ \ E:\ 25\%\,.$$

ليکونکي: اېپ، هيوليک

د فيبوناچي پرلپسې يا - ترادف Fibonacci-Folge

د فيبوناچي پرلپسي يا ترادفونه داسې پيژند لري يا تعريف دي:

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 1,$$

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1}\,, \quad \text{د } n \geq 1 \text{ لپاره}$$

دا په دې معنا چې هره فيبوناچي پرلپسې د دوارو ترمخ غړو زياتونن يا جمعه ده.

د فيبوناچي لومړي عددونه دي:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765, \ldots\,.$$

سرې د پيل ارزښت $a_1 = 1$ او $a_2 = 3$ ټاکي نو داسې په نامه لوکاس - $a_2 = 3$ Lucas- عدد:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765, \ldots\,.$$

که دوه يو په بل پسې د فيبوناچي عددونه يوه وکتور

$$x_n = (a_n, a_{n-1})^t$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ته سره يوځاي شي، نو ريکورزيون د

$$x_{n+1} = Ax_n$$

په څير د لاندې سره وليکو:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

د ماتريکسليکني په مرسته کېدی شي د فيبوناچي عدد دا اسيمپتوتيکي حالت وټاکل شي. د دې لپاره سړی د A آيګن-ارزښتونه او آيګن-وکتورونه شمېري:

$$\lambda_\pm = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}, \quad v_\pm = \begin{pmatrix} \lambda_\pm \\ 1 \end{pmatrix}.$$

که سړی د ريکورزيون وکتورونه د v_+ کرښيز کمبينېشن په حيث انځور کړي،

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}v_+ - \frac{1}{\sqrt{5}}v_-,$$

، نو لاس ته راځي:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\lambda_+\lambda_+^{n-1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\lambda_-\lambda_-^{n-1}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right)^n + o(\lambda_-^n).$$

ليکونکي: اپپ، هيوليک

(c) ketabton.com: The Digital Library

نورمال ماتريکسونه Normale Matrizen

يو کمپلکس ماتريکس A نورمال بلل کيږي، که

$$AA^* = A^*A\,,$$

وي، د $A^* = \bar{A}^t$ سره. په ځانګړې توګه يونيتار او هرمييتيکي ماتريکسونه نورمال دي.

د حقيقي نورمال ماتريکسونو لپاره دی:

$$AA^t = A^tA\,,$$

کوم چې په ځانګړې توګه د اورتوګونال او سيومتري ماتريکسونو لپاره پوره دی.

ليکونکي: اېپ، هيوليک،کيمرلي

د يونيتارو او هرميتيکي ماتريکسونو نورمالوالی ترلی له تعريف څخه لاس ته راځي.

د ئوه يونيتار ماتريکس لپاره دی:

$$AA^* = AA^{-1} = E = A^{-1}A = A^*A\,.$$

د يوه هرمېتيکي ماتريکس لپاره دی:

$$AA^* = AA = A^*A\,.$$

ليکونکي: اېپ، هيوليک

(c) ketabton.com: The Digital Library

د نورمالو ماتريکسونو يونيتار دياګونالي – يا دوه کونجتړي کول

Unitäre Diagonalisierung normaler Matrizen

يو ماتريکس A تيک هلته نورمال دی، که A يونيتار دياګوناوړ وي، دا په دې معنا چې ، که وي:

$$U^{-1}AU = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)\,,$$

د کوم سره چې د U متې يو اورتونورمال بنسټ و آيګن – ارزښت λ_j ته له آيګن- وکتورونو تشکيل کړي.

ليکونکي: اپپ، هيوليک، کيمرلې

که

$$A = UDU^*, \quad U^* = U^{-1}\,,$$

وي، نو نورمال دی، ځکه چې لرو:

$$\begin{aligned} AA^* &= (UDU^*)(UDU^*)^* = UD(U^*U)D^*U^* \\ &= U(D^*D)U^* = (UD^*U^*)(UDU^*) \\ &= A^*A\,. \end{aligned}$$

د دې معکوس کېدی شي د يوه اورتوګونال بنسټ شتون نسبت بعد ته د اينډکشن له لارې وښايي. د اينډکشن پل لپاره يو يونيتار ماتريکس V جوړوو د لاندې سره:

$$V^*AV = \left(\begin{array}{c|c} \lambda & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right).$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د اينکشن نيونې يا فرضيې له مخې کېدی شي B د يونتارماتريکس W له لارې په دياګونال بڼه ترنسفورمي شي، داسې چې سړی ځاي په ځاي کولی شي:

$$U = V \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & W \end{array} \right)$$

.

د V دجوړښت يا کنسترکشن ته د يوه نورمي آيګن – وکتور v څخه و آيګن-ارزښت λ ته ځي او ړدي

$$V = (v|\tilde{V}),$$

د کوم سره چې د $\tilde{V}$ متې وکتور v و اورتوګونال بنسټ ته پوره کوي. لاس ته راځي:

$$V^*AV = \left(\frac{v^*}{\tilde{V}^*} \right) \left(\; \lambda v \; \middle| \; A\tilde{V} \; \right) = \left(\begin{array}{c|c} \lambda & c^* \\ \hline 0 & B \end{array} \right) \; .$$

ښوولو تهدومره پاتيږي، چې B نورمال او $c = 0$ دی. دواړه د A د نوپماليټي څخه لاس ته راځي. دا د ورته والي ترنسفورميشن سره ساتلي پاتې کيږيو ، پس د پورته مساوات د ښي اړخ $\tilde{D}$ لپاره هم صدق کوي.

که

$$\tilde{D}\tilde{D}^* \qquad = \left(\begin{array}{c|c} |\lambda|^2 + |c|^2 & c^*B^* \\ \hline Bc & BB^* \end{array} \right)$$

$$\tilde{D}^*\tilde{D} \qquad = \left(\begin{array}{c|c} |\lambda|^2 & \overline{\lambda}c^* \\ \hline \lambda c & B^*B \end{array} \right) ,$$

تشکيل کړو، نو غوښتونی خويونه د پورته ماتريکسونو د دياګونال بلوکونو د پرتلې له لارې لاس ته راځي. ليکونکي: اپپ،هيوليګ

(c) ketabton.com: The Digital Library

ماتريکسونه

$$A = \begin{pmatrix} 3+2i & 3-2i \\ 3-2i & 3+2i \end{pmatrix}$$

نورمال دي، چې د سيده شمېرنې له لارې تصديق کېدی شي.

$$AA^* = \begin{pmatrix} 26 & 10 \\ 10 & 26 \end{pmatrix} = A^*A$$

د دې په تعقيب بايد A يونيتار دياګونالوړ وي. سرِی آيګن – ارزښتونه6 او $4i$ لاس ته راوړي او اړونده نورمي آيګن-وکتورونه د بېلګې په توګه دي:

$$v_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

د انتظار سره سم $v_1 \perp v_2$ دی، او د يونيتار ماتريکس $U = (v_1, v_2)$ سره دياګونال ماتريکس لاس ته راځي:

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 4i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3+2i & 3-2i \\ 3-2i & 3+2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

ليکونکي: اپپ،هيوليک

د هرميتيکي ماتريکسونو دياګونال بڼه Diagonalform hermitescher Matrizen

ديوه هوموجېن ماتريکس $A\ (A = A^*)$ آيګن-ارزښتونه λ_i حقيقي دي او د آيګن-وکتورونو v_i ځخه يو اورتوګونال بنسټ شتون لري. په تعقيب

(c) ketabton.com: The Digital Library

ده د يونيتارماتريکس سره

$$U^*AU = \mathrm{diag}\,(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)\,,$$

ده د يونيتارماتريکس $U = (v_1, \ldots, v_n)$ سره.

په ځنګړې حالت کې حقيقي سيومتريکي ماتريکسونو $(A = A^t)$ آيګن-وکتورونه هم حقيقي دي.

ليکونکي: هيوليګ، ربل

يونيتار دياګوناوړوالى په نورمالو ماتريکسونو د اړونده ټوليزې نتيجې څخه لاس ته راځي، هغه چې هرميتيکي حالت خوندي لري. د ښولو دا پاتې دى چې آيګن – ارزښت λ حقيقي دى. که په ورته توګه v آيګن- وکتور وي، نو دا له لاندې لاس ته راځي:

$$\lambda v^* v = \quad v^*(\lambda v) = v^*(Av) = (A^* v)^* v$$

$$= \quad (Av)^* v = (\lambda v)^* v = \overline{\lambda} v^* v\,,$$

ځکه چې $\lambda = \overline{\lambda} \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$ لرو.

ليکونکي: هيوليګ، ربل

هرميتيکي ماتريکس

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 - \mathrm{i} \\ -1 + \mathrm{i} & 1 \end{pmatrix}$$

ديترمينانت 0 لري. پسې $\lambda = 0$ يو آيګن – ارزښت دى او سړى تړلى ګوري، چې

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 - \mathrm{i} \end{pmatrix}$$

يو اړونده آيګن-وکتور دی. له $\mathrm{Spur}\, A = 3 = \lambda + \varrho$ څخه د ويم آيګن – ارزښت په حيث $\varrho = 3$ لاسته راځي. يو اړونده آيګن-وکتور نسبت و کمپلکس سکالار ضرب ته هغه و v ته لاندې اورتوګونال وکتور دی:

$$w = \begin{pmatrix} 1 + \mathrm{i} \\ -1 \end{pmatrix}.$$

د نورمي کولو له لارې يونيتار ماتريکس لاس ته راځي

$$U = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 + \mathrm{i} \\ 1 - \mathrm{i} & -1 \end{pmatrix}.$$

په تعقيب باور لري:

$$A = U \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} U^*,$$

د

$$U^* = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 - \mathrm{i} \\ 1 + \mathrm{i} & -1 \end{pmatrix}$$

سره، هغه و U ته معکوس.

ليکونکي: هيوليګ، کرايخ

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثبت ديفينيت ماتريکسونه Positiv definite Matrizen

يو مربع ماتريکس A مثبت ديفينيت بلل کيږي، که وي:

$$v^*Av > 0 \quad \forall v \neq 0.$$

که v^*Av يواځې نامنفي وي، نو A مثبت سيمي (نيم – يا برخه-) ديفينيت بولو.

يو مثبت ديفينيت ماتريکس A فقط مثبت دياګونالتوکي لري او آيګن-ارزښتونه. په ځنګړي توګه A معکوسوړ ده او معکوس يي هم مثبت ديفينيتدی.

ليکونکي: هيوليګ، ربل

ريلا ي – ويش (هعني هغه د وېش تيجه) Rayleigh-Quotient

د يوه هرميتيکی مثبت ديفينيت ماتريکس S لپاره د داسې په نامه ريلای-وېش اکسترم – ارزښتونه

$$r_S(x) = \frac{x^*Sx}{x^*x}, \quad x \neq 0,$$

خورا کوچنی او خورا لوي د S آيګن – ارزښت دی.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

ماتريکس S کېدی شي ا يونيتار ماتريکس U له لارې دياګونال فروم ته واړول شي:

$$U^*SU = D, \quad D = \text{diag}\,(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)\,,$$

د کوم سره چې

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$Sv_i = \lambda_i v_i \Rightarrow \lambda_i = \frac{v_i^* S v_i}{v_i^* v_i} > 0$$

او $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n$ نیول یا فرض کېدی شي.

که سړی $S = UDU^*$ او $x = Uy$ بدل کړي، نو دی

.

$$r_S(y) = \frac{y^* D y}{y^*(U^*U)y} = \frac{\sum_i \lambda_i |y_i|^2}{\sum_i |y_i|^2} .$$

دا بنايي چې

$$\lambda_{\min} \leq r_S(y) \leq \lambda_{\max} ,$$

چېرته چې د مطلوب آیګن-وکتورونو لپاره $y = e_n$ او $y = e_1$ لپاره صدق کوي.

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

مثلث بڼه Dreiecksform

یو کمپلګس مربع ماتریکس A کیدی شي د یوه ورته ترانسفورمیشن له لارې په پورته مثلث بڼه

$$R = \begin{pmatrix} \lambda_1 & r_{1,2} & \cdots & r_{1,n} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & r_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} = Q^{-1} A Q$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ترانفورمي شي، چېرته چې دياګونالي د A آيګن-ارزښتونه λ_i خوندي لري.

ليکونکي: هيوليګ،هيورنر

ښوونه د ماترريکس په بعد n باندې د اينډکشن له لارې کيدی شي صورت ونيسي، د

يوه (1×1)-ماتريکس د ترېويال حالت څخه په پيل.

يو $(n \times n)$-ماتريکس A تر څېرنې لاندې نيسو، نو دا لږترلږه يو ايګنوکتور v لري.

دا د نورمي کيدلو وروسته يوه اورتوګونال بنسټ $\{v, w_1, \ldots, w_{n-1}\}$ ته ورپوره

کيدی شي. په دې بنسټ کې څېرونه(فنکشن-که غواړی تابع) لاندې بڼه لري:

$$\tilde{A} = T^* A T = \begin{pmatrix} \lambda & x^* \\ 0 & B \end{pmatrix}.$$

د $((n-1) \times (n-1))$-ماتريکس لپاره د اينډکشن نيونې يا فرضيې له مخې يو

يونيتار ترانفورميشن $\tilde{Q}$ شتون لری د $\tilde{Q}^* B \tilde{Q} = R_{n-1}$ سره. له دې امله د

$$Q = T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tilde{Q} \end{pmatrix}$$

سره لاس ته راځي، چې

$$Q^* A Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tilde{Q}^* \end{pmatrix} T^* A T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tilde{Q} \end{pmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tilde{Q}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & x^* \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tilde{Q} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tilde{Q}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & x^*\tilde{Q} \\ 0 & B\tilde{Q} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda & x^*\tilde{Q} \\ 0 & \tilde{Q}^*B\tilde{Q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & x^*\tilde{Q} \\ 0 & R_{n-1} \end{pmatrix} = R\,.$$

ليکونکي: هيوليک، هيورنر

اصلي وکتورونه Hauptvektoren

که λ د کمپلکس $(n \times n)$ - ماتريکس A يو آيګن-اررښت وي، د الجبرى ډېرخلوالى m سره، نو يو وکتور v د

$$(A - \lambda E)^m v = 0\,, \quad v \neq 0$$

سره اصلى وکتور بلل کيږي و آيګن-ارزښت λ ته.

ټول اصلي وکتورونه و آئګن – ارزښت ته د صفر وکتور سره يوځاي د بعد m يو لاندې- يا برخوکتور جوړوي، دا اصليفضا H_λ و آيګن – ارزښت λ ته. دا کرښيزې څېروني يا فنکشن A ته انواريانت دى.

ټوله فضا د اصلي فضاو سيده جمعه يا زيتون دى:

$$\mathbb{C}^n = \bigoplus_\lambda H_\lambda$$

ليکونکي: هيوليک، هيورنر

(c) ketabton.com: The Digital Library

ښوونه يې له ډېرو برخپلونو يا-قدمونو رايوځای کيږي.

اول - داچې يوونماتريکس يا واحد ماتريکس د هر ماتريکس سره بدلپدونکی دی يوه وکتور $v \in H_\lambda$ د څېرې(عکس ؟؟) Av لپاره صدق کوي:

$$(A-\lambda E)^m Av = \left(A^{m+1} + \cdots + \lambda^m E^m A\right) v = A\left(A^m + \cdots + \lambda^m E^m\right) v$$

$$= \qquad A(A-\lambda E)^m v = A \cdot 0 = 0\,.$$

په تعقيب $Av \in H_\lambda$ دی.

دويم- د دې لپاره چې بعد وټاکو، ماتريکس A په پورتني مثلثبنه ترانفورمي کوو:

$$A \to B = Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} \lambda & & * & * & * \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda & * & * \\ & 0 & & R & \\ & & & & \end{pmatrix}.$$

دا چې د $v \in H_\lambda$ لپاره

$$0 = Q^{-1}(A-\lambda E)^m Q(Q^{-1}v) = (B-\lambda E)^m (Q^{-1}v)\,,$$

دی، اصلي وکتورونه د $v \to w = Q^{-1}v$ سره سم اصلي وکتور ته ترانفورمي کيږي.

مکر د B له بڼې روښانه دی، چې يوون – يا واحدوکتورونه e_i د $i \leq m$ لپاره د B

په اصليفضا $Q^{-1}H_\lambda$ کې پراته دي. پسې يو وکتور v د $v_i \neq 0$ سره د يوه $i > m$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لپاره د $(B-\lambda E)^m$ له لارې په 0 نه څېره کيږي يا فنکشن 0نه دی. په تعقيب $\dim H_\lambda = m$ لرو.

دريم – دا چې $\sum_\lambda \dim H_\lambda$ د الجبري د ډېرواره جمعې سره برابر دی، يعني برابر په n دی، بسيا کوي، چې د بنسټ خويونو لپاره د اصلي فضا کربنيز خپلواکوالی وښودل شي يا وښايو. دې ته استعماليږي، چې د $\varrho \neq \lambda$ لپاره لرو:

$$(A-\varrho E)v = 0 \wedge v \in H_\lambda \Rightarrow v = 0.$$

که د مختلو اصلي فضاو څخه يوه د وکتورونو جمعه ورکه شي،

$$v_\lambda + v_\varrho + v_\sigma + \ldots = 0,$$

، نو لاس ته راځي:

$$\left((A-\varrho E)^{m_\varrho}(A-\sigma E)^{m_\sigma}\ldots\right)v_\lambda = 0.$$

دا چې يوګونی ضريبونه H_λ انواريانت دي، په پورته يادونه استعمالوږ دی، او لاس ته ترې $v_\lambda = 0$ راځي. په ورته توګه $v_\varrho = v_\sigma = \ldots = 0$ ترې لاس ته راځي او له دې سره صفروکتور فقط په ساده ډول انځوروږ دی.

ليکونکي: هيليک، هيورنر

د اصلفضا څيوکليکي بنسټ Zyklische Basen von Haupträumen

د يوه کمپلکس مربع ماتريکس A يو اصلفضا (اصلي فضا) کېدی شي د څيکليکي برخفضاو په يوه سيده جمعې تجزيه شي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$H_\lambda = V_1 \oplus \cdots \oplus V_\ell ,$$

دا په دې معنا چې هر برخفضا V_i د لاندې بڼې یو بنسټ لري

$$B^{k_i} v_i, \ldots, Bv_i, v_i, \quad B = A - \lambda E,$$

د $w_i = B^{k_i} v_i$ سره یوه آیګن-وکتور و آیګن-ارزښت λ ته.

ماتریکس A برخفضا V_i اینواریانت پرېږدیاو هلته لاندې ماتریکس-انځورونه لري:

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix} .$$

لیکونکي:هیولیک،هیورنر

د تعریف سره سم H_λ له وکتورونو v څخه د $B^{k+1}v = 0$ سره جوړه ده، د کوم سره چې k کوچنۍ ده د λ د الجبري ډېرځلوالي m څخه. د بنسټ ټاکلې بڼه له دې امله نږدېوالی لري. د دې لپاره چې وکتورونه

$$w_i \in \ker B ,$$

چې بنسټ کره کوي ، وټاکو ، نو د ایګنوکتورونو $\ker B$ و λ ته برخفضاوې

$$U_j = \ker B \cap \text{Bild } B^j$$

تر څېړنې لاندې نیسو. په روښانه نوګه دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\emptyset = U_m \subset U_{m-1} \subset \cdots \subset U_0 = \ker B\,.$$

وکتورونه w_i به اوس ، له تشدېرئ سره په پيل، اينډوکتي، جوړېږي. که $w_1, \ldots, w_{i-1}$ همدا اوس کره شوي وي ، نو سرئ لويوالی دا لوي k_i داسې، د هغه U_{k_i} لپاره داسې چې W_{i-1} کې نه وي پروت، دا په دې w_j د دغه په کربنيزه هيولې معنا چې $v_i \neq 0$ باور لری د $B^{k_i} v_i = w_i \notin W_{i-1}, \quad B w_i = 0\,.$ سره .

په دې ډول بالاخره د ټول آيګن-فضا $\ker B$ لپاره يو بنسټ $\{w_1, \ldots, w_\ell\}$ جوړيږي او اړونده ځيوکليکي بنسټونه د V_i لپاره.

د فضاو V_i د B سره (همداسې A) د ضرب له لارې روښانه دی. د غوښتل شوې ماتريکس انځورنه له اندې څخه لاس ته ارځي

$$A(B^j v_i) = (\lambda E + B) B^j v_i = \lambda B^j v_i + B^{j+1} v_i\,,$$

، که د بنسټ وکتورونه ، لکه څنګه چې ورکړ شوي دي، د کښته کېدونکي توان سره تنظيم کړي.

د جوړښت د ټيکوالي لپاره بايد برسېره پر دې د وکتورنو $B^j v_i$ بنسټ خويونه هم وښوول شي. دا د دوه پلونو (قدمونو) سره صورت نيسي.

اول - لومړی کرښي. خپلواکوالی ښوول کيږي. دا تخنيکي دلايل کزدی شي د دوه ځيکليکي ځنځيرونو د بېلګې

$$B^2 v_1,\, B v_1,\, v_1, \quad B v_2,\, v_2\,,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له لارې لیدوړ شي. نیسو چې

$$\alpha_{2,1}B^2v_1+\alpha_{1,1}Bv_1+\alpha_{0,1}v_1+\alpha_{1,2}Bv_2+\alpha_{0,2}v_2=0,$$

دی، نو د B^2 سره د ضرب له لارې لرو

$$\alpha_{0,1}w_1=0 \implies \alpha_{0,1}=0\,,$$

د $B^3v_1=Bw_1=0$ او $B^2v_2=Bw_2=0$ له امله . د B سره د ضرب له لارې اوس لرو

$$\alpha_{1,1}w_1+\alpha_{0,2}w_2=0 \implies \alpha_{1,1}=\alpha_{0,2}=0$$

د جوړښت سره سم د آیګن-وکتورونو w_i کرښيز خپلواکوالی له امله. بالاخره لرو

$$\alpha_{2,1}=\alpha_{1,2}=0$$

بیا هم د آیګن-وکتور w_i د کرښيز خپلواکوالی له امله.

په ټولیز حالت په ورته توګه مخ ته ځو. د یوه کرښيز کمبینیشن د تحلیل په هکله بسټوکتور د B د مناسب توان سره ضربوي، تر څو د آیګن-وکتورونو ټول ترمونه له منځه ولاړ شي.

دویم - همدومرهښایو، چې هر وکتور $u\in H_\lambda$ د بنسټوکتورونو سره انځوروړ دی.

پس وي دې $B^ku=0\,,$ ، د $k\le m$ سره. د $k=1$ لپاره یې نه ښایو، ځکه چې وکتورونه w_i د جوړښت له امله د آیګن – فضا $\ker B$ لپاره یو بنسټ جوړوي. اندوکتیو سړی نیوی شي یا فرض کولی شي، چې په کې وکتورونه انځوروړ دي.

همداسې آیګن-وکتور $B^{k-1}u$ انځوروړ دی:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$B^{k-1}u = \sum_i \alpha_i w_i .$$

له دې لاس ته راځي، چې

$$B^{k-1}\underbrace{(u - \sum_i \alpha_i B^{k_i-k+1} v_i)}_{u'} = 0 \,.$$

د دې په تعقيب u' انځورونږ دی او له دې سره u هم .

ليکونکي:هيوليک،هيورنر

د جوردان بڼه Jordan-Form

يو کمپلکس مربعماتريکس کېدی شي د يوه ورته والي ترانفورمېشن له لارې د بلوک دياګونال بڼه باندې تراسفورم شي

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_k \end{pmatrix} = Q^{-1}AQ$$

باندې تراسفورم شي. له دې سره د جوردانبلکونه دا لاندې بڼه لري

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda_i & 1 \\ 0 & & & & \lambda_i \end{pmatrix} ,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د A یوه آیګن – ارزښت λ_i سره

تر ځای بدلون پورې د جوردان بنه یواځنۍ ده.

لیکونکي:هیولیګ،هیورنر

دا چې اصلي فضاوې H_λ د فنکشن A لاندې انواریانت دي، کیدی شي د اصلي وکتورونو بلوکبنې پورې یوه بنسټ په نسبت لاس ته راوړل شي. د ځانګړو څیوکلیکي بسټونو

$$B^{k_i} v_i,\, \ldots,\, B v_i,\, v_i, \quad B = A - \lambda_i E\,,$$

استعمال له لارې بلوکونه غوښتوني بڼه غوره کوي

لیکونکي: خیولیګ، هیورنر

ماتریکس

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

کرکتریستیکي بولینوم

$$p_A(\lambda) = (-1-\lambda)^3 + 4(4 - 3(-1-\lambda)) = -\lambda^3 - 3\lambda^2 + 9\lambda + 27$$

لري د ډبل صفرځایونو $\lambda = -3$ او ساده صفځایونو $\varrho = 3$ سره.

دا چې د ماتریکس

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(A-\lambda E)=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

رانګ 2 دی، و ته فقط يو آيګن-وکتور شتون لري. د دې په تعقيب A د جوردان بڼه لري.

$$Q^{-1}AQ=J=\begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},Q=(w,v,\tilde{w}).$$

د کرښيز و مساواتشيستمونو د حل له لارې

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

او

$$\begin{pmatrix} -4 & 0 & 4 \\ 2 & -4 & 0 \\ 3 & 2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tilde{w}_1 \\ \tilde{w}_2 \\ \tilde{w}_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

سړی لاندې آيګن-وکتورونه لاس ته راوړي:

$$w=\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{w}=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

اصلي ډياګونال پوره کوي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix},$$

دا په دې معنا چې د بېلګې $v = (-3, 4, 1)^t$ په توګه . له دې سره دی

$$Q = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

څه چې د ازمايښت له لارې $A = QJQ^{-1}$ تصديق کيږي.

ليکونکي: خيوليګ، هيورنر

د يوه کمپلکس (2×2)-ماتريکس A لپاره 3 څرنګواليز (د کواليتي له مخې) مختلف جوردان-نورمالبڼې شتون لري:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \varrho \end{pmatrix}, (\lambda \neq \varrho).$$

په لومړي حالت کې λ يو ډبل آيګن – ارزښت دی د فقط يوه (تر سکالار ضرب پورې) آيګن-وکتور w سره، دا په ي معا چې

$$\mathrm{Rang}(A - \lambda E) = 1.$$

يو په دې پورې اړونده اصلی وکتور v او له دې سره دې سره ترانسفورميشن ماتريکس د $Q = (w, v)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$w = (A - \lambda E)v$$

$$\ker(A - \lambda E)^2$$

د حل له لارې لاس ته رواړي ، همداسې د   ټاکلو له لارې.

د دې لپاره يو ځرګنده بېلګه

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -9 & 8 \end{pmatrix}$$

کرکتريستيکی پولينوم

$$P_A(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 4$$

دی، د دبل صفرځای $2 = \lambda$ سره. د

$$\begin{pmatrix} -6 & 4 \\ -9 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$w = (2,3)^t$$

حل له راې سړی   لاس ته راوړي او له دې سره

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 4 \\ -9 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

$$v = (1,2)^t$$

يو اړونده اصلي وکتور   . دا د ازمايښت سره تصديق کيږي:

$$A = QJQ^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

سره تصديق کيږي.   ليکونکي: خيوليګ، کرايخ

(c) ketabton.com: The Digital Library

د یوه کملکس (3×3) - ماتریکس A لپاره لاندې کولتاتیو مختلف جوردان –نورمالبڼې $J = Q^{-1}AQ$ شتون لری:

اول – جوړه دوله مختلف آیګن-ارزښتونه λ, ϱ, σ :

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \varrho & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{pmatrix}.$$

دویم – یو دبل آیګن – ازښت λ :

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \varrho \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \varrho \end{pmatrix}.$$

په دویم حالت کې

$$\mathrm{Rang}(A - \lambda E) = 2$$

او $Q = (w, v, \tilde{w})$ دي له آیګن وکتورونو w او $\tilde{w}$ یوه اصلي وکتور v سره، هغه چې د مساوات سیستم د حل له لارې

$$(A - \lambda E)w = 0, \quad w = (A - \lambda E)v, \quad (A - \varrho E)\tilde{w} = 0$$

د حل له لارې ټاکل کېدی شي.

دریم – یو دریواره آیګن –ارزښت:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

په دویم حالت کې

$$\mathrm{Rang}(A - \lambda E) = 1$$

دی او سړی یو اصلي وکتور v د

$$(A - \lambda E)^2 v = 0\,, \quad (A - \lambda E)v \neq 0.$$

حل له لارې لاس ته راوړي.

اړونده آیګن – وکتور $w = (A - \lambda E)v$ دی، او یو غزېدلی کربنیز خپلواک آیګن – وکتور $\tilde{w}$ دا لاندې پوره کوي:

$$(A - \lambda E)\tilde{w} = 0, \quad w \perp \tilde{w}\,.$$

بالاخره $Q = (w, v, \tilde{w})$ دی.

په دریم حالت کې

$$\mathrm{Rang}(A - \lambda E) = 2$$

دی او دی $Q = (w, v, u)$ له

$$(A - \lambda E)w = 0\,, \quad w = (A - \lambda E)v\,, \quad v = (A - \lambda E)u\,.$$

سره. لیکونکی: ویپر

(c) ketabton.com: The Digital Library

د (4x4) -ماتيکسونو جوردان-بڼې

Jordan-Formen von (4x4)-Matrizen

لاندې توابع ټول 14 ممکن (4×4) - ماتريکسونو د جوردان – بڼې ځای نيوني جوړښتونه ښايي .

- ځلور مختلف آيګن – ارزښتونه $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{pmatrix}$$

- يو دوه ځله آيګن – ازښت λ_1 او دوه دوه ځله آيګن -ارزښتونه λ_2, λ_3

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

- يو درې واره آيګن – ارزښت λ_1 او يو يوواره آيګن – ارزښت λ_2 .

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

- دوه دوه واره آيګن – ارزښت λ_1, λ_2

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

- يو څلورواره آيګن – ارزښت λ_1.

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$$

ليکونکي: خيوليک، هيورنر

د ماتريکسونو توانونه Potenzen vonMatrixen

د يو کمپلکس ماتريکس توانونه A^n ، $n = 0, 1, \dots$ تيک هلته صفر ماتريکس پولې ته تلونکي دي، که د ټولوآيګن-ارزښتونو λ مطلق ارزښت له 1 کوچنی دی.

پرلپسي (A^n) محدوده پاتې کيږي، که $|\lambda| \leq 1$ او د آيګن – ارزښت لپاره د ارزښت 1 سره

ليکونکي: خيوليک، هيورنر

(c) ketabton.com: The Digital Library

د A د جوردان – بڼې $J = Q^{-1}AQ$ سره کېدی شي د ماتریکس – توانونه په لاندې بڼه و لیکل شي:

$$A^n = (QJQ^{-1})(QJQ^{-1})\cdots(QJQ^{-1}) = QJ^nQ^{-1}$$

دلته یواځې دې ته اړتیا ده چې د J پولې ته تلنه(لیمیټ) تر څېړنې لاندې و نیل شي. د J د بلوکفورم (- بڼې) کېدی شي هر بلوک J_i ځانله تر څېړنې ونیل شي. د دې لپاره لیکو

$$J_i = (\lambda_i E) + D\,,$$

، د کوم سره چې D ګاوندی دیاګونال د یو سره خوندي لري. لکه چې په ساده توګه ښوول کیږي، د بعد m د یوه بلوک لپاره $D^m = 0$ دی. پسې صدق کوي

$$(J_i)^n = \lambda_i^n E + \binom{n}{1}\lambda_i^{n-1}D + \cdots + \binom{n}{m-1}\lambda_i^{n-m+1}D^{m-1}\,.$$

له دې کتمېوالي څخه کېدی شي د پرلبسپپولې ته تلنه(لیمیټ کونورګنت) و لوستل شي.

د $|\lambda_i| < 1$ لپاره دی

$$\lim_{n\to\infty}\binom{n}{j}\lambda_i^{n-j} = 0\,,$$

دی، ځکه چې $\binom{n}{j}$ فقط پولینومیال یعنې پولینومي لوییږي، د دې معکوس λ_i^{n-j} اکپوننشک ټیټیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

که $|\lambda_i| = 1$ وي پرلپسي محدوده يا راپنده پاتيږي، که $m = 1$ وي، دا په دې معنا، چې ګاونډی دياګونال د يوه سره شتون نه لري.

ليکونکي: خيوليک، هيورنر

په زيګولار ارزښت ټوټه کونه Singulärwert-Zerlegung

هر يوه کمپلکس $(m \times n)$ ماتريکس A ته يونيتار ماتريکسونه U او V شتون لري د

$$U^*AV = S = \begin{pmatrix} s_1 & & 0 \\ & s_2 & \\ 0 & & \ddots \end{pmatrix}.$$

سره.

زينګولار ارزښتونه

$$s_1 \geq s_2 \geq \cdots \geq s_k > s_{k+1} = \cdots = 0$$

د A^*A د آئګن – ارزښتونو ريښې دي او k د A رانګ دی.

د U متي u_j او د V متي v_j د AA^* همداسې A^*A د آيګن-وکتورونو اورتوګونال بنسټونه جوړوي او لاندې صدق کوي:

$$Av_j = s_j u_j,$$

د $1 \leq j \leq k$ لپاره.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د سينګولارارزښت تونه کوني له لارې کېدی شي کرښيزه څېرونه يا فنکشن

$$x \mapsto y = Ax$$

په لاندې بڼه انځور شي:

$$y = \sum_{i=1}^{k} s_i (v_i^* x) u_i$$

له دې لاس ته راځي ، چې

$$\operatorname{Kern} A = \operatorname{span}\{v_{k+1}, \dots, v_n\}, \quad \operatorname{Bild} A = \operatorname{span}\{u_1, \dots, u_k\}.$$

ذاالاخره $\|A\|_2 = s_1$ او $\|A\|_F^2 = \sum_{j,k} |a_{j,k}|^2 = s_1^2 + \cdots + s_k^2$ دي.

ليکونکي: اپپ.هيوليګ

د هرمېتيکي ماتريکس A^*A د دياګونالي کوني له لارې لاس ته

$$V^* A^* A V = \operatorname{diag}(s_1^2, \dots, s_k^2, 0, \dots, 0) = S^t S,$$

راځي، له هغې سره چې سرې نيولی شي، چې آيګن – ارزښتونه د خپلې لويې پسې منظم دي. دا چې A^*A مثبت ديفينيت دي، کېدی شي چې فقط نامنفي آيګن-ارزښتونه د مربع په څېر وليکي او په دې توګه د $m \times n$ دياګونالماتريکس S تعريف کړي.

د پورته مساوات څخه لرو ، چې د AV متې اورتوګونال دي او نورم s_i لري:

$$AV = \begin{pmatrix} s_1 u_1 & \cdots & s_k u_k & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = US$$

د يوه يونيتارماتريکس U سره.

(c) ketabton.com: The Digital Library

وروسته له دې چې غوښتونې انځورونه

$$A = USV^*$$

منځ ته ارغله، کېدی شئ پسې راتلونکي وینا ساده پسې وازمائل شي.

دا چې یونیتار ترانسفورمیشن د یوه ماتریکس رانګ نه تغیروي، صدق کوي

$$\text{Rang } A = \text{Rang } S = k\,.$$

پسې لرو

$$AA^*u_j = U(SS^{\mathrm{t}})U^*u_j = u_j(s_j)^2$$

او

$$A^*Av_j = V(S^{\mathrm{t}}S)V^*v_j = v_j(s_j)^2\,.$$

باالاخره Av_j د US د j ـمې متې سره برابر دی، یعني د u_js_j سره برابر.

لیکونکي: اېپ.هیولیک

فاسد معکوس Pseudo-Inverse

یو کمپلکس $(m \times n)$-ماتریکس A د سینګولار-ارزښت-تېوته کوني USV^* سره کیدی شي د اندولوني پرابلم(مسئله $|Ax - b| \rightarrow \min$ د مینیمال نورم سره په بنه

$$x = A^+b, \quad A^+ = VS^+U^*,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

وليکل شي، د کوم سره چې A^+ د A فاسد-معکوس بلل کيږي، او

$$S^+ = \mathrm{diag}(1/s_1, \ldots, 1/s_k, 0, \ldots, 0), \quad k = \mathrm{Rang}\, A\,,$$

د $(n \times m)$ - دياګونال ماتريکس د مثبت سينګولار ارزښت دی

د په څټ ارزښتونو سره.

که $\{u_1, \ldots, u_m\}$ او $\{v_1, \ldots, v_n\}$ د U همداسې V ، د متو اورتوګونال بنسټونه وي، نو کېدی شي کرښيز فنکشن $b \mapsto x = A^+b$ په ضريبونو بڼه

$$x = \sum_{\ell=1}^{k} \frac{1}{s_\ell} \, (u_\ell^* b) v_\ell$$

انځور شي. له دې څخه په ځانګړي ډول لاس ته راځي، چې

$$\mathrm{Kern}\, A^+ = \mathrm{span}\{u_{k+1}, \ldots, u_m\}, \quad \mathrm{Bild}\, A^+ = \mathrm{span}\{v_1, \ldots, v_k\}$$

او $\|A^+\|_2 = 1/s_k$.

ليکونکي: اپپ.هيوليګ

د د $2-$ نورم انواريانت له امله د يونيتار ترانفورميشن له لارې کېدی شي $Ax - b$ له کيڼ د U^* سره ضرب کړي. د

$$c = U^*b, \quad y = V^*x$$

سره ترې ورته د مينيمال کولو پرابلم لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$|Sy - c| = \left| \begin{pmatrix} s_1 y_1 - c_1 \\ \vdots \\ s_k y_k - c_k \\ -c_{k+1} \\ \vdots \\ -c_m \end{pmatrix} \right| \to \min .$$

مینیموم سرِی د لومړیو k مساواواتو د حل له لارې لاس ته راوړي:

$$y_i = c_i / s_i, \; i = 1 : k .$$

د یونیتار میاتریکس V $(|x| = |y|)$ نورم ته ریښتینوالي له امله د مینیمال نورم د حل لپاره دی:

$$y_{k+1} = \cdots = y_n = 0 .$$

په ټولیزه توګه ترې لاس ته راځي

$$y = S^+ c, \quad s^+_{i,j} = \begin{cases} 1/s_i & \text{für } i = j \le k \\ 0 & \text{sonst} . \end{cases}$$

لیکونکي: اپپ.هیولیګ

د

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 5 \\ 6 & 0 & 3 \\ 2 & -4 & 5 \\ 6 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لپاره دې د انډولوالي پرابلم حل شي

د زيګولار- ارزښت ټوټه کونې (تجزيه کونې) شمېرنې لپاره لومړی د

$$A^tA = \begin{pmatrix} 80 & -16 & 56 \\ -16 & 32 & -40 \\ 56 & -40 & 68 \end{pmatrix}$$

آيګن-ارزښتونه او آيګن-وکتورونه ټاکل کيږي او ترې لاس ته راځي

$$s_1^2 = 144,\ s_2^2 = 36,\ s_3^2 = 0, \quad V = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

له دې لړو

$$S = \begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad AV = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 0 \\ 6 & 3 & 0 \\ 6 & -3 & 0 \\ 6 & 3 & 0 \end{pmatrix} = US.$$

د U دوه لومړنی متې د AV د اړنده متو سره د ويش له لارې لاس ته راځي او د سيګولار ارزښتونو (له دې شره بايد ئوون- يا واحد وکتورونه منح ته شي) له لارې، پاتې متې (نه يواځنی ټاکلې) و اورتونورمال بنسټ ته د پوره کونې له لارې لاس ته راځي:

$$U = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له دې سره فاسد- معکوسيت

$$A^+ = V \begin{pmatrix} \frac{1}{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} U^t = \frac{1}{72} \begin{pmatrix} -2 & 6 & -2 & 6 \\ -5 & 3 & -5 & 3 \\ 4 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

دی او

$$x = A^+ b = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

د مینیمال نورم حل.

ليکونکي: اپپ.هيوليګ

د توپوګرافيکي کچونداتنونو تيکاوی يا اصلاح

Korrektur topografischer Meßdaten

د توپګرافي جګوال h_i داتنونه يا اعداد چې کچوني له لارې لاس ته راړني ته د جګوالو کمښتونه $d_{i,j}$ کچ کيږي. د کچونې ناتيکاوي په بنسټ د قانون له مخې صدق $d_{i,j} \neq h_i - h_j$ کوي

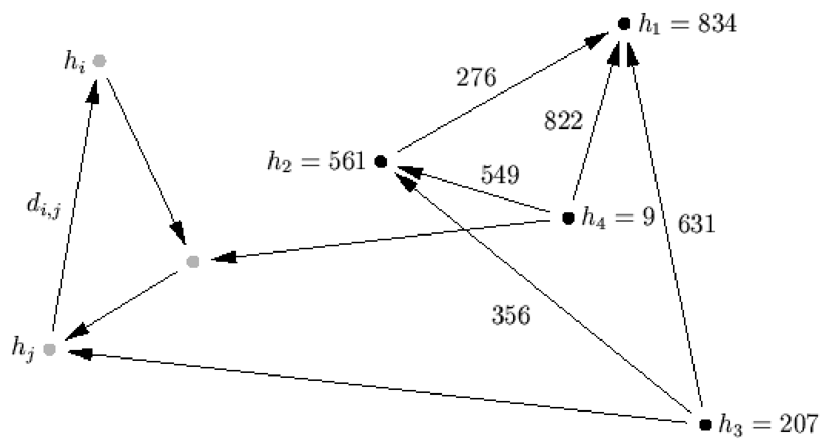
مناسب د جګوالي تيکاوي x_i کېدی شي د اندولوني پرابلم

$$\sum_{(i,j)} \left(d_{i,j} - ((h_i + x_i) - (h_j + x_j)) \right)^2 \longrightarrow \min \ .$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له لارې حل شي.

د تلنلارې د ښوولو لپاره د کمو داتن سره يو مودل-پرابلم حل کيږي.



د جګوالي او کمبنت ارزښتونو

$$h = (834, 561, 207, 9)^t, \quad d = (276, 631, 822, 356, 549)^t$$

لپاره، د $d = (d_{1,2}, d_{1,3}, d_{1,4}, d_{2,3}, d_{2,4})^t$ سره ، دا لاندې له ټاکلو اخوا (پورته، زيات) سيستم لاس ته راځي

F

$$A(h+x) = d, \quad A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

د مينيمال نورم غ،ښتونی حل دی:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x = A^+(d - Ah) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

د مينيمال – نورم – حل د څېړل شوي استعمال لپاره مخه ور دی، ځکه چې باید د ډېر امکان سره کوچنی ټيکاوی وټاکل شي.

ليکونکی : ويپر

د مور-پينروز-شرطونه Moore-Penrose-Bedingungen

فاسد-معکوس به د لاندې کټمټوالي له لارې يواځنی کرکتريستيک شي:

- $AA^+A = A$
- $A^+AA^+ = A^+$
- $(AA^+)^* = AA^+$
- $(A^+A)^* = A^+A$
- ليکونکي: ايپ.هيوليک

ساده بڼوول کيدی شي، چې د

$$A^+ = VS^+U^*, \quad A = USV^*$$

له لارې تعريف شوی فاسد-معکوس ورکړ شوي شرايط پوره کوي.

د بېلګې په توګه لومړی کټمټوالی د لاندې ښخه لاس ته ارځي

$$(USV^*)(VS^+U^*)(USV^*) = U[SS^+S]V^*,$$

ځکه چې په کونجيزو نوکانو يا قوسونو کې د تولیز شوو دياګونال ماتريکسونو (دوه کونجتړو – يا قطبي ماتريکسونو) ضرب به د دياګونال توکو د ضربوني له لارې جوړېږ شي او لرو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$s_{i,i}^{+} = 1/s_{i,i}, \quad i \le \mathrm{Rang}\, A\,.$$

نور ټول کټمټوالي هم دسېده پسي- شمېرني له لارې لاس ته راځي.

د دې ښوونه چې وښايو A^{+} يواځنی کرکتريستيک شوی دی د ورکړ شوو شرايطو له لارې، نور هم خوراستونځمن دی، له دې امله يې دلته له څېړنې تېرېږو.

ليکونکي: اېپ.هيوليک

اورتوګونال او ځانګړي اورتوګونال ګروپونه

Orthogonale und spezielle orthogonale Gruppe

د ټولو اورتوګونالو $(n \times n)$ - ماتريکسونو Q ډېرۍ(سټ) د اورتوګونال ګروپ $O(n)$ سره ښايو يا په نخښنه کوو يا بول.

د $Q \in O(n)$ لپاره صدق کوي

$$Q^{-1} = Q^{t}\,, \quad |\det Q| = 1$$

او د يوه کواوردينات ترانسفورميشن

$$x \to x' = Qx$$

سره اوږدوالی اوسکلار ضرب ساتلی پاتې کيږي.

د ټول اورتوګونال $(n \times n)$ - ماتريکسونو Q ډېرۍ د $\det Q = 1$ سره د ځرخونګروپ يا ځانګړی اورتوګونال ګروپ

$$SO(n) \subset O(n)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بلل کیږي.

هنداروڼه Spiegelung

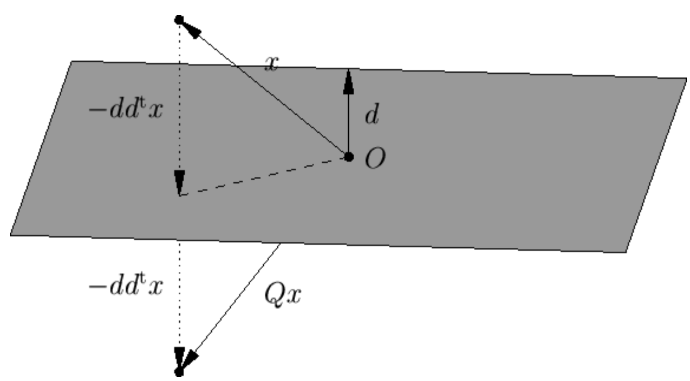
په $\mathbb{R}^n$ کې هنداروڼه (په هنداره انعکاسونه) و یوه یوونوکتور(واحد-) $d \neq 0$ ته اورتوګونال هایپرسطحه(Hyperebene)

$$H: \; d^t x = 0$$

باندې هنداروڼه د سیوم تري اورتوګونال ماتریکس

$$Q = E - 2dd^t$$

له لارې د یوونماتریکس (واحد-) E سره په نښه کیږي



پکې یا میلي په معنا ده

د Q سیومتري روښانه ده. له دې سره لرو :

$$QQ^t = Q^2 = (E - 2dd^t)^2 = E^2 - 4dd^t + 4dd^t dd^t = E\,,$$

دا په دې معنا چې Q اورتوګونال ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د هنداروني خويونو ښوولز لپاره لومړی په پامکې نيسو، چې وکتور

$$x - Qx = x - x + 2dd^t x = 2(d^t x)d$$

و d ته غبرگ دی، او منځټکی د x او Qx ترمنځ په هايپرهواره کې پروت دی:

$$d^t(x + Qx) = d^t x + d^t x - 2d^t dd^t x = 0\,.$$

له دې سره Qx په هايپرهواره د x هندارونه ده په سرچينه کې، هغه چې د d سره اورتوگونا ده.

ليکونکي: اپپ.هيوليگ

څرخون Drehung

آورتوگونال $(n \times n)$ - مآتريکس

$$\begin{array}{r} \text{Zeile } i \;\; \longrightarrow \\ \\ \text{Zeile } j \;\; \longrightarrow \end{array} \begin{pmatrix} 1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & c & & -s & \\ & & & \ddots & & \\ & & s & & c & \\ & & & & & \ddots \\ 0 & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

په پورته کې Zeile د ليکي يا کيلې په معنا ده

د $c = \cos\varphi$ او $s = \sin\varphi$ سره يوه څرخون په φ په $\mathbb{R}^n$ کې پرته د $x_i x_j$ - سطحه کې په گوته کوي(تحليلوي). ليکونکي: اپپ.هيوليگ

(c) ketabton.com: The Digital Library

ساده شمیرنه او د

$$\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$$

په پام کې نیولو سره تصدیقیږي، چې څرخونماتریکس R اورتوګونال دی:

$$RR^{t} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & \\ & & c^2+s^2 & & -sc+sc & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & -sc+sc & & c^2+s^2 & & \\ & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & 1 \end{pmatrix} = E\,.$$

- لیکونکي: اپپ.هیولیګ

څرخونمحور او څرخونکونج Drehachse und Drehwinkel

هر په $\mathbb{R}^3$ کي څرخون Q يو څرخون محور لري، دا پهدې معنا چې يو يوونوکتور u اینواریانت پریږدي،او په یوه کونج φ یو څرخون بشايي په هغه هواره کې چې u ته(باندې) اورتوګونال ده.

نسبت و یوه اورتوګونال ولاړسیستم u, v, w ته Q لاندې د ماتریکس آنځورونه لري:

$$\tilde{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}\,.$$

او د څرخونکونج لپاره په ځانګړې توګه صدق کوي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\cos\varphi = \frac{1}{2}\left(\mathrm{Spur}\, Q - 1\right) .$$

- ليکونکي: هيوليګ، ربل

د يوه څرخونماتريکس Q لپاره لرو:

$$Q^{-1} = Q^{t}, \quad |\det Q| = 1 .$$

دا چې د يوه اورتوګونالماتريکس آيګن –ارزښت λ_i مطلق ارزښت 1 لري
او $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = \det Q = 1$ دی، لرو، چې لږ تر لږه يو آيګن – ارزښت 1 دی. د
مناسب په ګڼه کزلز يا نمرهکولو سره يا

$$\lambda_1 = \overline{\lambda_2}, \quad \lambda_1\lambda_2 = 1$$

دی او يا

$$\lambda_i \in \{-1, 1\} .$$

دا نورمي شوی ايګن- وکتور u د آيګن – ارزښت 1 څرخونمحور ټټکي.

د يوه اورتوګونالولاړسيستم u, v, w لپاره باور لري:

$$Qu = u$$

$$Qv = \alpha v + \beta w$$

$$Qw = \gamma v + \delta w .$$

دا چې Qv, Qw کوم د u - کومپوننت نه لري، له لاندې له کونجساتونکو اورتوګونال
مارتيکسونو څخه لاس ته راځي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x \perp u \Rightarrow Qx \perp Qu = u\,.$$

كه پورته مساوات د ماتريكس بنه باندې

$$Q(\underbrace{u,v,w}_{P}) = (u,v,w)\underbrace{\left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \gamma \\ 0 & \beta & \delta \end{array}\right)}_{\tilde{Q}},$$

باندې وليكل شي، له $\tilde{Q} = P^{-1}QP$ لاس ته ارځي، چې

$$\left(\begin{array}{cc} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{array}\right)$$

يو څرخون ماتريكس دى. په همدې ډول د شپور د انواريانت له امله لاس ته راځي:

$$\mathrm{Spur}\,Q = \mathrm{Spur}\,\tilde{Q} = 1 + 2\cos\varphi$$

- ليكونكي: هيوليګ، ربل

ماتريكس

$$Q = \frac{1}{2}\left(\begin{array}{ccc} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{array}\right)$$

يو دياګونال ماتريكس دى، څكه چې لرو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$Q^{\mathrm{t}}Q = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = E \Rightarrow Q^{\mathrm{t}} = Q^*$$

او

$$\det Q = \det \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} = +1\,.$$

څرخونمحور د آئګن- وکتور u په حيث ټاکل کيږي و آيګن – ارزښت $\lambda = 1$ ته:

$$\underbrace{\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & -2 & -\sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} & -1 \end{pmatrix}}_{Q-E}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow u = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\,.$$

څرخونکونج φ له

$$\cos\varphi = \frac{1}{2}(\mathrm{Spur}\,Q - 1) = \frac{1}{2}(1 - 1) = 0$$

څخه لاس ته ارځي، د $\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$ په حيث .

د φ مخنخښه د څرخونلور u د لوريزوالي په واک کي ده او کېدی شي د يوه ولاړسيستم(کواوردينات سيستم) $\{u, v, w\}$ وټاکپ شي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$w^t Q v = w^t(\cos\varphi v + \sin\varphi w) = \sin\varphi .$$

د

$$v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

سره د راوړل شوي بېلګې لپاره لرو:

$$\sin\varphi = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \quad 0 \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = 1$$

نو لرو: $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ليکونی: ويپر

د يو څرخون په ضريپونو توټه کونه Faktorisierung einer Drehung

يو څرخون Q په $\mathbb{R}^3$ کي په کواورد يناتمخور د د کواوردڅرخونونو د ضرب په څېر کېدی انځور شي:

$$Q = D_z D_y D_x .$$

- ليکونکي: هيوليګ، ربل

څرخون D کېدی شي و ټاکل شي، دا سي چي يو په بل پسي sukzessive د Q

توکي q_{21}, q_{31}, q_{32} له منځه يووړل شي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$D_z^{-1}Q = \begin{pmatrix} \star & \star & \star \\ 0 & \star & \star \\ \star & \star & \star \end{pmatrix}$$

$$D_y^{-1}D_z^{-1}Q = \begin{pmatrix} 1 & \star & \star \\ 0 & \star & \star \\ 0 & \star & \star \end{pmatrix}$$

$$D_x^{-1}D_y^{-1}D_z^{-1}Q = \begin{pmatrix} 1 & \star & \star \\ 0 & 1 & \star \\ 0 & 0 & \star \end{pmatrix} = R\,.$$

له دې سره داسې کار اخستل شوی یا مخ ته تللي یو، چې یو په خوښه آیګن-وکتور $(v_1, v_2)^t$

په $(1,0)^t$ باندې د یوې سطحې د څرخون D له لارې ځان څېره کړی شي (یعني د تابع په څېر ولیکل شي). دا چې $\det R = 1$ دی $r_{33} = 1$ لرو او د متو د نورمي کولو له امله باید R یوونماتریکس (واحدماتریمس) وي. له دې سره غوښتونې انځورونه لاس ته راځي.

- لیکونکي: هیولیګ، ربل

د دې لپاره چې د ماتریکس

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{\sqrt{6}}{4} & -\frac{\sqrt{4}}{8} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{6}}{8} \end{pmatrix}$$

په ضريبونو ټوټه کول لاس ته راوړو، نو لومړی توکی $q_{2,1}$ له منځه وړو د $\frac{\pi}{2}$ په کچه څرخون د z – محور باندې:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{6}}{8} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{6}}{8} \end{pmatrix}.$$

داسې پای کوو چې د y -محور باندې د $\frac{\pi}{4}$ په کچه څرخوو:

:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} D_z^* Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

لاس ته راغلی ماتریکس یوو څرخون D_x دی د x -محور باندې. په ټولیزه توګه لاندې په ضريبونو ټوټه کونه لاس ته راوړو:

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

D_x D_y D_z

- ليکونکي: هيوليګ، کرايخ

څرخونماتريکس Drehmatrix

په $\mathbb{R}^3$ کې يو څرخون د نورمي شوي څرخون محورلور u او څرخونکونج φ سره ، داسې لوريزه لکه ښې پيچي ميخ ، د يو وکتور x فنکشن جوړوي

$$Qx = \cos\varphi\, x + (1 - \cos\varphi)\, u u^{t} x + \sin\varphi\, u \times x$$

، چيرته چې $v \times x$ د u او x صليب ضرب(وکتوري ضرب، چې x سره په نخښه کيږي) په نخښه کوي. اړونده څرخونماتريکس دی:

$$Q: \quad q_{ik} = \qquad \cos\varphi\, \delta_{ik} + (1 - \cos\varphi)\, u_i u_k + \sin\varphi \sum_j \varepsilon_{ijk} u_j \, .$$

د کرونيکرسومبول δ_{ik} او ε -تنزور ε_{ijk} سره.

- ليکونکي: هيوليګ، ربل

دا بسيا کوي پسې وښايو، چې $Qu = u$ او يو و u ته اورتوګونال وکتور v په يوه کونج φ د u په محور باندې وڅرخي. لومړی غوښتنه ترلړ کتل کيږي. د v څېرې يا تابع ارزښت په څېر لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$Qv = \cos\varphi\, v + \sin\varphi\, u \times v\,,$$

څه چې په φ د څرخون سره د v او $u \times v$ څخه غزېدلي سطحه په ګوته کوي.

- لیکونکي: هیولیک، ربل

د تولیز فرمول سره سم د $u = \frac{1}{\sqrt{3}}(1\ 1\ 1)^t$ په محرړر په $\varphi = \frac{\pi}{3}$ یو د څرخون ماتریکس Q له 3ترمونو څخه په لاندې ډول یوځای کیږي:

په تولیزه توګه لاس ته راوړ

$$\cos\varphi\ \delta_{ik}\ : \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$(1-\cos\varphi)u_i u_k\ : \quad \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- لیکونکي: هیولیک، کرایخ

$$\sin\varphi \sum_j \varepsilon_{ijk} u_j\ : \quad \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

مربعیزه فورم(څلوری یې بنه)

Quadratische Form

د یوه حقیقي سیموتریک ماتریکس A لپاره دا لاندې

$$\alpha(x) = x^t A x$$

مربعیزه فورم نوموو.

د A د آیګن – ارزښت د مخنخښې بدلون له مخې لاندې درې تیوپه(ډولونه) توپیروو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

- الیپتیکي (بیضوي ډوله) بڼه: ټول آیګن – ارزښتونه همغه مخنښه لري.
- پارابولیک : لږ تر لږه یو آیګن – ارزښت صفر دی او نور آیګن ارزښتونه همه یابرابرې وخنخښې لري.
- های پارابولیکي : د مختلفو مخنخښو سره آیګن – ارزښتونه شتون لري.

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

د A سیومتري اړیین نه ده چې مخ له مخه ونیول شي(فرض شي)، د ټولیز ماتریکس لپاره کېدی شي مربع بڼه په لاندې ډول ولیکل شي:

$$x^{\mathrm{t}}Ax = \sum_{j,k} x_j a_{j,k} x_k = \sum_j a_{j,j} x_j^2 + \sum_{j<k} (a_{j,k} + a_{k,j}) x_j x_k$$

پس کېدی شي هر ځل دوه ترمونه سره یوځای کړو او مربع بڼه سیومتري کړو یا په سیمتري واړوو:

$$x^{\mathrm{t}}Ax = \frac{1}{2} x^{\mathrm{t}}(A + A^{\mathrm{t}})x\,.$$

مربع بڼې د بېلګې په توګه د یوه سکالارتابع f د تیلور- ودې د لومړي ترم په څېر رامنځ ته کیږي:

$$f(x) = f(0) + \operatorname{grad} f(0)^{\mathrm{t}}\, x + \frac{1}{2} x^{\mathrm{t}}(\mathrm{H}\, f(0))\, x\,.$$

په دې حالت کې $\mathrm{H}\, f$ د دویم ټوټه (partiellen -) مشتق د هسې-ماتریکس دی، د بدلونوالي په بنسټ سیومتري دی. لیکونکي: اپپ، هیولیګ

سیومتریک ماتریکس

$$A = \begin{pmatrix} 1+\lambda & 1-\lambda \\ 1-\lambda & 1+\lambda \end{pmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

آيګن – ارزښتونه 2 او 2λ لري.

مربعي بڼه

$$\alpha(x) = x^t Ax$$

د $\lambda > 0$ لپاره بيضوي(هګۍ ډوله) ده، د $\lambda = 0$ لپاره پارابوليک او د $\lambda < 0$ لپاره هايپارابوليک دی.

- ليکونکي: اپپ، هيوليګ

کوادريک Quadrik

تکي

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^n : \alpha(x) + 2\beta(x) + \gamma = 0\}$$

کوادريک بلل کيږي، چېرته چي α يو مربعيزه بڼه، β يوه کرښوزه بڼه او γ يوه ثابته ده.

Q د ماتريکس ليکدود په ډول ليکل په لارندې ډول ليکل کيږي

$$Q : \quad x^t Ax + 2b^t x + c = 0$$

د $\alpha(x) = x^t Ax$ او $\beta(x) = b^t x$ سره.

د Q انځورونه يواځنی نه ده. د بېلګي په توګه کېدی شي د تعريف مساوات د يوه په خوښه ثابتي سره ضرب شي.

- ليکونکي: اپپ، هيوليګ

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کوادریکونو شډله تړتېه ونه Grobeinteilung der Quadriken

د یوه کوادریک د مساوات څخه په پیل

$$Q: \quad x^t A x + 2b^t x + c = 0$$

لیکو

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{c|c} c & b^t \\ \hline b & A \end{array}\right).$$

د $\tilde{x}^t = (1, x_1, \ldots, x_n)$ سره کېدی شي Q هم په لاندې هوموجین بڼه ولیکل شي:

$$Q: \quad \tilde{x}^t \tilde{A} \tilde{x} = 0$$

لاندې ډولونه یا تیوپونه توپیروو:

$\operatorname{Rang} \tilde{A} = \operatorname{Rang} A$

- مخروطي کوادریک

$\operatorname{Rang} \tilde{A} = \operatorname{Rang} A + 1$

- منځتکي کوادریک

$\operatorname{Rang} \tilde{A} = \operatorname{Rang} A + 2$

- پارابولیکي کوادریک
- لیکونکي: اېپ، هیولیګ

کوادریک

(c) ketabton.com: The Digital Library

يا دونه(ژباړی): په سطحه کې يوه کره(کرښه)، په دري بعديزه (درېپراخيدوني) فضا کې يوه سطحه ده، د ډېرو اووښتونو يا متحولو له لارې تشريح يا ښوول کيدی شي.پای

$$Q: \quad x_1^2 + \lambda x_2^2 + 2x_2 + \lambda = 0$$

دې د $\lambda \in \mathbb{R}$ سره ورکړ شوي وي، همداسې د ماتريکس لکيندود

$$Q: \quad x^t A x + 2b^t x + c = 0$$

د

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c = \lambda, \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

،

سره ورکړ شوي وي.

د $\lambda = 0$ لپاره $\operatorname{Rang} A = 1$ دی، پرته له دې $\operatorname{Rang} A = 2$ دی. د $\lambda = \pm 1$ لپاره $\operatorname{Rang} \tilde{A} = 2$ دی، پرته له دې $\operatorname{Rang} \tilde{A} = 3$ دی. له دی سره Q د $\lambda = 0$ لپاره يو پارابول ، د $\lambda = \pm 1$ لپاره مخروطي ډوله کوادريک او د نورو ټول ارزښتونو لپاره يو منځټکي کوادريک دی.

ليکونکي: اېپ، هيوليګ

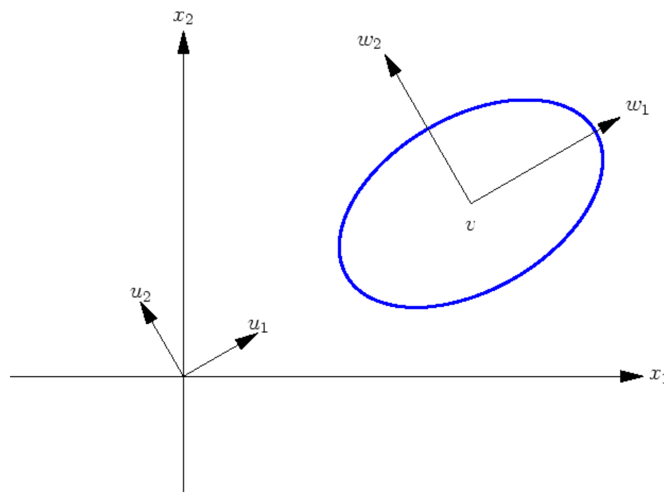
اصلي- محور –ترانفورميشن Hauptachsentransformation

د څرخون او راکښنی له لارې په $\mathbb{R}^n$ کې کېدی شي يو کوادريک په نورمال بڼه ترانسفورمي شي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x^t A x + 2b^t x + c = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i w_i^2 + 2\beta w_{m+1} + \gamma\,, \quad x = Uw + v\,,$$

چيرته چې $m = \text{Rang}\, A$ او $\beta\gamma = 0$ صدق کوي.



له دې سره د ځرخون ماتريکس U متې د A آيګن –ارزښتونو λ_i ته آيګن-وکتورونه u_i خوندي لري، چې د هغې لور اصلي محور بلل کيږي. د راکښني وکتور (راکښونوکتور) v د کوادريک منځټکی دی. ليکونکي: اپپ، هيوليګ

سيومتري مارتيکس A ته له آيګن –وکتورونو u_i ځخه د $\det(u_1, \ldots, u_n) = 1$ سره يو اروتوګونال بنسټ شتون لري، د کومو سره چې لومړی و آيګن – ارزښتونو $\lambda_i \neq 0$ ته آيګن – وکتورونه نئول کيږي. د لومړي ځای بدلون $x = Uy = (u_1, \ldots, u_n)y$ پسې له دې سره لاندې دياګونال بڼه لاس ته راځي

$$y^t \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_m, 0, \ldots, 0)y + 2\underbrace{(U^t b)}_{\tilde{b}}{}^t y + c\,.$$

له صفر ځخه مختلف آيګن-ارزښتونو $\lambda_i \neq 0$ لپاره د نورو ورپسې ځای بدلون له لارې

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y_i = z_i - \tilde{b}_i/\lambda_i$$

کيدی شيکرښيز ترمونه له ځايه يوړل شي (مربعي پوره کونه). ثابتې د

$$c \to \gamma = c - \sum_{i=1}^{m} \tilde{b}_i^2/\lambda_i \, .$$

سره سم تغير خوري،نو اوس له دې سره اوس دا بڼه لرو

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i z_i^2 + \sum_{i=m+1}^{n} 2\tilde{b}_i z_i + \gamma \, .$$

که اوس يو $\tilde{b}_i \neq 0$ د $i \geq m+1$ سره شتون ولري، نو د يو ه بل څرخون پسي د

$$z'_i = z_i \, , \quad i \leq m$$

$$z'_{m+1} = (1/\beta) \sum_{m+1}^{n} \tilde{b}_i z_i \, , \quad \beta = \pm|\tilde{b}|$$

او په اړونده اورتوګونال د $z'_{m+2}, \ldots, z'_n$ سره تکمي شوی

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i (z'_i)^2 + 2\beta z'_{m+1} + \gamma \, .$$

لاس ته راځي.

له دې سره د β سره مخ نخښنه ډاسي ټاکل کيږي، چې د β سره ويش وروسته لږ تر لمه دومره مثبت لکه منفي ترمونه λ_i/β رامنځ ته شي.

اخرنی راکښنه

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$w_{m+1} = z'_{m+1} + \gamma/(2\beta)$$

$$w_i = z'_i\,, \quad i \neq m+1$$

ثابته له منځه وړي او باالاخرخ راکوي:

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i w_i^2 + 2\beta w_{m+1}\,.$$

لیکونکي: اېپ، هیولیګ

کوادریکونه

یا دونه(ژباړی): په سطحه کې یوه کره(کرښه)، په درې بعدیزه (درېپراخیدونې) فضا کې یوه سطحه ده، د ډېرو اووښتونو یا متحولو له لارې تشریح یا ښوول کیدی شي.پای

$$Q: \quad 8x_1^2 + 17x_2^2 + 20x_3^2 + 20x_1x_2 + 8x_1x_3 + 28x_2x_3 - 48x_1 - 114x_2 - 78x_3 + 207 = 0$$

$$Q: \quad 8x_1^2 + 17x_2^2 + 20x_3^2 + 20x_1x_2 + 8x_1x_3 + 28x_2x_3 - 48x_1 - 114x_2 - 78x_3 + 207 = 0$$

دې په نورمال فورم یا – پنې ترانسفورمي شي.

د ماتریکس لکندود سره لاس ته راځي

$$Q: \quad x^t A x + 2b^t x + c = 0$$

د

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 10 & 4 \\ 10 & 17 & 14 \\ 4 & 14 & 20 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -24 \\ -57 \\ -39 \end{pmatrix}, \quad c = 207\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

سره.

ماتريكس A آيګن – ارزښتونه 36 ، 9 او 0 لري، په دې اړونده نورمي شوي آيګن-وکتورونه u_i د $\det(u_1, u_2, u_3) = 1$ سره د بېلګې په توګه دي:

$$u_1 = \frac{1}{3}(1,2,2)^t\,, \quad u_2 = \frac{1}{3}(2,1,-2)^t\,, \quad u_3 = \frac{1}{3}(2,-2,1)^t\,.$$

د ترانسفورميشن $x = Uy$ پسې د $U = (u_1, u_2, u_3)$ سره لاس ته راځي

$$Q: \quad 36y_1^2 + 9y_2^2 - 144y_1 - 18y_2 + 18y_3 + 207 = 0\,.$$

د مربعيزې تكميلوني له لارې

$$z_1 = y_1 - 2\,,\ z_2 = y_2 - 1\,,\ z_3 = y_3$$

لاس ته راحي

$$Q: \quad 36z_1^2 + 9z_2^2 + 18z_3 + 54 = 0\,.$$

راكښنه

$$w_1 = z_1\,,\ w_2 = z_2\,,\ w_3 = z_3 + 3$$

باالاحره نورمالفورم (- بڼه) راكوي

$$Q: \quad 36w_1^2 + 9w_2^2 + 18w_3 = 0\,.$$

په ټوليزه توګه ترانسفورميشن لاندې فورم يابنه راكوي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x = Uy = Uz + U\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = Uw + U\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + U\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

پس راکښنه ده

$$v = U\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 \\ 11 \\ -1 \end{pmatrix}$$

او د د کوادریک منځ ټکی په ګوته کوي.

لیکونکي: اېپ، هیولیک

مخروط غوڅی Kegelschnitt

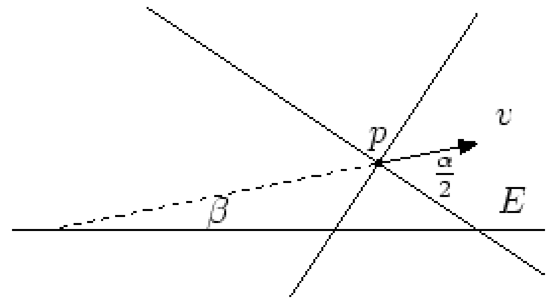
د یوه دېلمخروط غوڅی

$$K:\ (x-p)^{t}v = \pm\cos\frac{\alpha}{2}\,|x-p||v|$$

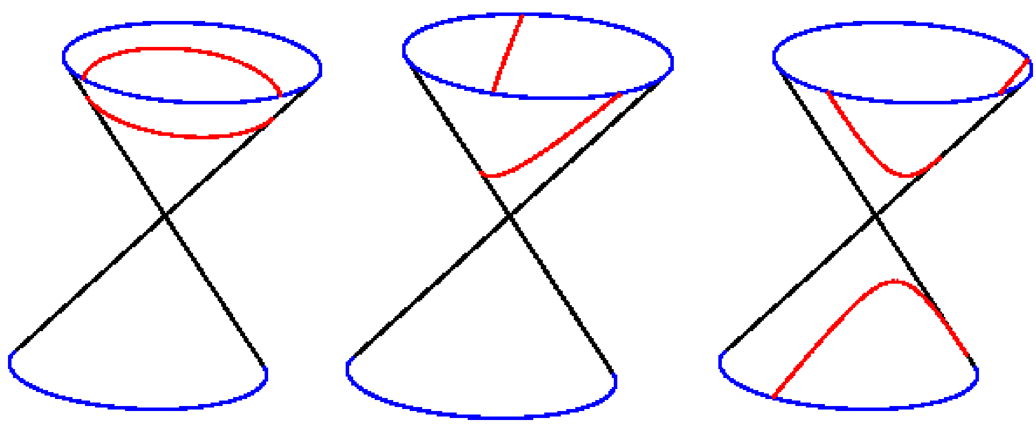
د څوکې p ($p_3 \neq 0$) ، لور v سره او وازولو کونج α د سطحې $E:\ x_3 = 0$ سره یوه مربعیزه کړه ده

$$K \cap E:\ a_{1,1}x_1^2 + 2a_{1,2}x_1x_2 + a_{2,2}x_2^2 + 2b_1x_1 + 2b_2x_2 + c = 0.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



د مخروط غوځي تيوپ يا ډول د E او کرښې , $p+tv \quad t\in\mathbb{R}$, ترمنځ کونج β د لويوالي په واک کې دی



Ellipse: بيضوي يا هګبش
$\beta > \alpha/2$

Parabel: پارابول
$\beta = \alpha/2$

Hyperbel: های پارابول
$\beta < \alpha/2$

ليکونکي: اپپ، هيوليک

د دوه بعدي کوادريکونو د اوکليدي نورمال بڼه

Euklidische Normalform der zweidimensionalen Quadriken

د سطحيزو کوادريکونو مختلف ډولونه شتون لري، د لاندې نورمال فورمونو سره:

(c) ketabton.com: The Digital Library

- مخروطي کوادريکونه

Normalform نورمال بنه	Bezeichnung نومونه
$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} = 0$	Punktټکی
$\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} = 0$	schneidendes Geradenpaar د غوڅوونکو کرښو جوړه
$\frac{x_1^2}{a_1^2} = 0$	Doppelgerade دبلې کرښې

- منځټکي کوادريکونه

Normalform نورما بنه	Bezeichnung نومونه
$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + 1 = 0$	(leere Mengeتش ډېرى)
$\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} + 1 = 0$	Hyperbelهای پارابول

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیضوي(هګی)Ellipse	$-\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} + 1 = 0$
تش ډېرى)leere Menge(	$\frac{x_1^2}{a_1^2} + 1 = 0$
paralleles Geradenpaar د کرښو غبرګه جوړه	$-\frac{x_1^2}{a_1^2} + 1 = 0$

- پارابولیکي کوادریکونه

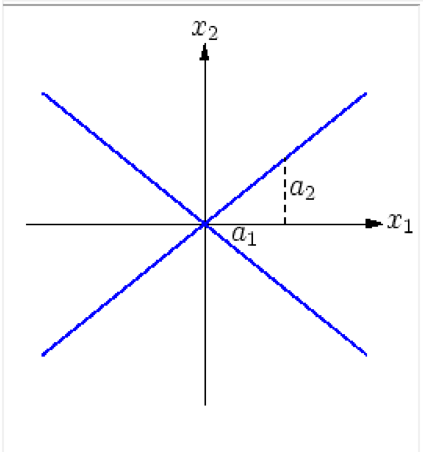
Bezeichnung نومونه	Normalform نورمال بڼه
Parabel پارابول	$\frac{x_1^2}{a_1^2} + 2x_2 = 0$

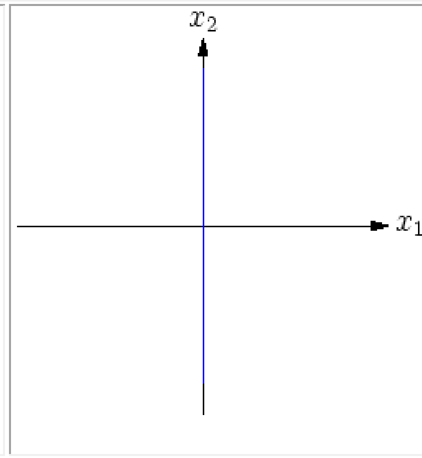
نورمالفورمونه یواځني دي، د ایندکسونو یا پیژند نخښنو تر ځای بدلون پورې او د مخروطي کوادریکونو د یوې ثابتې $c \neq 0$ سره د ضرب پورې.

لویې a_i مثبت اینسول کیږي او د کوادریکونو داصلي محور اوږدوالی بلل کیږي

Doppelgerade ډبل کرښې	schneidendes Geradenpaar د غوڅیدونکو کرښو جوړه

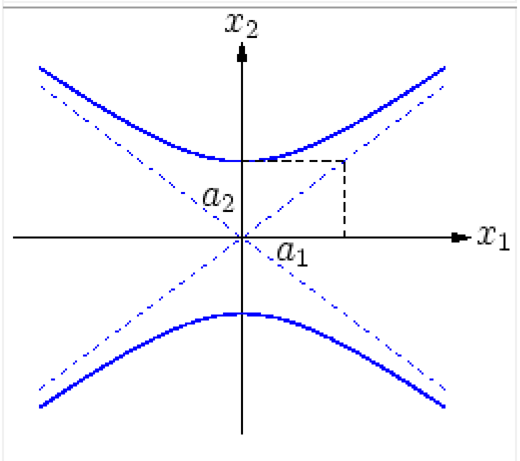
(c) ketabton.com: The Digital Library

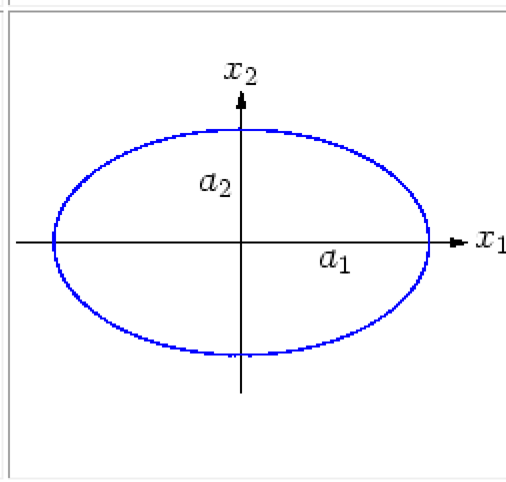




Hyperbel های پارابول

Ellipse بیضوي یا هکی



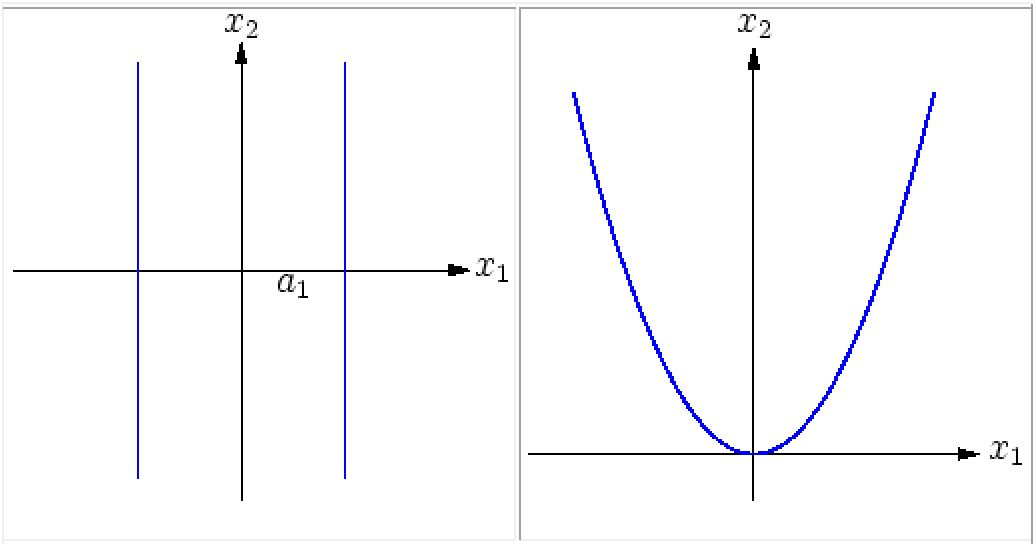


paralleles Geradenpaar

غبرگه(موازي) کرښجوره

Parabel پارابول

(c) ketabton.com: The Digital Library



ليکونکي: اپپ، هيوليک

اوس دې د لاندې کوادريکونو نورمالفورم(- بڼه) او تيوپ وټاکل شي

$$Q: \quad 3x_1^2+3x_2^2+10x_1x_2-12\sqrt{2}x_1-4\sqrt{2}x_2-8=0$$ د

ماتريکسفورم د مربعيز فورم څخه په پيل،

$$x^tAx+2b^tx+c=x^t\begin{pmatrix}3&5\\5&3\end{pmatrix}x+2\sqrt{2}\,(-6,-2)\,x-8$$

لومړی سړی د ماتريکس A آيګن – ارزښتونه او آيګن – وکتورونه ټاکي.

کرکتريتيکي پولينوم دی:

$$(3-\lambda)^2-25=9-6\lambda+\lambda^2-25=\lambda^2-6\lambda-16$$

او لاندې صفرځايونه لري

$$\lambda_{1,2}=\frac{6\pm\sqrt{36+64}}{2}=3\pm5$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

و $\lambda_1 = -2$ ته يو نورمي شوی آيګن-وکتور د لاندې کربنيز مساوات د حل څخه لاس ته راوړل کيږي

$$\begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} v_1 = 0$$

نو $v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)^t$ دی. دا چې دويم آيګن-وکتور په په لومړي بايد عمود (ولاړ) وي، نو لاس ته راځي $v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)^t$ ، د کوم سره چې مخنخښه داسې بايد ټاکل شوي وي، چې د لاندې ورکړ شوې ترانفورميشن ماتريکس ديترمينانت مثبت وي:

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

د $x = Uy$ سره تراسفورمي شوي مساوات لاندې بڼه لري:

$$\begin{aligned} 0 &= y^t \tilde{A} y + 2\tilde{b}^t y + c \\ &= y^t U^t A U y + 2\left(b^t U\right) y + c \\ &= -2y_1^2 + 8y_2^2 - 8y_1 - 16y_2 - 8\,. \end{aligned}$$

د مربعيزې پوره ونه يا تکميلونه راکوي

$$0 = -2y_1^2 + 8y_2^2 - 8y_1 - 16y_2 - 8$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \quad -2(y_1-2)^2+8(y_2-1)^2-8$$

$$= \quad -2z_1^2+8z_2^2-8$$

په همدې ډول

$$\frac{z_1^2}{2^2}-\frac{z_2^2}{1^2}+1=0\,.$$

نو مساوات يو هاى پارابول انځوروي.

(Autoren: Höllig/Hörner)

د درې بعدي کوادريکونو د اقليدس (اويکليد) نورمالفورم

Euklidische Normalform der dreidimensionalen Quadriken

د فضايي کوادريکونو 17 مختلف ډولونه شتون لري د لاندې نورمالفورمونو سره:

- مخروطي کوادريکونه

Normalform نورمال بڼه	Bezeichnung نومونه
$\frac{x_1^2}{a_1^2}+\frac{x_2^2}{a_2^2}+\frac{x_3^2}{a_3^2}=0$	Punktتکی

(c) ketabton.com: The Digital Library

(Doppel-)Kegel(دبل)مخروط	$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} - \frac{x_3^2}{a_3^2} = 0$
Geradeکرښه	$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} = 0$
Schneidende Ebenenغوڅونکي سطحي	$\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} = 0$
Doppelebeneدبل سطحي	$\frac{x_1^2}{a_1^2} = 0$

- منځنکي کوادریکونه

په نخښه ونه Bezeichnung	نورمال بڼه Normalform
(leere Menge) (تشډېرى)	$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2} + 1 = 0$
دوه پوښيز های پرابولوئيد zweischaliges Hyperboloid	$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} - \frac{x_3^2}{a_3^2} + 1 = 0$
يوپوښيز های پرابولوئيد einschaliges Hyperboloid	$\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} - \frac{x_3^2}{a_3^2} + 1 = 0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

Ellipsoid ايليپسوېيډ	$-\frac{x_1^2}{a_1^2}-\frac{x_2^2}{a_2^2}-\frac{x_3^2}{a_3^2}+1=0$
(leere Menge) تشډېرى	$\frac{x_1^2}{a_1^2}+\frac{x_2^2}{a_2^2}+1=0$
hyperbolischer Zylinder هايپربوليکي توته	$\frac{x_1^2}{a_1^2}-\frac{x_2^2}{a_2^2}+1=0$
elliptischer Zylinder ايليپتيکي توته	$-\frac{x_1^2}{a_1^2}-\frac{x_2^2}{a_2^2}+1=0$
(leere Menge) تشډېرى	$\frac{x_1^2}{a_1^2}+1=0$
parallele Ebenen غبرګي سطحې يا ٠ هوارئ	$-\frac{x_1^2}{a_1^2}+1=0$

- پارابوليکي کوادريکونه

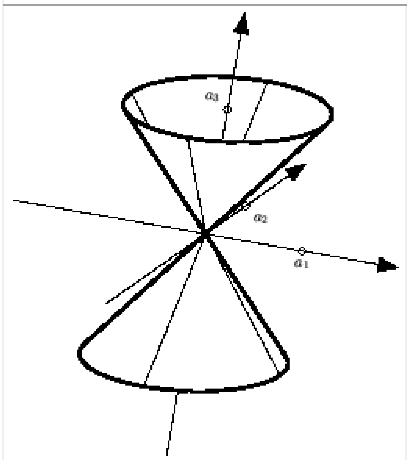
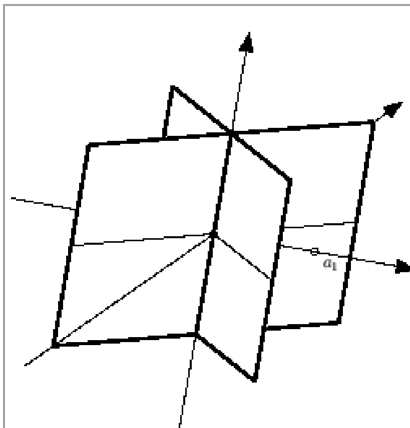
نومونه	نورمال بنه
هګی ډوله ايليپميکي پارابولوئيد	$\frac{x_1^2}{a_1^2}+\frac{x_2^2}{a_2^2}+2x_3=0$
هاي پارابوليکي پارابولوئيد	$\frac{x_1^2}{a_1^2}-\frac{x_2^2}{a_2^2}+2x_3=0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$\frac{x_1^2}{a_1^2} + 2x_2 = 0$	پارابوليکي توته

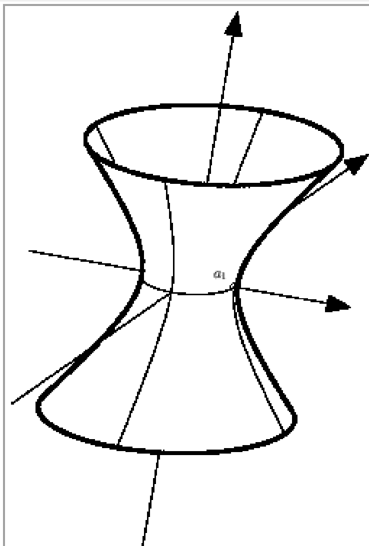
نورمال بڼې د ایندکسونو یا پېژند نخښو پورې یواځنې ټاکلي او مخروطۍ کوادریکونه د ثابتې $c \neq 0$ سره د ضرب پورې یواځنې ټاکلي.

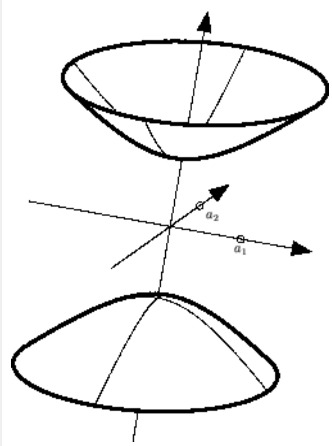
لويي a_i مثبت اینښول کيږي او د کوادريکونو د اصلي محور اوږدوالی بلل کيږي.

(دبل) مخروط	غوڅوونکي سطحې
	

دوه پوښيز های پارابول	يو يوښيز های پارابول

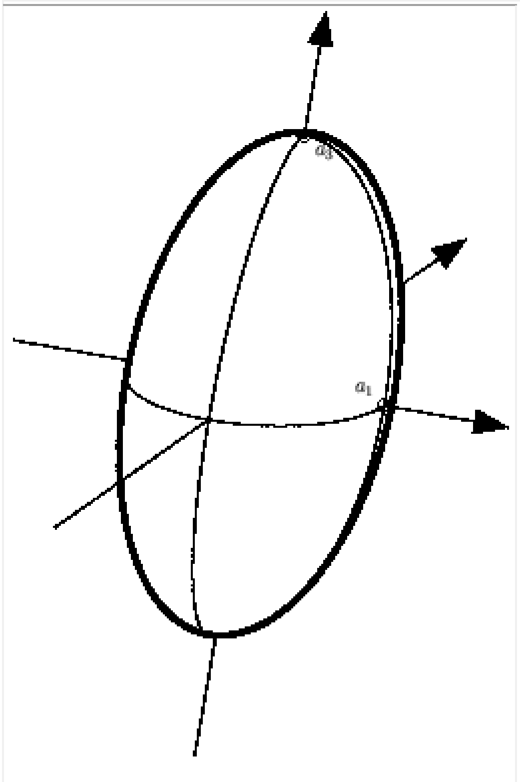
(c) ketabton.com: The Digital Library

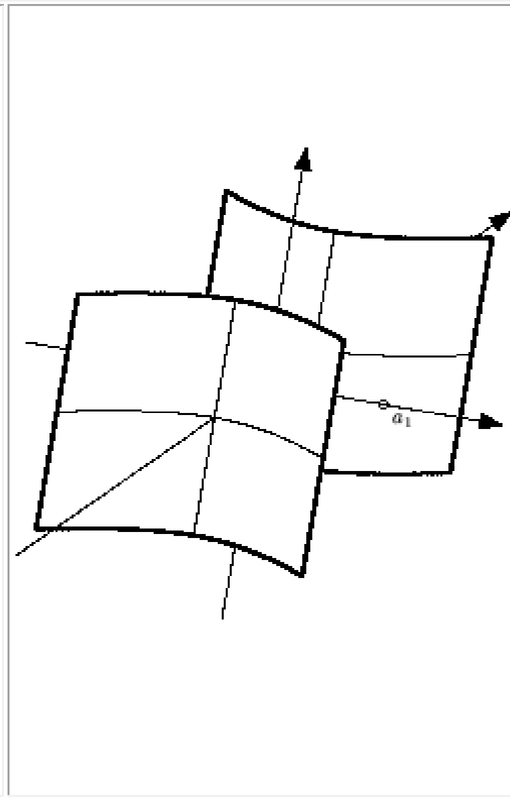




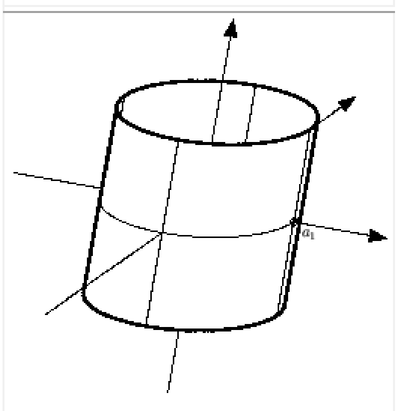
های پارابوليکي توته hyperbolischer Zylinder	Ellipsoidهکی ډوله یا بیضوي ډوله

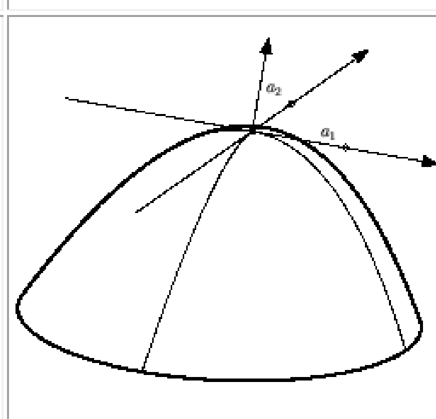
(c) ketabton.com: The Digital Library



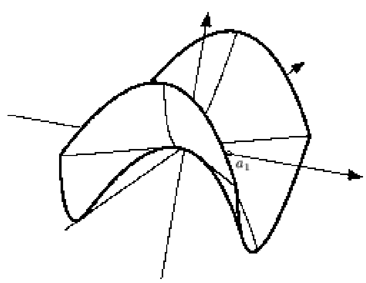
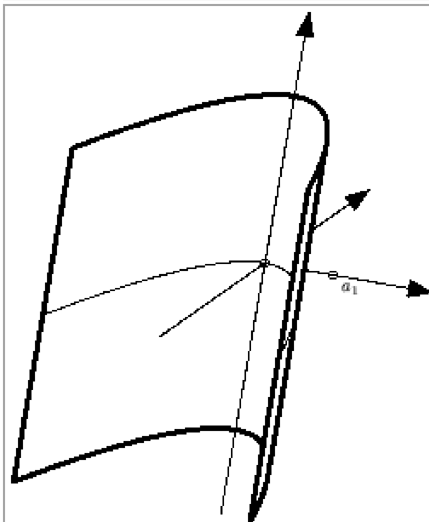


elliptischer Zylinder بيضوي توته	elliptisches Paraboloid بيضوي پارابولوئيد





(c) ketabton.com: The Digital Library

hyperbolisches Paraboloid های پارابولیکي پارابولوئید	parabolischer Zylinder پارابولیکي توته یا - استوانه
	

لیکونکي: هیولیګ، هیرنر

اوس دې د لاندې کوادریکونو نورمال بڼه او تیوپ (ډول) و ټاکل شي:

$$Q: \quad x^t \begin{pmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 4 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} x + 2\,(-2,1,2)\,x + 2 = 0$$

د ماتریکس کرکتریستیکي یا ټاکونکی پولینوم

$$p(\lambda) = \lambda^3 - 9\lambda^2 - 9\lambda + 81\,,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاندې صفرځاي لري:

$$\lambda_1 = 9\,, \quad \lambda_2 = 3\,, \quad \lambda_3 = -3\,.$$

و آيګن – ارزښتونو λ_i ته اړونده نورمي آيګن-وکتورونه دي:

$$v_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\,, \quad v_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\,, \quad v_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}\,,$$

جېرته چې مخنخښه داسې ټاکل کيږي، چې و لاړسيستم منځ ته راځي.

د اورتوګونال ترانسفورميشن ماتريکس په حېث منځ ته راځي:

$$U = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}\,.$$

دا د $x = Uy$ سره ترانسفورمي مساوات لاندې بڼه لري:

$$y^t \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} y + 2\,(0,3,0)\,y + 2 = 0\,.$$

مربعيزه پوره کونه راکوي

$$\begin{aligned} 0 &= 9y_1^2 + 3y_2^2 - 3y_3^2 + 6y_2 + 2 \\ &= 9y_1^2 + 3(y_2+1)^2 - 6y_2 - 3 - 3y_3^2 + 6y_2 + 2 \end{aligned}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \quad 9z_1^2 + 3z_2^2 - 3z_3^2 - 1$$

په همدې توګه

$$\frac{z_3^2}{\frac{1}{3}} - \frac{z_1^2}{\frac{1}{9}} - \frac{z_2^2}{\frac{1}{3}} + 1 = 0 \,.$$

نور مساوات يوپوښيز هاى پارابول انځوروي

ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

چې غوټې پسې وهې په لاس به درشي

چا وې دا چې په درياب کې ګور نه شته

برى د خداى (ج) سره دى.

د ډاکتر ماخان شينواري چاپ شوې ليکنې:

<u>1988 Vienna (Austria):</u>

<u>لومړى:</u>

H.K. Kaiser , M. Shinwari : Aproximation compact pological algebra : general algebra 6 ; Page 117 – 122 contributions to

<u>1987 Vienna (Austria):</u>

<u>دويم:</u>

Diss . Interpolation und Aproximation durch Polynime in Universalen Algebren . Uni. Wien

(c) ketabton.com: The Digital Library

Dissertation Interpolation and Aproximation by Polynome in universal Algebras, at the University of Vienna/Austria

لاندې د شمیرپوهنې پښتوټول کتابونه په المان کې د ،، افغانستان کلتوري ودې ټولنه،،له خوا چاپ شوي دي

2000 Bonn (Germany):

دریم: د شمیرپوهنې ستر کتاب : د شمیرپوهنې برسیره د انجنري، فزیک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زده کوونکو لپاره (دا کتاب په ۹۰۰ مخونو کې چاپ او دا نوې لیکنه به یې ځنو ځایونو غزېدلې او ځنې ځایونه ترې لرې شوي دي)

2003 Bonn (Germany):

څلورم: ځمککچپوهنه(هندسه) ، په سلو، زرو کې شمیرنه، د ګټې – او کټې د کټې شمیرنه ، د اختمالوالي شمېرنه کتاب د ښوونځي ټولې اړتیاوې پوره کوي

2003 Bonn (Germany):

پنځم: الجبرونه (د الجبر بنسټونه دي)

2003 Bonn (Germany):

شپږم: د شمیرپوهنې انګرېزي – پښتو ډکشنري.

2003 Bonn (Germany):

اووم: د شمیرپوهنې الماني ـ پښتو ـ او پښتو الماني ډکشنري

Mathematical dictionary German/ Pashto and Pashto/German

2003 Bonn (Germany):

(c) ketabton.com: The Digital Library

اتم: دفرنځیال برابرون (دا کتاب په دې ځانګه کې یو پیل دی، ساده لیکل شوی)

Differential equation Translation; An Introduction

Bonn (Germany): 2003

نهم: د شمیر پوهنې فرمولونو ټولګه

Mathematical Formulas

2003 Bonn (Germany):

لسم: شمیرپوهنه له عربي په پښتو

1997 Bonn (Germany):

یوولسم: د افغانستان په هکله سپیني خبرې: په المان کې

،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خوا

.یادونه: له ۲۰۰۰ کال دمخه ډاکتر ماخان شینواري د ،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خوا درې ساسي مجلې هم را وستلې.

د ډاکتر ماخان ،،میرې،، شینواري لیکنې او ژباړې چې په چاپیدو یې پیل کیږي

2012 Bonn; Germany; Kabul Afghanistan

ژباړې:

Prof. Brinkmann. (From Brinkmann.du.de) :

لاندې د برینکمن لیکنې چې له پرینکمن ن ج ځخه ژباړل شوي دي.

۱ - شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره لومړی ټوک

۲ – شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره دویم ټوک

۳ – شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره دریم ټوک

(c) ketabton.com: The Digital Library

۴ - د احتمالوالي شميرنه   د ښوونځي لپاره

۵ – احصايه يا ستاتيستيک   دښوونځي لپاره

لاندې کتابونه د شنوتګارت د پوهنتون د استادانو د لکچرونو څخه چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپاره شوي را ژباړل شوي.

۶ – اناليزی ۱

۷ – اناليزې ۲

۸ – کرښيز الجبر

۹ - د شميرپوهنې بنستونه

۱۰ - د فرمولونو ټولګه

۱۱ – فنکشنل اناليز

۱۲ – وکتور شميرنه

نورې ژباړې

۱۳ – له www./grundstudium.info/linearealgebra څخه:کرښيز الجبر

۱۴ – Georg Gutenbrunner ګڼونپوهنه يا د اعدادو تيوري

زما ليکنې

Bonn (Germany):

۱۵ - د شميرپوهنې ستر کتاب دويم چاپ د پوره تغيراتو سره : دا کتاب د شميرپوهنې برخې برسيره د

انجنري، فزيک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زدهکوونکو لپاره پوره ګټور دی. په

کتاب کې د اړتيا سره زياتونه او کونه راغلې

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۶ - څمککچپوهنه (هندسه) دويم چاپ د پوره تغيراتو سره

۱۷ – الجبر بنسټونه دويم چاپ له تغيراتو سره

۱۸ - ډېرۍ پوهنه يا سټ تيوري

۱۹ – د شميرپوهنې سم اند (منطق رياضي)

۲۰ - د يو څو شميرپوهانو ژوندليک

۲۱ – د شمير پوهنې ګډې وډې ليکنې

-۲۲ داهم ژباړه ده، خو ليکونکی يې متآسفانه راڅخه نابلد شوی: د مشتق او انتيګرال شميرنو ته تمرينونه او اوبيونې يا حلونه يې

۲۳ – د شميرپوهنې انګريزۍ پښتو او عربي + درې ډکشنري

۲۴ – د شميرپوهنې پښتو انګرېزي ډکشنري

۲۵ – د شميرپوهنې پښتو ډکشنري د شميرپوهنيزو وييونو په پښتو روښانه ونه

۲۶ - د زړه له کومې

۲۷ – د افغانستان په هکله سپينې خبرې، چې وبه غزيږي.

نوري ليکنې، چې په ژباړه يې پيل شوی، خو لا پوره نه دي

– د شتوتکارت پوهنتون لکچرنوټونو څخه ، چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپريږي:

د ګروپونو تيوري

- د ښوونځي لپاره فزيک د برينکمن ليکنه

له پنځم ټولګي څخه تر اووم ټولګي پورې ژباړل شوی (دا چې زما دويم مسلک فزيک دی، دا ليکنې ژباړم. دا هم د دې ليکوال يوه ډېره ښه ليکنه ده، چې -د شميرپوهنې په څير- دلته هم زيات تمرينونه د حل يا اوبيونې سره په کې راغلي او ماته زيات ګټور برېښي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

Get more e-books from www.ketabton.com
Ketabton.com: The Digital Library