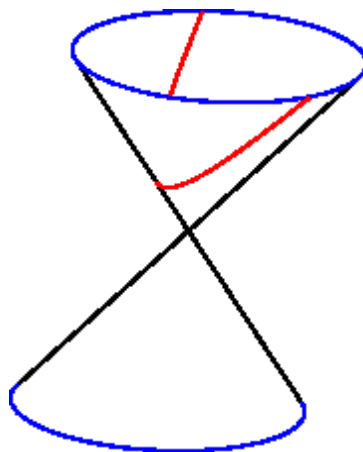


لاينيز (كربنيز) الجبر
Lineare Algebra

Ketabton.com



ڊاڪٽر ماخان (میری) شینواری

۱	لاینینز (کرنییز) الجبر
۱	بنستییز جور بنتونه / گروپونه او تنونه
۱	گروپ
۳	لاندي گروپونه
۳	گنوندپری یا د اعدادو ست
۴	پرموتیشونونه (د توکو یا اعدادو) حای بدلون)
۵	د حای بدلون (پرموتیشن) خپوکلکي یا تل
۸	مودولوس
۱۱	لومړني تنونه یا پتي یا ورشو
۱۳	گالویز – بدن
۱۴	په گروبونو یا دلو کي توری
۱۶	وکتور فضا یا وکتوري فضا
۱۹	د n - گوني وکتور فضا
۲۰	لاندي فضا یا برخه فضا
۲۲	گرنییز کمبیشن
۲۳	کرنییزه هیولی یا سپاین یا سمخ

۲۵ ننوتی – یا محذب کمبیشن

۲۶ حقیقی- یارینتونی سکالار ضرب

۲۷ سکالار ضرب

۲۸ مایل سیومتریک

۳۰ د کوشی-شوارخ – نامساوات

۳۱ نورم

۳۱ هوموگینیوالی

۳۲ د سکالار ضرب نورم

۳۳ ماکسیموم – نورم

۳۴ د حقیقی- یاریل وکتورونو سکالار ضرب

۳۵ د کمپلکس وکتورونو سکالار ضرب

۳۶ د دوه وکتورونو ترمخ کونج

۳۷ د پیتاگوراس (فیثاغورث) جمله

۳۹ کرنبیز نابلو اکوالی یا

۴۲ بنسټ Basis

۴۴ بعد یا پراخیدونی Dimension

۴۶ اورتوگونال یا ولاړ بنسټ

۴۹ اورتوگونال پروجکشن

۵۱ د گرام-شمیت تگلار یا قانون

۵۴ کرنبیزه څیرونه (فنکشن یا تابع)

	رکرنییز الج
۵۷	د کرنییزو توابعو کمپوزیشن
۵۸	ماتریکس
۶۱	یو کرنییز فنکشن یا تابع
۶۳	یو کرنییز فنکشن یا تابع
۶۵	Bild او Kern معنا څیره یا شکل او زری
۶۷	معکوس یا په څټ تابع (څیرونه یا فنکشن
۶۹	د ماتریکسونو وکتور فضا
۷۱	د ستراسن (وینه: ستراس) الگوریتم
۷۲	کوموتاتور
۷۴	په څټ یا معکوس ماتریکسونه
۷۶	تراسپونی او ادجونگری ماتریکسونه
۷۸	شپور Spur
۷۸	د یوه ماتریکس رانگ
۸۰	د یوه ماتریکس نورم
۸۱	هوموحنیټي:
۸۳	هوموحنیټي:
۸۴	د ماتریکس د ډکونی جوړښت
۸۴	اورتوگونال او یونیتار ماتریکسونه
۸۵	د هادامارد – ماتریکسونه

- ۸۶ د فوریر (ویینه: فوری) ماتریکسونه
- ۸۷ نورم رینتونی یا - وفاداره اورتوگونال ۱ و یونیتار
- ۸۹ څیوکلیکي (تلپیرته راگر ځېدوني) ماتریکسونه
- ۹۰ ستوبناستیکی ماتریکسونه
- ۹۱ دیترمینانت د انتیسیومتری کرنبیز فورم په حیث
- ۹۴ 2 - لیکیزه دیترمینانت
- ۹۵ د ساروس شیما یا شکل
- ۹۶ لوریز حجمونه (ډکي)
- ۹۸ د دیترمینانتونو لپاره قاعدې
- ۱۰۱ د ځانگړو ماتریکسونو دیترمینانتونه
- ۱۰۴ د دیترمینانتو بڼه بدلون
- ۱۰۵ د دیترمینانتو ودیزینه
- ۱۰۸ د 3 ټکو له لارې د یوې سطحې
- ۱۱۱ د واندروموند - دیترمینانتونه
- ۱۱۲ کرنبیز مساوات سیستم
- ۱۱۴ برېښنايي جریاندايره
- ۱۱۵ د یوه کرنبیز مساوات سیستم حلوروالی
- ۱۱۸ دیترمینانت او د یوه مساوات سیستم حلوروالی
- ۱۲۰ د کرامر قاعده

- ۱۲۳ په خټ لور ځای په ځای کول
- ۱۲۵ د گاوس ترانفورمیشن
- ۱۲۶ د گاوس د له منځه وړنه
- ۱۲۹ د اینیپلون بڼه
- ۱۳۱ د اینیپلون- بڼه د یوه ل م س (کرنییز مساواتسیستم) حل
- ۱۳۴ رانگ او د ک م س (کرنییز مساواتسیستم) حل وړوالی
- ۱۳۵ د انډول کرښه (انډولکرښه)
- ۱۳۷ د برابر وني حل یو بل سره یو غبریز.....
- ۱۳۸ الجبر - کرنییز مساوات سیستم- برابر وني پرابلم
- ۱۳۸ نور مال مساواتونه
- ۱۴۱ توموگرافي
- ۱۴۳ آیگن-ارزښت او آیگو-وکتور
- ۱۴۵ ورته والي - ترانفورمیشن
- ۱۴۷ کرکتر یستکي پولینوم
- ۱۵۰ الجبری او هندسي دپړځوالی
- ۱۵۲ د آیگن - ارزښتونو جمع او ضرب
- ۱۵۴ د ماتریکسونو ریښتونوی توابع
- ۱۵۵ د آیگن - وکتورونو بنسټ
- ۱۵۷ د ځیوکلیکي ماتریکسونو دیاگونالونه

- ۱۶۰ د ماتريکسونو توان
- ۱۶۲ د فيبوناچي پرلپسي يا - ترادف
- ۱۶۴ نورمال ماتريکسونه
- ۱۶۵ نورمال ماتريکسونه...
- ۱۷۰ مثبت ديفينيت ماتريکسونه
- ۱۷۰ ريلاي - ويش
- ۱۷۱ مثلث بيه
- ۱۷۳ اصلي وکتورونه
- ۱۷۵ د اصلضا څيوکليکي بنسټ
- ۱۷۹ د جوردان بيه
- ۱۸۶ د (4×4) -ماتيکسونو جوردان-بني
- ۱۸۹ په زيگولار ارزښت توتته کونه
- ۱۹۱ فاسد معکوس
- ۱۹۶ د توپوگرافيکي کچونداتنونو تیکاوی يا اصلاح
- ۱۹۷ د مور-پينروز-شرطونه
- ۱۹۸ اور توگونال او ځانگړي اور توگونال گروپونه
- ۱۹۹ هندارونه
- ۲۰۰ څرخون
- ۲۰۱ څرخونمحور او څرخونکونج

- ۲۰۵ د یو خر خون په ضرپیونو توتیه کونه
- ۲۰۸ خر خون ماتریکس
- ۲۱۰ مربعیزه فورم (بیه)
- ۲۱۱ کوادریکونه
- ۲۱۲ د کوادریکونو شذله توتیه ونه
- ۲۱۴ اصلي- محور - ترانفورمیشن
- ۲۱۸ مخروط غوخی
- ۲۲۰ د دوه بعدی کوادریکونو د اوکلیدی نورمال بیه
- ۲۳۲ د ډاکتر ماخان شینواری لیکنی

سریزه

زه د سریزې په هکله ډېر څه نه لیکم، خو دې ته گوته نیسم، چې ما د دې سرلیک لاندې دوه لیکنې کړي. دا مخ ته پرته د هغو لوستونکو لپاره ده، چې د شمیرپوهنې سره داسې لږڅه بلدتیا ولري، دا به ښه وي، خو اړینه هم نه ده.

دا لیکنه خورا مفصله ده نسبت هغې بلې ته

تر مخ راوړنه: فنکشن که په نورو ژبو کې وکورو، نو په پښتو ژباړه به یې څیره کونه (لنډ: څیره ونه) وي. په فنکشن کې یو څه په یو بل څه یا خپل ځان څیره کیږي. چې لومړی یې څیره کوونکی او دویم یې څیره ده یعنې دوه مجهولې یا اریابلې دي، چې یوه په بله څیره کیږي. لومړی خپلواک دی او دویم یې د لومړي په واک کې دی، نو له دې امله م عربي تابع بللي، یعنې دا د فنکشن تابع ده، چې مور به یې هم دا ناسم نوم وکاروو، چې گران شمیرپوهان راته په قهر نه شي.

که زما په دې لیکنه کې څیرونه راځي، نو هغه یې زموږ په ناسمه توگه همغه تابع ده. دا مو مو پوهیږم، چې له پامه نه لویږي.

ما په یو ځل ډېر ټابونه وژباړل او ولیکل، چې لیکنیز تاتیکاوي به ولري. د هغې به راته بڅښنه وکړی. دا څه چې تاسو ته وړاندې کیږي، پوره ټور دي او دې ته دې ریاته پامرنه وشي.

دا زما ټولې لیکنې به تر یوې اندازې ستونځې ولري، خو باور وکړی، چې غوټې پسې وهی په لاس درځي.

مننه: د ټولني او په ځانکري ډول د هغې د مشر بناغلي ډاکټر يحي وردگ څخه زياته مننه، نه داچې زما کتابونه يې [اپ ته ورسول بلکه په دې کار کې يې بط سارې هڅې کړي او بې له شکه يې خپلو يوادوالو ته ستر خدمت کړي، کور دې ودان وي، لوي څښتن دې ورته اجرونه ورکړي او د لا ډېرې برياوو په هيله دې زموږ دعا ورسره مل وي.

لاینبز (کرنبیز یا خطي) الجبر

بنسټیز جوړښتونه / گروپونه او تنونه

Groups and fields

گروپ

د یوه گروپ (G, \diamond) لاندې یوه ډېری G پوهیږو، په هغې چې یو دوه بیزه کارونه یا عملیه \diamond داسې پیژندل ولري یا تعریف شوي.

$$\diamond : G \times G \mapsto G,$$

دا په دې مانا، چې هره جوړه (a, b) د $a, b \in G$ سره د $a \diamond b \in G$ یو توکی باندې تنظیم دی. برسیره پردې لاندې خوښونه باید باور ولري:

Assoziativität: اسوخیاتیو والی یا اسوخیاتیو قانون

$$(a \diamond b) \diamond c = a \diamond (b \diamond c) \quad \forall a, b, c \in G$$

neutrale Element **ناپیلی توکی**: یو یواځنی ټاکلی ناپیلی توکی $e \in G$ شته دا په دې مانا، چې

$$e \diamond a = a \diamond e = a \quad \forall a \in G$$

Inverses Element مخامخ یا په ضد توکی یا برعکس توکی: هر توکی $a \in G$ ته یو یواځنی ټاکلی مخامخ یا په څټ یا برعکس توکی $a^{-1} \in G$ شته د

$$a \diamond a^{-1} = a^{-1} \diamond a = e$$

سره

گروپ کموتاتیو یا د ابل (ابل Abel د شمیرپوه نوم دی) گروپ بلل کیږي، که کارونه \diamond کموتاتیو وي:

$$a \diamond b = b \diamond a \quad \forall a, b \in G.$$

له اړوندتوب څخه لیدل کیږي، چې کومه کارونه کارول کیږي، نو زیات وخت د (G, \diamond) په ځای فقط G لیکل کیږي.

په باندي (بیجکتیو) رییل فنکشنونه یا توابع (بلواک) **bijjective real Functions**

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ یو په بل پسې کارونې له مخې یو گروپ جوړوي.

ساده ازمايل کیدی شي، چې یو په بل پسې ایښونه اسوځیاتيو ده :

$$((f \circ g) \circ h)(x) = f(g(h(x))) = (f \circ (g \circ h))(x).$$

ناپیلی توگه په روښانه توگه لاندې فنکشن دی

$$e: x \rightarrow x$$

بالاخره هر په باندي بلواک لپاره یو په څټ بلواک شته دی

$$f^{-1}: f(x) \rightarrow x.$$

یو په بل پسې ترنه کموتاتیو نه ده : د بیلگې په توگه لاندې لرو :

$$f: x \rightarrow 2x, \quad g: x \rightarrow x + 1$$

$$f \circ g \neq g \circ f.$$

کرنییز الجبر

$$f(g(x)) = 2(x + 1) \neq 2x + 1 = g(f(x)).$$

لاندې ګروپونه

د یوه ګروپ (G, \diamond) لپاره (U, \diamond) لاندې ګروپ بلل کیږي، که U د G برخې وي او (U, \diamond) پخپله یو ګروپ جوړ کړي

ددې لپاره، چې وازمایو، چې ایا U و ترنې \diamond ته یو ګروپ جوړوي، که نه، نو ازمایو، چې U و نښلوني \diamond ته او د په څنګت جوړښت ته بنده ده. یانې باور لري:

$$a \in U \Rightarrow a^{-1} \in U \quad \text{او} \quad a, b \in U \Rightarrow a \diamond b \in U$$

ګونډېری یاد اعدادو ست the set of numbers

$$\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

\mathbb{Z} و جمعې (زیاتون) ته یو کموتاتیو ګروپ دی، خوندي لرنې یا اینکلوزیون ته ټول ګڼونه و \mathbb{Q}, \mathbb{R} او \mathbb{C} ته یو لاندې ګروپ جوړوي او راشنل ګڼونه و \mathbb{R} او \mathbb{C} ته او رییل ګڼونه و کمپلکس ګڼونو ته یو لاندې ګروپ جوړوي.

که چېرې صفر لري شي، نو ضرب یا ځله ونه هم یو ګروپ جوړښت تعریفوي:

$$\mathbb{Q} \setminus \{0\} \subset \mathbb{R} \setminus \{0\} \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

تراو جدول یا تراوتخته

کارونه \diamond په پای ګروپ $G = \{g_1, \dots, g_n\}$ باندې کیدی شي د تراوماتریکس

$$A : \quad a_{i,j} = g_i \diamond g_j$$

له لارې روښانه شي.

لاندي څيرونه (بي له پرموتېشن يا بدلون څخه) اول تراوجورېنتونه بنایي د يوه گروپ لپاره د $n \leq 4$ سره:

$n = 2$
\diamond e a
e e a
a a e

$n = 3$
\diamond e a b
e e a b
a a b e
b b e a

$n = 4$
\diamond e a b c
e e a b c
a a e c b
b b c e a
c c b a e

$n = 4$
\diamond e a b c
e e a b c
a a e c b
b b c a e
c c b e a

دا گروپونه ټول ابل گروپونه دي، لکه د ماتریکس A د سیومتری ($a_{i,j} = a_{j,i}$) چې لیدل کیږي.

لومړی نابل گروپ شپږ توکي لري او د $\{1, 2, 3\}$ توکو د پروتېشن له مخې پیژندل کېدی شي

Permutations پرموتیشنونه (د توکو یا اعدادو) ځای بدلون)

د په خوښه ډېری M لپاره د بیجکشن (په کې څیرونه یا په کې فنکشن) لاندي له M په M کې، چې کمپوزیشن کارونه یا څیرونه یی د کارونې په څیر وي، یو گروپ پوهیږو داسې په نامه د M سیومتری گروپ.

لنډ: د M په M کې څیرونې ته پرموتېشن یا بدلون وایو.

که $M = \{1, 2, \dots, n\}$ وي، نو د سیومتری گروپ S_n څخه غږیږو، چې گراد یا درجه یی n وي.

د S_n ډېری د π توکي $n!$ پرموتیشن یا بدلون بلل کیږي او داسې یی لیکو

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ \pi(1) & \pi(2) & \pi(3) & \dots & \pi(n) \end{pmatrix}$$

کرنبیز الجبر

پرموتیشنګروپ په ټولیزه توګه کموتاتیو نه دی، لکه د لاندې بیلګې څخه لیدل کېږي

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

د ځای بدلون (پرموتیشن) څپوکلیکي یا تل بیرته راګرځیدونی لیکندود:

پرموتیشنونه داسې په نامه څپوکلیکي لیکندود له لارې هم ورکول کېږي. یو څپکلوس یا تل بیرته راګرځیدنه د یوه توکي او د هغه له څېرو، چې ډیر ځله د بدلون یا پرموتیشن له لارې منځ ته راځي، جوړه ده، تر څو چې بیرته هغه پیل توکي یا وتونتوکی ته ورسېږي. د هغو توکو څخه، چې په لومړي تلېرته راګرځیدني کې منځ ته نه راځي، نور څپوکلونه جوړېږي، تر څو ټول توکي رامنځ ته شي. څپکلونه د توکو د ګڼون (تعداد) ټیټیدونکي یا لوېدونکي ډول تنظیم کېږي او په کړو نوکانوکی یو پر بل پسې لیکل کېږي. هغه څپوکلونه یا تلېرته راګرځیدوني، چې اوږدوالی یې ۱ وي نه لیکل کېږي.

د بیلګې په توګه دی

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 3 & 2 & 6 & 5 & 1 \end{pmatrix} \equiv (146) (23) (5)$$

همداسې

$$\pi = (146) (23) .$$

د پرموتیشن ترانسپونې کوونه یا په بل ډول لیکنه او سیګنوم

یو ترانسپوزیشن (ځای بدلون)

$$\tau = (j k)$$

د j او k بدلون دی. ددی ساده یا بنسټیز پرموتیشن ترنې سره دا پرموتیشن π داسې انځورېدی شي:

$$\pi = \tau_1 \circ \dots \circ \tau_m .$$

دلته برابرزېنتوالی (جوړه یا ناجوړه m) یواځنی ټاکلی دی، او

$$\sigma(\pi) = (-1)^m$$

د پرموتیشن مخ نڅېبې یا د پرموتیشن زیکنوم π په څیر π ټاکو یا تعریفوو.

د

$$\tau_1 \circ \dots \circ \tau_m = \pi \in S_n$$

لپاره او د $k = \pi(n)$ سره دی

$$\tilde{\pi} = (k, n) \circ \pi \in S_{n-1} ,$$

ځکه چې د ترانسپوزیشن کمپوزیشن سره n کره په ځای نیول کېږي یا ځای په ځای پاتېږي. ایندوکتیو Induktiv (د ځانګړي په تولید پایونه) کیدی شي و نیول شي یا فرض شي، چې برابرزېنتوالی یا پارېټي د $\tilde{\pi}$ په ایندوڅیږي ټوټه ونه کې یواځنی ټاکلي ، پسي د $(-1)^m$ مخنڅېبه.

ددې لپاره، چې د پرموتیشن

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

سیکنوم و ټاکو، نو

$$(\pi(1), \dots, \pi(6)) = (6, 5, 3, 1, 2, 4)$$

کرنبیز الجبر

د ترانسپوزیشن سوکزیسیو (sukzessiv) پل په پل یو بل پسې) د کانوني لړۍ پرلپسې په څیر لیکنې ته بیا یو:

$$(1\ 6) : (1\ 5\ 3\ 6\ 2\ 4)$$

$$(2\ 5) : (1\ 2\ 3\ 6\ 5\ 4)$$

$$(4\ 6) : (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6).$$

په دې پسې یا له دې امله

$$(4\ 6) \circ (2\ 5) \circ (1\ 6) \circ \pi$$

کټمټوالی یا ایډنټیک ده، همداسې

$$\pi = (1\ 6) \circ (2\ 5) \circ (4\ 6)$$

او

$$\sigma(\pi) = (-1)^3$$

الترناتیو یا بدیلی سری کری شي څو ځیکلیکي لیکدوله وکارول شي:

$$\pi = (1\ 6\ 4) (2\ 5) (3).$$

ځکه چې د k اوږدوالي یوه څیوکلوس τ لپاره $\sigma(\tau) = (-1)^{k-1}$, دی

$$\sigma(\pi) = (-1)^2 \cdot (-1)^1 \cdot (-1)^0 = -1.$$

مودولوس Modulus

(که دوه گڼونه ۱۳ او ۵ ولرو او ۱۳ په ۵ ووېشو، نو لاس ته ۲ راځي د ۳ ياتي سره. دا داسې ليکو:

$$13 : 5 = 2$$

پاتي 3

ليکلی شو $0 = 5 = (13 - 3) : 5$ دا په دې مانا چې گڼ ۵ گڼ 3-13 وېشي

پېژند (ټاکونکی يا تعريف) که ټولگڼونه x او y او يو طبيعي عدد يا پيداېښتي گڼ a ولرو، نو وايو،، x کونگرواينځ مودولو a ($\text{mod } a$) ده،، په نڅېبه $x \equiv y \text{ mod } a$ ، که $x \equiv y \text{ mod } a$ نه وي، نو واي چې: x د y سره کونگرواينځ مودولو ($\text{mod } a$) نه ده،، يعني $x \not\equiv y \text{ mod } a$

مودولوس Modulus

لرو $a > 0$ او $x \in \mathbb{R}$. د $x \text{ mod } a$ (لوسټل: x مودولو a) لاندې په a باندې د x وېشنې پاتي پوهيرو، دا په دې مانا، چې

$$x \text{ mod } a = x - na \in [0, a)$$

د يوه ټولگڼ n لپاره. که باور ولري

$$x \text{ mod } a = y \text{ mod } a,$$

نو x او y کونگرواينځ مودولو a بلل کيږي.

پاتيټولگی (باقي-) (مودولو) modulo n

د ابل ګروپ جوړوي د زیاتون یا جمعې $\{0, 1, \dots, n-1\}$ ډېری

او د $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z} \bmod n$ سره په نڅبنه کيږي.

پام دي وي، چې ضرب modulo n په \mathbb{Z}_n د ګروپ جوړښت نه تعريفوي، ځکه چې 0 په څټ توکي نه لري.

د دي روښانه بيلګې په بنسټ اسان اړماښت کيدی شي، چې $\mathbb{Z}_4 = \{0, 1, 2, 3\}$ زیاتون یا جمعې، همداسې کمون یا تفرق د مودول – کاروني یا عمليې سره زغمور دي. د بيلګې په توګه دی

$$1 + 3 \bmod 4 = 0, \quad 0 - 2 \bmod 4 = 2$$

او داسې نور

سره له دي ځل مودولو 4 (modulo 4) مو د ګروپ تيوري ته نه لارښودوي، ځکه چې

$$1 \cdot 2 \bmod 4 = 3 \cdot 2 \bmod 4 = 2.$$

دا د ناپيلي توکي د يواځيوالي سره په مخامخوالي یا تضادګي پروت دی

بدن (جسم یا تن یا پټی Field)

يوه ډېرئ (سټ) چې په هغه کې يوه جمعې $+$ او يو ضرب \cdot تعريف وي، بدن یا پټی یا ورشو بلل کيږي، که لاندې خويونه په کې باور ولري:

اول – د ګروپ د جمعې یا زیاتيز جوړښت: $(K, +)$ يو ابل ګروپ دی د توکي (سفر توکي) سره.

دا په دې معنا چې د ټولو $a, b \in K$ لپاره باور لري.

$a + b$	=	$b + a$
$(a + b) + c$	=	$a + (b + c)$
$a + 0$	=	a
$a + (-a)$	=	$0,$

دویم - دلته $(-a)$ د a په څنګ یا معکوس توګی دی.

دریم - د ضرب ګروپي جوړښت: $(K \setminus \{0\}, \cdot)$ یو د ابل ګروپ دی د ناپیلي توګی 1 سره (یو توګی یا که غواری واحد توګی) دا په دې معنا چې د ټولو $a, b, c \in K \setminus \{0\}$ لپاره باور لري:

چیرته چې $(-a)$ و a ته په څنګ یا پریعکس توګی دی.

د ضرب ګروپي جزړښت: $(K \setminus \{0\}, \cdot)$ یو ابلګروپ دی د ناپیلي توګی (یو توګی)، دا په دې معنا چې د ټولو $a, b, c \in K \setminus \{0\}$ لپاره صدق کوي

$$a \cdot b = b \cdot a$$

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

$$a \cdot 1 = a$$

$$1 = a \cdot a^{-1}$$

کرنبیز الجبر

د کوم سره چې a^{-1} د a په څنټ یا برعکس توکی دی.

دیسټریبیوتیو قانون: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ د ټول $a, b, c \in K$ لپاره.

د ریښتونو اعدادو \mathbb{Q} ډېری، د حقیقي اعدادو \mathbb{R} ډېری او د کمپلکس اعدادو \mathbb{C} ډېری

د شمیرني قاعده یې سملاسي د اړونده ترني له لارې لاس ته راځي. صفر توکی یې 0 او یو توکی یې 1.

همداسې یې د کمپلکس عدد $z = x + iy \neq 0$ یو توکی نسبت و ضرب ته

$$w = \frac{x}{x^2 + y^2} + i \frac{-y}{x^2 + y^2},$$

دی، ځکه چې لرو:

$$z \cdot w = (x + iy) \left(\frac{x}{x^2 + y^2} + i \frac{-y}{x^2 + y^2} \right) = \frac{x^2 - i^2 y^2}{x^2 + y^2} + i \frac{-xy + yx}{x^2 + y^2} = 1 + i0.$$

لومړني تنونه یا پټي یا ورشو

د هر لومړني عدد P لپاره $\mathbb{Z}_P = \{0, 1, \dots, p-1\}$ د ډېریو یو تن دی د جمعې او ضرب **مودولو** P سره.

د په څنټ – یا برعکس توکي شتون پوري، نسبت و ضرب ته د تنونو لپاره همدا اوس په ټول اعدادو کې او د باقیټولگیو لپاره به میراث پاتي شي.

د $a \in \{2, \dots, p-1\}$ لپاره کیدی شي a^{-1} په لاندې توگه جوړ شي. لومړی سړی

$$a^i \neq 0 \pmod{p} \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

په پام کې نیسي چې،

که $a^i = np$ وی، نو د لومړي تن تجزيي څخه به ولرو، چې په P ویشل کيږي، څه

$$a < p$$

چې د له امله ناشونی دی. که اوس

پرلپسې، $a^i \bmod p$, $i = 0, \dots, p-1$ په پام کې ونیسو

، نو باید کم له کمه یو پاتې دوه واره رامنځ ته شي، یعني

$$a^{i_1} = a^{i_2} \bmod p, \quad i_1 < i_2$$

به صدق وکړي. له دې سره به وي:

$$a^{i_2-i_1} = a^{i_2-i_1-1} a = 1 \bmod p,$$

له کوم سره به چې a ته په برعکس توکي پیدا شوی وي.

په لومړني تن \mathbb{Z}_5 کې برعکس توکي دي

2^{-1}	=	$3 \bmod 5$
3^{-1}	=	$2 \bmod 5$
4^{-1}	=	$4 \bmod 5$.

که $a^i = np$ وی، نو د لومړني ضریب تجزيي څخه به مو لرو، چې P وېشي، څه

$$a < p$$

چې د له امله ناشوني دي. که اوس پرلپسې یا

په پام کې ونیسو، نو باید کم له کمه یو باقي دوه

واره رامنځ ته شي، پس $a^{i_2-i_1} = a^{i_2-i_1-1} a = 1 \bmod p$ ، به صدق وکړي د کوم

سره به چې a برعکس توکي پیدا شوی وي.

په لومړني تن \mathbb{Z}_5 کې په څنډ – یا برعکس توکي دي:

کرنییز الجبر

$$2^{-1} = 3 \pmod{5}$$

$$3^{-1} = 2 \pmod{5}$$

$$4^{-1} = 4 \pmod{5}.$$

د دې سره د بیلگې په توګه $\frac{(2+4)}{3} \pmod{5} = \frac{1}{3} \pmod{5} = 2$ همغریز دی له دې لاندې سره.

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} + \frac{4}{3} \pmod{5} &= 2 \cdot 2 + 4 \cdot 2 \pmod{5} \\ &= 4 + 3 \pmod{5} \\ &= 2. \end{aligned}$$

گالویز-بدن Galois-Körper

تن $GF[2^2]$ د 4 توکو سره د جمعې او ضرب د ترنوله لارې کیدی شی ورکړل شي:

+	0	1	a	b
0	0	1	a	b
1	1	0	b	a

·	0	1	a	b
0	0	0	0	0
1	0	1	a	b

a	a	b	0	1	a	0	a	b	1
b	b	a	1	0	b	0	b	1	a

دا مخ ته پروت جوړښت اصول داسې ساده نه دی، لکه په لومړنیو تنونو \mathbb{Z}_p کې او د گالویز له خوا پیدا شوي دي. دا په تېرلیزه توګه کېدی شي د تننرېر څخه د p^ℓ توکو سره $\ell \in \mathbb{N}$ ، د په خوښه p لپاره لومړنی عدد لپاره اجرا کړي یا سرته ورسوي، او کېدی شي و بنوول شي چې په دې توګه ټول تنونه لاس ته راوړي.

په گروپونو کې تورنی (لکه د مسابقي لپاره جمټو کیدو گروپ)

به کابل، غزني او ننګرهار کې په څلورو مهالوېش (وختونو) د نهو ډلو په منځ کې مسابقه بیل کيږي. د لته دي، هر یو د هر یو په مقابل کې، لوبه وکړي. دا په دې معنا چې په هر مهالوېش کې درې گروپونه د هر درې ډلو څخه لوبه وکړي، چې په هرو دې درې ځایونو کې دې لوبه وشي. ستونځې په دې کې پرته دي، چې یو بل باید سره غوڅ یا قطعه نه کړي، هره جوړه د $3 \cdot 4$ گروپونو کې باید یو ځل رامنځ ته شي

د شمیرپوهنې له مخې دا مسأله په لاندې ډول فرمولولی شو: دا 3 توکيزې ډېرې

$$S_{0,k} \cup S_{1,k} \cup S_{2,k} = \{1, \dots, 9\}, \quad k = 0, \dots, 3$$

دې وټاکل شي، چې د دوه ډېریو غوڅې ماکسیمال یو توکی خوندي ولري.

د دې شرایطو سره د دې مخه نیول کيږي، چې د گروپونو ډېرې چې د لوبو ورځې یې مختلفې دي، گډه د لوبدلو جوړه خوندي ولري..

کربنیز الجبر

د $S_{j,k}$ ډېری د لومړنی تن \mathbb{Z}_3 په مرسته جوړېدلای شي. د لته د لوبېلي نمري
 $(\alpha, \beta), \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_3$
 1, ..., 9 د نهه توکیزه، پای سطحې، د تیکو سره په
 نخبه کېدی شي او دا په نخبه شوي، پای سطحه، ډېری د دې سطحې د کربنوسره په
 نخبه کېدی شي:

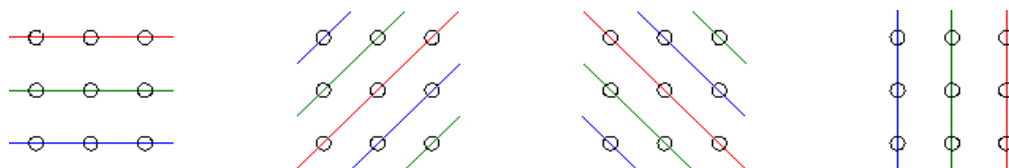
$$S_{j,k} = \{(\alpha, k \cdot \alpha + j \pmod{3}) : \alpha = 0, 1, 2\}, \quad ($$

کربنه د $(k = 0, 1, 2)$ جگېدنې سره

$$S_{j,3} = \{(j, \alpha) : \alpha = 0, 1, 2\} \quad ($$

ولاړه يا عمود کربنه

داگروپ وېشنه په لاندې شکل کې لیدور ده:



همدا مسأله د 16 تیمونو سره ده، 4 ښارونو او پنځه مهالوېش سره په ورته ډول حل
 کېدی شي. سری 4-توکیزه گالویز تن $GF[2^2]$ او لاندې گروپ وېش لاس ته راوړو:

	لوبخای 1	لوبخای 2	لوبخای 3	لوبخای 4
لومړی لوبورخ	1,2,3,4	5,6,7,8	9,10,11,12	13,14,15,16
2-مه لوبورخ	1,6,11,16	5,2,15,12	9,14,3,8	13,10,7,4
3-مه لوبورخ	1,10,15,8	5,14,11,4	9,2,7,16	13,6,3,12
4-مه لوبورخ	1,14,7,12	5,10,3,16	9,6,15,4	13,2,11,8

5-مه لوبورخ	1,5,9,13	2,6,10,14	3,7,11,15	4,8,12,16
-------------	----------	-----------	-----------	-----------

په ټولیزه توگه دلیل د q^2 لوبیلو او q بنارونو لپاره دلیل شونوی دی، هلته چې q د یوه لومړني عدد توان دی، ځکه چې د داسې یوه q لپاره تن $GF(q)$ شتون لری.

وکتور فضا یا وکتوري فضا

یو ابل گروپ $(V, +)$ وکتور فضا په یوه تن K یا K - وکتور فضا بلل کیږی، که یو سکالار ضرب \cdot ، تعریف وي، چې

$$(\lambda, v) \in K \times V$$

په ضرب $\lambda \cdot v \in V$ تنظیم او لاندې خوښونه ولری..

د ټولو سکالار $\lambda, \lambda_1, \lambda_2 \in K$ او ټولو وکتورونو $v, v_1, v_2 \in V$ لپاره صدق کوی:

$$(\lambda_1 + \lambda_2) \cdot v = \lambda_1 \cdot v + \lambda_2 \cdot v$$

$$\lambda \cdot (v_1 + v_2) = \lambda \cdot v_1 + \lambda \cdot v_2$$

$$(\lambda_1 \cdot \lambda_2) \cdot v = \lambda_1 \cdot (\lambda_2 \cdot v)$$

$$1 \cdot v = v$$

که $K = \mathbb{R}$ یا $K = \mathbb{C}$ وی، نو سری د یوه حقیقي همداسې کمپلکس وکتور فضا غږیږو او په ټولیزه توگه د سکالار ضرب لپاره ټکي څخه تېرېږو.

کرنییز الجبر

پام دی وی، چي د جمعی علامه د V په همداسی په K کی کارول کیږي. همداسی ضرب هم په K کی د ضرب لپاره کارول کیږي. پای

د تعریف سره سم په ځانگړي ډول په وکتور فضا کی د گروپ اکسیومونه ضدق کوی:
اسوخیاتیو قانون:

$$(v_1 + v_2) + v_3 = v_1 + (v_2 + v_3)$$

ضفر توکی (صفر وکتور): ټیک یو توکی $0 \in V$ د $v + 0 = v$ سره شتون لري، د
ټول $v \in V$ لپاره.

نسبت و جمعی ته په څټ - یا معکوس توکی: د ټولو $v \in V$ لپاره ټیک یو
 $-v \in V$ شتون لري د لاندی سره:

$$v + (-v) = 0$$

د جمعی بدلون قانون:

$$v_1 + v_2 = v_2 + v_1$$

غوښتونکی شرایط تنظیموي، چي جمعه، کمون یا تفریق او ضرب دا ورسره بلد شمیرقوانین پوره کوي. سری داسی کری شي چي ضرب سر ته ورسوي:

$$\left(\sum_i \lambda_i \right) \cdot \left(\sum_j v_j \right) = \sum_i \sum_j \lambda_i \cdot v_j.$$

سربیره پردی د مخ نخبی قانون صدق کوي.

$$-(-v) = (-1) \cdot (-v) = v, \quad -\left(\sum_i v_i\right) = \sum_i -v_i.$$

د $\text{Gard} \leq n$ (درجي) پولینوم

$$p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n, \quad a_i \in \mathbb{R} \quad (a_i \in \mathbb{C}),$$

یو حقیقي (کمپلکس) وکتور فضا جوړوي، د کوم سره چې جمعه او سکالار ضرب په ورته نږدې ډول تعریف دي:

$$(p + q)(x) = p(x) + q(x), \quad (\lambda p)(x) = \lambda p(x).$$

د وکتور فضا خویونه ساده تصدیق کیدلی شي.

په پام کې لرو چې پولینوم د n درجي سره، دا په دې معنا چې د $a_n \neq 0$ سره وکتور فضا نه جوړوي. د جمعي جوړول کیدی شي د درجي کموالی ته لارښود کړي. د بیلگې په توګه دی:

$$(2x - x^2) + (3 + x^2) = 3 + 2x.$$

پای

حقیقي پرلپسې (a_n) د $n \in \mathbb{N}$ سره یوه حقیقي وکتور فضا د عمليې سره جوړوي

$$(a_n) + (b_n) = (a_n + b_n), \quad \lambda(a_n) = (\lambda a_n).$$

که سربیره پر دې و غوښتل شي، چې ایا د وکتور سترکچر یا جوړښت خرابیدلی شي.

کرنییز الجبر

د بېلگې په توګه یو غبریزې پرلپسې وکتور فضا نه جوړوی. د مونوتون پرلپسېو جمعې اړین نه ده یو غبریز وی، لکه دا لاندې بېلګه ښایي:

$$(4n) + (-n^2)$$

برعکس به بندوالی یا محدودیت یو منل شوی خوی وی..

پای

د n - ګوني وکتور فضا

د K تن لپاره n - ګوني یا n - وکتورونو

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \quad a_i \in K$$

فضا دا K وکتور فضا K^n د کمپوننت ډوله تعریف شوي جمعې او سکالار ضرب سره، دا په دې معنا چې

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}$$

او

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot a_1 \\ \vdots \\ \lambda \cdot a_n \end{pmatrix}$$

د ټولو $a_i, b_i, \lambda \in K$ لپاره .

په زیاتو حالاتو کې ساده دی چې n گونی یا n ټولپل د لیکي وکتور په څېر

$$a = (a_1, \dots, a_n)^t$$

همداسي

$$a^t = (a_1, \dots, a_n)$$

ولیکل شي. د ترانسپوزیشن سیومبول a^{tt} سره د ستاندارد قرارداد څخه د متو وکتور په حیث توپیریري.

پای

لاندي فضا یا برخه فضا sub space

د یوه K -وکتور فضا V پبرخه U ، چې د په V کې تعریف شوي جمعې او سکالار ضرب سره پخپله وکتور فضا جوړوي، د V لاندي فضا یا برخه فضا بلل کيږي.

برخه فضا U زیات وخت د V توکو شرایطو سره تعریفیږي:

$$U = \{v \in V : A(v)\},$$

د کوم سره چې A یوه په نخښه کوي، چې د ټولو $v \in V$ لپاره باید پوره وي.

د دې لپاره چې و ازمایو چې ایا U د V لاندي فضا ده، کفایت کوي چې وینایو چې U نسبت د جمعې او سکالار ضرب سره تړلي ده:

$$u, v \in U \implies u + v \in U$$

کرنییز الجبر

$$\lambda \in K, u \in U \implies \lambda \cdot u \in U.$$

$$u, v \in U \implies u + v \in U$$

$$\lambda \in K, u \in U \implies \lambda \cdot u \in U.$$

لیکونکی ایپ، کیمرلی

برخفضاوی زیات وخت د ورزیاتو(برعلاوه؟) خانگر شوو خویونو له لاری منخ ته
 $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,
 راځي. که د حقیقی توابعو وکتورفضا په پام کې ونیسو، نو د بېلگې په
 توگه جوړه توابع $f(x) = f(-x)$ د ټولو $x \in \mathbb{R}$ لپاره یوه برخفضا جوړوی.
 نورې بېلگې همداسې معکوسې بېلگې په لاندې جدول کې ورکړې شوي دی.

خویونه	لاندي فضا
ناجوړه	هو
بند یا مخدود	ja هو
یو غریز	نه
نایر بکیدونکی	هو
مثبت	نه
گر بنییز	هو

لیکونکی: ایپ، هیولیگ

د یوه K -وکتور فضا د هر وکتور $d \neq 0$ لپاره د صفر څخه تیرېدونکي کرښه $v = \lambda d$, $\lambda \in K$ یوه لاندې - یا برخضا جوړوي.

په هر حالت یوه کرښه چې له صفر 0 نه تیرېږي، لاندې یا برخضا نه ده. د بېلگې په توګه

$$g : x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mu \in \mathbb{R},$$

په کرښه $(1, 0)^t$

پرتنه ده، مګر $(2, 0)^t$ نه.

لیکونکي: ایپ، هیولیک

گرښیز کمبینیشن Linear combination

په یوه K -وکتور فضا V وکتورونو v_1, v_2, \dots, v_m لپاره سری

$$\lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 + \dots + \lambda_m \cdot v_m = \sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot v_i$$

د سکالارو $\lambda_i \in K$ سره د وکتورونو v_i گرښیز کمبینیشن بولي یا نوموي.

په تولید توګه د $W \subset V$ لپاره د W څخه گرښیز کمبینیشن لاندې، د W څخه د ناپای ډېرو وکتورونو یو گرښیز کمبینیشن پوهیږو.

لیکونکي: ایپ، کیمرلي

کرنییز الجبر

$$v_1 = (3, 4, 5)^t, v_2 = (1, 1, 1)^t, v = (1, 2, 3)^t$$

وکتور د وکتورونو یو کرنییز کمینیشن دی، ځکه چې

$$v = v_1 - 2v_2.$$

$$v = (1, 0)^t$$

د دې برعکس

$$v_1 = (0, 1)^t, v_2 = (0, 2)^t,$$

د وکتورونو کرنییز کمینیشن نه دی، ځکه چې د

$$(0, *)^t$$

او کرنییز پولینوم بڼه لری..

$$v = (0, 0, 0, 0)^t$$

بلاخره کېدی شي په مختلفو ډولونو د وکتورونو

$$v_1 = (1, 1, 0, 0)^t, v_2 = (0, 2, 2, 0)^t, v_3 = (0, 0, 3, 3)^t, v_4 = (4, 0, 0, 4)^t$$

کرنییز کمینیشن په څیر انځور شي:

$$v = \lambda(12v_1 - 6v_2 + 4v_3 - 3v_4)$$

$$\lambda \in \mathbb{R}$$

د سره.

لیکونکي: اپپ، هیولیگ

کرنییزه هیولی یا سپاین یا سمخ (Linear Hülle (span)

یادونه: د په یوه فضا کې د خوندي شیانو او د باندې په منځ کې یو دیوال جوړوي.

د K - وکتور فضا V د وکتورونو v_1, \dots, v_n ټولو گرنییزو کمینېشنونو ډېری د وکتورونو v_i گرنییزه سپاین یا هیولې (یو څه یا کوتی یا ... و چې په فضا کې یو څا رابندوي (ژباړی)) بلل کیږي او داسې یې په نڅښه کوو:

$$\text{span}(v_1, \dots, v_n) = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot v_i : \lambda_i \in K \right\}.$$

په ورته توگه سړی د $\text{span}(U)$ وکتورونو د یوې ډېرې U لپاره د U د ټولو گرنییزو کمینېشنونو ډېری تعریفوی..

$\text{span}(U)$ د هرې برخې $U \in V$ لپاره د V یو برخه ده.

لیکونکي: اپ، کیمرلي

که په \mathbb{R}^3 کې دوه مختلفې د سرچینې گرنیې g_1 او g_2 په پام کې ونیسو، د بېلگې په توگه

$$g_1 : x = \lambda_1(1, 0, 0)^t, \quad g_2 : x = \lambda_2(0, 1, 0)^t, \quad \lambda_i \in \mathbb{R},$$

دا هر یو د لوریزو وکتورونو گرنییزه سپاین یا گرنییزه هیولې دي، دلته

$$v_1 = (1, 0, 0)^t, \quad v_2 = (0, 1, 0)^t.$$

نو د وکتورونو v_1 او v_2 گرنییزه هیولې یا سپاین یوه سطحه ده، چې گرنیې g_1 او g_2 خوندي لري، پس دلته

$$E : x = \lambda_1(1, 0, 0)^t + \lambda_2(0, 1, 0)^t, \quad \lambda_i \in \mathbb{R},$$

$$E = \{x : x_3 = 0\}$$

لیکونکی اپ، هیولیگ

ننوتی – یا محدب کمبینیشن Konvexkombination

په یوه حقیقی وکتور فضا V کی یو کرنییز کمبینیشن

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_m v_m$$

د $\lambda_i \geq 0, \sum_i \lambda_i = 1$ سره د وکتورونو $v_i \in V$ کنوکس کمبینیشن بلل کیږي.

لیکونکی اپ، هیولیگ

ننوتی یا محدبه هیولی یا سپاین (المائی وینه: شپاین) Konvexe Hülle

د یوه حقیقی وکتور فضا V د یوې برخدېری M محدبه هیولی د ټولو محدب کمبیشنونو

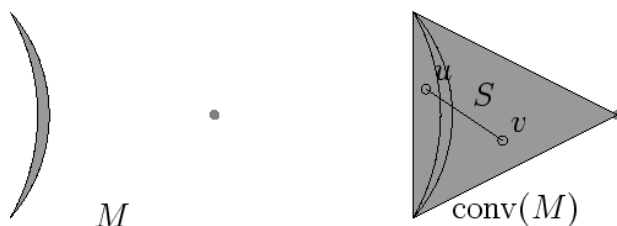
$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_m v_m \quad (\lambda_i \geq 0, \sum_i \lambda_i = 1)$$

دېری ده د $v_i \in M$ سره او د $\text{conv}(M)$ سره لیکل کیږي.

خُمکچیز یا هندسی $\text{conv}(M)$ خورا کوچنی دبری ده، چي M خوندي لري، کومه
 چي د هرو دوه توکو u, v لپاره د هغو ترنکرينه

$$S = \{\lambda u + (1 - \lambda)v : 0 \leq \lambda \leq 1\}$$

هم خوندي لري



لیکونکي اپ، هیولیگ

حقیقي- یاریسنتونی سکالار ضرب Reelles Skalarprodukt

په یوه حقیقي وکتور فضا V باندې یو سکالار ضرب یو تابع

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

ده، دلاندي خویونو سره:

مثبتوالی :

$$\langle v, v \rangle > 0 \quad v \neq 0$$

د لپاره.

سیومتري:

$$\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$$

کرنییزوالی:

$$\langle \lambda u + \rho v, w \rangle = \lambda \langle u, w \rangle + \rho \langle v, w \rangle$$

دلته $\lambda, \rho \in \mathbb{R}$ او $u, v, w \in V$ په خوبنه وکتورونه هر داسی سکالار.

د سیومتری په بنسټ یو حقیقی سکالار ضرب د دویم دلیل په بنسټ هم کرنییز دی، یعنی په V یو بی کرنییزه Bilinearform بڼه.

لیکونکی اپ، هیولیک، کرایخ

سکالار ضرب Skalarprodukt

په یو کمپلکس وکتور فضا V یو سکالار ضرب یو فنکشن

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$$

دی، د لاندې خویونو سره:

مثتوالی:

$$v \neq 0 \quad \langle v, v \rangle > 0$$

د لپاره.

مائل سیومتری:

$$\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$$

رکرنیز الج

کرنیزوالی:

$$\langle \lambda u + \rho v, w \rangle = \lambda \langle u, w \rangle + \rho \langle v, w \rangle$$

له دی سره $\lambda, \rho \in \mathbb{C}$ همداسی $u, v, w \in V$ په خوښه وکتورونه همداسی سکالار دي.

مایل سیومتريک Schiefsymmetrie :

کرنیزوالی:

$$\langle \lambda u + \rho v, w \rangle = \lambda \langle u, w \rangle + \rho \langle v, w \rangle$$

له دی سره $\lambda, \rho \in \mathbb{C}$ او په خوښه وکتورونه همداسی سکالار دي

د مائل سیومتري په اساس یو کمپلکس سکالار ضرب نسبت و دویمې متحولې ته کرنیز نه دی:

$$\langle u, \lambda v + \rho w \rangle = \bar{\lambda} \langle u, v \rangle + \bar{\rho} \langle u, w \rangle .$$

فقط د حقیقي سکالار لپاره کمپلکس کونجوگیشن بی مفهومه دی.

لیکونکي اپ، هیولیک، کرایخ

دا ترې لاس ته راغلي اسیومتري اړین ده، چې د کمپلکس سکالار ضرب مثبتوالی تضمینوي. د بی لگی په توګه دی:

$$\langle iv, iv \rangle \neq i^2 \langle v, v \rangle = -\langle v, v \rangle < 0$$

د $v \neq 0$ لپاره.

له دی زیات صدق کوي:

$$\langle iv, iv \rangle = (i\bar{i}) \langle v, v \rangle = \langle v, v \rangle > 0.$$

مثبتوالی اریین دو چی له لاری نو نورم تعریف کړای شو.

لیکونکي هیولیک، هیورنر

$$x, y \in \mathbb{R}^2$$

د وکتورونو لپاره یوه دحقیقي سکالار ضربونو د ممکنه تعریفونو لړۍ تر څېړني نیسو. په لاندې جدول ورکړ شوي، چې کوم خویونه پوره دي.

سکالار ځل	خویونه
$10x_1y_1 + x_2y_2$	ټول
x_1y_2	کرنبیزوالی
$ x_1y_1 + x_2y_2 $	مثبتوالی، سیومتري
$x_1x_2 + y_1y_2$	سیومتري

فقط لومړی تعریف ټول غوښتونې شرایط پوره کوي. په کملکس وکتورفضا \mathbb{C}^2 کې په هر ډول دا حالت نه دی، هم مثبتوالی او هم مائل سیومتري پوره نه دي:

$$\langle (i, 0), (i, 0) \rangle = 10i^2 = -10 < 0$$

$$\langle (i, 0), (1, 0) \rangle = 10i \neq \overline{\langle (1, 0), (i, 0) \rangle} = -10i$$

په داسې حالت کې چې د دویم Arguments اجزا وي يا کمپوننتونه کمپلکس کنجوگيرت کړي، پرابلک له منځه تلای شي. تعريف

$$\langle x, y \rangle = 10x_1\bar{y}_1 + x_2\bar{y}_2$$

په کمپلکس حالت غزونه راکوي.

ليکونکي: هيوليگ، هيورنر

د کوشي-شوارخ – نامساوات (نابرابرون)

Cauchy-Schwarz-Ungleichung

سکالار ضرب کېدی شي د اسوخياتیو قانون له مخې تخمین شي:

$$|\langle u, v \rangle| \leq |u||v|, \quad |w| = \sqrt{\langle w, w \rangle}.$$

$u \parallel v$

مساوات ټيک هلته صدق کوي، که صدق ولري .

که $v = \lambda u$ وي، لکه څنگه چې غوښتل کيږي مساوات صدق کوي.

د u همداسې د v ضرب د يوه سکالار سره نامساوات تغیر نه خوري. کېدی شي ونيسو (فرض کړو) چې صدق کوي:

کرنییز الجبر

$$|u|^2 = |v|^2 = 1.$$

که د سکالار ضرب سره (دلیل حقیقی حالت په بر کې نیسي) دي

$$\langle u, v \rangle = r \exp(i\varphi), \quad r > 0,$$

د $\lambda = \exp(i\varphi)$ سره د ناغبرگو (ناموازي) وکتورونو لپاره لاس ته راځي

$$0 < \langle u - \lambda v, u - \lambda v \rangle$$

$$= 1 + \lambda \bar{\lambda} - \lambda r \overline{\exp(i\varphi)} - \bar{\lambda} r \exp(i\varphi)$$

$$= 1 + 1 - r - r.$$

له دې سره $r = |\langle u, v \rangle| < 1$ باور لري، ده په دې معنا چې غوښتنه مو.

نورم Norm ډولیزوال

$$\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$$

په یوه حقیقی یا کمپلکس وکتور فضا V نورم یا تابع

د لاندې خویونو سره:

مثبتوالی:

$$v \neq 0 \quad \|v\| > 0$$

د لپاره.

هوموگینیوالی یا برابر ډولیزوالی Homogenität :

$$\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$$

درېګوډي (مثلث-) نامساوات:

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$$

دلته u, v په خوښه وکتورونه دي او λ یو په خوښه سکالار.

دد نورم $d(u, v) = \|u - v\|$ په مرسته کېدی شي د دوه وکتورونو ترمنځ واټن تعریف شي.

د سکالار ضرب نورم - Skalarprodukt - Norm

په یوه حقیقي یا کمپلکس وکتور فضا V د یوه سکالار ضرب سره ، نورم له

$$|v| = \sqrt{\langle v, v \rangle}, \quad v \in V$$

سره په یوه معنا دی.

مثبتوالی او هوموګینیتي (ورته والی) ترلی د سکالار ضرب د ورته خوینو څخه لاس ته راځي. د مثلث مساوات له

$$\begin{aligned} |u + v|^2 &= \langle u + v, u + v \rangle \\ &= \langle u, u \rangle + \underbrace{\langle u, v \rangle + \overline{\langle u, v \rangle}}_{\in \mathbb{R}} + \langle v, v \rangle \end{aligned}$$

کرنبیز الجبر

$$\begin{aligned} &\leq |u|^2 + 2|\langle u, v \rangle| + |v|^2 \\ \text{Cauchy-Schwarz} &\leq |u|^2 + 2|u||v| + |v|^2 \\ &= (|u| + |v|)^2 \end{aligned}$$

خه درینې نیونې له لارې لاس ته راځي.

لیکونکي: هیولیک، هیورنر

ماکسیموم - نورم Maximum-Norm

د وکتورونو فضاو \mathbb{R}^n او \mathbb{C}^n لپاره

$$\|z\|_\infty = \max_i |z_i|$$

ماسکیموم - نورم په نخبه کوي.

دریګوډي نامساوات پوره دي، ځکه چې د $z = x + y$ لپاره باور لري

$$\max_i |z_i| = \max_i |x_i + y_i| \leq \max_i (|x_i| + |y_i|) \leq \max_i |x_i| + \max_i |y_i|.$$

د پیل کولو یا رامنځ ته کولو سره تولید $w_i \in \mathbb{R}_+$ ماسکیموم-نورم کېدی شي د وزنونو شې:

$$\|z\|_{\infty, w} = \max_i (w_i |z_i|).$$

د حقیقی-یا ریل وکتورونو سکالار ضرب Skalarprodukt reeller Vektoren

د وکتورونو ضرب د
لیاره کانونیکي $v = (v_1, \dots, v_n)^t, w = (w_1, \dots, w_n)^t \in \mathbb{R}^n$

$$v^t w = \sum_{i=1}^n v_i w_i = v_1 w_1 + \dots + v_n w_n$$

سره تعریف دی د ورکدشوي assoziierten نورم

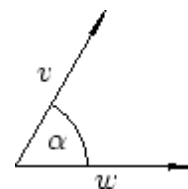
$$|v| = \sqrt{v_1^2 + \dots + v_n^2}.$$

سره.

هندسي کېدی شي دا نورم د
ترمنځ کوچنی زاویه یا کونج α په نڅنه کوي، چې د u او v څخه غزیدلي سطحې کې اندازه کېږي.

$$v^t w = |v| |w| \cos \alpha$$

له لارې تعریف شي، د v او w



د سکالار ضرب خوبونه ساده آزمایش کېږي.

د هندسي تعریف ورته والی د کوساین جلي سره تصدیقېږي (لومړی د $n = 2$ لپاره).

دې پسې د $v = (v_1, v_2)^t$ او $w = (w_1, w_2)^t$ سره باور لري، چې

کرنییز الجبر

$$|v - w|^2 = |v|^2 + |w|^2 - 2|v||w|\cos\alpha.$$

که خای په خای کرو، نو ترې لاس ته راځي

$$(v_1 - w_1)^2 + (v_2 - w_2)^2 = v_1^2 + v_2^2 + w_1^2 + w_2^2 - 2|v||w|\cos\alpha$$

او د بڼه بدلو سره بڼونه یا ثبوت.

د $n \geq 2$ لپاره v او w په \mathbb{R}^n کې یوه سطحه اواره (هواروي) وي یا غزوي. ورته شمېرنه په دې سطحه کې بنایي، چې د په خوښه دیمنزینون (ابعادو یا پراخېدونو) لپاره $n \geq 2$ تیک دی.

د کمپلکس وکتورونو سکالار ضرب Skalarprodukt komplexer Vektoren

د وکتورونو لپاره کانونیکي $x = (x_1, \dots, x_n)^t, y = (y_1, \dots, y_n)^t \in \mathbb{C}^n$

$$y^*x = \sum_{j=1}^n x_j \bar{y}_j$$

سکالار ضرب د له خوا تعریف دی د شسوخیري نورمونو

$$|z| = \sqrt{|z_1|^2 + \dots + |z_n|^2}.$$

سره.

دا سوپر سکریپت له دې سره د یوه وکتور **ترانسپوزیشن** او **کمپلکس کنجوگیشن** په گوته کوي.

دا تعریف حقیقي حالت خوندي لري، چې په هغو کې کمپلکس کنجوگیري حالت پوره وي.

$$x = \begin{pmatrix} 1 + 2i \\ -2 - i \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 2 \\ 2i \end{pmatrix}$$

که له \mathbb{C}^2 څخه د وکتورونو
سکالار ضرب جوړوو، نو لاس ته راځي:

$$\langle x, y \rangle = (1 + 2i) \cdot 2 + (-2 - i) \cdot \overline{2i} = 2 + 4i + 4i + 2i^2 = 2 + 8i - 2 = 8i.$$

پس د دوه کمپلکس وکتورونو سکالار ضرب اریین نه دی چې حقیقي وي.

د اسوخییری نورم سره د دویم وکتور کنجوگیری کونه غوره رول لري. بی له کنجوگیری
کوني څخه به په ضرب کې لومړي وکتور لاندې نورم لرو دی

$$\sqrt{(1 + 2i)^2 + (-2 - i)^2} = \sqrt{1 + 4i - 4 + 4 + 4i - 1} = \sqrt{8i} \notin \mathbb{R},$$

او د دویم وکتور لپاره به په همدې ډول نورم نامثبت وی:

$$\sqrt{2^2 + (2i)^2} = \sqrt{4 - 4} = 0 \neq 0.$$

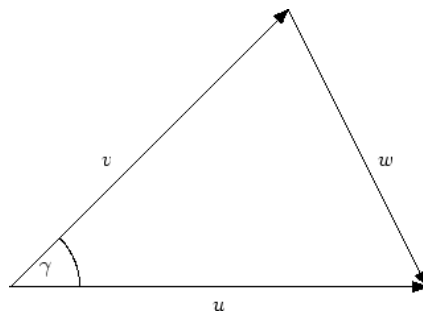
د دوه وکتورونو ترمنځ کونج Winkel zwischen Vektoren

$$\cos \angle(u, v) = \frac{\langle u, v \rangle}{|u||v|}$$

د یوه حقیقي سکالار ضرب لپاره د
لخوا

په $[0, \pi]$ کې د u او v ترمنځ یوکونج تعریفوي. په ځانګړې توګه u او v
اورتوګونال، $u \perp v$ ، بولو که $\langle u, v \rangle = 0$ ولرو.

د کونج تعریف په \mathbb{R}^2 کې د وکتورونو لپاره د کوساین له مخې رابولي:



په یوه درېکودي یا مثلث کې د اړخونو $|u|, |v|, |w|$ اوږدوالي لپاره اړیکې باور لري:

$$|w|^2 = |u|^2 + |v|^2 - 2|u||v| \cos \angle(u, v).$$

له بلې خوا د سکالار ضرب له تعریف څخه

$$|w|^2 = |v - u|^2 = |v|^2 + |u|^2 - 2\langle u, v \rangle,$$

د کونج تعریف د پرتلي له لارې لاس ته راځي.

د په خوښه حقيقي سکالار ضرب لپاره د کوشي-شورخ-مساوات په بنسټ لرو:

$$\frac{\langle u, v \rangle}{|u||v|} \in [-1, 1].$$

وېش کېدی شي په $[0, \pi]$ کې د یوه کونج د کوساین سره برابر کېښوول شي یا ځای په ځای شي.

د پیتاگوراس (فیثاغورث) جمله Satz des Pythagoras

د یوه سکالار ضرب-نورم د اور توگونال یا عکود وکتورونو u او v لپاره

$$|u + v|^2 = |u|^2 + |v|^2.$$

باور لري.

$$\begin{aligned}
 |u + v|^2 &= \langle u + v, u + v \rangle = \langle u, u \rangle + \underbrace{\langle u, v \rangle}_{=0, \text{ da } u \perp v} + \underbrace{\langle v, u \rangle}_{=0, \text{ da } v \perp u} + \langle v, v \rangle = \\
 &= |u|^2 + |v|^2.
 \end{aligned}$$

دا حمله د پیتاگوراس جملی تر نامه شهرت لری (569-475 v. Chr)، سره له دې چې دا له دې 1000 کاله د مخه بابلیانو پېژندله.

امکان لری، چې پیتاگوراس به لومړنی وو، چې دا جمله یی ثبوت کړی.

د پیتاگوراس درېگونې Pythagoräisches Tripel

د پیتاگوراس درېگونو سره درې طبیعي اعداد l, m, n بلل کیږی، د $l^2 + m^2 = n^2$ سره، د بېلگې په توگه (3, 4, 5).

یو مثلث چې د اړخونو اوږدوالي نسبت یی د پیتاگوراس درېگونې پوره کوی، د پیتاگوراس جمله پوره کوی او له دې امله دا ولارگوډیز یا ولارکونجیز او که غواړی قایم الزاویه دی.

مصریانو ممکن دا د ولارگوډ د لاس ته راوړلو لپاره کارولی وی: دوی د یوې رسی یا پری څخه کار رځسته، چې رابند او ۱۲ گنډې د برابر یون (واحد) اوږدوالي سره درلودې. که دې رسی یو درېگوډی داسې جوړ شي، چې اخونه یی درې، څلور، پنځه یوونه یا واحده اوږده وی، نو د لنډو اړخونو ترمنځ پروت کوچ ولاړ یا عمود دی.

$$\begin{aligned}
 m &= (l^2 - 1)/2 & l &\geq 3 \\
 n &= (l^2 + 1)/2
 \end{aligned}$$

هر ناجوره یا طاق عدد کېدی شي د عددونو سره د یو پیتاگوراس درېگونې ته پوره یا مکمل شي، ځکه چې

کرنییز الجبر

$$l^2 + \frac{l^4 - 2l^2 + 1}{4} = \frac{l^4 + 2l^2 + 1}{4} = \left(\frac{l^2 + 1}{2}\right)^2.$$

د دې درېگونې له 2 سره ضرب له لارې یو درېگونې لاس ته راځي، د هر ټول عد $l \geq 6$ لپاره.

دا ورکړ شوی جوړځت اصول د یوې طریقې ځانگړی حالت دی، کومه چې د؛ بینوم د دریم فرمول څخه لاس ته راځي، [که چې له

$$c^2 - b^2 = (c - b)(c + b) = a^2$$

لاس ته راځي، که a^2 په دوه مختلفو ضریبونو تجزیه کېدی شي، چې یو یې جوړه کمښت یا تفریق $(= 2b)$

ولري. د نا جوړه یا طاق $a = l$ لپاره دا ټوټه کونه $a^2 = a^2 \cdot 1$ پوره ده. لاس ته راوړو:

$$b = \frac{a^2 - 1}{2}, \quad c = \frac{a^2 + 1}{2}$$

او له دې سره دا پورته ځانگړی حالت.

کرنییز نابلواکوالی یا خپلواکوالی یا نا تابعیت **Lineare Unabhängigkeit**

وکتورونه v_1, \dots, v_m کرنییز بلواک بللکیري، که سکالار $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ شتون ولري د

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m = 0$$

او لږ تر لږه یوه $\alpha_i \neq 0$ سره. په بل حالت کې کرنییز خپلواک بلل کیري.

په ټولیزه توگه د وکتورونو یوه ډبرې M کرښیز نا بلوک یا خپواکه بلل کیږي، که د M هره پای برخه ډبرې د کرښیز نا بلوک یا خپلواکه وکتورونو څخه جوړه وي. په بل حالت کې M کرښیزه بلواکه بلل کیږي.

په پام کې دې وي، چې د کرښیز الجبر په موخه په حقیقت کې ناپاي ډبريو ته اجازه ورکړ شوې، مگر فقط ناپاي کرښيو ډبريو کمپینیشنونو ته. د بېلگې په توگه د پرلپسوی وکتور فضا ډبريو کې

$$e = (1, 1, \dots)^t, e_1 = (1, 0, 0, \dots)^t, e_2 = (0, 1, 0, \dots)^t, \dots$$

کرښیز خپلواک دی، سره له دې چې

$$e = \sum_{n \in \mathbb{N}} e_n .$$

دي.

د ثابتو پرلپسویو یا ترادفونو د کانونیکي یوون- یا واحد وکتورونو سره پای انځورونه نه شته.

په \mathbb{R}^2 کې دوه وکتورونه تیک هلته کرښیز خپلواک دي، که یو هم د بل ډبر وار نه وي، د بیلگې په توگه وکتورونه $(1, 0)^t$ او $(1, 1)^t$ کرښیز خپلواک دي، ځکه چې ایښوونه

$$\alpha(1, 0)^t + \beta(1, 1)^t = (0, 0)^t$$

راکوي

$$\beta = \alpha = 0 .$$

کرنییز الجبر

برعکس وکتورونه $(0, 0)^t$ او $(2, 3)^t$ کرنییز بلواک دي، که

$$(0, 0)^t = 0(2, 3)^t$$

همداسي:

$$0(2, 3)^t = (0, 0)^t; \quad 1(0, 0)^t +$$

پس د صفر وکتور يو، نه تریویال، یا ساده انځورونه شتون لري.

په \mathbb{R}^2 کې درې وکتورونه u, v, w تل کرنییز بلواک یا تابع دي، ځکه چې لاندې ځای په ځای کونه

$$\alpha u + \beta v + \gamma w = 0$$

کښته ټاکلي لاینیز هوموجین سیستم ته مو لارښودوي

$$\alpha u_1 + \beta v_1 + \gamma w_1 = 0$$

$$\alpha u_2 + \beta v_2 + \gamma w_2 = 0$$

د α, β, γ لپاره، چې تل یو ناساده حل لري

لکه په دوه بعدي همداسي په \mathbb{R}^3 کې دوه بعدي وکتورونه کرنییز بلواک دي، که دا غبرگ (موازي) وي، دا په دې معنا چې که یو وکتور د بل وکتور څو ځله وي.

درې وکتورونه کرنییز بلواک دي، که دوه وکتورونه غبرگ یا موازي وي یا که یو وکتور له دې نورو دوه وکتورونو غزېدلي سطحه کې پروت وي. د بېلگې په توگه د لاندې لپاره باور لري

رکرنییز الج

$$u = (1, 2, -3)^t, v = (4, -6, 2)^t, w = (-9, 3, 6)^t$$

لپاره باور لري

$$6u + 3v + 2w = (0, 0, 0)^t$$

، پس وکتورونه کرښیز بلواک دي.

د تعريف سره سم د کرښیز بلواکوالي لپاره ازماينست ورته دی یوه هوموچین کرښیز مساواتسیستم سره

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \cdots + \lambda_n \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

د سکالار λ_i لپاره. دا په ځانگړي توگه بنایي، چې څلور وکتورونه په \mathbb{R}^3 کې تل کرښیز بلواک یا تابع دي.

بنسټ Basis

د یوه وکتور فضا V برخدېری B د وکتور V یو بنسټ بلل کېږی، که B کرښیز خپلواکه وي او د V یو تولیدېدونکی یا جروېدونکی سیستم وي، دا په دې معنا چې که

$$v = \sum_{i=1}^m \lambda_i b_i$$

هر وکتور $v \in V$ یو یواځنی انځورونه د یوه پای کمیښن د $b_i \in B$ سره لري.

که B پای $(|B| = n)$ وي ، نو هر وکتور کېدی شي د یوه وضعیه قیمت له لارې سره نسبت و بنسټ ته ولیکي:

$$v \leftrightarrow v_B = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)^t.$$

د وضعیه قیمت انځوروني

$$v = \sum_{i=1}^n \lambda_i b_i \leftrightarrow v_B = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)^t,$$

سره ، دا په نامه کانونیکي ایزومورفیزم، سری کری شي یو پای بعدي K -وکتور فضا V د n -گونی وکتور فضا K^n سره په نخبه کری شي یا وپېژندلی شي. په ځاګړې توګه کېدی شي چې د پای حقیقي او کمپلکس وکتوري فضا د لوستلو سره په پروتو تیوب \mathbb{R}^n او \mathbb{C}^n ځان محدود یا رابند کړي.

لکه د بېلګې په توګه د پولینومونو وکتور فضا یدلکیري، اریین نه ده چې وکتور فضا دې پای بنسټ ولري. مګر د د کرنبیز الجب په ساحه کې پای کرنبیز کمپیشنونه تر څېرني لاندې نیول کیري. د دې لاس ته رځي، چې پرلپسې

$$e_1 = (1, 0, 0, \dots)^t, e_2 = (0, 1, 0, \dots)^t, \dots$$

د پرلپسېو د وکتور فضا لپاره بنسټ نه جوړوي. دا د ناپای کرنبیز کمپیشن مطالعه یا راورنه ، لکه دا چې څنګه په فوریې لریو کې رامنځ ته کیري، په لاس لرو، خو یوه کونورکنځ یا پولې ته یوه تګ کلیمه غواړي، یعنی د فقط وکتور فضا جوړښت څخه زیات.

بعد یا پراخیدونی Dimension

که یو وکتورفضا V یو پای بنسټ ولری، نو د بنسټ وکتورونو
 گڼون یا تعداد یواځنی ټاکلی او د V بعد یا پراخېدونۍ بلل کیږي:

$$B = \{b_1, \dots, b_n\}$$

$$n = \dim V .$$

د $V = \{0\}$ لپاره لیکو $\dim V = 0$ او $\dim V = \infty$ د یو ناپای بنسټ
 وکتورفضا لپاره.

د ټولیز بنسټ جملې له مخې هر وکتورفضا یو بسټ لری.

د دې لپاره چې وښایو، چې بعدونه یا پراخېدونې یواځنی ټاکلی دي، بسیا کوی، چې لاندې
 وپینه وښایو:

که یوه وکتورفضا n -توکیزه بنسټ

$$b_1, \dots, b_n ,$$

ولري، نو $n + 1$ وکتورونه

$$v_1, \dots, v_{n+1}$$

(او له دې سره د $n + 1$ څخه زیات وکتورونه هم) کرښیز بلواک دي.

که دوه بنسټونه د مختلفو ډېرو وکتورونو سره شته وي، نو د بنسټ وکتورونه به کرښیز
 خپلواکوالی ته یو تضاد لاس ته راشي.

پورتنۍ غوښتنه یا ثبوت کیدی شي د n پسې د ایندکشن له لارې وښوول شي.

د ایندکشن پل لپاره (اندکشن پیل $n = 1$ ساده دی) که د وکتورونو v_i بنسټ انځورونه
 راواخلو:

کرنبیز الجبر

$$v_i = \sum_{j=1}^n \gamma_{i,j} b_j, \quad i = 1, \dots, n+1.$$

باور لري:

$$\gamma_{i,1} = \dots = \gamma_{i,n} = 0,$$

نو دی ، او کرنبیز بلواکوالی همدا اوس و بنوول شو. نو کیدی شي د مناسب نمره کولو له لاري ونيسي، چي $\gamma_{n+1,n} \neq 0$. له پورته مساوات څخه په راوتني يا پيل سري اوس ومتورونه تعريفوي، کوم چي د $n-1$ وکتورونو b_1, \dots, b_{n-1} څخه د کرنبیز کمبينيشن په څير انځوريدلای شي:

$$v'_i = v_i - \frac{\gamma_{i,n}}{\gamma_{n+1,n}} v_{n+1}, \quad i = 1, \dots, n.$$

دا چي د b_n صريب يا څلوونی ورکيري، ساده کتل کيري. دا چي

$$\text{Span} \{b_1, \dots, b_{n-1}\}, v'_1, \dots, v'_n \in V' =$$

کي شي سري د ايندکشن نيوني (فرضي) وکاروي او نه ساده کرنبیز کمبينيشن لاس ته راوري

$$\lambda_1 v'_1 + \dots + \lambda_n v'_n = 0.$$

د بڼه بدلون پسي د کرنبیز کمبينيشن لاس ته راځي، نو له دي سره غوښتونى بلواکوالى يا تابعيت.

ليکونکي: اېپ، هيوليگ

اورتوگونال یا ولاړ بنسټ Orthogonal Basis

یو بنسټ $B = \{u_1, \dots, u_n\}$ اورتوگونال بلل کیږي، که وي:

$$\langle u_i, u_j \rangle = 0, \quad i \neq j.$$

که بنسټوکتورونه نورمي وي، دا په دې معنا چې $|u_i| = 1$ دي، نو د اورتوگونال سیستم یا اورتوگونال بنسټ څخه غږیږو.

یو وکتور v نسبت و یوه اورتوگونال بنسټ u_1, \dots, u_n ته انځورونه

$$v = \sum_{j=1}^n c_j u_j, \quad c_j = \frac{\langle v, u_j \rangle}{|u_j|^2}.$$

لري.

د ضریبونو c_j لپاره پاور لري

$$|c_1|^2 |u_1|^2 + \dots + |c_n|^2 |u_n|^2 = |v|^2.$$

د یوه نورمي بنسټ لپاره ترمونه $|u_j|^2$ له منځه ځي. او له دې سره لاس ته راځي:

$$c_j = \langle v, u_j \rangle, \quad |c_1|^2 + \dots + |c_n|^2 = |v|^2.$$

لیکونکي: اپې، هیولیک، کیمرلی

دا چې u_1, \dots, u_n یو بنسټ جوړوي، نو سکالا c_1, \dots, c_n د

$$v = \sum_{j=1}^n c_j u_j .$$

سره شتون لري.

که د پورتنی مساوات لپاره په خوبه سکالار ضرب د u_k سره جوړ کړو او د بنسټ د اورتوگونالیتی څخه کار واخستل شي، نو لاس ته راځي

$$\langle v, u_k \rangle = c_k \langle u_k, u_k \rangle$$

همداسې

$$c_k = \frac{\langle v, u_k \rangle}{\langle u_k, u_k \rangle} .$$

د ضریبونو لپاره کتموالی د پیتاگوراس د جملې ($n = 2$) ټولیزونه ده. دا تړلي د

$$|v|^2 = \langle c_1 u_1 + \cdots + c_n u_n, c_1 u_1 + \cdots + c_n u_n \rangle ,$$

ضربولو څخه لاس ته راځي، که دې ته پام وشي، چې مخلوط ترمونه

$$\langle c_j u_j, c_k u_k \rangle, \quad j \neq k$$

د بنسټ وکتورونو د اورتوگونالیتی له امله ورکيري

نسبت و اورتوگونال بنسټ

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$v = (8, 4)^t \quad \text{ته دا لاندي انځورونه لري}$$

$$v = \frac{\langle v, u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} u_1 + \frac{\langle v, u_2 \rangle}{\langle u_2, u_2 \rangle} u_2 = \frac{8 + 12}{1 + 9} u_1 + \frac{-48 + 8}{36 + 4} u_2 = 2u_1 - u_2 .$$

د ضربونو لپاره باور لري:

$$|2|^2 \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right|^2 + |-1|^2 \left| \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \end{pmatrix} \right|^2 = 4 \cdot 10 + 1 \cdot 40 = \left| \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix} \right|^2 .$$

نسبت و اورتوگونال بنسټ

$$u_1 = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}, u_2 = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix}, u_3 = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$v = (-1, 1, 3)^t \quad \text{ته لاندي انځورونه لري:}$$

$$v = \langle v, u_1 \rangle u_1 + \langle v, u_2 \rangle u_2 + \langle v, u_3 \rangle u_3 = 3u_1 - u_2 - u_3 .$$

د ضربیونو لپاره باور لري

$$|3|^2 + |-1|^2 + |-1|^2 = \left| \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right|^2 .$$

لیکونکي: اپ، هیولیک

اورتوگونال پروجکشن یا - پرپوسټون Orthogonale Projektion

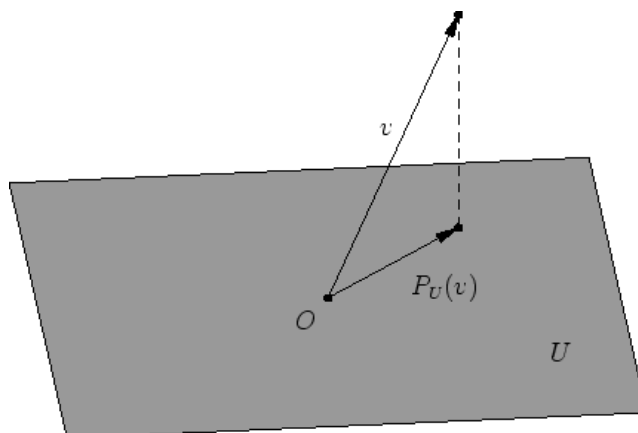
په یوه برخضا U اورتوگونال پرپوسټون

$$v \mapsto P_U(v) \in U$$

داورتوگونالیتی شرایط

$$\langle v - P_U(v), u \rangle = 0, \quad \forall u \in U$$

سره پیژندل شوی دی.



که u_1, \dots, u_j د U یو اوتوگونال بنسټ وي، نو دی

$$P_U(v) = \sum_{k=1}^j \frac{\langle v, u_k \rangle}{\langle u_k, u_k \rangle} u_k.$$

لیکونکي: اپ، هیولیگ

له $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$ سره یوه هایپر سطحه $H \subset \mathbb{R}^4$ تعریف کیري. د اوروتوگونال بنسټ لپاره کېدی شي لاندې وکتورونه وکارول شي:

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

نو د وکتور $x = (1, 2, 3, 4)^t$ د اوروتوگونال پروجکشن لپاره لاندې باور لري:

کرنییز الجبر

$$P_H x = \frac{x^t u}{|u|^2} u + \frac{x^t v}{|v|^2} v + \frac{x^t w}{|w|^2} w = \frac{-4}{4} u + \frac{-2}{4} v + \frac{0}{4} w$$

لیکونکی: هیولیگ، کرایخ

د گرام-شمیت تگلار یا قانون **Verfahren von Gram-Schmidt**

د یوه بنسټ b_1, \dots, b_n څخه کېدی شي، لکه په لاندې توگه، یو اورتوگونال بنسټ u_1, \dots, u_n جوړ شي. داسې د $j = 1, \dots, n$ لپاره سوکھیسیو تعریفوي:

$$u_j = b_j - \sum_{k < j} \frac{\langle b_j, u_k \rangle}{\langle u_k, u_k \rangle} u_k,$$

د $j = 1, \dots, n$ لپاره.

دا رکورزیو ساده کیږي، که بنسټوکتور له هر پل (قدم) ورسته نورمي شي:

$$u_j \leftarrow \frac{u_j}{|u_j|}.$$

په دې حالت دي: $\langle u_k, u_k \rangle = 1$

لیکونکی: ایپ، هیولیگ

سری ایندوکتیو (له یوه څخه تولیز ته) بنایي، چې u_1, \dots, u_l د $\text{span}(b_1, \dots, b_l)$ لپاره یو اورتوگونال بنسټ جوړزي.

د $l = 1$ لپاره دا روښانه دی: $u_1 = b_1$

د ایندکشن پل $(l \rightarrow l+1)$ لپاره په پام کې نیسو، چې د $j \leq l$ لپاره لرو

$$\langle u_{l+1}, u_j \rangle = \langle b_{l+1}, u_j \rangle - \sum_{k \leq l} \frac{\langle b_{l+1}, u_k \rangle}{\langle u_k, u_k \rangle} \underbrace{\langle u_k, u_j \rangle}_{\delta_{k,j} |u_k|^2} = 0.$$

له دې امله u_1, \dots, u_{l+1} اورتوگونال دي. بالاخره

$$b_{l+1} - u_{l+1} \in \text{span}(u_1, \dots, u_l) = \text{span}(b_1, \dots, b_l),$$

دي، له کوم سره چې و بنوول شو، دواړه فضا همغه لاندې فضا غږوي يا خوروي.

ليکونکي: هيوليگ، کرايخ

د دې لپاره چې نسبت سکالار ضرب يا ځل

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx$$

ته د پولینومونو p_0, p_1, \dots اورتوگونال پرلپسې (ترادف) جوړه کړو، کیدی شنلار

$$q_j(x) = x^j$$

سره هي سړی د مونوم $q_j(x) = x^j$ څخه مخ ته لارشي. د گرامشमित د تلنار سره لاس ته راوړي.

$$p_0 = q_0$$

$$p_1 = q_1 - \frac{\int_{-1}^1 x \cdot 1 dx}{\int_{-1}^1 1 \cdot 1 dx} \cdot 1 = x - 0$$

کرنبیز الجبر

$$p_2 = q_2 - \frac{\int_{-1}^1 x^2 \cdot x dx}{\int_{-1}^1 x \cdot x dx} \cdot x - \frac{\int_{-1}^1 x^2 \cdot 1 dx}{\int_{-1}^1 1 \cdot 1 dx} \cdot 1 = x^2 - 0 \cdot x - \frac{1}{3}.$$

تولیزه بڼه

$$p_{n+1} = q_{n+1} - \sum_{j=0}^n \frac{\langle q_{n+1}, p_j \rangle}{\langle p_j, p_j \rangle} \cdot p_j$$

کیدی شي کره نازکه یا نرمه شي، که سری د $q_{n+1}(x) = x^{n+1}$ په های پولینوم

$$\tilde{q}_{n+1}(x) = x \cdot p_n(x)$$

وکاروي. د

$$\text{span}\{p_1, \dots, p_n, q_{n+1}\} = \text{span}\{p_1, \dots, p_n, \tilde{q}_{n+1}\}$$

له امله دا قانوني دی. په دي حالت کې دي فقط زیاتوونی یا د جمعي غری د $j = n - 1$ سره د صفر سره نا برابره وي.

$$\langle \tilde{q}_{n+1}, q_n \rangle = \int_{-1}^1 x q_n(x) q_n(x) dx \quad j = n$$

د سیمتری په بنسټ د لپاره

$$p_k(x), k < n \quad [x p_j(x)] \quad j < n - 1$$

د یوکرنبیز کمبینیشن دی. د لپاره ورکیري. د

$$\langle p_n, p_n \rangle = 0$$

له امله له دي سره د

$$\langle \tilde{q}_{n+1}, p_j \rangle = \int_{-1}^1 p_n(x) [x p_j(x)] dx$$

هم صفر دی.

په دي توگه لاس ته راوړل شوي پولینومونه د لجنډر Legendre پولینومونه بلل کیري. د یوه بل نومالي کوني سره

رکرنییز الج

$$p_n(x) = \alpha_n x^n + \dots$$

د لاندې بنې د دوه ترمونو ریکورزیون لری

$$p_{n+1}(x) = \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} (x - \beta_n) p_n(x) - \gamma_n p_{n-1}(x)$$

$$\text{سرہ } \varrho_n = \langle p_n, p_n \rangle \quad \text{او} \quad \beta_n = \frac{\langle x p_n, p_n \rangle}{\varrho_n}, \quad \gamma_n = \frac{\alpha_{n+1} \alpha_{n-1} \varrho_n}{\alpha_n^2 \varrho_{n-1}} \quad \text{د}$$

کر بنییزه خپرونه (فونکشن یا تابع) Lineare Abbildung

د K وکتور فضا V او W ترمنځ فونکشن $L : V \rightarrow W$ گر بنییز بلل کیږی، که دا لاندې خوبونه ولري:

- مثبتوالی

$$L(u + v) = L(u) + L(v)$$

- هوموگېنوالی:

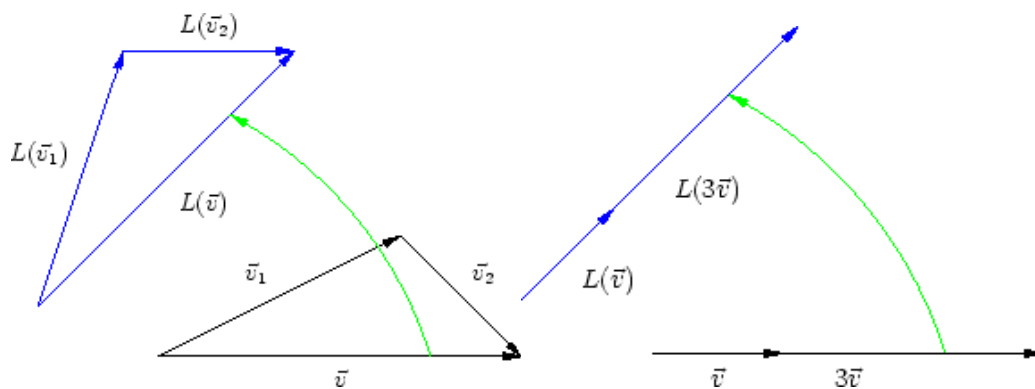
$$L(\lambda v) = \lambda L(v)$$

له دې سره $u, v \in V$ او $\lambda \in K$ په خوبه وکتورونه همداسې سکالار دي.

په خانگري توگه $L(0_V) = 0_W$ او $L(-v) = -L(v)$ باور لري.

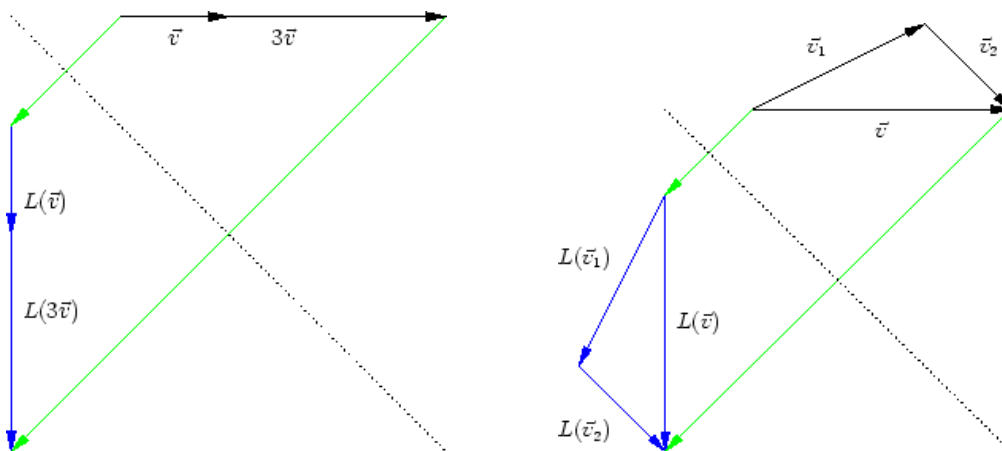
لکه په لاندې بیلگه کې به چې بنوول شي، یو څرخون کر بنییز دی.

کرنبیز الجبر



لکه جمعہ یا زیاتون $v = v_1 + v_2$ د دواړو وکتورونو v_i سره یو مثلث یا درېږگودی جوړوي، چې د ده بڼه د څرخون سره بې تغیره باټیري، دا په دې معنا چې جمعہ د مخه یا د څرخون سره جوړه شي. دا چې د ضرب λ سره غزونه د څرخون سره بدلیري، بسی ترلی لیدل کیري.

په ورته توگه بنوول کیري چې هندارونه هم کرنبیزه ده.



په سطحه کي د ټکو یوه راکبڼه کرنبیزه نه ده.

نه زاتونوالی یا جمعہ کیدنه او هم نه هوموجینیتی پوره دي. د

$$T : (x_1, x_2) \mapsto (x_1 + 1, x_2)$$

او

$$v_1 = (1, 0), v_2 = (0, 1), \lambda = 2$$

لپاره د بیلگې به توگه باور لري

$$T(v_1 + v_2) = (2, 1) \neq (3, 1) = T(v_1) + T(v_2)$$

$$T(\lambda v) = (3, 0) \neq (4, 0) = \lambda T(v).$$

لیکونکي: هیورلیگ، هیورنر

یو څو بیلگې لاندې د حقیقي توابعو یا فنکشنونو جدول بنایي. دلته هرچېرته ورکړ شوي، چې د کرنیزوالي لپاره کوم شرطونه پوره دي.

څیرونه یا فنکشن mapping	جمعی Additive	هوموجین homogen
$f \mapsto f'$	X	X
$f \mapsto f $	-	-
$f \mapsto \int_0^1 f$	X	X
$f \mapsto \max f$	-	-

کرنییز الجبر

$f \mapsto f(0)$	X	X
$f \mapsto (\max f + \min f)/2$	-	X

د یوه فنکشن لپاره یوه بیلگه، زیاتیز (مثبت) مگر هوموجین نه دی، دادی، چې یو فنکشن T ، چې یو کمپلکس ارزښتیزه تابع د هغی حقیقی برخه په گوته کړي یا وښایی یا په هغی څېره شي. دلته باور لري: $T(if) \neq iT(f)$

لیکونکي: هیورلیگ، هیورنر

د کرنییزو توابعو کمپوزیشن Komposition linearer Abbildungen

د دوه کرنییزو توابعو

$$S : U \rightarrow V, \quad T : V \rightarrow W.$$

لپاره سری کمپوزیشن تعریفوي (چې یوبل پسي تراو یا ځنزیرونه هم بلل کیري)

$$T \circ S : U \rightarrow W$$

داد لاندی لاری

$$(T \circ S)(u) = T(S(u)),$$

دایه دی معنا چې په $u \in U$ باندی فنکشن S او په نتیجه باندی فنکشن T کارول کیري، فنکشن T د فنکشن S پسي کارول کیري.

د دوه کرښیزو فنکشنونو کمپوزیشن بېرته کرښیز دی.

ماتریکس Matrix

په یوه تن یا جسم باندې د یوه $(m \times n)$ -ماتریکس تر نامه لاندې $(m, n \in \mathbb{N})$ دا لاندې یوه ولاړکدیزه - یا قام الزاویه شکل پوهیږو:

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

دلته دا د A وکتورونه $(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$ د i -مې لیکي - او $(a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj})^t$ د j -مې متي (ستن یا پرته لیکه یا درخ...) وکتورونه بلل کیږي. په ځانگړي توگه $(n \times 1)$ - ماتریکس یو د لیکي - او $(1 \times n)$ - ماتریکس یو د متي یا ستنې وکتور دي..

د ټولو $(n \times m)$ - ماتریکسونو ټولگه په $K^{n \times m}$ سره په نڅښه کیږي، حقیقي (کمپلکس) ماتریکسونه د $\mathbb{R}^{n \times m}$ ($\mathbb{C}^{n \times m}$) سره په نڅښه کیږي.

لاندې بیلگې د مختلف د ماتریکس بعدونه یا پراخېدونې ښايي.

$$\begin{pmatrix} 31 \\ 57 \\ 97 \end{pmatrix}, (i, 1+i, -1, 3i), \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ i & 1+i & -i \\ \sqrt{3}+3i & 7543 & 17 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 11 & 12 \\ 21 & 22 \\ 31 & 32 \end{pmatrix}$$

کرنبیز الجبر

لومري دوه ماتریکسونه د لیکو - همداسې د متو وکتورونه دي، دا په دې معنا چې د کومو څخه چې د یوې دیمنزیون 1 دی. ښي لور ته یو څلوریځ یا مربع ماتریکس او یو یو ولاړگودیز - یا مستطیلي ماتریکس دی.

لیکونکي: هیورلیگ، هیورنر

د یوه کرنبیز فنکشن ماتریکس Matrix einer linearen Abbildung

$$E = \{e_1, \dots, e_n\}$$

د دوه K - وکتوروفضاو ترمنځ د بنسټونو او

$$F = \{f_1, \dots, f_m\}$$

سره یو کرنبیز فنکشن $L : V \rightarrow W$ د بنسټو وکتورونو

$$L(e_j) = a_{1,j}f_1 + \dots + a_{m,j}f_m$$

د عکسونو یا ارزښت قیمتونو سره یواځني ټاکلي

دي. دا لاندې د ماتریکس انځورونه لری:

$$w_F = Av_E \iff w_i = \sum_{j=1}^n a_{i,j}v_j, \quad i = 1, \dots, m,$$

$$w = L(v)$$

وضعیه قیمتونه (کواردیناتونه)

د کومو سره چې w_i او v_j د v او

به نځینه کیري نسبت و بنسټ E او F ته. د ماتریکس A په j -مه مټه کې د

$$L(e_j)$$

کواردیناتونه یا وضعیه قیمتونه نسبت د F بنسټ ته ځا په ځای دي.

دا چې L د یوه بنسټ د عکسونو یا ارزښتونو سره یواځني ټاکلي، تړلي د کرنبیزوالي لپاره شرایطو څخه ورکول کیري:

$$w = L(v) = L\left(\sum_j v_j e_j\right) = \sum_j v_j L(e_j) = \sum_j \sum_i v_j a_{i,j} f_i.$$

$$w = \sum_i w_i f_i$$

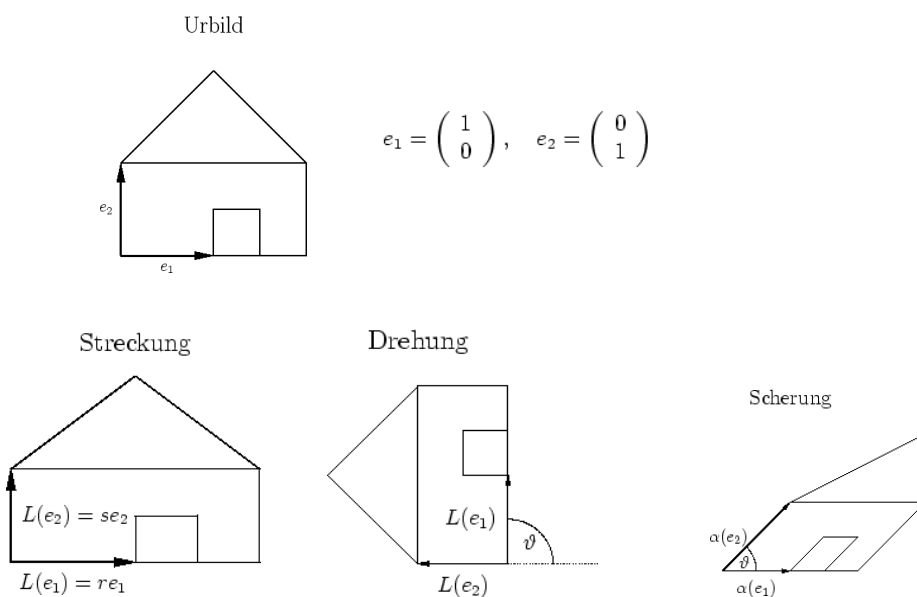
او د بنسټ وکتورونو w_i کواوردینات پرتله کيږي، داسې هم سړی غوښتل شوي د ماتریکسونو انځورونه لاس ته روري.

لیکونکي: هیولیگ، هیورن

په لاندې کې یو څو د سطحې کرښیزې تابع

$$L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

انځور شوي دي، چې د یوون – یا واحد وکتورونو شکلونو یا بهتره ارزښتونو e_i (غور) له لارې کره شوي دي.



کرنییز الجبر

$$A = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & \cot \vartheta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

سری کری شي چې د ماتریکس A انځورونه نسبت کانونیکي بنسټونو e_1, e_2 ته تړلی معلومیږي یا لوستل کیږي. د ماتریکس متي هره یوه ځانله د وکتورونو $i = 1, 2$ $L(e_i)$ کواوردیناتونه خوندي لري.

لیکونکي: هیولیگ، هیورن

یو کرنییز فنکشن یا تابع

$$x \mapsto p(x) = a_0 + a_1 x$$

په $x = 0, 1$ باندې د هغو ارزښتونو سره ټاکلي. فنکشن

$$L : p \mapsto \begin{pmatrix} p(0) \\ p(1) \end{pmatrix}$$

کرنییز دی او کېدی شي نسبت د ضریب وکتورونو

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

له لاري تعریف شوي مونومینسټ سره

رکرنییز الج

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

له لاری انخوری شي

که بنسټ

$$p_1(x) = 1 - x, p_2(x) = x$$

استعمال شي، نو ماتریکس

$$\begin{pmatrix} p_1(0) & p_2(0) \\ p_1(1) & p_2(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

تری لاس ته راځي.

تولیز د $n \leq$ درجی په m تکیه ځایون $x = x_1, \dots, x_m$ کې د یوه پولینوم

$$p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$$

ارزینتونه یا قیمت ټاکنه د واندرموند – ماتریکس Vandermonde-Matrix

$$V = \begin{pmatrix} x_1^0 & x_1^1 & \dots & x_1^n \\ x_2^0 & x_2^1 & \dots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_m^0 & x_m^1 & \dots & x_m^n \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} p(x_1) \\ \vdots \\ p(x_m) \end{pmatrix} = V \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

سره تشریح شوي یا ورکړل شوي.

کو او ردیناتونو ترانسفورمیشن د بنسټ بدلون سره

Koordinatentransformation bei Basiswechsel

د یوه بنسټ بدلون $E \rightarrow E'$ سره د یوه وکتور v کو او ردیناتونه د

$$v_E = Av_{E'} \Leftrightarrow v_{E'} = A^{-1}v_E,$$

سره سم ترانسفورمې کوي، د کوم سره چی د مربع ماتریکس A متی د بنسټ

وکتورونو e'_i ضریبونه نسبت و بنسټ ته خوندي لري:

$$e'_i = \sum_j a_{j,i} e_j.$$

لیکونکي: هیولیگ، هیورن

وکتور v نسبت و بنسټ وکتور E او E' ته لاندې انخورونه لري:

$$\sum_k \lambda_k e_k = v = \sum_k \lambda'_k e'_k.$$

د e'_k د انخورونې په مرسته نسبت و بنسټ E ته لرو:

$$\begin{aligned} v &= \sum_k \lambda'_k e'_k = \sum_k \lambda'_k \left(\sum_j a_{j,k} e_j \right) \\ &= \sum_j \left(\sum_k a_{j,k} \lambda'_k \right) e_j = \sum_j \lambda_j e_j. \end{aligned}$$

د کواوردینات پرتلی سره لاس ته راځي: $v_E = Av_{E'}$

لیکونکی: وییر

Bild او Kern معنا څیره یا شکل او زړي

د یوه کرښیز تابع $L : V \rightarrow W$ لپاره د

$$\ker L = \{v \in V : L(v) = 0\} \subseteq V$$

سره سری کرن یا زړی په نڅښه کوي او د

$$\text{Bild } L = \{w \in W : \exists v \in V$$

$$L(v) = w\} \subseteq W$$

د سره د L ارزښت یا شکل ښوول کيږي یا په نڅښه کيږي. دواړه ډبرې (ستونه) لاندې – یا برخه فضاوي دي.

لیکونکی: کیمرلي

ثبوتوو چې د K – وکتور فضا V همداسې W نسبت و کرښیزو عملیاتو ته تړلي یا رابند دي یعنی دا عملیات په کې بي بندیزه اجرا کېدی شي.

$$u, v \in \ker(L), \lambda \in K$$

لپاره، د کرښیزوالي

اول - $\ker L$ د V لاندې فضا ده: د
په بنسټ باور لري:

$$L(\lambda u) = \lambda L(u) = \lambda 0 = 0$$

او

$$L(u + v) = L(u) + L(v) = 0 + 0 = 0 .$$

کرنییز الجبر

د دې په تعقیب λu او $u + v$ هم د $\ker(L)$ توکي دي.

دویم - $\text{Bild } L$ د W لاندې فضا ده: د $u, v \in \text{Bild } L$ لپاره د

او $\lambda \in K$ سره د L کرنییزوالي په بنسټ لاندې صدق کوي:

$$\lambda u = \lambda L(x) = L(\lambda x)$$

او

$$u + v = L(x) + L(y) = L(x + y).$$

دا چې V یوه وکتور فضا ده، نو اړونده له مخ څېروني یا عکسونه یا تابع وي هم شته او

په تعقیب λu او $u + v$ هم د $\text{Bild } L$ توکي دي.

لیکونکی: وپیر

د Bild او Kern ابعاد یا براخیدوني $\text{Dimension von Bild und Kern}$

د یوه کرنییز فنکشن $L : V \rightarrow W$ لپاره باور لري

$$\dim V = \dim \ker(L) + \dim \text{Bild}(L),$$

که وي: $\dim V < \infty$

د دې لپاره چې د بعد کټمټوالی وښایو، نو د $\ker L$ لپاره یو بنسټ

$E' = \{e_1, \dots, e_m\}$ ټاکو او دا د $\{e_{m+1}, \dots, e_n\}$ سره د V و بنسټ E ته

پوره کوو. دا چې

$$L \left(\sum_{i=1}^n v_i e_i \right) = \sum_{i=m+1}^n v_i L(e_i),$$

نولرو:

$$\text{Bild } L = \text{span } F, \quad F = \{L(e_{m+1}), \dots, L(e_n)\}.$$

دا چي پسي F کرنیز خپلواک دی، یعنی د $\text{Bild } L$ بنسټ، نو له

$$\sum_{i=m+1}^n v_i L(e_i) = 0$$

لاس ته راځي $\sum_{i=m+1}^n v_i e_i \in \ker L$ او له دې سره $v_i =$.

دا غوښتونې د بعدفرمول اوس د بنسټوکتورونو تعداد څخه لاس ته راځي.

لیکونکي: هیولیگ، هیورن

د بعدفرمول د بنووني لپاره د پولینومونو - چې له $n \leq$ درجه لري - په فضا باندې k -م مشتق څېړل کيږي.

لومړی دې $k = 1$ او $n = 2$ وي. د پولینومونو د فضا لپاره چې درجه یې ≤ 2 ده $\{1, x, x^2\}$

بنسټ جوړوي، دا فضا پس بعد 3 لري. د

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

لپاره

د مشتق نیولو سره ثابته له منځه ځي یا ورکيږي. دا یوه یو بعدی لاندې - برخضا جوړوي. $p'(x) = a_1 + 2a_2 x$ چې درجه یې ≤ 1 ده. بیلد فضا نو بعد 2 لري.

کرنییز الجبر

د تابع گرن یا زری بعد 1 لري او له دې سره د $3 = 1 + 2$ سره د بعدفرمول پوره دی یا بنول شوی.

په ټولیزه توگه پولینوم لاندې فرمول لري:

$$p(x) = \sum_{l=0}^n a_l x^l$$

او k -م مشتق

$$p^{(k)}(x) = \sum_{l=k}^n \frac{l!}{(l-k)!} a_l x^{l-k}.$$

بیلد یا څپره یا ارزښت د $\leq n - k$ درجې پولینوم دی او پولینومونه چې $< k$ درجه لري له منځه وړل کیږي. پس د بعدفرمول لاندې بڼه لري:

$$n + 1 = \underbrace{((n - k) + 1)}_{\dim \text{Bild}} + \underbrace{k}_{\dim \text{ker}}.$$

لیکونکي: هیولیک، هیورن

معکوس یا په څټ تابع (څیرونه یا فنکشن) Inverse Abbildung

$$\ker L = 0_V$$

یوه کرنییزه تابع $L : V \rightarrow W$ تیک هلته انجکتیو یا په کې ده، که وي. په دې حالت کې د

$$w \mapsto v, \quad w = L(v),$$

له مخې یو معکوس تابع $L^{-1} : \text{Bild } L \rightarrow V$ تعریف شوي، چې دا هم کرنییزه ده

رکرنییز الج

په خانگري توگه باور لري

$$L^{-1} \circ L(v) = v, \quad L \circ L^{-1}(w) = w$$

د ټولو $w \in \text{Bild } L$ او $v \in V$ لپاره

لیکونکي: هیولیگ، هیورن

د L د گرنییزوالي په دلیل صدق کوي

$$L(v_1) - L(v_2) = L(v_1) + L(-v_2) = L(v_1 - v_2),$$

او له دې اړیکو لاس ته راځي:

$$L(v_1) = L(v_2) \Leftrightarrow v_1 - v_2 \in \ker L.$$

د یوه انجکتیو (په کې) کرنییزې تابع لپاره کېدی شي چې کرن یازری فقط صفروکتور خوندي ولري.

دا معکوس تابع کرنییزه ده له لاندې لاس ته راځي

$$L^{-1}(L(v_1) + L(v_2)) = L^{-1}(L(v_1 + v_2)) = v_1 + v_2 = L^{-1}(L(v_1)) + L^{-1}(L(v_2)),$$

$$L^{-1}(\lambda L(v_1)) = L^{-1}(L(\lambda v_1)) = \lambda v_1 = \lambda L^{-1}(L(v_1)).$$

لیکونکي: هیولیگ، هیورن

د ماتریکسونو وکتور فضا **Vektorraum der Matrizen**

کرنییز الجبر

د $(m \times n)$ ماتریکسونه یو وکتور فضا جوړوي، دا په دې معنا چې دا کېدی شي سره جمعه شي او د سکالار سره ضرب شي. دا کارونې یا عملیې په لاندې توګه کمپوننتونه تعریف دي:

$$C = A + B \Leftrightarrow c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j},$$

$$B = \lambda A \Leftrightarrow b_{i,j} = \lambda a_{i,j}.$$

لیکونکي: هیولیک، هیورن

د ماتریکسونو ضرب Matrix-Multiplikation

د یوه $(n \times m)$ ماتریکس A او یوه $(m \times s)$ ماتریکس B ضرب لاندې د $(n \times s)$ ماتریکس دی:

$$C = AB, \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^m a_{ik} b_{kj},$$

دا په دې معنا چې د c_{ij} د تعریف لپاره د A د i لیکې توکي او د B د j متي توکي سره جمعه کیږي:

$$\begin{pmatrix} c_{ij} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{i1} & \cdots & a_{ik} & \cdots & a_{im} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{kj} \\ \vdots \\ b_{mj} \end{pmatrix}.$$

پام دې وي، چې له دې سره باید د A د متو تعداد (گنون) د B د لیکو تعداد (گنون) سره برابر وي.

د ماتریکس ضرب همغه د کرنبیزو توابعو کمپوزیشن دی

$$T : u \mapsto v = Bu, \quad S : v \mapsto w = Av,$$

دا په دې معنا چې د C د $T \circ S$ ماتریکس انځورونه ده.

د کمپوزیشن لپاره د

$$w_i = \sum_{k=1}^m a_{ik} v_k, \quad v_k = \sum_{j=1}^s b_{kj} u_j$$

له مخې تعریف شوي تابع په لاندې ډول لاس ته راوړي.

$$w_i = \sum_k \sum_j a_{ik} b_{kj} u_j = \sum_j \left[\sum_k a_{ik} b_{kj} \right] u_j.$$

په گودیزه یا کونجیزه نوکانو یا که غواری قوسونو کې افاده د ماتریکسونو ضرب دی او کمپوزیشن توابعو د ماتریکس C سره سرخوري (یا برابر دی).

لیکونکي: هیولیگ، هیورن

په لاندې یو څو معلوم د ماتریکسونو ضربونه ورکړ شوي دي:

کرنییز الجبر

$$\begin{pmatrix} 1 & 10 & 100 \\ 100 & 10 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 321 & 213 & 132 \\ 123 & 312 & 231 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} (7 \ 13) = \begin{pmatrix} 7 & 13 \\ 14 & 26 \\ 21 & 39 \end{pmatrix}$$

$$(3 \ 4) \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 25$$

$$\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2i \end{pmatrix}$$

د ستراسن (ویینه: شتراس) الگوریتم Strassen's Algorithmus

که په ورسره بلد ډول د دوه (2×2) -ماتریکسونو A او B ضرب $C = AB$ تر څیرني لاني ونیسو، نو سړی اته ضربونو ته اړتیا لري. په ډېر هکښوالي (چې د څه انتظار نه کیري او پینښ شي) شتراسن وینوول چې اوه ضربونه بسیا کوي

[V. Strassen: Gaussian elimination is not optimal, Numer. Math. 13 (1969). 357-361]. Man berechnet die Produkte

سړی ضربوني شمیري

$$\begin{aligned}
 p_1 &= (a_{1,2} - a_{2,2})(b_{2,1} + b_{2,2}) \\
 p_2 &= (a_{1,1} + a_{2,2})(b_{1,1} + b_{2,2}) \\
 p_3 &= (a_{1,1} - a_{2,1})(b_{1,1} + b_{1,2}) \\
 p_4 &= (a_{1,1} + a_{1,2})b_{2,2} \\
 p_5 &= a_{1,1}(b_{1,2} - b_{2,2}) \\
 p_6 &= a_{2,2}(b_{2,1} - b_{1,1}) \\
 p_7 &= (a_{2,1} + a_{2,2})b_{1,1}
 \end{aligned}$$

او د C ضرب د زیاتون یا جمعی جوړولو له لارې لاس ته راځي.

$$\begin{aligned}
 c_{1,1} &= a_{1,1}b_{1,1} + a_{1,2}b_{2,1} = p_1 + p_2 - p_4 + p_6 \\
 c_{1,2} &= a_{1,1}b_{1,2} + a_{1,2}b_{2,2} = p_4 + p_5 \\
 c_{2,1} &= a_{2,1}b_{1,1} + a_{2,2}b_{2,1} = p_6 + p_7 \\
 c_{2,2} &= a_{2,1}b_{1,2} + a_{2,2}b_{2,2} = p_2 - p_3 + p_5 - p_7.
 \end{aligned}$$

کومتاتور Kommutator

د دوه $(n \times n)$ - ماتریکسونو کومتاتور د $[A, B] = AB - BA$ په حیث تعریف

شوی او په ټولیزه توګه ناصفر. د $[A, B] = 0$ په حالت کې ماتریکسونه A او B کموتي کیدونکی ماتریکسونه بلل کېږي.

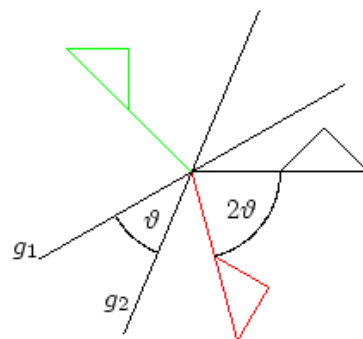
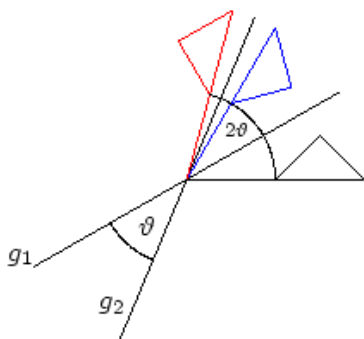
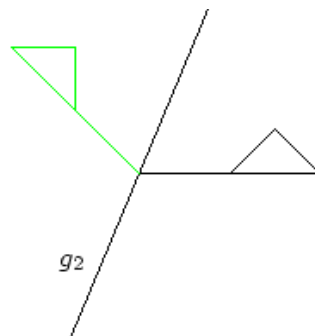
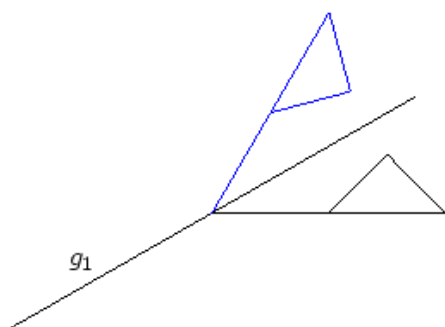
لیکونکي: هیولیک، هیورن

په مختلفو محورونو g_1 او g_2 د دوه وکتورونو S_1 او S_2 د هندارونو (که غواړئ انګاس) یو په بل پسې راوړنه کې د لړۍ پرلپسې رول نه لري.

دا پورته څیره یا عکس د یوګونو هندارونو شکلونه ښایي. په لاندې لړۍ کې کین ډبله هندارونه $S_2 \circ S_1$ انځور ده او ښي لور ته ډبله یا دوه واره هندارونه $S_1 \circ S_2$. د هر

کرنبیز الجبر

خله نتیجی بی د کرنسو ترمنخ په دوه برابره کونج خرخون دی، په هر حالت په مختلفو لورو.



که g_1 د لومړی کونجیمی په څېر ونیسو او د g_2 د y -محور نو توابع د ماتریکس انځورونه لري.

$$v = S_1 u = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} u,$$

$$v = S_2 u = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} u.$$

ڊپل هندارونه یا انعکاسونه لاندی انځورونه لری

$$\begin{aligned} w = S_2 S_1 u &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} u \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} u, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w = S_1 S_2 u &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} u \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} u. \end{aligned}$$

په دي حالت کی کوموتاتور په لاندی ډول دی

$$[S_1, S_2] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

لیکونکی: هیولیگ، هیورنر

په څټ یا معکوس ماتریکسونه Inverse Matrix

د یوه معکوس کېدونکی کرښیز تابع $Av \mapsto v$ لپاره A^{-1} د A معکوس ماتریکس په نڅښه کوي، دا په دي معنا چي

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E$$

د

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

یون - واحد ماتریکس سره؟

لیکونکی: هیولیگ، هیورنر

معکوس کپونکی په همدې ډول ریډولار ماتریکسونه
 $A \in K^{n \times n}$ نسبت و ضرب ته
 $GL(n, K)$ یو گروپ جوړوي، کرنییز گروپ چې د
 سره په نخبه کیږي.

باور لري

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

$A, B \in GL(n, K)$ د
 لپاره .

باور لري

$$B^{-1}A^{-1}AB = B^{-1}EB = B^{-1}B = E ,$$

او له دې سره $B^{-1}A^{-1}$ و AB ته معکوس دی

لیکونکی: هیولیگ، هیورنر

د دیاگونال ماتریکس معکوس داسې لاس ته راځي، چې د دیاگونال توکو معکوس یا په څت ارزښت جوړیږي، د بېلگې په توگه:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1/7 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

د درېگودۍ – یا مثلث متاریکس لپاره په معکوسونې کې د مثلث بڼه ساتلې پاتې کېږي، د بېلگې په توگه:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

په ټولیزه توگه د ماتریکس په څت یا معکوس پوره ځای نیولی یا ډک دی، د بېلگې په توگه:

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

لیکنې باید د یوه کرښیز مساواتسیتم له لارې و ټاکل شي.

لیکونکي: هیولیک، هیورنر

تراسپونې او ادجونگېری ماتریکسونه

Transponierte und adjungierte Matrix

که د یوه ماتریکس A لیکې اوو مټې سره بدلې شي، نو د ترانپونې ماتریکس $B = A^t$ څخه غږیږو، دا په دې معنا چې

$$b_{i,j} = a_{j,i}.$$

که د یوه کمپلکس ماتریکس A سرېږه پر دې لیکنې کنجوگیر شي، نو ادیونگېری ماتریکس ترې لاس ته راځي، دا په دې معنا چې

کرنییز الجبر

$$c_{i,j} = \bar{a}_{j,i}.$$

یو ماتریکس د $A = A^t$ سره سیومتريک بلل کيږي، یوه ماتریکس د $A = A^*$ سره د پخپله اډیونگيري په څېر ده یا هرمیتيکي Hermitesch ده. د حقيقي ماتریکسونو لپاره کلیمي سیومتريک او هرمیتيکي همغه (یوه) معنا لري.

لاندي قانون باور لري:

$$(AB)^* = B^*A^* \quad (AB)^t = B^tA^t$$

او -

$$(A^*)^{-1} = (A^{-1})^* \quad (A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$$

او -

د یوې لیکنې لپاره په $C^t = (AB)^t$ کې باور لري

$$c_{ji}^t = c_{ij} = \sum_k a_{ik} b_{kj} = \sum_k a_{ki}^t b_{jk}^t = \sum_k b_{jk}^t a_{ki}^t$$

او له دې سره $C^t = B^t A^t$ دا چې $\overline{a+b} = \bar{a} + \bar{b}$ او $\overline{ab} = \bar{a}\bar{b}$ باور لري، نو دا د اډیونگيري لپاره هم ټیک دی.

له

$$E = E^t = (AA^{-1})^t = (A^{-1})^t A^t$$

لاس ته راځي. په ورته توگه د اډیونگيري لپاره هم صدق کوي. $(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$

لیکونکي: هیولیک، هیورنر

شپور Spur

(د الماني څخه د شپور پښتو معنا: نڅښه يا علامه)

شپور د يوه $n \times n$ -ماتريکس A اصلي دوه کونټري ټوکو (وتر) جمع د A شپور بلل کيږي،

$$\text{Spur}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}.$$

که A, B په خوښه $(n \times n)$ - ماتريکسونه وي، نو باور لري:

$$\text{Spur}(AB) = \text{Spur}(BA).$$

له دې لاس ته راځي، د يوه رېډولار ماتريکس T او يوه په خوښه ماتريکس A لپاره صدق کوي:

$$\text{Spur}(T^{-1}AT) = \text{Spur}(A).$$

دا دا معنا لري، چې شپور يا سپور د کواوردينات ترانفورميشن لاندې invariant (نسبت يوي کچوني يا اندازه کوني ته بي تغيره پټي کيدل) يا بي تغيره پاتيري.

د يوه ماتريکس رانگ Rang einer Matrix

د يوه $(m \times n)$ -ماتريکس لپاره د کرښيز خپلواکو متو ماکسيمال گڼون يا تعداد د ماکسيمالو کرښيزو خپلواکو کيلو سره يو په بل پريوحي يا يو بل سره مساوي دي او د

رانگ A په لکنيز ډول $\text{Rang } A$ بلل کيږي،

په ځانگړي ډول باور لري

کرنییز الجبر

$$\text{Rang } A \leq \max\{m, n\}.$$

د ماکسیمال کرنییز خپلواکو متو v_1, \dots, v_n تعداد د وکتور فضا پعد به گوته کوي

$$V = \text{span}\{v_1, \dots, v_n\},$$

خکه چي سري کري شي د متو خخه بنسټ وټاکي. په ورته توگه وينا د لیکو

خخه غزیلي وکتور فضا W لپاره هم صدق کوي.

$$\dim V = \dim W$$

غوښتنه د n پسي اندکشن له لاري وښوول شي.

ساده ښوول کيږي، چي $\dim V$ او $\dim W$ د لاندي عمليو يا کارونو سره بي تغيره پاتيري:

- د متو يا لیکو بدلېدنه يا پرموتيشن

- د يوه سکالار جمعه دېرځله يا د يوه دېرځله سکالار سره د يوي متي (ليکي) جمعه د يوه بلي متي (ليکي) سره.

که $A \neq 0$ وي، سري کري شي دا عمليه په لاندي بڼه

$$B = \begin{pmatrix} b_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & A' & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

راوري.

د پرموتيشن سره لومړی لاس ته راځي او بيا د لومړی ليکي يا کيلي او متي پاتي توکي د مناسب جمعي له لاري له منځه وړي. په ټيک ډول لومړي د لومړی متي $b_{1,1} \neq 0$

خله و j -مې مټې ($j = 2, \dots, n$) ته جمعه کوي او په ورته توګه د لیکو وکتورونو سره هم دا عمل وځ ته بیولای شو. که د V' او W' سره وښتوني وکتور فضاوي د $(m-1) \times (n-1)$ - ماتریکس A' لپاره، نو لاس ته راځي

$$\dim V = \dim V' + 1, \quad \dim W = \dim W' + 1$$

او د ایندکشن له لارې غوښتنه.

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

یو څو تیپیکي حالتونه د درې (3×2) -متریکسونو سره دلیدلو شوي یا ورکړ شوي دي

$$\text{Rang} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{Rang} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = 2, \quad \text{Rang} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \\ 9 & 12 \end{pmatrix} = 1.$$

د دریم ماتریکس لپاره صدق کوي $4S_1 = 3S_2$ د مټو S_1 او S_2 لپاره او $2Z_3 = 3Z_2 = 6Z_1$ د لیکو Z_1, Z_2 او Z_3 لپاره. په دواړو حالتونو کې نو د غوښتوني وکتور فضا دیمنژن یا بعد برابر په 1 دی.

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

د یوه ماتریکس نورم Norm einer Matrix

د یوه وکتور نورم د ماتریکس نورم

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|$$

ته بنسټ ووي د نورم خویونو سر بېره (مثبتوالی، هوموچی نیټي، مثلثن مساوات)

$$\|AB\| \leq \|A\| \|B\|,$$

باور لري، دا په دی کعنا چی د ورسره تنظیم شوی ماتریکس نورم سبضریبي submultiplikativ دی.

لیکونکي: هیولیگ، هیورنر

په لاندی کی به یوگوني خویونه د ازمايني له لاری زبنوول شي:

مثبتوالی: د وکتور فضا تعریف له لاری تضمین دی، چی $\|A\| \geq 0$ دی. که A صفر ماتریکس وي، نو فقط صفر وکتور 0 د څېرې په څېر مخ ته لرو. که له بلي خوا نورم صفر وي، نو فقط صفر وکتور د څېرې په څېر رامنځ ته کيږي، او تابع یا فنکشن د صفر ماتریکس سره تشریح کيږي.

Homogenität هوموحنیټي:

$$\max_{\|x\|=1} \|\lambda Ax\| = \max_{\|x\|=1} |\lambda| \|Ax\| = \|\lambda A\|$$

$$|\lambda| \max_{\|x\|=1} \|Ax\| = |\lambda| \|A\| . =$$

$$\|\lambda A\| = \max_{\|x\|=1} \|\lambda Ax\| = \max_{\|x\|=1} |\lambda| \|Ax\|$$

$$= |\lambda| \max_{\|x\|=1} \|Ax\| = |\lambda| \|A\|.$$

Dreiecksungleichung مثلثات برابرون :

$$\begin{aligned} \|A + B\| &= \max_{\|x\|=1} \|(A + B)x\| = \max_{\|x\|=1} \|Ax + Bx\| \\ &\leq \max_{\|x\|=1} (\|Ax\| + \|Bx\|) \\ &\leq \max_{\|x\|=1} \|Ax\| + \max_{\|x\|=1} \|Bx\| = \|A\| + \|B\|. \end{aligned}$$

Submultiplikativität سب ضربیوالی:

د $B = 0$ لپاره $AB = 0$ دي او له دې سره نامساوات پوره دی. د $B \neq 0$ لپاره دی:

$$\begin{aligned} \|AB\| &= \sup_{x \neq 0} \frac{\|ABx\|}{\|x\|} = \sup_{x: Bx \neq 0} \frac{\|A(Bx)\|}{\|Bx\|} \frac{\|Bx\|}{\|x\|} \\ &\leq \sup_{y \neq 0} \frac{\|Ay\|}{\|y\|} \sup_{x \neq 0} \frac{\|Bx\|}{\|x\|} = \|A\| \|B\|. \end{aligned}$$

د لومړي بني بدلون سره ، جي په حقيقت کي ډبري يا ست په يوه سوپرېموم
Supremum څېره کيږي محدوديږي، مگر فقط وکتورونه تري لري کيږي، چي
صفر وکتور دڅېري په ډول لري او له دې سره سوپرېموم نه اغيزمن کوي.

لیکونکي: هیولیگ ، کرایخ

د لیکو د جمعی نورم Zeilensummen-Norm

د وکتورونو لپاره ماکسیموم نورم لیکو جمعی نورم

$$\|v\|_{\infty} = \max_i |v_i|$$

د ماتریکسونو لپاره د

$$\|A\|_{\infty} = \max_i \sum_j |a_{ij}|$$

تنظیم دی.

لیکونکي: هیولیگ ، کرایخ

$$\|x\|_{\infty} = \max_j |x_j| = 1$$

د لپاره

$$\|Ax\|_{\infty} = \max_i \left| \sum_j a_{ij} x_j \right| \leq \max_i \sum_j |a_{ij}|,$$

دی

او سری لاس ته راوړي

$$\|A\|_{\infty} = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|_{\infty} \leq \max_i \sum_j |a_{ij}|.$$

که سری ونیسي یا فرض کړي، چې ماکسیموم د $i = k$ لپاره فرض شوی یا نیول شوي، نو مساوات د

$$x_j = \text{sign } a_{kj}$$

انتخاب له لاری لاس ته راځي، ځکه چې دی:

$$\left| \sum_j a_{kj} x_j \right| = \sum_j \|a_{kj}\| .$$

لیکونکي: هیولیگ ، کرایخ

د ماتریکس د ډکونې جوړښت Belegungsstruktur von Matrizen

د صفر سره مختلف ماتریکس توکو $a_{i,j}$ د تنظیم سره سم د لاندې ترمنځ توپیر کوي

اول – دیاگونالماتریکس: $a_{i,j} = 0$ د $i \neq j$ لپاره،

باند ماتریکسونه Bandmatrizen: د لپاره د سره د صفر نه مختلفو ماتریکسونو د دیاگونالو شمېر، چې د باند سور په څېر په نڅښه کیري یا نومول کیري،

پورته (کنښته) مثلث ماتریکسونه: $a_{i,j} = 0$ د $i > j$ (لپاره)

په ټولیزه توګه یو $(m \times n)$ - ماتریکس ضعیف ډکسوی، که فقط

توکی $c \max(m, n)$ د صفي سره نامساوي وي، د یوې نه ډېرې لوی ثابتې c سره.

لیکونکي: ایپ، هیولیگ

Orthogonale und unitäre Matrizen اور توګونال او یونیتار ماتریکسونه

يو کمپلکس $(n \times n)$ - ماتریکس A یونیتار بلل کیری، که ولرو

$$A^{-1} = \overline{A}^t = A^*,$$

دا په دې معنا چې که د A متی د \mathbb{C}^n یو اورتوگونال بنسټ جوړ کړي. د حقیقي ماتریکسونو لپاره (لکه په سکالار ضرب کې) کمپلکس کنجیشن،

$$A^{-1} = A^t,$$

او سری د یوه اورتوگونال ماتریکس څخه غبريږي.

اورتوگونال (یونیتار) ماتریکسونه د $(\text{GL}(n, \mathbb{C}))$ یو لاندي - برخگروپ جوړوي

لیکونکي: ایپ، هیولیک

د هادامارد - ماتریکسونه Hadamard-Matrizen

د $n = 2^k$ لپاره تر سکالار کېدنو پورې اورتوگونال ماتریکسونه شتون لري د H_k د $n \times n$ بعد په $\{-1, 1\}$ کې د لیکنو سره داسې په نامه هادامارد ماتریکسونه.

د هاداماد لومړی ماتریکسونه دي:

$$H_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad H_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

رکرنییز الج

په تولیزه توگه ماتریسونه د ریکورزیون

$$H_{2k} = \begin{pmatrix} H_k & H_k \\ H_k & -H_k \end{pmatrix}$$

سره جورکړي.

لیکونکي: اپ، هیولیگ

د فوریر (ویینه: فوری) ماتریکسونه Fourier-Matrizen

د توان جورولو له لارې دیون - یا واحد ریښې

$$\omega_n = \exp(2\pi i/n)$$

سری داسې په نامه فوری ماتری: س لاس ته راوړي

$$W_n = \begin{pmatrix} \omega_n^{0 \cdot 0} & \dots & \omega_n^{0 \cdot (n-1)} \\ \vdots & & \vdots \\ \omega_n^{(n-1) \cdot 0} & \dots & \omega_n^{(n-1) \cdot (n-1)} \end{pmatrix}.$$

دا د نورمي کولو ($W_n \rightarrow W_n/\sqrt{n}$) پسې یونیتار دي، دا په دې معنا چې

$$W_n^* W_n / n = I$$

یون - یا واحد ماتریکس دی.

لیکونکي: اپ، هیولیگ

کرنبیز الجبر

د متو اور توگونالیتی ساده از مایل کیری. د $(j+1)$ - مو او $(k+1)$ - مو متو سکالار ضرب

$$\sum_{\ell=0}^{n-1} w_n^{\ell j} \overline{w_n^{\ell k}} = \sum_{\ell} w_n^{(j-k)\ell} = \frac{w_n^{(j-k)n} - 1}{w_n^{j-k} - 1},$$

دی، او داچی $w_n^n = 1$ دی، نو صورت یا ماتباندی صفر دی.

لیکونکی: اپ، هیولیک

د $n = 4$ لپاره $w_4 = \exp(2\pi i/4) = i$ دی، او سری لاس ته راوری

$$W_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{pmatrix}.$$

په 2 د وېشنې وروسته W_4 یونیتار دی، دا په دې معنا چې

$$\left(\frac{1}{2}W_4^*\right) \left(\frac{1}{2}W_4\right) = E.$$

له دې امله د فوری ماتریکسونو د سیومتري والی له امله $W_4^* = \overline{W_4^t} = \overline{W_4}$ دی.

لیکونکی: اپ، هیولیک

نورم ریښتوني یا - وفاداره اور توگونال ا و یونیتار ماتریکونه

Normtreue orthogonaler und unitärer Matrizen

یو حقیقي (کمپلکس) ماتریکس A تیک هلته اوتوگونال (یونیتار) دی، که دا د هر وکتور اوکلید (اقلیدس *euklidische*) نورم انوارینت پریر دی:

$$|Av| = |v|.$$

لیکونکي: اپ، هیولیک

بسیا کوي، چې کمپلکس حالت وڅیرو، چې حقیقي حالت په بر کې نیسي.

اول - A یونیتار ده، نو باور لري

$$(Ay)^*(Ax) = y^* A^* Ax = y^* x$$

پس په ټولیزه توگه د کمپلکس وکتورونو سکالار ضرب لاس ته راځي، چې د نورمرینتونوالی په بر کې لري.

دویم - د نورم ریښونوالی څخه لومړی لاس ته راځي، چې د A د متي وکتور v_j د

یوون وکتورونو e_j د عکسونو نورم یوی خوندي لري. د دې لپاره چې وښایو چې مختلفي

$$\lambda = \exp(i\theta)$$

متي اوتوگونال دي، نو، ټاکو، داسې چې لرو:

$$(\lambda v_k)^* v_j \in \mathbb{R}.$$

پسې د نورمرینتونوالی او اقلیدس نورم تعریف په بنسټ لرو

$$2 = |e_j + \lambda e_k|^2 = |v_j + \lambda v_k|^2 = |v_j|^2 + |\lambda|^2 |v_k|^2 + 2 \operatorname{Re}(\lambda v_k)^* v_j = 2 + 2\bar{\lambda} v_k^* v_j,$$

په تعقیب باید په بنی لور سکالار ضرب ورک شي.

لیکونکي: اپ، هیولیک

کرنییز الجبر

څیوکلیکي (تلپیرته راگر څېدونې) ماتریکسونه *Zyklische Matrizen*

د څیوکلیکي ماتریکسونو متي د لومړی متي د څیوکلیکي راکنې له لارې جوړیږي:

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots \\ a_1 & a_0 & a_{n-1} & \dots \\ a_2 & a_1 & a_0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

د ماتریکسونو ضرب سره څیوکلیکي جوړښت ساتلی یا خوندي پاتې کیږي.

لیکونکي: اپ، هیولیک

د یوه څیوکلیکي ماتریکس-ضرب $C = AB$ توکی دي:

$$c_{i,k} = \sum_{j=1}^n a_{i-j \bmod n} b_{j-k \bmod n}.$$

د اچي

$$\{0, \dots, n-1\} = k + \{0, \dots, n-1\} \bmod n,$$

کېدی شي سړی په زیاتوونو (د جمعې اجزاوو) د j په ځای $j+k$ ځای په ځای کړي، کوم چې بنایي، چې فقط د $c_{i,k}$ په واک کې دي.

لیکونکي: اپ، هیولیک

د څیوکلیکي ماتریکسونو

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 1 \\ 1 & -3 & 4 \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 5 \\ 5 & 0 & -2 \\ -2 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

ضرب دا لاندې څپوکلکي ماتریک دی:

$$C = AB = \begin{pmatrix} 18 & 11 & -23 \\ -23 & 18 & 11 \\ 11 & -23 & 18 \end{pmatrix}.$$

لیکونکي: ایپ، هیولیک

ستونبناستیکی ماتریکسونه

یو $(n \times n)$ -ماتریکس ستونبناستیکی بلل کیږي، که $p_{i,j} \geq 0$ وي او

$$\sum_{j=1}^n p_{i,j} = 1, \quad i = 1, \dots, n.$$

ستونبناستیکی ماتریکس د احتمالوالو x_i تغیر بنایي د لاندې له مخی:

$$x'_j = \sum_i x_i p_{i,j}.$$

لیکونکي: ایپ، هیولیک

د P د بنویونو په بنسټ x' هم یو د احتمالوالي وکتور دی، دا په دې معنا چې

$$x'_j \geq 0, \quad \sum_j x'_j = 1.$$

دا نه کمبنتوالی یا نه منفیوالی څرگند دی او د جمعی انوارینت له لاندې څخه تعقیبیری:

$$\sum_j \sum_i x_i p_{i,j} = \sum_i x_i \underbrace{\sum_j p_{i,j}}_{=1}.$$

لیکونکي: اپ، هیولیک

دیترمینانت د انتیسیومتری کرنبیز فورم په حیث

Determinante als antisymmetrische Multilinearform

د یوه مربع ماتریکس A دیترمینانت

$$\det A = \det(a_1, \dots, a_n)$$

د متی a_j سره کېدی شي د لاندې خویونو له لاری تعریف شي.

اول - دېر کرنبیزوالی

$$\det(\dots, \alpha a_j + \beta b_j, \dots) = \alpha \det(\dots, a_j, \dots) + \beta \det(\dots, b_j, \dots).$$

دویم - انتیسیومتری:

$$\det(\dots, a_j, \dots, a_k, \dots) = -\det(\dots, a_k, \dots, a_j, \dots).$$

دریم - نورمي کونه

$$\det(e_1, \dots, e_n) = 1, (e_k)_\ell = \delta_{k\ell}.$$

د دې قانون سره دیترمینانت د n -خله ضرب سره وده کولی شي:

$$\det A = \sum_{i \in S_n} \sigma(i) a_{i_1,1} \cdots a_{i_n,n},$$

د کوم سره چې د $(1, \dots, n)$ په ټولو ځای بدلونو (i_1, \dots, i_n) سره جمعه کړي او σ د ځای بدلونونو سره مخنځبڼه بڼایو.

سری دا لاندې لیکدود هم استعمالوي

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

لیکونکي: هیولیک، هیونر

د زیاتیدونو (د جمعی اجزاو) د تعداد د جگیدو له امله ($n!$ ځای بدلونونه شتون لري) د دیترمینانت د عملي انځورونو لپاره بڼه مساعدنه دی. مگر دا تړلی د تعریف شوو خویونو تړلی (د عملیو له لارې) دا د بنوونې او د نوروو خویونو د لاس ته راوړلو لپاره اړین دي. له دې امله دا د ورته (برابر ازبسته) تعریف لپاره ورکړ شوی دی.

لومړی بڼایو، چې غوښتل شوي خویونه مو اړین د دیترمینانت ویدزونې ته بیایي، په اړینه توگه د برموتیشن په مرستی.

د دې سره د A متي د یوون - یا واحد وکتورونو e_i د کرښیز کمبینیشنونو په حیث انځوروي:

$$a_j = \sum_{i=1}^n a_{i,j} e_i .$$

د ډبرکرنبیزوالي په بنسټ باور لري:

$$\det A = \sum_{i_1=1}^n \cdots \sum_{i_n=1}^n a_{i_1,1} \cdots a_{i_n,n} \underbrace{\det(e_{i_1}, \dots, e_{i_n})}_{=: d_i} .$$

دا جمعه لکه چې لاس ته راځي کیدی شي ساده شي. که له دې دوه یوون - یا

واحدوکتورونه برابر وي، نو د انتیسیمتری په بنسټ d_i صفر دی:

$$\det(\dots, e_k, \dots, e_k, \dots) = -\det(\dots, e_k, \dots, e_k, \dots) .$$

که ټول i_ν مختلف وي، دا په دې معنا چې

$$(i_1, \dots, i_n)$$

یو پرموتیشن دی د $(1, \dots, n)$ ، نو صدق کوي

$$d_i = (-1)^{\tau(i)} ,$$

د کوم سره چې $\tau(i)$ مودولو 2 د بدلونونو پواځنی ټاکلی تعداد (گنون) په نخبه کوي ، د کوم لپاره چې واحدوکتور په کانونیکي لړۍ پرلپسې راوړی شو. ځای بدلون د مخنځني تعریف پسي دی:

$$\det(e_{i_1}, \dots, e_{i_n}) = \sigma(i) \det(e_1, \dots, e_n) = \sigma(i) ,$$

دا په دې معنا چې سړی ورکړ شوی وډیزینه لاس ته راوړي.

برعکس کېدی شي و ازمايو، چي وديزینه د غوښتونې قانون سره تړلي ده. دېرکرنییز والی باور لري، خکه چي په ضرب

$$a_{i_1,1} \cdots a_{i_n,n}$$

کي د هرې متې تیک يو توکی منح ته راځي. انتي سیومتری لاس ته راځي، خکه چي د متو له بدلون دبدلولو تعداد کانونیکي لری پرلپسي په يو تغیر خوري، بالاخره په واحد ماتریکس کې جمعه په یوه زیاتووني (د جمعی غړي) کمیري

$$a_{1,1} \cdots a_{n,n} = 1 \cdots 1 = 1$$

لیکونکي: هیولیگ، هیونر

2 - لیکیزه دیترمینانت 2-reihige Determinante

د یوه -ماتریکس دیترمینانت

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

دی.

دا د برموتیشن وديزینی پسي په ساده ډول لیدل کیري، خکه چي 2 زیاتیدونی شتون لري.

دبدیل په توگه کېدی شي دیترمیناتونه د تعریف شوو خویونو له مخي هم و شمېرل شي.

که متې د کانونیکي واحد وکتور(یون-) e_k کرنییز کمینیشن په څېر انځور شي، نو د مولتی (دېر-) کرنییزوالي له امله لاس ته راځي

$$\begin{aligned} \det(ae_1 + ce_2, be_1 + de_2) &= a \det(e_1, be_1 + de_2) + c \det(e_2, be_1 + de_2) \\ &= ab \det(e_1, e_1) + ad \det(e_1, e_2) \end{aligned}$$

کرنییز الجبر

$$\begin{aligned}
 &+ cb \det(e_2, e_1) + cd \det(e_2, e_2) \\
 &= ab \cdot 0 + ad \cdot 1 + cb \cdot (-1) + cd \cdot 0 = ad - bc.
 \end{aligned}$$

لیکونکي: هیولیک، هیونر

د ساروس شیما یا شکل Sarrus-Schema

د یوه (3×3) - ماتریکس دیترمینانت لکه څنګه چې په تابع یا فنکشن کې ښوول شوی د ضربونو جمعه ده، چې مختلف دیاګونالونه (دوه کونجترې) په ګوته کوي:

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} = a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} + a_{2,1}a_{3,2}a_{1,3} + a_{3,1}a_{1,2}a_{2,3} - a_{3,1}a_{2,2}a_{1,3} - a_{1,1}a_{3,2}a_{2,3} - a_{2,1}a_{1,2}a_{3,3}$$

دې د ساروس په نامه یادې شوي شیما ته ورته د n جګ بعدي لپاره شتون نه لري. سملاسي د $n = 4$ دیترمینانت د 24 ضربونه یوه جمعه لري.

د ساروس-شیما په ساده توګه د ځای بدلون وډیزینه پسي په ساده توګه و آزمایي. لاندې جدول ټول زیاتوونې یا جمعی اجزای ښایي همداسې دا د ځایبدلون i سره اسوځیږي بدلونې، له کومو چې دا مخنځینه σ لاس ته راځي.

i	بدلونونه	$\sigma(i)$	Summand

	Vertauschungen		زیاتیدونی یا د جمعی اجزا
(1, 2, 3)		+	$+a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3}$
(2, 3, 1)	$\rightarrow (3, 2, 1) \rightarrow (1, 2, 3)$	+	$+a_{2,1}a_{3,2}a_{1,3}$
(3, 1, 2)	$\rightarrow (2, 1, 3) \rightarrow (1, 2, 3)$	+	$+a_{3,1}a_{1,2}a_{2,3}$
(3, 2, 1)	$\rightarrow (1, 2, 3)$	-	$-a_{3,1}a_{2,2}a_{1,3}$
(1, 3, 2)	$\rightarrow (1, 2, 3)$	-	$-a_{1,1}a_{3,2}a_{2,3}$
(2, 1, 3)	$\rightarrow (1, 2, 3)$	-	$-a_{2,1}a_{1,2}a_{3,3}$

لیکونکی: هیولیگ، هیونر

لوریز حجمونه (ډکی) Orientiertes Volumen

دیوه حقیقی ماتریکس A دیترمینانت مطلق ارزښت د -بعدي سره چې له متو څخه غزیدلی شپات (Spats) سره پراپر دی یا یو په بل پرېوځي:

$$|\det A| = \text{vol} \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i a_i : 0 \leq \alpha_i \leq 1 \right\} = \text{vol} (A[0, 1]^n) .$$

لیکونکی: هیولیگ، هیونر

کرنبیز الجبر

ساده از مایل کیدی شي، چې لوریز حجمونه یا ډکي

$$\text{vol}_* A := \text{sign}(\det A) \text{vol}(A[0, 1]^n)$$

ټول درې د دیترمیناتونو تعریف شوي خوږونه (مولتی کرنبیزوالی، انتی سیومتری، نورمي ونه) لري، له دې امله باید باور ولري:

$$\text{vol}_* A = \det A$$

لیکونکي: هیولیک، هیونر

په \mathbb{R}^3 کې د وکتورونو u, v, w لپاره دیترمیناتونه د شپات ضرب سره سر خوري یا برابر دی:

$$\det(u, v, w) = [u, v, w].$$

د بدیل په قسم دا کېدی شي د ε -تتخور ε -Tensors - سره افاده شي:

$$\det(u, v, w) = \sum_i \sum_j \sum_k \varepsilon_{i,j,k} u_i v_j w_k.$$

که وکتورونه د بېلگې په توگه و ټاکل شي

$$u = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

نو شیات ضرب لاس ته
راځي.

$$(2, 1, 1) \left(\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \right) = (2, 1, 1) \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = 6 - 1 - 1 = 4.$$

د ε - تنځور سره لاندي انځورونه لاس ته راځي

$$\begin{aligned} \det(u, v, w) &= \varepsilon_{1,2,3} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 + \varepsilon_{1,3,2} \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 + \varepsilon_{2,1,3} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 \\ &\quad + \varepsilon_{2,3,1} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 + \varepsilon_{3,1,2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 + \varepsilon_{3,2,1} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \\ &= 8 - 2 - 2 + 1 + 1 - 2 = 4. \end{aligned}$$

ليکونکي: هيوليگ، هيونر

د ديترميانټونو لپاره قاعدې Regeln für Determinanten

د $(n \times n)$ - ماتريکسونو A او B لپاره صدق کوي:

$$\det A = \det A^t, \quad \det A^* = \overline{\det A}$$

$$\det(AB) = (\det A)(\det B)$$

-
-
-
- A ټيک هلته انورټير ور يا معکوس کېدونکي ده، که $\det A \neq 0$ وي،
او

$$\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$$

لیکونکي: هیولیک، هیونر

اول – د سیومتری خویونه د خای بدلون پسی و دیزونی خخه لاس ته راځي:

$$\det A^t = \sum_{i \in S_n} \sigma(i) a_{1,i_1} \cdots a_{n,i_n}.$$

که د جمعې اجزا سره اندکسونه یا پیژند نڅیښي $\{1, \dots, n\}$ هر یو په لړۍ پرلپسې و i

ته معکوس خای بدلون j سره و وځلوو، نو د تابع یو تغیر شوی نظم لاس ته راوړو:

$$a_{j_1, i_{j_1}} \cdots a_{j_n, i_{j_n}} = a_{j_1, 1} \cdots a_{j_n, n}.$$

داچې $\sigma(i) = \sigma(j)$ دی، نو مساوي و دیزینه لاس ته راځي، لکه د $\det A$ لپاره.

د بیلگې په توگه

$$i = (1\ 2\ 3) \leftrightarrow j = (1\ 3\ 2)$$

یو بل ته معکوس خای پلونونه دي په ځیکلیکي لیکډول او

$$a_{1, i_1} a_{2, i_2} a_{3, i_3} = a_{1, 2} a_{2, 3} a_{3, 1} = a_{3, 1} a_{1, 2} a_{2, 3} = a_{j_1, 1} a_{j_2, 2} a_{j_3, 3}.$$

که د زیاتیدونو یا د جمعې د اجزاو ا ینکسونو یا پیژندنڅیښو $\{1, \dots, n\}$ کي وځلي هر

یو په لړۍ پرلپسې و i ته په څټ یا برعکس بدلونونه یا پرموتیشنونه j ته، نو فنکشن یو تغیر شوي نظم راکوي.

$$a_{j_1, i_{j_1}} \cdots a_{j_n, i_{j_n}} = a_{j_1, 1} \cdots a_{j_n, n}.$$

دا چې $\sigma(i) = \sigma(j)$ دی، نو سرب مساوي يا باربه وده لاس ته راوړي لکه $\det A$.

د بیلگې په توګه

$$i = (1\ 2\ 3) \leftrightarrow j = (1\ 3\ 2)$$

یو بل ته په ځیکلیکي لکنود په څنډ يا معکوس پرموتیشنونه یا ځای بدلیدني دي، او

$$a_{1,i_1} a_{2,i_2} a_{3,i_3} = a_{1,2} a_{2,3} a_{3,1} = a_{3,1} a_{1,2} a_{2,3} = a_{j_1,1} a_{j_2,2} a_{j_3,3}.$$

مخنځنه σ مثبت ده او هر ځل، ځکه چې

$$i = (1\ 3) \circ (1\ 2), \quad j = i^{-1} = (1\ 2) \circ (1\ 3),$$

دا په دي معنا چې د بدلونون شمیره (ګنون) هر ځل 2 دی.

دویم – که معکوسوړ نه وي، نو ضرپوالی د دریم خوي څخه لاس ته راځي.

د $\det A \neq 0$ لپاره بنوول کيږي، چې تابع

$$B \mapsto f(B) := \det(AB) / \det(A)$$

تو د دیترمینانت ک ټاکونکي خویونه لري، په تعقیب د $\det B$ سره باید برابر وي.

نورمي کونه $f(E_n) = 1$ څرکنده ده. د ډېر کرښيزوالي او انټیسیومتری لپاره په پام کې نیسو، چې فنکشن (تابع) $B \mapsto AB$ کرښيزه ده د B په مټو کې او دا چې د دوه مټو بدلون د AB د اړونده مټو بدلون په ګوته کوي.

دریم – یو مربع ماتریکس A ټیک هلته نامعکوسوړ ده، که د یوه نه ساده وکتور x لپاره

$$Ax = 0 \quad \text{وي، دا په دي معنا چې که د } A \text{ د د مټو یو نه ساده کرښيو کمپینیشن } a_j \text{ شتون ولري:}$$

کرنبیز الجبر

$$x_1 a_1 + \cdots + x_n a_n = 0.$$

$$x_1 a_1 + \cdots + x_n a_n = 0.$$

په ورکړ شوي حالتکې د متو وکتور ځايپېلون څه کېدی شي چې ونيسو، دا په دې معنا $x_1 \neq 0$

$$a_1 = y_2 a_2 + \cdots + y_n a_n, \quad y_j = -x_j / x_1.$$

د ضربوالي څخه لاس ته راځي

$$\det A = \sum_{j=2}^n y_j \det(a_j, a_2, \dots, a_n) = 0,$$

ځکه چې ټولې په بني لور دېترمينانونه دوه برابري متې خوندي لري، بايد د انتی سيومتري له امله ورکې شي يا له منځه ولاړې شي.

دا چې د انورټير وړ invertierbaren (په څټور) ماتريکس دېترمينانت د صفر سره برابر نه دی، د يوه له متو خواړه شوي غبرگ اړخيز لوريز حجم په حيث دېترمينانت د $\det(A^{-1})$.

هندسي تشریح څخه لاس ته راځي. بالاخره دا همداوس د لپاره بشوول شوي ضربوالي څخه لاس ته راځي.

ليکونکي: هيوليگ، هيورنر

د ځانگړو ماتريکسونو دېترمينانونه

Determinanten spezieller Matrizen

د يوه $(n \times n)$ ماتريکس A لپاره دېترمينانونه تړلي ورکول کيږي

- مثلث ماتریکس: که $a_{i,j} = 0$ د $i < j$ لپاره یا $i > j$ لپاره وي، نو باور لري

$$\det A = a_{1,1} \cdots a_{n,n}.$$

- بلوک دیاگونال ماتریکس: که ماتریکس B بلوک جوړښت د $A_{i,j} = 0 \quad i \neq j$ سره ولري او مربع دیاگونال بلوکونه $A_{i,i}$ ، نو باور لري

$$\det B = \prod_{i=1}^k \det A_{i,i}.$$

- اورتوگونا او یونیتار ماتریکسونه: د یوه یونیتار میاتریکس U لپاره باور لري

$$|\det U| = 1.$$

- د یوه اورتوگونا ل ماتریکس $(u_{i,j} \in \mathbb{R})$ لپاره ځانگړی دی

$$\det U \in \{-1, 1\}.$$

لیکونکي: هیولیک، هیورنر

- مثلماتریکس: دا چې $\det A = \det A^t$ دی، بسیا کوي چې پورته مثلث ماتریکس $(1, \dots, n)$ وڅېړو. د دځای بدلون i لپاره، کوم چې کټمتوال (ایدنټیټي) نه دی.

کرنبيز الجبر

، لاس ته ارځي، چې لږ تر لږه يو توکي د $i_k > k$ سره بايد ورکړ شوی وي، دا په $a_{i_k, k} = 0$ دي معنا چې داسي جمعه راکميري، د کټموالي ورکړه، او ديترمينانت د دياگونال توکو د ضرب څخه ورکول کيږي.

بلوکدياگونال ماتريکسونه: لومړی فقط يو وېش په 2 دياگونالبلوکونو رارو چې لويې n_1 او n_2 لري، نو دا بسيا کوي، چې په ځاي بدلون چې ور جمعه کړو يا وربيات کړو، کوم چې لومړي توکي د خپل ځانونو ترمنځ او له دي سره هم اکر توکي د خپل ځانونو ترمنځ بدل کړي، ځکه چې نور مو پاتېدونو يا د جمعي اجزاو 0 ته بيايي. دا د جمعي پاتي اجزاوي د لومړيو n_1 توکو يوه ځايبدلون k او د اخرو n_2 توکو يو ځاي بدلون l د ضرب په څير ليکل کيږي:

$\sum_{i \in S_n} \sigma(i) (a_{i_1, 1} \cdots a_{i_{n_1}, n_1}) (a_{i_{n_1+1}, n_1+1} \cdots a_{i_n, n})$	=	det B
$\left(\sum_{k \in S_{n_1}} \sigma(k) (a_{k_1, 1} \cdots a_{k_{n_1}, n_1}) \right) \left(\sum_{l \in S_{n_2}} \sigma(l) (a_{n_1+l_1, n_1+1} \cdots a_{n_1+l_{n_2}, n}) \right)$	=	
$\det A_{1,1} \det A_{2,2} .$	=	

ايندوکتيو له دي څخه يوه وينا لاس ته رورل کيږي له دوه بلوکونو څخه په ډېرو يوي ويشني لپاره.

اورتوگونال او يونيتار ماتريکسونه: دا چې کمپلکس کنجوگيشن په جمعي ضرب سره منځ ته کوي او $\det U = \det U^t$ صدق کوي، نو د ديترمينانت د ضربوالي څخه لاس ته راځي

$$1 = \det E = \det (U^*U) = \det U^* \det U$$

$$= \overline{\det U^t} \det U = \overline{\det U} \det U = |\det U|.$$

په حقیقي حالت کې دیترمینانت حقیقي ده او له دې امله فقط 1 او -1 ممکن دي.

لیکونکي : هیولیک، هیورنر

د دیترمینانتو بڼه بدلون Umformung von Determinanten

د یو ماتریکس دیترمینانتونه د دوه برابرو متو او یا دوه برابرو لیکو سره صفر دي. له دې په ځانګړې توګه لاس ته راځیو چې دیترمینانتونه تغیر نه خوري، که که سړی د یوې متې (لیکې) یوې بلې متې (لیکې) ته ورزیات کړي یا ورجمعه کړي لیکونکي : هیولیک، هیورنر

دا چې د ترانپوني حالت کې د یوه ماتریکس مټه په لیکې بدلیري او $\det A = \det A^t$ صدق کوي، دنو بسیا کوي، چد متو حالت وڅیرو.

د دوه متو د بدلولو سره باید دیترمینانت د تعریف له مخې مخنځبڼه بدله کړي. که دواړه کټمت متې یو د بل سره بدلې کړی شي ماتریکسونه ځان نه بدلوي او دیترمینانتونه باید صفر وي.

که λ - ځله د متې a_j و متې a_i ، $i \neq j$ ته ورزیاته یا جمعه شي، نو لاندې ماتریکس لاس ته راځي

$$A' = (a_1, \dots, a_i + \lambda a_j, \dots, a_j, \dots, a_n).$$

د کرنبیز کمبینیشن په بنسټ کېدی شي دیترمینانت و وېشل شي یا توتېه شي په

$$\det A' = \det (a_1, \dots, a_i, \dots, a_j, \dots, a_n) + \lambda \det (a_1, \dots, a_j, \dots, a_j, \dots, a_n).$$

دویم ماتریکس دوه کټمتې متې لري او له دې امله دا دیترمینانت صفر لري.

لیکونکي : هیولیگ، هیورنر

د یوه ماتریکس د یوې لیکې ډیرواره د ماتریکس د بلې لیکې سره زیاتولو یا جمعه کولو له لارې کېدی شي ماتریکس په مثلث بڼه باندې واپړول شي او دیترمینانت بیا د دیاگونال توکو د ضرب له لارې وگنل شي یا لاس ته رارل شي.

که د متو یا لیکو بدلون صورت ونیسي، مخنځبڼه تغیر خوري.

د بیلگې په توگه کېدی شي

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 8 & 0 & 4 \\ 3 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 6 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

لکه چې تعقیبوي وشمېرل شي.

دریمه لیکه ترې کم یا منفی د لومړۍ لیکې درې ځله راکوي :

$$\det A = \det \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 8 & 0 & 4 \\ 0 & -9 & 3 & -4 \\ 0 & 6 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

د دویمې متې او څلورمې متې بدلون:

$$\det A = - \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 & 8 \\ 0 & -4 & 3 & -9 \\ 0 & 4 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

دریمه لیکه ورزیات دویمه لیکه، څلورمه لیکه ترې کم دویمه لیکه راکوي:

$$\det A = -\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = -(1 \cdot 4 \cdot 3 \cdot (-2)) = 24.$$

لیکونکی : هیولیگ، هیورنر

د دیترمینانتو و دیزینه Entwicklung von Determinanten

د یوه $(n \times n)$ ماتریکس A دیترمینانت کېدی شي د یوې په خوښه مټې یا لیکې پسي و دیزینه کړي.:

د لیکې k پسي و دیزینه	$\det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{k+j} a_{k,j} \det \tilde{A}_{k,j}$ $= \sum_{i=1}^n (-1)^{i+l} a_{i,l} \det \tilde{A}_{i,l}$
د درز یا مټې l پسي و دیزینه	

چیرته چې هغه ماتریکس په گوته کوي، کومه چې د A د i - مې لیکې، j - مې مټې د کرښې کولو (په کرښه کولو له منځه وړنې) له لارې منځ ته راځي.

لیکونکی : هیولیگ، هیورنر

د $\det A = \det A^t$ له امله بسیا کوي، چې و دیزینه د یوې مټې پسي تر څپرني لاندې ونیسو.

- مه مټه په مټو

$$a_l = \sum_{i=1}^n a_{i,l} e_i$$

کرنییز الجبر

توتیه کوو، د دیترمینانتونو د ډبرکرنییزوالي په اساس لاس ته راځي

$$\det A = \sum_{i=1}^n a_{i,l} \det \underbrace{(a_1, \dots, a_{l-1}, e_i, a_{l+1}, \dots, a_n)}_{=B_i}.$$

یو ماتریکس B_i ترڅپرني لاندې نیسو، نو کېدی شي د دې لپاره د $n-l$ مټه بدلونونو له لارې l -مه مټه اخر ته راوړل شي، بې له دې چې د نورو مټو لږپرلېسي په خپلو منځونو کې تغیر شي.

په ورته توګه کېدی شي i -مه لیکه د $n-l$ لیکه بدلونونو سره اخرې لیکې ته راوړل شي:

$$\det B_i = (-1)^{n-l} (-1)^{n-i} \det \begin{pmatrix} & & & & & 0 \\ & & & & & \vdots \\ & & & \tilde{A}_{i,l} & & 0 \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,l-1} & a_{i,l+1} & \cdots & a_{i,n} \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

د بې اړخ دیترمینانت کې فقط د S_n ځای بدلونونه ونډه اخلي، چې د n -مې لیکني په څیټ n لري. دا د S_{n-1} ځای بدلون بڼایي او له دې سره دی

$$\det \begin{pmatrix} & & & & & 0 \\ & & & & & \vdots \\ & & & \tilde{A}_{i,l} & & 0 \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,l-1} & a_{i,l+1} & \cdots & a_{i,n} \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} = \det \tilde{A}_{i,l}.$$

د زیاتونو د جمعي اجزاوو ضرب د $1 = (-1)^{2l+2i-2n}$ سره د ورکړ شوي وډیزبېني فرمول ورکوي.

ڪه د ماتريڪس

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

لپاره ديترمينانت د لومري ليڪي پسي وديزبينه شي، نو لاس ته تري راخي

$$\begin{aligned} \det A &= (-1)^2 \cdot 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &+ (-1)^3 \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &+ (-1)^4 \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= 2(4 - 1) - 1(2 - 1) + 1(1 - 2) = 6 - 1 - 1 = 4. \end{aligned}$$

ليكونڪي : هيوليگ، هيورنر

د 3 ٽڪو له لاري د يوي سطحې ايمپليٽيت (ساده) انڇورونه

Implizite Darstellung einer Ebene durch 3 Punkte

په \mathbb{R}^3 ڪي يوه سطحه ڇي د دري ٽڪو

$$P_3 = (x_3, y_3, z_3) \quad P_1 = (x_1, y_1, z_1) \quad P_2 = (x_2, y_2, z_2)$$

له لارې ورکړ شوي وي، کېدی شي په ایمپلیسیت فرمول له

$$E : \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

له انځور شي. د لومړی لیکې پسي وديزیني سره لاس ته راځي

$$E : ax + by + cz = d$$

د لاندې سره

$$a = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}, \quad b = - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}, \quad c = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}, \quad d = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

لیکونکي: هیولیک، شترایت

بنسټ از مایینت Basistest

وکتورونه $a_1, \dots, a_n \in K^n$ ټیک هلته یو بنسټ جوړوي، که د ماتریکس

$$A = (a_1, \dots, a_n)$$

دیترمینانتونه ورک نه شي.

لیکونکي: هیولیک، هیورنر

که د A لومړی لیکه صفر وي، نو غوښتنه (ثبوت) روښانه ده.

په بل حالت کې کېدی شي د متي یوه ځاي بدلون پسي ونیسو یا فرض کړو، چې

اومتی a_j لکه څنګه لرو بڼه بدل کړو: $a_{1,1} \neq 0$

$$a_j \rightarrow a'_j = a_j - \frac{a_{1,j}}{a_{1,1}} a_1, \quad j = 2, \dots, n.$$

دا د متو عملیو کارولو له لارې کېدی شي د متو دیترمینانت او هم د بنسټ خویونه بې
تغییره پاتې شي. دا بڼه بدل شوی ماتریکس لاندې بڼه لري

$$A' = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ c & & & B \end{pmatrix}.$$

د ودیزبڼې جملې پسې لرو

$$\det A' = a_{1,1} \det B,$$

او دا چې $a_{1,1} \neq 0$ د A' متې ټیک هلته یو د K^n بنسټ دي، که د B متې یوه د
 K^{n-1} بنسټ دي. دا غوښتنه کېدی شي اندوکتیو و بنسټ شي.

لیکونکي : هیولیک، هیورنر

د بیلگې په توګه له

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

کېدی شي د بنسټ ازماښت روښانه شي.

که د متو یا لیکو څخه یو یې فقط له صفر جوړ وي، نو د دیترمینانت لپاره 0 ترې لاس ته
راځي. په دې حالت کې د ماتریکس رانګ ماکسیمال 1 دی او له دې امله متې بنسټ نه
جوړوي.

په بل حالت کې له $ad = bc$ لاس ته راځي

کرنبیز الجبر

$$a \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} - b \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ab - ba \\ ad - bc \end{pmatrix} = 0$$

او له دې سره متي کرنبیز بلواک دي.

که د متي کرنبیز بلواک وي، نو صدق کوي:

$$\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix},$$

دیترمینانت شمېرل کي. ي و ته:

$$\det A = ad - bc = a\lambda c - \lambda ac = 0.$$

لیکونکي : هیولیگ، هیورنر

د واندروند – دیترمینانتونه Vandermonde-Determinante

دیترمینانت دی $1, x, \dots, x^{n-1}$ په n ټکو x_i کي ارزښت شوي مونومونو

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{i>j} (x_i - x_j).$$

لیکونکي : هیولیگ، هیورنر

د $n = 2$ لپاره د واندروند – ماتریکس دیترمینانت دی

$$\det \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{pmatrix} = x_2 - x_1.$$

د یوه ټولیز n لپاره د ټولو نورو لیکو څخه لومړی لیکه کمیري:

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} \\ 0 & x_2 - x_1 & \dots & x_2^{n-1} - x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & x_n - x_1 & \dots & x_n^{n-1} - x_1^{n-1} \end{vmatrix}.$$

د لومړی متی پسي وديزیښي سره راكوي

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & \dots & x_2^{n-1} - x_1^{n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ x_n - x_1 & \dots & x_n^{n-1} - x_1^{n-1} \end{vmatrix},$$

د کوم سره چې له k -مې لیکي څخه ضرب $x_k - x_1$ رادباندي کیدی شي:

$$\left(\prod_{k=2}^n (x_k - x_1) \right) \begin{vmatrix} 1 & x_2 + x_1 & x_2^2 + x_2 x_1 + x_1^2 & \dots & \sum_{i=0}^{n-2} x_2^{n-2-i} x_1^i \\ 1 & x_3 + x_1 & x_3^2 + x_3 x_1 + x_1^2 & \dots & \sum_{i=0}^{n-2} x_3^{n-2-i} x_1^i \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n - x_1 & x_n^2 + x_n x_1 + x_1^2 & \dots & \sum_{i=0}^{n-2} x_n^{n-2-i} x_1^i \end{vmatrix}.$$

که د هرې متی څخه دا د مخه تېري شوي متی دا x_1 - ځله کم کړو، نو بېرته پیل ښي
ديترمينانت لاس ته راځي

کرنبیز الجبر

$$\left(\prod_{k=2}^n (x_k - x_1) \right) \begin{vmatrix} 1 & x_2 & \dots & x_2^{n-2} \\ 1 & x_3 & \dots & x_3^{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

، او فرمول د اندکشن له لارې بنوول کېدی شي.

لیکونکي : هیولیک، هیورنر

کرنبیز مساوات سیستم $\text{Lineares Gleichungssystem}$

په یوه تن یا جسم K کرنبیز مساوات سیستم دا لاندې بڼه لري

$$\begin{array}{ccccccc} a_{1,1}x_1 & + & \dots & + & a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1}x_1 & + & \dots & + & a_{m,n}x_n & = & b_m \end{array} \Leftrightarrow Ax = b$$

د یوه ضریبونو د ماتریکس $A = (a_{i,j}) \in K^{m \times n}$ سره، د نامعلومو $x_j \in K$ او یو بڼی اړخ $b \in K^m$ سره.

دا کرنبیز مساوانسیستم هوموجن بلل کېږي، که $b = 0$ وي، پرته له دې ناهوموجن inhomogen بلل کېږي.

د یوه حقیقي ($K = \mathbb{R}$) یا کمپلکس ($K = \mathbb{C}$) کرنبیز سیستم لپاره K اکسپلیسیټ explizit نه شي ورکول کېدی. دا چې کوم حالت مخ ته لرو د اړوندوالي له مخې لیدل کېږي یا روښانه دی.

که کرنبیز مساوات سیستم کوم حل نه لري (په ټولیزه د لپاره)، نو دا باندې- ټاکلی بلل کېږي. په دې حالت کې له اندولپرابلم څخه غږیږو. یو کرنبیز مساوات سیستم د $m > n$

نا یواحني حل سره (په ټولیزه توگه د $m < n$ لپاره) کښته - - یا لاندې- ټکلی بلل کيږي.

یوه تابع $f(x)$ کیدی شي له داتن

$$(x_i, f_i), \quad i = 1, \dots, n,$$

څخه د انترپولیشن له لارې په نږدې توگه بیا جوړه *rekonstruiert* شي. که یوه کرښیزه ځای په ځای کونه یا ایښوونه

$$f(x) \approx p(x) = \sum_{j=1}^n c_j p_j(x)$$

د مناسب بنسټوابعو p_j سره، نو د انترپولیشن شرایطو څخه

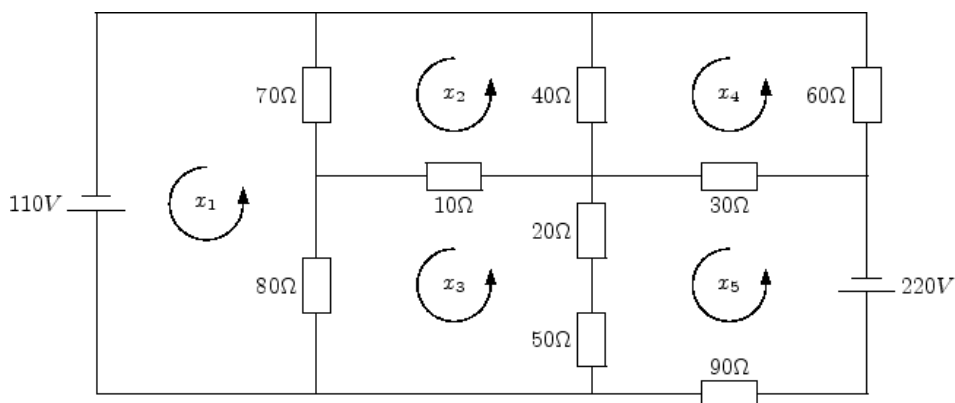
برېښنايي جرياندايره Elektrischer Schaltkreis

که په یوه بریناجریان دایره (گردی) کې د x_i سره د دایرې برېښناجریان وښایو د جریانلور د ساعتخښه وونې (عقربک) مخامخ یعنی معکوس، د سره د i - می او j - می پټی گسره دد یا مشترک مقاومت، د $R_{i,j}$ سره او د U_i سره ایښوولی *Spannungen*، نود او *Ohm* او کیرښهوف *Kirchhoff* قانون څخه دا کرښیز مساوات سیستم لرو

$$\sum_{i \sim 0} x_i R_{i,0} + \sum_{i \sim j} (x_i - x_j) R_{i,j} = U_i.$$

کرنبیز الجبر

دلته $i \sim j$ معنا ورکوي، چې i -م او j -م د برېښنا پټۍ یو گډ مقاومت لري. د دې مقاومت له لارې برېښنا جریان دی. د $i \sim 0$ سره مقاومت $R_{i,0}$ بنسول کيږي چې هغه فقط په i -مې پټۍ کې پروت دی.



د بیلگې په توګه د څېره شوي جریان داېرې (ګردۍ) لپاره کرنبیز مساوات سیستم

$$\begin{pmatrix} 150 & -70 & -80 & 0 & 0 \\ -70 & 120 & -10 & -40 & 0 \\ -80 & -10 & 160 & 0 & -70 \\ 0 & -40 & 0 & 130 & -30 \\ 0 & 0 & -70 & -30 & 190 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 110 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -220 \end{pmatrix}.$$

د ضریبونو ماتریکس په دیاګونال کې د یوې پټۍ پورې اړونده مقاومت او ځای یا (i, j) Position د i او j ګمیز یا منفي گډ مقاومت. د دې راورل شوي بیلگې حل دی:

رکرنیز الج

$$x \approx \begin{pmatrix} 1.0157 \\ 0.5641 \\ 0.0358 \\ -0.0940 \\ -1.1595 \end{pmatrix} .$$

لیکونکی: اپ، هیولیگ

د یوه کرینیز مساوات سیستم حلوروالی

Lösbarkeit eines linearen Gleichungssystems

په یوه تن یا جسم K د یوه هموجین کرینیز مساوات سیستم حلدبری

$$Ax = 0,$$

د یوه $m \times n$ ضربونو ماتریکس A یوه د K^n لاندې – یا برخدبری U ده.

که دا هموجین کرینیز سیستم

$$Ax = b$$

یو حل v ولري، نو د تولیز حل لپاره باور لري

$$x \in v + U,$$

دا په دې معنا چې حلدبری د K^n یو affinen لاندې – یا برخدبری ده. په خانگری

کرنییز الجبر

توگه کېدی شي هوموچېن کرنییز مساوات سیستم هیڅ ، یو $U = \emptyset$ یا ناپای ډېر زیات $\dim U > 0$ حلونه ولي.

لیکونکي: ایپ، هیولیک، کیمرلي

که x, y د هوموچېن کرنییز مساوات سیستم حلونه وي او $\lambda \in K$ ، نو لاس ته راوړو:

$$A(x + y) = Ax + Ay = 0 + 0 = 0$$

همداسي

$$A(\lambda x) = \lambda Ax = \lambda 0 = 0 ,$$

دا په دې معنا چې د هوموچېن کرنییز مساوات سیستم د حلونو ډېری یوه لاندې-یا برخضا U جوړوي.

که v د هوموچېن کرنییز مساوات سیستم یو حل وي او $u \in U$ ، نو $x = v + u$ د

$$Ax = A(v + u) = Av + Au = b + 0 = b$$

له امله هم د دې هوموچېن کرنییز مساوات سیستم یو حل دی.

برعکس د ناهوموچېن کرنییز مساوات سیستم د دوه حلونو v او w سره کمېنت یا تفریق $v - w$ د

$$A(v - w) = Av - Aw = b - b = 0$$

له امله هوموچېن کرنییز مساوات سیستم یو حل دی.

له دې سره د یوه ناهوموچین کرښیز مساوات سیستم ټول حلونه لاس ته راځي، داسې چې د ناهوموچین کرښیز مساوات سیستم د خوښې حلونو لپاره د ټولو هوموچین کرښیز مساوات سیستم حلونو جمعه جوړه کړو، يعی سره جمعه کړو.

لیکونکي: ایپ، هیولیک

دا لاندې ساده حالتونه د کرښیزو مساواتو مختلف ډولونه د لیدنې کوي:

لومړی - کرښیز مساوات سیستم

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29 \\ 60 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = 8 \quad x_2 = 1$$

یواځنی حلونه لري: .

دویم - کرښیز مساوات سیستم

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

یواځنی حل نه لري. که $x_3 = t$ په خوښه وټاکو، نو $x_2 = 2t$ $x_1 = 2$ د حلونو په څېر لاس ته راځي.

دریم - کرښیز مساوات سیستم

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}$$

کرنبیز الجبر

کوم حل نه لري. اخرنی لیکه $x_2 = 4$ راکوي، که دا په یوه لیکه کې کېښوول شي، د لومړی لیکي څخه $x_1 = 2$ لاس ته راځي، له دویمي څخه برعکس $x_1 = 1$.

لیکونکي: اپب، هیولیک

دیترمینانت او د یوه مساوات سیستم حلوروالی

Determinante und Lösbarkeit eines linearen Gleichungssystems

یو کرنبیز مساوات سیستم

$$Ax = b$$

د مربع ضریبونو ماتریکس A سره تیک هلته یو یواځنی حل لري، هر ښي لوریزې b سره، که همداسي دا هوموچېن سیستم $Ax = 0$ فقط یو ساده حل $x = 0$ ولري.

که $\det A = 0$ وي، نو یو حل فقط د ښي لورې b لپاره شتون لري په هغه د A د متو څخه غزېدلي لاندې – یا برخفضا ده. په دې حالت کې حل یواځنی نه دی.

لیکونکي: کرایخ، هیولیک

غوښتنه د دیترمینانت د خوینو څخه په لاس راځي.

و $\det A \neq 0$ ته ورته لرو، چې د A متي a_1, \dots, a_n کرنبیز خپلواکي دي. د تعریف سره سم دا په دې معنا دی چې

$$x_1 a_1 + \dots + x_n a_n = 0 \Leftrightarrow x_1 = \dots = x_n = 0,$$

$$Ax = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

د دې لپاره چې د ناهوموجین سیستم یواځنی حل وړوالی ته ورته لاس ته راوړای شو، له دې کار اخلو چې متی یو بنسټ جوړ کړي، دا په دې معنا چې هر بنی اړخ b د

$$x_1 a_1 + \dots + x_n a_n = b \Leftrightarrow Ax = b$$

کرنییز کمپنیشن په حیث

یواځنی انځور ور دی.

لیکونکي: ایپ، هیولیگ

دا کرنییز مساوات سیستم

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

$$ad - bc \neq 0$$

وي. په دې حالت کي

تیک هلته یو یواځنی حل لري، که دیتر مینانت
حل په لاندې ډول دی

$$x = \frac{du - bv}{ad - bc}, \quad y = \frac{av - cu}{ad - bc}.$$

که دیتر مینانت $ad - bc$ برابر 0 وي، په توپیره توگه کرنییز مساوات سیستم حل نه لري. په دې حالات حلونه فقط هلته شتون لري، که

$$av = cu$$

$$bv = du$$

صدق ولري. که د بېلگې به توگه $a \neq 0$ وي، نو کېدی شي y په خوښه وټاکو او د x لپاره لاس ته راوړو

$$x = \frac{u - by}{a}.$$

ليکونکي: پپ، اهيوليگ

د کرامر قاعده Cramersche Regel

د يوه مربع کرنبیز مساوات سيستم $Ax = b$ لپاره

$$x_i \det A = \det(a_1, \dots, a_{i-1}, b, a_{i+1}, \dots, a_n),$$

دی، د کوم a_j سره چې د متوضريونو ماتریکس A په نخبه کېږي.

په ځانگړې توگه کېدی شي د $\det A \neq 0$ لپاره په څټ يا معکوس $C = A^{-1}$ د

$$c_{i,j} = \frac{\det(a_1, \dots, a_{i-1}, e_j, a_{i+1}, \dots, a_n)}{\det A}$$

له لارې ټاکل کېدی شي.

ليکونکي: هيوليگ، شترایت

د دیتر مینانت د ډېر کرښیزوالي او سیومتری له امله لاس ته راځي:

$$\begin{aligned} \det(a_1, \dots, a_{i-1}, b, a_{i+1}, \dots, a_n) &= \det(a_1, \dots, a_{i-1}, \sum_{j=1}^n a_j x_j, a_{i+1}, \dots, a_n) \\ &= \sum_{j=1}^n x_j \det(a_1, \dots, a_{i-1}, a_j, a_{i+1}, \dots, a_n) \\ &= x_i \det(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \dots, a_n) \end{aligned}$$

په ځانګړي توګه د $b = e_j$ سره د معکوسي j مه مټه $x = (c_{i,j}, \dots, c_{n,j})^t$ راګوي

لیکونکي: هیولیک، شترایت

د یوه (2×2) - ماتریکس

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

د معکوس C لپاره د کرام قاعدې سره لرو

$$\begin{aligned} c_{1,1} &= \frac{\begin{vmatrix} 1 & b \\ 0 & d \end{vmatrix}}{\det A} = \frac{d}{\det A}, & c_{1,2} &= \frac{\begin{vmatrix} 0 & b \\ 1 & d \end{vmatrix}}{\det A} = \frac{-b}{\det A}, \\ c_{2,1} &= \frac{\begin{vmatrix} a & 1 \\ c & 0 \end{vmatrix}}{\det A} = \frac{-c}{\det A}, & c_{2,2} &= \frac{\begin{vmatrix} a & 0 \\ c & 1 \end{vmatrix}}{\det A} = \frac{a}{\det A}, \end{aligned}$$

$$\det A = ad - cb$$

همداسی د سره دا لاندی لرو

$$\det A = ad - cb$$

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - cb} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

لیکونکی: هیولیک، شترایت

د (3×3) - ماتریکس

(3×3)

د معکوس G لپاره د کرامر د قانون له مخی لرو

$$c_{1,1} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 3 \end{vmatrix}} = -\frac{3}{25}, \quad c_{1,3} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 3 \end{vmatrix}} = -\frac{2}{25},$$

$$c_{3,2} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{3}{25}, \quad \dots$$

$$A^{-1} = \frac{1}{25} \begin{pmatrix} -3 & 6 & -2 \\ 12 & 1 & 8 \\ -14 & 3 & -1 \end{pmatrix} .$$

لیکونکی: هیولیگ، شترایت

په خت لور خای په خای کول Rückwärts-Einsetzen

په یوه کرینیز مساوات سیستم کی د پورته مثلث -بني سره

$$\underbrace{\begin{pmatrix} r_{1,1} & \cdots & r_{1,n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & r_{n,n} \end{pmatrix}}_R \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} ,$$

د $\det R = r_{1,1} \cdots r_{n,n} \neq 0$ سره کری شو ناتاکلی x_n, \dots, x_1 یو پر بل پسې وټاکو:

$$r_{n,n}x_n = b_n \rightarrow x_n = b_n/r_{n,n}$$

او د $\ell = n - 1, \dots, 1$ لپاره ،

$$r_{e,e}x_e + \cdots + r_{e,n}x_n = b_e, \rightarrow x_e = (b_e - r_{e,e+1}x_{e+1} - \cdots - r_{e,n}x_n) / r_{e,e}.$$

کرنبیز الجبر

له دې سره به هر یو دا اوس معلوم شمېل شوي ارزښتونه $x_{\ell+1}, \dots, x_n$ و کارول شي.

په یوه مساوات سیستم کې د یوه لاندې مثلث ماتریکس کې کېدی شي په ورته توګه یو په بل پسې x_1, \dots, x_n و ټاکل شي.

د کرنبیز مساوات سیستم

$$\begin{aligned} 4x_1 + 3x_2 + x_3 &= 6 \\ 2x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 7x_3 &= 7 \end{aligned}$$

لپاره په ملټ بڼې کې د په څنټ ایښوونې له لارې حلونه لاس ته اخی

$$x_3 = 1$$

$$x_2 = (0 - 2)/2 = -1$$

$$x_1 = (6 - 3(-1) - 1) = 2.$$

لیکونکي: هیولیګ، شترایت

د ګاوس ترانفورمیشن Gauß-Transformationen

لاندې عمليې د کرنبیز مساوات سیستم د حلونو ډېری بې تغیره پریردي:

• د دوه مساواتو بدلونه

- یوه مساوات ضربونه د یوه ضریب $\neq 0$ سره.
- د یوه مساوات کمول له یوه بل مساوات څخه

د اخوا دوه عملیو د کمینیشن له لاری د یوې لیکې ډېرواره زیاتول یا جمعه کول و بلی لیکې ته عملیې دي چې اجازه لري یا پرینوول شوي عملیې دي.

د داسې په نامه گاوس ترانسفورمیشن په مسته کزدي شي sukzessive یا یو په بل پسې ناکلی له منځه یوورل شي او یو کرینیز مساوات سیستم په مثلثفورم ترانسفورمه کړو یا په بله بڼه واروو او بیا یې په څټ ایښوونې له لاری حل کړو.

لیکونکي: هیولیگ، شترایت

د کرینیز مساوات سیستم

$$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= 11 \\ x_1 + 7x_2 + 4x_3 &= 6 \\ 6x_1 - x_2 - 5x_3 &= -8 \end{aligned}$$

حل ځان ته تغیر نه ورکوي له

• د لومړي او دویم مساوات بدلونه

$$\begin{aligned} x_1 + 7x_2 + 4x_3 &= 6 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= 11 \\ 6x_1 - x_2 - 5x_3 &= -8 \end{aligned}$$

• د دویم مساوات ضربونه د 2 ضریب سره

$$\begin{aligned}x_1 + 7x_2 + 4x_3 &= 6 \\6x_1 - 4x_2 + 4x_3 &= 22 \\6x_1 - x_2 - 5x_3 &= -8\end{aligned}$$

• د دریم مساوات کمول یا تفریقول له دویم مساوات څخه

$$\begin{aligned}x_1 + 7x_2 + 4x_3 &= 6 \\6x_1 - 4x_2 + 4x_3 &= 22 \\-3x_2 + 9x_3 &= 30\end{aligned}$$

لیکونکي: هیولیک، شترایت

د گاوس د له منځه وړنه Gauß-Elimination

د گاوس – بڼه بدلون له لارې کېدی شي یو کرنییز مساوات سیستم د انعکاس وړ

($n \times n$)
 -ضریبماتریکس به ماکسیمال $n - 1$ پلونو (قدمونو) په پورته مثلثبڼه باندې وارول شي یا راوړو. د دې لپاره یو په بل پسې د دیاگونال لاندې کښته ضریبونه له منځه یوسو دا په دې معنا چې له $\ell - 1$ پلونو (قدمونو) وروسته دا ک م س (کرنییز مساوات سیستم) لاندې بڼه غوره کوي:

$$\begin{aligned}a_{1,1} x_1 + a_{1,2} x_2 + \dots + a_{1,\ell} x_\ell + \dots + a_{1,n} x_n &= b_1 \\a_{2,2} x_2 + \dots + a_{2,\ell} x_\ell + \dots + a_{2,n} x_n &= b_2 \\&\vdots \\a_{\ell,\ell} x_\ell + \dots + a_{\ell,n} x_n &= b_\ell \\a_{\ell+1,\ell} x_\ell + \dots + a_{\ell+1,n} x_n &= b_{\ell+1} \\&\vdots \\a_{n,\ell} x_\ell + \dots + a_{n,n} x_n &= b_n\end{aligned}$$

په یوگوني ډول ℓ -م له منځه وړني پل داسې ځغلي لکه لاندې .

- که دا m -دیاگونال توکی، داسې په نامه د پيوت-تونی Pivot-Element، صفر دی، نو ℓ -م به د یوه دې لاندې مساواتو سره بدل شي، داسې چې $a_{\ell,\ell} \neq 0$ به باور ولري...
- د $i > \ell$ لپاره به i -م مساوات څخه د ℓ -م مساوات ډېر واړه کم شي، داسې چې $a_{i,\ell}$ صفر شي:

$$a_{i,j} \leftarrow a_{i,j} - q_i a_{\ell,j}, \quad b_i \leftarrow b_i - q_i b_\ell \quad (q_i = a_{i,\ell} / a_{\ell,\ell})$$

د ټولو $j \geq \ell$ لپاره.

لیکونکي: هیولیک، شترایت

د کرښیز مساوات لپاره

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -2 & 1 \\ 6 & 4 & -1 & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

د گاوس الگوریتم په لاندې تو؛ه ځغلي:

- د لومړۍ او دویمې لیکې بدلول:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -2 & 1 \\ 6 & 4 & -1 & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

• (3 لیکه) - (1 لیکه) او (4 لیکه) - (1 لیکه) 2.

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

• (لیکه 2) + (لیکه 3):

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

• (لیکه 3) - (لیکه 4) 3 :

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

لیکونکی: هیولیگ، شترایت

د ایسیلون بنه Echelon-Form

یو کرښیز مساوات سیستم د یوه $(m \times n)$ - ضریب ماتریکس سره کېدی شي د گاوس ترانفورمیشن سره د اینډلون-فورم باندې یې بڼې بدله یا وارول شي:

$$Ax = b \rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \dots 0 & p_1 & * \dots * \\ & 0 & 0 \dots 0 & p_2 & * \dots * \\ & & & 0 & 0 \dots 0 & p_3 & * \dots * \\ & & & & & & \ddots \end{pmatrix}}_{A'} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}.$$

له دې سره داسې په نامه پیووت

$$p_1 = a'_{1,j_1}, \dots, p_k = a'_{k,j_k}, \quad k \leq m, \quad 1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n,$$

د صفر سره نابرابرې دي او k د A رانگ ی.

د k - ترانفورمیشن پل په لاندې ډول ځغلي:

- یو له صفر مختلف ماتریکس توکی p_k د خورا کوچنی متې ایندکس (پېژندنځېني سره او $\geq k$ لیکي اندکس) د لیکي پېژند نځېنه) د پیووت توکی په حیث ټاکل کیږي او د لیکو بدلون له لارې پوزیشن (k, j_k) ته راوړل کیږي. که پیووت توکی شتون نه لري، نو د اینډلون پڼه مو لاس ته راوړي ده.

- د k لیکي ډېرواره کمون یا تفریق له لارې د پیووت لاندې لور ته د ماتریکس توکی له منځه ځي.

لیکونکي: هیولیک، شترایت

د ماتریکس

کرنییز الجبر

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & -3 & 0 & 9 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & -1 & 4 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & 6 & 1 & 3 & 5 & 2 & -5 \\ 0 & -2 & -3 & 1 & 6 & -7 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & -3 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

لیاره ترنفورمیشن د اینتلون-فورم باندې په لاندې ډول ځغلي

1. د لومړۍ او دویمې لیکې بدلون:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 0 & -1 & 4 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & -3 & 0 & 9 \\ 0 & 4 & 6 & 1 & 3 & 5 & 2 & -5 \\ 0 & -2 & -3 & 1 & 6 & -7 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & -3 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

2. (3. لیکه) - 2 · (1. لیکه) - (2. لیکه) او (4. لیکه) + (Zeile) (1. لیکه):

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 0 & -1 & 4 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & -3 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & -3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & -3 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

3. (3. Zeile) - (2. Zeile), (4. Zeile) - (2. Zeile)

او (5. Zeile) - (2. Zeile)

په پورته کې Zeile د لیکې یا میلی په معنا دي.

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 0 & -1 & 4 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & -3 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(4. \text{ Zeile}) - \frac{1}{2} \cdot (3. \text{ Zeile}): .4$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 0 & -1 & 4 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & -3 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

د ایپیلون - فورم لري ناساده لیکي د پیووت -توکو او $p_1 = 2$, $p_2 = 1$ سره $p_3 = -10$.

لیکونکي: هیولیک، شترایت

د ایپیلون- بڼه د یوه ل م س (کرنیز مساواتسستم) حل

Lösung eines LGS in Echelon-Form

یو کرنیز مساوات سیستم $Dx = c$ د ایپیلون په بڼه،

$$\begin{pmatrix} 0 \dots 0 & p_1 & * \dots * \\ & 0 & 0 \dots 0 & p_2 & * \dots * \\ & & & 0 & 0 \dots 0 & p_3 & * \dots * \\ & & & & & & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}$$

کرنبیز الجبر

د پيووت p_1, \dots, p_k سره ټيک هلته حلور دی، که $c_{k+1} = \dots = c_m = 0$ وي.

حل يواځنی دی، که $k = n$ وي. د $k < n$ لپاره د هوموجين کرنبیز مساوات سيستم $(c_i = 0)$ ټيک $n - k$ کرنبیز خپلواک حلونه شته.

نا معلومي، چي بي له پيووت بي مټي په گوته کوي. کپدی شي ازادي يا په خوښه و ټاکل شي.

ليکونکي: هيوليگ، شترایت

په لاندي کي به زيات تيويکي حالتونه تر بحث لاندي راوړل شي.

$$k = n = 4 \quad \bullet$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix}$$

د په خټ ايښووني له لاري ریکورزيو يواځنی حل لاس ته راوړی شو.

$$x = (1, -1, -1, 1)^t.$$

$$c_4 \neq 0 \quad 3 = k < n = 5 \quad \bullet$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

په اخرنی لیکه کې $0 \cdot x = 1$ ترې لرو، له دې سره کرنییز مساوات سیستم کوم حل نه لري.

$$c_4 = 0 \quad 3 = k < n = 5$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

دا چې $c_{k+1} = 0$ ، نو کرنییز مساوات سیستم $Dx = c$ حلور دی

د $\text{Rang } D = 3 = n - 2$ له امله حل x یواځنی نه دی. دلته د دوه

کرنییز خپلواک حلونه v_i شتون لري د هوموجین سیستم او د تولیز حل لاندې بڼه

$$x = x_s + \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2, \alpha_j \in \mathbb{R}$$

لري د هوموجین سیستم یو ځانګړی حل x_s سره.

وکتورونه v_i د پيووت پورې نه اړه لرونکو نامعلومو د کانونیکي (بڼه یز: کنوني) ټاکنې له لارې معلوموي یا ټاکي او پاتې ضریبونه په هوموجین سیستم باندې:

$$r_{e,e}x_e + \cdots + r_{e,n}x_n = b_e, \rightarrow x_e = (b_e - r_{e,e+1}x_{e+1} - \cdots - r_{e,n}x_n) / r_{e,e}.$$

یو خانکری حل

$$x_s = \begin{pmatrix} 5/4 \\ -6 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

د $x_3 = x_5 = 0$ ایښوونې له لارې لاس ته راځي.

لیکونکي: هیولیگ، شترایت

رانگ او د ک م س (کرنبیز مساواتسیستم) حلوروالی

Rang und Lösbarkeit von LGS

$$A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m.$$

وي دي

$$A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m.$$

Sei

• کرنبیز مساوات سیستم $Ax = b$ یو حل لري

$$\iff \text{Rang } A = \text{Rang}(A, b).$$

• کرنبیز مساوات سیستم $Ax = b$ یواځنی حلور دی

$$\iff \text{Rang } A = \text{Rang}(A, b) = n.$$

• کرنبیز مساوات سیستم $Ax = b$ ډېر حلونه لري

$$\Leftrightarrow \text{Rang } A = \text{Rang}(A, b) = k < n.$$

دلته په پام کې ولری، چې د A رانگ او د غزېدلې ماتریکس A اینواریانت دي د ساده بڼې بدلون سره. له دې امله کېدی شي و نیول شي یا فرض شي کرښیز مساوات سیستم به ایښلون-بڼه دی. به دې بڼه کېدی شي نتیجې ترلې ولوستل شي.

د اندول کرښه (اندولکرښه) Ausgleichsgerade

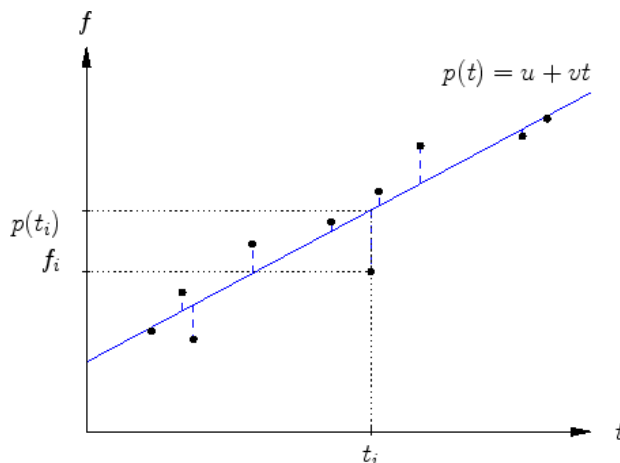
پوه کرښه

$$p(t) = u + vt,$$

، چې دانتونه $i = 1, \dots, n$ ، به خورا ښه توګه approximiert کوي، کېدی شي د ناتیګاوي مربع جمعې کمښت

$$\sum_{i=1}^n (f_i - p(t_i))^2$$

له لارې پیدا کړی شي.



کرنییز الجبر

د محوریرخی u او جگېډني v لباره لاندې فرمولونه راكوي

$$u = \frac{(\sum t_i^2)(\sum f_i) - (\sum t_i)(\sum t_i f_i)}{n(\sum t_i^2) - (\sum t_i)^2}$$

$$v = \frac{n(\sum t_i f_i) - (\sum t_i)(\sum f_i)}{n(\sum t_i^2) - (\sum t_i)^2},$$

كه لږ تر لږه دوه پراته ارزښتونه يا قيمتونه t_i ورك شي يعنې صفر وي.

ليكونكي: اېپ، هيوليگ

د مينيموم سره بايد غلطی مربع جمعي مشتق هم د u او v هم د پسي صفر وي:

$$0 = 2 \sum_i (u + vt_i - f_i)$$

$$0 = 2 \sum_i t_i (u + vt_i - f_i).$$

دواړه مساوات د ماتريكس په بڼه په لاندې ډول دي

$$\begin{pmatrix} n & \sum t_i \\ \sum t_i & \sum t_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum f_i \\ \sum t_i f_i \end{pmatrix}.$$

كه لږ تر لږه دوه t_i مختلفي وي، نو ديترمينانت ده:

$$\underbrace{(1 + \dots + 1)}_{n \text{ mal}} |(t_1, \dots, t_n)^t|_2^2 - \left(\sum_i 1 \cdot t_i \right)^2 > 0,$$

او سړی د کرامر د قاعدې سره ورکړ شوی حل لاس ته راوړي

لیکونکي: اپپ، هیولیگ

د برابر وني حل یو بل سره یو غریز کیدل یا یو په بل پریوتلو، کرنیزو مساوات سیستم

Ausgleichslösung überbestimmter, linearer Gleichungssysteme

که د یوه کرنیز مساوات سیستم $Ax = b$ بنی خوا b وي د $(m \times n)$ - اتریکس A متو کرنیز هیولی یاسپاین کی خوندي نه وي (په تیپیکي دول د $m > n$ لپاره)، دا په دې معنا چې وي

$$\text{Rang } A < \text{Rang } (A, b),$$

نو مساوات سیستم حل نه لري. سړی د یوه د پاسه ټاکلي سیستم څخه خبرې کوي. په دې حالت کې کېدی شي یو پروکسیمیشن د برابر والي پرابلم

$$|Ax - b| \rightarrow \min$$

له لاري و ټاکل شي.

د برابر والي حل شمېرل د نور مالو مساوات یا سینګولار ارزښتونه کوني په مرسته ممکن یا شونی دی

لیکونکي: اپپ، هیولیگ

الجبر - کرنبیز مساوات سیستم-برابرونی پر اہلم

Algebra - Lineare Gleichungssysteme – Ausgleichsprobleme

نورمال مساواتونہ Normalgleichungen

د یوہ پہ خوبنہ $m \times n$ – ماتریکس A لپارہ هر د برابرونی پر اہلم

$$|Ax - b| \rightarrow \min$$

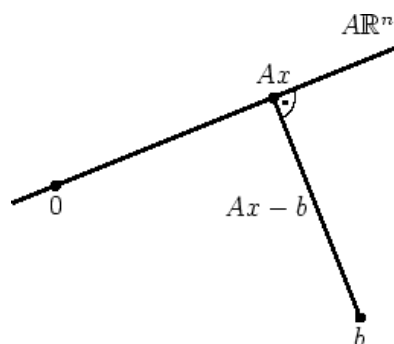
هر حل x نورمالیز – مساواتونہ

$$A^t Ax = A^t b,$$

پوره کوی، دا پہ دی معنا چي

ریزیدووم $r = Ax - b$ اور توگونال دی د A د متو خخه غزبدلی

لانڈیفا A سره Bild A



خُمکچیز یا هندسی مساوات معنا لری، چي ریزیدووم $r = Ax - b$ د ماتریکس A په متو نیغ ولار دی یعنی عمود دی.

ماتریکس $A^t A$ مربعیزه ده او پراخېدونى یا بعد n لري. دا ټیک هلته معکوسور ده کله

$$\text{Rang } A = n$$

چي وي، دا په دى معنا چي کله د A متي کرنييز خپلواکي وي. نورماليز-مساوات د سينگولار حالت کي هم حلور دى، خو حل يي يواځنى نه دى.

ليکونکي: اېپ، هيوليگ

له

$$|A(x + ty) - b|^2 \geq |Ax - b|^2$$

د

$$(Ax - b)^t y = y^t (Ax - b), \quad r = Ax - b$$

سره برابر ارزښته نامساوات

$$2ty^t A^t r + t^2 y^t A^t A y \geq 0$$

لاس ته راځي د ټولو $t \in \mathbb{R}$ او وکتورونو y لپاره. که د نابرابرون کين اړخ په t کي د پارابول په څېر ونيول شي، نو نه منفيوال (نه کميزوالي) د

$$y^t (A^t r) = 0.$$

سره به يوه معنا دي.

دا ټیک هلته د ټولو وکتورونو y لپاره صدق کوي، که په نوکانو کي افاده (ويينه) صفر وکتور وي.

ليکونکي: اېپ، هيوليگ

د

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

لیاره نورمال مساوات لاس ته راځي

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

لاس ته راځي

دا کرنییز مساوات سیستم ٺاځني حل $x = \left(\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \right)^t$ لري. ریزیووم
دي. $r = (1 \quad -2 \quad 1)^t$

که A کرنییز بلواکي متي ولري، لکه په بېلگه کي

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix},$$

نو نورمالو-مساوات سیستم سینگولار دي:

$$\begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

حل

$$x = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} - t \\ t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R},$$

په دې حالت کې یواځني نه دي، مگر ریزیدووم

$$r = \left(\frac{6}{5} \quad -\frac{12}{5} \quad 0 \right)^t$$

لیکونکي: اپپ، هیولیگ

توموگرافي Tomographie

لکه څنگه په فنکشن یا څیرونه (mappingتابع) کې بنسول شوي دي، په کمپیوتر-توموگرافي Computer-Tomographie کې د حجرو غرو ټینګوالي (غلظت)

$$x(u, v)$$

بیا جوړیږي، په کومه کې چې د ګڼوالي یا ټینګوالي بایلیدنه (کمبنت)

Intensitätsverlust د رونتګن وړانګو د k کودې له l غبرګو کرښو

$$\mathcal{R}_i : (u_i, v_i) + \mathbb{R}(\cos \vartheta_i, \sin \vartheta_i), \quad i = 1, \dots, m = kl,$$

کچ کيږي. سري د ټینګوالي وېش د یوه ټوټه ډوله ثابتې تابع approximiert کوي

سری د ټینګواليخوړونه د یوه ټوټه ډوله یا ټوټه په ټوټه ثابتو له لارې اپروکسيمي کوي د

مربعو Q_j په پاتې شونو او ګڼوالي کچه ونو د نږدې ونې له لارې کټلي کرښیزا نټیګرال څخه.

$$b_i = \int_{\mathbb{R}} x(u_i + t \cos \vartheta_i, v_i + t \sin \vartheta_i) dt \approx \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j,$$

چیرته چې x_j د $x(u, v)$ یو اپروکسیمیشن دی په Q_j او

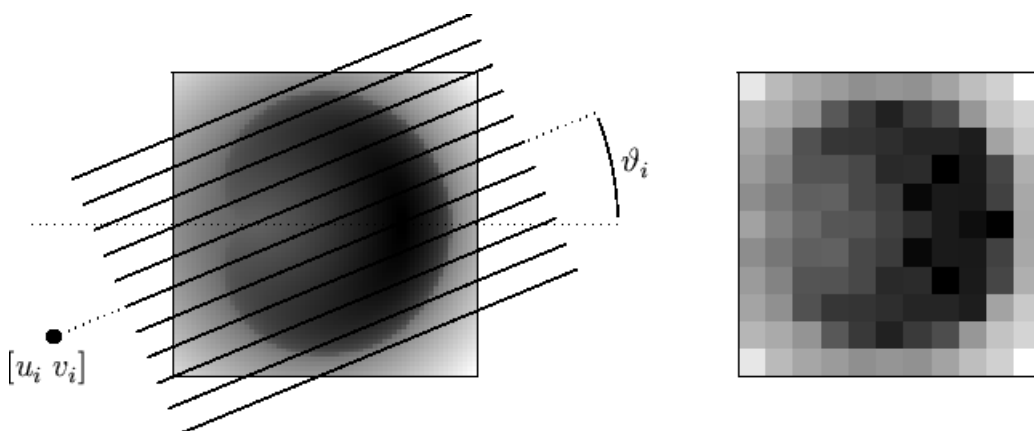
$$a_{i,j} = |\mathcal{R}_i \cap Q_j|$$

کرنییز الجبر

د کرنیو Q_j د سره غوڅي يا تقاطع اوږدوالی په گوته کوي. دا چې د کچوونو تعداد يا گنون په تولیزه توگه ډېر لوي دي نسبت د راستر (هغه تخته چې څیره پرې کښل کيږي) څلور یو او شنتیگرالونه چې تیک نه شي شمیرل کیدی، د داتا b څخه د x ټاکلوته سری یو برابر والیز یا د انډول پرابلم سره مخامخ کيږي.

دالاندې ژباړي دلته راکاپي کړي (دا لاندې دې همداسي په انگرېزي پاتې وي):

» The word "raster" has its origins in the Latin *rastrum* (a rake), which is derived from *radere* (to scrape). It originally referred to the raster scan of cathode ray tube (CRT) video monitors, which paints the image line by line by magnetically steering a focused electron beam. By association, it came also to refer to a rectangular grid of pixels. See also *rastrum*, a device for drawing musical staff lines پای»



پورته بڼي لور ته څیره په یوه 11×11 راستر شمیرلی نږدیوالی بڼایي کښل څیره شوی تینگوالي خورونه (غلظت-) بڼایي. له دې سره د کونج

$$\vartheta = 0, \pi/16, \pi/8, \dots$$

لیپاره 11 غبرگ سکن-لوري د راستر مربع سور باندي کارول شوي.

لیکونکي: اپ، هیولیگ

آیگن-ارزبنت او آیگو-وکتور Eigenwert und Eigenvektor

یو سکالار λ د یوه مربع ماتریکس A آیگو-ارزبنت بلل کیږي، که وي:

$$Av = \lambda v, \quad v \neq 0.$$

وکتورونه $v \neq 0$ د $Av = \lambda v$ سره و آیگن-ارزبنته λ ته آیگن-وکتورونه بلل کیږي. آیگن-وکتورونه و آیگن-ارزبنت ته د صفر وکتور سره یوځای یوه کرنبیزه فضا جوړوي، داسې په نامه د λ آیگن-فضا

$$V_\lambda = \ker(A - \lambda E)$$

لیکونکي: هیولیگ، هیورنر، کیمرلی

ماتریکسونه

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

آیگن-ارزبنتونه $\lambda_1 = 0$ او $\lambda_2 = 2$ لري، ځکه

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

او

کرنبیز الجبر

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

لیکونکی: هیولیگ، هیورنر

لاندي بېلگې د (2×2) ماتریکسونو لپاره ممکنه حالتونه بنایي

• دوه حقیقي آیگن-ارزبنتونه:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda_1 = -1, v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = 3, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

• یو حقیقي آیگن-ارزبنت، دوه کرنبیز خپلواک آیگن-زکتورونه:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \lambda = 2, v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

• یو حقیقي آیگن-ارزبنت، یو آیگن-وکتور:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda = 1, v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

• دوه کنجوگیري کمپلکس آیگن-ارزبنتونه او آیگن-وکتورونه:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda_{1,2} = 1 \mp i, v_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 \\ \pm i \end{pmatrix} .$$

لیکونکی: هیولیگ، هیورنر

لاندي بېلگې د کمپلکس (2×2) – متريکسونو لپاره ممکنه حالتونه څېړي.

• دوه آیگن-ارزبنتونه اودوه آیگن-وکتورونه:

$$A = \begin{pmatrix} i & 2 \\ 2 & i \end{pmatrix}, \quad \lambda_1 = 2 + i, v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = -2 + i, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

• یو آیگن-ارزبنت، دوه کرښیز خپلواک آیگن-وکتورونه:

$$A = \begin{pmatrix} 2i & 0 \\ 0 & 2i \end{pmatrix}, \quad \lambda = 2i, v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

• یو آیگن-ارزبنت، یو آیگن-وکتور:

$$A = \begin{pmatrix} i & -1 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \quad \lambda = i, v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

لیکونکي: هیولیک، هیورنر

ورته والي - ترانسفورمیشن Ähnlichkeitstransformation

د یوه مربعیز ماتریکس A په ورته والي ترانسفورمیشن

$$A \rightarrow B = Q^{-1} A Q,$$

کې آیگن-ارزبنتونه ساتلي پاتېږي. آیگن-وکتورونه د اینورتیرو ماتریکس Q له لارې تشریح شوي بنسټ بدلون سره سم ترانسفورمي کيږي، دا په دې معنا، چې د A آیگن-

کرنبیز الجبر

وکتور v و آيگن-ارزبنت λ ته و هممغسي د B آيگن-وکتور په گوته
کوي و همغه بنسټ ته.

ليکونکي: هيوليگ، هيورنر

که v د A يو آيگن-وکتور وي و آيگن-ارزبنت λ ته، يعني $Av = \lambda v$ ، نو د
 $w = Q^{-1}v$ لپاره لاس ته

$$Bw = Q^{-1}AQw = Q^{-1}AQQ^{-1}v = Q^{-1}Av = Q^{-1}\lambda v = \lambda Q^{-1}v = \lambda w.$$

ليکونکي: هيوليگ، هيورنر

لاندي مربع ماتريکس دي ورکړ شوی وي

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

د آيگن-ارزبنت $\lambda_1 = 2$ او $\lambda_2 = 3$ او د لاندي اړونده آيگن-وکتور سره:

$$v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

يو ورته والي ترانسفورميشن د

رکرنیز الج

$$B = Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}.$$

سرہ راکوي.

د B آيگن-وکتورونه w_1 او w_2 د

$$w_1 = Q^{-1}v_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ -\frac{5}{3} \end{pmatrix}$$

سرہ، همداسي

$$w_2 = Q^{-1}v_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

سرہ شميرل کيري.

ليکونکي: هيوليگ، کرايخ

کرکتريسټيکي پولينوم Charakteristisches Polynom

د $(n \times n)$ ماتريکس A آيگن-ازبټونه د کرکتريسټيکي پولينوم صفرونه دي

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix}.$$

په ځانگړي توگه د ماتبريکس آيگن - ارزښونه د ترانسپوزيشن سره اينواريانت پاتي کيري.

لیکونکي: هیولیک، هیورنر، کیمرلی

یو سکالار λ ټیک هلته د $(n \times n)$ -ماتریکس A آیگن-ارزبنت دی، که ولرو

$$Av = \lambda v, \quad v \neq 0,$$

دا په دې معنا چې که دا هوموجبن کرنبیز مساوات سیستم $(A - \lambda E)v = 0$ یو له
صفر مختلف حل ولري. دا حالت ټیک هلته لرو، که $(A - \lambda E)$ زینگولار وي یعنی که
وي:

$$\det(A - \lambda E) = 0.$$

لیکونکي: هیولیک، هیورنر

د آیگن - ارزبنتونو او - وکتونوشمیرنه

د دې لپاره چې د مربع ماتریکس A لپاره د آیگن-ارزبنت پرابلم حل کړو، لومړی د
کرکتریسټیکي پولینومونو آیگن-ارزبنتونه λ د صفرخایونو په حیث ټاکي

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda E).$$

د هر آیگن - ارزبنت λ لپاره له دې سره اړوند آیگن - وکتور v لاس ته راوړو د
هوموجبن کرنبیز مساوات سیستم د یوه ناتریویال په څېر

$$(A - \lambda E)v = 0.$$

د دې لپاره چې د آیگن-فضا V_λ لپاره یو بنسټ لاس ته راوړو، سری کړی شي دا سیستم
په ایښیلون-فرمول ترنسفورمی کړو.

$$\dim V_\lambda = 1$$

په ټولیزه توگه دی. دا تر یوه سکالار ضییب یواځنی ټاکلی آیگن-وکتور v کېدی شي هلته وټاکل شي، په کوم کې چې د وکتورونو v مناسب کمپوننتونه له مخه ورکړي

لیکونکي: هیولیک، کرایخ

د ماتریکس

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

د آیگن-ارزښت د ټالکو لپاره کرکتیستیکی پولینوم جوړوو

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -\lambda & -2 & -1 \\ 2 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(2-\lambda)^2 - 4 + 8 - 2\lambda = -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 6\lambda + 4.$$

او د ده صفرخایونه ټاکي. د گومان له مخې (د مطلق ارزښت غړي پروېشونی یا مقسوم علیه) د لومړي صفرخای په څېر $\lambda_1 = 2$ لاس ته راځي. د دې صفرخای وېشنه

$$(-\lambda^3 + 4\lambda^2 - 6\lambda + 4)/(\lambda - 2) = -\lambda^2 + 2\lambda - 2,$$

او په لاندې فرمول (دنیمی شپې فرمول په نامه بلل شوی) کې یې خای په خای کوو ترې لرو

$$\lambda_{2,3} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{-2} = 1 \pm i.$$

کرنییز الجبر

یو آیگن - وکتور و آیگن - ارزښت 2 ته کیدی شي د هوموجین مساوات سیستم

$$(A - 2E)v = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} v = 0$$

حلونو له لارې وټاکل شي. حل $v = (1, 0, -2)^t$ ساده لیدل کیري

یوه آیگن-ارزښته $1 + i$ ته یو آیگن - وکتور w_1 له دې لاندې لاس ته راوړو:

$$(A - (1 + i)E)w_1 = \begin{pmatrix} -1 - i & -2 & -1 \\ 2 & 1 - i & 1 \\ 0 & 2 & 1 - i \end{pmatrix} w_1 = 0.$$

او داسې د پزلگز به تگه $w_1 = (-1 - i, -1 + i, 2)^t$ دا A چې حقیقي ده، کپدی

شي و $\lambda = 1 - i$ ته آیگن-وکتور د کمبلکس کنجوگیشن له لارې جوړ شي:

$$w_2 = \overline{w_1} = (-1 + i, -1 - i, 2)^t$$

لیکونکي: هیولیک، هیورنر

الجبری او هندسي ډېرځلوالی

Algebraische und geometrische Vielfachheit

که λ د $(n \times n)$ – ماتریکس A آیگن – ارزښت وي، نو دکرکتريستيکي پولینوم

د صفرخای په حیث د λ دپرخوالی د آیگن-ارزښت λ

الجبري m_λ دپرخوالی بللکیري

د یوه آیگن – ارزښت λ د آیگن-فضا V_λ بعد یا پراخېدونی d_λ د λ هندسي دپرخوالی بلل کیري. . ابور لري

$$d_\lambda \leq m_\lambda, \quad \sum_{\lambda} m_\lambda = n,$$

همداسي

$$d_\lambda = n - \text{Rang}(A - \lambda E).$$

لیکونکي: هیولیک، هیورنر، کیمرلي

ماتریکسونه

$$A_1 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & 6 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

ټول لاندې کرکتريستيکي پولینوم لري:

$$(4 - \lambda)^3 = (4 - \lambda)(5 - \lambda)(3 - \lambda) + 4 - \lambda = (4 - \lambda)^3 + 12(4 - \lambda) - 12(4 - \lambda)$$

او له دې سره هوار $m_4 = 3$ دی. د ماتریکس

کرنییز الجبر

$$(A_1 - 4E) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (A_2 - 4E) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$(A_3 - 4E) = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 6 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

د رانگ په لړدوسره $d_4 = 3$ د A_1 لپاره، $d_4 = 2$ د A_2 لپاره او $d_4 = 1$ د A_3 لپاره پیژني لیکونکي: هیولیک، هیورنر

د آیگن – ارزښتونو جمعه او ضرب

Summe und Produkt von Eigenwerten

د یوه $(n \times n)$ ماتریکس A د آیگن – ارزښت λ_i لپاره صدق کوي

Für die Eigenwerte λ_i einer $(n \times n)$ -Matrix A gilt

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = \text{Spur } A, \quad \prod_{i=1}^n \lambda_i = \det A,$$

د کوم سره چې ډېرځله آیگن – ارزښتونه د الجبري ډېرځلوالی سره سم شمېرل کيږي.

لیکونکي: هیولیک، هیورنر

د دیترمینانت د مولتی کرنیزوالی په اساس د کرکتريستيکي پولینوم لپاره لاس ته راځي

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda E) = (-\lambda)^n + \text{Spur } A(-\lambda)^{n-1} + \dots + \det A.$$

بلي لور ته پولینوم په لاندې بڼه

$$p_A(\lambda) = \prod_{i=1}^n (\lambda_i - \lambda)$$

انځوریدلای شي. د دویم فرمول په ضربونه او د ضربیونو پرتله کونه دا ورکړ شوی کټمټوالی یا ایدنتیټي راځوي.

لیکونکي: هیولیگ، هیورنر

ماتریکس

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

کرکتريستيکي پولینوم

$$p_A(\lambda) = \lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc)$$

لي د لاندې صفرځایونو سره:

$$\lambda_{1,2} = \frac{(a + d) \pm \sqrt{(a + d)^2 - 4(ad - bc)}}{2}.$$

که د آیگن - ارزښتونو جمعه تشکیل شي، دا ریښي افاده له ښځه ځي، او لاس ته راځي:

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \frac{(a + d) + (a + d)}{2} = a + d = \text{Spur } A.$$

کرنبیز الجبر

که آیگن – ارزبنتونه سره ضرب شي، نو د دریم بېنوم فرمول سره لرو:

$$\lambda_1 \lambda_2 = \frac{(a+d)^2 - (a+d)^2 + 4(ad-bc)}{4} = ad - bc = \det A.$$

لیکونکي: هیولیک، هیورنر

د ماتریکسونو ریښتونی فنکشنونه یا توابع

Rationale Funktionen von Matrizen

که د یوه ماتریکس A یو آیگن-ارزبنت λ د ریښتونی فنکشن

$$r(t) = \frac{p(t)}{q(t)} = \frac{a_0 + a_1 t + \dots}{b_0 + b_1 t + \dots},$$

قطبهای نه وي، نو $r(\lambda)$ د

$$r(A) = q(A)^{-1} p(A) = p(A) q(A)^{-1}.$$

آیگن – ارزبنت دی.

په ځانگړي توگه λ^k د توان-ماتریکس A^k آیگن – ارزبنت دی او $1/\lambda$ د معکوس کېدونکي ماتریکس A^{-1} یو آیگن-ارزبنت دی.

لیکونکي: هیولیک، هیورنر

له $Av = \lambda v$ د $k \geq 0$ لپاره لاس ته راځي چې $A^k v = \lambda^k v$ او په ټولیزه توګه

$$\left(\sum_k c_k A^k \right) v = \left(\sum_k c_k \lambda^k \right) v .$$

پسي صدق کوي

$$Av = \lambda v \Leftrightarrow v = \lambda A^{-1} v ,$$

که A معکوس وړي

که λ د صورت پولینوم q صفر ځای نه وي. نو صدق کوي

$$q(A)v = q(\lambda)v, \quad q(A)^{-1}v = q(\lambda)^{-1}v ,$$

پس

$$q(A)^{-1}p(A)v = q(\lambda)^{-1}p(\lambda)v = p(A)q(A)^{-1}v$$

لکه څه مو چي غوښتل .

لیکونکي: هیولیک، هیورنر

د آیګن – وکتورونو بنسټ Basis aus Eigenvektoren

که یوه ماتریکس A ته د آیګن – وکتورونو v_j څخه یو بنسټ شتون ولري د آیګن –

ارزښت λ_j سره ، نو دی

کرنبیز الجبر

$$V^{-1}AV = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n), \quad V = (v_1, \dots, v_n),$$

دا په دې معنا چې A نسبت و بنسټ $\{v_1, \dots, v_n\}$ ته دیاگونال بڼه لري. لیکونکي: هیولی، اپپ
د بنوولو دی، چې

$$V^{-1}AV = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

باور لری، د لاندې سره ورته (برابر ارزښته) دی

$$AV = V \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = (\lambda_1 v_1, \dots, \lambda_n v_n).$$

دا چې v_j د V مټه و λ_j ته د آیگن-وکتورونه دي، دا سملاسي لیدل کيږي لیکونکي: هیولی، اپپ
ماتریکسونه

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -6 & 6 \\ 1 & -5 & 1 \\ 5 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$

آیگن- ارزښتونه -2 ، -2 او 3 لري. اړونده آیگن-وکتورونه د پیل لگی به توگه دی:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

د $V = (v_1, v_2, v_3)$ سره لاس ته راځي

$$V^{-1}AV = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

لیکونکي: هیولی، اپ

د ځیوکلیکي ماتریکسونو دیاگونالونه

Diagonalisierung zyklischer Matrizen

یو ځیوکلیکي $(n \times n)$ – ماتریکس A کېدی شي د پوریر-ماتریکس

$$W = (w^{jk})_{j,k=0,\dots,n-1}, \quad w = \exp(2\pi i/n),$$

په مرسته دیاگونالي شي.

$$\frac{1}{n} \overline{W} \begin{pmatrix} a_0 & a_{n-1} & \cdots & a_1 \\ a_1 & a_0 & \cdots & a_2 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_0 \end{pmatrix} W = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

د

$$\lambda_\ell = \sum_{k=0}^{n-1} a_k w^{-k\ell}, \quad \ell = 0, \dots, n-1,$$

سره د A آیگن – ارزښت دی.

لیکونکي: هیولی، اپ

کرنییز الجبر

Aw_ℓ

سری ساده بسی شمېرلی شي، چې د W ℓ مه مته د A یو آیگن - وکتور دی. د j - م کمپوننت لپاره سری لاس ته راوړي:

$$\sum_{k=0}^{n-1} a_{j-k \bmod n} w^{(k-j)\ell} w^{j\ell} = w^{j\ell} \sum_{k'=j-n+1}^j a_{k' \bmod n} w^{-k'\ell}.$$

دا اندکس یا پیژند نخینه مودولو سره بنوول کیري، کېدی شي د جمعی کېدنې ورشو د $k' = 0, \dots, n-1$ سره ځای په ځای شي یا بدله شي. په تعقیب سره یې زیاتون یا

جمعه برابر په λ_ℓ ده، لکه چې غوښتل مو. له دې مو و بنوول چې لرو:

$$AW = W \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

دا چې $\frac{1}{\sqrt{n}} W$ یوتیتار دی، دا په دې معنا چې $\frac{1}{\sqrt{n}} W^* = \left(\frac{1}{\sqrt{n}} W\right)^{-1}$ ، سری غوښتونکی ترانسفورمېشن په دیاگونال بڼه لاس ته راوړي

لیکونکي: هیولی، اپپ

د عمومي تیوري سره سم کیدی شي څیو کلیکي ماتریکس

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

د فوریر - ماتریکس

$$W = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{pmatrix}$$

سره په دیاگونال بڼه واپړول شي (ترانسفورمي شي)

$$\frac{1}{4}\overline{W}AW = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

د $0, 2, 2, 4$ سره د A آیگن - ارزښت. دا چې A حقیقي دی باید کمپلکس آیگن-وکتورونه

$$\begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -1 \\ -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ -1 \\ i \end{pmatrix}$$

(د W دویمه او څلورمه مټه) یو کډ آیگن-ارزښت ولري. داسې کېدی شي د کرښیز کمینېشن له لارې د آیگن-وکتورونو لپاره یو حقیقي بنسټ تشکیل شي:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -1 \\ -i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ -1 \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad i \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -1 \\ -i \end{pmatrix} - i \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ -1 \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

لیکونکي: اپ، هیولیک

د ماتریکسونو توان $Potenzen von Matrizen$

که A د مطلق ارزښت سره سم یا - - ډوله خورا لوی آیځن- ارزښت λ د آیځن - وکتور v سره ولري، نو صدق کوي:

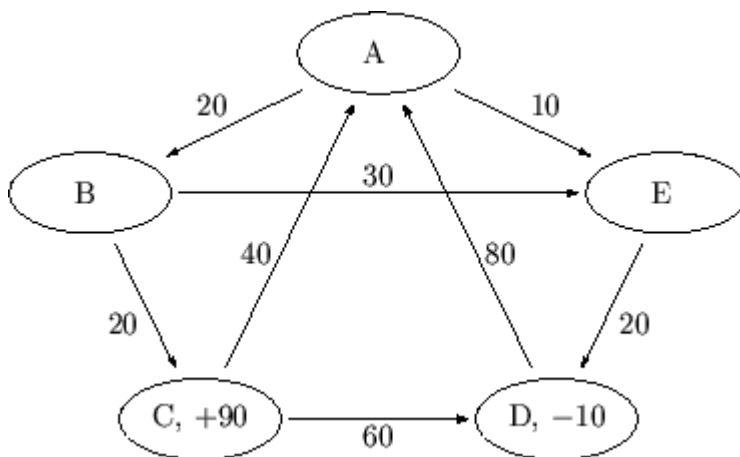
$$A^n x = \lambda^n (cv + o(1)), \quad n \rightarrow \infty,$$

که x یو نا تریویال کمپوننت د λ په آیځن-فضا کې ولري، دا په دې معنا چې

$$x = cv + w \quad c \neq 0 \quad \text{او} \quad v \nparallel w \quad \text{د سره.}$$

لیکونکي : ایپ، هیولیک

دا تابع د مارکیټپرځي x_i د رقابت د فیرو گانو کلنی تغیر ښایي. په دې ترتیب فیرو A د بېلگې په توگه 80% د فیرو D د مارکیټ برخه گټي او د فیرو C خپله د مارکیټ برخه 90% د په شاوخوا کې لویه وي د نوي خرڅلاو امکانات پیدا کولو سره ، په همدې وخت کې د مارکیټ برخي A او D ته له لاسه ورکوي.



د لیدځیری څخه د مارکیټ نوي برخي (ونډه) رانیسو:

$$\begin{matrix} A \\ \text{نوی neu} \end{matrix} = 0.7A + 0.4C + 0.8D$$

$$\begin{matrix} B \\ \text{نوی neu} \end{matrix} = 0.5B + 0.2A$$

$$\begin{matrix} C \\ \text{نوی neu} \end{matrix} = 0.9C + 0.2B$$

$$\begin{matrix} D \\ \text{نوی neu} \end{matrix} = 0.1D + 0.6C + 0.2E$$

$$\begin{matrix} E \\ \text{نوی neu} \end{matrix} = 0.8E + 0.3B + 0.1A.$$

له $x = (A, B, C, D, E)^t$ سره لاس ته راځي:

$$= \begin{pmatrix} 0.7 & 0 & 0.4 & 0.8 & 0 \\ 0.2 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0.9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.6 & 0.1 & 0.2 \\ 0.1 & 0.3 & 0 & 0 & 0.8 \end{pmatrix} x.$$

x نوی neu

د ايتراشن ماتریکس د n -توان سره ضربولو د n کلونو وروسته د مرکت ونډه راکوي.

نورمیري شوي وکتورونه x^0 د یوه ایگن- وکتور $\max v$ (ماکس) پولې ته ځي) کونورگیريگي) د ماتریکس د ارزښت له مخې لوی ایگن ارزښت $\max \lambda$ ته. سړی لاس ته راوړي $\max \lambda = 1.1$ او دې ته اړوند ایگنوکتور

$$v_{\max} = (0.75, 0.25, 0.25, 0.25, 0.5)^t.$$

کرنبیز الجبر

د اورده وخت لپاره بازار يا مارکيټ د A ه خوا ټاکل کيږي يا تعينږي. په سلو کې برخي د $\max v$ د نورمي کولو له لارې لاس ته راځي يعنې، $\max \|v\|_1$ په دې توگه

$$A : 37.5\%, B, C, D : 12.5\%, E : 25\% .$$

ليکونکي: اپپ، هيوليگ

د فيبوناچي پرلپسې يا - ترادف Fibonacci-Folge

د فيبوناچي پرلپسې يا ترادفونه داسې پيژند لري يا تعريف دي:

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 1,$$

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1}, \quad n \geq 1,$$

دا په دې معنا چې هره فيبوناچي پرلپسې د دواړو ترمنځ غړو زياتونن يا جمعه ده.

د فيبوناچي لومړي عددونه دي:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765, \dots$$

سری د پيل ارزښت $a_1 = 1$ او $a_2 = 3$ ټاکي نو داسې په نامه لوکاس - Lucas عدد:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765, \dots$$

که دوه يو په بل پسې د فيبوناچي عددونه يوه وکتور

$$x_n = (a_n, a_{n-1})^t$$

ته سره یوځای شي، نو ریکورزیون د

$$x_{n+1} = Ax_n$$

په څیر د لاندې سره ولیکو:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

د ماتریکسلیکني په مرسته کېدی شي د فیبوناچي عدد دا اسیمپتوتیکي حالت وټاکل شي. د دې لپاره سری د A آیگن-ارزبنتونه او آیگن-وکتورونه شمېري:

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}, \quad v_{\pm} = \begin{pmatrix} \lambda_{\pm} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

که سری د ریکورزیون وکتورونه د v_+ کرنییز کمبینیشن په حیث انځور کړي،

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}v_+ - \frac{1}{\sqrt{5}}v_-,$$

، نو لاس ته راځي:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\sqrt{5}}\lambda_+ \lambda_+^{n-1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\lambda_- \lambda_-^{n-1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \right)^n + o(\lambda_-^n). \end{aligned}$$

لیکونکي: اپې، هیولیک

نورمال ماتريکسونه Normale Matrizen

يو کمپلکس ماتريکس A نورمال بلل کيږي، که

$$AA^* = A^*A,$$

وي، د $A^* = \bar{A}^t$ سره. په ځانگړې توگه يونيتار او هر ميټيکي ماتريکسونه نورمال دي.

د حقيقي نورمال ماتريکسونو لپاره دی:

$$AA^t = A^tA,$$

کوم چې په ځانگړې توگه د اور توگونال او سيومټري ماتريکسونو لپاره پوره دی.

ليکونکي: اپپ، هيوليگ، کيمرلي

د يونيتارو او هر ميټيکي ماتريکسونو نورمالوالی ترلی له تعريف څخه لاس ته راځي.

د نوه يونيتار ماتريکس لپاره دی:

$$AA^* = AA^{-1} = E = A^{-1}A = A^*A.$$

د يوه هر مېټيکي ماتريکس لپاره دی:

$$AA^* = AA = A^*A.$$

ليکونکي: اپپ، هيوليگ

د نور مالو ماتریکسونو یونیتار دیاگونالی – یا دوه کونجټری کول

Unitäre Diagonalisierung normaler Matrizen

یو ماتریکس A ټیک هلته نورمال دی، که A یونیتار دیاگوناور وي، دا په دې معنا چې ، که وي:

$$U^{-1}AU = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n),$$

د کوم سره چې د U متي یو اورتونورمال بنسټ و آيگن – ارزښت λ_j ته له آيگن- وکتورونو تشکیل کړي.

ليکونکي: اپپ، هیولیک، کیمرلي

که

$$A = UDU^*, \quad U^* = U^{-1},$$

وي، نو نورمال دی، ځکه چې لرو:

$$\begin{aligned} AA^* &= (UDU^*)(UDU^*)^* = UD(U^*U)D^*U^* \\ &= U(D^*D)U^* = (UD^*U^*)(UDU^*) \\ &= A^*A. \end{aligned}$$

د دې معکوس کېدی شي د یوه اورتوکونال بنسټ شتون نسبت بعد ته د ایندکشن له لاري وښايي. د ایندکشن پل لپاره یو یونیتار ماتریکس V جوړوو د لاندې سره:

$$V^*AV = \left(\begin{array}{c|c} \lambda & 0 \\ \hline 0 & B \end{array} \right).$$

کرنبیز الجبر

د اینکشن نیونی یا فرضیې له مخې کېدی شي B د یوننارماتریکس W له لارې په دیاگونال بڼه ترنسفورمې شي، داسې چې سړی χ په χ کولی شي:

$$U = V \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & W \end{array} \right)$$

د V دجوړښت یا کنسټرکشن ته د یوه نورمي آیگن – وکتور v څخه و آیگن-ارزښت λ ته χ او بردي

$$V = (v | \tilde{V}),$$

د کوم سره چې د \tilde{V} متي وکتور v و اور توگونال بنسټ ته پوره کوي. لاس ته راځي:

$$V^* A V = \left(\begin{array}{c} v^* \\ \hline V^* \end{array} \right) (\lambda v | A \tilde{V}) = \left(\begin{array}{c|c} \lambda & c^* \\ \hline 0 & B \end{array} \right).$$

بنوولو تهدومره پاتیري، چې B نورمال او $c = 0$ دی. دواړه د A د نوپماليټي څخه لاس ته راځي. دا د ورته والي ترنسفورمیشن سره ساتلي پاتي کیریو، پس د پورته مساوات د بني اړخ \tilde{D} لپاره هم صدق کوي.

که

$$\tilde{D} \tilde{D}^* = \left(\begin{array}{c|c} |\lambda|^2 + |c|^2 & c^* B^* \\ \hline B c & B B^* \end{array} \right)$$

$$\tilde{D}^* \tilde{D} = \left(\begin{array}{c|c} |\lambda|^2 & \bar{\lambda} c^* \\ \hline \lambda c & B^* B \end{array} \right),$$

تشکیل کرو، نو غوښتونې خوښونه د پورته ماتریکسونو د دیاگونال بلوکونو د پرتلي له لارې لاس ته راځي. لیکونکي: اپپ، هیولیک

$$A = \begin{pmatrix} 3 + 2i & 3 - 2i \\ 3 - 2i & 3 + 2i \end{pmatrix}$$

نورمال دي، چې د سیده شمېرني له لاري تصدیق کېدی شي.

$$AA^* = \begin{pmatrix} 26 & 10 \\ 10 & 26 \end{pmatrix} = A^*A$$

د دي په تعقیب باید A یونیتار دیاگونالور وي. سری آیگن - ارزبنتونه 6 او $4i$ لاس ته راوري او اړونده نورمي آیگن-وکتورونه د بېلگي په توگه دي:

$$v_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

د انتظار سره سم $v_1 \perp v_2$ دی، او د یونیتار ماتریکس $U = (v_1, v_2)$ سره دیاگونال ماتریکس لاس ته راخي:

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 4i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 + 2i & 3 - 2i \\ 3 - 2i & 3 + 2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

لیکونکي: اپ، هیولیک

د هر میتیکی ماتریکسونو دیاگونال بڼه **Diagonalform hermitescher Matrizen**

دیوه هوموجین ماتریکس $A (A = A^*)$ آیگن-ارزبنتونه λ_i حقیقي دي او د آیگن-وکتورونو v_i څخه یو اورتوگونال بنسټ شتون لري. په تعقیب

ده د یونیتار ماتریکس سره

$$U^*AU = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n),$$

ده د یونیتار ماتریکس $U = (v_1, \dots, v_n)$ سره.

په ځنګرې حالت کې حقیقي سیومتریکی ماتریکسونو ($A = A^t$) آیګن-وکتورونه هم حقیقي دي.

لیکونکي: هیولیګ، ریل

یونیتار دیاګوناوړوالی په نورمالو ماتریکسونو د اړونده ټولیزې نتیجې څخه لاس ته راځي، هغه چې هر میتیکی حالت خوندي لري. د بنولو دا پاتې دی چې آیګن – ارزښت λ حقیقي دی. که په ورته توګه v آیګن- وکتور وي، نو دا له لاندې لاس ته راځي:

$$\begin{aligned} \lambda v^*v &= v^*(\lambda v) = v^*(Av) = (A^*v)^*v \\ &= (Av)^*v = (\lambda v)^*v = \bar{\lambda}v^*v, \end{aligned}$$

ځکه چې $\lambda = \bar{\lambda} \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$ لرو.

لیکونکي: هیولیګ، ریل

هر میتیکی ماتریکس

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1-i \\ -1+i & 1 \end{pmatrix}$$

دیترمینانت 0 لري. پسي $\lambda = 0$ یو آیګن – ارزښت دی او سړی ټرلی ګوري، چې

رکرنییز الج

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 - i \end{pmatrix}$$

یو اړونده آیگن-وکتور دی. له $\text{Spur } A = 3 = \lambda + \rho$ څخه د ویم آیگن - ارزښت په $\rho = 3$ حیث لاسته راځي. یو اړونده آیگن-وکتور نسبت و کمپلکس سکالار ضرب ته هغه و v ته لاندې اورتوگونال وکتور دی:

$$w = \begin{pmatrix} 1 + i \\ -1 \end{pmatrix}.$$

د نورمي کولو له لارې یونیتار ماتریکس لاس ته راځي

$$U = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 + i \\ 1 - i & -1 \end{pmatrix}.$$

په تعقیب باور لري:

$$A = U \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} U^*,$$

د

$$U^* = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 - i \\ 1 + i & -1 \end{pmatrix}$$

سره، هغه و U ته معکوس.

لیکونکي: هیولیک، کرایخ

مثبت ديفينيت ماتريکسونه Positiv definite Matrizen

يو مربع ماتريکس A مثبت ديفينيت بلل کيږي، که وي:

$$v^*Av > 0 \quad \forall v \neq 0.$$

که v^*Av يواځې نامنفي وي، نو A مثبت سيمي (نيم – يا برخه-) ديفينيت بولو.

يو مثبت ديفينيت ماتريکس A فقط مثبت دياگونالتوکي لري او آيگن-ارزبنتونه. په ځنگري توگه A معکوسور ده او معکوس يې هم مثبت ديفينيتدی.

ليکونکي: هيوليگ، ربل

ريلاي – ويش (هعني هغه د ويش تيجه) Rayleigh-Quotient

د يوه هرميتيکي مثبت ديفينيت ماتريکس S لپاره د داسي په نامه ريلاي-ويش اکسترم – ارزبنتونه

$$r_S(x) = \frac{x^*Sx}{x^*x}, \quad x \neq 0,$$

خورا کوچنی او خورالوي د S آيگن – ارزبنت دی.

ليکونکي: اپې، هيوليگ

ماتريکس S کېدی شي ايونيتار ماتريکس U له لارې دياگونال فروم ته وارول شي:

$$U^*SU = D, \quad D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n),$$

د کوم سره چې

رکرنیز الج

$$Sv_i = \lambda_i v_i \Rightarrow \lambda_i = \frac{v_i^* S v_i}{v_i^* v_i} > 0$$

او $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$ نیول یا فرض کېدی شي.

که سری $S = UDU^*$ او $x = Uy$ بدل کړي، نو دی

$$r_S(y) = \frac{y^* D y}{y^* (U^* U) y} = \frac{\sum_i \lambda_i |y_i|^2}{\sum_i |y_i|^2}.$$

دا بنایي چې

$$\lambda_{\min} \leq r_S(y) \leq \lambda_{\max},$$

چېرته چې د مطلوب ایگن-وکتورونو لپاره $y = e_1$ او $y = e_n$ لپاره صدق کوي.

لیکونکي: اپپ، هیولیک

مثلث بڼه Dreiecksform

یو کمپلکس مربع ماتریکس A کیدی شي د یوه ورته ترانسفورمیشن له لارې په پورته مثلث بڼه

$$R = \begin{pmatrix} \lambda_1 & r_{1,2} & \cdots & r_{1,n} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & r_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} = Q^{-1} A Q$$

کرنبیز الجبر

ترانفورمي شي، چپرته چې دیاگونالي د A آیگن-ارزبستونه λ_i خوندي لري. لیکونکي: هیولیک، هیورنر

بنوونه د ماتریکس په بعد n باندي د ایندکشن له لاري کیدی شي صورت ونیسي، د یوه (1×1) -ماتریکس د تریویال حالت څخه په پیل.

یو $(n \times n)$ -ماتریکس A تر څیرني لاندي نیسو، نو دا لږترلږه یو ایگنوکتور v لري. دا د نورمي کیدلو وروسته یوه اورتوگونال بنسټ $\{v, w_1, \dots, w_{n-1}\}$ ته ورپوره کیدی شي. په دې بنسټ کې څیرونه (فنکشن-که غواړی تابع) لاندي بڼه لري:

$$\tilde{A} = T^*AT = \begin{pmatrix} \lambda & x^* \\ 0 & B \end{pmatrix}.$$

د $((n-1) \times (n-1))$ -ماتریکس لپاره د ایندکشن نیوني یا فرضیې له مخې یو $\tilde{Q}^*B\tilde{Q} = R_{n-1}$ یونیټار ترانفورمیشن \tilde{Q} شتون لری د سره. له دې امله د

$$Q = T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tilde{Q} \end{pmatrix}$$

سره لاس ته راځي، چې

$$Q^*AQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tilde{Q}^* \end{pmatrix} T^*AT \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tilde{Q} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tilde{Q}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & x^* \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tilde{Q} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tilde{Q}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & x^* \tilde{Q} \\ 0 & B \tilde{Q} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \lambda & x^* \tilde{Q} \\ 0 & \tilde{Q}^* B \tilde{Q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & x^* \tilde{Q} \\ 0 & R_{n-1} \end{pmatrix} = R.
\end{aligned}$$

لیکونکی: هیولیک، هیورنر

اصلي وکتورونه Hauptvektoren

که λ دکمپلکس $(n \times n)$ - ماتریکس A یو آیگن-ارزبنت وي، د الجبری دېرخلوالی m سره، نو یو وکتور v د

$$(A - \lambda E)^m v = 0, \quad v \neq 0$$

سره اصلی وکتور بلل کیږي و آیگن-ارزبنت λ ته.

تول اصلی وکتورونه و آئگن - ارزبنت ته د صفر وکتور سره یوځای د بعد m یو لاندی- یا برخوکتور جوړوي، دا اصلیفضا H_λ و آیگن - ارزبنت λ ته. دا کرښیزي څېروني یا فنکشن A ته انواریانته دی.

توله فضا د اصلی فضاو سیده جمعه یا زیتون دی:

$$\mathbb{C}^n = \bigoplus_{\lambda} H_\lambda$$

لیکونکی: هیولیک، هیورنر

کرنییز الجبر

بسونه یی له دېرو برخیلونو یا-قدمونو رایوځای کیری.

اول - داچې یوونماتریکس یا واحد ماتریکس د هر ماتریکس سره بدلېدونکی دی یوه وکتور $v \in H_\lambda$ د څېرې (عکس؟؟) Av لپاره صدق کوي:

$$(A - \lambda E)^m Av = (A^{m+1} + \dots + \lambda^m E^m A) v = A (A^m + \dots + \lambda^m E^m) v \\ = A(A - \lambda E)^m v = A \cdot 0 = 0.$$

په تعقیب $Av \in H_\lambda$ دی.

دویم- د دې لپاره چې بعد وټاکو، ماتریکس A په پورتنی مثلثینه ترانفورمی کوو:

$$A \rightarrow B = Q^{-1} A Q = \begin{pmatrix} \lambda & & * & * & * \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda & * & * \\ & & & & \\ 0 & & & R & \end{pmatrix}.$$

دا چې $v \in H_\lambda$ لپاره

$$0 = Q^{-1}(A - \lambda E)^m Q(Q^{-1}v) = (B - \lambda E)^m(Q^{-1}v),$$

دی، اصلي وکتورونه د $v \rightarrow w = Q^{-1}v$ سره سم اصلي وکتور ته ترانفورمی کیری.

مکر د B له بني روښانه دی، چې یوون - یا واحد وکتورونه د $i \leq m$ لپاره د e_i په اصلیضا $Q^{-1}H_\lambda$ کې پراته دي. پسي یو وکتور v د $v_i \neq 0$ سره د یوه $i > m$

لیاره د $(B - \lambda E)^m$ له لاري په 0 نه څېره کيږي يا فنکشن 0 نه دی. په تعقيب $\dim H_\lambda = m$ لرو.

دریم - دا چې $\sum_\lambda \dim H_\lambda$ د الجبري د ډېرواره جمعې سره برابر دی، يعني برابر په n دی، بسيا کوي، چې د بنسټ خويونو لپاره د اصلي فضا کرښيز خپلواکوالی وښودل شي يا وښايو. دې ته استعمالیږي، چې د $\rho \neq \lambda$ لپاره لرو:

$$(A - \rho E)v = 0 \wedge v \in H_\lambda \Rightarrow v = 0.$$

که د مختلو اصلي فضاو څخه يوه د وکتورونو جمعه ورکه شي،

$$v_\lambda + v_\rho + v_\sigma + \dots = 0,$$

، نو لاس ته راځي:

$$((A - \rho E)^{m_\rho} (A - \sigma E)^{m_\sigma} \dots) v_\lambda = 0.$$

دا چې يوگونی ضربونه H_λ انوارینت دي، په پورته یادونه استعمالور دی، او لاس ته تري $v_\lambda = 0$ راځي. په ورته توگه $v_\rho = v_\sigma = \dots = 0$ تري لاس ته راځي او له دې سره صفروکتور فقط په ساده ډول انځورور دی.

ليکونکي: هيلیگ، هیورنر

د اصلفضا څيوکليکي بنسټ Zyklische Basen von Haupträumen

د يوه کمپلکس مربع ماتریکس A يو اصلفضا (اصلي فضا) کېدی شي د څيوکليکي برخفضاو په يوه سيده جمعې تجزيه شي:

کرنییز الجبر

$$H_\lambda = V_1 \oplus \cdots \oplus V_\ell,$$

دا په دې معنا چې هر برخفصا V_i د لاندې بڼې یو بنسټ لري

$$B^{k_i} v_i, \dots, B v_i, v_i, \quad B = A - \lambda E,$$

د $w_i = B^{k_i} v_i$ سره یوه آیکن-وکتور و آیکن-ارزښت λ ته.

ماتریکس A برخفصا V_i اینواریانت پرېږدیاو هلته لاندې ماتریکس-انځورونه لري:

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}.$$

لیکونکي: هیولیک، هیورنر

د تعریف سره سم H_λ له وکتورونو v څخه د $B^{k+1} v = 0$ سره جوړه ده، د کوم سره چې k کوچنی ده د λ د الجبري ډېرځلوالی m څخه. د بنسټ ټاکلي بڼه له دې امله نږدېوالی لري. د دې لپاره چې وکتورونه

$$w_i \in \ker B,$$

چې بنسټ کره کوي، وټاکو، نو د ایکنو وکتورونو $\ker B$ و λ ته برخفصاوي

$$U_j = \ker B \cap \text{Bild } B^j$$

تر څیړنې لاندې نیسو. په روښانه توګه دی

$$\emptyset = U_m \subset U_{m-1} \subset \dots \subset U_0 = \ker B.$$

وکتورونه w_i به اوس ، له تشدېری سره په پیل، ایندوکتی، جوړیږي. که
 همدا اوس کره شوي وي ، نو سړی لویوالی دا لوي k_i داسې، د هغه
 لپاره داسې چې U_{k_i} د دغه w_j په کرښزه هیولي W_{i-1} کې نه وی پروت، دا په دي
 معنا چې $v_i \neq 0$ باور لری د $B^{k_i}v_i = w_i \notin W_{i-1}$ ، $Bw_i = 0$.
 سره .

په دي ډول بالاخره د ټول آیگن-فضا $\ker B$ لپاره یو بنسټ
 $\{w_1, \dots, w_\ell\}$ جوړیږي او اړونده ځیوکلېکي بنسټونه د V_i لپاره.

د فضاو V_i د B سره (همداسې A) د ضرب له لاري روښانه دی. د غوښتل
 شوي ماتریکس انځورنه له اندي څخه لاس ته اړخي

$$A(B^j v_i) = (\lambda E + B)B^j v_i = \lambda B^j v_i + B^{j+1} v_i,$$

، که د بنسټ وکتورونه ، لکه څنگه چې ورکړ شوي دي، د کښته کېدونکي توان سره
 تنظیم کړي.

د جوړښت د ټیکوالي لپاره باید برسېره پر دي د وکتورنو $B^j v_i$ بنسټ خویونه هم
 وښوول شي. دا د دوه پلونو (قدمونو) سره صورت نیسي.

اول - لومړی کرښي. خپلواکوالی ښوول کيږي. دا تخنیکي دلایل کزدی شي د دوه
 ځیکلیکي ځنږیرونو د بېلگي

$$B^2 v_1, Bv_1, v_1, Bv_2, v_2,$$

له لاري لیدور شي. نیسو چي

$$\alpha_{2,1}B^2v_1 + \alpha_{1,1}Bv_1 + \alpha_{0,1}v_1 + \alpha_{1,2}Bv_2 + \alpha_{0,2}v_2 = 0,$$

دی، نو د B^2 سره د ضرب له لاري لرو

$$\alpha_{0,1}w_1 = 0 \implies \alpha_{0,1} = 0,$$

له امله B د B سره د ضرب له لاري اوس لرو

$$B^2v_2 = Bw_2 = 0 \quad \text{او} \quad B^3v_1 = Bw_1 = 0$$

$$\alpha_{1,1}w_1 + \alpha_{0,2}w_2 = 0 \implies \alpha_{1,1} = \alpha_{0,2} = 0$$

د جوربنت سره سم د آیگن-وکتورونو w_i کرنبیز خپلواکوالی له امله. بالاخره لرو

$$\alpha_{2,1} = \alpha_{1,2} = 0$$

بیا هم د آیگن-وکتور w_i د کرنبیز خپلواکوالی له امله.

په تولید حالت په ورته توگه مخ ته خو. دیوه کرنبیز کمبینیشن د تحلیل په هکله بستوکتور د B د مناسب توان سره ضربوي، تر خو د آیگن-وکتورونو تول ترمونه له منځه ولاړ شي.

دویم - همدومر هښایو، چي هر وکتور $u \in H_\lambda$ د بنستوکتورونو سره انځوروي دی.

پس وي دي، د $k \leq m$ $B^k u = 0$ ، سره. د $k = 1$ لپاره يي نه بښایو، ځکه چي

وکتورونه w_i د جوربنت له امله د آیگن - فضا $\ker B$ لپاره یو بنسټ جوړوي. اندوکتیو سری نیوی شي یا فرض کولی شي، چي په کي وکتورونه انځوروي دي.

همداسي آیگن-وکتور $B^{k-1}u$ انځوروي دی:

رکرنیز الج

$$B^{k-1}u = \sum_i \alpha_i w_i.$$

له دې لاس ته راځي، چې

$$B^{k-1} \underbrace{\left(u - \sum_i \alpha_i B^{k_i - k + 1} v_i \right)}_{u'} = 0.$$

د دې په تعقيب u' انځور ور دی او له دې سره u هم .

ليکونکي: هيوليگ، هيورنر

د جوردان بڼه Jordan-Form

يو کمپلکس مربع ماتریکس کېدی شي د يوه ورته والي ترانسفورمېشن له لارې د بلوک دیاگونال بڼه باندې ترانسفورم شي

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_k \end{pmatrix} = Q^{-1} A Q$$

باندې ترانسفورم شي. له دې سره د جوردان بڼه دا لاندې بڼه لري

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & \lambda_i & 1 \\ 0 & & & & \lambda_i \end{pmatrix},$$

د A يوه آيگن - ارزښت λ_i سره

تر ځای بدلون پورې د جوړدان بڼه يواځنې ده.

ليکونکي: هيوليگ، هيورنر

دا چې اصلي فضاوي H_λ د فنکشن A لاندې انوارينانت دي، کيدی شي د اصلي وکتورونو بلوکبني پورې يوه بنسټ په نسبت لاس ته راوړل شي. د ځانگړو څيوکليکي بستونو

$$B^{k_i} v_i, \dots, B v_i, v_i, \quad B = A - \lambda_i E,$$

استعمال له لارې بلوکونه غوښتونې بڼه غوره کوي

ليکونکي: څيوکليگ، هيورنر

ماتريکس

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

کرکټريستيکي پولينوم

$$p_A(\lambda) = (-1 - \lambda)^3 + 4(4 - 3(-1 - \lambda)) = -\lambda^3 - 3\lambda^2 + 9\lambda + 27$$

لري د ډبل صفر ځايونو $\lambda = -3$ او ساده صفحاڼونو $\varrho = 3$ سره.

دا چې د ماتريکس

$$(A - \lambda E) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

رانگ 2 دی، و ته فقط یو آیگن-وکتور شتون لري. د دې په تعقیب A د جوردان بڼه لري.

$$Q^{-1}AQ = J = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, Q = (w, v, \tilde{w}).$$

د کرښیز و مساواتشپستمونو د حل له لاري

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

او

$$\begin{pmatrix} -4 & 0 & 4 \\ 2 & -4 & 0 \\ 3 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{w}_1 \\ \tilde{w}_2 \\ \tilde{w}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

سړی لاندې آیگن-وکتورونه لاس ته راوړي:

$$w = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \tilde{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

اصلي ډیاگونال پوره کوي

کرنییز الجبر

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix},$$

دا په دي معنا چي د بېلگي په توگه . له دي سره دي

$$v = (-3, 4, 1)^t$$

$$Q = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

خه چي د ازمایینت له لاري تصدیق کیري.

$$A = QJQ^{-1}$$

لیکونکي: خپولیک، هیورنر

د یوه کمپلکس ماتریکس A لپاره 3 خرنګوالیز (د کوالیتی له مخې) مختلف جوردان-نورمالینې شتون لري:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \varrho \end{pmatrix}, (\lambda \neq \varrho).$$

په لومړي حالت کي λ یو ډبل آیگن - ارزښت دی د فقط یوه (تر سکالار صرب پورې) آیگن-وکتور w سره، دا په ی معا چي

$$\text{Rang}(A - \lambda E) = 1.$$

یو په دي پورې اړونده اصلی وکتور v او له دي سره دي سره ترانسفورمیشن ماتریکس

$$Q = (w, v)$$

د

رکرنییز الج

$$w = (A - \lambda E)v$$

د حل له لاری لاس ته راوړي ، همداسې د $\ker(A - \lambda E)^2$ ټاکلو له لاری.

د دې لپاره یو څرگنده بېلگه

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -9 & 8 \end{pmatrix}$$

کرکتريستیکی پولینوم

$$P_A(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 4$$

دی، د ډبل صفرځای $\lambda = 2$ سره. د

$$\begin{pmatrix} -6 & 4 \\ -9 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

حل له رای سړی $w = (2, 3)^t$ لاس ته راوړي او له دې سره

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 4 \\ -9 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

یو اړونده اصلي وکتور $v = (1, 2)^t$. دا د ازمايننت سره تصدیق کيږي:

$$A = QJQ^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

سره تصدیق کيږي. لیکونکي: خيولیک، کرایخ

کرنییز الجبر

د یوه کملکس (3×3) - ماتریکس A لپاره لاندې کولتاتیو مختلف جوردان - نورمالیږي شتون لری:

$$J = Q^{-1}AQ$$

اول - جوړه دوه مختلف آیگن-ارزبنتونه λ, ρ, σ :

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \rho & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{pmatrix}.$$

دویم - یو ډبل آیگن - ارزبنت λ :

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \rho \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \rho \end{pmatrix}.$$

په دویم حالت کې

$$\text{Rang}(A - \lambda E) = 2$$

او $Q = (w, v, \tilde{w})$ دي له آیگن وکتورونو w او \tilde{w} یوه اصلي وکتور v سره، هغه چې د مساوات سیستم د حل له لارې

$$(A - \lambda E)w = 0, \quad w = (A - \lambda E)v, \quad (A - \rho E)\tilde{w} = 0$$

د حل له لارې ټاکل کېدی شي.

دریم - یو دريواره آیگن - ارزبنت:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

په دویم حالت کې

$$\text{Rang}(A - \lambda E) = 1$$

دی او سری یو اصلي وکتور v د

$$(A - \lambda E)^2 v = 0, \quad (A - \lambda E)v \neq 0.$$

حل له لارې لاس ته راوړي.

دی، او یو غزېدلی کرنبیز خپلواک آیگن –
 اړونده آیگن – وکتور $w = (A - \lambda E)v$
 وکتور \tilde{w} دا لاندې پوره کوي:

$$(A - \lambda E)\tilde{w} = 0, \quad w \perp \tilde{w}.$$

بلاخره $Q = (w, v, \tilde{w})$
 دی.

په دریم حالت کې

$$\text{Rang}(A - \lambda E) = 2$$

دی او دی له $Q = (w, v, u)$

$$(A - \lambda E)w = 0, \quad w = (A - \lambda E)v, \quad v = (A - \lambda E)u.$$

سره. لیکونکی: وپیر

د (4x4) -ماتیکسونو جوردان-بني

Jordan-Formen von (4x4)-Matrizen

لاندي توابع ټول 14 ممکن (4×4) - ماتریکسونو د جوردان – بني خای نیوني جوربنتونه بنایي .

• څلور مختلف آیگن – ارزبنتونه $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{pmatrix}$$

• یو دوه ځله آیگن – ارزبنتونه λ_1 او دوه دوه ځله آیگن – ارزبنتونه λ_2, λ_3

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

• یو درې واره آیگن – ارزبنتونه λ_1 او یو یو واره آیگن – ارزبنتونه λ_2 .

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

• دوه دوه واره آیگن – ارزښت λ_1, λ_2

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

• یو څلورواړه آیگن – ارزښت λ_1

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$$

لیکونکي: خیولیک، هیورنر

د ماتریکسونو توانونه **Potenzen von Matrixen**

د یو کمپلکس ماتریکس توانونه A^n ، $n = 0, 1, \dots$ تیک هلته صفر ماتریکس پولي ته تلونکي دي، که د تولو آیگن-ارزښتونو λ مطلق ارزښت له 1 کوچنی دی.

پرلپسې (A^n) محدوده پاتي کيږي، که $|\lambda| \leq 1$ او د آیگن – ارزښت لپاره د ارزښت 1 سره

لیکونکي: خیولیک، هیورنر

$$J = Q^{-1}AQ$$

د A د جوردان - بني سره کېدی شي د ماتریکس - توانونه په لاندې بڼه و لیکل شي:

$$A^n = (QJQ^{-1})(QJQ^{-1}) \cdots (QJQ^{-1}) = QJ^nQ^{-1}$$

دلته یواځې دې ته اړتیا ده چې د J پولې ته تلنه (لیمیت) تر څېړنې لاندې و نیل شي. د J د بلوکفورم (- بني) کېدی شي هر بلوک J_i ځانله تر څېړنې و نیل شي. د دې لپاره لیکو

$$J_i = (\lambda_i E) + D,$$

، د کوم سره چې D گاوندی دیاگونال د یو سره خوندي لري. لکه چې په ساده توګه بنسول کیږي، د بعد m د یوه بلوک لپاره $D^m = 0$ دی. پسی صدق کوي

$$(J_i)^n = \lambda_i^n E + \binom{n}{1} \lambda_i^{n-1} D + \cdots + \binom{n}{m-1} \lambda_i^{n-m+1} D^{m-1}.$$

له دې کتموالي څخه کېدی شي د پرلپسېپولي ته تلنه (لیمیت کونورګنت) و لوستل شي.

$$|\lambda_i| < 1 \quad \text{د لپاره دی}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \binom{n}{j} \lambda_i^{n-j} = 0,$$

دی، ځکه چې $\binom{n}{j}$ فقط پولینومیال یعنی پولینومي لویږي، د دې معکوس λ_i^{n-j} اکپوننشک ټیټیږي.

که $|\lambda_i| = 1$ وي پرلپسي محدوده يا رابنده پاتيري، که $m = 1$ وي، دا په دې معنا، چي گاوندي دياگونال د يوه سره شتون نه لري.

ليکونکي: خيوليگ، هيورنر

په زيگولار ارزښت توتپه کونه Singularwert-Zerlegung

هر يوه کمپلکس $(m \times n)$ -ماتريکس A ته يونيتار ماتريکسونه U او V شتون لري د

$$U^*AV = S = \begin{pmatrix} s_1 & & 0 \\ & s_2 & \\ 0 & & \ddots \end{pmatrix}.$$

سره.

زيگولار ارزښتونه

$$s_1 \geq s_2 \geq \dots \geq s_k > s_{k+1} = \dots = 0$$

د A^*A د انگن - ارزښتونو رښي دي او k د A رانگ دی.

د U متي u_j او د V متي v_j د AA^* همداسي A^*A د ايگن-وکتورونو اورتوگونال بنسټونه جوړوي او لاندې صدق کوي:

$$Av_j = s_j u_j,$$

$$1 \leq j \leq k \quad \text{د لپاره.}$$

کرنییز الجبر

د سینګولار ارزښت توتې کونې له لارې کېدی شي کرنییزه څېړونه یا فنکشن

$$x \mapsto y = Ax$$

په لاندې بڼه انځور شي:

$$y = \sum_{i=1}^k s_i (v_i^* x) u_i$$

له دې لاس ته راځي، چې

$$\text{Kern } A = \text{span}\{v_{k+1}, \dots, v_n\}, \quad \text{Bild } A = \text{span}\{u_1, \dots, u_k\}.$$

$$\|A\|_F^2 = \sum_{j,k} |a_{j,k}|^2 = s_1^2 + \dots + s_k^2 \quad \text{او} \quad \|A\|_2 = s_1 \quad \text{داللاخړه دي.}$$

لیکونکي: اپې. هیولیک

د هر مېټیکي ماتریکس A^*A د دیاګونالي کونې له لارې لاس ته

$$V^*A^*AV = \text{diag}(s_1^2, \dots, s_k^2, 0, \dots, 0) = S^t S,$$

راځي، له هغې سره چې سړی نیولی شي، چې آیګن – ارزښتونه د خپلې لویې پسي منظم دي. دا چې A^*A مثبت دیفیټیت دي، کېدی شي چې فقط نامنفي آیګن-ارزښتونه د مربع

په څېر ولیکي او په دې توګه د $m \times n$ دیاګونالماتریکس S تعریف کړي.

د پورته مساوات څخه لرو، چې د AV متي اورتوګونال دي او نورم s_i لري:

$$AV = (s_1 u_1 \quad \dots \quad s_k u_k \quad 0 \quad \dots \quad 0) = US$$

د یوه یونیتار ماتریکس U سره.

رکرنییز الج

وروسته له دې چې غوښتونې انځورونه

$$A = USV^*$$

منځ ته ارغله، کېدی شئ پسي راتلونکي وينا ساده پسي واز مائل شي.

دا چې یونیتار ترانسفورمیشن د یوه ماتریکس رانگ نه تغیر وي، صدق کوي

$$\text{Rang } A = \text{Rang } S = k.$$

پسي لرو

$$AA^*u_j = U(SS^t)U^*u_j = u_j(s_j)^2$$

او

$$A^*Av_j = V(S^tS)V^*v_j = v_j(s_j)^2.$$

بالاخره Av_j د US د j مې متي سره برابر دی، یعنی د $u_j s_j$ سره برابر.

لیکونکي: اپې. هیولیک

فاسد معکوس Pseudo-Inverse

یو کمپلکس $(m \times n)$ ماتریکس A د سینګولار-ارزښت-توتیه کونې USV^* سره

کیدې شي د انډولوني پرابلم(مسئله) $|Ax - b| \rightarrow \min$ د مینیمال نورم سره په ښه

$$x = A^+b, \quad A^+ = VS^+U^*,$$

کرنبیز الجبر

ولیکل شي، د کوم سره چې A^+ د A فاسد-معکوس بلل کيږي، او

$$S^+ = \text{diag}(1/s_1, \dots, 1/s_k, 0, \dots, 0), \quad k = \text{Rang } A,$$

د $(n \times m)$ دیاگونال ماتریکس د مثبت سینګولار ارزښت دی

د په څنډ ارزښتونو سره.

که $\{u_1, \dots, u_m\}$ او $\{v_1, \dots, v_n\}$ د U همداښي V ، د متو اورتوګونال بنسټونه وي، نو کېدی شي کرنبیز فنکشن $x = A^+b$ په ضریبونو بڼه

$$x = \sum_{\ell=1}^k \frac{1}{s_\ell} (u_\ell^* b) v_\ell$$

انځور شي. له دې څخه په ځانګړي ډول لاس ته راځي، چې

$$\text{Kern } A^+ = \text{span}\{u_{k+1}, \dots, u_m\}, \quad \text{Bild } A^+ = \text{span}\{v_1, \dots, v_k\}$$

$$\|A^+\|_2 = 1/s_k$$

او

لیکونکي: اپې. هیولیګ

د د 2-نورم انواریانت له امله د یونیتار ترانفورمیشن له لارې کېدی شي

$$Ax - b$$

له کین د U^* سره ضرب کړي. د

$$c = U^*b, \quad y = V^*x$$

سره تړي ورته د مینیمال کولو پرابلم لاس ته راځي

$$|Sy - c| = \left| \begin{pmatrix} s_1 y_1 - c_1 \\ \vdots \\ s_k y_k - c_k \\ -c_{k+1} \\ \vdots \\ -c_m \end{pmatrix} \right| \rightarrow \min .$$

مینیموم سری د لومریو k مساواتو د حل له لاری لاس ته راوړي:

$$y_i = c_i/s_i, \quad i = 1 : k .$$

د یونیتار میاتریکس $(|x| = |y|)$ نورم ته ریښتینوالي له امله د مینیمال نورم د حل لپاره دی:

$$y_{k+1} = \dots = y_n = 0 .$$

په ټولیزه توګه ترې لاس ته راځي

$$y = S^+ c, \quad s_{i,j}^+ = \begin{cases} 1/s_i & \text{für } i = j \leq k \\ 0 & \text{sonst .} \end{cases}$$

لیکونکي: ایپ. هیولیک

د

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 5 \\ 6 & 0 & 3 \\ 2 & -4 & 5 \\ 6 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

لپاره دې د اندولوالي پرابلم حل شي

د زیګولار- ارزښت ټوټه کونې (تجزیه کونې) شمېرنې لپاره لومړی د

$$A^t A = \begin{pmatrix} 80 & -16 & 56 \\ -16 & 32 & -40 \\ 56 & -40 & 68 \end{pmatrix}$$

آیګن-ارزښتونه او آیګن-وکتورونه ټاکل کیري او ترې لاس ته راځي

$$s_1^2 = 144, s_2^2 = 36, s_3^2 = 0, \quad V = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

له دې لرو

$$S = \begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad AV = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 0 \\ 6 & 3 & 0 \\ 6 & -3 & 0 \\ 6 & 3 & 0 \end{pmatrix} = US.$$

د U دوه لومړنۍ متې د AV د اړنده متو سره د ویش له لارې لاس ته راځي او د سیګولار ارزښتونو (له دې سره باید ټوټه-یا واحد وکتورونه منح ته شي) له لارې، پاتې متې (نه یواځنې ټاکلې) و اورتونورمال بنسټ ته د پوره کونې له لارې لاس ته راځي:

$$U = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

له دي سره فاسد- معوسیت

$$A^+ = V \begin{pmatrix} \frac{1}{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} U^t = \frac{1}{72} \begin{pmatrix} -2 & 6 & -2 & 6 \\ -5 & 3 & -5 & 3 \\ 4 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

دی او

$$x = A^+b = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

د مینیمال نورم حل.

لیکونکي: اپ. هیولیک

د توپوگرافیکي کچونداتونو تیکاو یی اصلاح

Korrektur topografischer Meßdaten

د توپوگرافي جگوال h_i داتنونه یا اعداد چي کچوني له لاري لاس ته رارني ته د جگوالو

کمبنتونه $d_{i,j}$ کچ کيري. د کچوني ناتيکاو ي په بنسټ د قانون له مخي صدق کوي

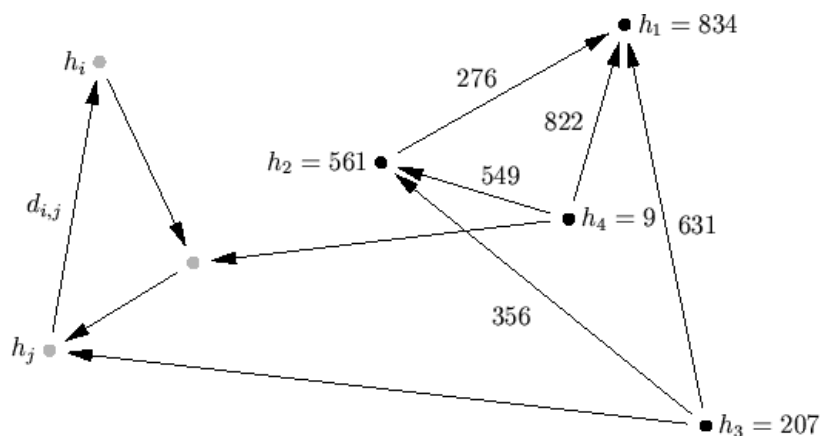
$$d_{i,j} \neq h_i - h_j$$

مناسب د جگوالي تیکاو ي x_i کېدی شي د انډولوني پرابلم

$$\sum_{(i,j)} \left(d_{i,j} - ((h_i + x_i) - (h_j + x_j)) \right)^2 \rightarrow \min .$$

له لاري حل شي.

د تلنلاري د بنوولو لپاره د کمو داتن سره یو موډل-پرابلم حل کيږي.



د جگوالي او کمښت ارزښتونو

$$h = (834, 561, 207, 9)^t, \quad d = (276, 631, 822, 356, 549)^t$$

لپاره، د $d = (d_{1,2}, d_{1,3}, d_{1,4}, d_{2,3}, d_{2,4})^t$ سره، دا لاندې له ټاکلو خوا (پورته، زیات) سیستم لاس ته راځي

F

$$A(h + x) = d, \quad A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

د مینیمال نورم غ،ښتونې حل دی:

$$x = A^+(d - Ah) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

د مینیمال – نورم – حل د څېړل شوي استعمال لپاره مخه وړ دی، ځکه چې باید د ډېر امکان سره کوچنی تیکای وټاکل شي.

لیکونکی: ویپر

د مور-پینروز-شرطونه Moore-Penrose-Bedingungen

فاسد-معکوس به د لاندې کټمټوالی له لارې یواځنی کرکتریسټیک شي:

$$\begin{aligned} AA^+A &= A & \bullet \\ A^+AA^+ &= A^+ & \bullet \\ (AA^+)^* &= AA^+ & \bullet \\ (A^+A)^* &= A^+A & \bullet \end{aligned}$$

• لیکونکی: اپ. هیولیک

ساده بنوول کیدی شي، چې د

$$A^+ = VS^+U^*, \quad A = USV^*$$

له لارې تعریف شوی فاسد-معکوس ورکړ شوي شرایط پوره کوي.

د بېلگې په توګه لومړی کټمټوالی د لاندې څخه لاس ته اړخي

$$(USV^*)(VS^+U^*)(USV^*) = U[SS^+S]V^*,$$

ځکه چې په کونجیزو نوکانو یا قوسونو کې د ټولیز شوو دیاګونال ماتریکسونو (دوه کونجیزو – یا قطبي ماتریکسونو) ضرب به د دیاګونال توکو د ضربونې له لارې جوړر شي او لرو:

$$s_{i,i}^+ = 1/s_{i,i}, \quad i \leq \text{Rang } A.$$

نور ټول کټمټوالي هم دسپډه پسي- شمېرني له لاري لاس ته راځي.

د دې بنسونه چې وښايو A^+ يواځني کرکټريستيک شوی دی د ورکړ شویو شرايطو له لاري، نور هم خوراستونځمن دی، له دې امله يې دلته له څېرني تېرېزو.

ليکونکي: اېپ. هيوليگ

اورتوگونال او ځانگړي اورتوگونال گروپونه

Orthogonale und spezielle orthogonale Gruppe

د ټولو اورتوگونالو $(n \times n)$ - ماتريکسونو Q ډېری (سټ) د اورتوگونال گروپ $O(n)$ سره ښايو يا په نڅېنه کوو يا بول.

د $Q \in O(n)$ لپاره صدق کوي

$$Q^{-1} = Q^t, \quad |\det Q| = 1$$

او د يوه کواوردينات ترانسفورميشن

$$x \rightarrow x' = Qx$$

سره اوږدوالي اوسکلار ضرب ساتلی پاتې کيږي.

د ټول اورتوگونال $(n \times n)$ - ماتريکسونو Q ډېری د $\det Q = 1$ سره د څرخونگروپ يا ځانگړي اورتوگونال گروپ

$$SO(n) \subset O(n)$$

هندارونه Spiegelung

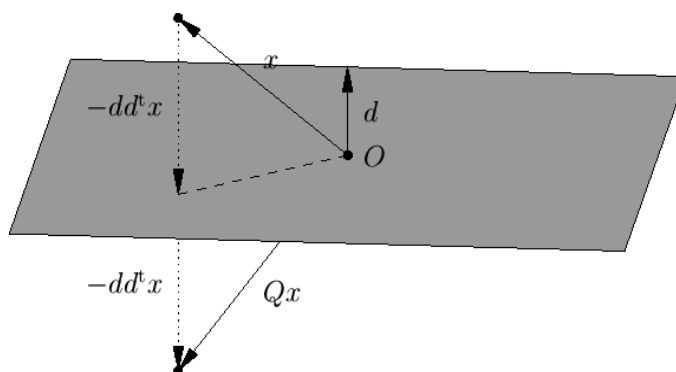
په \mathbb{R}^n کی هندارونه (په هنداره انعکاسونه) و یوه یوونوکتور (واحد-) ته $d \neq 0$ اور توگونال هایپر سطحه (Hyperebene)

$$H : d^t x = 0$$

باندې هندارونه د سیوم تری اور توگونال ماتریکس

$$Q = E - 2dd^t$$

له لاری د یوونماتریکس (واحد-) E سره په نینه کیری



پکی یا میلی په معنا ده

د Q سیومتری روښانه ده. له دې سره لرو :

$$QQ^t = Q^2 = (E - 2dd^t)^2 = E^2 - 4dd^t + 4dd^t dd^t = E,$$

دا په دې معنا چې Q اور توگونال ده.

کرنبيز الجبر

د هنداروني خوښو بنوولز لپاره لومړی په پامکي نيسو، چې وکتور

$$x - Qx = x - x + 2dd^t x = 2(d^t x)d$$

و d ته غبرگ دی، او منځتکی د x او Qx ترمنځ په هايپر هواره کي پروت دی:

$$d^t(x + Qx) = d^t x + d^t x - 2d^t d d^t x = 0.$$

له دې سره Q په هايپر هواره د x هندارونه ده په سرچينه کي، هغه چې د d سره اورتوگونا ده.

ليکونکي: اېپ.هيوليگ

څرخون Drehung

اورتوگونال $(n \times n)$ - ماتريکس

$$\begin{array}{l} \text{Zeile } i \rightarrow \\ \text{Zeile } j \rightarrow \end{array} \left(\begin{array}{cccc} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & c & -s \\ & & & \ddots \\ & & s & c \\ & & & & \ddots \\ 0 & & & & & 1 \end{array} \right)$$

په پورته کي Zeile د ليکي يا کيلي په معنا ده

د $c = \cos \varphi$ او $s = \sin \varphi$ سره يوه څرخون په φ په \mathbb{R}^n کي پرته د $x_i x_j$ -
سطحه کي په گوته کوي (تحليلوي). ليکونکي: اېپ.هيوليگ

$$\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1$$

په پام کي نیولو سره تصدیقیري، چي څرخونماتریکس R اورتوگونال دی:

$$RR^t = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & c^2 + s^2 & & & & & & \\ & & -sc + sc & & & & & & \\ & & -sc + sc & & \ddots & & & & \\ & & & c^2 + s^2 & & & & & \\ & & & & & \ddots & & & \\ 0 & & & & & & & & 1 \end{pmatrix} = E.$$

• لیکونکی: اپ. هیولیک

څرخونمحور او څرخونکونج Drehachse und Drehwinkel

هر په \mathbb{R}^3 کي څرخون Q یو څرخون محور لري، دا په دی معنا چي یو یوونوکتور u اینوارینانت پریردي، او په یوه کونج φ یو څرخون بنایي په هغه هواره کي چي u ته (باندې) اورتوگونال ده.

نسبت و یوه اورتوگونال ولاړسیستم u, v, w ته Q لاندې د ماتریکس آنورونه لري:

$$\tilde{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

او د څرخونکونج لپاره په ځانگړي توگه صدق کوي

$$\cos \varphi = \frac{1}{2} (\text{Spur } Q - 1) .$$

• ليکونکي: هيوليگ، ريل

د يوه څرخونماتريکس Q لپاره لرو:

$$Q^{-1} = Q^t, \quad |\det Q| = 1 .$$

دا چې د يوه اورتوگونالماتريکس آيگن-ارزښت λ مطلق ارزښت 1 لري او $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = \det Q = 1$ دی، لرو، چې لږ تر لږه يو آيگن - ارزښت 1 دی. د مناسب په گڼه کزلز يا نمر هکولو سره يا

$$\lambda_1 = \overline{\lambda_2}, \quad \lambda_1 \lambda_2 = 1$$

دی او يا

$$\lambda_i \in \{-1, 1\} .$$

دا نورمي شوی ايگن- وکتور u د آيگن - ارزښت 1 څرخونمحور ټټکي.

د يوه اورتوگونالو لارسيستم u, v, w لپاره باور لري:

$$Qu = u$$

$$Qv = \alpha v + \beta w$$

$$Qw = \gamma v + \delta w .$$

دا چې Qv, Qw کوم د u - کومپوننت نه لري، له لاندې له کونجساتونکو اورتوگونال مارتیکسونو څخه لاس ته راځي:

رکرنییز الج

$$x \perp u \Rightarrow Qx \perp Qu = u.$$

که پورته مساوات د ماتریکس بڼه باندې

$$Q \underbrace{(u, v, w)}_P = (u, v, w) \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \gamma \\ 0 & \beta & \delta \end{pmatrix}}_{\tilde{Q}},$$

$$\tilde{Q} = P^{-1}QP$$

باندې ولیکل شي، له لاس ته اړخې، چې

$$\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix}$$

یو څرخون ماتریکس دی. په همدې ډول د شپور د انواریانت له امله لاس ته راځي:

$$\text{Spur } Q = \text{Spur } \tilde{Q} = 1 + 2 \cos \varphi$$

• لیکونکي: هیولیگ، ریل

ماتریکس

$$Q = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$$

یو دیاگونال ماتریکس دی، ځکه چې لرو:

کرنییز الجبر

$$Q^t Q = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = E \Rightarrow Q^t = Q^*$$

او

$$\det Q = \det \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} = +1.$$

څرخونمحرور د آنګن- وکتور u په حیث ټاکل کيږي و آیګن - ارزښت $\lambda = 1$ ته:

$$\frac{1}{2} \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & -2 & -\sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} & -1 \end{pmatrix}}_{Q-E} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow u = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

څرخونکونج φ له

$$\cos \varphi = \frac{1}{2}(\text{Spur } Q - 1) = \frac{1}{2}(1 - 1) = 0$$

څخه لاس ته اړخي، د $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$ په حیث .

د φ مخنځبڼه د څرخونلور u د لوریزوالي په واک کې ده او کېدی شي د یوه

ولارسیستم (کووردینات سیستم) $\{u, v, w\}$ وټاکې شي:

$$w^t Q v = w^t (\cos \varphi v + \sin \varphi w) = \sin \varphi .$$

د

$$v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

سره د راورل شوي بېلگي لپاره لرو:

$$\sin \varphi = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = 1$$

نو لرو: $\varphi = \frac{\pi}{2}$ لیکونی: وپیر

د یو خرخون په ضریبونو توپه کونه Faktorisation einer Drehung

یو خرخون Q په \mathbb{R}^3 کې په کوارډیناتمخورد د کوارډیناتونو د ضرب په څېر کېدی انځور شي:

$$Q = D_z D_y D_x .$$

• لیکونکي: هیولیک، ریل

Q د D خرخون کېدی شي و ټاکل شي، دا سي چې یو په بل پسې successive د توکي q_{21}, q_{31}, q_{32} له منځه یووړل شي:

کرنبيز الجبر

$$D_z^{-1}Q = \begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$$

$$D_y^{-1}D_z^{-1}Q = \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix}$$

$$D_x^{-1}D_y^{-1}D_z^{-1}Q = \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} = R.$$

له دي سره داسي کار اخستل شوی يا مخ ته تللي يو، چي يو په خوبه آيگن-وکتور
 $(v_1, v_2)^t$

په $(1, 0)^t$ باندې د يوي سطحې د څرخون D له لارې ځان څېره کړی شي (يعني د تابع
 په څېر وليکل شي). دا چي $\det R = 1$ دی $r_{33} = 1$ لرو او د ميتو د نورمي کولو له
 امله بايد R يوونماتريکس (واحد ماتريکس) وي. له دي سره غوښتونې انځورونه لاس
 ته راځي.

• ليکونکي: هيوليگ، ربل

د دي لپاره چي د ماتريکس

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{\sqrt{6}}{4} & -\frac{\sqrt{4}}{8} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{6}}{8} \end{pmatrix}$$

په ضربیونو ټوټه کول لاس ته راوړو، نو لومړی توکی $q_{2,1}$ له منځه وړو د $\frac{\pi}{2}$ په کچه څرخون د z -محور باندې:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{6}}{8} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{6}}{8} \end{pmatrix}.$$

داسې پای کوو چې د y -محور باندې د $\frac{\pi}{4}$ په کچه څرخوو:

:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} D_z^* Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

لاس ته راغلی ماتریکس یوو څرخون D_x دی د x -محور باندې. په ټولیزه توګه لاندې په ضربیونو ټوټه کونه لاس ته راوړو:

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

کرنبیز الجبر

 D_z D_y D_x

• لیکونکی: هیولیگ، کرایخ

خرخونماتریکس Drehmatrix

په \mathbb{R}^3 کې یو څرخون د نورمې شوي څرخون محور لور u او څرخونکونج φ سره ، داسې لوریزه لکه بنی پیچي میخ ، د یو وکتور x فنکشن جوړوي

$$Qx = \cos \varphi x + (1 - \cos \varphi) uu^t x + \sin \varphi u \times x$$

، چیرته چې $v \times x$ د u او x صلیب ضرب (وکتوري ضرب، چې x سره په نڅینه کیري) په نڅینه کوي. اړونده څرخونماتریکس دی:

$$Q : q_{ik} = \cos \varphi \delta_{ik} + (1 - \cos \varphi) u_i u_k + \sin \varphi \sum_j \varepsilon_{ijk} u_j .$$

د کرونیکر سومبول δ_{ik} او ε_{ijk} -تنزور سره.

• لیکونکی: هیولیگ، ریل

دا بسیا کوي پسي وښایو، چې $Qu = u$ او یو و u ته اورتوگونال وکتور v په یوه

کونج φ د u په محور باندې وڅرخي. لومړی غوښتنه ترلر کتل کیري. د v څپرې یا تابع ارزښت په څپر لاس ته راځي

$$Qv = \cos \varphi v + \sin \varphi u \times v,$$

څه چې په φ د څرخون سره د v او $u \times v$ څخه غزېدلې سطحه په گوته کوي.

• لیکونکي: هیولیگ، ربل

د تولیز فرمول سره سم د $u = \frac{1}{\sqrt{3}}(1 \ 1 \ 1)^t$ په محرر په $\varphi = \frac{\pi}{3}$ یو د څرخون

ماتریکس Q له 3 ترمونو څخه په لاندې ډول یوځای کیري:

په تولیزه توگه لاس ته راوړ

$$\cos \varphi \delta_{ik} : \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$(1 - \cos \varphi) u_i u_k : \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \bullet \text{ لیکونکي: هیولیگ، کرایڅ}$$

$$\sin \varphi \sum_j \varepsilon_{ijk} u_j : \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{مربعیزه} \\ \text{فورم (څلوری یې بڼه)} \\ \text{Quadratische Form} \end{array}$$

د یوه حقیقي سیموتریک ماتریکس A لپاره دا لاندې

$$\alpha(x) = x^t A x$$

مربعیزه فورم نوموو.

د A د آیگن – ارزښت د مخنښې بدلون له مخې لاندې درې تیوپه (ډولونه) توپيروو:

کرنییز الجبر

- الیپتیکی (بیضوي ډوله) بڼه: ټول آیگن – ارزښتونه همغه مخخښه لري.
- پارابولیک: لږ تر لږه یو آیگن – ارزښت صفر دی او نور آیگن ارزښتونه همه یابرابرې وخنځنې لري.
- های پارابولیکي: د مختلفو مخخښو سره آیگن – ارزښتونه شتون لري.

لیکونکي: ایپ، هیولیک

د A سیومتری اریین نه ده چې مخ له مخه و نیول شي (فرض شي)، د ټولیز ماتریکس لپاره کېدی شي مربع بڼه په لاندې ډول ولیکل شي:

$$x^t Ax = \sum_{j,k} x_j a_{j,k} x_k = \sum_j a_{j,j} x_j^2 + \sum_{j < k} (a_{j,k} + a_{k,j}) x_j x_k$$

پس کېدی شي هر ځل دوه ترمونه سره یوځای کړو او مربع بڼه سیومتری کړو یا په سیمتری وپروو:

$$x^t Ax = \frac{1}{2} x^t (A + A^t) x .$$

مربع بڼې د بېلگې په توگه د یوه سکالارتابع f د ټیلور- وډې د لومړي ترم په څېر رامنځ ته کیږي:

$$f(x) = f(0) + \text{grad } f(0)^t x + \frac{1}{2} x^t (H f(0)) x .$$

په دې حالت کې $H f$ د دویم ټوټه (- partiellen) مشتق د هسې-ماتریکس دی، د بدلونوالي په بنسټ سیومتری دی. لیکونکي: ایپ، هیولیک

سیومتریک ماتریکس

$$A = \begin{pmatrix} 1 + \lambda & 1 - \lambda \\ 1 - \lambda & 1 + \lambda \end{pmatrix}$$

آیگن – ارزښتونه 2 او 2λ لري.

مربعي بڼه

$$\alpha(x) = x^t Ax$$

د $\lambda > 0$ لپاره بیضوي (هگی ډوله) ده، د $\lambda = 0$ لپاره پارابولیک او د $\lambda < 0$ لپاره هایپارابولیک دی.

• لیکونکي: اپ، هیولیک

کوادریک Quadrik

تکي

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^n : \alpha(x) + 2\beta(x) + \gamma = 0\}$$

کوادریک بلل کيږي، چېرته چې α یو مربعیزه بڼه، β یوه کرښوزه بڼه او γ یوه ثابت ده.

د ماتریکس لیکدود په ډول لیکل په لارندې ډول لیکل کيږي Q

$$Q : x^t Ax + 2b^t x + c = 0$$

د $\alpha(x) = x^t Ax$ او $\beta(x) = b^t x$ سره.

د Q انځورونه یواځنی نه ده. د بېلگې په توګه کېدی شي د تعریف مساوات د یوه په خوښه ثابتې سره ضرب شي.

• لیکونکي: اپ، هیولیک

د کوادریکونو شډله ټوټه ونه Grobeinteilung der Quadriken

د یوه کوادریک د مساوات څخه په پیل

$$Q: \quad x^t A x + 2b^t x + c = 0$$

لیکو

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{c|c} c & b^t \\ \hline b & A \end{array} \right).$$

د $\tilde{x}^t = (1, x_1, \dots, x_n)$ سره کېدی شي Q هم په لاندې هوموجین بڼه ولیکل شي:

$$Q: \quad \tilde{x}^t \tilde{A} \tilde{x} = 0$$

لاندې ډولونه یا تیوپونه توپيروو:

$$\text{Rang } \tilde{A} = \text{Rang } A$$

• مخروطي کوادریک

$$\text{Rang } \tilde{A} = \text{Rang } A + 1$$

• منځتکي کوادریک

$$\text{Rang } \tilde{A} = \text{Rang } A + 2$$

• پارابوليکي کوادریک

• لیکونکي: اپ، هیولیک

کوادریک

یا دونه (ژباری): په سطحه کې یوه کره (کرېنه)، په درې بعدیزه (درېپراخیدونې) فضا کې یوه سطحه ده، د ډېرو اووښتونو یا متحولو له لارې تشریح یا بنوول کېدی شي. پای

$$Q: x_1^2 + \lambda x_2^2 + 2x_2 + \lambda = 0$$

دې د $\lambda \in \mathbb{R}$ سره ورکړ شوي وي، همداسې د ماتریکس لکیندود

$$Q: x^t A x + 2b^t x + c = 0$$

د

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c = \lambda, \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

سره ورکړ شوي وي.

د $\lambda = 0$ لپاره $\text{Rang } A = 1$ دی، پرته له دې $\text{Rang } A = 2$ دی. د $\lambda = \pm 1$

لپاره $\text{Rang } \tilde{A} = 2$ دی، پرته له دې $\text{Rang } \tilde{A} = 3$ دی. له دې سره $\lambda = 0$ د Q

لپاره یو پارابول، د $\lambda = \pm 1$ لپاره مخروطي ډوله کوادریک او د نورو ټول ارزښتونو لپاره یو منځکي کوادریک دی.

لیکونکي: اپې، هیولیک

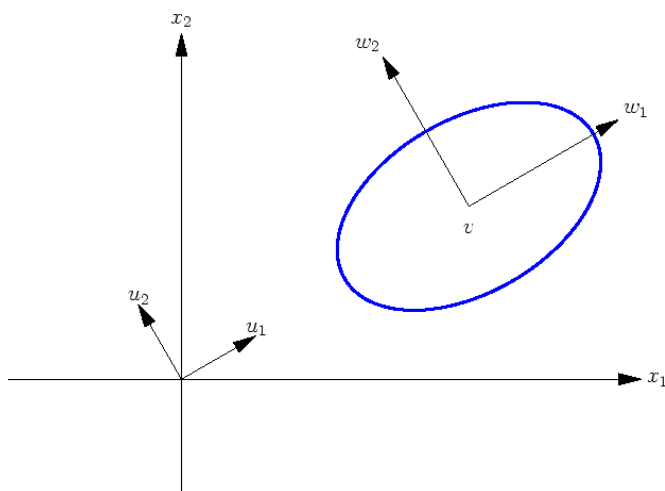
اصلي- محور — ترانسفورمیشن Hauptachsentransformation

د څرخون او راکښنې له لارې په \mathbb{R}^n کې کېدی شي یو کوادریک په نورمال بڼه ترانسفورمي شي:

کرنبیز الجبر

$$x^t A x + 2b^t x + c = \sum_{i=1}^m \lambda_i w_i^2 + 2\beta w_{m+1} + \gamma, \quad x = U w + v,$$

چیرته چې $m = \text{Rang } A$ او $\beta\gamma = 0$ صدق کوي.



له دې سره د څرخون ماتریکس U متی د A ایگن-ارزبنتونو λ_i ته ایگن-وکتورونه u_i خوندي لري، چې د هغې لور اصلي محور بلل کيږي. د راکبني وکتور (راکبنونو وکتور) v د کوادریک منځتکی دی. لیکونکي: ایپ، هیولیک

سیومتري ماتریکس A ته له ایگن-وکتورونو u_i څخه د $\det(u_1, \dots, u_n) = 1$ سره یو اړوتوگونال بنسټ شتون لري، د کومو سره چې لومړی و ایگن-ارزبنتونو $\lambda_i \neq 0$ ته ایگن-وکتورونه نټول کيږي. د لومړي ځای بدلون $x = U y = (u_1, \dots, u_n) y$ پسې له دې سره لاندې دیاگونال بڼه لاس ته راځي

$$y^t \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_m, 0, \dots, 0) y + 2(\underbrace{U^t b}_{\bar{b}})^t y + c.$$

له صفر څخه مختلف ایگن-ارزبنتونو $\lambda_i \neq 0$ لپاره د نورو ورپسې ځای بدلون له لارې

رکرنییز الج

$$y_i = z_i - \tilde{b}_i / \lambda_i$$

کیدی شیکرنییز ترمونه له حایه یورل شي (مربعي پوره کونه). ثابتي د

$$c \rightarrow \gamma = c - \sum_{i=1}^m \tilde{b}_i^2 / \lambda_i.$$

سره سم تغیر خوري، نو اوس له دي سره اوس دا بڼه لرو

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i z_i^2 + \sum_{i=m+1}^n 2\tilde{b}_i z_i + \gamma.$$

که اوس یو $\tilde{b}_i \neq 0$ د $i \geq m+1$ سره شتون ولري، نو د یوه بل څرخون پسې د

$$z'_i = z_i, \quad i \leq m$$

$$z'_{m+1} = (1/\beta) \sum_{i=m+1}^n \tilde{b}_i z_i, \quad \beta = \pm |\tilde{b}|$$

او په اړونده اور توگونال د z'_{m+2}, \dots, z'_n سره تکمي شوی

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i (z'_i)^2 + 2\beta z'_{m+1} + \gamma.$$

لاس ته راځي.

له دي سره د β سره مخ نڅېنه پاسي ټاکل کيږي، چي د β سره ویش وروسته لږ تر لږه

دومره مثبت لکه منفي ترمونه λ_i / β رامنځ ته شي.

اخرنی راکښنه

کرنییز الجبر

$$w_{m+1} = z_{m+1} + \gamma/(2\beta)$$

$$w_i = z_i, \quad i \neq m+1$$

ثابتہ لہ منخہ وری او بالاخرخ راکوی:

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i w_i^2 + 2\beta w_{m+1}.$$

لیکونکی: اپپ، هیولیگ

کوادریکونه

یا دونه (ژباری): په سطحه کی یوه کره (کرنه)، په درې بعدیزه (دریپراخیدونی) فضا کی یوه سطحه ده، د ډبرو اووښتونو یا متحولو له لاری تشریح یا ښوول کیدی شي. پای

$$Q: 8x_1^2 + 17x_2^2 + 20x_3^2 + 20x_1x_2 + 8x_1x_3 + 28x_2x_3 - 48x_1 - 114x_2 - 78x_3 + 207 = 0$$

$$Q: 8x_1^2 + 17x_2^2 + 20x_3^2 + 20x_1x_2 + 8x_1x_3 + 28x_2x_3 - 48x_1 - 114x_2 - 78x_3 + 207 = 0$$

دی په نورمال فورم یا - پنی ترانسفورمی شي.

د ماتریکس لکنود سره لاس ته راځي

$$Q: x^t Ax + 2b^t x + c = 0$$

د

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 10 & 4 \\ 10 & 17 & 14 \\ 4 & 14 & 20 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -24 \\ -57 \\ -39 \end{pmatrix}, \quad c = 207.$$

سره.

ماتریکس A آیگن - ارزښتونه 36 ، 9 او 0 لري، په دې اړونده نورمي شوي آیگن -

وکتورونه u_i د $\det(u_1, u_2, u_3) = 1$ سره د بېلگې په توګه دي:

$$u_1 = \frac{1}{3}(1, 2, 2)^t, \quad u_2 = \frac{1}{3}(2, 1, -2)^t, \quad u_3 = \frac{1}{3}(2, -2, 1)^t.$$

د ترانسفورمیشن $x = Uy$ پسې د $U = (u_1, u_2, u_3)$ سره لاس ته راځي

$$Q : 36y_1^2 + 9y_2^2 - 144y_1 - 18y_2 + 18y_3 + 207 = 0.$$

د مربعیزې تکمیلونې له لارې

$$z_1 = y_1 - 2, \quad z_2 = y_2 - 1, \quad z_3 = y_3,$$

لاس ته راځي

$$Q : 36z_1^2 + 9z_2^2 + 18z_3 + 54 = 0.$$

راکټنه

$$w_1 = z_1, \quad w_2 = z_2, \quad w_3 = z_3 + 3$$

بالاخره نورمال فورم (- بڼه) راګوي

$$Q : 36w_1^2 + 9w_2^2 + 18w_3 = 0.$$

په ټولیزه توګه ترانسفورمیشن لاندې فورم یابڼه راګوي

کرنییز الجبر

$$x = Uy = Uz + U \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = Uw + U \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + U \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

پس راکبنه ده

$$v = U \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 \\ 11 \\ -1 \end{pmatrix}$$

او د د کوادریک منخ ټکی په گوته کوي.

لیکونکي: اپپ، هیولیگ

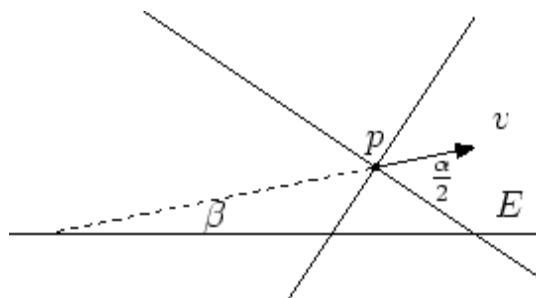
مخروط غوڅی Kegelschnitt

د یوه ډبل مخروط غوڅی

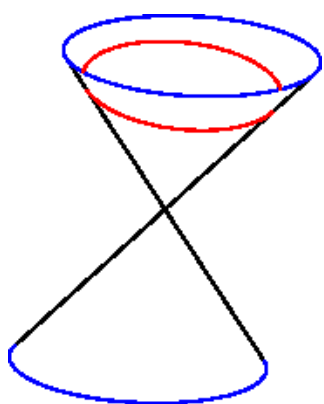
$$K : (x - p)^t v = \pm \cos \frac{\alpha}{2} |x - p| |v|$$

$E : x_3 = 0$ د څوکې $(\begin{smallmatrix} p_3 \neq 0 \\ p \end{smallmatrix})$ ، لور v سره او وازولو کونج α د سطحې سره یوه مربعیزه کره ده

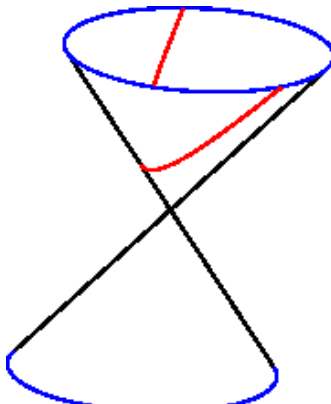
$$K \cap E : a_{1,1}x_1^2 + 2a_{1,2}x_1x_2 + a_{2,2}x_2^2 + 2b_1x_1 + 2b_2x_2 + c = 0.$$



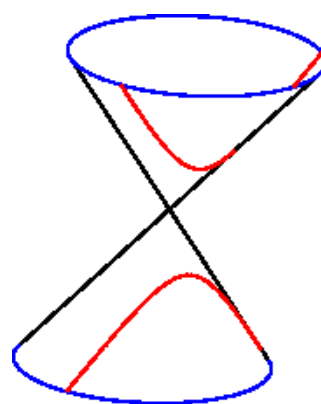
د مخروط غوڅي تيوپ يا ډول د E او کرښي ، $p + tv \quad t \in \mathbb{R}$ ، ترمنځ کونج β د لویوالي په واک کې دی



Elliptic: بیضوي یا هگښ
 $\beta > \alpha/2$



Parabel: پارابول
 $\beta = \alpha/2$



Hyperbel: های پارابول
 $\beta < \alpha/2$

لیکونکي: اپ، هیولیگ

د دوه بعدی کوادریکونو د اوکلیدی نورمال بڼه

Euklidische Normalform der zweidimensionalen Quadriken

د سطحیزو کوادریکونو مختلف ډولونه شتون لري، د لاندې نورمال فورمونو سره:

کرنییز الجبر

• مخروطی کو ادریکونه

Normalform نورمال بنه	Bezeichnung نومونه
$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} = 0$	Punkt نکی
$\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} = 0$	schneidendes Geradenpaar د غوڅوونکو کرنیو جوړه
$\frac{x_1^2}{a_1^2} = 0$	Doppelgerade دبلی کرنی

• منڅتکی کو ادریکونه

Normalform نورمال بنه	Bezeichnung نومونه
$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + 1 = 0$	(leere Menge) تنش دپری
$\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} + 1 = 0$	Hyperbel های پارابول

$-\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} + 1 = 0$	Ellipse بیصوي (هگی)
$\frac{x_1^2}{a_1^2} + 1 = 0$	(leere Menge) تش ډېری
$-\frac{x_1^2}{a_1^2} + 1 = 0$	paralleles Geradenpaar د کرښو غبرگه جوړه

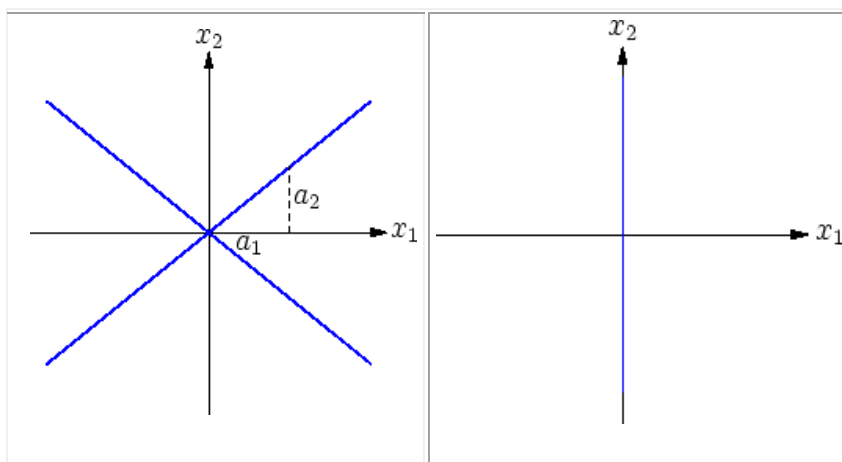
• پارابولیکي کوادریکونه

Normalform	Bezeichnung
نورمال بڼه	نومونه
$\frac{x_1^2}{a_1^2} + 2x_2 = 0$	Parabel پارابول

نورمالفورمونه یواځني دي، د ایندکسونو یا پېژند نڅښو تر ځای بدلون پورې او د مخروطي کوادریکونو د یوې ثابتې سره د ضرب پورې.

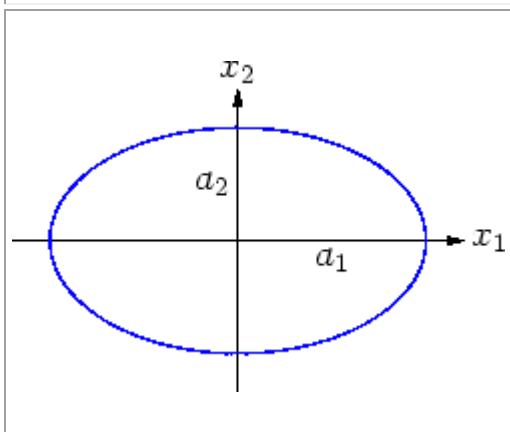
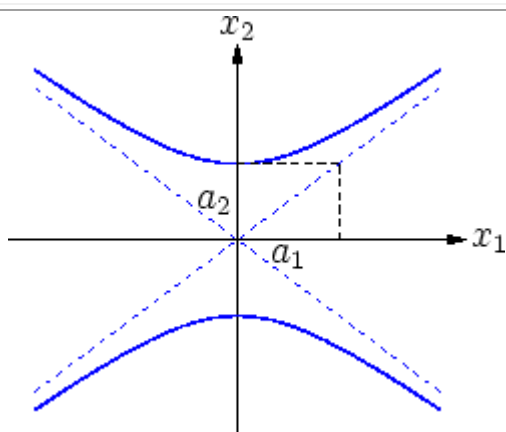
لویې a_i مثبت ایښول کيږي او د کوادریکونو د اصلي محور اوږدوالی بلل کيږي

schneidendes Geradenpaar	Doppelgerade
د غوڅیدونکو کرښو جوړه	ډبل کرښې



Hyperbel های پارابول

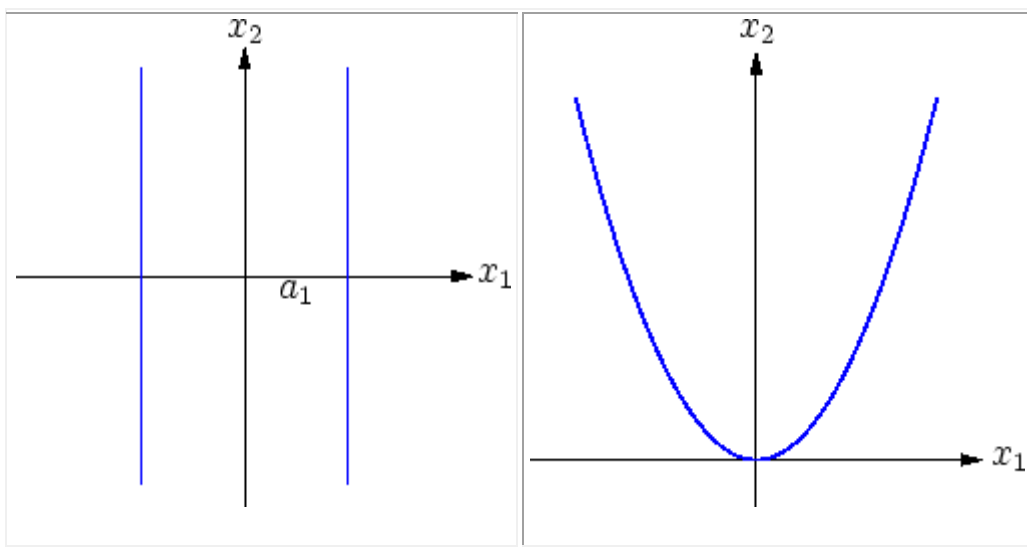
Ellipse بیضوی یا هکی



paralleles Geradenpaar

غبرگه (موازي) کر بنجوره

Parabel پارابول



لیکونکی: اپب، هیولیگ

اوس دی د لاندی کوادریکونو نورمالفورم (- بنه) او تیوپ و تاگل شی

$$Q : 3x_1^2 + 3x_2^2 + 10x_1x_2 - 12\sqrt{2}x_1 - 4\sqrt{2}x_2 - 8 = 0$$

ماتریکس فورم د مربعیز فورم خخه په پیل،

$$x^t Ax + 2b^t x + c = x^t \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} x + 2\sqrt{2}(-6, -2) x - 8$$

لومری سری د ماتریکس A آیگن - ارزینتونه او آیگن - وکتورونه تاکی.

کرکتریتیکی پولینوم دی:

$$(3 - \lambda)^2 - 25 = 9 - 6\lambda + \lambda^2 - 25 = \lambda^2 - 6\lambda - 16$$

او لاندی صفرخایونه لری

$$\lambda_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 + 64}}{2} = 3 \pm 5$$

کرنبیز الجبر

و $\lambda_1 = -2$ ته یو نورمي شوی آیگن-وکتور د لاندې کرنبیز مساوات د حل څخه لاس ته راوړل کیږي

$$\begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} v_1 = 0$$

نو $v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1)^t$ دی. دا چې دویم آیگن-وکتور په لومړي باید عمود (ولار)

وي، نو لاس ته راځي $v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)^t$ ، د کوم سره چې مخخښه داسې باید ټاکل شوي وي، چې د لاندې ورکړ شوي ترانفورمیشن ماتریکس دیترمینانت مثبت وي:

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

د $x = Uy$ سره ترانسفورمې شوي مساوات لاندې بڼه لري:

$$0 = y^t \tilde{A} y + 2b^t y + c$$

$$= y^t U^t A U y + 2(b^t U) y + c$$

$$= -2y_1^2 + 8y_2^2 - 8y_1 - 16y_2 - 8.$$

د مربعیزې پوره ونه یا تکمیلونه راکوي

$$0 = -2y_1^2 + 8y_2^2 - 8y_1 - 16y_2 - 8$$

$$= -2(y_1 - 2)^2 + 8(y_2 - 1)^2 - 8$$

$$= -2z_1^2 + 8z_2^2 - 8$$

په همدې ډول

$$\frac{z_1^2}{2^2} - \frac{z_2^2}{1^2} + 1 = 0.$$

نو مساوات یو های پارابول انځوروي.

(Autoren: Höllig/Hörner)

د درې بعدي کواډریکونو د اقلیدس (اویکلید) نورمالفورم

Euklidische Normalform der dreidimensionalen Quadriken

د فضایی کواډریکونو 17 مختلف ډولونه شتون لري د لاندې نورمالفورمونو سره:

• مخروطي کواډریکونه

Normalform	Bezeichnung
نورمال بڼه	نومونه
$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2} = 0$	Punkt

کرنبیز الجبر

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$	(Doppel-)Kegel (دبل) مخروط
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$	Gerade کرنبه
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$	Schneidende Ebenen غوڅونکي سطحې
$\frac{x^2}{a^2} = 0$	Doppelebene دبل سطحې

• منڅتکي کوادریکونه

نورمال بڼه Normalform	په نخښه ونه Bezeichnung
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0$	(leere Menge) (تشدېری)
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0$	دوه پوښیز های پرابولونید zweischaliges Hyperboloid
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0$	یو پوښیز های پرابولونید einschaliges Hyperboloid

$-\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} - \frac{x_3^2}{a_3^2} + 1 = 0$	Ellipsoid ایلیپسویڈ
$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + 1 = 0$	(leere Menge) تشہری
$\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} + 1 = 0$	hyperbolischer Zylinder ہایپر بولیکی توتہ
$-\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} + 1 = 0$	elliptischer Zylinder ایلیپتیکی توتہ
$\frac{x_1^2}{a_1^2} + 1 = 0$	(leere Menge) تشہری
$-\frac{x_1^2}{a_1^2} + 1 = 0$	parallele Ebenen غبرگی سطحی یا ۰ ہواری

• پارابولیکی کوادریکونہ

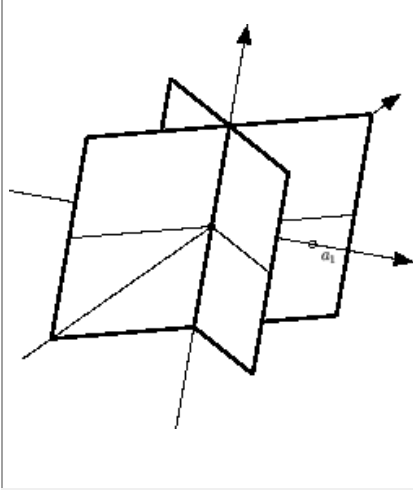
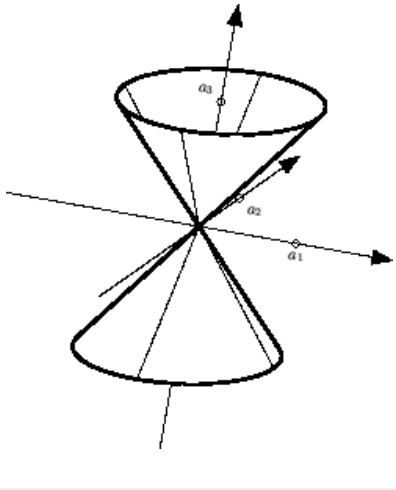
نورمال بنہ	نومونہ
$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + 2x_3 = 0$	هگی دولہ ایلیپمیکی پارابولویڈ
$\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} + 2x_3 = 0$	های پارابولیکی پارابولویڈ

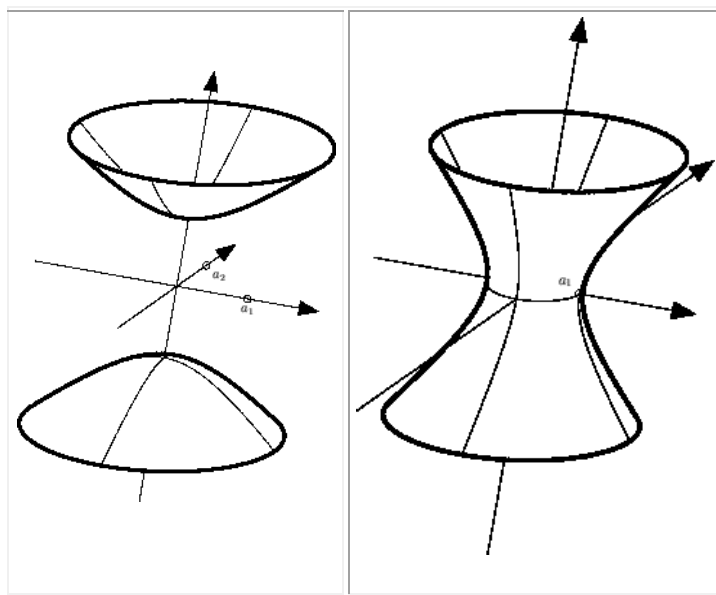
کرنبیز الجبر

$\frac{x_1^2}{a_1^2} + 2x_2 = 0$	پارابولیکي توتہ
----------------------------------	-----------------

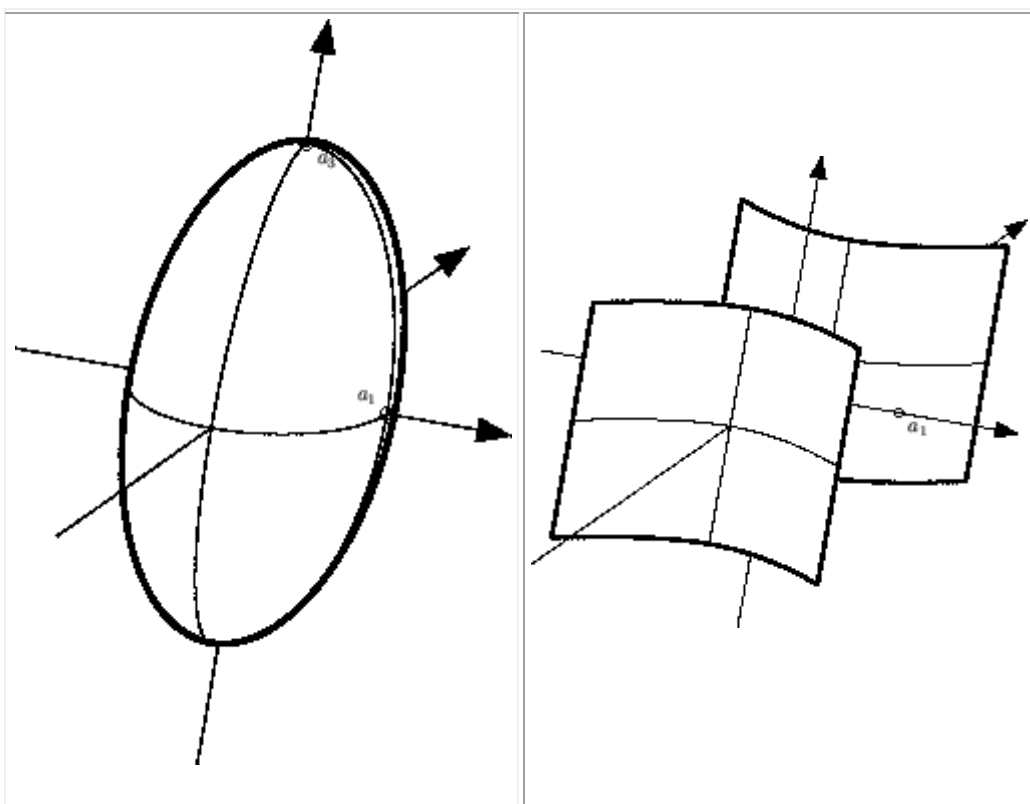
نورمال بنی د ایندکسونو یا پیژند نخبو پوری یواځنی تاکلی او مخروطی کوادریکونه د ثابتی $c \neq 0$ سره د ضرب پوری یواځنی تاکلی.

لویی a_i مثبت اینول کیری او د کوادریکونو د اصلی محور اوږدوالی بلل کیری.

غوځونکي سطحی	(دبل) مخروط
	
یو یوینیز های پارابول	دوه پوینیز های پارابول



Ellipsoid هکی ډوله یا بیضوي ډوله	های پارابولیکي توتہ hyperbolischer Zylinder

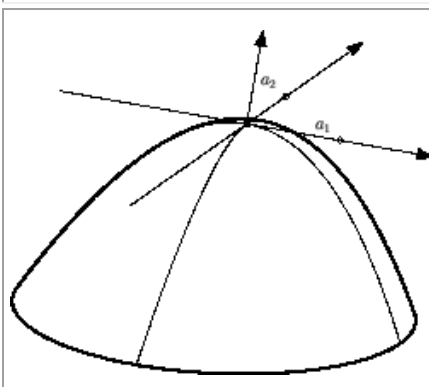
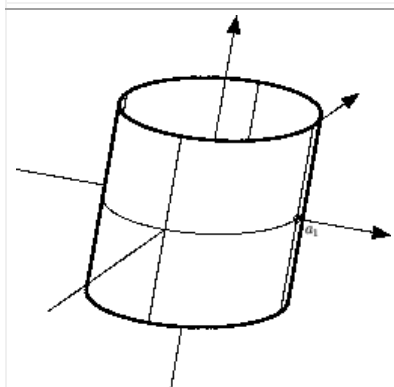


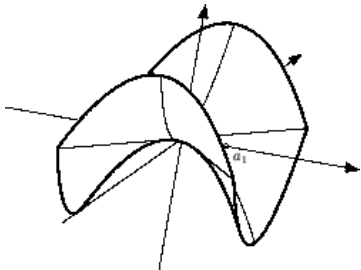
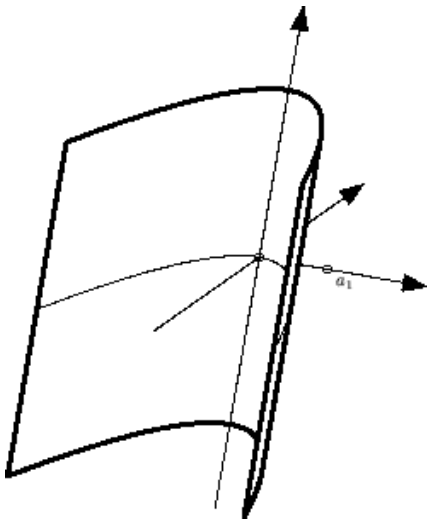
elliptischer Zylinder

بيضوي تونه

elliptisches Paraboloid

بيضوي پارابولوئيد



hyperbolisches Paraboloid های پارابولیکی پارابولونید	parabolischer Zylinder پارابولیکی توتہ یا - استوانہ
	

لیکونکی: هیولیگ، هیرنر

اوس دې د لاندې کوادریکونو نورمال بڼه او تیوپ (ډول) و ټاکل شي:

$$Q: \quad x^t \begin{pmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 4 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} x + 2(-2, 1, 2)x + 2 = 0$$

د ماتریکس کرکنریستیکی یا ټاټونکی پولینوم

$$p(\lambda) = \lambda^3 - 9\lambda^2 - 9\lambda + 81,$$

کرنییز الجبر

لاندي صفرخاي لري:

$$\lambda_1 = 9, \quad \lambda_2 = 3, \quad \lambda_3 = -3.$$

و آيگن - ارزبنتونو λ_i ته اړونده نورمي آيگن-وکتورونه دي:

$$v_1 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix},$$

چېرته چې مخخبنه داسې ټاکل کيږي، چې ولاړسيستم منح ته راځي.

د اورتوگونال ترانسفورميشن ماتريکس په چپټ منح ته راځي:

$$U = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

دا د $x = Uy$ سره ترانسفورمي مساوات لاندي بڼه لري:

$$y^t \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} y + 2(0, 3, 0)y + 2 = 0.$$

مربعيزه پوره کونه راکوي

$$\begin{aligned} 0 &= 9y_1^2 + 3y_2^2 - 3y_3^2 + 6y_2 + 2 \\ &= 9y_1^2 + 3(y_2 + 1)^2 - 6y_2 - 3 - 3y_3^2 + 6y_2 + 2 \end{aligned}$$

$$= 9z_1^2 + 3z_2^2 - 3z_3^2 - 1$$

په همدې توگه

$$\frac{z_3^2}{\frac{1}{3}} - \frac{z_1^2}{\frac{1}{9}} - \frac{z_2^2}{\frac{1}{3}} + 1 = 0.$$

نور مساوات یو پوښیز های پارابول انځوروي

لیکونکي: هیولیگ، هیورنر

چي غوټي پسي وهي په لاس به درشي

چا وي دا چې په دریاب کي گور نه شته

بری د خدای (ج) سره دی.

د ډاکتر ماخان شینواري چاپ شوي لیکنې:

1988 Vienna (Austria):

لومړی:

H.K. Kaiser , M. Shinwari : Aproximation compact pological algebra :
general algebra 6 ; Page 117 – 122 contributions to

1987 Vienna (Austria):

دویم:

Diss . Interpolation und Aproximation durch Polynime in Universalen Algebren .
Uni. Wien

*Dissertation Interpolation and Aproximation by Polynome in universal Algebras,
at the University of Vienna/Austria*

لاندې د شميرپوهنې پښتوتول کتابونه په المان کې د ،، افغانستان کلتوري ودې ټولنه، له
خوا چاپ شوي دي

2000 Bonn (Germany):

دریم: د شميرپوهنې ستر کتاب: د شميرپوهنې برسیره د انجری، فزیک او اقتصاد
لپاره، همداسې د بنوونکو او زده کوونکو لپاره (دا کتاب په ۹۰۰ مخونو کې چاپ
او دا نوې لیکنه به یې ځنو ځایونو غزېدلې او ځنې ځایونه ترې لرې شوي دي)

2003 Bonn (Germany):

څلورم: ځمکچپوهنه (هندسه)، په سلو، زرو کې شمیرنه، د گټې - او کټې د کټې
شمیرنه، د احتمالوالي شمیرنه کتاب د بنوونځي ټولې اړتیاوې پوره کوي

2003 Bonn (Germany):

پنځم: الجبرونه (د الجبر بنسټونه دي)

2003 Bonn (Germany):

شپږم: د شميرپوهنې انگرېزي - پښتو ډکشنري.

2003 Bonn (Germany):

اووم: د شميرپوهنې الماني - پښتو - او پښتو الماني ډکشنري

Mathematical dictionary German/ Pashto and Pashto/German

2003 Bonn (Germany):

اتم: دفرنخیال برابر وون (دا کتاب په دې څانگه کې یو پیل دی، ساده لیکل شوی)

Differential equation Translation; An Introduction

Bonn (Germany): 2003

نهم: د شمیر پوهنې فرمولونو ټولگه

Mathematical Formulas

2003 Bonn (Germany):

لسم: شمیرپوهنه له عربي په پښتو

1997 Bonn (Germany):

یوولسم: د افغانستان په هکله سپینې خبرې: په المان کې

،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خو

یادونه: له ۲۰۰۰ کال دمخه ډاکتر ماخان شینواري د ،د افغانستان روغې او بیا

آبادولو ټولنه،، له خوا درې ساسي مجلې هم را وستلې.

د ډاکتر ماخان ،،میري،، شینواري لیکني او ژباړې چې په چاپیدو یې پیل کیري

2012 Bonn; Germany; Kabul Afghanistan

ژباړې:

: Prof. Brinkmann. (From Brinkmann.du.de)

لاندي د برینکمن لیکني چې له پرینکمن ن ج څخه ژباړل شوي دي.

۱ - شمیرپوهنه د بنوونځي لپاره لومړی ټوک

۲ - شمیرپوهنه د بنوونځي لپاره دویم ټوک

۳ - شمیرپوهنه د بنوونځي لپاره دریم ټوک

۴ - د احتمالي شمیرنه د بنوونځي لپاره

۵ - احصایه یا ستاتیستیک د بنوونځي لپاره

لاندې کتابونه د شتوتگارت د پوهنتون د استادانو د لکچرونو څخه چې د شتوتگارت پوهنتون ن ج څخه خپاره شوي را ژباړل شوي.

۶ - انالیزی ۱

۷ - انالیزی ۲

۸ - کرنبیز الجبر

۹ - د شمیرپوهني بنسټونه

۱۰ - د فرمولونو ټولگه

۱۱ - فنکشنل انالیز

۱۲ - وکتور شمیرنه

نورې ژباړې

۱۳ - له www.grundstudium.info/linearealgebra څخه: کرنبیز الجبر

۱۴ - Georg Guttenbrunner گڼونپوهنه یا د اعدادو تیوري

زما لیکنې

Bonn (Germany):

۱۵ - د شمیرپوهني ستر کتاب دویم چاپ د پوره تغیراتو سره : دا کتاب د شمیرپوهني برخې برسيره د

انجنري، فزیک او اقتصاد لپاره ، همداسې د بنوونکو او زده‌کونکو لپاره پوره گټور دی. په

کتاب کې د اړتیا سره زیاتونه او کونه راغلي

- ۱۶ - ځمکچپوهنه (هندسه) دویم چاپ د پوره تغیراتو سره
- ۱۷ - الجبر بنسټونه دویم چاپ له تغیراتو سره
- ۱۸ - ډېری پوهنه یا ست تیوري
- ۱۹ - د شمیرپوهنې سم اند (منطق ریاضي)
- ۲۰ - د یو څو شمیرپوهانو ژوندلیک
- ۲۱ - د شمیر پوهنې گډې وډې لیکنې
- ۲۲ - داهم ژباړه ده، خو لیکونکی یې متأسفانه راڅخه نابلد شوی: د مشتق او انتیگرال شمیرنو ته تمرینونه او اوبیوني یا حلونه یې
- ۲۳ - د شمیرپوهنې انگریزي پښتو او عربي + درې ډکشنري
- ۲۴ - د شمیرپوهنې پښتو انگریزي ډکشنري
- ۲۵ - د شمیرپوهنې پښتو ډکشنري د شمیرپوهنیزو وییونو په پښتو روښانه ونه
- ۲۶ - د زره له کومې
- ۲۷ - د افغانستان په هکله سپینې خبرې، چې وبه غزیري.
- نوري لیکنې، چې په ژباړه یې پیل شوی، خو لا پوره نه دي
- د شتونکارت پوهنتون لکچرنوتونو څخه ، چې د شتونکارت پوهنتون ن ج څخه خپریږي:
- د گروپونو تیوري
- د بنوونځي لپاره فزیک د برینکمن لیکنه
- له پنځم ټولگي څخه تر اووم ټولگي پورې ژباړل شوی (دا چې زما دویم مسلک فزیک دی، دا لیکنې ژباړم. دا هم د دې لیکوال یوه ډېره بڼه لیکنه ده، چې -د شمیرپوهنې په څیر- دلته هم زیات تمرینونه د حل یا اوبیوني سره په کې راغلي او ماته زیات گټور برېشي)

**Get more e-books from www.ketabton.com
Ketabton.com: The Digital Library**