کرښیز الجبر

$$\begin{array}{c|l} & A \cdot X_1 = b \\ - & A \cdot X_2 = b \\ \hline = & A \cdot (X_1 - X_2) = 0 \end{array}$$

له ن ج : بنسټیز درس | کرښیز الجبر

2012

Ketabton.com

ژباړی: ډاکتر ماخان(میږی) شینواری

(c) ketabton.com: The Digital Library

کرښيز الجبر

$$
\begin{array}{c|l}
 & A \cdot X_1 = b \\
- & A \cdot X_2 = b \\
\hline
= & A \cdot (X_1 - X_2) = 0
\end{array}
$$

dr.shinwari@hotmail.com

له ن ج : بنسټيز درس | کرښيز الجبر

ژباړی: ډاکتر ماخان(میږی) شینواری

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرلیک

نظر یا د پیداکیدو فکر ۱

هندسي لړۍ پرلپسي یا لړۍ ۲

د برنولي نا مساوات یا نابرابرون ۳

د یوه کرښیز مساواتسیستم جوړښت ۴

ماتریکسونه: ۵

تراسپوني ماتریکس ۷

سیومتریکي ماتریکسونه ۷

نا یو ډوله یا اینهوموجین ۸

یو ډوله یا هوموجین ۹

لیکه پوړیز بڼه ۹

دیترمینانتونه ۱۳

رانګ ۱۳

د حلفضا د دیمنزیون (بعد، پراخیدونی)ټاکل ۱۳

د ګاوس - تلنلار یا - - قانون ۱۴

د ګاوس الګوریتموس ټیکاوی ۱۶

د حلونو یا اوبیونو نور قوانین ۱۷

ورته والي - یامشابهت اړیکي ۱۹

ډېرۍ یا سټ له ترنو یا عملیو سره ۱۹

لاندې برخه (که توټه برخه یا کښته برخه): ۲۰

ګروپ ۲۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرلیک

د ابل - یا کموتاتیو ګروپ ۲۱
کړۍ ۲۱
بدن یا تن ۲۳
پاتې ټولګي یا باقي ټولګي ۲۳
وکتور فضا ۲۷
کربښیز خپلواکوالی ۲۷
کربښیز بلواکواکوال ۲۸
د وکتور فضا تعریف ۲۸
د یوه وکتور فضا جوړونه یا که غواړۍ تولید ۲۹
سپاین یا کربښیزه Spann،((کربښیزه) رابنده ورشو ۳۴
جوړښتسیستم (تولیدي سیستم) ۳۴
بنسټ ۳۵
د شتاینیځ بدلونجمله ۳۵
بعد یا پراخېدونی ۴۰
لاندې وکتور فضا ۴۲
د لاندې فضاو لپاره د بعد یا پراخیدوني فرمول ۴۳
د فنکشنونو یا ځیرونو(توابعو) خویونه ۴۴
په کې (فنکشن یا تابع) ۴۴
په (په باندې او په کې فنکشن یا -- تابع) ۴۴

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرلیک

کربنیز فنکشنونه یا توابع ۴۵
زړی(هسته) او عکس یا څېره ۴۵
څانګړي کربنیز فنکشنونه ۴۶
د ارزښتوني فنکشنونه یا توابع یا څېروني ۵۰
ایزومورفیزمونه ۵۱
ماتریکسونه ۵۲
د یوه ماتریکس رانګ ۵۳
د متې(درز یا ستنې یا ولاړې ... ۵۵
په څټ- یا معکوس ماتریک ۵۵
دیترمینانتونه ۵۶
د لاپلاس د ودیزېنې جمله ۵۸
د دیترمینانتونو ساده ټاکنه ۵۹
د ایندومورفیزم دیترمینانتونه ۶۱
أیګن ارزښت ۶۲
أیګنوکتور ۶۲
دوه -کونجتړې کیدونکې یا دوه-کونجتړې ۶۲
أیګن فضاوې ۶۳
ماتریکس سړی څنګه دوه-کونجتړې یا... ۶۴
سکالار ضرب(دننۍ څل یا –ضرب) او نورم ۶۵
د کوشي –شوارځ- نامساوات ۶۷

(c) ketabton.com: The Digital Library

اورتوګونال وکتورونه ۶۸

اورتونورمال بنسټونه: ۶۸

ځای بدلون ۶۸

ترانپوزيشن ۶۸

د ډاکتر ماخان شينواري ليکنې ۷۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

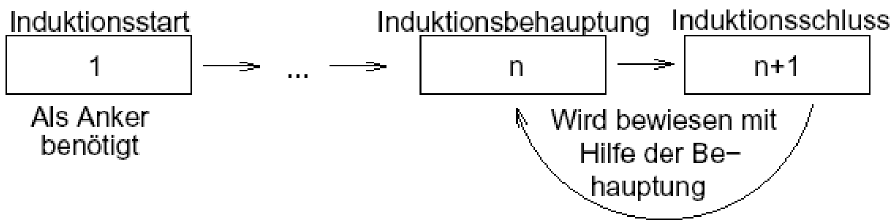
د ژباړي نيوليک

د دې سرليک لاندې يوه بله ليکنه هم شته. دا مخ ته پرته ليکنه ساده او د پيل په څير بايد وکتل شي. دا ليکنه د بنسټيزو ليکنو ن ج څخه راژباړل شوې ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

نظر يا د پيداکيدو فکر

پوره اندکشن د ښووني يو متود يا لار ده، هغه چي په کرښيزه الجبر کي زيات کارول کيږي. د ښووني لپاره نيول کيږي چي يو تاکلی فرمول د اندکشن ثبوت د n لپاره صدق کوي. د اندکشن پای يا ختمپدلو – چي د اندکشن پل هم بلل کيږي- ښوول کيږي، چي دا فرمول د $n+1$ لپاره صدق کوي، دايي چي بېرته د اندکشن ثبوت باندي لاس ولرو يا راونيسو. د دې لپاره چي ښوونه پيخي ټيک يا پوره ټيک وي، د يوه نښلون ټکي ته اړتيا شته، له کوم چي n پيل کيږي. دا نښلونټکی د اندکشن پيل ټکی هم بللکيږي. يا د اندکشن پيل او په ښوونه کي په پيل کي راوړل کيږي.



.

د پورته ديښتو ژباړه له کيڼ و ښي لور ته:

پورته: د ايندکشن پيل. لاندې: د په باندې ايښولو (کلکولو) لپاره اړين.

لوريزئ کرښي: لرو .

بيرته خيره پورته: د ايندکشن غوښتنه يا ثبوت د ايندکشن پای. لاندې: د غوښتني يا ثبوت په مرسته ښوول کيږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

هندسي لړۍ پرلپسې يا لړۍ (   )

$$\sum_{k=0}^{n-1} q^k = \frac{1-q^n}{1-q}$$

د ښوولو دی:

د اندکشن پيل: $n = 1$

$$\begin{aligned} q^0 &= 1 \\ &= \text{Okay} \\ \tfrac{1-q^1}{1-q} &= 1 \end{aligned}$$

د اندکشن وړاندنيونه(فرضيه): د n لپاره دې ښوول شوي وي:

$$\sum_{k=0}^{n-1} q^k = \frac{1-q^n}{1-q}$$

د اندکشن پل : $n \rightsquigarrow n+1$

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

دا دد ښوولو دی.

کينې پيل کوو

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} q^k &= \sum_{k=0}^{n-1} q^k + q^n \\ &=_{nach\ Vor.} \frac{1-q^n}{1-q} + q^n \\ &= \frac{1-q^n}{1-q} + \frac{(1-q)q^n}{1-q} \end{aligned}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1-q^n+(1-q)q^n}{1-q} \\
&= \frac{1-q^n+q^n-q^{n+1}}{1-q} \\
&= \frac{1-q^{n+1}}{1-q}
\end{aligned}
$$

د برنولي نا مساوات یا نابرابرون Bernoulische Ungleichung

دې وښوول شو $(1+x)^a \geq 1+ax$

د اندکشن پیل : $a=1$

: $1+x \geq 1+x$ تیک دی.

د اندکشن پل:

$a \rightsquigarrow a+1$

$(1+x)^{a+1} \geq 1+(a+1)x$

دې وښوول شي

موږ بېرته له ښۍ لورې پیل کوو

لاندې کې : Die Voraussetzug= نیونه(فرضیه)

$$
\begin{aligned}
(1+x)^{a+1} &= (1+x)^a \cdot (1+x) \\
&\geq_{Voraussetzung} (1+ax)\cdot(1+x) \\
&= 1+x+ax+ax^2 \\
&= 1+(a+1)x+ax^2 \\
&\geq 1+(a+1)x
\end{aligned}
$$

د پوره اندکشن سره نور د ښوولو فرمولونه

$(1+x)^a \geq 1+ax \quad \forall x \geq 0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لومړيو n طبيعي اعدادو مجموعه:

$$\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

د يوه کرښيز مساواتسيستم جوړښت

يو کرښيز مساواتسيستم د يو کرښيزو مساواتو تعداد څخه جوړ دی. دا مساوات نامعلومې خوندي لري، هم داسې په نامه واريابلې (اووښتونې يا متحولې). نامعلومې د ضريبونو سره ضربيږي. که د نامعلومې ضريب 0 - وي يعنې باور ولري: $0 \cdot x_k$ (دلته x_k نامعلومه ده) – نو دا ډول نامعلومه په مساواتو کې هم پرئښوول کيږي يعنې نه ليکل کيږي. دا لاندې د يوه کرښيز مساواتسيستم يوه بېلګه ده:

$$\begin{array}{ccccccccc} & & x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & + & 5x_4 & = & 5 \\ 3x_1 & + & 4x_2 & + & 5x_3 & + & 6x_4 & = & 0 \end{array}$$

او دا ټول a_{ij} عمومي ضريبونه دي او x_j واريابلې يا متحولې يا اووښتونې :

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11} \cdot x_1 & + & \dots & + & \dots & + & a_{1n} \cdot x_n & = & b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 & + & \dots & + & \dots & + & a_{2n} \cdot x_n & = & b_2 \\ & & & & \vdots & & & & \\ a_{m1} \cdot x_1 & + & \dots & + & \dots & + & a_{mn} \cdot x_n & = & b_m \end{array}$$

وکتور $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ کوم چې زيات وخت عمود ليکل کيږي د حل وکتور بلل کئږي.
د يوه مساواتسيستم د ممکنه حلونو ډېری يا سټ د حلونو ډېری بلل کيږي:

$$\text{Lös}(A, b) := \{x \in \mathbb{K}^n | Ax = b\}$$

که د حلونو ډېرئ تشه وي، نو د مساواتسيستم ناحلوړ يا نه حل کيدونکی دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ماتریکسونه:

سړی کړی شي په لړ ځای کې کرښيز مساوات د ماتریکس په ډول ولیکي. د مخه له دې چېٔ دا کار کوو باید ماتریکسونه راوړو یا رامنځ ته کړو.

یو متریکس یو ولاړکوډیز یا ولاړکونجیز جدول دی د m کیلو یا لیکو او n درځونو یا مټو یا ولاړو لیکو سره.

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

د ماتریکس لیکنډول mxn - ماتریکس

سړی کړی شي د ماتریکسونو یوګونې کرښې رادباندې ولیکي. دا بیا د **لیکو وکتورونه** بلل کیږي. په ټیک دې ترتیب د ولاړو لیکو یا مټو یا **ستنو وکتورونه** هم لاس ته راوړی شوو، که سړی یوګونې مټې رادباالندې ولیکي.

سړی کړی شي ماتریکسونه یو له بل سره جمعه کړي.

$$A+B := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

او سره ضرب کړي-+:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$A \cdot B \;:=\; \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \ldots & b_{nm} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} \cdot b_{11} + \ldots + a_{1n} \cdot b_{n1} & \ldots & a_{11} \cdot b_{1m} + \ldots + a_{1n} \cdot b_{nm} \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{m1} \cdot b_{11} + \ldots + a_{mn} \cdot b_{n1} & \ldots & a_{m1} \cdot b_{1m} + \ldots + a_{mn} \cdot b_{nm} \end{pmatrix}$$

د ماتریکسونو په جمعه ساده پوهیدل کیدی شي. سړی سره جمعه کوي، جې اړونده کمپوننتونه یو له بل سره حمعه کړي، داسې نتیجه لاس ته راځي. د ماتریکسونو ضرب ستونځمندی. په ضرب کې د لومړۍ ماتریکس لیکه د دویمې ماتریکس د متې سره ضرب کیږي او ورپسې سره جمعه کیږي. او نتیجه یې داسې لاس ته راځي، چې c_{ij} یعنې i–مه لیکه ، j -مه مته کې ضرب د حل ماتریکس چې لاسته راشي، د لومړي ماتریکس د i–مې لیکې د j–مې متې یا ستن د توکو سره ضربوو او له ټولو ضربونو څخه جمعه جوړوو. دا یو ځل بیا لیکو:

$$\begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cdots & b_{1j} & \cdots & \cdots \\ \cdots & b_{2j} & \cdots & \cdots \\ \cdots & \vdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & b_{nj} & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \ldots + a_{in} \cdot b_{nj} & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

هیله ده، چې په دا موضوع کې به لږه روښنتیا منځ ته راغلې وي. داسې وایو چې سړی دښۍ دیترمینانت مته په 90° درجو د ساعت ځرخوني (عقربک؟؟)په لور څرخوي، چې د کینې ماتریکس په لیکه پریوځي، یو په بل پراته توکي بیا سره ضربیوي او په دې پسې یې بیا له دې ضربونو جمعه جوړوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

اوس د ماتريکس د ضريوني په بنديزونو هم پوهيږو. سړی کړی شي $n \times m$- ماتريکس فقط د $n \times m$- ماتريکس سره ضرب کړي. دا په دې معنا، چې د کيڼ ماتريکس ليکې ټيک دومره بايد اوږدې وي لکه د ښې ماتريکس متې (درځونه، ستنې) ، پرته له دې ته په ليکه نه ،، پرېوځي،، يا سرخوري .

تراسپوني ماتريکس

د يوې ماتريکس ترانپوني ماتريکس داسې لاس ته راوړو، چې ليکې او متې سره بدلې شي. له توکي a_{ij} څخه توکی a_{ji} لاس ته راځي.

$$a_{ij} = a_{ji}$$

بيلګه:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & a_{41} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & a_{42} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{43} \end{pmatrix}$$

د مربع ماتريکسونو لپاره دا په همدې معنا دی لکه په ،،دوه – کونجترې،، (قطر) باندې هندارونه(انعکاس).

سيومتريکي ماتريکسونه

يو ماتريکس ټيک هلته سيومتريک دی، چې باور ولري:

$$a_{ij} = a_{ji}$$

د کرښيزمساوات سيستم ځايسپماييزه ليکندول

د يوه ماتيريکس په مرسته او کېدی شي کرښيزمساوات انرږي – او ځای سپماييز وليکو. موږ ته دا بام ودريږي، چې دا نامعلومې تل په هر مساوات کې همهغه دي . نو لکه په ماتريکس ضربونې کې د ماتريکس ضربونې په مرسته دا د مساوات سيستم څخه دباندې راباسو او په دې توګه د ضريبونو(ځلوونو) ماتريکس A لاس ته راوړو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$A \cdot x = b$$

د لیکبنې له مخې دا داسې برېښي:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

د ګاوس تلنلار لپاره ، چې لاندې لیکل شوې ده، دا بیا په لنډه توګه تکراروو او $x-$ - وکتور هم لرې بریږدو. له دې سره نوکان او مساوات هم لرې پرېږدو یا نه لیکو او دا ټول په یوه کاستن Kasten, یا کارتون کې لیکو، چې دا لګه چې ګورو، په لاندې توګه لیکل کیږي.

$$\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \\ \hline \end{array}$$

نا یو ډوله یا اینهوموجینبرابرون

یو کرښیز مساوات سیستم نایوډوله (اینهوموجین) بللکیږي، که که لږ تر لږه د یو b_i لپاره ($1 \leq i \leq n$) باور ولری

$$b_i \neq 0$$

په ریښتیني توګه دا پهدې معنا دی: پهښۍ لور صفرماتریکس نه دی ولاړ یا ځای په ځای نه دی.

یو ډوله یا هوموجین Homogen

د دې برعکس یو مساوات سیستم برابرډوله (هوموجین) بلل کیږی، که b صفروکتور وي، دا په دې معنا چې دټول b_i لپاره ($1 \leq i \leq n$) باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

$b_i = 0$

دا دا معنا لري، چې په بڼې اړخ صفروکتور پروت دی

لیکه- پوړیز بڼه **Zeilenstufenform**

موږ اوس طبعاً د کرښیز مساواتسیستم د اوبیونې یا حل سره مینه لرو. دا ګاوس الګوریتم چې یوځه کښته راځي، د اوبیونو یا حلونو د پیداکولو لپاره مرسته کوی. دا ماتریکس د ساده لیکه بدلون بڼې ځخه په لیک –پوړې –بڼې باندې اړوي. په لیکبوړیزبڼه کې یو ماتریکس مخ ته لرو، که هغه خورا ټیټه لیکه دا اکثره کیڼ پراته صفرونه ټولې لیکې خوندي ولري او د کیڼ پرتو صفرونو تعدا(ګڼون) پورته لور ته کم شي، د کوم سره چې کله کله یې له لیکې و لیکې ته یو ځل برابر باتې کیږی. لاندې ماتریکس د لیکې- پوړیز- بڼې ماتریکس بیلګه ده

$$\begin{pmatrix} 0 & \otimes & \oslash & \oslash & \oslash & \oslash & \oslash \\ 0 & 0 & \otimes & \oslash & \oslash & \oslash & \oslash \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \otimes & \oslash & \oslash \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \otimes & \oslash \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} \otimes \neq 0 \\ \oslash \neq 0 \text{ oder } 0 \end{matrix}$$

پورته الماني: د ،،یا،، په معنا

جمله :

موږ کړی شو هر ماتریکس په لیکه-پوړیز-بڼه ماتریکس واړوو. داچې د ګاوس تلنلار د دې لپاره یو الګوریم راکوي، چې دا متمین ده او دا جمله ښوول شوې.

د حلونو کریتیریوم

(نځښې، چې د دوه یا زیاتو شیانو یا کسانو ترمنځ پرې پرېکړه کیږي)

د دې لپاره چې د کرښیزمساتسیستم د حلونو تعداد وټاکلی شو، د حلونو کریتیرین یا نځښې(توپیرنځښې) شتون لري..

(c) ketabton.com: The Digital Library

برابرډوله یا هموجین مساواتسیستم کړی شي یا ساده حل ولري او یا ډېر حلونه ولري.

ساده حل:

ساده حل یې صفروکتور دی، دا په دې معنا، چې ټول مساوات ټیک هلته پوره کیږي، که ټولې واریابلې(متحولې یا اووښتونې) صفر کېښوول شي.

دا حالت هلته رامنځ ته کیږی، چې که برابرډوله مساوات سیستم په داسې لیکه-بوړیز-بڼه و اړولی شي، چې په هره لیکه کې له بورته تر کښته یو صفر ځا په ځای وی. او همدومره د ماتریکس متې ولرو لکه لیکې.
د یوه کرښیز مساوات سیستم بیلګه، چې یو د لیکه-پوړی-بڼې ماتریکس سره ، چې ښایي، چې فقط ساده حل شتون لري.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

د دې مساواتسیستم د اخرنې لیکې څخه لاس ته راځي $x_3 = 0$. له دویمې لیکې لاس $x_2 = 0$ ته راځي او بالاخره $x_1 = 0$ ، له کومه امله چې موږ د حل په څېر فقط صفروکتور لاس ته راوړو.
د یو هموجین مسواتسیستم سره کړی شو و ازمایو، چې ایا ومتورونه یو بل ته کرښیز خپلواک ای ا کرښیز بلواک دي. موږ له دې سره وکتورونه په متاریکس کې د متې وکتورونو په څیر لیکو. که داسې لاس ته راوړی هموجین کرښیز م ساوات سیستم فقط ساده حلونه لري، ن و وکتورونه یو بل ته کرښیز خپلواک دی.

زیات حلونه یا اوبیونې:

دا هوموجین کرښیز مساوات سیستم زیات حلونه لري، که خپلواکه متحوله (اووښتونې) شتون ولري.. یوه خپلواکه اووښتونې هغه اووښتونې ده چې مساواتسیستم حل له لارې کره نه وي ټاکل شوي. موږ مړی شو داسې اووښتونې په خپله خوښه وټاکو او همداسې په خوښه زیات حلونه د مساوات سیستم لپاره لاس ته راځي.

دا حلونه یو وکتورفضا غزوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا څنګه پيژنو،چې ايا يو مياواتسيستم خپواکي متڅولي لري؟ خپلواکي متحولي تيک هلته شتون لري، چې په سيستم کې لږ مساوات شتون ولري، نسبت اووښتونو ته.

بيلګه:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

داسي مساواتسيستمونههم شته، چې په هغې کې داسي نه ده، چې د متحولو څخه دې مساوات لږ وي. په داسي مساواتسيستم کې پيژنو، چې په ليکه پوړيزه کونه کې يوه صفرليکه شتونلري. پههوموجېنګربنيز سيستم کې کېدی شي داسي ليکه له منځه يوسو(پام! داپه ناهموجېن کې مکنه نه ده، ځکهچي دا حقيقت به مو لهمنځهوړی وي، چې کومحل شتون نه لري) . که د دي لهمنځه وړني سره زياتي متحولي پاتي شي نسبت مساواتو ته ، ن و يو م ساواتسيستم بهولرو د خپلواکو (ازاده)متحولو سره .
که د يوه هوموجين مساوات سيستم د حل سره، په کوم کې چې ماتريکس له متو وکتورونو جوړ دی، چې کربنيز خپلواکوالی يي يو بل ته ازمايل کيږي، لاس ته راشي، نو وکتورونه يو بل ته کربنيز بلواک دي.

انهوموجين مساواتسيستمونه کېدی شي هيڅ حل، تيک يو حل او يا ريات حلونه ولرودای شي.

هيڅ حل يا نه حل: يو انهوموجين کربنيز سيستم کوم حل نه لري، که د ديوه مساوات ضريبونه صفر وي، او اړونده b_i صفر نه وي..:

يعني

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n = b_i \quad b_i \neq 0$$

داسي يو برابرون يا مساوات بنه اړولی بنه بدل .**entartet** بلل کيږي. بنه اړول شوې مساوات نه پوره کيږي او له دې سره ټړلمسوات سيستم نه پوره کېدونکی دی، له کومه کبله چې موږ حل هم نه لرو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ټيک يو حل:

يو انهوموجين مساوات ټيک يو حل لري، که دا اړونده هومجين مساوات سيستم – دا اړونده هوموجين مساوات سيستم جوړ شي، په کومکې چې ټول b_i د صفر سره برابر وليکل شي – فقط ساده حلونه ولري.

د دې لپاره چې حلونه وشميرلی شو، دا انهوموجين کرښيز سيستم د ليکی پوړيزبڼه باندې اړوو، لکه پورته مو چې داسې وکړل، د کوم سره چې موږ b_i ($1 \leq i \leq n$) هم بايد په پام کې ونيسو.

يو ناهوموجين مساوات سيستم کيدی شي د دې لپاره وکارول شي، چې و ازمايي، چې ايا يو وکتور د نورو وکتورونو څخه د کرښيز کمبينېشن په څېر جوړی شي که نه. ټيک هلته يو حل شته، که bد متو يا ستنو وکترونو د کرښيز کمبينېشن څخه جوړولی شي. که داسې يو حل شتون ونه لري، نو نه شي کېدی چې د متو وکترونو څخه کمبينی يا ترکيب کړي. که يو يا حتا زيات حلونه شتون ولري، نو دا په لاندې توګه دي:

زيات حلونه يا اوبيونې:

لکه په کرښيز هوموجېن مساواتسيستم کې ازادې متحولې په ناهوموجېن مساوات سيسم کې هم راپيدا کيږي يا منځ ته ارځي. دا بېرته په هغه وختکې شتون لري، که سړی زاتې متحولې ولري نسبت مساواتو ته. په ناهوموجېن سيستمکې هم سړی کړی شي صفرليکې لرې کړي، چېرته چې $b_i = 0$ هم وي. په هرحالت دا بڼه تغير شوې مساوات له منځه نهشي وړل کېدی.

ديترمينانتونه Determinante :

که د يوه مربع ماتريکس وکتورونه يو بل ته کرښيز بلواک وي، نو ديترمينات 0 دی. په بل حالت کې $\neq 0$. له دې سره د $Ax = b$ لپاره باور لري:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$\det A \neq 0$ $\Rightarrow$	د هوموجین مساواتسیستم لپاره ساده حل،
$\det A = 0$ $\Rightarrow$	د ناهوموجین مساوات سیستم لپاره حلونه. د ناهوموجین سیستم لپاره حلونه یو حل یا هیڅ حل

رانګ Rang

$$rang(Ab) = rang(A)$$

حل شتون لري. د یوه ناهوموجین سیستم لپاره یو حل شتون لري. د یوه هوموجین سیستم لپاره ساده حل شتون لري.

د حلفضا د دیمنزیون (بعد، پراخیدونی)ټاکل

د یوه هوموجین مساواتسیستم د حلډېریو د د بعد ټاکلو لپاره مورږ کړی شو د دیمنزیون یا بعد فرمول ځخه کار واخلو. دا چې هر ماتریکس A په یوه ټاکلي بنسټ f_A ایندومورفیزم انځوروي د هوموجېن کربنیزمساوات سیستم حلفضا لپاره

$$Lsg(A,0) = Kern(f_A)$$

باور لري او داسې کړس شو د بعد د فرمړل

$$\dim V = \dim(Kern(f)) + \dim(Bild(f)) \Leftrightarrow \text{d}$$

$$\dim(Kern(f)) = \dim V - \dim(Bild(f))$$

سره د حلفضا بعد وټاکو

(c) ketabton.com: The Digital Library

بعد یا پراخیدونی

یا 0 دی : نو بیا تیک ساده حل شتون لري، داسې په نامه صفروکتور.

یا > 0 دی : نو په دې حالت کې ازادې اووښتونې(متحولې (شتون لري، بعد لویوالی د متحولو تعداد دی، چې لرو یې:

پوښتنه:

موږ عکس(څیره) څنګه ټاکو؟ موږ دلته باید یوون – واهدوکتورنه په ماتریکونو وڅغوو یا راوړو. موږ بای د پسې د بیلد(څېرې) پراخېدونی وشمېرو، داسې چې په هغې کې ښېرته یو کرښیزمساواتسیستم حل کړو. موږ له دې سره یو د شمیرنې پانګه لرودی شو. او که اشتباه کړم؟

د ګاوس - تلنلار یا - - قانون Gauss-Verfahren

د ګاوس-قانون د دې لپاره دی، چې یو ماتریکس په لیکه وکتورونو راوړي. د لیکه وکتورونو بدلیدنه او لیکه کمون یا تفریق د تر مخه سکالار ضرب په بنسټ د برخه اخستونکو لیکو تر هغې مخ ته بیایي، چې ماتریکس په لیکه پوړیز ماتریکس بدل شي. د ګاوس قانون تل د کترولو دی یا عملي کیدی شي.خو سه له دې هم کېدی شي، چې په قوي ډول ناټیک وي. اوس الګوریموس ،، پروګرامي ،، کوو:

لاندې یا کښته برخه:
د ګاوس قانون د یوه ماتریکس د لیکه پوړیز بڼې باندې اړولو لپاره

- په پیل کې ازمایو، چې ایاماتریکس ماتریکس همرا اوس لیکه پوړیز بڼه لري. په بیخي ځانګړې توګه $A = 0$ ، یعنې فقط له 0 –نو څخه جوړ ماتریکس لیکه پوړیزبڼه لري.

- د دې عمل جراکولو له مخه – او نظري په دې مهال هم- کېدی شي او باید هم لیکې بدلې شي، که دا کار ګټور وي. دا په دې معنا، چې د لیکې د پیوت توکي(Pivotelemente) له پورته بیخي کیڼ تل پسې ښي لور ته لاړ شي. د پیوت توکي

(c) ketabton.com: The Digital Library

هغه توکي بللکيږي، کوم چې له ښې لورې کتل شوي په يوه ليکه کې لومړی يا په سر کې د 0 سره نابرابر وي.

- د i سره پيل شوې هر ې ليکې لپاره د پورته ليکې د $i=1$ سره تر د اخرې ليکې پورې لاندې ډول مخ ته ځو:

د هرې ليکې لپاره ، چې وي – ليکه j تل له ليکې i کښته پرته ده - د i ډيرواره له ليکې j ته ور زياتوي يا تر کموي(که غواړی، جمعه کوي يا ترې تفريقوي) ، داسې چې a_{ji} - دلته i اووښتوني يا متحوله د متې يا درځ ګنه(نمره) په ګوته کوي- 0 شي.

د ګاوس الګوريتموس يوه ليدنه

په لاندې کې Aktuelles ورځنی يا اکتول

لومړی پل يا تلنلار i=1

$$\begin{array}{rcccc} \text{Aktuelles } i \rightarrow & X & X & X & X \\ \text{Aktuelles } j \rightarrow & 0 & X & X & X \\ & X & X & X & X \\ & X & X & X & X \\ & \uparrow & & & \end{array} \qquad \begin{array}{rcccc} \text{Aktuelles } i \rightarrow & X & X & X & X \\ & 0 & X & X & X \\ \text{Aktuelles } j \rightarrow & 0 & X & X & X \\ & X & X & X & X \\ & \uparrow & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{rcccc} \text{Aktuelles } i \rightarrow & X & X & X & X \\ & 0 & X & X & X \\ & 0 & X & X & X \\ \text{Aktuelles } j \rightarrow & 0 & X & X & X \\ & \uparrow & & & \end{array}$$

دويمه پل يا تلنه i=2

$$\begin{array}{rcccc} & X & X & X & X \\ \text{Aktuelles } i \rightarrow & 0 & X & X & X \\ \text{Aktuelles } j \rightarrow & 0 & 0 & X & X \\ & 0 & X & X & X \\ & & \uparrow & & \end{array} \qquad \begin{array}{rcccc} & X & X & X & X \\ \text{Aktuelles } i \rightarrow & 0 & X & X & X \\ & 0 & 0 & X & X \\ \text{Aktuelles } j \rightarrow & 0 & 0 & X & X \\ & & \uparrow & & \end{array}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دريم پل يا تلنه i=3

$$
\begin{array}{rcccc}
 & X & X & X & X \\
 & 0 & X & X & X \\
\text{Aktuelles } i \rightarrow & 0 & 0 & X & X \\
\text{Aktuelles } j \rightarrow & 0 & 0 & 0 & X \\
 & & & \uparrow &
\end{array}
$$

له ماتريکی داسې په لاس راړی ليکه پوړيز بڼه وکتور څخه کېدی شي حلونه (اوبيونې) وشمېرل شي.

دا داسې کوو چې دا مساواتسيستم بېرته په ماتريکس بڼه په يوګونو مساواتو بدل کړو او له لاندې څخه په پيل په اړونده متحولې پسې حل کړو.

کخ دا مساواتسيستم زيات حلونه لرودی شي، نو له دې سره پېژنو، چې متحولې شتون لري، چې د هغو ارزښتونه ه شو ټاکلی. دا نو ازادې متحولې دي.

د ګاوس الګوريتموس ټيکاوی

د دې لپاره چې وښايو چې ګاوس قانون يو کرښيز مساوات سيستم$\overline{A}$ د ټيک همغه يا برابر حلډېری (حلسټ) سره لکه مساواتسيستمA يې چې توليدوي، بايد وښايو، چې لاندې بڼه بدلونونه په حلونو کوم اغيز نه لري.

لومړی: د ليکو بدلونه

دويم : د ليکو صربونه د سره او بالاخره يې د بلې ليکې سره زياتول يا کمول(جمعه او تفريق)

ښوونه يې:

لومړی : دا ساده دی. د يوه مساوتسيستم د ليکو بدلون په حلونو کوم اغيز نه لري، ځکه چې لړې پرلپسې پروا نه لري..

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم : موږ د مساواتسیستم دوه لیکي ترځېړني لاندې نیسو، ځکه چې ښه بدلون فقط د دې دوه لیکو په مرسته صورت نیسي. نور و دوه لیکو سره سراوکار نه لرو او د حلونو ډېرۍ تغیر نه خوري:

$$
\begin{array}{llllllll}
(1) & a_{i1}x_1 & + & \cdots & + & a_{in}x_n & = & b_i \\
(2) & a_{j1}x_1 & + & \cdots & + & a_{jn}x_n & = & b_j
\end{array}
$$

لومړۍ لیکه د λ سره ضربوو، په مساوات کې تغیر نه راځي، ځکه چې سړی λ بیرته لنډولی شي یا کمولی شي یا که غواړۍ اختصار کولی شي:

$$\lambda \cdot a_{i1}x_1 + \cdots + \lambda \cdot a_{in}x_n = \lambda \cdot b_i$$

دا(1) اوس د دویمې(2) لیکې سره جمعه کوو، لکه چې ترې لرو

$$a_{j1}x_1 + \cdots + a_{jn}x_n + (\lambda \cdot a_{i1}x_1 + \cdots + \lambda \cdot a_{in}x_n) = b_j + (\lambda \cdot b_i)$$

پوهیږو چې دلته هم په حل کې کوم تغیر نه راځي، ځکه چې مساوات ورسره زیاتوو، چې په دواړو لورو ته راغلی او دواړو لورو ته همغه برخه ورکوو. دا بیرته سره لنډیدی شي او موږ بیرته وتونمساوات لرو.

د حلونو یا اوبیونو نور قوانین

د یوه کرښیزمساواتسیستم د حل لپاره د ګاوس قانون ترڅنګ نور قوانین هم شته. په ښوونځي کې مو د بدلون قوانین وپیژندل. په دې کې یو مساوات د یوې متحولې یا اووښتوني سره حل کیږي او بیایې ارزښت د مساوات سیستم په بل مساوات کې کېښوول کیږي.په همدې ترتیب دې کار ته دوام ورکوو، چې بیداشوط اوښتوني ارزښت د مساوات سیستم په هبل مساوات کز ځا په ځای کیږي، تر څو چې د ټولو متحولو ارزښتونه پیداشي.که د اووښتون و ارزښتونه په پای کز ځا په ځاشي او لاس ته راشی ، $0 = 0$ ، نو مساوات سیستم ناپای ډېر حلونه یا اوبیونې لري. که د دې ځا په ځای کونې وروسته ،، کیڼ اړخ $\neq$ ښی اړخ،، نو کوم حل شتون نه لري. په ورته توګه دا مساوي ایښونې قانون هم کارول کیږي، د کوم سره چې دوه مساوات د یوهې اووښتونې په لور حل شي او بیا

(c) ketabton.com: The Digital Library

برابر وليکل شي.

په پای کې باید وکورو، چې د یوه کرښيزمساوات سيستم څنګه حلونه لاس ته راړو، که ورته سيستم حل کړ شوی وي:

غواړو د یوه ناهموجين کرښيز مساوات سيستم حلډېری I وټاکو. موږ د هوموجين کرښيز مساوات سيستم حلډېری یا حل سټ H پيژنو. د هوموجين کرښيز مساواتسيستم حلونو ډېری یا سټ H د اړونده تابع د زړي(هستې) Kern سره برابره ده. برسره پردې موږ د ناهوموجين سيستم ټوټه یا برخه حل یا د حل یوه برخه حل v_0 پيژنو.

موږ کړی شو د دې ناهوموجين سيستم حلډېری I پيداکړو، داسې چې

د ناهوموجين سيستم ټولو حلونه v_0 جمعه کوو:

$$I = v_0 + H = \{v_0 + h \; \forall \; h \in H\}$$

د هوموجين کرښيزمساواتسيستم حلونه $Ax = 0$ د کرښيزو توابعو زړی(که غواړی: هسته) دی. موږ کړی شو ، لکه د ماتريکس A سره چې انځور یړي، دا زړی و دې ټوټه – یا برخا حل ته ورزيات یا ور جمعه کړو. دا ځانله (تنها) د ناهوموجين مسوات سيستم سره نه کوو بلکه د هوموجين مساوات سيستم سره هم همداسې مخ ته ځو.

$$Lsg(A, 0) = v_0 + Kern(A)$$

د هوجين مساواتسيستم ته تل یو ساده حل0 شتون ري، له دې سره لرو

$$Lsg(A, 0) = 0 + Kern(A) = Kern(A)$$

موږ د ناهوموجين مساواتسيستم دوه حلونه لرو. له دې دوه وو څخه یو حل د هوموجين مساوات سيستم لپاره جوړولی شو، داسې دواړه حلونه یو بل کم یا تفريق کړو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\begin{array}{c|l} & A\cdot X_1 = b \\ - & A\cdot X_2 = b \\ \hline = & A\cdot(X_1 - X_2) = 0 \end{array}$$

ورته والي - یامشابهت اړیکې **Äquivalenzrelationen**

په A یوه اړیکه$\sim$ ټیک هلته ورته بللکیږی، که د ټول $a,b,c\in A$ لپاره باور ولري

لومړی : $a\sim a$ یا $(a,a)\in\sim$ انهکاس یا هندارون اړیکې یا (Reflexiv)

دویم : که $a\sim b$، نو $b\sim a$ یا که $(a,b)\in\sim$، نو $(b,a)\in\sim$ سیومتریک اړیکې (Symmetrisch)

دریم : که $a\sim b$ اوږ $b\sim c$، نو $a\sim c$ یا که $(a,b),(b,c)\in\sim$، نو $(a,c)\in\sim$ ترانسیتیو اړیکې (Transitiv)

ورته اړیکې یوه ډېری(ستټ) په،، ورته ټولګیو،، ویشي.

ډېری یا ستټ له ترنو یا عملیو سره

د ښوونځي او هم د شمېرپوهنې په ورځني ژوند کې له دې سره بلد یو، چې له کومو سره ترمونه ساده کېدی شي. دا زیات وخت ډېره مرسته کوي. د بېلګې په توګه د دېستزیبوتیو قانون په مرسته لاندې ترم خورا زر ګڼلی شو، لکه بې له دې قانون.

$$\left(\frac{1}{8}+\frac{13}{2}\right)\cdot\frac{8}{13}=\frac{1}{8}\cdot\frac{8}{13}+\frac{13}{2}\cdot\frac{8}{13}=\frac{1}{13}+4=4\frac{1}{13}$$

د بینوم لومړی جملې هم د دیستریبوتیو قانون ډېر واره استعمالول دي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(a+b)^2 = (a+b)\cdot(a+b) = (a+b)\cdot a + (a+b)\cdot b = a\cdot a + b\cdot a + a\cdot b + b\cdot b = \\ = a^2 + 2ab + b^2$$

په لاندې برخه کې اوس شمېرنې نور قوانين ، چې د اکسيومونه بلل کيږي و تعريفو. دا قوانين د ډېريو لپاره صدق کوي د اړونده تړنو سره. زيات وخت پوښتنې رامنځ ته کيږي، چې دا اکسيومونه له کومه راځي. اکسيومونه خويونه ل ري، چې دا په ساده توګه تعريفيږي، بې له ثبوته. طبعأ دا په خوښه نه ټاکل کيږي. مګر په لومړي سر کې يا د پيل زده کوونکو لپاره په دې بسيا کوو، چې دا دې شتون ولري.

لاندې برخه (که ټوټه برخه يا کښته برخه):

Unterabschnitte

موږ او يو په بل پسې يوګوني تعريفونه ورکوو. له دې سره پورته و کښته لور ته تل زيات امسيمونه باور لري. د بيلګې په توګه تنونه يا اجسام له دوه کموتاتيو ګروپونو منځ ته راځي، يو ځل نسبت جمعې يا زياتون + ته او يوځل نسبت و ضرب · يا * ته او دې سره اړونده ديستريبوتيو قانون څخه يو ځای يا په ګډه، يعنې بدن يا تن يا جسم له ګروپ څخه زيات دی.

ګروپ

يوه حوړه يا يو ګون $(G,+)$ ، چې G يوه ډېری ده او $+$ يوه تړنه يا عمليه ده،

$$+ : G \times G \to G$$

ګروپ بللکيږی، که لاندې اکسيومونه پوره وی:

(c) ketabton.com: The Digital Library

G1 : $(a+b)+c = a+(b+c) \forall \ a,b,c \in G$ اسوشیاتیو قانون.

G2 : یو $e \in G$ (ناپیلی توکی) شتون لري چې د $\forall \ a \in G$ لپاره لاندې خویونه پوره کوي:

لومړی: $e+a=a$

دویم : د هر $a \in G$ لپاره یو $a' \in G$ شتون لري (په څټ یا برعکس توکی) د $a'+a=e$ سره

د ابل - یا کموتاتیو ګروپ **Abelsche / kommutative Gruppe**

یو ګروپ د ابل ګروپ بلل کیږي، که د د ګروپ د اکسیومونو **G1** او **G2** برسېره دا $a+b=b+a$ هم $\forall \ a,b \in G$ باور ولري (کموتاتیو قانون) *(Kommutativgesetz)*.

کړی Ring

یو ګون $(R,+,*)$ ، چېرته چې R یوه ډېری او $+,*$ دوه ترونونه یا عملیې دي د لاندې سره

$$+: R \times R \to R \qquad *: R \times R \to R,$$

کړی یا رینګ بلل کیږي، که لاندې اکسیومونه پوره وي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

R1 : د **+** سره یو ځای کموتاتیو ګروپ (اسوشاتیوۀ ناپیلی توکی، په ځت یا برعکس توکی دی.

R2 : $(a * b) * c = a * (b * c) \forall\ a, b, c \in R$ (د $*$ لپاره اسوشاتیو دی.

R3 : دپستربوتیو قانون باور لري:

(a) $\forall\ a, b, c \in R : (a + b) * c = a * c + b * c$

(b) $\forall\ a, b, c \in R : a * (b + c) = a * b + a * c$

کړی د یوي توکي (واحد توکي) سره Ring mit Einselement

$(R, +, *)$ یوه کړی ده، له دې امله باور لري:

$\exists 1 \in R$ (ناپیلی توکی یا یوې توکی د ترنې لپاره) د هغه لپاره چې باور لري:

$1 * a = a$

کموتاتیو کړی:Kommutativer Ring

$(R, +, *)$ یوه کړی ده، له دې امله باور لري:

$\forall\ a, b \in R : a * b = b * a$ (د $*$ لپاره کموتاتیو قانون)

کموتاتیو کړۍ د یوی توکي (واحد عنصر) سره

کړی، په کومو کې چې کموتاتیو قانون باور لري او دا هم یو یویتوکی ولري، یعنې د دوه پورته اکسیومونو سره، کموتاتیو کړۍ د یویتوکي سره بللکیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

Körper Field بدن یا تن یا پتی

یو ارزښت نظم یا توپل $(K,+,*)$ یو تن دی، که باور ولري

K1 : د کموتاتیو کړۍ اکسیومونه د یویتوکي سره باور لري.

K2: $\forall a \in K \exists a^{-1}$ ، داسې چې $a * a^{-1} = 1$ باور لري (د ترنې $*$ لپاره په څټ یا برعکس توکی)

پولینوم کړۍ Polynomring

$\mathbb{K}$ دې یو تن وي. د $\mathbb{K}_n[t]$ ډېرۍ د لاندې بڼې پولینومونو څخه جوړه ده

$$a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_n t^n$$

د کومو سره $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ ، t یوه اووښتونې(متحوله) او n د پولینوم درجه بللکیږي. د پولینومونو دا ډېرۍ یو کموتاتیو کړۍ ده. د یوه پلینوم P خورا جګ ضریب(څلوونی) - په پورتنی بېلګه کې یعنې n ، چې باید $a_n \neq 0$ وي - د پولینوم درجه بللکیږي. که دا 0 وي، یعنې د ټولو i لپاره $a_i = 0$ ، نو دا پولینوم صفر پولینوم بلل کیږي. د صفرپلینوم درجه ناپای ده:

$$\deg P := \begin{cases} \infty & \text{falls } P = 0 \\ n & \max\ (i \text{ für das gilt } a_i \neq 0) \end{cases}$$

پاتې ټولګي یا باقي ټولګي Restklassen

اوس غواړم د بدن لپاره یوه بله بېلګه دروپېژنم یا معرفي کړم، د لومړنیو ګڼونو پاتې ټولګي. د لومړنیو ګڼونو پاتي ټولګي کېدی شي بدنونه شي، داسې چې په هغو کې

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمعه(زياتون) او ضرب(ځل) تعريف شي. داسې تنونه $\mathbb{F}_p$ بللکيږي يعني د ببلګې په توګه $\mathbb{F}_7$ د پاتېتولګي 7 لپاره. په روڅني ژوند کې د پاتې تولګي سره ډېر شمېرل کيږي، د ببلګې په توګه د ليکنيزې جمعې سره 2.2 :

$$\begin{array}{r} 8 \\ +\ {}_1\ 9 \\ \hline 1\ 7 \end{array}$$

موږ 8 او 9 د 7 سره جمعه کړل چې چېرته موهغه لاس ته راغلی زيات هېر کړی نه دی. موږ اوس کړی شو چې هغه زيات يا لاس ته راغلی پرېږدو او وليکو

$$8 \bmod 10 + 9 \bmod 10 \equiv 7 \bmod 10$$

چېرته چې ،، mod ،، مودولو **modulo** په معنا دی، يعني د وېش پاتې يا باقي.

په ورته توګه نور پاتې تولګي هم تعريفولی شو. د دې په ځايچې په 10 يې ووېشو په 3 يې وېشو.

$$\begin{array}{r} 3 \\ +\ {}_1\ 2 \\ \hline 1\ 2 \end{array}$$

د دې لپاره کړی شو، چې يو د جمعې او ضرب جدول جوړ کړو:

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

·	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

په همدې توګه دا کار بيا کړو، دا وار د پاتې تولګي 4 لپاره:

(c) ketabton.com: The Digital Library

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

·	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

اوس کړی شو د بدن اکسیومونه په یوګوني ډول په هغو پاتې تړولګیو پورې اړونده بدن باندې د جدول ارزښتونو په مرسته و ازمایو. کموتاتیو قانون باور لري، که جدول په دوه -کونجتړې(قطر) باندې هنداروں یا انعکاس سیومتریک وي. په ځټ یا معکوس توکی شتون لري، که د جدول په هره لیکه او هره مټه کې د بدن هر توکی یوځل منځ ته راشي یا شتون ولري. صفرتوکی شتون لري، که   په هره لیکه او هره مټه کې منځ ته راشي یا شتون ولري. اسوځیاتیو او دېستریبوتیو قوانین له جدول ځخه په ساده توګه نه شي لوستل کېدی.

وروسته له دې چې دا نښلونتکي(د نښلونو تکي) لرو، پېژنو، چې بدن $\mathbb{F}_4$ شتون نه لري. دا د ضرب د معکوس توکی قانون په خلاف دی. داسې x نه شته چې$2 \cdot x = 1$ باوري کړي

یعنې د4 پاتې تړولګي ځخه بدن   نه شي جوړېدلای. برعکس یو بدن $\mathbb{F}_3$ له پاتې تړولګي 3 ځځخه ممکن دی، ځکه چې هېځ اکسیوم نه زیانمن یا زخمي کیږي: ګورو چې سیمتریک، برعکس او ناپیلی توکي شتون لري . همداسې د نږدې پسې ازمایلو ځخه ګورو چې اسوځیاتیو او دېستریبوتیو قوانین هم باوري دي.

که نور هم ځیرنه ژوره کړو، نو په دې کې یو سیستم ګورو،   چې کله یو پاتې تړولګی p یو بدن$\mathbb{F}_p$ کیږي. دا حالت تیک هلته رامنځ ته کیږي، چې p یو لومړنی ګڼ(عدد) وي. دا ثبوت دلته نه راوړو.

مګر غواړو چې په پای تعریف کړو، چې یو کرکتریستیک (خوی تاکونی) ځه شی دی او ولې د یوه په خوښه بدن $\mathbb{K}$کرکتریستیک تل یو لومړنی ګڼ او یا 0 دی:

پیژند(تعریف):

$\mathbb{K}$ دې یو ردن وي او 1 د ضرب یو ناپیلی توکی(یوونتوکی، عنصر واحد) وي. د یوه زیاتیز یا مثبت عدد n لپاره د $n \cdot 1$ لاندې پوهیږو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$n \cdot 1 = \underbrace{1 + \ldots + 1}_{n \text{ mal}}.$$

د بدن $\mathbb{K}$ کرکتریستیک په لاندې توګه تعریف دی

$\mathrm{char}\mathbb{K} = \begin{cases} 0 \\ n \end{cases}$	که n>0 شتون ونه لري، چې n.1=0 باور ولري که nشتون ونه لري، چې باور ولرn1=0

ښوونه: n تل یو لومړنی ګڼ دی:

وي دې $n \neq 0$ (د تعریف دویم حالت). که n لومړنی عدد نه وی، نو دا په لاندې ضقیبونو توټه کیږی [2.3] .

$$\begin{aligned} & n1 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & (n_1 \cdot n_2)1 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & n_1 1 \cdot n_2 1 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & n_1 1 = 0 \wedge n_2 1 = 0 \end{aligned}$$

دا تضاد دی. ځکه چې $n_1 < n$ او $n_2 < n$ باید کرکتریستیک $\mathbb{K} = n_1$ char اویا $\mathbb{K} = n_2$ char کرکتریستیک وي. دی $\mathrm{char}\ \mathbb{K} = n$ او له دې سره n په ضریبونو نه شي توټه (تجزیه) کېدی، نو له دې امله یو لومړنی عدد دی.

موږ د ښوونځي ځخه غوره بدنونه پیژنو، لکه د هوښیار اعدادو(کسري-) $\mathbb{Q}$ ، د ریل یا حقیقی اعداد $\mathbb{R}$ بدنونه او وروسته د کمپلکس اعدادو $\mathbb{C}$ بدنونه هم. دا ټول زدنونه کرکتریستیک 0 لري. نور د اعدادو غوره ډېری هم شته لکه د ټول ګڼونو (- اعدادو) ډېری. دا فقط یو کموتاتیو ګروپ جوړوي، ځکه چې په نسبت و ضرب ته معکوس توکی نه لری. دا له دې امله داسې ده،چې موږ په دې عددونو کې ماتونه(کسرونه) نه لرو. د ټولو طبیعي اعدادو $\mathbb{N}$ ډېری چې 0ورسره تړلی دی او یا نه،

(c) ketabton.com: The Digital Library

متأسفانه چې حتا یو ګروپ هم نه دی، ځکه چې د جمعي معکوس توکي نه لرو، د بېلګې په توګه د $3+x=1$ لپاره x شتون نه لری، ځکه چې $x=-2$ شتون نه لري.

وکتور فضا der Vektorraum

لاندې برخه

کرښیزبلواکوالی (خطي تابعیت)

یادونه (ژباړی): ګ,رو چې دلته مو تابع کلیمه، چې د فنکشن لپاره کارول کیږي، ناتیکاوي ته لاربنودوي. دلته د بلواکوالي یا تابعیت څخه موخه فنکشن نه دی. پای.

یو د وکتورونو $(v_1,\dots,v_n)$ کورنی کېدی شي کرښیز بلواکه یا کرښیز خپلواکه وي، نه دواړه یو ځای کېدی شي او هم نه له دوه څخه یوه هم نه . یوه کورنی هغه ډېری ده، چې یو توکی په کې دوه ځله هم راتلی شي. پس موږ په خوښه وکتورونه لرو- په کوم کې چې همغه وکتور ختی دوه ځله راتلی شي- کوم چې موږ داپه خپلو اړیکو کې یو له بل سره ځېړو.

کرښیز خپلواکوالی

V دې یو $\mathbb{K}-$ -وکتورفضا وي. یوه د وکتورونو $(v_1,v_2,\dots,v_n)$ پای کورنی له V څخه کرښیز خپلواک بلل کیږی، که له $\lambda_1,\dots,\lambda_n\in\mathbb{K}$

$$\lambda_1 v_1+\ldots+\lambda_n v_n=0$$

څخه لاس ته راشي، چې $\lambda_1=\ldots=\lambda_n=0$ دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا په دې معنا، چې صفر وکتور د نورو وکتورونو $v_1, v_2, \ldots, v_n$ څخه ساده ترکيب کيدی شي

کرښيز بلواکواکوال:

V دې بيا هم يو $\mathbb{K}-$ -وکتورفضا وی. يوه د وکتورونو $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ پای کورنۍ له V څخه کرښيز بلواک بلل کيږی، که له $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$

$$\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n = 0$$

لاس ته راشي، چې هم ساده حل $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$ شته ، او هم يو حل له کوم سره چې لږ تر لږه يو $(1 \leq i \leq n)\, \lambda_i \neq 0$ دی.

دا په دې معنا دی، چې موږ صفروکتورونه د ساده حلونو يا اوبيونو څخه په بل ډول هم د وکترونو د کورنې څخه جوړولی شو

د وکتور فضا تعريف:

اوس د وکتورفضا تعريف ته راځو:

$\mathbb{K}$ دې يو بدنوي. يودرېګون $(V, +, *)$ چې V يوه n-ګون

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

او $+$ او $*$ ترني يا عمليي وي

$$+ \quad : \quad V \times V \to V$$
$$* \quad : \quad \mathbb{K} * V \to V$$

$\mathbb{K}$ -وکتور فضا بلل کيږي، که لاندې اکسيونونه باور ولري:

$(V,+)$ يو کموتاتيو ګروپ دی.

S1 : $\forall\ \lambda,\mu \in \mathbb{K}, v \in V$ باور لري $\lambda * (\mu * v) = (\lambda * \mu) * v$ (آسوځياتيو قانون)

S2 : $1 \in \mathbb{K} : \forall\ v \in V : 1 * v = v$ (ناپيلی توکی)

D1 : $\forall\ \lambda,\mu \in \mathbb{K}, v \in V$ باور لري $(\lambda + \mu) * v = \lambda * v + \mu * v$ (ديستريبوتيو قانون)

D2 : $\forall\ \lambda \in \mathbb{K}, v, w \in V$ باور لري $\lambda * (v + w) = \lambda * v + \mu * w$ (دېتريبوتيو قانون)

د يوه وکتور فضا جوړونه يا که غواړی توليد Erzeugen eines Vektorraums

اوس غواړو $n-$ ګونی [3.1] $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ، چې دوکتورفضا د توليد لپاره اړتی ورته لرو توليد کړو. دا کړی شو که موږ دا ټول وليکو . دا د ډېرو کمو وکتورونو لپاره هم موخه ور دی. مګر د زياتو وکتورفضاو لپاره دا نا ممکن دی، څکه چې موږ ناپای ډېر ګونونه لرو. موږ بايد دا د يوه شمېرقانون سره توليد کړو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

كرښيز تركيبوالی

وي دې $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ په $\mathbb{K}-$ -وكتور فضا كې يوه د وكتورونو كورنۍ. هر د $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K})$ بڼې

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n$$

وكتور v د $v_1, v_2, \ldots, v_n$ كرښيز تركيب بلل ګيږی.

اوس ، د كلمو،، كرښيز خپل(بل)واک،، او د ،،كرښيز تركيب،، ترمنځ يو څو ښوونې يا ثبوتونه راړل كيږی. د دې ښوونو لاس ته راوړنې به شايد د ډېرو زده كړو په غوښنه او وينو ته تللي وي. تاسو پوهيږئ چې دا داسې دی. خو بيا هم موږ بايد دا يو ځل وښايو:

جمله ؛

كه د كورنۍ $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ وكتورونه يو بل ته كرښيزخپلواک وي، نو كېدی شي هر وكتور $v \in L(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ د دوی له لارې په يوه ټاكلې لار تركيب شي. له

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n \qquad v = \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 + \ldots + \mu_n v_n$$

ځخه لاس ته راځي

$$\lambda_1 = \mu_1; \;\; \lambda_2 = \mu_2; \;\; \lambda_n = \mu_n$$

ښوونه:

$$\begin{aligned} & v = v \\ \Leftrightarrow \quad & \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n = \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 + \ldots + \mu_n v_n \\ \Leftrightarrow \quad & (\lambda_1 - \mu_1) v_1 + (\lambda_2 - \mu_2) v_2 + \ldots + (\lambda_n - \mu_n) v_n = 0 \end{aligned}$$

د كرښيزخپلواكوالي له امله باور لري:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lambda_1 - \mu 1 = 0; \quad \lambda_2 - \mu_2 = 0; \; \ldots \; \lambda_n - \mu_n = 0$$
$$\Rightarrow \quad \lambda_1 = \mu 1; \quad \lambda_2 = \mu_2; \; \ldots \; \lambda_n = \mu_n$$

له دې سره کېدی شي وکتور ټیک په یوه ډول ترکیب شي.

برعکس یا په څټ کیدی شي وښوول شي:

جمله :

که چیرې یو وکتور v ټیک په یوه ډول له وکتورکورنیو $(v_1, v_2, \ldots v_n)$ څخه د کرښیز ترکیب کیدی شي، نو نو د دې کورنی وکتورونه یو بل ته کرښیز خپلواک دي.

ټیک په یوه ډول تکیبوړ په دې معنا دی، چې که

$$v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n$$
$$\text{und} \quad v = \mu_1 v_1 + \ldots + \mu_n v_n$$

باور ولري، $\lambda_1 = \mu_i$ باور لري او له دې سره $\lambda_i - \mu_i = 0$

$$v = v$$
$$\Leftrightarrow \quad \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n = \mu_1 v_1 + \ldots + \mu_n v_n$$
$$\Leftrightarrow \quad (\lambda_1 - \mu_1) v_1 + \ldots + (\lambda_n - \mu_n) v_n = 0$$

داچې $\lambda_i - \mu_i = 0$ د $1 \leq i \leq n$ لپاره د کورنې وکتورونه کرښیز خپلواک دي.

جمله:

که د یوې کورنې $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ وکتورونه کرښیز بلواک وي، نو له یوه څخه زیات امکانات شته چې وکتور v ترکیب کړو. کرښیز بلواک په دې معنا دی، چې لږ ترلږه یوه v_i لپاره $(1 \leq i \leq n)$ باور ولري:

$$v_i = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_{i-1} v_{i-1} + \lambda_{i+1} v_{i+1} + \ldots + \lambda_n v_n.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ښوونه:

که موږ وکتور v ولرو، کړی شو دا په لاندې ډول ترکيب کړو:

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n.$$

له دې ځخه لاس ته راځي $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. اوس کړی شو دا پورته يادشوی کرښيز ترکيب د v_i لپاره ځای په ځای کړو او لاس ته راړو

$$\begin{aligned} v &= \lambda_1 v_1 + \ldots + \\ &\quad \lambda_i \cdot (\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_{i-1} v_{i-1} + \lambda_{i+1} v_{i+1} + \ldots + \lambda_n v_n) \\ &\quad + \ldots + \lambda_n v_n \\ \Leftrightarrow \quad v &= (1+\lambda_i)\lambda_1 v_1 + \ldots + (1+\lambda_i)\lambda_n v_n \end{aligned}$$

نو $(1+\lambda_i)\lambda_1, \ldots, (1+\lambda_i)\lambda_n$ يو نوی امکان دی چې v ترکيب کړو او د دې سره همدا اوس دوه امکانات لرو

موږ کړی شو چې لاندې دوه واقعيتونه هم ثبوت کړو:

جمله :

که يو وکتور v_i د کورنۍ $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ کرښيز د کورنۍ $(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n)$ ځخه نه شي ترکيبېدی، نو د کورنۍ $(v_1, \ldots, v_n)$ وکتورونه يو بل ته کرښيز خپلواک دي.

ښوونه:

نيسو چې دا کرښيز بلواک دي. داپه دې معنا، چې د

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n = 0$$

لپاره لږ تر لږه د يوه λ_i لپاره $(1 \leq i \leq n)$ باور لري

$$\lambda_i \neq 0$$

دا په دې معنا چې

$$\begin{aligned} & \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_{i-1} v_{i-1} + \lambda_{i+1} v_{i+1} + \ldots + \lambda_n v_n = -\lambda_i v_i \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{\lambda_1}{-\lambda_i} v_1 + \ldots + \frac{\lambda_{i-1}}{-\lambda_i} v_{i-1} + \frac{\lambda_{i+1}}{-\lambda_i} v_{i+1} + \ldots + \frac{\lambda_n}{-\lambda_i} v_n = v_i \end{aligned}$$

نو کېدی شي، چې v_i له $(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n)$ کربنيزه ترکيب کړاي شي. دا نيونې ته تضاد دی. نو بايد وکتورونه کربنيز خپلواک وي.

په همدې توګه برعکس ی په ښت هم باور لري:

جمله:

که د کورنۍ $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ وکتورونه يو بل ته کربنيز خپلواک وي، نو کوم يو وکتور د بل ځخه کربنيز ترکيب کېدی نه شي.

ښوونه:

نيسو، چې دا شونی دی، يو وکتور v_i $(1 \leq i \leq n)$ کېدی شي کربنيز ترکيب کړاي شی. نو باور لري:

$$v_i = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_{i-1} v_{i-1} + \lambda_{i+1} v_{i+1} + \ldots + \lambda_n v_n$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ګورو، چې $\lambda_i \neq 0$ دی، ځکه چې $\lambda_i = -1$. او د کورنۍ وکتورونه به کرښیز بلواک وی. تضاد. بو دا ممکن نه ده، چې له دې وکتورونو څخه کوم یو له بل څخه کرښیز ترکیب کړي، ځکه چې بیا به کرښیز خپلواکوالی زخمي شوی یا زیانمن شوی وي.

سپاین یا کرښیزه **Spann**،((کرښیزه) رابنده ورشو)**Abschluss، lineare Hülle**

په یوه $\mathbb{K}-$ - وکتورفضا کې د یوې کورنۍ $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ د ټولو کرښیز ترکیبونو ډېرۍ سپاین یا کرښیزه رابنده ورشو بلل کیږي

$$span(v_1, \ldots, v_n)$$

یا د وکتورونو د کورنۍ کرښیزه (که غواړۍ) سمڅه(**Hülle**)

روښانه دې وي: د یوه سپاین وکتورونه ناجبري کرښیز خپلواک نه دي.

جوړښتسیستم (تولیدي سیستم) Erzeugendensystem

د وکتورکورنۍ $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ د وکتور فضا V تولیدی سیستم بلل کیږی، که باور ولري

$$V = span(v_1, v_2, \ldots, v_n)$$

داپه دې معنا چې وکتورونه د وکتور فضا V مکمله یا پوره غزوي.

دلته کېدی شي، چې د وکتورونو کورنۍ کرښیز بلواک یا کرښیز خپلواک وی. دا یواځې باید وکتور فضا و غزوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بنسټ Basis

د وکتورونو $(v_1,\dots,v_n)$ کورنی د وکتور V بنسټ بلل کيږي، که د کورنی یوګوني وکتورونه

- یو بل ته کربنيز خپلواک دي

- او که د وکتورونو کورنی ټول وکتور V وغزوي، یعني د V یو توليدي(جوړختيز) سيستم دی:

$$V = span(v_1,\dots,v_n)$$

او

$$\text{und}\quad \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$$

له دې سره یو توليدي سيستم ټیک هلته یو بنسټ دی، چې د دې توليدي سيستم وکتورونه یو بل ته کربنيز خپلواک دي.

د شتاينيځ بدلونجمله Austauschsatz von Steinnitz

جمله:

په يوه د $\mathbb{K}-$ - وکتورونو کورنی(که فضا) V کې دې یو بنسټ

$$B := \{v_1,\dots,v_r\}$$

او يوه کربنيز ځپلواکه کورني

$$(w_1,\dots,w_n)$$

ورکړ شوي وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دی $r \geq n$. سړی کړی شي د بنسټ n وکتورونه د nکربنیز خپلواکو کتورونو کورنیو سره بدل کړای شي، داسې چې نوی بنسټB^* بېرته کربنیز خپلواک دی او د وکتورفضا V_K بنسټ دی. د ایدنکس د ګڼې بدلون وروسته کېدی شي داسې ولیکو:

$$B^* := \{w_1, \ldots, w_n, v_{n+1}, \ldots, v_r\}$$

$$B^* := \{w_1, \ldots, w_n, v_{n+1}, \ldots, v_r\}$$

یا په ځانکړي حالت $n = r$:

$$B^* := \{w_1, \ldots, w_n\}$$

ښوونه:

ښوونه د بدلون لیما سره صورت نیسي. دا دبدلون لېما) وړه چمله) د د بنټ ځخه یو وکتور اخلي او یو بل ورزیاتوي:

بدلون جمله ګی **Austauschlemma**

یو $K-$ -وکتورفضا V دې د بنسټ

$$B := \{v_1, \ldots, v_r\}$$

سره ورکړ شوې وي او یوه w د

$$w = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_{k-1} v_{k-1} + \underline{\underline{\lambda_k v_k}} + \lambda_{k+1} v_{k+1} + \ldots + \lambda_r v_r \in V$$

د $\lambda_k \neq 0 \quad (\star)$ سره او

$\lambda_k \neq 0.$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو

$$B' := \{v_1, \ldots, v_{k-1}, w, v_{k+1}, \ldots, v_r\}$$

بېرته یود V بنسټ دی .

یعني سرې کړی شي v_k د w وکتور سره بدل کړي. (دا نور $\lambda_1 \ldots \lambda_r$ بې له λ_k باید حتمأ 0 نه وي.، مګر دوی کړی شي).

د بدلون جملې ښوونه**Beweis des Austauschlemmas** :

د لیکنې د ساده کونې لپاره نیسو، چې$k = 1$ دی. موږ ښایو چې

$$B' := \{w, v_2, \ldots, v_r\}$$

هم د V_K بنسټ دی.

- د بنسټ 3.2 ټول وکتورونه $v \in V$ د کرښیزترکیب په څېر لیکل کېدی شي یعني

$$v = \mu_1 v_1 + \ldots + \mu_r v_r \quad (\star\star)$$

داچې $\lambda_1 \neq 0$ دي، کړی شو په لاندې ډول یې بنهبدل کړو

$$\begin{aligned} & w = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_r v_r \qquad (von\ \star) \\ \Leftrightarrow\ & \lambda_1 v_1 = w - \lambda_2 v_2 - \ldots - \lambda_r v_r \\ \Leftrightarrow\ & v_1 = \frac{w}{\lambda_1} - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} v_2 - \ldots - \frac{\lambda_r}{\lambda_1} v_r \end{aligned}$$

- اوس کړی شو دا په $\star\star$ کې ځای په ځای کړو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\begin{aligned} v &= \mu_1\left(\frac{w}{\lambda_1}-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}v_2-\ldots-\frac{\lambda_r}{\lambda_1}v_r\right)+\ldots+\mu_r v_r \\ &= \mu_1\frac{w}{\lambda_1}-\mu_1\frac{\lambda_2}{\lambda_1}v_2-\ldots-\mu_1\frac{\lambda_r}{\lambda_1}v_r+\ldots+\mu_r v_r \\ &= \frac{\mu_1}{\lambda_1}w+\left(\mu_2-\mu_1\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)v_2+\left(\mu_3-\mu_1\frac{\lambda_3}{\lambda_1}\right)v_3+\ldots+\left(\mu_r-\mu_1\frac{\lambda_r}{\lambda_1}\right)v_r \end{aligned}$$

له دې لاس ته راځي، چې نوی بنسټ لږ تر لږه یو تولیدي سیستم دی.

- اوس پاتې دادی چې کربنیز خپلواکوالی و ښایو
$\mu w+\mu_2 v_2+\ldots+\mu_r v_r=0$

د $\star$ ځا ي په ځای کونه:

$$\begin{aligned} &\mu(\lambda_1 v_1+\lambda_2 v_2+\ldots+\lambda_r v_r)+\mu_2 v_2+\ldots+\mu_r v_r=0 \\ \Leftrightarrow\quad &\mu\lambda_1 v_1+(\mu\lambda_2+\mu_2)v_2+(\mu\lambda_3+\mu_3)v_3+\ldots+(\mu\lambda_r+\mu_r)v_r=0 \end{aligned}$$

نو $\mu\lambda_1=\mu\lambda_2+\mu_2=\mu\lambda_3+\mu_3=\ldots=\mu\lambda_r+\mu_r=0$ ، ځکه چې B
کربنیزخپلواکه وه ($\mu_2=\mu_3=\ldots=\mu_r=0$) او $\mu=0$ ، ځکه چې
$\lambda_1\neq 0$
.

له دې ځخه کربنیز خپلواکوالی لاس ته راځي

د بدلون جملې ښوونه:

له دې وروستهچې ومو ښوول، چې سړی یو وکتور v_k له بنسټ ځخه را
اخستی شي او د وکتور wسره یې بدلولی شي، که دا اړونده $\lambda_k\neq 0$ وي(
کړی شي، چې د نمرې یا ګڼې بذلون سره اِه ټیک ځای ته راوړل شي)، باید
وښایو، چې د زاړه بنسټ لپاره تل داسې یوه $\lambda_k\neq 0$ شتون لري، داسې چې
موږ وکتورونه پرلپسې سره بدلولی شو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

- که صفر وکتورونه سره بدل کړو، نو ښوونې ته نه اړکيږو. موږ اړيين نه يو چې کوم وکتور پيدا کړو، چې له هغو سره بنسټ وکتور بدل کړو. دا زموږ د ايندکشن پيل دی.

- زموږ د ايندکشن نيونه ده، چې k وکتورونه مو سره بدل کړي دي او بېرته مو يو بنسټ لاس ته راوړی دی:

$$B' = \{w_1, \ldots, w_k, v_{k+1}, \ldots, v_r\}$$

- د ايندکشن پای :

که موږ وکتور w_{k+1} بدل کړو، نو بايد يو λ_i د $k+1 \leq i \leq r$ سره پيداکړو، د کوم لپاره چې $\lambda_i \neq 0$ باور لري. باور لري :

$$w_{k+1} = \lambda_1 w_1 + \ldots + \lambda_k w_k + \underbrace{\lambda_{k+1} v_{k+1} + \ldots + \lambda_r v_r}_{\text{mindestens ein } \lambda_i \neq 0}$$

دا پورته لړ تر لږه يوه $\lambda_i \neq 0$.

دا چې کرښيزخپلواکه کورنۍ $(w_1, \ldots, w_k, w_{k+1}, \ldots)$ کرښيز خپلواکه وه، اجازه نه شته چې $\lambda_1 = \ldots = \lambda_k \neq 0$ وي، ځکه چې پرته له دې کرښيز خپلواکوالی زحمي شوی وي.

داچې w_{k+1} هم صفر وکتور نه دی، ځکه چې بيا به کرښيز خپلواکوالی زخمي شوی وي، نو يو λ_i ($k+1 \leq i \leq r$) شتون لري د $\lambda_i = 0$ سره.

د ښوونې ځخه لاس ته راوړنه

(c) ketabton.com: The Digital Library

- که یو $K-$ - وکتورفضا V یو پای بنسټ ولري، نو د V هر بنسټ پای دی.
- د یوې وکتورفضا هر دوه بنسټونه برابر اوږدوالی لري.
- بنسټ پوره کېدنه:

په یوه پای تولېدکېدونکي وکتور فضا Vکې دې کرښیز خپلواک وکتورونه $w_1, w_2, \ldots, w_n$ ورکړل شوي وي. نو کېدی شي سړی پیدا کړي، داسې چې

$$B := \{w_1, w_2, \ldots, w_n, w_{n+1}, \ldots, w_r\}$$

د V یو بنسټ وي.

- $v_i, \ldots, v_n$ دې د کرښیز خپلواک وکتورونو ډېرۍ وي، چې یوه وکتور فضا غزوي، نو د $v_i, \ldots, v_{n+1}$ ډېرۍ په هر حالت کرښیز بلواک ده.

دا په دې معنا چې بل وکتور نه شي پیداکېدی چې و $v_i, \ldots, v_n$ ته کرښیز خپلواک وي.

- د بنسټ بدلید جمله:

$v_i, \ldots, v_n$ دې کرښیز خپلواک وکتورونه وي، چې یوه وکتور فضا غزوي(دا په دې معنا چې دا یو بنسټ دی)، نو $w_i, \ldots, w_n$ کرښیز خپلواک وکتورونه ، چې د وکتورونو $v_i, \ldots, v_n$ د کرښز ترکیب څخه جوړیدی شي، برابره وکتورفضا غزوي.

بعد یا پراخېدونی(Dimension)

که Vیوه $K-$ - وکتور فضا وي، نو تعریفوو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$dim_k V = \begin{cases} \infty \\ r \end{cases}$	که V پای بنسټ ونه ري، کهV د r اوږدوالي بنسټ ولري

د پراخېدوني يا بعد جمله:

وي دې $f : V \to W$ (V, W دلته $\mathbb{K}-$ -وکتورفضاوې دي) يو کرښيزبلواک. نو د بعد ياپراخېدوني جمله باور لري:

$$dim\ V = dim\ Bild(f) + dim\ Ker(f)$$

Bildخيره او Ker(Kern) زړی يا هسته

ښوونه :

يادونه:

$dimV$: : دV د بنسټ وکتورونو ګڼون يا تعداد.

$dim\ Bild(f)$: : د وکتورونو ګڼون يا تعداد د V د لاندې وکتورفضا (Bild (f کې.

$dim\ Ker(f)$: : د f په زړي(هسته) کې د وکتورونو ګڼون يا تعداد. دا بېرته د V لاندې وکتورفضا ده.

لومړی: دا چې زړی (Ker (f د V لاندېوکتورفضا ده، په هر حالت لرو

$$dimV \geq dim\ Ker(f).$$

د $v_1, v_2, \ldots, v_n$ د زړي د بنسټونو وکتورونه يو بل ته کرښيز خپلواک دي.

د بنسټتکيلېدوجملې په بنسټ کېدی شي دې بنسټ ته کرښيز خپلواک وکتورنه V ته ورزيات کړي او دا بنسټ په دې توګه د V يوه بنسټ ته پوره يا تکميل کړي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$B_V := \{v_1, v_2, \dots, v_n, v_{n+1}, \dots v_k\}.$$

لومړی: موږ اوس پرېږدو چې تابع f د وکتورفضا V په بنسټ وښغلي. نو لاس ته راوړو:

$$Bild(f) = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(v_i)}_{=0} + \sum_{i=n+1}^{k} \lambda_i f(v_i) = \sum_{i=n+1}^{k} \lambda_i f(v_i)$$

د زړي بنسټوکتورونه په 0 تنظیمیږي يا ځبره کیږي . له دې امله د ځبرې یا عکس د بنسټوکتورونو ګڼون یا تعداد او له دې سره د عکس پرخېدونی یا بعد دی.

$$\begin{aligned} & dim\ \ Bild = dim\ V - dim\ \ Kern \\ \Leftrightarrow \quad & dim\ V = dim\ \ Bild + dim\ \ Kern \end{aligned} \qquad !!!$$

لاندې وکتور فضا

تعریف (پېژند):

د وکتورفضا V په $\mathbb{K}$ باندې یو لاندې وکتورفضا Uمنځ ته راځي، که سړی د وکتورفضا ټاکلي توکي لرې پرېږدي(لنډ:پرېږدي). له دې سره باید د لاندېوکتورفضا پاتې توکي دا لاندې ځویونه پوره کړی:

- $U \neq \emptyset$

- د ټول $x, y \in U$ لپاره $x + y \in U$ باور لري او د ټولو $x \in U$ ، $\lambda \in \mathbb{K}$ لپاره $\lambda x \in U$ باور لري .

(c) ketabton.com: The Digital Library

خويونه:

- له دې سره یو وکتورفضا لړترلږه دړه لاندې وکتورفضاوې لري. یو ځل دا اکسیومونه پخپله په وکتورفضا کې ورکړل شوي، داسې چې داوکتور فضا و خپل ځان ته لاندېوکتورفضا ده. له بلې خوا هروکتورفضا صفروکتور لري. دا صفر وکتور ځانله هم یوه وکتورفضا ده.

- $U_1 \cap U_2$ لاندې فضاو ده، کهU1 اوU2 لاندې فضاوې وي.

- $V_\mathbf{K}$ دې یوه وکتورفضا وي او $v_1, \ldots, v_n \in V_\mathbf{K}$. هر کرښيز ترکیب $L(v_1, \ldots, v_n)$ یوه لاندېفضا ده.

د لاندې فضاو لپاره د بعد یا پراخیدوني فرمول

$$dim(U_1 \cap U_2) + dim(U_1 + U_2) = dim(U_1) + dim(U_2)$$

ښوونه د وکتورفضاو د بنسټ د وکتورونو د ګڼون یا تعداد باندې مخ ته بیول کیږي. د وکتورفضا $U_1 \cap U_2$ بنسټ یو ځل وکتورفضا U_1 او یو ځل وکتورفضا U_2 ته وړپوره یا تکمیل کیږي. د وکتورفضا $U_1 + U_2$ بنسټ[3.3] د غوځې بنسټ دی جمعه یې دا نور د U_1 او U_2 وکتورونه

فنکشنونه یا توابع ، په ځانګړې توګه کرښيزې-

تعریف: X او Y ډېرې یا ستونه دي. یو تابع f یو ترتیب یا تنظیم دی، د کومو له لارې چې هرتوکی $x \in X$ په ټیم یوه توکي $f(x) = y \in Y$ تنظیم شي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$f : X \longrightarrow Y$

- دا چې دا توکی ځنګه ترتیبیږي دا پروا نه لري. لومی په کربښیزو توابعو کې بندیزونه راړل کیږي، دا چې تابع باید کربښیزهوي.

- د Y په توکي کېدی شي د X ډېر توکي وښايي ياپه ډېرو توکو ترتیب یا تنظیم شي. مګر برعکس ممکن نه دی. دا په Y کې توکی، کوم چې د X توکی له ښودل کیږي یا په کوم چې د X توکی تنظیم شي، باید تل یواځنی ټاکلی وي.

د فنکشنونو یا څیرونو(توابعو) خویونه Eigenschaften von Abbildungen

په باندې فنکشن(- تابع) Surjektiv

$f : V \to W$

دې یوه تابع وي. تابع په باندې ده، چه باور ولري:

$\forall \ w \in W \ \exists v \in V$ ، داسې چې $f(v) = w$.

په کې (فنکشن (څیرونه یا تابع)) Injektiv

$f : V \to W$

دې یو تابع وي. تابع په باندې دی، که باور ولري:

$\forall x, y \in V$

$x \neq y \Leftrightarrow f(x) \neq f(y) \qquad f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$

په (په باندې او په کې فنکشن یا -- تابع) Bijektiv

په توابع هم په باندې تابع دي او هم په کې تابع (سوزجکتیو، اینجکتیو) دي يخد په باندېولی اوپهکې والی پوره کوي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$\forall\, w \in W \;\; !\exists\, v \in V$ ، داسې چې باور لري $f(v) = w$. (هر $w \in W$ تیک یو پخوا یا تر مخځېره $v \in V$ لري)

کرښيز فنکشنونه يا توابع Lineare Abbildung

تعريف(پيژند)

يو تابع $f : V \to W$ ، د کوم سره چې V او W وکتورفضاوې دي په همغه بدن K ، کرښيز بلل کيږي(يا د وکتورونو هومومورفيزم)، که $\forall\; x, y \in V$ او $r \in K$ لپاره باور ولري:

$$\begin{array}{ll} L1: & f(x+y) = f(x) + f(y) \\ L2: & r \cdot f(x) = f(r \cdot x) \end{array}$$

سرې کړی شي دواړهاکسيومونه په باندې تګه سره رايوځای کړي:

$$L : f(r \cdot x + y) = r \cdot f(x) + f(y)$$

زړی(هسته) او عکس يا څېره Bild und Kern

د يوه تابع $f : V \longrightarrow W$ څېره يا عکس په لاندې توګه تعريف دی

د لږ ترلږه يوه لپاره.

$$Img(f) := \{w \in W | f(v) = w \text{ für mindestens ein } v \in V\}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د یوه تابع $f : V \longrightarrow W$ زړی په لاندې توګه تعریف دی

$$Kern(f) := \{v \in V | f(v) = 0\}$$

ځانګړي کرښیز فنکشنونه (توابع)

یو کرښیز تابع $F : V \rightarrow W$

یو مونومورفیزم Monomorphismus بلل کیږي، که F اینجکتیو وي.

ایپیمورفیزم Epimorphismus ، که Fسورجکتیو وي،

ایزومورفیزم **Isomorphismus** ،که F بیجکتیو وي،

ایندومورفیزم**Endomorphismus** ، که $V = W$ او

اوتومورفیزم**Automorphismus** ، که $V = W$ او F بیجکتیو وي.

د په باندې، په کې ، په (باندې او کې) فنکشنونو یا توابعو لپاره ښوونه

X→X

وې دی $f : X \rightarrow X$. لاندې ویناوې برابر ارزښته یا ایکویوالنت دي:

(i) f په کې دی injektiv

(ii) f ist surjektivپه باندې دی

(iii) f ist bijektivپه دی

دا چې له (iii) څخه (i) او(ii) لاس ته راځي او څخه لاس ته راځي روښانه ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ښوولو دی چې لومړی. (ii)→(i) او دويم. (i)→(ii)

لومړی: اينجکتيو له دې لاس ته راځي سورجکتيو. دا داسط ښايو، که په کې وښايو، چې،، نه سورجکتيو له دې لاس ته راځي نه اينجکتيو،،. د نور کلمو سره:: تابع سورجکتيو ده، که دا اينجکتيو وي، ځکه چې که سورجکتيو نه وي، نو ايجکتيو به هم نه شوی کېدی:

- په باندې يا سورجکتيو په دې معنا ده،چې د ټولو $x \in X$ لپاره په وتونډېری کې يو $x' \in X$ شتون لري، داسې چې باور $f(x') = x$ لري . . که يو تابع په باندې نه وي، نو يو $x \in X$ په کوخه ډېرۍ کې له مخه ځېره ونه لري(يعني چې دا يې ځېرهوي).
نو $f(X) \neq X$ باور لري .

وي دې $X := \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ يعني $|X| = n$ ، نو $|f(X)| = m < n$ دی[4.1]. نو نو اوس دا **Schubfachprinzip** von Dirichlet (د ديريښليت(شمير پوه) د ميزکورونو(لکه چې د ميز خانه يې پول)، خو داسې چې ډيطر کورګړي ولري(ژباړی) اصول) وايي، چې که n شيان په mکورونو(خانو) کې کېږدو او $n > m$ وي، نو لږ ترلږه په يوه کور کې له يوه زيات شيان بايد واچول شي.

د دې لاس ته راوړنې سره اينجکتيووالی نه دی ورکړ شوی، ځکه چې $f(x) = f(x')$ مګر $x \neq x'$ (ټيک هلته چې په يوه کور کې دوه توکي پراته دي).

دويم : سورجکتيو له دې لاس ته راځي اينجکتيو. موږ ښايو چې که تابع اينجکتيو نه وي، نو سورجکتيو هم نه ده.

1. f په کې نه ده، نو $f(x) = f(x')$ شتون لري د $x \neq x'$ سره . نو $f(X) \neq X$ دی او دا چې لږ تر لږه په $|f(X)| < |X|$ کې يو توکی کم دی لږ تر لږه $|f(X)| = n - 1$ کېدی شي وي ، داسې چې $|f(X)| < |X|$ او له دې

(c) ketabton.com: The Digital Library

سره تابع په باندې نه ده، داسې چې په موخه ډېرۍ کې يو توکی $x \in X$ شتون لري د کوم لپاره چې په وتونډېرۍ کې $x' \in X$ شتون نه لري.

F په کې(اينجکتيو) ⇔ Ker (F) = 0

وي دې $F : V \to W$ او $x, v_1, v_2, n \in V$ او $0 \in W$

له دې لاس ته راخي:

دا چې F په کې يا اينجکتيو دی نو هر شکل يا ځېره يو پخوا يا ترمخ شکل لري.

د 0 پخواشکل يا ترمخ شکل يا ځېره دې n وي. $\Longleftrightarrow$

$$Ker(F) = \{n\} \Rightarrow F(n) = 0$$

دا چې کربنيز دی بايد باور ولري:

$$\begin{aligned} & F(x) + F(n) = F(x+n) \\ \Leftrightarrow\quad & F(x) = F(x+n) - F(n) \\ \Leftrightarrow\quad & F(x) = F(x+n) - 0 \\ \Leftrightarrow\quad & F(x) = F(x+n) \\ \Rightarrow\quad & n = 0 \end{aligned}$$

نو $Ker(F) = 0$

له دې لاس ته راخي $(\Leftarrow)$:

$$Ker(F) \Leftrightarrow \{v \in V | F(v) = 0\}$$

د په باندېوالي خوونه: دا چې تابع کربنيزه دی با ور لري:

د په کې والي ښوونه:

$$\begin{aligned} & F(v_1) = F(v_2) \\ \Leftrightarrow\quad & F(v_1) - F(v_2) = 0 \\ \Leftrightarrow\quad & F(v_1 - v_2) = 0 \\ Da\ \ Ker(F) = 0 \ \Rightarrow\quad & F(v_1 - v_2) = F(0) \end{aligned}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له دې سره دی $v_1 = v_2$.

L پړه کې ⇔ کربنیزخپلواک وکتورونه په کربنیز خپلواک وکتورونو څېره کیږي

L په کې ⇔ کربنیزخپلواک L کربنیز خپلواک

له دې لاس ته راځي(⇐:) :

ښایو: $L(v) = L(w) \Rightarrow \ldots \Rightarrow v = w$

وي دې $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ بنسټ، $v, w \in V$ او بنسټ او

$L(v_1), \ldots, L(v_i), \ldots, L(v_n)$ کربنیز خپلواک

$$\begin{aligned} & L(v) = L(w) \\ \Leftrightarrow \quad & L(\sum \lambda_i v_i) = L(\sum \mu_i v_i) \\ \Leftrightarrow \quad & \sum \lambda_i L(v_i) = \sum \mu_i L(v_i) \\ \Rightarrow \quad & \sum (\lambda_i - \mu_i) L(v_i) = 0 \ \ (v \end{aligned}$$

(د کربنیز کمبینیشن د یواخیوالي له امله)

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad & \sum (\lambda_i - \mu_i) v_i = 0 \\ \Rightarrow \quad & v = w \end{aligned}$$

په کې والی ښایي

له دې لاس ته راځي یا

⇒:

ښایو: $L(\sum \lambda_i v_i) = 0$

$$\begin{aligned} & \sum \lambda_i v_i = \sum \mu_i v_i \\ \Leftrightarrow \quad & \sum \lambda_i L(v_i) = \sum \mu_i L(v_i) \end{aligned}$$

د ا ینجکتیویتي له امله

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad & \sum(\lambda_i - \mu_i)L(v_i) = 0 \\ \Rightarrow \quad & \sum(\lambda_i - \mu_i) = 0 \\ \Rightarrow \quad & L(\sum \lambda_i v_i) = 0 \end{aligned}$$

د ارزښتونې فنکشنونه یا توابع یا څېروني

موږ د بېلګې په توګه دري پولینومونه P_1, P_2, P_3 لرو د لاندې سره

$$\begin{aligned} P_1 &= (x-1)(x-2)(x-4) \\ P_2 &= (x-3)(x-5)(x-1) \\ P_3 &= (x-4)(x-2)(x-3) \end{aligned}$$

موږ اوس کړی شو یو د ارزښتونې تابع یا څېرونه تعریف کړو(a ځای دی په کوم کې چې ارزونه کیږی)

$$W_a(P) : P \mapsto P(a)$$

د ارزښتونې پولینوم کرښیز دی څکه چې لاندې $\forall\ P, Q \in \mathbb{Q}[X]$ او $\lambda \in K$ [4.2] باور لري :

$$W_a(\lambda P + Q) = \lambda W_a(P) + W_a(Q)$$

په دې توګه د ارزښتوني تابع سره کرښیز خپلواک وکتورونه په کرښیز خپلواک وکتورونو څېره کیږي ای ماپینګmapping جوړوي، دا په دې معنا چې

P_1, P_2, P_3 کرښیز خپلواک دي، که $W_a(P_1), W_a(P_2), W_a(P_3)$ کرښیز خپلواک وي.

موږ د

$$\lambda_1 W_a(P_1) + \lambda_2 W_a(P_2)) + \lambda_3 W_a(P_3) = 0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لپاره ښايو

: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$:

په دې معنا چې P د 1 په ځای کې ارزښتول کيږي، يعني دپولينوم $P(1)$ ارزښت تاکل کيږي، که 1 ځای په ځای کړو :

	$P(1)$	$P(2)$	$P(3)$	
P_1	$=0$	$=0$	$\neq 0$	$\Rightarrow \lambda_3 = 0$
P_2	$=0$	$\neq 0$	$=0$	$\Rightarrow \lambda_2 = 0$
P_3	$\neq 0$	$=0$	$=0$	$\Rightarrow \lambda_1 = 0$

داچې درې وکتورونه، چې د ارزښتوني له لارې جوړيږي يا منځ ته راځي يا توليديږي، کرښيز خپلواکدي، دادرې وکتورونه P_1, P_2, P_3 هم کرښيز خپلواک دی.

ايزومورفيزمونه Isomorphismen

V او W دې $\mathbb{K}-$ - وکتورفضاوې وي . V د $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ وکتور فضا بنسټ وي. تابع $f: V \to W$ ټيک هلته ايزومورفيزم[4.3], ده، که

$(f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_n))$

د W يو بنسټ وي. دا جمله په څټ يا برعکس هم باور لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

V دي يو $\mathbb{K}-$ -وکتروفضا او $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ دې بنسټ وي.

موړ ایزمورفیزم

$\mathbb{K}^n \longrightarrow V$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \longrightarrow \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n$$

کانونیکي بنسټ- ایزومورفیزم بولو. د اړتیا په حالت کې دا په $\Phi_{(v_1, v_2, v_n)}$ توګه هم ښایو. موږ دلته ګورو چې د کانونیکي بنسټ-ایزومورفیزم ځخه کار اخستلای شو، چې د یوونوکتورونو (واحد-) سره (کانونیکي بنسټ) او د وکتروفضا V د بنسټوکتورونو ځخه یو ماتریکی جوړ کړو، چې د دواړو وکتورفضاو ترمنځ ترنفورمي کیږي.

موږ دا داسې کړو چې د V د بنسټ وکتورونه یو په بل پسې په ماتریکس کې ولیکو.

ماتریکسونه **Matrizen**

یو ماتریکس $Mat(m \times n; K)$ یو د m لیکو او n درځونو(متو، ستنو) نظم دی د K بدن (پټي، ورشو، ساحه) ځخه. د یوه ماتریکس د یوګونو توکو د لیکي – او – متې کېدی شي د ایندکس لیکدودIndizeschreibweise سره ټیک کره شي:

a_{ij}

دلته i لیکه او j متِه په کوته کوي.

کرښیزې فنکشنونه (توابع) د ماتریکسونو په څېر

هر کرښیزه تابع کېدی شي په ټیک یوه ماتریکش تنظیم شي

(c) ketabton.com: The Digital Library

د یوه ماتریکس رانګ Rang

د یوه ماتریکس رانګ د کرښیز خبلواکو لیکو/ یا د همغږي د متو ګنون یا تعداد دی.

د متو رانګ = د لیکو راګ Zeilenrang = Spaltenrang

جمله :

د هر $m \times n$ ماتریکی لپاره باور لري:

د لیکوراګ=د متو رانګ یا رانک

ښوونه:

ورکړ شوی یو $(m \times n)$ ماتریکس

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

موږ د $R_1, \ldots, R_m$ سره لیکې-وکتورونهښایو:

$$\begin{array}{lllll} R_1 = & (a_{11}, & a_{12}, & \cdots, & a_{1n}) \\ R_2 = & (a_{21}, & a_{22}, & \cdots, & a_{2n}) \\ & & \cdots & & \\ R_m = & (a_{m1}, & a_{m2}, & \cdots, & a_{mn}) \end{array}$$

کهr د لیکې رانک وي، نو موږ r کرښیز خپلواک وکتورونه لرو، کوم چې د دې لپاره بنسټ جوړوي:

$$S_1 = (b_{11}, b_{12}, \cdots, b_{1n}), S_2 = (b_{21}, b_{22}, \cdots, b_{2n}), \ldots, S_r = (b_{m1}, b_{m2}, \cdots, b_{mn})$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

هر ليکه وکتور R_i د لاندې بنسټ وکتورونو کرښيز ترکيب دی:

$$R_1 = k_{11}S_1 + k_{12}S_2 + \ldots + k_{1r}S_r$$
$$R_2 = k_{21}S_1 + k_{22}S_2 + \ldots + k_{2r}S_r$$
$$\ldots$$
$$R_m = k_{m1}S_1 + k_{m2}S_2 + \ldots + k_{mr}S_r$$

د دې لپاره چې د ماتريکس هر توکی a_{ji} لاس ته راوړو، بايد ټول ضريبونه، د ليکې وکتور ونه د ليکېفضاڅخه وکتوروفضا انځور کړ، د بنسټ وکتور د اړونده توکي سره ضرب کړو. دا د a_{11} لپاره د بېلګې په توګه دی

$$a_{11} = k_{11} \cdot b_{11} + k_{12} \cdot b_{21} + \ldots + k_{1r} \cdot b_{r2}$$

له دې سره a د ټولو i لپاره د ليکې ډول دی.

$$a_{1i} = k_{11}b_{1i} + k_{12}b_{2i} + \ldots + k_{1r}b_{ri}$$
$$a_{2i} = k_{21}b_{1i} + k_{22}b_{2i} + \ldots + k_{2r}b_{ri}$$
$$\ldots$$
$$a_{mi} = k_{m1}b_{1i} + k_{m2}b_{2i} + \ldots + k_{mr}b_{ri}$$

موږ کړی شو اوس هر د متې وکتور په لاندې توګه وليکو:

$$\begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix} = b_{1i} \cdot \begin{pmatrix} k_{11} \\ k_{21} \\ \vdots \\ k_{m1} \end{pmatrix} + b_{2i} \cdot \begin{pmatrix} k_{12} \\ k_{22} \\ \vdots \\ k_{m2} \end{pmatrix} + \cdots + b_{ri} \cdot \begin{pmatrix} k_{1r} \\ k_{2r} \\ \vdots \\ k_{mr} \end{pmatrix}.$$

له دې امله دا وکتورونه د r وکتورونو کرښيز ترکيب دی:

$$\begin{pmatrix} k_{11} \\ k_{21} \\ \vdots \\ k_{m1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k_{12} \\ k_{22} \\ \vdots \\ k_{m2} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} k_{1r} \\ k_{2r} \\ \vdots \\ k_{mr} \end{pmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

اړیین نهده چې داوکتورونه دې یو بل تهکرښیز خپلواک وي. مګر په هر حالت باید هغه خوراجګ ګڼ(عدد) پهr رابند یا محدود وي، چې له کومهامله دی

د متې(درز یا ستنې یا ولاړې لیکې یا کیلې) رانک Spaltenrang $\leq r$

سرې همداسې د تراسپونی شوې ماتریکس سره هم مخ ته ځي او په دې توګه ،، $\leq r$ د لیکې رانک ،، Zeilenrang لاس ته راوړي. له دې سره دی:

د لیکې رانک = دمتې رانک

په څټ- یا معکوس ماتریک Inverse Matrix

یو مربع یا ځلوریزه $n \times n$ ماتریکسA یو معکوس ماتریکس A^{-1} لري،، که یو لهدې لاندې برابر ارزښته اړیکو څخه یو پوره وي.

- د متو (لیکو) وکتورونه کرښیز خپلواک دي.
- $rang(A) = n$
- $det(A) \neq 0$
- له دې سره اړوند کرښیزه تابع f_A یو ایزومورفیزم دی.

څرخون- او هدارون-ماتریکسونه(--- د انعکاسونې --)

په $\mathbb{R}^2$کې څرخون یا څرخونه:

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په $\mathbb{R}^2$ کې هندارونه:

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$$

دیترمینانتونه Determinanten

دیترمینانتونه دځه لپاره دي؟

دیترمینانتونه په $\mathbb{R}^2$ کې د غبرګ اړخیز(موازی الاضلاع) په $\mathbb{R}^2$کې د یوه شپات(کشکول شوی کوادر یا مکعب) او په $\mathbb{R}^n$ کې د یوه غبرګ خوایز سطحه ورکوي.
له دې سره روښانهکېدی شي،چې ولې یو دیترمینات صفر دی، که وکتورونه یو بل ته کرښیز بلواک وي. که په کې دوه وکتورونهورکړ شوې وي او دا یو بل ته کرښیز بلواک وي، نو دا یو غبرګاړخیز نه شي غزولی او له دې امله مساحت صفر دی. له دې سره هر مربع – یا څلوری-ماتریکس یوه ګڼ یا عدد سره تنظیمیږي.

تعریف(پیژند) Definition

دیترمینانت هر ماتریکس $M(n \times n, \mathbb{K})$ یو عددِ $\mathbb{K}$ باندې تنظیموي:

$$\det : M(n \times n, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}$$

فنکشن (تابع) لاندې خویونه لري:

لومړی: دیترمینانت په هره لیکه کې کرښیزه ده. داپه دې معنا، چې که سری له ماتریکس M یوه کرښه لرې بریږدي یا پرېږدي او د یو کتور x سره بدله کړي، چې بیا دا تابع نسبت دې وکتور ته څان کرښیز نیسي.

دویم : که د ماتریکس د لیکې رانک نسبت د لیکې تعدادn ته کوچنی وي، نو $\det A = 0$ ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دريم : د يوونماتريکس يا واحدماتريکس ډيترمينانت 1 دی:

$$\det(E) = 1$$

ټيک يوه تابع شته، چې دا خويونه پوره کوي. دا بايد وښايو، داسې چې مورږ يواځنوالی او شتونوالی وښايو. دا هر شرط لپاره بايد په يواځې تګهوښول شي.

مرشتندوي جمله:Hilfssätze :

د ښوونې لپاره لومړی لاندې مرستندوی جملې ښايو:

لومړی: که په ماتريکس A کې دوه ليکې بدلې شي، نو ماتريکس A' لاس ته راځي، نو باور لري.

$$\det A' = -\det A$$

.

دويم : که د يوعماتريکس ليکه د يوه سکالار λ سره ضرب شي نو ماتريکس A' لاس ته راځي او له دې سره باور لري:

$$\det A' = \lambda \det A$$

دريم : که په يوه ماتريکس A کې يوه ليکه د ماتريکس د بلې ليکې سره جمعه (ورزياته) شي نو ماتريکس A' لاس ته راځي، نوله دې ځخه ديترمينان بې اغيزه پاتې کيږي: $\det A = \det A'$

د دې مرستندوی او يواځنوالی او شتون جملو ښوونه دې په Jänichکې وکتل شي.

د ديترمينانتو ساده شمېرنه

لاندې برحه

(c) ketabton.com: The Digital Library

- 2×2
- 3×3

د لاپلاس د وديزېنې جمله Laplace Entwicklungssatz

د لاپلاس د وديزينې جمله مرسته کوي، کد له 3×3 ماتريکسونو څخه لوی ديترمينانتونه ټاکو[6.1]ا .

سرې کړی شي ديترمينانت ته وده ورکړای شي، که ماتريکس تل په کوچنيو ديترمينانتونو و وېشي. دلته لاندې ماتريکس A_{ij} هغه ماتريکس ده، چې د ماتريکس A د $i-$ -مې او $j-$ -مې ليکې همداسې متې د لرې کولو څخه لاس ته راځي. سرې کړی شي چې وديزيېنه سرته ورسوي يا د ليکې له لارې

$$det\ A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot A_{ij}$$

يا د متوو پسې

$$det\ A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot A_{ij}$$

د ضريب يا ځلووني $(-1)^{i+j}$ په مرسته يو د سترنجتختې ډوله مخ يا موسترمنځ ته راځي. له دې سره د ديترمينانت مخنخبنه ټاکل کيږي:

+	−	+	−	+
−	+	−	+	−
+	−	+	−	+
−	+	−	+	−
+	−	+	−	+

بېلګه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

ودیزیینه پورته لیکه پسې پورته لیکه => په لاندې دیترمینات کې د لیکې په څیر له منځه وړل کیږي =	$det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$

$$+a_{11} \cdot \underbrace{det \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}}_{1.Spalte \;\; ausgeblendet} \quad -a_{12} \cdot \underbrace{det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}}_{2.Spalte \;\; ausgeblendet}$$

۱ -م. درځ لرې کړي   ۲ -م درځ لرې کړي

$$+a_{13} \cdot \underbrace{det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{pmatrix}}_{3.Spalte \;\; ausgeblendet} \quad -a_{14} \cdot \underbrace{det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix}}_{4.Spalte \;\; ausgeblendet} =$$

۳ ــم درځ لرې کړی   ۴ ــم درځ لرې کړي

د دیترمینانتونو ساده ټاکنه

- که یوه لیکه یا متہ کرښیز بلواک وي، نو باور لري

$$det \;\; A = 0$$

دا د لاندې سره په برابره معنا ده(د لیکو تعداد همداسې د متو تعداد)

$$rang \;\; A < n$$

- که څوک یوه متہ د بلې سره بدله کړي یا یوه لیکه د بلې سره بدله کړي،

(c) ketabton.com: The Digital Library

مخنخښه تغير خوري(دا چې د ديترمينانت تابع الترنيري(بدیلي)
alternierend ده)

$$det\ A_{ij} = -det\ A_{ji}$$

- کهد ماتريکس يوه ليکه د سکالار سره ضرب شي،نوبايد تنها ديترمينانت هم د همغه سکالار سرهضرب شي:

$$det \begin{pmatrix} & \vdots & \\ \lambda\cdots\lambda & \lambda a & \lambda\cdots\lambda \\ & \vdots & \end{pmatrix} = \lambda\ det \begin{pmatrix} & \vdots & \\ \cdots & a & \cdots \\ & \vdots & \end{pmatrix}$$

په همدې توګه که ديترمينانت د λ^n سره هم ضربې شي، د کوم سره چې n د ليکو تعداد دی، داسې دهلکه که يوه ماتريکس ټوله له λ سره ضرب شي.

$$det(\lambda \cdot A) = \lambda^n \cdot det\ A$$

- د يوونماتريکس (واحد-) ديترمينانت 1 ده:

$$det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

- د يوه درېګوډي ماتريکس ديترمينانت د هغه د دوه کونجتړې ضرب دی:

$$det \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} = \lambda_1 \cdot \ \cdots \ \cdot \lambda_n$$

- ماتريکس څخه $n \times n$ داسې يوه درېګويزه ماتريکس کړی شو د هر په خوښه د ساده ليکو عمليو څخه د ګاوسقانون له مخې لاس ته راوړو. موږ بايد د ديترمينانت په ټاکلو يواځې دې ته پام وکړو، چې ليکه بدلون ديترمينانت ته له

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځانسره یوسو. نو که r د لیکو د بدلون تعدادوي، چې موږ سر ته رسولي چې درېګوډیزه بڼه لاس ته راوړو، باور ولري::

$$\det A' = (-1)^r \cdot a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ \ldots \ \cdot a_{nn}$$

- که څوک یوه ماتریکس ترنسپوني کړي(داپه دې معنا چې د لیک څخه متې جوړوي او له متو څخه لیکي او یا په مربع یا ځلوریزه ماتریکسونوکې دا په دوهکونجتړې(قطر) هنداره کوي) په دې حالت کې د ترادپوني ماتریکس دیترمینانت ارزښه د نه ترانپوني شوې ماتریکس د دیترمینانت سره برابر دی:

$$\det \ A = \det \ A^T$$

کوچنی بام: په ضرب کې دې پامدې وي. باور لري

$$(AB)^t = B^t A^t$$

- دیترمینانت- ضرب-جمله

$$\det(A \cdot B) = \det \ A \cdot \det \ B$$

.... ښوونه یې دلته ورزیاته کړی.

د ایندومورفیزم دیترمینانتونه

دا چې موږ هر ایندومورفیزم f د مربع – یا ځلوری-ماتریکس سره انځورولی شو[6.2]، له دې سرهکړی شو چې د ایندومورفیزم دیترمینانت هم تعریف کړو:

$$\det f := detA_f \in \mathbb{K}$$

اوس داپوښتنه رامنځ ته کوو، چې ایا د V د مختلفو بنسټونو لپاره دیترمینانتونه مختلف دي. دا کېدی شي وښوول شي چې دیترمینانت د بنسټ د ټاکنو یا اتخاب څخه خپلواک

(c) ketabton.com: The Digital Library

دي. له دې سره لهدې امله کړی شو چد د یوه ایندومورفیزم دیترمینانت یواځنې ت عریف کړو.

أيګن ارزښت Eigenwerte(Eigenvalue)

يادونه: دا أيګن په ټول ژبوکې همداسې ليکي. دا الماني وی یا لغات دی، د خپل په معنا دی.

أيګن ارزښت Eigenwerte(Eigenvalue)

F دې د وکتورفضا V_K ایندومورفیزم وي. یو $\lambda \in K$ أیکنارزښت بلل کيږي، که یو $v \in V$ شتون ولري د $v \neq 0$ سره ، داسې چې باور ولري.

$$F(v) = \lambda v$$

أيګنوکتور Eigenvektoren

F دې د وکتورفضا V_K یو ایندومورفیزم وي. هر له صفر وکتور مختلف $v \in V$ د

$$F(v) = \lambda v$$

سره د F أيګنوکتور بلل کيږي(أيګن ارزښت λ ته)

دوه -کونجتړې کیدونکې یا دوه-کونجتړې کیدنوړ(قطري کیدونکې) Diagonalisierbar

یو ایندومورفیزم دوه کونجتړې کېدونکی (قطري کېدونکې یا – وړ) بلل کيږي، که د أیکن وکتورونو ځخه یو بنسټ شتون ولري. دا په دې معنا چې د ایندومورفیزم لپاره یو دوه کونجتړی ماتریکس د لاندې بڼه شتون لري(د متو وکتورونه بنسټ ومتورونه

(c) ketabton.com: The Digital Library

شتون لري، λ_i أيګن ارزښتونه دي)

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

أيګن فضاوې Eigenräume

F دې د V ايندومورفيزم وي او $\lambda \in K$ ، نو

$$Eig(F;\lambda) := \{v \in V : F(v) = \lambda v\}$$

د F يو أيګنفضا بولو نسبت و λ ته.

- اګن فضا د V وكتورفضا يو برخوكتور فضا ده.
- صفروكتور په ليګنوكتور کې خوندي نه دی.
- $Eig(F;\lambda)\{0\}$ د λ اړونده أيګنوكتورونو ډېرى ده
- (S.210) ...

كركتريستيكي پولينوم يا سړى څكګه أيګن ا رزښتونه پيدا کوي؟

سړى کړى شي چې أيګن ارزښتونه وټکي، داسې چې د كركتريستيكي پولينوم صفرځايونه پيدا کوي. باور لري[7.1]

د ايګن ارزښت دى له دې لاس ته راځي او په څټ

$$\lambda \ ist \ Eigenwert \ von \ F \Leftrightarrow det(F - \lambda id_V) = 0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

سړی د لاندې ماتريکسونو دوه -کونجترې(قطر) پيداکوي:

$$\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & & \vdots \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{mn}-\lambda \end{pmatrix}$$

سړی أيګن وکتورونه او أيګن ارزښتونه څنګه پيدا کوي؟

که څوک أيګن-ارزښت λ ولري،نو کېدی شي و هغه ته مناسب أيګنوکتور وټاکي، داسې چې سړی لاندې برابرون - يا مساواتسيستم حل کړي:

$$(A-\lambda I)X=0$$

لکه کريتيکي پولينوم لپاره سړی همداسې ببرته ماتريکس جوړوي، چېرته چې د λ لپاره أيګن ارزښتونه ځای په ځای کوي . بيا سړی دا هوموجېن مساواتسيستم حل کوي.

يو ماتريکس سړی څنګه دوه-کونجترې يا قطري کوي؟

لومړ: که لږ ايګنوکتورونه توليد يا جوړېدی شي، دې ته (نسبت دې ته) چې ماتريګس درزونه همداسې ليکې لري، نو متريکس دوه کونجترې کيدونکې نه ده.

که پوره وکتورونه شتون لري او ودې ته ايګن ازښتونه نو $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ باور لري

$$D=S^{-1}AS=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

سکالار ضرب(دنننی ځل يا ـضرب) او نورم

(c) ketabton.com: The Digital Library

Skalarprodukt (Innenprodukt) und Norm

سکالار ضرب

تعریف یا پيژند:

يو تابع $<,>: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$, $(x,y) \to \ <x,y>$ سکالار ضرب بلل کيږي، که $\forall \ x,x',y \in \mathbb{R}^n$ دا لاندې باور ولري:

- $<x+x',y> = <x,y> + <x',y>$ کربنيزوالی (
- $<x,y> = <y,x>$ (سيومتري (Symmetrie)
- $<x,x> \geq 0$ او $<x,x> = 0 \Rightarrow x = 0$ مثبت او ديفينيت) Positiv und definit)

بېلګه:

- $<a,b> \mapsto a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots a_nb_n$

نورم Norm

پيژند(تعریف): يوه څیرونه یا فنکشن $|| \ || \ : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ نورم بلل کيږي، که لاندط امسیومونه باور ولري

- $||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ديفينيت
- $||x|| \geq 0$ مثبت

(c) ketabton.com: The Digital Library

- $||\lambda x|| = |\lambda| \cdot ||x||$ هوموجين

- $||x+y|| \leq ||x|| + ||y||$ درې ګوډي يا مثاثاتي نابرابرون

بيلګه:

$$||a||_\infty = ||(a_1, a_2, \ldots, a_n)||_\infty = \max(|a_i|; i = 1, \ldots, n)$$

ماکسيموم يا خورا جګ ارزښت

$$||a||_1 = ||(a_1, a_2, \ldots, a_n)||_1 = |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n|$$

(يو نورم)

$$||a||_2 = ||(a_1, a_2, \ldots, a_n)||_2 = \sqrt{< a, a >} = \sqrt{|a_1|^2 + |a_2|^2 + \ldots + |a_n|^2}$$

(د پيوتاګوراس نورم)

د وازيدو کونج تعريف:

د يوې وکتورفضا د x او y وکتورونو ترمنځ د وازېدوکونج α په لاندې توګه تعريف دی

$$< x, y >= ||x||\,||y||\,\cos\alpha \Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{< x, y >}{||x||\,||y||}$$

د وازيدو کونج د تعريف لپاره بايد کوساين تل تعريف وي. موږ بايد وښايو، چې دا لاندې باور لري:

$$-1 \leq \frac{< x, y >}{||x||\,||y||} \leq 1$$

دا د کوشي –شوارځ- نامساواتو خونديونه ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کوشي –شوارڅ- نامساوات

دپه خوښه وکتورونو $u, v \in V$ لپاره باور لري:

$$< u, v >^2 \leq < u, u >< v, v >$$

یا ورته(اکویوالنت):

$$| < u, v > | \leq ||u|| \cdot ||v||$$

ښوونه:

د $y = 0$ لپاره ساده دی. وي دې $y \neq 0$. موږ له یوه واړه چل څخه کار اخلو او $\lambda := \frac{< x, y >}{||x|| \, ||y||} \in \mathbb{R}$ ږدو. لاندې باور لري:

$$\begin{aligned} 0 \leq < x - \lambda y, x - \lambda y > &= < x, x > -2\lambda < x, y > + \lambda^2 < y, y > \\ &= ||x||^2 - 2\frac{< x, y >^2}{||y||^2} + \frac{< x, y >^2}{||y||^2} \\ &= ||x||^2 - \frac{< x, y >^2}{||y||^2} \end{aligned}$$

په ورته توګه باور لري $< x, y >^2 = ||x||^2 ||y||^2$ او له دې سره $| < x, y > | \leq ||x|| \, ||y||$.

نورمال شوي ا و اورتوګونال وکتورونه

وکتورونو نورمالیدنه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

وکتورونه نورمال شوي دي، چې اوږدوالی 1 لري، دا په دې معنا، چې $< v,v >= 1$

یا $||v|| = 1$.

یو وکتور نورمال کیدی شي یا کیږي، داسې چې دی د په څېټ یا معکوس ارزښت سره ضرب شي:

$$v_{normalisiert} = \frac{1}{||v||} \cdot v$$

اورتوګونال وکتورونه (یو په بل ولاړ -)

دوه وکتورونه v_1 او v_2 یو بل ته اوتوګونال دي، که دا یو په بل ولاړ یا عمود وي. یا نیغ ولاړ وي. له دې امله د دوي سکالار ضرب یا څل 0 دی.

$< v_1, v_2 >= 0$

هر وکتورفضا ته لږ ترلږه یو(یعنې په ریښتونې زیات) له اورتوګونال وکتورونو بنسټونه شته. کا دا هو اوږدوالی 1 ولري، نو دا ***اورتونورمال*** دي.

اورتونورمال بنسټونه:

یو اورتونورمال بنسټ هغه بنسټ دی، په هغه چې ټول وکتورونه دي چې نسبت سکالار ضرب ته اوږدوالی 1 لري او یو بل ته اورتوګونال دي.

سږی کړی شي هر بنسټ ته د شمیدت اورتوګونالیدونکي تلنلار **Schmidtschen Orthnormalisierungsverfahrens** په مرسته یو اورتونورمال بتسټ جوړ کړي:

موږ غواړو د $i = 1$ تر $i = n$ پورې لاندې فرمول وڅغلوو، د کوم سره چې د n بنسټ وکتورونو تعداد یاګنون دی، او یو بل پسې اورتوګونال وکتورونه د 1 اوږدوالي پیدا کوي یا میندي، چې دا موږ سملاسې د بل وکتور شمیرنو لپاره اړین مومو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$e_i = \frac{v_i - \sum_{k=1}^{i-1} e_k \cdot < v_i, e_k >}{\left\| v_i - \sum_{k=1}^{i-1} e_k \cdot < v_i, e_k > \right\|}$$

ځای بدلون Permotation

لیکندود

یو ځایبدلون یو په – یعني بیجکتیو څیرونه یا فنکشن دی، کوم چې n توکي ($n > 0$) تنظیموي.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma(1) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ \sigma(2) \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} n \\ \sigma(n) \end{pmatrix}$$

دا پورته لیکنډول دا معنا لري، چې د بیلګې په توګه 1 د $\sigma(1)$ ځای ته راکښل کیږي.

په همدې توکه څیوکلیکي یا تل بیرته راګرځیدونې لیکندود هم ورځنی یا بلد دی. د بیلګې په توګه:

$$(12)(3)(564) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

ترانپوزیشن Transposition

یو ترانسپوزیشن د تیک دوه یتوکو بدلون دی په څیوکلیکي لیکندود یعنې (ab) .

هر پرموتیشن د دوه ترانپوزشنونو کمپوزشن(ضرب) دی.

د ممکنه ځای بدلونو ګڼون یا تعداد

(c) ketabton.com: The Digital Library

که یوه ډېرۍ یا سټ n توکي لري، نو دا $n!$ ځای بدلونونه ممکن دي.

پاتې یا تش ځایونه

که یو پرموتیشن له یوه کوچني ځای څخه و یوه لوي پسې څیره کړي، نو تشځایونه تولیدیږي. که $j < k$ او $\sigma(k) < \sigma(j)$ وي، نو دا یو تشځای دی.

د ډاکتر ماخان شینواري لیکنې

د ډاکتر ماخان شینواري چاپ شوې لیکنې:

<u>1988 Vienna (Austria):</u>

<u>لومړی:</u>

H.K. Kaiser , M. Shinwari : Aproximation compact pological algebra : general algebra 6 ; Page 117 – 122 contributions to

<u>1987 Vienna (Austria):</u>

<u>دویم:</u>

Diss . Interpolation und Aproximation durch Polynime in Universalen Algebren . Uni. Wien

Dissertation Interpolation and Aproximation by Polynome in universal Algebras, at the University of Vienna/Austria

لاندې د شمیرپوهنې پښتوټول کتابونه په المان کې د ،، افغانستان کلتوري ودې ټولنه،،له خوا چاپ شوي دي

(c) ketabton.com: The Digital Library

2000 Bonn (Germany):

دریم: د شمیرپوهنې ستر کتاب : د شمیرپوهنې برسیره د انجنري، فزیک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زده کوونکو لپاره (دا کتاب په ۹۰۰ مخونو کې چاپ او دا نوې لیکنه به یې ځنو ځایونو غزېدلې او ځنې ځایونه ترې لرې شوي دي)

2003 Bonn (Germany):

څلورم: ځمککچپوهنه(هندسه) ، په سلو، زرو کې شمیرنه، د ګټې – او کټې د کټې شمیرنه ، د اختمالوالي شمېرنه کتاب د ښوونځي ټولي اړتیاوې پوره کوي

2003 Bonn (Germany):

پنځم: الجبرونه (د الجبر بنسټونه دي)

2003 Bonn (Germany):

شپږم: د شمیرپوهنې انګرېزي – پښتو ډکشنري.

2003 Bonn (Germany):

اووم: د شمیرپوهنې الماني - پښتو- او پښتو الماني ډکشنري

Mathematical dictionary German/ Pashto and Pashto/German

2003 Bonn (Germany):

اتم: دفرنښیال برابرون (دا کتاب په دې ښانګه کې یو پیل دی، ساده لیکل شوی)

Differential equation Translation; An Introduction

Bonn (Germany): 2003

نهم: د شمیر پوهنې فرمولونو ټولګه

Mathematical Formulas

(c) ketabton.com: The Digital Library

2003 Bonn (Germany):

لسم: شمیرپوهنه له عربي په پښتو

1997 Bonn (Germany):

یوولسم: د افغانستان په هکله سپینې خبرې: په المان کې

،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خو

.یادونه: له ۲۰۰۰ کال دمخه ډاکتر ماخان شینواري د ،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خوا درې ساسي مجلې هم را وستلې.

د ډاکتر ماخان ،،میرې،، شینواري لیکنې او ژباړې چې په چاپیدو یې پیل کیږي

2012 Bonn; Germany; Kabul Afghanistan

ژباړې:

: *Prof. Brinkmann. (From Brinkmann.du.de)*

لاندې د برینکمن لیکنې چې له پرینکمن ن ج څخه ژباړل شوي دي.

۱ - شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره لومړی ټوک

۲ – شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره دویم ټوک

۳ – شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره دریم ټوک

۴ - د احتمالوالي شمیرنه د ښوونځي لپاره

۵ – احصایه یا ستاتیستیک دښوونځي لپاره

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاندې کتابونه د شتوتګارت د پوهنتون د استادانو د لکچرونو څخه چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپاره شوي را ژباړل شوي.

۶ – انالیزی ۱

۷ – انالیزې ۲

۸ – کرښیز الجبر

۹ - د شمیرپوهنې بنسټونه

۱۰ - د فرمولونو ټولګه

۱۱ – فنکشنل انالیز

۱۲ – وکتور شمیرنه

نورې ژباړې

۱۳ – له www./grundstudium.info/linearealgebra څخه:کرښیز الجبر

۱۴ – Georg Gutenbrunner ګڼونپوهنه یا د اعدادو تیوري

زما لیکنې

Bonn (Germany):

۱۵ - د شمیرپوهنې ستر کتاب دویم چاپ د پوره تغیراتو سره : دا کتاب د شمیرپوهنې برخې برسیره د

انجنري، فزیک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زدهکوونکو لپاره پوره ګټور دی. په

کتاب کې د اړتیا سره زیاتونه او کونه راغلې

۱۶ - ځمکګچپوهنه (هندسه) دویم چاپ د پوره تغیراتو سره

۱۷ – الجبر بنسټونه دویم چاپ له تغیراتو سره

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۸ - ډېرۍ پوهنه یا سټ تیوري

۱۹ – د شمیرپوهنې سم اند (منطق ریاضي)

۲۰ - د یو څو شمیرپوهانو ژوندلیک

۲۱ – د شمیر پوهنې ګډې وډې لیکنې

-۲۲ داهم ژباړه ده، خو لیکونکی یې متآسفانه راځخه نابلد شوی: د مشتق او انتیګرال شمیرنو ته تمرینونه او اوبیونې یا حلونه یې

۲۳ – د شمیرپوهنې انګریزي پښتو او عربي + دري ډکشنري

۲۴ – د شمیرپوهنې پښتو انګرېزي ډکشنري

۲۵ – د شمیرپوهنې پښتو ډکشنري د شمیرپوهنیزو وییونو په پښتو روښانه ونه

۲۶ - د زړه له کومې(دا هغه لیکنې دي، چې ځنې یې په نړیول جالونو کې خپرې شوي دي.)

۲۷ – د افغانستان په هکله سپینې خبرې، چې وبه غزیږي.

نوري لیکنې، چې په ژباړه یې پیل شوی، خو لا پوره نه دي

– د شتوتکارت پوهنتون لکچرنوټونو څخه ، چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپریږي:

د ګروپونو تیوري

- د ښوونځي لپاره فزیک د برینکمن لیکنه

له پنځم ټولګي څخه تر اووم ټولګي پورې ژباړل شوی (دا چې زما دویم مسلک فزیک دی، دا لیکنې ژباړم. دا هم د دې لیکوال یوه ډېره ښه لیکنه ده، چې -د شمیرپوهنې په څیر- دلته هم زیات تمرینونه د حل یا اوبیونې سره په کې راغلي او ماته زیات ګټور برېښي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرلیک

Get more e-books from www.ketabton.com
Ketabton.com: The Digital Library