كرنيز الجبر

$$\begin{array}{c|l} & A \cdot X_1 = b \\ - & A \cdot X_2 = b \\ \hline = & A \cdot (X_1 - X_2) = 0 \end{array}$$

له ن ج : بنستيز درس | كرنيز الجبر

2012

ژیاری: داکتر ماخان(میری) شینواری

کرښيز الجبر

$$\begin{array}{c|l} & A \cdot X_1 = b \\ - & A \cdot X_2 = b \\ \hline = & A \cdot (X_1 - X_2) = 0 \end{array}$$

dr.shinwari@hotmail.com

له ن ج : بنسټيز درس | کرښيز الجبر

ژباړی: ډاکتر ماخان(میړی) شینواری

سرلیک

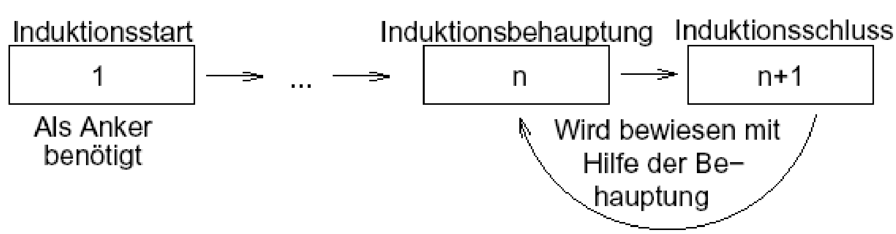
سرلیک

د ژباړي نیولیک

د دې سرلیک لاندې یوه بله لیکنه هم شته. دا مخ ته پرته لیکنه ساده او د پیل په څیر باید وکتل شي. دا لیکنه د بنسټیزو لیکنو ن ج څخه راژباړل شوې ده.

نظر یا د پیداکیدو فکر

پوره اندکشن د ښوونې يو متود یا لار ده، هغه چې په کرښيزه الجبر کې زيات کارول کيږي. د ښوونې لپاره نيول کيږي چې يو تاکلی فرمول د اندکشن ثبوت د n لپاره صدق کوي. د اندکشن پای یا ختمېدلو – چې د اندکشن پل هم بلل کيږي- ښوول کيږي، چې دا فرمول د $n+1$ لپاره صدق کوي، دایې چې بېرته د اندکشن ثبوت باندې لاس ولرو یا راونيسو. د دې لپاره چې ښوونه پیخې تيک یا پوره تيک وي، د يوه نښلون تکې ته اړتيا شته، له کوم چې n پيل کيږي. دا نښلونتکی د اندکشن پيل تکی هم بللکيږي. یا د اندکشن پيل او په ښوونه کې په پيل کې راوړل کيږي.



.

د پورته ديښتو ژباړه له کيڼ و ښي لور ته:

پورته: د ایندکشن پيل. لاندې: د په باندې ایښولو (کلکولو) لپاره اړين.

لوريزئ کرښې: لرو .

بيرته خيره پورته: د ایندکشن غوښتنه یا ثبوت د ایندکشن پای. لاندې: د غوښتنې یا ثبوت په مرسته ښوول کيږي.

هندسي لړۍ پرلپسې یا لړۍ (   )

$$\sum_{k=0}^{n-1} q^k = \frac{1-q^n}{1-q}$$

د ښوولو دی:

د اندکشن پیل: $n = 1$

$$\begin{aligned} q^0 &= 1 \\ &= \text{Okay} \\ \tfrac{1-q^1}{1-q} &= 1 \end{aligned}$$

د اندکشن وړاندنیونه(فرضیه): د n لپاره دې ښوول شوي وي:

$$\sum_{k=0}^{n-1} q^k = \frac{1-q^n}{1-q}$$

د اندکشن پل : $n \rightsquigarrow n+1$

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

دا دد ښوولو دی.

کینې پیل کوو

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} q^k &= \sum_{k=0}^{n-1} q^k + q^n \\ &=_{nach\ Vor.} \frac{1-q^n}{1-q} + q^n \\ &= \frac{1-q^n}{1-q} + \frac{(1-q)q^n}{1-q} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1-q^n+(1-q)q^n}{1-q}\\
&= \frac{1-q^n+q^n-q^{n+1}}{1-q}\\
&= \frac{1-q^{n+1}}{1-q}
\end{aligned}
$$

د برنولي نا مساوات يا نابرابرون Bernoulische Ungleichung

$(1+x)^a \geq 1+ax$ دې وښوول شو

د االندکشن پيل : $a=1$

$1+x \geq 1+x$: تيک دی.

د اندکشن پل:

$a \rightsquigarrow a+1$

$(1+x)^{a+1} \geq 1+(a+1)x$

دې وښوول شي

موږ بېرته له ښیٔ لورې پيل کوو

لاندې کې : Die Voraussetzug= نيونه(فرضيه)

$$
\begin{aligned}
(1+x)^{a+1} &= (1+x)^a \cdot (1+x)\\
&\geq_{Voraussetzung} (1+ax)\cdot(1+x)\\
&= 1+x+ax+ax^2\\
&= 1+(a+1)x+ax^2\\
&\geq 1+(a+1)x
\end{aligned}
$$

د پوره اندکشن سره نور د ښوولو فرمولونه

$(1+x)^a \geq 1+ax \quad \forall x \geq 0$

د لومړيو n طبيعي اعدادو مجموعه:

$$\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

د يوه کرښيز مساواتسيستم جوړښت

يو کرښيز مساواتسيستم د يو کرښيزو مساواتو تعداد څخه جوړ دی. دا مساوات نامعلومې خوندي لري، هم داسې په نامه واريابلې (اووښتونې يا متحولې). نامعلومې د ضريبونو سره ضربيږي. که د نامعلومې ضريب 0 - وي يعنې باور ولري: $0 \cdot x_k$ (دلته x_k نامعلومه ده) – نو دا ډول نامعلومه په مساواتو کې هم پرئښوول کيږي يعنې نه ليکل کيږي. دا لاندې د يوه کرښيز مساواتسيستم يوه بېلګه ده:

$$\begin{array}{ccccccccc} & & x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & + & 5x_4 & = & 5 \\ 3x_1 & + & 4x_2 & + & 5x_3 & + & 6x_4 & = & 0 \end{array}$$

او دا ټول a_{ij} عمومي ضريبونه دي او x_j واريابلې يا متحولې يا اووښتونې :

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11} \cdot x_1 & + & \dots & + & \dots & + & a_{1n} \cdot x_n & = & b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 & + & \dots & + & \dots & + & a_{2n} \cdot x_n & = & b_2 \\ & & & & \vdots & & & & \\ a_{m1} \cdot x_1 & + & \dots & + & \dots & + & a_{mn} \cdot x_n & = & b_m \end{array}$$

وکتور $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ کوم چې زيات وخت عمود ليکل کيږي د حل وکتور بلل کئږي.
د يوه مساواتسيستم د ممکنه حلونو ډېرى يا سټ د حلونو ډېرى بلل کيږي:

$$\mathrm{L\ddot{o}s}(A, b) := \{x \in \mathbb{K}^n | Ax = b\}$$

که د حلونو ډېرۍ تشه وي، نو د مساواتسيستم ناحلوړ يا نه حل کيدونکى دى.

ماتریکسونه:

سړی کړی شي په لږ ځای کې کرښیز مساوات د ماتریکس په ډول ولیکي. د مخه له دې چې دا کار کوو باید ماتریکسونه راوړو یا رامنځ ته کړو.

یو متریکس یو ولاړکوډیز یا ولاړکونجیز جدول دی د m کیلو یا لیکو او n درځونو یا متړو یا ولاړو لیکو سره.

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

د ماتریکس لیکنډول mxn - ماتریکس

سړی کړی شي د ماتریکسونو یوګونې کرښې رادباندې ولیکي. دا بیا د **لیکو وکتورونه** بلل کیږي. په ټیک دې ترتیب د ولاړو لیکو یا متړو یا **ستنو وکتورونه** هم لاس ته راوړی شوو، که سړی یوګونې متې رادباندې ولیکي.

سړی کړی شي ماتریکسونه یو له بل سره جمعه کړي.

$$\begin{aligned} A+B &:= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

او سره ضرب کړي-+:

$$A \cdot B \;:=\; \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nm} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} \cdot b_{11} + \dots + a_{1n} \cdot b_{n1} & \dots & a_{11} \cdot b_{1m} + \dots + a_{1n} \cdot b_{nm} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} \cdot b_{11} + \dots + a_{mn} \cdot b_{n1} & \dots & a_{m1} \cdot b_{1m} + \dots + a_{mn} \cdot b_{nm} \end{pmatrix}$$

د ماتریکسونو په جمعه ساده پوهیدل کیدی شي. سږی سره جمعه کوي، جي اړونده کمپوننتونه یو له بل سره حمعه کړي، داسې نتیجه لاس ته راځي. د ماتریکسونو ضرب ستونځمندی. په ضرب کې د لومړۍ ماتریکس لیکه د دویمې ماتریکس د متې سره ضرب کیږي او ورپسې سره جمعه کیږي. او نتیجه یې داسې لاس ته راځي، چې c_{ij} یعني i–مه لیکه ، j -مه متِه کې ضرب د حل ماتریکس چې لاسته راشي، د لومړي ماتریکس د i–مې لیکې د j–مۍ متې یا ستن د توکو سره ضربوو او له ټولو ضربونو څخه جمعه جوړوو. دا یو ځل بیا لیکو:

$$\begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cdots & b_{1j} & \cdots & \cdots \\ \cdots & b_{2j} & \cdots & \cdots \\ \cdots & \vdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & b_{nj} & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \dots + a_{in} \cdot b_{nj} & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

هیله ده، چې په دا موضوع کې به لږه روښنتیا منځ ته راغلې وي. داسې وایو چې سږی دښۍ دیترمینانت متِه په $90°$ درجو د ساعت ځرخوني (عقربک؟؟)په لور څرخوي، چې د کیڼې ماتریکس په لیکه پریوځي، یو په بل پراته توکي بیا سره ضربیوي او په دې پسې یې بیا له دې ضربونو جمعه جوړوي.

اوس د ماتريکس د ضربوني په بنديزونو هم پوهيږو. سړی کړی شي $n \times m$-
ماتريکس فقط د $n \times m$ -ماتريکس سره ضرب کړي. دا په دې معنا، چې د کيڼ
ماتريکس ليکې ټيک دومره بايد اوږدې وي لکه د ښي ماتريکس متې (درځونه، ستنې) ،
پرته له دې ته په ليکه نه ،، پرېوځي،، يا سرخوري .

تراسپوني ماتريکس

د يوې ماتريکس ترانپوني ماتريکس داسې لاس ته راوړو، چې ليکې او متې سره بدلې
شي. له توکي a_{ij} ځخه توکی a_{ji} لاس ته راځي.

$$a_{ij} = a_{ji}$$

بيلګه:

$$T \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & a_{41} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & a_{42} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{43} \end{pmatrix}$$

د مربع ماتريکسونو لپاره دا په همدې معنا دی لکه په ،،دوه – کونجترې،، (قطر) باندې
هندارونه(انعکاس).

سيومتريکي ماتريکسونه

يو ماتريکس ټيک هلته سيومتريک دی، چې باور ولري:

$$a_{ij} = a_{ji}$$

د کرښيزمساوات سيستم ځايسپماييزه ليکندول

د يوه ماتيريکس په مرسته او کېدی شي کرښيزمساوات انروړي – او ځای سپماييز
وليکو. مور ته دا بام ودريږي، چې دا نامعلومې تل په هر مساوات کې همهغه دي . نو
لکه په ماتريکس ضربونې کې د ماتريکس ضربونې په مرسته دا د مساوات سيستم
ځخه دباندې راباسو او په دې توګه د ضريبونو(ځلوونو) ماتريکس A لاس ته راوړو:

$$A \cdot x = b$$

د لیکبنې له مخې دا داسې بربښي:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

د ګاوس تلنلار لپاره ، چې لاندې لیکل شوې ده، دا بیا په لنډه توګه تکراروو او $x-$ - وکتور هم لرې بریږدو. له دې سره نوکان او مساوات هم لرې پریږدو یا نه لیکو او دا ټول په یوه Kasten, کاستن یا کارتون کې لیکو، چې دا لګه چې ګورو، په لاندې توګه لیکل کیږي.

$$\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \\ \hline \end{array}$$

نا یو ډوله یا اینهوموجینبرابرون

یو کرښیز مساوات سیستم نایوډوله (اینهوموجین) بللکیږي، که که لږ تر لږه د یو b_i لپاره ($1 \leq i \leq n$) باور ولری

$$b_i \neq 0$$

په ریښتینې توګه دا پهدې معنا دی: پهښې لور صفرماتریکس نه دی ولاړ یا ځای په ځای نه دی.

یو ډوله یا هوموجین Homogen

د دې برعکس یو مساوات سیستم برابرډوله (هوموجین) بلل کیږی، که b صفروکتور وي، دا په دې معنا چې دټول b_i لپاره ($1 \leq i \leq n$) باور لري

$b_i = 0$

دا دا معنا لري، چې په بڼې اړخ صفروکتور پروت دی

ليکه- پوړيز بڼه Zeilenstufenform

موږ اوس طبعأ د کرښيز مساواتسيستم د اوبيونې يا حل سره مينه لرو. دا ګاوس الګوريتم چې يوځه کښته راځي، د اوبيونو يا حلونو د پيداکولو لپاره مرسته کوی. دا ماتريکس د ساده ليکه بدلون بڼې ځخه په ليک –پوړې –بڼې باندې اړوي. په ليکبوړيزبڼه کې يو ماتريکس مخ ته لرو، که هغه خورا ټيټه ليکه دا اکثره کيڼ پراته صفرونه ټولې ليکې خوندي ولري او د کيڼ پرتو صفرونو تعدا(ګڼون) پورته لور ته کم شي، د کوم سره چې کله کله يې له ليکې و ليکې ته يو ځل برابر باتې کيږی. لاندې ماتريکس د ليکې- پوړيز- بڼې ماتريکس بيلګه ده

$$\begin{pmatrix} 0 & \otimes & \oslash & \oslash & \oslash & \oslash & \oslash \\ 0 & 0 & \otimes & \oslash & \oslash & \oslash & \oslash \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \otimes & \oslash & \oslash \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \otimes & \oslash \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} \otimes \neq 0 \\ \oslash \neq 0 \text{ oder } 0 \end{array}$$

پورته الماني: د ،،يا،، په معنا

جمله :

موږ کړی شو هر ماتريکس په ليکه-پوړيز-بڼه ماتريکس واړوو. داچې د ګاوس تلنلار د دې لپاره يو الګوريم راکوي، چې دا متمين ده او دا جمله ښوول شوې.

د حلونو کريتيريوم

(نځښې، چې د دوه يا زياتو شيانو يا کسانو ترمنځ پرې پرېکړه کيږي)

د دې لپاره چې د کرښيزمساتسيستم د حلونو تعداد وټاکلی شو، د حلونو کريتيرين يا نځښې(توپيرنځښې) شتون لري..

برابرډوله یا هموجین مساواتسیستم کړی شي یا ساده حل ولري او یا ډېر حلونه ولري.

ساده حل:

ساده حل يې صفروکتور دی، دا په دې معنا، چې ټول مساوات ټیک هلته پوره کیږي، که ټولې واریابلې(متحولې یا اووښتونې) صفر کېښوول شي.

دا حالت هلته رامنځ ته کیږی، چې که برابرډوله مساوات سیستم په داسې لیکه-بوړیز-بڼه و اړولی شي، چې په هره لیکه کې له بورته تر کښته یو صفر ځا په ځای وی. او همدومره د ماتریکس متې ولرو لکه لیکې.
د یوه کرښیز مساوات سیستم بیلګه، چې یو د لیکه-پوړی-بڼې ماتریکس سره ، چې ښايي، چې فقط ساده حل شتون لري.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

د دې مساواتسیستم د اخرنې لیکې څخه لاس ته راځي $x_3 = 0$. له دویمې لیکې لاس $x_2 = 0$ ته راځي او بالاخره $x_1 = 0$ ، له کومه امله چې موږ د حل په څېر فقط صفروکتور لاس ته راوړو.
د یو هموجین مسواتسیستم سره کړی شو و ازمایو، چې ایا ومتورونه یو بل ته کرښیز خپلواک ای ا کرښیز بلواک دي. موږ له دې سره وکتورونه په متاريکس کې د متې وکتورونو په څیر لیکو. که داسې لاس ته راوړی هموجین کرښیز م ساوات سیستم فقط ساده حلونه لري، ن و وکتورونه یو بل ته کرښیز خپلواک دی.

زيات حلونه يا اوبیونې:

دا هوموجین کرښیز مساوات سیستم زیات حلونه لري، که خپلواکه متحوله (اووښتونې) شتون ولري.. یوه خپلواکه اووښتونې هغه اووښتونې ده چې مساواتسیستم حل له لارې کره نه وي ټاکل شوي. موږ مړی شو داسې اووښتونې په خپله خوښه وټاکو او همداسې په خوښه زیات حلونه د مساوات سیستم لپاره لاس ته راځي.

دا حلونه یو وکتورفضا غزوي.

دا څنګه پیژنو،چې ایا یو میاواتسیستم خپواکي متڅولي لري؟ خپلواکي متحولي ټيک هلته شتون لري، چې په سیستم کې لږ مساوات شتون ولري، نسبت اووښتونو ته.

بیلګه:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

داسي مساواتسیستمونههم شته، چي په هغې کې داسي نه ده، چي د متحولو څخه دې مساوات لږ وي. په داسي مساواتسیستم کې پیژنو، چي په لیکه پوړیزه کونه کې یوه صفرلیکه شتونلري. پههوموجېنګربنیز سیستم کې کېدی شي داسي لیکه له منځه یوسو(پام! داپه ناهموجېن کې مکنه نه ده، ځکهچي دا حقیقت به مو لهمنځهوړی وي، چي کومحل شتون نه لري) . که د دې لهمنځه وړني سره زیاتي متحولي پاتي شي نسبت مساواتو ته ، ن و یو م ساواتسیستم بهولرو د خپلواکو (ازاده)متحولو سره .
که د یوه هوموجین مساوات سیستم د حل سره، په کوم کې چي ماتریکس له متو وکتورونو جوړ دی، چي کربنیز خپلواکوالی یې یو بل ته ازمایل کیږي، لاس ته راشي، نو وکتورونه یو بل ته کربنیز بلواک دي.

انهوموجین مساواتسیستمونه کېدی شي هیڅ حل، ټیک یو حل او یا ریات حلونه ولرودای شي.

هیڅ حل یا نه حل: یو انهوموجین کربنیز سیستم کوم حل نه لري، که د دیوه مساوات ضریبونه صفر وي، او اړونده b_i صفر نه وي..:

یعني

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n = b_i \quad b_i \neq 0$$

داسي یو برابرون یا مساوات بنه اړولی بنه بدل **entartet.** بلل کیږي. بنه اړول شوې مساوات نه پوره کیږي او له دې سره ټېرلمسوات سیستم نه پوره کېدونکی دی، له کومه کبله چي موږ حل هم نه لرو.

ټیک یو حل:

یو انهوموجین مساوات ټیک یو حل لري، که دا اړونده هومجین مساوات سیستم – دا اړونده هوموجین مساوات سیستم جوړ شي، په کومکې چې ټول b_i د صفر سره برابر ولیکل شي – فقط ساده حلونه ولري.

د دې لپاره چې حلونه وشمیرلی شو، دا انهوموجین کرښیز سیستم د لیکی پوړیزبڼه باندې اړوو، لکه پورته مو چې داسې وکړل، د کوم سره چې موږ b_i ($1 \leq i \leq n$) هم باید په پام کې ونیسو.

یو ناهوموجین مساوات سیستم کیدی شي د دې لپاره وکارول شي، چې و ازمايي، چې ایا یو وکتور د نورو وکتورونو څخه د کرښیز کمبینېشن په څېر جوړی شي که نه. ټیک هلته یو حل شته، که b د متو یا ستنو وکترونو د کرښیز کمبینېشن څخه جوړولی شي. که داسې یو حل شتون ونه لري، نو نه شي کېدی چې د متو وکترونو څخه کمبینی یا ترکیب کړي. که یو یا حتا زیات حلونه شتون ولري، نو دا په لاندې توګه دي:

زیات حلونه یا اوبیونې:

لکه په کرښیز هوموجېن مساواتسیستم کې ازادې متحولې په ناهوموجېن مساوات سیسم کې هم راپیدا کیږي یا منځ ته ارځي. دا بېرته په هغه وختکې شتون لري، که سړی زاتې متحولې ولري نسبت مساواتو ته. په ناهوموجېن سیستمکې هم سړی کړی شي صفرلیکې لرې کړي، چېرته چې $b_i = 0$ هم وي. په هرحالت دا بڼه تغیر شوې مساوات له منځه نهشي وړل کېدی.

دیترمینانتونه Determinante :

که د یوه مربع ماتریکس وکتورونه یو بل ته کرښیز بلواک وي، نو دیترمینات 0 دی. په بل حالت کې $\neq 0$. له دې سره د $Ax = b$ لپاره باور لري:

$\det A \neq 0$ $\Rightarrow$	د هوموجین مساواتسیستم لپاره ساده حل،
$\det A = 0$ $\Rightarrow$	د ناهوموجین مساوات سیستم لپاره حلونه. د ناهوموجین سیستم لپاره حلونه یو حل یا هیڅ حل

رانګ Rang

$rang(Ab) = rang(A)$

حل شتون لري. د یوه ناهوموجین سیستم لپاره یو حل شتون لري. د یوه هوموجین سیستم لپاره ساده حل شتون لري.

د حلفضا د دیمنزیون (بعد، پراخیدونی)ټاکل

د یوه هوموجین مساواتسیستم د حلډېریو د د بعد ټاکلو لپاره مور کړی شو د دیمنزیون یا بعد فرمول څخه کار واخلو. دا چې هر ماتریکس A په یوه ټاکلي بنسټ f_A ایندومورفیزم انځوروي د هوموجېن کربنیزمساوات سیستم حلفضا لپاره

$$Lsg(A,0) = Kern(f_A)$$

باور لري او داسې کړس شو د بعد د فرمړل

$$\dim V = \dim(Kern(f)) + \dim(Bild(f)) \Leftrightarrow \mathrm{d}$$

$$\dim(Kern(f)) = \dim V - \dim(Bild(f))$$

سره د حلفضا بعد وټاکو

بعد یا پراخیدونی

یا 0 دی : نو بیا تیک ساده حل شتون لري، داسې په نامه صفروکتور.

یا >0 دی : نو په دې حالت کې ازادې اووښتونې(متحولې (شتون لري، بعد لویوالی د متحولو تعداد دی، چې لرو يې:

پوښتنه:

موږ عکس(څیره) څنګه ټاکو؟ موږ دلته باید یوون – واهدوکتورنه په ماتریکونو وځغوو یا راوړو. موږ بای د پسې د بیلد(څېرې) پراخېدونی وشمېرو، داسې چې په هغې کې بېرته یو کربنیزمساواتسیستم حل کړو. موږ له دې سره یو د شمیرنې پانګه لرودی شو. او که اشتباه کړم؟

د ګاوس - تلنلار یا - - قانون Gauss-Verfahren

د ګاوس-قانون د دې لپاره دی، چې یو ماتریکس په لیکه وکتورونو راوړي. د لیکه وکتورونو بدلیدنه او لیکه کمون یا تفریق د تر مخه سکالار ضرب په بنسټ د برخه اخستونکو لیکو تر هغې مخ ته بیایې، چې ماتریکس په لیکه پوړیز ماتریکس بدل شي. د ګاوس قانون تل د کترولو دی یا عملي کیدی شي.خو سه له دې هم کېدی شي، چې په قوي ډول ناټیک وي. اوس الګوریموس ،، پروګرامي ،، کوو:

لاندې یا کښته برخه:
د ګاوس قانون د یوه ماتریکس د لیکه پوړیز بڼې باندې اړولو لپاره

- په پیل کې ازمایو، چې ایاماتریکس ماتریکس همرا اوس لیکه پوړیز بڼه لري. په بېخي ځانګړې توګه $A=0$ ، یعنې فقط له 0 –نو څخه جوړ ماتریکس لیکه پوړیزبڼه لري.

- د دې عمل جراکولو له مخه – او نظري په دې مهال هم- کېدی شي او باید هم لیکې بدلې شي، که دا کار ګټور وي. دا په دې معنا، چې د لیکې د پیوت توکي(Pivotelemente) له پورته بیخي کیڼ تل پسې ښي لور ته لاړ شي. د پیوت توکي

هغه توکي بللکيږي، کوم چې له ښې لورې کتل شوي په يوه ليکه کې لومړی يا په سر کې د 0 سره نابرابر وي.

- د i سره پيل شوې هر ي ليکې لپاره د پورته ليکې د $i = 1$ سره تر د اخرې ليکې پورې لاندې ډول مخ ته ځو:

د هرې ليکې لپاره ، چې وي – ليکه j تل له ليکې i کښته پرته ده - د i ډيرواره له ليکې j ته ور زياتوي يا تر کموي(که غواړی، جمعه کوي يا ترې تفريقوي) ، داسې چې a_{ji} - دلته i اووښتوني يا متحوله د متې يا درڅ ګڼه(نمره) په ګوته کوي- 0 شي.

د ګاوس الګوريتموس يوه ليدنه

په لاندې کې Aktuelles ورځنی يا اکتول

لومړی پل يا تلنلار i=1

$$\begin{array}{rcccc}
\text{Aktuelles } i \rightarrow & X & X & X & X \\
\text{Aktuelles } j \rightarrow & 0 & X & X & X \\
 & X & X & X & X \\
 & X & X & X & X \\
 & \uparrow & & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rcccc}
\text{Aktuelles } i \rightarrow & X & X & X & X \\
 & 0 & X & X & X \\
\text{Aktuelles } j \rightarrow & 0 & X & X & X \\
 & X & X & X & X \\
 & \uparrow & & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcccc}
\text{Aktuelles } i \rightarrow & X & X & X & X \\
 & 0 & X & X & X \\
 & 0 & X & X & X \\
\text{Aktuelles } j \rightarrow & 0 & X & X & X \\
 & \uparrow & & &
\end{array}$$

دويمه پل يا تلنه i=2

$$\begin{array}{rcccc}
 & X & X & X & X \\
\text{Aktuelles } i \rightarrow & 0 & X & X & X \\
\text{Aktuelles } j \rightarrow & 0 & 0 & X & X \\
 & 0 & X & X & X \\
 & & \uparrow & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rcccc}
 & X & X & X & X \\
\text{Aktuelles } i \rightarrow & 0 & X & X & X \\
 & 0 & 0 & X & X \\
\text{Aktuelles } j \rightarrow & 0 & 0 & X & X \\
 & & \uparrow & &
\end{array}$$

دریم پل یا تلنه i=3

$$\begin{array}{rcccc} & X & X & X & X \\ & 0 & X & X & X \\ \text{Aktuelles } i \rightarrow & 0 & 0 & X & X \\ \text{Aktuelles } j \rightarrow & 0 & 0 & 0 & X \\ & & & \uparrow & \end{array}$$

له ماتریکی داسې په لاس راړی لیکه پوړیز بڼه وکتور څخه کېدی شي حلونه (اوبیونې) وشمېرل شي.

دا داسې کوو چې دا مساواتسیستم ببرته په ماتریکس بڼه په یوګونو مساواتو بدل کړو او له لاندې څخه په پیل په اړونده متحولې پسې حل کړو.

کخ دا مساواتسیستم زیات حلونه لرودی شي، نو له دې سره پېژنو، چې متحولې شتون لري، چې د هغو ارزښتونه ه شو ټاکلی. دا نو ازادې متحولې دي.

د ګاوس الګوریتموس ټیکاوی

د دې لپاره چې وښایو چې ګاوس قانون یو کرښیز مساوات سیستم$\overline{A}$ د ټیک همغه یا برابر حلډېری (حلسټ) سره لکه مساواتسیستمA یې چې تولیدوي، باید وښایو، چې لاندې بڼه بدلونونه په حلونو کوم اغیز نه لري.

لومړی: د لیکو بدلونه

دویم : د لیکو صربونه د سره او بالاخره یې د بلې لیکې سره زیاتول یا کمول(جمعه او تفریق)

ښوونه یې:

لومړی : دا ساده دی. د یوه مساولتسیستم د لیکو بدلون په حلونو کوم اغیز نه لري، ځکه چې لړې پرلپسې پروا نه لري..

دویم : موږ د مساواتسیستم دوه لیکې ترځېړنې لاندې نیسو، څکه چې بڼه بدلون فقط د دې دوه لیکو په مرسته صورت نیسي. نور و دوه لیکو سره سراوکار نه لرو او د حلونو ډېرۍ تغیر نه خوري:

$$\begin{array}{lccccccc} (1) & a_{i1}x_1 & + & \cdots & + & a_{in}x_n & = & b_i \\ (2) & a_{j1}x_1 & + & \cdots & + & a_{jn}x_n & = & b_j \end{array}$$

لومړۍ لیکه د λ سره ضربوو، په مساوات کې تغیر نه راځي، څکه چې سرۍ λ بیرته لنډولی شي یا کمولی شي یا که غواړۍ اختصار کولی شي:

$$\lambda \cdot a_{i1}x_1 + \cdots + \lambda \cdot a_{in}x_n = \lambda \cdot b_i$$

دا(1) اوس د دویمې(2) لیکې سره جمعه کوو، لکه چې ترې لرو

$$a_{j1}x_1 + \cdots + a_{jn}x_n + (\lambda \cdot a_{i1}x_1 + \cdots + \lambda \cdot a_{in}x_n) = b_j + (\lambda \cdot b_i)$$

پوهیږو چې دلته هم په حل کې کوم تغیر نه راځي، څکه چې مساوات ورسره زیاتوو، چې په دواړو لورو ته راغلی او دواړو لورو ته همغه برخه ورکوي. دا بیرته سره لنډیدی شي او موږ بیرته وتونمساوات لرو.

د حلونو یا اوبیونو نور قوانین

د یوه کرښیزمساواتسیستم د حل لپاره د ګاوس قانون ترڅنګ نور قوانین هم شته. په ښوونځي کې مو د بدلون قوانین وپیژندل. په دې کې یو مساوات د یوې متحولې یا اووښتونې سره حل کیږي او بیایې ارزښت د مساوات سیستم په بل مساوات کې کېښوول کیږي.په همدې ترتیب دې کار ته دوام ورکوو، چې بیداشوط اوښتونې ارزښت د مساوات سیستم په هبل مساوات کز ځا په ځای کیږي، تر څو چې د ټولو متحولو ارزښتونه پیداشي.که د اووښتون و ارزښتونه په پای کز ځا په ځاشي او لاس ته راشی ، $0 = 0$ ، نو مساوات سیستم ناپای ډېر حلونه یا اوبیونې لري. که د دې ځا په ځای کونې وروسته ،، کین اړخ $\neq$ ښی اړخ،، نو کوم حل شتون نه لري. په ورته توګه دا مساوي ایښونې قانون هم کارول کیږي، د کوم سره چې دوه مساوات د یوهې اووښتونې په لور حل شي او بیا

برابر ولیکل شي.

په پای کې باید وکورو، چې د یوه کربنیزمساوات سیستم ځنګه حلونه لاس ته راړو، که ورته سیستم حل کړ شوی وي:

غواړو د یوه ناهموجین کربنیز مساوات سیستم حلډېری I وټاکو. موږ د هوموجین کربنیز مساوات سیستم حلډېری یا حل سټ H پیژنو. د هوموجین کربنیز مساواتسیستم حلونو ډېری یا سټ H د اړونده تابع د زړي(هستې) Kern سره برابره ده. برسره پردې موږ د ناهوموجین سیستم ټوټه یا برخه حل یا د حل یوه برخه حل v_0 پیژنو.

موږ کړی شو د دې ناهوموجین سیستم حلډېری I پیداکړو، داسې چې

د ناهوموجین سیستم ټولو حلونه v_0 جمعه کوو:

$$I = v_0 + H = \{v_0 + h \,\forall\, h \in H\}$$

د هوموجین کربنیزمساواتسیستم حلونه $Ax = 0$ د کربنیزو توابعو زړی(که غواړئ: هسته) دی. موږ کړی شو ، لکه د ماتریکس A سره چې انځور یړي، دا زړی و دې ټوټه – یا برخا حل ته ورزیات یا ور جمعه کړو. دا ځانله (تنها) د ناهوموجین مسوات سیستم سره نه کوو بلکه د هوموجین مساوات سیستم سره هم همداسې مخ ته ځو.

$$Lsg(A, 0) = v_0 + Kern(A)$$

د هوجین مساواتسیستم ته تل یو ساده حل0 شتون ري، له دې سره لرو

$$Lsg(A, 0) = 0 + Kern(A) = Kern(A)$$

موږ د ناهوموجین مساواتسیستم دوه حلونه لرو. له دې دوه وو څخه یو حل د هوموجین مساوات سیستم لپاره جوړولی شو، داسې دواړه حلونه یو بل کم یا تفریق کړو:

$$\begin{array}{c|l} & A\cdot X_1=b \\ - & A\cdot X_2=b \\ \hline = & A\cdot(X_1-X_2)=0 \end{array}$$

ورته والي - يامشابهت اړيکې **Äquivalenzrelationen**

په A يوه اړيکه~ ټيک هلته ورته بللکيږی، که د ټول $a,b,c\in A$ لپاره باور ولري

لومړی : $a\sim a$ يا $(a,a)\in\sim$ انهکاس يا هندارون اړيکې يا (Reflexiv)

دويم : که $a\sim b$، نو $b\sim a$ يا که $(a,b)\in\sim$، نو $(b,a)\in\sim$ سيومتريک اړيکې (Symmetrisch)

دريم : که $a\sim b$ او $b\sim c$ ، نو $a\sim c$ يا که $(a,b),(b,c)\in\sim$ ، نو $(a,c)\in\sim$ ترانسيتيو اړيکې (Transitiv)

ورته اړيکې يوه ډېرۍ(سټ) په،، ورته ټولګيو،، ويشي.

ډېرۍ يا سټ له ترنو يا عمليو سره

د ښوونځي او هم د شمېرپوهنې په ورځني ژوند کې له دې سره بلد يو، چې له کومو سره ترمونه ساده کېدی شي. دا زيات وخت ډېره مرسته کوي. د بېلګې په توګه د ډېستزيبوتيو قانون په مرسته لاندې ترم خورا زر ګڼلی شو، لکه بې له دې قانون.

$$\left(\frac{1}{8}+\frac{13}{2}\right)\cdot\frac{8}{13}=\frac{1}{8}\cdot\frac{8}{13}+\frac{13}{2}\cdot\frac{8}{13}=\frac{1}{13}+4=4\frac{1}{13}$$

د بينوم لومړۍ جملې هم د ديستريبوتيو قانون ډېر واره استعمالول دي

$$(a+b)^2 = (a+b)\cdot(a+b) = (a+b)\cdot a+(a+b)\cdot b = a\cdot a+b\cdot a+a\cdot b+b\cdot b = \\ = a^2+2ab+b^2$$

په لاندې برخه کې اوس شمېرنې نور قوانین ، چې د اکسیومونه بلل کیږي و تعریفو. دا قوانین د ډېریو لپاره صدق کوي د اړونده ترنو سره. زیات وخت پوښتنې رامنځ ته کیږي، چې دا ااکسیومونه له کومه راځي. اکسیومونه خویونه ل ري، چې دا په ساده توګه تعریفیږي، بې له ثبوته. طبعأ دا په خوښه نه ټاکل کیږي. مګر په لومړي سر کې یا د پیل زده کوونکو لپاره په دې بسیا کوو، چې دا دې شتون ولري.

لاندې برخه (كه ټوټه برخه یا کښته برخه):

Unterabschnitte

موږ او یو په بل پسې یوګوني تعریفونه ورکوو. له دې سره پورته و کښته لور ته تل زیات امسیمونه باور لري. د بیلګې په توګه تنونه یا اجسام له دوه کموتاتیو ګروپونو منځ ته راځي، یو ځل نسبت جمعې یا زیاتون + ته او یوځل نسبت و ضرب · یا * ته او دې سره اړونده دیستریبوتیو قانون څخه یو ځای یا په ګډه، یعنې بدن یا تن یا جسم له ګروپ څخه زیات دی.

ګروپ

یوه حوړه یا یو ګون $(G,+)$ ، چې G یوه ډېری ده او $+$ یوه ترنه یا عملیه ده،

$$+ : G \times G \to G$$

ګروپ بللکیږی، که لاندې اکسیومونه پوره وی:

G1 : $(a+b)+c = a+(b+c) \forall \ a,b,c \in G$ اسوڅياتيو قانون.

G2 : يو $e \in G$ (ناپيلى توکى) شتون لري چې د $\forall \ a \in G$ لپاره لاندې خويونه پوره کوي:

لومړى: $e+a=a$

دويم : د هر $a \in G$ لپاره يو $a' \in G$ شتون لري (په ځېټ يا برعکس توکى) د $a'+a=e$ سره

د ابل - يا کموتاتيو ګروپ **Abelsche / kommutative Gruppe**

يو ګروپ د ابل ګروپ بلل کيږي، که د د ګروپ د اکسيومونو **G1** او **G2** برسېره دا $a+b=b+a$ هم $\forall \ a,b \in G$ باور ولري (کموتاتيو قانون) *(Kommutativgesetz)*.

کړى Ring

يو ګون $(R,+,*)$ ، چېرته چې R يوه ډېرى او $+,*$ دوه ترونونه يا عمليې دي د لاندې سره

$$+ : R \times R \to R \qquad * : R \times R \to R,$$

کړى يا رينګ بلل کيږي، که لاندې اکسيومونه پوره وي:

R1 : د **+** سره یو ځای کموتاتیو ګروپ (اسوشاتیوؤ ناپیلی توکی، په څټ یا برعکس توکی دی.

R2 : $(a * b) * c = a * (b * c) \forall \; a, b, c \in R$ (د $*$ لپاره اسوشاتیو دی.

R3 : دېستربوتیو قانون باور لري:

(a) $\forall \; a, b, c \in R : (a + b) * c = a * c + b * c$

(b) $\forall \; a, b, c \in R : a * (b + c) = a * b + a * c$

کړۍ د یوي توکي (واحد توکي) سره Ring mit Einselement

$(R, +, *)$ یوه کړی ده، له دې امله باور لري:

$\exists 1 \in R$ (ناپیلی توکی یا یوې توکی د ترڼې لپاره) د هغه لپاره چې باور لري:

$1 * a = a$

کموتاتیو کړۍ:Kommutativer Ring

$(R, +, *)$ یوه کړی ده، له دې امله باور لري:

$\forall \; a, b \in R : a * b = b * a$ (د $*$ لپاره کموتاتیو قانون)

کموتاتیو کړۍ د یوی توکي (واحد عنصر) سره

کړۍ، په کومو کې چې کموتاتیو قانون باور لري او دا هم یو یویتوکی ولري، یعنې د دوه پورته اکسیومونو سره، کموتاتیو کړۍ د یویتوکي سره بللکیږي.

بدن یا تن یا پټۍField Körper

یو ارزښت نظم یا توپل $(K, +, *)$ یو تن دی، که باور ولري

K1 : د کموتاتیو کړۍ اکسیومونه د یوېتوکي سره باور لري.

K2: $\forall a \in K \exists a^{-1}$ ، داسې چې $a * a^{-1} = 1$ باور لري (د تړنې $*$لپاره په څټ یا برعکس توکی)

پولینوم کړۍ Polynomring

$\mathbb{K}$ دې یو تن وي. د $\mathbb{K}_n[t]$ ډېری د لاندې بڼې پولینومونو څخه جوړه ده

$$a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_n t^n$$

د کومو سره $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ ، t یوه اووښتونې(متحوله) او n د پولینوم درجه بللکیږي. د پولینومونو دا ډېرۍ یو کموتاتیو کړۍ ده. د یوه پلینوم Pخورا جګ ضریب(څلوونی) - په پورتنۍ بېلګه کې یعنې n ، چې باید $a_n \neq 0$ وي - د پولینوم درجه بللکیږي. که دا 0 وي، یعنې د ټولو i لپاره $a_i = 0$ ، نو دا پولینوم صفر پولینوم بلل کیږي. د صفرپلینوم درجه ناپای ده:

$$\deg P := \begin{cases} \infty & \text{falls } P = 0 \\ n & \max\ (i \text{ für das gilt } a_i \neq 0) \end{cases}$$

پاتې ټولګي یا باقي ټولګي Restklassen

اوس غواړم د بدن لپاره یوه بله بېلګه دروپېژنم یا معرفي کړم، د لومړنیو ګڼونو پاتې ټولګي. د لومړنیو ګڼونو پاتې ټولګي کېدی شي بدنونه شي، داسې چې په هغو کې

جمعه(زياتون) او ضرب(ځل) تعريف شي. داسې تنونه $\mathbb{F}_p$ بللکيږي يعنې د بېلګې په توګه $\mathbb{F}_7$ د پاتېتولګي 7 لپاره. په روڅني ژوند کې د پاتې ټولګي سره ډېر شمېرل کيږي، د بېلګې په توګه د ليکنيزې جمعې سره [2.2] :

$$\begin{array}{rrr} & & 8 \\ + & {}_1 & 9 \\ \hline & 1 & 7 \end{array}$$

موږ 8 او 9 د7 سره جمعه کړل چې چېرته موهغه لاس ته راغلی زيات هېر کړی نه دی. موږ اوس کړی شو چې هغه زيات يا لاس ته راغلی پرېږدو او وليکو

$$8 \bmod 10 + 9 \bmod 10 \equiv 7 \bmod 10$$

چېرته چې ،، mod ،، مودولو**modulo** په معنا دی، يعنې د وېش پاتې يا باقي.

په ورته توګه نور پاتې ټولګي هم تعريفولی شو. د دې په ځايچې په 10 يې ووېشو په 3 يې وېشو.

$$\begin{array}{rrr} & & 3 \\ + & {}_1 & 2 \\ \hline & 1 & 2 \end{array}$$

د دې لپاره کړی شو، چې يو د جمعې او ضرب جدول جوړ کړو:

$+$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

$\cdot$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

په همدې توګه دا کار بيا کړو، دا وار د پاتې ټولګي 4 لپاره:

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

·	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

اوس کړی شو د بدن اکسیومونه په یوګوني ډول په هغو پاتې ټولګیو پورې اړونده بدن باندې د جدول ارزښتونو په مرسته و ازمایو. کموټاتیو قانون باور لري، که جدول په دوه -کونجتړې(قطر) باندې هنداروں یا انعکاس سیومتریک وي. په ځېټ یا معکوس توکی شتون لري، که د جدول په هره لیکه او هره مټه کې د بدن هر توکی یوځل منځ ته راشي یا شتون ولري. صفرتوکی شتون لري، که په هره لیکه او هره مټه کې منځ ته راشي یا شتون ولري. اسوځیاتیو او دېستریبوتیو قوانین له جدول ځخه په ساده توګه نه شي لوستل کېدی.

وروسته له دې چی دا نښلونټکي(د نښلونو ټکي) لرو، پېژنو، چې بدن $\mathbb{F}_4$ شتون نه لري. دا د ضرب د معکوس توکی قانون په خلاف دی. داسې x نه شته چې$2 \cdot x = 1$ باوري کړي

یعنې د4 پاتې ټولګي ځخه بدن نه شي جوړېدلای. برعکس یو بدن $\mathbb{F}_3$ له پاتې ټولګي 3 خځخه ممکن دی، ځکه چې هېځ اکسیوم نه زیانمن یا زخمي کیږي: ګورو چې سیمتریک، برعکس او ناپیلی توکي شتون لري . همداسې د نږدې پسې ازمایلو ځخه ګورو چې اسوځیاتیو او دېستریبوتیو قوانین هم باوري دي.

که نور هم ځیرنه ژوره کړو، نو په دې کې یو سیستم ګورو، چې کله یو پاتې ټولګی p یو بدن$\mathbb{F}_p$ کیږي. دا حالت تیک هلته رامنځ ته کیږي، چې p یو لومړنی ګڼ(عدد) وي. دا ثبوت دلته نه راوړو.

مګر غواړو چې په پای تعریف کړو، چې یو کرکتریستیک (خوی ټاکونی) ځه شی دی او ولې د یوه په خوښه بدن $\mathbb{K}$کرکتریستیک تل یو لومړنی ګڼ او یا 0 دی:

پیژند(تعریف):

$\mathbb{K}$ دې یو ردن وي او 1 د ضرب یو ناپیلی توکی(یوونتوکی، عنصر واحد) وي. د یوه زیاتیز یا مثبت عدد n لپاره د $n \cdot 1$ لاندې پوهیږو

$$n \cdot 1 = \underbrace{1 + \ldots + 1}_{n \text{ mal}}.$$

د بدن $\mathbb{K}$ کرکتریستیک په لاندې توګه تعریف دی

$\mathrm{char}\mathbb{K} = \begin{cases} 0 \\ n \end{cases}$	که n>0 شتون ونه لري، چې n.1=0 باور ولري که n شتون ونه لري، چې باور ولر n1=0

ښوونه: n تل یو لومړنی ګڼ دی:

وي دې $n \neq 0$ (د تعریف دویم حالت). که n لومړنی عدد نه وی، نو دا په لاندې ضقیبونو ټوټه کیږی [2.3] .

$$\begin{aligned} & n1 = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & (n_1 \cdot n_2)1 = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & n_1 1 \cdot n_2 1 = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & n_1 1 = 0 \wedge n_2 1 = 0 \end{aligned}$$

دا تضاد دی. ځکه چې $n_1 < n$ او $n_2 < n$ باید کرکتریستیک $\mathbb{K} = n_1$ char اویا char $\mathbb{K} = n_2$ کرکتریستیک وي. دی char $\mathbb{K}$ = n او له دې سره n په ضریبونو نه شي ټوټه (تجزیه) کېدی، نو له دې امله یو لومړنی عدد دی.

موږ د ښوونځي ځخه غوره بدنونه پېژنو، لکه د هوښیار اعدادو(کسري-) $\mathbb{Q}$ ، د ریل یا حقیقی اعداد $\mathbb{R}$ بدنونه او ورپسي د کمپلکس اعدادو $\mathbb{C}$ بدنونه هم. دا ټول زدنونه کرکتریستیک 0 لري. نور د اعدادو غوره ډېرۍ هم شته لکه د ټول ګڼونو (- اعدادو) ډېرۍ. دا فقط یو کموتاتیو ګروپ جوړوي، ځکه چې په نسبت و ضرب ته معکوس توکی نه لری. دا له دې امله داسي ده،چې موږ په دې عددونو کې ماتونه(کسرونه) نه لرو. د ټولو طبیعي اعدادو $\mathbb{N}$ ډېرۍ چې 0 ورسره تړلی دی او یا نه،

متأسفانه چې حتا یو ګروپ هم نه دی، ځکه چې د جمعې معکوس توکي نه لرو، د بېلګې په توګه د $3+x=1$ لپاره x شتون نه لری، ځکه چې $x=-2$ شتون نه لري.

وکتور فضا der Vektorraum

لاندې برخه

کربنیزبلواکوالی (خطي تابعیت)

یادونه (ژباړی): ګ‌ړو چې دلته مو تابع کلیمه، چې د فنکشن لپاره کارول کیږي، ناتیکاوي ته لاربنودوي. دلته د بلواکوالي یا تابعیت څخه موخه فنکشن نه دی. پای.

یو د وکتورونو $(v_1,\ldots,v_n)$ کورنۍ کېدی شي کربنیز بلواکه یا کربنیز خپلواکه وي، نه دواړه یو ځای کېدی شي او هم نه له دوه څخه یوه هم نه . یوه کورنۍ هغه ډېرۍ ده، چې یو توکی په کې دوه ځله هم راتلی شي. پس موږ په خوښه وکتورونه لرو- په کوم کې چې همغه وکتور ختی دوه ځله راتلی شي- کوم چې موږ داپه خپلو اړیکو کې یو له بل سره ځېړو.

کربنیز خپلواکوالی

V دې یو $\mathbb{K}-$ -وکتورفضا وي. یوه د وکتورونو $(v_1,v_2,\ldots,v_n)$ پای کورنی له V څخه کربنیز خپلواک بلل کیږی، که له $\lambda_1,\ldots,\lambda_n\in\mathbb{K}$

$$\lambda_1 v_1+\ldots+\lambda_n v_n=0$$

څخه لاس ته راشي، چې $\lambda_1=\ldots=\lambda_n=0$ دي.

دا په دې معنا، چې صفر وکتور د نورو وکتورونو $v_1, v_2, \ldots, v_n$ څخه ساده ترکيب کيدی شي

کربنيز بلواکواکوال:

V دې بيا هم يو $\mathbb{K}-$ -وکتورفضا وی. يوه د وکتورونو $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ پای کورنۍ له V څخه کربنيز بلواک بلل کيږی، که له $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$

$$\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n = 0$$

لاس ته راشي، چې هم ساده حل $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$ شته ، او هم يو حل له کوم سره چې لږ تر لږه يو $(1 \leq i \leq n)\, \lambda_i \neq 0$ دی.

دا په دې معنا دی، چې موږ صفروکتورونه د ساده حلونو يا اوبيونو څخه په بل ډول هم د وکترونو د کورنې څخه جوړولی شو

د وکتور فضا تعريف:

اوس د وکتورفضا تعريف ته راځو:

$\mathbb{K}$ دې يو بدنوي. يودرېګون $(V, +, *)$ چې V يوه n-ګون

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

او $+$ او $*$ ترني یا عملیي وي

$$+ \quad : \quad V \times V \to V$$
$$* \quad : \quad \mathbb{K} * V \to V$$

$\mathbb{K}$ -وکتور فضا بلل کیږي، که لاندې اکسیونونه باور ولري:

$(V, +)$ یو کموتاتیو ګروپ دی.

S1 : $\forall \ \lambda, \mu \in \mathbb{K}, v \in V$ باور لري $\lambda * (\mu * v) = (\lambda * \mu) * v$ (آسوځیاتیو قانون)

S2 : $1 \in \mathbb{K} : \forall \ v \in V : 1 * v = v$ (ناپیلی توکی)

D1 : $\forall \ \lambda, \mu \in \mathbb{K}, v \in V$ باور لري $(\lambda + \mu) * v = \lambda * v + \mu * v$ (دیستریبوتیو قانون)

D2 : $\forall \ \lambda \in \mathbb{K}, v, w \in V$ باور لري $\lambda * (v + w) = \lambda * v + \mu * w$ (دېتریبوتیو قانون)

د یوه وکتور فضا جوړونه یا که غواړی تولید Erzeugen eines Vektorraums

اوس غواړو $n-$ -ګونی 3.1 $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ، چي دوکتورفضا د تولید لپاره اړتی ورته لرو تولید کړو. دا کړی شو که موږ دا ټول ولیکو . دا د ډېرو کمو وکتورونو لپاره هم موخه ور دی. مګر د زیاتو وکتورفضاو لپاره دا نا ممکن دی، څکه چي موږ ناپای ډېر ګونونه لرو. موږ باید دا د یوه شمېرقانون سره تولید کړو.

کرښيز ترکيبوالی

وي دې $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ په $\mathbb{K}-$-وکتور فضا کې يوه د وکتورونو کورنۍ. هر د $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K})$ بڼې

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n$$

وکتور v د $v_1, v_2, \ldots, v_n$ کرښيز ترکيب بلل ګيږی.
اوس ، د کلمو،، کرښيز خپل(بل)واک،، او د ،،کرښيز ترکيب،، ترمنځ يو څو ښوونې يا ثبوتونه راړل کيږی. د دې ښوونو لاس ته راوړنې به شايد د ډېرو زده کړو په غوښنه او وينو ته تللي وي. تاسو پوهيږئ چې دا داسې دی. خو بيا هم موږ بايد دا يو څل وښايو:

جمله ؛

که د کورنی $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ وکتورونه يو بل ته کرښيزخپلواک وي، نو کېدی شي هر وکتور $v \in L(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ د دوی له لارې په يوه ټاکلې لار ترکيب شي. له

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n \qquad v = \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 + \ldots + \mu_n v_n$$

څخه لاس ته راځي

$$\lambda_1 = \mu_1; \quad \lambda_2 = \mu_2; \quad \lambda_n = \mu_n$$

ښوونه:

$$\begin{aligned} & v = v \\ \Leftrightarrow \quad & \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n = \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 + \ldots + \mu_n v_n \\ \Leftrightarrow \quad & (\lambda_1 - \mu_1) v_1 + (\lambda_2 - \mu_2) v_2 + \ldots + (\lambda_n - \mu_n) v_n = 0 \end{aligned}$$

د کرښيزخپلواکوالي له امله باور لري:

$$\lambda_1 - \mu 1 = 0;\ \ \lambda_2 - \mu_2 = 0;\ \ldots\ \lambda_n - \mu_n = 0$$
$$\Rightarrow\ \ \lambda_1 = \mu 1;\ \ \lambda_2 = \mu_2;\ \ldots\ \lambda_n = \mu_n$$

له دې سره کېدی شي وکتور ټیک په یوه ډول ترکیب شي.

برعکس یا په څټ کیدی شي وښوول شي:

جمله :

که چیرې یو وکتور v ټیک په یوه ډول له وکتورکورنیو $(v_1, v_2, \ldots v_n)$ څخه د کرښیز ترکیب کیدی شي، نو نو د دې کورنی وکتورونه یو بل ته کرښیز خپلواک دي.

ټیک په یوه ډول تکیبوړ په دې معنا دی، چې که

$$v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n$$
$$\text{und}\quad v = \mu_1 v_1 + \ldots + \mu_n v_n$$

باور ولري، $\lambda_1 = \mu_i$ باور لري او له دې سره $\lambda_i - \mu_i = 0$

$$\begin{aligned} & v = v \\ \Leftrightarrow\quad & \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n = \mu_1 v_1 + \ldots + \mu_n v_n \\ \Leftrightarrow\quad & (\lambda_1 - \mu_1) v_1 + \ldots + (\lambda_n - \mu_n) v_n = 0 \end{aligned}$$

داچې $\lambda_i - \mu_i = 0$ د $1 \leq i \leq n$ لپاره د کورنې وکتورونه کرښیز خپلواک دي.

جمله:

که د یوې کورنې $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ وکتورونه کرښیز بلواک وي، نو له یوه څخه زیات امکانات شته چې وکتور v ترکیب کړو. کرښیز بلواک په دې معنا دی، چې لږ ترلږه یوه v_i لپاره $(1 \leq i \leq n)$ باور ولري:

$$v_i = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_{i-1} v_{i-1} + \lambda_{i+1} v_{i+1} + \ldots + \lambda_n v_n.$$

ښوونه:

که موږ وکتور v ولرو، کړی شو دا په لاندې ډول ترکيب کړو:

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n.$$

له دې څخه لاس ته راځي $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. اوس کړی شو دا پورته يادشوی کرښيز ترکيب د v_i لپاره ځای په ځای کړو او لاس ته راړو

$$\begin{aligned} v &= \lambda_1 v_1 + \ldots + \\ &\quad \lambda_i \cdot (\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_{i-1} v_{i-1} + \lambda_{i+1} v_{i+1} + \ldots + \lambda_n v_n) \\ &\quad + \ldots + \lambda_n v_n \\ \Leftrightarrow \quad v &= (1+\lambda_i)\lambda_1 v_1 + \ldots + (1+\lambda_i)\lambda_n v_n \end{aligned}$$

نو $(1+\lambda_i)\lambda_1, \ldots, (1+\lambda_i)\lambda_n$ يو نوی امکان دی چې v ترکيب کړو او د دې سره همدا اوس دوه امکانات لرو

موږ کړی شو چې لاندې دوه واقعيتونه هم ثبوت کړو:

جمله :

که يو وکتور v_i د کورنۍ $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ کرښيز د کورنۍ $(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n)$ څخه نه شي ترکيبېدی، نو د کورنۍ $(v_1, \ldots, v_n)$ وکتورونه يو بل ته کرښيز خپلواک دي.

ښوونه:

نيسو چې دا کرښيز بلواک دي. داپه دې معنا، چې د

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n = 0$$

لپاره لږ ت ر لږه د يوه λ_i لپاره $(1 \leq i \leq n)$ باور لري

$$\lambda_i \neq 0$$

دا په دې معنا چې

$$\begin{aligned} & \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_{i-1} v_{i-1} + \lambda_{i+1} v_{i+1} + \ldots + \lambda_n v_n = -\lambda_i v_i \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{\lambda_1}{-\lambda_i} v_1 + \ldots + \frac{\lambda_{i-1}}{-\lambda_i} v_{i-1} + \frac{\lambda_{i+1}}{-\lambda_i} v_{i+1} + \ldots + \frac{\lambda_n}{-\lambda_i} v_n = v_i \end{aligned}$$

نو کېدی شي، چې v_i له $(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n)$ کرښيزه ترکيب کړاي شي. دا نيونې ته تضاد دی. نو بايد وکتورونه کرښيز خپلواک وي.

په همدې توګه برعکس ی په ښت هم باور لري:

جمله:

که د کورنی $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ وکتورونه يو بل ته کرښيز خپلواک وي، نو کوم يو وکتور د بل ځخه کرښيز ترکيب کېدی نه شي.

ښوونه:

نيسو، چې دا شونی دی، يو وکتور v_i $(1 \leq i \leq n)$ کېدی شي کرښيز ترکيب کړاي شی. نو باور لري:

$$v_i = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_{i-1} v_{i-1} + \lambda_{i+1} v_{i+1} + \ldots + \lambda_n v_n$$

ګورو، چې $\lambda_i \neq 0$ دی، څکه چې $\lambda_i = -1$. او د کورنۍ وکتورونه به کرښيز بلواک وی. تضاد. بو دا ممکن نه ده، چې له دې وکتورونو ځخه کوم يو له بل ځخه کرښيز ترکيب کړي، څکه چې بيا به کرښيز خپلواکوالی زخمي شوی يا زيانمن شوی وي.

سپاين يا کرښيزه **Spann،((کرښيزه) رابنده ورشو)Abschluss، lineare Hülle**

په يوه $\mathbb{K}-$ - وکتورفضا کې د يوې کورنۍ $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ د ټولو کرښيز ترکيبونو ډېرۍ سپاين يا کرښيزه رابنده ورشو بلل کيږي

$span(v_1, \ldots, v_n)$

يا د وکتورونو د کورنۍ کرښيزه (که غواړۍ) سمڅه(**Hülle**)

روښانه دې وي: د يوه سپاين وکتورونه ناجبري کرښيز خپلواک نه دي.

جوړښتسيستم (توليدي سيستم) Erzeugendensystem

د وکتورکورنۍ $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ د وکتور فضا V توليدی سيستم بلل کيږی، که باور ولري

$$V = span(v_1, v_2, \ldots, v_n)$$

داپه دې معنا چې وکتورونه د وکتور فضا V مکمله يا پوره غزوي.

دلته کېدی شي، چې د وکتورونو کورنۍ کرښيز بلواک يا کرښيز خپلواک وی. دا يواځې بايد وکتور فضا و غزوي.

بنسټ Basis

د وکتورونو $(v_1, \dots, v_n)$ کورنۍ د وکتور V بنسټ بلل کیږي، که د کورنۍ یوګوني وکتورونه

- یو بل ته کربنیز خپلواک دي

- او که د وکتورونو کورنۍ ټول وکتور V وغزوي، یعنې د V یو تولیدي(جوړختیز) سیستم دی:

$$V = span(v_1, \dots, v_n)$$

او

$$\text{und} \quad \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$$

له دې سره یو تولیدي سیستم ټیک هلته یو بنسټ دی، چې د دې تولیدي سیستم وکتورونه یو بل ته کربنیز خپلواک دي.

د شتاینیڅ بدلونجمله Austauschsatz von Steinnitz

جمله:

په یوه د $\mathbb{K}-$ - وکتورونو کورنۍ(که فضا) V کې دې یو بنسټ

$$B := \{v_1, \dots, v_r\}$$

او یوه کربنیز ځپلواکه کورنې

$$(w_1, \dots, w_n)$$

ورکړ شوي وي.

دی $r \geq n$. سږی کړی شي د بنسټ n وکتورونه د nکربنیز خپلواکو کتورونو کورنیو سره بدل کړای شي، داسې چې نوی بنسټB^* بېرته کربنیز خپلواک دی او د وکتورفضا V_K بنسټ دی. د ایدنکس د ګڼې بدلون وروسته کېدی شي داسې ولیکو:

$$B^* := \{w_1, \ldots, w_n, v_{n+1}, \ldots, v_r\}$$

$$B^* := \{w_1, \ldots, w_n, v_{n+1}, \ldots, v_r\}$$

یا په ځانکړي حالت $n = r$:

$$B^* := \{w_1, \ldots, w_n\}$$

ښوونه:

ښوونه د بدلون لیما سره صورت نیسي. دا دبدلون لېما) وړه چمله) د د بنټ ځخه یو وکتور اخلي او یو بل ورزیاتوي:

بدلون جمله ګی **Austauschlemma**

یو $K-$ -وکتورفضا V دې د بنسټ

$$B := \{v_1, \ldots, v_r\}$$

سره ورکړ شوې وي او یوه w د

$$w = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_{k-1} v_{k-1} + \underline{\underline{\lambda_k v_k}} + \lambda_{k+1} v_{k+1} + \ldots + \lambda_r v_r \in V$$

د $\lambda_k \neq 0 \quad (\star)$ سره او

$$\lambda_k \neq 0.$$

نو

$$B' := \{v_1, \ldots, v_{k-1}, w, v_{k+1}, \ldots, v_r\}$$

بېرته يود V بنسټ دی .

يعني سرې کړی شي v_k د w وکتور سره بدل کړي. (دا نور $\lambda_1 \ldots \lambda_r$ بې له λ_k بايد حتمأ 0 نه وي.، مګر دوی کړی شي).

د بدلون جملې ښوونه**Beweis des Austauschlemmas** :

د ليکنې د ساده کونې لپاره نيسو، چې$k = 1$ دی. موږ ښايو چې

$$B' := \{w, v_2, \ldots, v_r\}$$

هم د V_K بنسټ دی.

- د بنسټ 3.2 ټول وکتورونه $v \in V$ د کرښيزترکيب په څېر ليکل کېدی شي يعني

$$v = \mu_1 v_1 + \ldots + \mu_r v_r \quad (\star\star)$$

داچې $\lambda_1 \neq 0$ دي، کړی شو په لاندې ډول يې بنهبدل کړو

$$\begin{aligned} & w = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_r v_r \qquad (von\ \star) \\ \Leftrightarrow \quad & \lambda_1 v_1 = w - \lambda_2 v_2 - \ldots - \lambda_r v_r \\ \Leftrightarrow \quad & v_1 = \frac{w}{\lambda_1} - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} v_2 - \ldots - \frac{\lambda_r}{\lambda_1} v_r \end{aligned}$$

- اوس کړی شو دا په $\star\star$ کې ځای په ځای کړو

$$\begin{aligned} v &= \mu_1 \left(\frac{w}{\lambda_1} - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} v_2 - \ldots - \frac{\lambda_r}{\lambda_1} v_r \right) + \ldots + \mu_r v_r \\ &= \mu_1 \frac{w}{\lambda_1} - \mu_1 \frac{\lambda_2}{\lambda_1} v_2 - \ldots - \mu_1 \frac{\lambda_r}{\lambda_1} v_r + \ldots + \mu_r v_r \\ &= \frac{\mu_1}{\lambda_1} w + \left(\mu_2 - \mu_1 \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right) v_2 + \left(\mu_3 - \mu_1 \frac{\lambda_3}{\lambda_1} \right) v_3 + \ldots + \left(\mu_r - \mu_1 \frac{\lambda_r}{\lambda_1} \right) v_r \end{aligned}$$

له دې لاس ته راځي، چې نوی بنسټ لږ تر لږه یو تولیدي سیستم دی.

- اوس پاتې دادی چې کرښیز خپلواکوالی و ښایو

$$\mu w + \mu_2 v_2 + \ldots + \mu_r v_r = 0$$

د $\star$ ځا ي په ځای کونه:

$$\begin{aligned} & \mu(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_r v_r) + \mu_2 v_2 + \ldots + \mu_r v_r = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \mu\lambda_1 v_1 + (\mu\lambda_2 + \mu_2) v_2 + (\mu\lambda_3 + \mu_3) v_3 + \ldots + (\mu\lambda_r + \mu_r) v_r = 0 \end{aligned}$$

نو $\mu\lambda_1 = \mu\lambda_2 + \mu_2 = \mu\lambda_3 + \mu_3 = \ldots = \mu\lambda_r + \mu_r = 0$ ، ځکه چې B کرښیزخپلواکه وه ($\mu_2 = \mu_3 = \ldots = \mu_r = 0$) او $\mu = 0$ ، ځکه چې $\lambda_1 \neq 0$.

له دې ځخه کرښیز خپلواکوالی لاس ته راځي

د بدلون جملې ښوونه:

له دې وروستهچې ومو ښوول، چې سرې یو وکتور v_k له بنسټ ځخه را اخستی شي او د وکتور wسره یې بدلولی شي، که دا اړونده $\lambda_k \neq 0$ وي(کړی شي، چې د نمرې یا ګڼې بدلون سره اِه تیک ځای ته راوړل شي)، باید وښایو، چې د زاړه بنسټ لپاره تل داسې یوه $\lambda_k \neq 0$ شتون لري، داسې چې موږ وکتورونه پرلپسې سره بدلولی شو:

- که صفر وکتورونه سره بدل کړو، نو ښوونې ته نه اړکیږو. موږ اړیین نه یو چې کوم وکتور پیدا کړو، چې له هغو سره بنسټ وکتور بدل کړو. دا زموږ د ایندکشن پیل دی.

- زموږ د ایندکشن نیونه ده، چې k وکتورونه مو سره بدل کړي دي او بېرته مو یو بنسټ لاس ته راوړی دی:

$$B' = \{w_1, \ldots, w_k, v_{k+1}, \ldots, v_r\}$$

- د ایندکشن پای :

که موږ وکتور w_{k+1} بدل کړو، نو باید یو λ_i د $k+1 \leq i \leq r$ سره پیداکړو، د کوم لپاره چې $\lambda_i \neq 0$ باور لري. باور لري :

$$w_{k+1} = \lambda_1 w_1 + \ldots + \lambda_k w_k + \underbrace{\lambda_{k+1} v_{k+1} + \ldots + \lambda_r v_r}_{\text{mindestens ein } \lambda_i \neq 0}$$

دا پورته لږ تر لږه یوه $\lambda_i \neq 0$.

دا چې کرښیزخپلواکه کورنۍ $(w_1, \ldots, w_k, w_{k+1}, \ldots)$ کرښیز خپلواکه وه، اجازه نه شته چې $\lambda_1 = \ldots = \lambda_k \neq 0$ وي، ځکه چې پرته له دې کرښیز خپلواکوالی زحمي شوی وي.

داچې w_{k+1} هم صفر وکتور نه دی، ځکه چې بیا به کرښیز خپلواکوالی زخمي شوی وي، نو یو λ_i ($k+1 \leq i \leq r$) شتون لري د $\lambda_i = 0$ سره.

د ښوونې ځخه لاس ته راوړنه

- که یو $K-$ - وکتورفضا V یو پای بنسټ ولري، نو د V هر بنسټ پای دی.
- د یوې وکتورفصا هر دوه بنسټونه برابر اوږدوالی لري.
- بنسټ پوره کېدنه:

په یوه پای تولېدکېدونکي وکتور فضا Vکې دې کربنیز خپلواک وکتورونه $w_1, w_2, \ldots, w_n$ ورکړل شوي وي. نو کېدی شي سرې پیدا کړي، داسې چې

$$B := \{w_1, w_2, \ldots, w_n, w_{n+1}, \ldots, w_r\}$$

د V یو بنسټ وي.

- $v_i, \ldots, v_n$ دې د کربنیز خپلواک وکتورونو ډېرئ وي، چې یوه وکتور فضا غزوي، نو د $v_i, \ldots, v_{n+1}$ ډېرئ په هر حالت کربنیز بلواک ده.

دا په دې معنا چې بل وکتور نه شي پیداکېدی چې و $v_i, \ldots, v_n$ ته کربنیز خپلواک وي.

- د بنسټ بدلید جمله:

$v_i, \ldots, v_n$ دې کربنیز خپلواک وکتورونه وي، چې یوه وکتور فضا غزوي(دا په دې معنا چې دا یو بنسټ دی)، نو $w_i, \ldots, w_n$ کربنیز خپلواک وکتورونه ، چې د وکتورونو$v_i, \ldots, v_n$ د کربنز ترکیب ځخه جوړیدی شي، برابره وکتورفضا غزوي.

بعد یا پراخېدونی(Dimension)

که Vیوه $K-$ - وکتور فضا وي، نو تعریفوو

$dim_k V = \begin{cases} \infty \\ r \end{cases}$	که V پای بنسټ ونه ري، کهV د r اوږدوالي بنسټ ولري

د پراخېدوني یا بعد جمله:

وي دې $f : V \to W$ (V, W دلته $\mathbb{K}-$ -وکتورفضاوې دي) یو کرښیزبلواک. نو د بعد یاپراخېدوني جمله باور لري:

$$dim\ \ V = dim\ \ Bild(f) + dim\ \ Ker(f)$$

Bildځیره او Ker(Kern) زړی یا هسته

ښوونه :

یادونه:

$dimV$: دV د بنسټ وکتورونو ګڼون یا تعداد.

$dim\ \ Bild(f)$: د وکتورونو ګڼون یا تعداد د V د لاندې وکتورفضا Bild (f) کې.

$dim\ \ Ker(f)$: د f په زړي(هسته) کې د وکتورونو ګڼون یا تعداد. دا بېرته د V لاندې وکتورفضا ده.

لومړی: دا چې زړی Ker (f) د V لاندېوکتورفضا ده، په هر حالت لرو

$$dimV \geq dim\ \ Ker(f).$$

د $v_1, v_2, \ldots, v_n$ د زړي د بنسټونو وکتورونه یو بل ته کرښیز خپلواک دي.

د بنسټتکیلېدوجملې په بنسټ کېدی شي دې بنسټ ته کرښیز خپلواک وکتورنه V ته ورزیات کړي او دا بنسټ په دې توګه د V یوه بنسټ ته پوره یا تکمیل کړي:

$$B_V := \{v_1, v_2, \ldots, v_n, v_{n+1}, \ldots v_k\}.$$

لومړی: موږ اوس پريږدو چې تابع f د وکتورفضا V په بنسټ وځغلي. نو لاس ته راوړو:

$$Bild(f) = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(v_i)}_{=0} + \sum_{i=n+1}^{k} \lambda_i f(v_i) = \sum_{i=n+1}^{k} \lambda_i f(v_i)$$

د زړي بنسټوکتورونه په 0 تنظيميږي يا ځبره کيږي . له دې امله د ځبرې يا عکس د بنسټوکتورونو ګڼون يا تعداد او له دې سره د عکس پرخېدونی يا بعد دی.

$$\begin{aligned} & dim\ \ Bild = dim\ V - dim\ \ Kern \\ \Leftrightarrow \quad & dim\ V = dim\ \ Bild + dim\ \ Kern \qquad !!! \end{aligned}$$

لاندې وکتور فضا

تعريف (پېژند):

د وکتورفضا V په $\mathbb{K}$ باندې يو لاندې وکتورفضا Uمنځ ته راځي، که سرې د وکتورفضا ټاکلي توکي لرې پرېږدي(لنډ:پرېږدي). له دې سره بايد د لاندېوکتورفضا پاتې توکي دا لاندې ځويونه پوره کړی:

- $U \neq \emptyset$

- د ټول $x, y \in U$ لپاره $x + y \in U$ باور لري او د ټولو $x \in U$ ، $\lambda \in \mathbb{K}$ لپاره $\lambda x \in U$ باور لري .

خويونه:

- له دې سره يو وکتورفضا لږترلږه دوه لاندې وکتورفضاوې لري. يو ځل دا اکسيومونه پخپله په وکتورفضا کې ورکړل شوي، داسې چې داوکتور فضا و خپل ځان ته لاندېوکتورفضا ده. له بلې خوا هروکتورفضا صفروکتور لري. دا صفر وکتور ځانله هم يوه وکتورفضا ده.

- $U_1 \cap U_2$ لاندې فضاو ده، که U1 او U2 لاندې فضاوې وي.

- $V_{\mathbf{K}}$ دې يوه وکتورفضا وي او $v_1, \ldots, v_n \in V_{\mathbf{K}}$. هر کرښيز ترکيب $L(v_1, \ldots, v_n)$ يوه لاندېفضا ده.

د لاندې فضاو لپاره د بعد يا پراخيدوني فرمول

$$dim(U_1 \cap U_2) + dim(U_1 + U_2) = dim(U_1) + dim(U_2)$$

ښوونه د وکتورفضاو د بنسټ د وکتورونو د ګڼون يا تعداد باندې مخ ته بيول کيږي. د وکتورفضا $U_1 \cap U_2$ بنسټ يو ځل وکتورفضا U_1 او يو ځل وکتورفضا U_2 ته وړپوره يا تکميل کيږي. د وکتورفضا $U_1 + U_2$ بنسټ[3.3] د غوځې بنسټ دی جمعه يې دا نور د U_1 او U_2 وکتورونه

فنکشنونه يا توابع ، په ځانګړې توګه کرښيزې-

تعريف: X او Y ډېرې يا ستونه دي. يو تابع f يو ترتيب يا تنظيم دی، د کومو له لارې چې هرتوکی $x \in X$ په ټيم يوه توکي $f(x) = y \in Y$ تنظيم شي

$f : X \longrightarrow Y$

- دا چې دا توکی ځنګه ترتيبيږي دا پروا نه لري. لومی په کربنيزو توابعو کې بنديزونه راړل کيږي، دا چې تابع بايد کربنيزهوي.

- د Y په توکي کېدی شي د X ډېر توکي وښايي ياپه ډېرو توکو ترتيب يا تنظيم شي. مګر برعکس ممکن نه دی. دا په Y کې توکی، کوم چې د X توکی له ښودل کيږي يا په کوم چې د X توکی تنظيم شي، بايد تل يواځنی ټاکلی وي.

د فنکشنونو يا څيرونو(توابعو) خويونه Eigenschaften von Abbildungen

په باندې فنکشن(- تابع) Surjektiv

$f : V \to W$ دې يوه تابع وي. تابع په باندې ده، چه باور ولري:

$\forall \ w \in W \ \exists v \in V$ ، داسې چې $f(v) = w$.

په کې (فنکشن (څيرونه يا تابع)) Injektiv

$f : V \to W$ دې يو تابع وي. تابع په باندې دی، که باور ولري:

$\forall x, y \in V$

$$f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y \qquad x \neq y \Leftrightarrow f(x) \neq f(y)$$

په (په باندې او په کې فنکشن يا -- تابع) Bijektiv

په توابع هم په باندې تابع دي او هم په کې تابع (سوزجکتيو، اينجکتيو) دي يخد په باندېولی اوپهکې والی پوره کوي:

$\forall\, w \in W \;\; \exists!\; v \in V$ ، داسې چې باور لري $f(v) = w$. (هر $w \in W$ تیک یو
پخوا یا تر مخځېره $v \in V$ لري)

کربنيز فنکشنونه يا توابع Lineare Abbildung

تعريف(پيژند)

يو تابع $f : V \to W$ ، د کوم سره چې V او W وکتورفضاوې دي په همغه بدن K ،
کربنيز بلل کيږي(يا د وکتورونو هومومورفيزم)، که $\forall\; x, y \in V$ او $r \in K$ لپاره
باور ولري:

$$L1: \quad f(x+y) = f(x) + f(y)$$
$$L2: \quad r \cdot f(x) = f(r \cdot x)$$

سرې کړی شي دواړهاکسيومونه په باندې تګه سره رايوځای کړي:

$$L: f(r \cdot x + y) = r \cdot f(x) + f(y)$$

زړی(هسته) او عکس يا ځېره Bild und Kern

د يوه تابع $f : V \longrightarrow W$ ځېره يا عکس په لاندې توګه تعريف دی

د لږ ترلږه يوه لپاره.

$$Img(f) := \{w \in W \mid f(v) = w \text{ für mindestens ein } v \in V\}$$

د یوه تابع $f : V \longrightarrow W$ زړی په لاندې توګه تعریف دی

$$Kern(f) := \{v \in V | f(v) = 0\}$$

خانګړي کرښيز فنکشنونه (توابع)

یو کرښيز تابع $F : V \to W$

یو مونومورفيزم Monomorphismus بلل کيږي، که F اينجکتيو وي.

ايپيمورفيزم Epimorphismus ، که Fسورجکتيو وي،

ايزومورفيزم **Isomorphismus** ،که F بيجکتيو وي،

ايندومورفيزم**Endomorphismus** ، که $V = W$ او

اوتومورفيزم**Automorphismus** ، که $V = W$ اوF بيجکتيو وي.

د په باندې، په کې ، په (باندې او کې) فنکشنونو يا توابعو لپاره ښوونه

X→X

وې دی $f : X \to X$. لاندې ويناوې برابر ارزښته يا ايکويوالنت دي:

(i) f په کې دی injektiv

(ii) f ist surjektivپه باندې دی

(iii) f ist bijektivپه دی

دا چې له (iii) څخه (i) او(ii) لاس ته راځي او څخه لاس ته راځي روښانه ده.

د ښوولو دی چې لومړی. (ii)→(i) او دویم. (i)→(ii)

لومړی: اینجکتیو له دې لاس ته راځي سورجکتیو. دا داسط ښایو، که په کې وښایو، چې،، نه سورجکتیو له دې لاس ته راځي نه اینجکتیو،،. د نور کلمو سره:: تابع سورجکتیو ده، که دا اینجکتیو وي، ځکه چې که سورجکتیو نه وي، نو ایجکتیو به هم نه شوی کېدی:

- په باندې یا سورجکتیو په دې معنا ده،چې د ټولو $x \in X$ لپاره په وتونډېرۍ کې یو $x' \in X$ شتون لري، داسې چې باور $f(x') = x$ لري . که یو تابع په باندې نه وي، نو یو $x \in X$ په کوخه ډېرۍ کې له مخه ځېره ونه لري(یعنې چې دا یې ځېرهوي).
نو $f(X) \neq X$ باور لري .

وي دې $X := \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ یعنې $|X| = n$ ، نو $|f(X)| = m < n$ دی[4.1]. نو نو اوس دا **Schubfachprinzip** von Dirichlet (د دیریښلیت(شمیر پوه) د میزکورونو(لکه چې د میز خانه یې پول)، خو داسې چې ډیطر کورګړي ولري(ژباړی) اصول) وایي، چې که n شیان په mکورونو(خانو) کې کېږدو او $n > m$ وي، نو لږ ترلږه په یوه کور کې له یوه زیات شیان باید واچول شي.

د دې لاس ته راوړنې سره اینجکتیووالی نه دی ورکړ شوی، ځکه چې $f(x) = f(x')$ مګر $x \neq x'$ (ټیک هلته چې په یوه کور کې دوه توکي پراته دي).

دویم : سورجکتیو له دې لاس ته راځي اینجکتیو. موږ ښایو چې که تابع اینجکتیو نه وي، نو سورجکتیو هم نه ده.

1. f په کې نه ده، نو $f(x) = f(x')$ شتون لري د $x \neq x'$ سره . نو $f(X) \neq X$ دی او دا چې لږ تر لږه په $|f(X)| < |X|$ کې یو توکی کم دی لږ تر لږه $|f(X)| = n - 1$ کېدی شي وي ، داسې چې $|f(X)| < |X|$ او له دې

سره تابع په باندې نه ده، داسې چې په موخه ډېرۍ کې يو توکی $x \in X$ شتون لري د کوم لپاره چې په وتونډېرۍ کې $x' \in X$ شتون نه لري.

F په کې(اينجکتيو) ⇔ Ker (F) = 0

وي دې $F : V \to W$ او $x, v_1, v_2, n \in V$ او $0 \in W$

له دې لاس ته راځي:

دا چې F په کې يا اينجکتيو دی نو هر شکل يا ځېره يو پخوا يا ترمخ شکل لري.

د 0 پخواشکل يا ترمخ شکل يا ځېره دې n وي. $\Longleftrightarrow$

$$Ker(F) = \{n\} \Rightarrow F(n) = 0$$

دا چې کرښيز دی بايد باور ولري:

$$\begin{aligned} & F(x) + F(n) = F(x+n) \\ \Leftrightarrow\quad & F(x) = F(x+n) - F(n) \\ \Leftrightarrow\quad & F(x) = F(x+n) - 0 \\ \Leftrightarrow\quad & F(x) = F(x+n) \\ \Rightarrow\quad & n = 0 \end{aligned}$$

نو $Ker(F) = 0$

له دې لاس ته راځي ($\Leftarrow$) :

$$Ker(F) \Leftrightarrow \{v \in V | F(v) = 0\}$$

د په باندېوالي خوونه: دا چې تابع کرښيزه دی با ور لري:

د په کې والي ښوونه:

$$\begin{aligned} & F(v_1) = F(v_2) \\ \Leftrightarrow\quad & F(v_1) - F(v_2) = 0 \\ \Leftrightarrow\quad & F(v_1 - v_2) = 0 \\ Da\ \ Ker(F) = 0 \ \Rightarrow\quad & F(v_1 - v_2) = F(0) \end{aligned}$$

له دې سره دی $v_1 = v_2$.

L په کې ⇔ کرښیزخپلواک وکتورونه په کرښیز خپلواک وکتورونو څېره کیږي

L په کې ⇔ کرښیزخپلواک L کرښیز خپلواک

له دې لاس ته راځي(:⇐) :

ښايو: $L(v) = L(w) \Rightarrow \ldots \Rightarrow v = w$

وي دې $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ بنسټ، $v, w \in V$ او بنسټ او

$L(v_1), \ldots, L(v_i), \ldots, L(v_n)$ کرښیز خپلواک

$$\begin{aligned} & L(v) = L(w) \\ \Leftrightarrow \quad & L(\sum \lambda_i v_i) = L(\sum \mu_i v_i) \\ \Leftrightarrow \quad & \sum \lambda_i L(v_i) = \sum \mu_i L(v_i) \\ \Rightarrow \quad & \sum (\lambda_i - \mu_i) L(v_i) = 0 \ \ (v \end{aligned}$$

(د کرښیز کمبینیشن د یواځیوالي له امله)

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad & \sum (\lambda_i - \mu_i) v_i = 0 \\ \Rightarrow \quad & v = w \end{aligned}$$

په کې والی ښايي

له دې لاس ته راځي یا

⇒:

ښايو: $L(\sum \lambda_i v_i) = 0$

$$\begin{aligned} & \sum \lambda_i v_i = \sum \mu_i v_i \\ \Leftrightarrow \quad & \sum \lambda_i L(v_i) = \sum \mu_i L(v_i) \end{aligned}$$

د ا ینجکتیویتي له امله

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \quad \sum(\lambda_i - \mu_i)L(v_i) = 0 \\ &\Rightarrow \quad \sum(\lambda_i - \mu_i) = 0 \\ &\Rightarrow \quad L(\sum \lambda_i v_i) = 0 \end{aligned}$$

د ارزښتوني فنکشنونه یا توابع یا څېروني

موږ د بېلګې په توګه درې پولینومونه P_1, P_2, P_3 لرو د لاندې سره

$$\begin{aligned} P_1 &= (x-1)(x-2)(x-4) \\ P_2 &= (x-3)(x-5)(x-1) \\ P_3 &= (x-4)(x-2)(x-3) \end{aligned}$$

موږ اوس کړی شو یو د ارزښتوني تابع یا څېرونه تعریف کړو(a ځای دی په کوم کې چې ارزونه کیږی)

$$W_a(P) : P \mapsto P(a)$$

د ارزښتوني پولینوم کرښیز دی څکه چې لاندې $\forall \ P, Q \in \mathbb{Q}[X]$ او $\lambda \in K$ [4.2] باور لري :

$$W_a(\lambda P + Q) = \lambda W_a(P) + W_a(Q)$$

په دې توګه د ارزښتوني تابع سره کرښیز خپلواک وکتورونه په کرښیز خپلواک وکتورونو ځېره کیږي ای ماپینګmapping جوړوي، دا په دې معنا چې

P_1, P_2, P_3 کرښیز خپلواک دي، که $W_a(P_1), W_a(P_2), W_a(P_3)$ کرښیز خپلواک وي.

موږ د

$$\lambda_1 W_a(P_1) + \lambda_2 W_a(P_2)) + \lambda_3 W_a(P_3) = 0$$

لپاره ښایو

: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$:

په دې معنا چې P د 1 په ځای کې ارزښتول کیږي، یعني دپولینوم ارزښت $P(1)$ تاکل کیږي، که 1 ځای په ځای کړو :

	$P(1)$	$P(2)$	$P(3)$	
P_1	$=0$	$=0$	$\neq 0$	$\Rightarrow \lambda_3 = 0$
P_2	$=0$	$\neq 0$	$=0$	$\Rightarrow \lambda_2 = 0$
P_3	$\neq 0$	$=0$	$=0$	$\Rightarrow \lambda_1 = 0$

داچې درې وکتورونه، چې د ارزښتونې له لارې جوړیږي یا منځ ته راځي یا تولیدیږي، کرښیز خپلواکدي، دادرې وکتورونه P_1, P_2, P_3 هم کرښیز خپلواک دی.

ایزومورفیزمونه Isomorphismen

V او W دې $\mathbb{K}-$ - وکتورفضاوې وي . V د $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ وکتور فضا بنسټ وي. تابع $f: V \to W$ ټیک هلته ایزومورفیزم [4.3], ده، که

$(f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_n))$

د W یو بنسټ وي. دا جمله په څټ یا برعکس هم باور لري.

V دې یو $\mathbb{K}-$ -وکتروفضا او $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ دې بنسټ وي.

موړ ایزمورفیزم

$\mathbb{K}^n \longrightarrow V$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \longrightarrow \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n$$

کانونیکي بنسټ- ایزومورفیزم بولو. د اړتیا په حالت کې دا په $\Phi_{(v_1, v_2, v_n)}$ توګه هم ښایو. موږ دلته ګورو چې د کانونیکي بنسټ-ایزومورفیزم ځخه کار اخستلای شو، چې د یوونوکتورونو (واحد-) سره (کانونیکي بنسټ) او د وکتروفضا V د بنسټوکتورونو ځخه یو ماتریکی جوړ کړو، چې د دواړو وکتورفضاو ترمنځ ترنفورمي کیږي.

موږ دا داسې کړو چې د V د بنسټ وکتورونه یو په بل پسې په ماتریکس کې ولیکو.

ماتریکسونه Matrizen

یو ماتریکس $Mat(m \times n; K)$ یو د m لیکو او n درځونو(متو، ستنو) نظم دی د K بدن (پټي، ورشو، ساحه) ځخه. د یوه ماتریکس د یوګونو توکو د لیکي – او – متې کېدی شي د ایندکس لیکدودIndizeschreibweise سره تیک کره شي:

a_{ij}

دلتهi لیکه او j مته په کوته کوي.

کرښیزې فنکشنونه (توابع) د ماتریکسونو په څېر

هر کرښیزه تابع کېدی شي په تیک یوه ماتریکش تنظیم شي

د یوه ماتریکس رانګ Rang

د یوه ماتریکس رانګ د کرښیز خبلواکو لیکو/ یا د همغې د متو ګنون یا تعداد دی.

د متو رانګ = د لیکو راګ Zeilenrang = Spaltenrang

جمله :

د هر $m \times n$ ماتریکی لپاره باور لري:

د لیکوراګ=د متو رانګ یا رانګ

ښوونه:

ورکړ شوی یو $(m \times n)$ ماتریکس

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

موږ د $R_1, \ldots, R_m$ سره لیکې-وکتورونهښایو:

$$\begin{array}{rl} R_1 = & (a_{11}, \quad a_{12}, \quad \cdots, \quad a_{1n}) \\ R_2 = & (a_{21}, \quad a_{22}, \quad \cdots, \quad a_{2n}) \\ & \qquad \cdots \\ R_m = & (a_{m1}, \quad a_{m2}, \quad \cdots, \quad a_{mn}) \end{array}$$

کهr د لیکې رانک وي، نو موږ r کرښیز خپلواک وکتورونه لرو، کوم چې د دې لپاره بنسټ جوړوي:

$$S_1 = (b_{11}, b_{12}, \cdots, b_{1n}), S_2 = (b_{21}, b_{22}, \cdots, b_{2n}), \ldots, S_r = (b_{m1}, b_{m2}, \cdots, b_{mn})$$

هر ليکه وکتور R_i د لاندې بنسټ وکتورونو کرښيز ترکيب دی:

$$\begin{aligned} R_1 &= k_{11}S_1 + k_{12}S_2 + \ldots + k_{1r}S_r \\ R_2 &= k_{21}S_1 + k_{22}S_2 + \ldots + k_{2r}S_r \\ &\cdots \\ R_m &= k_{m1}S_1 + k_{m2}S_2 + \ldots + k_{mr}S_r \end{aligned}$$

د دې لپاره چې د ماتريکس هر توکی a_{ji} لاس ته راوړو، بايد ټول ضريبونه، د ليکې وکتور ونه د ليکېفضاځخه وکتوروفضا انځور کړ، د بنسټ وکتور د اړونده توکي سره ضرب کړو. دا د a_{11} لپاره د بېلګې په توګه دی

$$a_{11} = k_{11} \cdot b_{11} + k_{12} \cdot b_{21} + \ldots + k_{1r} \cdot b_{r2}$$

له دې سره a د ټولو i لپاره د ليکې ډول دی.

$$\begin{aligned} a_{1i} &= k_{11}b_{1i} + k_{12}b_{2i} + \ldots + k_{1r}b_{ri} \\ a_{2i} &= k_{21}b_{1i} + k_{22}b_{2i} + \ldots + k_{2r}b_{ri} \\ &\cdots \\ a_{mi} &= k_{m1}b_{1i} + k_{m2}b_{2i} + \ldots + k_{mr}b_{ri} \end{aligned}$$

موږ کړی شو اوس هر د متې وکتور په لاندې توګه وليکو:

$$\begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix} = b_{1i} \cdot \begin{pmatrix} k_{11} \\ k_{21} \\ \vdots \\ k_{m1} \end{pmatrix} + b_{2i} \cdot \begin{pmatrix} k_{12} \\ k_{22} \\ \vdots \\ k_{m2} \end{pmatrix} + \cdots + b_{ri} \cdot \begin{pmatrix} k_{1r} \\ k_{2r} \\ \vdots \\ k_{mr} \end{pmatrix}.$$

له دې امله دا وکتورونه د r وکتورونو کرښيز ترکيب دی:

$$\begin{pmatrix} k_{11} \\ k_{21} \\ \vdots \\ k_{m1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k_{12} \\ k_{22} \\ \vdots \\ k_{m2} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} k_{1r} \\ k_{2r} \\ \vdots \\ k_{mr} \end{pmatrix}$$

اړیین نهده چې داوکتورونه دې یو بل تهکرښیز خپلواک وي. مګر په هر حالت باید هغه خوراجګ ګڼ(عدد) پهr رابند یا محدود وي، چې له کومهامله دی

د متې(درز یا ستنې یا ولاړې لیکې یا کیلې) رانګ Spaltenrang $\leq r$

سرې همداسې د تراسپونی شوې ماتریکس سره هم مخ ته څي او په دې توګه ،، Zeilenrang د لیکې رانګ ،، لاس ته راوړي. له دې سره دی: $\leq r$

د لیکې رانګ = دمتې رانګ

په څټ- یا معکوس ماتریک Inverse Matrix

یو مربع یا څلوریزه $n \times n$ ماتریکسA یو معکوس ماتریکس A^{-1} لري،، که یو لهدې لاندې برابر ارزښته اړیکو څخه یو پوره وي.

- د متو (لیکو) وکتورونه کرښیز خپلواک دي.
- $rang(A) = n$
- $det(A) \neq 0$
- له دې سره اړوند کرښیزه تابع f_A یو ایزومورفیزم دی.

څرخون- او هدارون-ماتریکسونه(--- د انعکاسونې --)

په $\mathbb{R}^2$کې څرخون یا څرخونه:

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

په $\mathbb{R}^2$ کې هندارونه:

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$$

دیترمینانتونه Determinanten

دیترمینانتونه دځه لپاره دي؟

دیترمینانتونه په $\mathbb{R}^2$ کې د غبرګ اړخیز(موازی الاضلاع) په $\mathbb{R}^2$کې د یوه شپات(کشکول شوی کوادر یا مکعب) او په $\mathbb{R}^n$ کې د یوه غبرګ خوایز سطحه ورکوي.
له دې سره روښانهکېدی شي،چې ولې یو دیترمینات صفر دی، که وکتورونه یو بل ته کرښیز بلواک وي. که په کې دوه وکتورونهورکړ شوې وي او دا یو بل ته کرښیز بلواک وي، نو دا یو غبرګاړخیز نه شي غزولی او له دې امله مساحت صفر دی. له دې سره هر مربع – یا څلوری-ماتریکس یوه ګڼ یا عدد سره تنظیمیږي.

تعریف(پیژند) Definition

دیترمینانت هر ماتریکس $M(n \times n, \mathbb{K})$ یو عدد $\mathbb{K}$ باندې تنظیموي:

$$\det : M(n \times n, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}$$

فنکشن (تابع) لاندې خویونه لري:

لومړی: دیترمینانت په هره لیکه کې کرښیزه ده. داپه دې معنا، چې که سرې له ماتریکس M یوه کرښه لرې بریږدي یا پرېږدي او د یو کتور x سره بدله کړي، چې بیا دا تابع نسبت دې وکتور ته ځان کرښیز نیسي.

دویم : که د ماتریکس د لیکې رانک نسبت د لیکې تعداد n ته کوچنی وي، نو $\det A = 0$ ده.

دريم : د يوونماتريکس يا واحدماتريکس ډيترمينانت 1 دی:

$$\det(E) = 1$$

ټيک يوه تابع شته، چې دا خويونه پوره کوي. دا بايد وښايو، داسې چې موږ يواځنوالی او شتونوالی وښايو. دا هر شرط لپاره بايد په يواځې تګهوښول شي.

مرشتندوي جمله:Hilfssätze :

د ښوونې لپاره لومړی لاندې مرستندوی جملې ښايو:

لومړی: که په ماتريکس Aکې دوه ليکې بدلې شي، نو ماتريکس A' لاس ته راځي، نو باور لري.

$$\det A' = -\det A$$

.

دويم : که د يوعماتريکس ليکه د يوه سکالارλ سره ضرب شي نو ماتريکس A' لاس ته راځي او له دې سره باور لري:

$$\det A' = \lambda \det A$$

دريم : که په يوه ماتريکس A کې يوه ليکه د ماتريکس د بلې ليکې سره جمعه (ورزياته) شي نو ماتريکس A' لاس ته راځي، نوله دې څخه ديترمينان بې اغيزه پاتې کيږي: $\det A = \det A'$

د دې مرستندوی او يواځنوالی او شتون جملو ښوونه دې په Jänichکې وکتل شي.

د ديترمينانتو ساده شمېرنه

لاندې برحه

- 2×2
- 3×3

د لاپلاس د وديزېني جمله Laplace Entwicklungssatz

د لاپلاس د وديزيني جمله مرسته کوي، کد له 3×3 ماتريکسونو څخه لوی ديترميناتونه ټاکوا[6.1] .

سرې کړی شي ديترمينانت ته وده ورکړای شي، که ماتريکس تل په کوچنيو ديترمينانتونو و وېشي. دلته لاندې ماتريکس A_{ij} هغه ماتريکس ده، چې د ماتريکس A د $i-$-مې او $j-$-مې ليکي همداسې متې د لرې کولو څخه لاس ته راځي. سرې کړی شي چې وديزيېنه سرته ورسوي يا د ليکي له لارې

$$det\ A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot A_{ij}$$

يا د متوو پسې

$$det\ A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot A_{ij}$$

د ضريب يا خلووني $(-1)^{i+j}$ په مرسته يو د سترنجتختې ډوله مخ يا موسترمنځ ته راځي. له دې سره د ديترمينانت مخنخبنه ټاکل کيږي:

+	−	+	−	+
−	+	−	+	−
+	−	+	−	+
−	+	−	+	−
+	−	+	−	+

بېلګه:

$det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$	وديزيينه پورته ليکه پسې پورته ليکه => پە لاندې ديترمينات کې د ليکې په ځير له منځه وړل کيږي =

$$+a_{11} \cdot \underbrace{det \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}}_{1.Spalte\ \ ausgeblendet} \quad -a_{12} \cdot \underbrace{det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}}_{2.Spalte\ \ ausgeblendet}$$

۱ -م. درځ لرې کړي　　　　۲ -م درځ لرې کړي

$$+a_{13} \cdot \underbrace{det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{pmatrix}}_{3.Spalte\ \ ausgeblendet} \quad -a_{14} \cdot \underbrace{det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix}}_{4.Spalte\ \ ausgeblendet} =$$

۳ ــم درځ لرې کړی　　　　۴ ــم درځ لرې کړي

د ديترمينانتونو ساده ټاکنه

- که يوه ليکه يا متِه کرښيز بلواک وي، نو باور لري

$$det\ \ A = 0$$

دا د لاندې سره په برابره معنا ده(د ليکو تعداد همداسې د متو تعداد)

$$rang\ A < n$$

- که څوک يوه متِه د بلې سره بدله کړي يا يوه ليکه د بلې سره بدله کړي،

مخنخښه تغیر خوري(دا چې د دیترمینانت تابع الترنیري(بدیلي) **alternierend** ده)

$$det\ A_{ij} = -det\ A_{ji}$$

- کهد ماتریکس یوه لیکه د سکالار سره ضرب شي،نوباید تنها دیترمینانت هم د همغه سکالار سرهضرب شي:

$$det \begin{pmatrix} & \vdots & \\ \lambda \cdots \lambda & \lambda a & \lambda \cdots \lambda \\ & \vdots & \end{pmatrix} = \lambda\ det \begin{pmatrix} & \vdots & \\ \cdots & a & \cdots \\ & \vdots & \end{pmatrix}$$

په همدې توګه که دیترمینانت دλ^n سره هم ضربې شي، د کوم سره چې n د لیکو تعداد دی، داسې دهلکه که یوه ماتریکس ټوله له λ سره ضرب شي.

$$det(\lambda \cdot A) = \lambda^n \cdot det\ A$$

- د یوونماتریکس (واحد-) دیترمینانت 1 ده:

$$det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

- د یوه درېګوډي ماتریکس دیترمینانت د هغه د دوه کونجتړې ضرب دی:

$$det \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} = \lambda_1 \cdot \ \cdots \ \cdot \lambda_n$$

- ماتریکس څخه $n \times n$ داسې یوه درېګویزه ماتریکس کړی شو د هر په خوښه د ساده لیکو عملیو څخه د ګاوسقانون له مخې لاس ته راوړو. موږ باید د دیترمینانت په ټاکلو یو اخې دې ته پام وکړو، چې لیکه بدلون دیترمینانت ته له

ڤانسره یوسو. نو که r د لیکو د بدلون تعدادوي، چې موږ سر ته رسولې چې درېګوډیزه بڼه لاس ته راوړو، باور ولري::

$$\det A' = (-1)^r \cdot a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ \ldots \ \cdot a_{nn}$$

- که څوک یوه ماتریکس ترنسپوني کړي(داپه دې معنا چې د لیک څخه متې جوړوي او له متو څخه لیکې او یا په مربع یا څلوریزه ماتریکسونوکې دا په دوهکونجتړې(قطر) هنداره کوي) په دې حالت کې د ترادپوني ماتریکس دیترمینانت ارزښه د نه ترانپوني شوې ماتریکس د دیترمینانت سره برابر دی:

$$\det \ A = \det \ A^T$$

کوچنی بام: په ضرب کې دې پامدې وي. باور لري

$$(AB)^t = B^t A^t$$

- دیترمینانت- ضرب-جمله

$$\det(A \cdot B) = \det \ A \cdot \det \ B$$

.... ښوونه یې دلته ورزیاته کړی.

د ایندومورفیزم دیترمینانتونه

دا چې موږ هر ایندومورفیزم f د مربع – یا څلوری-ماتریکس سره انځورولی شو[6.2]، له دې سرهکړی شو چې د ایندومورفیزم دیترمینانت هم تعریف کړو:

$$\det f := detA_f \in \mathbb{K}$$

اوس داپوښتنه رامنځ ته کوو، چې ایا د V د مختلفو بنسټونو لپاره دیترمینانتونه مختلف دي. دا کېدی شي وښوول شي چې دیترمینانت د بنسټ د ټاکنو یا انتخاب څخه خپلواک

دي.   له دې سره لهدې امله کړی شو چد د یوه ایندومورفیزم دیترمینانت یواځنې ت عریف کړو.

أیګن ارزښت(Eigenwerte(Eigenvalue

یادونه: دا أیګن په ټول ژبوکې همداسې لیکي. دا الماني وی یا لغات دی، د خپل په معنا دی.

أیګن ارزښت(Eigenwerte(Eigenvalue

F دې د وکتورفضا V_K ایندومورفیزم وي. یو $\lambda \in K$ أیکنارزښت بلل کیږي، که یو $v \in V$ شتون ولري د $v \neq 0$ سره ، داسې چې باور ولري.

$$F(v) = \lambda v$$

أیګنوکتور Eigenvektoren

F دې د وکتورفضا V_K یو ایندومورفیزم وي. هر له صفر وکتور مختلف $v \in V$ د

$$F(v) = \lambda v$$

سره د F أیګنوکتور بلل کیږي(أیګن ارزښت λ ته)

دوه -کونجتړې کیدونکې یا دوه-کونجتړې کیدنوړ(قطري کیدونکې) Diagonalisierbar

یو ایندومورفیزم دوه کونجتړې کېدونکی (قطري کېدونکې یا – وړ) بلل کیږي، که د أیکن وکتورونو څخه یو بنسټ شتون ولري. دا په دې معنا چې د ایندومورفیزم لپاره یو دوه کونجتړی ماتریکس   د لاندې بڼه شتون لري(د متو وکتورونه بنسټ ومتورونه

شتون لري، λ_i أيگن ارزښتونه دي)

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

أيگن فضاوې Eigenräume

F دې د V ايندومورفيزم وي او $\lambda \in K$ ، نو

$$Eig(F;\lambda) := \{v \in V : F(v) = \lambda v\}$$

د F يو أيگنفضا بولو نسبت و λ ته.

- اگن فضا د V وکتورفضا يو برخوکتور فضا ده.
- صفروکتور په ليگنوکتور کې خوندي نه دی.
- $Eig(F;\lambda)\{0\}$ د λ اړونده أيگنوکتورونو ډېری ده
- (S.210) ...

کرکتريستيکي پولينوم يا سړی څنګه أيگن ا رزښتونه پيدا کوي؟

سړی کړی شي چې أيگن ارزښتونه وټکي، داسي چې د کرکتريستيکي پولينوم صفرځايونه پيدا کوي. باور لري[7.1]

د ايگن ارزښت دی له دې لاس ته راځي او په څټ

$$\lambda \;\; ist \;\; Eigenwert \;\; von \;\; F \Leftrightarrow det(F - \lambda id_V) = 0$$

سړی د لاندې ماتريکسونو دوه -کونجتړې(قطر) پيداکوي:

$$\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & & \vdots \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{mn}-\lambda \end{pmatrix}$$

سړی أيګن وکتورونه او أيګن ارزښتونه څنګه پيدا کوي؟

که څوک أيګن-ارزښت λ ولري،نو کېدی شي و هغه ته مناسب أيګنوکتور وټاکي، داسې چې سړی لاندې برابرون - يا مساواتسيستم حل کړي:

$$(A-\lambda I)X=0$$

لکه کريتيکي پولينوم لپاره سړی همداسې بېرته ماتريکس جوړوي، چېرته چې د λ لپاره أيګن ارزښتونه ځای په ځای کوي . بيا سړی دا هوموجېن مساواتسيستم حل کوي.

يو ماتريکس سړی څنګه دوه-کونجتړې يا قطري کوي؟

لومړ: که لږ ايګنوکتورونه توليد يا جوړېدی شي، دې ته (نسبت دې ته) چې ماتريګس درزونه همداسې ليکي لري، نو متريکس دوه کونجتړې کيدونکې نه ده.

که پوره وکتورونه شتون لري او ودې ته ايګن ازښتونه نو $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n$ باور لري

$$D=S^{-1}AS=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

سکالار ضرب(دننني ځل يا ـــضرب) او نورم

Skalarprodukt (Innenprodukt) und Norm

سکالار ضرب

تعريف يا پيژند:

يو تابع $<,>: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ ، $(x,y) \to\ <x,y>$ سکالار ضرب بلل کيږي، که $\forall\ x,x',y \in \mathbb{R}^n$ دا لاندې باور ولري:

- $<x+x',y>=<x,y>+<x',y>$ کربنيزوالی (
- $<x,y>=<y,x>$ (سيومتري (Symmetrie
- $<x,x>\geq 0$ او $<x,x>=0 \Rightarrow x=0$ مثبت او ديفينيت) Positiv und definit)

بېلګه:

- $<a,b> \mapsto a_1b_1+a_2b_2+\dots a_nb_n$

نورم Norm

پيژند(تعريف): يوه ځيرونه يا فنکشن $||\ || : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ نورم بلل کيږي، که لاندط امسيومونه باور ولري

- $||x||=0 \Leftrightarrow x=0$ ديفينيت
- $||x|| \geq 0$ مثبت

- $||\lambda x|| = |\lambda| \cdot ||x||$ هوموجين

- $||x+y|| \leq ||x|| + ||y||$ درې ګوډي يا مثاثاتي نابرابرون

بيلګه:

$$||a||_\infty = ||(a_1, a_2, \ldots, a_n)||_\infty = \max(|a_i|; i = 1, \ldots, n)$$

ماکسيموم يا خورا جګ ارزښت

$$||a||_1 = ||(a_1, a_2, \ldots, a_n)||_1 = |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n|$$

(يو نورم)

$$||a||_2 = ||(a_1, a_2, \ldots, a_n)||_2 = \sqrt{< a, a >} = \sqrt{|a_1|^2 + |a_2|^2 + \ldots + |a_n|^2}$$

(د پيوتاګوراس نورم)

د وازيدو کونج تعريف:

د يوې وکتورفضا د x او y وکتورونو ترمنځ د وازېدوکونج α په لاندې توګه تعريف دی

$$< x, y >= ||x||\,||y||\, \cos\alpha \Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{< x, y >}{||x||\,||y||}$$

د وازيدو کونج د تعريف لپاره بايد کوساين تل تعريف وي. موږ بايد وښايو، چې دا لاندې باور لري:

$$-1 \leq \frac{< x, y >}{||x||\,||y||} \leq 1$$

دا د کوشي –شوارخ- نامساواتو خونديونه ده.

د کوشي –شوارڅ- نامساوات

دپه خوښه وکتورونو $u, v \in V$ لپاره باور لري:

$$< u, v >^2 \leq < u, u >< v, v >$$

یا ورته(اکویوالنت):

$$| < u, v > | \leq ||u|| \cdot ||v||$$

ښوونه:

د $y = 0$ لپاره ساده دی. وي دې $y \neq 0$. موږ له یوه واړه چل څخه کار اخلو او $\lambda := \frac{< x, y >}{||x|| \, ||y||} \in \mathbb{R}$ ږدو. لاندې باور لري:

$$\begin{aligned} 0 \leq < x - \lambda y, x - \lambda y > &= < x, x > -2\lambda < x, y > + \lambda^2 < y, y > \\ &= ||x||^2 - 2\frac{< x, y >^2}{||y||^2} + \frac{< x, y >^2}{||y||^2} \\ &= ||x||^2 - \frac{< x, y >^2}{||y||^2} \end{aligned}$$

په ورته توګه باور لري $< x, y >^2 = ||x||^2 ||y||^2$ او له دې سره $| < x, y > | \leq ||x|| \, ||y||$.

نورمال شوي ا و اورتوګونال وکتورونه

وکتورونو نورمالیدنه:

وکتورونه نورمال شوي دي، چې اوږدوالی 1 لري، دا په دې معنا، چې $< v,v >= 1$ یا $||v|| = 1$.

یو وکتور نورمال کیدی شي یا کیږي، داسې چې دی د په څټ یا معکوس ارزښت سره ضرب شي:

$$v_{normalisiert} = \frac{1}{||v||} \cdot v$$

اورتوګونال وکتورونه (یو په بل ولاړ -)

دوه وکتورونه v_1 او v_2 یو بل ته اوتوګونال دي، که دا یو په بل ولاړ یا عمود وي. یا نیغ ولاړ وي. له دې امله د دوي سکالار ضرب یا ځل 0 دی.

$< v_1, v_2 >= 0$

هر وکتورفضا ته لږ ترلږه یو(یعنې په رینښتونې زیات) له اورتوګونال وکتورونو بنسټونه شته. کا دا هو اوږدوالی 1 ولري، نو دا *اورتونورمال* دي.

اورتونورمال بنسټونه:

یو اورتونورمال بنسټ هغه بنسټ دی، په هغه چې ټول وکتورونه دي چې نسبت سکالار ضرب ته اوږدوالی 1 لري او یو بل ته اورتوګونال دي.

سړی کړی شي هر بنسټ ته د شمیدت اورتوګونالیدونکي تلنلار **Schmidtschen Orthnormalisierungsverfahrens** په مرسته یو اورتونورمال بتسټ جوړ کړي:

موږ غواړو د $i = 1$ تر $i = n$ پورې لاندې فرمول وځغلوو، د کوم سره چې n د بنسټ وکتورونو تعداد یاګنون دی، او یو بل پسې اورتوګونال وکتورونه د 1 اوږدوالي پیدا کوي یا میندي، چې دا موږ سملاسې د بل وکتور شمیرنو لپاره اړین مومو.

$$e_i = \frac{v_i - \sum_{k=1}^{i-1} e_k \cdot < v_i, e_k >}{\left\| v_i - \sum_{k=1}^{i-1} e_k \cdot < v_i, e_k > \right\|}$$

ځای بدلون Permotation

ليکندود

يو ځايبدلون يو په – يعني بيجکتيو ځيرونه يا فنکشن دی، کوم چې n توکي ($n > 0$) تنظيموي.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma(1) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ \sigma(2) \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} n \\ \sigma(n) \end{pmatrix}$$

دا پورته ليکنډول دا معنا لري، چې د بيلګې په توګه 1 د $\sigma(1)$ ځای ته راکښل کيږي.

په همدې توکه ځيوکليکي يا تل بيرته راګرځيدونې ليکندود هم ورځنی يا بلد دی. د بيلګې په توګه:

$$(12)(3)(564) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

ترانپوزيشن Transposition

يو ترانسپوزيشن د ټيک دوه يتوکو بدلون دی په ځيوکليکي ليکندود يعنې (ab) .

هر پرموتيشن د دوه ترانپوزشنونو کمپوزشن(ضرب) دی.

د ممکنه ځای بدلونو ګڼون يا تعداد

که يوه ډېرۍ يا سټ n توکي لري، نو دا $n!$ ځای بدلونونه ممکن دي.

پاتې يا تش ځايونه

که يو پرموتيشن له يوه کوچني ځای څخه و يوه لوي پسې ځيره کړي، نو تشځايونه توليديږي. که $j < k$ او $\sigma(k) < \sigma(j)$ وي، نو دا يو تشځای دی.

د ډاکتر ماخان شينواري ليکنې

د ډاکتر ماخان شينواري چاپ شوې ليکنې:

<u>1988 Vienna (Austria):</u>

<u>لومړی:</u>

H.K. Kaiser , M. Shinwari : Aproximation compact pological algebra : general algebra 6 ; Page 117 – 122 contributions to

<u>1987 Vienna (Austria):</u>

<u>دويم:</u>

Diss . Interpolation und Aproximation durch Polynime in Universalen Algebren . Uni. Wien

Dissertation Interpolation and Aproximation by Polynome in universal Algebras, at the University of Vienna/Austria

لاندې د شميرپوهنې پښتوټول کتابونه په المان کې د ،، افغانستان کلتوري ودې ټولنه،،له خوا چاپ شوي دي

2000 Bonn (Germany):

دريم: د شميرپوهنې ستر کتاب : د شميرپوهنې برسيره د انجنري، فزيک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زده کوونکو لپاره (دا کتاب په ۹۰۰ مخونو کې چاپ او دا نوې ليکنه به يې ځنو ځايونو غزېدلې او ځنې ځايونه ترې لرې شوي دي)

2003 Bonn (Germany):

څلورم: ځمککچپوهنه(هندسه) ، په سلو، زرو کې شميرنه، د ګټې – او کټې د کټې شميرنه ، د اختمالوالي شمېرنه کتاب د ښوونځي ټولې اړتياوې پوره کوي

2003 Bonn (Germany):

پنځم: الجبرونه (د الجبر بنسټونه دي)

2003 Bonn (Germany):

شپږم: د شميرپوهنې انګرېزي – پښتو ډکشنري.

2003 Bonn (Germany):

اووم: د شميرپوهنې الماني - پښتو- او پښتو الماني ډکشنري

Mathematical dictionary German/ Pashto and Pashto/German

2003 Bonn (Germany):

اتم: دفرنځيال برابرون (دا کتاب په دې ځانګه کې يو پيل دی، ساده ليکل شوی)

Differential equation Translation; An Introduction

Bonn (Germany): 2003

نهم: د شمير پوهنې فرمولونو ټولګه

Mathematical Formulas

2003 Bonn (Germany):

لسم: شمیرپوهنه له عربي په پښتو

1997 Bonn (Germany):

یوولسم: د افغانستان په هکله سپیني خبرې: په المان کې

،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو تولنه،، له خو

.یادونه: له ۲۰۰۰ کال دمخه ډاکتر ماخان شینواري د ،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خوا درې ساسي مجلې هم را وستلي.

د ډاکتر ماخان ،،میرې،، شینواري لیکنې او ژباړې چې په چاپیدو یې پیل کیږي

2012 Bonn; Germany; Kabul Afghanistan

ژباړې:

Prof. Brinkmann. (From Brinkmann.du.de) :

لاندې د برینکمن لیکنې چې له پرینکمن ن ج څخه ژباړل شوي دي.

۱ - شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره لومړی ټوک

۲ – شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره دویم ټوک

۳ – شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره دریم ټوک

۴ - د احتمالوالي شمیرنه د ښوونځي لپاره

۵ – احصایه یا ستاتیستیک دښوونځي لپاره

لاندې کتابونه د شتوتګارت د پوهنتون د استادانو د لکچرونو څخه چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپاره شوي را ژباړل شوي.

۶ – اناليزی ۱

۷ – اناليزې ۲

۸ – کرښيز الجبر

۹ - د شميرپوهنې بنسټونه

۱۰ - د فرمولونو ټولګه

۱۱ – فنکشنل اناليز

۱۲ – وکتور شميرنه

نورې ژباړې

۱۳ – له www./grundstudium.info/linearealgebra څخه:کرښيز الجبر

۱۴ – Georg Gutenbrunner ګڼونپوهنه يا د اعدادو تيوري

زما ليکنې

Bonn (Germany):

۱۵ - د شميرپوهنې ستر کتاب دويم چاپ د پوره تغيراتو سره : دا کتاب د شميرپوهنې برخې برسيره د

انجنري، فزيک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زدهکوونکو لپاره پوره ګټور دی. په

کتاب کې د اړتيا سره زياتونه او کونه راغلې

۱۶ - ځمککچپوهنه (هندسه) دويم چاپ د پوره تغيراتو سره

۱۷ – الجبر بنسټونه دويم چاپ له تغيراتو سره

۱۸ - ډېرئ پوهنه یا سټ تیوري

۱۹ – د شمیرپوهنې سم اند (منطق ریاضي)

۲۰ - د یو څو شمیرپوهانو ژوندلیک

۲۱ – د شمیر پوهنې ګډې وډې لیکنې

-۲۲ داهم ژباړه ده، خو لیکونکی یې متآسفانه راځخه نابلد شوی: د مشتق او انتیګرال شمیرنو ته تمرینونه او اوبیونې یا حلونه یې

۲۳ – د شمیرپوهنې انګریزې پښتو او عربي + درې ډکشنري

۲۴ – د شمیرپوهنې پښتو انګرېزي ډکشنري

۲۵ – د شمیرپوهنې پښتو ډکشنري د شمیرپوهنیزو وییونو په پښتو روښانه ونه

۲۶ - د زړه له کومې(دا هغه لیکنې دي، چې ځنې یې په نړیول جالونو کې خپرې شوي دي.)

۲۷ – د افغانستان په هکله سپینې خبرې، چې وبه غزیږي.

نوري لیکنې، چې په ژباړه یې پیل شوی، خو لا پوره نه دي

– د شتوتکارت پوهنتون لکچرنوټونو څخه ، چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپرېږي:

د ګروپونو تیوري

- د ښوونځي لپاره فزیک د برینکمن لیکنه

له پنځم ټولګي څخه تر اووم ټولګي پورې ژباړل شوی (دا چې زما دویم مسلک فزیک دی، دا لیکنې ژباړم. دا هم د دې لیکوال یوه ډېره ښه لیکنه ده، چې -د شمیرپوهنې په څېر- دلته هم زیات تمرینونه د حل یا اوبیونې سره په کې راغلي او ماته زیات ګټور برېښي)

سرلیک