٣

شمیر پوهنه

د ښوونځي لپاره

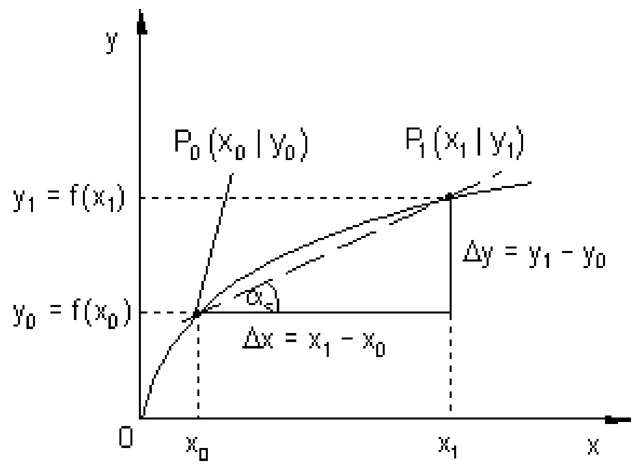
(ریاضي په درې برخو کې)

دریمه برخه

لیکونکی:
برینکمن (له برینکمن ن ج څخه)
ژباړې: ډاکتر ماخان (میرې) شینواری

شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره

(رياضي په درې برخو کې)



دریمه برخه

لیکونکی: پروفیسربرینکمن(له برینکمن ن ج څخه)

ژباړی: ډاکتر ماخان (میږی) شینواری

په دې هيله، چې په دې ليکنو او ژباړو به مې زموږ د بې وزلي او له پوهې پاتې ملت - په ما د پوهنې لپاره د لګښت - لپاره د پوهنې په لور داسې لږ ونډه اخستې وي.

کتاب پيژندنه

د کتاب نوم: شميرپوهنه دښوونځي لپاره

ليکونکی: پرفيسور برينکمن

ژباړی   :   ډاکتر ماخان،، ميرې،، شينواری

makhanshinwari@gmail.com

د خپريدو لړۍ

خپرندوی: د افغانستان کلتوري ودې ټولته

جرمني

چاپ کال   ۲۰۱۲

چاپ چارې   دانش خپرندويي ټولنې تخنيکي څانګه

WWW.danishpress.com

پښتو مو ژبه او شميرپوهنه پرې ساده ده

د خپرندوی ټولنې یادښت

له هغې مودې را په دې خوا، چې د افغانستان د کلتوري ودې ټولنې د علمي، ساینسي او طبي اثرو د خپرولو لړۍ پیل کړې، تراوسه یې په دې لړ کې مهم اثار خپلو هیواولو ته وړاندې کړي دي.

موږ باور لرو، چې پښتو ژبه هغه وخت په یوه مهمه غني ژبه بدلیدلای شي، چې د پوهې په ګڼه سمبال شي او په علمي او اکاډمیکو اثارو غني شي.

اوس چې زموږ ملي سراسري ژبه د بیلابیلوګواښونو او چلنجونو سره مخامخ ده، پر موږ ټولو ده، چې د دغه ګواښونو په وړاندې به په نره ودریږو او د علم او قلم په ژبه به ځواب ورته ووایو.

د اتحادیې له حوا د ډاکتر ماخان شینواري تراوسه زیاتو چاپ شویو اثارو په څنګ کې، د ده د پنځه وېښت شمیر پوهنې نویو ژباړو او لیکنو او دوه ټولنیزو لیکنو تر منځ، دغه اثر په همدې لړ کې ځکه د ارزښت وړ دی، چې د علمي، ساینسي اثارو د خپراوي په لړ کې د یوه مهم ګام په توګه ګڼل کیدای شي او هیله ده، چې د دې برخې مینه وال لوستوال، زده کوونکي او د پوهنتو زده کړې کته ترې واخستلی شي.

په درناوي

د افغانستان کلتوري ودې ټولنه

۲۰۰۱۲ ز ک

د ژباړې مننه

د هر څه له مخه د هغو ليکونکو پروفيسرانو څخه زياته مننه، چې د ليکنو څخه يې زما د ژباړې لپاره تفاهم لرې. ماته د دوي د ليکنو د ژباړې په هيڅ ډول مادي ګټه نه شته او دا کار مې يوازې په يوه د پوهنې توانمندې ، مګر وروسته پاتې ژبې ويونکي ولس ته وړاندې دی، دا دې د دې پروفيسرانو له خوا په پوهنيزه اړخ کې زموږ په دې اړخ کې هم مرستې ته اړ ولس سره مرسته وي.

همدا ډول زموږ،، د افغانسان کلتورې ودې ټولنه،، جرمنې، د غړو، مرستندويانو او په تيره بيا د مشر تابه څخه زياته مننه کوم، چې پرته له خپرندوې ټولنې په توګه يې د دې ليکنو زياته اقتصادي ونډه هم په غاړه اخستې.

دې لاندې زما کليوالو ملګرو او ملګرو د دې کتابونو په چاپ کې د توان سره سمه اقتصادي ونډه اخستې، چې زه ترې زياته مننه کوم:

د ښاغلي ډيپلوم انجنير ريحان الدين حساس، ښاغلي ډيپلوم انجنير محمد اکبر نور، ښاغلی ډاکتر سردار ګانه وال، ښاغلی ډاکترمانوګل ګانه وال، ښاغلي ټولنپوه محمدعارف بيان، ښاغلي ډيپلوم انجنيرمحمد ايوب بيان، همداسې زما د ملګري اروابناد ډاکتر حاجي محمد سلطانزي د ځوي ښاغلي ډاکتر صالح محمد سلطانزي ، ډيپلوم انجنير او ډيپلوم اقتصاد پوه رحمت الله فتحي او نه اخر زما د لور ډاکتر ځانګې شينواري او زما د ځوي اقتصاد پوه او ټولنساپوه اباسين شينواري.

نه د ټولو په اخر کې زما له ميرمن ښاپری څخه ډېره زياته مننه، چې زما د ليکنو- نه دا چې مخه يې نه ده نيولې- پوره ملاتړ کړي.

بيا هم له دوي څخه د زړه له کومې مننه کوم او لوي ښتن دې ورته اجرونه ورکړي، چې داسې مرستو ته دوام ورکړي.

په مننه : ستاسو ماخان شينواری

جرمني د بن ښار ۲۰۱۲ ز ک

نیولیک

.

.

.

.

.

.

.

.

الف

د ژباړې سريزه

ګرانو هيوادوالو او د شميرپوهنې مينه والو!

د ا څو کاله د مخه د ځنو شميرپوهنيزو کلمو په لټه کې د برينکمن د ن ج سره مخامخ شوم. دا چې دې ليکنې ښه خوندويونه يا متن درلود او زيات تمرينونه د حل سره، نو ما وبتيله، چې دا به پښتو ته اړوم. دا يوه ډېره ښه ليکنه ده، چې زده کوونکي ښوونکي او داسې لړ د شميرپوهنې سره بلد ميندې او پلرونه ترې ګټه اخستلى شي. په دې ليکنه کې هر څه خورا ښه روښانه شوي دي او په مختلفو بيلګو سمبال دي د حلونو يا اوبيونو سره، چې لوستنه يې هر د شميرپوهنې مينه وال لپاره د پيرځوينې وړ بولم.

کتتاب په درې برخو کې چاپيږي، چې هره برخه يې يوه خپلواکه او د يوې ځانګړې برخې خونديونه لري. زه په دې باور لرم، چې د شميرپوهنې مينه وال دا کارداسې لړ په غور وګوري، نو زر به ورسره مينه پيدا کړي.

دا کتابونه هم د هغو ۲۵ رياضي کتابونو لړۍ ده، چې ما چاپ ته چمتو کړي دي، خو نه پوهيږم، چې څو دا نور به ترې کله چاب شي. که څه پاتې شو، نو هغه به د دې کتابونو سره ن ج ته پورته کړم.

ګرانو لوستونکو!

دا زموږ د هيواد اړتيا لپاره په پوهنيزه اړخ کې په سره تيره اوبه تويول دي. دا کتابونو، چې کوم چې چاپيږي د زر دانو يا پنځه سوه څخه به نه اوړي، نو د يوه پنځوس ميليونه کمو زيات ولس لپاره زردا نې چې چاپيږي، دا خو اصلاً په شمير کې نه راځي،خو دا به په خروار ګڼو.
په لومړي کتاببرخه کې ځمککچپوهنه يا هندسه ورسره مل ده او په دويمه کتاببرخه کې مې وکتور شميرنه ورسره زياته کړې.

دریمه کتاببرخه مشتق او انتیګرال ته ځانګړې شوې.

ګرانو لوستونکو!

د برینکمن د لیکنو لړۍ د شمیرپوهنې په څانګه کې د ښوونځیو لپاره نوره هم پسې غزېدلې، چې ما هغه د ګرانو لوستونکو لپاره رازباړلې.

دا احصایه یا ستاتیستک دی او د احتمالوالې شمیرنه ده. دا دواړه کتابونه، چې دلته یې تاسو ته ژباړه وړاندې کیږي، هم په زیاتو تمرینونو، اود دوی په اوبیونو یا حلونو سره سمبال ده.

زما په اند، داسې لیکنه په پښتو کې د لومړي ځل لپاره کیږي، چې نومه ونې به دلته هم څه ناڅه ګرانو لوستونوکو ته نابلدې وي، خو پرې پوهیدنه شونې ده. هر څه په روښانه توګه ورکړل شوې.

ګرانو هیوادوالو!

داچې ما یوځای یا نوره هم ښه په یوه وار ډېر کار را ونیوه، نو هرومرو به ناټیکاوې زما له خوا په کې رامنځ ته شوې وې، خو دا به داسې ناټیکاوې نه وي، چې شمیرپوهنیزې ستونځې رامنځ ته کړي. له دې امله له ستاسو څخه زما په ستونځو پوهیدلو له امله زیاته مننه.

په دې هیله ، چې زما په غوښتنو او ستونځو به و پوهیږې په دې لیکنو او ژباړه کې ما ته هیڅ مادې ګټه نه شته. دا دې په ما زموږ د بې وزلې ولس د ډېر مصرف(لګښت) په هکله د یوې کوچنۍ پیرزوېنې په حیث وړاندې وي

مننه:

له هر څه د مخه د دې لکچرونو لیکنو لیکونکو شمیرپوهانو یعنې ستر پروفیسور بریکمن څخه زیاته مننه، چې د لیکنو څخه بهیې زموږ ولس هم ګټه پورته کړې.

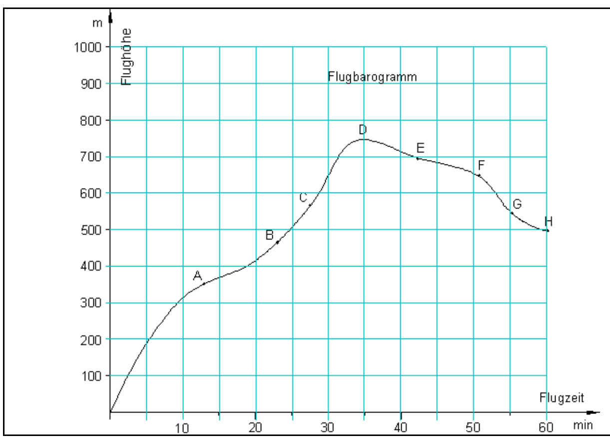
دفرنځیالشمیرنه (مشتق یا رابیلیدنه)

ننوتنه او بنسټونه

جګیدنه او تانجنت:

په یوه ټکي کې د تابع د ګراف میل(جګیدنه)

په الوتکوکې د الوتنې دلیک(الوتنلیک) الې (Flight barogramm)جوړې دي، چې تل د الوتنې جګوالی د الوتنې د وخت په واک کې یا د وخت تابعیت کې رسموي او په هر جګوالي کې د هوا فشار هم لیکي. که دا په پښتو واړوو، نو د لیک بکس به ورته ووایو.



په پورته ګراف کې د یوې الوتکې د الوتنې د بیلا بیلو وختونوجګوالی ښوول شوی.

-ایا فکر کوئ، چي په ټکي B کي نسبت و ټکي A ته جګوالی زیات دی؟
-ایا فکر کوئ، چي د E او G په ټکو کې جګوالی منفي دی؟ دلته د E په ټکي کې د ارزښت له مخي جګوالی زیات دی نسبت د G ټکي ته؟

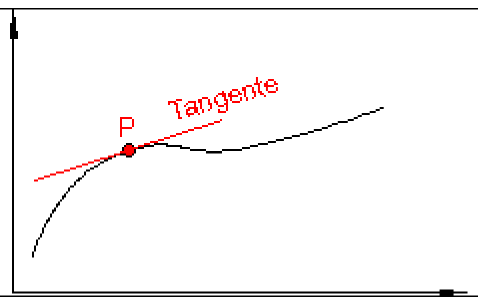
-ایا د یوې کرښي او منحني جګوالی هرچیرته توپیر لري او که نه ؟

لاس ته راوړنه :

۱ - ګورو، چي په یوه منحني کې د ګراف جګوالی هرچیرته برابر نه دی، نو له دې امله باید ټکی په ګوته کړو، چي هلته میل څیړل کیږي.

۲ - په لاندې بېلګه کې به روښانه کړو، چي تنها د یوې (سیده)کرښي میل هرچیرته برابر دی، نو له دې امله دلته د یوې کرښي د میل یا جګوالي څخه غږیږو.

بریښي چي لاندې پېژند یا تعریف هوښیارانه یا عاقلانه دی:

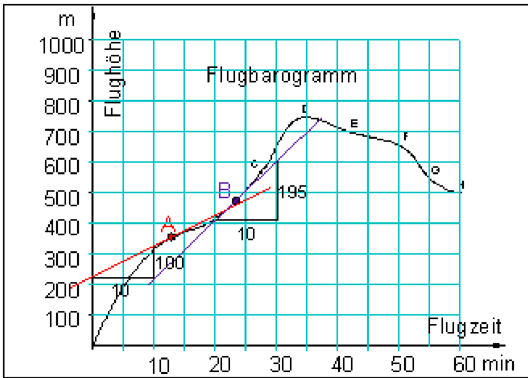
پېژند (تعریف): د یوې تابع ګراف میل (جګوالی) د P په یوه ټکي کې په همغه ټکي د تانجنت د میل د ګراف سره برابر دی	

لیدل کیږي چي دلته یو تانجنت د کرښي تعریف لري، چي د لمستکي(مماس) په چاپیریال کې د امکاناتو سره سم د مماس ټکي ته ښه ور نږدې کیږي.

ددې پېژند یا تعریف له مخې په یوه ټکي کې د یوه ګراف میل(جګیدنه) د یوې کرښي میل دی.

د ګراف د جګیدني ټاکلو لپاره د A اوB په ټکو هر یوه کې یوه کرښه (تانجنت) انځوروو، چي ګراف ته خورا زیاته نږدې کیږي.

د میل یا جګیدني مثلث په مرسته جګیدنه په ښدل یا ساده ډول شمیرل کیدی شي:



د A په ټکي کي جګیدنه :

$$\frac{100\text{ m}}{10\text{ min}} = 10\,\frac{\text{m}}{\text{min}}$$

د B په ټکي کي جګیدنه :

$$\frac{195\text{ m}}{10\text{ min}} = 19{,}5\,\frac{\text{m}}{\text{min}}$$

زمونږ د بیلګي لپاره میل یا جګیدنه په یوه ټاکلي ټکي کي د لحظوي (سملاسي) میل د چټکتیا (سرعت) په معنا دی.

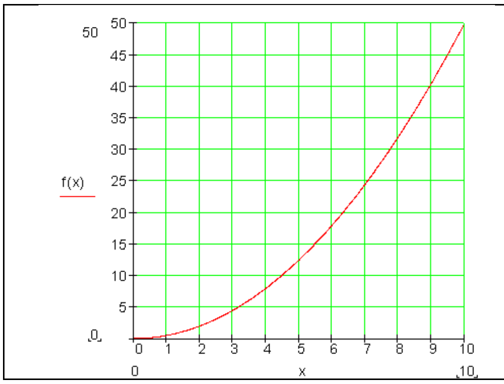
دA په ټکي کي : د الوتني وخت نږدې $12{,}5$ min ، د میل یاجګیدني چټکتیا(سرعت) نږدې $10\,\frac{m}{\text{min}}$ ده

د B په ټکي کي : د الوتني وخت نږدې $23{,}0$ min ، د جګیدني چټکتیا(سرعت) نږدې $19{,}5\,\frac{m}{\text{min}}$ ده.

تانجنت تر اوسه فقط د لیدني له مخي تعریف شوی ، چي د لمستکي چاپیریال ته خورا ډېر نږدې کیږي. له دي امله ممکن وه، چي د ګراف میل د A اوB په ټکو کي هم یواځي په نږدې ډول وټاکل شي، دا په عمل کي د قناعت وړ نه دی یا بسیا نه کوي.

په یوه ټکي کي د تابع دګراف میل (جګیدنه):

معلومه ده ، چي یو ریلګاډی د تمځای څخه له خوزېدو(حرکت)وروسته خپله چټکتیا(سرعت) په ورو ورو (کراره کراره) زیاتوي.وهلي لار(د تمځای څخه لرېوالی) تل زیاتیږي. د تمځای څخه لریوالی د چټکتیا یا سرعت په واک کي ده .



دا عمل د لاندې تابعمساوات له لارې ليکلی شو.

دلته د x وخت د ثانيې او د s لار د متر لپاره ليکو $s = f(x) = 0{,}5x^2$

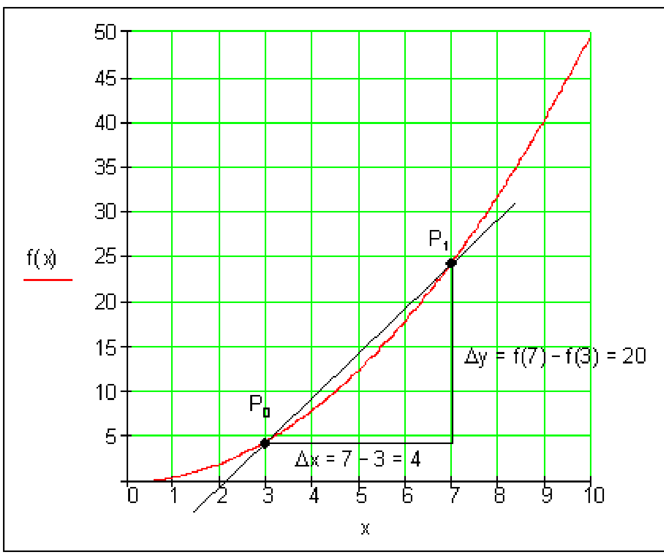
مخامخ : د تابع ګراف

اوس بايد منځنی ارزښت(منځنی چټکوالی) Averagerat of change د ۳ ــمي او ۷ ــمي ثانيی ترمنځ وشميرل شي.

ددې لپاره اړونده سيکانت انځوروو او د هغې چټکوالی شميرو.

اوس دې د تغير ارزښت (منځنی چټکوالی) د ۳ ــمي او ۴ ــمي ثانيو ترمنځ وشميرل شي.

په دريمه ثانيه کې د ارزښت تغير يا چټکوالی څومره دی؟



د منځنی چټکوالي داسې مخ ته بوزی، چې د تکو P_0 او P_1 ترمنځ واټن تل کوچنی شي، داسې چې تکی P_1 د تکي P_0 په لور وخوزيږي.

د ۳ –مې او ۷-مې دقیقې ترمنځ منځنی تغیرارزښت (جګوالی)دی:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(7) - f(3)}{7-3} = \frac{24{,}5 - 4{,}5}{7-3} = \frac{20}{4} = 5$$

د ۳ –مې او ۴ –مې دقیقې ترمنځ منځنی تغیرارزښت(منځنی جګوالی) دی:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(4) - f(3)}{4-3} = \frac{8 - 4{,}5}{4-3} = \frac{3{,}5}{1} = 3{,}5$$

دریمې دقیقې ته د ورنږدې کیدنې شمیرنه

Intervall $[3;x]$	$[3;4]$	$[3;3{,}1]$	$[3;3{,}01]$	$[3;3{,}001]$
$\Delta x = x - 3$	1	0,1	0,01	0,001
$\Delta y = f(x) - f(3)$	3,5	0,305	0,03005	0,0030005
$\frac{\Delta y}{\Delta x}$	3,5	3,05	3,005	3,0005

پورته شمیرنه په ګوته کوي، چې که ټکی P_1 د ټکي P_0 په لور وخوزیږي یا ورنږدې شي، نو د تغیر ارزښت(جګیدنه) تل زیاته و ارزښت ۳ ته ورنږدې کیږي.

موږ په دې توګه یو ارزښت لاس ته راوړو، چې لحظوي تغیرارزښت (لحظوي جګیدنې) ته تل ورنږدې کیږي.

که موږ فیزیکي لویي (واحدونه یا یوونونه) په خپله بیلګه کې وکاروو، نو د تغیرارزښت (جګوالي) لپاره m/s باور لري . دا د چټکتیا لپاره یوون(واحد) دی

دا په دې مانا دی،چې د لار-وخت دیاګرام چټکتیا (سرعت) په ګوته کوي.

لحضوي یاسترګو رپ تغیرارزښت شمیرلو ته شمیرنیزه تګلار

د $f(x) = 0,5x^2$ لپاره په اینتروال $[3;\Delta x]$ کې منځنی تغیر ارزښت(جګوالی)

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(3+\Delta x) - f(3)}{\Delta x} = \frac{0,5(3+\Delta x)^2 - 0,5\cdot 3^2}{\Delta x} = \frac{0,5\left[9 + 6\Delta x + (\Delta x)^2\right] - 0,5\cdot 9}{\Delta x}$$

$$= \frac{0,5\cdot 9 + 3\Delta x + 0,5(\Delta x)^2 - 0,5\cdot 9}{\Delta x} = \frac{\Delta x(3 + 0,5\Delta x)}{\Delta x} = 3 + 0,5\Delta x$$

دا $3+0,5\Delta x$ د منځنی تغیرارزښت دی

که اوس Δx تل کوچنی شي، موږ وایو که Δx د صفر په لور وهڅیږي یا لاړشي یعني ($\Delta x \to 0$) ،نو د منځنی تغیر ارزښت $3+0,5\Delta x$ د3 په لور ځي یا هڅیږي.

دا نو اوس لحظوي (د سترګو رپ) تغیرارزښت دی د x_0 په ځای کې.

د دې لپاره لیکو : د $\Delta x \to 0$ لپاره باور لري: $3+0,5\Delta x \to 3$

یا $$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}(3+0,5\Delta x) = 3$$

پوښتنې

1 - کیمیاوي تعامل د مختلفی چټکتیا سره صورت نیسي. د بیلګی به توګه که که ځینک د مالګی به تیزابو کی وچول شئ، نو هایدروجن تری ترې راوځي یا رامنح ته کیږیز لاندې جدول د هایدروجن سټ یا مقدار ورکوي، چې د وخت په واک کې دی یا تابع دي.

وخت پهS	2	4	6	8	10	12
د اوبو سټ یا مقدار په ملي لیترml	21	30,5	35,5	40,5	42,5	43

الف- د دې لپاره یو دیاګرام وکاږئ.

ب – د هایدروجن تولید په هکله څه وینا کیداي شئ؟

پ - په لاندې انتروالونو کې د تغیر ارزښت وشمیرئ.
$[\ 2\ ;\ 4\ ]\ ;\ [\ 4\ ;\ 8\ ]\ ;\ [\ 8\ ;\ 12\ ]$

دویم - د $f(x)=\frac{1}{4}x^2-x+1$ ؛ تغیر ارزښت په انتروالونو $[1;1,5];[-4;-2,5];[2;t]$ کې

د $t\ t\neq 2;[3;3+h]$ او $h>0$ سره وشمیرئ.

دریم - تابع $f(x)=\frac{3}{4}x^2-3x$ ؛ ورکړ شوې

الف – د $f(x)$ منځنی تغیرارژښت په انتروال $I=[2;5]$ وشمیري.

ب - د $s(x)$ سیکانت مساوات په $P\ (\ 2\ |\ f(2)\ )$ او $Q\ (\ 5\ |\ f(5)\ )$ ټکو کې وټاکئ.

پ _ د $f(x)$ لحضوي تغیرارزښت د $x=2$ په ځاي کې وشمیرئ.

ت - د $f(x)$ او $s(x)$ګرافونه په وضعیه قیمتسیستم کې وکاږئ

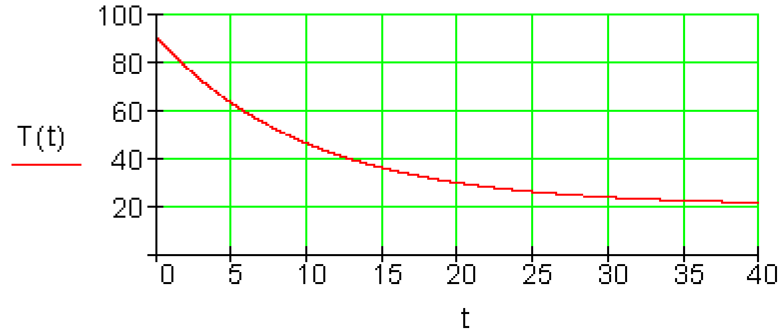
څلورم - یو جسم په ازاده غورځولو کې داسې حرکت کوي، چې په t وخت کې $S(t)=5.t^2$ لار وهي(S په ړتر او t دقیقه).

پنځم – یو تولید له خپل جمتووالي وختت څخه وروسته سړیږي.

تمپراتور(تودوخي) $T(t)=20+70e^{-0,1t}\ ;\ t\geq 0$ (t په دقیقو، $T(t)$ په څلزیوس درجې)

د سړیدو مخته تګ وشمیرئ.

ځیره د تابع $T(t)$ ګراف ښايي.



الف – له کوم حرارت څخه مخ ته ځو؟

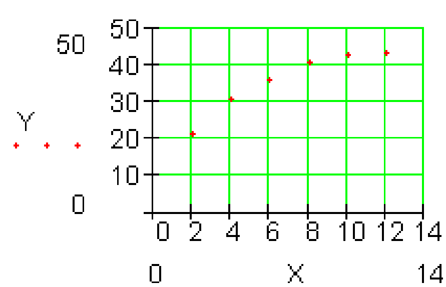
ب – فیریني کوم حرارت لري، که یخه شي؟

پ – په کوم وخت کې چټکتیا(سرعت) ، د هغې سره چې فیریني یخیږي ، خورا لویه ده.

ت _ په لومړیو لسو دقیقو کې د منځني تودوخې تغیر وشمیرئ.

مفصل حلونه

دلومړي مفصل حل الف –



ب – د هایدروجن تولید د وخت به واحد کی تل کمیږي پ - تغیر اریښت $\frac{\Delta y}{\Delta x}$

$$[2;4]: \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{30,5-21}{4-2} = 4,75$$

$$[4\,;8]:\ \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{40,5-30,5}{8-4}=2,5$$

$$[8\,;12]:\ \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{43-40,5}{12-9}=0,625$$

I	[2 ; 4]	[4 ; 8]	[8 ; 12]
$\frac{ml}{s}$	4,75	2,5	0,625

دویم – د $f(x)=\frac{1}{4}x^2-x+1$ منځنی تغیر اربښت $\frac{\Delta y}{\Delta x}$:

$$[1;1,5]:\ \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(1,5)-f(1)}{1,5-1}=\frac{\frac{1}{16}-\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}}=\underline{\underline{-\frac{3}{8}}}$$

$$[-4\,;-2,5]:\ \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(-2,5)-f(-4)}{-2,5-(-4)}=\frac{\frac{81}{16}-9}{\frac{3}{2}}=\underline{\underline{-\frac{21}{8}}}$$

$$[2\,;t]:\ \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(t)-f(2)}{t-2}=\frac{\frac{1}{4}t^2-t+1-\left(\frac{1}{4}\cdot 2^2-2+1\right)}{t-2}=\frac{\frac{1}{4}t^2-t+1}{t-2}$$

$$=\frac{\frac{1}{4}\left(t^2-4t+4\right)}{t-2}=\frac{\frac{1}{4}(t-2)^2}{t-2}=\underline{\underline{\frac{1}{4}(t-2)\ \text{für}\ t\neq 2}}$$

$$[3\,;3+h]:\ \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(3+h)-f(3)}{3+h-3}=\frac{\frac{1}{4}(3+h)^2-(3+h)+1-\left(\frac{1}{4}\cdot 3^2-3+1\right)}{h}$$

$$=\frac{\frac{1}{4}\left(9+6h+h^2\right)-3-h+1-\frac{9}{4}+3-1}{h}=\frac{\frac{1}{2}h+\frac{1}{4}h^2}{h}=\underline{\underline{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}h}}$$

دریم : الف_ $f(x)=\frac{3}{4}x^2-3x$ منځنۍ تغیر ارزښت به $[2;5]$ کې دی

$: \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(5)-f(2)}{5-2}$

$$f(5)=\frac{3}{4}\cdot 25-3\cdot 5=3{,}75 \quad f(2)=\frac{3}{4}\cdot 4-3\cdot 2=-3 \quad \Delta x=5-2=3$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{3{,}75-(-3)}{3}=\frac{6{,}75}{3}=\underline{\underline{2{,}25}}$$

ب – د s(x) سیکانت مساوات چې لهP او Q ټکو تیریږي، تیک همداسې شمیرل کیږي، لکه کرښه چې له دوه ټکو تیریږي.

P(2;f()) د a) له امله P(2;-3) لاس ته راځئ

Q(5;f(5)) د a) له امله Q(5;3,75) لاس ته راځئ

$s(x)=a_1\cdot x+a_0$ د $: a_1=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(5)-f(2)}{5-2}=2{,}25$: سره د (aپوښتنبرخه هم وګورئ:

$$\Rightarrow s(x)=2{,}25x+a_0$$

$$P(2|-3): s(2)=-3 \Leftrightarrow 2{,}25\cdot 2+a_0=-3 \Leftrightarrow a_0=-7{,}5$$

$$\Rightarrow s(x)=2{,}25x-7{,}5$$

د تانجنت جګوالی

پ- لحضوي تغیرارزښت د x = 2 په ځاي کې:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}=\frac{\frac{3}{4}(2+\Delta x)^2-3(2+\Delta x)\underbrace{+3}_{-f(2)}}{\Delta x}$$

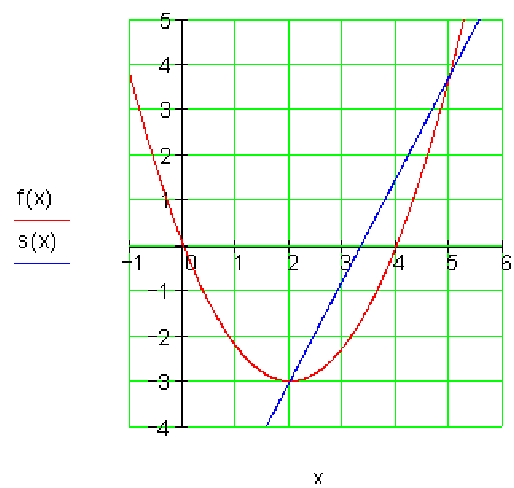
$$=\frac{\frac{3}{4}\left[4+4\Delta x+(\Delta x)^2\right]-6-3\Delta x+3}{\Delta x}=\frac{3+3\Delta x+\frac{3}{4}(\Delta x)^2-6-3\Delta x+3}{\Delta x}$$

$$=\frac{\frac{3}{4}(\Delta x)^2}{\Delta x}=\frac{3}{4}\Delta x$$

منخنی تغئیرارزښت په انتروال $[2;\Delta x]$ کې.

د $\Delta x \to 0$ لپاره دی: $\frac{3}{4}\Delta x \to 0$

د$f(x)$ لحضوي تغيرارزښت د $x = 2$ په ځای کې 0 دی



ت-

ځلورم - لحضوي جټکتيا يا سرعت د لحضوي تغير ارزښت سره په يوه معنا دی.

$$t=1:\ \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{s(1+\Delta x)-s(1)}{\Delta x}=10+5\Delta x \Rightarrow$$

د $\Delta x \to 0$ لپاره صدق کوي: $10+5\Delta x \to 10$

$$t = 2:\ \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{s(2+\Delta x)-s(2)}{\Delta x} = 20+5\Delta x \Rightarrow$$

د $\Delta x \to 0$ لپاره صدق کوي. $20+5\Delta x \to 20$

$$t = 3:\ \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{s(3+\Delta x)-s(3)}{\Delta x} = 30+5\Delta x \Rightarrow$$

د $\Delta x \to 0$ لپاره صدق کوي. $30+5\Delta x \to 30$

پنځم – الف- پیلتودوخي کيدی شي له $90\ {}^0C$ ګراف څخه ولوستل شي.

ب- تابع ارزښت اسيپتوتيکي د ارزښت^0C 20 په لور هڅيږي يا ځي.

پ-د سړيدنې چټکتيا په پيل کې خ ورا لويه وي.

ت- $$[0;10]:\ \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{T(10)-T(0)}{10-0}$$

د $T(10) = 20+70\cdot e^{-0,1\cdot 10} \approx 45,75$ und $T(0) = 20+70\cdot \underbrace{e^{-0,1\cdot 0}}_{1} = 90$ سره

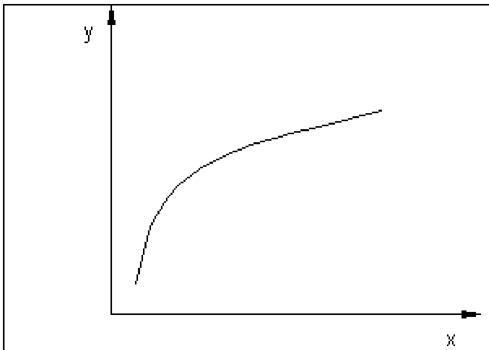
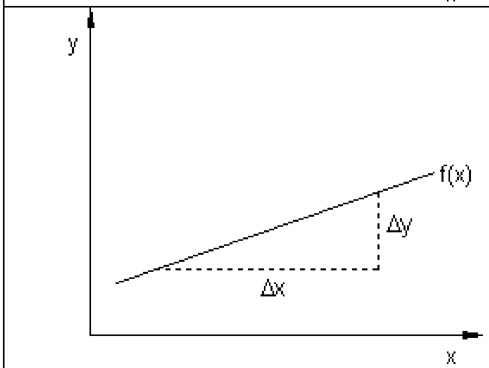
کيږي: $\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx \underline{\underline{-4,425}}$

کميزه يا منفي مخنخښه په دې معنا ده، چې تغيرقيمت منفي دی، د فيريني تودوخي کميږي.

کمښت وېش(تفاضلوېش) او مشتق يا رابيليدنه

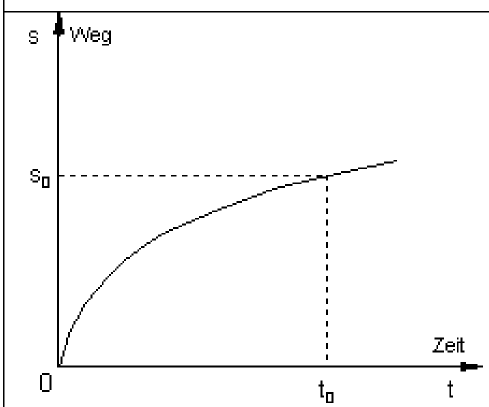
د غوڅووني(تقاطع) جګوالي څخه د تانجنت جګوالي ته

<table>
<tr>
<td>يو تابع $y = f(x)$ او اړونده ګراف دې ورکړ شوی وي.

كه د تابع جګيدني حالت په پام كې ونيسو ،نو ګورو چې د تابع جګيدنه په نږدې ټولو ټكو كې توپير لري.</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>يوه ثابته جګېدنه، لكه په كرښيز يا لاينيز تابع $f(x) = a_1x + a_0$ ا كې د
$$a_1 = \frac{\Delta y}{\Delta x} = konstant$$</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>په زياتو وختونو اړيينه ده ، چې د تغيرحالت(د جګېدني حالت) كې د تابع د تلني حالت و څېړو.

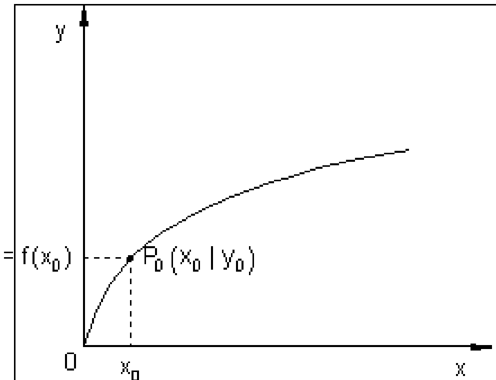
نو له دې امله لحظوی چټكتيا(همغه وختيزه – يا سملاسي) $v(t_0)$ په لار- وخت دياګرام كې وڅېړو.

د مشتقشمېرني په مرسته دا پرابلم حل كېدی شي.

د يوه تابع د جګيدني ټاكنه په يوه د مخه وركړ شوي ځای كې differenzieren د مشتق نيونه بلل كيږي.</td>
<td>

<table>
<tr><td>$t_0 \triangleq$</td><td>په پام كې نيولی ستركو رپ</td></tr>
<tr><td>$s_0 \triangleq$</td><td>تر دې ستركو رپ پورې وهلې لار</td></tr>
</table></td>
</tr>
</table>

يو تابع $y = f(x)$ او د هغه ګراف دې ورکړ شوی. په ټکي $P_0(x_0 | y_0)$ کې ورکړ شوی وي. ددې جګوالی پيداکړی شي.

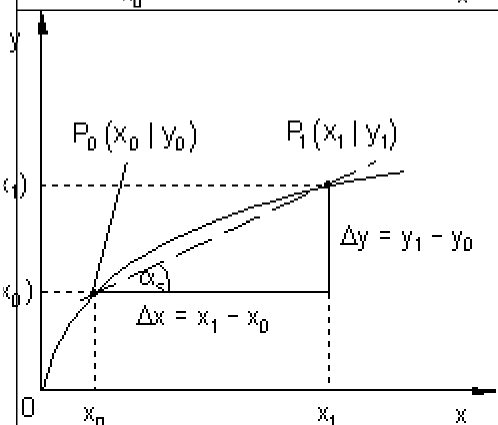


ددې پرابلم د حل لپاره داسې مخ ته ځو، چې لومړی جګوالی په نږدې توګه (تقريبي) پيدا کوو.

ددې لپاره يو بل ټکی $P_1(x_1 | y_1)$ د P_0. ټکي په نزدې کې ټاکو.

کرښه، چې دواړه ټکي سره تړي ،يعني سيکانت، يو جګوالی ښايي، چې د ټکو P_1 او P_0 ترمنځ د تابع ،،منځنی جګوالی،، په ګوته کوي.

دا د جګواليمثلث له لارې ټاکل کيږي.

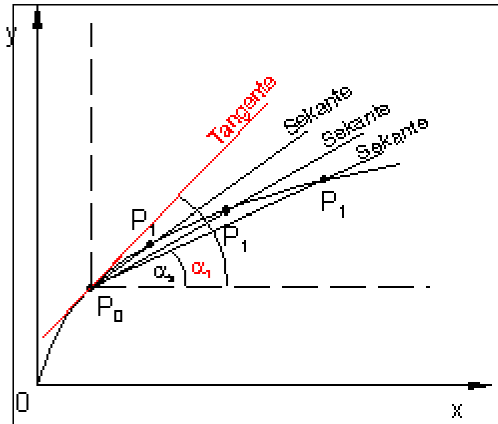


$$\tan \alpha_s = a_s = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

$\alpha_s \triangleq$	جګېدو کونج
$a_s \triangleq$	جګېدوضريب

که ټکی P_1 د ټکي P_0 په نزدې کې وټاکو يا ځای په ځا ی کړو، نو دا په ټکي P_0 کې د تابع دنوي سيکانت جګوالی دی چې بايد پيدا شي. که دا کار (تلنه) تل مخ ته بوزو، او ټکی P_1 تل و ټکي P_0 ته ورنزدې کړو، نو د پولې حالت په څېر يوه کرښه منځ ته راځي، چې د تابع ګراف په ټکي P_0 کې لمسوي.

د تانجنت جګېدنه په ټکي P_0 کې ټيک د تابع د ګراف جګېدنه په ټکي P_0 کې ښايي.



د تانجنت د جګوالي (میلان -) کونج	α_t =
د تنجنت د جګوالي ضریب	a_t =

داحالت یا تلنلار کیدی شي د ریاضي له لاري د پوله ارزښت جوړولو په څیر افاده شي.

$$\lim_{P_1 \to P_0} \alpha_s = \alpha_t \qquad \lim_{P_1 \to P_0} a_s = a_t$$

کمښتویش(تفاضلوېش) Difference quotient) او مشتق

د سیکانت جګیدنه (منځنی تغیر ارزښت)

$$a_s = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$\Delta x = x_1 - x_0 \Rightarrow x_1 = x_0 + \Delta x$$

د x لپاره د مساوات ښی خوا ځای په ځای کوو

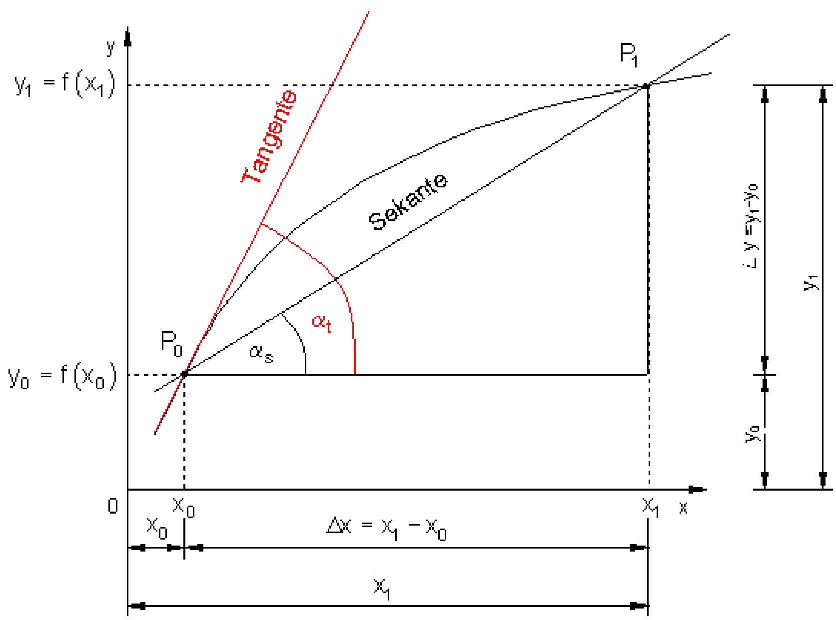
$$a_s = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

د تنجنت جګیدني سره د پوله ارزښت (حد) له لاري لرو

$$a_t = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)$$

دا مشتق یا لحظوي – د سترکو رپ تغیر ارزښت دی

یا لنډ
$$a_t = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$$



په ورته توګه د کمښت ویش یا د تفاضل ویش Difference quotient تر څیرني لاندې نیسو:

د یوې کرښې میل یا جګیدنه بې له مشتق نیوني ټاکلکیدی شي.
کرښه $y = f(x) = mx + a$ لرو.
د دې کرښې د جګیدنې فرمول په لاندې ډول دی:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

پیژند (تعریف):

دفرنځیالوېش(کمښتوېش)

د x_0 په ځای کې د تابع $f(x)$ مشتق یا رابیلیدنه بلل کیږي

تعریف (پیژند):
د تابع لومړی مشتق یا رابیلیدنه دx_0 په ځای کې دتانجنت جګیدنه ورکوي، چې د تابع ګراف یې په ټکي $P_0(x_0, y_0)$ کې لمسوي او له دې سره غبرګ د تابع د ګراف جګیدنه ده په ټکي $P_0(x_0, y_0)$ کې. دا سړی د تابع جګیدنه هم بولي.

تانجنتجګیدنه په ټکي $P_0(x_0, y_0)$ کې

د x_0 په ځای کې د تابع مشتق او د مشتق تابع

د x_0 په ځای کې د تابع مشتق یعنې څه؟

ددې د روښانه ونې لپاره د لاندې بیلګې څخه کار اخلو

بیلګه:
تابع $y = f(x) = x^2$ دې ورکړ شوې وي.

غوارړو د $x = x_0$ په ځای کې او په ځانګړي توګه د $x_0 = 2$ په ځای کې د هر څه لومړی کمبنتويش(د تفاضل وېش) پيداکوو.

$x = x_0:$ $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ $\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x_0+\Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x}$	$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x_0^2 + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x}$ $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x_0\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x$

اوس د ليميټ د لاس ته راوړلو له لارې د مشتق ضريب ته راځو:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}(2x_0 + \Delta x) = 2x_0$$

نو $\underline{\underline{f'(x_0) = 2x_0}}$ لرو او د $x_0 = 2$ لپاره $f'(2) = 2\cdot 2 = 4$ باور لري.

د $x_0 = 2$ په ځای کې د تابع $y = f(x) = x^2$ لومړی مشتق په 4 برابر دی، دا په دې معنی چې تابع د $x_0 = 2$ په ځای کې ميل ياچګوالی 4 لري.(لاندې تکرار شوې)

اوس د ليميټ د لاس ته راوړلو له لارې د مشتق ضريب ته راځو:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}(2x_0 + \Delta x) = 2x_0$$

نو $\underline{\underline{f'(x_0) = 2x_0}}$ لرو او د $x_0 = 2$ لپاره $f'(2) = 2\cdot 2 = 4$ باور لري.

د $x_0 = 2$ په ځای کې د تابع $y = f(x) = x^2$ لومړی مشتق په 4 برابر دی، دا په دې معنی چې تابع د $x_0 = 2$ په ځای کې ميل ياچګوالی 4 لري.

لاس ته راوړنه يې:

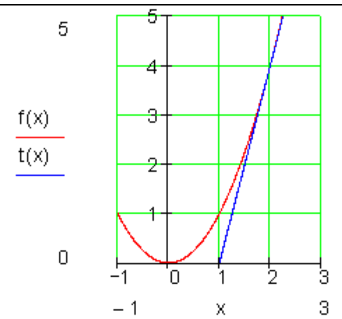
پايله يا لاس ته راوړنه يې کيدی شي، د تابع د ګراف له لارې و ازمايل شي، په داسې ډول چې د $P_0(x_0 | y_0) = P_0(2|4)$ په ټکي کې تانجنت انځور کړو او د ميل د مثلث له لارې جګيدنه لاس ته راوړو.

لکه پورته بېلګه کې: $y = f(x) = x^2$ په هر خوښه ځای x_0 کې تابع پيداکوو:

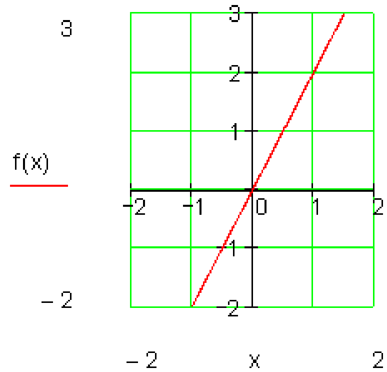
$$y = f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x_0) = 2x_0$$

x_0	-2	-1	0	1	2
$f'(x_0)$	-4	-2	0	2	4

لاندې ګراف وګورئ: ګراف يوه کرښه $f'(x) = 2x$ انځوروي، چې د تابع مشتق بلل کيږي(مخامخ ځيره)



پام:
که د يوې تابع مشتق ونيول شي، نو بيرته يوه تابع ترې لاس ته راځي، چې دا د مشتق تابع بللکيږي.



د مشتق تابع:
د تابع ارزښتونه په هر ټکي کې بنسټ تابع انځوروي، له دې امله دا د ميل تابع هم بلل کيږي.

بېلګه:
د $f(x) = x^3$ تابع دې ورکړ شوې دی.
فعاليت: ګران لوستونکي دې د $f(x) = x^3$ تابع او د تابع د مشتق ګراف وروسته له حله رسم کړي.
موږ غواړو په x_0 ټکي کې مشتق پيدا کړو او همداسې د مشتق تابع.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{(x_0+\Delta x)^3-x_0{}^3}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{x_0{}^3+3x_0^2\Delta x+3x_0(\Delta x)^2+(\Delta x)^3-x_0{}^3}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{3x_0^2\Delta x+3x_0(\Delta x)^2+(\Delta x)^3}{\Delta x}$$

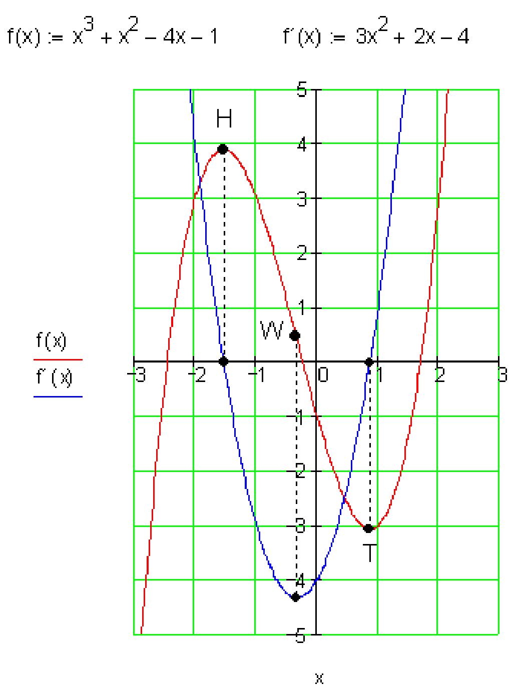
$$\Leftrightarrow\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta x(3x_0^2+3x_0\Delta x+(\Delta x^2))}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow\frac{\Delta y}{\Delta x}=3x_0^2+3x_0\Delta x+(\Delta x^2)$$

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(3x_0^2+3x_0\Delta x+(\Delta x)^2=3x_0^2$$

نو $\underline{\underline{f'(x_0)=3x_0^2}}$ د تابع $f(x)=x^3$ مشتق دی په ځای یا ټکي x_0 کې.

د مشتق تابع داسي ده: $\underline{\underline{f'(x_0)=3x_0^2}}$



د وضعیه کمیاتو - یا پروت ولاړ سیستم کې تابع او د تابع مشتق:
تابع(سوررنګه):
$f(x)=x^3+x^2-4x-1$
د تابع مشتق(شین):
$f'(x)=3x^2+2x-4$ ، چې بیرته د مشتق یا د میل تابع ده.

بیلګه۳:

ورکړ شوې تابع $f(x)=\frac{1}{x}$

غوښتونی: د x_0 په ځای کې د مشتق تابع

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\frac{1}{x_0+\Delta x}-\frac{1}{x_0}}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\frac{x_0}{x_0(x_0+\Delta x)}-\frac{(x_0+\Delta x)}{x_0(x_0+\Delta x)}}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\frac{x_0-(x_0+\Delta x)}{x_0(x_0+\Delta x)}}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\frac{x_0-x_0-\Delta x}{x_0(x_0+\Delta x)}}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\frac{-\Delta x}{x_0(x_0+\Delta x)}}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{-\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}\cdot x_0(x_0+\Delta x)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{-1}{x_0(x_0+\Delta x)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=-\frac{1}{x_0^2+x_0\cdot\Delta x}$$

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(-\frac{1}{x_0^2+x_0\cdot\Delta x}\right)=-\frac{1}{x_0^2}$$

نو $f'(x_0)=-\frac{1}{x_0^2}$ د x_0 په ځای کې مشتق دی

د مشتق تابع ده: $\underline{f'(x)=-\frac{1}{x^2}}$

بیلګه ۴ : یوه تابع $f(x)=\sqrt{x}$ دې ورکړ شوې وي.

د x_0 په ځای کې د تابع مشتق پیداکړی او د مشتق تابع.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\sqrt{x_0+\Delta x}-\sqrt{x_0}}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\left(\sqrt{x_0+\Delta x}-\sqrt{x_0}\right)\cdot\left(\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0}\right)}{\Delta x\cdot\left(\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0}\right)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{x_0+\Delta x-x_0}{\Delta x\cdot\left(\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0}\right)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}\cdot\left(\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0}\right)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0}}$$

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{1}{\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0}}\right)=\frac{1}{\sqrt{x_0}+\sqrt{x_0}}=\frac{1}{2\sqrt{x_0}}$$

نو $f'(x_0)=\frac{1}{2\sqrt{x_0}}$ د x_0 په ځای کې د پورته تابع مشتق دی

او د مشتق تابع $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ دی.

د $f(x)=x^q$ ډول توابعو مشتق د $q\in\mathbb{Q}$ سره.

د شمیرنې په بنسټ مو تر اوسه دا لاندې تر لاسه کړي:

تابع	د مشتق تابع	
$f(x)=x$	$f'(x)=1$	$f'(x)=1\cdot x^0$
$f(x)=x^2$	$f'(x)=2\cdot x$	$f'(x)=2\cdot x^1$
$f(x)=x^3$	$f'(x)=3\cdot x^2$	$f'(x)=3\cdot x^2$
$f(x)=\frac{1}{x}=x^{-1}$	$f'(x)=-\frac{1}{x^2}$	$f'(x)=-x^{-2}$
$f(x)=\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$	$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$f'=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$

که دا پورته پنځه قوانین یو د بل سره پرتله شي، نو کومان ترې لاس ته راځي، چې دا لاندې قوانین به باور ولري:

د توان قانون بې له ښووني

لومړی: زاړه ضریبونه د ضریب یا فاکتور په حیث د x کینې لور (په غربي ادبیاتو کې ورته وايي: ترمخ) ته ولیکی

دویم: نوی اکسپوننت هغه زوړ اکسپوننت دی، چې ۱ ترې کم شوی وي.

بیلګه:

$$f(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2} \Rightarrow f'(x) = -2x^{-3} = \underline{\underline{-\frac{2}{x^3}}}$$

موږ اوس د څو بنسټیزو توابعو مشتق شمیرنه تر څیړنې لاندې نیسو.

بیلګه ۱:

د یوې ثابتې مشتق :

موږ دالاندې تابع لرو،چې ارزښت یې یوثابت دی

ثابت $y = f(x) = c = Const$

نو د هر x_0 ځای لپاره لرو:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{c - c}{h} = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x = x_0} = f'(x_0) = 0$$

بیلګه ۲:

یوه $f(x)=x$ خطي(کرښیزه)تابع لرو.

د x_0 په ځای کې غواړو د دې تابع مشتق پیدا کړو او د مشتق تابع هم:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{(x_0+\Delta x)-x_0}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{x_0+\Delta x-x_0}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=1$$

$$\Rightarrow f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}1=\underline{\underline{1}}$$

نو $f'(x_0)=1$ د x_0 په ځای کې د تابع مشتق دی او $f'(x_0)=1$ د مشتق تابع ده یعني یوه ثابته ده.

بیلګه ۳ :

د $y=f(x)= c.u(x)$ ډوله تابع مشتق د c=ثابتې سره.

د یوې تابع مشتق، چې له یوې ساده تابع او یوې ثابتې سره د ضرب له لارې منځ ته راغلی وي، برابر دی د ساده تابع د مشتق سره، چې د(ثابتې=c) سره ضر ب شوی وي. یعني

له $y=f(x)= c.u(x)$ څخه لرو:

$$\Rightarrow f'(x)=c\cdot u'(x)$$

ثبوت:

$$f(x_0) = c\,u(x_0)$$
$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{c \cdot u(x_0 + \Delta x) - c \cdot u(x_0)}{\Delta x}$$
$$\Leftrightarrow f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} c \cdot \frac{u(x_0 + \Delta x) - u(x_0)}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow f'(x_0) = \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} c}_{c} \cdot \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x_0 + \Delta x) - u(x_0)}{\Delta x}}_{u'(x_0)}$$
$$\Leftrightarrow f'(x_0) = \underline{\underline{c \cdot u'(x_0)}}$$

بیلګه :

$$f(x) = 3x^4 \quad c = 3 \quad u(x) = x^4 \Rightarrow u'(x) = 4x^3$$
$$f'(x) = c \cdot u'(x) = 3 \cdot 4x^3 = \underline{\underline{12x^3}}$$

پیژند (تعریف):   دفرنځیالوېش

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) := \frac{dy}{dx}$$

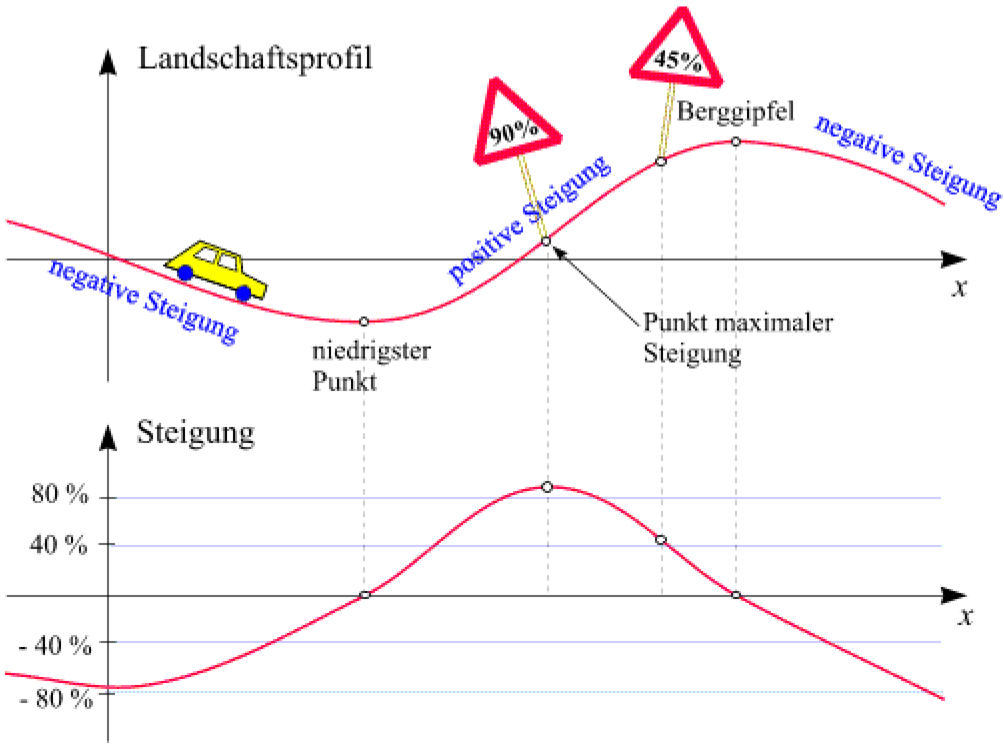
په بیدیا کې ځګوالئ

د تابع ګراف د سرک په څیر په فکر کې راولو، چې په بیدیا کې ځګ او تیټیږي یا کښته پورته ځغلي، نو په ښه توګه یې رسمولئ شو، چې د ګراف خویونه د مشتق سره په اړیکو کې راځي:

په لاندې څیره کې د لغاتونو په ترتیب ژباړه:د بیدیا جوړښت، منفي یا کمیزه ځګیدنه، خورا ټیټ ټکی،زیاتیزه یا مثبته ځګیدنه،د خورا ځګې ځګیدنې ټکی، د غره څوکه، منفي ځګیدنه.

پسې لاندې څیره کې: ځګیدنه

د سرک ښکته يا لاندې لور ته د ځانګړي دياګرام سره د سرک جګيدنه په هر ټکي کې انځور ده، د کومې سره چې يوه دويمه منحني ورکوي.



دياګرامونه په کره توره وګورى او وهڅيږئ، چې د دويمې منحني خويونه د لومړی منحني له خويونو را برسيره کړی.

چيرته چې سرک خورا ټيټ ټکی لري، هلته د جګيدنې ارزښت 0% دی. دا په دې معنا چې که موټر له دې ځايه تيرېږي په افقي ئا پراته ډول ځغلي او په همدې توره که موټر د غره په څوکه هم و ځغلي.

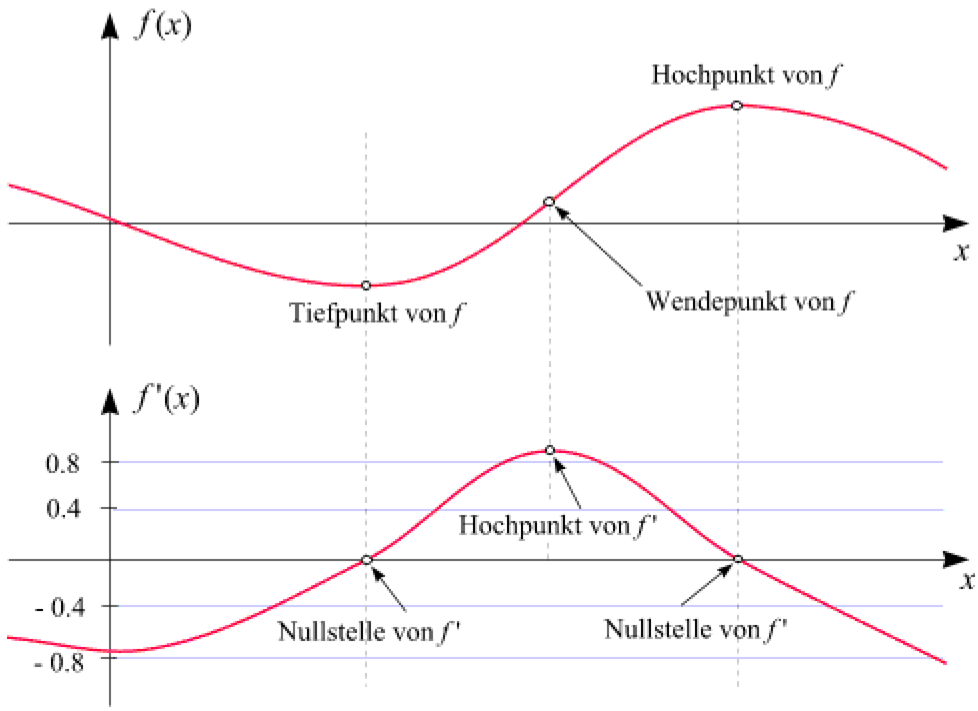
دا ټيک هغه ټکي دي، د کومو په چاپيريال کې چې منفي او مثبته جګيدنه يوبل سره رابندوي يا پولې لري.

د دې په منځ کې يو چيرته يو ټکی شتون لري، چې هلته جګيدنه ماکزيمال يا خورا لويه ده (په دې بيلګه کې 90%) .

همدي ته ورته په دویمه منحني (کږې) کې یو ه خوکه لري، مګر دا په دې بیدیا کې هغه ستره ،،څوکه،، نه ده، مګر که څوک غواړي، نو یوه د ،،جګیدني څوکه،، ده.

اوس دا دواړه کږې یا منحني په ورسره بلده یا معمول ریاضیکي ډول په لاندې شکلونو کې ښایو او سره پرتله کوو:

(دالماني پښتو ژباړه له پورته کښته لور له کیڼ وښي لو رته: د fخورا جګ- یاماکسیمال ټکی، د fخوراټیټټکی، د fاوړون- یا د انعطاف ټکی،د f' خورا جګ ټکی، د f' صفرځای د f' صفرځای)



لومړی منحني د f(x) ګراف دی، دویمه منحني یا کږه د مشتق تابع f'(x) ګراف دی.

دا دواړه ګرافونه بیا هم ټیک وګوری او وهڅیری، چې وپوهیری، چې دا یو د بیل سره په هره برخه کې څنګه یو د بل سره اړیکې لري.

د $f(x)$ ګراف دوه ځانکړي ټکي مو سترګو ته راځي: په یوه کې $f(x)$ مینیمال - یا خورا ټیټ ټکی په بل کې $f(x)$ ماکسیمال - یا خورا جګ ټکی دی. په دې ځایونو کې $f(x)$ صفرځایونه لري. هغه ټکی چې هلته د $f(x)$ ګراف خورا ستوغ دی، هغه، هغه د انعطاف ټکی یا اوړونټکی بلل کیږي. دا چې په دې ټکي کې د $f(x)$ مشتق خورا جګ دی (په دې بیلګه کې0,9)، دا د$f'(x)$ عظمي نقطه (خورا جګ ټکی) ده.

د ازادې سترګې سره د هغه ځای له لاندې منحني څخه ښه څرګندیږي، نسبت و پورته منحني ته.

د ې بیلګې څخه همدا اوس اټکل کولی شو یا ګومان راوړی شو: که یوه تابع $f(x)$ ولرو، نو د دې $f(x)$ تابع په هکله د $f(x)$ له مشتق څخه ارزښناک معلومات په لا س روړی شو.

دا موړته د ماکسیما او مینیما (د خورا جګ او خورا ټیټ ارزښت) په هکله (چې دا دواړه د افراطي ارزښت تر نامه یادیږي) او په دې هکله چې ګراف چېرته خور یا ستوغ دی، پوره کټور معلومات راکوي.

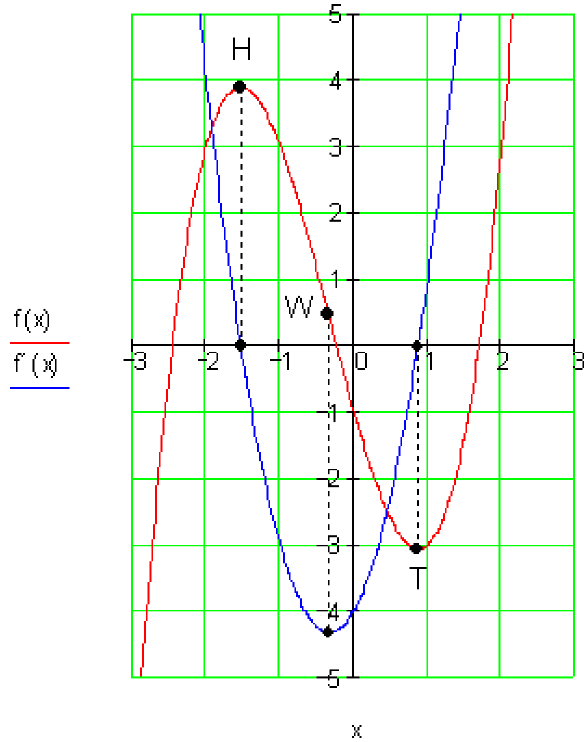
په کواوردینات سیستم (پروت –ولاړ-) کې تابع

او د تابع مشتق

تابع : $f(x) = x^3 + x^2 - 4x - 1$ مشتق: $f'(x) = 3x^2 + 2x - 4$

د یوه تابع مشتق بیرته تابع دی. موږدا د مشتق تابع یا د جګېدنې (میلان) تابع بولو

$f(x) := x^3 + x^2 - 4x - 1 \qquad f'(x) := 3x^2 + 2x - 4$



د دوارو توابعو ګراف په یوه قمیتي وضعیه (پروت ولاړ سیستم) کې و کښل شو.

هلته چې تابع f(x) یو جګ ټکی (H) همداسي ټیټ ټکی (T) لري ګراف د مشتق تابع x -محور کې غوځوي،په دې مانا چې د تابع ارزښت دلته صفر دی.

دا روښانه دی، ځکه چې په H او T کې تابع f(x) پروت یا افقي تانجنت لري، دا دا معنا لري، چې په دې ټکي کې د f(x) جګیدنه صفر ده.

د مشتق تابع f'(x) هلته مینیموم لري، چیرته چې د(f(x جګیدنه د H او T ترمنځ په پام ونیول شي د مطلق قیمت له مخې خورا لویه ده.

پوښتنېII:

لومړی - د f(x)تابع مشتق د x= 2 او x=u په ځایونو کې وشمیرئ

الف - $f(x) = x^2 + 3$ ب - $f(x) = \frac{2}{x}$ پ - $f(x) = \frac{1}{x+1}$ ت - $f(x) = \sqrt{x}$

دویم - مشتق یې وشمیرئ

الف - $f(x) = -2x^4 + 3x^2 - 4x + 2$ ب - $f(x) = 0,5x^4 - x^3 + 2,5x^2 - 8$

پ - $f(x) = \frac{1}{32}x^3 + \frac{3}{2}x - 4$ ت - $s(t) = -\frac{5}{6}t^2 + \frac{2}{3}t + \frac{5}{2}$

ټ - $f(x) = -(x-6)^2(x+1)$ ث- $f(x) = \frac{1}{2}\left(x^2 - 2\right)^2$

دریم - مشتق یې وشمیرئ:

الف – $f(x) = \frac{1}{16}\left(x^3 + x - 1\right)$ ب - $f(x) = x\left(x^2 - \frac{3}{2}x - 4\right)$

پ - $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ ت - $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

ټ - $f(x) = 6x + \frac{5}{x}$ ث - $f(x) = x^3 - 2x^2 + \frac{1}{x}$

څلورم - مشتق یې وشمیرئ:

الف – $f_t(x) = \frac{t}{2}x^4 - 2tx^3 + t^2$ ب - $f_k(x) = \frac{1}{k}x^3 + kx^2 + (k+1)x$

پ - $f_a(x)=\frac{1}{4}x^3+ax^2+\left(a-\frac{1}{2}\right)x-3$ ت - $f_t(x)=\frac{1}{2t}\left(x^2-t\right)^2$

ټ - $f(t)=5t^3-2t+5$ ث – $f(z)=-1,5z^3+2,5z^2+z$

ج - $A(u)=\frac{1}{2}u^2+3u+2u+1$ ح - $A(u)=\frac{1}{2}u\left(u^2+1\right)$

پنځم – د $f(x)$ جګوالی د $x=-3$ په ځای کې وشمیرئ او د $f(x)$ قاطع یا غوڅتکي د x - محورسره وشمیری .

الف – $f(x)=3x^2-5$ ب - $f(x)=4x-\frac{1}{x}$

شپږم - مشتق یې وشمیرئ:

الف – $f(x)=2x^2+3x+1$ ب - $f(x)=-x^2+2x-1$ پ - $f(x)=x+1$

ت - $\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x+4$ ټ - $f(x)=5b\,;\,b\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ ث- $f(x)=\frac{3}{4}x^2-\frac{2}{3}x-1$

ج - $f(x)=2x^3+3x^2-4x+2$ ح - $f(x)=-\frac{1}{4}x^3+\frac{2}{3}x^2-\frac{3}{4}x+\frac{1}{2}$

خ - $f(x)=\frac{1}{2}x^2+3x-7$ څ - $f(x)=\frac{3}{4}x^2+5x+8$

مفصل حلونه

لومړی –

الف –

$$f(x)=x^2+3$$

$$x=2:\ \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}=\frac{(2+\Delta x)^2+3-(2^2+3)}{\Delta x}$$

$$=\frac{4+4\cdot\Delta x+(\Delta x)^2+3-4-3}{\Delta x}=\frac{4\cdot\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}=\frac{\cancel{\Delta x}\cdot(4+\Delta x)}{\cancel{\Delta x}}=4+\Delta x$$

$$\Rightarrow f'(2)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(4+\Delta x)=\underline{\underline{4}}$$

$$x=u:\ \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(u+\Delta x)-f(u)}{\Delta x}=\frac{(u+\Delta x)^2+3-(u^2+3)}{\Delta x}$$

$$=\frac{u^2+2u\cdot\Delta x+(\Delta x)^2+3-u^2-3}{\Delta x}=\frac{2u\cdot\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}=\frac{\cancel{\Delta x}\cdot(2u+\Delta x)}{\cancel{\Delta x}}=2u+\Delta x$$

$$\Rightarrow f'(u)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(2u+\Delta x)=\underline{\underline{2u}}$$

ب –

$$f(x)=\frac{2}{x}$$

$$x=2:\ \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}=\frac{\frac{2}{2+\Delta x}-\frac{2}{2}}{\Delta x}=\frac{\frac{2}{2+\Delta x}-1}{\Delta x}=\frac{\frac{2}{2+\Delta x}-\frac{1\cdot(2+\Delta x)}{2+\Delta x}}{\Delta x}$$

$$=\frac{\frac{2-1\cdot(2+\Delta x)}{2+\Delta x}}{\Delta x}=\frac{\frac{2-2-\Delta x}{2+\Delta x}}{\Delta x}=\frac{\frac{-\Delta x}{2+\Delta x}}{\Delta x}=\frac{\frac{-\Delta x}{2+\Delta x}}{\frac{\Delta x}{1}}=\frac{-1\cdot\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}(2+\Delta x)}=\frac{-1}{2+\Delta x}$$

$$f'(2)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{-1}{2+\Delta x}\right)=-\underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

:

:

$$x=u:\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(u+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}=\frac{\frac{2}{u+\Delta x}-\frac{2}{u}}{\Delta x}=\frac{\frac{2\cdot u}{u\cdot(u+\Delta x)}-\frac{2\cdot(u+\Delta x)}{u\cdot(u+\Delta x)}}{\Delta x}$$

$$=\frac{\frac{2\cdot u-2\cdot(u+\Delta x)}{u\cdot(u+\Delta x)}}{\Delta x}=\frac{\frac{2\cdot u-2\cdot u-2\cdot\Delta x}{u\cdot(u+\Delta x)}}{\Delta x}=\frac{\frac{-2\cdot\Delta x}{u\cdot(u+\Delta x)}}{\frac{\Delta x}{1}}$$

$$=\frac{-2\cdot\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}\cdot u\cdot(u+\Delta x)}=\frac{-2}{u\cdot(u+\Delta x)}=\frac{-2}{u^2+u\cdot\Delta x}$$

$$f'(u)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{-2}{u^2+u\cdot\Delta x}\right)=-\frac{2}{u^2}$$

پ –

$$f(x)=\frac{1}{x+1}$$

$$x=2:\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}=\frac{\frac{1}{2+\Delta x+1}-\frac{1}{2+1}}{\Delta x}$$

$$=\frac{\frac{1}{3+\Delta x}-\frac{1}{3}}{\Delta x}=\frac{\frac{1\cdot 3}{3\cdot(3+\Delta x)}-\frac{1\cdot(3+\Delta x)}{3\cdot(3+\Delta x)}}{\Delta x}$$

$$=\frac{\frac{1\cdot 3-1\cdot(3+\Delta x)}{3\cdot(3+\Delta x)}}{\Delta x}=\frac{\frac{3-3-\Delta x}{3\cdot(3+\Delta x)}}{\Delta x}=\frac{\frac{-\Delta x}{3\cdot(3+\Delta x)}}{\frac{\Delta x}{1}}=\frac{-1\cdot\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}\cdot 3\cdot(3+\Delta x)}=\frac{-1}{3\cdot(3+\Delta x)}$$

$$f'(2)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{-1}{3(3+\Delta x)}\right)=-\frac{1}{9}$$

$$x=u:\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(u+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}=\frac{\frac{1}{u+\Delta x+1}-\frac{1}{u+1}}{\Delta x}$$

$$= \frac{\frac{1\cdot(u+1)}{(u+1)\cdot(u+\Delta x+1)} - \frac{1\cdot(u+\Delta x+1)}{(u+1)\cdot(u+\Delta x+1)}}{\Delta x}$$

$$= \frac{\frac{1\cdot(u+1)-1\cdot(u+\Delta x+1)}{(u+1)\cdot(u+\Delta x+1)}}{\Delta x} = \frac{\frac{u+1-u-\Delta x-1}{(u+1)\cdot(u+\Delta x+1)}}{\Delta x} = \frac{\frac{-\Delta x}{(u+1)\cdot(u+\Delta x+1)}}{\frac{\Delta x}{1}}$$

$$= \frac{-1\cdot\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}\cdot(u+1)\cdot(u+\Delta x+1)} = \frac{-1}{(u+\Delta x+1)(u+1)}$$

$$f'(u) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{-1}{(u+\Delta x+1)(u+1)} = \frac{-1}{(u+1)(u+1)} = -\underline{\underline{\frac{1}{(u+1)^2}}}$$

ت-

$$f(x) = \sqrt{x}$$

$$x = 2: \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x} = \frac{\sqrt{2+\Delta x}-\sqrt{2}}{\Delta x} = \frac{\left(\sqrt{2+\Delta x}-\sqrt{2}\right)\cdot\left(\sqrt{2+\Delta x}+\sqrt{2}\right)}{\Delta x\cdot\left(\sqrt{2+\Delta x}+\sqrt{2}\right)}$$

$$= \frac{2+\Delta x-2}{\Delta x\cdot\left(\sqrt{2+\Delta x}+\sqrt{2}\right)} = \frac{1\cdot\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}\cdot\left(\sqrt{2+\Delta x}+\sqrt{2}\right)} = \frac{1}{\sqrt{2+\Delta x}+\sqrt{2}}$$

$$f'(2) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{1}{\sqrt{2+\Delta x}+\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{2}} = \underline{\underline{\frac{1}{2\sqrt{2}}}}$$

$$x = u: \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(u+\Delta x)-f(u)}{\Delta x} = \frac{\sqrt{u+\Delta x}-\sqrt{u}}{\Delta x} = \frac{\left(\sqrt{u+\Delta x}-\sqrt{u}\right)\cdot\left(\sqrt{u+\Delta x}+\sqrt{u}\right)}{\Delta x\cdot\left(\sqrt{u+\Delta x}+\sqrt{u}\right)}$$

$$= \frac{u+\Delta x-u}{\Delta x\cdot\left(\sqrt{u+\Delta x}+\sqrt{u}\right)} = \frac{1\cdot\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}\cdot\left(\sqrt{u+\Delta x}+\sqrt{u}\right)} = \frac{1}{\sqrt{u+\Delta x}+\sqrt{u}}$$

$$f'(u) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{1}{\sqrt{u+\Delta x}+\sqrt{u}}\right) = \frac{1}{\sqrt{u}+\sqrt{u}} = \underline{\underline{\frac{1}{2\sqrt{u}}}}$$

دویم – مفصل حلونه

الف – $f(x) = -2x^4 + 3x^2 - 4x + 2 \Rightarrow f'(x) = -8x^3 + 6x - 4$

ب – $f(x) = 0{,}5x^4 - x^3 + 2{,}5x^2 - 8 \Rightarrow f'(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5x$

پ – $f(x) = \frac{1}{32}x^3 + \frac{3}{2}x - 4 \Rightarrow f'(x) = \frac{3}{32}x^2 + \frac{3}{2}$

ت- $s(t) = -\frac{5}{6}t^2 + \frac{2}{3}t + \frac{5}{2} \Rightarrow s'(t) = -\frac{5}{3}t + \frac{2}{3}$

ټ –

$$f(x) = -(x-6)^2(x+1) = -x^3 + 11x^2 - 24x - 36 \Rightarrow f'(x) = -3x^2 + 22x - 24$$

ث- $f(x) = \frac{1}{2}(x^2-2)^2 = \frac{1}{2}x^4 - 2x^2 + 2 \Rightarrow f'(x) = 2x^3 - 4x$

دریم – الف – $f(x) = \frac{1}{16}(x^3 + x - 1) \Rightarrow f'(x) = \frac{3}{16}x^2 + \frac{1}{16}$

ب – $f(x) = x\left(x^2 - \frac{3}{2}x - 4\right) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 4x \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 3x - 4$

پ – $f(x) = ax^4 + bx^2 + c \Rightarrow f'(x) = 4ax^3 + 2bx$

ت- $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \Rightarrow f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

ث – $f(x) = 6x + \frac{5}{x} = 6x + 5x^{-1} \Rightarrow f'(x) = 6 - 5x^{-2} = 6 - \frac{5}{x^2}$

ج --

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + \frac{1}{x} = x^3 - 2x^2 + x^{-1} \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 4x - x^{-2} = 3x^2 - 4x - \frac{1}{x^2}$$

ځلورم – مفصل حلونه

الف -

$$f_t(x) = \frac{t}{2}x^4 - 2tx^3 + t^2 \Rightarrow f_t'(x) = 2tx^3 - 6tx^2$$

ب -

$$f_k(x) = \frac{1}{k}x^3 + kx^2 + (k+1)x \Rightarrow f'_k(x) = \frac{3}{k}x^2 + 2kx + k + 1$$

پ -

$$f_a(x) = \frac{1}{4}x^3 + ax^2 + \left(a - \frac{1}{2}\right)x - 3 \Rightarrow f'_a(x) = \frac{3}{4}x^2 + 2ax + a - \frac{1}{2}$$

ت-

$$f_t(x) = \frac{1}{2t}\left(x^2 - t\right)^2 = \frac{1}{2t}x^4 - x^2 + \frac{1}{2}t \Rightarrow f_t'(x) = \frac{2}{t}x^3 - 2x$$

ټ –

$$f(t) = 5t^3 - 2t + 5 \Rightarrow f'(t) = 15t^2 - 2$$

ث –

$$f(z) = -1,5z^3 + 2,5z^2 + z \Rightarrow f'(z) = -4,5z^2 + 5z + 1$$

ج -

$$A(u) = \frac{1}{2}u^2 + 3u + 2u + 1 \Rightarrow A'(u) = u + 5$$

چ -

$$A(u) = \frac{1}{2}u\left(u^2 + 1\right) = \frac{1}{2}u^3 + \frac{1}{2}u \Rightarrow A'(u) = \frac{3}{2}u^2 + \frac{1}{2}$$

پنځم – مفصل حلونه

الف –

$$f(x)=3x^2-5\Rightarrow f'(x)=6x\Rightarrow f'(-3)=6\cdot(-3)=\underline{\underline{-18}}$$

د $f(x)$ صفرځایونه

$$f(x)=0\Leftrightarrow 3x^2-5=0\Rightarrow x_{1/2}=\pm\sqrt{\frac{5}{3}}\Rightarrow f'\left(\pm\sqrt{\frac{5}{3}}\right)=6\cdot\left(\pm\sqrt{\frac{5}{3}}\right)=\underline{\underline{\pm 6\cdot\sqrt{\frac{5}{3}}}}$$

ب –

$$f(x)=4x-\frac{1}{x}\Rightarrow f'(x)=4+\frac{1}{x^2}\Rightarrow f'(-3)=4+\frac{1}{9}=\underline{\frac{37}{9}}$$

د $f(x)$ صفرځایونه :

$$f(x)=0\Leftrightarrow 4x-\frac{1}{x}=0\Leftrightarrow\frac{4x^2-1}{x}=0\Leftrightarrow x^2=\frac{1}{4}\Rightarrow x_{1/2}=\pm\frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow f'\left(\pm\frac{1}{2}\right)=4+\frac{1}{\left(\pm\frac{1}{2}\right)^2}=4+\frac{1}{\frac{1}{4}}=4+4=\underline{\underline{8}}$$

شپږم – مفصل حلونه

الف – $f(x)=2x^2+3x+1\Rightarrow f'(x)=4x+3$

ب – $f(x)=-x^2+2x-1\Rightarrow f'(\ )=-2x+2$

پ – $f(x)=x+1\Rightarrow f'(x)=1$

ت- $f(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x+4\Rightarrow f'(x)=x-\frac{1}{3}$

ټ – $f(x)=5b\,;\,b\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\Rightarrow f'(x)=0$

ث ـ $f(x)=\frac{3}{4}x^2-\frac{2}{3}x-1 \Rightarrow f'(x)=\frac{3}{2}x-\frac{2}{3}$

ج ـ $f(x)=2x^3+3x^2-4x+2 \Rightarrow f'(x)=6x^2+6x-4$

چ ـ $f(\ )=-\frac{1}{4}x^3+\frac{2}{3}x^2-\frac{3}{4}x+\frac{1}{2} \Rightarrow f'(x)=-\frac{3}{4}x^2+\frac{4}{3}x-\frac{3}{4}$

ح ـ $f(x)=\frac{1}{2}x^2+3x-7 \Rightarrow f'(x)=x+3$

خ ـ $f(x)=\frac{3}{4}x^2+5x+8 \Rightarrow f'(x)=\frac{3}{2}x+5$

پوښتنې :

مشتق شمیرنه III

اول- مشتق يې ونيسئ

الف - $f(x)=\frac{4}{5}x^2-\frac{3}{4}x+\frac{1}{2}$ ب - $f(x)=-\frac{3}{7}x^2+\frac{4}{9}x+\frac{8}{10}$

پ - $f(x)=x^3-x^2+x+1$ ت - $f(x)=-x^3+x^2-x+7$

ټ - $f(x)=-\frac{3}{4}x^3+2x^2-x+1$ ث - $f(x)=-\frac{2}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+2x+\pi$

ج - $f(x)=4x^3+\pi x^2+bx+c$ چ - $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$

ح - $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}x^3-\frac{1}{\pi}x^2+\alpha x$ خ - $f(x)=\frac{4}{5}x^3-\frac{3}{4}x^2+4x+7$

دویم - مشتق يې ونیسئ

الف - $f(x)=x^4-2x^2+3x+1$ ب - $f(x)=2x^4+3x^2-2x+2$

پ - $f(x)=\frac{1}{2}x^4+\frac{1}{2}x^2-x+1$ ت - $f(x)=-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2$

ټ - $f(x)=x^5-2x^4+x^2-1$ ث - $f(x)=\frac{3}{4}x^4+\frac{5}{7}x^2+7$

ج - $f(x)=1$ چ - $f(x)=0$

ح - $f(x)=2x^6-4x^4+2x^2$ خ - $f(x)=\frac{3}{4}x^3+\frac{2}{3}x^2-x+4$

دریم – مشتق يې ونیسئ

الف - $f(x)=\frac{4}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+\sqrt{2}\cdot x$ ب - $f(x)=\sqrt{3}\cdot x^3-\sqrt{2}\cdot x^2+1$

پ - $f(x)=\frac{4}{3\pi}x^3+\frac{1}{3}x^2+1$ ت - $f(x)=3,5x^2-1,5x+2$

ټ - $f(x)=0,5x^2-2,5x+1$ ث - $f(x)=3,1x^2+\frac{7}{2}x-7$

ج - $f(x)=1,5x^3-2,5x^2+1$ چ - $f(x)=-2,5x^3+1,5x^2-1$

ح - $f(x)=t\cdot x^3+2x^2-4x$ خ - $f(x)=7,2x^2-8,2x+b$

څ - ځ -

څلورم – مشتق يې ونیسئ

الف - $f(x) = x^{-1}$ ب - $f(x) = \frac{1}{x}$

پ - $f(x) = \frac{2}{3x} + 2$ ت - $f(x) = 2x^{-2} + 3x^{-1} + 2$

ټ - $f(x) = -\frac{1}{2}x^{-2} + 2x^{-1}$ ث - $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$

ج - $f(x) = x^{\frac{1}{4}}$ چ - $f(x) = \sqrt{x}$ ح - $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ خ - $f(x) = \sqrt{x^3}$

ځوابونه

مشتق شمیرنه **III**

مفصل حلونه:

لومړی:

الف - $f(x) = \frac{4}{5}x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{2} \Rightarrow f'(x) = \frac{8}{5}x - \frac{3}{4}$

ب - $f(x) = -\frac{3}{7}x^2 + \frac{4}{9}x + \frac{8}{10} \Rightarrow f'(x) = -\frac{6}{7}x + \frac{4}{9}$

پ - $f(x) = x^3 - x^2 + x + 1 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 2x + 1$

ت - $f(x) = -x^3 + x^2 - x + 7 \Rightarrow f'(x) = -3x^2 + 2x - 1$

ټ - $f(x) = -\frac{3}{4}x^3 + 2x^2 - x + 1 \Rightarrow f'(x) = -\frac{9}{4}x^2 + 4x - 1$

ث - $f(x) = -\frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 2x + \pi \Rightarrow f'(x) = -2x^2 + 3x + 2$

ج – $f(x) = 4x^3 + \pi x^2 + bx + c \Rightarrow f'(x) = 12x^2 + 2\pi x + b$

چ - $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \Rightarrow f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

ح - $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}x^3 - \frac{1}{\pi}x^2 + \alpha x \Rightarrow f'(x) = \frac{3}{\sqrt{2}}x^2 - \frac{2}{\pi}x + \alpha$

خ - $f(x) = \frac{4}{5}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + 4x + 7 \Rightarrow f'(x) = \frac{12}{5}x^2 - \frac{3}{2}x + 4$

دویم:

الف - $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3x + 1 \Rightarrow f'(x) = 4x^3 - 4x + 3$

ب - $f(x) = 2x^4 + 3x^2 - 2x + 2 \Rightarrow f'(x) = 8x^3 + 6x - 2$

پ - $f(x) = \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{2}x^2 - x + 1 \Rightarrow f'(x) = 2x^3 + x - 1$

ت - $f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 \Rightarrow f'(x) = -x^3 + x^2 - x$

ټ - $f(x) = x^5 - 2x^4 + x^2 - 1 \Rightarrow f'(x) = 5x^4 - 8x^3 + 2x$

ث - $f(x) = \frac{3}{4}x^4 + \frac{5}{7}x^2 + 7 \Rightarrow f'(x) = 3x^3 + \frac{10}{7}x$

ج ـ $f(x) = 1 \Rightarrow f'(x) = 0$

چ - $f(x) = 0 \Rightarrow f'(x) = 0$

ح - $f(x) = 2x^6 - 4x^4 + 2x^2 \Rightarrow f'(x) = 12x^5 - 16x^3 + 4x$

خ - $f(x) = \frac{3}{4}x^3 + \frac{2}{3}x^2 - x + 4 \Rightarrow f'(x) = \frac{9}{4}x^2 + \frac{4}{3}x - 1$

دریم:

الف - $f(x) = \frac{4}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \sqrt{2} \cdot x \Rightarrow f'(x) = 4x^2 + 3x + \sqrt{2}$

ب - $f(x) = \sqrt{3} \cdot x^3 - \sqrt{2} \cdot x^2 + 1 \Rightarrow f'(x) = 3\sqrt{3} \cdot x^2 - 2\sqrt{2} \cdot x$

پ - $f(x) = \frac{4}{3\pi}x^3 + \frac{1}{3}x^2 + 1 \Rightarrow f'(x) = \frac{4}{\pi}x^2 + \frac{2}{3}x$

ت - $f(x) = 3{,}5x^2 - 1{,}5x + 2 \Rightarrow f'(x) = 7x - 1{,}5$

ټ - $f(x) = 0{,}5x^2 - 2{,}5x + 1 \Rightarrow f'(x) = x - 2{,}5$

ث - $f(x) = 3{,}1x^2 + \frac{7}{2}x - 7 \Rightarrow f'(x) = 6{,}2x + 3{,}5$

ج ـ $f(x) = 1{,}5x^3 - 2{,}5x^2 + 1 \Rightarrow f'(x) = 4{,}5x^2 - 5x$

چ - $f(x) = -2{,}5x^3 + 1{,}5x^2 - 1 \Rightarrow f'(x) = -7{,}5x^2 + 3x$

ح - $f(x) = t \cdot x^3 + 2x^2 - 4x \Rightarrow f'(x) = 3tx^2 + 4x - 4$

خ - $f(x) = 7,2x^2 - 8,2x + b \Rightarrow f'(x) = 14,4x - 8,2$

څلورم:

الف - $f(x) = x^{-1} \Rightarrow f'(x) = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$

ب - $f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1} \Rightarrow f'(x) = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$

پ - $f(x) = \frac{2}{3x} + 2 = \frac{2}{3}x^{-1} \Rightarrow f'(x) = -\frac{2}{3}x^{-2} = -\frac{2}{3x^2}$

ت - $f(x) = 2x^{-2} + 3x^{-1} + 2 \Rightarrow f'(x) = -4x^{-3} - 3x^{-2}$

ټ - $f(x) = -\frac{1}{2}x^{-2} + 2x^{-1} \Rightarrow f'(x) = x^{-3} - 2x^{-2}$

ث - $f(x) = x^{\frac{1}{3}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$

ج – $f(x) = x^{\frac{1}{4}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{4}x^{\frac{1}{4}-1} = \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}$

چ - $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$

ح - $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = x^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}-1} = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$

خ - $f(x)=\sqrt{x^3}=x^{\frac{3}{2}}\Rightarrow f'(x)=\frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1}=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$

پوښتنې

مشتقشمیرنه IV

لومړی: مشتق یې ونیسئ

الف- $f(x)=4x^2-3x+2$ ب - $f(x)=-2x^2+6x-4$

پ- $f(x)=2x^3-x^2+1$ ت - $f(x)=-7x^3+2x^2-x+1$

ټ - $f(x)=\left(x^2-3\right)^2$ ث - $f(x)=1-x^3$

ج = $f(x)=1-x^4$ چ - $f(x)=2x^2-x^4$

ح - $f(x)=0{,}5x^3+3x^2$ خ = $f(x)=-3x^7+1$

دویم: مشتق یې ونیسئ

الف- $f(x)=a+3bx^2$ ب - $f(x)=3x^7-0{,}5x^3$

پ- $f(x)=0{,}125x^8-30x^4$ ت - $f(x)=0{,}01ax^{12}-0{,}5bx^8$

ټ - $f(x)=3ax^5-0{,}5bx^4$ ث - $f(x)=0{,}25x^8+0{,}5x^{10}$

ج = $f(x)=0{,}25ax^4+0{,}5bx^5$ چ - $f(x)=0{,}5bx^6+0{,}2ax^5$

ح - $f(x)=-0{,}5x^5$ خ = $f(x)=0{,}5x^3+3x^2$

درېيم: مشتق یې ونیسئ

الف- $f(x) = -3x^7 + 2x$ ب - $f(x) = 0,5x^3 + 2x$

پ- $f(x) = 2x^3 - 3x^2$ ت - $f(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{4}x$

ټ - $f(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 4$ ث - $f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + x^2$

ج = $f(x) = \frac{1}{18}x^4 - \frac{4}{9}x^3 + x^2$ چ - $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$

ح - $f(x) = \frac{3}{8}x^3 - \frac{3}{4}x^2$ خ = $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 3x$

ځلورم:مشتق يي ونیسئ

الف- $f(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{2}x$ ب - $f(x) = -\frac{1}{16}x^4 + x^2$

پ- $f(x) = \frac{1}{16}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + 5$ ت - $f(x) = -\frac{1}{12}x^3 + \frac{3}{2}x + 9$

ټ - $f(x) = \frac{1}{16}x^4 - \frac{3}{4}x^2 + x$ ث - $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 + \frac{9}{2}x$

ج = $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x + 3$ چ - $f(x) = x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 8x$

ح - $f(x) = \frac{1}{12}x^4 - 2x^2$ خ = $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + 2x^2 + 5x$

حلونه

مشتقشمیرنهIV

مفصل حلونه:

لومړی:

الف- $f(x)=4x^2-3x+2 \Rightarrow f'(x)=8x-3$

ب - $f(x)=-2x^2+6x-4 \Rightarrow f'(x)=-4x+6$

پ- $f(x)=2x^3-x^2+1 \Rightarrow f'(x)=6x^2-2x$

ت - $f(x)=-7x^3+2x^2-x+1 \Rightarrow f'(x)=-21x^2+4x-1$

ټ - $f(x)=\left(x^2-3\right)^2=x^4-6x^2+9 \Rightarrow f'(x)=4x^3-12x$

ث - $f(x)=1-x^3 \Rightarrow f'(x)=-3x^2$

ج = $f(x)=1-x^4 \Rightarrow f'(x)=-4x^3$

چ - $f(x)=2x^2-x^4 \Rightarrow f'(x)=-4x^3+4x$

ح - $f(x)=0,5x^3+3x^2 \Rightarrow f'(x)=1,5x^2+6x$

خ = $f(x)=-3x^7+1 \Rightarrow f'(x)=-21x^6$

دويم:

الف- $f(x)=a+3bx^2 \Rightarrow f'(x)=6bx$

ب - $f(x)=3x^7-0,5x^3 \Rightarrow f'(x)=21x^6-1,5x^2$

پ- $f(x)=0,125x^8-30x^4 \Rightarrow f'(x)=x^7-120x^3$

ت - $f(x)=0,01ax^{12}-0,5bx^8 \Rightarrow f'(x)=0,12ax^{11}-4bx^7$

ټ - $f(x) = 3ax^5 - 0,5bx^4 \Rightarrow f'(x) = 15ax^4 - 2bx^3$

ث - $f(x) = 0,25x^8 + 0,5x^{10} \Rightarrow f'(x) = 5x^9 + 2x^7$

ج = $f(x) = 0,25ax^4 + 0,5bx^5 \Rightarrow f'(x) = 2,5bx^4 + ax^3$

چ - $f(x) = 0,5bx^6 + 0,2ax^5 \Rightarrow f'(x) = 3bx^5 + ax^4$

ح - $f(x) = -0,5x^5 \Rightarrow f'(x) = -2,5x^4$

خ = $f(x) = 0,5x^3 + 3x^2 \Rightarrow f'(x) = 1,5x^2 + 6x$

دریم:

الف- $f(x) = -3x^7 + 2x \Rightarrow f'(x) = -21x^6 + 2$

ب - $f(x) = 0,5x^3 + 2x \Rightarrow f'(x) = 1,5x^2 + 2$

پ- $f(x) = 2x^3 - 3x^2 \Rightarrow f'(x) = 6x^2 - 6x$

ت - $f(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{4}x \Rightarrow f'(x) = \frac{3}{8}x^2 - \frac{3}{4}$

ټ - $f(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 4 \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2}x^2 - x$

ث - $f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + x^2 \Rightarrow f'(x) = -x^3 + 2x$

ج = $f(x) = \frac{1}{18}x^4 - \frac{4}{9}x^3 + x^2 \Rightarrow f'(x) = \frac{2}{9}x^3 - \frac{4}{3}x^2 + 2x$

چ - $f(x)=\frac{1}{2}x^2-2x+1 \Rightarrow f'(x)=x-2$

ح - $f(x)=\frac{3}{8}x^3-\frac{3}{4}x^2 \Rightarrow f'(x)=\frac{9}{8}x^2-\frac{3}{2}x$

خ = $f(x)=-\frac{1}{3}x^3+3x \Rightarrow f'(x)=-x^2+3$

څلورم: الف- $f(x)=\frac{1}{8}x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{9}{2}x \Rightarrow f'(x)=\frac{3}{8}x^2-3x+\frac{9}{2}$

ب - $f(x)=-\frac{1}{16}x^4+x^2 \Rightarrow f'(x)=-\frac{1}{4}x^3+2x$

پ- / ت - $f(x)=-\frac{1}{12}x^3+\frac{3}{2}x+9 \Rightarrow f'(x)=-\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{2}$

ټ - $f(x)=\frac{1}{16}x^4-\frac{3}{4}x^2+x \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{4}x^3-\frac{3}{2}x+1$

ث - $f(x)=\frac{1}{2}x^3-3x^2+\frac{9}{2}x \Rightarrow f'(x)=\frac{3}{2}x^2-6x+\frac{9}{2}$

ج = $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x+3 \Rightarrow f'(x)=x^2-1$

چ - $f(x)=x^4-6x^3+12x^2-8x \Rightarrow f'(x)=4x^3-18x^2+24x-8$

ح - $f(x)=\frac{1}{12}x^4-2x^2 \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{3}x^3-4x$

خ = $f(x)=\frac{1}{4}x^4+2x^2+5x \Rightarrow f'(x)=x^3+4x^2+5$

پوښتنې

مشتقشميرنه VI

لومړی: د لاندې توابعو مشتق ونيسئ:

الف- $f(x)=5x^4-4x^3+3x^2-2x+6$ ب - $f(x)=\left(a^2+x^2\right)\left(a^2-x^2\right)$

پ- $f(x)=-2x^4+3x^2-4x+2$ ت - $f(x)=0,5x^4-x^3+2,5x^2-8$

ټ - $f(x)=\frac{1}{32}x^3+\frac{3}{2}x-4$ ث - $f(x)=-\frac{5}{6}x^2+\frac{2}{3}x+\frac{5}{2}$

دويم: د لاندې توابعو مشفق ونيسئ:

الف- $f(x)=-(x-6)^2(x+1)$ ب - $f(x)=\frac{1}{2}\left(x^2-2\right)^2$

پ- $f(x)=\frac{1}{16}\left(x^3+x-1\right)$ ت - $f(x)=x\left(x^2-\frac{3}{2}x-4\right)$

ټ - $f(x)=ax^4+bx^2+c$ ث - $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$

دريم: د لاندې توابعو مشفق ونيسئ:

الف- $f(x)=\frac{k}{2}x^4-2kx^3+k^2$ ب - $f(x)=\frac{1}{k}x^3+kx^2+(k+1)x$

پ- $f(x)=\frac{1}{4}x^3+ax^2+\left(a-\frac{1}{2}\right)x-3$ ت - $f(x)=\frac{1}{2k}\left(x^2-k\right)^2$

ټ - $f(t)=5t^3-2t+5$ ث - $f(z)=-1,5z^3+2,5z^2+z$

څلورم: د لاندې توابعو مشفق ونيسئ:

الف- $A(u)=\frac{1}{2}u^2+3u+2u+1$ ب - $A(u)=\frac{1}{2}u\left(u^2+1\right)$

پ- $f(x)=2\pi x^5-7x^3+\frac{3}{\pi}$ ت - $f(x)=\frac{x^2+2x+1}{x+1}$

ټ - $f(x)=\frac{x^2-2x+1}{x-1}$ ث - $f(x)=\frac{x^2-1}{x+1}$

ج = $f(x)=\frac{4x^2+12x+9}{2x+3}$ چ - $f(x)=\frac{\left(x^2+4x+4\right)^2}{x+2}$

پنځم: نلاندې تابع ورکړ شوې:

$ı\ f(x)=2x-\frac{1}{4}x^2\ ;\ x\in\mathbb{R}$

الف- د f(x) تابع جګوالی د x_0 په ځای کې وښایی د $\left[-4\,;-1;\,0\,;1{,}5\,;3\right]$ $x_0\in$ سره

ب - تابع f(x) په کوم ټکي کې د 3 جګوالي سره تانجنت لري؟

پ- د f(x) په P (2 | f(2))ټکي باندې د تانجنت مساوات وښایی

ت - د f(x) په P (2 | f(2)) ټکي باندې د نورمال یا عمود مساوات وښایی

ټ - تانجنت او نورمال یا عمود په وضعیهقیمتسیستم کې رسم کړی.

ث – $a(x)=t\cdot f(x)\,;\,t\in\mathbb{R}^*$

د x محور په S_1 او S_2 کې غوځوي(قطع کوي)

د t د کومو ارزښتونو لپاره تانجنت په S_1 او S_2 یو بل سره عمود دي؟

حلونه

مشتقشميرنه VI

نتيجې:

لومړی-

الف -

$f'(x) = 20x^3 - 12x^2 + 6x - 2 \qquad f''(x) = 60x^2 - 24x + 6$
$f'''(x) = 120x - 24$

ب - $f'''(x) = -24x \qquad f''(x) = -12x^2 \qquad f'(x) = -4x^3$

پ- $f'''(x) = -48x \qquad f''(x) = -24x^2 + 6 \qquad f'(x) = -8x^3 + 6x - 4$

ت - $f'''(x) = 12x - 6 \qquad f''(x) = 6x^2 - 6x + 5 \qquad f'(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5x$

ټ - $f'''(x) = \frac{3}{16} \qquad f''(x) = \frac{3}{16}x \qquad f'(x) = \frac{3}{32}x^2 + \frac{3}{2}$

ث - $f'''(x) = 0 \qquad f''(x) = -\frac{5}{3} \qquad f'(x) = -\frac{5}{3}x + \frac{2}{3}$

دويم:

الف- $f'''(x) = -6 \qquad f''(x) = -6x + 22 \qquad f'(x) = -3x^2 + 22x - 24$

ب - $f'''(x) = 12x \qquad f''(x) = 6x^2 - 4 \qquad f'(x) = 2x^3 - 4x$

پ- $f'(x)=\frac{3}{16}x^2+\frac{1}{16}\qquad f''(x)=\frac{3}{8}x\qquad f'''(x)=\frac{3}{8}$

ت - $f'(x)=3x^2-3x-4\qquad f''(x)=6x-3\qquad f'''(x)=6$

ټ - $f'(x)=4ax^3+2bx\qquad f''(x)=12ax^2+2b\qquad f'''(x)=24ax$

ث - $f'(x)=3ax^2+2bx+c\qquad f''(x)=6ax+2b\qquad f'''(x)=6a$

دریم:

الف- $f'(x)=2kx^3-6kx^2\qquad f''(x)=6kx^2-12kx\qquad f'''(x)=12kx-12k$

ب - $f'(x)=\frac{3}{k}x^2+2kx+k+1\qquad f''(x)=\frac{6}{k}x+2k\qquad f'''(x)=\frac{6}{k}$

پ- $f'(x)=\frac{3}{4}x^2+2ax+a-\frac{1}{2}\qquad f''(x)=\frac{3}{2}x+2a\qquad f'''(x)=\frac{3}{2}$

ت - $f'(x)=\frac{2}{k}x^3-2x\qquad f''(x)=\frac{6}{k}x^2-2\qquad f'''(x)=\frac{12}{k}x$

ټ - $f'(t)=15t^2-2\qquad f''(t)=30t\qquad f'''(t)=30$

ث - $f'(z)=-4,5z^2+5z+1\qquad f''(z)=-9z+5\qquad f'''(z)=-9$

څلورم:

الف- $A'(u)=u+5\qquad A''(u)=1\qquad A'''(u)=0$

ب - $A'(u)=\frac{3}{2}u^2+\frac{1}{2}\qquad A''(u)=3u\qquad A'''(u)=3$

پ-

$f'(x)=10\pi x^4-21x^2 \qquad f''(x)=40\pi x^3-42x \qquad f'''(x)=120\pi x^2-42$

ت - $f'(x)=1 \qquad f''(x)=0 \qquad f'''(x)=0$

ټ - $f'(x)=1 \qquad f''(x)=0 \qquad f'''(x)=0$

ث - $f'(x)=1 \qquad f''(x)=0 \qquad f'''(x)=0$

ج = $f'(x)=2 \qquad f''(x)=0 \qquad f'''(x)=0$

چ - $f'(x)=3x^2+12x+12 \qquad f''(x)=6x+12 \qquad f'''(x)=6$

پنځم:

الف-

$$f(x)=2x-\frac{1}{4}x^2 \Rightarrow f'(x)=2-\frac{1}{2}x$$

x	−4	−1	0	1,5	3
f'(x)	4	2,5	2	1,25	0,5

ب - د P(-2;-5) په ټکي کې د f(x) تانجنت جګوالی 3 لري.

پ- په f(x) باندې د تانجنت مساوات په ټکي (P (2 | f(2) کې: t(x) = x + 1

ت - په ټکي (P (2 | f(2) کې په f(x) باندې د عمود مساوات: n(x) = -x + 5

ټ - ث - د $t_{1,2}=\pm\frac{1}{2}$ لپاره تانجنتونه په ټکو S_1 او S_2 کې يو په بل عموددي.

مفصل حل:

لومړی: الف-

$$f(x) = 5x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 2x + 6$$
$$f'(x) = 5\cdot 4x^3 - 4\cdot 3x^2 + 3\cdot 2x^1 - 2\cdot 1 + 0 = \underline{\underline{20x^3 - 12x^2 + 6x - 2}}$$
$$f''(x) = 20\cdot 3x^2 - 12\cdot 2x^1 + 6\cdot 1 - 0 = \underline{\underline{60x^2 - 24x + 6}}$$
$$f'''(x) = 60\cdot 2x^1 - 24\cdot 1 + 0 = \underline{\underline{120x - 24}}$$

ب - $f(x) = (a^2 + x^2)(a^2 - x^2)$

اول- حل د صرب له لاري(د بینوم دریمه جمله)

$$f(x) = a^4 - x^4 \Rightarrow f'(x) = \underline{\underline{-4x^3}} \Rightarrow f''(x) = \underline{\underline{-12x^2}} \Rightarrow f'''(x) = \underline{\underline{-24x}}$$

دویم – د ضرب د قانون له مخې حل(مفصل)

$$f(x) = \underbrace{(a^2 + x^2)}_{u}\underbrace{(a^2 - x^2)}_{v} \Rightarrow u' = 2x \quad v' = -2x$$
$$f'(x) = u'v + uv' = 2x\cdot(a^2 - x^2) + (a^2 + x^2)(-2x)$$
$$= 2a^2x - 2x^3 - 2a^2x - 2x^3 = \underline{\underline{-4x^3}}$$
$$f''(x) = \underline{\underline{-12x^2}} \Rightarrow f'''(x) = \underline{\underline{-24x}}$$

پ- $f(x) = -2x^4 + 3x^2 - 4x + 2$

$f'(x) = -8x^3 + 6x - 4 \qquad f''(x) = -24x^2 + 6 \qquad f'''(x) = -48x$

ت - $f(x) = 0,5x^4 - x^3 + 2,5x^2 - 8$

$f'(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5x \qquad f''(x) = 6x^2 - 6x + 5 \qquad f'''(x) = 12x - 6$

ټ –

$$f(x)=\frac{1}{32}x^3+\frac{3}{2}x-4$$

$$f'(x)=\frac{1}{32}\cdot 3x^2+\frac{3}{2}\cdot 1-0=\underline{\underline{\frac{3}{32}x^2+\frac{3}{2}}}$$

$$f''(x)=\frac{3}{32}\cdot 2x^1+0=\underline{\underline{\frac{3}{16}}}x \qquad f'''(x)=\frac{3}{16}\cdot 1=\underline{\underline{\frac{3}{16}}}$$

ث –

$$f(x)=-\frac{5}{6}x^2+\frac{2}{3}x+\frac{5}{2}$$

$$f'(x)=-\frac{5}{3}x+\frac{2}{3} \qquad f''(x)=-\frac{5}{3} \qquad f'''(x)=0$$

دويم: الف- $f(x)=-(x-6)^2(x+1)$

- حل د ضربولو له لارې

$$f(x)=-\left(x^2-12x+36\right)(x+1)=-\left[x^3+x^2-12x^2-12x+36x+36\right]$$

$$=-\left[x^3-11x^2+24x+36\right]=-x^3+11x^2-24x-36$$

$$f'(x)=\underline{\underline{-3x^2+22x-24}}\Rightarrow f''(x)=\underline{\underline{-6x+22}}\Rightarrow f'''(x)=\underline{\underline{-6}}$$

دوي – حل د ځنزيري قانون له مخې.

$$f(x)=-\underbrace{(x-6)^2}_{u}\underbrace{(x+1)}_{v} \qquad u'=2(x-6)\cdot 1=2x-12 \qquad v'=1$$

$$f'(x)=-\left[u'v+uv'\right]=-\left[(2x-12)(x+1)+(x-6)^2\cdot 1\right]=$$

$$-\left[2x^2+2x-12x-12+x^2-12x+36\right]=-\left[3x^2-22x+24\right]=-3x^2+22x-24$$

$$\Rightarrow f''(x)=\underline{\underline{-6x+22}}\Rightarrow f'''(x)=\underline{\underline{-6}}$$

ب -

$$f(x)=\frac{1}{2}\left(x^2-2\right)^2$$

اول – حل د ضربولو له لارې

$$f(x)=\frac{1}{2}\underbrace{\left(x^2-2\right)^2}_{\text{2. bin. Formel}}=\frac{1}{2}\left(x^4-4x^2+4\right)=\frac{1}{2}x^4-2x^2+2$$

$$f'(x)=\underline{\underline{2x^3-4x}}\Rightarrow f''(x)=\underline{\underline{6x^2-4}}\Rightarrow f'''(x)=\underline{\underline{12x}}$$

یادونه: په پورته کې 2.bin.Formel د دویم بینوم فرمول په معنا دی.

دویم-د ځنزیري قانون سره حل:

$$f'(x)=\frac{1}{2}\left(x^2-2\right)^2=\frac{1}{2}\cdot 2\left(x^2-2\right)\cdot 2x=2x\left(x^2-2\right)=\underline{\underline{2x^3-4x}}$$

$$f''(x)=\underline{\underline{6x^2-4}}\Rightarrow f'''(x)=\underline{\underline{12x}}$$

پ-

$$f(x)=\frac{1}{16}\left(x^3+x-1\right)$$

$$f'(x)=\frac{1}{16}\left(3x^2+1\right)=\underline{\underline{\frac{3}{16}x^2+\frac{1}{16}}}\qquad f''(x)=\underline{\underline{\frac{3}{8}x}}\qquad f'''(x)=\underline{\underline{\frac{3}{8}}}$$

ت –

$$f(x)=x\left(x^2-\frac{3}{2}x-4\right)=x^3-\frac{3}{2}x^2-4x$$

$$f'(x)=\underline{\underline{3x^2-3x-4}}\Rightarrow f''(x)=\underline{\underline{6x-3}}\Rightarrow f''(x)=\underline{\underline{6}}$$

د لته به د ضرب قانون استعمال لرې غزېدلی وی.

ټ –

$$f(x) = ax^4 + bx^2 + c$$

$$f'(x) = 4ax^3 + 2bx \qquad f''(x) = 12ax^2 + 2b \qquad f'''(x) = 24ax$$

ث –

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \qquad f''(x) = 6ax + 2b \qquad f'''(x) = 6a$$

دريم: الف-

$$f(x) = \frac{k}{2}x^4 - 2kx^3 + k^2$$

$$f'(x) = 2kx^3 - 6kx^2 \qquad f''(x) = 6kx^2 - 12kx \qquad f'''(x) = 12kx - 12k$$

ب –

$$f(x) = \frac{1}{k}x^3 + kx^2 + \underbrace{(k+1)}_{\text{Konstante}}x$$

$$f'(x) = \frac{3}{k}x^2 + 2kx + (k+1)\cdot 1 = \underline{\underline{\frac{3}{k}x^2 + 2kx + \underbrace{k+1}_{\text{Konstante}}}}$$

$$\Rightarrow f''(x) = \underline{\underline{\frac{6}{k}x + 2k}} \Rightarrow f'''(x) = \underline{\underline{\frac{6}{k}}}$$

يادونه: دلته او په لاندې حل کې Konstante د ثابتې په معنا دی.

پ-

$$f(x) = \frac{1}{4}x^3 + ax^2 + \underbrace{\left(a - \frac{1}{2}\right)}_{\text{Konstante}}x - 3$$

$$f'(x)=\frac{3}{4}x^2+2ax+\left(a-\frac{1}{2}\right)\cdot 1=\underline{\underline{\frac{3}{4}x^2+2ax+a-\frac{1}{2}}}$$

$$\Rightarrow f''(x)=\underline{\underline{\frac{3}{2}x+2a}}\Rightarrow f'''(x)=\underline{\underline{\frac{3}{2}}}$$

ت - $f(x)=\frac{1}{2k}\left(x^2-k\right)^2$

اول – د ضرب له لارې حل (د بینوم دویم فرمول)

$$f(x)=\frac{1}{2k}\left(x^2-k\right)^2=\frac{1}{2k}\left(x^4-2kx^2+k^2\right)=\frac{1}{2k}x^4-x^2+\frac{1}{2}k$$

$$f'(x)=\underline{\underline{\frac{2}{k}x^3-2x}}\Rightarrow f''(x)=\underline{\underline{\frac{6}{k}x^2-2}}\Rightarrow f'''(x)=\underline{\underline{\frac{12}{k}x}}$$

دویم : د ځنزیري قانون له مخې (ساده دی)

$$f'(x)=\frac{1}{2k}\cdot 2\left(x^2-k\right)\cdot 2x=\frac{2}{k}x\left(x^2-k\right)=\underline{\underline{\frac{2}{k}x^3-2x}}$$

$$\Rightarrow f''(x)=\underline{\underline{\frac{6}{k}x^2-2}}\Rightarrow f'''(x)=\underline{\underline{\frac{12}{k}x}}$$

ټ -
$$f(t)=5t^3-2t+5$$
$$f'(t)=15t^2-2 \qquad f''(t)=30t \qquad f'''(t)=30$$

ث –
$$f(z)=-1{,}5z^3+2{,}5z^2+z$$
$$f'(z)=-4{,}5z^2+5z+1 \qquad f''(z)=-9z+5 \qquad f'''(z)=-9$$

څلورم:

الف-

$$A(u)=\frac{1}{2}u^2+3u+2u+1$$
$$A'(u)=u+5 \qquad A''(u)=1 \qquad A'''(u)=0$$

ب –

$$A(u)=\frac{1}{2}u\left(u^2+1\right)=\frac{1}{2}u^3+\frac{1}{2}u$$
$$A'(u)=\underline{\underline{\frac{3}{2}u^2+\frac{1}{2}}}\Rightarrow A''(u)=\underline{\underline{3u}}\Rightarrow A'''(u)=\underline{\underline{3}}$$

د لته به د ضرب قانون لرې غزيدلی وی.

پ-

$$f(x)=2\pi x^5-7x^3+\frac{3}{\pi}$$
$$f'(x)=10\pi x^4-21x^2 \qquad f''(x)=40\pi x^3-42x \qquad f'''(x)=120\pi x^2-42$$

ت -

$$f(x)=\frac{x^2+2x+1}{x+1}$$

اول- د تابع ترم د ترم بنه بدلون له لارې ساده کونه:

-

$$f(x)=\frac{x^2+2x+1}{x+1}=\frac{(x+1)(x+1)}{x+1}=x+1$$
$$f'(x)=\underline{\underline{1}}\Rightarrow f''(x)=\underline{\underline{0}}\Rightarrow f'''(x)=\underline{\underline{0}}$$

دويم – د وېش قانون استعمال (زيات وخت نيسي)

$$f(x)=\frac{x^2+2x+1}{x+1}$$

د $t\ u = x^2 + 2x + 1 \Rightarrow u' = 2x + 2$ سره

او $v = x+1 \Rightarrow y' = 1$ همداسي له $v^2 = (x+1)^2$ څخه لرو:

$$f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{(2x+2)(x+1) - (x^2+2x+1)\cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{2x^2+4x+2-x^2-2x-1}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{x^2+2x+1}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)^2}{(x+1)^2} = \underline{\underline{1}} \Rightarrow f''(x) = \underline{\underline{0}} \Rightarrow f'''(x) = \underline{\underline{0}}$$

د وېش قانون دي فقط په هغه حالتونو کي اسمعمال شي، که تابعترم په بله لار نه شي ساده کېدی.

ت - $f(x) = \dfrac{x^2-2x+1}{x-1}$

اول – تابعترم د ترم بدلون له لارې ساده کړی

$$f(x) = \frac{x^2-2x+1}{x-1} = \frac{(x-1)(x-1)}{x-1} = x-1$$

$$f'(x) = \underline{\underline{1}} \Rightarrow f''(x) = \underline{\underline{0}} \Rightarrow f'''(x) = \underline{\underline{0}}$$

د وېش قانون باندې صرف دظر کېږي.

ث - $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x+1}$

اول – تابعترم د ترم بدلون له لارې ساده کړی

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x+1} = \frac{(x+1)(x-1)}{x+1} = x-1$$

$$f'(x) = \underline{\underline{1}} \Rightarrow f''(x) = \underline{\underline{0}} \Rightarrow f'''(x) = \underline{\underline{0}}$$

د ویش قانون باندې صرف نظر کیږي.

ج =
$$f(x)=\frac{4x^2+12x+9}{2x+3}$$

اول – تابعترم د ترم بدلون له لارې ساده کړی

$$f(x)=\frac{4x^2+12x+9}{2x+3}=\frac{(2x+3)(2x+3)}{2x+3}=2x+3$$

$$f'(x)=\underline{2}\Rightarrow f''(x)=\underline{0}\Rightarrow f'''(x)=\underline{0}$$

د وېش له قانون څخه تیرېږو

چ -
$$f(x)=\frac{\left(x^2+4x+4\right)^2}{x+2}$$

اول – تابعترم د ترم بدلون له لارې ساده کړی

$$f(x)=\frac{\left(x^2+4x+4\right)^2}{x+2}=\frac{\left[(x+2)^2\right]^2}{x+2}=\frac{(x+2)^4}{x+2}=(x+2)^3$$

دویم – ځنزیري قانون استعمال کړی:

$$f'(x)=3(x+2)^2\cdot 1=3\left(x^2+4x+4\right)=\underline{\underline{3x^2+12x+12}}$$

$$\Rightarrow f''(x)=6x+12\Rightarrow f'''(x)=6$$

د ویش قانون باندې صرف نظر کیږي.

پنځم:

الف-

$$f(x) = 2x - \frac{1}{4}x^2 \Rightarrow f'(x) = 2 - \frac{1}{2}x$$

$$f'(-4) = 2 - \frac{1}{2}\cdot(-4) = 2 + 2 = 4$$

$$f'(-1) = 2 - \frac{1}{2}\cdot(-1) = 2 + \frac{1}{2} = 2,5$$

$$f'(0) = 2 - \frac{1}{2}\cdot 0 = 2$$

$$f'(1,5) = 2 - \frac{1}{2}\cdot 1,5 = 2 - 0,75 = 1,25$$

$$f'(3) = 2 - \frac{1}{2}\cdot 3 = 2 - 1,5 = 0,5$$

x	−4	−1	0	1,5	3
f'(x)	4	2,5	2	1,25	0,5

ب - $f(x) = 2x - \frac{1}{4}x^2 \Rightarrow f'(x) = 2 - \frac{1}{2}x$

د تانجنت جګیدنه به x0 کې ارزښت 3 لري.

$$f'(x_0) = 3 \Leftrightarrow 2 - \frac{1}{2}x_0 = 3 \Leftrightarrow x_0 = -2$$

$$f(x_0) = f(-2) = 2\cdot(-2) - \frac{1}{4}(-2)^2 = -5$$

د $P(-2|-5)$ په ټکي کې په f(x) باندې تانجنت ارزښت 3 لري.

پ- $f(x) = 2x - \frac{1}{4}x^2 \Rightarrow f'(x) = 2 - \frac{1}{2}x \quad P(2|f(2))$

$$t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

د x0 = 2 سره لرو:

$$t(x) = f'(2)(x-2) + f(2)$$

$$f(2) = 2\cdot 2 - \frac{1}{4}\cdot(2)^2 = 4 - 1 = 3 \qquad f'(2) = 2 - \frac{1}{2}\cdot 2 = 2 - 1 = 1$$

$$\Rightarrow t(x) = 1(x-2) + 3 = x - 2 + 3 = \underline{\underline{x+1}}$$

ت –

$$f(x) = 2x - \frac{1}{4}x^2 \Rightarrow f'(x) = 2 - \frac{1}{2}x \quad P(2|f(2))$$

$$n(x) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) + f(x_0)$$

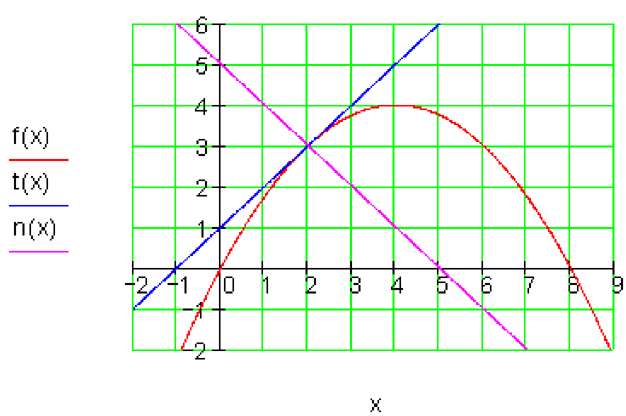
د $x0 = 2$ سره لرو:

$$n(x) = -\frac{1}{f'(2)}(x - 2) + f(2)$$

$$f(2) = 2 \cdot 2 - \frac{1}{4} \cdot (2)^2 = 4 - 1 = 3 \qquad f'(2) = 2 - \frac{1}{2} \cdot 2 = 2 - 1 = 1$$

$$\Rightarrow n(x) = -\frac{1}{1}(x - 2) + 3 = -x + 2 + 3 = \underline{\underline{-x + 5}}$$

پ –



ث - $g(x) = t \cdot f(x) = 2tx - \frac{1}{4}tx^2$

د $g(x)$ صفرځایونه:

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow 2tx - \frac{1}{4}tx^2 = 0 \Leftrightarrow x\left(2t - \frac{1}{4}tx\right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \Rightarrow S_1(0|0)$$

$$2t - \frac{1}{4}tx = 0 \,|\, -2t \Leftrightarrow -\frac{1}{4}tx = -2t \,|:\left(-\frac{1}{4}t\right) \Leftrightarrow x_2 = 8 \Rightarrow S_2(8|0)$$

د S1 او S2 عمودوالی په دې معنا دی چې:

---

g‘(0) د S1(0,0) په تکي کې د t1(x) تانجنت جګوالی دی. د تانجنت t2(x) جګوالی په تکي S2(8,0) کې دې هغه t1(x) ته عمود وي. د دې لپاره باید صدق وکړي:

g’(8)=-1/g’(0) د عمودوالي لپاره شرايط (1)

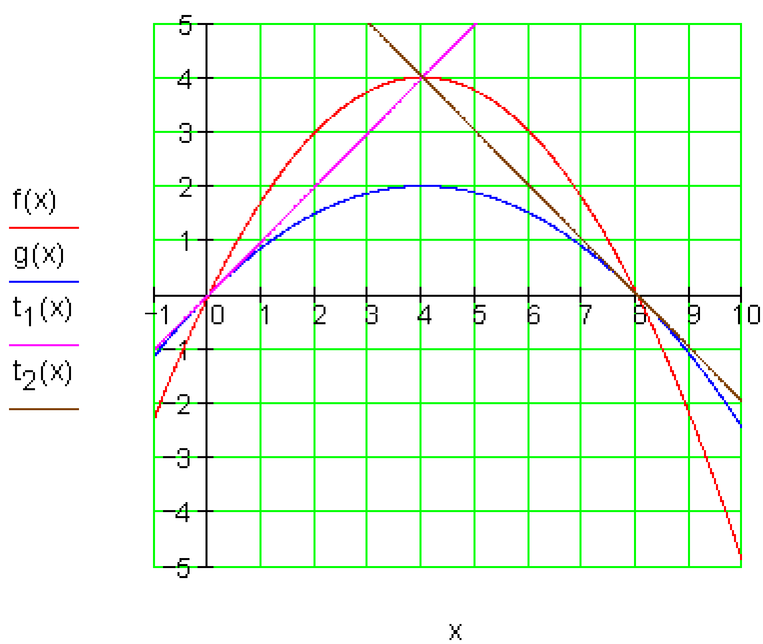
$$g'(x) = 2t - \frac{1}{2}tx \Rightarrow g'(8) = 2t - \frac{1}{2}t \cdot 8 = 2t - 4t = -2t$$

همداسې $g'(0) = 2t$

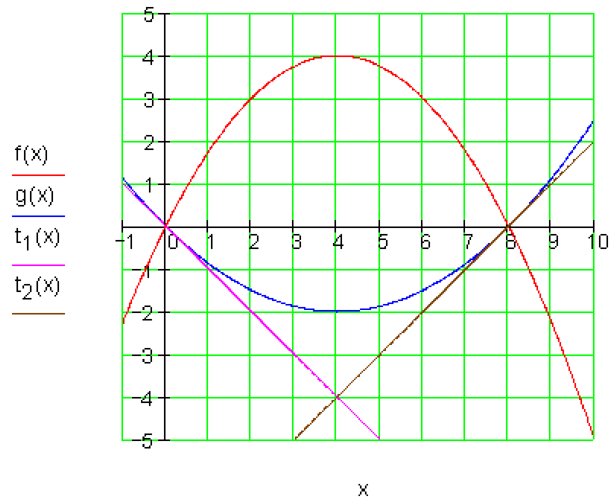
په (1) کې ځای په ځای کړی

$$-2t = -\frac{1}{2t} \,|\cdot 2t \Leftrightarrow -4t^2 = -1 \,|:(-4) \Leftrightarrow t^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \underline{\underline{t_{1/2} = \pm\frac{1}{2}}}$$

د t=1/2 لپاره صدق کوي.



د t=-1/2 لپاره صدق کوي:



III.3.1د مشتق شميرني قوانين

قضيه (د جمعي يا زياتون قاعده):
که يو تابع $f(x)$ د دوه توابعو $u(x)$ او $v(x)$ د جمعي څخه جوړ وي، نو مشتق يې هم د هر تابع د مشتق د جمعي څخه جوړ دی، يعني:

$$f(x) = u(x) + v(x)$$
$$\Rightarrow f'(x) = u'(x) + v'(x)$$

ښوونه:

$$f(x_0) = u(x_0) + v(x_0)$$
$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[u(x_0+\Delta x) - u(x_0)] + [v(x_0+\Delta x)] - v(x_0)}{\Delta x}$$
$$\Leftrightarrow f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[u(x_0+\Delta x) - u(x_0)]}{\Delta x} + \frac{[v(x_0+\Delta x)] - v(x_0)}{\Delta x}$$
$$\Leftrightarrow f'(x_0) = \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{u(x_0+\Delta x) - u(x_0)}{\Delta x}\right]}_{u'(x_0)} + \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{v(x_0+\Delta x) - v(x_0)}{\Delta x}\right]}_{v'(x_0)}$$
$$\Leftrightarrow f'(x) = \underline{\underline{u'(x_0) + v'(x_0)}}$$

بیلګه:

د دې ورکړ $f(x)=5x^2+3x$, $u(x)=5x^2$, $v(x)=3x$ توابعو شتق وشمیرئ.

ښوونه:

$$f(x)=5x^2+3x \quad u(x)=5x^2 \quad v(x)=3x$$
$$\Rightarrow u'(x)=10x \qquad v'(x)=3$$
$$f'(x)=u'(x)+v'(x)=\underline{\underline{10x+3}}$$

د جمعي قاعده تولزه کونه: که چیرې f_1،f_2،...... ،f_n توابع او k_1،k_2،....، k_n ثابت عددونه وي نو لرو(بې له ښوونې):

$$[k_1 f_1(x)+k_2 f_2(x)+.....+k_n f_n(x)]'$$
$$=k_1 f_1'(x)+k_2 f_2'(x)+.....+k_n f_n'(x)$$

قضیه (د ضرب قاعده):

که $f(x)$ او $g(x)$ دوه توابع وي، نو ښایو:

$$(f(x)\cdot g(x)' = f(x)'\cdot g(x)\cdot g(x)'$$

ښوونه: $\dfrac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}$

د مناسب فورم- یا بڼه بدلون یعنې په صورت کې د $-f(x_0)g(x)+f(x_0)g(x)$ ورزیاتولو څخه دا لاندې لرو:

$$\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x)+f(x_0)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}$$
$$=\frac{(f(x)-f(x_0))g(x)+f(x_0)(g(x)-g(x_0))}{x-x_0}$$
$$=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot g(x)+f(x_0)\cdot\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$$

له پورته څخه لاس راځي یعنې د دواړو لورو لیمیت نیسو یا پوله ټاکو:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}$$
$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot\lim_{x\to x_0}g(x)+f(x_0)\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$$
$$=f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0)$$

بیلګه:

$$f(x)=x^2\cdot x^3\quad u(x)=x^2\quad v(x)=x^3$$
$$\Rightarrow u'(x)=2x\quad v'(x)=3x^2$$
$$f'(x)=u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x)=2x\cdot x^3+x^2\cdot 3x^2=2x^4+3x^4=\underline{\underline{5x^4}}$$

بیلګه:

که $g(x)=x^2-1$ او $h(x)=\sqrt{x}$ ولرو، نو د $f(x)=g(x)h(x)$ مشتق غواړو پیدا کړو.

ښوونه:

په لاندې توګه مخ ته ځو:

$$f(x)=(x^2-1)\sqrt{x},\ f'(x)=2x\sqrt{x}+(x^2-1)\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{5}{2}x\sqrt{x}-\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

قضیه (د وېش قانون):

f او g دې دوه توابع وي. غواړو وښایو:

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

ثبوت: کولای شو، چې دا قضیه له دوه لارو یا طریقو وښایو(ثبوت کړو).

لومړۍ لار:

لومړۍ لار یا طریقه یې په لاندې کې ښایو او دویمه لار دې ګران زده کوونکي وښایي:

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]'=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)}-\frac{f(x)}{g(x)}}{h}\quad,\quad g(x)\neq 0$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)g(x)-f(x)g(x+h)}{g(x+h)g(x)h}$$

$$=\lim_{h\to0}\left[\frac{1}{g(x+h)g(x)}\frac{f(x+h)g(x)-f(x)g(x+h)}{h}\right]$$

غواړو $f(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g(x)$ صورت ته ور زيات کړو، نو لرو:

$$=\lim_{h\to0}\frac{1}{g(x+h)g(x)}\cdot\frac{f(x+h)g(x)-f(x)g(x)+f(x)g(x)-f(x)g(x+h)}{h}$$

$$=\frac{1}{g(x)g(x)}[\lim_{h\to0}g(x)\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-\lim_{h\to0}f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}]$$

$$=\frac{1}{[g(x)]^2}\left[g(x)\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-f(x)\lim_{h\to0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right]$$

$$=\frac{1}{[g(x)]^2}\left[g(x).f'(x)-f(x).g'(x)\right]=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

يعني لرو:

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]^{/}=\frac{f'(x)\,g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

دويمه لار:

د $\frac{1}{g(x)}$: مشتق غواړو پيدا کړو او ښايوچي دی:

$$(f(x))'=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\quad(\frac{1}{g(x)})'=-\frac{g'(x)}{g^2(x)}\qquad(*)$$

که $f(x)=\frac{1}{g(x)}$ کيږدو نو لرو:

$$(f(x))'=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{g(x+h)} - \frac{1}{g(x)}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{g(x)-g(x+h)}{g(x+h)g(x).h}$$

$$= \frac{\lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h}}{-\lim_{h\to 0} g(x+h)g(x)} = -\frac{g'(x)}{[g(x)]^2}$$

که دا $\frac{f(x)}{g(x)} = f(x)\frac{1}{g(x)}$ وپش ولرو او وغواړو چې مشتق یې پیدا کړو،نو له پورته ښوونې ، د (*) اړیکې او د ضرب قاعدې له مخې لرو:

$$[\frac{f(x)}{g(x)}]' = [f(x)\frac{1}{g(x)}]'$$

$$= f(x)(\frac{1}{g(x)})' + \frac{1}{g(x)} f'(x)$$

$$= f(x)(\frac{g'(x)}{(g(x))^2}) + \frac{1}{g(x)} f'(x)$$

$$= \frac{-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2} + \frac{f'(x)}{g(x)}$$

$$= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

یا په لنډه توګه دا لاندې:

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x)}{[v(x)]^2}$$

بیلګه:

$$f(x) = \frac{x}{x+2} \quad u(x) = x \quad v(x) = x+2$$

$$\Rightarrow u'(x) = 1 \quad v'(x) = 1 \quad [v(x)]^2 = (x+2)^2$$

$$f'(x) = \frac{u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x)}{[v(x)]^2} = \frac{1\cdot(x+2) - x\cdot 1}{(x+2)^2} = \frac{x+2-x}{(x+2)^2} = \underline{\underline{\frac{2}{(x+2)^2}}}$$

$$f(x) = \frac{2x^2+x^3}{x^4} \quad u(x) = 2x^2+x^3 \quad v(x) = x^4$$

$$\Rightarrow u'(x) = 4x+3x^2 \quad v'(x) = 4x^3 \quad [v(x)]^2 = x^8$$

$$f'(x) = \frac{u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x)}{[v(x)]^2} = \frac{(4x+3x^2)\cdot x^4 - (2x^2+x^3)\cdot 4x^3}{x^8}$$

$$= \frac{4x^5+3x^6-8x^5-4x^6}{x^8} = \frac{-x^6-4x^5}{x^8} = \frac{-x^5(x+4)}{x^8} = \underline{\underline{-\frac{x+4}{x^3}}}$$

بيلګه:

د $f(x) = \frac{x^2}{x^2-4}$ تابع (د $x^2-4 \neq 0$ سره) مشتق غواړو پيدا کړو.

حل: که چيرې $g(x) = x^2$ او $h(x) = x^2 - 4$

وضع شي نو لرو:
$$g'(x) = 2x$$
$$h'(x) = 2x$$

او د ويش قانون له مخي لرو:

$$f'(x) = \left[\frac{g(x)}{h(x)}\right]' = \frac{g'(x)h(x) - g(x)h'(x)}{[h(x)]^2}$$

$$= \frac{2x(x^2-4) - x^2.2x}{[x^2-4]^2}$$

$$= \frac{-8x}{[x^2-4]^2}$$

تولګه:

کمبنتوپش: (د سيکانت جګيدنه يا منځنى تغير ارزښت)	$\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$
دفرنشلوپش (د تانجنت جګيدنه يا لحضوي تغير ارزښت)	$f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$
د ثابتي يا تل همغي قانون	$f(x) = c \cdot u(x)$ د c =ثابت تي سره $\Rightarrow f'(x) = c \cdot u'(x)$ يا لند: $\boxed{f' = c \cdot u'}$
د جمعي- يا زياتون قانون	$f(x) = u(x) + v(x)$ $\Rightarrow f'(x) = u'(x) + v'(x)$ يا لند: $\boxed{f' = u' + v'}$
د ضرب – يا ځل قانون	$f(x) = u(x) \cdot v(x)$ $\Rightarrow f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$ يا په لنده بڼه: $\boxed{f' = u' \cdot v + u \cdot v'}$
د ويش قانون زنځيري قانون:	$f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ $\Rightarrow f'(x) = \dfrac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2}$ يا په لنده بڼه: $\boxed{f' = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}}$ $f(x) = f[z(x)]$ $\Rightarrow f'(x) = \underbrace{f'(z)}_{\text{äußere Ableitung}} \cdot \underbrace{z'(x)}_{\text{innere Ableitung}}$ د باندنى مشتق دننى مشتق

دنورو پسي توابعو مشتق:

مشتق تابعمساوات	تابع مساوات
$f'(x) = e^x$	$f(x) = e^x$
$f'(x) = \cos(x)$	$f(x) = \sin(x)$
$f'(x) = -\sin(x)$	$f(x) = \cos(x)$
$f'(x) = \frac{1}{x}$	$f(x) = \ln(x)$

بیلګه:

$f(x) = x \cdot e^x$ د ضرب قانون: $u' \cdot v + u \cdot v'$ د $u = x ; u' = 1; v = e^x ; v' = e^x$

$f'(x) = 1 \cdot e^x + x \cdot e^x = \underline{\underline{(x+1)e^x}}$ سره.

ثابتي دقانون: $f(x) = 3\ln x$ $f'(x) = 3 \cdot \frac{1}{x} = \frac{3}{x}$

$f(x) = x^2 \cdot \ln x$ دضرب قانون: $u' \cdot v + u \cdot v'$ د

$u = x^2 ; u' = 2x ; v = \ln x ; v' = \frac{1}{x}$ سره

$$f'(x) = 2x \cdot \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} = 2x\ln x + x = \underline{\underline{(2\ln x + 1)x}}$$

$f(x) = e^{\frac{1}{2}x}$ زنځیری قانون: $f'(x) = f'(z) \cdot z'$

$$z = \frac{1}{2}x \Rightarrow z' = \frac{1}{2} \quad f(z) = e^z \Rightarrow f'(z) = e^z \quad \Rightarrow \quad f'(x) = e^{\frac{1}{2}x} \cdot \frac{1}{2} = \underline{\underline{\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x}}}$$

$f(x) = 3\cos(x) - 2\sin(x)$ د جمعي قانونو: $v(x) = -2\sin(x)$ $u(x) = 3\cos(x)$

$$\Rightarrow u'(x) = -3\sin(x) \quad v'(x) = -2\cos(x)$$

$$f'(x) = u'(x) + v'(x) = \underline{\underline{-3\sin(x) - 2\cos(x)}}$$

3.III : د مشتقشمیرنې قوانین

پوښتنې

مشتقشمیرنه ۷

لومړی: مشتق یې ونیسئ:

الف- $f(x) = -\frac{1}{8}x^3 + \frac{1}{4}x^2 + \frac{5}{2}x$ ب - $f(x) = -\frac{2}{3}x^3 + x^2$

پ- $f(x) = -\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^3 + 3x^2$ ت - $f(x) = 6x^2 - \frac{2}{3}x^4$

ټ - $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^3$ ث - $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - 2x + 3$

ج = $f(x) = \frac{3}{8}x^3 - \frac{3}{2}x$ چ - $f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$

ح - $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + x^2 - x - 5$ خ = $f(x) = \frac{1}{48}x^4 - \frac{1}{2}x^2$

دویم: د لاندې توابعو مشتق ونیسئ د دې لپاره تاسو ته معلوم مشتققواعد وکاروئ او قاعده چې کاروئ و لیکئ

الف- $f(x) = 4x^3$ ب - $f(x) = 3e^x$ پ- $f(x) = 5\ln x$

ت - $f(x) = x^2 + x$ ټ - $f(x) = 2x^3 - 3x^2$ ث - $f(x) = 4x^5 - 2\ln x + 3e^x$

ج = $f(x) = x \cdot e^x$ چ - $f(x) = x^2 \cdot \ln x$ ح - $f(x) = x^3 \cdot (x^2 - 1)$

دریم: د لاندې توابعو مشتق ونیسئ د دې لپاره تاسو ته معلوم مشتققواعد وکاروئ او قاعده چې کاروئ و لیکئ

الف- $f(x) = \frac{x+1}{x}$ ب - $f(x) = \frac{x}{x+1}$ پ- $f(x) = \frac{(x+1) \cdot e^x}{x}$

ت - $f(x) = (x+1)^2$ ټ - $f(x) = (x^2+1)^2$ ث - $f(x) = e^{\frac{1}{2}x}$

ج = $f(x) = 2ax^3 - 4bx$ چ - $f(x) = e^{ax}$ ح - $f(x) = e^{-(x-2)}$

څلورم: د لاندی توابعو مشفقونه پیدا کړئ:

الف- $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + x - 7$ ب - $f(x) = x^2 \cdot e^x \cdot \sqrt{x}$

پ- $f(x) = \frac{x^2 \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt{x^3}}{x^3}$ ت - $f(x) = \frac{2x-1}{x+2}$

ټ - $f(x) = (a^2 + x)^2$ ث - $f(x) = (2x^3 - 3)^2$

پنځم:د لاندی توابعو مشفقونه پیدا کړئ:

الف- $f(x) = \left(x + e^x\right) \cdot \ln x$ ب - $f(x) = \ln(x^2 - 1)$

پ- $f(x) = (x+1) \cdot e^{(x+1)}$ ت - $f(x) = a\ln x - be^x - 3x^2$

ټ - $f(x)=\frac{(x+1)^2}{(x-1)^2}$ ث ــ $f(x)=\sqrt{\frac{3+x}{3-x}}$

شپږم: د لاندې توابعو دریواره مشتق ونئسئ

الف- $f(x)=3x+4$ ب - $f(x)=2x-4+x^3-5x+4x^3$

پ- $f(x)=3x^3+2x^2+x+1$ ت - $f(x)=(2x+1)^3$

ټ - $f(x)=x-x^4+3+x$ ث - $f(x)=1-2x-3x-4x+x^4$

ج = $f(x)=a+b+c^2-x-ax-bx-cx^3-c^3x$ چ ــ $f(x)=4x^3-2x^2+5x-2$

مفصل حلونه

مشتقشمیرنه **۷**

یادونه: په لاندې کې (Sr) د جمعي قانون (Pr) د ضرب قانون، Kettenregelځنزیري قانون (Kr) د ثابتي قانون (Qr) د وېش قانون په معنا دي

لورمړی:

الف- $f(x)=-\frac{1}{8}x^3+\frac{1}{4}x^2+\frac{5}{2}x \Rightarrow f'(x)=-\frac{3}{8}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$

ب - $f(x)=-\frac{2}{3}x^3+x^2 \Rightarrow f'(x)=-2x^2+2x$

پ- $f(x)=-\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^3+3x^2 \Rightarrow f'(x)=-x^3-\frac{3}{2}x^2+6x$

ت - $f(x)=6x^2-\frac{2}{3}x^4 \Rightarrow f'(x)=-\frac{8}{3}x^3+12x$

ټ - $f(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^3 \Rightarrow f'(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2$

ث - $f(x)=\frac{2}{3}x^3-2x+3 \Rightarrow f'(x)=2x^2-2$

ج = $f(x)=\frac{3}{8}x^3-\frac{3}{2}x \Rightarrow f'(x)=\frac{9}{8}x^2-\frac{3}{2}$

چ - $f(x)=x^3-3x^2-x+3 \Rightarrow f'(x)=3x^2-6x-1$

ح - $f(x)=-\frac{1}{3}x^3+x^2-x-5 \Rightarrow f'(x)=-x^2+2x-1$

خ = $f(x)=\frac{1}{48}x^4-\frac{1}{2}x^2 \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{12}x^3-x$

دويم:

الف- $f(x)=4x^3$ د ثابتي قانون $(Kr)\quad f'(x)=4\cdot(x^3)'=4\cdot 3x^2=\underline{\underline{12x^2}}$

ب - $f(x)=3\cdot e^x \quad (Kr) \quad f'(x)=3\cdot(e^x)'=\underline{\underline{3e^x}}$

پ- $f(x)=3\cdot \ln(x) \quad (Kr) \quad f'(x)=3\cdot[\ln(x)]'=3\cdot\frac{1}{x}=\underline{\underline{\frac{3}{x}}}$

ت - $f(x)=x^2+x$ د جمعي قانون: $f'(x)=\underline{\underline{2x+1}}$

.

ت - $f(x) = 2x^3 - 3x^2 \quad (Sr/Kr) \quad f'(x) = 2\cdot 3x^2 - 3\cdot 2x = \underline{\underline{6x^2 - 6x}}$

ث - $f(x) = 4x^5 - 2\cdot \ln(x) + 3\cdot e^x$

$(Sr/Kr) \quad f'(x) = 4\cdot 5x^4 - 2\cdot \frac{1}{x} + 3\cdot e^x = \underline{\underline{20x^4 - \frac{2}{x} + 3e^x}}$

ج = $f(x) = x\cdot e^x$ د $u'\cdot v + u\cdot v'$ ضرب قانو د $u = x;\ u' = 1;\ v = e^x;\ v' = e^x$:
سره

$f'(x) = 1\cdot e^x + x\cdot e^x = \underline{\underline{(x+1)\,e^x}}$

چ - $f(x)= x^2.\ln x$ (Pr د ضرب قانون) $u'v+uv'$ د $u=x^2;\ u'=2x; v=\ln x; v'=1/x$
سره.

$f(x) = x^2\cdot \ln(x) \quad (Pr): \ u'\cdot v + u\cdot v' \ \text{mit}\ u = x^2;\ u' = 2x;\ v = \ln(x);\ v' = \frac{1}{x}$

$f'(x) = 2x\cdot \ln(x) + x^2\cdot \frac{1}{x} = 2x\cdot \ln(x) + x = \underline{\underline{(2\ln x + 1)\,x}}$

ح - $f(x) = x^3\cdot (x^2 - 1) \quad (Pr/Sr): \ u'\cdot v + u\cdot v'$

د $u = x^3;\ u' = 3x^2;\ v = x^2 - 1;\ v' = 2x$ سره

$f'(x) = 3x^2\cdot (x^2-1) + x^3\cdot 2x = 3x^4 - 3x^2 + 2x^4 = \underline{\underline{5x^4 - 3x^2}}$

دریم: الف-د لاندې پینتو:

$f(x) = \frac{x+1}{x}$ د وېش قانون: $\frac{u'\cdot v - u\cdot v'}{v^2}$

د $u = x+1;\ u' = 1;\ v = x;\ v' = 1;\ v^2 = x^2$ سره

$$f'(x)=\frac{1\cdot x-(x+1)\cdot 1}{x^2}=\frac{x-x-1}{x^2}=-\frac{1}{x^2}$$

ب –

$$f(x)=\frac{x}{x+1}\quad (Qr/Sr):\ \frac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2}$$

$$\text{mit } u=x;\ u'=1;\ v=x+1;\ v'=1;\ v^2=(x+1)^2$$

$$f'(x)=\frac{1\cdot(x+1)-x\cdot 1}{(x+1)^2}=\frac{x+1-1}{(x+1)^2}=\frac{1}{(x+1)^2}$$

پ- د... سره

$$f(x)=\frac{(x+1)e^x}{x}\quad (Qr/Pr/Sr):\ \frac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2}$$

$$\text{mit } u=(x+1)e^x;\ u'=e^x+(x+1)e^x;\ v=x;\ v'=1;\ v^2=x^2$$

$$f'(x)=\frac{\left[e^x+(x+1)e^x\right]\cdot x-(x+1)e^x\cdot 1}{x^2}$$

$$=\frac{xe^x+x^2e^x+xe^x-xe^x-e^x}{x^2}=\frac{(x^2+x-1)e^x}{x^2}$$

ت –

$f(x)=(x+1)^2$ ځنزيري قانو: $f'(x)=f'(z)\cdot z'$

$$z=x+1\Rightarrow z'=1\quad f(z)=z^2\Rightarrow f'(z)=2z$$

$$f'(x)=2(x+1)\cdot 1=2(x+1)$$

ټ – $f(x)=(x^2+1)^2$

ځنزيري قانون: $f'(x) = f'(z).z'$

$$z = x^2 + 1 \Rightarrow z' = 2x \quad f(z) = z^2 \Rightarrow f'(z) = 2z$$
$$f'(x) = 2(x^2+1)\cdot 2x = 4x(x^2+1) = \underline{\underline{4x^3 + 4x}}$$

ث - $f(x) = e^{\frac{1}{2}x}$ ځنزيري قانون $f'(x) = f'(z)\cdot z'$

$$z = \frac{1}{2}x \Rightarrow z' = \frac{1}{2} \quad f(z) = e^z \Rightarrow f'(z) = e^z \quad \Rightarrow \quad f'(x) = e^{\frac{1}{2}x}\cdot\frac{1}{2} = \underline{\underline{\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x}}}$$

ج = $f(x) = 2ax^3 - 4bx \quad (Sr/Kr) \quad \Rightarrow f(x) = 2\cdot 3ax^2 - 4b = \underline{\underline{6ax^2 - 4b}}$

چ - $f(x) = e^{ax}$ ځنزيري قانون: $f'(x) = f'(z).z'$

$$z = ax \Rightarrow z' = a \quad f(z) = e^z \Rightarrow f'(z) = e^z \quad \Rightarrow \quad f'(x) = e^{ax}\cdot a = \underline{\underline{ae^{ax}}}$$

ح -

$f(x) = e^{-(x-2)}$ ځنزيري قانون: $f'(x) = f'(z).z'$

$$z = -(x-2) = -x + 2 \Rightarrow z' = -1 \quad f(z) = e^z \Rightarrow f'(z) = e^z$$
$$\Rightarrow \quad f'(x) = e^{-(x-2)}\cdot(-1) = \underline{\underline{-e^{-(x-2)}}}$$

ځلورم:

الف- $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + x - 7 \Rightarrow f'(x) = \underline{\underline{9x^2 - 4x + 1}}$

ب - $f(x) = x^2\cdot e^x\cdot\sqrt{x} = x^2\cdot x^{\frac{1}{2}}\cdot e^x = \underbrace{x^{\frac{5}{2}}}_{u}\cdot\underbrace{e^x}_{v} \Rightarrow f'(x) = u'v + uv'$

د $u = x^{\frac{5}{2}} \Rightarrow u' = \frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}}$ او $v = e^x \Rightarrow v' = e^x$ سره لرو:

$$f'(x) = \frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}} \cdot e^x + x^{\frac{5}{2}} \cdot e^x = \underline{\underline{\left(\frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{5}{2}}\right)e^x}}$$

پ-
$$f(x) = \frac{x^2 \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt{x^3}}{x^3} = \frac{x^2 \cdot x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{3}{2}}}{x^3} = \frac{x^{\frac{4}{2}+\frac{1}{2}+\frac{3}{2}}}{x^3} = \frac{x^{\frac{8}{2}}}{x^3} = \frac{x^4}{x^3} = x \Rightarrow f'(x) = \underline{\underline{1}}$$

ت -
$$f(x) = \frac{2x-1}{x+2} \Rightarrow f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

د $u = 2x - 1 \Rightarrow u' = 2$ او $v = x + 2 \Rightarrow v' = 1$ او $v^2 = (x+2)^2$ سره لرو:

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{2 \cdot (x+2) - (2x-1) \cdot 1}{(x+2)^2} = \frac{2x + 4 - 2x + 1}{(x+2)^2} = \underline{\underline{\frac{5}{(x+2)^2}}}$$

ټ -
$$f(x) = (a^2 + x)^2 \Rightarrow f'(x) = 2(a^2 + x) \cdot 1 = \underline{\underline{2(a^2 + x)}}$$

ث –

$$f(x) = (2x^3 - 3)^2 \Rightarrow f'(x) = 2(2x^3 - 3) \cdot 6x^2 = 12x^2(2x^3 - 3) = \underline{\underline{24x^5 - 36x^2}}$$

پنځم:

الف-

$$f(x) = \underbrace{(x + e^x)}_{u} \cdot \underbrace{\ln(x)}_{v} \Rightarrow f'(x) = u'v + uv'$$

د $u = x + e^x \Rightarrow u' = 1 + e^x$ او $v = \ln(x) \Rightarrow v' = \frac{1}{x}$ سره كيږي يا لرو:

$$f'(x) = (1+e^x)\cdot\ln(x) + (x+e^x)\cdot\frac{1}{x} = \underline{\underline{\ln x + \ln x\cdot e^x + 1 + \frac{e^x}{x}}}$$

ب –

$f(x) = \ln(x^2-1)$ زنځيري قانون $f'(x) = f'(z)\cdot z'$

$$z = x^2 - 1 \Rightarrow z' = 2x \quad f(z) = \ln(z) \Rightarrow f'(z) = \frac{1}{z}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x^2-1}\cdot 2x = \underline{\underline{\frac{2x}{x^2-1}}}$$

پ- $f(x) = (x+1)\cdot e^{(x+1)} \Rightarrow f'(x) = u'v + uv'$

د $u = (x+1) \Rightarrow u' = 1$ او $v = e^{(x+1)} \Rightarrow v' = e^{(x+1)}$ سره

$$f'(x) = 1\cdot e^{(x+1)} + (x+1)e^{(x+1)} = [1+(x+1)]e^{(x+1)} = \underline{\underline{(x+2)e^{(x+1)}}}$$

ت - $f(x) = a\cdot\ln(x) - b\cdot e^x - 3\cdot x^2 \Rightarrow f'(x) = \underline{\underline{\frac{a}{x} - be^x - 6x}}$

ټ – $f(x) = \frac{(x+1)^2}{(x-1)^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

د $u = (x+1)^2 \Rightarrow u' = 2(x+1)$ او $v = (x-1)^2 \Rightarrow v' = 2(x-1)$ او

$v^2 = (x-1)^4$ د سره لرو:

$$f'(x)=\frac{2(x+1)\cdot(x-1)^2-(x+1)^2\cdot 2(x-1)}{(x-1)^4}$$
$$=\frac{(x-1)\left[2(x+1)(x-1)-2(x+1)^2\right]}{(x-1)^4}=\frac{2(x+1)(x-1)-2(x+1)^2}{(x-1)^3}$$
$$=\frac{2\left(x^2-1\right)-2(x+1)^2}{(x-1)^3}=\frac{2x^2-2-2x^2-4x-2}{(x-1)^3}=\frac{-4x-4}{(x-1)^3}=-\frac{4(x+1)}{(x-1)^3}$$

ث ــ

$$f(x)=\sqrt{\frac{3+x}{3-x}}=\left(\frac{3+x}{3-x}\right)^{\frac{1}{2}}\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{3+x}{3-x}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(\frac{3+x}{3-x}\right)'$$

د ځنزيري قانون له مخې منځشميرنه:

$$\left(\frac{3+x}{3-x}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}\quad u=3+x\Rightarrow u'=1;\ v=3-x\Rightarrow v'=-1;\ v^2=(3-x)^2$$
$$\left(\frac{3+x}{3-x}\right)'=\frac{1\cdot(3-x)-(3+x)\cdot(-1)}{(3-x)^2}=\frac{3-x+3+x}{(3-x)^2}=\frac{6}{(3-x)^2}$$

$$f'(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{3-x}{3+x}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{6}{(3-x)^2}=\frac{3(3-x)^{\frac{1}{2}}}{(3+x)^{\frac{1}{2}}\cdot(3-x)^2}=\frac{3(3-x)^{-\frac{3}{2}}}{(3+x)^{\frac{1}{2}}}$$
$$=\frac{3}{(3-x)^{\frac{3}{2}}(3+x)^{\frac{1}{2}}}=\frac{3}{(3-x)(3-x)^{\frac{1}{2}}(3+x)^{\frac{1}{2}}}$$
$$=\frac{3}{(3-x)\left[(3-x)(3+x)\right]^{\frac{1}{2}}}=\frac{3}{(3-x)\left(9-x^2\right)^{\frac{1}{2}}}$$

شپږم:

الف- $f(x)=3x+4 \Rightarrow f'(x)=3 \qquad f''(x)=0 \qquad f'''(x)=0$

ب - $f(x)=2x-4+x^3-5x+4x^3=5x^3-3x-4$
$\Rightarrow f'(x)=15x^2-3 \qquad f''(x)=30x \qquad f'''(x)=30$

پ- $f(x)=3x^3+2x^2+x+1$
$\Rightarrow f'(x)=9x^2+4x+1 \qquad f''(x)=18x+4 \qquad f'''(x)=18$

ت -
$$f(x)=(2x+1)^3$$
$$\Rightarrow f'(x)=3(2x+1)^2\cdot 2=6\left(4x^2+4x+1\right)=24x^2+24x+6$$
$$f''(x)=48x+24 \quad f'''(x)=48$$

ټ - $f(x)=x-x^4+3+x=-x^4+2x+3$
$\Rightarrow f'(x)=-4x^3+2 \qquad f''(x)=-12x^2 \qquad f'''(x)=-24x$

ث –

$$f(x)=1-2x-3x-4x+x^4=x^4-9x+1$$
$$\Rightarrow f'(x)=4x^3-9 \qquad f''(x)=12x^2 \qquad f'''(x)=24x$$

ج- ثابت يا تل همغه=konstant

$$f(x)=\underbrace{a+b+c^2}_{\text{Konstante}}-x-ax-bx-cx^3-c^3x$$
$$f'(x)=-1-a-b-3cx^2-c^3=-3cx^2-\underbrace{a-b-c^3-1}_{\text{Konstante}}$$
$$f''(x)=-6cx \qquad f'''(x)=-6c$$

چ -

$$f(x) = 4x^3 - 2x^2 + 5x - 2$$
$$\Rightarrow f'(x) = 12x^2 - 4x + 5 \qquad f''(x) = 24x - 4 \qquad f'''(x) = 24$$

د جګو درجو مشتق

د لومړي مشتق پرته د لوړو درجو مشتق کونه هم شته، چې د ورپسې مشتق له لارې لاسته راځي
د $f'(x)$ بیا مشتق نیوني سره د $f''(x)$ مشتق تابع لاس ته راځي، چې د دویم مشتقتابع په نامه یادیږي.

بیلګه:

$$f(x) = x^3 + x^2 + x + 1 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2x + 1 \Rightarrow \underline{\underline{f''(x) = 6x + 2}}$$

د $f''(x)$ بیا مشتق نیونه و دریم مشتق ته اوداسې نور

$$f(x) = x^3 + x^2 + x + 1 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2x + 1 \Rightarrow f''(x) = 6x + 2 \Rightarrow \underline{\underline{f'''(x) = 6}}$$

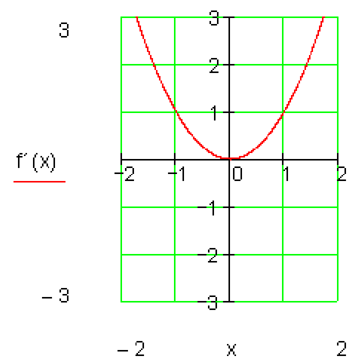
د $f(x) = \frac{x^3}{3}$ تابع دې ۴ واره مشتق ونیول شي

$$f(x) = \frac{x^3}{3} \Rightarrow f'(x) = \frac{3x^2}{3} = x^2 \Rightarrow f''(x) = 2x \Rightarrow f'''(x) = 2 \Rightarrow f''''(x) = 0$$

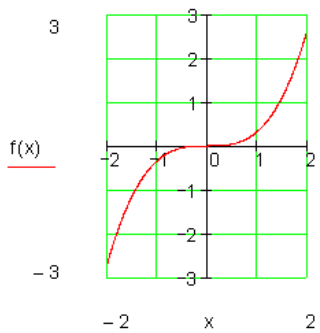
د تابع ګراف :

د یوه تابع انځورونه د اړونده مشتق تابع سره

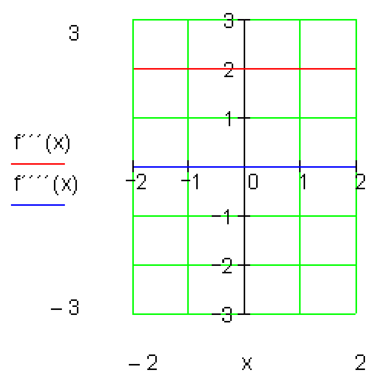
$$f(x)=\frac{x^3}{3}\Rightarrow f'(x)=x^2$$



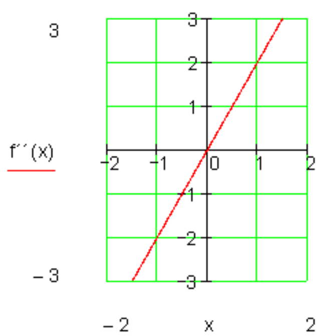
$$f(x)=\frac{x^3}{3}$$



$$f''(x)=2x\Rightarrow f'''(x)=2\Rightarrow f''''(x)=0$$

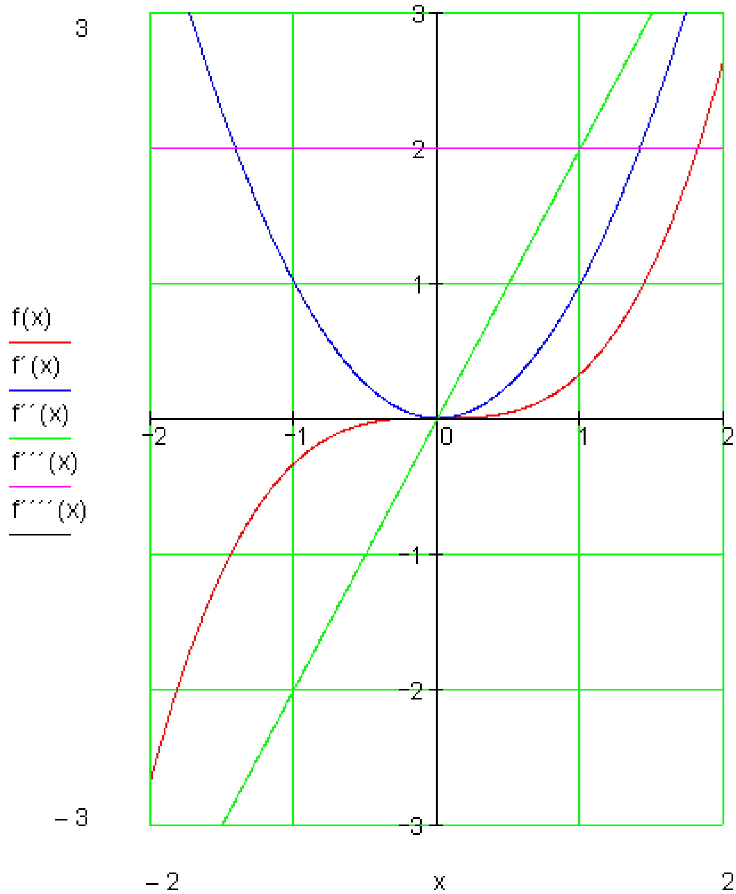


$$f'(x)=x^2\Rightarrow f''(x)=2x$$



د ټولو توابعو ګراف په یوه پروت ولاړ سیستم کې(دا ګراف د لاندې بیلګې پسې دی)

بیلګې: اول :	$f(x)=4x^3-2x^2+x-2$ $f'(x)=12x^2-4x+1$ $f''(x)=24x-4$ $f'''(x)=24$



دویم:

$$f(x) = \frac{3}{4}x^3 - 12x^2 + \frac{1}{4}x$$

$$f'(x) = \frac{9}{4}x^2 - 24x + \frac{1}{4}$$

$$f''(x) = \frac{9}{2}x - 24$$

$$f'''(x) = \frac{9}{2}$$

ټولګه:

د $f(x)$ لومړی مشتق د$f(x)$ مشتق تابع $f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$ ده :

د$f(x)$ دويم مشتق د $f'(x)$ مشتق تابع $f''(x) = \frac{d^2f(x)}{dx^2}$ دی:

د $f(x)$دريم مشتق د $f''(x)$ مشتق تابع $f'''(x) = \frac{d^3f(x)}{dx^3}$ دی:

په ځانګړي ډول: يو په خوښه وياند – يا راشنل تابع$f(x)$ په خوښه د مشتق قابليت لري.

تانجنت او عمود

د تانجنت جګيدنه

بيلګه:

تابع $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + 1$ لرو.

د تانجنت ميل: د يوه تابع د ګراف ميل په ټکي $P(x_0 \mid f(x_0))$ کې همغه معنی لري، لکه په دې ټکي د تانجنت ميل.

موږ $f(x)$ تابع او د تابع مشتق ټيک په پام کې نيسو.

موږ $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + 1$ مربع تابع لرو

د تابع مشتق $f'(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

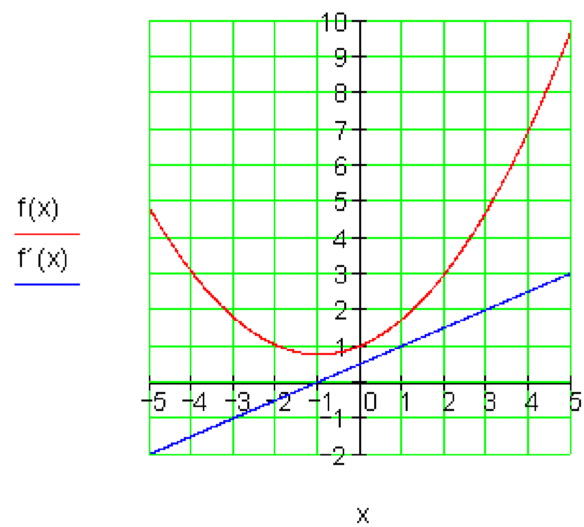
ارزښتجدول:

x	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5
f(x)	4,75	3	1,75	1	0,75	1	1,75	3	4,75	7	9,75
f '(x)	−2	−1,5	−1	−0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3

د $f(x)$ ارزښتجدول څخه لوستلی شو چې د پورته مربع تابع ککرټکی دی: $S(-1,\ 0.75)$
د $x=-1$ ارزښت لپاره $f'(-1)=0$ د ميل تابع ارزښت دی:
دا دا معنی لري، چې په ککرټکي کې د $f'(x)$ ميل صفر دی.
تانجنت په s کې هم دا معنی لري، چې صفر دی، دا هلته پروت(افقي) ځغلي؛ يعني د $x-$ محور سره غبرګ ځغلي.

ګرافونه:

$$f(x) := \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + 1 \qquad f'(x) := \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$



بيلګه:
$f(x)=2x^3+7x^2+x-7$ تابع لرو:

تانجنت دې پيداکړی شي، چې د $f(x)$ ګراف د $P(-2,\ f(-2))$ په ټکي کې لمسوي،

$$f(x) = 2x^3 + 7x^2 + x - 7 \Rightarrow f'(x) = 6x^2 + 14x + 1 \quad P(-2 \mid f(2)) \Rightarrow x_0 = -2$$
$$t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$
$$f'(x_0) f'(-2) = 24 - 28 + 1 = -3$$
$$f(x_0) = f(-2) = -16 + 28 - 2 - 7 = 3$$
$$\Rightarrow t(x) = -3(x+2) + 3 = -3x - 6 + 3 = \underline{\underline{-3x - 3}}$$

پایله:

د $f(x)$ تابع ګراف کې تانجنت او عمود په $P(x_0, f(x_0))$ ټکي کې لاندې بڼه لري.

د تانجنت مساوات

$$t(x) = \underbrace{f'(x_0)}_{\text{جګیدنه}}(x - x_0) + f(x_0)$$

د عمود مساوات

$$n(x) = -\underbrace{\frac{1}{f'(x_0)}}_{\text{جګیدنه}}(x - x_0) + f(x_0)\ ; \quad f'(x_0) \neq 0$$

د تانجنت او عمود عمومي فرمولونه:

پیل: تانجنت دې د $f(x)$ ګراف د $P(x_0, f(x_0))$ په ټکي کې لمس کړي. عمود (نورمال) دې د $f(x)$ ګراف د په $P(x_0, f(x_0))$ ټکي کې عمود یا ولاړ غوڅ کړي.

د تانجنت مساوات: $t(x) = m_t \cdot x + b_t$:

د $m_t = f'(x_0)$ سره لیکو:
$$t(x) = f'(x_0) \cdot x + b_t \qquad (1)$$

دا چې $P(x_0), f(x_0))$ تانجنت یو ټکی دی، نو لاس ته راځي:

$$t(x_0) = f(x_0) \Leftrightarrow f'(x_0) \cdot x + b_t = f(x_0)$$
$$\Leftrightarrow b_t = f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0$$

په (1) کې ږدو، نو لر:

$$t(x) = f'(x_0) \cdot x + f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0 = f'(x_0) \cdot x_0 + f(x_0)$$
$$= f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

عمود (نورمال):

د منحني سره په همغه ټکي کې چې تانجنت په پروت دی، عمود ځغلي.

د عمود میل:

$$m_n = -\frac{1}{m_t} = -\frac{1}{f'(x_0)}$$

$$\Rightarrow n(x) = -\frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

بیلګه:

د $f(x) = 2x - \frac{1}{4}x^2$ تابع لرو.

د تابع تانجنت او عمود(نورمال) پیدا کړئ:

حل:په لاندې توګه د تابع مشتق نیسو او ګراف یې(څېره لاندې کښل شوې) کاږو:

x	-4	-1	0	1.5	3
$f'(x)$	4	2.5	2	1.25	0.5

لرو: $f(x) = 2x - \frac{1}{4}x^2 \Rightarrow f'(x) = 2 - \frac{1}{2}x$

د تانجنت میل په ټکي x_0 کې د میل ارزښت 3 لري.

$$f'(x_0) = 3 \Leftrightarrow 2 - \frac{1}{2}x_0 = 3 \Leftrightarrow x_0 = -2$$

$$f(x) = f(-2) = 2 \cdot (-2) - \frac{1}{4}(-2)^2 = -5$$

د $P(-2,-5)$ په ټکي کې تانجنت په $f(x)$ باندې ارزښت 3 لري.

$$f(x) = 2x - \frac{1}{4}x^2 \Rightarrow f'(x) = 2 - \frac{1}{2}x \qquad ,P(2, f(2))$$

$$t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

د $x_0 = 2$ په ځای کې دا لاندې لرو:

$$t(x) = f'(2)(x-2) + f(2)$$

$$f(2) = 2 \cdot 2 - \frac{1}{4} \cdot (2)^2 = 4 - 1 = 3 \qquad f'(2) - \frac{1}{2} \cdot 2 = 2 - 1 = 1$$

$$\Rightarrow t(x) = 1(x-2) + 3 = x - 2 + 3 = \underline{\underline{x+1}}$$

د نورمال يا عمود پيدا کونه:

$$f(x)=2x-\frac{1}{4}x^2 \Rightarrow f'(x)=2-\frac{1}{2}x \ , \quad P(2|f(2))$$

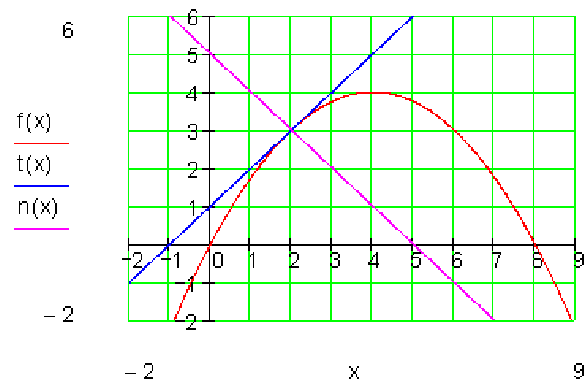
$$n(x)=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)+f(x_0)$$

د $x_0=2$ سره لاندې راکوي:

$$n(x)=\frac{1}{f'(2)}(x-2)+f(2)$$

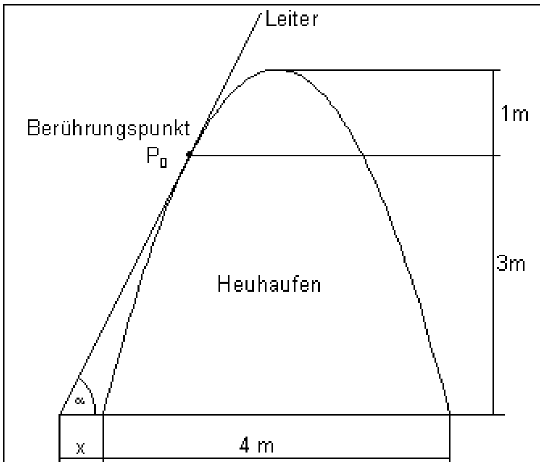
$$f(2)=2\cdot 2-\frac{1}{4}\cdot(2)^2=4-1=3 \qquad f'(2)-\frac{1}{2}\cdot 2=2-1=1$$

$$\Rightarrow n(x)=-\frac{1}{1}(x-2)+3=-x+2+3=\underline{\underline{-x+5}}$$



د يوې تابع د استعمال بيلګه د تانجنت له پاره :

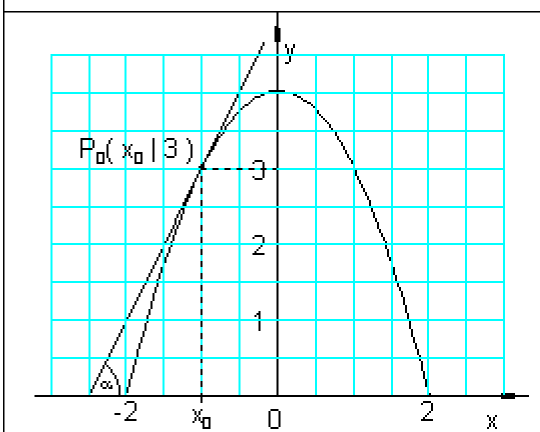
له ځمکې څخه د وښو په توپۍ يوه زينه ايښول کيږي. دا زينه په درې متره جګوالي توپۍ لمسوي.



د وښو توپې دې د يوه کيښکودي پارابول ځيره ولري، چې بنسټ يې ۴ متره سرور دی او ۴ متره جګوالی لري. غواړو په دې يوه زينه کيږدو، چې د وښو توپې سره تانجنت جوړ کړي.

په کومه زاويه(کونج)بايد دا زينه کيښنول شي؟

د وښو توپې له بيخ څخه دي په کوم لريوالي په څمکه دا زينه کيښنول شي؟



موږ د y محور داسې کاږو،چې د پارابول له ککرې(څوکې) څخه تيرېږي.

پارابول دا لاندې د تابع مساوات لري:

$$f(x) = a_2x^2 + 4$$

$$f(2) = 0 \Leftrightarrow 4a_2 + 4 = 0 \Leftrightarrow a_2 = -1$$

$$\Rightarrow f(x) = -x^2 + 4$$

موږ د x_0 لپاره ارزښت ټاکو:

$$f(x_0) = 3 \Leftrightarrow -x_0^2 + 4 = 3$$

$$\Leftrightarrow x_0^2 = 1 \Leftrightarrow x_{01/2} = \pm 1$$

شميرنه :

د نورو شميرنو لپاره ارزښت 1- = x_0 کاروو. زينه توپې په $P_0(-1,3)$ ټکي کې لمسوي.موږ په $P_0(-1,3)$ ټکي کې د تانجنت مساوات ټاکو:

.

$$f(x) = -x^2 + 4 \quad P_0(-1|3) \Rightarrow \bar{x}_0 = -1;\ \bar{f}(x_0) = 3$$
$$t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

د $f'(x) = -2x$ سره لاس ته راځي

$$f'(x_0) = f'(-1) = -2 \cdot (-1) = 2$$

$$\Rightarrow t(x) = 2[x - (-1)] + 3 = \underline{\underline{2x + 5}}$$

جوړه زاویه: $\tan\alpha = 2 \Leftrightarrow \underline{\underline{\alpha \approx 63{,}4^0}}$

د زینې او د وښو توپی تر منځ واټن د **f(x)** د صفرځای او د تانجنت**t(x)** د صفرځای ترمنځ واټن دی.

صفرځایونه:

لرو:

$$f(x) = -x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x_{1/2} = \pm 2$$
$$t(x) = 2x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = -2{,}5$$

د x ارزښتونو 2,5- او 2- ترمنځ واټن 0,5 دی.

زینه د وښو د توپی له پښو څخه باید نیم متر لرې کېښول شي.

ددې پوښتنې څخه مو زده کړل، چې د تانجنت مساوات څنګه ټاکل کیږي، چې یو ګراف په تعریف شوي ځای کې لمسوي.

په تولید کې د مشتق استعمال

فعالیت : یوه فابریکه x تولید کوي. په دې تولید د لګښت کیږي، چې دا د تولید په واک کې دی، چې موږ ورته د لګښت تابع وایو او په K(x) سره ښایو.

ځنګه کولی شو، چې د زیات تولید لپاره لګښت را ټیټ کړو؟

د لګښت تابع K(x) د تولید سټ(ډېرۍ) او ټول لګښت تر منځ تړاو انځوروي.

که تولید د Δx شاو خوا کې زیات شي، نو لګښت هم د ΔK په شاو خوا کې زیاتیږي.

کمښتویش (تقسیم تفاضل) $\frac{\Delta K}{\Delta x}$ د منځني لګښت زیاتوالی ښايي، د یوه Δx تولید تغیر سره(منځنی تغیر ارزښت)

د x_0 ځای کې لحضوي تغیر ارزښت د مشتق لګښت بلل کیږي. دا د پوله ارزښت $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta K}{\Delta x}$ سره ټاکل کیږي، داپه دې معني، چې د لګښت د تابعK مشتق.

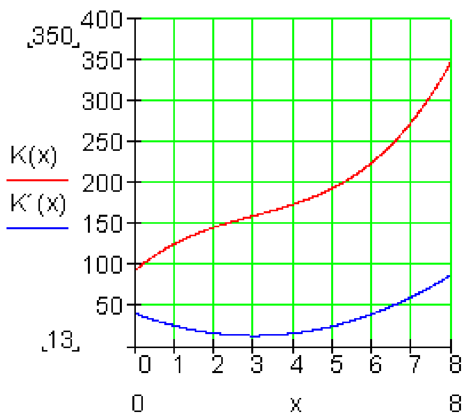
پیژند : د لګښتتابع **K(x)** مشتق د مشتق ارزښت**K'(x)** په نامه یادوو یا یې پوله لګشت**K'(x)** هم بولو.

بیلګه: د لګښت تابع $K(x) = x^3 - 9x^2 + 40x + 94$ دې ورکړ شوې وي.

الف: مشتق ارزښت وټاکئ، یو ارزښت جدول د **K(x)** او **K'(x)** لپاره وکاږئاو په پروتولاړ سیستم یا کواوردیناتسیستم کې یې ګراف وکاږئ.

پوله ارزښت د **I = [0 ; 6]** لپاره په ۱ پل(قدو) پراخوالي سره.

ب : د ډېر کم لګښتزاتوالی و ټاکئ:



لاندې تابع لرو:

$$K(x) = x^3 - 9x^2 + 40x + 94$$

مشتق ارزښت

$$K'(x) = 3x^2 - 18x + 40$$

ارزښت جدول

x	0	1	2	3	4	5	6
K(x)	94	126	146	160	174	194	226
K'(x)	40	25	16	13	16	25	40

خورا کم د لګښتزیاتوالی(لګښتجګېدنه) د پارابول **K'(x)** په ککره(څوکه) کې پروت دی ، یعني هلته چې تانجنت **K'(x)** پروت یا افقي دی

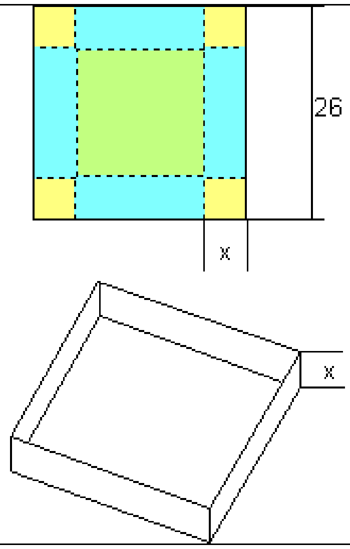
$$K'(x) = 3x^2 - 18x + 40 \Rightarrow K''(x) = 6x - 18$$

د تانجنت د پروتوالي یا افقیت لپاره :

$$K''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - 18 = 0 \Rightarrow \underline{\underline{x = 3}}$$

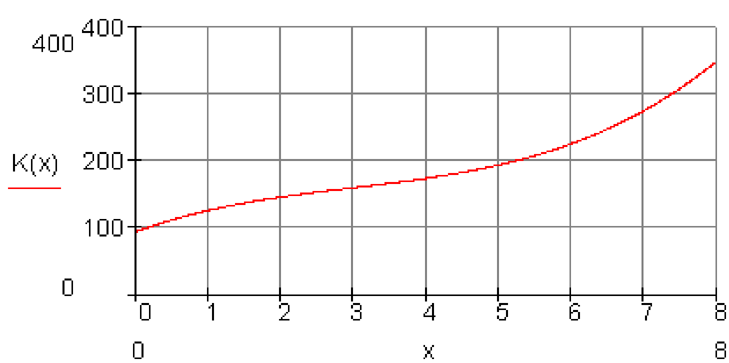
همدا نتیجه موږ د **K'(x)** لپاره جدول څخه هم لوستلی شوه.

نتیجه په دي معنا ده: کوچنی نرخجګوالی د یوه **x = 3** مقدار څخه لاس ته راوړو، دا هلته **13 GE / ME** دی.

د ي، مربع کارتون(د کلک کاغذ څخه جوړ)څخه ، چې ۲۶ سانتيمتره د اړخ اوږدوالی لري يو بکس جوړوو بې له سرپوښ، چې د x جګوالی لري. الف: د يوه تابع ترم وټاکی، چې د بکس حجم(ډکی) V د x په واکوالي يا تابعيت کي ښايي. ب – ګراف وکاږی او په نږدي توګه يي ماکسيما(خورا جګ) حجم و ټاکی.	

- د يوه روغتون د نرختابع(مصرف تابع)$K(x)$ د ناروغانو ګڼه (تعداد) x او د ټول مصرف ترمنځ اړيکي انځوروي، داسي چې $x = 1$ د 100 ناروغانو معنی او $y = 1$ دی معنی چې 1000 € / Tag. يوزر يورو په ورځ (1000 € / Tag.) .

$$K(x) = x^3 - 9x^2 + 40x + 94$$



الف : د مصرف تابع په خپله کتابچه کي وليکی.
ب : د لګښت تابع مشتق د مشتق لګښت (-مصرف) يا دحدمصرف په نامه ياديږي. تاسو د لګښت زياتيدنه د ناروغانو په واکوالي يا تابعيت کي تشريح کړی. (د $K(x)$ جګيدونه).
$K'(x)$ وټاکی او ګراف يي په وضعيه سيستم (پروت- ولاړ-سيستم) کي انځور کړی

پ : د ناروغانو د کوم تعداد سره د لګښت زياتوال خورا کم دئ؟ دا قيمتونه وشميرئ.

د الجبري توابعو مشتق

د الجبري او نورو توابعو پيژندونه: 1- يو بنسټيز تابع الجبري بلل کيږي، که د ترتيب قانون يې د مساواتو له لارې ورکړ شوی وي،په هغو کې چې په ترمونو کې د مساواتو د متحولو سره فقط الجبري عمليی(جمع،تفريق، ضرب، تقسيم(چې مخرج يې صفر نه وي)توانکونه او جذرنيونه(د توان-اوريښې اکسپوننتونه مثبت او تام عددي دي) کارول شوي وي. 2- ناالجبري توابع ترانسځندنت بلل کيږي، لکه اکسپوننشل-ولوګاريمی- او د زاويو توابع. 3- يو الجبري تابع راشنل بللکيږ ي، که د ترتيب قانون يې د يو مساوات سره ورکړ شوی وي، په کوم کې چې ناپای ډيرې راشنل د شمېر عمليی ((جمع،تفريق، ضرب، تقسيم(چې مخرج يې صفر نه وي)توانکونه او جذرنيونه(د توان-اوريښې اکسپوننتونه مثبت او تام عددي دي)) کارول شوي وي.

بيلګه:
د $f(x)=\sqrt{x}$ تابع ورکړ شوې په x_0 کې د تابع مشتق پيدا کړئ او د مشتق تابع په ګوته کړئ.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\sqrt{x_0+\Delta x}-\sqrt{x_0}}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{(\sqrt{x_0+\Delta x}-\sqrt{x_0})(\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0})}{\Delta x(\sqrt{x_0+\Delta x}-\sqrt{x_0})}$$

$$\Leftrightarrow\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{x_0+\Delta x-x_0}{\Delta x(\sqrt{x_0+\Delta x+\sqrt{x_0}})}$$

$$\Leftrightarrow\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta x}{\Delta x(\sqrt{x_0+\Delta x+\sqrt{x_0}})}$$

$$\Leftrightarrow\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{\sqrt{x_0+\Delta x+\sqrt{x_0}}}$$

$$f'(x_0)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{1}{\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0}}\right)=\frac{1}{\sqrt{x_0}+\sqrt{x_0}}=\frac{1}{2\sqrt{x_0}}$$

نو د x_0 په ځای کې $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x_0}}$ د تابع $f(x)=\sqrt{x}$ مشتق دی.

د تیرو درسونو پر بنسټ $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ د مشتق تابع ده.

د $f(x)=x^q \;;\; q\in Q$ ډوله توابعو مشتق:

د شمیرنې له مخې لاندې لاس ته را وړنې لرو:

تابع	د مشتق تابع	
$f(x)=x$	$f'(x)=1$	$f'(x)=1\cdot x^0$
$f(x)=x^2$	$f'(x)=2\cdot x$	$f'(x)=2\cdot x^1$
$f(x)=x^3$	$f'(x)=3\cdot x^2$	$f'(x)=3\cdot x^2$
$f(x)=\dfrac{1}{x}=x^{-1}$	$f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$	$f'(x)=-1.x^{-2}$
$f(x)=\sqrt{x}=x\dfrac{1}{2}$	$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$f'(x)=\dfrac{1}{2}.x^{-\frac{1}{2}}$

که دا پورته پنځه مشتقونه یو د بل سره پرتله کړو، نو اټکل کیږي، چې لاندې جوړښتقانون باور لري:

د توان (پوتنځ) قانون بې له ښوونې: 1- مختني اکسپوننت د متحولې x تر مخ د فاکتور په څېر لیکل کیږي. 2- نوی اکسپوننت همغه پخوانی اکسپوننت دی، چې په یو کم شوی.	د $f(x)=x^q \;\Rightarrow f'(x)=q\cdot x^{q-1}$ $q\in Q$ سره

بیلګه: د $f(x)=\frac{1}{x^2}$ مشتق پیدا کړئ.

ښوونه:

$$f(x)=\frac{1}{x^2}=x^{-2} \quad \Rightarrow f'(x)=-2x^{-3}=-\underline{\underline{\frac{2}{x^3}}}$$

بیلګه:

د $f(x)=3x^4$ تابع مشتق پیدا کړئ.

ښوونه:

$$f(x)=3x^4 \qquad c=3 \qquad u(x)=x^4 \Rightarrow u'(x)=4x^3$$

$$f'(x)=c\cdot u'(x)=3\cdot 4x^3=\underline{\underline{12x^3}}$$

بیلګه:

غواړو د $f(x)$ تابع مشتق د $x=2$ په ځای کې ونیسو:

$$f(x)=x^2+3$$

$$x=2: \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}=4+\Delta x$$

$$f'(2)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(4+\Delta x)=\underline{\underline{4}}$$

$$x=u: \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(u+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}=2u+\Delta x$$

$$f'(u)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(2u+\Delta x)=\underline{\underline{2u}}$$

بیلګه:

د تا بع $f(x)=\frac{1}{x+1}$ مشتق د $x=2$ په ځای کې پیداکړئ.

ښوونه:

$$f(x)=\frac{1}{x+1}$$

$$x=2:\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}=\frac{1}{3(3+\Delta x)}$$

$$f'(2)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{-1}{3(3+\Delta x)}\right)=-\frac{1}{9}$$

$$x=u:\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(u+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}=\frac{-1}{(u+\Delta x+1)(u+1)}$$

$$f'(u)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}=\frac{-1}{(u+\Delta x+1)(u+1)}=-\frac{1}{(u+1)^2}$$

بیلګه 2:

(توان(Potence) مشتق، چې طبیعي جګ عدد یا اکسپوننت لري:

موږ د $1, 2, 3,...$, $y(f(x)=x^n$ تابع لرو او غواړو مشتق یې پیداکړو:

ښوونه: موږ په لاندې توګه مخ ته ځو.

د بینوم جملې په بنسټ په هر x_0 ځای کې دا لاندې باورلري.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\frac{(x_0+h)^n-x_0^n}{}$$

$$=\frac{\binom{n}{0}x_0^n+\binom{n}{1}x_0^{n-1}h+\binom{n}{2}x_0^{n-2}h^2+...+\binom{n}{n}h^n-x_0^n}{h}$$

$$=\frac{1}{h}\left(x_0^n+nx_0^{n-2}h+\frac{n(n-1)}{2}x_0^{n-2}h^2+...+h^n-x_0^n\right)$$

$$=nx_0^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2}x_0^{n-2}h+...+h^{n-1}$$

د $h\to 0$ لپاره تابع $y=x^n$ د x_0 په هرځای کې، د لاندې مشتق سره، د مشتق قابلیت لري:

$$(dy/dx)_{x=x_0} = f'(x) = nx^{n-1}$$

ددې پورته بېلګې بل ډول ښوونه دې د پوښتنې په څېر وي.

د زنځیري توابعو مشتق

د u تابع کېدی شي د v تابع سره وتړل شي، که د د باندني تابع(ځنځیروني قاعده)، پېژند ورشو (دتعریف ساحه) $D(u)$ د دنني تابع د $W(v)$ سره ګډ توکي یا عناصر ولري.

ددې لپاره لیکو: $u^\circ v(x) = u(v(x))$، که د f تابع د $y = f(x) = u(z)$ سره او $z = v(x)$ وي.

اوس د $x = x_0$ ځای کې د $y = f(g(x))$ تړلي یا ځنځیري تابع مشتقوړوالی څېرو:

$$f(x) = f[g(x)]$$
$$\Rightarrow f'(x) = f'(g) \quad . \quad g'(x)$$

دننۍ مشتق د باندنۍ مشتق(دادې ورپورته شي)

ددې لپاره نیسو چې:

1- د $g(x)$ دننۍ تابع د $x = x_0$ په ځای کې مشتقوړ ده. دانو بیا باید د x_0 په یوه معلوم تعریف شوي چاپیریال کی متمادي(نه پریکیدونکی) وي.

موږ لرو : $g(x+h) -> g(x_0)$ د $h -> 0$ لپاره.

همداسې $g(x_0 + h) = g(x_0) + k$ داسې، چې $k -> 0$ د $h -> 0$ لپاره.

2- که د $y = f(z)$ دباندنی تابع په $z = z_0 g(x_0)$ کې د مشتق قابلیت ولري.

د $y = f(g(x))$ کمبنتویش کیدی شي په لاندې ډول ورکړ شي او بڼه(فورم) يې هم بدله شي :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(g(x_0+h)) - f(g(x_0))}{h} = \frac{f(g(x_0+h)) - f(g(x_0))}{g(x_0+h) - g(x_0)}$$

$$= \frac{f(z_0+k) - f(z_0)}{k} . \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h}$$

که $h -> 0$ لاړه شي (همداسې $k -> 0$ خواته ځي) نو دا اړیکی مشتق ته ځي:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0} = \left(\frac{d(g(x))}{dx}\right)_{x=x_o} = \left(\frac{df(z)}{dz}\right)_{z=z_o=g(x_0)} . \left(\frac{dg(x)}{dx}\right)_{x=x_0} \quad ;........(*)$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0} = \left(\frac{d(g(x))}{dx}\right)_{x=x_o} = \left(\frac{df(z)}{dz}\right)_{z=z_o=g(x_0)} . \left(\frac{dg(x)}{dx}\right)_{x=x_0}$$

که چیرې د ځای په ځای(فیکس) ځای $x = x_0$ لپار بیرته x نیسو، نو کیدی شي چې $(*)$ فرمول په لاندې لنډ ډول ورکړشي او د $y = (z)$, $z = g(x)$ لپاره باور ولري:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dz}}{\frac{dx}{dz}} = \frac{dy}{dz} . \frac{dz}{dx};.....................................(**)$$

په پام کې دې وي، چې $\frac{dy}{dx}$ د $z = g(x)$ په ځای کې باید ترتیب(تنظیم) شي.

دا $(*)$ فرمول ځنځیري قاعده(لار،قانون) بلل کیږي او د پورته نیونو یا فرضیو سره باوري دی. دا په ساده ډول په یاد لرلی شو، ځکه چې ښی خوا د کیڼې خوا سره د فورمال dzزیاتیدلو له لارې منځ ته راغلي.

د پورته ښوونې لاس ته راوړنه دا لاندې جمله ده:

جمله :
زنځیري قاعده

لرو : $f(z)=f(g(x))$ ، نود $z=g(x)$ تابع په x او د $y=f(z)$ تابع په $z=g(x)$ کې د مشتق قابليت لري يا مشتقوړ دی، نوترلی ورکړ شوی د $y=f(g(x))$ تابع هم په x کې د مشتق قابليت لري او دا باوري کيږي.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dz}}{\frac{dx}{dz}}=\frac{\frac{df}{dg}}{\frac{dx}{dg}}==f\,'(g(x)).g\,'(x)$$

لنډ: $$(fog)'(x)=f(g(x))'$$

بېلګه:

د $f(x)=(x^2+2)^2$ مشتق ونيسئ.

$$f(x)=\left(x^2+2\right)^2$$

Substitution بدلون $+2 \quad f(z)=z^2 \Rightarrow f\,'(z)=2z \quad z\,'(x)=2x$

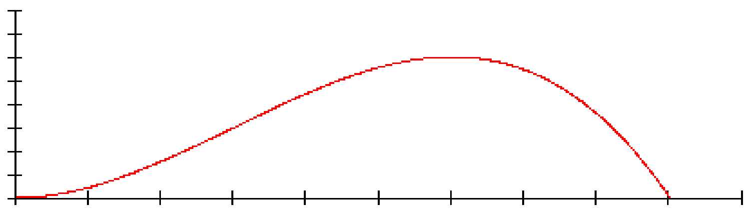
$$f\,'(x)=f\,'(z)\cdot z\,'(x)=2z\cdot 2x=2\left(x^2+2\right)\cdot 2x=\underline{\underline{4x^3+8x}}$$

د مشتق استعمال په طبيعي علومو

په رياضياتو کې زيات وخت توابع راوړل کيږي، چې د يوې متحولې(اووبنتونې) x په واک کې وي.

په طبيعي پوهنو کې زيات وخت توابع څيړو، چې د وخت په واک کې وي وي.

لکه په شکل کې د يوه توپ د غورځولو وهلې لار (دا وروسته روښانه کيږي)



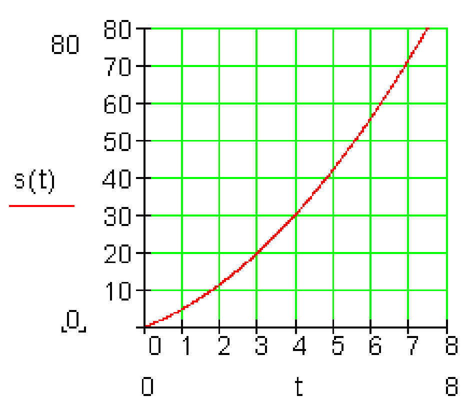
فعالیت:

ګران زده کوونکي دې د فزیک د درسونو له مخې د چټکتیا او بیړې تعریفونه ور کړي او د لار، وخت، چټکتیا او بیړې فرمولونه دې ولیکي.

بیلګه:

د یوه په برابرډوله بیړه (تعجیل) غورځول شوي شي لپاره د پیل چټکتیا (لومړنی سرعت) $v_0=4\frac{m}{s}$ او $a=1{,}8\frac{m}{s^2}$ بیړې(تعجیل) سره د لار-وخت- قانون په لاندې ډول دی:

$$\boxed{s(t)=\frac{1}{2}at^2+v_0t}$$



حل: د پورته ورکړشوي د v_0 ارزښت لپاره باور لري: $S(t) = 0{,}9t^2+4t$

(t په (ثانیه) ، s(t) په m (متر))

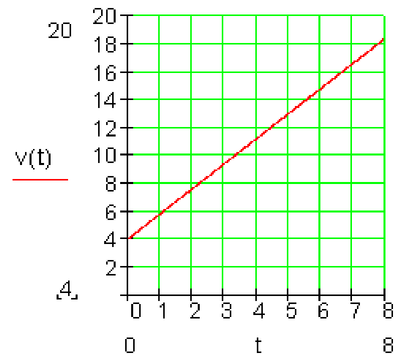
منځنی چټکتیا (سرعت) $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ ده)

لحظوی(سملاسي) چټکتیا په لاندې ډول

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{ds}{dt}=v$$

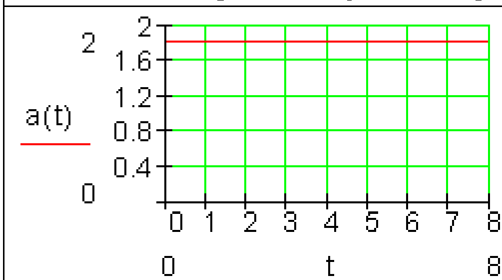
ده: $\underline{\underline{v = s'(t) = 1{,}8t+4}}$

په v-t - دياګرام کې يوه کرښه لاس ته راځي، دا په دې معنی چې چټکتيا په برابر $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ ډول زياتيږي. دا دلته ثابته جګيږنه $a = 1,8\ \frac{m}{s^2}$ ده او بيړه(تعجيل) ده.



د بيړې يا تعجيل لپاره دا لاندې مساوات صدق کوي:

$$v'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = a$$



پام : د يوه برابرډوله په بيړه (تعجيلي) خوزښت لپاره لاندې باور لري:

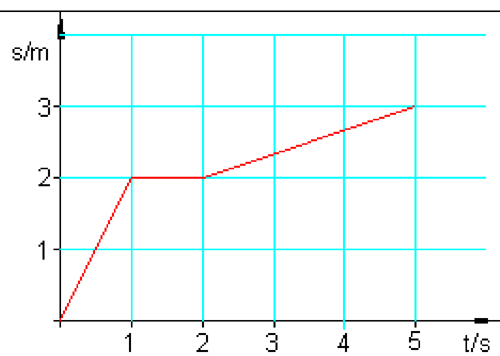
$$\left| s(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t \right| \qquad \boxed{v(t) = s'(t) = at + v_0} \qquad \boxed{a(t) = v'(t) = a}$$

د يوې چټکتيا (سرعت) v لپاره د وخت پسې د لار مشتق لپاره $v(t)=s'(t)$ لرو. د $s'(t)$ لپاره داسې $v(t) = s'(t).$ هم ليکو.

فعاليت:۱) د يوه خوزنده تن يا جسم د لار-وخت-دياګرام ورکړ شوی.

الف: دا خوزښت تشريح کړی.

ب : دې پورې اړونده د چټکتيا – وخت – ديا ګرام وکاږی.



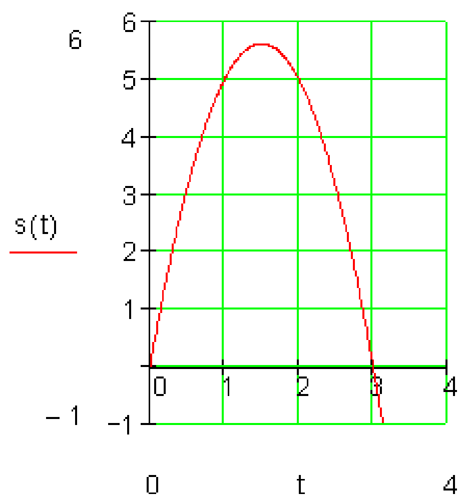
---

۲) یوه تیره د پیل چټکتیا $v_0 = 7\frac{m}{s}$ سره عمودي (ولاړه)پورته غورځول کیږي.

د لار-وخت-قانون دی: $s(t) = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2$ د $g = 10\frac{m}{s^2}$ (را ټولي (ګردي شوې)سره.

الف) د کوم وخت وروسته د تیرې چټکتیا (سرعت) صفر دی؟

ب) خورا جګ د میل جګوالی وشمیرئ.



۳) تابع د یوه خوزښت د لار-وخت-دیاګرام ښايي.

الف) د ورځني ژوند څخه یوه بیلګه ورکړئ، د هغې لپاره چې دا تلنه ټیک وي.

د منحني تلنه د $t > 3$ لپاره فزیکي څه مفهوم لري؟

ب) د خوزښت لپاره د لار-وخت-دیاګرام په لاندې ډول دی.

$$s(t) = \frac{1}{2} a \cdot t^2 + v_0 \cdot t$$

a او v_0 وټاکئ

پ) د اړونده بیرې – وخت-دیاګرم وکاږئ او دا تشریح کړئ.

یوه منفي چټکتیا (سرعت) څه معنا لري؟

۴) یوتن(جسم) په پورته ازاده غورځونه کې داسې حرکت کوي ،چې دt وخت کې $S(t)= 5.t^2$ لار وهي.

په وختونو $t=1;2;3$ کې لحظوي چټکتیا(سرعت) وښایئ.

۴ – حل:

لحضوي جټکتیا د سملاسي تغیرارزښت سره په دې لاندې معنا دی:

$$t = 1: \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{s(1+\Delta x)-s(1)}{\Delta x} = 10+5\Delta x \Rightarrow$$

د $\Delta x \to 0$ لپاره باور لري: $10+5\Delta x \to 10$

$$t = 2: \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{s(2+\Delta x)-s(2)}{\Delta x} = 20+5\Delta x \Rightarrow$$

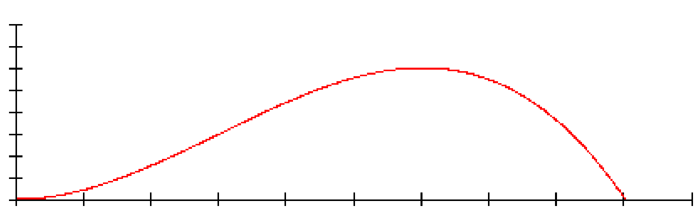
د $\Delta x \to 0$ لپاره باور لري:: $20+5\Delta x \to 20$

$\Delta x \to 0$

$$t = 3: \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{s(3+\Delta x)-s(3)}{\Delta x} = 30+5\Delta x \Rightarrow$$

د $\Delta x \to 0$ لپاره باور لري $30+5\Delta x \to 30$

تمرین : لاندې د $f(x) = -\frac{1}{288}x^3 + \frac{1}{16}x^2 \,;\, x > 0$ تابع ګراف او په ورنږدي توګه د فوټبال میدان کې د توپ الوتنې منحني(کږه) ښايي، چې لاندې څېره لري.



لاندې پوښتنې ځواب کړئ:

الف:توپ کوم خورا جګ(ماکسیمال) جګوالی لري او د وهلتکي(شوټ شوي ټکي) څخه کوم واټن لري؟

ب : د توپ وهلتکي (شوټ شوي ټکي)څخه توپ څومره لرې بیرته ځمکې ته راځي؟

پ : د لوبې د دفاع دېوال د توپ وهنې ځای څخه ۹ متره لرې او ۲ متره جګ دی. ایا توپ له دې څخه جګ الوزي؟

ت : توپ د تور لاین(د x محور) څخه په ۲ متره جګوالي الوزي. له ګول څخه په کوم لرېوالي دا ازاده شوټ وهل شوی دی؟

تانجنت او نورمال.

تمرینونه**III** :

د **f(x)** ګراف تانجنت په ټکي **P(x_0 | f(x_0)).** کې:

1 - $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x \qquad x_0 = 2$

2 - $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{9}{4}x^2 + \frac{15}{4}x + \frac{9}{4} \qquad x_0 = 2$

3 - $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 4x + 4 \qquad x_0 = -1$

4 - $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2 \qquad x_0 = 1$

5 - $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x + 3 \qquad x_0 = 1$

6 - $f(x) = x^3 - x^2 - 5x - 2 \qquad x_0 = -\frac{3}{2}$

7 - $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{5}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + 2 \qquad x_0 = 3$

8 - $f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x + 2 \qquad x_0 = 1$

9 - $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 4x + 4 \qquad x_0 = 0$

10 - $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}x^2 - 4x + 4 \qquad x_0 = 1$

حلونه

تمرینونه مشتقشمېرنه III

نتیجې او مفصل حلونه

نتیجې:

لومړی:

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x \qquad x_0 = 2 \Rightarrow P_0(2|2) \qquad t(x) = -3x + 8$$

دویم:

$$f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{9}{4}x^2 + \frac{15}{4}x + \frac{9}{4} \qquad x_0 = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_0\left(2 \,\middle|\, \frac{11}{4} = 2{,}75\right) \qquad t(x) = -\frac{9}{4}x + \frac{29}{4}$$

دریم:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 4x + 4 \qquad x_0 = -1 \Rightarrow P_0(-1|\,7) \qquad t(x) = -\frac{3}{2}x + \frac{11}{2}$$

څلورم:

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 2 \qquad x_0 = 1 \Rightarrow P_0(1|\,2) \qquad t(x) = 9x - 7$$

پنځم:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x + 3 \qquad x_0 = 1 \Rightarrow P_0\left(1 \,\middle|\, \frac{1}{2} = 0{,}5\right) \qquad t(x) = -2x + \frac{5}{2}$$

شپږم:

$$f(x) = x^3 - x^2 - 5x - 2 \quad x_0 = -\frac{3}{2} \Rightarrow P_0\left(-\frac{3}{2} \,\middle|\, -\frac{1}{8}\right) \quad t(x) = \frac{19}{4}x + 7$$

اوم:

$$f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{5}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + 2 \qquad x_0 = 3 \Rightarrow P_0(3\,|-1) \qquad t(x) = -\frac{1}{4}x - \frac{1}{4}$$

اتم:

$$f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x + 2 \qquad x_0 = 1 \Rightarrow P_0\left(1 \,\middle|\, -\frac{9}{2}\right) \qquad t(x) = -6x + \frac{3}{2}$$

نهم:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 4x + 4 \qquad x_0 = 0 \Rightarrow P_0(0\,|\,4) \qquad t(x) = -4x + 4$$

لسم:

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}x^2 - 4x + 4 \qquad x_0 = 1 \Rightarrow P_0(1|\,0) \qquad t(x) = -\frac{11}{3}x + \frac{11}{3}$$

مفصل حلونه1

لومړی:

شمیرنه:

$$f(x)=x^3-6x^2+9x \qquad x_0=2 \qquad t(x)=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$$

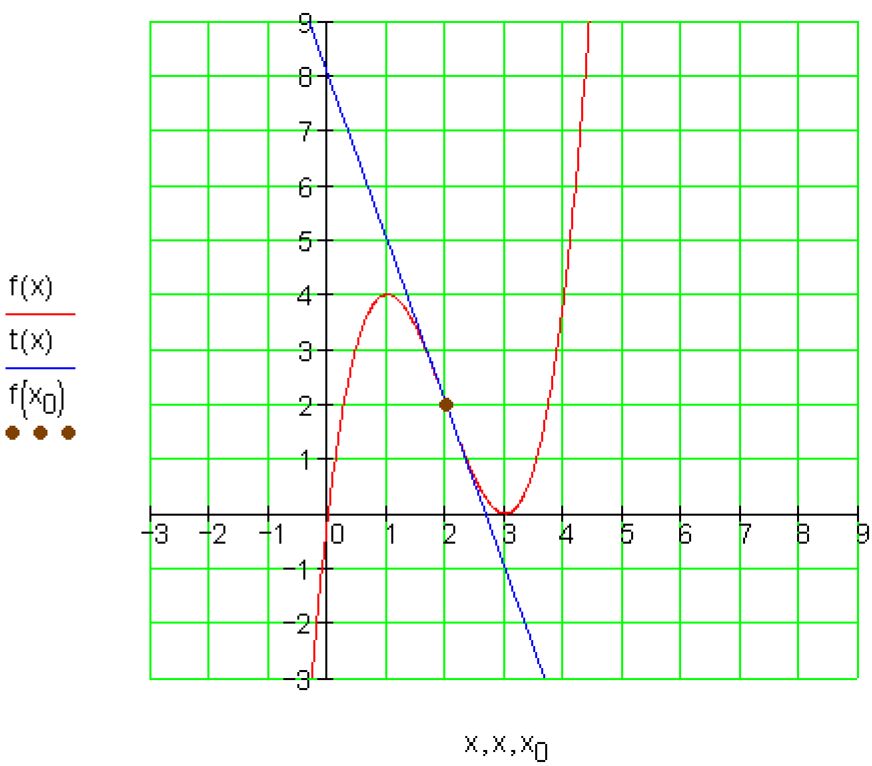
$$f'(x)=3x^2-12x+9 \Rightarrow f'(x_0)=f'(2)=12-24+9=-3$$

$$f(x_0)=f(2)=8-24+18=2 \Rightarrow \underline{\underline{P_0(2|2)}}$$

$$t(x)=-3(x-2)+2=-3x+6+2=\underline{\underline{-3x+8}}$$

ګرافونه

$$f(x)=x^3-6x^2+9x \qquad x_0=2 \Rightarrow P_0(2|2) \qquad t(x)=-3x+8$$



دويم: شميرنه:

$$f(x)=\frac{1}{4}x^3-\frac{9}{4}x^2+\frac{15}{4}x+\frac{9}{4} \qquad x_0=2 \qquad t(x)=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$$

$$f'(x)=\frac{3}{4}x^2-\frac{9}{2}x+\frac{15}{4} \Rightarrow f'(x_0)=f'(2)=\frac{3}{4}\cdot 4-\frac{9}{2}\cdot 2+\frac{15}{4}=\frac{12}{4}-\frac{36}{4}+\frac{15}{4}=-\frac{9}{4}$$

$$f(x_0) = f(2) = \frac{1}{4}\cdot 8 - \frac{9}{4}\cdot 4 + \frac{15}{4}\cdot 2 + \frac{9}{4} = \frac{8}{4} - \frac{36}{4} + \frac{30}{4} + \frac{9}{4} = \frac{11}{4} \Rightarrow$$

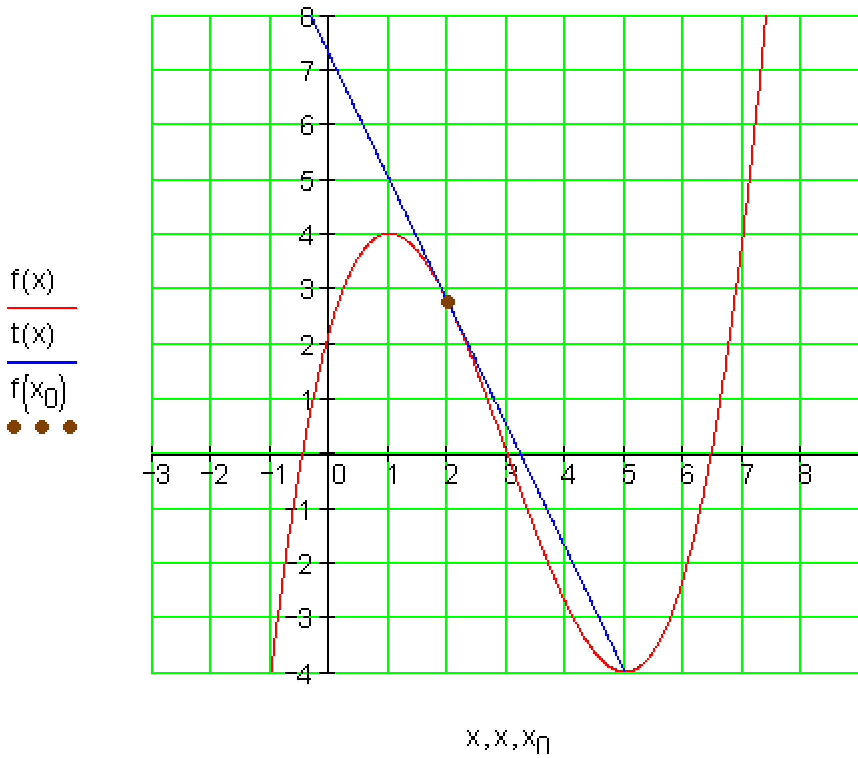
$$\Rightarrow P_0\left(2 \,\middle|\, \frac{11}{4} = 2{,}75\right)$$

$$t(x) = -\frac{9}{4}(x-2) + \frac{11}{4} = -\frac{9}{4}x + \frac{18}{4} + \frac{11}{4} = \underline{\underline{-\frac{9}{4}x + \frac{29}{4}}}$$

ګرافونه

$$f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{9}{4}x^2 + \frac{15}{4}x + \frac{9}{4} \qquad x_0 = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_0\left(2 \,\middle|\, \frac{11}{4} = 2{,}75\right) \qquad t(x) = -\frac{9}{4}x + \frac{29}{4}$$



دریم: شمیرنه:

$$f(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{2}x^2-4x+4 \qquad x_0=-1 \qquad t(x)=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$$

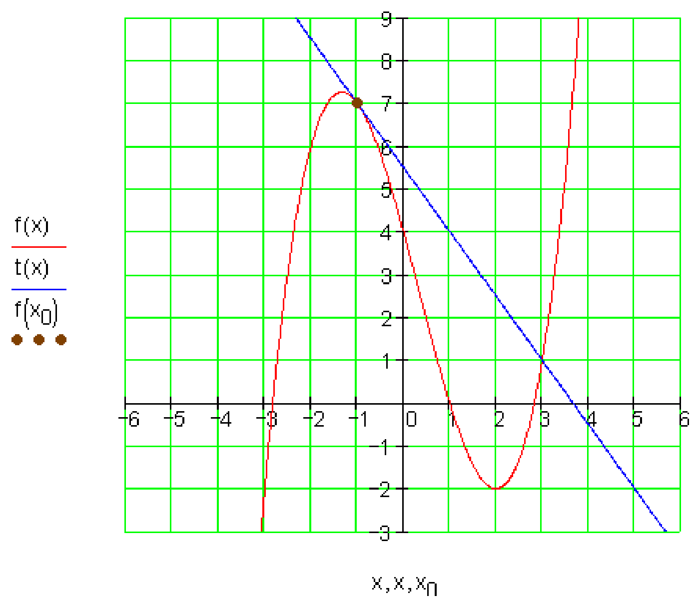
$$f'(x)=\frac{3}{2}x^2-x-4 \Rightarrow f'(x_0)=f'(-1)=\frac{3}{2}+1-4=\frac{3}{2}+\frac{2}{2}-\frac{8}{2}=-\frac{3}{2}$$

$$f(x_0)=f(-1)=\frac{1}{2}\cdot(-1)-\frac{1}{2}\cdot 1-4\cdot(-1)+4=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{8}{2}+\frac{8}{2}=7 \Rightarrow \underline{\underline{P_0(-1|7)}}$$

$$t(x)=-\frac{3}{2}(x+1)+7=-\frac{3}{2}x-\frac{3}{2}+\frac{14}{2}=\underline{\underline{-\frac{3}{2}x+\frac{11}{2}}}$$

گرافونه

$$f(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{2}x^2-4x+4 \qquad x_0=-1 \Rightarrow P_0(-1|7) \qquad t(x)=-\frac{3}{2}x+\frac{11}{2}$$



خلورم: شمیرنه:

$$f(x)=x^3+3x^2-2 \qquad x_0=1 \qquad t(x)=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$$

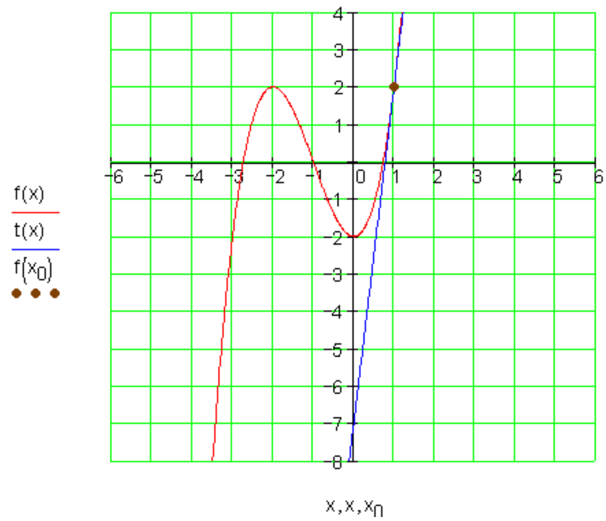
$$f'(x)=3x^2+6x \Rightarrow f'(x_0)=f'(1)=3+6=9$$

$$f(x_0)=f(1)=1^3+3\cdot 1^2-2=1+3-2=2 \Rightarrow \underline{\underline{P_0(1|2)}}$$

$$t(x)=9(x-1)+2=9x-9+2=\underline{\underline{9x-7}}$$

ګراف

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 2 \qquad x_0 = 1 \Rightarrow P_0(1|2) \qquad t(x) = 9x - 7$$



پنځم: شمیرنه:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x + 3 \qquad x_0 = 1 \qquad t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

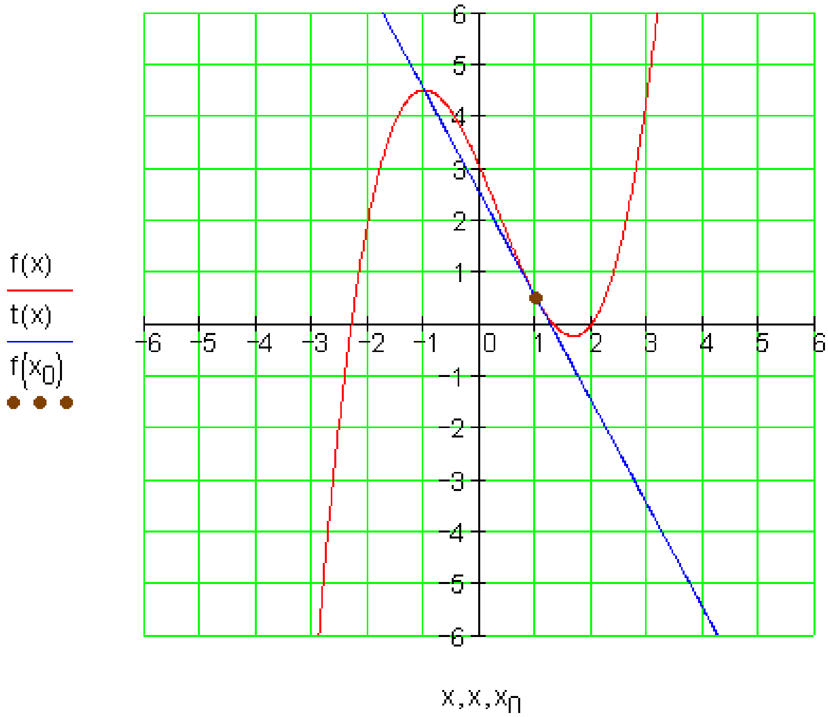
$$f'(x) = \frac{3}{2}x^2 - x - \frac{5}{2} \Rightarrow f'(x_0) = f'(1) = \frac{3}{2} - 1 - \frac{5}{2} = -2$$

$$f(x_0) = f(1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{5}{2} + 3 = -\frac{5}{2} + \frac{6}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \underline{\underline{P_0\left(1 \middle| \frac{1}{2}\right)}}$$

$$t(x) = -2(x - 1) + \frac{1}{2} = -2x + 2 + \frac{1}{2} = \underline{\underline{-2x + \frac{5}{2}}}$$

ګراف

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x + 3 \qquad x_0 = 1 \Rightarrow P_0\left(1 \middle| \frac{1}{2} = 0,5\right) \qquad t(x) = -2x + \frac{5}{2}$$



شپږم: شمیرنه:

$$f(x)=x^3-x^2-5x-2 \quad x_0=-\frac{3}{2} \qquad t(x)=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$$

$$f'(x)=3x^2-2x-5 \Rightarrow f'(x_0)=f'\left(-\frac{3}{2}\right)=3\cdot\frac{9}{4}-2\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)-5=\frac{27}{4}+\frac{12}{4}-\frac{20}{4}=\frac{19}{4}$$

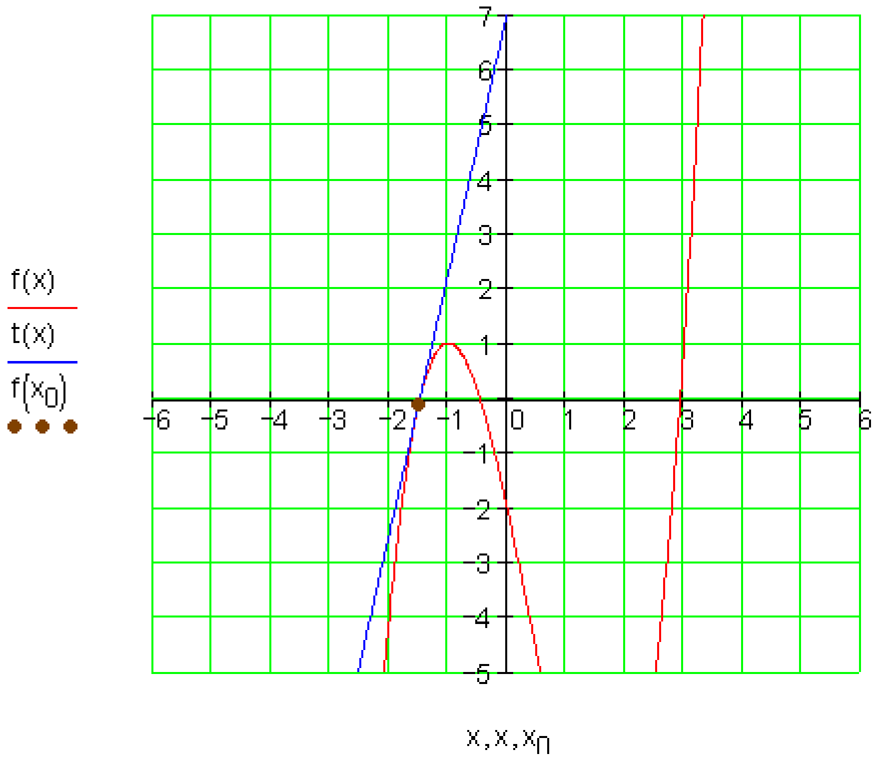
$$f(x_0)=f\left(-\frac{3}{2}\right)=-\frac{27}{8}-\frac{9}{4}+\frac{15}{2}-2=-\frac{27}{8}-\frac{18}{8}+\frac{60}{8}-\frac{16}{8}=-\frac{1}{8}\Rightarrow \underline{\underline{P_0\left(-\frac{3}{2}\,\middle|\,-\frac{1}{8}\right)}}$$

$$t(x)=\frac{19}{4}\left(x+\frac{3}{2}\right)-\frac{1}{8}=\frac{19}{4}x+\frac{57}{8}-\frac{1}{8}=\frac{19}{4}x+\frac{56}{8}=\underline{\underline{\frac{19}{4}x+7}}$$

ګراف

$$f(x)=x^3-x^2-5x-2 \quad x_0=-\frac{3}{2}\Rightarrow P_0\left(-\frac{3}{2}\,\middle|\,-\frac{1}{8}\right) \quad t(x)=\frac{19}{4}x+7$$

:



اووم: شمیرنه:

$$f(x)=\frac{1}{4}x^3-\frac{5}{4}x^2+\frac{1}{2}x+2 \qquad x_0=3 \qquad t(x)=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$$

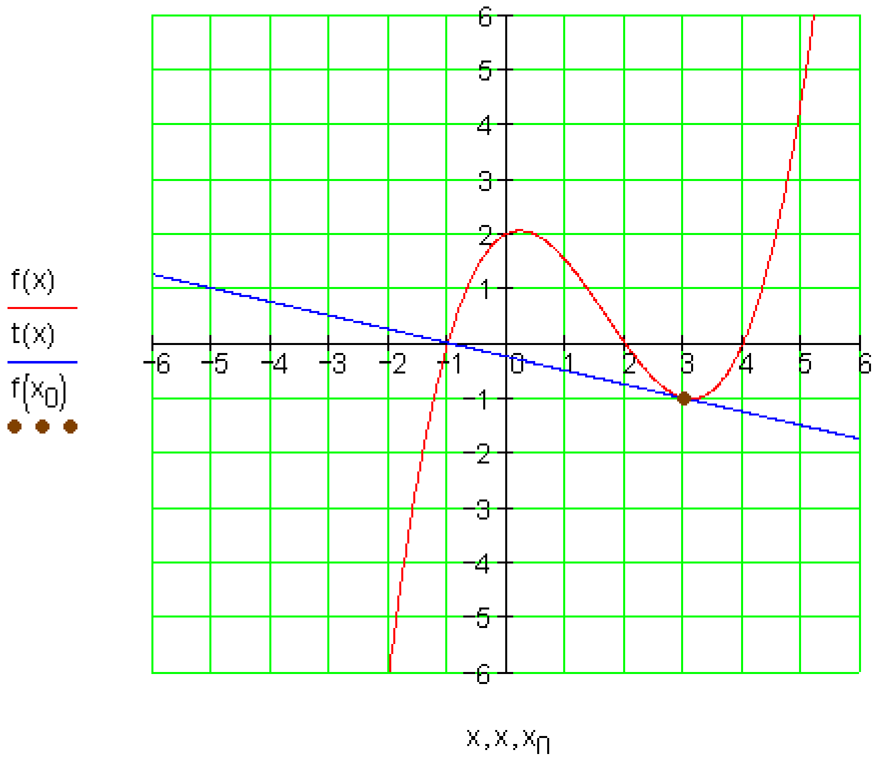
$$f'(x)=\frac{3}{4}x^2-\frac{5}{2}x+\frac{1}{2} \Rightarrow f'(x_0)=f'(3)=\frac{27}{4}-\frac{15}{2}+\frac{1}{2}=\frac{27}{4}-\frac{30}{4}+\frac{2}{4}=-\frac{1}{4}$$

$$f(x_0)=f(3)=\frac{27}{4}-\frac{45}{4}+\frac{3}{2}+2=\frac{27}{4}-\frac{45}{4}+\frac{6}{4}+\frac{8}{4}=-\frac{4}{4}=-1 \Rightarrow \underline{\underline{P_0(3\,|-1)}}$$

$$t(x)=-\frac{1}{4}(x-3)-1=-\frac{1}{4}x+\frac{3}{4}-1=-\frac{1}{4}x+\frac{3}{4}-\frac{4}{4}=\underline{\underline{-\frac{1}{4}x-\frac{1}{4}}}$$

گراف

$$f(x)=\frac{1}{4}x^3-\frac{5}{4}x^2+\frac{1}{2}x+2 \qquad x_0=3 \Rightarrow P_0(3\,|-1) \qquad t(x)=-\frac{1}{4}x-\frac{1}{4}$$



اتم: شمیرنه:

$$f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x + 2 \qquad x_0 = 1 \qquad t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

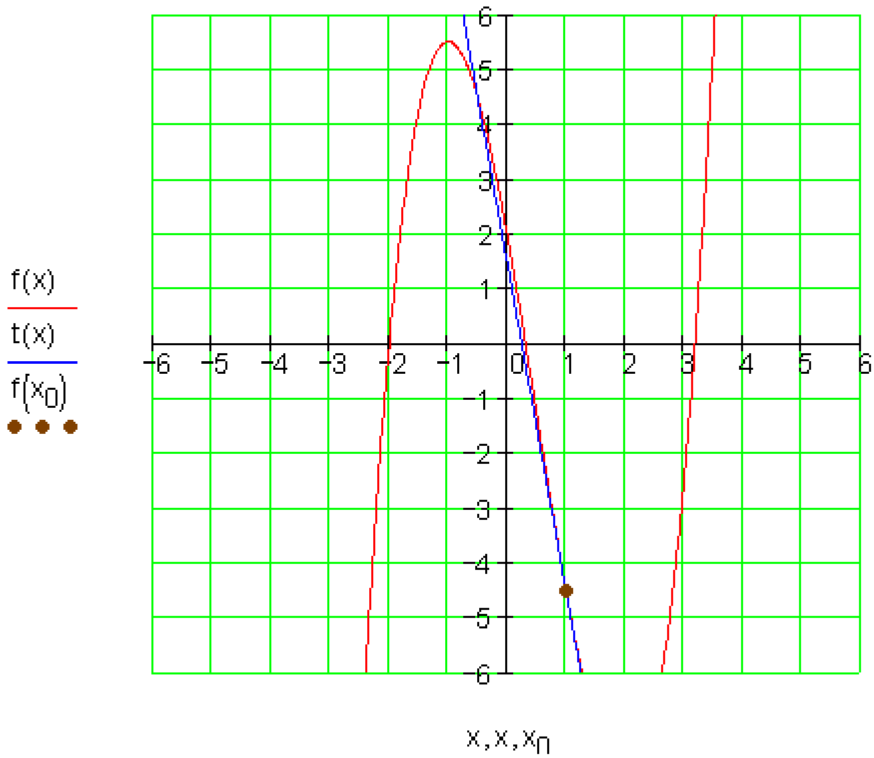
$$f'(x) = 3x^2 - 3x - 6 \Rightarrow f'(x_0) = f'(1) = 3 - 3 - 6 = -6$$

$$f(x_0) = f(1) = 1 - \frac{3}{2} - 6 + 2 = \frac{2}{2} - \frac{3}{2} - \frac{12}{2} + \frac{4}{2} = -\frac{9}{2} \Rightarrow \underline{\underline{P_0\left(1 \,\middle|\, -\frac{9}{2}\right)}}$$

$$t(x) = -6(x - 1) - \frac{9}{2} = -6x + 6 - \frac{9}{2} = -6x + \frac{12}{2} - \frac{9}{2} = \underline{\underline{-6x + \frac{3}{2}}}$$

ګراف

$$f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x + 2 \qquad x_0 = 1 \Rightarrow P_0\left(1 \,\middle|\, -\frac{9}{2} = -4,5\right) \qquad t(x) = -6x + \frac{3}{2}$$



نهم: شمیرنه:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 4x + 4 \qquad x_0 = 0 \qquad t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

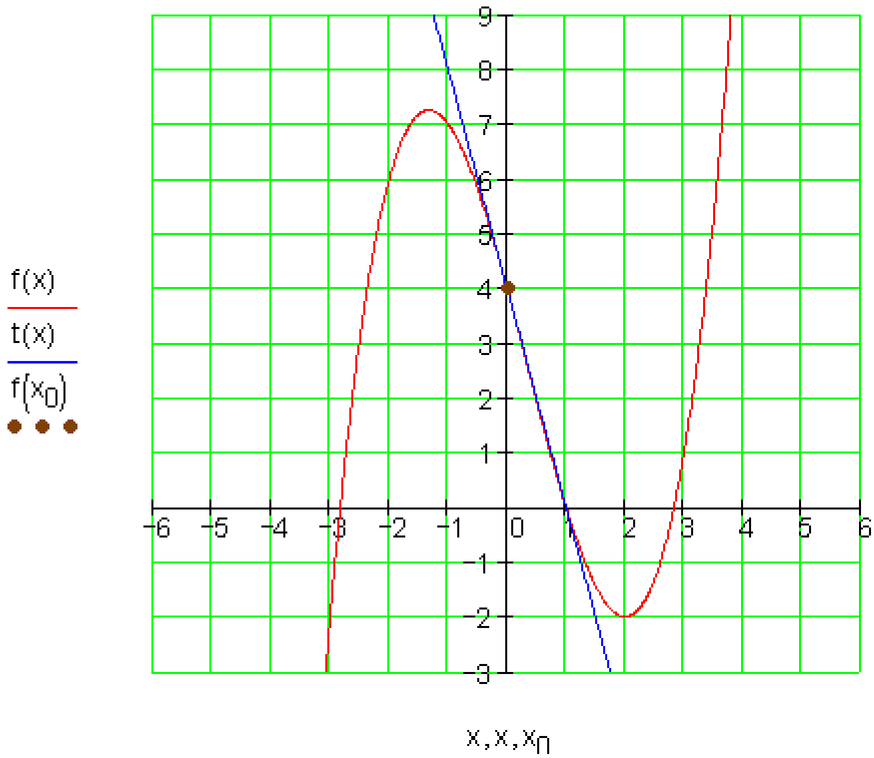
$$f'(x) = \frac{3}{2}x^2 - x - 4 \Rightarrow f'(x_0) = f'(0) = -4$$

$$f(x_0) = f(0) = 4 \Rightarrow \underline{\underline{P_0(0|-4)}}$$

$$t(x) = -4(x - 0) + 4 = \underline{\underline{-4x + 4}}$$

ګراف

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 4x + 4 \qquad x_0 = 0 \Rightarrow P_0(0|4) \qquad t(x) = -4x + 4$$



لسم: شمیرنه:

$$f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{3}x^2-4x+4 \qquad x_0=1 \qquad t(x)=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$$

$$f'(x)=x^2-\frac{2}{3}x-4 \Rightarrow f'(x_0)=f'(1)=1-\frac{2}{3}-4=\frac{3}{3}-\frac{2}{3}-\frac{12}{3}=-\frac{11}{3}$$

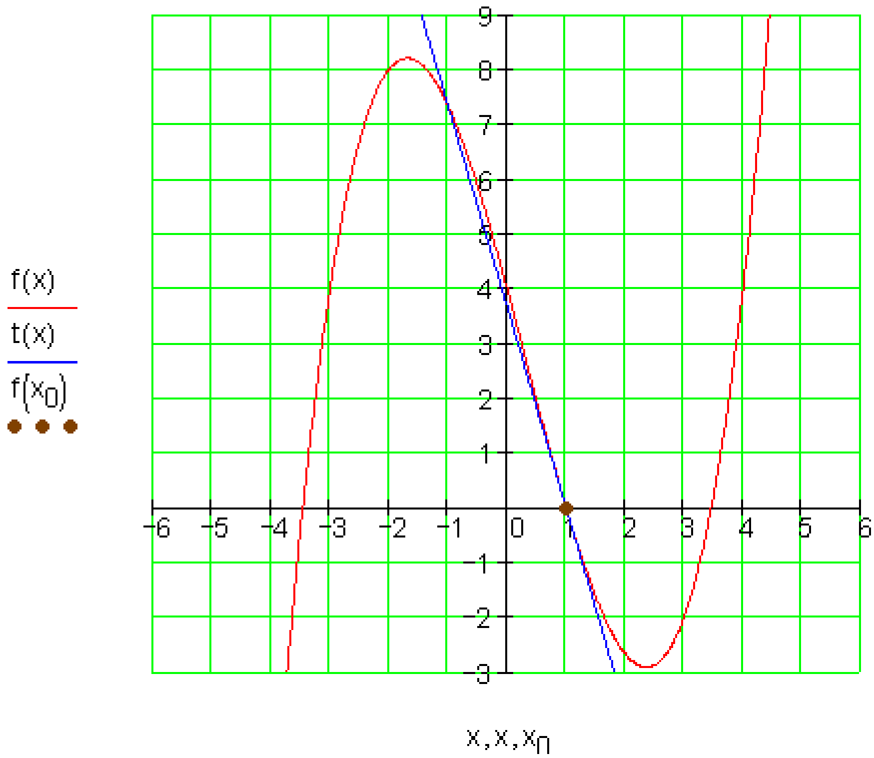
$$f(x_0)=f(1)=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}-4+4=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}-\frac{12}{3}+\frac{12}{3}=0 \Rightarrow \underline{\underline{P_0(1|0)}}$$

$$t(x)=-\frac{11}{3}(x-1)+0=\underline{\underline{-\frac{11}{3}x+\frac{11}{3}}}$$

ګرافونه:

$$f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{3}x^2-4x+4 \qquad x_0=1 \Rightarrow P_0(1|0) \qquad t(x)=-\frac{11}{3}x+\frac{11}{3}$$

.
.



مشتقشمیرنه VII

لومړی: ورکړشوی تابع: $f(x) = \frac{1}{9}x^3 - x \,;\, x \in \mathbb{R}$ ا

الف- f(x) په کوم ځای کې جګېدنه 2 لري؟

ب- د f(x) جګېدنه په x = 1,5 ځای کی 0,25- ده.

د همدې جګېدنې سره بې له شمېرنې بل ځای ورکړی.

د خپل ګومان په هکله دلیل راوړی

پ - f(x) په کومو تکو کې پروت یا افقي تانجنت لري؟ مساوات یې ورکړی.

ت - په سرچینه کې په $f(x)$ باندې تانجنت وټاکئ

ټ - په $f(x)$ باندې تانجنت د $P (u \mid f(u))$. په ټکي کې وټاکئ

ث - کومه کرښه $f(x)$ په $N (3 \mid 0)$ ټکي کې عمود غوځوي؟

دویم: — $f(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{3}{4}x^2 - 1;\ x \in \mathbb{R}$ تابع ورکړ شوې

الف – کرکتریستیکي یا خوبیز ټکي و ټاکئ او اړونده تانجنت یې ورکړئ.

ب- په $f(x)$ باندې تانجنت په ئ $x = 1$ او $x = -1$ د y - محوذ غوځوي یا قطع کوي د دې پوښتنې دلیل راوړئ؟

دریم _ ו $f(x) = -x^4 + 2x^3;\ x \in \mathbb{R}$ تابع ورکړ شوې

الف - $f(x)$ د x محور سره او د ټکو په هکله چې هلته افقي تانجنت لري مطالعه کړئ.

ب- $t(x)$ په $f(x)$ د $P (1 \mid f(1))$ په ټکي تانجنت دی.

د تانجنت مساوات وټاکئ. د $t(x)$ غوځتکئ د $f(x)$ سره وټاکئ.

پ – په کومو ټکو کې $f(x)$ د $1/8$ جګیدنې سره عمود لري؟ د عمود مساوات ورکړئ.

څلور _ ו $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x;\ x \in \mathbb{R}$ تابع ورکړ شږې ده.

الف- $f(x)$ په کرښیزو ضریبونو تجزیه کړئ او ګراف یې وکاږئ.

ب – په $f(x)$ باندې تانجنتونو مساوات په $x = 2$ کې وټاکئ او دا تانجنت د الف په وضعیه قیمتسیستم کې رسم کړئ..

پ – ټکئ $P (u \mid f(u))$ داسې وټاکئ، چې په P د $f(x)$ په تانجنت د $f(x)$ په سرجینې تانجنت سره غبرګ یعنې موازي وي.

ت – په کوم ځاي کې f(x) خورا کوچنی تانجنت لرئ؟

پنځم- یوه تیګه د v0 = 7 m/s پیل جکتیا یا سرعت سره عمود پورته غورځول کیږي.

د لار-وخت دیاګرام دی: $s(t) = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2$ د $g = 10 \frac{m}{s^2}$ سره.

الف- په کوم وختt کې د تیګې جګوالی صفر دی؟

ب- د جګېدني ماکسیمال جګوالی وشمېری.

حلونه

مشتقشمرنه VII

نتیجې او مفصل حلونه

مفصل حلونه:

لومړی:

الف – $f(x) = \frac{1}{9}x^3 - x\,;\ f'(x) = \frac{1}{3}x^2 - 1$

جګوالی پهx0 کې ارزښت 2 لرئ

$$\Rightarrow f'(x_0) = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{3}x_0^2 - 1 = 2 \Rightarrow \underline{x_{01/2} = \pm 3}$$

تابع دF(x) $x_{1/2} = \pm 3$ په ځایونو کې جګیدنه 2 لري.

ب - $f'(x) = \frac{1}{3}x^2 - 1$ یو پارابول او له دې امله محور سیومتري دی.

له $f'(1,5)=0,25$ څخه $f'(-0,25)=-0,25$ لاس ته راځي.

دf(x) $x_{1/2} = \pm 1,5$ په ځای کې0,25- جګیدنه لري.

پ–په f(x) یو پروت یا افقي تانجنت په ټکو کې پروت دی، چې هلته جګوالی صفر وي.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3}x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x_{1/2} = \pm\sqrt{3}$$
$$f\left(\sqrt{3}\right) = -\frac{2}{3}\sqrt{3}\,;\, f\left(-\sqrt{3}\right) = \frac{2}{3}\sqrt{3} \Rightarrow P\left(\sqrt{3} \mid -\frac{2}{3}\sqrt{3}\right);\, Q\left(-\sqrt{3} \mid \frac{2}{3}\sqrt{3}\right)$$

تانجنتونه کرښې دي، د x - محور سره غبرګې ځغلي.

$$t_1(x) = -\frac{2}{3}\sqrt{3}\,;\, t_2(x) = \frac{2}{3}\sqrt{3}$$

ت –

$$f(x) = \frac{1}{9}x^3 - x\,;\, f'(x) = \frac{1}{3}x^2 - 1$$

په سرچینه کې د تانجنت مساوات: x0 = 0

$$t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$
$$f'(x_0) = f'(0) = -1;\, f(x_0) = f(0) = 0$$
$$\Rightarrow t(x) = -1(x - 0) + 0 = \underline{\underline{-x}}$$

ټ –

$$f(x) = \frac{1}{9}x^3 - x\,;\, f'(x) = \frac{1}{3}x^2 - 1$$

د تانجنت مساوات د P(u;f(u)) په ټکي کې.

$$t(x) = f'(u)(x-u) + f(u)$$

$$f'(u) = \frac{1}{3}u^2 - 1;\ f(u) = \frac{1}{9}u^3 - u$$

$$t(x) = \left(\frac{1}{3}u^2 - 1\right)(x-u) + \frac{1}{9}u^3 - u = \underline{\underline{\left(\frac{1}{3}u^2 - 1\right)x - \frac{2}{9}u^3}}$$

ث – کربنه، چې f(x) په (0 | 3) N کې غوڅوي، په دې ټکي کې عمود ده.

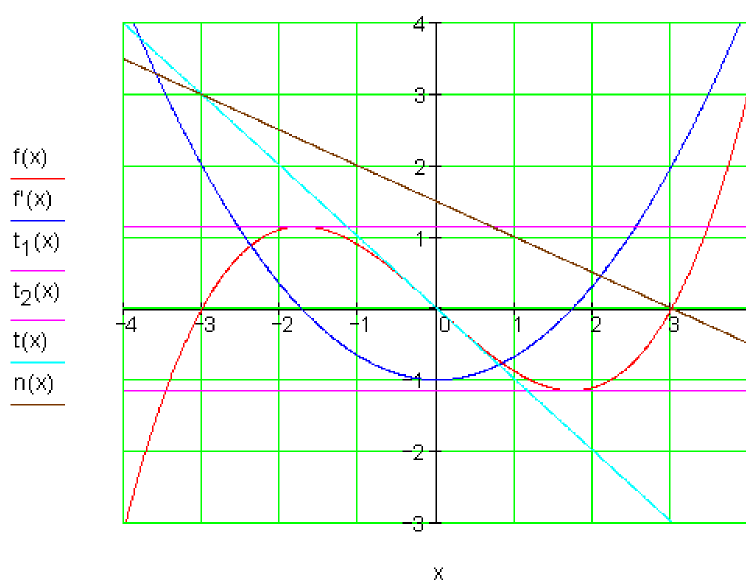
$$f(x) = \frac{1}{9}x^3 - x;\ f'(x) = \frac{1}{3}x^2 - 1;\ N(3\,|\,0) \Rightarrow x_0 = 3$$

$$n(x) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) + f(x_0)$$

$$-\frac{1}{f'(x_0)} = -\frac{1}{f'(3)} = -\frac{1}{2};\ f(x_0) = f(3) = 0$$

$$\Rightarrow n(x) = -\frac{1}{2}(x-3) + 0 = \underline{\underline{-\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}}}$$

گراف : Die Graphen:



دویم: الف- کرکتریستیک یا خوي ټاکونکي ټکي صفرځایونه دي، چې په دې ټکو کې د تانجنتونو جګوالی دی ، په هغو یاکومو کې چې پروت یا افقي تانجنت شته وي.

$$f(x)=\frac{x^4}{4}-\frac{3}{4}x^2-1;\ f'(x)=x^3-\frac{3}{2}x$$

صفرځایونه: $f(x)=0 \Leftrightarrow \frac{x^4}{4}-\frac{3}{4}x^2-1=0$

بي- یا دوه مربعیز مساوات.

د په ځاي ایښوونې Substitution له لارې حل یا اوبیونه:

$$x^2=z \Rightarrow f(z)=\frac{z^2}{4}-\frac{3}{4}z-1$$

$$f(z)=0 \Leftrightarrow \frac{z^2}{4}-\frac{3}{4}z-1=0 \Rightarrow z_1=4;\ z_2=-1$$

د Z2 لپاره حل نه شته.

$$z_1=4 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x_{1/2}=\pm 2 \Rightarrow \underline{\underline{P_{x1}(2\,|\,0);\ P_{x2}(-2\,|\,0)}}$$

$$f'(2)=2^3-\frac{3}{2}\cdot 2=\underline{\underline{5}};\ f'(-2)=(-2)^3-\frac{3}{2}\cdot(-2)=-8+3=\underline{\underline{-5}}$$

د پروت تانجنت سره ټکي.

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow x^3-\frac{3}{2}x=0 \Rightarrow x_1=0;\ x_{2/3}=\pm\sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$P_2(0\,|\,-1);\ P_2\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\,\Big|\,-\frac{25}{16}\right);\ P_3\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}\,\Big|\,-\frac{25}{16}\right)$$

$$f(x)=\frac{x^4}{4}-\frac{3}{4}x^2-1;\ f'(x)=x^3-\frac{3}{2}x$$

تانجنت په x = 1 او x = -1 کې.

$$t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

$$t_1(x) = f'(1)(x-1) + f(1)\,;\ t_2(x) = f'(-1)(x+1) + f(-1)$$

د ټکي سیومتري له امله

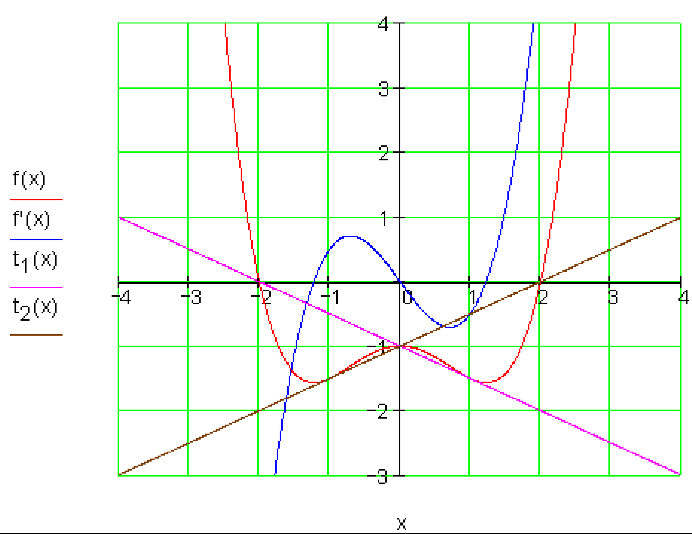
$$f'(1) = -\frac{1}{2}\,;\ f'(-1) = -f'(1) = \frac{1}{2}$$

د محور سیومتري له امله

$$f(1) = -\frac{3}{2}\,;\ f(-1) = f(1) = -\frac{3}{2}$$

$$t_1(x) = -\frac{1}{2}(x-1) - \frac{3}{2} = \underline{\underline{-\frac{1}{2}x - 1}}$$

$$t_2(x) = \frac{1}{2}(x+1) - \frac{3}{2} = \underline{\underline{\frac{1}{2}x - 1}}$$



دواړه تانجنتونه د y محور په ټکي $P_y(0;-1)$ کې غوڅوي.

ګرافونه:

دريم: الف- $f(x) = -x^4 + 2x^3 \,;\, f'(x) = -4x^3 + 6x^2$

صفرځايونه : $f(x) = 0 \Leftrightarrow -x^4 + 2x^3 = 0 \Rightarrow x_{1/2/3} = 0 \,;\, x_4 = 2$

$\underline{\underline{P_{x1/2/3}(0|0)}}$ درېواره صفرځاي او $\underline{\underline{P_{x4}(2|0)}}$

پروت يا افقي تانجنتونه:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -4x^3 + 6x^2 = 0 \Rightarrow x_{1/2} = 0 \,;\, x_3 = \frac{3}{2}$$

$$f(0) = 0 \,;\, f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{27}{16} \Rightarrow \underline{\underline{P_{1/2}(0|0) \,;\, P_3\left(\frac{3}{2} \middle| \frac{27}{16}\right)}}$$

ب –

$$f(x) = -x^4 + 2x^3 \,;\, f'(x) = -4x^3 + 6x^2 \,;\, P(1|f(1))$$

په f(x) تانجنت د x0 = 1 ټکي کې د f'(1) = 2 او f(1) = 1 سره.

له دې لاس ته راځي: t(x) = 2x -1

د t(x) غوځېکی د f(x) سره

$$f(x) = t(x) \Leftrightarrow -x^4 + 2x^3 = 2x - 1 \Leftrightarrow -x^4 + 2x^3 - 2x + 1 = 0$$

د P(1;1) سره ځاي په ځاي کونې يا اينووني سره ډبل صفرځايونه

$$x_{1/2} = 1 \Rightarrow (x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$$

پولينوموېش:

$$\left(-x^4+2x^3 \qquad -2x+1\right):\left(x^2-2x+1\right)=-x^2+1$$
$$\underline{-\left(-x^4+2x^3-x^2\right)}$$
$$x^2-2x+1$$
$$\underline{-\left(x^2-2x+1\right)}$$

$$-x^2+1=0 \Rightarrow \underline{\underline{x_{3/4}=\pm 1}}$$

F(-1) = -3 => Q(-1;-3) د t(x) د fx) سره یو بل غوځتکی دی.

پ-

$$f(x)=-x^4+2x^3\,;\,f'(x)=-4x^3+6x^2$$
$$n(x)=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)+f(x_0)$$

د عمود جګوالی دی:

$$\frac{1}{8}\Rightarrow -\frac{1}{f'(x_0)}=\frac{1}{8}$$

$$\Leftrightarrow f'(x_0)=-8 \Leftrightarrow -4x^3+6x^2=-8 \Leftrightarrow -4x^3+6x^2+8=0$$

X = 2 د $-4x^3+6x^2+8=0$ یو حل دی (د ازمایینت له لارې پیدا شوی)

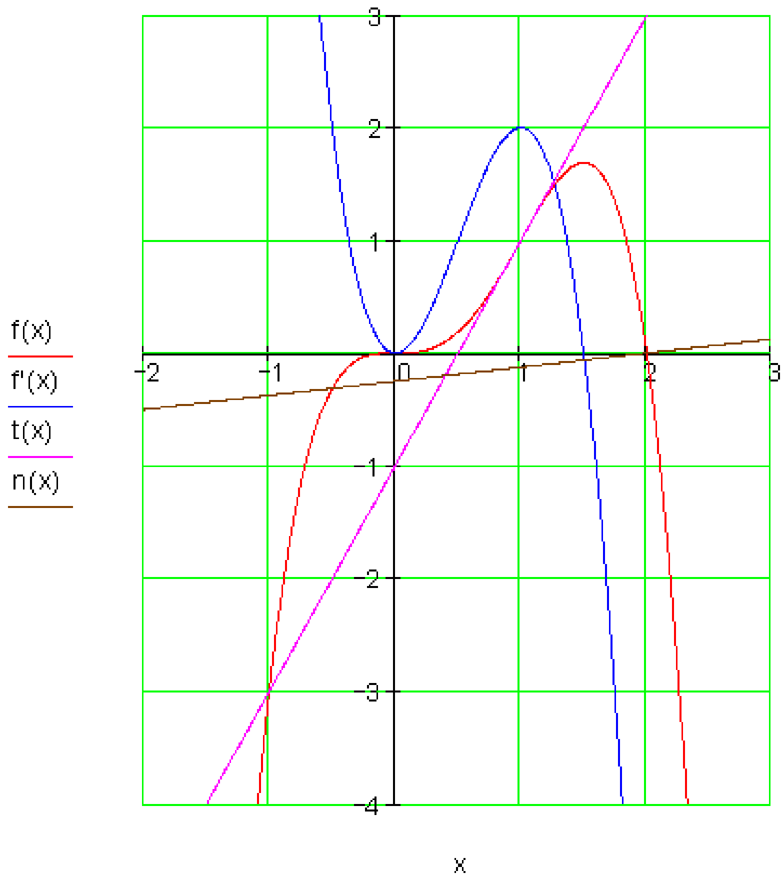
هورنر Horner

$$x=2\quad \begin{array}{cccc} -4 & 6 & 0 & 8 \\ & \underline{-8} & \underline{-4} & \underline{-8} \\ -4 & -2 & -4 & 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} -4x^2-2x-4=0 \\ p=\frac{1}{2};\,q=1\Rightarrow D<0 \end{array}$$

بل حل نه شته.

$$x = 2 \Rightarrow x_0 = 2 \Rightarrow n(x) = \frac{1}{8}(x-2) + \underbrace{f(2)}_{0} \Rightarrow n(x) = \underline{\underline{\frac{1}{8}x - \frac{1}{4}}}$$

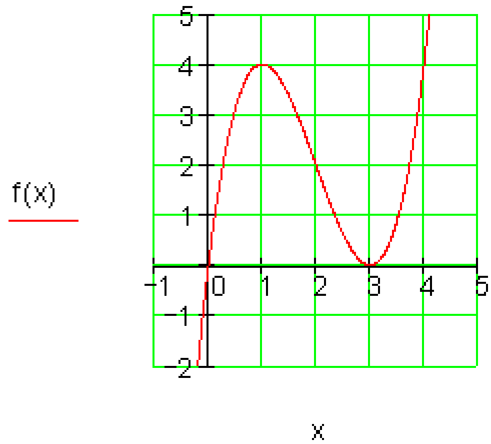
گرافونه:



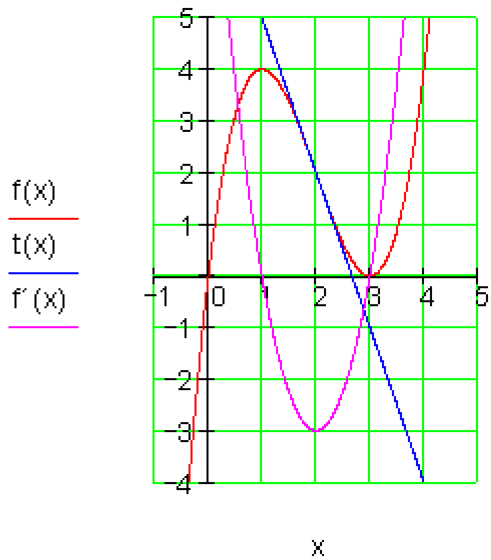
خلورم:

الف-

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$$
$$= x\,\underbrace{\left(x^2 - 6x + 9\right)}$$

	دپینوم دویم فرمول $= x(x-3)^2$ $\Rightarrow P_{x1}(0\,\vert\,0);$ $P_{x2/3}(3\,\vert\,0)$ مماس یا لمستکی

ب-

	$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$ $x_0 = 2$ $t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ $f'(2) = -3$ $f(2) = 2$ $\Rightarrow t(x) = -3(x-2) + 2$ $= \underline{\underline{-3x + 8}}$

پ –

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x\,;\ f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$$

تانجنت په سرچینه کې $f'(0) = 9$ جګوالی لري.

دې سره غبرګ هر تانجنت همدا یا برابر جګوالی لري پس هر په P(u;f(u)) ټکي همز

$$f'(u) = 9 \Leftrightarrow 3u^2 - 12u + 9 = 9 \Rightarrow u_1 = 0\,;\, u_2 = 4$$
$$u_1 = 0 \Rightarrow f(u_1) = f(0) = 0 \Rightarrow \underline{\underline{P_1(0\,|\,0)}}$$
$$u_2 = 4 \Rightarrow f(u_2) = f(4) = 4 \Rightarrow \underline{\underline{P_2(4\,|\,4)}}$$

ت –

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x;\ f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$$

د $f'(x)$ د $f(x)$ جګېدنه ده، دا پورته لور ته واز پارابول دی.

د هغه مینیموم د هغه غوښتکی یا د تقاطع ټکی دی، هلته $f'(x)$ یو پروت یا افقي تانجنت لري.

شرطونه: $f''(x) = 0$

$$F''(x) = 6x - 12 = 0 \Rightarrow x = 2$$

د $x = 2$ په ځای کي $f(x)$ خورا کمه جګېدنه لري.

$$f(2) = 2 \Rightarrow$$

په $P(2;2)$ ځای کي $f(x)$ خورا کمه جګېدنه لري.

هغه هلته ارزښت $f(2) = -3$ لري.

پنځم:

الف - د $s(t) = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2$ د $v_0 = 7\,\frac{m}{s}$ $: g = 10\,\frac{m}{s^2}$ سره

$$v(t) = s'(t) = v_0 - gt$$
$$v(t) = 0 \Leftrightarrow v_0 - gt = 0 \Rightarrow t = 0,7\ s$$

وروسته له 0,7S تيګه v(t)=0 سرعت لري

ب – د ميلان يا جګېدني خورا لوي يا ماکسيمال جګوالی

کښته لور ته وتز پارابول دی، چې ککرتکی يا رآس يې د غورځوني ماکسيمال جګوالی ورکوي.

د ککرتکي يا رآس شرطونه: $s'(t) = v(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0,7\ s$ د دې لپاره پرخه الف وکوری.

خورا لوي جګوالی: $s(0,7) = 2,45$

خورا لوي يا ماکسيمال جګوالی 2,45 m دی.

پوښتنې

مشتقشمېرنه VIII

اول – د يوې فابريکې ټول مصرف د10 ME ماکسيمال توليد په K(x) سره ښايو. د يوه ME د خرڅلاو نرخ 28 GE دی.

$$K(x) = x^3 - 12x^2 + 50x + 40$$

الف – د نرختابع مشتق وشمېرئ. (مشتقارزښت تابع يا پوله نرخ تابع) او ګراف يې وکاږئ. ګراف يې تشريح کړئ.

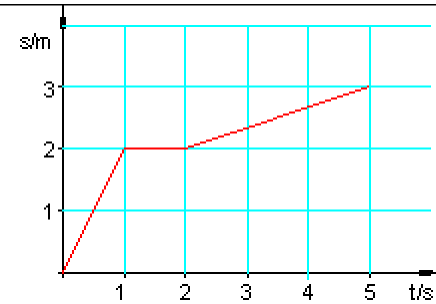
ب - مينيمال يا خورا کم د مشتقلګښت وشمېرئ.

پ – وښايئ، چې د هر توليد ډېرئ يا سټ مشتقنرخ يا مشتقلګښت مثبت دی.

ت – په کومه ورشو کې ګټې فکر وشي؟

ټ - په کومه ورشو کې ګټه زياتيږي؟

دويم _ د يوه خوزنده جسم يا تن د لار - وخت- دياګرام $s(t)$ ورکړی

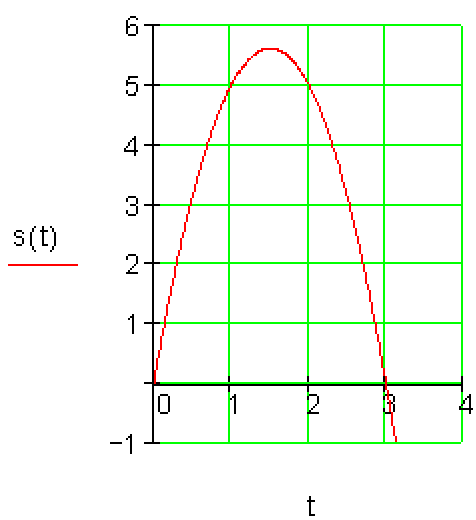


الف – دا حرکت تشريح کړی

پ - د اړونده چټکتيا – وخت – دياګرام رسم کړی، که باور ولري:

$v(t) = s'(t).$

دريم – تابع د يوه خوزښت يا حرکت لار د لار – وخت دياګرام کې ښايي.



الف – يو روځنی بېلګه ورکړی، چې دا لار په کوته کولاي شي.

د کږې يا منحني دا لار د $t > 3$ لپاره د فزيکي په څه مفهوم دی؟

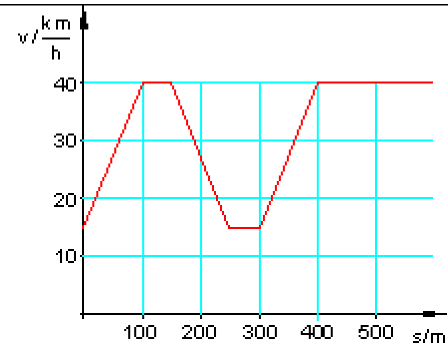
ب – د دې خوزښت يا حرکت لپاره د لار – وخت – قانون دی:

$$s(t) = \frac{1}{2} a \cdot t^2 + v_0 \cdot t$$

a او v_0 و ټاکی.

پ – دې سره اړوند د چټکتيا – وخت – دياګرام رسم کړی او دا تشريح کړی. يو منفي سرعت يا جتکتيا په څه معنا دی؟

ځلورم:

د یوه خوزښت د چټکتیا لار ورکړې. دا دیاګرام تشریح کړی. د ممکنه ټوټه کرښو تلنلار په هکله ویناوې وکړې.	

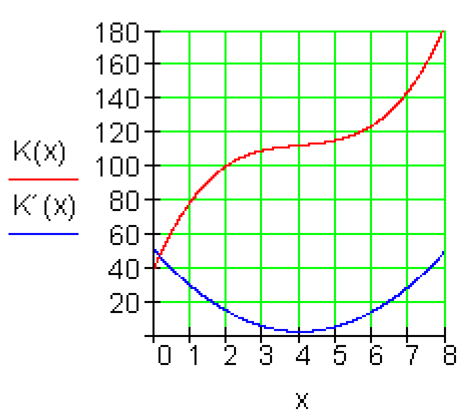
حلونه

مشتقشمیرنه VIII

مفصل ځوابونه:

لومړی:

الف-

الف - $K(x) = x^3 - 12x^2 + 50x + 40$ $K'(x) = 3x^2 - 24x + 50$ د پولي لګښت ګراف پورته لور ته واز پارابول دی. په ککره یا رآس کې یې پوله لګښت خورا کم دی.	

ب – د خورا کم مشتقلګښت لپاره شرطونه : $K''(x) = 0$

$$K(x) = x^3 - 12x^2 + 50x + 40$$
$$K'(x) = 3x^2 - 24x + 50$$
$$K''(x) = 6x - 24$$
$$K''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - 24 = 0 \Rightarrow x = 4$$
$$K'(4) = 2$$

له دې لاس ته راځي: د يوه 4ME (څلور ډېرې يا سټ واحدونه)توليد مشتقلګښت د 2GE/ME سره خورا کم دی.

پ –

$K'(x) = 3x^2 - 24x + 50$ د $K'(4) = 2$ لپاره مثبت دی.

که له نيونې يا فرضيې سره سم $K'(x)$ ، $x \in \mathbb{R}_+$ مثبت وي، د صفرځاي د لرلو اجازه نه شته.

موږ $K'(x)$ په صفرځايونو څېړو:

$$K'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 24x + 50 = 0$$
$$\Rightarrow p = -8 \,;\, q = \frac{50}{3} \,;\, D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 16 - \frac{50}{3} < 0$$

له دې لاس ته راځي جې حل يا اوبی نه شته.

مشتقلګښت د هر توليد لپاره مثبت دی.

څه چې د ښوولو وو.

ت – د لاس ته راوړنې (يعنې هر څه چې پلورل شوي وي) تابع: $E(x) = 28x$ (له پوښتنې کولو لاس ته راځي).

د ګټې تابع: $G(x) = E(x) - K(x) = -x^3 + 12x^2 - 22x - 40$

ګټه هلته کیږي، چې د ګټې تابع مثبت ارزښت لري.

ازمایو:

$G(5) = 25; G(4) = 0$ ، پس د $G(x)$ صفرځاي $x1 = 4$ دی.

هورنر:

$$\begin{array}{c|cccc} & -1 & 12 & -22 & -40 \\ x=4 & & -4 & 32 & 40 \\ \hline & -1 & 8 & 10 & 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} \Rightarrow -x^2 + 8x + 10 = 0 \\ x_{2/3} = 4 \pm \sqrt{26} \Rightarrow \underline{\underline{x_2 \approx 9,1}} \end{array}$$

د $\underline{\underline{4 \le x \le 9,1}}$ لپاره فابریکه په ګټهکار کوي.

ټ- – د ګټې زیاتیدل ځکه، چې $G(x)$ مثبته جګېدنه لري او $G(x) > 0$ دی.

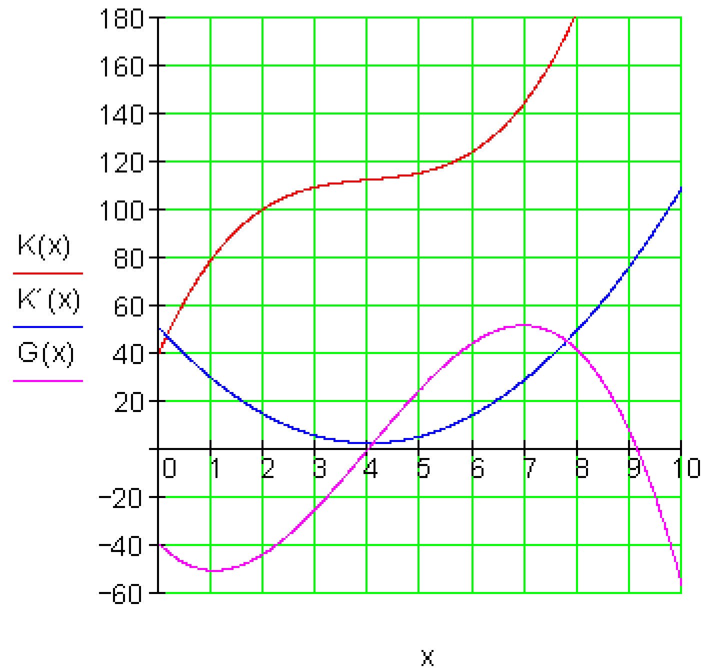
یعنې: $G(x) > 0 \wedge G'(x) > 0$

د $G'(x) = -3x^2 + 24x - 22 > 0$ $x \in \left[4 - \sqrt{\frac{26}{3}} ; 4 + \sqrt{\frac{26}{3}}\right]$ لپاره یا

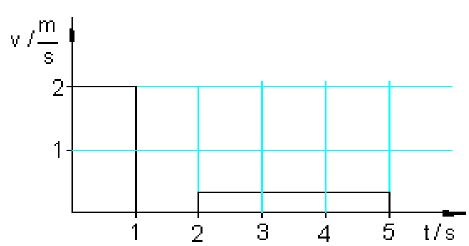
$x \in [1,05 ; 6,9]$

د ګټې زیاتیدنه: $[4 ; 9,1] \cap [1,05 ; 6,9] = \underline{\underline{[4 ; 6,9]}}$

ګرافونه:



دويم:

الف – له 0 تر 1 s پورې: خوزښت د مساوي پاتې چټكتيا سره .v = 2 m/s له 1 تر 2 s پورې. ځاي په ځاي دريدنه: v = 0 m/s له 2 تر 5 s پورې. خوزښت د مساوي پاتې چټكتيا سره: v = 1/3 m/s	ب- 

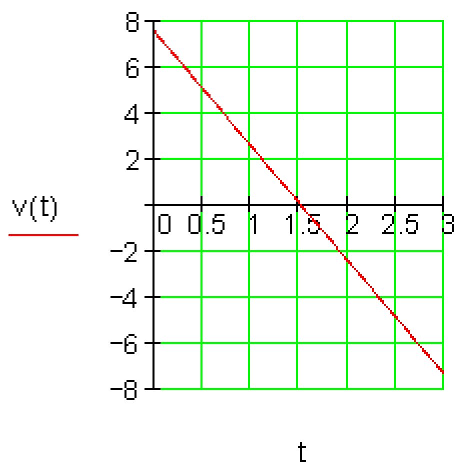
دريم: الف – يو شى عمود پورته لور ته غورځول كيږي. د 3 < t لپاره0 > s دى، ادا په دي معنا چي ادا شى د غورځول ځاي څخه لاندي يا كښته دى.

ب - $s(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t$ د خوزښت مساوات.

د a او v0 د خوزښا لپاره د ګراف له دوه ټکو څخه کار اخلو.

$$P_1(1|5): s(1) = \frac{1}{2}a + v_0 = 5 \qquad a = -5;\ v_0 = 7,5$$
$$P_2(3|0): s(3) = \frac{9}{2}a + 3v_0 = 0$$

a<0 په دي معنا، چي دا یو ځنډشوی حرکت دی.

	پ - $v(t) = s'(t) = at + v_0 = -5t + 7,5$ چټکتیا په پیل کي مثبت ده، دا په دي معنا چېجسم یا بدن پورته لور ته خوزي. مګر دا کمیږي او t = 1,5 s سره صفر دی. بدن هغه خپل خورا جګ جګوالي ته ورسېده. وریسي جګوالی منفي دی، بدن لویږي، هغه ښکته کښته لور ته خوزي.

څلورم:

0 - 100 m: چټکتیا زیاتیږي.

100 - 150 m چټکتیا براپره پتیږي40 km/h.

150 - 200 m [ټکتیا کمیږي.

---

250 - 300 m چټکتیا برابره پاتیږي..15 km/h :

300 - 400 m چټکتیا زیاتیږي.

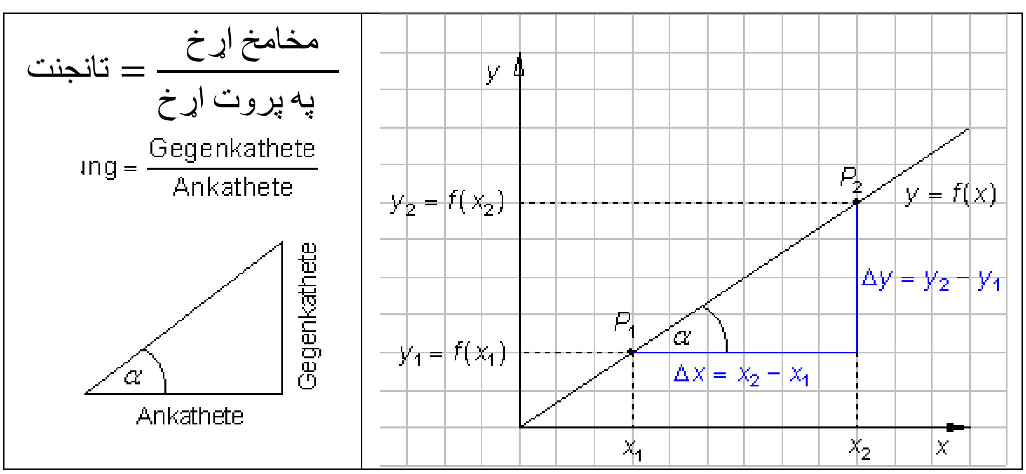
له 400 m وروسته چټکتیا ثابته پاتیږي. 40 km/h.

روښانه ونه: په کښته لوېدلي سرک په تعجیل یا په بیړه کیږي، پسي سرک هوار دی.

وریسې سرک مایل په غره پورته کیږي جتکتیا تر 15 km/h پورې کمیږي. پسي کښته لویږي، چې سرعت یا چټکتیا بیرته زیاتیږي. له دې وروسته هغه خورا جګه د 40 km/h چټکتیا یا سرعت ساتلې پاتیږي په دا پسې لر پاتې کرښه باندې.

تولګه :

د کرښې جګیدنه:



د کرښې لپاره د جګیدنې فرمول

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\text{مخامخ اړخ}}{\text{په پروت اړخ}} = \text{جګیدنه} \qquad \text{یا} \qquad \frac{f(x1)-f(x0)}{x1-x0} = \text{جګیدنه}$$

بيلګه:

ټکی $P_0(2|3)$ او $P_1(5|7)$ په کربنه پراته دي

د $x_0 = 2$ او $f(x_0) = f(2) = 3$ سره

همداسې $x_1 = 5$ او $f(x_1) = f(5) = 7$ د کربنې جګيدنه ده:

جګيدنه= $\text{Steigung} = \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \dfrac{f(5) - f(2)}{5-2} = \dfrac{7-3}{5-2} = \underline{\underline{\dfrac{4}{3}}}$

د يوې کربنې جګيدنه

موږ لروده: $\Delta x = x_1 - x_0$

موږ دا مساوات په x1 پسې بنه بدلوو

$$\Delta x = x_1 - x_0 \,|+x_0 \Leftrightarrow \Delta x + x_0 = x_1 \Leftrightarrow \underline{\underline{x_1 = x_0 + \Delta x}}$$

اوس د جګيدنې فرمول کې ليکو:

د $f(x_1)$ په ځای $f(x_0 + \Delta x)$ د $x_1 - x_0$ په ځای Δx

له دې سره د جګيدنې فرمول دا بنه لري:

جګيدنه= $\text{Steigung} = \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$

دا فرمول کمښت وېش دفرنسوېش بولو.

موږ د دې فرمول باوريوالی د پورته تمرين سره ازمايو.

$P_0(2|3)$ او $x_0 = 2$ $P_1(5|7)$ او $\Delta x = x_1 - x_0 = 5 - 2 = 3$

جګيدنه=

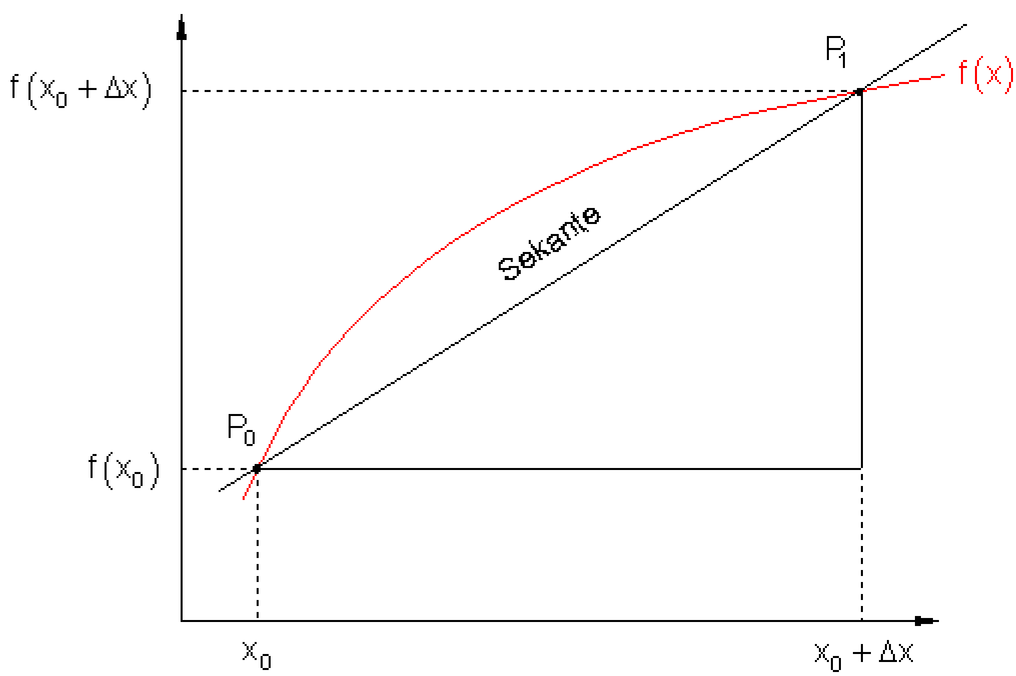
$$\text{Steigung} = \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(2+3)-f(2)}{3} = \frac{f(5)-f(2)}{3} = \frac{7-3}{3} = \underline{\underline{\frac{4}{3}}}$$

د يوې کربنې باوريوالی کيدی شي هم د کمبنتوپش سره وتاکل شي.

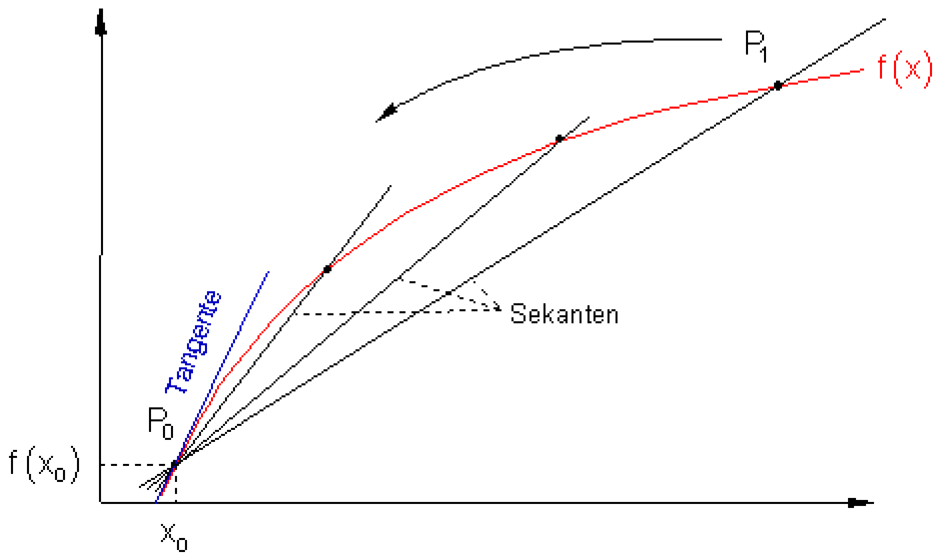
د سيکانت جګيدنه او د تانجنت جګيدنه

پرابلم: د يوه په خوښه تابع f(x) په ټکي P_0 کې د ګراف جګيدنه څومره لويه ده؟

د سيکانت يا ټوټهووني جګيدنه د P_0 او P_1 ترمنځ منځنی جګيدنه.



د سیکانت سره څه پېښیږي، که موږ ټکی P_1 تل پسې د ټکي P_0 په لور و خوزوو یا بوزو؟



سیکانت یا غوڅووني تل د $f(x)$ګراف ته ور نږدې کیږي.

که P_1 په P_0 ولویږي یا پریوځي، نوره نو بیا سیکانت یا غوڅووني نه شته. دا بیا تانجنت شوی دی.

تانجنت یوه کرښه ده، چې د $f(x)$ ګراف په ټکي P_0 کې لمسوي.

د تعریف یا پیژند له مخې د یوه د ګراف جګیدنه په ټکي P_0 کې د تانجنت د جګوالي سره برابره ده.

کمبنتوېش، دفرنشلوېش، مشتق او د جګیدني تابع

د دې لپاره چې د یوه ګراف $f(x)$ د x_0 په ځای کې یعني په ټکي $P_0\ (x_0 \mid f(x_0))$ کې وشمیرو، کیدی شي دسیکانتجګیدني فرمول لپاره دا ،، دلتا،، تل کوچنی شي، کوم چې

د ټکي P_1 راکښنه د P_0 په لور راکوي یا په ګوته کوي.

(کمبنتوپش) د سیکانت جګیدنه= $\text{Sekantensteigung} = \dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

د ګراف $f(x)$ جګیدنه د x_0 په ځای کې د پوله جوړوني له لارې راکوي یعني

(دفرنځیالوپش) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

پوله ارزښت په دې معنا، چې ،، x دلتا،، د صفر په لور هڅیږي، یعني په خوښه کوچنی کیږي، بې له دې چې ټیک صفر شي. ک د ،، x دلتا ،، لپاره ارزښت صفر ایښول شوی وی، نو به و یوه نه تعریف شوي افاده ا وبینه لاس ته راوړې وی.

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(x_0+0)-f(x_0)}{0} = \frac{f(x_0)-f(x_0)}{0} = \frac{0}{0}$$

تعریف نه

په یاد ولره: د دفرنشلوپش

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} := f'(x_0) := \frac{dy}{dx}$$

د x_0 په ځای کې د تابع ($f(x$ مشتق یا رابیلیدنه بلل کیږي او د x_0 په ځای کې د ($f(x$ جګیدني لپاره یوه کچه ونه ده

د مشتق بیلګه:

تابع $y=f(x)=x^2$ لرو، غواړو د $x=x0$ په ځای کې مشتق پیداکړو

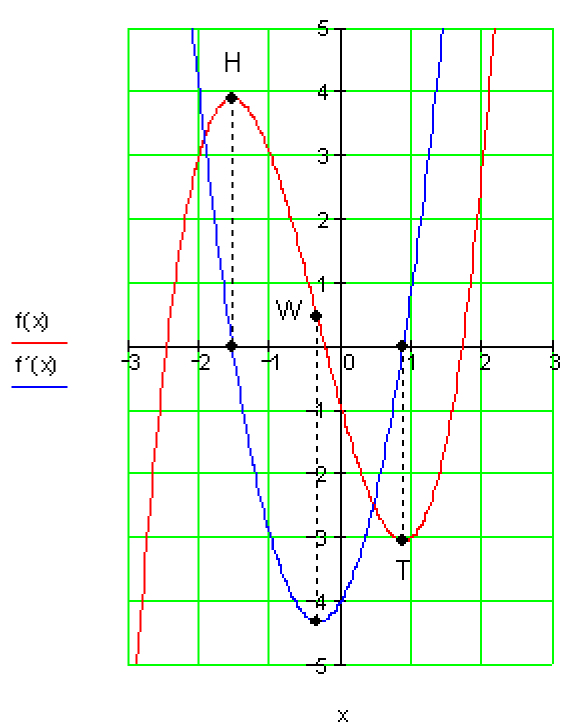
$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x_0+\Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x_0^2 + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x_0\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(2x_0 + \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}(2x_0 + \Delta x) = \underline{\underline{2x_0}}$$

دا چې د $f(x) = x^2$ لپاره ځای $x = x0$ په خوښه ټاکل کیدی شي، د دې تابع لپاره باور لري:　　(د مشتق- یا رابیلیدني تابع) $f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x$

$f(x) := x^3 + x^2 - 4x - 1$　　$f'(x) := 3x^2 + 2x - 4$



د مشتق – یا رابیلیدني تابع f'(x) په ځای سرې د جګیدني تابع هم وایي، ځکه چې دا ابع د هر تابع ارزښت x لپاره د x په ځای کې د مشتق شوي تابع جګوالی ورکوي.

دا ترځنګ د یوه تابع ګراف دی، هم داسې د مشتق تابع په یوه کواوردینات سیستم کې انځوروي.

د مشتق – یا رابیلیدني تابع f'(x) په ځای سرې د جګیدني تابع هم وایي، ځکه چې دا ابع د هر تابع ارزښت x لپاره د x په ځای کې د مشتق شوي تابع جګوالی ورکوي.

دا پورته ترځنګ د یوه تابع ګراف دی، هم داسې د مشتق تابع په یوه کواوردینات سیستم کې انځوروي

پام ولره:

په افراطي ځایونو (جګټکو، ټیټ ټکو) کې د مشتق تابع هر ځل ارزښت صفر لري.

په اوړونټکو – یا انعطاف ټکوکې (W) د مشتق تابع یو افراطي ځای لري.

یوغږیزوالي

د یوغږیزوالي خویونه:

یوغږیزې توابع(Monotony (یوناني: یوغږیز، برابرېدوله)

جګېدونکې(متزاید)، ټیټېدونکې(متناقص) توابع(جګ-ټیټېدونکې توابع)

که د ټولو $x_1 < x_2$ لپاره دf یوه تابع په یوه اینتروال کې $f(x_1) \leq f(x_2)$ $(f(x_1) \geq f(x_2))$ وي، نو تابع په دې اینتروال کې مونوتون جګېدونکې(- ټیټېدونکې) بلل کیږي، که $f(x_1) = f(x_2)$ په کې اجازه ونه لري، نو دا $f(x_1) < f(x_2)$ $(f(x_1) > f(x_2))$کره یا ټینګه مونوتون جګېدونکې (همغږیز ټیټېدونکې) بلل کیږي.

لاندې قواعد، چې له همغږیزوالي په لاس راځي، د همغږیزوالي حالت لپاره ګټور دي.

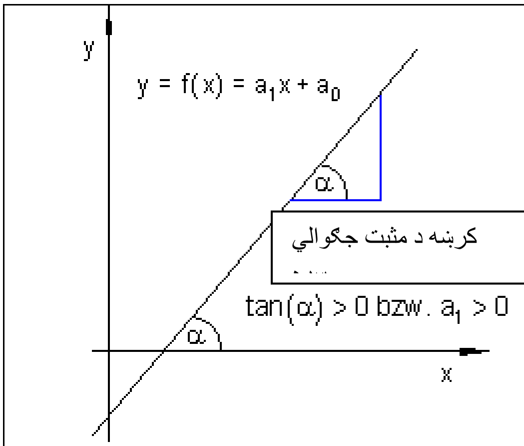
دf یوه تابع ټیک هلته د تعریف په ورشو(ساحه) D کې مونوتون جګېدونکې ده، که د خوښې x_1 او x_2 لپاره، چې په D کې پراته دي، باور ولري:

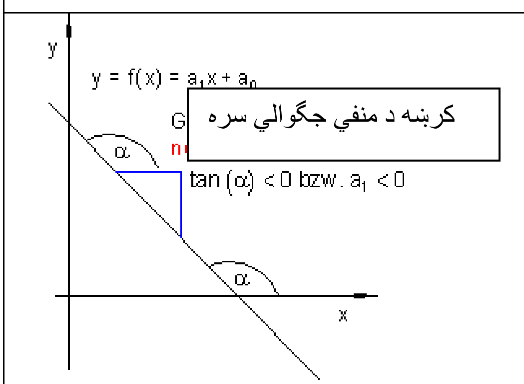
$$x_1, x_2 \in D \;\wedge\; x_1 \neq x_2 \;\Rightarrow \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$$

د f يو تابع تيک هلته په D کې مونوتون ټيټېدونکي ده، که د خوښې x_1 او x_2 لپاره، چې په D کې پراته دي، باور ولري:

$$x_1,x_2 \in D \wedge x_1 \neq x_2 \Rightarrow \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<0$$

يوغږيزوالی (يکنواخت) Monotony جګټيتوالی، د جګټيتوالی جملې

<table>
<tr>
<td>
دا $f(x) = a_1x + a_0$ کربښيز (خطي) تابع خورا ساده تابع ده، چې انحنانه لري. ددې لپاره مسئول يې ثابته جګېدنه يا ثابت ميل $a_1 = \tan(\alpha)$ دی، چېرته چې α د کربښي او مثبت لوريز د x -محور ترمنځ زاويه(کونج) ده.
په مخامخ شکل کې: کربښه د مثبت ميل سره
$a_1>0 \Leftrightarrow \tan\alpha>0$
</td>
<td>


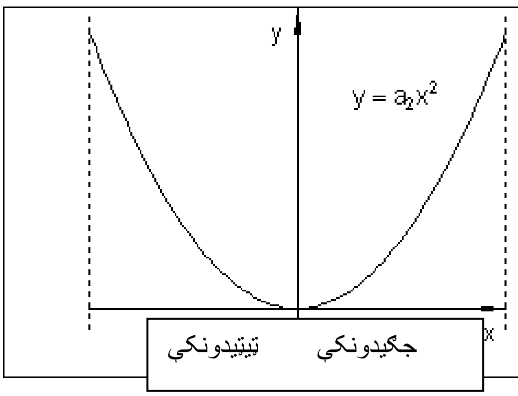
</td>
</tr>
<tr>
<td>
که $0<\alpha<90^0$ يا $0<a_1<\infty$ وي، دا په دې مانا چې $\alpha>0 \vee a_1>0$ همداسي($\Leftrightarrow$)، نو کربښه جګيږي. دا دا معنی لري، چې د جګېدونکي x سره د تابع f(x) ارزښت هم جګيږي.
په مخامخ شکل کې: کربښه د منفي جګيدنې سره: $\tan\alpha<0$ همداسي($\Leftrightarrow$) $a_1<0$
</td>
<td>


داپورته داسي دی: $tan\alpha<0$ همداسي $a_1<0$
</td>
</tr>
</table>

که $90^0<\alpha<180^0$ يا $-\infty<a_1<0$ وي، دا په دې معنی، چې $\alpha<0$ همداسي $a_1<0$، نو کربښه ټيټيږي يا لويږي. دا په دې معنی، چې د جګيدونکي x سره د تابع f(x) ارزښت کوچنی کيږي.

په پورته دواړو حالتونو کې د همغږيزې تابع (يا د جګ-ټيټيدونکې تابع) غږيږو او له يوه مونوتون جګيدونکي تابع ځخه، که $a_1 > 0$ وي. له يوې همغږيز يا مونوتون ټيټيدونکي تابع ځخه ، که$a_1 < 0$ وي.

دا د مونوتوني کلمه په هغو توابعو هم کارول کيږي، چې د منحنيو تلنه راکوي، که فکر وشي، چې په ټوليزه توګه د منحنی د ګراف په هر ټکي تانجنت اينبول کيدی شي.



له دې امله د تابع $f(x) = a_2x^2$ لپاره باور لري:

په اينتروال $I_1 = \{x \mid -\infty < x < 0\}_{\mathbb{R}}$ کې تابع $f(x)$ مونوتون ټيټيږي. او په اينتروال $I_2 = \{x \mid 0 < x < \infty\}_{\mathbb{R}}$ کې $f(x)$ مونوتون جګيږي.

لکه د کرښې په ګراف کې، چې جګيدنه ثابته وه. اوس دا حالت مخ ته نه لرو، يعنې جګيدنه ثابته نه ده، بلکې دا د منحني له يوه ټکې ځخه بل ټکي ته تغير خوري.

د تانجنت جګيدنه >0 ← منحني مونوتون جګيږي

د تانجنت جګيدنه < 0 ← منخني مونوتون ټيټيږي

د تانجنت جګيدنه، که صفر وي، ثابت پاتې کيږي.

روښانه ده چې د$f(x)$ تابع لومړی مشتق $f'(x)$ د تابع ميل (جګوالی) ورکوي. ددې سره د مونوتونی قضيه په لاندې ډول فرمولوو .

قضيه: د$f(x)$ تابع دې په اينتروال Iکې مشتقوړ وي.
۱ که د $f(x)$ تابع په اينتروال Iکې همغږيز – يا مونوتون جګيدونکي وي، نو باور لري:
$f'(x) \geq 0$ د ټولو $x \in I$لپاره

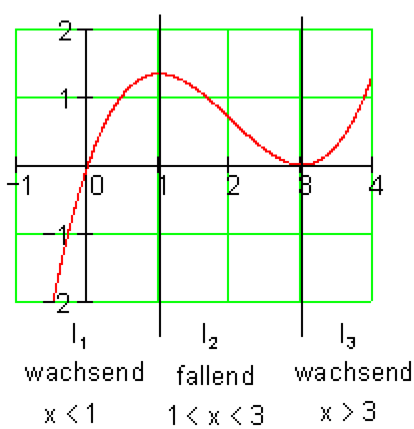
که $f(x)$ په اینټروال I کې مونوتون ټیټیدونکې وي، نو باور لري: $f'(x) \leq 0$ د ټولو $x \in I$ له پاره.

۲ . که $f'(x) \geq 0$ وي، دټولو $x \in I$ لپاره ، نو $f(x)$ په اینټروال I کې مونوتون جګیدونکې ده.

که $f'(x) \leq 0$ وي د ټولو $x \in I$ لپاره ، نو $f(x)$ په ایټروال I کې مونوتون ټیټیدونکې ده.

۳ که $f'(x) > 0$ وي ، د ټولو $x \in I$ لپاره، نو $f(x)$ په اینټروال I کې په کلکه مونوتون جګیدونکې ده

که $f'(x) < 0$ وي د ټولو $x \in I$ لپاره،نو $f(x)$ په اینټروال I کې په کلکه مونوتون ټیټیدونې ده.

د مونوتوني پیژند ورشو (تعریفساحو) ټاکنه بیلګه: د تابع ګراف څخه زیات وخت کېدی شي د مونوتوني ساحې لږ یا زیات ټیک و لوستل شي. د $I_1 = \{-\infty < x < 1\}_{\mathbb{R}}$ لپاره $f(x)$ په کلکه مونوتون جګېدونکی دی. د $I_2 = \{1 < x < 3\}_{\mathbb{R}}$ له پاره $f(x)$ مونوتون ټیټېدونکی ده. د r $I_3 = \{3 < x < \infty\}_{\mathbb{R}}$ لپاره $f(x)$ په کلکه مونوتون جګیدونکي ده.	$f(x) := \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x$  جګیدونکی　ټیټیدونکی　جګیدونکی

باور لري: $f'(x) > 0$ لاس ته راځي: کره مونوتون جګیدونکی

$f'(x) < 0:$ لاس ته راځي: کره مونوتون ټیټیدونکی

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x \Rightarrow f'(x) = x^2 - 4x + 3$$

لومړی پل: نا مساوات $f'(x) > 0$ همداسي نامسات $f'(x) < 0:$ حل کوو

دویم پل: د $f'(x)$ توټه کوته په کرښیزو ضربونو یا فاکتورونو

$$f'(x) = (x-1)(x-3)$$

دریم پل : د مخنخښي جدول.

د دوه ضربیونو ضرب تیک هلته زیاتیز یا مثبت دی، که دوړه ضربیونه همغه یا برابره مخ نخشه ولري.

یو د دوه ضیبونو ضرب تیک هلته کمیز یا منفي دی، که دواړه ضربیونه مختلفي مخنښپولري.

	$x = 1$		$x = 3$
Bereich	$x < 1$	$1 < x < 3$	$x > 3$
$x - 1$	$-$	$+$	$+$
$x - 3$	$-$	$-$	$+$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$ ist streng monoton	wachsend	fallend	wachsend

$f(x)$ جګیدونکی ټیټیدونکی جګیدونکی کره یوغږیز

بیلګه:دا لاندې ګراف لرو

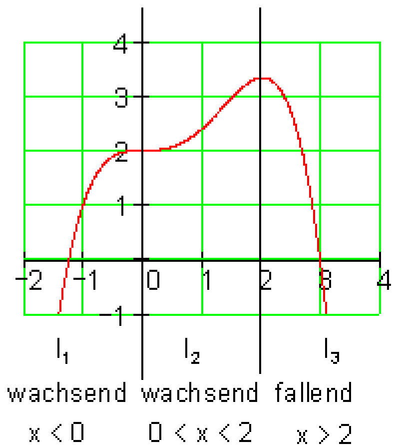
له ګراف څخه لاندې مونوتوني ساحې لوستل کیږي.

د $I_1 = \{-\infty < x < 0\}_{\mathbb{R}}$ لپاره f(x) په کلکه مونوتونج ګېدونکي ده.

د $I_2 = \{0 < x < 2\}_{\mathbb{R}}$ له پاره f(x)په کلکه مونوتونجګیدونکي ده.

د $I_3 = \{2 < x < \infty\}_{\mathbb{R}}$ لپاره f(x) په کلکه مونوتون ټیټیدونکي ده.

$$f(x) := \frac{-1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + 2$$



ټیټیدونکي   جګیدونکي، جګیدونکي،

له ګراف څخه لاندې مونوتوني ساحې لوستل کیږي.

د $I_1 = \{-\infty < x < 0\}_{\mathbb{R}}$ لپاره f(x) په کلکه مونوتونج ګېدونکي ده.

د $I_2 = \{0 < x < 2\}_{\mathbb{R}}$ له پاره f(x)په کلکه مونوتونجګېدونکي ده.

د $I_3 = \{2 < x < \infty\}_{\mathbb{R}}$ لپاره f(x) په کلکه مونوتون ټیټیدونکي ده.

ځای اړونده افراطي ټکي

یادونه: که په لیکنه انحرافي ټکي ګورئ،نو هغه افراطي ټکي دي.

ترمخ راوړنه او د کلمې روښانه ونه:

د یوه تابع ګراف زسمونه تر اوسه ناکافي وه، ځکه چې جګ او ټیټ ټکی نه پیژندل کیده.

د مشتق شميرنې له لارې موږ هڅيږو، چې دا ستونځې حل(اوبې کړو) کړو.

که د f(x) لپاره د x_0 په ځاي کی f' (x) = 0 ولرو نو يو نسبي ټيټ ټکی مو مخ ته پروت دی.

که دf(x) لپاره د x_0 په ځاي کی f' (x)=0اوf''(x)>0 ولرو نويو نسبي ټيټ ټکمو مخ ته پروت دی.

که ددې برعکس ولرو: f ' (x) = 0 او f '' (x) < 0 ، نو يو نسبي ماکسيموم مو مخ ته پروت دی.

د افراطي ټکي(ټيټ ټکي يا جګ ټکي) لپاره خوي ټاکونکی دی، چی f ' (x) = 0 وي، او د

f '' (x) مخ نښه (+ ، -)، په دې پريکړه کوي چی ايا يو ټيټ ټکی(اصغري ټکی)او که جګ ټکی(اعظمي ټکی) مو مخ ته پروت دی.

د پورته اړيکو لپاره لاندې يادوني اړيينې يا ضرور دي:

۱ – دا اړيکي يواځې د x_0 لپاره ارزښت لري چی د تعريف سټ په دننه کی پروت وي او هلته

د y = f (x) تابع پوره څو ځلې مشتقوړ وي، د غاړو(څنډو) او د هغوځايونو له پاره چی هلته f (x) تابع کم يا هيڅ مشتقوړ نه وي، ځانګړو څيړنو ته اړتيا ده.

۲ - شرايط چی f ' (x) = 0 وي (مشتقوړ تابع) يواځی د يوه انحرافي ارزښت لپاره ضرور دی (ضروري يا اړين شرايط) .

۳– شرايط f ' (x) = 0 او f '' (x) ≠0 د بحراني ټکي لپاره يواځی پوره کيدونکی دی او نه ضروري)

بیلګه :

د $f(x) = x^2 + 2$ تابع ګراف وکاږئ او که بحراني ارزښتونه لري، هغه د ګراف او د مشتق له لارې وټاکئ.

حل:

ګراف: ګراف دې د ګرانو لوستونکو د کور کار وي؟

د بیلګې له ګراف څخه روښانه ده، چې تابع د x=0 په ځاي کې خورا ټیټ ټکی(اصغري-) لري.

د انحراف ټکي له پاره اړیین شرطونه:

۱ – د تابع لومړي مشتق دی: $f'(x) = 2x$ په دې مساوات کې د تابع مشتق د x_0 له پاره صفرځاي لري، یعنې دلته یو بحراني ټکي پروت دی.

۲ – د تابع دویم مشتق: $f(x)'' = 2$. دا چې $f''(x) > 0$ دی، نو یو نسبي ټیټ ټکي مخ ته لرو.

بیلګه : د $y = x^4$ تابع د $x = x_0 = 0$ لپاره نسبي ټیټ ټکی لري او باوري دي

$$f'(x) = 4x^3 \Rightarrow f'(0) = 0$$

$$f''(x) = 12x^2 \Rightarrow f''(0) = 0$$

ګورو چې دوهم مشتق د صفر څخه نه کوچنی او نه لوي دی.

د پورته شنني څخه لاندې پیژند ته راځو:

پیژند : د $x = x_0$ په چاپیریال کې د $y = f(x)$ تعریف شوې تابع یونسبي جګټکی په همدې ډل نسبي ټیټ ټکی لري، که ټولو x_0 ته پوره نږدې x لپاره باور ولري: $f(x) > f(x_0)$ په همدې ډول $f(x) \leq f(x_0)$

جمله : (د یوه نسبي افراطي ټکي لپاره ضروري شرایط):

که په x_0 کی مشتقوړ تابع $y = f(x)$ انحرافي لري نو لرو: $f'(x) = 0$

دا جمله موږ ته وايي (یادونه ۲دې مقایسه شي): چیرته چی $f'(x) \neq 0$ وي نو هلته اکستریموم نه شته، د اکستریموم لپاره یواځي د x_0 ځاي په پوښتنه کی راځي، چی د هغي لپاره لرو $f'(x) = 0$ ، خو حمتي نه ده چی $y = f(x)$ دې یواکستریموم و لري.

جمله : (د یوه افراطي ټکي لپاره پوره کیدونکی شرایط):

که په $x = x_0$ کی دوه واره مشتقوړ تابع $y = f(x)$ لپاره ولرو:

$$f'(x) = 0 \quad , \quad f''(x) \neq 0$$

نو تابع $y = f(x)$ هلته یو افراطي ټکی لري. خورا ټیټ ټکی مخ ته لرو، که وي:

$$f''(x) < 0$$

خورا جګ ټکی مخ ته پروت دی ، که وي:

$$f''(x) > 0$$

له ښی لور انحنا یا کوږوالی اوله کیڼ لور انحنا یا کوږوالی (مقعر او محدب)

که په یوه اینټروال کي د مشتقوړ تابع f دویم مشتق $f''>0$ وي، نو په دې اینټروال کي ګراف کیڼ کوږ شوی یا کینه انحنا لري او که دویم مشتق $f'' < 0$ وي، نو د تابع ګراف ښی کوږ یا ښی انحنا لري.

دوه ځیرې (د لاندې بېلګې ځیره و باسی ؟-)

بیلګه:

ټول ګونګتابع (راشنل تابع) f د $f(x) = x^3 - 2x^2 + 4x - 1$ سره په کومه ورشو(ساحه)کې کینېکوږدی(کینه انحنا لري(ننوتی یا مقعر دی)) او په کومه ورشوکې ښی کوږ دی(ښی انحنا لري(محدب یا وتلی دی)؟

دویم مشتق: (لومړی مشتق(

$f'(x) = 3x^2 - 4x+4$

$f''(x)= 6x-4$

د $6x-4>0 \Rightarrow x > 2/3$ لپاره کینې ګوږوال (کینه انحنا (ننوتی یامقعر)

د $6x-4<0 \Rightarrow x < 2/3$ لپاره ښی کوږوالی(ښی انحنا(وتلی یامحدب))

بیلګه:

د مات راشنل تابع $f(x)=\dfrac{1}{x+2}$ ګراف یو های پارابول دی. د های پارابول کومه څانګه کینه کږه ده یا کینه انحنا لري(مقعر)، او کومه یوه یې ښی کوږوالی - یا ښی انحنا لري(محدب)؟

دویم مشتق : $f'(x)=\dfrac{1}{(x+2)^2}$; $f''(x)=\dfrac{2}{(x+2)^3}$

صورت تل مثبت دی.

د $x < -2$ لپاره د مخرج او همداسې د کسر ارزښت منفي دی. د های بارابول څانګه ښی کوږوالی یا انحنا لري (وتلی یا مخدب).

د لپاره $x > -2$ مخرج او همداسې ټول کسر(مات) مثبت دی.

های بارابول کینکوږ دی یا کینه انحنا لري(ننوتی یامقعر).

ببلګه :

د دواړو توابعو $f(x)=\sqrt{x}$ او $g(x)=\sqrt{x^3}$ کوږوالی(انحنا) دې یو د بل سره پرتله شي.

دواړه توابع د لپاره تعریف دي.

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad g'(x)=\frac{\sqrt{x^3}}{2}$$

$$f''(x)=-\frac{1}{4\sqrt{x^3}} \qquad g''=\frac{3}{4\sqrt{x}}$$

دویم مشتقونه د $x\in R^+$ لپاره تعریف دي.

په دې ساحه کې $f''(x) < 0$ دی. اړونده ګراف ښی کوږوالی یا انحنا لري، دا یو شي لور ته واز پارابول ښایي.

په همدې ساحه کې $f''(x) < 0$ دی. اړونده ګراف کیڼ کوږ دی یا کینه انحنا لري. اړونده ګراف یو کیڼ کوږوالی یا کینه انحنا لري، دا پورته لور ته واز پارابول دی.

د انعطاف ټکي(اوړونټکي)

یادونه: ولې اوړونټکی؟

وبه ګورو، چې په دې ټکي کې ګراف خپله لور اړوي، نو ......

موږ له پورته څیرې اټکل کولی شو چی : که د x_0 ځاي کی دا لاندې ولرو

$f''(x) = 0$ او

$f'''(x) > 0$، نو یو ښی-کیڼ- انعطاف ټکی (اوړونټکی) مو مخ ته پروت دی.

برعکس(په څټ):

که وي: $f''(x) = 0$ او $f'''(x) < 0$ نو یو کیڼ - ښی- د انعطاف ټکی مو مخ ته پروت دی.

د ا نعطافټکي لپاره خوی ټاکونکی دی، چی $f''(x) = 0$ وي ، داچی دا ښی -کیڼ - او که کیڼ- ښی – انعطاف ټکی(اوړونټکي) دی، د $f''(x)$ مخ نښه یی ټاکي.

-شرایط $f''(x) = 0$ د انعطاف ټکي لپاره یواځی اړیین یاضروري دي.

د $y = x^4$ لپاره $f''(0) = 0$ دی، مګر اوړونټکی مو مخ ته نه دی پروت.

–شرایط $f''(x_0) = 0$ او $f'''(x_0) \neq 0$ د انعطافټکي لپاره پوره کیدونکي دي. ګورو چی $y = f(x) = x^5$ تابع د $x = x_0 = 0$ ځاي کی یو انعطافټکی لري او باوري دي:

$$f'(x) = 5x^4 \quad , \quad f'(0) = 0$$

$$f''(x) = 20x^3 \quad , \quad f''(0) = 0$$

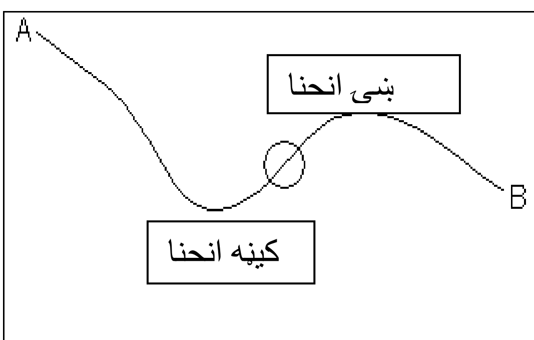
$$f'''(x) = 60x^2 \quad , \quad f'''(x) = 0$$

ګورو چي دریم مشتق $f'''(x)$ نه له صفرڅخه کوچنی او نه لوي دی.

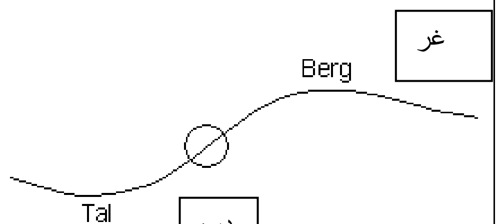
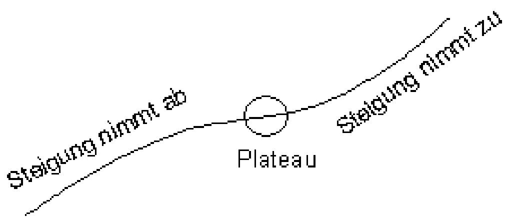
ترمخ راوړني او د کلمې روښانه وني:

د دې کلمې د لا نورې روښانه کولو لپاره په لاندې توګه مخ ته ځو:

د بایسکل ځغاستي چي له A څخه ځغلي د منحنی څخه تېرېږي او B ته رسېږي. د همغه وخت د بایسکل ځغاستي د اندل حالت د ځغاستي په وخت کې په پام کې ولری. د کیڼې منحني(د کیڼ لورې د اندل حالت) څخه وروسته د ښی لورې منحني کې ځغلي.



د کيڼې- او ښي منحني(کږې) ترمنځ باید د بایسکل اندل سیده ولاړ وي(عمود وي)، چې دا د اندل بدلون دی له کيڼې لوري و ښی لورې ته. دا د کيڼې او ښی منحني ترمنځ اوړيدنه ياد انعطاف ټکی بلل کيږي.

تاسو له بايسکل سره په يوه غونډۍ ځغلی. وروسته له هغې، چې له تالي څخه تېرېږي، نو لار په جګېدو پيل کوي. په لومړي سر کي نرم او بيا په نيغه جګيږي، بيا په دې پسې جګوالی ببرته کميږي، چې پاس د غونډۍ په څوکه صفر ارزښت غوره کړي. يو څېرته په غونډۍپورته صفرارزښت ته رسيږي. يو څېرته په لار جګېدنه خورا لويه وه. هلته د انعطاف ټکی پروت دی.	
د بایکل ځغلونکي بل حالت، چې له ښنګ دياګرام څخه يې رانيسو: په غره د بايسکل ځغاستميل ياجګېدنه لومړی کميږي، چې له سره ببرته جګه شي. ددې ترمنځ يوه ساحه شته، د کم جګوالي سره (يوه نسبتاًهواره).ً دې نسبتاً هوار ځای کې د ټوټه کرښې جګېدنه نسبت بل ځای ته کمه ده. هلته اوړونټکی(د انعطاف ټکی) پروت دی.	 له کيڼ و ښي لور ته: جګيدنه کميږي، هواره ، جګيدنه زياتيږي

پوهيږو، چې د يوې تابع لومړی مشتق د تابع د جګوالی تابع دی، چې له ګراف څخه يې جګوالی لوستل کيږي.دا چې د انعطاف ټکی خورا لوي يا خورا کوچنی ټکی کېدی شي، داسې پيدا کيږي، چې د مشتق تابع انخرافي ارزښتونه پيدا کړو.

دا تلنلار همهغسې ده، لکه د پيل تابع **f(x)** لپاره مو ټاکلې. اوس د مشتق تابع **f'(x)** باندې دا کار يا عمل اجرا کيږي.

مخکی له دې چې يو لړ جملی د بحراني(جګ – ټيټ -) ارزښتونو او د انعطاف ټکو په هکله څیړو، غواړو چې دا کليمی تعريف کړو .

دواړه کلمي به د نسبي بحراني ټکي په بڼه کی سره را غونډې شي.

پيژند ۲۰ . ۶ : په يوه چاپيريال x = x0 کی مشتقوړ تابع y = f (x) يو کيڼ- ښی- انعطافتکی په همدې ډول ښی- کيڼ- انعطافتکی لري، که د هغه مشتق هلته يو نسبي جګټکی(عظمي نقطه) په همدې توګه يو نسبي ټيټ ټکی ولري.

جمله ۲۰ . ۱۱ : (د يوه نسبي افراطي ټکي لپاره ضروري شرايط):

که په x0 کی مشتقوړ تابع y = f (x) اکستريموم لرې نو لرو: f ' (x) = 0

دا جمله موږ ته وايي (يادونه ۲دې پرتله شي): چيرته چې $f'(x) \neq 0$ وي نو هلته بحراني ټکی نه شته، د بحراني ټکولپاره يوائې د x0 ځاي په پوښتنه کی راځي، چې د هغي لپاره$f'(x) = 0$ وي ، خو حمتي نه ده چې y = f (x)دې يوبحراني ټکی ولري.

د پورته جملی استعمال په $y' = f'(x)$ څخه لاندې جمله لاس ته راځي:

جمله ۲ . ۱۲ : (د اوړونټکي(انعطاف ټکي) لپاره اړيين شرايط):

که په x = x0 کی دوه واره مشتق وړ تابع y = f (x) هلته يو انعطاف ټکی ولري، نو لاس ته ترې راځي:

دلته هم باور لري (يادونه ۴ دې پرتله شي): چيرته چې $f''(x) \neq 0$ وي ، نو هلته نه شي کيدی چي اوړونټکي موجود وي. مګرچيرته چې $f''(x) = 0$ وي ، اوړونټکی شته کېدلی شي، خو اړيين يا ضرور نه ده چې هلته انعطاف ټکی شته وي.

له پورته څخه لاندې جمله لاس ته راځي.

جمله ۲۰ ، ۱۳:

(د اوړونټکي يا انعطافټکي لپاره پوره کیدونکی شرطونه)که په x = x0 کی درپوار مشتقوړ تابع y = f (x) لپاره وي:

$f'''(x) \neq 0$ او f '' (x) = 0 ,

نو هلته يو انعطاف ټکی مخ ته لرو. که f ''' (x) < 0 وي، نو يو کيڼ- ښي – انعطاف ټکي مخ ته پروت دی او د f ''' (x) > 0 لپاره يو ښی-کيڼ-انعطاف ټکی مخ ته لرو.

شننيزه يا تحليلي بيلګه:

يادونه: موږ د x_E سره افراطي ټکی په نښه کوو او د x_W سره د انعطاف – يا اوړون ټکی په نښه کوو.

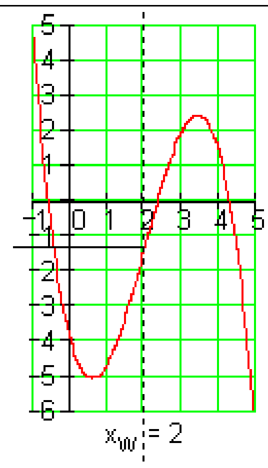
1- تابع مساوات د مشتق سره

$$f(x) = -\frac{2}{3}x^3 + 4x^2 - 4x - 4$$
$$f'(x) = -2x^2 + 8x - 4$$
$$f''(x) = -4x + 8$$
$$f'''(x) = -4$$

$$f(x) = -\frac{2}{3}x^3 + 4x^2 - 4x - 4$$

$$f(2) = -\frac{4}{3}$$

$$P_W\left(2 \mid -\frac{4}{3}\right)$$

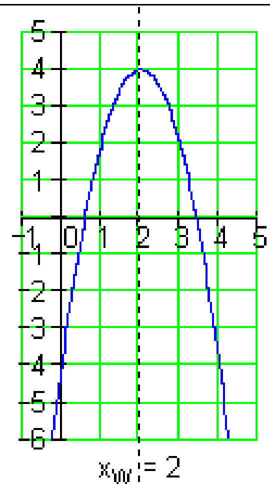


2- دويم مشتق صفر کړئ.

$$f''(x)=0 \Leftrightarrow -4x+8=0$$
$$\Rightarrow x_W = 2$$

$f'(x) = -2x^2 + 8x - 4$

Extremwert von f'(x) bei $x_W = 2$



د الماني پښتو: د(x)'f صفرځای په xw=2 کې

3- د انعطاف ټکي له مخې ښوونه، چې ایا د انعطاف ټکی شته دی؟

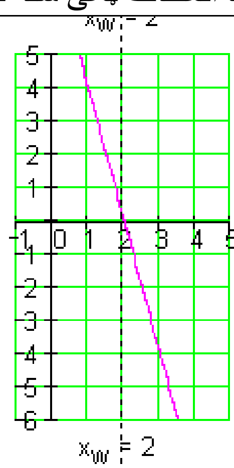
$$f'''(x_W) = f'''(2) = -4$$

4- په $f(x)$ د انعطاف ځایونه ځای په ځای کولو له لارې د انعطاف ټکي ټاکنه

$$f(x_W) = f(2) =$$
$$-\frac{2}{3}(2)^3 + 4(2)^2 - 4(2) - 4 = -\frac{4}{3}$$
$$\Rightarrow \underline{\underline{P_{W\left(2|-\frac{4}{3}\right)}}}$$
$$\underline{\underline{P_W(21-1.33)}}$$

$f''(x) = -4x + 8$

Nullstelle von f''(x) bei $x_W = 2$



د الماني پښو: د(x)''f ضفرځای په x_W =2 کی

پام: په انعطاف ځای x_W کې د $f(x)$ ګراف کرږیږي.

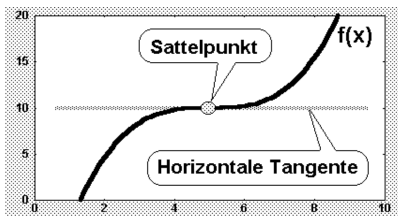
په یوه په خوښه ټکي x_0 کې د کږوني(انحنا) لپاره باور لري:

$f''(x) > 0$ په دې معني دی،چې $f(x)$ کیڼ لور ته کرږیږي(انحنا لري) دی.

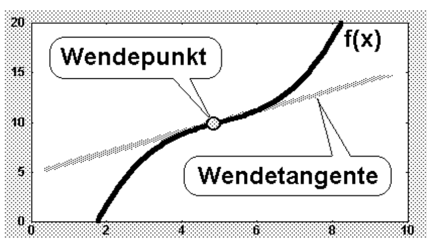
$f''(x) < 0$ په دې معنی، چې تابع $f(x)$ ګراف ښی لور ته کرږیږي(انحنا کوي)

یو زینټکی Der Sattelpunkt څه شی دی؟

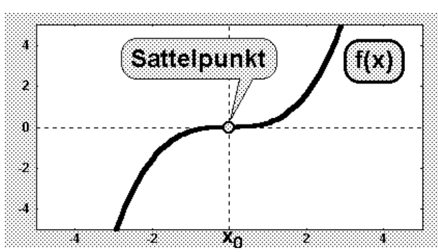
پیژند:



د زینټکي(کله کله برنډې ټکی هم بلل کیږي)لاندې د انعطافټکي ځانګړی حالت پوهیږو، داسي انعطافټکی چي تانجنت یې افقي (پروت) وي:



د پرتلي لپاره دې بیا یو ،،عادي،، انعطافټکی ورکړ شوی وي.دا یو مائل(نه افقي) تانجنت لري

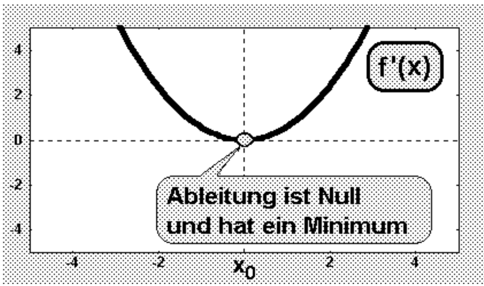


توضیح:

اوس فکر کوو، چي یو زینټکی څنګه د شمېرلو له مخې پیژندل کېدی شي. په دې برخه کي په ځانګړي توګه دا مخ ته لرو، چي یو زینټکی له ښي – و کینه انحنا و شمېرو.

د دې لپاره د $f(x)$ تابع جګوالی په پام کې نیسو، یعني لومړی مشتق: د زینټکي د مخه د $f(x)$ جګوالي کمیږي، په زینټکي کي صفر ارزښت لري، او له زینټکي څخه وروسته بېرته جګیږي.

یو زینټکی (د ښي – کیڼ – بدلون سره) په دې پیژندل کیږي، چې لومړی مشتق $f'(x)$ یې هلته صفر شي او سربېره پر دې هلته یو نسبي ټیټټکی (مینیموم) ولري.

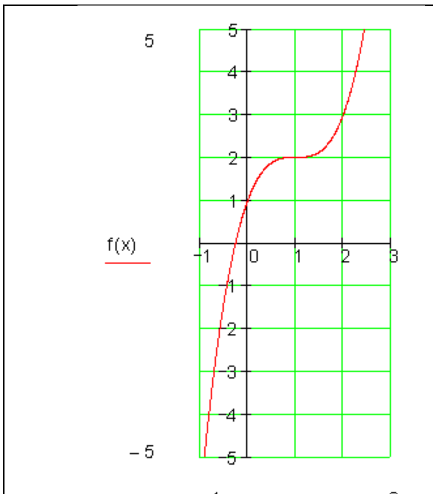


د لومړي مشتق $f'(x)$ شكل داسې برېښي:

لومړی شرط دی، چې مشتق يعنې $f'(x)$ په زينتګي کې د صفر سره مساوي دی.

زينتګی(ښی-کيڼ-بدلون) $f'(x_0)=0$
دوم شرط دی، چې مشتق $f'(x)$ هلته يو نسبي مينيموم لري.

دا په دې معنادی، چې بل جګ مشتق $f''(x)$ بايد په صفر مساوي وي او مخنښه له منفي و مثبت ته بدلېږي.
له دې سره سم د زينتګي لپاره پوره کيدونکي قضيه وميندل شوه:
د زينتګي لپاره جمله(خوي تاکنه)(د ښي –کيڼ- انعطاف سره)
الف:د x_0 ځا کې لومړی مشتق $f'(x)$ صفر دی: $f'(x_0)=0$
ب : د x_0 په ځا ي کې لومړی مشتق $f'(x_0)$ يو مينيموم لري، دا په دې معنا، چې دوم مشتق صفر دی، يعنې $f''(x)=0$ دوم مشتق مخنخښه له منفي څخه و مثبت ته بدلوي.
بل بديل(د ګرانو دوستانو وړانديز)



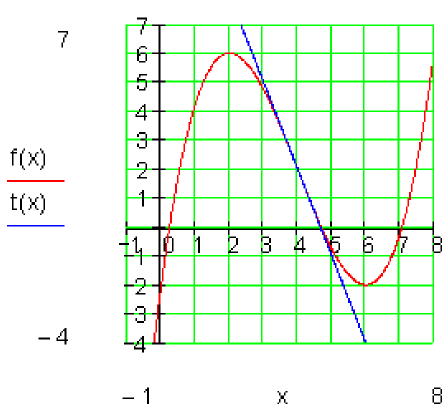
زينتګی:
د انعطاف ټکي يو ځانګړی حالت زينتګی دی. دا د انعطاف ټکی دئ د صفر جګيدنې سره.که د کيڼ لور ورتزدې شو فکر کيږي، چې، نسبي جګټکی مو مخ ته پروت دی
که څوک د ښي لور ور نزدې شي فکر کوي، چې يو نسبي ټيټکی مخ ته لرو.
اوس دا حالت د رياضياتو له لورې څيرو:

مشتق:	$f(x)=x^3-3x^2+3x+1$ $f'(x)=3x^2-6x+3$ $f''(x)=6x-6$ $f'''(x)=6$

$$f'(x)=0 \iff 3x^2-6x+3=0 \Rightarrow x_{1/2}=1$$

$f''(1)=6\cdot 1-6=0$ $f'''(1)=6$	1=> د $x=1$ سره د انعطاف تکی	1=> د $x=1$ سره زينتکی

د انعطاف تکي لپاره شرايط پوره دي.
دا چې د $f''(1)=0$ له امله د انعطاف تکی مخ ته لرو، نو دا د انعطاف تکی همغه زينتکی دی.
د انعطاف تکي پيداکونه:
د تابع گراف باندې انعطاف تکي کې تانجنت د انعطاف تانجنت بلل کيږي. د انعطاف تانجنت هم
همداسې پيدا کيږي لکه د تابع دگراف په يوه تکي کې تانجنت، چې تانجنت مساوات تاکل کيږي.

$f(x)=\frac{1}{4}x^3-3x^2+9x-2$ $f'(x)=\frac{3}{4}x^2-6x+9$ $f''(x)\frac{3}{2}x-6 \qquad f'''(x)=\frac{3}{2}$ $f''(x_W)=0 \iff \frac{3}{2}x-6=0$ د $x_W=4$ او $f'''(x_W)=\frac{3}{2}\neq 0$ د تانجنت $f(x_W)=f(4)=2 \Rightarrow \underline{P_W(4\|2)}$ مساوات لپاره باور لري. د x_W لپاره د تانجنت مساوات $t(x)=f'(x_W)(x-x_W)+f(x_W)$	 د انعطاف تانجنت د $f(x)$ گراف د انعطاف په تکي $P_W(4,2)$ کې غوڅوي او دا لاندې مساوات لري: $t(x)=-3x+14$

د $f'(x_W) = f'(4) = -3$ سره په لاندې ډول دي $t(x) = -x(x+4) + 2 = \underline{\underline{-3x+14}}$	

د انعطاف- یا وړون ټکي تانجنت پیداکونه:

په انعطاف ټکي کې د تابع دګراف تانجنت د انعطاف تانجنت بلل کیږي.
د انعطاف تانجنت مساوات همداسې ټاکل کیږي، لکه د تانجنت مساوات د ګراف په خوښه ټکي باندې.

داسې حالتونه، لکه $f'(x) = f''(x) = f'''(x) = 0$ دلته تر ځیرنې لاندې نه نیول کیږي.

د کږې یا منحني بحث (Kurven Diskusion) :

تر مخ راوړنه او د کلمې روښانه ونه:

د دې لپاره چې د یوې تابع وکاړلی او تشریح کړای شو، اړین دی چې د ګراف په ځني په راوتلو یا غوره ټمو او د ګراف په تلنه وپوهیږو.\

داسې د ګراف په غوره خوبیز یا کرکتریستیکي خویونو باندې د پوهیدنې او ځیرنې ته د کږو یا منحنیو خبرې اترې یا بحث وایو.

د دې لپاره چې د تابع کوم غوره خوي مو له یاده ونه ووځي یا راڅخهپاتې نه شي، نو د داسې ځیرنو لپاره سړی باید سیومتریک مخ ته ولاړ شي او هم تل د ځیرنو او شمیرنو د لړۍ پرلپسې یا لړي ترتیب په پام کې ونیسي.

په لاندې ډول تلنلار ډېره ګټوره ګڼل شوې

لومړی: تعریفورشو یا ـساحه:

سړی له هر څه د مخه د فنکشن یا تابع تعریفورشو ټاکي، ځکه چې فقط د دې ورشو په دننه کې موخه ور دی چې تابع خویونو ځیرنه مخ ته بوزو.

دویم: سیومتري:

سرې کره کوي، چې ایا تابع محوري- اوټکی سیومتری دی.

محورسیمتري سره باور لري: $f(-x)=f(x)$ په دواړو حالتونو کې فنکشن باید وڅیړل شي.

د ټکي سیومري سره باورل ري: $f(-x)=-f(x)$ فقط باید د $x \geq 0$ لپاره وڅیړل شي.

په ځنګړې توګه د ټول راشنل یا –خوښیار توابعو لپاره باور لري:

یو ټول راشنل تابع ټیک هلته محور سیمتریک دی، که د هغه ترمونه زاتیدوني یا د جمعې اعظاوې فقط د جوړه یا جفت جګ عدد یا اکسپوننت سره ولري.

یو ټول راشنل تابع ټیک هلته ټکی سیمتریک دی، که د هغه ترمونه نا جوړه یا طاق د زیاتیدوني یا د جمعې غړي ولري.

دریم: افراطیت:

د نسبي افراطیت ټاکني، دا سرې جګ – همداسې ټیټ ټکي بولي.

دا د پراته یا افقي تانجنت سره ټکي هم دي.

ټیټ ټکی= نسبي مینیموم پوره کیدونکي شرطونه: $f'(x_1)=0 \quad \wedge \quad f''(x_1)>0$	جګ ټکی = نسبي ماکسیموم پوره کیدونکي شرطونه: $f'(x_1)=0 \quad \wedge \quad f''(x_1)<0$

څلورم: اوړونټکی(نقطه انعطاف):

د اوړنټکي همداسې زین ټکي ټاکنه.

د اوړنټکي لپاره پوره کیدونکي شرطونه: $f''(x_W)=0 \quad \wedge \quad f'''(x_W)\neq 0$

زینټکی (همغه د اس زین ځخه دا نوم رانیول شوی)اوړنټکی دی د پراته تانجنت سره.

پنځم: محورغوځټکي(د محور د تقاطع نقاط):

که د x -محور ارزښت صفر (x = 0) د f(x) په فنکشن ارزښت کې کیښول شي، نو سړی د y –محور سره غوځټکی(نقطه تقاطع) لاس ته راوړي.

د y - محور سره غوځتکی $P_y(0 \mid y_s) \Rightarrow f(0)$ وټاکی.

د x- محور سره غوځټکی(صفرځای) $P_{xi}(x_i \mid 0) \Rightarrow f(x) = 0$

شپږم: ګراف:

دا تراوسه د ټولو راټول شوو معلوماتو سره اوس کیدی شي په زیاتو حالتونو کې ګراف انځورکړای شو.

د دې لپاره لومړی یو ارزښت جدول چمتو کیږي.

دا په ګوته کوي، چې نور کوم ارزښتونه دې وشمیرل شي.

دا کیدی شي چې د جبشمیرونو سره شومیرل شي او د یا د ټولګنونو یا تام اعدادو x - ارزښتونو لپاره د هورنر شیماپه مرسته.

اوم: کږوالي ځاننیونه(حالت) او یوغږیزوالی.

په اوړونوټکي یا انعطافټکي x_W کې د f د ګراف کږوالی تغیر خوري.

د په خوښه ټکي x0 کې د کږوالي لپاره باور ري:

$f''(x0) > 0$ په دې معنا، چې د f(x) ګراف کیڼ کوږ(ننوتی یا مقعر؟؟) دی.

$f''(x0) < 0$ په دې معنا، چې د f(x) ګراف ښي کوږ(وتلی یا محدب) دی:

یوعږیزوالی:

۱ . که د ټولو $x \in I$ لپاره $f'(x0) \geq 0$ وي، نو $f(x)$ يوغرېز جګيدونکی دی په انتروال I کې

که د ټولو $x \in I$ لپاره $f'(x0) \leq 0$ وي، نو $f(x)$ يوغرېز ټيټيدونکی دی په انتروال I کې.

۲ . که د ټولو $x \in I$ لپاره $f'(x0) > 0$ وي، نو $f(x)$ کره يا په کلکه يوغرېز

جګيدونکی دی په انتروال I کې

که د ټولو $x \in I$ لپاره $f'(x0) < 0$ وي، نو $f(x)$ کره يا په کلکه يوغرېز

ټيټيدونکی دی په انتروال I کې.

لنډ:په اوړونټکي کې د يوه ګراف د کږوالي حالت تغير خوري

د يوغرېزوالي حالت په افراطي ټکو کې تغير خوري

اتم: د تعريفورشو ژۍ ټکي:

د تعريفورشو په ژۍ ټکو کې د فنکشن څېړنه.

که تعريفورشو محدوه يا رابنده نه وي، نو دواړه پوله ا رزښتونه

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) \quad \text{او} \quad \lim_{x \to \infty} f(x)$$

دې وټاکل شي.

په ډول وييبنه يا افاده: د لوی x - ارزښت لپاره سړی د فنکشن ارزښتونو تلنه په زيا تيز يا مثبت لور او هم په کميزه يا منفي لور څيري او دا پوښتنه له ځانه کوي، چې فنکشن ارزښتونه په کومه لور ځغلي.

د يوه مفصل کړو بحث خبرې اترې يا بحث:

تعريفورشو:

تابعبرابرون یا تابع مسوات:

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 - \frac{9}{4} \Rightarrow$$

له دې لاس ته راځي تعریف ډېرۍ یا سټ $\underline{\underline{D_f = \mathbb{R}}}$.

فنکشن د ټول حقیقي ارزښتونو لپاره تعریف دی. د ورسره بلده توګه ټول راشنل فنکشنونو دا تل باور لري، خو پرته له دې که څوک وغواړي تعریف ورشو رابنده یا محدود کړي.

سیومتري: دا چې ټول جګګېونه یا اکسپوننتونه جوړه یا جفت دي، نو یو محورسیومتري مخ ده لرو،

باور لري: $f(-x)=-f(x)$ د ټول $x€R$ لپاره.

ګټه په دې کې ده، چې فنکشن ارزښتونه باید فقط د زیاتیزو یا مثبت x -ارزښتونو لپاره وشمیرل شي.

افراطییت:

د افراطي ټکو شمیرلو لپاره تلنلار:

سرې لومړی د $f(x)$ لومړي دوه مشتقونه ټاکي.

د لومړي ومشتق صفرایینوونه د پراته تانجنت ځای راکوي.

که سرې دا ارزښتونه په دویم مشتق کې کیږدي، نو سرې د مخ ته پراته افراطیت په هکله وینا ترلاسه کوي.

(نسبي مامسیموم یا نسبي مینیموم همداسي د افراطي ټکو نه والی).

د افراطي ځایونو x_i ازښتونه که فنکشن مساوات کې کینول شي افراطي ارزښتونه راکوي او له دې سره د افراطي ټکو کواوردیناتونه یا پراته ولاړارزښتونه څرګند دي.

تابعبرابرون یا ـمساوات: $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 - \frac{9}{4}$

مشتقونه: $f'(x) = x^3 - 4x \quad f''(x) = 3x^2 - 4 \quad f'''(x) = 6x$

د افراطي ارزښتون لپاره پوره کيد ونکي شرطونه.

$$f'(x) = 0 \wedge f''(x) \neq 0$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - 4x = 0$$

x له نوکانو وباسئ

$$\Leftrightarrow x\left(x^2 - 4\right) = 0 \mid$$

د صفرضرب جمله له دې لاس ته راځي $x1=0$ همداسې $x^2-4=0$

$$x^2 - 4 = 0 \mid +4$$
$$\Leftrightarrow x^2 = 4 \mid \sqrt{\ }$$
$$\Leftrightarrow |x| = 2 \Rightarrow x_2 = 2 \text{ bzw. } x_3 = -2$$

د پراته تانجنت ځایونه: $\boxed{x_1 = 0};\ \boxed{x_2 = 2};\ \boxed{x_3 = -2}$

د نسبي ماکسيموم همداسې نسبي مينيموم ښوونه:

$$f''(x_1) = f''(0) = 3 \cdot 0^2 - 4 = -4 < 0 \Rightarrow \text{rel. Max. für } x_1 = \boxed{x_{E1} = 0 \ (\text{Hochpunkt})}$$
$$f''(x_2) = f''(2) = 3 \cdot 2^2 - 4 = 8 > 0 \Rightarrow \text{rel. Min. für } x_2 = \boxed{x_{E2} = 2 \ (\text{Tiefpunkt})}$$
$$f''(x_3) = f''(-2) = 3 \cdot (-2)^2 - 4 = 8 > 0 \Rightarrow \text{rel. Min. für } x_3 = \boxed{x_{E3} = -2 \ (\text{Tiefpunkt})}$$

افراطي ارزښتونه:

د $x_{E1} = 0$ لپاره جګ ټکی

$$f(0) = -\frac{9}{4} = -2{,}25$$

$$\Rightarrow \boxed{P_{Max}\left(0 \mid -\frac{9}{4}\right) \text{ bzw. } P_{Max}(0 \mid -2{,}25)}$$

د $x_{E2} = 2:$ لپاره ټيټکی

$$f(2) = \frac{1}{4}\cdot 2^4 - 2\cdot 2^2 - \frac{9}{4} = -\frac{25}{4} = -6{,}25$$

$$\Rightarrow \boxed{P_{Min1}\left(2 \mid -\frac{25}{4}\right) \text{ bzw. } P_{Min1}(2 \mid -6{,}25)}$$

د $x_{E2} = -2:$ لپاره ټيټکي

د محور سيومتري له امله $f(-2) = f(2) = -\frac{25}{4} = -6{,}25$

$$\Rightarrow \boxed{P_{Min2}\left(-2 \mid -\frac{25}{4}\right) \text{ bzw. } P_{Min2}(-2 \mid -6{,}25)}$$

اوړنټکي يا د ا نعطاف ټکي:

د انعطاف ټکو ټاکلو لپاره د شميرني تلنلار:
د لومړيو دوه مشتقونو برسيره سرې د f(x) دريم مشتق جوړوي يا نيسي.

د دويم مشتق ضفرځايونه ممکنه اوړونټکي دي.
د افراطي ټکو مخ ته پرېوتني يا لرني ازماېښت لپاره د دويم مشتق شميرل شوی صفرځای په دريم مشتق کې ايښوول کيږي.

که لاس ته راوړنه د صفر سره برابره نه وي، نو اړونده x - ارزښتونه يو اوړنټکی په ګوته کوي. ځکه چې دا اړونده فنکشن ارزښتونه د x – ارزښتونو د تابع مساوات f(x) ترم کې ايښوولو له لارې لاس ته راځي.

تابع مساوات: $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 - \frac{9}{4}$

مشتقونه: $f'(x) = x^3 - 4x \quad f''(x) = 3x^2 - 4 \quad f'''(x) = 6x$

د اوړونټکو لپاره پوره کیدونکي شرطونه:

$$f''(x) = 0 \wedge f'''(x) \neq 0$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 4 = 0 \mid +4$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 = 4 \mid :3$$

$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{4}{3} \mid \sqrt{\ }$$

$$\Leftrightarrow |x| = \sqrt{\frac{4}{3}} \Rightarrow x_1 = \sqrt{\frac{4}{3}} \text{ bzw. } x_2 = -\sqrt{\frac{4}{3}}$$

ممکنه اوړونټکي: $\boxed{x_{W1} = \sqrt{\frac{4}{3}}}$; $\boxed{x_{W2} = -\sqrt{\frac{4}{3}}}$

په اوړونټکو ښوونه:

$$f'''(x_{W1}) = f'''\left(\sqrt{\frac{4}{3}}\right) = 6 \cdot \sqrt{\frac{4}{3}} \neq 0 ; f'''(x_{W2}) = f'''\left(-\sqrt{\frac{4}{3}}\right) = 6 \cdot \left(-\sqrt{\frac{4}{3}}\right) \neq 0$$

د $x_{W1} = \sqrt{\frac{4}{3}}$ لپاره اوړونټکی

$$f(x_{W1}) = f\left(\sqrt{\frac{4}{3}}\right) = \frac{1}{4} \cdot \left(\sqrt{\frac{4}{3}}\right)^4 - 2 \cdot \left(\sqrt{\frac{4}{3}}\right)^2 - \frac{9}{4} = -\frac{161}{36}$$

$$\Rightarrow \boxed{P_{W1}\left(\sqrt{\frac{4}{3}} \mid -\frac{161}{36}\right) \text{ bzw. } P_{W1}(1,15 \mid -4,47)}$$

د $x_{w2} = -\sqrt{\frac{4}{3}}$ لپاره اوړونتکی

$$f(x_{w2}) = f\left(-\sqrt{\frac{4}{3}}\right) = f\left(\sqrt{\frac{4}{3}}\right) = -\frac{161}{36}$$

د محور سیومتري لهامله

$$\Rightarrow \boxed{P_{w2}\left(-\sqrt{\frac{4}{3}} \mid -\frac{161}{36}\right) \text{ bzw. } P_{w1}(-1{,}15 \mid -4{,}47)}$$

پنځم: محورغوځتکي يا نقاط تقاطع محور

الف- د y–محور سره غوځتکي $f(0) = -\frac{9}{4} = -2{,}25 \Rightarrow \boxed{P_y(0 \mid -2{,}25)}$

ب – د x–محور سره غوځتکي(صفرځایونه)

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 - \frac{9}{4} = 0 \mid \cdot 4$$

$$\Leftrightarrow x^4 - 8x^2 - 9 = 0 \mid \text{Substitution } x^2 = z$$

$$\Leftrightarrow z^2 - 8z - 9 = 0$$

په z کي مربع مساوات

$$\Rightarrow p = -8 ; q = -9 ; D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \left(-\frac{8}{2}\right)^2 + 9 = 25$$

$$\Rightarrow z_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} = -\left(-\frac{8}{2}\right) \pm \sqrt{25} = 4 \pm 5 \Rightarrow z_1 = 9 ; z_2 = -1 < 0$$

(حل نه شته)

په څټ يا برعکس بدلون: $z_1 = x^2 = 9 \Rightarrow |x| = \sqrt{9} \Rightarrow x_1 = 3;\ x_2 = -3$

په $\boxed{P_{x2}(-3|0)}$; $\boxed{P_{x1}(3|0)}$ کي صفرځايونه

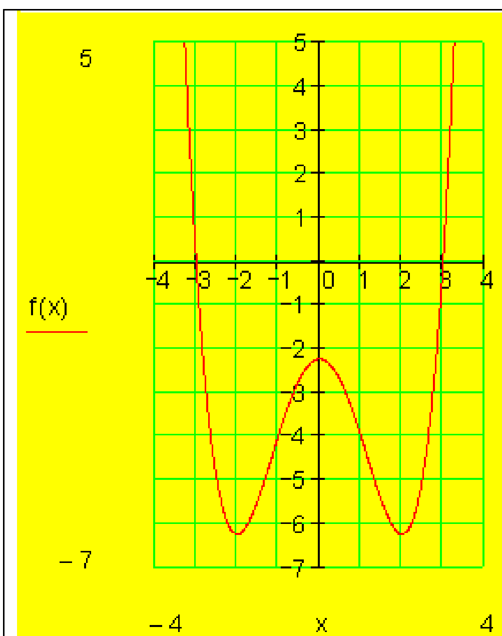
شپږم: ارزښت جدول:

ارزښت جدول د ورزياتو ارزښتونو سره:

$$f(1) = \frac{1}{4}\cdot 1^4 - 2\cdot 1^2 - \frac{9}{4} = -4;\ f(-1) = f(1) = -4$$

$$f(3,25) = \frac{1}{4}\cdot (3,25)^4 - 2\cdot (3,25)^2 - \frac{9}{4} \approx 4,52;\ f(-3,25) = f(3,25) \approx 4,52$$

		P_{x2}	P_{Min2}	P_{W2}		$P_{Max} = P_y$		P_{W1}	P_{Min1}	P
x	−3,25	−3	−2	−1,15	−1	0	1	1,15	2	
f(x)	4,52	0	−6,25	−4,47	−4	−2,25	−4	−4,47	−6,25	



شپږم: ټولګه:
محور غوښتکي
اکسترم ارزښتونه:

$P_{Min1}(2|-6,25);\ P_{Min2}(-2|-6,25)$
$P_{Max}(0|-2,25)$

ا ووړونتکي

$P_{W1}\left(\sqrt{\frac{4}{3}}\,|-\frac{161}{36}\right);\ P_{W2}\left(-\sqrt{\frac{4}{3}}\,|-\frac{161}{36}\right)$

مور غوښتکي

$P_y(0|-2,25);\ P_{x1}(3|0);\ P_{x2}(-3|0)$

د کږوالي يو غږيزوالى
ننوتى

	$\left]-\infty;-\sqrt{\frac{4}{3}}\right[$ und $\left]\sqrt{\frac{4}{3}};\infty\right[$ او وتلی: $\left]-\sqrt{\frac{4}{3}};\sqrt{\frac{4}{3}}\right[$ کره یوغږیز یتیدونکی $]-\infty;-2[$ und $]0;2[$ کره یوغږیز جګیدونکی $]-2;0[$ und $]2;\infty[$ ژې تکي $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\infty$

اووم: کږوالي حالت او یوغږیزوالی:

کږوالی د $x0=-2$ لپاره (کین له P_{w2})

$$f''(-2)=3\cdot(-2)^2-4=8>0$$

د $\boxed{\left]-\infty;-\sqrt{\frac{4}{3}}\right[}$ لپاره کینکوږوالی(ننوتی)

د $x_0=0$ لپاره کوږوالی (د P_{w1} او P_{w2} ترمنځ)

$f''(0)=-4<0$ ښی کوږوالی(وتلی) د $\boxed{\left]-\sqrt{\frac{4}{3}};\sqrt{\frac{4}{3}}\right[}$ لپاره.

د $x0=2$ لپاره کږوالی (د P_{w2} ښي لور ته)

$f''(2)=3.2^2-4=x>0$

کیڼ کوږوالی د $]\infty;\sqrt{\frac{4}{3}}[$ لپاره

کره یا په کلکه قوغږیز تیتیدونکی د $]-\infty;-2[$ لپاره

کره یو غږیز جګیدونکی د $]-2;0[$ لپاره

کره یا په کلکه قوغږیز تیتیدونکی د $]0;2[$ لپاره

کره یو غږیز جګیدونکی د $]2;\infty[$ لپاره

اتم: د تعریفورشو ژی ټکي:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{4}x^4-2x^2-\frac{9}{4}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^4\left(\frac{1}{4}-\frac{2}{x^2}-\frac{9}{4x^4}\right)\\ =\lim\limits_{x\to-\infty}x^4\cdot\underbrace{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{4}-\frac{2}{x^2}-\frac{9}{4x^4}\right)}_{\frac{1}{4}}=\frac{1}{4}\cdot\lim\limits_{x\to-\infty}x^4=\infty\\ \lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\frac{1}{4}\cdot\lim\limits_{x\to\infty}x^4=\infty\end{array}\right\}\Rightarrow\boxed{\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=\infty}$$

یوه تابع $y=x^3+x^2-3$ لرو. د دې تابع شکل رسم کړئ او بیا په دې رسم کې د تابع افرطي ټکي او د انعطاف ټکي په نخښه کړئ، رښانه کړئ، چې انحنا چیرته له کیڼې لور و ښی لورې ته او له ښی لورې و کیڼې لورې ته ده.

فعالیت:

- تناظر تعریف کړئ.
- لاندې توابع رسم کړئ، جګ ټکي، ټیټ ټکي او د انعطاف ټکي یې پیدا اکړئ.
- x^3+x
- $3x^3+x+2$

ددې لپاره چې یوه تابع رسم کړای شو، ساده ده که د تابع غوره ټکی و پیژنو. موږ دې بحث ته د منحنې بحث وایو. موږ په دا ډول خبرو اترو کې باید سیستماتیک مخ ته لاړ شو.
په لاندې ډول تلنه ګټوره بلل شوې.

دتعریف ساحه: د تابع څیړنه یواځې په همدې ورشو کې موخه وره ده.
تناظر **Symetry** : باید وټاکل شي، چې تابع محوري متناظر او که مرکزي متناظر ده.
د محوري تناظر لپاره باور لري: $f(-x) = f(x)$
د مرکزي تناطر لپاره باور لري. $f(-x) = -f(x)$
په پورته دواړو حالتونو کې دې فقط $x \geq 0$ وڅېړل شي.
په ټولیزه توګه که ټول ریل تابع په پام کې ونیسو، نو ګورو چې که توان(د پولینوم درجه)یې جفت(جوړه) وي، نو پولینوم محوري متناظر دی او که توان(د پولینوم درجه) طاق(ناجوړه) وي، نو پولینوم مرکزي متناظر دی.

بحراني ټکي**Extrema** : د نسبي بحراني ټکو ټاکل(جګټکی، ټیټټکی)
د جګټکی یا نسبي جګ ټکي پوره کیدونکي شرطونه:
$$f'(x_1) = 0 \ \wedge \ f''(x_1) < 0$$

انعطافټکی یا اوړونټکی : Inflection Point

د انعطافټکواو همداسې زینټکي ټاکلو له پاره پوره کیدونکي شرطونه:
$$f''(x_W) = 0 \quad \wedge \quad f'''(x_W) \neq 0$$
زینټکی انعطافټکی دی د افقي تانجنت سره.
د تابع تقاطع د x او y محورونوسره(د محورونوِغوڅټکی):
د $x-$ محور سرهِ غوڅټکی: $P_{xi}(x_i \mid 0) \Rightarrow (x) = 0$
د y محور سره غوڅټکی(صفرځای) ټاکي $P_y(0 \mid y_s) \Rightarrow f(0)$
دګراف انځورونه: د ټولو تراوسه راټولو شوو معلوماتو سره کړی شو، چې ګراف انځور کړو. ددې لپاره لومړی یو ارزښتجدول انځوریږي. دا راته په ګوته کوي، چې نور کوم ارزښتونه شمیرل کیږي.

د کږوالي - یا انحنا حالت او یوغږېزوالی:

د انعطاف په ټکي X_w کې د $f(x)$ ګراف تغیر خوري.

په خوښه یوه ټکي x_0 کې د انحنا لپاره باور لري:

$f''(x_0) > 0$ په دې معنا، چې د $f(x)$ تابع ګراف کینه انحنا لري (کونوکس)

$f''(x_0) < 0$ په دې معنا، چې د $f(x)$ تابع ګراف ښی انحنا لري (کونکاو)

یوغږېزوالی

1- که د ټولو $x \in I$ لپاره وي $f'(x) \geq 0$ ، نو $f(x)$ په انتروال I کې مونوتون جګیږي. که د ټولو $x \in I$ لپاره $f'(x) \leq 0$ وي, نو $f(x)$ په انتروال I کې مونوتون ټیټېدونکی دی.

2- که د ټولو $x \in I$ لپاره $f'(x) > 0$ وي، نو $f(x)$ تابع په انتروال I کې کره غښتلې مونوتون جګېدونکی ده.

که د ټولو $x \in I$ لپاره $f'(x) < 0$ وي، نو $f(x)$ تابع په انتروال I کې غښتلې مونوتون جګېدونکی ده.

د پېژند ورشو ژی ټکي:

د تابع ژی ټکي کتنه په پېژند ورشوکې. که پېژند ورشو نامحدوده وي، نو لیمیټ $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ او $\lim_{x\to\infty} f(x)$ ټاکو.

بیلګه :

د $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$ تابع رسم کړئ.

مشتق کونه:

$$y = f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$$
$$y' = f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$$
$$y'' = f''(x) = 6x - 12$$
$$y''' = f'''(x) = 6 \qquad D = IR$$

نسبي بحراني ټکي

$P_{max}(1|2) \qquad P_{min}(3|-2)$

انعطافتکی او تانجنت

$y = f_t(x) = -3x + 6 \qquad P_W(2|0)$

صفرځايونه:

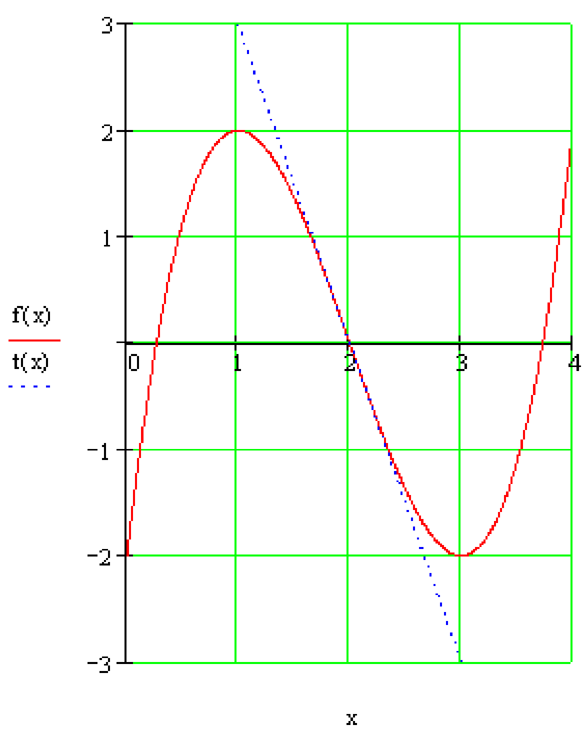
$P_{x2}(3.7|0) \quad P_{x1}(2|0)$

$P_{x3}(0.3|0)$ د $y-$

محور سره غوښتکی(دقاطع):

$P_y(0|-2)$

$f(x) := x^3 - 6x^2 + 9x - 2 \qquad t(x) := -3x + 6$



يوغريزوالی(مونوتوني ياجګ - تيتوالی) په

$I_1 = \{x \mid -\infty < x \le 1\}_{\mathbb{R}}$ کي

يوغريز جګيري. په

$I_3 = \{x \mid 3 \le x < \infty\}_{\mathbb{R}}$ کي

يوغريز جګيري.

د تابع حالت په $x \to -\infty$ او $x \to \infty$ کي

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^3\left(1 - \frac{6}{x} + \frac{9}{x^2} - \frac{2}{x^3}\right) = -\infty$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^3\left(1 - \frac{6}{x} + \frac{9}{x^2} - \frac{2}{x^3}\right) = \infty$$

سيومتري: نه لري

د کږوالي يا انحنا حالت:

ښی کږوالی یا انحنا(وتلی یا محدب) : $I_4 = \{x \mid -\infty < x < 2\}_{IR}$

کیڼ کږوالی یا انحنا (مقعریت یا ننوتوالی) : $I_5 = \{x \mid 2 < x < \infty\}_{IR}$

بیلګه۱ : لومړی: تعریفورشو:

$$f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 4x \qquad \boxed{D = \mathbb{R}}$$

دویم: سیومتري:

ټکی سیومتریک؛ $f(-x)=-f(x)$ ځکه چې فقط ناجوړه یا طاق جګعدد

دریم: افراطیت:

مشتق:

$$f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 4x \Rightarrow f'(x) = -x^2 + 4 \Rightarrow f''(x) = -2x \Rightarrow f'''(x) = -2$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 4 = 0 \Rightarrow x_1 = 2 \text{ bzw. } x_2 = -2$$

$$f''(x_1) = f''(2) = -4 < 0 \Rightarrow \text{rel Max für } x_1 = 2$$

$$f''(x_2) = f''(-2) = 4 > 0 \Rightarrow \text{rel Min für } x_2 = -2$$

$$f(x_1) = f(2) = \frac{16}{3} \Rightarrow \boxed{P_{Max}\left(2 \mid \frac{16}{3}\right)}$$

$$f(x_2) = f(-2) = -\frac{16}{3} \Rightarrow \boxed{P_{Min}\left(-2 \mid -\frac{16}{3}\right)}$$

څلورم: اوړنټکی یا نقطه انعطاف:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -2x = 0 \Rightarrow x_W = 0$$

$$f'''(x_W) = f'''(0) = -2 \neq 0$$

$$f(x_W) = f(0) = 0 \Rightarrow \boxed{P_W(0 \mid 0)}$$

پنځم: مخورغوڅټکی یا نقاط تقاطع محور:

$$f(0) = 0 \Rightarrow \boxed{P_y(0 \mid 0)}$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{3}x^3 + 4x = 0 \Leftrightarrow x\left(-\frac{1}{3}x^2 + 4\right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

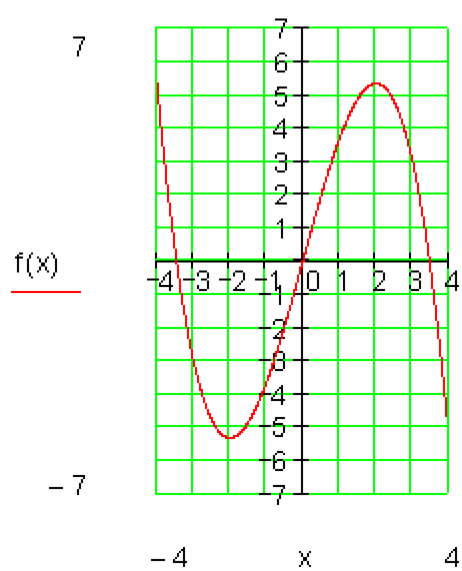
$$-\frac{1}{3}x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 12 = 0 \Rightarrow x_2 = \sqrt{12} \text{ bzw. } x_3 = -\sqrt{12}$$

ضفرځایونه: $\boxed{P_{x1}(0|0)}$; $\boxed{P_{x2}(\sqrt{12}|0)}$; $\boxed{P_{x3}(-\sqrt{12}|0)}$

شپږم: ارزښتجدول او ګراف:

$$f(-4) = 5{,}3\,;\, f(4) = -5{,}3\,;\, f(-3) = -3\,;\, f(3) = 3\,;\, f(-1) = -3{,}7\,;\, f(1) = 3{,}7$$

		P_{x3}		P_{Min}		P_y P_W P_{x1}		P_{Max}		P_{x2}	
x	-4	$-\sqrt{12}$	-3	-2	-1	0	1	2	3	$\sqrt{12}$	4
$f(x)$	$5{,}3$	0	-3	$-5{,}\overline{3}$	$-3{,}7$	0	$3{,}7$	$5{,}\overline{3}$	3	0	$-5{,}3$



اووم: کږوالي حالت او یوغږیزوالی:

د $x0=-2$ لپاره (کينې له P_W) $f''(-2) > 0$ له دې لاس ته راځي کينې کوږوال(ننوتی یا کونوکس)$]-\infty; 0[$

د $x0=2$ لپاره (ښي له P_W) $f''(2) < 2$ له دې لاس ته راځي ښي کوږوالی(کونکاو یا وتلی) $]0; -\infty[$

یوغویزوالی:

د $]-\infty; 0[$ لپاره کرهیوغږیز ټیټیدونکی یا لویدونکی

د $]0; -\infty[$ لپاره کره یوغږیز جګیدونکی

د $]2; \infty[$ لپاره کره یوغږیز ټیټیدونکی یا لویدونکی

اتم: د تعریفورشو ژۍ شرایط:

$$\left.\begin{aligned}
&\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{3}x^3 + 4x\right) = \lim_{x\to-\infty} x^3\left(-\frac{1}{3} + \frac{4}{x^2}\right) \\
&= \lim_{x\to-\infty} x^3 \cdot \underbrace{\lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{3} + \frac{4}{x^2}\right)}_{-\frac{1}{3}} = -\frac{1}{3}\cdot \lim_{x\to-\infty} x^3 = \infty \\
&\lim_{x\to\infty} f(x) = -\frac{1}{3}\cdot \lim_{x\to\infty} x^3 = -\infty
\end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{\begin{aligned}&\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty \\ &\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty\end{aligned}}$$

بیلګه ۲ :

لومړی:

$$f(x) = \frac{1}{16}x^3 - \frac{3}{8}x^2 + 2 \qquad \boxed{D = \mathbb{R}}$$

دویم: سیمتري:

سیومتري نه شته.

دریم: افراطیت:

مشتق:

$$f(x) = f(x) = \frac{1}{16}x^3 - \frac{3}{8}x^2 + 2 \Rightarrow f'(x) = \frac{3}{16}x^2 - \frac{3}{4}x \Rightarrow f''(x) = \frac{3}{8}x - \frac{3}{4} \Rightarrow f$$

$$f(x) = f(x) = \frac{1}{16}x^3 - \frac{3}{8}x^2 + 2 \Rightarrow f'(x) = \frac{3}{16}x^2 - \frac{3}{4}x \Rightarrow f''(x) = \frac{3}{8}x - \frac{3}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'''(x) =$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{16}x^2 - \frac{3}{4}x = 0 \Leftrightarrow x\left(\frac{3}{16}x - \frac{3}{4}\right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

$$\frac{3}{16}x - \frac{3}{4} = 0 \Rightarrow x_2 = 4$$

$$f''(x_1) = f''(0) = -\frac{3}{4} < 0 \Rightarrow \text{rel Max für } x_1 = 0$$

$$f''(x_2) = f''(4) = \frac{3}{4} > 0 \Rightarrow \text{rel Min für } x_2 = 4$$

$$f(x_1) = f(0) = 2 \Rightarrow \boxed{P_{Max}(0|2)}$$

$$f(x_2) = f(4) = 0 \Rightarrow \boxed{P_{Min}(4|0)}$$

څلورم:اوړنټکی یا نقطه انعطاف:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{8}x - \frac{3}{4} = 0 \Rightarrow x_W = 2$$

$$f'''(x_W) = f'''(2) = \frac{3}{8} \neq 0$$

$$f(x_W) = f(2) = 1 \Rightarrow \boxed{P_W(2|1)}$$

پنځم: محور غوڅتکي:

$$f(0) = 2 \Rightarrow \boxed{P_y(0|2)}$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{16}x^3 - \frac{3}{8}x^2 + 2 = 0$$

د P_{min} شمیرنه په دې معنا وګوری لوړی صفرځای x1=4.
هورنر

$$\begin{array}{llllll} & \frac{1}{16} & -\frac{3}{8} & 0 & 2 & \\ x=4 & & \frac{4}{16} & -\frac{1}{2} & -2 & \\ \hline & \frac{1}{16} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{2} & 0 & \Rightarrow \frac{1}{16}x^2-\frac{1}{8}x-\frac{1}{2}=0 \end{array}$$

$$\frac{1}{16}x^2-\frac{1}{8}x-\frac{1}{2}=0 \Leftrightarrow x^2-2x-8=0 \Rightarrow x_2=4\,;\ x_3=-2$$

صفرځایونه: $\boxed{P_{x1/2}(4\,|\,0)}\,;\ \boxed{P_{x3}(-2\,|\,0)}$

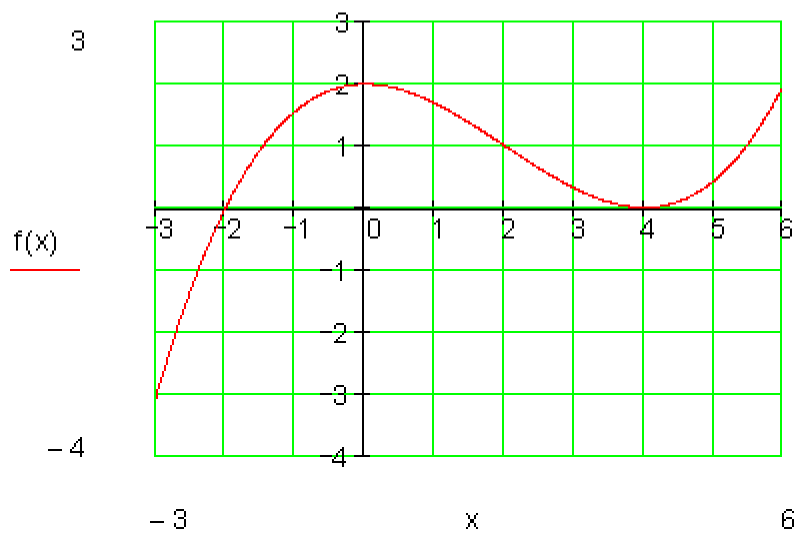
شپیږم: ارزښتجدول او ګراف:

ارزښتجدوال:

$f(-3)\approx -3{,}06\,;\ f(-1)\approx 1{,}56\,;\ f(1)\approx 1{,}67\,;\ f(3)\approx 0{,}31;\ f(5)\approx 0{,}44\,;\ f(6)=2$

		P_{x3}		P_{Max}		P_W		P_{Min} $P_{x1/2}$		
x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	$-3{,}06$	0	$1{,}56$	2	$1{,}67$	1	$0{,}31$	0	$0{,}44$	2

ګراف:



اووم: ګږوالی(ننوتوالی یا مقعربیت) او یوغږیزوالی:
اووم: کږوالي حالت او یوغږیزوالی:
د $x0=-2$ لپاره (کيڼ له P_W) $f''(0)=-¾<0$ له دې لاس ته راځي ښی کوږوال(ننوتی یا کونوکس)$]-\infty;2[$

د $x0=2$ لپاره (ښي له P_W) $f''(4)=¾>0$ له دې لاس ته راځي کيڼ کوږوالی(کونکاو یا وتلی) $]2;\infty[$
یوغویزوالی:
د $]-\infty;0[$ لپاره کره یوغږیز جګیدونکی
د $]0;4[$ لپاره کره یوغږیز ټیټیدونکی
د $]4;\infty[$ لپاره کره یوغږیز جګیدونکی

اتم: د تعریفورشو ژۍ شرایط؛

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{16}x^3-\frac{3}{8}x^2+2\right)=\lim_{x\to-\infty}x^3\left(\frac{1}{16}-\frac{3}{8x}+\frac{2}{x^3}\right)\\&=\lim_{x\to-\infty}x^3\cdot\underbrace{\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{16}-\frac{3}{8x}+\frac{2}{x^3}\right)}_{\frac{1}{16}}=\frac{1}{16}\cdot\lim_{x\to-\infty}x^3=-\infty\\&\lim_{x\to\infty} f(x)=\frac{1}{16}\cdot\lim_{x\to\infty}x^3=\infty\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\boxed{\begin{aligned}&\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty\\&\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty\end{aligned}}$$

بیلګه ۳ :
لومړی: تعریفورشو:

$$f(x)=-\frac{1}{2}x(x+3)^3=-\frac{1}{2}x^4-\frac{9}{2}x^3-\frac{27}{2}x^2-\frac{27}{2}x \qquad \boxed{D=\mathbb{R}}$$

دویم: سیمتري: سیوتتري نه شته.

دریم: افراطیت: مشتق د صرب له لارې(قانون)

$$f(x) = \underbrace{-\frac{1}{2}x}_{u}\underbrace{(x+3)^3}_{v} \Rightarrow f'(x) = u'v + uv'$$

$$u = -\frac{1}{2}x\,;\, v = (x+3)^3\,;\, u' = -\frac{1}{2}\,;\, v' = 3(x+3)^2$$

$$\Rightarrow \boxed{f'(x)} = -\frac{1}{2}(x+3)^3 - \frac{3}{2}x(x+3)^2 = \boxed{-\frac{1}{2}(x+3)^2(4x+3)}$$

$$f'(x) = \underbrace{-\frac{1}{2}(x+3)^2}_{u}\underbrace{(4x+3)}_{v} \Rightarrow f''(x) = u'v + uv'$$

$$u = -\frac{1}{2}(x+3)^2\,;\, v = 4x+3\,;\, u' = -(x+3)\,;\, v' = 4$$

$$\Rightarrow \boxed{f''(x)} = -(x+3)(4x+3) - \frac{1}{2}(x+3)^2 \cdot 4 = \boxed{-3(x+3)(2x+3)}$$

$$f''(x) = \underbrace{-3(x+3)}_{u}\underbrace{(2x+3)}_{v} \Rightarrow f'''(x) = u'v + uv'$$

$$u = -3(x+3)\,;\, v = 2x+3\,;\, u' = -3\,;\, v' = 2$$

$$\Rightarrow \boxed{f'''(x)} = -3(2x+3) - 3(x+3)\cdot 2 = \boxed{-(12x+27)}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}(x+3)^2(4x+3) = 0 \Rightarrow x_{1/2} = -3\,;\, x_3 = -\frac{3}{4}$$

$f''(x_{1/2}) = f''(-3) = 0 \Rightarrow$

د افراطیت په هکله وینا نه شته

$$f''(x_3) = f''\left(-\frac{3}{4}\right) = -3\left(-\frac{3}{4}+3\right)\left(2\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)+3\right) = -\frac{81}{8} = -10{,}125 < 0$$

لاس ته راځي: د $x_3 = -\frac{3}{4}$ لپاره نسبي افراطیت

$x_{1/2} = -3$ د f'(x) دبل صفرځای دی، دا په دې معنا چې د f'(x)مخنخبنې بدلون د

x=-3 په ځا کي نه شته. دا په دې معنا چې $x_{1/2} = -3$ دافراطي ځای نه دي.

$$f(x_3) = f\left(-\frac{3}{4}\right) = -\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)\left(-\frac{3}{4}+3\right)^3 = \frac{2187}{512} \approx 4,27$$

$$\Rightarrow \boxed{P_{Max}\left(-\frac{3}{4} \middle| \frac{2187}{512}\right) \text{ bzw. } P_{Max}(-0,75 \mid 4,27)}$$

څلورم: اوړونټكي يا نقاط انعطاف: د لاندې الماني پښتو: اوړونټكى.

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -3(x+3)(2x+3) = 0 \Rightarrow x_1 = -3;\ x_2 = -\frac{3}{2}$$

$$f'''(x_1) = f'''(-3) = -(12\cdot(-3)+27) \neq 0 \Rightarrow \text{Wendepunkt bei } x_{W1} = -3$$

$$f'''(x_2) = f'''\left(-\frac{3}{2}\right) = -\left(12\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)+27\right) \neq 0 \Rightarrow \text{Wendepunkt bei } x_{W2} = -\frac{3}{2}$$

$$f(x_{W1}) = f(-3) = -\frac{1}{2}\cdot(-3)(-3+3)^3 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{P_{W1}(-3 \mid 0)}$$

$$f(x_{W2}) = f\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}+3\right)^3 = \frac{81}{32} \approx 2,53$$

$$\Rightarrow \boxed{P_{W2}\left(-\frac{3}{2} \middle| \frac{81}{32}\right) \text{ bzw. } P_{W2}(-1,5 \mid 2,53)}$$

پنځم: محور غوڅټكي:

$$f(0) = 0 \Rightarrow \boxed{P_y(0 \mid 0)}$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}x(x+3)^3 = 0 \Rightarrow x_1 = 0;\ x_{2/3/4} = -3$$

صفرځایونه: $\boxed{P_{x1}(0 \mid 0)};\ \boxed{P_{x2/3/4}(-3 \mid 0)}$

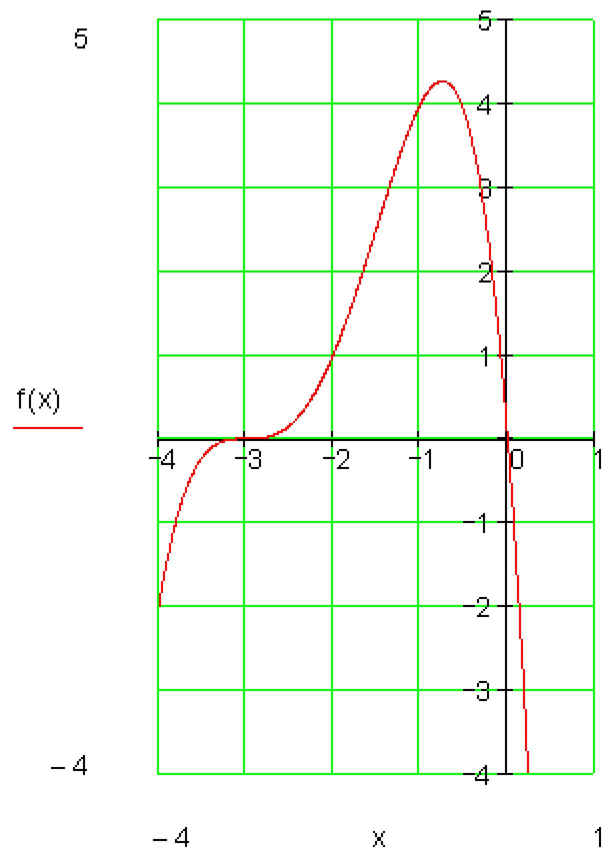
شپږم: ارزښتجدول او ګراف:

ارزښتجدول:

$$f(-4) = -2;\ f(-2) = 1;\ f(-1) = 4;\ f(0{,}5) \approx -10{,}72$$

		P_{W1} $P_{x2/3/4}$		P_{W2}		P_{Max}	P_{x1}	
x	−4	−3	−2	−1,5	−1	−0,75	0	0,5
f(x)	−2	0	1	2,53	4	4,27	0	−10,72

ګراف:



اووم: د انحنا حالت او یوغږیزوالی:

اووم: کږوالي حالت او یوغږیزوالی:

د $x_0=-2$ لپاره (کیڼ له P_W) $f''(-2) > 0$ له دې لاس ته راځي کیڼ کوږوال(ننوتی یا کونوکس)$]-\infty; 0[$

د x0=2 لپاره (ښي له P_W) f''(2) < 2 له دې لاس ته راځي ښي کوږوالى(کونکاو يا وتلى) $]0;-\infty[$

يوغويزوالى:

د $]-\infty;0[$ لپاره کرهيوغږيز ټيټيدونکى يا لويدونکى

د $]0;-\infty[$ لپاره کره يوغږيز جګيدونکى

د $]2;\infty[$ لپاره کره يوغږيز ټيټيدونکى يا لويدونکى

کږوالى:

د $x_0 = -4$ لپاره (کيڼ له P_{W1}) f''(-4) = -5 < 0
لاس ته راځي ښى کوږوالى (کونوکس)$]-\infty;-3[$

د$x_0 = -2$ لپاره (ښي له P_{W1}) f''(-2) = 1 > 0
لاس ته راځي کيڼ کوږالى (کونوکس) $]-3;-1{,}5[$

د $x_0 = -1$ لپاره (ښى له P_{W2}) f''(-1) = -2 < 0
لاس ته راځي ښى کوږوالى(کونکاو) $]-1{,}5;-\infty[$

يوغږيزوالى:

د مخامخ انتروال لپاره کره يوغږيز جګيدوکى	$]-\infty;-3[$
د مخامخ انتروال لپاره کره يوغږيز جګيدونکى	$\left]-3;-\frac{3}{4}\right[$
د مخامخ انتروال لپاره کره يوغږيز ټيټيدونکى	$\left]-\frac{3}{4};\infty\right[$

اتم: د تعريفورشو ژۍ ټکي:

$$\left.\begin{aligned}
&\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{2}x^4-\frac{9}{2}x^3-\frac{27}{2}x^2-\frac{27}{2}x\right)\\
&= \lim_{x\to-\infty} x^4\left(-\frac{1}{2}-\frac{9}{2x}-\frac{27}{2x^2}-\frac{27}{2x^3}\right)\\
&= \lim_{x\to-\infty} x^4\cdot\underbrace{\lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{2}-\frac{9}{2x}-\frac{27}{2x^2}-\frac{27}{2x^3}\right)}_{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to-\infty}x^4 = -\infty\\
&\lim_{x\to\infty} f(x) = -\frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to\infty}x^4 = -\infty
\end{aligned}\right\}\Rightarrow \boxed{\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = -\infty}$$

بیلګه۴ :

لومړی:تعریفورشو:

$$f(x) = -x^4 + \frac{9}{2}x^2 - \frac{81}{16} \qquad \boxed{D = \mathbb{R}}$$

دویم: محورسیومتري: $f(-x) = f(x)$ ځکه چې فقط جوړه(جغت) اکسپوننتونه

دریم: افراطیت:

مشتقونه یا رابیلیدني:

$$f(x) = -x^4 + \frac{9}{2}x^2 - \frac{81}{16} \Rightarrow f'(x) = -4x^3 + 9x \Rightarrow f''(x) = -12x^2 + 9 \Rightarrow f'''(x) = -24x$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -4x^3 + 9x = 0 \Leftrightarrow x\left(-4x^2 + 9\right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

$$-4x^2 + 9 = 0 \Rightarrow x_{2/3} = \pm\frac{3}{2}$$

$$f''(x_1) = f''(0) = 9 > 0 \Rightarrow \text{rel Min für } x_1 = 0$$

$$f''(x_2) = f''\left(\frac{3}{2}\right) = -18 < 0 \Rightarrow \text{rel Max für } x_2 = \frac{3}{2}$$

$$f''(x_3) = f''\left(-\frac{3}{2}\right) = -18 < 0 \Rightarrow \text{rel Max für } x_3 = -\frac{3}{2}$$

$$f(x_1) = f(0) = -\frac{81}{16} \approx -5{,}06 \Rightarrow \boxed{P_{Min}\left(0 \mid -\frac{81}{16}\right) \text{ bzw. } P_{Min}(0 \mid -5{,}06)}$$

$$f(x_2) = f\left(\frac{3}{2}\right) = 0 \Rightarrow \boxed{P_{Max1}\left(\frac{3}{2} \mid 0\right) \text{ bzw. } P_{Max1}(1{,}5 \mid 0)}$$

$$f(x_3) = f\left(-\frac{3}{2}\right) = 0 \Rightarrow \boxed{P_{Max2}\left(-\frac{3}{2} \mid 0\right) \text{ bzw. } P_{Max2}(-1{,}5 \mid 0)}$$

څلورم: اوړنټکی یا د انعطاف ټکی:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -12x^2 + 9 = 0 \Rightarrow x_{1/2} = \pm\sqrt{\frac{3}{4}}$$

$$f'''(x_1) = f'''\left(\sqrt{\frac{3}{4}}\right) = -24 \cdot \sqrt{\frac{3}{4}} \neq 0 \Rightarrow$$

په $x_{W1} = \sqrt{\frac{3}{4}} \approx 0,87$ کې اوړونټکی(انعطاف-)

$f'''(x_2) = f'''\left(-\sqrt{\frac{3}{4}}\right) = -24 \cdot \left(-\sqrt{\frac{3}{4}}\right) \neq 0$ لاس ته راځي: په $x_{W2} = -\sqrt{\frac{3}{4}} \approx -0,87$

کې اوړونټکی(انعطاف-)

$$f(x_{W1}) = f\left(\sqrt{\frac{3}{4}}\right) = -\frac{9}{4} = -2,25 \Rightarrow \boxed{P_{W1}\left(\sqrt{\frac{3}{4}} \mid -\frac{9}{4}\right) \text{ bzw. } P_{W1}(0,87 \mid -2,25)}$$

$$f(x_{W2}) = f\left(-\sqrt{\frac{3}{4}}\right) = -\frac{9}{4} = -2,25 \Rightarrow \boxed{P_{W2}\left(-\sqrt{\frac{3}{4}} \mid -\frac{9}{4}\right) \text{ bzw. } P_{W1}(-0,87 \mid -2,25)}$$

پنځم: محورغوځتکي:

$$f(0) = -\frac{81}{16} \approx -5,06 \Rightarrow \boxed{P_y\left(0 \mid -\frac{81}{16}\right) \text{ bzw. } P_y(0 \mid -5,06)}$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow -x^4 + \frac{9}{2}x^2 - \frac{81}{16} = 0$$

تراوسه معلوم صفرخایونه $x_1 = \frac{3}{2}; x_2 = -\frac{3}{2}$ (افراطي ټکي وکورئ)

پولینوموېش:

$$\left(-x^4 + \frac{9}{2}x^2 - \frac{81}{16}\right) : \underbrace{\left(x - \frac{3}{2}\right)\left(x + \frac{3}{2}\right)}_{x^2 - \frac{9}{4}}$$

$$\left(-x^4 + \frac{9}{2}x^2 - \frac{81}{16}\right) : \left(x^2 - \frac{9}{4}\right) = -x^2 + \frac{9}{4}$$

$$\underline{-\left(-x^4 + \frac{9}{4}x^2\right)}$$

$$\frac{9}{4}x^2 - \frac{81}{16}$$

$$-\left(\frac{9}{4}x^2 - \frac{81}{16}\right)$$

$$-x^2 + \frac{9}{4} = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{9}{4}$$

$$\Rightarrow x_{3/4} = \pm\frac{3}{2}$$

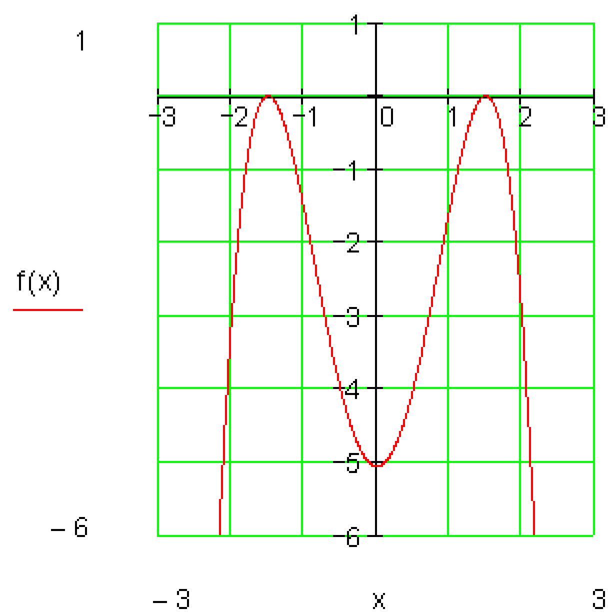
صفرځایونه: $\boxed{P_{x1/2}\left(\frac{3}{2}\,|\,0\right)}$; $\boxed{P_{x3/4}\left(-\frac{3}{2}\,|\,0\right)}$

شپږم: ارزښت جدول او ګراف:

ارزښتجدول:

$f(-2) \approx -3{,}06 = f(2)$; $f(-1) \approx -1{,}56 = f(1)$

		P_{Max2} $P_{x3/4}$		P_{W2}	P_{Min} P_y	P_{W1}		P_{Max1} $P_{x1/2}$	
x	−2	−1,5	−1	−0,87	0	0,87	1	1,5	2
f (x)	−3,06	0	−1,56	−2,25	−5,06	−2,25	−1,56	0	−3,06



اووم: کږوالی یا انحنا:

اووم: کږوالي حالت او یوغږیزوالی:

د x0=-2 لپاره (کين له P_W) $f''(-2) > 0$ له دی لاس ته راځي کين کوږوال(ننوتی یا کونوکس) $]-\infty; 0[$

د x0=2 لپاره (ښي له P_W) $f''(2) < 2$ له دی لاس ته راځي ښي کوږوالی(کونکاو یا وتلی) $]0; -\infty[$

یوغویزوالی:

د $]-\infty; 0[$ لپاره کرهیوغږیز تیتیدونکی یا لویدونکی

د $]-\infty; 0[$ لپاره کره یوغړیز جګیدونکی

د $]2; \infty[$ لپاره کره یوغړیز ټیټیدونکی یا لویدونکی

کړوالی:

د $x_0 =-1$ لپاره (د P_{W1} او P_{W2}ترمنځ) $f''(-1) =-3< 0$

له دې لای ته راځي ښي کړوالی (وتلی یا محدب؟) $\boxed{\left] -\infty ; -\sqrt{\frac{3}{4}} \right[}$

د $x_0 = 0$ لپاره (د P_{W1} او P_{W2}ترمنځ) $f''(0) = 9> 0$

له دې لای ته راځي ښي کړوالی کيڼ کړوالی: (ننوتی؟) $\boxed{\left] -\sqrt{\frac{3}{4}} ; \sqrt{\frac{3}{4}} \right[}$

د $x_0 = 1$ لپاره (له P_{W1}څخه ښی) $f''(1) = -3 < 0$

له دې لای ته راځي ښي کړوالی (وتلی یا محدب؟) $\boxed{\left] \sqrt{\frac{3}{4}} ; \infty \right[}$

یوغړیزوالی: د مخامخ لپاره کره یوغړیز جګیدونکی د مخامخ لپاره کره یوغړیز ټیټیدونکی د مخامخ لپاره کره یوغړیز جګیدونکی د مخامخ لپاره کره یوغړیز ټیټیدونکی	 $]-\infty ; -1{,}5[$ $]-1{,}5 ; 0[$ $]0 ; 1{,}5[$ $]1{,}5 ; \infty[$

اتم: د تعریفورشو ژی ټکي:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty}\left(-x^4 + \frac{9}{2}x^2 - \frac{81}{16}\right) = \lim\limits_{x\to -\infty} x^4\left(-1+\frac{9}{2x^2} - \frac{81}{16x^4}\right) \\ = \lim\limits_{x\to -\infty} x^4 \cdot \underbrace{\lim\limits_{x\to -\infty}\left(-1+\frac{9}{2x^2} - \frac{81}{16x^4}\right)}_{-1} = -1\cdot \lim\limits_{x\to -\infty} x^4 = -\infty \\ \lim\limits_{x\to \infty} f(x) = -1\cdot \lim\limits_{x\to \infty} x^4 = -\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\lim\limits_{x\to \pm\infty} f(x) = -\infty}$$

بیلګه:

۱ – تعریف – یا پیژندورشو:

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + x^3 \qquad \boxed{D = \mathbb{R}}$$

۲ – سیومتري: سیومتري نه شته

۳ – افراطیت-

مشتق

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + x^3 \Rightarrow f'(x) = -x^3 + 3x^2 \Rightarrow f''(x) = -3x^2 + 6x \Rightarrow f'''(x) = -6x + 6$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -x^3 + 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(-x+3) = 0 \Rightarrow x_{1/2} = 0;\ x_3 = 3$$

$$f''(x_1) = f''(0) = 0 \Rightarrow$$

په $x_1 = 0$ کي په افراطي ځای کومه وېينه یا افاده نه شته

مګر دا چې $x_{1/2} = 0$ د $f'(x)$ دبل صفرځای دی د $f'(x)$ لپاره په $x_{1/2} = 0$ ځای

کي د مخنخښي بدلون نه شته له دي لاس ته راځی، چې په $x_1 = 0$ کي افراطي ځایونه نه شته

$$f''(x_3) = f''(3) = -9 < 0 \Rightarrow \text{rel Max für } x_3 = 3$$

$$f(x_3) = f(3) = \frac{27}{4} = 6,75 \Rightarrow \boxed{P_{Max}\left(3 \,|\, \frac{27}{4}\right) \text{ bzw. } P_{Max}(3 \,|\, 6,75)}$$

۴ - اوړونټکی یا انعطافټکی: (لاندي الماني: په ... کي اوړونټکی)

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow x(-3x+6) = 0 \Rightarrow x_1 = 0;\ x_2 = 2$$

$$f'''(x_1) = f'''(0) = 6 \neq 0 \Rightarrow \text{Wendepunkt bei } x_{W1} = 0$$

$$f'''(x_2) = f'''(2) = -6 \neq 0 \Rightarrow \text{Wendepunkt bei } x_{W2} = 2$$

$$f(x_{W1}) = f(0) = 0 \Rightarrow \boxed{P_{W1}(0 \,|\, 0)}$$

$$f(x_{W2}) = f(2) = 4 \Rightarrow \boxed{P_{W2}(2 \,|\, 4)}$$

۵ – محورغوڅتکي:

$$f(0) = 0 \Rightarrow \boxed{P_y(0 \,|\, 0)}$$

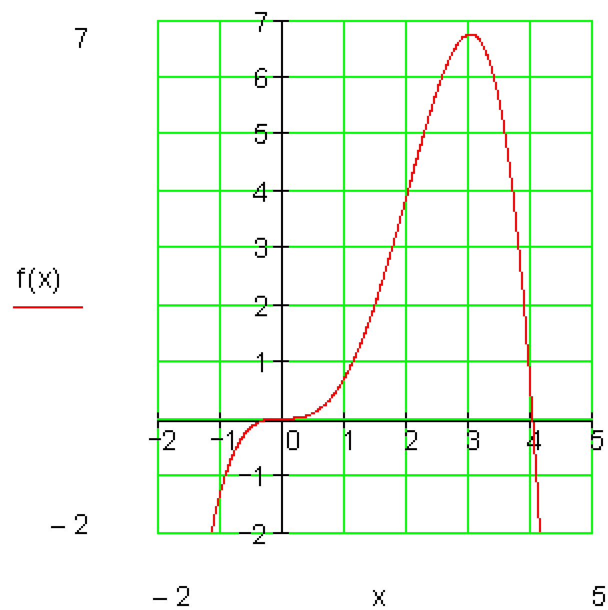
$$f(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{4}x^4 + x^3 = 0 \Leftrightarrow x^3\left(-\frac{1}{4}x + 1\right) = 0 \Rightarrow x_{1/2/3} = 0;\ x_4 = 4$$

صفرځایونه: $\boxed{P_{x1/2/3}(0 \,|\, 0)};\ \boxed{P_{x4}(4 \,|\, 0)}$

ارزښتجدول او ګراف :ارزښتجدول

$f(-1) = -1,25 ; f(1) = 0,75 ; f(4,2) = -3,7$

		P_{W1} $P_{x1/2/3}$ P_y		P_{W2}	P_{Max}	P_{x4}	
x	−1	0	1	2	3	4	4,2
f (x)	−1,25	0	0,75	4	6,75	0	−3,7



کږوالي حالت او یوغږیزوالی:

کږوالی:

د $x_0 = -1$ لپاره (د P_{W1} کیڼ لور ته) f’’(-1)=-9<0 له دې لاس ته راځي: ښی کږوالی(وتلی) $\boxed{]-\infty;-0[}$

د $x_0 = 1$ لپاره (دP_{W1}او P_{W2} ترمنځ) f’’(1)=3>0لاس ته راځي: کیڼ کوږوالی (ننوتی) $\boxed{]0;2[}$

د $x_0 = 3$ لپاره (ښی له P_{W2}) f’’(3)=-9<0 لاس ته راځي: ښي کږوالی(وتلی) $\boxed{]2;\infty[}$

یوغږیزوالی:

د مخامخ لپاره کره یوغږیز جګیدونکی	$]-\infty;0[$
د مخامخ لپاره کره یوغږیز جګیدونکی	$]0;3[$
د مخامخ لپاره کره یوغږیز ټیټیدونکی	$]3;\infty[$

اتم: د تعریفورشو ژی ټکي:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{4}x^4+x^3\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^4\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{x}\right)\\ =\lim\limits_{x\to-\infty}x^4\cdot\underbrace{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{x}\right)}_{-\frac{1}{4}}=-\frac{1}{4}\cdot\lim\limits_{x\to-\infty}x^4=-\infty\\ \lim\limits_{x\to\infty} f(x)=-\frac{1}{4}\cdot\lim\limits_{x\to\infty}x^4=-\infty\end{array}\right\}\Rightarrow\boxed{\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=-\infty}$$

افراطي ارزښتونه

تمرینونه د کور کار **I** :

د دریمې درجې ټول یا تام راشنل توابعو افراطي ټکي

د لاندې ټول راشنل(هوښیار) توابعو افراطي ارزښتونه مطالعه کړی او په ممکنه حالت کې یې انحرافي ټکي پیدا کړی.

اول - $f(x)=\frac{1}{4}x^3-3x$ دویم - $f(x)=-\frac{1}{2}x^3+2x^2$

دریم - $f(x)=\frac{1}{2}x^3-4x^2+8x$ څلورم - $f(x)=-\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{2}x+\frac{3}{2}$

پنځم - $f(x)=\frac{1}{9}x^3-\frac{1}{3}x^2-\frac{8}{3}x+\frac{26}{9}$ شپږم - $f(x)=\frac{2}{5}x^3-\frac{22}{5}x^2+14x-10$

اوم - $f(x)=\frac{1}{9}x^3-x^2+3x$ اتم- $f(x)=\frac{1}{4}x^3-\frac{3}{2}x^2+4$

نهم - $f(x)=\frac{1}{4}x^3-\frac{3}{2}x^2+3x-4$ لسم - $f(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2-2x-3$

حلونه

تمرينونه: مشتقشميرنه **I**

نتيجې او مفصل حلونه

نتيجې

اول - $P_{Max}(-2|\,4)$ $P_{Min}(2|-4)$

دويم - $P_{Max}\left(\frac{8}{3}\approx 2{,}67\;\middle|\;\frac{128}{27}\approx 4{,}74\right)$ $P_{Min}(0|\,0)$

دريم - $P_{Max}\left(\frac{4}{3}\approx 1{,}33\;\middle|\;\frac{128}{27}\approx 4{,}74\right)$ $P_{Min}(4|\,0)$

څلورم - $P_{Max}\left(\frac{5}{3}\approx 1{,}67\;\middle|\;\frac{128}{27}\approx 4{,}74\right)$ $P_{Min}(-1|\,0)$

پنځم - $P_{Max}(-2|\,6)$ $P_{Min}(4|-6)$

شپږم - $P_{Max}\left(\frac{7}{3}\approx 2{,}33\;\middle|\;\frac{512}{135}\approx 3{,}79\right)$ $P_{Min}(5|\,0)$

اوم - انحرافي ټکي نه شته اتم - $P_{Max}(0|4)$ $P_{Min}(4|-4)$

نهم - انحرافي ټکي شتون نه لري.

لسم - $P_{Max}\left(-1-\sqrt{3}\ |\ 3{,}131\right)$ $P_{Min}\left(-1+\sqrt{3}\approx 0{,}732\ |-3{,}797\right)$

پام: د انحرافي ټکو کې رينه وه، نو د جبشمېري سره دې شمېرنه وشي، ځکه چې پرته له دې به شمېرنه ډېر وخت ونيسي.

مفصل حلونه

اول – مفصل حل

شميرنه:

1 – تابع مساوات د مشتق سره

$$f(x)=\frac{1}{4}x^3-3x \qquad f'(x)=\frac{3}{4}x^2-3 \qquad f''(x)=\frac{3}{2}x$$

- د افقي يا پروت محور سره تانجنتونه:

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \underbrace{\frac{3}{4}x^2-3}_{\text{مربع مساوات}} =0|\cdot\frac{4}{3} \Leftrightarrow x^2-4=0|+4$$

$$\Leftrightarrow x^2=4|\sqrt{\ } \Leftrightarrow |x|=2 \Rightarrow x_1=2 \qquad x_2=-2$$

_ ازماينښت چې ايا يو انحرافي ټکی مخ ته لرو:

$$f''(x_1)=f''(2)=\frac{3}{2}\cdot 2=3>0 \Rightarrow \text{rel. Min. bei } x_1=2$$

$$f''(x_2)=f''(-2)=\frac{3}{2}\cdot(-2)=-3<0 \Rightarrow \text{rel. Max. bei } x_2=-2$$

- د انحرافي ارزښتونو شمېرنه

$$f(x_1) = f(2) = \frac{1}{4}2^3 - 3\cdot 2 = \frac{8}{4} - 6 = 2 - 6 = -4$$

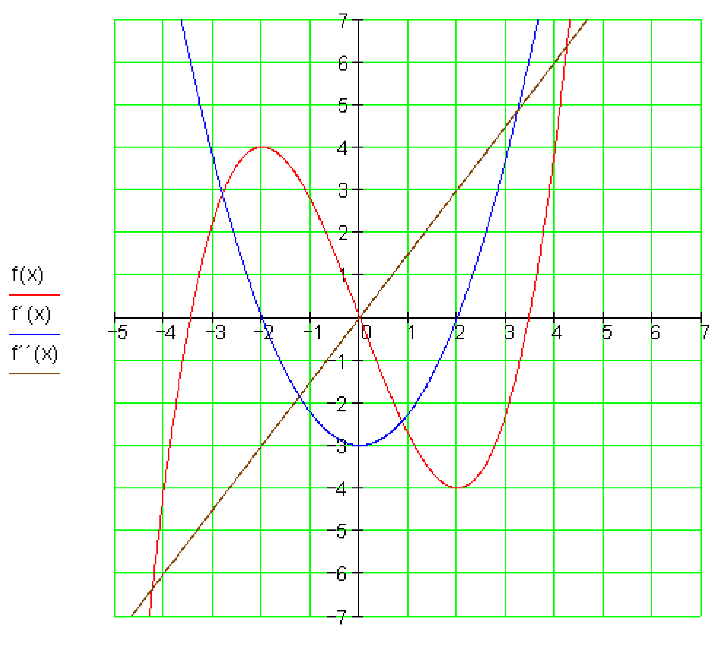
$$f(x_2) = f(-2) = \frac{1}{4}(-2)^3 - 3\cdot(-2) = -\frac{8}{4} + 6 = -2 + 6 = 4$$

- انحرافي ټکي:

$$P_{Min}(2|-4) \qquad P_{Max}(-2|4)$$

ګرافونه:

$$f(x) = \frac{1}{4}x^3 - 3x \qquad f'(x) = \frac{3}{4}x^2 - 3 \qquad f''(x) = \frac{3}{2}x$$



دويم – مفصل حل.

شمیرنه:

1 – تابع مساوات د مشتق سره

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + 2x^2 \qquad f'(x) = -\frac{3}{2}x^2 + 4x \qquad f''(x) = -3x + 4$$

2 - د پروت یا افقي تانجنت ځایونه:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{-\frac{3}{2}x^2 + 4x}_{\text{quadratische Gleichung}} = 0 \Leftrightarrow x\left(-\frac{3}{2}x + 4\right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

$$-\frac{3}{2}x + 4 = 0 | \cdot (-1) \Leftrightarrow \frac{3}{2}x - 4 = 0 | +4 \Leftrightarrow \frac{3}{2}x = 4 | \cdot \frac{2}{3} \Leftrightarrow x = \frac{8}{3} \Rightarrow \quad x_2 = \frac{8}{3}$$

3 - ازمایښت، چې ایا یو انحرافي ټکی مخ ته لرو:

$$f''(x_1) = f''(0) = -3 \cdot 0 + 4 = 4 > 0 \Rightarrow \text{rel. Min. bei } x_1 = 0$$

$$f''(x_2) = f''\left(\frac{8}{3}\right) = -3 \cdot \frac{8}{3} + 4 = -8 + 4 = -4 < 0 \Rightarrow \text{rel. Max. bei } x_2 = \frac{8}{3}$$

4 - د انحرافي ارزښتونو شمېرنه

$$f(x_1) = f(0) = -\frac{1}{2} \cdot 0^3 + 2 \cdot 0^2 = 0$$

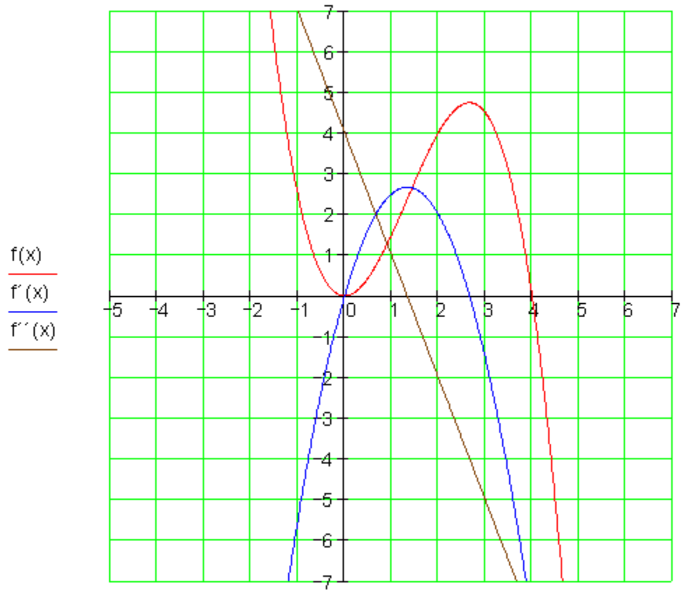
$$f(x_2) = f\left(\frac{8}{3}\right) = -\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{8}{3}\right)^3 + 2 \cdot \left(\frac{8}{3}\right)^2 = -\frac{1}{2} \cdot \frac{512}{27} + 2 \cdot \frac{64}{9} = -\frac{256}{27} + \frac{384}{27} = \frac{128}{27}$$

5 – انحرافي ټکي

$$\underline{\underline{P_{Min}(0|0)}} \qquad \underline{\underline{P_{Max}\left(\frac{8}{3} \approx 2{,}67 \,\middle|\, \frac{128}{27} \approx 4{,}74\right)}}$$

: گرافونه

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + 2x^2 \qquad f'(x) = -\frac{3}{2}x^2 + 4x \qquad f''(x) = -3x + 4$$



دريم - مفصل حل:شمیرنه:

1 – تابع مساوات د مشتق سره

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 4x^2 + 8x \qquad f'(x) = \frac{3}{2}x^2 - 8x + 8 \qquad f''(x) = 3x - 8$$

2 - د پورت یا افقي تانجنت ځایونه:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{\frac{3}{2}x^2 - 8x + 8}_{\text{quadratische Gleichung}} = 0 \Big| \cdot \frac{2}{3} \Leftrightarrow x^2 - \frac{16}{3}x + \frac{16}{3} = 0$$

$$p = -\frac{16}{3} \quad q = \frac{16}{3} \quad D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \frac{64}{9} - \frac{16}{3} = \frac{64}{9} - \frac{48}{9} = \frac{16}{9}$$

$$\Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{\frac{16}{9}} = \frac{4}{3} \Rightarrow x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \Bigg| \quad x_1 = \frac{8}{3} + \frac{4}{3} = \frac{12}{3} = 4, \quad x_2 = \frac{8}{3} - \frac{4}{3} = \frac{4}{3}$$

3 - ازمایښت، چې ایا یو انحرافي ټکی مخ ته لرو:

$$f''(x_1) = f''(4) = 3\cdot 4 - 8 = 4 > 0 \Rightarrow \text{rel. Min. bei } x_1 = 4$$

$$f''(x_2) = f''\left(\frac{4}{3}\right) = 3\cdot\frac{4}{3} - 8 = -4 < 0 \Rightarrow \text{rel. Max. bei } x_2 = \frac{4}{3}$$

4 - د انحرافي ارزښتونو شمیرنه

$$f(x_1) = f(4) = \frac{1}{2}\cdot 4^3 - 4\cdot 4^2 + 8\cdot 4 = \frac{1}{2}\cdot 64 - 64 + 32 = 32 - 64 + 32 = 0$$

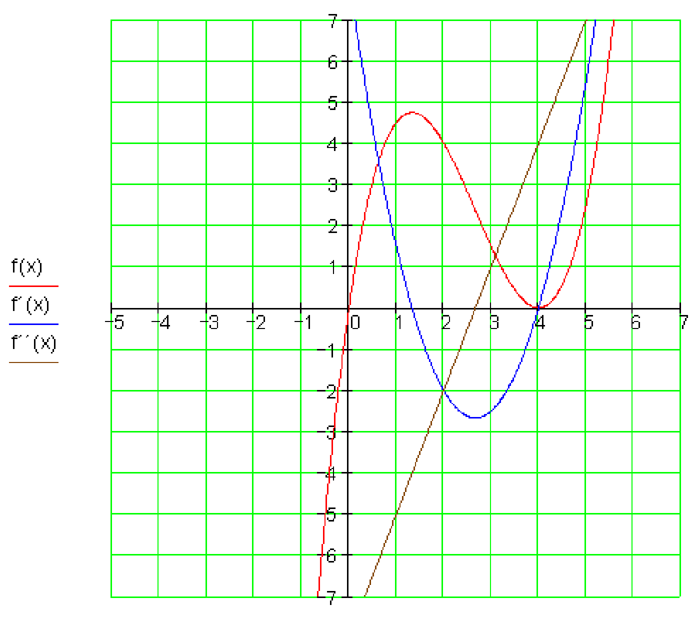
$$f(x_2) = f\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^3 - 4\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^2 + 8\cdot\frac{4}{3} = \frac{1}{2}\cdot\frac{64}{27} - 4\cdot\frac{16}{9} + \frac{32}{3}$$

$$= \frac{32}{27} - \frac{192}{27} + \frac{288}{27} = \frac{128}{27}$$

$$\underline{\underline{P_{Min}(4|\,0)}} \qquad \underline{\underline{P_{Max}\left(\frac{4}{3}\approx 1{,}33 \;\middle|\; \frac{128}{27}\approx 4{,}74\right)}}$$

5 - انحرافي ټکي:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 4x^2 + 8x \qquad f'(x) = \frac{3}{2}x^2 - 8x + 8 \qquad f''(x) = 3x - 8$$



ګرافونه

مفصل حل -

شميرنه: خلورم:

1 – تابع مساوات د مشتق سره

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{3}{2} \qquad f'(x) = -\frac{3}{2}x^2 + x + \frac{5}{2} \qquad f''(x) = -3x + 1$$

2 - د پورت يا افقي تانجنت ځايونه:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{-\frac{3}{2}x^2 + x + \frac{5}{2}}_{\text{quadratische Gleichung}} = 0 \,\Big|\cdot\left(-\frac{2}{3}\right) \Leftrightarrow x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{5}{3} = 0$$

$$p = -\frac{2}{3} \quad q = -\frac{5}{3} \quad D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \frac{1}{9} + \frac{5}{3} = \frac{1}{9} + \frac{15}{9} = \frac{16}{9}$$

$$\Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{\frac{16}{9}} = \frac{4}{3} \Rightarrow x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left| \begin{array}{l} x_1 = \frac{1}{3} + \frac{4}{3} = \frac{5}{3} \\ x_2 = \frac{1}{3} - \frac{4}{3} = -1 \end{array} \right.$$

3 - ازمايينت، چې ايا يو انحرافي ټکی مخ ته لرو:

$$f''(x_1) = f''\left(\frac{5}{3}\right) = -3\cdot\frac{5}{3} + 1 = -4 < 0 \Rightarrow \text{rel. Max. bei } x_1 = \frac{5}{3}$$

$$f''(x_2) = f''(-1) = -3\cdot(-1) + 1 = 4 > 0 \Rightarrow \text{rel. Min. bei } x_2 = -1$$

4 - د انحرافي ارزښتونو شميرنه

$$f(x_1) = f\left(\frac{5}{3}\right) = -\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{5}{3}\right)^3 + \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{5}{3}\right)^2 + \frac{5}{2}\cdot\left(\frac{5}{3}\right) + \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{125}{27} + \frac{1}{2}\cdot\frac{25}{9} + \frac{25}{6} + \frac{3}{2}$$

$$= -\frac{125}{54} + \frac{75}{54} + \frac{225}{54} + \frac{81}{54} = \frac{256}{54} = \frac{128}{27}$$

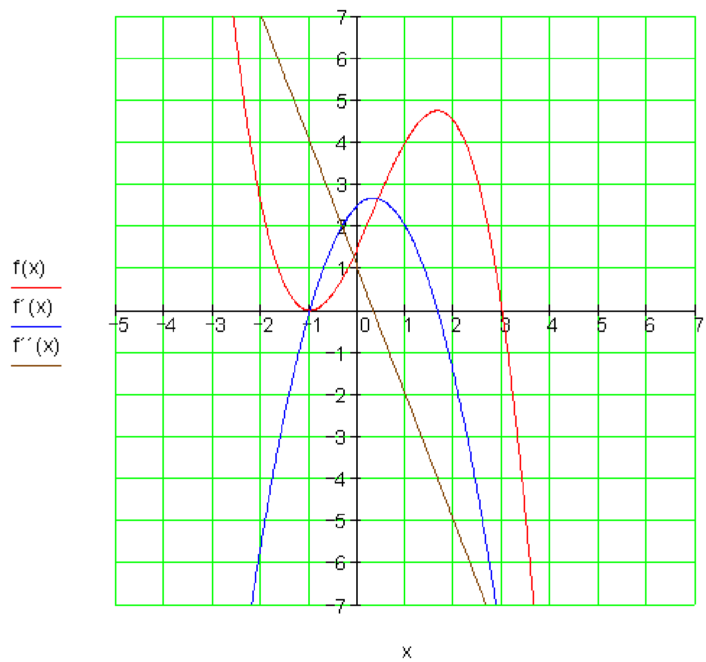
$$f(x_2)=f(-1)=-\frac{1}{2}\cdot(-1)^3+\frac{1}{2}\cdot(-1)^2+\frac{5}{2}\cdot(-1)+\frac{3}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{5}{2}+\frac{3}{2}=0$$

5 – انحرافي ټکي

$$\underline{\underline{P_{Min}(-1|\,0)}} \qquad \underline{\underline{P_{Max}\left(\frac{5}{3}\approx 1{,}67\;\middle|\;\frac{128}{27}\approx 4{,}74\right)}}$$

ګرافونه

$$f(x)=-\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{2}x+\frac{3}{2} \qquad f'(x)=-\frac{3}{2}x^2+x+\frac{5}{2} \qquad f''(x)=-3x+1$$



پنځم:

1 – تابع مساوات د مشتق سره

$$f(x)=\frac{1}{9}x^3-\frac{1}{3}x^2-\frac{8}{3}x+\frac{26}{9} \qquad f'(x)=\frac{1}{3}x^2-\frac{2}{3}x-\frac{8}{3} \qquad f''(x)=\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}$$

2 - د پروت يا افقي تانجنت ځايونه:

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \underbrace{\frac{1}{3}x^2-\frac{2}{3}x-\frac{8}{3}}_{\text{quadratische Gleichung}}=0|\cdot 3 \Leftrightarrow x^2-2x-8=0$$

$$p=-2 \quad q=-8 \quad D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=1+8=9$$

$$\Rightarrow \sqrt{D}=\sqrt{9}=3 \Rightarrow x_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D} \;\left|\; \begin{array}{l} x_1=1+3=4 \\ x_2=1-3=-2 \end{array}\right.$$

3 - ازمايښت، چې ايا يو انحرافي ټکی مخ ته لرو:

$$f''(x_1)=f''(4)=\frac{2}{3}\cdot 4-\frac{2}{3}=\frac{6}{3}=2>0 \Rightarrow \text{rel. Min. bei } x_1=4$$

$$f''(x_2)=f''(-2)=\frac{2}{3}\cdot(-2)-\frac{2}{3}=-\frac{6}{3}=-2<0 \Rightarrow \text{rel. Max. bei } x_2=-2$$

4 - د انحرافي ارزښتونو شميرنه

$$f(x_1)=f(4)=\frac{1}{9}\cdot 4^3-\frac{1}{3}\cdot 4^2-\frac{8}{3}\cdot 4+\frac{26}{9}=\frac{1}{9}\cdot 64-\frac{1}{3}\cdot 16-\frac{32}{3}+\frac{26}{9}$$

$$=\frac{64}{9}-\frac{48}{9}-\frac{96}{9}+\frac{26}{9}=-\frac{54}{9}=-6$$

$$f(x_2)=f(-2)=\frac{1}{9}\cdot(-2)^3-\frac{1}{3}\cdot(-2)^2-\frac{8}{3}\cdot(-2)+\frac{26}{9}=\frac{1}{9}\cdot(-8)-\frac{1}{3}\cdot 4+\frac{16}{3}+\frac{26}{9}$$

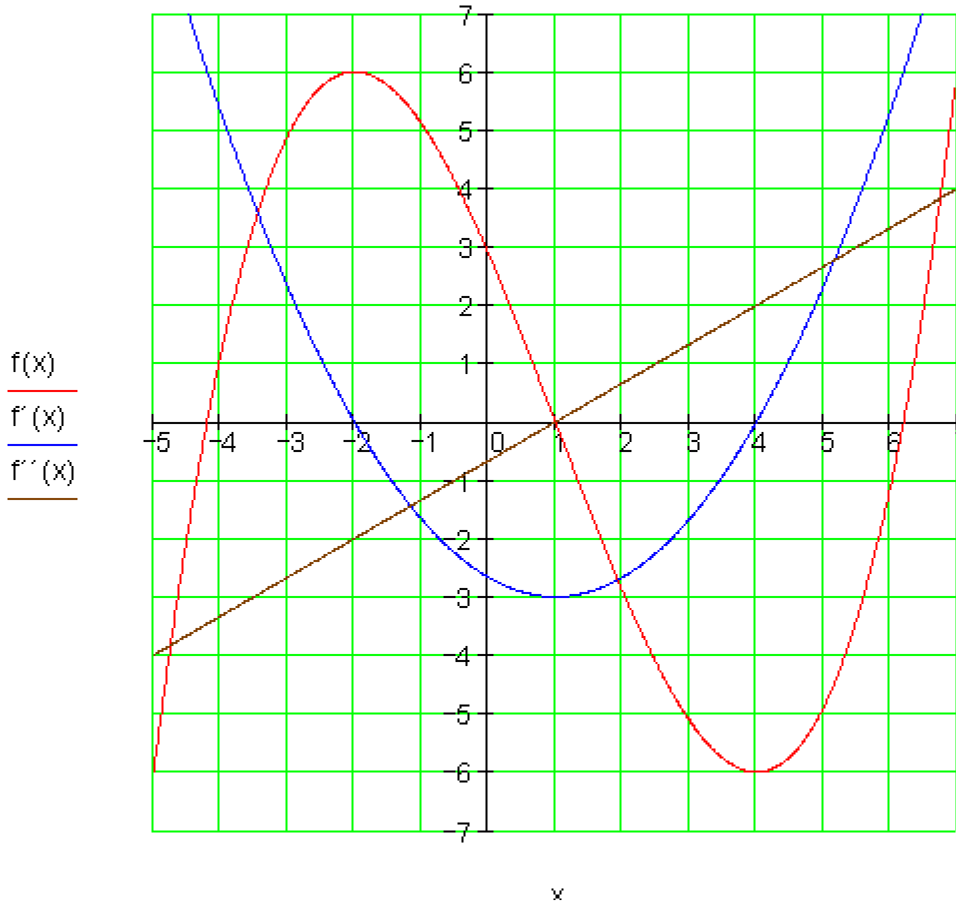
$$=-\frac{8}{9}-\frac{12}{9}+\frac{48}{9}+\frac{26}{9}=\frac{54}{9}=6$$

5 - افراطي ټکي

$$\underline{\underline{P_{Min}(4|-6)}} \qquad \underline{\underline{P_{Max}(-2|6)}}$$

گرافونه

$$f(x)=\frac{1}{9}x^3-\frac{1}{3}x^2-\frac{8}{3}x+\frac{26}{9}\qquad f'(x)=\frac{1}{3}x^2-\frac{2}{3}x-\frac{8}{3}\qquad f''(x)=\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}$$



شيپږم:

1 – تابع مساوات د مشتق سره

$$f(x)=\frac{2}{5}x^3-\frac{22}{5}x^2+14x-10\qquad f'(x)=\frac{6}{5}x^2-\frac{44}{5}x+14\qquad f''(x)=\frac{12}{5}x-\frac{44}{5}$$

2 - د پورت يا افقي تانجنت ځايونه:

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \underbrace{\frac{6}{5}x^2-\frac{44}{5}x+14=0}_{\text{quadratische Gleichung}} \Big| \cdot \frac{5}{6} \Leftrightarrow x^2-\frac{22}{3}x+\frac{35}{3}=0$$

$$p=-\frac{22}{3} \quad q=\frac{35}{3} \quad D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=\frac{121}{9}-\frac{35}{3}=\frac{121}{9}-\frac{105}{9}=\frac{16}{9}$$

$$\Rightarrow \sqrt{D}=\sqrt{\frac{16}{9}}=\frac{4}{3} \Rightarrow x_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D} \left| \begin{array}{l} x_1=\frac{11}{3}+\frac{4}{3}=\frac{15}{3}=5 \\ x_2=\frac{11}{3}-\frac{4}{3}=\frac{7}{3} \end{array} \right.$$

3 - ازماینښت، چې ایا یو انحرافي ټکی مخ ته لرو:

$$f''(x_1)=f''(5)=\frac{12}{5}\cdot 5-\frac{44}{5}=\frac{16}{5}>0 \Rightarrow$$

د $x_1=5$ په ځای کې نسبي مینیموم

$$f''(x_2)=f''\left(\frac{7}{3}\right)=\frac{12}{5}\cdot\frac{7}{3}-\frac{44}{5}=\frac{28}{5}-\frac{44}{5}=-\frac{16}{5}<0 \Rightarrow$$

د $x_2=\frac{7}{3}$ په ځای کې نسبئ مینیموم

4 - د انحرافي ارزښتونو شمیرنه

$$f(x_1)=f(5)=\frac{2}{5}\cdot 5^3-\frac{22}{5}\cdot 5^2+14\cdot 5-10=50-110+70-10=0$$

$$f(x_2)=f\left(\frac{7}{3}\right)=\frac{2}{5}\cdot\left(\frac{7}{3}\right)^3-\frac{22}{5}\cdot\left(\frac{7}{3}\right)^2+14\cdot\frac{7}{3}-10=\frac{2}{5}\cdot\frac{343}{27}-\frac{22}{5}\cdot\frac{49}{9}+\frac{98}{3}-10$$

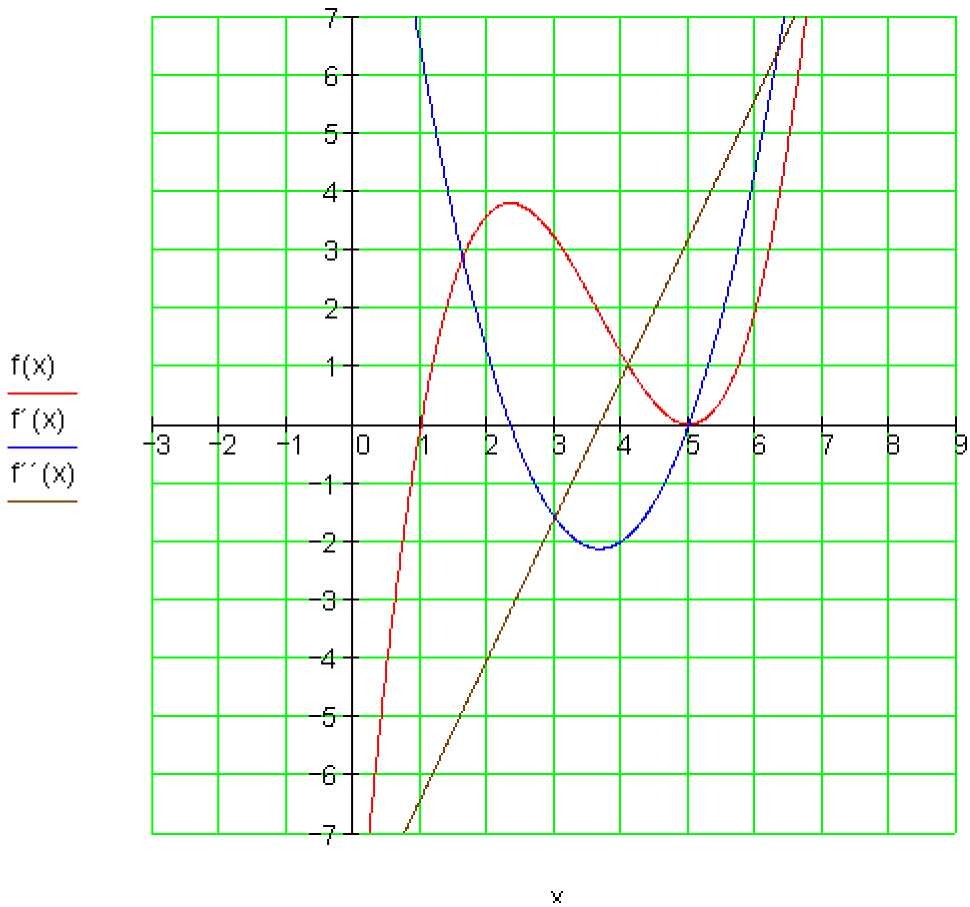
$$=\frac{686}{135}-\frac{3234}{135}+\frac{4410}{135}-\frac{1350}{135}=\frac{512}{135}$$

5 - انحرافي ټکي

$$P_{Min}(5|0) \qquad P_{Max}\left(\frac{7}{3}\approx 2{,}33 \,\middle|\, \frac{512}{135}\approx 3{,}79\right)$$

گرافونه:

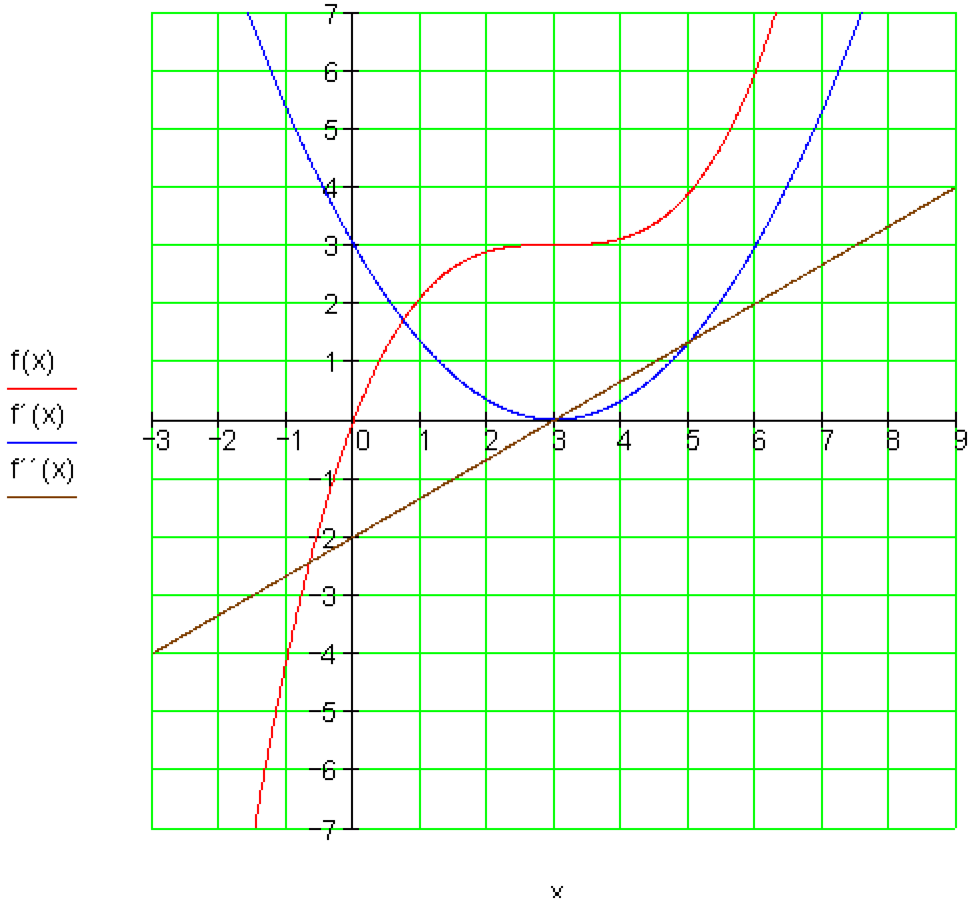
$$f(x)=\frac{2}{5}x^3-\frac{22}{5}x^2+14x-10 \qquad f'(x)=\frac{6}{5}x^2-\frac{44}{5}x+14 \qquad f''(x)=\frac{12}{5}x-\frac{44}{5}$$



اووم: شمیرنه:

1 – تابع مساوات د مشتق سره

$$f(x)=\frac{1}{9}x^3-x^2+3x \qquad f'(x)=\frac{1}{3}x^2-2x+3 \qquad f''(x)=\frac{2}{3}x-2$$



2 - د پروت يا افقي تانجنت ځايونه:

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \underbrace{\frac{1}{3}x^2-2x+3}_{\text{quadratische Gleichung}}=0|\cdot 3 \Leftrightarrow x^2-6x+9=0$$

$$p=-6 \quad q=9 \quad D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=9-9=0$$

$$\Rightarrow \sqrt{D}=\sqrt{0}=0 \Rightarrow x_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D}\ \left|\begin{array}{l} x_1=3 \\ x_2=3 \end{array}\right.$$

د لومړي مشتق ډبل صفرځايونه په دې معنا دي، چې په دې ځايونو کې انحرافي ارزښتونه نه شته. ازمايښت به هم دا وښايي.

3 - ازمایښت، چې ایا یو انحرافي ټکی مخ ته لرو:

$$f''(x_{1/2}) = f''(3) = \frac{2}{3}\cdot 3 - 2 = 0 \Rightarrow$$

له دې لاس ته راځي، چې افراطي ټکي نه شته

ګرافونه: ګراف د تیر مخ په سر کې راوړل شویاو فرمول یې دا لاندې دی.

$$f(x) = \frac{1}{9}x^3 - x^2 + 3x \qquad f'(x) = \frac{1}{3}x^2 - 2x + 3 \qquad f''(x) = \frac{2}{3}x - 2$$

اتم: شمیرنه:

1 – تابع مساوات د مشتق سره

$$f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 4 \quad f'(x) = \frac{3}{4}x^2 - 3x \qquad f''(x) = \frac{3}{2}x - 3$$

2 - د پورت یا افقي تانجنت ځایونه:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \quad \underbrace{\frac{3}{4}x^2 - 3x} \quad = 0| \Leftrightarrow x\left(\frac{3}{4}x - 3\right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

مربع مساوات

$$\frac{3}{4}x - 3 = 0|+3 \Leftrightarrow \frac{3}{4}x = 3|\cdot\frac{4}{3} \Leftrightarrow x = 4 \Rightarrow x_2 = 4$$

3 - ازمایښت، چې ایا یو انحرافي اروښتونه مخ ته لرو:

$$f''(x_1) = f''(0) = \frac{3}{2}\cdot 0 - 3 = -3 < 0 \Rightarrow \text{rel. Max. bei } x_1 = 0$$

$$f''(x_2) = f''(4) = \frac{3}{2}\cdot 4 - 3 = 3 > 0 \Rightarrow \text{rel. Min. bei } x_2 = 4$$

4 - د انحرافي ارزښتونو شمیرنه

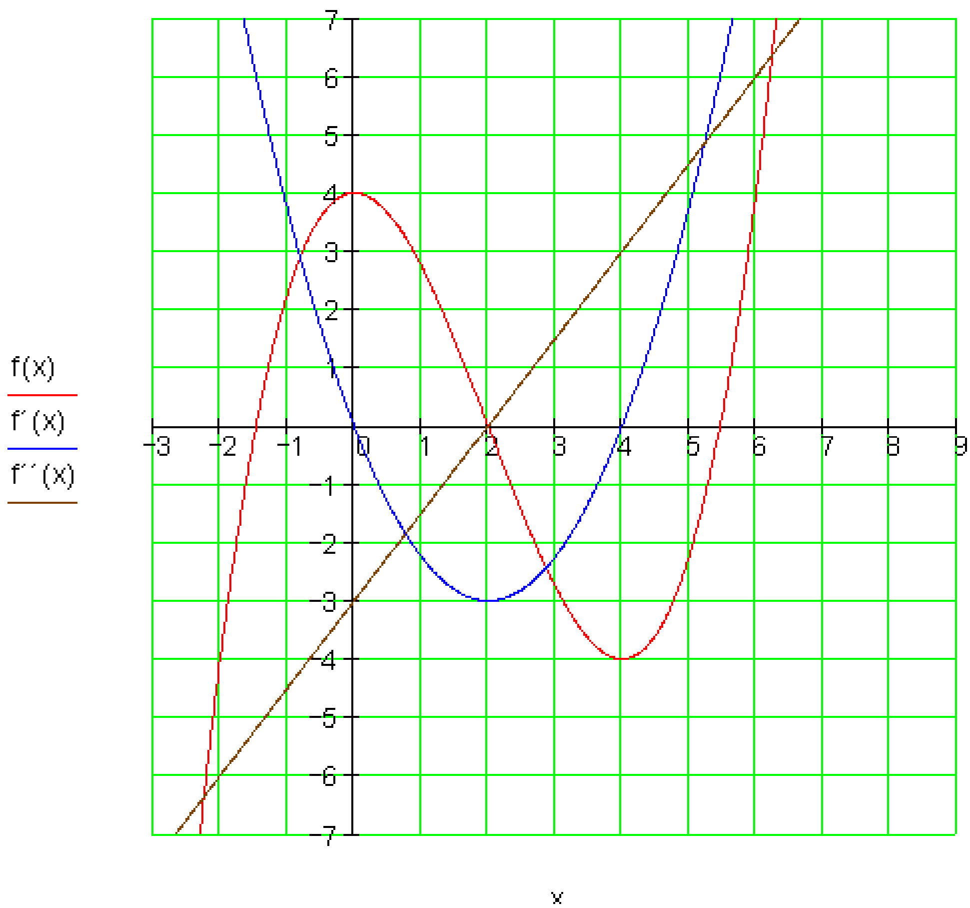
$$f(x_1) = f(0) = \frac{1}{4} \cdot 0^3 - \frac{3}{2} \cdot 0^2 + 4 = 4$$

$$f(x_2) = f(4) = \frac{1}{4} \cdot 4^3 - \frac{3}{2} \cdot 4^2 + 4 = 16 - 24 + 4 = -4$$

5 - انحرافي ټکي

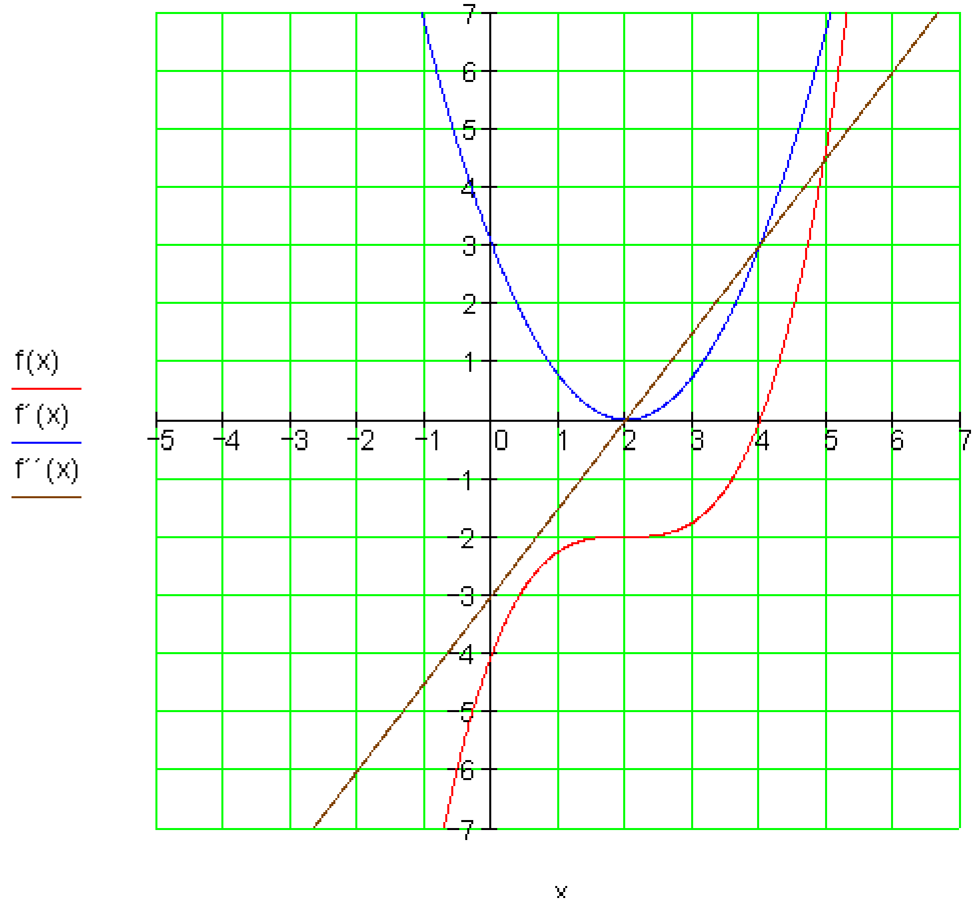
$\underline{\underline{P_{Max}(0|4)}}$ $\underline{\underline{P_{Min}(4|-4)}}$

گرافونه: $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 4$ $f'(x) = \frac{3}{4}x^2 - 3x$ $f''(x) = \frac{3}{2}x - 3$



نهم: شميرنه: 1 – تابع مساوات د مشتق سره

$$f(x)=\frac{1}{4}x^3-\frac{3}{2}x^2+3x-4 \qquad f'(x)=\frac{3}{4}x^2-3x+3 \qquad f''(x)=\frac{3}{2}x-3$$



2 - د پورت یا افقي تانجنت ځایونه:

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \underbrace{\frac{3}{4}x^2-3x+3}_{\text{quadratische Gleichung}}=0 \,\Big|\cdot\frac{4}{3} \Leftrightarrow x^2-4x+4=0$$

$$p=-4 \quad q=4 \quad D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=4-4=0$$

$$\Rightarrow \sqrt{D}=\sqrt{0}=0 \Rightarrow x_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D}\;\left|\begin{array}{l}x_1=2\\x_2=2\end{array}\right.$$

د لومړي مشتق دبل صفرځايونه په دې معنا دي، چې په دې ځايونو کې انحرافي ارزښتونه نه شته. ازمايښت به هم دا وښايي.

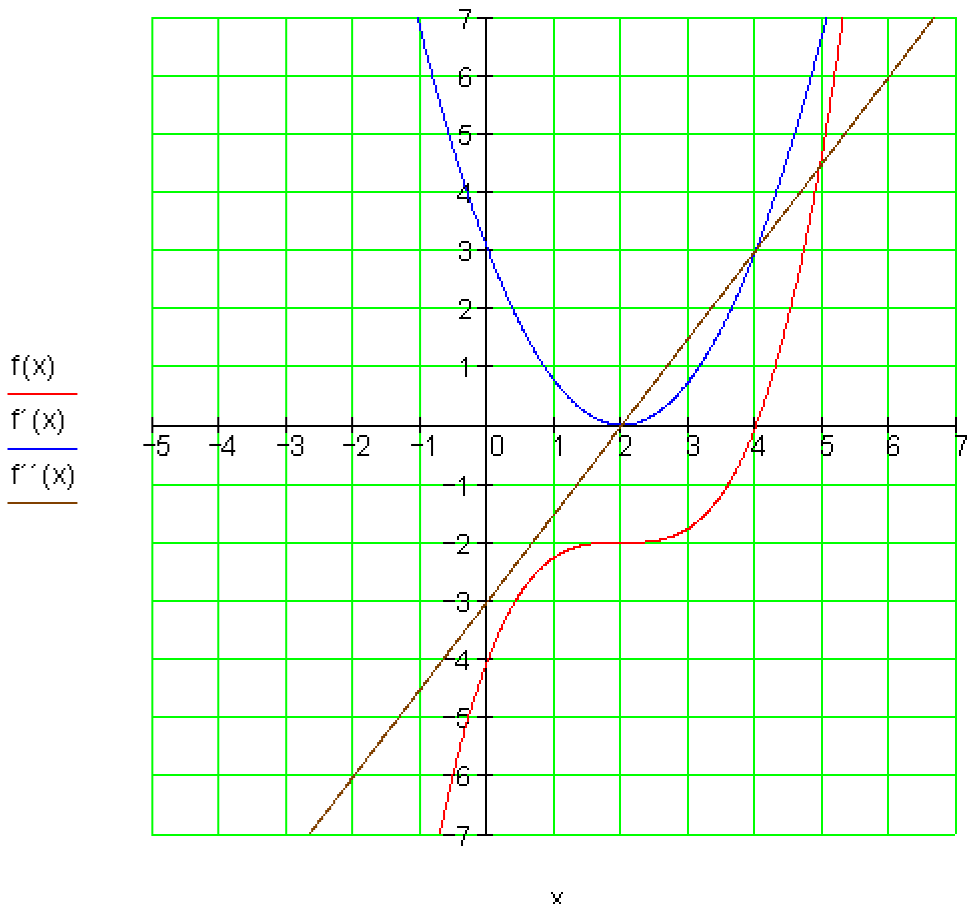
3 - ازمايښت، چې ايا انحرافي ارزښتونه مخ ته لرو:

$$f''(x_{1/2}) = f''(2) = \frac{3}{2} \cdot 2 - 3 = 0 \Rightarrow$$

له دې لاس ته راځي، چې انحرافي ارزښتونه په $x_{1/2} = 2$ کې نه شته.

ګرافونه: ګراف په پر مخ کې او فمول يې بيا هم دل لاندې:

$$f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 3x - 4 \qquad f'(x) = \frac{3}{4}x^2 - 3x + 3 \qquad f''(x) = \frac{3}{2}x - 3$$



لسم: شميرنه:

1 – تابع مساوات د مشتق سره

$$f(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2-2x-3 \quad f'(x)=x^2+2x-2 \quad f''(x)=2x+2$$

2 - د پورت يا افقي تانجنت ځايونه:

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \underbrace{x^2+2x-2}_{\text{quadratische Gleichung}}=0$$

$$p=2 \quad q=-2 \quad D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=1+2=3$$

$$\Rightarrow \sqrt{D}=\sqrt{3} \Rightarrow x_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D} \left| \begin{array}{l} x_1=-1+\sqrt{3} \\ x_2=-1-\sqrt{3} \end{array} \right.$$

3 - ازماينت، چې ايا يو انحرافي ټکی مخ ته لرو:

$$f''(x_1)=f''\left(-1+\sqrt{3}\right)=2\cdot\left(-1+\sqrt{3}\right)+2=-2+2\sqrt{3}+2=2\sqrt{3}>0$$

$$\Rightarrow \text{rel. Min. bei } x_1=-1+\sqrt{3}$$

$$f''(x_2)=f''\left(-1-\sqrt{3}\right)=2\cdot\left(-1-\sqrt{3}\right)+2=-2-2\sqrt{3}+2=-2\sqrt{3}<0$$

$$\Rightarrow \text{rel. Max. bei } x_2=-1-\sqrt{3}$$

4 - د انحرافي ارزښتونو شمېرنه

$$f(x_1)=f\left(-1+\sqrt{3}\right)=\frac{1}{3}\left(-1+\sqrt{3}\right)^3+\left(-1+\sqrt{3}\right)^2-2\left(-1+\sqrt{3}\right)-3\approx-3{,}797$$

$$f(x_2)=f\left(-1-\sqrt{3}\right)=\frac{1}{3}\left(-1-\sqrt{3}\right)^3+\left(-1-\sqrt{3}\right)^2-2\left(-1-\sqrt{3}\right)-3\approx 3{,}131$$

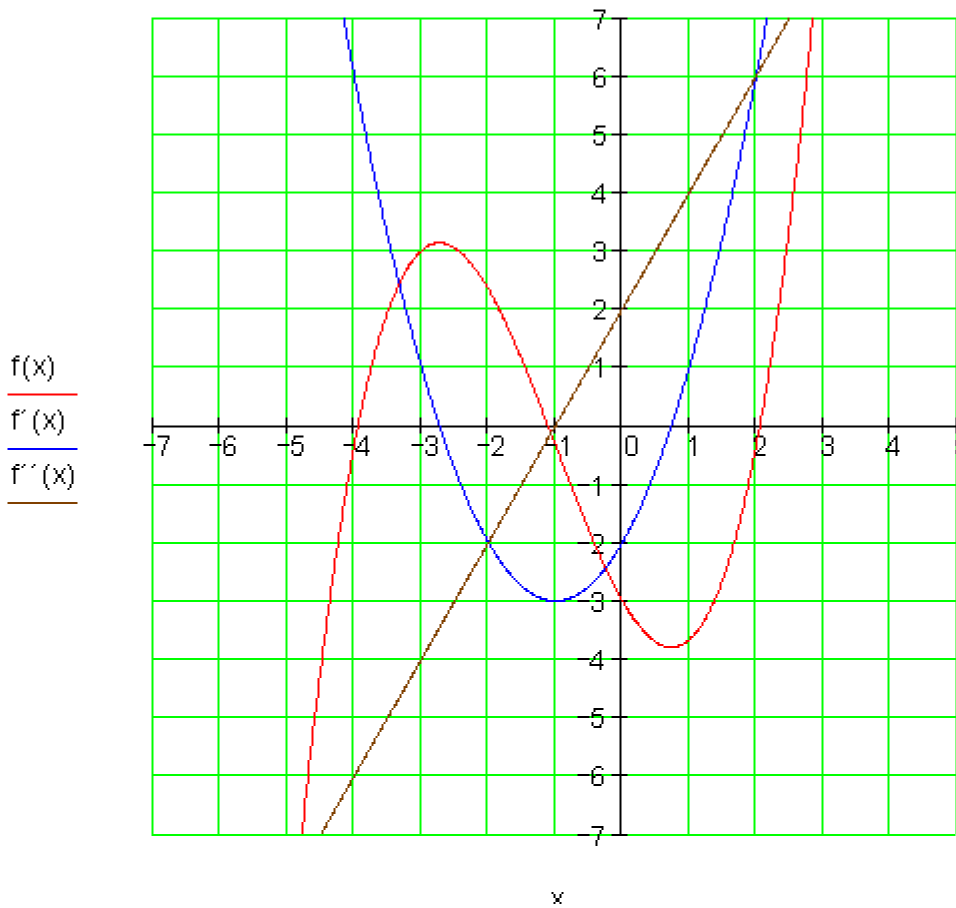
شميرنه د جبشميري سره سر ته رسيږي

5 - انحرافي تکي

$$P_{Min}\left(-1+\sqrt{3}\approx 0{,}732 \;\middle|\; -3{,}797\right) \qquad P_{Max}\left(-1-\sqrt{3} \;\middle|\; 3{,}131\right)$$

گرافونه:

$$f(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2-2x-3 \qquad f'(x)=x^2+2x-2 \qquad f''(x)=2x+2$$



پوښتنې

مشتقشمیرنه IX

لومړی:

د منحني ټکي د پراته تانجنت سره وشمېرى. ايا دا د منحني ټکي انحرافي ارزښتونه دئ؟ ستا پريکړه په دلايلو روښانه کړه.

الف – $f(x)=\frac{1}{8}x^3-\frac{3}{4}x$ ب - $f(x)=\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{2}x^2+4$ پ - $f(x)=-\frac{1}{4}x^4+x^3-2$

دويم: د تابع f(x) د ګراف انحرافي ټکي زشمېرئ. په يوه مناسب وضعيه قيمت سيستم کي يې ګراف وباسی.	$f(x)=\frac{1}{8}x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{9}{2}x$
دريم:a داسي وټاکی، چي تابع f(x) په x = 2 کي يو انحرافي ځاي ولرئ. دا کوم ډول انحرافي ځاي دی؟	$f(x)=-\frac{1}{12}x^3+ax^2+4$ د $x\in\mathbb{R}$ سره
څلورم: يو تابع f(x) ورکړشوی دی. a داسي وټاکی، چي د f(x) د ګراف افراطي ټکی د x -محور باندط پروت وي. ايا دا افراطي ټکی جګ - يا ټيټ ټکی دی؟	$f(x)=\frac{1}{8}x^4-x^3+a$

پنځم:

تابع f(x) دې انحرافي ارزښت ونه لري. د دې حالت لپاره دي ضريبونه کوم شرايطپورهکړي او f(x) څو صفرځايونه لري؟ ستاسو ځواب په دلايلو روښانه کړی؟	$f(x)=x^3+bx^2+cx+d$

شپږم:

تابع $f_a(x) = ax(x+3)^2$ ورکړشوې د $x \in \mathbb{R}$ او $a > 0.$ سره.

د خورا جګ اوخورا ټیټیکي ټرنکربنه د وضعیه قیمت سیسم محور سره مثلث جوړوي.
د مثلث سطحه د a په تابعیت سره پیداکړی. د دې د مخه یو شکل وباسی.

اووم: لاندې په انحرافي ارزښتزنو مطالعه کړی:

الف-

x	0,5	1	1,5	2	2,5
$f(x)$	1,6666	1,8333	1,75	1,6666	1,8333
$f'(x)$	0,75	0	−0,25	0	0,75

ب-

x	−3	−2	−1	0	1
$f(x)$	−0,149	−0,135	0,3678	3	13,591
$f'(x)$	−0,049	0,1353	1,1036	5	19,027

اتم: اتم - د دلاندې توابعو انحراف او انعطاف ټکو ارزښتونه وشمېری.

سربېره پردې د پوښتنو 6 ,5 ,4 ,1 او7 د محور غوځتکي (د تضاطع ټکي) وشمېری
او ګرافونه یې وکاږی.

الف - $f(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{4}x$ ب - $f(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 4$

پ - $f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + x^3 - 2$ ت - $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 8x + \frac{26}{3}$

ټ - $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^2$ ث - $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^3 + \frac{9}{4}x^2 + x - 3$

ج - $f(x)=\frac{1}{27}x^5-\frac{2}{3}x^3+3x$

حلونه

مشتقشميرنه IX

مفصل حلونه:

اول - مفصل حلونه:

الف – مشتق:

الف- $f(x)=\frac{1}{8}x^3-\frac{3}{4}x$ مشتق $f'(x)=\frac{3}{8}x^2-\frac{3}{4}$

پروت يا افقي تانجنت

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{3}{8}x^2-\frac{3}{4}=0\Rightarrow x_{1/2}=\pm\sqrt{2}$$

مشتق $f'(x)$د $x_{1/2}$ په ځای کې ساده صفرځايونه لري او مخنخبنه بدلوي. پس $f(x)$ دوه انحرافي ټکي لري.

ب - $f(x)=\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{2}x^2+4$ مشتق $: f'(x)=\frac{1}{2}x^2-x$

پروت يا افقي تانجنت: $f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{1}{2}x^2-x=0\Rightarrow x_1=0;\ x_2=2$

مشتق $f'(x)$د $x_{1/2}$ په ځای کې ساده صفرځايونه لري او مخنخبنه بدلوي. پس $f(x)$ دوه انحرافي ټکي لري

$f(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{4}x$ مشتق $f'(x) = \frac{3}{8}x^2 - \frac{3}{4}$

پروت (افقي) تانجنت:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{8}x^2 - \frac{3}{4} = 0 \Rightarrow x_{1/2} = \pm\sqrt{2}$$

مشتق $f'(x)$د $x_{1/2}$ سره ساده صفرځایونه لري او مخنخبنه بدلوي. پس $f(x)$ دوه انحرافي ارزښتوه لري.

ب -

مشتق: $f(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 4$

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^2 - x$$

پروت (افقي) تانجنت

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2 - x = 0 \Rightarrow x_1 = 0\,;\, x_2 = 2$$

مشتق $f'(x)$د $x_{1/2}$ سره ساده صفرځایونه لري او مخنخبنه بدلوي. پس $f(x)$ دوه افراطي ارزښتوه لري.

پ – $f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + x^3 - 2$ مشتق: $f'(x) = -x^3 + 3x^2$

پروت (افقي) تانجنت: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -x^3 + 3x^2 \Rightarrow x_{1/2} = 0\,;\, x_3 = 3$

مشتق $f'(x)$د $x_{1/2} = 0$ په ځای کې یو ډبل صفرځآی لري، دا په دې معنا چې د مخنخښې بدلېدنه شتون نه لري. پس $f(x)$ په دې ځای کې انحرافي ټکی نه لري. $x_3 = 3$

د f'(x) ساده صفرځای دی، هلته د مخنخښې بدلېدنه منځ ته راځي. نو f(x) په دې ځاي کې افراطي ټکی لري.

دویم - مفصل حلونه:

$$f(x)=\frac{1}{8}x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{9}{2}x$$
$$f'(x)=\frac{3}{8}x^2-3x+\frac{9}{2}$$
$$f''(x)=\frac{3}{4}x-3$$

د لوکال افراطي ټکو لپاره اړيين شرتونه:

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{3}{8}x^2-3x+\frac{9}{2}=0\,|\cdot\frac{8}{3}$$
$$\Leftrightarrow x^2-8x+12=0\Rightarrow p=-8\,;\,q=12\,;\,D=4\Rightarrow\boxed{x_1=6}\,;\,\boxed{x_2=2}$$
$$f''(x_1)=f''(6)=\frac{3}{2}\Rightarrow \text{rel Min}\quad f''(x_2)=f''(2)=-\frac{3}{2}\Rightarrow \text{rel Max}$$
$$\text{rel Min: } f(x_1)=f(6)=0\Rightarrow\boxed{P_{min}(6\,|\,0)}$$
$$\text{rel Max: } f(x_2)=f(2)=4\Rightarrow\boxed{P_{max}(2\,|\,4)}$$

یادونه: په پورته کې rel د relative لنډونه ده او د نسبي په معنا دی.

د ګراف د رسمولو لپاره نور ټکي هم اړيين دي

د y محور سره د تقاطع ټکی $\boxed{P_y(0\,|\,0)}$

صفرځایونه:

$$: f(x)=0\Leftrightarrow\frac{1}{8}x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{9}{2}x=0$$

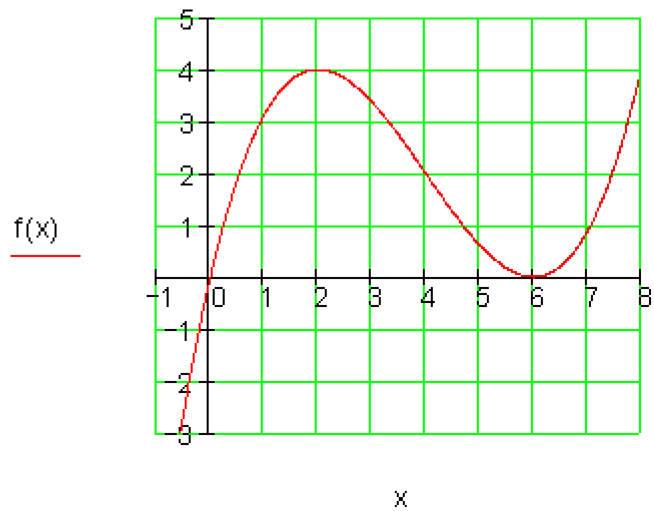
$$\Leftrightarrow x\left(\frac{1}{8}x^2-\frac{3}{2}x+\frac{9}{2}\right)=0 \Rightarrow x_1=0$$

$$\frac{1}{8}x^2-\frac{3}{2}x+\frac{9}{2}=0 \Rightarrow x_{2/3}=0$$

ډبل صفرځای

ارزښت جدول:

x	−1	0	1	2	3	4	5	6	7
f (x)	−6,125	0	3,125	4	3,375	2	0,615	0	0,875



دريم:

$$f(x)=-\frac{1}{12}x^3+ax^2+4; \qquad f'(x)=-\frac{1}{4}x^2+2a$$

پيل : په $x = 2$ کې افراطي ټکی په دې معنا دی چې:

$$f'(2)=0 \Leftrightarrow -\frac{1}{4}\cdot 2^2+2a\cdot 2=0 \Leftrightarrow \boxed{a=\frac{1}{4}}$$

او له $: f(x) = -\frac{1}{12}x^3 + \frac{1}{4}x^2 + 4$ سره همداسي $f'(x) = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x$

انحرافي ټکی: $: f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x = 0 \Rightarrow x_1 = 0$ همداسي x2 = 2

په x1 = 0 کې نسبي مین په x2=2 کې نسبي ماکس	$f''(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ $\Rightarrow f''(x_1) = f''(0) = \frac{1}{2} > 0 \Rightarrow$ re = $\Rightarrow f''(x_1) = f''(2) = -\frac{1}{2} < 0 \Rightarrow$

ځلورم:

$$f(x) = \frac{1}{8}x^4 - x^3 + a$$

د انحراف ټکی دې د x محور باندې پروت وي

دا په دې معنا چې : $f(x_E) = 0$

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 \qquad f''(x) = \frac{3}{2}x^2 - 6x$$

د پراته یا افقي تانجنت ځایونه

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2\left(\frac{1}{2}x - 3\right) = 0 \Rightarrow x_{1/2} = 0 \text{ und } x_3 = 6$$

د افراطي ځای شتون په هکله ازماینت

$f''(x_{1/2}) = f''(0) = 0$ لاس ته راځي، چې په $x_{1/2} = 0$ کې افراطي ځای نه شته

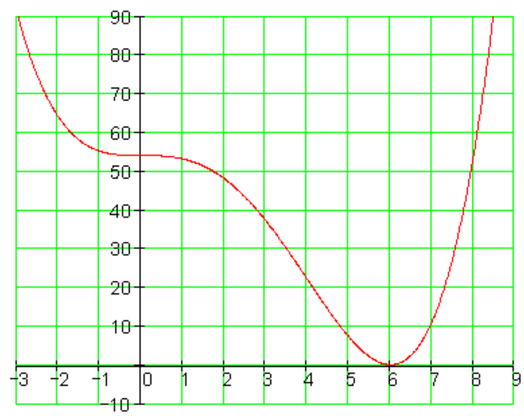
$$f''(x_3) = f''(6) = \frac{2}{3}\cdot 6^2 - 6\cdot 6 = 18 > 0 \Rightarrow \text{rel. Min bei } x_3 = 6$$

د a متحولې ټاکنه

$$f(6) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{8}\cdot 6^4 - 6^3 + a = 0 \Leftrightarrow \boxed{a = 54}$$

$f(x) = \frac{1}{8}x^4 - x^3 + 54$ د $x_E = 6$، په ځاې کې يو نسبي مينيموم لري

دا د x محور باندې پراته دي: $P_{Min}(6\,|\,0)$:



ځلورم:

$$f(x) = \frac{1}{8}x^4 - x^3 + a$$

افراطي ټکي بآید د x په محور پرآته وي،دآ په دې معنآ چې: $f(x_E)=0$:

$$f'(x)=\frac{1}{2}x^3-3x^2 \qquad f''(x)=\frac{3}{2}x^2-6x$$

د پرآته محور سره د تآنچنت ځآیونه

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^3-3x^2=0 \Leftrightarrow x^2\left(\frac{1}{2}x-3\right)=0 \Rightarrow x_{1/2}=0 \text{ und } x_3=6$$

د یوه آکسرېموم شتون آزمایینت : $f''(x_{1/2})=f''(0)=0$:

له دې لاس ته راځي، چې په $x_{1/2}=0$ کې افراطي ځایونه نه شته

د متحولېa ټآکنه:

$$f(6)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{8}\cdot 6^4-6^3+a=0 \Leftrightarrow \boxed{a=54}$$

$f(x)=\frac{1}{8}x^4-x^3+54$ د $x_E=6$ ځآی کې یو نسبي مینیموم لري.

دآ په x محور پروت دی: $P_{Min}(6|0)$:

پنځم:

$$f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$$

که د آنحرآف ټکي شتون ونه لري، بآید $f'(x) \neq 0$ بآور ولري:

یآ $f'(x) = 0$ د ډبل صفرځآي سره (لومړي مشتق بي له مخنخښې تغیر څخه)

$$f'(x) = 3x^2 + 2bx + c$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 2bx + c = 0 \Leftrightarrow \underbrace{x^2 + \frac{2}{3}bx + \frac{1}{3}c = 0}_{\text{quadratische Gleichung}}$$

$$p = \frac{2}{3}b\,;\ q = \frac{1}{3}c \Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \frac{1}{9}b^2 - \frac{1}{3}c$$

D<0 : مربع مسآوآت حل نه لرئ، که $\frac{1}{9}b^2 - \frac{1}{3}c < 0$ وي.

دآ په دې معنآ، چې f(x) په دې حآلت کې پروت یآ آفقي تآنجنت نه لري. دf(x) تابع ګراف له دریمې څلورمې یا ربعې څخه و لومړۍ څلورمې ته ځغلي.

تابع په کلکه همغږیز جګېدونکې د

D=0 : مربع مساوات ډبل صفرځای لري،ګه $(1/9)b^2 - (1/3)c = 0$ وي.

دا په دې معنا f(x)چې یو پروت تانجنت لري. مګر دا چې د f'(x) لپاره په دې ځاي کې د مخنخښې تغیر نه شته (ډبل صفرځای)، نو f(x) افراطي ځایونه نه لري.

داا چې د مخه پوهیږ. چې f(x)افراطي ټکی نه لري، نو f(x) ټیک یو صفرځاي لري.

پنځم:

که د آنحرآف ټکي شتون ونه لري، بآید0=|f'(x) بآور ولري:

یآ د ډبل صفرځآي سره (لومړي مشتق بي له مخنخښې تغیر څخه)

: مربع مسآوآت حل نه لرئ، که وي.

دآ په دې معنآ، چې په دې حآلت کې پروت یآ آفقي تآنجنت نه لري. د تابع ګراف له دریمې څلورمې یا ربعې څخه و لومړۍ څلورمې ته ځغلي.

تابع په کلکه همغږیز چګیدونکې ده

: مربع مساوات ډبل صفرځای لري،ګه وي.

دا په دې معنا چې یو پروت تانجنت لري. مګر دا چې د لپاره په دې ځاي کې د مخنخښې تغیر نه شته (ډبل صفرځای) انحرافي ځایونه نه لري.

داا چې د مخه پوهیږ چې انحرافي ټکی نه شته، تیک یو صفرځاي لري.

شپړم:

$$f(x) = ax(x+3)^2 = ax^3 + 6ax^2 + 9ax$$

$$f'(x) = 3ax^2 + 12ax + 9a \qquad f''(x) = 6ax + 12a$$

افراطي ټکي:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3ax^2 + 12ax + 9a = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 3 = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = -1 \text{ bzw. } x_2 = -3$$

$$f''(x_1) = f''(-1) = 6a\cdot(-1) + 12a = a(-6+12) > 0 \Rightarrow \text{rel. Min bei } x_1 = -1$$

$$f''(x_2) = f''(-3) = 6a\cdot(-3) + 12a = (-18+12) < 0 \Rightarrow \text{rel. Max bei } x_2 = -3$$

$$P_{Max} : f(-3) = a\cdot(-3)(-3+3)^2 = 0 \Rightarrow \boxed{P_{Max}(-3\,|\,0)}$$

$$P_{Min} : f(-1) = a\cdot(-1)(-1+3)^2 = -4a \Rightarrow \boxed{P_{Min}(-1\,|\,-4a)}$$

کربنیز مساوات د $P_{Max}(-3\,|\,0)$ او $P_{Min}(-1\,|\,-4a)$ سره.

$$a_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-4a - 0}{-1-(-3)} = \frac{-4a}{2} = -2a \Rightarrow g(x) = -2ax + a_0$$

د $P_{Max}(-3\,|\,0)$ سره ټکي ازماینت

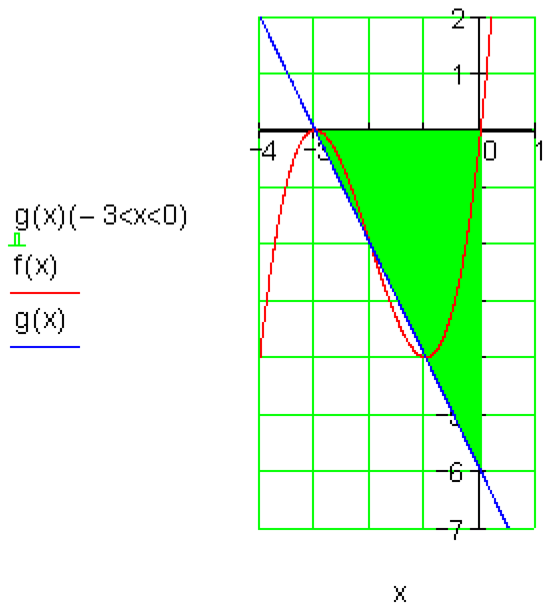
$$g(-3) = 0 \Leftrightarrow -2a\cdot(-3) + a_0 = 0 \Leftrightarrow a_0 = -6a \Rightarrow \boxed{g(x) = -2ax - 6a}$$

د محور سره غوڅتکي $g(x)$ او $P_y(0|-6a)$ und $P_x(-3|0)$ دي.

د درېکودي یا مثلث سطحه: $A = \frac{g \cdot h}{2} = \frac{3 \cdot 6a}{2} = \boxed{9a}$

(د مطلقه ارزښتونو سره کیدی شي وشمیرل شي):

<table>
<tr>
<td>



</td>
<td>

د$a=1$ لپاره ګرافیکي انځورونه.

کرښه د x محور د $P_x(-3|0)$ په ټکي کې غوڅوي او د y محور د $P_y(0|-6)$ په ټکي کې.

د سطحې شمیرنه د مطلقه ارزښتونو سره کیږي، ځکه چې سطحه تل مثبت ده.

A=g.h/2

د g=3 او h=6 لرو

$A = \frac{3 \cdot 6}{2} = 9\ FE$

په پورته کې FE د سطحې یوون یا واحد په معنا دی.

</td>
</tr>
</table>

اووم: الف –

x	0,5	1	1,5	2	2,5
f (x)	1,6666	1,8333	1,75	1,6666	1,8333
f '(x)	0,75	0	−0,25	0	0,75

دوه انحرافي ټکي شتون لري:

په x = 1 کې د مخنښي بدلون لرو د f'(x) لپاره د $\boxed{+}\to\boxed{-}\Rightarrow \text{rel. Max.}$ د دې لاس ته راځي نسبي ماکسيموم

په x=2 کې د f'(x) لپاره د مخنښي بدلون مخ ته لرو له $\boxed{-}\to\boxed{+}\Rightarrow \text{rel. Min.}$ ز له دې لاس ته راځي نسبي مينيموم

ب –

x	−3	−2	−1	0	1
f (x)	−0,149	−0,135	0,3678	3	13,591
f '(x)	−0,049	0,1353	1,1036	5	19,027

په انتروال [-3;-2] کې يو نسبي مينيموم پروت دی

f'(x) يو د مخنښي تغير لري له منفي و مثبت ته يعني $\boxed{-}\to\boxed{+}$

اتم:

الف – انحرافي ټکي

تابع : $f(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{4}x$

لومړی مشتق: $f'(x) = \frac{3}{8}x^2 - \frac{3}{4}$

دويم مشتق :: $f''(x) = \frac{3}{4}x$

دريم مشتق:ـ $f'''(x) = \frac{3}{4}$

د پراته تانجنت سره ځايونه

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{8}x^2 - \frac{3}{4} = 0 \Rightarrow x_{1/2} = \pm\sqrt{2}$$

ازمايښت چې ايا يو انحرافي ځاى مخ ته لرو.

$$f''(x_1) = f''\left(\sqrt{2}\right) = \frac{3}{4}\cdot\sqrt{2} \approx 1{,}016 > 0 \Rightarrow \text{rel. Min. bei } x_1 = \sqrt{2}$$

$$f''(x_2) = f''\left(-\sqrt{2}\right) = -\frac{3}{4}\cdot\sqrt{2} \approx -1{,}016 < 0 \Rightarrow \text{rel. Max. bei } x_2 = -\sqrt{2}$$

د افراطي ارزښتون شميرنه:

$$f(x_1) = f\left(\sqrt{2}\right) = -\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2} \approx -0{,}707\,;\; f(x_2) = f\left(-\sqrt{2}\right) = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2} \approx 0{,}707$$

فراطي ټکي:

$$P_{Min}\left(\sqrt{2} \approx 1{,}414 \,\middle|\, -\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2} \approx -0{,}707\right) \qquad P_{Max}\left(-\sqrt{2} \approx -1{,}414 \,\middle|\, \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2} \approx 0{,}707\right)$$

د انعطاف ټکی يا اوړونټکی

$$f(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{4}x \qquad f'(x) = \frac{3}{8}x^2 - \frac{3}{4} \qquad f''(x) = \frac{3}{4}x \qquad f'''(x) = \frac{3}{4}$$

د انعطافټکي لپاره اړيين شرطونه:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{4}x = 0 \Rightarrow x_w = 0$$

د انعطاف ټکي ازمايښت

$$f'''(x_w) = \frac{3}{4} \neq 0 \Rightarrow$$

يا له دې لاس ته راځ: په $x = x_w = 0$ كي د انعطاف ځاى

د انعطاف ټکي وضعیه قیمتونه (کواوردیناتونه یا پروت ولاړ محورونه)

$$y_w = f(x_w) = f(0) = 0 \Rightarrow P_w(0|0)$$

د $f(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{4}x$ تابع محورغوڅټکي (د محور تقاطع نقاط)

د y محور سره غوڅټکي: $P_y(0|0)$

صفرځایونه:

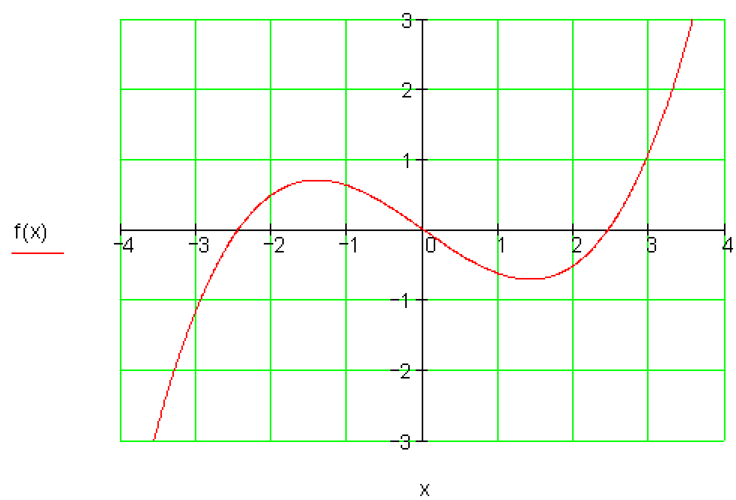
$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{4}x = 0$$

$$\Leftrightarrow x\left(\frac{1}{8}x^2 - \frac{3}{4}\right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

$$\frac{1}{8}x^2 - \frac{3}{4} = 0 | + \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{8}x^2 = \frac{3}{4} | \cdot 8$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 6 \Rightarrow x_2 = -\sqrt{6} \qquad x_3 = \sqrt{6}$$



د x محور سره غوڅټکي:

$$\underline{\underline{P_{x1}(0|0)}} \qquad \underline{\underline{P_{x2}\left(-\sqrt{6}\approx -2{,}449|0\right)}} \qquad \underline{\underline{P_{x2}\left(\sqrt{6}\approx 2{,}449|0\right)}}$$

ب –
انحراف ټکي

تابع : $f(x)=\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{2}x^2+4$

لومړی مشتق: $f'(x)=\frac{1}{2}x^2-x$

دویم مشتق: $f''(x)=x-1$

د پروت افقي تانجنت ځایونه:

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2-x=0 \Rightarrow x_1=0; x_2=2$$

ازمایښت، چې ایا انحراف ارزښتونه مخ ته لرو:

$$f''(x_1)=f''(0)=-1<0 \Rightarrow \text{rel. Max. bei } x_1=0$$
$$f''(x_2)=f''(2)=1>0 \Rightarrow \text{rel. Min. bei } x_2=2$$

د انحرافي ټکو شمیرنه

$$f(x_1)=f(0)=4 \qquad f(x_2)=f(2)=\frac{10}{3}$$

انحرافي ټکي

$$\underline{\underline{P_{Max}(0|4) \qquad P_{Min}\left(2|\frac{10}{3}\approx 3{,}333\right)}}$$

د انعطاف – یا اوړونټکی

$$f(x)=\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{2}x^2+4 \qquad f'(x)=\frac{1}{2}x^2-x \qquad f''(x)=x-1 \qquad f'''(x)=1$$

د اوړنټکي یا انعطآفټکي لپاره اړیین شرایط:

$$f''(x)=0 \Leftrightarrow x-1=0 \Rightarrow x_w=1$$

د انعطافټکي ازمایښت

$$f'''(x_w)=f'''(1)=1\neq 0 \Rightarrow$$

یا له دې لاس ته راځي: په $x=x_w=1$ د انعطاف ټکي

د انعطاف- یا اوړون ټکي وضعیه قیمتونه(پراته لاړ ارزښتونه) یا کواودیناتونه

$$y_w=f(x_w)=f(1)=\frac{1}{6}-\frac{1}{2}+4=\frac{22}{6}=3,\bar{6} \Rightarrow \underline{\underline{P_w\left(1\left|\,\frac{22}{6}=3,\bar{6}\right.\right)}}$$

د $f(x)=\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{2}x^2+4$ محور غوښتکي:

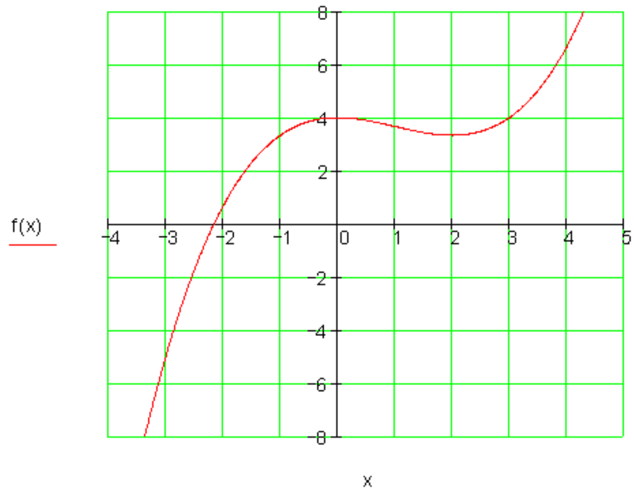
د y - محور سره غوښتکی: $P_y(0\,|\,4)$

صفرځایونه

$x_1\approx -2,175$ نومریکي پیدا شوی

د x - محور سره غوښتکی.

$$\underline{\underline{P_{x1}(x_1\approx -2,175\,|\,0)}}$$



پ – افراطي تکي

تابع: $f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + x^3 - 2$

لومړی مشتق: $f'(x) = -x^3 + 3x^2$

دويم مشتق: $f''(x) = -3x^2 + 6x$

د پروت محور سره ځايونه.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -x^3 + 3x^2 = 0 \Rightarrow x_{1/2} = 0; x_3 = 3$$

ازمايښت چې ايا يو افراطي ارزښت مو مخ ته پروت دی:

په x1=0 کې افراطي ارزښت نه شته	$f''(x_1) = f''(0) = 0 \Rightarrow$
په x2=0 کې نسبي مکسيموم	$f''(x_2) = f''(0) = 0 \Rightarrow$
په x3=3 د افراطي تکو شميرنه	$f''(x_3) = f''(3) = -9 < 0 \Rightarrow$

$$f(x_1) = f(0) = -2 \qquad f(x_2) = f(0) = -2 \qquad f(x_3) = f(3) = \frac{19}{4}$$

افراطي ټکي :

$$\underline{\underline{P_{Max}\left(3 \middle| \frac{19}{4} = 4{,}75\right)}}$$

اوړونټکی یا د انعطاف ټکی

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + x^3 - 2$$

$$f'(x) = -x^3 + 3x^2 \qquad f''(x) = -3x^2 + 6x \qquad f'''(x) = -6x + 6$$

د انعطافټکو لپاره اړیین شرایط

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 6x = 0$$
$$\Leftrightarrow x(-3x+6) = 0 \Rightarrow x_{w1} = 0$$
$$-3x + 6 = 0 \Rightarrow x_{w2} = 2$$

د انعطافټکو ازمایښت

$$f'''(x_{w1}) = f'''(0) = 6 \neq 0 \Rightarrow$$

له دې لاس ته راځي چې په $x = x_{w1} = 0$ کې د انعطاف ټکي

$$f'''(x_{w2}) = f'''(2) = -6 \neq 0 \Rightarrow$$

له دې لاس ته راځي چې په $x = x_{w2} = 2$ کې انعطاف ټکي:

د انعطافټکو وضعیه قیمتونه

$$y_{w1} = f(x_{w1}) = f(0) = -2$$

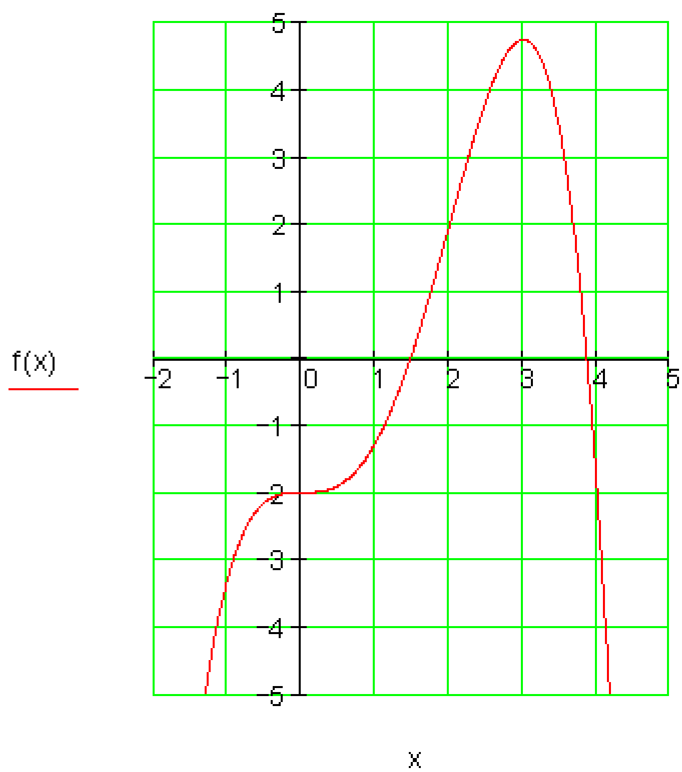
$$y_{w2} = f(x_{w2}) = f(2) = -\frac{1}{4} \cdot 2^4 + 2^3 - 2 = -4 + 8 - 2 = 2$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{P_{w1}(0|-2)}} \qquad \underline{\underline{P_{w2}(2|2)}}$$

د $f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + x^3 - 2$ تابع محور غوڅتکي

دy محور سره غوڅتکی: $P_y(0|-2)$

صفرځایونه: $x_1 \approx 1{,}467 \qquad x_2 \approx 3{,}861$



نومریکي پیداشوی

د x محور سره غوځتکي: $P_{x1}(x_1 \approx 1,467 \mid 0)$ $P_{x2}(x_2 \approx 3,861 \mid 0)$

ت – افراطي ټکي

تابع: $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 8x + \frac{26}{3}$

لومړی مشتق : $f'(x) = x^2 - 2x - 8$

دويم مشتق: $f''(x) = 2x - 2$

د پروت یا افقي محور سره غوځتکي

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 8 = 0 \Rightarrow x_1 = -2; x_2 = 4$$

ازمايښت چې ايا يو امحرافي ټکی م مخ تخ پروت دی

$$f''(x_1) = f''(-2) = -6 < 0 \Rightarrow \text{rel. Max. bei } x_1 = -2$$
$$f''(x_2) = f''(4) = 6 > 0 \Rightarrow \text{rel. Min. bei } x_2 = 4$$

د افراطي ا رزښتون شمېرنه

$$f(x_1) = f(-2) = 18 \qquad f(x_2) = f(4) = -18$$

اافراطي ټکي: $P_{Max}(-2 \mid 18)$ $P_{Min}(4 \mid -18)$

ت - انعطافټکی

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 8x + \frac{26}{3}$$
$$f'(x) = x^2 - 2x - 8 \qquad f''(x) = 2x - 2 \qquad f'''(x) = 2$$

د انغطافټکو لپاره اړيين شرطونه:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 2 = 0 \Rightarrow x_w = 1$$

د اوړونټکو يا انعطاف ټکو په هکله ازمايښت

$$f'''(x_w) = f'''(1) = 2 \neq 0 \Rightarrow$$

په $x = x_w = 1$ کې د انعطاف ځايونه

د اعطافټکي وضعيه قيمتونه:

$$y_w = f(x_w) = f(1) = \frac{1}{3} - 1 - 8 + \frac{26}{3} = 0$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{P_w(1|0)}}$$

د $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 8x + \frac{26}{3}$ محور غوښتکي

د y - محور سره غوښتکی: $\underline{P_y\left(0 \,\middle|\, \frac{26}{3} = 8,\bar{6}\right)}$

صفرځايونه: $f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 8x + \frac{26}{3} = 0$

هورنر :

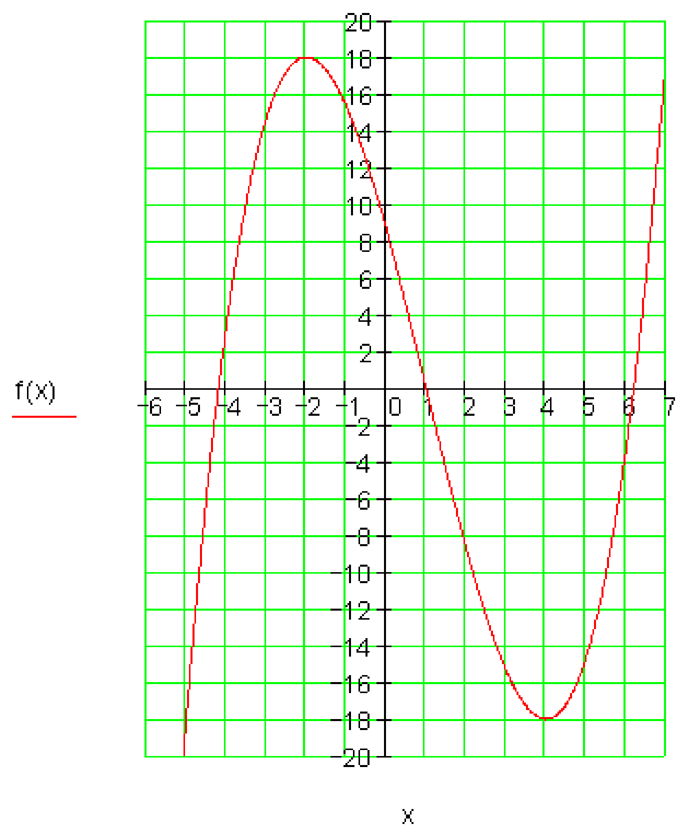
$$\begin{array}{cccccc} & \frac{1}{3} & -1 & -8 & \frac{26}{3} & \\ x = 1 & \downarrow & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{26}{3} & \\ & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{26}{3} & 0 & f(1) = 0 \Rightarrow \quad x_1 = 1 \end{array}$$

پاتې يا باقي پولينوم:

$$\frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{26}{3} = 0 | \cdot 3$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 26 = 0$$

$$p = -2 \qquad q = -26 \qquad \Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 1 + 26 = 27$$

$$x_{2/3} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \qquad \begin{aligned} x_2 &= 1 + \sqrt{27} \approx 6{,}196 \\ x_3 &= 1 - \sqrt{27} \approx -4{,}196 \end{aligned}$$



د x - محور سره غوځتکی

$$\underline{\underline{P_{x1}(1|0)}} \qquad \underline{\underline{P_{x2}\left(1+\sqrt{27}\approx 6{,}196\,|\,0\right)}} \qquad \underline{\underline{P_{x3}\left(1-\sqrt{27}\approx -4{,}196\,|\,0\right)}}$$

افراطي ټکي

تابع : $f(x)=\frac{1}{4}x^4-x^2$

لومړی مشتق : $f'(x)=x^3-2x$

دويم مشتق: $f''(x)=3x^2-2$

ځايونه د پراته محور سره:

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow x^3-2x=0 \Rightarrow x_1=0; x_{2/3}=\pm\sqrt{2}$$

ازمايښت چې ايا يو انحرافي ټکی مو مخ ته پروت دی.

$$f''(x_1)=f''(0)=-2<0 \Rightarrow \text{rel. Max. bei } x_1=0$$
$$f''(x_2)=f''\left(\sqrt{2}\right)=4>0 \Rightarrow \text{rel. Min. bei } x_2=\sqrt{2}$$
$$f''(x_3)=f''\left(-\sqrt{2}\right)=4>0 \Rightarrow \text{rel. Min. bei } x_3=-\sqrt{2}$$

د افراطي ارزښتونو شمېرنه :

$$f(x_1)=f(0)=0 \qquad f(x_2)=f\left(\sqrt{2}\right)=-1 \qquad f(x_3)=f\left(-\sqrt{2}\right)=-1$$

انحرافي ټکي:

$$\underline{\underline{P_{Max}(0|0) \qquad P_{Min1}\left(\sqrt{2}\approx 1{,}414|-1\right) \qquad P_{Min2}\left(-\sqrt{2}\approx -1{,}414|-1\right)}}$$

د انعطاف- يا اوړونټکي:

$$f(x)=\frac{1}{4}x^4-x^2 \qquad f'(x)=x^3-2x \qquad f''(x)=3x^2-2 \qquad f'''(x)=6x$$

د انعطاف ټکي لپاره اړيين شرطونه:

$$\begin{aligned} f''(x)=0 &\Leftrightarrow 3x^2-2=0|+2 \\ &\Leftrightarrow 3x^2=2|:3 \\ &\Leftrightarrow x^2=\frac{2}{3}|\sqrt{\ } \\ &\Leftrightarrow |x|=\sqrt{\frac{2}{3}} \Rightarrow x_{w1}=\sqrt{\frac{2}{3}} \qquad x_{w2}=-\sqrt{\frac{2}{3}} \end{aligned}$$

د انعطاع ټکو ازمايښت

$$f'''(x_{w1})=f'''\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)=6\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}\neq 0 \Rightarrow \text{Wendestelle bei } x=x_{w1}=\sqrt{\frac{2}{3}}\approx 0{,}816$$

$$f'''(x_{w1})=f'''\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)=-6\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}\neq 0 \Rightarrow \text{Wendestelle bei } x=x_{w2}=-\sqrt{\frac{2}{3}}\approx -0{,}816$$

د انعطآف ټکو وضعيه قيمتونه:

$$y_{w1}=f(x_{w1})=f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)=\frac{1}{4}\cdot\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^4-\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2=\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{9}-\frac{2}{3}=\frac{1}{9}-\frac{6}{9}=-\frac{5}{9}\approx -0{,}555$$

$$y_{w2}=f(x_{w2})=f\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)=-\frac{5}{9}\approx -0{,}555 \text{ weil } f(-x)=f(x)$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{P_{w1}\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\approx 0{,}816\,|\,-\frac{5}{9}\approx -0{,}555\right)}} \qquad \underline{\underline{P_{w2}\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\approx -0{,}816\,|\,-\frac{5}{9}\approx -0{,}555\right)}}$$

د $f(x)=\frac{1}{4}x^4-x^2$ ، محورغوځېکي يا د تقاطع ټکي

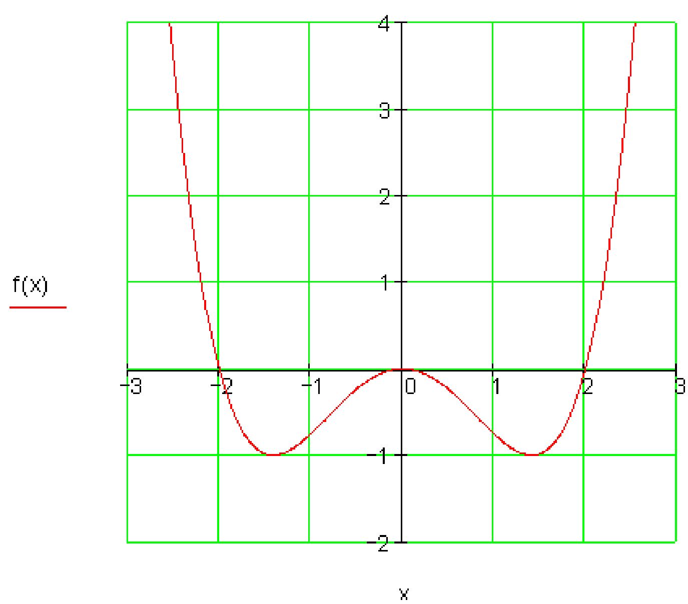
د y محور غوځتکي: $\underline{P_y(0|0)}$

صفرځایونه:

$$f(x)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}x^4-x^2=0$$
$$\Leftrightarrow x^2\left(\frac{1}{4}x^2-1\right)=0 \Rightarrow x_{1/2}=0$$
$$\frac{1}{4}x^2-1=0|+1 \Leftrightarrow x^2=4 \Rightarrow x_{3/4}=\pm 2$$

د x - محور سره غوځتکي:

$$\underline{\underline{P_{x1/2}(0|0)}} \qquad \underline{\underline{P_{x3/4}(\pm 2|0)}}$$



ث –

افراطي ټکي:

تابع: $f(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}x^3+\frac{9}{4}x^2+x-3$

لومړی مشتق: $f'(x)=x^3-\frac{9}{2}x^2+\frac{9}{2}x+1$

دویم مشتق: $f''(x)=3x^2-9x+\frac{9}{2}$

ځایونه د پراته یا افقي تانجنت سره.

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow x^3-\frac{9}{2}x^2+\frac{9}{2}x+1=0$$

لومړی صفرځاي له ګومان سره x1 = 2 ونیسی پاتې یا باقي پولینوم: $x^2-\frac{5}{2}x-\frac{1}{2}$

نور حلونه ترې لاس ته راځي: $x_2=\frac{5}{4}+\sqrt{\frac{33}{16}};x_3=\frac{5}{4}-\sqrt{\frac{33}{16}}$

ازمایښت چې ایا یو انحرافي ټکی لرو:

$$f''(x_1)=f''(2)=-1{,}5<0\Rightarrow \text{rel. Max. bei } x_1=2$$
$$f''(x_2)=f''\left(\frac{5}{4}+\sqrt{\frac{33}{16}}\right)\approx 1{,}971>0\Rightarrow \text{rel. Min. bei } x_2=\frac{5}{4}+\sqrt{\frac{33}{16}}$$
$$f''(x_3)=f''\left(\frac{5}{4}-\sqrt{\frac{33}{16}}\right)\approx 6{,}279>0\Rightarrow \text{rel. Min. bei } x_3=\frac{5}{4}-\sqrt{\frac{33}{16}}$$

د انحرافي ټکو شمېرنه

$$f(x_1)=f(2)=0 \quad f(x_2)=f\left(\frac{5}{4}+\sqrt{\frac{33}{16}}\right)\approx -0{,}136 \quad f(x_3)=f\left(\frac{5}{4}-\sqrt{\frac{33}{16}}\right)\approx -3{,}098$$

انحرافي ټکي:

$$P_{Max}(2|0) \quad P_{Min1}\left(\frac{5}{4}+\sqrt{\frac{33}{16}}\approx 2,686|-0,136\right) \quad P_{Min2}\left(\frac{5}{4}-\sqrt{\frac{33}{16}}\approx -0,186|-3,098\right)$$

د انعطافټکي یا اوړونټکي:

$$f(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}x^3+\frac{9}{4}x^2+x-3 \qquad f'(x)=x^3-\frac{9}{2}x^2+\frac{9}{2}x+1$$

$$f''(x)=3x^2-9x+\frac{9}{2} \qquad f'''(x)=6x-9$$

د انعطافټکي لپاره اړیین شرطونه:

$$f''(x)=0 \Leftrightarrow 3x^2-9x+\frac{9}{2}=0|:3$$

$$\Leftrightarrow x^2-3x+\frac{3}{2}=0$$

$$p=-3 \qquad q=\frac{3}{2} \Rightarrow D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=\frac{9}{4}-\frac{3}{2}=\frac{3}{4}$$

$$x_{w1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D} \qquad x_{w1}=\frac{3}{2}+\sqrt{\frac{3}{4}}\approx 2,366 \qquad x_{w2}=\frac{3}{2}-\sqrt{\frac{3}{4}}\approx 0,634$$

د انعطافټکي – یا اوړونټکي ازماینت(لاندې الما　نې د اوړونټکی یا انع

$$f'''(x_{w1})=f'''(2,366)=6\cdot 2,366-9\neq 0 \Rightarrow \text{Wendestelle bei } x=x_{w1}=\frac{3}{2}+\sqrt{\frac{3}{4}}\approx 2,366$$

$$f'''(x_{w1})=f'''(0,634)=6\cdot 0,634-9\neq 0 \Rightarrow \text{Wendestelle bei } x=x_{w2}=\frac{3}{2}-\sqrt{\frac{3}{4}}\approx 0,634$$

د انعطافټکي وضعیه قیمتونه:

$$y_{w1} = f(x_{w1}) = f(2,366) = \frac{1}{4}\cdot 2,366^4 - \frac{3}{2}\cdot 2,366^3 + \frac{9}{4}\cdot 2,366^2 + 2,366 - 3 \approx -0,07$$

$$y_{w2} = f(x_{w2}) = f(0,634) = \frac{1}{4}\cdot 0,634^4 - \frac{3}{2}\cdot 0,634^3 + \frac{9}{4}\cdot 0,634^2 + 0,634 - 3 \approx -1,80$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{P_{w1}\left(\frac{3}{2}+\sqrt{\frac{3}{4}} \approx 2,366 \mid y_{w1} \approx -0,07\right)}} \qquad \underline{\underline{P_{w2}\left(\frac{3}{2}-\sqrt{\frac{3}{4}} \approx 0,634 \mid y_{w2} \approx -1,80\right)}}$$

د $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^3 + \frac{9}{4}x^2 + x - 3$ ، تابع محور غوڅتکي:

د y - محور سره غوڅکی: $P_y(0 \mid -3)$

صفرځایونه:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^3 + \frac{9}{4}x^2 + x - 3 = 0$$

هورنر:

$$\begin{array}{rccccc}
 & \frac{1}{4} & -\frac{3}{2} & \frac{9}{4} & 1 & -3 \\
x=-1 & \downarrow & \underline{-\frac{1}{4}} & \underline{\frac{7}{4}} & \underline{-4} & 3 \\
 & \frac{1}{4} & -\frac{7}{4} & 4 & -3 & 0
\end{array} \quad f(-1) = 0 \quad \Rightarrow x_1 = -1$$

باقي یا پاتې پولینوم:

$$\frac{1}{4}x^3 - \frac{7}{4}x^2 + 4x - 3 = 0$$

هورنر:

$$\begin{array}{cccccc} & \frac{1}{4} & -\frac{7}{4} & 4 & -3 \\ x=2 & \downarrow & \frac{2}{4} & -\frac{5}{2} & 3 \\ \hline & \frac{1}{4} & -\frac{5}{4} & \frac{3}{2} & 0 \end{array} \quad f(2)=0 \quad \Rightarrow x_2 = 2$$

لاندې الماني= باقي –یا پاتې پولینوم:

$$\frac{1}{4}x^2 - \frac{5}{4}x + \frac{3}{2} = 0 | \cdot 4$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0$$

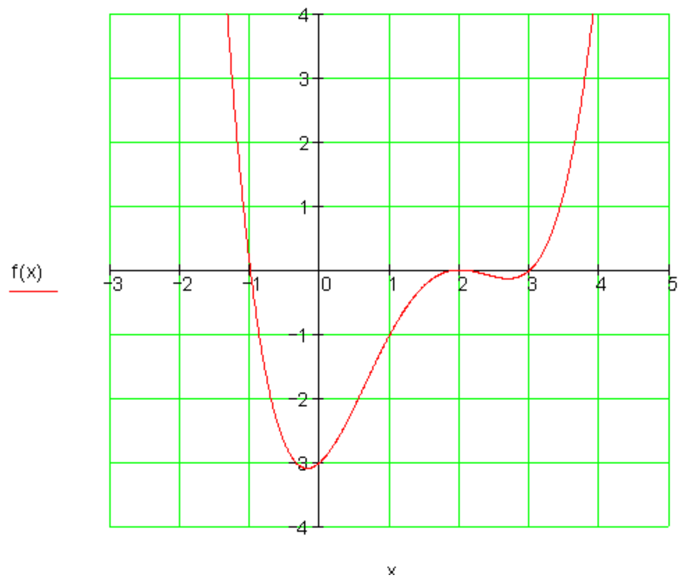
$$p = -5 \qquad q = 6 \qquad \Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \frac{25}{4} - \frac{24}{4} = \frac{1}{4} \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

$$x_{3/4} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \qquad \begin{array}{l} x_3 = \frac{5}{2} + \frac{1}{2} = 3 \\ x_4 = \frac{5}{2} - \frac{1}{2} = 2 \end{array}$$

-ارزښتونه د لویې پسې ترتب کړی: $x_1 = -1 \quad x_{2/3} = 2 \quad x_4 = 3$:

د x -محور سره غوځتکی:

$$\underline{\underline{P_{x1}(-1|0)}} \qquad \underline{\underline{P_{x2/3}(2|0)}} \qquad \underline{\underline{P_{x4}(3|0)}}$$



ج –

افراطي ټکي

تابع: $f(x)=\frac{1}{27}x^5-\frac{2}{3}x^3+3x$

لومړی مشتق: $f'(x)=\frac{5}{27}x^4-2x^2+3$

دويم مشتق: $f''(x)=\frac{20}{27}x^3-4x$

ځايونه د پراته يا افقي تانجنت سره.

(بي (دوه) مربع مساوات) $f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{5}{27}x^4-2x^2+3=0$

$$x_1 = 3; x_2 = -3; x_3 = \sqrt{\frac{9}{5}}; x_4 = -\sqrt{\frac{9}{5}}$$

ازماینښت چې ایا یو افراطي ټکی مخ ته لرو

$$f''(x_1) = f''(3) = 8 > 0 \Rightarrow \text{rel. Min. bei } x_1 = 3$$
$$f''(x_2) = f''(-3) = -8 < 0 \Rightarrow \text{rel. Max. bei } x_2 = -3$$
$$f''(x_3) = f''\left(\sqrt{\frac{9}{5}}\right) \approx -3{,}578 < 0 \Rightarrow \text{rel. Max. bei } x_3 = \sqrt{\frac{9}{5}}$$
$$f''(x_4) = f''\left(-\sqrt{\frac{9}{5}}\right) \approx 3{,}578 > 0 \Rightarrow \text{rel. Min. bei } x_4 = -\sqrt{\frac{9}{5}}$$

د افراطي ارزښتون شمېرنه :

$$f(x_1) = f(3) = 0 \qquad f(x_2) = f(-3) = 0$$
$$f(x_3) = f\left(\sqrt{\frac{9}{5}}\right) \approx 2{,}576 \qquad f(x_4) = f\left(-\sqrt{\frac{9}{5}}\right) \approx -2{,}576$$

افراطي ټکي:

$$P_{Min1}(3|0) \quad P_{Max1}(-3|0) \quad P_{Max2}\left(\sqrt{\frac{9}{5}} \approx 1{,}342 | 2{,}576\right)$$
$$P_{Min2}\left(-\sqrt{\frac{9}{5}} \approx -1{,}342 | -2{,}576\right)$$

اوړونټکي یا د انعطاف ټکي:

$$f(x) = \frac{1}{27}x^5 - \frac{2}{3}x^3 + 3x \qquad f'(x) = \frac{5}{27}x^4 - 2x^2 + 3$$
$$f''(x) = \frac{20}{27}x^3 - 4x \qquad f'''(x) = \frac{60}{27}x^2 - 4$$

د انعطاف ټکي لپاره اړيين شرايط:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{20}{27}x^3 - 4x = 0$$

$$\Leftrightarrow x \cdot \left(\frac{20}{27}x^2 - 4\right) = 0 \Rightarrow x_{w1} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{20}{27}x^2 - 4| + 4$$

$$\Leftrightarrow \frac{20}{27}x^2 = 4| : \frac{20}{27}$$

$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{27}{5}|\sqrt{\ } \Rightarrow x_{w2/3} = \pm\sqrt{\frac{27}{5}} \approx \pm 2{,}324$$

په انعطاف ټکي ازماېښت:

$f'''(x_{w1}) = f'''(0) = -4 \neq 0$ لاس ته راځي، په $x = x_{w1} = 0$ کې اوړنټکی.

$$f'''(x_{w2}) = f'''\left(\sqrt{\frac{27}{5}}\right) = \frac{60}{27} \cdot \frac{27}{5} - 4 = 8 \neq 0 \Rightarrow$$

لاس ته راځي، په $x = x_{w2} = \sqrt{\frac{27}{5}}$ کې اوړنټکی.

$$f'''(x_{w3}) = f'''\left(-\sqrt{\frac{27}{5}}\right) = \frac{60}{27} \cdot \frac{27}{5} - 4 = 8 \neq 0 \Rightarrow$$

لاس ته راځي، په $x = x_{w2} = -\sqrt{\frac{27}{5}}$ کې اوړنټکی.

د اوړونټکي کواوردیناتونه یا پروتولاړارزښتونه(قمتهای وضعیه؟؟):

$$y_{w1} = f(x_{w1}) = f(0) = 0$$

$$y_{w2} = f(x_{w2}) = f\left(\sqrt{\frac{27}{5}}\right) = \frac{1}{27}\left(\sqrt{\frac{27}{5}}\right)^5 - \frac{2}{3}\left(\sqrt{\frac{27}{5}}\right)^3 + 3\left(\sqrt{\frac{27}{5}}\right) \approx 1{,}115$$

$$y_{w3} = f(x_{w3}) = f\left(-\sqrt{\frac{27}{5}}\right) = \frac{1}{27}\left(-\sqrt{\frac{27}{5}}\right)^5 - \frac{2}{3}\left(-\sqrt{\frac{27}{5}}\right)^3 + 3\left(-\sqrt{\frac{27}{5}}\right) \approx -1{,}115$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{P_{w1}(0|0)}} \qquad \underline{\underline{P_{w2}\left(\sqrt{\frac{27}{5}} \approx 2{,}324 \mid y_{w2} \approx 1{,}115\right)}}$$

$$\underline{\underline{P_{w3}\left(-\sqrt{\frac{27}{5}} \approx -2{,}324 \mid y_{w3} \approx -1{,}115\right)}}$$

د $f(x) = \frac{1}{27}x^5 - \frac{2}{3}x^3 + 3x$ ، محورغوښتکي یا د محور سره د تقاطع ټکي.

د y محور سره غوښتکی: $P_y(0|0)$

صفرځایونه

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{27}x^5 - \frac{2}{3}x^3 + 3x = 0$$

$$\Leftrightarrow x\left(\frac{1}{27}x^4 - \frac{2}{3}x^2 + 3\right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

$$\frac{1}{27}x^4 - \frac{2}{3}x^2 + 3 = 0$$ بدلون: $x^2=z$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{27}z^2 - \frac{2}{3}z + 3 = 0 \mid \cdot 27$$ په z کې مربع(څلورئ) مساوات

$$\Leftrightarrow z^2 - 18z + 81 = 0$$

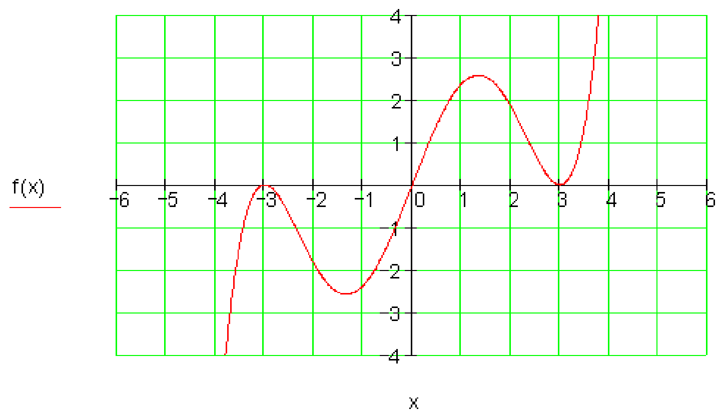
$$p = -18 \qquad q = 81 \qquad \Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 81 - 81 = 0 \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{0} = 0$$

$$z_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \qquad z_1 = 9 \qquad z_2 = 9$$

$$z_1 = 9 = x^2 \Rightarrow x_{2/3} = \pm 3 \quad z_2 = 9 = x^2 \Rightarrow x_{4/5} = \pm 3$$

د x -محور سره غوڅټکی.

$$\underline{\underline{P_{x1}(0|0)}} \quad \underline{\underline{P_{x2/3}(-3|0)}} \quad \underline{\underline{P_{x4/5}(3|0)}}$$



یادونه: دا برخه دلته پای شوه.

3.IX:اوړونټکی یا د انعطاف ټکی او زینټکی

تمرینونه مشتقشمیرنه **II**

لاندې ټول راشنل یا هوښیار توابع د اوړونټکي په هکله وخیړی او په ورکړ شوي حالت کې اوړون- یا د انعطافټکي وټاکی.

لومړی : $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 5$ دویم : $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 4x^2 + 8x$

دریم: $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 3x - 1$ څلورم: $f(x) = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 1$

پنځم: $f(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2-2x-1$ شپږم: $f(x)=\frac{1}{2}x^4-3x^2+\frac{3}{2}$

اووم: $f(x)=-\frac{1}{2}x^4+3x^2-1$ اتم: $f(x)=\frac{1}{4}x^4-x^3+\frac{3}{2}x^2-x+\frac{1}{2}$

نهم: $f(x)=-\frac{1}{4}x^4+x^3+1$ لسم: $f(x)=\frac{1}{12}x^4-\frac{3}{2}x^2-1$

تمرینونه

مشتقشمیرنه II

نتیجې او مفصل حلونه

نتیجې:

اول – $f(x)=\frac{1}{4}x^3-\frac{3}{2}x^2+5 \Rightarrow P_W(2|1)$

دویم – $f(x)=\frac{1}{2}x^3-4x^2+8x \Rightarrow P_W\left(\frac{8}{3}\,\middle|\,\frac{64}{27}\right)$

دریم – $f(x)=\frac{1}{4}x^3-\frac{3}{2}x^2+3x-1 \Rightarrow P_W(2|1)$

ځلورم – $f(x)=-\frac{1}{4}x^3+\frac{3}{2}x^2+1 \Rightarrow P_W(2|5)$

پنځم – $f(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2-2x-1 \Rightarrow P_W\left(-1\,\middle|\,\frac{5}{3}\right)$

شپږم - $f(x)=\frac{1}{2}x^4-3x^2+\frac{3}{2}\Rightarrow P_{w1/2}(\pm1|-1)$

اوم - $f(x)=-\frac{1}{2}x^4+3x^2-1\Rightarrow P_{w1/2}\left(\pm1\;\middle|\;\frac{3}{2}=1,5\right)$

اتم – $f(x)=\frac{1}{4}x^4-x^3+\frac{3}{2}x^2-x+\frac{1}{2}\Rightarrow$

اوړونټکی نه شته

نهم - $f(x)=-\frac{1}{4}x^4+x^3+1\Rightarrow P_{w1}(0|1)\quad P_{w2}(2|5)$

لسم - $f(x)=\frac{1}{12}x^4-\frac{3}{2}x^2-1\Rightarrow P_{w1/2}\left(\pm\sqrt{3}\approx1,73\;\middle|\;-\frac{19}{4}=-4,75\right)$

مفصل حلونه:

لومړی – مفصل حل:

شمیرنه:

اول- د تابع مساوات د مشتق سره

$$f(x)=\frac{1}{4}x^3-\frac{3}{2}x^2+5\qquad f'(x)=\frac{3}{4}x^2-3x$$

$$f''(x)=\frac{3}{2}x-3\qquad f'''(x)=\frac{3}{2}$$

دویم – د انعطافتکي لپاره اړیین شرطونه:

ممکنه انعطافځای یا اوړونځای دی

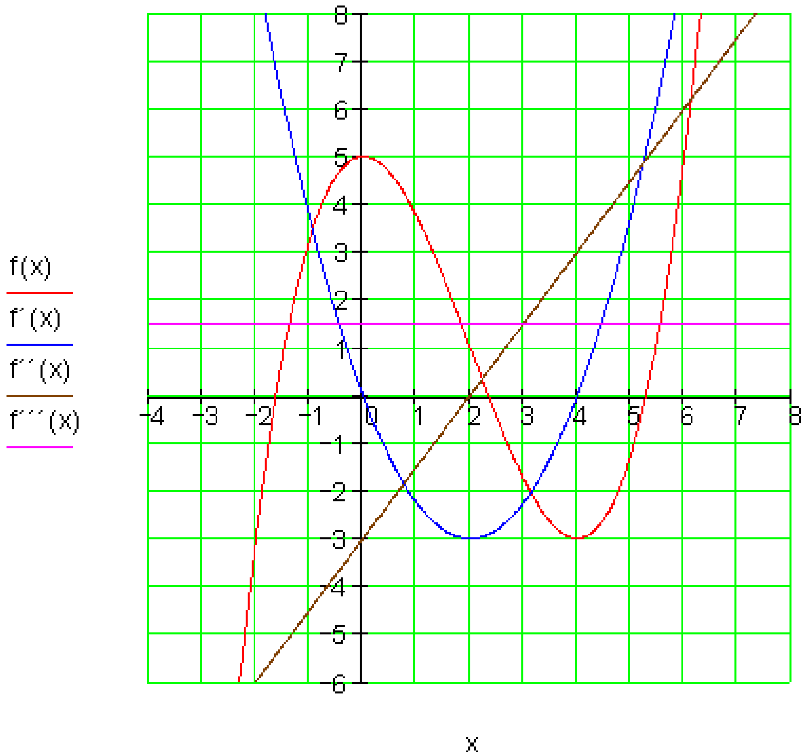
دریم – د دریم مشتق له لارې ښوونه، چې ایا یو انعطاف- یا اوړونټکی لرو:

$$f'''(x) = f'''(2) = \frac{3}{2} \neq 0 \Rightarrow x = x_W = 2$$

یو ممکنه انعطافځای یا اوړونځایدی.

څلورم – د انعطافټکي ټاکنه د انعطافځای اینوونې له لارې په f(x) کې

$$f(x_W) = f(2) = \frac{1}{4} \cdot 2^3 - \frac{3}{2} \cdot 2^2 + 5 = \frac{8}{4} - \frac{12}{2} + 5 = 2 - 6 + 5 = 1 \Rightarrow \underline{\underline{P_W(2|-1)}}$$



ګرافونه :

$$f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 5 \qquad f'(x) = \frac{3}{4}x^2 - 3x \qquad f''(x) = \frac{3}{2}x - 3 \qquad f'''(x) = \frac{3}{2}$$

دویم – مفصل حل:

شمېرنه: لومړی- د تابع مساوات د مشتقونو سره:

$$f(x)=\frac{1}{2}x^3-4x^2+8x \qquad f'(x)=\frac{3}{2}x^2-8x+8$$

$$f''(x)=3x-8 \qquad f'''(x)=3$$

دویم - د انعطاف ټکي لپاره اړیین شرطونه:

$$f''(x)=0 \Leftrightarrow 3x-8=0 \Leftrightarrow x=\frac{8}{3}$$ مکنه اوړنټکی یا د انعطاف ټکی

دریم - د دریم مشتق په مرسته ښوونه، چې ایا ئو انعطاف ټکی مخ ته لرو.

$$f'''(x)=f'''\left(\frac{8}{3}\right)=3\neq 0 \Rightarrow x=x_W=\frac{8}{3}$$

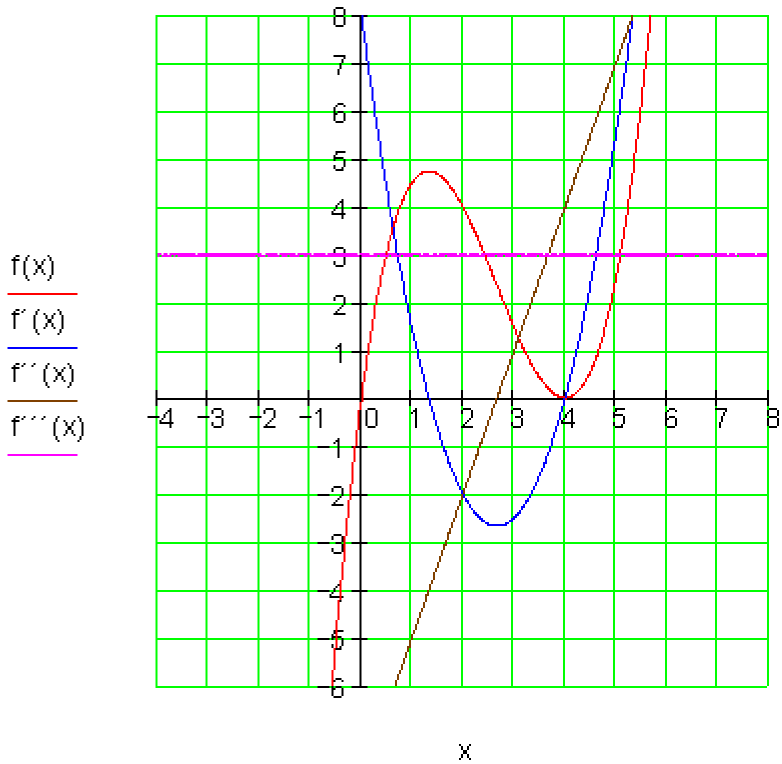
اوړنټکی یا د انعطافټکی دی

څلورم – د انعطافټکي ټاکنه په f(x) کې د انعطافځای اینبوونې له لارې

$$f(x_W)=f\left(\frac{8}{3}\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{8}{3}\right)^3-4\cdot\left(\frac{8}{3}\right)^2+8\cdot\frac{8}{3}=\frac{1}{2}\cdot\frac{512}{27}-4\cdot\frac{64}{9}+8\cdot\frac{8}{3}$$
$$=\frac{256}{27}-\frac{768}{27}+\frac{576}{27}=\frac{64}{27}\Rightarrow \underline{\underline{R_W\left(\frac{8}{3}\approx 2{,}67\ \middle|\ \frac{64}{27}\approx 2{,}37\right)}}$$

ګرافونه :
$$f(x)=\frac{1}{2}x^3-4x^2+8x \qquad f'(x)=\frac{3}{2}x^2-8x+8$$

$$f''(x)=3x-8 \qquad f'''(x)=3$$



دریم – مفصل حل

شمېرنه:

لومړی- د تابع مساوات د مشتقونو سره:

$$f(x)=\frac{1}{4}x^3-\frac{3}{2}x^2+3x-1 \quad f'(x)=\frac{3}{4}x^2-3x+3$$

$$f''(x)=\frac{3}{2}x-3 \quad f'''(x)=\frac{3}{2}$$

دویم - د انعطاف ټکي لپاره اړیین شرطونه:

$$f''(x)=0 \Leftrightarrow \frac{3}{2}x-3=0 \Leftrightarrow x=2$$

ممکنه اوړونټکی یا د انعطاف ټکی دی

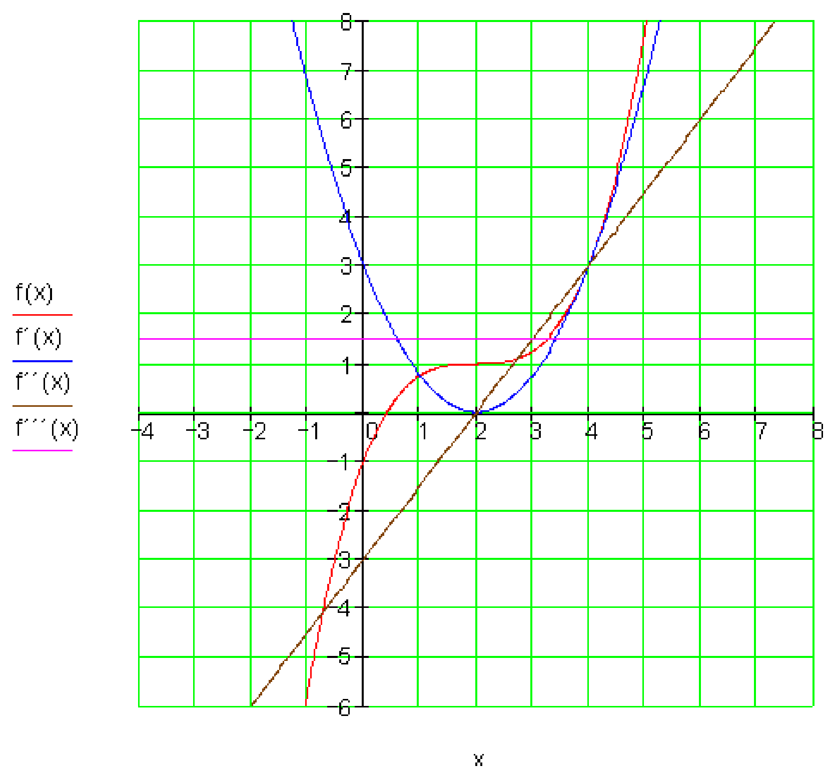
دریم - د دریم مشتق په مرسته ښوونه، چې ایا ئو انعطاف ټکی مخ ته لرو.

$$f'''(x) = f'''(2) = \frac{3}{2} \neq 0 \Rightarrow x = x_W = 2$$

ممکنه اوړونټکی دی

څلورم – د انعطافټکي ټاکنه د انعطافځای اینوونې له لارې په f(x) کې

$$f(x_W) = f(2) = \frac{1}{4}\cdot 2^3 - \frac{3}{2}\cdot 2^2 + 3\cdot 2 - 1 = \frac{8}{4} - \frac{12}{2} + 6 - 1 = 1 \Rightarrow \underline{\underline{R_W(2|1)}}$$



ګرافونه:

$$f(x)=\frac{1}{4}x^3-\frac{3}{2}x^2+3x-1 \quad f'(x)=\frac{3}{4}x^2-3x+3$$

$$f''(x)=\frac{3}{2}x-3 \quad f'''(x)=\frac{3}{2}$$

ځلورم – مفصل حل:

شميرنه: لومړی- د تابع مساوات د مشتقونو سره:

$$f(x)=-\frac{1}{4}x^3+\frac{3}{2}x^2+1 \quad f'(x)=-\frac{3}{4}x^2+3x$$

$$f''(x)=-\frac{3}{2}x+3 \quad f'''(x)=-\frac{3}{2}$$

دويم - د انعطاف ټکي لپاره اړيين شرطونه:

$$f''(x)=0 \Leftrightarrow -\frac{3}{2}x+3=0 \Leftrightarrow x=2$$

ممکنه اوړونټکي(انعطافټکي) دي.

دريم - د دريم مشتق په مرسته بنوونه، چې ايا يو انعطاف ټکی مخ ته لرو.

$$f'''(x)=f'''(2)=-\frac{3}{2}\neq 0 \Rightarrow x=x_W=2$$

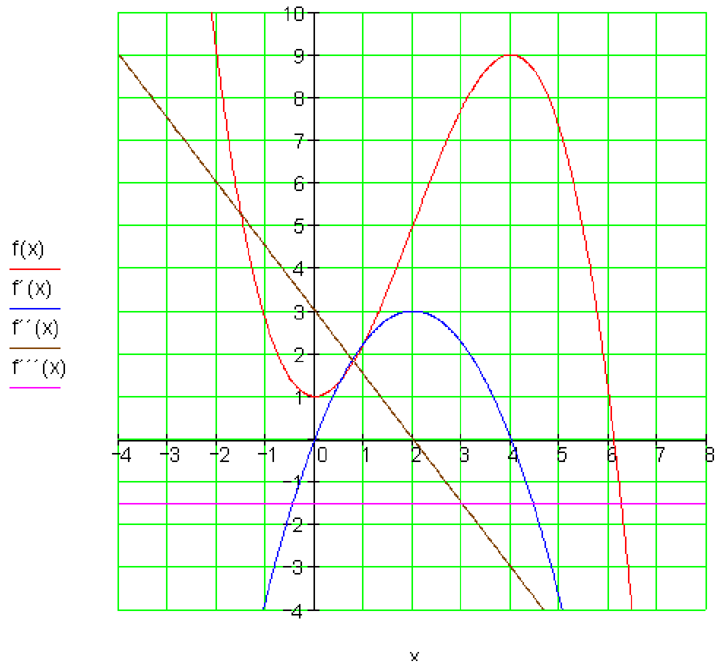
يو انعطافټکی يا اوړونټکی ړی.

ځلورم – د انعطافټکي ټاکنه د انعطافځای اېښوونې له لارې په $f(x)$ کې

$$f(x_W)=f(2)=-\frac{1}{4}\cdot 8+\frac{3}{2}\cdot 4+1=-2+6+1\Rightarrow \underline{\underline{P_W(2|5)}}$$

گرافونه: $f(x)=-\frac{1}{4}x^3+\frac{3}{2}x^2+1 \quad f'(x)=-\frac{3}{4}x^2+3x$

$$f''(x) = -\frac{3}{2}x + 3 \quad f'''(x) = -\frac{3}{2}$$



پنځم – مفصل حل:

شمېرنه: لومړی- د تابع مساوات د مشتقونو سره:

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 2x - 1 \quad f'(x) = x^2 + 2x - 2$$

$$f''(x) = 2x + 2 \quad f'''(x) = 2$$

دویم - د انعطاف ټکي لپاره اړیین شرطونه: $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1\, i$

ممکنه انعطاف- یا اوړونټکی دی

دریم - د دریم مشتق په مرسته بشوونه، چې ایا ئو انعطاف ټکی مخ ته لرو.

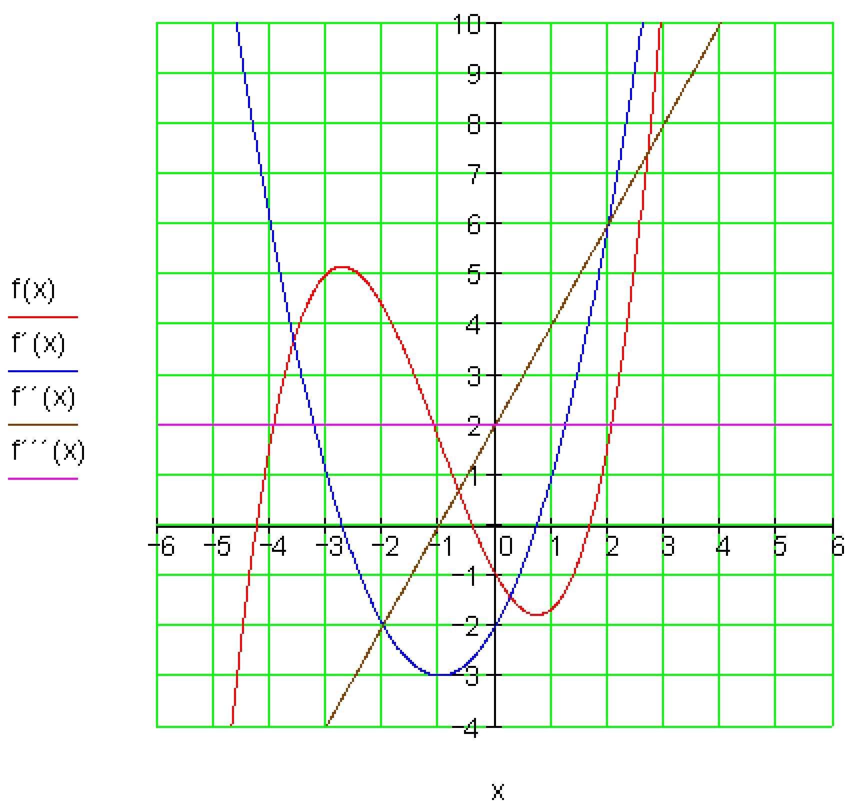
$$f'''(x) = f'''(-1) = 2 \neq 0 \Rightarrow x = x_W = -1$$

یو انعطافټکی دی.

خلورم – د انعطافټکي ټاکنه د انعطافځای اینوونې له لارې په f(x) کې

$$f(x_W) = f(-1) = \frac{1}{3}\cdot(-1)^3 + (-1)^2 - 2\cdot(-1) - 1 = -\frac{1}{3} + 1 + 2 - 1 = \frac{5}{3}$$

$$\Rightarrow P_W\left(-1 \,\middle|\, \frac{5}{3} \approx 1{,}67\right)$$



ګرافونه

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 2x - 1 \quad f'(x) = x^2 + 2x - 2 \quad f''(x) = 2x + 2 \quad f'''(x) = 2$$

شپږم – مفصل حل:

شمېرنه: لومړی- د تابع مساوات د مشتقونو سره:

$$f(x)=\frac{1}{2}x^4-3x^2+\frac{3}{2} \quad f'(x)=2x^3-6x \quad f''(x)=6x^2-6 \quad f'''(x)=12x$$

دویم - د انعطاف ټکي لپاره اړیین شرطونه:

$$f''(x)=0 \Leftrightarrow 6x^2-6=0 \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow x_{1/2}=\pm 1$$

یو ممکنه انعطاف-یا ا وړونټکی دی.

دریم - د دریم مشتق په مرسته ښوونه، چې ایا یو انعطاف ټکی مخ ته لرو.

یو اوړونې-یا انعطافټکی دی

$$f'''(x_1)=f'''(1)=12\cdot 1=12\neq 0 \Rightarrow x_1=x_{W1}=1$$

یو د انعطاف ټکی دی.

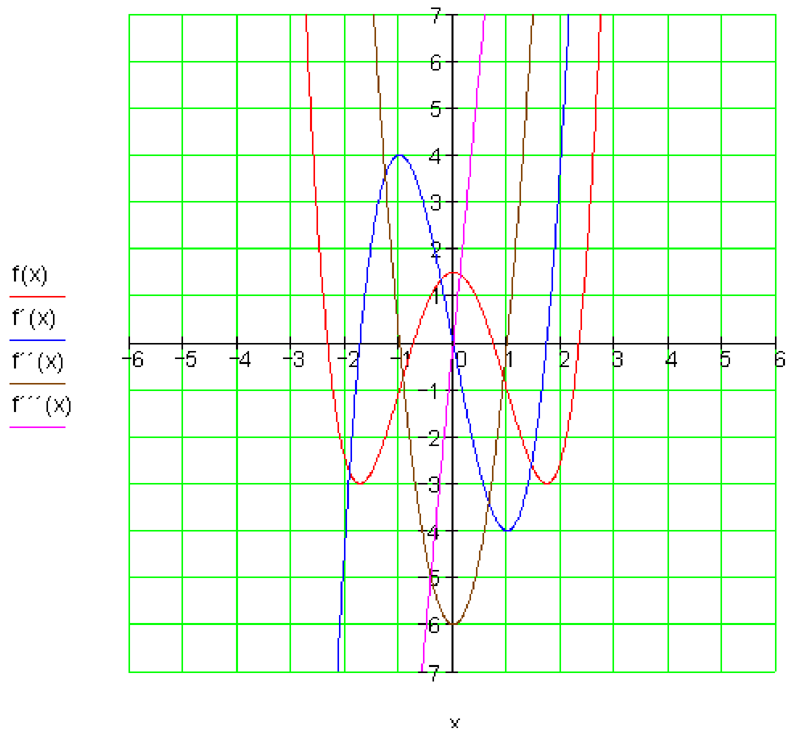
$$f'''(x_2)=f'''(-1)=12\cdot(-1)=-12\neq 0 \Rightarrow x_2=x_{W2}=-1$$

څلورم – د انعطافټکي ټاکنه د انعطافځای ایښوونې له لارې په f(x) کې

$$f(x_{W1/2})=f(\pm 1)=\frac{1}{2}(\pm 1)^4-3\cdot(\pm 1)^2+\frac{3}{2}=\frac{1}{2}-3+\frac{3}{2}=-1 \Rightarrow \underline{\underline{P_{W1/2}(\pm 1|-1)}}$$

ګرافونه:

$$f(x)=\frac{1}{2}x^4-3x^2+\frac{3}{2} \quad f'(x)=2x^3-6x \quad f''(x)=6x^2-6 \quad f'''(x)=12x$$



اوم – مفصل حل:

شمېرنه: لومړی- د تابع مساوات د مشتقونو سره:

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^4 + 3x^2 - 1 \quad f'(x) = -2x^3 + 6x \quad f''(x) = -6x^2 + 6 \quad f'''(x) = -12x$$

دويم - د انعطاف ټکي لپاره اړيين شرطونه:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -6x^2 + 6 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x_{1/2} = \pm 1$$

ممکنه اوړون – د انعطاف ځايونه دي

دريم - د دريم مشتق په مرسته بنوونه، چي ايا ئو انعطاف ټکی مخ ته لرو.

$$f'''(x_1) = f'''(1) = -12 \cdot 1 = -12 \neq 0 \Rightarrow x_1 = x_{W1} = 1$$

یو اوړونځای یا انعطاف ځای دی

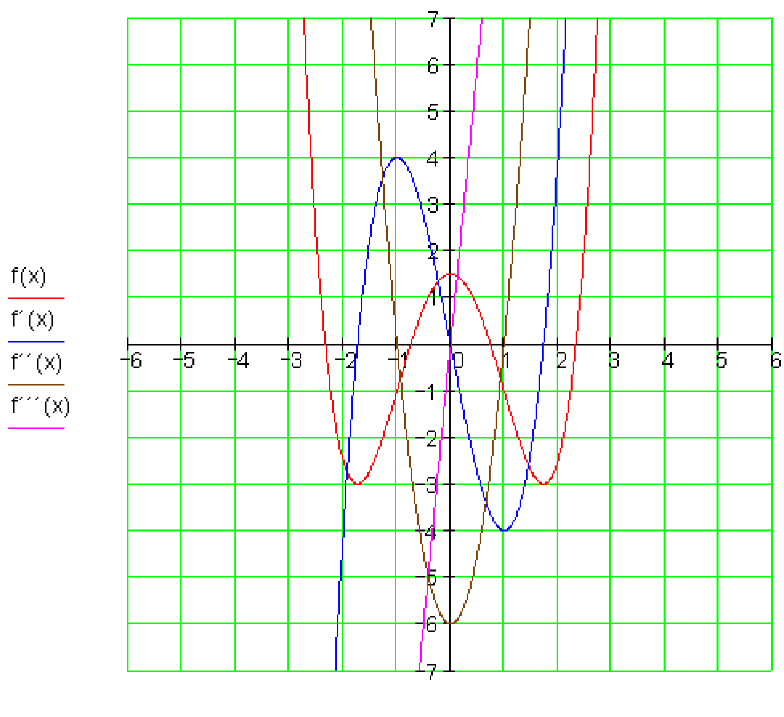
$$f'''(x_2) = f'''(-1) = -12\cdot(-1) = 12 \neq 0 \Rightarrow x_2 = x_{W2} = -1 \text{ is}$$

یو اوړونځای یا انعطاف ځای دی

څلورم – د انعطافټکي ټاکنه د انعطافځای اینووني له لارې په f(x) کې

$$f(x_{W1/2}) = f(\pm1) = -\frac{1}{2}(\pm1)^4 + 3\cdot(\pm1)^2 - 1 = -\frac{1}{2} + 3 - 1 = \frac{3}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R_{W1/2}\left(\pm1 \,\middle|\, \frac{3}{2} = 1{,}5\right)$$



گرافونه :

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^4 + 3x^2 - 1 \quad f'(x) = -2x^3 + 6x \quad f''(x) = -6x^2 + 6$$

$$f'''(x) = -12x$$

اتم – مفصل حل:

شمېرنه:

لومړی- د تابع مساوات د مشتقونو سره:

$$f(x)=\frac{1}{4}x^4-x^3+\frac{3}{2}x^2-x+\frac{1}{2} \quad f'(x)=x^3-3x^2+3x-1$$
$$f''(x)=3x^2-6x+3 \quad f'''(x)=6x-6$$

دویم - د انعطاف ټکي لپاره اړیین شرطونه:

$$f''(x)=0 \Leftrightarrow 3x^2-6x+3=0 \Leftrightarrow x^2-2x+1=(x-1)^2=0$$

$$\Leftrightarrow x_{1/2}=1s$$

ممکنه اوړنټکي یاد انعطاف ټکي دي

دریم - د دریم مشتق په مرسته بنوونه، چې ایا یو انعطاف ټکی مخ ته لرو.

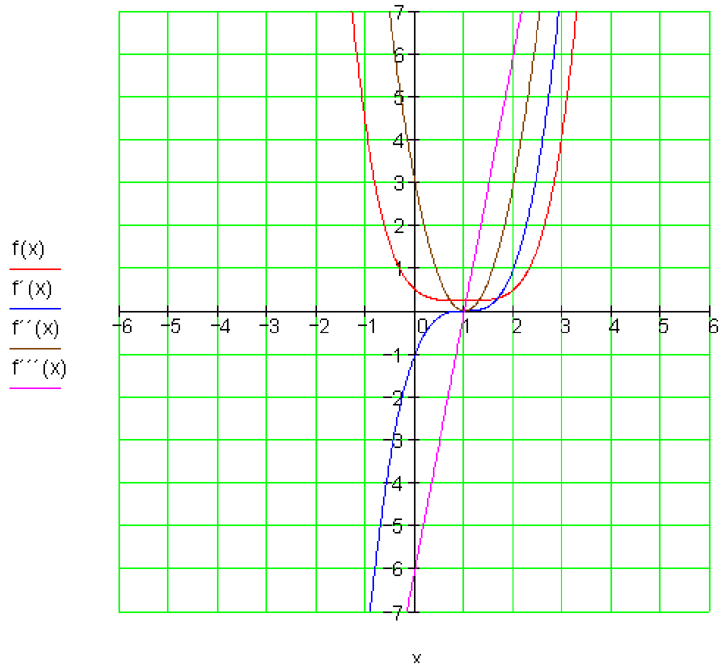
$$f'''(x_{1/2})=f'''(1)=6\cdot 1-6=0 \Rightarrow x_{1/2}=1i$$

دا د انعطاف ټکی نه دی.

د f(x) گراف اوړونټکی یا د انعطاف ټکی نه لري.

گرافونه :

$$f(x)=\frac{1}{4}x^4-x^3+\frac{3}{2}x^2-x+\frac{1}{2} \quad f'(x)=x^3-3x^2+3x-1$$
$$f''(x)=3x^2-6x+3 \quad f'''(x)=6x-6$$



نهم – مفصل حل:

شمیرنه:

لومړی- د تابع مساوات د مشتقونو سره:

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + x^3 + 1 \quad f'(x) = -x^3 + 3x^2$$

$$f''(x) = -3x^2 + 6x \quad f'''(x) = -6x + 6$$

دويم - د انعطاف ټکي لپاره اړيين شرطونه:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow x(-3x+6) = 0$$

ممکنه اوړنټکي يا د انعطاف ټکي د ي $\Leftrightarrow x_1 = 0 \quad \vee \quad x_2 = 2$

د پورته بنتو: ممکنه اوړنځای يا د انهطاف ځای دی

دریم -　د دریم مشتق په مرسته ښوونه، چي ایا ئو انعطاف ټکی مخ ته لرو.

$$f'''(x_1) = f'''(0) = 6 \neq 0 \Rightarrow x_1 = x_{W1} = 0$$

یو اوړنځای یا د انعطاف ځای دی

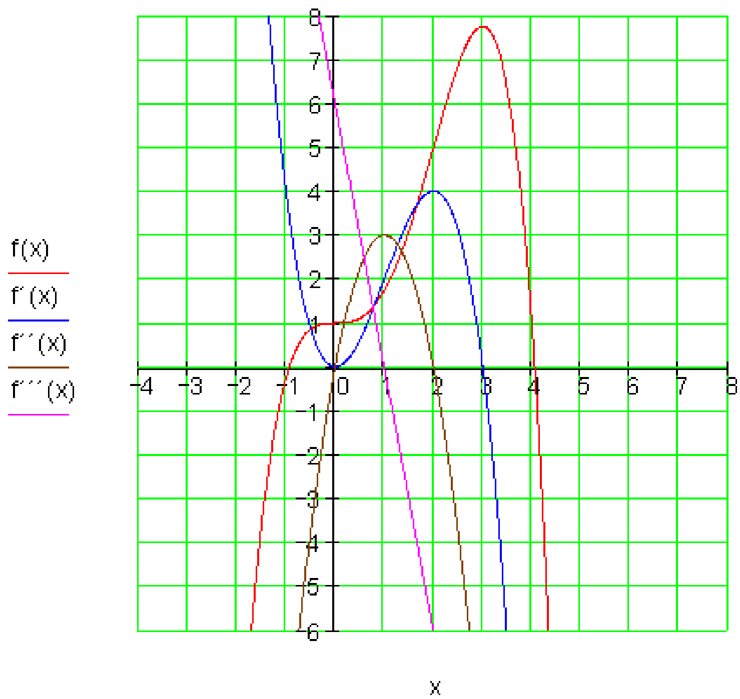
$$f'''(x_2) = f'''(2) = -6 \cdot 2 + 6 = -6 \neq 0 \Rightarrow x_2 = x_{W2} = 2$$

یو د انعطاف ځای دی

څلورم – د انعطافټکي ټاکنه د انعطافځای اینوونې له لارې په f(x) کې

$$f(x_{W1}) = f(0) = 1 \Rightarrow \underline{\underline{P_{W1}(0|1)}}$$

$$f(x_{W2}) = f(2) = -\frac{1}{4} \cdot 16 + 8 + 1 = 5 \Rightarrow \underline{\underline{P_{W2}(2|5)}}$$



گرافونه (پورته۰:

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + x^3 + 1 \quad f'(x) = -x^3 + 3x^2 \quad f''(x) = -3x^2 + 6x$$

$$f'''(x) = -6x + 6$$

لسم – مفصل حل:

شمیرنه: لومړی- د تابع مساوات د مشتقونو سره:

$$f(x) = \frac{1}{12}x^4 - \frac{3}{2}x^2 - 1 \quad f'(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x \quad f''(x) = x^2 - 3 \quad f'''(x) = 2x$$

دویم - د انعطاف ټکي لپاره اړیین شرطونه:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 3 \Leftrightarrow |x| = \sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow x_{1/2} = \pm\sqrt{3}$$

ممکنه انعطاف- یا اوړونځایونه دي

دریم - د دریم مشتق په مرسته ښوونه، چې ایا ئو انعطاف ټکی مخ ته لرو.

$$f'''(x_1) = f'''\left(\sqrt{3}\right) = 2 \cdot \sqrt{3} \neq 0 \Rightarrow x_1 = x_{W1} = \sqrt{3}$$

یو اعطافځای دی

$$f'''(x_2) = f'''\left(-\sqrt{3}\right) = -2 \cdot \sqrt{3} \neq 0 \Rightarrow x_2 = x_{W2} = -\sqrt{3}$$

یوانعطافځای یا اوړونځای دی

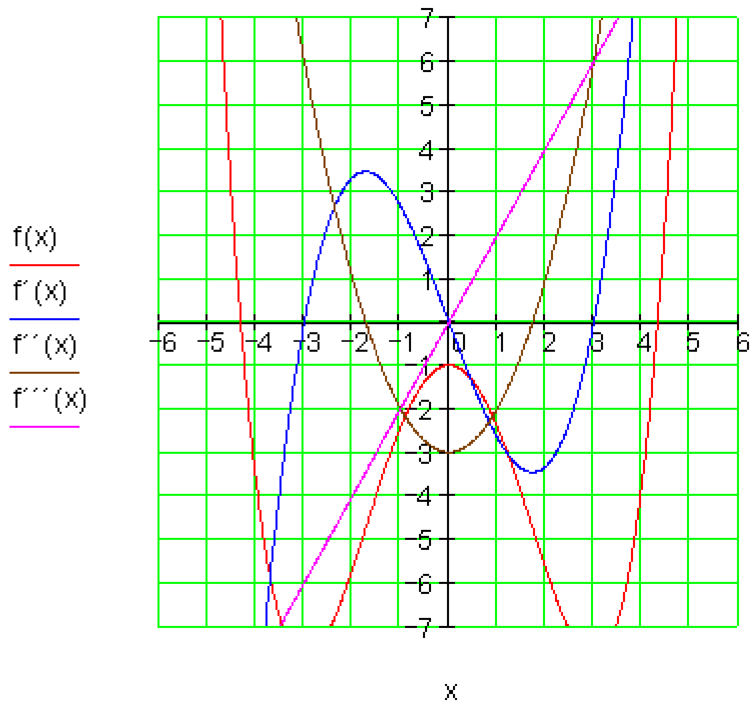
څلورم – د انعطافټکي ټاکنه د انعطافځای ایښوونې له لارې په f(x) کې

$$f(x_{W1/2}) = f\left(\pm\sqrt{3}\right) = \frac{1}{12}\left(\pm\sqrt{3}\right)^4 - \frac{3}{2}\left(\pm\sqrt{3}\right)^2 - 1 = \frac{1}{12} \cdot 9 - \frac{3}{2} \cdot 3 - 1$$

$$= \frac{3}{4} - \frac{9}{2} - 1 = \frac{3}{4} - \frac{18}{4} - \frac{4}{4} = -\frac{19}{4} \Rightarrow \underline{\underline{R_{W1/2}\left(\pm\sqrt{3} \;\middle|\; -\frac{19}{4} = -4{,}75\right)}}$$

گرافونه:

$$f(x)=\frac{1}{12}x^4-\frac{3}{2}x^2-1 \quad f'(x)=\frac{1}{3}x^3-3x \quad f''(x)=x^2-3 \quad f'''(x)=2x$$



حلونه

نتیجي او مفصل حلونه

مشتق د تولګي کار چمتووالي لپاره

لومړی: الف – $f(x)=\frac{1}{2}x^2+2x-2$

ب - نسبي مینیموم = ککرټکی یا د رآس ټکي:

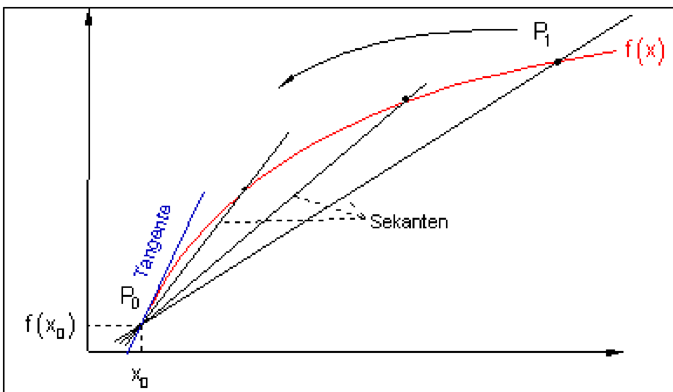
$P_{Min}\left(-2 \mid -4\right) = P_{Sp}\left(-2 \mid -4\right)$

پ - $P_{x2}\left(-2-2\cdot\sqrt{2} \approx -4{,}83 \mid 0\right) \qquad P_{x1}\left(-2+2\cdot\sqrt{2} \approx 0{,}83 \mid 0\right)$

ت - ګرافونه د مفضل حل سره دي.

دويم: د يوه تابع د ګراف جګېدنه په يوه ټکي کې په همغه ټکي کې د تابع د تانجنت د جګوالي سره برابره ده.

دريم:



که ټکی P_1 تل پسې د P_0 په لور وخوزيږي، نو د سيکانت جګوالی تغير خوري.

که هرڅومره زيات د P_0 ټکي ته نږدې کيږو، په همغه اندازه د سيکانت جګوالی د تانجنت جګوالي ته نږدې کيږي.

څلورم: د x_0 په ځاي کې د تابع لومړی مشتق په ټکي $P\left(x_0 \mid f(x_0)\right)$ کې د تانجنت جګوالی دی او له دې سره په دې ټکي کې د $f(x)$ د ګراف جګوالی هم دی.

پنځم: د مشتق تابع $f'(x)$ له دې امله د جګېدنې تابع بلل کيږي، ځکه چې دا په هر ټکي کې د $f(x)$ د جګوالي نمايندګي موي.

شپږم:

الف - $f'''(x) = 0 \qquad f''(x) = 0 \qquad f'(x) = 3$

ب - $f'(x)=15x^2-3 \qquad f''(x)=30x \qquad f'''(x)=30$

پ - $f'(x)=24x^2+24x+6 \qquad f''(x)=48x+24 \qquad f'''(x)=48$

ت - $f'(x)=9x^2+4x+1 \qquad f''(x)=18x+4 \qquad f'''(x)=18$

ټ - $f'(x)=-4x^3+2 \qquad f''(x)=-12x^2 \qquad f'''(x)=-24x$

ث - $f'(x)=4x^3-9 \qquad f''(x)=12x^2 \qquad f'''(x)=24x$

ج - $f'(x)=-3cx^2-a-b-c^3-1 \qquad f''(x)=-6cx \qquad f'''(x)=-6c$

چ - $f'(x)=12x^2-4x+5 \qquad f''(x)=24x-4 \qquad f'''(x)=24$

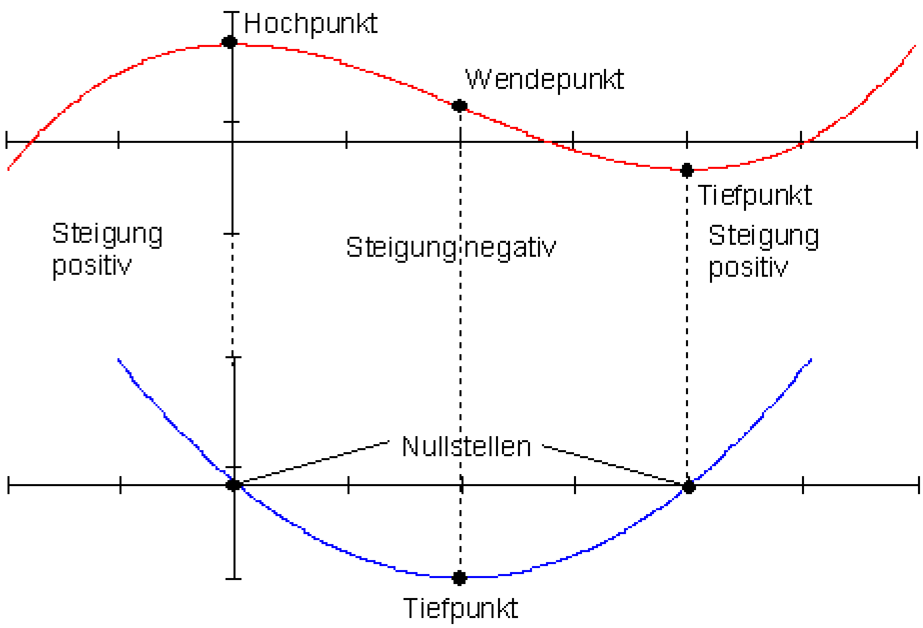
ح -
$f'(x)=20x^3-12x^2+6x-2 \qquad f''(x)=60x^2-24x+6 \qquad f'''(x)=120x-24$

خ - $f'(x)=-4x^3 \qquad f''(x)=-12x^2 \qquad f'''(x)=-24x$

اووم: $t(x)=-5x+6 \qquad n(x)=\frac{1}{5}x-\frac{22}{5}$

اتم: پښتو:په ګراف کې له کيڼ و ښي لور او له پورته کښته لورپه په ترتيب.

ټيټ ټکی، اوړونټکی-یا انعطافټکی،جګيدنه مثبت، جګيدنه منفي یا کميزه، ټيټټکی جګيدنه مثبت، صفرځای، ټيټټکی.



پوښتنې

مشتقشميرنه د تولګي کار د چمتووالي لپاره

لومړی - پارابول په درې ټکو کې:

الف –

د پارابول د تابعمساوات $f(x)$ و ټاکی چې له لاندې ټکو تيرېږي:

$$P_1(-4|-2) \quad P_2(-2|-4) \quad P_3(2|4)$$

ب – د غوځتکو يا د تقاطع ټکو وضعيه قيمتونه پيدا کړئ

پ – د $f(x)$ محور غوڅتکي پیداکړئ

ت – د $f(x)$ او $f'(x)$ ګرافونه په پروتولاړ سیستم یه د وضعیه قیمتونو سیستم کې وکاږئ.

دویم – په یوه ټکي کې د تابع د ګراف د جګېدنې لاندې څه پوهیږو؟

دریم – یو د لیدلو لپاره رسم وکاږئ او د حملو سره یې تشریح کړئ، چې په یوه ګراف څنګه له سیکانت جګوالي څخه د تانجنت جګوالي ته راځو؟

څلورم – د x_0 په ځا کې د یوې تابع لومړئ مشتق څه معنا لري؟

پنځم – ولې د مشتق تابع د جګوالي تبع هم بلل کېږي؟

شپږم – د لاندې توابعو درېواره مشتق ونیسئ:

آلف - $f(x) = 3x + 4$ ب - $f(x) = 2x - 4 + x^3 - 5x + 4x^3$

پ - $f(x) = 3x^3 + 2x^2 + x + 1$ ت - $f(x) = (2x+1)^3$

ټ - $f(x) = x - x^4 + 3 + x$ ث- $f(x) = 1 - 2x - 3x - 4x + x^4$

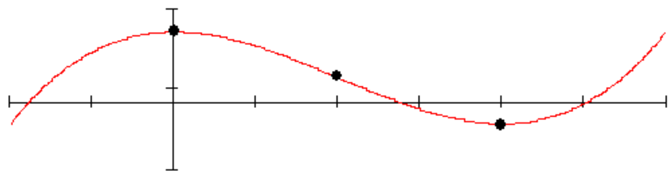
ج - $f(x) = a + b + c^2 - x - ax - bx - cx^3 - c^3x$ چ - $f(x) = 4x^3 - 2x^2 + 5x - 2$

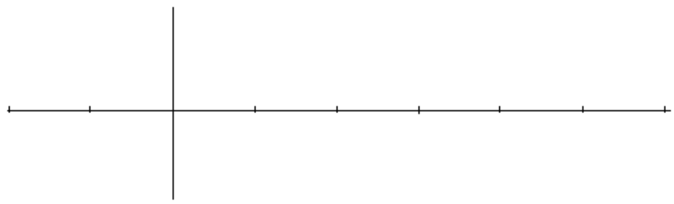
ح - $f(x) = 5x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 2x + 6$ خ - $f(x) = (a^2 + x^2)(a^2 - x^2)$

اوم – یوه $f(x) = -x^2 - x + 2$ تابع ورکړ شوې ده.

د $P(2;f(2))$ ټکي لپاره دې د تنجنت او عمود مساوات و ټاکل شي.

اتم – د تابع د ګراف لاندې د تابع د مشتق ګراف وکاږئ او په دواړو ګرافونو کې کرکتریستیکي یا خوي ټاکونکي ټکي په نخښه کړئ.





ځوابونه:

لومړی: الف -

$$P_1(-4\,|\,-2): f(-4) = 16a_2 - 4a_1 + 1a_0 = -2$$
$$P_2(-2\,|\,-4): f(-2) = 4a_2 - 2a_1 + 1a_0 = -4$$
$$P_2(2\,|\,4): f(2) = 4a_2 + 2a_1 + 1a_0 = 4$$

a_0	a_1	a_2	
1	−4	16	−2
1	−2	4	$-4 \;\|\; \mathrm{II}-\mathrm{I}$
1	2	4	$4 \;\|\; \mathrm{III}-\mathrm{I}$
1	−4	16	−2
0	2	−12	$-2 \;\|\; :2$
0	6	−12	$6 \;\|\; :(-6)$
1	−4	16	−2
0	1	−6	−1
0	−1	2	$-1 \;\|\; \mathrm{III}+\mathrm{II}$
1	−4	16	−2
0	1	−6	−1
0	0	−4	−2

$$-4a_2 = -2 \,|\, :(-4)$$
$$\Leftrightarrow \boxed{a_2 = \frac{1}{2}}$$
$$a_1 - 6a_2 = -1 \Leftrightarrow a_1 - 6\cdot\frac{1}{2} = -1$$
$$\Leftrightarrow a_1 - 3 = -1 \Leftrightarrow \boxed{a_1 = 2}$$
$$a_0 - 4a_1 + 16a_2 = -2 \Leftrightarrow a_0 - 4\cdot 2 + 16\cdot\frac{1}{2} = -2$$
$$\Leftrightarrow a_0 - 8 + 8 = -2 \Leftrightarrow \boxed{a_0 = -2}$$
$$\underline{\underline{f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x - 2}}$$

$$P_1(-4|-2): f(-4) = \frac{1}{2}\cdot(-4)^2 + 2\cdot(-4) - 2 = 8 - 8 - 2 = -2$$

$$P_2(-2|-4): f(-2) = \frac{1}{2}\cdot(-2)^2 + 2\cdot(-2) - 2 = 2 - 4 - 2 = -4$$

$$P_3(2|4): f(2) = \frac{1}{2}\cdot 2^2 + 2\cdot 2 - 2 = 2 + 4 - 2 = 4$$

ب - د پارابول ککرتکی یو انحرافي ټکی دی.

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x - 2 \quad \Rightarrow f'(x) = x + 2 \quad \Rightarrow f''(x) = 1$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \text{ i}$$

ممکنه افراطي ځاي دی

$$f''(\grave{x}) = f''(-2) = 1 > 0 \Rightarrow \text{rel.}$$

په $x = -2$ کې نسبي مینیموم

$$f(-2) = \frac{1}{2}\cdot 4 - 4 - 2 = 2 - 4 - 2 = -4$$

نسبي مینیموم = ککرتکی: $P_{Min}(-2|-4) = \underline{\underline{P_{Sp}(-2|-4)}}$

پ –

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x - 2 \qquad f(0) = -2 \Rightarrow \underline{\underline{P_y(0|-2)}}$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2 + 2x - 2 = 0$$

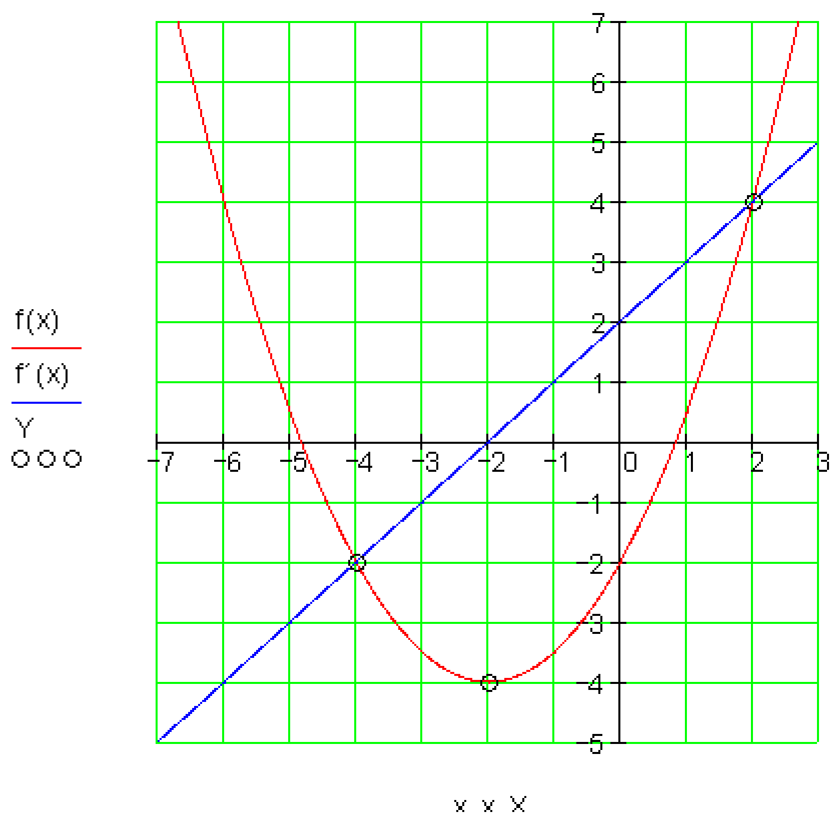
$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x - 4 = 0$$

د مربع مساوات نورمال بنه

$$p = 4; q = -4 \Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 4 + 4 = 8 \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{8} = 2\cdot\sqrt{2}$$

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left| \begin{array}{l} x_1 = -2 + 2\cdot\sqrt{2} \approx 0{,}83 \\ x_2 = -2 - 2\cdot\sqrt{2} \approx -4{,}83 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \Rightarrow \underline{\underline{P_{x1}\left(-2+2\cdot\sqrt{2} \approx 0{,}83 \mid 0\right)}} \\ \Rightarrow \underline{\underline{P_{x2}\left(-2-2\cdot\sqrt{2} \approx -4{,}83 \mid 0\right)}} \end{array}$$

ت -



شپږم:

ت-

ت – $f(x) = (2 + x)^3$

لومړی - حل د ضربولو له لارې

$$f(x) = (2x+1)^3 = (2x+1)\underbrace{(2x+1)^2}_{\text{1. bin. Formel}} = (2x+1)\left(4x^2+4x+1\right)$$

$$= 8x^3+8x^2+2x+4x^2+4x+1 = 8x^3+12x^2+6x+1$$

$$f'(x) = 24x^2+24x+6 \qquad f''(x) = 48x+24 \qquad f'''(x) = 48$$

دویم د ځنځیري قانون سره حل

$$f'(x) = 3(2x+1)^2\cdot 2 = 6(2x+1)^2 = 6\left(4x^2+4x+1\right) = \underline{\underline{24x^2+24x+6}}$$

$$f''(x) = 2\cdot 6(2x+1)\cdot 2 = 24(2x+1) = \underline{\underline{48x+24}}$$

$$f'''(x) = \underline{\underline{48}}$$

$f(x)=(2x+1)^3$

لومړی حل د ضربوني قانون له لارې

$$f(x) = (2x+1)^3 = (2x+1)\underbrace{(2x+1)^2}_{\text{1. bin. Formel}} = (2x+1)\left(4x^2+4x+1\right)$$

$$= 8x^3+8x^2+2x+4x^2+4x+1 = 8x^3+12x^2+6x+1$$

$$f'(x) = \underline{\underline{24x^2+24x+6}} \qquad f''(x) = \underline{\underline{48x+24}} \qquad f'''(x) = \underline{\underline{48}}$$

دویم حل د ځنځیري قانون له لارې

$$f'(x) = 3(2x+1)^2\cdot 2 = 6(2x+1)^2 = 6\left(4x^2+4x+1\right) = \underline{\underline{24x^2+24x+6}}$$

$$f''(x) = 2\cdot 6(2x+1)\cdot 2 = 24(2x+1) = \underline{\underline{48x+24}}$$

$$f'''(x) = \underline{\underline{48}}$$

ج-

$$f(x) = \underbrace{a+b+c^2}_{Konstante} - x - ax - bx - cx^3 - c^3x$$

$$f'(x) = -1 - a - b - 3cx^2 - c^3 = -3cx^2 - \underbrace{a - b - c^3 - 1}_{Konstante}$$

$$f''(x) = -6cx \qquad f'''(x) = -6c$$

خ- $f(x) = (a^2+x^2)(a^2-x^2)$

لومړی – د ضربولو له لارې) د بینوم دریم قانون)

$$f(x) = a^4 - x^4 \Rightarrow f'(x) = -4x^3 \Rightarrow f''(x) = -12x^2 \Rightarrow f'''(x) = -24x$$

دویم: د ضرب قانون سره ضربول

$$= \underbrace{(a^2+x^2)}_{u}\underbrace{(a^2-x^2)}_{v} \Rightarrow u' = 2x \quad v' = -2x$$

$$) = u'v + uv' = 2x\cdot(a^2-x^2) + (a^2+x^2)(-2x) = 2a^2x - 2x^3 - 2a^2x - 2x^3 = -4x^3$$

$$) = -12x^2 \Rightarrow f'''(x) = -24x$$

اووم:

$f(x) = -x^2 -x +2 \;\Rightarrow\; f'(x) = -2x - 1$

د ټکي (P(2;f(2)) وضعیه قیمتونه(کواوردیناتونه)

$f(2) = -2^2 - 2 + 2 = -4 -2 +2 = -4 \;\Rightarrow P(2;-4)$

جګېدنه په (P(2|-4 کې.

(د تانجنت جګیدنه)$f'(2)=-2.2-1=-5 \Rightarrow m_t= -5$

د تانجنت مساوات:

$$t(x) = m_t x + b_t = -5x + b_t$$

تانجنت له ټکي P(2|-4) تیریږي له دې لاس ته راځي او په ځټ یا برعکس

$$\Rightarrow t(2) = -4 \Leftrightarrow -5 \cdot 2 + b_t = -4 \Leftrightarrow b_t = 6$$

لاس ته راځي t(x)=-5x+6 د تانجنت مساوات دی له P(2|-4) لاري.

عمود مساوات:

$$m_n = -\frac{1}{m_t} = -\frac{1}{-5} = \frac{1}{5} \Rightarrow n(x) = \frac{1}{5}x + b_n$$

نورمال له ټکي P(2|-4) تیریږي. لرو:

$$P(2|-4) \Rightarrow n(2) = -4 \Leftrightarrow \frac{1}{5} \cdot 2 + b_n = -4 \Leftrightarrow b_n = -\frac{22}{5}$$

$$\Rightarrow n(x) = \frac{1}{5}x - \frac{22}{5}$$

د نورمال مساوات دی له P(2|-4) څخه تیریږي.

د فرمول له مخې الترناتیو یا بدیل حل

د f(x) په ګراف په ټکي P(x0;f(x0)) کې تانجنت او عمود.

د تانجنت مساوات

t(x) = f ' (x0)(x – x0) + f(x0)

f'(x0) جګېدنه

د عمود مساوات

$$n(x) = -\underbrace{\frac{1}{f'(x_0)}}_{\text{Steigung}}(x - x_0) + f(x_0);\ f'(x_0) \neq 0$$

$$f(x) = -x^2 - x + 2 \Rightarrow f'(x) = -2x - 1 \qquad x_0 = 2$$

$$f'(x_0) = f'(2) = -4 - 1 = -5$$

$$f(x_0) = f(2) = -4 - 2 + 2 = -4$$

$$t(x) = -5(x-2) - 4 = -5x + 10 - 4 = \underline{\underline{-5x + 6}}$$

$$n(x) = \frac{1}{5}(x-2) - 4 = \frac{1}{5}x - \frac{2}{5} - \frac{20}{5} = \underline{\underline{\frac{1}{5}x - \frac{22}{5}}}$$

پوښتني

مشتق د تولګي کار لپاره II

اول - تانجنت او عمود:

الف – تابع $f(x) = \frac{1}{16}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + 7$ دې ورکړ شوې وي.

د تانجنت او عمود لپاره دې د $x_0 = 2$ لپاره وشمېرل شي.

ب – تانجنت او عمود د محور سره يو درېګوډی(مثلث) جوړوي.

د دې سطحه وشمېرئ

دويم – $f(x) = \frac{1}{9}x^3 - x\ ;\ x \in \mathbb{R}$ تابع ورکړ شوې

الف - په کومو ځایونو کې f(x) جګېدنه 2 لري؟

ب - د جګېدنه د په ځای کې ده.

بې له شمېرنې یو بل ځای د برابرې جګېدنې سره ورکړی.

ستاسې ګومان مدلل کړی.

پ - f(x) په کومو ځایونو کې پروت یا افقي محور لري؟

مساوات یې ورکړی.

ت – په f(x) پاندې تانجنت په سرچینه کې وټاکی..

ټ – د تانجنت مساوات په f(x) باندې په ټکي P (u | f(u) کې معلوم کړی

ث – کومه کربښه f(x) په P_x (3 | 0) کې عمود غوڅوي؟

دریم : د څلورمې درجې ټول ریښتونی یا تام راشنل تابع ورکړ شوې :

$$f(x) = \frac{1}{32}x^4 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{9}{2}$$

الف – ایا د تابع ګراف سیومتریک دی؟ که هو، نو سیومتري کوم ډول ده؟

خپله پرېکړه باوري کړه(یا په دې هکله دلیل راوړه).

ب - نسبي انحراف (خورا جګټکی، خورا ټیټ ټکی) وشمېری.

پ - انعطاف ټکي وشمیری او په اوړونټکو یا انعطاف ټکو کې تابع مساوات هم وشمیری.

ت – محور غوڅټکي وشمیری.

ټ - تراوسه ټولو معلومو ټکو سره ارزښتجدول وکاږی.

ث – په یوه وضعیه قیمت سیستم کې ګراف نسبتآ ټیک وکاږئ. او غوره یا د نخښنه کیدو ځایونه په نخښنه کړئ.

(که اړیین وي، له دې سره خپل ارزښت جدول په څو ټکو وغزوئ.

په انتروال [5 ; 5-] = I کې د اندازې شمیروني یا وکچ یوونونوشمیرونی(د کرښي یا خطکش په څیر اله) : کچ واحد یا یوون 1 cm دی)

ج – د ګراف په یوغږیزوالي وینا وکړئ، دا په دې معنا چې د همغږیز جګیدني همداسې همغږیز ټیټیدني لپاره انتروالونه ورکړئ.

ح – د ګراف په انحنا یوه وینا وکړئ، دا په دې معنا چې د ښي همداسې د کیڼې انحنا لپاره انتروالونه ورکړئ.

خ – د تعریفورشو ژئ ټکي ورکړئ.

څلورم – د تام راشنل تابع ګراف له لاندې ټکو تېرېږي:

$P_1(-1|7) \quad P_2(-2|6) \quad P_3(3|1) \quad P_4(-3|-2)$

د تابع مساوات وشمېرئ، همداسې د انعطاف ټکی او محورغوځټکي.

ارزښت جدول ورکړئ او ګراف دامکان تر حده په یوه مناسب پروت ولاړ سیستم کې ټیک وکاږئ.

که د رسمولو لپاره کوم ټکي کم وو، نو هغه وشمیرئ.

حلونه:

نتیجې او مفصل حلونه مشتق د تولګي کار ته چمتووالی ||

لومړی:

الف - $n(x)=\frac{1}{4}x+\frac{3}{2}$ $\quad t(x)=-4x+10$

پ – دا مثلث یوه د 8,5 د سطحې واحدونو سطحه لري.

دویم:

الف – f(x)تابع د $x_{1/2}=\pm3$ په ځای کې جګوالی 2 لري.

ب - f'(x) د $x_{1/2}=\pm1,5$ په ځای کې جګېدنه 0,25- لري.

ت- $t(x)=-x$

ټ- $t(x)=\left(\frac{1}{3}u^2-1\right)x-\frac{2}{9}u^3$ $\quad$ ث- $g(x)=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$

دریم:

لف – دf(x) ګراف د y محور سره سیومتریک دی، ځکه چې اکسپوننت جوړه (جفت) دی

ب - $P_{max}(0|4{,}5)$ $\quad P_{min2}\left(\sqrt{12}\approx3{,}46|0\right)$ $\quad P_{min1}\left(-\sqrt{12}\approx-3{,}46|0\right)$

پ - $P_{w2}(-2|2)\Rightarrow t_2(x)=2x+6$ $\quad P_{w1}(2|2)\Rightarrow t_1(x)=-2x+6$

ت - $P_{x3/4}\left(\sqrt{12}\approx3{,}46|0\right)$ $\quad P_{x1/2}\left(-\sqrt{12}\approx-3{,}46|0\right)$ $\quad P_y(0|4{,}5)$

ټ – ګراف وګورئ. ث – ارزښت جدول وګورئ.

ج - په $\left]-\infty;-\sqrt{12}\right[$ کې کره یوغږیز ټیټیدونکي

په $]-\sqrt{12};0[$ کې کره مونوتو جګیدونکي

په $]0;\sqrt{12}[$ کې کره مونوتون ټیټیدونکي

په $]\sqrt{12};\infty[$ کې کره مونوتون چګیدونکي.

چ-په $]-\infty;-2[$ کې ککینه انحنا یا کوږوالی په $]-2;2[$ کې ښی کوږوالی

په $]2;\infty[$ کې کینکوږوال یا انحنا

ح- $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty \qquad \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\infty$

څلورم:

تابع مساوات	$f(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{2}x^2-4x+4$
انحرافي ټکي	$P_{min}(2\mid-2) \qquad P_{max}\left(-\frac{4}{3}=-1,\bar{3}\mid\frac{196}{27}\approx 7,26\right)$
د انعطاف ټکي	$P_w\left(\frac{1}{3}=0,\bar{3}\mid\frac{71}{27}\approx 2,63\right)$
محورغوڅټکي	$P_y(0\mid4) \quad P_{x1}(1\mid0) \quad P_{x2}\left(-\sqrt{8}\approx-2,83\mid0\right) \quad P_{x3}\left(\sqrt{8}\approx 2,83\mid0\right)$

مفصل حلونه:

لومړی:

الف-

$$f(x)=\frac{1}{16}x^4-\frac{3}{2}x^2+7 \qquad x_0=2 \qquad f'(x)=\frac{1}{4}x^3-3x$$

$$f(x_0)=f(2)=\frac{1}{16}\cdot 16-\frac{3}{2}\cdot 4+7=1-6+7=2$$

$$f'(x_0)=f'(2)=\frac{1}{4}\cdot 8-3\cdot 2=2-6=-4$$

$$t(x)=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)=-4(x-2)+2=-4x+8+2=\underline{\underline{-4x+10}}$$

$$n(x)=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)+f(x_0)=\frac{1}{4}(x-2)+2=\frac{1}{4}x-\frac{1}{2}+2=\underline{\underline{\frac{1}{4}x+\frac{3}{2}}}$$

ب ــ د ملث سطحه = $A=\frac{g.h}{2}$

تانجنت او عمود په $:S(x_0\,|\,f(x_0))=S(2|2)$ ټکي کې غوځوي. له دې سره لر: = h
2 LE د اوږدوالي دوه واحده. g د t(x) او n(x) د صفرځایونو تر منځ واټندی.

$$t(x)=0\Leftrightarrow -4x+10=0\Leftrightarrow 4x=10\Leftrightarrow x_1=\frac{10}{4}=2,5$$

$$n(x)=0\Leftrightarrow \frac{1}{4}x+\frac{3}{2}=0\Leftrightarrow \frac{1}{4}x=-\frac{3}{2}\Leftrightarrow x_2=-\frac{12}{2}=-6$$

$$g=6+2,5=8,5\Rightarrow A=\frac{8,5\cdot 2}{2}=\underline{\underline{8,5FE}}$$

یادونه: په پورته LE داوږدوالي واحد او FE د سطحې واحد دی.

دویم: الف - $f(x)=\frac{1}{9}x^3-x\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{3}x^2-1$

په x0 کې جګوالی ارزښت 2 لري.

$$\Rightarrow f'(x_0)=2\Leftrightarrow \frac{1}{3}x_0^2-1=2\Leftrightarrow \frac{1}{3}x_0^2=3\Leftrightarrow x_0^2=9\Rightarrow \underline{\underline{x_{01/2}=\pm 3}}$$

تابع f(x) له دې سره د $x_{1/2} = \pm 3$ په ځای کې چګوالی ۲ لري.

ب - $f'(x)=\frac{1}{3}x^2-1$ يو پارابول او له دې امله محورسيمتريک دی.

د f'(1,25) =-0,25 پسې لاس ته راځي: f'(-1,25x) = -0,25

د f'(x) په ځاي کې 0,25- جګېدنه لري $\underline{\underline{x_{1/2} = \pm 1,5}}$ ،

پ –

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3}x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x_{1/2} = \pm\sqrt{3}$$
$$f\left(\sqrt{3}\right) = -\frac{2}{3}\sqrt{3}\,;\, f\left(-\sqrt{3}\right) = \frac{2}{3}\sqrt{3} \Rightarrow \underline{P\left(\sqrt{3} \mid -\frac{2}{3}\sqrt{3}\right);\, Q\left(-\sqrt{3} \mid \frac{2}{3}\sqrt{3}\right)}$$

تانجنتونه کربښې دي، چې دx محور سره غبرګې ځغلي:

$$\underline{\underline{t_1(x) = -\frac{2}{3}\sqrt{3}\,;\, t_2(x) = \frac{2}{3}\sqrt{3}}}$$

ت –

$$f(x) = \frac{1}{9}x^3 - x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{3}x^2 - 1$$

د تانجنت مساوات په سرچينه کې: x0 = 0

$$t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$
$$f'(x_0) = f'(0) = -1 \qquad f(x_0) = f(0) = 0$$
$$\Rightarrow t(x) = -1(x - 0) + 0 = \underline{\underline{-x}}$$

ټ –

$$f(x)=\frac{1}{9}x^3-x \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{3}x^2-1$$

د تانجنت مساوات په $P(u;f(u))$ ټکي کې.

$$t(x)=f'(u)(x-u)+f(u)$$

$$f'(u)=\frac{1}{3}u^2-1 \qquad f(u)=\frac{1}{9}u^3-u$$

$$t(x)=\left(\frac{1}{3}u^2-1\right)(x-u)+\frac{1}{9}u^3-u=\left(\frac{1}{3}u^2-1\right)x-u\left(\frac{1}{3}u^2-1\right)+\frac{1}{9}u^3-u$$

$$=\left(\frac{1}{3}u^2-1\right)x-\frac{1}{3}u^3+u+\frac{1}{9}u^3-u=\left(\frac{1}{3}u^2-1\right)x-\frac{3}{9}u^3+\frac{1}{9}u^3=$$

$$=\underline{\underline{\left(\frac{1}{3}u^2-1\right)x-\frac{2}{9}u^3}}$$

ث - کربنه، چې $f(x)$ په $P_x(3\,|\,0)$ کې غوځوي، په دې ټکي کې عمود ده.

$$f(x)=\frac{1}{9}x^3-x \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{3}x^2-1 \qquad P_x(3\,|\,0) \Rightarrow x_0=3$$

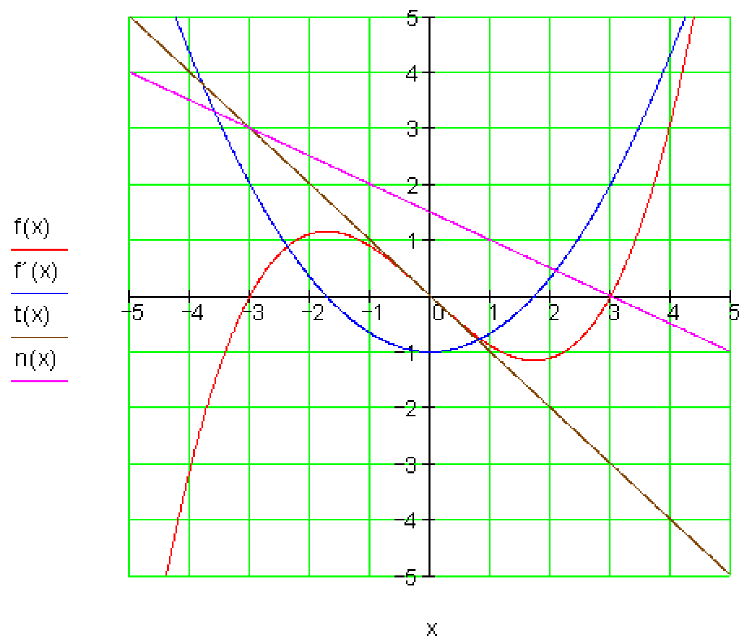
$$n(x)=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)+f(x_0)$$

$$f'(x_0)=f'(3)=\frac{1}{3}\cdot 9-1=3-1=2$$

$$f(x_0)=f(3)=\frac{1}{9}\cdot 27-3=3-3=0$$

$$n(x)=-\frac{1}{2}(x-3)+0=\underline{\underline{-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}}}$$

ث - ګرافونه:



دریم: لف- د f(x) ګراف د y محور سره سیومتري دی، ځکه چې فقط جوړه یا جفت اکسپوننت رامنځ ته کیږي.

ب -

$$f(x)=\frac{1}{32}x^4-\frac{3}{4}x^2+\frac{9}{2}\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{8}x^3-\frac{3}{2}x\Rightarrow f''(x)=\frac{3}{8}x^2-\frac{3}{2}$$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{1}{8}x^3-\frac{3}{2}x=0\Leftrightarrow x\left(\frac{1}{8}x^2-\frac{3}{2}\right)=0\Rightarrow x_1=0$$

$$\frac{1}{8}x^2-\frac{3}{2}=0\Leftrightarrow\frac{1}{8}x^2=\frac{3}{2}\Leftrightarrow x^2=12\Leftrightarrow x_{2/3}=\pm\sqrt{12}$$

x1= 0 او $x_{2,3}=\pm\sqrt{12}$ ځایونه دي، د پروت یا افقي محور سره.

$$f''(x_1)=f''(0)=-\frac{3}{2}<0\Rightarrow \text{rel. Max. bei } x_1=0$$

$$f''(x_{2/3})=f''\left(\pm\sqrt{12}\right)=\frac{3}{8}\cdot 12-\frac{3}{2}=\frac{36}{8}-\frac{3}{2}=2>0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{rel. Min. bei } x_{2/3} = \pm\sqrt{12}$$

$$f(x_1) = f(0) = \frac{9}{2} \qquad f(x_{2/3}) = \frac{1}{32}\cdot 144 - \frac{3}{4}\cdot 12 + \frac{9}{2} = 0$$

$$P_{max}(0\,|\,4{,}5) \qquad P_{min1}\left(-\sqrt{12} \approx -3{,}46\,|\,0\right) \qquad P_{min2}\left(\sqrt{12} \approx 3{,}46\,|\,0\right)$$

پ –

$$f(x) = \frac{1}{32}x^4 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{9}{2} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{2}x \Rightarrow f''(x) = \frac{3}{8}x^2 - \frac{3}{2} \Rightarrow f'''(x) = \frac{3}{4}x$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{8}x^2 - \frac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{8}x^2 = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x_{1/2} = \pm 2$$

$f_{1,2} = \pm 2$ ممکنه اوړونټکي یا د انعطاف ټکي دي.

$$f'''(x_{1/2}) = f'''(\pm 2) = \frac{3}{4}\cdot(\pm 2) \neq 0 \Rightarrow$$

له دې لاسته راځي، چې د انعطاف ټکي په $x_{1/2} = \pm 2$ کې.

$$f(x_{1/2}) = f(\pm 2) = \frac{1}{32}\cdot 16 - \frac{3}{4}\cdot 4 + \frac{9}{2} = \frac{1}{2} - 3 + \frac{9}{2} = 2$$

$P_{w1}(-2\,|\,2) \qquad P_{w2}(2\,|\,2)$ د انعطاف ټکي دي

د انعطاف تانجنت

$$x_0 = -2 \Rightarrow f(x_0) = f(-2) = 2 \qquad f'(x_0) = f'(-2) = -\frac{1}{8}\cdot 8 + \frac{3}{2}\cdot 2 = 2$$

$$t_{-1}(x) = 2(x+2) + 2 = \underline{\underline{2x+6}}$$

$$x_0 = 2 \Rightarrow f(x_0) = f(2) = 2 \qquad f'(x_0) = f'(2) = \frac{1}{8}\cdot 8 - \frac{3}{2}\cdot 2 = -2$$

$$t_2(x) = -2(x-2) + 2 = \underline{\underline{-2x+6}}$$

ت –

$$f(0)=\frac{9}{2}\Rightarrow \underline{\underline{P_y\left(0\,|\,\frac{9}{2}\right)}}$$

$$f(x)=0\Leftrightarrow \frac{1}{32}x^4-\frac{3}{4}x^2+\frac{9}{2}=0$$ (بي يا دوه مربع مساوات)

$$x^2=z\Rightarrow \frac{1}{32}z^2-\frac{3}{4}z+\frac{9}{2}=0|\cdot 32\Leftrightarrow z^2-24z+144=0$$

$$p=-24\qquad q=144\qquad \Rightarrow D=144-144=0\Rightarrow \sqrt{D}=\sqrt{0}=0$$

$$z_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D}=12\pm 0=12$$

$$z_1=x^2\Leftrightarrow 12=x^2\Leftrightarrow x_{1/2}=\pm\sqrt{12}\qquad z_2=x^2\Leftrightarrow 12=x^2\Leftrightarrow x_{3/4}=\pm\sqrt{12}$$

$$\underline{\underline{P_{x1/3}\left(\sqrt{12}\approx 3{,}46\,|\,0\right)}}\qquad \underline{\underline{P_{x1/3}\left(-\sqrt{12}\approx -3{,}46\,|\,0\right)}}$$

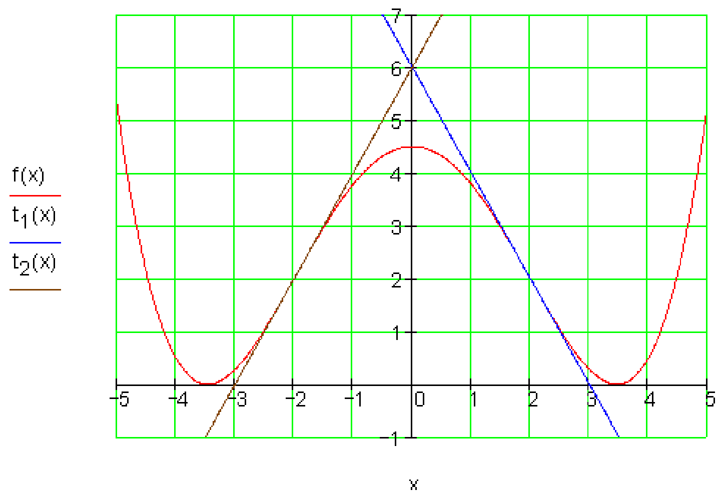
ټ – تابع ارزښتونه د جبشميري سره شميرل شوي.

د سيومتري دلايلو په بنسټ بسيا کوي، چې فقط د x مثبت ارزښت لپاره د تابع ارزښتونه وشميرل شي.

x	-5	-4	$-\sqrt{12}\approx -3{,}46$	-3	-2	-1	0
$f(x)$	$5{,}28$	$0{,}5$	0	$0{,}28$	2	$3{,}78$	$4{,}5$

x	1	2	3	$\sqrt{12}\approx 3{,}46$	4	5
$f(x)$	$3{,}78$	2	$0{,}28$	0	$0{,}5$	$5{,}28$

ث-ګرافونه:



ج - په $]-\sqrt{12};0[$ کې کله يوغږيز جګېدونکی په $]-\infty;-\sqrt{12}[$ کې کره يوغږيز ټيټېدونکی

په $]\sqrt{12};\infty[$ کې کله يوغږيز جګيدونکی په $]0;\sqrt{12}[$ کې کره يوغږيز ټيټيدونکی

د يوغږيزوالي حالت له ګراف څخه لوستل شوی.

تغيرات په افراطي ټکو کې رامنځ ته کيږي.

ح - په $]-\infty;-2[$ کې کينه انحنا يا کږرالی په $]-2;2[$ کې ښی انحنا

په $]2;\infty[$ کې کينه انحنا يا کږوالی

د انحنا يا کږوالي حالت له ګراف څخه ولوستل شو.

تغير په اوړون ټکو يا د انعطاف ټکو کې صورت نيسي

خ-

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} x^4 \left[\frac{1}{32} - \underbrace{\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{x^2}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{9}{2}\cdot\frac{1}{x^4}}_{\to 0} \right] = \infty$$

$$\lim_{x\to \infty} f(x) = \lim_{x\to \infty} x^4 \left[\frac{1}{32} - \underbrace{\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{x^2}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{9}{2}\cdot\frac{1}{x^4}}_{0} \right] = \infty$$

خلورم: د تابع مساوات شمېرنه :

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$$\begin{array}{llllll}
P_1(-1|7) & \Rightarrow & f(-1) = 7 & \Leftrightarrow & -1a_3 + 1a_2 - 1a_1 + 1a_0 & = 7 \\
P_2(-2|6) & \Rightarrow & f(-2) = 6 & \Leftrightarrow & -8a_3 + 4a_2 - 2a_1 + 1a_0 & = 6 \\
P_3(3|1) & \Rightarrow & f(3) = 1 & \Leftrightarrow & 27a_3 + 9a_2 + 3a_1 + 1a_0 & = 1 \\
P_4(-3|2) & \Rightarrow & f(-3) = 2 & \Leftrightarrow & -27a_3 + 9a_2 - 3a_1 + 1a_0 & = 2
\end{array}$$

a_0	a_1	a_2	a_3		
1	−1	1	−1	7	
1	−2	4	−8	6	II − I
1	3	9	27	1	III − I
1	−3	9	−27	2	IV − I
1	−1	1	−1	7	
0	−1	3	−7	−1	
0	4	8	28	−6	III + 4·II
0	−2	8	−26	−9	IV − 2·II
1	−1	1	−1	7	
0	−1	3	−7	−1	
0	0	20	0	−10	
0	0	2	−12	−7	

له اخرنئ دوه ليکو لرو:

$$20a_2 = -10 \mid 20 \Leftrightarrow a_2 = -\frac{1}{2}$$

$$2a_2 - 12a_3 = -7 \Rightarrow 2 \cdot \frac{1}{2} - 12a_3 = -7 \mid +1$$

$$\Leftrightarrow -12a_3 = -6 \mid (-12) \Leftrightarrow a_3 = \frac{1}{2}$$

$$-a_1 + 3a_2 - 7a_3 = -1 \Leftrightarrow -a_1 + 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - 7 \cdot \frac{1}{2} = -1$$

$$\Leftrightarrow -a_1 - \frac{3}{2} - \frac{7}{2} = -1 \Leftrightarrow -a_1 - 5 = -1 \mid +5$$

$$\Leftrightarrow -a_1 = 4 \mid \cdot (-1) \Leftrightarrow a_1 = -4$$

$$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 = 7 \Leftrightarrow a_0 + 4 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 7$$

$$\Leftrightarrow a_0 + 3 = 7 \mid -3 \Leftrightarrow a_0 = 4$$

$$\underline{\underline{f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 4x + 4}}$$

افراطي ټکی:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 4x + 4 \Rightarrow f'(x) = \frac{3}{2}x^2 - x - 4 \Rightarrow f''(x) = 3x - 1$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{2}x^2 - x - 4 = 0 \mid \cdot \frac{2}{3} \Leftrightarrow x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{8}{3} = 0 \Rightarrow p = -\frac{2}{3};\ q = -\frac{8}{3}$$

$$D = -\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \frac{1}{9} + \frac{8}{3} = \frac{25}{9} \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{\frac{25}{9}} = \frac{5}{3}$$

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left| \begin{array}{l} x_1 = \frac{1}{3} + \frac{5}{3} = 2 \\ x_2 = \frac{1}{3} - \frac{5}{3} = -\frac{4}{3} \end{array} \right.$$

$$f''(x_1) = f''(2) = 3 \cdot 2 - 1 = 6 - 1 = 5 > 0 \Rightarrow \text{rel. Min. bei } x_1 = 2$$

$$f''(x_2) = f''\left(-\frac{4}{3}\right) = 3 \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) - 1 = -4 - 1 = -5 < 0 \Rightarrow \text{rel. Max. bei } x_2 = -\frac{4}{3}$$

$$f(x_1) = f(2) = \frac{1}{2} \cdot 8 - \frac{1}{2} \cdot 4 - 4 \cdot 2 + 4 = 4 - 2 - 8 + 4 = -2 \Rightarrow \underline{\underline{P_{Min}(2 \mid -2)}}$$

$$f(x_2)=f\left(-\frac{4}{3}\right)=-\frac{1}{2}\cdot\frac{64}{27}-\frac{1}{2}\cdot\frac{16}{9}+4\cdot\frac{4}{3}+4=-\frac{64}{54}-\frac{16}{18}+\frac{16}{3}+4$$

$$=-\frac{64}{54}-\frac{48}{54}+\frac{288}{54}+\frac{216}{54}=\frac{392}{54}=\frac{196}{27}\Rightarrow \underline{\underline{P_{Max}\left(-\frac{4}{3}\approx 1{,}33\,\middle|\,\frac{196}{27}\approx 7{,}26\right)}}$$

اوړونټکي یا د انعطاف ټکي

$$f(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{2}x^2-4x+4\Rightarrow f'(x)=\frac{3}{2}x^2-x-4\Rightarrow f''(x)=3x-1\Rightarrow f'''(x)=3$$

$$f''(x)=0\Leftrightarrow 3x-1=0\,|+1\Leftrightarrow 3x=1|:3\Leftrightarrow x_w=\frac{1}{3}$$ ممکنه انعطافځایونه

$$f'''(x_w)=f'''\left(\frac{1}{3}\right)=3\neq 0\Rightarrow x_w=\frac{1}{3}$$ یو انعطاف – یا اوړونټکی دی.

$$f(x_w)=f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{27}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{9}-4\cdot\frac{1}{3}+4=\frac{1}{54}-\frac{1}{18}-\frac{4}{3}+4$$

$$=\frac{1}{54}-\frac{3}{54}-\frac{72}{54}+\frac{216}{54}=\frac{142}{54}=\frac{71}{27}\Rightarrow \underline{\underline{P_w\left(\frac{1}{3}\approx 0{,}33\,\middle|\,\frac{71}{27}\approx 2{,}63\right)}}$$

محورغوختکي: $f(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{2}x^2-4x+4 \qquad f(0)=4\Rightarrow \underline{\underline{P_y(0|4)}}$

$f(x)=0\Leftrightarrow \frac{1}{2}x^3-\frac{1}{2}x^2-4x+4=0$ لومړی صفرځای د ازمایښت له لارې. د

هورنر-شیما:

$$\begin{array}{cccccc} & & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -4 & 4 \\ x=1 & \downarrow & & \underline{\frac{1}{2}} & \underline{0} & \underline{-4} \quad f(1)=0\Rightarrow x_1=1 \\ & & \frac{1}{2} & 0 & -4 & 0 \end{array}$$

پاتې يا باقي پولينومونه:

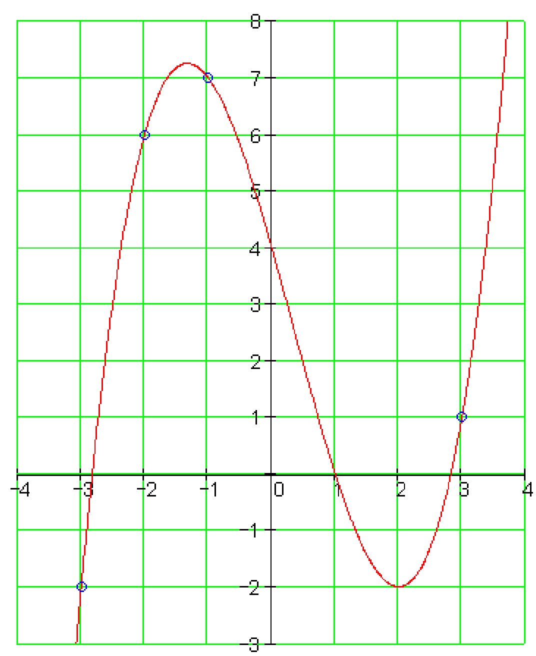
$$\frac{1}{2}x^2 - 4 = 0 \mid +4 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2 = 4 \mid \cdot 2 \Leftrightarrow x^2 = 8 \Rightarrow x_{2/3} = \pm\sqrt{8}$$

$$\underline{\underline{P_{x1}(1 \mid 0)}} \qquad \underline{\underline{P_{x2/3}\left(\pm\sqrt{8} \approx 2{,}83 \mid 0\right)}}$$

ارزښتجدول:

x	−3	−2,83	−2	−1,33	−1	0	0,33	1	2	2,83	3
f (x)	−2	0	6	7,26	7	4	2,63	0	−2	0	1

ګراف:



پوښتنې

مشتقشمیرنه د تولګي کار ته چمتووالی III

اول –

د دریمې درجې یو تام یا ټول ریښتونی یا راشنل عدد ورکړ شوی:

$$f(x) = x^3 + x^2 - 4x - 1$$

الف - مشتقتابع f'(x) معلومه کړی یا وټاکی

ب - د f'(x) تابع بیا مشتق ونیسی، چې له هغې f''(x) تابع منځ ته راشي

پ – د ارزښتجدول لاندې ارزښتونه وشمېری.

x	−3	−2,5	−2	−1,5	−1	−0,5	0	0,5	1	1,5	2
f(x)	−7	−0,38		3,88	3	1,13		−2,63	−3	−1,38	3
f'(x)	17	9,75	4	−0,25		−4,25	−4	−2,25		5,75	12
f''(x)	−16	−13	−10	−7		−1	2		8	11	14

ت - د مخه ورکړشوي وضعیه قیمتسیستم کې د f(x), f'(x) او f''(x) ګرافونه رسم کړی.

دویم – لاندې ریښتونې توابع ورکړشوي دي:

دوه الف- $f(x) = 2x^3 - 6x$ دوه ب - $f(x) = 2x^3 + 6x^2 - 4$

دوه پ - $f(x) = \frac{1}{10}x^4 - \frac{9}{5}x^2 + \frac{81}{10}$ دوه ت $f(x) = \frac{1}{5}x^4 - \frac{4}{5}x^3$

الف - الف – د سیمتري حالت په هکله ویناوې وکړی

ب- پ – ټکي د پراته تانجنت سره وشمېری

پ- پ – د محومر غوښتکي وټاکی

ت - یو څو تابع ارزښتونه وشمیرئ او ګراف یې وباسئ

دریم – یو تام ریښتونی تابع له لاندې څلور ټکو تیریږي:

درې الف - $P_1(-1|7); P_2(-2|6); P_3(3|1); P_4(-3|-2)$

درې ب $P_1(1|6); P_2(3|-4); P_3\left(-\frac{1}{2}|\frac{45}{8}\right); P_4\left(-\frac{3}{2}|-\frac{77}{8}\right)$

الف – د تابعمساوات وشمېرئ ب – د سیمتري حالت باندې یوه وینا وکړئ

پ – د پراته یا افقي تانجنت سره ټکي وشمېرئ

ت – محورغوڅټکي وټاکی یا معلوم کړئ.

یو څو تابع ارزښتونه وشمیرئ او ګراف یې رسم کړئ.

څلورم – د فوټبال لوبه کې د ازاده توپ وهلو د $f(x)$ تابع په نږدې توګه د توپ د الوتنې منحني یا ګږه ده.

$$f(x) = -\frac{1}{288}x^3 + \frac{1}{16}x^2 ; x > 0$$

الف – توپ کوم ماکسیمال جګوالی غوره کوي او د شوټټکي څخه څومره لرې دی؟

ب – توپ د شوټټکي څخه څومره لرې ښېرته په ځمکه لویږي؟

پ - نه متره لرې د لوبډلې مقاومتدیوال دی، هغه دوه متره جګ دی. ایا توپ له دې اوړي؟

ت - توپ د ګلکرښې څخه په متره جګوالي الوزي. ازاده شوټ له کوم واټن څخه وهل شوی دی؟

پنځم – د لاندې توابعو لپاره کمښتویش وشمېرئ

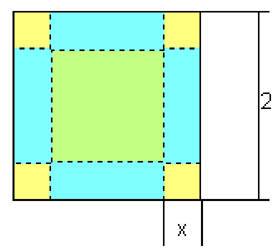
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

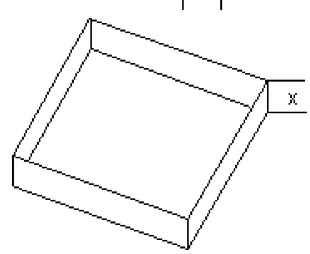
او د یوه رسم په کتنه یې تولیزه معنا روښانه کړئ.

الف - $f(x)=x^3$ ب - $f(x)=\frac{1}{3}x^2$

شپږم – د یوه مربع کارتون څخه یو کوټئ یا مکعب بې له پوښ جوړېږي، چې د اړخونو یا ضلعو اوږدوالی یې 26 دئ او جګوالی یې x دئ ، جوړېږي.

الف – د تابع ترم یې وټاکئ، چې حجم V د x په واکوالي یا تابعیت کې ښايي.



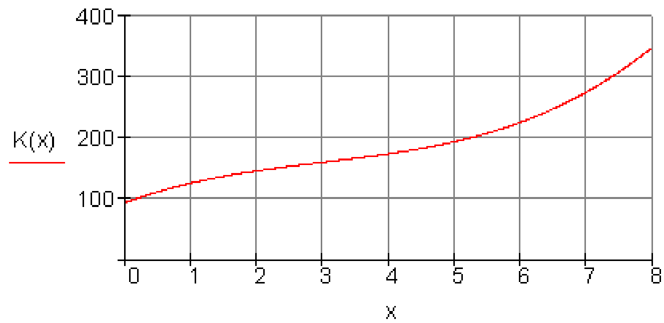


ب – ګراف یې وکاږئ او تقریبي ماکسیمال حجم یې معلوم کړئ

اوم – د یوه رغتون د د لګښتتابع K(x) د ناروغانو ګڼون یا تعداد x او ټولو لګښتونو ترمنځ انځوروي.

x = 1 دې د 100 ناروغانو په معنا، y = 1 د د روځې د زرو یورو / € 1000 Tag په معنا وي.

$$K(x)=x^3-9x^2+40x+94$$



الف - لګښتتابع په خپله کتابچه کې ولیکئ

ب – د لګښت تابع مشتق د مشتقلګښت یا هم پوله لګښت بولو. دا لګښت زیاتېده ښايي، چې ناروغانو تعداد په واک کې ده. (د $K(x)$ چګېدنه). $K'(x)$ وټاکئ او په کواوردیناتسیستم کې یې ګراف رسمکړئ.

پ – د ناروغانو کوم تعداد سره د لګښت زیاتېدل خورا کم دي؟

دا ارزښت وشمېرئ.

حلونه

مفصل حلونه

د ټولګې کار لپاره مشتقشمیرنه III

لومړئ:

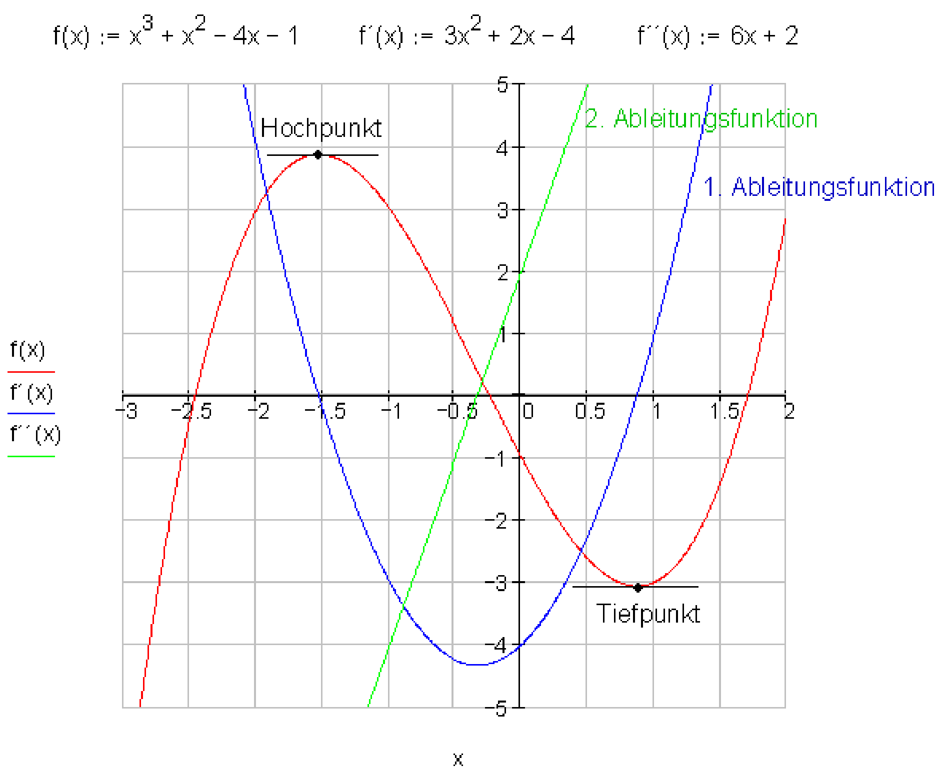
الف - $f'(x) = 3x^2 + 2x - 4$

ب - $f''(x) = 6x + 2$

پ – ارزښتچدول

x	−3	−2,5	−2	−1,5	−1	−0,5	0	0,5	1	1,5	2
f (x)	−7	−0,38	3	3,88	3	1,13	−1	−2,63	−3	−1,38	3
f '(x)	17	9,75	4	−0,25	−3	−4,25	−4	−2,25	1	5,75	12
f "(x)	−16	−13	−10	−7	−4	−1	2	5	8	11	14

ت ګراف:



د پورته پینتو له کینې: جګتکی، دویم مشتق، لومړی مشتق، تیتکی

ت-

جګتکی(نسبي ماکس) پروت تانجنت دویم مشتق له صفر کوچنی	$f'(x) = 0$ $f''(x) < 0$
ټیټتکی(نسبي مین) پروت تانجنت دویم مشتق له صفر لوي.	$f'(x) = 0$ $f''(x) < 0$

دویم. یو: الف-

$$f(x) = 2x^3 - 6x \Rightarrow$$

تکی سیمتري، ځکه چې فقط ناجوړه(طاق) اکسپوننت لرو.

صدق کوي: $f(-x) = -f(x)$

ب – $f(x) = 2x^3 - 6x \Rightarrow f'(x) = 6x^2 - 6$

د پروت محور سره تکي.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x^2 - 6 = 0 | +6$$
$$\Leftrightarrow 6x^2 = 6 | : 6$$
$$\Leftrightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x_1 = 1; x_2 = -1$$

د x1 = 1 او x2 = -1 په ځایونو کې افقي تانجنتونه شتون لري.

د y وضعیه قیمت شمیرنه

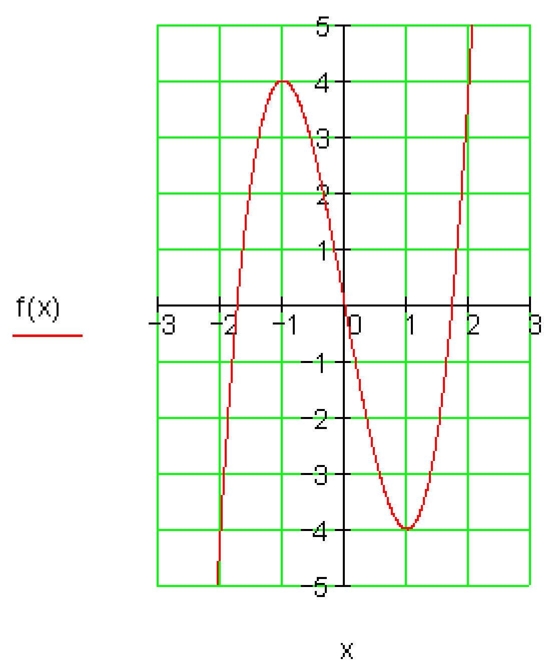
$$f(x_1) = f(1) = 2 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 = -4 \qquad \Rightarrow \underline{\underline{P_1(1|-4)}}$$
$$f(x_2) = f(-1) = 2 \cdot (-1)^2 - 6 \cdot (-1) = 4 \Rightarrow \underline{\underline{P_2(-1|4)}}$$

پ – د $f(x) = 2x^3 - 6x$ محورغوڅتکي

$$P_y : f(0) = 0 \Rightarrow \underline{\underline{P_y(0|0)}}$$

صفرځايونه:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^3 - 6x = 0$$
$$\Leftrightarrow x\left(2x^2 - 6\right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$
$$2x^2 - 6 = 0 | +6$$
$$\Leftrightarrow 2x^2 = 6 | : 2$$
$$\Leftrightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x_{2/3} = \pm\sqrt{3}$$
$$\underline{\underline{P_{x1}(0|0) ; P_{x2}\left(\sqrt{3}|0\right) ; P_{x3}\left(-\sqrt{3}|0\right)}}$$



ت-

$$f(x) = 2x^3 - 6x$$
$$x = 2 \Rightarrow f(2) = 2\cdot 2^3 - 6\cdot 2 = 4$$
$$x = -2 \Rightarrow f(-2) = -f(2) = -4$$

د سیومتري ټکي له امله

x	−2	−1,73	−1	0	1	1,73	2
f(x)	−4	0	4	0	−4	0	4

دویم. دوه:

الف –

$$f(x) = 2x^3 + 6x^2 - 4 \Rightarrow$$

سیومتري مخ ته نه لرو، ځکه چې نه فقط جوړه(جفت) یا فقط ناجوړه (طاق) اکسپوننتونه لرو.

ب –

$$f(x) = 2x^3 + 6x^2 - 4 \Rightarrow f'(x) = 6x^2 + 12x$$

ټکي له پراته تانجنت سره.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x^2 + 12x = 0$$
$$\Leftrightarrow x(6x+12) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$
$$6x + 12 = 0 | -12$$
$$\Leftrightarrow 6x = -12 | : 6$$
$$\Leftrightarrow x_2 = -2$$

د $x_1 = 0$ und $x_2 = -2$ او په ځایونو کې پراته تانجنتونه شتون لري.

د y وضعیه قیمتونو شمیرنه

$$f(x_1) = f(0) = -4 \qquad \Rightarrow \underline{\underline{P_1(0|-4)}}$$

$$f(x_2) = f(-2) = 2(-2)^3 + 6(-2)^2 - 4 = 4 \Rightarrow \underline{\underline{P_2(-2|4)}}$$

پ –

د $f(x) = 2x^3 + 6x^2 - 4$ ا محورغوځتکي یا د تقاطع ټکي.

$$P_y : f(0) = -4 \Rightarrow P_y(0|-4)$$

صفرځایونه

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^3 + 6x^2 - 4 = 0$$

یو صفرځاس د ازمایینت له لارې پیداکوو.

$$x = 1 \Rightarrow f(1) = 2 \cdot 1^3 + 6 \cdot 1^2 - 4 = 4$$

$$x = -1 \Rightarrow f(-1) = 2 \cdot (-1)^3 + 6 \cdot (-1)^2 - 4 = 0 \text{ I}$$

د x1 = -1 سره صفرځاي.

د هورنر شیما له لارې پولینوم راکښته یا کمه ونه

$$\begin{array}{rcrrrr} & & 2 & 6 & 0 & -4 \\ x = -1 & \downarrow & & \underline{-2} & \underline{-4} & \underline{4} \\ & & 2 & 4 & -4 & 0 \end{array}$$

یا کم شوی پولینوم:

$$2x^2 + 4x - 4 = 0 |: 2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x - 2 = 0$$

$$p = 2 \,;\, q = -2 \Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 1 + 2 = 3 \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{3}$$

$$x_{2/3} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left| \begin{array}{l} x_2 = -1 + \sqrt{3} \\ x_3 = -1 - \sqrt{3} \end{array} \right.$$

$$P_{x1}(-1|0)\,;\, P_{x2}\left(-1+\sqrt{3}\,|\,0\right)\,;\, P_{x3}\left(-1-\sqrt{3}\,|\,0\right)$$

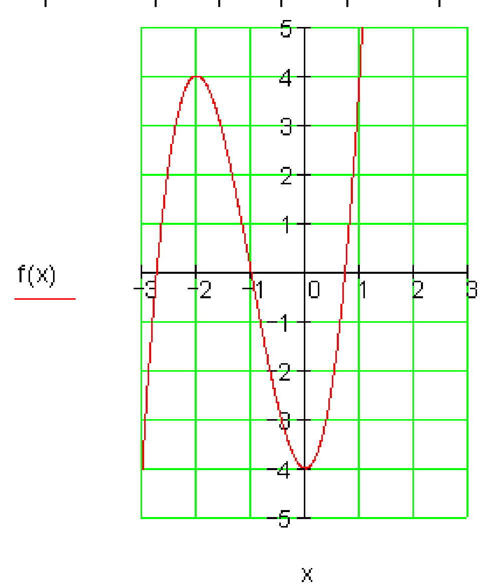
$$\text{bzw. } P_{x1}(-1|0)\,;\, P_{x2}(0{,}73\,|\,0)\,;\, P_{x3}(-2{,}73\,|\,0)$$

ت –

$$f(x) = 2x^3 + 6x^2 - 4$$

$$x = -3 \Rightarrow f(-3) = 2\cdot(-3)^3 + 6\cdot(-3)^2 - 4 = -4$$

x	−3	−2,73	−2	−1	0	0,73	1
f(x)	−4	0	4	0	−4	0	4



دویم. درې:

الف -

$$f(x)=\frac{1}{10}x^4-\frac{9}{5}x^2+\frac{81}{10}\Rightarrow$$

محورسیومتري، حکه چې حوړه یا جفت اکسپوننت مخ ته لرو.

صدق کوي: $f(-x)=f(x)$

ب –

$$f(x)=\frac{1}{10}x^4-\frac{9}{5}x^2+\frac{81}{10}\Rightarrow f'(x)=\frac{4}{10}x^3-\frac{18}{5}x$$

د پراته یا افقي تانجنت سره غوښتکي.

$$\begin{aligned}
f'(x)=0 &\Leftrightarrow \frac{4}{10}x^3-\frac{18}{5}x=0\\
&\Leftrightarrow x\left(\frac{4}{10}x^2-\frac{18}{5}\right)=0\Rightarrow x_1=0\\
&\frac{4}{10}x^2-\frac{18}{5}=0\,\Big|+\frac{18}{5}\\
&\Leftrightarrow \frac{4}{10}x^2=\frac{18}{5}\,\Big|:\frac{4}{10}\\
&\Leftrightarrow x^2=9\Rightarrow x_{2/3}=\pm 3
\end{aligned}$$

په $x_1=0$ und $x_2=3$ und $x_3=-3$ ځایونو کې پراته تانجنتونه شتون لري

د y وضعیه قیمتونو کواوردیناتونه شمیرل.

$$f(x_1)=f(0)=\frac{81}{10} \qquad \Rightarrow \underline{P_1\left(0\,\Big|\,\frac{81}{10}\right)}\ \text{bzw. } P_1(0\,|\,8{,}1)$$

$$f(x_2) = f(3) = \frac{1}{10}\cdot 3^4 - \frac{9}{5}\cdot 3^2 + \frac{81}{10} = 0 \Rightarrow \underline{\underline{P_2(3\,|\,0)}}$$

د محورسیومتري له امله لاس ته راځي $f(x_2) = f(-3) = f(3) = 0$ $\underline{\underline{P_3(-3\,|\,0)}}$

پ –

د $f(x) = \frac{1}{10}x^4 - \frac{9}{5}x^2 + \frac{81}{10}$ محورغوڅټکي یا د محور د تقاطع ټکي

$$P_y : f(0) = \frac{81}{10} \Rightarrow \underline{\underline{P_y\left(0\,\middle|\,\frac{81}{10}\right)}}$$

همداسې $P_y(0\,|\,8{,}1)$.

صفرځایونه

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{10}x^4 - \frac{9}{5}x^2 + \frac{81}{10} = 0 \text{ Substitution: } x^2 = z$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{10}z^2 - \frac{9}{5}z + \frac{81}{10} = 0 \,|\cdot 10$$

$$\Leftrightarrow z^2 - 18z + 81 = 0$$

$$p = -18\ ;\ q = 81 \Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 81 - 81 = 0$$

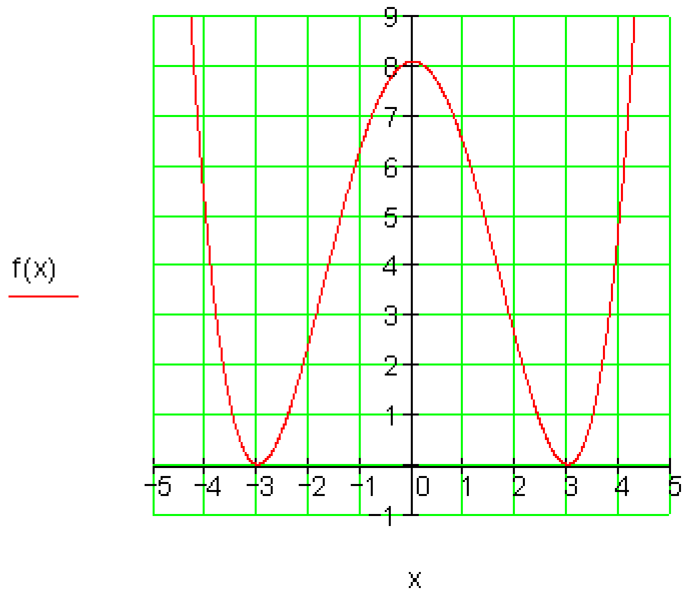
$$z_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left|\begin{array}{l} z_1 = 9 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x_{1/2} = \pm 3 \\ z_2 = 9 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x_{3/4} = \pm 3 \end{array}\right.$$

$\underline{\underline{P_{x1/3}(3\,|\,0)\,;\,P_{x2/4}(-3\,|\,0)}}$ دواړه ډبل صفرځایونه دي

دا په دې معنا، چې ګراف په دې ځای کې د x محور لمسوي.

داسې لمس ټکي یا مماسونه تل هم ټکي دي د پراته تانجنت سره.

ت – ځیره چې وروسته وی بنه به وی، خو څه وکړو. مخ باید برابر شي.



$$f(x) = \frac{1}{10}x^4 - \frac{9}{5}x^2 + \frac{81}{10}$$

$$x = 1 \Rightarrow f(1) = \frac{1}{10}\cdot 1^4 - \frac{9}{5}\cdot 1^2 + \frac{81}{10} = 6{,}4$$

د محور سیمتري له امله $x = -1 \Rightarrow f(-1) = f(1) = 6{,}4$

$$x = 2 \Rightarrow f(2) = \frac{1}{10}\cdot 2^4 - \frac{9}{5}\cdot 2^2 + \frac{81}{10} = 2{,}5$$

د محور سیومتري له امله $x = -2 \Rightarrow f(-2) = f(2) = 2{,}5$

$$x = 4 \Rightarrow f(4) = \frac{1}{10}\cdot 4^4 - \frac{9}{5}\cdot 4^2 + \frac{81}{10} = 4{,}9$$

د محور سیومتري له امله $x = -4 \Rightarrow f(-4) = f(4) = 4{,}9$

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
f(x)	4,9	0	2,5	6,4	8,1	6,4	2,5	0	4,9

دویم. څلور:

الف –

$$f(x) = \frac{1}{5}x^4 - \frac{4}{5}x^3 \Rightarrow$$

یعنې له دې لرو چې: سیومتري مو مخ ته نه ده پرته،

ځکه چې نه فقط جفت(جوړه) او نه فقط طاق(ناجوړه) اکسپوننتونه مخ ته لرو.

ب –

$$f(x) = \frac{1}{5}x^4 - \frac{4}{5}x^3 \Rightarrow f'(x) = \frac{4}{5}x^3 - \frac{12}{5}x^2$$

ټکي د پراته تانجنت سره

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Leftrightarrow \frac{4}{5}x^3 - \frac{12}{5}x^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2\left(\frac{4}{5}x - \frac{12}{5}\right) = 0 \Rightarrow x_{1/2} = 0 \\ &\frac{4}{5}x - \frac{12}{5} = 0 \,\Big|\, + \frac{12}{5} \\ &\Leftrightarrow \frac{4}{5}x = \frac{12}{5} \,\Big|\, : \frac{4}{5} \\ &\Leftrightarrow x = 3 \Rightarrow x_3 = 3 \end{aligned}$$

د $x_{1/2} = 0$ او $x_3 = 3$ ځایونو کې پروت تانجنت شته.

د y کواوردیناتو شمېرل.

$$f(x_1) = f(x_2) = f(0) = 0 \qquad \Rightarrow \underline{\underline{P_{1/2}(0|0)}}$$

$$f(x_3) = f(3) = \frac{1}{5}\cdot 3^4 - \frac{4}{5}\cdot 3^3 = -5{,}4 \Rightarrow \underline{\underline{P_3(3|-5{,}4)}}$$

پ ــ

د $f(x) = \frac{1}{5}x^4 - \frac{4}{5}x^3$ محورغوڅتکي

$$P_y : f(0) = 0 \Rightarrow \underline{\underline{P_y(0|0)}}$$

صفرځايونه

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{5}x^4 - \frac{4}{5}x^3 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^3\left(\frac{1}{5}x - \frac{4}{5}\right) = 0 \Rightarrow x_{1/2/3} = 0$$

$$\frac{1}{5}x - \frac{4}{5} = 0 \,\Big|\, + \frac{4}{5}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{5}x = \frac{4}{5} \,\Big|\cdot 5$$

$$\Leftrightarrow x = 4 \Rightarrow x_4 = 4$$

$$\underline{\underline{P_{x1/2/3}(0|0)\,;\,P_{x4}(4|0)}}$$

ت ــ

$$f(x) = \frac{1}{5}x^4 - \frac{4}{5}x^3$$

$$x = 1 \Rightarrow f(1) = \frac{1}{5}\cdot 1^4 - \frac{4}{5}\cdot 1^3 = -0{,}6$$

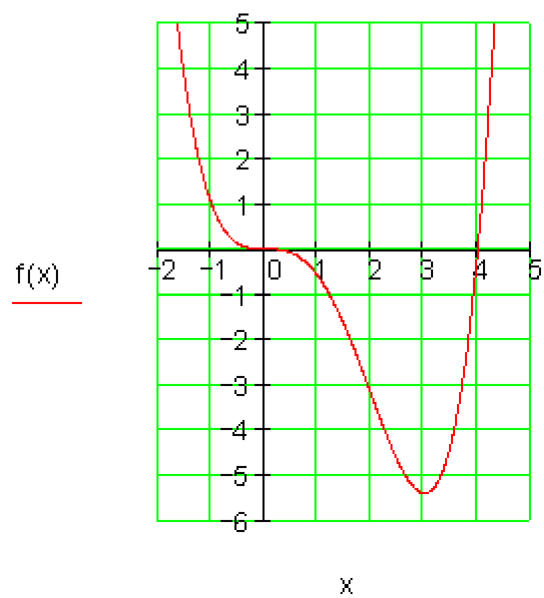
$$x=-1\Rightarrow f(-1)=\frac{1}{5}\cdot(-1)^4-\frac{4}{5}\cdot(-1)^3=1$$

$$x=2\Rightarrow f(2)=\frac{1}{5}\cdot 2^4-\frac{4}{5}\cdot 2^3=-3{,}2$$

$$x=-2\Rightarrow f(-2)=\frac{1}{5}\cdot(-2)^4-\frac{4}{5}\cdot(-2)^3=9{,}6$$

$$x=5\Rightarrow f(5)=\frac{1}{5}\cdot 5^4-\frac{4}{5}\cdot 5^3=25$$

x	−2	−1	0	1	2	3	4	5
f(x)	9,6	1	0	−0,6	−3,2	−5,4	0	25



یادونه : د $x = 0$ په ځای کې د $f(x)$ گراف پروت تآنجنت لري، مگر هلته نه چګېکی پروت دی او نه ټیټ ټکی.

دآ په دې معنآ، جي د پرآته تآنجنت سره ځآيونه حتمي نه ده چي افراطي ځآيونه وي. مگر آفراطي ټکي پروت تآنجنت لري.

دريم. يو:

الف-

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$
$$P_1(-1|7) \Rightarrow f(-1) = -1\cdot a_3 + 1\cdot a_2 - 1\cdot a_1 + 1\cdot a_0 = 7$$
$$P_2(-2|6) \Rightarrow f(-2) = -8\cdot a_3 + 4\cdot a_2 - 2\cdot a_1 + 1\cdot a_0 = 6$$
$$P_3(3|1) \Rightarrow f(3) = 27\cdot a_3 + 9\cdot a_2 + 3\cdot a_1 + 1\cdot a_0 = 1$$
$$P_4(-3|-2) \Rightarrow f(-3) = -27\cdot a_3 + 9\cdot a_2 - 3\cdot a_1 + 1\cdot a_0 = -2$$

a_0	a_1	a_2	a_3		
1	−1	1	−1	7	
1	−2	4	−8	6	II − I
1	3	9	27	1	III − I
1	3	9	−27	−2	IV − I
1	−1	1	−1	7	
0	−1	3	−7	−1	$\|\cdot(-1)$
0	4	8	28	−6	$\|:4$
0	−2	8	−26	−9	$\|:(-2)$
1	−1	1	−1	7	
0	1	−3	7	1	
0	1	2	7	−1,5	III − II
0	1	−4	13	4,5	IV − II
1	−1	1	−1	7	
0	1	−3	7	1	
0	0	5	0	−2,5	
0	0	−1	6	3,5	

$$5a_2 = -2{,}5 \,|:5$$
$$\Leftrightarrow \boxed{a_2 = -0{,}5 = -\frac{1}{2}}$$
$$-a_2 + 6a_3 = 3{,}5$$
$$\Leftrightarrow 0{,}5 + 6a_3 = 3{,}5 \,|-0{,}5$$
$$\Leftrightarrow 6a_3 = 3 \,|:6$$
$$\Leftrightarrow \boxed{a_3 = 0{,}5 = \frac{1}{2}}$$
$$a_1 - 3a_2 + 7a_3 = 1$$
$$\Leftrightarrow a_1 + 1{,}5 + 3{,}5 = 1$$
$$\Leftrightarrow \boxed{a_1 = 1 - 1{,}5 - 3{,}5 = -4}$$
$$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 = 7$$
$$\Leftrightarrow a_0 + 4 - 0{,}5 - 0{,}5 = 7$$
$$\Leftrightarrow \boxed{a_0 = 7 - 4 + 0{,}5 + 0{,}5 = 4}$$

$$\underline{\underline{f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 4x + 4}}$$

ب -

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 4x + 4 \Rightarrow$$

سیومتري مخ ته نه لرو

ځکه چې نه فقط جوړه او نه فقط ناجوړه یعنې طاق آکسپوننت شتون لري

پ –

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 4x + 4 \Rightarrow f'(x) = \frac{3}{2}x^2 - x - 4$$

ټکي د پرآته تآنجنت سره

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{2}x^2 - x - 4 = 0 | : \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{8}{3} = 0$$

$$p = -\frac{2}{3}\,;\ q = -\frac{8}{3} \Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \frac{1}{9} + \frac{24}{9} = \frac{25}{9} \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{\frac{25}{9}} = \frac{5}{3}$$

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left| \begin{array}{l} x_1 = \frac{1}{3} + \frac{5}{3} = \frac{6}{3} = 2 \\ x_2 = \frac{1}{3} - \frac{5}{3} = -\frac{4}{3} \end{array} \right.$$

د $x_1 = 2$ آو $x_2 = -4/3$ په ځآی کې پرآته تآنجنتونه شتون لري

د Y کوآوردیناتتونه و شمیری

$$x_1) = f(2) = \frac{1}{2} \cdot 2^3 - \frac{1}{2} \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 + 4 = -2 \qquad \Rightarrow \underline{\underline{P_1(2|-2)}}$$

$$x_2) = f\left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{4}{3}\right)^3 - \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{4}{3}\right)^2 - 4 \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) + 4 = \frac{196}{27} \Rightarrow$$

$$P_2\left(-\frac{4}{3}\approx -1{,}33\;\middle|\;\frac{196}{27}\approx 7{,}26\right)$$

ت-

د $f(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{2}x^2-4x+4$ محور غوځتکی یا نقطه تقاطع

$$P_y : f(0)=4 \Rightarrow P_y(0|4)$$

صفرځای وه

$$f(x)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^3-\frac{1}{2}x^2-4x+4=0$$

$$\begin{array}{cccccc|l} & 1/2 & -1/2 & -4 & 4 & \\ x=1 & \downarrow & \underline{1/2} & \underline{0} & -4 & \Rightarrow x_1 = 1 \text{ ist Nullstelle} \\ & 1/2 & 0 & -4 & 0 & \end{array}$$

پاتي يا باقي پولينوم:

$$\frac{1}{2}x^2-4=0|+4$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2=4|\cdot 2$$

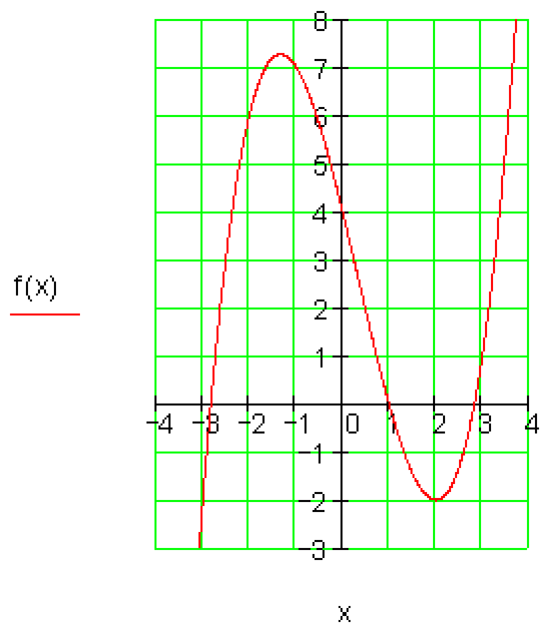
$$\Leftrightarrow x^2=8 \Rightarrow x_{2/3}=\pm\sqrt{8}$$

$$P_{x1}(1|0);\ P_{x2}\left(\sqrt{8}\approx 2{,}83|0\right);\ P_{x3}\left(-\sqrt{8}\approx -2{,}83|0\right)$$

ټ-

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 4x + 4$$

x	−3	−2,83	−2	−1,33	−1	0	1	2	2,83	3
f(x)	−2	0	6	7,26	7	4	0	−2	0	1



دریم. دوه:

الف-

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$$P_1(1|6) \qquad \Rightarrow f(1) = 1\cdot a_3 + 1\cdot a_2 + 1\cdot a_1 + 1\cdot a_0 = 6$$

$$P_2(3|-4) \qquad \Rightarrow f(3) = 27\cdot a_3 + 9\cdot a_2 + 3\cdot a_1 + 1\cdot a_0 = -4$$

$$P_3\left(-\frac{1}{2}\middle|\frac{45}{8}\right) \qquad \Rightarrow f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{8}\cdot a_3 + \frac{1}{4}\cdot a_2 - \frac{1}{2}\cdot a_1 + 1\cdot a_0 = \frac{45}{8}$$

$$P_3\left(-\frac{3}{2}\middle|-\frac{77}{8}\right) \qquad \Rightarrow f\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{27}{8}\cdot a_3 + \frac{9}{4}\cdot a_2 - \frac{3}{2}\cdot a_1 + 1\cdot a_0 = -\frac{77}{8}$$

a_0	a_1	a_2	a_3		
1	1	1	1	6	$\vert \cdot 8$
1	3	9	27	−4	$\vert \cdot 8$
1	−1/2	1/4	−1/8	45/8	$\vert \cdot 8$
1	−3/2	9/4	−27/8	−77/8	$\vert \cdot 8$
8	8	8	8	48	
8	24	72	216	−32	II − I
8	−4	2	−1	45	III − I
8	−12	18	−27	−77	IV − I
8	8	8	8	48	$\vert : 8$
0	16	64	208	−80	$\vert : 4$
0	−12	−6	−9	−3	$\vert : 3$
0	−20	10	−35	−125	$\vert : 5$
1	1	1	1	6	
0	4	16	52	−20	$\vert : 4$
0	−4	−2	−3	−1	III + II
0	−4	2	−7	−25	IV + II
1	1	1	1	6	
0	1	4	13	−5	
0	0	14	49	−21	$\vert : 7$
0	0	18	45	−45	$\vert : 9$
1	1	1	1	6	
0	1	4	13	−5	
0	0	2	7	−3	
0	0	2	5	−5	IV − III
1	1	1	1	6	
0	1	4	13	−5	
0	0	2	7	−3	
0	0	0	−2	−2	

$$-2a_3 = -2 \,|: (-2)$$
$$\Leftrightarrow \boxed{a_3 = 1}$$

$$2a_2 + 7a_3 = -3$$
$$\Leftrightarrow 2a_2 + 7 = -3 \,| -7$$
$$\Leftrightarrow 2a_2 = -10 \,|: 2$$
$$\Leftrightarrow \boxed{a_2 = -5}$$

$$a_1 + 4a_2 + 13a_3 = -5$$
$$\Leftrightarrow a_1 - 20 + 13 = -5 \,| +7$$
$$\Leftrightarrow \boxed{a_1 = 2}$$

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 6$$
$$\Leftrightarrow a_0 + 2 - 5 + 1 = 6 \,| +2$$
$$\Leftrightarrow \boxed{a_0 = 8}$$

$$f(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 8$$

ب –

$$f(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 8 \Rightarrow$$

سيومتري مخ ته نه لرو، ځكه چې نه فقط جفت او نه فقط طاق اكسپوننتونه مخ ته لرو.

پ –

$$f(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 8 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 10x + 2$$

تكي د افقي تانجنت سره

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 10x + 2 = 0 |: 3$$

$$\Leftrightarrow x^2 - \frac{10}{3}x + \frac{2}{3} = 0$$

$$p = -\frac{10}{3}\,;\; q = \frac{2}{3} \Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \frac{25}{9} - \frac{6}{9} = \frac{19}{9} \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{\frac{19}{9}}$$

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left| \begin{array}{l} x_1 = \frac{5}{3} + \sqrt{\frac{19}{3}} \approx 3,12 \\ x_2 = \frac{5}{3} - \sqrt{\frac{19}{3}} \approx 0,214 \end{array} \right.$$

په $x_1 = \frac{5}{3} + \sqrt{\frac{19}{3}}$ او $x_2 = \frac{5}{3} - \sqrt{\frac{19}{3}}$ ځايونو كې پراته تانجنتونه شته.

د y كواورديناتو شميرنه

$$f(x_1) = f\left(\frac{5}{3} + \sqrt{\frac{19}{3}}\right) \approx f(3,12) \approx -4,06 \qquad \Rightarrow \underline{\underline{P_1(3,12\,|\,-4,06)}}$$

$$f(x_1) = f\left(\frac{5}{3} - \sqrt{\frac{19}{3}}\right) \approx f(0,214) \approx 8,21 \qquad \Rightarrow \underline{\underline{P_2(0,214\,|\,8,21)}}$$

ت –

د $f(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 8$ محورغوڅتکي

$$P_y : f(0) = 8 \Rightarrow \underline{\underline{P_y(0|8)}}$$

صفرځایونه

لاني الماني: لومړی صفرځای

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - 5x^2 + 2x + 8 = 0$$

$$\begin{array}{cccccl|l}
 & & 1 & -5 & 2 & 8 & \\
x = 1 & \downarrow & & \underline{1} & \underline{-4} & \underline{-2} & \\
 & & 1 & -4 & -2 & 6 & \\
\hline
 & & 1 & -5 & 2 & 8 & \Rightarrow x_1 = -1 \text{ ist Nullstelle} \\
x = -1 & \downarrow & & \underline{-1} & \underline{6} & \underline{-8} & \\
 & & 1 & -6 & 8 & 0 &
\end{array}$$

پاتې یا پاتې پولینومونه: $x^2 - 6x + 8 = 0$

$$p = -6\,;\ q = 8 \Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 9 - 8 = 1 \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{1} = 1$$

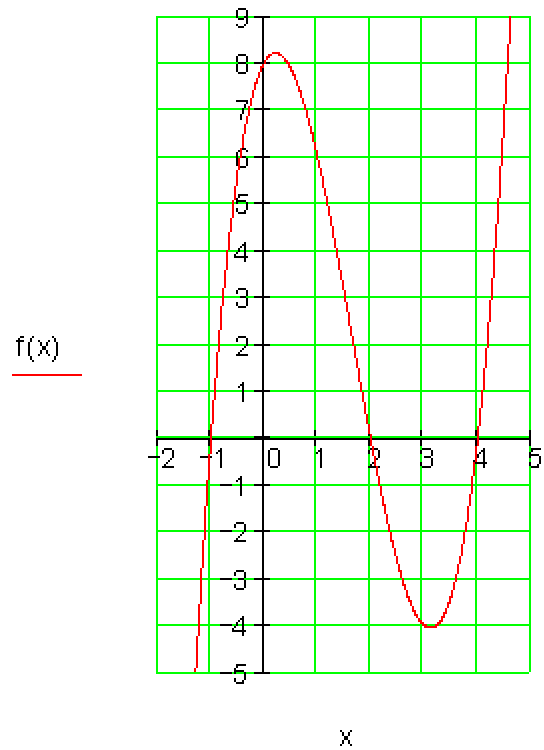
$$x_{2/3} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left| \begin{array}{l} x_2 = 3 + 1 = 4 \\ x_3 = 3 - 1 = 2 \end{array} \right.$$

$$\underline{\underline{P_{x1}(-1|0)\,;\ P_{x2}(4|0)\,;\ P_{x3}(2|0)}}$$

ټ-

$$f(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 8$$

x	−1,5	−1	−0,5	0	0,21	1	2	3	3,12	4
f(x)	−9,6	0	5,6	8	8,21	6	0	−4	−4,06	0



خلورم: الف –

$$f(x) = -\frac{1}{288}x^3 + \frac{1}{16}x^2 \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{96}x^2 + \frac{1}{8}x$$

د توپ ماکسیمال جګوالی د الوتنې لار جګټکی دی، له دې امله یو ټکی دی، د پراته تانجنت سره.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{96}x^2 + \frac{1}{8}x = 0$$

$$\Leftrightarrow x\left(-\frac{1}{96}x + \frac{1}{8}\right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

$$-\frac{1}{96}x + \frac{1}{8} = 0 | + \frac{1}{96}x$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{8} = \frac{1}{96}x \mid \cdot 96$$
$$\Leftrightarrow 12 = x \Rightarrow x_2 = 12$$
$$f(12) = -\frac{1}{288}\cdot 12^3 + \frac{1}{16}\cdot 12^2 = 3 \Rightarrow P(12 \mid 3)$$

جګتیکی دی.

توپ یو د درې متره ماکسیمال جګوالي ته رسیږي. او له دې امله د شوتیتکي یا وهلتیکي څخه 12 متره لرې دی.

ب–

$$f(x) = -\frac{1}{288}x^3 + \frac{1}{16}x^2$$

د صفرځایونه غواړو پیدا کړو.

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{288}x^3 + \frac{1}{16}x^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow x^2\left(-\frac{1}{288}x + \frac{1}{16}\right) = 0 \Rightarrow x_{1/2} = 0$$
$$-\frac{1}{288}x + \frac{1}{16} = 0 \mid +\frac{1}{288}x$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{16} = \frac{1}{288}x \mid \cdot 288$$
$$\Leftrightarrow \frac{288}{16} = x \Rightarrow x_3 = 18$$

توپ د وهلتیکي څخه په 18 متره لرېوالي بېرته ځمکې ته راالویږي

پ – $f(x) = -\frac{1}{288}x^3 + \frac{1}{16}x^2$

د شوټتکي څخه په نهه متره لري د توپ جګوالی دې پیدا شي.

$$f(9) = -\frac{1}{288} \cdot 9^3 + \frac{1}{16} \cdot 9^2 \approx 2,53$$

توپ د مقاومت دیوال څخه چې دوه متره لرې دی په 2,53 m جګوالي پورته الوزي.

ت –

$$f(x) = -\frac{1}{288}x^3 + \frac{1}{16}x^2$$

غواړو ځاي پیدا کړو چې هلته توپ الوتنه دوه متره جګوالی لري.

$$f(x) = 2 \Leftrightarrow -\frac{1}{288}x^3 + \frac{1}{16}x^2 = 2$$

د ازمائېنت له لارې حل:

$$f(15) \approx 2,344$$
$$f(15,5) \approx 2,086$$
$$f(15,6) \approx 2,028$$
$$\boxed{f(15,65) \approx 1,998}$$

ازاد شوټ یا ازاد وهل له۱،۹۹۸

پنځم: الف –

$$f(x) = x^3 \qquad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$
$$f(x_0 + \Delta x) = (x_0 + \Delta x)^3 = x_0^3 + 3x_0^2 \cdot \Delta x + 3x_0 \cdot (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$$
$$f(x_0) = x_0^3$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x_0^3 + 3x_0^2 \cdot \Delta x + 3x_0 \cdot (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - x_0^3}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3x_0^2 \cdot \Delta x + 3x_0 \cdot (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x\left(3x_0^2 + 3x_0 \cdot \Delta x + (\Delta x)^2\right)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} 3x_0^2 + \underbrace{3x_0 \cdot \Delta x}_{\to 0} + \underbrace{(\Delta x)^2}_{\to 0} = 3x_0^2$$

ب –

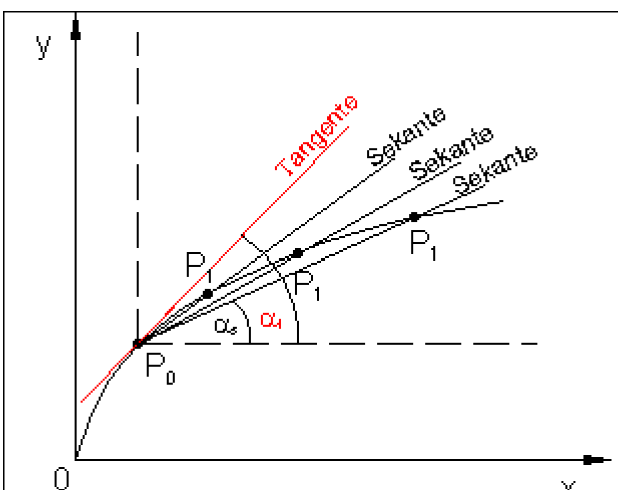
$$f(x) = \frac{1}{3}x^2 \qquad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

$$f(x_0+\Delta x) = \frac{1}{3}(x_0+\Delta x)^2 = \frac{1}{3}\left(x_0^2 + 2x_0 \cdot \Delta x + (\Delta x)^2\right)$$

$$f(x_0) = \frac{1}{3}x_0^2$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{1}{3}\left(x_0^2 + 2x_0 \cdot \Delta x + (\Delta x)^2\right) - \frac{1}{3}x_0^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{1}{3}\left(2x_0 \cdot \Delta x + (\Delta x)^2\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{1}{3}\Delta x(2x_0 + \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{3}\left(2x_0 + \underbrace{\Delta x}_{\to 0}\right) = \frac{2}{3}x_0$$



که P_1 و P_0 ته ورنزدې کيښول شي، نو د نوي سيکانت جګوالي به په دې ځاي کې د تابع جګوالی د P_0 په ټکي کې وي، چې بايد پيدا شي. که دا کار په کلکه مخ ته يووړل شي او ټکی P_1 تل زيات و P_0ټکي ته نږدې شي، نو د پولې ځاي په ځبر

یوه کربنه لاس ته راځي، دا د تابعګراف فقط په ټکي P_0 کې لمسوي. په ټکي P_0 کې د تابعګراف تانجنت. د تانجنت جګوالی په دې ټکيP_0 کې ټیک د تابع جګوالی پهP_0 کې.
شیپږم:

الف – حجم یا ډکی : V = l.b.h

$$\left.\begin{array}{l} l = 26-2x \\ b = 26-2x \\ h = x \end{array}\right| \Rightarrow V(x) = (26-2x)(26-2x)x = 4x^3 - 104x^2 + 676x$$

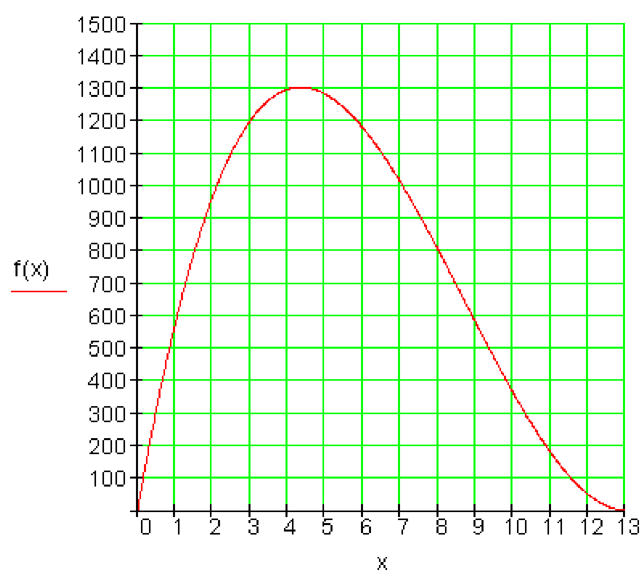
د کوتې حجم یا ډکی د یوه دریمې درجې ترم له لارې ټاکل کیږي:

$V(x) = 4x^3 - 104x^2 + 676x$

ب – $V(x) = 4x^3 - 104x^2 + 676x$

ارزښت جدول:

x	0	2	4	6	8	10	12
f(x)	0	968	1296	1176	800	360	48



ماکسيمال حجم يا ډکی په جګتکي کې، له دې لاس ته راځي: پروت يا افقي تانجنت.

$$V(x) = 4x^3 - 104x^2 + 676x \Rightarrow V'(x) = 12x^2 - 208x + 676$$

$$V'(x) = 0 \Leftrightarrow 12x^2 - 208x + 676 = 0$$

د دې مربع مساوات حل څخه لرو: $t\ x_1 = 13;\ x_2 = 13/3 \approx 4{,}33$

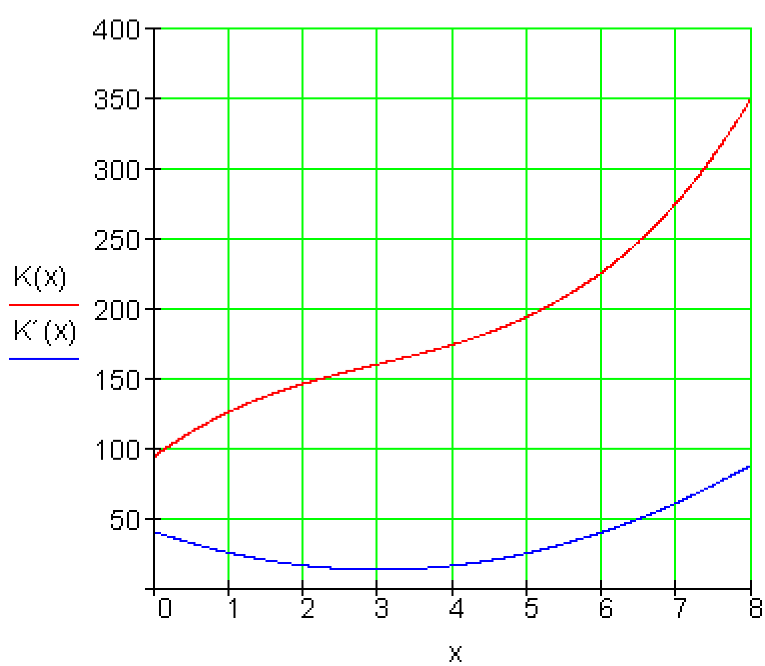
$$V\left(\frac{13}{3}\right) \approx 1302$$

د x=13/3 cm له ټاکلو د کوتۍ حجم يا ډکی $v \sim 1302m^3$ ماکسيمال دی.

حجم يا ډکی دی:

اووم:

الف \ ب



$$K(x) = x^3 - 9x^2 + 40x + 94 \Rightarrow K'(x) = 3x^2 - 18x + 40$$

ارزښتجدول

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
K'(x)	40	25	16	13	16	25	40	61	88

پ –

د K'(x) ګراف یو پارابول دی، هغه چې د لګښت زیاتوالی ښايي. د لګښت خورا کم زیاتوالی د پارابول له ککرتکي یا رآس تکي سره لاس ته راځي.

$$K(x) = x^3 - 9x^2 + 40x + 94 \Rightarrow K'(x) = 3x^2 - 18x + 40 \Rightarrow K''(x) = 6x - 18$$

د پارابول په ککرتکي کې پروت تانجنت.

$$K''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - 18 = 0 \Rightarrow x = 3$$
$$K'(3) = 13$$

د x = 3 ناروغانو ګڼون یا تعداد (300 ناروغان) د لګښت زیاتوالی له نورو خورا کم دی. K'(3) = 13 په دې معنا چې 130 € / Tag په روځ . یا په بل ډول ویل شوي: که په دې ناروغانو ته یو بل راشي، دا په دې معنا چې x = 3,01 . د یوه ورزیات ناروغ لپاره لګښت دی: K(3,01) - K(3) = 160,13 - 160 = 0,13

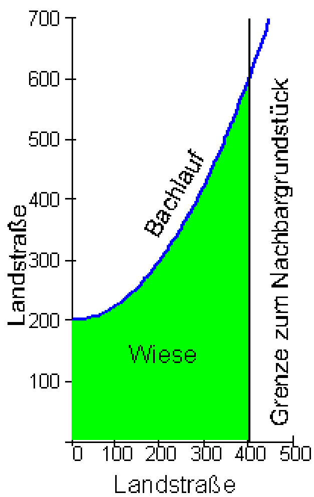
که دا ارزښتونه له 1000 سره ضرب شي، نو د روځې لاس ته ترې 130 €/Tag یورو راځي.

انتیګرالشمیرنه

انتیګرالشمیرنې لپاره پیل راوړنې

موږ د څمککچپوهنې یا هندسې له لارې بلد یو چې د کرښو رابند تنونو یا جسمونوسطحه او ډکی یا حجم څنګه وشمیرو.
که یوه سطحه له ګړې (-کرښې) رابنده وي، نو څه باید وشي؟
دا مو انتیګرال شمیرنې ته رابولي.

پیلبیلګه

	دا څیره شوی چمن خرڅیږي. له پورته لور د ویالې را بند دی او له ښې لور د ګاونډي ځمکه ده او کیڼ لور ته کوڅه او له کښته لور هم د یوې کوڅې را بند دی. ددی لپاره چې چمن وپلورل شي، باید سطحه وپیژندل شي. د پلورونکی لپاره سطحه باید نزدې پوره مګر هیڅکله کمه ونه شمیرل شي. اخستونکی هم د ځان لپاره فکر کوي، چې پیسې باید ورکړي، خو هیڅکله ځمکه د اصل څخه زیات ونه شمیرل شي.

وروسته له دې چې رانیوونکي او پلورونکي د چمن سطحه معلومه کړه، دواړه د پیسو په تادیه سره یوځای کیږي او په دې هکله موافقه کوي.

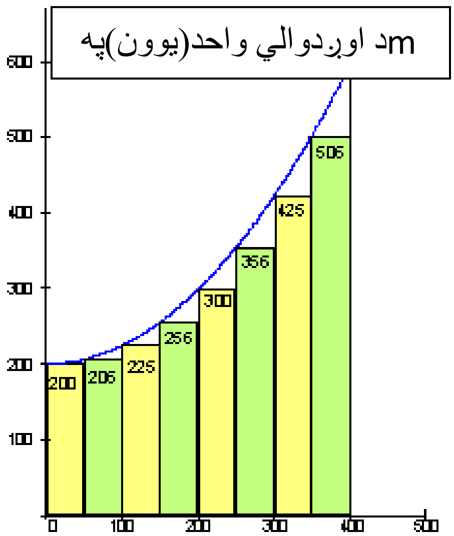
$f(x)=\frac{1}{400}x^2+200$ د تابع مساوات لري.

د اخستونکي له پاره ممکنه حل.

هره توټه(مستطیل پټی) 50m سره وره ده او په رسم کې ورکړشوی جګوالی لري. د ټولو پټیو، سطحه یو ځای شمیرو.

$$200\cdot 50=10000$$
$$206\cdot 50=10300$$
$$225\cdot 50=11250$$
$$256\cdot 50=12800$$
$$300\cdot 50=15000$$
$$256\cdot 50=12800$$
$$425\cdot 50=21250$$
$$506\cdot 50=25300$$
$$\underline{123700}$$

ځمکه په لاندې ډول په اوږدو توټو(پټیو) توټه کیږي

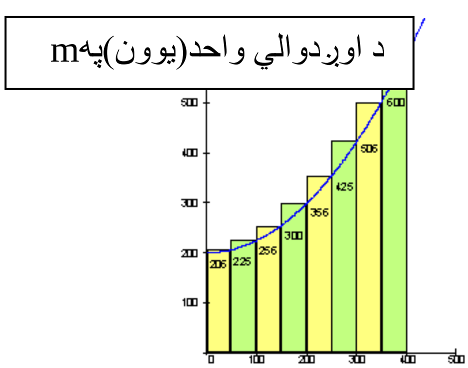


د اخستونکي لپاره ټوله سطحه نږدې $123700\ m^2$ ده.

د پلورونکي له پاره ممکنه حل:

هره توټه(پټی) 50m سورلري او په رسم کې ورکړشوی جګوالی لري. د ټولو پټیو سطحه یوځای شمیرو.

$$206\cdot 50=10300$$
$$225\cdot 50=11250$$
$$256\cdot 50=12800$$
$$300\cdot 50=15000$$
$$356\cdot 50=12800$$
$$425\cdot 50=21250$$
$$506\cdot 50=25300$$
$$600\cdot 50=30000$$
$$\underline{143700}$$



دا د پلورونکي له پاره د ټولې سطحې مساحت نږدې **$143700\ m^2$** دی.
اخستونکی او پلورونکی باید د دواړو قیمتونو ،،منځ،، ته راشي، دا په دې معنا چې دواړه د قیمتونو منځ ارزښت یو بل سره ومني. یعنې د سطحې منځ ارزښت، چې دی:

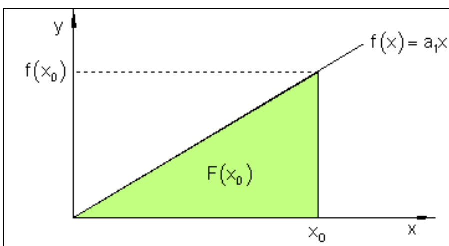
$$\frac{123700\ +143700}{2}=133700\ unt^2$$

دا به وروسته د تاکلي انتیګرال برخه (په مخ) کې وشمیرو، چې ریښتونی ارزښت یې $133333\bar{3}m^2$ دی.

د اخستونکي په بیلګه کې دا ډول شمیرنه ،،**لاندنی جمعي جوړول**،، بلل کیږي.
د پلورونکي په بیلګه دا ډول شمیرنه،، **پورتنی جمعي جوړول**،، بلل کیږي.
دا د سطحې ریښتونی ارزښت یو چیرته په دا منځ کې پروت دی.
باید ددې له پاره یوه لار پیدا کړو، چې رښتونی ارزښت ترې لاس ته راشي. ددې کار لپاره لږ نوره د چمتووالي لار شته.

سطحه او لومړنی تابع:

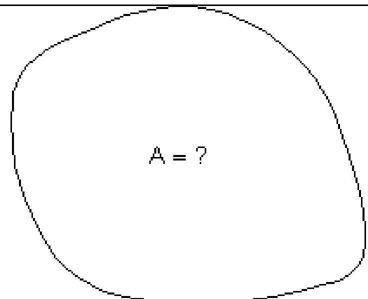
سطحې تابع ته ترمخ راوړنه:

د تابع $f(x)=a_1x$ ګراف په کارتیزي وضعیه سیستم (پروت ولاړسیستم) په سرچینه کې یوه کرښه انځوروي. یو تابع غواړو پیدا کړو، چې د ګراف او x -محور ترمنځ، د x_0 په واکوالي یا تابعیت کې سطحه په ګوته کوي. دا چې دا جوړه شوې سطحه یو مثلث دی، نو حل یې د مثلث د سطحې فرمول په مرسته $A=\frac{g\cdot h}{2}$ ساده پیدا کیږي: زموږ د مسألې لپاره متحوله داسې تغیرو: $A\rightarrow F(x_0);\ g\rightarrow x_0\,;\ h\rightarrow f(x_0)=a_1x_0$	 $F(x_0)=\frac{x_0\cdot f(x_0)}{2}$ د $f(x_0)=a_1x_0$ سره په لاندې ډول دی: $F(x_0)=\frac{x_0\cdot a_1x_0}{2}=\frac{a_1}{2}x_0^2$

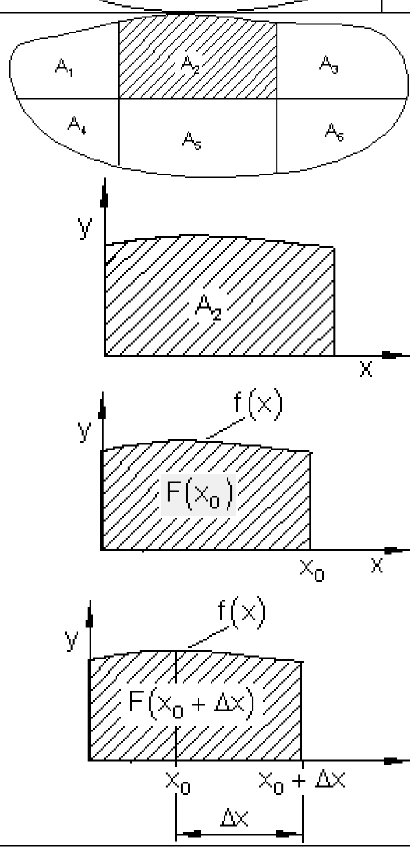
تابع $F(x_0)$ د گراف او د x - محور ترمنځ سطحه د x_0 په واكوالي(تابعيت) كې تشريح كوي يا ښايي. موږ دا تابع د **سطحې تابع** بولو.

د سطحې پرابلم:

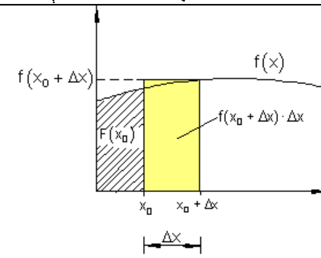
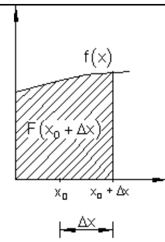
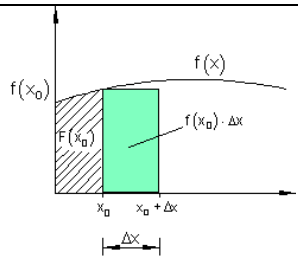
پخوانيو يونانيانو ته دا د منحني څخه رابندې سطحې شميرلو اصول معلوم وو.
دا دمشتق شميرنه، چې موږ ورسره اوس سر او كار لرو، ډېر وروسته (د اوه لسمې پيړۍپاي كې) د طبيعي علومو پوهانو لايبنيځ او نيوټون له خوا رامنځ ته (اختراع) شو.



هره لـه كږوكرښـو رابنـده سطحه پـه پـاى ډېـرو پلونو(قدمونو)، چې په هغې كې فقط يوه يوه كږه كرښه رامنځ ته كيږي.
نورې ټولې رابندوني سيده كرښيزې دي.
هره يوه د سطحې برخه(د بيلګې په توګه دلته $\mathbf{A_2}$) كېدى شي د وضعيه قيمتونو سيستم كې د يوې سطحې په څېر انځور شي، چې د كږې كرښې او پروت محور ترمنځ پرته وي.
كه له كږوكرښو رابند گراف د$f(x)$ متمادي تابع وي، نو پوښتنه رامنځ ته كيږي، چې ايا يو تابع شته چې د افقي(پروت) محورارزښت x_0 په سطحه $F(x_0)$ تنظيم كړي، لكه په پيلبېلګه كې؟
كه داسې يو تابعF شتون ولري، او سطحه $F(x_0)$ چې د x_0 افقي محورارزښت تنظيم وي، نو بايد د افقي(پروت) محور ارزښت $(x_0+\Delta x)$په سطحه $F(x_0+\Delta x)$ باندې تنظيم كړاى شي.



په يوه څلورضلعي(مستطيل) کې د سطحې رابندول:
يا د سطحۍ په کوتيو کې بندول:

 د منحني لاندې په نخښه شوې سطحه د ريښتونې سطحې څخه لويه ده	 $F(x_0+\Delta x)$ ريښتونې سطحه ده.	 د منحني لاندې په نخښه شوې سطحه له ريښتونې سطحې څخه کوچنۍ ده.

که د سطحې پټې (يا کوچنې مستطيلونه)هرڅومره کوچنې شي، په همغه اندازه د اصلي سطحې د مساحت څخه يې توپير کميږي.
دا اړودوالی د رياضياتو له مخې په لاندې توګه فرمول بندي کيدی شي:

$F(x_0)+f(x_0+\Delta x)\cdot\Delta x$	$F(x_0+\Delta x)$	$F(x_0)+f(x_0)\cdot\Delta x$

دا مو دې لاندې نابرابرونونويا نامساواتو ته راهڅوي

$$F(x_0)+f(x_0)\cdot\Delta x \le F(x_0+\Delta x) \le F(x_0)+f(x_0+\Delta x)\cdot\Delta x \quad |\, F(x_0)$$

$$\Leftrightarrow f(x_0)\cdot\Delta x \le F(x_0+\Delta x)-F(x_0) \le f(x_0+\Delta x)\cdot\Delta x \quad |:\Delta x$$

$$\Leftrightarrow f(x_0) \le \frac{F(x_0+\Delta x)-F(x_0)}{\Delta x} \le f(x_0+\Delta x)$$

ليميټ يې نيسو(پوله يې پيدا کوو):

$$\lim_{\Delta x\to 0} f(x_0) \le \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \le \lim_{\Delta x\to 0} f(x_0+\Delta x)$$

$$f(x_0) \le F'(x_0) \le f(x_0)$$

$$f(x_0) \le F'(x_0) = f(x_0)$$

نو لرو: $\underline{\underline{F'(x_0)=f(x_0)}}$

دا په دې معنا، چې د سطحې F(x) مشتق د کږې کرښې د تابع ارزښت $f(x_0)$ سره په x_0 ځای کې برابر دی.

....

موږ ليکو:

$$\boxed{F'(x)=\frac{dF(x)}{dx}=f(x)} \quad \text{يا} \quad F'(x_0)=\frac{dF(x_0)}{dx}=f(x_0)$$

که موږ بريالي شو، داسي يو تـابع F(x) پيداکړو چې مشتق يـې د رابندې کړې f(x)تـابع وي، نو F(x) د سطحي تابع دی.
که موږ يو تابع د لومړني تابع څخه رابيل کړويعني مشتق يـې ونيسو، نـو دا مشتق کـول بولو. د يوې سطحي تابع پيدا کول په روښانه توګه ددې کړنلارې برعکس دی.

سرې کړی شي فورمال ووايي:
د يوې سطحې مساحت تابع، چې پيداکړو، دا معنا لري چې انتيګرالول يې شميرو.
د يوه ساده توان تـابع پـه بيلګه د احساس لـه مخـې يـوه لار پيداکيدی شـي، چې دا څنګه ايتيګرالوي.

توانتابع :

$$f(x)=x^3 \quad \Rightarrow f'(x)=3\cdot x^{3-1}=3x^2$$

مشتق په دې معنا چې: اکسپوننت په يو کميږي او پوتنځتابع د زاړه پوتنځ سره ضربيږي.
انتيګرالونه (زياتونه ياورګډونه) په دې معنا چې: اکسپوننت په يو جګيږي اوپوتنځتابع په نوي اګسپوننت وېشل کيږي.

دا همدا اوس ازمايو:

پوتنځتابع:

$$f(x)=3x^2 \quad \Rightarrow F(x)=\frac{3}{2+1}x^{2+1}=\underline{\underline{x^3}}$$

تابع F(x) د f(x) بنسټتابع (لومړنی تابع يا ساده تابع) بلل کيږي، ځکه چې f(x) له F(x) څخه لاس ته ارځي يا را پيداکيږي يا راځيږي.

ناټاکلی انتيګرال

....
و به ګورو، چې نا ټاکلی انتیګرال د لومړنی تابع لپاره بل نوم دی.

که دیوې ورکړ شوې f(x) تابع F(x) لومړنی تابع، یعنې F(x) وپېژنو، نو د یوې ثابتې c د ور جمع کولوسره د f(x) د ټولو لومړنیو توابعو سټ G لاسته راوړو(c په خوښه یو حقیقي عدد دی).
مونږ د f(x) تابع د F(x) لومړنی تابع ټاکنه یا اینتګرلونه هم بولو او ددې له پاره لیکو:

$$\frac{dF}{dx} = f\,(x) \quad \Leftrightarrow \quad dF\,(x) = f\,(x)dx \quad \Leftrightarrow \quad F\,(x) = \int dF\,(x) = \int f\,(x)dx$$

نو لرو : $F(x) = \int f(x)\,d\,x$

دا تراوسه فورمال لیکندود وو. اوس دا ژوند ته رابولو.
مونږ لومړنی توابع پلټو

بیلګه:
لومړنی تابع F(x) دې پیدا شي، چې مشتق یې f(x) = 2x دی.
قاعده داسي ده $F(x) = \int f(x)dx = \int 2x\,dx$

مونږ ازمایو:
$F(x) = x^2$ ځکه چې $F'(x) = 2x = f(x)$
$F(x) = x^2 + 2$ ځکه چې $F'(x) = 2x = f(x)$. په ټولیزه توګه باور لري:
$F(x) = x^2 + C$ ځکه چې په هرحالت کې لرو: $F'(x) = 2x = f(x)$
دواړه توابع په ثابت غړي کې یو له بل توپیر لري. دوی همغه مشتق لري، ځکه چې د مشتق سره
هغه ثابت عدد له منځه ځي. له دې امله باید دې خپلې لار ته تغیر ورکړو.
قاعده(لار): باور لري: $\boxed{\int f(x)d\,x = F(x) + C}$
د لومړنیو توابعو سټ(ډېری)

د بنسټ توابعو لومړني توابع

بیلګه ښایي، چې د تابع f(x) لپاره نه یواځې یو لومړنی تابع بلکې ناپای ډېر توابع شته، چې یواځې ثابت عدد کې یو له بل سره توپیر لري، چې دا د f(x) د لومړنییو توابعو سټ بولو.

....

بیلګه

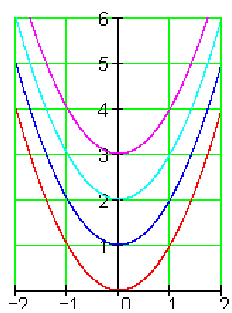
یو لومړنیتابع $F(x)$ دې پیدا شي، چې د هغه مشتق $f(x) = 3x^2 + 2$ وي.

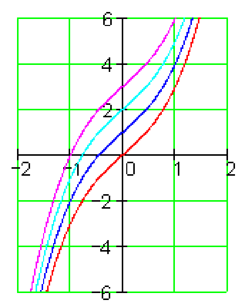
$F(x) = x^3 + 2x + C$ ، ځکه چې $F'(x) = 3x^2 + 2 = f(x)$

د ټولو لومړنیو توابعو ډېرۍ دې د منحنیو ډلې په څېر انځور شي، چې فقط ثابتو عددونو کې یو له بل توپیر لري.

ددې لپاره دې د ګرافونو لاندې دوه بیلګې وکتل شي.

$F(x) = x^3 + 2x + C$ $\qquad$ $F(x) = x^2 + C$





تمرینونه

لومړنی تابع پیداکړی

لاندی$f(x)$ توابعو ته لومړنی توابع$F(x)$ پیداکړی

اول - $f(x) = x^2$ $\qquad$ دویم - $f(x) = 2x^2$ $\qquad$ دریم - $f(x) = x$

څلورم - $f(x) = -2x$ $\qquad$ پمځم - $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ $\qquad$ شپږم - $f(x) = -\frac{1}{4}x$

اوم - $f(x) = x^3$ $\qquad$ اتم - $f(x) = 4x^3$ $\qquad$ نهم - $f(x) = 2$

لسم - $f(x) = x + 1$ $\qquad$ یولسم - $f(x) = x^2 + x - 3$ $\qquad$ دولسم - $f(x) = x^n ; n \in \mathbb{N}$

حلونه

تمرينونه انتيګرال ششميرنه

مفصل حلونه

اول - $f(x)=x^2 \Rightarrow F(x)=\frac{1}{3}x^3+C$ ازماييښت

$$F'(x)=\frac{1}{3}\cdot 3x^2+0=x^2=f(x)$$

دوري $f(x)=2x^2 \Rightarrow F(x)=\frac{2}{3}x^3+C$ ازمايښت

$$:F'(x)=\frac{2}{3}\cdot 3x^2+0=2x^2=f(x)$$

دريم - $f(x)=x \Rightarrow F(x)=\frac{1}{2}x^2+C$ ازمايښت

$$F'(x)=\frac{1}{2}\cdot 2x^1+0=x=f(x)$$

څلورم - $f(x)=-2x \Rightarrow F(x)=-x^2+C$ ازمايښت

$$:F'(x)=-2x^1+0=-2x=f(x)$$

پنځم - $f(x)=\frac{1}{2}x^2 \Rightarrow F(x)=\frac{1}{6}x^3+C$ ازمايښت

$$F'(x)=\frac{1}{6}\cdot 3x^2+0=\frac{1}{2}x^2=f(x)$$

شپږم - $f(x)=-\frac{1}{4}x \Rightarrow F(x)=-\frac{1}{8}x^2+C$ ازمايښت

$$F'(x)=-\frac{1}{8}\cdot 2x^1+0=-\frac{1}{4}x=f(x)$$

اوم - $f(x)=x^3 \Rightarrow F(x)=\frac{1}{4}x^4+C$ ازمايينت

$$F'(x)=\frac{1}{4}\cdot 4x^3+0=x^3=f(x)$$

اتم - $f(x)=4x^3 \Rightarrow F(x)=x^4+C$ ازمايينت

$$F'(x)=4x^3+0=4x^3=f(x)$$

نهم - $f(x)=2 \Rightarrow F(x)=2x+C$ ازمايينت $: F'(x)=2\cdot 1x^0+0=2=f(x)$

لسم - $f(x)=x+1 \Rightarrow F(x)=\frac{1}{2}x^2+x+C$ ازمايينت

$$F'(x)=\frac{1}{2}\cdot 2x^1+1x^0+0=x+1=f(x)$$

يولسم - $f(x)=x^2+x-3 \Rightarrow F(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-3x+C$ ازمايينت

$$: F'(x)=\frac{1}{3}\cdot 3x^2+\frac{1}{2}\cdot 2x^1-3\cdot 1x^0+0=x^2+x-3 \Rightarrow f(x)$$

دولسم - $f(x)=x^n;\ n\in\mathbb{N} \Rightarrow F(x)=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C$ ازمايينت

$$F'(x)=\frac{1}{n+1}\cdot(n+1)x^n+0=x^n=f(x)$$

د ناټاکلي انتيګرال ځخه و ټاکلي انتيګرال ته

ترمخ راوړنه يا وړاندراوړنه

موږ وليدل، چې څنګه يو تابع f(x) ته لومړنۍ تابع F(x) منځ ته راوړی شو، نو ناپای ډېر لومړني توابع شته دی، چې فقط د يوې ورجمع کوونکې ثابتې له امله يو له بل توپير لري.

لرو: تابع $f(x)=3x^2+2$ او د دې د لومړنيو توابعو سټ $f(x)=x^3+2x+C$

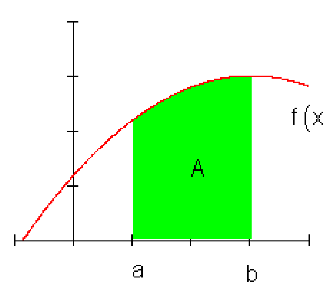
پيژند : د ټولو لومړنيو توابعو سټ و يوې تابع f(x) ته ،،ناټاکلی انتيګرال ،، بلل کيږي او ددې له پاره ليکو: $\boxed{\int f(x)dx=F(x)+C}$

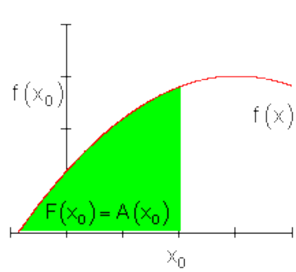
د مشتق- او انتيګرالشميرنې ترمنځ اړيکې کيدی شي د لاندې جملې له لارې لاس ته راشي.

جمله(قضيه) : د ناټاکلی انتيګرالشمېرنه د مشتقشمېرنې برعکس انځوروي

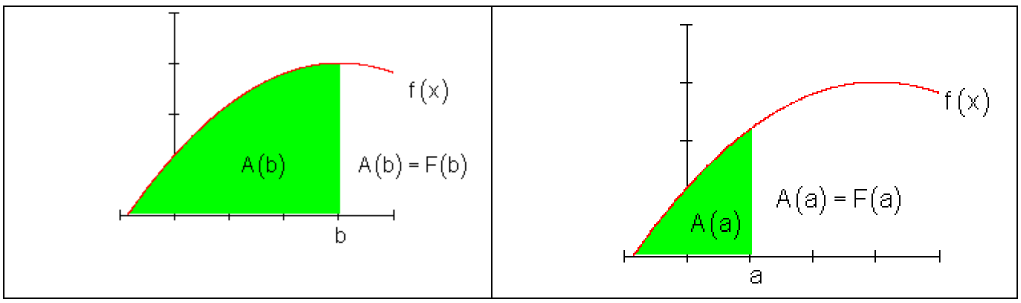
$$\frac{d[f(x)]+C}{dx}=[F(x)+C]'=f(x)$$

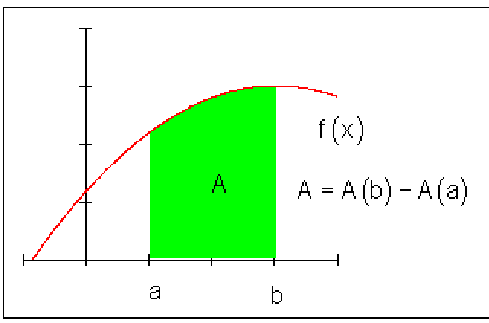
د تابع د ګراف لاندې او د انتروال [a ; b] تر منځ سطحه دې و ټاکل شي. زموږ په دې پرابلم موږ تر اوسه لاس ته راوړې زده کړې کاروو.





د يوې سطحې تابع شتون مو فکر دي لاندې پوهنې (زده کړې) ته لاربنوده وي:
د يوې سطحې، چې د يوې په پام کې نيولې f(x) تابع ګراف لاندې ده تر x_0 ځای پورې او يوې F'(x) تابع، چې دF(x) تابع مشتق د x_0 ځاي د f تابع د تابع ارزښت سره د x_0 په ځاي کې برابر وي، ترمنځ اړيکي شته دی، يعني $F'(x)=f(x)$

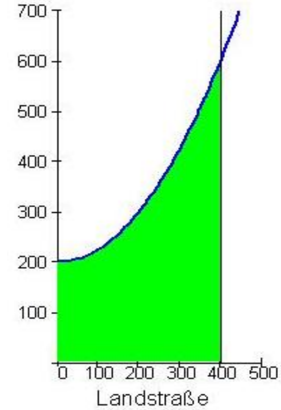


د انتروال [a,b] حدونو ترمنځ سطحې پيداکول د تابع د ګراف سطحو د کمښت ځخه په ځاي (A(b)) b او سطحې په (A(a)) a ځاي کې ،. يعني A= A(b) – A(a)په همدې توګه F= F(b) – F(a) لاس ته راځي.	

په انتروال [a,b] کې د تابعګراف لاندې سطحه د لومړنيو توابعو تفريق دی:

$$\boxed{A = F(b) - F(a) := \int_a^b F(x)dx}$$

دا انتيګرال ټاکلی انتيګرال هم بلل کيږي.
جمله :
دا تر اوسه لاس ته راوړو معلوماتو په بنسټ کړی شو، چې په پيل بيلګه کې راوړې د چمن سطحه وشميرو.
ثابته له تفريق سره لرې کيږي. په عمل کې د دې مسآلې د حل لپاره يوه بله لار ګتوره راوستلې يا ګټوره بنوولې:



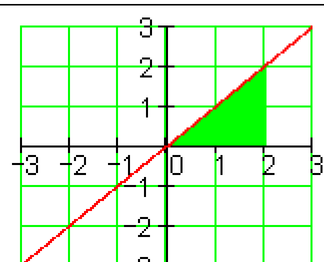
$$A=\int_0^{400}\left(\frac{1}{400}x^2+200\right)dx=\frac{1}{1200}x^3+200\cdot x\Big|_0^{400}$$

$$=\frac{1}{1200}\cdot 400^3+200\cdot 400\left[\frac{1}{1200}0^3+200\cdot 0\right]$$

$$=\frac{1}{1200}\cdot 400^3+200\cdot 400=\underline{\underline{133333.\bar{3}}}$$

دريم: د ساده سطحو شميرنه

بيلګه ١ :



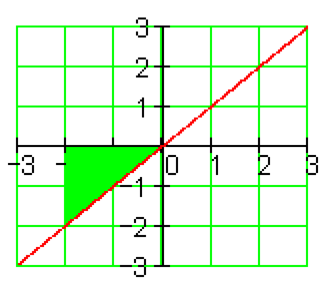
په انتروال $0 \le x \le 2$ کې د $f(x)$ او د x -محورترمنځ سطحه غواړو پيداکړو

$$f(x)=x$$

$$\int_0^2 f(x)\,dx=\int_0^2 x\,dx=\frac{x^2}{2}\Big|_0^2$$

$$=\frac{2^2}{2}-\frac{0^2}{2}=\frac{4}{2}-0=\underline{\underline{2\,FE}}$$

FE د سطحې يوون يا واحد دی.



بيلګه ٢ :

په انترو $-2 \le x \le 0$ کې د x-محور ترمنځ سطحه غواړو پيداکړو

$$f(x)=x$$

$$\int_{-2}^0 f(x)\,dx=\int_{-2}^0 x\,dx=\frac{x^2}{2}\Big|_{-2}^0$$

$$=\frac{0^2}{2}-\frac{(-2)^2}{2}=0-\frac{4}{2}=\underline{\underline{-2\,FE}}$$

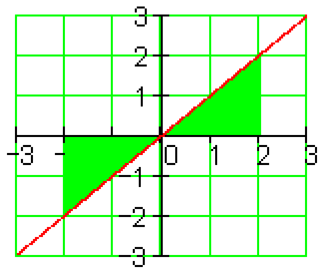
بيلګه ۳ :

په انټروال : $\le 2-$ کې د x-محور ترمنځ سطحه غواړو پيدا کړو

$$f(x) = x$$

$$\int_{-2}^{2} f(x)\,dx = \int_{-2}^{2} x\,dx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_{-2}^{2}$$

$$= \frac{2^2}{2} - \frac{(-2)^2}{2} = \frac{4}{2} - \frac{4}{2} = \underline{\underline{0\ FE}}$$



شميرنه ښايي، چې د x -محور پورته لور ته سطحه زياتيزه يا مثبت ده او د x – محور کښته لور ته سطحه کميزه يا منفي ګڼل کيږي.

په بيلګه ۳ کې سطحې يو بل مخامخ سره له منځه وړي يا پورته کوي.

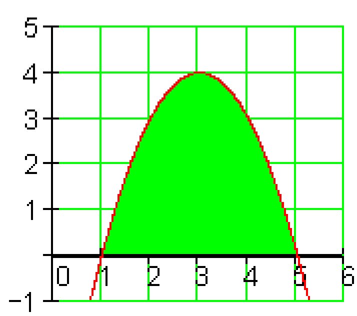
که فزيکي سطحه غيږو، نو انټيګرال بايد ووېشل شي او ارزښتونه وشميرل شي.

$$\int_{-2}^{2} x\,dx = \left|\int_{-2}^{0} x\,dx\right| + \left|\int_{0}^{2} x\,dx\right| = \left|\left.\frac{x^2}{2}\right|_{-2}^{0}\right| + \left|\left.\frac{x^2}{2}\right|_{0}^{2}\right| = \left|\frac{0^2}{2} - \frac{(-2)^2}{2}\right| + \left|\frac{2^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right| = 2 + 2 = \underline{\underline{4\ FE}}$$

بيلګه ۴ :

په انټروال $1 \le x \le 5$ کې د $f(x)$ اود x -محور ترمنځ سطحه غواړو پيدا کړو

$$f(x) = -x^2 + 6x - 5$$



$$A = \int_{1}^{5} f(x)\,dx = \int_{1}^{5} \left(-x^2 + 6x - 5\right) dx$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{6x^2}{2} - 5x\right]_{1}^{5}$$

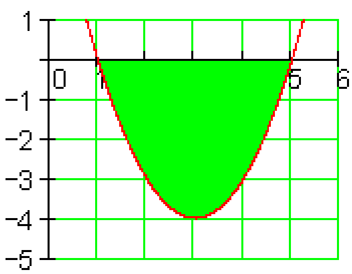
$$= \left(-\frac{5^3}{3} + \frac{6\cdot 5^2}{2} - 5\cdot 5\right) - \left(-\frac{1^3}{3} + \frac{6\cdot 1^2}{2} - 5\cdot 1\right)$$

$$= \left(-\frac{125}{3} + 75 - 25\right) - \left(-\frac{1}{3} + 3 - 5\right)$$

$$= -\frac{125}{3} + \frac{225}{3} - \frac{75}{3} + \frac{1}{3} - \frac{9}{3} + \frac{15}{3} = \frac{32}{3}$$

$$\Rightarrow A \approx \underline{\underline{10,67\ FE}}$$

بېلګه ۵:

په انټروال $1 \le x \le 5$ کې د $f(x)$ اود x -محور ترمنځ سطحه غواړو پيدا کړو $f(x) = x^2 - 6x + 5$  	$A = \int_1^5 f(x)\,dx = \int_1^5 \left(x^2 - 6x + 5\right) dx$ $= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{6x^2}{2} + 5x\right]_1^5$ $= \left(\frac{5^3}{3} - \frac{6\cdot 5^2}{2} + 5\cdot 5\right) - \left(\frac{1^3}{3} - \frac{6\cdot 1^2}{2} + 5\cdot 1\right)$ $= \left(\frac{125}{3} - 75 + 25\right) - \left(\frac{1}{3} - 3 + 5\right)$ $= \frac{125}{3} - \frac{225}{3} + \frac{75}{3} - \frac{1}{3} + \frac{9}{3} - \frac{15}{3} = -\frac{32}{3}$ $\Rightarrow A \approx \underline{\underline{-10,67\ FE}}$

جمله: سطحه پروتځای او مخنخښه

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx > 0 \Leftrightarrow x_1 < x_2$$
او سطحه د x -محور پورته لور ته پرته ده

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx < 0 \Leftrightarrow x_1 < x_2$$
او سطحه د x -محور کښته لور ته پرته ده.

د انټيګرېشن پولو بدلول:

څه پېښيږي، که د انټيګرېشن پولې سره بدلې شي؟

بېلګه ۶ :

$$f(x) = x$$

$$\int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^2 x\,dx = \frac{x^2}{2}\Bigg|_0^2$$

$$= \frac{2^2}{2} - \frac{0^2}{2} = \frac{4}{2} - 0 = \underline{\underline{2\,FE}}$$

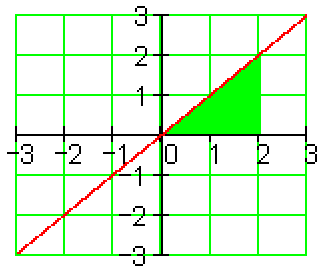
FE د سطحې یوون یا واحد دی.

د انتیګرېشن پولې سره بدلوو:

$$= \frac{0^2}{2} - \frac{2^2}{2} = 0 - \frac{4}{2} = \underline{\underline{-2\,FE}}$$

د دې لپاره چې سطحه مثبت یا زیاتیزه شي باید له (-1) سره ضرب شي.

په انټروال $0 \le x \le 2$ کې د $f(x)$ او د x - محورترمنځ سطحه غواړو پیداکړو



بیلګه ۷ :

د انتیګرېشن پولې سره بدلیږي

$$A = \int_5^1 f(x)\,dx = \int_5^1 \left(-x^2 + 6x - 5\right) dx$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{6x^2}{2} - 5x\right]_5^1$$

$$= \left(-\frac{1^3}{3} + \frac{6\cdot 1^2}{2} - 5\cdot 1\right) - \left(-\frac{5^3}{3} + \frac{6\cdot 5^2}{2} - 5\cdot 5\right)$$

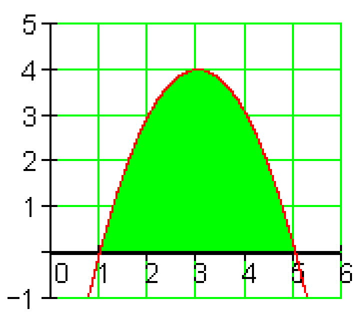
$$= \left(-\frac{1}{3} + 3 - 5\right) - \left(-\frac{125}{3} + 75 - 25\right)$$

$$= -\frac{1}{3} + \frac{9}{3} - \frac{15}{3} + \frac{125}{3} - \frac{225}{3} + \frac{75}{3} = -\frac{32}{3}$$

$$\Rightarrow A \approx \underline{\underline{-10{,}67\,FE}}$$

په انټروال $1 \le x \le 5$ کې د $f(x)$ اود x -محور ترمنځ سطحه غواړو پیدا کړو

$$f(x) = -x^2 + 6x - 5$$



$$A = \int_1^5 f(x)\,dx = \int_1^5 \left(-x^2 + 6x - 5\right) dx$$

$$\approx \underline{\underline{10{,}67\,FE}}$$

جمله: د پولې بدلولو سره د انتیګرېشن مخنخښه بدلیږي.

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx \quad \text{oder} \quad -\int_a^b f(x)\,dx = \int_b^a f(x)\,dx}$$

بیلګه ٨ :

په انټروو $-2 \le x \le 0$ کې د x-محور ترمنځ سطحه غواړو پیداکړو

$$\int_{-2}^{0} f(x)\,dx = \int_{-2}^{0} -x\,dx = -\int_{-2}^{0} x\,dx$$

پولې بدلوو

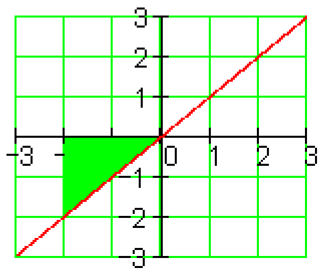
$$= \int_{0}^{-2} x\,dx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_{0}^{-2}$$

$$= \frac{(-2)^2}{2} - \frac{0^2}{2} = \frac{4}{2} - 0 = \underline{\underline{2\ FE}}$$

بیلګه ٢ :

په انټروو $-2 \le x \le 0$ کې د x-محور ترمنځ سطحه غواړو پیداکړو

$f(x) = -x$



تمرینونه:

انتيګرال شمیرنه II:

لاندې تاکلي انتيګرالونه وشمیرئ.

یو - $\int_{1}^{3} x\,dx$ دوه - $\int_{0}^{3} (x^2 - 1)\,dx$ درې - $\int_{-2}^{2} 4\,dx$ څلور - $\int_{3}^{4} dx$

پنځه - $\int_{0}^{4} (2x - 5)\,dx$ شپږ - $\int_{-\sqrt{8}}^{\sqrt{8}} \left(\frac{1}{2}x^2 - 4\right) dx$

اوه- $\int_{-3}^{3} (x^3 + 2x)\,dx$ اته - $\int_{-1}^{2} \left(x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 3x - 4\right) dx$

نهه - $\int_{-4}^{4} \left(2x^2 - \frac{1}{8}x^4\right) dx$ لس - $\int_{2}^{3} (3x - 6)^3\,dx$

حلونه

انتيګرال شميرنه II

نتيجې

لومړی- $\int_{1}^{3} x\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^3 = \underline{\underline{4}}$

دويم:- $\int_{0}^{3} \left(x^2 - 1\right) dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - x\right]_0^3 = \underline{\underline{6}}$

دريم- $\int_{-2}^{2} 4\,dx = \left[4x\right]_{-2}^{2} = \underline{\underline{16}}$

څلورم- $\int_{3}^{4} dx = \left[x\right]_3^4 = \underline{\underline{1}}$

پنځم- $\int_{0}^{4} (2x - 5)\,dx = \left[x^2 - 5x\right]_0^4 = \underline{\underline{-4}}$

شپږم: $\int_{-\sqrt{6}}^{\sqrt{6}} \left(\frac{1}{2}x^2 - 4\right) dx = \left[\frac{1}{6}x^3 - 4x\right]_{-\sqrt{6}}^{\sqrt{6}} \approx \underline{\underline{-15,085}}$

اووم- $\int_{-3}^{3} \left(x^3 + 2x\right) dx = \left[\frac{1}{4}x^4 + x^2\right]_{-3}^{3} = \underline{\underline{0}}$

اتم- $\int_{-1}^{2} \left(x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 3x - 4\right) dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 4x\right]_{-1}^{2} = \underline{\underline{-\frac{21}{4}}}$

نهم- $\int_{-4}^{4}\left(2x^2-\frac{1}{8}x^4\right)dx=\left[\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{40}x^5\right]_{-4}^{4}=\underline{\underline{\frac{512}{15}}}$

لسم- $\int_{2}^{3}(3x-6)^3\,dx=\left[\frac{27}{4}x^4-\frac{162}{3}x^3+\frac{324}{2}x^2-216x\right]_{2}^{3}=\underline{\underline{\frac{27}{4}}}$

مفصل حلونه:

لومړی- $\int_{1}^{3}x\,dx=\left[\frac{1}{2}x^2\right]_{1}^{3}=\frac{1}{2}\cdot 3^2-\frac{1}{2}\cdot 1^2=\frac{1}{2}\cdot 9-\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{9}{2}-\frac{1}{2}=\frac{8}{2}=\underline{\underline{4}}$

د ویم-

$$\int_{0}^{3}\left(x^2-1\right)dx=\left[\frac{1}{3}x^3-x\right]_{0}^{3}=\frac{1}{3}\cdot 3^3-3-\left(\frac{1}{3}\cdot 0^3-0\right)=3^2-3-(0)=9-3=\underline{\underline{6}}$$

دریم- $\int_{-2}^{2}4\,dx=[4x]_{-2}^{2}=4\cdot 2-4\cdot(-2)=8+8=\underline{\underline{16}}$

څلورم- $\int_{3}^{4}dx=[x]_{3}^{4}=4-3=\underline{\underline{1}}$

پنځم-

$$\int_{0}^{4}(2x-5)\,dx=\left[x^2-5x\right]_{0}^{4}=4^2-5\cdot 4-\left(0^2-5\cdot 0\right)=16-20-0=\underline{\underline{-4}}$$

شپږم-

$$\int_{-\sqrt{8}}^{\sqrt{8}}\left(\frac{1}{2}x^2-4\right)dx=\left[\frac{1}{6}x^3-4x\right]_{-\sqrt{8}}^{\sqrt{8}}=\frac{1}{6}\cdot\left(\sqrt{8}\right)^3-4\cdot\sqrt{8}-\left(\frac{1}{6}\cdot\left(-\sqrt{8}\right)^3-4\cdot\left(-\sqrt{8}\right)\right)$$

$$=\frac{1}{6}\cdot 8\cdot\sqrt{8}-4\cdot\sqrt{8}-\left(-\frac{1}{6}\cdot 8\cdot\sqrt{8}+4\cdot\sqrt{8}\right)=\frac{8}{6}\cdot\sqrt{8}-\frac{24}{6}\cdot\sqrt{8}+\frac{8}{6}\cdot\sqrt{8}-\frac{24}{6}\cdot\sqrt{8}$$

$$=-\frac{32}{6}\cdot\sqrt{8}=\underline{\underline{-\frac{16}{3}\cdot\sqrt{8}\approx-15{,}085}}$$

اووم –

$$\int_{-3}^{3}\left(x^3+2x\right)dx=\left[\frac{1}{4}x^4+x^2\right]_{-3}^{3}=\frac{1}{4}\cdot 3^4+3^2-\left(\frac{1}{4}\cdot(-3)^4+(-3)^2\right)$$

$$=\frac{81}{4}+9-\left(\frac{81}{4}+9\right)=\underline{\underline{0}}$$

اتم -

$$\int_{-1}^{2}\left(x^3-\frac{1}{2}x^2+3x-4\right)dx=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{6}x^3+\frac{3}{2}x^2-4x\right]_{-1}^{2}$$

$$=\frac{1}{4}\cdot 2^4-\frac{1}{6}\cdot 2^3+\frac{3}{2}\cdot 2^2-4\cdot 2-\left[\frac{1}{4}\cdot(-1)^4-\frac{1}{6}\cdot(-1)^3+\frac{3}{2}\cdot(-1)^2-4\cdot(-1)\right]$$

$$=\frac{16}{4}-\frac{8}{6}+\frac{12}{2}-8-\left[\frac{1}{4}\cdot 1-\frac{1}{6}\cdot(-1)+\frac{3}{2}\cdot 1+4\right]$$

$$=4-\frac{4}{3}+6-8-\left[\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{3}{2}+4\right]$$

$$=2-\frac{4}{3}-\frac{1}{4}-\frac{1}{6}-\frac{3}{2}-4=-\frac{24}{12}-\frac{16}{12}-\frac{3}{12}-\frac{2}{12}-\frac{18}{12}=-\frac{63}{12}=\underline{\underline{-\frac{21}{4}}}$$

نهم: مفصل حل(اوبيونه):

$$\int_{-4}^{4}\left(2x^2-\frac{1}{8}x^4\right)dx=\left[\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{40}x^5\right]_{-4}^{4}=$$

$$=\frac{2}{3}\cdot 4^3-\frac{1}{40}\cdot 4^5-\left[\frac{2}{3}\cdot(-4)^3-\frac{1}{40}\cdot(-4)^5\right]$$

$$=\frac{128}{3}-\frac{1024}{40}-\left[\frac{2}{3}\cdot(-64)-\frac{1}{40}\cdot(-1024)\right]$$

$$=\frac{128}{3}-\frac{1024}{40}-\left[-\frac{128}{3}+\frac{1024}{40}\right]=\frac{128}{3}-\frac{1024}{40}+\frac{128}{3}-\frac{1024}{40}$$

$$=\frac{256}{3}-\frac{2048}{40}=\frac{256}{3}-\frac{256}{5}=\frac{1280}{15}-\frac{768}{15}=\underline{\underline{\frac{512}{15}}}$$

لسم:

$$\int_{2}^{3}(3x-6)^3\,dx=\int_{2}^{3}(3x-6)^2\cdot(3x-6)\,dx=\int_{2}^{3}\left(9x^2-36x+36\right)\cdot(3x-6)\,dx$$

$$=\int_{2}^{3}\left(27x^3-162x^2+324x-216\right)dx$$

$$=\left[\frac{27}{4}x^4-\frac{162}{3}x^3+\frac{324}{2}x^2-216x\right]_{2}^{3}$$

$$=\frac{27}{4}\cdot 3^4-\frac{162}{3}\cdot 3^3+\frac{324}{2}\cdot 3^2-216\cdot 3-\left[\frac{27}{4}\cdot 2^4-\frac{162}{3}\cdot 2^3+\frac{324}{2}\cdot 2^2-216\cdot 2\right]$$

$$=\frac{2187}{4}-1458+\frac{2916}{2}-648-108+\frac{1296}{3}-648+432$$

$$=\frac{2187}{4}-1458+1458-648-108+432-648+432$$

$$=\frac{2187}{4}-540=\frac{2187}{4}-\frac{2160}{4}=\underline{\underline{\frac{27}{4}}}$$

د توابعو ترمنځ سطحه

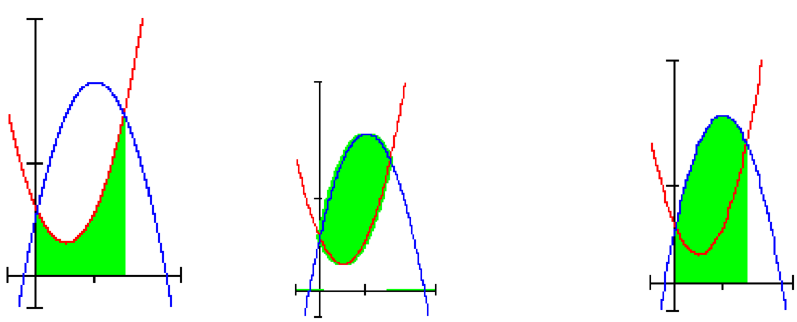
له دوه ګرافونو څخه رابندې سطحې د مساحت شميرنه:

ننوتنه: د يوه ډنډ يا يوه بند څېره دې دلته راوړل شي يا ديوه پټي چې له ګړو پولو را بند وي.

فعاليت:

- که داسې يو ډنډ ولرو، نو فکر وکړئ، چې د دې ډنډ مساحت څنګه وشمېرو؟

په څنو پوښتنو کې د سطحې مساحت شمېرل کيږي، چې د دوه توابعو ګرافونو ترمنځ پرته ده. دا ډول د سطحې مساحت کېدى شي د تاکلو اينتګرالونو د کمښت له لارې و شمېرل شي. که دواړه ګرافونه د x-محور پورته لور ته پراته وي،نو د لاندې شيما څخه مخ ته ځو :



$$A = A_1 - A_2$$

د اينتګرال جوړونه:

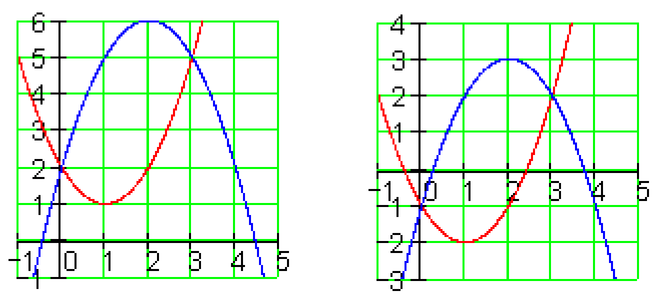
$$\int_0^3 f(x)dx = \int_0^3 (x^2 - 2x + 2)dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 2x\right]_0^3 = \frac{1}{3}\cdot 27 - 9 + 2\cdot 3 = 9 - 9 + 6 = \underline{\underline{6}}$$

$$\int_0^3 g(x)dx = \int_0^3 (-x^2 + 4x + 2)dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 2x\right]_0^3 = -\frac{1}{3}\cdot 27 + 2\cdot 9 + 2\cdot 3 =$$
$$= -9 + 18 + 6 = \underline{\underline{15}}$$

دا چې د دوه ګرافونو ترمنځ سطحه بايد تل مثبت وي،نو له لوي ارزښت څخه کووچنی ارزښت بايد کم شي.

$$A = \int_0^3 g(x)dx - \int_0^3 f(x)dx = 15 - 6 = \underline{\underline{9}}$$

لکه چې پوهيږو، د يوې سطحې مخنښنه ددې په واک کې ده، چې ايا سطحه د **x** - محور پورته لور ته پرته ده او که کښته لور ته. موږ ځېږو، چې ايا دا تاثيرات په پورتنی بيلګه کې پراته دي او که نه. موږ سطحه د **y** -محور په درې واحدونو(يوونونو) کښته لورته بيايو او سطحې نوې شمېرو.



که د ليد له مخې قضاوت وکړو،نو د ټولو لاس ته راوړنه به برابره وي.

د x–ارزښت غوځتکي هم او له دې سره د انتيګرال حدونه بې تغيره پاتيږي.

$$g(x) = -x^2 + 4x - 1 \quad \text{و} \quad f(x) = x^2 - 2x - 1$$

ځای په ځای کونه:

$$A=\int_0^3 f(x)dx-\int_0^3 g(x)dx=\int_0^3 (f(x)-g(x))\,dx$$

د $f(x)-g(x)=2x^2-6x$ سره کيږي:

$$A=\int_0^3 (2x^2-3x^2)\,dx=\left[\frac{2}{3}x^3-3x^2\right]_0^3=\frac{2}{3}\cdot 27-3\cdot 9=18-27=\underline{\underline{-9}}$$

دا چې د دوه منحنيو ترمنځ سطحه فزيکي سطحه ښايي، بايد لاس ته راوړنه يو مثبت عدد وي.

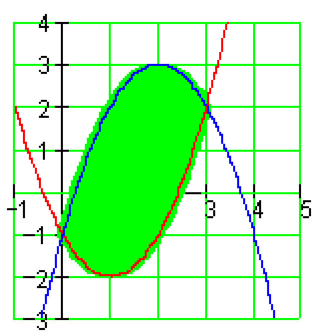
دا د مطلق ارزښت له لارې ترلاسه کوو.

$$A=\left|\int_0^3 (2x^2-6x)\,dx=\left|\left[\frac{2}{3}x^3-3x^2\right]_0^3\right|=\left|\frac{2}{3}\cdot 27-3\cdot 9\right|=|18-27|=|-9|=\underline{\underline{9}}\right|$$

د دې متود تولیزه ونه(عموميت) :

<table>
<tr>
<td>د دوه ګرافونو ترمنځ سطحه:

که يوه سطحه د يوې پورته او يوې کښته منحني څخه رابنده وي، چې تابع f(x) او تابع g(x) پورې اړه و لري، نو دا له دې رابنده سطحه په لاندې ډول شمېرل کيږي.

$A=\left|\int_a^b [f(x)-g(x)]dx\right|$</td>
<td></td>
</tr>
</table>

د انتیګرالوني حدونه a او b د x – محور د دواړو ګرافونو د وضعیه قېیمتونو غوڅېټکي دي.

تمرینونه:

د توابعو ګرافونو تر منځ سطحه.

د لاندې فنکشنونو(توابعو) ترمنځ سطحه وټاکئ او دواړه ګرافونه په یوه پروتولاړ سیستم کې وکاږئ. شمیرل شوې سطحې کرښه کرښه کړئ.

لومړی- $f(x) = x^2 - x - 6\,;\; g(x) = 4x - 10$

دویم- $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{2}x + 3\,;\; g(x) = 3x$

دریم - $f(x) = 0{,}75\left(x^2 - 5x + 4\right);\; g(x) = 0{,}75x + 3$

څلورم- $f(x) = x^2 + 5x + \frac{9}{4}\,;\; g(x) = -\frac{3}{2}x - \frac{21}{4}$

پنځم - $f(x) = (x-2)^2 - 4\,;\; g(x) = x - 1$

شپږم- $f(x) = x^2 - 4x + 1;\; g(x) = -x^2 + 2x + 1$

اووم- $f(x) = \frac{3}{2}x^2 - 6x + 3\,;\; g(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x$

اتم - $f(x) = x^2 + 3x\,;\; g(x) = 0{,}5x^2$

نهم- $f(x) = 0{,}5x^2 - 2x - 1;\; g(x) = 2x^2 + 2x + 1$

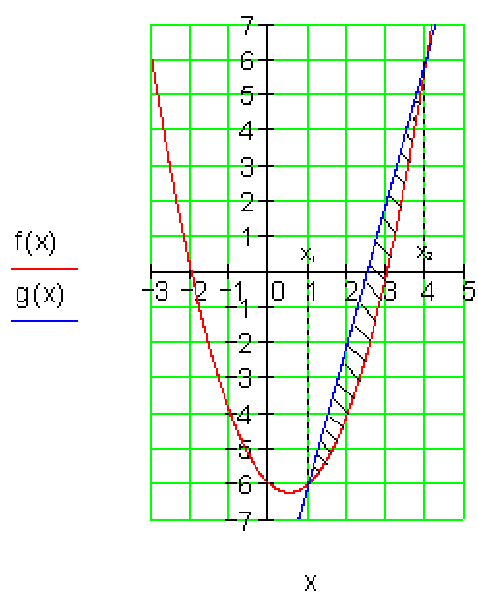
لسم- $f(x) = -0,5x^2 + 2\,;\ g(x) = -\frac{1}{9}(x-1)^2 + 1$

مفصل جلونه يا اوبيوني

$$f(x) = x^2 - x - 6\,;\ g(x) = 4x - 10$$
$$f(x) - g(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1 \text{ und } x_2 = 4$$

لومړی –
$$A = \left|\int_1^4 [f(x) - g(x)]\,dx\right| = \left|\left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 4x\right]_1^4\right|$$
$$= \left|\frac{1}{3}\cdot 4^3 - \frac{5}{2}\cdot 4^2 + 4\cdot 4 - \left[\frac{1}{3}\cdot 1^3 - \frac{5}{2}\cdot 1^2 + 4\cdot 1\right]\right| = \underline{\underline{4,5}}$$

د دواړ ګرافونو ترمنځ سطحه 4,5 FE (FE به له دې وروسته او د مخه د سطحي واحد يا يوون وي)ده.



دويم -

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{2}x + 3;\ g(x) = 3x$$

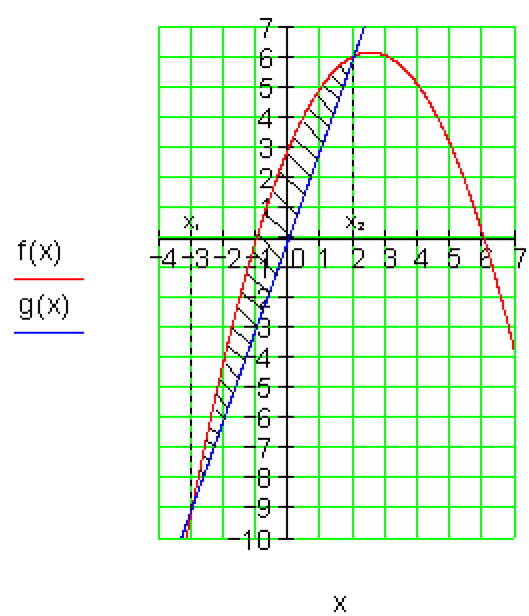
$$f(x) - g(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + 3 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -3 \text{ und } x_2 = 2$$

$$\int_{-3}^{2}\left[f(x) - g(x)\right]dx = \left[-\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + 3x\right]_{-3}^{2}$$

$$= -\frac{1}{6}\cdot 2^3 - \frac{1}{4}\cdot 2^2 + 3\cdot 2 - \left[-\frac{1}{6}\cdot(-3)^3 - \frac{1}{4}\cdot(-3)^2 + 3\cdot(-3)\right] = \frac{125}{12} \approx \underline{\underline{10{,}417}}$$

د دواړو ګرافونو ترمنځ سطحه 10,417 FE ده.

يادونه: سرى کرى شي چې شميرنه بې له مطلق ارزښت مخ ته بوزي، که سرى له نتايجو يا لاس ته راوړنو، که منفي ارزښت ولري، مطلق ارزښت جوړ کړي.

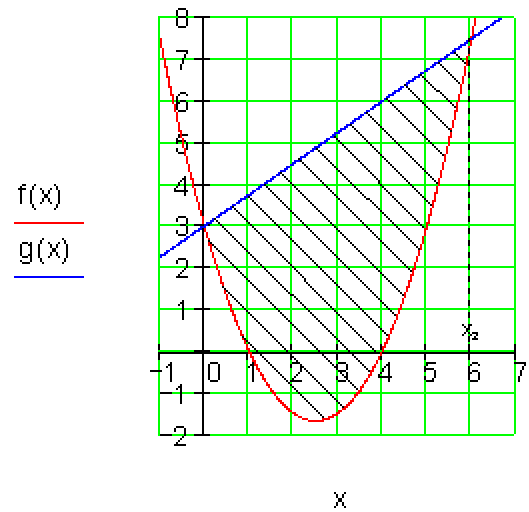


درېم –

$$f(x) = 0,75\left(x^2 - 5x + 4\right) = 0,75x^2 - 3,75x + 3\,;\; g(x) = 0,75x + 3$$
$$f(x) - g(x) = 0 \Leftrightarrow 0,75x^2 - 4,5x = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0 \text{ und } x_2 = 6$$

$$\int_0^6 [f(x) - g(x)]\,dx = \left[\frac{0,75}{3}x^3 - \frac{4,5}{2}x^2\right]_0^6 = \frac{0,75}{3}\cdot 6^3 - \frac{4,5}{2}\cdot 6^2 = -27$$
$$A = \left|\int_0^6 [f(x) - g(x)]\,dx\right| = |-27| = \underline{\underline{27}}$$

د دواړو ګرافونو ترمنځ سطحه 27 FE ده.



ځلورم –

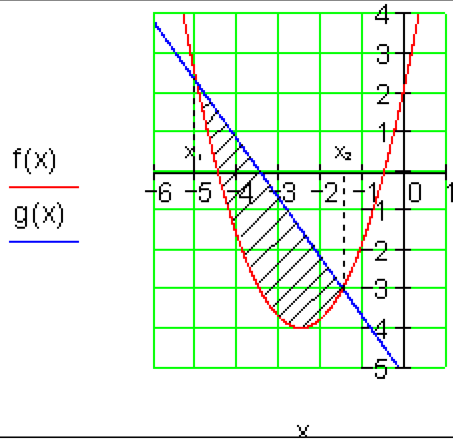
$$f(x) = x^2 + 5x + \frac{9}{4}\,;\; g(x) = -\frac{3}{2}x - \frac{21}{4}$$
$$f(x) - g(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{13}{2}x + \frac{15}{2} = 0 \Leftrightarrow x_1 = -5 \text{ und } x_2 = -\frac{3}{2}$$

او $x_2 = -\frac{3}{2}$

$$\int_{-5}^{-\frac{3}{2}} [f(x)-g(x)]\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{13}{4}x^2 + \frac{15}{2}x\right]_{-5}^{-\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)^3 + \frac{13}{4}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{15}{2}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right) - \left[\frac{1}{3}\cdot(-5)^3 + \frac{13}{4}\cdot(-5)^2 + \frac{15}{2}\cdot(-5)\right] = -\frac{343}{48}$$

$$A = \left|\int_{-5}^{-\frac{3}{2}} [f(x)-g(x)]\,dx\right| = \left|-\frac{343}{48}\right| \approx \underline{\underline{7{,}146}}$$



د دواړ ګرافون ترمنځ سطحه نږدې 7,146 FE ده.

پنځم -

$$f(x) = (x-2)^2 - 4 = x^2 - 4x\ ;\ g(x) = x - 1$$

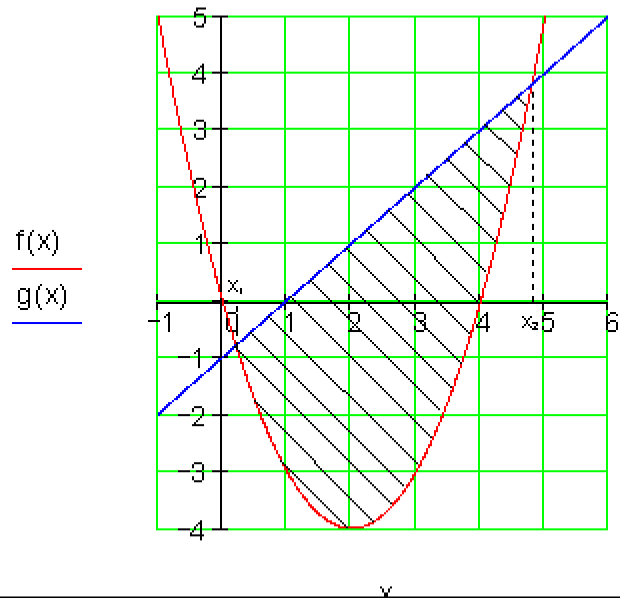
$$f(x) - g(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 1 = 0 \Leftrightarrow x_1 = \frac{5}{2} - \sqrt{\frac{21}{4}} \text{ und } x_2 = \frac{5}{2} + \sqrt{\frac{21}{4}}$$

$$\int_{\frac{5}{2}-\sqrt{\frac{21}{4}}}^{\frac{5}{2}+\sqrt{\frac{21}{4}}} [f(x)-g(x)]\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + x\right]_{\frac{5}{2}-\sqrt{\frac{21}{4}}}^{\frac{5}{2}+\sqrt{\frac{21}{4}}}$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{5}{2}+\sqrt{\frac{21}{4}}\right)^3 - \frac{5}{2}\cdot\left(\frac{5}{2}+\sqrt{\frac{21}{4}}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}+\sqrt{\frac{21}{4}}\right)$$

$$-\left[\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{5}{2}-\sqrt{\frac{21}{4}}\right)^3-\frac{5}{2}\cdot\left(\frac{5}{2}-\sqrt{\frac{21}{4}}\right)^2+\left(\frac{5}{2}-\sqrt{\frac{21}{4}}\right)\right]=-\frac{7}{2}\cdot\sqrt{21}\approx-16{,}039$$

$$A=\left|\int_{\frac{5}{2}-\sqrt{\frac{21}{4}}}^{\frac{5}{2}+\sqrt{\frac{21}{4}}}\left[f(x)-g(x)\right]dx\right|=\left|-\frac{7}{2}\cdot\sqrt{21}\right|\approx\underline{\underline{16{,}039}}$$



د دواړو ګرافونو ترمنځ سطحه نږدې يا څه ناڅه 16,039 FE ده.

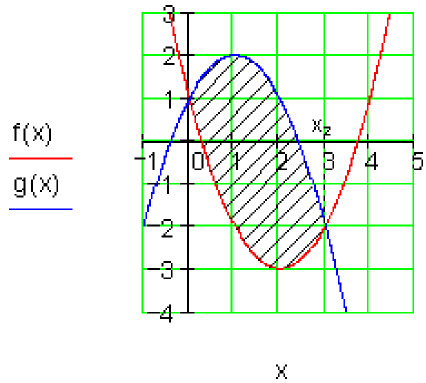
شيړم –

$$f(x)=x^2-4x+1;\ g(x)=-x^2+2x+1$$

$$f(x)-g(x)=0\Leftrightarrow 2x^2-6x=0\Leftrightarrow x_1=0 \text{ und } x_2=3$$

$$\int_0^3\left[f(x)-g(x)\right]dx=\left[\frac{2}{3}x^3-3x^2\right]_0^3=\frac{2}{3}\cdot3^3-3\cdot3^2=-9$$

$$A=\left|\int_0^3\left[f(x)-g(x)\right]dx\right|=|-9|=\underline{\underline{9}}$$

	د دواړو ګرافونو ترمنځ سطحه 9 FE ده.

اووم –

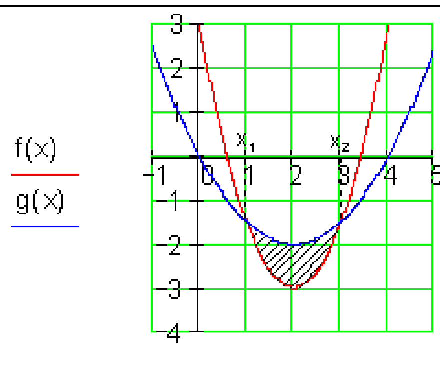
$$f(x) = \frac{3}{2}x^2 - 6x + 3\,;\; g(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x$$

$$f(x) - g(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1 \text{ und } x_2 = 3$$

$$\int_1^3 [f(x) - g(x)]\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x\right]_1^3$$

$$= \frac{1}{3}\cdot 3^3 - 2\cdot 3^2 + 3\cdot 3 - \left[\frac{1}{3}\cdot 1^3 - 2\cdot 1^2 + 3\cdot 1\right] = -\frac{4}{3}$$

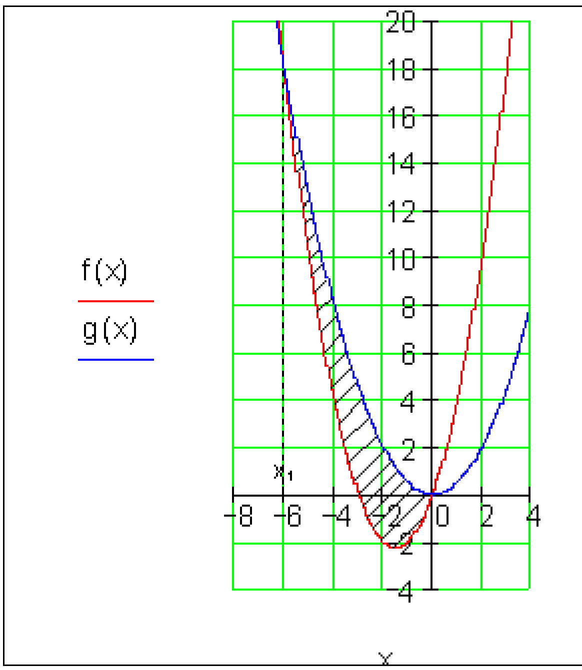
$$A = \left|\int_1^3 [f(x) - g(x)]\,dx\right| = \left|-\frac{4}{3}\right| = \underline{\underline{\frac{4}{3}}} \approx 1{,}333$$

	د دواړو ګرافونو ترمنځسطحه څه ناڅه يا نږدې 1,333 FE ده.

اتم -

$$f(x) = x^2 + 3x \; ; \; g(x) = 0,5x^2$$
$$f(x) - g(x) = 0 \Leftrightarrow 0,5x^2 + 3x = 0 \Leftrightarrow x_1 = -6 \text{ und } x_2 = 0$$

$$\int_{-6}^{0} [f(x) - g(x)]\, dx = \left[\frac{0,5}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^2\right]_{-6}^{0} = -\left[\frac{0,5}{3}\cdot(-6)^3 + \frac{3}{2}\cdot(-6)^2\right] = -18$$
$$A = \left|\int_{-6}^{0} [f(x) - g(x)]\, dx\right| = |-18| = \underline{\underline{18}}$$



د دواړو ګرافونو ترمنځ سطحه 18 FE ده.

نهم -

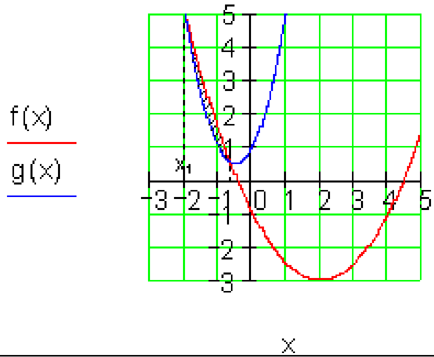
$$f(x) = 0,5x^2 - 2x - 1; \; g(x) = 2x^2 + 2x + 1$$
$$f(x) - g(x) = 0 \Leftrightarrow -1,5x^2 - 4x - 2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -2 \text{ und } x_2 = -\frac{2}{3}$$

$$\int_{-2}^{-\frac{2}{3}} \left[f(x)-g(x)\right] dx = \left[-\frac{1,5}{3}x^3 - 2x^2 - 2x\right]_{-2}^{-\frac{2}{3}}$$

$$= -\frac{1,5}{3}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)^3 - 2\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)^2 - 2\cdot\left(-\frac{2}{3}\right) - \left[-\frac{1,5}{3}\cdot(-2)^3 - 2\cdot(-2)^2 - 2\cdot(-2)\right]$$

$$= \frac{16}{27} \approx 0,593$$

ددواړو ګرفاون ترمنځ سطحه نږدې 0,593 FE ده.



لسم-

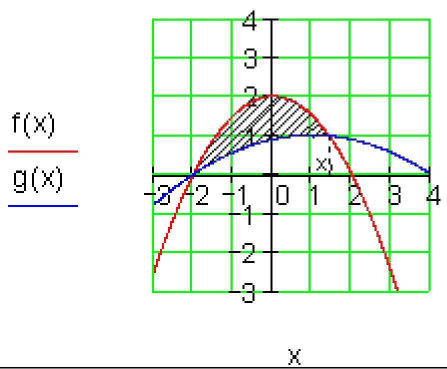
$$f(x) = -0,5x^2 + 2;\ g(x) = -\frac{1}{9}(x-1)^2 + 1 = -\frac{1}{9}x^2 + \frac{2}{9}x + \frac{8}{9}$$

$$f(x) - g(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{7}{18}x^2 - \frac{2}{9}x + \frac{10}{9} = 0 \Leftrightarrow x_1 = -2 \text{ und } x_2 = \frac{10}{7}$$

$$\int_{-2}^{\frac{10}{7}} \left[f(x)-g(x)\right] dx = \left[-\frac{7}{54}x^3 - \frac{1}{9}x^2 + \frac{10}{9}x\right]_{-2}^{\frac{10}{7}}$$

$$= -\frac{7}{54}\cdot\left(\frac{10}{7}\right)^3 - \frac{1}{9}\cdot\left(\frac{10}{7}\right)^2 + \frac{10}{9}\cdot\frac{10}{7} - \left[-\frac{7}{54}\cdot(-2)^3 - \frac{1}{9}\cdot(-2)^2 + \frac{10}{9}\cdot(-2)\right]$$

$$= \frac{128}{49} \approx 2,612$$

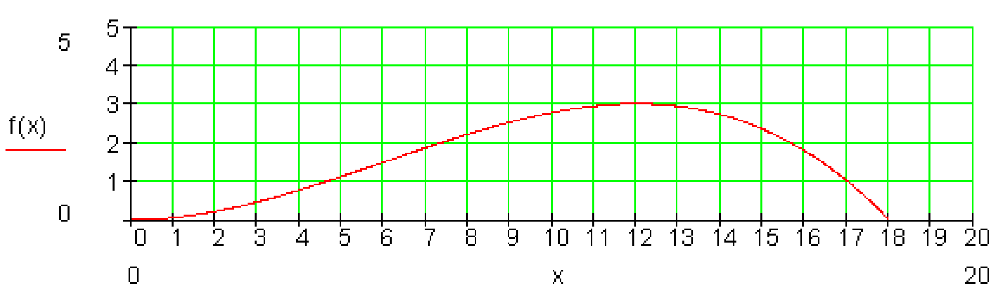
	ددواړو ګرافونو ترمنځ سطحه نږدې 2,612 FE ده.

انتيګرال د منځ- ارزښت په حيث يا توګه

f(x)د [a ; b] په انتروا کې انتيګرال د منځ ارزښت په تګه(حيث)

د يوه ازاد غونډوسکې وهلو فکشن f(x)ګراف په فوټبال لوبه کې په نږدې توګه د غونډوسکې (کرې) الوتنو کرړه يا منحنې ده.

$$f(x) = -\frac{1}{288}x^3 + \frac{1}{16}x^2$$



د غونډوسکې(کرې) وهلو يا شوټ ځخه وروسته د7 m او ترمنځ 16 m دغونډوسکې کرړه کوم د الوتنې منخنې جګوالى لرې؟

لومړى د دې ورشو لپاره ا رزښت جدول جوړوو.

x_i	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$f(x_i)$	1,872	2,222	2,531	2,778	2,941	3	2,934	2,722	2,344	1,778

د شمیرل شووفنکشن ارزښتونو f(x) منځ- ارزښت فرمول $\overline{f(x)}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(x_i)$ جوړېږي.
زموږ د بیلګې لپاره $n = 10$ دی،، نو باور لري:

$$\overline{f(x)}=\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}f(x_i)$$
$$=\frac{1}{10}\cdot(1{,}872+2{,}222+2{,}531+2{,}778+2{,}941+3+2{,}934+2{,}722+2{,}344+1{,}778)$$
$$=\frac{25{,}122}{10}=2{,}512$$

له دې سره غونډوسکه په انتروال [7 ; 16]کې منځني د 2,512 m الوتنجګوالی لري. که سرې دا تلنه په شډلو یا نریو پلونو(قمونو) واخلي، نو د منځي ارزښت بله لاس ته راوړنه به ترې را ووځي یا لاس ته راشي.

د x -ارزښتونو 7; 10; 13; 16 سره د منځني ارزښت لپاره به 2,34 m لاس ته راغلي وای.

د x -ارزښتونو ..... ;7; 7,5; 8; 8,5 سره د منځنی ارزښت لپاره به 2,555 m لاس ته راغلي وای.

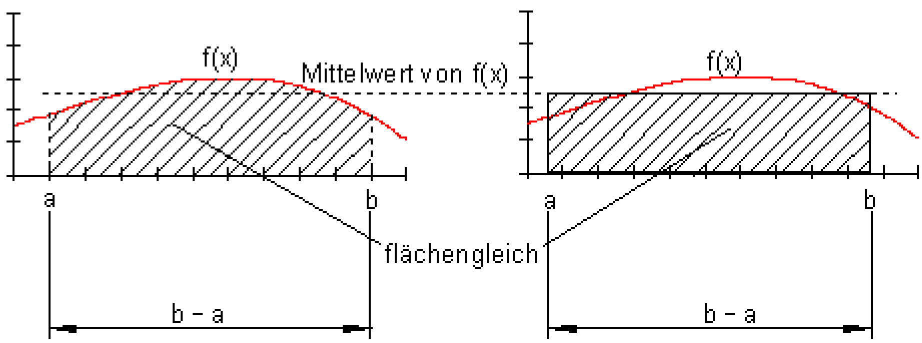
په روښانه تګه لیدل کیږي، چې هرڅومره x -پلونه نري واخستل شي په همغه اندازه منځنی ارزښت ټیک لاس ته راوړل کیږي.

دا تلنلار د ټاکلي انتیګرال له لارې غواړو غوره کړو:
للومړی نیسو، چې فنکشن f(x) په انتروال [a;b] کې تعریف دی یا پیژند لري او زیاتیز یا مثبت. فنکشن د انتروال[a;b] په منځکي کوم ارزښت غوره کوي؟

ټاکلی اتيګرال $\int_a^b f(x)dx$

په انتروال [a;b] کې د فنکشن د ګراف لاندې سطحه انځوروي.

مونږ اوس د دې په مخ د ولاړکوډيز يا مستطيل ډوله، له دې سطحې سره برابره کرښيزه سطحه ، په لاندې ډول ږدو:



د ولاړکوډيز يا مستطيل پرت ولاړډوله(-عمودي) اړخ د انتروال[a;b] د اوږدوالي سره يعنې b-a د سره برابر دی.

داروښانه کيږي، که چيرې د فنکشن f(x) منځ- ارزښت په انتروال [a;b] کې په پورته کرښونه کې د ولاړ کوډيز د جګوالي په څير تعريف شي.

$$\overline{f(x)} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

د فنکشن f(x) منځ- ارزښت

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

د يوه دا تا لړۍ سره په پرتله کونه

دا زمونږ په بيلګه باندې په دې معنا دی:

$$f(x) = -\frac{1}{288}x^3 + \frac{1}{16}x^2$$

$$\overline{f(x)} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \text{ mit } a = 7 \text{ und } b = 16 \text{ folgt:}$$

$$\overline{f(x)} = \frac{1}{16-7}\int_7^{16}\left(-\frac{1}{288}x^3 + \frac{1}{16}x^2\right)dx = \frac{1}{9}\left[-\frac{1}{4\cdot 288}x^4 + \frac{1}{3\cdot 16}x^3\right]_7^{16}$$

$$= \frac{1}{9}\left(\left[-\frac{1}{1152}\cdot 16^4 + \frac{1}{48}\cdot 16^3\right] - \left[-\frac{1}{1152}\cdot 7^4 + \frac{1}{48}\cdot 7^3\right]\right) = \underline{\underline{2,598}}$$

بال به له دې سره په انتروال [7 ; 16] کې د 2,598 m منځنی جګوالی لرودي.

ټاکلې انتیګرال له دې سره د جمعې یا زیاتون د کلمې تل پاتې ټولنیزوالی کیږي. دا پهدې معنا، چې سړی هرڅومره کوچني x - پلونه واخلي، همغومره سړی د فنکشن منځ ارزښت ته نږدې راځي. د زاتونو یا د جمعې د اجزاوو کا اعضاوو ګڼون یا تعداد زیاتیږي یا لوییږي.

انالیزی

--اکسپوننشل توابع او e - توابع

پیل

تراوسه راته معلومو توابعو کې توابع رامنځ ته کيده، چې اکسپوننتونه یا جګعددونه يې عددونه وو:

توانتوابع: $f(x) = a \cdot x^q$ د $q \in \mathbb{R}$: سره .

بیلګه: $f(x) = 2x^3$

توابع د مثبت بنسټ سره، د هغه سره چې خپلواکه متحوله x د اکسپوننت یا جګعدد سره رامنځ ته کيږي، اکسپوننشل تابع بلل کيږي.

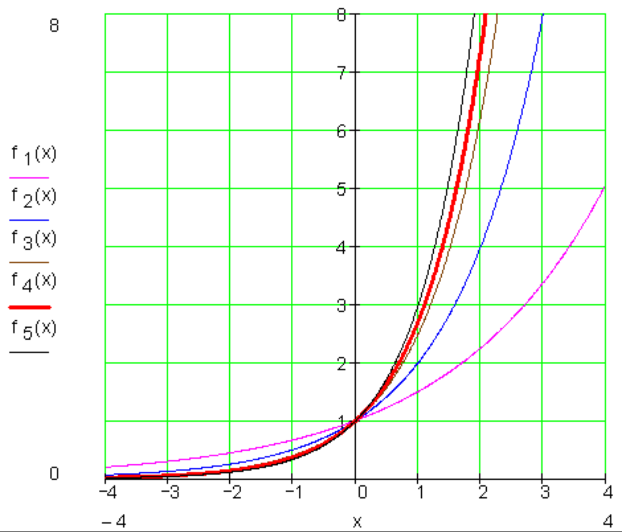
د اکپوننشل تابع لپاره بیلګه:

$f_1(x) = 1{,}5^x \quad f_2(x) = 2^x \quad f_3(x) = 2{,}5^x \quad f_4(x) = e^x \quad f_5(x) = 3^x$

اعداد **e** ; **2,5** ; **2** ; **1,5** او **3** بنسټ جوړوي او x اکسپو ننت یا جګعدد(جګګې).

بنسټ **e** د اويلر عدد باندې مشهور دی او فقريبي ارزښت يې 2,71828 دی.

دا به وروسته هم به نورو راوړونو کې غوره رول ولوبوي.



د اکپوننشل تابع ګراف د مختلفو بنسټونو سره.

دا سور رنګه انځور د اړونده اکسپوننشل تابع دe بنسټ پورې اړه لري، چې e تابع هم بلل کيږي.

پام ته راتلنه يا برېښيدنه:

- ټول په وضعيه قيمتسيستم کې ګرافونه د y - محور د (1 | 0) Py په ټکي کې غوڅوي (قطع کوي)

- د منفي x - ارزښت لپاره ټول ګرافونه د x - محور ته نزدې کيږي. د منفي x - محور په داسي حالتونو کې اسيمپتوت بلل کيږي. داسي هم ويلای شو، چې په داسي حالاتو کې د منفي x - رازښت ځان اسيمپتوتيکي د x - محور ته ورنزدې کوي.

په رياضيکي يا شمېرپوهنيز ډول داسي ليکو : $\lim_{x\to-\infty} a^x = 0$

د مثبت - ارزښت لپاره د تابع ارزښت له ټول پولو اوړي يعني د ناپای په لور ځي.

شميرپوهنيز ليکدود يي داسي دی: $\lim_{x\to\infty} a^x = \infty$

- په وضعيه قيمتسيستم کې انځورشويو ګرافونو ټول تابع ارزښتونه مثبت دي، ځکه چې د اکسپوننشل توابعو لپاره مثبت اجازه لري.

دا په دې معنا چې په داسې حالت کې صفرځايونه نه شته.

پېژند(هعريف)

د $f(x) = a^x$ r تابع د $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ او $x \in \mathbb{R}$ سره اکسپوننشل تابع د a په بنسټ بلل کيږي.

دا د **e** عدد له کومه منځ ته راځي؟

د ربحې شمېرنې څخه دې عدد e منځ ته راشي يا وده وکړي.

دلته په هر د فرمولونو ټولګه کې خوندي د ربحې فرمول استعماليږي.

n: د ربحې د برخې ګنون يا تعداد : K0 پيلپانګهKn دn : کاله ورسته د ربحې برخه p : د ربحې بنسټ يا بنه په %	$n:$ K_0 K_n $p:$ $K_n = K_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^n$

په کلنۍ ګټهٔ دې ګټه ونه دوه برابره شي. پس د ګټې بنه له p = 100% ټاکل کيږي داسې چې p/100 = 1 وي.

په يو کال د ډېرو د ګټې برخو سره، پانګه د ګټې-ګټې سره ډېر ځله په ګټه اچول کيږي.. دلته د ګټې پينه يا ببخ د ګټېبرخو باندې و وېشل شي.

د انګې په ګټه اچول د کال روسته د $p = 100\% \Rightarrow \frac{p}{100} = 1$ سره

$$K_1 = K_0 + K_0 \cdot \frac{p}{100} = K_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^1 = K_0(1+1)^1 = \underline{\underline{K_0 \cdot 2}}$$

د پانګې ګټونه د یو کال وروسته په نیمکلنه ګټونه د $t\ \frac{p}{2\cdot 100}=\frac{1}{2}$ سره.

$$K_2=K_0\left(1+\frac{1}{2}\right)^2=\underline{\underline{K_0\cdot 2,25}}$$

د پانګې ګټونه یا په ګټې اچونه له یو کال ورسته په میاشتنۍ ګټونه د $t\ \frac{p}{12\cdot 100}=\frac{1}{12}$ سره

$$K_{12}=K_0\left(1+\frac{1}{12}\right)^{12}=\underline{\underline{K_0\cdot 2,61\ldots}}$$

د پانګې په ګټې اچونه له یو کال ورسته په روځنۍ ګټونه د $\frac{p}{360\cdot 100}=\frac{1}{360}$ سره

$$K_{360}=K_0\left(1+\frac{1}{360}\right)^{360}=\underline{\underline{K_0\cdot 2,7145\ldots}}$$

د پانګې ګټونه یا په ګټې اچونه له یو کال ورسته په ساعته ګټونه د $\frac{p}{8640\cdot 100}=\frac{1}{8640}$ سره.

$$K_{8640}=K_0\left(1+\frac{1}{8640}\right)^{8640}=\underline{\underline{K_0\cdot\underbrace{2,7181\ldots}_{\approx e}}}$$

د پانګې ګټونه یا په ګټې اچونه له یو کال ورسته په nګټونه د $\frac{p}{n\cdot 100}=\frac{1}{n}$ سره.

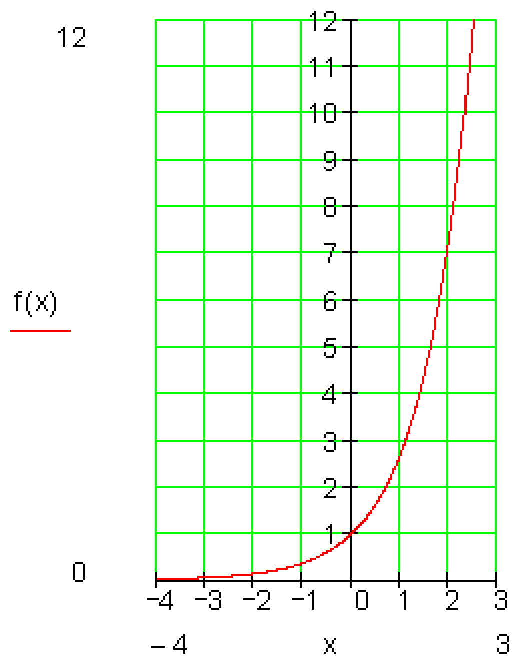
$$K_n=K_0\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

که په هره لحظه میاشتکي په کته واچول شي (یعني په ناپای ډېرو کټونو ناپای $n \to$) نو د یو کال وروسته لاندې پانګه لاس ته راوړو:

$$\lim_{n\to\infty} K_n = \lim_{n\to\infty} K_0 \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = K_0 \cdot \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = K_0 \cdot e$$

دا په دې معنا چې پانګه د e ضریب سره ډېرځله شوه،

د e- تابع $f(x) = e^x$ بنستیز خویونه



تابع ارزښت

$$f(0) = 1$$
$$f(1) = e \approx 2,72$$
$$f(2) = e^2 \approx 7,39$$
$$f(-1) = \frac{1}{e} \approx 0,37$$
$$f(-2) = \frac{1}{e^2} \approx 0,14$$

پوله ارزښت

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0 \qquad \lim_{x\to\infty} e^x = \infty$$

$f(x) = e^x > 0$ د $\forall x \in \mathbb{R}$

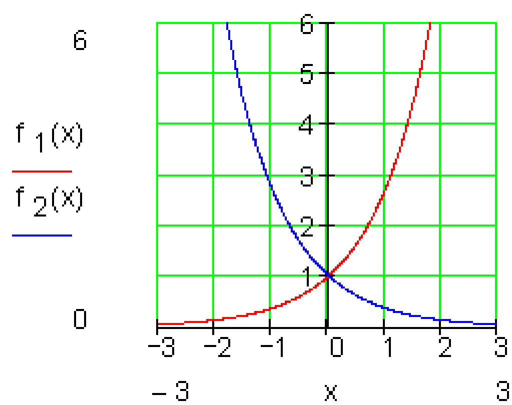
لپاره

د e - تابع صفرځای نه لري، د انحراف ټکي نه لري او هم د انعطاف ټکي نه لري

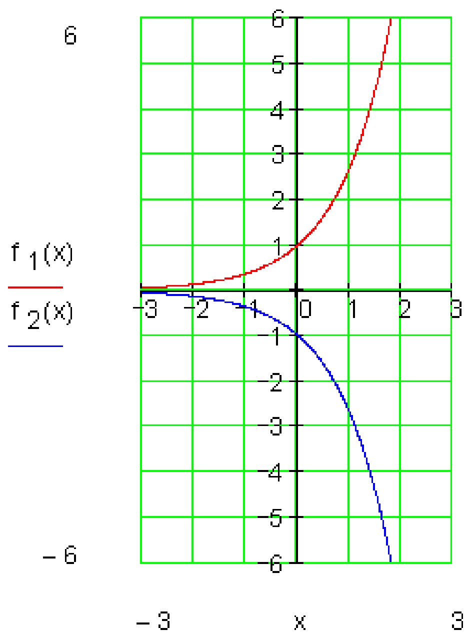
د e - تابع هندارونه یا معکوسونه، راکښنه او غزونه

په ورته توګه، لکه نورمال پارابولونه د مطلوبه عملیو سره نور پارابولونه منځ ته راځي، کیدی شي د e - توابعو د ګراف د راکښني، غزوني او هندارونې سره نور اکسپوننشل توابع وګټل یا لاس ته راوړل شي.

هندارونه یا معکوسونه:

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>د y -محور باندې منعکس شوې
$f_2(x) = e^{-x}$
دy - محور سره غوڅټکی
$f_2(0) = e^{-0} = e^0 = 1 \Rightarrow P_y(0|1)$
ژی پوله ارزښت
$\lim\limits_{x\to -\infty} e^{-x} = \infty$ $\lim\limits_{x\to \infty} e^{-x} = 0$
کوم صفرځایونه، انحرافي ټکي او ادعطافټکي نه شته</td>
</tr>
</table>

د x په محور هندارونه



$f_2(x) = -e^x$

د y– محور سره غوځتکی

$f_2(0) = -e^0 = -1 \Rightarrow P_y(0|-1)$

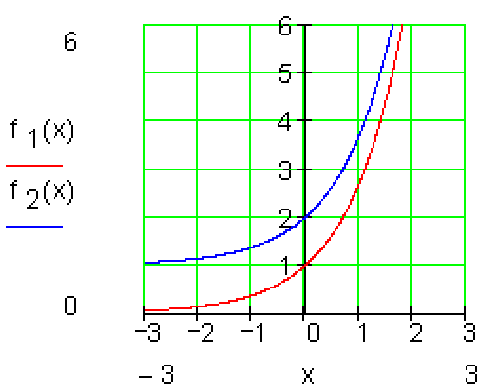
ژی یا د غاړي پوله ارزښت

$\lim_{x \to -\infty}(-e^x) = 0$

$\lim_{x \to \infty}(-e^x) = -\infty$ ،

کوم صفرځایونه، انحرافي ټکي او د انعطافټکي نه شته

د **y** په لور راکښنه



په یوه واحد پورته لور ته راکښنه

$f_2(x) = e^x + 1$

د y - محور سره غوځتکی

$f_2(0) = e^0 + 1 = 1 + 1 = 2 \Rightarrow P_y(0|2)$

د ژی پوله ارزښت

$\lim_{x \to \infty}(e^x + 1) = \infty \qquad \lim_{x \to -\infty}(e^x + 1) = 1$

کوم صفرځایونه، انحرافي ټکي او ادعطافټکي نه شته

په یوه واحد پورته لور ته راکښنه

$f_2(x) = e^x + 1$

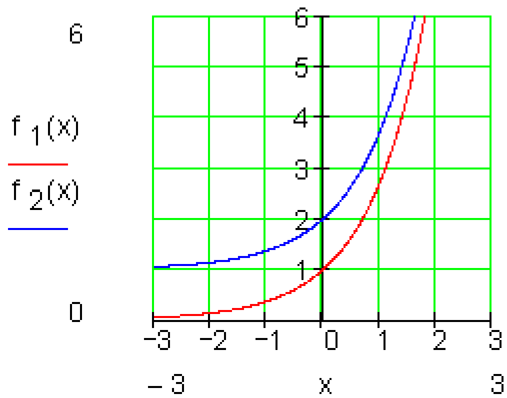
د y - محور سره غوخښتکی

$f_2(0) = e^0 + 1 = 1 + 1 = 2 \Rightarrow P_y(0|2)$

د ژی پوله ارزښت

$\lim_{x \to -\infty}(e^x + 1) = 1 \qquad \lim_{x \to \infty}(e^x + 1) = \infty$

کوم صفرځایونه، انحرافي ټکي او ادعطافتکي نه شته



په دوه واحده کښته لور ته راکښنه

$f_2(x) = e^x - 2$

د y – محور سره غوخښتکی

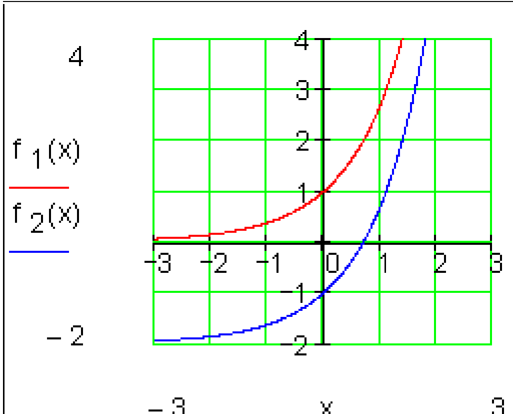
$f_2(0) = e^0 - 2 = 1 - 2 = -1 \Rightarrow P_y(0|-1)$

ژی یا د غاړې ارزښت

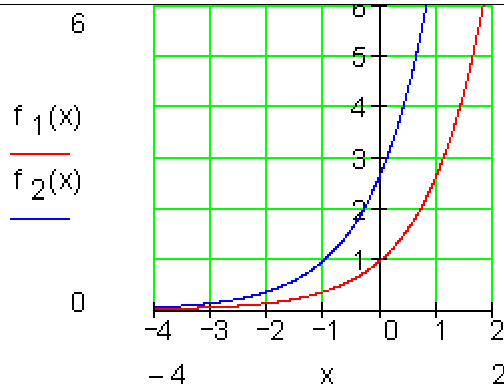
$\lim_{x \to -\infty}(e^x - 2) = -2 \qquad \lim_{x \to \infty}(e^x - 2) = \infty$

انحرافي او د انعطاف ټکي نه شته

صفرځا په انتروال [0 ; 1] کي.



د **x** محور باندې راکښنه



په یوه واحد کيڼ لور ته راکښنه

$f_2(x) = e^{x+1}$

د - محور سره غوڅېکی

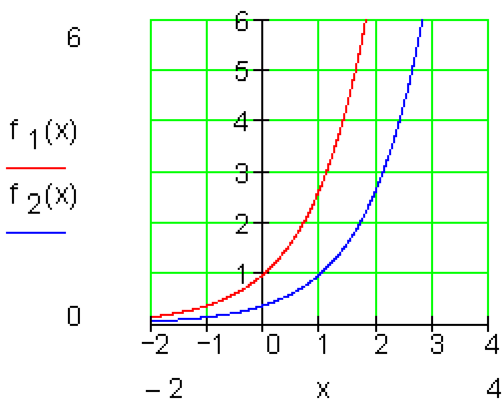
$f_2(0) = e^1 \approx 2,72 \Rightarrow P_y(0 | e \approx 2,72)$

ژی یا غاړې پوله ارزښت

$\lim_{x\to-\infty}\left(e^{x+1}\right) = 0 \qquad \lim_{x\to\infty}\left(e^{x+1}\right) = \infty$

صفرځایونه، انحرافي -او د انعطاف ټيش نه شته

په یوه واحد ښي لور ته راکښنه



$f_2(x) = e^{x-1}$

د y - محور سره غوڅېکی

$f_2(0) = e^{-1} \approx 0,37 \Rightarrow P_y\left(0 | e^{-1} \approx 0,37\right)$

ژی پوله ارزښت

$\lim_{x\to-\infty}\left(e^{x-1}\right) = 0 \qquad \lim_{x\to\infty}\left(e^{x-1}\right) = \infty$

صفرځایونه، د انحراف ټکي او انعطافټکي نه شته

غزونه (کېښکودنه) د **y** په لور

د ضریب k = 2 سره غزونه

$$f_2(x) = 2 \cdot e^x$$

د **y** - محور سره غوڅونه

$$f_2(0) = 2 \cdot e^0 = 2 \Rightarrow P_y(0|2)$$

ژی پوله ارزښت

$$\lim_{x \to -\infty}\left(2 \cdot e^x\right) = 0 \qquad \lim_{x \to \infty}\left(2 \cdot e^x\right) = \infty$$

د ضریب $k = \frac{1}{2}$ سره کیښکودنه

$$f_3(x) = \frac{1}{2} e^x$$

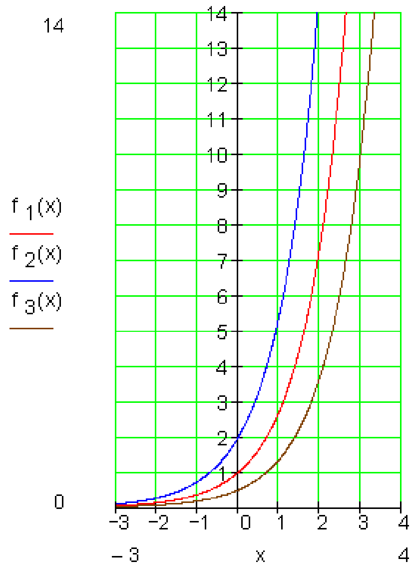
د **y** - محور سره غوڅتکی

$$f_3(0) = \frac{1}{2} \cdot e^0 = \frac{1}{2} \Rightarrow P_y\left(0 \left| \frac{1}{2}\right.\right)$$

ژی پوله ارزښت

$$\lim_{x \to -\infty}\left(\frac{1}{2} \cdot e^x\right) = 0 \qquad \lim_{x \to \infty}\left(\frac{1}{2} \cdot e^x\right) = \infty$$

صفرځایونه، انحرافتکي او انعطافتکي نه شته.



غزونه (کيښکودنه) د **x** په لور

د ضريب $k=\frac{1}{2}$ سره غزونه

$$f_2(x)=e^{2\cdot x}$$

د **y** - محور سره غوڅونه

$$f_2(0)=e^0=1 \Rightarrow P_y(0|1)$$

ژی پوله ارزښت

$$\lim_{x\to-\infty}\left(e^{2\cdot x}\right)=0 \qquad \lim_{x\to\infty}\left(e^{2\cdot x}\right)=\infty$$

د ضريب 2 سره راکښنه

$$f_3(x)=e^{\frac{1}{2}x}$$

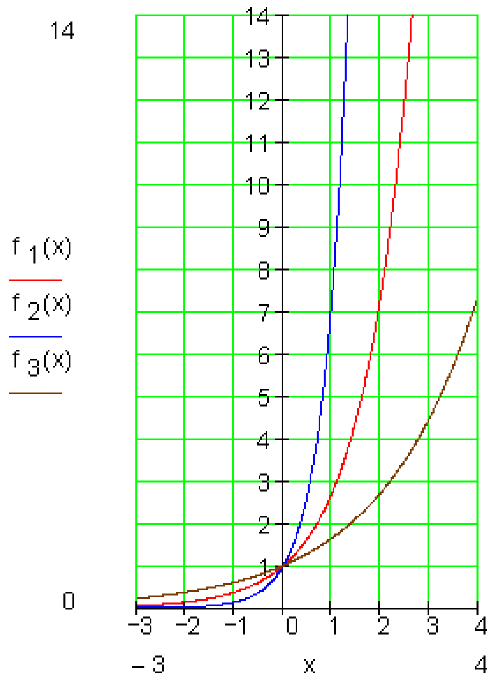
د **y** - محور سره غوڅتکی

$$f_3(0)=e^0=1 \Rightarrow P_y(0|1)$$

ژی پوله ارزښت

$$\lim_{x\to-\infty}\left(e^{\frac{1}{2}x}\right)=0 \qquad \lim_{x\to\infty}\left(e^{\frac{1}{2}x}\right)=\infty$$

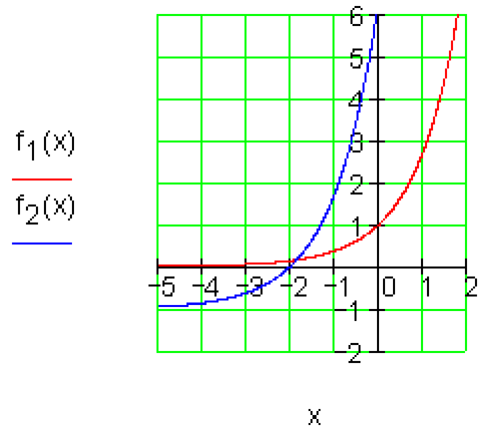
صفرځايونه، انحراف ارزښتونه او انعطافتکي نه شته.



د e تابعو هندارونه، راکښنه او غزونه په خوښه یو له بل سره کمبینیر یا نښلول کېدي یعني شمېرنئزې عملیې په اجرا کېدی شي .

د **x** - او **y** – محورونو راکښنه:

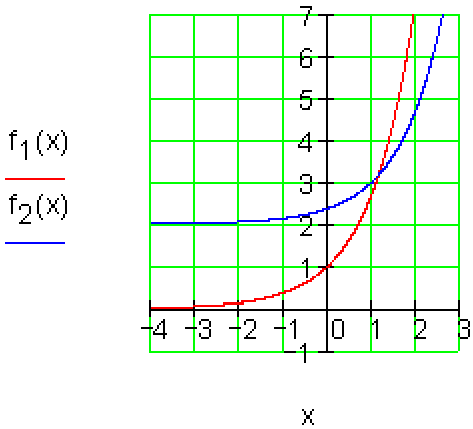
$f_1(x) := e^x \qquad f_2(x) := e^{x+2} - 1$



f_1 (x) منحٔ ته راغلی د x په محور د راکښنې له لارې په دوه واحدونو کین لور ته.

د y -محور باندې په یوه واحد د کښته لور ته .

$f_1(x) := e^x \qquad f_2(x) := e^{x-1} + 2$



تمرینونه:

د e - تابع ګرآف

د بنستیزې تابع e^x راکښنه، هندارونه یاانعکاس ، او بنه بدلون وښایاست.

هر تابع ګراف او د بنستیز تابع ګراف په یوه مناسب وضعیه قیمتسیستمکي و کاږی او د محور سره یې غوڅټکی(د تقاطع نقطه) .

د ګراف په مرسته ولولی:

پوله ارزښت یا حد (لیمیت) ، صفرځایونه که شته وي او د انعطاف ټکي.

یادونه: فقط په آنتروآل [10 ; 10-] کې تآبع آرزښتونه په پآم کې ونیسۍ.

Für= د لپاره

اول - $f(x) = e^x ; g(x) = e^{-x}$ für $[-4;4]$ دویم - $f(x) = -e^x$ für $[-5;3]$

دریم - $f(x) = e^{\frac{1}{3}x}$ für $[-4;4]$ څلورم - $f(x) = 2e^{\frac{1}{2}x}$ für $[-4;4]$

پنځم - $f(x) = \frac{1}{2}e^{x+3}$ für $[-5;3]$ شپږم - $f(x) = e^{x-2} - 3$ für $[-4;4]$

اوم - $f(x) = e^{-(x+2)} - 1$ für $[-5;3]$

اتم - $f(x) = 2 \cdot e^{-\frac{1}{2}(x-1)} - 2$ für $[-2;6]$

نهم - $f(x) = -10e^{-\frac{1}{2}(x+4)} + 3$ für $[-4;4]$

لسم - $f(x) = (x-2)e^{\frac{1}{4}x}$ für $[-10;5]$

نتیجي:

د اکسپوننشل تابع تمرینونه

مفصل حل

لومړی - مفصل حل

بنسټیزه تابع $f(x)=e^{x}$

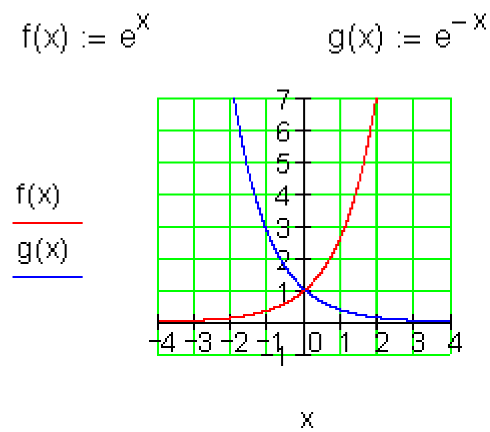
$$f(0)=e^{0}=1\Rightarrow P_y(0|1)$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=0;\ \lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$$

$f(x)=e^{-x}$ په y په هنداره شوی

$$f(0)=e^{-0}=1\Rightarrow P_y(0|1)$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\infty;\ \lim_{x\to\infty} f(x)=0$$



دویم - مفصل حل

$f(x)=-e^{x}$ له د -محور سره غوځتکي لاس ته راځي که په x - محور هنداره شي.

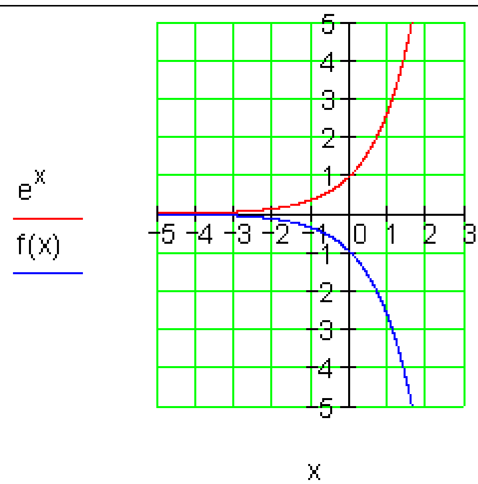
$$f(0)=-e^{0}=-1\Rightarrow P_y(0|-1)$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=0;\ \lim_{x\to\infty} f(x)=-\infty$$

صفرځایونه: نه شته

انحرافي ارزښتونه: نه شته

انعطافتکي : نه شته



دريم – مفصل حل

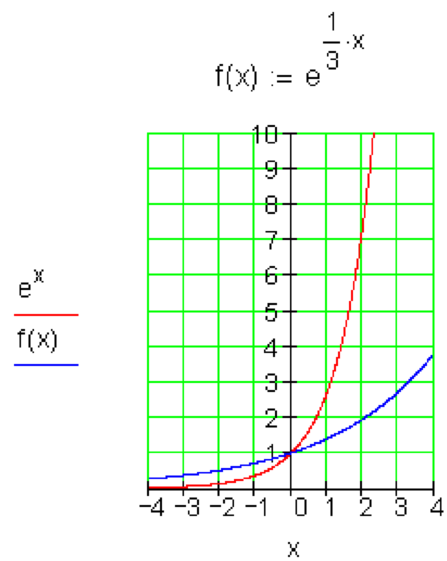
$f(x)=e^{\frac{1}{3}x}$ له e^x دغزوني له لاري د x په لور د ضريب 3 سره لاس ته راځي

$$f(0)=e^0=1 \Rightarrow P_y(0|1)$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=0;\ \lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$$

صفرځايونه نه شته

د انحرافي ارزښتونه: شته

انعطافتکي : نه شته



څلورم – مفصل حل

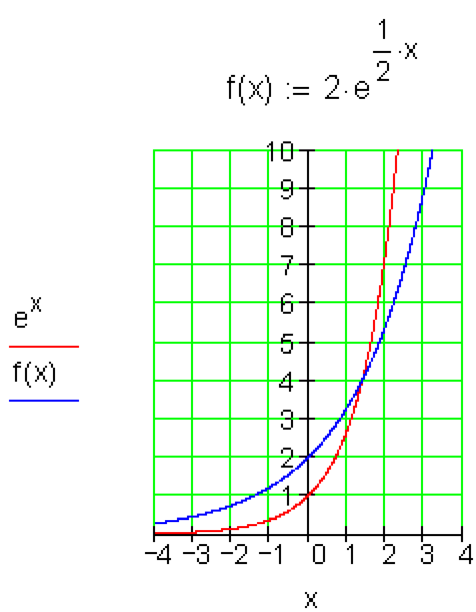
$f(x)=2\cdot e^{\frac{1}{2}x}$ له e^x منځ ته راځي د x په لور د ضريب 2 سره د غزوني له لاري د y په محور د غزوني له لاري د ضريب 2 سره.

$$f(0)=2\cdot e^0=2 \Rightarrow P_y(0|2)$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=0;\ \lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$$

صفرځايونه نه شته ه

انحرافي ارزښتونه: نه شته

انعطافتکي: شته



پنځم – $f(x)=\frac{1}{2}\cdot e^{x+3}$ له e^x لاس ته راځي د x په منفي لور د راکښني له لارې په 3 کچواحده، د کيښکودلو له لارې د y په لور ر باندې د ضريب 1/2 سره

$$f(0)=\frac{1}{2}\cdot e^{3}\approx 10$$

$$\Rightarrow P_y\left(0\,|\,\frac{1}{2}\cdot e^{3}\approx 10\right)$$

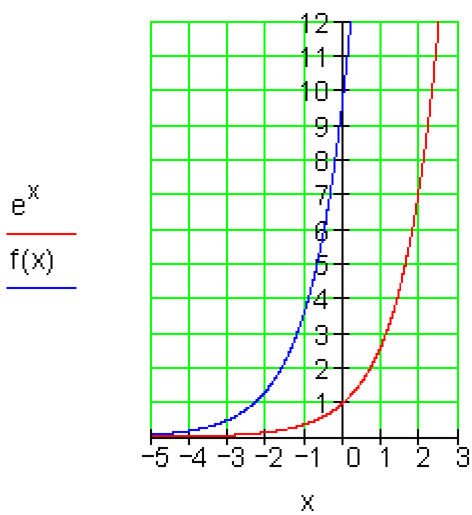
$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=0;\ \lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$$

صفرځايونه: نه شته

افراطي ارزښتونه: شته

انعطافټکي: شته

$f(x) := \frac{1}{2}\cdot e^{x+3}$



شپږم – $f(x)=e^{x-2}-3$ له e^x منځ ته راځي د منفي y لور باندې په 3 دسطحي واحده، د x په مثبته لور د راکښني له لارې په 2 سطحي واحده.

$$f(0)=e^{-2}-3\approx -2,86$$

$$\Rightarrow P_y\left(0\,|\,e^{-2}-3\approx -2,86\right)$$

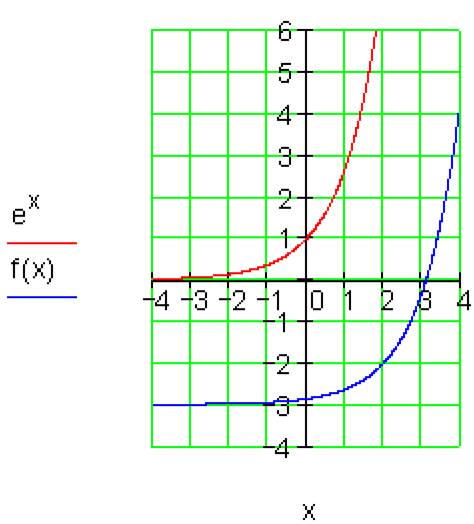
$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-3;\ \lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$$

صفرځايونه: په x~3,2

انحرافي ارزښتونه : نه شته

انعطافټکي: نه شته

$f(x) := e^{x-2}-3$



اوم – مفصل حل

$f(x)=e^{-(x+2)}-1$ له e^x منځ ته راځي د y په محور د هنداروني له لارې، د y په منفي لور په یو سطحي واخد. دx په منفي لور په 2 سطحي واحده غزول.

$$f(0)=e^{-2}-1\approx-0,86$$

$$\Rightarrow P_y\left(0\,|\,e^{-2}-1\approx-0,86\right)$$

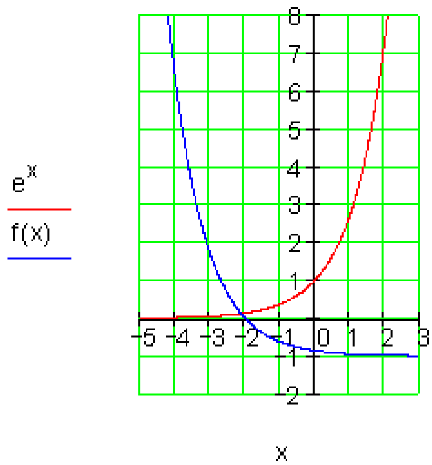
$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\infty;\ \lim_{x\to\infty} f(x)=-1$$

صفرځایونه : په x ~-1,8 کې

انحرافي ارزښتونه: نه شته

انعطافټکي: نه شته

$f(x) := e^{-(x+2)} - 1$



اتم — $f(x)=2\cdot e^{-\frac{1}{2}(x-1)}-2$

له e^x منځ ته راځي د y په محور د هنداروني له لارې د y په منفي لور راکښل په 2 واحده. دx په مثبت لور په 1 سطحي واحد راکښل. د y په مثبته لور په 2 واحده غزوني. د x په لور د2 واحده سره

$$f(0)=2\cdot e^{\frac{1}{2}}-2\approx1,3$$

$$\Rightarrow P_y\left(0\,|\,2\cdot e^{\frac{1}{2}}-2\approx1,3\right)$$

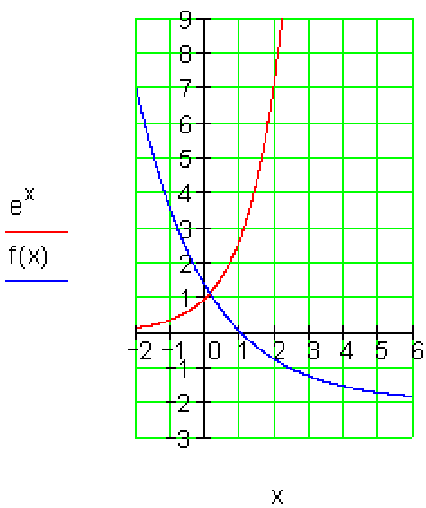
$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\infty;\ \lim_{x\to\infty} f(x)=-2$$

صفرځایونه : په x~1,2 کې

انحرافي ارزښتونه : شته

انعطافټکي: نه شته

$f(x) := 2\cdot e^{\frac{-1}{2}\cdot(x-1)} - 2$



نهم – $f(x) = -10e^{-\frac{1}{2}(x+4)} + 3$ له e^x منځ ته راځي دy په ممحور هنداروني له اړی د x په محور هنداروني ، د y په مثبته لور په 3 سطحي واحده را کښنه د x په منفي لور په 4 سطحي واحده راکښنه د y په لور غزونه د 10 ضریب سره. د x په لور غزوني د 2 ضریب سره.

$$f(0) = -10e^{-2} + 3 \approx 1{,}65$$

$$\Rightarrow P_y\left(0 \mid -10e^{-2} + 3 \approx 1{,}65\right)$$

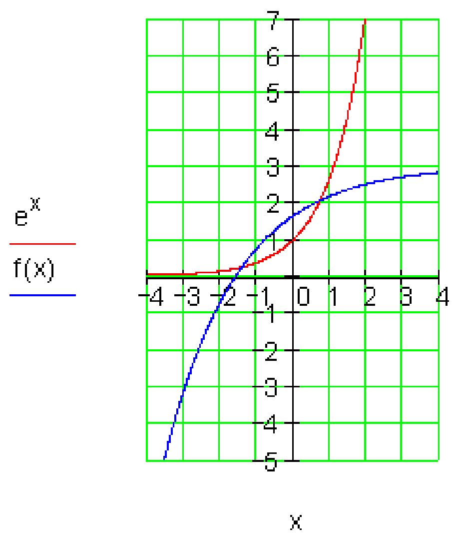
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty;\ \lim_{x\to\infty} f(x) = 3$$

صفرځايونه: په x~-1,6 کې.

انحرافي ارزښتونه: نه شته

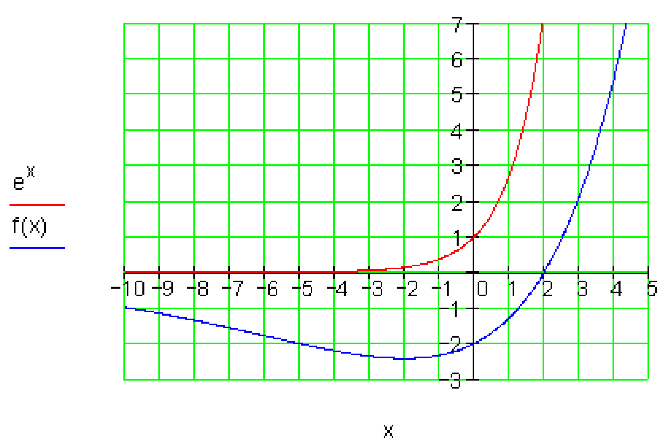
انعطافټکي: نه شته

$$f(x) := -10 \cdot e^{\frac{-1}{2}\cdot(x+4)} +$$



لسم – مفصل حل

$$f(x) := (x-2)\cdot e^{\frac{1}{4}\cdot x}$$



کربښیز مساوات u(x) = x - 2 د e- تابع $v(x) = e^{\frac{1}{4}x}$ سره نښلول کیږي. له دې دا

تابع لاس ته راځي: $f(x) = u(x) \cdot v(x) = (x-2)\,e^{\frac{1}{4}x}$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$$

په x = 2 کې صفرځای په x~-2 کې د انحراف ارزښت په x ~ -6 کې د انعطاف ټکی.

د اکسپوننشل توابعو کارونه یا استعمال

د تآبع مسآوآتو جوړونه

په طبیعت کې يې څیرنه:

د اکپوننشل توابعو مشتق

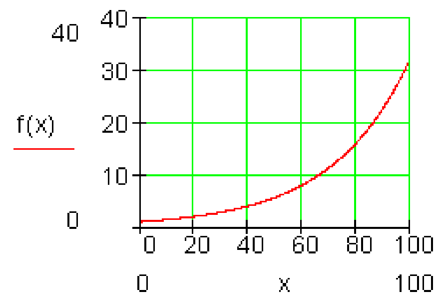
د تابع مساواتو جوړښت

کولي باکتریا Coli - Bakterien د انسان په کلمو کې کاره سرته رسوي. دوي د کوټې ویش (حجره ویش) له لارې زیاتیږي. و مساعدو شرایطو لاندې دوي په هرو ۲۰ دقیقو کې ځان تجزیه کوي. د غه عملیې لپاره یو ارزښت جدول : او ګراف يې کاږو. دلته د x اووښتوني (متغیره) په دقیقو د وخت لپاره ده.

د y متحوله د باکتریا ګانو د تعداد لپاره ده.

x = Minuten	0	20	40	60	80	100
y = Bakterienzahl	1	2	4	8	16	32

پورته جدول کې : x = دقیقې y = د بکتریاو تعداد



اوس مو دنده داده تابعیزې (د تابعو-) اړیکې د f(x) د یوه مساوات په بڼه وټاکو.

هرې ۲۰ دقیقې د بکتریاو تعداد یا ګڼون دوه برابره کیږي، دا په دې معنا چې دا د ۲۰ دقیقو وروسته نتیجه د دوه سره ضرب شي

لاندې ږدو یا لیکو: $f(x) = 2^{x}$

دلته f(x) د بکتریاو تعداد دی او x د دقیقو تعداد.

د دې تابع مساوات سره د بکتریاو تعداد هره دقیقه دوه برابره کوي.

د بام اوفکر وروسته موږ د تابع مساوات لاندې نتیجې ته رسیږو، چې دا شي حالت ټیک روښانه کوي یا تشریح کوي:

$$f(x) = 2^{\frac{1}{20}x}$$

Probe: $x = 0 \Rightarrow f(0) = 2^0 = 1$; $x = 20 \Rightarrow f(20) = 2^1 = 2$; $x = 40 \Rightarrow f(40) = 2^2 = 4$

ډیروالی، لکه چې دلته مو راووړ ، د اکسپوننشل ودې یا - زیاتوالي په نامه نوموو. یوه تابع چې داسې یوه تلنه تشریح کوي، اکسپوننشل تابع بولو.

تمرینیزې پوښتنې

د اکسپوننشل تابع د تابع مساوات د لاندې شرایطو سره باید څنګه وبرېښي:

الف – د باکتریو تعداد (ګڼون) هر پڅلس دقیقې دوه براپره کیږي.

ب – هر دېرش دقیقې د پاکتریو تعداد درې برابره کېږي.

پ - موږ په مطالعه یا کتلو پیل کوو، چې $n_0 = 1000\,000\,000$ د باکتریو تعداد شته یا موجود وي او تعداد یې هر پنځه څلوېښت دقیقې پنځه برابره کیږي.

ت - د کتلو پیل سره $n_0 = 1000\,000\,000$ باکتریې شته دي او هرې 45 min دقیقې د باکتریو تعداد د $e = 2,718$ په ضریب یا څلووني زیاتیږي.

هر لس دقیقې د n_0 تعداد نیمیږي.

حل :

الف $f(x) = 2^{\frac{1}{15}x}$ ب - $f(x) = 3^{\frac{1}{30}x}$

پ_ $f(x) = 1000\,000\,000 \cdot 5^{\frac{1}{45}x} = 1 \cdot 10^9 \cdot 5^{\frac{1}{45}x}$ ت -

$$f(x) = 100\,000 \cdot e^{\frac{1}{45}x} = 1 \cdot 10^5 \cdot e^{\frac{1}{45}x} \text{ mit } e = 2,718$$

ټ – تعداد یې = منفي دېرېدنه $\text{ا} f(x) = n_0 \cdot 2^{-\frac{1}{10}x}$

پام : توابع چې د زیاتیدو پروسې ښیې، اکسپوننشل توابع بلل کیږي. تولیز تابع مساوات یې دي:

$f(x) = n_0 \cdot a^{k \cdot x}$ د

$n_0 =$ Anzahl zur Zeit $t = 0$; $a \in \mathbb{R}^+$; $k, x \in \mathbb{R}$ ، $0 =$ پ‍ه وخت t تعداد د $= n0$

سره د وخت

اکسپوننشل ډیریدنه یا اکسپوننشل کیدنه د ژوند په زیاتو ورشو ګانو کې کتل کیدای شي:

په بیالوژي کې (د باکتریو ډیریدنه او کمیدنه)

په اوکولوګي کې (د حیواناتو ډیریدنه یا زیږګنده)

په اقتصاد کې (د ربح له لارې د پانګې زیاتیدنه)

په فزیکي او تخنیکي مسائلو کې (د رادیو اکتیو موادو تجزیه)

په روغتیا کې (د دوا اغیزه)

د **e** - تابع ته ځانګړې بیلګې

اکسپوننشل وده کونه

د باکتریا شتون د یوه **e** -تابع وروسته زیاتیږي.

د $n_0 = 2000$ باکتریاګانې شتون په ۴ ساعتونو کې په کوم ارزښت زیاتیږي.

له څومره ساعته وروسته دا باکرتیاوې $f(x) = n_0 \cdot e^{\frac{17\,221}{262\,551} \cdot t}$ د پیل ارزښت= n_0 ،
وخت په ساعت= t سره 10 000 ته ځګیږي؟

د تابع ګراف څنګه بریښي؟

د باکتریاو تعداد له څلور ساعته وروسته:

$$f(x) = n_0 \cdot e^{k \cdot x} \Rightarrow f(4) = 2000 \cdot e^{\frac{17\,221}{262\,551} \cdot 4} = \underline{\underline{2600}}$$

له څو ساعته وروسته دا باکتریا وې 10 000 دي؟

ا ېښونه: $f(x) = 2\,000 \cdot e^{\frac{17\,221}{262\,551} t} = 10\,000$

د دې لپاره چې جګ عدد یا ګڼt وتاکلی شو، نو باید اکسپوننشل مساوات
$2\,000 \cdot e^{\frac{17\,221}{262\,551} t} = 10\,000$ حل کړو.

دا د لوګاریتم سره کیدی شي. د دې لپاره باید لاندې د لوګاریتم قوانین وکارول شي:
$\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b$ او $\ln e^x = x$.

د اکسپوننشل مساوات حل:

$$\ln\left(2\,000 \cdot e^{\frac{17\,221}{262\,551} t}\right) = \ln 10\,000$$

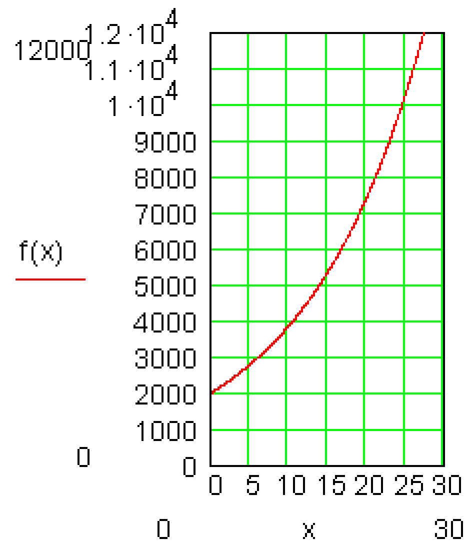
$$\Leftrightarrow \ln 2\,000 + \frac{17\,221}{262\,551} \cdot t = \ln 10\,000 \mid -\ln 2\,000$$

$$\Leftrightarrow \frac{17\,221}{262\,551} \cdot t = (\ln 10\,000 - \ln 2\,000) \mid \cdot \frac{262\,551}{17\,221}$$

$$\Leftrightarrow t \approx 24{,}54$$

د نږدې 24,5 ساعته وروسته

10000 باکتریاوې دي



اکسپوننشل کمیدنه یا کمښت

رادیو اکتیو مواد په برابر وخت کې تل په همغه ضریب تجزیه کیږي.

د هغو نیم ارزښت وخت ښخه لرو، چې له نیم وخت وروسته څومره فعالیت شتون لري.
فعالیت A(x) په مګاپیککورل (تجزیه په ثانیه کې Megabecquerel (1 MBq = 10^6 Zerfälle pro Sekunde) کچ یا اندازه کیږي.

د طبي معاینو لپاره یود Jod 131 د 1 نیم ارزښت وخت (t_h) 8 روځي کارول کیږي.

ناروغ ته A_0 = 4000 MBq ورکول کیږي.

د ....
ځومره نیم ارزښتوخت یا همداسې روځو وروسته په بدن کې د پاتې فعالیت ماکسیمال ترديې وخته 400 MBq دی؟

ګراف رسم کړی ، تقریبي وخت ولولی او ټیک ارزښت یې وشمېری.

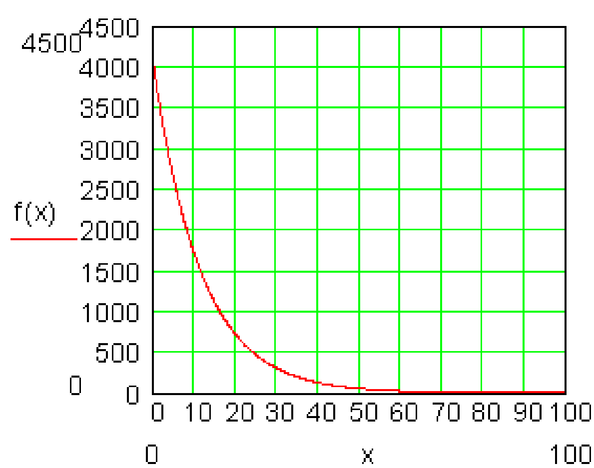
د رادیو اکتیو تجزیې قانون: $A(x) = A_0 \cdot e^{-\frac{\ln 2}{t_h}\cdot t}$ دلته په معنا دی: پیلفعالیت په MBq نیمارزښت وخت = t_h په روځو، t =وخت په روځو.

د تابع مساوات:

$$A(t) = A_0 \cdot e^{-\frac{\ln 2}{t_h}\cdot t}$$
$$= 4000 \cdot e^{-\frac{\ln 2}{8}\cdot t}$$

حل

$$A(t) = 4000 \cdot e^{-\frac{\ln 2}{8}\cdot t} = 400$$
$$\Leftrightarrow \ln\left(4000 \cdot e^{-\frac{\ln 2}{8}\cdot t}\right) = \ln 400$$
$$\Leftrightarrow \ln 4000 - \frac{\ln 2}{8}\cdot t = \ln 400$$
$$\Leftrightarrow t = \frac{8}{\ln 2}(\ln 4000 - \ln 400)$$
$$\Leftrightarrow t = \frac{8}{\ln 2}\cdot \ln 10 \approx \underline{\underline{26{,}575}}$$



د 27 روځو وروسته، نزدې له 3 نیمارزښت وخت وروسته کمښت په بدن کې نزدې 400 MBq دی.

د عدد e ، طبیعي لوګاریتم او د e - تابع

$e^x = b \Leftrightarrow x = \ln b$ $\qquad e = 2{,}718\,281\,828....$

z.B. $e^{\ln(x-1)} = x - 1$ $\qquad e^{\ln b} = b$

z.B. $\ln e^{-\frac{1}{k}\cdot x} = -\frac{1}{k}\cdot x$ $\qquad \ln e^x = x$

$\ln e = 1$ $\qquad \ln 1 = 0$

ګراف له II د I په لور ځغلي.

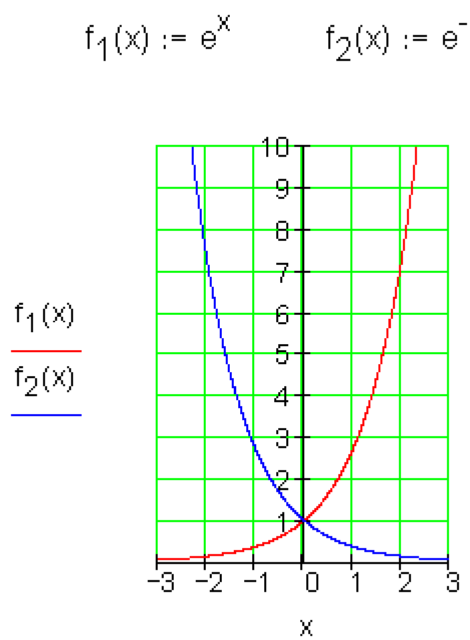
که اکسپوننت زاتيز يامثرت وي، نو ګراف همغږيز جګيدونکی دی.

که اکسپوننت کيمز يا منفي وي، ن و ګراف همريز لږيری يا ټيټيږي.

صفرځای نه شته.

د لوی x - ارزښت لپاره ګراف تل د x - محور ته نږدې کيږي.

ټول ګرافونه له ټکي P (0 | 1) تيريږي.



هر اکسپوننشل تابع يا بلواک د e -تابع له لارې کښل کيدی شي.

Mit $f(x) = a^x$ und $a = e^{\ln a}$ gilt:

$$f(x) = a^x = \left(e^{\ln a}\right)^x = e^{(\ln a)\cdot x} = e^{x\cdot\ln a}$$

له دې بنسته به په لاندې برخه کې داکسپوننشل تابع فقط د e –تابع تر څېړنې لاندې ونيل شي.

دریم: محور غوڅېټکي او اکسپوننشل مساوات

پیلبیلګې

بیلګه ۱

د لاندې تابع غوڅېټکي یا نقاط تقاطع باید وټاکل شي:

$$f(x) = -\frac{3}{4} \cdot e^{-\frac{1}{2}(x+4)}$$

د y-محور سره غوڅېټکی د لاندې اینوونې له لارې پیدا کیدی شي:

$$y_s = f(0)$$

$$f(0) = -\frac{3}{4} \cdot e^{-\frac{1}{2}(0+4)} = -\frac{3}{4} \cdot e^{-2} \approx -0{,}102 \Rightarrow \underline{P_y\left(0 \,|\, -\frac{3}{4} \cdot e^{-2} \approx -0{,}102\right)}$$

د x- محور سره غوڅېټکی دلاندې اینوونې څخه لاس ته راځي:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{3}{4} \cdot e^{-\frac{1}{2}(x+4)} = 0$$

له دې لاس ته راځي چې غوڅېټکي نه شته، ځکه چې $e^{-\frac{1}{2}(x+4)} \neq 0$ دی د ټول $x \in \mathbb{R}$ لپاره.

د x -محور سره غوڅېټکي د f (x) د صفرځایونو له لارې پیدا کیږي. تابع f (x) صفرځای نه لري، ځکه چې دا د x په لور غزېدل او د x په لور راکښلي e – تابع دی. دا برسیره پرته له دې د y -محور او x -محور باندې هنداره یا منعکس شوی دی،

د اکسپوننشل تابع بڼه $f(x) = a \cdot e^{u(x)}$ د $a \in \mathbb{R}$ سره د y -محور سره فقط يو غوڅټکی لري مګر کوم صفرځای نه لري. ځکه $e^{u(x)} \neq 0$ د ټول $x \in \mathbb{R}$ لپاره.

بیلګه ۲ :

د لاندې تابع غوڅټکي غواړو پيدا کړو

$$f(x) = \frac{1}{2} \cdot e^{2x+1} - 2 \cdot e^{x+1}$$

د y -محور سره غوڅټکی: $y_s = f(0)$

$$y_s = f(0) = \frac{1}{2} \cdot e^1 - 2 \cdot e^1 = -\frac{3}{2} \cdot e \approx -4{,}08 \Rightarrow \underline{\underline{P_y\left(0 \mid -\frac{3}{2} \cdot e \approx -4{,}08\right)}}$$

د دې لپاره چې د x –محور سره غوڅټکي وټاکلی شو، دا کار ستر دی. د دې لپاره د f (x) صفرځایونه باید وټاکل شي.

د د ی لپاره چې د x -محور سره غوڅټکی، يعني د اکسپوننشل تابع صفرځای وټاکو، دا په ډيرو حالتونو کي غوښتونی دی، چې اکسپوننشل تابع حل کړو. د دې معلومو عمليو د پاسه يا پرته، کوم چې د مساوات د حل لپاره کارول کيږي، د اکسپوننشل مساوات د حل لپاره اړين دی، چې د توان- او لوګاريتم قونين راته جوت وي.	$f(x) = \frac{1}{2} \cdot e^{2x+1} - 2 \cdot e^{x+1}$ د x محور سره غوڅټکی: $f(x) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{\frac{1}{2} \cdot e^{2x+1} - 2 \cdot e^{x+1} = 0}_{\text{Exponentialgleichung}}$ اکسپوننشل مساوات

$$\frac{1}{2}\cdot e^{2x+1}-2\cdot e^{x+1}=0\,|+2\cdot e^{x+1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\cdot e^{2x+1}=2\cdot e^{x+1}\,|\cdot 2$$

$$\Leftrightarrow e^{2x+1}=4\cdot e^{x+1}\,|:e^{x+1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{e^{2x+1}}{e^{x+1}}=4\,|$$ توانقانون

اکسپوننت ساده کونه

$$\Leftrightarrow e^{2x+1-(x+1)}=4\,|$$

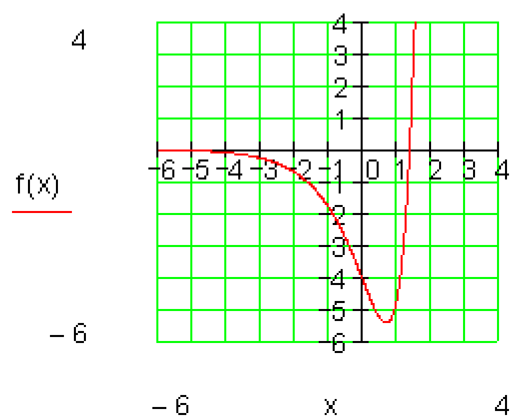
$\ln(\;)$ $\Leftrightarrow e^{x}=4\,|$ لوګاریتمونه

$$\Leftrightarrow \ln\left(e^{x}\right)=\ln(4)\,|$$ د لوګاریتم قانون

$$\Leftrightarrow x\cdot\underbrace{\ln(e)}_{1}=\ln(4)$$

$$\Leftrightarrow x=\ln(4)\approx 1,39\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{P_x\left(\ln(4)\approx 1,39\,|\,0\right)}}$$



د توان – او لوګاریتم قوانین

د توان – او لوګاریتم غوره قوانین سره رایوځای کړي.

توانقوانین:

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$	$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$
$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$	$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$	$a^0 = 1$	$\frac{1}{a^n} = a^{-n}$

د لوګاریتم تعریف:

$a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a(b)$	$e^x = b \Leftrightarrow x = \ln(b)$	$10^x = b \Leftrightarrow x = \lg(b)$

د لوګاریتم قوانین د e په بنسټ

$\ln(b \cdot c) = \ln(b) + \ln(c)$	$\ln\left(\frac{b}{c}\right) = \ln(b) - \ln(c)$	$a = e^{\ln(a)}$	$e^0 = 1$
$\ln(b^c) = c \cdot \ln(b)$	$\log_a b = \frac{\lg b}{\lg a} = \frac{\ln b}{\ln a}$	$\ln(1) = 0$	$\ln(e) = 1$

تمرینونه:

د توان او لوګاریتم قوانینو استعمال.

د لاندې توان او لوګاریتمي ترمونو د توان او لوکاریتمي قوانینو په استعمال سره بنه بدله کړی.

اول – $(e^x + e^{-x})^2$ دویم - $(e^x - e^{-x} + 5) \cdot e^x$

دریم - $\frac{e^{3x+1}}{e^{-x+2}}$ څلورم - $e^{-x} \cdot e^{-x+2} \cdot e^{2x-3}$

پنځم - $\frac{1}{e^{2x}} + 3(e^{-x})^2 - \left(\frac{2}{e^x}\right)^2$ شپږم - $e^{\ln(2k)} - 2k \cdot e^{\ln(2)}$

اوم - $\ln\left(e^{2}\right)-3\ln\left(\frac{e}{2}\right)$ اتم - $\ln\left(2e^{2}\right)+\ln\left(\frac{e}{2}\right)$

نهم - $e^{\ln(k)+1}$ لسم - $\frac{2}{3}e^{-\ln\left(\frac{3}{4}k\right)}$

د اکسپوننشل مساوات لپاره د حل لارې

د اکسپوننشل مساوات له لارې حل

یو اکسپوننشل مساوات دی، د لاندې بڼه بدلون له مخې

چې د اکسپوننشل مقاېسې سره حل کیدی شي.

یو حل د اکسپوننشل مقاېسې له مخې فقط هلته ممکن دی، که وکړای شو، د مساوات دواړه خواو ته ترمونه په داسې بڼه ولیکلای شو، چې د برابر بنسټ سره توانونه لاس ته راوړو. متآسفانه چې دا تل شوونې نه دي لکه لاندې بیلګه به چې وښایي:

د اکسپوننشلمساوات لپاره د حل لارې

د اکسپوننشل پرتله کونې له لارې حل

$$e^{2x+4}-e^{x-1}=0$$

اکسپوننشل مساوات دی، چې له لاندې بڼه بدلون

$$e^{2x+4}=e^{x-1}$$

له لارې د اکسپوننش پرتله کونې سره حل کيدی شي.

$$e^{2x+4} = e^{x-1} \Leftrightarrow 2x+4 = x-1 \Leftrightarrow 2x+4 = x-1 \Rightarrow \underline{x = -5}$$

ازماېښت:

$$e^{-10+4} - e^{-5-1} = e^{-6} - e^{-6} = 0$$

د اکسپوننشل له لارې حل فقط هلته شونی دی، چې که وکړای شو، چې پهدواړولورو ترم داسې بڼه بدل کړو، چې د برابر بنسټ سره توانونه لاس ته راوړو. دا متآسفانه تل شونې نه دي، لکه چې لاندې بيلګه يې په ګوته کوي:

د لوګاريتموس سره حل

$$\frac{1}{2e^x} - 3 = 0 \,|+3 \Leftrightarrow \frac{1}{2e^x} = 3 \,|\cdot 2e^x \Leftrightarrow 1 = 6\cdot e^x \Leftrightarrow e^x = \frac{1}{6}$$

دلته اکپوننشله مقايسه شوونې نه ده.

دا د لوګاريتم نيولو له لارې کېدی شي:

$$\ln\left(e^x\right) = \ln\left(\frac{1}{6}\right) \Leftrightarrow x\cdot\underbrace{\ln(e)}_{1} = \underbrace{\ln(1)}_{0} - \ln(6) \Leftrightarrow \underline{\underline{x = -\ln(6)}}$$

دا په لوګاريتم نيولو سره پيل په زياتو حالتونو کې برياو ته بيايې. مګر يا اګر چې اکسپوننشلمساوات، په کومو کې چې جمعه يا تفريق منځ ته راشي، نه شي کېدی لوګاريت يې ونيول شي. دلته هڅه کېدی شي، دا د بدلون (د ځاې نيوونکې واريابلې اينوونه) له لارې حل کړو.

د بدلون(په ځای د بلې متحولې اينول) له لآر حل

$e^{2x} - 5e^x + 4 = 0$ بدلون: $e^x = u$ und $e^{2x} = u^2$

$\Rightarrow u^2 - 5u + 4 = 0$

مربع مساوات دی د $u_1 = 1; u_2 = 4$ حل سره

په څنډ بدلون او د لوګاریتم نیولو له لارې حل.

$$u_1 = e^{x_1} = 1 \Rightarrow \underline{\underline{x_1 = \ln(1) = 0}}$$
$$u_2 = e^{x_2} = 4 \Rightarrow \underline{\underline{x_2 = \ln(4)}}$$

اکسپوننشل مساوات ته مفصلې بېلګې

بیلګه ۱:

ازماییښت $2e^{3\cdot\frac{1}{2}\ln(3)} - 6e^{\frac{1}{2}\ln(3)} = 0$ $\Leftrightarrow 2e^{\frac{3}{2}\ln(3)} - 6e^{\frac{1}{2}\ln(3)} = 0$ $\Leftrightarrow 2\left(e^{\ln(3)}\right)^{\frac{3}{2}} - 6\left(e^{\ln(3)}\right)^{\frac{1}{2}} = 0$ $\Leftrightarrow 2\cdot 3^{\frac{3}{2}} - 6\cdot 3^{\frac{1}{2}} = 0$ $\Leftrightarrow 2\cdot 3\cdot 3^{\frac{1}{2}} - 6\cdot 3^{\frac{1}{2}} = 0$ $\Leftrightarrow 6\cdot 3^{\frac{1}{2}} - 6\cdot 3^{\frac{1}{2}} = 0\ (w)$	$2e^{3x} - 6e^{x} = 0 \mid +6e^{x}$ $\Leftrightarrow 2e^{3x} = 6e^{x} \mid : 2$ د لوګاریتم نیولو له لار حل $\Leftrightarrow e^{3x} = 3e^{x} \mid \ln(\ )$ $\Leftrightarrow \ln\left(e^{3x}\right) = \ln\left(3\cdot e^{x}\right)$ $\Leftrightarrow 3x\cdot\ln(e) = \ln(3) + \ln\left(e^{x}\right)$ $\Leftrightarrow 3x\cdot\ln(e) = \ln(3) + x\cdot\ln(e)$ $\Leftrightarrow 3x = \ln(3) + x \mid -x$ $\Leftrightarrow 2x = \ln(3) \mid : 2$ $\Leftrightarrow \underline{\underline{x = \frac{1}{2}\ln(3)}}$

بیلګه ۲:

	ازمایینت
$x \cdot e^x - 3x = 0$ $\Leftrightarrow x\left(e^x - 3\right) = 0$ $\Rightarrow \underline{\underline{x_1 = 0}}$ und $e^x - 3 = 0 \mid +3$ د لوګاریم له لارې حل $\Leftrightarrow e^x = 3 \mid \ln(\ )$ $\Leftrightarrow \ln\left(e^x\right) = \ln(3)$ $\Leftrightarrow x \cdot \ln(e) = \ln(3)$ $\Leftrightarrow \underline{\underline{x_2 = \ln(3)}}$	$x_1 = 0$ $0 \cdot e^0 - 3 \cdot 0 = 0$ $\Leftrightarrow 0 \cdot 1 = 3 \cdot 0 = 0$ $\Leftrightarrow 0 = 0\ (w)$ $x_2 = \ln(3)$ $\ln(3) \cdot e^{\ln(3)} - 3 \cdot \ln(3) = 0$ $\Leftrightarrow \ln(3) \cdot 3 - 3 \cdot \ln(3) = 0$ $\Leftrightarrow 3 \cdot \ln(3) - 3 \cdot \ln(3) = 0\ (w)$

بیلګه ۳:

؟ $e^{2x} - \frac{17}{2}e^x + 4 = 0$ بدلون : $u = e^x \Rightarrow u^2 - \frac{17}{2}u + 4 = 0$

د مربع مساوات حل

$$p = -\frac{17}{2};\ q = 4;$$

$$D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \frac{289}{16} - \frac{64}{16} = \frac{225}{16} \Rightarrow \sqrt{D} = \frac{15}{4}$$

$$u_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D}$$

$$u_1 = \frac{17}{4} + \frac{15}{4} = \frac{32}{4} = 8$$

$$u_2 = \frac{17}{4} - \frac{15}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

په خټ بدلون

$$u_1 = 8 \Leftrightarrow e^x = 8 \mid \ln(\ )$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(e^x\right) = \ln(8)$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{x_1 = \ln(8)}}$$

$$u_2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow e^x = \frac{1}{2} \mid \ln(\ )$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(e^x\right) = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow x \cdot \ln(e) = \ln(1) - \ln(2)$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{x_2 = -\ln(2)}}$$

بیلګه ۴:

$$\frac{2}{1+e^x} = -2\frac{e^x-4}{\left(1+e^x\right)^2} \,|:2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{1+e^x} = -\frac{e^x-4}{\left(1+e^x\right)^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1\cdot\left(1+e^x\right)}{\left(1+e^x\right)\left(1+e^x\right)} = -\frac{e^x-4}{\left(1+e^x\right)^2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\left(1+e^x\right)}{\left(1+e^x\right)^2} = -\frac{e^x-4}{\left(1+e^x\right)^2} \,|\cdot\left(1+e^x\right)^2$$

$$\Leftrightarrow 1+e^x = -\left(e^x-4\right) \quad \Leftrightarrow \quad 1+e^x = -e^x+4 \,|+e^x-1$$

$$\Leftrightarrow 2e^x = 3 \,|\ln(\ ) \quad \Leftrightarrow \quad \ln\left(2\cdot e^x\right) = \ln(3)$$

$$\Leftrightarrow \ln(2)+\ln\left(e^x\right) = \ln(3) \quad \Leftrightarrow \quad \ln(2)+x\cdot\ln(e) = \ln(3)$$

$$\Leftrightarrow \ln(2)+x = \ln(3) \,|-\ln(2) \quad \Leftrightarrow \quad x = \ln(3)-\ln(2)$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{x = \ln\left(\frac{3}{2}\right)}}$$

بیلگه ۵:

$$e^{2x+4}-3e^{x+2}+2=0 \quad \Leftrightarrow \quad e^{2\cdot(x+2)}-3e^{x+2}+2=0$$

Substitution: $u = e^{x+2} \Rightarrow u^2-3u+2=0$

د مربع مساوات حل په ښت بدلون

$u_1 = 2 \Leftrightarrow e^{x+2} = 2 \,\vert \ln(\ )$	$p=-3;\ q=2;$
$\Leftrightarrow (x+2)\ln(e) = \ln(2)$	$D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \frac{9}{4}-\frac{8}{4} = \frac{1}{4} \Rightarrow \sqrt{D} = \frac{1}{2}$
$\Leftrightarrow x+2 = \ln(2) \,\vert -2$	$u_{1/2} = -\frac{p}{2}\pm\sqrt{D}$
$\Leftrightarrow \underline{\underline{x_1 = -2+\ln(2)}}$	$u_1 = \frac{3}{2}+\frac{1}{2} = \frac{4}{2} = 2$
$u_2 = 1 \Leftrightarrow e^{x+2} = 1 \,\vert \ln(\ )$	$u_2 = \frac{3}{2}-\frac{1}{2} = \frac{2}{2} = 1$
$\Leftrightarrow (x+2)\ln(e) = \ln(1)$	
$\Leftrightarrow x+2 = 0 \,\vert -2$	
$\Leftrightarrow \underline{\underline{x_2 = -2}}$	

تمرينونه: اکسپوننشلمساوات.

لاندې اکسپوننشل مساوات تاسو ته له معلومې لارې وشميرى.

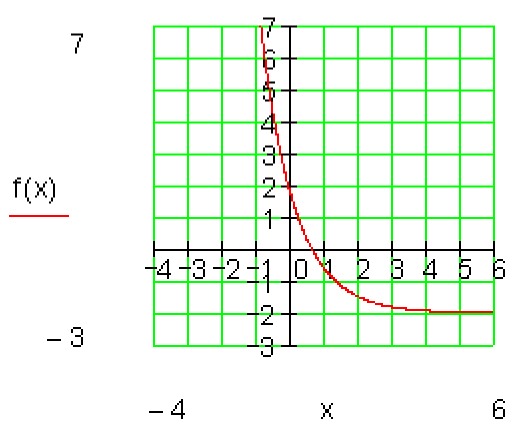
اول - $6-\frac{3}{2}e^{2-2x}=0$ دويم – $\frac{1}{4}e^{4x}-\frac{e}{2}=1$ دريم – $\frac{1}{2}e^{x}-e^{x+1}=0$

څلورم – $(3+2x)\,e^{x-1}=0$ پنځم – $-2x^{2}e^{-x+2}=0$

شپږم – $-\frac{1}{5}e^{x}-1+10e^{-x}=0$ اوم – $4-3e^{-\frac{1}{2}x}=e^{\frac{1}{2}x}$ اتم - $-\frac{3}{4}e^{-2x}+5=e^{-x}$

نهم - $\frac{2x}{e^{x}+1}=0$ لسم - $\left(2-e^{x}\right)^{2}=\left(e^{x}-3\right)^{2}$

<u>د محور ونو غوڅتکي وشميرى</u>



$$f(x)=\frac{1}{2}\cdot e^{2-x}-2$$

$$y_s=f(0)=\frac{1}{2}\cdot e^{2}-2\approx 1{,}7$$

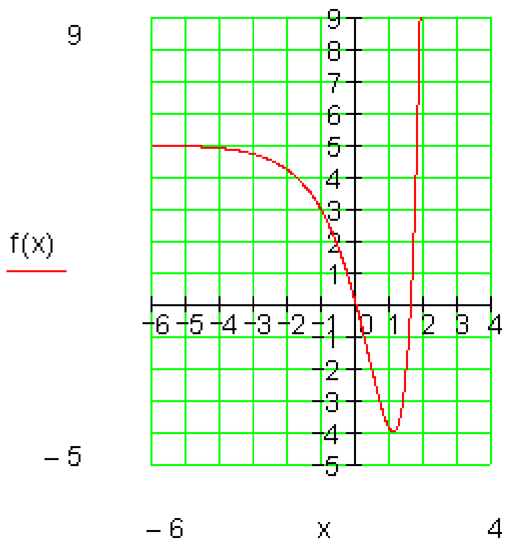
$$\Rightarrow \underline{\underline{P_y\left(0\,\middle|\,\frac{1}{2}\cdot e^{2}-2\approx 1{,}7\right)}}$$

$$f(x)=0\Leftrightarrow \frac{1}{2}\cdot e^{2-x}-2=0\,|+2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\cdot e^{2-x}=2\,|\cdot 2\Leftrightarrow e^{2-x}=4\,|\ln(\ )$$

$$\Leftrightarrow 2-x=\ln(4)\Leftrightarrow x=2-\ln(4)$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{P_x\left(x=2-\ln(4)\approx 0{,}614\,|\,0\right)}}$$



$$f(x) = e^{2x} - 6 \cdot e^{x} + 5$$

$$y_s = f(0) = 1 - 6 + 5 = 0 \Rightarrow \underline{\underline{P_y(0|0)}}$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow e^{2x} - 6 \cdot e^{x} + 5 = 0$$

بدلون: $e^{x} = u \Rightarrow e^{2x} = u^2$

$u^2 - 6u + 5 = 0$

د مربع مساوات حل

$$u_1 = 5; u_2 = 1$$

$$u_1 = 5 \Rightarrow e^{x_1} = 5 \Rightarrow x_1 = \ln(5) \approx 1{,}61$$

$$u_2 = 1 \Rightarrow e^{x_1} = 1 \Rightarrow x_2 = \ln(1) = 0$$

$$\underline{\underline{P_{x1}(\ln(5) \approx 1{,}61|0); P_{x2}(\ln(1) = 0|0)}}$$

حلونه

تمرينونه توان او د لوګاريتم قوانين

نتيجې

اول - $\left(e^{x} + e^{-x}\right)^2 = e^{2x} + e^{-2x} + 2$

دويم – $\left(e^{x} - e^{-x} + 5\right) \cdot e^{x} = e^{2x} + 5 \cdot e^{x} - 1$

دريم - $\dfrac{e^{3x+1}}{e^{-x+2}} = e^{4x-1}$

شلورم - $e^{-x} \cdot e^{-x+2} \cdot e^{2x-3} = \frac{1}{e}$

پنځم - $\frac{1}{e^{2x}} + 3\left(e^{-x}\right)^2 - \left(\frac{2}{e^x}\right)^2 = 0$

شپږم - $e^{\ln(2k)} - 2k \cdot e^{\ln(2)} = -2k$

اوم - $\ln\left(e^2\right) - 3\ln\left(\frac{e}{2}\right) = 3 \cdot \ln(2) - 1$

اتم - $\ln\left(2e^2\right) + \ln\left(\frac{e}{2}\right) = 3$

نهم - $e^{\ln(k)+1} = k \cdot e$

لسم – $\frac{2}{3} e^{-\ln\left(\frac{3}{4}k\right)} = \frac{8}{9k}$

مفصل حلونه

اول –

$$\left(e^x + e^{-x}\right)^2 = e^x \cdot e^x + 2 \cdot e^x \cdot e^{-x} + e^{-x} \cdot e^{-x}$$
$$= e^{x+x} + 2 \cdot e^{x-x} + e^{-x-x}$$

$$= e^{2x} + 2 \cdot e^0 + e^{-2x}$$

د $e^0 = 1$ سره کیږي

$$= e^{2x} + 2 \cdot 1 + e^{-2x} = \underline{\underline{e^{2x} + e^{-2x} + 2}}$$

دويم –

$$\left(e^{x}-e^{-x}+5\right)\cdot e^{x}=e^{x}\cdot e^{x}-e^{-x}\cdot e^{x}+5\cdot e^{x}$$
$$=e^{x+x}-e^{-x+x}+5\cdot e^{x}$$
$$=e^{2x}-e^{0}+5\cdot e^{x}=e^{2x}-1+5\cdot e^{x}=\underline{\underline{e^{2x}+5\cdot e^{x}-1}}$$

دريم –

$$\frac{e^{3x+1}}{e^{-x+2}}=e^{3x+1}\cdot e^{-(-x+2)}=e^{3x+1-(-x+2)}=e^{3x+1+x-2}=\underline{\underline{e^{4x-1}}}$$

ځلورم –

$$e^{-x}\cdot e^{-x+2}\cdot e^{2x-3}=e^{-x+(-x+2)+2x-3}=e^{-x-x+2+2x-3}=e^{-1}=\frac{1}{\underline{\underline{e}}}$$

پنځم –

$$\frac{1}{e^{2x}}+3\left(e^{-x}\right)^{2}-\left(\frac{2}{e^{x}}\right)^{2}=e^{-2x}+3\cdot e^{-2x}-\left(\frac{4}{e^{2x}}\right)=4\cdot e^{-2x}-4\cdot e^{-2x}=\underline{\underline{0}}$$

شپږم –

$$e^{\ln(2k)}-2k\cdot e^{\ln(2)}$$

د $e^{\ln(x)}=x$ سره کيږي

$$e^{\ln(2k)}-2k\cdot e^{\ln(2)}=2k-2k\cdot 2=2k-4k=\underline{\underline{-2k}}$$

اوم –

$$\ln\left(e^{2}\right)-3\ln\left(\frac{e}{2}\right)=2\cdot\ln(e)-3\left[\ln(e)-\ln(2)\right]$$

د $\ln(e)=1$ سره کیري

$$= 2\cdot 1-3\left[1-\ln(2)\right]=2-3+3\cdot\ln(2)=\underline{\underline{3\cdot\ln(2)-1}}$$

اتم –

$$\ln\left(2e^{2}\right)+\ln\left(\frac{e}{2}\right)=\ln(2)+\ln\left(e^{2}\right)+\ln(e)-\ln(2)$$

$$=\ln(2)+2\cdot\ln(e)+\ln(e)-\ln(2)=3\cdot\ln(e)=\underline{\underline{3}}$$

نهم –

$$e^{\ln(k)+1}=e^{\ln(k)}\cdot e^{1}=\underline{\underline{k\cdot e}}$$

لسم –

$$\frac{2}{3}e^{-\ln\left(\frac{3}{4}k\right)}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{e^{\ln\left(\frac{3}{4}k\right)}}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\frac{3}{4}k}=\frac{2}{3}\cdot\frac{\frac{1}{1}}{\frac{3k}{4}}=\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3k}=\underline{\underline{\frac{8}{9k}}}$$

حلونه

تمرینونه د اکسپوننشل مساوات حلونه

نتیجې او مفصل حلونه

نتیجې

اول – $6-\frac{3}{2}e^{2-2x}=0\Rightarrow x=1-\ln(2)$

دويم ــ $\frac{1}{4}e^{4x}-\frac{e}{2}=1\Rightarrow x=\frac{1}{4}\ln(4+2e)$

دريم ــ $\frac{1}{2}e^{x}-e^{x+1}=0\Rightarrow$

له دې لاس ته راځي چې حل نه شته

څلورم ــ $(3+2x)e^{x-1}=0\Rightarrow x=-\frac{3}{2}$

پنځم ــ $-2x^{2}e^{-x+2}=0\Rightarrow x=0$

شپږم ــ $-\frac{1}{5}e^{x}-1+10e^{-x}=0\Rightarrow x_1=\ln(5)$

اوم ــ $4-3e^{-\frac{1}{2}x}=e^{\frac{1}{2}x}\Rightarrow x_1=2\ln(3)\ \text{und}\ x_2=0$

اتم ــ $-\frac{3}{4}e^{-2x}+5=e^{-x}\Rightarrow x_1=-\ln(2)$

نهم ــ $\frac{2x}{e^{x}+1}=0\Rightarrow x=0$

لسم ــ $(2-e^{x})^{2}=(e^{x}-3)^{2}\Rightarrow x=\ln\left(\frac{5}{2}\right)$

مفصل حلونه

اول ــ

$$6-\frac{3}{2}e^{2-2x}=0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3}{2}e^{2-2x}=6\,|:\frac{3}{2} \quad \Leftrightarrow \quad e^{2-2x}=4\,|\ln(\ )$$

$$\Leftrightarrow 2-2x=\ln(4)\,|-2 \quad \Leftrightarrow \quad -2x=\ln(4)-2\,|:(-2) \quad \Leftrightarrow \quad x=1-\frac{1}{2}\ln(4)$$

$$\Leftrightarrow x=1-\ln\left(4^{\frac{1}{2}}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x=1-\ln(2)}}$$

دويم –

$$\frac{1}{4}e^{4x}-\frac{1}{2}e=1\,|+\frac{1}{2}e \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{4}e^{4x}=1+\frac{1}{2}e\,|\cdot 4 \quad \Leftrightarrow \quad e^{4x}=4+2e\,|\ln(\ )$$

$$\Leftrightarrow \quad 4x=\ln(4+2e)\,|:4 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x=\frac{1}{4}\ln(4+2e)}}$$

دريم –

$$\frac{1}{2}e^{x}-e^{x+1}=0\,|\cdot 2 \quad \Leftrightarrow \quad e^{x}-2e^{x+1}=0\,|+2e^{x+1}$$

$$\Leftrightarrow \quad e^{x}=2e^{x+1}\,|\ln(\ )$$

$$\Leftrightarrow \quad \ln\left(e^{x}\right)=\ln\left(2e^{x+1}\right) \quad \Leftrightarrow \quad x=\ln(2)+\ln\left(e^{x+1}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad x=\ln(2)+x+1\,|-x$$

$$\Leftrightarrow \quad 0=\ln(2)+1\,|-1 \quad \Leftrightarrow \quad \ln(2)=-1$$

تضاد ⇔ حل نه شته

ځلورم –

$$(3+2x)e^{x-1}=0 \quad \Leftrightarrow \quad 3+2x=0\,|-3$$

$$\Leftrightarrow \quad 2x=-3\,|:2 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x=-\frac{3}{2}}}$$

e^{x-1} تابعا e^x ا ده، چې په یو واحد د x محور ښي لور ته راکښل شوې ده.

تابع ا e^x ا صفرځای نه لري.

پنځم –

$$-2x^2e^{-x+2}=0$$

$$-2x^2e^{-x+2}=0 \quad \Leftrightarrow \quad -2x^2=0$$

$$\Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x=0}}$$

e^{-x+2} i تابع e^{-x} ده چې په 2EH (په ۲ یوونه یا واحده) د x محور کیڼ لور ته راکښل شوې ده..

تابع e^{-x} صفرځتی نه لري.

شپږم – لاندې الماني : بدلون

$$-\frac{1}{5}e^x-1+10e^{-x}=0 \text{ Substitution } u=e^x \Leftrightarrow -\frac{1}{5}u-1+\frac{10}{u}=0\,|\cdot u$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{5}u-1+\frac{10}{u}=0\,|\cdot(-5) \quad \Leftrightarrow \quad u^2+5u-50=0$$

$$p=5\,;\,q=-50 \Rightarrow D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=\frac{25}{4}+\frac{200}{4}=\frac{225}{4} \Rightarrow \sqrt{D}=\sqrt{\frac{225}{4}}=\frac{15}{2}$$

$$u_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D}\left|\begin{array}{l} u_1=-\frac{5}{2}+\frac{15}{2}=5 \\ u_2=-\frac{5}{2}-\frac{15}{2}=-10 \end{array}\right.$$

$$u_1=5 \Leftrightarrow e^x=5 \Leftrightarrow x_1=\ln(5)$$

$$u_2=-10 \Leftrightarrow e^x=-10 \Rightarrow$$

حل نه دی

اوم – الماني: بدلون

$$4-3e^{-\frac{1}{2}x}=e^{\frac{1}{2}x} \text{ Substitution } u=e^{\frac{1}{2}x} \Leftrightarrow 4-\frac{3}{u}=u \mid \cdot u$$

$$\Leftrightarrow 4u-3=u^2 \mid -u^2 \quad \Leftrightarrow \quad -u^2+4u-3=0 \mid \cdot(-1) \quad \Leftrightarrow \quad u^2-4u+3=0$$

$$p=-4\,;\, q=3 \Rightarrow D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=4-3=1 \Rightarrow \sqrt{D}=\sqrt{1}=1$$

$$u_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D} \left| \begin{array}{l} u_1=2+1=3 \\ u_2=2-1=1 \end{array} \right.$$

$$u_1=3 \Leftrightarrow e^{\frac{1}{2}x}=3 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x=\ln(3) \Leftrightarrow \underline{\underline{x_1=2\ln(3)}}$$

$$u_2=1 \Leftrightarrow e^{\frac{1}{2}x}=1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x=\ln(1) \Leftrightarrow x_2=2\underbrace{\ln(1)}_{0} \Leftrightarrow \underline{\underline{x_2=0}}$$

اتم – الماني: بدلون ،

$$-\frac{3}{4}e^{-2x}+5=e^{-x} \text{ Substitution } u=e^{-x} \Leftrightarrow -\frac{3}{4}u^2+5=u \mid -u$$

$$\Leftrightarrow -\frac{3}{4}u^2-u+5=0 \mid :\left(-\frac{3}{4}\right) \quad \Leftrightarrow \quad u^2+\frac{4}{3}u-\frac{20}{3}=0$$

$$p=\frac{4}{3}\,;\, q=-\frac{20}{3} \Rightarrow D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=\frac{4}{9}+\frac{60}{9}=\frac{64}{9} \Rightarrow \sqrt{D}=\sqrt{\frac{64}{9}}=\frac{8}{3}$$

$$u_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D} \left| \begin{array}{l} u_1=-\frac{2}{3}+\frac{8}{3}=2 \\ u_2=-\frac{2}{3}-\frac{8}{3}=-\frac{11}{3} \end{array} \right.$$

$$u_1=2 \Leftrightarrow e^{-x}=2 \Leftrightarrow -x=\ln(2) \Leftrightarrow \underline{x_1=-\ln(2)}$$

$$u_2 = -\frac{11}{3} \Leftrightarrow e^{-x} = -\frac{11}{3} \Leftrightarrow -x = \underbrace{\ln\left(-\frac{11}{3}\right)}_{\text{nicht definiert}} \Rightarrow$$

تعريف نه دی

له دې لاس ته راغلي چې حل نه دی.

نهم –
$$\frac{2x}{e^x+1} = 0 \,|\cdot\left(e^x+1\right) \quad \Leftrightarrow \quad 2x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x = 0}}$$

لسم –

$$\left(2-e^x\right)^2 = \left(e^x-3\right)^2 \quad \Leftrightarrow \quad 4-4e^x+e^{2x} = e^{2x}-6e^x+9 \,|-e^{2x}$$
$$\Leftrightarrow 4-4e^x = -6e^x+9 \,|+6e^x \quad \Leftrightarrow \quad 4+2e^x = 9 \,|-4 \quad \Leftrightarrow \quad 2e^x = 5 \,|:2$$
$$\Leftrightarrow e^x = \frac{5}{2} \,|\ln(\ ) \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x = \ln\left(\frac{5}{2}\right)}}$$

خلورم: د **e** -تا بع مشتق يا رابيليدنه

د ضرب- او زنځيري قانون سره

د **e** -تا بع مشتق يا رابيليدنه

د **e** -تا بع مشتق يا رابيليدنه د ساده لارو له لارې نه شي پيداکيدلای، د دې لپاره يوې ،،جګې شميرپوهنې يا رياضي،، ته ا ړتيا ده. دلته به يو ليدوړ متود انځور شي، له دې خطر سره هم، چې شميرپوهنيز متخصصين يا شميرپوهان به بغاوت وکړي.

$$y = f(x) = e^x$$
$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x_0 + \Delta x} - e^{x_0}}{\Delta x}$$

په پام کې نیسو چې باور لري: $e^{x_0 + \Delta x} = e^{x_0} \cdot e^{\Delta x}$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x_0} \cdot e^{\Delta x} - e^{x_0}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x_0}\left(e^{\Delta x} - 1\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} e^{x_0} \cdot \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = e^{x_0} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$$

موږ د تل کوچني کېدونکي Δx ـارزښت لپاره د $\frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$ ځانګړتیاوې څېړو

Δx	1	0,1	0,01	0,001	0,0001
$\frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$	1,718...	1,051...	1,00501...	1,0005...	1,00005...

د دې ځانګړتیاوو یا حالت په بنسټ لاس ته راوړو چې باور لري: $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = 1$

دا ځموږ د شمېرنې لپاره په دې معنا دی:

$$f'(x_0) = e^{x_0} \cdot \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}}_{1} = e^{x_0} \cdot 1 = \underline{\underline{e^{x_0}}}$$

که د x_0 په ځای x ولیکو، نو باور لري: $f(x) = e^x$ او $f'(x) = e^x$

اکسپوننشل تابع $f(x) = e^x$ مشتق $f'(x) = e^x$ لري

د e په بنسټ اکسپوننشل تابع یو تابع دی، په کوم کې چې تابع او مشتق سره برابر دي.

د $f'(x) = e^x$ ـتابع دمشتق سره ځان بیرته تولیدوي یا جوړوي.

د e -تابع د مشتق یا بیلیدني لپاره بنستقوانین:

د e -تابع هندارونه، غزونه او راکښنه مو دي ته بیایي، =ې اکسپوننت یا جګعدد(-ګڼ) نه تنها فقط د x اووښتونې یا متحوله خوندي لري.

د نورو توابعو سره د نښلونو له لارې نوي توابع منځ ته راځي، په کومو کې چې د e– تابع د فاکتور یا ضریب په څیر خوندي ده. په داسې حالتونو کې د مشتق لپاره نور قوانین د غوښتلو دي.

د زیاتیز یا مثبت x په لور په 3 یوونونو یا واحدونو د e - تابع راکښنه او د په لور په 2 ضریبونو غزونه د دوه ضریبونو یوه زنځرونه ورکوي.

$$f(x) = e^{\frac{1}{2}(x-2)} = e^{u(x)} \text{ mit } u(x) = \frac{1}{2}(x-2)$$ یو زنځیري تابع انځوروي.

د دې مشتق داسې دی

زنځیري لار یا قاعده:

$$\boxed{f(x) = e^{u(x)} \Rightarrow f'(x) = u'(x) \cdot e^{u(x)}}$$

$$u(x) = \frac{1}{2}(x-2) \Rightarrow u' = \frac{1}{2} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}(x-2)}$$

یو د e - تابع ترنه د یو کربښیز تابع سره تر څیرنې لاندې نیسو:

$f(x) = (2x-1) \cdot e^{x}$ نو دا د ضرب د قانون سره مشتق کوو یا رابیلوو.

د ضرب قانون یا -لار:

$$\boxed{f(x) = u(x) \cdot v(x) \Rightarrow f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)}$$

$$u(x) = (2x-1) \Rightarrow u'(x) = 2 \text{ und } v(x) = e^x \Rightarrow v'(x) = e^x$$
$$\Rightarrow f'(x) = 2 \cdot e^x + (2x-1) \cdot e^x = \left[2 + (2x-1)\right] \cdot e^x = \underline{\underline{(2x+1) \cdot e^x}}$$

دې قوانينو ته بيلګې

اول - $f(x) = e^{2-x} \Rightarrow f'(x) = (-1) \cdot e^{2-x} = \underline{\underline{-e^{2-x}}}$

دويم –

$$f(x) = e^{\frac{1}{4}x+4} \Rightarrow f'(x) = \underline{\underline{\frac{1}{4} \cdot e^{\frac{1}{4}x+4}}} \Rightarrow f''(x) = \underline{\underline{\frac{1}{16} \cdot e^{\frac{1}{4}x+4}}}$$

دريم –

$$f(x) = (x-2) \cdot e^{-x}$$
$$\text{mit } u = (x-2) \Rightarrow u' = 1 \text{ und } v = e^{-x} \Rightarrow v' = -e^{-x} \text{ wird}$$
$$f'(x) = u'v + uv' = 1 \cdot e^{-x} + (x-2) \cdot \left(-e^{-x}\right) = e^{-x} - (x-2) \cdot e^{-x}$$
$$= \left[1 - (x-2)\right] \cdot e^{-x} = \underline{\underline{(3-x) \cdot e^{-x}}}$$

څلورم –

$$f(x) = ax \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}$$
$$\text{mit } u = ax \Rightarrow u' = a \text{ und } v = e^{-\frac{1}{2}x^2} \Rightarrow v' = -x \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} \text{ wird}$$
$$f'(x) = u'v + uv' = a \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} + ax \cdot \left(-x \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}\right)$$
$$= a \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} - ax^2 \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} = \underline{\underline{a \cdot \left(1 - x^2\right) \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}}}$$

....

دپرواره مشتق یا رابیلیدنه:

د کږو یا منحنیو خبرو اترو یا بحث سره زیات وخت درې مشتقونه د توابعو د څېړنو لپاره غوښتونکي یا اړین دي.

$f(x) = (2x+4)\cdot e^{-\frac{1}{2}x}$ (د یوه کربنیز او e–تابع ضرب)

د $u = (2x+4) \Rightarrow u' = 2$ او $v = e^{-\frac{1}{2}x} \Rightarrow v' = -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}$ سره کیږی

$$f'(x) = u'v + uv' = 2\cdot e^{-\frac{1}{2}x} + (2x+4)\cdot\left(-\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}\right) = \left[2+(2x+4)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\right]\cdot e^{-\frac{1}{2}x} = \underline{\underline{-x\cdot e^{-\frac{1}{2}x}}}$$

د $u = -x \Rightarrow u' = -1$ او $v = e^{-\frac{1}{2}x} \Rightarrow v' = -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}$ سره کیږي

$$f''(x) = u'v + uv' = -1\cdot e^{-\frac{1}{2}x} + (-x)\cdot\left(-\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}\right) = \left(\frac{1}{2}x-1\right)\cdot e^{-\frac{1}{2}x}$$

د $u = \frac{1}{2}x - 1 \Rightarrow u' = \frac{1}{2}$ او $v = e^{-\frac{1}{2}x} \Rightarrow v' = -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}$ سره کیږي

$$f'''(x) = u'v + uv' = \frac{1}{2}\cdot e^{-\frac{1}{2}x} + \left(\frac{1}{2}x-1\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}\right) = \left[\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}x-1\right)\right]\cdot e^{-\frac{1}{2}x} =$$

$$= \underline{\underline{\left(1-\frac{1}{4}x\right)\cdot e^{-\frac{1}{2}x}}}$$

د هر مشتق یا رابیلیدني سره د e -تابعضریب بې تغیره پاتیږي. که دا له نوکانو راووځي، نو نور مشتقونه یا رابیلیدني ساده په لاس راوړی شو یا شمیرلی شو.

د مشتقتابع صفرځایونه کیدی شي زیات وخت ساده ولوستل شي.

تمرینونه

د e تابع مشتقا

د لاندې توابعو درې ځله مشتق وشمېرئ

اول - $f(x)=4\cdot e^{2x}$ دویم - $f(x)=e^{x+4}$ دریم - $f(x)=2\cdot e^{2-4x}$ څلورم-
پنځم - $f(x)=4x-2\cdot e^{-2x}$ شپږم - $f(x)=x\cdot e^{-2x}$ اوم - $f(x)=2x\cdot e^{2-x}$
اتم - $f(x)=(x+2)\cdot e^{x}$ نهم - $f(x)=(1-x)\cdot e^{\frac{1}{2}x}$ لسم - $f(x)=(1+x)\cdot e^{-\frac{1}{2}x+2}$
$f(x)=t\cdot x\cdot e^{-\frac{1}{4}x}$

حلونه

د e تابع مشتقا

نتیجې او مفصل حلونه

نتیجې

اول — $f(x)=4\cdot e^{2x}\Rightarrow f'(x)=8\cdot e^{2x}\,;\,f''(x)=16\cdot e^{2x}\,;\,f'''(x)=32\cdot e^{2x}$

دویم — $f(x)=e^{x+4}\Rightarrow f'(x)=e^{x+4}\,;\,f''(x)=e^{x+4}\,;\,f'''(x)=e^{x+4}$

دریم -

$$f(x)=4x-2\cdot e^{-2x}\Rightarrow f'(x)=4+4\cdot e^{-2x}\,;\,f''(x)=-8\cdot e^{-2x}\,;\,f'''(x)=16\cdot e^{-2x}$$

څلورم -

$$f(x)=2\cdot e^{2-4x}\Rightarrow f'(x)=-8\cdot e^{2-4x}\,;\,f''(x)=32\cdot e^{2-4x}\,;\,f'''(x)=-128\cdot e^{2-4x}$$

پنځم -

$$f(x) = x \cdot e^{-2x} \Rightarrow f'(x) = (1-2x)\cdot e^{-2x}\,;\, f''(x) = (4x-4)\cdot e^{-2x}\,;\, f'''(x) = (12-8x)\cdot e^{-2x}$$

شپږم -

$$f(x) = 2x \cdot e^{2-x} \Rightarrow f'(x) = (2-2x)\cdot e^{2-x}\,;\, f''(x) = (2x-4)\cdot e^{2-x}\,;\, f'''(x) = (6-2x)\cdot e^{2-x}$$

اوم -

$$f(x) = (x+2)\cdot e^{x} \Rightarrow f'(x) = (x+3)\cdot e^{x}\,;\, f''(x) = (x+4)\cdot e^{x}\,;\, f'''(x) = (x+5)\cdot e^{x}$$

اتم –

$$f(x) = (1-x)\cdot e^{\frac{1}{2}x} \Rightarrow$$

$$f'(x) = \left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x\right)\cdot e^{\frac{1}{2}x}\,;\, f''(x) = \left(-\frac{3}{4}-\frac{1}{4}x\right)\cdot e^{\frac{1}{2}x}\,;\, f'''(x) = \left(-\frac{5}{8}-\frac{1}{8}x\right)\cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

نهم -

$$f(x) = (1+x)\cdot e^{-\frac{1}{2}x+2} \Rightarrow$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}\cdot(1-x)\cdot e^{-\frac{1}{2}x+2}\,;\, f''(x) = \frac{1}{4}\cdot(x-3)\cdot e^{-\frac{1}{2}x+2}\,;\, f'''(x) = \frac{1}{8}\cdot(5-x)\cdot e^{-\frac{1}{2}x+2}$$

لسم –

$$f(x) = t\cdot x\cdot e^{-\frac{1}{4}x} \Rightarrow$$

$$f'(x) = t\cdot\left(1-\frac{1}{4}\cdot x\right)\cdot e^{-\frac{1}{4}x}\,;\, f''(x) = \frac{1}{16}\cdot t\cdot(x-8)\cdot e^{-\frac{1}{4}x}\,;\, f''' = \frac{1}{64}\cdot t\cdot(12-x)\cdot e^{-\frac{1}{4}x}$$

مفصل حلونه:

اول –

$$f(x) = 4 \cdot e^{2x}$$
$$f'(x) = 2 \cdot 4 \cdot e^{2x} = \underline{\underline{8 \cdot e^{2x}}}$$
$$f''(x) = 2 \cdot 8 \cdot e^{2x} = \underline{\underline{16 \cdot e^{2x}}}$$
$$f'''(x) = 2 \cdot 16 \cdot e^{2x} = \underline{\underline{32 \cdot e^{2x}}}$$

دويم –

$$f(x) = e^{x+4}$$
$$f'(x) = 1 \cdot e^{x+4} = \underline{\underline{e^{x+4}}}$$
$$f''(x) = 1 \cdot e^{x+4} = \underline{\underline{e^{x+4}}}$$
$$f'''(x) = 1 \cdot e^{x+4} = \underline{\underline{e^{x+4}}}$$

دريم –

$$f(x) = 2 \cdot e^{2-4x}$$
$$f'(x) = -4 \cdot 2 \cdot e^{2-4x} = \underline{\underline{-8 \cdot e^{2-4x}}}$$
$$f''(x) = -4 \cdot (-8) \cdot e^{2-4x} = \underline{\underline{32 \cdot e^{2-4x}}}$$
$$f'''(x) = -4 \cdot 32 \cdot e^{2-4x} = \underline{\underline{-128 \cdot e^{2-4x}}}$$

څلورم –

$$f(x) = 4x - 2 \cdot e^{-2x}$$
$$f'(x) = 4 - 2 \cdot (-2) \cdot e^{-2x} = \underline{\underline{4 + 4 \cdot e^{-2x}}}$$
$$f''(x) = -2 \cdot 4 \cdot e^{-2x} = \underline{\underline{-8 \cdot e^{-2x}}}$$
$$f'''(x) = -2 \cdot (-8) \cdot e^{-2x} = \underline{\underline{16 \cdot e^{-2x}}}$$

پنځم – $f(x) = x \cdot e^{-2x}$

د $u = x \Rightarrow u' = 1$ او $v = e^{-2x} \Rightarrow v' = -2 \cdot e^{-2x}$ سره

$$f'(x) = u' \cdot v + u \cdot v' = 1 \cdot e^{-2x} + x \cdot \left(-2 \cdot e^{-2x}\right) = 1 \cdot e^{-2x} - 2x \cdot e^{-2x} = (1-2x) \cdot e^{-2x}$$

$f''(x) = u' \cdot v + u \cdot v'$ د $u = 1-2x \Rightarrow u' = -2$ او $v = e^{-2x} \Rightarrow v' = -2 \cdot e^{-2x}$ د
سره

$$f''(x) = -2 \cdot e^{-2x} + (1-2x) \cdot \left(-2 \cdot e^{-2x}\right) = \left[-2 - 2 \cdot (1-2x)\right] \cdot e^{-2x} = \underline{\underline{(4x-4) \cdot e^{-2x}}}$$

$f'''(x) = u' \cdot v + u \cdot v'$ د $u = 4x-4 \Rightarrow u' = 4$ او $v = e^{-2x} \Rightarrow v' = -2 \cdot e^{-2x}$
سره

$$f'''(x) = 4 \cdot e^{-2x} + (4x-4) \cdot \left(-2 \cdot e^{-2x}\right) = \left[4 - 2 \cdot (4x-4)\right] \cdot e^{-2x} = \underline{\underline{(12-8x) \cdot e^{-2x}}}$$

شپږم –

$f(x) = 2x \cdot e^{2-x}$ د $u = 2x \Rightarrow u' = 2$ او $v = e^{2-x} \Rightarrow v' = -1 \cdot e^{2-x}$ سره

$$f'(x) = u' \cdot v + u \cdot v' = 2 \cdot e^{2-x} + 2x \cdot \left(-1 \cdot e^{2-x}\right) = (2-2x) \cdot e^{2-x}$$

$f''(x) = u' \cdot v + u \cdot v'$ د $u = 2-2x \Rightarrow u' = -2$ او $v = e^{2-x} \Rightarrow v' = -1 \cdot e^{2-x}$ سره

$$f''(x) = -2 \cdot e^{2-x} + (2-2x) \cdot \left(-1 \cdot e^{2-x}\right) = \left[-2 - (2-2x)\right] \cdot e^{2-x} = (2x-4) \cdot e^{2-x}$$

$f'''(x) = u' \cdot v + u \cdot v'$ د $: u = 2x-4 \Rightarrow u' = 2$ او $v = e^{2-x} \Rightarrow v' = -1 \cdot e^{2-x}$ سره

$$f'''(x) = 2 \cdot e^{2-x} + (2x-4) \cdot \left(-1 \cdot e^{2-x}\right) = \left[2 - (2x-4)\right] \cdot e^{2-x} = \underline{\underline{(6-2x) \cdot e^{2-x}}}$$

اوم –

د $f(x)=(x+2)\cdot e^{x}$ ، $u=x+2\Rightarrow u'=1$ او $v=e^{x}\Rightarrow v'=e^{x}$ سره

$$f'(x)=u'\cdot v+u\cdot v'=1\cdot e^{x}+(x+2)\cdot e^{x}=\left[1+(x+2)\right]\cdot e^{x}=\underline{\underline{(x+3)\cdot e^{x}}}$$

د $f''(x)=u'\cdot v+u\cdot v'$ ، $u=x+3\Rightarrow u'=1$ او $v=e^{x}\Rightarrow v'=e^{x}$ سره

$$f''(x)=1\cdot e^{x}+(x+3)\cdot e^{x}=\left[1+(x+3)\right]\cdot e^{x}=\underline{\underline{(x+4)\cdot e^{x}}}$$

د $f'''(x)=u'\cdot v+u\cdot v'$ ، $u=x+4\Rightarrow u'=1$ او $v=e^{x}\Rightarrow v'=e^{x}$ سره

$$f'''(x)=1\cdot e^{x}+(x+4)\cdot e^{x}=\left[1+(x+4)\right]\cdot e^{x}=\underline{\underline{(x+5)\cdot e^{x}}}$$

اتم –

د $f(x)=(1-x)\cdot e^{\frac{1}{2}x}$ ، $u=1-x\Rightarrow u'=-1$ او $v=e^{\frac{1}{2}x}\Rightarrow v'=\frac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}x}$ سره

$$f'(x)=u'\cdot v+u\cdot v'=-1\cdot e^{\frac{1}{2}x}+(1-x)\cdot\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x}=\left[-1+\frac{1}{2}(1-x)\right]\cdot e^{\frac{1}{2}x}=\underline{\underline{\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x\right)\cdot e^{\frac{1}{2}x}}}$$

د $f''(x)=u'\cdot v+u\cdot v'$ ، $u=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x\Rightarrow u'=-\frac{1}{2}$ او $v=e^{\frac{1}{2}x}\Rightarrow v'=\frac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}x}$ سره

$$f''(x)=-\frac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}x}+\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x\right)\cdot\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x}=\left[-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x\right)\right]\cdot e^{\frac{1}{2}x}=\left(-\frac{3}{4}-\frac{1}{4}x\right)\cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

د $f'''(x)=u'\cdot v+u\cdot v'$ ، $u=-\frac{3}{4}-\frac{1}{4}x\Rightarrow u'=-\frac{1}{4}$ او $v=e^{\frac{1}{2}x}\Rightarrow v'=\frac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}x}$ سره

$$f'''(x) = -\frac{1}{4}\cdot e^{\frac{1}{2}x} + \left(-\frac{3}{4} - \frac{1}{4}x\right)\cdot \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x} = \left[-\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\left(-\frac{3}{4} - \frac{1}{4}x\right)\right]\cdot e^{\frac{1}{2}x} = \underline{\underline{\left(-\frac{5}{8} - \frac{1}{8}x\right)\cdot e^{\frac{1}{2}x}}}$$

نهم – $f(x) = (1+x)\cdot e^{-\frac{1}{2}x+2}$

د $u = 1+x \Rightarrow u' = 1$ او $v = e^{-\frac{1}{2}x+2} \Rightarrow v' = -\frac{1}{2}\cdot e^{-\frac{1}{2}x+2}$ سره

$$f'(x) = u'\cdot v + u\cdot v' = 1\cdot e^{-\frac{1}{2}x+2} + (1+x)\cdot\left(-\frac{1}{2}\cdot e^{-\frac{1}{2}x+2}\right) = \left[1 - \frac{1}{2}(1+x)\right]\cdot e^{-\frac{1}{2}x+2}$$

$$= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x\right)\cdot e^{-\frac{1}{2}x+2} = \frac{1}{2}\cdot(1-x)\cdot e^{-\frac{1}{2}x+2}$$

$f''(x) = u'\cdot v + u\cdot v'$ د $u = \frac{1}{2}\cdot(1-x) \Rightarrow u' = -\frac{1}{2}$ او

$v = e^{-\frac{1}{2}x+2} \Rightarrow v' = -\frac{1}{2}\cdot e^{-\frac{1}{2}x+2}$ سره

$$f''(x) = -\frac{1}{2}\cdot e^{-\frac{1}{2}x+2} + \frac{1}{2}\cdot(1-x)\cdot\left(-\frac{1}{2}\cdot e^{-\frac{1}{2}x+2}\right) = \left[-\frac{1}{2} - \frac{1}{4}(1-x)\right]\cdot e^{-\frac{1}{2}x+2}$$

$$= \left(-\frac{3}{4} + \frac{1}{4}x\right)\cdot e^{-\frac{1}{2}x+2} = \frac{1}{4}\cdot(x-3)\cdot e^{-\frac{1}{2}x+2}$$

$f'''(x) = u'\cdot v + u\cdot v'$ د $u = \frac{1}{4}\cdot(x-3) \Rightarrow u' = \frac{1}{4}$ او

$v = e^{-\frac{1}{2}x+2} \Rightarrow v' = -\frac{1}{2}\cdot e^{-\frac{1}{2}x+2}$ سره

$$f'''(x)=\frac{1}{4}\cdot e^{-\frac{1}{2}x+2}+\frac{1}{4}\cdot(x-3)\cdot\left(-\frac{1}{2}\cdot e^{-\frac{1}{2}x+2}\right)=\left[\frac{1}{4}-\frac{1}{8}(x-3)\right]\cdot e^{-\frac{1}{2}x+2}$$

$$=\left(\frac{5}{8}-\frac{1}{8}x\right)\cdot e^{-\frac{1}{2}x+2}=\underline{\underline{\frac{1}{8}\cdot(5-x)\cdot e^{-\frac{1}{2}x+2}}}$$

لسم –

$f(x)=t\cdot x\cdot e^{-\frac{1}{4}x}$ د $u=t\cdot x\Rightarrow u'=t$ او $v=e^{-\frac{1}{4}x}\Rightarrow v'=-\frac{1}{4}\cdot e^{-\frac{1}{4}x}$ سره

$$f'(x)=u'\cdot v+u\cdot v'=t\cdot e^{-\frac{1}{4}x}+t\cdot x\cdot\left(-\frac{1}{4}\cdot e^{-\frac{1}{4}x}\right)=\left[t-\frac{1}{4}\cdot t\cdot x\right]\cdot e^{-\frac{1}{4}x}=\underline{\underline{t\cdot\left(1-\frac{1}{4}\cdot x\right)\cdot e^{-\frac{1}{4}x}}}$$

$f''(x)=u'\cdot v+u\cdot v'$ د $u=t\cdot\left(1-\frac{1}{4}\cdot x\right)\Rightarrow u'=-\frac{1}{4}\cdot t$ او $v=e^{-\frac{1}{4}x}\Rightarrow v'=-\frac{1}{4}\cdot e^{-\frac{1}{4}x}$ سره

$$f''(x)=-\frac{1}{4}t\cdot e^{-\frac{1}{4}x}+t\cdot\left(1-\frac{1}{4}\cdot x\right)\cdot\left(-\frac{1}{4}\cdot e^{-\frac{1}{4}x}\right)=\left[-\frac{1}{4}t-\frac{1}{4}\cdot t\cdot\left(1-\frac{1}{4}\cdot x\right)\right]\cdot e^{-\frac{1}{4}x}$$

$$=\left(-\frac{1}{2}\cdot t+\frac{1}{16}\cdot t\cdot x\right)\cdot e^{-\frac{1}{4}x}=\frac{1}{16}\cdot t\cdot(x-8)\cdot e^{-\frac{1}{4}x}$$

$f'''(x)=u'\cdot v+u\cdot v'$ د $u=\frac{1}{16}\cdot t\cdot(x-8)\Rightarrow u'=\frac{1}{16}\cdot t$ او $v=e^{-\frac{1}{4}x}\Rightarrow v'=-\frac{1}{4}\cdot e^{-\frac{1}{4}x}$ سره

$$f'''(x)=\frac{1}{16}\cdot t\cdot e^{-\frac{1}{4}x}+\frac{1}{16}\cdot t\cdot(x-8)\cdot\left(-\frac{1}{4}\cdot e^{-\frac{1}{4}x}\right)=\left[\frac{1}{16}t-\frac{1}{64}\cdot t\cdot(x-8)\right]\cdot e^{-\frac{1}{4}x}$$

$$=\left(\frac{3}{16}\cdot t-\frac{1}{64}\cdot t\cdot x\right)\cdot e^{-\frac{1}{4}x}=\underline{\underline{\frac{1}{64}\cdot t\cdot(12-x)\cdot e^{-\frac{1}{4}x}}}$$

پنځم: د e -تابع انتیګرېشن یا ګډونه

پیل:په ځښ کتني را تولوني سره د انتیګرالشمیرنې څخه لاندې ځرګند دي:

که د یو په خوښه انتیګرالوړ تابع $f(x)$انتیګرال ونیول شي، نو سړی یو بنسټ تابع لاس ته راوړي: $F(x)=\int f(x)\,dx$

تابع $f(x)$ د انتیګرالوني تابع هم بلل کیږي.

باور لري: $F(x)=\int f(x)\,dx \Leftrightarrow F'(x)=f(x)$

دا په دې معنا، چې که بنسټ تابع مشتق شي یا یې مشتق ونیول شي، نو سړی بیرته د انتیګرالیدني تابع لاس ته راوړي. دا ړ یکه موږ ته ممکنوي چې د مشتقولو له لارې د انتیګرال نتیجه و ازمایو.

بیلګه:

$f(x)=x^2 \Rightarrow F(x)=\int x^2\,dx=\frac{1}{3}x^3+C$ مشتق شوی: $F'(x)=x^2=f(x)$

که په e -تابع استعمال شي، له کوم چې موږ پوهیږو، چې د مشتق سره پخپله بیرته تولیدیږي یا منځ ته راځي په دې معنا دی:

وي دي $F(x)=\int f(x)\,dx=e^{x}+C$ د تولو توابعو f(x) بنسټ دېرئ یا سټ، نو
دی $F'(x)=f(x)=\left[e^{x}+C\right]'=e^{x}$

(۱) د -تابع ا نتیګرال: $\int e^{x}\,dx=e^{x}+C$

د e –تابع د مشتق سره دي په دې حالت کې، په کوم کې چې د e –تابع جګعدد یا اکسپوننت نه ځانله د اووښتوني یا متحولي x څخه جوړ وو، زنځیرقانون استعمال شي. په انتیګرېشن کې د ا نتیګرالیدونکي تابع دي داسي وټاکل شي، چې د (۱) انتیګرال کیدی شي

تولیز انتیګرال د بدلون قاعدې سره

$$f(x)=e^{-x}\Rightarrow F(x)=\int e^{-x}\,dx$$

$$\text{Substitution}: u(x)=-x\Rightarrow u'(x)=\frac{du(x)}{dx}=-1\Rightarrow dx=-du$$

$$\Rightarrow\int e^{-x}\,dx=-\int e^{u}\,du=-e^{u}+C$$

په څټ بلون: $\Rightarrow F(x)=\int e^{-x}\,dx=\underline{\underline{-e^{-x}}}\cdot$

ازماېښت: $F(x)=-e^{-x}+C\Rightarrow F'(x)=(-1)\cdot\left(-e^{-x}\right)=e^{-x}=f(x)$

بیلګه:

$$f(x)=e^{2x-1}\Rightarrow F(x)=\int e^{2x-1}\,dx$$

$$\text{Substitution}: u(x)=2x-1\Rightarrow u'(x)=\frac{du(x)}{dx}=2\Rightarrow dx=\frac{1}{2}du$$

$$\Rightarrow\int e^{2x-1}\,dx=\frac{1}{2}\int e^{u}\,du=\frac{1}{2}e^{u}+C$$

$$\Rightarrow F(x)=\int e^{2x-1}\,dx=\frac{1}{2}e^{2x-1}+C$$

ازمايښت: $F(x)=\frac{1}{2}e^{2x-1}+C \Rightarrow F'(x)=2\cdot\frac{1}{2}\cdot e^{2x-1}=e^{2x-1}=f(x)$

بيلګه:

$$f(x)=e^{2x-1} \Rightarrow F(x)=\int e^{2x-1}dx$$

$$\text{Substitution}: u(x)=2x-1 \Rightarrow u'(x)=\frac{du(x)}{dx}=2 \Rightarrow dx=\frac{1}{2}du$$

$$\Rightarrow \int e^{2x-1}dx=\frac{1}{2}\int e^{u}du=\frac{1}{2}e^{u}+C$$

$$\Rightarrow F(x)=\int e^{2x-1}dx=\underline{\frac{1}{2}e^{2x-1}+C}$$

ازمايښت: $F(x)=2\cdot e^{-\frac{1}{2}(1-x)}+C \Rightarrow F'(x)=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot e^{-\frac{1}{2}(1-x)}=e^{-\frac{1}{2}(1-x)}=f(x)$

د بدلون سره ټاکلی انټيګرال

د دې لپاره چې د ګراف او x محور ترمنځ سطحه وشميرو، زيات وخت بايد يو ټاکلی انټيګرال حل شي. دلته مو هم د بدلون لار حل ته لاربښودوي. د بدلون له لارې حل لپاره دوه متودونه يا واريانت شتون لري.

لومړئ لار يا واريانت :

$$f(x)=e^{\frac{1}{2}x-1} \Rightarrow A=\int_{-1}^{1}e^{\frac{1}{2}x-1}dx$$

بدلون:

$$u(x)=\frac{1}{2}x-1 \Rightarrow u'(x)=\frac{du}{dx}=\frac{1}{2} \Rightarrow dx=2\cdot du$$

د انتيګرال عمومي حل:

$$\int e^{\frac{1}{2}x-1}\,dx = 2\cdot\int e^{u}\,du = 2\cdot e^{u} + C \Rightarrow 2\cdot e^{\frac{1}{2}x-1} + C$$

د ټاکلي انتيګرال په حيث يې وشميرئ(بې له ثا بتي يا همغې C سره)

$$A = \int_{-1}^{1} e^{\frac{1}{2}x-1}\,dx = 2\cdot\left[e^{\frac{1}{2}x-1}\right]_{-1}^{1} = 2\cdot\left[e^{-\frac{1}{2}} - e^{-\frac{3}{2}}\right] \approx 2\cdot 0{,}3834 = \underline{\underline{0{,}7668}}$$

دويمه لار يا واريانت:

$$\text{Variante 2: } f(x) = e^{\frac{1}{2}x-1} \Rightarrow A = \int_{-1}^{1} e^{\frac{1}{2}x-1}\,dx$$

بدلون: $u(x) = \frac{1}{2}x - 1 \Rightarrow u'(x) = \frac{du}{dx} = \frac{1}{2} \Rightarrow dx = 2\cdot du$

پولې هم بدليږي:

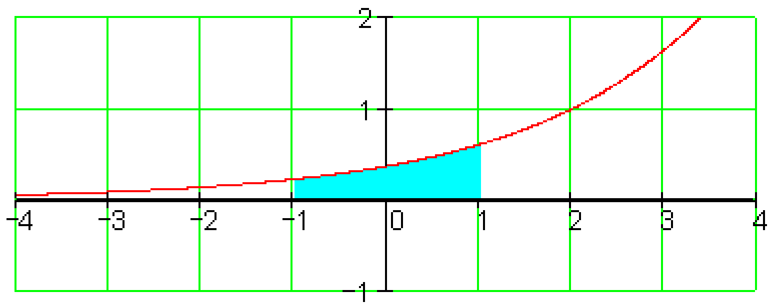
لاندې يا کښته پوله: $ug = u(-1) = -\frac{1}{2} - 1 = -\frac{3}{2}$

پورته پوله: $og = u(1) = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$

$$A = \int_{-1}^{1} e^{\frac{1}{2}x-1}\,dx = 2\cdot\int_{-\frac{3}{2}}^{-\frac{1}{2}} e^{u}\,du = 2\cdot\left[e^{u}\right]_{-\frac{3}{2}}^{-\frac{1}{2}} = 2\cdot\left[e^{-\frac{1}{2}} - e^{-\frac{3}{2}}\right] \approx 2\cdot 0{,}3834 = \underline{\underline{0{,}7668}}$$

په دویمه واریابلې کې د انیګرال لاندې او پورته پولې هم بدلې یا سبستیتویرت شوې. له دې لارې په زیاتو حالتونو کې شمیرن زیاتوالی راکمیږي.

$$f(x) := e^{\frac{1}{2}\cdot x-1} \qquad \int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 0.7668$$



تمرینونه

د ساده ـــتوابعو انتیګرالونه

د لاندې تابعو انتیګرال وشمیرئ. د اول تر څلورم تمرینونو پورې د ازمایښت له لارې کنترول کړئ.

اول - $\int -e^{-x}\,dx$ دویم - $\int \frac{1}{2}e^{2x}\,dx$ دریم - $\int 2\cdot e^{-\frac{1}{4}x}\,dx$ څلورم - $\int \frac{3}{4}\cdot e^{3x-4}\,dx$

پنځم - $\int_{0}^{2} e^{1-x}\,dx$ شپږم- $\int_{-1}^{2} e^{\frac{1}{2}x}\,dx$ اوم - $\int_{1}^{2} e^{4-2x}\,dx$ اتم - $\int_{0}^{\ln(2)} -\frac{1}{2}e^{-x}\,dx$ نهم -

$\int_{1}^{2} \frac{4}{e^{2x-4}}\,dx$ لسم - $\int_{0}^{4} -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{4}x}\,dx$

حلونه

تمرينونه د توابعو انتيګرالونه

نتيجې او مفصل حلونه

اول – $F(x)=\int -e^{-x}\,dx=e^{-x}+C \quad Probe: F(x)=e^{-x}+C \Rightarrow F'(x)=-e^{-x}$

دويم –

$$F(x)=\int \frac{1}{2}e^{2x}\,dx=\frac{1}{4}e^{2x}+C \quad Probe: F(x)=\frac{1}{4}e^{2x}+C \Rightarrow F'(x)=\frac{1}{2}e^{2x}$$

دريم -

$$F(x)=\int 2\cdot e^{-\frac{1}{4}x}\,dx=-8\cdot e^{-\frac{1}{4}x}+C$$

ازمايينت:

$$: F(x)=-8\cdot e^{-\frac{1}{4}x}+C \Rightarrow F'(x)=2\cdot e^{-\frac{1}{4}x}$$

څلورم - $F(x)=\int \frac{3}{4}\cdot e^{3x-4}\,dx=\frac{1}{4}\cdot e^{3x-4}+C$

ازمايينت: $F(x)=\frac{1}{4}\cdot e^{3x-4}+C \Rightarrow F'(x)=\frac{3}{4}\cdot e^{3x-4}$

پنځم - $\int_0^2 e^{1-x}\,dx=e^{1}-e^{-1}=e-\frac{1}{e}\approx 2,350$

شپږم –

$$\int_{-1}^{2} e^{\frac{1}{2}x}\,dx=2\cdot\left[e^{1}-e^{-\frac{1}{2}}\right]\approx 4,224$$

اوم - $$\int_1^2 e^{4-2x}\,dx = \frac{1}{2}\cdot\left[e^2-e^0\right] = \frac{1}{2}\cdot\left[e^2-1\right] \approx 3,195$$

اتم – $$\int_0^{\ln(2)} -\frac{1}{2}e^{-x}\,dx = -\frac{1}{2}\cdot\left[e^0-e^{-\ln(2)}\right] = -\frac{1}{2}\cdot\left[1-\frac{1}{e^{\ln(2)}}\right] = -\frac{1}{2}\cdot\left[1-\frac{1}{2}\right] = -\frac{1}{4}$$

نهم - $$\int_1^2 \frac{4}{e^{2x-4}}\,dx = 2\cdot\left[e^2-e^0\right] = 2\cdot\left[e^2-1\right] \approx 12,778$$

لسم - $$\int_0^4 -\frac{1}{2}\cdot e^{-\frac{1}{4}x}\,dx = -2\left[e^0-e^{-1}\right] \approx -1,264$$

اول – مفصل حل:

$$F(x) = \int F'(x)\,dx = \int -e^{-x}\,dx = -\int e^{-x}\,dx$$

بدلون $$u(x) = -x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -1 \Leftrightarrow dx = -du$$

$$-\int e^{-x}\,dx = -\int(-1)\cdot e^u\,du = \int e^u\,du = e^u + C$$
$$\Rightarrow F(x) = \int -e^{-x}\,dx = \underline{e^{-x}+C}$$

ازمايينت: $$F(x) = e^{-x}+C \Rightarrow F'(x) = -e^{-x}$$

دويم – مفصل حل

$$F(x) = \int F'(x)\,dx = \int \frac{1}{2}e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}\int e^{2x}\,dx$$

بدلون: $u(x) = 2x \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2 \Leftrightarrow dx = \frac{1}{2}du$

$$\int \frac{1}{2}e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{2}e^{u}\,du = \frac{1}{4}\int e^{u}\,du = \frac{1}{4}e^{u} + C$$

$$\Rightarrow F(x) = \int \frac{1}{2}e^{2x}\,dx = \underline{\frac{1}{4}e^{2x} + C}$$

ازمايينت: $Probe: F(x) = \frac{1}{4}e^{2x} + C \Rightarrow F'(x) = \frac{1}{2}e^{2x}$

دريم – مفصل حل

$$F(x) = \int F'(x)\,dx = \int 2\cdot e^{-\frac{1}{4}x}\,dx = 2\int e^{-\frac{1}{4}x}\,dx$$

بدلون: $u(x) = -\frac{1}{4}x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow dx = -4\cdot du$

$$\int 2\cdot e^{-\frac{1}{4}x}\,dx = 2\int (-4)\cdot e^{u}\,du = -8\int e^{u}\,du = -8\cdot e^{u} + C$$

$$\Rightarrow F(x) = \int 2\cdot e^{-\frac{1}{4}x}\,dx = \underline{-8\cdot e^{-\frac{1}{4}x} + C}$$

ازمايينت: $Probe: F(x) = -8\cdot e^{-\frac{1}{4}x} + C \Rightarrow F'(x) = 2\cdot e^{-\frac{1}{4}x}$

خلورم – $F(x) = \int F'(x)\,dx = \int \frac{3}{4}\cdot e^{3x-4}\,dx = \frac{3}{4}\int e^{3x-4}\,dx$

بدلون : $u(x) = 3x - 4 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 3 \Leftrightarrow dx = \frac{1}{3}\cdot du$

$$\int\frac{3}{4}\cdot e^{3x-4}\,dx=\frac{3}{4}\int\frac{1}{3}\cdot e^{u}\,du=\frac{1}{4}\int e^{u}\,du=\frac{1}{4}\cdot e^{u}+C$$

$$\Rightarrow F(x)=\int\frac{3}{4}\cdot e^{3x-4}\,dx=\underline{\frac{1}{4}\cdot e^{3x-4}+C}$$

ازمايښت: $F(x)=\frac{1}{4}\cdot e^{3x-4}+C\Rightarrow F'(x)=\frac{3}{4}\cdot e^{3x-4}$

پنځم – $\int_0^2 e^{1-x}\,dx$ بدلون: $u(x)=1-x\Rightarrow\frac{du}{dx}=-1\Leftrightarrow dx=-du$

لاندې پولې: $u(0)=1-0=1$ پورته پولې: $u(2)=1-2=-1$

$$\int_0^2 e^{1-x}\,dx=\int_1^{-1}(-1)\cdot e^{u}\,du=-\int_1^{-1}e^{u}\,du=\int_{-1}^{1}e^{u}\,du=\left[e^{u}\right]_{-1}^{1}=e^{1}-e^{-1}=e-\frac{1}{e}\approx\underline{\underline{2,350}}$$

شپږم - مفصل حل

$\int_{-1}^{2}e^{\frac{1}{2}x}\,dx$ بدلون: $u(x)=\frac{1}{2}x\Rightarrow\frac{du}{dx}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow dx=2\cdot du$

لاندې پولې: $u(-1)=\frac{1}{2}\cdot(-1)=-\frac{1}{2}$ پورته پولې: $u(2)=\frac{1}{2}\cdot 2=1$

$$\int_{-1}^{2}e^{\frac{1}{2}x}\,dx=2\int_{-\frac{1}{2}}^{1}e^{u}\,du=2\cdot\left[e^{u}\right]_{-\frac{1}{2}}^{1}=2\cdot\left[e^{1}-e^{-\frac{1}{2}}\right]\approx\underline{\underline{4,224}}$$

اوم – مفصل حل

$\int_1^2 e^{4-2x}\,dx$ بدلون: $u(x) = 4-2x \Rightarrow \dfrac{du}{dx} = -2 \Leftrightarrow dx = -\dfrac{1}{2}\cdot du$:

لاندې پولې: $u(2) = 4-4 = 0$ پورته پولې: $u(1) = 4-2 = 2$

$$\int_1^2 e^{4-2x}\,dx = -\frac{1}{2}\int_2^0 e^u\,du = \frac{1}{2}\int_0^2 e^u\,du = \frac{1}{2}\cdot\left[e^u\right]_0^2 = \frac{1}{2}\cdot\left[e^2 - e^0\right] = \frac{1}{2}\cdot\left[e^2 - 1\right] \approx \underline{\underline{3{,}195}}$$

اتم – مفصل حل

$\int_0^{\ln(2)} -\dfrac{1}{2}e^{-x}\,dx = -\dfrac{1}{2}\int_0^{\ln(2)} e^{-x}\,dx$ بدلون: $u(x) = -x \Rightarrow \dfrac{du}{dx} = -1 \Leftrightarrow dx = -du$

لاندې پولې: $u(0) = 0$ پورته پولې: $u(\ln(2)) = -\ln(2)$

$$-\frac{1}{2}\int_0^{\ln(2)} e^{-x}\,dx = -\frac{1}{2}\int_0^{-\ln(2)} (-1)\cdot e^u\,du = \frac{1}{2}\int_0^{-\ln(2)} e^u\,du = -\frac{1}{2}\int_{-\ln(2)}^{0} e^u\,du$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\left[e^u\right]_{-\ln(2)}^{0} = -\frac{1}{2}\cdot\left[e^0 - e^{-\ln(2)}\right] = -\frac{1}{2}\cdot\left[1 - \frac{1}{e^{\ln(2)}}\right] =$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\left[1 - \frac{1}{2}\right] = \underline{\underline{-\frac{1}{4}}}$$

یادونه: $e^{\ln(a)} = a \Rightarrow e^{\ln(2)} = 2$

نهم – مفصل حل

بدلون: $\int_1^2 \dfrac{4}{e^{2x-4}}\,dx = 4\int_1^2 e^{4-2x}\,dx$

بدلون:

$$u(x) = 4 - 2x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -2 \Leftrightarrow dx = -\frac{1}{2}du$$

لاندې پولې: $u(1) = 4 - 2 = 2$: پورته پولې: $u(2) = 4 - 4 = 0$

$$4\int_1^2 e^{4-2x}\,dx = 4\int_2^0 \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot e^u\,du = -2\int_2^0 e^u\,du = 2\int_0^2 e^u\,du$$
$$= 2\cdot\left[e^u\right]_0^2 = 2\cdot\left[e^2 - e^0\right] = 2\cdot\left[e^2 - 1\right] \approx \underline{\underline{12{,}778}}$$

لسم – مفصل حل

$$\int_0^4 -\frac{1}{2}\cdot e^{-\frac{1}{4}x}\,dx = -\frac{1}{2}\int_0^4 e^{-\frac{1}{4}x}\,dx$$

بدلون: $u(x) = -\frac{1}{4}x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow dx = -4\cdot du$:

لاندې پولې: $u(0) = 0$ پورته پولې: $u(4) = -\frac{1}{4}\cdot 4 = -1$

$$-\frac{1}{2}\int_0^4 e^{-\frac{1}{4}x}\,dx = -\frac{1}{2}\int_0^{-1}(-4)\cdot e^u\,du = 2\int_0^{-1} e^u\,du = -2\int_{-1}^0 e^u\,du$$
$$= -2\cdot\left[e^u\right]_{-1}^0 = -2\left[e^0 - e^{-1}\right] \approx \underline{\underline{-1{,}264}}$$

شپږم: ناټاکلی انتیګرال:

د طبيعي عدد وده د ګټې ګټې شميرنې په مرسته د يو کال وروسته د پانګې ګټه د $p = 100\% = 1$ سره.

$$K_1 = K_0 + K_0 \cdot p = K_0(1+p) = K_0 \cdot 2$$

د یو کال وروسته د نیم کال د پانګې په ګټوني د $p = 1/2$ سره

$$K_2 = K_0\left[1+\frac{1}{2}\right] = \underline{\underline{K_0 \cdot 2,25}}$$

د یو کال وروسته د میاشتې د پانګې په ګټوني د $p = 1/12$ سره

$$K_{12} = K_0\left(1+\frac{1}{12}\right)^{12} = \underline{\underline{K_0 \cdot 2,61\ldots}}$$

د یو کال وروسته په روځنۍ په بانګې ګټوني د $p = 1/360$ سره

$$K_{360} = K_0\left(1+\frac{1}{360}\right)^{360} = \underline{\underline{K_0 \cdot 2,7145\ldots}}$$

د یو کال وروسته په ساعتي د پانګې په ګټوني د $p = 1/8640$ سره

$$K_{8640} = K_0\left(1+\frac{1}{8640}\right)^{8640} = \underline{K_0 \cdot \underbrace{2,7181\ldots}_{\approx e}}$$

د پانګې ګټونه د یوه کال وروسته د n ګټوني سره

$$K_n = K_0\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

که په هره لحظه کې پیسي په ګټه واچول شي (یعني ناپاي ډېرې ګټوني ناپای$\rightarrow n$)،
نو نو له یو کال وروسته یوه پانګه لاس ته راوړي د :

$$\lim_{n\to\infty} K_n = \lim_{n\to\infty} K_0\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = K_0 \cdot \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = K_0 \cdot e$$

دا په دي معنا پانګه په e ضریب ډېرځلي شوه.

په ډېرو جبشمېریوکي یوه د e –تابعتکمه لري د Pi دکمیو ته ورته.

د اویلر د عدد ارزښت یو ناپای نه پریودیکي یعنې نه ببرته راګرځېدونکی لسمیز کسر(مات).

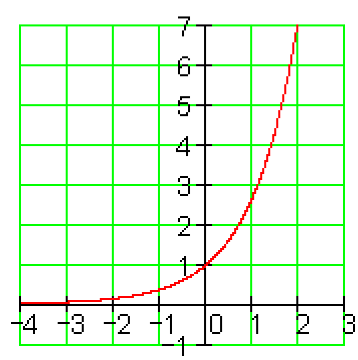
عدد e د اکسپوننشل تابع بنسټ جوړوي.

باور لري $e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ د e تابع دابنه لري: $f(x) = a\cdot e^{b\cdot x}$

د e ارزښت په 3ځایونو راګرد شوی:e = 2,718

د e ارزښت په 9 ځایونو راګرد شوی:e = 2,718 281 828

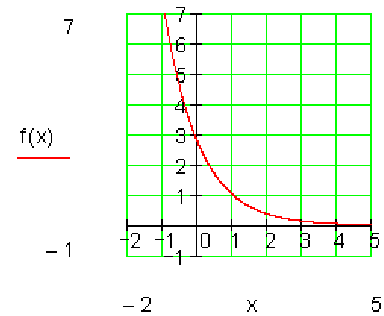
د **e** -تابع ته خیرنه

د e–تابع نورماله $f(x) = e^x$ د y-محور سره غوڅتکی $f(0) = e^0 = 1 \Rightarrow P_y(0 \mid 1)$ ژئ پوله ارزښت $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0 \qquad \lim_{x\to\infty} e^x = \infty$	
د y – محور باندې هنداره شوی $f(x) = e^{-x}$ د y –محور سره غوڅتکی	

$$f(0) = e^{-0} = e^{0} = 1 \Rightarrow P_y(0|1)$$

ژئ پوله ارزښت

$$\lim_{x\to -\infty} e^{-x} = \infty \qquad \lim_{x\to \infty} e^{-x} = 0$$



په یوه واحد(یوون) کښته لور ته راکښلی

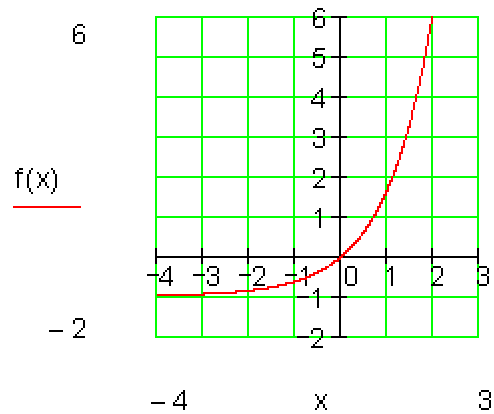
$$f(x) = e^{x} - 1$$

د y –محور سره غوڅتکی

$$f(0) = e^{0} - 1 = 1 - 1 = 0 \Rightarrow P_y(0|0)$$

ژئ پوله ارزښت

$$\lim_{x\to -\infty}\left(e^{x} - 1\right) = -1 \qquad \lim_{x\to \infty}\left(e^{x} - 1\right) = \infty$$



په یوه واحد(یوون) کښته لور ته راکښلی

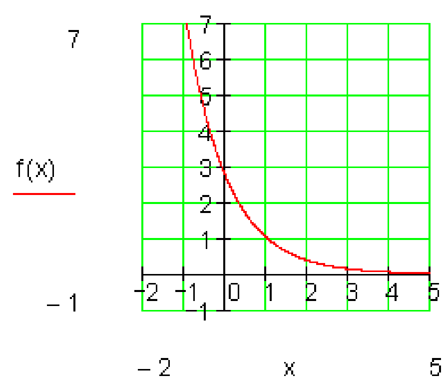
$$f(x) = e^{-(x-1)}$$

د y –محور سره غوڅتکی

$$f(0) = e^{-(0-1)} = e^{1} = e \Rightarrow P_y(0|e)$$
$$f(1) = e^{-(1-1)} = e^{0} = 1 \Rightarrow P(1|1)$$

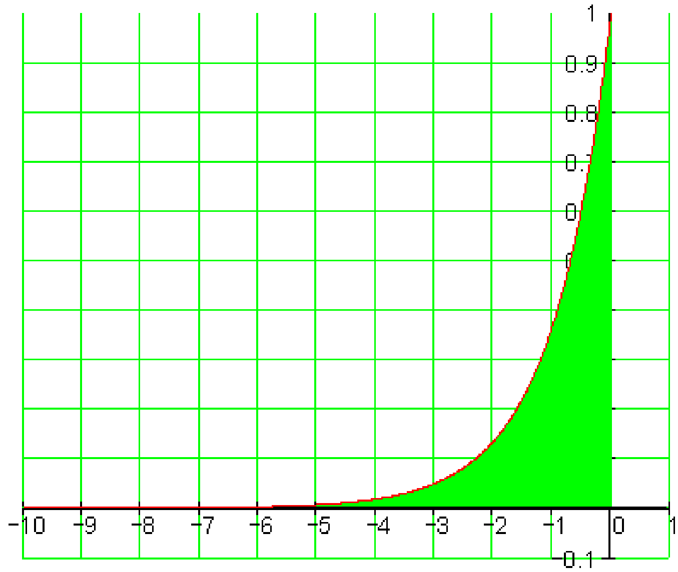
ژئ پوله ارزښت

$$\lim_{x\to -\infty} e^{-(x-1)} = \infty \qquad \lim_{x\to \infty} e^{-(x-1)} = 0$$



ناټاکلی انتیګرال

بیلګه:



د $f(x)=e^{x}$ د ګراف او د x-محور ترمنځ ټوله سطحه دې په $(-\infty\,;\,0]$ کې وشمیرل شي، یعني

$$A=\int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx=\int_{-\infty}^{0} e^{x}\,dx$$

تراوسه د ټاکلي انتیګرال کښته او پورته پولې اعداد وو.

یعنې د انتیګریشنورشو محدوده یا رابنده وه.

اوس د انتیګرسشن ورشو نوره رابنده نه ده.

دا ډول انتیګرال نا څرګند یا نا معلوم یا نا اصلي انتیګرال بلل کیږي د نابند انتیګریشن ورشو سره.

دا انتیګرال له ې درې بڼو څخه په یوه بڼه راتلی شي.

$\int_{a}^{\infty} f(x)\,dx$	$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$	$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$

د داسې ا نتیګرالونو شمیرلو لپاره سړی داسې مخ ته ځي:

لومړی سړی انتیګرال $\int_a^b f(x)dx$ د پای انتروال [a,b] لپاره شمیري، پسې د اړونده وېناو یا افادو څخه د $a \to -\infty$ یا $a \to \infty$ همداسې $b \to -\infty$ یا $b \to \infty$ لپاره پوله ارزښتونه جوړوي.

فورمال دا داسې لیدل کیږي:

$$\int_{a}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_{a}^{b} f(x)\,dx$$

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{b} f(x)\,dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{x} f(x)\,dx + \lim_{b\to\infty}\int_{c}^{b} f(x)\,dx$$

زموږ د سطحې شیمرلو لپاره دا په داسې توګه معلومیږي.

$$f(x) = e^x$$

$$A = \int_{-\infty}^{0} e^x\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0} e^x\,dx = \lim_{a\to-\infty}\left[e^x\right]_a^0$$

$$= \lim_{a\to-\infty}\left[e^0 - e^a\right] = \underbrace{\lim_{a\to-\infty} e^0}_{1} - \underbrace{\lim_{a\to-\infty} e^a}_{0} = \underline{\underline{1}}$$

بیلګه:

دا د y-محور باندې هنداره شوی د e-تابع د $f(x) = e^{-x}$ سره باید په انتروال $[0;\infty)$ کې برابره سطحه ولري.

$$A = \int_{0}^{\infty} e^{-x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_{0}^{b} e^{-x}\,dx$$

بدلون:

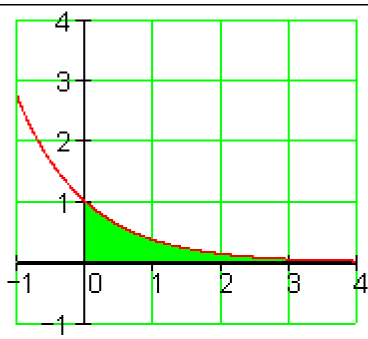
$$: u(x) = -x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -1 \Rightarrow dx = \frac{du}{-1}$$

$$u(0) = 0\,;\, u(b) = -b$$

$$\lim_{b\to\infty}\int_{0}^{-b} e^{u}\frac{du}{-1} = -\lim_{b\to\infty}\int_{0}^{-b} e^{u}\,du = \lim_{b\to\infty}\int_{-b}^{0} e^{u}\,du$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left[e^{u}\right]_{-b}^{0} = \lim_{b\to\infty}\left[e^{0} - e^{-b}\right]$$

$$= \lim_{b\to\infty} e^{0} - \lim_{b\to\infty} e^{-b} = 1 - 0 = \underline{\underline{1}}$$



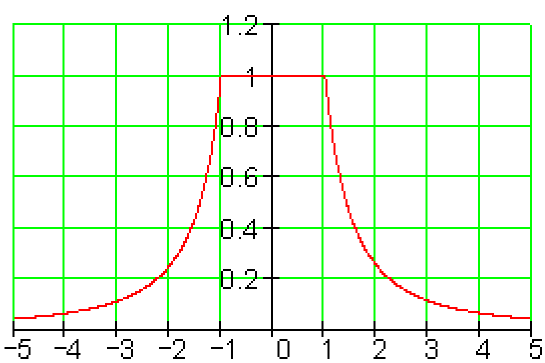
د یوه ترکیبي یا ګډوله تابع لپاره بېلګه:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} & \text{für } x < -1 \\ 1 & \text{für } -1 \le x \le 1 \\ \dfrac{1}{x^2} & \text{für } x > 1 \end{cases}$$

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$$

د انتیګرال (په برخو) توته کونه

$$A = \int_{-\infty}^{-1}\frac{1}{x^2}\,dx + \int_{-1}^{1} dx + \int_{1}^{\infty}\frac{1}{x^2}\,dx$$



تر مخ راوړنه:

د سیومتري دلایلو له امله باور لري: $\int_{-\infty}^{-1}\frac{1}{x^2}\,dx=\int_{1}^{\infty}\frac{1}{x^2}\,dx$ ا

داسي چې دا نتیګرال فقط یو ځل باید وشمیرل شي

$$\int_{-1}^{1}dx=[x]_{-1}^{1}=[1]-[-1]=1+1=\underline{\underline{2}}$$

$$\int_{1}^{\infty}\frac{1}{x^2}\,dx=\lim_{b\to\infty}\int_{1}^{b}\frac{1}{x^2}\,dx=\lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_1^b=\underbrace{\lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{b}\right]}_{0}-\underbrace{\lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{1}\right]}_{-1}=0-(-1)=\underline{\underline{1}}$$

$$A=\underbrace{\int_{-\infty}^{-1}\frac{1}{x^2}\,dx}_{1}+\underbrace{\int_{-1}^{1}dx}_{2}+\underbrace{\int_{1}^{\infty}\frac{1}{x^2}\,dx}_{1}=1+2+1=\underline{\underline{4}}$$

پوښتنې

د e- تابع سره انتیګرالونه

د سطحي مساحت شمېرنه

اول – لاندې انتیګرالونه وشمېرئ او اړونده سطحه يې کرښې ژکرښې کړئ.

الف - $\int_{0}^{1}e^{x}\,dx$ ب - $\int_{-1}^{0}e^{x}\,dx$ پ – $\int_{-3}^{0}e^{x}\,dx$

دویم – لاندې انتیګرالونه وشمېرئ او اړونده سطحه يې کرښې ژکرښې کړئ.

الف - $\int_0^1 (e^x - 1)\, dx$ ب - $\int_0^3 (e^x - 1)\, dx$ پ - $\int_{-\infty}^0 e^x\, dx$

دريم – لاندې انتيګرالونه وشمېرى او اړونده سطحه يې کربنې ژکربنې کړى.

الف - $\int_0^1 e^{-x}\, dx$ ب - $\int_{-1}^2 e^{-x}\, dx$ پ - $\int_0^\infty e^{-x}\, dx$

څلورم – لاندې انتيګرالونه وشمېرى او اړونده سطحه يې کربنې ژکربنې کړى.

الف - $\int_0^3 e^{-(x-3)}\, dx$ ب - $\int_1^3 e^{-(x-2)}\, dx$ پ - $\int_3^\infty e^{-(x-3)}\, dx$

پنځم – لاندې انتيګرالونه وشمېرى.

الف - $\int_0^3 (e^x - x + 1)\, dx$ ب - $\int_0^4 3 \cdot e^{x+2}\, dx$ پ - $\int_0^5 (e^x + e^{-x})\, dx$

شپږم – د k د کوم ارزښت لپاره دا انتيګرال ورکړشوي ارزښتونه لري؟

الف - $\int_0^2 k \cdot e^x\, dx = \frac{1}{2} e$ ب - $\int_0^4 (e^x - k \cdot x)\, dx = 4$ پ - $\int_0^k e^x\, dx = 2 \cdot e$

اوم – لاندې انتيګرالونه وشمېرى.

الف - $\int_0^{\ln(2)} (e^{2x} - 2e^x)\, dx$ ب - $\int_0^{\ln(k)} (e^{2x} - k \cdot e^x)\, dx$ پ - $\int_0^4 \left(\frac{1}{4} e^x - 2e^{\frac{1}{2}x}\right) dx$

اتم – لاندې انتيګرالونه وشمېرى او اړونده سطحه يې کربنې - کربنې کړى.

الف –

$$f(x) = e^x - 1 \qquad \text{für} \quad 0 \le x \le 2$$
$$g(x) = f(2) \cdot e^{-(x-2)} \qquad \text{für} \quad 2 \le x < \infty$$
$$A = \int_0^2 f(x)\,dx + \int_2^\infty g(x)\,dx$$

ب –

$$f(x) = e^x - 1 \qquad \text{für} \quad 0 \le x \le 3$$
$$g(x) = f(3) \cdot e^{-(x-3)} \qquad \text{für} \quad 3 \le x < \infty$$
$$A = \int_0^3 f(x)\,dx + \int_3^\infty g(x)\,dx$$

نهم – لاندې انتيګرالونه وشمېرى او اړونده سطحه يې کربښې - کربښې کړى.

الف -

$$f(x) = e^x - 1 \qquad \text{für} \quad 0 \le x \le 4$$
$$g(x) = f(4) \cdot e^{-(x-4)} \qquad \text{für} \quad 4 \le x < \infty$$
$$A = \int_0^4 f(x)\,dx + \int_4^\infty g(x)\,dx$$

ب -

$$f(x) = e^x - 1 \qquad \text{für} \quad 0 \le x \le k$$
$$g(x) = f(k) \cdot e^{-(x-k)} \qquad \text{für} \quad k \le x < \infty$$
$$A = \int_0^k f(x)\,dx + \int_k^\infty g(x)\,dx$$

حلونه

د e تابع انتيګرالونه ا

د سطحې شمېرنه

نیجې او مفصل حلونه

نتیجې

اول -

الف - $\int_0^1 e^x\,dx \approx 1,718$ ب - $\int_{-1}^0 e^x\,dx \approx 0,632$ پ - $\int_{-3}^0 e^x\,dx \approx 0,905$

دویم -

الف - $\int_0^1 (e^x - 1)\,dx \approx 0,718$ ب - $\int_0^3 (e^x - 1)\,dx \approx 16,086$ پ – $\int_{-\infty}^0 e^x\,dx = 1$

دریم -

الف - $\int_0^1 e^{-x}\,dx \approx 0,632$ ب - $\int_{-1}^2 e^{-x}\,dx \approx 2,583$ پ - $\int_0^\infty e^{-x}\,dx = 1$

څلورم -

الف - $\int_0^3 e^{-(x-3)}\,dx \approx 19,086$ ب - $\int_1^3 e^{-(x-2)}\,dx \approx 2,350$ پ - $\int_0^\infty e^{-(x-3)}\,dx = 1$

پنځم -

الف - $\int_0^3 (e^x - x + 1)\,dx \approx 17,586$ ب - $\int_0^4 3 \cdot e^{x+2}\,dx \approx 1188,119$

پ - $\int_0^5 (e^x + e^{-x})\,dx \approx 148,406$

شپږم -

الف - $\int_0^2 k\cdot e^x\,dx = \frac{1}{2}\cdot e \Leftrightarrow k \approx 0,213$ ب - $\int_0^4 \left(e^x - k\cdot x\right)dx = 4 \Leftrightarrow k \approx 6,2$ پ - $\int_0^k e^x\,dx = 2e \Leftrightarrow k \approx 1,862$

اوم -

الف - $$\int_0^{\ln(2)} \left(e^{2x} - 2e^x\right)dx = \int_0^{\ln(2)} e^{2x}\,dx - 2\cdot\int_0^{\ln(2)} e^x\,dx = -\frac{1}{2}$$

ب - $$\int_0^{\ln(k)} \left(e^{2x} - ke^x\right)dx = \int_0^{\ln(k)} e^{2x}\,dx - k\cdot\int_0^{\ln(k)} e^x\,dx = -\frac{1}{2}k^2 + k - \frac{1}{2}$$

پ -

$$\int_0^4 \left(\frac{1}{4}e^x - 2\cdot e^{\frac{1}{2}x}\right)dx = \frac{1}{4}\cdot\int_0^4 e^x\,dx - 2\cdot\int_0^4 e^{\frac{1}{2}x}\,dx = \frac{1}{4}e^4 - 4e^2 + \frac{15}{4} \approx -12,175$$

اتم - الف - $$\int_0^2 \left(e^x - 1\right)dx + \int_2^{\infty} f(2)\cdot e^{-(x-2)}\,dx = 2e^2 - 4 \approx 10,778$$

ب - $$\int_0^3 \left(e^x - 1\right)dx + \int_3^{\infty} f(3)\cdot e^{-(x-3)}\,dx = 2e^3 - 5 \approx 35,171$$

نهم - الف - $$\int_0^4 \left(e^x - 1\right)dx + \int_4^{\infty} f(4)\cdot e^{-(x-4)}\,dx = 2e^4 - 6 \approx 103,196$$

ب – $$\int_0^k \left(e^x - 1\right)dx + \int_k^{\infty} f(k)\cdot e^{-(x-k)}\,dx = 2e^k - k - 2$$

مفصل حلونه:

لومړی –

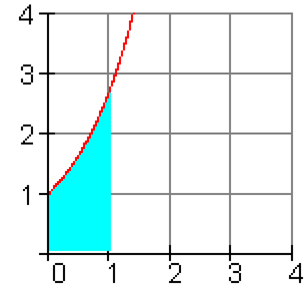
الف –

$$\int_0^1 e^x\,dx$$

$$= e^x \Big|_0^1$$

$$= e^1 - e^0$$

$$= e - 1 \approx 1{,}718$$



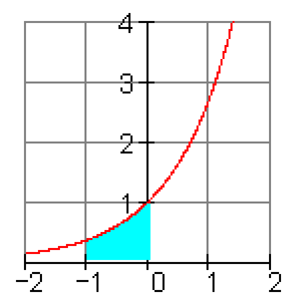
ب –

$$\int_{-1}^0 e^x\,dx$$

$$= e^x \Big|_{-1}^0$$

$$= e^0 - e^{-1}$$

$$= 1 - e^{-1} \approx 0{,}632$$



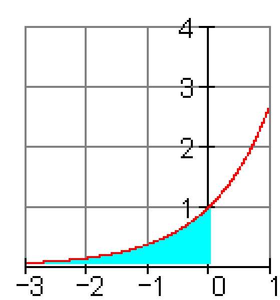
پ –

$$\int_{-3}^0 e^x\,dx$$

$$= e^x \Big|_{-3}^0$$

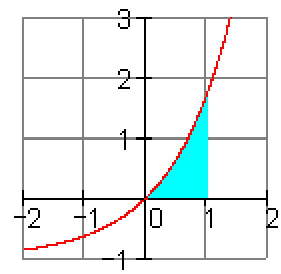
$$= e^0 - e^{-3}$$

$$= 1 - e^{-3} \approx 0{,}950$$



دويم:

الف-



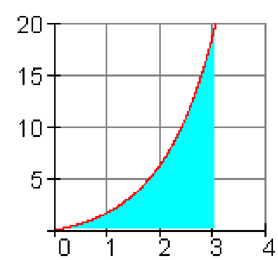
$$\int_0^1 \left(e^x - 1\right) dx$$

$$= e^x - x \Big|_0^1$$

$$= e^1 - 1 - \left(e^0 - 0\right)$$

$$= e - 1 - 1 \approx 0{,}718$$

ب –



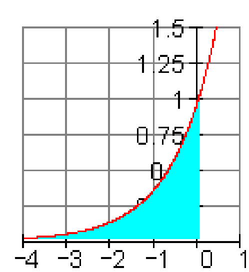
$$\int_0^3 \left(e^x - 1\right) dx$$

$$= e^x - x \Big|_0^3$$

$$= e^3 - 3 - \left(e^0 - 0\right)$$

$$= e^3 - 3 - 1 \approx 16{,}086$$

پ –



$$\int_{-\infty}^0 e^x\, dx = \lim_{a \to -\infty} \int_a^0 e^x\, dx$$

لومړی بي له پوله ارزښت جوړولو شمېرنه

$$\int_a^0 e^x\, dx = e^x \Big|_a^0 = e^0 - e^a = 1 - e^a$$

د پوله ارزښت جوړول

$$\lim_{a \to -\infty} \int_a^0 e^x\, dx = \lim_{a \to -\infty} \left(1 - e^a\right)$$

$$= 1 - \underbrace{\lim_{a \to -\infty} e^a}_{0} = 1 \Rightarrow \int_{-\infty}^0 e^x\, dx = 1$$

دریم:

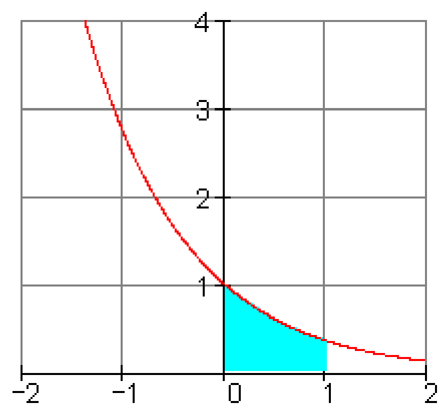
الف-

$\int_0^1 e^{-x}\,dx$ د بدلون له لارې حل

بدلون $: u(x) = -x \Rightarrow u'(x) = \frac{du}{dx} = -1 \Leftrightarrow dx = -du$

لاندې یا کښته پوله: $u(0) = 0$ پورته بوله : $u(1) = -1$

$$\Rightarrow -\int_0^{-1} e^u\,du = \int_{-1}^{0} e^u\,du = e^u\,\Big|_{-1}^{0} = e^0 - e^{-1} = 1 - e^{-1} \approx 0,632$$



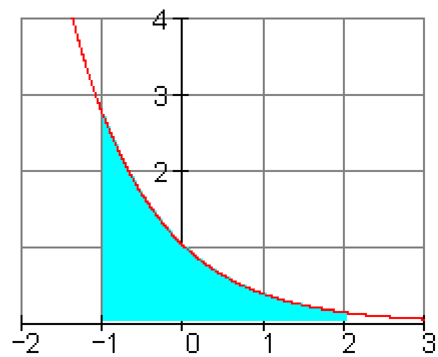
ب –

$\int_{-1}^{2} e^{-x}\,dx$ د بدلون له لارې حل

بدلون: $u(x) = -x \Rightarrow u'(x) = \frac{du}{dx} = -1 \Leftrightarrow dx = -du$

لاندې بوله : $u(-1) = -(-1) = 1$: پورته پوله: $u(2) = -2$

$$\Rightarrow -\int_{1}^{-2} e^{u}\, du = \int_{-2}^{1} e^{u}\, du = e^{u}\Big|_{-2}^{1} = e^{1} - e^{-2} = e - e^{-2} \approx 2,583$$



پ –

$\int_{0}^{\infty} e^{-x}\, dx = \lim_{a \to \infty} \int_{0}^{a} e^{-x}\, dx$ حلو لومړی بې لهه پولېچوړولو.

$\int_{0}^{a} e^{-x}\, dx$ د بدلون له لارې حل

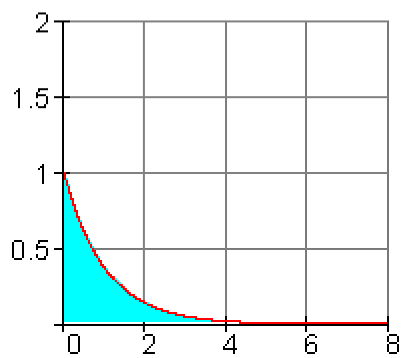
بدلون $u(x) = -x \Rightarrow u'(x) = \frac{du}{dx} = -1 \Leftrightarrow dx = -du$

لاندې يا کښته پوله: $u(0) = -0 = 0$ پورته پوله: $u(a) = -a$:

$$\Rightarrow -\int_0^{-a} e^u\,du = \int_{-a}^{0} e^u\,du = e^u\Big|_{-a}^{0} = e^0 - e^{-a} = 1 - e^{-a}$$

پوله تاکنه:

$$\lim_{a\to\infty}\int_0^a e^{-x}\,dx = 1 - \underbrace{\lim_{a\to\infty} e^{-a}}_{0} = 1 \Rightarrow \underline{\underline{\int_0^{\infty} e^{-x}\,dx = 1}}$$



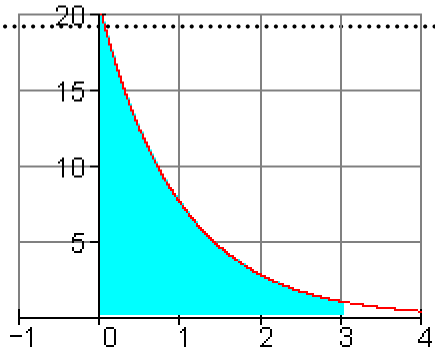
خلورم: الف-

$\int_0^3 e^{-(x-3)}\,dx$ I د بدلون له لارې حل

بدلون $: u(x) = -(x-3) = -x+3 \Rightarrow u'(x) = \dfrac{du}{dx} = -1 \Leftrightarrow dx = -du$

لاندې بوله : $u(0) = -(0-3) = 3$: پورته پوله: $u(3) = -(3-3) = 0$:

$$\Rightarrow -\int_3^0 e^u\,du = \int_0^3 e^u\,du = e^u\Big|_0^3 = e^3 - e^0 = e^3 - 1 \approx 19{,}086$$

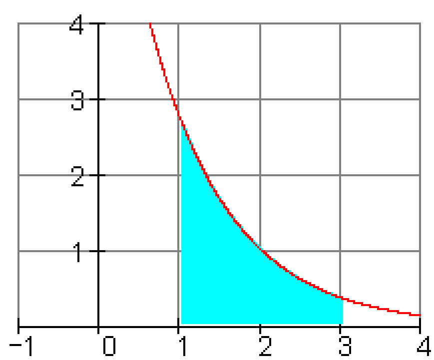


ب – $\int_1^3 e^{-(x-2)}\,dx$ I د بدلون له لارې حل

بدلون : $u(x) = -(x-2) = -x+2 \Rightarrow u'(x) = \frac{du}{dx} = -1 \Leftrightarrow dx = -du$

لاندې پوله : $u(1) = -(1-2) = 1$: پورته پوله: $u(3) = -(3-2) = -1$

$$\Rightarrow -\int_1^{-1} e^u\,du = \int_{-1}^{1} e^u\,du = e^u \Big|_{-1}^{1} = e^1 - e^{-1} = e - e^{-1} \approx 2{,}350$$



پ-

$$\int_3^{\infty} e^{-(x-3)}\,dx = \lim_{a\to\infty}\int_3^{a} e^{-(x-3)}\,dx$$

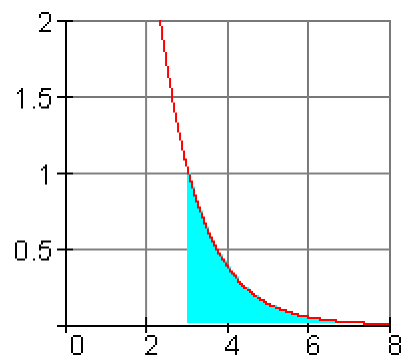
حل ، لومړی بې له پولې جوړولو

$\int_3^a e^{-(x-3)}\,dx$ د بدلون له لارې حل

بدلون: $u(x) = -(x-3) = -x+3 \Rightarrow u'(x) = \frac{du}{dx} = -1 \Leftrightarrow dx = -du$

لاندې پوله : $u(3) = -(3-3) = 0$ پورته پوله: $u(a) = -a+3$

پوله جوړونه: $\lim\limits_{a\to\infty}\int_0^a e^{-(x-3)}\,dx = 1 - \underbrace{\lim\limits_{a\to\infty} e^{-a+3}}_{0} = 1 \Rightarrow \underline{\underline{\int_0^\infty e^{-(x-3)}\,dx = 1}}$



پنځم: الف -

$$\int_0^3 \left(e^x - x + 1\right) dx = e^x - \frac{1}{2}x^2 + x \Big|_0^3$$

$$= e^3 - \frac{1}{2}\cdot 9 + 3 - \left(e^0 - \frac{1}{2}\cdot 0 + 0\right)$$

$$= e^3 - \frac{9}{2} + 3 - 1 = e^3 - \frac{5}{2} \approx 17{,}586$$

ب –

$$\int_0^4 3\cdot e^{x+2}\ dx = 3\cdot\int_0^4 e^{x+2}\ dx$$

د بدلون له لارې حل

بدلون: $u(x) = x+2 \Rightarrow u'(x) = \frac{du}{dx} = 1 \Leftrightarrow dx = du$

لاندې پوله : $u(0) = 0+2 = 2$ پورته پوله: $u(4) = 4+2 = 6$:

$$\Rightarrow 3\cdot\int_2^6 e^u\ du = 3\cdot\int_2^6 e^u\ du = 3\cdot e^u\ \Big|_2^6 = 3\cdot\left(e^6 - e^2\right) \approx 1188{,}119$$

حل ، لومړی بې له پولې جوړولو

پ –

$$\int_0^5 \left(e^x + e^{-x}\right) dx = \underbrace{\int_0^5 e^x\ dx}_{I} + \underbrace{\int_0^5 e^{-x}\ dx}_{II} = I + II$$

$$I : \int_0^5 e^x\ dx = e^x\ \Big|_0^5 = e^5 - e^0 = e^5 - 1$$

$$II : \int_0^5 e^{-x}\ dx =$$

= د بدلون له لارې حل

بدلون $: u(x) = -x \Rightarrow u'(x) = \frac{du}{dx} = -1 \Leftrightarrow dx = -du$

لاندې پوله : $u(0) = 0$ ، پورته پوله: $u(5) = -5$

$$\Rightarrow -\int_0^{-5} e^u\ du = \int_{-5}^0 e^u\ du = e^u\ \Big|_{-5}^0 = e^0 - e^{-5} = 1 - e^{-5}$$

$$\int^5 \left(e^x + e^{-x}\right) dx = I + II = e^5 - 1 + 1 - e^{-5} = e^5 - e^{-5} \approx 148{,}406$$

شپږم:
الف:

$$\int_0^2 k\cdot e^x\,dx=\frac{1}{2}\cdot e$$

$$\int_0^2 k\cdot e^x\,dx=k\cdot\int_0^2 e^x\,dx=k\cdot e^x\Big|_0^2=k\cdot\left(e^2-e^0\right)=k\cdot\left(e^2-1\right)$$

برابر كيږدى: $k\cdot\left(e^2-1\right)=\frac{1}{2}\cdot e\,\big|:\left(e^2-1\right)$

$$\Leftrightarrow k=\frac{\frac{1}{2}\cdot e}{\left(e^2-1\right)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{e}{e^2-1}\approx 0{,}213$$

ب –

$$\int_0^4\left(e^x-k\cdot x\right)dx=4$$

$$\int_0^4\left(e^x-k\cdot x\right)dx=e^x-\frac{1}{2}kx^2\Big|_0^4=e^4-\frac{1}{2}k\cdot16-\left(e^0-0\right)=e^4-8k-1$$

برابر كيږدى: $e^4-8k-1=4\,\big|-e^4+1$

$$\Leftrightarrow -8k=-e^4+5\,\big|:(-8)$$

$$\Leftrightarrow k=\frac{-e^4+5}{-8}=\frac{1}{8}e^4-\frac{5}{8}\approx 6{,}2$$

پ - لاند الماني: برابر كيږدى

$$\int_0^k e^x\,dx=2e$$

$$\int_0^k e^x\,dx=e^x\Big|_0^k=e^k-e^0=e^k-1$$

$\text{gleichsetzen}: e^k-1=2e\,\big|+1$

$$\Leftrightarrow e^k=2e+1\,\big|\ln(\ )$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(e^k\right)=\ln(2e+1)$$

$$\Leftrightarrow k\cdot\underbrace{\ln(e)}_{1}=\ln(2e+1)$$

$$\Leftrightarrow k=\ln(2e+1)\approx 1{,}862$$

اووم: حل : الف-

$$\int_0^{\ln(2)}\left(e^{2x}-2e^{x}\right)dx=\underbrace{\int_0^{\ln(2)} e^{2x}\,dx}_{I}-2\cdot\underbrace{\int_0^{\ln(2)} e^{x}\,dx}_{II}=I-2\cdot II$$

$I:\ \int_0^{\ln(2)} e^{2x}\,dx=$ د بدلون له لارې حل =

بدلون: $: u(x)=2x\Rightarrow u'(x)=\frac{du}{dx}=2\Leftrightarrow dx=\frac{1}{2}du$

لاندې پوله : $u(0)=2.0=0$ پورته پوله: $u(\ln(2))=2.\ln(2)$

$$\Rightarrow\frac{1}{2}\int_0^{2\cdot\ln(2)} e^{u}\,du=\frac{1}{2}e^{u}\Big|_0^{2\cdot\ln(2)}=\frac{1}{2}\left(e^{2\cdot\ln(2)}-e^{0}\right)=\frac{1}{2}\left[\left(\underbrace{e^{\ln(2)}}_{2}\right)^{2}-1\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left(2^{2}-1\right)=\frac{3}{2}$$

$$II:\ \int_0^{\ln(2)} e^{x}\,dx=e^{u}\Big|_0^{2\cdot\ln(2)}=\underbrace{e^{\ln(2)}}_{2}-e^{0}=2-1=1$$

$$\int_0^{\ln(2)}\left(e^{2x}-2e^{x}\right)dx=I-2\cdot II=\frac{3}{2}-2\cdot1=-\frac{1}{2}$$

ب-

$$\int_0^{\ln(k)}\left(e^{2x}-ke^{x}\right)dx=\underbrace{\int_0^{\ln(k)} e^{2x}\,dx}_{I}-k\cdot\underbrace{\int_0^{\ln(2)} e^{x}\,dx}_{II}=I-k\cdot II$$

$I:\ \int_0^{\ln(k)} e^{2x}\,dx=$ د بدلون له لارې حل =

بدلون: $u(x) = 2x \Rightarrow u'(x) = \frac{du}{dx} = 2 \Leftrightarrow dx = \frac{1}{2}du$

لاندې پوله : u(0)=2.0=0   پورته پوله: u(ln(k)= 2.ln(k)

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\int_0^{2\cdot\ln(k)} e^u\,du = \frac{1}{2}e^u\,\Big|_0^{2\cdot\ln(k)} = \frac{1}{2}\left(e^{2\cdot\ln(k)} - e^0\right) = \frac{1}{2}\left[\left(\underbrace{e^{\ln(k)}}_{k}\right)^2 - 1\right] = \frac{1}{2}\left(k^2 - 1\right)$$

$$II: \int_0^{\ln(k)} e^x\,dx = e^u\,\Big|_0^{2\cdot\ln(k)} = \underbrace{e^{\ln(k)}}_{k} - e^0 = k - 1$$

$$\int_0^{\ln(k)} \left(e^{2x} - ke^x\right)dx = I - k\cdot II = \frac{1}{2}\left(k^2 - 1\right) - k\cdot(k-1) = -\frac{1}{2}k^2 + k - \frac{1}{2}$$

پ-

$$\int_0^4 \left(\frac{1}{4}e^x - 2\cdot e^{\frac{1}{2}x}\right)dx = \frac{1}{4}\cdot\underbrace{\int_0^4 e^x\,dx}_{I} - 2\cdot\underbrace{\int_0^4 e^{\frac{1}{2}x}\,dx}_{II} = \frac{1}{4}\cdot I - 2\cdot II$$

$$I: \int_0^4 e^x\,dx = e^x\,\Big|_0^4 = e^4 - e^0 = e^4 - 1$$

$$II: \int_0^4 e^{\frac{1}{2}x}\,dx =$$

د بدلون له لارې حل

بدلون: $u(x) = \frac{1}{2}x \Rightarrow u'(x) = \frac{du}{dx} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow dx = 2du$

لاندې پوله : $u(0) = \frac{1}{2}\cdot 0 = 0$ پورته پوله: $u(4) = \frac{1}{2}\cdot 4 = 2$

$$\Rightarrow 2\cdot\int_0^2 e^u\,du = 2\cdot e^u\,\Big|_0^2 = 2\left(e^2-e^0\right) = 2e^2-2$$

$$\int_0^4\left(\frac{1}{4}e^x - 2\cdot e^{\frac{1}{2}x}\right)dx = \frac{1}{4}\cdot I - 2\cdot II = \frac{1}{4}\cdot\left(e^4-1\right) - 2\cdot\left(2e^2-2\right)$$

$$= \frac{1}{4}e^4 - \frac{1}{4} - 4e^2 + 4 = \frac{1}{4}e^4 - 4e^2 + \frac{15}{4} \approx -12{,}157$$

اتم: الف-

$$f(x) = e^x - 1 \qquad g(x) = f(2)\cdot e^{-(x-2)} \text{ mit } f(2) = e^2-1$$

$$A = \int_0^2 f(x)\,dx + \int_2^\infty g(x)\,dx = \underbrace{\int_0^2\left(e^x-1\right)dx}_{I} + \left(e^2-1\right)\underbrace{\int_2^\infty e^{-(x-2)}\,dx}_{II} = I + \left(e^2-1\right)\cdot II$$

$$I: \int_0^2\left(e^x-1\right)dx = e^x - x\,\Big|_0^2 = e^2 - 2 - \left(e^0-0\right) = e^2-3$$

$$II: \int_2^\infty e^{-(x-2)}\,dx = \lim_{a\to\infty}\int_2^a e^{-(x-2)}\,dx$$

حل ، لومړی بې له پولې جوړولو

د بدلون له لارې حل $\int_2^a e^{-(x-2)}\,dx$

بدلون:

$$u(x) = -(x-2) = -x+2 \Rightarrow u'(x) = \frac{du}{dx} = -1 \Leftrightarrow dx = -du$$

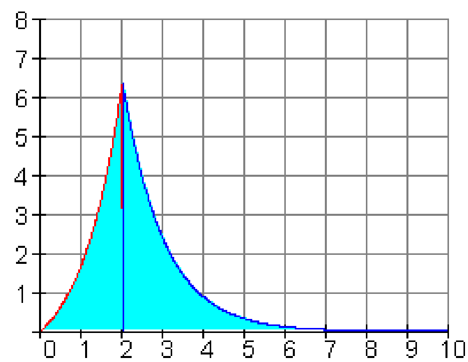
لاندې پوله : $u(2) = -(2-2) = 0$ پورته پوله: $u(a) = -a+2$

$$\Rightarrow -\int_0^{-a+2} e^u\,du = \int_{-a+2}^0 e^u\,du = e^u\,\Big|_{-a+2}^0 = e^0 - e^{-a+2} = 1 - e^{-a+2}$$

پوله ارزښت جوړونه

$$\lim_{a\to\infty}\int_0^a e^{-(x-2)}\,dx = 1-\underbrace{\lim_{a\to\infty} e^{-a+2}}_{0} = 1 \Rightarrow \int_2^\infty e^{-(x-2)}\,dx = 1$$

$$A = I+\left(e^2-1\right)\cdot II = e^2-3+\left(e^2-1\right)\cdot 1 = e^2-3+e^2-1 = 2e^2-4 \approx 10{,}778$$



ب- $g(x)=f(3)\cdot e^{-(x-3)}$ د $f(x)=e^x-1$ سره $f(3)=e^3-1$

$$A=\int_0^3 f(x)\,dx+\int_3^\infty g(x)\,dx=\underbrace{\int_0^3\left(e^x-1\right)dx}_{I}+\left(e^3-1\right)\underbrace{\int_3^\infty e^{-(x-3)}\,dx}_{II}=I+\left(e^3-1\right)\cdot II$$

$$I:\int_0^3\left(e^x-1\right)dx = e^x-x\ \Big|_0^3 = e^3-3-\left(e^0-0\right)=e^3-4$$

$$II:\int_3^\infty e^{-(x-3)}\,dx=\lim_{a\to\infty}\int_3^a e^{-(x-3)}\,dx\ L$$

حل ، لومړی بې له پولې جوړولو

$$\int_3^a e^{-(x-3)}\,dx$$

د بدلون له لارې حل

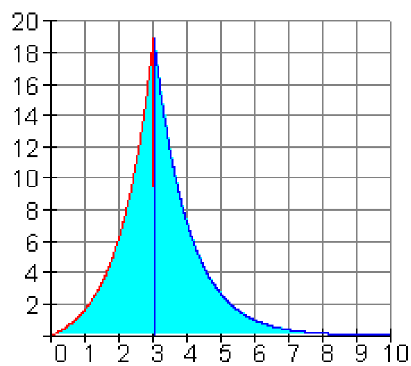
لاندې پوله : $u(3)=-(3-3)=0$ پورته پوله: $u(a)=-a+3$

$$\Rightarrow -\int_{0}^{-a+3} e^{u}\,du = \int_{-a+3}^{0} e^{u}\,du = e^{u}\Big|_{-a+3}^{0} = e^{0} - e^{-a+3} = 1 - e^{-a+3}$$

پوله جوړونه

$$\lim_{a\to\infty}\int_{0}^{a} e^{-(x-3)}\,dx = 1 - \underbrace{\lim_{a\to\infty} e^{-a+3}}_{0} = 1 \Rightarrow \int_{3}^{\infty} e^{-(x-3)}\,dx = 1$$

$$A = I + \left(e^{3}-1\right)\cdot II = e^{3} - 4 + \left(e^{3}-1\right)\cdot 1 = e^{3} - 4 + e^{3} - 1 = 2e^{3} - 5 \approx 35{,}171$$



نهم:

الف-

$$f(x) = e^{x} - 1 \qquad g(x) = f(4)\cdot e^{-(x-4)} \text{ mit } f(4) = e^{4} - 1$$

$$A = \int_{0}^{4} f(x)\,dx + \int_{4}^{\infty} g(x)\,dx = \underbrace{\int_{0}^{4}\left(e^{x}-1\right)dx}_{I} + \left(e^{4}-1\right)\underbrace{\int_{4}^{\infty} e^{-(x-4)}\,dx}_{II} = I + \left(e^{4}-1\right)\cdot II$$

$$I: \int_{0}^{4}\left(e^{x}-1\right)dx = e^{x} - x\Big|_{0}^{4} = e^{4} - 4 - \left(e^{0} - 0\right) = e^{4} - 5$$

$$II: \int_{4}^{\infty} e^{-(x-4)}\,dx = \lim_{a\to\infty}\int_{4}^{a} e^{-(x-4)}\,dx \; L$$

حل ، لومړی بې له پولې جوړولو

$$\int_4^a e^{-(x-4)}\,dx\ \text{L}$$

د بدلون له لارې حل

بدلون: $u(x) = -(x-4) = -x+4 \Rightarrow u'(x) = \frac{du}{dx} = -1 \Leftrightarrow dx = -du$

لاندې پوله : $u(4) = -(4-4) = 0$ پورته پوله: $u(a) = -a+4$

$$\Rightarrow -\int_0^{-a+4} e^u\,du = \int_{-a+4}^{0} e^u\,du = e^u \Big|_{-a+4}^{0} = e^0 - e^{-a+4} = 1 - e^{-a+4}$$

پوله ارزښت جوړونه

$$\lim_{a\to\infty}\int_0^a e^{-(x-4)}\,dx = 1 - \underbrace{\lim_{a\to\infty} e^{-a+4}}_{0} = 1 \Rightarrow \int_4^\infty e^{-(x-4)}\,dx = 1$$

$$A = \text{I} + \left(e^4 - 1\right)\cdot \text{II} = e^4 - 5 + \left(e^4 - 1\right)\cdot 1 = e^4 - 5 + e^4 - 1 = 2e^4 - 6 \approx 103{,}196$$

ب-

$$f(x) = e^x - 1 \qquad g(x) = f(k)\cdot e^{-(x-k)}\ \text{mit}\ f(k) = e^k - 1$$

$$A = \int_0^k f(x)\,dx + \int_k^\infty g(x)\,dx = \underbrace{\int_0^k \left(e^x - 1\right)dx}_{\text{I}} + \left(e^k - 1\right)\underbrace{\int_k^\infty e^{-(x-k)}\,dx}_{\text{II}} = \text{I} + \left(e^k - 1\right)\cdot \text{II}$$

$$\text{I}: \int_0^k \left(e^x - 1\right)dx = e^x - x \Big|_0^k = e^k - k - \left(e^0 - 0\right) = e^k - k - 1$$

$$\text{II}: \int_k^\infty e^{-(x-k)}\,dx = \lim_{a\to\infty}\int_k^a e^{-(x-k)}\,dx\ \text{L}$$

حل ، لومړی بې له پولې جوړولو

د بدلون له لارې حل $\int_k^a e^{-(x-k)}\,dx$

بدلون: $u(x)=-(x-k)=-x+k \Rightarrow u'(x)=\dfrac{du}{dx}=-1 \Leftrightarrow dx=-du$

لاندې پوله : $u(k)=-(k-k)=0$ ، پورته پوله: $u(a)=-a+k$

$$\Rightarrow -\int_0^{-a+k} e^u\,du=\int_{-a+k}^{0} e^u\,du=e^u\Big|_{-a+k}^{0}=e^0-e^{-a+k}=1-e^{-a+k}$$

پوله ارزښت جوړونه

$$\lim_{a\to\infty}\int_0^a e^{-(x-k)}\,dx=1-\underbrace{\lim_{a\to\infty}e^{-a+k}}_{0}=1\Rightarrow\int_k^\infty e^{-(x-k)}\,dx=1$$

$$A=I+\left(e^k-1\right)\cdot II=e^k-k-1+\left(e^k-1\right)\cdot 1=e^k-k-1+e^k-1=2e^k-k-2$$

پوښتنې

مشتق – او انتیګرالشمیرنه I

ګډې ودې پوښتنې

لومړی - د لاندې پوتنخ – او لوګاریتم ترمونو بڼه بدله کړی د توان – او لوګاریتم قوانینو د استعمال له لارې .

الف - $\left(e^x+e^{-x}\right)^2$ ب – $\left(e^x-e^{-x}+5\right)\cdot e^x$

دویم – د اکسپوننشل مساوات تاسو ته معلومې لارې حل کړئ.

الف - $6-\frac{3}{2}e^{2-2x}=0$ ب - $\frac{1}{4}e^{4x}-\frac{e}{2}=1$

دریم – د لاندې توابعو مشتق وشمېرئ.

الف - $f(x)=e^{-4x}-e^{4x}$ ب - $f(x)=\frac{3}{2}e^{-5x^2-3x}$

څلورم – د لاندې توابعو انتیګرال وشمېرئ او د مشتق سره یې نتیجې کنترول کړئ.

الف - $f(x)=\frac{1}{16}\left(x^2-3e^x\right)$ ب - $f(x)=x^3-2x^2+4x+\frac{3}{x}$

پنځم – تاسو ته د معلوم قانون له مخې د لاندې توابعو مشتق وشمېرئ.

الف - $f(x)=(x+a)^2-e^{2x-3}$ ب - $f(x)=\left(1-e^{ax}\right)^2$

شپږم - لاندې انتیګرالونه وشمېرئ.

الف - $\int_0^4 e^{\frac{1}{2}x}\,dx$ ب - $\int_1^2 e^{4-2x}\,dx$

اوم – $f(x)=e^{-\frac{1}{2}x}+\frac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}x}$ تابع ورکړ شوې.

الف – د [5 ; 4-] لپاره ارزښت جدول وکاږئ او ګراف یې ګرښیز کړئ. د y - محور، له تیټټکي او x –محور څخه تېرېدوکی y - محور سره غبرګې کرښې ترمنځ سطحه په نخښنه کړئ.

ب – نسبي مینیموم $T\,(x_e \mid f(x_e))$ وشمېرئ.

پ - د الف لاندې په نخښه شوې سطحه وشمېرئ.

اتم - د 3 –مې درجې تام راشنل تابع د x -محور په (0 | 4-) P کې غوڅوي او په (0 | 2) T کې یو تیتکی لري. په P تانجنت د د y - محور په (48 | 0) P_y کې غوڅوي. د f(x) تابع مساوات او د t(x) تانجنت مساوات وشمېرئ او ګراف یې کرښې-کرښې کړئ.

غوښتنه:

ټول هوښیا-یا راشنل توابع یابلواک، ټیټ ټکي، محورغوڅټکي، مشتق، تانجنتمساوات، ګاوس-الګوریتم.

نهم – د $f(x) = \frac{5}{4}x^4 - 3x^2 - 8$ تابع مساوات ورکړشوي دي. انحرافي ارزښتونه وشمېرئ او د ګراف او x –محور منځ سطحه وشمېرئ، چېرته چې صفرځایونه د انتیګرال پولې جوړوي. ګراف یې وکاږئ او شمېرلې سطحه یې په نخښه کړئ.

غښتني:

افراطي ارزښتونه، صفرځایونه، بیمربع مساوات، ټاکلی انتیګرال.

حلونه (اوبیونې)

مشتق – او انتیګرالشمیرنه

نتیجې او مفصل حلونه.

نتیجې:

اول – نتیجې

الف - $\left(e^{x}+e^{-x}\right)^{2}=e^{2x}+e^{-2x}+2$

ب - $\left(e^{x}-e^{-x}+5\right)\cdot e^{x}=e^{2x}+5\cdot e^{x}-1$

دویم – نتیجبځ

الف - $6-\frac{3}{2}e^{2-2x}=0\Rightarrow x=1-\ln(2)$

ب- $\frac{1}{4}e^{4x}-\frac{e}{2}=1\Rightarrow x=\frac{1}{4}\ln(4+2e)$

دریم – نتیجي

الف - $f(x)=e^{-4x}-e^{4x}\Rightarrow f'(x)=-4\left(e^{-4x}+e^{4x}\right)$

ب - $f(x)=\frac{3}{2}e^{-5x^{2}-3x}\Rightarrow f'(x)=\frac{3}{2}(-10x-3)\,e^{-5x^{2}-3x}$

$$f(x)=\frac{1}{16}\left(x^{2}-3e^{x}\right)\Rightarrow\int f(x)\,dx=\frac{1}{16}\left[\frac{1}{3}x^{3}-3e^{x}\right]+C$$

$$f(x)=x^{3}-2x^{2}+4x+\frac{3}{x}\Rightarrow\int f(x)\,dx=\frac{1}{4}x^{4}-\frac{2}{3}x^{3}+2x^{2}+3\cdot\ln|x|+C$$

پنځم - الف - $f(x)=(x+a)^{2}-e^{2x-3}\Rightarrow f'(x)=2\left(x+a-e^{2x-3}\right)$

ب - $f(x)=\left(1-e^{ax}\right)^{2}\Rightarrow f'(x)=-2a\cdot e^{ax}\left(1-e^{ax}\right)$

شپږم – نتیجې:

الف - $\int_{0}^{4}e^{\frac{1}{2}x}\,dx=2\cdot e^{2}-2\approx 12{,}778$

ب - $\int_{1}^{2} e^{4-2x}\, dx = \frac{1}{2}\cdot e^{2} - \frac{1}{2} \approx 3,195$

اوم – نتیجې:

د $f(x) = e^{-\frac{1}{2}x} + \frac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}x}$ لپاره ارزښت جدول.

الف -

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	7,46	4,59	2,9	1,95	1,5	1,43	1,73	2,46	3,83	6,17

ب –تیټتکی: $T\left(\ln(2) \mid \sqrt{2}\right)$

پ – په نخښه شوې سطحه 1FE (FE د سطحې واحد) ده

اتم – نتیجې:

$$f(x) = \frac{1}{3}x^{3} - 4x + \frac{16}{3};\ t(x) = 12x + 48$$

نهم – نتیجې:

$$P_{Max}(0 \mid -8);\ P_{Min\_1}\left(-\sqrt{\frac{6}{5}} \mid -\frac{49}{5}\right);\ P_{Min\_2}\left(\sqrt{\frac{6}{5}} \mid -\frac{49}{5}\right)$$

سطحه: $A = |-32| = 32\,FE$ (FE د سحې یوونونه یا واحدونه)

مفصل ځوابونه:

لومړی:

الف-

$$\underbrace{\left(e^{x}+e^{-x}\right)^{2}}_{\text{1. bin. Formel}} = e^{2x}+2\cdot e^{x}\cdot e^{-x}+e^{-2x}$$
$$= \underline{\underline{e^{2x}+e^{-2x}+2}}$$

ب –

$$\left(e^{x}-e^{-x}+5\right)\cdot e^{x} = e^{2x}-\underbrace{e^{-x}\cdot e^{x}}_{1}+5\cdot e^{x}$$
$$= e^{2x}-1+5\cdot e^{x}$$
$$= \underline{\underline{e^{2x}+5\cdot e^{x}-1}}$$

دویم:

الف –

$$6-\frac{3}{2}e^{2-2x}=0\,|\,-6$$
$$\Leftrightarrow -\frac{3}{2}e^{2-2x}=-6\,|\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)$$
$$\Leftrightarrow e^{2-2x}=4\,|\ln(\ \ )$$
$$\Leftrightarrow \ln\left(e^{2-2x}\right)=\ln(4)$$
$$\Leftrightarrow 2-2x=\ln(4)$$

د $\ln(4)=\ln\left(2^{2}\right)=2\cdot\ln(2)$ له امله باور لري:

$$\Leftrightarrow 2-2x=2\cdot\ln(2)\,|-2$$
$$\Leftrightarrow -2x=2\cdot\ln(2)-2\,|:(-2)$$
$$\Leftrightarrow x=-\ln(2)+1=\underline{\underline{1-\ln(2)\approx 0{,}307}}$$

ب -

$$\frac{1}{4}e^{4x} - \frac{e}{2} = 1 \,\Big|\, + \frac{e}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}e^{4x} = 1 + \frac{e}{2} \,\Big|\, \cdot 4$$

$$\Leftrightarrow e^{4x} = 4 + 2e \,\big|\, \ln(\ \ )$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(e^{4x}\right) = \ln(4 + 2e)$$

$$\Leftrightarrow 4x = \ln(4 + 2e) \,\big|\, : 4$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\ln(4 + 2e)}{4}$$

$$\Leftrightarrow x = \underline{\underline{\frac{1}{4}\ln(4 + 2e) \approx 0{,}561}}$$

دريم:

الف -

$$f(x) = e^{-4x} - e^{4x}$$

$$\Rightarrow f'(x) = -4 \cdot e^{-4x} - 4 \cdot e^{4x}$$

$$= \underline{\underline{-4\left(e^{-4x} + e^{4x}\right)}}$$

ب -

$$f(x) = \frac{3}{2}e^{-5x^2 - 3x}$$

$$\Rightarrow f'(x) = (-10x - 3) \cdot \frac{3}{2}e^{-5x^2 - 3x}$$

$$= \underline{\underline{-\frac{3}{2}(10x + 3)e^{-5x^2 - 3x}}}$$

$$f(x) = \frac{1}{16}\left(x^2 - 3e^x\right)$$

$$\Rightarrow F(x) = \int \frac{1}{16}\left(x^2 - 3e^x\right)dx$$

$$= \frac{1}{16}\int\left(x^2 - 3e^x\right)dx$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{16}\left[\frac{1}{3}x^3 - 3e^x\right] + C}}$$

څلورم: الف –

$$F'(x) = \frac{1}{16}\left(x^2 - 3e^x\right)$$

ب ـ

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + 4x + \frac{3}{x}$$

$$\Rightarrow F(x) = \int\left(x^3 - 2x^2 + 4x + \frac{3}{x}\right)dx$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + 2x^2 + 3\cdot\ln|x| + C}}$$

یادونه: $\int\frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$

$$f(x) = \ln(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$F'(x) = x^3 - 2x^2 + 4x + 3\cdot\frac{1}{x}$$

پنځم:

الف ـ	ب ـ
$f(x) = (x+a)^2 - e^{2x-3}$ $\Rightarrow f'(x) = 2\cdot(x+a)\cdot 1 - 2\cdot e^{2x-3}$ $= 2x + 2a - 2\cdot e^{2x-3}$ $= \underline{\underline{2\left(x + a - e^{2x-3}\right)}}$	$f(x) = \left(1 - e^{ax}\right)^2$ د زنځیري قانون سره $\Rightarrow f'(x) = \underbrace{2\cdot\left(1 - e^{ax}\right)}_{\text{äußere Abl.}}\cdot\underbrace{a\cdot\left(-e^{ax}\right)}_{\text{innere Abl.}}$ دننی مشتق دباندنی مشتق $= \underline{\underline{-2a\cdot e^{ax}\left(1 - e^{ax}\right)}}$

شپږم:

الف –

$$\int_0^4 e^{\frac{1}{2}x}\,dx \quad \text{Substitution: } u(x) = \frac{1}{2}x$$

$$u'(x) = \frac{du}{dx} = \frac{1}{2} \Rightarrow dx = 2du$$

$$ug: u(0) = 0\,;\ og: u(4) = 2$$

$$2\cdot\int_0^2 e^u\,du = 2\cdot e^u\,\Big|_0^2 = 2\cdot e^2 - 2\cdot e^0$$

$$= \underline{\underline{2\cdot e^2 - 2 \approx 12{,}778}}$$

ب – بدلون

$$\int_1^2 e^{4-2x}\,dx \quad \text{Substitution: } u(x) = 4 - 2x$$

$$u'(x) = \frac{du}{dx} = -2 \Rightarrow dx = -\frac{1}{2}du$$

$$ug: u(1) = 2\,;\ og: u(2) = 0$$

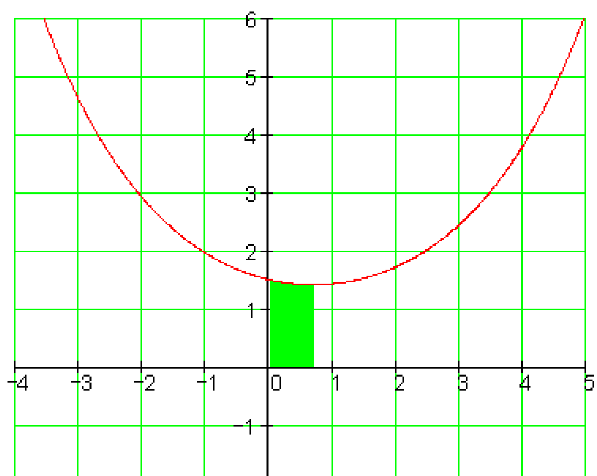
$$-\frac{1}{2}\cdot\int_2^0 e^u\,du = \frac{1}{2}\cdot\int_0^2 e^u\,du$$

$$= \frac{1}{2}\cdot e^u\,\Big|_0^2 = \frac{1}{2}\cdot e^2 - \frac{1}{2}\cdot e^0$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{2}\cdot e^2 - \frac{1}{2} \approx 3{,}95}}$$

اووم: الف – د $\quad f(x) = e^{-\frac{1}{2}x} + \frac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}x}$ لپاره ارزښت جدول

x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5
f (x)	7,46	4,59	2,9	1,95	1,5	1,43	1,73	2,46	3,83	6,17



ب – د نسبي مینیموم یا خورا کوچني ارزښت شمیرنه:

$$f(x)=e^{-\frac{1}{2}x}+\frac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}x}\Rightarrow f'(x)=-\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}+\frac{1}{4}e^{\frac{1}{2}x}$$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}+\frac{1}{4}e^{\frac{1}{2}x}=0\,|+\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}e^{\frac{1}{2}x}=\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}\,|\cdot 4$$

$$\Leftrightarrow e^{\frac{1}{2}x}=2e^{-\frac{1}{2}x}\,|\cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

$$\Leftrightarrow e^{x}=2\,|\ln(\ )$$

$$\Leftrightarrow x=\ln(2)$$

افراطي ځای. افراطي ارزښت:

$$f(x_e)=f(\ln(2))=e^{-\frac{1}{2}\ln(2)}+\frac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}\ln(2)}$$

$$=2^{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}\cdot 2^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$$

تیت ټکی: $\underline{\underline{T\left(\ln(2)\,|\,\sqrt{2}\right)}}$

پ – د سطحي شمیرنه:

$$f(x)=e^{-\frac{1}{2}x}+\frac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

$$\Rightarrow \int_0^{\ln(2)} f(x)\,dx=\int_0^{\ln(2)}\left(e^{-\frac{1}{2}x}+\frac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}x}\right)dx=\underbrace{\int_0^{\ln(2)}\left(e^{-\frac{1}{2}x}\right)dx}_{I}+\underbrace{\frac{1}{2}\int_0^{\ln(2)}\left(e^{\frac{1}{2}x}\right)dx}_{II}$$

$$I:\quad \int_0^{\ln(2)}\left(e^{-\frac{1}{2}x}\right)dx\quad u(x)=-\frac{1}{2}x\Rightarrow\frac{du}{dx}=-\frac{1}{2}\Rightarrow dx=-2du$$

$$u(0)=0 \quad u(\ln(2))=-\frac{1}{2}\ln(2)$$

$$\Rightarrow -2\int_{0}^{-\frac{1}{2}\ln(2)} e^{u}\,du = 2\int_{-\frac{1}{2}\ln(2)}^{0} e^{u}\,du = 2\left[e^{u}\right]_{-\frac{1}{2}\ln(2)}^{0} = 2\left[e^{0}-e^{-\frac{1}{2}\ln(2)}\right]$$

$$II:\quad \frac{1}{2}\int_{0}^{\ln(2)}\left(e^{\frac{1}{2}x}\right)dx \quad u(x)=\frac{1}{2}x \Rightarrow \frac{du}{dx}=\frac{1}{2}\Rightarrow dx=2du$$

$$u(0)=0 \quad u(\ln(2))=\frac{1}{2}\ln(2)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\cdot 2\int_{0}^{\frac{1}{2}\ln(2)}\left(e^{u}\right)du = \int_{0}^{\frac{1}{2}\ln(2)}\left(e^{u}\right)du = \left[e^{u}\right]_{0}^{\frac{1}{2}\ln(2)} = e^{\frac{1}{2}\ln(2)}-e^{0}$$

$$I+II:\quad 2e^{0}-2e^{-\frac{1}{2}\ln(2)}+e^{\frac{1}{2}\ln(2)}-e^{0} = 1-2\cdot 2^{-\frac{1}{2}}+2^{\frac{1}{2}}$$

$$=1-\frac{2}{\sqrt{2}}+\sqrt{2}=1-\frac{2}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=1-\frac{2}{\sqrt{2}}+\frac{2}{\sqrt{2}}=\underline{\underline{1}}$$

په نخښه شوي سطحه ارزښت 1FE (د سطحي یوون یا واحد) لري

اتم:

د پرابلم تحلیل:

د دریمي درجې ام راشنل (ریښتیني) تابع لپاره: $f(x)=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$

I. په T(2|0) کې ټیټ ټکی په دې معنا دی:

$1.\ x_1=2$ د f(x) صفرځای دی، یعني $f(x_1)=f(2)=0$.

$2.\ x_T=2$ د f(x) افراطي ځای دی، یعني $f'(x_T)=f'(2)=0$.

II. دP(-4|0) f(x) صفرځای دی، یعنيf(-4)=0.

III. په P(-4|0) کې تانجنت د y -محور په $a_{0T}=48$ کې غوڅوي، یعني $t(0)=48$

او $t(0)=48$.

د ضريبونوو مساواتو ليكل:

$$\text{I1.} \quad \Rightarrow f(2) = 0 \Leftrightarrow a_3 \cdot 2^3 + a_2 \cdot 2^2 + a_1 \cdot 2 + a_0 = 0$$
$$\Leftrightarrow 8a_3 + 4a_2 + 2a_1 + 1a_0 = 0$$

مساوات ۱ .

$$\text{I2.} \quad \Rightarrow f'(2) = 0 \text{ mit } f'(x) = 3a_3x^2 + 2a_2x + a_0 = 0$$
$$f'(2) = 0 \Leftrightarrow 3a_3 \cdot 2^2 + 2a_2 \cdot 2 + a_0 = 0$$
$$\Leftrightarrow 12a_3 + 4a_2 + a_1 = 0$$

مساوات ۲ .

$$\text{II} \quad \Rightarrow f(-4) = 0 \Leftrightarrow a_3 \cdot (-4)^3 + a_2 \cdot (-4)^2 + a_1 \cdot (-4) + a_0 = 0$$
$$\Leftrightarrow -64a_3 + 16a_2 - 4a_1 + 1a_0 = 0 \qquad \text{Gleichung III}$$

مسوات ۳ .

III. د تانجنت مساوات: $t(x) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$

د $x_0 = -4$ سره $f(x_0) = f(-4) = 0$ باور لري، ځكه چې $x_0 = -4$ د f(x) صفرځايونه دي.

$$f'(x_0) = f'(-4) = 3a_3 \cdot (-4)^2 + 2a_2 \cdot (-4) + a_0$$
$$= 48a_3 - 8a_2 + a_1$$
$$\text{also } t(x) = f'(x) \cdot (x - x_0) = (48a_3 - 8a_2 + a_1)(x + 4)$$
$$t(0) = 48 \Leftrightarrow (48a_3 - 8a_2 + a_1) \cdot 4 = 48$$
$$\Leftrightarrow 192a_3 - 32a_2 + 4a_1 = 48 \qquad \text{Gleichung IV}$$

پورته:مساوات IV .

له دې سره اوس ټول د ضريبونو مساوات معلوم دي:

$$\begin{array}{ll} \text{I} & 8a_3 + 4a_2 + 2a_1 + 1a_0 = 0 \\ \text{II} & 12a_3 + 4a_2 + a_1 = 0 \\ \text{III} & -64a_3 + 16a_2 - 4a_1 + 1a_0 = 0 \\ \text{IV} & 192a_3 - 32a_2 + 4a_1 = 48 \end{array}$$

د مساواتسيستم ځواب د ګاس-الګوريتم له لارې:

a_0	a_1	a_2	a_3		
1	2	4	8	0	
0	1	4	12	0	
1	−4	16	−64	0	III − I
0	4	−32	192	48	I : 4
1	2	4	8	0	
0	1	4	12	0	
0	−6	12	−72	0	III + 6·II
0	1	−8	48	12	IV − II
1	2	4	8	0	
0	1	4	12	0	
0	0	36	0	0	
0	0	−12	36	12	

$$3a_2 = 0 \Leftrightarrow \boxed{a_2 = 0}$$

$$-12a_2 + 36a_3 = 12$$

$$\Leftrightarrow 36a_3 = 12 \Leftrightarrow \boxed{a_3 = \frac{1}{3}}$$

$$a_1 + 4a_2 + 12a_3 = 0$$

$$\Leftrightarrow a_1 + 12 \cdot \frac{1}{3} = 0 \Leftrightarrow \boxed{a_1 = -4}$$

$$a_0 + 2a_1 + 4a_2 + 8a_3 = 0$$

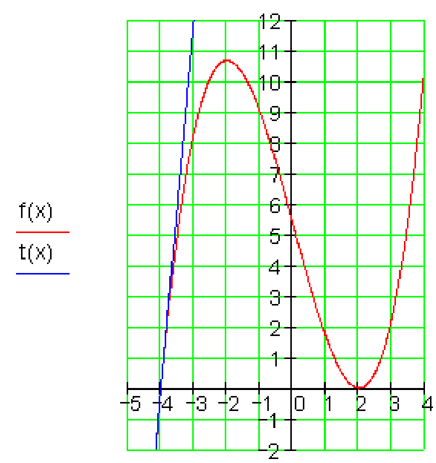
$$\Leftrightarrow a_0 - 8 + 8 \cdot \frac{1}{3} = 0 \Leftrightarrow \boxed{a_0 = \frac{16}{3}}$$

Funktionsgleichung:

$$\underline{\underline{f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x + \frac{16}{3}}}$$

د پورته الماني پينتو: تابع مساوات.
د تانجنت مساوات:

$$t(x) = (48a_3 - 8a_2 + a_1)(x+4) = \left(\frac{48}{3} - 4\right)(x+4) = \underline{\underline{12x + 48}}$$



نهم:
اول: افراطي ارزښتونه

$$f(x)=\frac{5}{4}x^4-3x^2-8$$

و y محور ته سیمتریک ده.

$$\Rightarrow f(-x)=f(x)$$

په کې نسبي ماکسیموم

$$f'(x)=5x^3-6x\,;\,f''(x)=15x^2-6$$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow 5x^3-6x=0$$

$$\Leftrightarrow x\left(5x^2-6\right)=0\Leftrightarrow x_1=0\,;\,x_{2/3}=\pm\sqrt{\frac{6}{5}}$$

$$f''(x_1)=f''(0)=15\cdot 0^2-6=-6<0\Rightarrow \text{rel Max bei } x_1=0$$

$$f''(x_2)=f''\left(\sqrt{\frac{6}{5}}\right)=15\cdot\left(\sqrt{\frac{6}{5}}\right)^2-6=15\cdot\frac{6}{5}-6=12>0\Rightarrow \text{rel Min bei } x_2=\sqrt{\frac{6}{5}}$$

$$f''(x_3)=f''\left(-\sqrt{\frac{6}{5}}\right)=15\cdot\left(-\sqrt{\frac{6}{5}}\right)^2-6=15\cdot\frac{6}{5}-6=12>0\Rightarrow \text{rel Min bei } x_3=-\sqrt{\frac{6}{5}}$$

$$f(x_1)=f(0)=-8\Rightarrow \underline{\underline{P_{Max}(0\,|\,-8)}}$$

$$f(x_2)=f(x_3)=f\left(\sqrt{\frac{6}{5}}\right)=\frac{5}{4}\left(\sqrt{\frac{6}{5}}\right)^4-3\left(\sqrt{\frac{6}{5}}\right)^2-8=-\frac{49}{5}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{P_{Min\_1}\left(-\sqrt{\frac{6}{5}}\,\Big|\,-\frac{49}{5}\right);P_{Min\_2}\left(\sqrt{\frac{6}{5}}\,\Big|\,-\frac{49}{5}\right)}}$$

دوه:

د سطحي شمیرنه صفرځایونه:

$$f(x)=0\Leftrightarrow \frac{5}{4}x^4-3x^2-8=0$$

بدلون: $x^2=z$

$$\Rightarrow \frac{5}{4}z^2-3z-8=0\Leftrightarrow z^2-\frac{12}{5}z-\frac{32}{5}=0\Rightarrow z_1=4\;|$$

همداسي $z_2 = -\frac{8}{5}$. (حل نه شته)

$z_1 = 4 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x_1 = -2$ همداسي؛ $x_2 = 2$. د انتیګریشن پولې دي.

د سطحې انتیګرال:

$$\int_{-2}^{2} f(x)\,dx = \int_{-2}^{3}\left(\frac{5}{4}x^4 - 3x^2 - 8\right)dx = \left[\frac{x^5}{4} - x^3 - 8x\right]_{-2}^{2}$$

$$= \left[\frac{2^5}{4} - 2^3 - 8\cdot 2\right] - \left[\frac{(-2)^5}{4} - (-2)^3 - 8\cdot(-2)\right] = -32$$

سطحه: A=|-32| =32FE (FE د سطحې واحد یا یوون)

$P_{Max}(0\,|\,-8)$

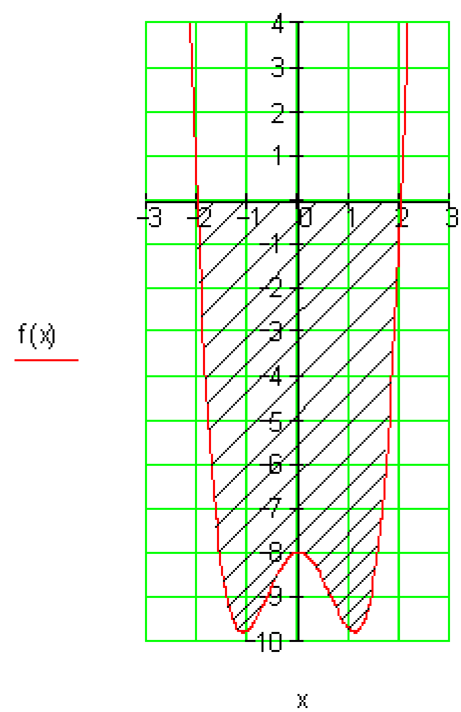
$P_{Min\_1}\left(-\sqrt{\frac{6}{5}}\,\middle|\,-\frac{49}{5}\right)$

bzw. $P_{Min\_1}(-1{,}09\,|\,-9{,}8)$

$P_{Min\_1}\left(\sqrt{\frac{6}{5}}\,\middle|\,-\frac{49}{5}\right)$

bzw. $P_{Min\_1}(1{,}09\,|\,-9{,}8)$

x	−2,2	−2	−1,5	−1
f(x)	6,76	0	−8,42	−9,75
x	−0,5	0	0,5	1
f(x)	−8,67	−8	−8,67	−9,75
x	1,5	2	2,2	
f(x)	−8,42	0	6,76	

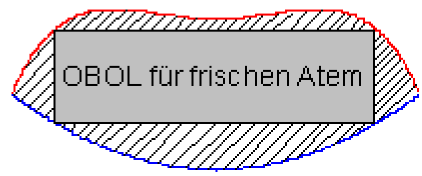


پوښتنې

مشتق – او انتیگرالشمېرنې ته د استعمال پوښتنې

د اعلاناتو تختې او ګډوله پوښتنې.

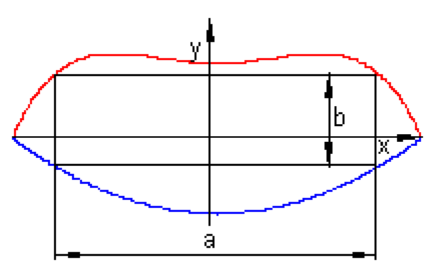
لومړی:

<table>
<tr>
<td>دا تر ښنګ د اعلاناتو تخته(
خوله د یوه په کې خوندي
ولاړګوډیز یا مستطیل سره، چې
خوزنده اعلانات په کې انځور
شوي دي) باید داسې جوړه شي،
چې په کې خوندي مستطیل ممکنه
خورا لویه سطحه ولري. د خولې
د غاړې کرښې یا منحنې د په
ښنګ کې توابعو د تابع مساواتو
له لارې انځورېږي:</td>
<td>

$$f(x) = -\frac{1}{486}x^4 + \frac{1}{54}x^2 + 2;\ g(x) = \frac{1}{18}x^2 - 2$$</td>
</tr>
</table>

الف- د خولې پورته برخه کوم تابع ښايي او کوم دا ښکته برخه؟ خپل ځواب مدلل کړی.

ب –

<table>
<tr>
<td>د دې مودول جوړونکی د ځغلند لیک
لپاره د مستطیل یا ولاړګوډیز تیکې
کچې ته اړتیا لري. د مستطیل اړخ a
او b اړخ داسې وټاکی، چې سطحه
ماکسیمال شي. سطحه څومره لویه ده؟
د اوږدوالي یوون یا واحد متر دی.</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

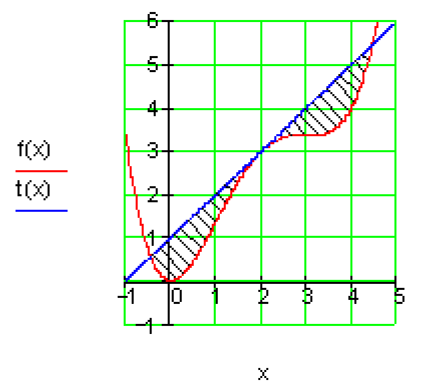
پ-

دا ټوله خوله دې په یوه دکور په یوه دیوال کې ورګډه یعنې وکښل شي، د دې لپاره د جوړولو انجنر اړینې سطحې ته اړتیا لري.

ت- دا کرښه شوې سطحه دې د خورا ارزښتناک برطبنا رانه رنگ سره جوړه شي. د یوه مربع متر په پوښ ورکونه یا رنگونه € 120 قیمت لري. ټوله پوښونه به څومره قیمت ولري؟

غوښتنه: مشتق، افراطي ارزښتونه، د گرافونو ترمنځ سطحه.

دویم:



د f(x) او t(x) گرافونو ترمنځ سطحه وټاکئ، که د t(x) د f(x) تانجنت په P(2 | f(2)) ټکي کې انځور کړي.

$$f(x)=\frac{1}{8}x^4-x^3+\frac{9}{4}x^2$$

غوښتنه: تانجنت، صفرځایونه، هورنر، ټاکلی انتیگرال

دریم:

تابع ورکړ شوی: $f_a(x)=a\cdot x^2\cdot e^{3-2x}\qquad x\in\mathbb{R}\,;\,a\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$

الف-د f(x) صفرځایونه وټاکی او خپلې نتیجې په کومنتار روښانه کړی.

ب – د پراته تانجنت سره ټکي پیداکړی او د دې ټکو پروتځای په هکله یوه وینا وکړی.

غږښتنه: مشتق، -تابع، د ضرب قانون، زنځیري قانون.صفرضرب. تانجنتونه، پراته.

ځوابونه

مشتق او انتيګرالشميرنې ته د استعمال پوښتنې

نتيجې

الف- $g(x)=\frac{1}{18}x^2-2$ د خوله لاندط برخه ښايي.

$f(x)=-\frac{1}{486}x^4+\frac{1}{54}x^2+2$ د خوله پورته برخه ښايي.

ب – د ولاړګوډيز يا مستطيل خورا لويه سطحه $23{,}095\ m^2$ ده.

پ – د خولې لپاره د کور په ديواله په ټوليېزه توګه $36{,}267\ m^2$ سطحې ته اړتيا شته.

ت – کرښيزه سطحه د ټولې سطحې او د ولاړګوډيز يا مستطيل کمښت يا تفريق دی. دا نږدې $13{,}172\ m^2$ دی. د پوښونې قيمت € 1580,65 دی. دويم: غړښتونکې سطحه 2,939 FE (د سطحې واحد يا يوون) ده.
دريم:
الف- $x_{1/2}=0$ يواځنی صفرځای دی، ځکه چې دبل منځ ته راځي، د $f(x)$ ګراف د x - محور په همدې ځای کې لمسوي.
ب- ټکي د پراته تانجنت سره په $x_1=0$ او $x_2=1$ کې پراته دي. ټول ټکي P_{1a} د کواوردينات يا پروت ولاړسيستم په سرچينه کې په $P_{1a}(0\mid 0)$ کې پراته دي. ټول P_{2a} ټکي د محور y ته غبرګې باندې په واټن کې پراته دي او کواوردينات $P_{2a}(1\mid ae)$ لري.

مفصل ځوابونه:

الف- د خولې لاندې برخه د مربع تابع له لارې روښانه يا تشيح کيږي. پورته برخه د ۴.درجې يوه ټول هوښيار يا راشنل تابع له لارې.

$g(x)=\frac{1}{18}x^2-2$ د خولې لاندې-يا کښته برخه ښايي

$f(x) = -\frac{1}{486}x^4 + \frac{1}{54}x^2 + 2$ د خولې پورته بخه ښايي.

ب-دا چې د f(x) او g(x) ګرافونه د y محور سره سيمتريک ځغلي، نو دا خوندي ولاړګوديز يا مستطيل هم د y محور ته سيمتريک دی.

د y محور a په دوه برابرو برخو وېشي.
د دې لپاره چې اړخ يا خواb د a په واکوالي کې وټاکو، نو ولاړګوديز يا مستطيل د ولاړو ګډونو يا قيموزاويو پورته او کښته کواورديناتونو ته اړتيا لرو.
پورته ولاړ يا قايم ګوډ يا کونج: $\left(\frac{a}{2} \middle| f\left(\frac{a}{2}\right)\right)$ کښته ولاړګوډ: $\left(\frac{a}{2} \middle| g\left(\frac{a}{2}\right)\right)$.

د y محور مطلق کمښت اړخ b راکوي. د دې لپاره د ولاړګوديز يا مستطيل همغه اړونده د y کواورديناتونه شميرو.

$$f\left(\frac{a}{2}\right) = -\frac{1}{486}\cdot\left(\frac{a}{2}\right)^4 + \frac{1}{54}\cdot\left(\frac{a}{2}\right)^2 + 2 = -\frac{1}{486}\cdot\frac{a^4}{16} + \frac{1}{54}\cdot\frac{a^2}{4} + 2$$
$$= -\frac{1}{7776}a^4 + \frac{1}{216}a^2 + 2 > 0$$
$$g\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{1}{18}\cdot\left(\frac{a}{2}\right)^2 - 2 = \frac{1}{18}\cdot\frac{a^2}{4} - 2$$
$$= \frac{1}{72}a^2 - 2 < 0$$

د b د اوږدوالي لپاره نو باور لري:

$b(a) = f\left(\frac{a}{2}\right) + \left|g\left(\frac{a}{2}\right)\right|$ داچې $g\left(\frac{a}{2}\right) < 0$ ist, دی، نو $\left|g\left(\frac{a}{2}\right)\right| = -g\left(\frac{a}{2}\right)$ باور لري او له دې سره دا لاندې

$$b(a) = f\left(\frac{a}{2}\right) - g\left(\frac{a}{2}\right) = -\frac{1}{7776}a^4 + \frac{1}{216}a^2 + 2 - \left(\frac{1}{72}a^2 - 2\right)$$

$$= -\frac{1}{7776}a^4 + \frac{1}{216}a^2 + 2 - \frac{3}{216}a^2 + 2$$

$$= -\frac{1}{7776}a^4 - \frac{2}{216}a^2 + 4 = -\frac{1}{7776}a^4 - \frac{1}{108}a^2 + 4$$

دا چې د b اړخ د a په واک کې دی، نو سړی دا هم وايي چې b د a فنکشن دی يعنې b(a).

د ولاړګوډيز A مساحت د هغه د ا ړخونو ضرب دی.

$$A(a) = a \cdot b(a) = a \cdot \left(-\frac{1}{7776}a^4 - \frac{1}{108}a^2 + 4\right)$$

$$= -\frac{1}{7776}a^5 - \frac{1}{108}a^3 + 4a$$

د A(a) د افراطي ارزښت ټاکل د a ارزښت راکوي، چې د هغه لپاره د ولاړګوډيز سطحه خورا ـــيا ماکسيمال لوييږي.

(په لاندې کې د الماني پښو: بدلون، حل نه شته،

$$A'(a) = -\frac{5}{7776}a^4 - \frac{3}{108}a^2 + 4\,;\; A''(a) = -\frac{20}{7776}a^3 - \frac{6}{108}a$$

$$A'(a) = 0 \Leftrightarrow -\frac{5}{7776}a^4 - \frac{3}{108}a^2 + 4 = 0 \,|\cdot\left(-\frac{7776}{5}\right)$$

$$\Leftrightarrow a^4 + \frac{3\cdot 7776}{108\cdot 5}a^2 - \frac{4\cdot 7776}{5} = 0$$

$$\Leftrightarrow a^4 + \frac{216}{5}a^2 - \frac{31104}{5} = 0 \text{ Substitution: } a^2 = z$$

$$\Leftrightarrow z^2 + \frac{216}{5}z - \frac{31104}{5} = 0 \Rightarrow p = \frac{216}{5}\,;\; q = -\frac{31104}{5}$$

$$\Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \left(\frac{108}{5}\right)^2 + \frac{31104}{5} = \frac{11664}{25} + \frac{155520}{25} = \frac{167184}{25}$$

$$= \frac{1296}{25}\cdot 129 \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{\frac{1296}{25}\cdot 129} = \frac{36}{5}\sqrt{129}$$

$$z_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \left| \begin{array}{l} z_1 = -\frac{108}{5} + \frac{36}{5}\sqrt{129} = a^2 \\ z_2 = -\frac{108}{5} - \frac{36}{5}\sqrt{129} < 0 \Rightarrow \end{array} \right.$$

حل نه شته

$$a^2 = -\frac{108}{5} + \frac{36}{5}\sqrt{129} \Rightarrow |a| = \sqrt{-\frac{108}{5} + \frac{36}{5}\sqrt{129}}$$

$$a_1 = \sqrt{-\frac{108}{5} + \frac{36}{5}\sqrt{129}}\ ;\ a_2 = -\sqrt{-\frac{108}{5} + \frac{36}{5}\sqrt{129}}$$

$a_1 = \frac{6}{5}\sqrt{-15 + 5\sqrt{129}} \approx 7,757$ د یو ځو بڼه بدلونونو سره.

داچې د z_2 ریښه یا جذر نه شي نیول کیدی او د a لپاره ارزښت باید زیاتیز یا مثبت وي، باید د a د A(a) یو افراطي ځای وي. دا د A(a) د دویم مشتق سره ازمایلی شو.

د $A''(a_1) < 0$ ،

$$A''(a_1) = -\frac{20}{7776}a_1^3 - \frac{6}{108}a_1$$

او $a_1 > 0$ ،

له امله.

د ارزښت $a_1 = \frac{6}{5}\sqrt{-15 + 5\sqrt{129}}$ لپاره

د ولاړګوډیز یا مستطیل سطحه ماکسیمال یا خورا لویه ده

دا چې ګراف، چې د خولي پورته برخه جوړوي، د $x = 0$ په ځای کې یو مینیموم یا خوراکوچنی ارزښت په ګوته کوي ((P_{Min} (0 | 2))، باید وازمایل شي، چې د ولاړکوډیز یا مستطیل پورته اړخ له دې څخه کښته پروت دی.

$$\text{Also ob } f\left(\frac{a_1}{2}\right) < 2 \text{ ist.}$$

$$f\left(\frac{a_1}{2}\right) = f\left(\frac{3}{5}\sqrt{5\sqrt{129}-15}\right) \approx 1{,}813 < 2$$

شمیرنه د جبشمیري سره صورت نیسي. نتیجه تصدیقوي، چې د مستطیل پورته ا ړخ د $f(x)$ د خورا کوچني ارزښت کښته لور ته پروت دی

اوس کیدی شي د مستطیل مساحت د جبشمیري سره و شمیرل شي.
د الماني پښتو: ولاړکوډیز یا مستطیل.

$$A_{\text{Rechteck}} = A(a_1) = -\frac{1}{7776}a_1^5 - \frac{1}{108}a_1^3 + 4a_1$$

$$A_{\text{Rechteck}} = A(a_1) = A\left(\frac{6}{5}\sqrt{5\sqrt{129}-15}\right) \approx 23{,}095$$

د ولاړکوډیز خورا لوی ارزښت یا ماکسیماله لویه نږدې $23{,}095\ m^2$ مساحت لري.

پ- د خولې ټول مساحت د $f(x)$ او $g(x)$ توابعو ګرافونو ترمنځ پروت دی. دا د انتګرال په مرسته میندل کیدی شي. د دې لپاره باید لومړی د انتیګرېشن پولې وټاکل شي.

$$f(x) - g(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{486}x^4 + \frac{1}{54}x^2 + 2 - \left(\frac{1}{18}x^2 - 2\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{486}x^4 + \frac{1}{54}x^2 - \frac{3}{54}x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{486}x^4 - \frac{1}{27}x^2 + 4 = 0 \mid \cdot(-486)$$

$$\Leftrightarrow x^4 + 18x^2 - 1944 = 0 \text{ Substitution: } z = x^2$$

$$\Leftrightarrow z^2 + 18z - 1944 = 0 \Rightarrow p = 18;\ q = -1944$$

$$\Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 81 + 1944 = 2025 \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{2025} = 45$$

د انتیگریشن پولی د x لپاره حل نه شته	$\mid z_1 = -9+45 = 36 = x^2 \Rightarrow x_{1/2} = \pm 6$ $\mid z_2 = -9-45 = -54 < 0 \Rightarrow$	$z_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D}$

د $f(x) - g(x) = -\frac{1}{486}x^4 - \frac{1}{27}x^2 + 4$: سره د ګرافونو ترمنځ سطحې لپاره باور لري:

لاندې الماني: خوله

$$A_{Mund} = A = \int_{x_1}^{x_2} \left[f(x) - g(x)\right] dx = \int_{-6}^{6} \left(-\frac{1}{486}x^4 - \frac{1}{27}x^2 + 4\right) dx$$

$$= -\frac{1}{5 \cdot 486}x^5 - \frac{1}{3 \cdot 27}x^3 + 4x \Big[_{-6}^{6}$$

$$= -\frac{7776}{2430} - \frac{216}{81} + 24 - \left(\frac{7776}{2430} + \frac{216}{81} - 24\right)$$

$$= -\frac{15552}{2430} - \frac{432}{81} + 48 = \frac{544}{15} \approx 36{,}267$$

دپه دیوال د خولې لپاره ټولټال $36{,}267\ m^2$ سطحې ته اړتیا شته.

ت- کرښیزه سطحه د ټولې سطحې او د ولاړګوډیز د سطحې د کمون یا تفریق سره برابره ده.

په لاندط کې د الماني پښتو له کین څخه ښي لورته: کرښیز، خوله، مستطیل یا ولاړ کوډیز

$$A_{schraffiert} = A_{Mund} - A_{Rechteck} = \frac{544}{15} - A\left(\frac{6}{5}\sqrt{5\sqrt{129}-15}\right) \approx 13{,}172$$

د $1m^2$ پوښونې قيمت 120€ دی.

$$\text{ټول قيمت} = 120\,€ \cdot A_{schraffiert} = 1580{,}65\,€$$

يادونه:

د دې لپاره چې د ګردونې ناټيکاوي مخه ونيول شي، بايد د جبشميري شميرنې سره منځارزښتونه ذخيره شي.

$$\text{ټول قيمت} = 120\,€ \cdot 13{,}172 = 1580{,}64\,€$$

د ګردوونې ناټيکاوي ته يادونه.
تر شوونتيا پورې چې د ګردونې ناټيکاوي مخه ونيولی شو، بايد د جبشميري شميرنې سره منځارزښتونه ذخيره شي. مګر په ډېرو حالتونو کې د لسميز يا اعشاريې(کوما) وروسته درې ځايونه بسيا کوي. په لاندې کې دې د لسميز وروسته د ۳ ځايونو ټيکاوي سره سرته ورسول شي. د الماني : ولاړګوډيز، خوله، کربنيزه سطحه، خوله، مستطيل

$$a_1 \approx 7{,}757$$

$$A_{Rechteck} \approx -\frac{1}{7776}\cdot(7{,}757)^5 - \frac{1}{108}\cdot(7{,}757)^3 + 4\cdot 7{,}757 \approx 23{,}095$$

$$A_{Mund} \approx 36{,}267$$

$$A_{schraffiert} = A_{Mund} - A_{Rechteck} \approx 36{,}267 - 23{,}095 \approx 13{,}172$$

$$\text{ټول ارزښت} \approx 120\,€ \cdot 13{,}172 \approx 1580{,}64\,€$$

دويم: حل

$$f(x) = \frac{1}{8}x^4 - x^3 + \frac{9}{4}x^2$$

تانجنت په $f(x)$باندې په $P(2|f(2))$ کې
$f(2)=3$ له دې لاس ته راځي ، چې$t(x)$ د $f(x)$ ګراف په تکي $P(2|f(2))$ کې لمسوي
تانجنتمساوات $: t(x)=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ د $x_0=2$ سره

$$f'(x)=\frac{1}{2}x^3-3x^2+\frac{9}{2}x \Rightarrow f'(x_0)=f'(2)=1$$

او د $f(x_0)=f(2)=3$ سره باور لري: $t(x)=1\cdot(x-2)+3$ یعني $\boxed{t(x)=x+1}$
د تانجنت غوځېتکي همداسې لمسېتکي د $f(x)$ د ګراف سره

$$t(x)-f(x)=x+1-\left(\frac{1}{8}x^4-x^3+\frac{9}{4}x^2\right)=-\frac{1}{8}x^4+x^3-\frac{9}{4}x^2+x+1$$

$$t(x)-f(x)=0 \Leftrightarrow -\frac{1}{8}x^4+x^3-\frac{9}{4}x^2+x+1=0$$

برېښي چې تانجنت د $f(x)$ ګراف په ټکي $P(2|3)$ کې لمسوي، کيدی شي $x_{1/2}=2$ حلونه وي.
هورنر:

$$\begin{array}{l|ccccc}
 & -\frac{1}{8} & 1 & -\frac{9}{4} & 1 & 1 \\
x=2 & & -\frac{1}{4} & \frac{6}{4} & -\frac{6}{4} & -\frac{4}{4} \\
\hline
 & -\frac{1}{8} & \frac{3}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{2}{4} & 0 \\
x=2 & & -\frac{1}{4} & \frac{4}{4} & \frac{2}{4} & \\
\hline
 & -\frac{1}{8} & \frac{2}{4} & \frac{1}{4} & 0 &
\end{array}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}=0 \Rightarrow x_{3/4}=2\pm\sqrt{6}$$

داچې تانجنت د $f(x)$ ګراف په ټکي$P(2|3)$ کې لمسوي (دبل صفرځای)، کيدی شي غوښتونې سطحه د لاندې انتيګرال سره وشميرل شي.

$$A=\int_{2-\sqrt{6}}^{2+\sqrt{6}}\left[t(x)-f(x)\right]dx=\int_{2-\sqrt{6}}^{2+\sqrt{6}}\left[-\frac{1}{8}x^4+x^3-\frac{9}{4}x^2+x+1\right]dx$$

$$= \left[-\frac{1}{40}x^5 + \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{4}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x\right]_{2-\sqrt{6}}^{2+\sqrt{6}} \approx 2,939$$

غوښتونې سطحه 2,939 FE (د سطحې واحد یا یوون) ده.

دریم:
الف-

$$f_a(x) = a \cdot x^2 \cdot e^{3-2x}$$

د صفرځایونو لپاره اینونه: $f_a(x) = 0 \Leftrightarrow a \cdot x^2 \cdot e^{3-2x} = 0$

ترڅیرنې لاندې نیول کیږي، چې د کوم x ارزښت لپاره ضرب ضریبونه (د ځل ځلووني) صفر کیږي.

$a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ یو ثاکلی ضریب دی، چې هیڅ صفرکیدای نه شي.

$x^2 = 0 \Leftrightarrow x_{1/2} = 0$ یو دبل صفرځای دی.

د $e^{3-2x} : e^{3-2x} = e^{-(2x-3)}$ څیرنه

له $e^{-(2x-3)}$، e^{-2x} څخه د xمحور ښی لور ته په ۳ واحده یا یوون د راکښنې له لارې منځ ته راځي ه.

دا چې e^{-2x} صفرځای نه لري، نو $e^{-(2x-3)}$ هم صفرځای نه لري.

له دې سره $\underline{\underline{x_{1/2} = 0}}$ یواځنی صفرځای دی، ځکه چې دبل منځ ته راځي، د f(x) ګراف د x محور په دې ځای کې لمسوي.(پروت تانجنت)

ب-

$f_a(x) = a \cdot x^2 \cdot e^{3-2x}$ په پاته تانجنت باندې څیرنه

د پراته تانجنت لپاره شرطونه: $f'_a(x) =$

د ضرب قاونو له لارې مشتق: $f'_a = u' \cdot v + u \cdot v'$

$$u = a \cdot x^2 \,;\, v = e^{3-2x} \Rightarrow u' = 2a \cdot x \,;\, v' = -2e^{3-2}$$

$$\Rightarrow f'_a(x) = 2ax \cdot e^{3-2x} + ax^2 \cdot \left(-2e^{3-2x}\right)$$

$$= 2ax \cdot e^{3-2x} - 2ax^2 \cdot e^{3-2x} = 2a \cdot e^{3-2x}\left(x - x^2\right)$$

$$f'_a(x)=0 \Leftrightarrow 2a\cdot e^{3-2x}\left(x-x^2\right)=0$$
$$\Leftrightarrow x(1-x)=0 \Rightarrow x_1=0\,;\,x_2=1$$

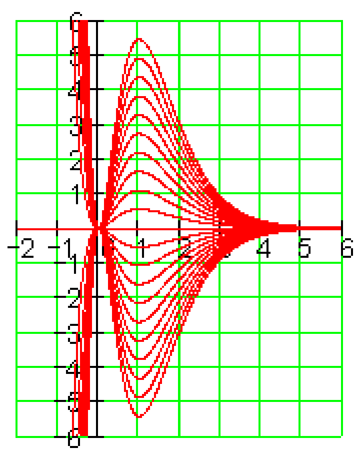
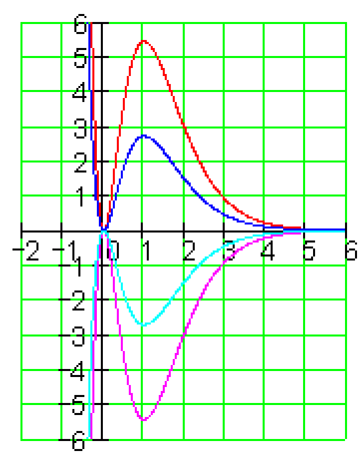
e^{3-2x} صفرکیدی نه شي(برخه الف وګورئ)

د پراته محور سره غوڅتکي

$$f_a(x_1)=f_a(0)=a\cdot 0^2\cdot e^3=0 \Rightarrow \underline{\underline{P_{1a}(0|0)}}$$
$$f_a(x_2)=f_a(1)=a\cdot 1^2\cdot e^{3-2}=a\cdot e \Rightarrow \underline{P_{2a}(1|a\cdot e)}$$

ټول ټکي P_{1a} د کواوردینات په سرچینه پراته دي، له پارامتر a څخه خپلواک دي.

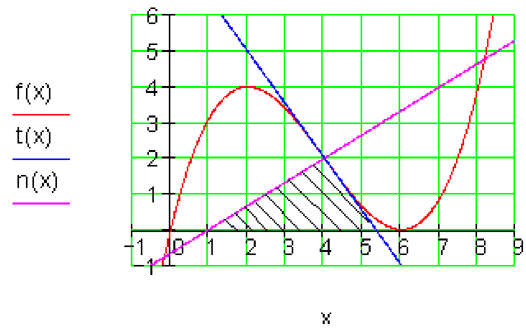
ټول ټکی P_{2a} د y محور ته غبرګه باندې پراته دي: x=1

$f_a(x)=a\cdot x^2\cdot e^{3-2x} \quad x\in\mathbb{R}\,;\,a\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$	$f_a(x)=a\cdot x^2\cdot e^{3-2x} \quad x\in\mathbb{R}$ د $a\in\{-2;-1;1;2\}$ لپاره
	

پوښتني: مشتق او انتیګرالشمیرنه II

ګډوله پوښتني

لومړی:

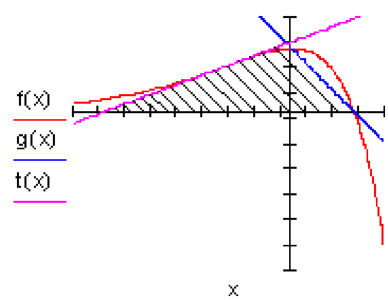


غوښتنې: مشتق،تانجنت، نورمال یا عمود، صفرځایونه، د درې ګوډي سطحه.

د درېګوډي مساحا، چې د تانجنت $t(x)$ او نورمالې یا عمود $n(x)$ له لارې د x محور سره جوړېږي، وشمېرئ:
$t(x)$ په ټکي $P(4|2)$ کې په $f(x)$ تانجنت دی

$$f(x)=\frac{1}{8}x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{9}{2}x$$

دویم:

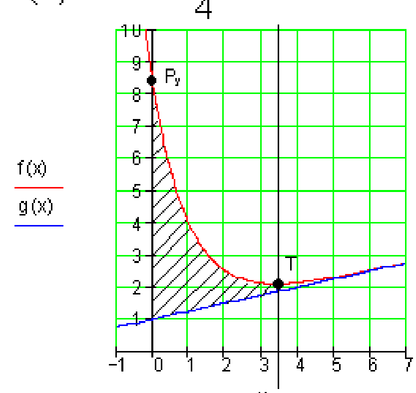


د په نخښه شوي درېګوډي یا مثلث سطحه وشمېرئ، که $f(x)=(2-x)e^{\frac{1}{2}x}$ وي.
$g(x)$ د $f(x)$ محور-غوښتېکي له لارې کرښه ده.
$t(x)$ د $f(x)$ اوړنتانجنت یا د انعطاف تانجنت دی

غوښتنه: محورغوښتکي، اوړون – یا د انعطاف ټکي، اوړنتانجنت یا د انعطاف تانجنت، د کرښو غوښتکي.

درېیم: تابع ورکړ شوې ده:

$$f(x)=e^{2-x}+\frac{1}{4}x+1 \qquad x\in\mathbb{R}$$



الف- د $f(x)$ غوښتکی د y محور سره وشمیرئ.
ب- د کرښي $g(x)$ مساوات وټاکئ. دا کرښه څه غوره والی یا معنا لري؟
پ- ټیټتکی $T(x_e\,|\,f(x_e))$ وشمیرئ.
ت- دا په نخښه شوې سطحه وشمیرئ.
ټ- سطحه په کوم ارزښت تغیر خوري، که ښی پوله د ناپای په لور لاړه شي.

غوښتنه: e - تابع ، محورغوځتکي، مشتق، سطحه، انتیګریشن، ناپای انتیګرال.

ځوابونه

مشتق او انتیګرال ته ګډوله پوښتنېII

نتیجې او مفصل ځوابونه

نتیجې

لومړی:

د درېګوډی مساحت نږدې FE ...4,333 د سطحې یوون یا واحد دی.

دویم: د درېګوډي سطحه نږدې 8,606 FE د سطحې واحد دی.

دریم:

الف- $P_y\left(0 \mid e^2+1\right)$ bzw. $P_y(0 \mid 8{,}389)$ همداسې

ب- کرښه د ګراف اسینمپتوتي جوړوي.

د اسیمپتوتي د تابع مساوات دی: $g(x) = \frac{1}{4}x + 1$

تیټتکی: $T\left(2+\ln(4) \mid \frac{7}{4}+\frac{1}{4}\ln(4)\right) \approx (3{,}386 \mid 2{,}097)$

ت-په نخښه شوې سطحه ده:

$$A = e^2 - e^{-\ln(4)} = e^2 - \frac{1}{4} \approx 7{,}139$$

ت- $A = e^2 \approx 7{,}389$

په دې ارزښت سطحه تغیر خوري، که ښی پوله د ناپای په لور لاړه شي.

مفصل ځوابونه:

لومړی:

د $f(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{2}x$ د $P(4|2) \Rightarrow x_0 = 4$ له لارې تانجنت

$$f'(x) = \frac{3}{8}x^2 - 3x + \frac{9}{2}$$

$$t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \qquad n(x) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) + f(x_0)$$

$$f(x_0) = f(4) = 2;\ f'(x_0) = f'(4) = -\frac{3}{2}$$

$$t(x) = -\frac{3}{2}(x-4) + 2 = \underline{\underline{-\frac{3}{2}x + 8}}$$

$$n(x) = \frac{2}{3}(x-4) + 2 = \underline{\underline{\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}}}$$

د تانجنت غوځنکی د x محور سره:

$$t(x) = 0 \Leftrightarrow x_t = \frac{16}{3}$$

د نورمالي غوځنکی د x محور سره.

$$n(x) = 0 \Leftrightarrow x_n = 1$$

د درېګوډي سطحه: $A = \frac{g \cdot h}{2}$ د $g = x_t - x_n = \frac{16}{3} - 1 = \frac{13}{3}$

او $h = 2 \Rightarrow A = \frac{\frac{13}{3} \cdot 2}{2} = \underline{\underline{\frac{13}{3} FE}}$ (دسطحې یوون یا واحد) سره.

دویم: $f(x) = (2-x)e^{\frac{1}{2}x}$

اول: د محورغوڅټکو شمیرنه.

د y محور سره غوڅټکی:

$$f(0) = (2-0)e^{\frac{1}{2} \cdot 0} = 2e^0 = 2 \Rightarrow P_y(0|2)$$

د x محور سره غوڅټکی

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow (2-x)e^{\frac{1}{2}x} = 0 \Leftrightarrow (2-x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 2$$

ضریب $e^{\frac{1}{2}x}$ نه صفر کیږي، نو $\underline{\underline{P_{x1}(2|0)}}$.

دوه: کرښه د د محور غوڅټکو $P_y(0|2)$ او $P_{x1}(2|0)$ له لارې.

$$g(x) = a_1x + a_0 \quad a_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0-2}{2-0} = -1 \Rightarrow g(x) = -x + a_0$$

ازماېښت: $P_y(0|2)$ $g(0) = 2 \Leftrightarrow -0 + a_0 = 2 \Rightarrow a_0 = 2$

$$\Rightarrow \underline{\underline{g(x) = -x + 2}}$$

دريږ: اوړون – یا انعطافټکی

$$f(x)=(2-x)e^{\frac{1}{2}x}=u(x)\cdot v(x)\Rightarrow f'(x)=u'v+uv'$$

$$u=(2-x)\,;\,u'=-1;\,v=e^{\frac{1}{2}x}\,;\,v'=\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x}$$

$$f'(x)=-1\cdot e^{\frac{1}{2}x}+(2-x)\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x}=\left[-1+\frac{1}{2}(2-x)\right]e^{\frac{1}{2}x}=\underline{\underline{-\frac{1}{2}x\cdot e^{\frac{1}{2}x}}}$$

$$f'(x)=-\frac{1}{2}x\cdot e^{\frac{1}{2}x}=u(x)\cdot v(x)\Rightarrow f''(x)=u'v+uv'$$

$$u=-\frac{1}{2}x\,;\,u'=-\frac{1}{2};\,v=e^{\frac{1}{2}x}\,;\,v'=\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x}$$

$$f''(x)=-\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x}-\frac{1}{2}x\cdot\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x}=\underline{\underline{-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}x\right)e^{\frac{1}{2}x}}}$$

$$f''(x)=-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}x\right)e^{\frac{1}{2}x}=u(x)\cdot v(x)\Rightarrow f'(x)=u'v+uv'$$

$$u=-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}x\right);\,u'=-\frac{1}{4};\,v=e^{\frac{1}{2}x}\,;\,v'=\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x}$$

$$f'''(x)=-\frac{1}{4}e^{\frac{1}{2}x}-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}x\right)\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x}=\underline{\underline{-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{4}x\right)e^{\frac{1}{2}x}}}$$

$$f''(x)=0\Leftrightarrow-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}x\right)e^{\frac{1}{2}x}=0\Leftrightarrow 1+\frac{1}{2}x=0\Leftrightarrow\underline{\underline{x_w=-2}}$$

$$f'''(x_w)=f'''(-2)=-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{4}(-2)\right)e^{\frac{1}{2}(-2)}=\frac{1}{4e}\neq 0$$

$$\Rightarrow x_w=-2$$

دا اړونټکی یا انعطافټکی دی.

$$y_w = f(x_w) = f(-2) = (2-(-2))e^{\frac{1}{2}(-2)} = 4e^{-1} = \frac{4}{e}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{W\left(-2 \mid \frac{4}{e}\right)}}$$

څلور: د اوړونټکي یا انعطاف ټکي تانجنت

$$f(x) = (2-x)e^{\frac{1}{2}x} \qquad f'(x) = -\frac{1}{2}x \cdot e^{\frac{1}{2}x} \qquad W\left(-2 \mid \frac{4}{e}\right)$$

$$f'(x_w) = f'(-2) = -\frac{1}{2}(-2) \cdot e^{\frac{1}{2}(-2)} = \frac{1}{e}$$

$$f(x_w) = f(-2) = (2-(-2))e^{\frac{1}{2}(-2)} = \frac{4}{e}$$

$$\Rightarrow t(x) = \frac{1}{e}(x+2) + \frac{4}{e} = \underline{\underline{\frac{1}{e}x + \frac{6}{e}}}$$

سره لرو $: x_w = -2$ د $t(x) = f'(x_w)(x - x_w) + f(x_w)$

پنځه: د x محوراو $g(x)=-x+2$ سره د اوړونټانجنت یا انعطافتانجنت غوځټکي

$$t(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{e}x + \frac{6}{e} = 0 \Leftrightarrow x = -6$$

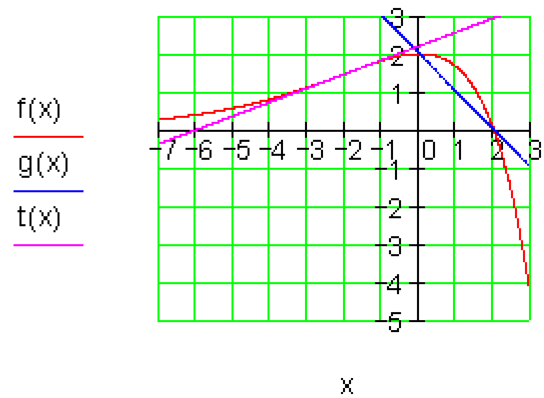
د انعطافټکي یا اونټکي صفرځایونه.

$$t(x) = g(x) \Leftrightarrow \frac{1}{e}x + \frac{6}{e} = -x + 2 \Leftrightarrow \underline{\underline{x_s = \frac{2e-6}{1+e}}}$$

$$y_s = g(x_s) = -\frac{2e-6}{1+e} + 2 = \frac{6-2e}{1+e} + 2 = \frac{8}{1+e}$$

د درېګوډي یامثلث جګوالی دی.

شپږ:



د درېګوډي د مساحت شميرنه
د درېګوډي يا مثلث جګوالی:

$$h = y_s = \frac{8}{1+e}$$

سطحه: $A=g.h/ 2$

g له $x=-6$ څخه د واټن په حيث تر $x=2 \Rightarrow g=8$ پورې.

$$A = \frac{8\cdot\frac{8}{1+e}}{2} = 4\cdot\frac{8}{1+e} = \frac{32}{1+e} \approx \underline{\underline{8,606\,FE}}$$

(د سطحي يوون يا واحد)

دريم:

الف-
$$f(x) = e^{2-x} + \frac{1}{4}x + 1$$

د y محور سره د غوڅي لپاره شرطونه:

$$y_s = f(0) \Leftrightarrow y_s = e^{2-0} + \frac{1}{4}\cdot 0 + 1 = e^2 + 1 \approx 8,389$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{P_y\left(0\,|\,e^2+1\right)}}\ \text{bzw.}\ P_y\left(0\,|\,8,389\right)$$

پورته: bzw = همداسي.

ب-
$$f(x) = e^{2-x} + \frac{1}{4}x + 1$$

g(x) د f(x) اسيمپتوت يا ګاونډ(مجانب) دی داپه دې معنا، چې د f(x) ګراف د لوی x ارزښتونو لپاره د g(x) په لور ځغلي.

$e^{2-x} = e^{-(x-2)}$ د لوی x ارزښت لپاره د صفر په لور ځغلي، داسې چې f(x) د لوی x ارزښت لپاره فقط نور د برخترم $\frac{1}{4}x + 1$ له لارې ټاکل کيږي.

نو له دې د ګاونډ یا مجانب د تابعمساوات $: g(x) = \frac{1}{4}x + 1$ دی.

پ-

$$f(x) = e^{2-x} + \frac{1}{4}x + 1 \Rightarrow f'(x) = -e^{2-x} + \frac{1}{4} \Rightarrow f''(x) = e^{2-x}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -e^{2-x} + \frac{1}{4} = 0 \mid + e^{2-x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4} = e^{2-x} \mid \ln$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{1}{4}\right) = \ln\left(e^{2-x}\right)$$

$$\Leftrightarrow \ln(1) - \ln(4) = 2 - x$$

$$\Leftrightarrow -\ln(4) = 2 - x$$

$<=> x=2+\ln(4)=>$

افراطي ارزښت په $\text{ei } x_e = 2 + \ln(4) \approx 3{,}386$ کې

$$f''(x_e) = f''(2+\ln(4)) = e^{2-(2+\ln(4))} = e^{2-2-\ln(4)}$$

$$= e^{-\ln(4)} = e^{\ln\left(\frac{1}{4}\right)} = \frac{1}{4} > 0 \Rightarrow \text{rel. Min bei } x_e = 2 + \ln(4) \approx 3{,}386$$

$$f(x_e) = f(2+\ln(4)) = e^{2-(2+\ln(4))} + \frac{1}{4}(2+\ln(4)) + 1$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\ln(4) + 1 = \frac{7}{4} + \frac{1}{4}\ln(4) \approx 2{,}097$$

ټیټټکی:

$$\underline{\underline{T\left(2+\ln(4) \mid \frac{7}{4} + \frac{1}{4}\ln(4)\right)}} \approx (3{,}386 \mid 2{,}097)$$

ت- په نخښه شوې سطحه د f(x) او g(x) ګرافونو ترمنځ په انتروال $[0; x_e]$ کې پرته ده.

د $A=\int\limits_0^{x_e}\left[f(x)-g(x)\right]dx$ $f(x)=e^{2-x}+\frac{1}{4}x+1$ او $g(x)=\frac{1}{4}x+1$ سره

کيږي $f(x)-g(x)=e^{2-x}$ او له دې سره $A=\int\limits_0^{x_e}e^{2-x}\,dx$

بدلون:

$$u=2-x\Rightarrow\frac{du}{dx}=-1\Leftrightarrow dx=-du\quad x_e=2+\ln(4)$$

لاندې پوله $u(0)=2$ پورته پوله: $u(x_e)=2-(2+\ln(4))=-\ln(4)$

$$A=-\int\limits_2^{-\ln(4)}e^u\,du=\int\limits_{-\ln(4)}^{2}e^u\,du=\left[e^u\right]_{-\ln(4)}^{2}=e^2-e^{-\ln(4)}=\underline{\underline{e^2-\frac{1}{4}\approx 7{,}139}}$$

ت- په نخښه شوې سطحه د $f(x)$ او $g(x)$ ګرافونو ترمنځ په انتروال $[0;\infty]$ کې پرته ده

د $A=\int\limits_0^{\infty}\left[f(x)-g(x)\right]dx$ $f(x)=e^{2-x}+\frac{1}{4}x+1$ او $g(x)=\frac{1}{4}x+1$ سره

کيږي $f(x)-g(x)=e^{2-x}$

او له دې سره

$A=\int\limits_0^{\infty}e^{2-x}\,dx$ يو نا معلوم؟؟؟ انتيګرال دی له دې لاس ته راځي $A=\lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_0^{b}e^{2-x}\,dx$

بدلون: u=2 => du/dx =-1 => dx=-du

لاند پوله u(0)=2 پورته پوله: u(b)02-b

$$A=\lim_{b\to\infty}\left(-\int\limits_2^{2-b}e^u\,du\right)=\lim_{b\to\infty}\int\limits_{2-b}^{2}e^u\,du=\lim_{b\to\infty}\left[e^u\right]_{2-b}^{2}=$$

$$=\lim_{b\to\infty}\left[e^2-e^{2-b}\right]=\underline{\underline{e^2\approx 7{,}389}}$$

ځکه چې $\lim_{b\to\infty} e^{2-b} = \lim_{b\to\infty} e^{-(b-2)} = 0$

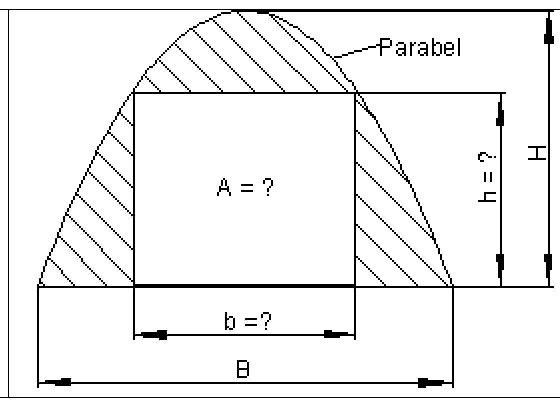
پوښتنې

مشتق او انتيګرال شميرنه III

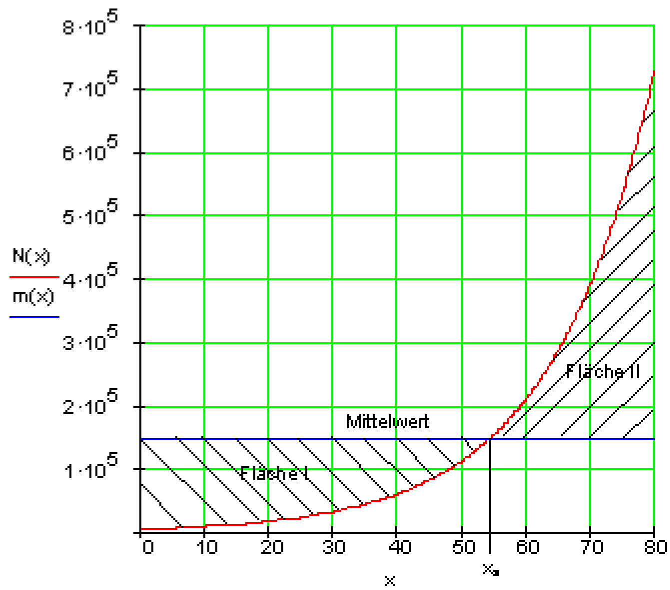
ګډوله پوښتنې

لوړمۍ:

په يوه پارابول ډوله ديوال دې يوه ولاړګوډيزه کړکۍ کيښول شي، تر ځمکې رسيږي. د ديوال کچه $B = 4$ m, (سور) $H = 4$ m (جګوالی) ده.

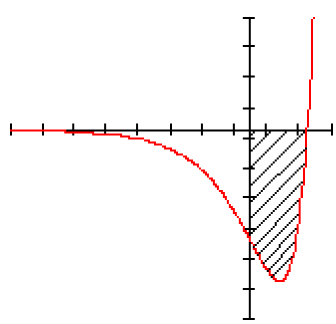
الف- کړکۍ بايد کومه کچه (سور او جګوالی) ولري، له کومې سره چې د کړکۍ سطحه خورا لويه يا ماکسيمال شي؟ د کړکۍ سطحه څومره ده؟ ب- دا د ديوال پاتې سطحه دې رنګ شي. دا سطحه څومره لويه ده.	

غوښتنې: د ککرۍ ټکي مساوات، افراطي ارزښت شميرنه، ټاکلی انتيګرال، ريښه قانونونه.دويم: د يوې باکتريا کلتور(وده) اکسپوننشل جګيږي. د 48 ساعته په دننه کې دبکترياو ګڼون يا تعداد له 5000 و 100000 ته زيات کړ.(100000همداسي x ، وخت په ساعت)

الف- د ودې تابع وټاکئ. ب- د باکترياو تعداد د کوم وختپه دننه کې دوه برابره کيږي؟ پ- د لومړيو 80 ساعتونو د بکترياو د تعداد منځارزښت جوړ کړئ. ت- په څنګ ګراف کي د ودې تابع N(x) او منځ ارزښت m(x) کښل يا څيره شوي. وښايئ چې دواړه په نخښنه شوې سطحې برابرې لويې دي. دا روښانه کړئ، چې دا ولې داسې باید وي.	

غوښتنې: تابع ، توانقوانين، لوګاريتم قوانين، اکسپوننشلمساوات، منځ ارزښت، ټاکلی انتيګرال.

دريم:

ورکړشوی تابع $f(x) = e^{2x} - 4 \cdot e^{x}$ وټاکئ: محور غوڅتکي، تيټتکي، اوړون-انعطافتکي په نخښنه شوې سطحه وټاکئ:	

پوښتنې: اکسپوننشلمساوات، افراطي ارزښتونه، د بدلون له لارې انتيګرال.

ځوابونه
مشتق او انتیګرال شمیرنه III

ګډوله پوښتنې
نتیجې او مفصل ځوابونه

نتیجې:
لومړی:
الف-

د کړکۍ سو: $b = \sqrt{\frac{16}{3}} \approx \underline{\underline{2,309\,m}}$

د کړکۍ جګوالی: $h = f\left(\frac{b}{2}\right)$ mit $\frac{b}{2} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{16}{3}} = \frac{2}{3}\cdot\sqrt{3}$ und $f(x) = -x^2 + 4$

$$h = -\left(\frac{2}{3}\cdot\sqrt{3}\right)^2 + 4 = -\frac{4}{9}\cdot 3 + 4 = -\frac{4}{3} + 4 = \underline{\underline{\frac{8}{3} \approx 2,\bar{6}\,m}}$$

د کړکۍ سطحه: $\underline{\underline{A = h\cdot b = \frac{8}{3}\cdot\sqrt{\frac{16}{3}} \approx 6,158\,m^2}}$

ب- پاتې سطحه: د پارابول منځ کې سطحه ترې کم د کړکۍ سطحه.

پاتې – یا باقي سطحه: $\frac{32}{3} - \frac{8}{3}\sqrt{\frac{16}{3}} \approx \underline{\underline{4,508\,m^2}}$

دویم:
الف- د ودې تابع دی:

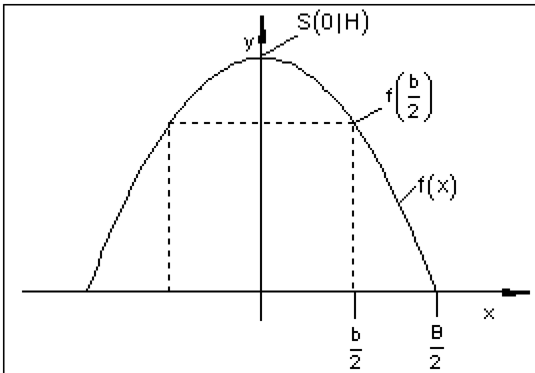
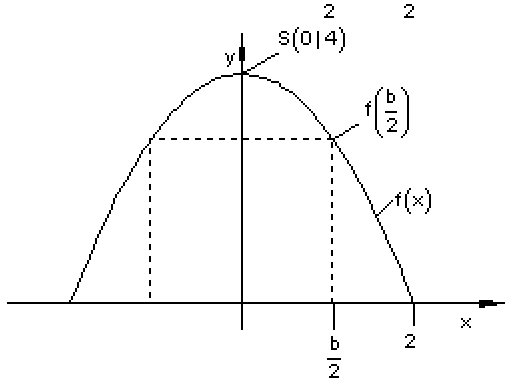
$$N(t) = 5000\cdot e^{\frac{1}{48}\ln(20)t}$$

ب- د باکتریا تعداد هر تول 11,106 ساعتونه دوه برابره کیږي
پ- په منځنی توګه په لومړیو 80 ساعتونو کې146570 باکتریاوې شتون لري
ت-تابع $m(x) = m$ دودې تابع $N(x)$ منځ ارزښت جوړوي. د سطحی برخه(سطحهI)
، چې د $m(x) = m$ لاندې یا کښته لور ته پرته ده باید تیک همدومره لویه وي لکه د

سطحې برخه(سطحه II)، چې د m(x) = m پورته لور ته پرته ده. دا د منځ ارزښت ځخه لاس ته راځي. دا چې اوس N(x) د سطحيI په ورشو يا ساحه کې کښته لورته پروت دی، هلته د امتيګرال ارزښت کميز يا منفي دی. داچې N(x) د سطحی II په ورشو يا ساحه کې پورته لور پروت دی، هلته د انتيګرال ارزښت زياتيز يا مثبت دی. نو د دې پسې يا تعقيب بايد په ټوله سطحه د انتيګرال منځ ارزښت صفر وي. دريم:

د y محور سره غوڅتکی:	: $P_y(0\,|\,-3)$
د x محور سره غوڅتکی:	: $P_x(\ln(4)\,|\,0)$ bzw. $P_x(1{,}39\,|\,0)$
ټيټکی:	$P_{Min}(\ln(2)\,|\,-4)$ bzw $P_{Min}(0{,}69\,|\,-4)$
اوړ,ن-يا د انعطاف ټکی:	$P_w(0\,|\,-3)$
په نخښه شوې سطحه: bzw=همداسې	$A=\left|-\frac{9}{2}\right|=\frac{9}{2}FE=4{,}5\,FE$

مفصل حلونه

لومړی: د پرابلم يا مسئلې رياضي کونه عمومي :	
د B = 4 m, H = 4 m لپاره ځانګړی	

الف ــ

ږدو: $f(x)=a_2x^2+4$ د $S(0|4)$ له امله ککرۍ ټکی

$$P(2|0) \Rightarrow f(2)=0 \Leftrightarrow a_2\cdot 2^2+4=0\,|-4$$
$$\Leftrightarrow 4a_2=-4\,|:4$$
$$\Leftrightarrow a_2=-1$$

د پارابول مساوات: $f(x)=-x^2+4$

د مستطیل یا ولاړګوډیز سطحه $A=b.h$ د $h=f\left(\frac{b}{2}\right)=-\left(\frac{b}{2}\right)^2+4=-\frac{b^2}{4}+4$ سره

$$\Rightarrow A(b)=b\cdot\left(-\frac{b^2}{4}+4\right)=-\frac{1}{4}b^3+4b$$

د $A(b)$ خورا جګ ارزښت غواړو پیدا کړو(افراطي ارزښت)

$$A(b)=-\frac{1}{4}b^3+4b \Rightarrow A'(b)=-\frac{3}{4}b^2+4 \Rightarrow A''(b)=-\frac{3}{2}b$$

د افراطي ارزښت لپاره اړیین شرطونه:

$$A'(b)=0 \Leftrightarrow -\frac{3}{4}b^2+4=0\,|:-4$$
$$\Leftrightarrow -\frac{3}{4}b^2=-4\,|:\left(-\frac{3}{4}\right)$$
$$\Leftrightarrow b^2=\frac{16}{3}\,|\sqrt{\ }$$
$$\Leftrightarrow |b|=\frac{16}{3} \Rightarrow b_1=\sqrt{\frac{16}{3}}\ \text{bzw.}\ b_2=-\sqrt{\frac{16}{3}}$$

b1 ارزښتوو یا رانیسو، ځکه چې کمیزه یا منفي سطحه نه لرو یا نه شته.

په افراطیت ازماېښت:

$$A''(b_1) = A''\left(\sqrt{\frac{16}{3}}\right) = -\frac{3}{2}\cdot\sqrt{\frac{16}{3}} < 0 \Rightarrow \text{rel. Max. bei } b_1 = \sqrt{\frac{16}{3}}$$

د کړکۍ سور: $\underline{\underline{b = \sqrt{\frac{16}{3}} \approx 2{,}309\ m}}$

د کړکۍ جګوالی: $h = f\left(\frac{b}{2}\right)$ د $\frac{b}{2} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{16}{3}} = \frac{4}{2}\cdot\sqrt{\frac{1}{3}} = 2\cdot\sqrt{\frac{3}{9}} = \frac{2}{3}\cdot\sqrt{3}$:

او $f(x)=-x^2+4$ سره کیږي

$$h = -\left(\frac{2}{3}\cdot\sqrt{3}\right)^2 + 4 = -\frac{4}{9}\cdot 3 + 4 = -\frac{4}{3} + 4 = \frac{8}{3} \approx 2{,}\bar{6}\ m$$

د کړکۍ سطحه: $\underline{\underline{A = h\cdot b = \frac{8}{3}\cdot\sqrt{\frac{16}{3}} \approx 6{,}158\ m^2}}$

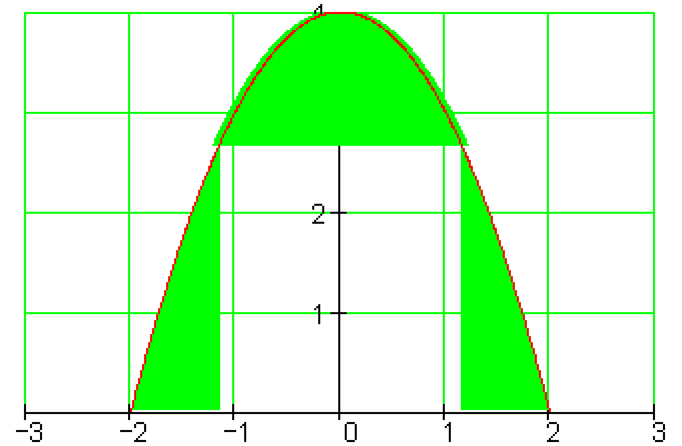
ب – پاتې سطحه: د پارابول لاندط یا ګښته سطحه ترې کم یا منفي د کړکۍ سطحه.

د پارابول لاندې سطحه:

$$\int_{-2}^{2} f(x)\ dx = \int_{-2}^{2}\left(-x^2+4\right) dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + 4x\right]_{-2}^{2}$$

$$= -\frac{1}{3}\cdot 2^2 + 4\cdot 2 - \left[-\frac{1}{3}\cdot(-2)^3 + 4\cdot(-3)\right]$$

$$= -\frac{8}{3} + 8 - \frac{8}{3} + 8 = 16 - \frac{16}{3} = \frac{32}{3} \approx 10{,}\bar{6}\ m^2$$



پاتې یا باقي سطحه:

$$\frac{32}{3}-\frac{8}{3}\sqrt{\frac{16}{3}} \approx \underline{\underline{4,508\ m^2}}$$

دویم –

الف - د ودې تابع لپاره ایښوونه: $: N(t)=N_0\cdot e^{k\cdot t}$ د $N_0=5000$ سره.

د ۴۸ ساعته وروسته باور لري: $N_{48}=N_0\cdot e^{48\cdot k}$ د $N_{48}=100000$ سره.

د ودې فامتور یا ضیب یا ځلوونی دې وټاکل شي.

$$N_{48}=N_0\cdot e^{48\cdot k}\ \ |:N_0$$

$$\Leftrightarrow \frac{N_{48}}{N_0}=e^{48\cdot k}\ \ |\ln$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{N_{48}}{N_0}\right)=\ln\left(e^{48\cdot k}\right)=48k\ |:48$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{48}\cdot\ln\left(\frac{N_{48}}{N_0}\right)=k$$

د عددونو سره $k=\frac{1}{48}\cdot\ln\left(\frac{100000}{5000}\right)=\frac{1}{48}\cdot\ln(20)$ کیږي.

د ودې ضریب: $: k = \frac{1}{48} \cdot \ln(20) \approx 0,0624$

له دې سره د ودې تابع ده: $: \underline{\underline{N(t) = 5000 \cdot e^{\frac{1}{48} \cdot \ln(20) \cdot t}}}$

ب – د باکتریانو تعدا یا ګنون دبل یا دوه برابره کیږي

اینوونه: $2 \cdot N_0 = N_0 \cdot e^{\frac{1}{48} \ln(20) \cdot t} \quad |: N_0$

$$\Leftrightarrow 2 = e^{\frac{1}{48} \ln(20) \cdot t} \quad | \ln$$

$$\Leftrightarrow \ln(2) = \ln\left(e^{\frac{1}{48} \ln(20) \cdot t}\right) = \frac{1}{48} \ln(20) \cdot t \; |: \frac{1}{48} \ln(20)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln(2)}{\frac{1}{48} \ln(20)} = t \Leftrightarrow \underline{\underline{t = \frac{48 \cdot \ln(2)}{\ln(20)} \approx 11,106}}$$

هر 11,106 ساعته د باکتریاو تعداد دوه برابره کیږي.

پ – د ۸۰ ساعته وروسته منځ ارزښت

$$m = \frac{1}{80} \int_0^{80} N(t)\, dt = \frac{1}{80} \int_0^{80} N_0 \cdot e^{k \cdot t}\, dt = \frac{N_0}{80} \int_0^{80} e^{k \cdot t}\, dt$$

بدلون: $: u(t) = k \cdot t \Rightarrow \frac{du}{dt} = k \Rightarrow dt = \frac{1}{k} du$

لاندې پوله : u(0)=k.0=0 پورته پوله:u(80)=80k

$$m=\frac{N_0}{80}\left(\frac{1}{k}\int_0^{80k} e^u\,du\right)=\frac{N_0}{80k}\left[e^u\right]_0^{80k}=\frac{N_0}{80k}\left(e^{80k}-1\right)$$

د $N_0=5000$ او $k=\frac{1}{48}\ln(20)$ سره کیږي

$$m=\frac{5000}{\frac{80}{48}\ln(20)}\left(e^{\frac{80}{48}\ln(20)}-1\right)=\frac{5000}{\frac{5}{3}\ln(20)}\left(e^{\frac{5}{3}\ln(20)}-1\right)$$

$$=\frac{15000}{5\cdot\ln(20)}\left(20^{\frac{5}{3}}-1\right)=\underline{\underline{\frac{3000}{\ln(20)}\left(20^{\frac{5}{3}}-1\right)\approx 146569,767}}$$

په منځنی توګه په لومړنیو 80 ساعتو کې ,146570اکتیاو ې شتون لري.

ت ــ $m(x)=m$ $N(x)=N_0\cdot e^{k\cdot x}$ ثابت یا همغه دی(د پوښتنې پ برخه وګورئ)

موږ انتیګرال جوړوو، کوم چې د دواړو پولو ترمنځ سطحه انځوروي.

$$\int_0^{80}\left(N(x)-m\right)dx=\int_0^{80}\left(N_0\cdot e^{k\cdot x}-m\right)dx=N_0\int_0^{80}e^{k\cdot x}\,dx-m\int_0^{80}dx$$

انتیګرالI: $\int_0^{80}e^{k\cdot x}\,dx$ د بدلون له لارې حل u(x)=k.x

$$\frac{du}{dx}=k\Rightarrow dx=\frac{1}{k}du$$

لاندې پوله : u(0)=k.0=0 پورته پوله:u(80)=80k

$$\int_0^{80} e^{k\cdot x}\ dx = \frac{1}{k}\int_0^{80k} e^{u}\ du = \frac{1}{k}\left[e^{u}\right]_0^{80k} = \frac{1}{k}\left(e^{80k}-1\right)$$

انتیګرال II :

$$\int_0^{80} dx = \left[x\right]_0^{80} = 80$$

$$N_0\int_0^{80} e^{k\cdot x}\ dx - m\int_0^{80} dx = \frac{N_0}{k}\left(e^{80k}-1\right) - 80m$$

ارزښتونه کیږدئ یا وضعه کړئ

$$N_0 = 5000\,;\ k = \frac{1}{48}\ln(20)\,;\ m = \frac{3000}{\ln(20)}\left(20^{\frac{5}{3}}-1\right)$$

$$\frac{N_0}{k}\left(e^{80k}-1\right) - 80m = \frac{5000}{\frac{1}{48}\ln(20)}\left(e^{80\cdot\frac{1}{48}\ln(20)}-1\right) - \frac{80\cdot 3000}{\ln(20)}\left(20^{\frac{5}{3}}-1\right)$$

$$= \frac{240000}{\ln(20)}\left(20^{\frac{5}{3}}-1\right) - \frac{240000}{\ln(20)}\left(20^{\frac{5}{3}}-1\right) = 0$$

تابع $m(x) = m$ د ودې تابع $N(x)$ منځ ارزښت جوړوي. د سطحې (برخه I) د $m(x)$ کښته لور ته باید ټیک همدومره لویه وي، لکه د سطحې برخه (برخهII) ، چې د $m(x)$ پورته لور ته پرته ده. دا له منځ ارزښت څخه راځي یا لرو. دا چې د $N(x)$ د سطحې I په ورشو کې د $m(x)$ کښته لور ته پروت دی ، هلته د انتیګرال ارزښت کمیز یا منفي دی. دا چې $N(x)$ د سطحې I I په ورشو کې د $m(x)$ پورته لور ته پروت دی، نو هلته د انتیګرال ارزښت زیاتیز یا مثبت دی. د دې په تعقیب یا په دې پسې د انتیګرال په ټوله سطحه کې چې منځ ارزښت یې جوړ شو، نو منځ ارزښت باید په صفر برابر وي. پورته شمیرنه په ګوته کوي، چې دا حالت دی.

دریم -

لومړی: محور غوڅټکي:

$$f(x) = e^{2x} - 4 \cdot e^{x}$$

د y محور سره غوڅټکي

$$y_s = f(0) = e^{0} - 4 \cdot e^{0} = 1 - 4 = -3 \Rightarrow \underline{P_y(0 \mid -3)}$$

دx محور سره غوڅټکي

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow e^{2x} - 4 \cdot e^{x} = 0$$ (اکسپوننشل مساوات)

د حل اینوونه د لوګاریتم له لارې:

$$e^{2x} - 4 \cdot e^{x} = 0 \mid +4 \cdot e^{x}$$

$$\Leftrightarrow e^{2x} = 4 \cdot e^{x} \mid \ln(\ )$$

( )lnپه دې معنا چې د دواړو اړخونو لوګاریتم ونیسئ

$$\Leftrightarrow \ln\left(e^{2x}\right) = \ln\left(4 \cdot e^{x}\right)$$
$$\Leftrightarrow 2x \cdot \ln(e) = \ln(4) + x\ln(e)$$
$$\Leftrightarrow 2x = \ln(4) + x \mid -x$$

$$\Leftrightarrow x = \ln(4) \approx 1,39 \Rightarrow$$

صفرځایونه: $\underline{\underline{P_x(\ln(4) \mid 0)}}$ همداسې $\underline{\underline{P_x(1,39 \mid 0)}}$.

دویم:

$$f(x)=e^{2\cdot x}-4\cdot e^{x}\,;\,f'(x)=2e^{2\cdot x}-4e^{x}\,;\,f''(x)=4e^{2\cdot x}-4e^{x}$$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow 2e^{2\cdot x}-4e^{x}=0$$

$$\Leftrightarrow 2e^{2\cdot x}=4\cdot e^{y}\ |:2$$

$$\Leftrightarrow e^{2\cdot x}=2\cdot e^{x}\ |\ln(\ )$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(e^{2\cdot x}\right)=\ln\left(2\cdot e^{x}\right)$$

$$\Leftrightarrow 2x\cdot\ln(e)=\ln(2)+x\cdot\ln(e)$$

(د پراته تانجنت سره ځای دی $\Leftrightarrow 2x=\ln(2)+x\Rightarrow x_e=\ln(2)$

$$f''(x_e)=f''(\ln(2))=4\cdot e^{2\cdot\ln(2)}-4\cdot e^{\ln(2)}=4\cdot\left(e^{\ln(2)}\right)^2-4\cdot e^{\ln(2)}$$

له $e^{\ln(2)}=2$ سره کیږي

$$f''(\ln(2))=4\cdot 2^2-4\cdot 2=8>0\Rightarrow \text{ rel Min für } x_e=\ln(2)$$

$$y_e=f(\ln(2))=e^{2\cdot\ln(2)}-4\cdot e^{\ln(2)}=\left(e^{\ln(2)}\right)^2-4\cdot e^{\ln(2)}=2^2-4\cdot 2=-4$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{P_{Min}(\ln(2)\,|\,-4)\ \text{ bzw } P_{Min}(0{,}69\,|\,-4)}}$$

دریم: اوړنټکی یا د انعطاف ټکی f’’(x)00 او $f'''(x)\neq 0$

$$f(x)=e^{2\cdot x}-4\cdot e^{x}\,;\,f'(x)=2\cdot e^{2\cdot x}-4\cdot e^{x}\,;\,f''(x)=4\cdot e^{2\cdot x}-4\cdot e^{x}\,;$$

$$;\,f'''(x)=8\cdot e^{2x}-4\cdot e^{x}$$

$$f''(x)=0\Leftrightarrow 4\cdot e^{2\cdot x}-4\cdot e^{x}=0$$

$$\Leftrightarrow 4\cdot e^{2\cdot x}=4\cdot e^{x}\ |:4$$

$\Leftrightarrow e^{2\cdot x} = e^{x} \Rightarrow x_w = 0$ ځکه چي 2x=x فقط د x=0 لپاره کیدونکی دی.

$f'''(x_w) = f'''(0) = 8\cdot e^{0} - 4\cdot e^{0} = 8\cdot 1 - 4\cdot 1 = 4 \neq 0 \Rightarrow x_w = 0$ صفرځای دی

$$f(x_w) = f(0) = e^{0} - 4\cdot e^{0} = 1 - 4\cdot 1 = -3 \Rightarrow \underline{\underline{P_w(0|-3)}}$$

ثلورم:

$$\int_0^{\ln(4)} f(x)\,dx = \int_0^{\ln(4)} \left(e^{2\cdot x} - 4\cdot e^{x}\right) dx = \int_0^{\ln(4)} e^{2\cdot x}\,dx - 4\int_0^{\ln(4)} e^{x}\,dx$$

برخه انتیگرال د بدلون له لارې حلونه. الماني= او له دې سره

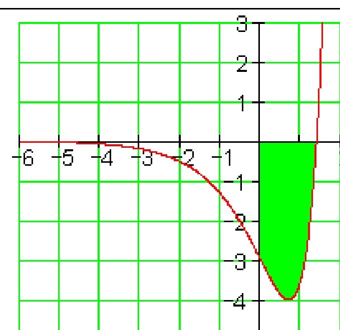
$$\int e^{2\cdot x}\,dx \text{ Substitution: } u(x) = 2x \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2 \Rightarrow dx = \frac{1}{2}\,du$$

$$\frac{1}{2}\int e^{u}\,du = \frac{1}{2}e^{u} \Rightarrow \int e^{2\cdot x}\,dx = \frac{1}{2}e^{2\cdot x} \text{ und mit } \int e^{x}\,dx = e^{x}$$

$$\int_0^{\ln(4)} f(x)\,dx = \left[\frac{1}{2}e^{2\cdot x} - 4e^{x}\right]_0^{\ln(4)} = \left[\frac{1}{2}e^{2\cdot\ln(4)} - 4e^{\ln(4)}\right] - \left[\frac{1}{2}e^{0} - 4e^{0}\right]$$

$$= \left[\frac{1}{2}\cdot 16 - 4\cdot 4\right] - \left[\frac{1}{2}\cdot 1 - 4\cdot 1\right] = -\frac{9}{2}$$

$$A = \left|-\frac{9}{2}\right| = \frac{9}{2}FE = \underline{\underline{4{,}5\,FE}}$$

	په پورته کې FE (د سطحي یوون یا واحد)

پوښتنې

مشتق- او انتیګرالشمیرنې ته د استعمال پوښتنې II

Infusion او ګډې وډېپوښتنې

لومړی:

د عملیات وروسته ناروغ ته اینفوزیونInfusion (اینفوزیونInfusion لاتین کلمه ده، چې له *infundere* اخست شوی او دلته د ،،څاڅکي څاڅکي،، په مانا ده، چې بدن ته ننوځي) اخلي یا اینفوزیون ورکوي. څیره دوزې Dosierung ښایي چې ناروغ ته یوه 24 ساعته وخت په انتروال کې ورکول کیږي. دوزې په دې معنا دی: په وخت کې mg/h. پیل کیږي د1 mg/h دوزې سره.

الف- د دوزې ورکونو تلنه وښایی.

ب- د دوزې تلنه د یوه لاندې اکسپوننشل تابع سره مودل کیږي.

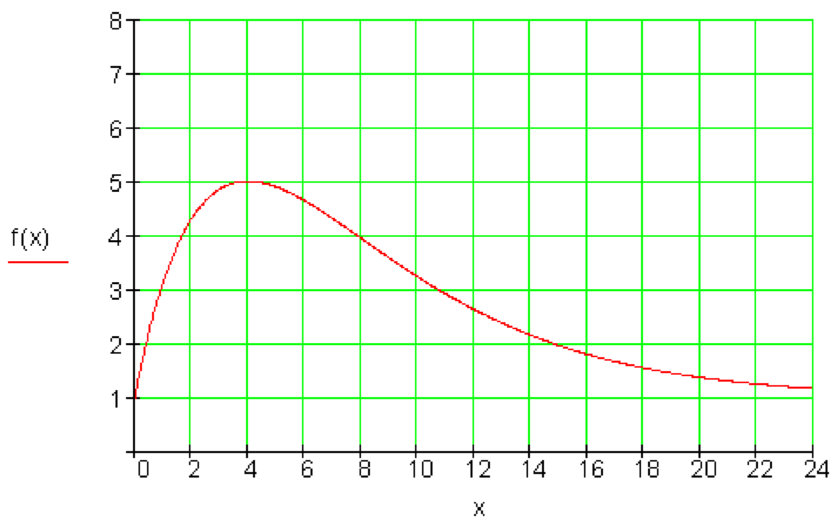
$$f(x) = n_0 + a \cdot x \cdot e^{k \cdot x}$$

د او لپاره مناسب ارزښتونه وسمیری، که له ساعته وروسته یو خورا لجګه دوزې ورکونه د دا نوره بس شي.

تابع مساوات څنګه دي؟

پ- په کوم وخت کې د دوزې کمیدنه به زور سره صورت نیسي؟

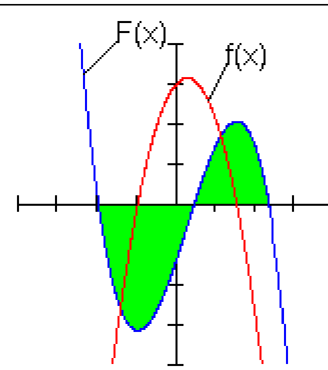
ت- د ورکړ شوې دوا ډېری یا سټ وشمیری، که اینفوزیون 24 صورت ونیي.



غوښتنه: e - تابع ، مشتق، افراطي ارزښتونه، اوړنټکی یا د انعطاف ټکی، ټاکلی انتیګرال.

دویم: لاندې تابع ورمړ شوی دی:

$$f(x) = -2x^2 + x + 3$$



الف-د بنسټ تابع F(x) ګراف د ټکي (0 | 2-) له لارې ځغلي.

د F(x) تابع مساوات وټاکی.

ب- دا په ځنګ کې د ګراف په نخښه شوې سطحه وشمیری.

د شمیرنې ټیکوالی: د لسمیز یا عشاریه ځخه درځایه وروسته.

غوښتنه: ټول راشنل یا هوښیار. بنسټ تابع، c وټاکی، صفرځایونه،ټاکلی انتیګرال.

حلونه(اوبیونې)

مشتق- او انتیګرالشمېرنې ته داستعمال پوښتنې II

نتیجې او مفصل حلونه

اول – نتیجې:

الف – د تلنو تشریح:

دوزې ورکونه له 1 mg/h څخه پیل کیږي. بیا یوغږیزه جګیږي، چې ۴ ساعته وروسته د5 mg/h یو خورا حګ ارزښت ته ورسیږي. له دې وذوسته ټیټیږي، لوړمی په زور یا قوي، بیا لږ په زور، یو غږیزکمیږي.

ب – د دوزې ورکونې تابع مساوات دي:

$$f(x) = 1 + e \cdot x \cdot e^{-\frac{1}{4}x}$$

پ – د دوزې ورکونې کموالی د x = 8 ساعته وروسته په زور یا قوي دی. دا ا وړنځای یا انعطافځای دی.

ت -

$$M = \int_0^{24}\left(1 + e \cdot x \cdot e^{-\frac{1}{4}x}\right)dx = 24 - 112e^{-5} + 16e \approx 66,738$$

په 24 ساعته کې د ورکړ شوو د دارو ډېری یا سټ نږدې 67 mg دی.

دویم – نتیجه.

الف- د بنسټتابع F(x) تابعمساوات داسې دي:

$$F(x) = -\frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{4}{3}$$

ب – د په نخښه شوې سطحې منځپانګه یا مساحت نږدې دی:

$$A \approx 4{,}955 + 2{,}522 \approx 7{,}477\ FE$$

FE د سطحې واحد یا یوون

اول- مفصل حل : دلته بې نه شته؟؟؟

الف – د تلنې تشریح یا روښانونه:

دوزې ورکونه له 1 mg/h څخه پیل کیږي. بیا یوغږیزه جګیږي، چې ۴ ساعته وروسته د5 mg/h یو خورا حګ ارزښت ته ورسیږي. له دې وذوسته ټیټیږي، لوړمی په زور یا قوي، بیا لږ په زور، یو غږیزکمیږي.

ب – د دوزې ورکونې تابع مساوات دي:

$$A \approx 4{,}955 + 2{,}522 \approx 7{,}477\ FE$$

FE د سطحې واحد یا یوون

پ -

اینوونه: $f(x) = n_0 + a \cdot x \cdot e^{k \cdot x}$

پیلدوزېورکونه: $n_0 = 1\,mg/h \Rightarrow f(x) = 1 + a \cdot x \cdot e^{k \cdot x}$

دx=4 ساعته وروسته خورا لویه یاماکسیمال دوزې ورکونه په دې معنا:

f(x) په x=4 کې پروت یا افقي تانجنت لري، یعني f’(x) = 0

f’(x)=u’v+uv’ دu=a.x او $v = e^{k \cdot x}$ همداسېu'=a او $v' = k \cdot e^{k \cdot x}$ د سره:

$$f'(x) = a\cdot e^{k\cdot x} + a\cdot x\cdot e^{k\cdot x} = a\cdot e^{k\cdot x}(1+k\cdot x)$$
$$f'(4) = 0 \Leftrightarrow a\cdot e^{4k}(1+4\cdot k) = 0$$
$$\Leftrightarrow 1+4\cdot k = 0 \Leftrightarrow k = -\frac{1}{4}$$
$$\Leftrightarrow f(x) = 1+a\cdot x\cdot e^{-\frac{1}{4}x}$$

له x=4 ساعته وروسته: f(4)=5

$$f(4) = 5 \Leftrightarrow 1+4a\cdot e^{-\frac{1}{4}\cdot 4} = 5$$
$$\Leftrightarrow 1+4a\cdot e^{-1} = 5 \Leftrightarrow a = e$$

د دوزې ورکوني تابع مساوات: $\underline{\underline{f(x) = 1+e\cdot x\cdot e^{-\frac{1}{4}x}}}$

ث – د دوزې ورکوني تغیر ارزښت(د وخت په واکوالي کې) د لومړي مشتق سره ټاکل کیږي. د دې ماکسیموم په اوړونټکي یا انعطافټکي کې پروت دی.

$$f(x) = 1+e\cdot x\cdot e^{-\frac{1}{4}x}$$

لومړی مشتق

$$f'(x) = u'v+uv' \text{ mit } u = e\cdot x \text{ und } v = e^{-\frac{1}{4}x}$$

همداسې u’=e او $\mid v' = -\frac{1}{4}e^{-\frac{1}{4}x}$

$$f'(x) = e\cdot e^{-\frac{1}{4}x} - \frac{e}{4}x\cdot e^{-\frac{1}{4}x} = e\cdot e^{-\frac{1}{4}x}\left(1-\frac{1}{4}x\right)$$

دويم مشتق

$$f''(x) = u'v + uv' \text{ mit } u = e \cdot e^{-\frac{1}{4}x} \text{ und } v = 1 - \frac{1}{4}x$$

همداسې $u' = -\frac{1}{4} e \cdot e^{-\frac{1}{4}x}$ او $v' = -\frac{1}{4}$

$$f''(x) = -\frac{1}{4} e \cdot e^{-\frac{1}{4}x} \cdot (1 - \frac{1}{4}x) - \frac{1}{4} e \cdot e^{-\frac{1}{4}x} = -\frac{1}{4} e \cdot e^{-\frac{1}{4}x} \cdot (2 - \frac{1}{4}x)$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2 - \frac{1}{4}x = 0 \Rightarrow x_w = 8$$

د اوښتون ځای (د انعطاف ځای) لپاره شرايط

دريم مشتق

$$f'''(x) = u'v + uv' \text{ mit } u = -\frac{1}{4} e \cdot e^{-\frac{1}{4}x} \text{ und } v = 2 - \frac{1}{4}x$$

همداسې $u' = \frac{1}{16} e \cdot e^{-\frac{1}{4}x}$ او $v' = -\frac{1}{4}$

$$f'''(x) = u' = \frac{1}{16} e \cdot e^{-\frac{1}{4}x} \cdot (2 - \frac{1}{4}x) + \frac{1}{16} e \cdot e^{-\frac{1}{4}x} = \frac{1}{16} e \cdot e^{-\frac{1}{4}x} \cdot (3 - \frac{1}{4}x)$$

$$f'''(x_w) = f'''(8) = \frac{1}{16} e \cdot e^{-2} \cdot (3 - \frac{1}{4}8) = \frac{1}{16} e^{-1} \neq 0$$

له دې لاس ته راځي، چې $\Rightarrow x_w = 8$ د f(x) اوښتونځای(د انعپاف ځای)

د ګولی ورکولو Dosierungوخت له8 = x ساعته وروسته خورا قوي دی.

ت – د ورکړشوو ګولیو یا دارو ډېریو یا ستونو سطحه د ګراف او دx محور ترترمنځ ده، څکه چيmg/h.h=mg .

د دې سره د يوې پيچکارۍ وخت ۲۴ ساعتونه بنسټ دی.

ډېرۍ = Menge

$$f(x) = 1 + e \cdot x \cdot e^{-\frac{1}{4}x} \Rightarrow Menge = M = \int_0^{24} f(x)\,dx = \int_0^{24} \left(1 + e \cdot x \cdot e^{-\frac{1}{4}x}\right) dx$$

د پهI کې او په II کې یعنې $I = \int_0^{24} 1dx$ او $II = \int_0^{24} x \cdot e^{-\frac{1}{4}x}\,dx$ د انتیګرال د وېشنې په حیث

داسې چې باور لري: K=I+e.II

$$I = \int_0^{24} 1dx = [x]_0^{24} = 24$$

$II = \int_0^{24} x \cdot e^{-\frac{1}{4}x}\,dx$ د توته انتیګرال له لارې حل د $\int u \cdot v'dx = u \cdot v - \int u' \cdot v\,dx$ سره.

$$u(x) = x; v'(x) = e^{-\frac{1}{4}x}; u'(x) = 1; v(x) = \int e^{-\frac{1}{4}x}\,dx$$

ترمنځ شمیرنه

$\int e^{-\frac{1}{4}x}\,dx$ د بدلون له لارې حل:

$$: u(x) = -\frac{1}{4}x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -\frac{1}{4} \Rightarrow dx = -4\,du$$

$$\int e^{-\frac{1}{4}x}\,dx = -4\int e^{u}\,du = -4e^{u} = -4e^{-\frac{1}{4}x} = v$$

$$\int x\cdot e^{-\frac{1}{4}x}\,dx = x\cdot(-4e^{-\frac{1}{4}x}) - \int 1\cdot(-4e^{-\frac{1}{4}x})\,dx = -4x\cdot e^{-\frac{1}{4}x} + 4\int e^{-\frac{1}{4}x}\,dx$$

$$= -4x\cdot e^{-\frac{1}{4}x} - 16e^{-\frac{1}{4}x} = -4e^{-\frac{1}{4}x}(x+4)$$

$$\Rightarrow II = \int_0^{24} x\cdot e^{-\frac{1}{4}x}\,dx = \left[-4e^{-\frac{1}{4}x}(x+4)\right]_0^{24} = -4e^{-6}(24+4) - [-4\cdot 4] =$$

$$= -112e^{-6} + 16$$

$$\Rightarrow M = I + e\cdot II = 24 + e\left(-112e^{-6} + 16\right) = 24 - 112e^{-5} + 16e \approx 66{,}738$$

په 24 ساعته کې به نزدې د 67 mg د دواډېرى يا سټ ورکړ شي.

دویم – مفصل حل

الف –

$$f(x) = -2x^2 + x + 3$$

$$I(x) = \int f(x)\,dx = \int\left(-2x^2 + x + 3\right)dx = -\frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 3x + C$$

$$P(-2\,|\,0) \Rightarrow I(-2) = 0 \Leftrightarrow -\frac{2}{3}(-2)^3 + \frac{1}{2}(-2)^2 + 3\cdot(-2) + C = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{16}{3} + 2 - 6 + C = 0 \Leftrightarrow C = -\frac{4}{3}$$

$$F(x) = I(x) + C \Rightarrow \underline{\underline{F(x) = -\frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{4}{3}}}$$

ب – د انتیګریشن پولې لپاره د F(x) صفرځایونه وټاکی.

$$F(x) = -\frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{4}{3}$$

معلوم دی.

$$\begin{array}{lcccc} & -2/3 & 1/2 & 3 & -4/3 \\ x_1 = -2 & \downarrow & \underline{4/3} & \underline{-22/6} & \underline{4/3} \\ & -2/3 & 11/6 & -2/3 & 0 \end{array}$$

$$-\frac{2}{3}x^2 + \frac{11}{6}x - \frac{2}{3} = 0 \,|: \left(-\frac{2}{3}\right) \Leftrightarrow x^2 - \frac{11}{4}x + 1 = 0$$

$$p = -\frac{11}{4};\ q = 1 \Rightarrow D = \frac{57}{64}$$

$$x_{2/3} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left| \begin{array}{l} x_2 = \frac{11}{8} + \sqrt{\frac{57}{64}} \approx 2{,}319 \\ x_3 = \frac{11}{8} - \sqrt{\frac{57}{64}} \approx 0{,}431 \end{array} \right.$$

$$A = |A_1| + |A_2| = \left|\int_{x_1}^{x^2} f(x)\,dx\right| + \left|\int_{x_2}^{x_3} f(x)\,dx\right|$$

$$\text{mit } x_1 = -2;\ x_2 = \frac{11}{8} - \sqrt{\frac{57}{64}};\ x_3 = \frac{11}{8} + \sqrt{\frac{57}{64}}$$

$$A_1 = -\frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{4}{3}x\Big|_{x_1}^{x_2}$$

$$= -\frac{1}{6}x_2^4 + \frac{1}{6}x_2^3 + \frac{3}{2}x_2^2 - \frac{4}{3}x_2 + \frac{1}{6}x_1^4 - \frac{1}{6}x_1^3 - \frac{3}{2}x_1^2 + \frac{4}{3}x_1 \approx -4{,}995$$

$$A_2 = -\frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{4}{3}x\Big|_{x_2}^{x_3}$$

$$= -\frac{1}{6}x_3^4 + \frac{1}{6}x_3^3 + \frac{3}{2}x_3^2 - \frac{4}{3}x_3 + \frac{1}{6}x_2^4 - \frac{1}{6}x_2^3 - \frac{3}{2}x_2^2 + \frac{4}{3}x_2 \approx 2{,}522$$

$$A \approx 4{,}955 + 2{,}522 \approx \underline{\underline{7{,}477}}$$

پوښتنې

مشتق او انتیګرال شمیرنې ته پارامتریک پوښتنېI

پوښتنې د e تابع سره

لومړی: تابع $f_k(x) = e^{2x} - k \cdot e^x$ ورکړشوی د k>0او $x \in \mathbb{R}$ لپاره

الف-محور غوځټکي، که شتون ولري، وشمیرئ .

ب- افراطي ټکي، که شتون ولري، وشمیرئ.

پ- اوړنټکي، که شتون ولري، وشمیرئ.

ت ـــد تعریف ورشو د پولو یا حدونو لپاره تابع ارزښتونه وټاکئ

ټ- د محورغوځټکو او x -محور ترمنځ سطحهA_k وټاکئ.

ث- د $x \in \{-3; -2,5; ...; 1; 1,5\}$ لپاره ارزښتجدول جوړ کړئ او د $k \in \{2; 3; 4; 5\}$ لپاره ګراف په پروتولاړ- یا کواوردینات سیستم کې وکاږئ.

ج-د f_k (x) د ټیټ ټکو ځایکرښه(ځای منحني) f_{ok} (x) وشمیرئ او دا په پروت ولاړسیستم کې وکاږئ.

د $k = 5$ لپاره سطحه A_k وشمیرئ.

دویم: د $k>0$ او $x \in \mathbb{R}$ لپاره تابع $f_k(x) = \frac{1}{4}k \cdot e^{x} - 2 \cdot e^{\frac{1}{2}x}$ ورکړ شوی.

الف- په محورغوڅټکو f_k وڅیړئ او دا وشمیرئ.

ب- د $f_k(x)$ لومړي دريم مشتقونه جوړ کړئ یا وشمیرئ.

پ- f_k په افراطي ټکو باندې وڅیړئ او دا وشمیرئ.

ت – f_k په اوړونټکو یا انعطافټکو باندې وڅیړئ او دا وشمیرئ.

ټ- د تعریفورشو د پولې لپاره تابع ارزښت وټاکئ.

ث – د افراطي ټکو لپاره ځایکړه یا –منحني $f_{ok}(x)$ وټاکئ.

ج- د محورونو غوڅټکو او x –محور ترمنځ سطحه A_k وټاکئ

ح- لاندې ارزښت جدول وکاروئ او په یوه پروتولاړ-یا کواوردینات سیستم کې د $f_1(x); f_2(x); f_3(x); f_4(x)$ او ځایوکړې $f_{ok}(x)$ لپاره ګراف وکاږئ. د غوره ټکو (محوغوڅټکي، افراطي- ا و اوړونټکو) ارزښتونه د جبشمیري سره وشمیرئ.

x	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5
$f_1(x)$	−0,16	−0,27	−0,43	−0,7	−1,12	−1,75	−2,62	−3,59	−3,94	−1,13	12,7
$f_2(x)$	−0,16	−0,26	−0,42	−0,67	−1,03	−1,5	−1,94	−1,74	1,08	12,5	49,8
$f_3(x)$	−0,16	−0,26	−0,41	−0,63	−0,94	−1,25	−1,26	0,11	6,1	26,2	86,9
$f_4(x)$	−0,16	−0,25	−0,4	−0,6	−0,85	−1	−0,58	1,95	11,1	39,8	124

خ= د $k = 1$ لپاره سطحه A_k وشمیرئ او دا په یوه پروتولاړسیستم کې په نخښه کړئ.

حلونه

مشتق او انتیګرال ته پارامتریک پوښتنې

نتیجې او مفصل حلونه

اول - نتیجې

الف -

$P_{k_x}\left(\ln(k)\,|\,0\right)$ $\qquad$ $P_{k_y}\left(0\,|\,1-k\right)$

ب –

تیټتکی: $P_{k_{Min}}\left(\ln\left(\frac{k}{2}\right)\Big|-\frac{1}{4}k^2\right)$

پ - اوړونټکی: $P_{k_w}\left(\ln\left(\frac{k}{4}\right)\Big|-\frac{3}{16}k^2\right)$

ت -

$\lim\limits_{x\to\infty} f_k(x)=\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f_k(x)=0$

ټ - مفصل حل وګورى

ث - سطحه: $A_k=\left|-\frac{1}{2}k^2+k-\frac{1}{2}\right|$

ج – دټولوټیټکو لپاره د دځایمنحني د تابع مساوات: $f_{ok}(x)=-e^{2x}$

چ – د $k = 5$ لپاره سطحه 8 FE (۸ یوونه یا واحده)ده.

دويم - نتيجې

الف –

د ټولو $k \in \mathbb{R}$ لپاره د y–محور سره يو غوځېټکی شتون لري $P_{k_y}\left(0 \mid \frac{k}{4}-2\right)$

د ټولو $k > 0$ لپاره د x–محور سره يو غوځېټکی شتون لري $P_{k_x}\left(2\cdot\ln\left(\frac{8}{k}\right) \mid 0\right)$

ب –

$$f_k\,'(x) = \frac{1}{4}k\cdot e^x - e^{\frac{1}{2}\cdot x} \qquad f_k\,''(x) = \frac{1}{4}k\cdot e^x - \frac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

$$f_k\,'''(x) = \frac{1}{4}k\cdot e^x - \frac{1}{4}\cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

پ – د ټول $k > 0$ لپاره يو نسبي خورا ټيټټکی شتون لري

$$P_{k_{Min}}\left(2\cdot\ln\left(\frac{4}{k}\right) \mid -\frac{4}{k}\right)$$

ت – د ټول $k > 0$ لپاره يو اوړونټکی يا د انعطافټکی شتون لري

$$P_{k_w}\left(2\cdot\ln\left(\frac{2}{k}\right) \mid -\frac{3}{k}\right)$$

ټ - $\lim_{x\to\infty} f_k(x) = \infty \qquad \lim_{x\to-\infty} f_k(x) = 0$

ث –

$f_{ok}(x) = -e^{\frac{1}{2}\cdot x}$ د $f_k(x)$ د ټيټټکي ځايکړه يا منحني ده.

ج - سطحه : $A_k = \left| -\frac{16}{k} - \frac{1}{4}k + 4 \right|$

چ – مفصل حل وګورى.

ح - سطحه $A_1 = 12,25$ FE

اول – مفصل حلونه:

الف – دy - محور سره غوڅتکي

$$f_k(x) = e^{2x} - k \cdot e^x$$
$$y_s = f_k(0) = e^{2 \cdot 0} - k \cdot e^0 = 1 - k \Rightarrow \underline{\underline{P_{k_y}(0 \mid 1-k)}}$$

دx – محور سره غوڅتکي (صفرځايونه)

له نوکانو باسل $f_k(x) = 0 \Leftrightarrow e^{2x} - k \cdot e^x = 0 \mid e^x$

د صفرضرب جمله وکاروئ $\Leftrightarrow \underbrace{(e^x - k)}_{=0} \cdot \underbrace{e^x}_{\neq 0} = 0 \mid$

$$e^x - k = 0 \mid +k \Leftrightarrow e^x = k \mid \ln(\;\;) \Leftrightarrow x = \ln(k)$$
$$\underline{\underline{P_{k_x}(\ln(k) \mid 0)}}$$

ب – د انحراف ټکي:

$$f_k(x) = e^{2x} - k \cdot e^x$$
$$f_k'(x) = 2 \cdot e^{2x} - k \cdot e^x = (2 \cdot e^x - k) \cdot e^x$$
$$f_k''(x) = 4 \cdot e^{2x} - k \cdot e^x = (4 \cdot e^x - k) \cdot e^x$$

$$f_k'(x) = 0 \Leftrightarrow (2 \cdot e^x - k) \cdot e^x = 0 \mid :$$

د صفرضرب جمله وکاروئ

$$\Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{k}{2}\right)$$

یو ممکنه افراطي ځای دی

د دويم مشتق له لارې يې شميرنه: $f_k''(x) \neq 0$

$$f_k''(x) = f_k''\left(\ln\left(\frac{k}{2}\right)\right) = 4 \cdot e^{2\cdot\ln\left(\frac{k}{2}\right)} - k \cdot e^{\ln\left(\frac{k}{2}\right)} = 4 \cdot \left(e^{\ln\left(\frac{k}{2}\right)}\right)^2 - k \cdot e^{\ln\left(\frac{k}{2}\right)}$$

د $e^{\ln\left(\frac{k}{2}\right)} = \frac{k}{2}$ سره کيږي:

$$f_k''(x) = 4 \cdot \left(\frac{k}{2}\right)^2 - k \cdot \frac{k}{2} = 4 \cdot \frac{k^2}{4} - \frac{k^2}{2} = k^2 - \frac{k^2}{2} = \frac{k^2}{2} > 0$$

په $x = x_E = \ln\left(\frac{k}{2}\right)$ کې يو نسبي خورا ټيټټکي(مينيموم) شتون لري.

افراطي ارزښت:

$$y_{k_E} = f_k(x_E) = f_k\left(\ln\left(\frac{k}{2}\right)\right) = e^{2\cdot\ln\left(\frac{k}{2}\right)} - k \cdot e^{\ln\left(\frac{k}{2}\right)} = \left(\frac{k}{2}\right)^2 - k \cdot \frac{k}{2} = \frac{k^2}{4} - \frac{k^2}{2} =$$

$$= \frac{1}{4}k^2 - \frac{2}{4}k^2 = -\frac{1}{4}k^2$$

له دې لاس ته راځي خورا ټيټټکی(مينيموم): $\underline{\underline{P_{k_{Min}}\left(\ln\left(\frac{k}{2}\right) \mid -\frac{1}{4}k^2\right)}}$

پ ـــ د انعطاف ټکي يا اوړونټکي

$$f_k''(x) = 4 \cdot e^{2x} - k \cdot e^x = \left(4 \cdot e^x - k\right) \cdot e^x$$

$$f_k'''(x) = 8 \cdot e^{2x} - k \cdot e^x = \left(8 \cdot e^x - k\right) \cdot e^x$$

د او ړونټکي یا د ا نعطاف ټکي لپاره اړیین او پوره کیدونکي شرطونه:

$$f_k''(x) = 0 \wedge f_k'''(x) \neq 0$$

$$f_k''(x) = 0 \Leftrightarrow \left(4 \cdot e^x - k\right) \cdot e^x = 0|$$

د صفرضرب جمله وکاروئ

$$4 \cdot e^x - k = 0 + k \Leftrightarrow 4 \cdot e^x = k| : 4 \Leftrightarrow e^x = \frac{k}{4} | \ln(\ )$$

$$\Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{k}{4}\right)$$

یو ممکنه اوړنوټکی دی

د دریم مشتق له لارې یې ازماېښت: $f_k'''(x) \neq 0$

$$f_k'''(x) = f_k'''\left(\ln\left(\frac{k}{4}\right)\right) = 8 \cdot e^{2 \cdot \ln\left(\frac{k}{4}\right)} - k \cdot e^{\ln\left(\frac{k}{4}\right)} = 8 \cdot \left(\frac{k}{4}\right)^2 - k \cdot \frac{k}{4} =$$

$$= \frac{8}{16}k^2 - \frac{1}{4}k^2 = \frac{1}{4}k^2 \neq 0$$

په $x = x_w = \ln\left(\frac{k}{4}\right)$ کې یو اوړونټکی یا انعطافټکی پورت دی.

$$y_{k_w} = f_k(x_w) = f_k\left(\ln\left(\frac{k}{4}\right)\right) = e^{2 \cdot \ln\left(\frac{k}{4}\right)} - k \cdot e^{\ln\left(\frac{k}{4}\right)}$$

$$= \left(\frac{k}{4}\right)^2 - k \cdot \frac{k}{4} = \frac{k^2}{16} - \frac{k^2}{4} = \frac{1}{16}k^2 - \frac{4}{16}k^2 = -\frac{3}{16}k^2$$

له دې لاس ته راځي، چې اوړونټکی دی:

$$\underline{\underline{P_{k_w}\left(\ln\left(\frac{k}{4}\right)\Big| -\frac{3}{16}k^2\right)}}$$

ت - د تعریفورشو د پولو لپاره د تابع ارزښتونه:

ټا کل کیږي: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f_k(x)$

$$\lim_{x\to-\infty} f_k(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(e^{2x} - k\cdot e^{x}\right) = \lim_{x\to-\infty} e^{2x} - k\cdot\lim_{x\to-\infty} e^{x} = 0 - k\cdot 0 = 0$$

د $x\to-\infty$ لپاره د x محور د $f_k(x)$ اسیمپتوت دی.

$$\lim_{x\to\infty} f_k(x) = \lim_{x\to\infty}\left(e^{2x} - k\cdot e^{x}\right) = \lim_{x\to\infty}\left[\left(e^{x} - k\right)\cdot e^{x}\right] = \infty$$

د $x\to\infty$ لپاره د $f_k(x)$ تابع ارښتونه اه ټولو پولو اوړي يا وده کوي.

ټ – د سطحه د د محورغوځټکو ترمنځ:

صفرځایونه :

$$x_1 = \ln(k) \Rightarrow$$

د سطحي انتیګرال دی: $A_k = \left|\int_0^{\ln(k)} f_k(x)\,dx\right|$

$$\int_0^{\ln(k)} f_k(x)\,dx = \int_0^{\ln(k)}\left(e^{2x} - k\cdot e^{x}\right)dx = \underbrace{\int_0^{\ln(k)} e^{2x}\,dx}_{I} - k\cdot\underbrace{\int_0^{\ln(k)} e^{x}\,dx}_{II} = I - k\cdot II$$

$$I:\int_0^{\ln(k)} e^{2x}\,dx \text{ Substitution: } u(x)=2x \Rightarrow \frac{du}{dx}=2 \Rightarrow dx=\frac{1}{2}du$$

$$ug:\quad u(0)=2\cdot 0=0 \quad og:\quad u(\ln(k))=2\cdot\ln(k)$$

$$\int_0^{\ln(k)} e^{2x}\,dx=\frac{1}{2}\cdot\int_0^{2\cdot\ln(k)} e^{u}\,du=\left[\frac{1}{2}e^{u}\right]_0^{2\cdot\ln(k)}=\frac{1}{2}e^{2\cdot\ln(k)}-\frac{1}{2}e^{0}=\frac{1}{2}k^2-\frac{1}{2}$$

$$II:\int_0^{\ln(k)} e^{x}\,dx=\left[e^{x}\right]_0^{\ln(k)}=e^{\ln(k)}-e^{0}=k-1$$

$$\int_0^{\ln(k)} f_k(x)\,dx=I-k\cdot II=\frac{1}{2}k^2-\frac{1}{2}-k\cdot(k-1)=\frac{1}{2}k^2-\frac{1}{2}-k^2+k=-\frac{1}{2}k^2+k-\frac{1}{2}$$

له دې سره سطحه کیږي: $\underline{\underline{A_k=\left|-\frac{1}{2}k^2+k-\frac{1}{2}\right|}}$

ث – ارزښت جدول او د منحنیو ګرافونه (د منحنیو ډله) .

سربېره پردې دې محورغوځټکي، ټيټټکي او د انعطاف ټکي و ارزښت جدول وروشمېرل شي.

$$P_{k_y}(0\,|\,1-k);P_{k_x}(\ln(k)\,|\,0);P_{k_{Min}}\left(\ln\left(\frac{k}{2}\right)\,|\,-\frac{1}{4}k^2\right);P_{k_w}\left(\ln\left(\frac{k}{4}\right)\,|\,-\frac{3}{16}k^2\right)$$

K=2

$$P_{2_y}(0\,|\,-1);P_{2_x}(\ln(2)\approx 0{,}69\,|\,0);P_{2_{Min}}\left(\ln\left(\frac{2}{2}\right)=0\,|\,-1\right);P_{2_w}\left(\ln\left(\frac{2}{4}\right)\approx -0{,}69\,|\,-0{,}75\right)$$

x	−3	−2,5	−2	−1,5	−1	−0,5	0	0,5	1	1,5	1,75
$f_2(x)$	−0,1	−0,16	−0,25	−0,37	−0,6	−0,85	−1	−0,58	1,95	11,1	21,6

K=3

$P_{3_y}(0|-2); P_{3_x}(\ln(3) \approx 1{,}1|0); P_{3_{Min}}\left(\ln\left(\frac{3}{2}\right) = 0{,}41|-2{,}25\right); P_{3_w}\left(\ln\left(\frac{3}{4}\right) \approx -0{,}29|-1{,}69\right)$

x	−3	−2,5	−2	−1,5	−1	−0,5	0	0,5	1	1,5	1,75
$f_3(x)$	−0,15	−0,24	−0,39	−0,62	−0,97	−1,45	−2	−2,23	−0,77	6,64	15,85

$k = 4:$

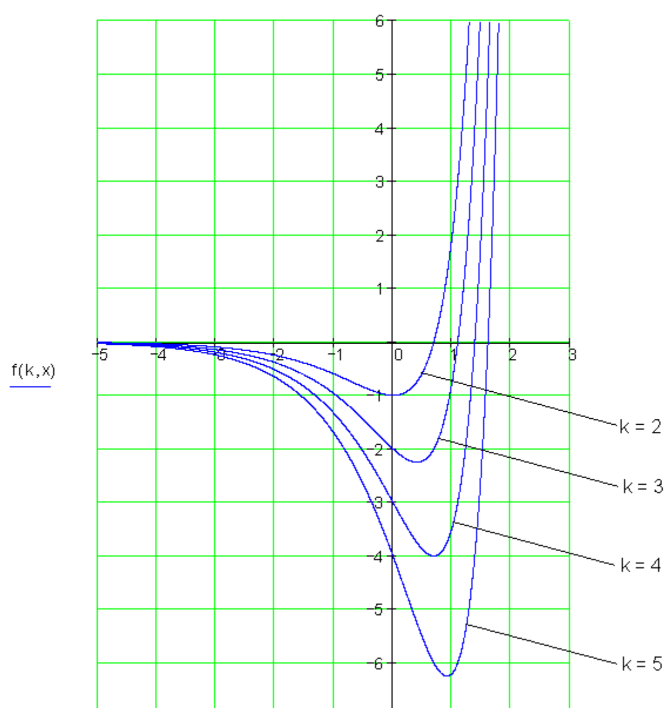
$P_{4_y}(0|-3); P_{4_x}(\ln(4) \approx 1{,}39|0); P_{4_{Min}}\left(\ln\left(\frac{4}{2}\right) = 0{,}69|-4\right); P_{4_w}\left(\ln\left(\frac{4}{4}\right) = 0|-3\right)$

x	−3	−2,5	−2	−1,5	−1	−0,5	0	0,5	1	1,5	1,75
$f_4(x)$	−0,2	−0,32	−0,52	−0,84	−1,34	−2,06	−3	−3,88	−3,48	2,16	10,1

$k = 5:$

$P_{5_y}(0|-4); P_{5_x}(\ln(5) \approx 1{,}61|0); P_{5_{Min}}\left(\ln\left(\frac{5}{2}\right) = 0{,}92|-6{,}25\right); P_{5_w}\left(\ln\left(\frac{5}{4}\right) \approx 0{,}22|-4{,}69\right)$

x	−3	−2,5	−2	−1,5	−1	−0,5	0	0,5	1	1,5	1,75
$f_5(x)$	−0,25	−0,4	−0,66	−1,07	−1,7	−2,67	−4	−5,53	−6,2	−2,32	4,34



ج - د محليمنحني لپاره تيتټکو شميرنه:

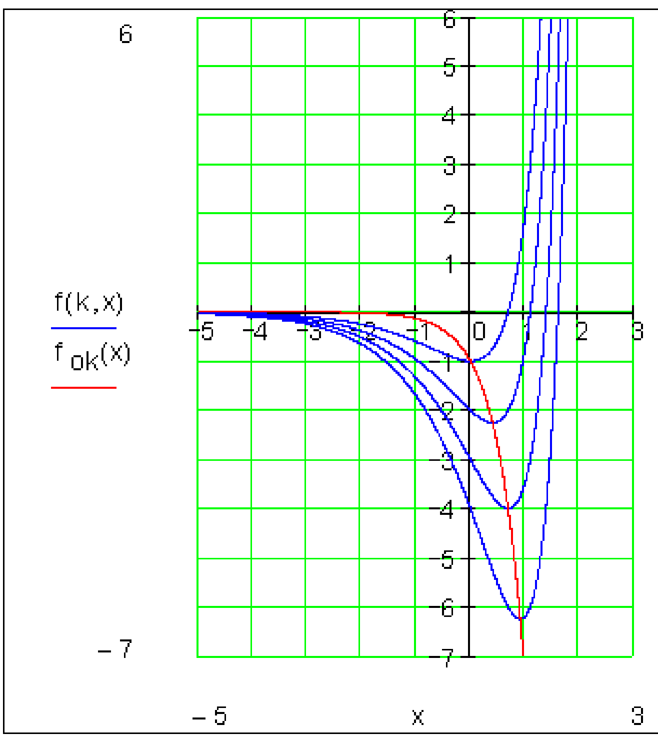
$$P_{k_{Min}}\left(\underbrace{\ln\left(\frac{k}{2}\right)}_{x}\middle|\underbrace{-\frac{1}{4}k^2}_{y}\right)\Rightarrow x=\ln\left(\frac{k}{2}\right)\quad(1)\qquad y=-\frac{1}{4}k^2\quad(2)$$

(۱) له k پسي حل کړئ:

$$x=\ln\left(\frac{k}{2}\right)\Big|\,e\quad\Leftrightarrow\quad e^x=e^{\ln\left(\frac{k}{2}\right)}\quad\Leftrightarrow\quad e^x=\frac{k}{2}\quad\Leftrightarrow\quad k=2\cdot e^x$$

نتيجه په (۲) کې کيږدئ:

$$y=-\frac{1}{4}k^2=-\frac{1}{4}\cdot\left(2\cdot e^x\right)^2=-\frac{1}{4}\cdot 4\cdot e^{2x}=-e^{2x}$$



له دې سره د ټولو تيتټکو لپارهد تابع مساوات شي:

$f_{ok}(x)=-e^{2x}$

چ – د $k = 5$ لپاره:

له e) څخه لاس ته راوړنه $A_k = \left|-\frac{1}{2}k^2 + k - \frac{1}{2}\right|$

$$A_5 = \left|-\frac{1}{2}\cdot 5^2 + 5 - \frac{1}{2}\right| = \left|-\frac{25}{2} + 5 - \frac{1}{2}\right| = \left|-\frac{25}{2} + \frac{10}{2} - \frac{1}{2}\right| = \left|-\frac{16}{2}\right| = |-8| = 8$$

د $k = 5$ لپاره سطحه 8 یونه یا واحده ده.

دویم – مفصل حلونه الف – د y - محور سره غوڅتکي:

$$f_k(x) = \frac{1}{4}k\cdot e^x - 2\cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

$$y_s = f_k(0) = \frac{1}{4}k\cdot e^0 - 2\cdot e^{\frac{1}{2}0} = \frac{k}{4} - 2 \Rightarrow \underline{\underline{P_{k_y}\left(0 \,|\, \frac{k}{4} - 2\right)}}$$

د ټولو $k \in \mathbb{R}$ لپاره د y - محور سره غوڅتکي شتون لري.

د x - محور سره غوڅتکي(صفرځایونه):

$$f_k(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}k\cdot e^x - 2\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x} = 0 \,|+2\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}k\cdot e^x = 2\cdot e^{\frac{1}{2}x} \,|\cdot\frac{4}{k}$$

$$\Leftrightarrow e^x = \frac{8}{k}\cdot e^{\frac{1}{2}x} \,|\ln(\ )$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(e^x\right) = \ln\left(\frac{8}{k}\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}\right) = \ln\left(\frac{8}{k}\right) + \ln\left(e^{\frac{1}{2}x}\right)$$

$$\Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{8}{k}\right) + \frac{1}{2}\cdot\ln\left(e^x\right) = \ln\left(\frac{8}{k}\right) + \frac{1}{2}x \,|-\frac{1}{2}x$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}x = \ln\left(\frac{8}{k}\right) | \cdot 2 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2 \cdot \ln\left(\frac{8}{k}\right) \quad \Rightarrow \underline{\underline{P_{k_x}\left(2 \cdot \ln\left(\frac{8}{k}\right) | 0\right)}}$$

د ټولو $k>0$ لپاره دx - محور سره غوڅېکي شتون لري (صفرځایونه).

پ – مشتقونه

$$f_k(x) = \frac{1}{4}k \cdot e^x - 2 \cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

$$f_k'(x) = \frac{1}{4}k \cdot e^x - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}x} = \frac{1}{4}k \cdot e^x - e^{\frac{1}{2}x}$$

$$f_k''(x) = \frac{1}{4}k \cdot e^x - \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

$$f_k'''(x) = \frac{1}{4}k \cdot e^x - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}x} = \frac{1}{4}k \cdot e^x - \frac{1}{4} \cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

ث – انحراف ټکي

$$f_k(x) = \frac{1}{4}k \cdot e^x - 2 \cdot e^{\frac{1}{2}x} \quad f_k'(x) = \frac{1}{4}k \cdot e^x - e^{\frac{1}{2}x} \quad f_k''(x) = \frac{1}{4}k \cdot e^x - \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

د افراطي ټکو لپاره پوره کیدونکي شرطونه: $f_k'(x) = 0 \quad \wedge \quad f_k''(x) \neq 0$

$$f_k'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}k \cdot e^x - e^{\frac{1}{2}x} = 0 | + e^{\frac{1}{2}x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}k \cdot e^x = e^{\frac{1}{2}x} | \cdot \frac{4}{k}$$

$$\Leftrightarrow e^x = \frac{4}{k} \cdot e^{\frac{1}{2}x} | \ln(\ )$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(e^x\right) = \ln\left(\frac{4}{k} \cdot e^{\frac{1}{2}x}\right) = \ln\left(\frac{4}{k}\right) + \frac{1}{2} \cdot \ln\left(e^x\right)$$

$$\Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{4}{k}\right) + \frac{1}{2}x \mid -\frac{1}{2}x$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}x = \ln\left(\frac{4}{k}\right) \mid \cdot 2 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2\cdot\ln\left(\frac{4}{k}\right)$$

ممکنه افراطي ځایونه

$$f_k''(x) = f_k''\left(2\cdot\ln\left(\frac{4}{k}\right)\right) = \frac{1}{4}k\cdot e^{2\cdot\ln\left(\frac{4}{k}\right)} - \frac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\ln\left(\frac{4}{k}\right)} = \frac{1}{4}k\cdot e^{\ln\left(\frac{4}{k}\right)^2} - \frac{1}{2}\cdot e^{\ln\left(\frac{4}{k}\right)}$$

$$= \frac{1}{4}k\cdot\left(\frac{4}{k}\right)^2 - \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{k} = \frac{1}{4}k\cdot\frac{16}{k^2} - \frac{2}{k} = \frac{4}{k} - \frac{2}{k} = \frac{2}{k} > 0$$

د ټولو $k>0$ لپاره .

له دې لاس ته راځي، چې نسبي اکستریموم(تیتټکی) په $x = x_{k_{Min}} = 2\cdot\ln\left(\frac{4}{k}\right)$ کې

$$y_{k_{Min}} = f_k\left(x_{k_{Min}}\right) = \frac{1}{4}k\cdot e^{2\cdot\ln\left(\frac{4}{k}\right)} - 2\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\ln\left(\frac{4}{k}\right)} = \frac{1}{4}k\cdot e^{\ln\left(\frac{4}{k}\right)^2} - 2\cdot e^{\ln\left(\frac{4}{k}\right)}$$

$$= \frac{1}{4}k\cdot\left(\frac{4}{k}\right)^2 - 2\cdot\frac{4}{k} = \frac{1}{4}k\cdot\frac{16}{k^2} - \frac{8}{k} = \frac{4}{k} - \frac{8}{k} = -\frac{4}{k}$$

$$\Rightarrow \underline{P_{k_{Min}}\left(2\cdot\ln\left(\frac{4}{k}\right) \mid -\frac{4}{k}\right)}$$

د ټولو $k > 0$ لپاره یو نسبي اکستریمومو) تیتټکی) شتون لري.

ت ــ $f_k(x) = \frac{1}{4}k\cdot e^x - 2\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x} \quad f_k''(x) = \frac{1}{4}k\cdot e^x - \frac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}$

$$f_k'''(x) = \frac{1}{4}k \cdot e^x - \frac{1}{4} \cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

د انعطاف ټکی یا اوړونټکی: $f_k''(x) = 0 \quad \wedge \quad f_k'''(x) \neq 0$

$$f_k''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}k \cdot e^x - \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x} = 0 | + \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}k \cdot e^x = \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x} | \cdot \frac{4}{k}$$

$$\Leftrightarrow e^x = \frac{2}{k} \cdot e^{\frac{1}{2}x} | \ln(\ )$$

$$\Leftrightarrow \ln(e^x) = \ln\left(\frac{2}{k} \cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}\right) = \ln\left(\frac{2}{k}\right) + \frac{1}{2} \cdot \ln(e^x)$$

$$\Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{2}{k}\right) + \frac{1}{2}x | - \frac{1}{2}x$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}x = \ln\left(\frac{2}{k}\right) | \cdot 2 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2 \cdot \ln\left(\frac{2}{k}\right)$$

ممکنه اوړونټکی یا انعطافټکي

$$f_k''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}k \cdot e^x - \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x} = 0 | + \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}k \cdot e^x = \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x} | \cdot \frac{4}{k}$$

$$\Leftrightarrow e^x = \frac{2}{k} \cdot e^{\frac{1}{2}x} | \ln(\ )$$

$$\Leftrightarrow \ln(e^x) = \ln\left(\frac{2}{k} \cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}\right) = \ln\left(\frac{2}{k}\right) + \frac{1}{2} \cdot \ln(e^x)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}x = \ln\left(\frac{2}{k}\right) | \cdot 2 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2\cdot\ln\left(\frac{2}{k}\right) \text{ möç}$$

ممکنه اوړونټکي یا د انغطاف ټکي

د لاندې پېښتو: د... لپاره.

$$f_k'''(x) = f_k'''\left(2\cdot\ln\left(\frac{2}{k}\right)\right) = \frac{1}{4}k\cdot e^{2\cdot\ln\left(\frac{2}{k}\right)} - \frac{1}{4}\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\ln\left(\frac{2}{k}\right)} = \frac{1}{4}k\cdot e^{\ln\left(\frac{2}{k}\right)^2} - \frac{1}{4}\cdot e^{\ln\left(\frac{2}{k}\right)}$$

$$= \frac{1}{4}k\cdot\left(\frac{2}{k}\right)^2 - \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{2}{k}\right) = \frac{1}{4}k\cdot\frac{4}{k^2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{k} = \frac{1}{k} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{k} = \frac{1}{k}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{k} \neq 0$$

د $k>0$ لپاره.

$$\Rightarrow x = x_{k_w} = 2\cdot\ln\left(\frac{2}{k}\right)$$

یو اوړونټکی یا د انعطاف ټکی دی.

$$y_{k_w} = f_k(x_{k_w}) = \frac{1}{4}k\cdot e^{2\cdot\ln\left(\frac{2}{k}\right)} - 2\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\ln\left(\frac{2}{k}\right)} = \frac{1}{4}k\cdot e^{\ln\left(\frac{2}{k}\right)^2} - 2\cdot e^{\ln\left(\frac{2}{k}\right)}$$

$$= \frac{1}{4}k\cdot\left(\frac{2}{k}\right)^2 - 2\cdot\left(\frac{2}{k}\right) = \frac{1}{4}k\cdot\frac{4}{k^2} - 2\cdot\frac{2}{k} = \frac{1}{k} - \frac{4}{k} = \frac{1}{k}(1-4) = -\frac{3}{k}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{P_{k_w}\left(2\cdot\ln\left(\frac{2}{k}\right) | -\frac{3}{k}\right)}}$$

د$k>0$ لپاره یو اوړنوکی شتون لري

ټ – د تعریف ورشو د پولو لپاره د تابع ارزښتونه:

$$f_k(x) = \frac{1}{4}k \cdot e^x - 2 \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot x}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f_k(x) = \frac{1}{4}k \cdot \underbrace{\lim_{x\to-\infty} e^x}_{\to 0} - 2 \cdot \underbrace{\lim_{x\to-\infty} e^{\frac{1}{2} \cdot x}}_{\to 0} = \frac{1}{4}k \cdot 0 - 2 \cdot 0 = 0$$

د $x \to -\infty$ لپاره ټول تابع ارزښتونه د 0 په لور ځغلي. له دې سره د x–محور اسمپټوت یت ګاونډ(مجانب) دی.

$$\lim_{x\to\infty} f_k(x) = \frac{1}{4}k \cdot \underbrace{\lim_{x\to\infty} e^x}_{\to\infty} - 2 \cdot \underbrace{\lim_{x\to\infty} e^{\frac{1}{2} \cdot x}}_{\to\infty} = \frac{1}{4}k \cdot \infty - 2 \cdot \infty$$

حلوړ نه دی.

مګر دا چې e^x د $x \to \infty$ لپاره نسبت $e^{\frac{1}{2} \cdot x}$ ته ګړندی له ټولو پولو اوړي، کیدی د کمون یا تفریق د پام کې لرنې له امله له دې څخه مخ ته لاړ شو، چې $\lim_{x\to\infty} f_k(x) = \infty$ ؛ باور لري

ث - د ټیټتکو ځایزه یا محلي منحني

$$P_{k_{Min}}\left(\underbrace{2 \cdot \ln\left(\frac{4}{k}\right)}_{x} \,\Big|\, \underbrace{-\frac{4}{k}}_{y}\right) \Rightarrow x = 2 \cdot \ln\left(\frac{4}{k}\right) \quad (1) \quad y = -\frac{4}{k} \quad (2)$$

(1) د k په لور یا پسې حل کړئ او (2) کې ځاي په ځاي کړئ د ځای کرښ(-منحني) تابع مساوات ورکوي.

$$x = 2 \cdot \ln\left(\frac{4}{k}\right) \Big| : 2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} \cdot x = \ln\left(\frac{4}{k}\right) \Big| e^{(\,)} \quad \Leftrightarrow e^{\frac{1}{2} \cdot x} = e^{\ln\left(\frac{4}{k}\right)}$$

$$\Leftrightarrow \quad e^{\frac{1}{2} \cdot x} = \frac{4}{k}$$

په ځتړ ارزښت يې جوړ کړئ

$$\Leftrightarrow \quad e^{-\frac{1}{2}x} = \frac{k}{4} | \cdot 4 \quad \Leftrightarrow \quad k = 4 \cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot x}$$

په(2) کي ځای په ځای کړې

$$y = -\frac{4}{k} = -\frac{4}{4 \cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot x}} = -\frac{4}{4} \cdot \frac{1}{e^{-\frac{1}{2}\cdot x}}$$

$$= -\frac{1}{e^{-\frac{1}{2}x}} = -e^{\frac{1}{2}\cdot x} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{f_{ok}(x) = -e^{\frac{1}{2}x}}}$$

$f_{ok}(x)$ د $f_k(x)$ د تيتتکي ځای کره(-منحني) ده

ج - د سطحي د مساحت شمېرنه

$f_k(x) = \frac{1}{4}k \cdot e^x - 2 \cdot e^{\frac{1}{2}x}$ دا انتيګرال بايد حل شي $A_k = \left| \int_0^{x_k} f_k(x)\, dx \right|$

$$\int f_k(x)\, dx = \frac{1}{4}k \cdot \int e^x\, dx - 2 \cdot \int e^{\frac{1}{2}x}\, dx$$

د $\int e^x\, dx = e^x + C$ او $\int e^{\frac{1}{2}x}\, dx = 2 \cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x} + C$ سره باور لري:

$$\int f_k(x)\, dx = \frac{1}{4}k \cdot e^x - 2 \cdot 2 \cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x} + C = \frac{1}{4}k \cdot e^x - 4 \cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x} + C$$

د پوله اينووني وروسته لرو: $ug = 0; \quad og = x_k = 2 \cdot \ln\left(\frac{8}{k}\right) = \ln\left(\frac{8}{k}\right)^2$ کيږي:

$$\int_0^{x_k} f_k(x)\,dx = \frac{1}{4}k\cdot e^{\ln\left(\frac{8}{k}\right)^2} - 4\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\ln\left(\frac{8}{k}\right)} - \left(\frac{1}{4}k\cdot e^0 - 4\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot 0}\right)$$

$$= \frac{1}{4}k\cdot\left(\frac{8}{k}\right)^2 - 4\cdot\frac{8}{k} - \frac{1}{4}k + 4 = \frac{1}{4}k\cdot\frac{64}{k^2} - \frac{32}{k} - \frac{1}{4}k + 4$$

$$= \frac{16}{k} - \frac{32}{k} - \frac{1}{4}k + 4 = \frac{1}{k}(16-32) - \frac{1}{4}k + 4 = -\frac{16}{k} - \frac{1}{4}k + 4 \Rightarrow \underline{\underline{A_k = \left|-\frac{16}{k} - \frac{1}{4}k + 4\right|}}$$

چ - رارتلی یا په گته شوی تکی تکي

$k = 1$

$$P_{k_y}\left(0 \,|\, \frac{1}{4}k - 2\right) \Rightarrow P_{1_y}\left(0 \,|\, \frac{1}{4}\cdot 1 - 2\right) \Rightarrow P_{1_y}(0 \,|\, -1{,}75)$$

$$P_{k_x}\left(2\cdot\ln\left(\frac{8}{k}\right) \,|\, 0\right) \Rightarrow P_{1_x}\left(2\cdot\ln\left(\frac{8}{1}\right) \,|\, 0\right) \Rightarrow P_{1_x}(4{,}16 \,|\, 0)$$

$$x_{k_{Min}} = 2\cdot\ln\left(\frac{4}{k}\right) \Rightarrow x_{1_{Min}} = 2\cdot\ln\left(\frac{4}{1}\right) \approx 2{,}77 \Rightarrow f_1\left(x_{1_{Min}}\right) = -4 \Rightarrow P_{1_{Min}}(2{,}77 \,|\, -4)$$

$$x_{k_w} = 2\cdot\ln\left(\frac{2}{k}\right) \Rightarrow x_{1_w} = 2\cdot\ln\left(\frac{2}{1}\right) \approx 1{,}39 \Rightarrow f_1\left(x_{1_w}\right) = -3 \Rightarrow P_{1_w}(1{,}39 \,|\, -3)$$

$k = 2$

$$P_{k_y}\left(0 \,|\, \frac{1}{4}k - 2\right) \Rightarrow P_{2_y}\left(0 \,|\, \frac{1}{4}\cdot 2 - 2\right) \Rightarrow P_{2_y}(0 \,|\, -1{,}5)$$

$$P_{k_x}\left(2\cdot\ln\left(\frac{8}{k}\right) \,|\, 0\right) \Rightarrow P_{2_x}\left(2\cdot\ln\left(\frac{8}{2}\right) \,|\, 0\right) \Rightarrow P_{2_x}(2{,}77 \,|\, 0)$$

$$x_{k_{Min}} = 2\cdot\ln\left(\frac{4}{k}\right) \Rightarrow x_{2_{Min}} = 2\cdot\ln\left(\frac{4}{2}\right) \approx 1{,}39 \Rightarrow f_2\left(x_{2_{Min}}\right) = -2 \Rightarrow P_{2_{Min}}(1{,}39 \,|\, -2)$$

$$x_{k_w} = 2\cdot\ln\left(\frac{2}{k}\right) \Rightarrow x_{2_w} = 2\cdot\ln\left(\frac{2}{2}\right) = 0 \Rightarrow f_2\left(x_{2_w}\right) = -1{,}5 \Rightarrow P_{2_w}(0 \,|\, -1{,}5)$$

$k = 3$

$$P_{k_y}\left(0 \mid \frac{1}{4}k - 2\right) \Rightarrow P_{3_y}\left(0 \mid \frac{1}{4}\cdot 3 - 2\right) \Rightarrow P_{3_y}(0 \mid -1,25)$$

$$P_{k_x}\left(2\cdot \ln\left(\frac{8}{k}\right) \mid 0\right) \Rightarrow P_{3_x}\left(2\cdot \ln\left(\frac{8}{3}\right) \mid 0\right) \Rightarrow P_{3_x}(1,96 \mid 0)$$

$$x_{k_{Min}} = 2\cdot \ln\left(\frac{4}{k}\right) \Rightarrow x_{3_{Min}} = 2\cdot \ln\left(\frac{4}{3}\right) \approx 0,58 \Rightarrow f_3\left(x_{3_{Min}}\right) \approx$$

$$\approx -1,33 \Rightarrow P_{3_{Min}}(0,58 \mid -1,33)$$

$$x_{k_w} = 2\cdot \ln\left(\frac{2}{k}\right) \Rightarrow x_{3_w} = 2\cdot \ln\left(\frac{2}{3}\right) \approx -0,81 \Rightarrow f_3\left(x_{3_w}\right) = -1 \Rightarrow P_{3_w}(-0,81 \mid -1)$$

$k = 4$

$$P_{k_y}\left(0 \mid \frac{1}{4}k - 2\right) \Rightarrow P_{4_y}\left(0 \mid \frac{1}{4}\cdot 4 - 2\right) \Rightarrow P_{4_y}(0 \mid -1)$$

$$P_{k_x}\left(2\cdot \ln\left(\frac{8}{k}\right) \mid 0\right) \Rightarrow P_{4_x}\left(2\cdot \ln\left(\frac{8}{4}\right) \mid 0\right) \Rightarrow P_{4_x}(1,39 \mid 0)$$

$$x_{k_{Min}} = 2\cdot \ln\left(\frac{4}{k}\right) \Rightarrow x_{4_{Min}} = 2\cdot \ln\left(\frac{4}{4}\right) = 0 \Rightarrow f_4\left(x_{4_{Min}}\right) = -1 \Rightarrow P_{4_{Min}}(0 \mid -1)$$

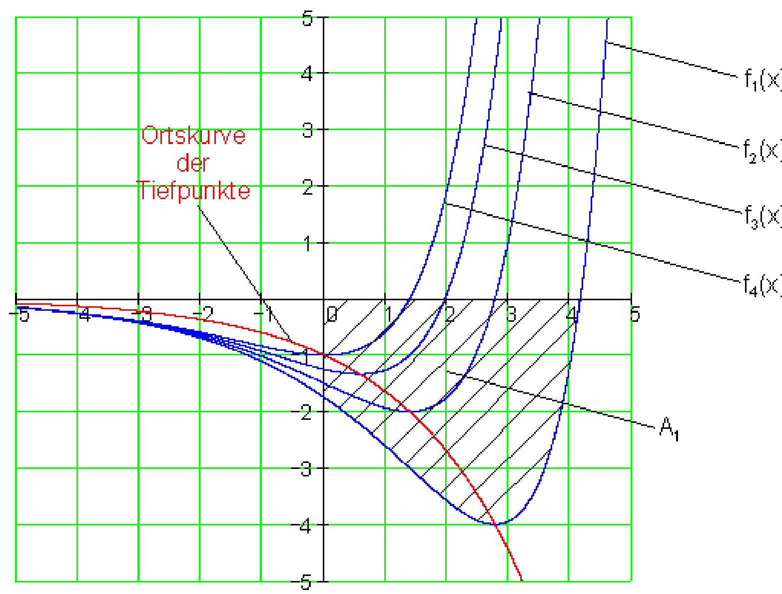
$$x_{k_w} = 2\cdot \ln\left(\frac{2}{k}\right) \Rightarrow x_{4_w} = 2\cdot \ln\left(\frac{2}{4}\right) \approx -1,39 \Rightarrow f_4\left(x_{4_w}\right) = -0,75 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_{4_w}(-1,39 \mid -0,75)$$

د تابع ګراف

$$f(k,x) := \frac{1}{4}\cdot k\cdot e^{x} - 2\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x} \qquad f_{0k}(x) := -e^{\frac{1}{2}\cdot x}$$

د تيتيکي لپاره ځای کړّ



ح – معلومه سطحه :

$$A_k = \left|-\frac{16}{k} - \frac{1}{4}k + 4\right| \text{ für } k = 1 \text{ gilt:}$$

$$A_1 = \left|-\frac{16}{1} - \frac{1}{4}\cdot 1 + 4\right| = \left|-16 + 4 - \frac{1}{4}\right| = \left|-12 - \frac{1}{4}\right| = |-12,25| = \underline{\underline{12,25FE}}$$

پوښتنې

مشتق – او انتیګرال شمیرنو ته پوښتنې

د e -تابع سره پوښتنې.

لومړی: د k>0 او $x \in \mathbb{R}$ لپاره تابع $f_k(x) = (k-x)\,e^{\frac{1}{2}x}$ ورکړي

الف- محورغوڅېټکي، که شتون ولري، وشميرئ.

ب- افراېی ټکي، ه شتون ولري، وشميرئ.

پ-اوړونټکی یا د انعطاف ټکي، که شتون ولري، وشميرئ.

ت- د تعريفورشو پوله ارزښت لپاره تابعارزښتونه وټاکئ.

ټ- د محورغوڅېټکو او x – محور ترمنځ سطحه A_k وټاکئ.

ث- په یو پروتولاړ یا کواورد یناتسیستم کې د $x \in \{-5;-4;...;4;5\}$ او $k \in \{1;2;3;4\}$ لپاره ارزښت جدول وکاږئ.

ج- د لاندې ځایګړو یا ـمنحنیو مساواتابع وشميرئ:

د $f_k(x)$ د جګټکي ځایکره یا ـمنحني $f_{okh}(x)$ او

د $f_k(x)$ د جګټکي اوړونټکي یا د انعطافټکي $f_{okw}(x)$ او دا په یوه پروتولاړسیستم (قیمتوضعیه؟؟) کې وکاږئ.

چ- د $k = 4$ لپاره سطحه A_4 وشميرئ او دا په پروتولاړسیستم(یا قیمت وضعیه) کې وکاږئ.

دويم: د $k \in \mathbb{R}$ او $x \in \mathbb{R}$ لپاره دې تابع $f_k(x) = (x^2 - k) \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot x}$ ورکړ شوې وي.

الف- محور غوڅېټکي، که شتون ولري، وشميرئ. د کوم k ارزښت لپاره صفرځای شتون لري؟

ب- د $f_k(x)$ لومړي درې مشتقونه وشميرئ.

پ- $f_k(x)$ د افراطي ځایونو په هکله وڅیړی او د افراطیت او د k په واکولي یا تابعیت باندې یې یوه وینا (دا چې وینا څه شی دی ، د سم ا ند یا منطق برخ کې یې کتلی شئ) وکړئ.

ت - $f_k(x)$ په اوړونځاییونو بندې د k په واکلوالي کې وڅیړئ.

ټ- د په واکوالي کې دې د A_k سطحه د صفرځایونو او د x –محور ترمنځ وشمیرل شي.

مرستموقف: $\int x^2 \cdot e^{\frac{1}{2}x}\,dx = \left(2x^2 - 8x + 16\right) \cdot e^{\frac{1}{2}x} + C$

ث- په یوه پروتولاړسیستم یا د وضعیهقیمت سیستم کې د $k \in (-4; -2; 0; 2; 4)$ لپاره ګراف وکاږئ.

د لاندې ارزښت جدول څخه داتا وکاروئ.

x	−10	−8	−6	−4	−2	0	2
$f_{-4}(x)$	0,7	1,25	1,99	2,71	2,94	4	21,75
$f_{-2}(x)$	0,69	1,21	1,89	2,44	2,21	2	16,31
$f_0(x)$	0,67	1,17	1,79	2,17	1,47	0	10,97
$f_2(x)$	0,66	1,14	1,69	1,89	0,74	−2	5,44
$f_4(x)$	0,65	1,1	1,59	1,62	0	−4	0

برسیره پردې، که غوښتوني ووو،صفرځایونه، افراطي ځایونه او اوړونټکي یا د انعطاف ټکي.

ج- د سطحه وشمیرئ او سطحه په پروته- ولاړسیستم یا وضعیه قیمت سیسم کې په نخښنه کړئ.

حلونه

مشتق او انتیګرالشمیرنې ته پارامتریکي پوښتنې II

نتیجې او مفصل حلونه

اول – نتیجې

الف - $P_{k_x}(k|0)$ $P_{k_y}(0|k)$

ب –

جګتیکی : $P_{k_{Max}}\left(k-2 \,|\, 2\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot k-1}\right)$

ث –

$\lim_{x\to\infty} f_k(x) = -\infty$ $\lim_{x\to-\infty} f_k(x) = 0$

ټ -

سطحه: $A_k = \left|4\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot k} - 2k - 4\right|$

د ځایکړې یا ځایمنحني د جګتیکو لپاره تابع مساوات:	$f_{okh}(x) = 2\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}$
د ځایکړې یا ځایمنحني د د تولو انعطافتیکو لپاره تابع مساوات:	$f_{okw}(x) = 4\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}$

k = 4 17,556 FE

دویم – نتیجې :

الف -

$P_{k_{x1/2}}\left(\pm\sqrt{k}\,|\,0\right)$ $P_{k_y}(0|-k)$

ب –

$$f_k{}'(x) = \left(\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{1}{2}k\right) \cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}$$

$$f_k{}''(x) = \left(\frac{1}{4}x^2 + 2x - \frac{1}{4}k + 2\right) \cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}$$

$$f_k{}'''(x) = \left(\frac{1}{8}x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{1}{8}k + 3\right) \cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}$$

پ - د4-<k لپاره د $x_1 = -2 + \sqrt{4+k}$ په ځای کې یو نسبي خورا ټیټ ټکی پروت دی.

د 4-<k لپاره د $x_2 = -2 - \sqrt{4+k}$ په ځای کې یو نسبي خورا جګ ټکی پروت دی.

ت - $x_1 = -4 + \sqrt{8+k}$ یو اوړنټکی یا انعطا فټکی، که 8-<k وي.

$x_2 = -4 - \sqrt{8+k}$ یو اوړنټکی یا انعطا فټکی، که 8-<k وي.

ټ -

ث – مفصل حل وګوری

ج – سطحه $A_4 = 11{,}772$ FE

اول – مفصل حلونه

الف د y –محور سره غوڅټکی:

$$f_k(x) = (k - x) \cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

$$y_s = f_k(0) = (k - 0) \cdot e^{\frac{1}{2}\cdot 0} = k \cdot 1 = k \Rightarrow \underline{\underline{P_{k_y}(0 \mid k)}}$$

د x –محور سره غوڅټکی(صفرځایونه):

$$f_k(x) = 0 \Leftrightarrow \left(\underbrace{k-x}_{0}\right) \cdot \underbrace{e^{\frac{1}{2}x}}_{\neq 0} = 0$$

د پیتاګوراس(فیثاغرث) جمله وکاروئ

$$k - x = 0 | +x \Leftrightarrow k = x \Leftrightarrow x = k \Rightarrow \underline{\underline{P_{k_x}(k|0)}}$$

ب – د انحراف ټکي

$$f_k(x) = (k-x) \cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

$$f_k'(x) = u'v + uv' \text{ r}$$

د $u = k - x \Rightarrow u' = -1$ او $v = e^{\frac{1}{2}x}$ سره

$$\Rightarrow v' = \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

$$f_k'(x) = -1 \cdot e^{\frac{1}{2}x} + (k-x) \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}x} = \left(-\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}k - 1\right) \cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

$$f_k''(x) = u'v + uv'$$

د $u = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}k - 1 \Rightarrow u' = -\frac{1}{2}$ او $v = e^{\frac{1}{2}x} \Rightarrow v' = \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}x}$ سره

$$f_k''(x) = -\frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}x} + \left(-\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}k - 1\right) \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}x} = \left(-\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}k - 1\right) \cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

$$f_k'''(x) = u'v + uv'$$

د $u=-\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}k-1\Rightarrow u'=-\frac{1}{4}$ او $\text{I}\,v=e^{\frac{1}{2}x}\Rightarrow v'=\frac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}x}$ سره

$$f_k'''(x)=u'v+uv' \text{ mit } u=-\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}k-1\Rightarrow u'=-\frac{1}{4} \text{ und } v=e^{\frac{1}{2}x}\Rightarrow v'=\frac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

$$f_k'''(x)=u'v+uv'$$

د $u=-\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}k-1\Rightarrow u'=-\frac{1}{4}$ او $v=e^{\frac{1}{2}x}\Rightarrow v'=\frac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}x}$ سره

$$f_k'''(x)=-\frac{1}{4}\cdot e^{\frac{1}{2}x}+\left(-\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}k-1\right)\cdot\frac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}x}=\left(-\frac{1}{8}x+\frac{1}{8}k-\frac{3}{4}\right)\cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

$$f_k'(x)=0\Leftrightarrow\left(-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}k-1\right)\cdot e^{\frac{1}{2}x}=0$$

د پیتاگوراس جمله وکاروئ

$$\Leftrightarrow-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}k-1=0\Leftrightarrow x=k-2$$

$$\Leftrightarrow x=k-2\ \text{i}$$

یو ممکنه افراطي ځای دی.

د دویم مشتق(رابیلیدني) سره یي ازماېښت: $f_k''(x)\neq 0$

$$f_k''(x)=f_k''(k-2)=\left[-\frac{1}{4}(k-2)+\frac{1}{4}k-1\right]\cdot e^{\frac{1}{2}(k-2)}=-\frac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}k-1}<0$$

په $x=x_E=k-2$ کې یو نسبي خرا تیټتکی (خورا جګ تکی) شتون لري

افراطي ارزښتونه: $y_{k_E} = f_k(x_E) = f_k(k-2) = \left[k-(k-2)\right]\cdot e^{\frac{1}{2}(k-2)} = 2\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot k-1}$

له دې لاس ته رځی، چی ټکی: $\underline{\underline{P_{k_{Max}}\left(k-2 \mid 2\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot k-1}\right)}}$

پ – د انعطاف ټکي]

$$f_k''(x) = \left(-\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}k-1\right)\cdot e^{\frac{1}{2}x} \qquad f_k'''(x) = \left(-\frac{1}{8}x+\frac{1}{8}k-\frac{3}{4}\right)\cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

د اوړونټکي یا انعطافټکي لپاره اړین- یا ضروري شرایط:

$$f_k''(x) = 0 \wedge f_k'''(x) \neq 0$$

$$f_k''(x) = 0 \Leftrightarrow \left(-\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}k-1\right)\cdot e^{\frac{1}{2}x} = 0|$$

د پیتاګوراس جمله وکاروئ یا استعمال کړئ

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}k-1=0 \Leftrightarrow x = k-4$$

په $x = x_w = k-4$ کې یو اوړونټکی یا د انعطافټکی شته.

$$y_{k_w} = f_k(x_w) = f_k(k-4) = \left[k-(k-4)\right]\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot(k-4)} = 4\cdot e^{\frac{1}{2}k-2}$$

له دې لاس ته را ځي، چې اوړونټکی دی:

$$\underline{\underline{P_{k_w}\left(k-4 \mid 4\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot k-2}\right)}}$$

ت – د تعریف ورشو پولې لپاره د تابع ارزښتونه.

تاکو: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f_k(x)$

$$\lim_{x\to-\infty} f_k(x)=\lim_{x\to-\infty}(k-x)\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}=0$$

د $x\to\infty$ لپاره د x-محور د $f_k(x)$ ګاونډ(مجاورت یا ا سیمپتوت) دی.

ټ – صفرځای: $x_1=k$ له دې لاس ته راځي د سطحې انتیګرال $A_k=\left|\int\limits_0^k f_k(x)\,dx\right|$

$$\int_0^k f_k(x)\,dx=\int_0^k (k-x)\cdot e^{\frac{1}{2}x}\,dx$$

د ټوټه – یا پارشل انتیګرال له لارې حل لومړی ټولیز یا عمومي

$$\int \underbrace{(k-x)}_{u(x)}\cdot \underbrace{e^{\frac{1}{2}\cdot x}}_{v'(x)}dx=u(x)\cdot v(x)-\int u'(x)\cdot v(x)\,dx$$

$$u(x)=k-x\Rightarrow u'(x)=-1$$

$$v'(x)=e^{\frac{1}{2}x}\Rightarrow v(x)=\int e^{\frac{1}{2}x}\,dx=2\cdot e^{\frac{1}{2}x}+C$$

$$\int u'(x)\cdot v(x)\,dx=\int(-1)\cdot 2\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}\,dx=-2\cdot\int e^{\frac{1}{2}\cdot x}\,dx=-4\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}$$

$$\int f_k(x)\,dx=(k-x)\cdot 2\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}-\left(-4\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}\right)+C=2k\cdot e^{\frac{1}{2}x}-2x\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}+4\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}+C$$

$$\int_0^k f_k(x)\,dx=\left[2k\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}-2x\cdot e^{\frac{1}{2}x}+4\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}\right]_0^k$$

$$=2k\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot k}-2k\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot k}+4\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot k}-\left(2k\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot 0}-2\cdot 0\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot 0}+4\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot 0}\right)=4\cdot e^{\frac{1}{2}k}-2k-4$$

له دې سره سطحه کېږي یا ده: $A_k = \left|4 \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot k} - 2k - 4\right|$

ث – ارزښتجدول او د ګړو یا منحنی کوډې (ګزافونه).

محور غوڅټکي، تېتټکي او اوړونټکي یا د ا نعطاف تکي دې برسیره ارزښت جدول ته ورو‌شمیرل شي.

$$P_{k_y}(0|k);\quad P_{k_x}(k|0);\quad P_{k_{Max}}\left(k-2 \,|\, 2 \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot k - 1}\right);\quad P_{k_w}\left(k-4 \,|\, 4 \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot k - 2}\right)$$

$k = 1$:

$$P_{1_y}(0|1);\quad P_{1_x}(1|0);\quad P_{1_{Min}}\left(-1 \,|\, 2 \cdot e^{-\frac{1}{2}} \approx 1{,}21\right);\quad P_{1_w}\left(-3 \,|\, 4 \cdot e^{-\frac{3}{2}} \approx 0{,}89\right)$$

x	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5
$f_1(x)$	0,49	0,68	0,89	1,1	1,21	1	0	−2,72	−8,96	−22,17	−48,73

$k = 2$:

$$P_{2_y}(0|2);\quad P_{2_x}(2|0);\quad P_{2_{Min}}\left(0 \,|\, 2 \cdot e^{0} = 2\right);\quad P_{2_w}\left(-2 \,|\, 4 \cdot e^{-1} \approx 1{,}47\right)$$

x	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5
$f_2(x)$	0,57	0,81	1,12	1,47	1,82	2	1,65	0	−4,48	−14,78	−36,55

$k = 3$:

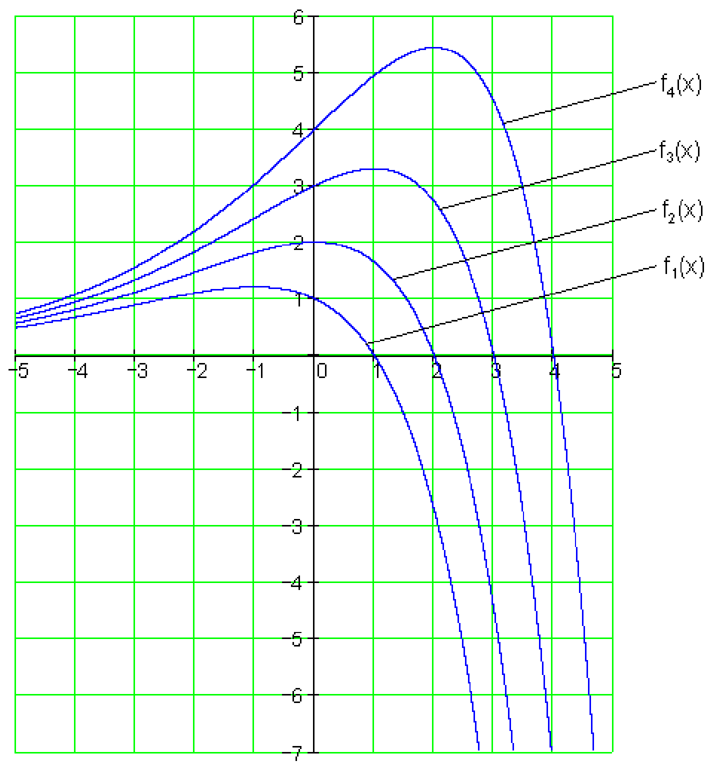
$$P_{3_y}(0|3);\quad P_{3_x}(3|0);\quad P_{3_{Min}}\left(1 \,|\, 2 \cdot e^{\frac{1}{2}} \approx 3{,}3\right);\quad P_{3_w}\left(-1 \,|\, 4 \cdot e^{-\frac{1}{2}} \approx 2{,}43\right)$$

x	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5
$f_3(x)$	0,66	0,95	1,34	1,84	2,43	3	3,3	2,72	0	−7,39	−24,36

K=4 :

$P_{4_y}(0|4);\quad P_{4_x}(4|0);\quad P_{4_{Min}}\left(2|2\cdot e^1\approx 5{,}44\right);\quad P_{4_w}\left(0|4\cdot e^0=4\right)$

x	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5
$f_4(x)$	0,74	1,08	1,56	2,21	3,03	4	4,95	5,44	4,48	0	−12,18



ج ـ د ځای یا محلي منحني شمیرنه :

$$P_{k_{Max}}\left(\underbrace{k-2}_{x}\,|\,\underbrace{2\cdot e^{\frac{1}{2}k-1}}_{y}\right)\Rightarrow x=k-2\quad(1)\qquad y=2\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot k-1}\quad(2)$$

(۱) په k پسې حل کړئ: $x=k-2\quad\Leftrightarrow\quad k=x+2$

نتخجه په (۲) کې کیږدئ:

$$y = 2 \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot (x+2)-1} = 2 \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot x+1-1} = 2 \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot x}$$

له دې سره دټولو جګټکو لپاره د ځای کرې یا ځای-منحني تابعمساوا ت کیږي:

$$\underline{\underline{f_{okh}(x) = 2 \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot x}}}$$

$$P_{k_w}\left(\underbrace{k-4}_{x} \mid \underbrace{4 \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot k-2}}_{y}\right) \Rightarrow x = k-4 \quad (1) \quad y = 4 \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot k-2} \quad (2)$$

(۱) په k پسې حل کړئ:

$$x = k-4 \quad \Leftrightarrow \quad k = x+4$$

نتیجه په (۲) کې کیږدئ

$$y = 4 \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot (x+4)-2} = 4 \cdot e^{\frac{1}{2} x+2-2} = 4 \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot x}$$

له دې سره د ټولو اوړنټکو یا انعطافټکو لپاره د تابعمساوات دي:

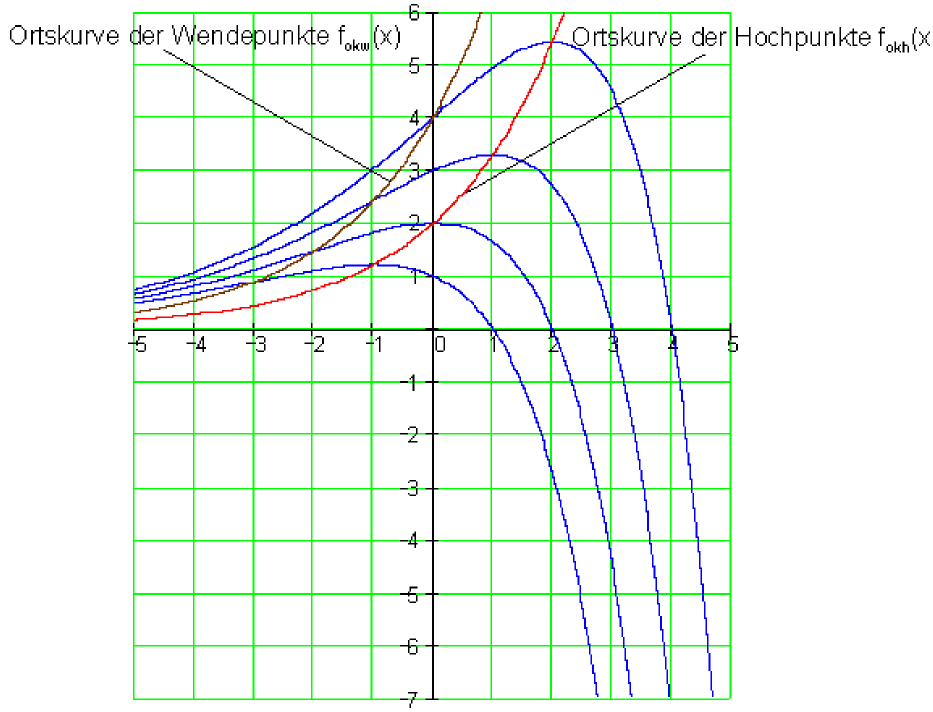
$$\underline{\underline{f_{okw}(x) = 4 \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot x}}}$$

لاندې له کیڼ و ښي لور ته:

د جګټکي... ځایمنحني د اوړونټکی یا انعطافټکي منحنۍ

د الماني پښتو: له کيڼ څخه ښي لور ته: د اوړونټکي يا انعطافټکي ځای کړه

د جګټکي ځای کړه.



ح – د $k = 4$ لپاره سطحه:

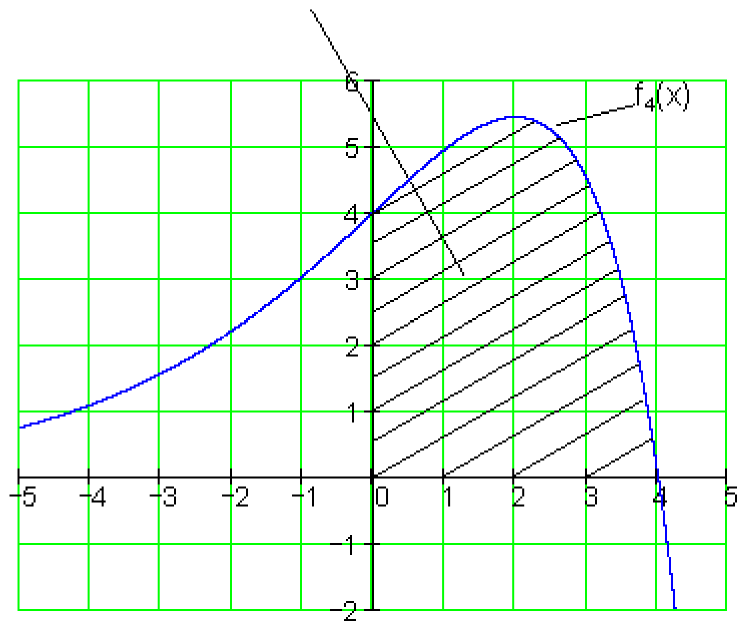
$$A_k = \left|4 \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot k} - 2k - 4\right|$$

نيجه له ټ څخه

$$A_4 = \left|4 \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot 4} - 2 \cdot 4 - 4\right| = \left|4 \cdot e^2 - 8 - 4\right| = \left|4 \cdot e^2 - 12\right| \approx 17{,}556$$

د $k = 4$ لپاره سطحه $\underline{\underline{17{,}556\ FE}}$ (يونه يا وحدونه)ده.

A_4 د محورغوښتکو او x -محور ترمنځ سطحه.



دویم – مفصل حل

الف –

د y –محور سره غوښتکی:

$$f_k(x) = \left(x^2 - k\right) \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot x}$$

$$y_s = f_k(0) = \left(0^2 - k\right) \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot 0} = -k \cdot 1 = -k \Rightarrow \underline{\underline{P_{k_y}(0 \mid -k)}}$$

د x - محور سره غوښتکی(صفرځایونه):
د پیتاګوراس جمله وکاروئ

$$f_k(x) = 0 \Leftrightarrow \left(\underbrace{x^2 - k}_{=0}\right) \cdot \underbrace{e^{\frac{1}{2} \cdot x}}_{\neq 0} = 0$$

$$x^2 - k = 0 | +k \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = k | \sqrt{\ } \quad \Leftrightarrow \quad |x| = \sqrt{k}$$

$$\Leftrightarrow \quad x_{k_{x1/2}} = \pm\sqrt{k} \text{ für } k \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{P_{k_{x1/2}}\left(\pm\sqrt{k} \mid 0\right)}$$

صفرځایونه فقط د $k \geq 0$ لپاره شتون لري.

ب - مشتقونه

$$f_k(x) = \left(x^2 - k\right) \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot x}$$

$$f_k'(x) = u'v + uv'$$

د $u = x^2 - k \Rightarrow u' = 2x$ او $v = e^{\frac{1}{2} \cdot x} \Rightarrow v' = \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot x}$ سره

$$f_k'(x) = 2x \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot x} + \left(x^2 - k\right) \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot x} = \left(\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{1}{2}k\right) \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot x}$$

$$f_k''(x) = u'v + uv'$$

د $u = \frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{1}{2}k \Rightarrow u' = x + 2$ او $v = e^{\frac{1}{2} \cdot x} \Rightarrow v' = \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot x}$ سره

$$f_k''(x) = (x+2) \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot x} + \left(\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{1}{2}k\right) \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot x} = \left(\frac{1}{4}x^2 + 2x - \frac{1}{4}k + 2\right) \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot x}$$

$$f_k'''(x) = u'v + uv'$$

د $u = \frac{1}{4}x^2 + 2x - \frac{1}{4}k + 2 \Rightarrow u' = \frac{1}{2}x + 2$ او $v = e^{\frac{1}{2} \cdot x} \Rightarrow v' = \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}x}$ سره

$$f_k'''(x)=\left(\frac{1}{2}x+2\right)\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}+\left(\frac{1}{4}x^2+2x-\frac{1}{4}k+2\right)\cdot\frac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}=\left(\frac{1}{8}x^2+\frac{3}{2}x-\frac{1}{8}k+3\right)\cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

پ - د افراط ټکي:

$$f_k'(x)=0\Leftrightarrow\left(\underbrace{\frac{1}{2}x^2+2x-\frac{1}{2}k}_{0}\right)\cdot\underbrace{e^{\frac{1}{2}\cdot x}}_{\neq 0}=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{2}x^2+2x-\frac{1}{2}k=0|\cdot 2\quad\Leftrightarrow\quad x^2+4x-k=0$$

$$p=4;\quad q=-k\quad\Rightarrow\quad D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=4+k\quad\Rightarrow\quad\sqrt{D}=\sqrt{4+k}$$

د$k\geq 0$ لپاره شتون لري

$x_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D}$	$x_1=-2+\sqrt{4+k}$ $x_2=-2-\sqrt{4+k}$	د$k\geq 0$ لپاره

د$-4\geq k$ لپاره x_1 او x_2 ځایونه دي د پراته-ولاړ تانجنت سره

د $k<0$ لپاره پروت-ولاړ تانجنت نه شته

د افراطیت ډول: $f_k''(x_{1/2})\neq 0$

$$f_k''(x_{1/2})=\left(\frac{1}{4}x_{1/2}^2+2\cdot x_{1/2}-\frac{1}{4}k+2\right)\cdot\underbrace{e^{\frac{1}{2}\cdot x_{1/2}}}_{>0}$$

که $0<(\ldots)$ وي، نو لاس ته راځي، چې په $x_{1/2}$ کې مینیموم یا خوراټیټ ټکی لرو.

که $0>(\ldots)$ وي، نو لاس ته راځي، چې په $x_{1/2}$ کې ماکسیموم یا خورا جګ ټکی لرو

منځشمیرنه:

$$: x_1^2 = \left(-2+\sqrt{4+k}\right)^2 = 8-4\cdot\sqrt{4+k}+k$$

$$x_2^2 = \left(-2-\sqrt{4+k}\right)^2 = 8+4\cdot\sqrt{4+k}+k$$

$$\left(\frac{1}{4}x_1^2+2\cdot x_1-\frac{1}{4}k+2\right)=\left[\frac{1}{4}\cdot\left(8-4\cdot\sqrt{4+k}+k\right)+2\cdot\left(-2+\sqrt{4+k}\right)-\frac{1}{4}k+2\right]=$$

$$=\sqrt{4+k}>0$$

د $x_1=-2+\sqrt{4+k}$ په ځای کې یو نسبي مینیموم پروت دی، که k > -4 وي.

$$\left(\frac{1}{4}x_2^2+2\cdot x_2-\frac{1}{4}k+2\right)=\left[\frac{1}{4}\cdot\left(8+4\cdot\sqrt{4+k}+k\right)+2\cdot\left(-2-\sqrt{4+k}\right)-\frac{1}{4}k+2\right]=$$

$$=-\sqrt{4+k}<0$$

د $x_2=-2-\sqrt{4+k}$ په ځای کې یو نسبي خورا ټیټټکی پروت دی، که k > 0 وي.

د k=-4 لپاره $\sqrt{4+k}=0$ دی، یعنې $f_k''(x_{1/2})=0$ په دې حالت کې د $x_{1/2}$ په ځای کې په حقیقت کې یو پروت-ولاړ تانجنت شتون لري مګر نه افراطي ارزښت.

ت ــ د انعطاف ټکی یا اوړونټکی

$$f_k''(x)=0 \Leftrightarrow \left(\underbrace{\frac{1}{4}x^2+2x-\frac{1}{4}k+2}_{=0}\right)\cdot\underbrace{e^{\frac{1}{2}\cdot x}}_{\neq 0}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}x^2+2x-\frac{1}{4}k+2=0|\cdot 4 \quad\Leftrightarrow\quad x^2+8x-k+8=0$$

$$p=8;\quad q=-k+8 \quad\Rightarrow\quad D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=16-(-k+8)=16+k-8=8+k$$

$$x_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D}\quad\left|\begin{array}{l}x_1=-4+\sqrt{8+k}\\ x_1=-4-\sqrt{8+k}\end{array}\right.\quad \text{für } k\geq -8$$

د $k \geq 0$ لپاره x_1 او x_2 ممکنه اوړونټکي یا د انعطاف ټکي دي.

د $k < 0$ لپاره اوړونټکي نه شته

د اوړونځایونو ازمایښت: $f_k'''(x_{1/2}) \neq 0$

$$f_k'''(x_{1/2}) = \left(\frac{1}{8}x_{1/2}^2 + \frac{3}{2}x_{1/2} - \frac{1}{8}k + 3\right) \cdot \underbrace{e^{\frac{1}{2}\cdot x_{1/2}}}_{\neq 0}$$

که $(\ldots) \neq 0$ وي نو لاس ته راځي، چې اوړونټکی په $x_{1/2}$ کې.

منځشمیرنه:

$$: x_1^2 = \left(-4 + \sqrt{8+k}\right)^2 = 24 - 8 \cdot \sqrt{4+k} + k$$

$$x_2^2 = \left(-4 - \sqrt{8+k}\right)^2 = 24 + 8 \cdot \sqrt{4+k} + k$$

$$\frac{1}{8}x_1^2 + \frac{3}{2}x_1 - \frac{1}{8}k + 3 = \left[\frac{1}{8}\left(24 - 8 \cdot \sqrt{4+k} + k\right) + \frac{3}{2}\left(-4 + \sqrt{8+k}\right) - \frac{1}{8}k + 3\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{8+k} \neq 0$$

$x_1 = -4 + \sqrt{8+k}$ د $k > -8$ لپاره یو اوړنځای یا د انعطاف ځای دی.

$$\frac{1}{8}x_2^2 + \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{8}k + 3 = \left[\frac{1}{8}\left(24 + 8 \cdot \sqrt{4+k} + k\right) + \frac{3}{2}\left(-4 - \sqrt{8+k}\right) - \frac{1}{8}k + 3\right] =$$

$$= -\frac{1}{2}\sqrt{8+k} \neq 0$$

$x_2 = -4 - \sqrt{8+k}$ د $k > -8$ لپاره یو اوړونټکی یا د انعطافټکی دی.

ټ- د سطحې د مساحت ټولیزه شمیرنه

$P_{k\times 1/2}\left(\pm\sqrt{k}\,|\,0\right)$ صفرځایونه فقط د $k\geq 0$ لپاره شتون لري

دا انتیګرال غواړو وشمیرو:

$$\int_{-\sqrt{k}}^{\sqrt{k}} f_k(x)\,dx = \int_{-\sqrt{k}}^{\sqrt{k}} \left(x^2-k\right)\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}\,dx = \underbrace{\int_{-\sqrt{k}}^{\sqrt{k}} x^2\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}\,dx}_{I} - k\cdot \underbrace{\int_{-\sqrt{k}}^{\sqrt{k}} e^{\frac{1}{2}\cdot x}\,dx}_{II} = I - k\cdot II$$

ټولیز حل I مخ له مخه ورکول کیږي

$$\int x^2\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}\,dx = \left(2x^2-8x+16\right)\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}+C$$

حل II:

$$\int e^{\frac{1}{2}\cdot x}\,dx \quad \text{Substitution: } u(x)=\frac{1}{2}x \Rightarrow \frac{du}{dx}=\frac{1}{2} \Rightarrow dx = 2\cdot du$$

$$\Rightarrow \int e^{\frac{1}{2}\cdot x}\,dx = 2\cdot\int e^{u}\,du = 2\cdot e^{u} = 2\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}+C$$

سره راټولول یا یوځای کول:

$$\int f_k(x)\,dx = I - k\cdot II = \left(2x^2-8x+16\right)\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x} - k\cdot 2\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}+C =$$

$$=\left(2x^2-8x+16-2k\right)\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}+C$$

د پولو ځای په ځای کونه یا ایښونه:

$$\int_{-\sqrt{k}}^{\sqrt{k}} f_k(x)\,dx = \left[\left(2x^2-8x+16-2k\right)\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}\right]_{-\sqrt{k}}^{\sqrt{k}}$$

$$= \left(2k-8\sqrt{k}+16-2k\right)\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot\sqrt{k}} - \left(2k+8\sqrt{k}+16-2k\right)\cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot\sqrt{k}}$$

$$= \left(-8\sqrt{k}+16\right)\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot\sqrt{k}} - \left(8\sqrt{k}+16\right)\cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot\sqrt{k}}$$

د فزیکي سطحې پاره باور لري:

$$A_k = \left|\int_{-\sqrt{k}}^{\sqrt{k}} f_k(x)\,dx\right| = \left|\left(-8\sqrt{k}+16\right)\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot\sqrt{k}} - \left(8\sqrt{k}+16\right)\cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot\sqrt{k}}\right|$$

الف-

K=-4

$k < 0$ صفرځای نه شته، ځکه چې $P_{k_y}(0|-k) \Rightarrow P_{-4_y}(0|4)$

افراطي ځای نه شته، ځکه د k=-4 لپاره شرط $k < -4$ پوره نه دی

$$x_{k_{w1}} = -4+\sqrt{8+k} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{-4_{w1}} = -4+\sqrt{8-4} = -4+\sqrt{4} = -2 \Rightarrow f_{-4}\left(x_{-2_{w1}}\right) \approx 2{,}94$$

$$x_{-4_{w2}} = -4-\sqrt{8-4} = -4-\sqrt{4} = -6 \Rightarrow f_{-4}\left(x_{-4_{w2}}\right) \approx 1{,}99$$

K=-2

$k < 0$ صفرځای نه شته، ځکه چې $P_{k_y}(0|-k) \Rightarrow P_{-2_y}(0|2)$

$x_{k_{Min}} = -2+\sqrt{4+k} \Rightarrow$ ›

$$\Rightarrow x_{-2_{Min}} = -2+\sqrt{4-2} = -2+\sqrt{2} \approx -0,59 \Rightarrow f_{-2}\left(x_{-2_{Min}}\right) \approx 1,75$$

$$x_{-2_{Max}} = -2-\sqrt{4-2} = -2-\sqrt{2} \approx -3,41 \Rightarrow f_{-2}\left(x_{-2_{Max}}\right) \approx 2,48$$

$x_{k_{w1}} =$

$$= -4+\sqrt{8+k} \Rightarrow x_{-2_{w1}} = -4+\sqrt{8-2} = -4+\sqrt{6} \approx -1,55 \Rightarrow f_{-2}\left(x_{-2_{w1}}\right) \approx 2,03$$

$$x_{-4_{w2}} = -4-\sqrt{8-2} = -4-\sqrt{6} \approx -6,45 \Rightarrow f_{-2}\left(x_{-2_{w2}}\right) \approx 1,73$$

$$k = 0$$

$$P_{k_y}(0|-k) \Rightarrow P_{0_y}(0|0)$$

دبل صفرځایونه $P_{k_{x1/2}}\left(\pm\sqrt{k}\,|\,0\right) \Rightarrow P_{0_{x1/2}}(0|0)$

$$x_{k_{Min}} = -2+\sqrt{4+k} \Rightarrow x_{0_{Min}} = -2+\sqrt{4+0} = -2+\sqrt{4} = 0 \Rightarrow f_0\left(x_{0_{Min}}\right) = 0$$

$$x_{0_{Max}} = -2-\sqrt{4+0} = -2-\sqrt{4} = -4 \Rightarrow f_0\left(x_{0_{Max}}\right) \approx 2,17$$

$$x_{k_{w1}} = -4+\sqrt{8+k} \Rightarrow x_{0_{w1}} = -4+\sqrt{8+0} = -4+\sqrt{8} \approx -1,17 \Rightarrow f_0\left(x_{0_{w1}}\right) \approx 0,76$$

$$x_{0_{w2}} = -4-\sqrt{8+0} = -4-\sqrt{8} \approx -6,83 \Rightarrow f_0\left(x_{0_{w2}}\right) \approx 1,53$$

$$k = 2$$

$$P_{k_y}(0|-k) \Rightarrow P_{2_y}(0|-2)$$

$$P_{k_{x1/2}}\left(\pm\sqrt{k}\,|\,0\right) \Rightarrow P_{2_{x1/2}}\left(\pm\sqrt{2} \approx \pm 1,41|\,0\right)$$

$$x_{k_{Min}} = -2+\sqrt{4+k} \Rightarrow x_{2_{Min}} = -2+\sqrt{4+2} = -2+\sqrt{6} \approx 0,45 \Rightarrow f_2\left(x_{2_{Min}}\right) \approx -2,25$$

$$x_{2_{Max}} = -2-\sqrt{4+2} = -2-\sqrt{6} \approx -4,45 \Rightarrow f_2\left(x_{2_{Max}}\right) \approx 1,92$$

$$x_{k_{w1}} = -4+\sqrt{8+k} \Rightarrow x_{2_{w1}} = -4+\sqrt{8+2} = -4+\sqrt{10} \approx -0{,}84 \Rightarrow f_2\left(x_{2_{w1}}\right) \approx -0{,}85$$

$$x_{2_{w2}} = -4-\sqrt{8+2} = -4-\sqrt{10} \approx -7{,}16 \Rightarrow f_2\left(x_{2_{w2}}\right) \approx 1{,}37$$

$k = 4$

$$P_{k_y}\left(0\,|\,-k\right) \Rightarrow P_{4_y}\left(0\,|\,-4\right)$$

$$P_{k_{x1/2}}\left(\pm\sqrt{k}\,|\,0\right) \Rightarrow P_{4_{x1/2}}\left(\pm\sqrt{4} = \pm 2\,|\,0\right)$$

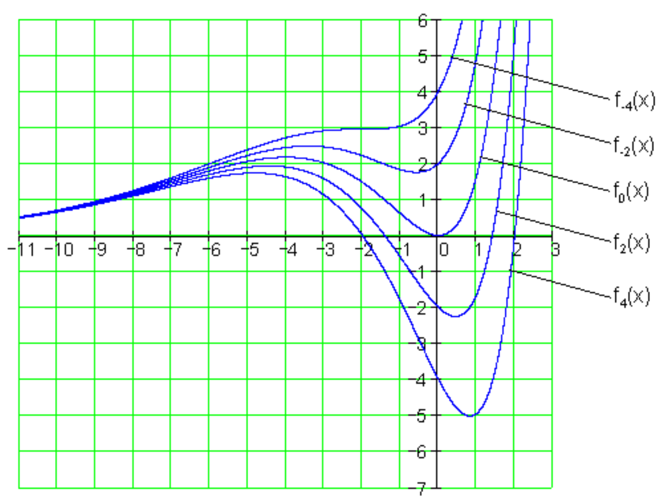
$$x_{k_{Min}} = -2+\sqrt{4+k} \Rightarrow x_{4_{Min}} = -2+\sqrt{4+4} = -2+\sqrt{8} \approx 0{,}83 \Rightarrow f_4\left(x_{4_{Min}}\right) \approx -5{,}01$$

$$x_{4_{Max}} = -2-\sqrt{4+4} = -2-\sqrt{8} \approx -4{,}83 \Rightarrow f_4\left(x_{4_{Max}}\right) \approx 1{,}73$$

$$x_{k_{w1}} = -4+\sqrt{8+k} \Rightarrow x_{4_{w1}} = -4+\sqrt{8+4} = -4+\sqrt{12} \approx -0{,}54 \Rightarrow f_4\left(x_{4_{w1}}\right) \approx -2{,}84$$

$$x_{4_{w2}} = -4-\sqrt{8+4} = -4-\sqrt{12} \approx -7{,}46 \Rightarrow f_4\left(x_{4_{w2}}\right) \approx 1{,}24$$

د $f_k(x) = \left(x^2-k\right)\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}$ او $k \in \mathbb{R}$ لپاره $x \in \mathbb{R}$



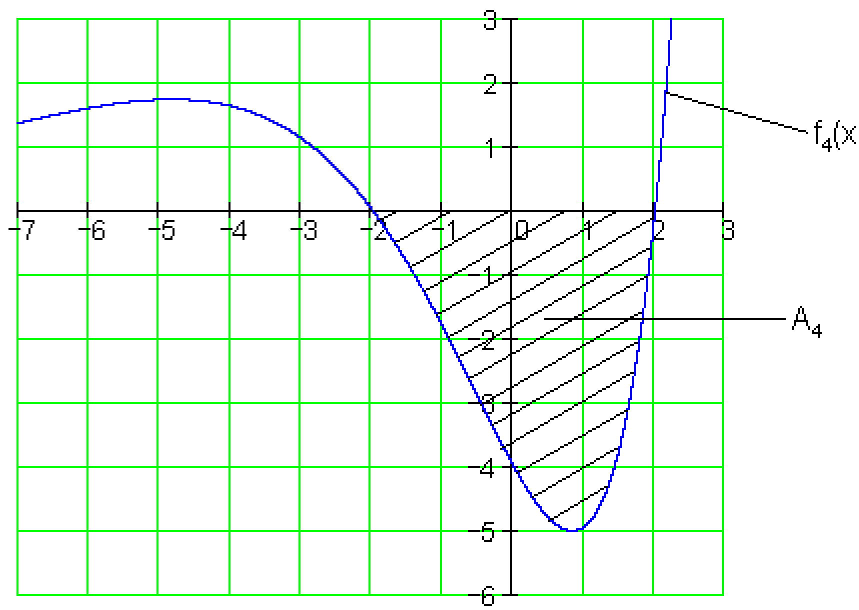
د فزیکي سطحې لپاره باور لري:

$$A_k = \left| \int_{-\sqrt{k}}^{\sqrt{k}} f_k(x)\,dx \right| = \left| \left(-8\sqrt{k}+16\right) \cdot e^{\frac{1}{2}\cdot\sqrt{k}} - \left(8\sqrt{k}+16\right) \cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot\sqrt{k}} \right|$$

په ځانګړې توګه د k=4 لپاره باور لري:

$$A_4 = \left| \int_{-\sqrt{4}}^{\sqrt{4}} f_4(x)\,dx \right| = \left| \left(-8\sqrt{4}+16\right) \cdot e^{\frac{1}{2}\cdot\sqrt{4}} - \left(8\sqrt{4}+16\right) \cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot\sqrt{4}} \right|$$

$$= \left| (-8 \cdot 2+16) \cdot e - (8 \cdot 2+16) \cdot e^{-1} \right| = \left| -32 \cdot e^{-1} \right| \approx \left| -11{,}772 \right| = \underline{\underline{11{,}772 FE}}$$



ساده مشتق- او انتیګرالشمیرنه (د یوه ساده تابع رابیلونه او ورګډونه)

تابع	مشتق	بنستیزه تابع
$f(x)$	$f'(x)$	$F(x)$
$f(x)=k$	$f'(x)=0$	$F(x)=k\cdot x+C$
$f(x)=x^n$	$f'(x)=n\cdot x^{n-1}$	$F(x)=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C \quad (n\neq -1)$
$f(x)=e^x$	$f'(x)=e^x$	$F(x)=e^x+C$
$f(x)=a^x$	$f'(x)=a^x\cdot \ln(a)$	$F(x)=\frac{1}{\ln(a)}a^x+C \quad (a>0, a\neq 1)$
$f(x)=\ln(x)$	$f'(x)=\frac{1}{x}$	$F(x)=x\cdot\ln(x)-x+C \quad (x>0)$
$f(x)=\sin(x)$	$f'(x)=\cos(x)$	$F(x)=-\cos(x)+C$
$f(x)=\cos(x)$	$f'(x)=-\sin(x)$	$F(x)=-\cos(x)+C$
$f(x)=\frac{1}{x}=x^{-1}$	$f'(x)=-\frac{1}{x^2}=-x^{-2}$	$F(x)=\ln\lvert x\rvert+C \quad (x\neq 0)$

د مشتق ـ او انتیګرالشمیرنو سره مخامخ کول

د ثابتي قانون

$f(x)=k\cdot u(x)$ mit $k=\text{konstant}$ $\int f(x)\,dx=\int k\cdot u(x)\,dx=k\cdot\int u(x)\,dx$ = ثابته یا همغه	$f(x)=k\cdot u(x)$ mit $k=\text{konstant}$ $\Rightarrow f'(x)=k\cdot u'(x)$ = ثابته یا همغه

بيلګه: $f(x)=3x^4 \quad k=3 \quad u(x)=x^4$ $\Rightarrow u'(x)=4x^3$ $f'(x)=k\cdot u'(x)=3\cdot 4x^3=\underline{\underline{12x^3}}$	بيلګه: $f(x)=3x^2 \Rightarrow k=3 \quad u(x)=x^2$ $\int f(x)\,dx=3\cdot\int u(x)\,dx=3\cdot\int x^2\,dx$ $=3\cdot\frac{x^3}{3}+C=\underline{\underline{x^3+C}}$
د جمعي قانون Summenregel $f(x)=u(x)\pm v(x)$ $\Rightarrow f'(x)=u'(x)\pm v'(x)$	$f(x)=u(x)\pm v(x)$ $\int f(x)\,dx=\int u(x)\,dx\pm\int v(x)\,dx$
بيلګه: $f(x)=5x^2+3x$ $u(x)=5x^2 \quad v(x)=3x$ $\Rightarrow u'(x)=10x \quad v'(x)=3$ $f'(x)=u'(x)+v'(x)=\underline{\underline{10x+3}}$	بيلګه: $f(x)=x^2+x+1$ $\int f(x)dx=\int x^2\,dx+\int x\,dx+\int 1\,dx$ $=\underline{\underline{\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x+C}}$

د مشتقشميرنې لپاره نور قوانين

د ضرب قانون: $f(x)=u(x)\cdot v(x)\Rightarrow$ in Kurzform: $\boxed{f'=u'\cdot v+u\cdot v'}$

بيلګه: دالماني پښتو: د... او... سره

$$f(x)=x\cdot e^x \text{ mit } u(x)=x \text{ und } v(x)=e^x$$

$$f'=u'\cdot v+u\cdot v'$$

$$u'(x)=1;\ v'(x)=e^x$$

$$f'(x)=1\cdot e^x+x\cdot e^x=\underline{\underline{(x+1)e^x}}$$

د وېش قانون:دالماني پښتو : په لنده بڼه:

$$f(x)=\frac{u(x)}{v(x)}$$ لاس ته اوړنه په لنده بڼه $$\boxed{f'=\frac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2}}$$

بیلګه: $f(x)=\dfrac{e^x}{x}$ د $u(x)=e^x$ او $v(x)=x$ سره

$$f'=\frac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2}$$

$$u'(x)=e^x\,;\,v'(x)=1;\,v^2=x^2$$

$$f'(x)=\frac{e^x\cdot x-e^x\cdot 1}{x^2}=\underline{\underline{\frac{(x-1)\,e^x}{x^2}}}$$

ځنځیزي قانون: د الماني پښتو: کیږ: د باندنی مشتق ښی: دننني مشتق

$$f(x)=f\left[z(x)\right]\Rightarrow f'(x)=\underbrace{f'(z)}_{\text{äußere Ableitung}}\cdot\underbrace{z'(x)}_{\text{innere Ableitung}}$$

دننني مشتق دباندنی مشتق

بیلګه: $f(x)=e^{2x}$

د $z=2x$ سره $f(z)=e^z$ لاس ته راځي

$$f'(x)=f'(z)\cdot z'(x)$$

$$f'(z)=e^z\,;\,z'(x)=2\Rightarrow f'(x)=e^z\cdot 2=\underline{\underline{2\cdot e^{2x}}}$$

تمرینونه : د مشتق تمرینونه د ضربقانون، وېش قانون، او زنځیري قاونو سره

د لاندې توابعو مشتق تاسو ته د معلومو قوانینو له مخې وشمیرئ.

اول – $f(x)=(x+a)^2-e^{2x-3}$ دویم- $f(x)=\left(1-e^{ax}\right)^2$

دریم - $f(x)=\left(e^{2x}+e^{-x}\right)^2$ خلورم - $f(x)=(x+1)e^x$

پنځم - $f(x)=(3-2x)e^{-\frac{1}{2}x}$ شپږم - $f(x)=a(x-3)e^{4x-3}$ اوم -

$f(x)=\frac{x^2+1}{e^x}$ اتم - $f(x)=\frac{e^x-1}{e^x+1}$ نهم - $f(x)=\frac{x}{x-1}$ لسم - $f(x)=\frac{1}{x}\left(x^2-4\right)$

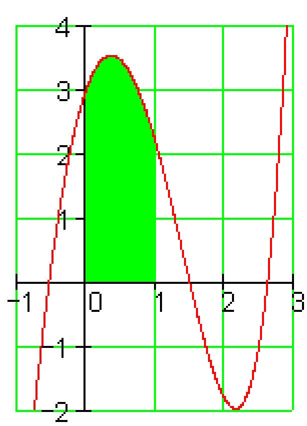
د انتیګرالشمیرنې لپاره نورې لارې یا قوانین

د انتیګرالونو پوله بدلونه:

د انتیګرېشن پولو بدلون له لارې د انتیګرال مخنخښه تغیر خوري	$\int_a^b f(x)\,dx=-\int_b^a f(x)\,dx$ oder $-\int_a^b f(x)\,dx=\int_b^a f(x)\,dx$

دا په نخښه شوې سطحه دې وشمیرل ش

$f(x):=3e^x-6x^2$



$$\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1\left(3e^x-6x^2\right)dx$$

$$=3\int_0^1 e^x\,dx-6\int_0^1 x^2\,dx=$$

$$3\int_0^1 e^x\,dx+6\int_1^0 x^2\,dx$$

$$=\left[3e^x\right]_0^1+\left[2x^3\right]_1^0$$

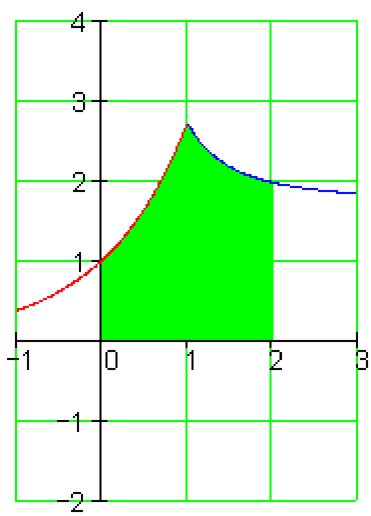
$$=3e^1-3e^0+2\cdot 0-2\cdot 1$$

$$=3e^1-5\approx 3{,}155$$

صفرانتیګرال

$\boxed{\int_a^a f(x)\,dx = 0}$	که په تاکلي اتیګرال کې کښته اوپورته پولې سره برابرې یامساوي وي، نود تاکلي انتیګرال ارزښت صفر دی.

د انتګروال جمعه

$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx}$	د ټول انتیګرال ارزښت په برخه ساحو انتیګرالونو د جمعه کوني یا یو پر بل زیاتوني له لارې منځ ته راځي.
$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{für } x < 1 \\ \dfrac{1}{x^2} + (e-1) & \text{für } x \geq 1 \end{cases}$ په نخښه شوې سطحه دې وشمیل $\int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^1 e^x\,dx + \int_1^2 \left(\frac{1}{x^2} + e - 1\right) dx$ $= \left[e^x\right]_0^1 + \left[-\frac{1}{x} + e\cdot x - x\right]_1^2$ $= e^1 - e^0 + \left[-\frac{1}{2} + 2e - 2\right] - [-1 + e - 1]$ $\approx \underline{\underline{3,937}}$	

تمرینونه: مشتق – او انتیګرالشمېرنه د **e** تابع سره.

د لاندې توابعو مشتق وشمېرئ.

اول - $f(x) = e^{-4x} - e^{4x}$ دویم - $f(x) = \frac{3}{2} e^{-5x^2 - 3x}$

دریم - $f(x) = -4e^{x}\left(e^{-x}+3\right)$ څلورم - $f(x) = -e^{t-x} - 2t\cdot e^{-tx}$

پنځم - $f(x) = t\cdot e^{2-3x} - 6e^{x^2+3}$ شپږم - $f(x) = t\left(e^{-x} - 3x^2\right)$

د لاندې توابعو انتیګرال ونیسئ او د مشتق له لارې یې تیکوالی و ازمایئ

اوم - $f(x) = \frac{1}{16}\left(x^2 - 3e^{x}\right)$ اتم - $f(x) = x^3 - 2x^2 + 4x + \frac{3}{x}$

نهم - $f(x) = t\cdot x - \frac{3}{2}e^{x} + t^2 + 2e$ لسم - $f(x) = t^2x\left(x^2 - 8x\right)$

ځوابونه:

د مشتق تمرینونه د ضربقانون، وېش قانون، او زنځیري قاونو سره

نتیجې او مفصل ځوابونه. نتیجې:

لومړی - $f(x) = (x+a)^2 - e^{2x-3} \Rightarrow f'(x) = 2\left(x + a - e^{2x-3}\right)$

دویم: $f(x) = \left(1-e^{ax}\right)^2 \Rightarrow f'(x) = -2a\cdot e^{ax}\left(1-e^{ax}\right)$

دریم: $f(x) = \left(e^{2x} + e^{-x}\right)^2 \Rightarrow f'(x) = 2\left(e^{2x} + e^{-x}\right)\cdot\left(2e^{2x} - e^{-x}\right)$

څلورم:- $f(x) = (x+1)e^{x} \Rightarrow f'(x) = (x+2)e^{x}$

پنځم: $f(x) = (3-2x)e^{-\frac{1}{2}x} \Rightarrow f'(x) = \left(x - \frac{7}{2}\right)e^{-\frac{1}{2}x}$

شپږم: $f(x) = a(x-3)e^{4x-3} \Rightarrow f'(x) = a \cdot e^{4x-3}(4x-11)$

اووم: $f(x) = \dfrac{x^2+1}{e^x} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{-x^2+2x-1}{e^x}$

اتم: $f(x) = \dfrac{e^x-1}{e^x+1} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{2e^x}{\left(e^x+1\right)^2}$

نهم: $f(x) = \dfrac{x}{x-1} \Rightarrow f'(x) = -\dfrac{1}{(x-1)^2}$

لسم: $f(x) = \dfrac{1}{x}\left(x^2-4\right) = x - \dfrac{4}{x} = x - 4x^{-1} \Rightarrow f'(x) = 1 + \dfrac{4}{x^2}$

مفصل حٔوابونه

لومړی:

د لاندې الماني پښتو: زنځیري لار یا قانو

$$f(x) = (x+a)^2 - e^{2x-3} = u(x) - v(x) \Rightarrow f'(x) = u'(x) - v'(x)$$

$$\text{Kettenregel:} \quad u(x) = (x+a)^2 \Rightarrow u'(x) = 1 \cdot 2(x+a)$$

$$v(x) = e^{2x-3} \Rightarrow v'(x) = 2 \cdot e^{2x-3}$$

$$f'(x) = 2(x+a) - 2 \cdot e^{2x-3} = \underline{\underline{2\left(x+a-e^{2x-3}\right)}}$$

دویم:

$$f(x) = \left(1-e^{ax}\right)^2 = f\left[z(x)\right] \Rightarrow f'(x) = f'(z) \cdot z'(x)$$

دننني مشتق: $z(x) = \left(1-e^{ax}\right) \Rightarrow z'(x) = -a \cdot e^{ax}$

دننني مشتق: $z(x)=\left(1-e^{ax}\right)\Rightarrow z'(x)=-a\cdot e^{ax}$

دباندنی مشتق: $f(z)=z^2\Rightarrow f'(z)=2z=2\left(1-e^{ax}\right)$

$$f'(x)=2\left(1-e^{ax}\right)\cdot\left(-a\cdot e^{ax}\right)=\underline{\underline{-2a\cdot e^{ax}\left(1-e^{ax}\right)}}$$

دريم: $f(x)=\left(e^{2x}+e^{-x}\right)^2=f\left[z(x)\right]\Rightarrow f'(x)=f'(z)\cdot z'(x)$

دننني مشتق: $z(x)=\left(e^{2x}+e^{-x}\right)\Rightarrow z'(x)=2e^{2x}-e^{-x}$

دباندنی مشتق: $f(z)=z^2\Rightarrow f'(z)=2z=2\left(e^{2x}+e^{-x}\right)$

$$f'(x)=\underline{\underline{2\left(e^{2x}+e^{-x}\right)\cdot\left(2e^{2x}-e^{-x}\right)}}$$

څلورم:

$$f(x)=(x+1)e^x=u(x)\cdot v(x)\Rightarrow f'(x)=u'v+uv'$$

$$u=(x+1);\ u'=1;\ v=e^x;\ v'=e^x$$

$$f'(x)=1\cdot e^x+(x+1)e^x=\left[1+(x+1)\right]e^x=\underline{\underline{(x+2)e^x}}$$

پنځم:

$$f(x)=(3-2x)e^{-\frac{1}{2}x}=u(x)\cdot v(x)\Rightarrow f'(x)=u'v+uv'$$

$$u=(3-2x);\ u'=-2;\ v=e^{-\frac{1}{2}x};\ v'=-\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}$$

$$f'(x)=-2\cdot e^{-\frac{1}{2}x}+(3-2x)\cdot\left(-\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}\right)=-2\cdot e^{-\frac{1}{2}x}-\frac{1}{2}(3-2x)\cdot e^{-\frac{1}{2}x}=$$

$$=\underline{\underline{\left(x-\frac{7}{2}\right)e^{-\frac{1}{2}x}}}$$

شپږم:

$$f(x)=a(x-3)e^{4x-3}=u(x)\cdot v(x)\Rightarrow f'(x)=u'v+uv'$$
$$u=a(x-3);\ u'=a;\ v=e^{4x-3};\ v'=4e^{4x-3}$$
$$f'(x)=a\cdot e^{4x-3}+a(x-3)\cdot 4e^{4x-3}=\underline{\underline{a\cdot e^{4x-3}(4x-11)}}$$

اووم:

$$f(x)=\frac{x^2+1}{e^x}=\frac{u(x)}{v(x)}\Rightarrow f'(x)=\frac{u'v-uv'}{v^2}$$
$$u=x^2+1;\ u'=2x;\ v=e^x;\ v'=e^x;\ v^2=e^x\cdot e^x$$
$$f'(x)=\frac{2x\cdot e^x-(x^2+1)e^x}{e^x\cdot e^x}=\underline{\underline{\frac{-x^2+2x-1}{e^x}}}$$

اتم:

$$f(x)=\frac{e^x-1}{e^x+1}\Rightarrow f'(x)=\frac{u'v-uv'}{v^2}$$
$$u=e^x-1;\ u'=e^x;\ v=e^x+1;\ v'=e^x;\ v^2=(e^x+1)^2$$
$$f'(x)=\frac{e^x(e^x+1)-(e^x-1)e^x}{(e^x+1)^2}=\frac{e^x[(e^x+1)-(e^x-1)]}{(e^x+1)^2}=\underline{\underline{\frac{2e^x}{(e^x+1)^2}}}$$

نهم:

$$f(x)=\frac{x}{x-1}\Rightarrow f'(x)=\frac{u'v-uv'}{v^2}$$
$$u=x;\ u'=1;\ v=x-1;\ v'=1;\ v^2=(x-1)^2$$
$$f'(x)=\frac{1\cdot(x-1)-x\cdot 1}{(x-1)^2}=\underline{\underline{-\frac{1}{(x-1)^2}}}$$

لسم:

$$f(x) = \frac{1}{x}\left(x^2 - 4\right) = x - \frac{4}{x} = x - 4x^{-1}$$

$$f'(x) = 1 - \left(-1 \cdot 4x^{-2}\right) = \underline{\underline{1 + \frac{4}{x^2}}}$$

ځوابونه

د کور د e - تابعو مشتق او انتیګرالونه I

نتیجې او مفصل ځوابونه . نتیجې:

لومړی:

$$f(x) = e^{-4x} - e^{4x} \Rightarrow f'(x) = -4e^{-4x} - 4e^{4x} = \underline{\underline{-4\left(e^{-4x} + e^{4x}\right)}}$$

دویم:

$$f(x) = \frac{3}{2}e^{-5x^2-3x} \Rightarrow f'(x) = \underline{\underline{\frac{3}{2}(-10x-3)\,e^{-5x^2-3x}}}$$

دریم :

$$f(x) = -4e^{x}\left(e^{-x} + 3\right) = -4\underbrace{e^{x} \cdot e^{-x}}_{1} - 12e^{x} = -4 - 12e^{x} \Rightarrow f'(x) = \underline{\underline{-12e^{x}}}$$

څلورم:

$$f(x) = -e^{t-x} - 2t \cdot e^{-tx} \Rightarrow f'(x) = \underline{\underline{e^{t-x} + 2t^2 \cdot e^{-tx}}}$$

پنځم:

$$f(x) = t \cdot e^{2-3x} - 6e^{x^2+3} \Rightarrow f'(x) = \underline{\underline{-3t \cdot e^{2-3x} - 12x \cdot e^{x^2+3}}}$$

شپږم:

$$f(x) = t\left(e^{-x} - 3x^2\right) = t \cdot e^{-x} - 3t \cdot x^2 \Rightarrow f'(x) = -t \cdot e^{-x} - 6t \cdot x = \underline{\underline{-t\left(e^{-x} + 6x\right)}}$$

اووم:

$$f(x) = \frac{1}{16}\left(x^2 - 3e^{x}\right) \Rightarrow F(x) = \frac{1}{16}\int\left(x^2 - 3e^{x}\right)dx = \underline{\underline{\frac{1}{16}\left[\frac{1}{3}x^3 - 3e^{x}\right] + C}}$$

$$F'(x) = \frac{1}{16}\left(x^2 - 3e^{x}\right) = f(x)$$

اتم:

$$f(x)=x^3-2x^2+4x+\frac{3}{x}\Rightarrow F(x)=\int\left(x^3-2x^2+4x+\frac{3}{x}\right)dx$$

$$=\underline{\underline{\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3+2x^2+3\cdot\ln|x|+C}}$$

$$F'(x)=x^3-2x^2+4x+3\cdot\frac{1}{x}=f(x)$$

نهم:

$$f(x)=t\cdot x-\frac{3}{2}e^x+t^2+2e\Rightarrow F(x)=\int\left(t\cdot x-\frac{3}{2}e^x+t^2+2e\right)dx$$

$$=\underline{\underline{\frac{1}{2}t\cdot x^2-\frac{3}{2}e^x+t^2\cdot x+2e\cdot x+C}}$$

$$F'(x)=t\cdot x-\frac{3}{2}e^x+t^2+2e=f(x)$$

لسم:

$$f(x)=t^2x\left(x^2-8x\right)=t^2\left(x^3-8x^2\right)\Rightarrow F(x)=t^2\int\left(x^3-8x^2\right)dx=$$

$$\underline{t^2\left(\frac{1}{4}x^4-\frac{8}{3}x^3\right)+C}$$

$$F'(x)=t^2\left(x^3-8x^2\right)=t^2x\left(x^2-8x\right)=f(x)$$

مفصل ځوابونه:

لومړی:

$$f(x)=e^{-4x}-e^{4x}\Rightarrow f'(x)=-4e^{-4x}-4e^{4x}=\underline{\underline{-4\left(e^{-4x}+e^{4x}\right)}}$$

مشتق د ضرب قانون له مخې مخ ته بيول کيږي

دويم:

$$f(x)=\frac{3}{2}e^{-5x^2-3x}\Rightarrow f'(x)=(-10x-3)\cdot\frac{3}{2}\cdot e^{-5x^2-3x}$$
$$=\frac{3}{2}(-10x-3)e^{-5x^2-3x}=\underline{\underline{-\frac{3}{2}(10x+3)e^{-5x^2-3x}}}$$

دریم:

$$f(x)=-4e^x\left(e^{-x}+3\right)=-4\cdot e^x\cdot e^{-x}-4\cdot 3\cdot e^x$$
$$=-4\cdot e^{x-x}-12\cdot e^x=-4\cdot e^0-12\cdot e^x$$
$$=-4-12\cdot e^x\Rightarrow f'(x)=\underline{\underline{-12e^x}}$$

څلورم:

$$f(x)=-e^{t-x}-2t\cdot e^{-tx}\Rightarrow f'(x)=(-1)\left(-e^{t-x}\right)-\left(-t\cdot 2t\cdot e^{-tx}\right)$$
$$=\underline{\underline{e^{t-x}+2t^2\cdot e^{-tx}}}$$

پنځم:

$$f(x)=t\cdot e^{2-3x}-6e^{x^2+3}\Rightarrow f'(x)=-3t\cdot e^{2-3x}-2x\cdot 6e^{x^2+3}$$
$$=\underline{\underline{-3t\cdot e^{2-3x}-12x\cdot e^{x^2+3}}}$$

شپږم:

$$f(x)=t\left(e^{-x}-3x^2\right)=t\cdot e^{-x}-3t\cdot x^2$$
$$\Rightarrow f'(x)=-t\cdot e^{-x}-2\cdot 3t\cdot x=-t\cdot e^{-x}-6t\cdot x=\underline{\underline{-t\left(e^{-x}+6x\right)}}$$

اووم:

$$f(x) = \frac{1}{16}\left(x^2 - 3e^x\right)$$

$$\Rightarrow F(x) = \int \frac{1}{16}\left(x^2 - 3e^x\right) dx = \frac{1}{16}\int\left(x^2 - 3e^x\right) dx = \underline{\underline{\frac{1}{16}\left[\frac{1}{3}x^3 - 3e^x\right] + C}}$$

$$F'(x) = \frac{1}{16}\left(3\cdot\frac{1}{3}x^2 - 3e^x\right) = \frac{1}{16}\left(x^2 - 3e^x\right) = F(x)$$

اتم:

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + 4x + \frac{3}{x}$$

$$\Rightarrow F(x) = \int\left(x^3 - 2x^2 + 4x + \frac{3}{x}\right) dx = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{4}{2}x^2 + 3\cdot\ln|x| + C$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + 2x^2 + 3\cdot\ln|x| + C}}$$

$$F'(x) = x^3 - 2x^2 + 4x + 3\cdot\frac{1}{x} = f(x)$$

یادونه: $\int\frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C \text{ und } f(x) = \ln|x| \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$

نهم:

$$f(x) = t\cdot x - \frac{3}{2}e^x + t^2 + 2e$$

$$\Rightarrow F(x) = \int\left(t\cdot x - \frac{3}{2}e^x + t^2 + 2e\right) dx = \underline{\underline{\frac{1}{2}t\cdot x^2 - \frac{3}{2}e^x + t^2\cdot x + 2e\cdot x + C}}$$

$$F'(x) = \frac{2}{2}t\cdot x - \frac{3}{2}e^x + t^2 + 2e = t\cdot x - \frac{3}{2}e^x + t^2 + 2e = f(x)$$

لسم:

$$f(x) = t^2x\left(x^2-8x\right) = t^2\left(x^3-8x^2\right)$$

$$\Rightarrow F(x) = t^2\int\left(x^3-8x^2\right)dx = \underline{\underline{t^2\left(\frac{1}{4}x^4-\frac{8}{3}x^3\right)+C}}$$

$$F'(x) = t^2\left(\frac{4}{4}x^3-3\cdot\frac{8}{3}x^2\right) = t^2\left(x^3-8x^2\right) = t^2x\left(x^2-8x\right) = f(x)$$

اتم: ناپرېکيدنوالی يا متماديت، مشتق وړوالی او انتيګرالوړوالی

د ناپرېکيدنوالي يا متمادين کلمه دې ليدوړ روښانه يا تشريح شي.

يو تابع **f(x)** هلته په يوه انتروال [a ; b] کې متمادي يا ناپرېکيدونکی دی، که چيرې خوک وکړای شي، چې د تابع ګراف د انتروال له يوه سر څخه تر بله سره پورې داسې وکښلای شي، چې د پنسل څوکه له ځايه پورته کيدو ته اړ نه شي.

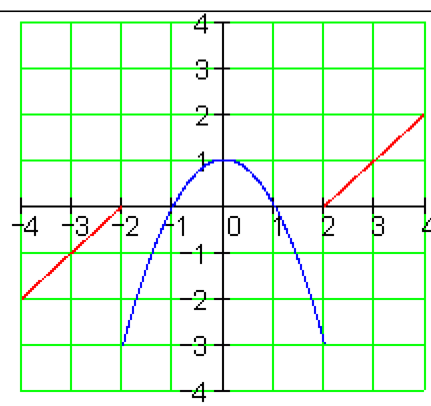
يا که چيرې تابع **f(x)** د ګراف ټکي د يوه انتروال [a ; b] په دننه کې بې له کندلو يا نښلولو يو بل سره نښتي وي، بې له دې چې کوم ټوپونه ترې رامنځ ته شي، نو بيا تابع f(x) په انتروال [a ; b] کې ناپرېکيدونکې يا متمادي دی.

بيلګه:

مورږ سره يوځای اينول شوېې تابع څيړو

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{für } -\infty < x < -2 \\ -x^2+1 & \text{für } -2 \le x \le 2 \\ x-2 & \text{für } 2 < x < \infty \end{cases}$$

په ځايونو $x_1 = -2$ او $x_2 = 2$ کې د f(x) ګراف ټوپونه کوي ياښايي.
په دې ځايونو کې f(x) پرېکيدونک يا نامتمادي دی.



-----...

د متمادي يا ناپرېکيدونکو توابعو لپاره بيلګې:

هر ټولراشنل تابع په خپل تعريفورشو ناپرېکيدونکی دی.

هر مات-يا کسري تابع په خپل تعريفورشو ناپرېکيدونکی دی.(يعني فقط هلته پرېکيدونکی دی، چيرته چې ماتلاندي يا مخرج صفرځيونه لري، ځکه چې هلته تابع تعريف نه ده).

د طبيعي پوهنو ټولګيزي يا کلاسيکي څېرنو لپاره باورلري: طبيعت ټوپونه نه وهي.

د وخت سره د نباتاتو او نورو ژونديو وده.

له دې امله ټولې طبيعي پېښې ناپريکيدونکې يا متمادي ځغلي.په يوه بخار دېګ کې د تودوخې جګوالی.

پرېکيدونکې يا نامتمادي(ټوپلوله) تغيرات هم شته لکه د پوست قيمت جګيدل يا د شيانو په نرخ کې ارزاني.

د ناپرېکيدنوالي يا متماديت شميرپوهنيز تعريف ياپيژند:

د f(x) تعريفدېرئ يا ـــسټ دې D_f وي او ارزښتدېرئ يئ W_f .
تابع f(x) د $x = x_0$ په ځای کې د $x_0 \in D_f$ سره ټيک هلته ناپرېکيدونکې يا متمادي ده، که

← تابع ارزښت $f(x_0)$ شتون لري، دا په دې معنا چې $f(x_0) \in W_f$ ،

← د $x = x_0$ لپاره د f(x)پوله ارزښت شتون لري

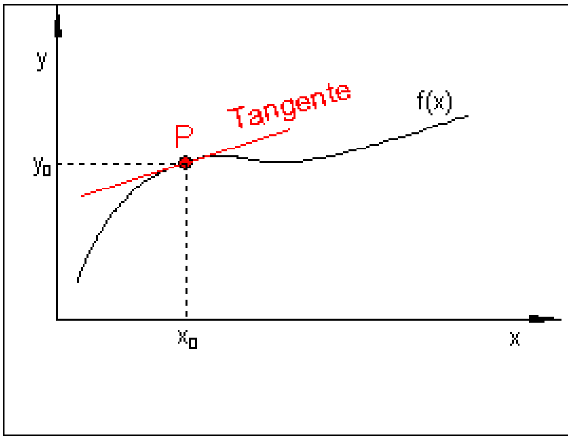
او د يوه ټاکلي عدد g سره برابر دی او که

← $f(x_0) = g$ باور ولري.

که له دې شرايطو فقط يو هم پوره نه وي، نو بيا تابع f(x) د $x = x_0$ په ځای کې پرېکيدونکې يا نامتمادي دی.

مشتقوړوالی(رابيليدوړوالی)

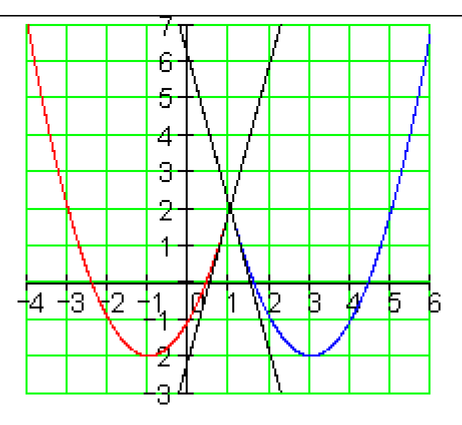
موږ لومړی د يوه فنکشن مشتقوړوالی فقط ليدنيز راوړو



بيلګه: د لومړی مشتق د x_0 په ځای کي د فنکشن جګوالی راکوي، چي د فنکشن ګراف په ټکي $P_0\ (\ x_0\ |\ y_0\ )$ کي لمسوي ا و له دي سره په همدي وخت کي په ټکي $P_0\ (\ x_0\ |\ y_0\ )$ کي د فنکشنګراف جګوالی دی. سږی د فنکشن جګيدنه هم وايي. له دي لاس ته راوړنو سره تابع د x_0 په ځای کي تيک هلته مشتقوړه، که يو يواځنی جګوال شتون ولري

د x_0 په ځای کي د يوه فنکشن مشتقوړوالي شرطونه:
فنکشن بايد دx_0 په ځای کي ناپرېکيدونکي وي.

دا شرط اړين دی مګر نه پوره کيدونکی، لکه چي لاندي بيلګه بنايي.



بيلګه: دا ترڅنګ څيرونه(فنکشن) د د فنکشن ګراف د $f(x)$

$f(x)=\begin{cases} x^2+2x-1 \\ x^2-6x+7 \end{cases}$	د $x<1$ لپاره د $x\geq 1$ لپاره

سره بنايي.

په ټکي $(1,2)$ کي يواځنی تانجنت شتون نه لري

$$t_1(x) = 4x - 2$$

$$t_2(x) = -4x + 6$$

بيلګه: فنکشن $f(x)$ په $x = 1$ کې متمادي يا ناپرېکيدونکی دی، هلته ټوپ نه شته.

مګر موږ په ټکي $P(1 | 2)$ کې دوه مختلف تانجنتونه لرو. دا په دې معنا چې د $x = 1$ لپاره هم دوه مختلف د تانجنتونو جګوالی لرو، يعني دوه مشتقونه يا رابيليدنې.

دا په دې معنا مشتقفنکشن په $x = 1$ ځای کې يواځنی نه دی.

دا په ځان پسې لري، چې فنکشن $f(x)$ په $x = 1$ ځای کې مشتقوړ نه دی.

ليدنيز يا د ليدلو له مخې دا په دې معنادی چې:

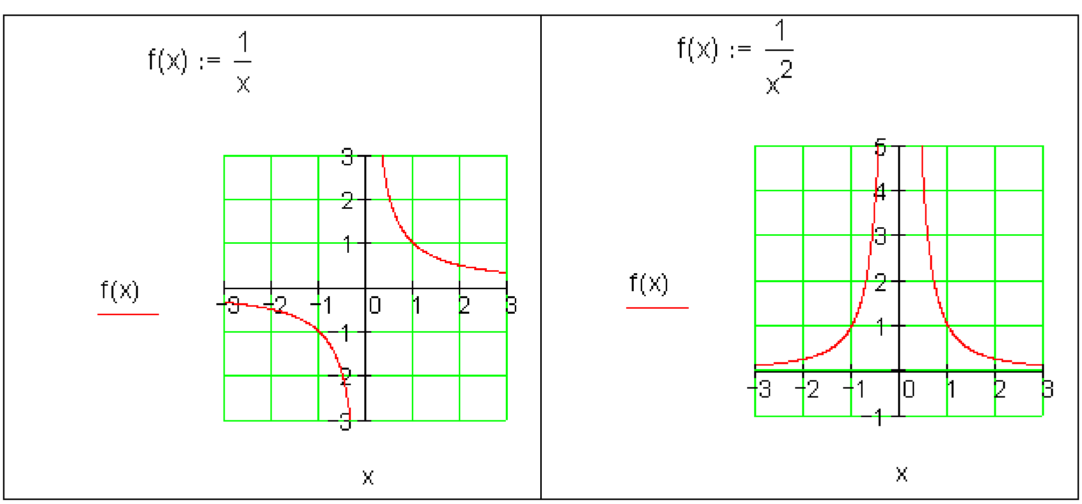
يو فنکشن $f(x)$ د x_0 په ځای کې مشتقوړ يا رابيليدوړدی، که په دې ځای کې يې مشتق يا رابيليدنه يواځنی وي، يعني ټيک يو تانجنت شتون ولري.

سړی دا هم ويلی شي، هغه ځای کې چې ګراف څوکه ولري يا را مات شوی يعني ګوډ ولري(را مات وي) ، فنکشن وشتقوړ نه دی.

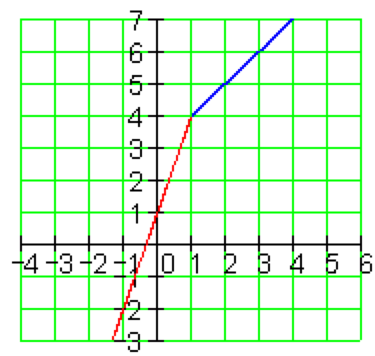
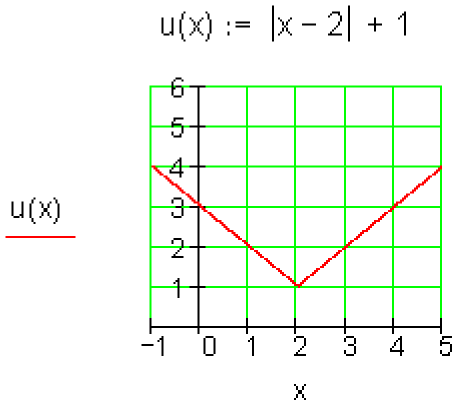
په څټ (برعکس) دا د ناپرېکيدنې يا متماديت لپاره په دې معنادی:

که فکشن د x_0 په ځای کې مشتقوړ وي، نو دا هلته ناپرېکيونکی يا متمادي هم دی.

نورې



دواړه فنکشنونه، که غوټرۍ توابع، د په ځای کې مشتقوړ نه دي، ځکه چې دا هلته تعریف نه دي یا پیژند نه لري.

 د x_0 په ځای کې فنکشن په حقیقت کې ناپرېکیدونکی دی، مګر مشتقوړ نه دی(ګود لري یا مات دی)	 دx_0 په ځای کې په حقیقت کې یا په رینتیني ناپرېکیدونکی یا متمادي دی، مګر مشتق نه شته (څوکه)

د مشتقوړوالي شمیرپوهنیز پیژند یا تعریف:

ښی ناپرېکیدونکي پوله	کینه ناپرېکیدونکي پوله
د کمبنتوپش فنکشن	د کمبنتوپش فنکشن
$\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ für $x > x_0$	$\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ für $x < x_0$

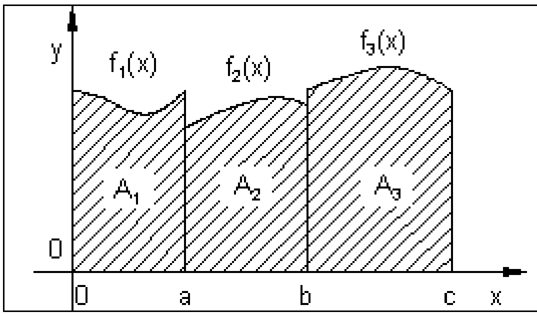
که د کین اړخ او د ښي اړخ کمبنتوپش فنکشنونه سره برابر وي، نو $f(x)$ د x_0 په ځای کې مشتقوړ دی.

بیا نو یو مشتق$f'(x_0)$ شتون لري ، د تانجنت جګوالی د ګراف په ټکي($x_0;\ f(x_0)$) کې.

انتیګرالورِوالی:

تابع انتیګرالوړ دی، که دا لږ تر لږه توټه ډېرله یا توټه په توټه متمادي یا ناپرېکیدونکی وي.

بېلګه:



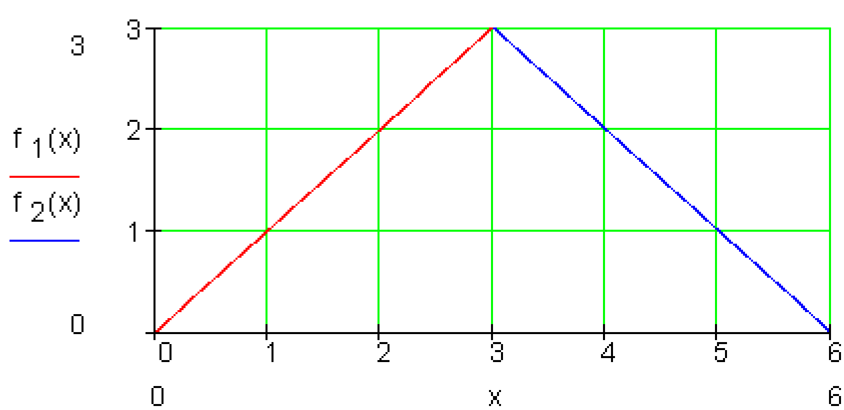
کرښه شوې سطحه دې پیدا شي

$$A = A_1 + A_2 + A_3$$

$$= \int_0^a f_1(x)\,dx + \int_a^b f_2(x)\,dx + \int_b^c f_3(x)\,dx$$

د درې ګوډي یا مثلث سطحه غواړو پیدا کړو.

$$f(x) = \left\{ \begin{matrix} f_1(x) = x \text{ für } (0 \le x < 3) \\ f_2(x) = -x + 6 \text{ für } (3 \le x \le 6) \end{matrix} \right\}$$



$$A = \int_0^6 f(x)\,dx = \int_0^3 f_1(x)\,dx + \int_3^6 f_2(x)\,dx$$

$$= \int_0^3 x\,dx + \int_3^6 (-x+6)\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^3 + \left[-\frac{x^2}{2} + 6x\right]_3^6$$

$$= \frac{3^2}{2} - \frac{0^2}{2} + \left[\left(-\frac{6^2}{2} + 6\cdot 6\right) - \left(-\frac{3^2}{2} + 6\cdot 3\right)\right] = \underline{\underline{9\,FE}}$$

(پورته FE د سطحې یوون یا واحد)

سره له دې ې تابع د (3 | 3) P په ځای کې مشتقوړ یا رابیلیدوړ نه دی، کیدی شي سطحه له دوه برخ –انتیګرالونو پیدا شي.

توابع، چې بې د بدلون له لارې حل کیږي لکه لاندې بلګه:

بیلګه:

عواړو د $f(x)=e^x$ مشتق پیدا کړو. دا مشتق په ساده ډول پیدا کولي شو، یعنې لرو:

$$f(x)=e^x \Rightarrow F(x)=\int f(x)dx = \int e^x dx = e^x + C$$

ګورو، چې $F'(x)=e^x = f(x)$ دی.

که ولرو: $f(x)=e^{2x}$ او د پورته په څیر لاړ شو، نو لاس ته به ترې راشي:

$$f(x)=e^{2x} \Rightarrow F(x)=\int f(x)dx = \int e^{2x}dx \neq e^{2x} + C$$

وي $F(x)=e^{2x}+C$ **دی، که** $F'(x)=2e^{2x} \neq f(x)$

له دې امله د بدلون قانون ته اړیو:

د ناټاکلو انتیګرالونو حل د بدلون له لارې

تراوسه مو فقط د هغو انتیګرالونو پوښتنې ځواب کړې، چې د اده توابعو مشتق باندې بیرته اړول کیده. دا سې له دې لارې لاسته رغلي بنسټ انتیګرالونو د نورو ټول حلونو

بنسټ کیږي. د بنسټ انتیګرالونو کارونه یا استعمال تل شونی نه دی، لکه لاندې بېلګه چې ښايي.

بېلګه: د $f(x)=e^{2x}$ تابع انتیګرال ونیسئ

$$f(x)=e^{2x} \Rightarrow F(x)=\int f(x)dx=\int e^{2x}dx=?$$

بدلون : $u(x)=2x=u$

جوړ کړئ: $u'(x)=\dfrac{du}{dx}=2 \Rightarrow dx=\dfrac{du}{2}$

$$\int f(x)dx=\int e^{u}\frac{du}{2}=\frac{1}{2}\int e^{u}du=\frac{1}{2}e^{u}+C$$

د بدلون برعکس: $\dfrac{1}{2}e^{u}+C=\dfrac{1}{2}e^{2x}+C$

نو لرو: $F(x)=\int(x)dx=\int e^{2x}dx=\dfrac{1}{2}e^{2x}+C$

ازمايښت: $F(x)=\dfrac{1}{2}e^{2x}+C \Rightarrow F'(x)=\dfrac{1}{2}e^{2x}\cdot 2=e^{2x}=f(x)$

بېلګه : وښایئ چې باور لري.

$$.f(x)=(x+1)^{2} \Rightarrow F(x)=\int f(x)dx=\int(x+1)^{2}dx$$

بدلون $u(x)=x+1=u$ جوړ کړئ

$$u'(x)=\frac{du}{dx}=1 \Rightarrow dx=\frac{du}{1}$$

$$\int f(x)dx=\int u^{2}\frac{du}{1}=\int u^{2}du=\frac{u^{3}}{3}+C$$

بیرته- یا په ځټ بدلون: $\dfrac{u^{3}}{3}+C=\dfrac{(x+1)^{3}}{3}+C$

نو: $\int(x)dx=\int(x+1)^{2}dx=\underline{\underline{\dfrac{(x+1)^{2}}{3}+C}}$

بېلګه :

و ښايي چې باور لري:

$$f(x)=(3x+6)^3 \Rightarrow F(x)=\int f(x)dx=\int (3x+6)^3dx$$

بدلون: $u(x)=3x+6=u$

جوړوو: $u'(x)=\frac{du}{dx}=3 \Rightarrow dx=\frac{du}{3}$

$$\int f(x)dx=\int u^3\frac{du}{3}=\frac{1}{3}\int u^3du=\frac{u^4}{12}+C$$

بېرته بدلون: $\frac{u^4}{12}(3x+6)^4+C$

نو لرو: $\int (x)dx=\int (3x+6)^3dx=\underline{\underline{\frac{1}{12}(3x+6)^4+C}}$

بېلګه :

$$f(x)=x\cdot\ln\left(x^2\right)\Rightarrow F(x)=\int f(x)\,dx=\int\left(x\cdot\ln\left(x^2\right)\right)dx=?$$

بدلون : $u(x)=x^2=u$

جوړوو: $u'(x)=\frac{du}{dx}=2x\Rightarrow dx=\frac{1}{2x}du$

$$\int f(x)\,dx=\int x\cdot\ln(u)\cdot\frac{1}{2x}du=\frac{1}{2}\int\ln(u)\,du=\frac{1}{2}\left[u\cdot\ln(u)-u+C\right]=\frac{1}{2}u\cdot\ln(u)-\frac{1}{2}u+C$$

بېرته بدلون: $\frac{1}{2}u\cdot\ln(u)-\frac{1}{2}u+C=\frac{1}{2}x^2\cdot\ln\left(x^2\right)-\frac{1}{2}x^2+C$

نو لرو: $\int(x)\,dx = \int\left(x\cdot \ln\left(x^2\right)\right)dx = \underline{\underline{\frac{1}{2}x^2\cdot \ln\left(x^2\right)-\frac{1}{2}x^2+C}}$

د ټاکلو انتيګرالونو حل د بدلون له لارې:

ټاکلي انتيګرالونه هم د بدلون له لارې حل کيږي.

بيلګه :

وښاياست:

$$f(x)=e^{2x}\quad \Rightarrow F(x)=\int_{-1}^{1}e^{2x}dx$$

د انتيګرال حل د بدلون له لارې:

۱ – بدلون $u(x)=2x$

۲ – د dx په ځای کيږدی

$$u'(x)=\frac{du}{dx}=2\quad \Rightarrow dx=\frac{1}{2}du$$

۳ – د پولو بدلون

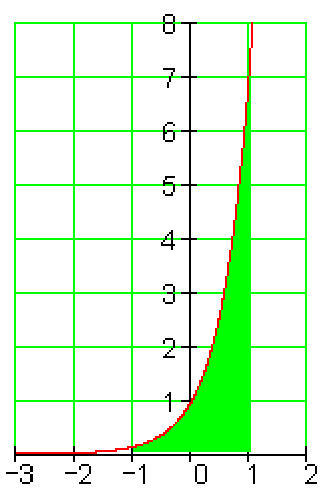
- لاندې پوله $u(-1)=-2$

- پورته پوله $u(1)=2$

۴ - په انتيګرال کې ځا په ځای کړی

$$\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}e^{u}du=\frac{1}{2}\left[e^{u}\right]_{-2}^{2}=\frac{1}{2}\left[e^{2}-e^{-2}\right]=\underline{\underline{3.627}}$$

$f(x) := e^{2\cdot x}$



بيلګه :

$$f(x)=2x\cdot \ln(x^2)\quad \Rightarrow F(x)=\int_{1}^{2}2x\cdot \ln(x^2)dx$$

د انتيګرال حل د بدلون له لارې

۱ – بدلون $u(x) = x^2$

۲ – د ځای په په ځای کونه

$$u'(x) = \frac{du}{dx} = 2x \quad \Rightarrow dx = \frac{1}{2x}du$$

۳ – د پولي بدلون

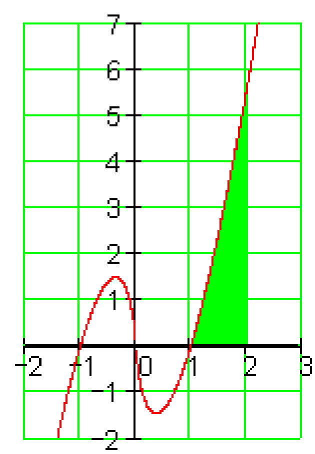
- لاندې پوله $u(1) = 1$
- پورته پوله $u(2) = 4$

۴ – په انتيګرال کې ځای په ځای کړی

$$\int_1^4 2x \cdot \ln(u) \cdot \frac{1}{2x} du = \int_1^4 \ln(u) du = [u \cdot \ln(u) - u]_1^4$$

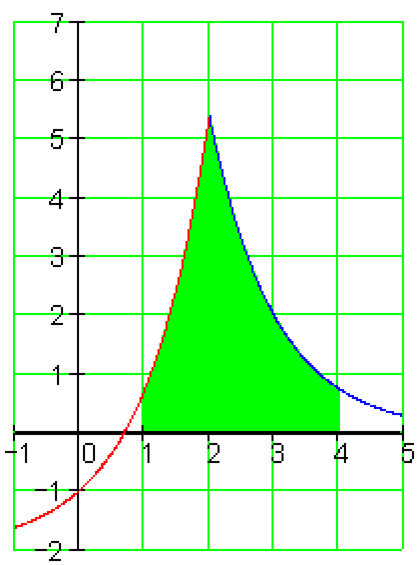
$$= [4 \cdot \ln(4) - 4] - [1 \cdot \ln(1) - 1] \approx \underline{\underline{2.545}}$$

$$f(x) := 2x \cdot \ln(x^2)$$



بیلګه :

$f(x) = \begin{cases} e^x - 2 \\ (e^2 - 2)e^{-(x-2)} \end{cases}$	د $x < 2$ له پاره د $x \geq 2$ له پاره



$$A = \underbrace{\int_1^2 \left(e^x - 2\right) dx}_{I_1} + \underbrace{\int_2^4 \left(e^2 - 2\right) e^{-(x-2)}\, dx}_{I_2}$$

$$I_1 = \int_1^2 \left(e^x - 2\right) dx = \left[e^x - 2x\right]_1^2 = e^2 - e - 2$$

$$I_2 = \left(e^2 - 2\right) \int_2^4 e^{-(x-2)}\, dx$$

$$u(x) = -(x-2) = -x + 2$$

$$\frac{du}{dx} = -1 \Rightarrow dx = -du;\ u(2) = 0;\ u(4) = -2$$

$$I_2 = -\left(e^2 - 2\right) \int_0^{-2} e^u\, du = \left(e^2 - 2\right) \int_{-2}^0 e^u\, du$$

$$= \left(e^2 - 2\right) \cdot \left[e^u\right]_{-2}^0 = e^2 + 2e^{-2} - 3$$

$$I = I_1 + I_2 = e^2 - e - 2 + e^2 + 2e^{-2} - 3 = \underline{\underline{7{,}331}}$$

ټوټه انټيګرالونه Partialy Integration

ټوټه انټيګرالونه، چې ضرب انټيګرالونه هم بلل کيږي، په انټيګرالشميرنه کې د لومړنيو توابعو ټاکلو يا شميرلو لپاره امکان دی. دا کيدی شي د مشتقشميرنې د برعکسکونې په څير وګڼل شي.

د ټوټه انټيګرالونې له پاره لاندې قانون کارول کيږي، چې د متمادي (نه پرېکيدونکي) توابعو f او g له پاره باور لري:.

$$\int_a^b f(x) \cdot g'(x)\, \mathrm{d}x = \left[f(x) \cdot g(x)\right]_a^b - \int_a^b f'(x) \cdot g(x)\, \mathrm{d}x.$$

دا قانون تيک هلته ګټور دی، که د f مشتقنيولو سره يو ساده تابع منځ ته راځي.

د ضرب قانون (د ضرب مشتقنيونې) څخه لرو:

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$u' \cdot v = (u \cdot v)' - u \cdot v'$$

له دې څخه لاس ته راځي:

$$\int u' \cdot v = \int (u \cdot v)' - \int u \cdot v'$$

$$\int u' \cdot v = u \cdot v - \int u \cdot v'$$

په دې پسې د ټاکلي انتيګرال لپاره باور لري:

$$\int_a^b f(x) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x = f(b) \cdot g(b) - f(a) \cdot g(a) - \int_a^b f'(x) \cdot g(x)\,\mathrm{d}x$$

يا همدغسې، لکه په زياتو رياضي کتابونو کې چې پيداکيږي.

$$\int_a^b f(x) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x = [f(x) \cdot g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x) \cdot g(x)\,\mathrm{d}x.$$

د دې مخ ته حدونو يا ترمونو لپاره ګتور دی، چې لومړی ځان په ناټاکلي انتيګرال محدود کړو، چې دا نا اړينو حدونو څخه چې ليد مو رابندوي، ازاد يو.

بيلګه:
د بيلګې په توګه لاندی انتيګرال شميرو.

$$\int x \cdot \ln(x)\,\mathrm{d}x$$

يو ساده انتيګراليدونکې تابع $g'(x)$ او همداسی يو ساده مستقکيدونکي تابع $f(x)$ لټوو. نيسو چې $f(x) = \ln(x)$ او $g'(x) = x$ ، ځکه چې د $\ln(x)$ انتيګرالونه نوې $\ln(x)$ راکوي. اوس د $f(x)$ مشتق نيسو)مشتق کوو) او انتيګرالوو، نو لرو:

$$f'(x) = \frac{1}{x} \text{ او } g(x) = \frac{x^2}{2}.$$

له دې څخه اوس دالاندې فرمول لاس ته راځي:

$$\int x \cdot \ln(x)\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} \cdot \ln(x) - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} \cdot \ln(x) - \frac{x^2}{4}$$

بدیل لیکبڼه:

اوس دی u او v په خوښه توابع وي. U او V دې د u او V لومړني توابع وي ، او همداسې دې u' او v' د u او v مشتقونه وي.

u تابع ده، چې د مشتق نیولو له پاره لومړیتوب لري، v تابع ده چې د انتیګرالونې له پاره لومړیتوپ لري. نو باورلري:

$$\int_a^b u(x) \cdot v(x)\,\mathrm{d}x = u(b) \cdot V(b) - u(a) \cdot V(a) - \int_a^b u'(x) \cdot V(x)\,\mathrm{d}x$$
$$= [u(x) \cdot V(x)]_a^b - \int_a^b u'(x) \cdot V(x)\,\mathrm{d}x$$

ټوټه انتیګرالونې لار(طریقې)

د ټوټه انتیګرالونې ګټور استعمال له پاره مختلف معیاري چلول شته.

بیلګه :

کله کله کیدی شي ګټور وي، چې د مساوات ښی لور ته ټوټه انتیګرال د څو واره انتیګرالونې وروسته بیرته راوګرځي، چې د په ورته بڼه د اصلي یا پخواني کیڼ لور انتیګرال سره یوځای کولی شو.

$$\int \sin(x) \cdot \cos(x)\,\mathrm{d}x$$

که کیږدو $f(x) = \cos(x)$ او $g'(x) = \sin(x)$ ، نو ترې لرو:

$$f'(x) = -\sin(x) \text{ او } g(x) = -\cos(x)$$

او لاس ته ترې راځي

$$\int \sin(x) \cdot \cos(x)\,\mathrm{d}x = [-\cos^2(x)] - \int \sin(x) \cdot \cos(x)\,\mathrm{d}x.$$

که دواړو لورو ته وتون انتیګرال ورزیات کړو، نو راکوي:

$$2\int \sin(x)\cdot\cos(x)\,\mathrm{d}x = -\cos^2(x)$$

که واړه لورې په 2 وویشل شي، نو بالاخره لاس ته ترې راځي:

$$\int \sin(x)\cdot\cos(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\cdot\cos^2(x) + C$$

بېلګه ۲ :

د ځنو انتیګرالونو سره داسي لاس ته راوړنه لرو، چي: که د g'(x) له پاره یو ترم وټاکو چي په انتیګرالوني کی هیڅ یا کو تغیر خوري، لکه د بېلګې په توګه اکسپوننشل تابع او یا مثلثاتي توابع. نو کیدی شي دا بل ترم ،،له منځه یوورل شي،،.

$$\int e^x\cdot(2-x^2)\,\mathrm{d}x$$

که هر ځل ex = g'(x) کېږدو او د f(x) له پاره، د انتیګرال لاندی ترم ، نو ترې لاس ته راځي:

$$\begin{aligned}\int e^x\cdot(2-x^2)\,\mathrm{d}x &= [e^x\cdot(2-x^2)] - \int e^x\cdot(-2x)\,\mathrm{d}x\\ &= [e^x\cdot(2-x^2)] + [e^x\cdot 2x] - \int 2\cdot e^x\,\mathrm{d}x\\ &= [e^x\cdot(2-x^2)] + [e^x\cdot 2x] - [2\cdot e^x]\\ &= [e^x\cdot(2-x^2+2x-2)]\\ &= [e^x\cdot(2x-x^2)] + C\end{aligned}$$

بېلګه ۳ :

که له انتیګرال لاندي فقط یو ترم ولرو، چي د هغه لومړنی تابع بې له جدول ارزښت ځخه پاي ته نه رسیږي(نه پایول کیږي)(نه ختمیږي) کیدی شي کله کله د ورزیاتوني له لارې(ناڅرګند شته) ضریب "1" توته انتیګرال شي.

$$\int \ln(x)\,\mathrm{d}x = \int 1\cdot\ln(x)\,\mathrm{d}x = \int g'(x)\cdot\ln(x)\,\mathrm{d}x$$

که $f(x) = \ln(x)$ او $g'(x) = 1$ کیږدو، نو لاس ته ترې راوړی شو

$$\begin{aligned}\int 1 \cdot \ln(x)\,\mathrm{d}x &= x \cdot \ln(x) - \int x \cdot \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\ &= x \cdot \ln(x) - \int 1\,\mathrm{d}x \\ &= x \cdot \ln(x) - x + C\end{aligned}$$

.

جمله :

مونږ د دې لاندې انتیگرال نیسو:

$$\int x\cos(x)\,dx$$

ږدو $u = x$ ، نو لرو : $du = dx$

ږدو $dv = \cos(x)\,dx$ ، نو $v = \sin(x)$ لرو

په لاندې توگه مخ ته ځو:

$$\begin{aligned}\int x\cos(x)\,dx &= \int u\,dv \\ &= uv - \int v\,du \\ &= x\sin(x) - \int \sin(x)\,dx \\ &= x\sin(x) + \cos(x) + C.\end{aligned}$$

C د انتیگرالونې یوه په خوښه ثابته ده

د ټوټه انتیگرالونې د استعمال سره د انتیگرالونو لکه

$$\int x^2 e^x\,dx \quad \text{او} \quad \int x^3 \sin(x)\,dx$$

کیده شي په همدې لار حل شي:

یوه په زړه پورې بیلگه دا لاندې ده :

$$\int e^x \cos(x)\,dx$$

که په پوره کره والي ونیسو، نو په ورسره بلده لار اړین نه دی، چې دا دې حل ولري.

دا بېلګه د دوه واره ټوټه انتیګرالوني استعمال له لارې حل کولی شو.

لومړی : $u = \cos(x)$ داسې چې $du = -\sin(x)\,dx$

$dv = e^x\,dx$ داسې چې $v = e^x$

نو لرو :

$$\int e^x \cos(x)\,dx = e^x \cos(x) + \int e^x \sin(x)\,dx.$$

اوس ، ددې له پاره چې پاتې انتیګرال حل شي، نو د ټوټه انتیګرالوني قاعده بیا استعمالوو ، د دې لاندې سره :

$u = \sin(x);\ du = \cos(x)\,dx$

$v = e^x;\ dv = e^x\,dx$

نو لرو :

$$\int e^x \sin(x)\,dx = e^x \sin(x) - \int e^x \cos(x)\,dx$$

که دا سره یوځای کړو، نو لاس ته راځي:

$$\int e^x \cos(x)\,dx = e^x \cos(x) + e^x \sin(x) - \int e^x \cos(x)\,dx.$$

که فکر وکړو، نو پورته مساوات دواړو لورو ته همغه انتیګرال لرو(بې له مخ نخښې)، نو د ښي لور انتیګرال که کیڼ لور ته یوسو ، لاس ته ترې راځي:

$$2\int e^x \cos(x)\,dx = e^x(\sin(x) + \cos(x)) + C$$

$$\int e^x \cos(x)\,dx = \frac{e^x(\sin(x) + \cos(x))}{2} + C'$$

C د انتیګرالونې یوه په خوښه ثابته ده

د کور کار:

انتیګرال د بدلون له لارې د لاندې انتیګرالونو ځوابونه، همداسې شمیرنه

لومړی: $\int \frac{3}{4x+1}\,dx$ دویم: $\int_0^2 \frac{4}{4-x}\,dx$

دریم: $\int \frac{2}{(1-x)^2}\,dx$ څلورم: $\int \frac{6}{(2x-1)^3}\,dx$

پنځم: $\int_{-2}^{2} \frac{10}{(x-4)^5}\,dx$ شپږم: $\int_{-2}^{2} e^{1-x}\,dx$

اووم: $\int_0^4 e^{\frac{1}{2}x}\,dx$ اتم: $\int_1^2 e^{4-2x}\,dx$

نهم: $\int_1^2 \frac{4}{e^{2x-4}}\,dx$ لسم: $\int_0^2 \left(x-1-e^{-\frac{1}{2}x}\right)dx$

ځوابونه

انتیګرال د ساده بدلون له لارې

نتیجې: لومړی:

$$\int \frac{3}{4x+1}\,dx = \frac{3}{4}\cdot \ln(4x+1)+C$$

دويم:

$$\int_0^2 \frac{4}{4-x}\,dx = 4\cdot\ln(4) - 4\cdot\ln(2) = 4\cdot\ln(2) \approx 2,773$$

دزيم:

$$\int \frac{2}{(1-x)^2}\,dx = \frac{2}{1-x} + C$$

ځلورم:

$$\int \frac{6}{(2x-1)^3}\,dx = -\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{(2x-1)^2} + C$$

پنځم:

$$\int_{-2}^{2} \frac{10}{(x-4)^5}\,dx = -\frac{5}{2}\left[\frac{1}{16} - \frac{1}{1296}\right] = -\frac{25}{162} \approx -0,154$$

شپږم:

$$\int_{-2}^{2} e^{1-x}\,dx = e^3 - e^{-1} \approx 19,718$$

اووم:

$$\int_0^4 e^{\frac{1}{2}x}\,dx = 2\cdot e^2 - 2\cdot e^0 = 2\cdot e^2 - 2 \approx 12,778$$

اتم:

$$\int_1^2 e^{4-2x}\,dx = \frac{1}{2}\cdot e^2 - \frac{1}{2}\cdot e^0 = \frac{1}{2}\cdot e^2 - \frac{1}{2} \approx 3,195$$

نهم:

$$\int_1^2 \frac{4}{e^{2x-4}}\,dx = 2\cdot e^2 - 2\cdot e^0 = 2\cdot e^2 - 2 \approx 12,788$$

لسم:

$$\int_0^2 \left(x - 1 - e^{-\frac{1}{2}x}\right) dx = -2\cdot e^0 - \left(-2\cdot e^{-1}\right) = -2 + 2\cdot e^{-1} \approx -1,264$$

ځوابونه

انتیګرال د ساده بدلون له لارې

مفصل ځوابونه

لومړی:

$$\int \frac{3}{4x+1}\,dx \qquad \text{Substitution: } u = 4x+1 \qquad \frac{du}{dx} = 4 \Rightarrow dx = \frac{1}{4}du$$

$$\frac{3}{4}\int \frac{1}{u}\,du = \frac{3}{4}\cdot\ln(u) + C$$ د $u = 4x+1$ سره

$$\int \frac{3}{4x+1}\,dx = \underline{\underline{\frac{3}{4}\cdot\ln(4x+1) + C}}$$

دویم:

$$\int_0^2 \frac{4}{4-x}\,dx \qquad \text{Substitution: } u = 4-x$$

$\frac{du}{dx} = -1 \Rightarrow dx = -du$ لاندې پوله $u(0) = 4$ پورته پوله $u(2) = 4-2 = 2$

$$-4\int_4^2 \frac{1}{u}\,du = 4\int_2^4 \frac{1}{u}\,du = \left[4\cdot\ln(u)\right]_2^4 = 4\cdot\ln(4) - 4\cdot\ln(2)$$

$$= 4\left[\ln(4) - \ln(2)\right] = 4\cdot\ln\left(\frac{4}{2}\right) = 4\cdot\ln(2) \approx \underline{\underline{2{,}773}}$$

دریم:

$$\int \frac{2}{(1-x)^2}\,dx \qquad \text{Substitution: } u = 1-x \qquad \frac{du}{dx} = -1 \Rightarrow dx = -du$$

د u=1-x سره
$$-2\int \frac{1}{u^2}\,du = -2\int u^{-2}\,du = -2\cdot\frac{1}{-1}\cdot u^{-1} = \frac{2}{u}$$

$$\int \frac{2}{(1-x)^2}\,dx = \underline{\underline{\frac{2}{1-x}+C}}$$

ځلورم:

$$\int \frac{6}{(2x-1)^3}\,dx \qquad \text{Substitution: } u = 2x-1 \qquad \frac{du}{dx} = 2 \Rightarrow dx = \frac{1}{2}du$$

د U=2x-1 سره
$$\frac{6}{2}\int \frac{1}{u^3}\,du = 3\int u^{-3}\,du = 3\cdot\frac{1}{-2}\cdot u^{-2} = -\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{u^2}$$

$$\int \frac{6}{(2x-1)^3}\,dx = \underline{\underline{-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{(2x-1)^2}+C}}$$

پنځم:

$$\int_{-2}^{2} \frac{10}{(x-4)^5}\,dx \qquad \text{Substitution: } u = x-4 \qquad \frac{du}{dx} = 1 \Rightarrow dx = du$$

لاندې پوله $u(-2) = -2-4 = -6$ پورته پوله $u(2) = 2-4 = -2$

$$10\int_{-6}^{-2} \frac{1}{u^5}\,du = 10\int_{-6}^{-2} u^{-5}\,du = \left[10\cdot\frac{1}{-4}\cdot u^{-4}\right]_{-6}^{-2} = -\frac{5}{2}\cdot\left[\frac{1}{u^4}\right]_{-6}^{-2}$$

$$= -\frac{5}{2}\left[\frac{1}{16}-\frac{1}{1296}\right] = \underline{\underline{-\frac{25}{162} \approx -0{,}154}}$$

شپږم:

$$\int_{-2}^{2} e^{1-x}\,dx \qquad \text{Substitution: } u = 1 - x \qquad \frac{du}{dx} = -1 \Rightarrow dx = -du$$

لاندې پوله $u(-2) = 1-(-2) = 3$ پورته پوله $u(2) = 1-2 = -1$

$$-\int_{3}^{-1} e^{u}\,du = \int_{-1}^{3} e^{u}\,du = \left[e^{u}\right]_{-1}^{3} = \underline{\underline{e^{3} - e^{-1} \approx 19{,}718}}$$

اووم:

$$\int_{0}^{4} e^{\frac{1}{2}x}\,dx \qquad \text{Substitution: } u = \frac{1}{2}x \qquad \frac{du}{dx} = \frac{1}{2} \Rightarrow dx = 2du$$

لاندې پوله $u(0)=0$ پورته پوله $u(4)=2$

$$2\int_{0}^{2} e^{u}\,du = 2\left[e^{u}\right]_{0}^{2} = 2\cdot e^{2} - 2\cdot e^{0} = \underline{\underline{2\cdot e^{2} - 2 \approx 12{,}778}}$$

اتم:

$$\int_{1}^{2} e^{4-2x}\,dx \qquad \text{Substitution: } u = 4 - 2x \qquad \frac{du}{dx} = -2 \Rightarrow dx = -\frac{1}{2}du$$

لاندې پوله $u(1)=4-2=2$ پورته پوله $u(2)=4-4=0$

$$-\frac{1}{2}\int_{2}^{0} e^{u}\,du = \frac{1}{2}\int_{0}^{2} e^{u}\,du = \left[\frac{1}{2}e^{u}\right]_{0}^{2} = \frac{1}{2}\cdot e^{2} - \frac{1}{2}\cdot e^{0} = \underline{\underline{\frac{1}{2}\cdot e^{2} - \frac{1}{2} \approx 3{,}195}}$$

نهم:

$$\int_1^2 \frac{4}{e^{2x-4}}\,dx = 4\int_1^2 e^{4-2x}\,dx \qquad \text{Substitution: } u = 4-2x \qquad \frac{du}{dx} = -2 \Rightarrow dx = -\frac{1}{2}du$$

لاندې پوله $u(1) = 4-2 = 2$ پورته پوله $u(2) = 4-4 = 0$

$$-4\cdot\frac{1}{2}\int_2^0 e^u\,du = 2\int_0^2 e^u\,du = \left[2e^u\right]_0^2 = 2\cdot e^2 - 2\cdot e^0 = \underline{\underline{2\cdot e^2 - 2 \approx 12{,}788}}$$

لسم:

$$\int_0^2 \left(x - 1 - e^{-\frac{1}{2}x}\right) dx = \int_0^2 (x-1)\,dx - \int_0^2 e^{-\frac{1}{2}x}\,dx$$

$$1.\ \text{Integral: } \int_0^2 (x-1)\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2 - x\right]_0^2 = \frac{1}{2}\cdot 4 - 2 - (0) = 0$$

$$2.\ \text{Integral: } -\int_0^2 e^{-\frac{1}{2}x}\,dx \qquad \text{Substitution: } u = -\frac{1}{2}x \qquad \frac{du}{dx} = -\frac{1}{2} \Rightarrow dx = -2du$$

لاندې پوله $u(0) = 0$ پورته پوله $u(2) = -\frac{1}{2}\cdot 2 = -1$

$$= (-1)(-2)\int_0^{-1} e^u\,du = 2\int_0^{-1} e^u\,du = -2\int_{-1}^0 e^u\,du = \left[-2e^u\right]_{-1}^0$$

$$= -2\cdot e^0 - \left(-2\cdot e^{-1}\right) = \underline{\underline{-2 + 2\cdot e^{-1} \approx -1{,}264}}$$

د ټوټه انټيګرالونو لپاره څو نوربط بیلګې

که چیرته د دوه توابعو انتیګرال غواړو وشمیرو، نو په زیاتو حالتونو کې دا تراوسه روښانه یا معلومه د انتیګرال لار مو بریا ته نه بیایي.

$$f(x) = x \cdot \ln\left(x^2\right) \Rightarrow F(x) = \int f(x)\,dx = \int\left(x \cdot \ln\left(x^2\right)\right)dx = ?$$

$$\text{Substitution: } u(x) = x^2 = u$$

جوړوو: $u'(x) = \frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{1}{2x}du$

$$\int f(x)\,dx = \int x \cdot \ln(u) \cdot \frac{1}{2x}\,du = \frac{1}{2}\int \ln(u)\,du = \frac{1}{2}\left[u \cdot \ln(u) - u + C\right] = \frac{1}{2}u \cdot \ln(u) - \frac{1}{2}u + C$$

د بدلون په بیرته په ځت: $\frac{1}{2}u \cdot \ln(u) - \frac{1}{2}u + C = \frac{1}{2}x^2 \cdot \ln\left(x^2\right) - \frac{1}{2}x^2 + C$

نو: $\int(x)\,dx = \int\left(x \cdot \ln\left(x^2\right)\right)dx = \underline{\underline{\frac{1}{2}x^2 \cdot \ln\left(x^2\right) - \frac{1}{2}x^2 + C}}$

دا انتیګرال د بدلون قانون سره حل کیدی شي، دا چې د بدلون له لارې ضریب له منځه ځي. په عادي ډول دا حالت نه دی.

$$f(x) = x \cdot \ln(x) \Rightarrow F(x) = \int f(x)\,dx = \int\left(x \cdot \ln(x)\right)dx = ?$$

دا انتیګرال د بدلون له لارې نه شي حل کیدی. موږ د صرب قانون لپاره د مشتقشمیرنې څخه یوه اینبوونې یا په ځای کونې ته وده ورکوو.

$$f(x) = u(x) \cdot v(x) \Rightarrow f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

د ثابتې په پام کې نه نیولو له امله د دفرنځیال او انتیګرال بنسټ حملې له لارې باور لري:

$$\int f'(x)\,dx = f(x) = u(x)\cdot v(x)$$

د $f'(x) = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x)$ سره په دې پسې باید هم باور ولري

$$\int u'(x)\cdot v(x)\,dx + \int u(x)\cdot v'(x)\,dx = u(x)\cdot v(x)$$

د $\int u(x)\cdot v'(x)\,dx$ پسي د بڼه بدلون له امله راکوي:

$$\int u(x)\cdot v'(x)\,dx = u(x)\cdot v(x) - \int u'(x)\cdot v(x)\,dx$$

د $\int u'(x)\cdot v(x)\,dx$ پسي د بڼه بدلون له امله راکوي:

$$\int u'(x)\cdot v(x)\,dx = u(x)\cdot v(x) - \int u(x)\cdot v'(x)\,dx$$

د دې بڼه بدلون په ريښتوني يا حقيقت کې دا د دوه ضربيونو انتيګرال حل نه شو، مګر د u او ' v او په همدې توګه د ' u او v هوښياره ټاکنه کيدی شي دا وييڼه يا افاده داسې بڼه بدل شي، چې ا نتيګرال يې کيدی شي حل شي

بيلګه ۱

$$\int \underbrace{x}_{u}\cdot\underbrace{e^x}_{v'}\,dx = u\cdot v - \int u'\cdot v\,dx$$

$$u = x \Rightarrow u' = 1$$

$$v' = e^x \Rightarrow v = \int e^x\,dx = e^x$$

$$\int x\cdot e^x\,dx = x\cdot e^x - \int 1\cdot e^x\,dx = x\cdot e^x - e^x + C = \underline{\underline{(x-1)e^x + C}}$$

بيلګه ۲

.

$$\int \underbrace{x}_{u} \cdot \underbrace{e^{k\cdot x}}_{v'}\,dx = u\cdot v - \int u'\cdot v\,dx$$

$$u = x \Rightarrow u' = 1$$

$$v' = e^{k\cdot x} \Rightarrow v = \int e^{k\cdot x}\,dx$$ د بدلون له لاې حل

$$v = \int e^{k\cdot x}\,dx$$

بدلون $u = k\cdot x \Rightarrow \frac{du}{dx} = k \Rightarrow dx = \frac{1}{k}du$

په ځت یا بیرته بدلون: $v = \int e^{k\cdot x}\,dx = \frac{1}{k}e^{k\cdot x}$

$$\int x\cdot e^{k\cdot x}\,dx = u\cdot v - \int u' v\,dx = x\cdot\frac{1}{k}e^{k\cdot x} - \int 1\cdot\frac{1}{k}e^{k\cdot x}\,dx = \frac{x}{k}e^{k\cdot x} - \frac{1}{k}\underbrace{\int e^{k\cdot x}\,dx}_{\frac{1}{k}e^{k\cdot x}}$$

$$= \frac{x}{k}e^{k\cdot x} - \frac{1}{k}\cdot\frac{1}{k}e^{k\cdot x} = \frac{x}{k}e^{k\cdot x} - \frac{1}{k^2}e^{k\cdot x} = \left(\frac{x}{k} - \frac{1}{k^2}\right)e^{k\cdot x} + C$$

بیلګه ۳ :

$$\int \underbrace{x}_{u} \cdot \underbrace{\ln(x)}_{v'}\,dx = u\cdot v - \int u'\cdot v\,dx$$

$$u = x \Rightarrow u' = 1$$

$$v' = \ln(x) \Rightarrow v = x\cdot\ln(x) - x$$

$$\int x\cdot\ln(x)\,dx = x\cdot(x\cdot\ln(x) - x) - \int 1\cdot(x\cdot\ln(x) - x)\,dx$$

$$\Leftrightarrow \int x\cdot\ln(x)\,dx = x^2\cdot\ln(x) - x^2 - \int x\cdot\ln(x)\,dx + \int x\,dx \mid + \int x\cdot\ln(x)\,dx$$

$$\Leftrightarrow 2\cdot\int x\cdot\ln(x)\,dx = x^2\cdot\ln(x) - x^2 + \frac{1}{2}x^2 \mid :2$$

$$\Leftrightarrow \int x\cdot\ln(x)\,dx = \frac{1}{2}x^2\cdot\ln(x) - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^2 = \underline{\underline{\frac{1}{2}x^2\cdot\ln(x) - \frac{1}{4}x^2 + C}}\ (x>0)$$

بیلګه ۴

$$\int \underbrace{x^2}_{u}\cdot\underbrace{e^{2x}}_{v'}\,dx = u\cdot v - \int u'v\,dx \quad u = x^2 \Rightarrow u' = 2x \quad v' = e^{2x} \Rightarrow v = \int e^{2x}\,dx$$

منځ شمیرنه

$$\int e^{2x}\,dx \quad \text{Substitution: } u = 2x \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2 \Rightarrow \underline{dx = \frac{1}{2}du}$$

$$\boxed{\int e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}e^{2x}} \quad \text{په ځت بدلون} \quad \Rightarrow \frac{1}{2}\int e^u\,du = \frac{1}{2}e^u$$

$$\int x^2\cdot e^{2x}\,dx = \underbrace{x^2\cdot\frac{1}{2}e^{2x}}_{u\cdot v} - \int \underbrace{2x}_{u'}\cdot\underbrace{\frac{1}{2}e^{2x}}_{v}\,dx = \frac{1}{2}x^2\cdot e^{2x} - \int x\cdot e^{2x}\,dx$$

$$\int \underbrace{x}_{u}\cdot\underbrace{e^{2x}}_{v'}\,dx = u\cdot v - \int u'v\,dx \quad u = x \Rightarrow u' = 1 \quad v' = e^{2x} \Rightarrow v = \frac{1}{2}e^{2x}$$

(پورته وګورئ)

$$\int x\cdot e^{2x}\,dx = x\cdot\frac{1}{2}e^{2x} - \int 1\cdot\frac{1}{2}e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}x\cdot e^{2x} - \frac{1}{2}\underbrace{\int e^{2x}\,dx}_{\frac{1}{2}e^{2x}} = \frac{1}{2}x\cdot e^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x}$$

$$\int x^2 \cdot e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}x^2 \cdot e^{2x} - \underbrace{\int x \cdot e^{2x}\,dx}_{\frac{1}{2}x\cdot e^{2x}-\frac{1}{4}e^{2x}} = \frac{1}{2}x^2 \cdot e^{2x} - \left(\frac{1}{2}x \cdot e^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x}\right)$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \cdot e^{2x} - \frac{1}{2}x \cdot e^{2x} + \frac{1}{4}e^{2x} = \underline{\underline{\frac{1}{4}\left(2x^2 - 2x + 1\right)e^{2x} + C}}$$

دا بیلګه ښايي، چې په انتیګرال کې زیات وخت ډېرې تلنلارې یو په بل پسې کارول کیږي. دا چې د ټوټه انتیګرال منځنۍ پایله (لاس ته راوړنّ) زیات وخت څرګند یا معلوم دي، سړی دې دا د یوه انتګرئشن جدول په بڼه په یاد کې وساتي.

د انتیګرېشن نورې تلنلارې او تخنیکونه هم شته، چې په دې ځای کې دې ترڅېړنې لاندې دې نه نیول کیږي. د بیلګې په توګه دې ماتنسبي انتیګرېشن د ټوټه مات یا کسر ټوټه ونې په ګوته شي.

یوڅو ناټاکلي انتیګرالونه:

لومړی: $\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C \quad n \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

دویم: $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C \quad x \neq 0$

دریم : $\int e^x\,dx = e^x + C$

څلورم: $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln(a)} + C \quad a > 0;\ a \neq 1$

پنځة $\int (ax+b)^n\,dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)} + C \quad n \neq -1$

شپږم: $\int \frac{1}{ax+b}\,dx = \frac{1}{a}\ln|ax+b|$

اووم: $\int x\,(ax+b)^n\,dx = \frac{a(n+1)x-b}{a^2(n+1)(n+2)}(ax+b)^{n+1} + C \quad n \neq -1;\,-2$

ا تم: $\int \frac{1}{x(ax+b)}\,dx = -\frac{1}{b}\ln\left|\frac{ax+b}{x}\right| + C$

نهم: $\int \frac{x}{ax+b}\,dx = \frac{x}{a} - \frac{b}{a^2}\ln|ax+b| + C$

لسم : $\int_0^\infty \frac{1}{(1-x)\sqrt{x}}\,dx = 0$

یولسم: $\int e^{ax}\,dx = \frac{1}{a}e^{ax} + C$

دولسم: $\int x\cdot e^{ax}\,dx = \frac{1}{a^2}(ax-1)e^{ax} + C$

دیارلسم: $\int_{-1}^{1} a^x\,dx = \frac{a^2-1}{a\cdot\ln(a)} \quad a>0$

څوارلسم: $\int \ln(x)\,dx = x\cdot\ln(x) - x + C \quad x>0$

پنځلسم: $\int [\ln(x)]^2\,dx = x\cdot[\ln(x)]^2 - 2x\cdot\ln(x) + 2x + C \quad x>0$

شپاړسم: $$\int x^n \ln(x)\, dx = x^{n+1}\left(\frac{\ln(x)}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2}\right) + C \quad x > 0 ; m \neq -1$$

اولسم: $$\int \frac{[\ln(x)]^n}{x}\, dx = \frac{[\ln(x)]^{n+1}}{n+1} + C \quad x > 0 ; n \neq -1$$

اتلسم: $$\int \frac{1}{x \cdot \ln(x)} = \ln\left|\ln(x)\right| + C \quad x > 1$$

نولسم: $$\int \frac{1}{x \cdot [\ln(x)]^n} = -\frac{1}{(n-1)\left([\ln(x)]^{n-1}\right)} + C \quad x > 1 ; n \neq 1$$

يوڅو ټاكلي انتيګرالونه:

لمړی: $$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \frac{\pi}{2}$$ دويم: $$\int_0^\infty \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}}\, dx = \pi$$

دريم: $$\int_a^b \frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}\, dx = \pi$$ څلورم: $$\int_0^a \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\, dx = \frac{\pi}{2}$$

پنځم: $$\int_0^\infty \frac{1}{a^2 + x^2}\, dx = \frac{\pi}{2a}$$ شپږم: $$\int_0^\infty e^{-x^2}\, dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

اووم: $$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = 1$$ ا تم: $$\int_0^a \frac{x^2}{\sqrt{ax - x^2}}\, dx = \frac{3}{8} a^2 \pi$$

نهم: $$\int_0^\infty \frac{1}{(1-x)\sqrt{x}}\, dx = 0$$ لسم: $$\int_0^{2b} \sqrt{2bx - x^2}\, dx = -\frac{b^2 \pi}{2}$$

يوولسم: $\int_{-1}^{1} a^x \, dx = \dfrac{a^2 - 1}{a \cdot \ln(a)} \quad a > 0$ دولسم: $\int_0^{\infty} e^{-x} x^n \, dx = n! \quad n \in \mathbb{N}$

ديارلسم: $\int_0^{\infty} e^{-x^2} \, dx = \dfrac{1}{2}\sqrt{\pi}$ څوارلسم: $\int_0^{\infty} \dfrac{x}{e^x + 1} \, dx = \dfrac{\pi^2}{12}$

پنځلسم: $\int_0^{\infty} \dfrac{x}{e^x - 1} \, dx = \dfrac{\pi^2}{6}$ شپاړلسم: $\int_0^{1} \dfrac{\ln(x)}{x + 1} \, dx = -\dfrac{\pi^2}{12}$

اوولسم: $\int_0^{1} \dfrac{\ln(x)}{x - 1} \, dx = \dfrac{\pi^2}{6}$ اتلسم: $\int_0^{1} \dfrac{\ln(x + 1)}{x^2 + 1} \, dx = \dfrac{\pi}{8} \cdot \ln(2)$

نولسم: $\int_0^{1} \dfrac{\ln(x)}{x^2 - 1} \, dx = \dfrac{\pi^2}{8}$

د ډاکتر ماخان شینواري چاپ شوې لیکنې:

1988 Vienna (Austria):

لومړی:

H.K. Kaiser , M. Shinwari : Aproximation compact pological algebra : contributions to general algebra 6 ; Page 117 – 122

1987 Vienna (Austria):

دویم:

H.K. Kaiser , M. Shinwari : Interpolation und Aproximation durch Polynime in Universalen Algebren . Diss . Uni. Wien

لاندې د شمیرپوهنې پښتوټول کتابونه په المان کې د ،، افغانستان کلتوري ودې ټولنه،،له خوا چاپ شوي دي

2000 Bonn (Germany):
دریم: د شمیرپوهنې ستر کتاب : د شمیرپوهنې برسیره د انجنري، فزیک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زده کوونکو لپاره (دا کتاب په ۹۰۰ مخونو کې چاپ او دا نوې لیکنه به یې څنو ځایونو غزېدلې او څنې ځایونه ترې لرې شوي دي)

2003 Bonn (Germany):
څلورم: څمککچپوهنه(هندسه) ، په سلو زرو کې شمیرنه، د کټې – او کټې د کټې شمیرنه ، د اختمالوالې شمېرنه کتاب د ښوونځې ټولې اړتیاوې پوره کوي

2003 Bonn (Germany):
پنځم: الجبرونه (د الجبر بنسټونه دي)

2003 Bonn (Germany):
شپږم: د شمیرپوهنې انګرېزي – پښتو ډکشنري.

2003 Bonn (Germany):

اووم: د شمیرپوهنې الماني ـ پښتو- او پښتو الماني ډکشنري

Mathematical dictionary German/ Pashto and Pashto/German

2003 Bonn (Germany):

اتم: دفرنځیال برابرون (دا کتاب په دې ځانګه کې یو پیل دی، ساده لیکل شوی)

Differential equation Translation; An Introduction

Bonn (Germany): 2003

نهم: د شمیر پوهنې فرمولونو ټولګه

Mathematical Formulas

2003 Bonn (Germany):

لسم: شمیرپوهنه له عربي په پښتو

1997 Bonn (Germany):

یوولسم: د افغانستان په هکله سپیني خبرې: په المان کې

،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خو

.یادونه: له ۲۰۰۰ کال دمخه ډاکتر ماخان شینواري د ،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خوا درې ساسي مجلې هم را وستلي.

د ډاکتر ماخان ،،میرې،، شینواري لیکنې او ژباړې چې په چاپیدو یې پیل کیږي

بن- المان، کابل – افغانستان ۲۰۱۲ ز ک

ژباړې:

لاندې د برینککن لیکنې چې له پرینمن ن ج ځخه ژباړل شوي دي.

---

۱ - شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره لومړی ټوک

۲ – شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره دويم ټوک

۳ – شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره دريم ټوک

۴ - د احتمالوالي شميرنه

۵ – احصايه يا ستاتيستيک

لاندې کتابونه د شتوتګارت د پوهنتون د استادانو د لکچرونو څخه چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپاره شوي را ژباړل شوي.

۶ – اناليزی ۱

۷ – اناليزې ۲

۸ – کرښيز الجبر

۹ - د شميرپوهنې بنسټونه

۱۰ - د فرمولونو ټولګه

۱۱ – فنکشنل اناليز

۱۲ – وکتور شميرنه

نورې ژباړې

۱۳ – له www./grundstudium.info/linearealgebra څخه:کرښيز الجبر

۱۴ – Georg Gutenbrunner ګڼونپوهنه يا د اعدادو تيوري

زما ليکني

Bonn (Germany):

۱۵ - د شميرپوهنې ستر کتاب دويم چاپ د پوره تغيراتو سره : دا کتاب د شميرپوهنې برخې برسيره د

انجنري، فزيک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زدهکوونکو لپاره پوره ګټور دی. په

کتاب کې د اړتيا سره زياتونه او کونه راغلي

۱۶ - ځمککچپوهنه (هندسه) دويم چاپ د پوره تغيراتو سره

۱۷ – الجبر ښستونه دويم چاپ له تغيراتو سره

۱۸ - ډېرۍ پوهنه يا سټ تيوري

۱۹ – د شميرپوهنې سم اند (منطق رياضي)

۲۰ - د يو څو شميرپوهانو ژوندليک

۲۱ – د شمير پوهنې ګډې وډې ليکنې

-۲۲   داهم ژباړه ده، خو ليکونکی يې متآسفانه راڅخه نابلد شوی: د مشتق او انتيګرال شميرنو ته

تمرينونه او اوبيونې يا حلونه يې

۲۳ – د شميرپوهنې انګريزې پښتو او عربي + درې ډکشنري

۲۴ – د شميرپوهنې پښتو انګرېزي ډکشنري

---

۲۵ – د شمیرپوهنې پښتو ډکشنري د شمیرپوهنیزو وییونو په پښتو روښانه ونه

۲۶ - د زړه له کومې(دا هغه لیکنې دي، چې ځنې یې په نړیول جالونو کې خپرې شوي دي.)

۲۷ – د افغانستان په هکله سپینې خبرې، چې وبه غزیږي.

نوري لیکنې، چې په ژباړه یې پیل شوی، خو لا پوره نه دي

– د شتوتکارت پوهنتون لکچرنوټونو څخه ، چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپریږي:

د ګروپونو تیوري

- د ښوونځي لپاره فزیک د برینکمن لیکنه

له پنځم ټولګي څخه تر اومم ټولګي پورې ژباړل شوی (دا چې زما دویم مسلک فزیک دی، دا لیکنې ژباړم. دا هم د دې لیکوال یوه ډېره ښه لیکنه ده، چې -د شمیرپوهنې په څیر- دلته هم زیات تمرینونه د حل یا اوبیونې سره په کې راغلي او ماته زیات ګټور برېښي)

د لیکوال ژوند ته لنډه کتنه

ماخان په اولني نوم میرړي شینواری د ارواښادې پستو او ارواښاد نوررحمان زوي په ۱۳۲۰ ؟ ه لمریز کې د شینوارو هسکه مینه کې دې نړۍ ته سترګې راغړولي.

د هسکې میني د لومړني ښوونځي (د لومړنیو زده کوونکو څخه وو) څخه وروسته د رحمان بابا لیسه له ۱۹۵۴ تر ۱۹۶۵ پورې(ښوونځي له لومړي ټولګې پیل او د دویم ټولګي څخه ګام او پای).

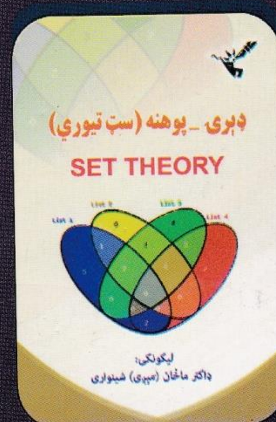
د ۱۹۶۶ تر سپمتبر د کابل طب پوهنځی. له ۱۹۶۶ سپتمبر څخه د اتریش برس، چې هلته یې د شمیرپوهنې ډاکتري په پوره ستونځو تر لاسه کړه.

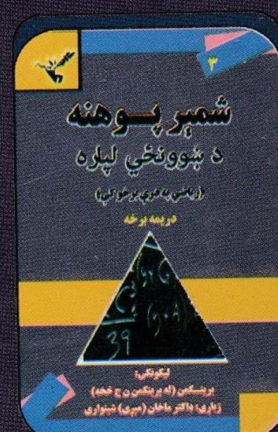
د۱۹۹۸۷ ش ک تر ۱۹۸۸ د فبروري تر پای د دباندنیو چارو وزارت کې مامور. د ۱۹۸۸ مارچ څخه تر ۱۹۹۲ جون پورې په بن کې د افغانستان جمهوریت سفارت شارژد افیر(صفر نه وو). له هغې وروسته په جرمنې کې سیاسي پناه. له ۲۰۰۸ مارچ څخه د ۲۰۰۹ دسمبر پورې د د ریاضي څانګه کې د پوهنې وزارت درسي نساب کې دنده.

ماخان میرړي په ۱۹۷۲ کې له لرې د میرمن ښاپیرۍ سره واده شوی، چې د واده خبر ورته اتریش ته راغی. ده له میرمن ښاپیری سره په ۱۹۶۳ ز ک کې کوزده کړې وه.

دوي ته لوي څښتن په اتریش ویانا کې د مای په شلم ۱۹۷۹ ز ک دوه بچیان وبخښل، چې څانګه او اباسین نومیږي. څانګه په المان کې د پوهنتون علمي همکاره وه او د حقوقو ډاکتره ده او اباسین ملي اقتصاد او ټولنیزه سایکولوژي لوستلي.
ماخان شینواري بې کاره نه دی او لږ تر لږه له ۹۷ ۱۹ څخه همدا د کتابونو لیکلو اوو د ژباړې دنده یې په غاړه اخستې، چې خپل فکر د شونې پولې تازه ساتي.

ډاکټر ماخان (مېږی) شینواری





د افغانستان د کلتوري ودې ټولنه _ جرمني
VEREIN ZUR FORDERUNG DER
AFGHANISCHEN KULTUR E.V

د خپرونو لړ (۱۲۹)