ځمککچپوهنه(هندسه)

Geometry

ليکونکی:

ډاکتر ماخان (میرزی) شینواری

2012

Ketabton.com

جرمني د بن ښار

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځمککچپوهنه (هندسه)

ليکونکی:
ډاکتر ماخان (ميرزي) شينواری

ناچاپ

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرلیک

ځمککچپوهنه(بنسټيزه هندسه)

هندسي بنسټيزې کلیمی

تکی ، کرښه ، هواره(سطحه) ۱
نیمه – یا نیمهواره ۷

کونجکلیمه ۱۱

څرخونپروسه: څرخونکنج : ۱۴

ګراد ۱۵

کونج کلمه ۱۷

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځمککچپوهنه(بنسټیزه هندسه)

هندسي بنسټیزې کلیمی

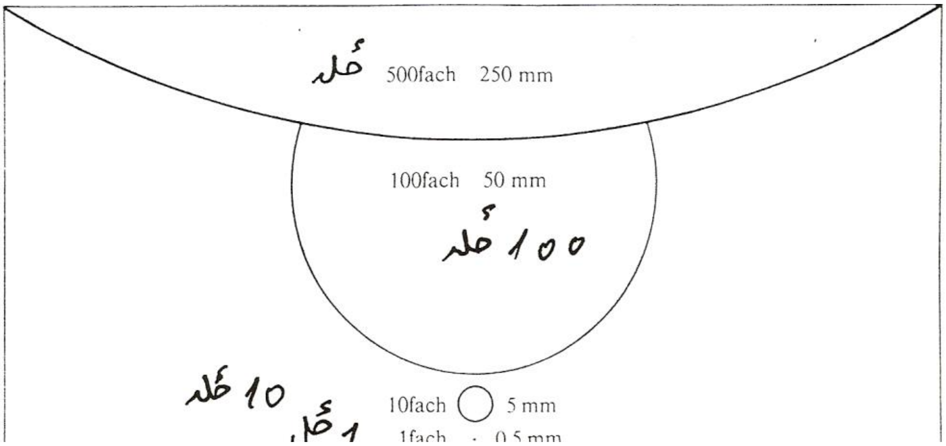
ټکی ، کرښه ، هواره(سطحه)

پیژند(تعریف): اویکلید(Euklid) اویکلید وایي، چي ټکی هغه دی چی نور نه شي کوچنی کیدی. ددې پیژند ستونځی په دې کې دي، چی بیا نو د داسی واړه شي څخه ځنګه
کرښه، او هواره جوړیدلی شي. یعنی که ټکی د هندسی اتم (لاتین Atom نه ویشونکی)
وي بیا نو ځنګه کیدی شي چی پراخه شي یا وغزیږي؟ یا یی که مایکروسکوپ له لارې
لوي کړو، نو پوره ستره هواره نیوی شي په عمل کی د کښلو (رسم ویستلو) له
لارې ګورو چی ټکی څرګند غزیدلی یا پراخیدلی شي، لکه څنګه چی لوییدل یعنی غټیدلی
شي:
په لاندې کې ګورو، چې ټکی د همدې شمیروني له لارې څومره غټیدلی شي

(c) ketabton.com: The Digital Library

یادونه : هندسه ځمککچ ته وايي، نو که هندسه ځمککچ پوهنه وبلل شي، د لمړنيو پوهيدلو لپاره به هم سملاسي اسانه وي .همدا اوس هم، له دې امله چي په هندسه کی ډيرځه ليدلکيدی شي او د رانيولو وړ دي).
لنډ: شيان يا ليديدونکي»رانيولوړ «(يا شي ډوله ځرګنديږي، همدومره ستونځی ليدل کيږي، چي نومونه اړوند (تړلی) کره وټاکلی شو، اوهمداسی يي دا اړونده کره ټاکنه روښانه يا فکروړ کړی شو، که څه هم په لومړي وار سره، چی ګونډې دا شکلونه ليدوړ او نيولوړ دي، ساده ښکاري، مګر په خپل دننه کی (خپله خته کی) خورا پيچلي دي چی يواځی ور نږدې پيژند(تعريف) يی کيدلی شي او په لاندې کی به راته روښانه شي:

-موږ په لاندې ځيره کی د ټکی غټيدل يا لوييدل ښايو



ګورو چی ټکی هوارې او کرښی ته پراخيدلی شي يعني عملي ځيره ښوونه يا شکل نخښوونه يی د ستونځو سره مل ده، خو سره ددې هم ځنی تيوريکي کره (ټيك) ښوونه يي ضرور ده ، يا نه پريښودونکی ده. دا پرابلم په مقايسوي- يا د پرتلي په توګه- ساده له منځه وړل کيدی شي: په لاندې کی د تشريح شوو شيانو يا ليديدونکی لاندې د هغو تيوريتيکی اياله(خيالي)ځيره پوهيږو او نه د هغه عملي ريښتينوالی يا رياليزه کوونه٠ د دې لپاره، چی ځانونه دې له دې ستونځو راوباسلی شو، دا مو د هندسی د ډيری کنځپت ته لارښودوي. د پورته شکلونوسره سره، د هندسي جوړختونو (ځيرو) لاندې ، د ټکو ډيری پوهيږو. يعنی هندسي جوړښتونه بل څه نه دي، بی د ټکو له ډيری٠ داسی تعريفوو:
لنډ: ټکی او کرښه

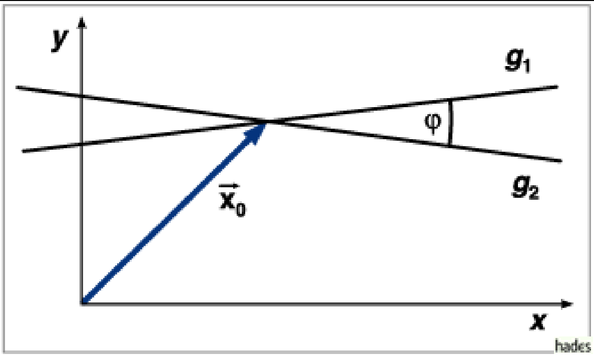
(c) ketabton.com: The Digital Library

پيژند(تعريف) :
يوه هواره يا سطحه د يوې ډيرۍ په څير کلکه نيسو، چې توکی يی ټکی بللکيږي. او په غټو لاتين تورو يی ښايو لکه .....,A,B,C,P,Q ، په هواره کی يوه برخډيرۍ په نخښه شوې ده، چې توکي يي کرښی بلل کيږي او په کوچنيو لاتيني تورو..... , a , b , c سره ښوول کيږي
يا په بل ډول :يوه هواره E د ناپای ټکو ډيرۍ ده. د هوارې هره برخه (چی پخپله پای يا ناپای کيدی شي) د هوارې يا سطحې څيره (فيګور يا شکل) بلل کيږي.

د کښلو(رسمولو، انځوروﻟو هوارې غزول)لکه د بيلګي په توګه د کاغذ دمخ (تخنيکي بنديزونه لري (محدود دي). د هندسي هدفمندۍ لپاره بايد بيا دا کاغذ هرې لور ته ناپای غزيدل شوی وي او پنډوالی يی صفر ته را کښته شوی وي، ځکه چی يوه هواره دوه ديمينزيونال ده) دوه اړخيز يا دلته ښه دی چی د اړخ په ځاي خوا ووايو، ځکه چی اړخ مو د-n ګوډيو لپاره کارولی دی. د لته يی د خواوو څخه سور او اوږدوالی عبارت دی . (په دې کتاب کی او بيا دې موضوع کی له وړو څرګندونو تيريږو او هغه څه چی خورا مهم دي هغه دلته راوړو)۰

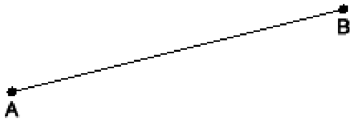
لنډ : ټکی هغه کوچنی څه دی، چې هواره او کرښه ترې جوړيدی شي او له دې امله ټکی دهوارې يا سطحې، چې د ټکوډيرۍ جوړوي، توکی دی۰

ټکی د دوه کرخو غوڅې له لارې انځوريدی شي ۰ که دوه کرښې g او h په P کې غوڅې کړي، نو د دې لپاره داسې ليکو:
h = { P □ g}
يا لاندې انځورونه
په لاندې ځيره کې g_1 او g_2
په يوه ټکي کې سره غوڅوي



پيژند :
ټوټه کرښه (پای کرښه يا بنده کرښه) AB د ټولو ټکو هغه ډيرۍ ده، چی له ټکيA و B ته د هوارې يا سطحې په دننه کی لنډ واټن يا - فاصله وهي، يعني که دا دواړه ټکي يو بل په لنډ واټن کی د هوارې په دننه کی سره وتړي، چی د غاړې ټکي A او B هم په دې پورې اړه لري. يعني ټکی A او B هم په دې کرښه پراته دي۰داسې ليکو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

A € AB; B € AB يا هغه کرښه، چي دوه ټکی په لنډ واټن کې سره وتړي بندکرښه بلل کيږي، ټکي د کرښې توکي دي	

که بند کرښه د «ځيرکرښي» په څير ونيسو او يا د کاغذ پرمخ کرښی (ختکش) کيږدو نو دا کرښه دواړو لورو ته غزيدلی شي، چې موږ دا کرښه بولو٠

کرښه د ځمککچپوهنې بنسټيزه کليمه ده٠ ليدوږ د اويکليد جيومتري کې دا يوه ناپای غزيدلی کرښی ته وايي، چې ناپای نرۍ وي، د لاندې خويونو سره:
که په يوه کرښه دوه يو له بل بيل ټکي پراته وي، نو د دوي ترمنځ ټوټه کرښه يو لنډ واټن په نخښه کوي، چې موږ ورته ټوټه کرښه يا بند کرښه وايو٠

دا کليمه ټيک زموږ پيژند نه راکوي٠ اوس هندسه په اکسيومونو ودانه ده، چې کرښه او ټکی داسې ورکړ شوي، چې مخ د مخه يې پيژند څرګند ورکړ شوی او نيول شوی يانې موږ يې پيژنو ٠

پيژند يا تعريف :

د بندکرښی (پای AB)- دواړو لورو ناپای غزولوته کرښه (ناپاىکرښه) AB يا g ويل کيږي. بندکرښه نو بيا د (ناپاي -) کرښي اصلي برخديرى ده٠

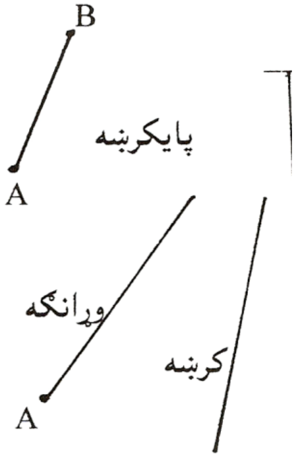
په نخښونه يې g (برخدېرى) □ AB

طبعآ کيدی شي، چی کرښه په يوه لور وغزول شي

پيژند :

که بندکرښه يواځي په يوه لور ناپای وغزول شي،(نا پای) نيمکرښهشي (ناپاي) نيمکرښه يا وړانګه(شعاع) بلل کيږي. نيمکرښه يا وړانګه يوې لورته بنده او بلی لور ته ناپای غزول کيدی شي، يعني پيل لري مګر پای نه لري .

(c) ketabton.com: The Digital Library

	لنډ: د بندکرښی دواړه لورې بندې ، د نیم کرښي یوه لور بنده او بله وازه او دکرښي دواړه لورې وازي دي. په پورته ځیرو کې د بند کرښی، وړانګې او کرښی توپیر څرګند دی٠ نیمکرښه د کرښی برخډیری دی

که په یوه هواره کی په یوه کرښه g ټکیPکیښوول شي، نو وایو چیPدgاینځیدیر (inzidiert) کیږي یاټکیPپه کرښهgپروت دی یاgلهPتیریږي او gد هوارېEسره اینځیدیرت کیږي، په دې حالت کی د اینځیدینخ اړیکو(inzidenzrelationen) یا »پروتوالی اړیکو«څخه غږیږو٠
که په همغه کرښه له دوه ټکو (په همغه هواره له درې ټکو زیات) زیات ټکي پراته وي، نو دې ته سړی کولینیار(kollinear() کومپلانار(چې په همغه هواره یا ستڅه کې شته ويkomplanar) وایي .که یو ټکی P په دوه (زیاتو) کرښوg اوhپروت وي نو دا د gاوh غوڅټکی بلل کیږي اوداسی یې لیکو:

$$h = \{ P \cap g \}$$

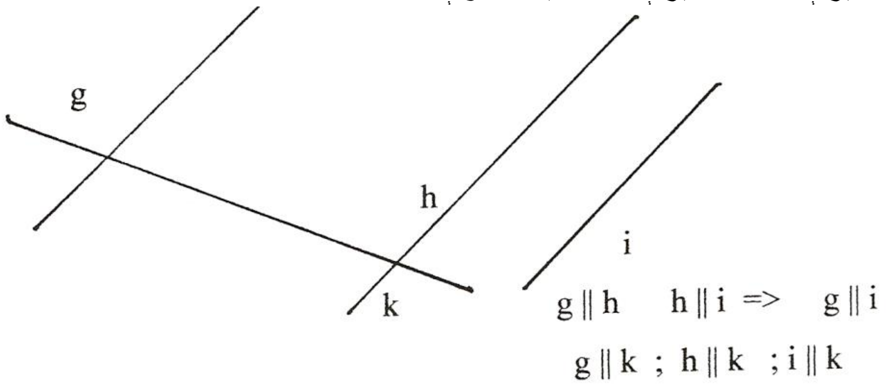
د پام وړ : ټکی د ډیری نوك کی{ } لیکل کیږي(یا د ډیری غیږ کی نیول کیږي)، ځکه چی ناپاںکرښي g او hد ټکو ډیری دي او ټکی P د غوڅډیری توکی دی .
که چیرې ډیرې ناپایکرښی په یوه ټکي کی سره غوڅی کړي نوکوپونکتال (kopunktal) بلل کیږي، کوپونکتالی ناپای کرښی د ناپاںکرښو غونچه (Büschel)یا بهتره ستوری جوړوي٠

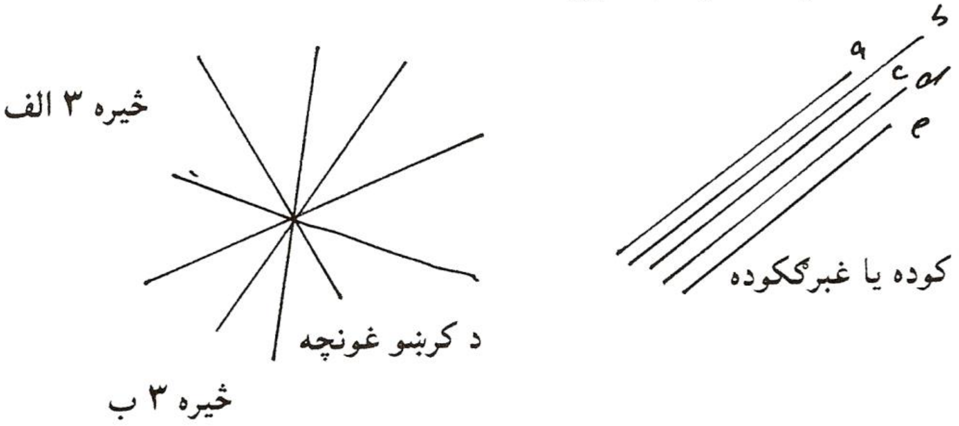
د کرښو کوده(ځېرې ټولې لاندې کښل شوي دي)

پیژند(تعریف) : کرښي g او h بي له ګډو ټکو یابهتره : بی له غوڅټکو غبرګکرښی (موازیکرښی) بللکیږي، لیکدود(مطلب د شمیرپوهنی لیکدود) یې د ی g||h

(c) ketabton.com: The Digital Library

کرښی د ناپای ډیرو غوښتکو سره کټمټ یا (ایدنتیك identisch) بلل کیږي یا مساوي کیږي. دا په دې مانا چی یو په بل پرتی دي. یو بل ته کټمټ کرښی سره غبرگی دی۰
ددې لپاره لیکو: g = h
ناغبرگی کرښی g او h په نخښونه کی داسی په نخښه کیږي: g|/|h (دا دې منل شي، چې دا د ناغبرگ کرښو لیکډول دی یا لیکدود)۰
د لاندې ځیرې شننه د ځیرې کښته لیکل شوې:





هندسی ځیره : یوه هندسي ځیره یوه ناتش ټکیډیری ده.
هغه لاین (یوخوایز یا یو دیمنزیونال (لاتین: په ټولیزه توگه مانا یی: هرې لور ته پراخیدنه، یوې لورته پراخېدونی(1Dimensional) بلل کیږي، که هغه په یوه کرښه پروت وي او ټکی نه وي .
پیژند(تعریف):هغه هندسي ځیره »هواره (Fläche) بلل کیږي، که هغه په یوه هواره هوره (Ebene) پرته وي، مگر نه په یوه ټکي پرته وي ۰ هواره یا سطحه دوه پراخیدونې یا –دیمنزیونال(2 Dimensional)ده۰

په پورته کې د کرښو کوده یا د کرښو ډله سره غبرگې هم دي۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

دلته $A < B$ په دې مانا ده چې « A په یوه کرښه g د B تر مخ یعني څمور په بلد دود، کینې لور ته پرته ده» دا په دې مانا چې په کرښه g ځغاسته باندې لمړی د A ټکی او بیا په ترتیب د B او C ټکو ته راځو. په دې توګه د منځ اړیکی له لارې لوریزې کرښې ته راځو. دا په دې مانا چې داسې کرښې لوریزې کرښې دي.
یعني په هغه پخوانی ډول سمت یا لور یې څرګند دی.
منځ اړیکی Wz(ABC) دا مانا لري چې یا $A<B<C$ او یا $A>B>C$. دا په دې مانا، چې هره کرښه په دوه ډوله لوریزه کیدی شي یعنی سمت یې ټاکل کیدی شي.

تعریف : g دې یوه لوریزه کرښه وي او A دې د g یو ټکی وي، نو د A بدل یا توپیري ټکی کرښه g په دوه برخېدیریو ویشي: (دلته کرښه ناپای کرښه ده)

$$\{X : X \in g \text{ او } X < A\}, \quad \{Y : Y \in g \text{ او } Y > A\}$$

که دواړو برخېدیریو ته ټکی A ورزیات شي، نو له A څخه په g پیداشوې وړانګې منځ ته راځي . A منځ ټکی او g د دواړو، نسبت و A ته یو بل ته مخامخ یا یو د بل په څټ وړانګو وړونکرښه بلل کیږي.

یوه وړانګه د پیلټکی A او له دې توپیر ټکی $P(P \neq A)$ له امله یواځنی (یواځنی شمیر پوهنیزه کلیمه ده او تل دې ورته پام وي، دا په څیرونه کی زیاته کاروول کیږي. دا په دې مانا ، چې بل نه شته) ټاکلی دی. یعنی په دې ټکو بله له دې وړانګي توپیري یا بدله وړانګه نه شته. دا په AP ښوول کیږي. دې AP ته مخامخ یا په څټ وړانګه په AP ښوول کیږي.
تل باور لري:

$$AP^{+} \cap AP^{-} = \{A\} \quad \text{او} \quad AP^{+} \cup AP^{-} = Zw(AP)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که وکتلی شو چی د پای کربښی یو سر له بل څخه د مخه پروت وي، نو پایکربښه لوریزه ده. که A له B مخ ته یا کیڼ لور ته پرته وي نو کربښه په AB ښایو د کربښي لوریزوالی د یوه غشي په مرسته ښوولی شو یعنی: پایکربښه AB او BA یو بل ته مخامخ یا په بل ډول یو بل ته په شټ پرتی دي.

نیمه هواره یا لنډ: نیمهواره

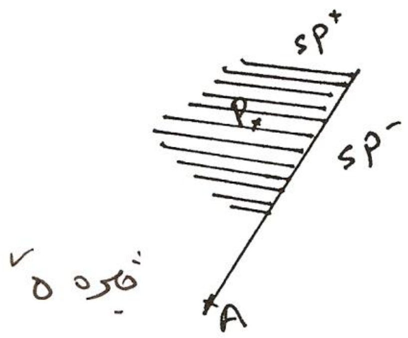
تعریف : هره کربښه g په هغي کربښه پورې اړه نه لرلو ټکو باندې په دوه وازو نیمهوارو باندې ویشي. دوه ټکی د نیمهوارې یوه لور ته ، ټیک او ټیک هلته پراته دي، چی ددې ټکو ترمنځ د کربښي g کوم ټکی نه وي پروت. g د دواړو هرې یوې هوارې ژیکربښه یا لنډه: ژی یا غاړه ده.
د یوې وازې هوارې او ژی کربښی ټولنه نیمهواره جوړوي. یوې ژیکربښي پورې اړونده دواړه نیمهوارې یو بل ته مخامخ یا یو بل ته په شټ نیمهوارې بلل کیږي.

که ټکی A او B له g پیداشوې یا منځ ته راغلی نیمهوارې په یوه لور پراته وي، نو وایو چی A او B د کربښی g په همغه لور پراته دي.

یوه نیمهواره د پیداکربښي او یوه ټکی P له لارې (چي په ژیکربښه g نه وي پروت) یوائنی ټاکلی ده، یعنی له دې نیمهوارې بدله بله داسی نیمهواره نه شته.

یو ټکیډیری ، چی له یوې وازې نیمهوارې او یوې وړانګي، داسی په نامه هوارجوړوونکی وړانکی ، جوړ وي، جنډه یا بیرغ بلل کیږي. دلته د وازې هوارې ژیکربښه د وړانګي وړونکی کربښه بلل کیږي.

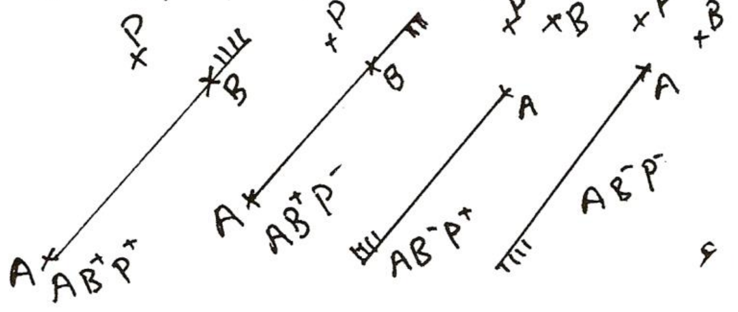
(c) ketabton.com: The Digital Library



وړانګه د جنډې ژیوړانګه ، ددې پیل ټکی د جنډې پیلټکی بلل کیږي. یوه جنډه f د ژیوړانګي s سره او په دې وازه هواره پراته ټکي P سره په sP^+ ښوول کیږي.

جنډه د همغږې وړونکې وړانګې یا ژیوړانګي s سره ، چې د sP^+ سره مخامخ یا په څټ ده ، د sP^- سره ښایو. (څیره: ۵)

که په sP^+ همداسی sP^- سومبول، په پورته د وړانګي s لپاره اینښوول شوی سومبول، چی له A و B ته ځي او AB^+ همداسی AB^- بدل کړو یا کیږدو، نو د لاندې سومبولونو AB^-P^-; AB^-P^+; AB^+P^-; AB^+P^+ سره کرکترستیك یا ښوول شوې یا ټاکل شوي جنډې ښایي. لاندې څیرې ددې لپاره کارېږو:

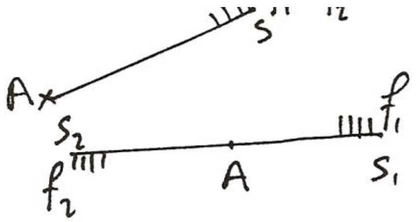


څیره ۶

دېلوړ څیرو بیرغونه AB^+P^+ او AB^-P^- یو بل سره مخامخ دې، ځکه چی وړونکی وړانګه او نیمهوارې یو بل ته مخامخ یا یو بل ته په څټ دی(پام دې وي چی مخامخ او په څټ همغه مانا لري یعني همغه یو ډول شمیرنیزې کلیمې دي)،

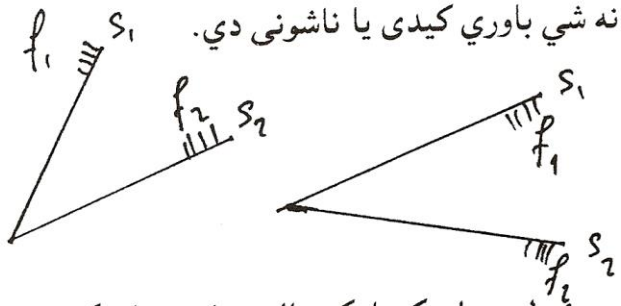
دوه بیرغونه (f_2 , f_1 د همغه پیل ټکي A سره) وپیل ټکي A ته همغه لوریز یا مساویلوریز بلل کیږي، د کولینیارې ژیوړانګو سره، که $f_1 = f_2$ یا f_1 و f_2 ته مخامخ یا په څټ وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



څیره ۷

دا دوه بیرغونه یو بل ته مخامخ بلل کیږي د همغه پیلټکي، د ناکولینیارې ژیوړانګو سره، که د f_1 ژیوړانګه په f_2 یا f_2 ژیوړانګه د f_1 په ژیوړانګه پرته وي ، مګر دواړه امکانات نه شي باوري کیدی یا ناشونی دي.

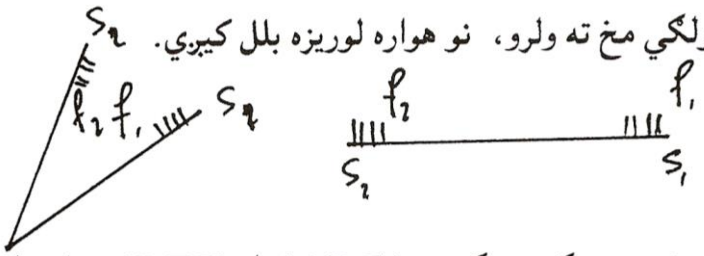


څیره ۸

د ټولو جنډو ډیریو کی همغه لوریز اړیکی ایکویوالنت یا ورته اړیکی دي. هغه په دوه ټولګیو د ډیریو ویشنه ممکنوي.

هغه جنډې چی مساوي لوریز نه دي یو بل ته مخامخلوریز یا یو بل ته په څټلوریز بلل کیږي. دې ته خو پام شته چی مخامخ یا په څټ لوریز همغه مانا لري

که دا ډول لوریزټولګي مخ ته ولرو، نو هواره لوریزه بلل کیږي.



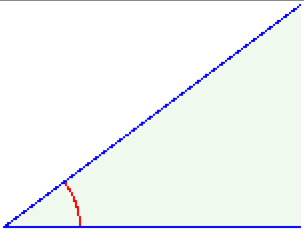
څیره ۹

دوه منظم یا ترتیب شوي د ټکو دریګوني (A,B,C) او (D,E.F) ټیك هلته یا هلته او هلته همغه څرخونموخه لري(یعنی د څرخونی هدف یی همغه دی)، که

(c) ketabton.com: The Digital Library

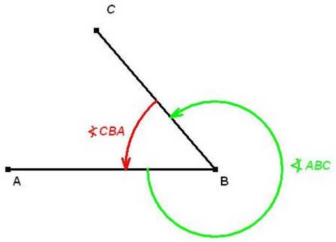
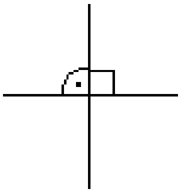
جنډې AB C او DE F همغه لوريزې وي. د يوه منظم نه كولينيار يا كولايني دريګونټېكو (A,B,C) څرخونموخې لاندې د جنډې AB C لوريزتولګى پوهيږو.

كونجكليمه

پيژند (تعريف): په يوه هواره کي، چی دوه وړانګی S 1 او S2 ياني S1/\ S2 د پيل غوښتکی S ولري په هواره يا سطحه E کی کونج β جوړوي .وړانګي د کونج پينی بلل کيږي او پيلټکي S دکونج > ککره (لنډ : کونجککره)بلل کيږي.	

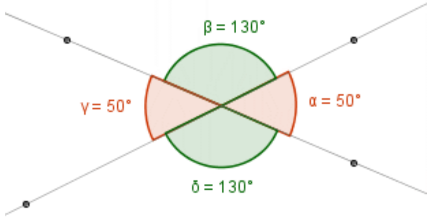
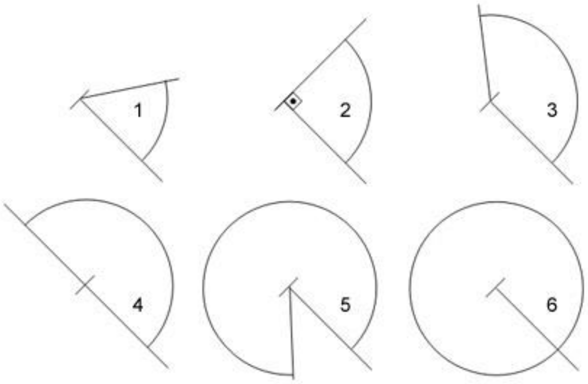
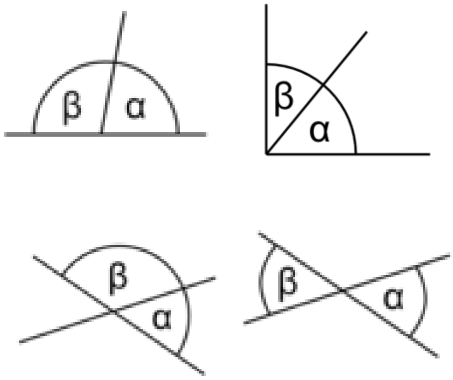
لنډ: دوه کرښې، چې په يوه ټکي کې سره غوڅې کړي، کونج جوړوي، چې کرښې د کونج پينې او غوڅټکی يې د کونج ککره يا (رآس الزاويه) بلل کږي ۰ پورته څيره دې وکتل شي۰ګونجونه په ګراد (لاتين پل يا لاقدم)کچيږي

د کونجونو رسمونه او نومه ونې

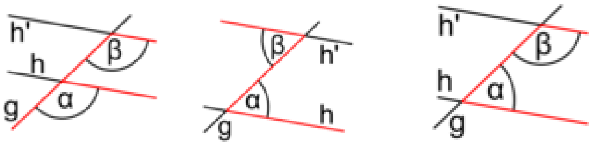
هغه کونج ، چې له ۱۸۰ درجو کوچنی وي هغې ته ننوتی کونج واي او هغه کونج، چې له ۱۸۰ درجو لوي وي هغه ته وتلی کونج واي ننوتی کونج Konvexes Winkel وتلی کونج konkaves Winkel تيره کونج، چې له ۹۰ درجو کوچنی دی، ولاړکونج، چې پوره ۹۰ درجې دی، پڅکونج، چې له ۹۰ درجو لوي او له ۱۸۰ درجو کوچنی دی، غزيدلی کونج، چې ۱۸۰ درجې دی ، له پڅ زيات- يا د پڅ په څټ- يا له پڅ اخوا کونج ، چې له ۱۸۰ درجو لوي او له ۳٦۰ درجو کوچنی دی، پوره کونج، چې ۳٦۰ درجی دی۰ دا دې په ګوته وي، چۀ صفرکونج صفر دی۰	 

يادونه: دا مي ډير تکرار راوړی، هيله ده، ګران لوستونکي به ورسره ستړي نه شي

(c) ketabton.com: The Digital Library

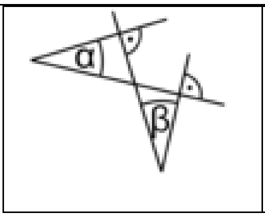
مخامخ ثیره : ککر په ککر کونجونه یورنګیزدي، بدلرنګیز کونجونه ګاونډي بلل کیږي۰	
لاندې کونجونه پخپله ونوموی‌کړی ۰	
کمپلیمنت یا ۹۰ درجو ته پوره کیدونکي کونجونه(مخامخ ثیره دي وکتل شي)۰ په ثنګ کي يي سوپلیمنت یا ۱۸۰ درجو ته پوره کیدونکی کونجونه ۰مخامخ ثیره ۰ مخامخ کونجونه ښی لور ته : ککر په ککره کونجونه۰ کیڼ لور ته : ګاونډي کونجونه	

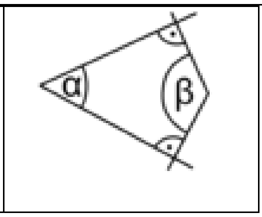
له کیڼ ثخه و ښی لور : پوړیز کونجونه ، ردبدلکونجونه



(c) ketabton.com: The Digital Library

مخامخ کونجونه، چې پښې يې يو په بل ولاړې وي, ۱۸۰ درجو ته يو بل پوره کوي. په دې بل حالت کې کونجونه يو بل سره برابر دي.



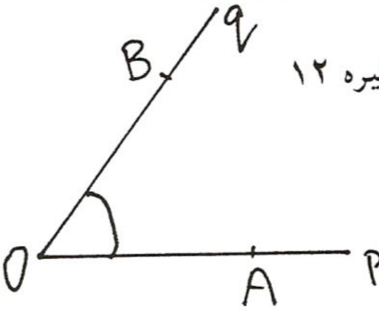


یادونه : ګران لوستونکې به راته بخښنه وکړي، چې د زياتو کونجونو هغه ورسره بلد نامه سره ښه نه يم بلد، ځکه چۀ په محدب ، مقعر او داسې نورو باندې نه پوهيږم، يواځې له قايم الزاويه څخه پرته.

يو ګراد Grad لاتين: پل يا قدم

لاندې کونجونه سره توپير کيږي، چې ايا د پښو لړی پرلپسی کره ټاکلي او ايا د کونج دننه په نخښنه شوی دی او که نه.

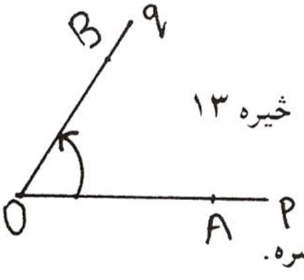
د کونج دننه په نخښنه شوی نه دی: د پښو لړی پرلپسی کره نه ده ټاکلی



خيره ۱۲

بنسټيز کونج:
د وړانګو p , q (نامنظمی) جوړې،
د ګډ پيلټکي O سره، د (p,q) ∢
يا (ABC) ∢ په نخښبوني

د A ∈ p , B ∈ q سره.
دلته O ککرټکی دی، p او q د کونج پښی دي.



خيره ۱۳

د پښو لړی پرلپسی کره ټاکلی ده:
لوريز بنسټيزکونج: د وړانګو p او q
منظمه جوړه د ګډ ټکی O سره د (p,q)∢
يا AOB ∢ په نخښبونی د A ∈ p او B ∈ q سره.

دلته هم لکه د مخه o ککرټکی، p لومړۍ پښه او q دويمه پښه ده. دا کونج په

(c) ketabton.com: The Digital Library

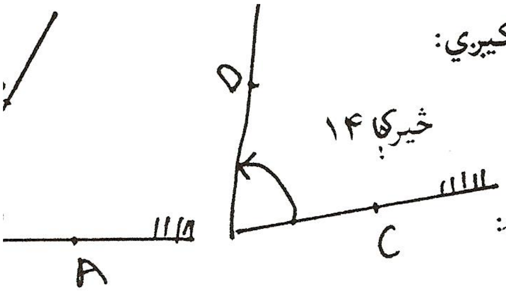
شمیرپوهنیزه موخه مثبت لوریز دی

یادونه : هغه د څرخون لور چی د ساعت څرخیو مخامخ یا په بل ډول په څټ ځغلی

مثبتلوریز او هغه چې د ساعتڅرخیو په لور ځغلي مفي لوریز څرخون بلل کیږي.

دوه کو نجونه تېیك هلته او یا هلته او هلته مساویلوریز دي، که د هغو جنډې همغه لوریز یا مساوي لوریزې وي.

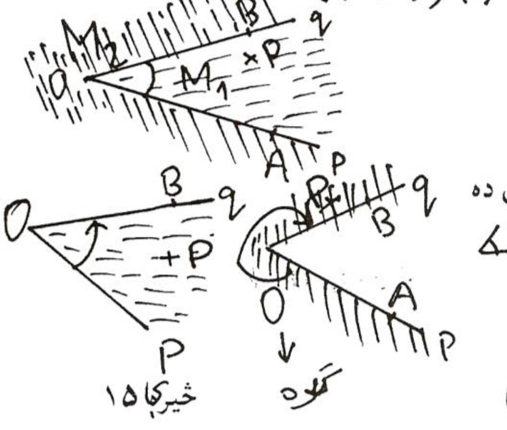
لکه په دې شیره کی چی لیدل کیږي:



د کونج دننه په نخښبه شوی دی:

د کونجونو لړی پرلپسی یی کره نه ده ټاکل شوې. (بلد یا عادي) کون
بنسټیز کونج هواره په دوه برخه‌یریو M_1 او M_2 ویشي. په نخښبه برخ
بیلګي په توګه په ټکی P کی) د کونج دننه بلل کیږي(د کونجهوار

نخښونه کي: ∢(p,q; p) ، ∢(AOB;P)
که دننه یی تش ډیری وي نو
دا کونج صفر کونج دی .



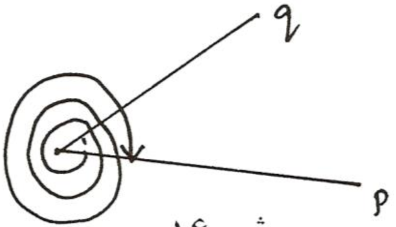
د پښو لړی پرلپسی کره ټاکلی شوې ده
لوریز کونج: په ګښبونه ∢(p,q;p)
لوریز بنسټیز کونج او دننه یی په
نخښونهP≠q، که وي، نو (p,q;p)
او (q,p;p) بدللوریز دي. (P≠q)

(c) ketabton.com: The Digital Library

که دلته هم که د کونجونو دننه تش وي،
نو کونج صفر کونج دی $\measuredangle(p,q;\,p) = 0°$

څرخونپروسه: څرخونکونج:

لوریز کونج، که د کونج په همغه لور د یوه طبیعی ګڼ یا پیدایښتي ګڼ په اندازه چی یوه پښه یی ځاي په ځاي ده وڅرخول شي، نو د کونج لور کی تغیر نه راځي.



څیره ۱۶

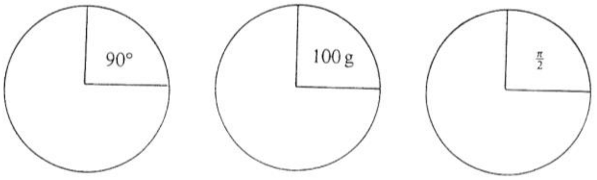
ګراد (لاتاین Grad پل یا قدم)

د کونج لویوالی په مختلفو ډولونو ورکول کیدی شي. د اندازې یووني (یو یې : یوون) یا واحدونه(یو یې : واحد) لاس ته راځي، چی یو کونج - په یوه ګردۍ کی کښل شوې- په مساوي برخو یا سکتورونو وویشل شي.) سکتور او ګردۍ لپاره دې، د ګردۍ لوست ځاي وکتل شي (و رسره بلد یا مروج یی په ٍ360° مساوي برخو ویشنه ده)
پیژند : 1/360° د یوه پوره کونج 1° (په تورو :یوه درجه. ، لاتین یي gradus = پل قدم) بلل کیږي.
ګراد نور هم په 60° کونجدقیقو ویشل کیږي) ’60 =°1 او کونجدقیقه په "60 کونجثانیو(.(1’= 60’’

د» ګراد یا درجی« لاندې »زړه درجه«(زوړ ګراد) پوهیدل کیږي. دا د زاړه بابیلوني زاړه شپیتیز سیستم څخه دی. په تریګونومیتري یا کونجکچ کي کونج برسیره پردې په لینده کچ یا - اندازه پاندې هم اندازه کیږي او په ګیودازي (Geodäsie د اندازه کولو تخنیك، - پوهنه یا- علم (په نوي ګراد یا ګون (gon (اندازه کیږي چی دلته ګردۍ په ۴۰۰ برخو ویشل کیږي .دا په جبشمیري کی مودوس"GRAD" « دی .څیرې :

د ګردۍ څلورمی انځورونه

(c) ketabton.com: The Digital Library



خیرګیا ۱۷

زوړ ګراد DEG نوی ګراد GRAD لینده کچRAD

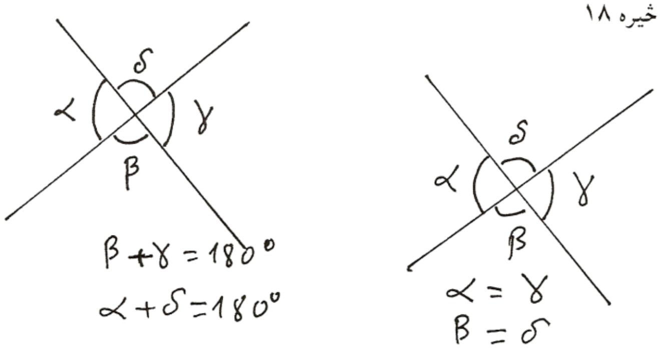
د کونج مثبت- او منفی – یا زیاتون - او کموننخښي د کونججوړونکی یاکونج تولیدیدونکي څرخونلورې څخه لاس ته راځي. کیڼ څرخون (د ساعت د څرخی په څټ څرخیدنه) مثبت- زیاتونمخنخښه مخ ته یعنی کیڼ لور ته لري او ښی څرخون (د ساعت د ځرخولو په لور) منفی – یا کمونمخنخښه مخ ته لري یعني کیڼ لور ته لري. د دوه کونجونو مقایسی یا انډول یا پرتلی لپاره بیا یواځی مطلقه ارزښت مهم دی. مطلقه ارزښت سوچه یا خالص د ځاي ارزښت یا ځیفرارزښت دی، بي له مخنخښي. د مطلقه ارزښت همداسی ځاي ارزښت لپاره دې ځما د شمیرپوهنی بنسټیزکتاب وکتل شي۰(په نړیوال جال کې به هم راشي)

بیلګه : 5 = |5-| , 3 =|3|دوه کرښی یو د بل سره څلور غوڅکونجونه جوړوي، چی په تولیزه یا عمومي ډول یی جوړه سره مختلفی لوي وي. د بیلګې په توګه که له غوڅکونج غبرګونو موخه به مو وړوکی کونج وي۰

پیژند :که دوه ناپانکرښی یو بل سره په یو ټکی کي پرېکړي، نو څنګ په څنګ کونجونو ته ګاونډي کونجونه واي، چی دوي یوه پښه ګډه لري او دواړه کونجونه 180° لري (د درجي نخښه کله کله کیڼ لور ته لیکل شوې، خو دا په پوهېدنه کي کومې ستونځې نه رامخ ته کوي) ۰

کونجونه چی ککرې یي سره نښتی یا په بل ډول ککره په ککره وي، هغو ته ککرنکونجونه ویل کیږي. ککریکونجونه مساوي لوي دي، دوي یو ګډککریټکی لري او پښی یی یوه یوه په ګډو کرښو پرتی دي .

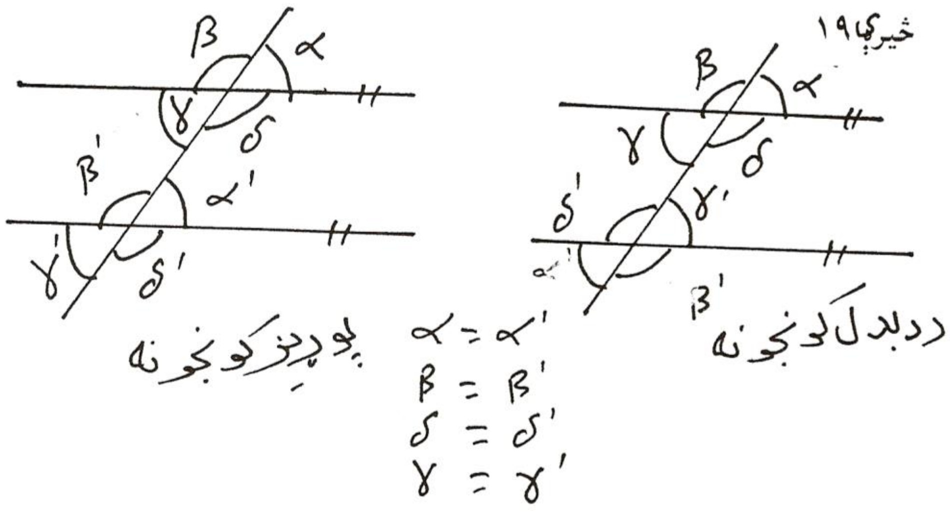
خیره ۱۸



(c) ketabton.com: The Digital Library

خیره‌کونجونه چی ځانونه 180° ته پوره کوي سوپلیمینت (Supplementwinkel)
بلل کیږي او کونجونه چی ځانونه 90° درجو ته پوره کوي کومپلیمینتکونجونه
(Komplementwinkel)بلل کیږي. دې دواړو کونجونو ته تر یوه نامه لاندې چی
راشي پوره کوونکی کونجونه وایي .که دوه غبرګی کرښی g اوh د یوې بلی ناپایکرښي k
له خوا غوڅی شي، نو څلور دننه پریکونجونه منځ ته راځي ۰ دوي د g او h تر منځ،
او د k په مختلفو خواوو(او څلور دباندې پریکونجونه)نه د غبرګکرښو g او hترمنځ،
بلکه له دوي دباندې(د k په یوه لور یو دباندنی او یو دننه غوڅ- یا پریکونجونه
پوړیزکونجونه بلل کیږي، دوه دننني یا دوه دباندنی غوڅ- یا پریکونجونه چی د k په بیلو
لورو پراته وي ردبدلکونجونه بلل کیږي(څېرې پورته ورکړ شوي دي) ۰

جمله: پوړیز- او رد بدل کونجونه په غوڅغبرګکرښو(غبرګې کرښې، چې له دې کرښې
غوڅې شوي دي) کې سره برابر دي



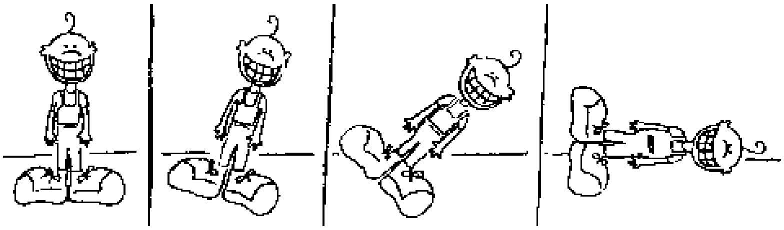
کونج کلمه

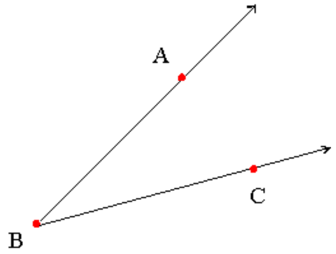
What is an Angleکونج څه شی دی ?

یادونه: لاندې برخه څه تکرار لري، خو بیا بیا راوړنه ښه زده کړه ځان پسې لري۰

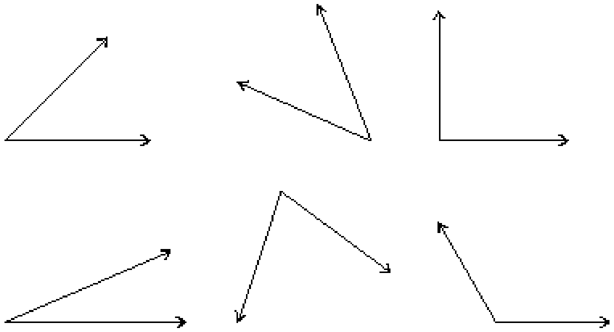
دوه وړانګی، چې یو پای لري او سره غوڅي کړي کونج جوړوي۰ وړانګی د کونج پېښي
یا اړخونه بلل کېږي او هغه ټکی، چی هلته کرښی غوڅوي ککرټکی یې بولو۰

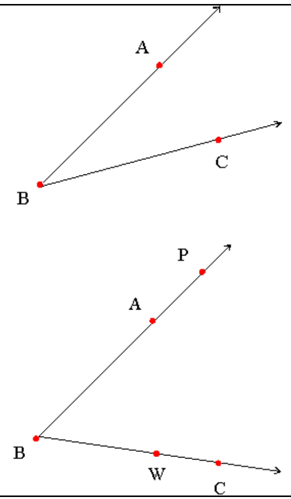
(c) ketabton.com: The Digital Library





Example: دلته د کونجونو ځنې بیلګی راوړو .





که توري د کونج په خوله کې راشي ښه به وي، خودا هم د لیکني ستونځي دي، چې زه ورسره لاس پهګریوان یم· ABC∠ کونجونه داسي ښایو

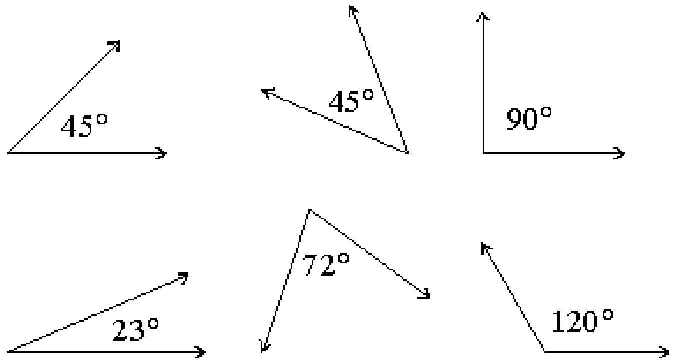
Example: د همغه کونجلپاره بیل بیل نومونه لرودی شو لکه

WBA ∠ CBPd∠ ,PBW∠ ,PBC∠ ,

(c) ketabton.com: The Digital Library

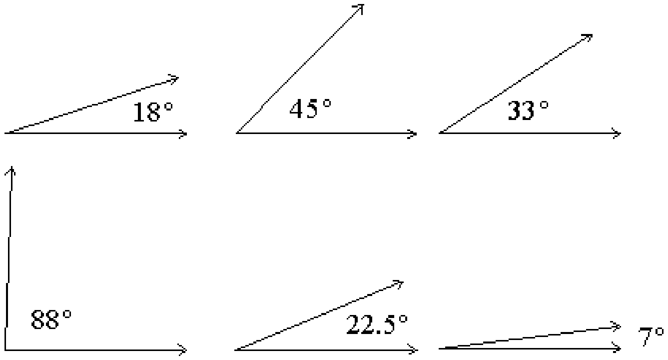
Degrees: د کونج کچوني یوون یا واحد یا یووالی: کونج په درجه کچیږي

Example په لاندې کې ځني بیلګې :



تیره کونج ، چې د صفر او ۹۰ درجو ترمنځ وي Angles Acute

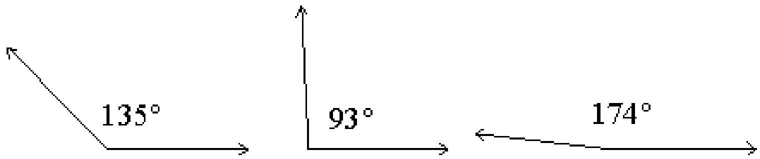
Example لاندې کونجونه تیره دي .



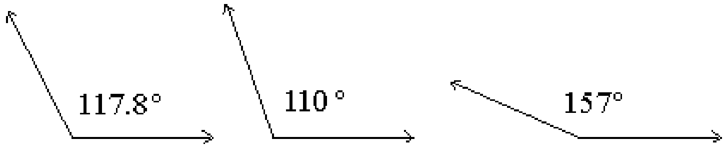
پخ کونجونه Obtuse Angles

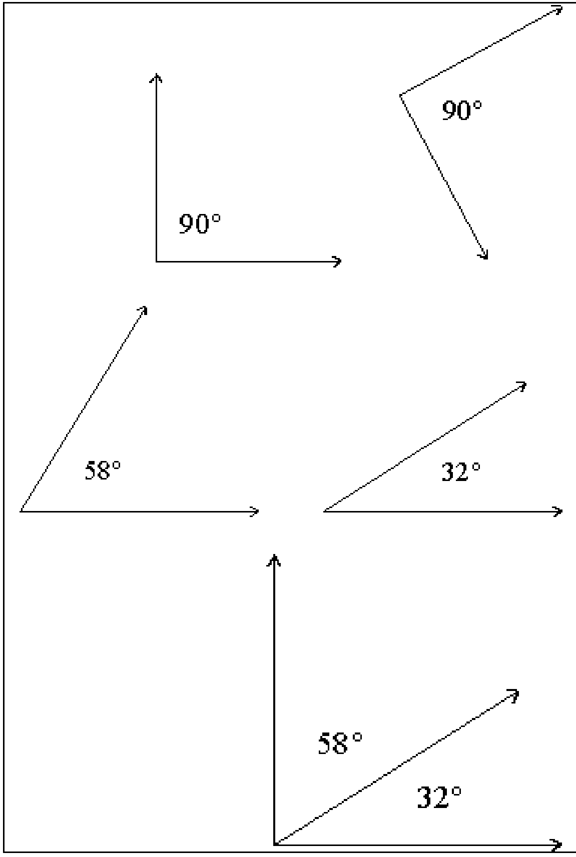
پخ کونجونه ، حې د ۹۰ درجو او ۱۸۰ درجو ترمنځ وي پخ کونجونه بلل کیږي.

Example لاندې کونجونه ټولپخ کونجونه دي:



(c) ketabton.com: The Digital Library





Right Anglesولاړکونج: هغه کونج، چي ۹۰ درجي وي

لاندې دواړه کونجونه ولاړ کونجونه ديExample:

Complementary Anglesکمپليمنت کونجونه: هغه کونجونه، چي يو بل و ۹۰ درجو ته پوره کوي۰کمپليمنټکونجونه بلل کيږي۰ يو کونج د بل کونج کمپليمنت بلل کيږي

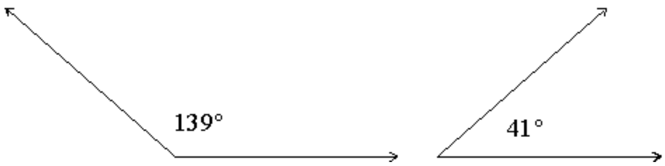
بيلگهExample: دا مخامخ دوه کونجونه کمپليمنت کونجونه دي

دوه کونجونه، چي داسي سره يوځاي شي،چي يو ولاړ کونج جوړ کړي،نو دا کونجونه يو له بل سره کمپليمنت دي!

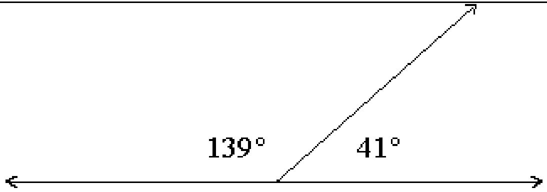
Supplementary Anglesسوپليمنت کونجونه :

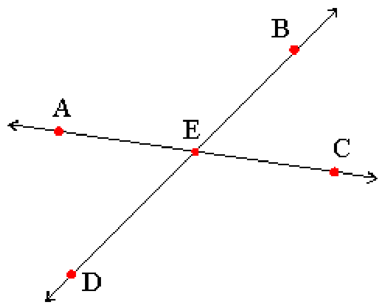
هغه کونجونه، چي ۱۸۰ درجکو ته سره پوره کوي سوپليمنت کونجونه بلل کيږي

بيلگه Example: لاندې دوه کونجونه سوپليمنت دي

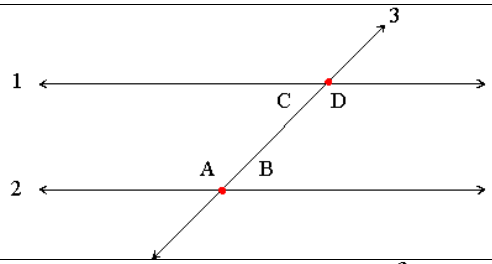
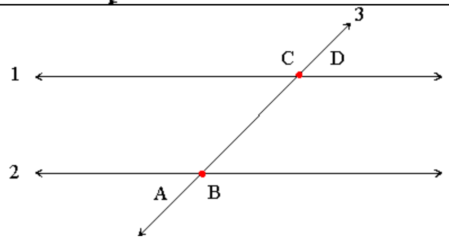


(c) ketabton.com: The Digital Library

<table>
<tr><td>

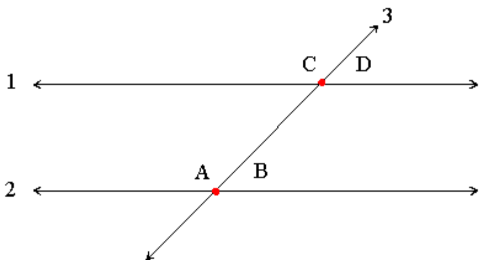

</td><td>داسي دوه سره ترلي کونجونه، چي ځانونه ۱۸۰ درجو ته پوره کړي سوپليمنت کونجونه جوړوي

Vertical Anglesککر په ککر کوجونه: چي دوه کرښي داسي سره غوڅي کړي، لکۀ په لاندي ځيره او کونجونه، همغه ککره ولري ککر په ککره کونجونه بلل کيږي او سره برابر ده

, AEB او DEC کونجونه او همداسي BEC او AEDککر په ککره کونجونه دي.</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Alternate Interior Anglesرد بدل دننه کونجونه : په لاندي کي کونجونه Aاو Dهمداسي B او C ردبدل دننني کونجونه او سره برابر دي . A اوB ، C او D ګاوندي کونجوه دي.</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Alternate Exterior Angles

ردبدل دباندي کونجونه : په لاندي کي کونجونه B او C ردبدل همداسي A او D بدل - يا ردبدل دباندني کونجونه او سره برابر دي</td></tr>
</table>

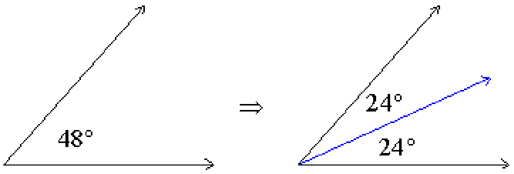
پوريز کونجونه Corresponding Angles دا کونجونه A او C همداسي D او Bپوريز کونجونه دي او يو له بل سره برابر دي



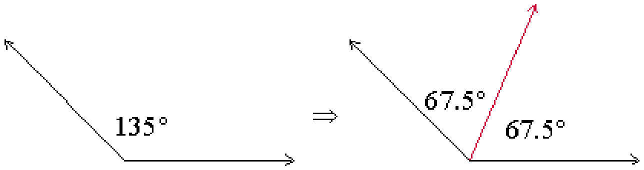
(c) ketabton.com: The Digital Library

Angle Bisectorکونجنیمی : هغه کرښه، چې کونجونه نیموي کونجنیمی یې بولو

بیلګه Example: د بنی کونج شنه کرښه ، د کین کونج نیمی ده

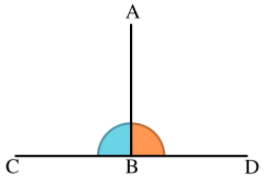


په بني کونج کې سره کرښه د کین کونج نیمی ده .



Orthogonal or Perpendicular Lines

ولاړې کرښې: هغه کرښې، چې یو په بل نیغې ولاړې وي پرپینډکیولار نومیږي۰(زما وراندیز: نیغې ولاړې کرښې)



نښلونه:

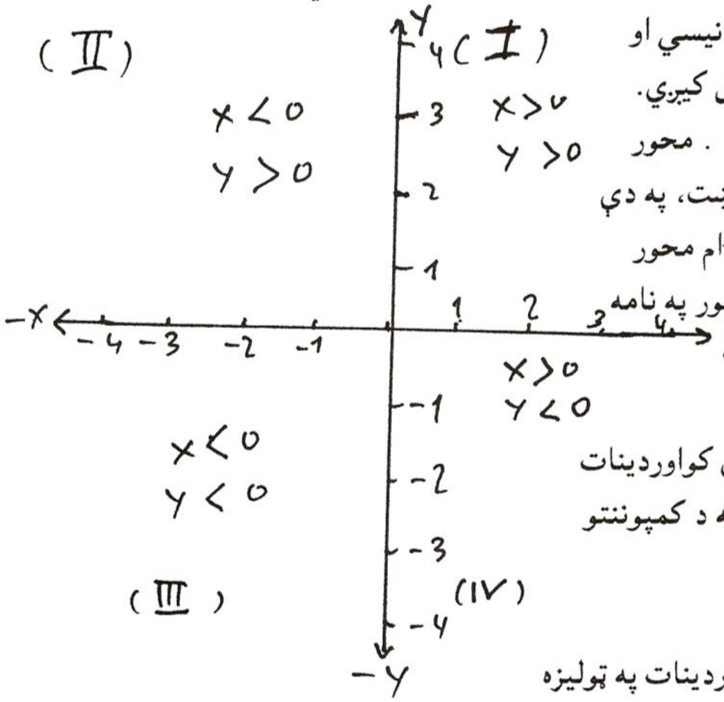
کواوردینات سیستم

یادونه: کواوردینات سیستم ځخه ځموږ موخه پروتولاړسیستم دی. دا په ادبیاتو کې په همدسي یادیږي. ما دا دواړه ترمینولوژي کارولي، هیله ده چې ستونځې به پیښې نه کړي.

د شمیرپوهنی او همدا ډول د تخنیك په ډیرو څانګو کی د کواوردینات سیستم ډیر مهم رول لوبوي. په کارتیزي کواوردینات سیستم کی د هواري هر ټکی P د خپلو دواړو کواوردیناتو(x,y) ورکولوسره کره یا ټیك ورکړ شوی دی. لمړی کمپوننت یا ابسځیز (Abszisse) د x –ارزښت یا پروت ارزښت او دوهم کمپوننت یا اوردینات

(c) ketabton.com: The Digital Library

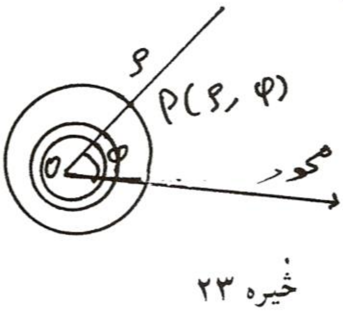
(Ordinate) د y–ارزښت بلل کیږي یا ولاړارزښت. کارتیزي کواوردینات سیستم هواره د دوه یو په بل نیغ ولاړ محورونو (لنډ : ولاړ محورونو) له لارې په څلورو برخوویشي (څلورمی Quadranten) د کوادرانتو نومره بندي یا نمره کول د ساعت څرخیدلو په څټ صورت نیسي او د ښي پورته لور څخه پیل کیږي. پروتنیغ پروت محور د ۱ . محور یا x–محور یا پروت ارزښت، په دې لوتنیغ ولاړ محور د ۲ –ام محور یا y– محوراو یا ولاړمحور په نامه یادیږي.



خیره ۲۰ : د کارتیزي کواوردینات سیستم څلور کوادرانتونه د کمپوننتو له مختنخښي سره.

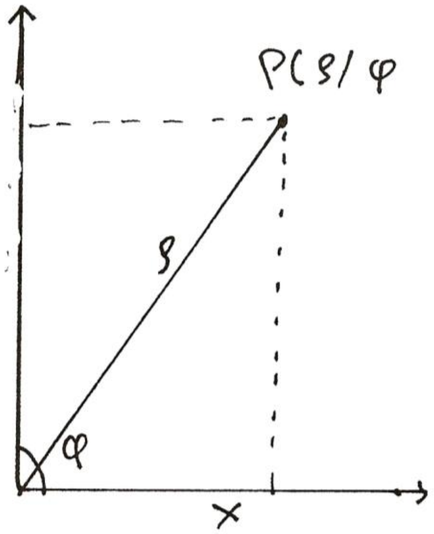
د یوه ټکي P(x,y) کواوردینات په ټولیزه توګه اجازه نه لري چې بدل شي، څکه چې دا کپموننتونه تنظیم شوې یا منظمه جوړه ده. د ځل یا ضرب لمړنی کپموننت د y– محور څخه فاصله ټاکي دوم کپموننت د x– محور څخه. که لمړی کمپوننت منفي وي، نو ټکی د y–محور کینې لور ته

د دریګوډیز ناخپلواکو (تریګونومتریکي مثلاثاتي فنکشنونو) (چې وروسته راغلی) او همدارنګه دپیتاګوراس له بنستیزی جملی شمیراړونی (خیره ۲۳) کولی شو چې د کارتیزي کواوردینات څخه و پولار کواوردینات ته راشو او سرچپه هم.



خیره ۲۳

(c) ketabton.com: The Digital Library



شیره ۲۴

جمله : د پولارکواوردینات بدلون یا ترانسفورمیشن (Transformation لاتین : شکل اړول یا بدلول) و کارتیزي کواوردینات ته

$$x = \rho . \cos \varphi$$

$$y = \rho . \sin \varphi$$

د کارتیزي کواوردینات بدلون یا ترانسفورمیشن و پولارکواوردینات ته

$$x^2 + y^2 = \rho^2 \Rightarrow \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

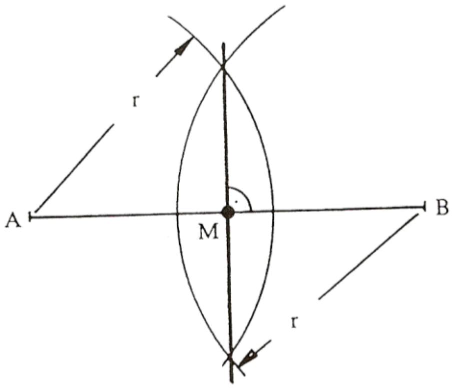
$$\cos \varphi = \frac{x}{\rho} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\sin \varphi = \frac{y}{\rho} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

هندسی بنسټیز جوړښتونه:

زه دلته داموضوع اوږده نه څیړم، خو دومره غواړم چي په ګوته کړم، چي تراوسه مو یو څه د هندسی ځنی بنسټیزې کلیمي تشریح کړې او دلته دا غواړم وښایم، چی څنګه ځنی بسټیز شکلونه کښل کیږي، په هغه صورت کی چی له موږ سره ګردونی یا څرخی (څیرکل یا پرکال او که پرکار مو ورته وایه) او کرښی یا ختکش وي یا همداسی کونجکچ د مناسبو ویشنو سره موجود وي. ددې لپاره چی ځنی ستونځی مو له منځه لرې کړي وي باید له دې څیرو یوه لیدید ونکی څیره ولروچی دا د دې څیرو په کښلو یا رسم کولو ممکن کیدی شي. دا د عملي اندازې پرابلومونو حل یا ستنځوبي کي هم مرسته کوي، که د اندازي یوونونه (واحدونه) ونه لرو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

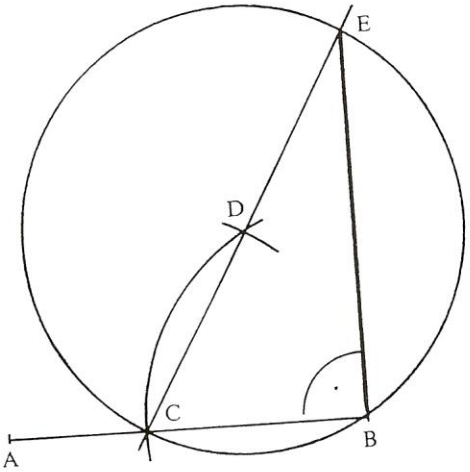


خيره ۲۵

۱ – د AB کرښې نيمول او
۲ – د منځ ولاړکرښې کښل
د A او B په هر ټکي يوه ګردۍ د
وړانګې $r > (1/2).|AB|$ سره ووهی
(سيومتري دوه ګردۍ ځيرې)
د دواړو ټکو تړلکرښه په غوځټکی M
کی په کرښه AB منځولاړکرښه ده
او دا کرښه په M کی نيموي.
۳ – د يوې کرښې په سرټکي کی د
ولاړکرښې جوړول (يا کښل). په B
يوه ګرديلينده ووهی د وړانګی $r < |AB|$ سره، چی AB په C کی پرې کړي، وروسي
بيا په C يوه ګرديلينده په همغه وړانګه ووهی چی د مخه وهل شوې ګرديلينده په D
کی پرې کړي. D د دريمی ګردۍ منځ ټکی دی د وړانګی $r = CD$

سره. چی CD غزولشوې تر ګردۍ
په E کی پرې کوي. E نو په B نيغه
ولاړه ده. (تالس ګردۍ دې وکتل شي)

۴ – د ټکي P څخه په کرښه g باندې
يوه نيغه ولاړکرښه واچوی ($P \notin g$).
په P کی په وړانګه r يوه ګردۍ ووهی،
چی هغه د g له فاصلی(واټن) لوی
وي او کرښه g په A او B کی پرې کړي.
اوس نو لکه په (۲) کی الترناتيو:
لکه د (۳) لاندې په کرښې او هندسي
دريکوډي.

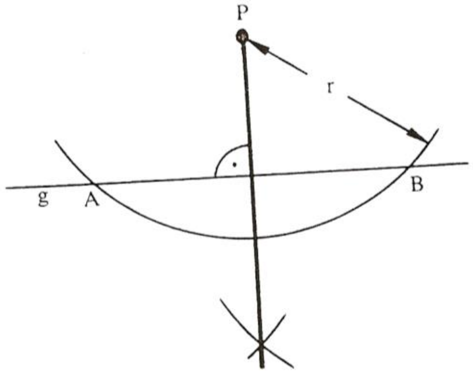


خيره ۲۶

(۳ - يو ډې اړ مند)

(c) ketabton.com: The Digital Library

۵ – د AB کرښی سره دتکي $P \notin AB$ یوه غبرګکرښه جوړول(کښل): د خوښي په یوه ټکي $C \in AB$ د وړانګی $r = |CP|$ یوه ګردۍ ووهی چی کرښه AB په D کی پرې کړي، بیا نو په D او P همغه لینده ووهی چی یو بل سره د E په ټکی کی غو ثوي. دا د PE کرښه د AB کرښی سره غبرګه ده. (دا د روتی نومي څلورګوډي جوړول دې).

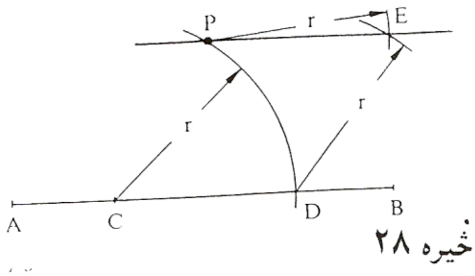


څیره ۲۷

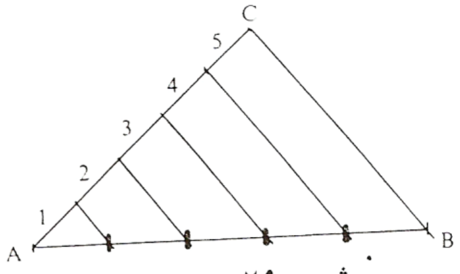
الترناتیو : لکه په(۴) کی په ټکي P کی ولاړه کرښه s و AB باندې او بیا همداسی نیغ – یا ولاړکرښه په s د P ټکی کی.

---

۶ – د یوې کرښی AB ویشل په n مساوي برخو(د بیلګي په توګه ۵) د A ټکی څخه یوه د خوښی وړانګه وغزوی. په دې کرښه بیا n – ځله (دلته ۵ ځله) د خوښي اوږدې کرښی ووهی. اخرنی ټکی C له B سره وتړی او بیا له هر ټکي د BC مرستکرښی سره غبرګی کرښی وکاږۍ، دا غبرګی کرښی د AB کرښه په (۵) مساوي برخو ویشي.



څیره ۲۸

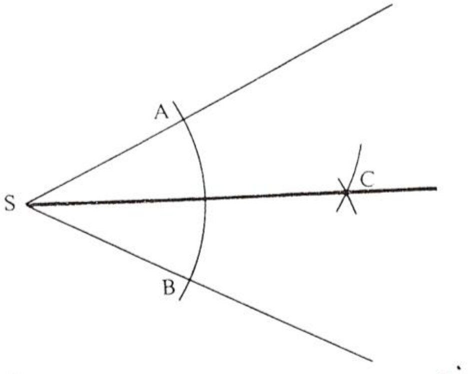


څیره ۲۹

(c) ketabton.com: The Digital Library

۷ – د یوه کونج نیمول

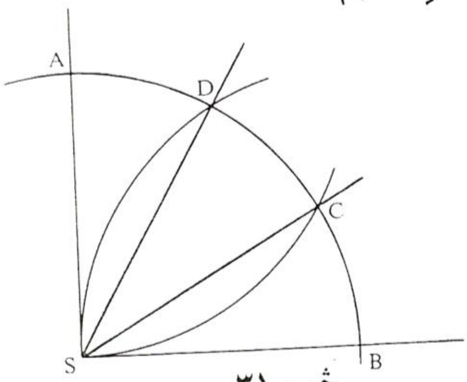
په ککره S یوه د خوښی لینده ووهه چی د کونج پښی په A او B کی پرې کړي، بیا په A او B په همغه وړانګه یو د خوښی ګردیلینده ووهۍ چی یو بل سره په C کي پرې کړي، پریتهکی د S سره وتړی.



ضحره ۳۲

۸ – یو ولاړګوډی په درې مساوي برخو هره 30° وویشی

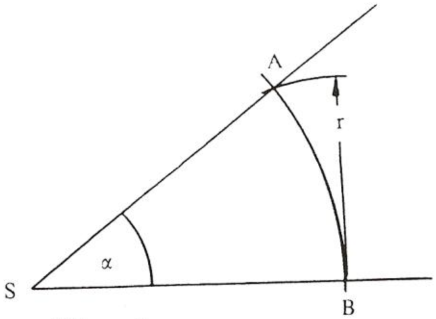
په ککره S باندې یوه د خوښی ګردیلینده وباسی چی دواړه پښی په او B کي پری یا غوځی کړي او له .



ځیره ۳۱

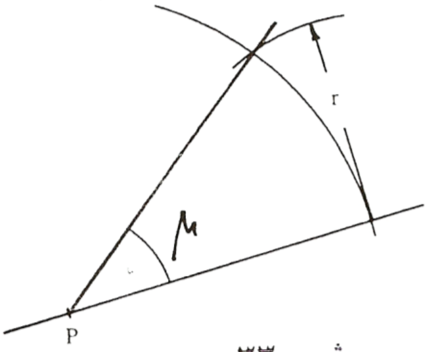
دې وروسته د ځرښوونکي په همدې بیرته والي یا وازون د A او B ټکو څخه ګردیلیندی وکاږی، اوس د S څخه د C او D په لور وړانګی وکاږی، دا دوه وړانګی دا ولاړ– یا نیغکونج درې مساوي ټوټی کوي یا په درې برابو برخو ویشي.

یادونه : هر د خوښی کونج په څرخی او کرښي باندې په درې مساوي برخو نه



ځـره ۳۲

(c) ketabton.com: The Digital Library

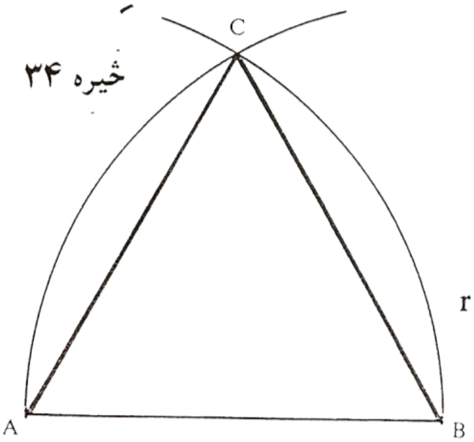


خيره ۳۳

ويشل کيږي، ددې لپاره بيا الجبري مواد په کار دي.

۹ – د μ کونج په يوه ټکي P

وغزوی، د ورکړشوي کو نج په ککره S باندې يو ګرديلينده ووهي چې پښی يی په A او B کي پرې کړي، بيا نو په همغه ګردۍ ووهی چې شرخی د |AB| په اندازه وي. اوس نو دا پريټکی د P سره وتړی.

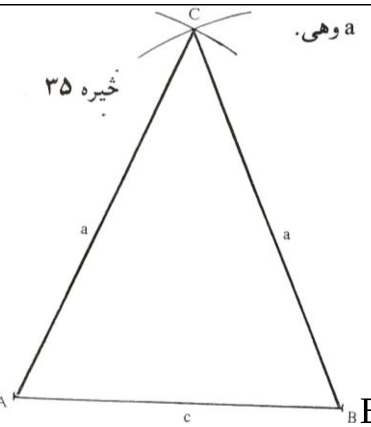


خيره ۳۴

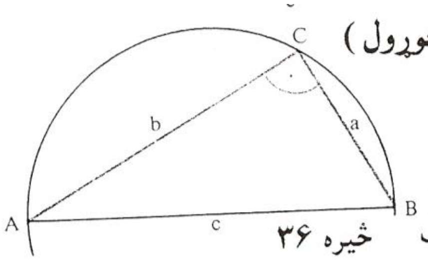
۱۰ – د مساوي اړخيز درېګوډي

کښل: په A او B باندې يوه ګرديلينده ووهی چې وړانګه يی r = |AB| وي ، چې يو بل په ټکي C کی پرې کړي.

.

 a وهی. خيره ۳۵ A B	بيانوC دA او B سره ونښلوو، دا لاس ته راغلی درېګوډی مساوي اړخونه لري. په همدې ډول مساوي پښيز درېګوډی انځورېږي، د ورکړشوي بسټ AB=c سره. په A او B يوه يوه پښه وه,

(c) ketabton.com: The Digital Library

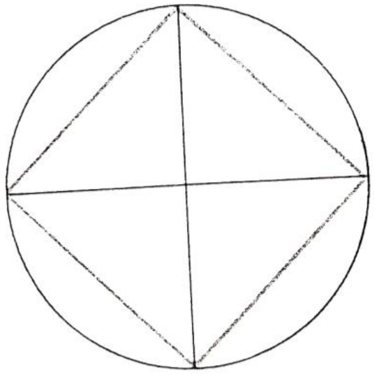


۱۱ – د ولاړکونجیز درېګوټي کښل (جوړول)

هر درېګوټی چي اوږد اړخ یې د یوه ګردي قطر وي، ولاړکونجیز درېګوټی دی.

(د تالس (Thales) جمله ودودسته راځي

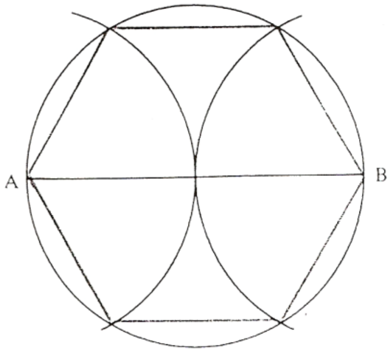
ځیره ۳۶



ځیره ۳۷

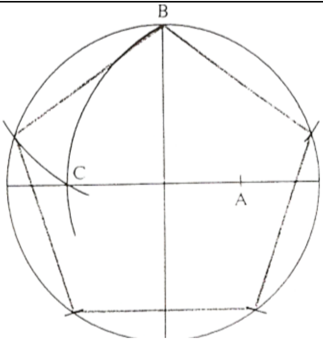
۱۲ – په ګردی کی د یوې مربع کښل

د ګردی په منځټکي باندې لکه په (۲) کی دوه یو په بل ولاړ نیمي (قطرونه) وکاږی او هغه ټکي چی ګردی پرې کړی سره ونښلوی.



۱۳ – په یوې ورکړ شوې ګردی کی دمنظم پنځه ګوټی کښل: د ګردی وړانګه په A کی نیمه کړی ، له A څخه کرښه AB تر C وکاږی، |BC| د پنځه ګوټي د اړخ اوږدوالی دی.
(ځیره ۳۹)

ځیره ۳۸

۱۴ – په ګری کې د منظمم درېګوټي کښل: د نیمي یا قطر اخرني ټکو څخه د ګردۍ وړا نګې په اندازه ګردۍ لینده ووهۍ. د دې ټکو چې ګردۍ پرې کوییوځای کول منظم شپږګوټۍ چوړوي.	

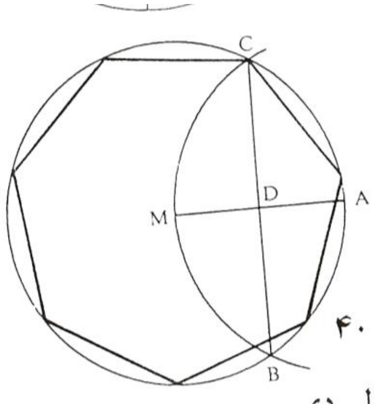
(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۵ – د مساوي اوه ګوټي

جوړول یا کښل:

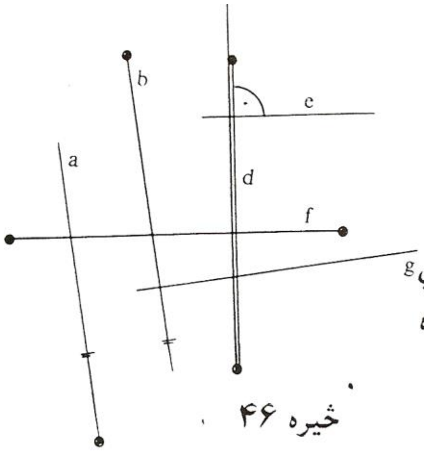
د ورکړ شوي ګردي دنیمي اخر ټکی A خخه دAM وړانګه په اندازه ګردیلینده ووهی چی ګردی په B او C کي پرې کوي. د BC کرښه د AM وړانګه په D کي په ولاړکونجي غوځوي،

پس |BD| د مساوي اوګوټیز د اړخ اوږدوالی دی.



شیره ۴۰

تمرینونه



شیره ۴۶

۱ – په ډیري ژبه باندې یی افاده کړی:

الف – ټکی A په کرښه g پروت دی.

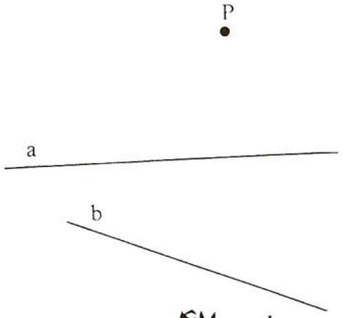
ب – کرښه g د ټکو A او B ترمنځ ځغلي

پ – کرښه AB په ناپای کرښه g پرته ده

ت – ټکی C په کرښه . چی له A وبه B ته ځغلي، پروت دی،

۲ – په شیره ۴۶ کی څومره ناپاي کرښی، کرښی او وړانګي پرتی دي؟

۳ – کومی کرښی غبرګي، او کومی یو په بل ولاړې پرتی دي؟ دا په سمبولو وکاروی (شیره ۴۷)



شیره ۴۷

۴ – هرې کرښي ته جوړ کړی :

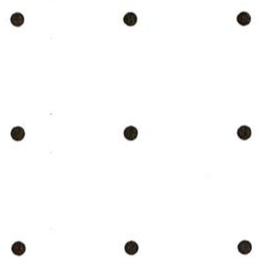
الف – یوه ولاړه

ب – په ورکړشوي ټکي کی یوه غبرګه (شیره ۴۸)

(c) ketabton.com: The Digital Library

۵ – د اسمان کومی لوري یو په بل ولاړې دي؟

۶ – داسې کرښه لار (چې یو بل سره ترلي وي) وباسئ، چې له ټولو په ځیره ۴۹ کې ورکړ شوو۹ ټکو تیریږي. دا کرښو تلنه یا کرښو



ځیره ۴۸

خوزیدنه یا تلنه (حرکت)

د یوې هوارې په خپل ځان یویواځنی ځیرونه تلنه یا خوزیدنه (حرکت) بلل کیږي او په φ ښوول کیږي، که چیرې دا لاندې خویونه ولري:

ا – د یوې هندسي ځیرې (کرښی، هوارې ، وړانګی ناپایکرښی، نیمهوارې) ځیره ډیري لاندې، یوه هغه هندسي ځیره پوهیږو، د کومی چې په غوښتونکی ځیره ډیري ژیکرښی پیلټکي ، پایټکي په ژیکرښی ، پیلټکي ، پایټکي باندې ځیره شي.

۲ – که f_1 او f_2 دوه جنډې وي ، ~~نو ټیك یوه تلنه شته~~ نو ټیك یوه تلنهφ شته، د $\varphi(f_1)=f_2$ سره.

۳ – که A او B دوه په خوښه ټکي وي، نو یوه تلنهφ شته د $\varphi(A)=B$ او $\varphi(B)=A$ سره

۴ – که p او q دوه وړانګي وي ، د ګډ پیلټکي سره ، نو یوه تلنه φ شته د $\varphi(p)=q$ او $\varphi(q)=p$ سره.

۵ – د تلنو یا خوزیدنو ډیری، د یو په بل پسی ځیرونو ته یو ګروپ جوړوي(د الجبر برخه یا د لیکو...الجر کتاب دې وکتل شي)

د تلنویا خوزیدنو (حرکت) ځانګړي ډولونه دي :

(c) ketabton.com: The Digital Library

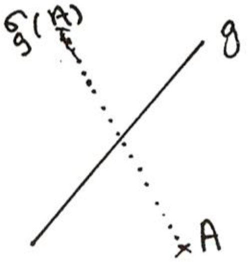
– راکښنه ، چی د τ سره يی ښايو
– ايينونه يا هندارونه، چی د σ سره ښايو
– څرخون چی د ρ سره يی ښايو
که يو ټکی همداسی يوه کرښه ، چی په خپل ځان ځيره شي ، نودا ودې ځيرونی ته

يا نسبت ودې ځيرونی ته فيکسټکی ځای په ځای ټکی او همداسی فيکس کرښه يا ځای په ځای کرښه بلل کيږي.
راکښنه τ يوه تلنه يا خوزيدنه ده د لاندې ځانګړو خويونو سره

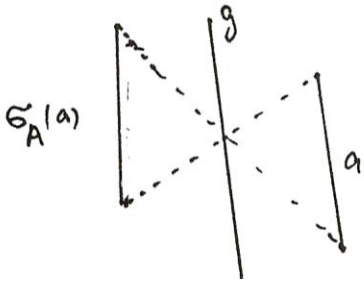
تلنه ۱ (V) : د يوې په خوښه کرښی ځيره و هغې کرښی ته غبرګه کرښه ده.
تلنه ۲ (V) : که ځيرونه کټمټ ځيرونه نه وي، نو هر ځيره ټکی د خپل اصل ټکي څخه توپير لري .

ايينونه يا هندارونه . د ايينونی دوه ډولونه موجود دي:

لمړی : ايينونه σ_g په يوه کرښه g ، چی کرښ ايينونه ورته ويل کيږي، يوه تلنه ده، د لاندې خويونو سره



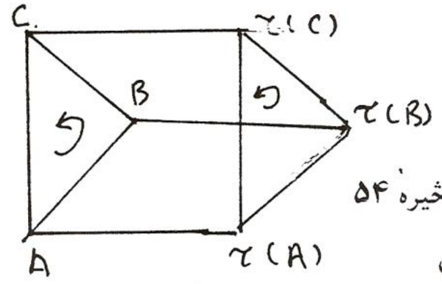
س ۱ : دکرښی g هر ټکی فيکسټکی يا په خپلځان ځيره ټکی دی ، له دې سره کرښه يوه فکسکرښه ده.
س ۲ : دواړه د کرښی g وازې هوارې يو له بل سره بدليدلی شي.
ځيره ۵۲
دوم: ايينونه σ_A په په يوه ټکی ، چی ټکی ايينونه بلل کيږي، يوه تلنه ده ، د لاندې خويونو سره : (ځيره ۵۲)



پ ۱ : هره کرښه چی له A تيريږي په خپل ځان داسی ځيره کيږي، چی دواړه له A پيداشوې وړانګي يو له بل سره بدلی شي.

پ ۲ : هره کرښه و دې کرښی ته غبرګی کرښی باندې ثیره کیږي. (ثیره ۵۴)

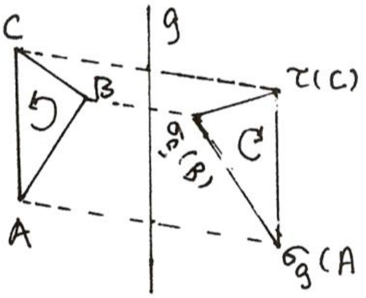
ثیره ۵۳



لوریزه تلنه یا خوزیدنه:

یوه تلنه φ همغه لوریزه ده ، ټیك هلته یا هلته او هلته، کله چی هره ثیره F د φ(F) سره همغه لور ولري یا مساوي لوریز وي.

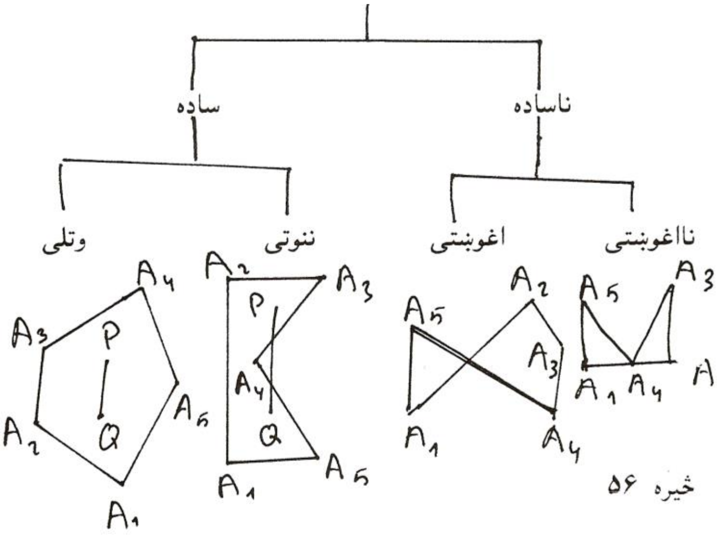
ثیره ۵۴



یوه تلنه φ همغه لوریز نه یا نامساویلوریز ده، ټیك هلته یا هلته او هلته، کله چی هره ثیره F و φ(F) ته مخامخ یا په ځټ لوریز وي.

ثیره ۵۵

ډېرګوډیز (د بیلګې په توګه پنځه ګوډیز)

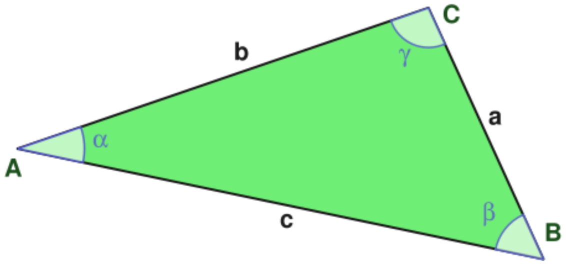


ثیره ۵۶

(c) ketabton.com: The Digital Library

یو وتلی n– کوډی منظم بلل کیږي، که د اړخونو اوږدوالی یی برابر وي او دننه کونجنونه یی مساوي یا برابر لوي وي.

درېګوډی (درېګوټی، مثلث)

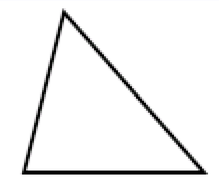
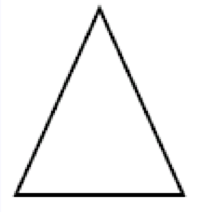
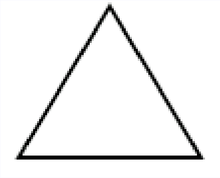
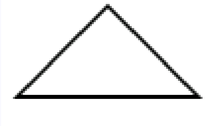
دا چي د دوه ټکو ترمنځ تل یواځی یوه کرښه انځوریدلی شي، نو د یوه شکل لپاره کم له کمه درې ټکی په کار دي، په داسی ډول چی دا ټکي په یوه کرښه نه وي پراته. دا اوس هم په همغه هواره پراته دي. که دا ټکی د ځیرې د ګوډټکو په ځیر ونیول شي، نو دریګوډی لا سته راځي٠ کرښي، چي درېګوډی په کي راګیر دی یا درېګوډی جوړوي د درېګوډي اړخونه یا هغه عربي یې ضلع بولو٠	 ګورو، چې کوجونه الفا ، بیتا او ګاما دي او اړخونه a,b او c دي. په ځیره کي ګوډونه په لویو تورو سره په نخښنه کیږي یانی A,B او C ګوډونه دي٠

ولې درېګوډی ؟

موږ وایو، چې سپین مي د برګ د کور د ګوډ سره ولید، یا د برګ د پټي یو ګوډ اوبو وړی، په یوه ځیره کې یا یوه جوړښت کې دننه د دوه کرښو غوڅی کونج بولو او دباندنی ګوډ ٠ کندهاریان وایی ګوټ٠ دا پروا نه لري، که څوک یې ګوډ ، ګوټ او که کونج بولی یانی درېګوډی، درېګوټی او که درېکونجی بولي ، خو ماته یې درېګوډی نوم ښه برېښي٠ پام دې وي، چې له ما څخه دا نوم درېګوډی نومول شوی، دا ځیره ده نارینه نه ده، نو له دې امله به ښه وي، که درېګوډی وبللشي، نوره یې د ګرانو هیوادوالو او د ځکګچپوهنې مینه والو خوښه٠

د درېګوډیو مختلف ډولونه یا تیوپونه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

	نامنظم کونجونه او اړخونه يې برابر نه دي.	برابرپښيز دوه اړخونه او دوه کونجونه يې برابردي .	برابراړخيز ټول اړخونه او کونجونه يې برابردي .
تيره کونجيز- درېګوډي **ټول کونجونه يې تيره دي ياني له ۹۰ درجو کوچني دي** **<90°.**			
ولاړکونجيز درېګوډی، يو کونج يې ولاړکونج دی			
پڅکونجيز درېګوډی **يو کونج يې پڅ دی ياني له ۹۰ درجې لوي دی.(>90°)**			

د کونجونو الفا ، بيتا او ګاما (α,β,γ) او اړخونو a,b,cله مخې د درېګوډيو مختلف تيوپونه سره بيليدی شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په پورته ځيرو کې پورته ښی لور ته درېګوډي همغه رسم شوي، خو دا يو دې د بل سره برابر پام کې ونه نيول شي، يانی د يوه درېګوډي پښی دی نابرابرې وي۰ تيره کونجيز درېګوډی، چې دريواړه کونجونه توپير لري، درې برابرکونجونه لري ، دوه کوجونه يې سره برابر وي، ولاړکونيز، پڅکونجيز، دا هم د برابرو او نا برابرو کونجونو سره ۰ هغه درېګوډی، چې دوه کوجونه يې سره برابر دي، اړخونه يې هم برابر دي او د برابرو کونجونو په مخامخ برابر اړخونه پراته دي۰ دا لاندي ښه ځيړل شوي دي، د ځيرو سرهږ

د درېګوډي يو له بل بيل ډولونه

د دريګوډي د پام وړ ټکی

- د دريګوډي هر درې يوډوله کرښی ، يو بل په يوه ټکی کی پرې کوي

- اړخنيمی په S کی

- د کونجنيمی يا نيموونکی په W کی-

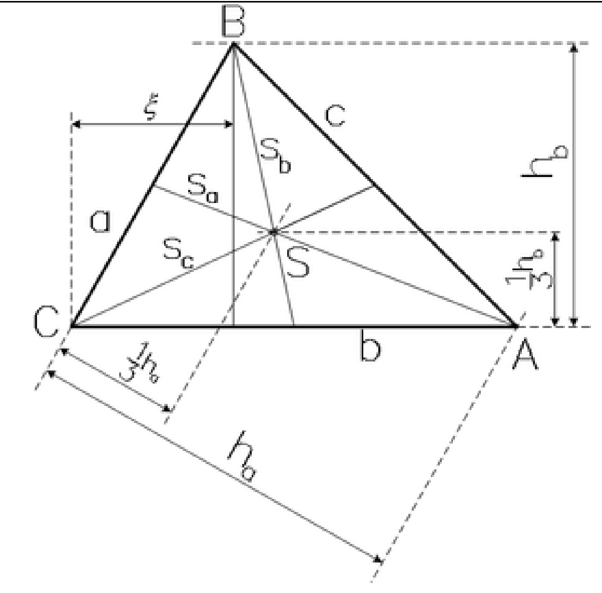
- اړخنيمی د منځ ولاړې (کرښی) په M کی: دا هغه کرښه ده، چې د دېګوډی د اړخ په منځ ولاړه ده، چې موږ يې منځولاړه بولو

-. جګکرښی يا جګي په H کی

دا ټکی د يوه دريګوډي د پام وړ ټکی دي - :

له دوي څخه S دروندټکی(د ثقلمرکز)

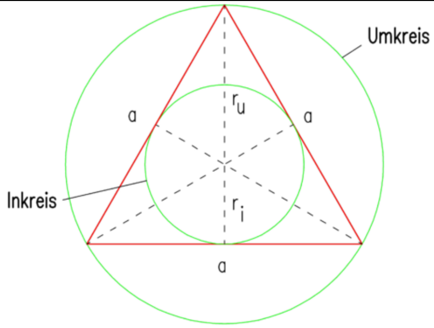
له دوي څخه W د دننه ګردی منځ ټکوړانګه او M د دباندې يا راګردې ګردی يا نوره هم ښه خورا ښه او مناسبه نوم يې چاپيريالګردی منځ ټکی دی (وړانګه) r، د چاپيريالګردی منځټکی



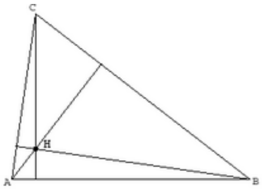
(c) ketabton.com: The Digital Library

دلته هڅیږو، چې څیرې راوړو، د څیړنې سره یې :

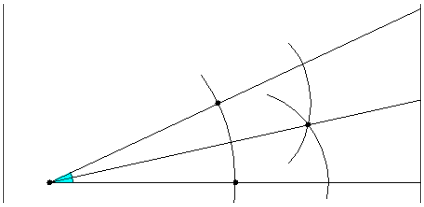
Umkreis Inkrei اي ىډرګـيډنوخ دهراتاو-يا په راتاوګردى



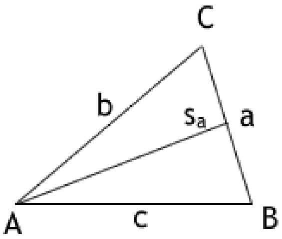
په لاندې څیره کې جګې کرښې وینو. دا هغه کرښې دې، چې را په ګوته کوي، چې اړخ د کونې سره کوم جګی لري او دا کر په یوه ټکی کې غوڅوي.



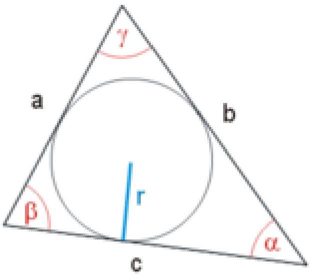
په مخامخ څیره کې کونجنیمی ګورو او وینو، چې څنګه کښل یا رسم کیږي.



په مخامخ څیره اړخنیمی کتل کیږي. دا هغه کرښه ده، چې له کونج څخه اړخ نیمی.

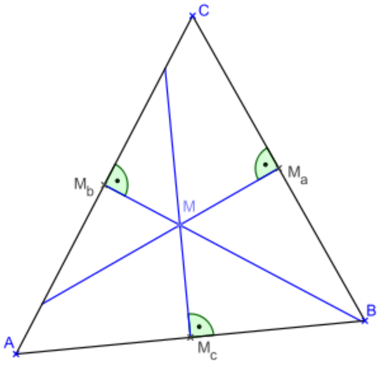


په مخامخ په درېکوډى کې د خوندي ګردى منځټکی د وړانګی سره کتل کیږي.

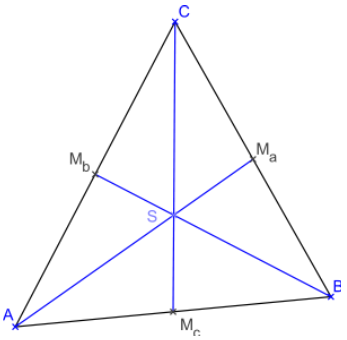


(c) ketabton.com: The Digital Library

لاندې ښيره په درېګوډي کې په منځولاړې ګرښې په ګوته کويو چې پّ لړونده ټکي کې سره غوښوي

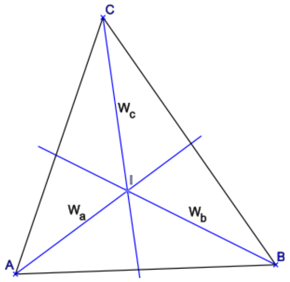


په لاندې مخامخ دريګوډي کې درې اړخنيمۍ ورکړ شوي،چې ته يوه ټکي کې سره غوښوي

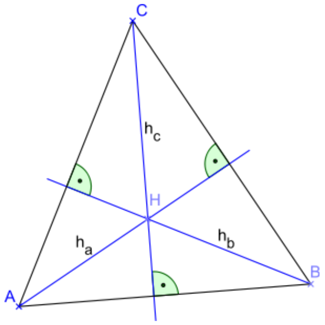


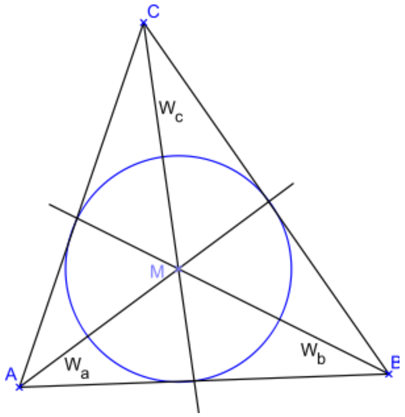
په مخامخ ښيره کې ګورونږ چې کونجنيمۍ ی خونديګردۍ منځټتي کې سره غوښوي

په لاندې درېګوډي کې دې کونخنيمۍ ديو جې په يوه ټکي سه پرې کوي

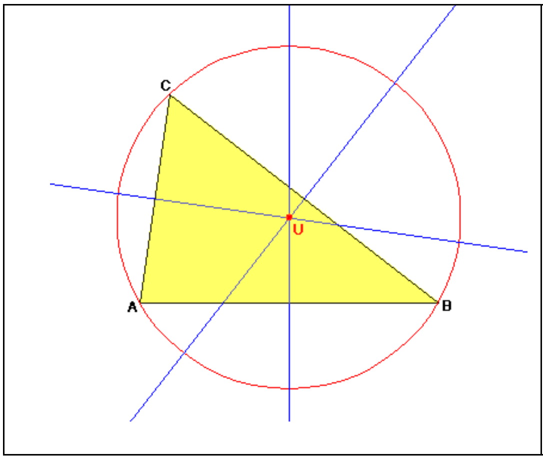


په لاندې ښيره کې د درېګوډي درې جګې ورکړ شويو چې په يوه ټکي کې سره غوښوي

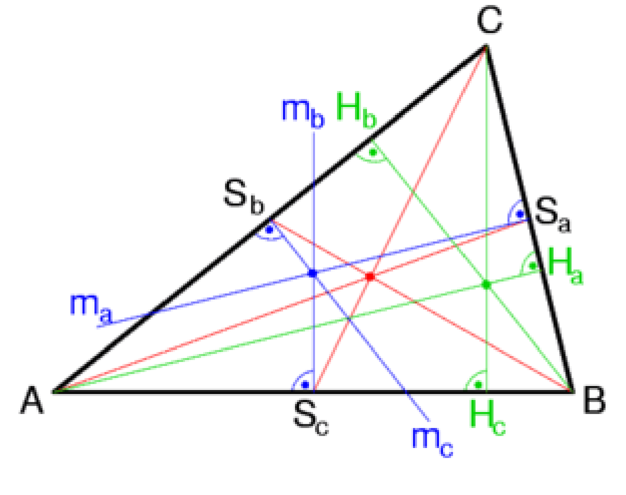




(c) ketabton.com: The Digital Library



په مخامخ ښيره کې د درېګوډي منځولاړې ګوروو چې غوښتککې يې ی راتاوګردی منځټکي دی



په مخامخ ښيره کې هغه اړخنيمی، چې په اړخ ولاړې دي کتل کيږي، په اړخنيمی ولاړې، جګی او اړخنيمی کتل کيږي، چې دريواړه په يوه کرښه پرتې دي ٠

د جګو غوښتکی (شين)، راتاوګردی منځټکی(اسماني يا زرغون)، دروندټکی(سور) په يوه کرښه پراته دي.

د درېګوډيو جوړيد امکانات يا شونتوب: درېګوډي يواځنی جوړيږي (همدا يو درېګوډی او بل، چې له دې درېګوډي توپير ولري نه شي جوړيدی) ،

-که د دريګوډيو دريواړه اړخونه ورکړ شوي وي،

-يا دوه اړخونه او له دې اړخونو بند کونج يا

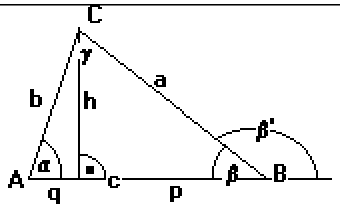
- يو اړخ او ددې اړخ په دواړو سرونو يا اخرونو کونجونه وپيژنو

یا په همدې ډول هغه دریګوډی، چی دوه اړخونه او د لوي اړخ مخامخ کونج یی پیژندل شوی وي. د کونګروا ینځ جملو کی یی بیلګي راځي .

د دریګوډي پیژندنه لنډ: یو n - ګوډی، چی n=3 وي، دری ګوډی بلل کیږي .

په درېګوډي کی جملی:

په عمومي ډول لاندې جملی باوري یا معتبرې دي چی بي له ثبوته دلته راوړل کیږي.

 	١ - د کونجزیاتون جمله : په درېګوډي کی ټول کونجونه 180° لري $\square + \square + \square = 180^\circ$ په مخامخ څیره ګې β' د β ګاونډی کونج دی

٢ - د دباندني کو نج جمله: دباندی کونج د ناګاونډیو کونجونو زیاتون یا مجموعی سره مساوي دی،له دې امله د درېګوډي د دباندنیو کونجونو زیاتون 360° لري:

یادونه : ګران د ځمککچ مینه وال دې دا څیره له پ ورتـ ه ځ بړې څخه پوره کړي ۰:

٣ – درېګوډي نامساوات یا دریګوډي نابرابرونو نه:

په هر درېګوډي کی د دوه اړخونو اوږدوالی زیاتون د دریم اړخ اوږدوالی څخه لوي دئ

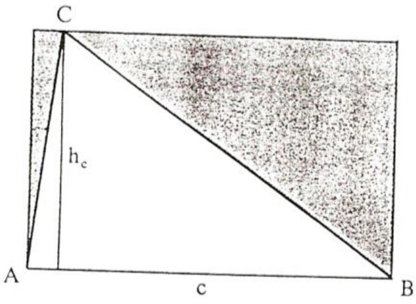
$$a + b > c \; ; \quad a + c > b \; ; b + c > a$$

٣ الف-د هر دریګوډي دوه اړخونو اوږدوالي مطلقه ارزښت کمون، توپیر یا فرق د دریم اړخ اوږدوالی همغه- یامطلقه ارښت څخه کوچنی دئ

$$| a - b | < c \; ; \qquad | a - c | < b \quad ; \quad | b - c | < a$$

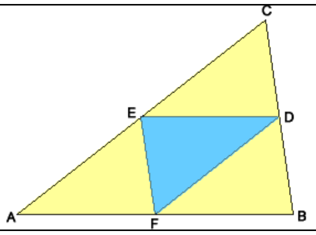
٤ - د درېګوډي چاپیریال د دریواړو اړخونو زیاتون دئ $U = a + b + c$

(c) ketabton.com: The Digital Library

	۵ - د درېګوډی منځهواره (د هوارې دننه) لنډ : هواره (، د یوه اړخ اوږدوالی او په هغی کښلی (نیغ) ولاړ جګوالی(لنډ: جګوالي) د ځل نیمايي دی F =a.ha/2 = b.hb/2=c.hc/2

د ښووني لپاره يې د یوه لنډ چل   څخه کار اخلو: موږ درېګوډی د   جګکرښي په اوږدو باندې په دوه ولاړکونجیو غوڅوو او د درېګوډي   په اړخ یی څیره باسو، په دې ډول دوه   ولاړکونجیز دریګوډي منځ   ته راځی،   چی د هغی ټوله هواره، د غوښتونکي درېګوډي هوارې دوه برابره ده.

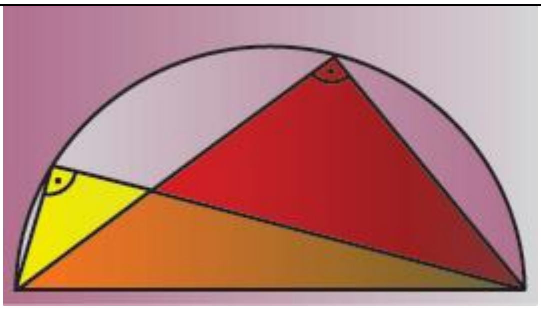
دا له پورته څیرې څخه هم څرګندیږي.

	۶ - د درېګوډي اړخونو نیمايي هغه منځنی درېګوډی جوړوي، د کوم اړخونه چی نیمايي دومره اوږده وې لکه د پیل شوې درېګوډي(د و ړانګي جمله دې وکتل شي

ګورو چی د یوه دریګوډي جګی تل څرګند نه دی. مګر دا چی د یوه جګي له لارې یو درېګوډی په دوه برخو ویشل کیږي، چی په دې ډل دوه ولاړکونجیز دریګوډي ترې منځ ته راځي، چی دا جګی   بیا د پیتاګوراس له لارې -جملی چی وروسته راځي - او یا د تریګونومتري یا کونجکچ متودو یا لارو له لارې ، چی هغه وروسته څیړل کیږي، لاس ته راوړی شو .

	د تالس جملهSatz des Thales: که AB د یوې ګردی(دایرې) یوه نیمی (قطر) وي او C په دې ګردی پروت وي، نو درېګوډي

(c) ketabton.com: The Digital Library

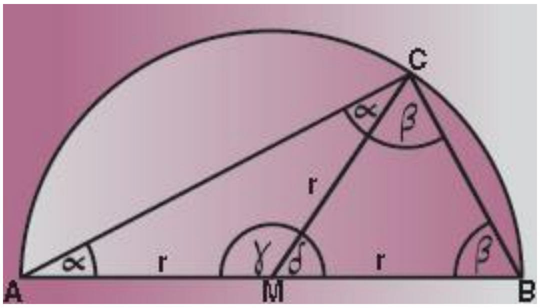


ABC په C کې ولاړکونجیز دی٠

د دې جملې په خټ یا برعکس دی:

که چیرې درېګوډي ABC په C کې ولاړکونجیز وي، نو C په ګردی پرته ده د نیمي AB سره

د جملې د ښووني لپاره: دا برخه دې دا دلته د ښوونځي شاګردانو لپاره نه وي٠



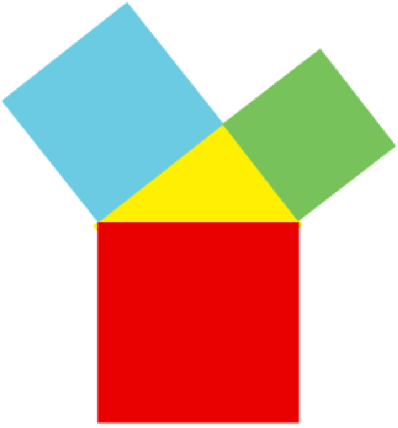
$$\alpha+\beta+(\alpha+\beta) = 180^\circ$$

$$2\alpha+2\beta = 180^\circ$$

له دې لاس ته راځي

$$\alpha+\beta = 90^\circ$$

د پیتاګوراس (فیثاغورث Satz des Pythagoras)



په یوه ولاړکونیجز درېګوډي کې ، چې کاتیتونه یا ولاړ اړخونه یې a او b وي، د هیپوتینوزی یا اوږد اړخ یې c سره پخ نخښنه ګوو , باور لري

$$a^2+b^2=c^2$$

د دې جملې په خټ یا برعکس

که د یوه درېګوډي ABC د اړخونو a, b, cلپاره باور ولري

$$a^2+b^2=c^2. F=\frac{b}{2}\sqrt{a^2-\frac{b^2}{4}}=b.\frac{h_b}{2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو دا درېګوډي په C کې ولاړکونجیز دی یا د پیتاګوارس جمله وایي، چې په یوه ولاړکونجیز درېګوډي کې د هیپوتینیوز(لوي اړخ) څلورى یا مربع د کاتیتونو(ولاړ اړخونو) د څلوریو یا مربعګانو د زیاتون سره برابره ده.

ولاړکونجیز درېګوډى یو ولاړ کونج لري یانې ۹۰ درجې کونج

د درېګوډى اوږد اړخ د لوى کونج مخامخ پروت دى ، چې هیپوتینوز *Hypotenuse* یا لوى اړخ بلل کیږي

نور دوه اړخونه کاتیتونه *Katheten* یا ولاړ اړخونه بلل کیږي٠

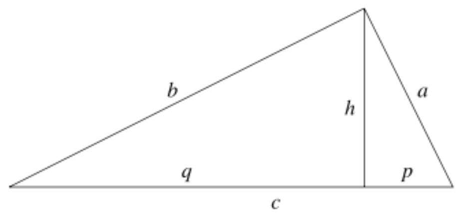
لاندې جملې ښایو:

دا جملې ټولې یوځاي راوړل شوي

جمله : ولاړ کونجیز درېګوډى $a + b + c = U$

$a.b / 2 = c \,.\, hc / 2 = F$

د پیتاګوراس جمله	$c^2 = a^2 + b^2$
د اویکلید د کاتیتونویا ولاړ اړخونو جمله	$a^2 = c \cdot p$
	$b^2 = c \cdot q$
	$c = p + q$
د اویکلید د جګیو جمله	$h^2 = p \cdot q$



(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله : برابر- یا مساوي پښیز درېګوډی جګی

$$h=\sqrt{a^2-\frac{b^2}{4}}$$

$$U = 2a + b$$

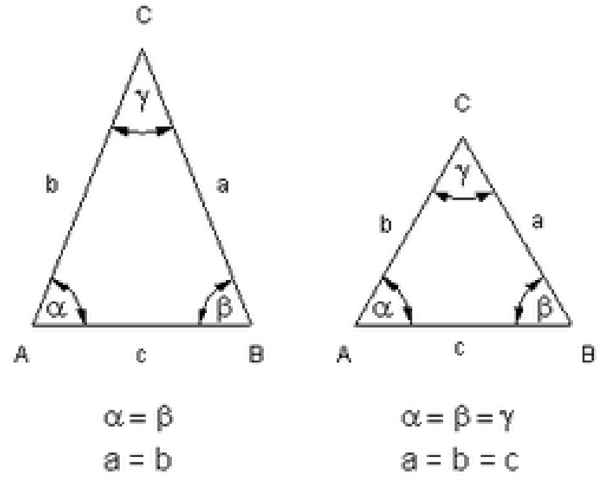
$$F=\frac{b}{2}\sqrt{a^2-\frac{b^2}{4}}=b.\frac{h_b}{2}$$

ځکه چی $h=\sqrt{a^2-\frac{b^2}{4}}$ (د پیتاګوراس جملی له مخی(پیتاګوراس جمله وګوری)

جمله : برابر اړخیز درېګوډی :

د یوه برابر اړخیز درېګوډي ټول درې آړخونه برابر دي، دنني کونج ونه برابر لوي دي، له دې امله برابر اړخیز درېګوډي منظمو پولیګونونو پورې اړه لري٠) پولیګون لاتین ډیرکوډیز(<u>Polygonen</u>).

د برابر اړخیز درېګوډي هر کونج ٦٠ درجې دی٠ برابر اړخیز درېګوډي تره کونجیزو ډریوګوډیو په ډله کې دی، ځکه، چې ټول درېکونجونه له ٩٠ درجو کم دي
په دې برسیره یوه برابرااړخیزه درېګوډیيوه برابرپښیزه درېګوډی هم ده٠
ټول برابراړخیزدرېګوډي یو بل ته ورته دی (وروسته راځی)

په یوه برابراړخیز درېګوډي کی، د یوه اړخ کونجنیمی-، اړخنیمی-، په منځولاړې-اوجګی –یو په بل پریوځي٠ په ورته توګه دا د ضوندي ګردی دباندې ګردی او دروندټکی اړخ جګیو غوڅټکی لپاره هم په یوه برابراړخیز درېګوډي کې باور لري٠	

(c) ketabton.com: The Digital Library

پورته څیره کې کیڼ لور ته برابر پښیز - او ښي لور ته برابراړخیز درېګوړی دی. هر برابر څه یې کښل شوي.

د یوه برابراړخیز درېګوړی، چې د اړخ اوږدوالی یې a دی، لپاره باور لري

$A = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$	Fläche *A* *هواره یا سطحه*
$h = \frac{\sqrt{3}}{2} a$	*جګوالی*Höhe *h*
$r = \frac{\sqrt{3}}{3} a = \frac{a}{\sqrt{3}}$	د چاپیریالګردی وړانګهUmkreisradius *r*
$\rho = \frac{\sqrt{3}}{6} a$	د خوندي ګردی وړانګهInkreisradius ρ
$u = 3 \cdot a$	*چاپیریال*Umfang *u*

د برابراړخیز درېګوډي خوېونه دې ګران لوستونکي وښايي

د اویکلید د کاتیتونو یا ولاړ اړخونو جمله

دواړه سرې هوارې یو له بل سره او همداسې دوآړه شنې هوارې همغه منځهواره لري. یا په بل ډول : د سرو او شنو ولاړکوډیو هوارې یو له بل سره برابرې دي.

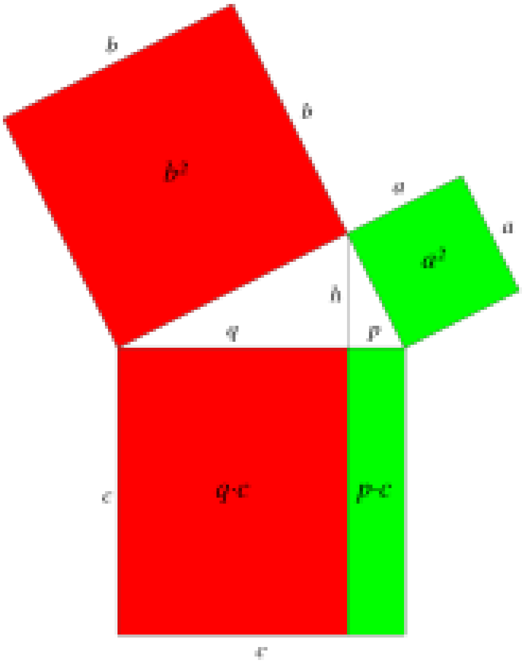
$a^2=pc$ او $b^2=qc$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که a,b,c د ولاړکونجيز درېګوډي اړخونه وي، د هيپوتينوز c سره٠ که دا درېګوډی په جګي h په دوه برخو وويشل شي او p يې هيپوتيوز ټوټه په a ده او qهمداسې ټوټه ده په b، نو باور لري:

په aځلورى د p او cولاړکونجيز څلورګوډي او په bځلورى د ولاړکونجيز څلورګوډي، د اړخونو q او cسره هوار برابره ده يانې هوارې يا سطحې يې برابرې دي٠

لاندې څېره دې وکتل شي٠ پام دې وي ، چې دا پورته ښونه او دا لاندی سره برابرې دي، خو يوائې څيرې يې بدې دي، دوه ځله ښوونه پروا نه لري٠

	*فرمول يې :* $a^2 = p.c$ $b^2 = q.c$

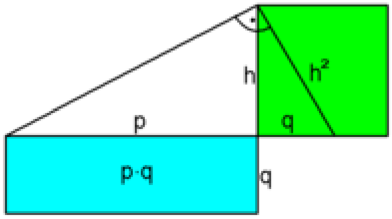
Kathetensatzد كاتيتيونو جمله:دواړه سرې هوارې همغه منځهواره لري او همداسې دواړه شني هواري هم *د اړخ او څلورى د فرمول په څير په لاندې ډول دي*

$$a^2 = p \cdot c$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$b^2 = q \cdot c$$

د اويکليد جګجمله Höhensatz des Euklid

<table>
<tr>
<td>


</td>
<td>

$$h^2 = p \cdot q$$

د جګجملی د بياتيوني ښوونه(دا لږ ستونځمنه ده، خو زما يي دا ځيره بدلون ښه راځی ګرانو لوستونکو ته په مينه وړاندې کيږي) :
</td>
</tr>
</table>

د جګجملی ښوونه : د پيتاګوراس له جملې $a^2 + b^2 = c^2$

او د بينوم له فرمول

$$(p + q)^2 = p^2 + 2pq + q^2$$

څخه ښوونه لاس ته راځي

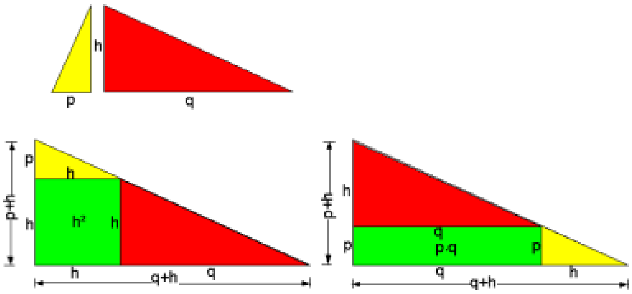
په دياګرام کې درې دربګودې ليدل کيږي، يو له اړخونو a,b,c ، بل له اړخونو h,p,a او h,q,b. سره، د دې هريوه دربګودې لپاره د پيتاګوراس جمله باور لري٠:

$$h^2 = p.q \Leftrightarrow q^2 = pq + q^2 + h^2$$

د پورته بياتيوني له لارې ښوول کيږي٠

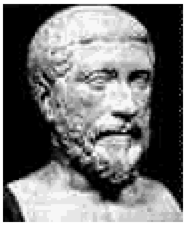
جيومتريکي ښوونه

(c) ketabton.com: The Digital Library



دا ځيره دې ګران لوستونکی پام ته را وبولي، چې څنګه د ښووني کار مخ ته ځي

(تمرين)



د ساموس پيتاګوراس Pythagoras von Samos

تکرار: په ولاړکونجيز دريکوډي کي د کاتيتونو(ولاړ اړخونو) د ځلوريو يا مربعګانو زياتون د هيپوتينوز(اوږده اړخ) د ځلورى سره برابر دى۰

دا جمله د پيتاګواراس جملې ترنامه شهرت لري او د ساموس پيتاګوراس د ژوند سره برابر ځاي نيسي۰ لکه لاندې په ګوته کوي،چې دا انسان له دې خورا زيات وو ۰

دا يو له مانا ډک انسان دى »برتراند راسل « Bertrand Russell - ",,

دى د جلبازو مشر دى « هيراکليت»Heraklit - ",,
لودويګ بورنې د هغۀ په هکله وايې« کله، چې هغه دا جمله پيداکړه، Ludwig Börne
هغه د خداى په نامه سل سوخندر خيرات کړل۰ له هغې وروسته ټول سوخندر لړزيږي، ترهغې، چې نوي څه کشف شي «

(c) ketabton.com: The Digital Library

پيتاکوراس په570دزکال پخواپه جزيره ساموس کې پيداشوی .
پلالر يې سامي زرگر منيسارښوس **Mnesarchos** دی

چې شل کلن وو د تالس **Thales** په ميلت Milet او انيکشيماندر کې يې زده کړې کولې

د پيتاګوراس ښوونه يا پوهنه Die Lehre Pythagoras

روح نه مري او ځاي بدلوي، داسې، چې له يوه ژوندي څخه وبل ته ځي

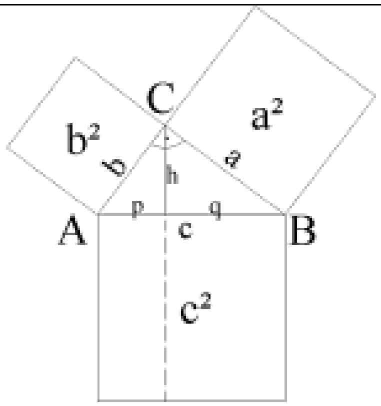
د پيتاګوراس جمله

په يوه ولاړ كونجيز درېګودي كې د كاتيتونو(ولاړو اړخونو) څلورى زياتون د هيپوتينوز (اوږده اړخ)له څلورى سره برابر دى

c^2	**=**	**$a^2 + b^2$**
$p \cdot c$ (د کاتيتونو جمله)	=	b^2
$q \cdot c$	=	a^2
Kathetensatz د کاتيت جمله		
$p \cdot c + q \cdot c$	=	$a^2 + b^2$
$(c \cdot (p + q)$	=	$a^2 + b^2$

دپورته لپاره لاندې څېره وګورى

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دې جملې د ښوونې لپاره له ۲۰۰ څخه زیاتې اوبیونې یا ښوونې (ثبوتونه) شته	

پیلونې او ښوونې

د یوونڅلورۍ یا یوون مربع څېره

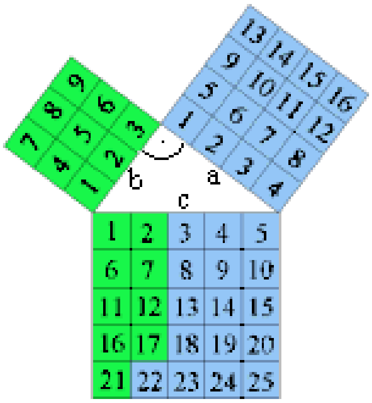
یو ولاړ کونجیز درېګوډۍ لرو، چې اړخونه یې په لاندې ډول دي

(z.B. a= 3cm; b= 4cm; c= 5cm)

په هر اړخ څلورۍ جوړوو، لکه لاندې څېره

$25cm^2 = 9cm^2 + 16cm^2$

$c^2 = b^2 + a^2$



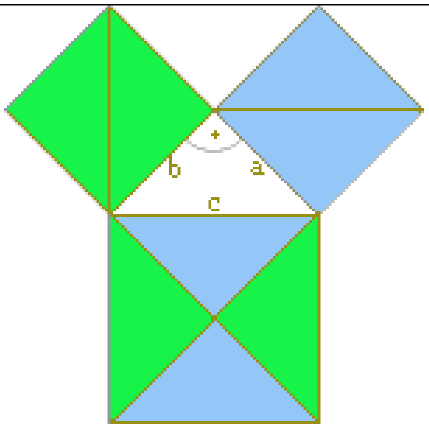
په لاندې کې یو برابرپېنیز ولاړکونجیز درېګوډی لرو:

ولاړکونجیز برابربرپېنیز درجګوډی، چې اوږد اړخ یې

دی (z.B. c=5cm).

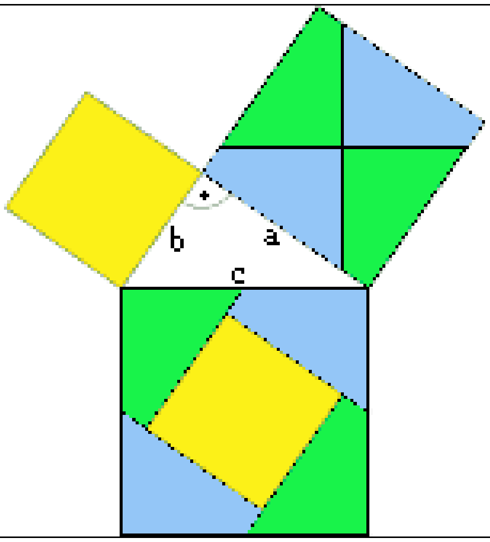
اړخونه a^2 او b^2 ګورو، نو کره به ورته وګورو، چې څه شوي یاني ځنې ځلورۍ نیمې شوي او ځنی بیا په ځلور برخو ویشل شوي٠

که څیر Jته وګورو، څه کره کولی شو؟



2.2 په خوبنه ولاړګوډیز لرو

دا په خوبنه ولاړکونجیز درېګوډی دی (z.B. c= 4,5cm) تالس ګردی د لویې کتیت ځلرۍ له منځ څخه لوي اړخ ته یوه غبرګهکرښه وکاږی او هیپوتینوز ته یوه ولاړه a^2 غوڅه کړي٠ ګران لوستونکي دي له څیرې څخه پخپلهپه ګوته کړي، چې د لوي اړخ ځلورۍ د نورو اړونو د ځلوریو سره برابره ده

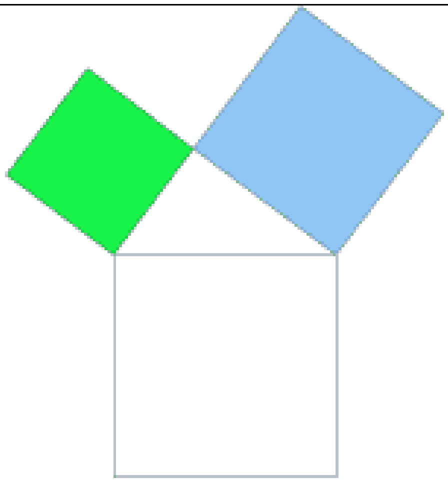


3. د څیرې ځمککچیزه لاربنودنه

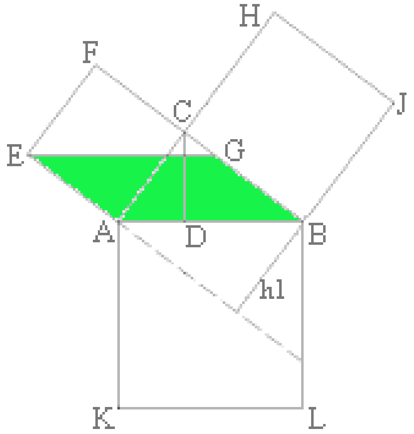
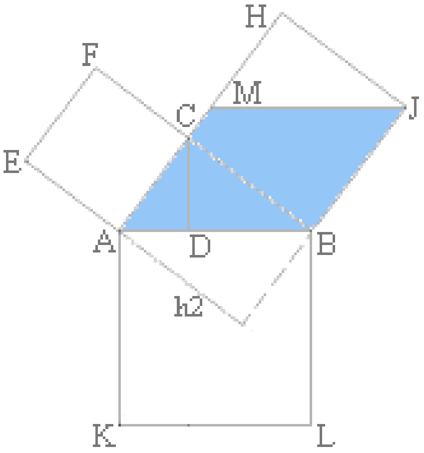
د لوړو ګوډونو یا کاتیتونو ځلورۍ په درېګوډي ABC کې دننه د غبرګ اړخیز په څېر غوځ کړی

(c) ketabton.com: The Digital Library

<table>
<tr>
<td>غبرګ اړخیز د لوی اړخ څلوری(مربع)
کډېکي باندې د هغې تر یوه اړخ پوری و
څرخوی .

غبرګ اړخیز(مایلګوډیز) یوه ولاړګوډیز
په ډول د لوی اړخ مبع یا څلوری هوارې
کې دننه بیاتي کړی</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>ښوونه :الف : بیاتیونه:

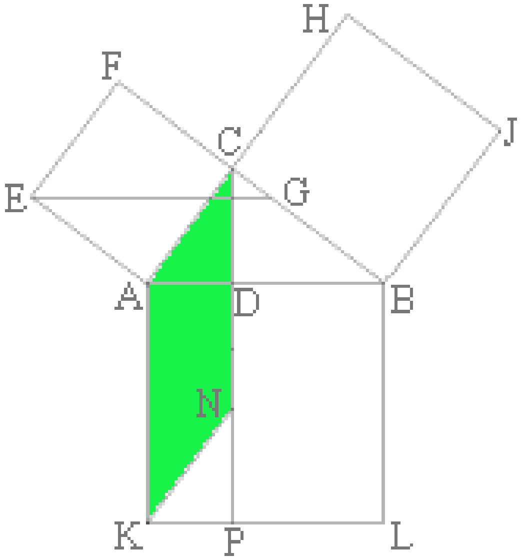
EACF = EABG . 1
ځکه, جي برابر بنسټلاین EA او برابر
حګی

BJHC = BJMA   . 2
ځکه،برابر بنسټلاین BJ او برابر
جګی(h) JHلري</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

(c) ketabton.com: The Digital Library

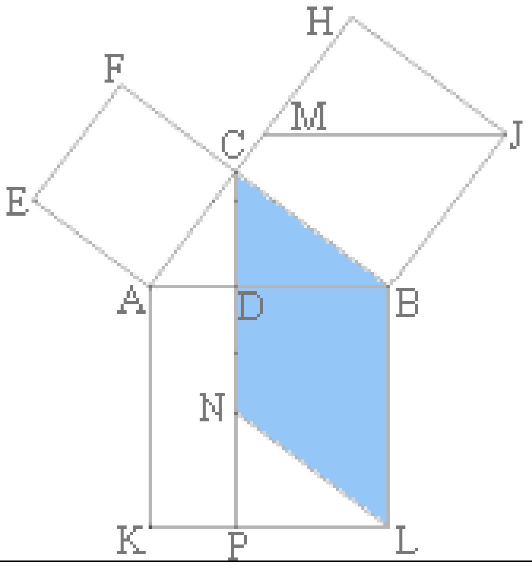
ب . څرخون : ۳ . EABG = AKNC

ځکه په A باندې EA = AC (د
یوې ځلورې اړخونه) AB = AK
(دیوې ځلورې اړخونه)



۴ . BJMA = BCNL

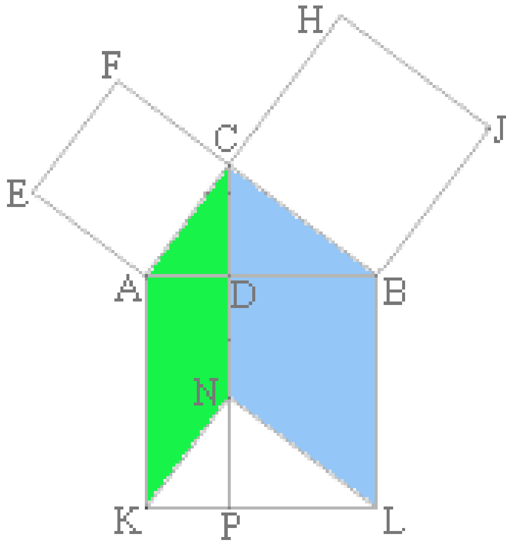
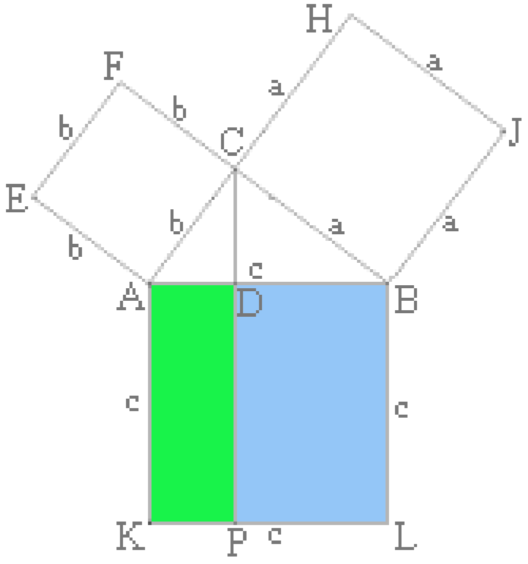
ځکه، چې په B باندې BJ = BC (
د یوې ځلورې اړخ اوړوالی) BA = BL
(د یوې ځلورې اړخونه)



پ . بیاتیونه:

۵ . AKNC = AKPD ځکه، چې همغه بنسټلاید AK شره نغه جګې KP لرې

(c) ketabton.com: The Digital Library

	۶ . NLBC = DPLB ځکه،چې همغه بنسټلاین BL اوهمغه جګی PL لري د پورته دواړو لپاره لاندې ځېره وګورئ
	له مخامخ ځیرې لاس ته اځي $a^2 = c \cdot DB$ $b^2 = c \cdot AD$ له دې لاس ته راځي : $c.AD+c.DB=C^2$ $b^2+a^2 = C^2$

بیاتیونه پیل(لاندې ځیره)

۱ - په هر دې اته درېګوډیو ځلوری داسې کیږدئ،جې برابر اوږده اړخونه یو په بل پریوزي، لکه چې ګور د یوې ځلورئ اړخونه د یوه درېکوډي داړخونو سره برابر دي .

(c) ketabton.com: The Digital Library

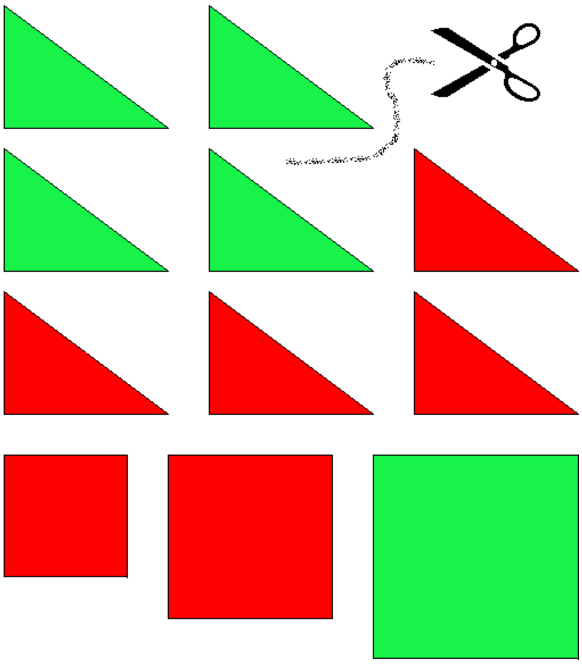
۲ - ټولې سرې ځيرې (دوه ځلورۍ اوځلور درېګوډي) داسې يوځای کيږدی، چې يوه لويه ځلوری منځ ته راشي .

۳ - ټولې شنې ځېرې (يوه ځلورۍ او ځلور درېګوډي) داسې يوځای کيږدی، جې يوه لويه ځلوری منځ ته راشي.

۴ - ځان ته باور پيدا کړه،چې دواړه داسې منځ ته راغلې ځلورۍ يو بل پټه وي.

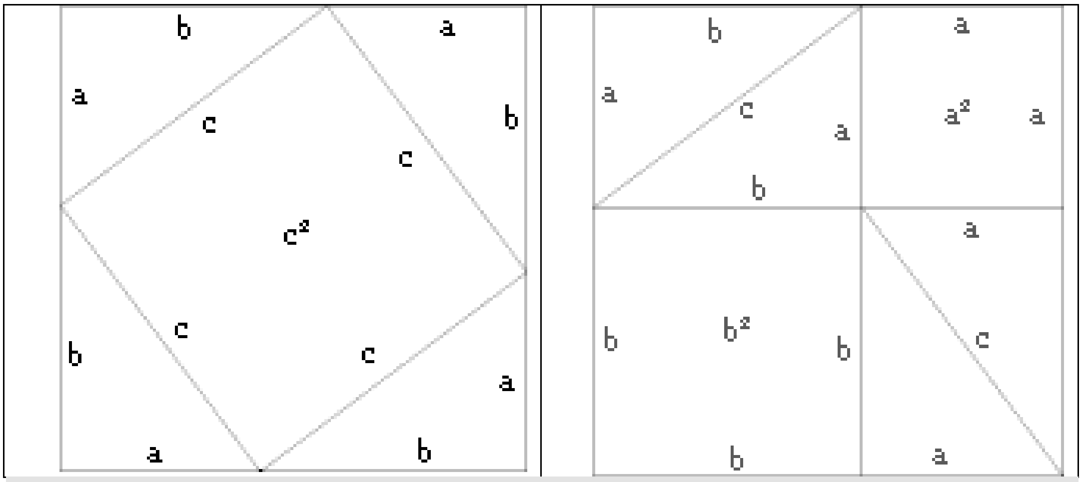
۵ - ټول درېکوډي لرې کړه، نو دا پاتې شنه ځلورۍ، د هوارې يا سحې له مخې کوچنۍ يا برابره ده دې نورو دواړو سرو ځلويو سره.

د ځواب لپاره دلايل راوړه!



۵. Berechnungsbeweisد شميرلو ښوونه

(c) ketabton.com: The Digital Library



$4 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot b + c^2$	=	$(a+b)^2$
$2ab + c^2$	=	$a^2 + 2ab + b^2$
c^2	=	$a^2 + b^2$

دا څیرې دې د ځمککچپوهنې مینه والو ته وړاندې وي، که وخت پیدا شو دا څه په منځ کې پاتې به هم وژباړل شي او ګرانو لوستونکو ته به وړاندې شي

لاندې څیره کې د،پیتاګوراس ونه، لیدل کیږي

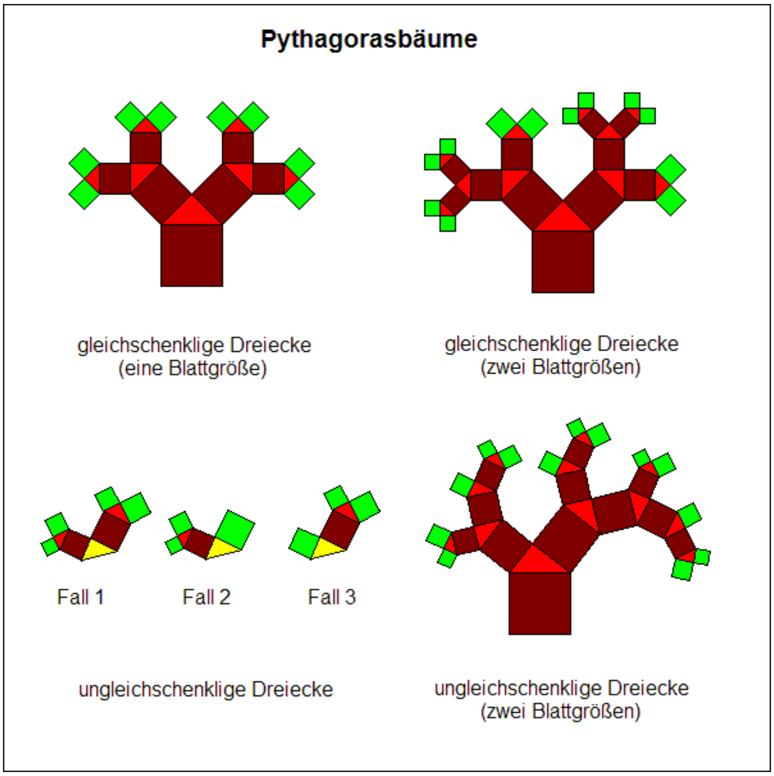
له کینې و ښي-، له پورته و کښته لور ته

برابرپښیز درېګوډی (یوه پانه لویوالی)

- برابرپښیزدرېګوډی(دوه پانې لویې)

حالت ۱ تر۳نابرابرپښیز درېګوډي- نابرابرپښیز دېګوډی(دوه پانې لویی)

(c) ketabton.com: The Digital Library



تمرینونه:

۱ – لاندي درېګوټي وکاږی :

a) a = 4 cm ; b = 8 cm ; c = 9 cm

b) a = 8 cm; b = 8 cm ; ß = 50°

c) a = 8 cm ; ß = 40° ; γ = 50°

۲ – د هوارې فرمول په مرسته

وښايې: چې د يوه درېګوټي خواوې يا اړخونه او ګڅي ، يو له بل سره په څټ اړيکو يا ځانښونو يا تناسب پرتې وي.

۳ – درېګوټی د لاندي ورکړو سره کومه هواره لري

a) a = 7 cm ; h_a = m6 cm

b) c = 3 cm ; h_c = 5 cm

(c) ketabton.com: The Digital Library

c) $a = b = c = 6$ cm

d) $a = 10$ cm ; $\beta = 45°$; $\gamma = 90°$

۴ – د هوارې اندازولو بل امکانات داسی په نامه د هیرون لیما ورکوي(د سکندریي هیرون Hronsche Dreiecksformel). که دري اړخونه معلوم وي ، نو هواره له لاندې فرمول څخه ټاکل کیږي

$$F = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

د $s = U/2 = (a+b++c)/2$ سره

د هوارې شمیرنی لپاره د په باندې ګردی همداسی دننه ګردیو وړانګو څخه هم کار اخستل کیدی شي.

$$F = a.b.c / 4r = s.\varrho = \varrho.U/2 = \frac{\varrho.U}{2}$$

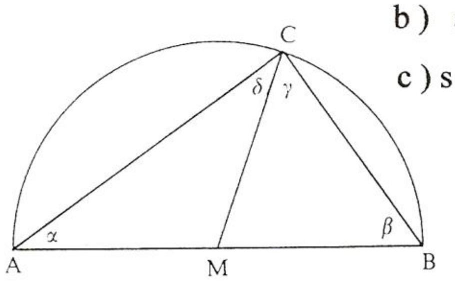
دلته د دننه ګردۍ او r د دباندې ګردۍ وړانګی دي. لاندې ټولی پاتی یا نامعلومی لویي د ټولو دریګوډیو لپاره وټاکی :

a) $a = 3$ cm ; $b = 4$ cm ; $c = 5$ cm

b) $a = 5$ cm ; $b = 7$ cm ; $U = 20$ cm

c) $s = 17$ cm ; $= 5$ cm ;

$h_a = 13$ cm $= h_b$



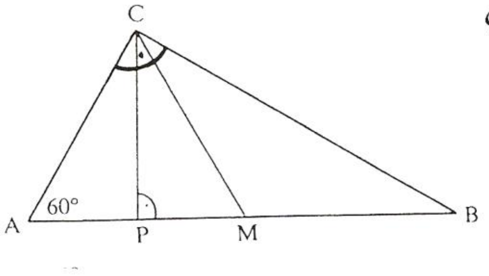
خیره ۸۲

۵ – د هندسی له لارې د لاندې خیرونو په مرسته د تالس جمله وښایی.

(خیره۸۲)

(c) ketabton.com: The Digital Library

۶ – خیره ۸۴ یو ولاړکونجیز دریګوډی ښايي د کونج = 90° سره، وښايي چې کرښې $\overline{CP}$ او $\overline{CM}$ کونج په دري مساوي برخو ويشي.



خیره ۸۳

۷ – وي دې a,b,c د پیتاګوراس (فیثاغورس) ګڼون دریګونی. وښايي : (n>m)

a) $a = 2n + 1$; $b = 2n^2 + 2n$;

$c = 2n^2+2n+1$

b) $a = 2nm$; $b = n^2 - m^2$:

$c = n^2 + m^2$

۸ – د ولاړکونجیز دریګوډي پاتی برخی وښایی(ښوونه لکه په لیکنه کی):

a) h = 4 cm : q = 5 cm ;

b) h) 7 cm; b = 10 cm

c) p = 4 cm: q = 12 cm

۹ – د کانتی یا اړخ یا ژی a اوږدولای څخه د یوه مساوي اړخیز دریګوډي جګوالی وښایی.

۱۰ – وښايي : په یوه مساوي اړخیز دریګوډي کی د دباندې ګردی وړانګه $r = (a/3)\sqrt{3} = 2\varrho$ ده او له دې سره سم د دننه ګردی وړانګه په لاندې توګه ده: $\varrho = (a/6)\sqrt{3} = r/2$.

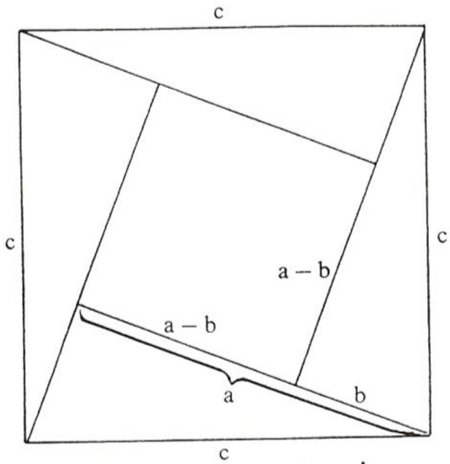
۱۱ – د ورکړشوي هوپوتینوزې سره د یوه ولاړکونجیز دریګوډي هواره کله خورا لویه ده؟ دا په دې مانا چې بله له دې لویه هواره نه وي.

۱۲ – په یوه ولاړکونجیز دریګوډي کی یوه کانتی یا ژی ۳ سانتي متره اوږده ده، بله نیمه دومره اوږده ده (x) ، لکه هیپتوینوزې (2x) نو x وشمیری.

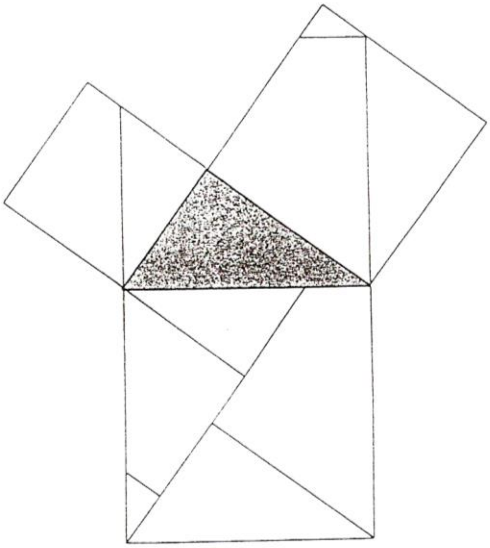
(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۳ – د یوه ولاړکونجيز مساویپښیز دریکونجي هیپوتینوزې c = 10 cm ده،
کیدی شي له دې ځخه د یوې پښې اودوالی وشمیرل شي؟

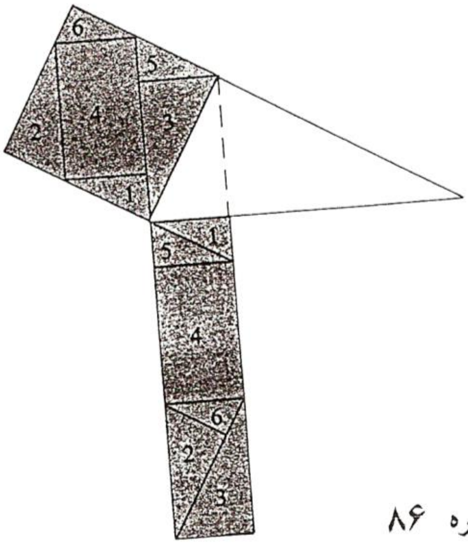
۱۴ – د لاندې ځیرو په مرسته دې د پیتاګوراس درسي جمله وښوول شي:



ځیره ۸۴



ځیره ۸۵



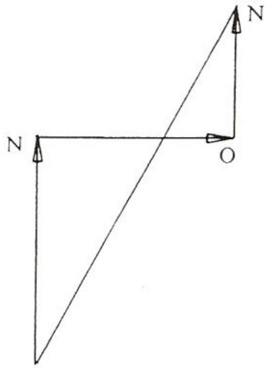
ځیره ۸۶

۱۵ – د یوې مربع ځخه چې د یوې کانتی یا ژی اوږدوالی یې ۵ سانتي متره وي، یو مساوي هواریز ولاړ– کونجي جوړ کړی، چې د یوې ژی یا اړخ اوږدوالی یي ۴ سانتي متره وي:

الف) د کاتیت له جملی سره

ب) د جګجملی سره.

(c) ketabton.com: The Digital Library



ثیره ۸۷

۱۶ – د کاتیت جملی صدق د
ثیرونی په مرسته، د برخه
هوارو د مساویوالی ښوونې
له لارې وښايي« (ثیره ۸۶)

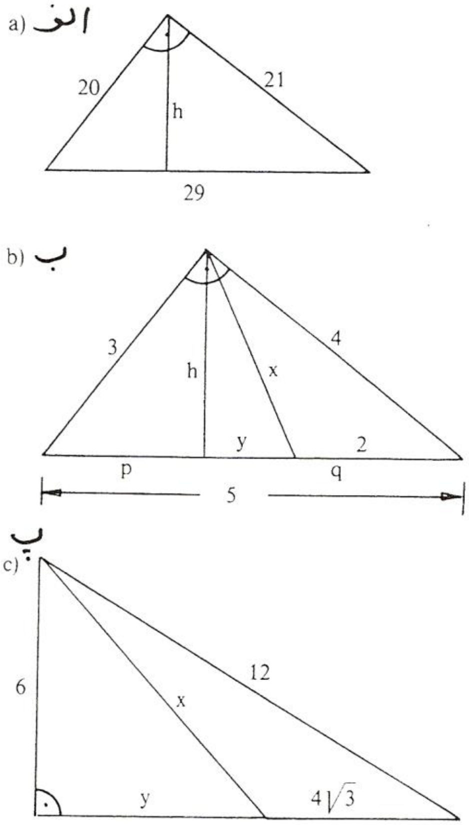
۱۷ – په برخه دریګوډیو MPC
(ثیره [illegible]/) د پیتاګوراس جمله
استعمال کړی، او په دې بنسټ
د پیوتاګوراس جمله وښايي .

۱۸ – د مساویپښیز ولاړکونجیز
دریګوډیوپښی داسی راکړ شوې
الف) ۶ سانتي متره»
ب) ۸ سانتي متره ،
پ) x سانتي متره، هره اړونده
هیپوتینوزې څومره اوږده ده؟

۱۹ – یو موټر ۷ کیلو متره د سهیل لور
ته او ۶ کیلومتره ختیز لور ته او بیا
۴ کیلومتره د سهیل لور ته ځغلي.
دا موټر د خپل وتلځاي څخه څومره لرې
دی؟ (ثیره ۸۷)

۲۰ – د خپل وتلځاي څخه به څومره لرې وي،
که نور هم ۴ کیلو متره د ختیز لور ته
وځغلي؟

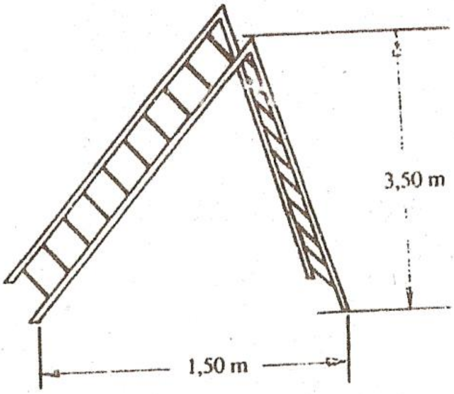
۲۱ – دا نامعلومی کرښی په ثیره ۸۸کی
وښايي.



ثیره ۸۸

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲۲ – یوه دیوال ته ۵ متره اوږده زینه ایښول شوې د زینې بیخ له دیوال ۴ ، ۱ متره واټن لري زینه څومره جګه رسیږي؟



خیره ۸۹

۲۳ – د یوې نقشې، چې د ۱۰۰۰۰۰ : ۱ اندازه ده یو د پلو لار غزیدلي ، چې د نقشې اوږدوالی ۷ ، ۰ سانتي متره دی د جګلاینونو ۲۵۰ متره او ۴۵۰ متره سره . دا د پلو لار په ریښتونی څومره اوږده ده ؟

۲۴ – د یوه کور بنسټ فورم یو مساویپښیز دریګوډی دی

الف) د ۹ سانتي متر په سور یا بر او جګوالی ۶ ، ۰ سانتي متره د چت له پورته ژی تر ناوی پورې .

ب) د یوه ۹ متره په سور او۵،۳ متره Sparenlänge د بنستفورم ۶،۵ متره جګوالي سره د بنستفورم سور وشمیرۍ

۲۵ – په یوه رامارته زینه کی ټولی پوړی مساوي اوږدوالی لریهغه په څیوررونه ۶۴ کی کښنل شوې د پوړیو واټن وشمیرۍ

۲۶ – پو یوه مساوي پښیز دریګوډي کي چی چاپیری یی ۲۵ سانتي متره دی او جګوالی یی ۲ سانتي متره له بنسټ اړخ څخه کوچنی دی۔

(c) ketabton.com: The Digital Library

اړخونه ثومره اوږده دي او جګوالی یې ثومره اوږد دی ؟

۲۷ – هر یو ټال په زوړند ځغلول شوي رسی تړلی، چې د تړلو ټکی یي د یوه مساوي‌پښيز دریګوډي کونجټکي دي. که وزنوړونکی ۶ متره اوږد او ۱ متر یو له بل لرې په کښتنی تړلي وي، نو کښتنی ټال ثومره لرې ټال وهلی شي، که دریګوډیبنسټ منځټکی د لار جګ ټکي کی ۲،۵ متره د خپل ژورځای ځخه جګه وي ؟

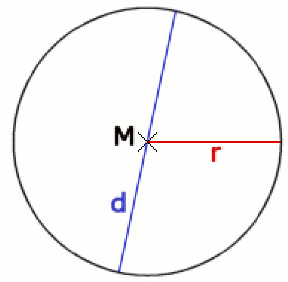
۲۸ – کوم یو د لاندې دریګوډیو ځخه نه شي کښل کیدی؟

a) a = 3 cm; b = 4 cm ; c = 6 cm b) a = 5 cm ; b = 9 cm ; c = 7 cm c) a = 7 cm ; b = 4 cm ; c = 2 cm

d) a = 12 cm ; b = 13 cm ; c = 1 cm

۲۹ – ولی درې اړخیز دریګوډی هیڅوخت ولاړکونجیز دریګوډی نه شي کیدی؟

ګردی (دایره)

 	پیژند یاتعریف د یوې هوارې ټول هغه ټکی، کوم چی له یوه ټکی داسی په نامه منځټکي M ځخه همغه- یا برابر واټن r (په نامه وړانګه) ولري، ګردی لاین یا لنډ: ګردی بلل کیږي (مخامخ ځیره) $$k = \left\{X \in E \mid \left|\overline{MX}\right| = r\right\}$$ ګردی سطحه یا - هواره او ګردی چاپیریال یا - محیط

(c) ketabton.com: The Digital Library

په پام کی دی وي، چی د ټولو هغو ټکو ډیری، چی واټن یی له M څخه د r کوچنی یا د r سره برابر وي ګردۍ (موخه ترې ګردۍ منځهواره ده یا ټیك : ګردیټوټه ځما په پام به بهتره وي که دا ګردۍچیترو یا لنډ : چیترو، چې موخه ترې یواځې منځهواره ده، وبولو) بلل کیږي

پیژند: لکه د مخه مو، چې په ګوته کړه، هغه کرښه چی د ګردۍ ژی یو ټکی د منځ ټکی سره تړي، هغه د ګردۍ وړانګه یا لنډ: وړانګه بلل کیږي، چې په r سره یې ښایو٠
پیژند: او هغه کرښه، چې ګردۍ نیموي د ګردۍ نیمونکې کرښه یا لنډ: نیمی (قطر) بلل کیږي او په d سره یې په نخښه کوو٠

پیژند
دګردۍ دننه کونج پوره کونج ۳۸۰ درجې لري.
ګردیچاپیریال د وړانګې r سره په لاندې ډول ورکړ شوی دی

$$u = d \cdot \pi = 2r \cdot \pi$$

او همداسی ګردۍمنځهواره د وړانګې r سره په لاندې توګه ورکول کیږي

$$A = r^2 \cdot \pi = \frac{d^2 \cdot \pi}{4}$$

$$d = 2 \cdot \sqrt{\frac{A}{\pi}} = 2r$$

دا لاندې ورکړشوی ګڼ ګردۍ ګڼ بلل کیږي
: $\pi = 3{,}14159265$

یادونه: دا چې ما کله هواره یا سطحه په A یا F او π مې په Pi نخښه کړې، دا به هیله ده کرانو لوستونکو ته ستونځې پیښې نه کړې.
په پورته کې ورکړ شوی ګردۍ ګڼ « پي » ګورو، چې بیرته راګرځیدونی دی٠ له دې امله یو ایرشنل ګڼ دی او د مات په څیر نه لیکل کیږي، بلکه له لسمیز (عشاریه) وروستی پریودي کیدونکی څیفر پرلپسی دی. په کارونه کې یی موږ نزدې شمرني ته مجبور یو، ځکه چه د جبشمیري د ګنځایونو له امله، چې پای دي یا پوله لري یا رابند(محدود) دي.

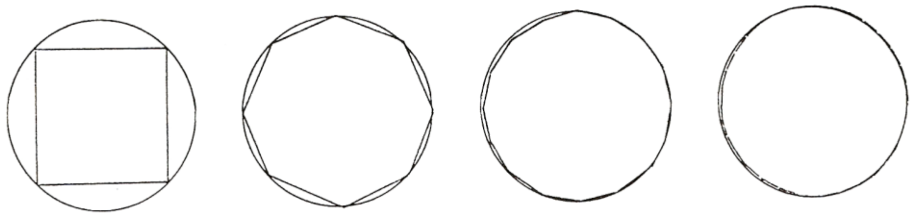
څنګه سړی په دې بریالی شو چی دا ګڼ پیدا کړي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا لار دې په لاندې کی لنډه ورکړ شي:

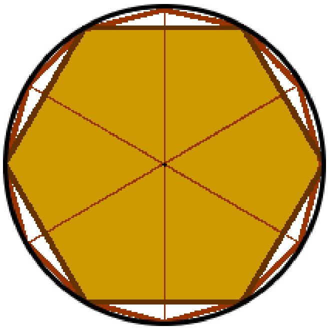
دا له ارښیمدس څخه پیل کارونه (عملیه) یا تګلار داسی پیل کیږي، چی په ګردی کی یو ه څلوری یا مربع راګیروي یا رابنده وي او بالاخره یی په منځنیو ولاړو سوکڅیسیف یا یو په بل پسی ۸ ، ۱۶، ۳۲ او داسی نورو، لوړ یا جګ کړي یعني په همغه وخت کی دوه برابره کړی .

خیره ۱۱۹



یوې ګردی ته د یوه n –ګوډي له لارې نږدیونه (نږدې کیدنه)

خیرې ۱۱۹ ښناڅ چې،

په مخامخ خیرو کې نهه ګوډی ورپسې شپږګوډی کښل شوي، دي ته ګورو، چې څنګه ګردی ته نږدې کیږي	

په پورته خیره څو څوګوډیز بریښي او ستره تری راتاو ګردی

پورته خیرو کې یوې ګردی ته د یوه n -ګوډي له لارې نږدیونه (نږدې کیدنه)

کتل کیږي، هغه ٦٥٥٣٧ ګوډی، چې ګورو نږدې یا تیک ګردی ده)

د زیاتیدونکي n سره کانتی یا ژی یا اړخونه تل کوچني کیږي، چي پخپله له ۱۰۰ یا ۱۵۰ ور رسونو ته په یوه پانه کی د کښلو یا رسمولو څخه وځي یا نه کښل کیږي، په همدې وخت کی د منځنکی څخه د په همغه واټن د تکو ګڼون یا تعداد زیاتیږي (یعنی د

(c) ketabton.com: The Digital Library

ګوډټکوتعداد يا ګڼون) د مربع پيلګردۍ سره دا څيره تل نزدې کيږي. په ورته توګه د دې چاپيرپال او منځهواره هم همغه چاپيرپالګردي ته نزدي کيږي. د ګوډټکو زياتيدو سره د ګردۍ وړانګه هم لوييږي. د هغو چاپيرپال   او منځهواره تل همغه ډير کونجي او په همدې توګه د چاپيرپالګردي څخه. په روښانه توګه ليدل کيږي چې د چاپير پالګردۍ او د منځ هوارې د ناپای ډير n ګوډونو سره   د   n   - ګوډي سره يوځاي پريوځي يا يوځای کيږي.

په لاندې جدول کې د چاپيرپال ارزښت او په همدې توګه د منځهوارې ارزښت د زياتيدونکي n ګڼ سره ستابيل (په خپل حالت، چې ډير تغير په کې نه راځي) پيژندوړ دئ:

منځهواره Fn	چاپرپال Un	پيدايښتي ګڼ n
2	5,656854	4
2, 828427	6,122934	8
3,061467	6,242890	16
3,121445	6,273096	32
3,136548	6,280662	64
3,140331	6,282554	128
3,141277	6,283027	256
3,141572	6,283145	512
3,141572	6,283175	1024
3,141587	6,283182	2048
3,141591	6,283184	4096

وروسته به وکتل شي چې څنګه د ګردۍ چاپيرى او ګردۍ منځهواره د تريکونومتري   يا دريګوډيکچ له لارې ټاکل کيدی شي

پيلبيلګه:

 د بانك مدير ښاغلی کړاو غواړي د کنفرانسونو لپاره يو د ښيښې   ميز جوړ کړي چې په هره لور يې ۸ کسان ځاي نيولی شي. ايا ددې لپاره يو ميز چې ۲ متره نيمۍ(قطر) ولري

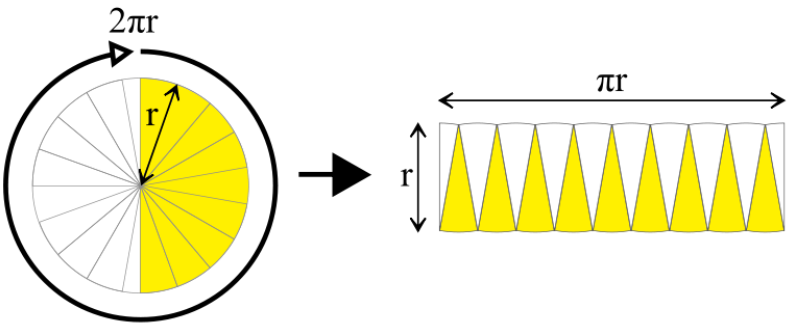
(c) ketabton.com: The Digital Library

بسيا کوي، که د يوه نفر لپاره له ۷۵ څخه تر ۸۰ سانيمتره د ميز په سور، ځاي په پام کی نيول شوی وي؟ دا ميز به څومره ګران وي، که يو څلوری متر يا مترمربع د کار د معاش سره ۲۵۰ مارکه ګران وي يا ۲۵۰ مارکه ارزښت ولري؟

دميز چاپيريال دی $pi.1m=6,248m^2 = U$ په د هرکنفرانس برخوالو لپاره ۷۵ سانتي متره سرورځاي په پام کی وي، نو د ميز چاپيريال دی : 8.75= 600cm

د ۸۰سانتيمتره ځاي د نفر په سر 80.8 = 640cm . منځ ارزښت يې 6,2m دی. پس د نېکو هيلو سره ټول خاي نيولی شي
مېز دا هواره لري: $F = \pi.1m = 3142m^2$ او له دي امله 3,142.250=785,40 ياني الماني مارکونه ارزښت لري..

په لاندې څيره کې کتل کيږي، چې د ګردی منځهواره نزدې



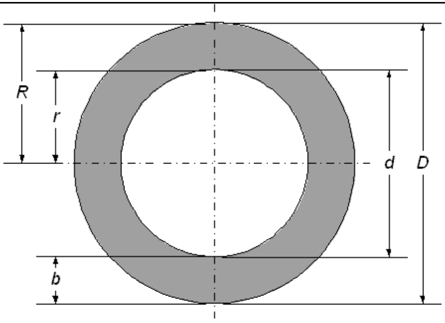
$$A = r^2 \cdot \pi = \frac{d^2 \cdot \pi}{4}$$

ده (په پورته څيره کې د څيرې کوچنيوالي له امله د ګردی څيره لږ تخريب شوه، خو دا ستونځې پوهوړ دي٠

ګردنېوته او ګرديبرخه، ګرديکړی

(c) ketabton.com: The Digital Library

ډیر وخت دننه- یا خوندیګردی له چاپیریالګردی کوچنی وي. نو له دې امله د دوي ترمنځ یوه کړی منځ ته راځي، چی د هغې منځهواره د دواړو ګردیو د کمون یا توپیر څخه شمیرل کیږي٠

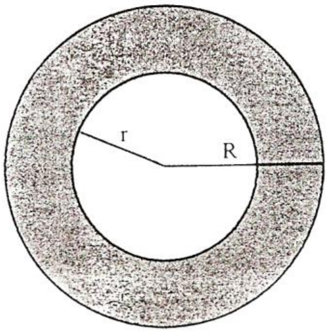


جمله : موږ دوه ګردۍ لرو، چې د چاپیریالګردی یا دباندې ګردۍ وړانګه R او د دننه ګردی یا خوندې ګردۍ وړانګه r ده، نو د

$$F_K = \pi R^2 - \pi r^2$$

$$F_K = \pi (R^2 - r^2)$$

$$F_K = \pi (R - r)(R + r)$$



خیره ۱۲۰

بل ډول یې: یوې ګردیکړی منځهواره ده

$$A = \pi \cdot (R^2 - r^2)$$

همداسې کیدی شي، چې د ګردیکړی منځهواره د ګردیبرخې د سور او دننه او دباندې ګردۍ د نیمیو څخه هم وشمیرل شي، چې په لاندې کې یې ګورو:

$$A = (D - b) \cdot b\pi$$

پیلبیلګه:

د کړاو میز درز پیداکړ. چی له غاړې یا ژۍ پنځه سانتي متره دننه لور ته ځغلي. ښاغلی کړاو فکر کوي ، چې که دامیز په پنځه سانتیمتره کوچنی کړی . کوم میز هواره پاتې کیږي او ګردیکړی چی له منځه ځي څومره لویه ده؟

او د همغه پیل نیونی سره لکه د مخه څومره نفر اوس په میز ځاي نیولی شي ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

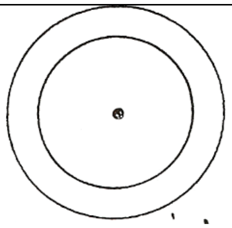
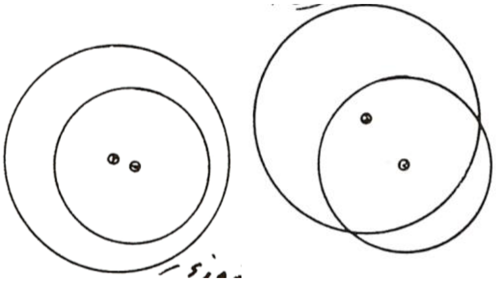
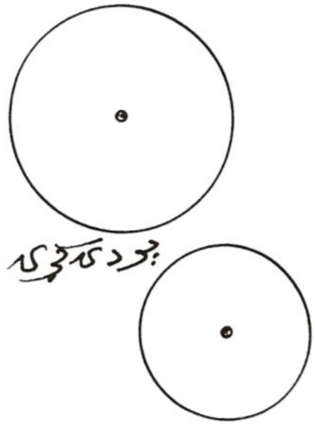
$F = (0,9m)^2 . Pi = 2,835m^2$

د گردیکړی منځهواره او چاپیریا په لاندې ډول دي

$F = 1,95m . 0,05m . Pi = 0,30m^2$

$U' = 2,095m . Pi = 5,969m$; $U' : 8 = 74,6 \text{ cm}$

د داسې لړ ستونځو سره بیا هم ټول کسان پر میز ځاي نیولی شي۰

هغه گردۍ، چې منځټکي يې يو پ بل پريوځي کونځنتري يا راټول يا يومنځي بلل کيږي او پرته له دې دکسځنتري يا نه يومنځي بللکيږي.	
تر هغې چې يوه گردۍ ټوله په بله کې پرته وي، يدی شي چې د راکښلو له لارې په يومنځي يا کونځنتري گرديو بدله شي	 دا يو نايومنځي گردۍ دي
	

هغه دوه یا زیاتې گردۍ چې منځ ټکي يې يو په بل پريوځي کونځنتري Konzentrie یا راټول او په غیر له دې اکسځینتري Exzentrieیا ناراټول بلل کیږي .تر څو یوه گردۍ

(c) ketabton.com: The Digital Library

ټوله په بله کی پرته وي کيدی شي چی د راکښلو له لارې په کونخينتري ګرديو يا راټولګرديو بدلی شي.

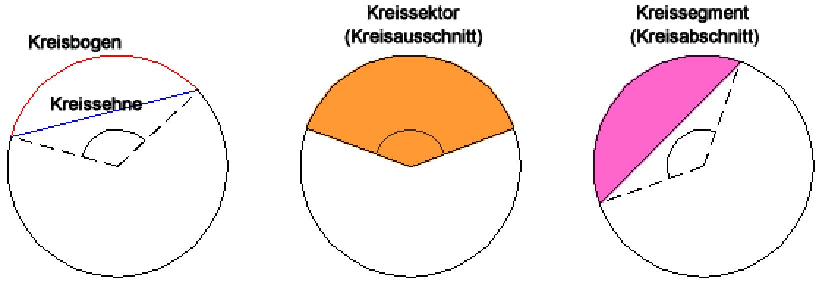
که ګردی يوبل پوره پټې نه کړي، نو د ګډو هوارو يا سطحو(= غوځديريو) يا ګډو پاتې يا باقي شميرنه له ستونځو سره مخامخ کيږي .که ګردی يو له بل سره ګډ ټکي ونه لري نو دا ګردی يو دبل سره پردی بلل کيږي٠

ځو پيژندونه يا تعريفونه:

د ګردی هغه برخه ګرديټوټه (سګمنت) Segment/ Abschnitt بلل کيږي، که چيري يوه ګردی د يوې کرښی له لارې يا کرښه باندې غوڅه شي . داسی يوه کرښه غوځکرښه ياغوڅوونی يا ټوټه ووني (سيکانت) Sekante بلل کيږي. غوځکرښه ګردی په دوه ټوټو ويش. که دا کرښه د ګردی له منځ ځخه تيره شي، نو ګردی په دوه برابرو برخو ويشي، چې دا بيا ګردی نيمووني بلل کيږ. هغه غوڅوني چی له منځ ټکي تيره شي، د ګردی نيمی يا لنډ: نيمی بلل کيږي. که ګردی په يوه ټکي کی لمس کړی نو دا کرښه تانجنت بلل کيږي او که له ګردی ځخه دا کرښه دباندې تيره شي نو تيريدونی کرښه بلل کيږي .په ګردی د غوځکرښی دننه پرته برخه د ګردی ټوټوني (Sehne) يا وتر بلل کيږي .ټوټونی يا Sehne بندکرښه ده په داسی حال کی چی غوځی ، تنجنت او تيريدونکی ناپاي کرښي يا ـلکه، چې ورسره بلد يو ـ کرښي دي .د يوه ګردی ځخه د دوه وړانګو په مرسته کيدی شی يوه برخه راغوځه شي دا برخه ګرديبرخه يا سکتور Sektor بلل کيږي. د منځټکيکونج يامنځني کونج او ليندې (Bogen) b سره. مخامخ ځيره ده

په لاندې ځيرو کې د نومونو له الماني ځخه په پښتو کوونه له کين وښی لورته:
ګرديلينده Kreisbogen د ګردی ټوټه ووني(ټوټووني) Kreissehne ،
ګردی برخه Kreissektor ،

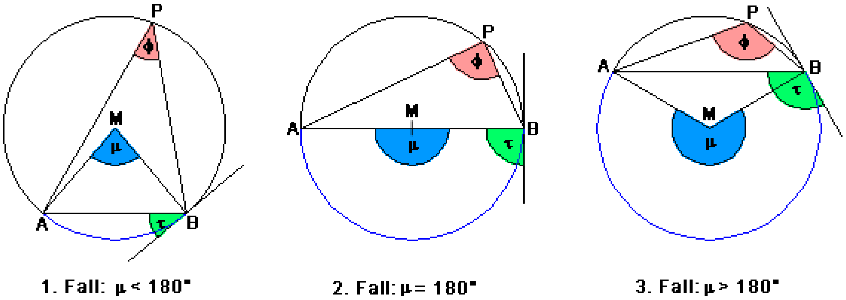
(c) ketabton.com: The Digital Library



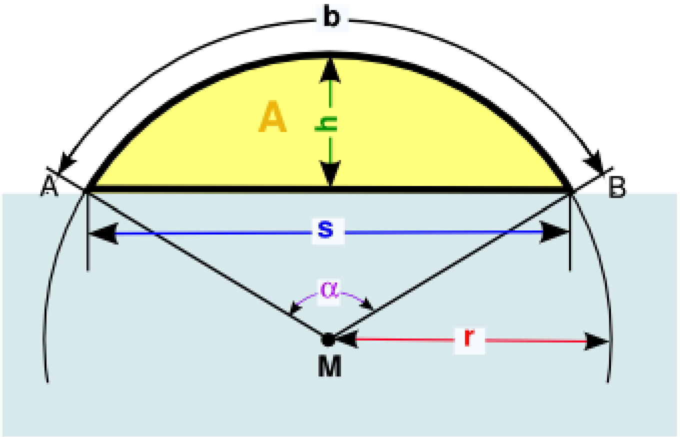
د

پورته ژباړه له کيڼ څخه و ښي لور ته: ګردی- لینده تو ټه وونې، ګردي برخه، ګردی توټه
.

په ګردی کې د کونجونو ډولونه:



د ګردی توټه



(c) ketabton.com: The Digital Library

ګردی ټوټه Kreissegment ,

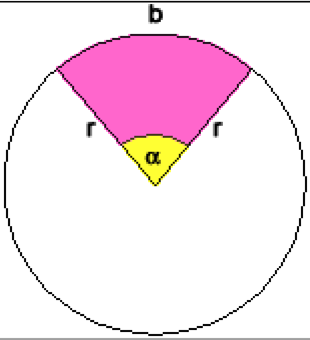
د ګردی ټوټی لویې:

- α = منځټکیکونج Mittelpunktswinkel
- b = ګردی لینده Kreisbogen
- h = ټوټي جګی Segmenthöhe
- r =وړانګه Radius
- s = ګردی ټوټه ووني یا - وتر Kreissehne
- A = ټوټي هواره Segmentfläche
- M = ګردی - منځټکی Kreismittelpunkt
- Verbindung ترنه A-M-B = برابرپينيز درېګوډی
-

د ګرديټوټي فرمولونه	
سطحه مخامخ فرمول Flächeninhalt	!Error $A = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot r^2 \cdot \pi - \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot \sin\alpha,$ $A = \frac{r \cdot b}{2} - \frac{s \cdot (r-h)}{2},$
Radius وړانګه	$r = \frac{4h^2 + s^2}{8h}$
Kreissehne ګردی ټوټه ووني (د وروسته لپاره دي په پام کې وي	$s = 2r \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right),$ $s = \frac{2h}{\tan\left(\frac{\alpha}{4}\right)} = 2h \cdot \cot\left(\frac{\alpha}{4}\right)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

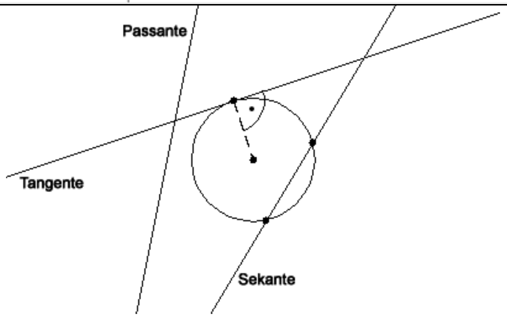
	$h = r - \left(r \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right),$ $h = r - \sqrt{r^2 - \left(\frac{s}{2}\right)^2},$ $h = \frac{s}{2} \cdot \tan\left(\frac{\alpha}{4}\right)$	Segmenthöhe د ټوټې جګوالی
	$b = 2r \cdot \frac{\alpha \cdot \pi}{360°},$ $b = r \cdot \pi \cdot \frac{\alpha}{180°},$ $b = \frac{\alpha \cdot \pi \cdot (4h^2 + s^2)}{1440h},$	دلینديِ اوږدوالی Bogenlänge
	α , $\alpha = 4 \cdot \arctan\left(\frac{2h}{s}\right)$	Mittelpunktswinkel منځټکیکونج په درجه کچ (Gradmaß)

	Kreissektor ګردی برخه یا قطاع

د ګردی برخي یا قطاع فرمولونه	
!Error $A = \frac{\alpha}{360°} \cdot r^2 \cdot \pi$	سطحه یا منځهواره Flächeninhalt

(c) ketabton.com: The Digital Library

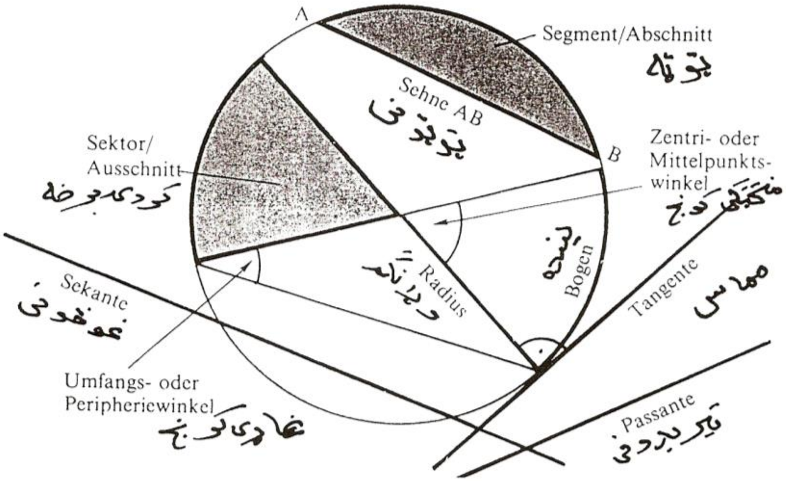
د ګردی ليندۍ اوږدوالی	$b = \frac{\alpha}{180°} \cdot r \cdot \pi$
Radiusوړانګه	r
Mittelpunktswinkel (Gradmaß)منځټکيکونج(په درجه کچ)	α
Kreiszahlګرديګڼ يا - عدد	!Error $\pi \approx 3{,}1415926536$



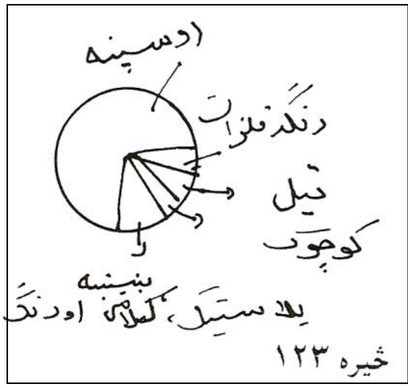
په لاندې ښيره کې نومونه: تيريدونې Passante ، تانجنت يا مماس Tangente، غوڅووني Sekante، لاندې ښيره کې څو هرڅه روښانه دي.

د پورته ښيرې کې راوړي څه په لاندې ښيره کې ټول په لاندې ښيره کې ورکړل شوي دي

(c) ketabton.com: The Digital Library



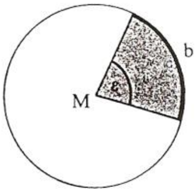
پیلبیلګه: د یوه بنس موټر جوړولو لپاره ۱۷۵۰ کیلوګرامه اومه(خام) مواد په خرڅ رسيږي یامصرفيږي. په دې کی اوسپنه او فولاد ۷۵ په سلو کي ، په پالستي، ښيښي او رنګ ټول ۹ په سلو کی رسيږي، په رنګه فلزونو او ربړ ۶ په سلو کی رسيږي، او تیل ۴ په سلو کی . یو ګردیدیاګرام وکاږئ چی هره برخه په کې ورکړ شوي وي .د ګردي ټوله هواره د ټولو موادو سره مساوي دهٔ) ۱۰۰ په سلو کی (د جوړموادو برخه د ګردبرخی څخه عبارت دئ. یوه د یو په سلو کی برخه به یوه ګردئبرخه وي د منځکونج سره 360°:100=3,6° وی .

	یعني 4%~14,4°;6%~21,6°;9%32,4°;75%=270° ځيره دی، چې د هرڅه برخه کې ورنزدې ښوول شوې وي په یوې ګردئ کې وکښل شي یا لاندې

د ګردئ برخې ځیره ځرګندوي» د منځکونج چې د ، ε سره یې په نخښنه کوو لویوالي

په تناسب برخهواره Fsk او هم لينده b تغير خوري او لاندې باوري دي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$\frac{F_{SK}}{F} = \frac{b}{U} = \frac{\varepsilon}{360^\circ}$	ε لويوالي b ده ټګی دیبوخه یاګردی اغوځي 

د ډبل برابرون د دويمې برخې څخه باوري دي:

جمله : د ګردۍ برخې د لينديې اوږدوالی داسی دی:

$$b = \frac{n.\varepsilon}{360^\circ} = \frac{2\pi r.\varepsilon}{360^\circ} = \frac{\pi r \varepsilon}{180^\circ}$$

د لومړی برخی څخه د سيکتور يا ګرديبرخی لپاره باوري کيږي

جمله: د سيکتور يا د ګرديبرخی منځهواره په لاندې ډول ده:

$$F_{Sk} = \frac{F.\varepsilon}{360^\circ} = \frac{\pi r^2.\varepsilon}{360^\circ} = \frac{rb}{2}$$

اړيکي $F_{Sk} = \frac{rb}{2}$ د مات $F_{Sk} = \frac{F.b}{n} = \frac{\pi r^2 b}{2\pi r}$ د لندونې څخه منځ ته راغلي

بيلګه: د خام موادو برخی (بيلګه مخ) هواره څومره لويه ده، که د ګردی دياګرام **۵** سانتي متره وي ؟

F اوسپنه او فولاد $= (25\pi : 360^\circ).270 = 0{,}218.270 = 58{,}905\ cm^3$

F پلاستيك $= 0{,}216.32{,}4 = 7{,}069\ cm^3$

F رنګه فلزات $= F_{ربړ} = 0{,}218.21{,}6 = 4712\ cm^3$

F تيل $= 0{,}218.14{,}4 = 3{,}142\ cm^3$

د ټولو ټوله يا د ټول زياتون بايد د ګردی سطحه يا هواره ورکړي:

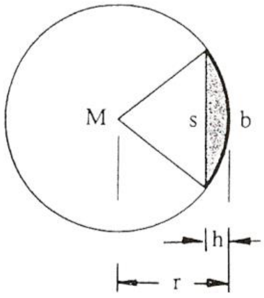
(c) ketabton.com: The Digital Library

$F = \pi r^2 = 78,54\ cm^3$

د برخهوارې ددې فرمول سره نور د برخهوارې شمیرلو لپاره هم کوم جنجال یا پرابلم نه شته. د اخرنی هواره دلته بیا د برخهوارې او د دوه وړانگو او ټوټونی څخه جوړ مساوي پښیز دریگوډي کمون دی.

ثیره ۱۲۵

گردکه ټوټه



د دریگوډي هواری لپاره باور لري:

$F = s(r - h) / 2 = 0,5\ r^2 . \sin \varepsilon$

(تریگونومتري دی وکتل شي ....) او

او د دې سره ټوټه سطحه یا هواره

جمله: د گردیټوټی یا سگمنت هوارې په لاندې ډول دي:

$$F_{Sg} = F_{Sh} - F$$
$$F_{Sg} = (br/2) - s(r - h) / 2$$
$$F_{Sg} = (\pi r^2 \varepsilon / 360°) - (r^2 \sin \varepsilon)/2$$
$$F_{Sk} = (r^2/2) [\pi \varepsilon / 180° - \sin \varepsilon]$$

په کارونه یا عمل کی د ټوټه هوارې لپاره گټور نږدې ارزښت $F_{Sg} = (2/3)sh$ ښوول شوی دی.

پیلبیلگه: مدیر کړاو له ځان څخه پوښتي چی ایا د گردیمیز په ځاي به یو منظم اته کو نجی هدفمند بهتر نه وای؟ نو په اختیار کي هواره او چاپیری به څومره لوي وي؟

لمړی گردیټوټی شمیرو. په ورته ډول لکه د گردي نږدې شمیرلو لپاره، د مربع څخه و ډیرکونجي ته، مخ ته ځو او دې د اړخونو اوږدوالی s شمیرو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

منځولاړه m، د اته کو نجیز کانتی یا ژی k او بالاخره د ګردیتوټي
جګولی h د پیتاګوراس د جملی په مرسته شمیرو.
لاندې لاس ته راځي:

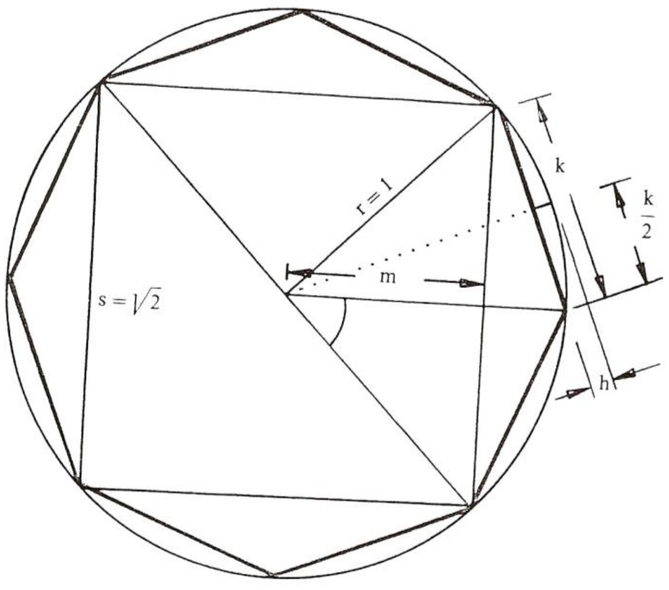
$s = \sqrt{2} . 1 = 1,414 \text{ m} ; \; m = \sqrt{a-(1,414 : 2)^2} = s / 2 = 0,707 \text{ m}$

$k = \sqrt{(1 - 0,707)^2 + 0,707^2} = 0,756 \text{ m}$

$h = 1 - \sqrt{1 - (0,765 : 2)^2} = 0,076 \text{ m}$

د $\varepsilon = 45°$ له امله $b = 0,393$ m دی./ و له دې سره

$F_{\text{ټوټه}} = 0,5.[0,393.1 - 1,414(1-0,076)] = 0,039 \text{ m}^2$



(c) ketabton.com: The Digital Library

له دې څخه په هرصورت د ښيښې ميز جوړېږي. ټوله غورزول شوې له دې امله په لاندې توګه ده: $8.0.039 = 0,312\ m^2$.ميز اوس لاندې هواره لري

$$F_0 - F_{\text{غورزولشوې}} = 2,828\ m^2$$

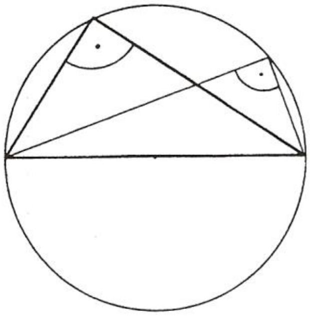
او په همدې توګه لکه د کوچني شوي ګرديهواره د وړانګي $r = 95\ cm$ سره. د کيناستلوځاي سور (k) حتي زيات شوی ، چاپيری اوس $U = 8.0,765 = 6,123\ m$

دی. نژديونه هم همدا ارزښت ورکوي: $F = 0,765.0,076 = 0,039\ m^2$ او داسې نور.

تريګونومتريکي حل مو زر هدف ته رسوي:

$$F_{\text{ټوټه}} = \pi.1.45:360 - 0,5.\sin 45° = 0,039 m^2$$

او داسی نور . څيره

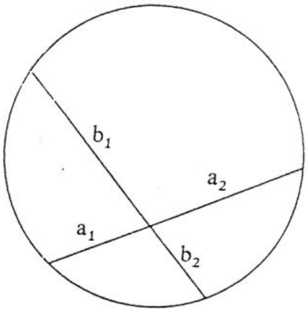


څيره ۱۲۷

ګرديجملی او ګرديخو يونه

د تالس جمله

په نيمه ګردۍ کی هر پريفري– يا ژی کونج ولاړکونج دی(څيره)



$a_1 \cdot a_2 = b_1 \cdot b_2$

د ټوټونی جمله

که دوه ګردۍ ټوټونی په ګردۍ کی دننه يو بل غوڅی کړي نو د غوڅبرخو

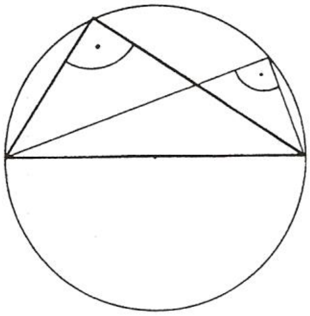
(c) ketabton.com: The Digital Library

تريګونومتريکي حل مو زر هدف ته رسوي:

F ټوټه =π.1.45:360 - 0,5.sin45° = 0,039m²

او داسې نور . ځيره

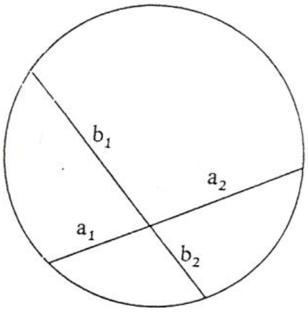
ګرديجملې او ګرديخو يونه



ځيره ۱۲۷

د تالس جمله

په نيمه ګردۍ کې هر پريفري– يا ژی کونج ولاړکونج دی(ځيره)



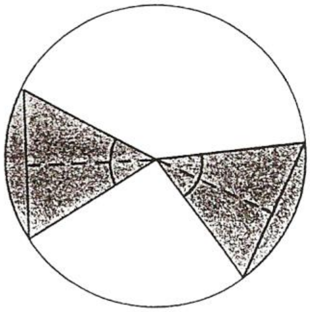
$a_1 \cdot a_2 = b_1 \cdot b_2$

ځيره ۱۲۸

د ټوټونی جمله

که دوه ګردۍ ټوټونی په ګردۍ کې دننه يو بل غوځې کړي نو د غوځبرخو ځل (ضرب) يې يو ثابت دی

د مساوي ټوټوونو جمله

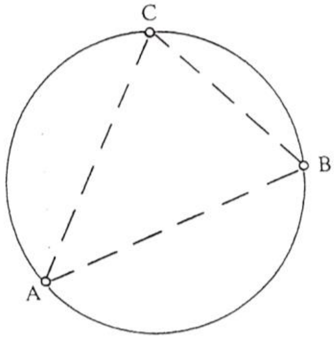


ځيره ۱۳۱

مساي اوږدې ګرديټوټې د ګردي له منځټکي مساوي فاصلې لري، مساوي منځټکي کونجونه، مساوي ګرديلينده، او مساوي ګرديټوټې او مساوي ګرديبرخې لري .

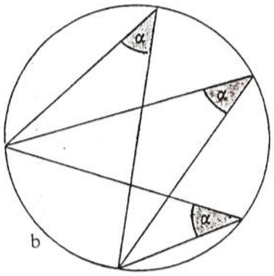
(c) ketabton.com: The Digital Library

د چاپیرګردی جمله



د درې ټکو A, B, C لپاره یوه ګردی موجود ده چې د دریواړو ټکو څخه تیریږي:
دا د دریکونجي ABC چاپیرګردی بلل کیږي خیره

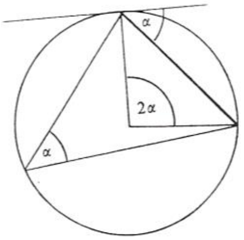
د پریفري – یا ژیکونج جمله



خیره ۱۳۳

په همغه لینده باندې ټول
پریفري – ژی کونجونه مساوي دي

د منځټکي کونج او پریفري – یا ژی کونج جمله:

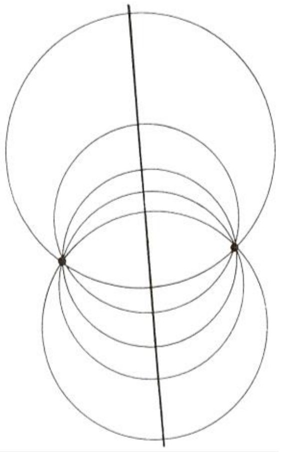


یو منځټکي کونجدوه برابره دومره لوي دی لکه په دې تړلی پریفري – یا ژی کونج(چاپیریالکونج) مخامخ خیره.

د منځټکي کونج او د تانجنت کونج – او ټوټونکونج جمله:

د منځټکي کونج دوه برابره دومره لوی دی لکه په دې اړوند تانجنت – یا ټوټه وونې کونج.

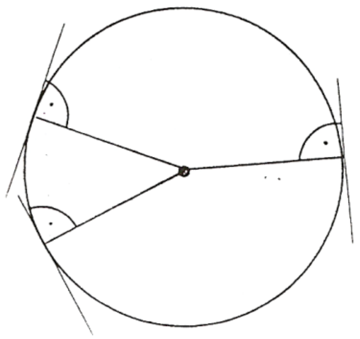
د ګردیو جمله چې په دوه ټکو کې سره غوڅوي:



د ټولو ګردیو یا دایرو منځټکي کونج چې یو بل دوه ټکو او کې غوڅوییو ناپای کربنه باندې، چې ځایلاین (ځایکربنه) وایي پراته دي. مخامخ خیره.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د وړانګې او تنجنت جمله



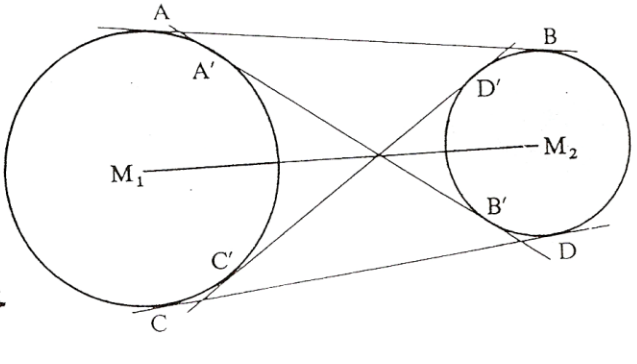
خیره ۱۳۶

په لمستکي پرته وړانګه او اړوند تانجنت سره يو په بل ولاړ يا نيغ پراته دي.

د تانجنت جمله:

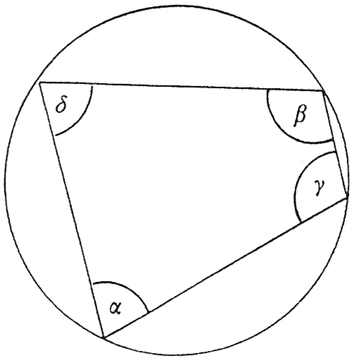
د دوه ګرديو د منځ ټکوM_1 او M_2 سره تانجنتونه دننني (دباندني) تانجنتونه نوميږي که د دوه ګرديو د منځټکوکرښه $M_1 M_2$ غوڅه (غوڅه نه) کړي.که چيرې دوه ګردي ګډ دننني او دباندني تانجنتونه ولري، پس د داوړو تانجنتونو غوڅټوټې همغه اوږدوالی لري.

$|AB| = |CD|$ په همدې ډول (<=>) $|A'B'| = |C'D'|$



خیره ۱۳۷

(c) ketabton.com: The Digital Library

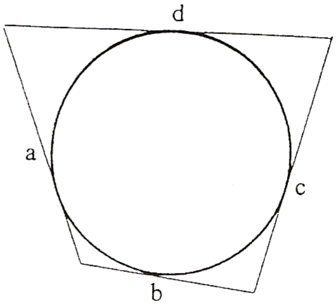


څیره ۱۳۸

د ټوټوونو څلورګوډي جمله

د ټوټونوکونجونه چې مخامخ پراته دي یو بل سره 180° باندې پوره کوي.

$$\alpha+\beta=\gamma+\delta=180^{\circ}$$



څیره ۱۳۹

د تانجنتونو څلورګوډي جمله

د تانجنتونو په څلوکونجي کی د مخامخ کونجونلویوالی د نورو مخامخ کونجونو سره مساوي دی.

a + c = b + d

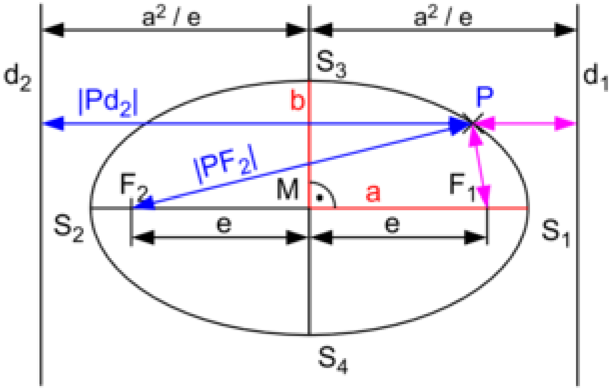
ایلیپسی(بیضوي یا هګی) (دلته موخه هواره ده) Ellipse

پیلبیلګه:

د کړاو میز جوړښت باندې موړ په اته کونجي اوبی یا حل کی تم کړی وو. دا چی په دې ډول یو میز سره تل د زخمي کیدو خطر موجود دی

پوښتنه رامنځ ته کیږي چی : داسی یو را ګردشوی ښکلی شکل ، چی ګردی نه وي او منظم غوڅ وي، شته، چی د کړاو اړتیا پوره کړي؟ په ریښتونی ، داسی یو اوبی یا حل موجود دی، لکه چی لاندې څیره ښایي .چی هر د غاړې ټکی دوه ټکو واټنونو ته یو ثابت واټن لري

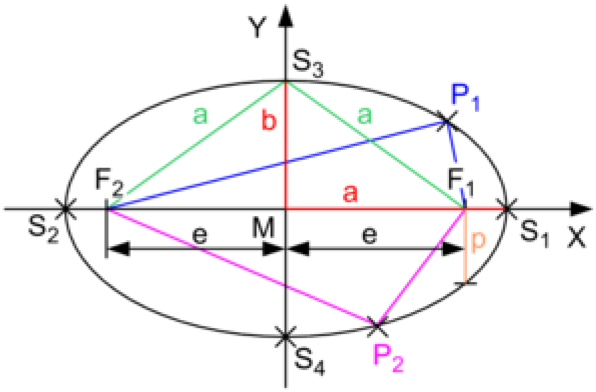
(c) ketabton.com: The Digital Library



پيژند يا تعريف:

د ټولو هغوټکو Pډيري ته چی له دوه ځاي په ځاي ټکو F1 او (F2 سوزېدټکی يا بهتره سوزونټکو(څخه ثابته يا همغه واټن يا فاصله لري، ايليپسی نوميږي

لاندې واټنونو يا فاصلو ته سوزونوړانګی وايي. $|PF_2| = r_2 \wedge |PF_1| = r_1$



$$E = \{P \mid |\overline{F_1P}| + |\overline{F_2P}| = 2a\}$$

منځ ټکي) واړوی M په (Oته د ايليپسی منځ ټکی وای، e ته د سوزونواټن يا فاصله يا لايني ايکسځنتريځيتايت (lineare Exzentrizität) يا لايني ناراټوله وايي .ددې لويو لپاره لاندې اړيکي باوري دي:

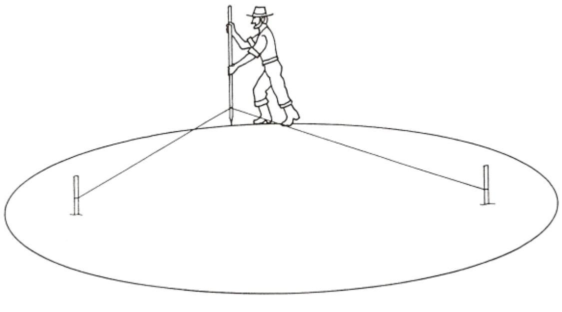
(c) ketabton.com: The Digital Library

$$I........r+r=2a \wedge II........a^2-b^2=e^2$$

په دې کی a او b د ایلیپسی لوي او ووړ نیممحورونه دي. اړیکه I روښانوي، که چیرې د ایلیپسی ټکی P د نیممحور a په اخر کی وټاکل شي، IIد پیوتاګوراس له جملی لاس ته راځي که د P ټکی د b نیممحور په اخر پروت وي .دواړه ناپاکرښی چی د سوزونټکي تیریږي او په دې په O کی ولاړه ناپای کرښه د ایلیپسی سیومیتري محورونه جوړوي .د خوښي په ټکی P کي هره په تانجنت ولاړه کرښه د سوزونوړانګو ترمنځ کونج نیموي .

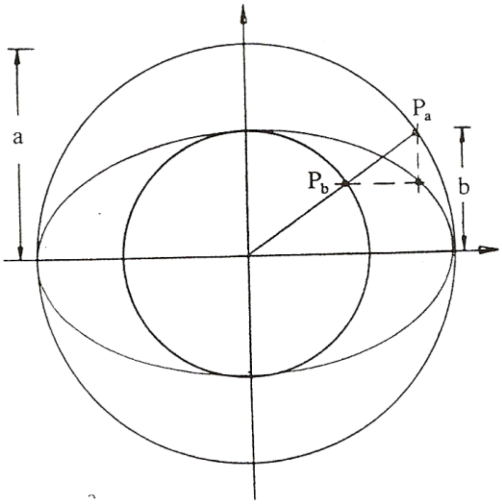
د ایلیپسی جوړول د باغوان لخوا یا د ایلیپسي باغواني جوړښت:

دا څیره دې ګران لوستونکي د تمرین په توګه وباسې، د یوې رسی، چی په a 2 اوږده وي، په داوړو سرونو کي موږي وتړئ او دا بیا په ځمکه ټکوهي، د یو بل)خوزیدونکی (موږي یا لرګي په مرسته دا پړی راکښ کړئ یا راکاږی او وګرځوی ، دلته کوم شکل چي پیداکیږي ایلیپسی ده او دواړه د پړي د سرونو ټکي چی موږي پرې وهل شوي سوزونټکي دي. څیره په هر کواوردینات سیسم او یا په یوه میلي متر کاغذد کونځینتري یا راټولو ګردیو په مرسته بل جوړښت امکان پیداکیږي، چی سړی د یوه ټکي دوه ګردۍ د a او b وړانګي ووهي او هره د خوښي وړانګه د ننني ګردۍ په Pb او دباندنی ګردۍ په Pa کی غوڅوي. که د Pb څخه یوه پرته کرښه وویستل شي او د همغه تر Pa دوام، نو هرچیرته یو د ایلیپسی یا هګی یا بیضوي ټکی لاس ته راځي. د ایلیپسی هر ټکی داسی پیدا کیدی شي .پیژندل کیږي چی هر 2 bته غبرګ ټوټونی

 خیره ۱۴۱	د k= a / b فاکتور سره لنډ شوی دی. له دې سره د هوارې دننه هم تغیر خورې ددې فاکتور k په اندازه $...r \Rightarrow \pi r.(k.r)=F(hagai, baizawy)$ او له دې چی r = a او k.r =b) د لته r د ګردی » لویه نیمه اکسی(محور) ده جمله : دایلیپسی هواره ده $F=\pi ab$:

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ایلیپسی چاپیرونی په ساده ډول نه شي شمیرل کیدی، په عمل کی په زیات وخت کی نزدیونه یا نزدې شمیرنه بسیا کوي.



خیره ۱۴۲

جمله : د ایلیپسی چاپیری:

$U \sim \pi(1,5\ .\ [a+b] - \sqrt{ab})$

او یا ګردي ته ورته ایلیپسی. دا په دې مانا چی $a \sim b$:

$U \sim \pi\ .\ \sqrt{2(a^2 + b^2)}$

دا فرمولونه، که $a = b$ وي د ګردي چاپیري ته ځي:

$$U = \pi(1,5\ .\ [a+a] - \sqrt{a^2}) = \pi(3a-a) = 2\pi a = 2\pi <=>$$

اویا په په همدې توګه یا $\Leftrightarrow$

$$U = \pi.\ \sqrt{2(a^2 + a^2)} = \pi.\sqrt{4a^2} = \pi 2a = 2\pi r$$

بیلګه:

کوم خورا لویوالی د بناغلی ګراو میز په ایلیپسي یانیضوي یا هګي خیره لرودی شي ؟

لوي محور $a = 1m$ پاتي کیږي، کوچنی محور دی: $b = 95cm$، داچی میز باید د درځ ژوروالي پورې غوخ شي. نو له دې امله هواره ده:

$$F = \pi .1.0,95 = 2,985m^2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

چاپیری کیږي:

$$U \sim \quad 1(1,5.1.95 - \sqrt{0,95}\,)\ 6,127\ m \quad <=>$$

یا په همدې توګه د بیضوي یا هګۍ و د ګردۍ فورم ته یا ګردیځیرې ته نزدې فورم نیسي U ~ 6,128 m. له دې امله هګیځیره د میز لپاره مساعد اوبی یا حل دی.

تمرینونه

۱ – په کالیفورنیا کی د یوزیمیت ملي پارک Yosimite National Park ، خپل ماموت ونو (Mammutbaumbestände) له امله خورا مشهور دی. کوم چاپیری یی هغه ونه لري چی وړانګه یي ۷ ، ۴ متره وي؟

۲ – د لاس ساعت دقیقه ښونکی ۱،۵ سانتي متره اوږد دی(څرخونمحور– څوکه)، څوکه یی په یوه سانیه، یوه ساعت، یوه ورځ، یوه اونی، یوه کال کی څومره لار وهي؟

۳ – ځمکه نزدې ۶۳۷۸ کیلومتره یوه قطبي(اکواتور) وړانګه لري. قطبچاپیری یی څومره دی؟

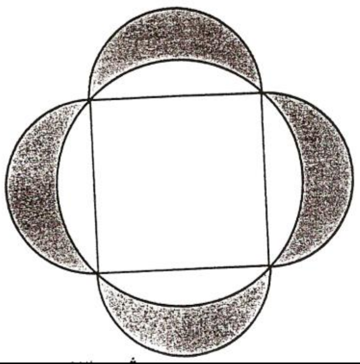
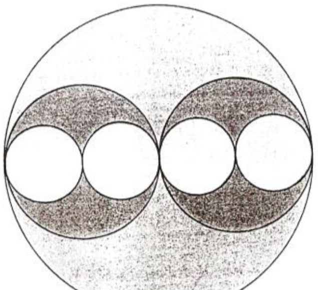
۴ – په خیال کی دې ولرو، چی له اکواتور یا قطب څخه یو پړی غزوو (۴۰۰۰۰ کیلو متره)، کوم چی د اکواتور یا قطب له چاپیري څخه یومتر اوږد دی. د یوه ځانګړي تخنیکی چمتووالی له لارې په هرځاي کی د ځمکی څخه په همغه واټن راوړل کیږي. ایا دا واټن پوره لوي دی چی سړی ددې ترمنځ یوه د (ګیرکلی) پاکي وځایوولی شي یا ځاي کړای شي؟

۵ – د غوځهواره به یی د ځمکي سره څومره وي که د اکواتور یا قطب په اندازه جګ وي؟

۶ – په اکواتور یا قطب دوه ځایونه څومره لري دی، که یو له بل یوه اوږددرجی په

انداه لرې وي؟

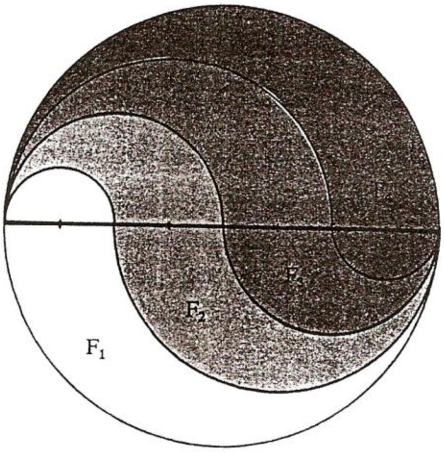
(c) ketabton.com: The Digital Library

۷ – د ګردۍ [اپریا ل ځنګه تغیرخوري، که د هغه وړانګه دوه رابره شي یا په همدې ډولنیمه شي؟ ۸ – وښایې: د مربع هواره د څلورمې میاشتو(سپوږمیو) د هوارې سره مساوي ده؟	
د څیرې سره سم د ګردیو هوارمتن یا د هوارو دننه د مساوي وړانګو سره وټاکۍ. د ا هره یوه د لویې ګردۍ په سلو کې څومره جوړوي؟ وښایې، چط څلورو واړو ګردیو چاپړۍ د همغې وړانګې سره دومره لوي دی لکه د راچاپیره یا دباندې ګردۍ چاپړي. ۱۰ – د یوې مربع د باندې او دننه یوه ګردۍ راګرځیدلې. د دواړو ګردیو هوارې یو بل ته ځنګه متناسب دي یا ځانونه نیسي؟	

۱۱ – د دوه ګردیو منځ ټکی د مساوي وړانګې r = 7,2 cm سره، یو له بل دومره
لري دي لکه دا وړانګه . د دواړو ګردیو ګډه هواره اندازه کړئ، چې څومره ده؟

۱۲ – په یوه ګردۍ ، چې وړانګه
یې r = 10 cm ده، که
یوه ګردیکړۍ کیښول شي،
چې هواره یې دومره لویه ده
لکه د دننه ګردۍ هواره. د
دباندې ګردۍ وړانګه به
څومره وي؟

۱۳ – د یوې ګردۍ
برخهوارې، F_1 او F_2 ، لکه په
څیره ۱۴۵کې چې ورکړ شوي،
وښایې، چې وړانګه یې r = 4 cm



څیره ۱۴۵

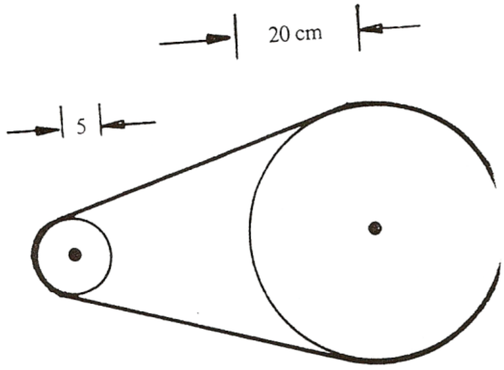
(c) ketabton.com: The Digital Library

وي. وښايي چې هواره په څلورو مساوي
هوارو ټوټه شوې ده (څيره ۱۴۵)

۱۴ – د هغه ګردې وړانګه وښايي ، کوم چې همغه هوارخوندي لري لکه :
الف) یوه مربع، چې داړخ اوږدوالی یې ۵ سانتي متره وي.
ب) يوه روټی چې نيمي یې ۴ سانتي متره او ۶ سانتي متره وي .
پ) یو مساوي اړخيز دريکونجی چې د اړخ اوږدوالی ۷ سانتي متره وي.

۱۵ – د یوه پنډ پينسيل سره یوه ګردۍ وهل کيږي، چې دننی وړانګه یې ۵ سانتي متره وي. داچې پنسل يو سانتي متره پنډ دی ، نو دا په ريښتينی یوه ګرديکړی ده. د دې ګرديکړی هواره وشميری.

۱۶ – یوه ساتليت يا جوړه، يعنی مصنوعي سپوږمۍ، له ځمکی په يوه ګردۍ راڅرخي، چې سرعت يې په سانيه کی ۸ کيلو متره دی . د ځمکڅرخون لپاره دا ۱ ساعت او ۲۸ دقيقو ته ضرورت لري. وښايي چې دا ساتليت يا جوړه سپوږمۍ يا مصنوعي سپوږمۍ له ځمکی څخه په کوم جګوالي الوزي؟



څيره ۱۴۶

۱۷ – د یوه څرخونکړی یا بهتره څرخونپټی په مرسته کيدی شي څرخونحرکت يا څرخونخوزون د يوې څپی په بلی څپي راوړل يا واړول شي. په يوه ورکشاپ کی يوه دقيقه يعنی ډيره ټيك اره په بريښنا ماشين چلول کيږي يا په حرکت راوړل کيږي. د ارې خوزون يا حرکت څومره زر يا تيزدی يا چټك دی، که د ماشينڅرخونڅرخی يا ګاډيل (r = 20 cm) په ثانيه کی ۸۰۰ ځله وګرځي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۸ – کوم چاپيری او هواره اليپسی يا بيضوي يا هگيخيره لري که ولر:

a) $a = 40$ cm, $b = =12$ cm, b) $a = 6$ cm, $e = 1$ cm

c) $r_1 = 4$ cm , $r_2 = 3$ cm , $w(r_1,r_2) = 90°$

۱۹ – وښايي: په يو په بل پرتو اليپسو کی دی $a_1 = a_2$ او $b_2 = b_1 /2$ ، نو دننی ايلپس بيضوي همدومره لويه ده، لکه په دې دپاسه ايليپسي يا هگيخيرې غاړه.

۲۰ – ځمکه په يوه کال د لمر څخه نزدې د يوې گردی په څير راڅرخي. ددې چاپيري وړانگه نزدې ۱۵۰ ميليونه کيلومتره ده.

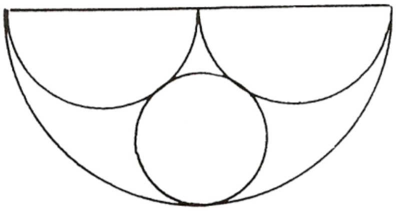
الف) د څرخونلار اوږدوالی څومره دی ؟

ب) په کوم منځنی سرعت (کيلو متره په سانيه کی) ځمکه په خپل چاپيري راڅرخي؟

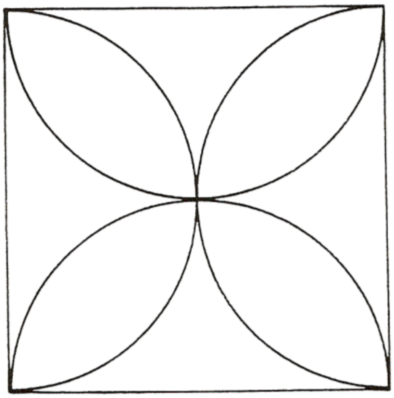
پ) په ورځ کی ځمکه نزدې څومره واټن تی کوي ؟

ت) په ريښتونی ځمکه د لمر څخه په يوه ايليپسی لار راڅرخي، چی په يوه سوزون ټکي کی پخپله لمر قرار لري. د لته هغه لنډ واټن ځمکه لمر ۱۴۷ ميليونه کيلو متره دی، او لرې واټن يی ۱۵۳ ميليونه کيلو متره دی. په دې ورزيات ورکړو سره کوچنی نيممحور وښايي، او همدا ډول د ايليپسي يا بيضوي هواره او (نزدې) چاپيری هم.

۲۱ – د ټولی هوارې کومه ټوټه برخه رنگ ده؟



څيره ۱۴۷



(c) ketabton.com: The Digital Library

۲۲ – د دوه ګردیو وړانګی ځان داسی نیسي یا په تناسب کی سره پرتی دي، لکه 8 : 5 په لویه ګردۍ کی یو ګردیبرخه موجود ده ، چی د هغی لینده دومره لویه ده لکه د کوچنی ګردۍ وړانګه r = 10 cm. وشمیرۍ

الف– منځتېکي کونج
ب – د ګردیبرخی هواره.

۲۳ – کوم منځتېکي کونج په لیندۍ پورې اړه لري، چي
الف) ټیك همدومره لوي وی لکه وړانګه ؟
ب) دوه واره دومره لوي وی لکه وړانګه ؟
پ) نیم دومره لوي وی لکه وړانګه ؟

۲۴ – د یوې ګردیټوټونی منځ ټکي کونج وشمیری ، چی هواره یی همدومره لویه وي، که په وړانګه یی چی مربع .

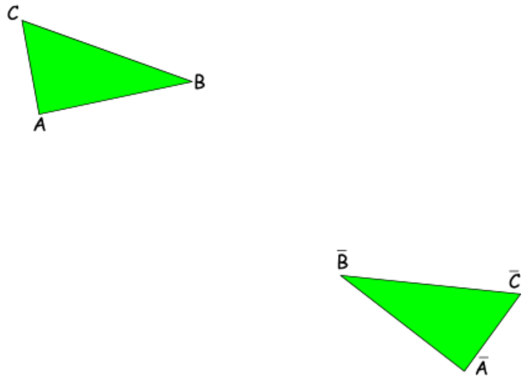
۲۵ – یو مصنوعي ساتلیت یا جوړه سپوږمۍ ځمکه په ۲۰۰ کیلو متره جګوالي راګردوي یعني له ځمکي راګرځي یا بهتره له ځمکی راڅرخي. د راڅرخونوخت یی ۱ ساعت، ۲۸ دقیق او ۲۶ ثانیي دي.
الف – سرعت یی څومره لوي دی؟
ب – په یوه دقیقه کی څومره لار وهي؟

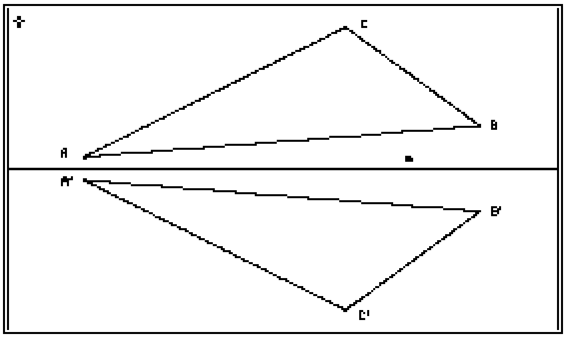
(c) ketabton.com: The Digital Library

کونګروواینخ ځیرونی(برابرې ځیروني)

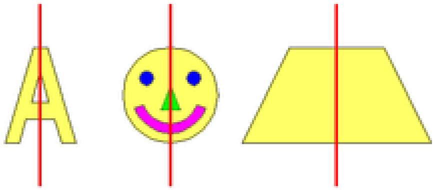
Kongruenzabbildungen

Congruence mapping



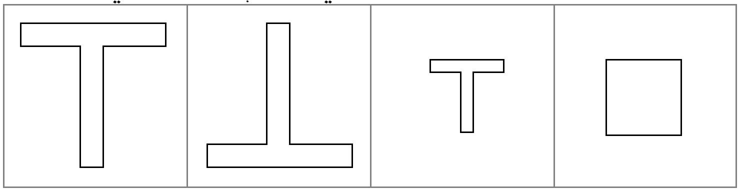


سیومتري ځیرې یا شکلونه Symmetrische Figuren



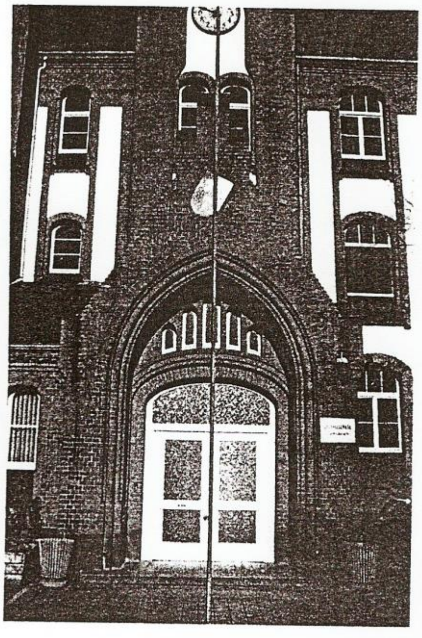
د هوارو ځخه مو ولیدل، چی د هغو ترمنځ سیومتري ځیری یا شکلونه، یعنی داسي په نامه برابرې یا مساوي او نیمایي ځیرې:

د شمیرپوهنی له مخی د ساده شمیروړتوب له امله تخنیکي، د هغو د ساده بدله ونی له امله، او د ښکلا له مخی، د هغو د همغسي څیرې څرګندوني له امله یو ځانګړی ځای نیسی)



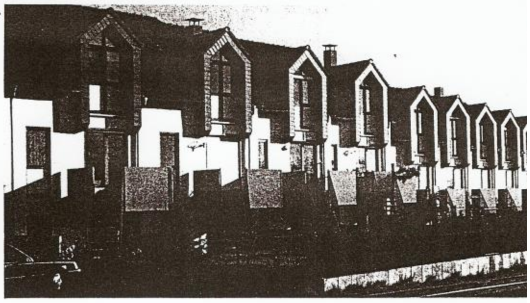
په پورته څیره کې کیڼ لور ته دوه د ټي څیرې یو بل پټوي، کیڼ لور دې د کښلی ټي سره برابرپټوونی ټي وکښل شي٠ دا محور سیومتري څیرې دي٠

په ځانګړي ډول د اخرني شکلونو څخه کتل کیږي چی سیومتري تل دا مانا نه لري چی شکلونه دې په دوه نیمو وویشل شي، کیدی شي دوه یا زیات شیان وي ، چي د هغو د ترتیب له امله یو له بل سره خیالي سیومتري اړیکي ولري. دوه یا زیات شکلونه لکه چی څنګه ضربالمثل وایي چي داسي یو بل ته ورته دي لکه » دوه هګی .» له دې ځایه تر کونګروانیڅ یو پل دی



خیره ۱۴۸

Beispiele:
1.



خیره ۱۴۹

پیژند : هندسي شکلونه کونګروینڅ (برابر) بلل کیږي، که په فورم ، بڼه (څیره) او لویوالي کی یو بل سره یو شي وي او یواځي ځای یی یو له بل بیل وي٠

(c) ketabton.com: The Digital Library

يادونه : زه به وړانديز وکړم، چې کونګروااينڅ څيروني » ورته برابرې څيروني »
وبولو، ځکه، چې يو بل ته ورته دي او برابرې هم دې ياني که يو پر بل واچول شي يا يو
پر بل پريوزي، نو يو بل پټوي٠

د دوه شيانو A او B د کونګروااينڅ د ليکلو سومبول په لاندې ډول دی:

A ~ B <=> A ~ B

د کونګروااينڅ خويونه :

١ - کونګروينڅ څيرې يا - شکلونه يو په بل پريوځي يا يو بل پټوي .

٢ - کونګروينڅ څيرې يا شکلونه د کاغذ په هنري غبرګولو يا غوڅولو په بنسټ، کيدی
شي يو په بل پريوځی٠

پورته څيره تکی سيومتري ده ٠

غوڅول د شمير پوهنی کار نه دی، مګر غبرګول کيدی شي وي.

لنډ : محورهنداروني او کرښهنداروني ، څرخون، ټکيڅيره ونې او راکښني ګونګروااينڅ
څيره ونې دي٠

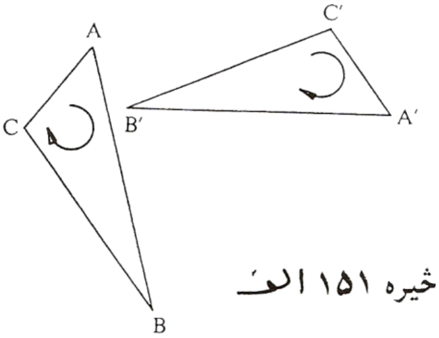
پوښتنه کيږي چی :

په شميرپوهنه کی عمليي شته چی د هغي په مرسته يا د هغي له لارې يا د هغی په
وسيله څيرې يو په بل پريوتی - او پټيدی شي ، داسي کارونی يا عمليي په کړنه يا عمل
کی شته او دا کونګروااينڅ څيره ونې يا څيره کوني بلل کيږي.

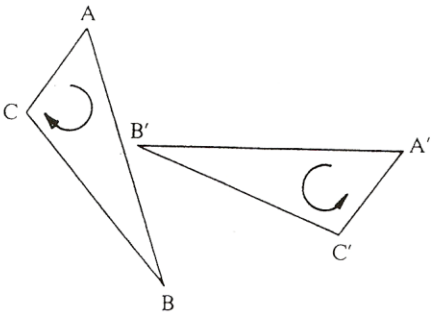
هر کونګروااينڅ څيره يا شکل او لويوالی (منځهواره) ساتي. په دې ډول بايد کونجونه
او اوږدوالي ريښتونی وي، چی په دې ډول د برخو تناسب، کرښوتناسب، برخو تناسب
غبرګ کرخو تناسب (ځاننيونه) ريښتونی دی. لاندې به وښوول شي چی زيات تر زيات د
کونج څرخونلور يا سمت تغير خوړونکي دی، که څرخونلور تغير ونه خوری نو يولوريز
کونګروينڅ بلل کيږی او که څرخونلور تغير وخوري نو شکلونه مخامخ لوريز يا په څټ
يا برعکس کونګروانيڅ بلل کيږي

(c) ketabton.com: The Digital Library

ثیره ۱۵۰

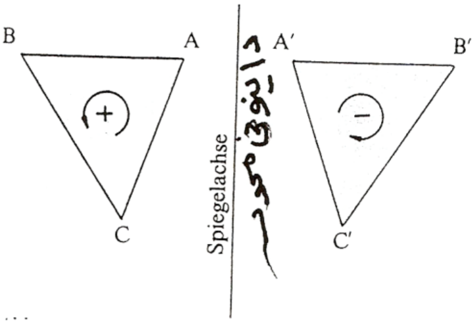


ثیره ۱۵۱ الف



ثیره ۱۵۱ ب

کرښهندارونه(په کرښه منعکسونه) Geradenspiegelung

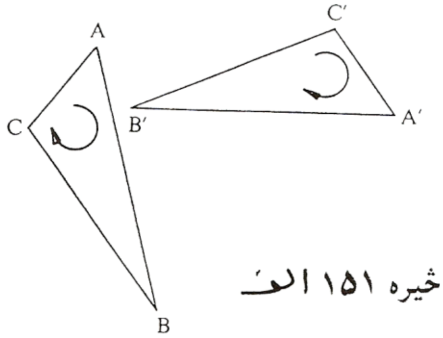


ثیره ۱۵۲

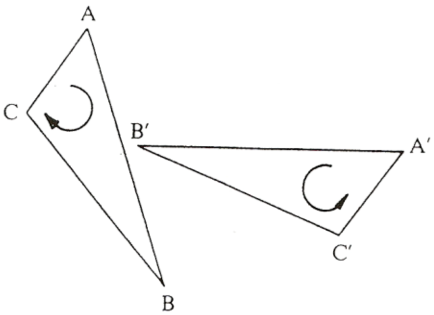
یو کونګرواینځ ثیره ونه مو په پیل ثیرونو کی وښوده. کرښ اینونه یا کرښهندارونه یواځنی مخامخ کونګروینځ ثیره ونهی ده ، ځکه چی د کونج د لور تغیر په کی منځ ته راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ثيره ۱۵۰

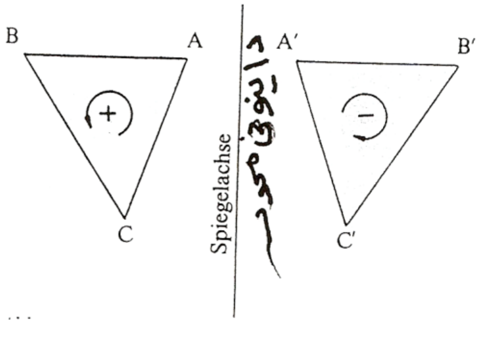


ثيره ۱۵۱ الف



ثيره ۱۵۱ ب

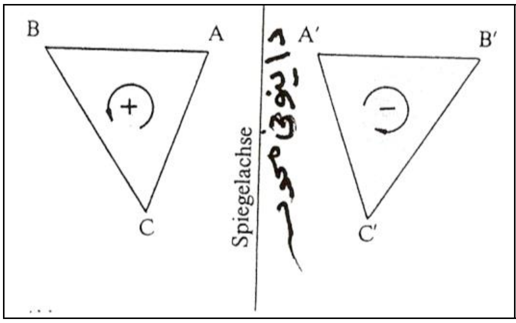
کرښهنداروونه(په کرښه منعکسونه) Geradenspiegelung



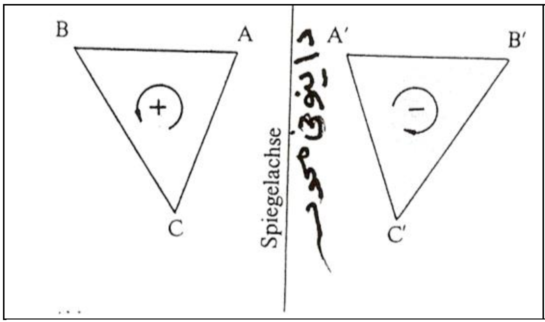
ثيره ۱۵۲

يو کونګروا ينځ ثيره ونه مو په پيل ثيرونو کی وښوده. کرښ اينونه يا کرښهنداروونه يواځنی مخامخ کونګروينځ ثيره ونهی ده ، ځکه چی د کونج د لور تغير په کی منځ ته راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

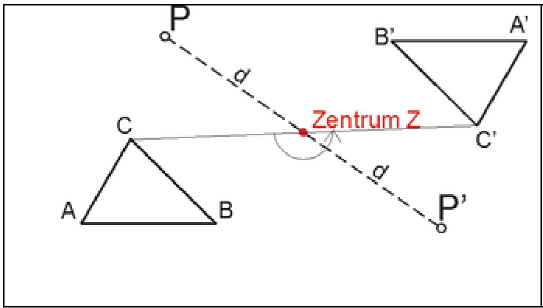


په کربنه هندارونه(پ کربنه منعکسونه):
په پیل انعکاس کې مو یوه کونګروانځ تشکیل وښوده. په کربنه انعکاس ورکول یواځنی مخامخ انعکاس دی، ځکه چې د زویې د لور منځ ته په کې راځي.



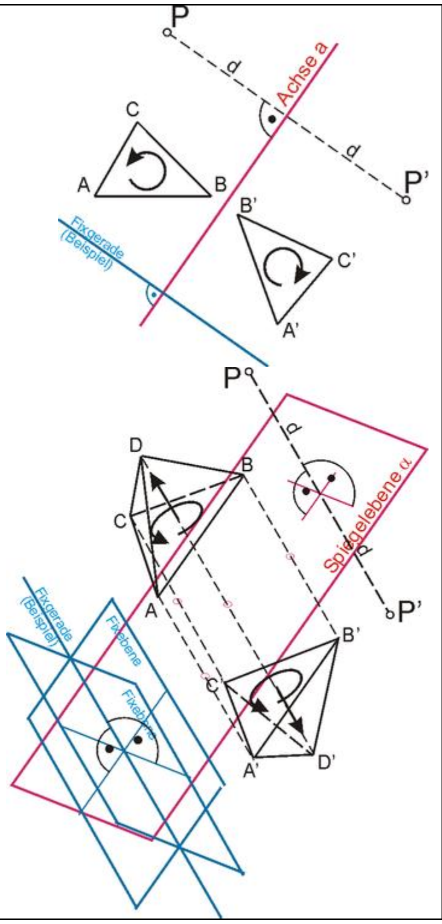
په کربنه هندارونه(پ کربنه منعکسونه):
په پیل انعکاس کې مو یوه کونګروانځ تشکیل وښوده. په کربنه انعکاس ورکول یواځنی مخامخ انعکاس دی، ځکه چې د زویې د لور منځ ته په کې راځي. لاندې ځېره دې وکتل شي

د درې ګوډې ABC مثبت- یا زیاتونلوریز څخه یو منفي لوریز یا کمونلوریز درې ګوډې A'B'C'جوړیږي. یخپله کربنه g په اینونکی کربنه یا په اینونکربنه یا په هنداروونکربنه بلل کیږي او یا د اینه ونې محور. په دې ټول پراته ټکی تغیر نه خوري) ځاي په ځاي ټکی (فیکسټکی (Fixpunkte دی، له دې امله کربښی g ته د ځاي په ځاي ټکوکربښه هم وایي. ټولی په g نغولاړې(لنډ: ولاړې) کربښي د اینه کولو په بنسټ په خپل ځان ځېره کیږي، مګر ټول ټکي د g سره د غوڅټکي په استثني یا بی له غوڅټکي کربښي ټکي د خپلي فاصلی په ساتلو ځاي بدلوي. له دې امله دا کربښي ځاي په ځاي کربښی بلل کیږي ۰
په لاندې ځېره کې کیڼ لور ته درې ګوډې په ټکی ، چې د کښلې کربښی منځ ټکی دی ، ښي لور ته ځېره کیږي او دا په همدې ټکي۰ کتک کیږي، چې د هر ځېره ټکی واټن د همدې ټکي څخه همغ دی لکه د ځېره کووني ټکی واټن له دې منځټکی څخه .

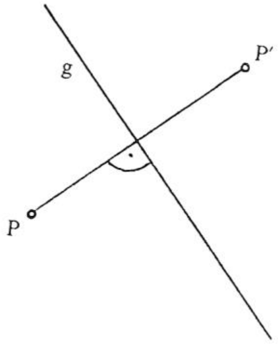


په پورته محور اینه ونه کی لیدل کیږي، چې د محور څخه د ځېرې او ځېره کونکي ټکي سره برابر دي، خو ګورو، چې ځرخون لور یې همغه ځرخونلور نه دی۰۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

	په مخامخ ځيره کې ايېنه ونې کښل شوي دي

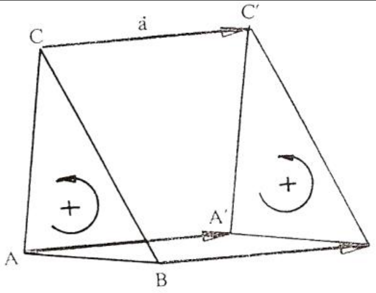
د کربښ اينوونو(هنداروني يا انعکاس) جوړښتخيرنه

 ځيره ۱۵۳	۱ - دا ټکي له هر په نخه ټکي (ډيرګوډي کی د کونجټکی او په ګردي کی د منځ ټکی) په g ولاړ يا زوړند پريوځي او دا له g اخوا په فاصله د |Pg|غزوي. (دا د مخه راغلي .) ۲ – ټول ټکی د اصل په ترتيب سره وتړی(په ګردی کی : په M'يو ګر دی د r'=r په وړانګه ووهی). د ځيرې او پخواځيرې(اصل) د ټولشکل لپاره بيا g سيومتريمحور دی، دا په دې مانا، چی ټوله ځيره د اينونې سره په خپل ځان ځيره کيږي .

(c) ketabton.com: The Digital Library

هره کرښ اینوونه Sg کیدی شي چی په g بیا کرښ اینونو باندې په همغه محور بیرته راوکرځول شي.دSg په یا په څټ ځیره ونه یا مخامخ ځیره ونه بیرته Sg دی. دا دځیرو زیاتواره ځیره ونو ځانګړی حالت د٠
دلته بیا سړی د ځیره ونو د ځنځیرونو څخه خبرې کوي او د دې لپاره تړلنخښه »°« په کار اچول کړي. کرښ اینوونه د ګونګراینځو لاندې یو مرکزي ځای یا منځځای لري، ځکه چی ټولی نورې اینونی د کرښ اینوني ځنځیرونو باندې بیرته راګرځول کیږي، لکه چی په لاندې کی به وګورو.

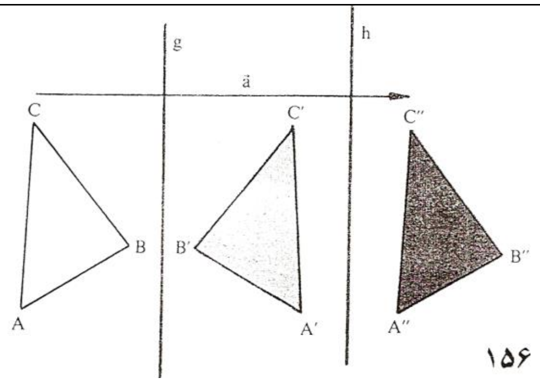
راکښنه یا کښونی Verschiebungen

پیژند : غبرګکښول ،لنډ کښول یا وړل Va د خپل وړلوکتور یا وړونوکتور یا کښونوکتور له لارې یواځنی ټاکلی دی (ددې لپاره د وکتور لوست وګوری٠	
د وکتورونو لاندې مساوي اوږده او په یوه لور غشي پوهیږو، کوم چی د ځیرې وتلتکي په ځیرنټکو لوریز وي . (لنډ : د وکتور لاندې یوه لوریزه کرښه پوهیږو، د ځانګړو شرایطو لاندې) د کښنولو لپاره پریکړی د وکتور اوږدوالی | a | دی او د وکتور لور. کښنول په همغه لور کونګرواینځځیروني دي، دا په دې مانا چی د ځرخونلور ساتلی پاتي کیږي٠	 ځیره ۱۵۵

د کښنولو جوړښتځیرنه
۱ - په هر نخښه شوي ټکي (په ډیرګوډي کی ګوډونه او په ګردۍ کی منځټکی)د ګښنولو وکتور a وکاږئ (برابر یا مساوي اوږده، همغه لوراو غبرګ غشی.)
۲ - د وکتورونو اخرټکي سره د اصل په پرلپسي ترتیب ونخلوی. (په ګردیکښنونو کی : په اخر ټکي د r وړانګي په اندازه ګردۍ ووهی)کښونه ځای په ځانټکي نه لري(که د صفر وکتور دي په نامه identität ایدنتیتي یا کښمټ ځیرونی څخه تیر یا صرف نظر شو)

(c) ketabton.com: The Digital Library

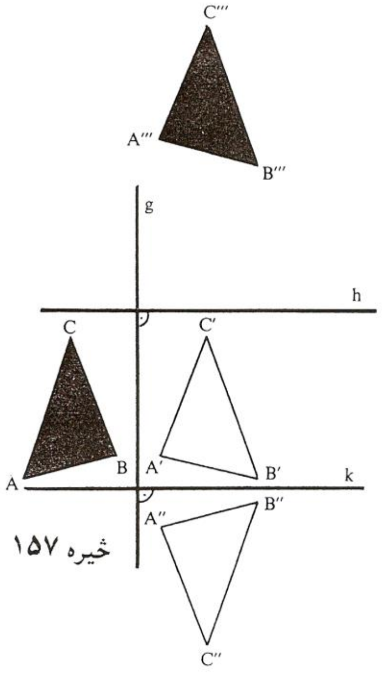
ددې لپاره ټولی له a سره غبرګی کربښي ځاي په ځاي کربښی دي، دا په دې مانا چی دوي په خپل ځان څیره کیږي .هر کښنول یا نوه هم ښنه هره کښنه ونه Va د V-a کښنولو له لارې بیرته راوګرځول کیدی شي.



۱۵۶

دلته -a وکتور د a سره غبرګ او همغومره اوږد دی، مګر په مخامخ یا په څټ لور .هره کښنونه په دوه کربښو g او hله دوه واره اینولو یا هندارونو له لارې بیرته لاس ته راوړونکی ده، چی واټن d یی همدا د کښنولو وکتور نیم اوږدوالی ورکوي. دا بدلون یواځنی نه دی: پس په عمومي ډول باور لري: $V_a = S_g \circ S_h$ د g||h سره او |a| = 2d ، چیرته چی d د g اوh ترمنځ واټن ورکوي.

په یوه ځانګړي ډول یو په بل پسي صورت نیونکی زیات کربښ اینونه دې په دې ځاي کی ذکر شوي وي، څکه چي دا – لکه څنګه ټول نور واریانت یا



خیره ۱۵۷

اووښتونی – یو ساده بنسټیز فورم نه ورکوي : خویوونکي یا کښنوونی اینونه. ټرنه $G_{a;g} = S_g \circ V_a$ یو کښنوونی اینونه ده،

که g || **a** وي.

هره کښنووني اینونه یا هندارونه د درې کربښ اینونو $S_h \circ S_k \circ S_g$ تړل دي، چیرته چی کربښي h او k ، کوم چی دکښنوونی ځاي نیسي، په g نیغی ولاړې دي:

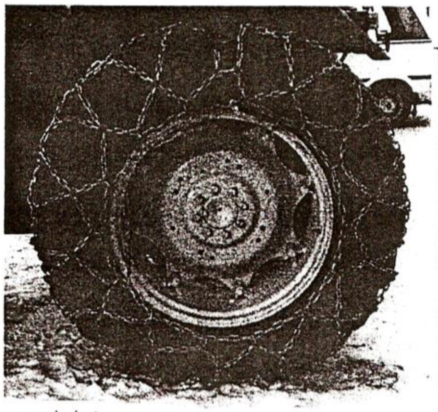
$h \parallel k ; h \perp g$.

یوه کښنوني اینونه ځاي په ځاي ټکي نه لري، مګر g د څیرroونی ځاي په ځاي کربښه ده. هره کښنوونی اینونه $G_{a;g}$ په $G_{-a;g}$ سره بیرته راکرځول کیدی شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

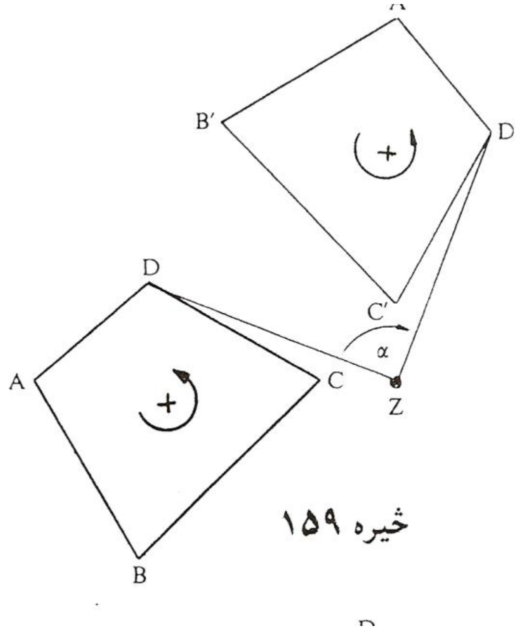
Drehungen

څرخونونه (څرخونونه)



خیره ۱۵۸

تعریف : څرخون $D_{Z;\mu}$ هغه څیرونه ده، چی په ورکړ شوي ټکي Z (څرخونټکی یا څرخونمنځ) هر اصلی ټکی P په یو څیره ټکي P' داسی تنظیم کړي، چی $|PZ| = |P'Z|$ او $w(PZP')=\mu$ چی μ یو د مخه ځاي په ځاي ورکړ شوی کونج دی، د څرخونکونج.



څیره ۱۵۹

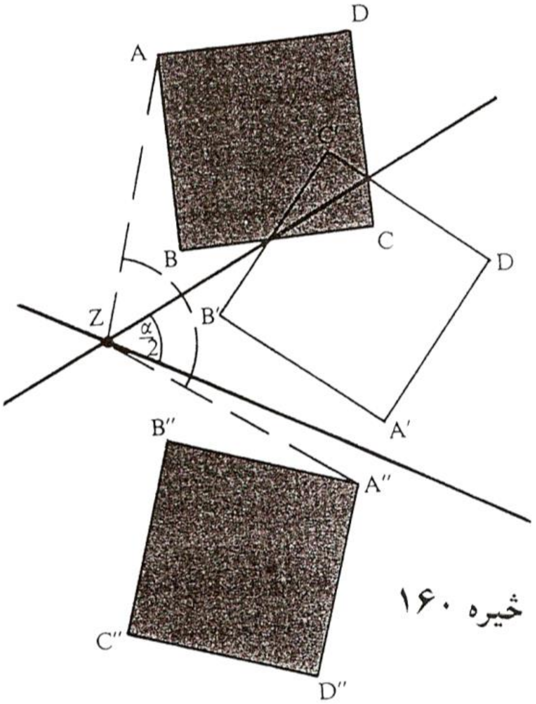
پس یو څرخون د څرخونټکي Z او څرخونکونج څخه یواځنی ټاکلی دی. د څرخونلور په مخ نخه له مخه ورکړ شوی. (ددې لپاره دې د مخه تري لوستونه پام کی وي).

دڅرخون جوړښت څیرنه

۱ – په ټولو په نخښه ټکو (د ډیرکونجیز کونجټکي، په ګردی کی منځټکی) او

(c) ketabton.com: The Digital Library

حرخونمنځ Z یوه وړانګه کیږدی . د
هرټکي P واټن PZ په یوه مرستندوي
وړانګه وکاږی، کوم چی له PZ سره
کونج جوړوي.
۲ –لاس ته راغلی ټکی P' په اصل
پرلپسي ترتیبیو د بل سره ونښلوی
(یا په همدې ډول په P' یو ګردی
د r' = r په وړانګه ووهی).
څرخون D_z یوه همغه لوریز
کونګروا ینځ خیرونه ده.
که څرخون D_z له څرخون په$0°$:
ایدنتیتي یا کتمټ، توپیر ولري، نو دا
یواځي یو ځاي په ځاي ټکی لري: پخپله Z .



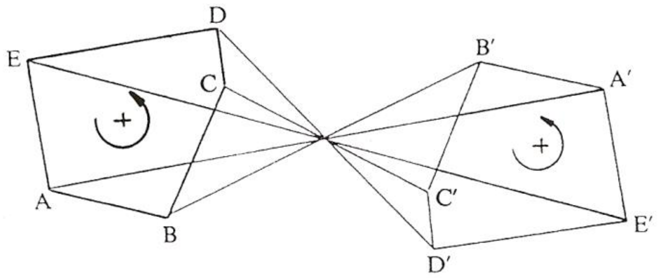
خیره ۱۶۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

هر څرخون D_z د په کونج کیدی شي چی په څرخون D_z په کونج -
بیرته راوګرځول شي. د جوړښت ځیړنی څخه پیژندل کیږي، چی هر څرخون D_z
د دوه کرښي اینوني چی په ټکی Z کی په کونج $/2$ یو بل غوځوونکو کرښو g
اوh ځاي نیونکی کیدی شي: څرخون : $D_{Z;\mu} = S_g \circ S_h$
د $h = \{Z\}, \mu = 2.w(g;h)$ g سره. (ځیره)

تعریف : یو څرخون د څرخونکونج $\mu = \pm 180°$ سره ټکی اینونه بلل کیږي. دا په دې مانا چی په ټکي اینه کیږي.

په دې توګه ټکی اینونه هم یو همغه لوریز کونګروانیځ ځیرونه ده. (ځیره ۱۲۸)



ځیره ۱۶۱

په ټکي اینوني جوړښت ځیړنه

۱ – د اصلي ځیرې هر په نخښه ټکي څخه یوه کرښه وکاږي، چي له اینونکي ټکي Z تیره شي، او |PZ| واټن د Z په بله لور وباسی.
۲ – داسی لاس ته راغلي ټکي په پرلپسی ترتیب سره ونښلوی. (همداسی په M' یو د r' = r وړانګي ګردی ووهی).

(c) ketabton.com: The Digital Library

ټولګه

هره کونګروانیڅ څیرونه د کرښی اینوني د ترلو څخه لاس ته راځي. دلته بیا هر کرښ اینونه څرخون لور بدلوي. له دې امله لرو:

د کرښ اینونو (څرخونو یا کښنونو) جوړه تعداد یا ګښون یو همغه لوریز کونګروانیڅ څیرونه ده. د نا جوړه تعداد یا ګښون کرښ اینونو (کرښ اینونی یا کښنونو اینونی) یو نا همغه لوریز کونګروانیڅ څیرونه ده.

دیو په بل پسی د کونګروانیڅ څیرونو کارونه بیرته کونګروانیڅ څیرونه لاس ته راکوي. دا چی هرکونګروانیڅ کرښ اینونه ده نو د پای کونګروانیڅ یو په بل پسی اینونه ده. برسیره پر دې هر کونګروانیڅ بیرته راګرځیدلی یا په څټ کیدلی شي. که له دوه وو زیات کونګروانیڅ څیرونی یو په بل پسی منځ ته راشي ، نو په خوښه اسوځیاتیو را یوځاي کیدی شي. الجبري ټول کونګروانیڅ څیرونی یو ګروپ جوړوي د ناپیلي کتمټ څیرونی سره، دا په دې مانا چی ناپیلی څیرونه ، چی په کارونه کی تغیر نه راولی کتمټ څیرونه ده. (د ګروپ لپاره دې نښلونی برخه وکتل شي)

په عمل کی د دریګوټی کونګروانیڅ جملی له پوره اهمیت ډکی دی

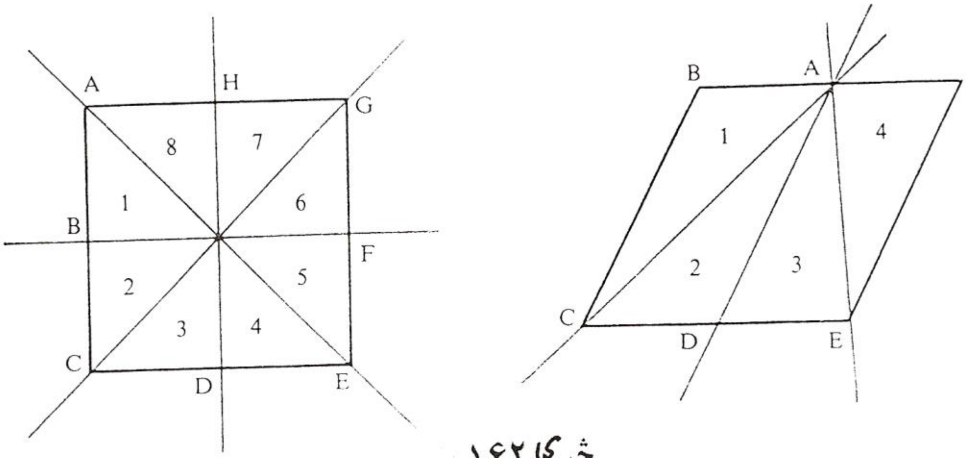
کونګروانیڅجملی:
الف) په خپلو دري اړخونو کي (SSS) یا
ب) په دوه اړخونو او لهدې اړخونو رابند کونج کی(SWS) یا
پ) په دوه اړخونو کی او د اوړداړخ مخامخ کونج کی (SSW) یا
ت) په یوه اړخ او دواړو راګیر کونجونو کي (WSW) یو بل سره وخوري یا سره مساوي شي

(c) ketabton.com: The Digital Library

تمرینونه

۱ – په یوه غبرګ اړخیز ABCD هندارونی $S_{BC} \circ S_{AB}$ وکاږئ.

۲ – د کونګروانیخ جملو په مرسته وښایي، چې غوڅکرښی پیلڅیرې په کونګروانیخ برخو ټوټه کوي.



څېرې ۱۶۲

۳ – په یوه بیلګه وښایي :

الف) $S_g \circ S_h \neq S_h \circ S_g$

ب) $S_g \circ (S_h \circ V_g) = (S_g \circ S_h) \circ V_g$

۴ – د «هیلګولند» کیشتی او د «کوین ماری» لوي کیښتی ترمنځ واټن **۵** کیلو متره دی . هیلګولند کیشتی په شمال لودیځ ۶۰ درجي(N60°W) دلته N د شمال او W د لودیز لپاره دی، کرښلاینی حرکت کوي او «کوین ماري» په **۸۲** درجو جنوب لویدیز لور حرکت کوي (S82°W) دلته S د جنوب لپاره دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په دې وخت کی د «هیلگولند» څخه « کوین ماری » په ۷۰ درجو شمالشرق(N70°O)
دلته O د ختیز لپاره ده، لیدل کیږي.Nord,, Süd, West, Ost
الف) په کوم کونج دواړه لارې یو بل غوڅوي ؟
ب) د دې وخت له ځاي څخه به هغه غوڅېکی څومره لرې وي؟

۵ – وي دې ABC یو مساوي پښیز دریګوډی، له بنسټ AB سره، g او h د کونجونو∝ او ß کونجنیمي دي. وښایي چی دریګوډي ABP اوABQ کونګرواینت دي. (P او Q د مخامخ اړخ سره د کرښو غوڅېکي دي).

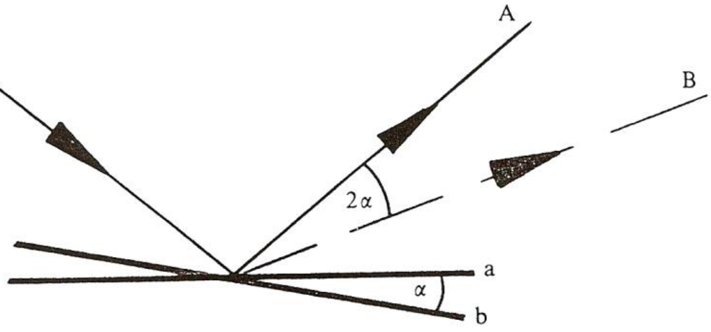
۶ – څومره کورونتخیروني موجود دی چی لاندې څیرې یی په خپل ځان ځیره کوي: کرښی ، ګردیې، غبرګ اړخي، مساوي پښیز دریګوډي ، ولاړ ګوډی، راوتی، مربع، مساوي اړخیز دریګوډي ؟ کتمتخیرونه دې نه په کی شمیرل کیږي.

۷ – یو څرخیدونکی هنداره ، یوه هنداره ده ، چی په یوه خپله ایښوول شوي هواره پروت محور باندې څرخوړ ایښوول شوي. ترتیب په څیره کی له پورته لور انځوریږي.

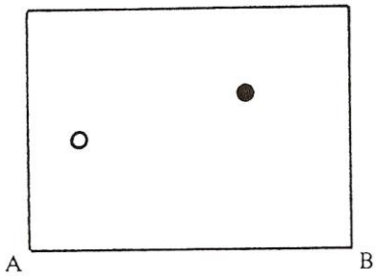
د نور له چینی L څخه یوه وړانګه په هنداره د (a) په ځاي یا ځاینیوون کی پریوزي او د هندارونی یا انعکاس قانون سره سم(پریووتکونج = وتلکونج) د$\overline{OA}$ لور باندې بیرته غورځول- یا اینه کیږي یا منعکس کیږي. اوس نو هنداره د ∝ په کونج د (b) ځاي یا ځاینوون ته راوړل کیږي یا راغرخیږي. دلته نو د نوروړانګه د $\overline{OB}$ په لور هحینداره کیږي یا غورځول کیږي یامنعکس کیږي. وښایی :

$$w(\overline{OA}; \overline{OB}) = 2\alpha$$

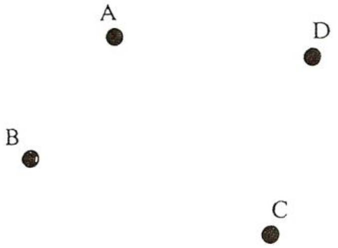
(c) ketabton.com: The Digital Library



خيره ۱۶۳



خيره ۱۶۴



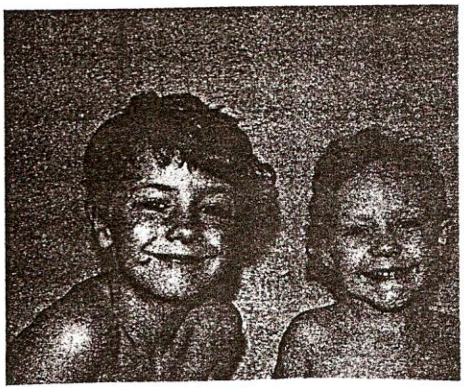
خيره ۱۶۵

۸ – د کوټې منځ کې دوه توپونه اېښول شوي يو سپين او بل تور. د کوټې له ديوالونو څخه توپ بلې لور ته نه شي تللی سپين توپ دې داسې ووهل شي چي تور توپ ووهي.دا د اينه ونی يا انعکاس د قانون سره سم په ديوال AB لګيږي. (حيره) د کرښو لار وکاږئ « تورتوپ – اينه ټکی ياانعکاسټکی – سپين توپ»

۹ – دا د يوه کور څلور برجونه دي، چي په A,B,C,D سره يې ښايو (خيره) داسې يو ځاي S شته ، له کوم چي برج A د برج C څخه يا سره پټ شي او برسيره پر دې له دې ځاي څخه A د B او D د منځتې په خير ښکاره شي يا ځان وښايي .؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

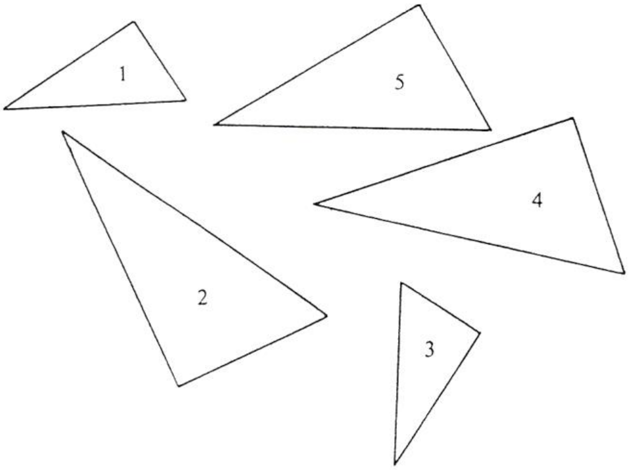
ورته والیځیرونه Ähnlichkeisabbildung



ځیره ۱۶۶

که چیرې دوه غبرګوني کوچنیان وکتل شي ،نو سم د لاسه ویل کیږي، چی دا دوه یو بل ته ورته دي. شیان یا لیدیدونکي هم یو بل ته ورته بلل کیږي، که ګڼ خویونه یا ګډې نخښې ولري، یعني ځرګند یو بل ته ورته وي، مګر سره له دې هم یو له بل توپیر کیدونکی وي. په شمیرپوهنه کی داسی نه شو ویلی چی دا شیان یا لیدیدونکي یو بل ته زیات یا کم ورته دی، دا خیالي قضاوت دی چی په شمیرپوهنه کی داسی قضاوت ځاي نه لري.

پیلبیلګه:



ځیره ۱۶۷

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاندې دریګوډی د کونجونو $60° = ß$, $30° = α$ او $90° = γ$ سره وکاږي.
ددې کونجونو سره له یوه زیات دریګوډي موجود دي، چې په ځانګړي توګه د ولاړ کونج ورکړه یواځیوالی یا یواځیتوب نیول کیدی یا فرض کیدی شي.
دریګوډي ۱ او ۲ کونګروانیخ دي، دریګوډي ۲ او ۴ هم، مګر دریګوډي ۱ او یا ۱ او ۴ کونګروانیخ نه دي. سره ددې هم دوي زیاتی ګډې نخښې لري (کونج، «بڼه»یا «شکل» یا څیره) دوي یو بل ته ورته دي.

ددوي ترمنځ نور څه ګډ دي یا دوي نور څه ګډ لري؟
له کونګروانیخجملی څخه مخ ته ځو، د اړخونو اوږدوالی اندازه کوو او راته ښایو چه د اړخونو ځاننیونه یا د اړخونو تناثب :

$$\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|BC|}{|B'C'|} = \frac{|CA|}{|C'A'|}$$

او

$$\frac{|AB|}{|A'''B'''|} = \frac{|BC|}{|B'''C'''|} = \frac{|CA|}{|C'''A'''|}$$

ثابت دی.

پس تعریفوو

تعریف : هوارې څیرې یا شکلونه هلته یو بل ته ورته دي، کله چې د مناسبو پاي کرښو اوږدوالی په همغه ځاننیونه یا تناسب پروت وي او (له دې امله هم) یو د بل سره مناسب کونجونه مساوي لوي وي.

بیلګه : کونګروانیخ څیرې د ورته شکلونو یو ځانګړی حالت دی، په هغوي کی د

(c) ketabton.com: The Digital Library

ورکړشوو اړخونو تناسب یا ځاننیونه تل ۱ دی.
له دې امله باید –د کونګروانيځ د ټولیزیدلو یا عمومیت – د دریګوډیو لپاره هم ورته جملې موجود وي.
ددوه یا زیاتو دریګوډیو ترمنځ یو بل ته ورته والی هلته پروت دی یا شته ، موجود دی، کله یی چی مناسب کونجونه سره یو شی وي او دې کونجونو سره مناسب اړخونه یو د بل سره په همداسی تناسب یا ځاننیونه کی پراته وي یا اړیکو کی).
دا هم د دریګوډیو لپاره باور یااعتبار لري، په داسی ډول– د کونګروانيځ ځخه پر مخ ځو– چی سړی داسی نومولی د ورته والي جملی لیکلی شي.

د ورته والي جملی: دریګوډی یو بل ته هلته ورته دي، که په لاندې کی سره برابر وي

۱ – د دریګوډیو دریواړو اړخونوپه مناسبه توګه د اړخونو تناسب یا ځاننیونه.

$$a : a' = b : b' = c : c' .$$

او یا

۲ – د دوه یو بل سره مناسبو اړخونوتناسب یا ځاننیونه او له دې بندشوې کونج. دا په دې مانا چې

$$a : a' = b .: b' \quad \text{او} \quad \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$$

او یا

۳ – د دوه مناسبو اړخونو تناسب او د لوی اړخونو مخامخ کونجونومساویوالی. په دې مانا چی: $a : a' = b : b'$ او $ß = ß'$ د $a < b$ لپاره او یا

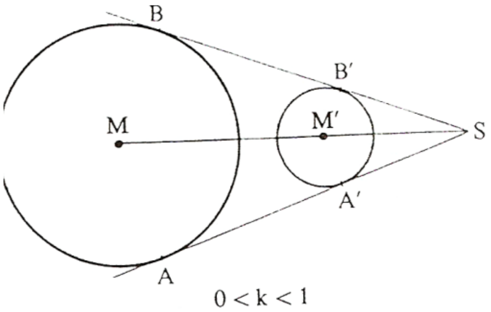
۴ – ددوه کونجونواندازې مساویوالی ، چی په دې ډول ټول کونجونه مساوي دي. دا په دې مانا چی :

(c) ketabton.com: The Digital Library

په همدې ډول کیدی شي د نورو څیرو لپاره هم د ورته والی جملی تر فرمول لاندې راوړل شي. څیرې یو بل ته ورته دي، که دوي د ځانګړو ورتوني څیروني له لاری یو په بل پریوتی شي.

مهم ورته والي څیرونی منځني راکښنه ده

تعریف: منځني راکښنه $Z_{S,k}$ د ټکي S (د راګښلو منځ) او یوه ګڼ k د راکښلو فاکتور یا ځلونکي په بنسټ یواځنی ټاکلی وي. هر اصلي اوړدوالي ته د منځني راکښنو له لارې په k–ځلی تغیر ورکو ل کیږي.



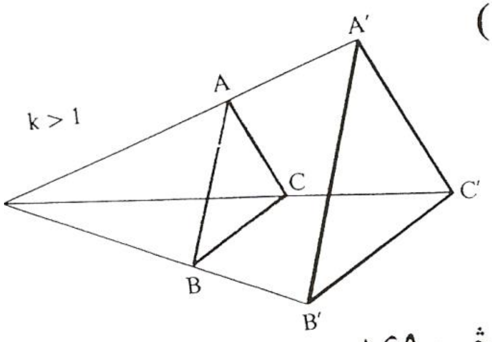
څیره ۱۶۸

د k لپاره له صفر تر یو ګڼونه پریښوول کیدی شي. په دې کی بیاپخپله له دې پوهیدی شو چی څیرونه له اصلي کوچنی ده. په دې حالت کی له زبیخلو (کیښکلو) غبرېږو. څیرونه نوره هم د راکښلو باور لري. که k = -1 وي نو اړوند منځني راکښل په راکښل منځ S باندې ټکي اینونه ده. د هر بل منفی ګڼ k |=-1 لپاره کیدی شي k په k =(-1).|k| باندې تجزیه شي. له دې وروسته پورته یادونی په همغه هدف استعمالیږي یا کارول کیږي.

یادونه : پام دې وشي چی راکښنه به ښه وي او که غزیدنه.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د منځراکښنی جوړښتځیړنه(توضیح)



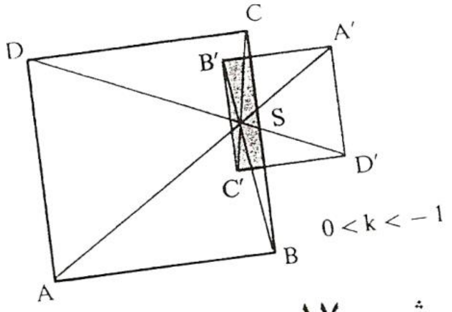
ځیره ۱۶۹

۱ – د اصلي هر په نخښنه ټکي د راکښلو منځ S سره و نخلوی.

۲ – د هر ټکي P لپاره د|PS| پای کرښي په k ځل کيږي(جوړښت ته د 0> k لپاره هم، مقایسه ځیره) او نوې پای کرښه

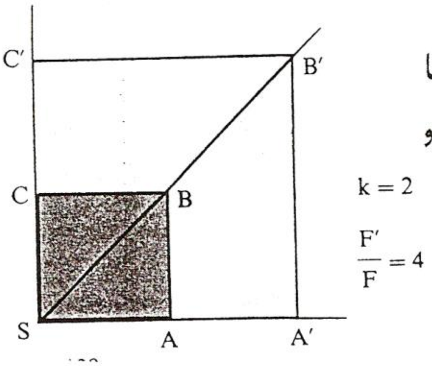
|'SP|.k = |SP|

په کرښه چی دټکي S ځخه پيل له P, S او 'P تیریږي وکاږی.



ځیره ۱۷۰

۳ – د اصل په ترتیب یا اصل ته ورته ټول ځیره ټکي سره ونښلوی.



ځیره ۱۷۱

دا چی ورته ځیرې (بی له 1 = |k|) کونګروانېنځ نه دي، نو د هوارې دننه یا منځ هم تغیر خوري، مګر که ټولی خواو یا اړخونه په فاکتور k(د بیلګي په توګه 3 = k , 2 = k) تغیر کړو، نو ځیروونکی هواره باید په فاکتورk^2 (یعني $k^2 = 4$, همداسی $k^2 = 9$) تغیر وخوري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

تعري: په يو منځراکښنو، چی فاکتور k ولري د څيرې هواره 'F او له څيرې دمخه (اصلي) هوارې F ترمنځ لاندنی تناسب يا ځاننيونه موجود دی.

$$F' : F = k^2 \quad \Rightarrow \quad F' = F.k^2$$

د لته د k مخنخښه کوم رول نه لري ځکه چی منفی ځل منفی بيرته مثبت دی

پيلبيلګ:

دياس(دفيلم دياس) (فورمات يا لويوالی 24mm.36mm)

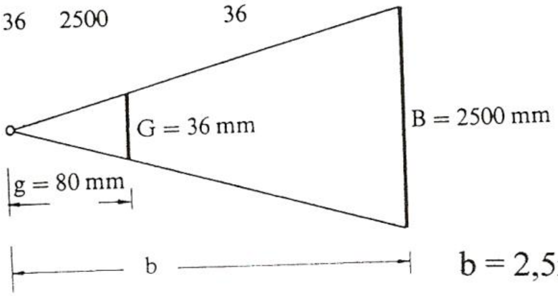
په يوه ديوال چی لويوالی يی 2,5 m . 2,5 m دی. د ممکن حده پورې څيره کيږي. د ښه ټيك جوړولوسره يی له عدسي واټن 8cm دی. پريوستونی يا پرويکتور د څيرې ديوال څخه بايد څومره لرې وي؟ د دياس هوراه په څو واره لويه شوې ؟

د دياس دڅيرونی لپاره لاندې اړيکی باور لري:

$$\frac{\text{د څيرې جګوالی } B}{\text{د دياسجګوالی } G} = \frac{\text{د څيرې پراخوالي } b}{\text{د دياس –عدسی لريوالی} g}$$

څيره ۱۷۲

$$\frac{80}{36} = \frac{b}{2500} \Rightarrow b = \frac{2500 \cdot 80}{36} = 5555{,}56\ \text{mm}$$



ممکن ډك په دې مانا، چی 36 mm په 2,5 m بايد لوي شي. په دې توګه د پريوستون ديوال –عدسي واټن په لاندې ډول دی :

$$b = 2{,}5\text{m}.0{,}08\text{m} : 0{,}036\text{m}$$

$$\sim 5{,}56\text{m}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لویوالی فاکتور یا ځلی دی

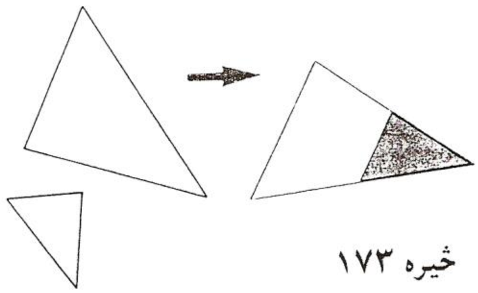
$k = 2{,}5: 0{,}036 \sim 69{,}44$

له دې امله د ځیرې هواره ده:

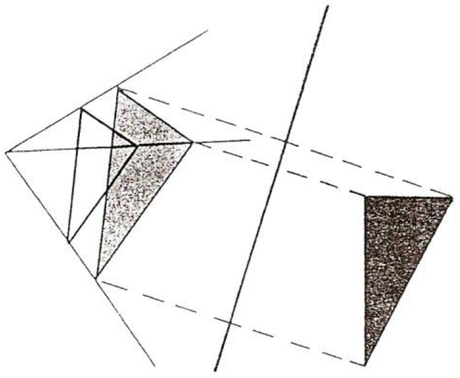
$$F' = 69{,}44^2 . 0{,}036 . 0{,}024 = 4{,}17 m^2$$

دا د دیاس هوارې 4822,53 واره یا ځله ده.

دا روښانه ده، چی ورته ځیرې، د څرخوني، راکښلو له لارې او اینونی له لارې یوه پوزیشن ته راوړل کیږ، په کوم چی سم د لاسه د شکلونو د کونجونو د برابرتوب ورته والی پیژندل کیدی شي.



ځیره ۱۷۳



ځیره ۱۷۴

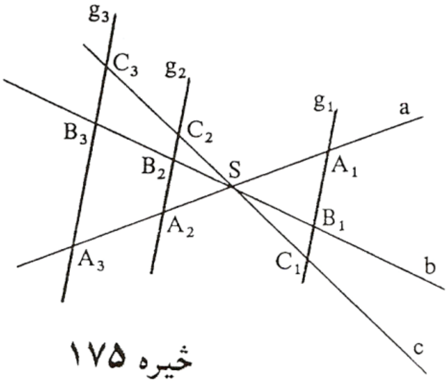
تعریف : هره کونګروایښځ ځیرونه، هر منځراکښونکی او له دوې هر تړلی یا ځنځیري اینښولشوې یا ځای په ځای شوې ځیرونی ورته ځیرونی بلل کیږي.

دا چی هره ورته ځیرونه بیرته یوه داسی ځیرونه باندې راګرځي، نو بیخي باور لري : د ورته

(c) ketabton.com: The Digital Library

والي خيروني ډيرى چې پرلپسى سره وتړل شي يا ځنځيري شي ګروپ جوړوى (د ګروپ لپاره دې، چې شميرپوهنيزه کليمه ده، د کتاب پاى وکتل شي)
او خيرې او همداسي پيل بيلګه (ډياسپرويکتور) څخه د وړانګي جمله ټوليزه يا عمومي کيدى شي.

۱ . وړانګي جمله: که له يوه ټکي S وتلى وړانګي $a,b,c,\ldots$ له غبرګو کرښو g_2,g_2,g_3 ..... ، غوڅي شي، نو د يوې وړانګی ټوټی همداسی تناسب کی دی يا همداسی ځان نيسی لکه
د بلی وړانګي ټوټی: دا په دې مانا چې:



خيره ۱۷۵

$$\frac{|SA_1|}{|SA_2|}=\frac{|SB_1|}{|SB_2|}=\frac{|SC_1|}{|SC_2|}$$

او

$$\frac{|SA_1|}{|A_1\,A_3|}=\frac{|SB_1|}{|B_1\,B_3|}=\frac{|SC_1|}{|C_1\,C_3|}$$

په خيره کی د اړيکو ښوونه سم د لاسه په غبرګو کرښو له پوړيزکونجونو او د دريګوډيو ورته والي چې SA_1B_1 او SA_2B_2, SA_1C_1 او SA_2C_2 اوپه همدې ډول د SB_1C_1 او SB_2C_2 سره يی لري.
برسيره پر دې باور لري:

۱ . وړانګي جملی په څټ: که له ناپاى کرښو.... g_1 , g_2 , g_3 څخه د خورې

(c) ketabton.com: The Digital Library

غونچې یا بهتره ستورې کربښو له لارې ټوټې پرېکړې شي، چې یو بل ته ثابتې یا همغه ځای په ځای ځانیونې یا تناسبات ځرګندوي، نو دا کربښې یو بل سره غبرګې دي.

۲ . وړانګې جمله:

که له یوه ټکي وتلې وړانګې د غبرګو ناپاکربښو ځخه غوځې شي، نو د دوې ټوټې چې له غبرګو دې ځان داسې نیسې یا په داسې تناسب کې دیلکه هغه د ککرټکې ځخه وتلې کچ شوې د وړانګو ټوټې.

$$\frac{|SA_1|}{|SA_2|} = \frac{|A_1B_1|}{|A_2B_2|} = \frac{|SB_1|}{|SB_2|} = \frac{|B_1C_1|}{|B_2C_2|} = \frac{|SC_1|}{|SC_2|} = \frac{|A_1C_1|}{|A_2C_2|}$$

۳ . وړانګې جمله:

په یوه غبرګې ټوټو ځانیونه داسې ده لکه پهدې بلې غبرګې ټوټو ځانیونه یا تناسب:

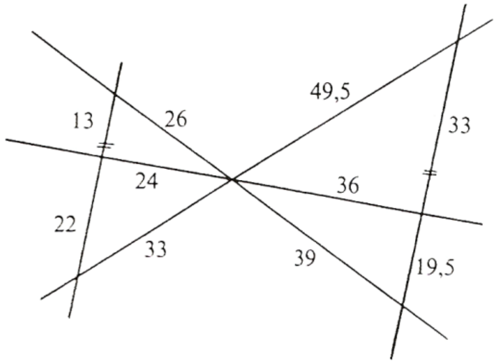
$$\frac{|A_1B_1|}{|B_1C_1|} = \frac{|A_2B_2|}{|B_2C_2|} \quad \text{oder} \quad \frac{|A_1C_1|}{|B_1C_1|} = \frac{|A_2C_2|}{|B_2C_2|} \quad \text{oder} \quad \frac{|A_1B_1|}{|A_1C_1|} = \frac{|A_3B_3|}{|A_3C_3|}$$

بیلګه :

۱ . د لمړې وړانګې جملې پسې لړو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱ . د وړانګو جملو پسی یا له امله باور لري:



خيره ۱۷۶

1. Strahlensatz: $\frac{26}{39} = \frac{24}{36} = \frac{33}{49{,}5} = \frac{2}{3}$

لمړی وړانګی جمله

2. Strahlensatz: $\frac{24}{22} = \frac{36}{33}$ oder

۲. وړانګی جمله

$\frac{33}{22} = \frac{49{,}5}{33}$ oder

$\frac{26}{35} = \frac{39}{52{,}5}$

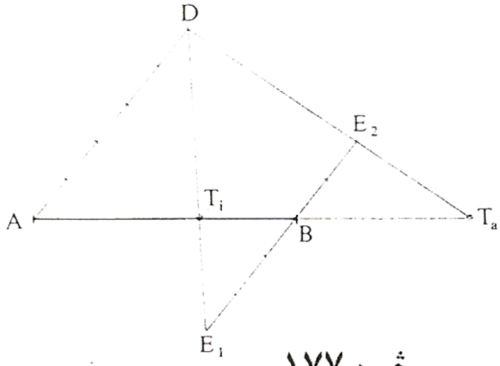
3. Strahlensatz: $\frac{13}{22} = \frac{19{,}5}{33}$ oder

۳. وړانګی جمله

$\frac{35}{22} = \frac{52{,}5}{33}$

۲ . د يوې کرښی AB ويشنه يا ټوټونه:

کرښه AB دننه(T_i) په ځاننيونه يا تناسب 5:3 او دباندې (T_a) په تناسب يا ځاننيونه 2 : 5 ويشل کيږي. د



خيره ۱۷۷

دې لپاره د ۲ . وړانګي جمله

کارول کيږي يا استعماليږي:

– دننه ټوټوونټکی T_i :

$$\frac{|AD|}{|BE_1|} = \frac{|AT_i|}{|T_i B|} = \frac{5}{3}$$

– د باندې ټوټوونټکی T_a:

$$\frac{|AD|}{|BE_2|} = \frac{|AT_a|}{|T_a B|} = \frac{5}{2}$$

دا جوړښت د ويشنی برسيره

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کرښو د ځل لپاره هم کارول کیدی شي. نو $|AT_a|$ د $|T_aB|$ دوه نیم واره دی.

۳ . طلايي غوڅی یا –غوڅونه:

په طلای غوڅي یوه د a اوږدوالی کرښه داسی ټوټه کیږي، چی برخه ټوټو د x اوږدوالی همداسی د $a - x$ اوږدوالی لپاره اړیکی $a : x = x : (a-x)$ باور لري. دلته x د دواړو برخه کرښو لویه برخه ده دا ویشنه په هنر او ارښیتکتور کی له مانا ډکه ده یا مهم رول لوبوي. له پورته اړیکو څخه لاس ته راځي: $x^2 = a(a-x)$ او له دې بیا $x = \sqrt{a(a-x)}$ لاس ته راځي. دا په دې مانا چی اوږده کرښه د دوو لنډو کرښو او د ټولی کرښی هندسي منځ دی. که دا فرمول نور هم ښه بدلون غوره کړي او د x په لور اوبی یا حل شي، نو ترې لاس ته راځي :

$x = \sqrt{a^2 - ax}$

$x^2 \; a^2 - ax$

$0 = x^2 + 1x - a^2$

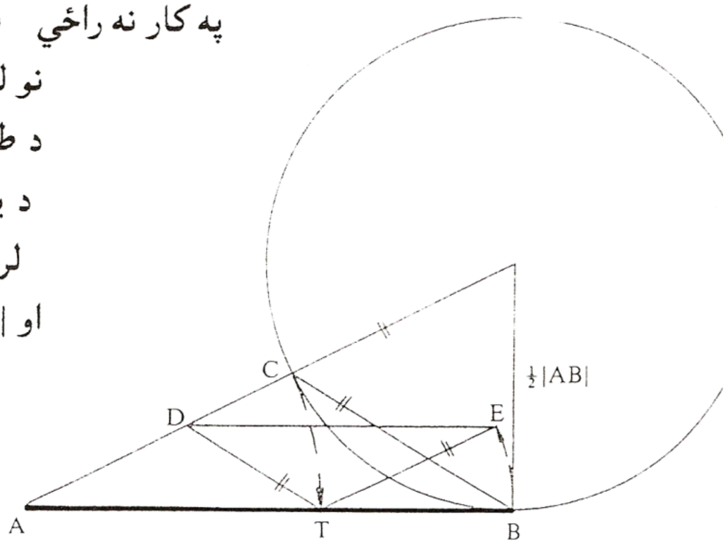
$x_{1,2} = -(a/2) \pm \sqrt{(a/2)^2 + a^2}$

$= -(a/2) \pm \sqrt{(5/4)a^2}$

$x_1 = 0{,}5a(\;5 - 1)$ په کار نه راځي

$x \sim 0{,}618a$ نو لرو:

خیره ۱۷۸



د طلايي قاعدې لګه لارې

د یوې کرښی $|AB|$ ویشنه

لرو $|AC| = |AT|$

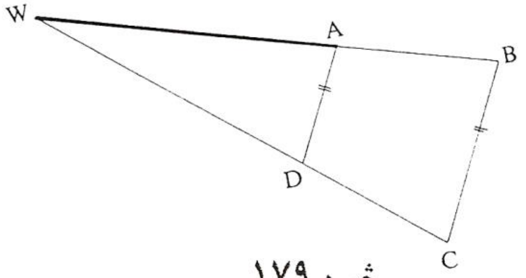
او $|AD| = |TE| = |TB|$

$$\frac{|AB|}{|AT|} = \frac{|AT|}{|TB|}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

تمرینونه

۱ – په کواوردیناتسیستم کې دریګوړی $A(2|3), B(6|1), C(3|6)$ ورکړ شوی دی.
الف) دا دریګوړی د $k = 2$ په اندازه وغزوی . د غزولو مرکزدې $Z(0|0)$ وي.
ب) دا دریګوړی په $S(-2 | -3)$ وڅرخوی د $140° = \alpha$ سره. دا ځیره دریګوړی په S باندې د $k = -1,5$ سره وغزوی.
پ) دا دریګوړی په ۴ یوونو سره لمړی کیڼ لورته او بیا په ۵ یوونونو پورته لورته وکښوی، بالاخره یې په x– محور هنداره کړی او بیا یې بالاخره په ټکي $(0|-6)$ د $k = -1$ سره وغزوی.
۲ – ایا ټول الف) مساوي پښیز ، ب) مساوي اړخیز، پ) ولاړکونجیز دریګوړی یو بل ته ورته دي ؟
۳ – د یوه مکعب پورته هواره د مرکزی غزوني د غزونفکتور یا غزونخل k سره او د هوانیمي غوځټکي سره د غزولومرکز په ځیر، څنګه تغیریږي؟
۴ – کرښه $|AB| = 10$ cm دننه او دباندې داسی ټوټه کړی، چې په ځاننیوني یا تناسب د $5:2$ کی سره پراته وي.

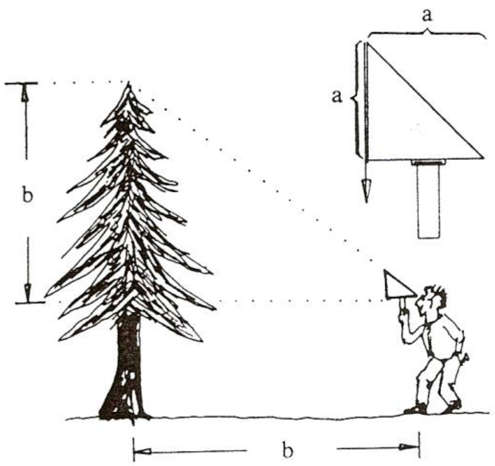


ځیره ۱۷۹

۵ – کرښه $|CD| = 6,5$ cm د «طلای غوځي قاعدې» له لارې ټوټه کړی.
۶ – د یوه کتونبرج A (ځیره ۱۷۹) څخه دې واټن $|AW|$ یوه ځنګل برخی W ته وټاکل شي.
دري ټکی B, C او D په نخښه کیږي په داسی ډول چې AD||BC وي. اندازه کیږي: $|AB| = 75$ m : $|BC| = 125$ m او $|AD| = 100$ m , نو $|AW|$ څومره اوږد دی ؟

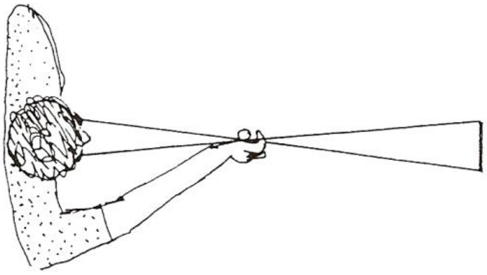
(c) ketabton.com: The Digital Library

۷ – الف) د یوه «ځنګلوالدریکوډي»
سره (ځیره) د یوې ونی
جګوالی اندازه کیدی شي. – ونه
څومره لویه ده ، که د ځنګلوال
سترګه له ځمکی څخه ۷۰، ۱
متره جګه وي، او دی له ونی
۱۰ متره لرې ولاړ وي؟



ځيره ۱۸۰

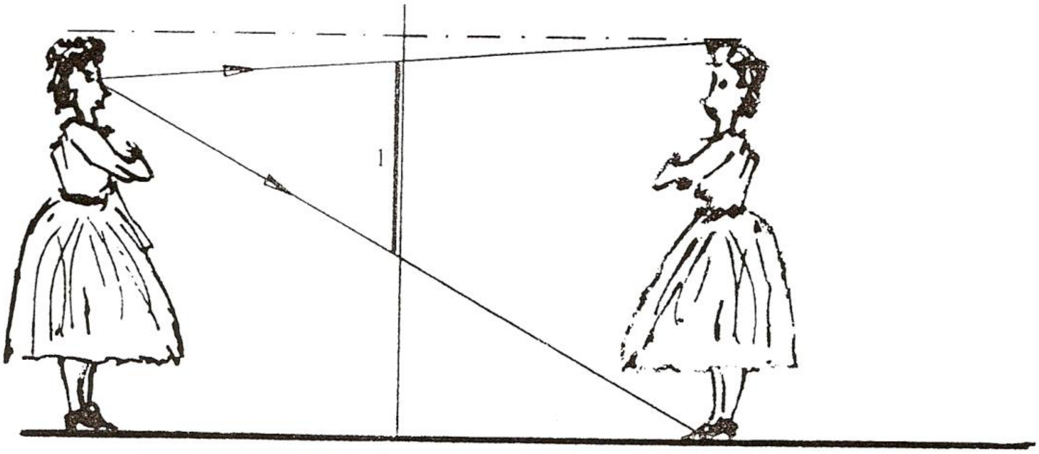
ب) څنګه (د یوه څرګنډه واټن)
د یوه شي د جګوالی د خپل
مټ په مرسته نږدې یا تقریبي
اندازه کولی شي؟
لارښود: ۷ الف وګوری)
پ) په عسکری کي د دوه شیانو
د واټن د اندازه کولو لپاره
« د غټې کوتي ګام » تخنیك
کارول کیږي یا استعمالیږي.
دا داسی صورت نیسی چی
لمړی سړی خپله کینه سترګه
پټوي او غټه ګوته راوباسی،


ځيره ۱۸۱

لمړی یو انډول وړ شی، چی ښي
لور ته پروت دی، اندازه کوي او بیا د ښی سترګي په پټولو سره ټیك هغهٔ لټوونکی
موخه د زیر لاندې نیسي. دلته د واټن اندازې ورکونی ته سړی څنګه راځي؟
۸ – میرمن څانګه غواړي چی په خپله پوره لویوالی ځان د دالیز په هنداره کی
وګوري. په عادې توګه د دالیز د کوچنوالی له امله ۸۰ سانتي متره له هندارې

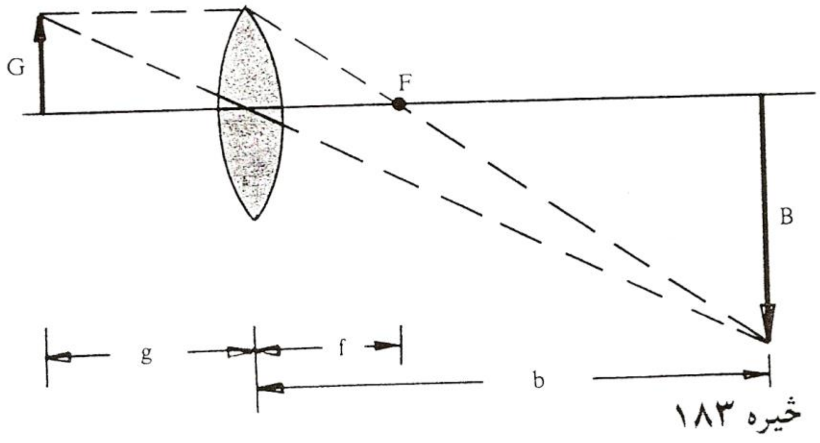
(c) ketabton.com: The Digital Library

لرې، هنداري ته مخامخ ودریږي.دا هنداره باید څومره کم له کمه جګه وي چې میرمن ځانګه د سترګو جګوالی چې ۶۵، ۱ متره دی ټول لویوالی چې ۷۳ ،۱ متره دی وګوري؟



څیره ۱۸۲

۹ – د یوې لینزې یا عدسی یا سترګی له لارې په څیره کی د نور څیرونی



څیره ۱۸۳

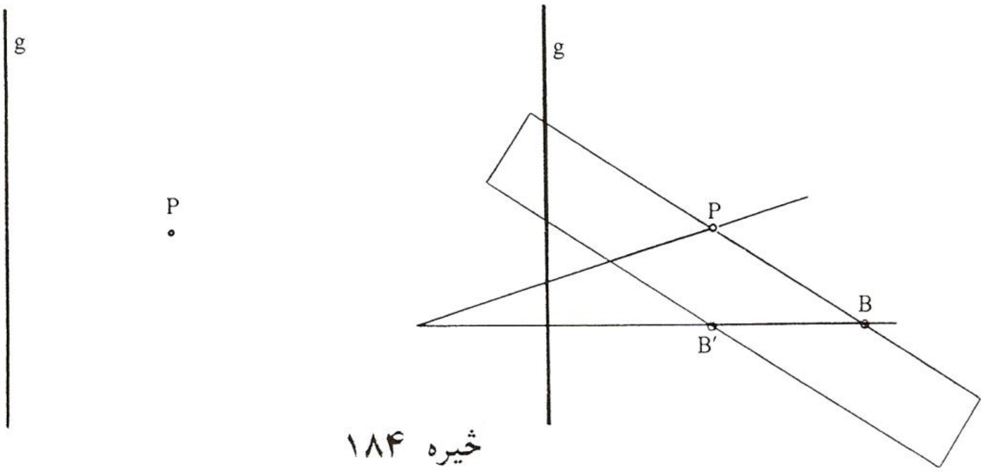
(c) ketabton.com: The Digital Library

جوړښت کتل کیږي. د لینزې یا عدسی لپاره د لینزې یا عدسی مساوات $(1/g)+(1/b) = (1/f)$ باور لري، پخپله د څیرونی لپاره مساوات $B / G = b / g$ باور لري(په لغاتو: د څیرې جګوالی د شي جګوالی سره ځان داسی نیسی لکه د څیرې لریوالی د شي لریوالی ته). دا دواړه اړیکی د وړانګي له جملی راوباسی !

۱۰ – یو ولاړکونجیز دیاپوزیتیویا مثبت دیاس داړخ اوږدوالی ۳،۶ سانتي متره سره او ۲،۴ سانتي متره سره یو و هغه ته غبرګ دیوال باندې پریوزې . څیورونی لینزې یا عدسی، دا شی ۱۲ سانتي متره له دیاس او ۴،۸۰ متره له دیوال لرې دي. د پریوستون دیوال کم له کمه باید څومره وي ؟

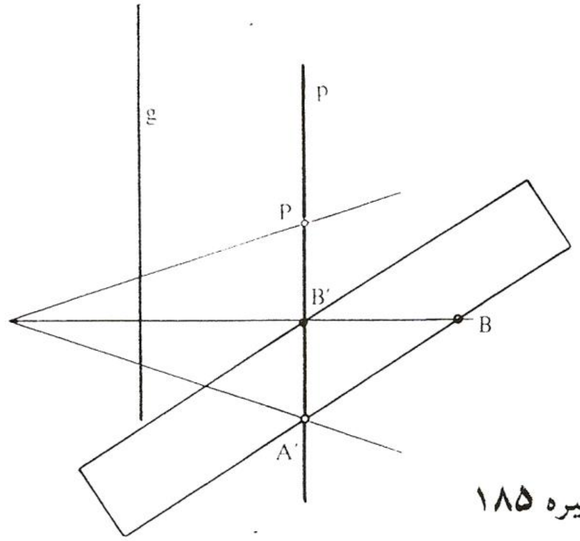
۱۱ – یو د دیوال مربع شکله کړکی، چي اړخ یی ۲۰ سانتي متره اوږد دی له یوه هغه ته غبرګ دیوال څخه ۱۲ متره لرې ده. د هغی کړکۍ څخه څومره لرې باید یوه د پرېښنا سرچینه ، چی د ټکي بڼه لري، لرې وي چی له کړکی تیره رڼا یوه د ۱۶ مترمربع هواره روښانه کړي؟

۱۲ – د کوم مرکزې غزوني سره کیدی شي چی یو ګردي دننه دریګوډی په ګردي راګیر یا ګردي دباندې دریګوډي باندې څیره شي؟ ګردۍ هوارې یو بل سره



څیره ۱۸۴

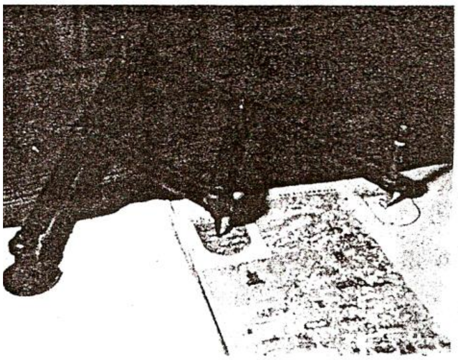
(c) ketabton.com: The Digital Library



ځیره ۱۸۵

په کومه ځانییونه یا تناسب ځای نیسی یا پرتی دي؟

۱۳ – د دیسارګ (Desarues) د جملی له مخی کیدی شي چی کرښه g په ټکی P جوړه شي ، که ټول رسم الات یوائځي یوه لرګي مته وي (د بیلګي په توګه کرښی یا ختکش) د دوه غبرګو کانتو سره یا اړخونو سره ځمور په اختیار کي وي. په دلایلو روښانه کړی، چی ولی په پرلپسی ځیرو جوړښت کی د جوړښت لار کار ورکوي.



ځیره ۱۸۶

۱۴ – وښایی چی د هر غبرګ اړخیزABCD لپاره باور لري: که د یوه نیمی د په خوښه ټکي P څخه یوه اړخ ته غبرګه کرښه رسم شي، نوغبرګاړخي منځ ته

(c) ketabton.com: The Digital Library

راځي، چې ABCD ته منځنی یامرکزې ورته دی. د همغه غزولومرکز چیرته پروت دی؟

په دې خویونو د پانتوګراف(Pantograph) یا په ورځنی ژبه د ځانې ټونګی دا یوه د رسموولو اله ده قانون هم بینا دی. O په رسمتخته تر زیر لاندې راځي . په پینسل P سره د مخه کښل شوي څیرې باندې حرکت ورکول کیږي، نو په دې توګه دا رسمپینسل یو مرکزي یامنځنی ورته څیره رسم کوي (څیره.) په تي مخ کی کښل شوې ده

۱۵ – په یوه ګردی کی دوه ټوټونی یا زیني یوبل غوځوي. ټوټی ۱۸ سانتیمتره او ۳۵ سانتي متره دی، د دومی هغه اوږده ټوټه ۳۰ سانتیمتره ده. نا معلومه ټوټه یی وښایی.

۱۶ – خومره لرې سرې کتلی شي

الف) د بحرهوارې څخه ۴۰ متره جګ اندازه ټوکری

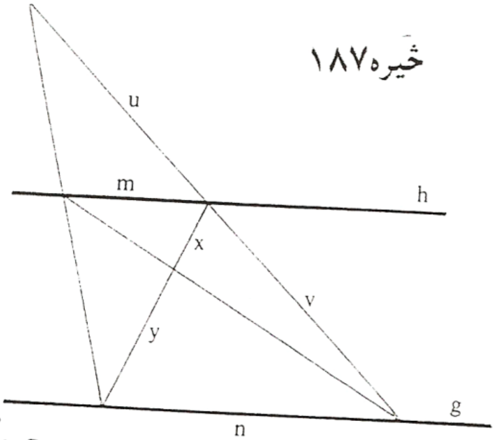
ب) د یوه له ځمکی ۲ کیلو متره جګ هوا پوښکی یاهوا بالون،

پ) د یوه الوتونکی کوټکی چی د سپوږمی هوارې څخه۲ کیلومتره جګه وي(r = 1735 km)؟

۱۷ – د شکل ۱ (څیره

څیره۱۸۷

الف) لپاره صدق کوي h || g او



a) $\frac{u}{v} = 1$

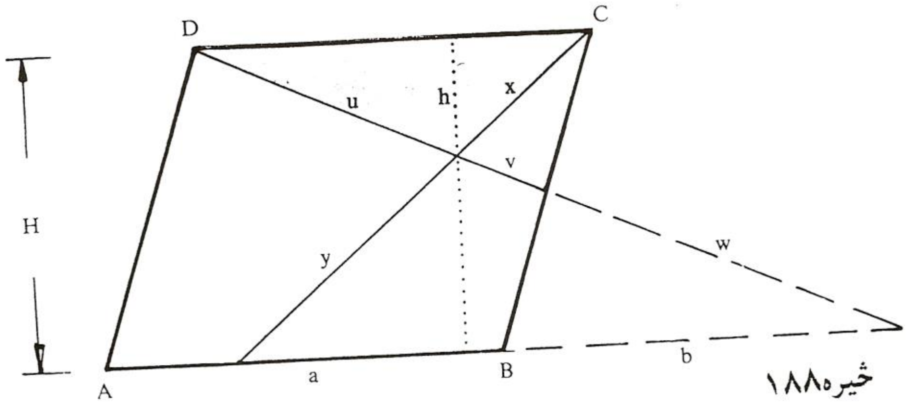
b) $\frac{u}{v} = 0,5$

c) $\frac{u}{v} = \frac{2}{3}$

Berechnen Sie $\frac{x}{y}$. وشمېرئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۸ – وشمیری u / v او x / y (ځیره ب)
د غبرګاړخیز ځومه برخه رنګه ده؟



ځیره۱۸۸

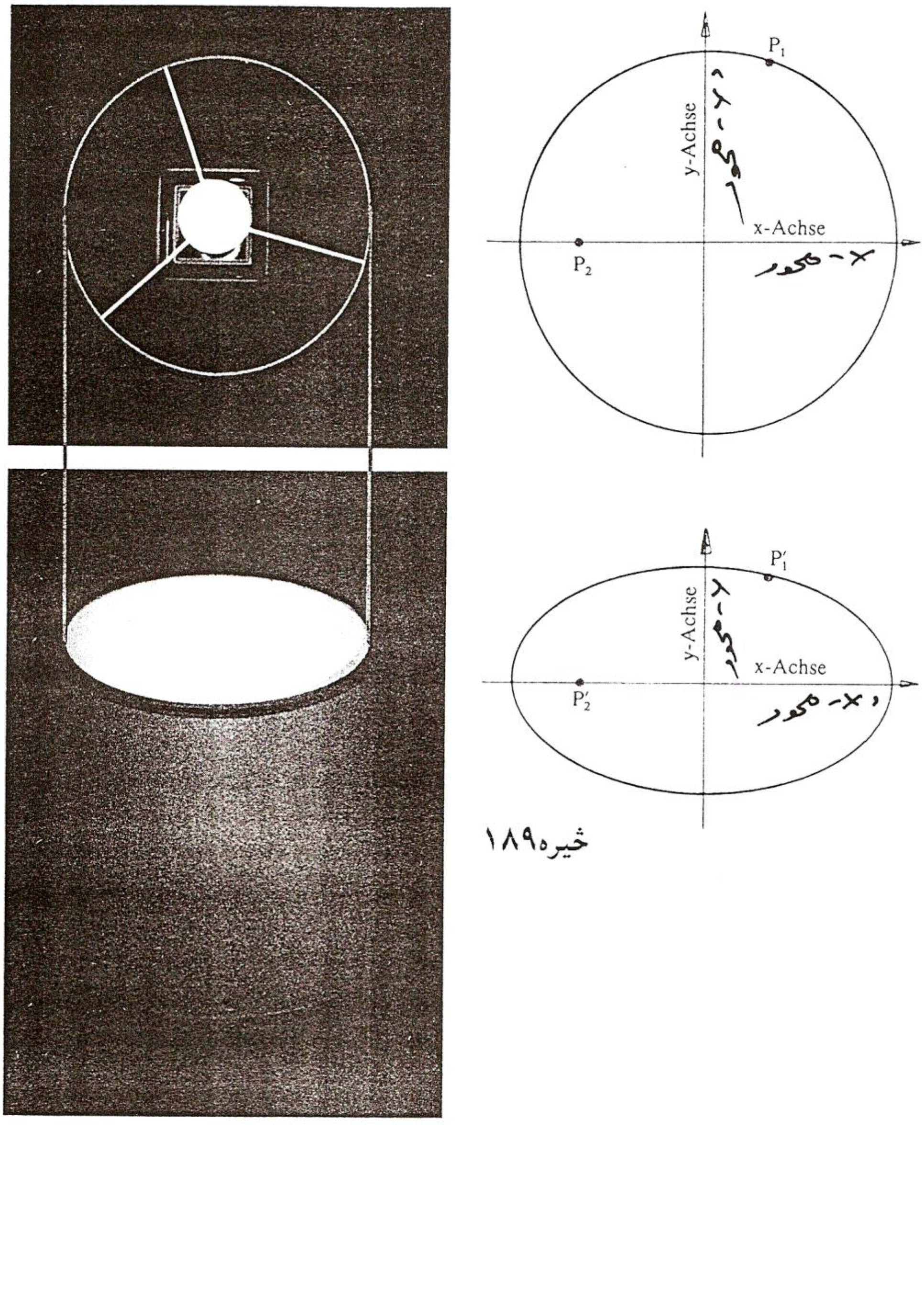
افینی ځیرونی (Affine Abbildungen)

محوري افینیتي Die axiale Affinität

دبیلګي په توګه مو د مخه تیرو درسونو کی وپوښتل، چی ایا موږ له یوې ګردې ښیښې ټوټې چې لږ څنډه یې ماته ده یوه بله ګرډې ټوټه چی وړانګه یی له پخوا

(c) ketabton.com: The Digital Library

کوچنی وي او یا یو ډیرګوډی جوړولی شو، چې سیومتري او په دې توګه ښکلی



شیره۱۸۹

(c) ketabton.com: The Digital Library

وي. دلته موږ الیپسي سره مخامخ شو.
پوښتنه دا ده چې ایا یوه څیرونه شته چې له ګردۍ څخه الیپسي لاس ته راشي؟
د څیرې ۱۸۹/ دلیدلو له مخې داسې خیال راپیدا کیږي، چې ګونديې د ګردۍ او
ایلیپسي ترمنځ څه خپلوي شته. دا نو بیا دې لاندې پریکړې ته اجازه ورکوي، چې
یوه څیرونه باید موجود وي چې د ګردۍ څیرونه ایلیپسی شي.
دا څیرونه باید کوم خویونه ولري؟
موږ بیا د جوړونې نیونې چې د مخه مو کړي رامنځ ته کوو.
ټولې په پراته (افقي) x– محور باندې پراته ټکې ځاي په ځاي پاتیږي: پس
د x– محور د ځاي په ځاي ټکو کرښې څیرونه ده. د دې په څټ د y – محور ټول
ارزښتونه تغیر خوري. پس هره y–محور سره غبرګه کرښه ځاي په ځاي کرښه ده.
له دې سره موږ د نوې څیرونې لپاره ټول ضروري خویونه راټول کړل: د افینیتي
محورa سره یوه محوري افینیتي $A_{a;g;k}$ ، د لورکرښې (کرښه چې لورې یې
څرګندوي لنډ یې: لورکرښه) g او د افینیتي فاکتور k |= 0 مخ ته پراته دي، که
لاندې شرایط پوره وي :
۱ – هره کرښه PP' چې له ټکو P او P' تیره وي د g سره غبرګه ځغلي.
۲ – که *P د PP' او a غوڅټکی وي ، نو لرو : |P*P'| = |k|.|PP*|.
په دې توګه نو یوه محوري افینیتي، دکرښې –،غبرګ – او ټوټه تناسب یا ځاننیونه
ریښتونې ده. اخرنۍ دا وايي چې په اصلي پایکرښې درې ټکې دا پایکرښه په همغه
تناسب یا ځاننیونه پرې کوي، لکه د څیره ټکې په څیره کرښه باندې.

له دې لاندې د محور افینیتي جوړښت څېړنه لاس ته راځي
۱ – له اصلي کرښې په نخه شوي ټکي (د بیلګي په توګه P) څخه وg سره یوه
غبرګه کرښه وباسی او ددې غوڅټکی د افینیتي محور سره د بیلګي په توګه *P
وبولی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲ – له *P څخه $|P'P^*| = k \cdot |PP^*|$

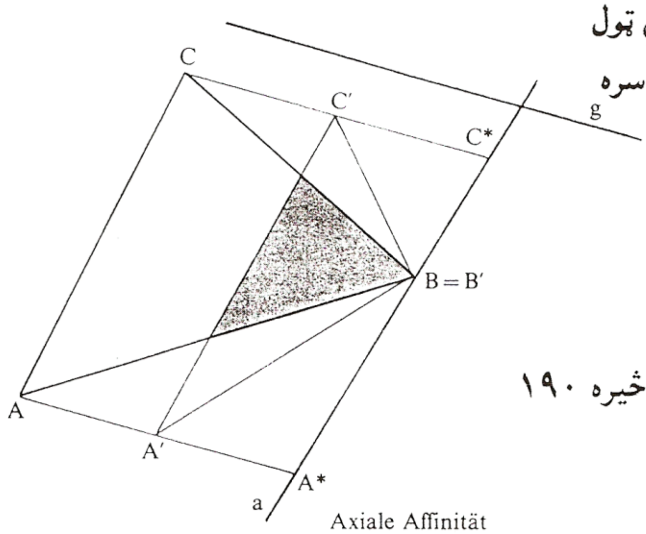
و g ته غبرګي مناسبی کرښی

وکارئ.

۳ – په دې توګه رامنځ ته شوي ټول

ټکي اصل ته په ورته توګه سره

ونښلوی.

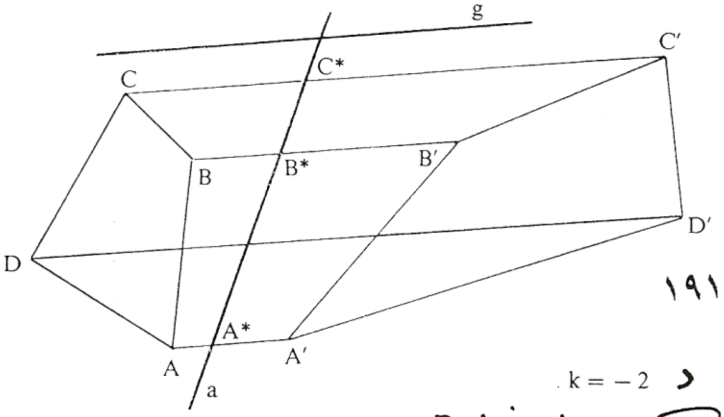


Axiale Affinität

ځیره ۱۹۰

$k = \frac{1}{2}$ د

آکسیال افینیتی



ځیره ۱۹۱

$k = -2$ د

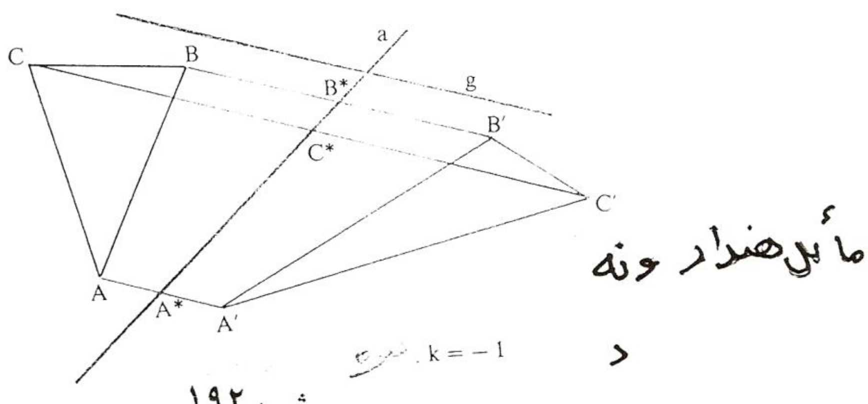
آکسیال افینیتی

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $k = 1$ لپاره د هوارې هر ټکی ځای په ځای ټکی دی، ځکه چی ټولی پایکربنی تغیر نه خوري. له دې لرو چی $A_{a;g;1}$ کټمټ یا identisch ایدنتیك دي.
د $k > 0$ لپاره P او P* د a په یوه (همغه) خوا پراته دي(ځیره) ، د $k < 0$ لپاره د a په بدلوخواوو (ش. ۱۵۷)
یو ځیرونه $A_{a;g;k}$ کیدی شي په ځیرووني $A_{a;g\ 1/k}$ بیرته راوکرځي .

مائیل هندارونه

مائیل هندارونه یوه ځانګړې محوري افینیتي ده : د $k = -1$ لپاره لریوالی یا فاصله |PP*| همدومره ده لکه لریوالی یا واټن یا فاصله |P'P*| . پس مائیل اینونه محوري افینیتي $A_{a;g;-1}$ ده.



ځیره ۱۹۲

(c) ketabton.com: The Digital Library

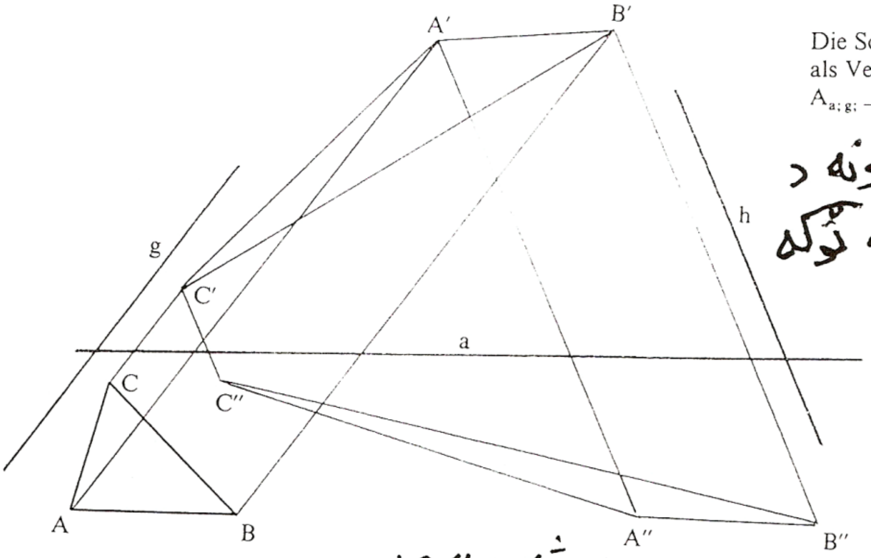
: محوري افينيتي(يو بل سره) تړلو ځانګړي حالتونه:

ياتي كوونه يا بياتيونه Scherung

: دوه محوري افينيتی(يوبل سره) تړل، چې همغه افنيتي محور a ولري،g او h
ختلفلوري محورونه او يو بل ته مخامخ افينيتي فاكتورونه k او 1 / k ولري، نو
بياتيونه(بياتي كونه) ورته وايو.

بياتيونه(يوبل سره)
: تړلو په څير:

$A_{a;g;-2} \cdot A_{a;g;-½}$



Die Scherung
als Verknüpfung
$A_{a;g;-2} \cdot A_{a;h;-\frac{1}{2}}$

بياتيونه د
تړنې په توګه

شمېره ۱۹۳

(c) ketabton.com: The Digital Library

په بیاتیونی کی، لکه ځنګه په مائیلی اینوني کی د هواری دننه بی تغیره پاتی کیږي، سره ددې چی د یواځنیو یا ټولو شکلونو تغیر خوړلی شي. (تمرین وګوری)
په عمومي توګه د ځیرې – او اصلي هوارې لپاره په یوه محوري افینیتي کي باور لري : F'=|k|.F , او یو په بل پسی کارونو یا عملیو اجرا کولو کی هم په همدې ډول
F' = |k.... .k|.F:
دا په دې مانا، چی محوري افینیتي په عمومي توګه هوارې ریښتونی نه ده.

محوراینونه

محوراینونه یوه محوري افیتي ده له k = -1 سره. (ځیره ۱۹۲ وګوری)

کونګروانیخ ځیرونه
هره کونګروانیخځیرونه کیدی شي له محوراینونی یوځای راټوله شي.

منځنی راکښنه(راکښل)
هر منځراکښنه یو افقینه ځیرونه ده.

په عمومي ډول لاندې لاس ته راځي

د ټولو کونګروانیخ ځیرونو، ورته ځیرونو او محوري ځیرونو ډیري، د ټولو افقین ځیرونو ډیری ورکوي. که افینځیرونی یو په پسي اجراشي یو ګروپ جوړوي، داسی په نامه افینګروپ.
(ګروپ دې د کتاب په پای کی وکتل شي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

تمرینونه

۱ – یو دریګوډی ABC دې په یوه افین هوارمساوي باندې داسی واړول شي، چیرته چی $|AB| = |AB'|$ او .

۲ – په دریګوډي $A(3|5)$,: $B(5|4)$; $C(3|1)$ باندې یو محوري افنیتي داسی وکاروي یا استعمال کړی، چی $A'(-3|1)$ او y– محور د افینیتي محور وي.

۳ – د ګردی ځیره د $M(2|3)$ او $r = 3$ cm سره وټاکی ، که د x–محور د افینیتي محور وي، په ۱ او ۳ کوادرانت یا څلورمه کي لورکرښه او $k = 2$ د افینتي فاکتور یا –ځل وي.

۴ – یو دریګوډی په هوار مساوي پنځه ګوډي واړوی.

۵ – یوه ګردی دې د نیمي $d = 12$ cm او د افینیتي فاکتور $k = ½$ سره افینځیره شي. د راپیدا ایلیپسی د هوارې دننه وشمیری. (دوه یو په بل ولاړ محورونه افینیتي محورونه دي چی له منځټکي او لوریزکرښی څخه تیریږي)

۶ – یو تریخ ABCD جوړکړی له $a = 8$ cm ; $c = 3$ cm ; $d = 5$ cm او $\sphericalangle = 40°$. په دې محورې افینیتي لارښوده کړی، چی د افنیتي محور یی د تریخ منځلاین وي، چی د لورکرښه یي د هغي سره ۵۵ درجي کونج جوړوي او د افنیتي ځل ا –فکتور یی $k = 3/2$ دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دریکوډیکچ یا تریکونومتري Trigonometrie

تعریفونه

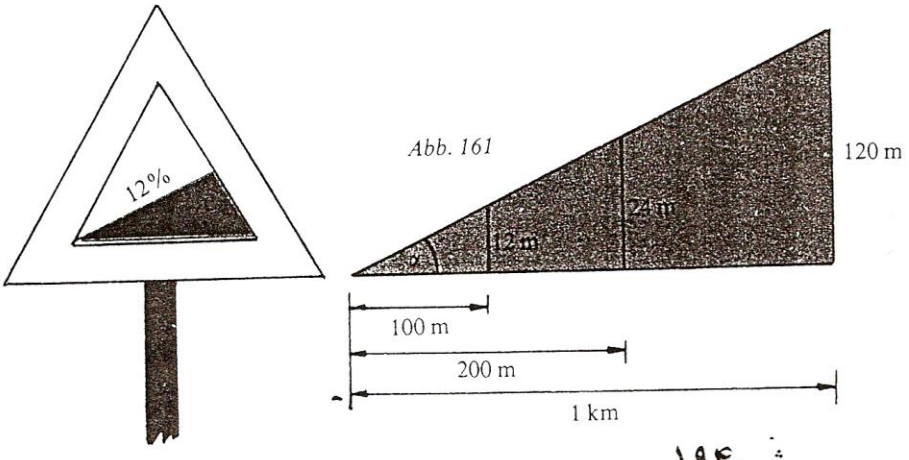
د دریکوډیکچ یا تریکونومتري دنده ده چی په هواره یا په هوا کی دریکوډي کچ کړي ، د ځانګړوبلواکو له لارې، دې په نامه تریکونومتریبلواکو. برسیره پر دې د دې په مرسته پریودیکی یعنی په منظمه فاصله پرلپسی تکراریدونکی پیښې(موږ یې تل راګرځیدوني بللی شو) ښیړل کیږي.
تریکونمتري تر هیپارچ (Hipparch ۱۶۰ – ۱۲۵ له م پخوا) پوري تعقیبیدی شي، وروسته له مصري پتولیمویس Patolemäus چي په ۱۶۸ م کال کی مړ شوی او بیا له هندې او عربو شمیرپوهانو له خوا پرمختګ ورکړ شو. له پیل دا د کارونی یا عملي کیدو د ستونځو سره مخامخ وه. دریکوډیکچ خپل کارونه په استرنومي او فزیك، د ځمککچ یا اندازه کولو، د ځمك اندازونی، نقشو علم، او ابادی او نوتیك Nautik (د کیشتیو د لارو نقشه ویستلو پوهنه) کی مومي.
د تریکونومتري مانا یا مهموالی په ځانګړي ډول په دې ریښتینوالی یا واقعیت کی نغښتی، چی د دې په مرسته د پایکرښبلواکوالی ، د کونجبلواکوالی سره تړلی شي(پام دې وي، چی دا تړاو شمیرپوهینیز مفهوم لري).

پیلبیلګه: د په مانایا مهم جګوالي یا لویدکرښو نخښنه لوحی یا په بله عبارت د زوړي او پیچومی لیکتختی(دې ته دې پام وي چی ما دا کلیمی هر چیرې د زوړي او پیچومی په نامه نه دې بللی، خو دا به ښه وي ، چی په هغه مناسب ځای

(c) ketabton.com: The Digital Library

کی ، که ما بیرته اصلاح نه کړې، نو په دې نومونو دې ونومول شي) وهل شوي

د دې له لارې کوم معلومات ورکول کیدی شي؟
پیچومی یا جګوال 12 % په دې مانا چی په راتلونکو سلو مترو کی یو جګوالی د ۱۲ مترو وهل کیږي، دا ۱۲ متره ټیک ۱۲ له سلو دي. په نورو سلو مترو کی نور ۱۲ متره پیچومی یا جګوالی تی کیږي، نو په عمومي ډول یا ټولیزه توګه له ۲۰۰ متره پراته اوږدوالي وروسته ۲۴ متره پیچومی یا جګوالی. له یو کیلومتر وروسته دا پیچومی یا جګوالي لیدیدونکي ۱۲۰ متره ته جګیږي. کتل کیري یا لیدل کیږي، چی په ورکړشوي پیچومي یا جګوالي کی د پیچومي توپیر متناسب یا په ځاننیونه و هوارې فاصلي ته تغیر خوري . د پایکرښو تناسب یا ځاننیونه تابث یا ځاي په ځاي پاتیږي او د په سلو کی ګڼ په لوحه ورکوي. د واقعي جګوالي اوږدوالي معلومات نه

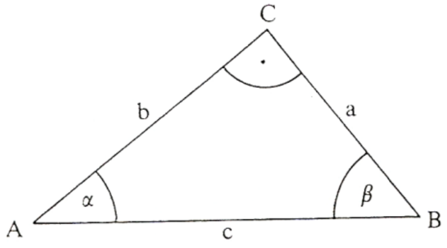


ځیره ۱۹۴

(c) ketabton.com: The Digital Library

ورکوي همداسي زوړی یا لویدون. په داسي حالت کی هم بیا نورې لوحي هم زوړندې وي.
په همدې ډول پیچومی کیدی شي، لکه په سلو جمله کی، د کونج له لارې هم ورکړشي، چی د سرك ټوټه یی د پرتون سره جوړوي.
تریګونومتري یا د په سلوکی (د پیچومي یا جګوالي تناسب) د پیچومي یا جګوالي ویناوي دي او یا په څرګندو پیچومي کونج یا جګکونج چی سلییز پیچومی یا جګوالی ټاکي. په دې ډول په سلو کی ۱۲ جګوالي سره د پیچومي کونج په لاندې ډول دی $\alpha = 6,48°$.

په پیلبیلګه کي څرګندیږي چی دا پایکرښي د یوه ولاړ دریګوډي اړخونه انځوروي، چی د دوه دریګوډیو تناسب یا ځانینونه د کونج په بلواکسی یا اړتوب ښاییی. زیات وخت هیوپوتینوزې (اوږداړخ) په c ښوول کیږي او هغه ته مخامخ کونج په γ . نورې دواړه کتیتی a او b دي او د دوي مخامخ کونجونه α او β.

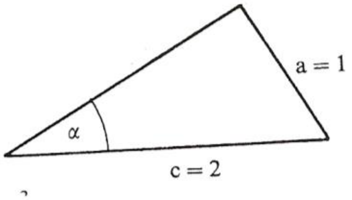


څیره ۱۹۵

اوس نو لاندې جملي باور لري:

(c) ketabton.com: The Digital Library

سایبنلواك sinusfunktion: بلیگه:

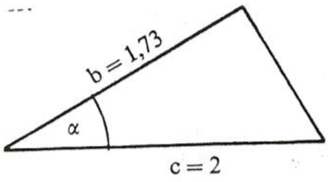


$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{\text{مخامخ کاتیت}}{\text{هیپوتینوزې}}$$

$\sin 30° = \frac{1}{2}$

خیره ۱۹۶

کوسایبلوك Cosinusfunktion بیلگه:

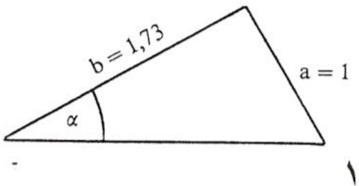


$$\cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{\text{پرته کتیت}}{\text{هیپوتینوزې}}$$

$\cos 30° = \frac{1,73}{2} = 0,8660$

خیره ۱۹۷

تنجنتبلواك Tangensfunktion بیلگه:



$$\tan\alpha = \frac{a}{b} = \frac{\text{مخامخ کاتیت}}{\text{پروتکاتیت}}$$

خیره ۱۹۸

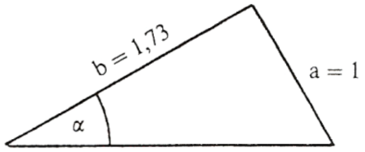
$\tan 30° = \frac{1}{1,73} = 0,577$

(c) ketabton.com: The Digital Library

يادونه : پام دې وي چې د مخامخ کاتيت لاندې د دريګوټي هغه اړخ پوهيږو، چې په هيپوتينوزې پراته کونج ته، چې څموږ موخه وي، مخامخ پروت وي او هغه اړخ چې په همدې کونج پروت وي ، هغه ته په کونج پروت اړخ چې موږ يې لنډ پروت کاتيت بولو.

دا لاندې نور کونجبلواک دي، چې کم کارول کيږي

کوتنجنتبلواک Kotangensfunktion بيلګه



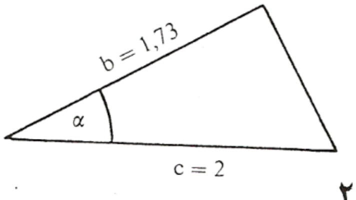
$$\cot\alpha = \frac{b}{a} = \frac{\text{پرته کاتيت}}{\text{مخاخ کاتيت}}$$

خيره ۱۹۹

$$\cot 30° = \frac{1,73}{1} = 1,73$$

ډير کم ، د بيلګي په توګه استرونومي کی، لاندې کونجبلواک کارول کيږي

سيکانسبلواک sekansfunktion بيلګه



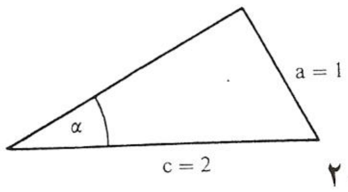
$$\sec\alpha = \frac{c}{b} = \frac{\text{هيپوتينوزې}}{\text{پرته کاتيت}}$$

څيره ۲۰۰

$$\sec 30° = \frac{2}{1,73} = 1,156$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

کوسیکانسبلواك Kosekansfunktion بیلګه:



$$\operatorname{cosec}\alpha = \frac{c}{a} = \frac{\text{هیپوتینوزې}}{\text{مخامخ کاتیت}}$$

څیره ۲۰۱

$\operatorname{cosec} 30° = \frac{2}{1} = 2$

موږ به زیات وخت لمړنی درې یا په همدې توګه لمړنی څلور بلواکه د کارونی لپاره راونیسو یا وکاروو.

په خوښه دریګوډیو کی شمیرنه

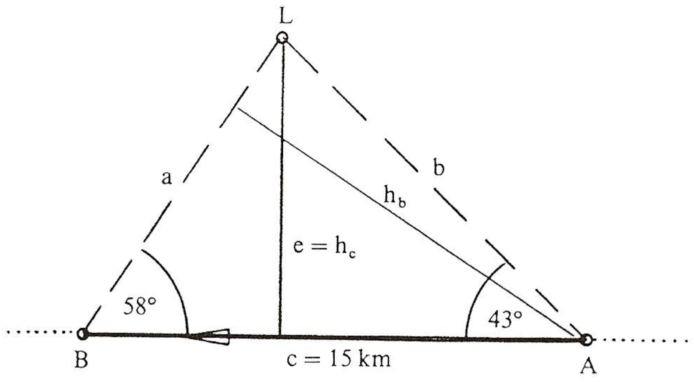
سره له دې چی کونجبلواکي یواځی په ولاړکونجیز دریګوډي کی باید تعریف کیږي، خو بیا هم برسیره پر دې استعمال یا کارونه مومي. د پیچومي یا جګوالی په جوړولو کی هر دریګوډی په ولاړو برخه دریګوډیو تجزیه یا ټوټه کیدی شي. په اخرني هنري، د مخکني مرستندوي، همدې منځ ته راوړو پایکرښي وینا وي د پیل دریګوډي باندې لاس ته راځي او په هغه کی د ورکړشوو کونجونو.

پیلبیلګه

یوه کیښتی د رڼاډزکړي(کله چی کښتی له ستونځو مخامخ شي او یا یوې بلی کښتی یا یو بل څه ته که یوه کښتی وغواړي خبر ورکړي، نو یوه توپانچه شته چی له هغی داسی ډز کیږي چی له لرې څرګندیږي او نورې خبر ورته لیږونکی په دې پوهیږي، چی څه پیښ شوي دي). دلته $\alpha = 43°$ د تګ په لور اندازه کیږي او له

(c) ketabton.com: The Digital Library

یوه تګ پایکربنې $c = 15\ km$ او کونج $ß = 58°$ وروسته.
په دوم ډز کې کیبنتی له ډز رڼااور څخه څومره لرې ده؟
د A څخه و B ته د کیبنتی نزدې واټن e د ډزرڼااور څخه څومره لرې دی؟
په A کې له اور څخه څومره لرې وه ؟



شیره ۲۰۲

اوبی یا حل:

$$\gamma = 180° - \alpha - ß = 79° ; \qquad \sin ß = h_b / c \text{ او } \sin \gamma = h_b / b$$

د h_b په لور اوبیول یا حلول او په همدې وخت کې لاس ته راځي:

$$h_b = c \cdot \sin \beta \quad \text{und} \quad h_b = b \cdot \sin \gamma$$

$$\Rightarrow c \cdot \sin \beta = b \cdot \sin \gamma \Leftrightarrow \frac{c}{b} = \frac{\sin \gamma}{\sin \beta}$$

$$\Rightarrow b = \frac{c \cdot \sin \beta}{\sin \gamma} = \frac{15 \cdot \sin 58°}{\sin 79°} = 12{,}959\ km$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لنډ واټن e لپاره باور لري:

$$\sin \alpha = \frac{e}{b} \Rightarrow e = b \cdot \sin \alpha = 12{,}959 \cdot \sin 43° = 8{,}838\ \text{km}$$

$$\sin \beta = \frac{e}{a} \Rightarrow a = \frac{e}{\sin \beta} = \frac{8{,}838}{\sin 58°} = 10{,}421\ \text{km}$$

لکه چې په یاد راوړل شو، د همغه دریګوډي اړخونوa او b په شمیرنه کی مرستندوي لویی له منځه ځي او باور لري:

د ساین جمله :

په خوښه دریګوډي کی د اړخونو ځانښیونه یاتناسب د اړخونو مخامخ کونجونو د ساین ځانښیونه یا تناسب دی.

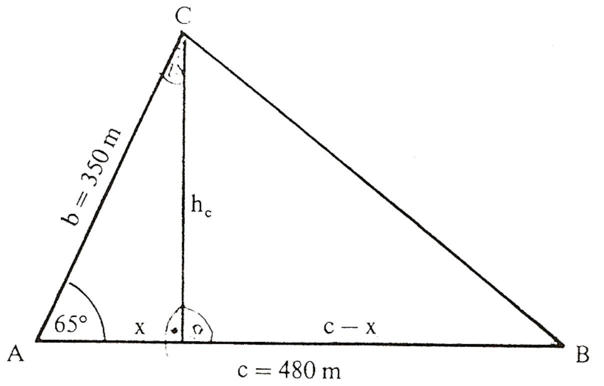
$\sin\alpha / \sin\beta = a / b$ $\sin\beta / \sin\gamma = b / c$

$\sin\gamma / \sin\alpha = c / a$

د ساین جمله په پڅ دریګوډي کې هم باورلري(تمرین دې وکتل شي). ددې سره په یوه دریګوډي کی نه موجودې ټوټې هلته شمیرل کیږي، چیرته چی دوه اړخونه او یو مخامخ کونج یا دوه کونجونه او یو مخامخ اړخ ورکړ شوی وي.
سړی بیا څه کوي که دریواړه اړخونه ورکړ شوي وي او یا دوه اړخونه او د هغوتر منځ راګیر کونج؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

پيلبيلګه : په يوه د ډبروسکرو کان کې دوه ستنې $b = 350\ m$
او $c = 480\ m$ دي او يو کونج $\alpha = 65°$ښندوي.
د B څخه و C ته به د نبنلولو ستن يا تير څومره لوي وي ؟



شيره ۲۰۳

اوبى يا حل :
جګوالى يا جګى h_c کرښه $AB = c$ په دوه ټوټو x او $c-x$ ويشي.
دلته دی $x = b.\cos\alpha$ ،
څکه چی $\cos\alpha = x / b$ دی. د پيتاګوراس د جلی له مخی
لرو : $h_c^2 = b^2 - x^2$
او

$$a^2 = h_c^2 + (c-x)^2 .$$
$$a^2 = h_c^2 + c^2 + x^2 - 2cx$$
$$a^2 = b^2 - x^2 + c^2 + x^2 - 2cb\cos\alpha$$
$$\Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د اړخونو اوږدوالی نومونی او کونج کیدی شي چي منظم بیرته راګرځیدونکی (ځیکلیکي یوناني کلیمه ده ګردی ډوله یا منظم بیرته راګرځیدونکی zyklisch) یو بل سره بدل شي» له دې امله باور لري

کوساین جمله

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos\alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac.\cos\beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\cos\gamma$$

په هر یوه دریګوټي کی د هر اړخ مربع مساوي ده، د نورو دواړو اړخونو د مربع زیاتون سره ترې کم دوه ځله د دې دوه اړخونو ځل او ددې دوه اړخونو رابند شوي کونج کوساین سره ځل.

د کوساین جمله د پیوتاګوراس د جملی عمومیت یا ټولیز ته هم وایي. (تمرین ۶ مخ دې وکتل شي)

د کونجبلواك له لارې یو بل متود، د ډیرګوټي شمیرلو لپاره ، تر څو دا په دریګوټیو ویشل کیدی شي چی پوره اړخونه او کونجونه یی څرګند وي، پیدا شو.

د دې ټولو سره د څلورګوټي یو وربرسیره بل د شمیر فرمول پیداشو:

$$A = 0,5.d_1.d_2.\sin\alpha$$

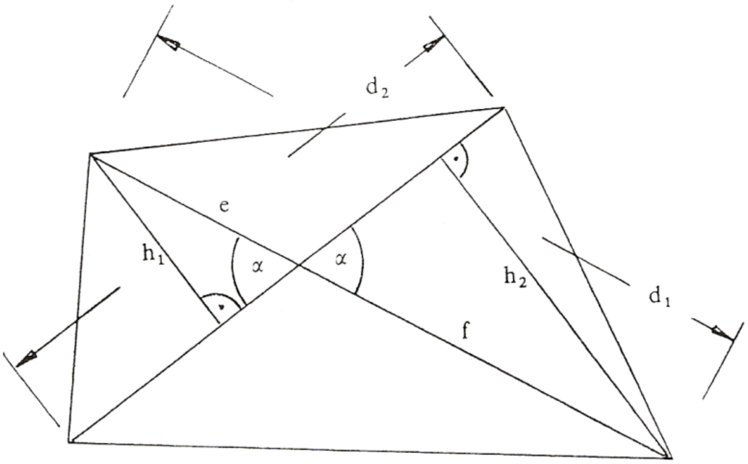
چیرته چي $\alpha = w(d_1; d_2)$ وي .

اوبی یا حل : $A=0,5(d_2h_1 + d_2h_2)$

که d_1 په e او f ټوټه یا تجزیه شي ، نو لرو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$h_1 = e \cdot \sin\alpha$$
$$h_2 = f \cdot \sin\alpha$$
$$\Rightarrow A = 0{,}5 \cdot d_2 (e + f) \sin\alpha$$
$$\Rightarrow A = 0{,}5 \cdot d_2\, d_1 \sin\alpha$$



شیره۲۰۴

د په خوښه کونجونو تریګونومتریکي بلواکي

په اخره برخه کی مو وویل، چی کونجبلواك، نه یواځی د دننه لورته تیرو دریګوډیو لپاره ، بلکه د هغو کونجونو لپاره چی له ۹۰ درجو لوي وي ، هم هدفمند (موخور) تشریحوړ دي. له دې وروسته کونجبلواکو خپله پوره موخه یا هدف تر لاس کړ.

دا پراختیا څنګه تصور یا د خیالوړ کیدی شي ؟

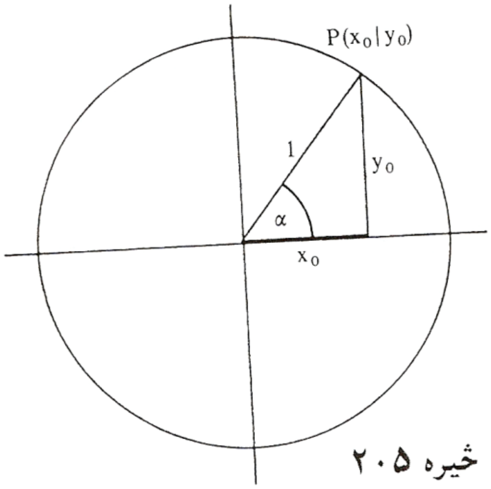
(c) ketabton.com: The Digital Library

په ښه توګه داسی کیدی شي چی په یوه ولاړ پروت سیستم یا کواوردیناتسیستم کی یوه ګردی ووهي چی وړانګه یي ۱ یعنی یو یوون یا واحد دی (دې ته یوونګردی ویل کیږي، ځکه چی وړانګه یی یو یوون دی) او د ګردی منځټکی او د پروت ولاړ سیستم کواوردېنات سرچینه یو په بل پریوځي . نو بیا هر دریګوډی، چی د هغی یو کونج د ګردی ځنتریکونج دی، یعنی کونج یی د ګردې په منځ یا ځنتر پروت دی، (ځیره ۲۰۴) کم له کمه یی یو اړخ ۱ یعنی یو یوون اوږدوالی لري. دا د دریګوډی په دننه کی شمیرنه او اړیکي اسانه کوي.

لمړی د یوه ولاړکونجیز دریګوډي ځخه پیل کوو، چی په لمړي لمړي ځلورمه یا کوادرانت (Quadrant) کی پروت د ی . نو هیپوتینوزې ۱ اوږدوالی لري، او په ګردی ،د کونجټکی $P(x|_0y_0)$ په پام کی نیولو سره، باور لري:

$$\sin\alpha = y_0 / 1 = y_0 , \quad \cos\alpha = x_0 / 1 = x_0$$

دا کرښی د پریوستون او یا د سیورېدرځونو په ځیر لاس ته راځي، که موږ وړانګه د یوه ټالوهونکی مړوند په ځیر ونیسو یعنی فرض کړو، کوم چی د محورغبرګي رڼا لاندې راشی.



ځیره ۲۰۵

په دې ولاړ کونجیز دریګوډي کی کیدی شي چی د پیتاګوراس جمله وکارول شي:

تریګونومتریکي پیتاګوراس:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

چیرته چی $\sin^2\alpha = \sin\alpha . \sin\alpha$ په مانا دی.

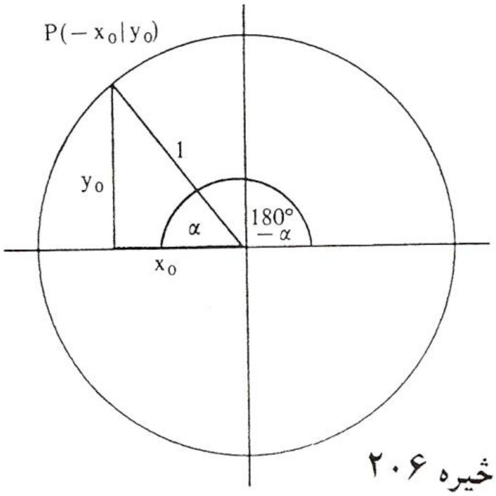
(c) ketabton.com: The Digital Library

کیدی شي ، چی پوښتنه وشي چی همدا « سیوری » بیا کله لاس ته راتلی شي.
دا حالت بیاټیك هلته لاس ته راځي، چی وړانګه د منفي x –محور سره یو کونج ∝ جوړ کړي، یعني ځنتریکونج یې ∝ - 180° وي.
د « سیوروڅیرو» څخه لاس ته راځي:

$$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$$

$$\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$$

ځکه چی دا سیوری همغومره اوږد دی لکه د مخه، مګر اوس له صفر پیل مخامخ (منفی) لور ښایي.



خیره ۲۰۶

په ورته توګه لاس ته راځی :

$$\sin(180° + \alpha) = -\sin\alpha;$$

$$\cos(180° + \alpha) = -\cos\alpha$$

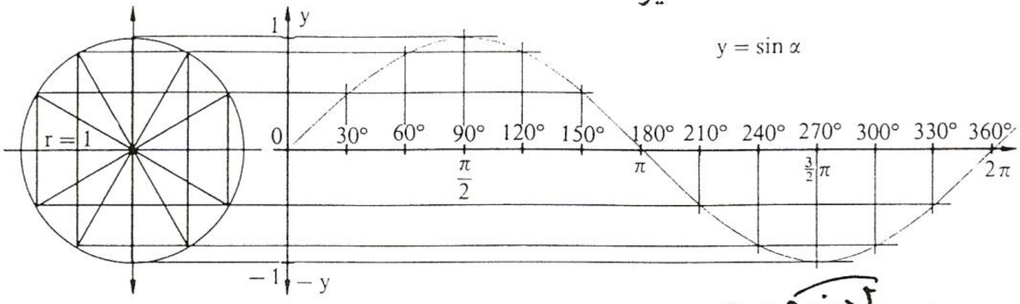
$$\sin(360° - \alpha) = \sin(-\alpha) = -\sin\alpha;$$

$$\cos(360° - \alpha) = \cos(-\alpha) = \cos\alpha$$

د کونج ∝+360° لپاره بیرته د سرچیني کونج اړیکی لاس ته راځي: همدا ډول د ∝+720 لپاره اوهمداسی نور. په دې توګه د په خوښه کونجفنکشنونو یا کونجبلواکو لپاره د ساین او کوساین بلواك تعریف دي.
د $\tan\alpha = \sin\alpha / \cos\alpha$ له امله (مقایسه مخ ١٥١) دا د تنجنت بلواك لپاره هم صدق کوي. له دې امله لاندې د بلواکګرافونه لاس ته راځی

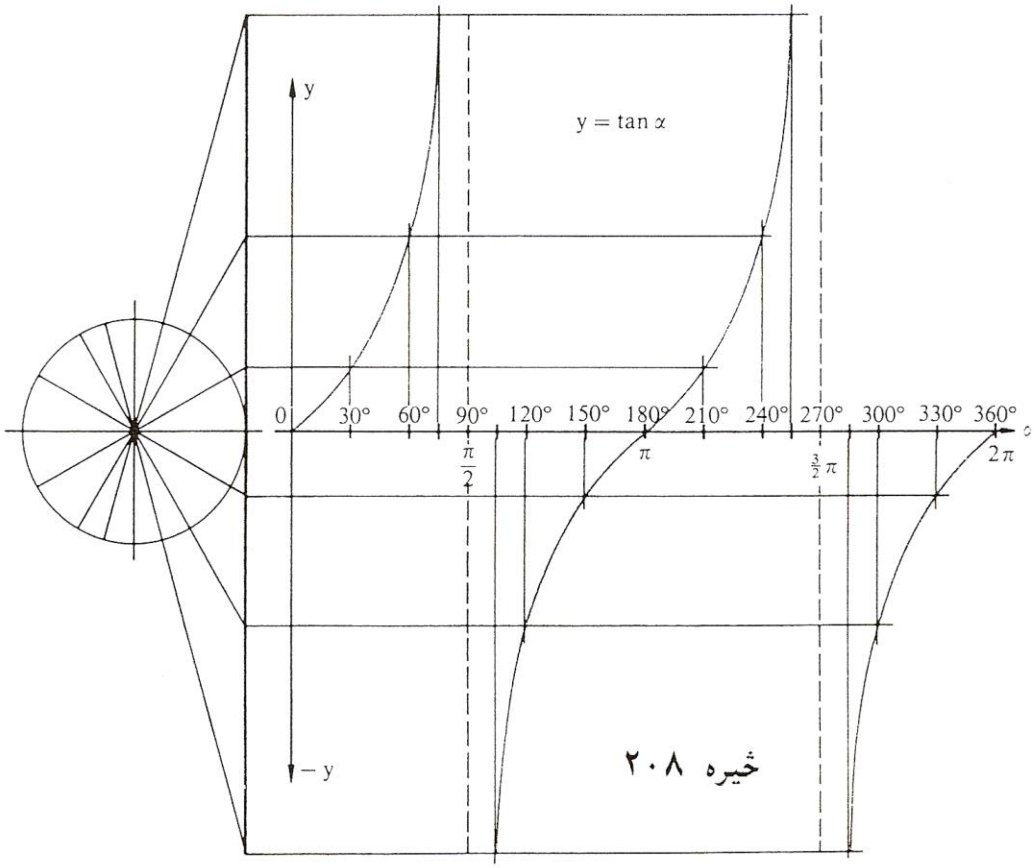
(c) ketabton.com: The Digital Library

ثیره ۲۰۷



Die **Sinuskurve**: $y = \sin x$; $x \in \mathbb{R}$; $y \in [-1; 1]$

د ساین کږه

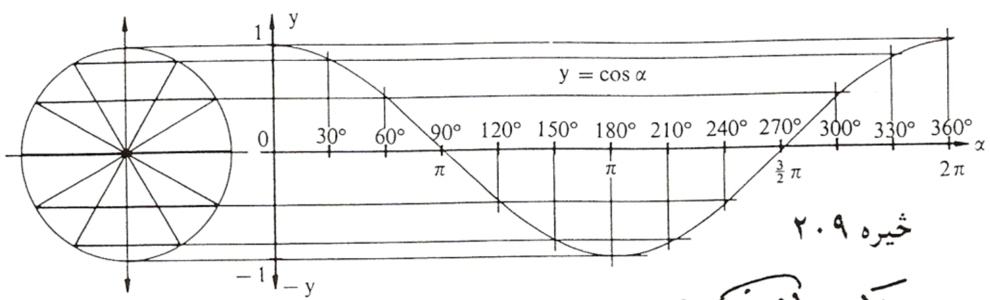


ثیره ۲۰۸

Die **Tangenskurve**: $y = \tan x$; $x \in \mathbb{R} \setminus \{x \mid x = (2z+1)\frac{\pi}{2} \wedge z \in \mathbb{Z}\}$; $y \in \mathbb{R}$

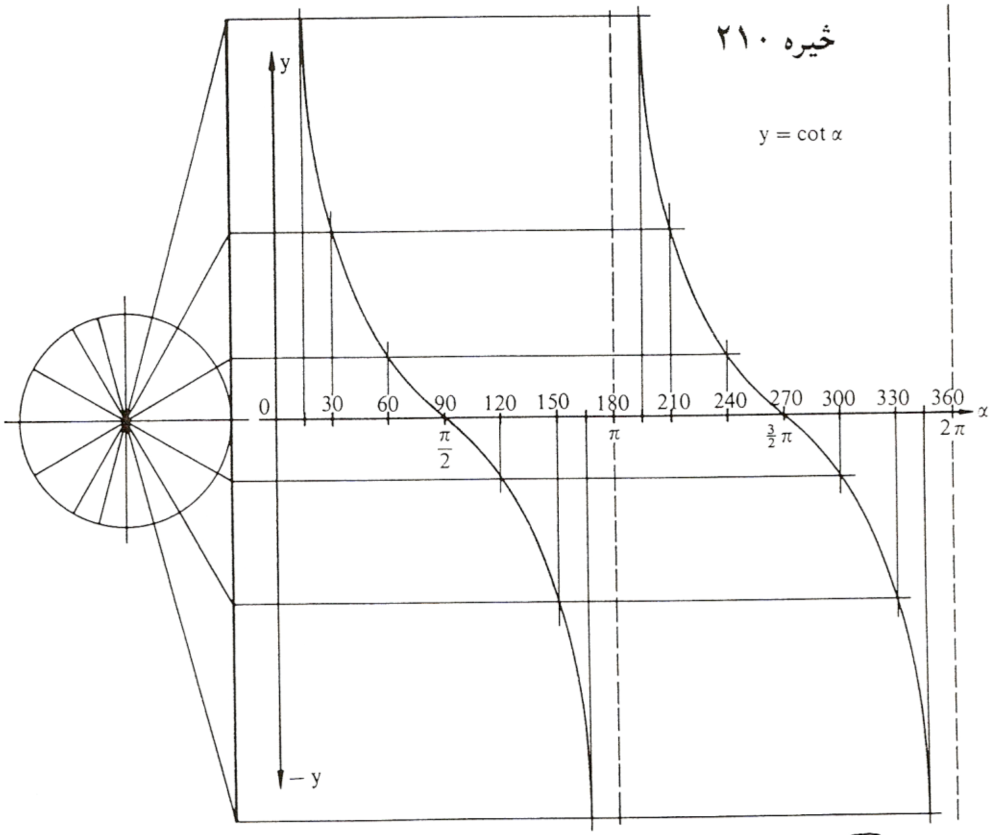
د تنجنت کږه

(c) ketabton.com: The Digital Library



Die **Kosinuskurve**: $y = \cos x;\ x \in \mathbb{R};\ y \in [-1; 1]$

دکوساین کچ.



Die **Kotangenskurve**: $y = \cot x;\ x \in \mathbb{R} \setminus \{x \mid x = z \cdot \pi \wedge z \in \mathbb{Z}\};\ y \in \mathbb{R}$

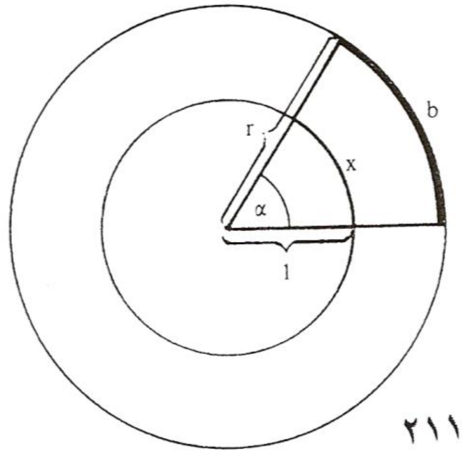
دکوتنجنت کچ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لینده اندازه (لینده کچ) Das Bogenmaß

په زړه درجه د کونجکچ یا – اندازې سره بلد یو (دمخه ولیدل، چی ۳۶۰ درجی پوره ګردی ښايي. هغه، چی لږ ورسره بلد یو یا زیات ورسره بلد نه یو، هغه نوې درجه ده ، چی ګردی په ۴۰۰ مساوي برخو ویشل کیږي. دا په دواړو کچیوونونو یا کچواحدونو کی ګډ دي، چی په ګڼونو اندازه کیږي، بی له کچ یوون ارزښتډیری ریبلګڼونه دي، په داسی حال کي چی وتل ګڼونه (= د تعریف ډیري ګڼونه) یو یوون یا واحد (درجه یا ګون) لري. دا په کارونه یا عمل کی موږ زیات وښت د خنډ سره مخامخ کوي. له دې امله د لیندې کچ سره د کونجکچ لپاره یو ور زیات امکان پیدا شو.

کونج لويي په واقعیت کی یوون «راد (rad) » لري، مګر دا په کارونه یا عمل کی کیدی ونه لیکل شي یا صرف نظر پرې وشي، که بدلون ته مو نه راهڅوي. دا کونجکچونه چی د کونج لپاره په تریګونومتریکی بلواکو کی اینښودل کیږی (د بیلګي په توګه sin)



خیره ۲۱۱

ارګومنت (Argument تعریفډیری) بلل کیږي. په تعریفډیري کی کیدی شي چی نوې درجه ، زړه درجه او یا لینده کچ وکارول شي. کاروونکی دې پام ولري چی په جبشمیري کی همغه مودوس په کار اچول شوي دی(راتلونکی دې وکتل شي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

په برخه ګردیبرخوکی وښوول شو (ګردیبرخی د مخه څیړل شوي دي) چی هر کونج پورې یوه ګردبرخه یا ګردی لینده اړه لري، نو ټولی ګردی پورې ۳۶۰ درجی کونج یا $2\pi r$ اړه لري، یوه کونج α پورې بیا یوه لینده b اړه لري، کومه چی په چاپېری ځانګړی همداسی نیسي لکه په پیل کی α و ۳۶۰ درجو ته . دلته ګردیګڼ دی : $\pi = 3,14....$ (دا مو له دې پخوا لاس ته راوړی دی)

پیلبیلګه:

کونج $\alpha = 60°$ له ګردی د ۱۰ سانتیمتره وړانګي سره یوه په لاندې ډول ګردی لینده $b = 20\pi . 60° : 360° = 10,47$ cm غوځوي یا بیلوي. د ګردی چاپیری دی : $U = 20\pi = 62,83$ cm

همغه کونج α د ۵ سانتي متره وړانګی سره ګردیلینده

$$b = 10\pi .60° : 360° = 5,236 \text{ cm}$$

غوڅوي. دا ګردی لاندې چاپیری لري: $U = 10 = 31,416$ cm .

له ګردی د وړانګي $r = 1$ cm سره ددې په څټ یا برعکس کونج ګردیلینده

$$b = 2\pi . 60°: 360° = 1,047 \text{ cm}$$

غوڅوي» د دې ګردي چاپیری فقط $U = 2\pi = 6,283$ دی .

له بیلګي څرګندیږي، چی لینده اندازه په همغه اندازه زیاتیږي لکه وړانګه. له دې امله کیدی شي خپله شمیرنه په یوونګردي د وړانګي ۱ سره رابنده یا محدوده کړي او روښانه کړي:

تعریف: په یوونګردي د ګردیلیندی اوږدوالي کچګڼ، چی په څنتریکونج

(c) ketabton.com: The Digital Library

باندې څیره شوي، لینده کچ بلل کیږي. لاندې شمیراوړون باوري کوي:

$$x = (\alpha / 180^\circ).\pi \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = (x/\pi)\,180^\circ = \frac{x}{\pi}\cdot 180^\circ$$

دا چې د وړانګې څرخون په پوره کونج هم وراوړیدی شي، نو له دې امله د لینده کچ لپاره په خوښه ریيلګڼونه پرېښوول شوي.

بیلګی :

$$\alpha = 1^\circ \Leftrightarrow x = \frac{1^\circ}{180^\circ}\pi = 0{,}0175 \text{ (rad)}$$

$$\alpha = 30^\circ \Leftrightarrow x = \frac{30^\circ}{180^\circ}\pi = \frac{\pi}{6} = 0{,}5236$$

$$\alpha = 45^\circ \Leftrightarrow x = \frac{45^\circ}{180^\circ}\pi = \frac{\pi}{4} = 0{,}7854$$

$$\alpha = 60^\circ \Leftrightarrow x = \frac{60^\circ}{180^\circ}\pi = \frac{\pi}{3} = 1{,}0472$$

$$\alpha = 90^\circ \Leftrightarrow x = \frac{90^\circ}{180^\circ}\pi = \frac{\pi}{2} = 1{,}5708$$

$$\alpha = 180^\circ \Leftrightarrow x = \frac{180^\circ}{180^\circ}\pi = \pi = 3{,}1416$$

$$\alpha = 360^\circ \Leftrightarrow x = \frac{360^\circ}{180^\circ}\pi = 2\pi = 6{,}2832$$

$$\alpha = 720^\circ \Leftrightarrow x = \frac{720^\circ}{360^\circ}\pi = 4\pi = 12{,}5664 \quad \text{usw.;}$$

$$\alpha = -75^\circ \Leftrightarrow x = \frac{-75^\circ}{180^\circ}\pi = \frac{-5}{12}\pi = -1{,}309$$

ارکوسبلواکي Arcusfunkrionen

زیات وخت دا پوښتنه هم رامنځ ته کیږي ، چې لکه په ورکړشوو کرښځانیونو راپیداشوې کونجونه څنګه معلومیږي یا څنګه راڅرګندیږی یا بهتره څنګه ځانونه نیسی. ددې لپاره چې دا پوښتنه ځواب شي، باید امکانات ولټول شي، چې د کونجبلواک ارزښتونو څخه څنګه بیرته کونج یا په همدې توګه د هغه تعریفهیري ته، په لینده کچ راتلی شو. دا کونجبلواک پریودیکی یا تل بیرته راګرځیدونکي بلواک دی، دا په دې مانا، چې د بلواک ارزښت په منظمه توګه د مختلفو کونجونولپاره یا .

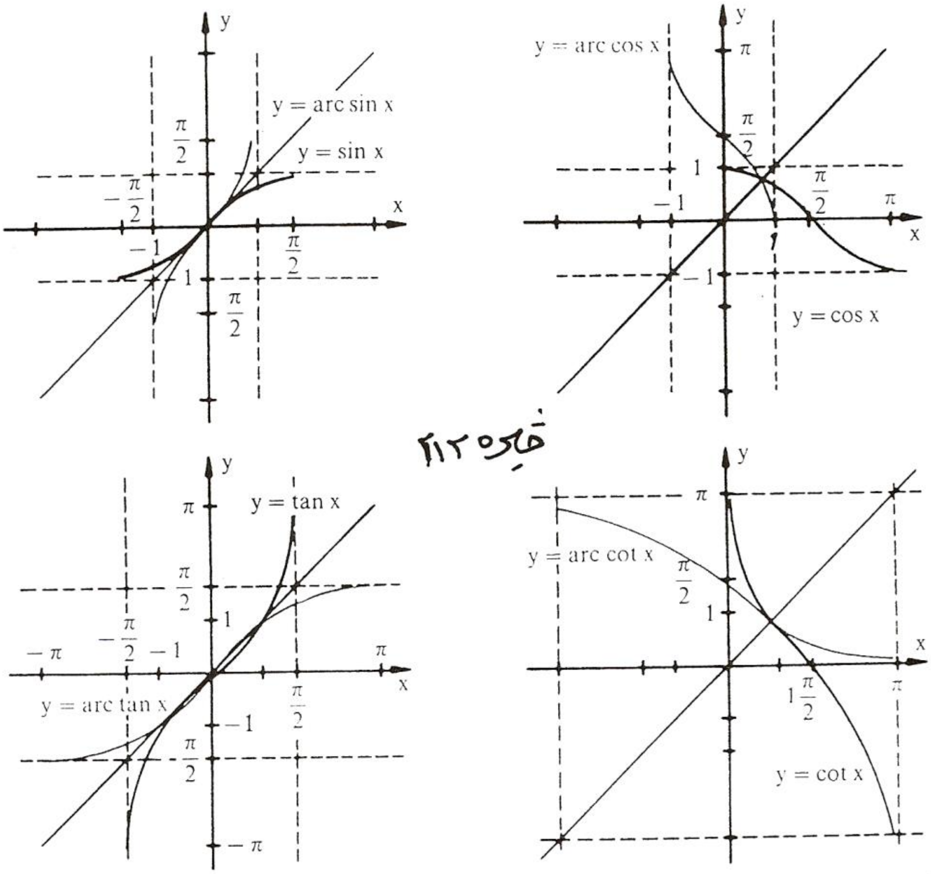
(c) ketabton.com: The Digital Library

مختلفو واټنونو وروسته، بلواك ارزښتونه تکراریږي. د دې لپاره چې په څرګندنه ممکن شي، نو باید د خپل تعریف ډیری په یوه برخه ډیري رابند یا محدود شي.

تعریف : د یوه (رابند یا محدود) تریګونومتریکي بلواك په څټ بلواکونه ارکوس بلواك Arcusfunktion بلل کیږي یا څیکلومتریکي بلواك (لاتین ارکوس: Arcus = Bogen = لینده)

دلته (arc sin(x لوستل کیږي »د x ارکوس ساین. د کونجبلواك تعریفډیری دلته اړونده ارکوسبلواك ارزښتډیری دی او په څټ ارګومنت یا تعریفډیری دلته تل یو ریيلګڼ دی.

Trigonometrische Funktion تریګونومتریکي بلواك	Arcusfunktion ارکوسبلواك
f: $x \mapsto \sin(x)$ $\mathbb{D} = \left\{x \middle\| -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}\right\}$ $\mathbb{W} = \{y \| -1 \le y \le 1\}$	f^{-1}: $x \mapsto \arcsin(x)$ $\mathbb{D} = \{x \| -1 \le x \le 1\}$ $\mathbb{W} = \left\{y \middle\| -\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}\right\}$
f: $x \mapsto \cos(x)$ $\mathbb{D} = \{x \| 0 \le x \le \pi\}$ $\mathbb{W} = \{y \| -1 \le y \le 1\}$	f^{-1}: $x \mapsto \arccos(x)$ $\mathbb{D} = \{x \| -1 \le x \le 1\}$ $\mathbb{W} = \{y \| 0 \le y \le \pi\}$
f: $x \mapsto \tan(x)$ $\mathbb{D} = \left\{x \middle\| -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right\}$ $\mathbb{W} = \{y \| -\infty < y < \infty\}$	f^{-1}: $x \mapsto \arctan(x)$ $\mathbb{D} = \{x \| -\infty < x < \infty\}$ $\mathbb{W} = \left\{y \middle\| -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\right\}$
f: $x \to \cot(x)$ $\mathbb{D} = \{x \| 0 < x < \pi\}$ $\mathbb{W} = \{y \| -\infty < x < \infty\}$	f^{-1}: $x \to \operatorname{arccot}(x)$ $\mathbb{D} = \{x \| -\infty < x < \infty\}$ $\mathbb{W} = \{y \| 0 < y < \pi\}$



شېره ۲۱۲

Beispiele: بېلګې:

1. arcsin (0,8) $= 0{,}9273\,(\text{rad}) = 53{,}13°$
2. arccos (1) $= 0\,(\text{rad}) = 0°$
3. arctan (−100) $= -1{,}5608\,(\text{rad}) = -89{,}43°$
4. arccot (−70) $= -0{,}0143\,(\text{rad}) = -0{,}82°$

۵ – دا چی کونجبلواك و اركوسبلاك يو د بل په ځتې بلواك دې نو باور لري.

$\sin(\arcsin(y)) = y; \quad \arcsin(\sin(x)) = x$

$\cos(\arccos(y)) = y; \quad \arccos(\cos(x)) = x$

$\tan(\arctan(y)) = y; \quad \arctan(\tan(x)) = x$

$\cot(\text{arccot}(y)) = y; \quad \text{arccot}(\cot(x)) = x$

يعنې په لاندې توګه هم

$\sin(\arcsin(0{,}4)) = \sin(23{,}58°) = 0{,}4$

$\arccos(\cos(\pi/3)) = \arccos(0{,}5) = 1{,}0472$

$\tan(\arctan(-40)) = \tan(-88{,}5679°) = -39{,}9999$

$\text{arccot}(\cot(60°)) = \text{arccot}(0{,}5774) = 1{,}0472$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د جبشميري کارونى يا استعمال لپاره

داچى پخوا معمول جدولونه د بلواك تعريفډيري او ارزښتډيري شميرلو لپاره له کاره غورځول شوي دى او دنده يې ايلکترونيکي ماشينونو نيولى ده، غواړو چي د جبشميري استعمال په هکله هم څه ووايو
کورکمپيوتر زيات وخت داسى فنکشنونه يا بلواکي لري يا وظيفى په کلك اختيار کى لري، چى د درجي اوړون په لينده کچ او په څپ کوي، مګر شميردرځ په توګه بايد د شميرونکى په پروګرام کى ځاى په ځاي شوى وي.
پوره اسانتياوې او زياته کارونه د جبشميرې په غاړه پرته ده، دلته دې توکمى د < .... > سره په نخښه شي:
په قاعده کى دريى بلواك ورکړشوي دي : < cot > ; < cos > ; < sin > کوتنجنت بيا داسى شميرلکيدى شي، د < tan><1/x > . د < INV > – توکمي سره سړى ارکوسبلواك ته راځي: نو < INV><sin > ارکوس ساين دى. په عمومى توګه کونج – بي پروا که په لينده کچ او يا درجه کچ ورکړ شوي وي – بايد د فنکشن له مخه ورکړ.

بيلګي

١ لاندې جدول همغه د کاروني يا اتعمال لپاره د جبشميري چمتووالى بناى :

Winkelmaß کونج	TR-Modus په نخښونه	Beispiel بېلګه
Altgrad زړه درجه Neugrad نوې درجه Bogenmaß لينده کچ	DEG GRAD RAD	$\sin 45° = 0{,}7071$ $\sin 50^g = 0{,}7071$ $\sin \frac{\pi}{4} = 0{,}7071$

(c) ketabton.com: The Digital Library

2.

Zu ermitteln	Tastenfolge	Anzeige im Display	Modus
sin 45°	45⟨sin⟩	0.707106781	DEG
$\sin \frac{\pi}{6}$	⟨π⟩⟨:⟩6⟨sin⟩	0,5	RAD
cot 30°	30⟨tan⟩⟨1/x⟩	1.732050808	DEG
arccos 0,5	0.5⟨INV⟩⟨cos⟩	60(°)	DEG
arccos 0,5	0.5⟨INV⟩⟨cos⟩	$1.047 = \frac{\pi}{3}$	RAD
arccot 2	2⟨1/x⟩⟨INV⟩⟨tan⟩	26.56505118°	DEG
sin 220^g	220⟨sin⟩	−0,3090	GRAD

دلته مهم دی، چی جبشمیری په همغه ټاکلي یوون ترتیب شوی وي. یو «د مخه ټاکنه» (د «مودوس ټاکنه ») د زاړه – یا نوي درجی همدا ډول لینده کچ، د ډیرو جبشمیریو مودلونو سره د تکمی <DRG> ځخه لاس ته راځی یا د بیلګي په توګه . < MODE >

د ورکړشوي درجه ګڼ اوړون په لینده کچ د << DRG -> > سره سورت نیسي.

بیرته یا په ختې سړی داسی راځي– لکه چی لرل مو– د <INV> – تکمی سره.

بیلګی

60°	⟨DRG⟩	60(rad)
60	⟨DRG⟩	60(grad)
60°	⟨DRG →⟩	1.047197551(rad)
1.047197551	⟨DRG →⟩	66.66666667(grad)
66.66666667	⟨DRG →⟩	60°
60°	⟨INV⟩⟨DRG →⟩	66.66666667(grad)
66.66666667	⟨INV⟩⟨DRG →⟩	1.047197551(rad)
1.047197551	⟨INV⟩⟨DRG →⟩	60°

دلته ګراد نښونه (gard) نوی درجه ده یعنی ګون(gon).

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځنې جشميري په دې برسيره نور زيات امكانات هم لري ، نتيجې يې په ګراد دقيقې، ثانيي اويا لسيز سيستم ورکړ شوي دي. بدلون بيا د تکمۍ <DMS-Dd> سره صورت نيسي:

26.75° 30°15′	⟨inv⟩⟨DMS – Dd⟩ ⟨DMS – Dd⟩	26°45′ 30.25°

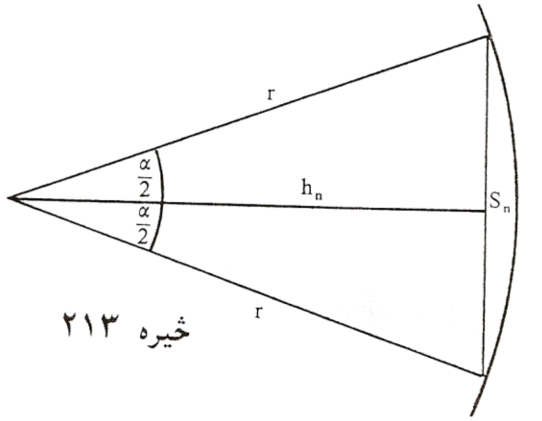
د " 30° 15" " ورکړه کيدی شي د جبشميري سره مختلف بدلون ولري دلته دې د جبشميرې د لاس کتاب څخه ګټه واخستل شي (يادونه: زه پوهيږم چې داسې شيان موږ متآسفانه په خپل هيواد کې نه لرو ، خو په هر صورت يې ليکل ضرور دي، دا پرمختګ موږ هم خپل شاته نه شي پريښوولی)

پيلبيلګه: دلته دې S_n د يوه منظم n– ګوټي د اړخ اوږدوالی وي، چې په يوه ګردۍ کې چې وړانګه يې r = 5 cm ده، راګير دی.

الف) وښايي چې

$$S_n = 2r . \sin (180° : n)$$

ب) د يوه داسې n– ګوټي چاپيرې U_n وشميرې ، چې n = 8;16;32;128 وي، او په نږدې توګه يا تقريبي د دې ګردي چاپيرې د دې وړانګې r سره وښايي .



خيره ۲۱۳

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب) په همدې ډول n– ګوډی له هوارو A_n څخه په نږدې توګه یا تقریبي د ګردی ــ هواره A وښایي .

اوبی (حل : هر n– ګوډی کیدی شي په n مساوي دریګوډیو ټوټه کړی شي.

د هغو د څینتریکونج ∝ لپاره باور لري $\propto = 360° / n$. د جګی یا جګوالی h_c

د کښلو سره په هر مساوي پښیز دریګوډي کي ولاړکونجیزې نیایی د څنتریکونج

یا منځکونج سره لاس ته راځي :

$$\frac{\propto}{2} = 360° / 2n = 180° / n$$

بر سیره پر دې صدق کوي

$$(S_n /2) / r = \sin\frac{\propto}{2} \Rightarrow S_n = 2r . \sin\frac{\propto}{2} = 2r . \sin(180° / n)$$

b) $U = n.S_n = 2r.n.\sin\ (180°/n) = 10n.\sin\ (180° / n)$

د ارزښتشمیرنو د غلطي مخنیوی لپاره همدفمند یا موخه ور دی، که

په دغه همغه لړپیرلپسی تکمی وکارول شي یا استعمال شي .

180° ⟨STO⟩ ⟨:⟩ 8⟨=⟩⟨SIN⟩⟨·⟩ 8⟨·⟩10⟨=⟩ 30.614675
⟨RCL⟩⟨:⟩ 16⟨=⟩⟨SIN⟩⟨·⟩ 16⟨·⟩10⟨=⟩ 31.214452
⟨RCL⟩⟨:⟩ 32⟨=⟩⟨SIN⟩⟨·⟩ 32⟨·⟩10⟨=⟩ 31.365485
⟨RCL⟩⟨:⟩ 64⟨=⟩⟨SIN⟩⟨·⟩ 64⟨·⟩10⟨=⟩ 31.403312
⟨RCL⟩⟨:⟩ 128⟨=⟩⟨SIN⟩⟨·⟩ 128⟨·⟩10⟨=⟩ 31.412773

پ) د ډیرګوډي هواره د دریګوډیو هوارو د یوځایوالی څخه لاس ته راځی

د هر دریګوډي هواره ده: $0,5 .S_n . h_n$. د

$$h_n = r.\cos(\ 180° / n\ )$$

$$S_n = 2r . \sin\ (\ 180°/ n)$$ او

له امله داسی دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$A = n \cdot 0{,}5 \cdot s_n \cdot h_n = n \cdot \frac{1}{2} \cdot 2r \cdot \sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right) \cdot r \cdot \cos\left(\frac{180^\circ}{n}\right).$$

$$A = r^2 \cdot n \cdot \sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right) \cos\left(\frac{180^\circ}{n}\right) = r^2 \cdot n \cdot 0{,}5 \sin\left(\frac{360^\circ}{n}\right)$$

له دې سره د نرې [illegible]

360° ⟨STO⟩ ⟨ : ⟩ 8 ⟨ = ⟩ ⟨SIN⟩ ⟨ · ⟩ 8 ⟨ · ⟩ 12.5 ⟨ = ⟩ 70.710678
⟨RCL⟩ ⟨ : ⟩ 16 ⟨ = ⟩ ⟨SIN⟩ ⟨ · ⟩ 16 ⟨ · ⟩ 12.5 ⟨ = ⟩ 76.536686
⟨RCL⟩ ⟨ : ⟩ 32 ⟨ = ⟩ ⟨SIN⟩ ⟨ · ⟩ 32 ⟨ · ⟩ 12.5 ⟨ = ⟩ 78.036129
⟨RCL⟩ ⟨ : ⟩ 64 ⟨ = ⟩ ⟨SIN⟩ ⟨ · ⟩ 64 ⟨ · ⟩ 12.5 ⟨ = ⟩ 78.413712
⟨RCL⟩ ⟨ : ⟩ 128 ⟨ = ⟩ ⟨SIN⟩ ⟨ · ⟩ 128 ⟨ · ⟩ 12.5 ⟨ = ⟩ 78.508279

د يوه جشميرې سره ، چي له يوې زخيرې زياتى ولري ، لکه چی پام به مو ورته کړی وي ، د کونجونو برسيره نورې ثابتي هم زخيره کيدی شي» په يوه منظم پروګرامونو ماشين سره کيدي شي چي د دا ډول شميرنو لپاره د ګوډونو ګڼ څخه ت شو يا د ګوډونو ګڼ باند ې صرفنظر وشي .

د تريګونومتريکي بلواکو خويونه

دا چی کونجکچ په درجه کچ او هم په لينده کچ ورکول کيدی شي، کيدی شي چی يوه کونج بلواك تعريفېدېری يا ∝ او يا x وي. ددې لپاره چی د يوه بلواك خوي باندې ټينګار وکړو، بايد په لاندې په لينده کچ تکيه وکړو.
د لاندې خويونو لمړۍ ډله يواځي له تعريفمساوات (د مخه راغلی) او د پيتاګوراس له جملی لاس ته راځي (د مخه لوستل شوې) لاندې صدق کوي :

(c) ketabton.com: The Digital Library

تعریف :

$$\tan(x) = \frac{\text{مخامخ کاتیت}}{\text{پرته کاتیت}} = \frac{\frac{\text{مخامخ کاتیت}}{\text{هیپوتینوزي}}}{\frac{\text{پرته کاتیت}}{\text{هیپوتینوزي}}} = \sin(x) / \cos(x)$$

ورته:

$$\cot(x) = \cos(x) / \sin(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

له دي لاس ته راځي

$$\cot(x) = 1 / \tan(x) \iff \tan(x) = 1 / \cot(x)$$

برسیره پر دي لرو:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

د دي سره لاس ته راځي:

$$1 / \cos^2 x = 1 + \tan^2 x \;; \quad 1 / \sin^2 x = 1 + \cot^2 x$$

په تریګونومتریکي بلواکو کی هیله ده ، چی د پوتنځ لیکدود په پام کی ونیسی.
په لاندي پاملرنی سره :

$$\sin^2 x = (\sin x)^2 \neq \sin(x^2) = \sin x^2$$

په لاندي کی gegeben ورکړی او gesucht غوښتونی یا پلټونی په مانا دي

gegeben ورکړی / gesucht غوښتونی	sin x	cos x	tan x	cot x
sin x	sin x	$\pm\sqrt{1-\cos^2 x}$	$\pm\frac{\tan x}{\sqrt{1+\tan^2 x}}$	$\pm\frac{1}{\sqrt{1+\cot^2 x}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

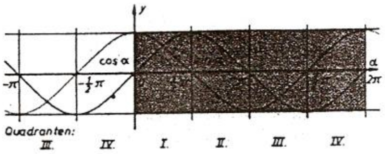
$\cos x$	$\pm\sqrt{1-\sin^2 x}$	$\cos x$	$\pm\dfrac{1}{\sqrt{1+\tan^2 x}}$	$\pm\dfrac{\cot x}{\sqrt{1+\cot^2 x}}$
$\tan x$	$\pm\dfrac{\sin x}{\sqrt{1-\sin^2 x}}$	$\pm\dfrac{\sqrt{1-\cos^2 x}}{\cos x}$	$\tan x$	$\dfrac{1}{\cot x}$
$\cot x$	$\pm\dfrac{\sqrt{1-\sin^2 x}}{\sin x}$	$\pm\dfrac{\cos x}{\sqrt{1-\cos^2 x}}$	$\dfrac{1}{\tan x}$	$\cot x$

لکه چې د مخه مو په ګوته کړل، کیدی شي چې تریګونومتریکي بلواك د مختلفو ګونجونو لپاره روښانه شي. که لمړي ورکړ شوي بلواك ارزښتونه مقایسه شي، نو په کره توګه یا په کلکه توګه لاس ته راوړی شو

تعریف : تریګونومتریکي بلواك ټول پریودیکي یعني بیرته راګرځیدونکی دی، دا په دې مانا، چې د بلواك ارزښتونه په منظمو واټنونو کی تکراریږي. په دې د ساین بلواك او د کوساین بلواك راګرځیدنه (یا ۳۶۰ درجې) لري،
کوتنجنتبلواك راګرځیدنه (یا ۱۸۰ درجې (180°)) لري.

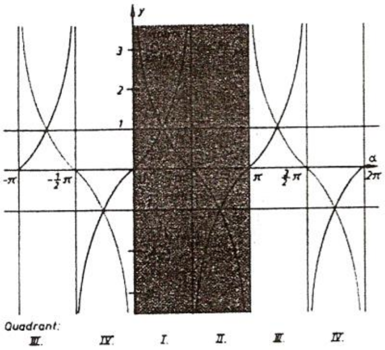
$$\left.\begin{aligned}\sin(x \pm 2k\pi) &= \sin x\\ \tan(x \pm k\pi) &= \tan x\end{aligned}\right\}\quad k \in N$$

$$\left.\begin{aligned}\cos(x \pm 2k\pi) &= \cos x\\ \cot(x \pm k\pi) &= \cot x\end{aligned}\right\}\quad k \in N$$



خیره ۲۱۴

د ساین – او کوساین فنکشن
پریودیک راګرځیدنه



(c) ketabton.com: The Digital Library

د تانجنت او کوتانجنت فنکشنونو پریود یا تل بیرته راګرځیدنه:

بیلګې:

بیلګې :

$\sin 50°$	$= \sin(50° + 360°)$	$= \sin(50° - 720°)$	$= 0{,}76604$	
$\cos -30°$	$= \cos(-30° - 360°)$	$= \cos(-30° + 1080°)$	$= 0{,}86603$	
$\tan 2{,}5$	$= \tan(2{,}5 - \pi)$	$= \tan(2{,}5 + 5\pi)$	$= -0{,}74702$	
$\cot 10$	$= \cot(10 + \pi)$	$= \cot(10 - \pi)$	$= 1{,}54235$	
$\sin 35°$	$= \sin(180° - 35°)$	$= -\sin(180° + 35°)$	$= -\sin(360° - 35°)$	$= 0{,}573576$
$\cos 35°$	$= -\cos 145°$	$= -\cos 215°$	$= \cos 325°$	$= 0{,}81952$
$\tan 0{,}6109$	$= -\tan 2{,}5307$	$= \tan 3{,}7525$	$= -\tan 5{,}6723$	$= 0{,}700208$
$\cot 0{,}6109$	$= -\cot 2{,}5307$	$= \cot 3{,}7525$	$= -\cot 5{,}6723$	$= 1{,}428042$

که د فنکشن ګراف ته په ځیر شو، نو برسیره پر دې روښانیږي:

x	$\pi - x$	$\pi + x$	$2\pi - x$	
$\sin x =$	$\sin(\pi - x) =$	$-\sin(\pi + x) =$	$-\sin(2\pi - x)$	(Abb. 179)
$\cos x =$	$-\cos(\pi - x) =$	$-\cos(\pi + x) =$	$\cos(2\pi - x)$	(Abb. 179)
$\tan x =$	$-\tan(\pi - x) =$	$\tan(\pi + x) =$	$-\tan(2\pi - x)$	(Abb. 180)
$\cot x =$	$-\cot(\pi - x) =$	$\cot(\pi + x) =$	$-\cot(2\pi - x)$	(Abb. 180)

بیلګی:

	α	$180° - \alpha$	$180° + \alpha$	$360° - \alpha$
	35°	145°	215°	325°
sin	0,573576	0,573576	– 0,573576	– 0,573576
cos	0,819152	– 0,819152	– 0,819152	0,819152
tan	0,700208	– 0,700208	0,700208	– 0,700208
cot	1,428148	– 1,428148	1,428148	– 1,428148

که څه هم نن د کونجبلواکو شمیرلو لپاره، یواځې د جبشمیرې یا کمپیوتر څخه کار اخستل کیږي ، هدفمند بولو، چې یو څو زیات د استعمال وړ ارزښتونه په لاندې ورکړو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
α	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	270°	360°
sin x bzw. sin α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
cos x bzw. cos α	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	-1	0	1
tan x bzw. tan α	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	–	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0	–	0
cot x bzw. cot α	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	–	0	–

دلته د همداډول یا همداسې په معنا دی

له دې جدول څخه کیدی شي په خیال کی یا ګوماني لاس ته راوړی شو

$$\sin x = \cos(\quad/2 - x) \qquad \cos x = \sin(\quad/2 - x)$$
$$\tan x = \cot(\quad/2 - x) \qquad \cot x = \tan(\quad/2 - x)$$

دا ګومان کیدی شي په ولاړکونجیز دریګوډي کي د تعریف په مرسته په ساده توګه وښوول شي. :

$\sin \quad = a / c$ او $\cos ß = a / c$

د $ß = 90° -$ له امله لاس ته راځي :

$\sin \quad = \cos(90° - \quad)$

په ورته توګه نور ې غوښتني هم لاس

ته راتلی شي.

دا له څیرو څخه هم لاس ته راوړل کیدی شي، څکه د ساین او کوساین بلواکو یا په همدې ډول د تانجنت او کوتنجنت بلواکو ګرافونه د $x = \quad /2$ کرښی ته یو بل سره محورسیومتري څغلي :

له څیرو او بیلګو څخه په دې برسیره لاس ته راځي:

تعریف: د کوساین بلواك جفت دی ، لرو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\cos(x) = \cos(-x)$$

ساین – ، تنجنت – او کوتنجنت بلواك ناجفت دي» د دوي لپاره باور لري:

$$\sin(x) = -\sin(-x),\ \tan(x) = -\tan(-x)\ ;\ \cot(x) = -\cot(-x)$$

یادونه : په دې نلواکو کي کیدی شي چی x له نوکانو دباندې هم وي:

بیلګی:

$$\sin 60° = -\sin(-60°) = 0{,}86603$$

$$\cos 0{,}75 = \cos(-0{,}75) = -0{,}70711$$

$$\tan 150° = -\tan(-150°) = -0{,}57735$$

$$\cot 1{,}3 = -\cot(-1{,}3) = o{,}27762$$

د زیاتون قضیي یا تیورمونه

دا چي کونجبلواك لاینې نه دي(د فنکشنګراف کرښه نه ده،بلکه کږه ده) ، نو ډېل تعریفډیرې پورې ساده ډبل بلواك ارزښت اړه نه لري.

لکه

$$\sin 30° = 0{,}5 \quad \sin 90° = 1 \quad \sin 180° = 0$$

د داسی په نامه زیاتونمسئلی په مرسته ممکن کیږي، چی د بلواك ارزښت د کونج په دوه برابرولو یا په همدې ډول د دوه کونجونو پو په بل زیاتولو د یوګونو کونجونو لپاره ارزښتونه رابي کړی شو.

بیلګی :

1 . $\sin(x + y) = \sin x . \cos y + \cos x . \sin y$

1' . $\sin(x - y) = \sin x . \cos y - \cos x . \sin y$

(c) ketabton.com: The Digital Library

2 . $\cos(x + y) \cos x . \cos y - \sin x . \sin y$

2 '. $\text{cis} (x- y) = \cos x . \cos y + \sin x . \sin y$

3 . $\sin 2x = 2.\sin x . \cos x$

4 . $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

5. $\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$

6. $\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$

7. $\sin \left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{0{,}5(1 - \cos x)}$

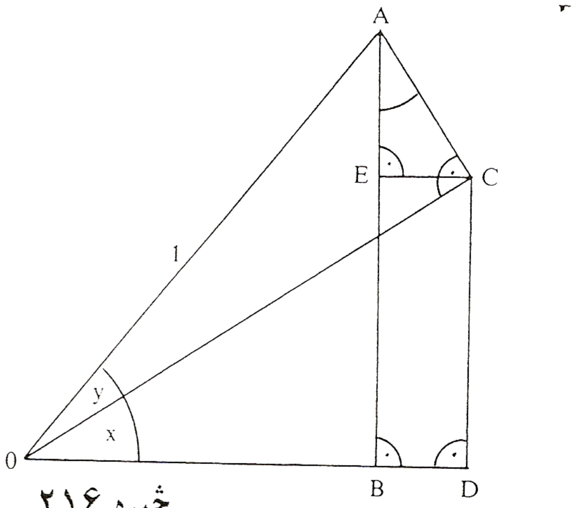
8. $\cos \left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{0{,}5(1 + \cos x)}$

9. $\tan (x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \cdot \tan y}$ mit $\tan x \cdot \tan y \neq 1$

9′. $\tan (x - y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \cdot \tan y}$ mit $\tan x \cdot \tan y \neq 1$

10. $\cot (x + y) = \frac{\cot x \cdot \cot y - 1}{\cot x + \cot y}$ mit $\cot x \neq -\cot y$

10′. $\cot (x - y) = \frac{\cot x \cdot \cot y + 1}{\cot x - \cot y}$ mit $\cot x \neq \cot y$



خیره ۲۱۶

(c) ketabton.com: The Digital Library

1. und **2.**:

$|OA| = 1$

$|AC| = \sin y; \quad |OC| = \cos y$

$|AB| = \sin(x+y); \quad |OB| = \cos(x+y)$

$$\frac{|EC|}{|AC|} = \sin x \Rightarrow |EC| = |AC| \cdot \sin x = \sin x \cdot \sin y$$

$$\frac{|OD|}{|OC|} = \cos x \Rightarrow |OD| = |OC| \cdot \cos x = \cos x \cdot \cos y$$

$$\frac{|EA|}{|AC|} = \cos x \Rightarrow |EA| = |AC| \cdot \cos x = \cos x \cdot \cos y$$

$$\frac{|DC|}{|OC|} = \sin x \Rightarrow |DC| = |OC| \cdot \sin x = \sin x \cdot \sin y$$

برسېره پر دې لرو:

$$|AB| = |AE| + |EB| = |AE| + |CD|$$
$$|OB| = |OD| - |BD| = |OD| - |EC|$$

د ځای په ځای کولو څخه سمونه په لاس راځي

$$\sin(x+y) = \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y$$
$$\cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$$

1'. **2'.**:

3. **4.**: $x = y$. ځای پر ځای کېږه

5.: Setze $z + t = x;\ z - t = y \Rightarrow z = \frac{x+y}{2};\ t = \frac{x-y}{2}$ کېږده

پس څرګند

$$\sin x = \sin(z+t) = \sin z \cdot \cos t + \cos z \cdot \sin t$$
$$= \sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} + \cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$

$$\sin y = \sin(z-t) = \sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} - \cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$ څرګند

$$\Rightarrow \sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

6. سمونه په ورته توګه ثبوتولای شي

7.: $x = y = z/2$ کېږده

$$\Rightarrow \cos(x+y) = \cos z = \cos 2\cdot\frac{z}{2} = \cos^2\frac{z}{2} - \sin^2\frac{z}{2}$$

$$\Rightarrow \sin^2\frac{z}{2} = \cos^2\frac{z}{2} - \cos z = 1 - \sin^2\frac{z}{2} - \cos z \qquad (*)$$

$$\Rightarrow 2\sin^2\frac{z}{2} = 1 - \cos z \Rightarrow \sin^2\frac{z}{2} = \frac{1}{2}(1 - \cos z)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ريښه نيوني له لارې ښوونه لرو

په (*) کې $\sin^2 z/2$ $1-\cos^2 z/2$ کيږده:

۹ – ۱: دا اړيکې له ۱ او اوم او تانجنت پيژند څخه لاس ته راځي

بلواك يا فنكشن $y = a . \sin(bx+c) +d$

لکه چی په پيل کی مو وويل په طبيعت او تخنيك كي ډيرې پيښې شته دی چي تل بيرته راکرځي يا لنډ: راګرځي، يعني پريوديکي دي. د دې د تشريح لپاره په خپل سوچه يا خالصه بڼه تل د ساين بلواك بسيا نه كوي.
دا زيات علتونه لري : لمړی د ساينبلواك د ۱- او ۱ ترمنځ ارزښت نيسي، له بلې لور داواقعي د كونج په واك کی نه دي بلکه د وخت په واك كي دي د يوې راګرځيدنی سره، چی دا په ساده توګه د 2 په ډول نه شي رانيولكيدی. له دې امله د ساين بلواك د دې كارونو د روښانوولو لپاره بايد موډيفيځير شي يا يی بڼه واوړي. دا بڼه اوړون او د هغی تاثير په لاندې ليدنه کی راټول شويدي، ګراف يی ورزياتی خيرونی لپاره دی. په ورته ډول د نورو کونجبلواکو لپاره باور لري په عمل كي مګر يواځي د ساينبلواك (په همدې توګه د هغي مخامخ د كوساين بلواك چي په $\pi/2$ سره راکښل شوی وي) د مانا ډك دي. (لوستل: له ښي لوري څخه)

بلواك	تاثير	دكاروني ساحه	بيلګی
$y = \sin (x)$		ټولی تلبيرته راګرځيدونی تعامولونه	خيره ۲۱۷
$y = \sin(x) +d$	د Y - لور باندې راکښنه	د يوه مساوي او بدل شپېلونډ يو په بل پرلوټل	خيره ۲۱۸

$y = \sin(x+c)$	د فاز تغیرات ځای بدلون	په بدل برېښنا جریان کې د برېښنا او شیانو تګ تحرک دوبناتونه	څېره ۲۱۹
$y = a . \sin(x)$	د امپلیټود د ځای بدلون فاکتور - 1 د 180° فاز ځای بدلون دی	دیوه پندول خوځېدنه	څېره ۲۲۰
$y = \sin(bx)$	د پریود تغیر یا بدلون $b>1$ سرعت $0<b<1$ په کرار کېدل $b<0$ په شا ګرځېدنه کم محور دی	دیو بستېمنی ګړدي څېرونه په یوه وخت دا دی چه زړه ضربه لېږد په دغه زړه کې الو په اوازونو کې	څېره ۲۲۱
$y = a . \sin(bx+c)+d$	عمومي حالت	کمپلکس پریودیک جریان یا عمل	څېره ۲۲۲

تمرینونه

۱ – د لاندې ورکړې سره څیره بله کړی

$4°6' = 4,1°$; $10°, 5' = 10°30$

a) $6,75° =$ b = $120,48° =$ c) $-75,65° =$

d) $52°16' =$ e) $97°13' =$ f) $44°44' 44'' =$

۲ – په درجه کچ ي ولیکی

a) $x = \pi/3$,   b) $x = -\pi/4$,   c) $x (2/3)\pi$

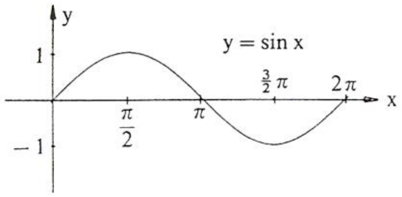
d) $x = 4$ e) $x = -3$ f) $x = 4,7$

۳ – په لینده کچ یی ولیکي

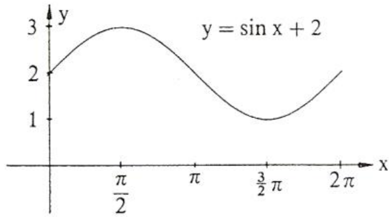
a) $15°$ b) $-60°$ c) $540°$ d) $20°15'$ e) $15,75°$

(c) ketabton.com: The Digital Library

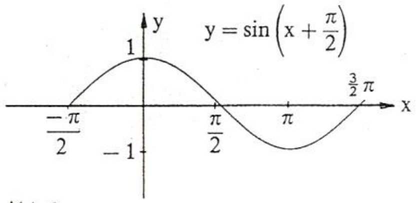
(c) ketabton.com: The Digital Library



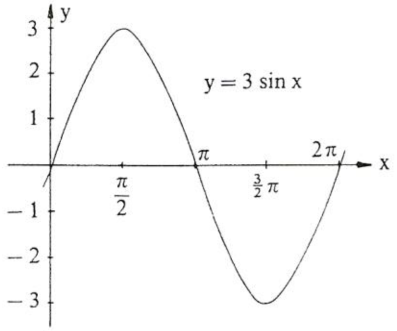
ثیره ۲۱۷



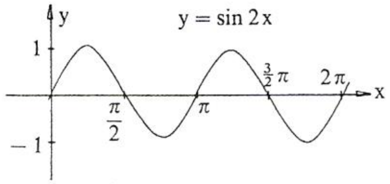
ثیره ۲۱۸



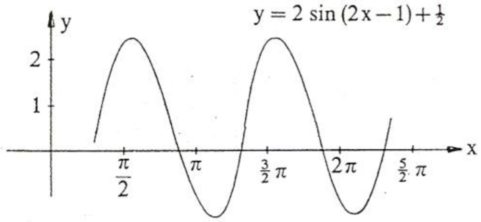
ثیره ۲۱۹



ثیره ۲۲۰



ثیره ۲۲۱



ثیره ۲۲۲

د دې بلواک ګراف د ساین کرې $y = \sin x$ څخه لکه چې ګورو لاس ته راځي:

۱ – د ارزښت دوه ځله کېدل

۲ – د نیمې راګرځید اوږدوالی باندې پرسیدنه

۳ – په یوه یوون د ښي لور ته راکښنه

۴ – په $1 / 2$ پورته لورته 100% راکښنه

(c) ketabton.com: The Digital Library

۴ – وښاکی

a) sin20° b) sin(-30°) c) sin 172° d) din1°4'

e) cos 35° f) cos 380° g) cos(-27°) h) cos47,9°

i) tan 11° k) tan (-15°) l) tan 33,33° m) tan 13°13'

n) cot 870° o) cot (-11°) p) cot 14°14'

q) cot (-2°2')

r) sin α =0,8 s) cos α = 0,9 t) tan α = 2,5

u) cot α =-1 v) sin φ = 0,3 w) cos φ = -0,13

x) tan φ = -4 y) cot φ = 0,3 z) arcsin(x) = π /2

۵ – په یوه ولاړکونجیز دریګوډي کی لرو γ = 90° او په دې برسیره :

a) a = 7 cm; b = 6cm

b) a = 16cm; = 66°45'

c) c = 5cm; a = 3cm

پاتی ټوټی وشمیری

۶ – په مساوي پښیز دریګوډي

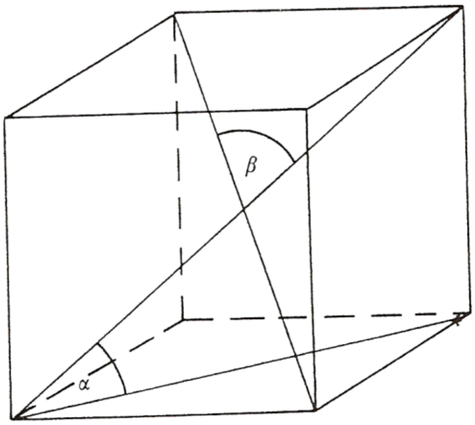
کي (a = پښه ده) دی

a) a= 10cm ; α =80°40'

b) a= 12 cm ; h = 8cm

c) ß = 40°; a = 7cm

پاتی ټوټي وشمیري



شیره ۲۲۳

۷ – د یوه پڅکونجیز (α > 90°)

دریګوډي لپاره ساین وشمیری

۸ الف) کوساین د یوه پڅ کونجیز

دریګوډي لپاره وشمیری (α > 90°)

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب) په يوه ولاړکونجيز دريګوډي کوم فرمول لاس ته راځي؟

۹ – په يوه مکعب کی د يوه هوا نيمي او بنستهواري ترمنځ کونج څومره لوي دی ؟

ځيره .د دواړو هوا يا فضا يا بدن نيميو ترمنځ کونج څومره لوي دی ؟

۱۰ – د دوه ګرديو وړانګی

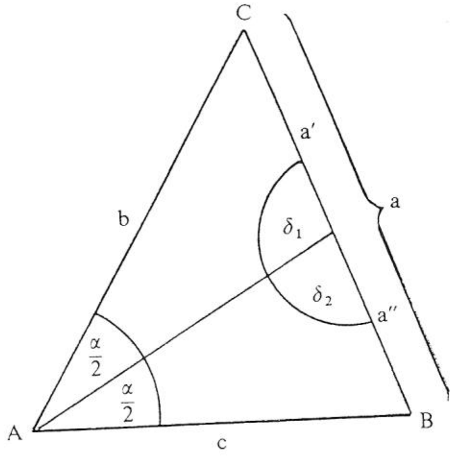
$r_1 = 5$ cm , $r_2 = 4$ cm

دي او همداسی د منځټکو واټن $|M_1M_2| = 8$cm ورکړ شوی دی.

دد دواړو ګرديو د تماس

مماسونو غوڅکونجی وټاکی

او د کړي غوڅونی اوږدوالی .



ځيره ۲۲۴

۱۱ – په يوه دريګوډي کی د يوه

کونجنيمی مخامخ اړخ په داسی

ځان نيونه يا تناسب غوڅوي لکه

په دي پرتي خواوي. دا غوښتنه د

ساين جملی په مرسته حل

(اوبی) کړی(ځيره۲۲۴).

۱۲ – که يوه بار ځاي ته،

چي ۵۰ ،۱ متره جګ دی،

يوه زينه ورجګه شي

ميلانکونج ➚ دي زيات ترزيات 33° وي، زينه دي څومره لويه وي؟

۱۳ – الف)د يوي پورته ختلی کوځي جګوالي توپيردي څومره وي، که دا

کوڅه ۱۶۰۰ متره اوږده او 12% جګه وي؟

ب) د ۱۵۴۰ پرتی لاري وهلو وروسته د جګوالي توپير څومره دی ؟

پ) د يوه زوړندي پټيلار، چی ۱۷۰۰ متره اوږده ده، په سلو کی څومره

لوي دی ، که دا د جګوالی توپير ۵۰۰ متره ولري؟

يو د اوبنی يا د اوبو بيلر (کله= ۱۰۰ کيلوګرامه) په يوه پورته خيزول کيږي، چې

(c) ketabton.com: The Digital Library

میلانکونج ∢ = 25° لري. د وزنزور په زوړندزور تختی سره غبرګ او نورمال یعنی ولاړ زور(د فشارزور) ولاړ تجزیه یا ټوټه کیږي، دواړه زوره څومره لوي دی ؟ (۱ کیلو ګرام = ۹ ، ۸۱ نیوټن 1 kg = 9,81N).

۱۵ – یو تلفونستن په څلور رسیو، چی هره یوه یی ۵۳ متره اوږده ده، درول کیږي. درسیو میلانکونج 60° دی په پښه باندې په کوم جګوالي باید رسی وړلی شي ؟

۱۶ – د یوې ۵۳ متره جګي ونی سیوری ۵ ، ۱۲ متره اوږد دی. په ځمکه لمروړانګي په کوم جګوالی یوبل سره مخمامخ کیږي.؟

۱۷ – د یوه ۵ متره جګ کتونټکي (لکه د یوه کور، په دوم منځل کی کړکی) ، څخه د یوه برج څوکه لیدل کیږي چی جګیدونکوج یی ∢ = 18,5° او پښیتټکی یی ß=8° لوید کونج ، برج څومره جګ دی ؟ د لیدټکي څخه یی پروت لریوالی څومره دی ؟

۱۸ – الف) د پیزا (Pisa) کوږ برج ۴۷ متره جګ دی، او څوکه یی د پښی ټکي څخه ۵۰ ،۴ متره ور اوړي. دا برج څومره مایل دی ؟

ب) د یوه جومات برج چی ۱۵۰ متره جګ وي، لیدونکی د کوم کونج لاندې دا برج کتلی شي، که دا برج په ځمکي ټکي (یعنی د سترګي جګوالی د برج بنسټټکي سره برابر وي)، څخه وکتل شي، چی د برج له بنسټ څخه ۵۰۰ متره واټن ولري؟

پ) د ۵، ۱ کیلو متره لریوالی څخه یو بل برج د کوم کونج لاندې لیدل کیږي

– که جګوالی یی ۱۶۰ متره وي؟

– که جګوالی یي ۱۳۷ متره وي ؟

ت) د پراته کوم اوږدوالی لاندې د بنسټ څخه د ۱۲ درجی کونج لاندې

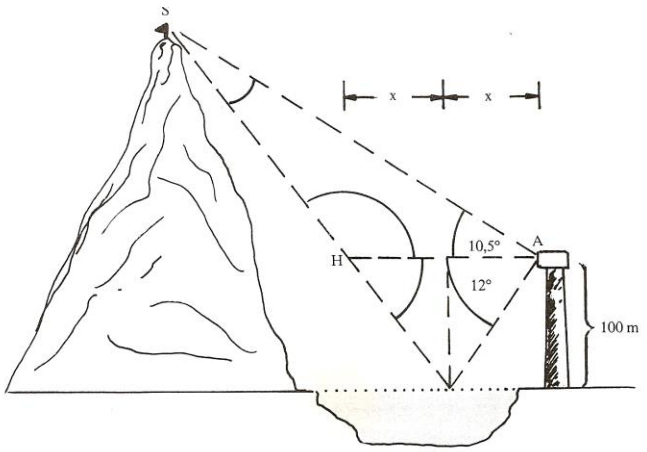
– د بل برج څوکه ښکاریږي چی جګوالی یي ۱۴۳ متره وي ؟

–د پاریس د ایفل برج ښکاریږي چی جګوالی یي ۳۰۰ متره دی ؟

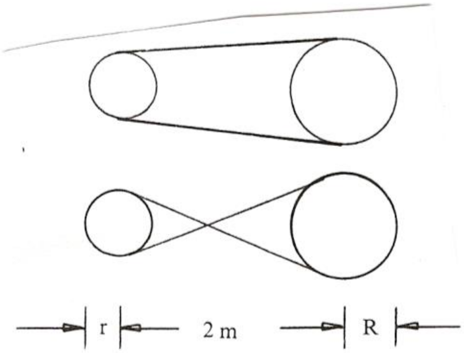
۱۹ – د ښیپپس اهرام(CHeopspyramide) ۱۳۷ متره جګوالی لري او د بنسټ

(c) ketabton.com: The Digital Library

د یوه اړخ اوږدوالی یې ۲۳۰ متره دی چې بنسټ یې مربع شکل لري
الف) د اړخهوارې میلانکونج څومره دی ؟
ب) د څنګهوارې دریواړه دننۍ کونجونه څومره لوي دي؟
۲۰ – یو ژوری یا قبر –۸ ، ۱ متره ژور دی، بنسټسور یې ۵ ، ۲ متره دی، د پورته لور ته وازکونج ی دواړو لورو ته ۶۰ درجې دی
الف) دا کبر پخپل وازوالی یا سر کې څومره پراخ دی؟
ب) که ۱۰ متره اوږد وي، نو بیا دا څومره اوبه ځایکوي ، که جګوالی یې ۵۰ ، ۱ متره وي؟
۲۱ – یو ډنډ په سر کې ۶ متره سرور دی او ۵ ، ۴ متره جګوالی لري د بحیرې لور ته 14° میلان لري، د دننه لور ته 28° میلان لري. د ډنډ بنسټ څومره سور لري؟ د هغې د نیمی هواره څومره ده؟
۲۲ – د ریفلډنډ Riffelsee څخه یو ښه لید د ماترهورن (ماترنښکر یا د ماترن د غره څوکه Matterhorn) دواړه په زیرمات ، سویس Zermatt / Schweiz کې دی) اچول کیږي که دا د یوه لیدټکي څخه چې ۱۰۰ متره جګ دی د ډنډ په لور ښکته وکتل شي، نو د غره د څوکې هندارونه د 12° پریوتکونج لاندې لیدل کیږي. د غره څوکه د یوپورته کونج 11° لاندې لیدل کیږي. د ریفلډنډ باندې د ماترنښکر څوکه څومره جګه پروته ده؟
څیره



(c) ketabton.com: The Digital Library



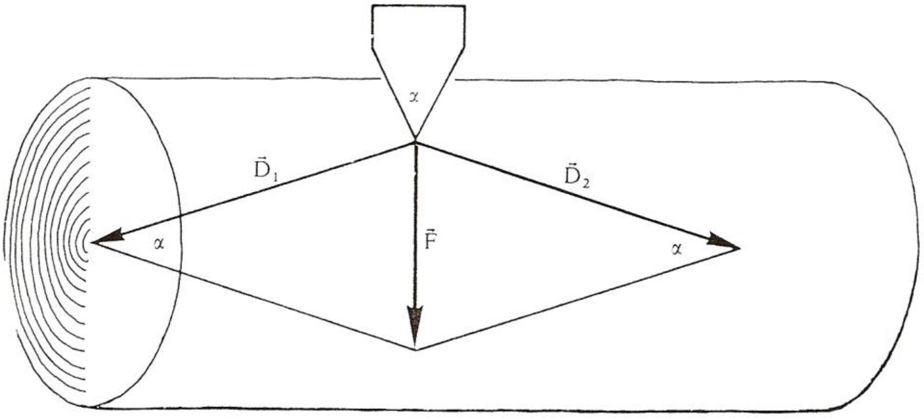
خیره ۲۲۶

۲۳ – الف) یوه د کشولو کړی، چي په دوه دکښولو چیترو باندې راتاو ده، څومره اوږده ده، که لاندې اندازې ولري $r = 22\ cm$, $R = 35\ cm$, $|M_1M_2| = 2m$?

ب) دا کړی به څومره اوږدې وي که د اتیران په څیر له چیتروګانو یا تیکلیو ‌واکی ځیدلی وي ؟

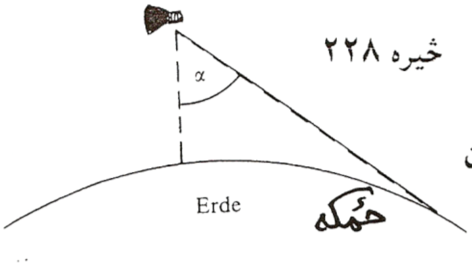
۲۴ الف) د ونی په ستنه یو کایل)موږی) په ښتك د D زور سره وهل کیږي. د فشار هغه زورونه D څومره لوی دي، کوم چی د ستنی درځونه ، که د کایل یا تبرګي کونج $\alpha = 6°$ وي. (حیره ۱۹۴)؟

ب) په کومکایلکونج یا تبرګیکونج لرو: $|D|=|F|$ ؟



خیره ۲۲۷

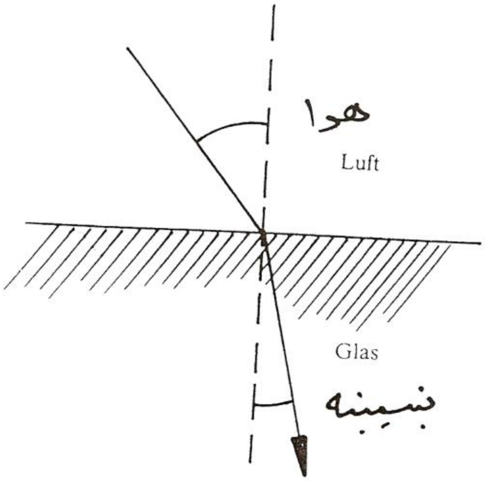
(c) ketabton.com: The Digital Library



خیره ۲۲۸

۲۵ – د یوه الوتماشین څخه ځمکه د یوه ∝ کونج لاندې لیدل کیږي (خیره) دا الوتماشین څومره جګ الوزي؟ (د ځمکی وړانګه : ۶۳۷۰ کیلومتره)

۲۶ – یو ګادی د $v_{\propto} = 120km/h$ سرعت سره روان دی، نو د باران څاڅکی په پټلی د تلنلور باندې په $= 115°$ کونج



خیره ۲۲۹

د چیترو (مطلب د ګاډي د اوسپنی تیر یا ګاډیل دی) مخامخ ځغلي. له دې ورکړو څخه د باران د څاڅکو د لویدلو سرعت v_g وټاکی؟

۲۷ – که د لمرووړانګه په دوه مختلفو طبقو ولویږي، نو خپلی لور ته تغیر یا بدلون ورکوي. د سنیلیوس Snellius د ماتقاعدې له مخی کیدی شي چی د ماتیدو قانون وشمیرل شي. دا قانون وایي، چی پروتوړانګه ، ماتوړانګه او ولاړکرښه یا عمود په بیلیدونکی هوارې په یوه هواره پراته دي او برسیره پر دې لاندې اړیکي باور لري یا صدق کوي:

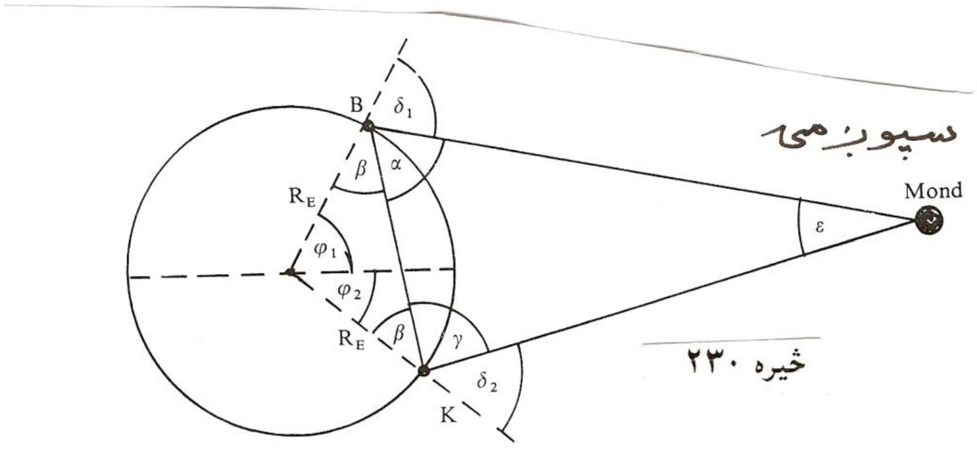
$$\sin \propto \; / \; \sin ß = n$$

که د رڼاوړانګه په یوه ښیښه (اوبو) پریوزي، نو $n = 1,5 \; (1,33)$ دی وښایي، چی ماتکونجونه څومره لوي دي، کوم چی په لاندې پروتکونجونو اړه لري:

؟ 10,5°, 15,8°, 27,3° , 41,2°,67,6°,, 72,4°, 81,9°

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲۸ – په ۱۸ ا–مه میلادي پیړۍ کې د سپوږمۍ لریوالی تریګومتریکي وټاکل شو. په برلین کې (جغرافیوي اوږدوالی $\varphi_1 = 52,52°$) او لکه د ښو هیلو په کونج کې ($\varphi_2 = -33,93°$)، کوم چې په همغه اوږدګراد پراته دي، د سپوږمۍ سره په همغه وخت کې تړل کیږي. له دې لاس ته راغلل:
. $\delta_2 = 55,72°$ او $\delta_1 = 32,08°$
وشمیرئ $|KM|$, ß , $|BK|$ او له دې څخه d_{EM} .



شیره ۲۳۰

۲۹ – لړځیدنیSchwingungen تل د وخت په اړه شمیرل کیږي یعني د وخت t تړواک لاندې دي. دا د بلواک $y = a . (\sin (2\pi /T)) .t + k)$ له لارې ورکړ شوي. دلته $(2\pi / T)\, t = x$ هغه کونج دی ، کوم چې په T وخت کې وهلکیږي. $1 / T = f$ د یوه څرخون پریود یا راګرځیدنی وخت په ګوته کوي او د لړځیدنی دوام بلل کیږي» f فرکونځ frequenz بلل کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ټولو راګرځیدونکو هوارو زیاتون، دباندې هوارې، او ډکي یا حجومونه، د هوارو متن ټولګی سره ده.
ډکي یا حجمونه په مکعبمتر m^3 په همدې توګه د مکعب متر برخه یا څو واره باندې ورکول کیږي، چې یو په بل اړول یی، لکه چی لاندې ګورو، ساده دي

$$1\ m^3 = 1m.1m.1m = 100cm^3.100cm.100cm = 1\ 000\ 000\ cm^3$$

یعنی :

$$1km^3 = 10^9\ m^3$$

$$1m^3 = 10^6\ cm^3$$

$$1cm^3 = 10^3\ mm^3$$

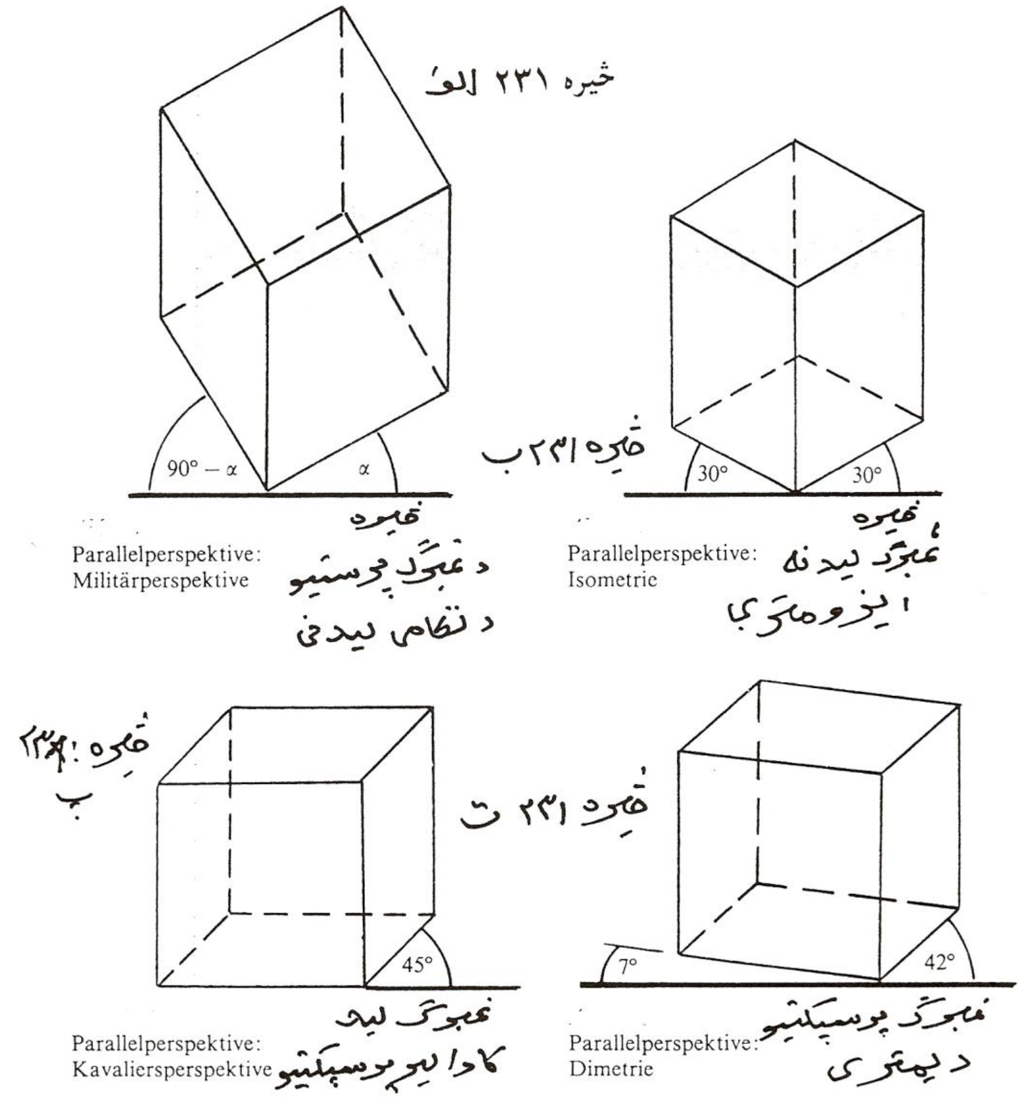
$$1mm^3 = 10^9\ \mu m^3$$

برسیره پردې په پیچلو شکلونو باندې باید یو لیدونکی یا اوپتیکي نظرلاس ته راوړی شو.

د هندسي بدنونو یا تنونو رسمول

په پرینځیپ کی د بدن درې ډوله ګرافیکي انځورونه موجود ده. دام کی ګیرونه ، مایل انځورونه، او دربتخته ئیز پرویکشن Projektion (دریتیخته ئیز پریوستون).
دا هروي یی مختلفې دندې سر ته رسوي.
د دام ګیرونه اصلاً ددې لپاره په کار راځي، چی د بدن ټوله دباندې هوارې وښولی شي. دا که چیرې راګردي پریکړی شي او سره ونښلول شي، نو د هغه بدن څیره جوړولی شي.

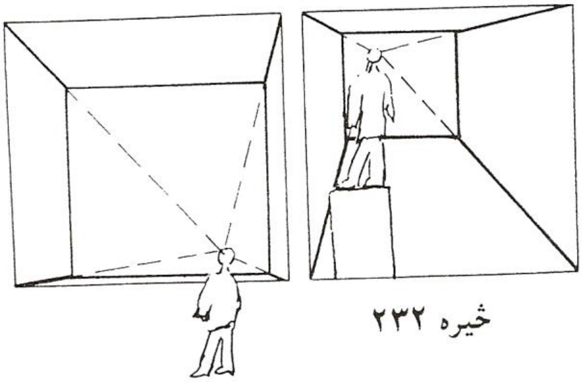
(c) ketabton.com: The Digital Library



د استعمال وړ د نظراچولو (د نظر لاندې راوړلو) کښل، مایلځیره کښل دي. دا هوایي پراخیدنه واضح کوي. دلته د کاوالیر پرسپکتیو (مائیل له پورته) او یوه (چینهښی پرسپکتیو (مائیل له ښکته) ترمنځ توپیر کیږي، مګر د دواړو ترمنځ لاندې ګډه قاعده موجود ده: لیدونکي ته جبهیي (فرونتال) ځغلیدونکی لاینونه په

(c) ketabton.com: The Digital Library

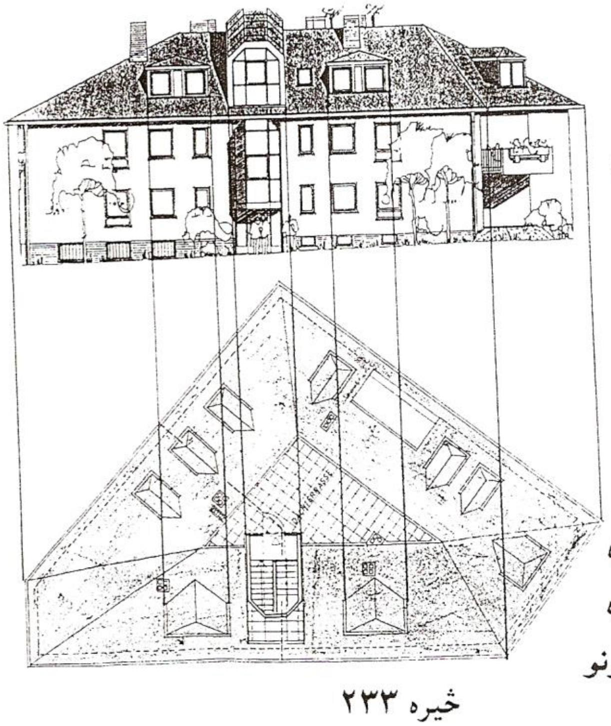
نورمال اوږدوالي، له ليدونکي لرې ځغليدونکي لاينونه مائيل او په لنډ ډول کښل کيږي. لنډونه يې د کونج تر واك ده:



خيره ۲۳۲

پروت کونج	30°	45°	60°
لنډوونکی فاکتور	2/3	½	1/3

په يوه پرسپکتيو مائيل جوړښت کی طبعاً ځني برخی او نه ښيره شوې د شا خواوي ورکيږي، دا په دې مانا چي په کښلو کی نه راځي. له دې امله او په ځانګړي ډول کونجلرونکو بدنونو لپاره درې تختئيزپرويکشن (پريوستون) ګټور دی.
دا يو درې ځلي ولاړ پريوستني له لارې منځ ته راځي (الف) بنسټيز ضرز يا غوځي هواره، (ب) اړخيزغوځي يا درز هواره (پ) پورته درز يا غوځي هواره او دا زيات وخت په جوړښترسمونو کی استعماك مومي.



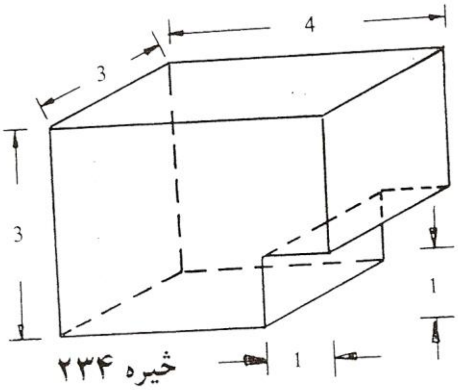
خيره ۲۳۳

(c) ketabton.com: The Digital Library

تمرینونه

۱ – د دې خیره بدن څخه
دریتختهییز پریوستون وکاږی

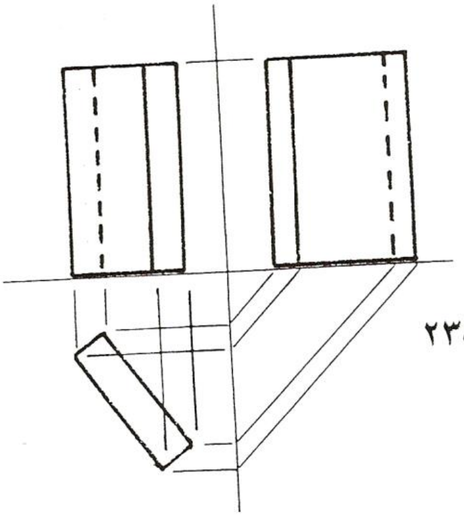
۲ · ددې بدن مائئله خیره
وکاږی، کوم چی دریتخه ئیزه
خیره پورې اړه لري.



خیره ۲۳۴

۳ – د یوې ولاړې ګردي توتی یا
استوانی مایيلی خیرې غوښتل
کیږي، چی د بنسټ او ولاړ
درځ له لارې ورکړ شوي وي.

۴ – یو شپیراړخي نل یا شپږڅنډیز
نل وباسی په غبرګ پرسپتکیو
انځورونی سره.


خیره ۲۳۵

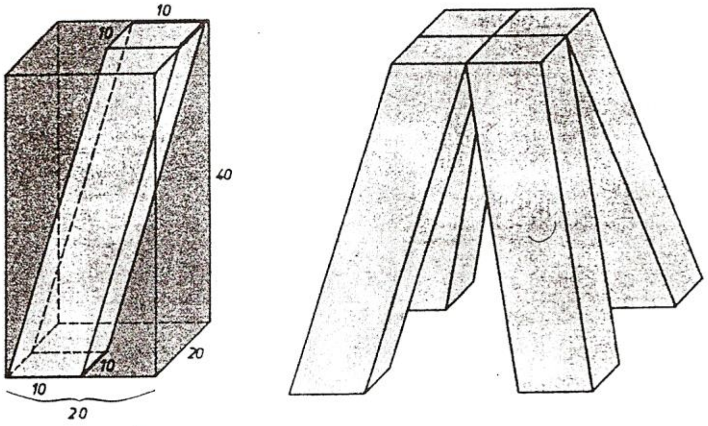
(c) ketabton.com: The Digital Library

پریزماوې Prismen

پیلبیلګه :

۱ = د یوه ستنویا تیرپښو جوړ میز یا Podestپودست(لکه په څیره کی کښل شوی میز) د لاندې جوربښت لپاره یو پښ باید څلور پښی د څلوراړخیز لرګیو په څیره شوي شکل اره کړي. یوه پښه څومره ډکی (حجم) لري ؟

$$V = 10^2 . 40 = 4000cm^3$$



څیره ۲۳۶

۲ – د یوکږولاړې یا مستقیمی پریزما چی جګوالی یي 12 cm دی دباندې هواره او ډکی (حجم)، چی ځمکه او سر یا سرپوښ یی یو سیومتري تراپیځ وي

(c) ketabton.com: The Digital Library

د اړخونو د اوږدوالي $a = 10$ cm , $c = 6$ او $h_r = 4$ cm سره څومره دی؟

د تریخ هواره

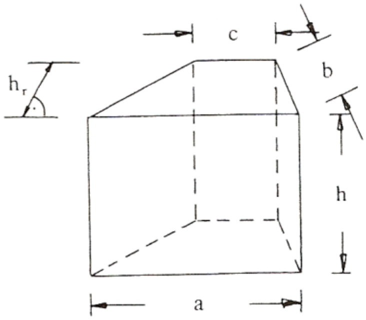
$$h_r.(a+c) / 2 = 4.(10+6)/2 = 32cm^2$$

ده، نو ډکی یی په لاندې ډول دی:

$$V = G.h = 32.12 = 384\ cm^3$$

د دباندې هوارې لپاره د تریخ اړخ اوږدوالي b ته اړه شته .

دا د پیتاګوراس د جملی په مرسته لاس ته راوړو



څیره ۲۳۷

$$b = \sqrt{16+4} = 4,47\ cm$$

له دې امله دباندې هواره ده :

$$O = 2.G+ (2.b + a\ c),h$$

$$O = 64 + (8,84 + 10 + 6).12$$

$$O = 363,28\ cm^3$$

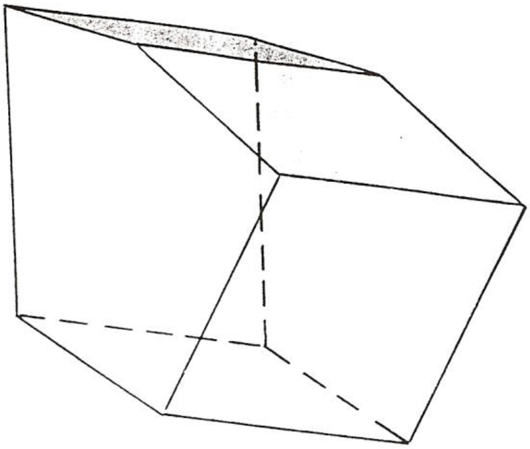
ساده بدنونه هغه دي، چی یواځي په ډیرګوډیو (پولیګونو) بند شوي وي یا یواځي له ډیرګوډیو راګیر وي، او ددې ترمنځ د بیلګي په توګه بیا پریزما ده.

تعریف Prisma : داسی یو هندسي بدن، کوم چی له دوه یو بل سره غبرګو او ګونګروانخو پولیګونو یا ډیرګوډیو بند یا راګیروي پریزما بلل کیږي.

د بنسټ او پورته هوارې د کونګروانښ له امله د اړخونو هوارې غبرګاړخیز دي.
د پورته هوارې (چت) ولاړ اوږدوالی د پریزما جګوالی بلل کیږي. کیدی شي چی د

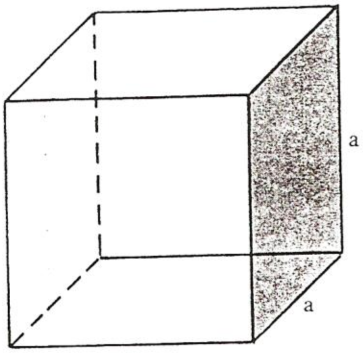
(c) ketabton.com: The Digital Library

یوه اړخ اوږدوالی د جګوالي باور ولري، نو بیا له ولاړې پریزما غبرېږو.



خیره ۲۳۸

د ټولوخورامنظم او په دې ډول خورا ځانګړي پریزما شپږاړخیز یا مکعب دی
(وورفل Würfel) . دا د دباندنی هوراو ۶ کونګروانیځ مربع خواوې لري، او ژی یا اړخونه(کانتی) یی یو په بل نیغي ولاړې دي.



خیره ۲۳۹

جمله : د یوه شپږ اړخیز یا شپږخوایز (مکعب) د دباندې هوارې O او ډکي (حجم) V لپاره باور لري:

$$O = 6a^2$$

$$V = a^3 = a^2 . a = G . h$$

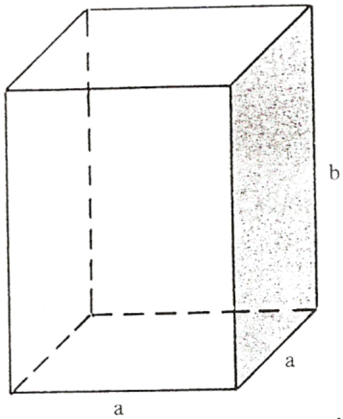
بیلګه : څه شی درونددی یو کورک(Quark یو شکل لرګي ډوله بدن دی، چی د بوتلونو خولی په پټېږي) مکعب چی د یوه اړخ اوږدوالی یی 0,3 m وي او که یو د اوسپنی مکعب چی د اړخ اوږدوالی یي 8 cm (د کورک ۷ سختوالی g/cm³ ۰,۶ د اوسپنی 7,86 g/cm³)

(c) ketabton.com: The Digital Library

ددې لپاره چې د یوه بدن کتله m لاس ته راوړی شو، نو کلکوالی یا دیښرتی یی د ډکي سره ځلوو.

د کورك مکعب ډکی : $V = (30cm)^2 = 27000\ cm^3$

$m = 27000cm^3\ .0,2g/cm^3 = 5400\ g$



شیره ۲۴۰

د اوسپنی مکعب ډکی :

$V = (8cm)^3 = 512\ cm^3$

$m = 512cm^3\ .7,86\ g/cm^3$

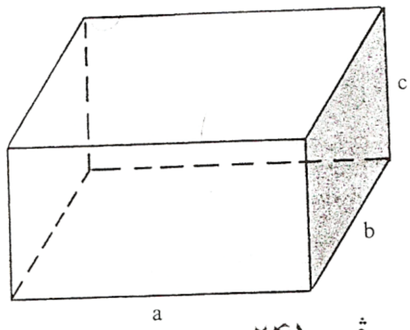
$= 4024\ 32\ g$

د کورکمکعب له دې امله د اوسپنی د مکعب ته نزدې

34% [(5400-4024):4024 ~0,34]

دی. یا په بل عبارت، د کورك مکعب نزدې ۳۴ په سلو کی د اوسپنی د مکعب څخه درونډ دی.

که د مکعب سټه (ځمکه) یا بستې او چتې یا سر مربع پاتی شي او نورې خواوې یی تغیر کړي نو یوه مربع ستن (پینه) لاس ته راځي.



شیره ۲۴۱

که ځمکه او سر هم یوه ولاړکوډیز ته «ټولیز» شي یا « عمومیت » پیدا کړي، نویو کوادر Quader منځ ته راځي. هغه درې مختلفی اړخنیمي، مگر مساوي هوا نیمي

(c) ketabton.com: The Digital Library

ا هواقطرونه لري. دا د پیتاګوراس د جملې په مرسته شمیرل کیدی شي.

جمله: د مربع ستن د دباندې هوارې او ډکې (حجم) لپاره سدق کوي:

$$O = 4ab + 2a2$$

$$V = a^2 b$$

د اړخونو نیمیو اوږدوالی په لاندې ډول دی

$$d_1 = \sqrt{a^2 + b^2}; \quad d_2 = \sqrt{a^2 + c^2}$$

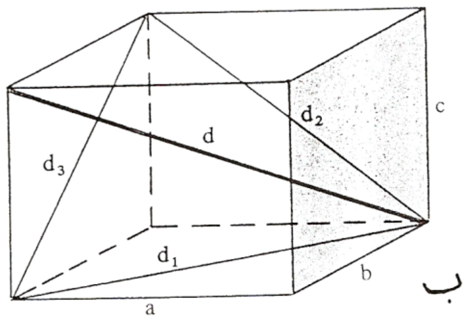
$$d_3 = \sqrt{b^2 + c^2}$$

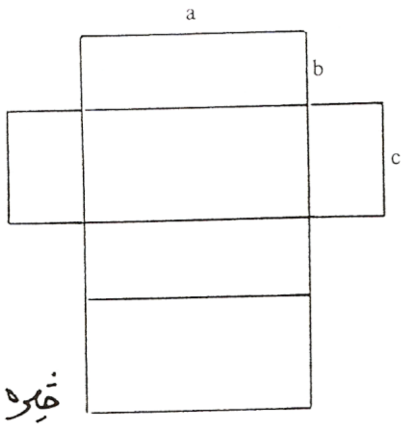
د هوانیمیو لپاره صدق کوي:

$$d = \sqrt{d_1^2 + c^2} = \sqrt{d_2^2 + b^2} = \sqrt{d_3^2 + a^2}$$

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

شیره ۲۴۲ الف





شیره ۲۴۲ ب

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه: یو کوادر د کانتو اوږدوالی $a = 5cm$, $b = 4cm$ (بنستیز هواره a.b)
او $c = 12cm$ لري:

د پوښهواره: $M = 2.(5.12+ 4.12) = 216\ cm^2$

دباندې هوار. $O = 2.(5.12 + 4,12 + 5.4) = 256\ cm^2$

ډکی (حجم) : $V = 5.4.12 = 240cm^3$

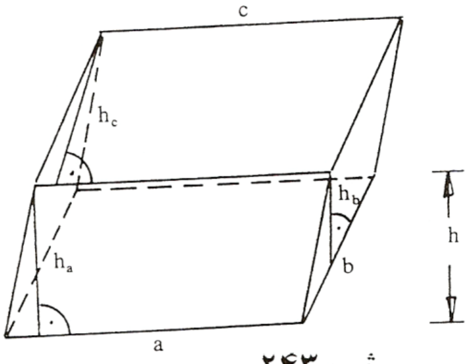
نیمي: $d_1 = \sqrt{25 + 16} = 6,40\ cm,\quad d_2 = \sqrt{25 + 144} = 13\ cm$

$d_3 = \sqrt{16 + 144} = 12,65\ cm$

$\Rightarrow d = \sqrt{25 + 16 + 144} = 13,60\ cm$

یوه مائیل څلوراړخیزه پریزما د جوړه یو بل سره غبرګو کونګروانیڅ څلورکونجیو سره غبرګ اپیپت یا شپات یا په بل عبارت غبرګهواریز بلل کیږي ، چې موږ به یی له دې ورسته همداسی وبولو. د هغو دباندې هواره د هغه د بنستې پورته – او اړخهوارې دوه ځله ده.

دا د غبرګ اړخیز په څیر شمیرل کیږي او په عمومي ډول باور لري:



څیره ۲۴۳

جمله: د غبرګهواریز دباندې هواره او ډکی دي:

$O = 2.(a.h_a + b.h_b + c.h_c)$

$V = G.h$

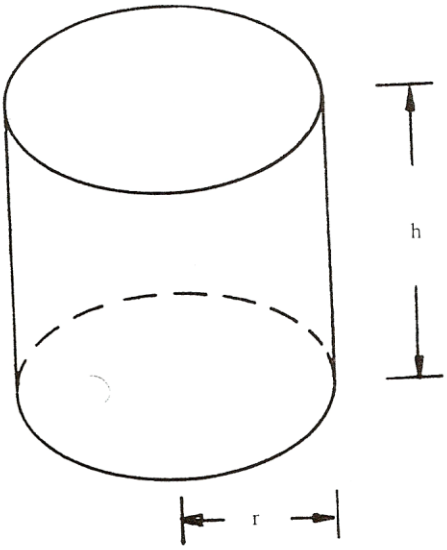
دلته د ډکي شمیرنه د غبرګ اړخیزهوارې په

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځیر اجرا کیږي: د بدن جوداشوي توکي یو د بل مخامخ لور تکمیلوي:
یو بل عمومیت یا ټولیزه به د غیر منظم ، مګر په بنسټ یا ځمکه او پورته
کونګروا ینخ ډیرګوډیز پریښول وی، د هوارې د خواو هوارې بیا غبرګ اړخیز دي.

جمله: د په خوښه پریزما د دباندې هوارې او حجم لپاره باور لري:
د ټولو خواو هوارو زیاتون + بنسټیزه هواره . 2 = O
بنسټهواره . جګوالی = V

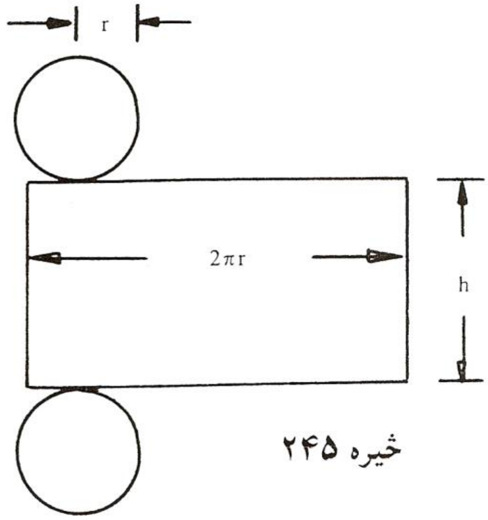
سیلیندر(توته یا استوانه یا ستن)



خیره ۲۴۴

د هغی نیغي(سیخ ولاړې) پریزما
سره ، چی لاندې او باندې یې
سیومتري – ګوډیز وي – څه پیښیږی،
که د کونجونو شمیر نور هم زیات شي؟
اوس نو لاندې هواره (او په همدې ډول
پورته هواره هم) په ګردي بدلیږي او
دا ډیر سره ګوډیز شوي د خواو هوارې
په یوې کږې یا راتاو هوارې بدلیږي.
یو بدن یو بل سره کونګروا ینخ او
غبرګ لاندې پورته ګردیهوارو سره
ګردیتوته یا ګردیسیلیندر بلل کیږي.
د دی روښانونی یا توضیح لاندې درې
شیان څرګندیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



۲۴۵ څیره

۱ – د توتی یا استوانه یا
گردیسیلیندر د پریزما سره
خپلوان دی.
۲ – گردي استوانه یا توته پخپله
د په خوښه فورم شوې پورته –
او لاندې هوارو لپاره یو
ځانگړی حالت دی
۳ – لمړنی ځرگندونه د ولاړ
گردي سلیندر یا توتی یو
ځانگړی مهم حالت وو،
ډکی یا حجم د همغه پرینځیپ
له لارې کیږي لکه د پریزما.
د جال ښوونه یی د
پوښ د خلاصولو له لارې کیږي، له دې سره دوه گردی تړلي راځي چې لاندې
او پورته(دځمکی– او سرپټی هوارې) هوارې دي.

جمله: د یوه ولاړې گردی استوانی یا توتی پوښ، دباندې هوارې او ډکي
لپاره باور لري:

$$M = 2\pi rh$$

$$O = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi r(r+h)$$

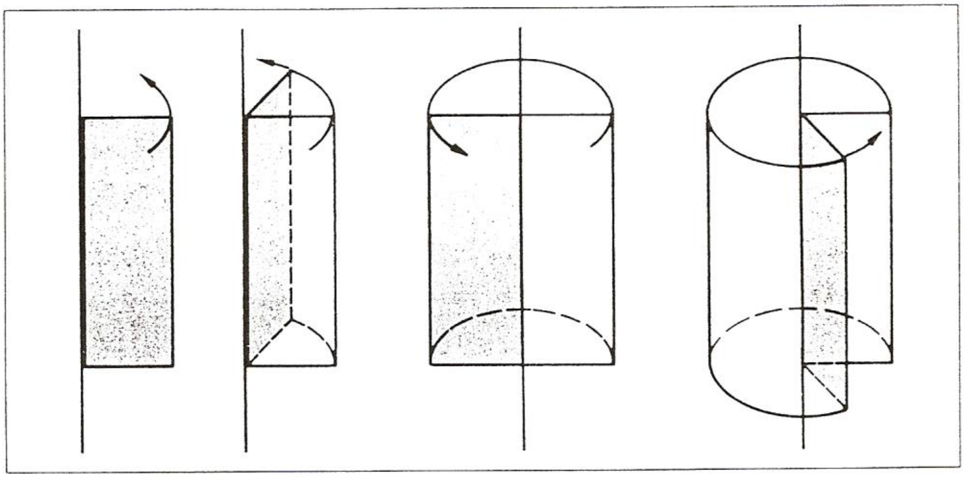
$$V = \pi r^2 h$$

که د یوې استوانی یا توتی څخه منځنکي سیومترې استوانه چې وړانگه یي له
مخکی استوانی یا توتی کوچني وي راوباسل شي، نو دې پاتي ته یی سوری استوانه

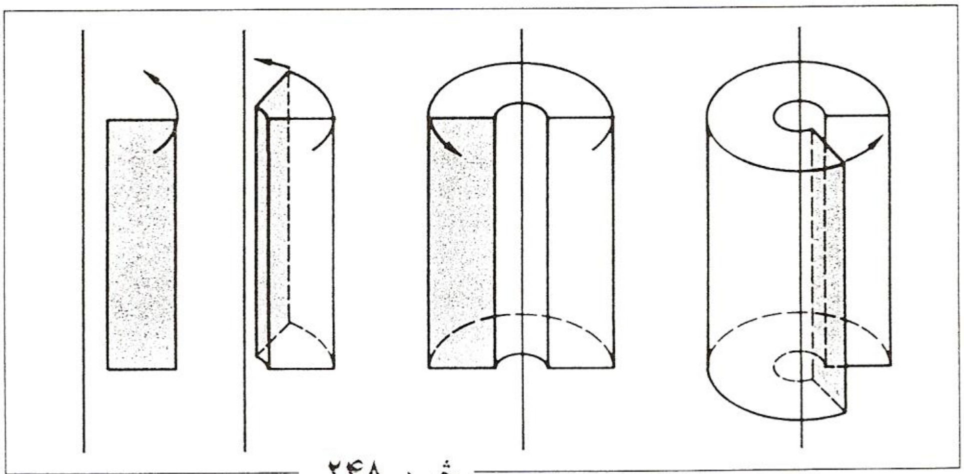
(c) ketabton.com: The Digital Library

که د مخه ونیول شي یا فرض شي، چې دا سلیخ شوي کاغذ 0,1 mm پنړ دی،
نو دلته باید ټول $0,491 . 10000 = 4910,m^2$ کاغذ سلیخ شوی وي.

د ګردي – او سوری استوانی یا توټې یا ستن لاندې د یوه ولاړکونجیز ځرخون(Rotation) هم په خیال کی راوړلی شو:



څیره ۲۴۷



څیره ۲۴۸

(c) ketabton.com: The Digital Library

تمرینونه

۱ – یوه سمه پریزما د شپږکونډیز بنسټ – په همدې ډول سرهوارې سره لرو، چې ۵ سانتي متره جګه ده. هربنسټهوارې اړخ یې ۴ سانتي متره اوږددی. ددې ډکې پوښ او پورته یا ټوله راګرده هواره وشمیرئ.

۲ – یو غبرګهواری ۸۱ مکعب متره ډکې لري او پورته هواره یا ټوله هواره یې ۱۳۲ مربع سانتي متره ده. جګوالی او د اړخ اړخیز c اوږدوالي یې وښايي، که بنسټ هواره یې د اړخونو اوږدوالی ۵ ،۴ سانتي متره او ۳ سانتي متره ولري او دا دواړه اړخونه وي بل سره د ۶۰ درجو کونج جوړ کړي.

۳ – پورته واره او ډکي څنګه تغییر خوري، که د یوه کوادر اړخونه دوه برابره شي؟

۴ – د یوه کوادر دري اړخونه یو بل سره په ۱:۲:۳ څاننیونه یا تناسب کې پراته دي، دا څومره اوږد دی، که د دې کوادر ډکي ۱ مکعب متر وي؟

۵ – یو مکعب د هوانیمی $d = 6\sqrt{3}$ لري. نو ټولهواره، ډکی او اړخ (a , V , O) یې وشمیرئ.

۶ – د شکو موټر کي چې د بارهواندازه یا بارډکي اندازه یې 2,82m×1,68m÷0,55 وي، څومره مترمکعب شګه ځایږي، که دا د پورته اړخ یا کانتي پورې ډک شي؟ د بارورونکي د بار وزن ۱۵ ، ۱ ټنه دی په بارولو به څومره ورزیات شوی وي ، که شګه یوه ډیبنتی، ټیګوالی یا غلظت $\rho = 2\ g/cm^2$ ولري؟

۷ – په یوه هواره کرښه یو د پټلیو بند باید ډک شي. دا کرښتهوټه ۲۵۰ متره اوږده ده، دا پټلیبند ۸ متره جګ دی او په بنستهواره کې ۳۹ متره ، په سر کې ۲۷ متره سرور دی، د ډکولو لپاره به څومره خاوره بسیا وکړي؟

۸ – د سرك جوړولو ماشین څرخونی (د اوسپنی غټه استوانه چې سرك پرې پخوي او په سرك یې څرخوي) ۵ ۱ ، ۱ متره نیمی لري او د۲۵ ،۲ متره سرور دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

هغه هواره خومره لويه ده، چې خرخې يې په يوه څرخون وهي؟

٩ – يو بايسکل پمپ د ٥ ، ٢ سانتيمتره اوږد رڼا نيمی لري او د پمپ اوږدوالی ۲۸ سانتيمتره دی، د پمپ تشياړکی خومره دی ؟

١٠ – د دې لپاره، چې د ګيلاس توته په پروتغوخي باندې ځيرو يا معاينه کړو، ٢٠٠ ګرامه پارې نه يی ډکوو(ρ = 13,6 g/cm³) . پوهيږو، چې توته هر ځای کی همغه دننني نيمی لري. دا نيمی خومره دی، که پاره 82 cm جګه وي؟

١١ – يوه کچتوته دې، د يوه 5 cm دننه نيمی سره داسی په کچکربنو په نښه شي، چې د هرو دوه پرلپسی کربنو وي د 5 cm³ ډکی وښايي. د دوه څنګ په څنګ کربنو ترمنځ دې واټن خومره وټاکل شي؟

١٢ – د يوه ولاړګوډيزې وسپنی ټوټی (25 cm × 20 cm) څخه دې يوه کوتی ، بی له سرپوښ او بيښ څخه جوړه شي. ډکی يی وشميری که الف) چاپيری يی د اوږده اړخ سره برابر وي او ب) که چاپيری يی د لنډ اړخ سره برابر وي؟

١٣ – د لاندې توتو پاتی کڅونه وښايي:

a) r = 5 cm ; h = 12 cm b) r = 9cm ; V = 120 cm³

c) h = 6,5 cm ; O = 300 cm³ d) M = 282 cm² ; V = 424 cm³

١۴ – توته خومره ډکی لري، که يو د a اړخ اوږدوالي مکعب په کې خوندي وي؟ پوښ او دباندې يا پاسهواره يی خومره دي؟

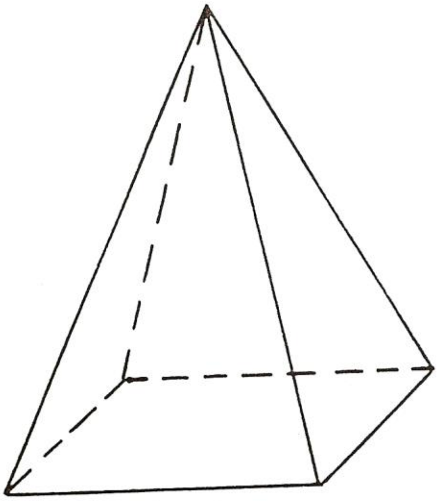
١۵ – د يوې توتی جګی h او وړانګه r ځانونه (h : r =) 3 : 2 نيسی. ډکی يی 2000 cm³ دی. h , r او M يی وټاکی.

١٨ – يو ولاړډوله توته يزه ګل کوتی د h = 17 cm جګي سره د سره د سرپوښ او بيښ ايليپسی د دواړو نيممهرونو a = 30 cm او b = 20 cm سره لري. د دې ډکی خومره دی؟

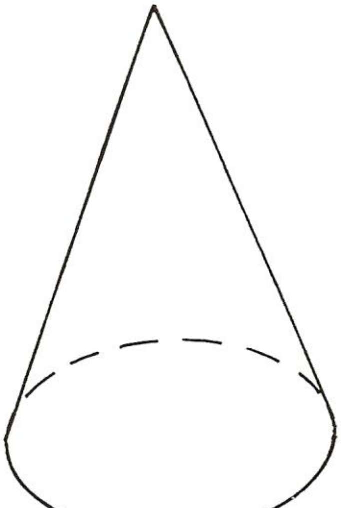
(c) ketabton.com: The Digital Library

اهرامونه او مخروطونه Pyramiden und Kegel

که څه هم دواړه بدنونه بدلو ګروپونو پورې اړه لري– اهرام یواځې هواره راګرځیدهواره لري، مخروط مګر راتاو یا کږه هواره.– بیاهم زیات ګډونوالی لري، نو له دې امله یې یه ګډه غواړو وپیژنو یا معرفي کړو.



خیره ۲۴۹



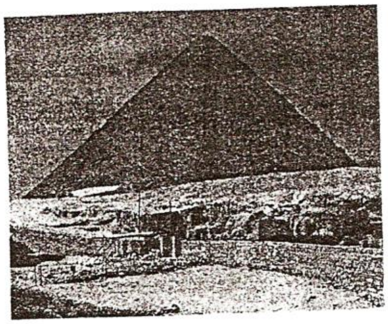
خیره ۲۵۰

پیلبیلګه :

د ۲۵۹۰ او ۲۴۷۰ (م. کال پخوا) ترمنځ په غزه مصر کی په یوه ډیر مصرف د فرعون خیوبس د قبر اهرام خیوبساهرام (Cheopspyramide) جوړ شو. د دې د جوړولو لپاره څه سل زره انسانان په کار واچول شو، چی هغوی نږدې دوه نیم میلیونه

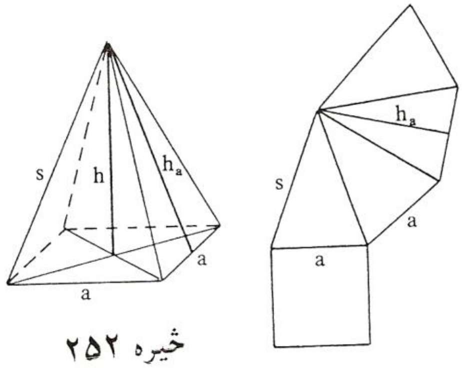
(c) ketabton.com: The Digital Library

د تیګو بلاکونه پري کړل ، رایي وړل
او یو په بل یی طبقه په طبقه یا پوړی
په پوړی باید اینبوولي وی. دا د
خیوبس اهرام څومره ډکی (حجم)
لري، که هغه یوه لاندې هواره ۲۳۰
متره مربع ولري او جګوالی یی ۱۴۷
متره وي. د هغه لیدوړ دباندې هواره
څومره ده ؟



څیره ۲۵۱

د خیوبس اهرام د ولاړو اهرامونو ځانګړی حالت جوړوي، څکه چی د هغی تیره ککره د لاندې هوارې په منځ ټکي نیغه ولاړه ده. هغه اهرامونه چی په هغو کی دا حالت نه وي کاږه یا بهتره مائل اهرامونه بلل کیږي. په عمومي ډول یو اهرام راپورته کیږي، که د ډیرګوډي ګوډونه له ډیرګوډي دباندې ټکي سره ونخلول شي. د کونجونو او سرتیرې نخلونلاین ته اړخکانتی (لنډ : اړخ) وایي . لکه چی د جالښوونه یی ښایي، نو دباندې هواره یي له لاندې اړخ او د اړخیزو دریګوډي د یوځایوالي ځخه لاس ته راځي، چی وروستی یي پوښ هم بللي شو یا بولو.



څیره ۲۵۲

که د ډکي یا حجم ټاکلو لپاره د خیوبس اهرام په مربع شکلي پوړیزتجزه شوی وي، په فکر کی راولو چی د پوړی جګوالی یی h / n وي. د وړانګي جملی د خورا پورته پوړی د هوارې لپاره لاس ته راځي:

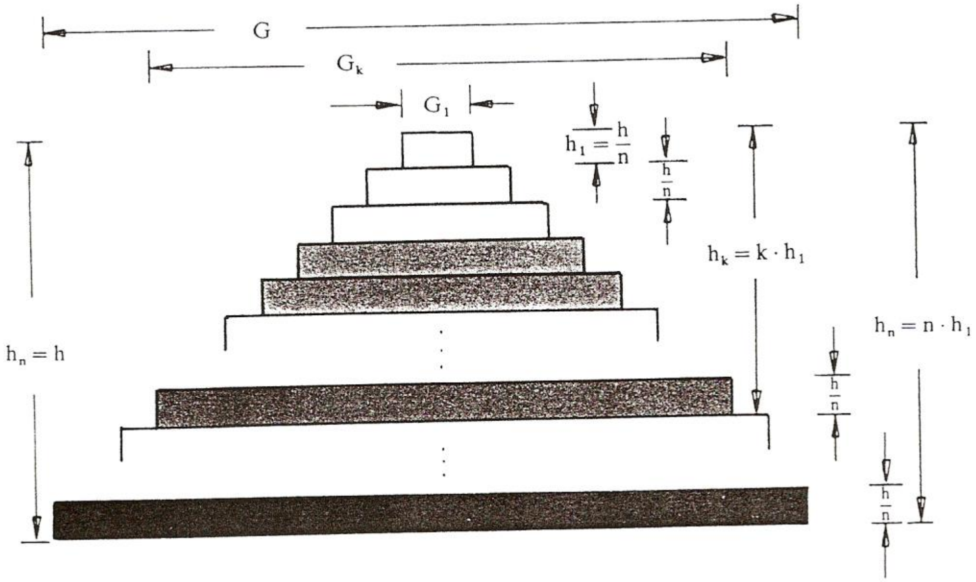
(c) ketabton.com: The Digital Library

$$h_1^2 : h^2 = G_1 : G \Rightarrow G_1 = G :(h^2 / h_1^2) = G / n^2$$

په ټولیزه توګه (عمومي ډول) :

$$h_k^2 : h^2 = G_k : G$$

$$\Rightarrow G_k = G.(k/n)^2 \quad , G_n = G$$



خيره ۲۵۳

په دې ډول د k–ام زینی پوړي ډکی (حجم) دی

$$V_k = G_k.h / n = Gh.k^2 / n^3$$

د ټولو پوړیو له زیاتون څخه لرو

$$V_{\text{پوړی}} = Gh.(1^2+2^2+...+n^2): n^3$$

$$= Gh\left(\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}\right): n^3$$

$$= Gh\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}\right)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پوره ایندوکڅیون له لارې لرو (دا په دې کتاب کی نه څیړل کیږي. ددې موضو لپاره دې ځما دشمیرپوهنی بنسټیز کتاب وکتل شي)

$$1^2+2^2+3^3+...+n^2 = n(n+1)(2n+1) :6 = (2n^3+3n^2 +n) / 6$$

که د پوړیو شمیر n نور هم لوي شي، نو بیا یی سړی له میلان څخه نه شي توپیرولی. دې ګڼونپوهی اکویوالنت دا دی چی n هرڅومره لوي شي او n په ماتلاندې کی موجودوي نو هغه په هغو غړو صرفنظر کیدی شي یا هغه غړي له پامه ایستل (لرې) کیدی شي.
په دې پوله حالت کي د اهرام ډکی له لاندې اړیکو شمیرل کیږي.

$$V = G.h / 3$$

دا د خیوبس اهرام باندې استعمالوو :
د اړخونو هواروجګوالی له نیمی لاندې اړخ او جګوالي د پیوتاګوراس د جملی له

لاری شمیرل کیږي: $h_a = 115^2 + 147^2 = 186 , 64m$
په دې ډول یی پوښ دی $M = 4.0,5.186,64.230 = 85853,80m^2$
د دباندې هواری څخه نور څه نه لیدل کیږي.
ډکی یی دی : $V = 230^2 .147 = 7776300m^3$

جمله : د یو اهرام د پوښ، دباندې هوارې او ډکي لپاره باور لري:
د اړخونو د ټولو دریګوډیو زیاتون = M
O = M + بنسټهواره
V = جګوالی . بنسټهواره / 3

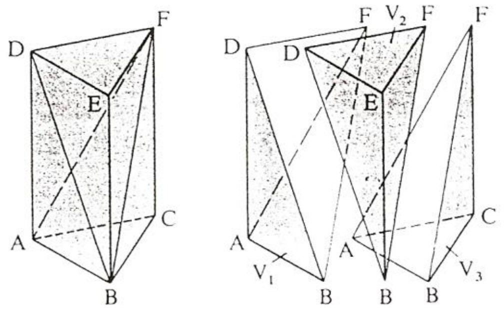
(c) ketabton.com: The Digital Library

دا فرمولونه طبعاً د مائيل اهرام لپاره هم باور لري د پوړيو شميرنه بيا طبعاً يو څه اندازه ستونځي لريکه چيرې د يوه اهرام بنسټ يوه ګردۍ ونيسو نو مخروط لاس ته راځي، مخروط سم ولاړ بلل کيږي ، که د هغه تيره ککره يا لنډه: ککره په منځټکي (نيغه) ولاړه وي، نور ټول مخروطونه مائيل بلل کيږي. دا په لاس کی لرلو له لارې ګورو، چی د اهرام ډکي يا حجم شميرډول په مخروط باندې هم استعماليدی شي، که د پوړيو په ځاي دلته وړې ستنی په پام کی ونيول شي. لکه په څيره ✓ کي د پوښ خورونه يا پوښ جال ښايي چی پوښ د ګردي ټوټه ده، چی وړانګه يی د بنسټګردي وړانګه ده او لينده يی د ګردۍ چاپيرونکی کی ورکړ شوی دي:

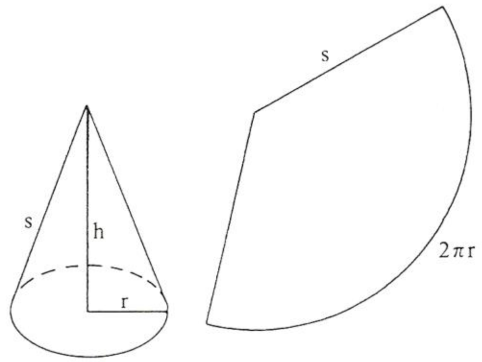
$$F_S = b.r / 2 ,$$

پس لرو

$$M = 2\pi r.s / 2 = s.\pi .r$$

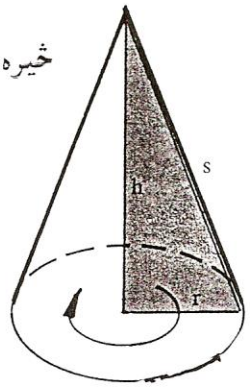


څيره ۲۵۴



څيره ۲۵۵

څيره ۲۵۶



(c) ketabton.com: The Digital Library

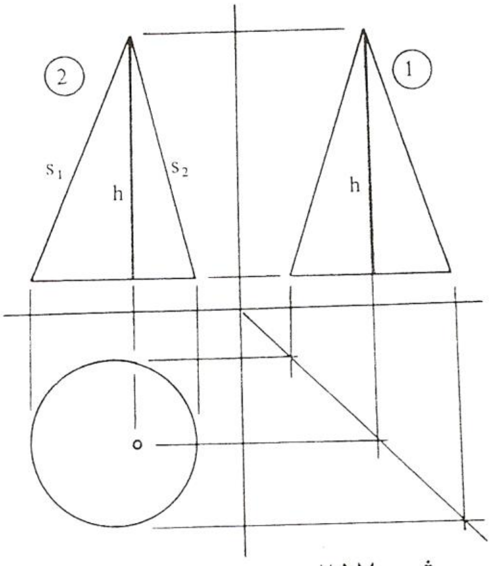
جمله : د ګردي مخروط پوښ، دباندې هواره او حجم لپاره باور لري:

$$M = s.\pi r = \pi . r^2 . 360° / \alpha$$

د $\alpha = 360° . r / s$ سره

$$O = M + \pi r^2 = \pi r (r + s)$$

$$V = \pi r^2 . h / 3$$



ځيره ۲۵۷

په پام کی دې وي چی ولاړ مخروط د څرخون په ځير هم په خيال کی راوړل کيدی شي: چی په کانتی يا يوه اړخ د يوه ولاړ دريګوټي څرخون څخه لاس ته راځي.

بيلګه : د ولاړ ګرديمخروط ډکی وشميری چی د بنستهواري وړانګه يی ۶ سانتيمتره وي د پوښ يو خورا زيات يا عظمي اوږدوالی يی ۱۵ سانتي، او مينيمال پوښ اوږدوالی يی ۱۱ سانتي متره دی؟ د هيرون دريګوټي فرمول سره سړی د غوڅهوارې په متن يی اخر ته رسوي. (۲)«

$$F = \sqrt{19(19-12)\ (19-15)(19-11)}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$F = 65,238\ cm^2$$

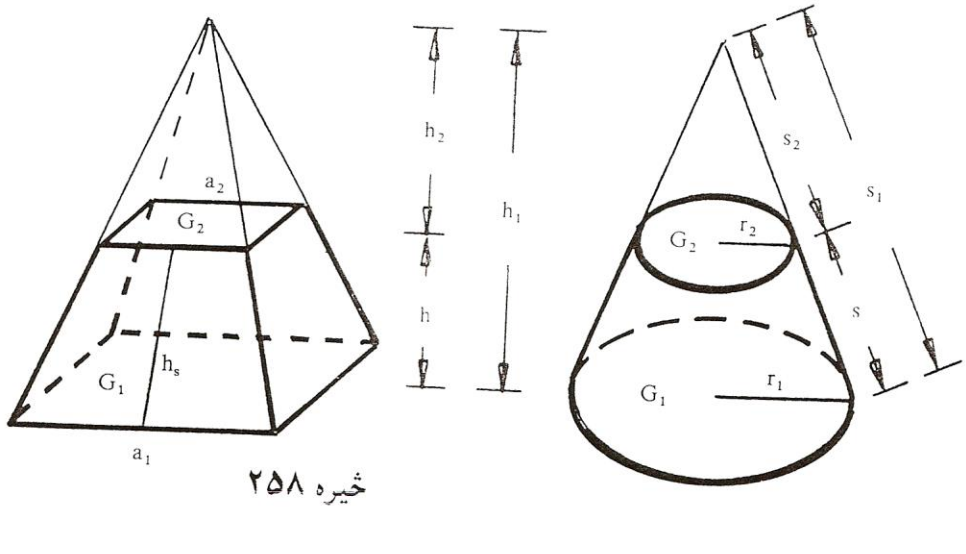
$$F = d.h / 2 \Rightarrow h = 2F / d = F / r = 10,87\ cm$$

$$\Rightarrow V = \pi r^2 h / 3 = 409,79 cm^3$$

پخ اهرامونه او پخ مخروطونه

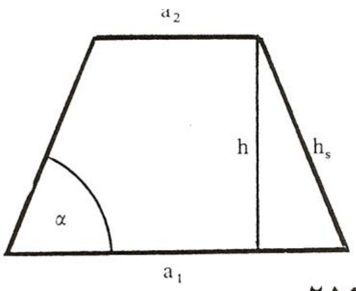
که یو اهرام او یا مخروط په یوه اوږدوالي h بنسټهواري ته غبرګ پرې کړی شي، نو پخ اهرام او پخ مخروط ترې راجوړیږي) راپیداکیږي یا منځ ته راځي.

د پخ اهرام پوښهواره د یوه ترپخ ښخه عبارت دی چې د دوه دریګوډیو له کمون ښخه لاس ته راځي.



خیره ۲۵۸

(c) ketabton.com: The Digital Library



خیره ۲۵۹

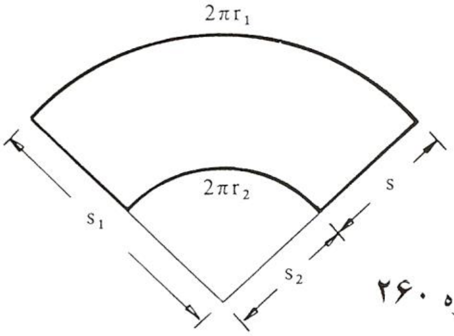
د دوي اوږدوالی د پیوتاګوراس له
جملی او یا د میلانکونج α
څخه ټاکل وړ دي.

$$h_s = h / \sin\alpha$$

د اهرام د بنسټهوارې زیات امکاناتو
له امله د پوښهوارې لپاره یو ټولیز
فرمول هدفمند نه دی. که بنسټهواره
یو منظم n–ګوړی وي، نو لرو :

$$M = (U + u).\ h / 2$$

د U بنسټهواری چاپیرونکی ، u د
سرپټهوارې یا سرپوښهوارې چاپیری.



خیره ۲۶۰

په همدې ډول د سم مخروط د دوه
ګردیبرخهوارو کمون دی:

$$M = (s_1\, 2\pi\, r_1 / 2) - (s_2\, .2\pi\, r_2\,) / 2)$$
$$= \pi\, (s_1\, r_1 - s_2\, r_2\,)$$

د وړانګي جملی په مرسته لاندې اړیکی
پیداکیږي:

$$s_2 : s_1 = r_2 : r_1 \iff s_2\, r_1 = s_1\, r_2$$
$$\Rightarrow M = \pi (s_1 r_1 - s_2 r_1 + s_2 r_2 - s_2 r_2)$$
$$= \pi [(s_1 - s_2) r_1 + (s_1 - s_2) r_2]$$
$$= \pi\ s(r+r)$$

د $s = s_1 - s_2$ له امله
ددې لپاره چې دباندې هواره لاس ته راوړو، باید بنسټ – او سرپټهواره یا
سرپوښهواره ور زیات کړو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دپخڼکي د اولني اهرام او یا مخروط او د پریشوي څوکی کمون څخه لاس ته راځي، چی دا هم بیرته اهرام او یا مخروط شکلونه لري. (څیره √ وګوری)

$$V = G_1.h_1 / 3 \ - G_2.h_2 / 3 = [G_1(h+h_2) - G_2h_2]/ 3$$

دا چي په n–ګوډي کی د اړخ اوږدوالی همداسی د ګردیشمیرنه کی وړانګه مربعي ډوله کارول کیږي، د وړانګي له جملی د بنستهواريږ او سرپوښهواريږ یوبل ته ځانونه داسی نیسي لکه د هغو د واټنونو مربع د سرچینیزي څوکی څخه.

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{h + h_2}{h_2} = \frac{\sqrt{G_1}}{\sqrt{G_2}}$$

$$\Leftrightarrow \quad (h + h_2) \cdot \sqrt{G_2} = h_2 \cdot \sqrt{G_1}$$

$$\Leftrightarrow h\sqrt{G_2} + h_2\sqrt{G_2} = h_2\sqrt{G_1}$$

$$\Leftrightarrow \quad h\sqrt{G_2} = h_2(\sqrt{G_1} - \sqrt{G_2})$$

$$\Leftrightarrow \quad h_2 = -\frac{h\sqrt{G_2}}{\sqrt{G_2} - \sqrt{G_1}}$$

که د h_2 لپاره پیدا ارزښتونه د ډکیفرمول کی کیښول شي، نو د ترڅنګ بیا یواځي هواريږ G_1 ، G_2 او G_3 راپیداکیږي.

$$\Leftrightarrow V = \frac{1}{3}\left[G_1\left(h - \frac{h\sqrt{G_2}}{\sqrt{G_2} - \sqrt{G_1}}\right) + G_2\frac{h\sqrt{G_2}}{\sqrt{G_2} - \sqrt{G_1}}\right]$$

$$\Leftrightarrow V = \frac{1}{3} \cdot \left[G_1 \cdot h - \frac{G_1 \cdot h\sqrt{G_2}}{\sqrt{G_2} - \sqrt{G_1}} + \frac{G_2 \cdot h\sqrt{G_2}}{\sqrt{G_2} - \sqrt{G_1}}\right]$$

$$\Leftrightarrow V = \frac{1}{3}\left[\frac{G_1 h\sqrt{G_2} - G_1 h\sqrt{G_1} - G_1 h\sqrt{G_2} + G_2 h\sqrt{G_2}}{\sqrt{G_2} - \sqrt{G_1}}\right]$$

$$\Leftrightarrow V = \frac{h}{3}\left[\frac{G_2\sqrt{G_2} - G_1\sqrt{G_1}}{\sqrt{G_2} - \sqrt{G_1}}\right]$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که اخري اړیکی د $\sqrt{G_2} + \sqrt{G_1}$ سره پراخه شي(د بینوم دریم فرمول)، نو په دې پسی لاس ته راځي:

$$V = \frac{h}{3}\left[\frac{(G_2\sqrt{G_2} - G_1\sqrt{G_1})(\sqrt{G_2} + \sqrt{G_1})}{G_2 - G_1}\right]$$

$$\Leftrightarrow V = \frac{h}{3}\left[\frac{G_2^2 - G_1\sqrt{G_1 G_2} + G_2\sqrt{G_1 G_2} - G_1^2}{G_2 - G_1}\right]$$

د ماتباندې ترم څخه د $G_2 - G_1$

$$G_2^2 - G_1\sqrt{G_1G_2} + G_2\sqrt{G_1G_2} - G_1^2 = (G_2 - G_1)(G_1 + \sqrt{G_1G_2} + G_2)$$

له امله نوکبند شي او بالاخره د لنډونی څخه لاس ته راځي:

$$V = (G_1 + \sqrt{G_1G_2} + G_2)\, h / 3$$

د اهرام ، په همدې ډول د مخروط ډکي.

په پڅمخروط کیدی شي د ګردیهوارې فرمول $G_1 = \pi r_1^2$ او $G_2 = \pi r_2^2$ وکارول شي

جمله: د پڅ اهرام پوښ ټوله هواره او ډکی :

د ټول تراپخ هوارو زیاتون = M

$$O = G_1 + G_2 + M$$

$$V = (G_1 + \sqrt{G_1G_2} + G_2)\, h / 3$$

د پڅمخروط پوښ پاس یا ټوله یا پورته هواره او ډکی :

$$M = \pi s(r_1 + r_2) = \pi(s_1r_1 - s_2r_2)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$O = \pi s(r_1 + r_2) + \pi r_1^2 + \pi r_2^2 = \pi (r_1 s + r_2 s + r_1^2 + r_2^2)$$

$$V = (r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)\pi h / 3$$

پیلبیلګه

د برنس مجسمی لپاره دې یوه مټه د همغه موادو جوړه شي. دا دې ۱،۵ متره جګ وي، او یوه کتله دې ولري چي ۱۰ ټنه وي (د برنس دیښتی یا کلکوالی $\rho = 8,7\ g/cm^3$) په پوښتنه کی یو ګرد (پخمخروط) یا یو مربعشکلی (پخ اهرام) راځي. سرپوښهواره دې ، په اندازه ، ۱ مترمربع لوي وي. نورې اندازې وښايي ؟ د دواړو مټو لپاره شمیرنه ورته ځغلي

$$V = m / \rho = 10t / (8,7t/m) = 1,149\ m^3$$

دا چي جګوالی او سرپوښ معلوم دي، بنسټ د یومربع مساوات له لارې لاس ته راځي:

$$V = 1,149 \qquad = 0,5(G_1 + (\sqrt{G_1.1} + 1)$$

$$\Leftrightarrow \quad 1,299 - G_1 \qquad = \sqrt{G_1}$$

$$\Rightarrow \quad 1,687 + G^2 - 2598G_1 = G_1$$

$$\Leftrightarrow \quad G_1^2 - 3,598\ G + 1,687 \quad = 0$$

$$G_1 = (3,598 / 2) \pm \sqrt{(3,598 /2)^2 - 1,687}$$

$$G_1 = 1.799 \pm 1,245$$

$$\Rightarrow \quad G_1 = 3,044m^2 \quad \text{یا} \quad G_1 = 0,549m^2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(دوم اوبی یا حل 0,549، په کار نه راځي ، ځکه چې لاندې هواره به له پورته څخه کوچنۍ وي)

له دې څخه پورته او لاندې وړانګه لاس ته راځي او نیمی په پخمخروط او په همدې توګه د کانتو یا اړخ اوږدوالی په پخ اهرام کی:

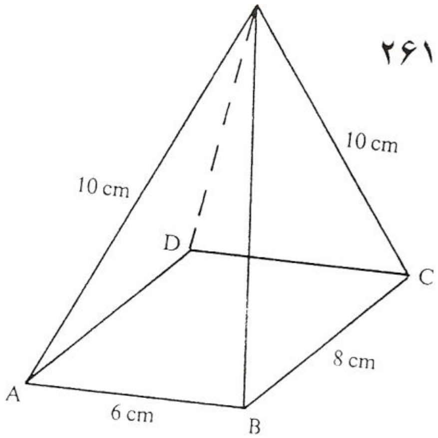
$$a_2 = \sqrt{G_2} = 1m \; ; \quad r_2 = \sqrt{G_2/\pi} = 56,42 \text{ cm}$$
$$=> d_2 = 112,84 \text{ cm}$$

$$a_1 = \sqrt{G_1} = 1,745 \text{ m} \; ; \quad r_1 = \sqrt{G_1/\pi} = 98,42 \text{ cm}$$
$$=> d_1 = 196,85 \text{ cm}$$

د پیتاګوراس له جملې څخه د اړخونو اوږدوالی لاس ته راځي:

$$h_s = \sqrt{h^2 + (a_1 - a_2)^2 / 4} = 1,546 => M = 8,488 \text{ m}^2$$

$$s = \sqrt{h^2 + (r_2 - r_2)^2} => M = 7,575 \text{ m}^2$$



شیره ۲۶۱

تمرینونه

۱ – د یوه مربع اهرام پاسهواره او ډکی وشمیری ، که وي :

الف) $a = 7$ cm ; $h = 14$ cm

ب) $s = 15$ cm ; $a = 10$ cm

پ) $V = 80$ cm³ ; $h = 10$ cm

ت) $h_a = 13$ cm: $h = 10$ cm

(c) ketabton.com: The Digital Library

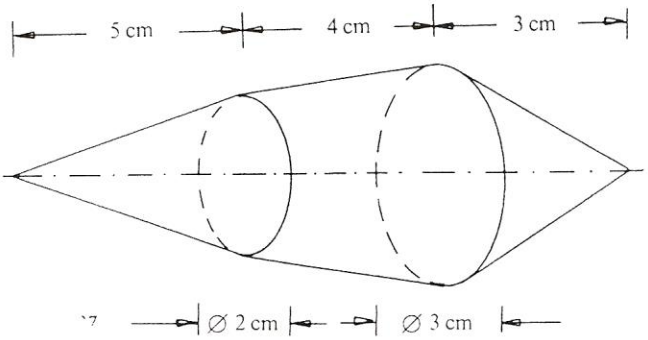
ټ) $h = 12\ cm\ ;\ s = 18\ cm$

ث) $h_a = 12\ cm;\ \ M = 400cm^2$

۲ – د ځیره شوي اهرام پاسهواره او ډکی وشمیری. (لمړی ترونکربښه له ټکي A څخه د جګوالی پښیپګي ته وشمیری)

۳ – په کوم جګوالي دې مربع اهرام بنستهواري ته غبرګ غوځ شي چې ډکی یی نیم شي؟

۴ – یو ولاړ اهرام د بنستیز منظم شپږکونجي سره بنستې لاندې هوارې اړخ یا کانتی $a = 4\ cm$ لري او خوا اړخ اوږدوالی یی $s = 12\ cm$ دی. V او O وشمیری ؟



۵ – د ځیره شوي بدن ډکي وشمیری.

ځیره ۲۶۲

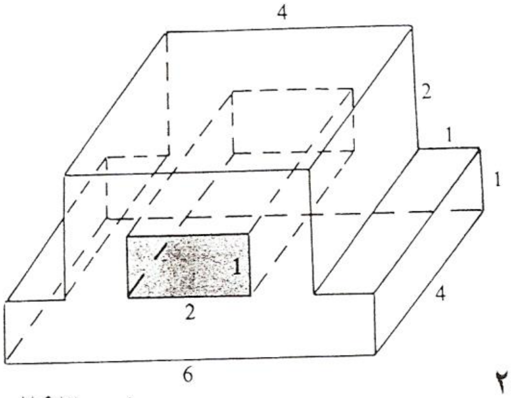
یادونه: ∅ د نیمي یا قطر په مانا ده چې د دایرې [illegible]

۶ – د یوه ګردیګرد برج سر یا سر دې نوي پټ شي. د سرپوښ د هوارې د اندازې لپاره سرپوښوونکی د برج ترمخ داسی ولاړ دی یا داسی ځای نیسي، چې پوښ اوږدوالی s د ۷۵ درجو په یوه کونج ګوري، کوم چې ټیك د سر میلان په ګوته کوي، د سرپوښ هواره څومره لویه ده، که برج ۵۰ متره جګ وي او د برج نیمي ۱۲ متره وي؟ سرپوښوونکی د برج څخه ۱۰ متره لرې ولاړ دی او د سترګو جګوالی یی ۱، ۸۰ متره دی.

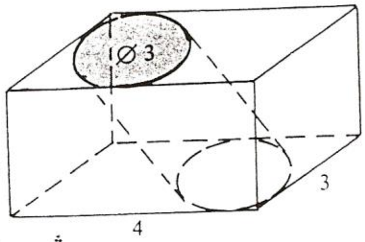
(c) ketabton.com: The Digital Library

۷ – د یوه برج اهرامډوله سرپوښ چې بنسټ یې مربع او اړخ اوږدوالی یې $a = 12cm$ دی په وسپنه دې پټ شي اړخکانتې یې ۱۴خ متره ده د سرپوښ هواره یې څومره ده؟ دا چت به څومره ارزښت ولري، که یو مترمربع سرپوښول د هرڅه سره ۹۵ المان مارکه ارزښت ولري؟

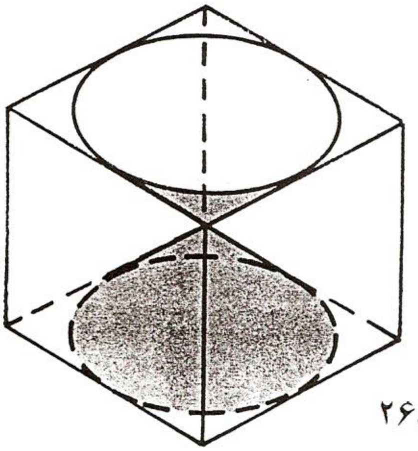
۸ – د څیره شوو بدنونو پاسهواره وشمیری(ورکړه په سانتي متر)



څیره ۲۶۳



څیره ۲۶۴



څیره ۲۶۵

۹ – د پورته څیره شوي بدن ډکی وشمیری.

۱. –په مختلف کارېوېو کی مخروط ډوله خالیګاوې برمه کیږي:

الف) په یوه مکعب چې اړخ اوږدوالی یا کانتی اوږدوالی یی $a = 60$ cm دی، یو مخروط د جګوالی $h = d = a$ سره

ب) په یوه مکعب کی د $a = 60$ cm یو سیومتري

(c) ketabton.com: The Digital Library

دیابولو (لاتین:Diavolo = شیطان)

پ) په دوه سمو ګردیاستوانو د h = 2r = 60 cm هم یو مخروط او یو دیابولو، دا موړ د شګو ساعت په څیر پیژنو . د تشځای ډکي او په همدې ډول

د نور پاتی بدن ډکی هم وشمیری.

۱۱ – یو مربع اهرام (h = 2a = 10 cm) بنستهوارې ته غبرګ په دوه برخو ویشل کیږي. د غوڅهوارې واټن دې بنستهوارې ته 0,25h ; 0,5h ; 0,75h وي.
د هر برخه بدن ډکي وشمیرۍ.

۱۲ – ددې لپاره چی یو ګردیډوله فیلترکاغذ د فیلتر لپاره استعمال کړی شی، دا سړی یو څلورمه برخه ګردۍ باندې را غبرګوي ، وازی باید څومره وازکونجی ولري، ددې لپاره چی فیلتر جوړ شي.

۱۳ – یو مخروط ډوله کچګیلاس دې ټیك ۱ لیتر ځاي کړي. هغه ۱۵ سانتي متره جګ دۍ. د هغه نیمی (یا نیمی ګردۍ) دې څومره لوي وي.

۱۴ – ۵ مکعب متره شګه یوې ټوپۍ باندې اچول کیږي. دا ستوریکونج ۴۵ درجی دۍ . جګی او نیمی یي څومره لوي دي؟

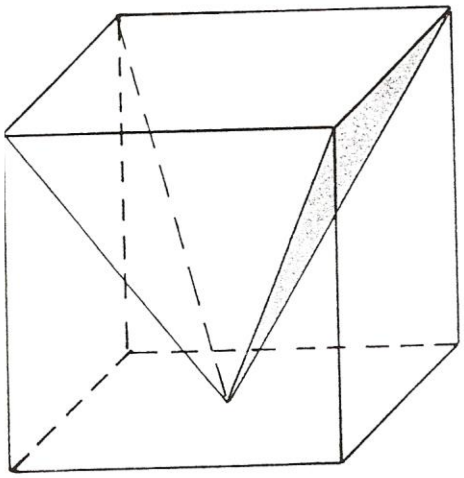
۱۵ – یو مخروط ډوله د اوبو ګیلاس دې د نیمایي پورې له اوبو ډك شي. دا اوبه په ګیلاس کی څومره جګی ولاړې دي؟

۱۶ – یو کافیواله یوه مخروط ډوله د شربت ګیلاس د شربت څخه ډکوي چی اندازه ۱۵ سانتي متره جګه ده. دۍ دا ګیلاس د یو سانتي متره پورې کم له شربت ډکوي. دا په دې توګه په سلو کی څومره شربت سپما کوي

۱۷ – په څیره ۲۶۶ کی ورکړ شوی اهرام ډکی وشمیری

۱۸ – په یوه چت باندې یو د وښو چتپټووني، چي ۵ ، ۴ متره جګ دۍ اینښوول کیږي، چی اړخ اوږدوالی یی a = 12,5 m متره او b = 9 m متره .دي. د

(c) ketabton.com: The Digital Library



خیره ۲۶۶

چت پورته کانتی یا پورته اړخ ۷ متره اوږد دی . د چتپټوونې ډکې وشمیرئ او همداسې د چتپټې سرهواره هم وشمیرئ.

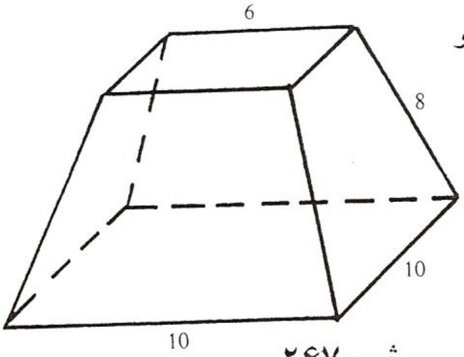
۱۹ – د یو دوه متره ژور بنسټ لپاره څومره خاوره باید راوویستل شي، که پوره ژی یا غاړه یې ۱۰ متره د غاړې اوږدوالی ولري او ستورېکونج –یعنی هغه کونج چې د غاړې یا اړخ سره د کنلو په لور جوړوي– یې ۶۰ درجې وي؟

۲۰ – د یوه هواډکې څومره مائیلوالی لري، که د یوه وني ستنې هوا ډکې شمیرلو لپاره چې مخروط ډوله دی د موټې قاعده وکارول شي، د لاندې سره

$V^* = \pi h\,[(r_1 + r_2)/2]^2$

د $r_1 = 10$ cm سره

او $r_2 = 5$ cm



خیره ۲۶۷

۲۱ – څومره مسو ټوټه په کار ده، چې خیره شوې مسخولی جوړه کړای شو(وکړنې په ضیس متر؟ (خیره ۲۶۷ .

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲۲ – جوړ شوي کارپوټي حومره درنی دي (اندازه په سانتي متره)

۲۳-د لاندې پخمخروطونو M ,O او V وشميرى

.

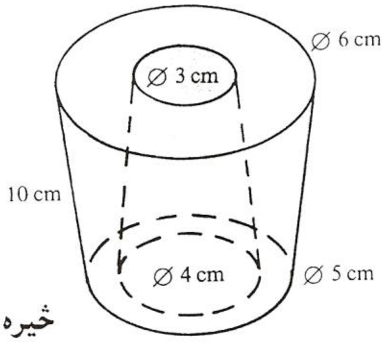
پخ کیګل مخروط

Kegelstümpfe:

a) $r_1 = 12$ cm; $r_2 = 10$ cm; $h = 8$ cm

b) $r_1 = 9$ cm; $r_2 = 7$ cm; $s = 6$ cm

c) $r_1 = 5$ cm; $h = 7$ cm; $s = 8$ cm



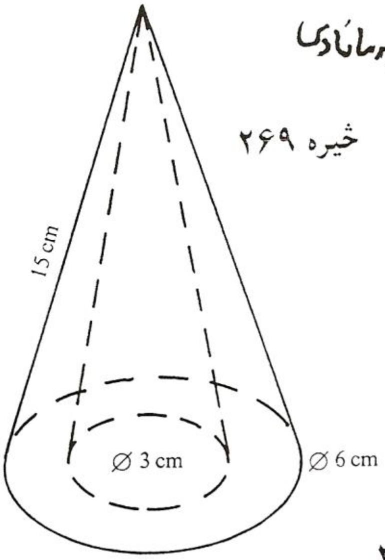
شيره ۲۶۸

Eisenwerkstück $\varrho = 6{,}5$ g/cm³

د اوسپنې کار لوټه

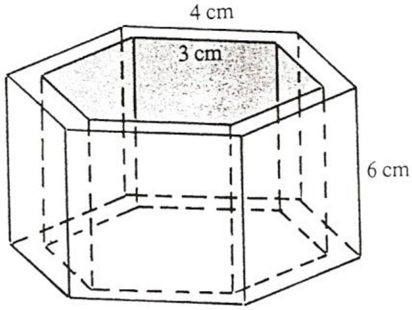
څ په دې کالبوتو کې هم د کمې پرسانادی
با غلظت

شيره ۲۶۹



Kunststoffmodell $\varrho = 2{,}5$ g/cm³

پلاستيک مودل



شيره ۲۷۰

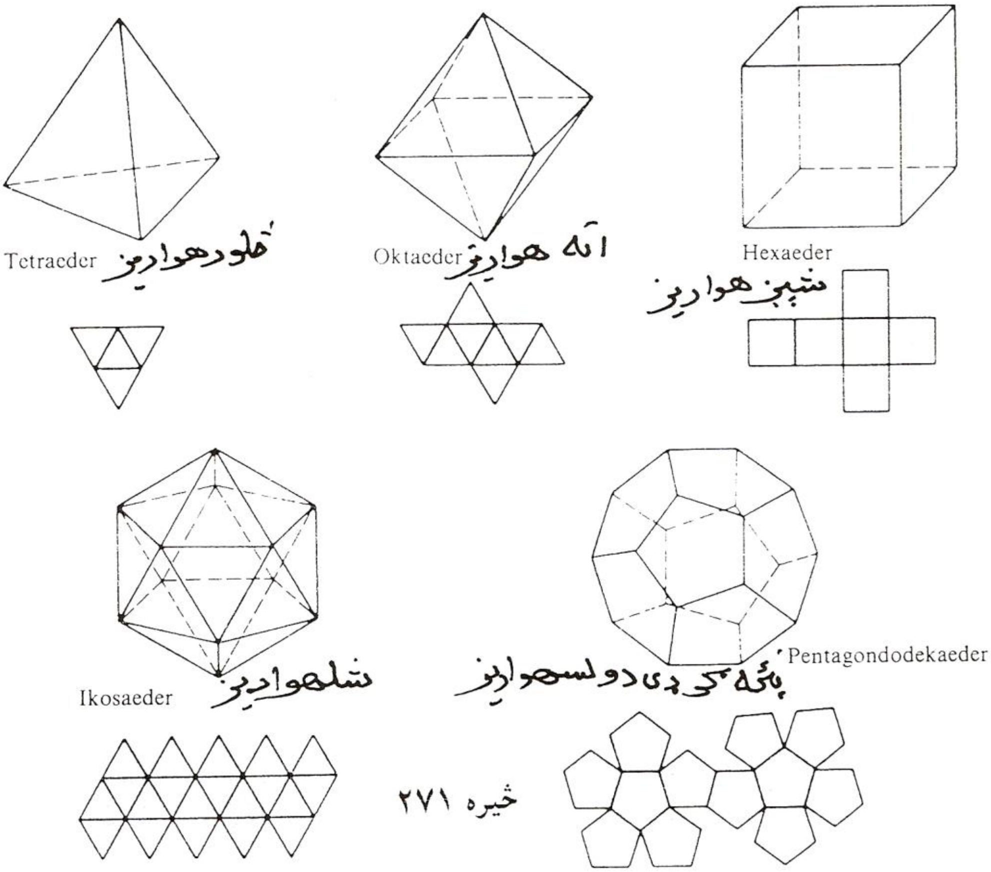
Messingsechskantrohr $\varrho = 8{,}3$ g/cm³

د مسنګ شپږ اړخیزه لوټه

(c) ketabton.com: The Digital Library

منظم ډیرهواریز

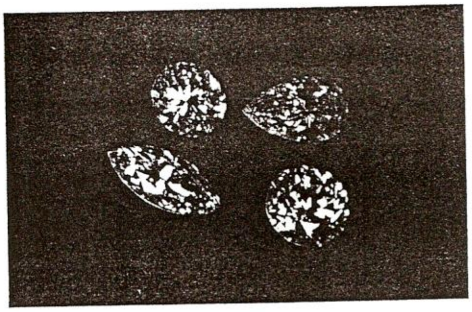
ټول بدنونه ، کوم چی یواځي بندهواري لري یا له هوارو رابند وي، پولوئیدر (یونانی : ډیر هواریز) نومیږي. موږ به دا له دې وروسته دا ډیرهواریز وبولو.
د دوي ترمنځ ټیك پنځه منظم یو بل ته ناورته بدنونه. دا د شمیرپوهنی له اړخه په ځانګړې توکه په زړه پورې دي، ځکه چی پاس هواري او ډکي یې بند دي، دا په دې مانا چي د فرمولونو له لاې انځوریدلی شي، او په دې برسیره ، ځکه چی طبعي کریستال دا شکلونه یا فورمونه یا ځیرې لري.



خيره ۲۷۱

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا پنځه منظم بدنونهد هواروبندهواریز ابو کهګ هواربندیزدي : تیترائیدر (څلورهواریز Tetraeder) ، هیکسائیدرHexaeder (شپږهواریز ، مکعب) اوکتائیدرOktaeder (اته هواریز) دودیکائیدر (دولس هواریز ، د خپل اړخهوارو له امله پنتاګون دودیکائیدرPentagondodekaeder پنځه ګوټي دولسهواریزه بلل کیږي)، او په همدې توګه ایکوزائیدر Ikosaeder(شلهواریز) څیرې په تیر مخ کې.

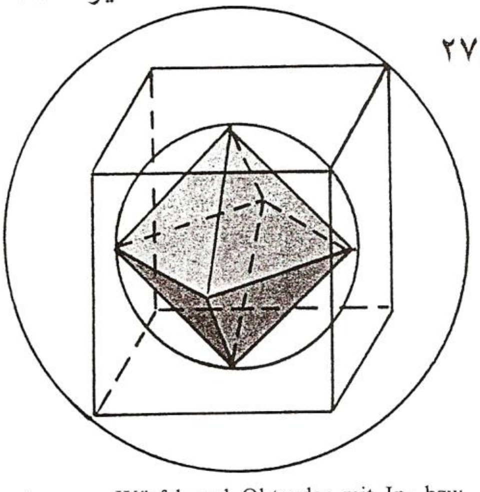


څیره ۲۷۲

بیلګی

د مالګي تیګي مکعب جوړوي، کوپفرسولفید مینرال Fahlerz تیترائیدر، د ګوګړو کریستال دودیکائیدر او الون (کالیوم الومینیوم سولفات) اوکتائیدر جوړوي.

څیره ۲۷۳



Würfel und Oktaeder mit In- bzw. Umkugeln

مکعب او اته هواریز د پلګی تیګی او په راکیږ غونډیږو ...

منظمډیرهواریز پلاتوني (افلاطوني) (خیالی platonische) بدنونه هم یادیږي، ځکه چې یوناني فیلوسوف او شمیرنپوه (۴۲۷ تر ۳۴۷ د م. پخوا) په دې نظر وو، چې څلور پخواني عناصر اور، خاوره، اوبه، او هوا په خپل واړه فورم تیترائیدر، ایکوزائیدر، اوکتائیدر او هیکسائیدر په ګوته کوي. د هغه په فکر جهان پخپله یو دودیکائیدر فورم لروده. په دې پنځو هر یوه بدن کي کیدی

(c) ketabton.com: The Digital Library

شي يوه ګردي دننه او دباندې وكښل شي. كه دا يو په بل كې دننه شي يا په بل عبارت دننه راګير شي، نو په دې توګه شپږ دننه – او شپږ دباندې هوارې لاس ته راځي ، كومو چې كيپلر Kepler دې عقيدې ته راوستى شو ، كوم (چې هغه وخت معلوم) شپږ پلانيت به په داسى لاره ګرځي، چې د هغوي نيممحورونه د داسى دننه – او دباندېغونډې ورانګو سره برابر شي.

لاندې جدول د دې منظم پولوئيدر ډيرهواريزومعلومو لويو پوره معلومات وركوي.

Polyeder	e	f	k	l	m	α	r	ϱ	O	V
Tetraeder	4	4	6	3	3	60°	$\frac{a}{4}\sqrt{6}$	$\frac{a}{12}\sqrt{6}$	$a^2\sqrt{3}$	$\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$
Hexaeder	8	6	12	4	3	90°	$\frac{a}{2}\sqrt{3}$	$\frac{a}{2}$	$6a^2$	a^3
Oktaeder	6	8	12	3	4	60°	$\frac{a}{2}\sqrt{2}$	$\frac{a}{6}\sqrt{6}$	$2a^3\sqrt{3}$	$\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$
Dodekaeder	20	12	30	5	3	108°	$\frac{a\sqrt{3}+a\sqrt{15}}{4}$	$\frac{a}{20}\sqrt{250+110\sqrt{5}}$	$3a^2\sqrt{25+10\sqrt{5}}$	$\frac{15a^3+7a\sqrt{5}}{4}$
Ikosaeder	12	20	30	3	5	60°	$\frac{a}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$	$\frac{a\sqrt{27}+a\sqrt{15}}{12}$	$5a^2\sqrt{3}$	$\frac{15a^3+5a^3\sqrt{5}}{12}$

د لته حروف لاندې ماناوې لري . a = د كانتې يا اړخ اوږدوالى ، e = د ګوټونو ګڼ (تعداد) f = د هواروګڼ. k = بدن اړخونوګڼ، l = د هوارو اړخونو ګڼ، m = په هركونج كې د كانتو يااړخونو ګڼ، α = د ګاونډيو هوارو ترمنځ كونج، r = د چاپيرګردي وړانګه ، ϱ = د دننه ګردي وړانګه ، O = پاس هواره يا پورته يا ټوله هواره ، V = ډكي.

پنځه يوون ډيرهواريز (Einheitspolyeder) لاندې (a = 1) ارزښتونه لري:

(c) ketabton.com: The Digital Library

Polyeder	r	ϱ	O	V
Tetraeder	0,6124	0,2041	1,7321	0,1179
Hexaeder	0,8660	0,5	6	1
Oktaeder	0,7071	0,4082	3,4641	0,4714
Dodekaeder	1,4013	1,1135	20,6457	7,6631
Ikosaeder	0,9511	0,7558	8,6603	2,1817

د اویلر د ډیرهواریز جمله، د په خوښه ډیرهواریز لپاره یو ټاکنمساوات راکوي، د ګوډګښون e ، اړخګښون k او هوارګښون f لپاره:

د اویلر ډیرګوډي یا پولوئید جمله : $e + f - k = 2$

په هرصورت داجمله یواځي د کونوکس یا نتوتو پولوئید یا ډیرهواریز لپاره باور لري، یعنی هغه ، چی په کومو کی ټول نیمي د بدن په دننه کی ځغلي، یعنی منظمو ډیرهواریز لپاره.

بیلګي:

کوادر : $8 + 6 - 12 = 2$

اوکتائید: $6 + 8 - 12 = 2$

دودیکائید $20 + 12 - 30 = 2$

غونډاری یا غونډوسکه(کره) او غونډاري برخې

ولې غونډاری یا غوندوسکه؟

که تاسو د انګرېزي فوټبال په عربي ژباړه په عربي وګورئ، نو کرةّ قدم به ترې واخلی.

(په لاندې کې ما د غونډاري یا غونډوسکې په ځای غونډی لکلی، چې ښه او ټیک نومونه نه ده.)

(c) ketabton.com: The Digital Library

د هندسې یا ځمککچپوهنې له مخې غونډاری یا غونډوسکه د ټولو هغو ټکو ټولګه ده یا د هغو ټکو ځای دی، چې له یوه په

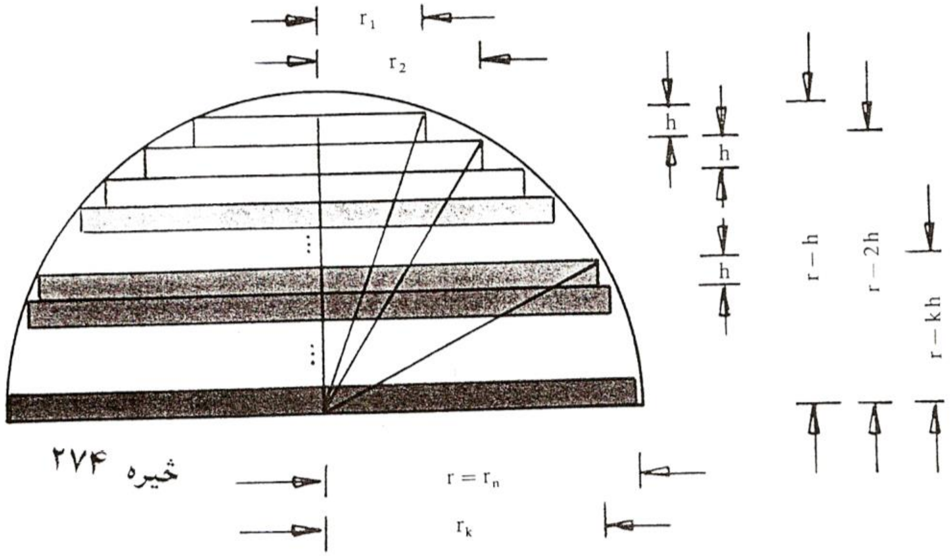
کلکه یاکره ټاکلی ټکی M څخه چی د غونډۍ منځټکی بلل کیږی همغه واټن r ولري.

غونډۍ نه یواځی د جګدرجئیز یا لوړ سیومتري(هره نیمی په همغه وخت کی سیومتري محور دی) له امله د بدنونو ترمنځ یو ځانګړي رول لري، بلکه هغه موږ انسانانو لپاره هم د مانا ډکه ده، ځکه چی ځمکه (نږدې) یو غونډۍ شکل لري . د بیلګي په توګه په کارتوګرافي کی ځمکه اوږدګردیو (میریدیانی Meridiane) باندې ویشل کیږي. په مریدیانی باندې هر واټن د ځمکی وړانکی R ته بیا یوه لینده په ګوته کوي. د ډکي ټاکلو لپاره بیا غونډۍ) ګردی استوانی ته ورته) په کوچنیو ستن ډوله چیتروګانو (کردې ټوټی، چی موږ ورته په هسکه مینه کی چیټرو وایو . د مات منګی څخه ګردې څیرې جوړیږي، ټوټه ده) ټوټه کیږي، چی جګوالی یی $h = r / n$ دی. د یوګونو چیتروګانو وړانګو لپاره باور لري یا صدق کوي(د پیتاګوراس جمله) :

$$r_1^2 = r^2 - (r-h)^2 \Rightarrow V_1 = \pi r_1^2 h$$
$$r_2^2 = r^2 - (r-2h)^2 \Rightarrow V_2 = \pi r_2^2 h$$

.

.



څیره ۲۷۴

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$r_k^2 = r^2 - (r - kh)^2 \Rightarrow V_k = \pi r_k^2 h$$
$$r_k^2 = r^2 - (r^2 + k^2 h^2 - 2rkh)$$
$$r_k^2 = 2rkh - k^2 h^2$$
$$r_k^2 = \frac{2r^2 \cdot k}{n} - \left(\frac{rk}{n}\right)^2$$
$$r_k^2 = r^2\left(\frac{2k}{n} - \frac{k^2}{n^2}\right) \Rightarrow V_k = \pi r^3\left(\frac{2k}{n^2} - \frac{k^2}{n^3}\right)$$

$$V_{ges.} = \pi r^3\left[\frac{2}{n^2}(1 + 2 + \ldots + n) - \frac{1}{n^3}(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2)\right]$$
$$V_{ges.} = \pi r^3\left[\frac{2}{n^2}\left(\frac{n}{2}(n+1)\right) - \frac{1}{n^3} \cdot \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)\right]$$
$$V_{ges.} = \pi r^3\left[\left(1 + \frac{2}{n}\right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}\right)\right]$$
$$V_{ges.} = \pi r^3\left[\frac{2}{3} + \frac{3}{2n} - \frac{1}{6n^2}\right]$$

که د «ستنګيو» ګڼون تلم پورته لاړ شي، نو په نوکانو کی لمړی ترم د مانا دی او لاس ته راځي

$V_{نیمغونډۍ} = (2/3)\pi r^3 \Rightarrow V_{غونډۍ} = \frac{4}{3}\pi r^3$

د غونډي د پاس هوارې د شميرلو لپاره دا په خورا زياتو برخه هوارو ويشي. که دا د ګوډ يا کونج ټکي د منځټکي سره ونښلول شي نو دا يو د اهرامشکل بدن ځان ته غوره کوي د r جګوالي سره.

د دې ټولو اهرامونو ډکيو زياتون د غونډې ډکی ورکوي. دا د خورا زياتو هوارو لپاره په نزدې توګه بسيا کوي، که چيرې څوك په پام کی ونه نيسی، چي دا سره د کمو استنثاوو کتل کيږي چی پوره هوار نه دي. برسيره پر دې بايد د دې بنسټ هوارو زياتون د غونډي پاس هوارې سره برابر وي. له دې امله باور لري

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

غونډي V = د اهرامونوډکیو زیاتون = r. (1 / 3) .

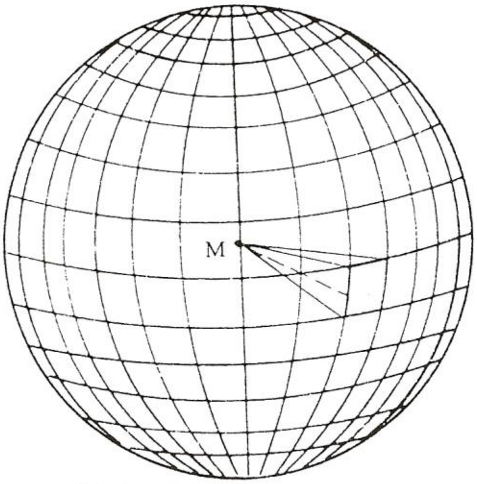
د غونډي پاس یا ټوله هواره

$(1/3).\ r.\ O$ د غونډي $= (4/3)\pi r^3$

O د غونډي $= 4\pi r^2$

په ټولیزه یا عمومي توګه باور لري

$O = 4\pi r^2 \quad , V = (4/3) \quad r^3$



ځیره ۲۷۵

پیلبیلګه:

منځنی ځمکوړانګه ۶۳۷۰ کیلو متره ده . د ځمکی پاسهواره او ډکی ځومره دي؟ ځمکه ځومره کتله لري،که د ځمکي منځنی سختوالی $5,514\ g/cm^3$ د مخه ونیول شي یا فرض شي؟

$O = 5,10.10^8\ km^2$,

$V = 1,08\ .\ 10^{12}\ km^3$;

$m = 5,97.10^{24}\ kg$

د خالیغونډي ډکی همداسی لاس ته راځي لکه د یوې خالي استواني ډکی (د مخه لوستل شوی دی) د دوه یو په بل کی پرتو کونځینتري غونډیو توپیر یا کمون:

V خالیغونډی $= (4/3)\ \pi\ (r_1^3 - r_2^3)$.

پیلبیلګه:

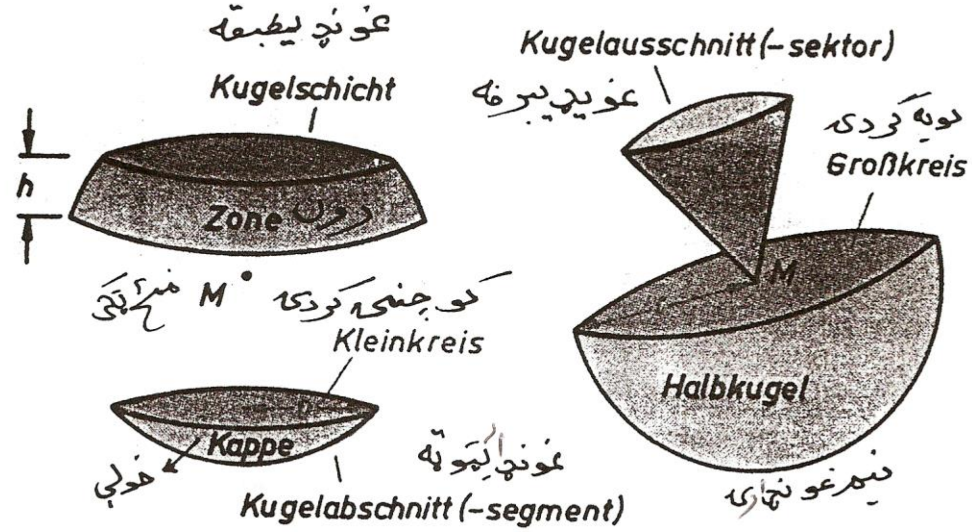
د اوسپنی خالیغونډی کومه کتله لري ، که د باندنینیمی یي ۱۲ سانتیمتره او

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دیوال پنډوالی یی ۸ ملیمتره (دیښتی یا سختوالی یا ټینګوالی) وي؟

$V = (4/3)\pi(6^3 - 5,2^3) = 315,8\ cm^3; \quad m = V \cdot \rho = 2463,25\ g$

اوس غونډیبرخی په پام کی نیسو. په ټولیزه توګه لاندې بنسټیز فورمونه مخ ته
له:



خیره ۲۷۶

ددې یوه ټوټه یا زیاتې ټوټې داسی منځ ته راځي ، چی غونډی د یوې یا یا زیاتو ګردیو له خوا غوڅه شي. که داغوڅی د غونډې له منځټکي تیر شي، نو دوه نیمغونډې او یوه لویه ګردی د غوڅهوارې په څیر منځ ته راځي. که غوڅی له منځټکي تیر نه شي، نو دوه غونډیټوټی منځ ته راځي. د دوه داسی غوڅیو ترمنځ یوه غونډیطبقه منځ ته راځي. که له غونډې یو مخروط ډوله ټوټه رابیله شي، نو غونډیبرخه منځ ته راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پرتله کړی) د دواړو خوليو د يو بل سره مساوي کيښوولو له لارې لرو:

$$\varrho_1^2 h_2 - \varrho_2^2 h_1 + hh_1h_2 = 0$$

دا بالاخره مور لاندې ته لاربښودوي:

$$V = \frac{\pi h (3\varrho_1^2 + 3\varrho_2^2 + h^2)}{6}$$

د غونډيبرخي ډکي يا غونډيبرخي حجم داسی لاس ته راځي، چی د يوه مخروط او او د ګرديتوټی ډکي سره زيات کړو:

$$V = \frac{\pi h^2 (3r - h)}{3} + \frac{\pi \varrho^2 (r - h)}{3}$$

دلته بيرته اړيکی (*) کارول کيږي، چی په لاندې ډول څيره بدولون ترې لاس ته راځي . په دې توګه د ϱ^2 لپاره ځاي په ځاي کوي او له دې لاس $\varrho^2 = h\,(2r - h)$ ته راځي :

$$V = \frac{\pi h^2 (3r - h)}{3} + \frac{\pi h (2r - h)(r - h)}{3}$$

$$\Leftrightarrow \quad V = \pi r h^2 - \frac{\pi h^3}{3} + \frac{2\pi r^2 h}{3} - \pi r h^2 + \frac{\pi h^3}{3}$$

$$\Leftrightarrow \quad V = \frac{2\pi r^2 h}{3}$$

نو د (*) په مرسته ځو کای په ځای نشي لوړ لاس ته راځي

$$V = \frac{2}{3}\pi h \left(\frac{\varrho^2 + h^2}{2h} \right)^2 = \frac{\pi}{6h} (\varrho^2 + h^2)^2$$

د غونډيتوټی پوښهواره M ، چی د غونډيخولی نوميږي او يا کاردينالخولی بلل کيږي، په همغه فکر شميرل کيږي لکه د غونډې پاس يا ټوله هواره . که د غونډيبرخی د ډيرو اهرامونو د زياتون په څير په پام کی ولرو، نو د هغی بنسټهواره همغه غونډيخولی ده. (کړی شو چی غونډيخولی په ځاي کپره وليکو) نو لرو :

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$Mr / 3 = 2\pi r^2h / 3 \iff M = 2\pi rh$$

که د (*) له لارې بدل شي، نو د غونډېکپرې لپاره لاس ته راځي :

$$M = \pi.(\varrho^2 + h^2)$$

د ټولهوارې د لاس ته راوړلو لپاره دې بيا يواځې د بنسټګردی هواره ور زياته شي. د غونډيطبقی پوښهوارې ته د غونډيزون Kugelzone وايي. دا د دوه کپرو له کمون څخه لاس ته راځي. ټوله هواره يا پاسهواره يې داسی لاس ته راځي، چی بنسټهواره او سرپوښګردي هوارې وززيات شي. د غونډيټوټي پاس هواره داسی لاس ته رځي، چی د غونډيکپرې هوارېته د مخروطپوښ ورزيات شي.

د غونډاري برخو لپاره لاندې فرمولونه باور لري.

د غونډاري ټوټه غونډاري خولی	$V = \frac{1}{3}\pi h^2(3r - h) = \frac{1}{6}\pi h(3\varrho^2 + h^2)$ $M = 2\pi rh = \pi(\varrho^2 + h^2)$ (Kugelkappe) $O = 2\pi rh + \pi\varrho^2 = \pi(2\varrho^2 + h^2)$
غونډاري ټيکلی غونډاري زون	$V = \frac{1}{6}\pi h(3\varrho_1^2 + 3\varrho_2^2 + h^2)$ $M = 2\pi rh$ (Kugelzone) $O = \pi(2rh + \varrho_1^2 + \varrho_2^2)$
غونډاري برخه	$V = \frac{2}{3}\pi r^2 h = \frac{\pi}{6h}(\varrho^2 + h^2)^2$ $O = \pi r(2h + \varrho)$

بيلګه:

۱ – د پنيرڅرخ د يوه غونډيطبقي فورم يا بڼه لري. د هغه پاس هواره او ډکی وشميرئ، که وي : $\varrho_1 = \varrho_2 = 25$ cm او $h = 20$ cm.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$V = (20\pi / 6)(3.25^2 + 3.25^2 + 20^2) = 43458,70 \text{ cm}^2$$

$$= 34,458 \text{ dm}^2$$

وړانګه r د پیتاګوراس د جملي په مرسته لاس ته راځي :

$$r^2 = \rho_1^2 + (h / 2)^2 \Rightarrow r^2 = 25^2 + 10^2 \Rightarrow r = 26,93 \text{ cm}$$

نو لرو

$$O = \pi (2.26,93.20 + 2.25^2) = 7310,59\text{cm2} = 73,11 \text{ dm}^2$$

۲ – یو دلوبې لاټو یا لوبې څرخې د غونډېټوټې بڼه لري د ټولجګوالی r = 16 cm او سور 10 cm = b = 2 ρ سره. د هغه ډکی او پاسهواره څومره لوي دي؟

د خولی جګوالی د پیتاګوراس د جملی په مرسته لاس ته راځي :

$$(r - h)^2 + \rho^2 = r^2 \Leftrightarrow r^2 = - 2rh + h^2 + \rho^2 = r^2$$

$$\Leftrightarrow h^2 - 2rh + \rho^2 = 0 \Leftrightarrow h^2 - 32h + 25 = 0$$

د دواړو اوبیو یا حلونو $h_1 = 31,2$ cm او $h_2 = 0,8$ cm سره.

داچی h < r ، نو باید یواځي دوم اوبی یا حل د کارونی یا ګټور وي. له دې امله لاس ته رځي

$$V = 2\pi .16^2 . 0,8 : 3 = 428,93 \text{ cm}^3$$

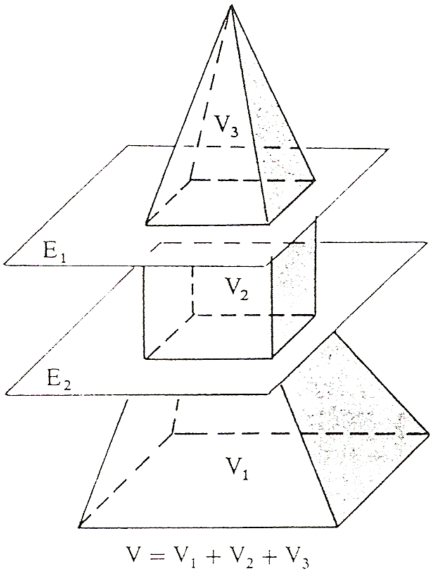
$$O = 16\pi(2 . 0,8 + 5) = 331,75 \text{ cm}^2$$

په خوښه جوړشوي یا فورم شوي بدنونه

لکه څنګه مو چی زیات تر پام تیر شو، ګټوور دی چی د یوه پیچلي بدن د ډکي یا پاسهوارې د شمیرلو لپاره دا بدن په ګټوره توګه یا هدفمند ډول ټوټې ټوټې کړو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په دې ډول ساده برخه بدنونه منځ ته راځي، کوم چې ض معلومو فرمولونو له لارې شمیرل کیدی شي.

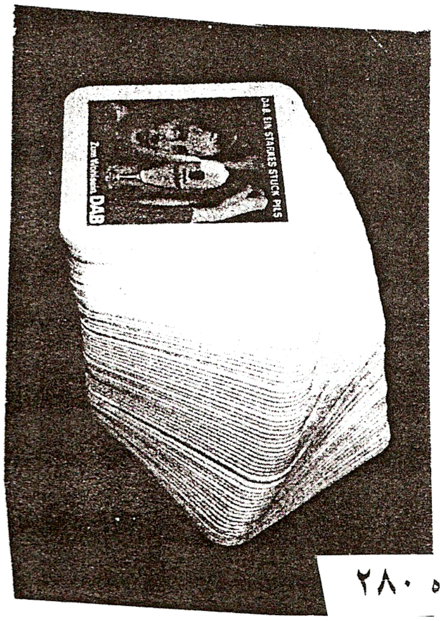


شیره ۲۷۹

بیلګې :

ددې شیره شوي بدن ډکی له یوه پڅ اهرام، کوادر یا غبرګاړخیز یا مکعب او یوه اهرام څخه لاس ته راځي.دا جوتیږي، که بدن په دوه غوڅیو په هوارو E_1 او E_2 ټوټه شي .

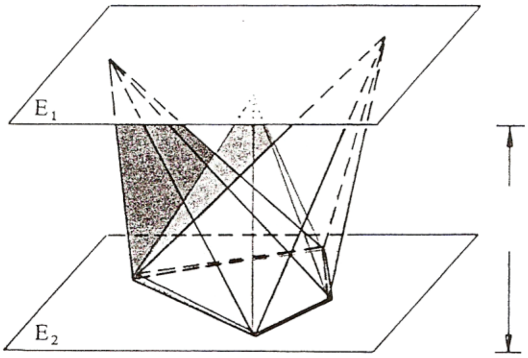
د بیاتیونی له لارې کیدی شي چې زیات بدنونه یوبل سره پرتله یا مقایسه شي(مخروط، اهرامونه) د ګیلاس اینښولو ټوټې(داسی ډبل کاغذونه دي چې د پیالیلاندې یا ریمکابي یا پشکاب په ځیر وي او ګیلاسونه پرې اینښوول کیږي) چې یو په بل اینښول شوي په پام کی نیسو. د دې ټوټو د څرخولو ، یا ځاي بدلولو له لارې جګوالی او ډکی نه بدلیږي. له دې منځ ته راغلی پوړی په پام کی نه نیول کیږي، ځکه چې په تیوري کی



شیره ۲۸۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا بدن د ناپای زیاتو طبقو څخه جوړ دی، چی پنډوالي یی په پام کي نه نیول کیږي د دې نور ورزیات استعمال د کاوالیری Cavalieri پرنځیپ دی



جمله :

دوه بدنونه همغه ډکی یا برابر ډکي لري، که د هغو ټول پراته غوڅي په همغه واټن بنسټهواري ته پراته وي.

په دې کی ضرور نه دی چي غوڅهواري دی کونګروا‌ینځ وي!

څیره ۲۸۱ : دا بیاتي شوي اهرامونه ډکي برابر دي، ځکه چی همغه جګي او برابر بنسټهوارې لري: $V = (1/2)G.h$ د کوچنیو واټنونوسره هره غوڅهواره چی د بنسټهوارې سره غبرګه وي، په اهرامونوکی هواربرابر غوڅهوارې خوړوي

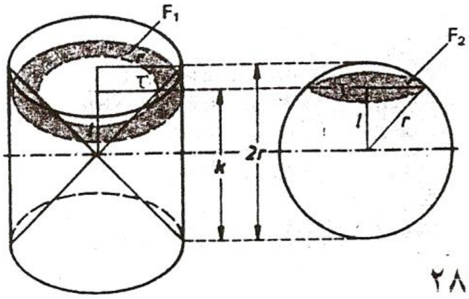
دا د غونډیږکي شمیرلو لپاره یو ښکلی میتود رامنځ ته کوي. د یوې ګردي استوانی یا ګردیټوټی څخه چی وړانګه r لري او 2r جګ دی دوه د څوکو یا ککرې له لارې یو بل ته مخامخ مخروطونه غوڅوي (یو دیابولو) د $r = h$ سره. داپاتی خالیفورم یوه د شګو ساعت پوښ راپه ګوته کوي. د یوې دومی همغی سره برابر ې ګردي استوانی یا ګردیتوتی د وړانګي r په اندازه یو غونډی راغوڅوو. د سیومتري له امله بسیا کوي که لاندې نیمغونډی او د «شګو» ساعتنیمی تر څیرنی لاندی ونیسو. هره غوڅهواره یوه بسټهوارې سره غبرګه هواره راکوي، په غونډي کی ګردی په شګوساعتپوښ کی

ګردیګوته یا ګردیکږی. دلته دې 'r د دیابولو څخه منځ ته راغلي ګردۍ وړانګه وي. r د غونډیغوڅیګردي وړانګه .

د هوارو لپاره چی واټن 1 له همغه بدن منځټکي ولري، باور لري:

$$F_S = \pi r^2 - \pi r'^2 = \pi (r^2 - r'^2)$$

$$F_K = \pi r^2 = \pi (r^2 - 1^1)$$



خیره ۲۸۲

د وړانګي جملی څخه، برسیره په دې لاس ته راځي: ← (د شګوساعت)

$$r' / r = 1 / r \Rightarrow r' = 1$$

$$\Rightarrow F_S = \pi (r^2 - 1^2) F_K$$

دواړه بدنونه ګورو چې ډکیمساوی یا ډکیبرابر دي.

اوس د استوانی ډکی $V_Z = \pi r^2 h = 2\pi r^3$ دی، څکه چی $h = 2r$ دی .

د دیابولو ډکی دی :

$$V_D = (2\pi r^2 / 3).(h/2) = \pi r^2 .h / 3 = (2/3)\pi r^2$$

او له دې سره د شګوساعت – او نیمغونډي ډکی :

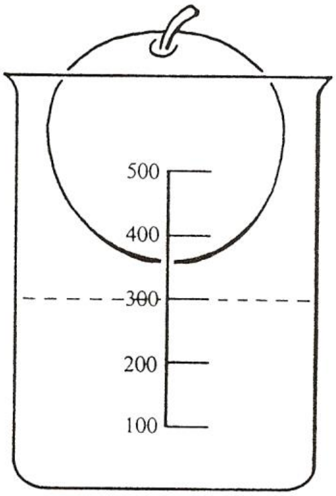
$$V_K = V_Z - V_D = 2\pi r^3 - (2/3)\pi r^3$$

$$V_K = (6/3)\pi r^3 - (2/3)\pi r^3 = (4/3)\pi r^3$$

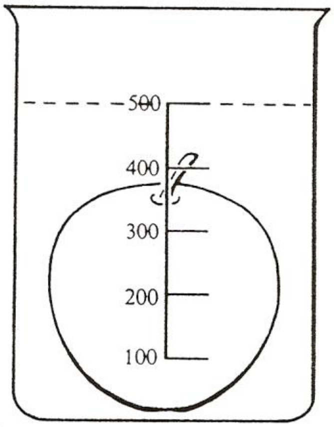
د پوره نامنظم شکلونو ډکی د شمیرپوهنی له لارې یا هیڅ نه شمیرل کیږي او یا پوره ټیك د پیچلو شمیرنپوهنو متوضو سره هم نه شمیرل کیږي. لکه د یوې منې یا د یوه

(c) ketabton.com: The Digital Library

الو ډکی یواځي فزیکی متودونه یا طریقی مرسته کوي چی ډکي یی وشمیرل شي.
لکه په لاندې ځیرو کي ، ځي روښانه شوی دی.



ځیره ۲۸۳



ځیره ۲۸۴

تمرینونه

۱ – د هغه بدن ډکی څومره لوي دی ، چمنځ ته راځي، که د مکعب په هره هواره یو ولاړ اهرام کیښول شي د $s = a$ سره؟

۲ – یو تیترائیدر څلورهوایز بدن او یو غونډی برابر پاسهوارې لري. د هغوي ډکی په کوم تناسب یو بل سره پراته دي یا کومه ځاننیونه یو بل سره لري؟

۳ – هر منظم پولوئید لپاره یوه دننه غونډی شته . چی د هغه هره هواره په منځټکي کی لمس کوي. ددې وړانګه دی r وي. د پولوئید ډ ګی اوV اوO پاسهوارې $V = O.r / 3$ لپاره دلایل راوړی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پام وکړی چی پولوئیدر په اهرامونو ټوټه شي چی وړانګه r ولري، په
ډول چي د پولوئید هر اړخهواره د داسی یوه اهرام بنسټهواره وي.

۴ – د المان د پارلمان په سر منه او اټیران چی له طیلا جوړ دي د پارلمان د
ډانګ سره غبرګ د قدرت نخښنه جوړوي. دا د پارلمان منه به څومر
وي، که دا د پاکی طیلا ښخه جوړ وي($\rho \sim 19{,}3\ g/cm^3$; $\sim 10\ cm$ ~
اټیران وزن ثابت یا ځای په ځای پاتیږي)؟

۵ – یوه غونډۍ، توته، اهرام (د هغو بنسټهواره) برابر وړانګی لري، د اه
غونډۍ جګوالی یا جګی داسی وټاکی ، چی الف) همغه ډکي لري» د
برابره پاسهواري لري.

۶ – د یوه غونډۍ ډوله تیلو ځاځکي ښخه، چی ۵ میلي متره نیمی لري، له
توئیږي د یوې ګردۍ ډوله تیلو پرده جوړوي، چی نیمی ئی ۱ متر . دا
څومره پنډه ده؟

۷ – د یوې سابونپوڼکی دیوال به څومره لوي وي، چی دباندنی نیمی یی
سانتي متره وي، کوم چی له ځاځکی جوړ دی، چی نیمی یی ۵ میلي م

۸ – یوه د ښیښی غونډۍ د دابضنی نیمی سره، چی ۱۲ سانتي متره دی ۲
وزن لري یا درند دی. د هغی دیوال څومره لوي دی ($2{,}6 g/cm3$ ~

۹ – یو هوا بالون یو ۲۵ متره نیمی لري.
الف) دا دننه سمخ یا غار یی څومره دروند دی، که د یو مربع متر و
وزن ۴۵ ګرامه وي؟ ب) ډکی څومره وزن لري که
هایدروجن ($\rho = 9.10^{-5}\ g/cm^3$) د ډکي مادې په ځیر وکارول شي؟

۱۰ – یو مکعب کي یو غونډاری یا غونډۍ د خورا لوي ډکی سره خوندي ک
په یوه غونډاري چی خورا کم ډکی ولری راګیر یا خوندې کیږي.د م
اړخ اوږدوالی 5 cm دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

الف د ټول تن غوڅی څیره وباسی .

ب) د دواړو غونډارو ډکی او پاسهواره وشمیری .

۱۱ – د لاندې هوايي بدنونو ډکي او پاس هوارې څومره لويي دي:

الف) سپوږمی ($r = 1735\ km$)

ب) مارس ($r = 3430\ km$)

پ) وینوس ($r = 6305\ km$)

ت) جوپيتر (ر $r = 71800\ km$)

۱۲ – د کورکغوټي($\rho = 0,25\ g/cm^3$) د ۳۶ سانتي متره نیمي سره یوه غونډېډوله د پارې زړی($\rho = 11,4\ g/cm^3$) لري. دا د پاربزړی څومره لوي دی، که غونډی تر نیمايي په ابو کی ډوبه شي؟

۱۳ – د یوه لوي سري سري ۴۰۰ میلیونه غونډېډوله د سږوپوښکی لري، هر یوه د نیمي $0,3\ mm$ سره. د ټولو پوښکیو ګډه پاسهواره څومره ده؟

۱۴ – یو غونډی ، چی وړانګه یی $r = 10\ cm$ ده، د یوې هوارې څخه په ۳ سانتي متره ، له منځ یا کوکز څخه، واټن غوځیږي. د دواړو برخو غوڅهوارې او ډکي وشمیری.

۱۵ – د پاتی یاد نایادو برخو M, V, h او r د لاندې غونډېبرخو لویوالی وشمیری

a) $r = 6\ cm$; $h = 5\ cm$ b) $M = 50\ cm^2$; $h = 3\ cm$

c) $h = r = 7\ cm$ d) $M = 700 cm^2$; $r = 10\ cm$

۱۶ – د ځمکی پاسهوارې کومه برخه د ۱۰۰۰۰ متره جګوالی څخه لیدل کیدی شي(د ځمکی وړانګه ۶۳۷۰ کیلومتره ده)

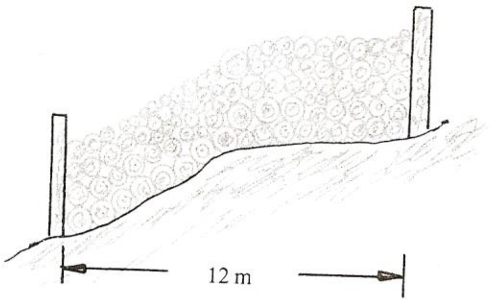
۱۷ – د یوه غونډي نیمی په څلورو برابرو برخو ویشل کیږي. په ټوټهټکو کی په نیمی ولاړې درې هوارې اچول کیږي. په کوم ځاننیونه یا تناسب کی

الف) د پوښهوارې ، ب) د راپیدا شوو یا منځ ته راغلو غونډي برخو

(c) ketabton.com: The Digital Library

سره پراته دي؟

۱۸ – په يوه غونډي کی، له منځ څخه ليدلو يا کتلو سره ، هوايی(دلته مطلب د غونډي ترمنځ هوا يا د هواډکی دی) پرسيدنه، د دريواړو کواوردیناتو څخه برابردي. که دا يو له بل توپير ولري، نو د اليپسوئيد څخه غږيږو، چی اصلی محورونه يی a,b او c دي. د ايليپسوئيد ډکی د فرمول $V = (4/3)\ a.b.c$ له مخی شميرل کيږي. ځکه په رينبتونی غونډی نه دی، بلکه يو اليپسوئيد ، چی اصلي محورونه يي $a = c = 6378$ km (د اکواتور وړانگه) او $b = 6357$ km (قطبي وړانگه) لوي دي. (که په کلکه ونيول شي نو د اکواتوروړانگو ترمنځ يو کوچنی توپير شته) د ځمکي ډکی وشميری او د مخ ته تير غونډي او غونډي برخي کی لوستلو سره يی پرتله کړی)



خيره ۲۸۵

۱۹ –په يوه زوړندي يا پيچومی باندي ۱ متر اوږد لرگی ډيری شوی، لکه په خيره ۲۸۵کی چی ليدل کيږي. څومره د هوامتر لرگی دا 1,20 m جگه د لرگوډيری لري.

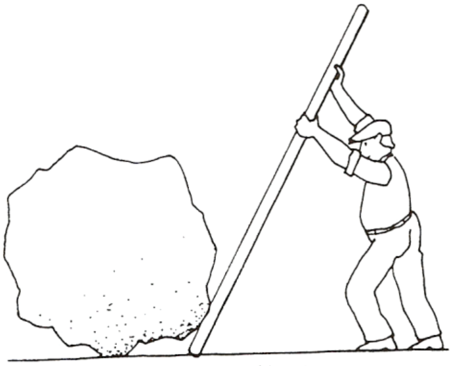
(c) ketabton.com: The Digital Library

وکتورشمیرنه

نځورونه

پیلبیلګه

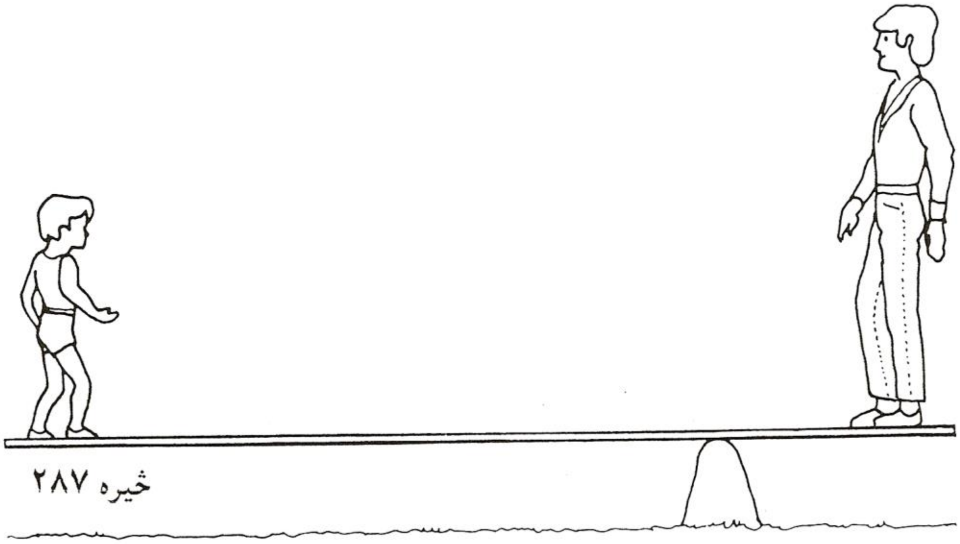
یوه درندې تیګی ته څنګه سړی حرکت ورکولی شي؟ طبعآ کیدی شي چي وړل یی وازمائل شي، مګر دا پوره ستونځی لري او دا لاندې طریقه یی ساده ده: د تیګی لاندې سړی یوه تخته یا اهرم ننبلوي او یا ورلاندې کوي، د بل سر نه یی لاندې لور ته زور کوي یا لاندې لور ته زور په واردوي. تیګه یو څرخونحرکت باندې راځي.
ددې حالت لپاره د اهرم قانون صدق کوي« زور د زوراهرم = بار د بار اهرم» .
که تیکه په پوره اندازه اوږده (او ستابیل) وي، کیدی چی یو ډیر نازورور سړی هم کړی شي، چی خورا درانده بارونه پورته کړي.



یا دا حالت د پورته پیلبیلګي سره ټیك وښانه څرګند شوی ؟ هیڅ نه پیښیږي، که ځوك په اهرم ښکته یا پورته زور ونه کړي بلکه یا راکښ یا ورپورې وهي.
موږ باید دا پوښتنه نوره هم روښانه کړو و د زوارزښت سره دزورتاشي لور هم په شپله لوبه کی ورداخل کړو.ددې هدف لپاره وکتور سره شمیرنه کړي.

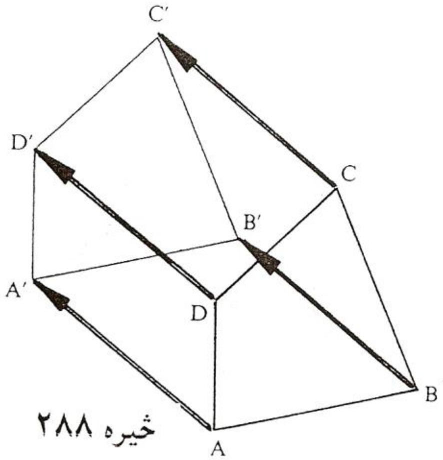
خیره ۲۸۶

(c) ketabton.com: The Digital Library



شیره ۲۸۷

تعریف : وکتور د یوه ارزښت او یوه لور سره تعریف دی. **تل د یوه غشي په شیر انځوریږي.** اوږدوالی د وکتور ارزښت (ګڼ ارزښت) ، په هواکی یی ځاي لور او د غشي څوکه د وکتورلور موخه یا هدف ښایي.



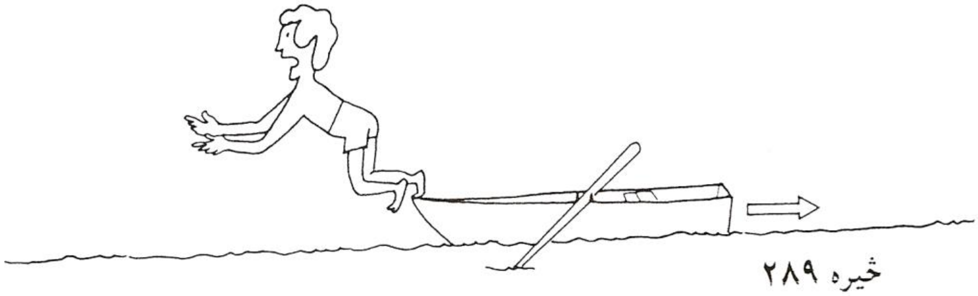
شیره ۲۸۸

دوکتورونو لپاره د کارونی ساحی

ګڼونه د مخنخښی سره کیدی شي د وکتور په حیث واضح شي. په فزیك کی کښنول، لکه زورونه، سرعتتونه، لارې کیدی شي د وکتورونو په شیر انځور شي. (د جلالکوټ څخه و شیره ✓ کښنول په وکتور سره په ښنه کیږي

(c) ketabton.com: The Digital Library

و هسکی مینی ته رابنایی، چی دا لار دا دوه ځایونه سره ونخلوي او دا هم رابنايي چی څومره اږده ده. وکتور دا را په ګوته کوي، چی ایا څوك له جلاکوټ څخه هسکی مینی ته ځي او که له هسکی مینی څخه جلالکوټ ته)



څیره ۲۸۹

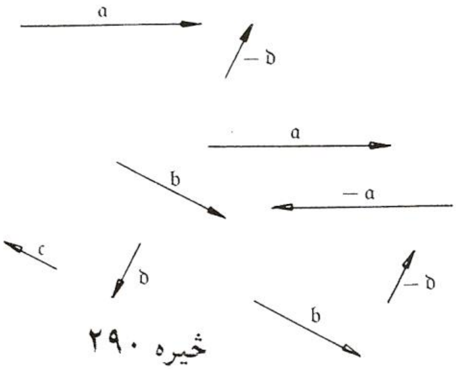
داچی یو وکتور د خپل پیلټکي او پایټکي سره ورکړ شوی دی، کیدی شي چی دا ټکي هم د هغه په انځورونه کی استعمال شي.

> **تعریف:** هغه وکتور چي له ټکي P و ټکي Q ته لاربنودوي، د $\overrightarrow{PQ}$ سره په نخښه کیږي.
> بل ډول لیکدودونه یی دي: $\overrightarrow{PQ} = \mathbf{a} = \vec{a}$.

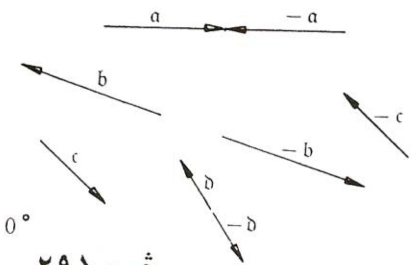
په راکښلو سره که ټکی 'P د P څیره او ټکي 'Q د ټکي Q څیره وي، نو د $\overrightarrow{PQ}$ اوږدوالی او لورد $\overrightarrow{P'Q'}$ یو بل سره برابر دي. له دې امله دا باید برابر ولیدل شي یا وګڼل شي. یو وکتور له دې امله یو غشی نه دی بلکه ډیر یوبل سره غبرګ او کوګرواینځ غشي دي. له دې امله د ورته ټولګي څخه هم غږیدی شو. (دا دې ځما په لمړي د شمیتپوهنی کتاب کي وکتل شي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

ثیره وکتورو نه د ایکویوالنځتېولګی
په ثیر: دوه وکتورونه ټیك هلته سره برابر دي، که هغه همغه ارزښت(اوږدوالی) او همغه لور ولري.



ثیره ۲۹۰



ثیره ۲۹۱

تعریف

د **a** مطلقه ارزښت $a = |\mathbf{a}|$ دی. a تل یو نامنفي ګڼ دی.
وکتورونه د ارزښت ۱ سره مورږ یوونوکتورونه یا واحدوکتورونه بولو.
وکتورونه د همغه ارزښت سره مګر د مخامخ لور سره مخامخ یا په څټ وکتورونه بلل کیږي:

$$|\mathbf{a}| = |-\mathbf{a}| = a$$

$$\overrightarrow{PQ} = \mathbf{a} = -\overrightarrow{QP} = -(-\mathbf{a})$$

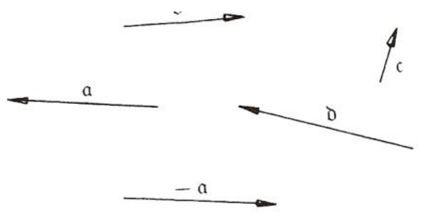
یواځنی وکتور د 0 (صفر) ارزښت سره صفروکتور **0** دی:

$$\overrightarrow{AA} = \mathbf{a} \Rightarrow |\overrightarrow{AA}| = |\mathbf{a}| = 0$$

دا چی وکتورونه له ټکي وټکي ته لارې روښانه کوي، کیدې شي چی د وکتورونو د توضیح لپاره کواوردینات یا پروت ولاړ سیستمونه (محورونه) هم وکارول شي:

تعریف: وکتورکواردینات د پیل او پای ټکو توپیر یا کمون څخه لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library



خیره ۲۹۲

په هواره کي : $a = \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} x_Q - x_P \\ y_Q - y_P \end{pmatrix}$

په هوا کی : $a = \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} x_Q - x_P \\ y_Q - y_P \\ z_Q - z_P \end{pmatrix}$

خیره وکتورونه او د هغوي ارزښتونه(اوږدوالی):

$| \mathbf{a} | = |\mathbf{-a}| = 2,5 \; ; | \mathbf{b} | = 2 \; ; | \mathbf{c} | = 1 \; ; \; | \mathbf{v} | = 3$

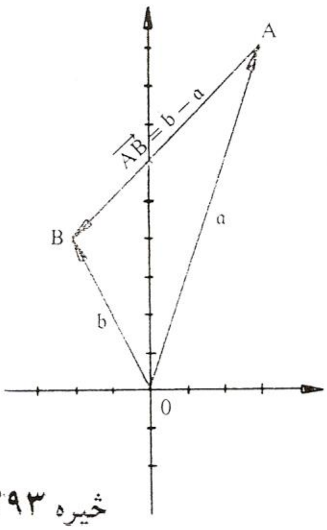
بیلګي:

وي دي $A(3|9)$ او $B(-2|4)$ پیل- او پایټکي . نو د A او B څخه ټاکلی وکتور کواوردینات په لاندې ډول لاس ته راځي :

$a = \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix}; \quad b = \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$

$c = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -2-3 \\ 4-9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \end{pmatrix}$

$-c = \overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} 3+2 \\ 9-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$



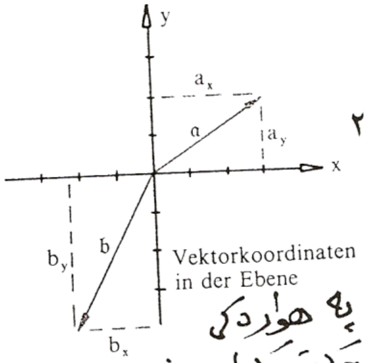
خیره ۲۹۳

جمله: د وکتور ارزښت د پیتاګوراس له جملی څخه لاس ته راځي او دا د یوګونو کواودیناتو له لارې :

په هواره کی: $| \mathbf{a} | = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په هوا کې: $|\mathbf{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$



خیره ۲۹۴

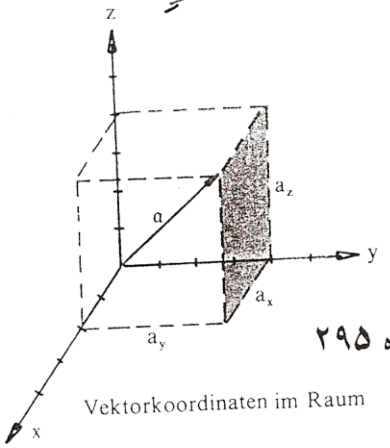
په هوارډکې وکتورکواوردینات

بیلګې :

$$a = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow |a| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$b = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \end{pmatrix} \Rightarrow |b| = \sqrt{8^2 + 8^2} = \sqrt{128} \approx 11,31$$

$$c = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix} \Rightarrow |c| = \sqrt{4^2 + (-5)^2 + 6^2} = \sqrt{77} \approx 8,77$$



خیره ۲۹۵

په هواکې وکتورکواوردینات

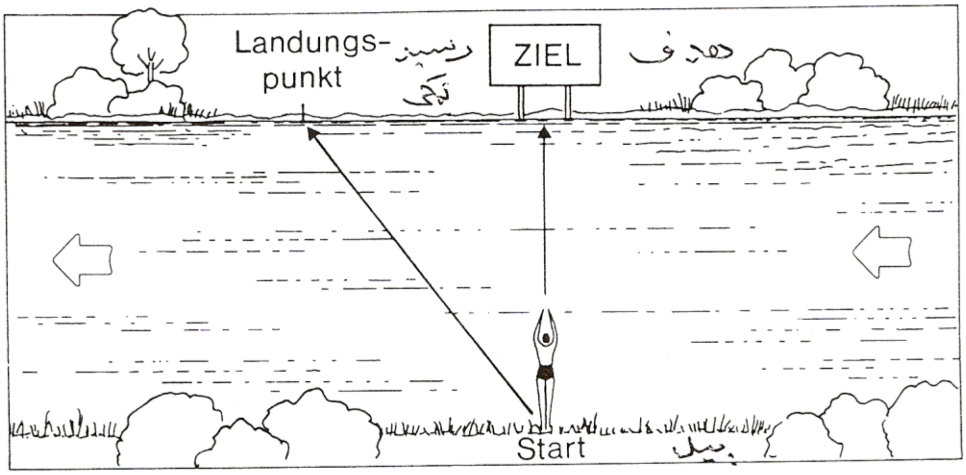
وکتورزیاتون او s–ځلوون یا ضربول

پیلبیلګه: یو لامبووهونکی د سین بلی لور ته د سین په سور یا پلنو لامبی، دا په دې مانا چې اوبه روانی دي. سره له دې چې دا تل سیده لامبي ، دا نه شي کولی چې هغه د لمبا ځاي ته مخامخ ځاي ته ولمبیدی شي.د روانو اوبو څخه د ځان سره ووړ کیږي. په تولیزه –

(c) ketabton.com: The Digital Library

یا عمومي توګه ده یو مائل حرکت وکړ یا مایل یي ولمبل، کوم کې چې د ده د لمبا سرعت او د سین سرعت یو په بل زیات شوي دي.

ګرافیکی د وکتورزیاتون داسی صورت نیسي، چی د دواړو سرعتونو وکتورغشي په خپلو پیل ټکو یو په بل ږدي او دا هر یو د یوه غبرګ اړخیز سره یوځایی وصل کوي. د غبرګ اړخیز نیمی د دواړو سرعت وکتورونو زیاتون ، چی له پیل ټکی پیل کیږي انځوروي. یعنی د لامبووهونکي او د اوبو د سرعت زیاتون ، ځموږ په ځیره کی «



ځیره ۲۹۶

تعریف: وکتورونو ګرافیکی سره زیاتیږي، که د دوهم وکتور پیلټکی د لمړي وکتور په پاګي کینبول شي یعنی د غشی په سر کینبول شي او داسی وریسی . دا زیاتون وکتور نو بیا د لمړي وکتور د پیل ټکی د دوهم وکتور یا د ځنځیر اخرني وکتور د څوکی یا غشي سر پورې غزول کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د خیرونو څخه دا لاندې هم لاس ته راتلی شي

جمله : د زیاتونوکتور کواودینات همداسی کمونوکتور د پیلوکتور د زیاتوز همداسی کوم څخه لاس ته راځي.

په هوارۍ

$$a + b = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \end{pmatrix}$$

په فضا کې

$$a + b = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \\ a_z + b_z \end{pmatrix}$$

بیلګه

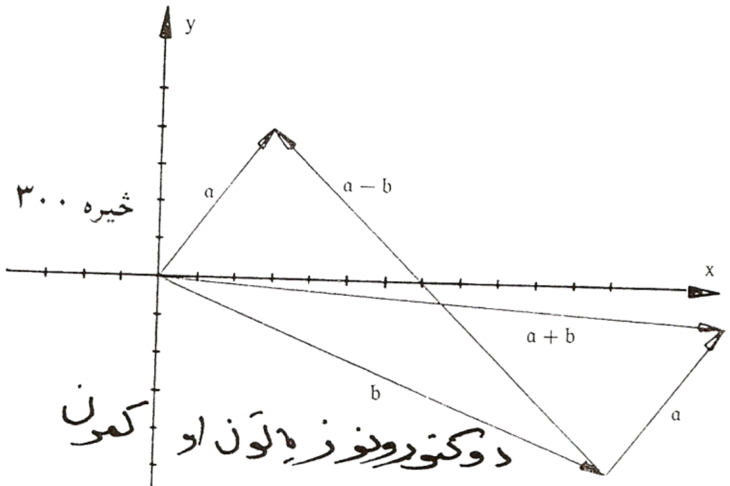
1. $a = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 12 \\ -5 \end{pmatrix}; \quad |a| = 5 \quad |b| = 13$

$$\Rightarrow a + b = \begin{pmatrix} 3 + 12 \\ 4 \ - 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$a - b = \begin{pmatrix} 3 - 12 \\ 4 \ + 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$b - a = \begin{pmatrix} 12 - 3 \\ -5 - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -9 \end{pmatrix}$$

$$|a - b| = |b - a| \approx 12{,}73; \quad |a + b| \approx 15{,}03$$



Addition und Subtraktion von Vektoren

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$2.\quad a=\begin{pmatrix}4\\3\\2\end{pmatrix};\quad b=\begin{pmatrix}-2\\0\\5\end{pmatrix};\quad c=\begin{pmatrix}7\\8\\-9\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow a+b=\begin{pmatrix}4-2\\3+0\\2+5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\\7\end{pmatrix}$$

$$a-c=\begin{pmatrix}4-7\\3-8\\2+9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\-5\\11\end{pmatrix}$$

$$a-b+c=\begin{pmatrix}4+2+7\\3-0+8\\2-5-9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13\\11\\-12\end{pmatrix}$$

$$a+a=\begin{pmatrix}4+4\\3+3\\2+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\6\\4\end{pmatrix}=2\cdot a$$

دا وروستنی بیلگه د وکتورونو د ځلولو لپاره ده چې له ګڼونو سره ځل شوي (s– ځلون یا · ضربونه) یعنی د سکالار سره ځلونه :

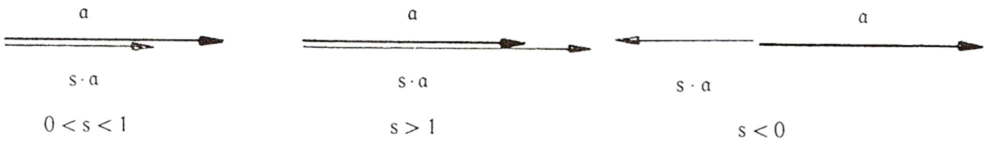
تعریف : وي دې s یو ریل ګڼ (سکالار هم نومیږي) **a** یو وکتور. نو s.**a** = **a** . s هغه وکتور لاس ته راکوي ، چې همغه لور ولري لکه **a** او s –واره اوږدوالی ولري. وکتور **a** له s سره ځلیږي، که د وکتور هر کومپوننت د s سره ځل شي:

$$s\cdot a=\begin{pmatrix}s\cdot a_x\\s\cdot a_y\end{pmatrix}$$ په هواره کې ، $$s\cdot a=\begin{pmatrix}s\cdot a_x\\s\cdot a_y\\s\cdot a_z\end{pmatrix}$$ په هواکې

$$a = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}; \quad s_1 = 4; \quad s_2 = -0{,}5$$

$$\Rightarrow s_1 \cdot a = \begin{pmatrix} 4 \cdot 5 \\ 4 \cdot 7 \\ 4 \cdot 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 28 \\ 36 \end{pmatrix}; \quad s_2 \cdot a = \begin{pmatrix} -0{,}5 \cdot 5 \\ -0{,}5 \cdot 7 \\ -0{,}5 \cdot 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2{,}5 \\ -3{,}5 \\ -4{,}5 \end{pmatrix}$$

هندسي د یوه وکتور ځلونه د یوه رییلګڼ سره د هغه وکتور منځنی غزونه ده د ځلوونی یا فاکتور s په اندازه. د وکتور پیلتګی د کرښمنځ یا غزونمنځ دی.
دلته د $|s|>1$ سره وکتور اوږدیږي یا غزیږي» او د $|s|<1$ سره وکتور لنډیږي.
د $|s|=1$ لپاره د وکتور ارزښت تغیر نه خوري. که $s<0$ وي، نو د وکتور لور راپه ښت کیږي یا راګرځي یا برعکس کیږي.



څیره ۳۰۱: د وکتورa ځلونه د یوه رئیل ګڼ s سره.

که $s = 0$ وي ، نو $s.\mathbf{a}$ صفر وکتور **0** دی .

جمله :په ټوله توګه یا مجموعه کی د سکالار سره د وکتور ځلونو لپاره ل
اندې شمیر قاعدې باور لري:

$$|s.\mathbf{a}| = |s|.|\mathbf{a}|$$
$$(s_1 + s_2).\mathbf{a} = s_1.\mathbf{a} + s_2.\mathbf{a}$$
$$s.(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = s.\mathbf{a} + s.\mathbf{b}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګي:

$$\textbf{1.}\quad \left|-3\cdot\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{matrix}-9\\-12\\-15\end{matrix}\right| \approx 21{,}21$$

$$\left|-3\cdot\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}\right| = |-3|\cdot\left|\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}\right| = 3\cdot\sqrt{50} \approx 21{,}21$$

$$\textbf{2.}\quad (4-6)\begin{pmatrix}-3\\7\end{pmatrix} = (-2)\begin{pmatrix}-3\\7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\-14\end{pmatrix}$$

$$(4-6)\cdot\begin{pmatrix}-3\\7\end{pmatrix} = 4\cdot\begin{pmatrix}-3\\7\end{pmatrix} - 6\cdot\begin{pmatrix}-3\\7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-12\\28\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-18\\42\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\-14\end{pmatrix}$$

$$\textbf{3.}\quad 3\cdot\left[\begin{pmatrix}5\\-3\\11\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-2\\6\\8\end{pmatrix}\right] = 3\begin{pmatrix}7\\-9\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}21\\-27\\9\end{pmatrix}$$

$$3\cdot\left[\begin{pmatrix}5\\-3\\11\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-2\\6\\8\end{pmatrix}\right] = 3\cdot\begin{pmatrix}5\\-3\\11\end{pmatrix} - 3\cdot\begin{pmatrix}-2\\6\\8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}15\\-9\\33\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-6\\18\\24\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}21\\-27\\9\end{pmatrix}$$

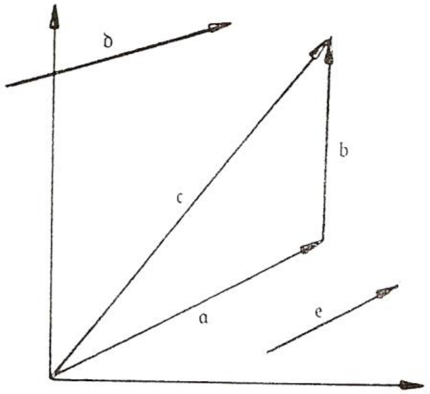
که یو وکتور د بل وکتور زیاتواره په څیر انځور کړی شي، نو دواړه وکتورونه لاینې بلواك بلل کیږي، په غیر له دې لاین خپلواك بلل کیږي.
ټیك په لاندې توګه افده کیږي:

> **تعریف:** دوه وکتورونه **a** او **b** لاینی بلواك دي، که چیرې (یواځنی ټاکلی) ریيلګڼ s (سکالار) موجود وي د کوم لپاره چې **s.a = b** باور ولري.
> دا وکتورونه لاینخپلواك دی، که انځورونه **s.a = b** د هیڅکوم ریيل ګڼ s لپاره ممکنه نه وي.

په هواره (R^2) کی تل دري وکتورونه لائني بلواك دي. په هوا (R^3) کی تل ۴ وکتورونه لاینبلواك دي. په هواره زیات تر زیاته ۲ او په هوا کی زیات تر زیات

(c) ketabton.com: The Digital Library

دري وکتورونه لاینیخپلواک کیدی شي.



شیره ۳۰۲

لایني بلواک وکتورونه	لایني خپلواک وکتورونه د بیلګې پو توګه
{a , e}	{a , b}
{ a , b , c }	{ b , c }
{ a , c , d }	{ e , d }

بیلګې:

۱ – وکتورونه $a = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 11 \end{pmatrix}$ او $b = \begin{pmatrix} 6 \\ -12 \\ -22 \end{pmatrix}$ لایني بلواک دي ، ځکه چې

$$s.\begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -12 \\ -22 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} -3.s = 6 \\ 6.s = -12 \\ 11.s = -22 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} s = -2 \\ s = -2 \\ s = -2 \end{matrix}$$

۲ – په خټ یا برعکس، وکتورونه $a = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$ او $b = \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \\ 20 \end{pmatrix}$ لاینیخپلواک دی، ځکه چې :

$$s.\begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \\ 20 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} -4.s = 10 \\ 6.s = 15 \\ 8.s = 20 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} s = -2,5 \\ s = 2,5 \\ s = 2,5 \end{matrix}$$

ګورو، چې دلته سره ګډ یا مساوي s نه شي پیداکیدی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د وکتورونو لاینی خپلواکوالي او لاینی بلواکوالی په هواره او هوا کي د وکتورونو انځورونو لپاره په کارول کیدي شي:
لکه څنګه چی ټکی په کواوردیناتو کی تعریفیږي چی خپل واټن له محور څخه بیانوي، نو همداسی کیدی شي چی وکتورونه ، ځانونه، په ښونه داسی وکتورونو روښانه یا بیان کړي، چی ځغاستلور یی یو ددې کواوردیناتو محور وي..

تعریف:

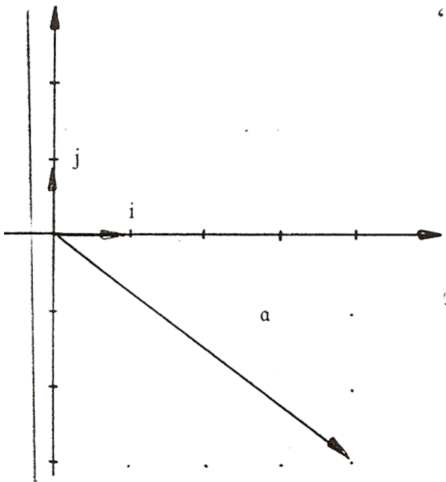
وکتورونه : $i=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ او $j=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ په هواره کي، همداسی

وکتورونه $i=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ او $j=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ په هوا کي او $k=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

بنسټ وکتورونه بلل کیږي. دا مثبتمحور لو په ګوته کوي او ددې لپاره باور لري:

$$|\mathbf{i}| = |\mathbf{j}| = |\mathbf{k}| = 1$$

هر وکتور کیدی چی په هواره کی له i او j او په هوا کي د i , j او k وکتورونو په نامه لاینی کمبیناشن په څیر د بنسټ وکتورونو څخه انځور کړی شي.



څیره ۳۰۳

بیلګي:

$$a=\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}=4\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}-3\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=4\cdot i-3\cdot j=4\cdot i+(-3)\cdot j$$

$$b=\begin{pmatrix}-3\\11\\6\end{pmatrix}=-3\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+11\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+6\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=-3i+11j+6\ell$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په پای کی یو نظر په الجبري جوړښت، چی وکتورونه یی د زیاتون او کمون په بنسټ او د ریبلګڼونو سره ځلونی له لاري لري:

د ټولو وکتورونو ډیری V په هواره کی (همدا ډول په هوا کی) د زیاتون په نسبت یو زیاتون کموتاتیو ګروپ جوړوي (د ګروپ تعریف وروسته)، ځکه چی لرو :

اول – $a + b \in V$ د ټولو b, a لپاره ، چی له V وي، رابندیدنه

دوم – $(a + b) + c = a + (b + c)$ د ټولو c, b, a لپاره، چی له V وي اسوشیاتیو قانون

دریم – $0 + a = a + 0$ صفر وکتور 0 ناپییلی توکی دی

څلورم – $0 = a + (-a) = (-a) + a$ هر وکتور ته یو په ښځ وکتور یعني مخامخ وکتور موجود دی

پنځم – $a + b = b + a$ د ټولو a, b لپاره، چی له V وي. کموتاتیو قانون

برسیره پر دې د ځلوونی لپاره د یوه ریل ګڼ سره باور لري:

شپږم – $s. a \in V$ د ټولو a لپاره ، چی له V وي

اووم – $1 . a = a$ د ټولو a لپاره، چی له V وي

اتم – $(m+n) . a = m.a + na$ د ټولو ریبلګڼون m او n لپاره او هر وکتور a لپاره ، چی له V وي.

نهم – $m.(a + b) = m. a + n.b$ د ټولو وکتورونو a او b لپاره چي له V وي او هر ریبل ګڼ m لپاره.

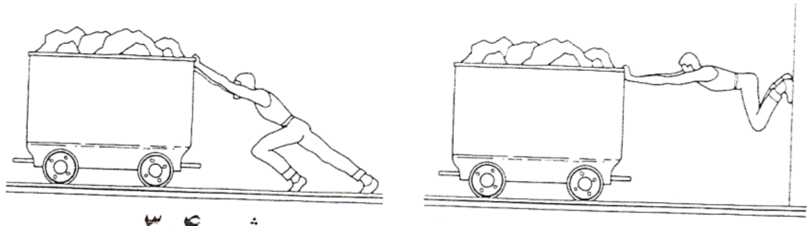
په ټولګیزه توګه یو داسی جوړښتخویونه د وکتورهوایا ۰ فضا تر نامه یادیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

سکالار ځل

وکتورونهٔ لکه چې ومو لیدل،کیدی شي چې سره زیات شي او یا د یوه رییلګڼ سره ځل شي . کیدی شي، چې وکتورونه یو له بل سره هم ځل کړی شي؟
دا حتی په دوه توپیریدونکو ډولونو ممکن دی . یو واریانت یو د یوې لوي په توګه، بیرته یو وکتورهوا جوړوي(د مخه لوستل شوی دی)، بل یې د یوې لوي په توګه سکالار لاس ته راکوي، چې دا یواځې ارزښت لري او لور نه لري.

پیلبیلګه :
په پخوا وختونو کی د سکرو د کانو واګونونه په لاس راکښل کیده. دلته دا پوښتنه رامنځ ته کیږي، چې ولی کارګر واګون مخته راکښوده او په همدې توګه ټیلواهه، ددې لپاره چې موټر سم پورته کړي؟



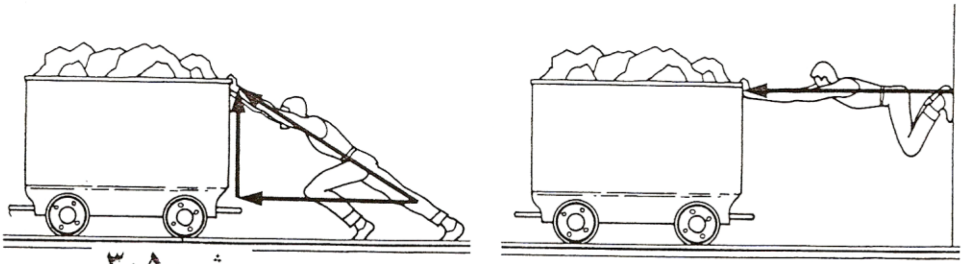
خیره ۳۰۴

ددې پوښتنی سره موږ د دوه وکتوري لویو سره سر او کا رلرو: زور او لار، چې د هغو ځل په فزیك کی «کار» بلل کیږي. هغه زور چې واګون په حرکت کی راولی، باید د واګون په لور واچول شي یا د واګون په لور تاثیر وکړي. یو په پورته لور اچولی زور کړی شي چې واګون پورته کړي. هر مایل تاثیر کوونکی زور کیدی شي د وکتور زیاتون قانون له لارې په یوه واګون سره غبرګ او بل په دې ولاړ زور ټوټه کړي یا تجزیه کړي. یواځې پروت زور واګون د مخ لور ته

(c) ketabton.com: The Digital Library

په حرکت راولي. په دې توګه واردونکی زور او مؤثر زور په ټولیزه توګه همغه یو زور نه دی. دا د دې پوښتنې ځواب هم دې، چې ولي کارګر د مخ لور ته تکیه وهي.: هغه رسی چې د هغې له لارې زور اچول کیږي، نزدې ځمکې سره غبرګه ځغلي (= لار) ، (نزدې د متهو ټول زور کیدی شي مؤثر واقع شي. هر څومره چې کونج د ځمکې او رسی ترمنځ مایل وي، همغومره زيات زور بی تاثیره پاتې کیږي.

دا په کار اچولی زور ، په دوه یو په بل ولاړو کمپوننتو (زورونو) ټوټه کیدل یو ولاړکونجیز دریګوډی جوړوي، دا لار سره غبرګ زور د $F.\cos\alpha$ په څیر لاس ته راځي . کار $W = F.s.\cos\alpha$ پخپله په برخلاف د جوړښتلوی زور او لار – لور نه لري، بلکه یواځې ارزښت لري:
دا یو سکالار دی.



څیره ۳۰۵

تعریف:

د دوه وکتورونو **a** او **b** یو **a . b** سکالار ځل لاندې (ویل کیږي **a** ځل **b**) یو یواځنی ریل ګڼ پوهیدل کیږی ،

$$\mathbf{a}.\mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|.\cos\alpha = a.b.\cos\alpha$$

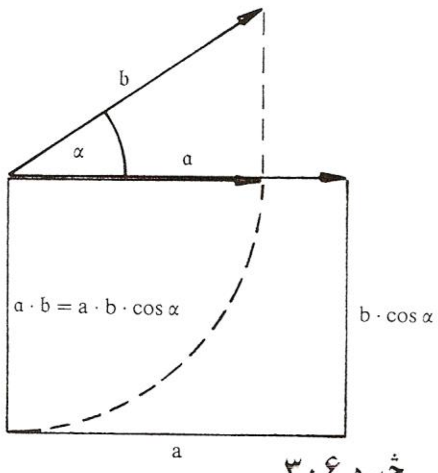
(c) ketabton.com: The Digital Library

دلته کونج ∝ د **a** او **b** وکتورونو ترمنځ کونج دی .

هندسي سکالار ځل د یوه ولاړکونجیز هوارمتن دی یا هواره ده د اړخونو او b.cos∝ سره (د **b** پریوستون په **a**). داسی یوه هواره هلته موجود ده،که له دې وکتورونو هیڅ یو هم د صفر اوږدوالی ونه لري او یا 0 =| cos∝ ، یعني ∝≠ 90° ده.

د **b** ولاړ پریوستون په **a** کله کله په ∝ سره ښول کیږي: $b_a = b.\cos\alpha$

$$\mathbf{a.b} = a.b_a$$



خیره ۳۰۶

جمله: د دوه وکتورونو 0 =| **a** او 0 =| **b** سکالار ځل هلته او هلته صفر دی، کله چې دواړه یو په بل ولاړ وي:

a . b = 0 <=> a _|_ b

بیلګه:

د یوه ولاړکونجیز کواوردینات سیستم(Orthono.-rmalbasis اورتونورمالبنسټ) یو په بل نیغ ولا ړ دي. له دې امله له دوه مختلفو وکتورونو ځل صفر دی او د یوه بنسټوکتور سکالار ځل د ځان سره تل ۱ دی :

$$\mathbf{i.i = j.j = k.k = 1 \quad , \quad i.j = j.k = k.i = 0}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د د زياتون څخه په بل ډول، د وکتورډيری نسبت و سکالار ځل ته تړلی يا رابند نه دی . د سکالار ځل د په خوښه وکتورونو ځل د هغه ډيري څخه راوباسی، چی عمليه په کی اجرا کيږي، دا په دې مان چی دا نتيجه بيرته وکتور نه دی يعنی د وکتو په ډيري کی هم نه دی پروت. دلته اسوشياتيو قانون هم باور نه لري:

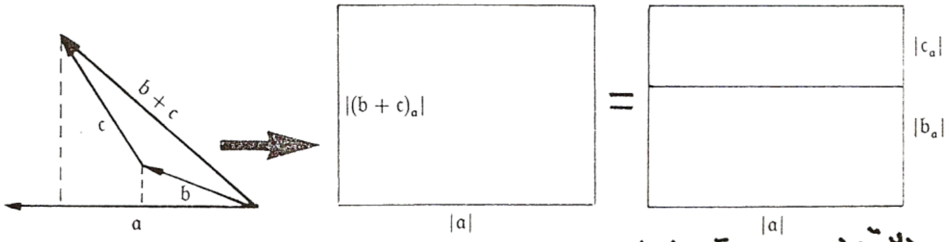
$$a.(b.c) = a.|b|.|c| \cos(b.c)$$

د a يو زيتځله دی او په ښي : $(a.b).c = |a|.|b|.\cos(a.b).c$ د c يو زياتځل دی.

سره له دې هم باورلري:

سکالار ځل کموتاتيو دی :	$a.b = b.a$
او وکتور زياتون ته ډيستربوتيو دی.	$a.(b+c) = a.b+a.c$

څيره ۳۰۷



Das Distributivgesetz $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ ډيستربيوتيو قانون :

کموتاتيو قانون په کمپوننتوانځورونو له لارې او بنسټ وکتورونو له لارې ساده ښوول يا ثابت کيدی شي. د بيلګي په توګه په هواره کی :

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$a \cdot b = (a_x \cdot i + a_y \cdot j) \cdot (b_x \cdot i + b_y \cdot j)$$
$$a \cdot b = a_x i \cdot b_x i + a_y j \cdot b_x i + a_x i \cdot b_y j + a_y j \cdot b_y j$$
$$a \cdot b = a_x b_x i \cdot i + a_y b_x j \cdot i + a_x b_y i \cdot j + a_y b_y j \cdot j$$
$$a \cdot b = a_x b_x \cdot 1 + a_y b_x \cdot 0 + a_x b_y \cdot 0 + a_y b_y \cdot 1$$
$$a \cdot b = a_x b_x + a_y b_y$$
$$a \cdot b = b_x a_x + b_y a_y = b \cdot a$$

په ورته ډول دا د دري او زيات کمپوننتوکتورنو لپاره هم ښوول کيدي شي:

تعریف : د سکالار ځل د کمپوننت انځورونی لپاره باور لري:

$$a \cdot b = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_y \\ b_y \end{pmatrix} = a_x a_y + b_x b_y \quad \text{bzw.} \quad a \cdot b = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

همداسی

د **a** او **b** ترمځ کونج په لان دې ډول تاکل کيږي:

$$\cos \alpha = \frac{a \cdot b}{|a| \cdot |b|}.$$

د---

ردوه وکتورونو ترمنځ رابند کونج α شميرنه د تير مخ مساواتو څخه لاس ته راځي

بيلګي:

1. $a = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \end{pmatrix} \Rightarrow a \cdot b = (-3) \cdot 10 + 5 \cdot 6 = 0$

also auch $\cos \alpha = \dfrac{0}{\sqrt{(9 + 25)} \cdot \sqrt{(100 + 36)}} = 0 \Rightarrow \alpha = 90°$

2. $a = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} \Rightarrow |a| = a = \sqrt{81 + 9} = \sqrt{90}; \quad |b| = b = \sqrt{4 + 25} = \sqrt{29}$

$a \cdot b = 9 \cdot 2 + 3 \cdot (-5) = 18 - 15 = 3 \Rightarrow \cos \alpha = \dfrac{3}{\sqrt{90} \cdot \sqrt{29}} \approx 0{,}05872 \Rightarrow \alpha \approx 86{,}63°$

(c) ketabton.com: The Digital Library

وکتورځل

پیبیلګه:
که چیرې په یوه سوري جام کي اوبه واچوی او بیا سوری خلاس کړی او یا که چیرې تاسو یو لاسمینځي یا لمباڼه ډك کړی وي، نو که چیرې اوبه بندی راوباسی اوبه په ښیلوریز څرخون ډوله حرکت له سوري وځي .
دا داوبو تویدل د دروند ورن په ذریعه منځ ته راځي ، په ښي لور څرخیدنه اوبه د کوریولیسزور Corioliskraft له لارې منځ ته راځي. دا د کشولو زور په حرکت کوونکي سیستم کی باید وکتل شي یا تر نظر لاندې وي، او دا د ځمکی په ځانڅرخون له لارې کتل کیدیشي.

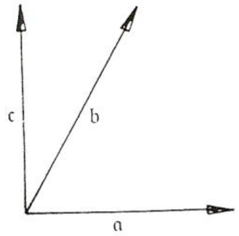
د دوه وکتوري لویو یو بل باندې تاثیر له امله (حرکت یا خوزیدنه د دروندزور په بنسټ او د ځمکی څرخون له امله خوزیدنه یا حرکت) یوه بله لویه ، چیدا هم وکتوري لویه ده منځ ته راځي. د دریواړه، د لور له امله ، په یواځنی ګڼاریکو کی سره پرتی دي، او او د دریمی ارزښت کیدی شي د نورو دوهو ارزښتونو لاس ته راوړو. په ټولیزه توګه باور لري:

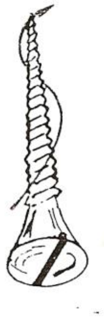
تعریف :
د وکتورځل $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ لاندې ($\mathbf{a}$ اتیران $\mathbf{b}$) یو وکتور پوهیږو، چی لاندې خویونه ولري
اول . دا وکتوردریګوني $\mathbf{a,b,c}$ په لړیپرلپسی یو ښی سیستم جوړوي
دوم. وکتور $\mathbf{c}$ په وکتورونو $\mathbf{a}$ او $\mathbf{b}$ نیغ ولاړدی، یعنی په هغی هواره هم چی د دوه وکتورونه په کی پراته دي.

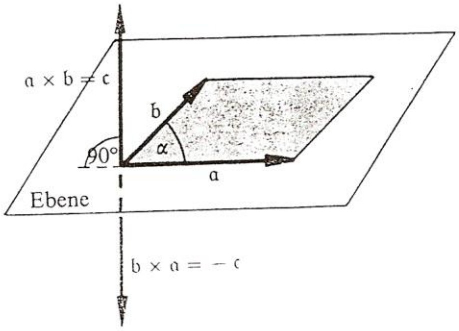
(c) ketabton.com: The Digital Library

دریم. د وکتور **c** ارزښت د **a** او **b** څخه جوړ غبرګ اړخیز سره مساوي دی

$$|\mathbf{a}\times\mathbf{b}| = |\mathbf{a}|.|\mathbf{b}| . \sin(\mathbf{a};\mathbf{b}) = a.b.\sin\alpha$$







خیره ۳۰۸ : یو ښي سیستم کیدی شي، چی د پیچیمیخ له لاري وښوول شي:
که پیچیمیخ له **a** و **b** ته وځرخول شي، نو میخ د **c** په لور خوزي یا حرکت کوي

خیره ۳۰۹

خیره ۳۰۹ : وکتور ځل او هندسي اهمیت یی

پس که د وکتور وکتور ځل صفر وکتور وي ، نو یا یو له دې دواړو وکتورونو صفروکتور دی او یا دواړه سره غبرګ پراته دي (دا په دې مانا ، چی $\alpha = 0$ او یا $\alpha = 180°$)

جمله: وکتور **c** د دیترمینانت په مرسته د وکتورونو **a** او **b** د کمپوننتو له لاري لاس ته راوړ کیدي شي

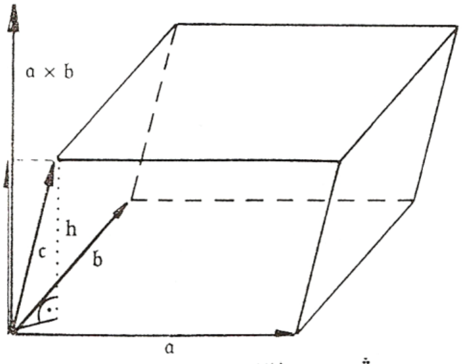
$$c = a \times b = \begin{vmatrix} i & a_x & b_x \\ j & a_y & b_y \\ k & a_z & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

$$c = a \times b = (a_y b_z - b_y a_z)\, i + (a_z b_x - b_z a_x)\, j + (a_x b_y - b_x a_y)\, k$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

شپاتځل Spatprodukt یا غبرګهواریزي ځل

د وکتورځلونه ارزښت هغه غبرګهواریزي هواره ده، کومه چې له دواړو وکتورونو غزیږي. یو دریخوایز یا دریدمینزیونال وینه و غبرهواریز ته شپات یا بیرته همغه شپږهواریز وایي (دا د مخه لوستل شوی) دا کیدی شي، چې له درې وکتورونو څخه غزیدلی فکر ته راوړل شي. د دې ډکی داسی شمیرل کیږي، چې بنسټهواره د جګې سره ځل کړای شي. دا جګې د c ولاړ پریوستون دی، په $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$. یو هندسي بدنیز Stereometrische اوبی یا حل له دې امله د c او $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ د سکالارځل له لارې لاس ته راوړ لکیږي.



څیره ۳۱۰

تعریف :

د وکتورونو **a , b** او **c** څخه غزیدلی شپات یا غبرګهواریز (Parallelepiped) ډکی دلاندې ځل څخه شمیرل کیږي:

$$V_{Spat} = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$$

دا غبرګهواریزځل مثبت دی، که وکتورونه **a ,b , c** په دې ترتیب یو لړیپرلسی ښی سیستم جوړ کړي، په غیر له دې بیا منفی دی.

تر هغی ، چې بنسټهواره د یوه وکتور له لارې ځان ښای یا ښوول کیږي یا ځان څرګندوي، نو دا ډکي یو سکالار دی .

په ادبیاتو کی دا د ځل اهیران نخښه ، چې په نوکانو کی نیول شوې، زیات وخت نه

(c) ketabton.com: The Digital Library

یکل کیږي، یعنی لیکو: $(a\times b)\cdot c = a.b.c$ ، غبرګهواریزځل شمیرنه د
یترمینانت شمیرنی له لور صورت نیسي:

$$(a\times b)\cdot c=\begin{vmatrix} i & j & \bar{\imath} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}\cdot\begin{pmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{pmatrix}$$

$$(a\times b)\cdot c=\begin{vmatrix} c_x & c_y & c_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{vmatrix}$$

داچې دا اتېرانځل لکه د مخه مو چې وویل د بنسټوکتورونو د لاینې کومبینیشن په ځیر انځوریدلی شي، دا بیرته په یوه له دې کمپوننتو، کومی چې له صفر توپیر لري.

بیلګه:

د هغه غبرګهواریز ډکی ځومره لوي دی، چې دد لاندې وکتورونو څخه غزیدلی وي؟

$$a=\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix};\quad b=\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$ او $$c=\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$ aufgespannt wird? له دې چې غزیږي

$$abc=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & -2 & 5 \\ 3 & -3 & 6 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & -3 & -1 & -2 \\ 4 & 5 & 6 & 4 & 5 \end{vmatrix}$$

$$abc=2\cdot(-2)\cdot 6+0\cdot(-3)\cdot 4+3\cdot(-1)\cdot 5-3\cdot(-2)\cdot 4-2\cdot(-3)\cdot 5-0\cdot(-1)\cdot 6$$

$$abc=-24+0-15+24+30-0=15$$

غبرګهواریز نو ډکی 15 V.E لري (یعنی ۱۵ (V,E) ډکیبوونونه یا –واحدنه)

تمرینونه

۱ – دواړه وکتورونه $a=\binom{3}{4}$ او $b=\binom{-2}{5}$ ورکړشوي دي. په یوه کواوردیناتسیستم کی دا لاندې رسم کړی

(c) ketabton.com: The Digital Library

رسم کړی .

a) a + 3b , b) 0.5a - 3b , c) 2(a + b)

او په هروار یی نتیجه د کمپوننت په ډول وړکړی؟

۱ – په هوا یا فضا کی ټکی (4|1-|2)B .(3|2|1)A , O(0|0|0) او C(-5|7|9) ورکړ شوي دي، لاندې وکتورونه په کمپوننت لیکدود څه نومیږي یا څه ډول دي؟

a) $\overrightarrow{OA}$ b) $\overrightarrow{BC}$ c) $\overrightarrow{AC}$

d) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ e) $\overrightarrow{AO} - \overrightarrow{BC}$ f) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD}$

د دې وکتورونو ارزښتونه څومره لوی دي؟

۲ – که په یوه هواره کی دوه وکتورونه a او b لایني خپلواك وي، نو هر بل د دې هوارې وکتور د دې دوه وکتورونو a او b د لایني کمبینیشن په څیر انځوریدلی شي. a او b بنسټ جوړوي.

وکتور c د مساوات $c = k_1a + k_2b$ له لارې د لایني کمبینیشن په څیر د ریپلو ګنونو k_1 او k_2 سره انځور کړی. له دې دوه مساوات د k_1 او k_2 ناپیژندونکو سره جوړ کړی. (د دې لپاره دې زما د شیمرپوهنی کتاب وکتل شي)

$$a = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix}-5\\4\end{pmatrix}$$

$$a)\ c = \begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix} \qquad b)\ c = \begin{pmatrix}-2\\-3\end{pmatrix} \qquad c)\ c = \begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix}$$

۴ – وي دې : $a = \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ او $b = \begin{pmatrix}-5\\12\end{pmatrix}$ ، وشمیری:

a) a.b b) -a.b c) a.a d) b.b

e) a.(b.a) f) a.(b.a).a

او د دواړو وکتورنو ترمنځ کونج.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۵ – کونجونه $\alpha = w(a,b)$, $\beta = w(b,c)$, $\gamma = w(a,c)$ د وکتورونو

$$a = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

لپاره وټاکی/:.

۶ – د تریګونومتري یا کونجکچ د کوساین جمله، لکه د مخه مو چی لوستلی د سکالارځل په مرسته وشمیری.

۷ – د تالس جمله، چی د مخه مو لوستلی د سکالارځل په مرسته وشمیری:

۸ – په خوښه دریګوړي ABC لپاره د پیتاګوراس جمله او د هغی په څټ وشمیری:

$$\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BC} \quad \Leftrightarrow \quad |\overrightarrow{AB}|^2 = |\overrightarrow{AC}|^2 + |\overrightarrow{BC}|^2$$

۹ – د مختـه لوستل شوو کاتیت جمله او جګجمله وکتوري وښایی.

۱۰ – د یوه په خوښه غبرګهواریز ABCD لپاره وشمیری:

۱۱ – الف) د غبرګ اپیپت یا غبرګهواریز ډکي وشمیری، چی له

وکتورونو $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 3 \\ \\ \end{pmatrix}$ او $c =$ څخه غزیدلی وي.

ب) دا څه مانا لري ، که وي : $(a \times b) . c = 0$ ؟

پ) د یوې بیلګي په مرسته وښایي، چی اتیرانځل اسوځیاتیو نه دی.

ت) د وکتورونو $a = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 0 \\ \end{pmatrix}$ او $c = k. \begin{pmatrix} 4 \end{pmatrix}$ له لاري یو غبرګ

اپیپت ورکړ شوی دی، چی ډکی یی ۸ یوونونه دی. k به څومره لویه وي؟

۱۲ – یوه سپورتي الوتکه د 250 km/h په سرعت د N60°O په لور الوځي.
سملاسی له جنوب څخه باد لګیږي. دا باد یو د 75 km /h سرعت لري او دا

(c) ketabton.com: The Digital Library

الوتکه له پیللارې اړوي. دا نوې الوتللور وټاکی او د الوتکی نوی سرعت!

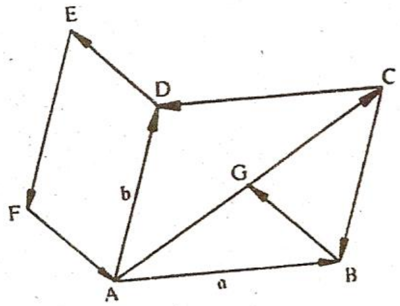
۱۳ – د وکتورونو a او b لپاره کله لاندې اړیکی باورلري ؟

a) | a + b| < | a | + | b | , b) | a + b | = | a | + | b |

۱۴ – لاندېوکتورونه ورکړشوي دي:

$$a=\begin{pmatrix}-6\\4\end{pmatrix};\ b=\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix};\ c=\begin{pmatrix}9\\-6\end{pmatrix};\ d=\begin{pmatrix}-45\\30\end{pmatrix};\ e=\begin{pmatrix}20\\4\end{pmatrix};\ f=\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix};\ g=\begin{pmatrix}-2,5\\-0,5\end{pmatrix}$$

وکتورونه c تر g (که ممکن وي) د وکتورونو a یا b د ډیرواره په څیر انځور کړی.



۱۵ – ناټاکلی وکتورونه د a او b د وکتورونو لاینې کمبینیشن په څیر انځور کړی. (څیره)

۱۶ – یو دریګوډی ABC په $a=\begin{pmatrix}6\\3\end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix}-3\\-1\end{pmatrix}, c=\begin{pmatrix}0\\-5\end{pmatrix}$.

سره ورکړ شوی دی. دا اړخ اوږدوالی او دننني کوجونه وشمیری.

۱۷ – په یوه څلورګوډي کی دی $a=\begin{pmatrix}6\\1\end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix}2\\8\end{pmatrix}$.

$c=\begin{pmatrix}-3\\5\end{pmatrix}$ und او $d=\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$

د نیمی اوردوالی وشمیری او د هغی غوڅکونج ($\leq 90°$)

۱۸ – یوه کیبنتی د ټکی O څخه د $r=\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$ په لور خوزیږي یا حرکت کوي، دا کیبنتی تګلور دی، باد د $w=\begin{pmatrix}-1\\-4\end{pmatrix}$ په لور لږیږي.

الف) د بادزور F_|_ برخه څومره لویه ده، چی په زیګل باندې ولاړ پریوزي. یا تاثیر کوي؟ دا زور کومه لور لري؟

ب) د F برخزور له _\|_F څخه څومره لوي دی، ك ومه چی کینښتی د مخ په لور بیایي؟

۱۹ – یو بار، چی ۱۰۰۰۰ نیوټونه دی د دوه مائلو ستنو سره نیول شوی. جوړښت یی یو مساوي پښیز دریګوډی جوړوي ، د بنسټ ۶ متره سره او د پښی اوږدوالی (د ستنی اوږدوالی) ۵ متره دی.

الف د وشن زور په ضواړو ستنو څنګه تاثیر اچوي؟

ب) د دې برخه زور ولاړ او پراته کمپونتوتونه څومره لوي دي؟

۲۰ –د وکتورv کواوردینات و اورتوګونالبنسټونو$\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ او$\begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}$ ته وشمیری، که $|v| = 5$ وي او v د وکتور$\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ سره یو د 55° کونج جوړ کړي.

۲۱ – وي دې $a + b + c = v$. وشمیری : $a.d + b.v + c.d$

۲۲ – د څلور ټکو A, B, C, D او همداسی E, F, G, H سره یو غبرګ اړخیز ورکړشوی دی. د لاندې ورکړنو یا شرطونو سره د هغو هوارې وشمیری

a) $A = (0 | 6 | 0)$, $B = (8|4|0)$, $C = (6|16|0)$

b) $E = 1,5|2,5|3,5)$, $F = (0.5|0|2,5)$, $G = (1 | 0,5| 4,5$

هغه تراوسه ورك یا نامعلوم ټکی (D همداسی H) چیرته پروت دی؟

۲۳ –اهرام د بنسټ هوارې د کونجونو

$A = (1|0|2)$, $B = (3|3|7) =$, $C = (4|2|12)$, $D = (2| - 1| 7)$

سره کوم ډکی لري، چی څوکه یی $S = (2 |4 |15)$ وي؟

لارښودنه: لمړی خپل ځان وپوهوي، چی آیا کونجونه ریښتیا په یوه هواره کی پراته دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

تجار تي شميرنه

ځاننيونيز يا متناسب او په څټ ياچپه ځاننيونيز يامتناسب بلواك (فنكشنونه)، دربقضيه

په ورځني ژوند کی دې ته اړتيا پيښيږي چې ورکړ شوې لويی (يا ډيروالي) يو د بل سره انډول (مقايسه) کړای شي. د بيلګې په توګه د څپليو لويوالی د ځمکی ارزښت، د مياشتني معاش يو د بل سره انډول. د دوه داسی ګڼونو a او b د انډول لپاره په زيات وخت کي کمون a - b کفايت کوي. دلته نو بيا د دې دوه ګڼونو a اوb له توپير څخه غږيږو. په ډيرو وختونو کی دا بسيا (کفايت) نه کوي چې د دوه ګڼونو کمون د هغوله توپير څخه لاس ته راوړو.

پيلبيلګه:
دوه پټي يو $1800\ m^2$ اوبل $2000\ m^2$ يو له بل $200\ m^2$ توپير لري. دا د پټيو لويووالی که $400\ m^2$ او $600\ m^2$ وي، نو ترمنځ کمون هم همدا دی. څه به ووايو که د دواړو ځمکو ويش د يوه ميراث ويش وي؟
هر ځل به دا يو $200\ m^2$ ډيره لاس ته راولي نسبت و دې بل ته. ګورو چې په دوم ويش کی $400m^2/600m^2$ د لمړي ميراثخور لپاره تاوان نسبت و لمړي ويش $1800m^2/2000m^2$ ته زيات دی.
دا په دې مانا، چی که هرڅومره ځمکه لويه وي نو په همغه اندازه د دواړو ميراثخورو ترمنځ توپير کميږي.

دا مختته پرته بيلګه ښايی، چي په داسی حالتونو کي دانډول لويي يو بل سره په تناسب يا ځاننيونه کی راوستل کيدي شي

(c) ketabton.com: The Digital Library

تعريف: که a او b دوه له صفر مختلفی لويي يا ګڼونه وي، نو a / b
ويش يا a: b د a تناسب يا ځاننيونه وb ته بلل کيږي.

بيلګه: ۱ – د ځمکو $400m^2$ او $600m^2$ لويوالی يو بل
سره $400/600 = 0,6 = 2/3$ تناسب جوړوي يا يو بل سره ځانيسي. دا
کوچنی ځمکه(پټی) د لوي پټي 66,6% جوړوي.

۲ – د پټيو $1800m^2$ او $2000m^2$ لويوالی يو بل سره په

$$1800/2000=0,9=9/10$$

تناسب يا ځاننيونه کی پراته دي. دا کوچنی پټی د لوي پټي 90%
جوړوي.

۳ – د مودل ګاډي TT لاين(ليکو يا پټليو) او الماني ګاډو د ليکو يا پټليو
سور يو بل سره په لاندې تنساب کی پراته دي

$$12mm/1435mm = 0,00836 \sim 1/120 .$$

۴ – که يو کړندی په 30 دقيقو کي 70km ځغلي، نو د وهل شوې فاصلي
سرعت تناسب ووخت ته په لاندې ډول دی.

$$s/t = 70km / ½ h =140[km/h] = 140km/h .$$

۵ – د يوه هوموژين بدن(د مساويډوله مواد جوړ) سختوالیϱ د هغه د
کتلی(g) ځاننيونه يا تناسب دی ، د هغه بدن ډکي(cm3) ته

$$\varrho = m / V [g / cm^3]$$

د يوه لرګي بلاك سختوالی(کثافت)، چی درې کيلو ګرامه دروند او څلور
زره مکعب سانتيمتره ډکی(حجم) لري، $0,75 g / cm^3$ دی

$$3000g / 4000 cmw = 0,75 g/cm^3 = \text{سختوالی}\varrho .$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

موږ غواړو، چې اوس ځانونه د بلواك دوه ځانګړو تیپونو یا ډولونو ته متوجه کړو، دا څنګه، چې موږ په ورځني ژوند کې ډیر واره ورسره مخامخ کیږو، چې له دې امله یي پیژندنه ځموږ لپاره خورا مهمه ده.

پیلبیلګه:

۱ – د یوه نل څخه په 3 دقیقو کې ۱۲ لیتره اوبه راوځي. څو لیتره اوبه به په یوه ورځ کي له دې نل څخه راووځي، څومره په یوه کال کې؟

که په درې دقیقو کې ۱۲ لیتره اوبه له نل څخه راوځي، نو په یوه دقیقه کې باید ۴ لیتره اوبه او په ۲۴ ساعتونو یا ۱۴۴۰ دقیقو کې

طبعاً 5760 = 4 . 1440 لیتره اوبه راوځي. او په دې تعقیب په یوه کال کې 2102400 = 360 . 5760 لیتره او یا ۲۱۰۲۴ هیکتولیتر اوبه بهیږي.

۲ – څلور کارګر یو ه بنسټ کنده په ۹ ساعتونو کې راپورته اوکانکریټوي.

څومره وخت درې کارګره ضرورت لري او څومره وخت به ۱۰ کارګر ضرورت ولري چې دا ځمکه راپورته کړي اوهم کانکریټ کړي؟

که څلور کارګره ددې لپاره ۹ ساعته ضرورت لري، نو یو کارګر ددې لپاره حتماً زیات وخت په کار لري، یعني څلور ځله زیات وخت، پس ۳۶ ساعته، نو درې کارګر په تعقیب 12 = 3 : 36 ساعته او لس کارګر 3,6 = 10 : 36 ساعته = درې ساعتونه او ۳۶ دقیقي ضرورت لري چې دا ځمکه وکني او کانکریټ کړي.

په دواړو حالتونو کې یو نظم منځ کې پروت دی، دقیق په لمړۍ بیلګه کې فنکشن وخت —> د اوبو مقدار او په دومه بیلګه کې فنکشن کارګر —> د کارساعتونه.

مګر داوړه فنکشنونه پوره په خپل راوړون ډول کې یو له بل توپیریږي:

۱ – څومره ډیر وخت چې تیریږي په همغه اندازه زیاتی اوبه له نل بهیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲ – ځومره چې کارګر زياتيږي همغومره د کار وخت کميږي
دې ته ورته د ورکړشوو فنکشنونويا بلواکو شميرپوهنيزيا ماتيماتيکي ليکدود
د فنکشن ورکړدود مختلف ليدل کيږي.

۱– فنکشن f : وخت (دقيقه) ⟵ د اوبو ډيرى(ل)

د فنکشن ليکدود (فنکشن ليکلوقانون) لري $x \rightarrow 4x$

په دې ډول د فنکشن مساوات داسې بريښي $y = 4x \;;\; x \in Q^{+}_{0}$

۲ – فنکشن g : کارګر (ځو دانى) ⟵ د کاروخت (ساعت h)

د فنکشن ليکدود لري $x \rightarrow 36/x$

په دې ډول د اړوند يا مربوط فنکشن مساوات داسې بريښي $y = 36/x \;;\; x \in N$

تعريف:

يوه لويه x و هغې ته تنظيم شوې لوي y ته سيده متناسب سيده ځانيونه
(په نخښه کې$y \sim x$) بللکيږي که د هغوي تناسب ياځا نيونه
(ويش) y / x تل يو ثابت ارزښت وساتي : يعنى $y / x = k$ وي.
بلواك(تابع) يا فنکشن $y = kx$ (ثابت –k) د تناسب يا ځانيونى ځلونى
يا فاکتور بلل کيږي.
يوه لويه هغې بلى تنظيم شوى لويي ته ناسيده متناسب ده يا ناسيده
ځانيونه کى ده، که د هغو ځل تل يوثابت ارزښت وساتي: يعني

$$y.x = k \iff y = k/x$$

بلواك يا فنکشن $y = k/x$ چپه يا په ځټ متناسب (antiproportional)
يا په ځټ ځانيونکى بلواك يا فنکشن بلل کيږي.

متناسب فنکشن $y = kx$ د يوې لوي دوه برابره، نيم برابر، n –برابره پورې د
بلى لويي هم دوه برابره، نيم برابره يا n–برابره پورې اړه لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په چپه یا په ثڼ متناسب فنکشن $y = k / x$ کی دوه برابره، نیم برابر ... $n-$ برابره پورې د بلې لوي نیم برابر، دوه برابر ... $1/n-$برابره تعلق لري(اړه لري) .
په چپه یا په ثڼ متناسب فنکشن $y = k/x$ کی د چپه یا ناسیده متناسبوالي ثخه خبرې کیږي. که متناسب او چپه یا په ثڼ متناسب فنکشنونه په یوه کواوردینات کی انځور شي، نو لیدل کیږي چی متناسب بلواك یا فنکشنونه مونوتون پورته کیدونکی او چپه یا په ثڼ متناسب بلواك یا فنکشنونه مونوتون لویدونکي دي (د مونوتون کلیمو لپاره دې ځما د شمیرپوهنی کتاب وکتل شي)

بیلګي :

۱ – سیده تناسب یا سیده ځاننیونه:

الف : په شي اخستلو کی د ډیري ارزښت سیده متناسب دی

ارزښت(افغانی) ډیری (کلیوګرام)

ب : په تیزوالی یاسرعت کی وهل شوې لار د وخت سره سیده متناسب ده

$s(km) \quad -> t(s)$

۲ – ناسیده تناسب یا ناسیده ځاننیونه

الف : یوې معلومی لار وهلو لپاره تعجیل هغه په بر کی نیولي وخت سره ناسیده متناسب دی: که هرڅومره تعجیل زیات وي په همغه اندازه وخت کمیږي.

ب : د وچو شودو د یوه څرګند ټاکلي ټول وزن د وړونکوتیو ګڼنه ناسیده متناسب ده د هرې کوتی یویزوزن سره: که هرڅومره زیاتی کوتی په کار واچول شي په همغه ګڼون د کوتیو وزن کمیږي.

تعریف: د لاندې ډول $a/b = c/d$ یا $a:b = c:d$ مساوات د تناسب مساوات یا ځاننیونیز برابرون بلل کیږي (ویل کیږي چی a و b ته ځان داسی نیسي (یا داسی انډول کی ده) لکه c و d ته) دلته a او d د تناسب یا انډول

(c) ketabton.com: The Digital Library

دباندني غړي دي او b او c د انډول دنني غړي. په هر تنساب کی د دباندنیو غړوځل د دننیو غړو د ځل سره برابر دی:

$$a / b = c / d \quad \Leftrightarrow \quad a . d = c . b$$

اوس ځان باوري کولی شو چی د دننیو غړو بدلول او یا د دباندینو غړو بدلول یو د بل سره په تناسب یا انډول کی تغیر نه راولي. کیدی شي چی ټول دنني غړي د دباندینیو غړو سره بدل شي:

$$a/b = c/d \quad \Leftrightarrow \quad a/c = b/d \quad \Leftrightarrow \quad c/a = d/b \quad \Leftrightarrow \quad b/a = d/c$$

له دې امله کیدی شي چی یو دبل سره برابر زیات تناسبونه یا انډولونه د یو په بل پسی راتلونکو تناسوبونو په څیر ولیکل شي:

$$a/b=c/d = e/f \quad \Leftrightarrow \quad a:c:e = b:d:f$$

دلته باید په پام کی وي چی ویش ځانله صورت نیسي یعني تل د دوه ګڼونو.

بیلګي :

۱ – له $7 / 21 = 5 / 15$ څخه لاس ته راځي $5.21 = 7.15$ یا $7 / 21 = 15/5$ یا $15/21=5/7$ یا $21/15 = 7/5$.

۲ – د $8/12 = 4/6 = 2/3$ لپاره لیکو $8:4:2 = 12:6:3$

۳ – یو تناسب چی دننه او دباندې غړي یي یو له بل سره برابر وي ناپریکیدونکی تناسب بولو. په ناپریکیدنکی تنساب یا انډول $a:m=m:b$ یا $m:a = b:m$ کی m منځنی متناسب انډولی بلل کیږي. منځنی متناسب د نورو دوو غړو a او b جیومتریکي منځ دی.:

$$a / m = m / b \quad \Leftrightarrow \quad m^2 = a.b \quad \Rightarrow \quad m = \sqrt{a.b}$$

د $a = 16$ او $b = 9$ لپاره $m = 12$ منځنی متناسب داسی دی:

(c) ketabton.com: The Digital Library

16/12 = 12/9

۴ څلور انډولونه متناسب یا ځاننیونیزڅنګه لیکل کیږي؟

18/x=8/5 <=> 18 . 5 = 8x => x = (18 . 5) / 8 = 11,25

په ترتیب تنساسب یا ځاننیونه یا انډول کی باور لري: 18 / 11,25 = 8 / 5

زیات وخت مود تکست وظیفی د تناسبمساواتو (انډول برابرون) ته لاربنودوي، نو بیا دريِ ورکړشوو لویو ته څلورم تنساب یا انډول غوښتل کیږي. د داسی وظیفو لپاره سیده یا ناسیده تناسب یوه غوره رول لوبوي. داسی پوښتنی د دریقضی شمیرني یا پاي (ختم) شمیرنی لاندې شهرت لري.

د دریقضي شمیرني اصلي پرابلم په دې کی دی، چی د وظیفي ورکول باید ځرګند یا روښانه شي، چی ایا دا یوسیده متناسب او که چپه یا په ځټ متنساب بلواك (تابع) یا فنکشن دی.

د دري قضي پوښتنی کولو څخه لاندې تکامل منځ ته راځي :

۱ – یوه د شرایطو قضیه، کومه چی ټولی ضروري ورکوني په ګوته کوي.

۲ – یوه د پوښتنی قضیه چی غوښتونکی لو یه x متن کي یا خوندي لري او له هغي سیده یا ناسیده د ځواب تناسب ته تکامل ورکوي.

۳ – یوه پایقضیه، په کوم کی چی له یوه یوون (واحد) په ورته یامناسب ډیرون پاي ورکول کیږي.

پیلبیلګه:

یوه الوتکه له الف ځاي تر ب ځاي پورې چی ۸۰۰ کیلومتره واټن دی په ۶ ساعتو او ۴۰ دقیقوکی تی کوي، دا الوتکه به ۲۲۰۰ کیلومتره لار په څو ساعتوکی ووهي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

د درې جملې له لارې يې ځواب:

الف – د شرايطو قضيه........... 800km - 6h 40 min

يا................ 800km - 400 min

ب – د پوښتنې قضيه .. .. 2200 km - x min

پ – پايقضيه.......... 200km - 400/4min = 100min

2200km - 11.100 min = 1100 min

دا الوتکه به په دې ترتيب د 2200km اوږده واټن لپاره

1100min = 18h20min

ضرورت ولري.

د دې وظيفه د ټيك ځواب لپاره ضروري نيوني دا وي چې سيده تناسب وپيژندل شي: هرڅومره چې د الوتلو واټن لرې کيږي په همغه اندازه الوتکه زيات وخت په بر کې نيسي.

يعنې 2200km اوږد واټن په داسې انډول يا تناسب کې دی لکه 400min و 800 km ته:

$$x / 2200 = 400/800$$

د اکويوالنځ فورم(ځيرې–) اوړون له لارې څخه ځواب x لاس ته راځي:

$$x = (400 . 2200) / 800 = 1100$$

۲ – ۴ کارګر د يوه ديوال وهلو لپاره پنځه ورځې ضرورت لري. د ناروغۍ له امله يو کارګر د کارلري پاتيږي. دا راکمه يا راکوچنې ډله اوس څنګه مشغول ده؟ دلته يو ناسيده تناسب يا ځانښيونه لرو:

هرڅومره چې کارګر کم وي په همغه اندازه وخت زياتيږي

(c) ketabton.com: The Digital Library

ددریجملی سره شمیرنه	د تناسب سره شمیرنه
۴ کارګر – ۵ ورځي ۱ کارګر – ۵ . ۴ ورځي ۳ کارګر – ۳ / ۲۰ ورځي پس ۳ کاګر – $6\frac{2}{3}$ ورځ	غوښتونکی کاروخت x د ۵ ورځو سره داسی تناسب کی دی لکه ۴ کارګر و درې کارګرو ته $x/5 = 4/3 \iff x = (4.5)/3 = 20 / 3$ ورځی

یوځای شوې درې قضیه:

د ۳۰ جوړه کالیو ګنډلو لپاره ۱۲ درزیان ۲۰ د کار ورځي ضرورت لري. څومره ورځی به ۱۰ درزیان د ۷۰ جوړه کالیو لپاره ضرورت ولري؟

لمړی دریقضیه	دومه درې قضیه
(سیده متناسب)	(ناسیده متناسب)
۳۰ جوړه کالي	۱۲ درزیان – ۲۰ ورځي
۷۰ جوړه کالي	۱۰ درزیان – x ورځي

هرڅومره چی کالی زیات وي همغومره زیاتی ورځي، هرڅومره چی درزیان زیات وي همغومره لږې ورځي

۱۰ جوړه کالی –	۱۲ درزیان –	ورځی
۷۰ جوړه کالی	۱۲ درزیان	ورځی
۷۰ جوړه کالي	۲ درزیان –	ورځي
۷۰ جوړه کالي	۱۰ درزیان	ورځي

پس لرو

$x = (20.7.6)/(3.5) = 56$ ورځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

تمرینونه

۱ – لاندې ځانتیونې یا تناسبونه ساده افاده کړی

a) 200t : 2 kg b) 6 m : 6 km

c) 4km / 30min d) 3,2 t : 400dm³

۲ – یوه موټر د ۵۵۰۰ کیلو متره اوږدې لار لپاره ۳۸۵ لیتره ډیزل وسزول

الف) په دې تګډول ۵۰ لیتره ډیزل د څومره لار لپاره بسیا کوي؟

ب) د یوې ۴۳۰ کیلو متره لار لپاره به دا موټر څومره ډیزل مصرف کړي؟

۳ – که غواړو چې د یوه موټر سره د الف ټکی څخه و ب ته ورسیږو ، نو د ۶۰ کیلومتره په ساعت ته درینیم اعته ضرورت لرو. د الف څخه ب ته سړی په څومره وخت کي رسیدلي شي، که د موټر سرعت په لاندې ډول وي:

a) 50km / h b) 110 km / h?

۴ – یو ښار پلان د ۱ : ۱۰۰۰۰ تناسب یا ځانتیونه ورکړ شوی دی. لاندې واټنونه په ریښتونی څومره دی ؟

a) 5 cm b) 33 mm c) 1 dm

۵ – یو ۸۱ ګڼ څنګه په داسی په ۲ زیاتونونو ټوټه کیدی شي، چی ځانتیونه یا تناسب یی داسی وي لکه : 5 : 4 ؟

۶ – د یوه ګڼ او ۵ کمون ځان نیونه یا تناسب و ۷ ته داسی دی ، لکه چی د ۵ کمون ودې ګڼ سره، چی ۴ ته ځا نیسی یا و ۴ ته تناسب یا ځانتیونه؟ دا ګڼ کوم دی؟

۷ – یو فاو وې موټر ۸۰ کیلو متره په ساعت کي ځغلي او په دې پسی په ۱۲۰ متره کی وروسته یو بی ایم وې موټر ۱۲۰ کیلو په ساعت کی ځغلي.

الف) بی ایم وې څومره وخت ته ضرورت لري، چی د فاو وې څخه مخ ته شي؟

ب) بي ایم وې په دې وخت کی څومره واټن وهلی دی؟

پ) دا بی ایم وې څومره وخت ته ضرورت لري، چي له فاو وې موټر څخه ۴۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

متره مخ ته شي ؟

۸ – د سونګ سکرو سوزلو له امله د کولنډیاوکسید غاز پیداکیږي. د سونګ سکرو او د راپیدا کولنډیاوکسید Kohlendioxid (CO_2) ترمنځ تناسب یا ځاننیونه 3 : 11 ده.

څو ګرامه سونګسکاره به ۱۰۰ ګرامه کولینډیاکسید رامنځ ته کیږي؟

۹ – له دریو یو په بل اغیزهمند غابنورڅرخي د ۴۸ ، ۳۶ همداسی ۱۶ ښاغونو سره دا کوچنی څرخی ۴۰۰ وارې په یوه دقیقه کی ګرځي یا څرخی.

نور دواړه غابنورڅرخی څو واره څرخی یا ګرځی؟

۱۰ – ۹۰۰ تیږي، چی ۳۶ سانتي متره سور لري ۴۰۵۰ کیلو ګرامه وزن لري.

۱۱۰۰ تیږې به څومره وزن ولري، که د همغو موادو جوړې وي او سور يی ۲۴ سانتي متره وي؟

۱۱ – یو د زدکوونکو ورځپاڼه « هیلی »د رحمان بابا د لیسی څخه راوځی د دې لپاره چی د ورځپاڼو ۱۲۰۰ توکه وتړل شي ، څلور زدکوونکی ۳ ساعته کار پرې کوي.

څومره زدکوونکی په کار دې، چی ۲۱۰۰ توکه ورځپاڼی په ټیك دوه ساعته کی وتړي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

په سلو کی – -Prozent ، په زرو کی – - Primille

گټه– -Zins او د گټې د گټې شمیرنه Zinseszinsrechnung

مور د a / b یا c / d ډولونو انډولونه او یا په همدې ډول ویشنه په مساواتو و ازمایل. د ماتشمیرنې په چوکاټ کی(څما د شمیرپوهنی کتاب دې وکتل شي) به وښوول شي چی څنگه بنسټیز نظم په داسی ماتو کی ټاکل کیدی شي. د انډول یا مقایسي لپاره دا هم وړاندېکوولی شو چی دواړه مات لاندې په گډ ماتلاندې چی 100 وي پراخ شي. دا کم له کمه په نزدې ډول په هر مات کی کیدی شي.

پیلبیلگه:

یو جوړ جامې، چې په ۲۳۰ افغانۍ پلورل کیدې، په ۴۰ افغانی گرانی شي د گرانښت تناسب یا ځاننیونه یی و اولني ارزښت ته څومره دی؟

دا تناسب ۴۰/۲۳۰ کیدی شي نزدې په یوه مات چی مات لاندې یې «۱۰۰» وي انځور شي، دا کیدی شي چی د ویشنی له لارې داسی صورته ونیسي:

40 / 230 = 0,1739 پس 40 / 230 ~ 17,39 / 100

قیمتیدل د لمړني قیمت 1739, 0 څله راکوي. داسي هم وایو چی قیمتیدل په سلو کی نزدې ۱۷ دي.

تعریف: د یوه بنسټیزارزښت G سلمه برخه ددې گڼ 1 په سلو کی بلل کیږي، او ددې لپاره لیکو %1 د G دی G/100 , په همدې ډول % P له G

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ګڼې ارزښت W = P.G/100 له لارې ټاکل کیږي، P په سلو کی جمله او W په سلو کی ارزښت بلل کیږي.

بنسټ ارزښت G ځان و 100 ته داسی نیسي لکه د په سلو کی ارزښت W د په سلو کی جملی P ته، پس

$$\frac{G}{100} = G / 100 = W / P = \frac{W}{P}$$

$$\Leftrightarrow G \cdot P = 100 \cdot W$$

د اخرني مساوات څخه د فورم اړولو له لارې لاس ته راځي

جمله:

د په سلو کی ټاکنه	بنسټ ارزښت	په سلو کی ارزښت
P = 100 . W / G	G = 100.W/ P	W = G.P / 100

بیلګی:

۱ – د په سلو کی ارزښت	بنسټ ارزښت	په سلو کی ټاکنه
= 16,80 DM	د 120 DM	14 %

۲ – یو نفر باید د یوه نوي بایسکل لپاره 60 DM , 40 یعنی المانی مارکونه د مالیا لپاره (14%) ادا کړي

دا بایسکل څو ارزښت لري، بی له مالیا، او دا د مالیا سره څو ارزښت لري؟

که د 40,60DM په سلو کی ارزښت د په سلو کی ټاکنی 14% وي،

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو باید 40,60 / 14DM د 1% د بنسټارزښت برابر وي. په دې پسې بنسټ ارزښت (= 100%) د G = (40,60 / 14)100DM = 290 DM لاس ته راځي.
له دې سره بایسکل ۲۹۰ مارکونه بې مالیا ارزښت لري او ۶۰ ، ۳۳۰ ماروکونه د مالیا سره.
کید ی شي، چې سملاسی هم د مالیا سره ارزښت ته راشو، که د دې لپاره یو بنسټ ارزښت د ۱۱۴ په سلو کې کېښول شي یا وضعه شي:

$$G = (40,60 / 14).\ 114DM = 330,60\ DM$$

۳ – یو جوړ کالي چې ۱۵۰ مارکونه ارزښت لري په ۱۰ په سلو کې ګرانیږي، دا کالي تر ډیر ځنډ نه پلورل کیږي، نو له دې امله یې بیا دوکانواله په ۱۰ په سلو کې ارزانوي. پوښتنه داده، چې ایا داکالي به اوس هم ۱۵۰ مارکونه ارزښت ولري، که څنګه؟
طبعاً نه ، ځکه چې ګرانوالی په ۱۰ ٪ مارکونو زیاتوالی یې په سرچینیز ارزښت دی ، مګر دا ارزنښت یې په دې اوسني ارزښت، چې 150 + 150.10% = 165DM په بنسټ منځ ته راځي. له دې امله دا کالي د ارزنښت وروسته اوس

$$165 - 165.10\% = 165 - 16,50 = 145,50DM$$

مارکونه دی. که یوه وړکې ستوی بنسټ ارزښت بیا ر د په سلو کې ارزښت شمیرل کیږي، کیدی شي چې دا د یوه سانګل له لارې وشي.

بیلګي:

اول) د ۳۵۰ ماروکونو ۱۴ ٪ کې داسې شمیرل کیږي: 350.0,14 = 49 DM

دوم) که د ۴۵۶۸ کیلو ګرامه بنسټ ارزښت په ۲۲ ٪ کم شي، نو لاس ته راځي:

$$4568(1 - 0,22) = 4568.0,78 = 3563,04\ DM$$

دریم) که د $2303\ m^2$ بنسټ ارزښت په 24% جګ شي، نو لاس ته ترې راځي«

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$2303.(1+0,24) = 2303\ .1,24 = 2855,72\ m^2$$

لاندې بنستهاکنی یا بنستې مقدارونه دی په مات بڼه ورکړ شي :

$1\% = \frac{1}{100}$	$1\frac{1}{4}\% = \frac{1}{80}$	$1\frac{1}{3}\% = \frac{1}{75}$	$1\frac{2}{3}\% = \frac{1}{60}$
$2\frac{1}{2}\% = \frac{1}{40}$	$3\frac{1}{3}\% = \frac{1}{30}$	$4\frac{1}{6}\% = \frac{1}{24}$	$5\% = \frac{1}{20}$
$6\frac{1}{4}\% = \frac{1}{16}$	$6\frac{2}{3}\% = \frac{1}{15}$	$8\frac{1}{3}\% = \frac{1}{12}$	$11\frac{1}{9}\% = \frac{1}{9}$
$12\frac{1}{2}\% = \frac{1}{8}$	$16\frac{2}{3}\% = \frac{1}{6}$	$20\% = \frac{1}{5}$	$25\% = \frac{1}{4}$
$33\frac{1}{3}\% = \frac{1}{3}$	$50\% = \frac{1}{2}$	$66\frac{2}{3}\% = \frac{2}{3}$	$75\% = \frac{3}{4}$

د یوه بنستې– یا ستېه ارزښت G یو په زرمه برخه ۱ پرومیلی (لاتین) واي، چی مونږ یی دلته هم د زرو څخه ۱ بولو:

۱ په زرو کی 1 ‰ له G دی G / 1000

د پرومیلی یا په زرو کی شمیرنی لپاره له دې وروسته انډولګڼ ۱۰۰۰ (په ماتلاندې کی) ، 1000‰ له دې سره یو ستېه ارزښت دی.

بیلګه :

4,7 ‰ له 3690DM دې: 17,34DM

مونږ غواړو، چی دا اوس د په سلو کی شمیرنی یو ځانګړي بڼی سره مشغول کړو. په ورځني ژوند کی خلك د کور جوړولو لپاره یا د یوې مغازې جوړولو لپاره پیسی (بډایي یا سرماي) پوروي او دا زیات وخت په نوې نړی کی له بانکونو څخه، د پور ورکولو له لارې پورورکوونکی څه پیسی باید لاس ته راولی، د ارزښت بایللو تر نامه، چی دې ته د سرمایي ګټه وایي. په بانکی معاملو کی د فعالی ا و غیر فعالی ګټی ترمنځ توپیر باید وشي. فعاله ګټه بانك د پوروړی څخه د ورکړشوې پور په مقابل کي لاس ته راوړي، د دې په څټ یا برعکس څوك چی په بانك کی شمیرکتابچه خلاصوي او په بانك کی پیسی سپما کوي ، نو دمرکزې یا ملي بانك په هدایت د

(c) ketabton.com: The Digital Library

پیسو د سپما لپاره سپماکونکي هم څه پیسي لاس ته راوړي، چی دې ته به موږ د سپما ګټه ووایو ، په هر صورت په ځنی هیوادونو کي د پورګټی او سپما ګټی ترمنځ توپیر باید له ۲ په سلو کی تر درې په سلو کی څخه زیات نه وي.

په پرینځیپ کی باید د ساده ګټی او داسی په نامه د ګټی ګټی ترمنځ شمیرنو کی توپیر وشي . په داسی حال کی، چی په ساده ګټه کی پوروړی د پورشوي مقدار په بدل کی یوه ټاکلی ګټه ورکوي، چی هغه زیات وخت د یوه کال په منځ کي یعنی د یوه کال تیریدلو سره ټاکل شوې وي او دا ګټه د کال په اخر کی په منظمه توګه ورکول کیږي یا ادا کیږي.

د ګټی ګټی په شمیرلو کی د هغه غونډ وخت ګټه شمیرل کیږی ، چی په هغی کی د ګټی ګټه هم خوندې یا شامل ده، دلته هغه د هرکال ګټه د هغی لمړنی بډایي ته ورزیاتیږي او بیا د ټولو ګټه د بل کال لپاره شمیرل کیږی او په همدې ډول وړپسی د دوه او یا زیاتو کالو.

لمړی غواړو، چی یوائی ساده ګټی شمیرلو سره ځان په کار واچوو:

پیلبیلګه

یوه د ۳۵۰۰ مارکونو بډایي یا سرمایه په بانکی شمیرنه کي په بانك کی اینښولکیږي، چي کلنی ګټه یی 4,5% ده. له 3,5 کالو وروسته دا سرمایه اینښونکي په بانکی شمیرنه کي څومره پیسی لري؟

دلته په پوره هدایت ساده ګټونه مخ ته پرته وي، که څه هم په معمولی توګه داسی شمیرنو کی د ګټی ګټه هم شمیرل کیږي. د په سلو کی شمیرنو بنسټ ارزښت دلته هغه ګټوونکی بډایي یا سرمایه K (بنسټسرمایه) ده، او د په سلو کی ارزښت ګټه Z ده (په المانی مارکونو) ، د په سلوکی مقدار ، چی ما کله په سلو کي ټاکنه(یعنی په سلو کي څومره اندازه) بللی په %).

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا چی پہ دندہ یا شمیرنہ کي گټہ غوښتل شوې(دمخہ برخہ دې، یعني د پہ سلو کي ارزښت دې وکتل شي) ددې لپارہ لاس تہ راځي

$$Z = K.p / 100 = 3500.4,5 / 100 = 157,50DM$$

دا د یوہ کال لپارہ گټہ دہ ، پہ بنسټیزہ بڼہ‌ایي ، چی ۳۵۰۰ مارکونہ دي. پہ درینیمو کالو کی پہ سادہ گټونہ بڼہ‌ایي، چی بانکی شمیر یی واز کړی 3,5 .157,50 = 551,25DM لاس تہ راوړي. پہ دې توګہ بہ پہ سپما کتابچہ کي 3500 + 551,25 = 4051,25DM (مارکونہ) وي.

د گټې وخت t لکہ، چی ومو لیدل یو کال ، زیات یا کم کیدی شي. ، بیا نو پہ بانکي شمیرنہ کي د یوہ کال لپارہ ۱۲ میاشتي نیسی، چی د هرې میاشتي لپارہ ۳۰ ورځي ټاکي، یعنی پہ ټولیزہ توګہ ۳۶۰ ورځو پہ بنسټ بیا بانکی شمیرنی صورت نیسی. د ورځو پہ بنسټ بانکي شمیرنو کي هغہ د سپما ورځ ورسرہ شمیرل کیږي(د سپماورځ Wertstellung یا Valutierung)، هغہ ورځ، چی پیسی بیرتہ لہ بانګ اخستلي کیږي یا لہ بانك بیرتہ پورتہ کیږي، نہ ورسرہ شمیرل کیږي.

د گټې فرمول: Z = K.p / 100 . د ورځنی گټې فرمول: Z = K.p.t / 100.360

بیلګی

لمړی : ۴۵۰۰ مارکونہ لہ ۳ . ۷ . ۱۹۸۷ څخہ تر ۱۵ . ۹ ۱۹۹۰ پورې څومرہ گټہ کوي، کہ گټہ 4 , 75% وي.

د گټې وخت د ورځو پہ بنسټ شمیرو: t = 12 +60+3.360 = 1152 ورځي.

د ورځنی فرمول لہ مخی لاس تہ راځي:

$$Z = K.p.t / 100.360 = 4500.4,75.1152 / 100.360 = 684DM$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دوم : یوې ښځې په ۱۵ . ۳ . ۱۹۸۷ باندې ۷۹۰ مارکه په بانکي سپما کتابچه کېښوول، او دا پيسې يې بيرته په ۲۰ . ۲ . ۱۹۸۸ له بانك څخه راواخستلې. دې بهايي يا سرمايې څومره ګټه وکړه:

- $p = Z.100.360 / K.t = 30.100.360 / 790.335 = 4{,}0809 \Rightarrow p \sim 4{,}08\%$

دريم : په څومره وخت کې کيدی شي، چې ۱۰۰۰ مارکونه د ساده ګټې په بنسټ ۲۰۰۰ مارکونو ته جګه شي، که بهايي په 4 , 5% ګټه سپما شوې وي؟

- $t = Z.100.360 / K.p = 1000.100.360 / 1000.4{,}5 = 8000$

ورځې ۸۰۰۰ = ۲۲ کاله او ۸۰ ورځې

څلورم : يو بهايي ، چې لاټري يې ختلې په ساده ګټونه ، چې ۷ ،۶ په سلو کې ده له بانك څخه د مياشتې ۲۰۰۰ مارکونه ګټه اخلي.

دا د لاټرې ختنه به څومره جګه وي؟

موږ دا د ګټې فرمول د بهايي په لور اړوو يابدلوو:

- $K = Z.100.360 / p.t = 2000.100.360 / 6{,}7\ .30 = 358208{,}95DM$

لکه چې پوهيږو، بانکونوپرکسيس يا کار کې د ګټې ګټونه معمول ده، او له دې زيات نه. د ګټې ګټه کلنی شميرل کيږي او بهايي ته ورزياتيږي.

يو پيلبهايي K_0 ، د يوه کال په اوږدوالی کې د يوې ګټې ټاکه يامقدار $p\%$ سره په ګټه اچول کيږي، د کال په اخر کې د يوې ګټې

- $K_1 = K_0 + K_0\,(p / 100) = K_0\,(1 + p/100)$

سره په سپماکتابچه کې ليکل شوې ده.

دلته $K_0.p / 100$ د يوه کال را اچولی ګټه ده، د يو کال په پيلبهايي K_0 سره.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ټول دوه کاله وروسته دا پیلبډایي د همغی پنبیگټی یا گټی پیل سره داسی لویه شوې

$$K_2 = (K_0 + K_0 . P / 100) + (K_0 + K_0 . P/100).(P/100)$$
$$= K_0 + K_0.P/100 + (K_0.P/100)(P/100)$$

که K_0 له نوکانو یا غیږ دباندې ونیول شي نو لاس ته راځي:

$$K_2=K_0(1+2.P/ 100 + P^2 / 100) = K_0(1+ P/100)^2 = K_1(1+ P/100)$$

له درې کاله وروسته دا بډایي یا سرمایه ده:

$$K_3=K_0(1 + P/100)^3 \qquad K_3=K_2(1 + P/100)$$

که دا شمیرنه په ورته توگه دوام پیداکړي، نو د t کالو وروسته په ټولیزه توگه لاندې بډایي لاس ته تري راځی

$$K_t = K_0 . (1 + P/100)^t = K_{t-1} . (1 + P/100)$$

د $(1 + p/100)$ لپاره غواړود لنډونی له امله q ولیکو، q گټی فاکتوریا گټی ځلونی بلل کیږي:

$$q = 1 + p / 100$$

ددې ساده ونی سره لاس ته راځي: د گټی گټی فرمول: یوه بډایي K_0 د t کالو وروسته د p% کلنی گټي باندې(د گټی جگیدنه) په $K_t = K_0 (1 + p / 100) = K_0.q^t$ لویه شوې

بیلگه : له درینیمو کلو وروسته په ۴،۵ ٪ گټه ۳۵۰۰ مارکونه په کوم ارزښت لوییږي؟

$$K_{3,5} = K_0. q^t = 3500.1,045^{3,5} = 4082,96 \text{ DM}$$ مارکونه

د گټیگټی شمیرنی سره بډایي $K_0 , K_1 , K_2 , K_3 , ..., K_t$ یوه هندسی پرلپسی جوړوي(ددې لپاره دې ځما د شمیرپوهنی کتاب وکتل شي) دا د پیلبډایي K او ځلوونی $q = 1 + p / 100$ سره ، گرافیکی که وکتل شي، نو د گټی لوییدنی فنکشن $K_t = K_0 . q^t$ یو اکسپوننشل بلواك انځوروي. د تعریفډیري $D = Q$ سره.

ساده گټه اچونی بیا یو لاینی فنکشن $K_t = K_0 (1 + p.t / 100) ; t \subset Q$ په نخښه کوي.له دې امله بډایي په ساده گټه اچونه دومره چټکه نه لوییږي، لکه چی په یوه دگټی گټی اچونی باندې.

بیلگی: ۱ – یو د ۴۷۰۰ افغانیو مقدار یا ارزښت دې د پنځه کلونو لپاره په ساده گټه اچونه او ب) په د گټی گټی اچونی چی ۵۷، ۴ ٪ دی اینښوول کیږي. دا هر پایبډایي څومره لویه ده؟

a) $K_5=K_0(1 + P.t/100) = 4700(1+ 4,75 . 5/ 100) = 5816,25$ Af

$K_5= K_0 + 1116,25 = 5816,25$ Af

b) $K_5 = k_0. q^t = 4700 . 1,0475^5 = 5927,45$ Af

۲ – یوه بډایي د ۵۰۰۰۰ افغانیو په ۳.۵.۹۷ واچول شوه او باید په ۳۱.۱۲.۲۰۰۱ راووستل شي. څومره په ۴.۵ ٪ گټه باندې لوي شوی دی، که پوره کلونه (له۱۲.۳۱-۱.۱) په گټه واچول شي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$K = [K_0 + K_0.p.t / 100.360].(1 + p/100)^n$$
$$= [50000 + 50000.4,5.237 / 36000].1,045^4$$
$$K = 61392.35 \text{ Af}$$

د لویو K_0 , q , t او K_t په ګټه فاکتور کی افاده کیدو لپاره رامنځ ته کیږي. د ګټي اختستنی وروسته کیدی شي د سرچینیزې بهایي K_0 پوښتنه رامنځ ته شي، چی د t کلونو په p % ګټونه یا ګټه و بهایي K_t ته بیایي. K_0 د K_t د بهایي د اوس وخت یا حال یا نغد ارزښت بلل کیږي. د K_0 شمیرنه په ورکړشوې بهایي K_t ته چی بیاي دیسکونتونه Diskuntierung یا ګټوني بلل کیږي:

تعریف: د نغدارزښت فرمول
$$K_0 = \frac{K_t}{(1 + \frac{p}{100})^t} = \frac{K_t}{q^t} = K_t.(\frac{1}{q})^t$$

دلته $(1/q)$ د ګټوني فاکتور بلل کیږي. د نغدارزښت فرمول له $K_t = K_0 .q^t$ اړیکو څخه لاس ته راغلی ، چی د K_0 په لور اوبی یا حل شوي.

بیلګي:

١ – یو نیکه غواړي د خپل لمسی د پنځمی زیږیدنی له امله یو څه ئیسی بانک کی سپما کړي، د ٥٪ په ګټه . دا پیصي بهه خومره یا دا مقدار به خومره لوي، چی دا لمسی په خپله ٢٥ کالیزه ٢٠٠٠٠ مارکونهلاس ته راوړي؟ باید په بانك یکی ٢٣ ، ٩٦١٢ مارکونه کینښوول شي یا سپما شي..

٢ –د یوه کور خرڅلاو کی دوه اختسونکی مختلف اوفرت یا وړاندیزونه کوي « علاقمند الف ١٥٠٠٠٠ مارکونه نغد ، ١٢٠٠٠٠ مارکونه له دوه کاله وروسته او نور ١٥٠٠٠٠ مارکونه د ټولیزه توګه له شپږ کاله وروسته ادا کړي یعني د کور مالك ته ورکړي.

علاقمند ب غواړي، چی ١٣٠٠٠٠ مارکونه نغد ، ١٥٠٠٠٠ مارکونه له دري کالو وروسته او ١٤٠٠٠٠ مارکونه له نورو دوه کالو وروسته ورکړي.

کوم یو علاقمند ګټور دی، که مونږ ٨٪ ګټهٔ ونیولي شو یا فرض کړای شو؟ دا چی دواړه ارزښتونه یا وړاندیزونه یو له بل سره پرتله کړاي شو، نو باید دواړه نغد ارزښت ته راوړو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه:

یوه د ۸۰۰۰ مارکونو بډایي ، کومه چې د ګټې په ګټونه ولاړه ده، باید ۶٪ کلنی ګټې د څلورو کالو لپاره په بانګ کې پاتي شي یا کیښوول شي. بډایي به څومره لویه وي په الف) کلني ، ب) نیمکلنی، خ) میاشتنی، او ت) په ورځنی ګټونه؟

تمرینونه:

۱ – یو جوړ کالي په ارزښت یا نیه کې ۴،۵ ٪ کمشو» د دې کالیو لومړنیی نیه ۲۵۰ ماکرونه وه . اوس دا کالي کومه نیه لري؟

۲ – یو پطلون په ۴ ، ۵ ٪ ارزان شو، دا پطلون او س ۲۵۰ مارکونه ارزښت لري. دې پطلون پخوا کومه بیه درلوده؟

۳ – د یوه جاکټ بیه په ۷۰ مارکونوه راکمیږي، دې پخوا ۲۵۰ مارکونه بیه لروده، اوس دا څومره بیه لري یا حومره قمته ده؟

۴ – یو جوړ دریشی په ۹۸ مارکونوګرانیږي او اوس ۴۵۰ مارکونه بیه لري. د ا ګرانښت په سلو کی څومره دی؟

۵ – رابات یو د بیي راکومن دی، چې اخستونکی ته د ځانګړو شرایطو لاندې ورکول کیږي. سکونتو یو بیه کمون دی، چې اخستونکی ته د نغدو پیسو ورکولو له امله ورکول کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

الف) يو د ۵۷ ، ۸۵۰ مارکونو شمير، يعني په کاغذ ليکل شوې بيه په ګوته شوې: د لسو ورځو ترمنځ نغد اداکولو په حالت کی ۳٪ سکونتو.
دلته څومره پيسی ورکول کيږي؟
ب) يو اخستونکی د خپل نوي لاس ته راوړي بايسکل کی ۲۰ ٪ رابات لاس ته راوړي، او دا چی هغه پيسی ندې ورکوي، بر سيرهٔ پردې ۲ ٪ سکونتو هم ورکول کيږي. دا باسکل او س دی د دې لپاره بايسکل لپاره ۱۵۶ مارکونه ادا کوي.
دې بايسکل د سکونتو او ربات د مخه څومره بيه لروده؟
۶ – په يوه نغدپيسوبيه ۱۴ ٪ کی د ماليي ورزياتيږي او ۳ ٪ ربات ورکول کېږي.
که پخپله ځان ته شمير ليلی ليکی شی ، ته به ماليه لومړی ورزياته کړې او که لمړی به ربات له شمير کم کړې؟
دا نغده ارزښت به څومره جګ شي، که لومړی ماليه ورزياته شي او بيا ربات ترې کم شي؟
۷ – اباسين خپ کور دننه په ۱۱۰۰۰۰ ماروکونو بيمه کړی. دی ددې بيمی پوره کوونو لپاره کلنی ۵ ،۱ په زرو ګټه بايد نيمی ته ادا کړي. دا څومره ده؟
۸ – يوه ګازره په منځنی توګه 0,5‰ ويټامين A لري. څو ګرامه ګازرې به ۱۵ ملي ګرامه ويټامين A ولري؟
۹ – په يوه موټربيولو کنترول کی د يوه موټرځغلونکی څخه د ازماينی لپاره وينه اخستل کيږي. معاينه دا نتيجه ورکوي، چی موټرځغلوونکی 1,7‰ الکول په وينه کی لري. دابه څو مترمکعبه الکول وي، که ونيسو، چی د وينی ډکی ۷ ليتره وي؟
۱۰ – د ارزښتکاغذ (دا په بانك کی څه کاغذونه دې، چي خلك يی اخلی، په کلنی ټاکلی ګټی سره) يو پيسی اينښوونکی ددضيويدند Dividende (کلنی ګټهٔ ده) ۲۷۰ مارکونه اخلي. څموره پيسيبه هغه اينښودلي وي، که يوه بډايي

په ۵ ، ۷ ٪ ګټهٔ اينښوول شوې وي ؟
۱۱ – اباسين په يوه بانکی حساب کی ۷۰۰۰ مارکونه اچوي. له کوم وخت وروسته په ساده ۴ ٪ کی ګټونه، دی ۸۰۰ مارکونه لاس ته راوړي؟
۱۲ –

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ډاکتر ماخان شينواري چاپ شوې ليکنې:

1988 Vienna (Austria):

لومړی:

H.K. Kaiser , M. Shinwari : Aproximation compact pological algebra : general algebra 6 ; Page 117 – 122 contributions to

1987 Vienna (Austria):

دويم:

Diss . Interpolation und Aproximation durch Polynime in Universalen Algebren . Uni. Wien

Dissertation Interpolation and Aproximation by Polynome in universal Algebras, at the University of Vienna/Austria

لاندې د شميرپوهنې پښتوټول کتابونه په المان کې د ،، افغانستان کلتوري ودې ټولنه،،له خوا چاپ شوي دي

2000 Bonn (Germany):

دريم: د شميرپوهنې ستر کتاب : د شميرپوهنې برسيره د انجنري، فزيک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زده کوونکو لپاره (دا کتاب په ۹۰۰ مخونو کې چاپ او دا نوې ليکنه به يې ځنو ځايونو غزېدلې او ځنې ځايونه ترې لرې شوي دي)

2003 Bonn (Germany):

څلورم: ځمککچپوهنه(هندسه) ، په سلو، زرو کې شميرنه، د ګټې – او کټې د کټې شميرنه ، د اختمالوالي شمېرنه کتاب د ښوونځي ټولې اړتياوې پوره کوي

(c) ketabton.com: The Digital Library

2003 Bonn (Germany):

پنځم: الجبرونه (د الجبر بنسټونه دي)

2003 Bonn (Germany):

شپږم: د شمیرپوهنې انګرېزي – پښتو ډکشنري.

2003 Bonn (Germany):

اووم: د شمیرپوهنې الماني ـ پښتو ـ او پښتو الماني ډکشنري

Mathematical dictionary German/ Pashto and Pashto/German

2003 Bonn (Germany):

اتم: دفرنځیال برابرون (دا کتاب په دې ځانګه کې یو پیل دی، ساده لیکل شوی)

Differential equation Translation; An Introduction

Bonn (Germany): 2003

نهم: د شمیر پوهنې فرمولونو ټولګه

Mathematical Formulas

2003 Bonn (Germany):

لسم: شمیرپوهنه له عربي په پښتو

1997 Bonn (Germany):

یوولسم: د افغانستان په هکله سپینې خبرې: په المان کې

،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خو

(c) ketabton.com: The Digital Library

.یادونه: له ۲۰۰۰ کال دمخه ډاکتر ماخان شینواري د ،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خوا درې ساسي مجلې هم را وستلي.

د ډاکتر ماخان ،،میرې،، شینواري لیکنې او ژباړې چې په چاپیدو یې پیل کیږي

2012 Bonn; Germany; Kabul Afghanistan

ژباړې:

Prof. Brinkmann. (From Brinkmann.du.de) :

لاندې د برینکمن لیکنې چې له پرینکمن ن ج څخه ژباړل شوي دي.

۱ - شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره لومړی ټوک

۲ – شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره دویم ټوک

۳ – شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره دریم ټوک

۴ - د احتمالوالي شمیرنه د ښوونځي لپاره

۵ – احصایه یا ستاتیستیک دښوونځي لپاره

لاندې کتابونه د شتوتګارت د پوهنتون د استادانو د لکچرونو څخه چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپاره شوي را ژباړل شوي.

۶ – انالیزی ۱

۷ – انالیزې ۲

۸ – کرښیز الجبر

۹ - د شمیرپوهنې بنستونه

۱۰ - د فرمولونو ټولګه

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۱ – فنکشنل انالیز

۱۲ – وکتور شمیرنه

نورې ژباړې

۱۳ – له www./grundstudium.info/linearealgebra څخه:کرښیز الجبر

۱۴ – Georg Gutenbrunner ګڼونپوهنه یا د اعدادو تیوري

زما لیکنې

Bonn (Germany):

۱۵ - د شمیرپوهنې ستر کتاب دویم چاپ د پوره تغیراتو سره : دا کتاب د شمیرپوهنې برخې برسیره د

انجنري، فزیک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زدهکوونکو لپاره پوره ګټور دی. په کتاب کې د اړتیا سره زیاتونه او کونه راغلې

۱۶ - ځمککچپوهنه (هندسه) دویم چاپ د پوره تغیراتو سره

۱۷ – الجبر بنسټونه دویم چاپ له تغیراتو سره

۱۸ - ډیرۍ پوهنه یا سټ تیوري

۱۹ – د شمیرپوهنې سم اند (منطق ریاضي)

۲۰ - د یو څو شمیرپوهانو ژوندلیک

۲۱ – د شمیر پوهنې ګڼې وړې لیکنې

۲۲- داهم ژباړه ده، خو لیکونکی یې متآسفانه راڅخه نابلد شوی: د مشتق او انتیګرال شمیرنو ته تمرینونه او اوبیونې یا حلونه یې

۲۳ – د شمیرپوهنې انګریزۍ پښتو او عربي + درې ډکشنري

۲۴ – د شمیرپوهنې پښتو انګرېزي ډکشنري

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲۵ – د شمیرپوهنې پښتو ډکشنري د شمیرپوهنیزو وییونو په پښتو روښانه ونه

۲۶ - د زړه له کومې(دا هغه لیکنې دي، چې ځنې يې په نړیول جالونو کې خپرې شوي دي.)

۲۷ – د افغانستان په هکله سپیني خبرې، چې وبه غزیږي.

نوري لیکنې، چې په ژباړه یې پیل شوی، خو لا پوره نه دي

– د شتوتکارت پوهنتون لکچرنوټونو څخه ، چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپریږي:

د ګروپونو تیوري

- د ښوونځي لپاره فزیک د برینکمن لیکنه

له پنځم ټولګي څخه تر اووم ټولګي پوري ژباړل شوی (دا چې زما دویم مسلک فزیک دی، دا لیکنې ژباړم. دا هم د دې لیکوال یوه ډېره ښه لیکنه ده، چې -د شمیرپوهنې په څیر- دلته هم زیات تمرینونه د حل یا اوبیونې سره په کې راغلي او ماته زیات ګټور برېښي)

د لیکوال ژوند ته لنډه کتنه

(c) ketabton.com: The Digital Library

ماخان په اولني نوم میرې شینواری د ارواښادې پستو او ارواښاد نوررحمان زوي په ۱۳۲۰ ؟ ه لمریز کې د شینوارو هسکه مینه کې دې نړۍ ته سترګې راغړولي.

د هسکې مینې د لومړني ښوونځي (د لومړنیو زده کوونکو څخه) څخه وروسته د رحمان بابا لیسه له ۱۹۵۴ تر ۱۹۶۵ پورې(ښوونځي له لومړي ټولګي پیل او د دویم ټولګي څخه ګام او پای).

د ۱۹۶۶ تر سپتبر د کابل طب پوهنځی. له ۱۹۶۶ سپتمبر څخه د اتریش برس، چې هلته يې د شمیرپوهنې ډاکتري په پوره ستونځو تر لاسه کړه.

د۱۹۹۸۷ ش ک تر ۱۹۸۸ د فبروري تر پای د دباندنیو چارو وزارت کې مامور.

د ۱۹۸۸ مارچ څخه تر ۱۹۹۲ جون پورې په بن کې د افغانستان جمهوریت سفارت شارژد افیر(صفر نه وو).

له هغې وروسته په جرمني کې سیاسي پناه. له ۲۰۰۸ مارچ څخه د ۲۰۰۹ دسمبر پورې د د ریاضي څانګه کې د پوهنې وزارت درسي نساب کې دنده.

ماخان میرې په ۱۹۷۲ کې له لرې د میرمن ښاپیرۍ سره واده شوی، چې د واده خبر ورته اتریش ته راغی.

ده د میرمن ښاپیرۍ سره په ۱۹۶۳ ز ک کې کوزده کړې وه.

دوي ته لوي څښتن په اتریش ویانا کې د مای په شلم ۱۹۷۹ ز ک دوه بچیان وبخښل، چې څانګه او اباسین نومیږي. څانګه په المان کې د پوهنتون علمي همکاره وه او د حقوقو ډاکتره ده او اباسین ملي اقتصاد او ټولنیزه سایکولوژي لوستلي.

Get more e-books from www.ketabton.com
Ketabton.com: The Digital Library