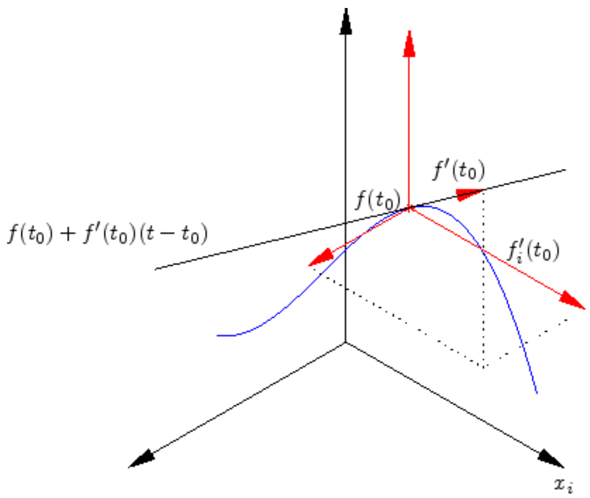
انالیز ۱ Analysis 1

د پوهنتون لپاره لکچرنوټونه

د ډېرو متحولو یا اووښتونو انالیز

یا انالیز دوه



لیکونکي: د شتوتګارت پوهنتون د شمیرپوهنې یا ریاضي څانګه

د مات انلاین څخه یا د شتوتګارت پوهنتون نه ځنه

Smakhan1946gmail.com

ژباړی: ډ اکتر ماخان (میرزي) شینواری

د لوی څښتن په نامه

په دې هیله، چې په دې لیکنو او ژباړو به مې زموږ د بې وزلې او له پوهې پاتې ملت - په ما د پوهنې په لار د لګښت - لپاره د پوهنې په لور داسې لږ ونډه اخستې وي.

د کتاب نوم: د ډېرو متحولو یا اووښتونو انالیزې

لیکونکي: د شتوتګارت پوهنتو د ریاضي څا نګه

د مات انلاین څخه یا د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه

ژباړی: ډ اکتر ماخان میرې شینواری

Smakhan1946@gmail.com

د چاپ لړي:

د ژباړي مننه

د دې لیکنې مل نورې خپرونې د شتوتګارت د پوهنتون د شمیرپوهنې د څانګې د لکچرونو لړۍ چاپ باندې پیل کیږي

د هر څه له مخه د هغو لیکونکو پروفیسرانو څخه زیاته مننه، چې د لیکنو څخه یې زما د ژباړې لپاره تفاهم لري. ماته د دوي د لیکنو د ژباړې په هیڅ ډول مادي ګټه نه شته او دا کار مې یوازې په یوه د پوهنې توانمندې ، مګر وروسته پاتې ژبې ویونکي ولس ته وړاندې دی، دا دې د دې پروفیسرانو له خوا په پوهنیزه اړخ کې- زموږ په دې اړخ کې هم مرستې ته اړ ولس- سره مرسته وي.

سرليک

سرلیک

سرليک

سرلیک

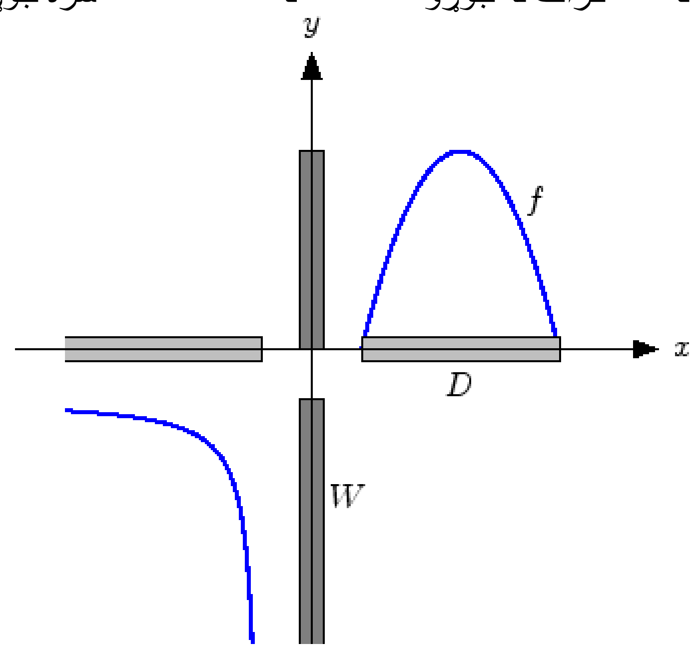
بلواک یا تابع (ټیک یې: فنکشن) Funktion

یو فنکشن یا بلواک یا تابع

$$f : D \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x)$$

د تعریف ورشو $D \subseteq \mathbb{R}$ هرتوکی x د ارزښت ډېرۍ $W \subseteq \mathbb{R}$ څخه د یوه ارزښت $f(x)$ سره تنظیموي.

د f ګراف له جوړو (x,y) د $y = f(x)$ سره جوړ دی.



لکه د ځيرې ځخه چې ليدلکيږي، تعريفورشو (رڼه خړه يا پرته) او ارزښت ورشو (تياره خړه يا ولاړه) په x -محور همداسې په y -محور د ګراف پريوتل دي.

ليکونکي: هيوليګ، هورنر، کنش

د دې لپاره چې د تابع

$$f(x) = \frac{\ln(3-x)}{\sqrt{x}-1}$$

تعريف ورشو او ارزښت ورشو وټاکو، لومړی دې د په ساده –يا لومړنيو توابعو رامنځ ته کيدونکې بنديزونه يا محدودوالی په پام کې ونيول شي. د تعريف ورشو د توکي لوګاريتم بايد زياتيز يا مثبت وي او د ارزښت ورشو ناکميز يا نامنفي وي:

$$3 - x > 0 \quad \text{او} \quad x \geq 0.$$

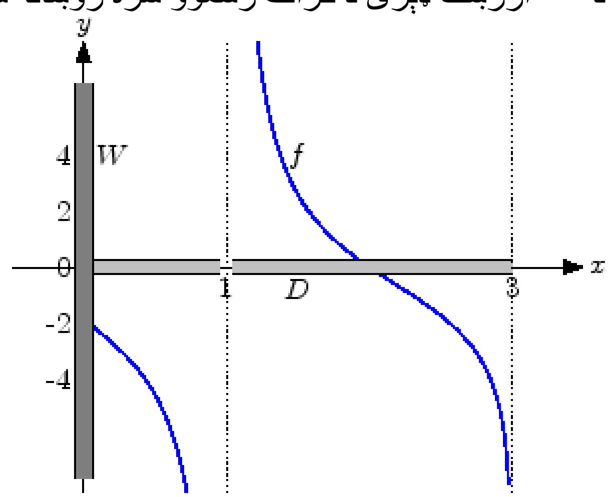
په همدې توګه بايد ماتلاندې يا مخرج صفر نه وي، دا په دې معنا چې

$$x \neq 1.$$

په ټوليزه توګه راکوي:

$$\mathrm{D} = [0,3)\backslash\{1\} = [0,1) \cup (1,3).$$

د f ارزښت دېرى د ګراف رسموو سره روښانه شي



دا چې f د $x \in (1,3)$ لپاره د $-\infty$ او $+\infty$ ترمنځ ټول ارزښتونه نيسي، $W = \mathbb{R}$ باور لري.

ليکونکي: هيوليګ، هيورنر،کنش)

لاندې جدول د څو بنسټيزو توابعو تعريفورشو او ارزښت ورشو ښايي.

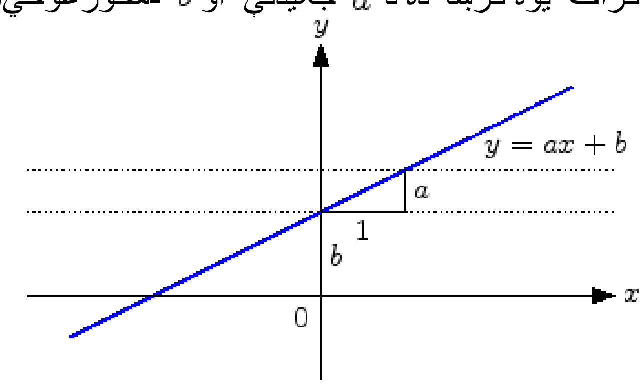
$f(x)$	D	W
$1/x$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$
$\ln x$	$(0, \infty)$	$\mathbb{R}$
$\tan x$	$\mathbb{R} \setminus \{x \,:\, x = (2k+1)\pi/2,\ k \in \mathbb{Z}\}$	$\mathbb{R}$
$\sqrt{x}$	$[0, \infty)$	$[0, \infty)$

(ليکونکي: هيوليګ، هيورنر،کنش)

کرښيزفنکشنونه يا توابع

د يوه کرښيز فنکشن يا تابع
$$f(x) = ax + b$$

ګراف يوه کرښه ده د a جګيدني او y -محورغوځي(محورقاطع) b سره .



د دې لپاره بدیلي انځورونه د ټکي-جګیدنې – بڼه ده

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = a$$

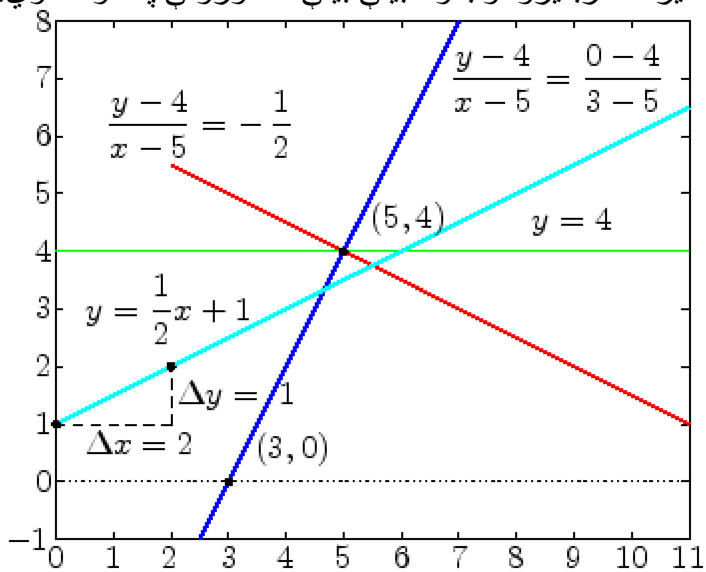
او د دوه-ټکو- بڼه

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0},$$

چیرته چې (x_0, y_0) او (x_1, y_1) په کرښه پراته ټکي دي.

(لیکونکي: هیولیګ، هیورنر)

خیره د کرښیزو توابعو بیلي بیلي انځورنې په کوته کوي:



لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

څلوری- یا مربع فنکشنونه یا - توابع

د یوه مربع تابع

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

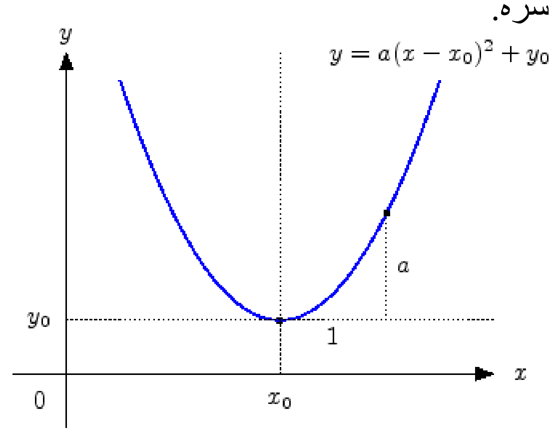
كراف د لاندې بڼې يو پارابول دی

$$y = a(x - x_0)^2 + y_0$$

د ککرۍ- يا رأسټکي

$$(x_0, y_0) = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2}{4a} + c\right).$$

سره.



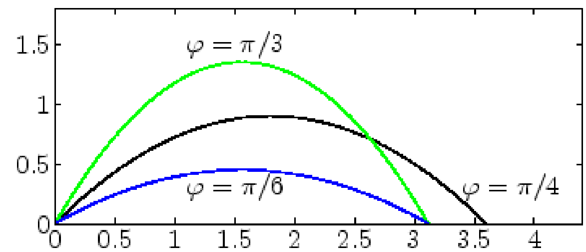
پای

- كه يو تن د يوه كونج φ لاندې په يوه v چټكتيا و توغول شي، د الوتنې لار دا لاندې پارابول

$$y = x\tan\varphi - \frac{g}{2v^2\cos^2\varphi}x^2$$

راكوي ، چيرته چې g د ځمكې بيره ده يا - تعجيل دی.

لاندې ځيره: مايل توغول يا غورځول د v = 6 سره.



مساوات د برابرېدوله خوزښت په x - او y -کمپوننتونو د بيلوني يا ټوټه کوني(که غواړې: تجزيې) څخه لاس ته راځي ، د v پيل چټکتيا سره او د ازاده غوزوني د خوزښت ته پام کوني له لارې:

$$x(t) = vt\cos\varphi \quad \Rightarrow \quad t = \frac{x}{v\cos\varphi}$$

$$y(t) = vt\sin\varphi - \frac{1}{2}gt^2$$

$$\Rightarrow y(x) =$$

$$= \frac{vx\sin\varphi}{v\cos\varphi} - \frac{gx^2}{2v^2\cos^2\varphi} = x\left(\tan\varphi - \frac{gx}{2v^2\cos^2\varphi}\right).$$

د غورځوني واټن دی

$$x = \frac{2v^2\cos^2\varphi}{g}\tan\varphi = \frac{v^2}{g}\sin(2\varphi).$$

دا د $\varphi = \pi/4 \,\widehat{=}\, 45°$ لپاره ماکسيمال دی.
ليکونکي: هيوليک، هيورنر،کنش

همغږيزې توابع Monotone Funktion

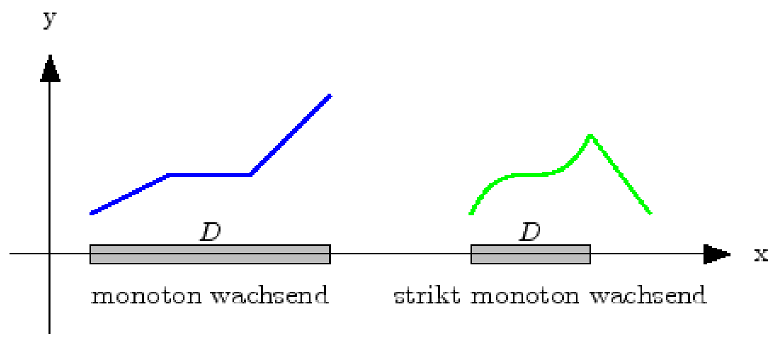
یو تابع f په یوه انتروال D (کره) همغږیز جګیدونکی دی، که وی

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \overset{(<)}{\leq} f(x_2), \quad x_k \in D,$$

همداسي که f ټوټه ډوله ناپرېکېدونکی مشتقوړ دی، که وي

$$f'(x) \overset{(>)}{\geq} 0$$

د ټولو $x \in D$ لپاره تر ځانله یا جدا ټکي بورې



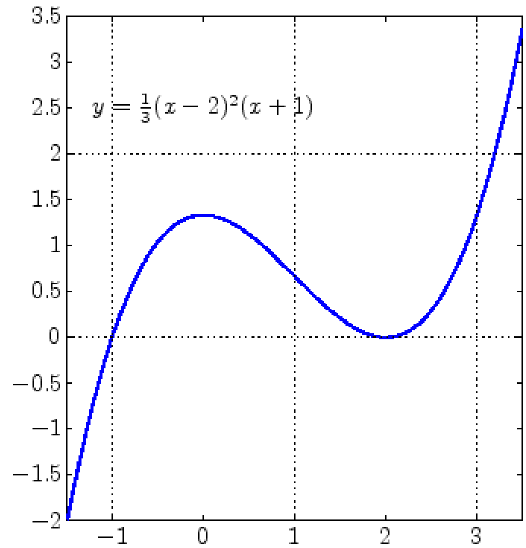
کره همغږیز جګیدونکي

همغږیز جګیدونکي

په ورته توګه (کره) همغږیز ټیټیدونکی تعریفیږي.

یکونکي: هیولیک، هیورنر،کنش

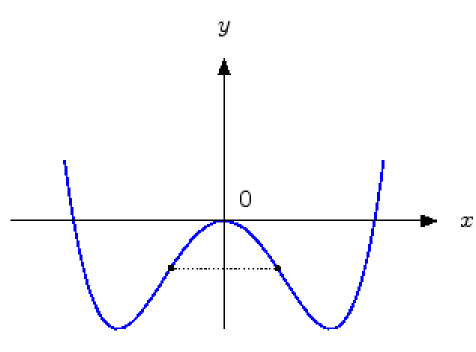
تابع $x \mapsto f(x) = \frac{1}{3}(x-2)^2(x+1)$ په $x = 0$ ځای کي یو جګ- یا ماکسیمال ټکی ($f'(0) = 0, f''(0) < 0$) لري او په $x = 2$ ځای ټیټ-یامینیمال ټکی ($f'(2) = 0, f''(2) > 0$) لري . د $x \leq 0$ او $x \geq 2$ لپاره تابع کره مونوتونجګیدونکي نخ ده او د $0 \leq x \leq 2$ لپاره کره مونوتون ټیټیدونکي نه ده.



یکونکي: هیولیک، هیورنر،کنش

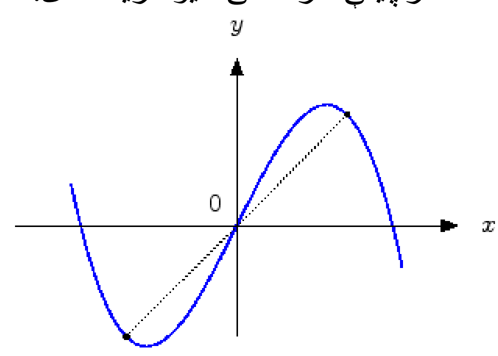
جوړه او ناجوړه – یا جفت او طاق توابع

یو تابع f جوړه دی، که $f(x)=f(-x)$ وي، دا په دې معنا چې که ګراف د y - محور سره سیومتریک وي. یو ناجوړه یا طاق تابع $f(x)=-f(-x)$ دی، او ګراف سرچینې سره تکی سیومتریک دی.



gerade Funktion

جوړه یا جفت تابع

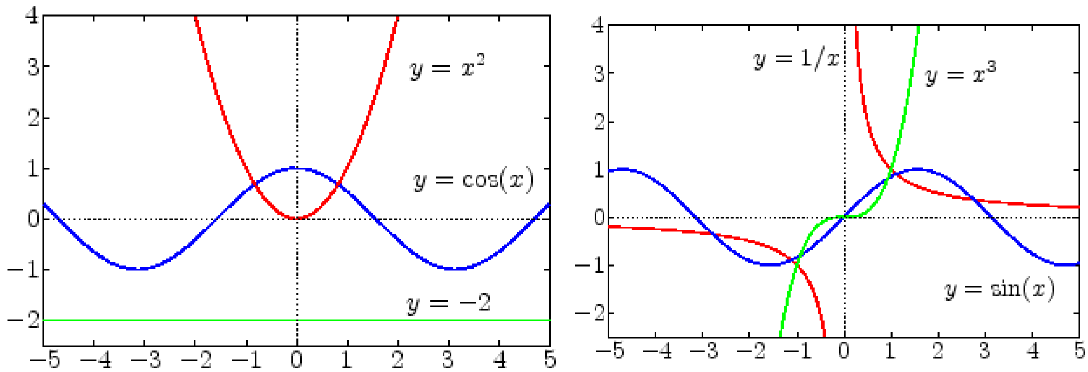


ungerade Funktion

ناجوړه یا طاق تابع

د دوه جوړه توابعو ضرب جوړه تابع دی. برعکس د یوه ناجوړه یا طاق تابع ضرب د یوه جوړه تابع سره ناجوړه دی. د زیاتون یا جمعي او کمښت یا تفریق جوړولو سره د تابع تیپ یا ډول ساتلی پاتیږي.
پای.

لاندې توابع یو کینې لور ته یو ښو جوړه (جفت) او ښي لور ته یو ښو ناجوړه (طاق) توابع ښايي.



د مناسب ترکیب جوړولو سره سرې نورې بیلګې لاس ته رواړي. نو توابع

$$f(x) = x^2 \cos x - x^3 \sin x, \qquad g(x) = -2 + \frac{1}{x^2}$$

جوړه دي او

$$h(x) = f(x) \sin x - g(x) x^3$$

ناجوړه دي.

پاي.

برعکس – یا په ښت فنکشن - تابعUmkehrfunktion

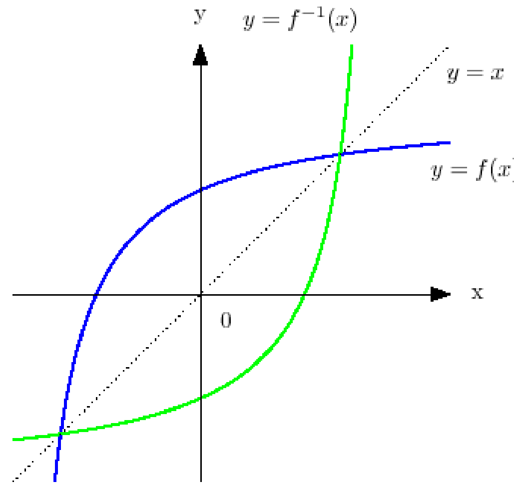
د یوه اینجکتیو (په کې -) تابع $f : D \to W$ د تعریفورشو D او ارزښت ورشو $W \subseteq \mathbb{R}$ سره د

$$f^{-1} : W \to D \subseteq \mathbb{R},\ x \mapsto f^{-1}(x)$$

له لارې تعریف دی. له دې سره لاندې باور لري

$$y = f(x) \iff x = f^{-1}(y).$$

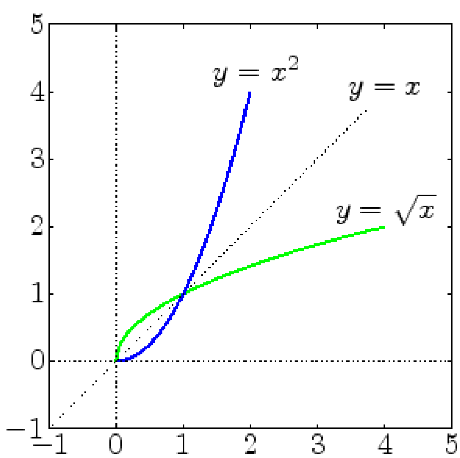
د برعکس توابعو تعریف ورشو د f ارزښت ورشو ده. د هغه ګراف $y = f^{-1}(x)$ د f د ګراف په لومړي کونجنیمی $(y = x)$ هنداره شوې ښېره ده:

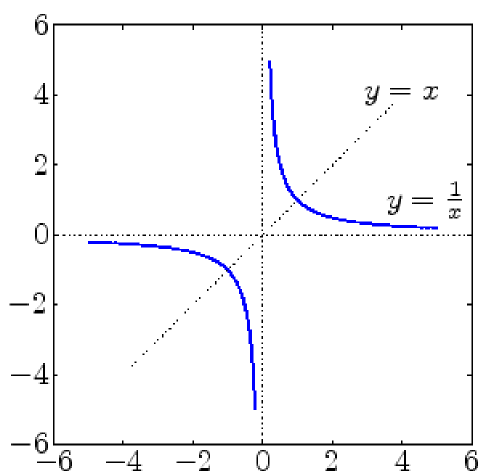


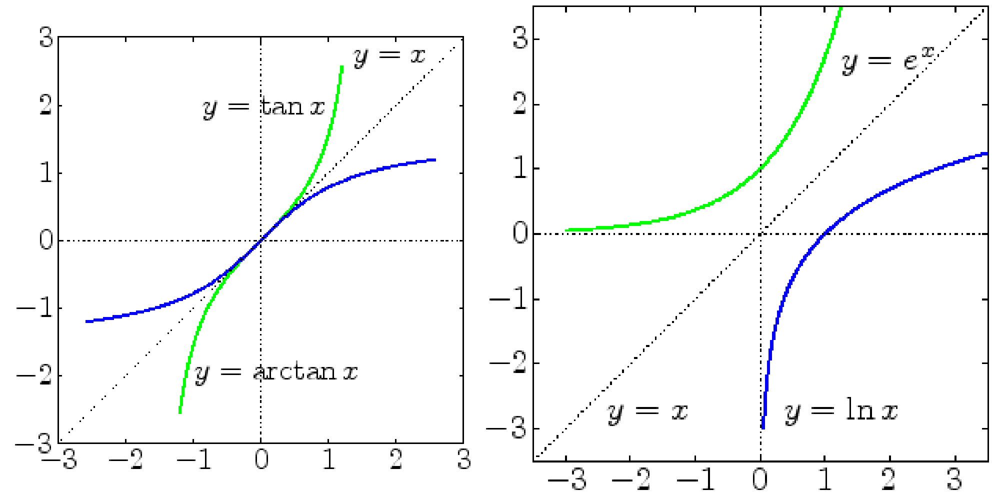
کيدی شي ليکندود $f^{-1}(x)$ مو په ساده توګه د معکوس ارزښت $f(x)^{-1} = \frac{1}{f(x)}$ سره بدلولو ته لار ښود کړي. په ځانګړې توګه ، که د تابع x ارزښت ونه ليکل شي، دا اړيکي دې بايد روښانه وي، چې موخه مو څه ده.

پای.

لاندې ځيرې د يو څو بيلګو برعکس - يا په څېړ فنکشن يا تابع ښايي.







په لاندې جدول کې هر اړونده تعریف ورشو وې ورکړ شوې دي:

f	D	f^{-1}	D
x^2	$\mathbb{R}$	$\sqrt{x}$	$[0,\infty)$
e^x	$\mathbb{R}$	$\ln(x)$	$(0,\infty)$
$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$	$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$
$\tan x$	$\mathbb{R}\setminus\{x\,:\,x=(2z+1)\pi/2\,,z\in\mathbb{Z}\}$	$\arctan x$	$\mathbb{R}$

د فنکشنونو یا توابعو سره شمیرنه Rechnen mit Funktionen

د توابعو کرښیز ترکیب تکي دوله تعریف شوی دی، دا په دې معنا چې په توابعو د اړونده عملیو له لارې:

$$(rf+sg)(x)=rf(x)+sg(x).$$

په ورته توګه ضرب fg او وېش f/g . په وېش کې باید g د صفر سره برابر نه وي..
بالاخره

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

د دوه توابعو یو په بل پسې راوستل یا ځنځیرونه ښایي.
پای.

د بیلګې

$$f(x) = x^2 - 4, \qquad g(x) = x + 2$$

لپاره مختلفې ترړنې راکوي

$$(f + 2g)(x) = x^2 + 2x$$

$$(fg)(x) = x^3 + 2x^2 - 4x - 8$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = x - 2, \qquad x \neq -2$$

په وېش کې تعریفتشځای $x = -2$ له منخه تلونکی یا د جګیدو وړ دی،

ځکه چې صورت یا ماتباندې $x^2 - 4 = (x + 2)(x - 2)$ هم په $x = -2$ کې یو صفرځای لري.

د f او g یو په بل پسې ترړنه یا ځنځیرونه راکوي

$$(f \circ g)(x) = (x + 2)^2 + 4$$

$$(g \circ f)(x) = x^2 - 2,$$

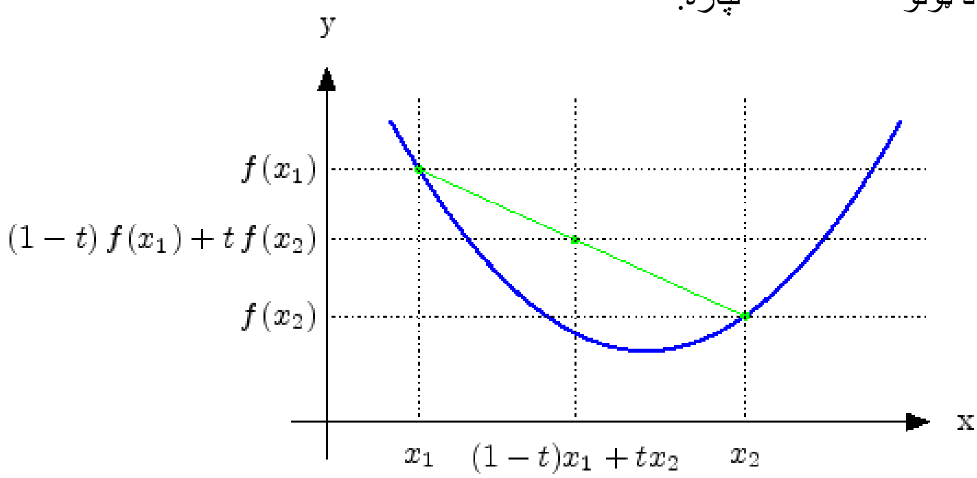
نو ترړنه یا عملیه $\circ$ کموتاتیو یا بدلوړ نه ده.

ننوتي او وتلي - یا مقعر او محدبې توابع

یو تابع په یوه انټروال D کې(کره) ننوتی دی، که هر ټوټه ووني یا سیکانت د ګراف پورته لور ته پروت وي، دا په دې معناچې

$$f((1-t)\,x_1 + t x_2) \overset{(<)}{\leq} (1-t)\,f(x_1) + t\,f(x_2)\,, \quad t \in (0,1)$$

د ټولو $x_i \in D$ لپاره.



که f دوه واره ناپرېکېدونکی مشتقوړ وي، نو (کره) ننوتنه د ټولو $x \in D$ لپاره د

$$f''(x) \overset{(>)}{\geq} 0$$

سره تر هغه ځانله ټکي پورې ورته یا برابر ارزښته ده.

د ننوتو توابعو زیاتون یا جمعه ننوتي ده. ټرني یا عملیې $/, \cdot, -$ همداسي یو په بل پسې راوړنه یا ځنځیرونه $\circ$ په ټولیزه توګه ننوتوالی نه ساتي. بالاخره هر ننوتی تابع ناپرېکېدونکی دی.

په ورته توګه وتلی تابع هم تعريف کيږي. د وتلي تابع لپاره ټوټه وونی یا سيکانت د ګراف کښته لور ته پروت دی، دا په دې معنا چې د x - محور باندې هنداره شوی تابع $-f$ وتلی دی.

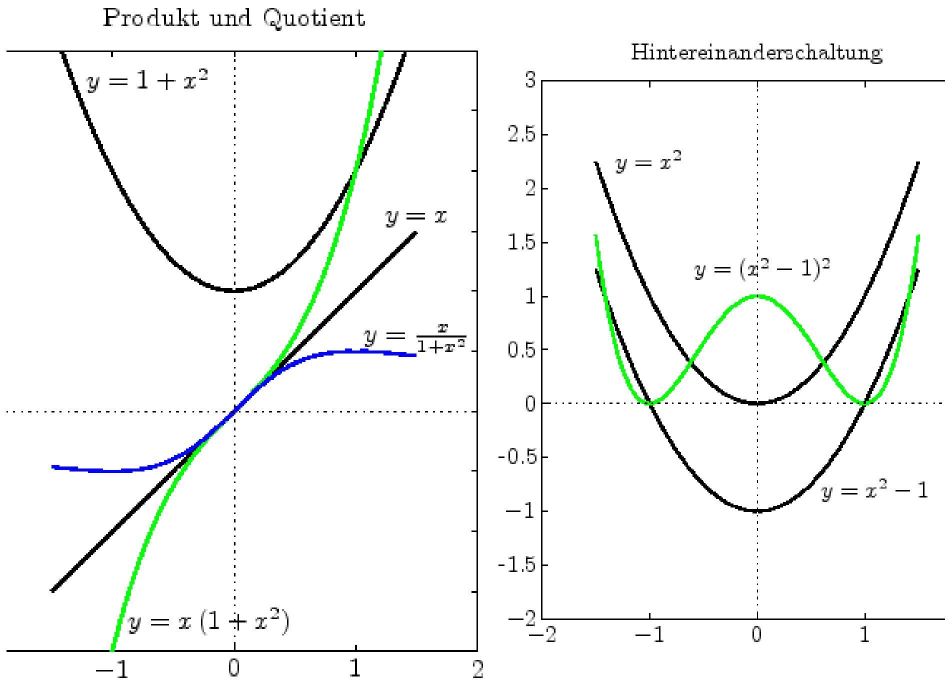
پای.

د دوه ننوتو فنکشنونو یا توابعو جمعه یا زياتون د تعريف څخه ترلی لاس ته راځي:

$$\begin{aligned}(f+g)((1-t)x_1+tx_2) \\ &= f((1-t)x_1+tx_2)+g((1-t)x_1+tx_2) \\ &\le (1-t)\,f(x_1)+t\,f(x_2)+(1-t)\,g(x_1)+t\,g(x_2) \\ &= (1-t)(f+g)(x_1)+t(f+g)(x_2),\end{aligned}$$

د کوم سره چې د نابرابرون ننوتوالی د f او g څخه کار اخستل کيږي.
نوري ترڼې یا عمليې په ټوليزه توګه ننوتوالی نه ساتي، لکه چې لاندې بيلګې به يې وشايي.

يو په بل پسې ترڼه ضرب او ويش



د دي لپاره چي په يوه ټکي کي د تابع ناپرېکدنوالی وښايو، ټاکو $c < a < x < b$.
نو دی

$$
\begin{aligned}
x &= ta + (1-t)b \\
a &= sx + (1-s)c
\end{aligned}
$$

د $0 < s,t < 1$ سره. داچي ننوتی دی، نو باور لري

$$f(x) - f(a) \leq (1-t)(f(b) - f(a))$$

همداسي

$$f(x) - f(a) \geq \left(\frac{1-s}{s}\right)(f(a) - f(c)),$$

د $f(a) \leq sf(x) + (1-s)f(c)$ له امله.

د $x \to a$ لپاره s او t د 1 په لور هڅيږي، او له دي سره دی

سرلیک

$$\lim_{x\to a}(f(x)-f(a))=0.$$

د $x<a$ لپاره ورته دلیل راوړل کیږي.

پولینوم Polynom

د n درجې یو پولینوم p په لاندې بڼه لیکل کیږي

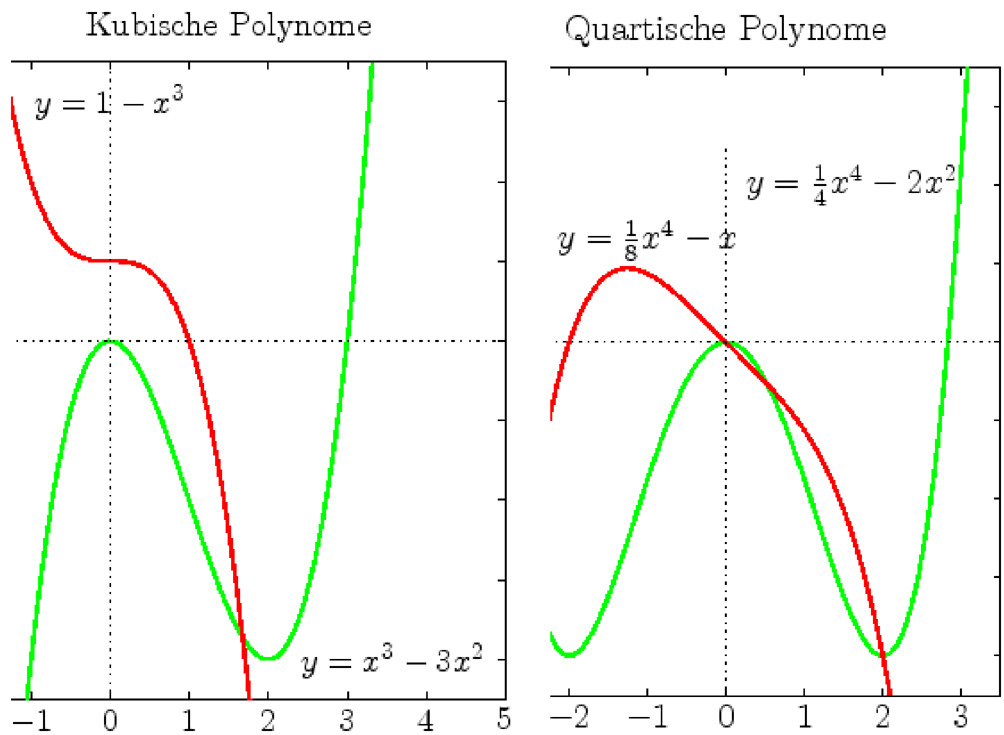
$$p(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$$

د $a_n\neq 0$ سره.

اووښتوني یا متحولې x او ضریب یا ځلووني a_k کیدی شي حقیقي – همداسې کمپلکس ګڼونه یا عددونه وي. په اړونده توګه د حقیقي همداسې د کمپلکس پولینوم څخه غږیږو. لیکونکیة: هیورنر او هیولیګ

لاندې ځیرې مکعب ډوله ($n=3$) او کوارتیک ډوله ($n=4$) پولینومونه د ځرنګوالي له لورې مختلف تابع ګرافونو سره ښایي.

کوارتیک پولینومونه مکعب پولینومونه



Polynomdivision پولینوموېش

پولینومونو p او q ته د $m = \text{Grad}\, q \le \text{Grad}\, p = n$ سره يواځني
پولینومونه f او r شتون لري د
$p = fq + r,\quad \text{Grad}\, f = n - m,\quad \text{Grad}\, r < m$.
سره.

دا توټه ونه کيدی شي د وېش له لارې د باتي يا باقی سره وټاکل شي.

په ځانګي توګه د p د صفرځای t لپاره لاس ته راځي چې $p(x) = f(x)(x-t)$
دی د $\text{Grad}\, f = n - 1$. ړ سره.

پای.

د q سره د p وېش څخه لرو

$$\underbrace{a_n x^n + \cdots}_{p(x)} = \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} \underbrace{(b_m x^m + \cdots)}_{q(x)} + p_{n-1}(x)$$

د يوه پاتې يا باقي $p_{n-1}(x) = a'_{n-1} x^{n-1} + \cdots$ سره.

که $m \le n-1$ وي کېدی شي بيا ووېشل شي:

$$p_{n-1}(x) = \frac{a'_{n-1}}{b_m} x^{n-1-m} q(x) + p_{n-2}(x) .$$

پروسه پرې کيږي، که د پاتې پولينوم درجه له m کوچنۍ وي، دا په دې معناچې
وروسته د $r = p_{n-(n-m+1)}$. سره.
د تل بيا ضرب له لارې لاس ته راځي

$$f(x) = \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} + \frac{a'_{n-1}}{b_m} x^{n-1-m} + \cdots .$$

که t د p صفرځای وي، نو باور لري

$$0 = p(t) = f(t)(t-t) + r(t) = r(t)$$

او له دې سره $r(x) = 0$ ، ځکه چې $1 >$ Grad r دی.

د پولينوم وېش د ليکنيز وېش سره ورته مخ ته تلی شي.

د بيلګې په توګه د $p(x) = 9x^5 + 12x^4 + 10x^3 + 4x^2 + 4x + 2$
او $q(x) = 3x^2 + 2x + 1$ لپاره لاس ته راځي

$$(9x^5 + 12x^4 + 10x^3 + 4x^2 + 4x + 2) : (3x^2 + 2x + 1) =$$
$$= 3x^3 + 2x^2 + x + \frac{r(x)}{q(x)}$$

$$\begin{array}{r} -(\,9x^5 + 6x^4 + 3x^3\,) \\ \hline 6x^4 + 7x^3 + 4x^2 \\ -(\,6x^4 + 4x^3 + 2x^2\,) \\ \hline 3x^3 + 2x^2 + 4x \\ -(\,3x^3 + 2x^2 + x\,) \\ \hline 3x + 2 = r(x) \end{array}$$

نو دی

$$\underbrace{9x^5 + 12x^4 + 10x^3 + 4x^2 + 4x + 2}_{p(x)} = \underbrace{(3x^3 + 2x^2 + x)}_{f(x)}\underbrace{(3x^2 + 2x + 1)}_{q(x)} + \underbrace{(3x + 2)}_{r(x)} .$$

د يوه پولينوم صفرځايونه او فاکتوري کول يا په ضريبونو ټوټه کول

يو د n درجې پولينوم p د څووالي يا تکرار سره ټيک z_k کمپلکس صفرځايونه لري او له دې سره کېدی شي په ورته کرښيزو ضريبونو يا فاکتورونو

$$p(z) = c(z - z_1) \cdots (z - z_n)$$

وليکل شي د ثابتې c سره.

که p حقيقی يا قبيل وي، نو کمپلکس صفرځايونه په کنجوګيری جوړو $x_k \pm \mathrm{i}y_k$ رامنځ ته کيږي.

يو حقيقي په ضريبونو ليکل يا فاکتوره کول کېدی شي د کرښيزو فاکتورونو ترڅنګ د لاندې مربع فاکتورونه

$$(z - x_k - \mathrm{i}y_k)(z - x_k + \mathrm{i}y_k) = (z - x_k)^2 + y_k^2$$

هم ولري.

د دويمې درجې پولينوم صفرځايونو لپاره کيدی د منځشپې يا **ABC فرمول(دا د p,q -فرمول ته روته يا همهغسې دی) و کارول شي** او د دريمې او څلورمې درجې پولينومونه د کاردان فرمولونو Cardanischen Formeln له لارې د اکسپليځيت الجبری افادو يا ويېنو په توګه و ټاکل شي.
د جګو درجو پولينومونو لپاره بيا په ټوليزه توګه نومريکي تلنلارې کارول کيوي. که بيا يو صفرځای معلوم وی، نو کېدی شي د ا ړونده کرښيز فاکتورونې يا ضريبونې له لارې

و وېشل شي.
$q(z) = p(z)/(z - z_1)$ او $z_2, \ldots, z_n$ د $n-1$ درجې د پولینوم د د صفرځایونو په توګه وټاکل شي.
د الجبر بنسټيزې جملې په اساس د ≥ 1 Grad درجې کمپلکس پولینوم یو صفرځای لري . د پرلپسي پولینوموېشنې د صفرځایونو سره
اړونده کربښیز صریبونه یا فاکتورونه له دې سره ضریبونه راکوي.

که p فقط حقیقی صریبونه ولري، نو باور لري

$$\overline{p(z)} = \overline{\sum_{k=0}^{n} p_k z^k} = \sum_{k=0}^{n} p_k \overline{z^k} = \sum_{k=0}^{n} p_k \overline{z}^k = p(\overline{z})$$

یعنې د یوه صفرځای z_0 لپاره هم $p(\overline{z_0}) = \overline{0} = 0$ دی.

د $p(z) = z^3 - 5z^2 + 9z - 5$

په ضریبونو لیکل یا فاکتوره کول ټاکو. پیژنو، چې $z_1 = 1$ یو صفرځای دی او یو د پولینوم وېش سره لرو
$p(z)/(z-1) = z^2 - 4z + 5.$

د دې مربع پولینوم صفرځایونه د منځشپې فرمول له مخې دي
$z_{2,3} = 2 \pm i.$

د دې په تعقیب کمأبکس فاکتورونه لاندې ده

$$p(z) = (z-1)(z-2-i)(z-2+i).$$

حقیقی په ضریبونو لیکنه یا صریبونه د دواړو اخرني فکتورونو د ټولګې څخه لاس ته راوړو همداسې سیده د مربع تکمیلونې له لارې:

$$z^2 - 4z + 5 = (z-2)^2 + 1,$$

دا په دې معنا چې

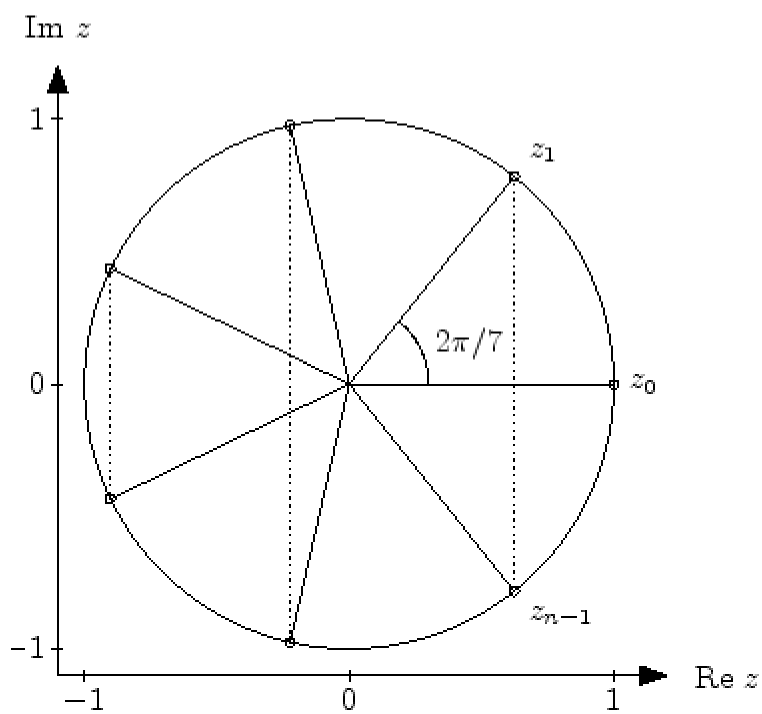
$$p(z) = (z-1)((z-2)^2+1).$$

ليکونکي: هيوليګ،هيورنر، کنش

د $p(z) = z^n - 1$ صفرځايونه n -م يوونرېښي يا واحدجذرونه دي
$z_k = \exp(2k\pi \mathrm{i}/n), k = 0, ..., n-1.$

له دې سره کمپلکس فاکتورونه لاس ته راځي

$$p(z) = \prod_{k=0}^{n-1} (z - \exp(2k\pi \mathrm{i}/n)).$$



د کمپلکس کنجرګيري صفرځايونو ټولګه يا يوځای کونه حقيقي فاکتوري کونه راکوي.

د جوړه n لپاره دی

$$p(z) = (z-1)(z+1)\prod_{k=1}^{n/2-1}\left(z^2 - 2z\cos(2k\pi/n)+1\right)$$

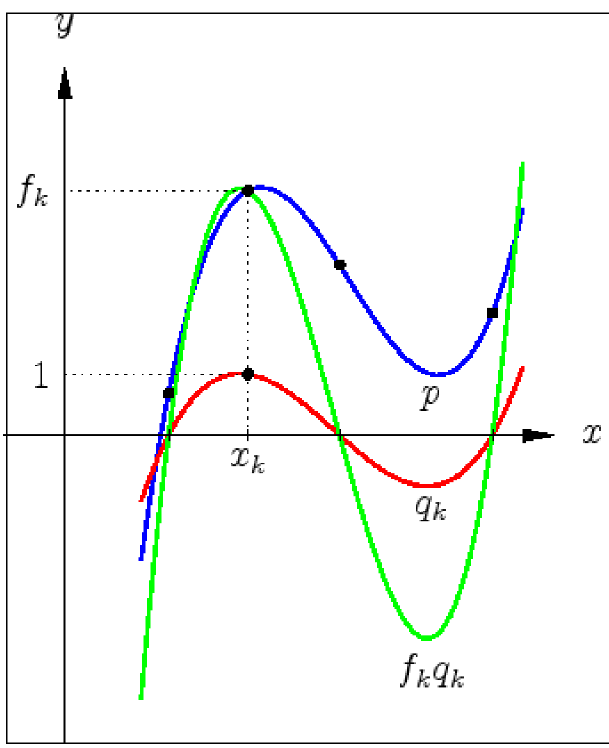
او د ناجوړه یا طاق n لپاره

$$p(z) = (z-1)\prod_{k=1}^{(n-1)/2}\left(z^2 - 2z\cos(2k\pi/n)+1\right).$$

پای.

د پولینومونو سره انترپولیشن

په $n+1$ کي تابع ا رزښتونه f_k جوړه په مختلف تکیه ځایونو $x_0,\dots,x_n$ کیدی شی یواځني د یوه $\leq n$ Grad درجي پولینوم له لارې انترپولی شي:



$$p(x_k) = f_k, \quad k = 0,\dots,n.$$

دا انترپولیشن پولینوم کیدی شي د لاګرانج – بنه

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k q_k(x),$$

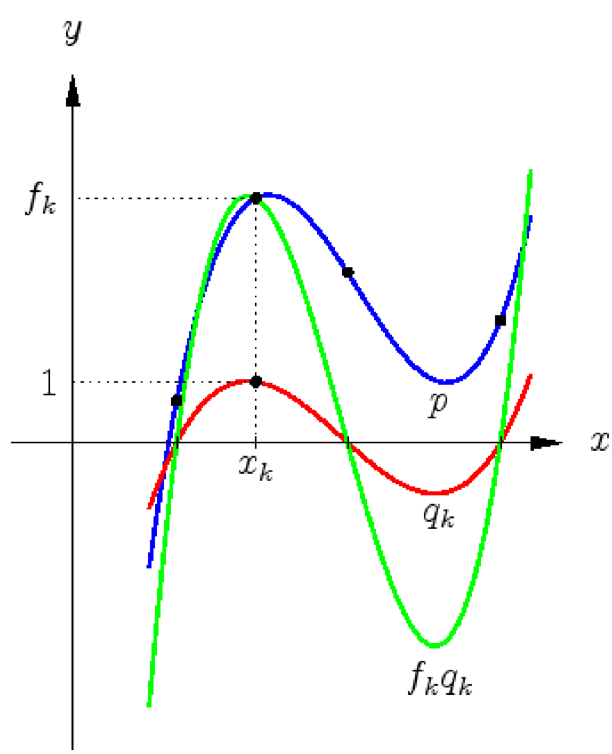
$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k q_k(x),$$

$$p(x_k) = f_k, \quad k = 0, \ldots, n\,.$$

دا انترپولیشن پولینوم کیدی شي د لاګرانج – بنه

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k q_k(x), \quad q_k(x) = \prod_{j \neq k} \frac{x - x_j}{x_k - x_j},$$

انځور شي.



پولینوم q_k د لاګرانج-پولینوم بلل کیږي او په ټکي x_k کې ارزښت 1 لري او په نورو ټولو ټکو x_j کې یې ارزښت صفر دی:

سرليک

$$q_k(x_j) = \delta_{k,j}$$

د کرونيکر-سومبول δ سره.

د لاګرانج-پولينوم

$$q_k(x_j) = \delta_{j,k}$$

پوره کوي او له دې سره لاس ته راځي

$$p(x_j) = \sum_k f_k \delta_{j,k} = f_j \,,$$

د انترپوليشن شرايط ټول پوره دي.

د دې لپاره چې يواځنوالى وښايو، چې يو بل انترپوليشنپولينوم $\tilde{p}$ شتون لري، کمښت را اخلو يا تر ځېړنې نيسو.

$$p - \tilde{p} \,.$$

دا (لږتر لږه) $n+1$ صفرځاونه لري(د انترپوليشن کېدونکي ځايونه x_k)، مګر (زيات له زياته) د n درجو. له دط سره بايد کمښت کټمټ وي، نو پولينومونه سره توپير نخ لري.

ليکونکي: هيوليګ،هيورنر

په اکويديستانت يا برابرواټنيز تکيه -ځايونو $x_k = kh$ د f_k ارزښتونو توابعو ټيک ګرافيکي انځورونې ته کېدى شي مکعبيز انترپوليشن وکارول شي. له دې سره په تکيه-ځايونو $x_{k+1/2} = (k+1/2)h$ منځ ارزښتونه د

$$f_{k+1/2} = (-f_{k-1} + 9f_k + 9f_{k+1} - f_{k+2})/16$$

له لارې اپروکسيمى شي. دا پروسه تکراريږي، تر هغز چې پوره داتا منځ ته راشي.

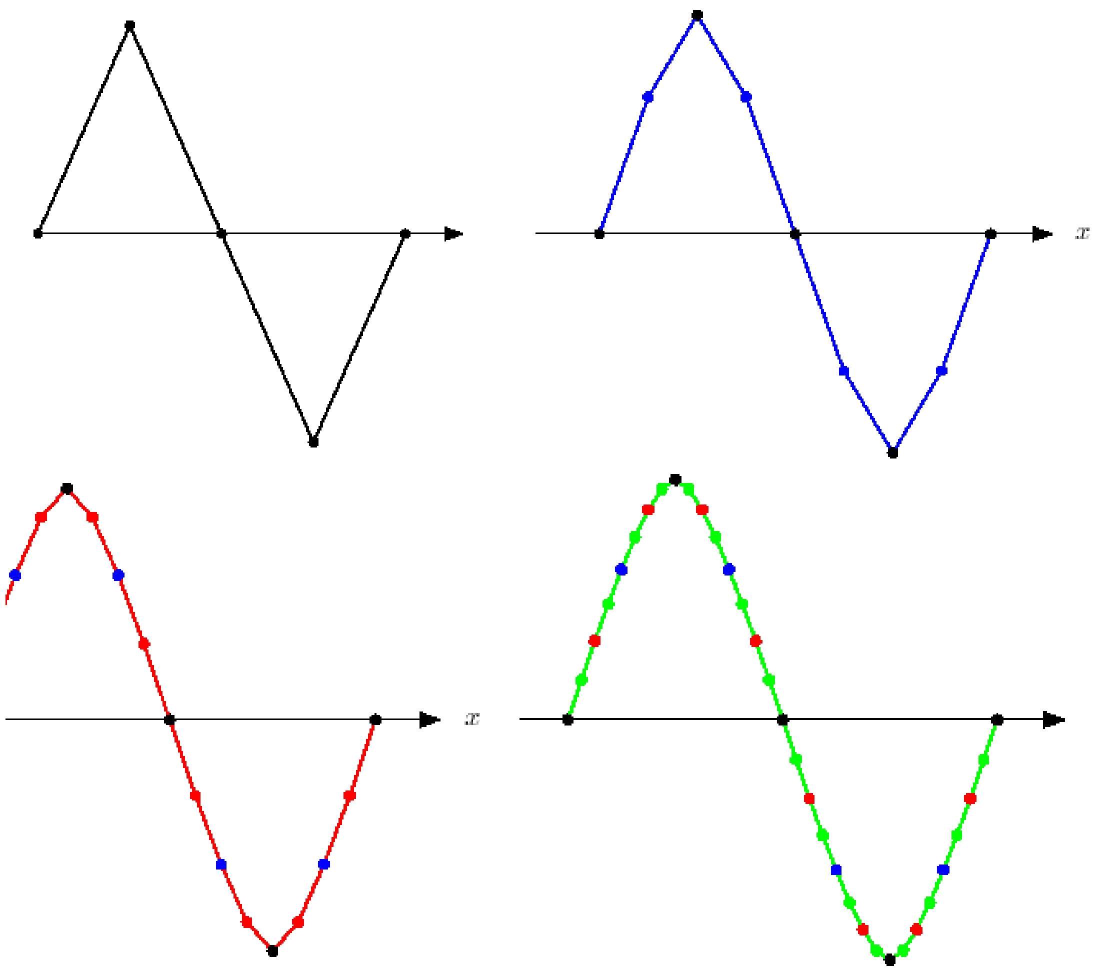
د ـټکو -فرمول وزنونه

$$-\frac{1}{16},\ \frac{9}{16},\ \frac{9}{16},\ -\frac{1}{16}$$

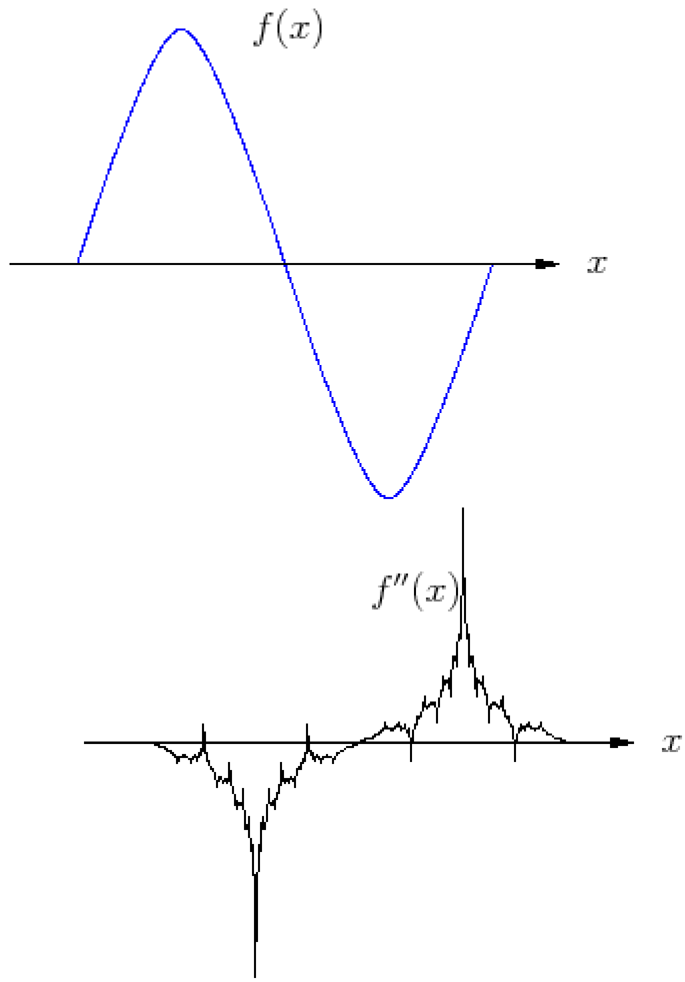
په تکيه-ځايونو $x_{k+1/2}$ د لاګرانژ-پولينوم ارزښتونه دي.
د بېلګې په توګه

$$-\frac{1}{16}=\left(\frac{x-kh}{(k-1)h-kh}\,\frac{x-(k+1)h}{(k-1)h-(k+1)h}\,\frac{x-(k+2)h}{(k-1)h-(k+2)h}\right)\Bigg|_{x=(k+1/2)h}\ .$$

دی.
د سيمتري په بنسټ او دا چې ضريبونه بايد سيمتريک شي(د ثابتو داتا انترپوليشن) ، بې
له شمېرنې نور ضريبونه راکوي.



ځيره وتونداتا ښايي او د 4 -ټکو-انترپولیشن د دري ځله کاروني يا استعمال له لارې د منځ ته ارغلي ساين تابع اپروکسيميشن . په حقيقت کې دا لاندې کيږ ښودل شوی پوله تابع خوی اغیز لري. مګر په هر حالت فقط لومړی مشتق ناپرېکيدونکی دی.



ښی ګرافيک وېشلی کمښت له لارې ورنږدې يا نږدې دويم مشتق د اته واره انترپولیشن پسې ښايي. سړی د ګراف فراکتالfraktalen (فراکتال: لاتين: مات) خويونه پيژني.

راشنل (کسری يا نسبتي) توابع

یو رینتونی تابع r د صورت درجې m او مخرج درجې n سره د دوه پولینمونو وېش دی:

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m}{b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n}.$$

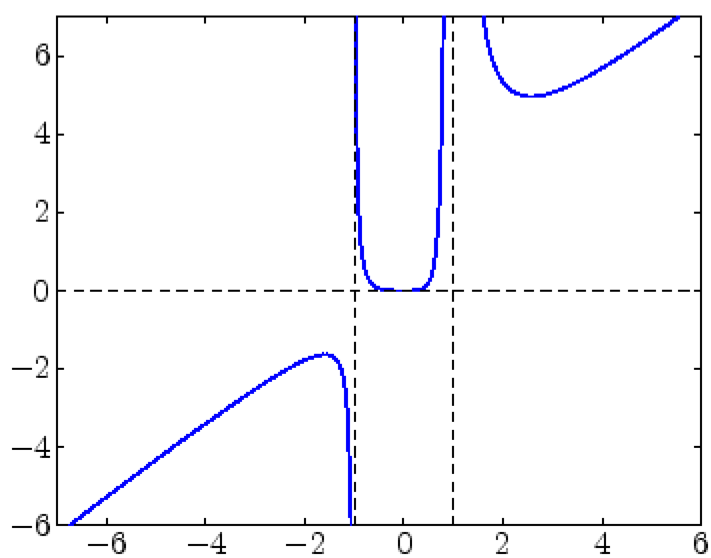
دا انځوونه نا ټوټه وونې بلل کیږي، که p او q کوم ګډ کربنیز ضریب یا فاکتور ونه لري. د مخرج صفرځایونه راشنل تابع r د تعریف تشځایونه دي او د قطبځایونه بلل کیږي. د دوی نظم د صفرځایونو ډېرځلوالی ښايي.

اووښتونې یا متحولې x او ضریبونه a_k, b_k کېدی شي حقیقي یا کمپلکس وي.
اړوند سړی د حقیقي یا کمپلکس راشنل تابع څخه غږیږي.
للیکونکي : اېپ، هیولیګ

تابع

$$f(x) = \frac{x^4}{(x+1)(x-1)^2}$$

تابع یو سادهقطب په $x=-1$ کې لري او دبل پول په $x=1$ کې.



سرې له تابع f څخه درک کوي، چې په یوه ساده صفرځای کې مخنخښه بدلوي او په یوه ډبل صفرځای کې مخنخښه تغیر نه خوري.

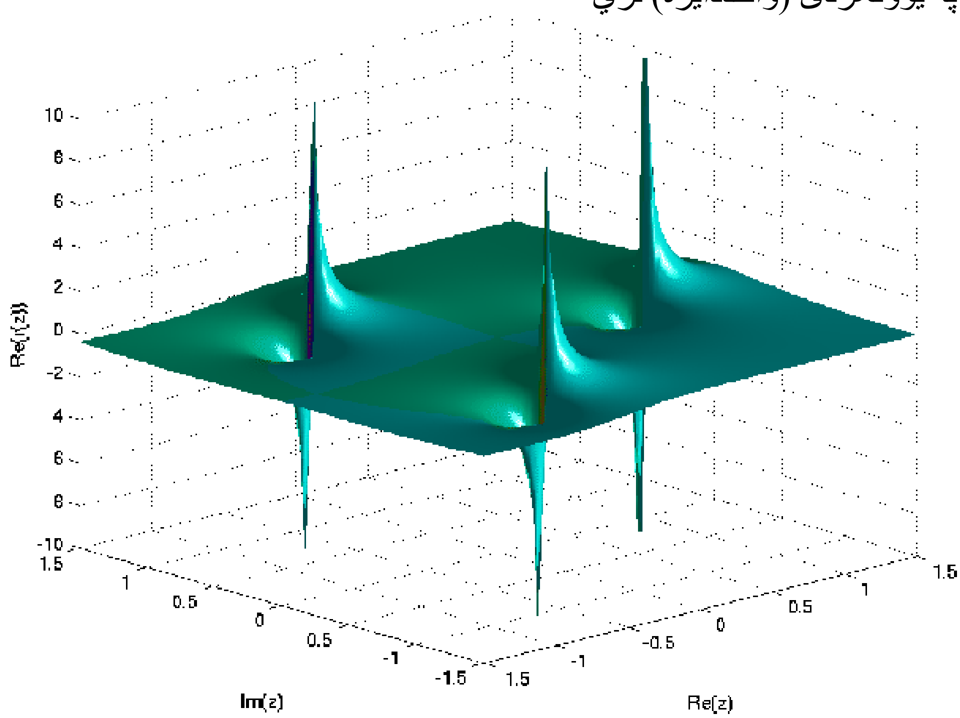
کمپلکس راشنل- یا کسري توابع

$$r(z) = \frac{z^2}{z^3 - 1}$$

درې صفرځایونه

$$z_1 = 1, z_2 = e^{2\pi i/3} = -\tfrac{1}{2} + \tfrac{\sqrt{3}}{2}i, z_3 = e^{-2\pi i/3} = -\tfrac{1}{2} - \tfrac{\sqrt{3}}{2}i$$

په یوونکردی (واحددایره) لري



ځیره د r د ګراف رییل - او ایماجینار برخه ښایي. له دې سره د رنګوېشنه (که چېرې رنګه وه) د r د مطلق ارزښت له لارې تاوکل شوې.

) لیکونکي: اپپ،هیورنر، کنش

په ټوټه مات ټوټه کونه يا تجزيه کونه **Partialbruchzerlegung**

يو د m_j نظم راشنل تابع r د n مختلفو صفرځايونو z_j سره ،

$$r = \frac{p}{q}, \quad q(z) = (z - z_1)^{m_1} \cdots (z - z_n)^{m_n}$$

کيدی شي په لاندې ټوټه شي

$$r(z) = f(z) + \sum_{j=1}^{n} r_j(z), \quad r_j(z) = \frac{a_{j,1}}{z - z_j} + \dots + \frac{a_{j,m_j}}{(z - z_j)^{m_j}},$$

دلته f د $d = \mathrm{Grad}\ p - \mathrm{Grad}\ q$ Grad درجې پولينوم دی ($f = 0$ ، که $d < 0$ وی). راشنل توابع r_j د r په قطبځايونو کې اصلي برخې بلل کيږي. دا د $r(z)$ لوېدنه تشريح کوي د $z \to z_j$ لپاره. پولينوم f کيدی شي د پولينوموېش له لارې وشمېرل شي:

$$p = fq + g, \quad \mathrm{Grad}\ g < \mathrm{Grad}\ q\,.$$

دلته g د p په q باندې وېشنې پاتې يا باقي دی. ضريبونه $a_{j,\nu}$ کيدی شي د z^k د ضريبونو د پرتله کونې له لارې په کټوټوالي

$$p(z) = q(z)\left(f(z) + \sum_{j=1}^{n} r_j(z)\right)$$

وټاکل شي.

د بديل په توګه د اصلي برخو ټاکلو لپاره د پوله ارزښت متود هم کارول کيدی شي.

د قطبونو د خوراځګو ضريبونو لپاره باور لري

$$a_{j,m_j} = \lim_{z \to z_j} (z - z_j)^{m_j} r(z) .$$

د یوه نظم $(m_j > 1)$ قطبخای کې نه شي کېدی ضریبونه $a_{j,1}, \dots, a_{j,m_j - 1}$ سیده د پولې ارزښت په توګه وټاکل شي. سړی کړی شي دا اوس شمیرل شوی ترم $a_{j,m_j} / (z - z_j)^{m_j}$ کم کړي او د رکورسیو متود وکاروي.. یو ضریب پرتله کونه د همدا اوس شته ترمونو په پام کې نیولو هم شونې ده.

پوله ارزښت کېدی شي وټاکل شي، داسې چې د r په مخرج کې ضریب $(z - z_j)^{m_j}$ لرې برېښوول شي او بیا z_j په پاتې کسر یا ـمات کې ځا په ځای شي. په ځانګړې توګه باور لري

$$a_{j,1} = \frac{p(z_j)}{\prod_{k \neq j} (z_j - z_k)}$$

د ساده قطب ځایونو $z_1, \dots, z_n$ لپاره.

لیکونکي : اپ، هیورنر

د ساده قطبځایونو ($m_j = 1$) لپاره به تېته کونه منځ ته راشي. د پولینوم وېش پسې راشنل تابع منځ ته راځي

$$r(z) - f(z) = \frac{g(z)}{q(z)} = \frac{g(z)}{(z - z_1) \cdots (z - z_n)},$$

د کوم سره چې پولینوم $q(z)$ او $g(z)$ ګډ پروېشونی یا مقسوم علیه ونه لري، نیسو ، چې تول z_j مختلف دي، او $\mathrm{Grad}\ g < n$ باور لري.

د تېته کسر تېته کونې سره د برابر اېښوونې وروسته

$$\frac{a_1}{z - z_1} + \cdots + \frac{a_n}{z - z_n}$$

د $a_j = a_{j,1}$ سره او د q د ضربول سره سړی د $g(z)$ د لاګرانژ ـانځورونه لاس ته راوړي

$$g(z)=\sum_{j=1}^{n}\left(a_j\prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}(z-z_k)\right)=\sum_{j=1}^{n}\left[a_j\prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}(z_j-z_k)\right]\underbrace{\prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}\frac{z-z_k}{z_j-z_k}}_{q_j(z)}$$

دا په ې معناچي د $q_j(z_k)=\delta_{j,k}$ له امله په ګوډیزه نوکانو کي د $g(z_j)$ ازښتونه

$$a_j = g(z_j)/\prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}(z_j-z_k).$$

دي. له دې سره لاس ته راځي
په ورته توګه د جګو درجو قطبځایونه هم کار ول کېدی شي. دا مګر تخنیکي لږ پې]لی دی.
لیکونکي : اپ، هیورنر
د

$$r(z)=\frac{p(z)}{q(z)}=\frac{z^3}{z^2+z-2}$$

په ټوټه کسر(مات) ټوټه ونه دې وټاکل شي.
دا چې د صورت درجه د مخرج له درجې کوچنی نه ده، باید لومړی یو پولینوم وېش صورت ونیسي. سړی لاس ته راوړي

$$\begin{array}{l}(z^3):(z^2\ +z\ \ -2)=z-1+\dfrac{3z-2}{z^2+z-2},\\ -(\underline{z^3\quad +z^2\ -2z})\\ \qquad -z^2\ +2z\\ \quad -(\underline{-z^2\ -z\ \ +2})\\ \qquad\quad 3z\quad -2\end{array}$$

دا په دې معنا چې $f(z) = z - 1, \quad g(z) = 3z - 2.$ د $r = f + \frac{g}{q}$ سره .
د دې لپاه چې د ټوټه مات ټوټه ونې اينونه چې لاس ته راوړو بايد اوس د r قطبڅايونه
وټاکل شي. د منځشپې فرمول سره لاس ته $z_1 = 1$ او $z_2 = -2$ راوړو د مخرج
پلينوم د صفځاى په څېر:

$$q(z) = (z-1)(z+2).$$

د g/q ټوټه مات ټوټه ونه له دې سره لاندې بڼه لري

$$\frac{3z-2}{z^2+z-2} = \frac{a_1}{z-1} + \frac{a_2}{z+2}.$$

دا اخر پل د ضريبونو a_k ټاکل دي.
د پوله ارزښت متود سره لاس ت ه راځي

$$a_1 = \lim_{z \to 1}(z-1)\frac{3z-2}{z^2+z-2} = \left.\frac{3z-2}{z+2}\right|_{z=1} = \frac{1}{3}$$

$$a_2 = \left.\frac{3z-2}{z-1}\right|_{z=-2} = \frac{8}{3}.$$

او

په ټوليزه توګه لاس ته راځي

$$r(z) = z - 1 + \frac{1/3}{z-1} + \frac{8/3}{z+2}.$$

پاى.

راشنل توابع

$$r(z) = \frac{2z^2 - 5z - 3}{z^3 - 3z^2}$$

په $z_1 = 3$ کې يوه سادهقطبځاى لري او په $z_2 = 0.$ کې يو دبل قطبځاى لري.

دا چې د صورت درجه د مخرج له درجې کوچنۍ ده، پولينوم وېش ته اړتيا نه شته او د په ټوټه کسر ټوټه ونه دا بڼه لري

$$\frac{2z^2-5z-3}{z^3-3z^2}=\frac{a_1}{z^2}+\frac{a_2}{z}+\frac{a_3}{z-3}.$$

د پوله ارزښت متود سره لرو

$$a_1 \qquad = \lim_{z\to 0} z^2\frac{2z^2-5z-3}{z^3-3z^2}=\left.\frac{2z^2-5z-3}{z-3}\right|_{z=0}=1$$

$$a_3=\lim_{z\to 3}(z-3)\frac{2z^2-5z-3}{z^3-3z^2}=\left.\frac{2z^2-5z-3}{z^2}\right|_{z=3}=0\,.$$

سرې په ساده ډول کړی شي، چې دا پاتې (هغه په اصطلاح، چې ورته وايو باقي مانده) ضريبونه a_2 په يوه ټکي $z \neq 0,3$ د تابع ارزښتونو د پرتوله کوني له لارې وټاکي.
د بېلګې په توګه د $z = 1$ لپاره لرو

$$\frac{2-5-3}{1-3}=1+a_2+0$$

او سرې $a_2=2$ لاس ته راوړي.

ليکونکي: اپ،هيورنر

د راشنل توابعو لپاره

$$r(z)=\frac{z^2-5z+4}{z^3-3z^2+z+5}$$

لپاره قطبځايونه روښانه نه دي. د ازماېښت له لارې $z_1=-1$ پيداکيږي او بيا د پولينوم وېش سره لاس ته راځي

$$(z^3-3z^2+z+5):(z+1)=z^2-4z+5.$$

.

د نيمي شپې فرمول سره د مخرج نور صفرځايونه $q(z)$ لاس ته راځي

$$z_{2,3}=2\pm i.$$

له دې سره ماتلاندې یا مخرج ضریبه ونه یا فاکتوری کونه

$$q(z) = (z+1)(z-2-i)(z-2+i)$$

لري او د ټوټه کسر ټوټه کونه داسې ده

$$\frac{p(z)}{q(z)} = \frac{a}{z+1} + \frac{b}{z-2-i} + \frac{c}{z-2+i}.$$

د دې لپاره چې a, b, c د ضریبونو د پرتلې له لارې وټاکو، د مخرج $q(z)$ سره وېشو او لرو

$$+ 4 = a(z-2-i)(z-2+i) + b(z+1)(z-2+i) + c(z+1)(z-2-i).$$

د $1, z, z^2$ د ضریبونو د پرتله کوني له لارې د درې ناټاکلو یا نامعلومو a, b او c لپاره یو کرښیز مساوات سیټم لاس ته راځي:

a	b	c	
1	1	1	1
-4	$-1+i$	$-1-i$	-5
5	$-2+i$	$-2-i$	4

د حل په حیث لاس ته $b = i/2$ $a = 1,$ او $c = -i/2$ راځي ، دا په دې معنا ، چې

$$r(z) = \frac{1}{z+1} + \frac{i/2}{z-2-i} + \frac{-i/2}{z-2+i}.$$

که اخري دواړه ترمونه سره یوځای کړو، نو حقیقي ټوټه کسر ټوټه ونه لاس ته راځي

$$r(z) = \frac{1}{z+1} + \frac{1/4}{z^2-4z+5}.$$

د حقیقي ټوټه کسر ټوټه ونه یا تجزیه

يو حقيقي ريښتونی يا راشنل تابع r د حقيقي قطبځايونو x_j سره او کمپلکس کنجوګيري قطبځايونو $u_k \pm$ i v_k سره او څو واره والی يا ډېروالی m_j همداسي n_k

$$r = \frac{p}{q}, \quad q(x) = \prod_j (x - x_j)^{m_j} \prod_k ((x - u_k)^2 + v_k^2)^{n_k}$$

کيدی شي په لاندې بڼه

$$r(x) = f(x) + \sum_j \sum_{\nu \le m_j} \frac{a_{j,\nu}}{(x - x_j)^\nu} + \sum_k \sum_{\mu \le n_k} \frac{b_{k,\mu}(x - u_k) + c_{k,\mu}}{((x - u_k)^2 + v_k^2)^\mu}$$

ټوټه کيږي، د $d = \mathrm{Grad}\ p - \mathrm{Grad}\ q$ درجې ($f = 0$ ، که $d < 0$ وي)

يوه پولينوم f سره. د په هر قطبځای زياتونونو يا د جمعې غړو د ګڼون يا تعداد ډېرواره والی په ګوته کوي. په ځانګړې توګه د ساده قطبځای لپاره باور لري

$$r(x) = f(x) + \sum_j \frac{a_j}{x - x_j} + \sum_k \frac{b_k(x - u_k) + c_k}{(x - u_k)^2 + v_k^2}.$$

پولينوم f کيدی شي دپولينوم وېش له لارې وټاکل شي

$$p = fq + g, \quad \mathrm{Grad}\ g < \mathrm{Grad}\ q,$$

دا په دې معنا چې g د p وېش په q باندې پاتې يا باقي دی. ضريبونه کيدی شي د مخرج پولينوم سره له ضرب وروسته دضريبونو د پرتلې له لارې وشمېرل شي.
حقيقي ټوټه کسر ټوټه کونه هم کيدی شي د کمپلکس بڼې څخه و کټل شي يا لاس ته راوړل شي، داسې چې سړی کمپلکس کنجوګيري ترمونه سره يوځای کاندې.

ټوټه کونه د ساده قطبځايونو ($m_j = n_k = 1$) لپاره سرته رسيږي..

د r کمپلکس ټوټه کسر ټوټه کونه په دې حالت کې دا لاندې بڼه لري

$$p(x)+\sum_j \frac{a_j}{x-z_j}$$

د z_j سره د مخرج پرلینوم q ساده صفرځایونه او

$$a_j=\lim_{z\to z_j}(z-z_j)r(z).$$

دا q چې حقیقي دی، نو کمپلکس صفرځایونه د کمپلکس کونجږګیري جوړوړپه توګه منځ ته راځي:

$$z_k=u+\mathrm{i}v,\quad z_l=u-\mathrm{i}v=\overline{z_k}.$$

له دې سره د اړونده ترمونو لپاره لاندې ټوټه ونه باور لري

$$\overline{a_k}=\lim_{z\to z_k}\overline{(z-z_k)r(z)}=\lim_{\overline{z}\to z_l}(\overline{z}-z_l)r(\overline{z})=a_l,$$

دا په دې معنا، چې

$$a_k=s+\mathrm{i}t,\quad a_l=s-\mathrm{i}t.$$

د دواړو ترمونو یوځای کونه غوښتوني بڼه راکوي:

$$\frac{s+\mathrm{i}t}{x-u-\mathrm{i}v}+\frac{s-\mathrm{i}t}{x-u+\mathrm{i}v}=\frac{2s(x-u)-2tv}{(x-u)^2+v^2}.$$

د جګو درجو قطبځایونه کیدی شي په ورته توګه تر څیړنې ونیول شي، مګر دلیل راوړنه یې په څرګنده توګه پیچلې ده.

د

$$r(x)=\frac{p(x)}{q(x)}=\frac{2x^3-9x^2+11x+1}{x^3-4x^2+5x}$$

حقیقي په ټوټه کسر ټوټه کونې ټاکنه په درې پلونو یا قدمونو وېشل کیږي

(i) دا چې $\mathrm{Grad}\ p\geq\mathrm{Grad}\ q$ دی، لومړی د پلوینوم وېشنه صورت نیسي:

$$(2x^3 - 9x^2 + 11x + 1) : (x^3 - 4x^2 + 5x) = 2$$

$$g(x) = -x^2 + x + 1.$$

پاتې

له دې سره لاس ته راځي

$$r(x) = f(x) + \frac{g(x)}{q(x)} = 2 + \frac{-x^2 + x + 1}{x^3 - 4x^2 + 5x}.$$

(ii) د دې لپاره چې د g/q ټوټه ونې اینوونه یا اسعمال پیداکړو، نو قطبځایونه ټاکو یا پیدا کوو.

د q د صفرځایونو $x = 0$ د نوکانو دباندېکونې وروسته د مبع تکمیل له لارې سرې نور دواړه صفرځایونه لاس ته راوړي:

$$x^2 - 4x + 5 = (x-2)^2 + 1^2.$$

دا پاتې صفرځایونه کمپلکس کونجوګیري جوړې $u \pm iv = 2 \pm i$ دي.له دې سره اینوونه په لاندې توګه ده

$$\frac{-x^2 + x + 1}{x((x-2)^2 + 1^2)} = \frac{a}{x} + \frac{b(x-2) + c}{(x-2)^2 + 1^2}.$$

(iii) د ضریبونو د ټاکنو لپاره د اصلي مخرج q سره ضربیږي او ترې لاس ته راځي

$$-x^2 + x + 1 = a((x-2)^2 + 1^2) + b(x-2)x + cx$$

د x ,1 او x^2 ضریبونو پرتله مو کربنیز مساوات سیستم ته بیایي

$$1 = \qquad 5a$$

$$1 = -4a - 2b + c$$
$$-1 = a + b$$

د لاندې حل سره

$$a = \frac{1}{5},\ b = -\frac{6}{5},\ c = -\frac{3}{5}\,.$$

له دې سره حقیقي ټوټه کسر ټوټه کونه ده

$$r(x) = \frac{1/5}{x} + \frac{-6/5(x-2) + (-3/5)}{(x-2)^2 + 1^2}.$$

د ټاکلو لپاره پوله ارزښت متودونه هم کارول کیږي. که دا ایښوونه یا ځای په ځای کونه د x سره ضرب شي او $x = 0$ کیږدي، نو لاس ته ترې راځي

$$\frac{1}{2^2 + 1^2} = a + 0 \Longrightarrow a = \frac{1}{5}.$$

د $x = 2$ ځای په ځای کونې سره c لاس ته راځي:

$$\frac{-2^2 + 2 + 1}{2(0^2 + 1^2)} = \frac{1/5}{2} + \frac{c}{0^2 + 1^2} \Longrightarrow c = -\frac{3}{5}.$$

بالاخره کېدی b د ټکی ازماېښت $x \neq 2$ له لارې ، د بېلګې په توګه $x = 1$ منځ ته راشي.
پای.

د

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{x^3}{x^4 + 2x^2 + 1}$$

حقیقي ټوټه کسر ټوټه کونې ټاکلو په دوه پلونو یا قدمونو کې ترتیبیږي

(i) د اینسوونې د ټاکلو لومړی قطبځایونه پیدا کیږي. له

$$q(x) = (x^2+1)^2$$

پیژندل کیږي، چې $\pm i$ ډبل صفرځایونه دي، دا په دې معنا چې $u=0$ او $v=1$.
له دې سره دا اینسوونه ده

$$\frac{x^3}{(x^2+1)^2} = \frac{b_1x+c_1}{x^2+1} + \frac{b_2x+c_2}{(x^2+1)^2}.$$

(ii) د ضریبونو د ټاکلو له امله دا سړی د اصلي مخرج q سره ضربوي او لاس ته
ترې راوړي

$$\begin{aligned} x^3 &= (b_1x+c_1)(x^2+1)+b_2x+c_2 \\ &= b_1x^3+c_1x^2+(b_1+b_2)x+(c_1+c_2)1. \end{aligned}$$

د $1, x, x^2$ او x^3 د ضریبونو پرتله کونه مو کرښیز سیستم ته بیایي

$$\begin{aligned} 1 &= b_1 \\ 0 &= c_1 \\ 0 &= b_1+b_2 \\ 0 &= c_1+c_2 \end{aligned}$$

د لاندې حل سره

$$b_1=1,\ c_1=0,\ b_2=-1,\ c_2=0\,.$$

بدیلې کیدی شي د کمپلکس ټوټوه کسر ټوّ کونې څخه مخ ته لاړ شو

$$\frac{z^3}{(z-i)^2(z+i)^2} = \frac{a}{z-i} + \frac{b}{(z-i)^2} + \frac{c}{z+i} + \frac{d}{(z+i)^2}.$$

ضریبونه $c=\overline{a},\ d=\overline{b}$ پوره کوي او د جمعي جوړولو له لارې

$$\frac{a}{z-i} + \frac{c}{z+i}, \quad \frac{b}{(z-i)^2} + \frac{d}{(z+i)^2}$$

هم حقیقي توټهکسر توټه کونه لاس ته راوړي

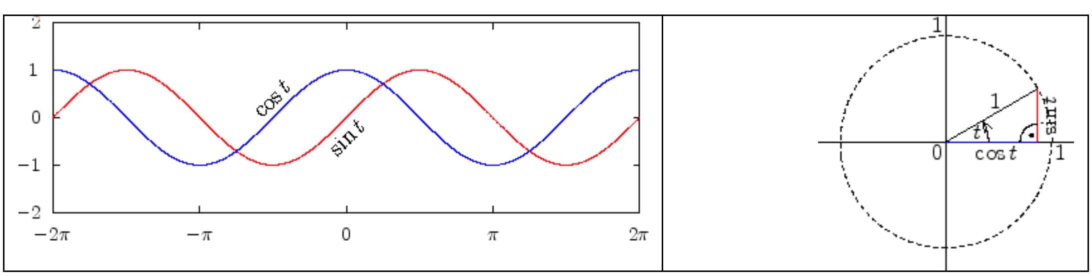
$$\frac{x^3}{(x^2+1)^2} = \frac{x}{x^2+1} + \frac{-x}{(x^2+1)^2}.$$

ساین او کوساین **Sinus und Cosinus**

د

$$(\cos t, \sin t), \quad t \in \mathbb{R}$$

سره په سرچینه په کونج t څرخول شوی ټکی $(1,0)$ کواوردینات نومولکیږي . د تر مخنښي پورې کوساین او ساین په یوه ولاړکوډیز یرېکوډي (المثلث القایم الزاویه) کې د ولاړ اړخونو(هغه اضلاع وې چې یو د بل سره قلموازاویه جوړه وي) نسبت د نیمی(قطر) سرره په ګوته کوي.



دواړه ګردی توابع یا د داېرې توابع 2π - تلبېرته راګرځېدونې یا 2π - پریودیکې دي او باور لري

$$\cos t = \sin(t + \pi/2)$$

, •

- $\cos t = \cos(-t), \quad \sin t = -\sin(-t)$,
- $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$.

یو څو ځانګړي ارزښتونه دي:

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
cos	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0

د اویلر-مویورې فرمول **Formel von Euler-Moivre**

یو اکسپوننشل تابع د ایماجینار x -محور سره کېدی شي د $t \in \mathbb{R}$ لپاره د تریکونومتریک(درېکوډي - یا مثلثاتې -) توابع په مرسته افاده شي.

$$\cos t + \mathrm{i} \sin t = \exp(\mathrm{i}t)$$

کوساین او ساین حقیقي – او ایماجینار ګنونه(عددونه) په ګوته کوي د ارزښت 1 ($|\exp(\mathrm{i}t)| = 1$) سره .

که پورته فرمول اینورتیر یا معکوس شي ، نو لاس ته راځي

$\cos t$	$= \mathrm{Re}\, e^{\mathrm{i}t} = \frac{1}{2}\left(e^{\mathrm{i}t} + e^{-\mathrm{i}t}\right)$
$\sin t$	$= \mathrm{Im}\, e^{\mathrm{i}t} = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(e^{\mathrm{i}t} - e^{-\mathrm{i}t}\right)$.

د اکسپ، کوساین او ساین کټمتوالی اویلر او مویورې ته ځي. دا د جیومتریکي کمپلکس عددونو د انترپولیشن لپاره بنسټ جوړوي او د فوری-انالیوز کې غوره رول لوبوي.

لیکونکي: هیولیک، کوپف

د ساین او کوساین لپاره د زیاتون- یا جمع قضیه

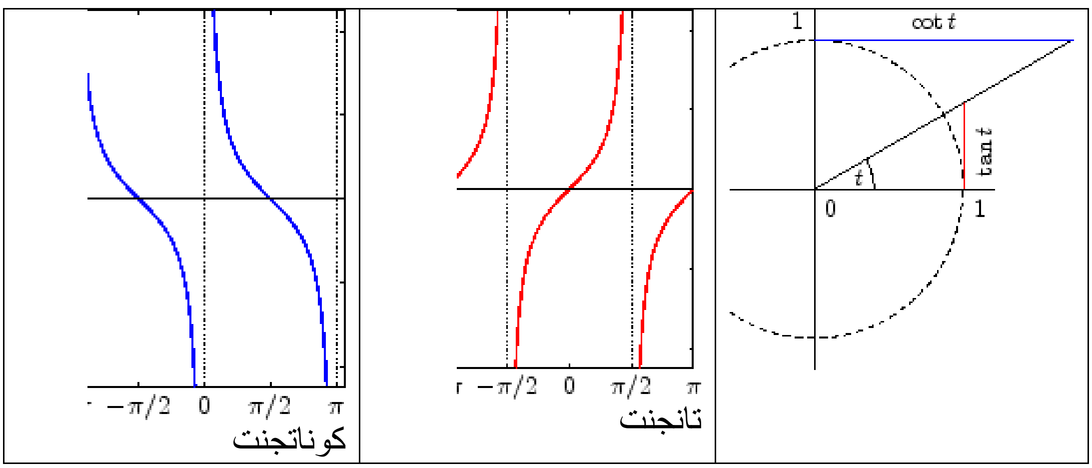
د گردیتوابعو $\sin t$ او $\cos t$ لپاره لاندې اړیکې باور لري:

- $$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$
- $$\sin(\alpha+\beta)=\sin\beta\cos\alpha+\sin\alpha\cos\beta$$

په ځانګړې توګه دی

$$\cos(2\alpha)=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha,\qquad \sin(2\alpha)=2\sin\alpha\cos\alpha.$$

تانجنت او کوتاجنت **Tangens und Cotangens**



د تانجنت او کوتانجنت توابع د

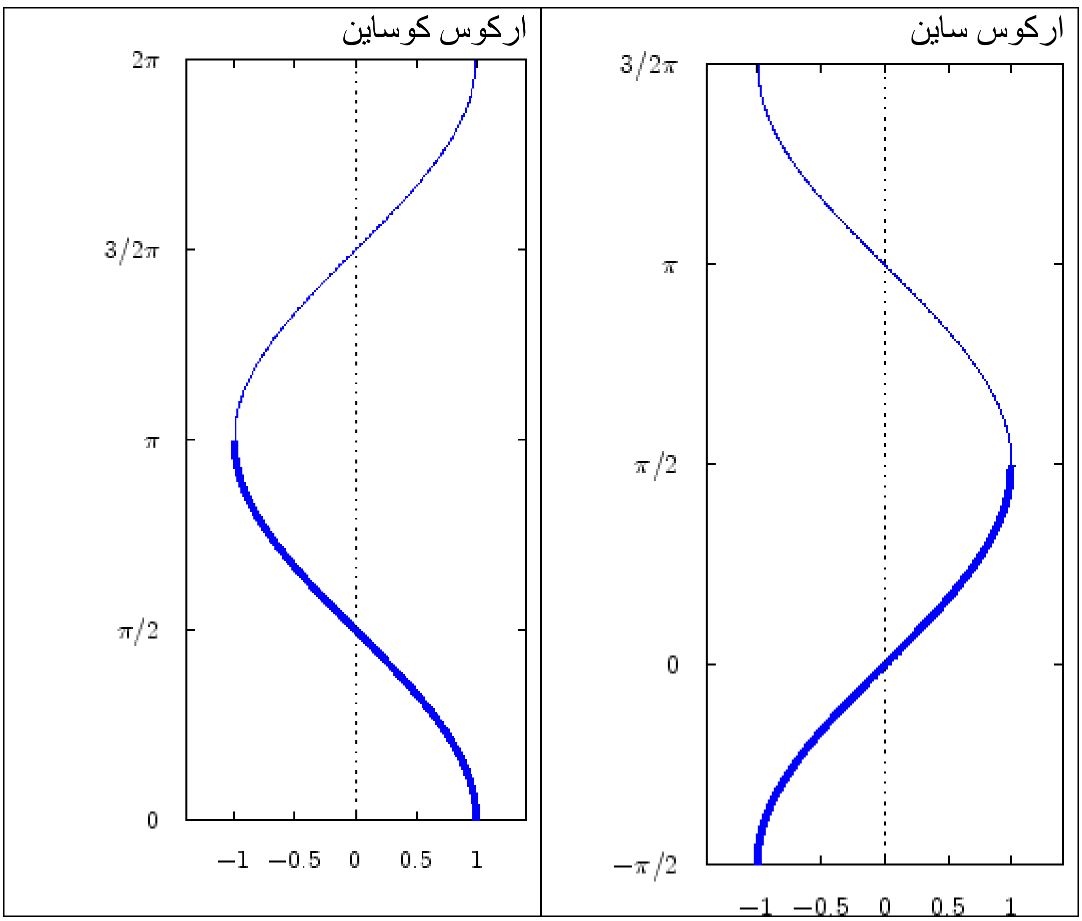
$$\tan t=\frac{\sin t}{\cos t},\qquad \cot t=\frac{\cos t}{\sin t}$$

له لارې تعریف دي. دا تر دمخنښې پورې د ولاړکوډیز درېکوډي(- - مثلث) د ولاړکوډونو Katheten نسبت ورکوي

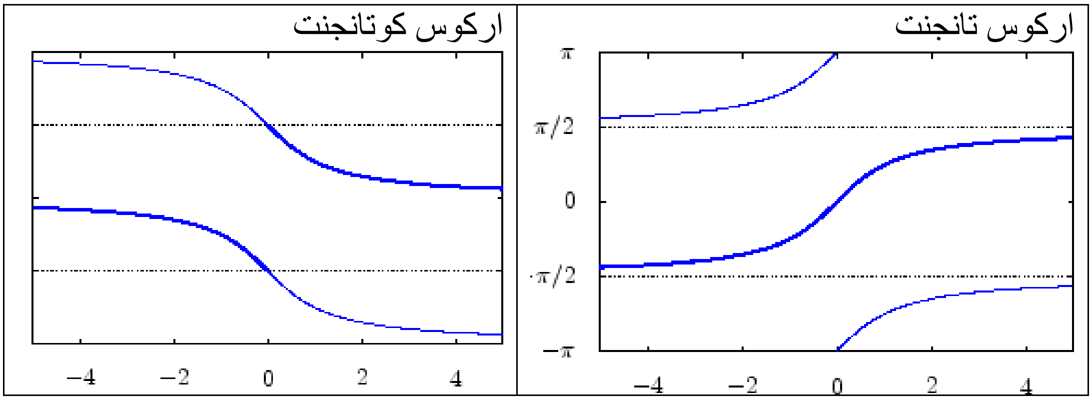
یو څو ځانګړي ارزښتونه دي:

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
tan	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	nicht def.
cot	nicht def.	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0

د ارکوس توابع **Arcusfunktionen**

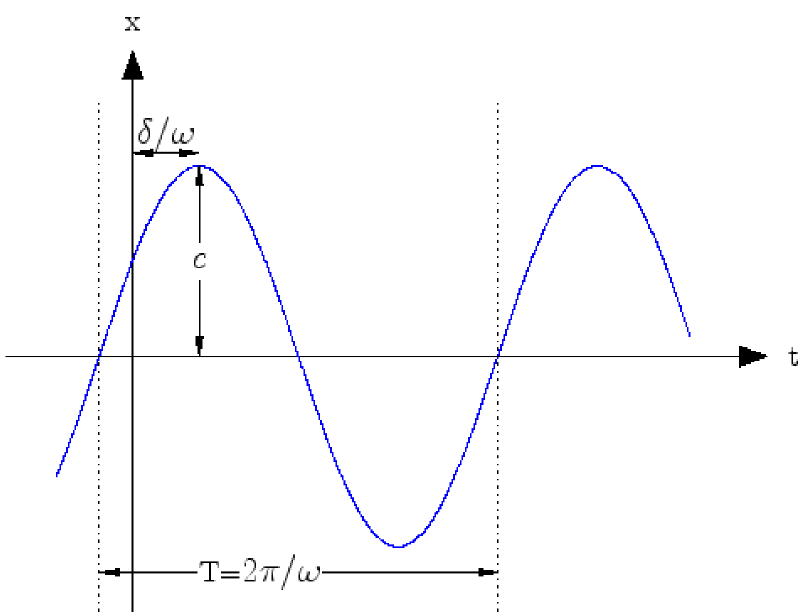


د درېګوډيز (ترېګونومتريکي يا مثلثاتي) توابعو په څټ يا معکوس توابع د arccos, arcsin, arctan, arccot سره ښوول کيږي.



د دي تعريف – او ارزښت ورشو د پورته ځېرې ځخه رانيول کېدی شي.
له دې سره اصلي ځانګې غوړې يا پنډې کښل شوي دي.
ليکونکي: هيوليک، کنويف، کنش

هارمونيک لړځيدني يا رپيدني
Harmonische Schwingung



یو هارمونیکي لړځیدنه د جګوالي Amplitude $c \geq 0$ سرره،د فاز بلځای ته وړنه یا راکښنه δ او فرکونځ ω همداسې پریودېوالی یا تل (بیرته) راګرځیدنه $T = 2\pi/\omega$ لاندې بڼه لري

$$x(t) = c\cos(\omega t - \delta)\ .$$

ورته یا برابر ارزښته انځورونه ده

$$\operatorname{Re} c \exp(\mathrm{i}(\omega t - \delta))$$

یا

$$a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)$$

د $a = c\cos(\delta), b = c\sin(\delta)$ سره ، دا په دې معنا چې (c, δ) د (a, b) قطبي کواوردیناتونه دي.
پای.

د پارمتر شمیربدلون د جمعي تیورم څخه لاس ته راځ:

$$c\cos(\omega t - \delta) = c\left(\cos(\omega t)\cos(\delta) + \sin(\omega t)\sin\delta\right) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad a = c\cos\delta, \quad b = c\sin\delta.$$

برعکس دی

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \delta = \arctan(b/a) + \varphi$$

د لاندې سره

$$\varphi = \begin{cases} 0, & \text{für } a \geq 0 \\ \pi, & \text{für } a < 0 \text{ und } b \geq 0 \\ -\pi & \text{sonst.} \end{cases}$$

پای.

د هارموني رپیدنې یو پر بل پرېوتنه

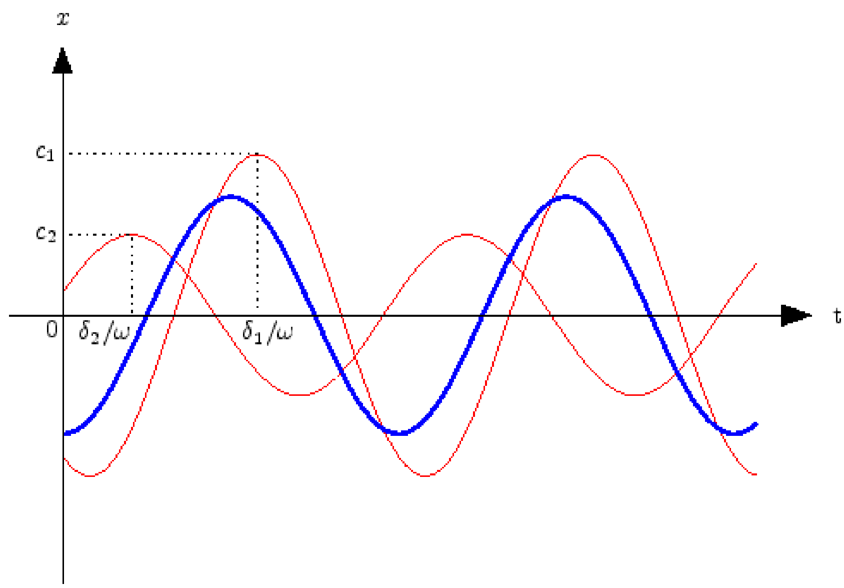
د دوه هارموني رپېدنو يو پر بل پربوتنه (په ځېره کې غوړ کښل شوي دي)

$$x_k(t) = c_k \cos(\omega t - \delta_k), \quad k = 1, 2 \,,$$

د

امپليتودې سره هارمونيک دي

$$c = \sqrt{c_1^2 + 2\cos(\delta_1 - \delta_2) c_1 c_2 + c_2^2} \,.$$



ليکونکي: هيوليک، کوپف،کنش

د يو پر بل پربوتني کمپلکس بڼه

$$\mathrm{Re}\left(c_1 e^{\mathrm{i}\omega t - \delta_1} + c_2 e^{\mathrm{i}\omega t - \delta_2}\right) = \mathrm{Re}\left([c_1 e^{-\mathrm{i}\delta_1} + c_2 e^{-\mathrm{i}\delta_2}] e^{\mathrm{i}\omega t}\right)$$

راکوي

$$[\ldots] = c e^{-\mathrm{i}\delta} = z$$

او له دي سره

$$c^2 = z\bar{z} = (c_1 e^{-\mathrm{i}\delta_1} + c_2 e^{-\mathrm{i}\delta_2})(c_1 e^{\mathrm{i}\delta_1} + c_2 e^{\mathrm{i}\delta_2}) \,.$$

$$e^{\mathrm{i}s} + e^{-\mathrm{i}s} = 2\cos s$$

د په پام کې نيولو سره ضربونه غوښتنه راکوي..

په بديله ت وګه کېدی شي امپليتود انځوروني

$$x_k(t) = a_k \cos(\omega t) + b_k \sin(\omega t)$$

څخه وشمېرل شي. سړی لاس ته راوړي

$$c = \sqrt{(a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2} .$$

لیکونکي: هیولیګ، کوپف

په درځ یا مټه باندې کړولو هارموني لړځېدنه یو په بل پربوځي

$$\cos(\omega t - \delta_k), \quad \delta_k = k\delta,\ k = 0, \ldots, n,$$

د برابر یا همغه فرکونځ او امپلیتود. لړځېدنه د کمپلکس انځوروني په مرسته د دې لاندې حقیقي برخې په حیث لاس ته راځي

$$e^{\mathrm{i}\omega t} + e^{\mathrm{i}(\omega t - \delta)} + \ldots + e^{\mathrm{i}(\omega t - n\delta)} = e^{\mathrm{i}\omega t} \frac{1 - (e^{-\mathrm{i}\delta})^{n+1}}{1 - e^{-\mathrm{i}\delta}}$$

$$= e^{\mathrm{i}\omega t} \frac{e^{-\mathrm{i}\frac{n+1}{2}\delta}(2\mathrm{i}\sin\frac{n+1}{2}\delta)}{e^{-\mathrm{i}\frac{\delta}{2}}(2\mathrm{i}\sin\frac{\delta}{2})} = \left(\frac{\sin\frac{n+1}{2}\delta}{\sin\frac{\delta}{2}}\right) e^{\mathrm{i}(\omega t - \frac{n}{2}\delta)} .$$

یو په بل پربوتنه لاندې امپلیتود لري

$$\frac{\sin\frac{n+1}{2}\delta}{\sin\frac{\delta}{2}}$$

او فاز $(n/2)\delta$.

د $\omega = 0$ سره د ایماجیناربرخې د پرتله کوني له لارې تریګونمتریکی کتمتوالی راکوي.

$$\sin\delta + \ldots + \sin n\delta = \frac{\sin\frac{n+1}{2}\delta \sin\frac{n}{2}\delta}{\sin\frac{\delta}{2}} .$$

لیکونکي: هیولیګ، کوپف

د دوه لړځېدنو $c_k e^{i\omega_k t}$ يو پر بل پرېوتنه کېدی شي د

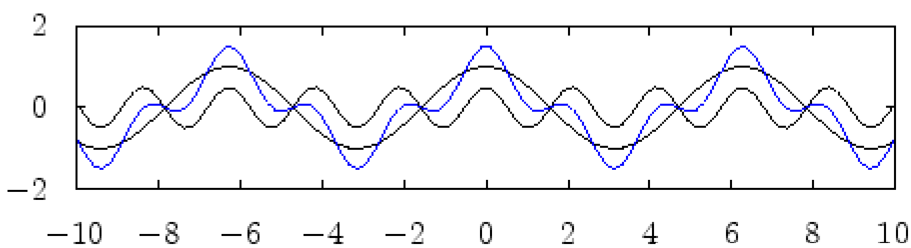
$$c(t)e^{i\bar{\omega}t},\quad c(t)=c_1e^{-i\Delta\omega t}+c_2e^{i\Delta\omega t},$$

په ضرب د $\bar{\omega}=(\omega_1+\omega_2)/2$ او $\Delta\omega=(\omega_1-\omega_2)/2$ سره وليکل شي.
لاس ته راغلی داسې په نامه مودوليري رېږدنه تيک هلته پريوديکي ده، که د فرکونځ نسبت ω_1/ω_2 راشنل وي.
د مودولي شوی کمپلکس امپليتود مينيمال او ماکسيمال ارزښت همداسي مطلق ارزښت د $|c_1-c_2|$ همداسې c_1+c_2 ترمنځ لوړ ټيټ کيږي. په ځانګړې توګه دی

$$c(t)=2c\cos(\Delta\omega t)$$

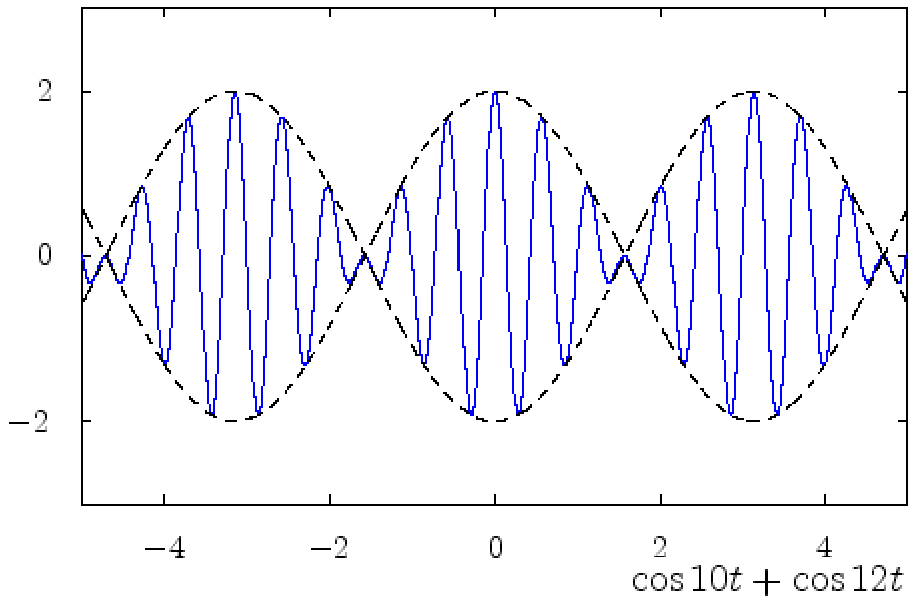
د همغږې يا برابرې امپليتود $c=c_1=c_2$ لپاره.
لاندې ځيرې يو څو بېپيکي حالتونه په ګوته کوي

- periodische Überlagerungپريوديکي يو پر بل پرېوتنه

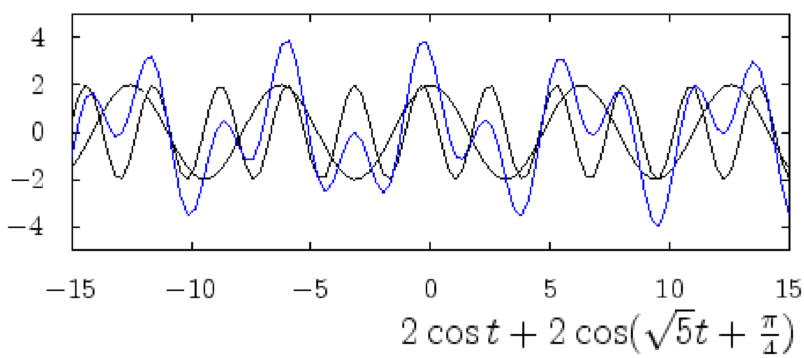


$\cos t+\frac{1}{2}\cos 3t$

- برابر امپليتود c_k او $\omega_1\approx\omega_2$



- aperiodische Überlagerung اپريوديکي يا نه - يو پر بل پرېوتنه

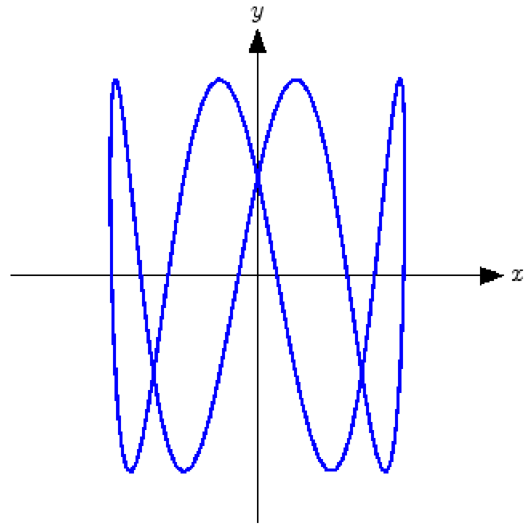


پاي.

د سطي لړځېدنو يو پر بل پرېوتنې د لړځېدنو مختالف لورو (a_1, a_2) او (b_1, b_2) کږې يا منحني

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \cos(\omega_1 t - \delta_1) + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \cos(\omega_2 t - \delta_2) \, ,$$

لاس ته راځي چې د مخترع Lissajous-Figuren ليساجوس –څيرې بللکيږي.

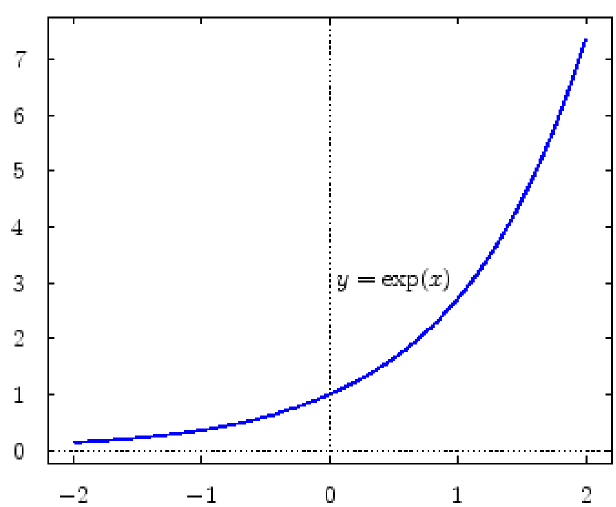


خېره د پارامتر يوه بېلګه بنايي

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \omega_1 = 1, \quad \delta_1 = 0, \quad \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \omega_2 = 4, \quad \delta_2 = \frac{\pi}{3}.$$

پای.

اکسپوننشل توابع
Exponentialfunktion



توان تابع

$$y = e^x = \exp(x)$$

$x \in \mathbb{R}$

د اویلر عدد $e = 2.71828...$ سره اکسپونننشل تابع بلل کيږي. دا د ټول لپاره مثبت ده او د تابع مساوات پوره کوي
$e^{x+y} = e^x e^y$.

$$e^{-x} = 1/e^x$$
په ځانګړې توګه

ګټه يا ربح Verzinsung

يوبيل بډايې د – وارهد اخستني همداسې او ورکوني وروسته د يوې ګټوې Rate r
($r < 0$ همداسې $r > 0$) د يوې ګټونې فاکتور $(1+p)$ سره لاندې پای بډايې ورکوي

$$y = (1+p)^n x + \frac{(1+p)^n - 1}{p} r \ .$$

دلته $p = 1$ د 100% يو ګټه اينوونه ده په کلنۍ ګټه ا چونې سره.

فعاله کلنۍ ګټه د مياشتنۍ ګټونې ځخه شمېرل کيږي د يوه ګټې اينونې p_m سره و لاندې ته

$$p_j = (1+p_m)^{12} - 1 \geq 12 p_m \ .$$

ليکونکي: هيوليک، هيورنر

بنسټ بډايې په همدې لومړني ګټونې پريود کې په پام کې نيول کيږي، اخستنه ههمداسې اچونه لومړی د ورپسې کال. په لاندې توګه يا د اسې راکوي

$$\begin{aligned} n = 1: &\quad y = x(1+p) + r, \\ n = 2: &\quad y = \big(x(1+p) + r\big)(1+p) + r. \end{aligned}$$

په ټولېزه توګه باور لري

$$
\begin{aligned}
y &= \left(\cdots\left(x(1+p)+r\right)(1+p)+r\right)\cdots\right) \\
&= x(1+p)^n + \left[1+(1+p)+(1+p)^2+\cdots+(1+p)^{n-1}\right]r
\end{aligned}
$$

دا په ګوډيزو نوکانو کې افاده کېدی شي په هندسي جمعه فرمول واړوي او سړی دا ورکړ
شوی فرمول لاس ته راوړي.
پای.

د منهتان خرڅول 1626زک مورګن(د ځمکي د کچوني يوون يا واحد دی) 11000
Morgen د يوه حاضر قيمت په رانيولو ګټور تمام شو، ځکه چې په کلنی7 په سلو کې
ګټه دا بډايي په کال 2000 زک کې

$$y = 60\,\mathrm{NLG}\cdot(1.07)^{374} = 5.857\cdot 10^{12}\,\mathrm{NLG}\ (\triangleq 2.658\cdot 10^{12}\,\mathrm{EUR})$$

ده(که متمأن بانکونه او د اسعارو رفورم له مخه نه وي نيول شوی يا فرض شوی).
په مياشتنی ګټه لرو

$$y = 60\,\mathrm{NLG}\cdot(1+7/1200)^{4488} = 13.030\cdot 10^{12}\,\mathrm{NLG}\ (\triangleq 5.913\cdot 10^{12}\,\mathrm{EUR})$$

او

$$y = 60\,\mathrm{NLG}\cdot\exp(0.07\cdot 374) = 14.060\cdot 10^{12}\,\mathrm{NLG}\ (\triangleq 6.380\cdot 10^{12}\,\mathrm{EUR})$$

د ټوليزې ګټوني سره.
که مورګن د 0.81 Ha هکتارسره وشمېرل شي، نو د منهتان دا نننی سطحه د89
مربعکيلو متره ورکوي. يو کور هلته نن نږدې6500 USD/Quadratmeter امريکايي
ډالر په مربع متر ارزښت لري. دا پيسې به د يوه کور تعميرلپاره چې څلور پوړيز وي
ورسيږي، چې په ټوله سطحه ونيسي.
پای.

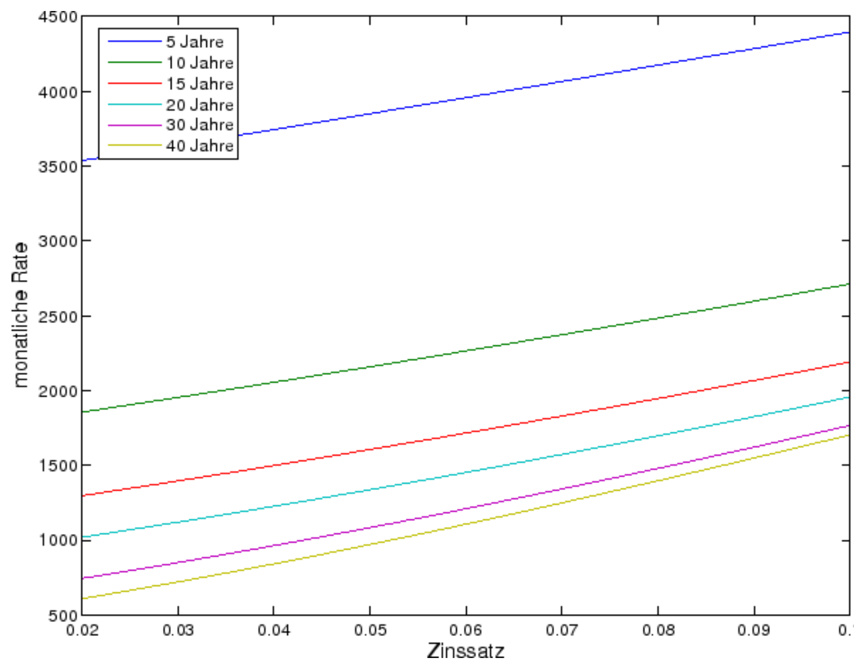
د يوه $x = 200000$ يوروپور ، $n = 30$ کلونو لپاره او يوې کره شوې ګټې پېنې
$p = 5$
په سلو کې مياشتنی ګټه لاندې ده

$$p_m = (1+p)^{1/12} - 1 = 0.4074\%$$

او میاشتنی رات یا ګټه ده

$$r = \frac{p_m(1+p)^n}{(1+p)^n - 1} x = 1060.11\,\mathrm{EUR}.$$

د لاندې پسې تړلي له ګټي فرمول څخه د صفر اینسووني له لارې د پور ارزښت راکوي او
د $(1+p_m)^{12} = 1+p$ په پام کې نیولو سره .
تولـه تادیه $30 \cdot 12r = 381639.60$ یورو د پور جمعي څخه د په 90.8 په سلو
کې اوړي(د بانک مزدوري پرې زیاته).



پروت: ګټونه یا د ګټي پینه ، ولاړ: میاشتنی ګټه
ګراف میاشتنی ګټه ښایي د یوه 200 000 یورو پور لپاره د ګټي پینې د ضریب په څېر
د مختلفو وختونو لپاره.
پای.

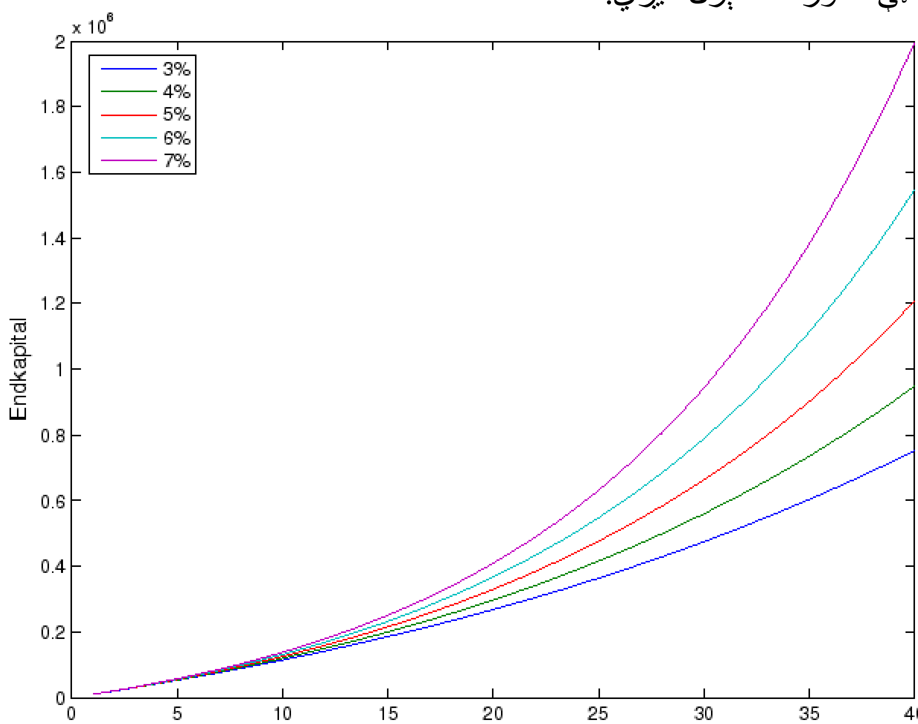
کلني د پیسو ورکونه $z = 10000$ یور د یوې 7 په سلو کې ګټوني ته د
$n = 12$ کلونو وروسته یوه دا لاندې بډایي ورکوي

$$y = \frac{(1+p_j)^n - 1}{p_j} z = \frac{1.07^{12} - 1}{0.07} 10000\,\mathrm{EUR} = 178884.51\,\mathrm{EUR}.$$

د نور لس کاله د ژوند انتظار ته دا د لاندې یوه میاشتنۍ تقاوت ته بسیا کوي

$$r = \frac{p_m (1+p_j)^{10}}{(1+p_j)^{10} - 1} y = \frac{0.005654 \cdot 1.07^{10}}{1.07^{10} - 1} 178884.51\,\mathrm{EUR} = 2057.17\,\mathrm{EUR},$$

چې د هیپوتیکي(د کورونو جوړولو او اخستلو لپاره ارزانه پور دی) Hypotheken
ګټي ته ورته شمېرل کیږي.

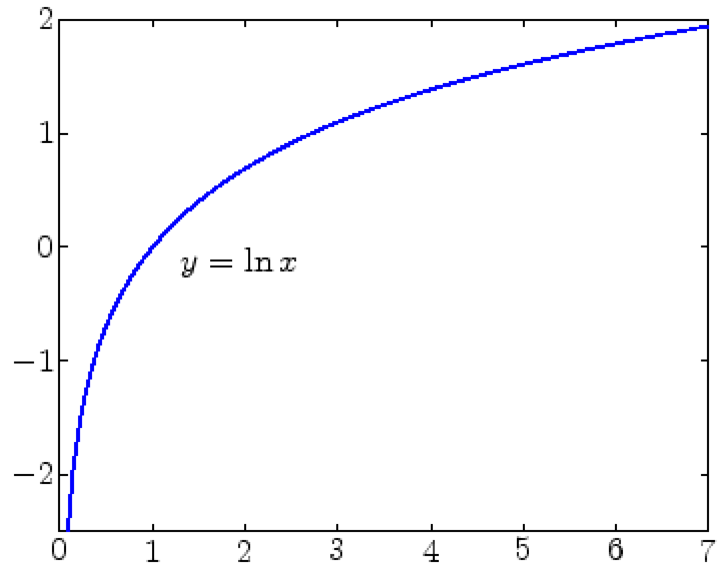


پروت: وخت ،   ولاړ: پای سرمایه
خېره د مختلفو ګټونو لپاره د یوې سرمایې وده ښایي د وخت تېرېدو سره .
پای.

لوګاریتم **Logarithmus**

د لوګارتم تابع د اکسپوننشلتابع معکوس دی:

$$y = e^x \quad \Leftrightarrow \quad x = \ln y.$$



دا $(0,\infty)$ کره مونوتونن جګېدونکی په $\mathbb{R}$ تنظيموي او لاندې تابعمساوات پوره کوي

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y.$$

په ځانګړې توګه دی $\ln(1/x) = -\ln x$.
پای.

د يوې مادې راديواکتيو له منځه تلنه(په زراتو تجزيه کېدنه) د زره کيدنې قانون

$$N(t) = N(0)e^{-kt}$$

له مخې تشريح کيږي. دلته $N(t)$ د ا تمونو ګڼون يا تعداد دی د t په وخت کې او $k > 0$ يوه د موادو په واک کې د زره کېدو ثابته ده.

د نيم ارزښت وخت T داسې تعريف دی $N(T) = \frac{1}{2}N(0)$ ، داپه دې معنا چې

$$e^{-kT} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow T = \ln 2/k.$$

د چرنوبل د ریکتور د ړز یا الوتني سره یو ه ډینګرۍ یا خولې یا مرخېړۍ په ځنو برخو کې Cäsium-137 د 2000Bq/kg (Bq/kg د رادیواکتیویتی د فعالیت د کچوني لپاره یوون دی) سره د نیمارزښت وخت 29.7 کلونو په وړانګو خور شو.

$$k = \frac{\ln 2}{29.7} = 0.023$$

او له دې سره

$$N(t) = 2000 \exp(-0.023t).$$

په المان کې پوله ارزښت .600Bq/kg کې پروت د ی. د

$$600 = 2000 \exp(-0.023t) \Rightarrow -0.023t = \ln(0.3) \Rightarrow t \approx 52$$

له امله داپوله ارزښت د ورکړشوو ارزښتونو لپاره ۵۲ کالو وروسته کښته – یا کمیږي.

نیم وخت ارزښت :

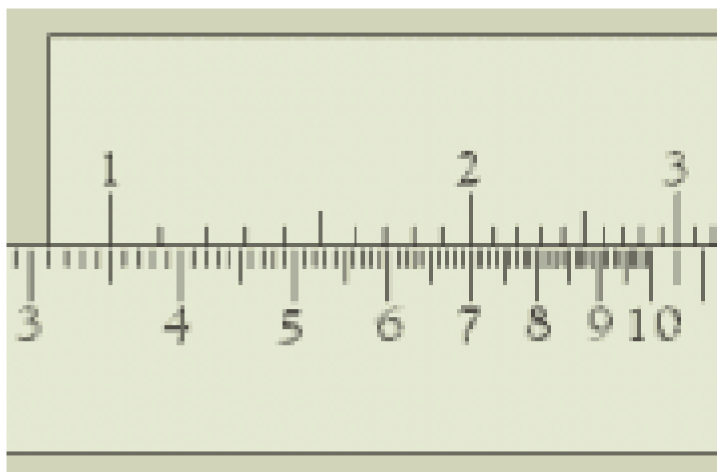
Cäsium-134	2 Tage
Cäsium-137	29.7 Jahre
Jod-131	8 Tage
Kohlenstoff-14	5730 Jahre
Kalium-40	1.2 Mrd. Jahre
Plutonium-239	24000 Jahre
Radon-222	3.8 Tage
Radium-226	1600 Jahre
Strontium-90	28 Jahre
Uran-235	800 Mio. Jahre
Uran-238	4.5 Mrd. Jahre

پای.

لوګاریتم دا خوی لري، چې د دوه ګڼونو یا عددونود لوګاریتمونو جمعه د دې د دې دوه عددونو د ضرب د لوګاریتم سره برابر دی:

$$\log x + \log y = \log(xy).$$

په دې توګه کېدی شي چې دوه کرښې(خط کشونه) د لوګاریتم کچوونو سره یو په بل کیږدي او لاس ته راوړنه د دېعددونو جمعه نه بلکه ضرب دی.(د شمېرکښوونې (چې یوې او بلې لورته کښیږي) اصول)



د پورته ښېرې ښځه د بېلګې په توګه ګورو چې $3.5 \cdot 2 = 7$ دی. د لته د پورته کچوونې ۱ د لاندې سکالا په3.5 (لومړی ضریب) کېښول کیږي. بالاخره ۲ د پورته سکالا (دویم ضریب) د ضرب لاس ته راوړنه په لاندې سکالا لوستل کیږي.

پای.

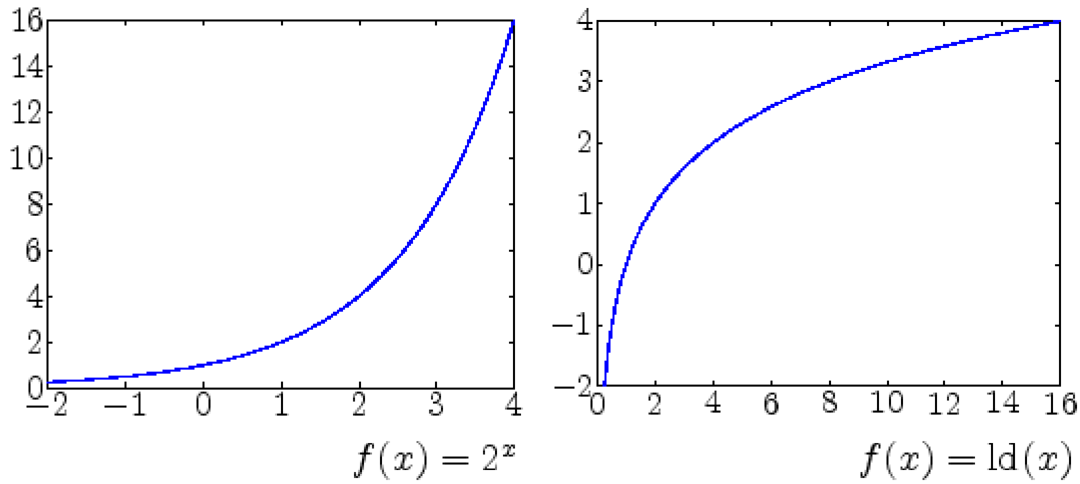
تولیز توان توابع او لوګاریتم

د $a > 0$ لپاره تعریفوو

$$y = a^x = \exp(x \ln a)$$

د معکوس يا په ځت تابع سره
$x = \log_a y, \quad y > 0.$

په ځانګړې توګه سرې ليکي $\log = \log_{10}$ د لوګاريتم لپاره د 10 بنسټ سره او $\mathrm{ld} = \log_2$ د دوال لوګاريتم لپاره.



د ودې قانون

$y = a^x, \quad a > 0$

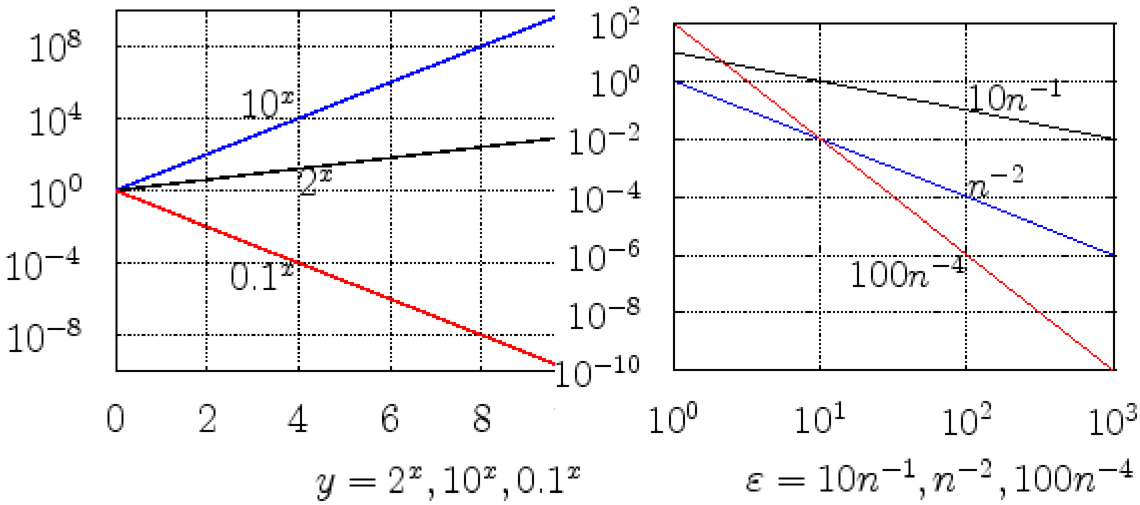
کيدی شي نيم لوګاريتمي دکښل شي. دلته په يوه محور x او په بل محور $\log y$ ليکل کيږي. د x او $\log y$ ترمنځ نسبت د ودې قانون له مخې کرښيز دی او رسم شوې کرښه لاندې جګړالی لري
$m = \log a.$

يو بل امکان دادی، چې په دواړو محورونو يو لوګاريتمي سکالا وکاروو.
دا د بېلګې په توګه د ناتيکاوي ارزښت لپاره
$\varepsilon \approx cn^{-k}$

مناسب ده. دا چې

$$\log \varepsilon = \log c - k \log n \,,$$

د کرږې کمیز یا منفي چګېدنه ورکوي.



د توان او لوګاریتم لپاره شمیرقوانین

Rechenregeln für Potenzen und Logarithmen

د اکسپوننشل – او لوګاریتمي توابعو د تعریف او تابع مساواتو څخه لرو

$$\begin{aligned} a^{s+t} &= a^s\, a^t, & \log_a x + \log_a y &= \log_a(xy), \\ a^{s-t} &= a^s / a^t, & \log_a x - \log_a y &= \log_a(x/y), \\ (a^s)^t &= a^{st} & \log_a x^t &= t \log_a x \,. \end{aligned}$$

برسېره پردې د دوه مختلفو بنسټونو ت رمنځ د شمېربدلون لپاره باور لري

$$\log_b x = \log_b a \, \log_a x \,.$$

په ځانګړې توګه دی

$$\log x = (\log e) \ln x \,.$$

لیکونکي: هیولیک، کنوپف

که کیږدو

$$x = a^s, \quad y = a^t,$$

نو د توان او لوګاریتم د فرمولونو ورته وال یا برابرارزښتوالی روښانه دی. لومړي دواړه کتمتوالي د تابع مساواتو څخه لاس ته راځي او دريم له تعريف $b^r = e^{r\ln b}$ څخه.:

$$(a^s)^t = (e^{s\ln a})^t = e^{st\ln a} = a^{st}.$$

د شمیبدلون فرمول برابرارزښت دی و لاندې ته

$$x = b^{\log_b a \log_a x},$$

او د ساده ونې له لارې ښې اړخ لاس ته راځي.
ليکونکي: هیولیګ، کنوپف

لاندې دواړه بېلط دشمېقوانین تشریح کوي یا په ګوته کوي.

(i)

$$) - 2\ln(2) = \ln(2^2) + \ln(x^2) - 2\ln 2 = 2\ln 2 + 2\ln x - 2\ln 2 = 2\ln x$$

(ii)

$$\log_4(x^2) + \mathrm{ld}(2x) = 2\frac{\ln x}{\ln 4} + 1 + \frac{\ln x}{\ln 2} = 1 + \frac{\ln x}{\ln 2} + \frac{\ln x}{\ln 2} = 1 + 2\frac{\ln x}{\ln 2}$$

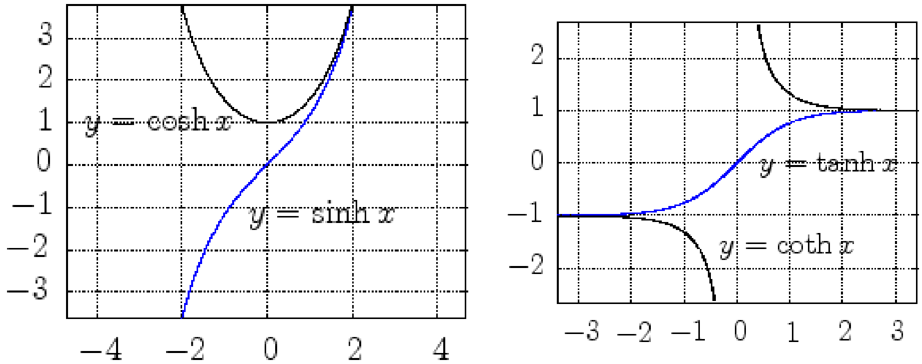
های پرابول تابع **Hyperbelfunktionen**

تريګونومتريکي توابعو ته ورته تعریفوو

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

همداسې

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = 1/\coth x.$$

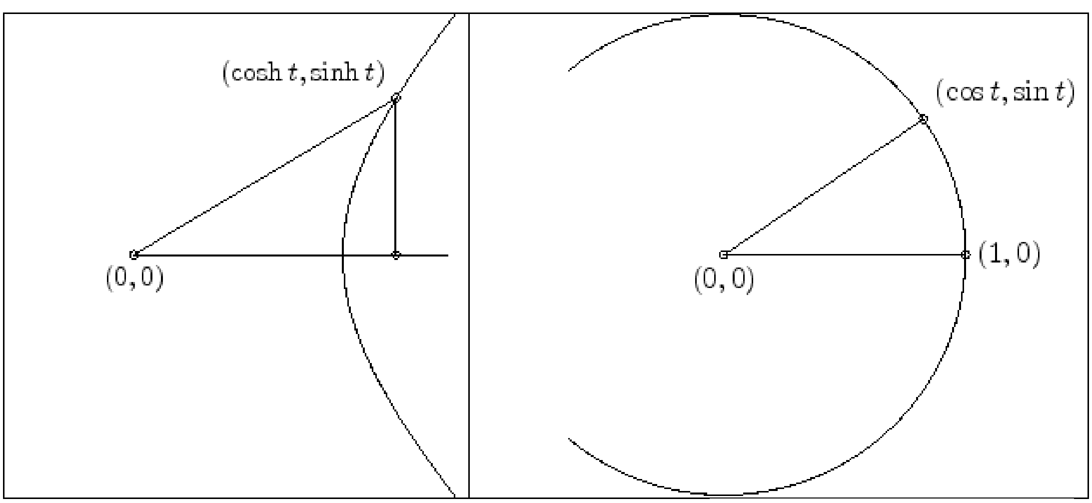


$\sinh x$, $\cosh x$ $\qquad$ $\tanh x$, $\coth x$

معکوس یا په خټ توابع اکسپلیثیت یا په روښانه توګه ورکول کیږي:

$$\begin{aligned} \operatorname{arsinh} x &= \ln(x + \sqrt{x^2+1}), \qquad & -\infty < x < \infty \\ \operatorname{arcosh} x &= \ln(x + \sqrt{x^2-1}), \qquad & 1 \leq x < \infty. \end{aligned}$$

د هایپربول تابع نوم د لاندي کتمتوالي څخه رانیول شوی



$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

دا روښانه کوي، چې د $t \mapsto (\cosh t, \sinh t)$ له لارې د هایپرابول یو ښاخ پارامتري کیږي..

له $y = (e^x - e^{-x})/2$ څخه د e^x سره ضرب له لارې لاس ته راځي

$$(e^x)^2 - 2ye^x - 1 = 0$$

او له دې سره

$$e^x = y + \sqrt{y^2+1}.$$

د مربع مساوات دویم حل د $e^x > 0$ له امله باید په پام کې ونه نیول شي. د لوګاریتمي کوني څخه لاس ته راځي

$$\operatorname{arsinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2+1}).$$

د کوساین هوپربولیک د فرمول څخه پورته ته په ورته توګه لاس تره اځي

$$(e^x)^2 - 2ye^x + 1 = 0$$

او له دې سره

$$e^x = y + \sqrt{y^2-1}.$$

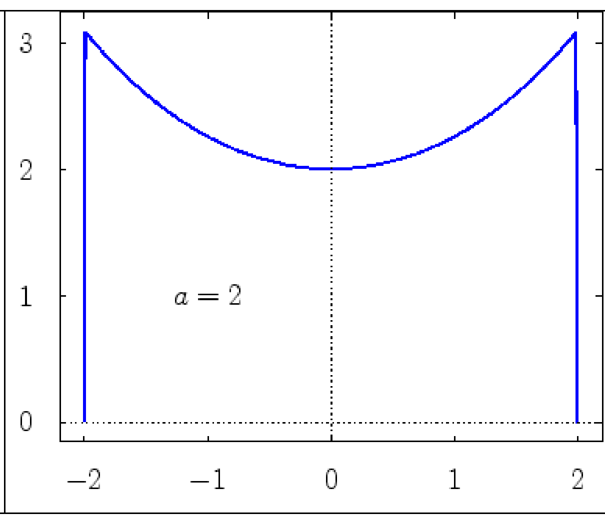
د لوګاریتم کوني له لارې د په څت- یا معکوس تابع فرمول لاس ته راځي.
لیکونکي: هیولیګ، کنویف

د یوه هایپارابول په پای ټکو کلک شوي سیم ځګوالی h د خپل وزن له لارې اغیزمنشوی دننی شپانونګ a دی

$$h(x) = a\cosh(x/a).$$

تابع h د لاندې دفرنځیال مساوات حل دی.

$$h'' = \frac{1}{a}\sqrt{1+(h')^2}.$$



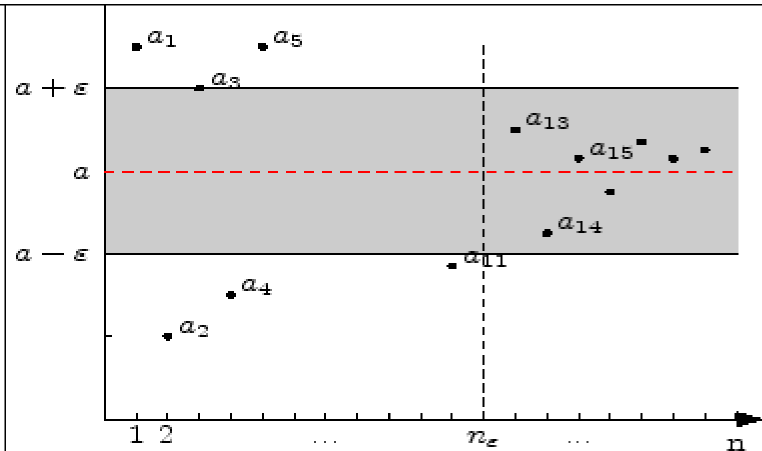
هایپارابولیکی کټمټوتوالی
Hyperbolische Identitäten

تریګونومتریکي توابعو ته ورته کټمټوالی باور لري

$$\begin{aligned}
\sinh(-x) &= -\sinh x \\
\cosh(-x) &= \cosh x \\
\sinh(x+y) &= \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y \\
\cosh(x+y) &= \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y \\
\cosh^2 x - \sinh^2 x &= 1\,,
\end{aligned}$$

چې د تعریفونوو له لارې کېدی شي نازک شي

د یوې پرلپسې (ترادف)پوله ارزښت
Grenzwert einer Folge

یوه پرلپسې $(a_n) = a_1, a_2, \ldots$ د یوه پوله ارزښت a په لور هڅیږي، $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n,$ که هر $\varepsilon > 0$ ته یو n_ε داسې شتون ولري د $\lvert a_n - a\rvert < \varepsilon$ $n > n_\varepsilon$ سره د ټولو لپاره	

دا $a_n \to a$ لیکدود هم د یوې پرلپسې د کونورګنت یا پولې ته تلو لپاره کارول کیږي .

که (a_n) پوله ارزښت ونه لري، نو پرلپسي دیورګنت یا پولې ته نه تلونکې بللکیږي.

پای.

د دې لپاره چې د کونورګنت-قضیه وښایو یعني د $n > n_\varepsilon$ لپاره $|a_n - a| < \varepsilon$ وښایو، کیدی شي لومړی دا افاده $|a_n - a|$ د تخمین کونې له لارې پورته لور ته ساده کړو او بیا داسې په نامه نامساوات د n پسې حل کړو.

که دا د بیلګې په توګه د لاندې پرلپسي لپاره وکارول شي

$$a_n = \frac{n^2+n}{n^2+1},$$

کومه چې پوله ارزښت $a = 1$ لري، یو ممکنه تخمین دی

$$|a_n - a| = \left|\frac{n^2+n}{n^2+1} - 1\right| = \left|\frac{n-1}{n^2+1}\right| \le \frac{n}{n^2+1},$$

دا چې $|n-1| \le n$ د ټولو $n \ge 0$ لپاره . پرته له دې $n^2+1 > n^2$ دی او له دې سره $\frac{1}{n^2+1} < \frac{1}{n^2}$ هم . نو له دې لاس ته راځي

$$|a_n - a| \le \frac{n}{n^2+1} \le \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}.$$

له دې سره $\frac{1}{n} < \varepsilon$ دی، باید $n > \frac{1}{\varepsilon}$ وي. که n_ε یو طبیعي عدد چې له $\frac{1}{\varepsilon}$ لوی وي ، وټاکو ، نو د ټولو $\varepsilon > 0$ او ټولو $n > n_\varepsilon$ لپاره باور لري.

$$|a_n - a| < \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

پرلپسي
$1, q, q^2, \ldots$

د $|q| < 1$ لپاره یو پوله ارزښت 0 لري او د $|q| > 1$ یا $q = -1$ لپاره دیورګنت دی

د پرلپسیو د پوله ارزښت شمیرنې لارې
Rechenregeln für Grenzwerte bei Folgen

د پولې ته تلونکې پرلپسي (a_n) او (b_n) لپاره د پولو a او b سره باور لري:

- $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b$
- $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n b_n) = ab$
- $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n / b_n) = a/b$, falls $b \neq 0$
- لیکونکی: اپپ، هیولیګ

زیاتون او کمښت یا کمون : د درېګوډي نابرابرون څخه لاس ته راځي
$|(a_n \pm b_n) - (a \pm b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| \to 0.$

ضرب یا ځل: دا چې a_n محدود ده، لرو

$$|a_n b_n - ab| = |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| \leq |a_n||b_n - b| + |b||a_n - a| \to 0.$$

وېش: د ټول $n > n_0$ لپاره دی

$$0 \notin \left(b - \frac{|b|}{2}, b + \frac{|b|}{2}\right) \ni b_n \,,$$

او له دې لاس ته راځي

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \left|\frac{b - b_n}{bb_n}\right| \leq \text{const}\, |b_n - b| \to 0,$$

دا په دې معنا چې $1/b_n \to 1/b$. د a_n/b_n پولې ته تلنه دهمدا اوس ښوول شوي د پولې ته تلونکو پرلپسیو ضرب قانون څخه لاس ته راځي.

پای.

که دپرلپسیو توکي د n راشنل تابع وي، $a_n = \frac{p(n)}{q(n)}$ ، نو کیدی شي پوله ارزښت د خورا جګ توان د لنډوني څخه پیداکړی شو. د بیلګې په توګه دی

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n - 2n^2}{3n^2 + 4n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1/n - 2}{3 + 4/n} = -\frac{2}{3} \,.$$

په ټولیزه توګه د صورت-درجې j او مخرج-درجې k لپاره باور لري

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_j n^j + \cdots p_0}{q_k n^k + \cdots q_0} = \begin{cases} 0, & \text{für } j < k \\ \frac{p_j}{q_k}, & \text{für } j = k. \end{cases}$$

د $j > k$ لپاره پرلپسې پولې ته نه ځي یعنې دیورګنټ ده.

پای.

دمعلومو پوله ارزښتونو

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e, \quad \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}$$

په مرسته لاس ته راځي

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n^2-1)^n}{n^{2n}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\left(\frac{n-1}{n}\right)^n$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = e\cdot\frac{1}{e} = 1.$$

په پام کې نیسو، چې

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \neq \left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)^n = 1 \,,$$

ځکه چې د ضرب د ضریبونو ګڼون یا تعداد ثابت نه دی.
لیکونکی: هیولیک، کرایخ

د کوشي قضیه**Cauchy-Kriterium**

یوه پرلپسې (a_n) تیک هلته پولې ته ځي، که د ټولو $\varepsilon > 0$ لپاره یو n_ε شتون ولري، داسې چې

$$|a_j - a_k| < \varepsilon$$

د ټول $j,k > n_\varepsilon$ لپاره باور ولري.
د کوشي په نوم نومول شوي قضیې په مرسته د پوله ارزښت ثبوت بې د پوله ارزښت پیژندلو ممکن دی.
لیکونکی: ایپ، هیولیګ

د کوشي – قضیې اړینوالی د پوله ارزښت له تعزیف څخه لاس ته راځي:

$$a = \lim a_n \iff |a_m - a| < \varepsilon \quad \text{für} \quad m > m_\varepsilon$$

که کیږدو $n_\varepsilon = m_{\varepsilon/2}$ ، نو لرو

$$|a_j - a_k| \le |a_j - a| + |a - a_k| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

د ټول $j,k > n_\varepsilon$ لپاره، حه چې د ښوولو وو.

دا چې شرط پوره کېدونکی هم دی، ستونځمن دی چې و یې ښایو، او دا د حقیقی عددونو په پوره والي ولاړ دی.

پای.

یوه رکورزیو تعرف شوې پرلپسې (a_n) کېدی شي زیات وخت د کوشي-قضیه د تخمینونې له لارې

$$|a_{n+1} - a_n| \le cq^n$$

د $q \in [0,1)$ سره یې ټیکوالی و ازمایل شي. داسې د هندسي پولې ته تلنه د $j < k$ لپاره راکوي

$$|a_j - a_k| \le |a_j - a_{j+1}| + |a_{j+1} - a_{j+2}| + \quad \ldots \quad + |a_{k-1} - a_k| \le cq^j\,(1 + q + q^2 + \ldots) \le \frac{cq^j}{1-q}.$$

ښی اړخ د $< \varepsilon$ لپاره ده د $j,k > n_\varepsilon = \ln\frac{\varepsilon(1-q)}{c} / \ln q$ لپاره ، نو د کوشي قضیه پوره ده. د ځرګند، د

$$a_n = \sqrt{2 + a_{n-1}}, \quad a_0 = 1,$$

له لارې رکورزیو تعریف شوې پرلپسې a_n د کونورګنځ قضیې د ثبوت لپاره استعمالوي

د ایندکشن پیل : $(n = 1)$: نامساوات

$$|a_1 - a_0| \leq cq$$

باور لري، که $c = |a_1 - a_0|/q$ کېښول شي.

د ایندکشن پای $(n \to n+1)$: شرى اټکل شوى کمښت یا تفریق د

$$|a_{n+1} - a_n| = |\sqrt{2 + a_n} - \sqrt{2 + a_{n-1}}| = \left|\frac{a_n - a_{n-1}}{\sqrt{2 + a_n} + \sqrt{2 + a_{n-1}}}\right|.$$

په بڼه ښيي.

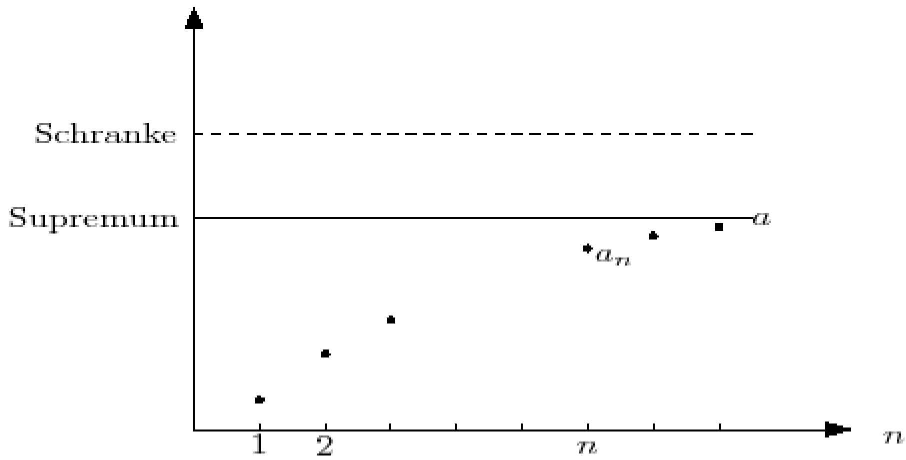
د اندکشن د نیونې له مخې ښى اړخ $\leq \frac{1}{2\sqrt{2}} cq^n$ دى او د ټاکنې سره
$q = 1/2\sqrt{2} \leq cq^{n+1}$

لکه چې غوښتل مو.

پاى.

یو غږیزه پولې ته تلنه Monotone Konvergenz

یو پرلپسي (a_n) همغږیز جګېدونکي $a_{n+1} \geq a_n$ همداسي همغږیز ټیټېدونکي $a_{n+1} \leq a_n$ بلل کیږي ، که همداسي وي د ټولو n لپاره. دا کره همغږیز جګېدونکي همداسي کره همغږیز ټیټېدونکي بلل کیږي ، که $a_{n+1} > a_n$ همداسي $a_{n+1} < a_n$ وي د ټولو n لپاره.



يوه رابنده يا محدوده ، د $n > n_0$ لپاره همغږيز جګېدونکي يا ټيټېدونکي پرلپسي (a_n) پولې ته تلونکي ده. پوله ارزښت يې د پرلپسي توکو a_n , $n > n_0$. سوپريموم همداسې اينفيموم دی.

ليکونکی: ايپ، هيوليګ

د يوې مونوتون جګېدونکې پرلپسې لپاره د سوپرېموم د تعريف سره، چې د ټولو $\varepsilon > 0$ لپاره يو n_ε شتون لري د کوم لپاره چې باور لري

$$a - \varepsilon < a_{n_\varepsilon} \leq a = \sup_{n>n_0} a_n$$

د همغږيزوالي په بنسټ دی

$$a - \varepsilon < a_{n_\varepsilon} \leq a_n \leq a \quad , \text{für} \quad n > n_\varepsilon \,,$$

نو $a_n \rightarrow a$.

د مونوتون ټيټېدونکې پرلپسې لپاره په ورته توګه دلايل راوړل کيږي.

د پرلپسي پولې ته تلنه

Die Konvergenz der Folge

$$a_n = (1+1/n)^n, \quad n = 0, 1, ...,$$

د اویلر عدد e په لور کېدی شي د مونوتون کونورګنت حملې په بنسټ و ښوول شي.
دواړه وړاندنیونې(فرضیې) کېدی شي د بېنوم درسي جملې په مرسته و ښوول شي.

(i) رابندیدنه یا محدودیت: له

$$a_n = (1+1/n)^n = 1 + \binom{n}{1}\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\frac{1}{n^2} + \binom{n}{3}\frac{1}{n^3} + ...$$

او

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdots k} \le \frac{n^k}{1\cdot 2\cdots 2}$$

لاس ته راځي

$$a_n \le 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ... \le 3$$

(ii) همغږیزوالی: سړی a_{n+1} هم د بېنوم له جملې سره شماري:

$$a_{n+1} = 1 + \binom{n+1}{1}\frac{1}{n+1} + \binom{n+1}{2}\frac{1}{(n+1)^2} + \binom{n+1}{3}\frac{1}{(n+1)^3} + ...$$

که دا په (i)کې د a_n انځورونې سره پرتله کړي، نو سړی کره کوي، چې اړونده ترمونه لوی دي:

$$\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdots k}\frac{1}{n^k}$$

$$\le \frac{(n+1)\cdot n\cdots(n-k+2)}{1\cdot 2\cdots k}\frac{1}{(n+1)^k} \quad =$$

$$= \binom{n+1}{k} \frac{1}{(n+1)^k}.$$

دا له نامساوات څخه لاس ته راځي

$$\frac{n-j}{n} \leq \frac{n+1-j}{n+1}$$

د یوګونوو ضریبونو لپاره. داچې د a_{n+1} لپاره زیاتون یا جمعه لا ترم

$$\frac{1}{(n+1)^{n+1}}$$

لري لاس ته راځي

$$a_n < a_{n+1}.$$

نارېښتونی پوله ارزښت **Uneigentliche Grenzwerte**

یوه پرلپسي (a_n) دا نارېښتونی پوله ارزښت ($-\infty$) ∞ لري، که د ټولو $a > 0$ لپاره یو n_a شتون ولري، داسې چې

$$a_n > a \quad (< -a)$$

باور ولري د ټولو $n > n_a$ لپاره. پرلپسي چې نارېښتونی پوله ارزښت لري، دا ټاکلې دیورګنت –یا پولې ته نه تلونکې پرلپسې هم بلل کیږي.
لیکونکي:اپپ، هیولیګ، ویپپر

د دې لپاره چې وښایو ، چې

$$a_n = \frac{n!}{2^n} \to \infty,$$

دا په دې معنا چې

$$\frac{n!}{2^n} > a$$

د $n > n_a$, لپاره، دا a_n سرې د یوې ساده افادې یا ویینې له لارې کښته لور ته تخمینوي:

$$a_n = \frac{1\cdot 2\cdots n}{2\cdot 2\cdots 2} \geq \frac{1}{2}\cdot\frac{n}{2}.$$

له دې سره له $\frac{n}{4} > a$ همداسي له $n > 4a = n_a$ لرو $a_n > a$

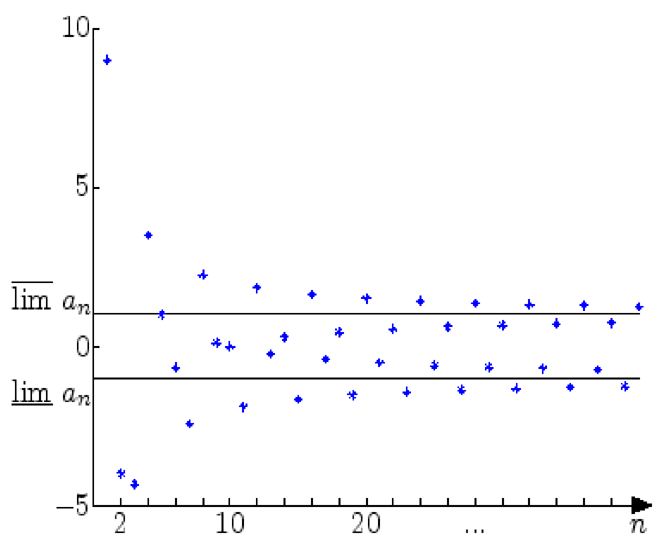
پوله اینفریور او پوله سوپریور(کښته - او پورته پوله ارزښت)

Limes Inferior und Limes Superio

د هرې پرلپسي (a_n) لپاره، په ناصلي حالت کې uneigentlichen Sinn ، یو پوله ارزښت شتون لري.

$$\varliminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \underline{a_n}\,,\quad \underline{a_n} = \inf_{k\geq n} a_k$$

$$\varlimsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \overline{a_n}\,,\quad \overline{a_n} = \sup_{k\geq n} a_k$$



لکه په خیره کې چې شوول شوی دی، پرلپسي (a_n) د همعریزې پرلپسي $(\underline{a_n})$ او $(\overline{a_n})$ له لارې یا نوره هم ښه له لورې رابندې دي:

$$\underline{a_n} \leq a_n \leq \overline{a_n}.$$

که پوله اینفریور او پوله سوپریور یو په بل پریوځي، نو پرلپسې (a_n) پولې ته تلونکې ده او لرو

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_n = \overline{\lim}_{n\to\infty} a_n .$$

لیکونکي: اپپ ،هیولیګ

د پولې اینفریور او پولې سوپریور شتون د همهغږیز پولې ته تلنې جملې له لارې ترلې لاس ته راځي، خکه چې پرلپسې

$$\underline{a}_n = \inf_{k\geq n} a_n \ , \quad \overline{a}_n = \sup_{k\geq n} a_n$$

همغږیز ځګیدونکې همداسې همغږیز ټیټیدونکې دي.
په روښانه توګه باور لري

$$\underline{a}_n \leq a_n \leq \overline{a}_n .$$

که پوله اینفریور او پوله سوپریور همغه ازښت a ولري، نو لا سته راځي

$$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$$

د $n > n_\varepsilon$ لپاره، نو $a_n \to a$.

پرتله کوونکې قضیه **Vergleichskriterium**

که د $\lim a_n = a$ او $\lim c_n = c$ سره د پوره کوچنې n لپاره
$a_n \leq b_n \leq c_n$ باور لري، نو دی

$$a \leq \underline{\lim}\, b_n \leq \overline{\lim}\, b_n \leq c.$$

په ځانګړې توګه له $a = c$ د پرلپسې (b_n) کونورګنت لاس ته راځي:

$$\lim_{n\to\infty} b_n = a = c .$$

لومړی غوښتنه ساده ده، ځکه چې نابرابرون $\leq$ د پولې ته تګ له امله ساتلی پتيري:

$$\inf_{k\geq n} a_n \leq \inf_{k\geq n} b_n \;\Rightarrow\; \lim_{n\to\infty} a_n = \underline{\lim}\, a_n \leq \underline{\lim}\, b_n .$$

په ورته توګه لرو $\overline{\lim}\, b_n \leq c$.

که پوله ارزښتونه سره برابر وي ($a = c$) ، نو باور لري

$$a - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < a + \varepsilon$$

د $n > n_\varepsilon$ لپاره. له دې سره لرو $b_n \to a$.
پای.

پوله ارزښت

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

په لاندې نامساوات باندې د پرتلې قضيې استعمال له لارې لاس ته راځي

$$1 \leq \sqrt[n]{n} \leq 1 + \frac{2}{\sqrt{n}} .$$

دلته ښی نابرابرون د بینوم د فرمول څخه باوري دی:

$$1 \leq n \leq 1 + n \cdot \frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{4}{n} + \cdots$$

په تولیزه توګه د ضرب قانون څخه لاس ته راځي

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^k} = \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{n}\right)^k = 1$$

د $k \in \mathbb{N}$ لپاره . د کم نظم ترمونو د په زیاتوالي له امله پوله ارزښت ساتلی پاتیري. د یوه پولینوم

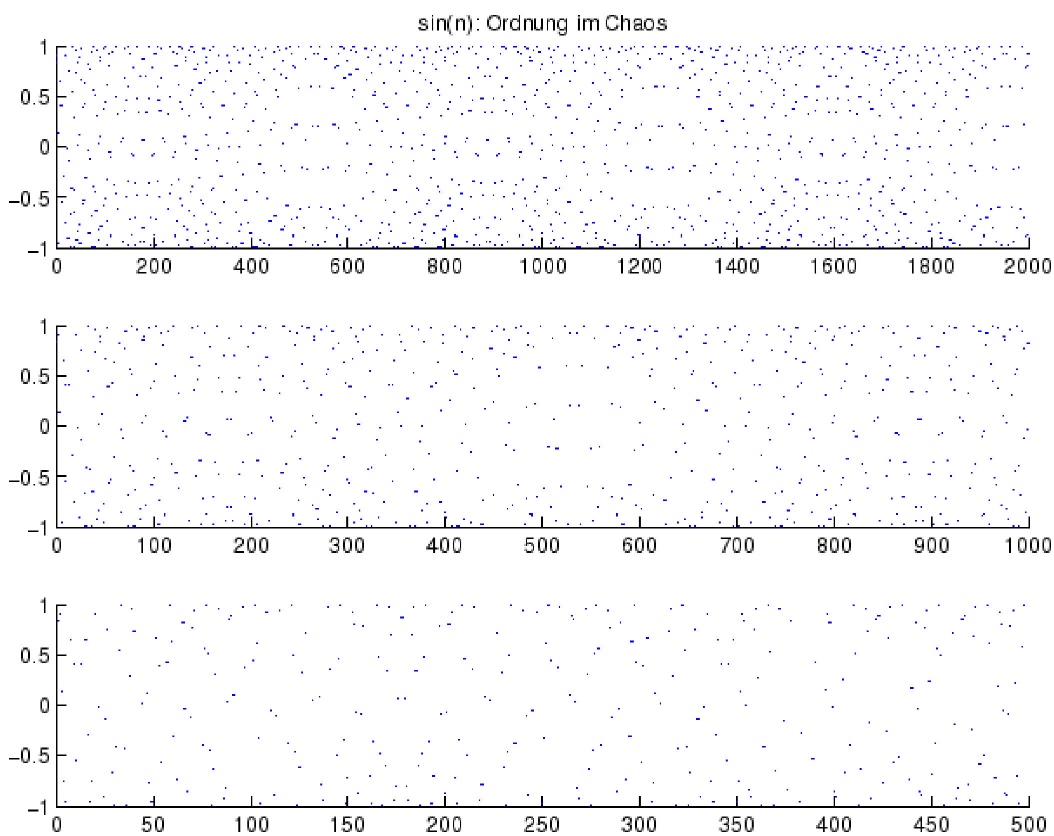
$$p(n) = a_k n^k + \cdots + a_0 \;,\; a_k > 0$$

لپاره هم $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{p(n)} = 1$ دی .

د يوې پرلپسې پنډغالي ټکی **Häufungspunkt einer Folge**

يوه پرلپسې (a_n) پنډغالي ټکی a لري، که هر انټروال $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$ دپرلپسې ناپای ډېر توکي خوندي ولري. دې ته ورته د يوې برخه پرلپسې باور لري، چې a ته ځي. په ځانګړې توګه يوپوله ارزښت د پرلپسې بنډغالي ټکی هم دی.

خيره پرلپسې $(\sin n)_{n\in \mathrm{N}}$ ښايي.



سرې په نږدې توګه د پرلپسې يا ترادف توکو a_n برابروېشنه په انټروال $[-1,1]$ کې پيژني. په ريښتوني ښول کېدی شي، چې په $[-1,1]$ کې هر ټکی د پرلپسې پنډغالي ټکی دی.

د یوې پرلپسې یا ترادف (a_n) د پندغالي ټکي د ټاکلو لپاره باید کونورګنت برخه پرلپسې و پیژندل شي.
د بیلګې لپاره

هغه دا دي

$$a_n = \frac{n\sin(n\frac{\pi}{2})}{n+\sin(n\frac{\pi}{2})}$$

$$b_k = a_{2k} = \frac{0}{k}$$

$$c_k = a_{4k+1} = \frac{(4k+1)}{(4k+1)+1}$$

$$d_k = a_{4k+3} = \frac{-(4k+1)}{(4k+1)+1}.$$

له دې سره پنډغالي ټکی لاس ته راځي

$$\lim b_k = 0, \lim c_k = 1, \lim d_k = -1$$

ورهولست- - یا فرهولست- مودل **Verhulst-Modell**

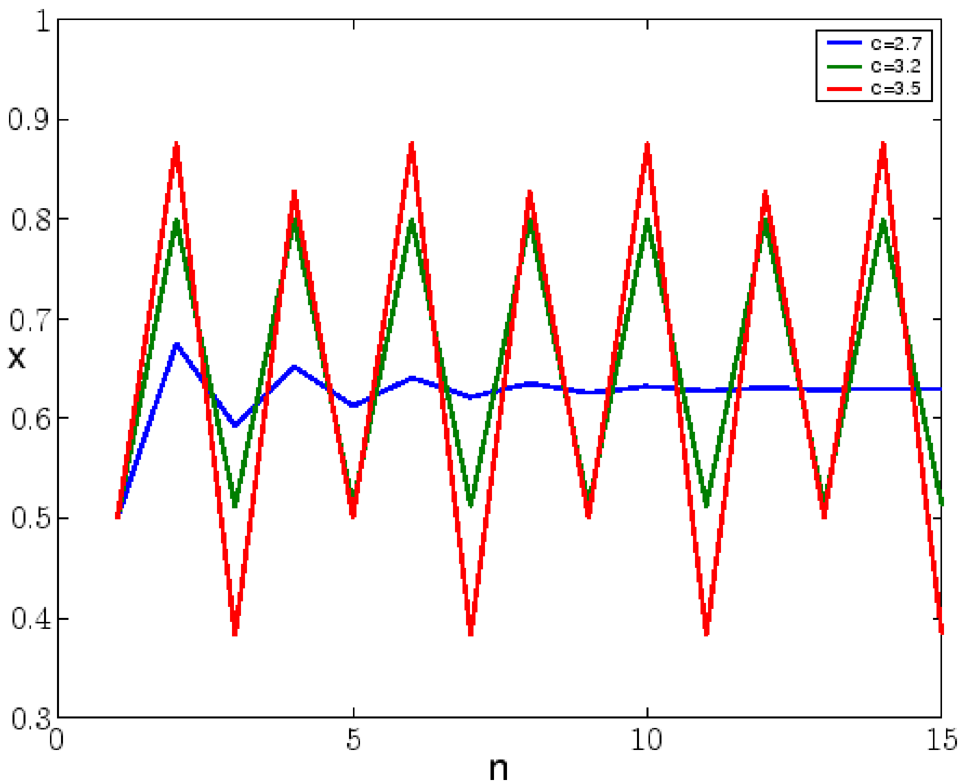
یو بیلجیمي شمیرپوه وو : Pierre-François **Verhulst** [vəɾˈhʏlst]
(* 28. Oktober 1804 in Brüssel; † 15.
Februar 1849 ebenda)

ریکورژن(په ځت ځغاستل) Rekursion

هغه فنکشن، چې د خپل ځان له خوا پیژند لري یا تعریفیږي

$$x_{n+1} = cx_n(1-x_n)$$

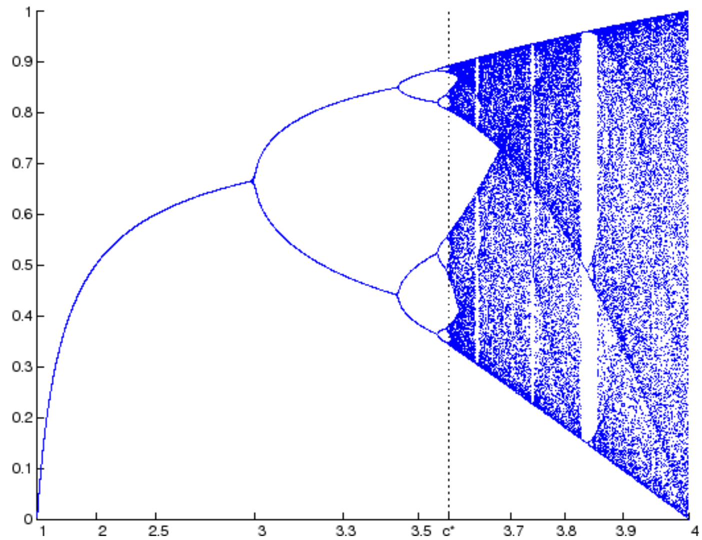
د $c \in (0,4]$ سره د نورمال شوي خلکو ګنوالي x_n وده په ګوته کوي. یو څو تیوپیکي بیلګې د ا لاندې څیره ښایي



د $c \leq 3$ لپاره x_n د $n \to \infty$ لپاره لاندې پولې ارزښت ته ځي

$$x_* = \frac{c-1}{c}.$$

د $c > 3$ لپاره سرې اوسځلیشن ګوري. که پارامتر تل لوی شي، نو د پنډغالي - تکو x_* ګڼون یا تعداد دوه برابره کیږي د افاط پارامتر ارزښتونو c_i څخه اوښتلو باندي یعني له دې نور زیاتیدلو باندې . دا په لاندې څیره کې کښل شوی دی، په کوم کې چې د تکي x_* د c -محور پورته لور ته ځای په ځای شوي دي.



پوله ارزښت

$$\lim_{n\to\infty}\frac{c_n - c_{n-1}}{c_{n+1} - c_n} = 4,69920166\ldots$$

داسي په نامه د انځوروني ثابته ده، چې دا زيات وخت د ځانګو کولو پرابلم کې رول لوبوي.

له پورته ځيرې څخه روښانه کيږي، چې ايتيشن د

$$c > c^* = \lim_{n\to\infty} c_n$$

لپاره يوګډوډيز chaotisches Verhalten حالت ښايي

د پيPi رکورزيو اپروکسيميشن
Rekursive Approximation von Pi

د a_n او b_n نيم اوږدوالی چې د يوې يوونګردۍ يا واحد داېرې د $(6 \cdot 2^n)$ -ګوډونو يا کونجونو په باندې او په کې يعنې په دننه اودباندې لاندې ريکورژن پوره کړي

$$a_{n+1} = \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n}\,, \quad b_{n+1} = \sqrt{a_{n+1} b_n}\,, \quad a_0 = 2\sqrt{3}\,, b_0 = 3\,,$$

د $\pi = 3.14159265358979 32\ldots$ په مرسته اپروکسيمي کيدی شي.
دا فرمول د يوهان فريدريش پفاف Johann Friedrich Pfaff (1765-1825) له خوا په 1800 زکال ميندل شوی.
ارښيميدس Archimedes (287-212 v. Chr.) د 96 ـ گوټونو ($n = 4$) او اټکل يا تخمين سره اړيکي

$$3.140845\ldots = \frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7} = 3.142857\ldots$$

وميندلې يا ترې لاس ته راوړې.

د گردی گڼ يا عدد π له د يو ميليارد ځايونو ډېر شميرل شوی دی. لاندې جدول د تاريخې ودې څخه يوه کاپی راکوي.:

Wert	korr. Stellen		Jahr	Autor
				Bibel (1. Könige 7:23)

Autor	Jahr		korr. Stellen	Wert
Bibel (1. Könige 7:23)	550	v. Chr.	0	3
Babylonier	2000	v. Chr.	1	3+1/8
Archimedes	250	v. Chr.	3	223/71 $< \pi <$ 22/7
Liu Hui	263		5	
Tsu Ch'ung Chi	480		7	
Al-Kashi	1429		14	

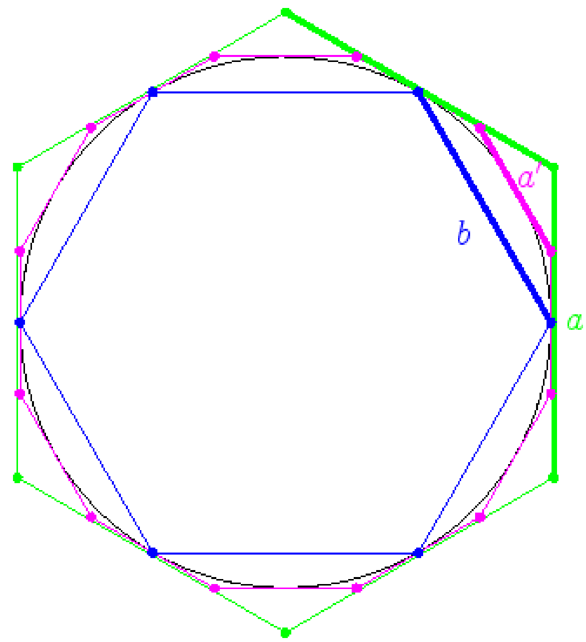
Romanus	1593		15	
Van Ceulen	1596		20	
Van Ceulen	1615		35	
Sharp	1699		71	
Machin	1706		100	
Rutherford	1824		152	
Strassnitzky/Dase	1844		200	
Shanks	1874		527	
Smith/Wrench	1949		1 120	
Reitwiesner u.a.	1949		2 037	
Genuys	1958		10 000	
Shanks/Wrench	1961		100 265	
Guilloud/Filliatre	1966		250 000	
Guilloud/Dichampt	1967		500 000	
Guilloud/Bouyer	1973		1 001 250	
Kanada/Yoshino/Tamura	1982		16 777 206	
Kanada/Tamura/Kubo u.a.	1987		134 217 700	
Chudnovskys	1989		1 011 196 691	

پای.

د ج.ف. پفاف ريکورزيون په ساده هندسي پامکوني باندې ولاړ دی

د وړانګي (تالس) جملې له مخې د a_n لپاره لاس ته راځي:

$$a' : b = \left(\frac{a}{2} - \frac{a'}{2}\right) : \frac{a}{2} \Leftrightarrow a'a = ba - ba' \Leftrightarrow a' = \frac{ab}{a+b}\,.$$



که $k_n = 3 \cdot 2^n$ د دېرګوډي نيم د اړخونګښون يا تعداد په ګوته کړي، نو باور لري

$$a_n = k_n a\,,\; b_n = k_n b \Rightarrow a_{n+1} = k_{n+1} a' = 2k_n \cdot \frac{ab}{a+b}$$

$$= 2\frac{(k_n a)(k_n b)}{k_n a + k_n b} = \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n}\,.$$

د b_n لپاره ريکورزيون کېدی شي د تريګونومتري توابعو په مرسته و ښوول شي. له

$$a_n = k_n 2 \tan(\pi/(2k_n))\,, \quad b_n = k_n 2 \sin(\pi/(2k_n))$$

لاس ته راځي

$$
\begin{aligned}
b_{n+1}^2 &= 4k_n^2 4\sin^2(\pi/(4k_n)) \\
&= \underbrace{2k_n 2\tan(\pi/(4k_n))}_{a_{n+1}} \underbrace{\cos(\pi/(4k_n)) 2k_n 2\sin(\pi/(4k_n))}_{k_n 2\sin(\pi/(2k_n))=b_n} \\
&= a_{n+1} b_n \,.
\end{aligned}
$$

د پرلپسيو يا ترادفونو ځانګړي پوله ارزښتونه

يو څو غوره پوله ارزښتونه په لاندې جدول کې راوړل شوي

a_n	$a = \lim_{n\to\infty} a_n$
$\sqrt[n]{n}$	1
$n^\alpha q^n \,,\ \lvert q\rvert < 1$	0
$n^{-\alpha} \ln n \,,\ \alpha > 0$	0
$q^n/n!$	0
$n!/n^n$	0
$(1+1/n)^n$	e
$(1-1/n)^n$	$1/e$

پای.

زیات واره کیدی شي پوله ارزښتونه وشمیرل شي، داسې چې سړی د مناسب ښه بدلون له لارې معیاري افادې ته بېرته ولاړ شي. دا د دوه بیلو سره روښانه کیږي.
(i) د پرلپسې پوله ارزښت شمېرلو ته

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{2n+3}\right)^{4n}, \quad n \in \mathbb{N},$$

سړی ږدي

$$m = 2n+3,\ n = \frac{m-3}{2}$$

او لاس ته راوړي

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{2m-6}.$$

په دې پسې یا د دې په تعقیب دی

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \left(\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m\right)^2 \cdot \left(\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)\right)^{-6} =$$

$$= e^2 \cdot 1^{-6} = e^2.$$

$$a_n = \binom{3n}{n}/2^n, \quad n \in \mathbb{N},$$

(ii) د دې لپاره چې د
پوله ارزښت وشمیرو، سړی لیکي

$$a_n = \frac{(3n)(3n-1)\cdots(2n+1)}{n\cdot(n-1)\cdots 1}\cdot\frac{1}{2^n} =$$

$$= \left(\frac{3}{2}\cdot\frac{3-1/n}{2}\cdots\frac{2+1/n}{2}\right)\cdot\frac{n^n}{n!}.$$

دا چې په نوکانو کې افاده ≥ 1 ده لرو

$$\lim_{n\to\infty} a_n \geq \lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{n!} = \infty.$$

د لاندې بڼې پوله ارزښت

$$\frac{a_n \pm b_n}{c_n \pm d_n}$$

په مناسب ډول سړی داسې شمیري، چې سړی د مطلق ارزښت د لویې پرلپسې توکو سره ووېشي:
د بیلګې په توګه دا پوله ارزښت

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(3+\sqrt{n+4})^2}{5n+\ln\, n}$$

که غواړو وشمیرو، نو مات یا کسر په لاندې بڼه لیکو

$$\frac{9+3\sqrt{n+4}+n+4}{5n+\ln\, n} = \frac{13/n+6\sqrt{1/n+4/n^2}+1}{5+(\ln\, n)/n}.$$

دا چې $1/n, 1/n^2$ او $(\ln\, n)/n$ د صفر پهلور ځی، نو پوله ارزښت دا لاندې دی

$$\frac{0+6\cdot\sqrt{0}+1}{5+0} = \frac{1}{5}.$$

د یوې لړۍ پرلپسې (لنډ: لړۍ) پوله ارزښت
Grenzwert einer Reihe

یو زیاتون یا جمعه $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ دډېروو زیاتیدونو سره لړی بلل کیږي. دا د یوې پولې ارزښت

$$s = \sum_{k=0}^{\infty} a_k,$$

په لور هڅيږي، که ټوټه زياتوونويا – جمعو

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

پرلپسې (s_n) د s لور ته وهڅيږی يا کونورګنت شي. که پوله ارزښت شتون ونه لري نو پرلپسي پولي ته نه تلونکې يا ديورګنت بلل کيږي.
پوله ارزښت کېدی د زياتوونو (هغه عددونه چې يو په بل زياتيږي) د لړۍ پرلپسې په واک کې وي، همداسې اړتيا نه شته چې د نظم بدلون وروسته شتون ولري.

د يوې لړۍ د پولې ته تلنې لپاره اړيين (شرط) دی، چې

$$\lim a_n = 0.$$

فقط په لږو حالتونو کې د يوې لړۍ روښانه يا اکسپليځيټ شمېرنه ممکن ده. يوه بېلګه يې د ټاکلو لړيو ده د راشنل زياتيدونو سره لکه

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n^2-1} = \frac{3}{2}.$$

د ټوټه کسر ټوټه ونې وروسته

$$\frac{2}{n^2-1} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1},$$

کېدی شي دا لړۍ په

$$(\frac{1}{1} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{4}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{5}) + (\frac{1}{4} - \frac{1}{6}) + \dots$$

بنه ولیکل شي. تر $\frac{1}{1}$ او $\frac{1}{2}$ پورې ټول زیاتېدونې یو بل له منخه وړي یا پورته کوي،
داسې چې پوله ارزښت $\frac{3}{2}$ ترلی لوستل کېدی شي.
د ټوټه زیاتون د کمښت لپاره د ټول $n < m$ لپاره باور لري

$$|s_n - s_m| =$$

$$= |(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}) + (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}) + \ldots + (\frac{1}{m-3} - \frac{1}{m-1}) + (\frac{1}{m-2} - \frac{1}{m})| \leq$$

$$\leq \frac{4}{n-1},$$

داچې منځني ترمونه سره پورته کیږي یا له منځه سره وړي. ټوټه زیاتون یا ـجمعه د کوشي – پرلپسې جوړوي:

$$n > 1 + \frac{4}{\varepsilon}. \qquad |s_n - s_m| < \varepsilon$$

د لپاره

و پولې ارزښت ته کمون یا تفریق دی

$$|\frac{3}{2} - s_n| = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} < \frac{2}{n}.$$

بیلګه دا هم ښايي، چې د زیاتوونو یا د جمعې د غړو لړی پرلپسې غوره یا ښه روښانه ده.

که لړی پرلپسې

$$(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}) + (\frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{8} - \frac{1}{5}) +$$
$$+ (\frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{16} - \frac{1}{6}) + \ldots,$$

وټاکو، نو هر ه په نوکاانو کې افاده $\geq \frac{1}{4}$ ده، نو لړی پرلپسې دیورګنت ده.

هندسي یا څمککچیزې لړی
Geometrische Reihe

ځمکچیزه لړۍ $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ تیک هلته پولې ته ځي، $|q| < 1$ وي.
د هندسي زیاتونفرمول سره

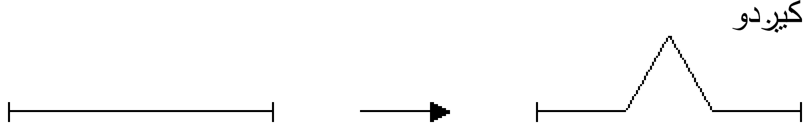
$$s_n = 1 + q + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

کېدی شي پوله ارزښت وښانه یا اکسپلیڅیت وشمېرل شي:

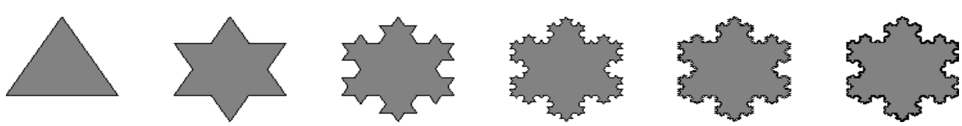
$$\lim_{n\to\infty} s_n = 1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^n + \cdots = \frac{1}{1 - q}$$

د $|q| < 1$ لپاره.
پای.

که د یوه برابر اړخیز درېکوډي یا مثلث مخ ته تک سره ژۍ د قانون یا قاعدې سره سم کیږدو



نو یوه ډېرۍ یا ستې لاس ته راځي د وتلو ژیو سره ، داسې په نامه د کوښ-د واورو پوتې Koch-Schneeflocke.



- $1/3$-م د واورو پوتی $3 \cdot 4^n$ ژۍ لري. دا چې د هر پل سره په ضریب کمیږي، نو د دې خومره والي لپاره لاس ته راځي

د ژیو ګڼون یا – تعداد ضرب د ژیو اوږدوالی:

$$(3 \cdot 4^n)(3^{-n}) = 3 \left(\tfrac{4}{3}\right)^n \to \infty ,$$

،

دا په دې معنا چې د ژیو اوږدوالی پولې ته نه ځي یا دیورګنت دی.

په n -م پل سره $3\cdot 4^{n-1}$ برابراړخيز درېګوډي لاس ته راځي د ژيو اوږدوالي 3^{-n} او سطحې $\sqrt{3}/4\,(3^{-n})^2$ په ور زياتوالي سره. په دې توګه د n –م د واورو پوټي د سطحې لپاره راکوي

$$\frac{\sqrt{3}}{4}+\sum_{i=1}^{n}\left(3\cdot 4^{i-1}\,\frac{\sqrt{3}}{4}\,(3^{-i})^2\right) = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(1+\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{n}\frac{4^{i-1}}{9^{i-1}}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}\left(1+\frac{1}{3}\sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{4}{9}\right)^{i}\right).$$

دا وتلي پوله ډېرۍ په پسې توګه سطحه لري

$$\frac{\sqrt{3}}{4}\left(1+\frac{1}{3}\,\frac{1}{1-4/9}\right)=\frac{2\sqrt{3}}{5}.$$

هارموني لړۍ Harmonische Reihe

هارموني لړۍ

$$s=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k},$$

پولې ته نه ځي يا همداسې ناټاکلې پوله ارزښت $s=\infty$ لري.
په ټوليزه توګه لړۍ

$$s_\alpha=\sum_{k=1}^{\infty}k^{-\alpha}$$

د $\alpha\leq 1$ لپاره ديورګنت او $\alpha>1$ لپاره پولې ته تلونکې ده. يو څو ځانګړي ارزښتونه د.

$$s_2 = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots ,$$

$$s_4 = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-4} = \frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \dots ,$$

$$s_6 = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-6} = \frac{1}{1^6} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \dots .$$

مطلق پولې ته تلونکې لړۍ **Absolut konvergente Reihen**

که

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|,$$

پولې ته لاړ شي، نو لړۍ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ مطلق پولې ته تلونکې بللل کیږي.

د کونورګنت د دې قوي بڼې څخه لرو، چې لړۍ د زیاتوونو لړې پرلپسې په خوښه تغیر له امله هم کونورګنت ده یعنې پولې ته ځی.

کوښی (کوشي) – کونورګنت قضیه راکوي:

$$\exists n_\varepsilon : |a_{m+1}| + \dots + |a_n| < \varepsilon \quad \text{für} \quad m,n > n_\varepsilon$$

د دریګودي نابرابرون په مرسته د توته زیاتون د کمښت لپاره لاس ته راځي:

$$|s_n - s_m| = |a_{m+1} + \dots + a_n| \le |a_{m+1}| + \dots + |a_n| < \varepsilon$$

د $m,n > n_\varepsilon$, لپاره ،

دا په دې معناچې د $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ پولې ته تلنه.

مایورانت او مینورانت
Majorante und Minorante

که $|a_n| \leq c|b_n|$ د $n \geq n_0$ لپاره وي او یو مثبت یا زیاتیزه ثابته، نو د $\sum b_n$ مطلق کونورګنت څخه د $\sum a_n$ مطلق کونورګنت لاس ته راځي

که برعکس $|a_n| \geq c|b_n|$ وي دېولو تر پای ډېرو n لپارهو نو د $\sum |b_n|$ دیورګنت څخه لاس ته راځي، چې $\sum a_n$ هم مطلق کونورګنت نه ده.

زیاتوخت یا زیات واره هندسي لړۍ $\sum q^n$ او لړۍ $\sum n^{-\alpha}$ د پرتله کونې لړۍ په څیر کارول کیږي.

د لړۍ

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n}^{-1}$$

لپاره دی

$$a_n = \frac{n \cdot (n-1) \cdots 1}{(2n) \cdot (2n-1) \cdots (n+1)} \leq 2^{-n}.$$

د دې په تعقیب هندسي لړۍ $\sum 2^{-n}$ یوه مایورانت ده، نو دا پولې ته تلونکې ده.
د لړۍ

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+1000}$$

لپاره د $n > 9$ لپاره باور لري

$$a_n \geq \frac{n^2}{2n^3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n} .$$

په دې پسې یا په تعقیب هارموني لړۍ يوه مينورانت ده، نو لړۍ پولې ته نه ځي يا ديورګنت ده.

د وېش قضيه Quotientenkriterium

که $a_n \neq 0$ د $n > n_0$ لپاره وي او يو عدد $q \in (0,1)$ شتون ولري د

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q , \quad n > n_0 ,$$

سره، نو $\sum a_n$ مطلق پولې ته ځي. برعکس

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1 , \quad n > n_0 ,$$

، نو $\sum a_n$ پولې ته نه ځي يا ديورګنت ده.

د پولې ته تلنې لپاره پوره کېدونکې قضيه کېدی شي په ورته بڼه

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$$

هم وليکل شي.

په پام کې دې وي، چې پوره کېدونکي پولې ته تلونکي شرطونه رکورزيو د نابرابرون

$$|a_{n+1}| < |a_n| , \quad n > n_0 ,$$

په توګه دی، چې د هغې په بنسټ کومهوينا ممکن نه ده.

پای.

که

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\,,\,\left|\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}\right|\,,\,\dots\,\le q\,,$$

وي، نو دی

$$|a_{n+k}| \le q|a_{n+k-1}| \le \dots \le q^k|a_n|\,.$$

له دې سره هندسي لړۍ یوه مینورانت ده.
د دیورګنت لپاره قضیه راکوي، چې

$$0 < |a_n| \le |a_{n+1}| \le \dots$$

د $n > n_0$ لپاره. زیاتیدونې صفرپرلپسي نه جوړوي، له کوم چې د $\sum a_n$ دیورګنت لاس ته راځي یا پولې ته نه تګ..
پای.

د وېش قاعده کېدی شي ګټوره وي که په لړیو استعمال شي، چې د هغې زیاتوونې فاکولتیت او توانونه خوندي ولري. د

$$\sum_{n=1}^{\infty} 3^n \Big/ \binom{2n}{n}$$

لپاره د بېلګې په توګه سړی لاس ته راوړي

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{3^{n+1}\,(n+1)!\,(n+1)!}{(2n+2)!}\cdot\frac{(2n)!}{3^n\,n!\,n!} = \frac{3\cdot(n+1)(n+1)}{(2n+2)(2n+1)}\,.$$

د دې افادې پوله ارزښت د $n \to \infty$ لپاره $\frac{3}{4}$ دی، پسې(تعقیب) یې لړۍ پولې ته ځي.

د زیاتوونو یو سیده تخمین

$$a_n = \frac{3\cdot 6\cdots 3n}{(n+1)(n+2)\cdots(2n)}$$

مفصل دی یا ډېر کار غواړي. ضریبونه

$$\frac{3k}{n+k}\,, \quad k=1,\ldots,n\,,$$

له یو څخه هم لوی دي او هم کوچني. سړی باید مناسبې جوړې سره یوځای کاندي، چې یوه تخمین ته راشي.

د ریښې یا جذرقضیه **Wurzelkriterium**

که یو عدد $q \in [0,1)$ د

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leq q$$

سره شتون ولري د $n > n_0$ لپاره، نو $\sum a_n$ مطلق پولې ته ځي. که برعکس

$$|a_n| \geq 1$$

وي د ناپای ډېرو n لپاره، نو $\sum a_n$ پولې ته نه تلونکې ده.
د کونورګنت لپاره پوره کېدونکي شرطونه کېدی شي په ورته یا برابر ارزښته بڼې

$$\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$$

هم ولیکل شي.

که $|a_n| \leq q^n$ د $n > n_0$ لپاره باور ولري، نو هندسي لړی یو مایورانت جوړوي.
د دیورګنت لپاره شرط راکوي، چې (a_n) صفر پرلپسې نه ده، ځکه چې $|a_n| \geq 1$ د ناپای ډېرو n لپاره باور لري..

د ریښې قضیه استعما کېدی شي په هغو لړیو ګټوره وي، چې د هغو زیاتونونه n -م توان خوندي ولري. د

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(3+(-1)^n)^n} = \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{2^3} + \ldots$$

لپاره سړی د بیلګې په توګه لري

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{|x|}{|3+(-1)^n|}\ .$$

د دې افادې یا وییني پرلپسې

$$\frac{|x|}{2}, \frac{|x|}{4}, \frac{|x|}{2}, \dots ,$$

د

$$q = \frac{|x|}{2}$$

له لارې یا سره محدود ده. په تعقیب یې لړی د $|x| < 2$ لپاره پولې ته ځي.
همدې نتیجې ته رسو، که سړی پوله سوپریور جوړه کړي.

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{|x|}{2}\ .$$

دا د n –مې ریښې اوسځیلیري پرلپسې پولې ته نه ځي بې پروا یا نا غوره یا مهمه نه ده.

د لایبنیځ قضیه **Leibniz-Kriterium**

الترنیري (مخ نخښه بدلونې) لړۍ

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 \pm \cdots$$

پولې ته ځي، که (a_k) یوه مونوتون صفر پرلپسې وي. د لړۍ باقیو یا پاتو لپاره باور لري

$$0 \leq |\sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k a_k| \leq |a_{n+1}|.$$

د يوې الترنيري جمعې ارزښت کېدی شي تل د لومړي زياتوني د مطلق ارزښت له لارې اټکل شي.

د اټکل په بنسټ

$$|s_m - s_n| = |a_{n+1} - a_{n+2} + \ldots - a_m| \leq |a_{n+1}|$$

د کوښی قضيه پوره ده، او د لپاره د پاتې جمعې اټکل لاس ته راځي.
د دې نامساوات د ښوونې لپاره، چې د لړۍ دپاتې لپاره اټکل راکوي، سړی بې له ټوليزو بنديزونو (o.B.d.A.) $a_{n+1} \geq 0$ نيسي او $s_m - s_n$ د

$$a_{n+1} - \underbrace{(a_{n+2} - a_{n+3})}_{\geq 0} - \underbrace{(a_{n+4} - a_{n+5})}_{\geq 0} - \ldots \leq a_{n+1}$$

له لارې پورته لور ته اټکل کوي. او د

$$\underbrace{(a_{n+1} - a_{n+2})}_{\geq 0} + \underbrace{(a_{n+3} - a_{n+4})}_{\geq 0} + \ldots \geq -a_m \geq -a_{n+1}$$

له لارې کښته لور ته اټکل کوي

د لايبنيخ قضيې سره د الترنيري هارموني لړۍ

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = \ln 2 \, ;$$

پولې ته تګ لاس ته راځي ، پرلپسې

$$a_n = \frac{1}{n}$$

په روښانه توګه يوه همغږيزه صفر پرلپسې ده. د n –م ټوټه جمعې ناټيکاوی ، دا په دې معنا چې د لړۍ پرلپسې مطلق ارزښ دا لاندې دی

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k} - \ln 2 \right| \leq \frac{1}{n+1} \, .$$

د لايبنيخ قصيې دواړه وړاندنيونې غوره دي.

د

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{n} = -\frac{2}{1} + \frac{3}{2} - \frac{4}{3} + \frac{5}{4} - \dots$$

لړۍ لپاره زیاتووني a_n صفرپرلپسې نه جوړوي. له

$$|s_{n+1} - s_n| = |a_{n+1}| \geq 1$$

 څخه   دیورگنت لاس ته راځي.

د

$$\sum_{n=1}^{\infty} \max\left(\frac{(-1)^n}{n}, \frac{(-1)^n}{2n}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{4} - \dots$$

لړۍ لپاره زیاتوونې a_n همغږیزې نه دي. که یو په بل پسې زیاتوني سره یوځای کړو، نو لاس ته ترې راځي

$$b_n = a_{2n-1} + a_{2n} = -\frac{1}{2(2n-1)} + \frac{1}{2n} = \frac{2n-2}{(4n-2)(2n)} \geq \frac{1}{4n}$$

für $n > 1$.

په تعقیب هامونې لړۍ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ یوه مینورانت ده، نو له دې کبله لړۍ دیورگنت ده.

د اویلر **Euler** گڼ یا عدد **e** دیوې پرلپسې او یوې لړۍ پولې په حیث

د اویلر عدد $e = 2,71828182845905\dots$

کيدی شي د يوې پرلپسې او يوې لړۍ پوله ارزښت پّ ځير انځور شي

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$$

پای.

د لړۍ پولې ته تلنه له $1/n! \leq 4\cdot 2^{-n}$ څخه د مايورانت قضيې په بنسټ لاس ته راځي.

پرلپسې $a_n = (1+1/n)^n$ د لاندې دواړو اټکلونو په بنسټ د e سره نومول شوي يا په نخښه شوي پوله ارزښت په لور ځي.

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n \leq e \quad .$$

(a)

د ښوونې لپاره لومړی په پام کې نيسو چې د $n \geq k \geq 0$ لپاره

$$\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} = \frac{1}{k!}\,\frac{n}{n}\,\frac{n-1}{n}\cdots\frac{n-k+1}{n} \;\leq\; \frac{1}{k!}$$

دی. له دې سره د بينوم فرمول څخه لرو

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} \leq \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} \leq e$$

او دپوله ارزښت جوړولو سره غوښتنه لرو.

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n \geq e \,.$$

(b)

د ښوونې لپاره $N \geq 1$ په خوښه ټاکو مګر کره او د $n > N$ لپاره لرو:

$$a_n \geq \sum_{k=0}^{N}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^{N}\frac{1}{k!}\,\frac{n}{n}\,\frac{n-1}{n}\cdots\frac{n-k+1}{n} \geq \sum_{k=0}^{N}\frac{1}{k!}\left(\frac{n-N}{n}\right)^N .$$

له دې سره لاس ته راځي

$$\lim_{n\to\infty} a_n \geq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!}\left(1-\frac{N}{n}\right)^{N} = \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!}$$

او د پولې ارزښت جوړولو($N \longrightarrow \infty$) سره غوښتنه.

له (a)او (b) څخه د $\underline{\lim}\, a_n \leq \overline{\lim}\, a_n$ له امله لرو :

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n = \overline{\lim}_{n\to\infty} a_n = e.$$

د لړیو ځانګړي پوله ارزښتونه

په لاندې کې د څو غوره لړیو پوله ارزښتونه ورکړ شوي.

.

$$\sum_{k=0}^{\infty} aq^k = a + aq + aq^2 + \cdots = \frac{a}{1-q} \quad \text{, für } |q| < 1$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots = \infty$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1}\frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \pm \cdots = \ln 2$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$$

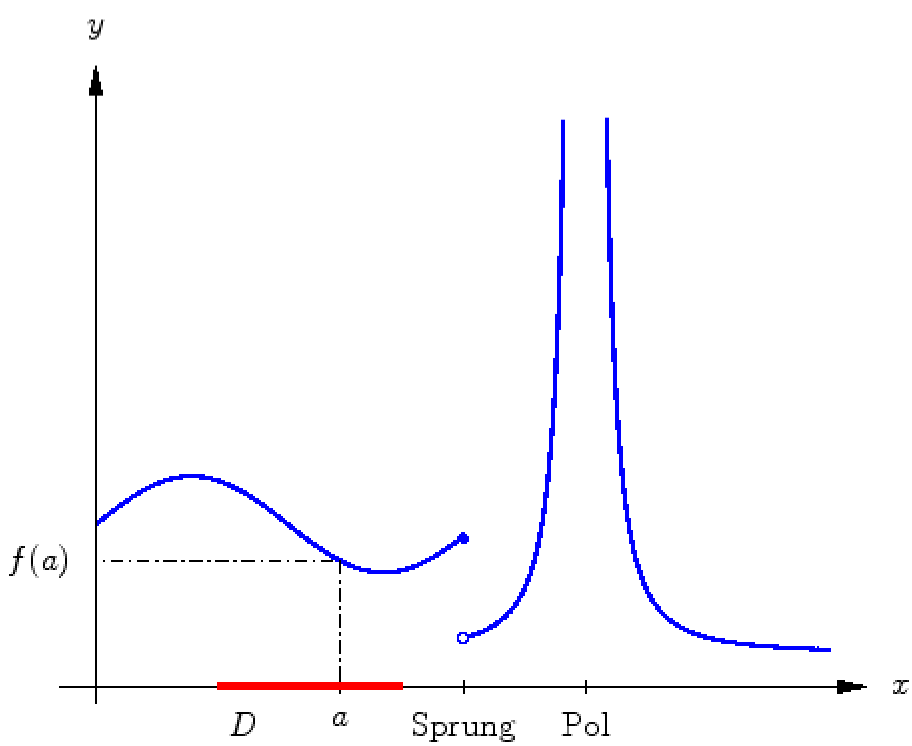
$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{1}{k^2} = 1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}\pm\cdots=\frac{\pi^2}{12}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!} = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots=e$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k}\frac{1}{k!} = 1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}\pm\cdots=\frac{1}{e}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k\cdot 2^k} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 2^2}+\frac{1}{3\cdot 2^3}+\cdots=\ln 2$$

ناپرېکیدنه یا متمادیت **Stetigkeit**



يو تابع f په ټکی a کې ناپرېکيدونکی يا متمادي دی، که د ټولو پرلپسيو (x_n) لپاره د د پولې a سره د تابع ارزښت $f(x_n)$ د $f(a)$ په لور کونورګنت وی يا هځيږي:

$$x_n \to a \Longrightarrow f(x_n) \to f(a)\,,$$

د پوله ارزښت د تعريف له مخې هر $\varepsilon > 0$ ته يو δ_ε شتون ل ري د $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ سره د $|x - a| < \delta_\varepsilon\,,$ لپاره ، او سړی ليکي

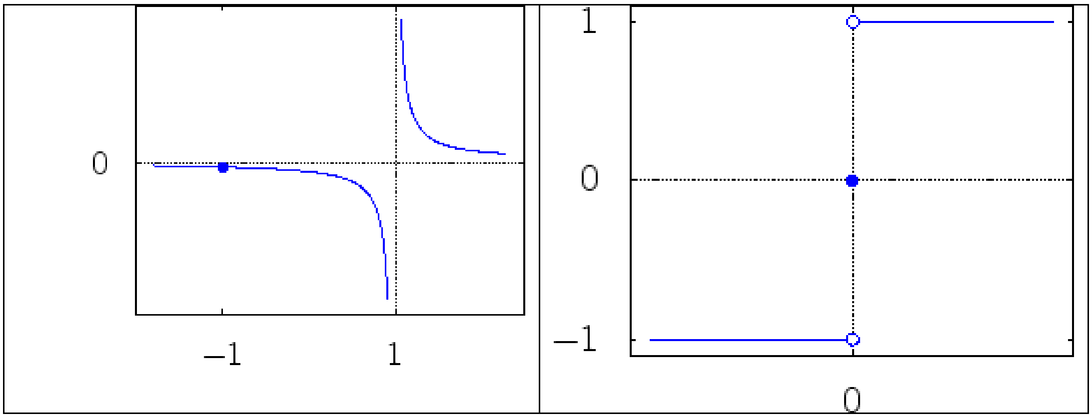
$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)\,.$$

يو تابع په يوه انتروال D ناپرېکيدونکي ده، که دا د D په هر ټکي کې ناپرېکېدونکې وي.

دا په دې معناچې د f ګراف سره تړلی دی، تابع ګام يا ټوپ نه وهي او قطب نه لري (لنډ: نه پرې کيږي او نه ماتيږي).

بالاخره ناپرېکېدنه په دې معنا ده، چې ګراف بې له دې چې (پنسل پورته شي) پرې شي رسم کيږي.

فنکشن $f(x) = \operatorname{sign}(x)$	فنکشن $g(x) = \dfrac{x+1}{x^2-1}$



پورته دواړه بیلګې د پرېکیدنې مختلف تیوپونه ښایي.

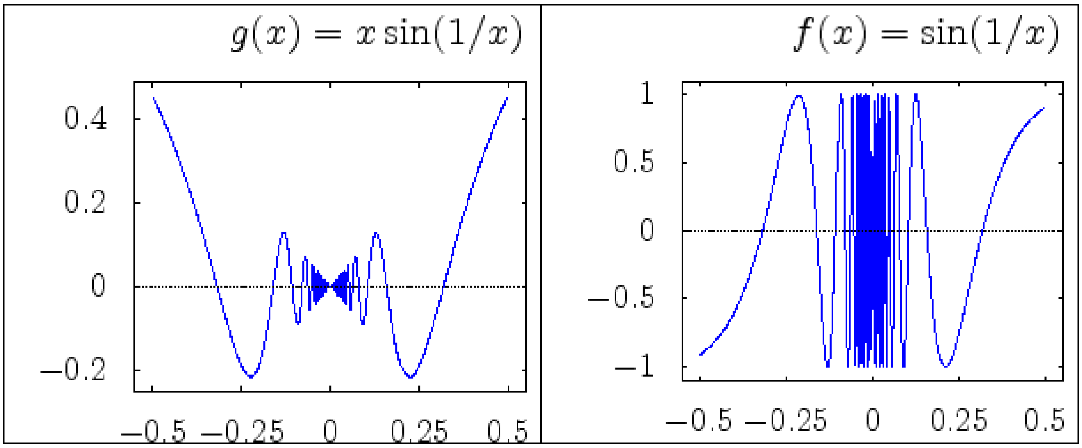
د سیګنوم تابع sign په صفرځای کې یو توپ وهي. په حقیقت کې د تابع ارزښت تعریف دی، $\operatorname{sign}(0) = 0$ ، مګر د $f(x)$ پوله ارزښت د $x \to 0$ لپاره شتون نه لري.

تابع په $x = \pm 1$ کې تعریفتشیا لري. د $x \to 1$ لپاره $|g(x)|$ د ∞ په لور هڅیږي، g هلته یو قطبځای لري. مګر سره له دې هم پوله ارزښت $\lim_{x \to -1} g(x)$ شتون لري. دا ترلی د کرښیز ضریب $(x+1)$ د لندوني څخه کتل کیږي.

$$g(x) = \frac{1}{x-1}, \quad x \neq -1 .$$

دا یوه له منځه وړونکې یا پورته کیدونکې تعریفتشیا ده. د تابع ارزښت $g(-1) = -\frac{1}{2}$ د تکمیلوني له لارې g په $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ باندې یو ناپرېکیدونکې تابع کیږي.

پای.



تابع (خيرې يې پورته دي)
$f(x) = \sin(1/x)$

په صفر 0کې پرېکيدونکي ده، ځکه چې د $x \to 0$ لپاره د -1 او 1 ترمنځ اوسځيلی کيږي.

برعکس ياپه ځت د تابع

$$g(x) = x\sin(1/x)$$

تعريفتشيا په $x = 0$ کې پورته کيدونکي يا له منځه وړونکي ده.

له

$$0 \le |x\sin(1/x)| \le |x|$$

د $\lim_{x\to 0} |x| = 0$ سره د پرتله کيدونکي قضيې په بنسټ لاس ته راځي

$$\lim_{x\to 0} x\sin(1/x) = 0.$$

له دې امله کيدی شي د g

$g(0) = 0$

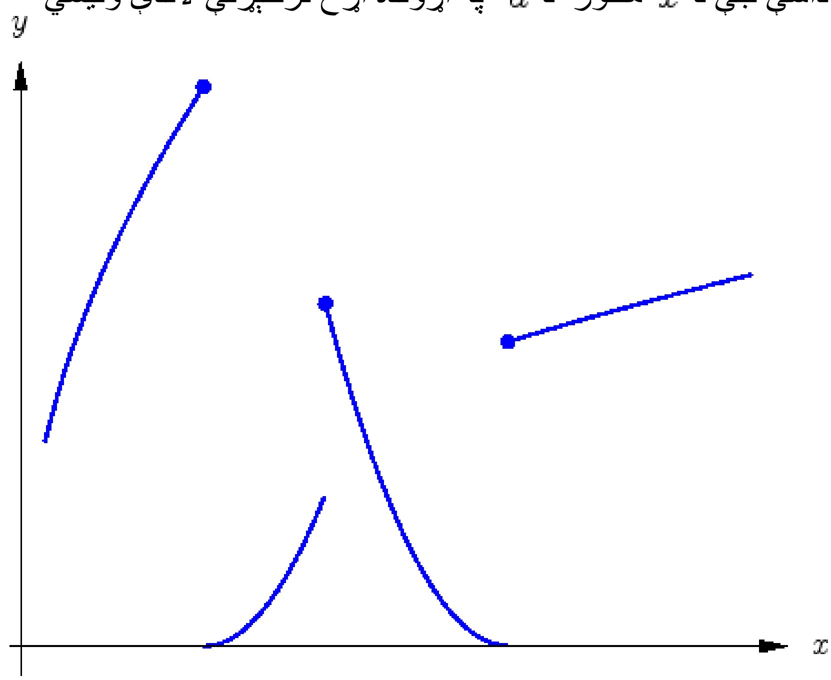
اینووني له لارې يوه په ټول $\mathbb{R}$ ناپرېکيدونکي تابع ته پوره شي.

يو اړخيز ناپرېکيدنوالى يا متماديت **Einseitige Stetigkeit**

ناپرېکدنوالي ته ورته سړى کيږ- همداسې ښى ناپرېکېدنوالى تعريفوي

$$\lim_{x \to a-} f(x) = f^{-}(a)\,, \qquad \lim_{x \to a+} f(x) = f^{+}(a),$$

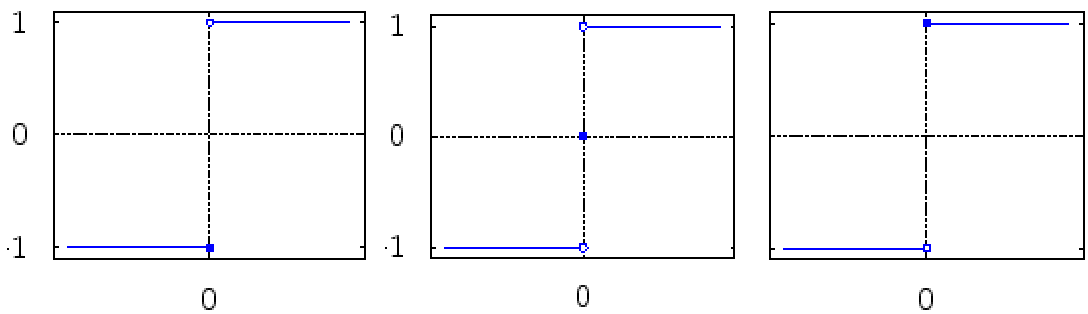
داسې جې د x محور د a په اړونده اړخ ترڅېړنې لاندې ونيسي



که د f په يوه ټوپځاى تابع ارزښت تعيف وي، نو دا په ګراف کې پنډ په نخښه کېدى شي، چې روښانه شي چې د کيږ- يا ښي اړخ د پولې ارزښت سره سر خوري.

پاى.

تابع
$$f(x)=x/|x|$$
په ټولو ټکو کې تر تعریفتشیا $x=0$ پورې ناپرېکیدونکې ده.



که $f(0)=-1$ کېږدو نو تابع به کيڼ اړخیزه او د $f(0)=1$ سره ښي اړخیزه ناپرېکېدونکې په 0 کې مخ ته لاړه شي. د $f(0)=0$ لپاره د سیګنوم-تابع

$$f(x)=\mathrm{sign}(x),$$

لاس ته راځي، چې دا په 0 کې نه ښۍ – او نه کینه ناپرېکېدونکی دی.

د ناپرېکیدونکو توابعو لپاره لارې یا قاعدې

په یوه ټکې a کې ناپرېکېدونکې توابعو f او g لپاره

$rf \quad (r\in\mathbb{R})$

$f\pm g$

fg

f/g (وي $g(a)\neq 0$) که

$f\circ g$

په a کې ناپرېکیدونکې دي.

په ورته وګه په يوه انټروال D ناپرېکېدونکې تابع همداسې د کېڼ – اوښي اړخيز ناپرېکېدنوالي ځايونو لپاره باور لري.
پای.

دا لار د پوله ارزښت لپاره اړونده وينا ښخه ترلې لاس ته راځي.
كه دبيلګې په ت وګه د ناپرېكېدونكو توابعو كمپوزېشن(تركيب) تر څېړني ونيسو، د g د ناپرېکېدنوالي ښخه د هرې پرلپسې (x_n) لپاره د پوله ارزښت a سره دا راکوي

$$\lim_{n\to\infty} g(x_n) = g(a).$$

دا چې f هم ناپرېكېدونكې دی، لاس ته راځي

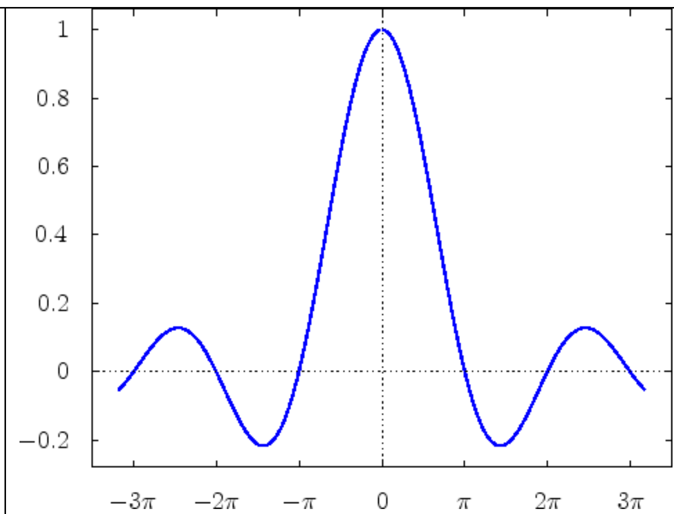
$$\lim_{n\to\infty} f(g(x_n)) = f(g(a)).$$

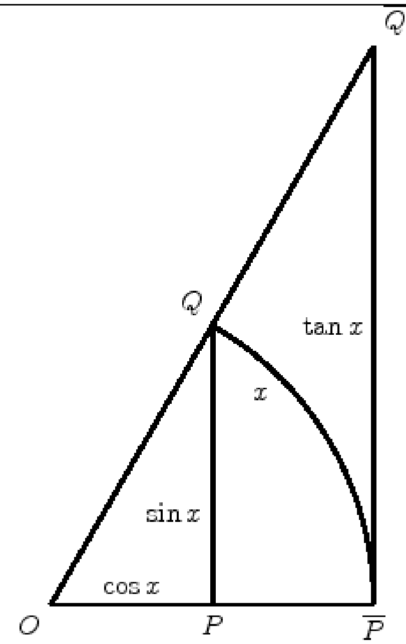
پاي.

داسې په نامه sinc - تابع.

$$f(x) = \operatorname{sinc} x = \frac{\sin x}{x}$$

د مخ ته بيولو يا دوام
$f(0) = 1$
سره په $\mathbb{R}$
باندې ناپېكېدونكې ده.
ښوونه يې د ترېګونومتريک توابعو په تخمين پورې اړه لري.





د ردېګوډي $\Delta(OPQ)$ ، د ګردی ټوټه ووني یا وتر او درېګوډي $\Delta(O\overline{P}\overline{Q})$ د سطحو د پرتلې له لارې په څېره کې کتل کيږي، چې

$$\frac{\sin x\cos x}{2} \le \frac{x}{2} \le \frac{\tan x}{2}$$

همداسې

$$\frac{1}{\cos x} \ge \operatorname{sinc} x \ge \cos x,$$

د $\sin x/2$ سره وېشني له لارې او د معکوس ارزښت جوړونه. د $\lim_{x\to 0}\cos x = 1$ د پرتلې قضيې څخه لاس ته راځي.

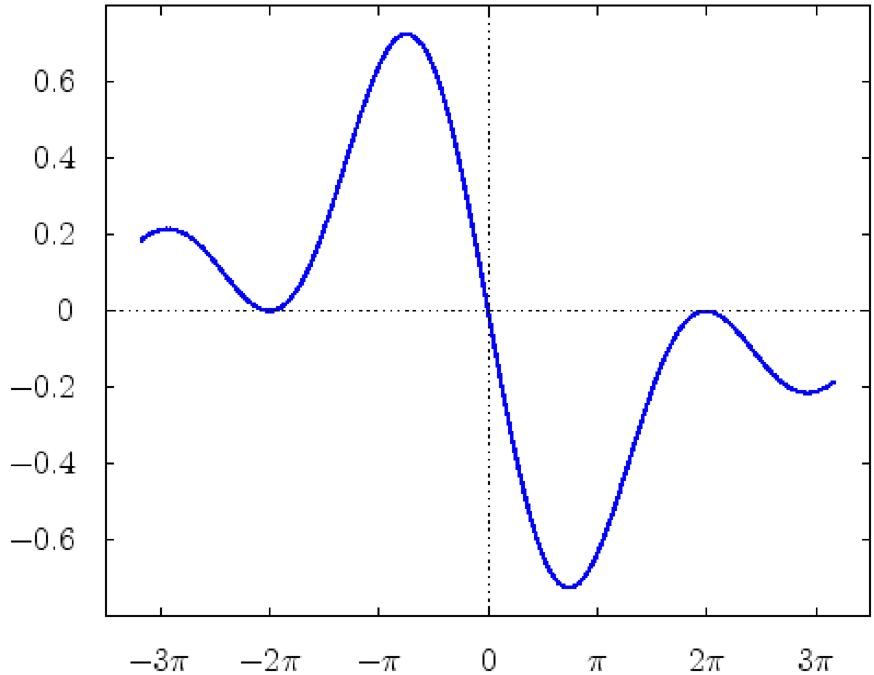
$$\lim_{x\to 0}\operatorname{sinc} x = 1.$$

ليکونکي: اېپ، هيوليک

تابع

$$f(x) = \frac{\cos x - 1}{x}$$

د مخ ته وړنې $f(0) = 0$ سره په ټول $\mathbb{R}$ ناپرېکيدونکې ده



باور لري

$$\frac{\cos x - 1}{x} = \frac{(\cos x - 1)(\cos x + 1)}{x(\cos x + 1)} = \frac{\cos^2 x - 1}{x(\cos x + 1)}$$

$$= -\frac{\sin^2 x}{x(\cos x + 1)} = -\frac{\sin x}{x} \frac{1}{\cos x + 1} \sin x,$$

او له

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x + 1} = \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad \lim_{x\to 0} \sin x = 0$$

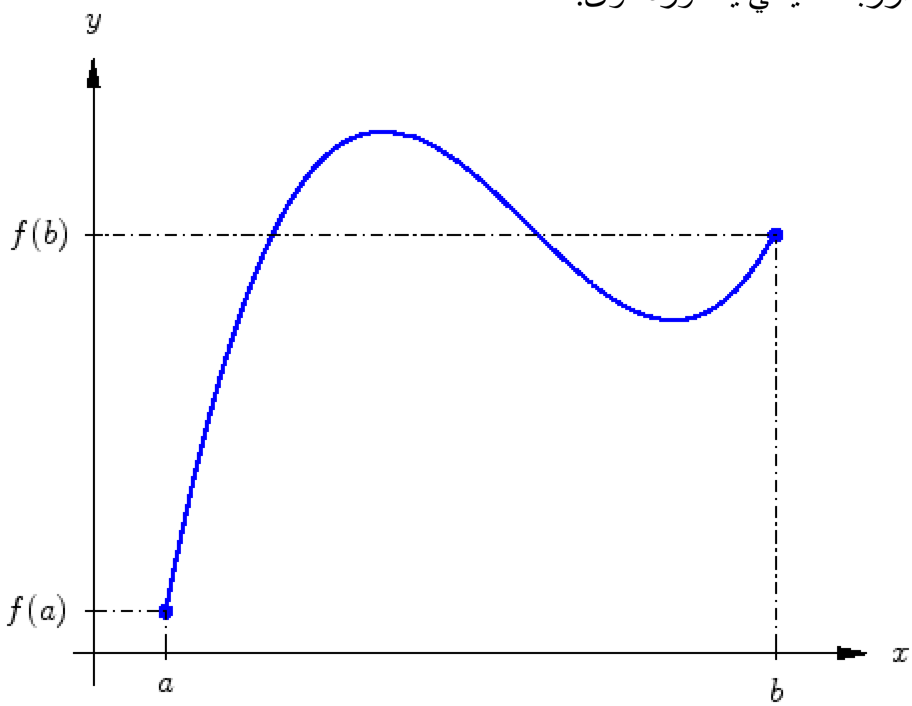
لاس ته راځي

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0.$$

ليکونکي: اپپ، هيوليک

منځ ارزښت جمله **Zwischenwertsatz**

یو ناپرېکېدونی تابع f په یوه بندانتروال $[a,b]$ د $f(a)$ او $f(b)$ ترمنځ هر ارزښت نیسي یا غوره کوی.

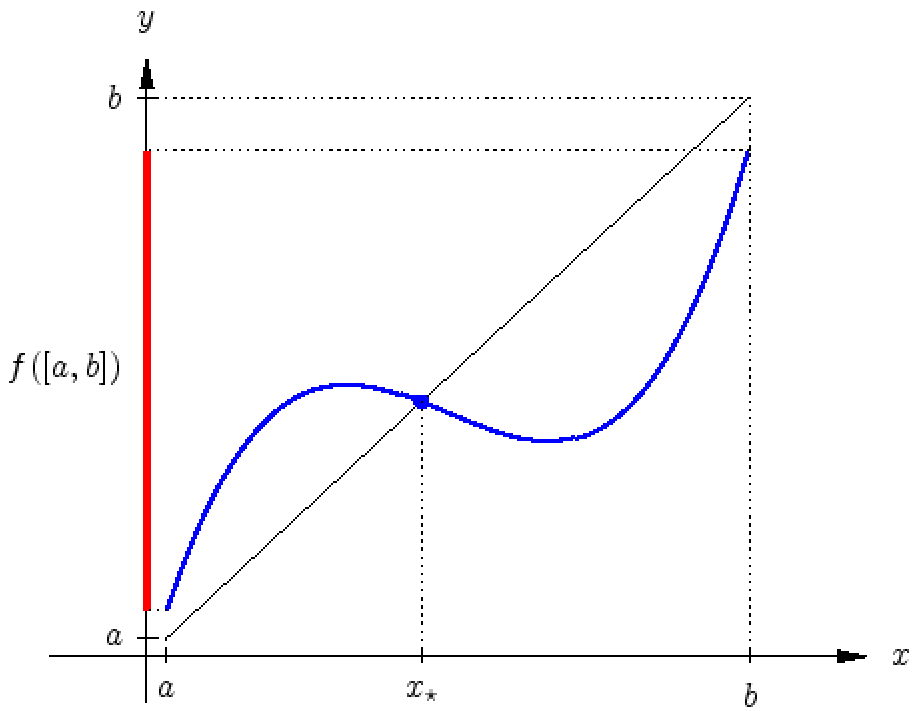


لیکونکي: اپپ، هیولیګ

که یو تابع f انتروال $[a,b]$ په انتروال $[a,b]$ ناپرېکېدونکی تنظیم کړي، نو یو $x_\star$ شتون لري د

$$x_\star = f(x_\star).$$

سره.



د ناپرېکيدونکي تابع

$$g(x) = f(x) - x$$

لپاره $g(a) \geq 0$ او $g(b) \leq 0$ باور لري. د منځ ارزښت جملې سره د يوه صفرځای $x_\star \in [a,b]$ شتون لاس ته راځي:

د نټپرېکيدونکو توابعو لپاره

$$g(x) = f(x) - x$$

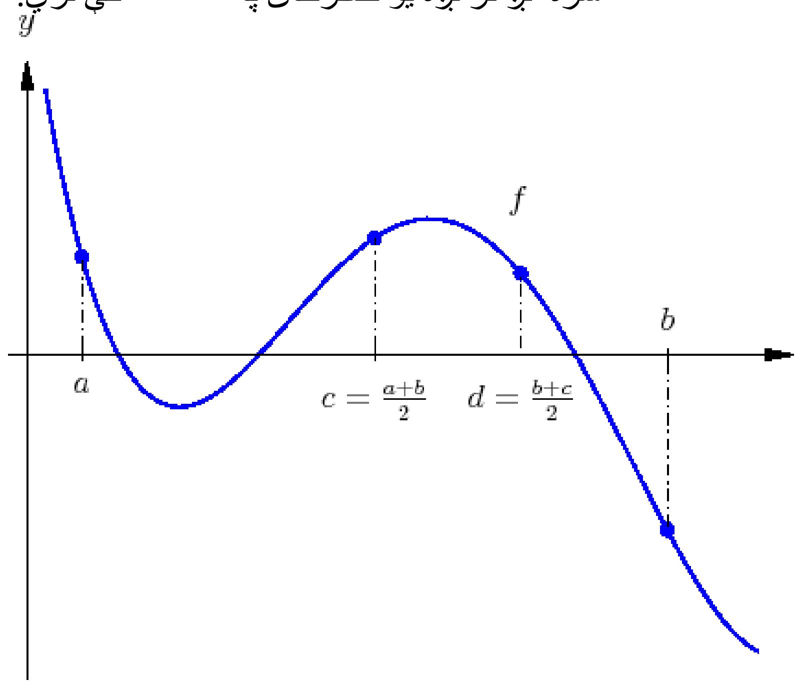
$$g(x_\star) = 0 \;\Leftrightarrow\; f(x_\star) = x_\star$$

دا په دې معناجې د f يو ځاي په ځای - يا بيکس ټکی $x_\star$.

ليکونکي: هيوليک، کراخ

د دوه سطحو – یا برخو تلنلار **Bisektionsverfahren**

د منځ ارزښت جملې په بنسټ یو ناپرېکیدونکی تابع $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ د $f(a)f(b)\le 0$ سره لږ تر لږه یو صفرځای په $[a,b]$ کې لري.



که دا انتروال نیم شي او f ته د انتروال په ةنځ کې ارزښت ورکړي

$$c=\frac{a+b}{2}$$ ،

نو کیدی شي د مخنخښي په مرسته پرېکړه وشي، چې د کوم انتروال په نیمايي کې باید صفرځای پروت وي:

$f(a)f(c)\le 0$ لاسته راځي ، چې په $[a,c]$, کې صفرځای شتون لري

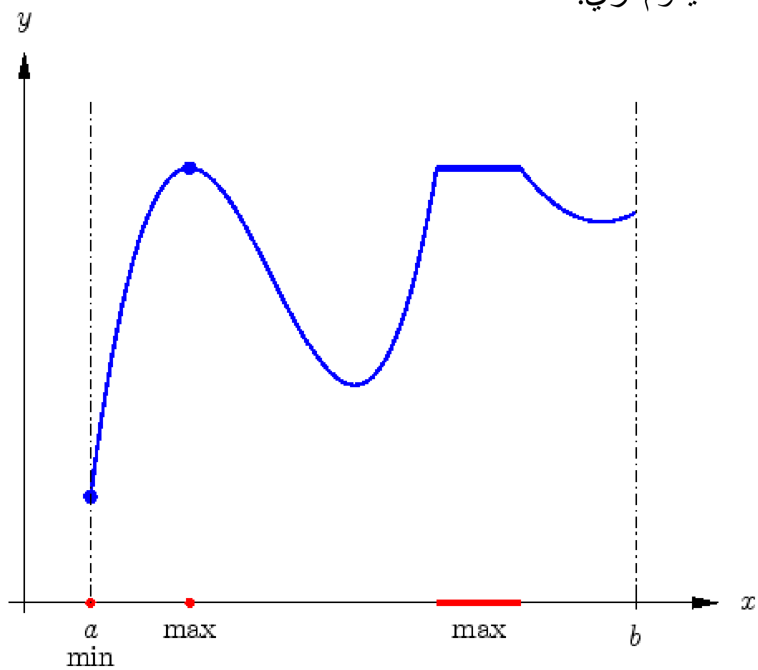
$f(a)f(c)\ge 0$: لاس ته راځي صفرځاب په $[c,b]$. کې شتون لري

سرِی اوس دا اړونده برخه انتروال ټاکي او دااېتریر iteriert (ټیک حل ته ور نږدې کونه) کوي، تر څو د انتروال اوږدوالی غوښتوني ټیکوالي ته ورسیږي.

لیکونکي: ایپ، هیولیک، پفایل

د ناپرېکيدونکي تابع افرطيت Extrema stetiger Funktionen

يو ناپرېکيدونکی تابع په يوه پای رابند انتروال $[a, b]$ لږ تر لږه يو مينيموم او يو ماکسيموم لري.



ليکونکي: ايپ، هيولیک

يو $c > 0$ شتون لري د
$$(x+y)^n \leq c(x^n+y^n)$$

د $x, y \geq 0$ سره لپاره

د بنوونې ته د $x \neq 0$ لپاره (حالت $x = 0$ ساده دی) ليکو

$$z = y/x$$

او ناپرېکيدونکی تابع

$$f(z) = \frac{(1+z)^n}{1+z^n}.$$

څېړو.

دا چې $\lim_{z\to\infty} f(z) = 1$ دی، نو یو $b > 0$ شتون لري، داسې چې $f(z) \leq 2$ د $z \geq b$ لپاره باوري کوي. د

$$c = \max\left\{2, \max_{z\in[0,b]} f(z)\right\}$$

سره لاس ته راځي

$$f(z) = \frac{(1+z)^n}{1+z^n} \leq c$$

او له دې سره پورته غوښتنه
لیکونکي: اېپ، هیولیګ

برابرډوله ناپرېکیدنوالی Gleichmäßige Stetigkeit

یو تابع f په یوه انتروال D برابرډوله یا برابرارزښته ناپرېکېدونکی دی ، که د ټولو $\varepsilon > 0$ لپاره یو δ_ε شتون ولري ، دا سې چې راکړي

$$|x-a| < \delta_\varepsilon \;\Rightarrow\; |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

د ټولو $x, a \in D$ لپاره.

د f د تنها ناپرېکېدنې په برعکس δ_ε د a په واک کې نه ده. تنهاپه یوه محدود رابند انتروال کې ناپرېکېدنوال کی او برابرارزښته یا – ډوله ناپرېکېدنوالی سره ورته دی.
لیکونکي: هیولیګ، پفایل

په ټکي ډول پولې ته تلنه Punktweise Konvergenz

د توابعو (f_n) يوه پرلپسي په يوه انتروال D ټکي ډوله د پولي تابع f په لور پولي ته ځي.

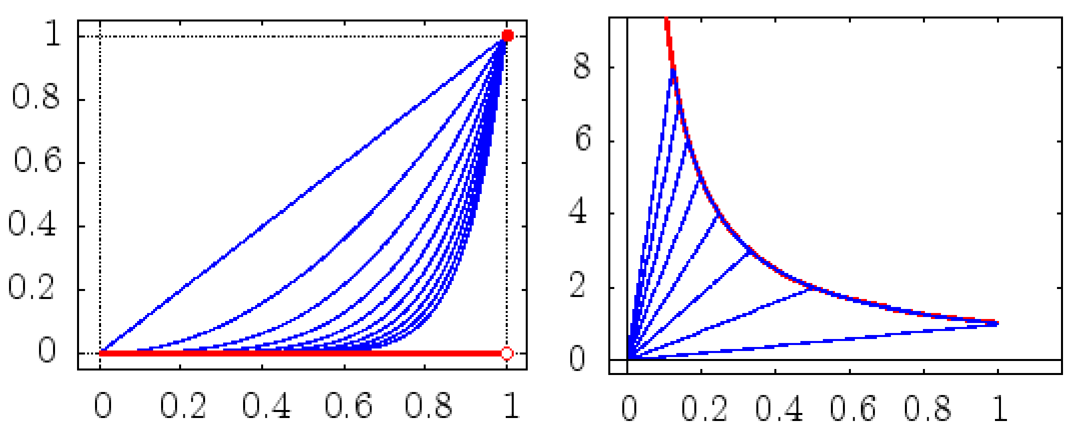
$$f_n \underset{\text{pktw.}}{\longrightarrow} f,$$

که $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ وي د ټولو $x \in D$ لپاره.
ليکونکي: اېپ، هيوليګ

په ټکيډوله پولي ته تلنې بايد نه دی چې ناپرېکېدنوال او بندوالی ساتلي پاتې شي.
د بېېلګي په توګه د $f_n(x) = x^n$ ټکي ډوله پوله ارزښت په $[0,1]$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

په ښي انتروال پای پرېکېدونکی دی، لکه په کينه څېره کې چې ښوول شوی دی.



د يو کونورګنت لپاره بېلګه چې د نامحدود پوله تابع په لور ښی څېره د پرلپسي سره

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x, & 0 < x \le 1/n \\ 1/x, & 1/n < x \end{cases},$$

ښايي ، چې په $(0,1)$ ټکي ډوله د پوله تابع $f(x) = 1/x$ په لور پولې ته ځي.
ليکونکي: اېپ، هيوليګ

برابرارزښته يا برابرډوله پولې ته تلنه **Gleichmäßige Konvergenz**

د توابعو يوه پرلپسي (f_n) په يوه انتروال D برابرډوله د يوه پولې تابع f په لور پولې ته ځي،

$$f_n \underset{\text{glm.}}{\longrightarrow} f,$$

که هر $\varepsilon > 0$ ته يو n_ε شتون ولرى، داسې چې

$$n > n_\varepsilon \Longrightarrow |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

د ټولو $x \in D$ لپاره باور ولري.

د کوشي قضيې په مرسته کېدى شي برابرډوله پولې ته تلنه بې د پولېتابع نسبت څخه تعريف شي. سرى ورته شرطونه لاس ته راوړي، داسې چې

$$m, n > n_\varepsilon \Longrightarrow |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

د ټولو $x \in D$ لپاره بايد باور ولري.

که توابع f_n ناپرېکېدونکي وي، نو پوله تابع f هم ده.
ليکونکي: اېپ، هيوليګ

د درېګوډي نامساواتو څخه لرو

$$\begin{aligned} &|f(x_0) - f(x)| \\ &\le |f(x_0) - f_n(x_0) + f_n(x_0) - f_n(x) + f_n(x) - f(x)| \\ &\le |f(x_0) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f_n(x)| + |f_n(x) - f(x)|. \end{aligned}$$

د په خوښه $\varepsilon > 0$ ته د برابرډوله کونورګنت له امله يو n_ε شتون لري، داسې چې د $n > n_\varepsilon$ لپاره

$$|f_n(y) - f(y)| < \varepsilon \quad \forall\, y \in D$$

باوري کوي. د يوه داسې n لپاره اخرنی او لومړنی ترم $< \varepsilon$ دي، که $|x - x_0| < \delta_\varepsilon$ وي. دا له $|f\,(x) - f\,(x_0)\,| < 3\varepsilon$ لاس ته راځي او له دې سره $f\,(x) \rightarrow f\,(x_0)$ د $x \rightarrow x_0$ لپاره.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

د توابعو لړۍ پولې ته تلنه **Konvergenz von Funktionenreihen**

يوه د توابعو f_k لړۍ $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ ټکي ډوله (برابرډوله) پولې ته تلونکې ده، که دا د لاندې ټوټه جمعې يا زياتون $s_n = \sum_{k \leq n} f_k$ لپاره دا حالت ولري.

يوه کلکونه يې مطلق پولې ته تلنه ده، چې د هغې سرره د $\sum_n |f_n|$ د برابرډوله پولې ته تلنې لپاره غوښتل کيږي. په دې حالت کې پولې ته تلنه د لړۍ يوه نظم بدلون لپاره هم ساتلی پاتيږي.
د تعريف سره سم دا وينا وې په تابع پرلپسيوو هم د باور وړ دي.
ليکونکي: اپپ، هيوليګ

په لاندې کې د يو څو تيوپيکي بيلګو حالتونه ښولکيږي

(i) د توابعو لړۍ

$$\sum_{k=0}^{\infty} x(1-x)^k = x\left[1 + (1-x) + (1-x)^2 + \cdots\right]$$

په $[0,1]$ ټکي ډوله پولې ته ځي. د هندسي لړی لپاره فرمولپه مرسته پوله تابع لاس ته راځي

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

دا چې په $x = 0$ کې پرېکېدونکی دی، کېدی شي لړی برابرډوله کونورګنت نه وي.

(ii) د $x \in [0,1]$ لپاره لړی

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-x)^k}{k} = -x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \pm \cdots$$

د لایبنیځ –پولې ته تلنې له امله ($\frac{x^k}{k}$ همغږیز صفر پرلپسې ده). دا چې د لړی پاتې د لایبنیځ پسې د

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-x)^k}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-x)^k}{k}\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-x)^k}{k}\right| \leq \left|\frac{x^{n+1}}{n+1}\right| \leq \frac{1}{n+1}$$

له لارې اټکل کېدی شي، لړی په $[0,1]$ حتی برابرډوله پولې ته ځي. مګر سره له دې په $[0,1]$ باندې مطلق پولې ته نه ځي، ځکه چې $\sum(1/k)$ دیورګنت ده.

(iii) لړی

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^2} = x + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{9} + \cdots$$

په $[-1,1]$ باندې مطلق پولې ته ځي، ځکه چې

$$\sum_{k=1}^{m}\left|\frac{x^k}{k^2}\right|-\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{x^k}{k^2}\right|=\sum_{k=n+1}^{m}\left|\frac{x^k}{k^2}\right|\leq\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$$

باور لري، او

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

پولې ته ځي.
ليکونکي: اپپ، هيوليګ

توابعو لړۍ ته مايورانت يا پورته پولې
Majorante bei Funktionenreihen

د پوره لوی n لپاره باور لري

$$|f_n(x)|\leq ca_n\,,\quad x\in D\,,$$

اوکه لړۍ $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ پولې ته ځي، بيا نو لړۍ

$$\sum_{n=1}^{\infty}f_n$$

مطلق پولې ته تلونکې ده.
ليکونکي: اپپ، هيوليګ

وينا تړلې د اعدادو لړۍ لپاره د مايورانت له جملې لاس ته راځي، ځکه چې د ټولو $x\in D$ لپاره لرو

$$\sum_{k=1}^{n} |f_k(x)| - \sum_{k=1}^{m} |f_k(x)| \leq c \sum_{k=m+1}^{n} a_k$$

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

د اکسپوننشل تابع ضرب انځورونه

اکسپوننشل تابع کېدی شي د يوه ضرب د پوله ارزښت په حيث انځور شي:

$$e^x = \lim_{n\to\infty} (1 + x/n)^n \, , x \in \mathbb{R} \, ,$$

په هر انټروال $[-a, a]$ د برابرډوله پولې ته تګ سره.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

لومړی به د

$$f_n(x) = (1 + x/n)^n = 1 + \binom{n}{1}\frac{x}{n} + \cdots + \binom{n}{n}\frac{x^n}{n^n} \, .$$

برابرډوله پولې ته تلنه و ښوول شي. دې ته سرې ترې کار اخلي يا استعمالوي، چې

(i)

$a^k/k! \to 0$ د په خوښه $a \geq 0$ لپاره ؛

(ii)

$p_{n,j} = \frac{n(n-1)\cdots(n-j+1)}{n^j}$ د هر $j \in \mathbb{N}$ لپاره يو مونوتون جګېدونکې د 1

په لور تلونکي پرلپسي ده.

د دې لپاره چې د کوشي فرمول استعمال کړو، سرې کمښت يا تفريق

$f_m(x) - f_n(x)$

په لاندې بڼه ليکي

$$\sum_{j=0}^{k-1} (p_{m,j} - p_{n,j}) \frac{x^j}{j!} + \sum_{j=k}^{m} p_{m,j} \frac{x^j}{j!} - \sum_{j=k}^{n} p_{n,j} \frac{x^j}{j!}$$

د $k < n < m$ سره .

د $|x| \leq a$ لپاره د $a \geq 1$ او $k \geq 2a$ سره د اخرنیو زیاتېدونو ارزښت هر ځل

$$\leq \frac{a^k}{k!} \underbrace{\left(1 + \frac{a}{k+1} + \frac{a^2}{(k+1)(k+2)} + \cdots\right)}_{\leq 2},$$

دی، نو د(i) پسې $< \varepsilon/3$ د یوه پوره لوي ټاکلې k لپاره.
د (ii) پسې یا له مخې دی

$$|p_{m,j} - p_{n,j}| < \frac{\varepsilon/3}{ka^k}$$

د $m, n > N_j(\varepsilon)$ لپاره، اوله دې سره کیدی شي د لومړنی جمعې هره زیاتېدونې د $f_m(x) - f_n(x)$ په توته کیدو د $\frac{\varepsilon/3}{k}$ له لارې اټکل کړي. په ټولیزه توګه لرو

$$|f_m(x) - f_n(x)| < k\frac{\varepsilon/3}{k} + 2\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon, \quad m, n > \max_{j<k} N_j(\varepsilon).$$

د

برابرډوله پولې ته تلنې په بنسټ په هر انتروال $[-a, a]$ باندې د پولې تابع $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ ناپرېکېدونکې ده. بسیا کوي، چې $f(x) = e^x$ د راشنل پروت محور $x = p/q$ لپاره وښایو. د یوې برخه پرلپسې $n = mp$ په راوړنې سره د e د تعریف څخه لاس ته راځي

$$\lim_{m\to\infty} \left(1 + \frac{x}{mp}\right)^{mp} = \lim_{m\to\infty} \left(1 + \frac{p}{mpq}\right)^{mpq/q} = e^{p/q}$$

د $t \mapsto t^{p/q}$ ناپرېکېدنې له امله.

د اکسپوننشال تابع لړۍ انځورونه

اکسپوننشل تابع کېدی شي د یوې لړۍ د پولع ارزښت په تګه انځور شي:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \ , x \in \mathbb{R},$$

د هر انتروال $[-a, a]$ برابرډوله پولې ته تلنې سره.
لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

اوس د ضرب انځورونې ته ورته والی ښولکیږي:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$$

$x > 0$ دا تړلی د تیلور-لړۍ په څېر د جمعې د روښانه ونې څخه لاس ته راځي. د لپاره دا لاندې سیده ښوونه ستونځمنه ده، سره له دې بې له مشتق منځ راوځي.

سړی پوله ارزښت $\lim_{n\to\infty} (1 + x/n)^n$ د

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \left(\frac{x}{n}\right)^j = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n} \left(\frac{x^j}{j!} \underbrace{\frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-j+1)}{n \cdot n \cdots n}}_{\leq 1} \right)$$

$$\leq \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n} \frac{x^j}{j!}$$

له لارې پورته لور ته اټکل کوي او د

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n} \left(\frac{x^j}{j!} \frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-j+1)}{n \cdot n \cdots n} \right)$$

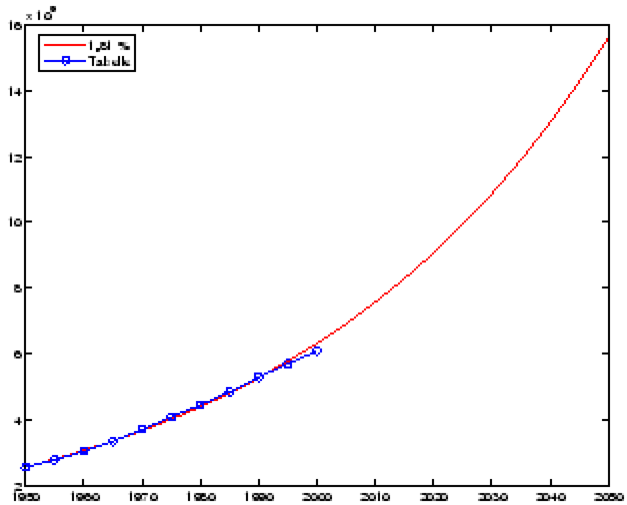
$$\geq \sum_{j=0}^{m}\left(\frac{x^j}{j!}\lim_{n\to\infty}\prod_{k=0}^{j-1}(1-k/n)\right)$$
$$= \sum_{j=0}^{m}\frac{x^j}{j!}$$

د یوه په خوښه $m \in \mathbb{N}$ کښته لور ته اټکل کوي. د $m \to \infty$ لپاره د پوله ارزښت جوړولو ځخه وروسته د دواړو آټکلونو یو بل سره برابروالی لاس ته راځي.
یوه ورته دلیل راوړنه د $x < 0$ لپاره همم شوني ده، که سړی مثبت او منفي برخه په دې منځ ته راغلي جمعه کې ځانله یا جداوڅیړي.
لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

اکسپوننشا تابع د ډېرې بیلوژیکي ودې پروسې تر څیړنې لاندې نیسي. د بیلګې په توګه په یو ساده د د قومونو ودې مودل کې د زیږېدنې ګڼون یا تعداد متناسب دی د د ورځنی اوسیدونکو تعداد $p(t)$ سره د t په وخت کې، دا په دې معنا چې
$$p(t+\Delta t) \approx p(t) + \Delta t(\lambda p(t))\,.$$

د $\Delta t \to 0$ لپاه دا د ودې قانون
$$p(t) = ce^{\lambda t}\ , \qquad c = p(0)\ ,$$
له لارې مودلي کیږي.

کال	د نفوسو تعداد په میلیونو	ونډه
	2555	
1950	2779	1.76 %
1955	3039	1.87 %
1960	3345	2.02 %
1965	3707	2.16 %
1970	4088	1.80 %
1975	4456	1.80 %
1980	485	1.79 %
1985	5283	1.77 %
1990	5690	1.54 %
1995	6080	1.37 %
2000		1.25 %



(کينې) جدول د نړۍ اوسېدونکي $p(t)$ ښايي همداسي کلنۍ د ودې تعداد(اټکل شوی ارزښت). کلنۍ منحنۍ د ودې زياتون (ريټ) په کلونو 1950-2000کې 1.81 % وو. له 1950 کال څخه به د ثابت منحني اکسپوننشل ودې سره

$$p(t) = 2555078074e^{0.0181(t-1950)}$$

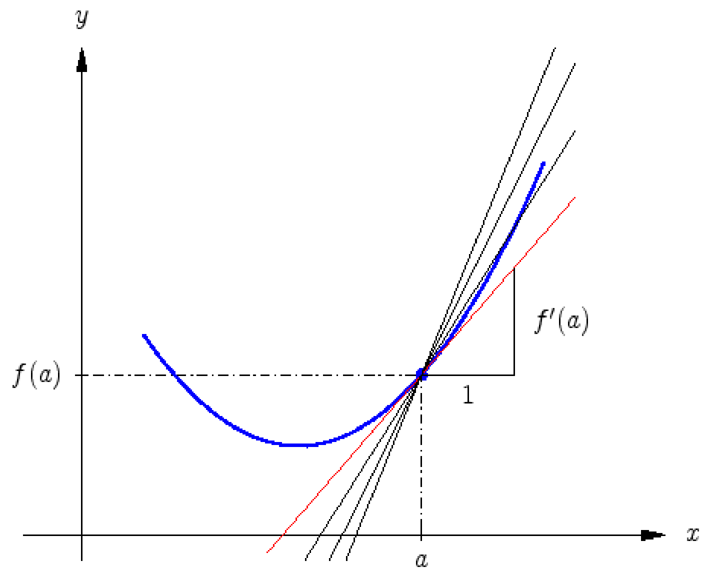
به د نړۍ اوسېدونکي په کال 2050 کې 16 ميلیارده وګنل شي(ټکي په ټکي شوې کرښه يا منحني).
ليکونکي: هيوليګ، هيوررنر

مشتق(رابيليدنه) **Ableitung**

يو تابع f په ټکي a کې مشتقوړ يا رابېلېدوړ دی، که د مشتق په نوم نومول شوې پوله ارزښت

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

شتون ولري..



مشتقوړوالی يا رابيليدوړوالی هندسي په دې معنا دی، چې د ټوټه ونې يا سيکانت جګوالی له

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

څخه د ورکړشوي تانجنت جګوالي په لور وهڅيږي يا کونورګنت شي(پوله يې ونيول شي).

سړی داسې هم ليکي:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}f(x) = \frac{dy}{dx}$$

د $y = f(x)$ سره . دا ليکدود يا ه‍دول په کمبنت وېش کې $\Delta x \to 0$ پولې ته تګ ښايي

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{x + \Delta x - x}.$$

جګ مشتقونه د $f'', f''', \ldots$ همداسې $f^{(2)}, f^{(3)}, \ldots$ سره په نخښه کيږي.

يو تابع f په يوه ډېرۍ يا سټ D باندې مشتقوړ بلل کيږي، که $f'(x)$ د ټول $x \in D$ لپاره شتون ولري.

د تابع $f(x) = x^2$ د مشتق لپاره د تعريف سره سم لرو:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2xh + h^2}{h} = \lim_{h \to 0}(2x + h) = 2x\,.$$

دويم مشتق $f''(x) = 2$ ثابت دی.

په ټوليزه توګه يو د خوښې مونوم $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$ لپاره د بينوم فرمول په مرسته لرو

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} x^{n-1}h + O(h^2)}{h} = nx^{n-1}\,,$$

د کوم سره چې $O(h^2)$ د نظم h^2 ترمونه په نخښه کوي.

د $f(x) = \sin x$ مشتق کېدی شي د زياتون – يا جمعي قضيې په مرسته وشمېرل شي له

$$\sin(t \pm h/2) = \sin t \cos(h/2) \pm \cos t \sin(h/2)$$

څخه د کمبنت وېش لپاره د $t = x + h/2$ سره راکوي

$$\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \frac{\sin\left((x+h/2) + h/2\right) - \sin\left((x+h/2) - h/2\right)}{h}$$

$$= \frac{2\cos(x + h/2)\sin(h/2)}{h}.$$

د

$$\lim_{h\to 0}\frac{2\sin(h/2)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sin(h/2)}{h/2} = 1$$

له امله د $0 \to h$ لپاره ښی اړخ د $\cos x$ په لور هڅیږي.
لیکونکي: هیولیګ، کوپف

د بنسټتوابعو مشتق یا رابیلیدنه

لاندې جدول د غوره بنسټتوابعو مشتق ښايي:

$f(x)$	$f'(x)$		$f(x)$	$f'(x)$
c	0		x^r, $r \neq 0$	$r\,x^{r-1}$
e^x	e^x		$\ln\lvert x\rvert$	$\frac{1}{x}$
$\sin x$	$\cos x$		$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\cos x$	$-\sin x$		$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\tan x$	$\tan^2 x + 1$		$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$

$\cot x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$		$\operatorname{arccot} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$

ليکونکي: هيوليګ، کوپف

د مشتق يارابيليدنې کرښزوالی **Linearität der Ableitung**

مشتق کرښيز دی، دا په دې معناچې د مشتقوړ توابعو f او g لپاره باور لري

$$(rf)' = rf', \quad r \in \mathbb{R},$$
$$(f \pm g)' = f' \pm g'.$$

ليکونکي: هيوليګ، کوپف

د ضرب قانون **Produktregel**

د دوه مشتقوړ توابعو f او g د ضرب مشتق دی

$$(fg)' = f'g + fg'.$$

په ټوليزه توګه د ضرب $f = f_1 \cdots f_n$ لپاره باور لري

$$f' = \sum_{i=1}^{n} f_i' \frac{f}{f_i}.$$

ليکونکي: هيوليګ، کوپف

د تعريف څخه ترلی راکوي

$$
\begin{aligned}
(fg)'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} g(x+h)\frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h\to 0} f(x)\frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\
&= f'(x)g(x) + f(x)g'(x).
\end{aligned}
$$

ليکونکي: هيوليګ، کوپف

د پولينوم

$$p(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$$

مشتق د $x = 1,2,3$ په ځايونو کې تاکل کيږي. دا چې د هر کرښيز ضريب مشتق 1 دی، د ضرب له لارې يا قاعدې څخه لرو

$$
\begin{aligned}
p'(1) &= (1-2)(1-3) = 2, \\
p'(2) &= (2-1)(2-3) = -1, \\
p'(3) &= (3-1)(3-2) = 2.
\end{aligned}
$$

په ورته توګه سړی د

$$p(x) = (x-1)\cdots(x-n),$$

لپاره شايي، چې

$$p'(k) = (-1)^{n-k}(n-k)!\,(k-1)!$$

دی د $k = 1, \ldots, n$ لپاره.
(Autoren: Höllig/Hörner/Knesch)

د وېش قانون يا لار **Quotientenregel**

د دوه مشتقوړ توابعو د وېش مشتق دی

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

په ټول ټکو x کې د $g(x) \neq 0$ سره. په ځانګړې توګه باور لري

$$\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}\,.$$

ليکونکي: هيوليګ، کوپف

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1-2x}{4+3x^2}$$

د راشنل توابعو مشتق دی

$$\frac{(1-2x)'(4+3x^2) - (1-2x)(4+3x^2)'}{(4+3x^2)^2}$$

$$= \frac{-2(4+3x^2) - (1-2x)(6x)}{(4+3x^2)^2}$$

$$= \frac{6x^2 - 6x - 8}{(4+3x^2)^2}$$

په بديلي ډول د ضرب قانون سره لاس ته راوړو

$$\left((1-2x)\frac{1}{4+3x^2}\right)' =$$

$$= (-2)\frac{1}{4+3x^2} + (1-2x)\frac{-6x}{(4+3x^2)^2} = \frac{6x^2-6x-8}{(4+3x^2)^2}.$$

(Autoren: Höllig/Kreitz

ځنځيری لار یا - قانون **Kettenregel**

د توابعو د ځنځيروني

$$h(x) = (f \circ g)(x) = f\left(g(x)\right)$$

لپاره مشتق دی

$$h'(x) = f'(g(x))g'(x)$$

.

د $f(y) = z,\ g(x) = y,\ h(x) = z$ سره سړی ليکي

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\,\frac{dy}{dx}$$

.

ليکونکي: هيوليګ، کوپف

د تعريف څخه تړلی لاس ته راځي

سرلیک

$$\begin{aligned}(f(g(x)))' &= \lim_{h\to 0}\frac{f(g(x+h))-f(g(x))}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(g(x+h))-f(g(x))}{g(x+h)-g(x)}\,\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\\ &= \lim_{\tilde{h}\to 0}\frac{f(g(x)+\tilde{h}))-f(g(x))}{\tilde{h}}\,\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\\ &= f'(g(x))g'(x),\end{aligned}$$

چیرته چې $\tilde{h} = g(x+h) - g(x)$ دی.

لیکونکي: هیولیګ، کوپف

د ځنځیري قانو د روښنه کولو ته تعریفیږي:

$$h'(x) = \frac{d}{dy}\,\mathrm{s}\,h(x) = \sin\big(\underbrace{\ln(1+x^2)}_{y=g(x)}\big)\cdot x^2))g'(x).$$

د دنننی مشتق $g'(x)$ شمېرلو ته د سره د ځنځیر قانون کارول کیږي:

$$g'(x) = \frac{1}{1+x^2}(2x).$$

په بدیلي توګه کېدی شي د مشتق لیکدود وکارول شي. د

$$z = \sin y, y = \ln w, w = 1 + x^2$$

سره دی

$$\frac{dz}{dx}=\frac{dz}{dy}\frac{dy}{dw}\frac{dw}{dx}=\cos(y)\frac{1}{w}2x=\cos\left(\ln(1+x^2)\right)\frac{1}{1+x^2}(2x)\,.$$

ليکونکي: هيوليګ، کوپف

ايمپليخيت مشتق نيول Implizites Differenzieren

که يو تابع $y=f(x)$ ايمپليخيت وي، دا په دې معناچې يو برابرون په x او y کې ورکړ شوی، داسې چې دواړه خواوي د x پسې مشتق کيدی شي. دلته يواځې په کې $y=y(x)$ افادو باندې ځنځيري قانون استعماليږي.

د بېلګې په توګه سړی د

$$E:\ \ x^2+3y^2=7$$

له لارې ورکړ شوې ايليپسې يا هګۍ

$$\frac{d}{dx}\left(x^2+3y^2\right)=2x+6yy'=\frac{d}{dx}7=0$$

همداسې

$$y'=-\frac{1}{3}\,\frac{x}{y}$$

.

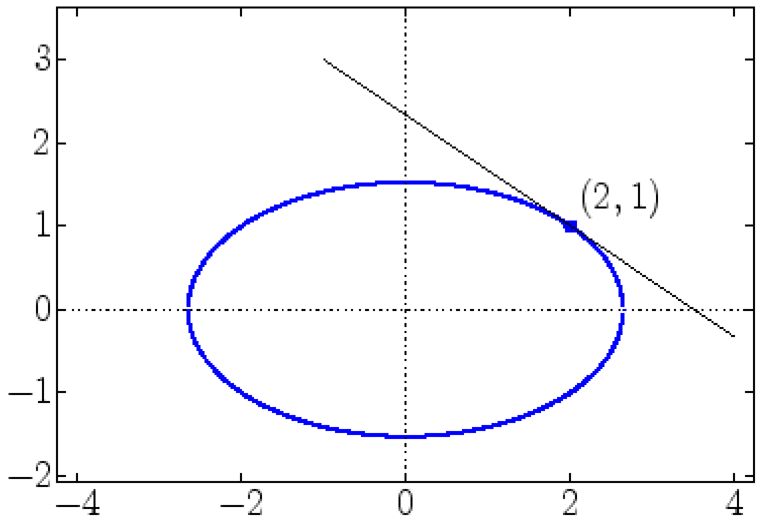
لاس ته راوړي.

له دې سره کېدی شي د E په يوه ټکي د $y\neq 0$ سره د تانجنت جګوالی وټاکل شي.

د بېلګې په توګه د $(2,1)$ لپاره په لاس راځي

$$y'=-\frac{1}{3}\frac{2}{1}=-\frac{2}{3}$$

.



په ورته توګه جګ مشققونه شمېرل کيږي. د yy' لپاره دضرب قانون د استعمال سره دی

$$\frac{d}{dx}\,(2x + 6yy') = 2 + 6(y')^2 + 6yy'' = 0\,.$$

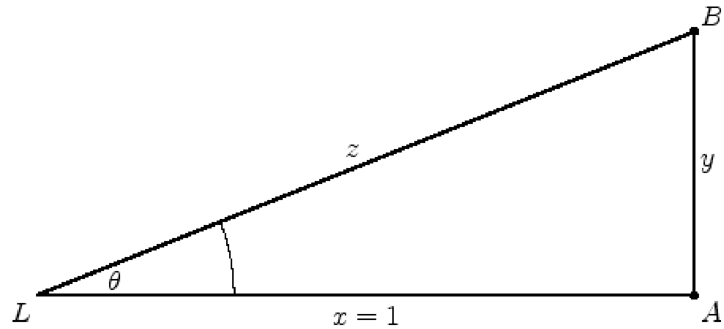
له دې لاس ته راځي

$$y'' = -\frac{1 + 3(y')^2}{3y}$$

.

کيدی شي په E باندې د يوه ټکي ځا په ځای کول او همدا د $y'(x)$ ارزښتونو پيژندلو له لارې ځرګند ازښتونه ټاکي
ليکونکي: هيوليګ، کوپف

په ټکي L کې يو د برېښنا يا رڼا برج دی د يوه څرخېدونکي بېجلی يا ګروپ سره، چې د رڼا وړانګه يې د ټکو A او B له لارې تللی 1 km کرښيز لرې دښته لويږي.



وړانګه غورځونکی د یوه څرخون لپاره 2 ثانیو ته اړتیا لري، دا په دې معنا چې

$$\frac{d\theta}{dt} = \pi$$

. د رڼاوړانګې پوزیشن یا ځای په دښته کې دی

$$y(t) = x \tan\theta(t).$$

له دې سره د چټکتیا لپاره لاس ته راځي

$$\frac{dy}{dt} = 1\pi \frac{1}{\cos^2(\theta)} \longrightarrow \infty \qquad \text{für} \quad \theta \to \frac{\pi}{2},$$

دا په دې معنا چې سوری یې له رڼا چټک دی.

یو ټیکه معالعه لاندې راکوي. د دې وخت توپیر په پام کېنیولو له امله رڼا B ته د په

وخت $t = \frac{\theta}{\pi} + \frac{z}{c}$ ورسیږي، دکوم سره چې $c = 300000\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$ د رڼا چټکتیا ده،
له دې سره لرو

$$\frac{\theta'}{\pi} = 1 - \frac{z'}{c}.$$

وروسته د t پسې د $z^2 = y^2 + 1$ مشتق راکوي

$$zz' = yy', \qquad \frac{z'}{y'} = \frac{y}{z} = \sin(\theta).$$

د θ' او z' اېښوونه په

$$y' = \frac{\theta'}{\cos^2(\theta)}$$

کې بالاخره راکوي

$$y' = \frac{1}{\cos^2(\theta)}\left(\pi - \frac{\pi}{c}y'\sin\theta\right)$$

همداسې

$$y' = \frac{c \cdot 1\pi}{c\,\cos^2(\theta) + 1\pi\sin(\theta)}$$

.

د $\theta \longrightarrow \frac{\pi}{2}$ لپاره اوس $y' \longrightarrow c$ هڅيږي، د اينشټاين د تيوري سره په هم غږۍ کې باور لري

t

$$y' \longrightarrow \infty \qquad \frac{\sin(\theta)}{\cos^2(\theta)} \rightarrow -\frac{c}{\pi},$$

für

$\theta \approx 4.781 \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$

داپه دې معناچې د لپاره ښږته سړی يوو خورا لويه چټکتيا لاس ته راوړي. سوری له دې امله د رڼا ګړندی دی. دا د اينشټاين تيوري سره په تضاد کې نه دی، ځکه چې سړی يو ه پېښنه Phänomen, ګوري، نا دا خورنده ماده. د ،،ساده

$300000\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$

ښېرونکي،، لپاره بو نا ښه احساس پاتيږي دا په هر صورت له ښځه ورو خوزي.

ليکونکي: هيوليګ، کوپف

د لايبنيځ قاعده يا لار**Leibniz-Regel**

د يوه ضرب n -م مشتق دی

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)}$$

.

(Autoren: Höllig/Kopf)

د په حالت کې باور لري

$$(fg)'' = (f'g + fg')' = f''g + 2f'g' + fg''$$

او د لپاره دی

$$(fg)''' = (f'g + fg')'' = (f''g + 2f'g' + fg'')' =$$

$$= f'''g + 3f''g' + 3f'g'' + fg'''$$

ټوليزه ښوونه د اندکشن له لارې صورت په n نيسي د بينوميال ضريبونو لپاره د ريکورزين په پام کې نيولو سره.
ليکونکي: هيوليګ، کوپف

د $x = 0$ په ځا کې دې د

$$f(x)\,g(x) = x^9\ \cos(\sin x)$$

يولسم مشتق وشمېرل شي.

د دې لپاره لومړی له دې څخه کار اخلو، چې د $x = 0$ لپاره د مونوم f فقط 9 -م مشتق د صفر سره نابرابر دی:

$$f^{(9)}(0) = 9!\,.$$

د لاېبنېڅ- فرمول له دې سره فقط په یوه ترم راکمه وي.

$$(fg)^{(11)}\,|_{x=0} = \binom{11}{2} f^{(9)}(0)\, g^{(2)}(0)\,.$$

د ځنځیري قانون سره لرو یا لاس ته اځي

$$g'(x) = -\sin(\sin x)\,\cos x$$

$$g''(x) = -\cos(\sin x)\cos^2 x + \sin(\sin x)\sin x,$$

یعني $g''(0) = -1$. له دې سره غوښتونی مشتق دا لاندې دی

$$\binom{11}{2} 9!\,(-1) = -\frac{1}{2}\,(11!)\,.$$

لیکونکي: هیولیک، کوپف

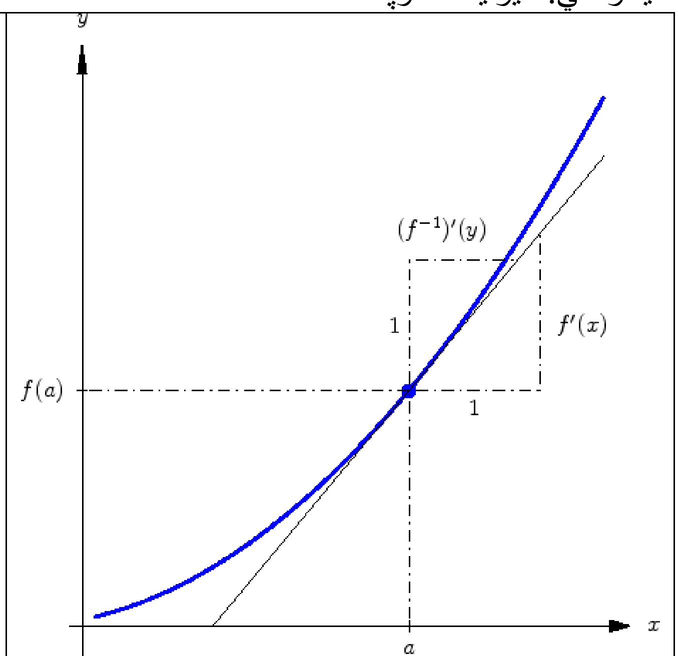
که یو تابع $y=f(x)$ د $f'(x)\neq 0$ سره f ناپرېکېدونکي مشتقوړ وي، نو د x په یوه چاپېریال کې معکوس وړ دی ، او باور لري

$$(f^{-1})'(y) = f'(x)^{-1},$$

همداسي

$$dx/dy = (dy/dx)^{-1}$$

.



لکه په ځېره کې چې لیدل کیږي، د f او f^{-1} جګوالي معکوس دي.

لیکونکي: اپپ، هیولیګ،

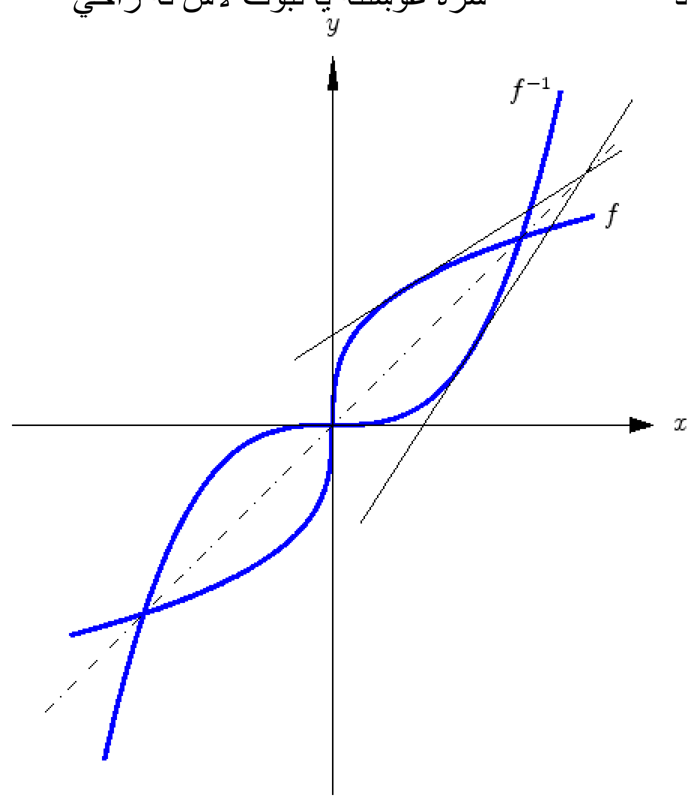
که کیږدو $g = f^{-1}$ ، نو لاس ته راوړو

$$x = g(f(x))$$

او د ځنځیري قانون سره مشتقونه

$$1 = g'(f(x))f'(x)\,.$$

د $y = f(x)$ سره غوښتنه یا ثبوت لاس ته راځي



دا چې د f او f^{-1} جګوالی په اړونده د x او y په ځایونو کې سره معکوس دي، روښانیږي، که په پام کې ونیول شي، چې f او f^{-1} یو بل ته سیومتریک دي.

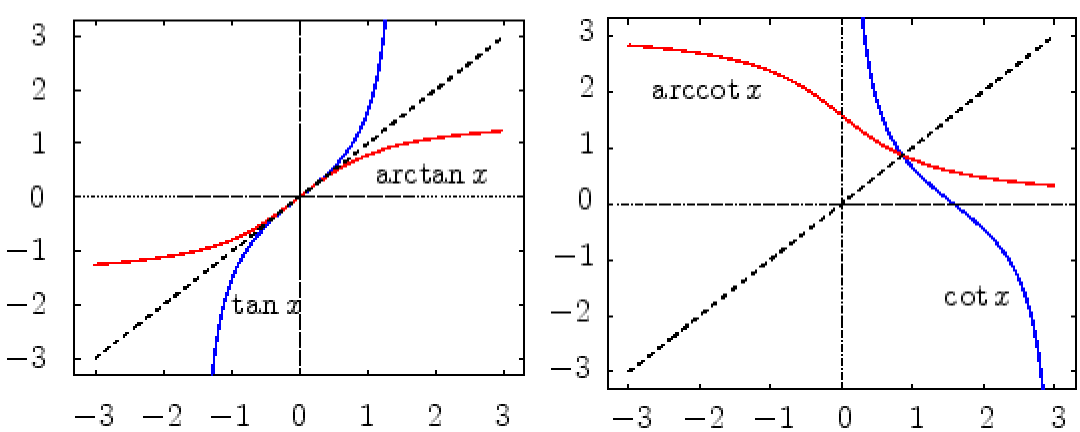
لیکونکي: اپپ، هیولیک،

دا چې د تانجنت تابع د $x = \arctan y$ معکوس تابع مشتق وټاکو، لومړی شمېرو

$$\frac{d}{dx}\tan x = \frac{d}{dx}\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

له دې سره لاس ته راځي

$$\frac{d}{dy}\arctan y = \left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)^{-1} = \cos^2 x.$$



ښی اړخ اوس باید د y تابع په څېر ولیکل شي. د دې لپاره کټوتوالی کارول کیږي با استعمالیږي.

$$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + y^2$$

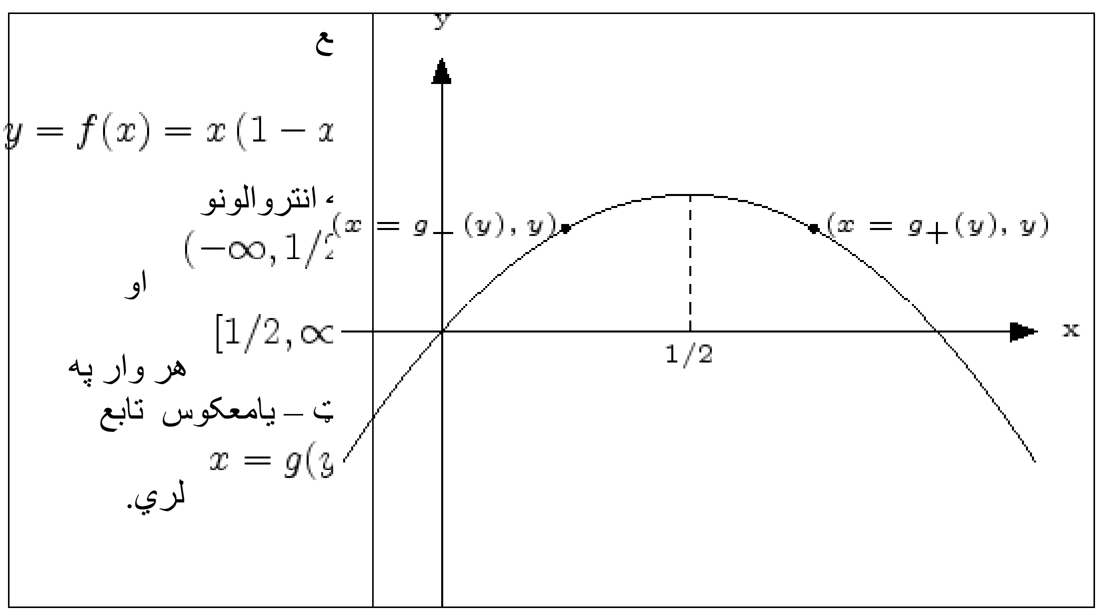
او لاس ته راوړي

$$\frac{d}{dy}\arctan y = \frac{1}{1+y^2}.$$

په ورته توګه د کوتانجنت په څېر- یا معکوس تابع ښایو.

$$\frac{d}{dy}\text{arccot} y = -\frac{1}{1+y^2}.$$

لیکونکي: اپپ، هیولیک،



په دواړو حالتونو کې باور لري

$$g'(y)=\frac{1}{f'(x)}=\frac{1}{1-2x}\,.$$

بل یې مشتقنیول راکوي

$$g''(y)=\left(\frac{1}{1-2x}\right)'\frac{dx}{dy}=\frac{2}{(1-2x)^2}\frac{1}{1-2x}\,.$$

په ځانګړي ډول د $x=1,y=0$ لپاره لاس ته راځي

$$g'(0)=1,\quad g''(0)=-2\,.$$

مشتقونه شمېرلوړ دي، بې له دې چې معکوس تابع باید روښنه جوړه شي. دا ټیک هلته شونی دی، چې که سړی د y تابع د په څېر $g'(y)$ و لیکي. په دې بیلګه کې دا شوندی دی، ځکه x د y تابع په څېر لیکل کېدی شي:

$$g_{\pm}(y)=\frac{1}{2}\pm\sqrt{1/4-y}\,.$$

پورته ارزښتونه داسې شمېرل کېدی شي، دکومو سره چې د هغوی د ارزښتجوړې $(1,0)$ اړونده ځانګه باید وټاکل شي.

لیکونکي: هیولیک، کرایخ

لوګاریتمي مشتق یا - رابیلیدنه **Logarithmische Ableitung**

دا فرمول

$$f'(x)=f(x)\frac{d}{dx}\ln|f(x)|$$

کیدی شي د $g(x)>0$ سره د $y=g(x)^{h(x)}$ بڼې توابعو مشتقیدو ته وکارول شي. سړی لاس ته راوړي

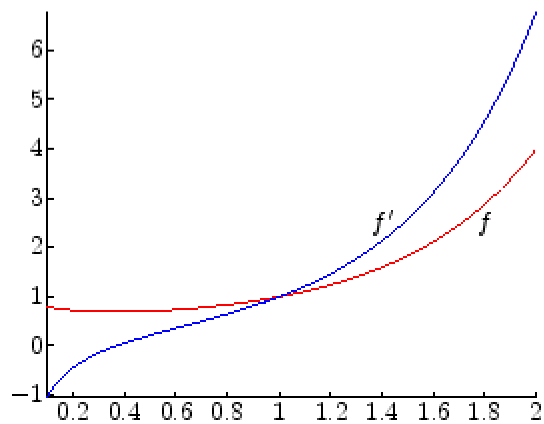
$$\frac{dy}{dx} = g(x)^{h(x)} \frac{d}{dx}\left(h(x) \ln g(x)\right) .$$

لیکونکي: اپپ، هیولیگ،

د $x > 0$ سره تابع $f(x) = x^x$

لپاره مشتق دی

$$f'(x) = x^x \frac{d}{dx} \ln(x^x) = x^x \frac{d}{dx} (x \ln x) = x^x (\ln x + 1) .$$



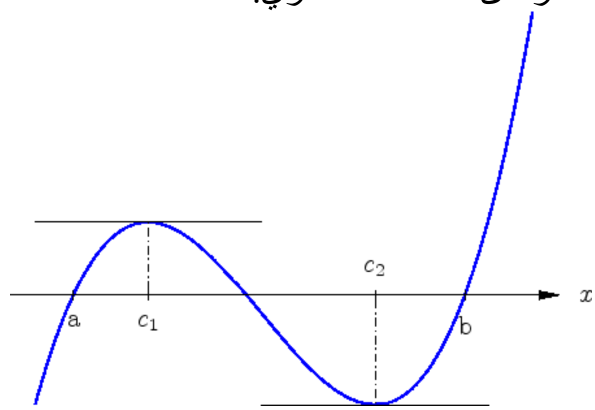
$\ln f(x) = x \ln x$

د $x \to 0$ لپاره د صفر په لور هڅیږي، نو x^x د $e^0 = 1$ په لور. نو تابع په صفرځای کې ښي اړخیز ناپزېکېدونکي ده. د مشتق لپاره $\ln x + 1 \to -\infty$ f دا حالت نه دی. د $x^x \to 1$ او له امله د $x \to 0$ لپاره په صفر یو ولاړ یا عمود تانجنت لري.

لیکونکي: اپپ، هیولیگ،

د رولې جمله Satz von Rolle

د یوه ناپرېکیدونکي مشتقوړ تابع f مشتق د $f(a)=f(b)=0$ سره لږ تر لږه یو صفرځای $c \in (a,b)$ لري.



تولیز باور لري: که یو تابع په یوه انتوال $[a,b]$ کې n صفرځایونه ولري (د ډېروار والي په شمول)، نو هلته kــم مشتق $\geq n-k$ صفرځایونه لري.

لیکونکي: اپپ، هیولیګ،

دا چې f ناپرېکېدونکی دی، نو د افراطي ارزښت جملې له امله په $[a,b]$ کې ټکي c او d شتون لري دا لاندې باوري کوي

$$f(c) = \min_{x\in[a.b]} f(x)$$

$$f(d) = \max_{x\in[a.b]} f(x).$$

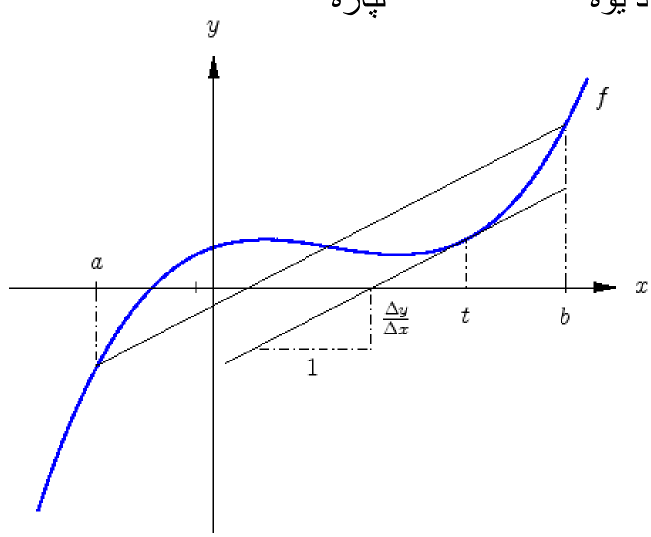
که f ناثابت وي(د ثابت f حالت ساده دی)، نو $f(c) < f(d)$ باور لري. له دې امله لږ ترلږه د دې دواړو ټکو څخه یو یې په (a,b) کې پروت دی . دا چې f مشتقوړ دی باید د دې ځایز یا لوکال افراطیت لپاره مشتق ورک – یا صفر شي.
لیکونکي: اپپ، هیولیګ،

منځ ارزښت قضیه **Mittelwertsatz**

د یوه ناپرېکېدونکي مشتقوړ تابع f لپاره باور لري

$$f(b) - f(a) = f'(t)(b-a)$$

د یوه $t \in (a,b)$ لپاره



هندسي دا کټوټوالی په دې معنا دی، چې تانجنت په یوه ټکي کې غبرګ دی د له پای ټکو $(a, f(a))$ او $(b, f(b))$ تېرېدونکي ټوټه وني یا وتر سره. داسي هم لیکو

$$\Delta y = f'(t)\Delta x$$

.

لیکونکي: اپپ، هیولیګ،

د یوې تابع

$$g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

لپاره $g(a) = g(b) = 0$ باور لري. دا چې f ناپرېکېدونکی مشتقوړ دی، نو g هم ناپرېکېدونکی مشتقوړ دی او د رولې د جملې پر بنسټ یو $t \in (a,b)$ شتون لري د لاندې سره

$$0 = g'(t) = f'(t) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

همداسې

$$f(b) - f(a) = f'(t) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

لیکونکي: اپپ، هیولیګ،

ټولیزه (شوې) منځ ارزښت جمله **Verallgemeinerter Mittelwertsatz**

که f او g ناپرېکېدونکي مشتقوړ توابع وي، نو $t \in (a,b)$ یو شتون لري د لاندې سره

$$(f(b) - f(a))g'(t) = (g(b) - g(a))f'(t)\,.$$

که برسېره پردې په (a,b) باندې $g'(x) \neq 0$ باور ولري، نو سرې کړی شي هم

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(t)}{g'(t)}$$

هم ولیکي.
لیکونکي: اپپ، هیولیګ،

د تابع

$$h(x) = (f(b) - f(a))g(x) - (g(b) - g(a))f(x) - f(b)g(a) + f(a)g(b)$$

لپاره $h(a) = h(b) = 0$ باور لري. دا چې f او g ناپرېکېدونکي مشتقوړ دي،
نو h هم ناپرېکېدونکي مشتقوړ دی او د پورته د رولي د جملې سره سره سم یو $t \in (a,b)$ شتون لري د لاندې سره.

$$0 = h'(t) \; = (f(b) - f(a))g'(t) - (g(b) - g(a))f'(t)$$

bzw. همداسې

$$(f(b) - f(a))g'(t) \qquad = (g(b) - g(a))f'(t)\,.$$

که (a,b) په باندې $g'(x) \neq 0$ وي. نو د منځ ارزښت جملې سره سم
$g(b) - g(a) \neq 0$ هم او سړی لاس ته راوړي.

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(t)}{g'(t)}\,.$$

لیکونکي: اپپ، هیولیګ،

لانداو-سیمبول **Landau-Symbole**

سړی لیکي

$$f(x) = O(g(x)) \qquad (\ x \to a)\ ,$$

که یو ثابت c شتون ولري، دسې چې $|f(x)| \le c|g(x)|$ وي a ته پوره نږدې x لپاره .

د $|f(x)|/|g(x)|$ د 0 په لور هڅيږي، نو سړی په اړونده توګه لیکدود کاروي

$$f(x) = o(g(x))$$

.

لیکونکي: اپپ، هیولیک،

د بینوم له جملې څخه لاس ته راځي

$$(1+x)^n = 1 + nx + O(x^2) \quad (x \to 0)$$

په څټ – یا معکوس جوړوني د $1 - nx$ سره دغزوني وروسته لاس ته راځي

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1+x)^n} &= \frac{1}{1+nx+O(x^2)} \\ &= \frac{1-nx}{1-(nx)^2+O(x^2)} = \frac{1-nx}{1+O(x^2)} \\ &= 1 - nx + O(x^2)\,.\end{aligned}$$

د $x \to \infty$ لپاره دی

$$(1+x)^s = O(x^s)$$

د ټولو $s \in \mathbb{R}$ لپاره.

لیکونکي: اپپ، هیولیک،

ناپرېکيدنه او مشتقوړوالی کيدی شي د لاګرانژ فرمول په مرسته تعريف شي.

يو تابع f په $x = a$ کې ناپرېکېدونکی دی، که وي

$$f(x) - f(a) = o(1) \quad (x \to a).$$

مشفقوړوالی د

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + r$$

سره په يوه معنا دی د

$$r = o(h) \quad (|h| \to 0).$$

سره.

د يوه دوه واره ناپرېکېدونکي مشتقوړتابع لپاره د تېلور ــودې څخه هغه تېره

$$r = O(h^2)$$

اټکل لاس ته راځي

ليکونکي:کلاوس، هيوليګ،

د لو، پيتال قاعده يا لار **Regel von l'Hospital**

که دوه ناپرېکېدونکي مشتقوړ توابع f او g په a کې يوه ګډ صفرځای يا قطبځای ولري، نو باور لري

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

که ښی پوله ارزښت شتون ولري(په ورکړ شوي حالت کې په ناپای کې)
د ټوليزه منځ ارزښت جملې په بنسټ د x او a تر منځ يو t شتون لري د لاندې سره

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(t)}{g'(t)},$$

که سړی ، د یوه ناپای پوله ارزښت په موخه، $f'(t)/0$ یعني داسې $\pm\infty$ په معنا کړي.

له دې $x \to a$ سره هم $t \to a$ ځي، نو سملاسي راکوي

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

لیکونکي: اپپ، هیولیګ،

د لو، پېتال د جملې استعمال د یو څو بېلګو لړیو په بنسټ روښانه کېږي

د $0/0$ لپاره:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-2x+1}{3x^2-7x+4} = \lim_{x\to 1}\frac{3x^2-2}{6x-7} = -1$$

د $-\infty/\infty$ لپاره :

$$\lim_{x\to 0+} x\ln(x) = \lim_{x\to 0+}\frac{\ln(x)}{1/x} = \lim_{x\to 0+}\frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0+} -x = 0$$

د ټولو $x \to \infty$ لپاره:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\pi/2-\arctan x}{1/x} = \lim_{x\to\infty}\frac{-1/(1+x^2)}{-1/x^2} = 1$$

دېواره استعمال:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin(x)}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)-x}{x\sin(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{\sin(x)+x\cos(x)}$$

$$= \qquad \lim_{x\to 0}\frac{-\sin(x)}{2\cos(x)-x\sin(x)}=0$$

په دې بېلګو کې دې پام وي، چې د شمېرلو پوله ارزښت شتون د لوپيتال قاعدې د استعمال پسې د منځته راغلې پوله ارزښت د شتون له لارې تضمين دی.

ليکونکي: اپپ، هيوليک،

کرښيزاپروکسميشن (ورنږدېوالی) **Lineare Approximation**

د يوه دوه واره ناپرېکېدونکي مشتقوړ تابع f لپاره باور لري

$$f(x+\Delta x)=f(x)+f'(x)\Delta x+R$$

د لاندې پاتې غړي سره

$$R=\frac{1}{2}f''(t)(\Delta x)^2=O((\Delta x)^2)$$

او د t د x او ترمنځ $x+\Delta x$ سره.

ليکونکي: اپپ، هيوليک،

تابع

$$g(y):=f(y)-f(x)-f'(x)(y-x)-$$

$$-\frac{f(x+\Delta x)-f(x)-f'(x)\Delta x}{(\Delta x)^2}(y-x)^2$$

د $y=x+\Delta x$ لپاره يو صفرځای لري او د $y=x$ لپاره يو ډبل يا دوه واره صفرځای لي. د رولې د جملې په تعقيب يو $y=x+\Delta x$ شتون لري د لاندې سره

سرلیک

$0 = g''(t)$	$= f''(t) - 2\dfrac{f(x+\Delta x) - f(x) - f'(x)\Delta x}{(\Delta x)^2}$

همداسي

$f(x+\Delta x) - f(x) - f'(x)\Delta x$	$= \dfrac{1}{2}f''(t)(\Delta x)^2 \,.$

لیکونکي: اپپ، هیولیګ،

د ناټیکاوي وده **Fehlerfortpflanzung**

د یوه کچ – یا اندازونې ارزښت $\Delta x = \tilde{x} - x$ مطلق ناټیکاوی یا یو

نږدېوالی $x \approx \tilde{x}$ ښایي نو د یوه ناپرېکېدونکي مشتقوړ تابع f لپاره

$$|\Delta y| = |f'(x)||\Delta x| + o(\Delta x)$$

باور لري د $\Delta y = f(\tilde{x}) - f(x)$ سره. په اړونده توګه د نسبي ناټیکاوی لپاره باور لري

$$\frac{|\Delta y|}{|y|} = \left(|f'(x)|\,\frac{|x|}{|y|}\right)\frac{|\Delta x|}{|x|} + o(\Delta x)$$

که $x, y \neq 0$ وي. په نوکانو کې افاده c_r د x په ځای کې د f د کندیشن عدد بلل کیږي.

د ترم $o(\Delta x)$ د پرېښېږلږ یعنې له منځه وړلو له لارې کېدی شي د ناټیکاوي نږدیوالس اټکل شي. د دې سره کېدی شي د ټیک مشتق ارزښت په ځای مناسب بندیزونه هم وکارول شي:

$$|\Delta y| \leq c_a|\Delta x|\,, \quad c_a \geq \max_{|t-x|\leq|\Delta x|} |f'(t)|\,.$$

په ا ړونده توګه $c_r = c_a\frac{|x|}{|y|}$ د نسبي ناټیکاوي لپاره یو بندیز یا لنډ: بند دی

لیکونکي: اپپ، هیولیګ،

یو کونج $\vartheta \in (0,\pi/2)$ کېدی شي د کاټېټونو یا ولاو اړخونو د نسبت څخه په جګېدونکي دربګوډي کې داسې وټاکو :

$$\vartheta = \arctan(y/x)\,.$$

که y د کره ځای په ځای x سره کچ کړو، نو کېدی شي ضریب c_a د مطلق ناټیکاوي لپاره د

$$\left|\frac{d\vartheta}{dy}\right| = \left|\frac{1/x}{1+y^2/x^2}\right| = \left|\frac{x}{x^2+y^2}\right|$$

له لارې اټکل شي. افاده د $y = 0$ لپاره ماکسمال کیږي، او سړی لاس ته $c_a = \frac{1}{x}$ راوړي، دا په دې معنا چې

$$|\Delta\vartheta| \le |1/x|\ |\Delta y|\ .$$

لویې ناټیکیاوی د کوچني x لپاره غزیږي. په ورته توګه د نسبي ناټیکاوي د قوی کېدني فکتور لپاره هم باور لري

$$c_r = \max_y \left|\frac{x}{x^2+y^2}\frac{y}{\vartheta}\right|\ .$$

که دا لاندې تخمین وکارول شي

$$|\vartheta| \ge |\sin\vartheta| = \left|\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\,,$$

،

نو لاس ته راځي

$$c_r \leq \left| \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| \leq 1 \,.$$

نو نږدېوالي ډول باور لري

$$\frac{|\Delta\vartheta|}{|\vartheta|} \leq \frac{|\Delta y|}{|y|} \,,$$

دا په دې معنا چې نسبي فکتور نه غښتلی کيږي

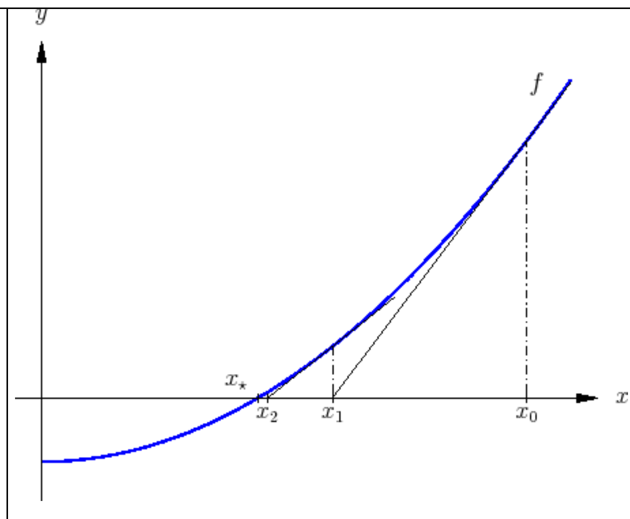
ليکونکي: کلاوس، هيوليک،

د نيوټن تلنلار يا - قانو**Newton-Verfahren**

د نيټن تلنلار سره کېدی شي د يوه تابع f صفرځای x_* نومريک وټاکل شي. د نږدېوني يا اپروکسميشن پرلپسي $x_0, x_1 \ \ldots$ د کرښيزوالي څخه کټل کيږي.

نږدېوالی $x_{\ell+1}$ د x -محور سره د تانجنت غوښتکی دی په ټکی $(x_\ell, f(x_\ell))$ کي :

$$x_{\ell+1} = x_\ell - f(x_\ell)/f'(x_\ell)$$



د يوه ساده صفرځای x_* ($f'(x_*) \neq 0$) لپاره د نيوټن – ايتريشن لوکال مربع پولې ته ځي، دا په دې معناچې

$$|x_{\ell+1} - x_*| \leq c \; |x_\ell - x_*|^2$$

د پيلټکي x_0 لپاره د x_* په يوه پوره کوچني چاپريال کې.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ،

د تيلور -نږدې ارزت Taylor-Approximation له لارې سړی

$$0 = f(x_*) = f(x_\ell) + f'(x_\ell)(x_* - x_\ell) + r$$

لاس ته راوړي د پاتې غړي

$$r = \frac{1}{2} f''(t_\ell)(x_* - x_\ell)^2 \,,$$

سره د يوه t_ℓ لپاره چې د x_* او x_ℓ ت رمنځ پرته ده. که د انترپوليشن قاعده کې کيږدو

$$f(x_\ell) = f'(x_\ell)(x_\ell - x_*) - r$$

،

نو لالاس ته راځي

$$x_{\ell+1} = x_* - r/f'(x_\ell) \,.$$

د $f'(x_\ell) \neq 0$ لپاره لرو

$$|x_{\ell+1} - x_*| = c_\ell |x_\ell - x_*|^2, \quad c_\ell = \frac{1}{2} \left| \frac{f''(t_\ell)}{f'(x_\ell)} \right| \,.$$

که $f'(x_*) \neq 0$ باور ولري، نو c_ℓ د ناپريکيدنبأه امله د x_ℓ لپاره په يوه د x_* چاپيريال $[x_* - \delta, x_* + \delta]$ کې مخدود دی:

$c_\ell \leq c$.

له ې سره د مربع يا ځلوريز پولې ته تک لاس ته راځي.
ليکونکي: ايپ، هيوليک،

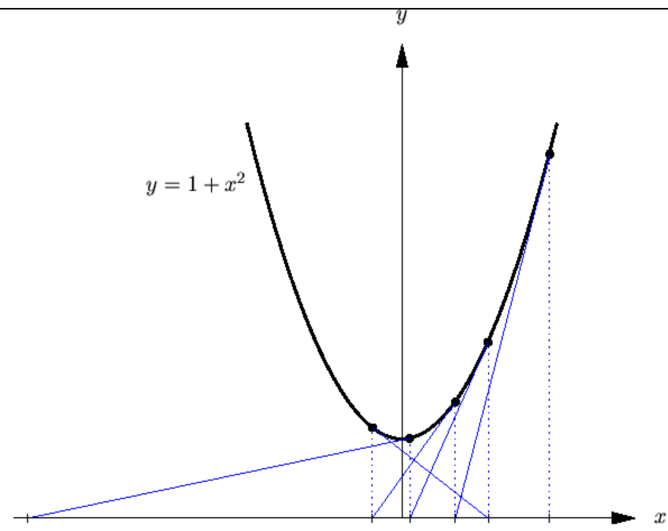
که په لاندې مساوات د نيټن قانون وکاروو

$$f(x) = x^2 + 1 = 0$$

،

نو اتريشن(پل په پل اصلي حل ته وردړدې کېدنه) لاس ته راځي

$$x_{l+1} = \frac{1}{2}\left(x_l - \frac{1}{x_l}\right) .$$

f په پام کې د ې وي. چې حقيقي حل نه لري، نيوټن تلنلار يا قانون په حقيقي پيل ارزښت x_0 سره پولې ته نه شي تللی. (x_l) په رښتيا کې پرلپسي يو ګډوډ حالت غوره کوي. د کټمتوالي په مرسته	

$$\cot(2\phi) = \frac{1}{2}\left(\cot\phi - \frac{1}{\cot\phi}\right)$$

پرلپسي (x_ℓ) کېدی شي اکسپليځيټ ورکړل شي:

$$x_0 = \cot\phi \implies x_\ell = \cot(2^\ell\phi).$$

ليکونکي: اپپ، هيوليک،

ها له بابليانو ښخه کارول شوی ايترېشن يا پل پل مخ ته تلنه يا تکرار
$$x \longleftarrow (x + a/x)/2$$

د يوه حقيقی عدد a د ريښني شمېرلو ته په ټيکه مطالعه د $f(x) = x^2 - a$ لپاره د نيوتن تلنلار په حيڅ ځان ښايي:

$$\frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right) = x - \frac{x^2 - a}{2x}$$

د $a = 2, x_0 = 1$ لپاره نږدې شمېرنه يا اپروکسيمېشن لاس ته راوړو.

1

1.5

1.41666666666666666666666666666666667

1.41421568627450980392156862745098039 2157

1.41421356237468991062629557889013491 0117

1.41421356237309504880168962350253024 3615

1.41421356237309504880168872420969807 8570

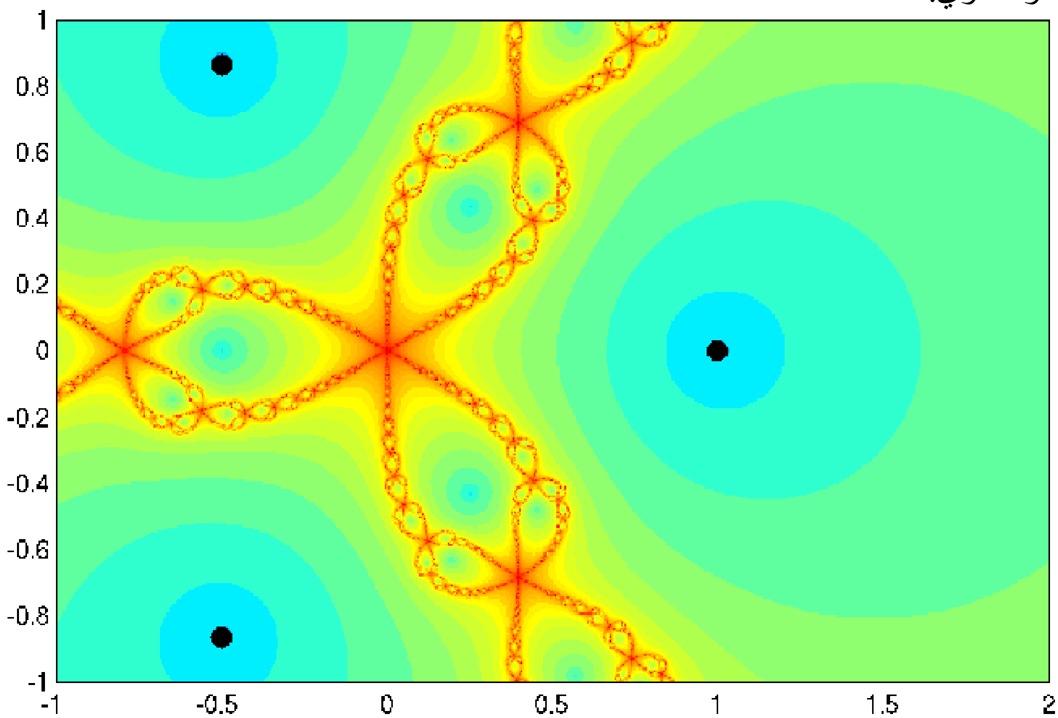
کونورګنځ فوق العاده ګړندی دی. د هر پل سره د د ټيکو ځايونو(ترې لاندې کرښه تېره ده) تعداد په نږدې توګه دوه واره کيږي. په دې بېلګه کې مربع پولې ته تلنه کېدی شي د ساده بڼې بدلون له لارې هم وښوول شي:

$$x_{\ell+1} - \sqrt{a} = (x_\ell + a/x_\ell)/2 - \sqrt{a} = \frac{1}{2x_\ell}(x_\ell - \sqrt{a})^2.$$

د نيټن-تلنلار د هندسي روښانه ونې ښخه لرو، چې په نږدې توګه شمېرنه د $x_0 \neq 0$ لپاره پولې ته تلونکې ده.

ليکونکي: اپپ، هيوليک،

لاندې ځېره د لاندې مساوات لپاره د کمپلکس نيوټن-اېټرشن پولې ته تلنه ښايي
$$z^3 - 1 = 0$$
د حلونو $z = \exp(2\pi i k/3)$ سره. مختلف رنګونه د پولې ته تلني ورشو ګاني ښايي د همغه يا اړونده صفرځای لپاره. تياره رنګه شوط ځايونه ګرندی پولې ته تلنه په ګوته کوي.



سرې د پولې ته تلني ورشو په روښانه توګه fraktal مات خوي پيژني

د تيلور پولينوم **Taylor-Polynom**

د تيلور پولينوم Das Taylor-Polynom

$$p_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

د يوه تابع f انترپوليرى (ارزښت چې د دوه ټکو ترمنځ پروت وي) مشتق په ټکي a

$p_n^{(k)}(a) = f^{(k)}(a),\ k = 0, \ldots, n$

تر ت نظم n پورې، دا په دې معنا چې .

که f يو $(n+1)$-واره ناپرېکېدونکى مشتقوړ وي، نو باور لري

$$f(x) = p_n(x) + R, \quad R = \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

د يوه t لپاره چې د a او x ترمنځ وي.
ليکونکي: اپپ، هيوليګ،

سيده پسې شميرنه د f او p_n مشتق يو بل سره توافق يا يوغرېزوالى ښايي. د پاتې غړي R د پوره کيدو يا تکميل ته سړى د تيلور پولينوم په يوه بل ترم غزوي:

$q(y) = p_n(y) + c(y-a)^{n+1}$.

ثابته داسې ټاکل شوې، چې $q(x) = f(x)$ وي. پسې $q - f$ يو صفرځاى لري د $n+1$ د ډېروالي سره په $y = a$ کې او يو بل صفرځاى په $y = x$ کې، په ټوليزه نو $n+2$ صفرځايونه . درولې جملې پسې بايد $(n+1)$-م مشتق بايد لږ تر لږه يو صفرځاى t ولري:

$$0 = q^{(n+1)}(t) - f^{(n+1)}(t) = c(n+1)! - f^{(n+1)}(t) .$$

له

$$R = f(x) - p_n(x) = q(x) - p_n(x) = c(x-a)^{n+1}$$

څخه د پاتې غړي غوښتونې ښه راکوي.
ليکونکي: اپپ، هيوليګ،

د ساين تابع $f(x) = \sin x$ مشتقونه دي

$$f' = \cos x, \quad f'' = -\sin x, \quad f''' = -\cos x, \quad f^4 = f = \sin x, \dots .$$

د ارزښتونو

$$f'(0) = 1, \quad f''(0) = 0, \quad f'''(0) = -1, \quad f^4(0) = f = 0, \dots .$$

سره لومړي د تيلور پولينومونه د ساين تابع دي.

$$\begin{aligned}
p_1(x) &= x \\
p_3(x) &= x - \frac{x^3}{6} \\
p_5(x) &= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} \\
p_7(x) &= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040}
\end{aligned}$$

په ورته توګه د کوساين تابع لپاره هم باور لري

$$\begin{aligned}
p_0(x) &= 1 \\
p_2(x) &= 1 - \frac{x^2}{2} \\
p_4(x) &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \\
p_6(x) &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720}.
\end{aligned}$$

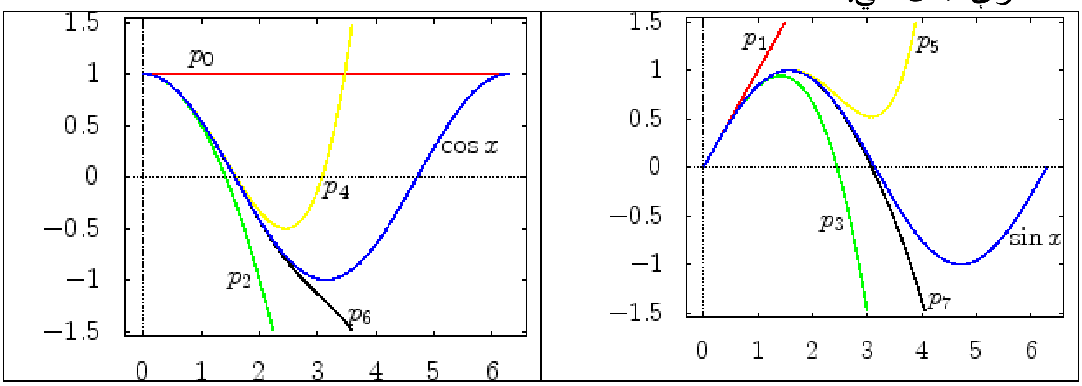
نږدې شمېرنه یا اپروکسیمېشن د ډېر کوچني x لپاره خورا دقیق دی. د بېلګې په توګه کېدی شي د نږدېوني ناټیکاوی

$$\sin 0.1 \approx p_4(0.1) = 0.09983\ldots$$

د

$$|R| = \frac{|\cos t|}{5\,!}\,0.1^5 \leq \frac{1}{12000000} \leq 10^{-7}$$

له لارې اټکل شي.



لکه د خبرې څخه چې لیدل کیږي، نږدې شمېرنه د لوی x لپاره لومړی د ځګو درجو سره پوره ټیک یا دقیق وي. په جدول کې د څو د x - ارزښت لپاره ناټیکاوي ورکړل شوي دي.

x	π	$\pi/2$	$\pi/3$	$\pi/4$	$\pi/5$	$\pi/6$
$p_1(x)$	3.1416	0.5708	0.1812	0.0783	0.0405	0.0236
$p_3(x)$	2.0261	0.0752	0.0102	0.0025	0.0008	0.0003
$p_5(x)$	0.5240	0.0045	0.0003	0.0000	0.0000	0.0000
$p_7(x)$	0.0752	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

$p_0(x)$	2.0000	1.0000	0.5000	0.2929	0.1910	0.1340
$p_2(x)$	2.9348	0.2337	0.0483	0.0155	0.0064	0.0031
$p_4(x)$	1.1239	0.0200	0.0018	0.0003	0.0001	0.0000
$p_6(x)$	0.2114	0.0009	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

ليکونکي: اپپ، هيوليګ،

حقيقي د تيلور لړۍ Reelle Taylor-Reihe

په يوه ټکي x_0 کې د يوه ناپای ډېرواره مشتقوړ تابع f د تيلور لړۍ د يوې په توان لړۍ يوه وده ده:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(x-x_0)^n, \quad a_n=\frac{1}{n!}\,f^{(n)}(x_0)\,.$$

د $x \in \mathbb{R}$ لپاره لړۍ او همداسې ټول مشتقونه په يوه انتروال (x_0-r, x_0+r) کې مطلق پولې ته تلونکي دي او د $|x-x_0|>r$ لپاره پولې ته نه تلونکي دي. د $|x-x_0|=r$ لپاره بې له نورو څېړنو د لړېی پولې ته تلنې په هکله وېناوي ناشونې دي.

د ودې ټکي د واټن لپاره بند(بنديز) r د پولې ته تلنې يا کونورګنت ـ وړانګې په نامه يادېږي او د فرمول

$$r=\left(\overline{\lim_{n\to\infty}}\,|a_n|^{1/n}\right)^{-1}$$

سره شمېرل کيږي. له دې سره ارزښتونه $r = 0$ او $r = \infty$ شوني دي. په دې حالت کې د کونورګنت انتروال يا تش دی او يا ټول $\mathbb{R}$ دی.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ،

د ريښي قضيې په بنسټ دی

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\left|\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n\right|} = \frac{1}{r}\,|x-a|\,.$$

په توګه د $|x-a| < r$ لپاره د تېلرو-اړی يوې ته ځي او د $|x-a| > r$ لپاره پولې ته نه ځي. د $|x-a| = r$ لپاره نورې څېړنې اړيينې دي يا نورو څېړنو ته اړتيا ده.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ،

تابع

$$f(x) = \begin{cases} \exp(-1/x^2), & \text{für } x \neq 0 \\ 0, & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

په 0کې برابرډوله ناپرېکېدونکې ده. دا پسې دپوره اينډکشن له لارې ښوول کېدی شي، چې ټول مشتقونه د

$$f^{(n)}(x) = \frac{p_n(1/x)}{\exp((1/x)^2)}$$

بڼې دي، د يوه مناسب پولينوم p_n سره. دا چې د $x \to 0$ (همداسې د $1/|x| \to \infty$) لپاره اکسپوننشل تابع نسبت يوه پولينوم ته په قوت يا قوي جګيږي، نو ټول پولينومونه په $x = 0$ ځای کې ارزښت 0لري. اړونده تيلور-لړی نو له دې امله صفر لړی ده

$$\sum_{k=0}^{\infty} 0x^k \,.$$

داچې د $x \neq 0$ $f(x) \neq 0$ لپاره دی، نو د تیلور-لړۍ د f سره فقط د $x = 0$ لپاره یو بل سره برابر یا یو غږیز دي، دا په دې معنا چې د پولې ته تلنې وړانګه r 0 ده.

لیکونکي: اپپ، هیولیګ،

اکسپوننشل تابع

$$f(x) = \exp(x)$$

لاندې مشتق لري

$$f^{(n)}(x) = \exp(x)\,.$$

که د $x = 0$ په ځای کې وارزول شي ، ترې لاس ته راځي

$$f^{(n)}(0) = 1\,.$$

د دې په تعقیب د اکسپوننشل تابع د تیلور-لړۍ لاندې بڼه لري

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}\,.$$

دا چې

$$\lim_{k\to\infty} 1/\sqrt[k]{k!} = 0\,,$$

نو $r = \infty$ دی، دا په دې معنا چې د تیلورر-لړۍ په ټول $\mathbb{R}$ پولې ته ځي یا کونورګنت ده.

لیکونکي: اپپ، هیولیګ،

د بېلګې لپاره تابع

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$$

په$a=4$ وديز کيږي.

ددې لپاره لومړی مشتقونه جوړيږي:

$f^{'}(x)$	=	$-\frac{1}{2}\,x^{-3/2}$
$f^{''}(x)$	=	$\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\,x^{-5/2}$
.	.	.
.	.	.
.	.	
$f^{n}(x)$	=	$(-1)^n\,2^{-n}\cdot 1\cdot 3\cdots(2n-1)\cdot x^{-\frac{2n+1}{2}}\,.$

په وديزېنې ټکي د قيمت اېښوونې يا -وضع کونې سره سړی د تيلور-ضريبوننه لاس ته راوړي

$$c_n=\frac{f^{(n)}(4)}{n!}=(-1)^n\,\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)}\,2^{-2n-1}\,.$$

د لړۍ لومړي درې ترمونه دي

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{16}\,(x-4)+\frac{3}{128}\,(x-4)^2+\cdots\,.$$

د دې لپاره چې د ضريبونو وړانګه r وټاکو، په پام کې نيسو

$$\frac{1}{2}\,\frac{1}{2n}\,2^{-2n}\leq c_n\leq\frac{1}{2}\,2^{-2n}\,.$$

له دې سره دی

$$\frac{1}{4}\,\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\sqrt[n]{1/(4n)}\leq\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\sqrt[n]{c_n}\leq\frac{1}{4}\,\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\sqrt[n]{1/2}\,.$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1/n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c} = 1$$

دا چي دی لاس ته

$$r = \frac{1}{(1/4)} = 4$$

راځي .

ليکونکي: اپپ، هیولیګ،

د اویلر فرمول

$$\exp(\mathrm{i}t) = \cos t + \mathrm{i}\sin t$$

کیدی شي د تیلور-ودیزیښني په مرسته

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24} - \dots$$

$$\sin t = t - \frac{t^3}{6} + \frac{t^5}{120} - \dots$$

د کوساین ـ او ساین توابع منځ ته راوړل شي. له

$$-\frac{t^2}{2} = \frac{(\mathrm{i}t)^2}{2}, \quad -\frac{t^3}{6} = \frac{\mathrm{i}^2 t^3}{3!}, \quad +\frac{t^4}{24} = \frac{(\mathrm{i}t)^4}{4!}, \quad +\frac{t^5}{120} = \frac{\mathrm{i}^4 t^5}{5!}, \dots$$

څخه لاس ته راځي

$$\cos t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{i}t)^2 k}{(2k)!}$$

$$\mathrm{i}\sin t = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\mathrm{i}t)^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

او د زیاتون یا جمعې له لارې د تیلور –ودیزیښني له لارې د اویلر فرمول لاس ته راوړو

$$\begin{aligned}\exp(\mathrm{i}t) &= 1+\mathrm{i}t-\frac{t^2}{2!}-\mathrm{i}\frac{t^3}{3!}\cdots \\ &= 1-\frac{t^2}{2!}\pm\cdots+\mathrm{i}(t-\frac{t^3}{3!}\pm\cdots) \\ &= \cos t+\mathrm{i}\sin t\,.\end{aligned}$$

ليکونکي: اپپ، هيوليګ،

د لوګاريتم تابع

$$f(x)=\ln x$$

لاندې مشتق لري

$$f'(x)=\frac{1}{x},\quad f''(x)=-\frac{1}{x^2},\quad f'''(x)=\frac{2}{x^3}\,.$$

په دې پسې مرربعيز د تيلور –پولينوم په ټکي $a=1$ کې دی

$$p(x)=0+(x-1)-\frac{1}{2}(x-1)^2\,.$$

باقی – يا پاتې غړی دابنه لري

$$\begin{aligned}r(x)=f(x)-p(x) &= \frac{1}{3!}\,f'''(\xi)\,(x-1)^3 \\ &= \frac{1}{3\,\xi^3}(x-1)^3\end{aligned}$$

د ξ سره، چې د x او 1 ترمنځ پروت دی. ناټيکاوی د ممکن کوچني ξ لپاره خورا غټ دی. سړی اټکل لاس ته راوړي

$$|r(x)|\le\frac{1}{3}\left|\frac{x-1}{\min(1,x)}\right|^3\,.$$

د $x \in [0.75, 1.25]$ لپاره ناتیکاوی دی

$$\le \frac{1}{3}\left|\frac{1/4}{3/4}\right|^3 = \frac{1}{81}\,.$$

لیکونکي: هیولیګ،

بینومیال لړی Binomialreihe

تابع

$$f(x) = (1+x)^\alpha$$

د $\alpha \in \mathbb{R}$ سره یوه تیلور-لړی لري

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}x^k = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \cdots$$

د $|x| < 1$ لپاره ، د کوم سره چې

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$$

تولیز شوی بینوم ضریب دی

لیکونکي: اپپ، هیولیګ،

دا ترلي لاس ته راځي، چې

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\,.$$

لړی

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}x^k$$

د وېش قضيې

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\left|\frac{\binom{\alpha}{k+1}x^{k+1}}{\binom{\alpha}{k}x^k}\right|=|x|\overline{\lim_{k\to\infty}}\left|\frac{\alpha-k}{k+1}\right|=|x|<1.$$

له مخې پولې ته ځي
ليکونکي: اپپ، هيوليګ،

د تيلور ـــلړۍ مشتق او انتيګرال
Differentiation und Integration von Taylor-Reihen

د يوې د تيلور- لړۍ

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k(x-a)^k\,,\quad c_k=\frac{f^{(k)}(a)}{k!}\,,$$

کېدی شي غړي ډوله يا يې غړي په غړي مشتق او انتيګرال ونيول شي:

$$f'(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)c_{k+1}(x-a)^k$$

$$\int f(x)dx=c+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_{k-1}}{k}(x-a)^k.$$

په دواړو عمليو کې د پولې ته تلنې وړانګه بې تغيره پاتېږي.

ليکونکي: هيوليګ، کرايخ

د بینوملړی

$$(1+t)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} t^k = 1 + \alpha t + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}t^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}t^3 + \cdots,$$

څخه د $t = -x^2$ او $\alpha = -1/2$ سره لاس ته راځي

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{-1/2}{k} x^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2k)} x^{2k}$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + \frac{5}{16}x^6 + \cdots.$$

د انتیګرال له لارې او همداسې د

$$\frac{d}{dx}\arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \arcsin(0) = 0$$

په پام کې نیولو سره د غړي په غړي انتیګرال له لارې داوده لاس ته راځي

$$\text{arcs}\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{-1/2}{k} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2k)} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

$$= x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \frac{5x^7}{112} + \cdots$$

لیکونکي: اپپ، هیولیک،

د انتیګرا

$$\int_0^x e^{-t^2}\,dt$$

نږدې ډوله شمیرنه د تیلور-اکسپوننشل تابع باندې لاس ته راولي

$$e^{-t^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{k!} \, .$$

له دې سره لاس ته راځي

$$\int_0^x e^{-t^2}\, dt = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{k!(2k+1)} \, .$$

$$\int_0^1 e^{-t^2}\, dt$$

د نومريکي نږدېوني پخ حيث د لپاره لاندې ارزښتونه لاس ته راځي

k=0: 1
k=1: 0.66666666666667
k=2: 0.76666666666667
k=3: 0.74285714285714
k=4: 0.74748677248677
k=5: 0.74672919672920
k=6: 0.74683603433603
k=7: 0.74682280682281
k=8: 0.74682426573971
k=9: 0.74682412070118
(Autoren: App/Höllig)

د تيلور-لړۍ ضرب **Multiplikation von Taylor-Reihen**

د تيلور – لړۍ کېدی شي غړي په غړي سره ضرب شي:

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} f_n (x-a)^k\right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k (x-a)^k\right) = \sum_{k=9}^{\infty} c_k (x-a)^k$$

د لاندې سره

$$c_k = \sum_{j=0}^{k} f_{k-j} b_j \,.$$

د ضرب د کونورګنت وړانګه د دواړو ضریبونو د پولې ته تلنې وړانګې د مینیموم سره برابره ده.
لیکونکي: ، هیولیک، کرایخ

د لاندې تابع د تیلور – لړۍ شمیرنې ته
Zur Berechnung der Taylor-Reihe der Funktion

$$f(t) = e^{-t}\cos(\omega t)$$

سړی کړی شي د اکسپوننشل تابع د تیلور – لړۍ او د کوساین –تابع وکاروي

$$e^{-t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-t)^k}{k!} = 1 - t + \frac{t^2}{2!} - \frac{t^3}{3!} \pm \cdots$$

$$\cos = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(\omega t)^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{(\omega t)^2}{2!} + \frac{(\omega t)^4}{4!} - \frac{(\omega t)^6}{6!} \pm \cdots \,.$$

د ضرب څخه د لومړي ترم لپاره لاس ته راځي

$$e^{-t}\cos(\omega t) = 1 - t + \frac{1-\omega^2}{2!} t^2 + \left(\frac{\omega^2}{2!} - \frac{1}{3!}\right) t^3 + \cdots \,.$$

$$e^{-t}\cos(\omega t) = \mathrm{Re}\left(e^{(\mathrm{i}\omega - 1)t}\right)$$

بدیلي کېدی شي هم و کارول شي:

$$e^{-t}\cos(\omega t) = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{i}\omega - 1)^k t^k}{k!}\right)$$

$$= \mathrm{Re}\left(1 + (\mathrm{i}\omega - 1)t + \frac{(\mathrm{i}\omega - 1)^2}{2!}t^2 + \frac{(\mathrm{i}\omega - 1)^3}{3!}t^3 \cdots\right)$$

$$= 1 - t + \frac{1 - \omega^2}{2!}t^2 + \frac{3\omega^2 - 1}{3!}t^3 + \cdots .$$

ليکونکي: اپپ، هيوليګ،

د تيلور-لړۍ وېش **Division von Taylor-Reihen**

د دوه تيلور – لړيو وېش

$$q(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k (x-a)^k \Big/ \sum_{k=0}^{\infty} g_k (x-a)^k, \qquad g_0 \neq 0,$$

د ضريبونو پرتلې له لارې کېدی شي له کتوتوالي

$$(q_0 + q_1 u + \ldots)(g_0 + g_1 u + \ldots) = f_0 + f_1 u + \ldots\ , \quad u = x - a\,,$$

څخه وټاکل شي:

$$\begin{aligned} q_0 g_0 &= f_0 & &\longrightarrow & q_0 \\ q_1 g_0 + q_0 g_1 &= f_1 & &\longrightarrow & q_1 \\ & & & & \vdots \\ q_n = (f_n - q_{n-1} g_1 - \ldots - q_0 g_n)/g_0 & & &\longrightarrow & q_n\,. \end{aligned}$$

ليکونکي: هيوليګ، اپريښ

د $q(x) = \tan x$ تر 5نظم پورې وديزونې لپاره ږدو:

$$(q_1x + q_3x^3 + q_5x^5 + \dots)\underbrace{\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \dots\right)}_{\cos x} = \underbrace{x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \dots}_{\sin x}.$$

له دې سره همدا اوس وکارول شو، چې تانجنت $\tan x$ ناجوړه(طاق) دی، دا په دې معنا چې $q_0 = q_2 = \dots = 0$.
د ضریبونوو له پرتلې څخه لرو:

$$q_1x = \qquad x \longrightarrow q_1 = 1,$$

$$\left(-\frac{q_1}{2} + q_3\right)x^3 = \qquad -\frac{1}{6}x^3 \longrightarrow q_3 = \frac{1}{3},$$

$$\left(\frac{q_1}{24} - \frac{q_3}{2} + q_5\right)x^5 = \qquad \frac{1}{120}x^5 \longrightarrow q_5 = \frac{2}{15}.$$

لیکونکي: هیولیګ، اپریښ

د راشنل توابعو تیلور-ودیزېنه
Taylor-Entwicklung rationaler Funktionen

د یوه راشنل تابع $r(z)$ د تیلور –ودیزیېنه په ټکي $z = a$ کې کېدی شي د کمپلکس پارشل جمعې په مرسته وټاکل شي، دا په دې معناچې r د یوه پولینوم او د بنسټ تابع

$$\frac{1}{(u-z)^j} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+j-1}{j-1} \frac{(z-a)^n}{(u-a)^{n+j}}.$$

جمعه ده.

د يوګونو زياتونونو(د جمعي اعضاوې) د کونورګنت وړانګې د وديزېنې ټکي د قطب نقطو د واټن $|u-a|$ سره برابره ده
ليکونکي: کلاوس هيوليګ

وديزېنه يا وده د بينوم لړۍ يو ځانګړی حالت دی:

$$\frac{1}{(u-z)^j}=\frac{1}{((u-a)-(z-a))^j}=(u-a)^{-j}(1+x)^{-j},$$

$$, \quad x=-\frac{z-a}{u-a}.$$

بديلي کېدی شي په ټکي $z=a$ کې مشتق وشمېرل شي او د n-م د تيلور ضريبونو لپاره لاس ته راوړو

$$\frac{j\cdot(j+1)\cdots(j+n-1)}{n!}=\binom{n+j-1}{n}(u-a)^{-j-n}.$$

د

$$\lim_{n\to\infty}\binom{n+j-1}{j-1}^{1/n}=1$$

له امله د کونورګنت يا پولې ته تلنې وړانګه $|u-a|$ ده .
ليکونکي: کلاوس هيوليګ

د ښوونې لپاره د

$$r(z)=\frac{1}{z^2-z}=-\frac{1}{z}-\frac{1}{1-z}$$

وده په $a=3$ وتاکل شي. د لومړي ترم لپاره د توليز فرمول څخه د $u=0$ او $j=1$ سره لاندې د تيلور n-م ضريب لاس ته راوړي

$$\binom{n}{0}(-3)^{-(n+1)},$$

دا په دې معنا چې

$$-\frac{1}{z} = -\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}((z-3)/(-3))^n, \quad |z-3| < 3.$$

دا ترې لاس ته راغلې هندسي لړۍ کېدی شي سیده هم لاس ته اروړل شي. دا د دویم ترم په بنسټ ښوول کیږی. سړی لیکي

$$-\frac{1}{1-3-(z-3)} = \frac{1}{2}\frac{1}{1-(z-3)/(-2)}$$

او لاس ته راوړي

$$-\frac{1}{1-z} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}((z-3)/(-2))^n, \quad |z-3| < 2.$$

د دواړو لړیو زیاتون یا جمعه دا وده راکوي

$$\frac{1}{z^2-z} = \left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{9}-\frac{1}{4}\right)(z-3) + O((z-3)^2).$$

لیکونکي: کلاوس هیولیګ

د یوې تیلور – لړۍ معکوس ارزښت تکرار شمیرنه
Iterative Berechnung des Kehrwerts einer Taylor-Reihe

که $g(0) \neq 0$ وي، نو کېدی شي د ایتریشن له لارې

$$f \longleftarrow 2f - gf^2$$

له $f(x) = 1/g(0)$ څخه په وتو د معکوس ارزښت $f = 1/g$ وده وشمېرل شي.
د لته په هر پل کې د ټیکو ترمونو تعداد یا ګڼ،ن دوه برابره کیږي.

دا متود د نیوتن تلنلار د $\frac{1}{f} - g = 0$ د یوه حل f ټاکل په ګوته کوي

لیکونکي: کلاوس هیولیګ، اپیریش

د پولې ته تلنې وینا کېدی شي د کتوتوالي

$$f_{\text{neu}} - \frac{1}{g} = -g\left(f_{\text{alt}} - \frac{1}{g}\right)^2$$

حخه ولوستل شي، څکه چې له $f_{\text{alt}} - 1/g = O(x^n)$ لاس ته

$f_{\text{neu}} - 1/g = O(x^{2n})$

راځي .

لیکونکي: کلاوس هیولیګ، اپیریش

د

$$f(x) = 1/g(x) = 1/\cos x$$

تیلور ودیزیینه کېدی شي لکه چې په تعقیب یی پل په پل وشمېرل شي. له

$$g = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + O(x^6), \quad f_0 = 1$$

څخه په وته لاس ته راځي

$$\begin{aligned} f_1 &= 2\cdot 1 - g\cdot 1^2 \\ &= 1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x^4 + O(x^6) \\ f_2 &= 2(1+\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x^4) - g\,(1+\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x^4)^2 + O(x^6) \\ &= 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + O(x^6)\,. \end{aligned}$$

سملاسې له دوه پلونو (قدمونو) وروسته لومړي شپږ ترمونه تیک دي.

د $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \dots$ سره له ضرب پسې د تانجنت لړۍ راکوي

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \dots$$

ليکونکي: کلاوس هيوليک، اپيريښ

د معکوس تابع د تيولور وديزيينه
Taylor-Entwicklung der Umkehrfunktion

د يوه تابع f د معکوس تابع $g(x)$ د تيلور ضريبونه د $f'(a) \neq 0$ سره په ټکي $b = f(a)$ کې کېدی شي د $g(f(x)) = x$ له مشفونې و ټاکل شي :

$$g(b) = a$$

$$g'(b)\, f'(a) = 1 \quad \longrightarrow \quad g'(b)$$

$$g''(b)\, f'(a)^2 + g'(b)\, f''(a) = 0 \quad \longrightarrow \quad g''(b)$$

$$\vdots$$

دا منځ ته راغلې مساوات کېدی شي تل پسېsukzessive د مشتقونو $g'(b),\, g''(b), \dots$ پسې وشمېرل شي.
ليکونکي: کلاوس هيوليک، اپيريښ

د $f(x) = \sin x$, $g(x) = \arcsin x$ او $a = 0$ لپاره لرو

$$g(0) = 0$$

$$g'(0)\cos 0 = 1 \quad \longrightarrow \quad g'(0) = 1$$

$$g''(0)\cos^2 0 - g'(0)\sin 0 = 0 \quad \longrightarrow \quad g''(0) = 0$$

$$'(0)\cos^3 0 - g''(0)(-\sin 0) + g''(0)\cos 0(-\sin 0) + g'(0)(-\cos 0) = 0 \quad \longrightarrow \quad g'''(0) = 1$$

$$\vdots$$

$$\arcsin x = x + \tfrac{1}{6}x^3 + O(x^4)$$

دا په دې معنا چې . که په پام کې ونيول شي،
جې د يوه ناجوړه يا طاق تابع په څېر – يا معکوس تابع ناجوړه ده، نو سملاسي يې
وديزيېنه تر پنځم ترم پورې ټيک ده.
ليکونکي: کلاوس هيوليګ، اپپريش

د تيلور ځانګړې لړۍ **Spezielle Taylor-Reihen**

$$(1 = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \cdots \quad |x| < 1$$

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \pm \cdots \quad -1 < x \le 1$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \pm \cdots \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \pm \cdots \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\mathrm{t} = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1} \frac{2^{2k}(2^{2k}-1)}{(2k)!} B_{2k} x^{2k-1} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \cdots \quad |x| < \frac{\pi}{2}$$

$$\mathrm{ar} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2k)} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \frac{5x^7}{112} + \cdots \quad |x| < 1$$

$$\mathrm{arcc} = \frac{\pi}{2} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2k)} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} = \frac{\pi}{2} - \left(x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \frac{5x^7}{112} + \cdots\right) \quad |x| < 1$$

$$\mathrm{arctar} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} \pm \cdots \quad |x| < 1$$

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

د پاد نږدې ارزښت شمیرنه **Pade-Approximation**

د یوه تابع $f(z) = c_0 + c_1 z + \cdots$ د (m,n) - پاد-نږدې ارزښت شمېرنه یو
راشنل تابع دی د صورت – یا ماتباندې درجې m او مخرج یا ماتلاندې درجې n سره،
چې د f سره د $z \to 0$ لپاره تر ځګو درجو ترمونو همغږیز کیږي یا سره برابریږي:

$$\frac{p(z)}{q(z)} - f(z) = O(z^{m+n+1}) .$$

پولینومونه $p(z) = a_0 + \cdots + a_m z^m$ او $q(z) = b_0 + \cdots + b_n z^n$ کېدی
شي د ضریبونو د پرتلې له لارې وټاکل شي.
لیکونکي: اپپ، هیولیګ

د q سره د ضرب وروسته لاس ته راوړو

$$(a_0 + a_1 z + \cdots) - (c_0 + c_1 z + \cdots)(b_0 + b_1 z + \cdots) = c z^{m+n+1} + \cdots ,$$

او لاس ته راځي، چې د $k \leq m+n$, z^k ضريبونه بايد ورک شي:

$$\begin{aligned} k=0: &\quad a_0 - c_0 b_0 = 0 \\ k=1: &\quad a_1 - c_0 b_1 - c_1 b_0 = 0 \\ &\quad \ldots . \end{aligned}$$

دا کښته – يا لامدې ټاکل شوی هوموجېن کرښيز مساوات سيستم ($m+n+1$ مساوات د $m+n+2$ متحولو يا ناټاکلو سره) راکوي، چې تل حل لري.
دا چې f په صفر کې قطب نه لري، راکوي $b_0 = 0$ ، چې $a_0 = 0$ راکوي. له دې امله کېدی شي د ممکنه لنډونو وروسته د q لومړي له صفر توبېرېدونکي ضريبونه د 1 سره برابر اېښول کېښولی شي.
ليکونکي: اېپ، هيوليګ

د اکسپوننشل توابعو لپاره د (m,n)-پاد-نږدې ارزښت شمېرنې ته مساوات سيستم په لاندې ډول دی.

$$0 = a_0 - b_0$$

$$0 = a_1 - b_1 - b_0$$

$$\ldots$$

$$0 = a_m - b_m - \cdots - \frac{1}{m!} b_0$$

$$0 = b_{m+1} - \cdots - \frac{1}{(m+1)!} b_0$$

$$\ldots$$

$$0 = \frac{1}{m!} b_n - \cdots - \frac{1}{(m+n)!} b_0 .$$

د حل لپاره د بيلګې په توګه لاس ته راوړی شو

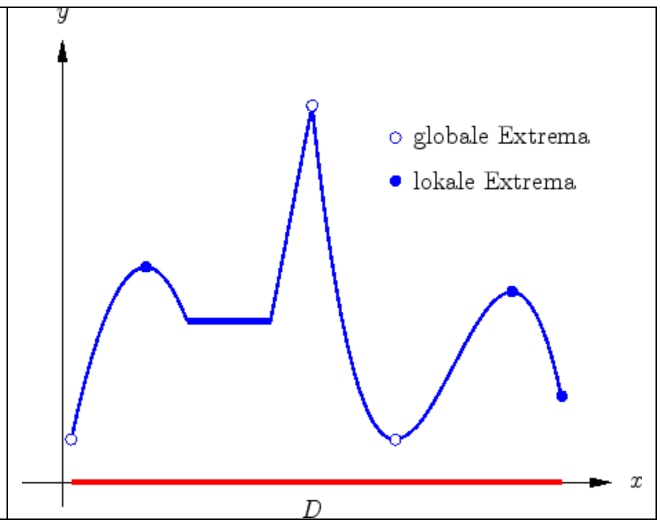
$$r_{1,1}(x) = \frac{1 + x/2}{1 - x/2}, \quad r_{2,2}(x) = \frac{1 + x/2 + x^2/12}{1 - x/2 + x^2/12}.$$

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

اکستريما(افراطيت) **Extrema**

تابع f په a کې په يوه ډېری(سټ) D يو توليز يا ګلوبال مينيموم لري، که وي
$f(a) \leq f(x) \quad \forall x \in D.$

په يوه ځايیز – يا لوکال مينيموم کې د تابع ارزښت $f(a)$ فقط په يوه کوچنې]اپيريال $(a - \delta, a + \delta) \cap D$ کې مينيمال دی.
ګلوبال او لوکال مينيموم سره ورته تعريف دي.



په يوه رابند انتروال د يوه ټوټه ډوله ناپرېکېدونکی او مشتقوړ تابع لپاره کېدی شي افراطي ارزښتونه فقط د مشتقونو په صفرځايونو ، پرېکېدونکي ځايونو او يا په ژیَ ځايونو کې رامنځ ته شي. تيوپ يا ډول يې کېدی شي د ځګو مشتقونو په مرسته او د ت ابع ارزښتونو د پرتلې له لارې پيداشي.

ليکونکي: هيوليګ، هيورنر
د يوه ناپرېکېدونکي مشتقوړ تابع لپاره د لوکال مينيموم سره د تعريفورشو په دننني ټکي a کې د مشتق لپاره لرو

$$f'(a)=\lim_{\substack{h\to 0\\ h\geq 0}}\frac{\overbrace{f(a+h)-f(a)}^{\geq 0}}{h}\geq 0$$

او

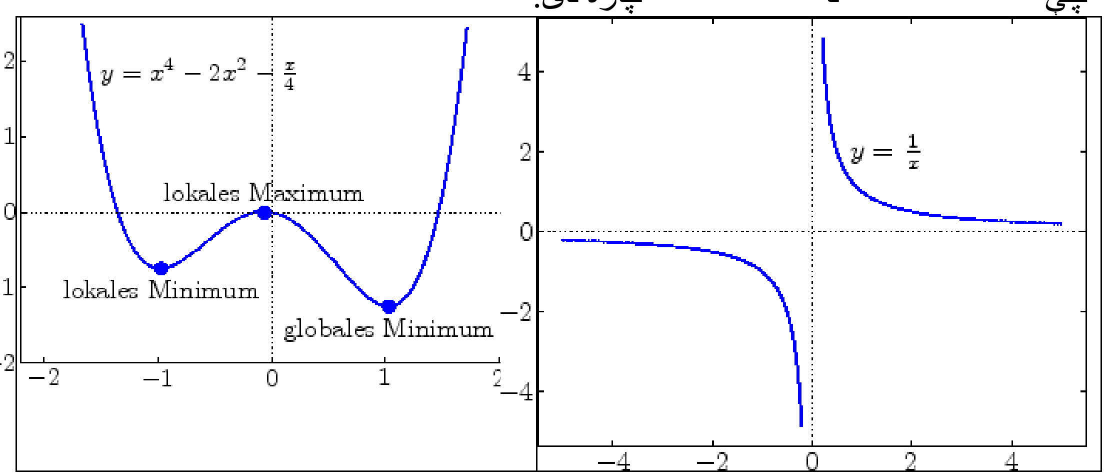
$$f'(a)=\lim_{\substack{h\to 0\\ h\leq 0}}\frac{\overbrace{f(a+h)-f(a)}^{\geq 0}}{h}\leq 0$$

نو $f'(a)=0$. يعني د تعریف ورشو په دننه کې په یوه لوکال افراطیت کې باید مشتق صفر وي یا f هلته مشتقوړ نه وي.

لیکونکي: هیولیک، هیورنر

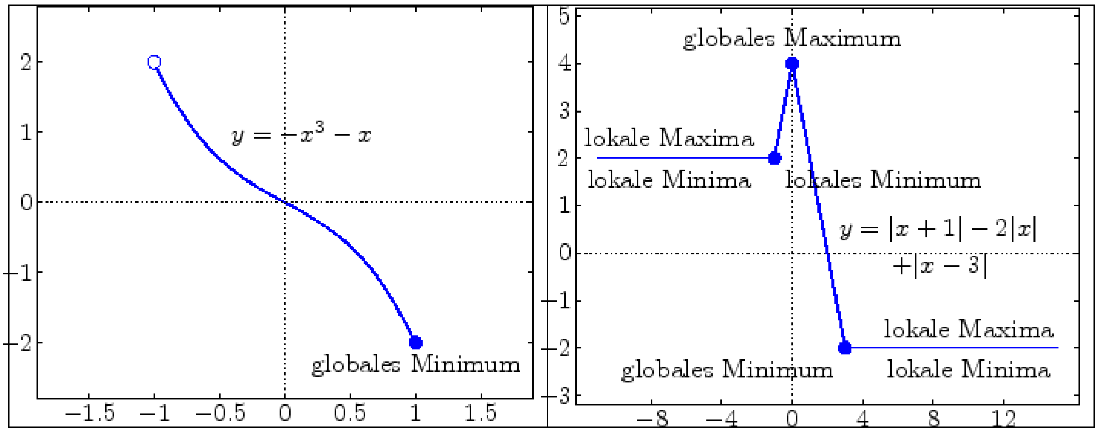
په لاندې کې به یو څو تیپیکي حالتونه وڅیړل شي.

تابع $f(x)=x^4-2x^2-x/4$ د $D=\mathbb{R}$ سره دوه مینیما اویو متکسیما لري. مینیموم د کوچني تابع ارزښت سره ګلوبال دی. یو ګلوبال ماکسیموم شتون نه لي ، ځکه چې $f(x)\to\infty$ د $x\to\pm\infty$ لپاره دی.



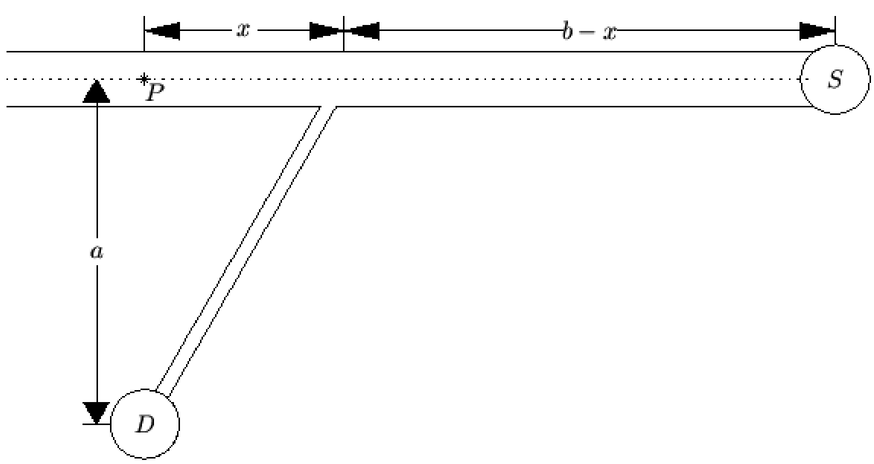
تابع $f(x)=1/x$ د $D=\mathbb{R}\setminus\{0\}$ سره اکستیم یا افراطي ارزښتونه نه لري.که یو تابع په یوه واز انتروال ثابت وي، نو دا ځایونه هم (لکال) ماکسیما او هم) لوکال) مینیما دي.

یوه کره همغږیز – یا مونوتون تابع سره افراطي ارزښتونه په ژی ټکو کې نیول کیږي، که دا تعریفورشو پورې تعلق ولري یا اړوند وی.



لیکونکي: هیولیک، هیوړنر

له یوه کلي D ځخه یوه ښار S ته یوترنسرک جوړیږي. په واټن a همدا اوس له کلي و ښار ته یو سرک جوړ دی له ښار ځخه تر ټکي P پورې لار ، هغه سرک چې کلي ته بل یا پسي نږدې پروت دی، اوږدوالی b لري.
دا سیده کرښیز توته لار باید داسي جوړه وي، چې د ښار ګرندی رسیدنه شوونې یا تظمین وي، که د یوه منځني [تکتیا km/h $v_a = 120$ د $v_n = 60$ په واټن په نوي ځنګیز یا فرعي سرک ځخه لاړ شو.



د P او د څنګیز سرک ترمنځ واټن $x \geq 0$ د ټاکلو لپاره د مینیمی – یا کموني له لارې اړین وخت

ښار ته د خوزښت لپاره دی

$$t(x) = \sqrt{a^2 + x^2}/v_n + (b - x)/v_a$$

د مشتق صفرځایونه

$$t'(x) = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2} v_n} - \frac{1}{v_a} \stackrel{!}{=} 0\,,$$

راکوي

$$v_a x = v_n \sqrt{a^2 + x^2} \quad \Leftrightarrow \quad x_m = a/\sqrt{3}$$

یعني ممکنه لوکال اکستېرم ځاي په (0, b)کې. ایا چې دا مینیموم دی، باید د خوزښت وخت سره په انتروالټکو کې د پرتلې له لارې وټاکل شي:

$$t(a/\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}a + b}{v_a}\,, \qquad t(0) = \frac{2a + b}{v_a}\,, \qquad t(b) = \frac{2\sqrt{a^2 + b^2}}{v_a}$$

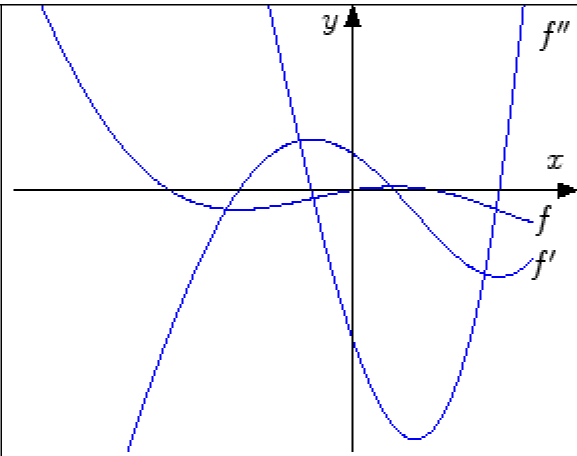
په روښانه توګه $t(0) \geq t(x_m)$ دی. د ښي پایټکو لپاره باور لري

$$\begin{aligned} t(b) \geq t(x_m) \Leftrightarrow \quad & 2\sqrt{a^2 + b^2} \geq \sqrt{3}a + b \\ \Leftrightarrow \quad & 4a^2 + 4b^2 \geq 3a^2 + 2\sqrt{3}ab + b^2 \\ \Leftrightarrow \quad & a^2 - 2\sqrt{3}ab + 3b^2 = (a - \sqrt{3}b)^2 \geq 0\,. \end{aligned}$$

اخرنی مساوات تل پوره دی، او له دې سره x_m اوپټیمال یا اغیز من دی، که په غوره انتروال $(0, b)$ کې پروت وي.: $b \geq a/\sqrt{3}$. په بل حالت کې به مینیموم په ژۍ ټکي b ته ، یعنې ښار ته د سیده تړنې، سره ورسیږي.

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

د اکستریم – یا افرطي ازښتونو ازماېښت **Extremwerttest**

	د یوه افراطی ارزښت تیوپ یا ډول په هکله کېدی شي د جګو مشتقونو په مرسته پرېکړه وشي. که f یو دوه واره ناپرېکیدونکی مشتقوړ تابع وي او $f'(a)=0\,,\qquad f''(a)>0$ $(f''(a)<0)\,,$ ولرو،

نو f په a کې یو ځاییز مینیموم(ماکسیموم) لري. که د a په ځای کې دویم مشتق ورک شي یا صفر شي، نو باید جګ مشتقونه پرېکړې ته را وړاندې شي. که باور ولري

$$f'(a)=f''(a)=\cdots=f^{(n-1)}(a)=0 \quad \text{und} \quad f^{(n)}(a)\neq 0\,,$$

نو f په a کې تیک هلته یو افراطیت لري، که جوړه وي. په دې حالت کې f په a کې یو لوکال یا ځای اړونده ماکسیموم همداسې مینیموم لري، که $f^{(n)}(a)<0$ همداسې $f^{(n)}(a)>0$ وي.

لیکونکي:اپپ، هیولیګ

د ښووني لپاره و f ته سرې د a په ځای کې د $n-1$ درجې د تیلور-پولینوم کاروي د باقي یا پاتي

$$f(x)-f(a)=\frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-a)^n$$

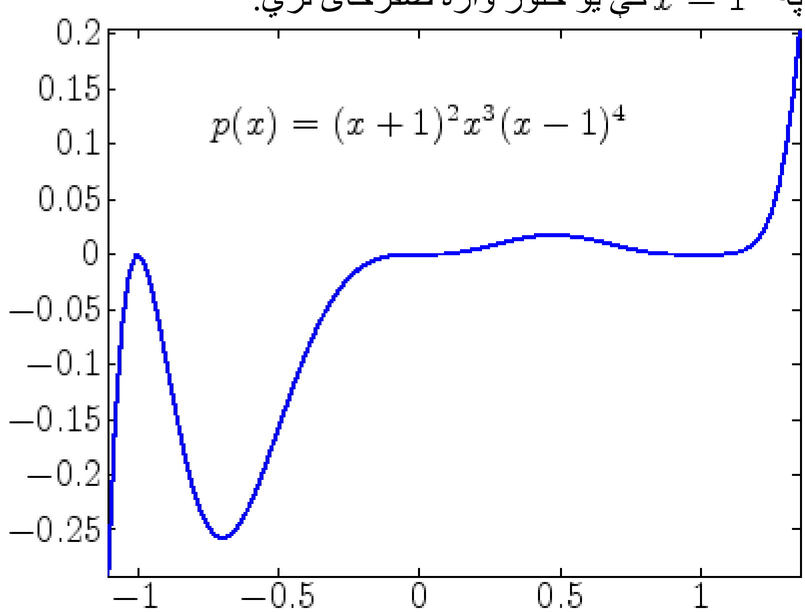
غړي سره او په پام کې نیسي، چې د $f^{(n)}(t)$ او د $f^{(n)}(a)$ لپاره(او له دې سره هم د t لپاره) a ته په بوره نږدېوالي همغه یا برابره مخنخښه ولري.

د ناجوړه یا طاق n لپاره له $x < a$ څخه و $x > a$ ته په تلنې کې د پورته مساوات
ښی اړخ یو د مخنخښې بدلون لري. د دې پسې $f(x) - f(a)$ هم هلته د مخنخښې
بدلون لري او د a د f افراطي ځای نه دی.
د جوړه n لپاره د $x \neq a$ لپاره تل $(x - a)^n > 0$ دی. د $f^{(n)}(a) < 0$ په
حالت کې د $x \neq a$ لپاره او x چې a ته پوره نږدې پروت دی $f(x) < f(a)$
لاس ته راځي. نو تابع f په دې حالت کې په a کې یو لوکال ماکسیموم لري . حالت
$f^{(n)}(a) > 0$ په ورته توګه یو لوکال میموم راکوي.
لیکونکي:اپپ، هیولیګ

پولینوم

$$p(x) = (x + 1)^2 x^3 (x - 1)^4$$

په $x = -1$ کې یو دبل صفرځای ، په $x = 0$ کې یو درېواره صفرځای لري او
په $x = 1$ کې یو څلور واره صفرځای لري.



باور لري

$$p(-1) = p'(-1) = 0, \quad p''(-1) = 2(-1)^3(-2)^4 < 0\,.$$

په $x = -1$ کي p يو ماکسيموم لري. په $x = 1$ کي p يو مينيموم، خکه چي

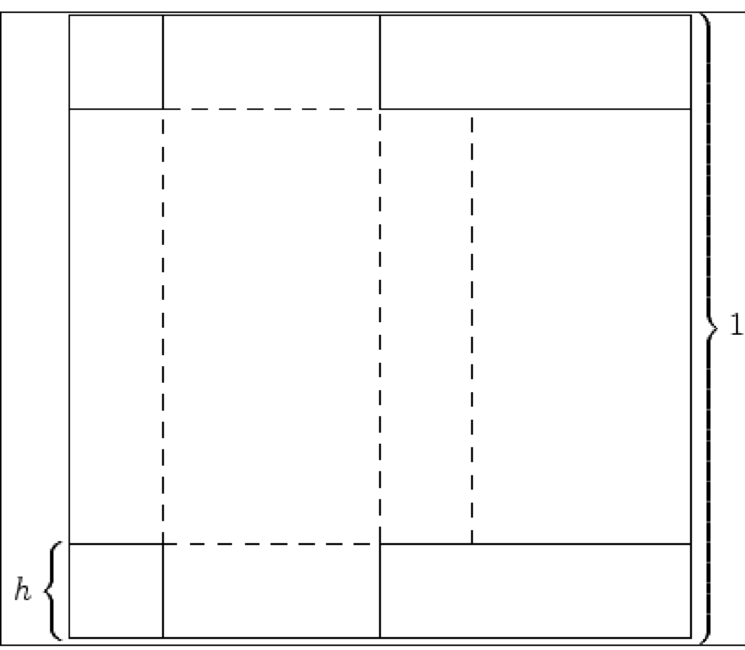
$$p(1) = \ldots = p'''(1) = 0, \quad p^{(4)}(1) = 2^2 1^3 4! > 0\,.$$ ،

بالاخره p د

$$p(0) = p'(0) = p''(0) = 0, \quad p'''(0) = 3!(-1)^4 \neq 0$$

له امله او په $x = 0$ کي يو مخنخښي بدلون له امله په سرچينه کي افراطي ځايونه نه لري.

ليکونکي:اپپ، هيوليګ

د دې ورکړ شوي غوڅنموني په مرسته دې د مربعيز ټوټه کارتونونو څخه دې ممکنه د لوی حجم صندق جوړ شي	

ډکی يا حجم دی

$$v(h) = \underbrace{(1-2h)/2}_{\text{Länge}} \cdot \underbrace{(1-2h)}_{\text{Breite}} \cdot \underbrace{h}_{\text{Höhe}} = 2h^3 - 2h^2 + \frac{1}{2}h$$

جګوالی سور اوږدوالی

د مشتق صفرځایونه

$$v'(h) = 6h^2 - 4h + \frac{1}{2} \overset{!}{=} 0$$

راکوي

$$= \frac{1}{3} \pm \sqrt{\frac{1}{9} - \frac{1}{12}} = \frac{1}{3} \pm \frac{1}{6}$$

یعني ممکنه افراطي ځایونه. فقط $h = \frac{1}{6}$ هندسي موخه ور دی او

$$v\,(1/6) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{27}\,.$$

دا چې د ژی ټکو $h = 0$ او $h = 1/2$ لپاره ډکی یا حجم صفر 0 دی، صندق د $h = 1/6$ لپاره ماکسیمال ډکی یا حجم لري.

لیکونکي:اپپ، هیولیک

Wendepunkte (نقطه انعطاف)اوړونټکي

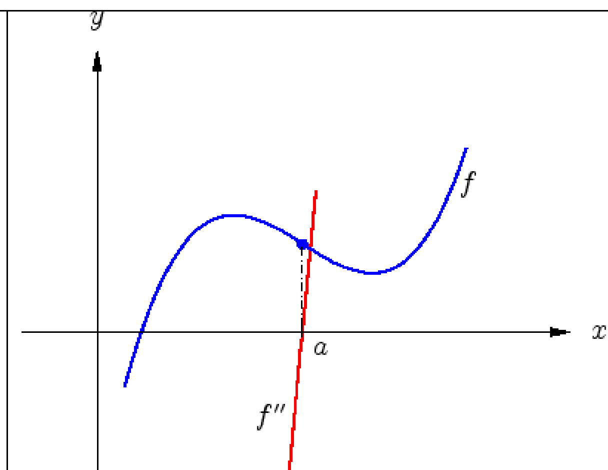
د یوه تابع f په یوه اوړنټکي a کې دویم مشتق مخنښه بدلوي.

د یوه پوره هوار تابع لپاره اړین دی،

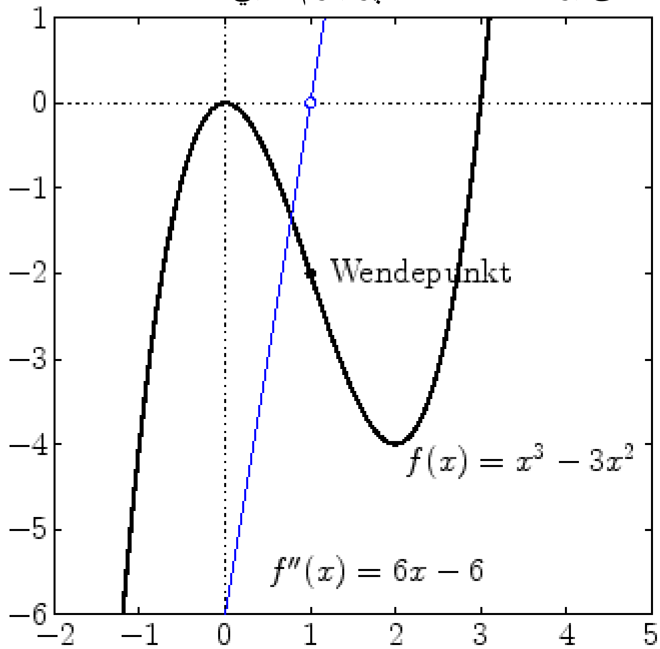
چې $f''(a) = 0$ وي او پوره

کېدونکي، چې $f'''(a) \neq 0$ وي.

لیکونکي: هیولیک، هیورنر



مشتق یو kubisches پولینوم ښایي.



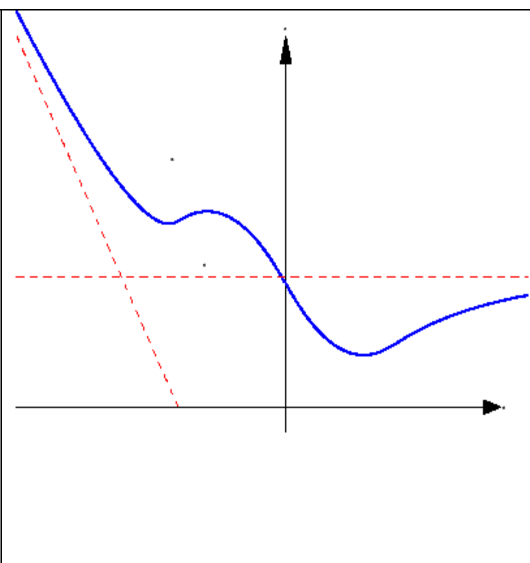
دا چې د ویم مشتق کرښیز دی، تل ټیک یو افراطی ټکی شتون لري.
لیکونکي: هیولیک، هیورنر

اسیمپتوتي(یو په بل نه پرېوتونکي یا ګاونډی) **Asymptoten**

د f یو کرښیز تابع $p(x) = ax + b$ یو اسیمپتوت یا ګاونډی دی، که د $x \to \infty$ یا $x \to -\infty$ لپاره $f(x) - p(x) \to 0$ وي.

لکه په ښېره کې چې ښوول شوی دی، ګاونډ د تابع f حالت د لوي x لپاره تشریح کوي.

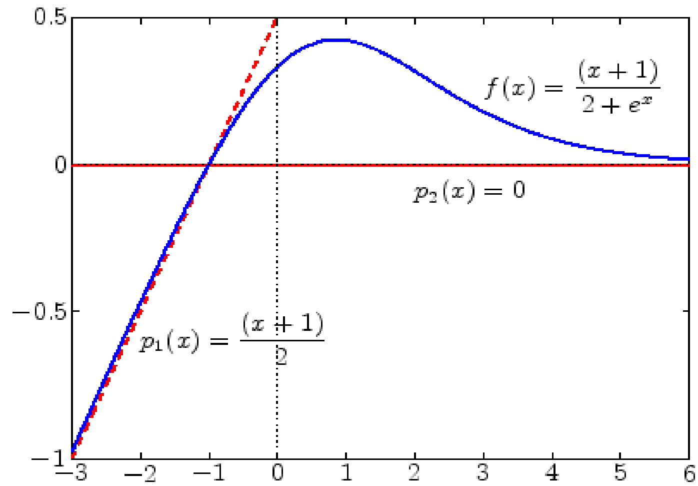
لیکونکي: هیولیک، هیورنر



د دې لپاره چې د تابع

$$f(x) = \frac{x+1}{2+e^x}$$

ګاونډ وټاکو پوله ارزښتونه $x \to \pm\infty$ ځانله تر ځېړنې نيسو.



د $x \to \infty$ لپاره دی

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{(x+1)\cdot e^{-x}}{2\cdot e^{-x}+1}$$

$$= \frac{0}{0+1} = 0\,.$$

له دې سره د x محور ګاونډ يا اسيمپتوت دی

د $x \to -\infty$ لپاره e^x د 0 په لور هڅيږي او

$$p(x) = \frac{x+1}{2}$$

ګاونډ دی.

ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

د راشنل- یا کسر توابعو ګاونډ یا اسیمپتوتې
Asymptoten rationaler Funktionen

یو راسنل تابع

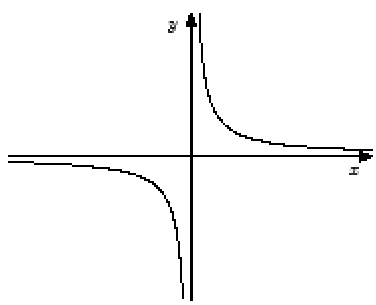
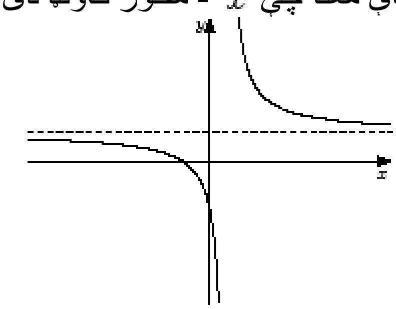
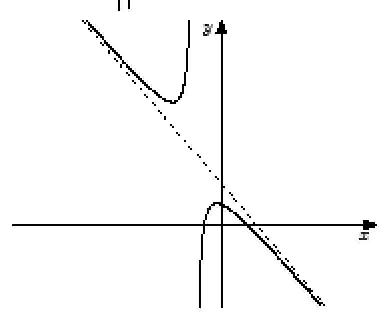
$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

تیک هلته یو کربنیز ګاونډ لري، که $\text{Grad } p \le \text{Grad } q + 1$ وي.

د $\text{Grad } p < \text{Grad } q$ لپاره باور لري

$$\lim_{p\to\pm\infty} r(x) = 0\,,$$

دا په دې معنا چې x - محور ګاونډ دی.

د $\text{Grad } q \le \text{Grad } p \le \text{Grad } q + 1$ لپاره سړی کربنیز ګاونډ د پولینوم وېش سره لاس ته راوړي :

$$r(x) = ax + b + \frac{\tilde{p}(x)}{q(x)}$$

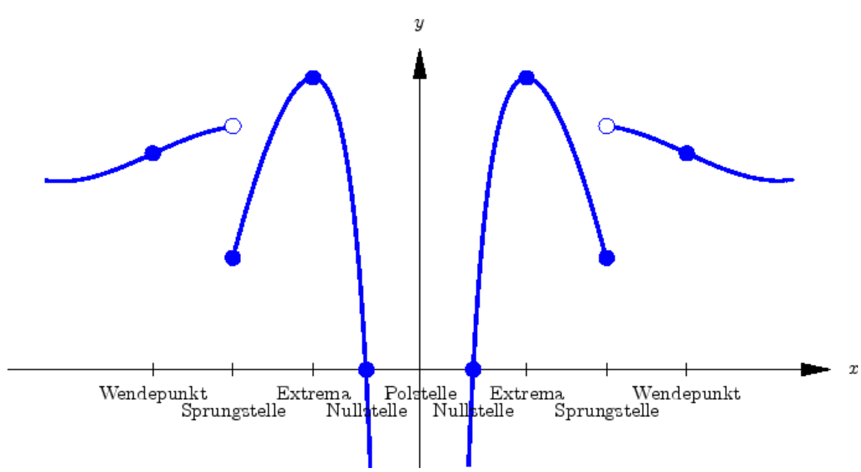
د Grad q < Grad $\tilde{p}$ سره. اسیمپتوت پروت یا افقي, $(a = 0)$ دی، که Grad q = Grad p وي.

که د صورت درجه د مخرج له درجې له یو زیات وي، نو $r(x)$ د لوي x لپاره د یوه پولینوم سره، چې ≥ 2 درجه وي اپروکسیمي کیږي.
لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

د کږو یا منحنیو خبرې یا بحث **Kurvendiskussion**

د یوه تابع د څومره والي حالت باندي قضاوت ته لاندي نخښې کیدی شي رامخ ته شي:

- سیومتريSymmetrien
- تل بیرته راګرځیدنهPeriodizität
- پرېکیدنوالي ځایونهUnstetigkeitsstellen
- صفرځایونهNullstellen ($\longrightarrow$ Vorzeichen) (مخنخښه $\longrightarrow$)
- اکستریماExtrema ($\longrightarrow$ Monotoniebereiche) (همغږیزوالي $\longrightarrow$ ورشوګاني)
- اوړونتکیWendepunkte ($\longrightarrow$ Konvexitätsbereiche) (ننوتلوالي ورشوګاني $\longrightarrow$)
- قطبځایونهPolstellen
- اسیپتوتونه یا ګاونډيAsymptoten



د تابع يو اړونده تحليل د کړو خبرې اترې يا بحث بلل کيږي
ليکونکي: هيوليک، هيورنر

د کړوخبرو اترو د ښکندوني لپاره يو تابع

$$f(x) = \sin x + \frac{1}{3}\,\sin(3x)$$

تر څېړنې نيول کيږي.

سيمتري : داچې $\sin x = -\sin(-x)$ دی ، نو تابع ناجوړه دی

تل بيرته راګرځېدنه يا پريوديڅيتيPeriodizität : تابع لکه د ساين تابع پخپله 2π - پريوديکي دی او له دې امله په لاندې کې فقط په انتروال $[-\pi,\pi]$ کې راوړل کيږي.

د پرېکېدنوالي ځايونه : تابع له ناپرېکېدونکو توابعو څخه سره يرځای شوی، له دې امله برکېدنځاينه نه لري.

صفرځايونه: د زياتو- يا جمعه نقضيې سره $[-\pi,\pi]$ دی

$$f(x) = 2\sin x - \frac{4}{3}\,\sin^3 x = \sin x\underbrace{\left(2 - \frac{4}{3}\sin^2 x\right)}_{\neq 0}.$$

تابع صفرځايونه په 0 او $\pm\pi$ کې لري.
افراطيت: مشتق

$$f'(x) = 2\cos x - 4\sin^2 x\,\cos x = -2\cos x + 4\cos^3 x$$

صفر دی د $\cos x = 0$ يا د $\cos x = \pm 1/\sqrt{2}$ لپاره ، نو

$$x = \pm\pi/2 \quad \vee \quad x = \pm\pi/4 \quad \vee \quad x = \pm 3\pi/4.$$

دا چې تابع په ټول $\mathbb{R}$ تعريف او تلبيرته راګرځېدونې ده، ژئ ترڅېړنې لاندې نه نيسو.

د دویم مشتق د محنخښې څخه

$$f''(x) = 2\sin x - 12\cos^2 x \sin x$$

او د تابع ارزښت د پرتله کونې له لارې کېدی شې د افراطیت تیوپ یا ډول وټاکل شې:

x	$f(x)$	$f''(x)$	Typ
$-3\pi/4$	$-\sqrt{8}/3$	$2\sqrt{2} > 0$	globales Minimum
$-\pi/2$	$-2/3$	$-2 < 0$	lokales Maximum
$-\pi/4$	$-\sqrt{8}/3$	$2\sqrt{2} > 0$	globales Minimum
$\pi/4$	$\sqrt{8}/3$	$-2\sqrt{2} < 0$	globales Maximum
$\pi/2$	$2/3$	$2 > 0$	lokales Minimum
$3\pi/4$	$\sqrt{8}/3$	$-2\sqrt{2} < 0$	globales Maximum

اوړونټکی یا د انعطاف ټکیWendepunkte **:**

دویم مشتق

$$f''(x) = 2\sin x - 12\cos^2 x \sin x = -10\sin x + 12\sin^3 x$$

$$\sin x = \pm\sqrt{5/6}$$

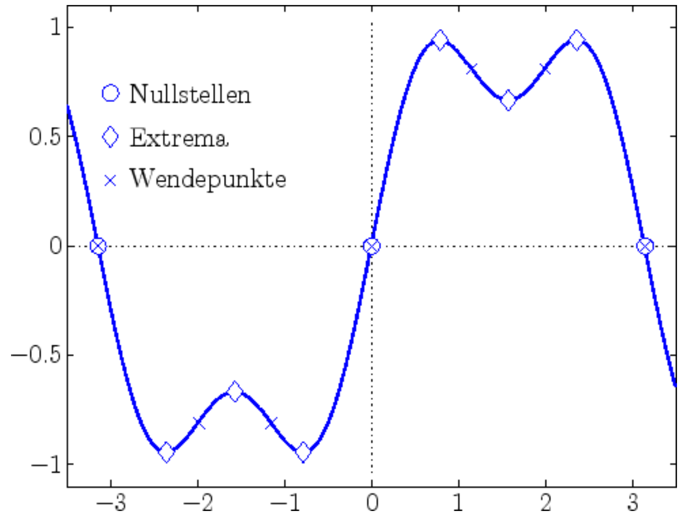
صفر دی د $\sin x = 0$ لپاره یا ، دا په دې معنا چې

$$x = 0 \quad \vee \quad x = \pm\pi \quad \vee \quad x \approx \pm 1.15 \quad \vee \quad x \approx \pm 1.99$$

دا چې په دې ځای کې دریم مشتق نه ورکیږي. تابع f اوړونټکی په $(0,0)$ او $(\pm\pi,0)$ کې لري همداسې په نږدې توګه په $(-1.99,-0.81)$ ، $(1.15,0.81)$, $(-1.15,-0.81)$ او $(1.99,0.81)$ کې.

قطبځایونه**Polstellen** : ناپرېکېدونکي توابع قطبځایونه نه لري.

ګاونډي **Asymptoten** : تابع پریودیکې او نه ثابت دی، نو ګاونډي یا اسیپتوت یا مجاورتونه نه لري.



ليکونکي: هيوليک، هيورنر

د يوې کرښې خبرو يا بحث روښانه ولو لپاره تابع

$$f(x) = \frac{5x^3 + 4x}{20(x-1)(x+1)}$$

ترخيرني لاندې نيول کيږي.
سيومتري : صورت ناجوړه او مخرج جوړه دی. تابع نو له دې امله ناجوړه دی، دا په دې معنا چې سرچيني ته سيومتريک دی.
پريوديځيتي يا (تل) بيرته راګځيدنه: تابع پريوديک نه دی.
برېکيدنځايونه: د مخرج صورت صفرځايونه ± 1 د صورت صفرځايونه نه دي. له دې سره f په $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$ ناپرېکېدونکی دی.
صفرځايونه: صورت د $x = 0$ لپاره ورکيږي.
افراطيت :

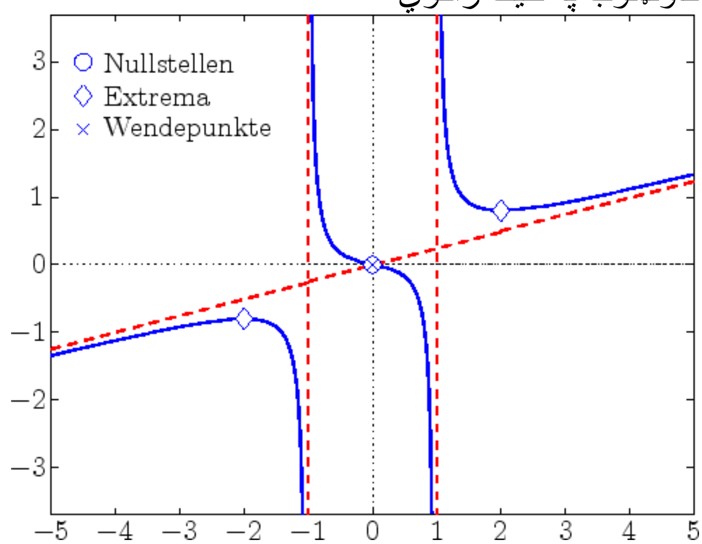
$$f'(x) = \frac{5x^4 - 19x^2 - 4}{20(x^2-1)^2} \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 2$$

دا چې تابع ساده صفرځايونه لري، افراطيت فقط لوکال يا ځای اړوند دی. د f د ځومره والي حالت ځخه کيدی شي تيوپ يا ډول لاس ته راشي. دا چې $f(x) \to -\infty$ د $x \to -\infty$ او $x \to -1$ لپاره دی، بايد انتروال $(-\infty, -1)$ يو ماکسيموم ولري. په ورته توګه $(1, \infty)$ لر تر لره يو مينيموم لري. نو د مشتق صفرځايونو ته

سړی یو لوکال ماکسیموم په $(-2,-4/5)$ او یو لوکال مینیموم په $(2,4/5)$ کې لاس ته راوړي.
اوړونټکي یا نقاط انعطاف:

$$f''(x) = \frac{-80x^5 + 398x^3 + 42x}{20(x^2-1)^3} \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$$

داچې په دې ځای کې دریم مشتق صفر نه دی، نو $(0,0)$ یو اوړونټکی دی.
قطبځایونه: تابع په $x = \pm 1$ کې ساده قطبځایونه لري.
اسیمپتوت یا ګاونډېتوب: یو د پولینوم وېش $p(x) = 5x/20 + 0 = x/4$ د ګاونډتوب په حیث راکوي



لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

د کړې خبرو اترو د ښوولو یا روښانه کولو ته تابع

$$f(x) = e^{-x^2} + \frac{4|x|}{e^4}$$

څېړل کیږي.

سیمتري : دا چې x^2 او $|x|$ جوړه دي، تابع جوړه دی، دا په دې معنا چې سیمتر و y - محور ته.
پریودیځيتي یا تل بېرته راګرځېدنه: تابع پریودیک نه دی.

پرېکېدنوالي ځایونه: تابع له ناپرېکېدونکو توابعو څخه سره یوځای شوې ده او له دې امله پرېکېدنځایونه نه لري. لکه د مطلق ارزښت تابع لپاره په هرحالت مشتق په صفرټکي کې ناپرېکېدونکی نه دی.

صفرځایونه: اکسپوننشل توابع تل مثبت یا زیاتیز دي، د مطلق ارزښت تابع نه منفي دي. نو صفرځایونه نه شته.

افراطیت:

$$f'(x) = -2xe^{-x^2} + \frac{4}{e^4}\text{sign}(x) \overset{!}{=} 0,\ x \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 2\,.$$

برسیره پردې دې افراطی ټکی په $x = 0$ کې ،څېړل شي، چېرته چې مشتق پرېکېدونکی دی. دا چې تابع په ټول $\mathbb{R}$ تعریف دی، نو د x لپاره د $\pm\infty$ ته د تلنې حالت هم باید په پام کې ونیول شي.

دا چې $f(x) \to \infty$ د $x \to \pm\infty$ لپاره دی، نو f لږ تر لږه یو ګلوبال مینیموم لري، مګر کلوبال ماکسیموم نه لري. د y ارزښت په پرتله کریتیکال ټکی

$$(-2, 9/e^4) \qquad (0,1) \qquad (2, 9/e^4)$$

ښايي، چې ګلوبال مینیموم په $x = \pm 2$ کې نیول کیږي. دا چې f په انتروال $[-2,2]$ کې مینیموم او هم یو ماکسیموم لري، ترې لاس ته راځي چې $(0,1)$ یو لوکال ماکسیموم دی.

اوړونټکی یا د انعطاف ټکی:

$$f''(x) = -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2} \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad 4x^2 = 2 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 1/\sqrt{2}$$

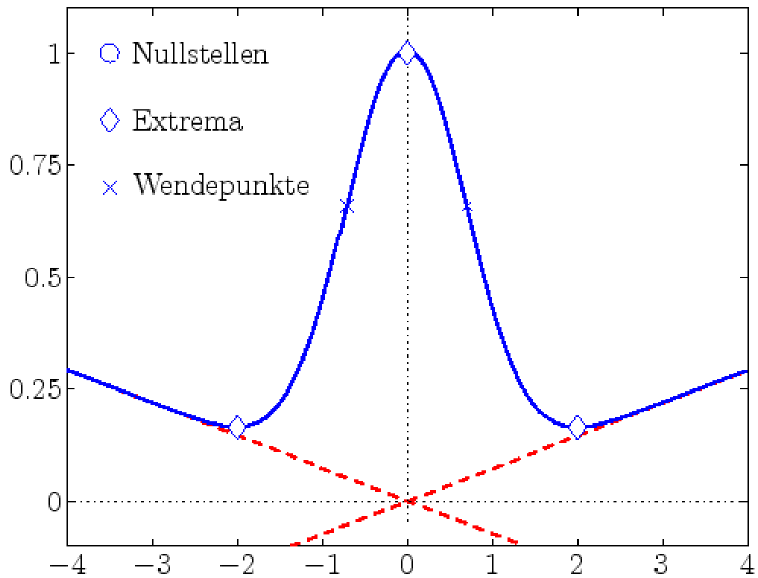
دریم مشتق په دې ځایونو $\neq 0$ کې دی. ترې لاس ته راځي چې f یو اوړنټکی

$$\left(\pm 1/\sqrt{2},\ e^{-1/2} + \frac{4}{\sqrt{2}\,e^4}\right).$$

لري.

قطبځایونه: تابع قطبځایونه نه لري.

ګاونډي یا مجاورتها: دا چې e^{-x^2} د $|x|$ لپاره د صفر په لور ګړندی دی، تابع ګاونډیان $p_+(x) = \frac{4x}{e^4}$ او $p_-(x) = \frac{-4x}{e^4}$ لري.



ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

ريمن-انټيګرال Riemann-Integral

د يوه ناپرېکېدونکي تابع f يو تاکلی انټيګرال د

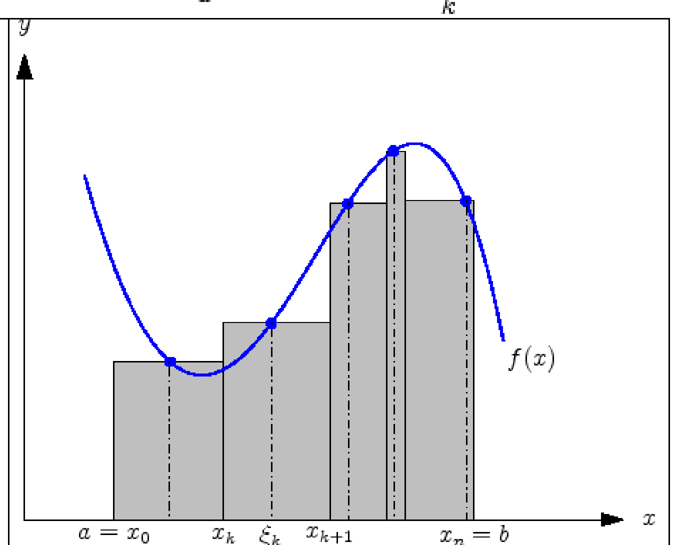
$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{|\Delta|\to 0} \int_a^b f_\Delta = \lim_{|\Delta|\to 0} \sum_k f(\xi_k)\,\Delta x_k$$

له لارې تعريف شوی دی. دلته د $\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ يوه توټه کونه ښايي،

$$|\Delta| = \max_k \Delta x_k\ ,$$

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}\ ,$$

ξ_k يو ماکسيمال انټروال دی او په k – م انټروال يو په خوښه ټکی دی. د انټيګرال تعريف په ښی لور زياتون ياجمعه د ريمن زياتون يا – جمعه بلل کيږي.



د زياتيز يا مثبت f لپاره $\int_a^b f(x)\,dx$ د f د ګراف کښته لورته سطحه په ګوته کوي

ليکونکي: هيوليګ، هيورنر، ويپپر

که $f(x)$ ناپرېکيدونکی مشتقوړ وي، نو د مشتقشمېرنې د منځ ارزښت جملې څخه د لپاره باور لري

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq (x_2 - x_1) \max_{x\in[x_1,x_2]} |f'(x)|$$

Δ_i دې د ټوټه ونو يوه پرله پسې وي د $|\Delta_i| \to 0$ سره. د تابع پرلپسې دوه توکي Δ_m او Δ_n را اخلو او د Δ ټوټه ونه را اخلو، چې د Δ_m او Δ_n د نورو يا ورپسې يل لاندې ټوټه کونو له لارې منځ ته راځي ، چېرته چې Δ_m د لاندې $x_i\,,\, i=0,\ldots,k_m$ يا ورپسې ټوټه ونو ټکي دي او Δ ټکي $z_i\,,\, i=0,\ldots,k$ لري، نو د $\zeta_j \in [z_{j-1}, z_j]$ سره باور لري

$$\left|\int f_\Delta - \int f_{\Delta_m}\right| = \left|\sum_{j=1}^{k} f(\zeta_j)\,\Delta z_j - \sum_{i=1}^{k_m} f(\xi_i)\,\Delta x_i\right|$$

$$= \left|\sum_{i=1}^{k_m} \sum_{x_{i-1}\leq z_{j-1}<z_j\leq x_i} (f(\zeta_j) - f(\xi_i))\Delta z_j\right|$$

$$\leq |\Delta_m| \max_{t\in[a,b]} |f'(t)| \underbrace{\sum_{i=1}^{k_m} \sum_{x_{i-1}\leq z_{j-1}<z_j\leq x_i} \Delta z_j}_{b-a}\ .$$

په ورته تګه باور لري

$$\left|\int f_\Delta - \int f_{\Delta_n}\right| = O(|\Delta_n|)\,,$$

او له دې سره

$$\left|\int f_{\Delta_m} - \int f_{\Delta_n}\right| \to 0$$

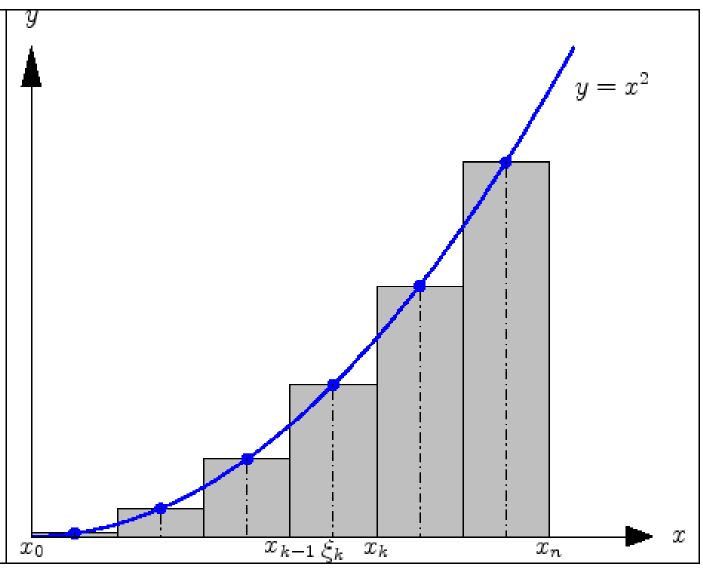
د $n,m \to \infty$ لپاره . د ریمن –زیاتون نو یوه کوشي-پرلپسي جوړوي، نو پولې ته تلونکي دي.
په ورته توګه د دوه پرلپسیو و همغې یا برابرې پولې ته تلنه وښوول شي.
د توټه ناپرېکېدونکو f ښوونه تخنیکي داسي لږ پېچلې ده. سړی د f د ناپرېکېدني انتروال ښېل یا جدا ترخېړني نیسي او هلته د برابرډوله ناپرېکېدني څخه ګټه اخلي:

$$|f(x_1) - f(x_2)| \le \varepsilon \qquad \text{für} \quad |x_1 - x_2| < \delta\,.$$

دا اټکل د منځ ارزښت جملې په ځای رامنځ ته کیږي او نور دلایل په ورته وګه مخ ته بیولکیږي.
لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

ریمن –انتیګرال په حیث د $\int_0^1 x^2\,dx$ شمېرلو کیدی شي د توټه وني پرلپسي

وکارول شي د n-م توټه وني لپاره د ارزښتونو ځایونو
$\xi_i = (2i-1)/(2n)\,,$
$,\, i = 1, \ldots, n\,,$
سره.



د تعریف سره سم لاس ته راځي

$$\int f_{\Delta_n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\left(\frac{2i-1}{2n}\right)^2 = \frac{1}{4n^3}\left(4\sum_{i=1}^{n} i^2 - 4\sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} 1\right)$$

$$\frac{1}{4n^3}\left(\frac{4n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{4n(n+1)}{2} + n\right) = \frac{1}{3} - \frac{1}{12n^2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \int f_{\Delta_n} = \frac{1}{3}$$

او له دې سره .

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

د انتیګرال خویونه **Eigenschaften des Integrals**

دا لاندې تاکلی انتیګرال دا لاندې خویونه لري :

$$\int f+g = \int f + \int g \quad , \quad \int rf = r\int f$$

کرښیزوالس,

$$f \leq g \implies \int f \leq \int g$$

همغږیزوالی :

$$\int_a^b f + \int_b^c f = \int_a^c f$$

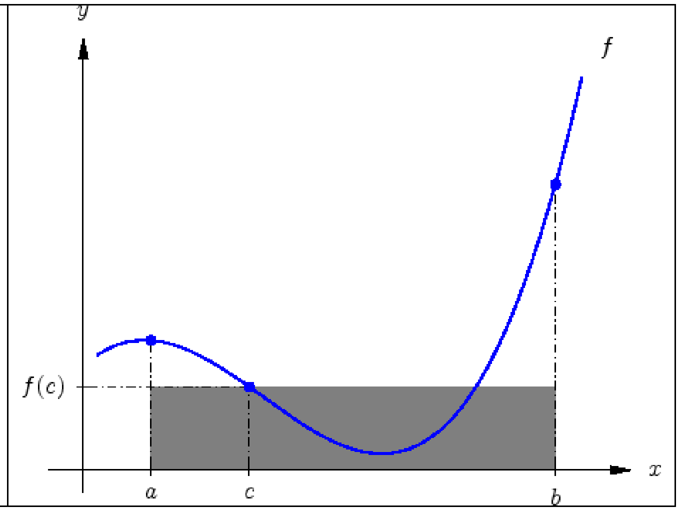
زیاتون یا جمعه

$$\int_b^a f = -\int_a^b f$$

د وروستیو خویونو د همغږیزونې له امله سږی تعریفوي: .

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

د انتیګرالشمیرنې منځ ارزښت جمله **Mittelwertsatz der Integralrechnung**

که f او g په $[a,b]$ ناپرېکېدنوکي توابع وي او g د مخنخښي بدلون ونه لري ، نو $c \in [a,b]$ شتون لري د $$\int_a^b fg = f(c)\int_a^b g.$$ سره	

په ځانګي توګه ، لکه په ځېره کې چې ليدوړ دي، دی $\int_a^b f = (b-a)f(c)$

ليکونکي: هيوليک، هيورنر

بې له تولیزو بنديزونو دې $g \geq 0$ وي. د انتيګرال د اټکل له لارې

$$(\min_{[a,b]} f)\, g(x) \leq f(x)g(x) \leq (\max_{[a,b]} f)\, g(x)$$

لاس ته راځي

$$(\min_{[a,b]} f)\int g \leq \int fg \leq (\max_{[a,b]} f)\int g.$$

دا چې f د منځارزښت جملې له مخې د $\min f$ او $\max f$ ترمنځ هر ارزښت نيسي، نو غوښتونی برابروالی راکوي.

په توليزه توګه وړاندنيونه ده، چې د g مخنخښي بدلون نه لري، اړيين، لکه د بېلګې

$$\underbrace{\int_{-1}^{1} x^2\,dx}_{>0} = \int_{-1}^{1} x\cdot x\,dx \neq c\int_{-1}^{1} x\,dx = 0$$

ځخه لیدل کیږی.
لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

بنسټیز – یا ساده توابع **Stammfunktion**

یو تابع F د $F' = f$ سره د f بنسټیز ت ابع دی، او د دې لپاره لیکو

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c$$

د ټولو بنسټیز توابعو ډېرۍ لپاره، چې د f ناټاکلي انتیګرال بلل کیږي.
د انتیګرالونې ثابته c په خوښه ده. د بېلګې په توګه دی

$$F_a(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

د $F_a(a) = 0$ سره یو ممکنه لومړی یا بنسټیزه تابع.
نه ټولو بنسټیزو توابعو ته داسې روښانه د بنسټیزو توابعو اکسپلیځیت ورکړه شونې ده،

$$f(x) = \exp\left(x^2\right)$$

یوه بېلګه ده .
لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

د انتیګرالشمیرنې اصلي جمله یا قضیه
Hauptsatz der Integralrechnung

که F د یوه ناپرېکېدونکي تابع f بنسټیز یا لومړنی تابع وي ، دا په دې معنا چې $f = F'$ وي، نو باور لري

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

همداسې په لنډه لیکندول

$$\int_a^b f = [F]_a^b \,.$$

یو بنئتیز انتیګرال کېدی شي د انتروال په پای ټکو کې د بنسټیزو توابعو د تابع ارزښتونو د کمښت په ډول وشمېرل شي
لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

که دواړه خواوې د b تابع په څېر راوړل شي، نو بسیا کوي وښایو، چې دواړه خواوې برابر مشتق لري، ځکهچې د $b=a$ لپاره ارزښت سره سرخوري(دواړه خواوې صفر دي).
د کینې اړخ لپاره لرو

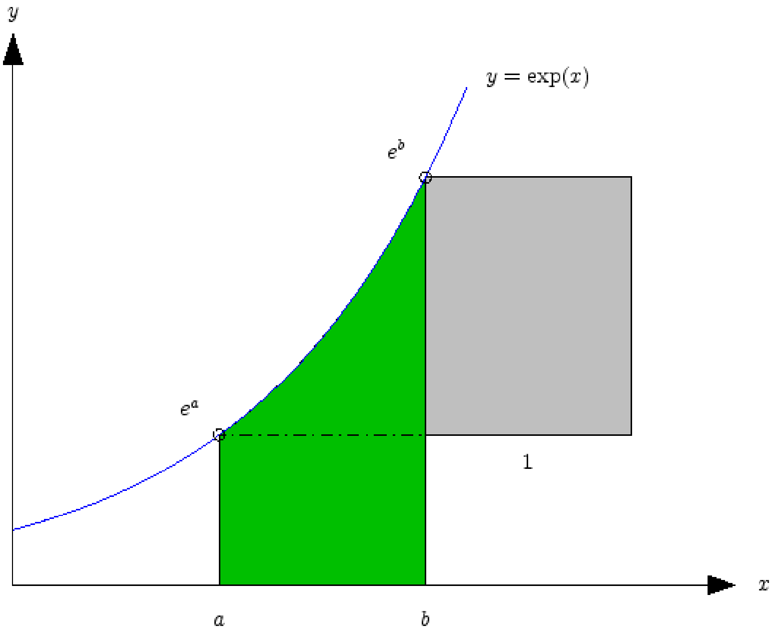
$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \left(\int_a^{b+h} f - \int_a^b f \right) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_b^{b+h} f \,.$$

د منځ ارزښت جملې پسې یا په تعقیب انتیګرال مساوي دی په $(b+h-b)\,f(c)$
د $c \in (b, b+h)$ سره.
پوله ارزښت برابر دی په $f(b)$. دا د ښي اړخ د مشتق سره سر خوري یا یو غړیز دی
لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

د اکسپننشل تابع مشتق بېرته اکسپوننشل تابع دی او له دې امله دی

$$\int_a^b e^x\,dx = e^b - e^a \,.$$

د د a او b ترمنځ ګراف لاندې سطحه برابره د ولاړګوډېزر(مستطیل) د سطحې سره د سور 1 او د تابع ارزښت دواټن د اوږدوالي په حیث.



د لوکايتم تابع $F(x) = \ln(x)$ مشتق $F'(x) = 1/x\,,\ x \in \mathbb{R}^+$ دی او له دې سره

$$\int_a^b 1/x\,dx = \ln(b) - \ln(a)\,, \quad a, b \in \mathbb{R}^+ .$$

د $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ يو بنستيز تابع $F(x) = \arctan x$ دی . د دې په تعقيب دی

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \arctan(1) - \arctan(0) = \frac{\pi}{4} .$$

د مشتقوني څخه لاس ته راځي، چې

$$F(x) = -\ln(\cos x)$$

د $f(x) = \tan x$ يو بنسټيز تابع دی

$$F'(x) = -\frac{1}{\cos x}(-\sin x).$$

په تعقيب دی:

$$\int_0^{\pi/4} \tan x \, dx = -[\ln(\cos x)]_0^{\pi/4} = -\ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) \approx 0.347\,.$$

ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

د M کتلې يو ستوری يو د کښولو ورشو توليدوي، چې د هغې له خوا په يوه کتله m يو زور $F(x) = \gamma \frac{mM}{x^2}$ واردوي . دلته γ د ګراويتيشن يا راکښنې قوه ده او x د دروندتکو ترمنځ واټن دی.

د $1/x^2$ لپاره يو لومړنی يا بتسټيز تابع $-1/x$ دی. د دې لپاره چې يو تن له واټن a و واټن b ته يوړولی شو ، بايد کار

$$\int_a^b F(x)\,dx = \gamma mM \int_a^b \frac{1}{x^2}\,dx = -[\gamma mM/x]_a^b = \gamma mM(1/a - 1/b)$$

سرته ورسيږي.

د a لپاره د ستوري د وړانګې سرره برابر او $b \to \infty$ کېدی شي د برابر اينوونې له لارې د کينيتيکي انرژي سره چې داسې په نامه د تېښتې چټکتيا v تاکي دا په دې معنا چې چټکتيا ، چې اړين ده، چې د يوه ستوري راکښنقوه پرېښودی شي يا راکښنقوې څخه ووځي:

$$\frac{m}{2}v^2 = \gamma\frac{mM}{a} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\gamma\frac{2M}{a}}\,.$$

په اکواتور کې د ځمکې لپاره $v = 11.2\,\text{km/s}.$ دی .
ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

د بنسټيزو توابعو لومړني توابع**Stammfunktionen der Grundfunktionen**

لاندې جدول بنسټيزو توابعو $f(x)$ ته لومړني توابع $F(x)$ ښايي

$f(x)$	$F(x)$		$f(x)$	$F(x)$
$x^s\,,\ s \neq -1$	$x^{s+1}/(s+1)$		$1/x$	$\ln\lvert x\rvert$
$\exp(x)$	$\exp(x)$		$\ln(x)$	$x\ln(x) - x$
$\sin x$	$-\cos x$		$\cos x$	$\sin x$
$\tan x$	$-\ln(\cos x)$		$\sin x \cos x$	$\sin^2(x)/2$
$1/(1+x^2)$	$\arctan x$		$1/\sqrt{1-x^2}$	$\arcsin x$

ټوټه- يا پارشل انتيګرالونه**Partielle Integration**

د مشتق د ضرب قانون $(fg)' = f'g + fg'$ څخه په ورته توګه فرمول بندي له
لارې د ناټاکلي انتیګرال لپاره راکوي:

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx\,.$$

په اړونده توګه د ناټاکلو انتیګرالونو

$$\int_a^b f'g = [fg]_a^b - \int_a^b fg'$$

لپاره باور لري. د لته دې په پام کې ونیول شي، چې د ژۍ ترم $[fg]_a^b$ ورکیږي، که د
دواړو توابعو څخه یو یې د انتروال پای ټکو کې صفر وي. په همدې توګه د پریودیکي
تابع لپاره د پریود اوږدوالي $(b-a)$ کې هم له منځه ځي.
لیکونکي: هیولیګ، کوپف

له $\int (1+x)^\alpha\,dx = \frac{1}{\alpha+1}\,(1+x)^{\alpha+1} + c$ څخه د $\alpha \neq -1$ لپاره لاس
ته راځي

$$\begin{aligned}\int \underset{u}{x}\underset{v'}{\sqrt{1+x}}\,dx &= x\frac{2}{3}(x+1)^{3/2} - \int 1\cdot\frac{2}{3}(1+x)^{3/2}\,dx\\ &= \frac{2}{3}x(1+x)^{3/2} - \frac{4}{15}(1+x)^{5/2} + c.\end{aligned}$$

په ورته توګه شمیرل کیږي

$$\begin{aligned}\int_0^1 \underset{u}{x}\underset{v'}{\sqrt{1-x}}\,dx &= \left[-x\frac{2}{3}(1-x)^{3/2}\right]_0^1 + \int_0^1 1\cdot\frac{2}{3}(1-x)^{3/2}\,dx\\ &= 0 - \left[\frac{4}{15}(1-x)^{5/2}\right]_0^1 = \frac{4}{15}\,.\end{aligned}$$

یو لوګاریتمي ضریب د یو ځل ټوټه انتیګرالونې له لارې له منځه تلی شي.
د بیلګې په توګه دی

$$\int x^n(\ln|x|)\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1}(\ln|x|) - \int \frac{1}{n+1}x^{n+1}\,\frac{1}{x}\,dx$$
$$= \frac{1}{n+1}x^{n+1}(\ln|x|) - \frac{1}{(n+1)^2}x^{n+1} + c.$$

په دې ډول کیدی شي په خوښه پولینومونه

$$\sum_{j,k} a_{j,k}x^j(\ln|x|)^k$$

په x او $\ln|x|$ کې انتیګرال شي یا انتیګرال ونیول شي.

لیکونکي: هیولیګ، کوپف

د ټوټه اتیګرالونې له لارې کېدی شي د پولینوم درجه کمه شي. د بېلګې په توګه دی

$$\int x^n e^x\,dx = x^n e^x - \int n x^{n-1}e^x\,dx$$
$$= x^n e^x - n x^{n-1}e^x + \int n(n-1)x^{n-2}e^x\,dx$$
$$= \cdots$$
$$= e^x\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\frac{n!}{k!}x^k + c.$$

په دې توګه نېدی شي د $n \in \mathbb{N}$, $x^n\,e^{\beta x}$, بنې ترمونوکمبینېشن په خوښه انتیګرال شي یا یې انتیګرال ونیول شي. لیکونکي: هیولیګ، کوپف

د $x^n \cos x$ او $x^n \sin x$ ضربونه کېدی شي د ډېرواره ټوټه انتيګرالونې له لارې انتيګرال شي:

$$\int x^n \left\{ \begin{array}{c} \cos x \\ \sin x \end{array} \right\} dx = x^n \left\{ \begin{array}{r} \sin x \\ -\cos x \end{array} \right\} - \int n x^{n-1} \left\{ \begin{array}{r} \sin x \\ -\cos x \end{array} \right\} dx$$
$$= \ldots .$$

د تکرار ټوټه انتيګرالوني له لارې بالاخره ضريب x^k له منځه ځي. په دې توګه کېدی شي د په خوښه پولينوم توابعو لومړنی تابع په x , $\sin x$ او $\cos x$ کې وشمېرل شي.
ليکونکي: هيوليګ، کوپف

له $\cosh'(x) = \sinh(x)$, $\sinh'(x) = \cosh(x)$ څخه لاس ته راځي

$$\int e^x \sinh(x)\, dx = e^x \cosh(x) - \int e^x \cosh(x)\, dx$$
$$= e^x \cosh(x) - e^x \sinh(x) + \int e^x \sinh(x)\, dx$$

او له دې سره لکه چې برېښي
$$e^x \cosh(x) = e^x \sinh(x),$$

يو په ښکاره توګه مخامخوالی يا تضاد دی.
ناټيکاوی په اخرنظ پايونه کې پروت دی – د انتيګرالنيوني ثابته بايد په پام کې ونيول شي:
$$e^x \frac{e^x + e^{-x}}{2} = e^x \frac{e^x - e^{-x}}{2} + c.$$

د $c = 1$ ټاکنه مو ټيکې نتيجې ته لارښودوي.
ليکونکي: هيوليګ، کوپف

د ټوټه انتيګرالوني سره لرو

سرليک

$$\int e^{ax}\sin(bx)\,dx = \frac{1}{a}e^{ax}\sin(bx) - \frac{b}{a}\int e^{ax}\cos(bx)\,dx$$
$$= \frac{1}{a}e^{ax}\sin(bx) - \frac{b}{a^2}e^{ax}\cos(bx) - \frac{b^2}{a^2}\int e^{ax}\sin(bx)\,dx,\ (a \neq 0).$$

د ويم ځل انتيګرالونه مو بېرته برابر انتيګرال ته ته بيايي، او له دې سره لاس ته راځي:

$$\int e^{ax}\sin(bx)\,dx = \frac{ae^{ax}\sin(bx) - be^{ax}\cos(bx)}{a^2+b^2} + c$$

بديلي سړى

کړى شي د اويلر-مويورې فرمول هم د پورته ډول انتيګرال شمېرنو ته استعمال کړي. د

$$\cos(t) = \mathrm{Re}\left(\exp(\mathrm{i}t)\right)$$

بېلګې په توګه له لاس ته راځي

$$\int_0^\pi e^t\cos(t)\,dt\,\mathrm{Re}\left(\int_0^\pi \exp(t+\mathrm{i}t)\,dt\right) = \mathrm{Re}\left(\left[\frac{\exp(t+\mathrm{i}t)}{1+\mathrm{i}}\right]_0^\pi\right)$$
$$= \qquad \mathrm{Re}\left(\frac{-e^\pi - 1}{1+\mathrm{i}}\right) = -(e^\pi+1)/2\,.$$

ليکونکي: هيوليک، کوپف

له

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin(nx)\sin(mx)\,dx = -\int_{-\pi}^{\pi} n\cos(nx)(-\frac{1}{m}\cos(mx))\,dx$$
$$= \frac{n^2}{m^2}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(nx)\sin(mx)\,dx$$

د $m \neq n$ لپاره لرو

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin(nx)\sin(mx)\,dx = 0\,.$$

په پام کې دې ونيول شي، چې د تابع پريوديځيتي يا تل بېرته رتګرځېدنه په تړته انتيګرالونه کې د ژى شرايط له منځه ځي. د $m = n$ لپاره د لومړي مساوات او

$$\sin^2 + \cos^2 = 1$$

ځخه لاس ته راځي

$$2\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2(nx)\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}1\,dx=2\pi\,.$$

په ورته توګه سړی د تابع $\cos(mx)$ اورتوګونالیټي ښايي.
ليکونکي: هيوليګ، کوپف

دلتا - تابع Delta-Funktion

د ديراکDiracsche دلتا-تابع δ د

$$\int_{\mathbb{R}}\delta f=f(0)$$

له لارې تعريف دی، د کوم سره چې يو په خوښه ناپرېکيدونکی تابع دی، چې د يوه انتروال (a,b) دباندې وکېږي. د ټوټه انتيګرالوني په مرسته يا په يوه پوله پروسه کېدی شي δ د Heavisideschen ټوپتابع د مشتق ټوليزوالي

$$H(x)=\begin{cases}1, & \text{für } x>0\\ 0, & \text{sonst}\end{cases}$$

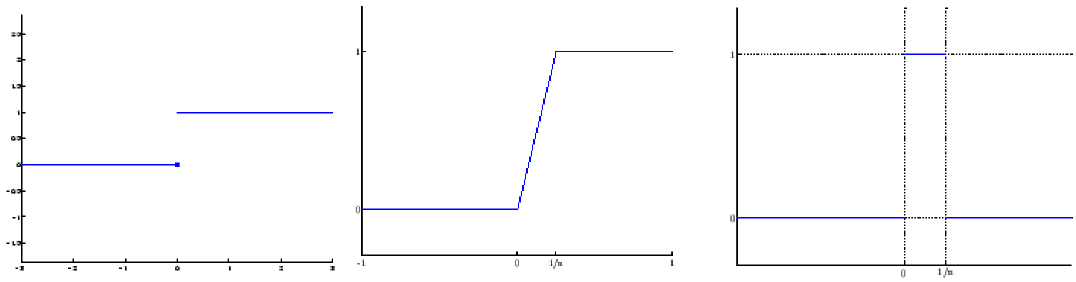
په حيث تشريح کيدی شي.

ليکونکي: هيوليګ، کوپف

که $0\in(a,b)$ وي، نو د ټوټه انتيګرال سره لاس ته راځي

$$\int_{-a}^{b}H'f=[Hf]_a^b-\int_a^b Hf'$$
$$=-\int_0^b f'=-[f]_0^b$$
$$=f(0)$$

او له دې سره $\int H'f=\int\delta f$.



Heaviside-Funktion
H

نږدېوالی
H_n
Näherung
der Heaviside-Funktion

نږدېوالی
$\delta_n = H_n'$
Näherung
der Delta-Funktion

په د پوله پروسي سره د جوړ شوي د Heavyside-Funktion اپروکسيميشن سره سرې بديل لاس ته راوړي :

$$\int_a^b H_n' f = n \int_0^{1/n} f = f(t_n) \to f(0) .$$

له دې سره د اخرني مساوات لپاره د منځ ا رزښت جمله کارول شوې.
ليکونکي: هيوليګ، کوپف

د متحولو – يا اووبنتونو بدلون **Variablensubstitution**

د ځنځيري قاونو

$$\frac{d}{dx} F(g(x)) = f(g(x)) g'(x), \quad f = F',$$

ځخه د د بدلون $y = g(x)$ لپاره لومړنيو تابع جوړولو له لارې لاس ته راځي

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = F(y) + c = \int f(y)\,dy\,.$$

په ورته توګه د ټاکلي انتيګرال لپاره باور لري

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = F(g(b)) - F(g(a)) = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\,dy$$

.

د دفرنشل کونو په ورسته کېدی شي دا فرمول په لاندې بنه

$$\int_a^b f(g(x))\frac{dy}{dx}\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\,dy$$

وليکل شي.

يو ساده ځانګړی حالت يو کرښيز متحول بدلون دی

$$x \mapsto y = px + q\,.$$

په دې حالت کې دی

$$\int f(px+q)\,dx = \frac{1}{q}\,F(y) + c$$

همداسې

$$\int_a^b f(px+q)\,dx = \frac{1}{p}\,[F]_{pa+q}^{pb+q}\,.$$

ليکونکي: هيوليګ، کوپف

د انتيګرال

$$\int_0^{\pi/\varepsilon} \frac{\sin \varepsilon x}{x} dx$$

لپاره بدلون $dx = \frac{1}{\varepsilon} du$ $u = \varepsilon x\,,$ او د انتيګرالونې پولو ترانسفورميشن $x = \pi/\varepsilon \leftrightarrow u = \pi$ راکوي

$$\int_0^{\pi/\varepsilon} \frac{\sin \varepsilon x}{x} dx = \int_0^{\pi} \frac{\sin u}{u} du.$$

په ټولیزه توګه د یو بدلون $u = rx$ سره باور لري

$$\frac{dx}{x} \to \frac{du}{u}$$

او له دې سره

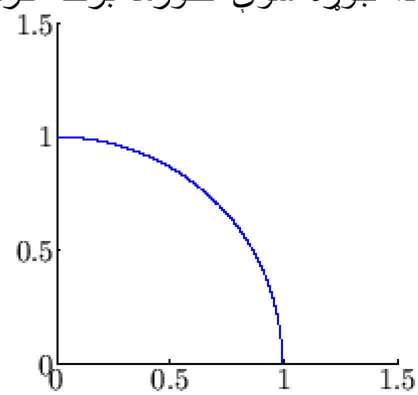
$$\int_a^b f(rx)\frac{dx}{x} = \int_{ra}^{rb} f(u)\frac{du}{u}.$$

ليکونکي: هيوليګ، کوپف

تابع

$$f(x) = \sqrt{1-x^2}, \quad 0 \le x \le 1,$$

دا جوړه شوې څلورمه برخه ګردۍ يا څلورمه برخه داېره ښايي



له دې سره د انتيګرال لپاره باور لري

$$\int_0^1 f(x)dx = \frac{\pi}{4}.$$

که بدلن $x = 0 \to u = 0$, $dx = \cos u\, du$, $x = \sin u$ وکارول شي او $x = 1 \to u = \frac{\pi}{2}$ ، نو لاس ته راځي

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^{\pi/2} \cos^2 u\,du = \frac{1}{2}\,\frac{\pi}{2}\,,$$

لکه ځنګه چې انتظار کېده. د اخرني مساوات لپاره دا لاندې

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 u + \cos^2 u\,du = \frac{\pi}{2}$$

وکارول شو.

په عجيبه ډول بدلون $x = \cos u,\quad dx = -\sin u\,du$,

$x = 0 \to u = -\pi/2$ او $x = 1 \to u = 2\pi$ په برېښنده توګه یوه ناټيکه نتيجه راکوي:

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_{-\pi/2}^{2\pi} -\sin^2 u\,du = -\frac{5\pi}{4}.$$

څه ناټيک وو؟ په کلکه نيولې توګه باور لري

$$\sqrt{1-\cos^2 u} = |\sin u|$$

او له دې سره

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_{-\pi/2}^{2\pi} |\sin u|(-\sin u)du = \frac{\pi}{4}.$$

د لاندې انتيګرال لپاره

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+5}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x-3)^2-4}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{((x-3)/2)^2-1}}$$

بدلون $y = (x-3)/2 \quad dx = 2dy$, راکوي

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+5}} = \int \frac{dy}{\sqrt{y^2-1}}\,.$$

د ورپسې بدلون f $y = \cosh t$, $dy = \sinh t\, dt$ سره د

$\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$ له امله لاس ته راځي

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+5}} &= \int \frac{\sinh t\, dt}{\sinh t} \\
&= \int dt = t + c \\
&= \operatorname{arcosh} y + c \\
&= \operatorname{arcosh}((x-3)/2) + c \\
&= \ln\left(\frac{x-3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{x^2-6x+5}\right) + c
\end{aligned}$$

له دې سره د بېلګې په توګه لاس تهراځي

$$\begin{aligned}
\int_5^7 \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+5}} &= \ln(2 + \frac{1}{2}\sqrt{2}) - \ln 1 \\
&= \ln(2 + \frac{1}{2}\sqrt{2}).
\end{aligned}$$

که په انتګرالېدونکي کې دننه مشتق پېژندل کېږي، لکه د بېلې په توګه د

$$\int \frac{(\ln x)^2}{x}\, dx\,,$$

لپاره، نو د بدلون قانون په ځانګړې توګه ساده دی. په دې بېلګه کې

$$y = g(x) = \ln x\,, \quad g'(x) = \frac{1}{x}$$

ځای په ځای کوو او لاس ته راوړو

$$\int g(x)^2\, g'(x)\, dx = \int y^2\, dy = \frac{1}{3}y^3 + c\,.$$

د په ښېټ یا معکوس بدلون سره لرو

$$\int \frac{\ln x^2}{x}\,dx = \frac{1}{3}(\ln x)^3 + c\,.$$

لیکونکي: هیولیګ، کوپف

په تیوپیکي توګه سړی هڅیږي چې د بدلون له لارې انتیګرالېدونکی ساده کړي. د بېلګې په توګه د

$$\int \frac{e^{3y}}{e^{2y}-1}\,dy$$

لپاره نږدې دی چې

$$y = g(x) = \ln x \quad \Leftrightarrow \quad x = e^y$$

کیږدي. دا د

$$\frac{dy}{dx} = g'(x) = \frac{1}{x} = e^{-y}$$

له امله دا ترانسفورمي شوی ناټاکلی انتیګرال راکوي

$$\int \frac{x^3}{x^2-1}\,\frac{dy}{dx}\,dx = \int \frac{x^2}{x^2-1}\,dx = \int \left(1 + \frac{1}{x^2-1}\right)\,dx$$

$$\int 1\,dx + \int \frac{1}{x^2-1}\,dx = x + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + c\,.$$

د $x = e^y$ دبېرته بدلون له لارې بالاخره لاس ته راځي

$$F(y) = e^y + \frac{1}{2}\left|\frac{e^y-1}{e^y+1}\right| + c\,.$$

لیکونکي: هیولیګ، کوپف

لومړی (بنسټیزه -) تابع

$$\int \frac{dx}{\cos x}$$

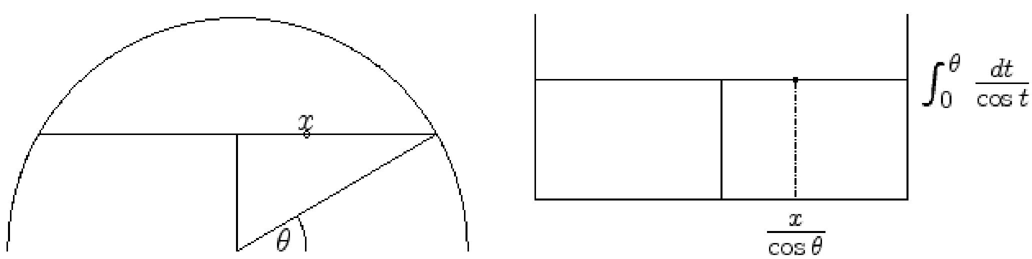
کيدی شي د بدلون سره

$$u = \frac{1}{\cos x} + \tan x = \frac{1 + \sin x}{\cos x}, \qquad du = \left(\frac{\sin x}{\cos^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} \right) dx,$$

وشمېرل شي:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\cos x} &= \int (\cos x)^{-1} \left(\frac{\sin x}{\cos^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} \right)^{-1} du \\ &= \int \frac{du}{u} = \ln |u| + c \\ &= \ln \left| \frac{1}{\cos x} + \tan x \right| + c. \end{aligned}$$

يو کارونه يې د Mercator-Projektion دی. له دې سره د ځمکې بورته سطحه کونجريښتونې په سطحه برېوځي.



د سور گردی (طول البلد) له دې سره د $1/\cos\theta$ په نسبت سره غزيږي.

ليکونکي: هيوليک، کوپف

ساده راشنل انتيگراليدونکې د ساده قطب سره
Elementare rationale Integranden mit einfachen Polen

د درې بنستيتيوپه راشنل توابعو لومړنی توابع دي

$$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\ln|x+b/a|+c$$

$$\int \frac{dx}{(x-a)^2+b^2} = \frac{1}{b}\arctan\left(\frac{x-a}{b}\right)+c$$

$$\int \frac{(x-a)dx}{(x-a)^2+b^2} = \frac{1}{2}\ln((x-a)^2+b^2)+c$$

لیکونکي: هیولیګ، کوپف

فرمولونه کېدی شي ترلي د مشتق له لارې پسي وشمېرل شي. بدیل يې د انتیګرال ساده بڼه بدلونونه شوني دي.

له $\int dy/y = \ln|y|+c$ لاس ته راځي

$$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\int \frac{dx}{x+b/a} = \frac{1}{a}\ln|x+b/a|+c.$$

د بڼه بدلون پسې

$$\int \frac{dx}{(x-a)^2+b^2} = \frac{1}{b^2}\int \frac{dx}{((x-a)/b)^2+1}$$

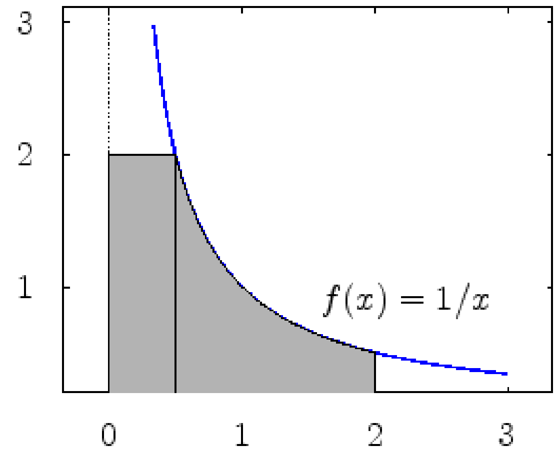
بدلون $dx = b\,dy$, $y = (x-a)/b$ راکوي

$$\frac{1}{b}\int \frac{dy}{y^2+1} = \frac{1}{b}\arctan y + c = \frac{1}{b}\arctan\left(\frac{x-a}{b}\right)+c.$$

د بدلون , $y = (x-a)^2+b^2$ سره لاس ته راځي

$$\int \frac{(x-a)\,dx}{(x-a)^2+b^2} = \frac{1}{2}\int \frac{dy}{y} = \frac{1}{2}\ln|y|+c$$

$$= \frac{1}{2}\ln((x-a)^2+b^2)+c.$$

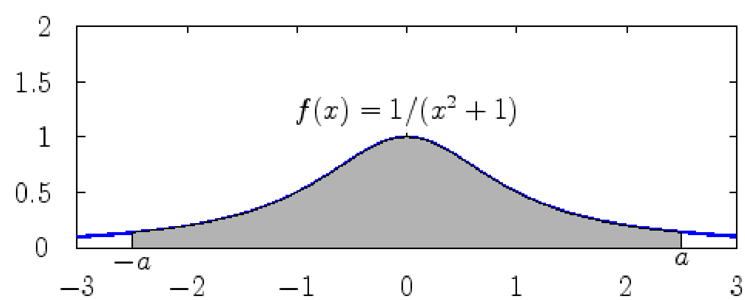


د خړې سطحې مساحت د

$$2\frac{1}{2}+\int_{1/2}^{2}\frac{1}{x}dx = 1+\ln 2-\ln\frac{1}{2} = 1+\ln 4$$

له لارې شمېرل کيږي.

ليکونکي: هيوليګ، کوپف



د $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ د ګراف لاندې سطحه داسې شمېرل کيږي

$$\lim_{a\to\infty}\int_{-a}^{a}\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a\to\infty}\arctan a-\arctan(-a) \longrightarrow \frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2} = \pi$$

ليکونکي: هيوليګ، کوپف

د

$$r(x) = \frac{3x+6}{2x^2-4x+10}$$

لومړی تابع ټاکلو لپاره، لومړی د مخرج مربعتکمیلونه جوړیږي:

$$2(x^2-2x+5) = 2((x-1)^2+2^2)\,.$$

په اړونده توګه صورت هم بڼه بدلیږي:

$$3(x+2) = 3((x-1)+3)\,.$$

له دې سره کېدی شي د ستاندارد افادې په توګه ټوټه یا تجزیه شي:

$$r(x) = \frac{3}{2}\,\frac{x-1}{(x-1)^2+2^2} + \frac{9}{2}\,\frac{1}{(x-1)^2+2^2}\,.$$

له دې سره لاس ته راځي

$$\int r(x)\,dx = \frac{3}{4}\,\ln\left((x-1)^2+4\right) + \frac{3}{4}\,\arctan\left(\frac{x-1}{2}\right) + c\,.$$

د ټاکلی انتیګرال $\int_1^3 r(x)\,dx$ لپاره سرې د پولو د په ځای اینښوونې له لارې لومړنی تابع لاس ته راوړي

$$\frac{3}{4}\left(\ln 8 - \ln 4 + \arctan(1) - \arctan(0)\right) = \frac{3}{4}\,\ln 2 - \frac{3}{16}\,\pi\,.$$

لیکونکي: هیولیګ،

ساده راشنل انتیګرالونه د زیاتواره قطب سره
Elementare rationale Integranden mit mehrfachen Polen

د $n \in \mathbb{N}$ لپاره دی

$$\int (x-a)^{-n-1}dx = -\frac{1}{n}(x-a)^{-n} + c\,.$$

د ډېرواره کمپلکس کنجوګيري قطبځايونو کې د اړونده مربع

$$q(x) = (x-a)^2 + b^2$$

ضريبونو لپاره باور لري

$$\int \frac{c(x-a)+d}{q(x)^{n+1}}\,dx = \frac{d(x-a)}{2b^2n\,q(x)^n} - \frac{c}{2n\,q(x)^n} + \frac{d(2n-1)}{2b^2n}\int \frac{dx}{q(x)^n}\,.$$

د ګراد يا درجې ردکشن د لومړنې تابع رکورزيو شمېرنه شوونې کوي.

ليکونکي: هيوليګ، کوپف

لومړنی فرمول د $y = x - a$ او $dx = dy$ د د بدلون له لارې لاس ته راځي:

$$\int (x-a)^{-n-1}dx = \int y^{-n-1}dy = -\frac{1}{n}y^{-n} + c\,.$$

د دويم فرمول د ښوونې لپاره لومړی يو ساده د رکوزيون فرمول منځ ته راځي.

د ټوټه انتيګرالونې سره لاس ته راځي

$$\begin{aligned}\int \frac{dy}{(1+y^2)^k} &= \frac{y}{(1+y^2)^k} + 2k\int \frac{y^2}{(1+y^2)^{k+1}}\,dy \\ &= \frac{y}{(1+y^2)^k} + 2k\left(\int \frac{dy}{(1+y^2)^k} - \int \frac{dy}{(1+y^2)^{k+1}}\right).\end{aligned}$$

له دې کتمتوالی منځ ته راځي

$$\int \frac{dy}{(1+y^2)^{k+1}} = \frac{y}{2k(1+y^2)^k} + \frac{2k-1}{2k}\int \frac{1}{(1+y^2)^k}\,dy\,.$$

له دې سره اوس د بدلون $y = \frac{x-a}{b}$ سره لاس ته راځي

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{((x-a)^2+b^2)^{n+1}} &= \frac{1}{b^{2n+2}}\int \frac{dx}{((\frac{x-a}{b})^2+1)^{n+1}}\\ &= \frac{1}{b^{2n+1}}\int \frac{dy}{(1+y^2)^{n+1}}\\ &= \frac{1}{b^{2n+1}}\left(\frac{y}{2n(1+y^2)^n}+\frac{2n-1}{2n}\int\frac{dy}{(1+y^2)^n}\right)\\ &= \frac{x-a}{2b^2n((x-a)^2+b^2)^n} \quad +\frac{2n-1}{2b^2n}\int\frac{dx}{((x-a)^2+b^2)^n}\,.\end{aligned}$$

ترم

$$\int \frac{c(x-a)}{((x-a)^2+b^2)^{n+1}}\,dx$$

کیدی شي د بدلون $y=(x-a)^2+b^2$ له لارې وشمیرل شي، څکه چې په صورت کې د y مشتق ځای لري:

$$\begin{aligned}\int \frac{c(x-a)}{((x-a)^2+b^2)^{n+1}}\,dx &= \frac{c}{2}\int\frac{dy}{y^{n+1}}\\ &= \frac{c}{2(-n)y^n}\\ &= -\frac{c}{2n((x-a)^2+b^2)^n}\,.\end{aligned}$$

لیکونکي: هیولیګ، کوپف

د انتیګرال

$$\int \frac{2x+1}{(x^2+9)^2}\,dx$$

لپاره په ټولیز فرمول کې د اېښوونې وروسته د ډېرواره قطبونو سره د $a=0, b=3, c=2, d=1$ او $n=1$ سره راکوي

$$\frac{-2}{2(x^2+9)}+\frac{x}{18(x^2+9)}+\frac{1}{18}\int\frac{1}{x^2+9}\,dx$$

او د بنه بدلون پسې

$$\frac{x-18}{18(x^2+9)}+\frac{1}{18}\left(\frac{1}{3}\arctan(\frac{x}{3})+c\right)$$
$$=\frac{x-18}{18(x^2+9)}+\frac{1}{54}\arctan(\frac{x}{3})+c'.$$

لیکونکي: هیولیګ، کوپف

د راشنلتوابعو انیګرالونه **Integration rationaler Funktionen**

د حقیقي ټوټه کسر ټوټه ونې له لارې کېدی شي یو حقیقي راشنل تابع د لاندې درې ساده بنسټیتوپ جمعي

$$ax^n\,,\quad \frac{c}{(ax+b)^n}\,,\quad \frac{c(x-a)+d}{((x-a)^2+b^2)^n}$$

د $n\in\mathbb{N}_0\,,\; a,b,c,d\in\mathbb{R}$ سره انځور شي. د لومړنیو توابعو په مرسته کېدی شي د دې بنسټیتوابعو لپاره د په خوښه راشنلتوابعو لپاره لومړنی توابع وټاکل شي.
لیکونکي: هیولیګ، کوپف

د

$$\int r(x)dx,\quad r(x)=\frac{x^5+10x^3+5^2-x+25}{x^4+8x^2-9}\,,$$

د شمېرلو لپاره لومړی یو ټوټه کسر ټوټه ونه سرته رسوو.
د پولینوم وېش پسې ،

$$r(x)=x+\frac{2x^3+5x^2+8x+25}{x^4+8x^2-9}\,,$$

اود مخرج ضریبونو جوړولو پسې

$$x^4+8x^2-9=(x+1)(x-1)(x^2+9)\,,$$

لاس ته راځي

$$r(x)-x=\frac{a}{x+1}+\frac{b}{x-1}+\frac{cx}{x^2+9}+\frac{d}{x^2+9}\,.$$

که د اصلي مجراج سره ضب شي، نو لاس ته راځي

$$2x^3+5x^2+8x+25$$

$$=\quad a(x-1)(x^2+9)+b(x+1)(x^2+9)+(cx+d)(x^2-1)$$

$$x^3(a+b+c)+x^2(-a+b+d)+x(9a+9b-c)+1(-9a+9b-d)$$

او د ضریبونو د پرتلې $a=-1$, $b=2$, $c=1$ او $d=2$ له لارې.
یوګوني ترمونه کېدی اوس ساده انتیګرال شي:

$$\int\frac{x^5+10x^3+5^2-x+25}{x^4+8x^2-9}$$

$$=\quad\int xdx+\int\frac{-dx}{x+1}+\int\frac{2dx}{x+1}+\int\frac{xdx}{x^2+9}+\int\frac{2dx}{x^2+9}$$

$$\frac{1}{2}x^2-\ln|x+1|+2\ln|x-1|+\frac{1}{2}\ln(x^2+9)+\frac{2}{3}\arctan\left(\frac{x}{3}\right)+c.$$

لیکونکي: هیولیګ، کوپف

د ساین او کوساین د ضرب انتیګرالونه

د $a^2\neq b^2$ لپاره د زیاتون-یا جمعې قضیې څخه لاس ته راځي

$$\int \sin(ax)\sin(bx)\,dx = \frac{\sin((a-b)x)}{2(a-b)} - \frac{\sin((a+b)x)}{2(a+b)} + c$$

$$\int \sin(ax)\cos(bx)\,dx = -\frac{\cos((a-b)x)}{2(a-b)} - \frac{\cos((a+b)x)}{2(a+b)} + c$$

$$\int \cos(ax)\cos(bx)\,dx = \frac{\sin((a-b)x)}{2(a-b)} + \frac{\sin((a+b)x)}{2(a+b)} + c\,.$$

په ځانګړې توګه د ټولګټیزو یا تامعددې a,b لپاره انټیګارل په پریودیکي انټروال $[-\pi,\pi]$ باندې ورکیږي. د ټوټه انټیګرالونې په مرسته لاس ته راځي

$$\int \sin^n(ax)dx - \frac{1}{na}\sin^{n-1}(ax)\cos(ax) + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2}(ax)dx$$

$$\int \cos^n(ax)dx\,\frac{1}{na}\sin(ax)\cos^{n-1}(ax) + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2}(ax)dx\,.$$

داسې کیدی شي اکسپوننت سوکڅسیو یا ټل کم شي. د $n = 2$ لپاره په ځانګړې توګه لاس ته راځي

$$\int \sin^2(ax)\,dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin(2ax)}{4a} + c$$

$$\int \cos^2(ax)\,dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin(2ax)}{4a} + c\,.$$

په ځانګړې توګه باور لري

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(nx)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nx)\,dx = \pi$$

د $n \in \mathbb{N}$ لپاره .
لیکونکي: هیولیګ، کوپف

که د لومړۍ کټمتوالي د ښي اړخ مشتق ونیول شي، نو سړی لاس ته راوړي

$$\frac{1}{2}\cos\left((a-b)\,x\right) - \frac{1}{2}\cos\left((a+b)\,x\right) .$$

د زیاتون – یا جمعي قضیه راکوي

$$\frac{1}{2}\left(\cos(ax)\cos(bx) + \sin(ax)\sin(bx) - \cos(ax)\cos(bx) + \sin(ax)\sin(bx)\right) =$$

$$= \sin(ax)\sin(bx) ,$$

کوم چې د کیڼ لور د انتیګرال سره سر خ وري.

د $\sin^2(ax)$ او $\cos^2(ax)$ لومړنی تابع کېدی شي د ټوټه انتیګرال سره وشمېرل شي. د بېلګې په توګه دی

$$\int \sin(ax)\sin(ax)\,dx$$

=

$$-\frac{1}{a}\cos(ax)\sin(ax) - \int \left(-\frac{1}{a}\cos(ax)\right)\left(a\cos(ax)\right)\,dx$$

$$= -\frac{1}{a}\cos(ax)\sin(ax) + \int \left(1 - \sin^2(ax)\right)\,dx .$$

د $\int \sin^2(ax)\,dx$ پسې حل کونه غوښتونی لومړنی تابع راکوي.
لیکونکي: هیولیګ، کوپف

د کمپلکس تریګونومتیکي توابعو انتیګرالونه

Integration komplexer trigonometrischer Polynome

له

$$\int e^{ikx}\,dx = \frac{1}{ik}e^{ikx} + c, \quad 0 \neq k \in \mathbb{Z},$$

څخه د کمپلکس تریګونومتریکي پولینومونو لپاره لاس ته راځي

$$p(x) = \sum_{|k| \leq n} c_k e^{ikx}\,,$$

داسې چې
dass

$$\int p(x)\,dx = c + c_0 x + \sum_{0 \neq |k| \leq n} \frac{c_k}{ik} e^{ikx}$$

همداسې
sowie

$$\int_{\pi}^{\pi} p = 2\pi c_0$$

باور لري.

د اوېلر-مویورې فرمول په مرسته کېدی شي په دې توګه په خوښه پولینومونه په $\sin(kx)$ او $\cos(kx)$ کې انتیګرال شي.

لیکونکي: هیولیګ، کوپف

د

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^4 x\,dx$$

شمdرلو ته د اوېلر-مویورې فرمول په مرسته انتیګرال په لاندې توګه لیکل کیږي

$$\frac{1}{16}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)^4 = \frac{6}{16} + \sum_{k \neq 0} c_k e^{ikx}$$

او $2\pi\frac{6}{16} = \frac{3}{4}\pi$ د انتیګرال ارزښت په توګه لاس ته راوړي.

بدیلي کیدی شي ټوټه انتیګرال وکارول شي:

$$\begin{aligned}\int \sin^4 x dx &= \int \sin x \sin^3 x\, dx \\ &= -\cos x \sin^3 x + 3\int \cos^2 x \sin^2 x\, dx \\ &= -\cos x \sin^3 x + 3\int \sin^2 x\, dx - 3\int \sin^4 x\, dx.\end{aligned}$$

که په $\sin^4 x$ انتیګرال بنی لور ته راوړل شي، نو د درجې کموالی راکوي

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^4 x\, dx = -\frac{1}{4}\left[\cos x \sin^3 x\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{3}{4}\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x\, dx\,.$$

د

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x\, dx = \pi$$

په مرسته سړی $\frac{3}{4}\pi$ هم د انتیګرال ارزښت په توګه لاس ته راوړي
لیکونکي: هیولیک، پفایل

تریګونومتریکي بدلونونه Trigonometrische Substitutionen

د لاندې بدلونونو په مرسته کېدی شي د ساده الجبري انتیګرالیدونکو یوه لړۍ اکسپلیځیت یا په ښه هڅرګنده توګه وشمېرل شي.

$$
\begin{array}{lll}
x = a\sin t: & dx = a\cos t\,dt & \sqrt{a^2-x^2} = a\cos t \\
x = a\tan t: & dx = a/\cos^2 t\,dt & \sqrt{a^2+x^2} = a/\cos t \\
x = a/\cos t: & dx = a\sin t/\cos^2 t\,dt & \sqrt{x^2-a^2} = a\tan t
\end{array}
$$

په بل حالت کې باید د ریښې د پروت محور متحولې لومړی په مربعیز تکمیلېدونکي بڼه راړل شي.

لیکونکي: هیولیګ، پفایل

د انتیګرال

$$\int_0^{1/2} \sqrt{1-x^2}\,dx$$

لپاره بدلون $x = \sin t,\ dx = \cos t\,dt$ او د پولو اعیارول $x = 0 \rightarrow t = 0$ او $x = 1/2 \rightarrow t = \pi/6$ راکوي

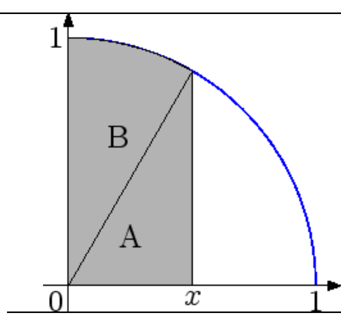
$$\int_0^{\pi/6} \cos^2 t\,dt = \left[\frac{1}{2}(\sin t\cos t + t)\right]_0^{\pi/6} = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{8}\,.$$

ناټاکلی انتیګرال دی

$$\int \sqrt{1-x^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\arcsin x + c\,.$$

انتیګرال کیدی شي د یوه ساده هندسي یا ځمکګچیز اند(فکر) سره هم وټاکل شي

لکه د څیرې څخه چې لیدل کیږي، د $\sqrt{1-x^2}$ د ګراف لاندې سطحه په دوه برخسطحو ودانه یا جوړه ده.



د درېکوډي سطحي مساحت $A = \frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}$ دی او د ګردی برخط یا قطاع مساحت د $t = \arcsin x$ کونج سره $B = \frac{1}{2}t = \frac{1}{2}\arcsin x$ ده. د دې سطحو د

مساحت جمعه کیدل غوښتونې سطحه راکوي.
لیکونکي: هیولیګ، کوپف

د انتیګرال

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$$

$$dx = 1/\cos^2 t\, dt$$

لپاره د بدلون $x = \tan t,$ څخه لاس ته راځي

$$\int \frac{dt/\cos^2 t}{\tan t/\cos t} = \int \frac{dt}{\sin t} = \ln|\tan\frac{t}{2}| + c,$$

د کوم سره چې اخرنی مساوات د ښی اړخ د مشتق نیولو له لارې ازمایل کېدی شی.
د بېرته بدلون له لارې لاس ته راځي

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}} = \ln|\tan(\frac{1}{2}\arctan x)| + c.$$

له دې سره د بېلګې په توګه لاس ته راځي

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}} &= \ln|\tan\frac{\pi}{4}| - \ln|\tan\frac{\pi}{8}| \\ &= \ln 1 - \ln\left(\frac{\frac{1}{2}\sqrt{2}}{1+\frac{1}{2}\sqrt{2}}\right) \\ &= \ln(1+\sqrt{2}).\end{aligned}$$

لیکونکي: هیولیګ، کوپف

د انتیګرال

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+5}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x-3)^2-4}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{((x-3)/2)^2-1}}$$

لپاره بدلون $y=(x-3)/2$, $dx=2dy$ راکوي

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+5}} = \int \frac{dy}{\sqrt{y^2-1}}.$$

د پسي بدلون $y=\frac{1}{\cos t}$, $dy=\frac{\sin t}{\cos^2 t}\,dt, \sqrt{y^2-1}=\tan t$ n سره لاس ته راځي

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+5}} = \int \frac{dt}{\cos t} = \ln\left|\frac{1}{\cos t}+\tan t\right| + c,$$

د کوم سره چې اخرنی برابروالی د ښی خوا د مشتق نیوني له لارې ازمایل کیدی شي.
د په څټ یا معکوس بدلون پسې د

$$\sin t = \sqrt{1-(1/y)^2}, t = \arccos y = \arcsin\sqrt{1-(1/y)^2}$$

سره لومړنی تابع دلاس ته راځي

$$\ln\left|y+y\sin\left(\arccos\frac{1}{y}\right)\right| + c = \qquad \ln\left|y+y\sqrt{1-\left(\frac{1}{y}\right)^2}\right| + c$$

$$= \ln\left|\frac{x-3}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{x^2-6x+5}\right| + c.$$

لیکونکي: هیولیګ، کوپف

د ساین او کوساین راشنل توابع
Rationale Funktionen von Sinus und Cosinus

د بدلون

$$x = \tan(t/2)$$

سره د يوه په خوښه راشنل تابع r لپاره لاس ته راځي

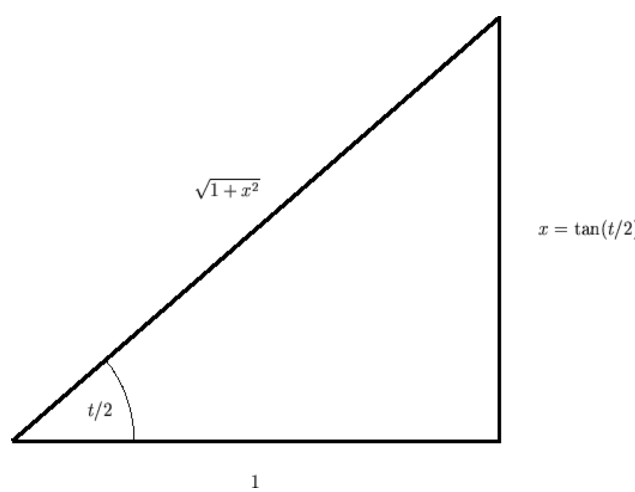
$$\int r(\cos t, \sin t)\, dt = \int r\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}, \frac{2x}{1+x^2}\right) \frac{2}{1+x^2}\, dx\,.$$

له دې سره تريګونومتريکي تابع کېدی شي په يوه راشنل انتيګرال واړوي، کوم چې د ټوټه کسر ټوټه ونې سره شمېرل کېدی شي.

ليکونکي: هيوليګ، اپريش

لکه د څيرې څخه چې ليدل کيږي، باور لري

$$\cos(t/2) = 1/\sqrt{1+x^2}\,, \quad \sin(t/2) = x/\sqrt{1+x^2}$$



له دې لاس ته راځي

$$dx = \frac{1}{2}\,\frac{1}{\cos^2(t/2)}\, dt = \frac{1}{2}\,(1+x^2)\, dt$$

همداسې

$$\cos t = \cos^2(t/2) - \sin^2(t/2) = \frac{1-x^2}{1+x^2}\,,$$

$$\sin t = 2\cos(t/2)\sin(t/2) = \frac{2x}{1+x^2}\,.$$

ليکونکي: هيوليګ، اپرين

د بدلون $x = \tan(t/2)$ سره لاس ته راځي

$$\int \frac{dt}{\sin t} = \int \frac{1+x^2}{2x}\,\frac{2}{1+x^2}\,dx$$

$$= \int \frac{dx}{x} = \ln|\tan(t/2)| + c.$$

په اړونده تګه لاس ته راځي

$$\int \frac{dt}{\cos t} = \int \frac{1+x^2}{1-x^2}\,\frac{2}{1+x^2}\,dx$$

$$= \int \left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\right) dx$$

$$= \ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + c\,.$$

د $x = \tan(t/2)$ د بېرته بدلون پسې لاس ته راځي

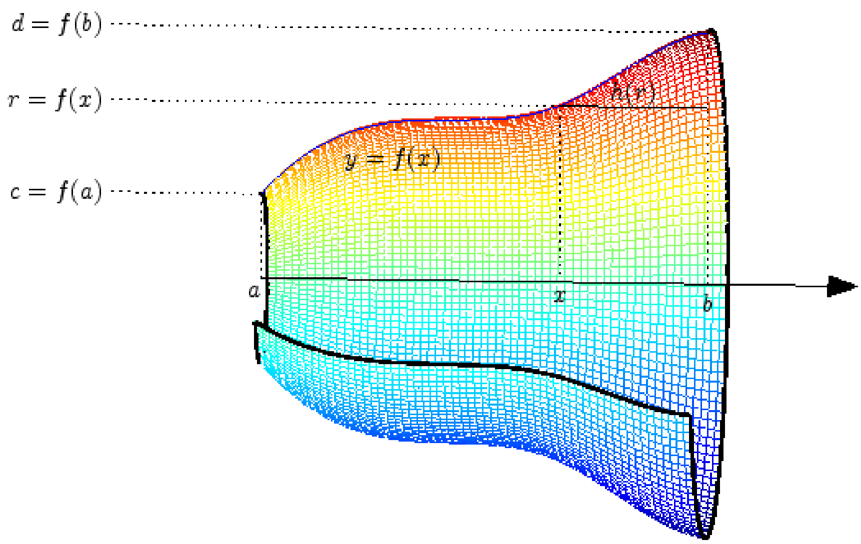
$$\int \frac{dt}{\cos t} = \ln\left|\frac{1+\tan(t/2)}{1-\tan(t/2)}\right| + c\,.$$

ليکونکي: هيوليګ، اپرين

د څرخېدونو بدنونو ډکی یا حجم Volumen von Rotationskörpern

د V ډکی حجم د x په محور جوړ شوي بدن د تابع ګراف $r = f(x) \geq 0$,
$a \leq x \leq b$
د څرخون له لارې کېدی شي انتيګرېشن له لارې په ګردی ډوله غوڅي يا تقاطع باندې شمېرل کيدی شي:

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 \, dx \, .$$

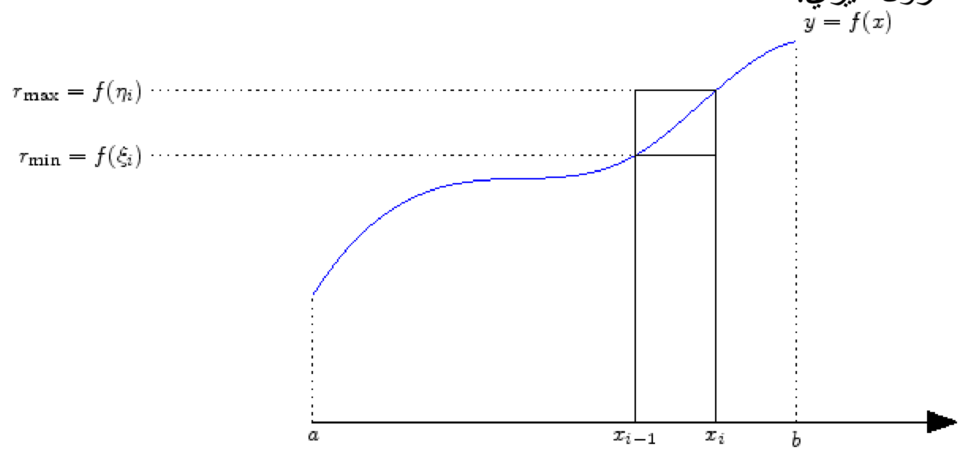


بديلي کېدی شي د توتې پوښ باندې انتيګرال شي.

$$V = \pi c^2 (b - a) + 2\pi \int_c^d r \, h(r) \, dr \, ,$$

چيرته چې c همداسې d مينيمال همداسې ماکسيما وړانګه r او $h(r)$ په بدن کې خوندي توتې پوښ ټول جګوالی دی د وړانګې r سره. دا واريانت له ټولو د همغږيز وړانګې تابع f لپاره موخ وره ده.
ليکونکي: هيوليک، هيورنر

د لومړي فرمول د ښووني لپاره په څېره کي کښل شوی اپروکسیمیشن   یا نږدېوالی کارول کیږي.



یوه ټوټه کوني Δ یوه انتروال $, i = 1 \ldots n,$ $[x_{i-1}, x_i]$ لپاره کېدی شي ډکی(حجم) د یوې توټي

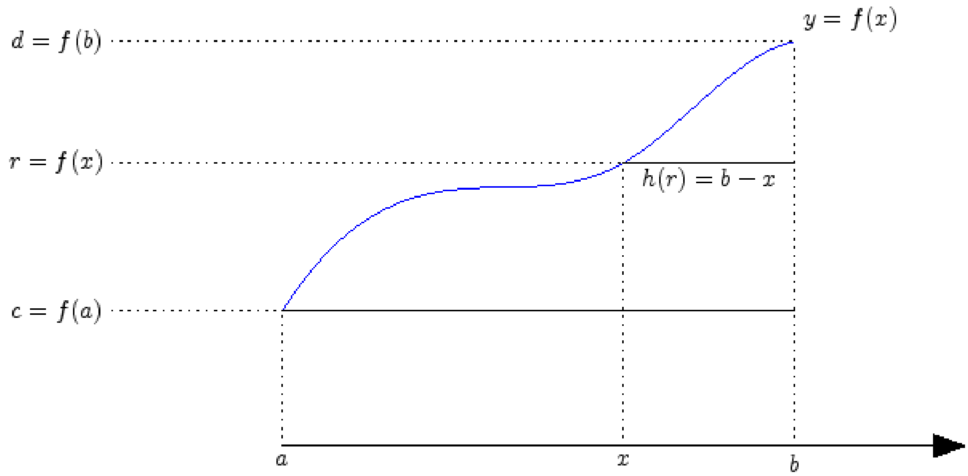
له لارې د مینیمال وړانګې $f(\xi_i)$ سره او یوې توټي د ماکسیمال وړانګې $f(\eta_i)$ سره رابند شي. د ټول حجم V لپاره نو بیا باور لري

$$\pi \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)^2 \Delta x_i \leq V \leq \pi \sum_{i=1}^{n} f(\eta_i)^2 \Delta x_i \,,$$

د $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ سره. دواړه دباندني ترمونه د ریمن-جمعه ده، چې د انتیګرال ارزښت لور ته ځي، یعني باور لري

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 \, dx.$$

ددویم فرمول د ښووني لپاره لومړی نیول کیږي، چې f همغږیز جګېدونکی دی.



د $dr = f'(x)\,dx$, $r = f(x)$ همداسې د $x = f^{-1}(r)$ سره لاس ته راځي

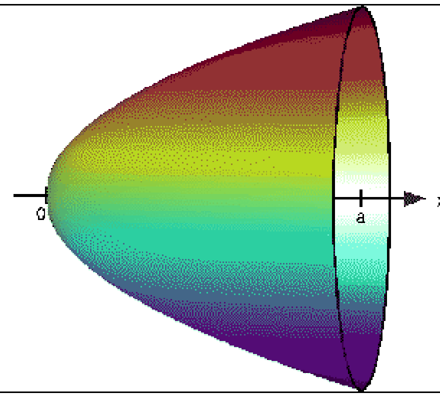
$$
\begin{aligned}
2\pi \int_{c=f(a)}^{d=f(b)} h(r) r\,dr &= \pi \int_a^b \underbrace{(b-x)}_{u}\underbrace{2f(x)f'(x)}_{v'}\,dx \\
&= \pi\,(b-x)f(x)^2\Big|_a^b + \pi \int_a^b f(x)^2\,dx \\
&= \underbrace{-\pi(b-a)c^2}_{\text{innerer Zylinder}} + \pi \int_a^b f(x)^2\,dx\,,
\end{aligned}
$$

څه چې دويم فرمول په ګوته کوي.

د همغږيز ټيټېدونکي توابعو لپاره کېدی شي په ورته توګه مخ ته ولاړ شو. په توليز حالت کې دا د همغږيزوالي ورشو د ټوټه کونې له لارې لاس ته راځي

ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

دا څېره شوی پارابولویید د کږې یا منحني
$y=\sqrt{x}$
د څرخون یا څرخېدو له
لارې د x په محور څېره شوی .



د څرخیدونکي بدن د څرخیدني قانون سره سم ډکی یا حجم دی

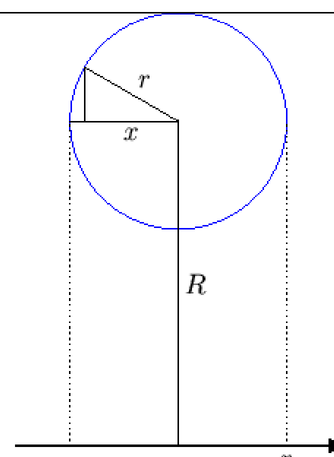
$$\pi\int_0^a\left(\sqrt{x}\right)^2\,dx=\pi\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^a=\frac{1}{2}\pi a^2\,.$$

بدیلي د توتي پوښ بادي انتیګرلوني له لارې لاس ته راوړي

$$2\pi\int_0^{\sqrt{a}}r(a-r^2)dr=2\pi\left[-\frac{1}{4}(a-r^2)^2\right]_0^{\sqrt{a}}=\frac{1}{2}\pi a^2\,.$$

لیکونکي: هیولیک، هیورنر

یو توروس (د ګردی یا داېرې کږی
(Torus دیوې ګردی دڅرخون څخه منځ
ته راځي د وړانګې r سره په یوه محور د
منځ ټکي څخه په R واټن.



ډکی یا حجم د دوه څرخیدونکو بدنونو د کمښت څخه شمیرل کیږي

$$V = \pi \int_{-r}^{r} \left(R + \sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 dx - \pi \int_{-r}^{r} \left(R - \sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 dx$$

$$= 4\pi \int_{-r}^{r} R\sqrt{r^2 - x^2}\, dx\,.$$

د بدلون $x = r\ \sin\varphi$, $dx = r\ \cos\varphi\, d\varphi$ سره لاس ته راځي

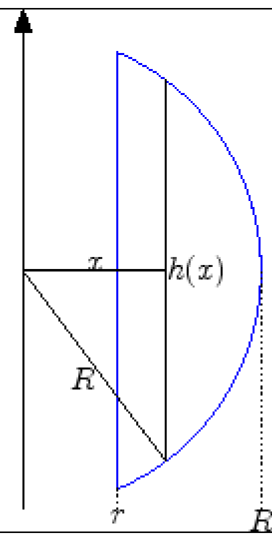
$$V = 4\pi R r \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\varphi\, r \cos\varphi\, d\varphi$$

$$= 4\pi R r^2 \frac{\pi}{2} = 2\pi^2 R r^2\,,$$

ځکه چې

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2\varphi\, d\varphi = \frac{\pi}{2}\,.$$

لکه چې څېره شوی یو له غونډاري د R په وړانګي په پراته محور د وړانګې r سره رابیله شوې توته ده.



د دې لپاره چې ډکي یا حجم شمېرو، د وړانګې $x,\ r \le x \le R$ سره په توته پوښ انتیګرال نیولکیږي . د $R = 5, r = 3$ لپاره د $h(x) = 2\sqrt{R^2 - x^2}$ سره لاس ته راځي

$$V = 2\pi \int_r^R 2x\sqrt{R^2 - x^2}\, dx = 2\pi \left[-\frac{2}{3} \left(R^2 - x^2\right)^{3/2} \right]_r^R$$
$$= \frac{4}{3}\pi(25-9)^{3/2} = \frac{256}{3}\pi\,.$$

د يوې کرښې يا منحني اوږدوالی **Länge einer Kurve**

د يوې کرښي L اوږدوالی د ناپرېکېدونکي مشتقوړ پارامتريک کولو $t \mapsto p(t)$ سره، $a \le t \le b$ ، دی

$$\int_a^b |p'(t)|\, dt\,.$$

پّ ځانګړې توګه د يوې کرښي لپاره په xy -سطحه د پارامتريک انځورونې $p(t) = (x(t), y(t))$ سره باور لري

$$L = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt\,.$$

په ځانګړې توګه ديوه تابع $y = f(x)\,,\ x \in [c,d]$ ګراف لاندې اوږدوالی لري

$$L = \int_c^d \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx\,.$$

د $p(a)$ او $p(t)$ ترمنځ د کرښو ټوټو اوږدوالی ،

$$s(t) = \int_a^t |p'(\tau)|\, d\tau\,,$$

کيدی شي د کانونيکي کرښې پارمتر په توګه وکارول شي. سړی داسې په نامه د کرښې اوږدوالي پسې پارمتري کونه لاس ته راوړي :

$$q(s) = p(t), \quad |q'| = 1\,.$$

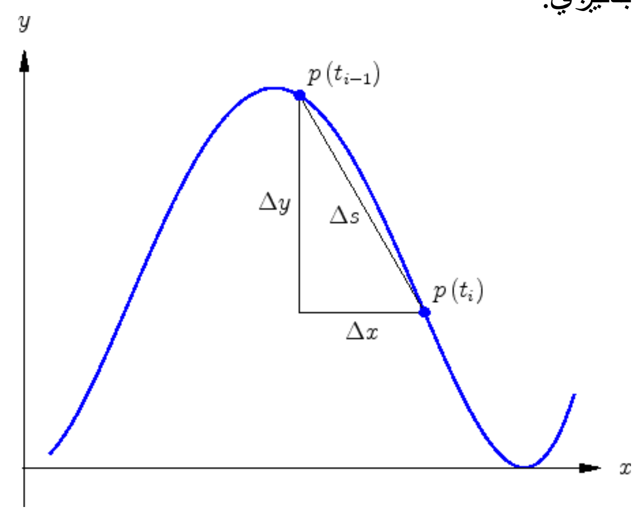
د نورمي تانجنت کرږې په بنسټ د کانونيکي پارمتري کوني لپاره باور لري

$$\int_C f = \int_0^L f(q(s))\,ds$$

د C د L اوږدوالي سره.

ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

د يوې مسطحې کرږې د اږودوالي شميرنې لپاره د پارامتر انتروال بيه ټوټو وېشل کيږي او يو برخه انتروال $[t_{i-1}, t_i]$ لپاره کرږه د پای ټکو د تړونکرښې له لارې ځای بدليږي يا بدليږي.



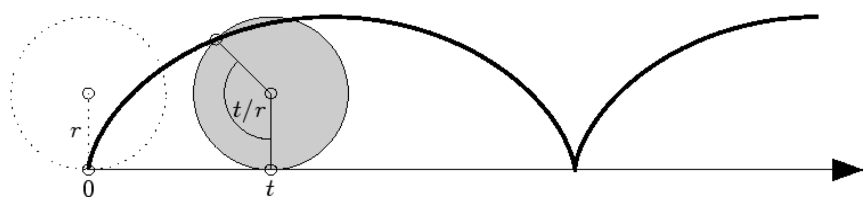
د انتګرال د منځ ارزښت جملې سره بيا باور لري:

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta s_i = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(p_1'(\xi_i))^2 + (p_2'(\eta_i))^2}\,\Delta t_i\,,$$

د $\xi_i, \eta_i \in [t_{i-1}, t_i]$ سره . دا اخرنۍ ویینه یا افرده د ورکړ شوي انتیګرال د یمن-زیاتون یا -جمعې دی.
په ورته تګه د ډېرپراخېدونکي یا ډېربعدیز ی کرږ لپاره د مشتق نورم د انتیګرال په بنه راکوي.
لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

که د r وړانګې سره یوه ګردۍ یا داېره د په محور ګرځوو یا وڅرخوو، نو ژي ټکی یو څیکلویید تشریح کوي.



د سرچینې لپاره د پیل ټکي په حیث

$$\begin{aligned} x(t) &= t + r\cos(3\pi/2 - t/r) = t - r\sin(t/r) \\ y(t) &= r + r\sin(3\pi/2 - t/r) = r - r\cos(t/r) \end{aligned},$$

د $t \in [0, 2\pi r]$ سره ، د یوې ګرږ لیندۍ یو پارمتري کونه ده.
د لیندې اوږدوالی دی

$$L = \int_0^{2\pi r} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi r} \sqrt{(1-\cos(t/r))^2 + (\sin(t/r))^2}\, dt\,.$$

د بدلون $s = t/r$, $dt = r\,ds$ او کټمټوالي

$$\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1\,, \quad 1 - \cos(2\varphi) = 2\ \sin^2\varphi$$

سره لاس ته راځي

$$L = \quad r\int_0^{2\pi}\sqrt{2(1-\cos(s))}\,ds = r\int_0^{2\pi} 2\sin(s/2)\,ds = 8\,r\,.$$

ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

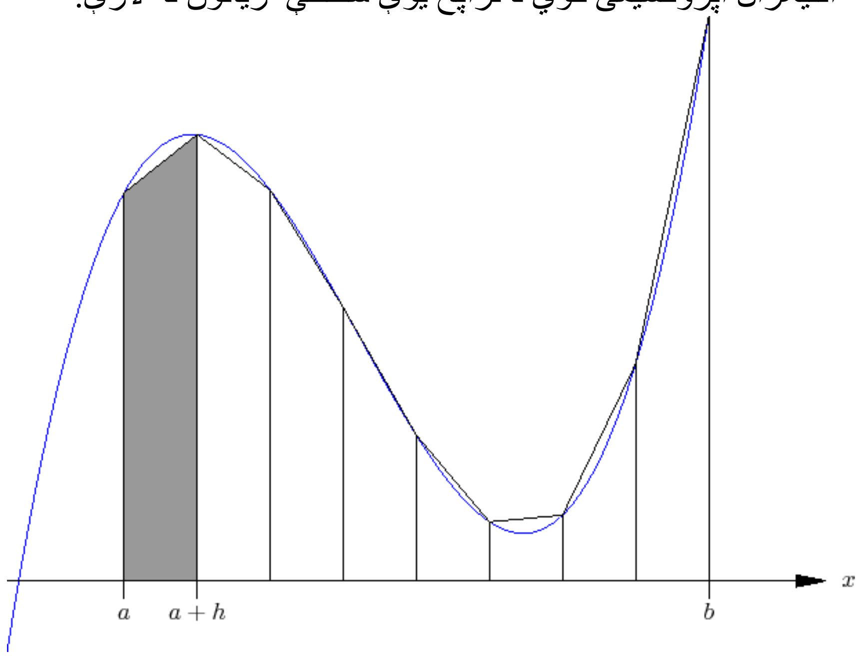
د ذوزنقي قانون **Trapez-Regel**

نږديوالی

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx s_h f =$$

$$= h(f(a)/2 + f(a+h) + \cdots + f(b-h) + f(b)/2)$$

انتيګرال اپروکسيمی کوي د تراپخ يوې سطحې زياتون له لارې.



د يوه دوه واره ناپرېکېدونکی مشتقوړ تابع د ناتيکاوي پاره باور لري:

$$s_h f - \int_a^b f = \frac{b-a}{12} f''(r) h^2,$$

د $r \in [a, b]$ لپاره.

په ټيکه توګه ناټيکاوی د خويو يا هوارو توابعو لپاره ګاونديز يا اسيمپټوتيکي وده لري

$$s_h f - \int_a^b f = c_1 (f'(b) - f'(a)) h^2 + c_2 (f'''(b) - f'''(a)) h^4 + \ldots$$

له f او h څخه خپلواکې ثابتې c_j سره. له دې څخه لاس ته راځي، چې د ټراپچ قانون د $(b-a)$-پريوديکي توابعو لپاره خورا دقيق دی. ناټيکاوی ګړندی د صفر په لور ځي نسبت هر h-توان ته.
ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

په يوه ا نټروال ناټيکاوی دی

$$\frac{h}{2}(f(0) + f(h)) - \int_0^h 1 \cdot f = \int_0^h (t - h/2) f'(t)\, dt.$$

بيا ټوټه انټيګرالونه او منځ ا رزښت جملهې استعمال راکوي

$$-\int_0^h \frac{1}{2} t(t-h) f''(t)\, dt = \underbrace{-\int_0^h \frac{1}{2} t(t-h)\, dt}_{h^3/12}\ f''(r).$$

په ټوټه انټروال باندې د جمعې پسې سرې لاس ته راوړي

$$\frac{1}{12} h^3 \sum_{i=1}^{n} f''(r_i).$$

جمعه کيدی شي د

$$n \min f'' \leq \sum f''(r_i) \leq n \max f''$$

له لارې اټکل شي. د ترمنځارزښت جملې پسې بالاخره لاس ته راځي

$$\sum f''(r_i) = nf''(r) = \frac{b-a}{h} f''(r)\,,$$

د يوه $r \in [a,b]$ سره.

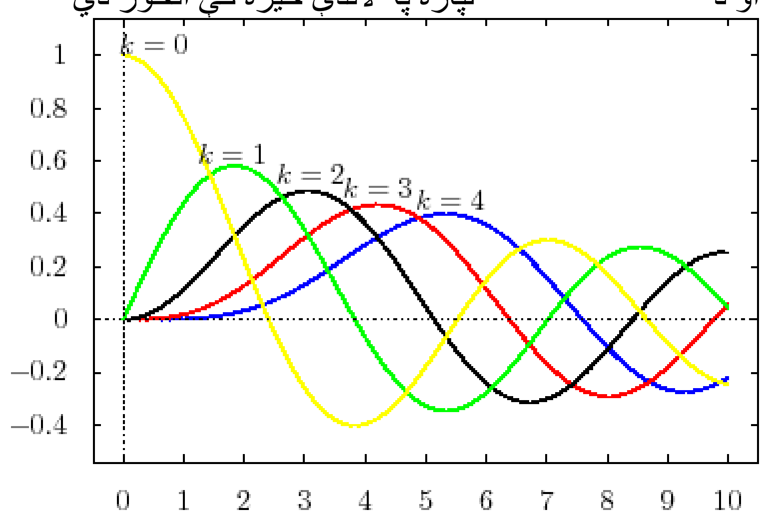
د ګاونډ يا مجانب ناټيکاوي ودې ښوونه اوړده ده. دا د باقي غړي په تل تو‌ټه انتيګرالونه ولاړه ده او د ژی ترمونو په يوه مناسبه کارونه يا استعمال.

ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

د بسل-تابع Bessel-Funktionen $\mathcal{J}_k$ د تولګنيز k لپاره دا لاندې انتيګرال انځورونه لري

$$\mathcal{J}_k(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\cos(kz - x\sin(z))}_{f(z)}\, dz$$

او د $k = 0, \ldots, 4$ لپاره په لاندې ځيره کې انځور دي



د تراپخ قانو شمیرلو سره شړی کاروي، چې

$$\frac{1}{2}\left(f(a)+f(a+2\pi)\right)=f(a)$$

او دا چې f جوړه دی. که ټکي

$$z_i=-\pi+\frac{1+2i}{2}\,\frac{2\pi}{n},$$

وټاکو ، نو جمعه

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(z_i)=2\sum_{i=n/2}^{n-1} f(z_i)$$

دې جوړه شي.

لکه د $\mathcal{J}_1(2)$ لاندې نږدېونه یا اپرکسیمیشن د $n=4,8,\ldots 64$ ټکو سره ښايي، پولې ته تلنه فوقالعاده ګړندی ده.

n	
4	$\underline{0}.45464871341284084769800993295587$
8	$\underline{0.576}55235602472460377030331810649$
16	$\underline{0.576724807756}15774487465153090293$
32	$\underline{0.5767248077568733872024482422691}3$
64	$\underline{0.5767248077568733872024482422691}3$

دا د ذوزنقي قانون جګ ټیکاوی د خوی پریودیکي انتیګرال لپاره یوپیک دی او کېدی شي د ناټیکاوي د یوهه ټیکې انځورونې ، د اویلر-ماکلورن-Euler-Maclaurinschen د جمعي فرمول مدلل کړای شي.

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

د ګاوس فرمول Gauß-Formel

د n –مې درجې یا نظم د ګاوس فرمول په نږدې بڼه یا ډول د یوه تابع انتیګرال ټاکي د انتیګرال د انتربولیشن پولینوم له لارې د n -مې درجې د لاګرانژ پولینومونو په صفرځایونو $x_1 < \cdots < x_n$ کې:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} w_i f\left(x_i\right)$$

د w_i سره د لاګرانژپولینوم

$$p_i(x) = \prod_{j\neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

په انتوال $[-1,1]$ باندې.

فرمول د $< 2n$ Grad درجې پولینوم لپاره ټیک دی او د ټولو له مخه د تحلیلی توابعو لپاره خورا ټیک دی. ټول وزنونه w_i زیاتیز یا مثبت دي، او تکیه ځایونه x_i په انتګریشن انتروال $(-1,1)$ کې پراته دي. دا د ګاوس پارامتر تر 10 -م نظم پورې جدولي شوی او په لاندې جدول کې ورکړ شوی دی

n	x_i	w_i
2	$\pm\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1
3	0 $\pm\frac{1}{5}\sqrt{15}$	$\frac{8}{9}$ $\frac{5}{9}$
4	$\pm\frac{1}{35}\sqrt{525-70\sqrt{30}}$ $\pm\frac{1}{35}\sqrt{525+70\sqrt{30}}$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{36}\sqrt{30}$ $\frac{1}{2}-\frac{1}{36}\sqrt{30}$
5	0 $\pm\frac{1}{21}\sqrt{245-14\sqrt{70}}$ $\pm\frac{1}{21}\sqrt{245+14\sqrt{70}}$	$\frac{128}{225}$ $\frac{161}{450}+\frac{13}{900}\sqrt{70}$ $\frac{161}{450}-\frac{13}{900}\sqrt{70}$

د ګاوس پارامتر x' او w' د خوښې انتګریشنانتروال $[a,b]$ لپاره د کرښیز تراسفورمېشن له لارې لاس ته راځي:

$$x_k' = a + \frac{b-a}{2}\,(x_k+1)\,, \quad w_k' = \frac{b-a}{2}\,w_k\,.$$

لومړی ښایو، چې نږدې ټاکنه د $< n$ Grad درجې د پلوینوم f لپاره ټیک دی. دا د لاندې څخه لاس ته راځي

$$\sum_{k=1}^{n} w_k f = \sum_{k=1}^{n}\left(\int_a^b p_k(x)\,dx\right) f(x_k) = \int_a^b \underbrace{\sum_{k=1}^{n} p_k(x) f(x_k)}_{=q(x)}\ dx\,.$$

داچې p_k نسبت و ټکو x_k ته د لاګرانژ پولینومونه دي، q په دې ټکو کې و f ته انترپولیشنپولینوم دی او داسې له f سره همغږیز کیږي.
د ځانګړو ټکو ټاکلو له لارې کېدی شي حتی د $< 2n$ Grad درجې پولینوم f ټیک انتیګرال شي.
دې ته f د پولینومونو په مرسته داسې لیکو

$$f(x) \qquad = p(x)s(x) + r(x)$$

د n Grad درجې لژندر-پولینوم p او د. $< n$ Grad دجې پولینومونه r او s.
که $p(x_k) = 0$ په پام کې ونیول شي، نو لکه پورته لاس ته راځي

$$\sum_{k=1}^{n} w_k f(x_k) \ = \sum_{k=1}^{n}\left(\int_a^b p_k(x)\,dx\right)\left(p(x_k)s(x_k) + r(x_k)\right)$$

$$= \int_a^b \sum_{k=1}^{n} p_k(x) r(x_k)\,dx = \int_a^b r(x)\,dx\,.$$

له بلې خوا باور لري

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &= \int_a^b (p(x)s(x)+r(x))\,dx \\ &= \int_a^b p(x)s(x)\,dx + \int_a^b r(x)\,dx \\ &= \int_a^b r(x)\,dx\,,\end{aligned}$$

ځکه چې p د $< n$ Grad درجې پولینوم ته اورتوګونال دی.
د وزن زاتیزوالی یا مثبتوالی د کټمټوالي څخه لاس ته راځي

$$w_k = \int p_k = \sum_i w_i\, p_k(x_i) = \sum_i w_i\, p_k(x_i)^2 = \int p_k^2\,.$$

د اخرنې ترمخ یا وړاندې مساوات د $p_k(x_i) = \delta_{k,i}$ له امله باور لري، او اخرنی، داچې p_k^2 $< 2n$ Gradدرجه لري، نو د ګاوس-فرمول له لارې تیک انتیګرال کیدی شي.
د ګاوس-فرمول د روښانه ولو ته لاندې جدول د مختلفو انتیګراندونو یا انتیګرال کېدونکو نږدې تاکل یا اپروکسیمیشن ښایي.

n	$\int_1^1 e^{-x^2}\,dx$	$\int_0^\pi \frac{\sin x}{x}\,dx$	$\int_0^1 \sqrt{1-x^4}\,dx$
1	2.000000	2.000000	0.968245
2	1.433062	1.848571	0.891006
3	1.498679	1.851976	0.879356
4	1.493334	1.851936	0.876417
5	1.493663	1.851937	0.875306

په اخرني انتيګرال کې ورو پولې ته تلنې دليل په $x = 1$ کې زينګولاريتي ده.

د ګاوس-فرمول فقط خويو يا هوارو glatt (يو تابع خوی يا هوار تابع يو ماتماتيکي تابع دی، چې ناپرېکېدونکی او ناپای زيات مشتقوړ وي توابعو ته ډېر دقيق دی.

ليکونکي: اېپ، هيوليګ

ناڅرګند يا نا معلوم انتيګرال Uneigentliches Integral

د يو په يوه انتروال $[a,b)$ تړته ډوله ناپرېکېدونکی تابع f لپاره کېدی شي د

$$\int_a^b f = \lim_{c \to b-} \int_a^c f$$

له لارې د انتيګرال کليمه په ناپای انتروالونو ($b = \infty$) او نامحدودو انتيګراليدونکو($f(b) = \pm\infty$) وغزول شي.
په ورته توګه زينګولاريتي په لاندې يا په دواړو پولو مطالعه شي. په اخرني حالت کې بايد پوله ارزښت د پرلپسې $c \to a+$, $d \to b-$ د ټاکنو څخه خپلواک وي.

د يوه ناټاکلي انتيګرال د شتون لپاره پوره کېدونکي د f مطلق انتيګرالوړوالی دی، دا په دې معناچې

$$\int_c^d |f(x)| \leq \text{ثابت}$$

د ټول برخه انتروالونو $[c,d] \subset (a,b)$ لپاره.
ليکونکي: اېپ، هيوليګ

د ناټاکلي انتيګرال د شميرلو لپاره

$$\int_0^\infty e^{-x}\, dx\,.$$

د $b > 0$ لپاره ټاکي

$$\int_0^b e^{-x}\,dx = \left[-e^{-x}\right]_0^b = -e^{-b} + 1\,.$$

له دې سره سرې لاس ته راوړي

$$\int_0^\infty e^{-x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\left(-e^{-b}+1\right) = 1\,.$$

که پوله ارزښت ساده شمېرل کېدونکی وي، نو سرې پسې تړلي ناټاکلې پولې کاروي، داپه دې معنا چې سرې لیکي

$$\int_0^\infty e^{-x}\,dx = \left[-e^{-x}\right]_0^\infty = 0 - (-1) = 1$$

او دا په راوړل شوې بیلګه کې.
لیکونکي: اپپ، هیولیګ

د ناټکلو انتیګرالونو

$$\int_2^\infty \frac{1}{x(\ln(x))^r}\,dx\,.$$

لپاره د بدلون $y = \ln(x)$, $dy = dx/x$
سره سرې لاس ته راوړي

$$\int_2^b \frac{1}{x(\ln(x))^r}\,dx = \int_{\ln(2)}^{\ln(b)} \frac{1}{y^r}\,dy = \begin{cases} \dfrac{(\ln(b))^{1-r} - (\ln(2))^{1-r}}{1-r}\,, & r \neq 1 \\ \ln(\ln(b)) - \ln(\ln(2))\,, & r = 1 \end{cases}.$$

په دې پسې د $b \to \infty$ لپاره پوله ارزښت ټیک هلته شتون لي، که $r > 1$ باور ولري. په دې حالت کې دی

$$\int_2^\infty \frac{1}{x\ln(x)^r}\,dx = -\frac{(\ln(2))^{1-r}}{1-r}\,.$$

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

د ناټاکلي انتيګرال

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{\sqrt{\cos(x)}}\,dx\,.$$

لپاره انتيګرالېدونکی په پورته انتيګرال پولي $x = \frac{\pi}{2}$ سيګولار دی. سړی د $0 < b < \frac{\pi}{2}$ لپاره لاس ته راوړي

$$\int_0^b \frac{\sin(x)}{\sqrt{\cos(x)}} = \left[-2\sqrt{\cos(x)}\right]_0^b = -2\sqrt{\cos(b)} + 2\,.$$

له دې سره لاس ته راځي

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{\sqrt{\cos(x)}}\,dx = \lim_{b\to\frac{\pi}{2}} \int_0^b \frac{\sin(x)}{\sqrt{\cos(x)}} = \lim_{b\to\frac{\pi}{2}} \left(-2\sqrt{\cos(b)} + 2\right) = 2\,.$$

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

د ناټاکلي انتيګرال

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+2x}{1+x^2}\,dx\,.$$

لپاره

$$\arctan(x) + \ln(1+x^2)$$

د انتيګراليدونکو بنسټ- يا ساده تابع دی. ناټيکه ايښوونه

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+2x}{1+x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_{-b}^{b} \frac{1+2x}{1+x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty} \left[\arctan(x) + \ln(1+x^2)\right]_{-b}^{b}$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left(2\arctan(b)\right) = \pi$$

د ناټاکلي انتيګرال لپاره راکوي. د تعريف سره سم د ناټاکلي انتيګرال پورته او کښته پولي بايد يو له بل خپلواک و څېړل شي. داچې نه پوله ارزښت

$$\lim_{c\to-\infty}\int_c^0 \frac{1+2x}{1+x^2}\,dx = \lim_{c\to-\infty}\left(-\arctan(c)-\ln(1+c^2)\right)$$

او نه پوله ارزښت

$$\lim_{d\to\infty}\int_0^d \frac{1+2x}{1+x^2}\,dx \quad = \lim_{d\to\infty}\left(\arctan(d)+\ln(1+d^2)\right)$$

شتون لري، دا ناټاكلی انتيګرال

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1+2x}{1+x^2}\,dx$$

هم شتون نه لري.
ليكونكي: اپپ، هيوليګ

د نامعلوم انتيګرال لپاره د پرتلې قضيه
Vergleichskriterium für uneigentliche Integrale

كه f د g لپاره يو مايورانت وي، داپه دې معناچې

$$|f(x)| \le |g(x)| \qquad a < x < b$$

باور لري، نو د g د مطلق انتيګرالوړوالي څخه د انتيګرال

$$\int_a^b f(x)\,dx\,.$$

شتون لاس ته راځي

ليكونكي: اپپ، هيوليګ

فقط د پوله ارزښت

$$\int_a^b f = \lim_{c \to b-} \int_a^c f$$

شتون ترڅیړنې لاندې نیول کیږي. په نورو حالتونو کې په ورته توګه مخ ته ځو.
تابع

$$r(c) = \int_a^c |f|$$

برابرغږېزه جګېدونکې ده او پورته لور ته د $\int_a^b |g|$ له لارې رابنده یا محدود ده. په دې پسې د r د $c \to b-$ لپاره پولې ته تلونکی دی او له دې امله $\int_a^b |f|$ شتون لري.
تابع

$$s(c) = \int_a^c (f + |f|)$$

همم برابرغږېزه جګېدونکې ده او د $2\int_a^b |g|$ له لارې رابنده یا محدود. پسې s هم د $c \to b-$ لپاره پولې ته تلونکی دیاو له دې امله $\int_a^b (f + |f|)$ شتون لری.
له دې څخه د

$$\int_a^b f = \int_a^b (f + |f|) - \int_a^b |f|.$$

شتون لاس ته راځي.
لیکونکي: اپپ، هیولیګ

د پرتلع تلبع لپاره زیات وخت $f(x) = x^r$ کارول کیږي.
د $0 < a < b < \infty$ لپاره دی

$$\int_a^b x^r\,dx = \begin{cases} \dfrac{b^{r+1} - a^{r+1}}{r+1}, & r \neq -1 \\ \ln(b) - \ln(a), & r = -1\,. \end{cases}$$

دا ترم د $b \to \infty$ لپاره ټیک هلته پولې ته تلونکی دی، که $r < -1$ باور ولري، دا په دې معناچې انتیګرال

$$\int_1^\infty x^r\,dx$$

شتون ولري ټیک د $r < -1$ لپاره.

د $a \to 0+$ لپاره ټیک هلته پوله ارزښا لاس ته راځي، که $r > -1$ باور ولري، دا په دې معنا چې انتیګرال

$$\int_0^1 x^r\,dx$$

ټیک د $r > -1$ لپاره شتون ولري.

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

د دې لپاره چې د نامعلوم انتیګرال شتون د

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\,dx$$

په حیث وښایو ، سړی دا انتیګرال په دوه برخو توته کوي.

دا چې $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ دی، نو لاندې انتیګرال شتون لري

$$\int_0^1 \frac{\sin(x)}{x}\,dx\,.$$

په انتروال $[1,\infty]$ د نامعلوم انتيګرال لپاره د ټوټه انتيګرالوني له لارې لاس ته راځي

$$\int_1^b \frac{\sin(x)}{x}\,dx = \left[-\frac{\cos(x)}{x}\right]_1^b - \int_1^b \frac{\cos(x)}{x^2}\,dx\,.$$

د $b\to\infty$ لپاره لومړی ترم د $\cos(1)$ په لور ځي او دويم د پرتلې قضيې له مخې پولې ته ځي، ځکه چې

$$\left|\frac{\cos(x)}{x^2}\right| \le \left|\frac{1}{x^2}\right|\,.$$

سره له دې چې د تابع کوم ورکړ شوی لومړی – یا بنسټيز تابع نه لري، کېدی شي د نامعلوم انتيګرال ارزښت وټاکي. .

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}\,.$$

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

ګاما تابع یا - فنکشن **Gamma-Funktion**

د

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt,$$

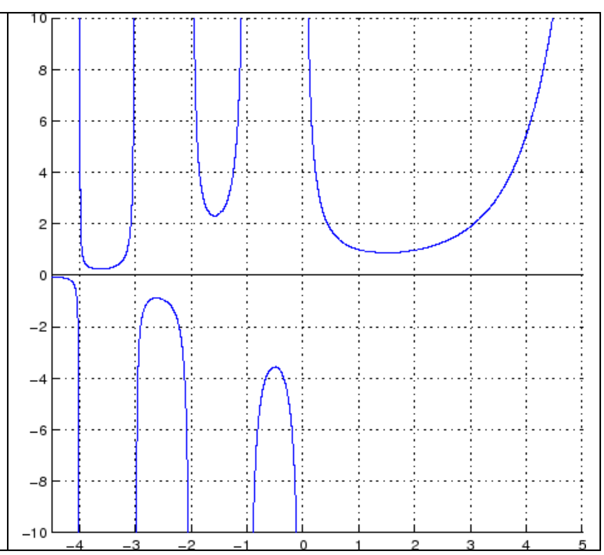
$$x\in(0,\infty)\,,$$

له اړې تعريف شوی ګاما تابع فنکشنل مساوات پوره کوي

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)\,.$$

په ځانګړې توګه

$\Gamma(n+1)=n!$, $n\in\mathbb{N}$. دی.



د فنکشنل مساواتو په مرسته کېدی شي ګاما-تابع د کمیز پروت یا x محور لپاره هم تعریف کړی شي. لکه د جوړ شوي تابع ګراف ځخه چې لیدل کیږي، دا ساده قطبونه د $x = 0, -1, \ldots$ لپاره لري.

لیکونکي: اېپ، هیولیک

انتیګرال

$$\int_0^1 t^{x-1} e^{-t}\,dt$$

فقط د $0 < x < 1$ لپاره پرابلم جوړوي. په دې حالت کې انتیګرال د $t^{x-1} e^{-t} \le t^{x-1}$ له امله د پرتلې قضیې له مخې پولې ته تلونکی دی.

انتیګرال

$$\int_1^\infty t^{x-1} e^{-t}\,dt$$

هم د پرتلې قضیې په بنسټ شتون لري او اټکلونه $t^{x-1} e^{-t} \le t^{-2}$

د پوره لوي t لپاره بسیا کوي.
د ټوټه انتیګرال سره لاس ته راځي

$$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty t^x e^{-t}\,dt = \left[-t^x e^{-t}\right]_{t=0}^\infty + \int_0^\infty x t^{x-1} e^{-t}\,dt$$
$$= 0 + x\int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\,dt = x\Gamma(x)\,,$$

او له دې سره د پوره اېندکشن په مرسته او $\Gamma(1) = 1$ د $n \in \mathbb{N}$ لپاره لاس ته راځي

$$\Gamma(n+1) = n!\,.$$

د ګاما تابع د ګاوس تعريف

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}$$

د تابع يوه روښانه ونه په ټول $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}^-$ اجازه زاکوي.

.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

د کوشي اصلي ارزښت **Cauchyscher Hauptwert**

د يوه په $x = c \in (a,b)$ کې زيګولار تابع f لپاره سړی

$$\mathrm{CHW}\int_a^b f = \lim_{h\to 0+}\left(\int_a^{c-h} f + \int_{c+h}^b f\right)$$

د کوشي اصلي ارزښت په څېر تعريفوي

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

د تيپيکي بېلګې په څېر د کوشي اصلې ارزښت

$$\mathrm{CHW}\int_{-a}^{a} x^k\,dx\,,\quad k\in\mathbb{Z}\,,$$

شمېرل کيږي.

د $k = -1$ لپاره دی

$$\int_{-a}^{-h}\frac{dx}{x} + \int_h^a \frac{dx}{x} = \ln|h| - \ln|a| + \ln|a| - \ln|h| = 0\,.$$

د انتيګراليدونکي د انتی سيمتري په دليل د CHW ورکيږي په يو سيمتري انتروال لپاره.

د $k \neq -1$ لپاره دی

$$\int_{-a}^{-h} x^k\,dx + \int_h^a x^k\,dx = \frac{1}{k+1}\left((-h)^{k+1} - (-a)^{k+1} + a^{k+1} - h^{k+1}\right)$$

د ناجوړه يا طاق k لپاره دا ا فاده يا ويينه او له دې سره د کوشي اصلي ارزښت صفر دی. د زياتيز يا مثبت جوړه(حفت) k لپاره دا د $2/(k+1)a^{k+1}$ په لور هڅيږي.
په ساده توګه د کوشي اصلي ارزښت د رګولار انتيګرال سره سره خوري يا يوعږيز کيږي. د $k = -2, -4, \dots$ لپاره برعکس يا د دې په خلاف هم انتيګرال او هم د کوشي اصلي ارزښت شتون نه لري.
ليکونکي: اپپ، هيوليګ

د انتيګرال لاندې مشتقول Differenzieren unter dem Integral

انتيګرال $\int_a^b f(x,t)\,dx$ د ناپرېکېدونکې تابع f لپاره د t ناپرېکېدونکی تابع دی. که f_t ناپرېکېدونکی وي، ن و باور لري

$$\frac{d}{dt}\int_a^b f(x,t)\,dx = \int_a^b f_t(x,t)\,dx\,.$$

ليکونکي: هيوليګ،کنيش

د دې لپاره چې د

$$g(t) = \int_a^b f(x,t)\,dx$$

ناپرېکېدنه په ټکي $t_0 \in (c,d)$ کې وښايو، له دې څخه کار اخلو، چې f په ولاړګوډيز $[a,b] \times [c,d]$ کې برابرډوله ناپرېکېدونکی دی. هر $\varepsilon > 0$ ته له دې امله يو $\delta > 0$ شتون لري داسې چې

$$|f(x,t)-f(x,t_0)|<\varepsilon$$

باور لري د ټولو x او $|t-t_0|<\delta$ لپاره. د دې t لپاره نو دی

$$|g(t)-g(t_0)|\le\int_a^b|f(x,t)-f(x,t_0)|\,dx<\varepsilon(b-a)\,.$$

له دې سره g ناپرېکيدونکی دی.

که f_t ناپرېکېدونکی وي، نو لاس ته راځي

$$\frac{g(t+h)-g(t)}{h}=\int_a^b\frac{f(x,t+h)-f(x,t)}{h}\,dx=$$

$$=\int_a^b\frac{1}{h}\int_0^h f_t(x,t+s)\,ds\,dx\,,$$

د کوم سره چې

$|f_t(x,t+s)-f_t(x,t)|<\varepsilon$ دی د ټولو $h<\delta$. لپاره.

له دې امله کېدی شي د دفرنسل وېش کمښت و

$$\int_a^b f_t(x,t)\,dx=\int_a^b\frac{1}{h}\int_0^h f_t(x,t)\;ds\,dx$$

ته د

$$(b-a)\frac{1}{h}\,h\,\varepsilon$$

له لارې اټکل شي او د h سره د صفر په لور هڅيږي.

ليکونکي: بوسسلر، هيوليک،کنيش

بسل- توابعBessel-Funktionen دا لاندې د انتيګرال انځورونه لري

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(x\sin t - nt)\,dt, \quad n = 0, 1, \ldots .$$

دا دا لاندې د دفرنځيال مساوات پوره کوي

$$x^2 J_n''(x) + x J_n'(x) + (x^2 - n^2) J_n(x) = 0 .$$

دا کېدی شي د انتيګرا لاندې د دفرنځيال سره وازمايل شي. لومړی دی

$$J_n'(x) = -\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \underbrace{\sin(x\sin t - nt)}_{v}\underbrace{\sin t}_{u'}\,dt$$

$$\frac{n}{\pi}\int_0^{\pi} \cos t\cos(x\sin t - nt)\,dt - \frac{x}{\pi}\int_0^{\pi} \cos^2 t\cos(x\sin t - nt)\,dt$$

$$J_n''(x) = -\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(x\sin t - nt)\sin^2 t\,dt$$

که $J_n'(x)$ ، $J_n(x)$ او $J_n''(x)$ د دفرنځيال مساوات په کېن لور کښېښول شي او له π سره ضرب شي، له کوم سره چې $\xi = x\sin t - nt$ کېښول شي، نو لاس ته راځي

Se

$$-x^2\int_0^{\pi} \cos\xi\sin^2 t\,dt - x^2\int_0^{\pi} \cos^2 t\cos\xi\,dt + nx\int_0^{\pi} \cos t\cos\xi\,dt + x^2\int_0^{\pi} \cos\xi\,dt - n^2\int_0^{\pi} \cos\xi\,dt$$

$$= \cdot\, nx\int_0^{\pi} \cos t\cos\xi\,dt + x^2\int_0^{\pi} \cos\xi\,dt - n^2\int_0^{\pi} \cos\xi\,dt$$

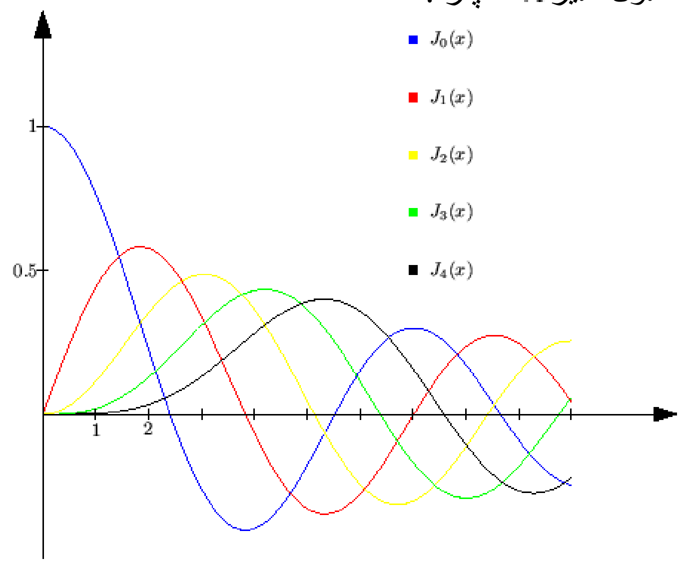
$$= n\int_0^{\pi} (x\cos t - n)\cos(x\sin t - nt)\,dt$$

سرليک

$$n \sin(x \sin t - nt)|_0^{\pi} = 0$$

=

د ټول ګنيز n لپاره.



خېره 5 لومړني د بسل توابع بنايي .
ليکونکي: بوسسلر ، هيوليګ،کنيش

لايبنيڅ-قانون Leibniz-Regel

د ناپرېکېدونکو مشتقوړ توابعو a, b او f لپاره دی

$$\frac{d}{dt}\int_{a(t)}^{b(t)} f(x,t)dx = \int_{a(t)}^{b(t)} f_t(x,t)dx + f(b(t),t)b'(t) - f(a(t),t)a'(t)$$

ليکونکي: بوسسلر ، هيوليګ،کنيش

که انتيګرال له $g(t)$ سره وښوول شي او ځا په ځا کړو

$$V(t) = (a(t), b(t), t)\,, \quad U(c,d,e) = \int_c^d f(x,e)\ dx\,,$$

نو $g = U \circ V$ دی او فرمول د ځنځيري قانون له لارې لاس ته راځي:

$$g'(t) = U'(V(t))\,V'(t), \quad V' = (a', b', 1)\,.$$

له دې سره د U ټوټه مشتقونه دا لاندې دي

$$U_c(c,d,e) = -f(c,e),$$

$$U_d(c,d,e) = f(d,e), \quad U_e(c,d,e) = \int_c^d f_e(x,e)\,dx\,,$$

او د $g'(t)$ لپاره په افاده يا ويېنه کې اېښوولو سره غوښتنه راکوي.
ليکونکي: بوسسلر، هيوليګ،کنيش

د لايبنيخ فرمول سره لاس ته راځي

$$\frac{d}{dt}\int_0^{\sqrt{t}} e^{x^2/t}\,dx = \int_0^{\sqrt{t}} -\frac{x^2}{t^2}e^{x^2/t}\,dx + e\frac{d}{dt}\sqrt{t}$$

$$= -\int_0^{\sqrt{t}} \frac{x^2}{t^2}e^{x^2/t}\,dx + \frac{e}{2\sqrt{t}}$$

بيا مشتقول يې راکوي

$$\frac{d}{dt}\left(-\int_0^{\sqrt{t}} \frac{x^2}{t^2}e^{x^2/t}\,dx + \frac{e}{2\sqrt{t}}\right)$$

$$=$$

$$\int_0^{\sqrt{t}} 2\frac{x^2}{t^3}e^{x^2/t} + \frac{x^4}{t^4}e^{x^2/t}\,dx - \frac{e}{2t^{3/2}} - \frac{e}{4t^{3/2}}$$

$$= \int_0^{\sqrt{t}} \frac{2tx^2 + x^4}{t^4} e^{x^2/t}\, dx - \frac{3e}{4t^{3/2}}$$

بدیلي لومړی کېدی شي بدلون $x = \sqrt{t}y$, $dx = \sqrt{t}\, dy$ ولیکي او دا انتیګرال لاس ته راوړي

$$g(t) = \int_0^1 e^{y^2} \sqrt{t} dy$$

د کره یا ځای په ځای پولو سره . نو کېدی شي

$$g'(t) = \frac{d}{dt} \int_0^1 e^{y^2} \sqrt{t} dy = \int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{t}} e^{y^2}\, dy$$

$$= \int_0^{\sqrt{t}} \frac{1}{2t} e^{x^2/t}\, dx$$

او

$$g''(t) = \frac{d}{dt} \int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{t}} e^{y^2}\, dy = -\int_0^1 \frac{1}{4t^{3/2}} e^{y^2}\, dy$$

$$= -\int_0^{\sqrt{t}} \frac{1}{4t^2} e^{x^2/t}\, dx$$

په ساده توګه وشمیرل شي.
د لومړي مشتق لپاره د فرمول مساوات روښانه نه دي، خو کېدی شي اسان د ټوټه انتیګرالوني سره و ازمایل شي:

$$-\int_0^{\sqrt{t}} \frac{x^2}{t^2} e^{x^2/t}\, dx + \frac{e}{2\sqrt{t}} = \qquad -\frac{1}{2t}\int_0^{\sqrt{t}} \underbrace{x}_{v}\, \underbrace{\frac{2x}{t} e^{x^2/t}}_{u'}\, dx + \frac{e}{2\sqrt{t}}$$

$$-\frac{1}{2t}\left[x e^{x^2/t}\right]_{x=0}^{x=\sqrt{t}} + \int_0^{\sqrt{t}} \frac{1}{2t} e^{x^2/t}\, dx + \frac{e}{2\sqrt{t}}$$

$$= \qquad \int_0^{\sqrt{t}} \frac{1}{2t} e^{x^2/t}\, dx$$

د دویم برابرون مشتق کېدی شي په ورته توګه و ښوول شي.
ليکونکي: هيوليګ،کنيش

په t پسې د انتيګرال د مشتق

$$\int_{t^2}^{e^t} \frac{\cos(tx)}{x}\, dx$$

لپاره لاس ته راځي

$$\begin{aligned}
&\int_{t^2}^{e^t} -\sin(tx)\, dx + \frac{\cos(te^t)}{e^t}\, \frac{d}{dt} e^t - \frac{\cos(t^3)}{t^2}\, \frac{d}{dt} t^2 \\
&= \frac{1}{t}\, \cos(te^t) - \frac{1}{t}\, \cos(t^3) + \cos(te^t) - \frac{2}{t}\, \cos(t^3) \\
&= \left(\frac{1}{t} + 1\right) \cos(te^t) - \frac{3}{t}\, \cos(t^3)
\end{aligned}$$

ليکونکي: هيوليګ،کنيش

د دفرنشل مساوات

$$u'(t) - \lambda u(t) = f(t)$$

یو زره یا کوچنی حل u_p کېدی شي دهوموجېن مساوات حل $\exp(\lambda t)$ د سوپر پوزېشن له لارې و کتل شي:

$$u_p(t) = \int_0^t e^{\lambda(t-s)} f(s)\, ds\,.$$

د لاینیخ فرمول په بنسټ دی

$$u_p'(t) = \frac{d}{dt}\int_0^t \frac{e^{\lambda t}}{e^{\lambda s}} f(s)\, ds = \int_0^t \lambda \frac{e^{\lambda t}}{e^{\lambda s}} f(s)\, ds + f(t)\frac{d}{dt}t$$

$$= \lambda \int_0^t \lambda e^{\lambda(t-s)} f(s)\, ds + f(t)$$

په دفرنشل مساوات کې د $u_p(t)$ او $u_p'(t)$ د اینوولو له لارې کېدی شي حل تصدیق شي.
لیکونکي: هیولیگ،کنیش

د نامعلومو انتیگرالونو مشتقول
Differenzieren uneigentlicher Integrale

که توابع f او f_t ناپرېکېدونکې وي او د $t \in (c,d)$ لپاره باور ولري

$$|f(x,t)| \le \psi(x), \qquad \int_0^\infty \psi < \infty$$

$$|f_t(x,t)| \le \varphi(x), \qquad \int_0^\infty \varphi < \infty,$$

نو کیدی شي د انتیګرال د نخښې لاندې مشتق ونیول شي:

$$\frac{d}{dt}\int_0^\infty f(x,t)\,dx = \int_0^\infty f_t(x,t)\,dx\,, \quad c < t < d.$$

په ورته توګه وینا وې د محدودو انتیګرالېدونکو سره د نامعلومو انتیګرالونو لپاره باور لري.

لیکونکي: هیولیک،کنیش

د دې لپاره چې وښایو، چې

$$\int_0^\infty \frac{f(x,t+h)-f(x,t)}{h} - f_t(x,t)\,dx$$

د $h \to 0$ لپاره د 0 په لور هڅیږي، انتیګرال توټه کیږي:

$$\int_0^\infty \dots = \int_0^b \dots + \int_b^\infty \dots$$

دویمه زیاتېدونکې یا د جمعې غړی د نیونې له مخې د

$$\left|\int_b^\infty \frac{1}{h}\int_0^h f_t(x,t+s)\,ds - f_t(x,t)\,dx\right| \le \int \frac{1}{h}\,h\varphi(x) + \varphi(x)\,dx = 2\int_b^\infty \varphi(x)\,dx$$

له لارې اټکل شي. دا انتیګرال له $< \varepsilon$ کیږي. د پوره لویې b لپاره. د دې b لپاره لومړی زیاتېدونکی $< \varepsilon$ دی د پوره کوچني h لپاره.، ځکه چې د پای انتیګریشن انټروال لپاره د انتیګرال لاندې مشتق کېدی شي.

لیکونکي: هیولیک،کنیش

د ګاما تابع مشتقونه

$$\Gamma(t) = \int_0^\infty e^{-x} x^{t-1}\, dx, \quad t > 0\,,$$

دي

$$\Gamma^{(k)}(t) = \int_0^\infty e^{-x} x^{t-1} (\ln x)^k\, dx\,.$$

مشتقيدنه په حق ده، ځکه چې انتيګرالېدونکي $f(x,t) = e^{-x} x^{t-1} (\ln x)^k$ يو
برابرډوله مايورانت لري:

$$|f(x,t)| \le e^{-x}\, x^{r-1}\, x^k \le ce^{-x/2}, \quad x \ge 1$$

او

$$|f(x,t)| \le x^{1/r-1} |\ln x|^k \le cx^{1/(2r)-1}\,, \quad x \le 1$$

د $t \in [1/r, r]$ لپاره. د دې لپاره وکارول شو، چې

$$\lim_{x\to\infty} x^\alpha e^{-\beta x} = 0, \quad \lim_{x\to 0+} x^\alpha |\ln x|^\beta = 0$$

د ټولو $\alpha, \beta > 0$ لپاره

ليکونکي: بوسسلر، هيوليک،کنيش

دا د پارامتر په واک کې انتيګرال

$$g(t) = \int_0^\infty \sin(xt)\, \frac{dx}{x}$$

مطلق پولې ته تلونکی نه دی، له دې امله برابر ډوله مايورانت هم نه لري.
د لته مو د t پسې د انتيګرال لاندې يو فورمال دفرنځيشن يوه تضاد ته لاربښودوي.
فورمال مشتق

$$g'(t) = \int_0^\infty \cos(xt)\, dx$$

يو پولې ته نه تلونکی انتيګرال دی. له بلې خوا يو واريابل بدلون , $y = xt$
$dy = t\, dx$

سرليک

راکوي

$$g(t) = \int_0^\infty \sin(y)\,\frac{dy}{y} = \frac{\pi}{2}\,.$$

مشتق په دې لاس ته راوړنه کېمتې صفر دی.
ليکونکي: بوسسلر، هيوليګ،کنيش

د ۲۰۱۱ ز ک د مارچ لسم
برى د لوى خښتن سره دی.

د ډاکتر ماخان شینواري چاپ شوې لیکنې:

<u>1988 Vienna (Austria):</u>

<u>لومړی:</u>

H.K. Kaiser , M. Shinwari : Aproximation compact pological algebra : general algebra 6 ; Page 117 – 122 contributions to

<u>1987 Vienna (Austria):</u>

<u>دویم:</u>

Diss . Interpolation und Aproximation durch Polynime in Universalen Algebren . Uni. Wien

Dissertation Interpolation and Aproximation by Polynome in universal Algebras, at the University of Vienna/Austria

لاندې د شمیرپوهنې پښتوټول کتابونه په المان کې د ،، افغانستان کلتوري ودې ټولنه،،له خوا چاپ شوي دي

<u>2000 Bonn (Germany):</u>

دریم: د شمیرپوهنې ستر کتاب : د شمیرپوهنې برسیره د انجنري، فزیک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زده کوونکو لپاره (دا کتاب په ۹۰۰ مخونو کې چاپ او دا نوې لیکنه به یې ځنو ځایونو غزېدلې او ځنې ځایونه ترې لرې شوي دي)

<u>2003 Bonn (Germany):</u>

څلورم: ځمککچپوهنه(هندسه) ، په سلو، زرو کې شمیرنه، د ګټې – او کټې د کټې شمیرنه ، د اختمالوالي شمېرنه کتاب د ښوونځي ټولې اړتیاوې پوره کوي

<u>2003 Bonn (Germany):</u>

پنځم: الجبرونه (د الجبر بنسټونه دي)

2003 Bonn (Germany):

شپږم: د شمیرپوهنې انګرېزي – پښتو ډکشنري.

2003 Bonn (Germany):

اووم: د شمیرپوهنې الماني ـ پښتو- او پښتو الماني ډکشنري

Mathematical dictionary German/ Pashto and Pashto/German

2003 Bonn (Germany):

اتم: دفرنڅیال برابرون (دا کتاب په دې څانګه کې یو پیل دی، ساده لیکل شوی)

Differential equation Translation; An Introduction

Bonn (Germany): 2003

نهم: د شمیر پوهنې فرمولونو ټولګه

Mathematical Formulas

2003 Bonn (Germany):

لسم: شمیرپوهنه له عربي په پښتو

1997 Bonn (Germany):

یوولسم: د افغانستان په هکله سپینې خبرې: په المان کې

،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خو

.یادونه: له ۲۰۰۰ کال دمخه ډاکتر ماخان شینواري د ،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خوا درې ساسي مجلې هم را وستلي.

د ډاکتر ماخان ،،میرې،، شینواري لیکنې او ژباړې چې په چاپېدو یې پیل کیږي

2012 Bonn; Germany; Kabul Afghanistan

ژباړې:

: *Prof. Brinkmann. (From Brinkmann.du.de)*

لاندې د برينکمن ليکنې چې له پرينکمن ن ج څخه ژباړل شوي دي.

١ - شميرپوهنه د ښوونځي لپاره لومړی ټوک

٢ – شميرپوهنه د ښوونځي لپاره دويم ټوک

٣ – شميرپوهنه د ښوونځي لپاره دريم ټوک

۴ - د احتمالوالي شميرنه د ښوونځي لپاره

۵ – احصايه يا ستاتيستيک دښوونځي لپاره

لاندې کتابونه د شتوتګارت د پوهنتون د استادانو د لکچرونو څخه چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپاره شوي را ژباړل شوي.

۶ – اناليزی ١

٧ – اناليزې ٢

٨ – کرښيز الجبر

٩ - د شميرپوهنې بنسټونه

١٠ - د فرمولونو ټولګه

١١ – فنکشنل اناليز

١٢ – وکتور شميرنه

نورې ژباړې

١٣ – له www./grundstudium.info/linearealgebra څخه:کرښيز الجبر

١۴ – Georg Gutenbrunner ګڼونپوهنه يا د اعدادو تيوري

زما لیکنې

onn (Germany):

۱۵ - د شمیرپوهنې ستر کتاب دویم چاپ د پوره تغیراتو سره : دا کتاب د شمیرپوهنې برخې برسیره د

انجنري، فزیک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زدهکوونکو لپاره پوره ګټور دی. په

کتاب کې د اړتیا سره زیاتونه او کونه راغلي

۱۶ - ځمککچپوهنه (هندسه) دویم چاپ د پوره تغیراتو سره

۱۷ – الجبر بنسټونه دویم چاپ له تغیراتو سره

۱۸ - ډېرۍ پوهنه یا سټ تیوري

۱۹ – د شمیرپوهنې سم اند (منطق ریاضي)

۲۰ - د یو څو شمیرپوهانو ژوندلیک

۲۱ – د شمیر پوهنې ګډې وډې لیکنې

۲۲- داهم ژباړه ده، خو لیکونکی یې متآسفانه راڅخه نابلد شوی: د مشتق او انتیګرال شمیرنو ته تمرینونه او اوبیونې یا حلونه یې

۲۳ – د شمیرپوهنې انګریزې پښتو او عربي + درې ډکشنري

۲۴ – د شمیرپوهنې پښتو انګرېزي ډکشنري

۲۵ – د شمیرپوهنې پښتو ډکشنري د شمیرپوهنیزو وییونو په پښتو روښانه ونه

۲۶ - د زړه له کومې(دا هغه لیکنې دي، چې ځنې یې په نړیول جالونو کې خپرې شوي دي.)

۲۷ – د افغانستان په هکله سپینې خبرې، چې وبه غزیږي.

نوري ليکنې، چې په ژباړه يې پيل شوی، خو لا پوره نه دي

– د شتوتکارت پوهنتون لکچرنوټونو څخه ، چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپریږي:

د ګروپونو تيوري

- د ښوونځي لپاره فزيک د برينکمن ليکنه

له پنځم ټولګي څخه تر اووم ټولګي پورې ژباړل شوی (دا چې زما دویم مسلک فزیک دی، دا ليکنې ژباړم. دا هم د دې ليکوال يوه ډېره ښه ليکنه ده، چې -د شميرپوهنې په څير- دلته هم زيات تمرينونه د حل يا اوبيونې سره په کې راغلي او ماته زيات ګټور برېښي)