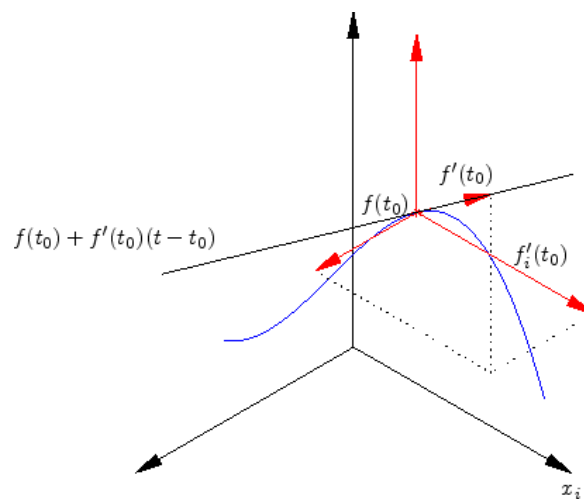


انالیز ۱

Analysis 1

د پوهنتون لپاره لکچرنوټونه
د ډېرو متحولو یا اووښتونو انالیز
یا انالیز دوه



لیکونکي: د شتوتگارت پوهنتون د شمیرپوهنې یا ریاضي څانګه

د ماتې انالیز څخه یا د شتوتگارت پوهنتون د څانګه

Smakhan1946gmail.com

ژباړی: د اکر ماخان (میري) شینواری

د لوی څښتن په نامه

په دې هیله، چې په دې لیکنو او ژباړو به مې زموږ د بې وزلي او له پوهې پاتې ملت
- په ما د پوهني په لار د لگښت - لپاره د پوهني په لور داسې لږ ونډه اخستي وي.

د کتاب نوم: د ډېرو متحولو یا اووښتونو انالیزې

لیکونکي: د شتوتکارت پوهنتو د ریاضي څانګه

د مات انلاین څخه یا د شتوتکارت پوهنتون ن ج څخه

ژباړی: ډاکتر ماخان میري شینواری

Smakhan1946@gmail.com

د چاپ لړي:

د ژباړې مننه

د دې لیکنې مل نورې خپرونې د شتوتگارت د پوهنتون د شمیرپوهنې د خانگي د لکچرونو لړۍ چاپ باندې پیل کيږي

د هر څه له مخه د هغو لیکونکو پروفیسرانو څخه زیاته مننه، چې د لیکنو څخه یې زما د ژباړې لپاره تفاهم لري. ماته د دوي د لیکنو د ژباړې په هیڅ ډول مادي گټه نه شته او دا کار مې یوازې په یوه د پوهنې توانمندی، مگر وروسته پاتې ژبې ویونکي ولس ته وړاندې دی، دا دې د دې پروفیسرانو له خوا په پوهنیزه اړخ کې- زموږ په دې اړخ کې هم مرستې ته اړ ولس- سره مرسته وي.

- ۱ بلواک یا تابع یا فنکشن
- ۳ کرښيزي توابع
- ۴ څلورۍ- يا مربع فنکشنونه يا - توابع
- ۶ همغږيز توابع
- ۹ برعکس - يا په څټ فنکشن
- ۱۱ د فنکشنونو يا توابعو سره شميرنه
- ۱۲ ننوتې او وتلې - يا مقرر او محددې توابع
- ۱۵ پولينوم
- ۲۱ د پولينومونو سره انټرپوليشن
- ۲۳ د لاگرانج-پولينوم
- ۲۵ راشنل (کسری يا نسبتي) توابع
- ۲۷ کمپلکس راشنل- يا کسري توابع
- ۲۸ په ټوټه مات ټوټه کونه يا تجزيه کونه
- ۳۳ د حقيقي ټوټه کسر ټوټه ونه يا تجزيه
- ۳۹ د حقيقي ټوټه کسر ټوټه ونه يا تجزيه
- ۴۰ د اويلر-مويورې فرمول
- ۴۱ تانجنټ او کوتانجنټ
- ۴۲ د ارکوس توابع
- ۴۳ هارمونیک لړځيدنې يا رپيدنې
- ۴۹ اکسپوننشل توابع
- ۵۰ گټه يا ربح
- ۵۶ ټوليز توان توابع او لوگارېتم
- ۵۷ د ودې قانون
- ۵۸ د توان او لوگارېتم لپاره شمير قوانين

سرلیک

۵۹	های پرابول تابع
۶۲	د یوې پرلپسې پوله ارزښت
۶۶	د کوشي قضیه
۶۸	همغریز ه پولي ته تلنه
۷۰	د پرلپسې پولي ته تلنه
۷۱	نارېښتونی پوله ارزښت
۷۲	پوله اینفریور او پوله سوپریور
۷۳	پرتله کوونکې قضیه
۷۵	د یوې پرلپسې پندغالي ټکی
۷۶	ورهولست- مودل
۷۶	ریکورژن
۷۸	د پی Pi رکورزیو اپروکسیمیشن
۸۲	د پرلپسیو یا ترادفونو ځانگړي ...
۸۴	د یوې لړۍ پرلپسې
۸۶	هندسي یا ځمکچیزې لړۍ
۸۸	هارموني لړۍ
۸۹	مطلق پولي ته تلونکې لړۍ
۹۰	مایورانت او مینورانت
۹۱	د وېش قضیه
۹۳	د ریښې قضیه

۹۴	د لایبنيڅ قضیه
۹۸	د لړيو ځانگړي پوله ارزښتونه
۹۹	ناپرېکيدنه يا متماديت
۱۰۲	يو اړخيز ناپرېکيدنوالی يا متماديت
۱۰۴	د ناپرېکيدونکو توابعو لپاره ...
۱۰۷	منځ ارزښت جمله
۱۰۹	د دوه سطحو – يا برخو تلنلار
۱۱۰	د ناپرېکيدونکي تابع افرطيت
۱۱۱	برابردوله ناپرېکيدنوالی
۱۱۲	په ټکي ډول پولې ته تلنه برابرازښته ...
۱۱۴	د توابعو لړۍ پولې ته تلنه
۱۱۶	توابعو لړۍ ته مایورانټ يا پورته پولې
۱۱۷	د اکسپوننشل تابع ضرب انځورونه
۱۱۹	د اکسپوننشل تابع لړۍ انځورونه
	مشتق(رابيليدنه)
۱۲۴	د بنسټتوابعو مشتق يا رابيليدنه
۱۲۷	د مشتق يار ابيليدني کرښزوالی
۱۲۷	د ضرب قانون
۱۲۹	د وېش قانون يا لار
۱۳۰	ځنځيری لار يا – قانون
۱۳۲	ايمپليڅيت مشتق نيول
۱۳۶	د لایبنيڅ قاعده يا لار

سرلیک

- ۱۴۱ لوگار یتمی مشتق یا – رابیلیدنه
- ۱۴۳ د رولي جمله
- ۱۴۴ منخ ارزبنت قضیه
- ۱۴۵ ټولیزه (شوي) منخ ارزبنت جمله
- ۱۴۷ لاند او-سیمبول
- ۱۴۸ د لو، پیتال قاعده یا لار
- ۱۵۰ کر بنیز اېروکسمیشن (ورنر دېوالی)
- ۱۵۱ د ناتیکاوې وده
- ۱۵۳ د نیوتن تلنار یا – قانون
- ۱۵۷ د تیلور پولینوم
- ۱۶۱ حقیقي د تیلور لړی
- ۱۶۳ اکسپوننشل تابع
- ۱۶۵ د اویلر فرمول
- ۱۶۶ د لوگار یتم تابع
- ۱۶۷ بی نومیال لړی
- ۱۶۸ د تیلور لړی مشتق او انٹیگرال
- ۱۷۰ د تیلور لړی ضرب
- ۱۷۲ د تیلور لړی وېش
- ۱۷۴ د راشنل توابعو تیلور-ودیز پنه
- ۱۷۵ د یوې تیلور – لړی
- ۱۷۷ د معکوس تابع د تیلور ودیز پینه
- ۱۷۸ د تیلور ځانگړې لړی
- ۱۷۹ د یاد نږدې ارزبنت شمیرنه

- ۱۸۱ اکسترېما(افراطیت)
- ۱۸۵ د اکسترېم – یا افراطي ارزښتونو ازماښت
- ۱۸۶ پولینوم
- ۱۹۰ اسیمپټوټي(یو په بل نه پرېوتونکي یا ګاونډیتوب)
- ۱۹۱ د راشنل- یا کسر توابعو ګاونډ یا اسیمپټوټي
- ۱۹۲ د کړو یا منحنيو خبري یا بحث
- ۱۹۸ ریمن-انتيګرال
- ۲۰۱ د انتيګرال خویونه
- ۲۰۱ د انتيګرال شمیرني منځ ارزښت جمله
- ۲۰۳ بنسټیز – یا ساده توابع
- ۲۰۷ د بنسټیزو توابعو لومړني توابع
- ۲۰۷ ټوټه- یا پارشل انتيګرالونه
- ۲۱۲ دلټا - تابع
- ۲۱۳ د متحولو – یا اووښتونو بدلون
- ۲۱۹ د متحولو – یا اووښتونو بدلون
- ۲۲۲ ساده راشنل انتيګرالونه د زیاتواره قطب سره
- ۲۲۵ د راشنلتوابعو انيګرالونه
- ۲۲۷ د ساین او کوساین د ضرب انتيګرالونه
- ۲۲۸ د کمپلکس تریګونوميټیکي توابعو انتيګرالونه
- ۲۳۰ تریګونوميټريکي بدلونونه
- ۲۳۳ د ساین او کوساین راشنل توابع

- ۲۳۶ د څرخیدونو بدنونو ډکۍ یا حجم
- ۲۴۱ د یوې کرې یا منحنې اوږدوالی
- ۲۴۴ د نوزنقې قانون
- ۲۴۸ د گاوس فرمول
- ۲۵۱ ناڅرگند یا نا معلوم انتیگرال
- ۲۵۵ د نامعلوم انتیگرال لپاره د پرتلې قضیه
- ۲۵۸ گاما تابع یا – فنکشن
- ۲۵۹ د کوشي اصلي ارزښت
- ۲۶۰ د انتیگرال لاندې مشتقول
- ۲۶۳ لایبنيخ-قانون
- ۲۶۸ د نامعلومو انتیگرالونو مشتقول
- د ډاکتر ماخان شینواري چاپ شوی،
- ۲۷۱ چاپیدونکې او چاپ ته چمتو لیکنې

Funktion (تیک یی: فنکشن) بلواک یا تابع

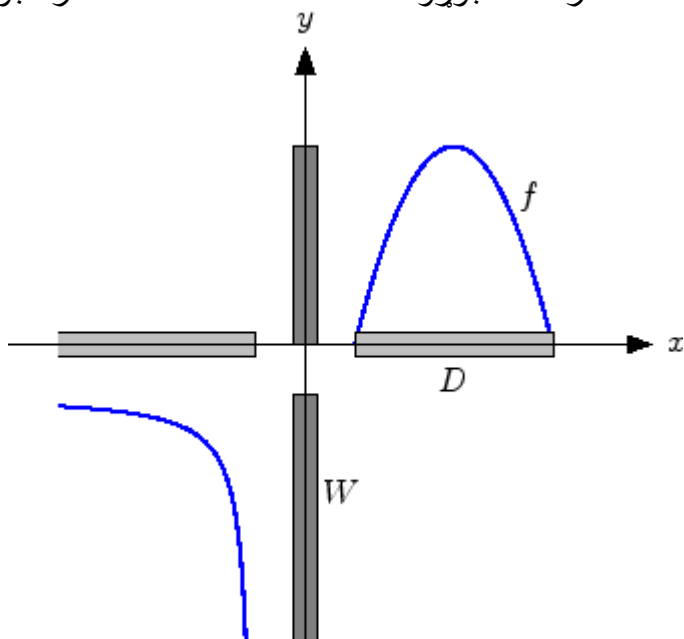
یو فنکشن یا بلواک یا تابع

$$f : D \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x)$$

$W \subseteq \mathbb{R}$ هر توکی x د ارزښت ډېری $D \subseteq \mathbb{R}$ د تعریف ورشو
 څخه د یوه $f(x)$

ارزښت سره تنظیموي.

$y = f(x)$ (x, y) f د گراف له جوړو
 د سره جوړ دی.



لکه د څیرې څخه چې لیدلکیري، تعریفورشو (رڼه خړه یا پرته) او ارزښت ورشو (تیاره خړه یا ولاړه) په x -محور همداسې په y -محور د گراف پریوتل دي.

لیکونکي: هیولیگ، هورنر، کنش

د دې لپاره چې د تابع

$$f(x) = \frac{\ln(3-x)}{\sqrt{x}-1}$$

تعریف ورشو او ارزښت ورشو وټاکو، لومړی دې د په ساده -یا لومړنیو توابعو رامنځ ته کیدونکي بندیزونه یا محدودوالی په پام کې ونیول شي. د تعریف ورشو د توکي لوگاریتم باید زیاتیز یا مثبت وي او د ارزښت ورشو ناکمیز یا نامنفي وي:

$$x \geq 0, \quad 3 - x > 0$$

او

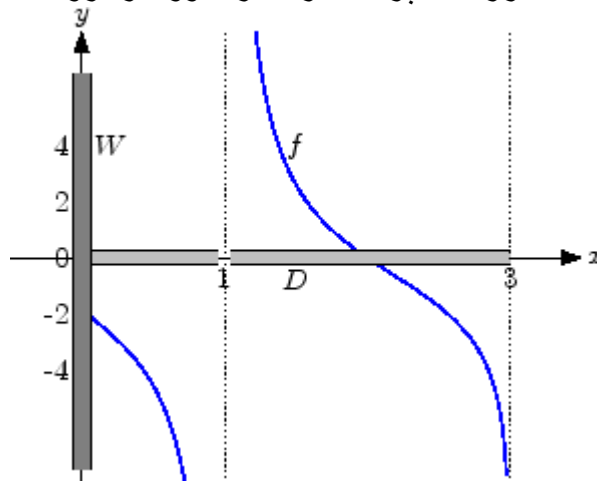
په همدې توگه باید ماتلاندې یا مخرج صفر نه وي، دا په دې معنا چې

$$x \neq 1.$$

په ټولیزه توگه راکوي:

$$D = [0, 3) \setminus \{1\} = [0, 1) \cup (1, 3).$$

د f ارزښت ډېری د گراف رسمو سره روښانه شي



سرلیک

دا چې f د $x \in (1, 3)$ لپاره د $-\infty$ او $+\infty$ ترمنځ ټول ارزښتونه نیسي، $W = \mathbb{R}$ باور لري.

(لیکونکي: هیولیگ، هیورنر، کنش)

لاندې جدول د څو بنسټیزو توابعو تعریفورشو او ارزښت ورشو ښایي.

$f(x)$	D	W
$1/x$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$
$\ln x$	$(0, \infty)$	\mathbb{R}
$\tan x$	$\mathbb{R} \setminus \{x : x = (2k + 1)\pi/2, k \in \mathbb{Z}\}$	\mathbb{R}
\sqrt{x}	$[0, \infty)$	$[0, \infty)$

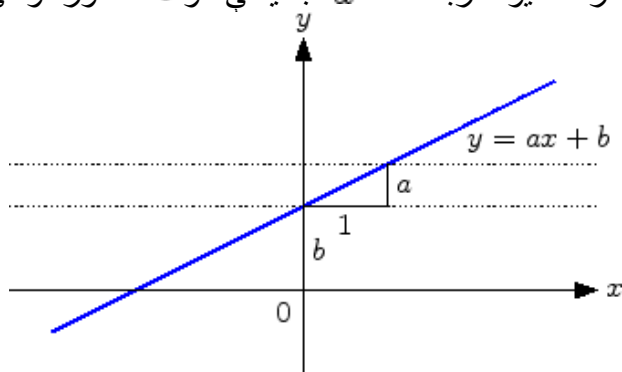
(لیکونکي: هیولیگ، هیورنر، کنش)

کرښیز فنکشنونه یا توابع

د یوه کرښیز فنکشن یا تابع

$$f(x) = ax + b$$

گراف یوه کرښه ده د a جگړدني او y -محور غوڅي (محور قاطع) b سره .



د دې لپاره بدیلی انځورونه د ټکي-جگیدني - بڼه ده

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = a$$

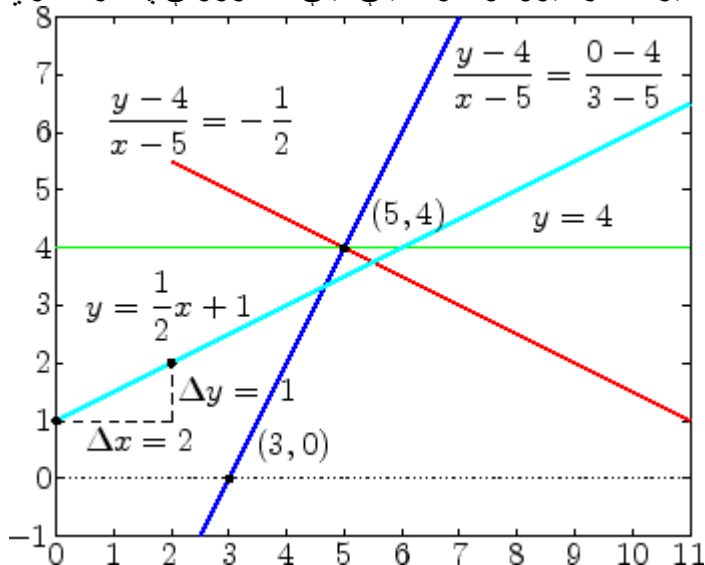
او د دوه-ټکو- بڼه

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0},$$

چیرته چې (x_0, y_0) او (x_1, y_1) په کرښه پراته ټکي دي.

(لیکونکي: هیولیگ، هیورنر)

څیره د کرښو توابعو بیلې بیلې انځورونې په کوته کوي:



لیکونکي: هیولیگ، هیورنر

څلورۍ- یا مربع فنکشنونه یا - توابع
د یوه مربع تابع

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

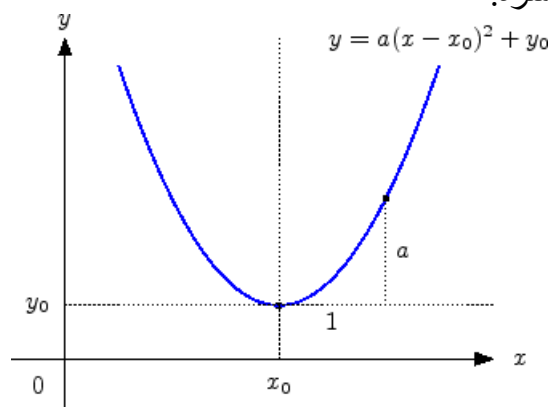
کراف د لاندې بڼې یو پارابول دی

$$y = a(x - x_0)^2 + y_0$$

د ککړۍ- یا رأسنکې

$$(x_0, y_0) = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2}{4a} + c \right).$$

سره.



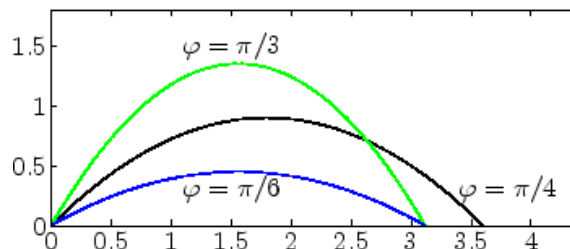
پای

- که یو تن د یوه کونج φ لاندې په یوه v چټکتیا و توغول شي، د الوتنې لار دا لاندې پارابول

$$y = x \tan \varphi - \frac{g}{2v^2 \cos^2 \varphi} x^2$$

راکوي، چیرته چې g د ځمکې بیرته ده یا - تعجیل دی.

لاندې څیره: ماییل توغول یا غورځول د $v = 6$ سره.



مساوات د برابر ډوله خوزبنت په x - او y - کمپوننتونو د بیلونې یا ټوټه کونې (که غواړئ: تجزیې) څخه لاس ته راځي، د v پیل چټکتیا سره او د ازاده غوزونې د خوزبنت ته پام کونې له لارې:

$$x(t) = vt \cos \varphi \quad \Rightarrow \quad t = \frac{x}{v \cos \varphi}$$

$$y(t) = vt \sin \varphi - \frac{1}{2} gt^2$$

$$\Rightarrow y(x) =$$

$$= \frac{vx \sin \varphi}{v \cos \varphi} - \frac{gx^2}{2v^2 \cos^2 \varphi} = x \left(\tan \varphi - \frac{gx}{2v^2 \cos^2 \varphi} \right).$$

د غورځونې واټن دی

$$x = \frac{2v^2 \cos^2 \varphi}{g} \tan \varphi = \frac{v^2}{g} \sin(2\varphi).$$

دا د $\varphi = \pi/4 \hat{=} 45^\circ$ لپاره ماکسیمال دی. لیکونکي: هیولیگ، هیورنر، کنش

Monotone Funktion همغږیزې توابع

سرلیک

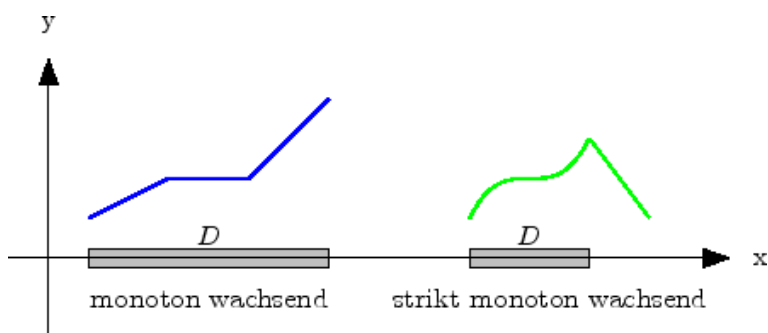
یو تابع f په یوه انټروال D (کره) همغږیز جگیدونکی دی، که وی

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \stackrel{(<)}{\leq} f(x_2), \quad x_k \in D,$$

همداسې که f توته ډوله ناپرېکېدونکی مشتقور دی، که وی

$$f'(x) \stackrel{(>)}{\geq} 0$$

د ټولو $x \in D$ لپاره تر ځانله یا جدا ټکي پورې



همغږیز جگیدونکي

کره همغږیز جگیدونکي

په ورته توګه (کره) همغږیز ټیټیدونکی تعریفیږي.

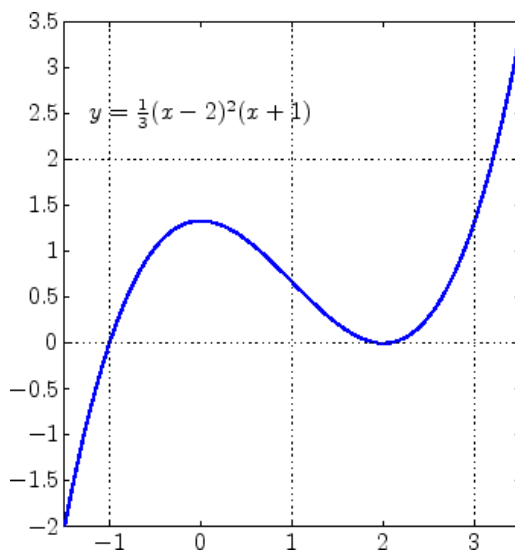
یکونکي: هیولیګ، هیورنر، کنش

تابع $x \mapsto f(x) = \frac{1}{3}(x-2)^2(x+1)$ په $x=0$ ځای کې یو جګ- یا

ماکسیمال ټکی ($f'(0) = 0, f''(0) < 0$) لري او په $x=2$ ځای ټیټ-یامینیمال

ټکی ($f'(2) = 0, f''(2) > 0$) لري. د $x \leq 0$ او $x \geq 2$ لپاره تابع کره

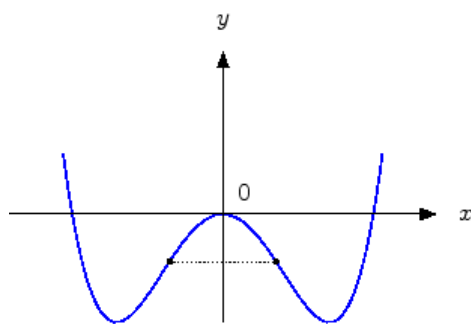
مونوتونجگېدونکي نخ ده او د $0 \leq x \leq 2$ لپاره کره مونوتون ټیټیدونکي نه ده.



یکونکي: هیولیک، هیورنر، کنش

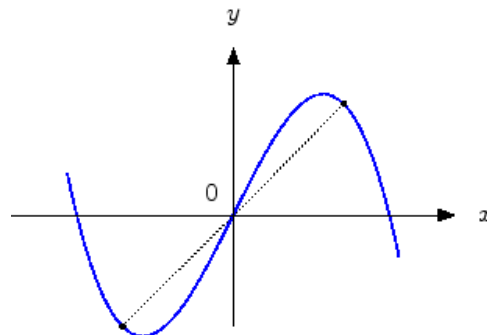
جوړه او ناجوړه - یا جفت او طاق توابع

- یو تابع f جوړه دی، که $f(x) = f(-x)$ وي، دا په دې معنا چې که گراف د y محور سره سیومتريک وي. یو ناجوړه یا طاق تابع $f(x) = -f(-x)$ دی، او گراف سرچینې سره ټکی سیومتريک دی.



gerade Funktion

جوړه یا جفت تابع



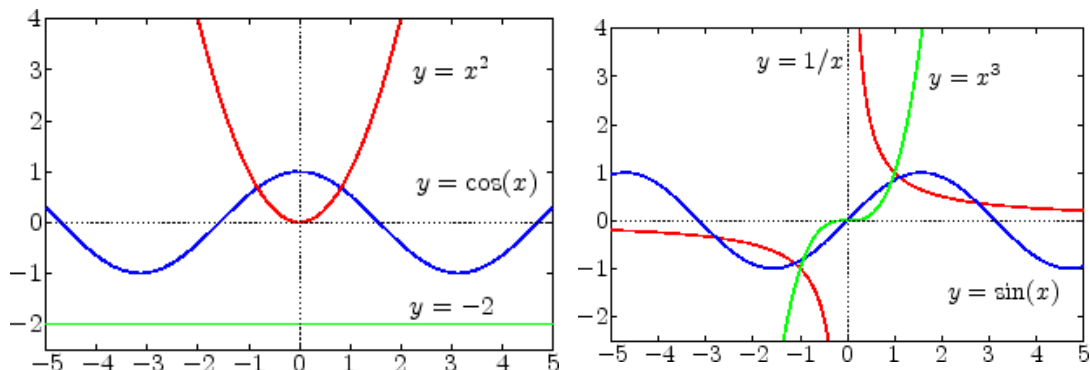
ungerade Funktion

ناجوړه یا طاق تابع

د دوه جوړه توابعو ضرب جوړه تابع دی. برعکس د یوه ناجوړه یا طاق تابع ضرب د یوه جوړه تابع سره ناجوړه دی. د زیاتون یا جمعې او کمښت یا تفریق جوړولو سره د تابع تیب یا ډول ساتلی پاتیري. پای.

سرلیک

لاندي توابع يو کين لور ته يو څو جوړه (جفت) او بني لور ته يو څو ناجوړه (طاق) توابع
بنايي.



د مناسب ترکیب جوړولو سره سړی نوري بیلگي لاس ته رواري. نو توابع

$$f(x) = x^2 \cos x - x^3 \sin x, \quad g(x) = -2 + \frac{1}{x^2}$$

جوړه دي او

$$h(x) = f(x) \sin x - g(x)x^3$$

ناجوړه دي.

پاي.

برعکس – يا په څټ فنکشن - تابع Umkehrfunktion

د يوه اینجکتیو (په کې -) تابع $f : D \rightarrow W$ د تعریفورشو D او ارزښت ورشو
 $W \subseteq \mathbb{R}$ سره د

$$f^{-1} : W \rightarrow D \subseteq \mathbb{R}, \quad x \mapsto f^{-1}(x)$$

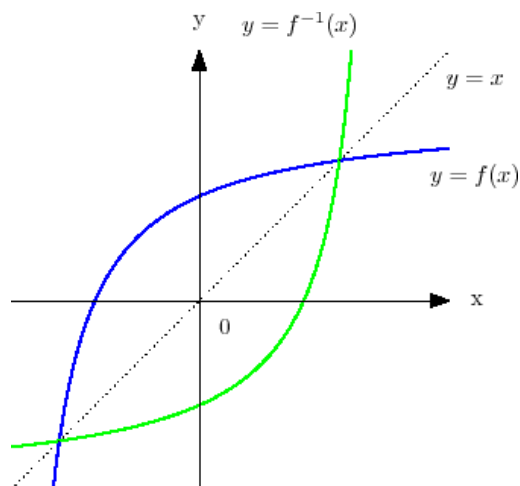
له لاري تعريف دی. له دې سره لاندي باور لري

$$y = f(x) \iff x = f^{-1}(y).$$

د برعکس توابعو تعريف ورشو د f ارزښت ورشو ده. د هغه گراف $y = f^{-1}(x)$ د

f د گراف په لومړي کونجیمي ($y = x$) هنداره شوي څپره ده:

سرلیک



$$f^{-1}(x)$$

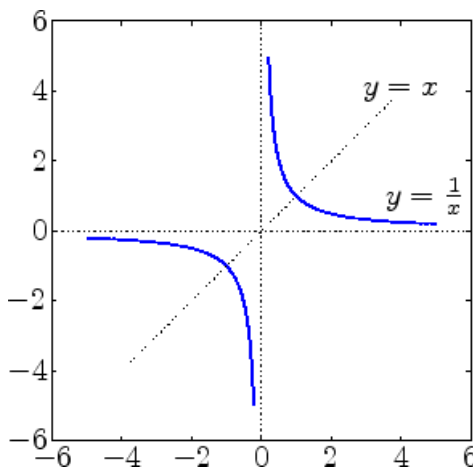
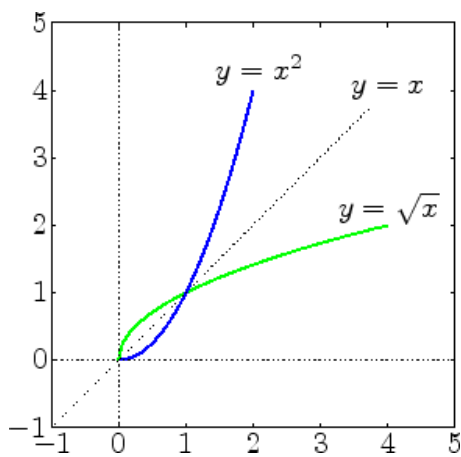
کیدی شي لیکندود مو په ساده توگه د معکوس ارزښت

$$f(x)^{-1} = \frac{1}{f(x)}$$

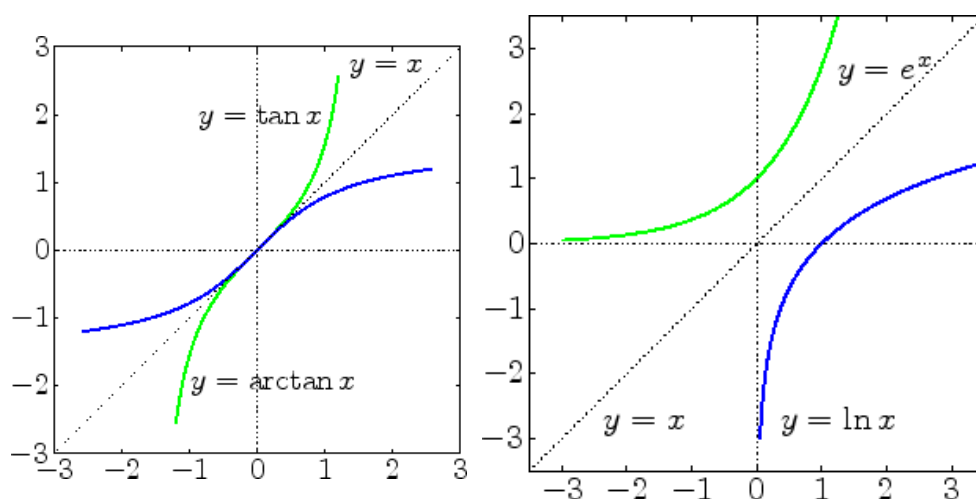
سرته بدلولو ته لار ښود کړي. په ځانگړې توگه ، که د تابع x ارزښت ونه لیکل شي، دا اړیکې دې باید روښانه وي، چې موخه مو څه ده.

پای.

لاندي څیرې د یو څو بیلگو برعکس - یا په څټ فنکشن یا تابع ښايي.



سرلیک



په لاندې جدول کې هر اړونده تعریف ورشو وي ورکړ شوي دي:

f	D	f^{-1}	D
x^2	\mathbb{R}	\sqrt{x}	$[0, \infty)$
e^x	\mathbb{R}	$\ln(x)$	$(0, \infty)$
$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$
$\tan x$	$\mathbb{R} \setminus \{x : x = (2z + 1)\pi/2, z \in \mathbb{Z}\}$	$\arctan x$	\mathbb{R}

د فنکشنونو یا توابعو سره شمیرنه Rechnen mit Funktionen

د توابعو کرښیز ترکیب ټکي ډوله تعریف شوی دی، دا په دې معنا چې په توابعو د اړونده عملیو له لارې:

$$(rf + sg)(x) = rf(x) + sg(x).$$

په ورته توگه ضرب fg او وېش f/g په وېش کې باید g د صفر سره برابر نه وي..
بالاخره

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

د دوه تابعو یو په بل پسې راوستل یا ځنځیرونه بنایي. پای.

د بیلگې

$$f(x) = x^2 - 4, \quad g(x) = x + 2$$

لپاره مختلفې ترنې راکوي

$$(f + 2g)(x) = x^2 + 2x$$

$$(fg)(x) = x^3 + 2x^2 - 4x - 8$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = x - 2, \quad x \neq -2$$

په وېش کې تعریفشخای $x = -2$ له منځه تلونکی یا د جگیدو وړ دی،

ځکه چې صورت یا ماتباندي $x^2 - 4 = (x + 2)(x - 2)$ هم په $x = -2$ کې یو صفرخای لري.

د f او g یو په بل پسې ترنه یا ځنځیرونه راکوي

$$(f \circ g)(x) = (x + 2)^2 + 4$$

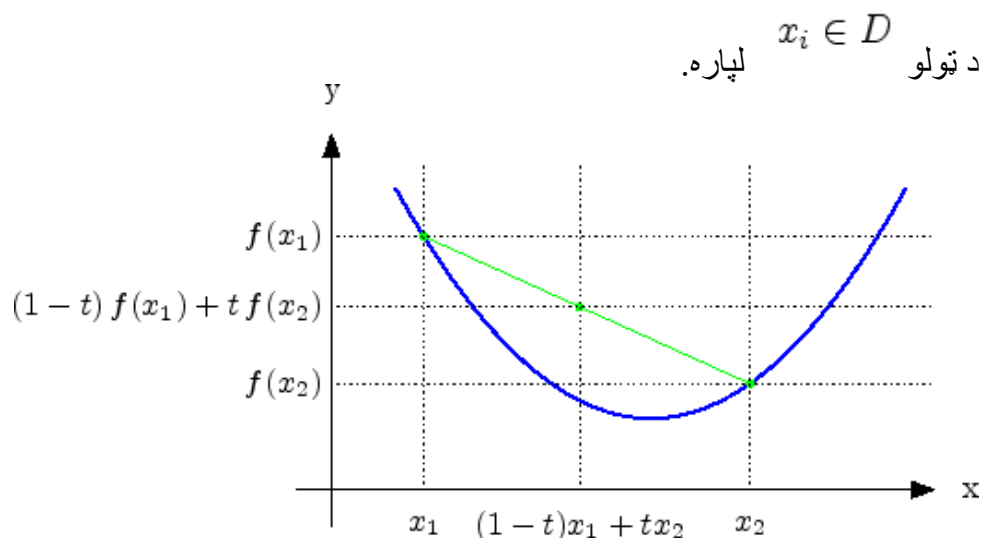
$$(g \circ f)(x) = x^2 - 2,$$

نو ترنه یا عملیه \circ کموتاتیو یا بدلور نه ده.

ننوتی او وتلی - یا مقعر او محدبې توابع

یو تابع په یوه انټروال D کې (کره) ننوتی دی، که هر ټوټه وونی یا سیکانت د گراف پورته لور ته پروت وي، دا په دې معناچي

$$f((1-t)x_1 + tx_2) \stackrel{(<)}{\leq} (1-t)f(x_1) + tf(x_2), \quad t \in (0,1)$$



که f دوه واره ناپرېکېدونکی مشتقور وي، نو (کره) ننوتنه د ټولو $x \in D$ لپاره د

$$f''(x) \stackrel{(>)}{\geq} 0$$

سره تر هغه ځانله ټکي پورې ورته یا برابر ارزښته ده.

د ننوتو توابعو زیاتون یا جمعه ننوتی ده. ټرنی یا عملیې $\frac{d^2y}{dx^2}$ همداسي یو په بل پسې راورنه یا ځنځیرونه \circ په ټولیزه توگه ننوتوالی نه ساتي. بالاخره هر ننوتی تابع ناپرېکېدونکی دی.

په ورته توگه وتلی تابع هم تعريف کيږي. د وتلي تابع لپاره توتیه وونی یا سیکانت د گراف کښته لور ته پروت دی، دا په دې معنا چې د x - محور باندې هنداره شوی تابع $-f$ وتلی دی.

پای.

د دوه ننوتو فنکشنونو یا توابعو جمعہ یا زیاتون د تعريف څخه ترلی لاس ته راځي:

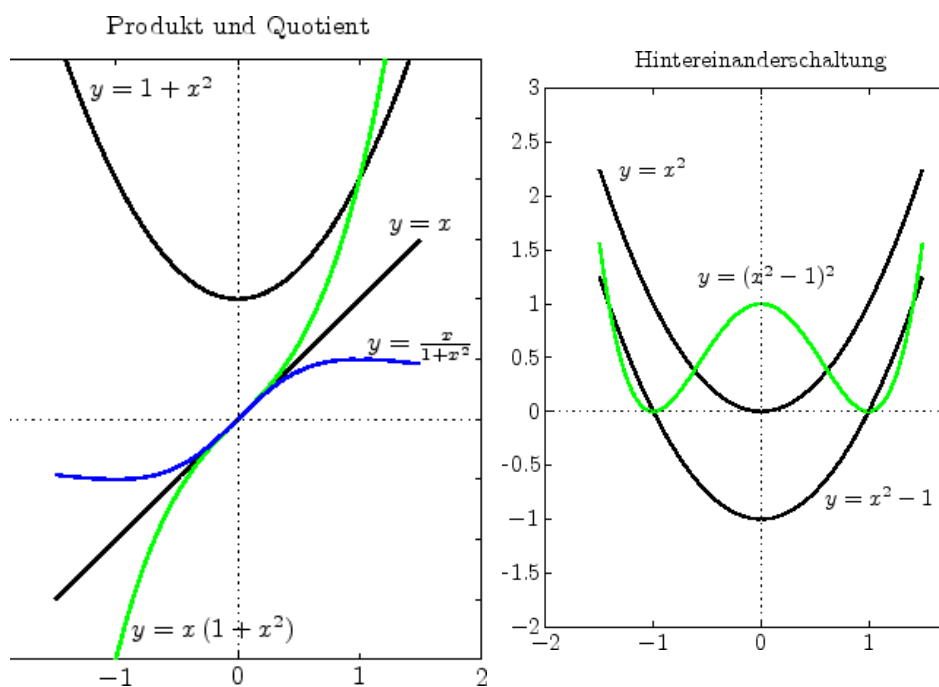
$$\begin{aligned} & (f + g)((1 - t)x_1 + tx_2) \\ &= f((1 - t)x_1 + tx_2) + g((1 - t)x_1 + tx_2) \\ &\leq (1 - t)f(x_1) + tf(x_2) + (1 - t)g(x_1) + tg(x_2) \\ &= (1 - t)(f + g)(x_1) + t(f + g)(x_2), \end{aligned}$$

د کوم سره چې د نابرابرون ننوتوالی د f او g څخه کار اخستل کيږي. نورې ترنې یا عمليې په توليزه توگه ننوتوالی نه ساتي، لکه چې لاندې بیلگې به يې وشايي.

ضرب او وېش

یو په بل پسې ترنه

سرلیک



$$c < a < x < b$$

د دې لپاره چې په یوه ټکي کې د تابع ناپېرېگدنوالی وښایو، ټاکو نو دې

$$x = ta + (1 - t)b$$

$$a = sx + (1 - s)c$$

د $0 < s, t < 1$ سره. دا چې ننوتی دی، نو باور لري

$$f(x) - f(a) \leq (1 - t)(f(b) - f(a))$$

همداسې

$$f(x) - f(a) \geq \left(\frac{1 - s}{s}\right) (f(a) - f(c)),$$

$$f(a) \leq sf(x) + (1 - s)f(c) \quad \text{د له امله.}$$

د $x \rightarrow a$ لپاره s او t د 1 په لور هڅیږي، او له دې سره دی

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - f(a)) = 0.$$

د $x < a$ لپاره ورته دلیل راوړل کيږي.

پولینوم Polynom

د n درجې یو پولینوم P په لاندې بڼه لیکل کيږي

$$p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$$

د $a_n \neq 0$ سره.

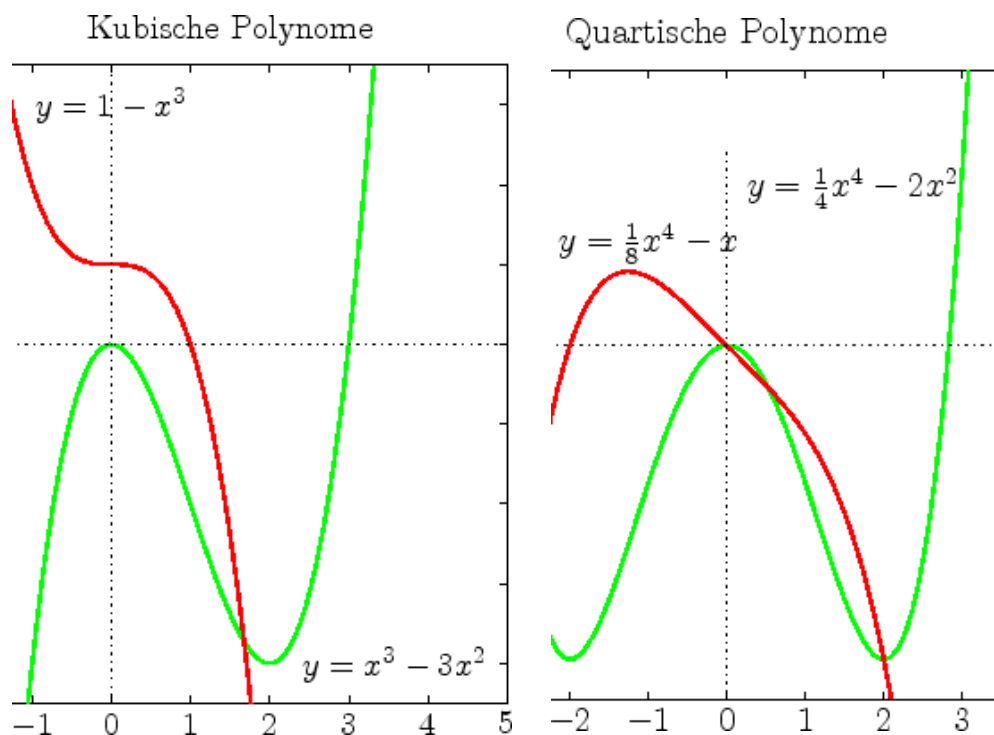
اووښتوني یا متحولي x او ضریب یا څلورنۍ a_k کیدی شي حقیقي – همداسې کمپلکس
گڼونه یا عددونه وي. په اړونده توګه د حقیقي همداسې د کمپلکس پولینوم څخه غږیږو.
لیکونکي: هیورنر او هیولیک

لاندې څیږي مکعب ډوله ($n = 3$) او کوارتیک ډوله ($n = 4$) پولینومونه د
څرنګوالي له لوري مختلف تابع ګرافونو سره بنایي.

مکعب پولینومونه

کوارتیک پولینومونه

سرلیک



پولینومویش Polynomdivision

پولینومونو p او q ته د $m = \text{Grad } q \leq \text{Grad } p = n$ سره یواځني
 پولینومونه f او r شتون لري د

$$p = fq + r, \quad \text{Grad } f = n - m, \quad \text{Grad } r < m.$$
 سره.

دا توپه ونه کیدی شي د وېش له لارې د باتي یا باقی سره وټاکل شي.

په ځانګي توګه د p د صفرځای t لپاره لاس ته راځي چې

$$p(x) = f(x)(x - t)$$
 دی د $\text{Grad } f = n - 1$ سره.

پای.

د q سره د p وېش څخه لرو

$$\underbrace{a_n x^n + \dots}_{p(x)} = \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} \underbrace{(b_m x^m + \dots)}_{q(x)} + p_{n-1}(x)$$

د یوه پاتې یا باقی $p_{n-1}(x) = a'_{n-1} x^{n-1} + \dots$ سره.

که $m \leq n - 1$ وي کېدی شي بیا ووبشل شي:

$$p_{n-1}(x) = \frac{a'_{n-1}}{b_m} x^{n-1-m} q(x) + p_{n-2}(x).$$

پروسه پرې کیري، که د پاتې پولینوم درجه له m کوچنی وي، دا په دې معنا چې وروسته د $r = p_{n-(n-m+1)}$ سره.

د تل بیا ضرب له لارې لاس ته راځي

$$f(x) = \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} + \frac{a'_{n-1}}{b_m} x^{n-1-m} + \dots$$

که t د p صفرځای وي، نو باور لري

$$0 = p(t) = f(t)(t-t) + r(t) = r(t)$$

او له دې سره $r(x) = 0$ ، ځکه چې $\text{Grad } r < 1$ دی.

د پولینوم وېش د لیکنیز وېش سره ورته مخ ته تللی شي.

$$p(x) = 9x^5 + 12x^4 + 10x^3 + 4x^2 + 4x + 2 \text{ د بیلګې په توګه د}$$

او $q(x) = 3x^2 + 2x + 1$ لپاره لاس ته راځي

$$\begin{aligned} (9x^5 + 12x^4 + 10x^3 + 4x^2 + 4x + 2) : (3x^2 + 2x + 1) &= \\ &= 3x^3 + 2x^2 + x + \frac{r(x)}{q(x)} \end{aligned}$$

سرلیک

$$\begin{array}{r} -(9x^5 + 6x^4 + 3x^3) \\ \hline 6x^4 + 7x^3 + 4x^2 \\ -(6x^4 + 4x^3 + 2x^2) \\ \hline 3x^3 + 2x^2 + 4x \\ -(3x^3 + 2x^2 + x) \\ \hline 3x + 2 = r(x) \end{array}$$

نو دی

$$\underbrace{9x^5 + 12x^4 + 10x^3 + 4x^2 + 4x + 2}_{p(x)} = \underbrace{(3x^3 + 2x^2 + x)}_{f(x)} \underbrace{(3x^2 + 2x + 1)}_{q(x)} + \underbrace{(3x + 2)}_{r(x)}.$$

د یوه پولینوم صفرخایونه او فاکتوري کول یا په ضریبونو توتو کول

یو د n درجې پولینوم p د خووالي یا تکرار سره ټیک z_k کمپلکس صفرخایونه لري او له دې سره کېدی شي په ورته کرښیزو ضریبونو یا فاکتورونو

$$p(z) = c(z - z_1) \cdots (z - z_n)$$

ولیکل شي د ثابتې c سره.

$$x_k \pm iy_k$$

که p حقیقی یا قبیل وي، نو کمپلکس صفرخایونه په کنجوگیری جړرو رامنځ ته کیږي.

یو حقیقي په ضریبونو لیکل یا فاکتوره کول کېدی شي د کرښیزو فاکتورونو ترڅنګ د لاندې مربع فاکتورونه

$$(z - x_k - iy_k)(z - x_k + iy_k) = (z - x_k)^2 + y_k^2$$

هم ولري.

د دویمې درجې پولینوم صفرخایونو لپاره کیدی د منځسپې یا **ABC فرمول (دا د p, q فرمول ته روتو یا همغښي دی) و کارول شي** او د دریمې او څلورمې درجې پولینومونه د کاردان فرمولونو **Cardanischen Formeln** له لارې د اکسپلیسیت الجبری افادو یا ویبنو په توګه و ټاکل شي.

د جګو درجو پولینومونو لپاره بیا په ټولیزه توګه نومریکي تلنلارې کارول کیږي. که بیا یو صفرخای معلوم وی، نو کېدی شي د اړونده کرښیز فاکتورونو یا ضریبونو له لارې

و وېشل شي.

د $q(z) = p(z)/(z - z_1)$ او z_2, \dots, z_n د $n - 1$ درجې د پولینوم د د صفرځایونو په توګه وټاکل شي.

د الجبر بنسټیزې جملې په اساس د $\text{Grad} \geq 1$ درجې کمپلکس پولینوم یو صفرځای لري. د پرلپسې پولینومو پېشنې د صفرځایونو سره اړونده کرښیز صریبونه یا فاکتورونه له دې سره صریبونه راکوي.

که P فقط حقیقی صریبونه ولري، نو باور لري

$$\overline{p(z)} = \overline{\sum_{k=0}^n p_k z^k} = \sum_{k=0}^n p_k \overline{z^k} = \sum_{k=0}^n p_k \overline{z}^k = p(\overline{z})$$

یعني د یوه صفرځای z_0 لپاره هم $p(\overline{z_0}) = \overline{0} = 0$ دی.

$$p(z) = z^3 - 5z^2 + 9z - 5$$

په صریبونو لیکل یا فاکتوره کول ټاکو. پیژنو، چې $z_1 = 1$ یو صفرځای دی او یو د پولینوم وېش سره لرو

$$p(z)/(z - 1) = z^2 - 4z + 5.$$

د دې مربع پولینوم صفرځایونه د منځسپې فرمول له مخې دي

$$z_{2,3} = 2 \pm i.$$

د دې په تعقیب کمابکس فاکتورونه لاندې ده

$$p(z) = (z - 1)(z - 2 - i)(z - 2 + i).$$

حقیقی په صریبونو لیکنه یا صریبونه د دواړو اخرنی فکتورونو د ټولګې څخه لاس ته راوړو همداسې سیده د مربع تکمیلوني له لارې:

$$z^2 - 4z + 5 = (z - 2)^2 + 1,$$

سرلیک

دا په دې معنا چې

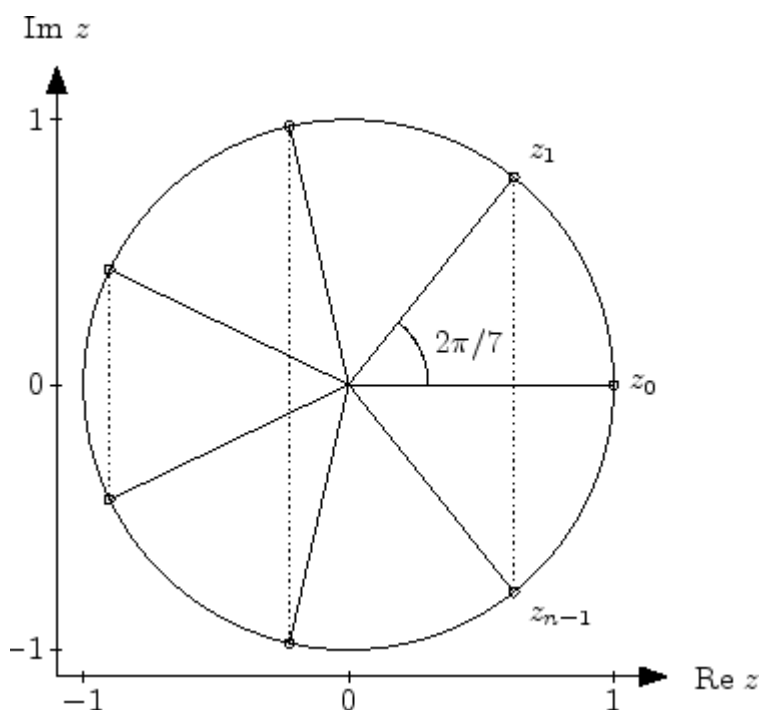
$$p(z) = (z - 1)((z - 2)^2 + 1).$$

لیکونکي: هیولیگ، هیورنر، کنش

د $p(z) = z^n - 1$ صفرخایونه n - م یوونرېښې یا واحدجرونه دي
 $z_k = \exp(2k\pi i/n), k = 0, \dots, n - 1.$

له دې سره کمپلکس فاکتورونه لاس ته راځي

$$p(z) = \prod_{k=0}^{n-1} (z - \exp(2k\pi i/n)).$$



د کمپلکس کنجرېگري صفرخایونو ټولګه یا یوځای کونه حقیقي فاکتوري کونه راګوي.

د جوړه n لپاره دی

$$p(z) = (z - 1)(z + 1) \prod_{k=1}^{n/2-1} (z^2 - 2z \cos(2k\pi/n) + 1)$$

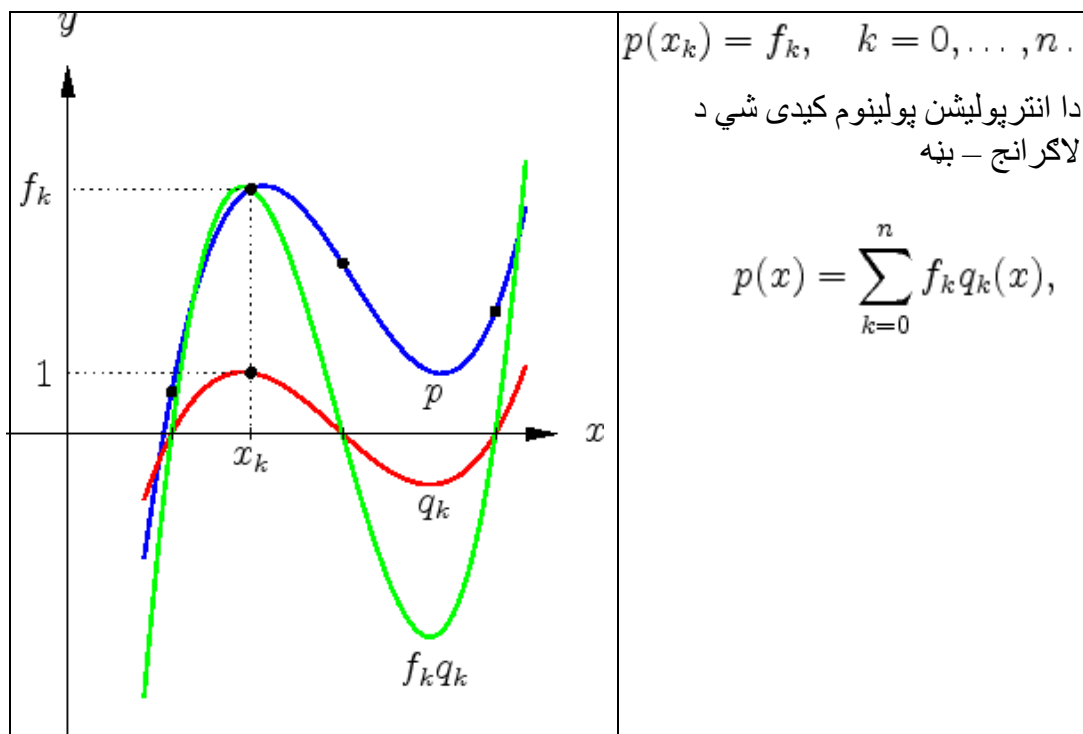
او د ناجوره یا طاق n لپاره

$$p(z) = (z - 1) \prod_{k=1}^{(n-1)/2} (z^2 - 2z \cos(2k\pi/n) + 1).$$

پای.

د پولینومونو سره انترپولیشن

په $n + 1$ کې تابع ارزښتونه f_k جوړه په مختلف تکیه ځایونو x_0, \dots, x_n کیدی شي یواځني د یوه $\text{Grad} \leq n$ درجې پولینوم له لارې انترپولی شي:



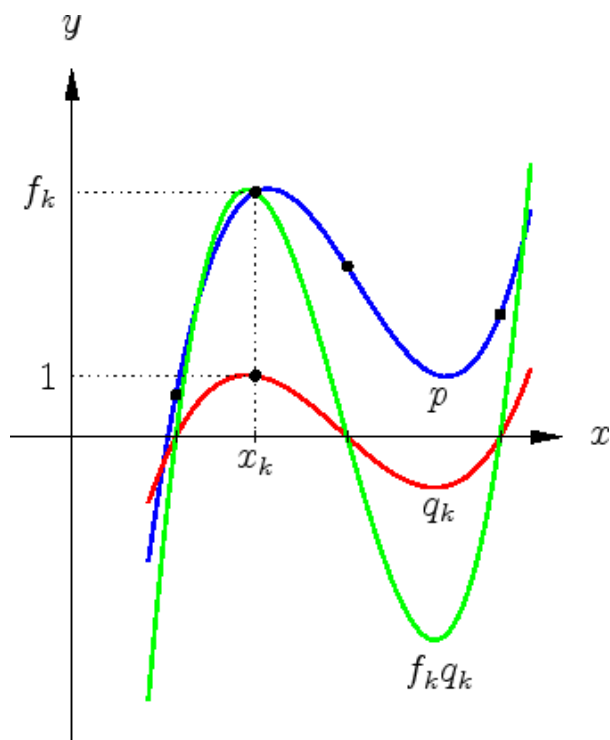
$$p(x) = \sum_{k=0}^n f_k q_k(x),$$

$$p(x_k) = f_k, \quad k = 0, \dots, n.$$

دا انترپولیشن پولینوم کیدی شي د لاگرانج - بڼه

$$p(x) = \sum_{k=0}^n f_k q_k(x), \quad q_k(x) = \prod_{j \neq k} \frac{x - x_j}{x_k - x_j},$$

انځور شي.



پولینوم q_k د لاگرانج-پولینوم بلل کیږي او په x_k کې ارزښت 1 لري او په نورو ټولو x_j کې یې ارزښت صفر دی:

$$q_k(x_j) = \delta_{k,j}$$

د کرونیگر-سومبول δ سره.

د لاگرانج-پولینوم

$$q_k(x_j) = \delta_{j,k}$$

پوره کوي او له دې سره لاس ته راځي

$$p(x_j) = \sum_k f_k \delta_{j,k} = f_j,$$

د انترپولیشن شرایط ټول پوره دي.

د دې لپاره چې یواځوالی وښایو، چې یو بل انترپولیشن پولینوم \tilde{p} شتون لري، کمښت را اخلو یا تر څېړني نیسو.

$$p - \tilde{p}.$$

دا (لرتر لره) $n + 1$ صفر ځاونه لري (د انترپولیشن کېدونکي ځایونه x_k)، مگر (زیات له زیاته) د n درجو له دط سره باید کمښت کتمت وي، نو پولینومونه سره توپیر نخ لري. لیکونکي: هیولیگ، هیورنر

په اکویديستانت یا برابر واتییز تکیه-ځایونو f_k د ارزښتونو توابعو ټیک گرافیکي انځورونې ته کېدی شي مکعبیز انترپولیشن وکارول شي. له دې سره په تکیه-

$$x_{k+1/2} = (k + 1/2)h$$

منځ ارزښتونه د ځایونو

$$f_{k+1/2} = (-f_{k-1} + 9f_k + 9f_{k+1} - f_{k+2})/16$$

له لارې اپروکسیمې شي. دا پروسه تکراریري، تر هغز چې پوره داتا منځ ته راشي. د ټکو فرمول وزنونه

سرلیک

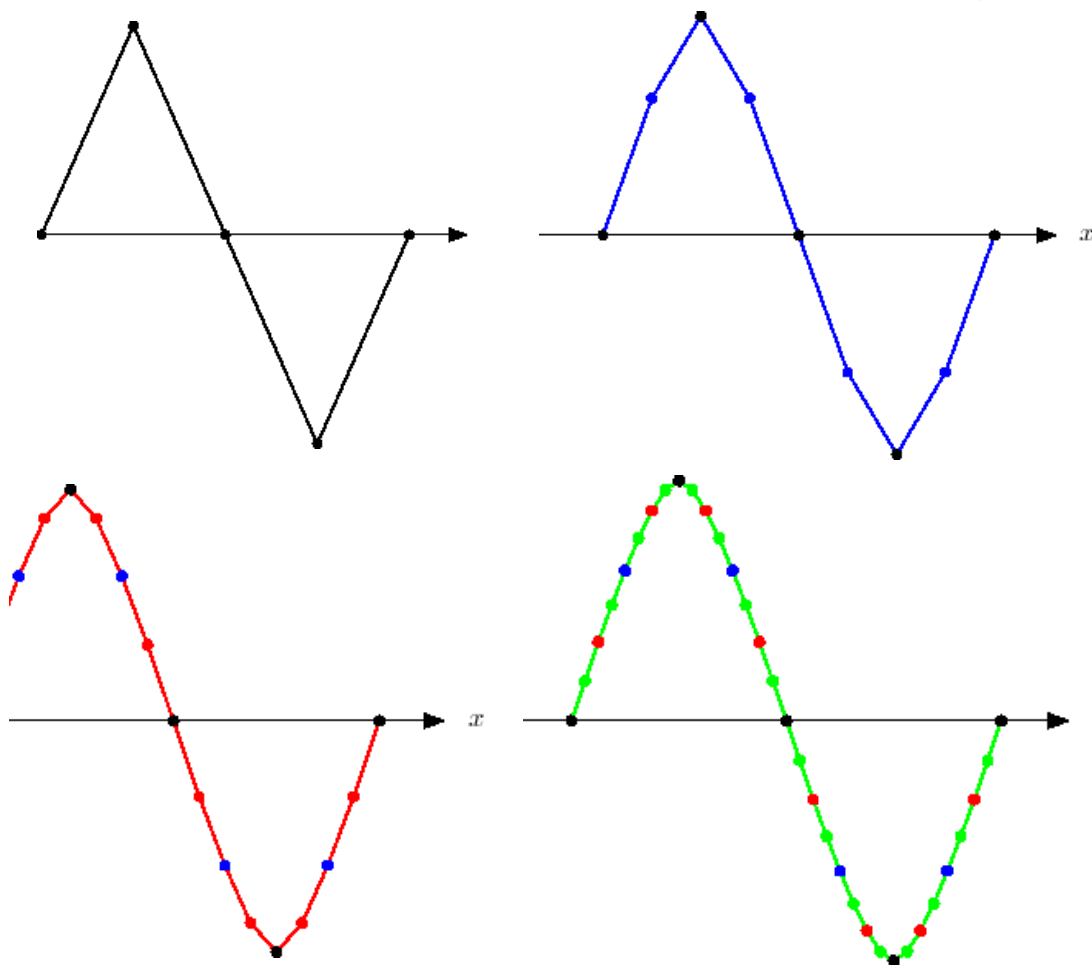
$$-\frac{1}{16}, \frac{9}{16}, \frac{9}{16}, -\frac{1}{16}$$

په تکیه-خایونو $x_{k+1/2}$ د لاگرانژ-پولینوم ارزښتونه دي.
د بېلگې په ټوکه

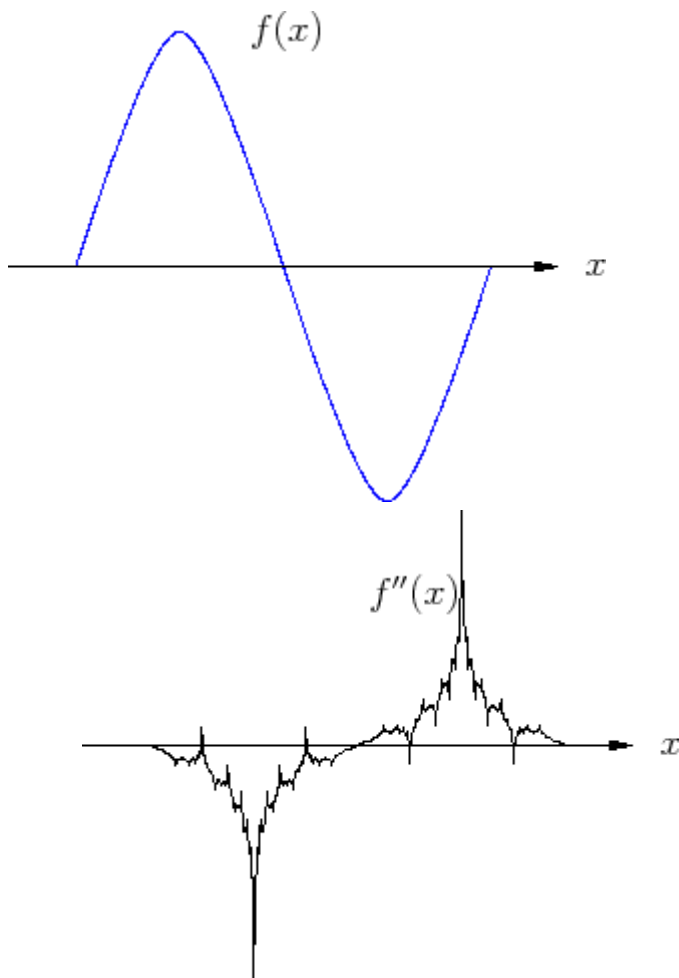
$$-\frac{1}{16} = \left(\frac{x - kh}{(k-1)h - kh} \frac{x - (k+1)h}{(k-1)h - (k+1)h} \frac{x - (k+2)h}{(k-1)h - (k+2)h} \right) \Big|_{x=(k+1/2)h}$$

دی.

د سیمټري په بنسټ او دا چې ضریبونه باید سیمټریک شي (د ثابتو داتا انټرپولیشن) ، بی له شمېرنې نور ضریبونه راځوي.



څیره وتونداتا بنایي او د 4-ټکو-انترپولیشن د درې څله کارونې یا استعمال له لارې د منځ ته اړغلي ساین تابع اېروکسیمیشن . په حقیقت کې دا لاندې کین بنودل شوی پوله تابع خوی اغیز لري. مگر په هر حالت فقط لومړی مشتق ناپرېکیدونکی دی.



بنی گرافیک وېشلی کمښت له لارې ورنږدې یا نږدې دویم مشتق د اته واره انترپولیشن پسي بنایي. سری د گراف فراکتال *fraktalen* (فراکتال: لاتین: مات) خویونه پیژني.

راشنل (کسری یا نسبي) توابع

سرلیک

یو ریښتونی تابع r د صورت درجې m او مخرج درجې n سره د دوه پولینومونو وېش دی:

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_0 + a_1x + \dots + a_mx^m}{b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n}$$

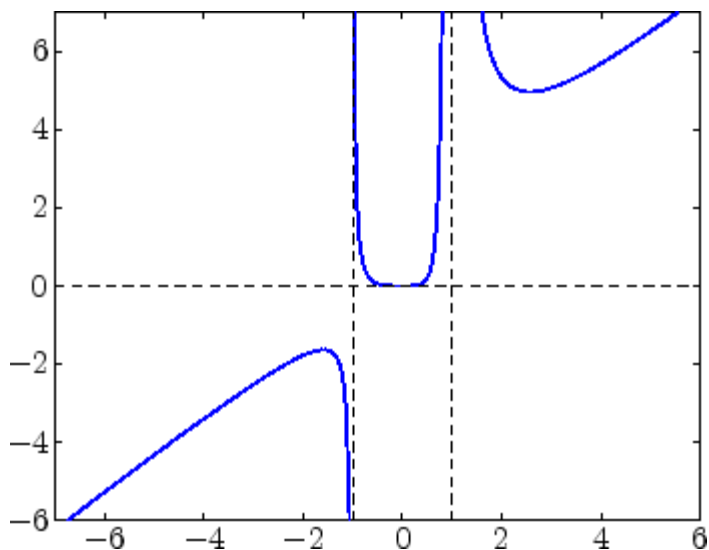
دا انځورونه نا ټوټه وونی بلل کیږي، که p او q کوم گډ کرښیز ضریب یا فاکتور ونه لري. د مخرج صفرځایونه راشنل تابع r د تعریف تشځایونه دي او د قطبځایونه بلل کیږي. د دوی نظم د صفرځایونو ډېرځلوالی ښایي.

اووښتوني یا متحولي x او ضریبونه a_k ، b_k کېدی شي حقیقي یا کمپلکس وي. اړوند سری د حقیقي یا کمپلکس راشنل تابع څخه غږیږي. للیکونکي: اپ، هیولیگ

تابع

$$f(x) = \frac{x^4}{(x+1)(x-1)^2}$$

تابع یو ساده قطب په $x = -1$ کې لري او ډبل پول په $x = 1$ کې.



سری له تابع f څخه درک کوي، چې په یوه ساده صفرځای کې منځښته بدلوي او په یوه ډبل صفرځای کې منځښته تغیر نه خوري.

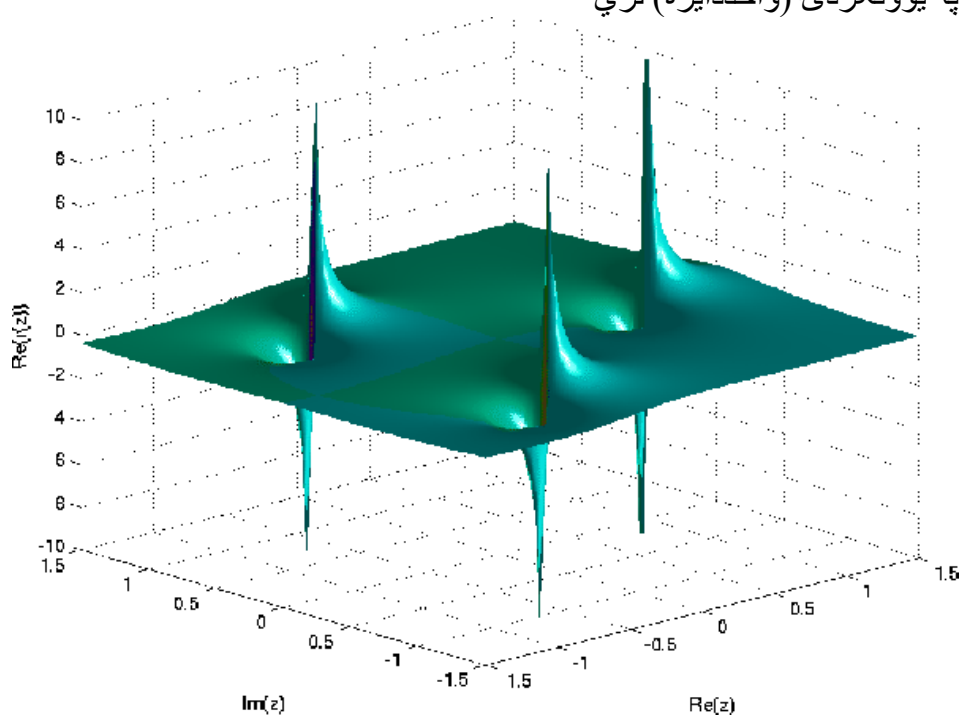
کمپلکس راشنل- یا کسري توابع

$$r(z) = \frac{z^2}{z^3 - 1}$$

درې صفرځایونه

$$z_1 = 1, z_2 = e^{2\pi i/3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, z_3 = e^{-2\pi i/3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

په یوونگردي (واحدایره) لري



څیره د r د گراف ریيل - او ایماجینار برخه ښایي. له دې سره د رنگو پښته (که چېرې رنگه وه) د r د مطلق ارزښت له لارې ټاکل شوي.

(لیکونکي: ایپ، هیورنر، کنش

سرلیک

په ټوټه مات ټوټه کونه یا تجزیه کونه Partialbruchzerlegung

یو د m_j نظم راشنل تابع r د n مختلفو صفرخایونو z_j سره ،

$$r = \frac{p}{q}, \quad q(z) = (z - z_1)^{m_1} \dots (z - z_n)^{m_n}$$

کیدى شي په لاندې ټوټه شي

$$r(z) = f(z) + \sum_{j=1}^n r_j(z), \quad r_j(z) = \frac{a_{j,1}}{z - z_j} + \dots + \frac{a_{j,m_j}}{(z - z_j)^{m_j}},$$

دلته f د $d = \text{Grad } p - \text{Grad } q$ درجې پولینوم دی ($f = 0$ ، که

$d < 0$ وی). راشنل توابع r د r_j په قطبخایونو کې اصلي برخې بلل کېږي. دا د $r(z)$ لوبنده تشریح کوي د $z \rightarrow z_j$ لپاره. پولینوم f کیدى شي د پولینوموېش له لارې وشمېرل شي:

$$p = fq + g, \quad \text{Grad } g < \text{Grad } q.$$

دلته g د p په q باندې وېشني پاتي یا باقي دی. ضریبونه $a_{j,\nu}$ کیدى شي د z^k د ضریبونو د پرتله کونې له لارې په کټوتوالي

$$p(z) = q(z) \left(f(z) + \sum_{j=1}^n r_j(z) \right)$$

وټاکل شي.

د بدیل په توګه د اصلي برخو ټاکلو لپاره د پوله ارزښت متود هم کارول کیدى شي.

د قطبونو د خوراجکو ضریبونو لپاره باور لري

$$a_{j,m_j} = \lim_{z \rightarrow z_j} (z - z_j)^{m_j} r(z).$$

د یوه نظم $(m_j > 1)$ قطبځای کې نه شي کېدی ضربیونه $a_{j,1}, \dots, a_{j,m_j-1}$ سیده
د پولې ارزښت په توګه وټاکل شي. سری کړی شي دا اوس شمیرل شوی ترم

کم کړي او د رګورسیو متود وکاروي.. یو ضریب پرتله کونه
د همدا اوس شته ترمونو په پام کې نیولو هم شوني ده.

پوله ارزښت کېدی شي وټاکل شي، داسې چې د r په مخرج کې ضریب $(z - z_j)^{m_j}$

لري برېښوول شي او بیا z_j په پاتې کسر یا مات کې ځا په ځای شي. په ځانګړي
توګه باور لري

$$a_{j,1} = \frac{p(z_j)}{\prod_{k \neq j} (z_j - z_k)}$$

د ساده قطب ځایونو z_1, \dots, z_n لپاره.
لیکونکي: اپ، هیورنر

د ساده قطبځایونو ($m_j = 1$) لپاره به ټوټه کونه منځ ته راشي. د پولینوم وېش پسې
راشئل تابع منځ ته راځي

$$r(z) - f(z) = \frac{g(z)}{q(z)} = \frac{g(z)}{(z - z_1) \cdots (z - z_n)},$$

د کوم سره چې پولینوم $g(z)$ او $q(z)$ ګډ پروېشونی یا مقسوم علیه ونه لري، نیسو،

چې ټول z_j مختلف دي، او $\text{Grad } g < n$ باور لري.
د ټوټه کسر ټوټه کونې سره د برابر اېښوونې وروسته

$$\frac{a_1}{z - z_1} + \cdots + \frac{a_n}{z - z_n}$$

سرلیک

د لاس ته راوړي $a_j = a_{j,1}$ د سره او د q د ضربول سره سرې د $g(z)$ د لاگرانژ-انځورونه

$$g(z) = \sum_{j=1}^n \left(a_j \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n (z - z_k) \right) = \sum_{j=1}^n \left[a_j \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n (z_j - z_k) \right] \underbrace{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \frac{z - z_k}{z_j - z_k}}_{q_j(z)}$$

دا په $g(z_j)$ معنایي د $q_j(z_k) = \delta_{j,k}$ له امله په گوډیزه نوکانو کې د ازبستونه

$$a_j = g(z_j) / \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n (z_j - z_k).$$

دې. له دې سره لاس ته راځي په ورته توګه د جګو درجو قطبځایونه هم کار ول کېدی شي. دا مګر تخنیکي لږ پېلې دی.

لیکونکي: اپ، هیورنر

$$r(z) = \frac{p(z)}{q(z)} = \frac{z^3}{z^2 + z - 2}$$

په توتیه کسر (مات) توتیه ونه دې وټاکل شي. دا چې د صورت درجه د مخرج له درجې کوچنۍ نه ده، باید لومړی یو پولینوم وپس صورت ونیسي. سرې لاس ته راوړي

$$\begin{aligned} (z^3) : (z^2 + z - 2) &= z - 1 + \frac{3z - 2}{z^2 + z - 2}, \\ -\frac{(z^3 + z^2 - 2z)}{-z^2 + 2z} & \\ -\frac{(-z^2 - z + 2)}{3z - 2} & \end{aligned}$$

دا په دې معنا چې $r = f + \frac{g}{q}$ د $f(z) = z - 1$, $g(z) = 3z - 2$.
 د دې لپاره چې د ټوټه مات ټوټه ونې ایښونه چې لاس ته راوړو باید اوس د r قطبځایونه وټاکل شي. د منځنۍ فرمول سره لاس ته پلینوم د صفحای په څېر:
 $q(z) = (z - 1)(z + 2)$.

د g/q ټوټه مات ټوټه ونه له دې سره لاندې بڼه لري

$$\frac{3z - 2}{z^2 + z - 2} = \frac{a_1}{z - 1} + \frac{a_2}{z + 2}.$$

دا اخر پل د ضریبونو a_k ټاکل دي.

د پوله ارزښت متود سره لاس ته راځي

$$a_1 = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1) \frac{3z - 2}{z^2 + z - 2} = \left. \frac{3z - 2}{z + 2} \right|_{z=1} = \frac{1}{3}$$

$$a_2 = \left. \frac{3z - 2}{z - 1} \right|_{z=-2} = \frac{8}{3}.$$

او

په ټولیزه توګه لاس ته راځي

$$r(z) = z - 1 + \frac{1/3}{z - 1} + \frac{8/3}{z + 2}.$$

پای.

راشنل توابع

$$r(z) = \frac{2z^2 - 5z - 3}{z^3 - 3z^2}$$

په $z_1 = 3$ کې یوه ساده قطبځای لري او په $z_2 = 0$ کې یو ډبل قطبځای لري.

سرلیک

دا چې د صورت درجه د مخرج له درجې کوچنۍ ده، پولینوم وېش ته اړتیا نه شته او د په ټوټه کسر ټوټه ونه دا بڼه لري

$$\frac{2z^2 - 5z - 3}{z^3 - 3z^2} = \frac{a_1}{z^2} + \frac{a_2}{z} + \frac{a_3}{z - 3}.$$

د پوله ارزښت متود سره لرو

$$a_1 = \lim_{z \rightarrow 0} z^2 \frac{2z^2 - 5z - 3}{z^3 - 3z^2} = \frac{2z^2 - 5z - 3}{z - 3} \Big|_{z=0} = 1$$

$$a_3 = \lim_{z \rightarrow 3} (z - 3) \frac{2z^2 - 5z - 3}{z^3 - 3z^2} = \frac{2z^2 - 5z - 3}{z^2} \Big|_{z=3} = 0.$$

سړی په ساده ډول کړی شي، چې دا پاتې (هغه په اصطلاح، چې ورته وايو باقي مانده)

د تابع ارزښتونو د پرتوله کونې له لارې وټاکي. د بېلگې په توگه د $z = 1$ لپاره لرو

$$\frac{2 - 5 - 3}{1 - 3} = 1 + a_2 + 0$$

او سړی $a_2 = 2$ لاس ته راوړي.

لیکونکي: اپ، هیورنر

د راشنل توابعو لپاره

$$r(z) = \frac{z^2 - 5z + 4}{z^3 - 3z^2 + z + 5}$$

لپاره قطبځایونه روښانه نه دي. د ازماښت له لارې پیداکړي او بیا د پولینوم وېش سره لاس ته راځي

$$(z^3 - 3z^2 + z + 5) : (z + 1) = z^2 - 4z + 5.$$

د نیمې شپې فرمول سره د مخرج نور صفرځایونه $q(z)$ لاس ته راځي

$$z_{2,3} = 2 \pm i.$$

له دې سره ماتلاندې یا مخرج ضریبه ونه یا فاکتوری کونه

$$q(z) = (z + 1)(z - 2 - i)(z - 2 + i)$$

لري او د ټوټه کسر ټوټه کونه داسې ده

$$\frac{p(z)}{q(z)} = \frac{a}{z + 1} + \frac{b}{z - 2 - i} + \frac{c}{z - 2 + i}.$$

د دې لپاره چې a, b, c د ضریبونو د پرتلې له لارې وټاکو، د مخرج $q(z)$ سره وپشو او لرو

$$z + 4 = a(z - 2 - i)(z - 2 + i) + b(z + 1)(z - 2 + i) + c(z + 1)(z - 2 - i).$$

د $1, z, z^2$ د ضریبونو د پرتله کونې له لارې د درې ناتیالو یا نامعلومو a, b او c لپاره یو کرښیز مساوات سیستم لاس ته راځي:

a	b	c	
1	1	1	1
-4	$-1 + i$	$-1 - i$	-5
5	$-2 + i$	$-2 - i$	4

د حل په حیث لاس ته $b = i/2$ او $a = 1$ ، $c = -i/2$ راځي، دا په دې معنا، چې

$$r(z) = \frac{1}{z + 1} + \frac{i/2}{z - 2 - i} + \frac{-i/2}{z - 2 + i}.$$

که اخري دواړه ترمونه سره یوځای کړو، نو حقیقي ټوټه کسر ټوټه ونه لاس ته راځي

$$r(z) = \frac{1}{z + 1} + \frac{1/4}{z^2 - 4z + 5}.$$

د حقیقي ټوټه کسر ټوټه ونه یا تجزیه

سرلیک

یو حقیقي ریښتونۍ یا راشنل تابع r د حقیقي قطبځایونو x_j سره او کمپلکس کنجوکیري قطبځایونو $u_k \pm v_k$ سره او څو وارو والی یا ډېروالی m_j همداسې n_k

$$r = \frac{p}{q}, \quad q(x) = \prod_j (x - x_j)^{m_j} \prod_k ((x - u_k)^2 + v_k^2)^{n_k}$$

کیدۍ شي په لاندې بڼه

$$r(x) = f(x) + \sum_j \sum_{\nu \leq m_j} \frac{a_{j,\nu}}{(x - x_j)^\nu} + \sum_k \sum_{\mu \leq n_k} \frac{b_{k,\mu}(x - u_k) + c_{k,\mu}}{((x - u_k)^2 + v_k^2)^\mu}$$

توټه کیري، د $d = \text{Grad } p - \text{Grad } q$ درجي () که $f = 0$ ، $d < 0$ وي

یوه پولینوم f سره. د په هر قطبځای زیاتونونو یا د جمعي غرو د گڼون یا تعداد ډېرواره والی په گوته کوي. په ځانگړي توگه د ساده قطبځای لپاره باور لري

$$r(x) = f(x) + \sum_j \frac{a_j}{x - x_j} + \sum_k \frac{b_k(x - u_k) + c_k}{(x - u_k)^2 + v_k^2}$$

پولینوم f کیدۍ شي ډپولینوم وېش له لارې وټاکل شي

$$p = fq + g, \quad \text{Grad } g < \text{Grad } q,$$

دا په دې معنا چې g د p وېش په q باندې پاتي یا باقي دی. ضریبونه کیدۍ شي د مخرج پولینوم سره له ضرب وروسته دضریبونو د پرتلي له لارې وشمېرل شي. حقیقي توټه کسر توټه کونه هم کیدۍ شي د کمپلکس بڼې څخه وکتل شي یا لاس ته راوړل شي، داسې چې سړی کمپلکس کنجوکیري ترمونه سره یوځای کاندې.

توټه کونه د ساده قطبځایونو () لپاره سرته رسیږي.. $m_j = n_k = 1$

د r کمپلکس ټوټه کسر ټوټه کونه په دې حالت کې دا لاندې بڼه لري

$$p(x) + \sum_j \frac{a_j}{x - z_j}$$

د z_j سره دمخرج پرلینوم q ساده صفرخایونه او

$$a_j = \lim_{z \rightarrow z_j} (z - z_j)r(z).$$

دا q چې حقیقي دی، نو کمپلکس صفرخایونه د کمپلکس کونجرگيري جوړوپه توگه منځ ته راځي:

$$z_k = u + \frac{v}{i}, \quad z_l = u - \frac{v}{i} = \overline{z_k}.$$

له دې سره د اړونده ترمونو لپاره لاندې ټوټه ونه باور لري

$$\overline{a_k} = \lim_{z \rightarrow z_k} \overline{(z - z_k)r(z)} = \lim_{\bar{z} \rightarrow z_l} (\bar{z} - z_l)r(\bar{z}) = a_l,$$

دا په دې معنا، چې

$$a_k = s + \frac{t}{i}, \quad a_l = s - \frac{t}{i}.$$

د دواړو ترمونو یوځای کونه غوښتونې بڼه راکوي:

$$\frac{s + it}{x - u - iv} + \frac{s - it}{x - u + iv} = \frac{2s(x - u) - 2tv}{(x - u)^2 + v^2}.$$

د جگو درجو قطبځایونه کیدی شي په ورته توگه تر څیرني ونیول شي، مگر دلیل راوړنه یې په څرگنده توگه پېچلې ده.

د

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{2x^3 - 9x^2 + 11x + 1}{x^3 - 4x^2 + 5x}$$

حقیقي په ټوټه کسر ټوټه کونې ټاکنه په درې پلونو یا قدمونو وېشل کیري

(i) دا چې $\text{Grad } p \geq \text{Grad } q$ دی، لومړی د پلونیوم وېشنه صورت نیسي:

سرلیک

$$(2x^3 - 9x^2 + 11x + 1) : (x^3 - 4x^2 + 5x) = 2$$

$$g(x) = -x^2 + x + 1.$$

پاتي

له دي سره لاس ته راځي

$$r(x) = f(x) + \frac{g(x)}{q(x)} = 2 + \frac{-x^2 + x + 1}{x^3 - 4x^2 + 5x}.$$

(ii) د دي لپاره چې د $\frac{g}{q}$ ټوټه ونې ايسوونه يا اسمعمال پيدا كړو، نو قطبځايونه ټاكو يا پيدا كوو.

د q د صفر ځايونو $x = 0$ د نوكانو د باندې كوني وروسته د مبع تكميل له لاري سړي نور دواړه صفر ځايونه لاس ته راوړي:

$$x^2 - 4x + 5 = (x - 2)^2 + 1^2.$$

دا پاتي صفر ځايونه كمپلېكس كونجوگيري جوړي $u \pm iv = 2 \pm i$ دي. له دي سره ايسوونه په لاندي توگه ده

$$\frac{-x^2 + x + 1}{x((x - 2)^2 + 1^2)} = \frac{a}{x} + \frac{b(x - 2) + c}{(x - 2)^2 + 1^2}.$$

(iii) د ضربيونو د ټاكنو لپاره د اصلي مخرج q سره ضربيري او تري لاس ته راځي

$$-x^2 + x + 1 = a((x - 2)^2 + 1^2) + b(x - 2)x + cx$$

د x ، 1 او x^2 ضربيونو پرتله مو كړنيز مساوات سيستم ته بيايي

$$1 = 5a$$

$$1 = -4a - 2b + c$$

$$-1 = a + b$$

د لاندې حل سره

$$a = \frac{1}{5}, b = -\frac{6}{5}, c = -\frac{3}{5}.$$

له دې سره حقیقي توپه کسر توپه کونه ده

$$r(x) = \frac{1/5}{x} + \frac{-6/5(x-2) + (-3/5)}{(x-2)^2 + 1^2}.$$

د ټاکلو لپاره پوله ارزښت متودونه هم کارول کيږي. که دا ایشوونه یا ځای په ځای کونه د x سره ضرب شي او $x = 0$ کيږدي، نو لاس ته ترې راځي

$$\frac{1}{2^2 + 1^2} = a + 0 \implies a = \frac{1}{5}.$$

د $x = 2$ ځای په ځای کوني سره c لاس ته راځي:

$$\frac{-2^2 + 2 + 1}{2(0^2 + 1^2)} = \frac{1/5}{2} + \frac{c}{0^2 + 1^2} \implies c = -\frac{3}{5}.$$

بلاخره کېدی b د ټکی ازماښت $x \neq 2$ له لارې، د بېلګې په توګه $x = 1$ منځ ته راځي.
پای.

د

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{x^3}{x^4 + 2x^2 + 1}$$

حقیقي توپه کسر توپه کوني ټاکلو په دوه پلونو یا قدمونو کې ترتیبيږي

سرلیک

(i) د اینسوونې د ټاکلو لومړۍ قطبځایونه پیدا کيږي. له

$$q(x) = (x^2 + 1)^2$$

پېژندل کيږي، چې $\pm i$ ډبل صفرځایونه دي، دا په دې معنا چې $u = 0$ او $v = 1$.
له دې سره دا اینسوونه ده

$$\frac{x^3}{(x^2 + 1)^2} = \frac{b_1x + c_1}{x^2 + 1} + \frac{b_2x + c_2}{(x^2 + 1)^2}.$$

(ii) د ضریبونو د ټاکلو له امله دا سری د اصلي مخرج q سره ضربوي او لاس ته تری راوړي

$$\begin{aligned} x^3 &= (b_1x + c_1)(x^2 + 1) + b_2x + c_2 \\ &= b_1x^3 + c_1x^2 + (b_1 + b_2)x + (c_1 + c_2)1. \end{aligned}$$

$$\begin{array}{rcl} & & 1, x, x^2 \\ & & \text{د } x^3 \text{ او د ضریبونو پرتله کونه مو کړنیز سیستم ته بیایي} \\ 1 & = & b_1 \\ 0 & = & c_1 \\ 0 & = & b_1 + b_2 \\ 0 & = & c_1 + c_2 \end{array}$$

د لاندې حل سره

$$b_1 = 1, c_1 = 0, b_2 = -1, c_2 = 0.$$

بدیلي کیدی شي د کمپلکس ټوټه کسر ټو کوني څخه مخ ته لاړ شو

$$\frac{z^3}{(z-i)^2(z+i)^2} = \frac{a}{z-i} + \frac{b}{(z-i)^2} + \frac{c}{z+i} + \frac{d}{(z+i)^2}.$$

ضریبونه $c = \bar{a}$, $d = \bar{b}$ پوره کوي او د جمعې جوړولو له لارې

$$\frac{a}{z-i} + \frac{c}{z+i}, \frac{b}{(z-i)^2} + \frac{d}{(z+i)^2}$$

هم حقیقي توتهکسر توته کونه لاس ته راوړي

$$\frac{x^3}{(x^2+1)^2} = \frac{x}{x^2+1} + \frac{-x}{(x^2+1)^2}.$$

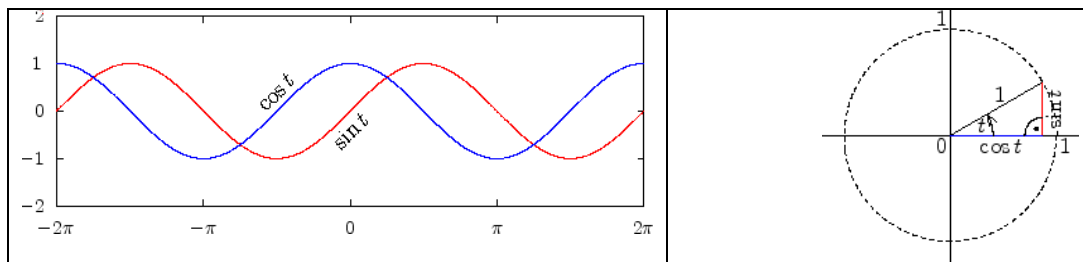
ساین او کوساین Sinus und Cosinus

د

$$(\cos t, \sin t), \quad t \in \mathbb{R}$$

(1,0)

سره په سرچینه په کونج t څرخول شوی ټکی کو اور دینات نومولکیري . د تر مخنځنې پورې کوساین او ساین په یوه ولاړگودیز یربگودې (المثلث القايم الزاويه) کې د ولاړ اړخونو (هغه اضلاع وي چې یو د بل سره قلموازاویه جوړه وي) نسبت د نیمې (قطر) سرره په گوته کوي.



دواړه گردۍ توابع یا د داېرې توابع 2π - تلبېرته راگرځېدونې یا 2π - پریودیکی دي او باور لري

$$\cos t = \sin(t + \pi/2)$$

سرلیک

$$\cos t = \cos(-t), \quad \sin t = -\sin(-t)$$

$$\sin^2 t + \cos^2 t = 1$$

یو څو ځانگړي ارزښتونه دي:

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
cos	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0

د اویلر-مویري فرمول Formel von Euler-Moivre

یو اکسپوننشل تابع د ایماجینار x-محور سره کېدی شي د $t \in \mathbb{R}$ لپاره د تریگونومتريک (درېگودي - یا مثلثاتي -) توابع په مرسته افاده شي.

$$\cos t + i \sin t = \exp(it)$$

کوساین او سین حقیقي - او ایماجینار ګڼونه (عددونه) په ګوته کوي د ارزښت 1)
 $|\exp(it)| = 1$ سره .

که پورته فرمول اینورټیر یا معکوس شي ، نو لاس ته راځي

$= \operatorname{Re} e^{it} = \frac{1}{2} (e^{it} + e^{-it})$	cost
$= \operatorname{Im} e^{it} = \frac{1}{2i} (e^{it} - e^{-it})$	sint

د اکسپ، کوساین او سین کټمټوالی اویلر او مویري ته ځي. دا د جیومتريکي کمپلکس عددونو د انټرپولیشن لپاره بنسټ جوړوي او د فوري-انالیوز کي غوره رول لوبوي.

لیکونکي: هیولیک، کویف

د سین او کوساین لپاره د زیاتون- یا جمع قضیه

د گردی توابعو $\sin t$ او $\cos t$ لپاره لاندې اړیکې باور لري:

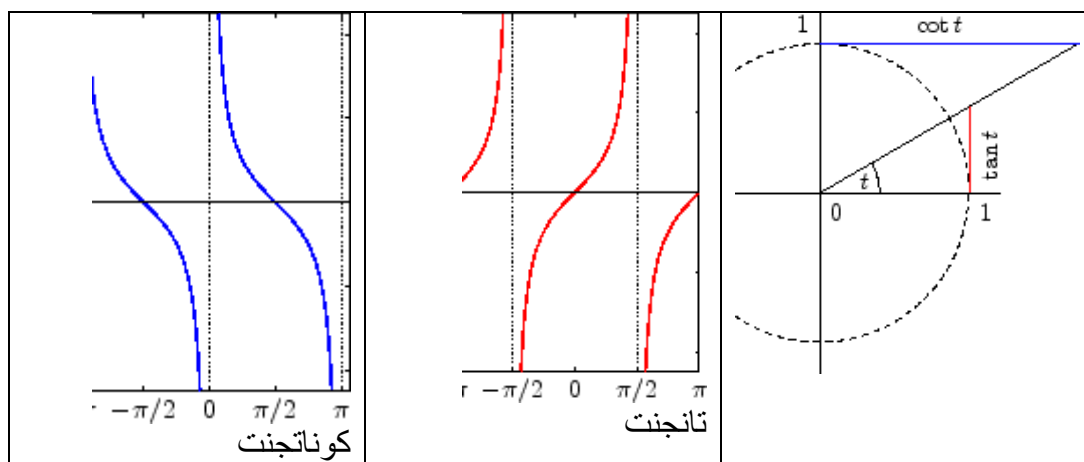
$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \beta \cos \alpha + \sin \alpha \cos \beta$$

په ځانګړې توګه دی

$$\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha, \quad \sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha.$$

تانجنت او کوتانجنت Tangens und Cotangens



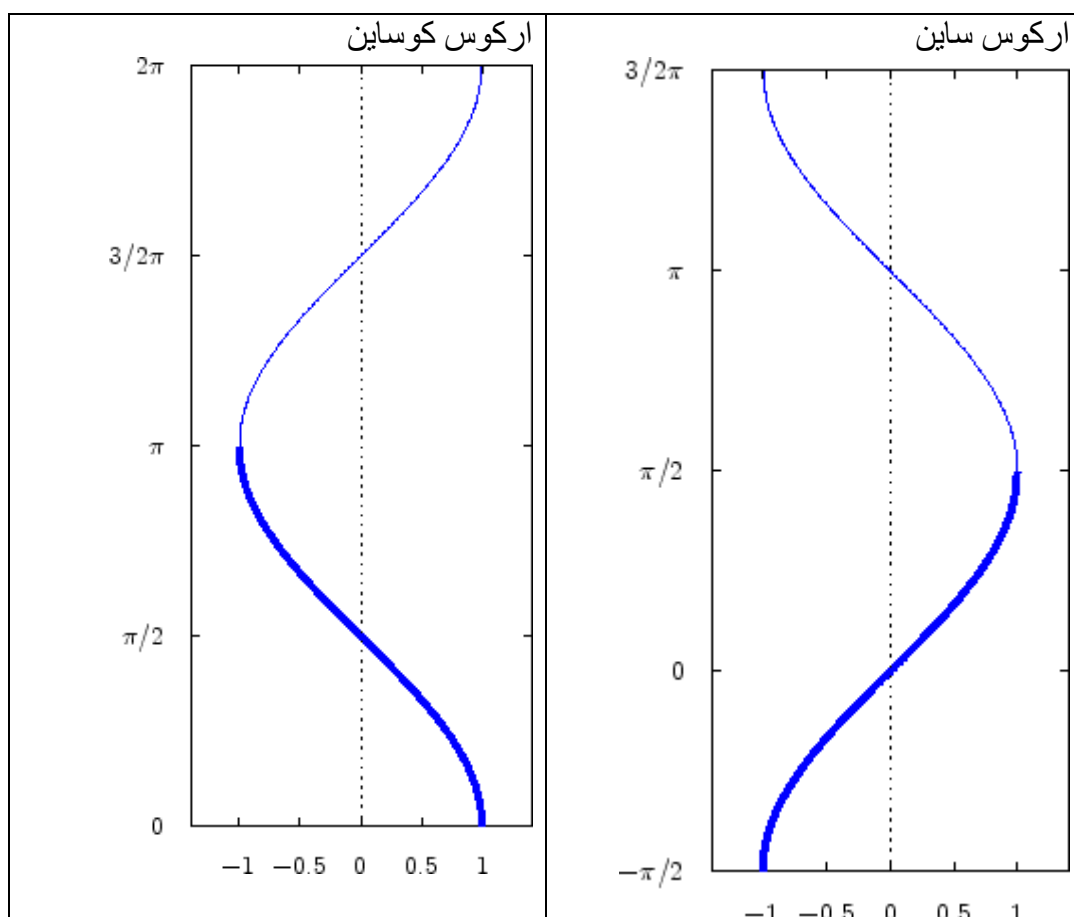
د تانجنت او کوتانجنت توابع د

$$\tan t = \frac{\sin t}{\cos t}, \quad \cot t = \frac{\cos t}{\sin t}$$

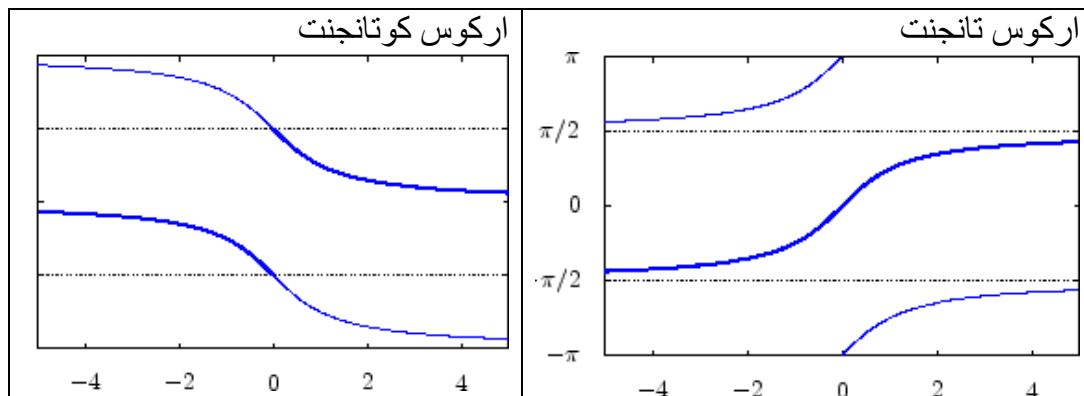
له لارې تعريف دي. دا تر دمخښې پورې د ولاړګوډيز درېګوډي (- - مثلث) د ولاړګوډونو $Katheten$ نسبت ورکوي يو څو ځانګړي ارزښتونه دي:

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
tan	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	nicht def.
cot	nicht def.	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0

د ارکوس توابع Arcusfunktionen

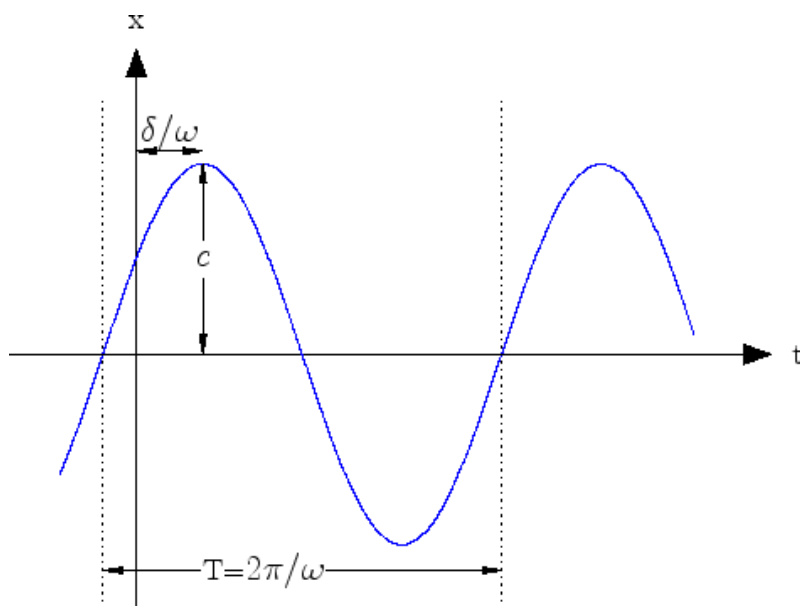


د درېگودیز (ترېگونوميټريکي يا مثلثاتي) توابعو په څنټ يا معکوس توابع د $\arccos, \arcsin, \arctan, \operatorname{arccot}$ سره بنوول کيږي.



د دې تعريف - او ارزښت ورشو د پورته څپرې څخه رانيول کېدې شي.
له دې سره اصلي ځانگې غورې يا پندې کېدل شوي دي.
ليکونکي: هيوليک، کنوېف، کنش

هارمونيک لرځيدنې يا رپيدنې Harmonische Schwingung



سرلیک

یو هارمونيکي لرځيدنه د جگوالي Amplitude $c \geq 0$ سره، د فاز بلځای ته ورنه يا

$$T = 2\pi/\omega$$

راکښنه δ او فرکونځ ω همداسې پريودوالي يا نل (بیرته) راگرځيدنه لاندې بڼه لري

$$x(t) = c \cos(\omega t - \delta).$$

ورته يا برابر ارزښته انځورونه ده

$$\operatorname{Re} c \exp(i(\omega t - \delta))$$

يا

$$a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t)$$

د $a = c \cos(\delta)$, $b = c \sin(\delta)$ سره، دا په دې معنا چې (c, δ) د قطبي (a, b) کواورديناټونه دي. پای.

د پارمتر شمير بدلون د جمعې تيورم څخه لاس ته راځ:

$$c \cos(\omega t - \delta) = c(\cos(\omega t) \cos(\delta) + \sin(\omega t) \sin \delta) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = c \cos \delta, \quad b = c \sin \delta.$$

برعکس دی

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \delta = \arctan(b/a) + \varphi$$

د لاندې سره

$$\varphi = \begin{cases} 0, & \text{für } \alpha \geq 0 \\ \pi, & \text{für } a < 0 \text{ und } b \geq 0 \\ -\pi & \text{sonst.} \end{cases}$$

پای.

د هارموني ريښې يو پر بل پرېوتنه

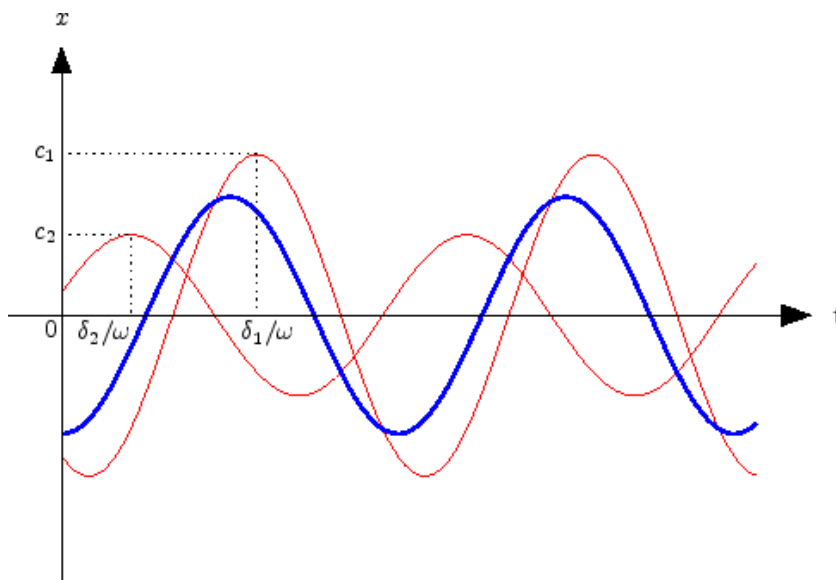
د دوه هارموني رپښو يو پر بل پرېوتنه (په څېره کې غوړ کېدل شوي دي)

$$x_k(t) = c_k \cos(\omega t - \delta_k), \quad k = 1, 2,$$

د

امپليټوډي سره هارمونيک دي

$$c = \sqrt{c_1^2 + 2 \cos(\delta_1 - \delta_2) c_1 c_2 + c_2^2}.$$



ليکونکي: هيوليگ، کوپف، کنش

د يو پر بل پرېوتني کمپلکس بڼه

$$\operatorname{Re}(c_1 e^{i\omega t - \delta_1} + c_2 e^{i\omega t - \delta_2}) = \operatorname{Re}([c_1 e^{-i\delta_1} + c_2 e^{-i\delta_2}] e^{i\omega t})$$

راکوي

$$[\dots] = c e^{-i\delta} = z$$

او له دې سره

$$c^2 = z \bar{z} = (c_1 e^{-i\delta_1} + c_2 e^{-i\delta_2})(c_1 e^{i\delta_1} + c_2 e^{i\delta_2}).$$

$$e^{is} + e^{-is} = 2 \cos s$$

د په پام کې نیولو سره ضربونه غوښتنه راکوي..
په بدیله ت وگه کېدی شي امپليټود انځوروني

سرلیک

$$x_k(t) = a_k \cos(\omega t) + b_k \sin(\omega t)$$

څخه وشمېرل شي. سری لاس ته راوړي

$$c = \sqrt{(a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2} .$$

لیکونکي: هیولیک، کویف

په درخ یا مته باندي کړولو هارموني لړځېدنه یو په بل پرېوځي

$$\cos(\omega t - \delta_k), \quad \delta_k = k\delta, \quad k = 0, \dots, n,$$

د برابر یا همغه فرکونخ او امپلیتود. لړځېدنه د کمپلکس انځوروني په مرسته د دې لاندي حقیقي برخي په حیث لاس ته راځي

$$\begin{aligned} e^{i\omega t} + e^{i(\omega t - \delta)} + \dots + e^{i(\omega t - n\delta)} &= e^{i\omega t} \frac{1 - (e^{-i\delta})^{n+1}}{1 - e^{-i\delta}} \\ &= e^{i\omega t} \frac{e^{-i\frac{n+1}{2}\delta} (2i \sin \frac{n+1}{2}\delta)}{e^{-i\frac{\delta}{2}} (2i \sin \frac{\delta}{2})} = \left(\frac{\sin \frac{n+1}{2}\delta}{\sin \frac{\delta}{2}} \right) e^{i(\omega t - \frac{n}{2}\delta)} . \end{aligned}$$

یو په بل پرېوتته لاندي امپلیتود لري

$$\frac{\sin \frac{n+1}{2}\delta}{\sin \frac{\delta}{2}}$$

$$(n/2)\delta$$

او فاز

د $\omega = 0$ سره د ایماجیناربرخي د پرتله کوني له لاري تريگونمتریکی کټمټوالی راځوي.

$$\sin \delta + \dots + \sin n\delta = \frac{\sin \frac{n+1}{2}\delta \sin \frac{n}{2}\delta}{\sin \frac{\delta}{2}} .$$

لیکونکي: هیولیک، کویف

د دوه لړځېدنو $c_k e^{i\omega_k t}$ یو پر بل پرېوتنه کېدی شي د

$$c(t)e^{i\bar{\omega}t}, \quad c(t) = c_1 e^{-i\Delta\omega t} + c_2 e^{i\Delta\omega t},$$

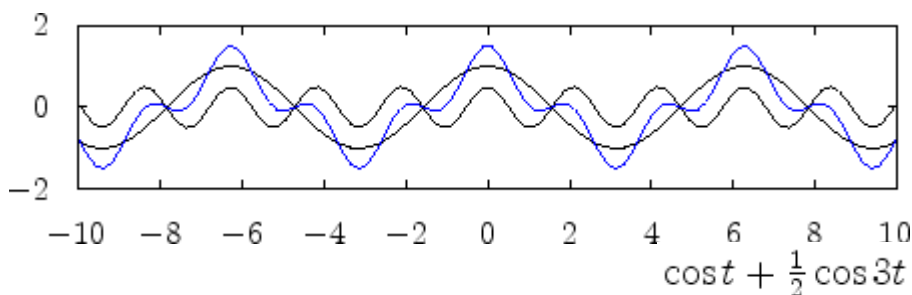
په ضرب د $\bar{\omega} = (\omega_1 + \omega_2)/2$ او $\Delta\omega = (\omega_1 - \omega_2)/2$ سره ولیکل شي. لاس ته راغلی داسې په نامه مودولیري ریښه ټیک هلته پرېودیکی ده، که د فرکونخ

نسبت ω_1/ω_2 راشنل وي. د مودولي شوی کمپلکس امپلیتود مینیمال او ماکسیمال ارزښت همداسې مطلق ارزښت د $|c_1 - c_2|$ همداسې $c_1 + c_2$ ترمنځ لور ټیټ کیږي. په ځانگړې توگه دی

$$c(t) = 2c \cos(\Delta\omega t)$$

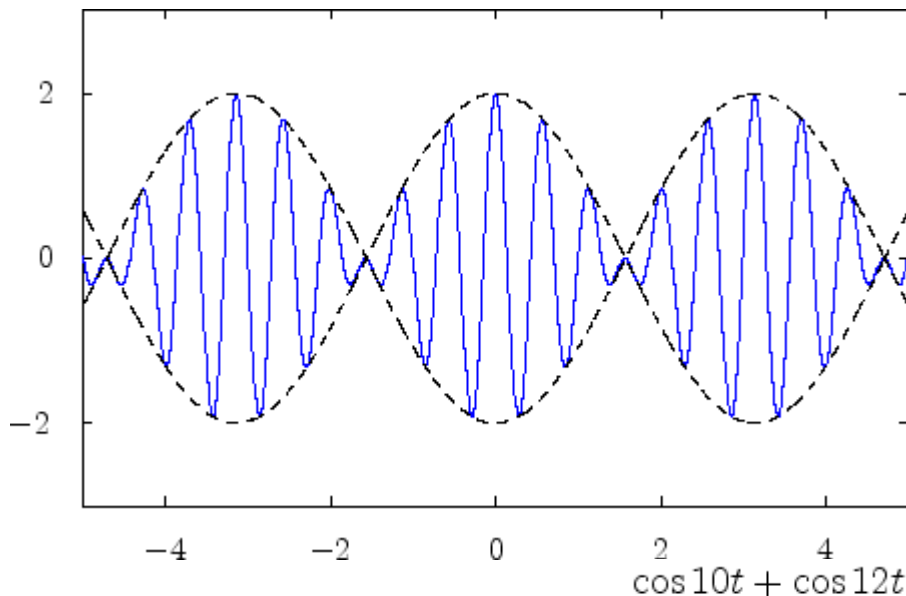
د همغې یا برابري امپلیتود $c = c_1 = c_2$ لپاره. لاندې څیرې یو څو بیپیکي حالتونه په گوته کوي

• periodische Überlagerung پرېودیکی یو پر بل پرېوتنه

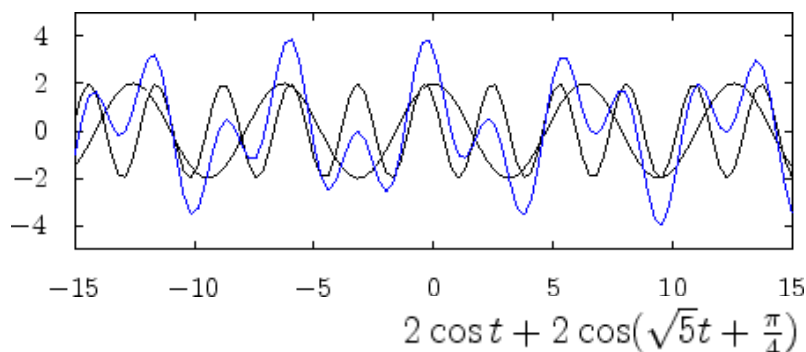


• برابر امپلیتود c_k او $\omega_1 \approx \omega_2$

سرلیک



• **aperiodische Überlagerung** اپریوڊيکي یا نه - یو پر بل پر پوتنه

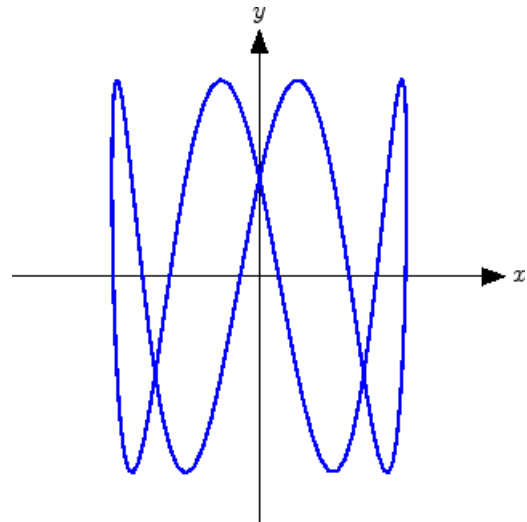


پای.

د سطي لړځېدنو یو پر بل پر پوتني د لړځېدنو مختلف لورو
کړي یا منځني

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \cos(\omega_1 t - \delta_1) + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \cos(\omega_2 t - \delta_2),$$

لاس ته راځي چې د مخترع Lissajous-Figures لیساجوس - څیړي بللکیري.

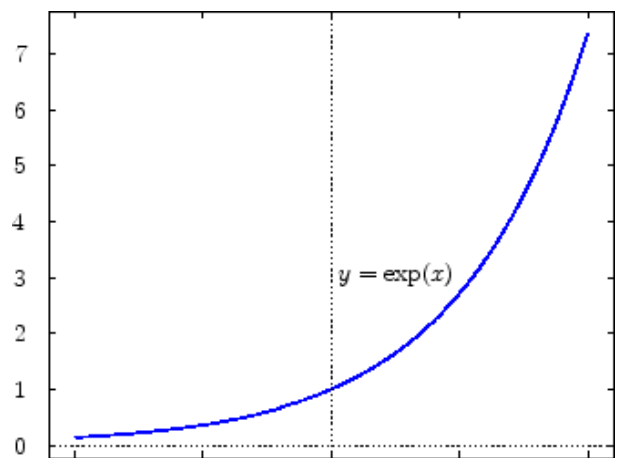


څېره د پارامتر یوه بېلگه ښایي

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \omega_1 = 1, \quad \delta_1 = 0, \quad \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \omega_2 = 4, \quad \delta_2 = \frac{\pi}{3}.$$

پای.

اکسپوننشل توابع Exponentialfunktion



توان تابع

سرلیک

$$y = e^x = \exp(x)$$

$$x \in \mathbb{R}$$

د اوپلر عدد $e = 2.71828\dots$ سره اکسپوننشل تابع بلل کيږي. دا د تول لپاره مثبت ده او د تابع مساوات پوره کوي

$$e^{x+y} = e^x e^y.$$

$$e^{-x} = 1/e^x$$

په ځانگړې توگه

گټه يا ربح Verzinsung

يو بيل بډايی د - وارهد اخستني همداسي او ورکوني وروسته د يوې گټوې Rate r (همداسي $r > 0$) د يوې گټوې فاکتور $(1+p)$ سره لاندې پای بډايی ورکوي

$$y = (1+p)^n x + \frac{(1+p)^n - 1}{p} r.$$

دلته $p = 100\%$ د يو گټه ايسوونه ده په کلني گټه ا چوني سره.

فعاله کلني گټه د مياشتني گټوې څخه شمېرل کيږي د يوه گټي ايسونې p_m سره و لاندې ته

$$p_j = (1+p_m)^{12} - 1 \geq 12p_m.$$

ليکونکي: هيوليگ، هيورنر

بنسټ بډايی په همدې لومړني گټوې پريود کې په پام کې نيول کيږي، اخستنه همداسي اچونه لومړی د ورپسې کال. په لاندې توگه يا د اسي راکوي

$$n = 1: y = x(1+p) + r,$$

$$n = 2: y = (x(1+p) + r)(1+p) + r.$$

په ټولېزه توگه باور لري

$$y = (\dots (x(1+p) + r)(1+p) + r) \dots$$

$$= x(1+p)^n + [1 + (1+p) + (1+p)^2 + \dots + (1+p)^{n-1}]r$$

دا په گوډیزو نوکانو کې افاده کېدې شي په هندسي جمعه فرمول واروي او سری دا ورکړ شوی فرمول لاس ته راوړي. پای.

د منهتان خرڅول 1626 زک مورگن (د ځمکې د کچونې یوون یا واحد دی) 11000 Morgen د یوه حاضر قیمت په رانیولو گټور تمام شو، ځکه چې په کلنۍ 7 په سلو کې گټه دا بډایي په کال 2000 زک کې

$$y = 60 \text{ NLG} \cdot (1.07)^{374} = 5.857 \cdot 10^{12} \text{ NLG} (\hat{=} 2.658 \cdot 10^{12} \text{ EUR})$$

ده (که متمأن بانکونه او د اسعارو رفورم له مخه نه وي نیول شوی یا فرض شوی). په میاشتنۍ گټه لرو

$$y = 60 \text{ NLG} \cdot (1 + 7/1200)^{4488} = 13.030 \cdot 10^{12} \text{ NLG} (\hat{=} 5.913 \cdot 10^{12} \text{ EUR})$$

او

$$y = 60 \text{ NLG} \cdot \exp(0.07 \cdot 374) = 14.060 \cdot 10^{12} \text{ NLG} (\hat{=} 6.380 \cdot 10^{12} \text{ EUR})$$

د تولیزی گټونې سره.

که مورگن د 0.81 Ha هکتار سره وشمېرل شي، نو د منهتان دا نننۍ سطحه د 89 مربع کیلو متره ورکوي. یو کور هلته نن نږدې 6500 USD/Quadratmeter امریکایي ډالر په مربع متر ارزښت لري. دا پیسې به د یوه کور تعمیر لپاره چې څلور پوریز وي ورسیري، چې په ټوله سطحه ونیسي. پای.

د یوه $x = 200000$ یوروپور، $n = 30$ کلونو لپاره او یوې کره شوې گټې پینې $p = 5$

په سلو کې میاشتنۍ گټه لاندې ده

$$p_m = (1 + p)^{1/12} - 1 = 0.4074\%$$

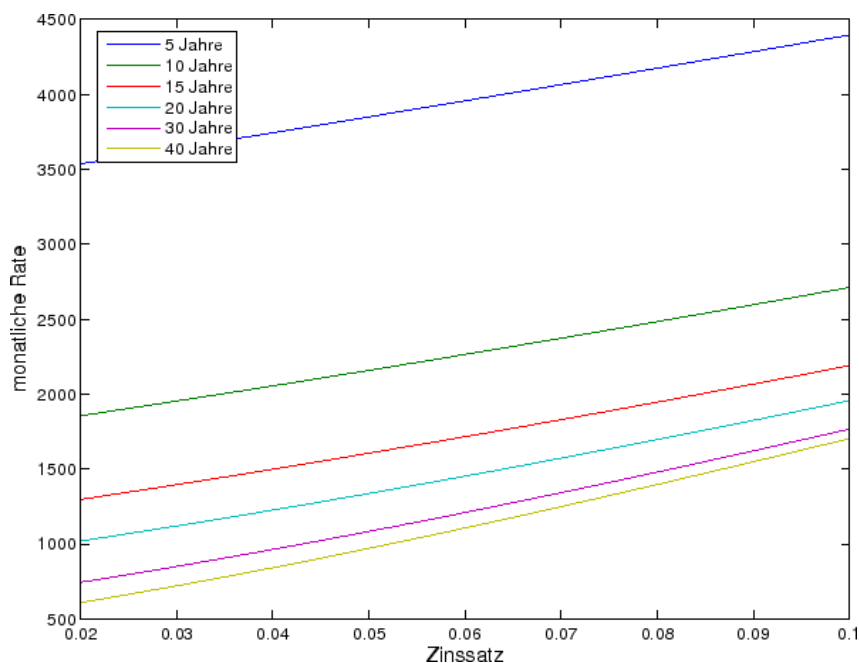
سرلیک

او میاشتنی رات یا گټه ده

$$r = \frac{p_m(1+p)^n}{(1+p)^n - 1} x = 1060.11 \text{ EUR.}$$

د لاندې پسي تړلي له گټې فرمول څخه د صفر ایشونې له لارې د پور ارزښت راکوي او د $(1+p_m)^{12} = 1+p$ په پام کې نیولو سره .

ټوله تادیه $30 \cdot 12r = 381639.60$ یورو د پور جمعې څخه د په 90.8 په سلو کې اوږي (د بانک مزدوري پرې زیاته).



پروت: گټونه یا د گټې پښه ، ولاړ: میاشتنی گټه
 گراف میاشتنی گټه بنایي د یوه 200 000 یورو پور لپاره د گټې پښې د ضریب په څېر
 د مختلفو وختونو لپاره.
 پای.

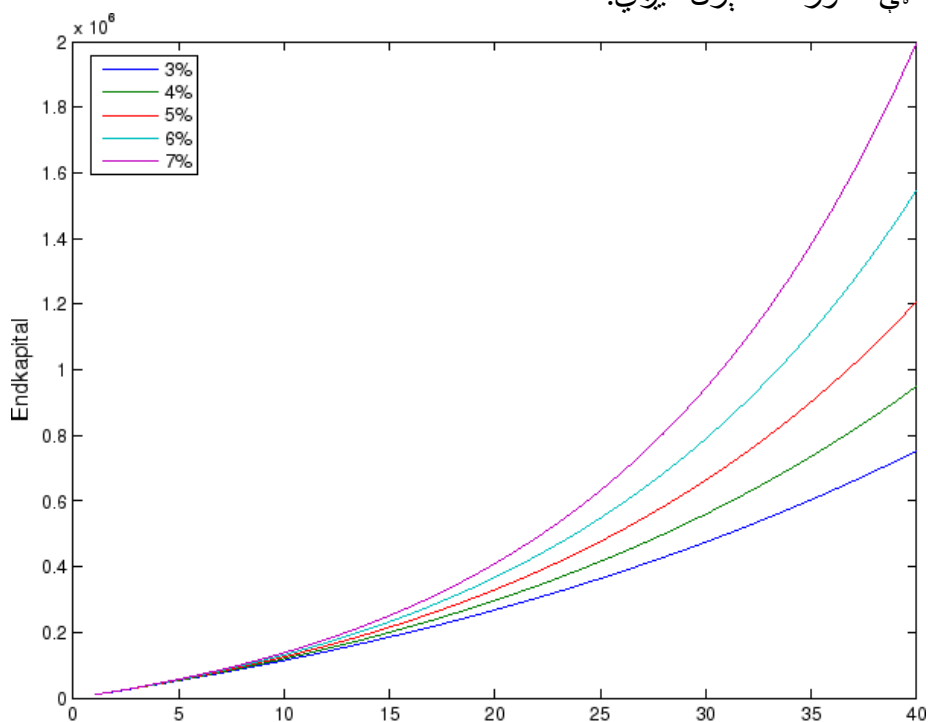
کلني د پیسو ورکونه $z = 10000$ یور د یوې 7 په سلو کې گټونې ته د
 $n = 12$ کلونو وروسته یوه دا لاندې بډایي ورکوي

$$y = \frac{(1 + p_j)^n - 1}{p_j} z = \frac{1.07^{12} - 1}{0.07} 10000 \text{ EUR} = 178884.51 \text{ EUR}.$$

د نور لس کاله د ژوند انتظار ته دا د لاندې یوه میاشتني تفاوت ته بسيا کوي

$$r = \frac{p_m (1 + p_j)^{10}}{(1 + p_j)^{10} - 1} y = \frac{0.005654 \cdot 1.07^{10}}{1.07^{10} - 1} 178884.51 \text{ EUR} = 2057.17 \text{ EUR},$$

چي د هيبوتيکي (د کورونو جوړولو او اخستلو لپاره ارزانه پور دی) Hypotheken گټي ته ورته شمېرل کيږي.



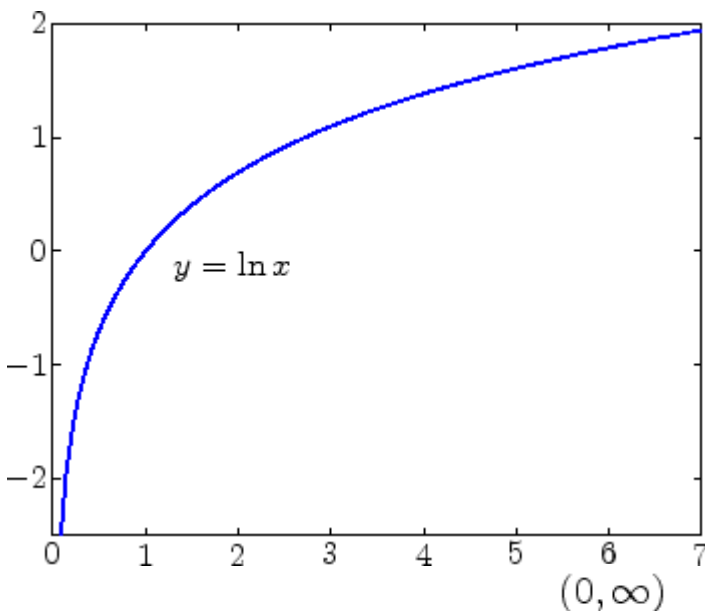
پروت: وخت ، ولاړ: پای سرمایه
خپره د مختلفو گټونو لپاره د یوې سرمایه وده بنایي د وخت تېرېدو سره .
پای.

لوگارېتم Logarithmus

د لوگارتم تابع د اکسپوننشلتابع معکوس دی:

سرلیک

$$y = e^x \Leftrightarrow x = \ln y.$$



دا کره مونوتونن جگېدونکی په \mathbb{R} تنظیموي او لاندې تابع مساوات پوره کوي

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y.$$

په ځانگړې توگه دی .
 $\ln(1/x) = -\ln x$
 پای.

د یوې مادې رادیواکتیو له منځه تلنه (په زراتو تجزیه کېدنه) د زره کیدني قانون

$$N(t) = N(0)e^{-kt}$$

له مخې تشریح کيږي. دلته $N(t)$ د اتمونو گڼون یا تعداد دی د t په وخت کې

$$k > 0$$

او یوه د موادو په واک کې د زره کېدو ثابت ده.

$$N(T) = \frac{1}{2}N(0)$$

، داپه دې معنا چې

د نیم ارزښت وخت T داسې تعریف دی

$$e^{-kT} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow T = \ln 2/k.$$

د چرنوبیل د ریکتور د دیز یا الوتې سره یو ه ډینگری یا خولې یا مرخبری په ځنو برخو کې Cäsium-137 د 2000Bq/kg د رادیواکتیویټی د فعالیت د کچونې لپاره یوون دی) سره د نیمارزبنت وخت 29.7 کلونو په وړانگو خور شو.

$$k = \frac{\ln 2}{29.7} = 0.023$$

او له دې سره

$$N(t) = 2000 \exp(-0.023t).$$

په المان کې پوله ارزبنت 600Bq/kg کې پروت دی. د

$$600 = 2000 \exp(-0.023t) \Rightarrow -0.023t = \ln(0.3) \Rightarrow t \approx 52$$

له امله دا پوله ارزبنت د ورکړشو ارزبنتونو لپاره 52 کالو وروسته کبنته – یا کمیري.

نیم وخت ارزبنت :

Cäsium-134	2 Tage
Cäsium-137	29.7 Jahre
Jod-131	8 Tage
Kohlenstoff-14	5730 Jahre
Kalium-40	1.2 Mrd. Jahre
Plutonium-239	24000 Jahre
Radon-222	3.8 Tage
Radium-226	1600 Jahre
Strontium-90	28 Jahre
Uran-235	800 Mio. Jahre
Uran-238	4.5 Mrd. Jahre

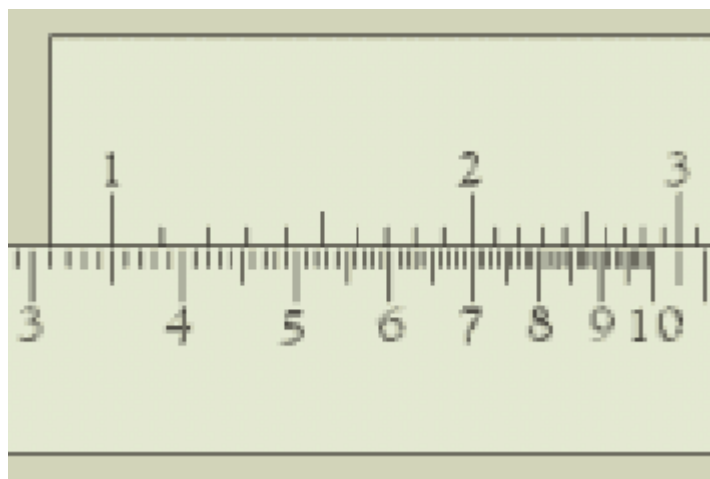
پای.

سرلیک

لوگاریتم دا خوی لري، چي د دوه گڼونو یا عددونود لوگاریتمونو جمعه د دي د دي دوه عددونو د ضرب د لوگاریتم سره برابر دی:

$$\log x + \log y = \log(xy).$$

په دي توگه کېدی شي چي دوه کرښي (خط کشونه) د لوگاریتم کچوونو سره یو په بل کیردي او لاس ته راوړنه د دپعددونو جمعه نه بلکه ضرب دی. (د شمېرکښوونې (چي یوې او بلې لورته کښیري) اصول)



د پورته څېرې څخه د بېلگې په توگه گورو چي $3.5 \cdot 2 = 7$ دی. دلته د پورته کچوونې ۱ د لاندې سکالا په 3.5 (لومړی ضریب) کېښول کیري. بالاخره ۲ د پورته سکالا (دویم ضریب) د ضرب لاس ته راوړنه په لاندې سکالا لوستل کیري.

پای.

تولیز توان توابع او لوگاریتم

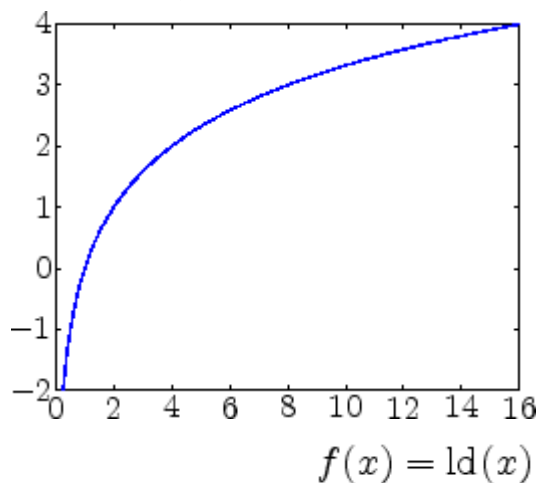
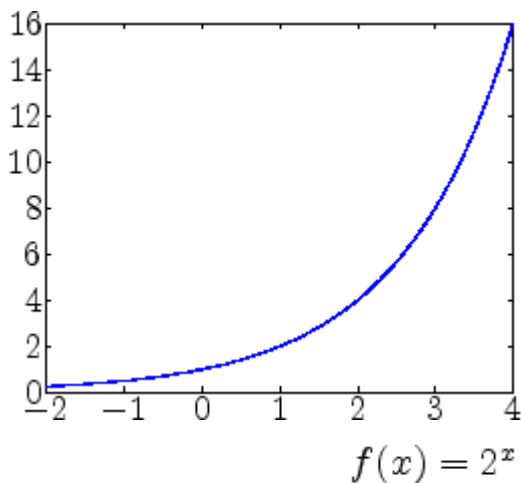
د $a > 0$ لپاره تعریفوو

$$y = a^x = \exp(x \ln a)$$

د معکوس یا په څنټ تابع سره

$$x = \log_a y, \quad y > 0.$$

په ځانگړې توگه سری لیکي $\log = \log_{10}$
 د لوگارېتم لپاره د 10 بنسټ سره او $\text{ld} = \log_2$ د دوال لوگارېتم لپاره.



د ودې قانون

$$y = a^x, \quad a > 0$$

کیدي شي نیم لوگارېتمی دکنبل شي. دلته په یوه محور x او په بل محور $\log y$ لیکل

کیري. د x او $\log y$ ترمنځ نسبت د ودې قانون له مخې کرښیز دی او رسم شوي کرښه لاندې جگړالی لري

$$m = \log a.$$

یو بل امکان دادی، چې په دواړو محورونو یو لوگارېتمی سکالا وکاروو. دا د بېلگې په توگه د نایتیکاوي ارزښت لپاره

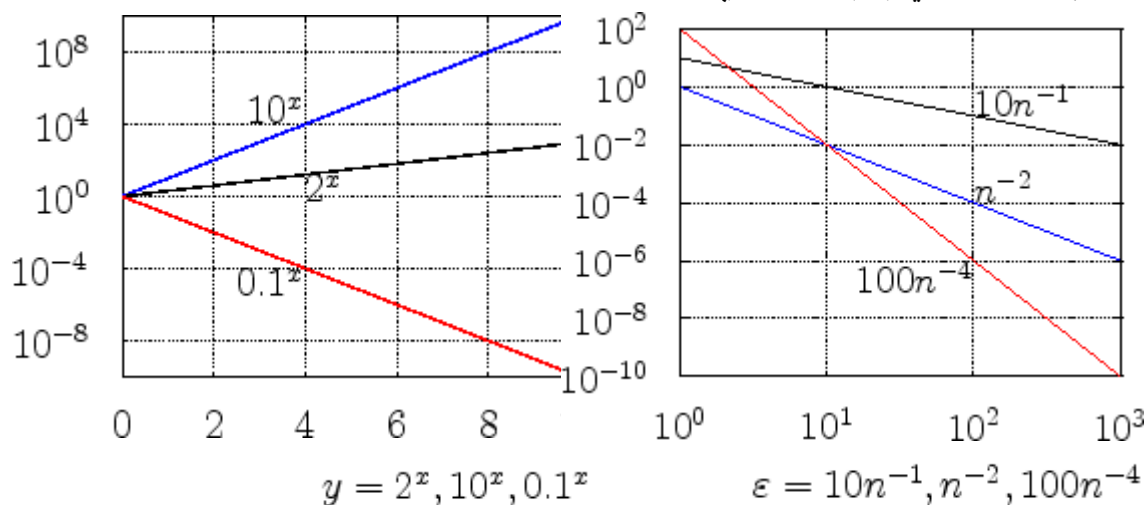
$$\varepsilon \approx cn^{-k}$$

مناسب ده. دا چې

سرلیک

$$\log \varepsilon = \log c - k \log n,$$

د کړې کمیز یا منفي چکېدنه ورکوي.



د توان او لوگارېتم لپاره شمیرقوانین

Rechenregeln für Potenzen und Logarithmen

د اکسپوننشل – او لوگارېتمې توابعو د تعریف او تابع مساواتو څخه لرو

$$\begin{aligned} a^{s+t} &= a^s a^t, & \log_a x + \log_a y &= \log_a(xy), \\ a^{s-t} &= a^s/a^t, & \log_a x - \log_a y &= \log_a(x/y), \\ (a^s)^t &= a^{st} & \log_a x^t &= t \log_a x. \end{aligned}$$

برسېره پردې د دوه مختلفو بنسټونو ت رمنځ د شمېرېدلون لپاره باور لري

$$\log_b x = \log_b a \log_a x.$$

په ځانگړې توگه دی

$$\log x = (\log e) \ln x.$$

لیکونکي: هیولیک، کنوپف

که کیردو

$$x = a^s, \quad y = a^t,$$

نو د توان او لوگاریتم د فرمولونو ورته وال یا برابر ارزښتوالی روښانه دی. لومړي دواړه کټمټوالي د تابع مساواتو څخه لاس ته راځي او دریم له تعریف $b^r = e^{r \ln b}$ څخه.:

$$(a^s)^t = (e^{s \ln a})^t = e^{st \ln a} = a^{st}.$$

د شمېدلون فرمول برابر ارزښت دی و لاندې ته

$$x = b^{\log_b a \log_a x},$$

او د ساده ونې له لارې ښی اړخ لاس ته راځي. لیکونکي: هیولیگ، کنوف

لاندې دواړه بېلټ دشمېقوانین تشریح کوي یا په گوته کوي.

(i)

$$\ln(x^2) - 2 \ln(2) = \ln(2^2) + \ln(x^2) - 2 \ln 2 = 2 \ln 2 + 2 \ln x - 2 \ln 2 = 2 \ln x$$

(ii)

$$\log_4(x^2) + \text{ld}$$

$$(2x) = 2 \frac{\ln x}{\ln 4} + 1 + \frac{\ln x}{\ln 2} = 1 + \frac{\ln x}{\ln 2} + \frac{\ln x}{\ln 2} = 1 + 2 \frac{\ln x}{\ln 2}$$

های پرابول تابع Hyperbelfunktionen

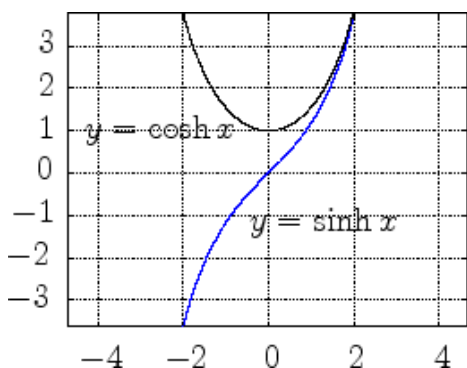
تریگونومتريکي توابعو ته ورته تعريفوو

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

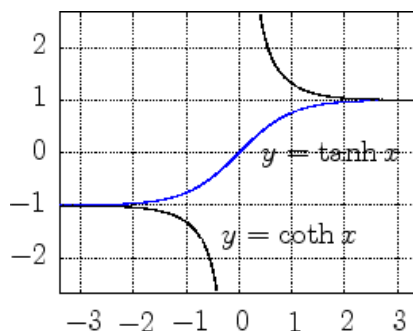
همداسي

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = 1 / \coth x.$$

سرلیک



$\sinh x, \cosh x$



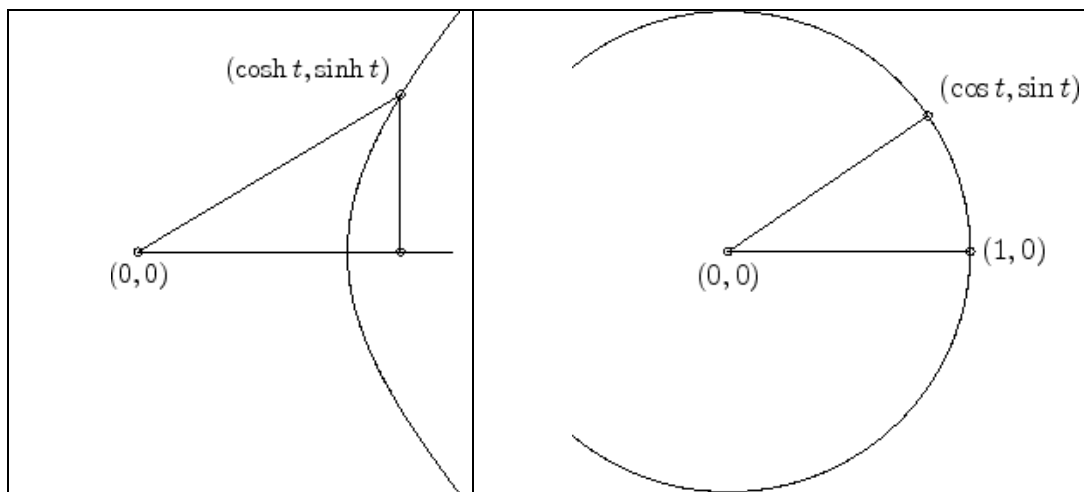
$\tanh x, \coth x$

معکوس یا په څټ توابع اکسپلیڅیت یا په روښانه توگه ورکول کيږي:

$$\operatorname{arsinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}), \quad -\infty < x < \infty$$

$$\operatorname{arcosh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}), \quad 1 \leq x < \infty.$$

د هاپربول تابع نوم د لاندې کټمتوالي څخه رانیول شوی



$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

دا روښانه کوي، چې د $t \mapsto (\cosh t, \sinh t)$ له لارې د هاپربول یو ښاخ پارامټري کيږي..

له $y = (e^x - e^{-x})/2$ څخه د e^x سره ضرب له لارې لاس ته راځي

$$(e^x)^2 - 2ye^x - 1 = 0$$

او له دې سره

$$e^x = y + \sqrt{y^2 + 1}.$$

د مربع مساوات دویم حل د $e^x > 0$ له امله باید په پام کې ونه نیول شي. د لوگاریتمی کوني څخه لاس ته راځي

$$\operatorname{arsinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}).$$

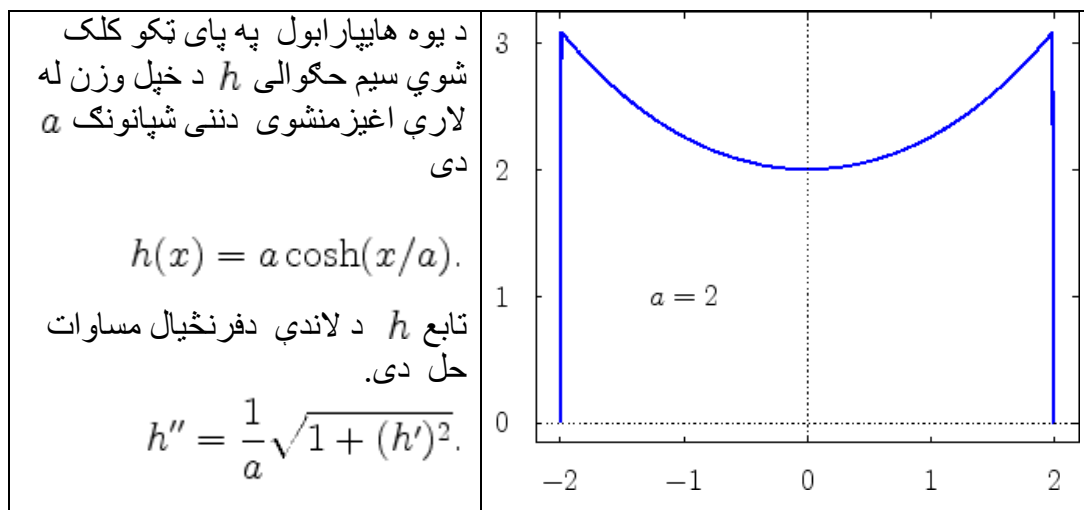
د کوساین هوپربولیک د فرمول څخه پورته ته په ورته توګه لاس تره اځي

$$(e^x)^2 - 2ye^x + 1 = 0$$

او له دې سره

$$e^x = y + \sqrt{y^2 - 1}.$$

د لوگاریتم کوني له لارې د په څنټ- یا معکوس تابع فرمول لاس ته راځي. لیکونکي: هیولیګ، کنوېف



هایپیارابولیکي کټمټووالی Hyperbolische Identitäten

تریګونومتريکي توابعو ته ورته کټمټووالی باور لري

سرلیک

$$\sinh(-x) = -\sinh x$$

$$\cosh(-x) = \cosh x$$

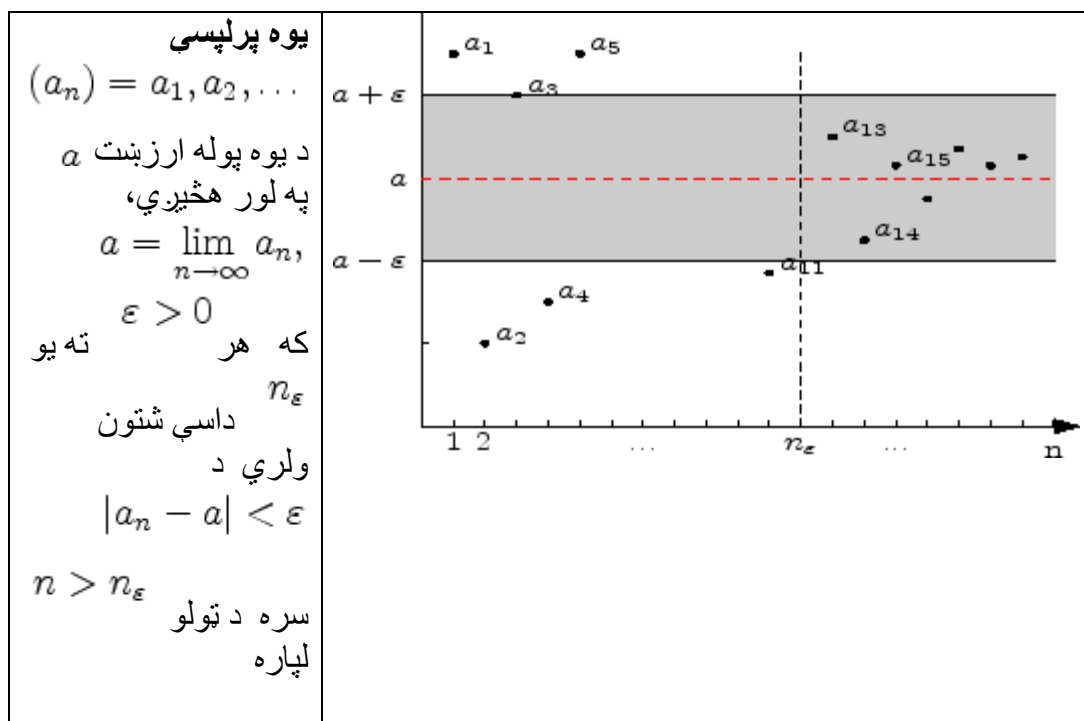
$$\sinh(x + y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$$

$$\cosh(x + y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1,$$

چې د تعريفونو له لارې کېدی شي نازک شي

د یوې پرلپسې (ترادف) پوله ارزښت
Grenzwert einer Folge



دا $a_n \rightarrow a$ لیکدود هم د یوې پرلپسې د کونورگنت یا پولې ته ټلو لپاره کارول کیږي .

که (a_n) پوله ارزښت ونه لري، نو پرلپسي ديورگنت يا پولې ته نه تلونکي بللکيري. پای.

د دې لپاره چې د کونورگنت-قضيه وښايو يعنې

$$n > n_\varepsilon \quad |a_n - a| < \varepsilon$$

د لپاره

وښايو، کيدی شي لومړی دا افاده $|a_n - a|$ د تخمین کونې له لارې پورته لور ته ساده کړو او بيا داسې په نامه نامساوات د n پسي حل کړو.

که دا د بيلگې په توگه د لاندې پرلپسي لپاره وکارول شي

$$a_n = \frac{n^2 + n}{n^2 + 1},$$

کومه چې پوله ارزښت $a = 1$ لري، يو ممکنه تخمین دی

$$|a_n - a| = \left| \frac{n^2 + n}{n^2 + 1} - 1 \right| = \left| \frac{n - 1}{n^2 + 1} \right| \leq \frac{n}{n^2 + 1},$$

دا چې $|n - 1| \leq n$ د ټولو $n \geq 0$ لپاره. پرته له دې $n^2 + 1 > n^2$ دی او له

دې سره $\frac{1}{n^2 + 1} < \frac{1}{n^2}$ هم. نو له دې لاس ته راځي

$$|a_n - a| \leq \frac{n}{n^2 + 1} \leq \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}.$$

له دې سره $\frac{1}{n} < \varepsilon$ دی، باید $n > \frac{1}{\varepsilon}$ وي. که n_ε يو طبيعي عدد چې له $\frac{1}{\varepsilon}$ لوی وي، وټاکو، نو د ټولو $\varepsilon > 0$ او ټولو $n > n_\varepsilon$ لپاره باور لري.

$$|a_n - a| < \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

سرلیک

پرلپسي

$$1, q, q^2, \dots$$

د $|q| < 1$ لپاره یو پوله ارزښت 0 لري او د $|q| > 1$ یا $q = -1$ لپاره دیورگنت دی

د پرلپسيو د پوله ارزښت شمیرني لاري

Rechenregeln für Grenzwerte bei Folgen

د پولي ته تلونکي پرلپسي (a_n) او (b_n) لپاره د پولو a او b سره باور لري:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = ab$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n / b_n) = a/b \quad b \neq 0$$

, falls لیکونکی: ایپ، هیولیگ

زیاتون او کمښت یا کمون: د درېگودي نابرابرون څخه لاس ته راځي

$$|(a_n \pm b_n) - (a \pm b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| \rightarrow 0.$$

ضرب یا ځل: دا چې a_n محدود ده، لرو

$$|a_n b_n - ab| = |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| \leq |a_n| |b_n - b| + |b| |a_n - a| \rightarrow 0.$$

وېش: د ټول $n > n_0$ لپاره دی

$$0 \notin \left(b - \frac{|b|}{2}, b + \frac{|b|}{2} \right) \ni b_n,$$

او له دې لاس ته راځي

$$\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \right| = \left| \frac{b - b_n}{bb_n} \right| \leq \text{const} |b_n - b| \rightarrow 0,$$

دا په دې معنا چې $1/b_n \rightarrow 1/b$ د a_n/b_n پولې ته تلنه دهمدا اوس بنوول شوي د پولې ته تلونکو پرلپسېو ضرب قانون څخه لاس ته راځي.

پای.

که دپرلپسېو توکي د n راشنل تابع وي، نو کیدی شي پوله ارزښت د خورا جگ توان د لنډوني څخه پیدا کړی شو. د بیلگې په توگه دی

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n - 2n^2}{3n^2 + 4n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/n - 2}{3 + 4/n} = -\frac{2}{3}.$$

په ټولیزه توگه د صورت-درجي j او مخرج-درجي k لپاره باور لري

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_j n^j + \dots + p_0}{q_k n^k + \dots + q_0} = \begin{cases} 0, & \text{für } j < k \\ \frac{p_j}{q_k}, & \text{für } j = k. \end{cases}$$

د $j > k$ لپاره پرلپسې پولې ته نه ځي يعنې دپورگنت ده.

پای.

دمعلومو پوله ارزښتونو

سرلیک

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}$$

په مرسته لاس ته راځي

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^2 - 1)^n}{n^{2n}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 - 1}{n^2}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \left(\frac{n-1}{n}\right)^n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = e \cdot \frac{1}{e} = 1. \end{aligned}$$

په پام کې نيسو، چې

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \neq \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)^n = 1,$$

ځکه چې د ضرب د ضریبونو گڼون یا تعداد ثابت نه دی.
لیکونکی: هیولیگ، کرایخ

د کوشي قضیه Cauchy-Kriterium

یوه پرلپسې (a_n) تیک هلته پولې ته ځي، که د ټولو $\varepsilon > 0$ لپاره یو n_ε شتون ولري، داسې چې

$$|a_j - a_k| < \varepsilon$$

$$j, k > n_\varepsilon$$

د ټول لپاره باور ولري.

د کوشي په نوم نومول شوي قضیې په مرسته د پوله ارزښت ثبوت بي د پوله ارزښت پېژندلو ممکن دی.

لیکونکی: ایپ، هیولیگ

د کوشي - قضیې ارینوالی د پوله ارزښت له تعریف څخه لاس ته راځي:

$$a = \lim a_n \iff |a_m - a| < \varepsilon \quad \text{für } m > m_\varepsilon$$

که کیندو $n_\varepsilon = m_\varepsilon/2$ ، نو لرو

$$|a_j - a_k| \leq |a_j - a| + |a - a_k| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

د ټول $j, k > n_\varepsilon$ لپاره، حه چې د بنوولو وو.

دا چې شرط پوره کېدونکی هم دی، ستونځمن دی چې و یې بنایو، او دا د حقیقی عددونو په پوره والي ولاړ دی.

پای.

یوه رکورزیو تعرف شوي پرلپسې (a_n) کېدی شي زیات وخت د کوشي-قضیه د تخمینونو له لاري

$$|a_{n+1} - a_n| \leq cq^n$$

د $q \in [0, 1)$ سره یې ټیکوالی و ازمایل شي. داسې د هندسي پولې ته تلنه د لپاره راکوي

$$|a_j - a_k| \leq |a_j - a_{j+1}| + |a_{j+1} - a_{j+2}| + \dots + |a_{k-1} - a_k| \leq cq^j (1 + q + q^2 + \dots) \leq \frac{cq^j}{1-q}$$

بسی اړخ د $\varepsilon <$ لپاره ده د $n_\varepsilon = \ln \frac{\varepsilon(1-q)}{c} / \ln q$ لپاره ، نو د کوشي قضیه پوره ده. د څرگند، د

$$a_n = \sqrt{2 + a_{n-1}}, \quad a_0 = 1,$$

له لاري رکورزیو تعریف شوي پرلپسې a_n د کونورگنځ قضیې د ثبوت لپاره استعمالوي

سرلیک

د ایندکشن پیل: $(n = 1)$: نامساوات

$$|a_1 - a_0| \leq cq$$

باور لري، که $c = |a_1 - a_0|/q$ کښنول شي.د ایندکشن پای $(n \rightarrow n + 1)$: شری اټکل شوی کمښت یا تفریق د

$$|a_{n+1} - a_n| = |\sqrt{2 + a_n} - \sqrt{2 + a_{n-1}}| = \left| \frac{a_n - a_{n-1}}{\sqrt{2 + a_n} + \sqrt{2 + a_{n-1}}} \right|.$$

په بڼه بڼي.

د اندکشن د نیوني له مخې بنی اړخ $\leq \frac{1}{2\sqrt{2}}cq^n$ دی او د ټاکنې سره

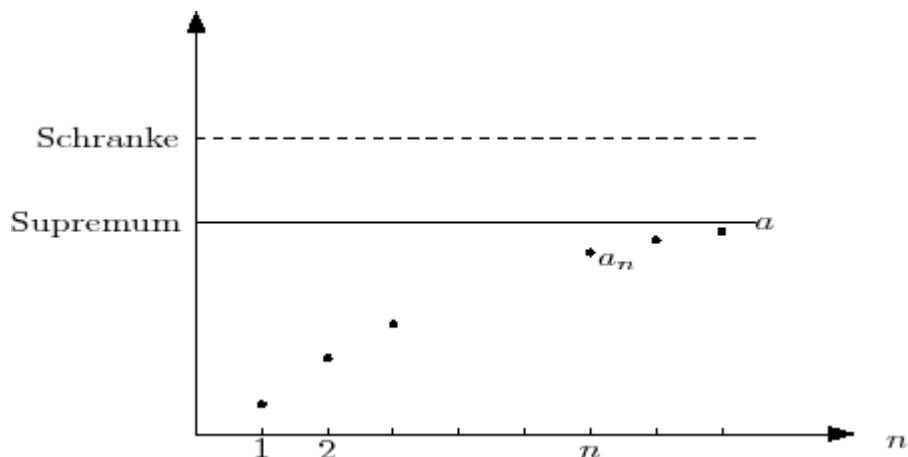
$$q = 1/2\sqrt{2} \leq cq^{n+1}$$

لکه چې غوښتل مو.

پای.

یو غږیزه پولې ته تلنه Monotone Konvergenz

یو پرلپسې (a_n) همغږیز جگېدونکي $a_{n+1} \geq a_n$ همداسې همغږیزټیټېدونکي $a_{n+1} \leq a_n$ بلل کيږي، که همداسې وي د ټولو n لپاره. دا کره همغږیزجگېدونکي همداسې کره همغږیز ټیټېدونکي بلل کيږي، که $a_{n+1} > a_n$ همداسې $a_{n+1} < a_n$ وي د ټولو n لپاره.



یوه رابنده یا محدوده ، د $n > n_0$ لپاره همغږیز جگېدونکي یا ټیټېدونکي پرلپسې (a_n) پولي ته تلونکي ده. پوله ارزښت یې د پرلپسې توکو . a_n , $n > n_0$ سوپریموم همداسې اینفیموم دی.

لیکونکی: اېپ، هیولیک

د یوې مونوتون جگېدونکي پرلپسې لپاره د سوپریموم د تعریف سره، چې د ټولو لپاره یو $\epsilon > 0$ شتون لريو د کوم لپاره چې باور لري

$$a - \epsilon < a_{n_\epsilon} \leq a = \sup_{n > n_0} a_n$$

د همغږیزوالي په بنسټ دی

$$a - \epsilon < a_{n_\epsilon} \leq a_n \leq a, \quad n > n_\epsilon, \quad \text{für}$$

$$a_n \rightarrow a \quad \text{نو .}$$

د مونوتون ټیټېدونکي پرلپسې لپاره په ورته توگه دلایل راوړل کيږي.

سرلیک

د پرلپسي پولې ته تلنه

Die Konvergenz der Folge

$$a_n = (1 + 1/n)^n, \quad n = 0, 1, \dots,$$

د اوپلر عدد e په لور کېدی شي د مونوتون کونورگنت جملې په بنسټ و ښوول شي. دواړه وړاندنيوني (فرضيې) کېدی شي د بېنوم درسي جملې په مرسته و ښوول شي.

(i) رابنديښه يا محدودیت: له

$$a_n = (1 + 1/n)^n = 1 + \binom{n}{1} \frac{1}{n} + \binom{n}{2} \frac{1}{n^2} + \binom{n}{3} \frac{1}{n^3} + \dots$$

او

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \dots k} \leq \frac{n^k}{1 \cdot 2 \dots 2}$$

لاس ته راځي

$$a_n \leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots \leq 3$$

(ii) همغږيزوالی: سری a_{n+1} هم د بېنوم له جملې سره شماری:

$$a_{n+1} = 1 + \binom{n+1}{1} \frac{1}{n+1} + \binom{n+1}{2} \frac{1}{(n+1)^2} + \binom{n+1}{3} \frac{1}{(n+1)^3} + \dots$$

که دا په (i) کې د a_n انځورونې سره پرتله کړي، نو سری کره کوي، چې اړونده ترمونه لوی دي:

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} &= \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \dots k} \frac{1}{n^k} \\ &\leq \frac{(n+1) \cdot n \dots (n-k+2)}{1 \cdot 2 \dots k} \frac{1}{(n+1)^k} = \end{aligned}$$

$$= \binom{n+1}{k} \frac{1}{(n+1)^k}.$$

دا له نامساوات څخه لاس ته راځي

$$\frac{n-j}{n} \leq \frac{n+1-j}{n+1}$$

د یوگونو ضریبونو لپاره. دا چې د a_{n+1} لپاره زیاتون یا جمعه لا ترم

$$\frac{1}{(n+1)^{n+1}}$$

لري لاس ته راځي

$$a_n < a_{n+1}.$$

نارېښتونی پوله ارزښت **Uneigentliche Grenzwerte**

یوه پرلپسې (a_n) دا نارېښتونی پوله ارزښت $(-\infty)$ لري، که د ټولو $a > 0$

لپاره یو n_a شتون ولري، داسې چې

$$a_n > a \quad (< -a)$$

باور ولري د ټولو $n > n_a$ لپاره. پرلپسې چې نارېښتونی پوله ارزښت لري، دا

ټاکلې دیورگنت یا پولې ته نه تلونکې پرلپسې هم بلل کيږي.

لیکونکي: اپ، هیولیگ، ویپیر

د دې لپاره چې وښایو، چې

$$a_n = \frac{n!}{2^n} \rightarrow \infty,$$

دا په دې معنا چې

$$\frac{n!}{2^n} > a$$

لپاره، دا a_n سری د یوې ساده افادې یا ویښې له لارې

کښته لور ته تخمینوي:

سرلیک

$$a_n = \frac{1 \cdot 2 \cdots n}{2 \cdot 2 \cdots 2} \geq \frac{1}{2} \cdot \frac{n}{2}$$

له دې سره له $\frac{n}{4} > a$ همداسې له $n > 4a = n_a$ لرو $a_n > a$

پوله اینفریور او پوله سوپریور (کښته - او پورته پوله ارزښت)

Limes Inferior und Limes Superior

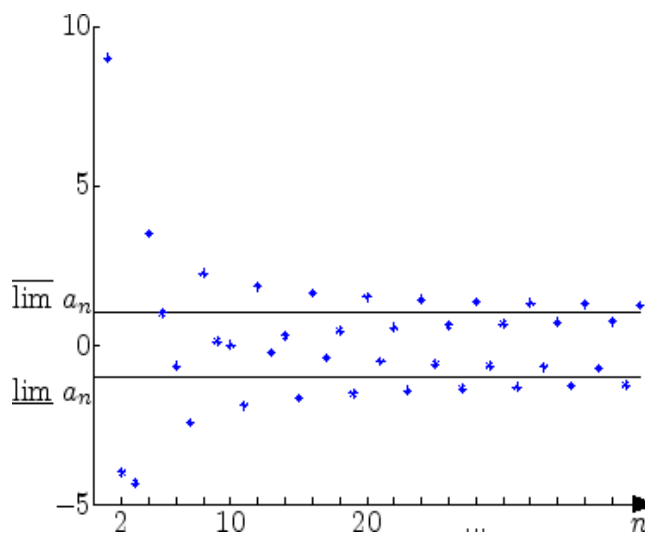
د هرې پرلپسې (a_n) لپاره، په ناصلي حالت کې $\text{uneigentlichen Sinn}$ ، یو پوله ارزښت شتون لري.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \underline{a_n}, \underline{a_n} = \inf_{k \geq n} a_k$$

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{a_n}, \overline{a_n} = \sup_{k \geq n} a_k$$



لکه په څیره کې چې شول شوی دی، پرلپسې (a_n) د همغږیزې پرلپسې $(\underline{a_n})$ او $(\overline{a_n})$ له لارې یا نوره هم ښه له لوري رابندې دي:

$$\underline{a_n} \leq a_n \leq \overline{a_n}.$$

که پوله اینفریور او پوله سوپریور یو په بل پریوخی، نو پرلپسی (a_n) پولي ته تلونکي ده او لرو

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n .$$

لیکونکي: اپ، هیولیگ

د پولي اینفریور او پولي سوپریور شتون د همغریز پولي ته تلني جملې له لاري ترلي لاس ته راځي، خکه چي پرلپسي

$$\underline{a}_n = \inf_{k \geq n} a_k , \quad \bar{a}_n = \sup_{k \geq n} a_k$$

همغریز جگیدونکي همداسي همغریز ټیټیدونکي دي.

په روبشانه توگه باور لري

$$\underline{a}_n \leq a_n \leq \bar{a}_n .$$

که پوله اینفریور او پوله سوپریور همغه ازبنت a ولري، نو لاسته راځي

$$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$$

$$a_n \rightarrow a \quad \text{د } n > n_\varepsilon \text{ لپاره، نو}$$

پرتله کونکي قضیه Vergleichskriterium

که د $\lim a_n = a$ او $\lim c_n = c$ سره د پوره کوچني n لپاره

$$a_n \leq b_n \leq c_n \text{ باور لري، نو دی}$$

$$a \leq \underline{\lim} b_n \leq \overline{\lim} b_n \leq c .$$

په ځانگړي توگه له $a = c$ د پرلپسي (b_n) کونورگنت لاس ته راځي:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a = c .$$

سرلیک

لومړۍ غوښتنه ساده ده، ځکه چې نابرابرون \leq د پولې ته تگ له امله ساتلی پټیږي:

$$\inf_{k \geq n} a_n \leq \inf_{k \geq n} b_n \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \underline{\lim} a_n \leq \underline{\lim} b_n.$$

په ورته توګه لرو $\overline{\lim} b_n \leq c$.

که پوله ارزښتونه سره برابر وي ($a = c$) ، نو باور لري

$$a - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < a + \varepsilon$$

د $n > n_\varepsilon$ لپاره. له دې سره لرو $b_n \rightarrow a$. پای.

پوله ارزښت

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

په لاندې نامساوات باندې د پرتلي قضیې استعمال له لارې لاس ته راځي

$$1 \leq \sqrt[n]{n} \leq 1 + \frac{2}{\sqrt{n}}.$$

دلته بنی نابرابرون د بینوم د فرمول څخه باوري دی:

$$1 \leq n \leq 1 + n \cdot \frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{4}{n} + \dots$$

په ټولیزه توګه د ضرب قانون څخه لاس ته راځي

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^k} = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[n]{n})^k = 1$$

$k \in \mathbb{N}$

د لپاره . د کم نظم ترمونو د په زیاتوالي له امله پوله ارزښت ساتلی پاتېږي. د یوه پولینوم

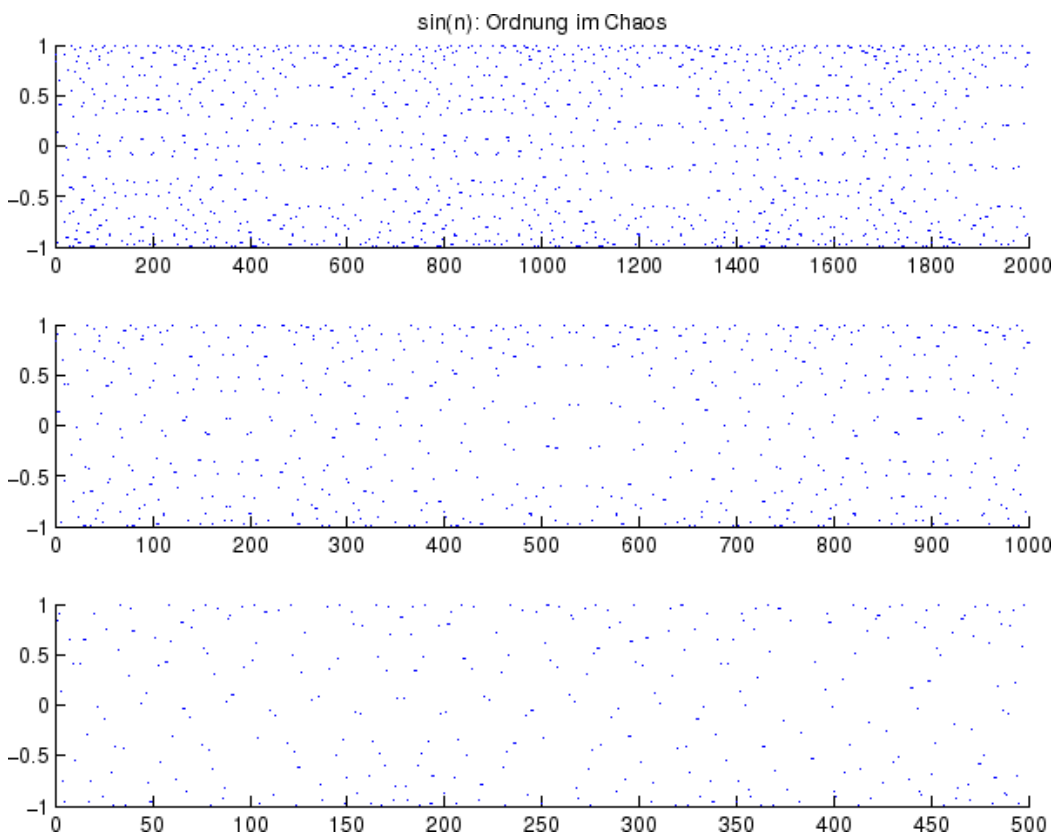
$$p(n) = a_k n^k + \dots + a_0, \quad a_k > 0$$

لپاره هم $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{p(n)} = 1$ دی .

Häufungspunkt einer Folge ټکی پندغالي پرلپسي د يوي

$(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \quad \varepsilon > 0$ ، (a_n) پندغالي ټکی a لري، که هر انتروال دپرلپسي ناپای ډېر توکي خوندي ولري. دې ته ورته د يوي برخه پرلپسي باور لري، چې a ته ځي. په ځانگړي توگه يوپوله ارزښت د پرلپسي بندغالي ټکی هم دی.

$(\sin n)_{n \in \mathbb{N}}$ څيره پرلپسي بنایي.



سری په نږدې توگه د پرلپسي يا ترادف توکو a_n برابرېشنه په انتروال $[-1, 1]$ کې پیژني. په ریښتوني ښول کېدی شي، چې په $[-1, 1]$ کې هر ټکی د پرلپسي پندغالي ټکی دی.

سرلیک

د پندغالي ټکي د ټاکلو لپاره باید کونورگنت برخه
 د یوې پرلپسې یا ترادف پرلپسې و پیژندل شي.
 د بیلگې لپاره

هغه دا دي

$$a_n = \frac{n \sin(n \frac{\pi}{2})}{n + \sin(n \frac{\pi}{2})}$$

$$b_k = a_{2k} = \frac{0}{k}$$

$$c_k = a_{4k+1} = \frac{(4k+1)}{(4k+1)+1}$$

$$d_k = a_{4k+3} = \frac{-(4k+1)}{(4k+1)+1}$$

له دې سره پندغالي ټکی لاس ته راځي

$$\lim b_k = 0, \lim c_k = 1, \lim d_k = -1$$

ور هوولست - یا فر هوولست - مودل **Verhulst-Modell**Pierre-François **Verhulst** [vər'hʏlst] یو بیلجیمي شمیرپوه وو

(* 28. Oktober 1804 in Brüssel; † 15.

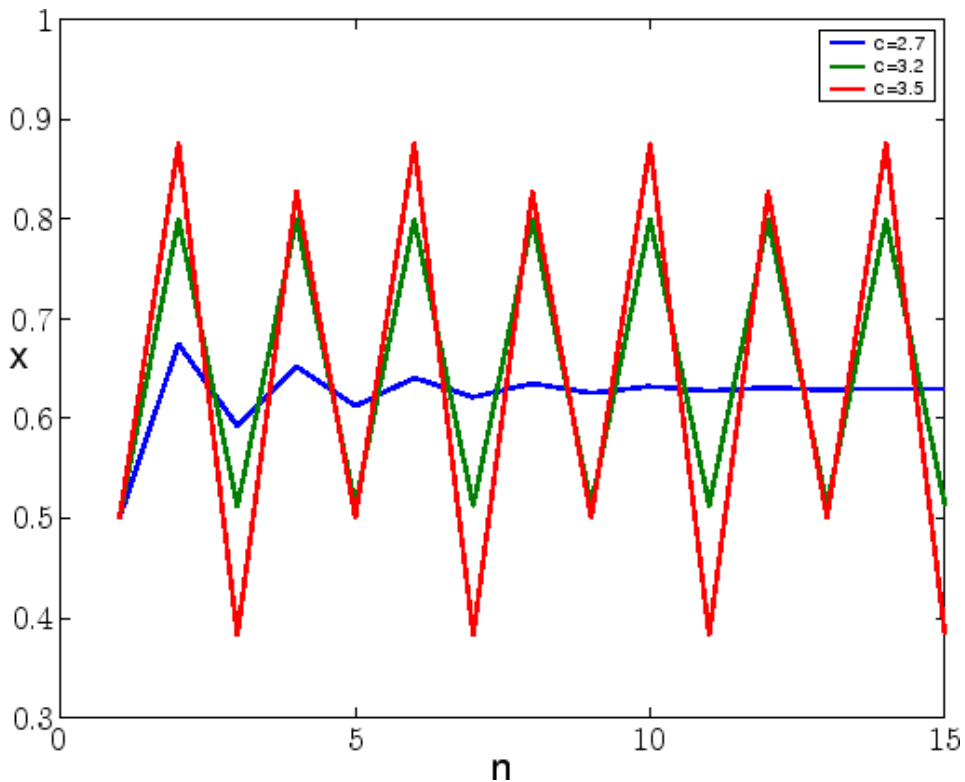
Februar 1849 ebenda)

ریکورژن (په خټ خُغاستل) Rekursion

هغه فنکشن، چې د خپل ځان له خوا پیژندل لري یا تعریفیږي

$$x_{n+1} = cx_n(1 - x_n)$$

د $c \in (0, 4]$ سره د نورمال شوي خلکو گڼوالي x_n وده په گوته کوي. یو خو تیوپیکی بیلگې دا لاندې څیره بنایي



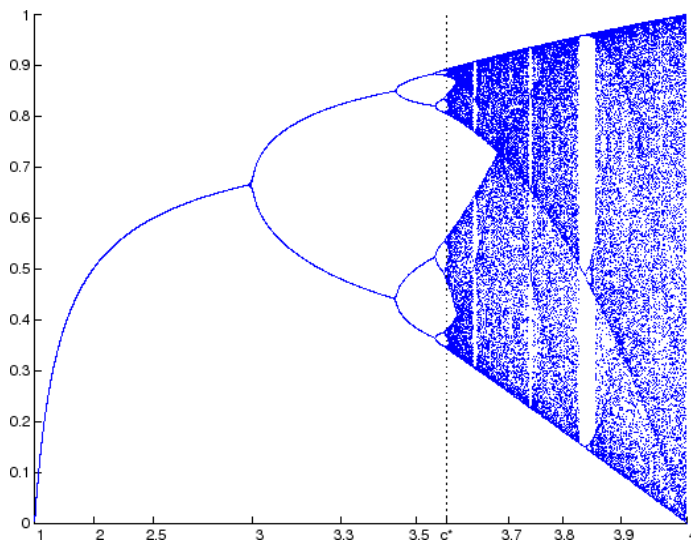
د $c \leq 3$ لپاره x_n د $n \rightarrow \infty$ لپاره لاندې پولې ارزښت ته ځي

$$x_* = \frac{c - 1}{c}$$

د $c > 3$ لپاره سری اوسځلېشن گوري. که پارامتر تل لوی شي، نو د پندغالي -

تکو x_* گڼون یا تعداد دوه برابره کيږي د افاط پارامتر ارزښتونو c_i څخه اوبنتلو باندې یعنی له دې نور زیاتیدلو باندې. دا په لاندې څیره کې کښل شوی دی، په کوم کې چې د x_* تکی د c -محور پورته لور ته ځای په ځای شوي دي.

سرليڪ



پوله ارزڻت

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_n - c_{n-1}}{c_{n+1} - c_n} = 4,69920166\dots$$

داسي په نامه د انځوروني ثابتہ ده، چي دا زيات وخت د څانگو کولو پرابلم کي رول لوبوي.

له پورته څيري څخه روښانه کيږي، چي ايتيشن د

$$c > c^* = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n$$

لپاره يوگډوډيز chaotisches Verhalten حالت ښايي

د پي Pi رکورزيو اپروکسيميشن Recursive Approximation von Pi

د a_n او b_n نيم اوږدوالي چي د يوي يوونگردي يا واحد داږي د $(6 \cdot 2^n)$ -گډونو يا کونجونو په باندې او په کي يعني په دننه اوډباندي لاندي ریکورژن پوره کړي

$$a_{n+1} = \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n}, \quad b_{n+1} = \sqrt{a_{n+1} b_n}, \quad a_0 = 2\sqrt{3}, \quad b_0 = 3,$$

د... $\pi = 3.1415926535897932$ په مرسته اېروکسيمي کیدی شي. دا فرمول د یوهان فریدرېش پفاف (Johann Friedrich Pfaff (1765-1825) له خوا په 1800 زک کال میندل شوی. ارنېمېدس (Archimedes (287-212 v. Chr.) د 96-گودونو ($n = 4$) او اټکل یا تخمین سره اړیکې

$$3.140845 \dots = \frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7} = 3.142857 \dots$$

ومیندلي یا تري لاس ته راوړي.

د گردی گڼ یا عدد π له د یو میلیار د ځایونو ډېر شمیرل شوی دی. لاندې جدول د تاریخي ودې څخه یوه کاپی راکوي.:

Wert	korr. Stellen	Jahr	Autor Bibel (1. Könige 7:23)

Autor	Jahr		korr. Stellen	Wert
Bibel (1. Könige 7:23)	550	v. Chr.	0	3
Babylonier	2000	v. Chr.	1	$3+1/8$
Archimedes	250	v. Chr.	3	$\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}$
Liu Hui	263		5	
Tsu Ch'ung Chi	480		7	
Al-Kashi	1429		14	

سرلیک

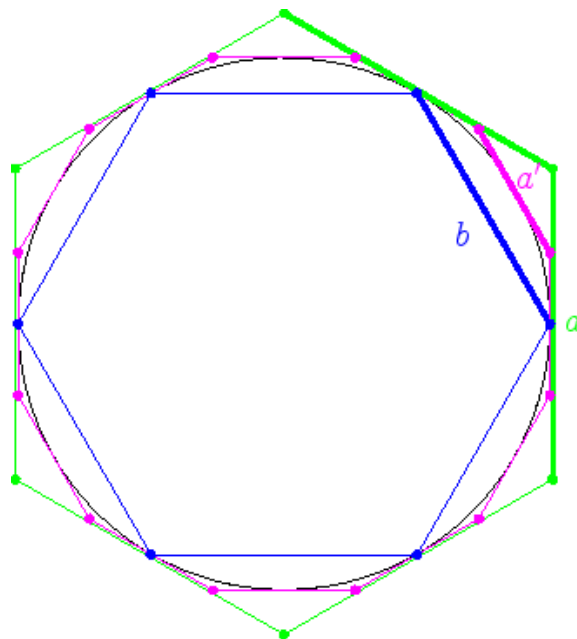
Romanus	1593		15	
Van Ceulen	1596		20	
Van Ceulen	1615		35	
Sharp	1699		71	
Machin	1706		100	
Rutherford	1824		152	
Strassnitzky/Dase	1844		200	
Shanks	1874		527	
Smith/Wrench	1949		1 120	
Reitwiesner u.a.	1949		2 037	
Genuys	1958		10 000	
Shanks/Wrench	1961		100 265	
Guilloud/Filliatre	1966		250 000	
Guilloud/Dichampt	1967		500 000	
Guilloud/Bouyer	1973		1 001 250	
Kanada/Yoshino/Tamura	1982		16 777 206	
Kanada/Tamura/Kubo u.a.	1987		134 217 700	
Chudnovskys	1989		1 011 196 691	

پای.

د ج.ف. پفاف ریکورزیون په ساده هندسي پامکوني باندې ولاړ دی

د وړانګې (تالس) جملې له مخې د a_n لپاره لاس ته راځي:

$$a' : b = \left(\frac{a}{2} - \frac{a'}{2} \right) : \frac{a}{2} \Leftrightarrow a'a = ba - ba' \Leftrightarrow a' = \frac{ab}{a+b}.$$



که $k_n = 3 \cdot 2^n$ د ډبرګوډي نیم د اړخونوګنون یا تعداد په ګوته کړي، نو باور لري

$$\begin{aligned} a_n = k_n a, b_n = k_n b \Rightarrow a_{n+1} &= k_{n+1} a' = 2k_n \cdot \frac{ab}{a+b} \\ &= 2 \frac{(k_n a)(k_n b)}{k_n a + k_n b} = \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n}. \end{aligned}$$

د لپاره ریکورزیون کېدی شي د تریګونومتري توابعو په مرسته و بنوول شي. له b_n

$$a_n = k_n 2 \tan(\pi / (2k_n)), \quad b_n = k_n 2 \sin(\pi / (2k_n))$$

سرلیک

لاس ته راځي

$$\begin{aligned}
 b_{n+1}^2 &= 4k_n^2 4 \sin^2(\pi/(4k_n)) \\
 &= \underbrace{2k_n^2 \tan(\pi/(4k_n))}_{a_{n+1}} \underbrace{\cos(\pi/(4k_n)) 2k_n^2 \sin(\pi/(4k_n))}_{k_n^2 \sin(\pi/(2k_n))=b_n} \\
 &= a_{n+1} b_n .
 \end{aligned}$$

د پرلپسيو يا ترادفونو ځانگړي پوله ارزښتونه

يو څو غوره پوله ارزښتونه په لاندې جدول کې راوړل شوي

a_n	$a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$
$\sqrt[n]{n}$	1
$n^\alpha q^n, q < 1$	0
$n^{-\alpha} \ln n, \alpha > 0$	0
$q^n/n!$	0
$n!/n^n$	0
$(1 + 1/n)^n$	e
$(1 - 1/n)^n$	$1/e$

پای.

زیات واره کیدی شي پوله ارزښتونه وشمیرل شي، داسې چې سری د مناسب بڼه بدلون له لارې معیاري افادې ته بېرته ولاړ شي. دا د دوه بیلو سره روښانه کیږي. (i) د پرلپسې پوله ارزښت شمېرلو ته

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{2n+3}\right)^{4n}, \quad n \in \mathbb{N},$$

سری ږدي

$$m = 2n + 3, \quad n = \frac{m-3}{2}$$

او لاس ته راوړي

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{2m-6}.$$

په دې پسي یا د دې په تعقیب دی

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \left(\lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m \right)^2 \cdot \left(\lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{m}\right) \right)^{-6} = \\ &= e^2 \cdot 1^{-6} = e^2. \end{aligned}$$

$$a_n = \binom{3n}{n} / 2^n, \quad n \in \mathbb{N},$$

(ii) د دې لپاره چې د

پوله ارزښت وشمیرو، سری لیکي

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{(3n)(3n-1) \cdots (2n+1)}{n \cdot (n-1) \cdots 1} \cdot \frac{1}{2^n} = \\ &= \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{3-1/n}{2} \cdots \frac{2+1/n}{2} \right) \cdot \frac{n^n}{n!}. \end{aligned}$$

سرلیک

دا چې په نوکانو کې افاده ≥ 1 ده لرو

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{n!} = \infty.$$

د لاندې بڼې پوله ارزښت

$$\frac{a_n \pm b_n}{c_n \pm d_n}$$

په مناسب ډول سری داسې شمیرې، چې سری د مطلق ارزښت د لویې پرلپسې توکو سره ووبشي:

د بیلگې په توګه دا پوله ارزښت

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3 + \sqrt{n+4})^2}{5n + \ln n}$$

که غواړو وشمیرو، نو مات یا کسر په لاندې بڼه لیکو

$$\frac{9 + 3\sqrt{n+4} + n + 4}{5n + \ln n} = \frac{13/n + 6\sqrt{1/n + 4/n^2} + 1}{5 + (\ln n)/n}.$$

دا چې $1/n, 1/n^2$ او $(\ln n)/n$ د صفر پهلور ځی، نو پوله ارزښت دا لاندې دی

$$\frac{0 + 6 \cdot \sqrt{0} + 1}{5 + 0} = \frac{1}{5}.$$

د یوې لړۍ پرلپسې (لنډ: لړۍ) پوله ارزښت

Grenzwert einer Reihe

یو زیاتون یا جمعه $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ دډېروو زیاتیدونو سره لړۍ بلل کېږي. دا د یوې پولې ارزښت

سرلیک

$$s = \sum_{k=0}^{\infty} a_k,$$

په لور هڅیږي، که ټوټه زیاتوونو یا - جمعو

$$s_n = \sum_{k=0}^n a_k$$

 (s_n)

پرلپسې s لور ته وهڅیږی یا کونورگنت شي. که پوله ارزښت شتون ونه لري نو پرلپسې پولې ته نه تلونکې یا دیورگنت بلل کیږي. پوله ارزښت کېدی د زیاتوونو (هغه عددونه چې یو په بل زیاتیري) د لړۍ پرلپسې په واک کې وي، همداسې اړتیا نه شته چې د نظم بدلون وروسته شتون ولري.

د یوې لړۍ د پولې ته تلنې لپاره اړین (شرط) دی، چې

$$\lim a_n = 0.$$

فقط په لرو حالتونو کې د یوې لړۍ روښانه یا اکسپلیخیت شمېرنه ممکن ده. یوه بېلگه یې د ټاکلو لړیو ده د راشنل زیاتیدونو سره لکه

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n^2 - 1} = \frac{3}{2}.$$

د ټوټه کسر ټوټه ونې وروسته

$$\frac{2}{n^2 - 1} = \frac{1}{n - 1} - \frac{1}{n + 1},$$

کېدی شي دا لړۍ په

$$\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right) + \dots$$

سرلیک

بڼه ولیکل شي. تر $\frac{1}{1}$ او $\frac{1}{2}$ پورې ټول زیاتېدونې یو بل له منځه وړي یا پورته کوي، داسې چې پوله ارزښت $\frac{3}{2}$ ترلی لوستل کېدی شي.

د ټوټه زیاتون د کمښت لپاره د ټول لپاره باور لري $n < m$

$$|s_n - s_m| =$$

$$= \left| \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) + \dots + \left(\frac{1}{m-3} - \frac{1}{m-1} \right) + \left(\frac{1}{m-2} - \frac{1}{m} \right) \right| \leq \frac{4}{n-1},$$

دا چې منځني ترمونه سره پورته کيږي یا له منځه سره وړي. ټوټه زیاتون یا —جمعه د کوشي — پرلپسې جوړوي:

$$n > 1 + \frac{4}{\varepsilon} \quad |s_n - s_m| < \varepsilon$$

د لپاره

و پولي ارزښت ته کمون یا تفریق دی

$$\left| \frac{3}{2} - s_n \right| = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} < \frac{2}{n}.$$

بیلگه دا هم ښايي، چې د زیاتوونو یا د جمعي د غړو لړۍ پرلپسې غوره یا بڼه روښانه ده.

که لړۍ پرلپسې

$$\begin{aligned} & \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{8} - \frac{1}{5} \right) + \\ & + \left(\frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{16} - \frac{1}{6} \right) + \dots, \end{aligned}$$

وټاکو، نو هر ه په نوکانو کې افاده $\geq \frac{1}{4}$ ده، نو لړۍ پرلپسې دیورگنت ده.

هندسي یا حُمکچيزي لړۍ

Geometrische Reihe

ځمکچیزه لړۍ $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ ټیک هلته پولې ته ځي، $|q| < 1$ وي. د هندسي زیاتونفرمول سره

$$s_n = 1 + q + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

کېدی شي پوله ارزښت وېنانه یا اکسپلیټیت وشمېرل شي:

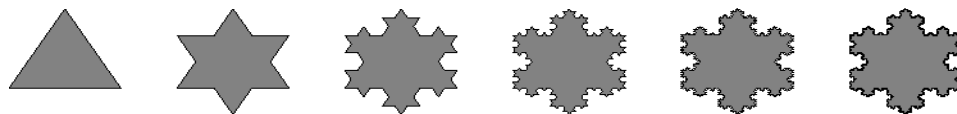
$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = 1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^n + \dots = \frac{1}{1 - q}$$

د $|q| < 1$ لپاره پای.

که د یوه برابر اړخیز درېکودي یا مثلث مخ ته تگ سره ژۍ د قانون یا قاعدې سره سم کیږدو



نو یوه ډېری یا سټ لاس ته راځي د وتلو ژبو سره ، داسې په نامه د کوبن-د واورو پوتې Koch-Schneeflocke.



1/3

- -م د واورو پوتې $3 \cdot 4^n$ ژۍ لري. دا چې د هر پل سره په ضریب کمیري، نو د دې څومره والي لپاره لاس ته راځي

د ژبو گنون یا - تعداد ضرب د ژبو اوږدوالی:

$$(3 \cdot 4^n) (3^{-n}) = 3 \left(\frac{4}{3}\right)^n \rightarrow \infty,$$

دا په دې معنا چې د ژبو اوږدوالی پولې ته نه ځي یا دیورگننت دی.

سرلیک

په n -م پل سره $3 \cdot 4^{n-1}$ برابر اړخیز درېګوډي لاس ته راځي د ژيو اوږدوالي 3^{-n}

او سطحې په ور زیاتوالي سره. په دې توګه د n -م د واورو پوټي د سطحې لپاره راکوي

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{3}}{4} + \sum_{i=1}^n \left(3 \cdot 4^{i-1} \frac{\sqrt{3}}{4} (3^{-i})^2 \right) &= \frac{\sqrt{3}}{4} \left(1 + \frac{1}{3} \sum_{i=1}^n \frac{4^{i-1}}{9^{i-1}} \right) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} \left(1 + \frac{1}{3} \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{4}{9} \right)^i \right). \end{aligned}$$

دا وتلې پوله ډېرې په پسي توګه سطحه لري

$$\frac{\sqrt{3}}{4} \left(1 + \frac{1}{3} \frac{1}{1 - 4/9} \right) = \frac{2\sqrt{3}}{5}.$$

هارموني لړۍ Harmonische Reihe

هارموني لړۍ

$$s = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k},$$

پولي ته نه ځي يا همداسې ناتاکلی پوله ارزښت $s = \infty$ لري. په ټوليزه توګه لړۍ

$$s_{\alpha} = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-\alpha}$$

د $\alpha \leq 1$ لپاره ډيورګنت او $\alpha > 1$ لپاره پولي ته تلونکي ده. يو څو ځانګړي ارزښتونه د.

$$s_2 = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots,$$

$$s_4 = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-4} = \frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \dots,$$

$$s_6 = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-6} = \frac{1}{1^6} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \dots.$$

Absolut konvergente Reihen مطلق پولي ته تلونکي لری

که

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|,$$

پولي ته لار شي، نو لری $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ مطلق پولي ته تلونکي بلل کیري.

د کونورگنت د دې قوي بني څخه لرو، چې لری د زیاتونو لری پرلپسې په خوښه تغیر له امله هم کونورگنت ده یعنی پولي ته ځی.

کوښی (کوشي) – کونورگنت قضیه راکوي:

$$\exists n_{\varepsilon} : |a_{m+1}| + \dots + |a_n| < \varepsilon \quad m, n > n_{\varepsilon}$$

für

د درېگودي نابرابرون په مرسته د توتیه زیاتون د کمښت لپاره لاس ته راځي:

$$|s_n - s_m| = |a_{m+1} + \dots + a_n| \leq |a_{m+1}| + \dots + |a_n| < \varepsilon$$

د $m, n > n_{\varepsilon}$ لپاره ،

سرلیک

دا په دې معناچې د $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ پولې ته تلنه.

مایورانټ او مینورانټ Majorante und Minorante

که $|a_n| \leq c|b_n|$ د $n \geq n_0$ لپاره وي او یو مثبت یا زیاتیزه ثابت، نو د $\sum b_n$ مطلق کونورگنت څخه د $\sum a_n$ مطلق کونورگنت لاس ته راځي.

که برعکس $|a_n| \geq c|b_n|$ وي دتولو تر پای ډیرو n لپاره نو د $\sum |b_n|$ دیورگنت څخه لاس ته راځي، چې $\sum a_n$ هم مطلق کونورگنت نه ده.

زیاتوخت یا زیات واره هندسي لړۍ $\sum q^n$ او لړۍ $\sum n^{-\alpha}$ د پرتله کونې لړۍ په څیر کارول کيږي.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n}^{-1}$$

لپاره دی

$$a_n = \frac{n \cdot (n-1) \cdots 1}{(2n) \cdot (2n-1) \cdots (n+1)} \leq 2^{-n}.$$

د دې په تعقیب هندسي لړۍ $\sum 2^{-n}$ یوه مایورانټ ده، نو دا پولې ته تلونکې ده. د لړۍ

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3 + 1000}$$

لپاره د $n > 9$ لپاره باور لري

$$a_n \geq \frac{n^2}{2n^3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n}$$

په دې پسي يا په تعقيب هارموني لړۍ يوه مينورانت ده، نو لړۍ پولې ته نه ځي يا ديورگنت ده.

د وېش قضيه Quotientenkriterium

که $a_n \neq 0$ د $n > n_0$ لپاره وي او يو عدد $q \in (0, 1)$ شتون ولري د

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq q, \quad n > n_0,$$

سره، نو $\sum a_n$ مطلق پولې ته ځي. برعکس

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \geq 1, \quad n > n_0,$$

نو، $\sum a_n$ پولې ته نه ځي يا ديورگنت ده. د پولې ته تلني لپاره پوره کېدونکي قضيه کېدی شي په ورته بڼه

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$$

هم وليکل شي.

په پام کې دي وي، چې پوره کېدونکي پولې ته تلونکي شرطونه رکورزيو د نابرابرون

$$|a_{n+1}| < |a_n|, \quad n > n_0,$$

په توگه دي، چې د هغي په بنسټ کومهي نا ممکن نه ده.

سرلیک

پای.

که

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|, \left| \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} \right|, \dots \leq q,$$

وي، نو دی

$$|a_{n+k}| \leq q |a_{n+k-1}| \leq \dots \leq q^k |a_n|.$$

له دي سره هندسي لړۍ يوه مينورانت ده.

د ديورگنت لپاره قضيه راكوي، چې

$$0 < |a_n| \leq |a_{n+1}| \leq \dots$$

د لپاره. زياتيدوني صفرپرلپسي نه جوړوي، له كوم چې د $\sum a_n$ ديورگنت لاس ته راځي يا پولې ته نه تگ. پای.

د وېش قاعده کېدی شي ګټوره وي که په لړيو استعمال شي، چې د هغې زياتووني فاکولټيت او توانونه خوندي ولري. د

$$\sum_{n=1}^{\infty} 3^n / \binom{2n}{n}$$

لپاره د بېلګې په توګه سړی لاس ته راوړي

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{3^{n+1} (n+1)! (n+1)!}{(2n+2)!} \cdot \frac{(2n)!}{3^n n! n!} = \frac{3 \cdot (n+1)(n+1)}{(2n+2)(2n+1)}$$

$$\frac{3}{4}$$

د دي افادي پوله ارزښت د $n \rightarrow \infty$ لپاره دی، پسي (تعقيب) يې لړۍ پولې ته ځي.

د زياتوونو يو سيده تخمين

$$a_n = \frac{3 \cdot 6 \cdots 3n}{(n+1)(n+2) \cdots (2n)}$$

مفصل دی یا ډېر کار غواړي. ضریبونه

$$\frac{3k}{n+k}, \quad k = 1, \dots, n,$$

له یو څخه هم لوی دي او هم کوچني. سری باید مناسبې جوړې سره یوځای کاندې، چې یوه تخمین ته راشي.

د ریښې یا جذرقضیه **Wurzelkriterium**

که یو عدد $q \in [0, 1)$ د

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leq q$$

سره شتون ولري د $n > n_0$ لپاره، نو $\sum a_n$ مطلق پولي ته ځي. که برعکس $|a_n| \geq 1$

وي د ناپای ډېرو n لپاره، نو $\sum a_n$ پولي ته نه تلونکي ده. د کونورگنت لپاره پوره کېدونکي شرطونه کېدی شي په ورته یا برابر ارزښته بڼې

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$$

هم ولیکل شي.

که $|a_n| \leq q^n$ د $n > n_0$ لپاره باور ولري، نو هندسي لړۍ یو مایورانن جوړوي.

د دیورگنت لپاره شرط راکوي، چې (a_n) صفر پرلپسې نه ده، ځکه چې $|a_n| \geq 1$ د ناپای ډېرو n لپاره باور لري..

د ریښې قضیه استعما کېدی شي په هغو لړیو کتوره وي، چې د هغو زیاتونونه n - م توان خوندي ولري. د

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(3 + (-1)^n)^n} = \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{2^3} + \dots$$

سرلیک

لپاره سری د بیلگې په توگه لري

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{|x|}{|3 + (-1)^n|}.$$

د دې افادې يا ويښې پرلپسې

$$\frac{|x|}{2}, \frac{|x|}{4}, \frac{|x|}{2}, \dots,$$

د

$$q = \frac{|x|}{2}$$

له لارې يا سره محدود ده. په تعقيب يې لری د $|x| < 2$ لپاره پولي ته ځي. همدې نتيجه ته رسو، که سری پوله سوپريور جوړه کړي.

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{|x|}{2}.$$

دا د n -مې ريښې اوسخيليري پرلپسې پولي ته نه ځي بي پروا يا نا غوره يا مهمه نه ده.

د لايښخ قضيه Leibniz-Kriterium

الترنيري (مخ نخښه بدلونې) لری

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 \pm \dots$$

پولي ته ځي، که (a_k) يوه مونوتون صفر پرلپسې وي. د لری باقيو يا پاتو لپاره باور لري

$$0 \leq \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k a_k \right| \leq |a_{n+1}|.$$

د یوې التریري جمعې ارزښت کېدی شي تل د لومړي زیاتوني د مطلق ارزښت له لارې اټکل شي.

د اټکل په بنسټ

$$|s_m - s_n| = |a_{n+1} - a_{n+2} + \dots - a_m| \leq |a_{n+1}|$$

د کوښی قضیه پوره ده، او د لپاره د پاتې جمعې اټکل لاس ته راځي. د دې نامساوات د بنوونې لپاره، چې د لړۍ د پاتې لپاره اټکل راځوي، سری بی له ټولیزو

$$s_m - s_n \quad a_{n+1} \geq 0 \quad \text{بنديزونو (o.B.d.A.) نیسي او د}$$

$$a_{n+1} - \underbrace{(a_{n+2} - a_{n+3})}_{\geq 0} - \underbrace{(a_{n+4} - a_{n+5})}_{\geq 0} - \dots \leq a_{n+1}$$

له لارې پورته لور ته اټکل کوي. او د

$$\underbrace{(a_{n+1} - a_{n+2})}_{\geq 0} + \underbrace{(a_{n+3} - a_{n+4})}_{\geq 0} + \dots \geq -a_m \geq -a_{n+1}$$

له لارې کښته لور ته اټکل کوي

د لایبنيخ قضیې سره د التریري هارموني لړۍ

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = \ln 2;$$

پولي ته تگ لاس ته راځي، پرلپسي

$$a_n = \frac{1}{n}$$

په روښانه توگه یوه همغږیزه صفر پرلپسي ده. د n -م ټوټه جمعې ناتیكاوی، دا په دې معنا چې د لړۍ پرلپسي مطلق ارزښت دا لاندې دی

$$\left| \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k} - \ln 2 \right| \leq \frac{1}{n+1}.$$

د لایبنيخ قضیې دواړه وړاندیوني غوره دي.

سرلیک

د

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{n} = -\frac{2}{1} + \frac{3}{2} - \frac{4}{3} + \frac{5}{4} - \dots$$

لری لپاره زیاتووني a_n صفر پرلپسي نه جوړوي. له

$$|s_{n+1} - s_n| = |a_{n+1}| \geq 1$$

څخه دیورگنت لاس ته راځي.

د

$$\sum_{n=1}^{\infty} \max \left(\frac{(-1)^n}{n}, \frac{(-1)^n}{2n} \right) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{4} - \dots$$

لری لپاره زیاتووني a_n همغږيزي نه دي. که یو په بل پسي زیاتوني سره یوځای کړو، نو لاس ته ترې راځي

$$b_n = a_{2n-1} + a_{2n} = -\frac{1}{2(2n-1)} + \frac{1}{2n} = \frac{2n-2}{(4n-2)(2n)} \geq \frac{1}{4n}$$

$n > 1$.

für

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

په تعقیب هاموني لری یوه مینورانت ده، نو له دې کبله لری دیورگنت ده.

د اویلر Euler گڼ یا عدد e دیوی پرلپسي او یوی لری پولي په حیث
د اویلر عدد $e = 2,71828182845905 \dots$

کیدی شي د یوې پرلپسې او یوې لړۍ پوله ارزښت پې څیر انځور شي

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

پای.

د لړۍ پولې ته تلنه له $1/n! \leq 4 \cdot 2^{-n}$ څخه د مایوراننټ قضیې په بنسټ لاس ته راځي.

پرلپسې $a_n = (1 + 1/n)^n$ د لاندې دواړو اټکلونو په بنسټ د e سره نومول شوي یا په نڅېبه شوي پوله ارزښت په لور ځي.

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n \leq e \quad . \quad (a)$$

د ښوونې لپاره لومړی په پام کې نیسو چې د $n \geq k \geq 0$ لپاره

$$\binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \frac{1}{k!} \frac{n}{n} \frac{n-1}{n} \dots \frac{n-k+1}{n} \leq \frac{1}{k!}$$

دی. له دې سره د بېنوم فرمول څخه لرو

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \leq \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \leq e$$

او دپوله ارزښت جوړولو سره غوښتنه لرو.

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n \geq e \quad . \quad (b)$$

د ښوونې لپاره $N \geq 1$ په خوښه تاكو مگر كره او د $n > N$ لپاره لرو:

$$a_n \geq \sum_{k=0}^N \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^N \frac{1}{k!} \frac{n}{n} \frac{n-1}{n} \dots \frac{n-k+1}{n} \geq \sum_{k=0}^N \frac{1}{k!} \left(\frac{n-N}{n}\right)^N$$

سرلیک

له دې سره لاس ته راځي

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^N \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{N}{n}\right)^N = \sum_{k=0}^N \frac{1}{k!}$$

او د پولې ارزښت جوړولو ($N \rightarrow \infty$) سره غوښتنه.له (a) او (b) څخه د $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \overline{\lim} a_n$ له امله لرو :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \overline{\lim} a_n = e.$$

د لړيو ځانگړي پوله ارزښتونه

په لاندې کې د څو غوره لړيو پوله ارزښتونه ورکړ شوي.

$$\sum_{k=0}^{\infty} aq^k = a + aq + aq^2 + \dots = \frac{a}{1-q}, \text{ für } |q| < 1$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots = \infty$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \pm \dots = \ln 2$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}$$

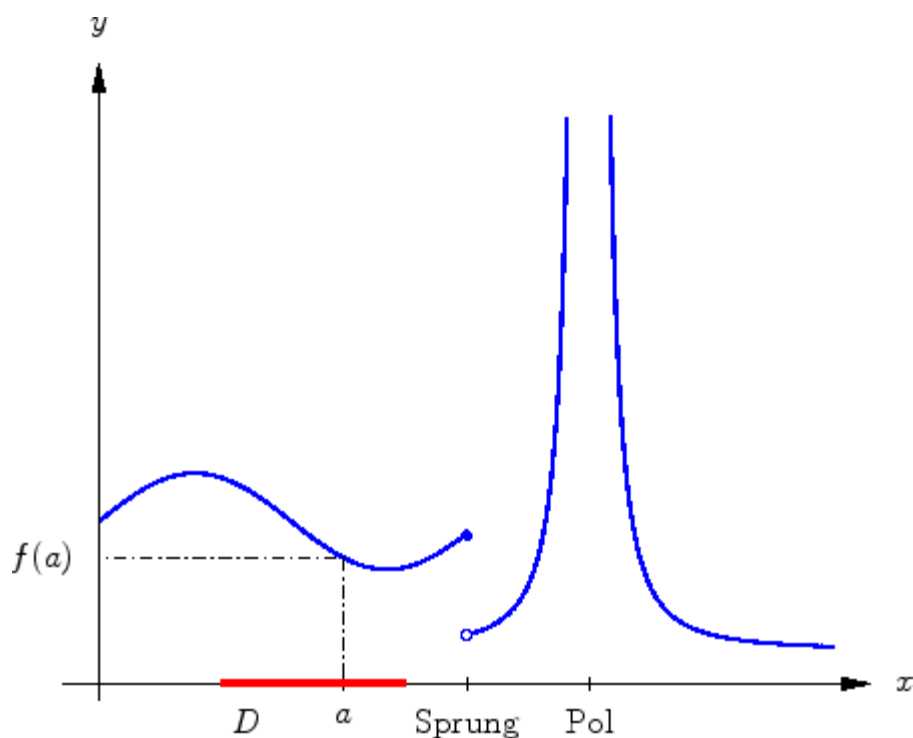
$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{k^2} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} \pm \dots = \frac{\pi^2}{12}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots = e$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k!} = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} \pm \dots = \frac{1}{e}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \cdot 2^k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 2^2} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \dots = \ln 2$$

ناپربکيدنه يا متماديت *Stetigkeit*



سرلیک

یو تابع f په ټکي a کې ناپربکيدونکي يا متمادی دی، که د ټولو پرلپسويو (x_n) لپاره
 د د پولې a سره د تابع ارزښت $f(x_n)$ د $f(a)$ په لور کونورگنت وي يا هڅيري:

$$x_n \rightarrow a \implies f(x_n) \rightarrow f(a),$$

د پوله ارزښت د تعريف له مخې هر $\varepsilon > 0$ ته يو δ_ε شتون لري د

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon, \quad |x - a| < \delta_\varepsilon,$$

سره د لپاره، او سړی ليکي

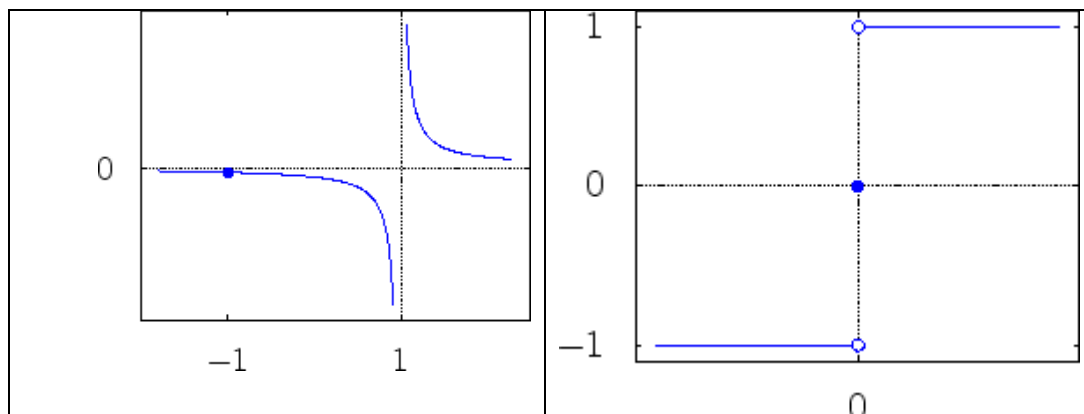
$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

یو تابع په يوه انټروال D ناپربکيدونکي ده، که دا د D په هر ټکي کې ناپربکيدونکي وي.

دا په دې معناچې د f گراف سره تړلی دی، تابع گام يا توپ نه وهي او قطب نه لري (لنډ: نه پرې کيږي او نه ماتيري).

بالاخره ناپربکيدنه په دې معنا ده، چې گراف بي له دې چې (پنسل پورته شي) پرې شي رسم کيږي.

$g(x) = \frac{x+1}{x^2-1}$ فنکشن	$f(x) = \text{sign}(x)$ فنکشن
----------------------------------	-------------------------------



پورته دواړه بیلگې د پرېکړېدنې مختلف تړپونه ښايي.

د سیګنوم تابع sign په صفرځای کې یو توپ وهی. په حقیقت کې د تابع ارزښت $\text{sign}(0) = 0$ ، مګر د $f(x)$ تعریف دی، پوله ارزښت د $x \rightarrow 0$ لپاره شتون نه لري.

تابع په $x = \pm 1$ کې تعریفشیا لري. د $x \rightarrow 1$ لپاره $|g(x)|$ د ∞ په لور هڅیږي، g هلته یو قطبځای لري. مګر سره له دې هم پوله ارزښت $\lim_{x \rightarrow -1} g(x)$ شتون لري. دا تړلی د کرښیز ضریب $(x+1)$ د لنډونې څخه کتل کېږي.

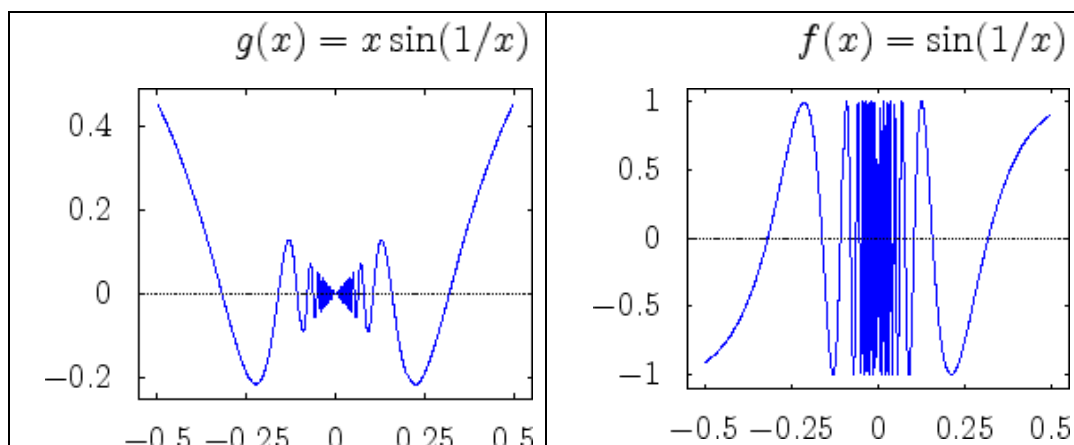
$$g(x) = \frac{1}{x-1}, x \neq -1.$$

$$g(-1) = -\frac{1}{2}$$

دا یوه له منځه وړونکې یا پورته کېدونکې تعریفشیا ده. د تابع ارزښت د تکمیلونې له لارې g په $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ باندې یو ناپرېکړېدونکې تابع کېږي.

پای.

سرلیک



تابع (څيړې يې پورته دي)

$$f(x) = \sin(1/x)$$

په صفر 0 کې پرېکيدونکي ده، ځکه چې د $x \rightarrow 0$ لپاره د x^{-1} او 1 ترمنځ اوسځيلی کيږي.

برعکس ياپه څټ د تابع

$$g(x) = x \sin(1/x)$$

تعريفنشيا په $x = 0$ کې پورته کيدونکي يا له منځه وړونکي ده.

له

$$0 \leq |x \sin(1/x)| \leq |x|$$

د $\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0$ سره د پرتله کيدونکي قضیې په بنسټ لاس ته راځي

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \sin(1/x) = 0.$$

له دې امله کيدی شي g د

$$g(0) = 0$$

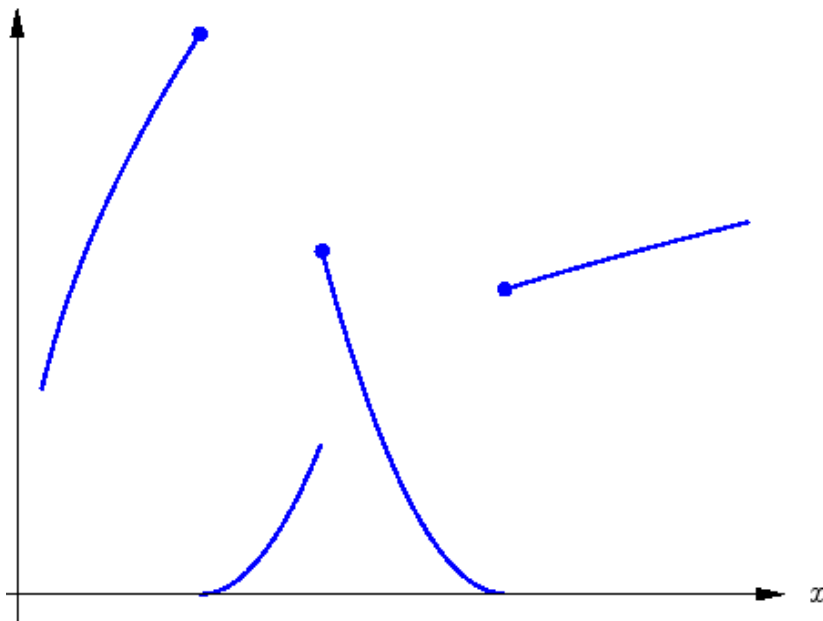
ایینوونی له لاری یوه په ټول \mathbb{R} ناپرېکښونکي تابع ته پوره شي.

يو اړخيز ناپرېکښوالی يا متمادیت $\text{Einseitige Stetigkeit}$

ناپرېکښوالی ته ورته سری کین- همداسې بنی ناپرېکښوالی تعریفوي

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f^-(a), \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f^+(a),$$

داسې چې د x محور د a په اړونده اړخ ترڅېړني لاندې ونیسي



که د f په یوه ټوپځای تابع ارزښت تعیف وي، نو دا په گراف کې پند په نڅښه کېدی شي، چې روښانه شي چې د کین- یا بنی اړخ د پولې ارزښت سره سر خوري.

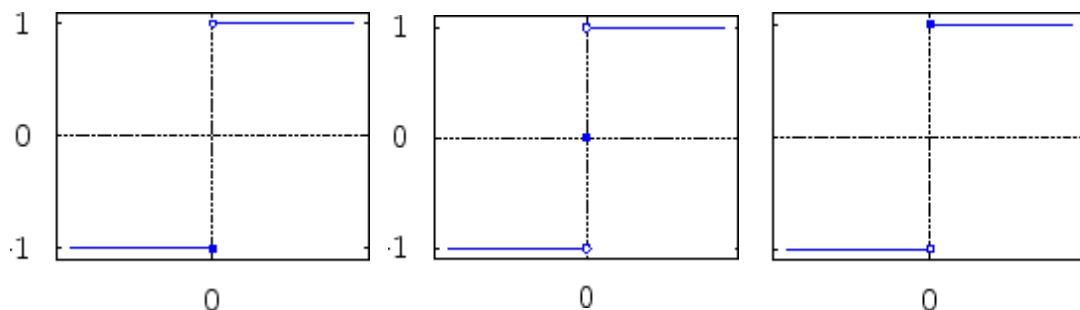
پای.

سرلیک

تابع

$$f(x) = x/|x|$$

په ټولو ټکو کې تر تعریفشیا $x = 0$ پورې ناپرېکېدونکې ده.



که $f(0) = -1$ کېږدو نو تابع به کین اړخیزه او د $f(0) = 1$ سره ښی اړخیزه ناپرېکېدونکې په 0 کې مخ ته لاره شي. د $f(0) = 0$ لپاره د سیکنوم-تابع

$$f(x) = \text{sign}(x),$$

لاس ته راځي، چې دا په 0 کې نه ښی - او نه کینه ناپرېکېدونکې دی.

د ناپرېکېدونکو توابعو لپاره لارې یا قاعدې

په یوه ټکي a کې ناپرېکېدونکې توابعو f او g لپاره

$$rf \quad (r \in \mathbb{R})$$

$$f \pm g$$

$$fg$$

$$f/g \quad (\text{که } g(a) \neq 0 \text{ وي})$$

$$f \circ g$$

په a کې ناپرېکېدونکې دي.

په ورته وگه په یوه انټروال D ناپربکېدونکې تابع همداسې د کین - اوبني اړخیز ناپربکېدونالي ځایونو لپاره باور لري. پای.

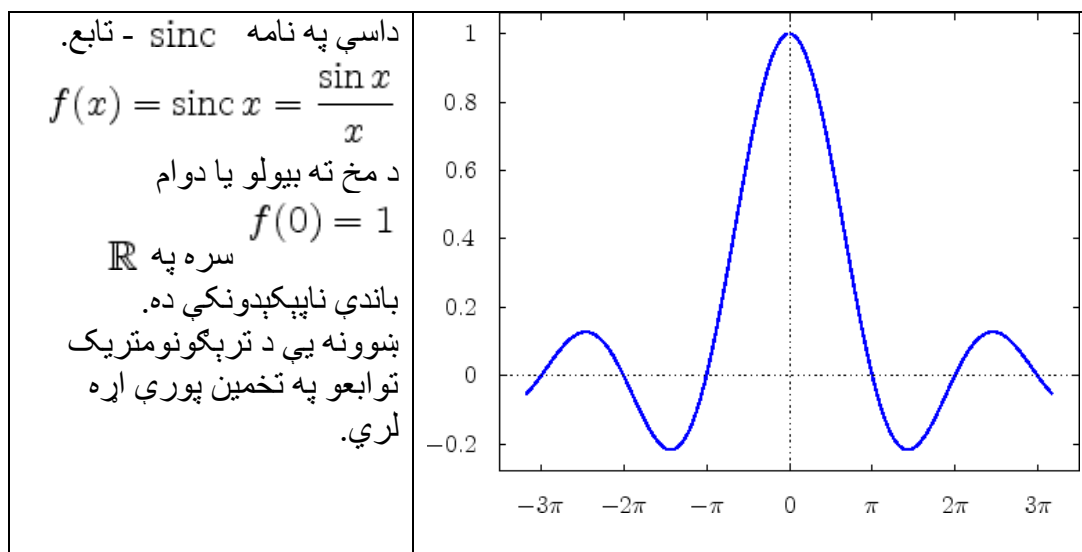
دا لار د پوله ارزښت لپاره اړونده وینا څخه تړلي لاس ته راځي. که د بېلگې په ت وگه د ناپربکېدونکو توابعو کمپوزېشن (ترکیب) تر څېړني ونیسو، د g د ناپربکېدونالي څخه د هرې پرلپسې (x_n) لپاره د پوله ارزښت a سره داراکوي

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = g(a).$$

دا چې f هم ناپربکېدونکې دی، لاس ته راځي

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(g(x_n)) = f(g(a)).$$

پای.



سرلیک

<p>د رډېگودي $\Delta(OPQ)$ ، د گردۍ ټوټه وونې يا</p> <p>وتر او درېگودي $\Delta(OPQ)$ د سطحو د پرتلي له لارې په څېره کې کتل کيږي، چې</p> $\frac{\sin x \cos x}{2} \leq \frac{x}{2} \leq \frac{\tan x}{2}$ <p>همداسې</p> $\frac{1}{\cos x} \geq \operatorname{sinc} x \geq \cos x,$ <p style="text-align: right;">$\sin x/2$</p> <p>د سره وېشنې له لارې او د معکوس ارزښت جوړونه. د قضیې څخه لاس ته راځي.</p> $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1,$ $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sinc} x = 1.$	
--	--

لیکونکي: اپې، هیولیک

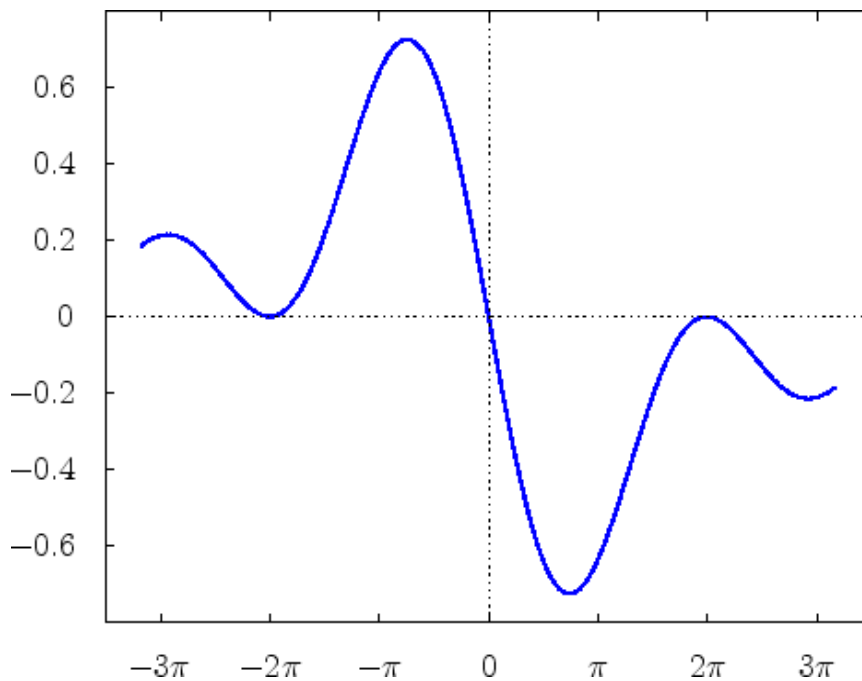
تابع

$$f(x) = \frac{\cos x - 1}{x}$$

$$f(0) = 0$$

د مخ ته وړني سره په ټول \mathbb{R} ناپېرېدونکي ده

د مخ ته وړني



باور لري

$$\begin{aligned} \frac{\cos x - 1}{x} &= \frac{(\cos x - 1)(\cos x + 1)}{x(\cos x + 1)} = \frac{\cos^2 x - 1}{x(\cos x + 1)} \\ &= -\frac{\sin^2 x}{x(\cos x + 1)} = -\frac{\sin x}{x} \frac{1}{\cos x + 1} \sin x, \end{aligned}$$

اوله

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x + 1} = \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$$

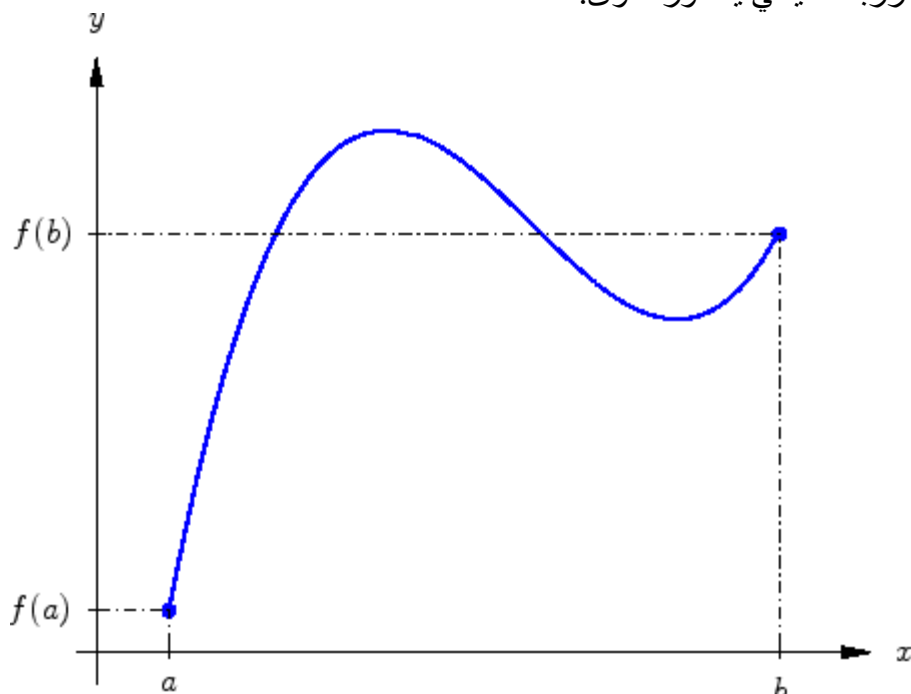
لاس ته راځي

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0.$$

ليکونکي: اېپ، هيوليگ

Zwischenwertsatz جمله ارزښت

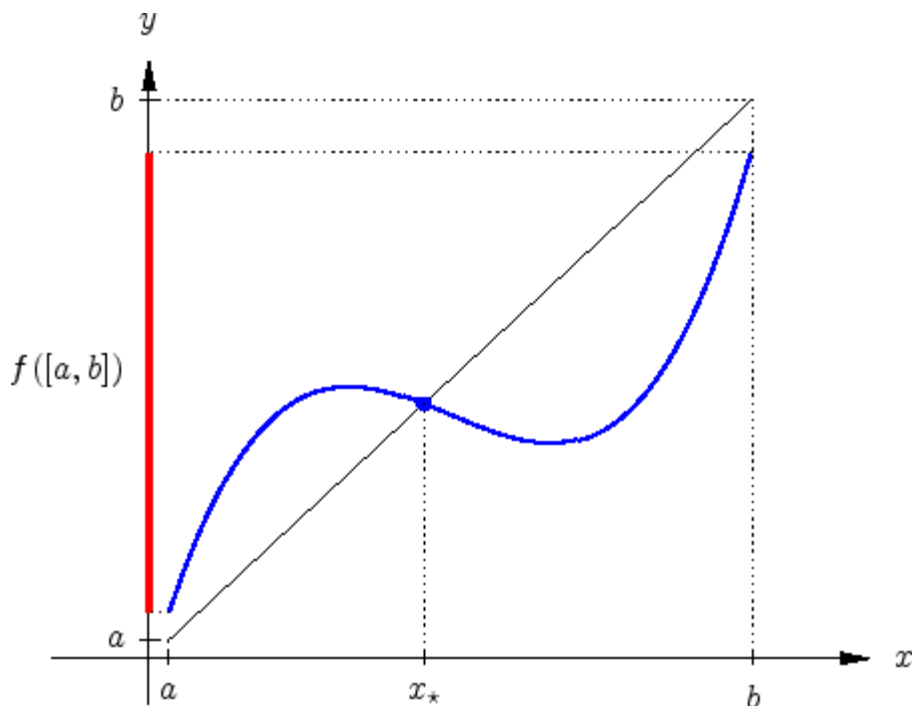
يو ناپرېکېدونى تابع f په يوه بند انټروال $[a, b]$ د $f(a)$ او $f(b)$ ترمنځ هر ارزښت نيسي يا غوره کوي.



ليکونکي: اېپ، هيو ليگ

که يو تابع f انټروال $[a, b]$ په انټروال $[a, b]$ ناپرېکېدونکى تنظيم کړي، نو يو x_* شتون لري د $x_* = f(x_*)$.

سره.



د ناپرېکيدونکي تابع

$$g(x) = f(x) - x$$

لپاره $g(a) \geq 0$ او $g(b) \leq 0$ باور لري. د منځ ارزښت جملې سره د يوه
صفرځای $x_* \in [a, b]$ شتون لاس ته راځي:

د ننتېرېکيدونکو توابعو لپاره

$$g(x) = f(x) - x$$

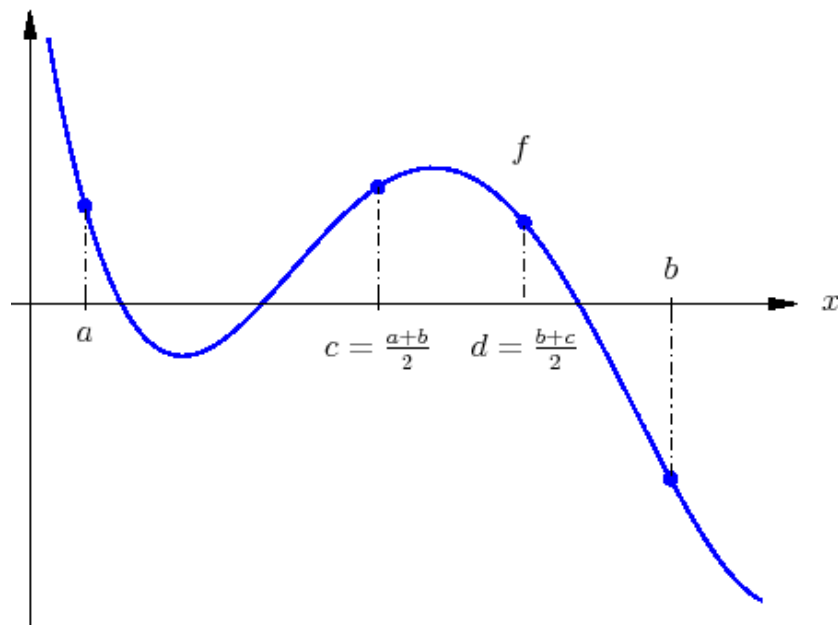
$$g(x_*) = 0 \Leftrightarrow f(x_*) = x_*$$

دا په دې معنا چې د f يو ځاي په ځای - يا بيکس ټکی x_* لیکونکي: هیولیک، کراخ

سرلیک

د دوه سطحو – یا برخو تئلاز **Bisektionsverfahren**د منځ ارزښت جملې په بنسټ یو ناپربکيدونکی تابع $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ د

$f(a)f(b) \leq 0$ سره لږ تر لږه یو صفرځای په $[a, b]$ کې لري.



که دا انټروال نیم شي او f ته د انټروال په منځ کې ارزښت ورکړي

$$c = \frac{a+b}{2},$$

نو کیدی شي د مخنښې په مرسته پرېکړه وشي، چې د کوم انټروال په نیمايي کې باید صفرځای پروت وي:

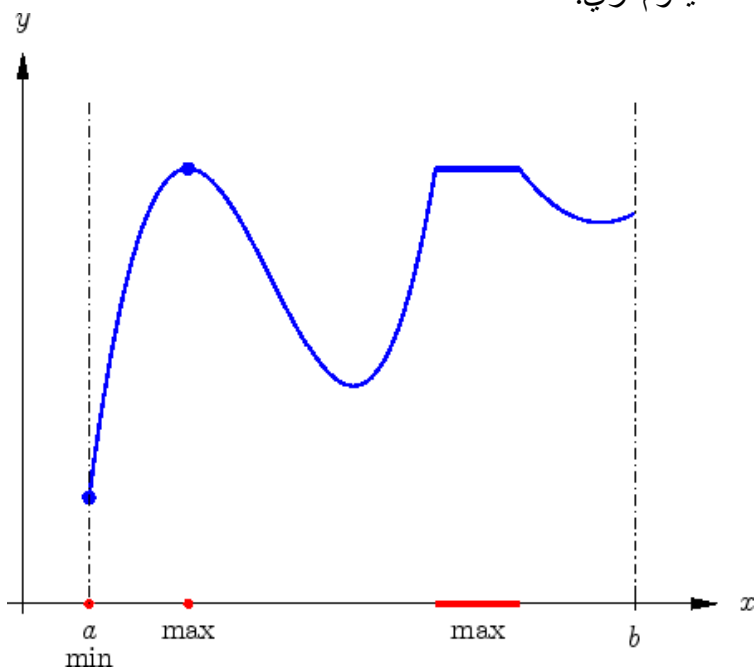
$f(a)f(c) \leq 0$ لاسته راځي، چې په $[a, c]$ کې صفرځای شتون لري

$f(a)f(c) \geq 0$: لاس ته راځي صفرځای په $[c, b]$ کې شتون لري

سړی اوس دا اړونده برخه انټروال ټاکي او دا ایتريټر *iteriert* (ټیک حل ته ور نږدې کونه) کوي، تر څو د انټروال اوږدوالی غوښتونې ټیکوالي ته ورسیري. لیکونکي: اپې، هیولیگ، پفایل

د ناپرېکيدونکي تابع افرطيت Extrema stetiger Funktionen

يو ناپرېکيدونکی تابع په يوه پای رابند انتروال $[a, b]$ لږ تر لږه يو مينيموم او يو ماکسيموم لري.



ليکونکي: اېپ، هيوليگ

يو شتون لري د $c > 0$

$$(x + y)^n \leq c(x^n + y^n)$$

سره د $x, y \geq 0$ لپاره

د بنووني ته د $x \neq 0$ لپاره (حالت $x = 0$ ساده دی) لیکو

$$z = y/x$$

او ناپرېکيدونکی تابع

سرلیک

$$f(z) = \frac{(1+z)^n}{1+z^n}.$$

څیرو.

$$f(z) \leq 2 \quad \text{شتون لري، داسې چې} \quad b > 0 \quad \text{دی، نو یو} \quad \lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 1 \quad \text{دا چې}$$

$$z \geq b$$

د لپاره باوري کوي. د

$$c = \max \left\{ 2, \max_{z \in [0, b]} f(z) \right\}$$

سره لاس ته راځي

$$f(z) = \frac{(1+z)^n}{1+z^n} \leq c$$

او له دې سره پورته غوښتنه
لیکونکي: ایپ، هیولیگ

برابر ډوله ناپرېکېدنوالی Gleichmäßige Stetigkeit

یو تابع f په یوه انټروال D برابر ډوله یا برابر ارزښته ناپرېکېدونکی دی، که د ټولو

$$\varepsilon > 0 \quad \text{لپاره یو} \quad \delta_\varepsilon \quad \text{شتون ولري، داسې چې راکړي}$$

$$|x - a| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

د ټولو $x, a \in D$ لپاره.

د f د تنها ناپرېکېدنې په برعکس δ_ε د a په واک کې نه ده. تنهپه یوه محدود رابند

انټروال کې ناپرېکېدنوالی کی او برابر ارزښته یا - ډوله ناپرېکېدنوالی سره ورته دی.
لیکونکي: هیولیگ، پفایل

په ټکي ډول پولې ته تلنه Punktweise Konvergenz

د توابعو (f_n) یوه پرلپسی په یوه انټروال D کې ډوله د پولې تابع f په لور پولې ته ځي.

$$f_n \xrightarrow{\text{pktw.}} f,$$

که $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ وي د ټولو $x \in D$ لپاره.

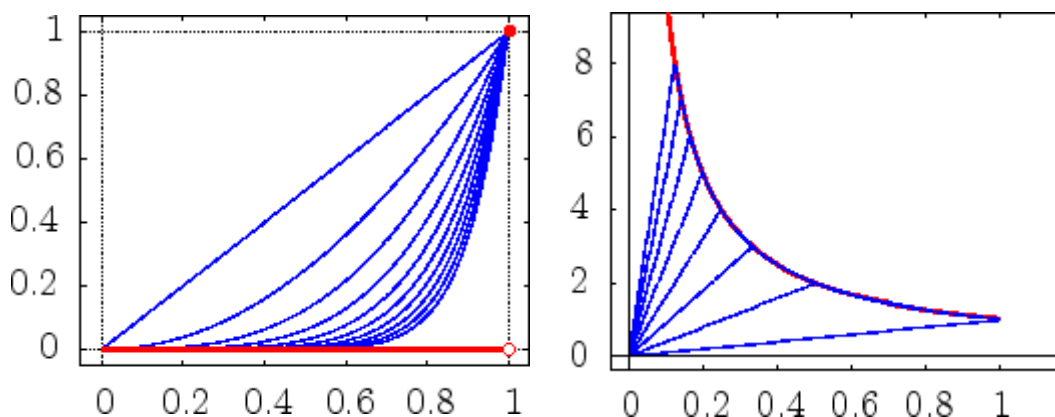
لیکونکي: ایپ، هیولیک

په ټکیدوله پولې ته تلني باید نه دی چې ناپرېکېدونال او بندوالی ساتلي پاتې شي.

د بېلګې په توګه د $f_n(x) = x^n$ ټکي ډوله پوله ارزښت په $[0, 1]$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

په بنسټي انټروال پای پرېکېدونکی دی، لکه په کینه څېره کې چې بنوول شوی دی.



د یو کونورګنت لپاره بېلګه چې د نامحدود پوله تابع په لور بنسټي څېره د پرلپسي سره

سرلیک

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x, & 0 < x \leq 1/n \\ 1/x, & 1/n < x \end{cases},$$

بنایي، چې په $(0, 1)$ ټکي ډوله د پوله تابع $f(x) = 1/x$ په لور پولي ته ځي. لیکونکي: ایپ، هیولیگ

برابر ارزښته یا برابر ډوله پولي ته تلنه **Gleichmäßige Konvergenz**

د توابعو یوه پرلپسې (f_n) په یوه انټروال D برابر ډوله د یوه پولي تابع f په لور پولي ته ځي،

$$f_n \xrightarrow{\text{glm.}} f,$$

که هر $\varepsilon > 0$ ته یو n_ε شتون ولری، داسې چې

$$n > n_\varepsilon \implies |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

$$x \in D$$

د ټولو لپاره باور ولري.

د کوشي-قضیې په مرسته کېدی شي برابر ډوله پولي ته تلنه یې د پولپتابع نسبت څخه تعریف شي. سری ورته شرطونه لاس ته راوړي، داسې چې

$$m, n > n_\varepsilon \implies |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

$$x \in D$$

د ټولو لپاره باید باور ولري.

که توابع f_n ناپرېکېدونکي وي، نو پوله تابع f هم ده. لیکونکي: ایپ، هیولیگ

د درېگودي نامساواتو څخه لرو

$$|f(x_0) - f(x)|$$

$$\leq |f(x_0) - f_n(x_0) + f_n(x_0) - f_n(x) + f_n(x) - f(x)|$$

$$\leq |f(x_0) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f_n(x)| + |f_n(x) - f(x)|.$$

د په خوښه $\varepsilon > 0$ ته د برابر ډوله کونورگنت له امله یو n_ε شتون لري، داسې چې د

$$|f_n(y) - f(y)| < \varepsilon \quad \forall y \in D$$

باوري کوي. د یوه داسې n لپاره اخرنی او لومړنی ترم $< \varepsilon$ دي،

$$|f(x) - f(x_0)| < 3\varepsilon \quad |x - x_0| < \delta_\varepsilon$$

که وي. داله لاس ته راځي او له دې سره $x \rightarrow x_0$ د $f(x) \rightarrow f(x_0)$ لیکونکي: اپ، هیولیک لپاره.

د توابعو لړۍ پولې ته تلنه **Konvergenz von Funktionenreihen**

یوه د توابعو لړۍ f_k لري $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ ټکي ډوله (برابر ډوله) پولې ته تلونکي ده، که دا د

$$s_n = \sum_{k \leq n} f_k$$

لاندې ټوټه جمعي یا زیاتون لپاره دا حالت ولري.

یوه کلکونه یې مطلق پولې ته تلنه ده، چې د هغې سره د $\sum_n |f_n|$ د برابر ډوله پولې ته تلني لپاره غوښتل کیږي. په دې حالت کې پولې ته تلنه د لړۍ یوه نظم بدلون لپاره هم ساتلی پاتیري.

د تعریف سره سم دا ویناوي په تابع پرلپسېوو هم د باور وړ دي. لیکونکي: اپ، هیولیک

په لاندې کې د یو څو ټیوپیکي بیلکو حالتونه ښولکیري

(i) د توابعو لړۍ

$$\sum_{k=0}^{\infty} x(1-x)^k = x [1 + (1-x) + (1-x)^2 + \dots]$$

سرلیک

په $[0, 1]$ ټکي ډوله پولې ته ځي. د هندسي لړۍ لپاره فرمولپه مرسته ډوله تابع لاس ته راځي

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

دا چې په $x = 0$ کې پرېکېدونکې دی، کېدی شي لړۍ برابرډوله کونورگنت نه وي.

(ii) د $x \in [0, 1]$ لپاره لړۍ

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-x)^k}{k} = -x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \pm \dots$$

د لایبنيخ-پولي ته تللي له امله $\left(\frac{x^k}{k}\right)$ همغږیز صفر پرلپسې ده. دا چې د لړۍ پاتي د لایبنيخ-پسي د

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-x)^k}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{(-x)^k}{k} \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-x)^k}{k} \right| \leq \left| \frac{x^{n+1}}{n+1} \right| \leq \frac{1}{n+1}$$

له لارې اټکل کېدی شي، لړۍ په $[0, 1]$ حتی برابرډوله پولې ته ځي. مگر سره له دې په $[0, 1]$ باندې مطلق پولې ته نه ځي، ځکه چې $\sum(1/k)$ دیورگنت ده.

(iii) لړۍ

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^2} = x + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{9} + \dots$$

په $[-1, 1]$ باندې مطلق پولي ته ځي، ځکه چې

$$\sum_{k=1}^m \left| \frac{x^k}{k^2} \right| - \sum_{k=1}^n \left| \frac{x^k}{k^2} \right| = \sum_{k=n+1}^m \left| \frac{x^k}{k^2} \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

باور لري، او

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

پولي ته ځي.

ليکونکي: اپ، هیولیگ

توابعو لړۍ ته مایورانته یا پورته پولي

Majorante bei Funktionenreihen

د پوره لوی n لپاره باور لري

$$|f_n(x)| \leq ca_n, \quad x \in D,$$

اوکه لړۍ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ پولي ته ځي، بیا نو لړۍ

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n$$

مطلق پولي ته تلونکي ده.

ليکونکي: اپ، هیولیگ

وینا تړلي د اعدادو لړۍ لپاره د مایورانته له جملې لاس ته راځي، ځکه چې د ټولو

$$x \in D$$

لپاره لرو

سرلیک

$$\sum_{k=1}^n |f_k(x)| - \sum_{k=1}^m |f_k(x)| \leq c \sum_{k=m+1}^n a_k$$

لیکونکي: اېپ، هیولیک

د اکسپوننشل تابع ضرب انځورونه

اکسپوننشل تابع کېدی شي د یوه ضرب د پوله ارزښت په حیث انځور شي:

$$e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + x/n)^n, x \in \mathbb{R},$$

په هر انټروال $[-a, a]$ د برابرډوله پولې ته تگ سره. لیکونکي: اېپ، هیولیک

لومړی به د

$$f_n(x) = (1 + x/n)^n = 1 + \binom{n}{1} \frac{x}{n} + \dots + \binom{n}{n} \frac{x^n}{n^n}.$$

برابرډوله پولې ته تلنه و ښوول شي. دې ته سری تری کار اخلي یا استعمالوي، چې

(i)

$$a \geq 0 \quad a^k/k! \rightarrow 0$$

د په خوښه لپاره؛

(ii)

$$j \in \mathbb{N} \quad p_{n,j} = \frac{n(n-1)\dots(n-j+1)}{n^j}$$

د هر لپاره یو مونوتون جگېدونکي د 1

په لور تلونکي پرلپسې ده.

د دې لپاره چې د کوشي فرمول استعمال کړو، سری کمښت یا تفریق

$$f_m(x) - f_n(x)$$

په لاندې بڼه لیکي

$$\sum_{j=0}^{k-1} (p_{m,j} - p_{n,j}) \frac{x^j}{j!} + \sum_{j=k}^m p_{m,j} \frac{x^j}{j!} - \sum_{j=k}^n p_{n,j} \frac{x^j}{j!}$$

$$k < n < m$$

د سره .

د $|x| \leq a$ لپاره د $a \geq 1$ او $k \geq 2a$ سره د اخرنیو زیاتېدونو ارزښت هر ځل

$$\leq \frac{a^k}{k!} \underbrace{\left(1 + \frac{a}{k+1} + \frac{a^2}{(k+1)(k+2)} + \dots \right)}_{\leq 2},$$

$$< \varepsilon/3$$

دی، نو د (i) پسې د یوه پوره لوي ټاکلي k لپاره. د (ii) پسې یا له مخې دی

$$|p_{m,j} - p_{n,j}| < \frac{\varepsilon/3}{ka^k}$$

$$m, n > N_j(\varepsilon)$$

د لپاره، اوله دې سره کیدی شي د لومړنی جمعې هره زیاتېدونې د

$$\frac{\varepsilon/3}{k}$$

$$f_m(x) - f_n(x)$$

په ټوټه کیدو د له لارې اټکل کړي. په ټولیزه توګه لرو

$$|f_m(x) - f_n(x)| < k \frac{\varepsilon/3}{k} + 2 \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon, \quad m, n > \max_{j < k} N_j(\varepsilon).$$

د

$$[-a, a]$$

برابردوله پولې ته تلني په بنسټ په هر انټروال باندي د پولې تابع

$$f(x) = e^x$$

$$f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$$

د راشنل پروت

ناپربکېدونکي ده. بسيا کوي، چې

$$n = mp$$

$$x = p/q$$

د په راوړني سره د e

لپاره وښايو. د یوې برخه پرلپسې

محور تعريف څخه لاس ته راځي

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{mp} \right)^{mp} = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{p}{mpq} \right)^{mpq/q} = e^{p/q}$$

د $t \mapsto t^{p/q}$ ناپربکېدنې له امله.

د اکسپوننشل تابع لړۍ انځورونه

اکسپوننشل تابع کېدی شي د یوې لړۍ د پوله ارزښت په تګه انځور شي:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n, x \in \mathbb{R},$$

د هر انټروال $[-a, a]$ برابر ډوله پولي ته تلني سره. لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

اوس د ضرب انځورونې ته ورته والی ښولکیري:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$$

$$x > 0$$

دا تړلی د تیلور-لړۍ په څېر د جمعې د روښانه ونې څخه لاس ته راځي. د لپاره دا لاندې سیده ښوونه ستونځمنه ده، سره له دې بې له مشتق منځ راوځي.

سری پوله ارزښت $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + x/n)^n$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \left(\frac{x}{n}\right)^j &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^n \left(\frac{x^j}{j!} \frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-j+1)}{\underbrace{n \cdot n \cdots n}_{\leq 1}} \right) \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^n \frac{x^j}{j!} \end{aligned}$$

له لارې پورته لور ته اټکل کوي او د

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^n \left(\frac{x^j}{j!} \frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-j+1)}{n \cdot n \cdots n} \right)$$

$$\begin{aligned} &\geq \sum_{j=0}^m \left(\frac{x^j}{j!} \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=0}^{j-1} (1 - k/n) \right) \\ &= \sum_{j=0}^m \frac{x^j}{j!} \end{aligned}$$

د یوه په خوښه $m \in \mathbb{N}$ کښته لور ته اټکل کوي. د $m \rightarrow \infty$ لپاره د پوله ارزښت جوړولو څخه وروسته د دواړو اټکلونو یو بل سره برابروالی لاس ته راځي. یوه ورته دلیل راوړنه د $x < 0$ لپاره هم شونې ده، که سړی مثبت او منفي برخه په دې منځ ته راغلي جمعه کې ځانله یا جداوڅیږي. لیکونکي: هیولیک، هیورنر

اکسپوننشا تابع د ډېرې بیلوژیکي ودې پروسې تر څیړنې لاندې نیسي. د بیلگې په توګه په یو ساده د د قومونو ودې موډل کې د زېږېدنې ګڼون یا تعداد متناسب دی د د ورځني اوسیدونکو تعداد $p(t)$ سره د t په وخت کې، دا په دې معنا چې

$$p(t + \Delta t) \approx p(t) + \Delta t(\lambda p(t)).$$

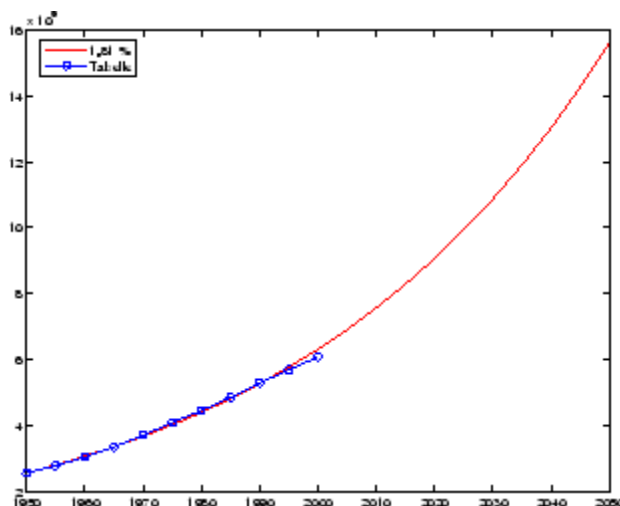
د $\Delta t \rightarrow 0$ لپاه دا د ودې قانون

$$p(t) = ce^{\lambda t}, \quad c = p(0),$$

له لارې موډلي کيږي.

ونډه	د نفوسو تعداد په میلیونو	کال
	2555	
1.76 %	2779	1950
1.87 %	3039	1955
2.02 %	3345	1960
2.16 %	3707	1965
1.80 %	4088	1970
1.80 %	4456	1975
1.79 %	485	1980
1.77 %	5283	1985
1.54 %	5690	1990
1.37 %	6080	1995
1.25 %		2000

سرلیک



(کین) جدول د نړۍ اوسېدونکي بنیایي همداسې کلنی د ودې تعداد (اټکل شوی ارزښت). کلنی منځني د ودې زیاتون (ریټ) په کلونو 1950-2000 کې 1.81 % وو. له 1950 کال څخه به د ثابت منځني اکسپوننشل ودې سره

$$p(t) = 2555078074e^{0.0181(t-1950)}$$

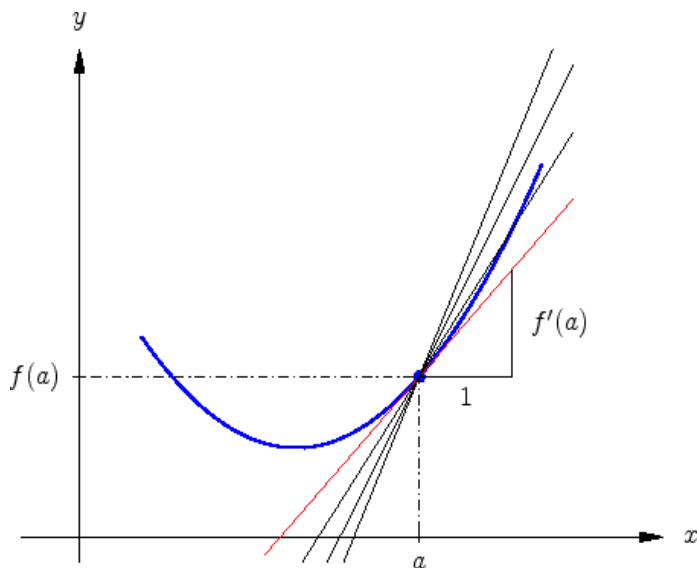
به د نړۍ اوسېدونکي په کال 2050 کې 16 میلیارده وگنل شي (ټکي په ټکي شوي کره یا منځني).
لیکونکي: هیولیک، هیورنر

مشتق (رابیلیدنه) Ableitung

یو تابع f په ټکي a کې مشتقور یا رابیلېډور دی، که د مشتق په نوم نومول شوي پوله ارزښت

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

شتون ولري..



مشتقوړوالی یا رابیلیدوړوالی هندسي په دې معنا دی، چې د توتیه ونې یا سیکانت جگوالی له

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

څخه د ورکړ شوي تانجنت جگوالي په لور وهڅيري يا کونورگنت شي (پوله يې ونيول شي).

سړی داسې هم ليکي:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}f(x) = \frac{dy}{dx}$$

د $y = f(x)$ سره . دا لیکدود يا ه-ډول په کمښت وېش کې $\Delta x \rightarrow 0$ پولي ته تگ ښايي

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{x + \Delta x - x}$$

سرلیک

جگ مشتقونه د f''', f'', \dots همداسی $f^{(2)}, f^{(3)}, \dots$ سره په نڅښه کيږي. f یو تابع په یوه ډبرۍ یا سټ D باندې مشتقور بلل کيږي، که $f'(x)$ د ټول $x \in D$ لپاره شتون ولري.

د تابع $f(x) = x^2$ د مشتق لپاره د تعریف سره سم لرو:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2xh + h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h) = 2x.$$

دویم مشتق $f''(x) = 2$ ثابت دی. $f(x) = x^n$ $n \in \mathbb{N}$ لپاره د بېنوم فرمول په مرسته لرو

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\binom{n}{1} x^{n-1} h + O(h^2)}{h} = nx^{n-1},$$

د کوم سره چې $O(h^2)$ د نظم h^2 ترمونه په نڅښه کوي.

د $f(x) = \sin x$ مشتق کېدی شي د زیاتون - یا جمعې قضیې په مرسته وشمېرل شي له

$$\sin(t \pm h/2) = \sin t \cos(h/2) \pm \cos t \sin(h/2)$$

څخه د کمښت وپس لپاره د $t = x + h/2$ سره راکوي

$$\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \frac{\sin((x+h/2)+h/2) - \sin((x+h/2)-h/2)}{h}$$

$$= \frac{2 \cos(x + h/2) \sin(h/2)}{h}$$

د

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 \sin(h/2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(h/2)}{h/2} = 1$$

له امله د $h \rightarrow 0$ لپاره ښی اړخ د $\cos x$ په لور هڅیږي. لیکونکي: هیولیگ، کوپف

د بنسټوابعو مشتق یا رابیلدنه

لاندي جدول د غوره بنسټوابعو مشتق ښایي:

$f(x)$	$f'(x)$		$f(x)$	$f'(x)$
c	0		$x^r, r \neq 0$	rx^{r-1}
e^x	e^x		$\ln x $	$\frac{1}{x}$
$\sin x$	$\cos x$		$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\cos x$	$-\sin x$		$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\tan x$	$\tan^2 x + 1$		$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$

سرلیک

$\cot x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$		$\operatorname{arccot} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$
----------	-----------------------	--	---------------------------	--------------------

لیکونکي: هیولیک، کوپف

Linearität der Ableitung د مشتق یار ایلیدنی کر بنزوالی

مشتق کر بنیز دی، دا په دې معنا چې د مشتقور توابعو f او g لپاره باور لري

$$(rf)' = rf', \quad r \in \mathbb{R},$$

$$(f \pm g)' = f' \pm g'.$$

لیکونکي: هیولیک، کوپف

Produktregel د ضرب قانون

د دوه مشتقور توابعو f او g د ضرب مشتق دی

$$(fg)' = f'g + fg'.$$

په ټولیزه توګه د ضرب لپاره باور لري

$$f = f_1 \cdots f_n$$

$$f' = \sum_{i=1}^n f'_i \frac{f}{f_i}.$$

لیکونکي: هیولیک، کوپف

د تعریف څخه ترلی راکوي

$$\begin{aligned}
(fg)'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} g(x+h) \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} f(x) \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\
&= f'(x)g(x) + f(x)g'(x).
\end{aligned}$$

لیکونکي: هیولیک، کویف

د پولینوم

$$p(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$$

$$x = 1, 2, 3$$

مشتق د $x=1, 2, 3$ په ځایونو کې ټاکل کیږي. دا چې د هر کرښیز ضریب مشتق 1 دی، د ضرب له لارې یا قاعدې څخه لرو

$$p'(1) = (1-2)(1-3) = 2,$$

$$p'(2) = (2-1)(2-3) = -1,$$

$$p'(3) = (3-1)(3-2) = 2.$$

په ورته توګه سړی د

$$p(x) = (x-1) \cdots (x-n),$$

لپاره شایي، چې

$$p'(k) = (-1)^{n-k} (n-k)! (k-1)!$$

سرلیک

دی د $k = 1, \dots, n$ لپاره.
(Autoren: Höllig/Hörner/Knesch)

د وېش قانون یا لار Quotientenregel

د دوه مشتقور توابعو د وېش مشتق دی

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

په ټول ټکو x کې د $g(x) \neq 0$ سره. په ځانګړې توګه باور لري

$$\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}$$

لیکونکي: هیولیک، کوپف

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1 - 2x}{4 + 3x^2}$$

د راشنل توابعو مشتق دی

$$\frac{(1 - 2x)'(4 + 3x^2) - (1 - 2x)(4 + 3x^2)'}{(4 + 3x^2)^2}$$

$$= \frac{-2(4 + 3x^2) - (1 - 2x)(6x)}{(4 + 3x^2)^2}$$

$$= \frac{6x^2 - 6x - 8}{(4 + 3x^2)^2}$$

په بدیلی ډول د ضرب قانون سره لاس ته راوړو

$$\begin{aligned} & \left((1-2x) \frac{1}{4+3x^2} \right)' = \\ & = (-2) \frac{1}{4+3x^2} + (1-2x) \frac{-6x}{(4+3x^2)^2} = \frac{6x^2 - 6x - 8}{(4+3x^2)^2}. \end{aligned}$$

(Autoren: Höllig/Kreitz)

خُنځیری لار یا - قانون Kettenregel

د توابعو د خُنځیروني

$$h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x))$$

لپاره مشتق دی

$$h'(x) = f'(g(x))g'(x)$$

د سره سری لیکي $f(y) = z, g(x) = y, h(x) = z$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx}$$

لیکونکي: هیولینگ، کوپف

د تعریف څخه ترلی لاس ته راځي

سرلیک

$$\begin{aligned}
 (f(g(x)))' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{g(x+h) - g(x)} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\
 &= \lim_{\tilde{h} \rightarrow 0} \frac{f(g(x) + \tilde{h}) - f(g(x))}{\tilde{h}} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\
 &= f'(g(x))g'(x),
 \end{aligned}$$

چیرته چې $\tilde{h} = g(x+h) - g(x)$ دی.
لیکونکي: هیلوگ، کویف

د ځنځیري قانون د روښنه کولو ته تعریفیږي:

$$h'(x) = \frac{d}{dy} \sin(\underbrace{\ln(1+x^2)}_{y=g(x)} \cdot x^2) g'(x).$$

د دنني مشتق $g'(x)$ شمېرلو ته د سره د ځنځیر قانون کارول کیږي:

$$g'(x) = \frac{1}{1+x^2} (2x).$$

په بدلي توگه کېدی شي د مشتق لیکدود وکارول شي. د

$$z = \sin y, y = \ln w, w = 1 + x^2$$

سره دی

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dw} \frac{dw}{dx} = \cos(y) \frac{1}{w} 2x = \cos(\ln(1+x^2)) \frac{1}{1+x^2} (2x).$$

لیکونکي: هیولیک، کوپف

ایمپلیسیت مشتق نیول Implizites Differenzieren

که یو تابع $y = f(x)$ ایمپلیسیت وي، دا په دې معناچي یو برابرېون په x او y کې ورکړ شوی، داسې چې دواړه خواوي د x پسې مشتق کیدی شي. دلته یواځې په $y = y(x)$ کې افادو باندې ځنځیري قانون استعمالیږي.

د بېلگې په توگه سری د

$$E: x^2 + 3y^2 = 7$$

له لاري ورکړ شوي ایلېسی یا هگی

$$\frac{d}{dx} (x^2 + 3y^2) = 2x + 6yy' = \frac{d}{dx} 7 = 0$$

همداسې

$$y' = -\frac{1}{3} \frac{x}{y}$$

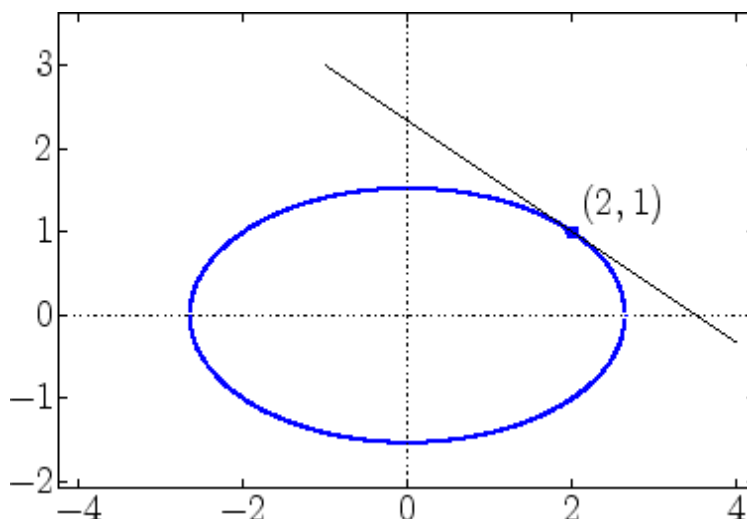
لاس ته راوړي.

له دې سره کېدی شي د E په یوه ټکي د $y \neq 0$ سره د تانجنت جگوالی وټاکل شي.

د بېلگې په توگه د $(2, 1)$ لپاره په لاس راځي

$$y' = -\frac{1}{3} \frac{2}{1} = -\frac{2}{3}$$

سرلیک



په ورته توگه جگ مشفقونه شمېرل کيږي. د yy' لپاره د ضرب قانون د استعمال سره دی

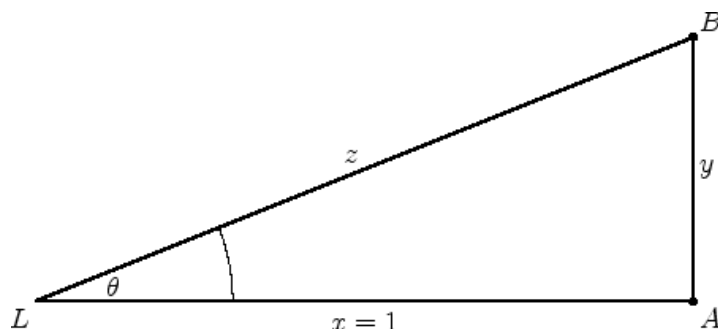
$$\frac{d}{dx} (2x + 6yy') = 2 + 6(y')^2 + 6yy'' = 0.$$

له دې لاس ته راځي

$$y'' = -\frac{1 + 3(y')^2}{3y}$$

کیدی شي په E باندې د یوه ټکي ځای کول او همدا د $y'(x)$ ارزښتونو پیژندلو له لارې څرگند ازښتونه ټاکي لیکونکي: هیولیگ، کوپف

په ټکي L کې یو د برېښنا یا رڼا برج دی د یوه څرخېدونکي بېجلی یا گروپ سره، چې درناورانگه یې د ټکو A او B له لارې تللی 1 km کرښیز لري دښته لویږي.



ورانگه غورخونکی دیوه خرخون لپاره 2 ثانیه ته اړتیا لري، دا په دې معنا چي

$$\frac{d\theta}{dt} = \pi$$

د رناورانگي پوزیشن یا خای په دبنته کي دی .

$$y(t) = x \tan \theta(t).$$

له دې سره د چټکتیا لپاره لاس ته راځي

$$\frac{dy}{dt} = 1\pi \frac{1}{\cos^2(\theta)} \rightarrow \infty \quad \theta \rightarrow \frac{\pi}{2},$$

für ,

دا په دې معنا چي سوری يي له رنیا چټک دی.

یو ټیکه معالعه لاندې راکوي. د دې وخت توپیر په پام کې نیولو له امله رنیا B ته د په

$$c = 300000 \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

د رنیا چټکتیا ده،

ورسیري، دکوم سره چي

وخت

$$t = \frac{\theta}{\pi} + \frac{z}{c}$$

له دې سره لرو

$$\frac{\theta'}{\pi} = 1 - \frac{z'}{c}$$

$$z^2 = y^2 + 1$$

مشتق راکوي

وروسته د t پسي د

سرلیک

$$zz' = yy', \quad \frac{z'}{y'} = \frac{y}{z} = \sin(\theta).$$

د θ' او z' اېښوونه په

$$y' = \frac{\theta'}{\cos^2(\theta)}$$

کې بالاخره راکوي

$$y' = \frac{1}{\cos^2(\theta)} \left(\pi - \frac{\pi}{c} y' \sin \theta \right)$$

همداسې

$$y' = \frac{c \cdot 1\pi}{c \cos^2(\theta) + 1\pi \sin(\theta)}$$

د $\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}$ لپاره اوس $y' \rightarrow c$ هڅيري، د اېنشتاين د تيوري سره په هم غږی کې باور لري

t

$$y' \rightarrow \infty \quad \text{für} \quad \frac{\sin(\theta)}{\cos^2(\theta)} \rightarrow -\frac{c}{\pi},$$

$$\theta \approx 4.781 \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi \right)$$

داپه دې معناچې د لپاره بېرته سری یوو خورالویه چټکتیا لاس ته راوړي. سری له دې امله درنا گړندی دی. دا د اېنشتاين تيوري سره په تضاد کې نه دی، ځکه چې سری یو ه پېښه، Phänomen گوري، نا دا خورنده ماده. د ،، ساده

$$300000 \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

څېړونکي، لپاره بو نا بنه احساس پاتيري دا په هر صورت له ورو خوزي.

لیکونکي: هیولیگ، کویف

د لایبنيخ قاعده يا لار Leibniz-Regel

د یوه ضرب n -م مشتق دی

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)}$$

(Autoren: Höllig/Kopf)

د په حالت کې باور لري

$$(fg)'' = (f'g + fg')' = f''g + 2f'g' + fg''$$

او د لپاره دی

$$\begin{aligned} (fg)''' &= (f'g + fg')'' = (f''g + 2f'g' + fg'')' = \\ &= f'''g + 3f''g' + 3f'g'' + fg''' \end{aligned}$$

ټولیزه بنوونه د اندکشن له لارې صورت په n نيسي د بينوميال ضربيونو لپاره د ریکورزین په پام کې نیولو سره. لیکونکي: هیولیک، کویف

د $x = 0$ په ځا کې دی د

$$f(x)g(x) = x^9 \cos(\sin x)$$

بولسم مشتق وشمېرل شي.

د دی لپاره لومړی له دی څخه کار اخلو، چې د $x = 0$ لپاره د مونوم f فقط 9-م مشتق د صفر سره نابرابر دی:

$$f^{(9)}(0) = 9! .$$

سرليک

د لايښځ- فرمول له دې سره فقط په يوه ترم راکمه وي.

$$(fg)^{(11)}|_{x=0} = \binom{11}{2} f^{(9)}(0) g^{(2)}(0).$$

د ځنځيري قانون سره لرو يا لاس ته اځي

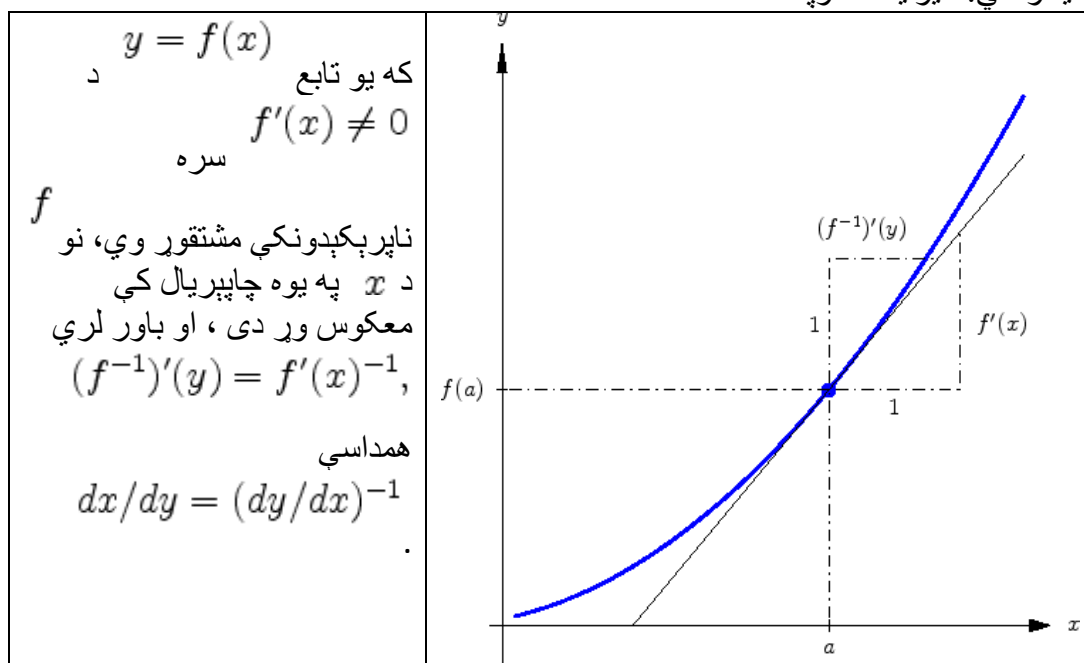
$$g'(x) = -\sin(\sin x) \cos x$$

$$g''(x) = -\cos(\sin x) \cos^2 x + \sin(\sin x) \sin x,$$

يعني $g''(0) = -1$. له دې سره غوښتونې مشتق دا لاندې دی

$$\binom{11}{2} 9! (-1) = -\frac{1}{2} (11!).$$

ليکونکي: هيو ليگ، کوف

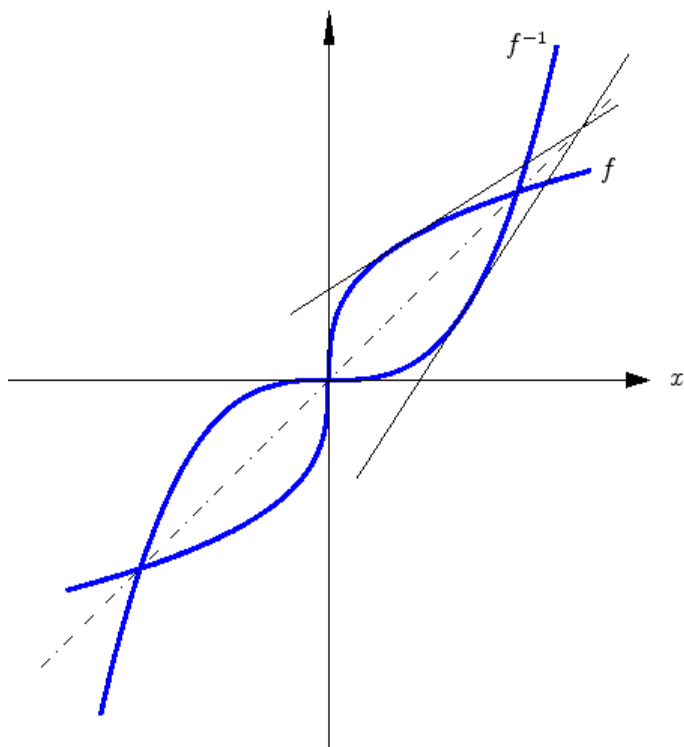


لڪه په څېره کي چي ليدل کيږي، د f او f^{-1} جگوالي معكوس دي. ليكونكي: اڀپ، هيوليگ،

که کيږدو $g = f^{-1}$ ، نو لاس ته راوږو $x = g(f(x))$

او د ځنځيري قانون سره مشتقونه $1 = g'(f(x))f'(x)$.

د $y = f(x)$ سره غوښتنه يا ثبوت لاس ته راڃي



سرليک

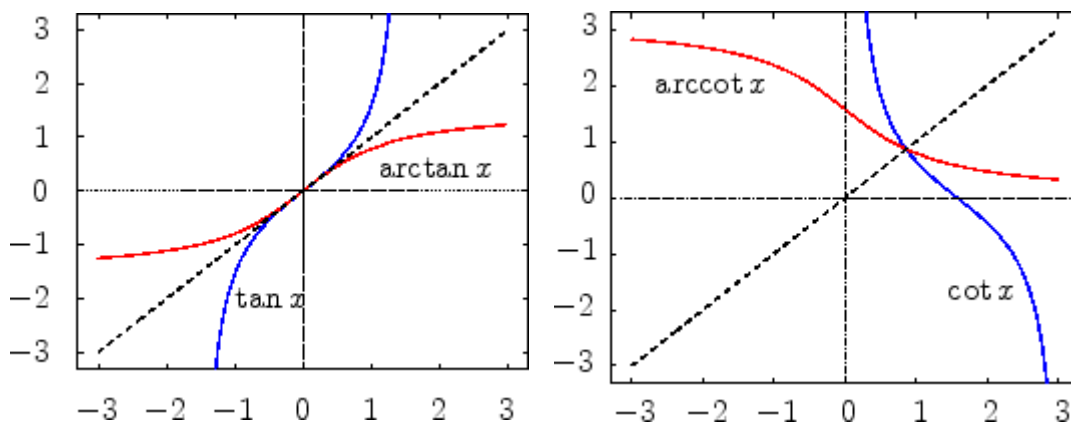
دا چي د f او f^{-1} جگوالی په اړونده د x او y په ځایونو کې سره معکوس دي، روښانيږي، که په پام کې ونیول شي، چې f او f^{-1} یو بل ته سیومتریکی دي. لیکونکي: ایپ، هیولیک،

دا چي د تانجنت تابع د $x = \arctan y$ معکوس تابع مشتق وټاکو، لومړی شمېرو

$$\frac{d}{dx} \tan x = \frac{d \sin x}{dx \cos x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

له دې سره لاس ته راځي

$$\frac{d}{dy} \arctan y = \left(\frac{1}{\cos^2 x} \right)^{-1} = \cos^2 x.$$



بنی اړخ اوس باید د y تابع په څېر ولیکل شي. د دې لپاره کټوتوالی کارول کيږي با استعمالیږي.

$$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + y^2$$

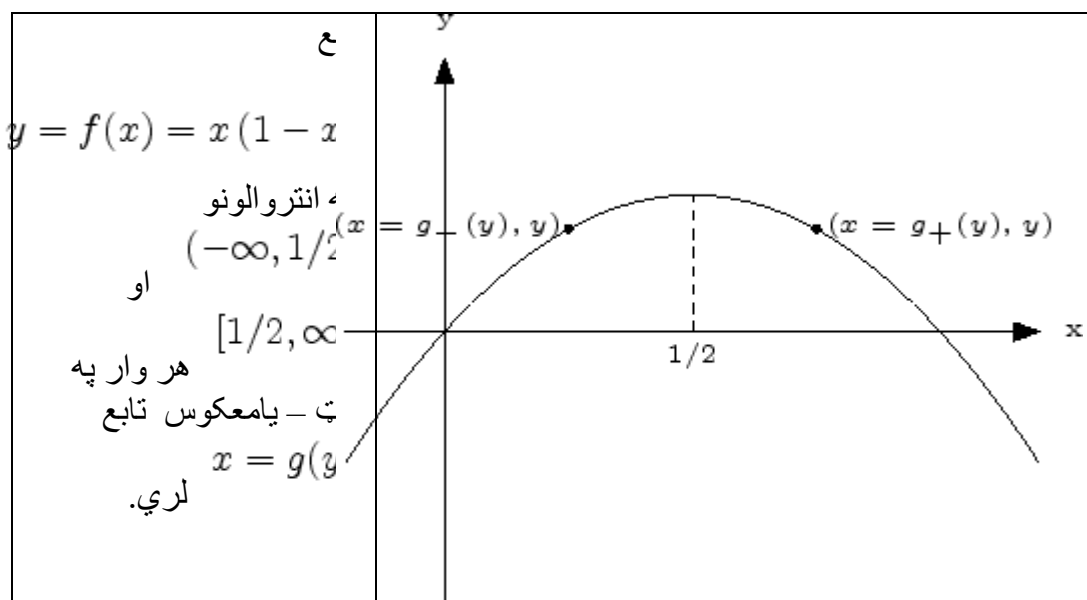
او لاس ته راوړي

$$\frac{d}{dy} \arctan y = \frac{1}{1 + y^2}$$

په ورته توګه د کوتانجنټ په څېر- یا معکوس تابع بنایو.

$$\frac{d}{dy} \operatorname{arccot} y = -\frac{1}{1 + y^2}$$

لیکونکي: ایپ، هیولیک،



سرلیک

په دواړو حالتونو کې باور لري

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{1-2x}.$$

بل يې مشتقنيول راكوي

$$g''(y) = \left(\frac{1}{1-2x} \right)' \frac{dx}{dy} = \frac{2}{(1-2x)^2} \frac{1}{1-2x}.$$

په ځانگړي ډول د $x = 1, y = 0$ لپاره لاس ته راځي

$$g'(0) = 1, \quad g''(0) = -2.$$

مشتقونه شمېرلور دي، بې له دې چې معكوس تابع بايد روښنه جوړه شي. دا ټيک هلته

شونې دي، چې كه سړی د y تابع د په څېر $g'(y)$ و ليكي. په دې بيلگه كې داشوندي دي، ځكه x د y تابع په څېر ليكل كېدای شي:

$$g_{\pm}(y) = \frac{1}{2} \pm \sqrt{1/4 - y}.$$

پورته ارزښتونه داسې شمېرل كېدای شي، دكومو سره چې د هغوی د ارزښتجوړې

(1, 0)

اړونده څانگه بايد وټاكل شي.

ليكونكي: هيوليگ، كرايخ

لوگاريتمي مشتق يا - رابيليدنه Logarithmische Ableitung

دا فرمول

$$f'(x) = f(x) \frac{d}{dx} \ln |f(x)|$$

$$y = g(x)^{h(x)} \quad g(x) > 0$$

بني توابعو مشتقيدو ته وکارول

سره د

كېدی شي د
شي. سړی لاس ته راوړي

$$\frac{dy}{dx} = g(x)^{h(x)} \frac{d}{dx} (h(x) \ln g(x)) .$$

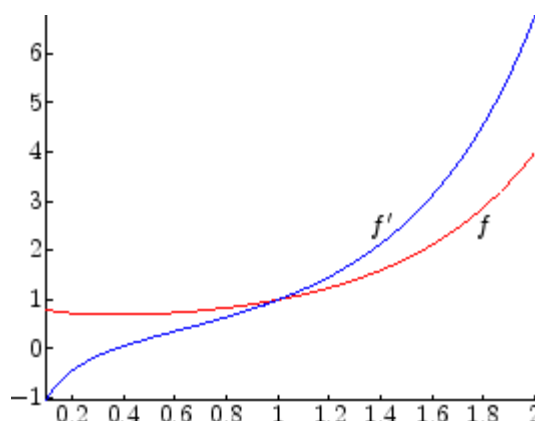
لیکونکي: اپپ، هیولیگ،

د $x > 0$ سره تابع

$$f(x) = x^x$$

لپاره مشتق دی

$$f'(x) = x^x \frac{d}{dx} \ln(x^x) = x^x \frac{d}{dx} (x \ln x) = x^x (\ln x + 1) .$$



$$\ln f(x) = x \ln x$$

د $x \rightarrow 0$ لپاره $e^0 = 1$ په لور. نو تابع په صفرخای کې بني اړخيز ناپزېکېدونکي ده. د مشتق لپاره

$$f \quad \ln x + 1 \rightarrow -\infty$$

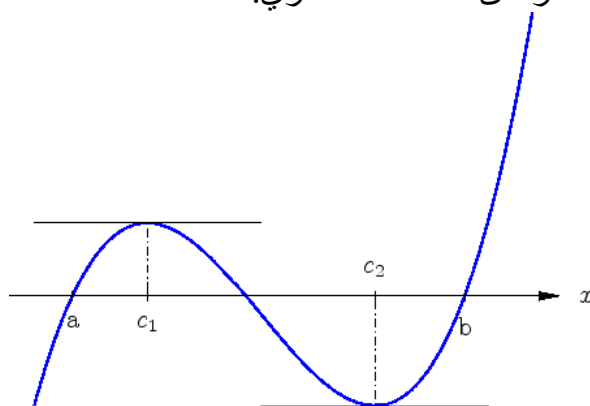
دا حالت نه دی. د $x^x \rightarrow 1$ او په صفر يو ولاړ يا عمود تانجنت لري. له امله د $x \rightarrow 0$ لپاره

لیکونکي: اپپ، هیولیگ،

د رولي جمله **Satz von Rolle**

سرلیک

د یوه ناپېرېکېدونکې مشتقور تابع f مشتق د $f(a) = f(b) = 0$ سره لږ تر لږه یو
 صفرخای $c \in (a, b)$ لري.



تولیز باور لري: که یو تابع په یوه انتوال $[a, b]$ کې n صفرخایونه ولري (د ډېروار والي په شمول)، نو هلته k -م مشتق صفرخایونه لري. $\geq n - k$

لیکونکي: اپې، هیولیګ،

دا چې f ناپېرېکېدونکی دی، نو د افراطي ارزښت جملې له امله په $[a, b]$ کې ټکي c او d شتون لري دا لاندې باوري کوي

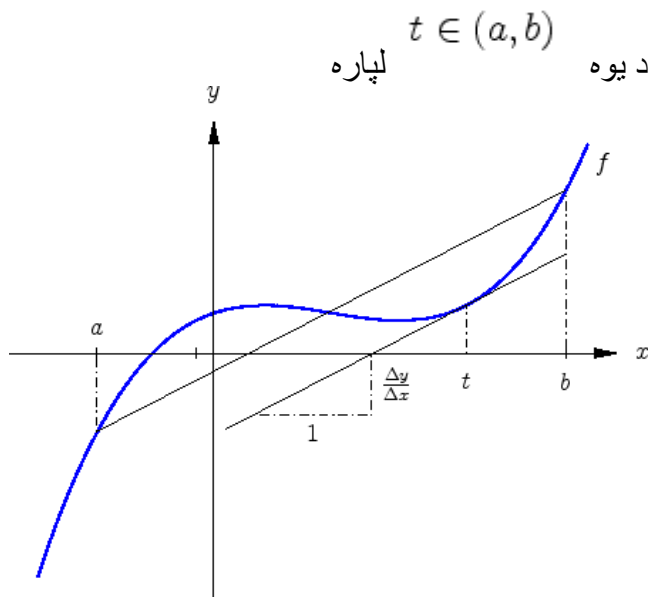
$$f(c) = \min_{x \in [a, b]} f(x)$$

$$f(d) = \max_{x \in [a, b]} f(x).$$

که f نا ثابت وي (د ثابت f حالت ساده دی)، نو $f(c) < f(d)$ باور لري. له دې امله لږ تر لږه د دې دواړو ټکو څخه یو یې په (a, b) کې پروت دی. دا چې مشتقور دی باید د دې ځایز یا لوکال افراطیت لپاره مشتق ورک – یا صفر شي. لیکونکي: اپې، هیولیگ،

منځ ارزښت قضیه Mittelwertsatz

د یوه ناپرېکېدونکي مشتقور تابع f لپاره باور لري

$$f(b) - f(a) = f'(t)(b - a)$$


هندسي دا کټوتوالی په دې معنا دی، چې تانجنت په یوه ټکي کې غبرگ دی د له پای ټکو $(a, f(a))$ او $(b, f(b))$ تېرېدونکي توپه ونې یا وتر سره. داسې هم لیکو

$$\Delta y = f'(t)\Delta x$$

سرلیک

لیکونکي: ایپ، هیولیک،

د یوې تابع

$$g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

لپاره $g(a) = g(b) = 0$ باور لري. دا چې f ناپرېکېدونکې مشتقور دی، نو g هم

ناپرېکېدونکې مشتقور دی او د رولې د جملې پر بنسټ یو لاندې سره شتون لري د

$$0 = g'(t) = f'(t) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

همداسې

$$f(b) - f(a) = f'(t) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

لیکونکي: ایپ، هیولیک،

تولیزه (شوی) منځ ارزښت جمله Verallgemeinerter Mittelwertsatz

که f او g ناپرېکېدونکي مشتقور توابع وي، نو $t \in (a, b)$ یو شتون لري د لاندې سره

$$(f(b) - f(a))g'(t) = (g(b) - g(a))f'(t).$$

که برسېره پردې په (a, b) باندې $g'(x) \neq 0$ باور ولري، نو سړی کړی شي هم

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(t)}{g'(t)}$$

هم وليڪي.
ليڪونڪي: اڀپ، هيوليڪ،

د تابع

$$h(x) = (f(b) - f(a))g(x) - (g(b) - g(a))f(x) - f(b)g(a) + f(a)g(b)$$

ليپاره $h(a) = h(b) = 0$ باور لري. دا چي f او g ناپرپڪڊونڪي مشتقور دي،
نو h هم ناپرپڪڊونڪي مشتقور دي او د پورته د رولي د جملي سره سم يو
 $t \in (a, b)$ شتون لري د لاندې سره.

$$0 = h'(t) = (f(b) - f(a))g'(t) - (g(b) - g(a))f'(t)$$

bzw. همداسي

$$(f(b) - f(a))g'(t) = (g(b) - g(a))f'(t).$$

که (a, b) په باندي $g'(x) \neq 0$ وي. نو د منځ ارزښت جملي سره سم
 $g(b) - g(a) \neq 0$ هم او سري لاس ته راوري.

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(t)}{g'(t)}.$$

ليڪونڪي: اڀپ، هيوليڪ،

لانداو-سيمبول Landau-Symbole

سري ليڪي

سرلیک

$$f(x) = O(g(x)) \quad (x \rightarrow a),$$

که یو ثابت c شتون ولري، دسې چې $|f(x)| \leq c|g(x)|$ وي a ته پوره نږدې x لپاره .

د 0 په لور هڅیږي، نو سړی په اړونده توګه لیکدود کاروي

$$f(x) = o(g(x))$$

لیکونکي: اپې، هیولیګ،

د بینوم له جملې څخه لاس ته راځي

$$(1+x)^n = 1 + nx + O(x^2) \quad (x \rightarrow 0)$$

په څټ - یا معکوس جوړونې د $1 - nx$ سره دغزوني وروسته لاس ته راځي

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1+x)^n} &= \frac{1}{1+nx+O(x^2)} \\ &= \frac{1-nx}{1-(nx)^2+O(x^2)} = \frac{1-nx}{1+O(x^2)} \\ &= 1-nx+O(x^2). \end{aligned}$$

د $x \rightarrow \infty$ لپاره دی

$$(1+x)^s = O(x^s)$$

د ټولو $s \in \mathbb{R}$ لپاره.

لیکونکي: اپې، هیولیګ،

ناپربکېدنه او مشتقوړوالی کیدی شي د لاگرانژ فرمول په مرسته تعریف شي.

يو تابع f په $x = a$ کې ناپربکېدونکی دی، که وي

$$f(x) - f(a) = o(1) \quad (x \rightarrow a).$$

مشتقوړوالی د

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + r$$

سره په یوه معنا دی د

$$r = o(h) \quad (|h| \rightarrow 0).$$

سره.

د یوه دوه واره ناپربکېدونکي مشتقوړ تابع لپاره د تېلور-وډي څخه هغه تېره

$$r = O(h^2)$$

ایکل لاس ته راځي

لیکونکي: کلاوس، هیولیگ،

د لو، پیتال قاعده یا لار Regel von l'Hospital

که دوه ناپربکېدونکي مشتقوړ توابع f او g په a کې یوه گډ صفرځای یا قطبځای ولري، نو باور لري

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

که ښی پوله ارزښت شتون ولري (په ورکړ شوي حالت کې په ناپای کې) د ټولیزه منځ ارزښت جملې په بنسټ د x او a تر منځ یو t شتون لري د لاندې سره

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(t)}{g'(t)},$$

سرلیک

که سری، د یوه ناپای پوله ارزښت په موخه، $f'(t)/0$ یعنی داسې $\pm\infty$ په معنا کړي.

له دې $x \rightarrow a$ سره هم $t \rightarrow a$ ځي، نو سملاسي راکوي

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

لیکونکي: اېپ، هیولیک،

د لو، پیتال د جملې استعمال د یو څو بېلگو لړیو په بنسټ روښانه کړي

د $0/0$ لپاره:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 2x + 1}{3x^2 - 7x + 4} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 2}{6x - 7} = -1$$

د $-\infty/\infty$ لپاره:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x)}{1/x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} -x = 0$$

د ټولو $x \rightarrow \infty$ لپاره:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi/2 - \arctan x}{1/x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-1/(1+x^2)}{-1/x^2} = 1$$

ډېواره استعمال:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin(x)} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - x}{x \sin(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{\sin(x) + x \cos(x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin(x)}{2 \cos(x) - x \sin(x)} = 0$$

په دې بېلگو کې دې پام وي، چې د شمېرلو پوله ارزښت شتون د لويپیتال قاعدې د استعمال پسې د منځته راغلي پوله ارزښت د شتون له لارې تضمین دی.

لیکونکي: اېپ، هیولیگ،

کرښیز اېروکسمیشن (ورنږدېوالی) Linear Approximation

د یوه دوه واړه ناپېرېدونکي مشتقور تابع f لپاره باور لري

$$f(x + \Delta x) = f(x) + f'(x)\Delta x + R$$

د لاندې پاتې غړي سره

$$R = \frac{1}{2} f''(t)(\Delta x)^2 = O((\Delta x)^2)$$

او د t د x او ترمنځ $x + \Delta x$ سره.
لیکونکي: اېپ، هیولیگ،

تابع

$$g(y) := f(y) - f(x) - f'(x)(y - x) -$$

$$- \frac{f(x + \Delta x) - f(x) - f'(x)\Delta x}{(\Delta x)^2} (y - x)^2$$

د $y = x + \Delta x$ لپاره یو صفرځای لري او د $y = x$ لپاره یو ډبل یا دوه واړه صفرځای لري. د رولي د جملې په تعقیب یو شتون لري د لاندې سره

سرلیک

$= f''(t) - 2 \frac{f(x + \Delta x) - f(x) - f'(x)\Delta x}{(\Delta x)^2}$	$0 = g''(t)$
--	--------------

همداسي

$= \frac{1}{2} f''(t) (\Delta x)^2.$	$f(x + \Delta x) - f(x) - f'(x)\Delta x$
--------------------------------------	--

ليكونكي: اپ، هيوليگ،

د ناتيكاوي وده Fehlerfortpflanzung

د يوه کچ - يا اندازوني ارزښت $\Delta x = \tilde{x} - x$ مطلق ناتيكاوي يا يو

نرديوالي $\tilde{x} \approx x$ بنايي نو د يوه ناپرېکېدونکي مشتقور تابع f لپاره

$$|\Delta y| = |f'(x)| |\Delta x| + o(\Delta x)$$

$$\Delta y = f(\tilde{x}) - f(x)$$

باور لري د سره. په اړونده توگه د نسبي ناتيكاوي لپاره باور لري

$$\frac{|\Delta y|}{|y|} = \left(|f'(x)| \frac{|x|}{|y|} \right) \frac{|\Delta x|}{|x|} + o(\Delta x)$$

که $x, y \neq 0$ وي. په نوکانو کې افاده c_r د x په ځای کې د f د گنديشن عدد بلل کيږي.

$$o(\Delta x)$$

د ترم د پربنبررلر يعني له منځه وړلو له لارې کېدی شي د ناتيكاوي نرديوالس اټکل شي. د دي سره کېدی شي د تیک مشتق ارزښت په ځای مناسب بنديزونه هم وکارول شي:

$$|\Delta y| \leq c_a |\Delta x|, \quad c_a \geq \max_{|t-x| \leq |\Delta x|} |f'(t)|.$$

$$c_r = c_a \frac{|x|}{|y|}$$

په اړونده توگه د نسبي ناتيكاوي لپاره يو بنديز يا لنډ: بند دی

لیکونکي: اپې، هیولیگ،

یو کونج $\vartheta \in (0, \pi/2)$ کېدی شي د کاتېتونو یا ولاو اړخونو د نسبت څخه په جگېدونکي درېږودي کې داسې وټاکو:

$$\vartheta = \arctan(y/x).$$

که y د کره ځای په ځای x سره کچ کړو، نو کېدی شي ضریب c_a د مطلق ناتیکیاوي لپاره د

$$\left| \frac{d\vartheta}{dy} \right| = \left| \frac{1/x}{1 + y^2/x^2} \right| = \left| \frac{x}{x^2 + y^2} \right|$$

له لارې اټکل شي. افاده د $y = 0$ لپاره ماکسمال کیږي، او سری لاس ته $c_a = \frac{1}{x}$ راوړي، دا په دې معنا چې

$$|\Delta\vartheta| \leq |1/x| |\Delta y|.$$

لویې ناتیکیاوی د کوچني x لپاره غزیري. په ورته توګه د نسبي ناتیکیاوي د قوی کېدنې فکتور لپاره هم باور لري

$$c_r = \max_y \left| \frac{x}{x^2 + y^2} \frac{y}{\vartheta} \right|.$$

که دا لاندې تخمین وکارول شي

$$|\vartheta| \geq |\sin \vartheta| = \left| \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right|,$$

نو لاس ته راځي

سرلیک

$$c_r \leq \left| \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| \leq 1.$$

نو نږدېوالي ډول باور لري

$$\left| \frac{\Delta \vartheta}{\vartheta} \right| \leq \left| \frac{\Delta y}{y} \right|,$$

دا په دې معنا چې نسبي فکتور نه غښتلی کيږي

لیکونکي: کلاوس، هیولیگ،

د نیوټن تڼلار یا - قانون Newton-Verfahren

<p>د نیتین تڼلار سره کېدی شي د یوه تابع f صفرخای x_* نومریک وټاکل شي. د نږدېونې یا اپروکسمیشن پرلپسې $x_0, x_1 \dots$ د کرښیزوالي څخه گټل کيږي.</p> <p>نږدېوالی $x_{\ell+1}$ د x-محور سره د تانجنت غوڅتکی دی په ټکی $(x_\ell, f(x_\ell))$ کې:</p> $x_{\ell+1} = x_\ell - f(x_\ell) / f'(x_\ell)$	
--	--

د یوه ساده صفرخای x_* ($f'(x_*) \neq 0$) لپاره د نیوټن - ایتریشن لوکال مربع پولې ته ځي، دا په دې معنا چې

$$|x_{\ell+1} - x_*| \leq c |x_\ell - x_*|^2$$

د بیلټکي لپاره د x_* په یوه پوره کوچني چاپریال کې. لیکونکي: اپې، هیولیک،

د تیلور-نږدې ارزت Taylor-Approximation له لارې سری

$$0 = f(x_*) = f(x_\ell) + f'(x_\ell)(x_* - x_\ell) + r$$

لاس ته راوړي د پاتې غړي

$$r = \frac{1}{2} f''(t_\ell)(x_* - x_\ell)^2,$$

سره د یوه t_ℓ لپاره چې د x_ℓ او x_* ت رمنځ پرته ده. که د انټرپولیشن قاعده کې کیردو

$$f(x_\ell) = f'(x_\ell)(x_\ell - x_*) - r,$$

نو لاس ته راځي

$$x_{\ell+1} = x_* - r/f'(x_\ell).$$

د $f'(x_\ell) \neq 0$ لپاره لرو

$$|x_{\ell+1} - x_*| = c_\ell |x_\ell - x_*|^2, \quad c_\ell = \frac{1}{2} \left| \frac{f''(t_\ell)}{f'(x_\ell)} \right|.$$

سرليک

که $f'(x_*) \neq 0$ باور ولري، نو c_ℓ د ناپريکيدنپناه امله د x_ℓ لپاره په يوه د x_* چاپيريال $[x_* - \delta, x_* + \delta]$ کې محدود دی:

$$c_\ell \leq c.$$

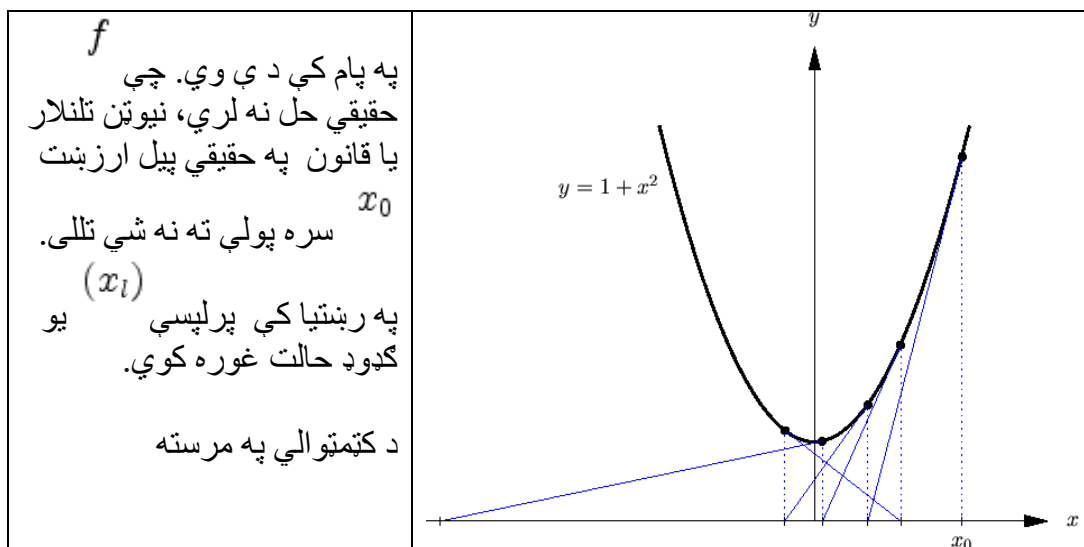
له y سره د مربع يا څلوريز پولې ته تگ لاس ته راځي. ليکونکي: اپې، هيوليگ،

که په لاندې مساوات د نيتن قانون وکاروو

$$f(x) = x^2 + 1 = 0$$

نو اتریشن (پل په پل اصلي حل ته ورږدې کېدنه) لاس ته راځي

$$x_{l+1} = \frac{1}{2} \left(x_l - \frac{1}{x_l} \right).$$



$$\cot(2\phi) = \frac{1}{2} \left(\cot \phi - \frac{1}{\cot \phi} \right)$$

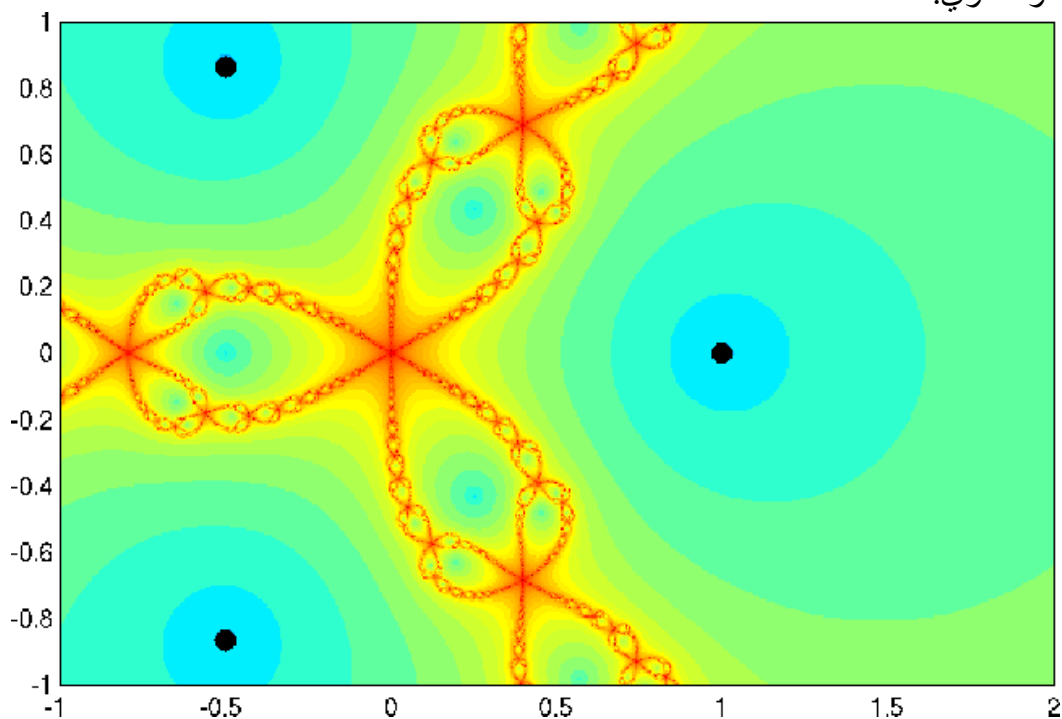
پرلپسې (x_ℓ) کېدی شي اکسپليڅيټ ورکړل شي:

لیکونکي: ایپ، هیولیک،

لاندې څېره د لاندې مساوات لپاره د کمپلکس نیوټن-اېترشن پولې ته تله بنایي

$$z^3 - 1 = 0$$

د حلونو $z = \exp(2\pi ik/3)$ سره. مختلف رنگونه د پولې ته تلني ورشو گاني بنایي د همغه یا اړونده صفرخای لپاره. تیاره رنگه شوط خایونه گړندی پولې ته تله په گوته کوي.



سری د پولې ته تلني ورشو په روښانه توگه **fraktal** مات خوي پیژني

د تیلور پولینوم **Taylor-Polynom**

د تیلور پولینوم **Das Taylor-Polynom**

$$p_n(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n$$

د یوه تابع f انټرپولیری (ارزښت چې د دوه ټکو ترمنځ پروت وي) مشتق په ټکي a

$$p_n^{(k)}(a) = f^{(k)}(a), \quad k = 0, \dots, n$$

ترت نظم n پورې، دا په دې معنا چې

که یو $f^{(n+1)}$ - واره ناپېرېدونکی مشتق وي، نو باور لري

$$f(x) = p_n(x) + R, \quad R = \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}$$

د یوه t لپاره چې د a او x ترمنځ وي. لیکونکي: اپې، هیولیگ،

سیده پسي شمیرنه د f او p_n مشتق یو بل سره توافقی یا یو غبریزوالی ښایي. د پاتي غري R د پوره کیدو یا تکمیل ته سری د تیلور پولینوم په یوه بل ترم غزوي:

$$q(y) = p_n(y) + c(y-a)^{n+1}.$$

ثابته داسې ټاکل شوي، چې $q(x) = f(x)$ وي. پسي $q - f$ یو صفرخای لري د

د ډېروالي سره په $y = a$ کې او یو بل صفرخای په $y = x$ کې، په ټولیزه

نو $n+2$ صفرخایونه. درولي جملې پسي باید $(n+1)$ -م مشتق باید لږ تر لږه یو صفرخای t ولري:

$$0 = q^{(n+1)}(t) - f^{(n+1)}(t) = c(n+1)! - f^{(n+1)}(t).$$

له

$$R = f(x) - p_n(x) = q(x) - p_n(x) = c(x-a)^{n+1}$$

څخه د پاتي غري غوښتونې ښه راکوي. لیکونکي: اپې، هیولیگ،

سرلیک

$$f(x) = \sin x$$

د ساین تابع مشتقونه دي

$$f' = \cos x, \quad f'' = -\sin x, \quad f''' = -\cos x, \quad f^4 = f = \sin x, \dots$$

د ارزښتونو

$$f'(0) = 1, \quad f''(0) = 0, \quad f'''(0) = -1, \quad f^4(0) = f = 0, \dots$$

سره لومړي د تیلور پولینومونه د ساین تابع دي.

$$p_1(x) = x$$

$$p_3(x) = x - \frac{x^3}{6}$$

$$p_5(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$$

$$p_7(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040}$$

په ورته توګه د کوساین تابع لپاره هم باور لري

$$p_0(x) = 1$$

$$p_2(x) = 1 - \frac{x^2}{2}$$

$$p_4(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$$

$$p_6(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720}$$

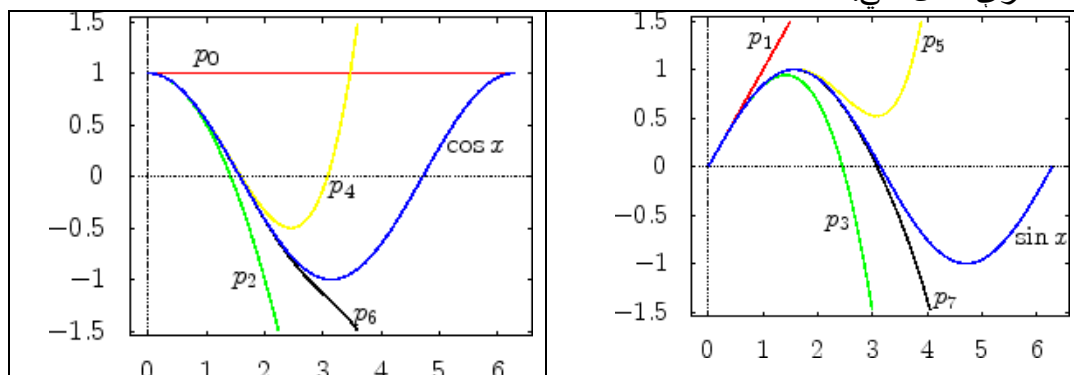
نږدې شمېرنه یا اېروکسیمېشن د ډېر کوچني x لپاره خورا دقیق دی. د بېلګې په توګه کېدې شي د نږدېونې ناتیګاوی

$$\sin 0.1 \approx p_4(0.1) = 0.09983\dots$$

د

$$|R| = \frac{|\cos t|}{5!} 0.1^5 \leq \frac{1}{12000000} \leq 10^{-7}$$

له لارې اټکل شي.



لکه د څېرې څخه چې لیدل کیږي، نږدې شمېرنه د لوی x لپاره لومړی د جګو درجو سره پوره ټیک یا دقیق وي. په جدول کې د x - ارزښت لپاره ناتیګاوي ورکړل شوي دي.

x	π	$\pi/2$	$\pi/3$	$\pi/4$	$\pi/5$	$\pi/6$
$p_1(x)$	3.1416	0.5708	0.1812	0.0783	0.0405	0.0236
$p_3(x)$	2.0261	0.0752	0.0102	0.0025	0.0008	0.0003
$p_5(x)$	0.5240	0.0045	0.0003	0.0000	0.0000	0.0000
$p_7(x)$	0.0752	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

سرلیک

$p_0(x)$	2.0000	1.0000	0.5000	0.2929	0.1910	0.1340
$p_2(x)$	2.9348	0.2337	0.0483	0.0155	0.0064	0.0031
$p_4(x)$	1.1239	0.0200	0.0018	0.0003	0.0001	0.0000
$p_6(x)$	0.2114	0.0009	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

لیکونکي: اپ، هیولیک،

حقیقي د تیلور لړۍ Reelle Taylor-Reihe

په یوه ټکي x_0 کې د یوه ناپای ډېرواره مشتقور تابع f د تیلور لړۍ د یوې په توان لړۍ یوه وده ده:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n, \quad a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0).$$

د $x \in \mathbb{R}$ لپاره لړۍ او همداسې ټول مشتقونه په یوه انټروال $(x_0 - r, x_0 + r)$ کې مطلق پولي ته تلونکي دي او د $|x - x_0| > r$ لپاره پولي ته نه تلونکي دي. د $|x - x_0| = r$ لپاره به له نورو څېړنو د لړۍ پولي ته تلني په هکله ویناوي ناشوني دي.

د ودې ټکي د واټن لپاره بند(بندیز) r د پولي ته تلني یا کونورگنت –ورانگي په نامه یادېږي او د فرمول

$$r = \left(\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n} \right)^{-1}$$

سره شمېرل کيږي. له دې سره ارزښتونه $r = 0$ او $r = \infty$ شوني دي. په دې حالت کې د کونورگنت انټروال یا تش دی او یا ټول \mathbb{R} دی.

لیکونکي: اېپ، هیولیگ،

د ریښې قضیې په بنسټ دی

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n \right|} = \frac{1}{r} |x-a|.$$

په توګه د $|x-a| < r$ لپاره د تېلور-اری یوې ته ځي او د $|x-a| > r$ لپاره پولې ته نه ځي. د $|x-a| = r$ لپاره نورې څېړنې اړیښي دي یا نورو څېړنو ته اړتیا ده. لیکونکي: اېپ، هیولیگ،

تابع

$$f(x) = \begin{cases} \exp(-1/x^2), & \text{für } x \neq 0 \\ 0, & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

په 0 کې برابر ډوله ناپرېکېدونکي ده. دا پسي دپوره ایندکشن له لارې ښوول کېدی شي، چې ټول مشتقونه د

$$f^{(n)}(x) = \frac{p_n(1/x)}{\exp((1/x)^2)}$$

بني دي، د یوه مناسب پولینوم p_n سره. دا چې د $x \rightarrow 0$ (همداسې د $1/|x| \rightarrow \infty$)

لپاره اکسپوننشل تابع نسبت یوه پولینوم ته په قوت یا قوي جگيږي، نو ټول پولینومونه په $x = 0$ ځای کې ارزښت 0 لري. اړونده تیلور-لړۍ نوله دي امله صفر لړۍ ده

سرلیک

$$\sum_{k=0}^{\infty} 0x^k.$$

داچې د لپاره $f(x) \neq 0$ $x \neq 0$ دی، نو د تیلور-لړۍ د f سره فقط د $x = 0$ لپاره یو بل سره برابر یا یو غریز دي، دا په دې معنا چې د پولې ته تلني وړانګه $r > 0$ ده.

لیکونکي: اپې، هیولیګ،

$$f(x) = \exp(x)$$

اکسپوننشل تابع

$$f^{(n)}(x) = \exp(x).$$

لاندې مشتق لري

که د $x = 0$ په ځای کې وارزول شي، ترې لاس ته راځي

$$f^{(n)}(0) = 1.$$

د دې په تعقیب د اکسپوننشل تابع د تیلور-لړۍ لاندې بڼه لري

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

دا چې

$$\lim_{k \rightarrow \infty} 1/\sqrt[k]{k!} = 0,$$

نو $r = \infty$ دی، دا په دې معنا چې د تیلور-لړۍ په ټول \mathbb{R} پولې ته ځي یا کونورګنت ده.

لیکونکي: اپې، هیولیګ،

سرلیک

د بیلگې لپاره تابع

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

په $a = 4$ وديز کيږي.

ددې لپاره لومړی مشتقونه جوړيږي:

$-\frac{1}{2} x^{-3/2}$	=	$f'(x)$
$\left(-\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{3}{2}\right) x^{-5/2}$	=	$f''(x)$
.	.	.
.	.	.
$(-1)^n 2^{-n} \cdot 1 \cdot 3 \cdots (2n-1) \cdot x^{-\frac{2n+1}{2}}$	=	$f^n(x)$

په وديزېڼې ټکي د قيمت ايښوونې يا -وضع کونې سره سړی د ټيلور-ضريبوننه لاس ته راوړي

$$c_n = \frac{f^{(n)}(4)}{n!} = (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2n)} 2^{-2n-1}.$$

د لړۍ لومړي درې ترمونه دي

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{16} (x-4) + \frac{3}{128} (x-4)^2 + \cdots$$

د دې لپاره چې د ضريبونو وړانگه r وټاکو، په پام کې نيسو

$$\frac{1}{2} \frac{1}{2n} 2^{-2n} \leq c_n \leq \frac{1}{2} 2^{-2n}.$$

له دې سره دی

$$\frac{1}{4} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{1/(4n)} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{c_n} \leq \frac{1}{4} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{1/2}.$$

سرلیک

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{c} = 1$$

دا چې $r = \frac{1}{(1/4)} = 4$ راځي لیکونکي: اپې، هیولیگ،

د اویلر فرمول

$$\exp(it) = \cos t + i \sin t$$

کیدى شي د تیلور-ودیزیني په مرسته

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24} - \dots$$

$$\sin t = t - \frac{t^3}{6} + \frac{t^5}{120} - \dots$$

د کوساین - او سین توابع منځ ته راوړل شي. له

$$-\frac{t^2}{2} = \frac{(it)^2}{2}, \quad -\frac{t^3}{6} = \frac{i^2 t^3}{3!}, \quad +\frac{t^4}{24} = \frac{(it)^4}{4!}, \quad +\frac{t^5}{120} = \frac{i^4 t^5}{5!}, \dots$$

څخه لاس ته راځي

$$\cos t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(it)^{2k}}{(2k)!}$$

$$i \sin t = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(it)^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

او د زیاتون یا جمعې له لارې د تیلور-ودیزیني له لارې د اویلر فرمول لاس ته راوړو

$$\begin{aligned}
 \exp(it) &= 1 + it - \frac{t^2}{2!} - i\frac{t^3}{3!} \cdots \\
 &= 1 - \frac{t^2}{2!} \pm \cdots + i\left(t - \frac{t^3}{3!} \pm \cdots\right) \\
 &= \cos t + i \sin t.
 \end{aligned}$$

لیکونکي: اپ، هیولیک،

د لوگارېتم تابع

$$f(x) = \ln x$$

لاندي مشتق لري

$$f'(x) = \frac{1}{x}, \quad f''(x) = -\frac{1}{x^2}, \quad f'''(x) = \frac{2}{x^3}.$$

په دې پسي مرربعيز د تیلور-پولینوم په ټکي $a = 1$ کې دی

$$p(x) = 0 + (x - 1) - \frac{1}{2}(x - 1)^2.$$

باقی - یا پاتي غری دابنه لري

$$\begin{aligned}
 r(x) = f(x) - p(x) &= \frac{1}{3!} f'''(\xi) (x - 1)^3 \\
 &= \frac{1}{3\xi^3} (x - 1)^3
 \end{aligned}$$

د ξ سره، چې د x او 1 ترمنځ پروت دی. ناتیځاوی د ممکن کوچني ξ لپاره خورا غټ دی. سړی اټکل لاس ته راوړي

$$|r(x)| \leq \frac{1}{3} \left| \frac{x - 1}{\min(1, x)} \right|^3.$$

د $x \in [0.75, 1.25]$ لپاره ناتیګاوی دی

$$\leq \frac{1}{3} \left| \frac{1/4}{3/4} \right|^3 = \frac{1}{81}.$$

لیکونکي: هیولیګ،

بینومیال لړۍ Binomialreihe

تابع

$$f(x) = (1+x)^\alpha$$

$\alpha \in \mathbb{R}$

د سره یوه تیلور-لړۍ لري

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + \dots$$

د $|x| < 1$ لپاره، د کوم سره چې

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$$

تولیز شوی بینوم ضریب دی

لیکونکي: اپ، هیولیګ،

دا تړلي لاس ته راځي، چې

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}.$$

سرلیک

لړۍ

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$$

د وېش قضیې

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{\binom{\alpha}{k+1} x^{k+1}}{\binom{\alpha}{k} x^k} \right| = |x| \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{\alpha - k}{k + 1} \right| = |x| < 1.$$

له مخې پولې ته ځي
لیکونکي: اپې، هیولیگ،

د تیلور لړۍ مشتق او انټیګرال

Differentiation und Integration von Taylor-Reihen

د یوې د تیلور-لړۍ

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - a)^k, \quad c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!},$$

کېدی شي غړي ډوله یا یې غړي په غړي مشتق او انټیګرال ونيول شي:

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) c_{k+1} (x - a)^k$$

$$\int f(x) dx = c + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_{k-1}}{k} (x - a)^k.$$

په دواړو عملیو کې د پولې ته تلني وړانګه بې تغیره پاتېږي.

لیکونکي: هیولیگ، کرایخ

سرلیک

د بینوملری

$$(1+t)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} t^k = 1 + \alpha t + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} t^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} t^3 + \dots,$$

خڅه د $t = -x^2$ او $\alpha = -1/2$ سره لاس ته راځي

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{-1/2}{k} x^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2k)} x^{2k} \\ &= 1 + \frac{1}{2} x^2 + \frac{3}{8} x^4 + \frac{5}{16} x^6 + \dots \end{aligned}$$

د انتیگرال له لارې او همداسې د

$$\frac{d}{dx} \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \arcsin(0) = 0$$

په پام کې نیولو سره د غړي په غړي انتیگرال له لارې داوده لاس ته راځي

$$\begin{aligned} \arcsin \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{-1/2}{k} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2k)} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \\ &= x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \frac{5x^7}{112} + \dots \end{aligned}$$

لیکونکي: اپب، هیولیک،

د انتیگرا

$$\int_0^x e^{-t^2} dt$$

نږدې ډوله شمیرنه د تیلور-اکسپوننشل تابع باندې لاس ته راوړي

$$e^{-t^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{k!} .$$

له دې سره لاس ته راځي

$$\int_0^x e^{-t^2} dt = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{k!(2k+1)} .$$

د نومړيکي نږدېونې پخ حيث د

لپاره لاندې ارزښتونه لاس ته راځي

$\int_0^1 e^{-t^2} dt$

k=0: 1
k=1: 0.666666666666667
k=2: 0.766666666666667
k=3: 0.74285714285714
k=4: 0.74748677248677
k=5: 0.74672919672920
k=6: 0.74683603433603
k=7: 0.74682280682281
k=8: 0.74682426573971
k=9: 0.74682412070118
(Autoren: App/Höllig)

د تیلور-لړۍ ضرب Multiplikation von Taylor-Reihen

د تیلور – لړۍ کېدې شي غړي په غړي سره ضرب شي:

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} f_n(x - a)^k \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k(x - a)^k \right) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(x - a)^k$$

د لاندې سره

سرلیک

$$c_k = \sum_{j=0}^k f_{k-j} b_j .$$

د ضرب د کونورگنت وړانگه د دواړو ضریبونو د پولې ته تلنې وړانگې د مینیموم سره
برابره ده.
لیکونکي: ، هیولیک، کرایخ

د لاندې تابع د تیلور – لړۍ شمیرني ته

Zur Berechnung der Taylor-Reihe der Funktion

$$f(t) = e^{-t} \cos(\omega t)$$

سری کړی شي د اکسپوننشل تابع د تیلور – لړۍ او د کوساین – تابع وکاروي

$$e^{-t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-t)^k}{k!} = 1 - t + \frac{t^2}{2!} - \frac{t^3}{3!} \pm \dots$$

$$\cos \omega t = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(\omega t)^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{(\omega t)^2}{2!} + \frac{(\omega t)^4}{4!} - \frac{(\omega t)^6}{6!} \pm \dots$$

د ضرب څخه د لومړي ترم لپاره لاس ته راځي

$$e^{-t} \cos(\omega t) = 1 - t + \frac{1 - \omega^2}{2!} t^2 + \left(\frac{\omega^2}{2!} - \frac{1}{3!} \right) t^3 + \dots$$

$$e^{-t} \cos(\omega t) = \operatorname{Re} (e^{(i\omega - 1)t})$$

هم و کارول شي:

بدیلي کېدی شي

$$e^{-t} \cos(\omega t) = \operatorname{Re} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\omega - 1)^k t^k}{k!} \right)$$

$$\begin{aligned}
 &= \operatorname{Re} \left(1 + (i\omega - 1)t + \frac{(i\omega - 1)^2}{2!} t^2 + \frac{(i\omega - 1)^3}{3!} t^3 \dots \right) \\
 &= 1 - t + \frac{1 - \omega^2}{2!} t^2 + \frac{3\omega^2 - 1}{3!} t^3 + \dots
 \end{aligned}$$

لیکونکی: اپ، هیولیک،

د تیلور-لری وېش Division von Taylor-Reihen

د دوه تیلور-لریو وېش

$$q(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x-a)^k / \sum_{k=0}^{\infty} g_k(x-a)^k, \quad g_0 \neq 0,$$

د ضربونو پرتلی له لاری کېدی شي له کتوتوالي

$$(q_0 + q_1u + \dots)(g_0 + g_1u + \dots) = f_0 + f_1u + \dots, \quad u = x - a,$$

څخه وټاکل شي:

$$q_0 g_0 = f_0 \quad \longrightarrow \quad q_0$$

$$q_1 g_0 + q_0 g_1 = f_1 \quad \longrightarrow \quad q_1$$

⋮

$$q_n = (f_n - q_{n-1}g_1 - \dots - q_0 g_n) / g_0 \quad \longrightarrow \quad q_n.$$

لیکونکی: هیولیک، پریس

د $q(x) = \tan x$ تر 5نظم پورې وډیزوني لپاره ږدو:

سرلیک

$$(q_1x + q_3x^3 + q_5x^5 + \dots) \underbrace{\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \dots\right)}_{\cos x} = \underbrace{x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \dots}_{\sin x}.$$

له دې سره همدا اوس وکارول شو، چې تانجنت $\tan x$ ناچوره (طاق) دی، دا په دې

$$q_0 = q_2 = \dots = 0$$

معنا چې

د ضریبونو له پرتلي څخه لرو:

$$q_1x = x \longrightarrow q_1 = 1,$$

$$\left(-\frac{q_1}{2} + q_3\right)x^3 = -\frac{1}{6}x^3 \longrightarrow q_3 = \frac{1}{3},$$

$$\left(\frac{q_1}{24} - \frac{q_3}{2} + q_5\right)x^5 = \frac{1}{120}x^5 \longrightarrow q_5 = \frac{2}{15}.$$

لیکونکي: هیولیک، ابرین

د راشنل توابعو تیلور-وډیزینه

Taylor-Entwicklung rationaler Funktionen

د یوه راشنل تابع $r(z)$ د تیلور-وډیزینه په ټکي $z = a$ کې کېدی شي د کمپلکس پارشل جمعې په مرسته وټاکل شي، دا په دې معنا چې r د یوه پولینوم او د بنسټ تابع

$$\frac{1}{(u-z)^j} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+j-1}{j-1} \frac{(z-a)^n}{(u-a)^{n+j}}.$$

جمعه ده.

د یوگونو زیاتونونو (د جمعی اعضاوي) د کونورگنت وړانگي د وديزېني ټکي د قطب

نقطو د واټن $|u - a|$ سره برابره ده
لیکونکي: کلاوس هیولیک

وديزېنه یا وده د بینوم لړۍ یو ځانگړی حالت دی:

$$\frac{1}{(u - z)^j} = \frac{1}{((u - a) - (z - a))^j} = (u - a)^{-j} (1 + x)^{-j},$$

$$, \quad x = -\frac{z - a}{u - a}.$$

بدیلي کېدی شي په ټکي $z = a$ کې مشتق وشمېرل شي او د n -م د تیلور ضریبونو لپاره لاس ته راوړو

$$\frac{j \cdot (j + 1) \cdots (j + n - 1)}{n!} = \binom{n + j - 1}{n} (u - a)^{-j - n}.$$

د

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \binom{n + j - 1}{j - 1}^{1/n} = 1$$

له امله د کونورگنت یا پولې ته تلني وړانگه $|u - a|$ ده.
لیکونکي: کلاوس هیولیک

د بنووني لپاره د

$$r(z) = \frac{1}{z^2 - z} = -\frac{1}{z} - \frac{1}{1 - z}$$

وده په $a = 3$ وټاکل شي. د لومړي ترم لپاره د تولیز فرمول څخه د $u = 0$ او

سره لاندې د تیلور n -م ضریب لاس ته راوړي $j = 1$

$$\binom{n}{0} (-3)^{-(n+1)},$$

سرلیک

دا په دې معنا چې

$$-\frac{1}{z} = -\frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} ((z-3)/(-3))^n, \quad |z-3| < 3.$$

دا ترې لاس ته راغلي هندسي لړۍ کېدې شي سیده هم لاس ته اورول شي. دا د دویم ترم په بنسټ بنوول کېږي. سړی لیکي

$$-\frac{1}{1-3-(z-3)} = \frac{1}{2} \frac{1}{1-(z-3)/(-2)}$$

او لاس ته راوړي

$$-\frac{1}{1-z} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} ((z-3)/(-2))^n, \quad |z-3| < 2.$$

د دواړو لړیو زیاتون یا جمعه دا وده راکوي

$$\frac{1}{z^2 - z} = \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{4}\right)(z-3) + O((z-3)^2).$$

لیکونکي: کلاوس هیولیک

د یوې تیلور – لړۍ معکوس ارزښت تکرار شمیرنه

Iterative Berechnung des Kehrwerts einer Taylor-Reihe

$$g(0) \neq 0$$

که وي، نو کېدې شي د ایتربشن له لارې

$$f \leftarrow 2f - gf^2$$

$$f = 1/g$$

$$f(x) = 1/g(0)$$

وده وشمېرل شي.

څخه په وتو د معکوس ارزښت

له

دلته په هر پل کې د ټیکو ترمونو تعداد یا گڼ، ن دوه برابره کېږي.

$$\frac{1}{f} - g = 0$$

دا متود د نیوټن تئلاز د د یوه حل ټاکل په گوته کوي

لیکونکي: کلاوس هیولیگ، اپیرین

د پولي ته تلني وينا کیدی شي د کتوتوالي

$$f_{\text{neu}} - \frac{1}{g} = -g \left(f_{\text{alt}} - \frac{1}{g} \right)^2$$

حخه ولوستل شي، حخه چې له $f_{\text{alt}} - 1/g = O(x^n)$ لاس ته

$$f_{\text{neu}} - 1/g = O(x^{2n})$$

راځي

لیکونکي: کلاوس هیولیگ، اپیرین

د

$$f(x) = 1/g(x) = 1/\cos x$$

تیلور ودیزینه کېدی شي لکه چې په تعقیب یې پل په پل وشمېرل شي. له

$$g = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + O(x^6), \quad f_0 = 1$$

حخه په وته لاس ته راځي

$$f_1 = 2 \cdot 1 - g \cdot 1^2$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x^4 + O(x^6)$$

$$f_2 = 2\left(1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x^4\right) - g\left(1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x^4\right)^2 + O(x^6)$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + O(x^6).$$

سملاسي له دوه پلونو (قدمونو) وروسته لومړي شپږ ترمونه ټیک دي.

سرلیک

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \dots$$

د سره له ضرب پسي د تانجنت لړۍ راكوي

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \dots$$

ليكونكي: كلاوس هيوليگ، اپيرينس

د معكوس تابع د تيولور وديزيينه

Taylor-Entwicklung der Umkehrfunktion

د يوه تابع f د معكوس تابع $g(x)$ د تيولور ضريبونه د $f'(a) \neq 0$ سره په ټكي

$$b = f(a)$$

كي كېدى شي د

$$g(f(x)) = x$$

له مشفوني و ټاكل شي :

$$g(b) = a$$

$$g'(b) f'(a) = 1 \quad \longrightarrow \quad g'(b)$$

$$g''(b) f'(a)^2 + g'(b) f''(a) = 0 \quad \longrightarrow \quad g''(b)$$

⋮

دا منځ ته راغلي مساوات كېدى شي تل پسي sukzessive د مشتقونو

$$g'(b), g''(b), \dots$$

پسي وشمېرل شي.

ليكونكي: كلاوس هيوليگ، اپيرينس

$$f(x) = \sin x \quad g(x) = \arcsin x$$

د او $a = 0$ لپاره لرو

$$g(0) = 0$$

$$g'(0) \cos 0 = 1 \quad \longrightarrow \quad g'(0) = 1$$

$$g''(0) \cos^2 0 - g'(0) \sin 0 = 0 \quad \longrightarrow \quad g''(0) = 0$$

$$g'''(0) \cos^3 0 - g''(0)(-\sin 0) + g''(0) \cos 0(-\sin 0) + g'(0)(-\cos 0) = 0 \quad \longrightarrow \quad g'''(0) = 1$$

⋮

$$\arcsin x = x + \frac{1}{6}x^3 + O(x^4)$$

دا په دې معنا چې . که په پام کې ونیول شي،
 چې د یوه ناجوره یا طاق تابع په څېر - یا معکوس تابع ناجوره ده، نو سملاسي يې
 وديزيبنه تر پنځم ترم پورې ټيک ده.
 لیکونکي: کلاوس هیولیک، اپرینس

د تیلور ځانگړې لړۍ **Spezielle Taylor-Reihen**

$$(1 + x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + \dots \quad |x| < 1$$

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \pm \dots \quad -1 < x \leq 1$$

$$\ln(1-x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{x^k}{k} = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \dots \quad |x| < 1$$

سرلیک

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \pm \dots \quad x \in \mathbb{R}$$

$$t = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{2^{2k}(2^{2k}-1)}{(2k)!} B_{2k} x^{2k-1} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \dots \quad |x| < \frac{\pi}{2}$$

$$\arctan x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2k)} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \frac{5x^7}{112} + \dots \quad |x| < 1$$

$$\operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2k)} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} = \frac{\pi}{2} - \left(x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \frac{5x^7}{112} + \dots \right) \quad |x| < 1$$

$$\operatorname{arctan} x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} \pm \dots \quad |x| < 1$$

لیکونکي: ایپ، هیولیگ

د پاد نږدې ارزښت شمیرنه Pade-Approximation

$$(m, n) \quad f(z) = c_0 + c_1 z + \dots$$

د یوه تابع د پاد-نږدې ارزښت شمیرنه یو

راشنل تابع دی د صورت - یا ماتباندې درجې m او مخرج یا ماتلاني درجې n سره،چې د f سره د $z \rightarrow 0$ لپاره تر جګو درجو ترمونو همغږیز کيږي یا سره برابرېږي:

$$\frac{p(z)}{q(z)} - f(z) = O(z^{m+n+1}).$$

$$q(z) = b_0 + \dots + b_n z^n \quad \text{او} \quad p(z) = a_0 + \dots + a_m z^m$$

کېدی

پولینومونه

شي د ضریبونو د پرتلي له لاري وټاکل شي.

لیکونکي: ایپ، هیولیگ

د q سره د ضرب وروسته لاس ته راوړو

$$(a_0 + a_1 z + \dots) - (c_0 + c_1 z + \dots)(b_0 + b_1 z + \dots) = cz^{m+n+1} + \dots,$$

او لاس ته راځي، چې د $k \leq m + n$ ، z^k ضریبونه باید ورک شي:

$$k = 0 : a_0 - c_0 b_0 = 0$$

$$k = 1 : a_1 - c_0 b_1 - c_1 b_0 = 0$$

$$\dots$$

دا کښته – یا لامدې ټاکل شوی هوموجن کرښیز مساوات سیستم ($m + n + 1$)

مساوات د $m + n + 2$ متحولو یا ناکلو سره) راځوي، چې تل حل لري.

دا چې f په صفر کې قطب نه لري، راځوي $a_0 = 0$ ، $b_0 = 0$ چې راځوي. له دې

امله کېدی شي د ممکنه لنډونو وروسته د q لومړي له صفر توپیردونکي ضریبونه د 1 سره برابر ایښول کېښولی شي. لیکونکي: ایپ، هیولیگ

د اکسپوننشل توابعو لپاره د (m, n) -پاد-نردې ارزښت شمېرني ته مساوات سیستم په لاندې ډول دی.

$$0 = a_0 - b_0$$

$$0 = a_1 - b_1 - b_0$$

...

$$0 = a_m - b_m - \dots - \frac{1}{m!} b_0$$

$$0 = b_{m+1} - \dots - \frac{1}{(m+1)!} b_0$$

...

$$0 = \frac{1}{m!} b_n - \dots - \frac{1}{(m+n)!} b_0 .$$

سرلیک

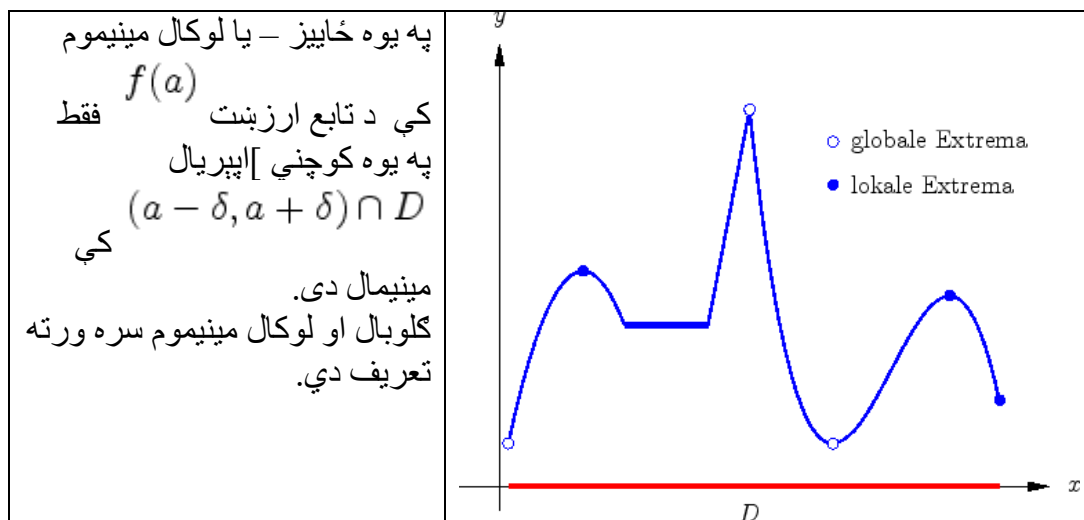
د حل لپاره د بیلگې په توګه لاس ته راوړی شو

$$r_{1,1}(x) = \frac{1 + x/2}{1 - x/2}, \quad r_{2,2}(x) = \frac{1 + x/2 + x^2/12}{1 - x/2 + x^2/12}.$$

لیکونکي: اېپ، هیولیک

اکسترېما (افراطیت) **Extrema**

تابع f په a کې په یوه ډبرې (سټ) D یو ټولیز یا ګلوبال مینیموم لري، که وي

$$f(a) \leq f(x) \quad \forall x \in D.$$


په یوه رابند انټروال د یوه ټوټه ډوله ناپېرېدونکي او مشتقور تابع لپاره کېدی شي افراطي ارزښتونه فقط د مشتقونو په صفر ځایونو، پرېکېدونکي ځایونو او یا په ژي ځایونو کې رامنځ ته شي. تیوپ یا ډول یې کېدی شي د جګو مشتقونو په مرسته او د تابع ارزښتونو د پرتلي له لارې پیداشي.

لیکونکي: هیولیک، هیورنر

د یوه ناپېرېدونکي مشتقور تابع لپاره د لوکال مینیموم سره د تعریفور شو په دننني ټکي a کې د مشتق لپاره لرو

$$f'(a) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \geq 0}} \frac{\overbrace{f(a+h) - f(a)}^{\geq 0}}{h} \geq 0$$

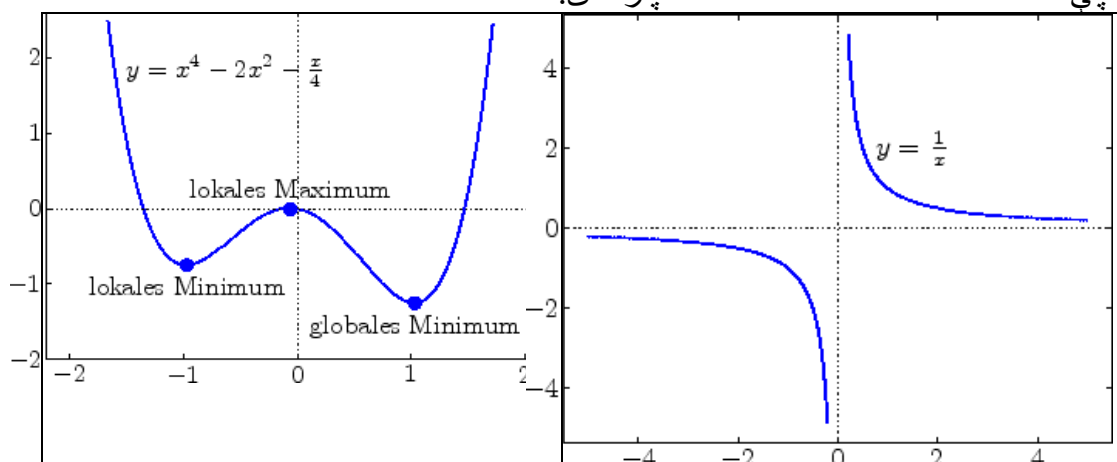
او

$$f'(a) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \leq 0}} \frac{\overbrace{f(a+h) - f(a)}^{\geq 0}}{h} \leq 0$$

نو $f'(a) = 0$. یعنی د تعریف ورشو په دننه کې په یوه لوکال افراطیت کې باید مشتق صفر وي یا f هلته مشتقور نه وي. لیکونکي: هیولیگ، هیورنر

په لاندې کې به یو څو تییکی حالتونه وڅیرل شي.

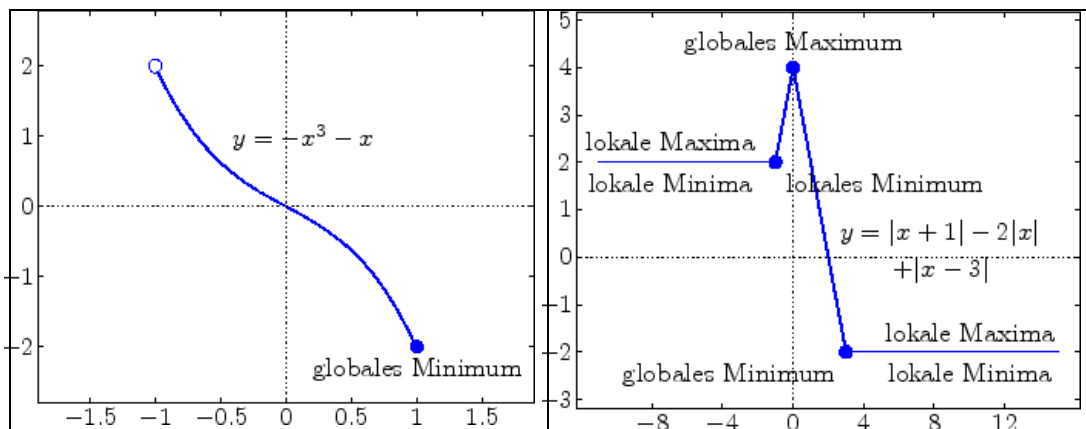
تابع $f(x) = x^4 - 2x^2 - x/4$ د $D = \mathbb{R}$ سره دوه مینیمیا او یو متکسیما لري. مینیموم د کوچنی تابع ارزښت سره گلوبال دی. یو کلوبال ماکسیموم شتون نه لري، ځکه چې $f(x) \rightarrow \infty$ د $x \rightarrow \pm\infty$ لپاره دی.



تابع $f(x) = 1/x$ د $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ سره اکستیم یا افراطي ارزښتونه نه لري. که یو تابع په یوه واز انتروال ثابت وي، نو دا ځایونه هم (لکال) ماکسیما او هم (لوکال) مینیمیا دي.

سرليک

يوه کره همغږيز – يا مونوتون تابع سره افراطي ارزښتونه په ژی ټکو کې نيول کيږي، که دا تعريفورشو پورې تعلق ولري يا اړوند وی.

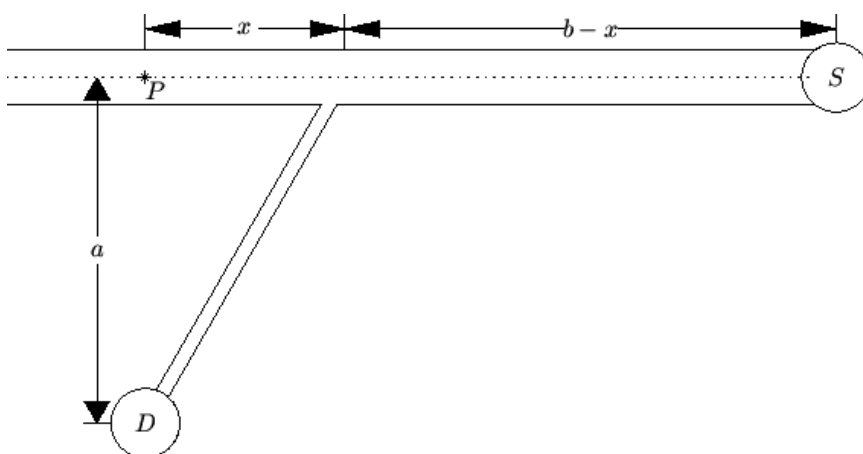


ليکونکي: هيوليگ، هيورنر

له يوه کلي D څخه يوه ښار S ته يوټرنسک جوړيږي. په واټن a همدا اوس له کلي و ښار ته يو سرک جوړ دی له ښار څخه تر ټکي P پورې لار، هغه سرک چې کلي ته بل يا پسې نږدې پروت دی، اوږدوالی b لري.

دا سيده کرښيز ټوټه لار بايد داسې جوړه وي، چې د ښار گړندی رسيدنه شونې يا تضمين

وي، که د يوه منځني [ټکټيا km/h] په واټن په نوې ځنګيز يا فرعي سرک څخه لار شو. $v_n = 60$ $v_a = 120$



د P او د څنګیز سرک ترمنځ واټن $x \geq 0$ د ټاکلو لپاره د مینیممۍ – یا کمونې له لارې اړین وخت

ښار ته د خوزښت لپاره دی

$$t(x) = \sqrt{a^2 + x^2}/v_n + (b - x)/v_a$$

د مشتق صفر ځایونه

$$t'(x) = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}v_n} - \frac{1}{v_a} \stackrel{!}{=} 0,$$

راکوي

$$v_a x = v_n \sqrt{a^2 + x^2} \Leftrightarrow x_m = a/\sqrt{3}$$

یعني ممکنه لوکال اکسټریم ځای په $(0, b)$ کې. ایا چې دا مینیموم دی، باید د خوزښت وخت سره په انټروال کې د پرتلې له لارې وټاکل شي:

$$t(a/\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}a + b}{v_a}, \quad t(0) = \frac{2a + b}{v_a}, \quad t(b) = \frac{2\sqrt{a^2 + b^2}}{v_a}$$

په روښانه توګه $t(0) \geq t(x_m)$ دی. د ښي پایټکو لپاره باور لري

$$t(b) \geq t(x_m) \Leftrightarrow 2\sqrt{a^2 + b^2} \geq \sqrt{3}a + b$$

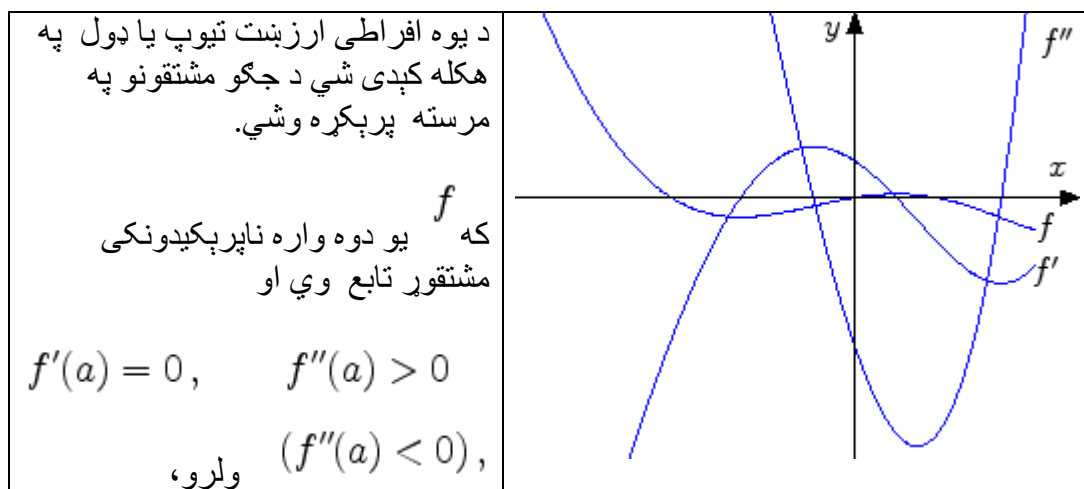
$$\Leftrightarrow 4a^2 + 4b^2 \geq 3a^2 + 2\sqrt{3}ab + b^2$$

$$\Leftrightarrow a^2 - 2\sqrt{3}ab + 3b^2 = (a - \sqrt{3}b)^2 \geq 0.$$

اخرنی مساوات تل پوره دی، او له دې سره x_m اوپټیمال یا اغیز من دی،

$$b \geq a/\sqrt{3} \quad (0, b)$$

که په غوره انټروال کې پروت وي. په بل حالت کې به مینیموم په ژي ټکي b ته، یعني ښار ته د سیده تړنې، سره ورسېږي.

د اکستریم – یا افراطي ازبنتونو ازماښت **Extremwerttest**

نو f په a کې یو ځاییز مینیموم (ماکسیموم) لري. که د a په ځای کې دویم مشتق ورک شي یا صفر شي، نو باید جگ مشتقونه پرېکړي ته را وړاندې شي. که باور ولري

$$f'(a) = f''(a) = \dots = f^{(n-1)}(a) = 0 \quad \text{und} \quad f^{(n)}(a) \neq 0,$$

نو f په a کې ټیک هلته یو افراطیت لري، که جوړه وي. په دې حالت کې f په a کې یو لوکال یا ځای اړونده ماکسیموم همداسې مینیموم لري، که $f^{(n)}(a) < 0$ همداسې $f^{(n)}(a) > 0$ وي.

لیکونکي: ایپ، هیولیک

د بنووني لپاره و f ته سری د a په ځای کې د $n - 1$ درجې د تیلور-پولینوم کاروي د باقي یا پاتي

$$f(x) - f(a) = \frac{f^{(n)}(t)}{n!} (x - a)^n$$

غري سره او په پام کې نیسي، چې د $f^{(n)}(t)$ او د $f^{(n)}(a)$ لپاره (او له دې سره هم د t لپاره) a ته په بوره نږدېوالي همغه یا برابره مخنښته ولري.

د ناجوره یا طاق n لپاره له $x < a$ څخه و $x > a$ ته په تڼي کې د پورته مساوات
بني اړخ یو د مخنښي بدلون لري. د دې پسي $f(x) - f(a)$ هم هلته د مخنښي
بدلون لري او a د f افراطي ځای نه دی.

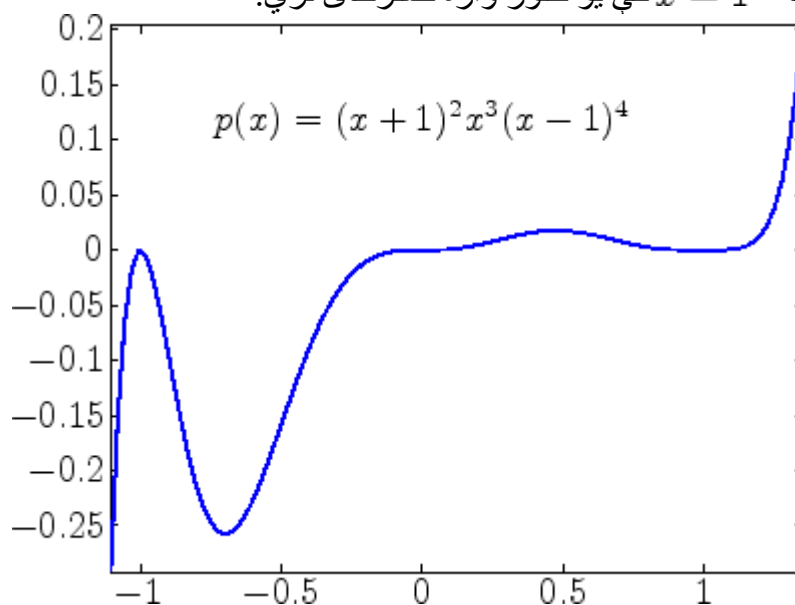
د جوړه n لپاره د $x \neq a$ لپاره تل $(x - a)^n > 0$ دی. د $f^{(n)}(a) < 0$ په
حالت کې د $x \neq a$ لپاره او x چې a ته پوره نږدې پروت دی $f(x) < f(a)$

لاس ته راځي. نو تابع f په دې حالت کې په a کې یو لوکال ماکسیموم لري. حالت
 $f^{(n)}(a) > 0$ په ورته توګه یو لوکال میموم راکوي.
لیکونکي: اېپ، هیولیک

پولینوم

$$p(x) = (x + 1)^2 x^3 (x - 1)^4$$

په $x = -1$ کې یو ډبل صفرځای، په $x = 0$ کې یو درېواړه صفرځای لري او
په $x = 1$ کې یو څلور واړه صفرځای لري.



باور لري

سرليک

$$p(-1) = p'(-1) = 0, \quad p''(-1) = 2(-1)^3(-2)^4 < 0.$$

په $x = -1$ کې P يو ماکسيموم لري. په $x = 1$ کې P يو مينيموم، ځکه چې

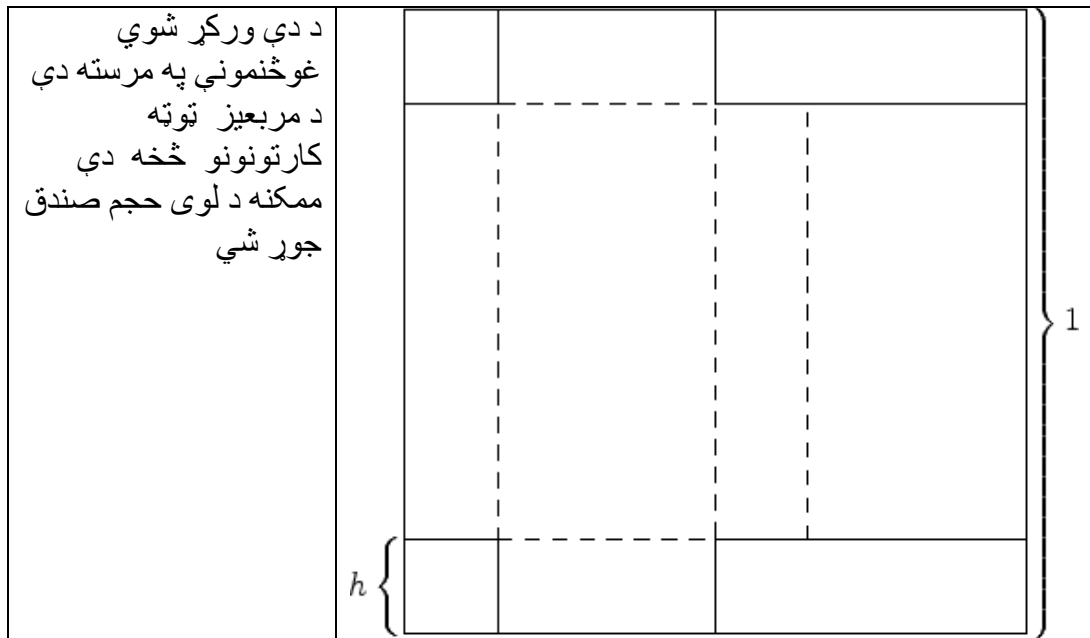
$$p(1) = \dots = p'''(1) = 0, \quad p^{(4)}(1) = 2^2 1^3 4! > 0.$$

بالاخره P د

$$p(0) = p'(0) = p''(0) = 0, \quad p'''(0) = 3!(-1)^4 \neq 0$$

له امله او په $x = 0$ کې يو مخخېبي بدلون له امله په سرچينه کې افراطي ځايونه نه لري.

ليکونکي: اېپ، هيو ليگ



ډکي يا حجم دی

$$v(h) = \underbrace{(1-2h)/2}_{\text{Länge}} \cdot \underbrace{(1-2h)}_{\text{Breite}} \cdot \underbrace{h}_{\text{Höhe}} = 2h^3 - 2h^2 + \frac{1}{2}h$$

اوردوالی سور جگوالی

د مشتق صفر ځایونه

$$v'(h) = 6h^2 - 4h + \frac{1}{2} \stackrel{!}{=} 0$$

راکوي

$$= \frac{1}{3} \pm \sqrt{\frac{1}{9} - \frac{1}{12}} = \frac{1}{3} \pm \frac{1}{6}$$

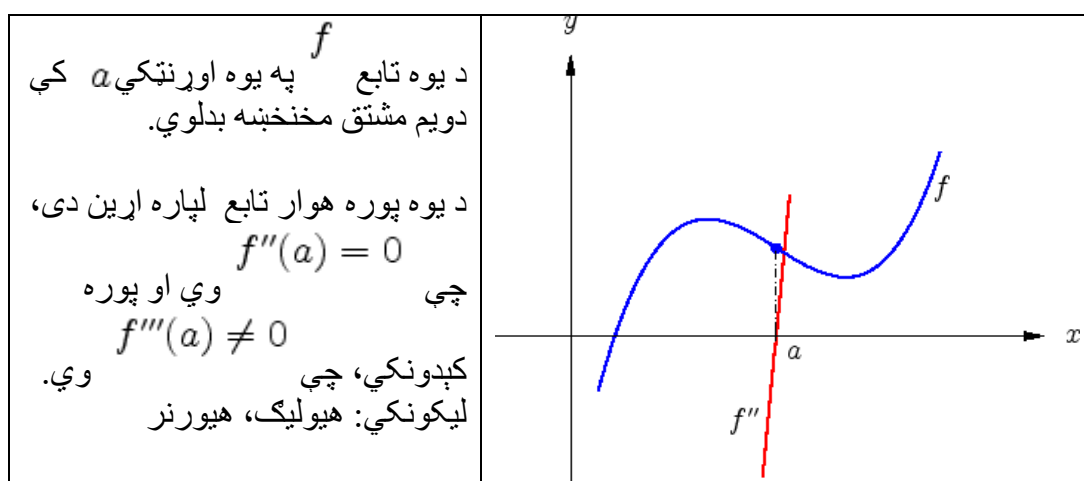
يعني ممکنه افراطي ځایونه. فقط $h = \frac{1}{6}$ هندسي موخه ور دی او

$$v(1/6) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{27}$$

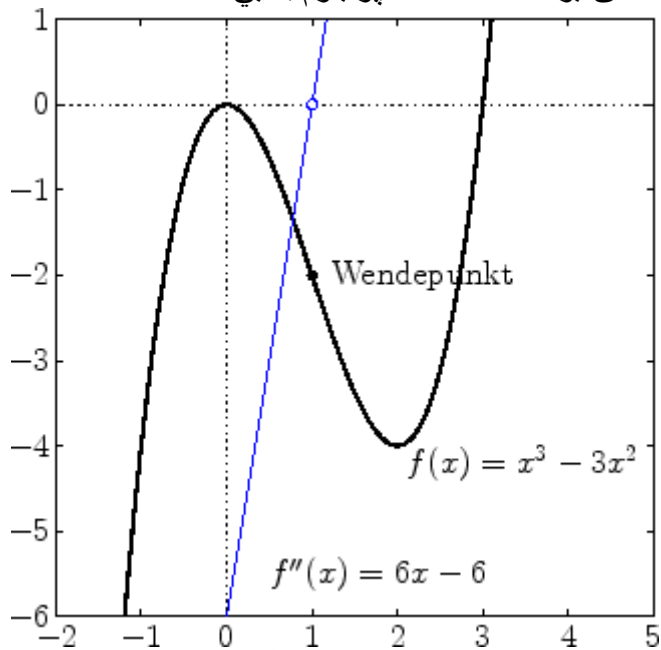
دا چې دژي ټکو $h = 0$ او $h = 1/2$ لپاره ډکی یا حجم صفر 0 دی، صندوق د لپاره ماکسیمال ډکی یا حجم لري.

لیکونکي: ایپ، هیولیک

Wendepunkte (نقطه انعطاف) اورونټکي



مشتق یو kubisches پولینوم بنایي.



دا چي دویم مشتق کر بنیز دی، تل ټیک یو افراطی ټکی شتون لري. لیکونکي: هیولیگ، هیورنر

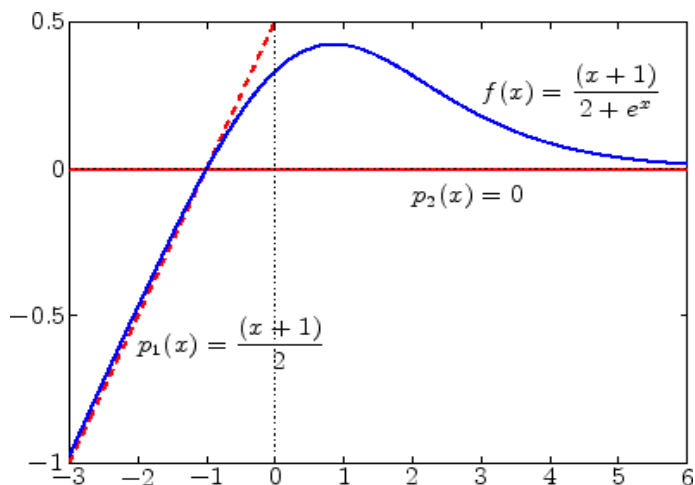
اسیمپتوتی (یو په بل نه پر پوتونکي یا گاونډی) Asymptoten

<p>f د $p(x) = ax + b$ یو کر بنیز تابع یو اسیمپتوت یا گاونډی دی، که $x \rightarrow -\infty$ یا $x \rightarrow \infty$ د $f(x) - p(x) \rightarrow 0$ لپاره وي.</p> <p>لکه په څېره کي چي بنوول شوی دی، f گاونډ د تابع حالت د لوي x لپاره تشریح کوي.</p> <p>لیکونکي: هیولیگ، هیورنر</p>	
---	--

د دې لپاره چې د تابع

$$f(x) = \frac{x + 1}{2 + e^x}$$

ځانله تر څېړني نيسو. $x \rightarrow \pm \infty$ گاونډ وټاکو پوله ارزښتونه



د $x \rightarrow \infty$ لپاره دی

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x + 1) \cdot e^{-x}}{2 \cdot e^{-x} + 1} \\ &= \frac{0}{0 + 1} = 0. \end{aligned}$$

له دې سره د x محور گاونډ يا اسيمپټوت دی

$x \rightarrow -\infty$

د لپاره e^x د 0 په لور هڅيري او

$$p(x) = \frac{x + 1}{2}$$

گاونډ دی.

ليکونکي: هيوليگ، هيورنر

د راشنل- یا کسر توابعو گاونډ یا اسیمپتوتی
Asymptoten rationaler Funktionen

یو راشنل تابع

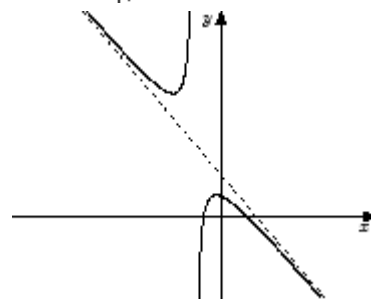
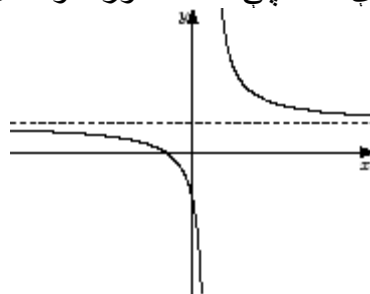
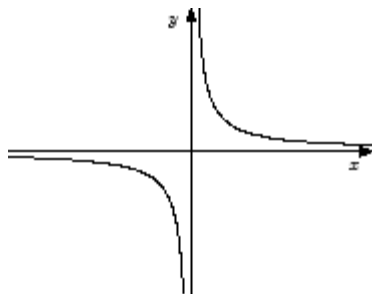
$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

تیک هلته یو کرښیز گاونډ لري، که $\text{Grad } p \leq \text{Grad } q + 1$ وي.

د $\text{Grad } p < \text{Grad } q$ لپاره باور لري

$$\lim_{p \rightarrow \pm\infty} r(x) = 0,$$

دا په دې معنا چې x - محور گاونډ دی.



د $\text{Grad } p \leq \text{Grad } q + 1$ لپاره سری کرښیز گاونډ د پولینوم وپش سره لاس ته راوړي:

$$r(x) = ax + b + \frac{\tilde{p}(x)}{q(x)}$$

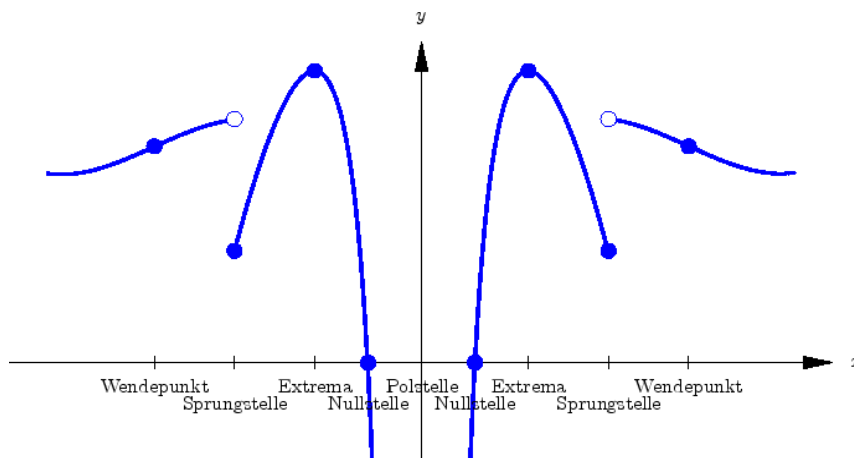
د $\text{Grad } \tilde{p} < \text{Grad } q$ سره. اسیمپتوت پروت یا افقي، $(a = 0)$ دی، که $\text{Grad } p = \text{Grad } q$ وي.

که د صورت درجه د مخرج له درجې له یو زیات وي، نو $r(x)$ د لوي x لپاره د یوه پولینوم سره، چې ≥ 2 درجه وي اړوکسيمي کيږي. لیکونکي: هیولیگ، هیورنر

د کزو یا منحیو خبرې یا بحث **Kurvendiskussion**

د یوه تابع د څومره والي حالت باندې قضاوت ته لاندې نڅېني کیدی شي رامنځ ته شي:

- Symmetrien سیومتری
- Periodizität پریته بیرته راگرځیدنه
- Unstetigkeitsstellen پرېکیدنوالي ځایونه
- Nullstellen (→ Vorzeichen) صفر ځایونه (مخنځینه →)
- Extrema (→ Monotoniebereiche) اکسترېما (همغږیزوالي ورشوگاني →)
- Wendepunkte (→ Konvexitätsbereiche) اوړونتیکی (ننوتلوالی ورشوگاني →)
- Polstellen قطب ځایونه
- Asymptoten اسیمپتوتونه یا گاونډي



د تابع یو اړونده تحلیل د کړو خبرې اترې یا بحث بلل کیږي
لیکونکي: هیولیک، هیورنر

د کړو خبرو اترو د څښندنې لپاره یو تابع

$$f(x) = \sin x + \frac{1}{3} \sin(3x)$$

تر څېړنې نیول کیږي.

$$\sin x = -\sin(-x)$$

سیمتري: داچې دی، نو تابع ناجوره دی

تل بیرته راگرځېدنه یا پریودیټي Periodizität: تابع لکه د ساین تابع پخپله 2π -
پریودیکي دی او له دې امله په لاندې کې فقط په انتروال $[-\pi, \pi]$ کې راورل کیږي.

د پرېکېدنوالي ځایونه: تابع له ناپرېکېدونکو توابعو څخه سره یږخای شوی، له دې امله
پرېکېدنځایونه نه لري.

صفر ځایونه: د زیاتو- یا جمعه نقضیې سره $[-\pi, \pi]$ دی

$$f(x) = 2 \sin x - \frac{4}{3} \sin^3 x = \sin x \underbrace{\left(2 - \frac{4}{3} \sin^2 x \right)}_{\neq 0}$$

تابع صفر ځایونه په 0 او $\pm\pi$ کې لري.
افراطیت: مشتق

$$f'(x) = 2 \cos x - 4 \sin^2 x \cos x = -2 \cos x + 4 \cos^3 x$$

صفر دی د $\cos x = 0$ یا د $\cos x = \pm 1/\sqrt{2}$ لپاره، نو
 $x = \pm\pi/2 \quad \vee \quad x = \pm\pi/4 \quad \vee \quad x = \pm 3\pi/4$.

دا چې تابع په ټول \mathbb{R} تعریف او تلېرته راگرځېدونې ده، ژی ترڅېړنې لاندې نه نیسو.

د دویم مشتق د محنځینې څخه

$$f''(x) = 2 \sin x - 12 \cos^2 x \sin x$$

او د تابع ارزښت د پرتله کونې له لارې کېدی شي د افراطیت تیوب یا ډول وټاکل شي:

x	$f(x)$	$f''(x)$	Typ
$-3\pi/4$	$-\sqrt{8}/3$	$2\sqrt{2} > 0$	globales Minimum
$-\pi/2$	$-2/3$	$-2 < 0$	lokales Maximum
$-\pi/4$	$-\sqrt{8}/3$	$2\sqrt{2} > 0$	globales Minimum
$\pi/4$	$\sqrt{8}/3$	$-2\sqrt{2} < 0$	globales Maximum
$\pi/2$	$2/3$	$2 > 0$	lokales Minimum
$3\pi/4$	$\sqrt{8}/3$	$-2\sqrt{2} < 0$	globales Maximum

: Wendepunkte یا د انعطاف ټکی

دویم مشتق

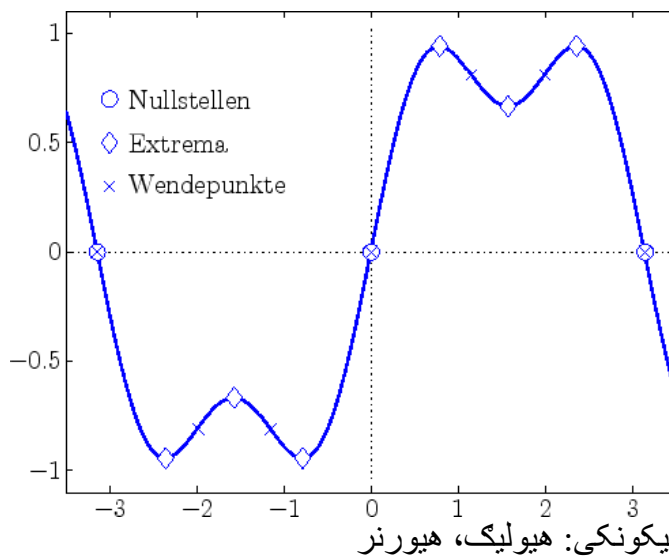
$$f''(x) = 2 \sin x - 12 \cos^2 x \sin x = -10 \sin x + 12 \sin^3 x$$

$$\sin x = \pm \sqrt{5/6}$$

صفر دی د $\sin x = 0$ لپاره یا ، دا په دې معنا چې
 $x = 0 \quad \vee \quad x = \pm\pi \quad \vee \quad x \approx \pm 1.15 \quad \vee \quad x \approx \pm 1.99$

دا چې په دې ځای کې دریم مشتق نه ورکېږي. تابع f اوړونټکی په $(0,0)$ او $(\pm\pi, 0)$ کې لري همداسې په نږدې توګه په $(-1.99, -0.81)$ ، $(1.99, 0.81)$ او $(-1.15, -0.81)$ ، $(1.15, 0.81)$ کې.

قطبځایونه **Polstellen** : ناپرېکېدونکي توابع قطبځایونه نه لري.
 ګاونډي **Asymptoten** : تابع پر یوډیکې او نه ثابت دی، نو ګاونډي یا اسیټوت یا مجاورتونه نه لري.



دیوی کړی خبرو یا بحث روښانه ولو لپاره تابع

$$f(x) = \frac{5x^3 + 4x}{20(x-1)(x+1)}$$

ترخیرنی لاندې نیول کیري.

سیومتري: صورت ناجوره او مخرج جوړه دی. تابع نو له دي امله ناجوره دی، دا په دي معنا چي سرچیني ته سیومتريک دی.

پریودیختي یا (تل) بیرته راگځیدنه: تابع پریودیک نه دی.

برپکښځایونه: د مخرج صورت صفرځایونه ± 1 د صورت صفرځایونه نه دي. له دي

سره f په $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$ ناپربکډونکی دی.

صفرځایونه: صورت د $x = 0$ لپاره ورکیري. افراطیت:

$$f'(x) = \frac{5x^4 - 19x^2 - 4}{20(x^2 - 1)^2} \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow x = \pm 2$$

دا چي تابع ساده صفرځایونه لري، افراطیت فقط لوکال یا ځای اړوند دی. د f د څومره

والي حالت څخه کیدی شي تیوپ یا ډول لاس ته راشي. دا چي $f(x) \rightarrow -\infty$ د

$x \rightarrow -\infty$ او $x \rightarrow -1$ لپاره دی، باید انتروال $(-\infty, -1)$ یو ماکسیموم

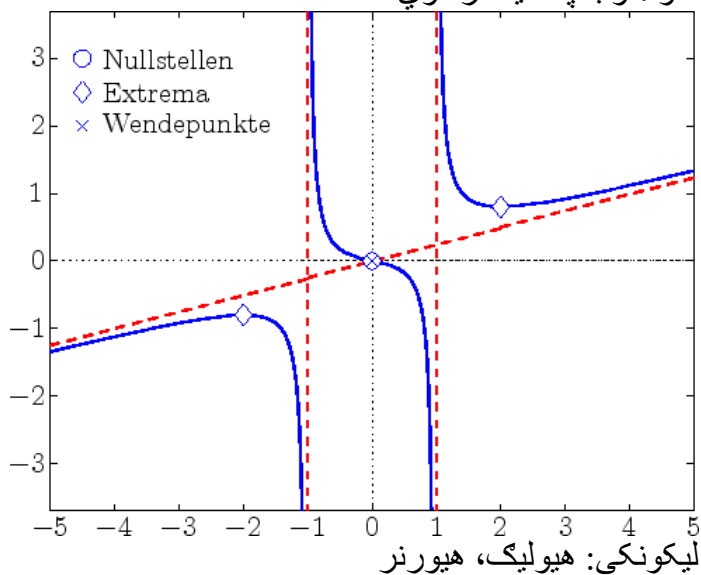
ولري. په ورته توگه $(1, \infty)$ لږ تر لږه یو مینیموم لري. نو د مشتق صفرځایونو ته

سری یو لوکال ماکسیموم په $(-2, -4/5)$ او یو لوکال مینیموم په $(2, 4/5)$ کې لاس ته راوړي. اوروټکی یا نقاط انعطاف:

$$f''(x) = \frac{-80x^5 + 398x^3 + 42x}{20(x^2 - 1)^3} \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow x = 0$$

داچې په دې ځای کې دریم مشتق صفر نه دی، نو $(0, 0)$ یو اوروټکی دی. قطبځایونه: تابع په $x = \pm 1$ کې ساده قطبځایونه لري.

اسیمپتوت یا گاونډتوب: یو د پولینوم وېش $p(x) = 5x/20 + 0 = x/4$ د گاونډتوب په حیث راکوي



د کړې خبرو اترو د بنسټولو یا روښانه کولو ته تابع

$$f(x) = e^{-x^2} + \frac{4|x|}{e^4}$$

څیرل کيږي.

سیمتري: دا چې x^2 او $|x|$ جوړه دي، تابع جوړه دی، دا په دې معنا چې سیمتر و y - محور ته. پریودیځیتي یا تل بېرته راگرځېدنه: تابع پریودیک نه دی.

سرلیک

پرېکېدونوالي ځایونه: تابع له ناپرېکېدونکو توابعو څخه سره یوځای شوي ده او له دې امله پرېکېدونځایونه نه لري. لکه د مطلق ارزښت تابع لپاره په هر حالت مشتق په صفر ټکي کې ناپرېکېدونکی نه دی.

صفر ځایونه: اکسپوننشل توابع تل مثبت یا زیاتیز دي، د مطلق ارزښت تابع نه منفي دي. نو صفر ځایونه نه شته.
افراطیت:

$$f'(x) = -2xe^{-x^2} + \frac{4}{e^4} \text{sign}(x) \stackrel{!}{=} 0, x \neq 0 \Rightarrow x = \pm 2.$$

برسیره پردې دې افراطی ټکی په $x = 0$ کې، څېړل شي، چېرته چې مشتق پرېکېدونکی دی. دا چې تابع په ټول \mathbb{R} تعریف دی، نو د x لپاره د $\pm\infty$ ته د تلني حالت هم باید په پام کې ونیول شي.

دا چې $f(x) \rightarrow \infty$ د $x \rightarrow \pm\infty$ لپاره دی، نو f لږ تر لږه یو گلوبال مینیموم لري، مگر گلوبال ماکسیموم نه لري. د y ارزښت په پرتله کریتیکال ټکی

$$(-2, 9/e^4) \quad (0, 1) \quad (2, 9/e^4)$$

بنايي، چې گلوبال مینیموم په $x = \pm 2$ کې نیول کيږي. دا چې f په انټروال $[-2, 2]$ کې مینیموم او هم یو ماکسیموم لري، ترې لاس ته راځي چې $(0, 1)$ یو لوکال ماکسیموم دی.
اورونټکی یا د انعطاف ټکی:

$$f''(x) = -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2} \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow 4x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm 1/\sqrt{2}$$

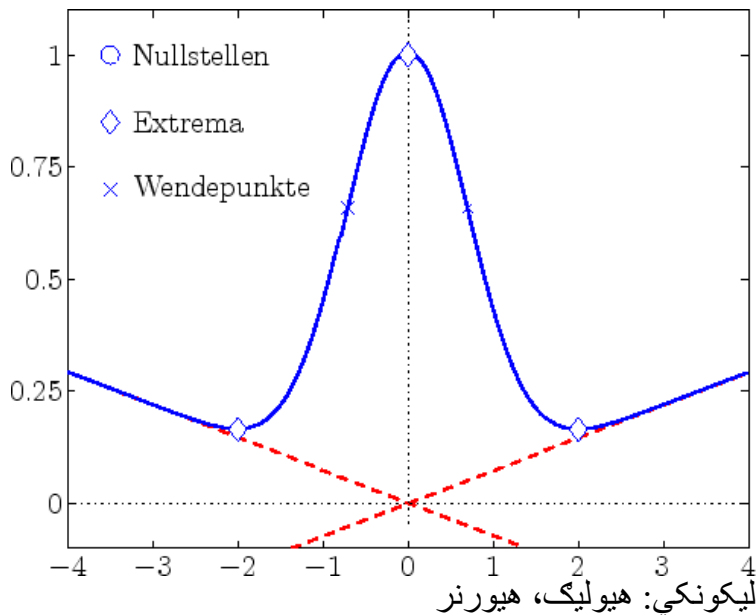
دریم مشتق په دې ځایونو $\neq 0$ کې دی. ترې لاس ته راځي چې f یو اورونټکی

$$\left(\pm 1/\sqrt{2}, e^{-1/2} + \frac{4}{\sqrt{2}e^4} \right).$$

لري.

قطب ځایونه: تابع قطب ځایونه نه لري.

گاونډي یا مجاورتها: دا چې e^{-x^2} د $|x|$ لپاره د صفر په لور ګړندی دی، تابع گاونډیان $p_+(x) = \frac{4x}{e^4}$ او $p_-(x) = \frac{-4x}{e^4}$ لري.



ریمن-انٹیگرال Riemann-Integral

د یوه ناپربکېدونکي تابع f یو ټاکلی انٹیگرال د

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \int_a^b f_{\Delta} = \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \sum_k f(\xi_k) \Delta x_k$$

له لارې تعریف شوی دی. دلته د

$$\Delta : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

یوه ټوټه کونه بنیایي،

$$|\Delta| = \max_k \Delta x_k,$$

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1},$$

یو ماکسیمال انټروال دی او ξ_k په k - م انټروال یو په خوښه ټکی دی. د انٹیگرال تعریف په ښی لور زیاتون یا جمعه د ریمن زیاتون یا - جمعه بلل کیږي.

سرلیک

د زیاتیز یا مثبت f لپاره $\int_a^b f(x) dx$ د f د گراف کښته لورته سطحه په گوته کوي

لیکونکي: هیولیگ، هیورنر، ویپیر

که $f(x)$ ناپرېکيدونکی مشتقور وي، نو د مشتقشمېرنې د منځ ارزښت جملې څخه د لپاره باور لري

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq (x_2 - x_1) \max_{x \in [x_1, x_2]} |f'(x)|$$

Δ_i دې د ټوټه ونو یوه پرله پسې وي د $|\Delta_i| \rightarrow 0$ سره. د تابع پرلپسې دوه ټوټې Δ_m او Δ_n را اخلو او د Δ ټوټه ونه را اخلو، چې د Δ_m او Δ_n د نورو یا ورپسې یل لاندې ټوټه کونو له لارې منځ ته راځي، چېرته چې Δ_m د لاندې یا ورپسې ټوټه ونو ټکي $x_i, i = 0, \dots, k_m$ دي او Δ ټکي $z_i, i = 0, \dots, k$ لري، نو د $\zeta_j \in [z_{j-1}, z_j]$ سره باور لري

$$\begin{aligned} \left| \int f_{\Delta} - \int f_{\Delta_m} \right| &= \left| \sum_{j=1}^k f(\zeta_j) \Delta z_j - \sum_{i=1}^{k_m} f(\xi_i) \Delta x_i \right| \\ &= \left| \sum_{i=1}^{k_m} \sum_{x_{i-1} \leq z_{j-1} < z_j \leq x_i} (f(\zeta_j) - f(\xi_i)) \Delta z_j \right| \\ &\leq |\Delta_m| \max_{t \in [a, b]} |f'(t)| \underbrace{\sum_{i=1}^{k_m} \sum_{x_{i-1} \leq z_{j-1} < z_j \leq x_i} \Delta z_j}_{b-a} \end{aligned}$$

په ورته تگه باور لري

$$\left| \int f_{\Delta} - \int f_{\Delta_n} \right| = O(|\Delta_n|),$$

او له دې سره

$$\left| \int f_{\Delta_m} - \int f_{\Delta_n} \right| \rightarrow 0$$

$$n, m \rightarrow \infty$$

د لپاره . د ریمن-زیاتون نو یوه کوشي-پرلپسي جوړوي، نو پولي ته تلونکي دي.

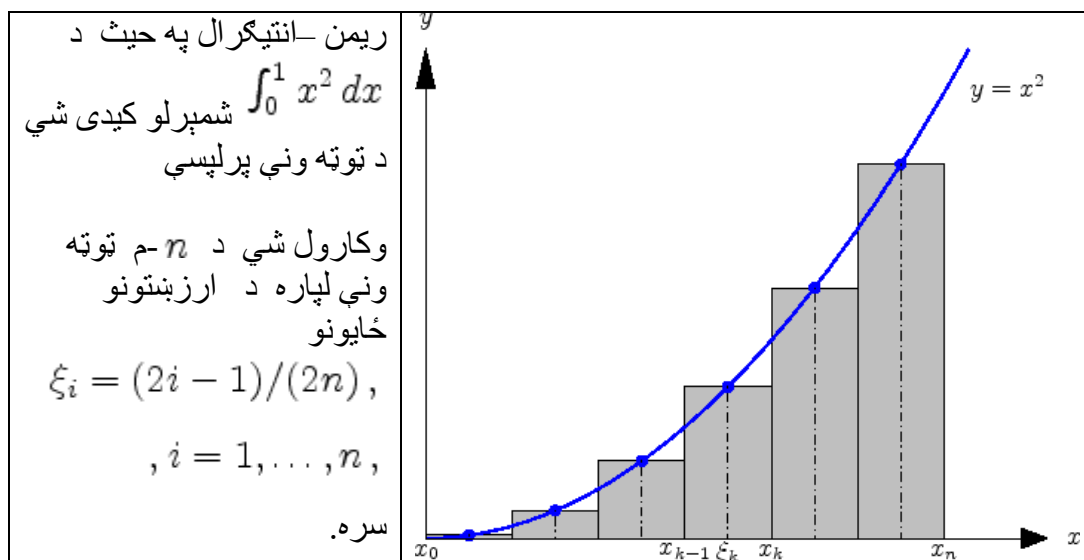
په ورته توگه د دوه پرلپسيو و همغی یا برابري پولي ته تلنه وینوول شي.

د ټوټه ناپرېکېدونکو f بنوونه تخنیکي داسي لږ پېچلي ده. سړی د f د ناپرېکېدنې انټروال بېل یا جدا ترخپرنې نیسي او هلته د برابر دوله ناپرېکېدنې څخه گټه اخلي:

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq \varepsilon \quad \text{für } |x_1 - x_2| < \delta.$$

دا اټکل د منځ ارزښت جملې په ځای رامنځ ته کيږي او نور دلایل په ورته وگه مخ ته بیولکيږي.

لیکونکي: هیولیک، هیورنر



د تعریف سره سم لاس ته راځي

سرلیک

$$\int f_{\Delta_n} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \left(\frac{2i-1}{2n} \right)^2 = \frac{1}{4n^3} \left(4 \sum_{i=1}^n i^2 - 4 \sum_{i=1}^n i + \sum_{i=1}^n 1 \right)$$

$$\frac{1}{4n^3} \left(\frac{4n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{4n(n+1)}{2} + n \right) = \frac{1}{3} - \frac{1}{12n^2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_{\Delta_n} = \frac{1}{3}$$

او له دې سره .
لیکونکي: هیولیگ، هیورنر

د انتیگرال خوږونه **Eigenschaften des Integrals**

دا لاندې ټاکلی انتیگرال دا لاندې خوږونه لري :

$$\int f + g = \int f + \int g \quad \int r f = r \int f$$

کرښیزوالس،

$$f \leq g \implies \int f \leq \int g$$

همغریزوالی :

$$\int_a^b f + \int_b^c f = \int_a^c f$$

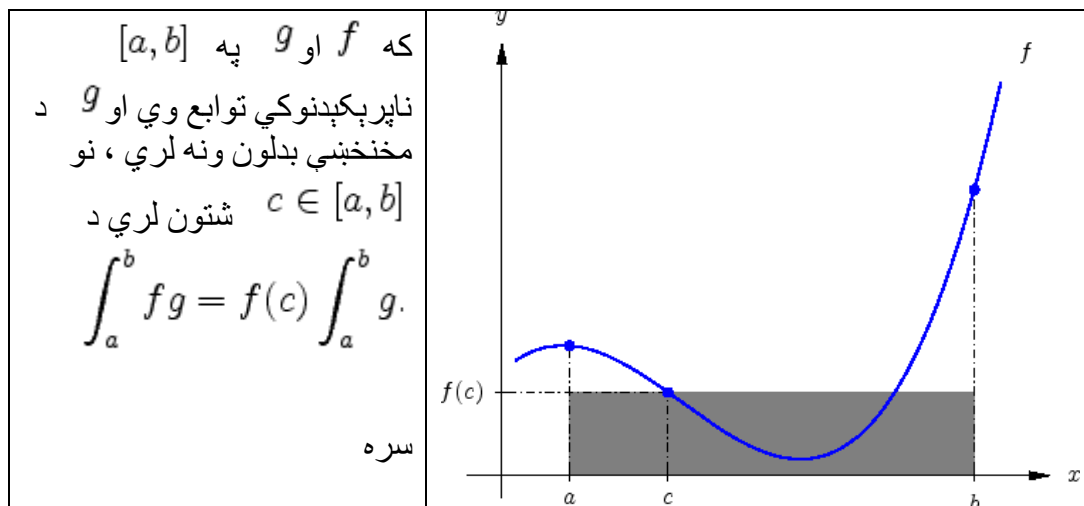
زیاتون یا جمعه

$$\int_b^a f = - \int_a^b f$$

د وروستیو خوږونو د همغریزوني له امله سری تعریفوي: .
لیکونکي: هیولیگ، هیورنر

د انتیگرال شمیرني منح ارزښت جمله

Mittelwertsatz der Integralrechnung



په ځانګې توګه، لکه په څېره کې چې لیدور دي، دی

$$\int_a^b f = (b - a)f(c)$$

لیکونکي: هیولیک، هیورنر

بي له ټوليزو بنديزونو دي $g \geq 0$ وي. د انتیګرال د اټکل له لاري

$$(\min_{[a,b]} f) g(x) \leq f(x)g(x) \leq (\max_{[a,b]} f) g(x)$$

لاس ته راځي

$$(\min_{[a,b]} f) \int g \leq \int fg \leq (\max_{[a,b]} f) \int g.$$

دا چې f د منځارزېنت جملې له مخې د $\min f$ او $\max f$ ترمنځ هر ارزېنت نیسي، نو غوښتونې برابروالی راکوي.

په ټوليزه توګه وړاندنیونه ده، چې د g مخخېنې بدلون نه لري، اړین، لکه د بېلګې

$$\underbrace{\int_{-1}^1 x^2 dx}_{>0} = \int_{-1}^1 x \cdot x dx \neq c \int_{-1}^1 x dx = 0$$

څخه لیدل کیږي.
لیکونکي: هیولیک، هیورنر

بنسټیز – یا ساده توابع **Stammfunktion**

یو تابع F د $F' = f$ سره د f بنسټیز تابع دی، او د دې لپاره لیکو

$$\int f(x) dx = F(x) + c$$

د ټولو بنسټیزو توابعو ډېری لپاره، چې د f ناتیډي انټیګرال بلل کیږي. د انټیګرالونې ثابت c په خوښه ده. د بېلګې په توګه دی

$$F_a(x) = \int_a^x f(t) dt$$

$$F_a(a) = 0$$

د سره یو ممکنه لومړی یا بنسټیزه تابع. نه ټولو بنسټیزو توابعو ته داسې روښانه د بنسټیزو توابعو اکسپلیڅیت ورکړه شونې ده،

$$f(x) = \exp(x^2)$$

یوه بېلګه ده.

لیکونکي: هیولیک، هیورنر

د انټیګرالشمیرنې اصلي جمله یا قضیه

Hauptsatz der Integralrechnung

که F د یوه ناپرېکېدونکي تابع f بنسټیز یا لومړنی تابع وي، دا په دې معنا چې

$$f = F'$$

وي، نو باور لري

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

همداسې په لنډه لیکندول

$$\int_a^b f = [F]_a^b .$$

یو بننټیز انټیگرال کېدی شي د انټروال په پای ټکو کې د بنسټیزو توابعو د تابع ارزښتونو د کمښت په ډول وشمېرل شي لیکونکي: هیولیگ، هیورنر

که دواړه خواوې د b تابع په څېر راوړل شي، نو بسیا کوي وښایو، چې دواړه خواوې برابر مشتق لري، ځکه چې د $b = a$ لپاره ارزښت سره سرخوري (دواړه خواوې صفر دي).
د کین اړخ لپاره لرو

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\int_a^{b+h} f - \int_a^b f \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_b^{b+h} f .$$

$$(b + h - b) f(c)$$

د منځ ارزښت جملې پسي یا په تعقیب انټیگرال مساوي دی په
د $c \in (b, b + h)$
سره.

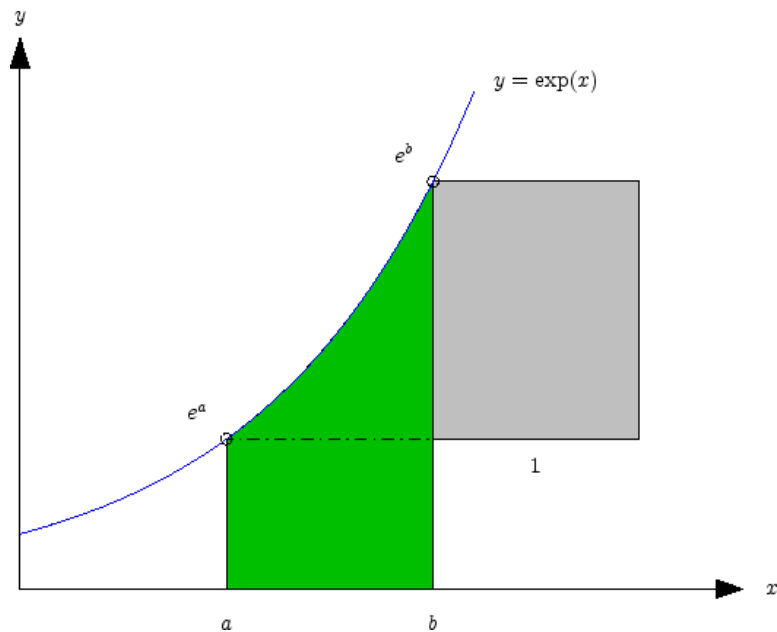
پوله ارزښت برابر دی په $f(b)$. دا د بني اړخ د مشتق سره سر خوري یا یو غریز دی لیکونکي: هیولیگ، هیورنر

د اکسپننشل تابع مشتق بېرته اکسپوننشل تابع دی او له دې امله دی

$$\int_a^b e^x dx = e^b - e^a .$$

د a او b ترمنځ گراف لاندې سطحه برابره د ولاړگودیزر (مستطیل) د سطحې سره د سور 1 او د تابع ارزښت دواړو د اوردوالي په حیث.

سرلیک



د لوکایتم تابع مشتق $F'(x) = 1/x, x \in \mathbb{R}^+$ دی اوله دې سره $F(x) = \ln(x)$

$$\int_a^b 1/x \, dx = \ln(b) - \ln(a), \quad a, b \in \mathbb{R}^+ .$$

د $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ یو بنسٹیز تابع $F(x) = \arctan x$ دی . د دې په تعقیب دی

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \arctan(1) - \arctan(0) = \frac{\pi}{4} .$$

د مشتقونی څخه لاس ته راځي، چې

$$F(x) = -\ln(\cos x)$$

د $f(x) = \tan x$ یو بنسټیز تابع دی

$$F'(x) = -\frac{1}{\cos x}(-\sin x).$$

په تعقیب دی:

$$\int_0^{\pi/4} \tan x \, dx = -[\ln(\cos x)]_0^{\pi/4} = -\ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) \approx 0.347.$$

لیکونکي: هیولیک، هیورنر

د M کتلې یو ستوری یو د کینولو ورشو تولیدوي، چې د هغې له خوا په یوه کتله m یو زور $F(x) = \gamma \frac{mM}{x^2}$ واردوي. دلته γ د گراویتیشن یا راکبني قوه ده او x د دروندتکو ترمنځ واټن دی.

د $1/x^2$ لپاره یو لومړنی یا بنسټیز تابع $-1/x$ دی. د دې لپاره چې یو تن له واټن a و واټن b ته یوړولی شو، باید کار

$$\int_a^b F(x) \, dx = \gamma mM \int_a^b \frac{1}{x^2} \, dx = -[\gamma mM/x]_a^b = \gamma mM(1/a - 1/b)$$

سرته ورسیري.

د a لپاره د ستوري د وړانگې سره برابر او $b \rightarrow \infty$ کېدی شي د برابر ایښوونې له لارې د کینیتیکی انرژي سره چې داسې په نامه د تېښتې چټکتیا v ټاکي دا په دې معنا چې چټکتیا، چې اړین ده، چې د یوه ستوري راکبنفوه پرېښودی شي یا راکبنفوي څخه ووځي:

سرلیک

$$\frac{m}{2}v^2 = \gamma \frac{mM}{a} \Rightarrow v = \sqrt{\gamma \frac{2M}{a}}$$

په اکواتور کې د ځمکې لپاره $v = 11.2 \text{ km/s}$ دی .
لیکونکي: هیولیک، هیورنر

د بنسټیزو توابعو لومړني توابع **Stammfunktionen der Grundfunktionen**

لاندې جدول بنسټیزو توابعو $f(x)$ ته لومړني توابع $F(x)$ ښايي

$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$
$x^s, s \neq -1$	$x^{s+1}/(s+1)$	$1/x$	$\ln x $
$\exp(x)$	$\exp(x)$	$\ln(x)$	$x \ln(x) - x$
$\sin x$	$-\cos x$	$\cos x$	$\sin x$
$\tan x$	$-\ln(\cos x)$	$\sin x \cos x$	$\sin^2(x)/2$
$1/(1+x^2)$	$\arctan x$	$1/\sqrt{1-x^2}$	$\arcsin x$

ټوټه- یا پارشل انټیگرالونه **Partielle Integration**

د مشتق د ضرب قانون
 لاري د ناټاکلي انتیگرال لپاره راکوي:

$$(fg)' = f'g + fg'$$

څخه په ورته توگه فرمول بندي له

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx.$$

په اړونده توگه د ناټاکلو انتیگرالونو

$$\int_a^b f'g = [fg]_a^b - \int_a^b fg'$$

لپاره باور لري. دلته دې په پام کې ونیول شي، چې د ژی ترم $[fg]_a^b$ ورکیري، که د دواړو توابعو څخه یو یې د انټروال پای ټکو کې صفر وي. په همدې توگه د پریودیکی تابع لپاره د پریود اوردوالي $(b - a)$ کې هم له منځه ځي. لیکونکي: هیولیگ، کوپف

له
ته راځي

څخه د $\alpha \neq -1$ لپاره لاس

$$\int (1+x)^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1} (1+x)^{\alpha+1} + c$$

$$\begin{aligned} \int_x^u x \sqrt{1+x} dx &= x \frac{2}{3} (1+x)^{3/2} - \int 1 \cdot \frac{2}{3} (1+x)^{3/2} dx \\ &= \frac{2}{3} x (1+x)^{3/2} - \frac{4}{15} (1+x)^{5/2} + c. \end{aligned}$$

په ورته توگه شمیرل کیري

$$\begin{aligned} \int_0^1 x \sqrt{1-x} dx &= \left[-x \frac{2}{3} (1-x)^{3/2} \right]_0^1 + \int_0^1 1 \cdot \frac{2}{3} (1-x)^{3/2} dx \\ &= 0 - \left[\frac{4}{15} (1-x)^{5/2} \right]_0^1 = \frac{4}{15}. \end{aligned}$$

سرلیک

یو لوگاریمي ضریب د یو حل توپه انٹیگرالونې له لارې له منځه تلی شي. د بیلگې په توگه دی

$$\begin{aligned}\int x^n (\ln |x|) dx &= \frac{1}{n+1} x^{n+1} (\ln |x|) - \int \frac{1}{n+1} x^{n+1} \frac{1}{x} dx \\ &= \frac{1}{n+1} x^{n+1} (\ln |x|) - \frac{1}{(n+1)^2} x^{n+1} + c.\end{aligned}$$

په دې ډول کیدی شي په خوښه پولینومونه

$$\sum_{j,k} a_{j,k} x^j (\ln |x|)^k$$

په x او $\ln |x|$ کې انٹیگرال شي یا انٹیگرال ونيول شي.

لیکونکي: هیولیگ، کوپف

د توپه انٹیگرالونې له لارې کیدی شي د پولینوم درجه کمه شي. د بیلگې په توگه دی

$$\begin{aligned}\int x^n e^x dx &= x^n e^x - \int n x^{n-1} e^x dx \\ &= x^n e^x - n x^{n-1} e^x + \int n(n-1) x^{n-2} e^x dx \\ &= \dots \\ &= e^x \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \frac{n!}{k!} x^k + c.\end{aligned}$$

په دې توگه نېدی شي د $n \in \mathbb{N}$, $x^n e^{\beta x}$, بڼې ترمونوکمبینېشن په خوښه انٹیگرال شي یا یې انٹیگرال ونيول شي. لیکونکي: هیولیگ، کوپف

د $x^n \cos x$ او $x^n \sin x$ ضربونه کېدی شي د ډېرواره توتېه انټیگرالونې له لارې انټیگرال شي:

$$\int x^n \left\{ \begin{array}{l} \cos x \\ \sin x \end{array} \right\} dx = x^n \left\{ \begin{array}{l} \sin x \\ -\cos x \end{array} \right\} - \int nx^{n-1} \left\{ \begin{array}{l} \sin x \\ -\cos x \end{array} \right\} dx$$

$$= \dots$$

د تکرار توتېه انټیگرالونې له لارې بالاخره ضرب x^k له منځه ځي. په دې توګه کېدی شي د په خوښه پولینوم توابعو لومړنی تابع په $\sin x$, x او $\cos x$ کې وشمېرل شي. لیکونکي: هیولیک، کوپف

$$\cosh'(x) = \sinh(x) \quad \sinh'(x) = \cosh(x)$$

له څخه لاس ته راځي ،

$$\int e^x \sinh(x) dx = e^x \cosh(x) - \int e^x \cosh(x) dx$$

$$= e^x \cosh(x) - e^x \sinh(x) + \int e^x \sinh(x) dx$$

او له دې سره لکه چې برېښي

$$e^x \cosh(x) = e^x \sinh(x),$$

یو په څرګنده توګه مخامخوالی یا تضاد دی. نآټیکاوې په اخرنظ پایونه کې پروت دی - د انټیگرالونې ثابتې باید په پام کې ونیول شي:

$$e^x \frac{e^x + e^{-x}}{2} = e^x \frac{e^x - e^{-x}}{2} + c.$$

د $c = 1$ ټاکنه مو ټیګي نتیجې ته لارښودوي. لیکونکي: هیولیک، کوپف

د توتېه انټیگرالونې سره لرو

سرلیک

$$\begin{aligned}\int e^{ax} \sin(bx) dx &= \frac{1}{a} e^{ax} \sin(bx) - \frac{b}{a} \int e^{ax} \cos(bx) dx \\ &= \frac{1}{a} e^{ax} \sin(bx) - \frac{b}{a^2} e^{ax} \cos(bx) - \frac{b^2}{a^2} \int e^{ax} \sin(bx) dx, (a \neq 0).\end{aligned}$$

د ویم ځل انتیگرالونه مو بېرته برابر انتیگرال ته په بیایي، او له دې سره لاس ته راځي:

$$\int e^{ax} \sin(bx) dx = \frac{ae^{ax} \sin(bx) - be^{ax} \cos(bx)}{a^2 + b^2} + c$$

بدیلي سړی

کړی شي د اویلر-مویوري فرمول هم د پورته ډول انتیگرال شمېرنو ته استعمال کړي. د

$$\cos(t) = \operatorname{Re}(\exp(it))$$

لاس ته راځي

بېلګې په توګه له

$$\begin{aligned}\int_0^\pi e^t \cos(t) dt \operatorname{Re} \left(\int_0^\pi \exp(t + it) dt \right) &= \operatorname{Re} \left(\left[\frac{\exp(t + it)}{1 + i} \right]_0^\pi \right) \\ &= \operatorname{Re} \left(\frac{-e^\pi - 1}{1 + i} \right) = -(e^\pi + 1)/2.\end{aligned}$$

لیکونکي: هیولیک، کوپف

له

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^\pi \sin(nx) \sin(mx) dx &= - \int_{-\pi}^\pi n \cos(nx) \left(-\frac{1}{m} \cos(mx) \right) dx \\ &= \frac{n^2}{m^2} \int_{-\pi}^\pi \sin(nx) \sin(mx) dx\end{aligned}$$

د $m \neq n$ لپاره لرو

$$\int_{-\pi}^\pi \sin(nx) \sin(mx) dx = 0.$$

په پام کې دې ونیول شي، چې د تابع پریودیټی یا تل بېرته رتګرځېدنه په توتېه انتیگرالونه کې د ژی شرایط له منځه ځي. د $m = n$ لپاره د لومړي مساوات او

$$\sin^2 + \cos^2 = 1$$

څخه لاس ته راځي

$$2 \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(nx) dx = \int_{-\pi}^{\pi} 1 dx = 2\pi.$$

په ورته توگه سری د تابع $\cos(mx)$ اور توگونالیتی بنایي. لیکونکي: هیولیک، کوپف

دلنا - تابع Delta-Funktion

د دیراک Diracsche دلنا-تابع δ د

$$\int_{\mathbb{R}} \delta f = f(0)$$

له لاری تعریف دی، د کوم سره چې یو په خوښه ناپرېکیدونکی تابع دی، چې د یوه انتروال (a, b) د باندې وکیري. د توتې انٹیگرالونې په مرسته یا په یوه پوله پروسه کېدی شي δ د Heavisideschen توپتابع د مشتق تولیدوالي

$$H(x) = \begin{cases} 1, & \text{für } x > 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

په حیث تشریح کیدی شي.

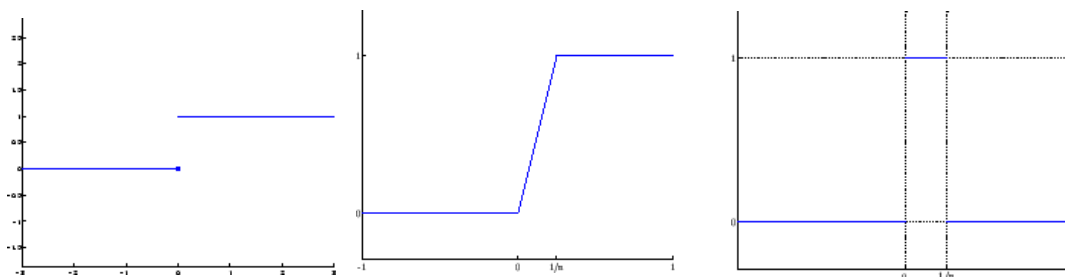
لیکونکي: هیولیک، کوپف

که $0 \in (a, b)$ وي، نو د توتې انٹیگرال سره لاس ته راځي

$$\begin{aligned} \int_{-a}^b H' f &= [Hf]_a^b - \int_a^b H f' \\ &= - \int_0^b f' = -[f]_0^b \\ &= f(0) \end{aligned}$$

$$\int H' f = \int \delta f \quad \text{او له دې سره .}$$

سرلیک



Heaviside-Funktion
 H

نږدېوالی
 H_n

نږدېوالی
 $\delta_n = H'_n$

Näherung

Näherung

der Heaviside-Funktion

der Delta-Funktion

په د پوله پروسې سره د جور شوي د Heaviside-Funktion اپروکسیمیشن سره
سری بدیل لاس ته راوړي :

$$\int_a^b H'_n f = n \int_0^{1/n} f = f(t_n) \rightarrow f(0).$$

له دې سره د اخري مساوات لپاره د منځ ارزښت جمله کارول شوي.
لیکونکي: هیولیگ، کویف

د متحولو – یا اووښتونو بدلون Variablensubstitution

د ځنځیري قانونو

$$\frac{d}{dx} F(g(x)) = f(g(x))g'(x), \quad f = F',$$

څخه د بدلون $y = g(x)$ لپاره لومړنیو تابع جوړولو له لارې لاس ته راځي

$$\int f(g(x))g'(x) dx = F(y) + c = \int f(y) dy.$$

په ورته توگه د ټاکلي انتیگرال لپاره باور لري

$$\int_a^b f(g(x))g'(x) dx = F(g(b)) - F(g(a)) = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y) dy$$

د دفرنشل کونو په ورسته کېدی شي دا فرمول په لاندې بڼه

$$\int_a^b f(g(x)) \frac{dy}{dx} dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y) dy$$

ولیکل شي.

يو ساده ځانگړی حالت يو کرښيز متحول بدلون دی

$$x \mapsto y = px + q.$$

په دې حالت کې دی

$$\int f(px + q) dx = \frac{1}{p} F(y) + c$$

همداسې

$$\int_a^b f(px + q) dx = \frac{1}{p} [F]_{pa+q}^{pb+q}.$$

لیکونکي: هیولیک، کوپف

د انتیگرال

$$\int_0^{\pi/\varepsilon} \frac{\sin \varepsilon x}{x} dx$$

$$dx = \frac{1}{\varepsilon} du$$

لپاره بدلون $u = \varepsilon x$, او د انتیگرالونې پولو ترانسفورمیشن

$$x = \pi/\varepsilon \leftrightarrow u = \pi$$

راکوي

سرلیک

$$\int_0^{\pi/\varepsilon} \frac{\sin \varepsilon x}{x} dx = \int_0^{\pi} \frac{\sin u}{u} du.$$

په ټولیزه توګه د یو بدلون $u = rx$ سره باور لري

$$\frac{dx}{x} \rightarrow \frac{du}{u}$$

او له دې سره

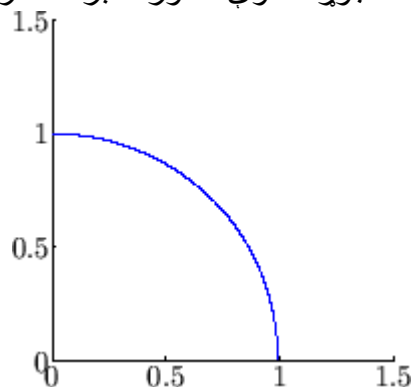
$$\int_a^b f(rx) \frac{dx}{x} = \int_{ra}^{rb} f(u) \frac{du}{u}.$$

لیکونکي: هیولیګ، کوپف

تابع

$$f(x) = \sqrt{1-x^2}, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

دا جوړه شوي څلورمه برخه ګردی یا څلورمه برخه داېره ښايي



له دې سره د انتیګرال لپاره باور لري

$$\int_0^1 f(x) dx = \frac{\pi}{4}.$$

که بدلن $x = \sin u$, $dx = \cos u du$, $x = 0 \rightarrow u = 0$ او

$$x = 1 \rightarrow u = \frac{\pi}{2}$$

، نو لاس ته راځي

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^{\pi/2} \cos^2 u du = \frac{1}{2} \frac{\pi}{2},$$

لکه څنگه چې انتظار کېده. د اړخني مساوات لپاره دا لاندې

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 u + \cos^2 u du = \frac{\pi}{2}$$

وکارول شو.

$$dx = -\sin u du$$

په عجیبه ډول بدلون ،

$$x = 0 \rightarrow u = -\pi/2$$

او $x = 1 \rightarrow u = 2\pi$ په برېښنده توګه یوه ناتیګه

نتیجه راکوي:

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_{-\pi/2}^{2\pi} -\sin^2 u du = -\frac{5\pi}{4}.$$

څه ناتیګ وو؟ په کلکه نیولې توګه باور لري

$$\sqrt{1 - \cos^2 u} = |\sin u|$$

او له دې سره

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_{-\pi/2}^{2\pi} |\sin u|(-\sin u)du = \frac{\pi}{4}.$$

د لاندې انټیګرال لپاره

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 6x + 5}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x-3)^2 - 4}} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{((x-3)/2)^2 - 1}}$$

$$y = (x-3)/2 \quad dx = 2dy$$

بدلون ، راکوي

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 6x + 5}} = \int \frac{dy}{\sqrt{y^2 - 1}}.$$

سرلیک

د ورپسې بدلون $y = \cosh t$, $dy = \sinh t dt$ سره د

له $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$ امله لاس ته راځي

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 6x + 5}} &= \int \frac{\sinh t dt}{\sinh t} \\ &= \int dt = t + c \\ &= \operatorname{arcosh} y + c \\ &= \operatorname{arcosh}((x - 3)/2) + c \\ &= \ln \left(\frac{x - 3}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{x^2 - 6x + 5} \right) + c \end{aligned}$$

له دې سره د بېلګې په توګه لاس ته راځي

$$\begin{aligned} \int_5^7 \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 6x + 5}} &= \ln \left(2 + \frac{1}{2} \sqrt{2} \right) - \ln 1 \\ &= \ln \left(2 + \frac{1}{2} \sqrt{2} \right). \end{aligned}$$

که په انتګرالېدونکي کې دننه مشتق پېژندل کېږي، لکه د بېلګې په توګه د

$$\int \frac{(\ln x)^2}{x} dx,$$

لپاره، نو د بدلون قانون په ځانګړې توګه ساده دی. په دې بېلګه کې

$$y = g(x) = \ln x, \quad g'(x) = \frac{1}{x}$$

ځای په ځای کوو او لاس ته راوړو

$$\int g(x)^2 g'(x) dx = \int y^2 dy = \frac{1}{3} y^3 + c.$$

د په څنډ يا معکوس بدلون سره لرو

$$\int \frac{\ln x^2}{x} dx = \frac{1}{3}(\ln x)^3 + c.$$

لیکونکي: هیولیک، کوپف

په تیوپیکي توگه سری هڅیري چې د بدلون له لاری انتیگرالېدونکی ساده کړي. د بېلگي په توگه د

$$\int \frac{e^{3y}}{e^{2y} - 1} dy$$

لپاره نږدې دی چې

$$y = g(x) = \ln x \quad \Leftrightarrow \quad x = e^y$$

کیردي. داد

$$\frac{dy}{dx} = g'(x) = \frac{1}{x} = e^{-y}$$

له امله دا ترانسفورمي شوی ناپاکلی انتیگرال راکوي

$$\int \frac{x^3}{x^2 - 1} \frac{dy}{dx} dx = \int \frac{x^2}{x^2 - 1} dx = \int \left(1 + \frac{1}{x^2 - 1} \right) dx$$

$$\int 1 dx + \int \frac{1}{x^2 - 1} dx = x + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x - 1}{x + 1} \right| + c.$$

د $x = e^y$ د بېرته بدلون له لاری بالاخره لاس ته راځي

$$F(y) = e^y + \frac{1}{2} \left| \frac{e^y - 1}{e^y + 1} \right| + c.$$

لیکونکي: هیولیک، کوپف

لومړی (بنسټیزه -) تابع

$$\int \frac{dx}{\cos x}$$

سرلیک

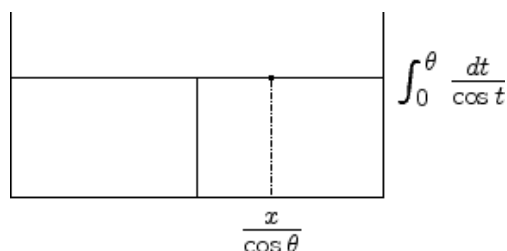
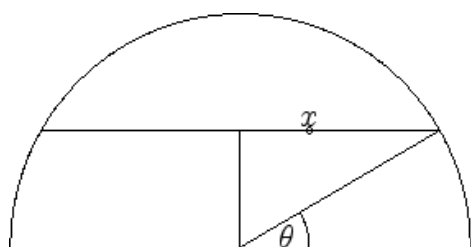
کیدۍ شي د بدلون سره

$$u = \frac{1}{\cos x} + \tan x = \frac{1 + \sin x}{\cos x}, \quad du = \left(\frac{\sin x}{\cos^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} \right) dx,$$

و شمېرل شي:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\cos x} &= \int (\cos x)^{-1} \left(\frac{\sin x}{\cos^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} \right)^{-1} du \\ &= \int \frac{du}{u} = \ln |u| + c \\ &= \ln \left| \frac{1}{\cos x} + \tan x \right| + c. \end{aligned}$$

يو کارونه يې د Mercator-Projektion دی. له دې سره د ځمکې پورته سطحه کونجرېښتونې په سطحه برېوځي.



د سور گردۍ (طول البلد) له دې سره د $1/\cos \theta$ په نسبت سره غزيرې.

ليکونکي: هيوليگ، کوف

ساده راشنل انټيگراليدونکي د ساده قطب سره

Elementare rationale Integranden mit einfachen Polen

د درې بنسټيويو په راشنل توابعو لومړنۍ توابع دي

$$\int \frac{dx}{ax + b} = \frac{1}{a} \ln |x + b/a| + c$$

$$\int \frac{dx}{(x - a)^2 + b^2} = \frac{1}{b} \arctan \left(\frac{x - a}{b} \right) + c$$

$$\int \frac{(x - a)dx}{(x - a)^2 + b^2} = \frac{1}{2} \ln((x - a)^2 + b^2) + c$$

لیکونکي: هیولیگ، کوپف

فرمولونه کېدی شي ترلي د مشتق له لاري پسي وشمېرل شي. بدیل يې د انتیگرال ساده بڼه بدلونونه شوني دي.

$$\int dy/y = \ln |y| + c$$

له لاس ته راځي

$$\int \frac{dx}{ax + b} = \frac{1}{a} \int \frac{dx}{x + b/a} = \frac{1}{a} \ln |x + b/a| + c.$$

د بڼه بدلون پسي

$$\int \frac{dx}{(x - a)^2 + b^2} = \frac{1}{b^2} \int \frac{dx}{((x - a)/b)^2 + 1}$$

بدلون $y = (x - a)/b$, $dx = b dy$ راځوي

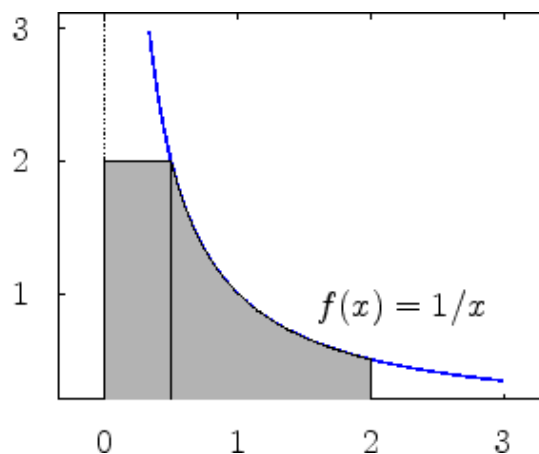
$$\frac{1}{b} \int \frac{dy}{y^2 + 1} = \frac{1}{b} \arctan y + c = \frac{1}{b} \arctan \left(\frac{x - a}{b} \right) + c.$$

د بدلون $y = (x - a)^2 + b^2$, سره لاس ته راځي

$$\int \frac{(x - a) dx}{(x - a)^2 + b^2} = \frac{1}{2} \int \frac{dy}{y} = \frac{1}{2} \ln |y| + c$$

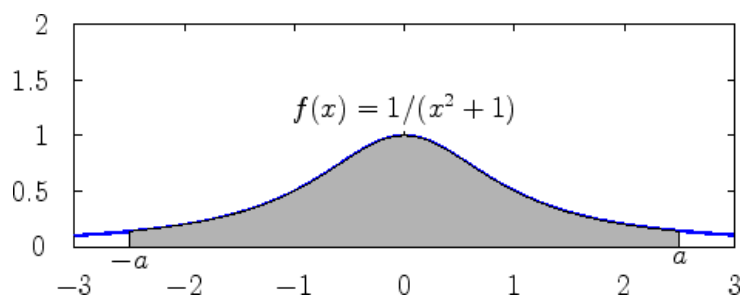
سرلیک

$$= \frac{1}{2} \ln((x-a)^2 + b^2) + c.$$



د خړې سطحې مساحت د

$$2 \frac{1}{2} + \int_{1/2}^2 \frac{1}{x} dx = 1 + \ln 2 - \ln \frac{1}{2} = 1 + \ln 4$$

له لارې شمېرل کيږي.
ليکونکي: هيوليگ، کوف

د گراف لاندې سطحه داسې شمېرل کيږي

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$$

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-a}^a \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a \rightarrow \infty} \arctan a - \arctan(-a) \rightarrow \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

ليکونکي: هيوليگ، کوف

د

$$r(x) = \frac{3x + 6}{2x^2 - 4x + 10}$$

لومړی تابع ټاکلو لپاره، لومړی د مخرج مربع تکمیلونه جوړیږي:

$$2(x^2 - 2x + 5) = 2((x - 1)^2 + 2^2).$$

په اړونده توګه صورت هم بڼه بدلیږي:

$$3(x + 2) = 3((x - 1) + 3).$$

له دې سره کېدی شي د ستاندارد افادې په توګه ټوټه یا تجزیه شي:

$$r(x) = \frac{3}{2} \frac{x - 1}{(x - 1)^2 + 2^2} + \frac{9}{2} \frac{1}{(x - 1)^2 + 2^2}.$$

له دې سره لاس ته راځي

$$\int r(x) dx = \frac{3}{4} \ln((x - 1)^2 + 4) + \frac{3}{4} \arctan\left(\frac{x - 1}{2}\right) + c.$$

د ټاکلي انټیګرال لپاره سرې د پولو د په ځای ایښوونې له لارې لومړنی
تابع لاس ته راوړي

$$\frac{3}{4} (\ln 8 - \ln 4 + \arctan(1) - \arctan(0)) = \frac{3}{4} \ln 2 - \frac{3}{16} \pi.$$

لیکونکي: هیولیګ،

ساده راشنل انټیګرالونه د زیاتواره قطب سره

Elementare rationale Integranden mit mehrfachen Polen

د $n \in \mathbb{N}$ لپاره دی

سرلیک

$$\int (x - a)^{-n-1} dx = -\frac{1}{n} (x - a)^{-n} + c .$$

د ډېرواره کمپلکس کنجوگيري قطب‌ایونو کې د اړونده مربع

$$q(x) = (x - a)^2 + b^2$$

ضریبونو لپاره باور لري

$$\int \frac{c(x - a) + d}{q(x)^{n+1}} dx = \frac{d(x - a)}{2b^2 n q(x)^n} - \frac{c}{2n q(x)^n} + \frac{d(2n - 1)}{2b^2 n} \int \frac{dx}{q(x)^n} .$$

د گراد یا درجي ردکشن د لومړني تابع رکورزيو شمېرنه شونې کوي. لیکونکي: هیولیک، کویف

لومړنی فرمول د $dx = dy$ او $y = x - a$ د بدلون له لارې لاس ته راځي:

$$\int (x - a)^{-n-1} dx = \int y^{-n-1} dy = -\frac{1}{n} y^{-n} + c .$$

د دویم فرمول د بنیوني لپاره لومړی یو ساده د رکوزیون فرمول منځ ته راځي.

د ټوټه انټیگرالوني سره لاس ته راځي

$$\begin{aligned} \int \frac{dy}{(1 + y^2)^k} &= \frac{y}{(1 + y^2)^k} + 2k \int \frac{y^2}{(1 + y^2)^{k+1}} dy \\ &= \frac{y}{(1 + y^2)^k} + 2k \left(\int \frac{dy}{(1 + y^2)^k} - \int \frac{dy}{(1 + y^2)^{k+1}} \right) . \end{aligned}$$

له دې کټمټوالی منځ ته راځي

$$\int \frac{dy}{(1 + y^2)^{k+1}} = \frac{y}{2k(1 + y^2)^k} + \frac{2k - 1}{2k} \int \frac{1}{(1 + y^2)^k} dy .$$

له دې سره اوس د بدلون $y = \frac{x-a}{b}$ سره لاس ته راځي

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{((x-a)^2 + b^2)^{n+1}} &= \frac{1}{b^{2n+2}} \int \frac{dx}{\left(\left(\frac{x-a}{b}\right)^2 + 1\right)^{n+1}} \\
&= \frac{1}{b^{2n+1}} \int \frac{dy}{(1+y^2)^{n+1}} \\
&= \frac{1}{b^{2n+1}} \left(\frac{y}{2n(1+y^2)^n} + \frac{2n-1}{2n} \int \frac{dy}{(1+y^2)^n} \right) \\
&= \frac{x-a}{2b^2n((x-a)^2 + b^2)^n} + \frac{2n-1}{2b^2n} \int \frac{dx}{((x-a)^2 + b^2)^n}.
\end{aligned}$$

ترم

$$\int \frac{c(x-a)}{((x-a)^2 + b^2)^{n+1}} dx$$

$$y = (x-a)^2 + b^2$$

کیدی شي د بدلون له لارې وشمیرل شي، ځکه چې په صورت

کې د y مشتق ځای لري:

$$\begin{aligned}
\int \frac{c(x-a)}{((x-a)^2 + b^2)^{n+1}} dx &= \frac{c}{2} \int \frac{dy}{y^{n+1}} \\
&= \frac{c}{2(-n)y^n} \\
&= -\frac{c}{2n((x-a)^2 + b^2)^n}.
\end{aligned}$$

لیکونکي: هیولیک، کوپف

د انټیگرال

$$\int \frac{2x+1}{(x^2+9)^2} dx$$

لپاره په ټولیز فرمول کې د ایښوونې وروسته د ډېرواره قطبونو سره د

$$a = 0, b = 3, c = 2, d = 1$$

او $n = 1$ سره راکوي

سرلیک

$$\frac{-2}{2(x^2 + 9)} + \frac{x}{18(x^2 + 9)} + \frac{1}{18} \int \frac{1}{x^2 + 9} dx$$

او د بڼه بدلون پسې

$$\begin{aligned} & \frac{x - 18}{18(x^2 + 9)} + \frac{1}{18} \left(\frac{1}{3} \arctan\left(\frac{x}{3}\right) + c \right) \\ &= \frac{x - 18}{18(x^2 + 9)} + \frac{1}{54} \arctan\left(\frac{x}{3}\right) + c'. \end{aligned}$$

لیکونکي: هیولیک، کویف

د راشنلتوابعو انیگرالونه Integration rationaler Funktionen

د حقیقي ټوټه کسر ټوټه ونې له لارې کېدی شي یو حقیقي راشنل تابع د لاندې درې ساده بنسټیو پ جمعې

$$ax^n, \quad \frac{c}{(ax + b)^n}, \quad \frac{c(x - a) + d}{((x - a)^2 + b^2)^n}$$

د $n \in \mathbb{N}_0, a, b, c, d \in \mathbb{R}$ سره انځور شي. د لومړنیو توابعو په مرسته کېدی شي د دې بنسټیوابعو لپاره د په خوښه راشنلتوابعو لپاره لومړنی توابع وټاکل شي. لیکونکي: هیولیک، کویف

$$\int r(x) dx, \quad r(x) = \frac{x^5 + 10x^3 + 5^2 - x + 25}{x^4 + 8x^2 - 9},$$

د شمېرلو لپاره لومړی یو ټوټه کسر ټوټه ونه سرته رسوو. د پولینوم وېش پسې،

$$r(x) = x + \frac{2x^3 + 5x^2 + 8x + 25}{x^4 + 8x^2 - 9},$$

اود مخرج ضربیونو جوړولو پسې

$$x^4 + 8x^2 - 9 = (x + 1)(x - 1)(x^2 + 9),$$

لاس ته راځي

$$r(x) - x = \frac{a}{x + 1} + \frac{b}{x - 1} + \frac{cx}{x^2 + 9} + \frac{d}{x^2 + 9}.$$

که د اصلي مجراج سره ضرب شي، نو لاس ته راځي

$$2x^3 + 5x^2 + 8x + 25$$

$$= a(x - 1)(x^2 + 9) + b(x + 1)(x^2 + 9) + (cx + d)(x^2 - 1)$$

$$x^3(a + b + c) + x^2(-a + b + d) + x(9a + 9b - c) + 1(-9a + 9b - d)$$

او د ضریبونو د پرتلي $a = -1$, $b = 2$, $c = 1$ او $d = 2$ له لارې.
يوگوني ترمونه کېدی اوس ساده انټیگرال شي:

$$\int \frac{x^5 + 10x^3 + 5^2 - x + 25}{x^4 + 8x^2 - 9}$$

$$= \int x dx + \int \frac{-dx}{x + 1} + \int \frac{2dx}{x + 1} + \int \frac{xdx}{x^2 + 9} + \int \frac{2dx}{x^2 + 9}$$

$$\frac{1}{2}x^2 - \ln|x + 1| + 2 \ln|x - 1| + \frac{1}{2} \ln(x^2 + 9) + \frac{2}{3} \arctan\left(\frac{x}{3}\right) + c.$$

ليکونکي: هيو ليگ، کوف

د ساين او کوساين د ضرب انټیگرالونه

د $a^2 \neq b^2$ لپاره د زياتون-يا جمعي قضيي څخه لاس ته راځي

سرلیک

$$\int \sin(ax) \sin(bx) dx = \frac{\sin((a-b)x)}{2(a-b)} - \frac{\sin((a+b)x)}{2(a+b)} + c$$

$$\int \sin(ax) \cos(bx) dx = -\frac{\cos((a-b)x)}{2(a-b)} - \frac{\cos((a+b)x)}{2(a+b)} + c$$

$$\int \cos(ax) \cos(bx) dx = \frac{\sin((a-b)x)}{2(a-b)} + \frac{\sin((a+b)x)}{2(a+b)} + c.$$

په ځانګړې توګه د ټولګنیزو یا تامعددي a, b لپاره انټیګرال په پریودی کې انټروال $[-\pi, \pi]$ باندې ورکېږي. د ټوټه انټیګرالونې په مرسته لاس ته راځي

$$\int \sin^n(ax) dx = \frac{1}{na} \sin^{n-1}(ax) \cos(ax) + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2}(ax) dx$$

$$\int \cos^n(ax) dx = \frac{1}{na} \sin(ax) \cos^{n-1}(ax) + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2}(ax) dx.$$

داسې کیدی شي اکسپوننت سوکخسیو یا تل کم شي. د $n = 2$ لپاره په ځانګړې توګه لاس ته راځي

$$\int \sin^2(ax) dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin(2ax)}{4a} + c$$

$$\int \cos^2(ax) dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin(2ax)}{4a} + c.$$

په ځانګړې توګه باور لري

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(nx) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nx) dx = \pi$$

$$n \in \mathbb{N}$$

د لپاره .
لیکونکي: هیولیگ، کوپف

که د لومړی کتمتوالي د بني اړخ مشتق ونيول شي، نو سړی لاس ته راوړي

$$\frac{1}{2} \cos((a-b)x) - \frac{1}{2} \cos((a+b)x).$$

د زیاتون - یا جمعي قضیه راکوي

$$\frac{1}{2} (\cos(ax) \cos(bx) + \sin(ax) \sin(bx) - \cos(ax) \cos(bx) + \sin(ax) \sin(bx)) =$$

$$= \sin(ax) \sin(bx),$$

کوم چي د کین لور د انتیگرال سره سرخ وړي.

د لومړنی تابع کېدی شي د توتیه انتیگرال سره وشمېرل شي. د بېلگي په توگه دی

$$\int \sin(ax) \sin(ax) dx$$

=

$$-\frac{1}{a} \cos(ax) \sin(ax) - \int \left(-\frac{1}{a} \cos(ax) \right) (a \cos(ax)) dx$$

$$-\frac{1}{a} \cos(ax) \sin(ax) + \int (1 - \sin^2(ax)) dx.$$

=

د $\int \sin^2(ax) dx$ پسې حل کونه غوښتونی لومړنی تابع راکوي.

لیکونکي: هیولیگ، کوپف

د کمپلکس تریگونومتیکي توابعو انتیگرالونه

Integration komplexer trigonometrischer Polynome

له

سرليک

$$\int e^{ikx} dx = \frac{1}{ik} e^{ikx} + c, \quad 0 \neq k \in \mathbb{Z},$$

څخه د کمپلکس تريگونوميټريکي پولینومونو لپاره لاس ته راځي

$$p(x) = \sum_{|k| \leq n} c_k e^{ikx},$$

داسې چې

dass

$$\int p(x) dx = c + c_0 x + \sum_{0 \neq |k| \leq n} \frac{c_k}{ik} e^{ikx}$$

همداسې

sowie

$$\int_{-\pi}^{\pi} p = 2\pi c_0$$

باور لري.

د اوپلر-مويورې فرمول په مرسته کېدی شي په دې توګه په خوښه پولینومونه

$$\cos(kx) \quad \sin(kx)$$

په او کې انټیګرال شي.

لیکونکي: هیولیک، کوپف

د

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^4 x dx$$

شمدرلو ته د اوپلر-مويورې فرمول په مرسته انټیګرال په لاندې توګه لیکل کيږي

$$\frac{1}{16} (e^{ix} - e^{-ix})^4 = \frac{6}{16} + \sum_{k \neq 0} c_k e^{ikx}$$

او $2\pi \frac{6}{16} = \frac{3}{4}\pi$ د انتیگرال ارزښت په توګه لاس ته راوړي.

بدیلي کیدی شي توتېه انتیگرال وکارول شي:

$$\begin{aligned} \int \sin^4 x dx &= \int \sin x \sin^3 x dx \\ &= -\cos x \sin^3 x + 3 \int \cos^2 x \sin^2 x dx \\ &= -\cos x \sin^3 x + 3 \int \sin^2 x dx - 3 \int \sin^4 x dx. \end{aligned}$$

که په $\sin^4 x$ انتیگرال بنی لور ته راوړل شي، نو د درجې کموالی راګوي

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^4 x dx = -\frac{1}{4} [\cos x \sin^3 x]_{-\pi}^{\pi} + \frac{3}{4} \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x dx.$$

د

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x dx = \pi$$

په مرسته سرې $\frac{3}{4}\pi$ هم د انتیگرال ارزښت په توګه لاس ته راوړي لیکونکي: هیولیک، پفایل

تریګونومتريکي بدلونونه Trigonometrische Substitutionen

د لاندې بدلونونو په مرسته کېدی شي د ساده الجبري انتیګرالیدونکو یوه لړۍ اکسپلېسیت یا په ښه هڅرګنده توګه وشمېرل شي.

سرلیک

$$\begin{array}{lll}
 x = a \sin t : & dx = a \cos t dt & \sqrt{a^2 - x^2} = a \cos t \\
 x = a \tan t : & dx = a / \cos^2 t dt & \sqrt{a^2 + x^2} = a / \cos t \\
 x = a / \cos t : & dx = a \sin t / \cos^2 t dt & \sqrt{x^2 - a^2} = a \tan t
 \end{array}$$

په بل حالت کې باید د ریښې د پروت محور متحولي لومړی په مربعیز تکمیلېدونکي بڼه رارل شي.

لیکونکي: هیولیک، پفایل

د انتیگرال

$$\int_0^{1/2} \sqrt{1-x^2} dx$$

لپاره بدلون $x = \sin t$, $dx = \cos t dt$ او د پولو اعیارول $x = 0 \rightarrow t = 0$ او $x = 1/2 \rightarrow t = \pi/6$ راکوي

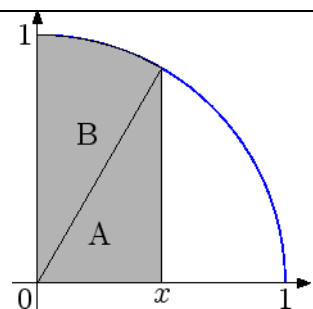
$$\int_0^{\pi/6} \cos^2 t dt = \left[\frac{1}{2} (\sin t \cos t + t) \right]_0^{\pi/6} = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{8}.$$

ناتاکلی انتیگرال دی

$$\int \sqrt{1-x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2} \arcsin x + c.$$

انتیگرال کیدی شي د یوه ساده هندسي یا
حُمکچیز اند(فکر) سره هم وټاکل شي

لکه د څیرې څخه چې لیدل کیږي، د
 $\sqrt{1-x^2}$ د گراف لاندې سطحه په
دوه برخسطحو ودانه یا جوړه ده.



د درېگودي سطحې مساحت $A = \frac{x}{2} \sqrt{1-x^2}$ دی او د گردی برخط یا قطاع

مساحت د $t = \arcsin x$ کونج سره $B = \frac{1}{2} t = \frac{1}{2} \arcsin x$ ده. د دې سطحو د

مساحت جمعه کیدل غوښتونې سطحه راځوي.
لیکونکي: هیولیک، کوپف

د انتیگرال

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$$

لیاره د بدلون $dx = 1/\cos^2 t dt$
څخه لاس ته راځي $x = \tan t$,

$$\int \frac{dt/\cos^2 t}{\tan t/\cos t} = \int \frac{dt}{\sin t} = \ln \left| \tan \frac{t}{2} \right| + c,$$

د کوم سره چې اخیښ مساوات د بنی اړخ د مشتق نیولو له لارې ازمايل کېدی شی.
د بېرته بدلون له لارې لاس ته راځي

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}} = \ln \left| \tan \left(\frac{1}{2} \arctan x \right) \right| + c.$$

له دې سره د بېلګې په توګه لاس ته راځي

$$\begin{aligned} \int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}} &= \ln \left| \tan \frac{\pi}{4} \right| - \ln \left| \tan \frac{\pi}{8} \right| \\ &= \ln 1 - \ln \left(\frac{\frac{1}{2}\sqrt{2}}{1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}} \right) \\ &= \ln(1 + \sqrt{2}). \end{aligned}$$

لیکونکي: هیولیک، کوپف

د انتیگرال

سرلیک

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 6x + 5}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x-3)^2 - 4}} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{((x-3)/2)^2 - 1}}$$

$$y = (x-3)/2, \quad dx = 2dy$$

راکوي لپاره بدلون

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 6x + 5}} = \int \frac{dy}{\sqrt{y^2 - 1}}$$

$$y = \frac{1}{\cos t}, \quad dy = \frac{\sin t}{\cos^2 t} dt, \quad \sqrt{y^2 - 1} = \tan t$$

د پسي بدلون راځي

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 6x + 5}} = \int \frac{dt}{\cos t} = \ln \left| \frac{1}{\cos t} + \tan t \right| + c,$$

د کوم سره چې اخرنی برابروالی د بنی خوا د مشتق نیونی له لاری ازمايل کیدی شي.
د په څنټ یا معکوس بدلون پسی د

$$\sin t = \sqrt{1 - (1/y)^2}, t = \arccos y = \arcsin \sqrt{1 - (1/y)^2}$$

سره لومړنی تابع د لاس ته راځي

$$\ln \left| y + y \sin \left(\arccos \frac{1}{y} \right) \right| + c = \ln \left| y + y \sqrt{1 - \left(\frac{1}{y} \right)^2} \right| + c$$

$$= \ln \left| \frac{x-3}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{x^2 - 6x + 5} \right| + c.$$

لیکونکي: هیولیک، کویف

د ساین او کوساین راشنل توابع

Rationale Funktionen von Sinus und Cosinus

د بدلون

$$x = \tan(t/2)$$

سره د یوه په خوبنه راشنل تابع r لپاره لاس ته راځي

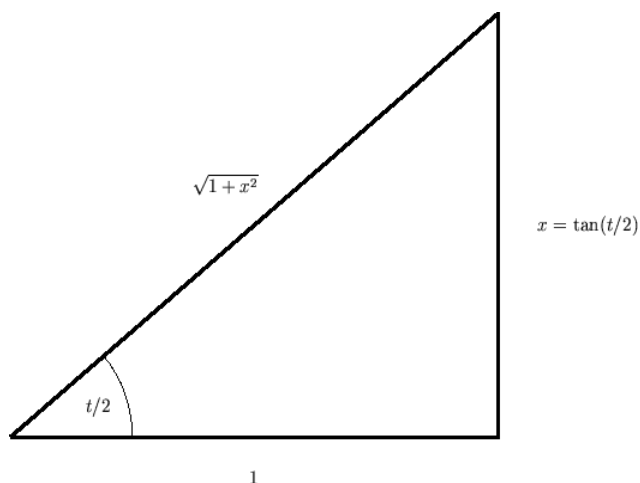
$$\int r(\cos t, \sin t) dt = \int r \left(\frac{1-x^2}{1+x^2}, \frac{2x}{1+x^2} \right) \frac{2}{1+x^2} dx.$$

له دې سره تریگونومتریکی تابع کېدی شي په یوه راشنل انتیگرال واروي، کوم چې د ټوټه کسر ټوټه ونې سره شمېرل کېدی شي.

لیکونکي: هیولیگ، اېرینس

لکه د څیرې څخه چې لیدل کیږي، باور لري

$$\cos(t/2) = 1/\sqrt{1+x^2}, \quad \sin(t/2) = x/\sqrt{1+x^2}$$



له دې لاس ته راځي

$$dx = \frac{1}{2} \frac{1}{\cos^2(t/2)} dt = \frac{1}{2} (1+x^2) dt$$

همداسي

$$\cos t = \cos^2(t/2) - \sin^2(t/2) = \frac{1-x^2}{1+x^2},$$

سرلیک

$$\sin t = 2 \cos(t/2) \sin(t/2) = \frac{2x}{1+x^2}.$$

لیکونکي: هیولیک، اږین

$$\int \frac{dt}{\sin t} = \int \frac{1+x^2}{2x} \frac{2}{1+x^2} dx$$

د بدلون $x = \tan(t/2)$ سره لاس ته راځي

$$= \int \frac{dx}{x} = \ln |\tan(t/2)| + c.$$

په اړونده تگه لاس ته راځي

$$\int \frac{dt}{\cos t} = \int \frac{1+x^2}{1-x^2} \frac{2}{1+x^2} dx$$

$$= \int \left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} \right) dx$$

$$= \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + c.$$

د بېرته بدلون پسي لاس ته راځي $x = \tan(t/2)$

$$\int \frac{dt}{\cos t} = \ln \left| \frac{1 + \tan(t/2)}{1 - \tan(t/2)} \right| + c.$$

لیکونکي: هیولیک، اږین

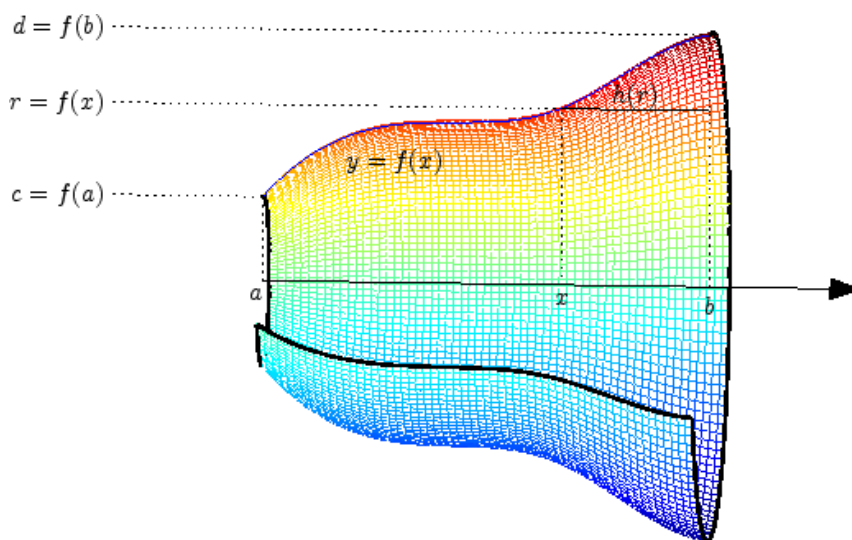
د څرخیدونو بدنونو ډکی یا حجم **Volumen von Rotationskörpern**

$$r = f(x) \geq 0$$

د V ډکی حجم د x په محور جوړ شوي بدن د تابع گراف ، $a \leq x \leq b$

د څرخون له لارې کېدی شي انټیگرېشن له لارې په گردۍ ډوله غوڅي یا تقاطع باندې شمېرل کېدی شي:

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 dx .$$



بدیلي کېدی شي د توتي پوښ باندې انټیگرال شي.

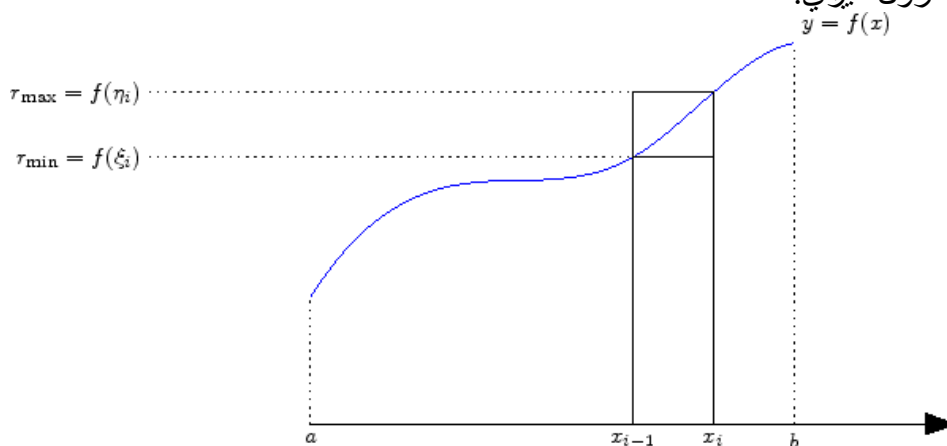
$$V = \pi c^2(b - a) + 2\pi \int_c^d rh(r) dr ,$$

چیرته چې c همداسې d مینیمال همداسې ماکسیمال وړانگه r او په بدن کې خوندي توتي پوښ ټول جگوالی دی د وړانگې r سره. دا واریانت له ټولو د همغریز

وړانگې تابع f لپاره موخ وره ده. لیکونکي: هیولیگ، هیورنر

سرلیک

د لومړي فرمول د بنووني لپاره په څېره کې کښل شوی اېروکسیمیشن یا نږدېوالی کارول کېږي.



یوه ټوټه کونې Δ یوه انټروال $[x_{i-1}, x_i]$ ، $i = 1 \dots n$ ، لپاره کېدی شي ښکې (حجم) د یوې ټوټې

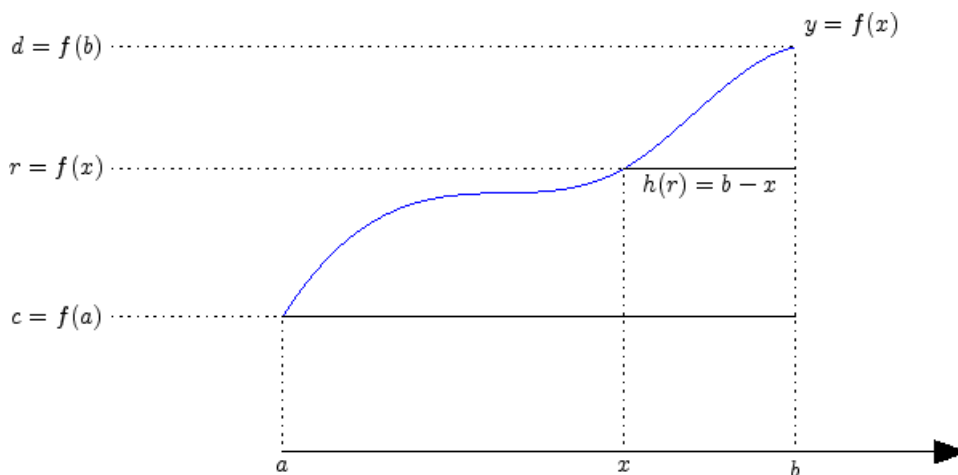
له لارې د مینیمال وړانګې $f(\xi_i)$ سره او یوې ټوټې د ماکسیمال وړانګې $f(\eta_i)$ سره رابند شي. د ټول حجم V لپاره نو بیا باور لري

$$\pi \sum_{i=1}^n f(\xi_i)^2 \Delta x_i \leq V \leq \pi \sum_{i=1}^n f(\eta_i)^2 \Delta x_i,$$

د $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ سره دواړه دباندي ترمونه د ریمن-جمعه ده، چې د انټیګرال ارزښت لور ته ځي، یعنی باور لري

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 dx.$$

د دویم فرمول د بنووني لپاره لومړی نیول کېږي، چې همغږیز جګېدونکی دی.



د همداسې د $x = f^{-1}(r)$ سره لاس ته راځي

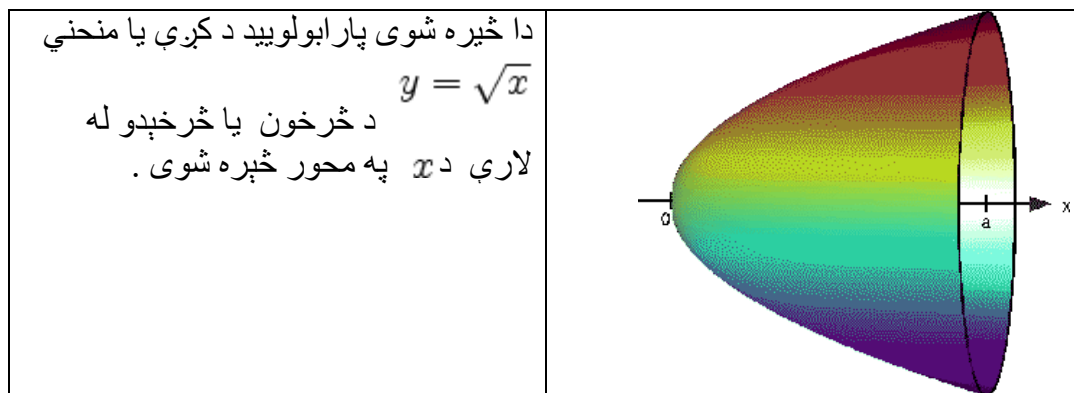
$$\begin{aligned}
 2\pi \int_{c=f(a)}^{d=f(b)} h(r)r \, dr &= \pi \int_a^b \underbrace{(b-x)}_u \underbrace{2f(x)f'(x)}_{v'} \, dx \\
 &= \pi (b-x)f(x)^2 \Big|_a^b + \pi \int_a^b f(x)^2 \, dx \\
 &= \underbrace{-\pi(b-a)c^2}_{\text{innerer Zylinder}} + \pi \int_a^b f(x)^2 \, dx,
 \end{aligned}$$

څه چې دویم فرمول په گوته کوي.

د همغږیز ټیټېدونکې توابعو لپاره کېدی شي په ورته توګه مخ ته ولاړ شو. په ټولیز حالت کې دا د همغږیزوالي ورشو د ټوټه کونې له لارې لاس ته راځي

لیکونکي: هیولیک، هیورنر

سرلیک



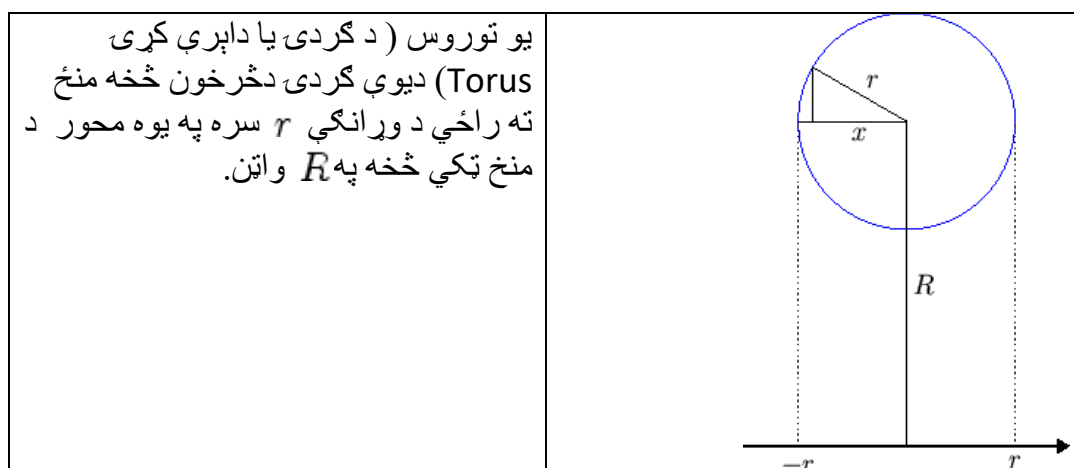
د څرخیدونکي بدن د څرخیدني قانون سره سم پکې یا حجم دی

$$\pi \int_0^a (\sqrt{x})^2 dx = \pi \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^a = \frac{1}{2} \pi a^2 .$$

بدیلي د توتې پوښ بادي انټیگرلوني له لارې لاس ته راوړي

$$2\pi \int_0^{\sqrt{a}} r(a - r^2) dr = 2\pi \left[-\frac{1}{4}(a - r^2)^2 \right]_0^{\sqrt{a}} = \frac{1}{2} \pi a^2 .$$

لیکونکي: هیولیک، هیورنر



ډکي یا حجم د دوه څرخیدونکو بدنونو د کمښت څخه شمیرل کيږي

$$V = \pi \int_{-r}^r \left(R + \sqrt{r^2 - x^2} \right)^2 dx - \pi \int_{-r}^r \left(R - \sqrt{r^2 - x^2} \right)^2 dx$$

$$= 4\pi \int_{-r}^r R\sqrt{r^2 - x^2} dx .$$

د بدلون $x = r \sin \varphi$, $dx = r \cos \varphi d\varphi$ سره لاس ته راځي

$$V = 4\pi Rr \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \varphi r \cos \varphi d\varphi$$

$$= 4\pi Rr^2 \frac{\pi}{2} = 2\pi^2 Rr^2 ,$$

<p style="text-align: center;">ځکه چې</p> $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 \varphi d\varphi = \frac{\pi}{2} .$ <p>لکه چې څېره شوی یو له غونډاري د R په وړانګي په پراته محور د وړانګي r سره رابېله شوي توتته ده.</p>	
--	--

د دې لپاره چې ډکي یا حجم شمېرو، د وړانګي $x, r \leq x \leq R$ سره په توتته پوښ انتیګرال نیولکيږي. د $R = 5, r = 3$ لپاره د $h(x) = 2\sqrt{R^2 - x^2}$ سره لاس ته راځي

سرلیک

$$V = 2\pi \int_r^R 2x\sqrt{R^2 - x^2} dx = 2\pi \left[-\frac{2}{3} (R^2 - x^2)^{3/2} \right]_r^R$$

$$= \frac{4}{3}\pi(25 - 9)^{3/2} = \frac{256}{3}\pi.$$

د یوې کزې یا منحنې اوږدوالی **Länge einer Kurve**

د یوې کزې L اوږدوالی د ناپېرېکېدونکې مشتقور پارامتریک کولو $t \mapsto p(t)$ سره،
 $a \leq t \leq b$ دی،

$$\int_a^b |p'(t)| dt.$$

په ځانگړې توگه د یوې کزې لپاره په xy -سطحه د پارامتریک انځورونې

سره باور لري $p(t) = (x(t), y(t))$

$$L = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt.$$

په ځانگړې توگه د یوه تابع $y = f(x)$, $x \in [c, d]$ گراف لاندې اوږدوالی لري

$$L = \int_c^d \sqrt{1 + f'(x)^2} dx.$$

د $p(a)$ او $p(t)$ ترمنځ د کړو توتو اوږدوالی،

$$s(t) = \int_a^t |p'(\tau)| d\tau,$$

کیدې شي د کانونیکې کزې پارمتر په توگه وکارول شي. سړی داسې په نامه د کزې اوږدوالي پسي پارمتر په کونه لاس ته راوړي:

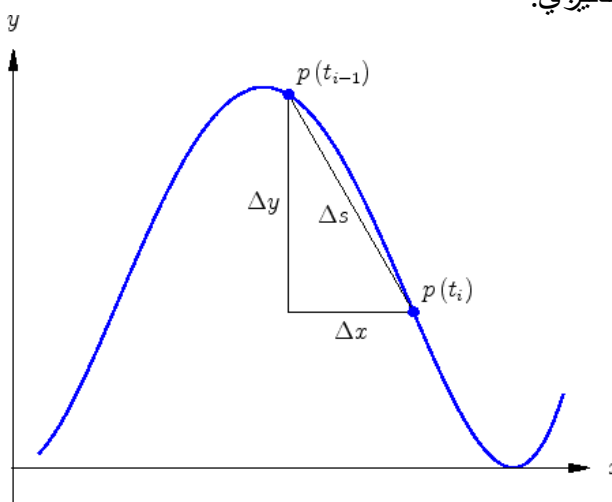
$$q(s) = p(t), \quad |q'| = 1.$$

د نورمي تانجنت کړې په بنسټ د کانونیکي پارمټري کوني لپاره باور لري

$$\int_C f = \int_0^L f(q(s)) ds$$

د C د L اوږدوالي سره.
لیکونکي: هیولیگ، هیورنر

د یوې مسطحې کړې د اوږدوالي شمیرني لپاره د پارامتر انتروال بیه ټوټو وېشل کيږي او یو برخه انتروال $[t_{i-1}, t_i]$ لپاره کړه د پای ټکو د ترونکریښي له لارې خای بدلیري یا بدلیري.



د انتگرال د منځ ارزښت جملې سره بیا باور لري:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \Delta s_i &= \sum_{i=1}^n \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} \\ &= \sum_{i=1}^n \sqrt{(p'_1(\xi_i))^2 + (p'_2(\eta_i))^2} \Delta t_i, \end{aligned}$$

سرلیک

$$\xi_i, \eta_i \in [t_{i-1}, t_i]$$

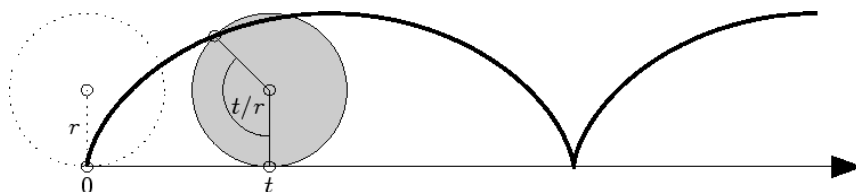
د سره . دا اخرنی وپینه یا افرده د ورکړ شوي انتیگرال د یمن-

زیاتون یا -جمعی دی.

په ورته تگه د ډبرپراخېدونکي یا ډبربعديزې کېرې لپاره د مشتق نورم د انتیگرال په بڼه راکوي.

لیکونکي: هیولیک، هیورنر

که د r وړانگی سره یوه گردی یا داېره د په محور گرځوو یا وڅرخوو، نو ژي ټکی یو څیکلوید تشریح کوي.



د سرچینې لپاره د پیل ټکي په حیث

$$\begin{aligned} x(t) &= t + r \cos(3\pi/2 - t/r) = t - r \sin(t/r) \\ y(t) &= r + r \sin(3\pi/2 - t/r) = r - r \cos(t/r) \end{aligned}$$

$$t \in [0, 2\pi r]$$

د سره ، د یوې گېرې لیندې یو پارمترې کونه ده.

د لیندې اوږدوالی دی

$$L = \int_0^{2\pi r} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$$

$$= \int_0^{2\pi r} \sqrt{(1 - \cos(t/r))^2 + (\sin(t/r))^2} dt.$$

$$s = t/r$$

د بدلون ، $dt = r ds$ او کټمتوالي

$$\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1, \quad 1 - \cos(2\varphi) = 2 \sin^2 \varphi$$

$$L = r \int_0^{2\pi} \sqrt{2(1 - \cos(s))} ds = r \int_0^{2\pi} 2 \sin(s/2) ds = 8r.$$

لیکونکي: هیولینگ، هیورنر

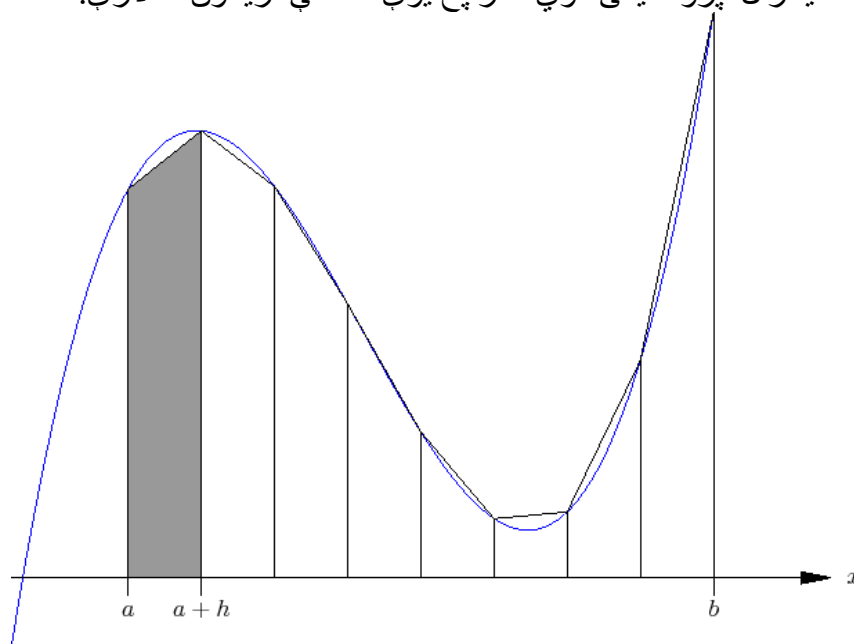
د دوزنقي قانون Trapez-Regel

نردیوالی

$$\int_a^b f(x) dx \approx s_h f =$$

$$= h(f(a)/2 + f(a+h) + \dots + f(b-h) + f(b)/2)$$

انتیگرال اپروکسیمي کوي د تراپخ یوې سطحې زیاتون له لاري.



د یوه دوه واره ناپرېکېدونکي مشتقور تابع د ناتیکاوي پاره باور لري:

سرلیک

$$s_h f - \int_a^b f = \frac{b-a}{12} f''(r) h^2,$$

د $r \in [a, b]$ لپاره.

په ټيکه توګه ناتيکاوۍ د خويو يا هوارو توابعو لپاره ګاونډيز يا اسيمپټوټيکي وده لري

$$s_h f - \int_a^b f = c_1 (f'(b) - f'(a)) h^2 + c_2 (f'''(b) - f'''(a)) h^4 + \dots$$

له f او h څخه خپلواکي ثابتي c_j سره. له دې څخه لاس ته راځي، چې د تراپح قانون د پريوډيکي توابعو لپاره خورا دقيق دی. ناتيکاوۍ ګړندی د صفر په لور ځي نسبت هر h -توان ته. لیکونکي: هيوليګ، هيورنر

په يوه انټروال ناتيکاوۍ دی

$$\frac{h}{2} (f(0) + f(h)) - \int_0^h 1 \cdot f = \int_0^h (t - h/2) f'(t) dt.$$

بيا ټوټه انټيګرالونه او منځ ارزښت جملهې استعمال راکوي

$$- \int_0^h \frac{1}{2} t(t-h) f''(t) dt = - \underbrace{\int_0^h \frac{1}{2} t(t-h) dt}_{h^3/12} f''(r).$$

په ټوټه انټروال باندې د جمعې پسي سړی لاس ته راوړي

$$\frac{1}{12} h^3 \sum_{i=1}^n f''(r_i).$$

جمعه کيدی شي د

$$n \min f'' \leq \sum f''(r_i) \leq n \max f''$$

له لاري اټکل شي. د ترمنځ ارزښت جملې پسي بالاخره لاس ته راځي

$$\sum f''(r_i) = n f''(r) = \frac{b-a}{h} f''(r),$$

$$r \in [a, b]$$

د يوه سره.

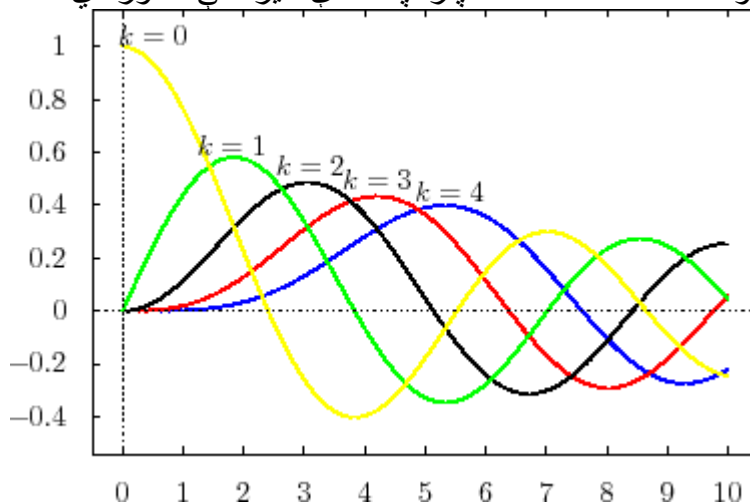
د گاونډ يا مجانب ناتيکاوې ودي ښوونه اوږده ده. دا د باقي غړي په تل توټه انټيگرالونه ولاړه ده او د ژي ترمونو په يوه مناسبه کارونه يا استعمال. ليکونکي: هيوليگ، هيورنر

د بسل-تابع Bessel-Funktionen J_k د ټولگنيز k لپاره دا لاندي انټيگرال انځورونه لري

$$J_k(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\cos(kz - x \sin(z))}_{f(z)} dz$$

$$k = 0, \dots, 4$$

او د لپاره په لاندي څيره کې انځور دي



سرلیک

د تراپخ قانو شمیرلو سره شری کاروي، چي

$$\frac{1}{2} (f(a) + f(a + 2\pi)) = f(a)$$

او دا چي f جوړه دی. که ټکي

$$z_i = -\pi + \frac{1 + 2i}{2} \frac{2\pi}{n},$$

وټاکو، نو جمعه

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(z_i) = 2 \sum_{i=n/2}^{n-1} f(z_i)$$

دې جوړه شي.

$n = 4, 8, \dots, 64$
ټکو سره بنایي،

لکه د $J_1(2)$ لاندې نږدېونه یا اپرکسیمیشن د پولې ته تلنه فوقالعاده گړندی ده.

n	
4	<u>0.45464871341284084769800993295587</u>
8	<u>0.57655235602472460377030331810649</u>
16	<u>0.57672480775615774487465153090293</u>
32	<u>0.57672480775687338720244824226913</u>
64	<u>0.57672480775687338720244824226913</u>

دا د دوزنقي قانون جگ ټیکای د خوی پریودیکی انٹیگرال لپاره یوپییک دی او کېدی شي د ناتیکیکای دیوهه ټیکي انخوروني، د اویلر-ماکلورن-Euler Maclaurinschen د جمعي فرمول مدلل کرای شي.

لیکونکي: هیولیگ، هیورنر

د گاوس فرمول **Gauß-Formel**

د n -مې درجې یا نظم د گاوس فرمول په نږدې بڼه یا ډول د یوه تابع انتیگرال ټاکي د انتیگرال د انټربولیشن پولینوم له لارې د n -مې درجې د لاگرانژ پولینومونو په صفر ځایونو $x_1 < \dots < x_n$ کې:

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n w_i f(x_i)$$

د w_i سره د لاگرانژ پولینوم

$$p_i(x) = \prod_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

په انتوال $[-1, 1]$ باندې.

فرمول د $\text{Grad} < 2n$ درجې پولینوم لپاره ټیک دی او د ټولو له مخه د تحلیلی توابعو لپاره خورا ټیک دی. ټول وزنونه w_i زیاتیز یا مثبت دي، او ټکيه ځایونه x_i په انتگریشن انټروال $(-1, 1)$ کې پراته دي. دا د گاوس پارامتر تر 10-م نظم پورې جدولی شوی او په لاندې جدول کې ورکړ شوی دی

n	x_i	w_i
2	$\pm \frac{1}{3}\sqrt{3}$	1
3	0 $\pm \frac{1}{5}\sqrt{15}$	$\frac{8}{9}$ $\frac{5}{9}$
4	$\pm \frac{1}{35}\sqrt{525 - 70\sqrt{30}}$ $\pm \frac{1}{35}\sqrt{525 + 70\sqrt{30}}$	$\frac{1}{2} + \frac{1}{36}\sqrt{30}$ $\frac{1}{2} - \frac{1}{36}\sqrt{30}$
5	0 $\pm \frac{1}{21}\sqrt{245 - 14\sqrt{70}}$ $\pm \frac{1}{21}\sqrt{245 + 14\sqrt{70}}$	$\frac{128}{225}$ $\frac{161}{450} + \frac{13}{900}\sqrt{70}$ $\frac{161}{450} - \frac{13}{900}\sqrt{70}$

سرلیک

د گاوس پارامتر x' او w' د خوښې انټگریشن انټروال $[a, b]$ لپاره د کرښیز تراسفورمېشن له لارې لاس ته راځي:

$$x'_k = a + \frac{b-a}{2}(x_k + 1), \quad w'_k = \frac{b-a}{2} w_k.$$

لومړی بنایو، چې نږدې ټاکنه د $\text{Grad} < n$ درجې د پلوینوم f لپاره ټیک دی. دا د لاندې څخه لاس ته راځي

$$\sum_{k=1}^n w_k f = \sum_{k=1}^n \left(\int_a^b p_k(x) dx \right) f(x_k) = \int_a^b \underbrace{\sum_{k=1}^n p_k(x) f(x_k)}_{=q(x)} dx.$$

دا چې p_k نسبت و ټکو x_k ته د لاگرانژ پولینومونه دي، په دې ټکو کې و f ته انټرپولیشن پولینوم دی او داسې له f سره همغږیز کېږي.

د ځانګړو ټکو ټاکلو له لارې کېدی شي حتی د $\text{Grad} < 2n$ درجې پولینوم f ټیک انټیګرال شي.

دې ته f د پولینوموېشن په مرسته داسې لیکو

$$f(x) = p(x)s(x) + r(x)$$

د n درجې لژندر-پولینوم p او د $\text{Grad} < n$ درجې پولینومونه r او s .

که $p(x_k) = 0$ په پام کې ونیول شي، نو لکه پورته لاس ته راځي

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n w_k f(x_k) &= \sum_{k=1}^n \left(\int_a^b p_k(x) dx \right) (p(x_k)s(x_k) + r(x_k)) \\ &= \int_a^b \sum_{k=1}^n p_k(x) r(x_k) dx = \int_a^b r(x) dx. \end{aligned}$$

له بلي خوا باور لري

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x) dx &= \int_a^b (p(x)s(x) + r(x)) dx \\ &= \int_a^b p(x)s(x) dx + \int_a^b r(x) dx \\ &= \int_a^b r(x) dx,\end{aligned}$$

ځکه چې p د $\text{Grad} < n$ درجي پولینوم ته اور توگونال دی. د وزن زاتيزوالی یا مثبتوالی د کټمټوالي څخه لاس ته راځي

$$w_k = \int p_k = \sum_i w_i p_k(x_i) = \sum_i w_i p_k(x_i)^2 = \int p_k^2.$$

د اخرنی تر مخ یا وړاندې مساوات د $p_k(x_i) = \delta_{k,i}$ له امله باور لري، او اخرنی، دا چې p_k^2 $\text{Grad} < 2n$ درجه لري، نو د گاوس-فرمول له لارې ټیک انټیگرال کیدی شي.

د گاوس-فرمول د روښانه ولو ته لاندې جدول د مختلفو انټیگراندونو یا انټیگرال کېدونکو نږدې ټاکل یا اپروکسیمیشن ښايي.

n	$\int_1^1 e^{-x^2} dx$	$\int_0^\pi \frac{\sin x}{x} dx$	$\int_0^1 \sqrt{1-x^4} dx$
1	2.000000	2.000000	0.968245
2	1.433062	1.848571	0.891006
3	1.498679	1.851976	0.879356
4	1.493334	1.851936	0.876417
5	1.493663	1.851937	0.875306

سرلیک

په اڅرنی انتیگرال کې ورو پولي ته تلني دلیل په $x = 1$ کې زینګولاریتی ده.

د ګاوس-فرمول فقط خویو یا هوارو $glatt$ (یو تابع خوی یا هوار تابع یو ماتماتیکی تابع دی، چې ناپربېدونکی او ناپای زیات مشتقور وي توابعو ته پېر دقیق دی.

لیکونکي: اپې، هیولیګ

ناڅرګند یا نا معلوم انتیگرال Uneigentliches Integral

د یو په یوه انتروال $[a, b)$ توتې ډوله ناپربېدونکی تابع f لپاره کېدی شي د

$$\int_a^b f = \lim_{c \rightarrow b^-} \int_a^c f$$

له لاري د انتیگرال کلیمه په ناپای انتروالونو ($b = \infty$) او نامحدودو

$$f(b) = \pm\infty$$

انتیګرالیدونکو () وغزول شي.

په ورته توګه زینګولاریتی په لاندې یا په دواړو پولو مطالعه شي. په اڅرنی حالت کې

$$c \rightarrow a+ \quad d \rightarrow b-$$

باید پوله ارزښت د پرلپسي د ټاکنو څخه خپلواک وي.

د یوه ناتاکلي انتیگرال د شتون لپاره پوره کېدونکي د f مطلق انتیګرالوروالی دی، دا په دې معناچي

$$\int_c^d |f(x)| \leq \text{ثابت}$$

د ټول برخه انتروالونو $[c, d] \subset (a, b)$ لپاره.

لیکونکي: اپې، هیولیګ

د ناتاکلي انتیگرال د شمیرلو لپاره

$$\int_0^{\infty} e^{-x} dx.$$

د $b > 0$ لپاره ټاکي

$$\int_0^b e^{-x} dx = [-e^{-x}]_0^b = -e^{-b} + 1.$$

له دې سره سرې لاس ته راوړي

$$\int_0^{\infty} e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} (-e^{-b} + 1) = 1.$$

که پوله ارزښت ساده شمېرل کېدونکی وي، نو سرې پسي ترلي ناکلې پولي کاروي، داپه دې معنا چې سرې لیکي

$$\int_0^{\infty} e^{-x} dx = [-e^{-x}]_0^{\infty} = 0 - (-1) = 1$$

او دا په راوړل شوي بیلگه کې. لیکونکي: اپې، هیولیک

د ناکلو انټیگرالونو

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x(\ln(x))^r} dx.$$

$$y = \ln(x) \quad dy = dx/x$$

لپاره د بدلون

سره سرې لاس ته راوړي

$$\int_2^b \frac{1}{x(\ln(x))^r} dx = \int_{\ln(2)}^{\ln(b)} \frac{1}{y^r} dy = \begin{cases} \frac{(\ln(b))^{1-r} - (\ln(2))^{1-r}}{1-r}, & r \neq 1 \\ \ln(\ln(b)) - \ln(\ln(2)), & r = 1 \end{cases}$$

په دې پسي د $b \rightarrow \infty$ لپاره پوله ارزښت ټیک هلته شتون لي، که $r > 1$ باور ولري. په دې حالت کې دی

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x \ln(x)^r} dx = -\frac{(\ln(2))^{1-r}}{1-r}.$$

سرلیک

لیکونکي: ایپ، هیولیک

د ناکلی انٹیگرال

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{\sqrt{\cos(x)}} dx.$$

لیپاره انٹیگرال پوله په پورته انٹیگرال پولي $x = \frac{\pi}{2}$ سیگلار دی. سری د $0 < b < \frac{\pi}{2}$

لیپاره لاس ته راوړي

$$\int_0^b \frac{\sin(x)}{\sqrt{\cos(x)}} = \left[-2\sqrt{\cos(x)} \right]_0^b = -2\sqrt{\cos(b)} + 2.$$

له دې سره لاس ته راځي

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{\sqrt{\cos(x)}} dx = \lim_{b \rightarrow \frac{\pi}{2}} \int_0^b \frac{\sin(x)}{\sqrt{\cos(x)}} = \lim_{b \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(-2\sqrt{\cos(b)} + 2 \right) = 2.$$

لیکونکي: ایپ، هیولیک

د ناکلی انٹیگرال

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+2x}{1+x^2} dx.$$

لیپاره

$$\arctan(x) + \ln(1+x^2)$$

د انٹیگرال پوله بنسټ- یا ساده تابع دی. نایکه ایښوونه

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+2x}{1+x^2} dx &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_{-b}^b \frac{1+2x}{1+x^2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\arctan(x) + \ln(1+x^2) \right]_{-b}^b \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} (2 \arctan(b)) = \pi \end{aligned}$$

د ناکلی انٹیگرال لپاره راځي. د تعریف سره سم د ناکلی انٹیگرال پورته او کبته پولي باید یوله بل خپلواک و څېرل شي. داچې نه پوله ارزښت

$$\lim_{c \rightarrow -\infty} \int_c^0 \frac{1+2x}{1+x^2} dx = \lim_{c \rightarrow -\infty} (-\arctan(c) - \ln(1+c^2))$$

او نه پوله ارزښت

$$\lim_{d \rightarrow \infty} \int_0^d \frac{1+2x}{1+x^2} dx = \lim_{d \rightarrow \infty} (\arctan(d) + \ln(1+d^2))$$

شتون لري، دا ناتاکلی انتیگرال

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+2x}{1+x^2} dx$$

هم شتون نه لري.

لیکونکي: اپ، هیولیگ

د نامعلوم انتیگرال لپاره د پرتلي قضیه

Vergleichskriterium für uneigentliche Integrale

که f د g لپاره یو مایورانتي وي، داپه دي معناچي

$$|f(x)| \leq |g(x)| \quad a < x < b$$

باور لري، نو د g د مطلق انتیگرال وړوالي څخه د انتیگرال

$$\int_a^b f(x) dx .$$

شتون لاس ته راځي

لیکونکي: اپ، هیولیگ

فقط د پوله ارزښت

سرلیک

$$\int_a^b f = \lim_{c \rightarrow b^-} \int_a^c f$$

شتون ترخیرني لاندې نیول کیري. په نورو حالتونو کې په ورته توګه مخ ته ځو. تابع

$$r(c) = \int_a^c |f|$$

برابر غریزه جګېدونکي ده او پورته لور ته د $\int_a^b |g|$ له لارې رابنده یا محدود ده. په

دې پسي r د $c \rightarrow b^-$ لپاره پولي ته تلونکی دی او له دې امله $\int_a^b |f|$ شتون لري. تابع

$$s(c) = \int_a^c (f + |f|)$$

هم برابر غریزه جګېدونکي ده او د $2 \int_a^b |g|$ له لارې رابنده یا محدود. پسي s هم د

$\int_a^b (f + |f|)$ شتون لري. له دې څخه د $c \rightarrow b^-$ لپاره پولي ته تلونکی دیاو له دې امله

$$\int_a^b f = \int_a^b (f + |f|) - \int_a^b |f|.$$

شتون لاس ته راځي.

لیکونکي: ایپ، هیولیک

د پرتلغ تلغ لپاره زیات وخت $f(x) = x^r$ کارول کیري. د $0 < a < b < \infty$ لپاره دی

$$\int_a^b x^r dx = \begin{cases} \frac{b^{r+1} - a^{r+1}}{r+1}, & r \neq -1 \\ \ln(b) - \ln(a), & r = -1. \end{cases}$$

دا ترم د $b \rightarrow \infty$ لپاره ټیک هلته پولې ته تلونکی دی، که $r < -1$ باور ولري، دا په دې معنا چې انټیگرال

$$\int_1^{\infty} x^r dx$$

شتون ولري ټیک د $r < -1$ لپاره.

د $a \rightarrow 0+$ لپاره ټیک هلته پوله ارزښنا لاس ته راځي، که $r > -1$ باور ولري، دا په دې معنا چې انټیگرال

$$\int_0^1 x^r dx$$

ټیک د $r > -1$ لپاره شتون ولري.

لیکونکي: ایپ، هیولیک

د دې لپاره چې د نامعلوم انټیگرال شتون د

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx$$

په حیث وښایو، سری دا انټیگرال په دوه برخو توپه کوي.

دا چې $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ دی، نو لاندې انټیگرال شتون لري

$$\int_0^1 \frac{\sin(x)}{x} dx.$$

سرلیک

په انټروال $[1, \infty)$ د نامعلوم انټیگرال لپاره د ټوټه انټیگرالونې له لارې لاس ته راځي

$$\int_1^b \frac{\sin(x)}{x} dx = \left[-\frac{\cos(x)}{x} \right]_1^b - \int_1^b \frac{\cos(x)}{x^2} dx.$$

د $b \rightarrow \infty$ لپاره لومړی ترم د $\cos(1)$ په لور ځي او دویم د پرتلې قضیې له مخې پولې ته ځي، ځکه چې

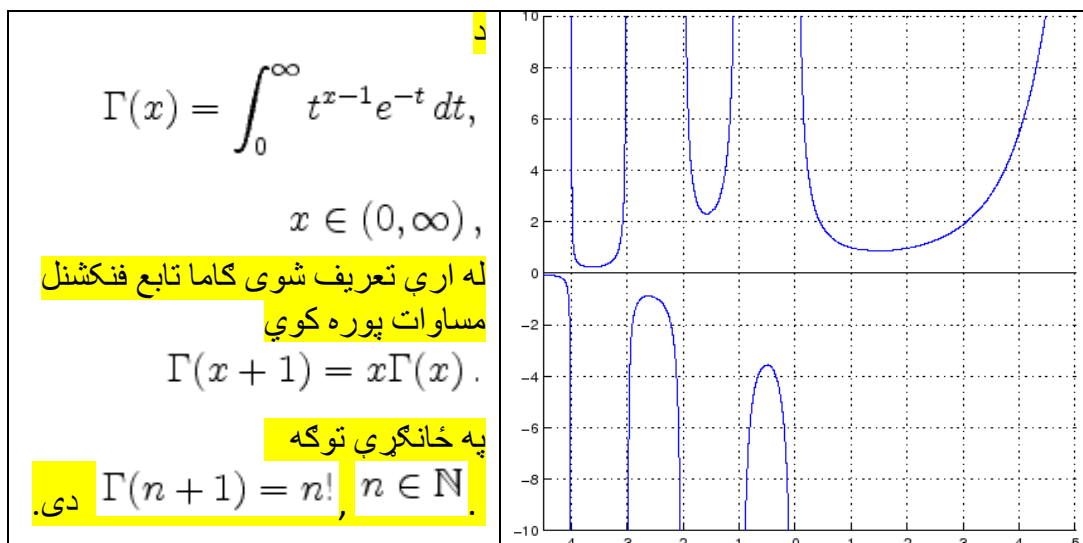
$$\left| \frac{\cos(x)}{x^2} \right| \leq \left| \frac{1}{x^2} \right|.$$

سره له دې چې د تابع کوم ورکړ شوی لومړی - یا بنسټیز تابع نه لري، کېدی شي د نامعلوم انټیگرال ارزښت وټاکي.

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

لیکونکي: اپې، هیولیگ

گاما تابع یا - فنکشن Gamma-Funktion



د فنکشنل مساواتو په مرسته کېدی شي گاما-تابع د کمیز پروت یا x محور لپاره هم تعریف کړی شي. لکه د جور شوي تابع گراف څخه چې لیدل کیږي، دا ساده قطبونه د $x = 0, -1, \dots$ لپاره لري.

لیکونکي: اپې، هیولیک

انتیگرال

$$\int_0^1 t^{x-1} e^{-t} dt$$

فقط د $0 < x < 1$ لپاره پرابلم جوړوي. په دې حالت کې انتیگرال د $t^{x-1} e^{-t} \leq t^{x-1}$

له امله د پرتلي قضیې له مخې پولي ته تلونکی دی.

انتیگرال

$$\int_1^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

هم د پرتلي قضیې په بنسټ شتون لري او اټکلونه $t^{x-1} e^{-t} \leq t^{-2}$

د پوره لوي t لپاره بسيا کوي. د ټوټه انتیگرال سره لاس ته راځي

$$\begin{aligned} \Gamma(x+1) &= \int_0^{\infty} t^x e^{-t} dt = [-t^x e^{-t}]_{t=0}^{\infty} + \int_0^{\infty} x t^{x-1} e^{-t} dt \\ &= 0 + x \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt = x \Gamma(x), \end{aligned}$$

او له دې سره د پوره اېنډکشن په مرسته او $n \in \mathbb{N}$ د $\Gamma(1) = 1$ لپاره لاس ته راځي

سرلیک

$$\Gamma(n+1) = n! .$$

د گاما تابع د گاوس تعريف

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^x}{x(x+1) \cdots (x+n)}$$

د تابع يوه روښانه ونه په ټول $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^-$ اجازه زاكوي.

ليكونكي: اپ، هيوليگ

د كوشي اصلي ارزښت Cauchyscher Hauptwert

د يوه په $x = c \in (a, b)$ كې زيگولار تابع f لپاره سړی

$$\text{CHW} \int_a^b f = \lim_{h \rightarrow 0^+} \left(\int_a^{c-h} f + \int_{c+h}^b f \right)$$

د كوشي اصلي ارزښت په څېر تعريفوي

ليكونكي: اپ، هيوليگ

د تپيكي بېلگې په څېر د كوشي اصلي ارزښت

$$\text{CHW} \int_{-a}^a x^k dx, \quad k \in \mathbb{Z},$$

شمېرل كيږي.

$$k = -1$$

د لپاره دی

$$\int_{-a}^{-h} \frac{dx}{x} + \int_h^a \frac{dx}{x} = \ln|h| - \ln|a| + \ln|a| - \ln|h| = 0 .$$

د انتيگريډونكي د انتی سيمتري په دليل د CHW وركيږي په يو سيمتري انتروال لپاره.

د $k \neq -1$ لپاره دی

$$\int_{-a}^{-h} x^k dx + \int_h^a x^k dx = \frac{1}{k+1} ((-h)^{k+1} - (-a)^{k+1} + a^{k+1} - h^{k+1})$$

د ناجوره یا طاق k لپاره دا افاده یا وینه او له دې سره د کوشي اصلي ارزښت صفر دی. د زیاتیز یا مثبت جوړه (حفت) k لپاره دا د $2/(k+1)a^{k+1}$ په لور هڅیږي. په ساده توګه د کوشي اصلي ارزښت د رګولار انټیګرال سره سره خوري یا یو عزیز کيږي. د $k = -2, -4, \dots$ لپاره برعکس یا د دې په خلاف هم انټیګرال او هم د کوشي اصلي ارزښت شتون نه لري. لیکونکي: اپې، هیولیګ

د انټیګرال لاندې مشتقول **Differenzieren unter dem Integral**

انټیګرال $\int_a^b f(x, t) dx$ د ناپربکېدونکي تابع f لپاره د t ناپربکېدونکي تابع دی. که f_t ناپربکېدونکي وي، ن و باور لري

$$\frac{d}{dt} \int_a^b f(x, t) dx = \int_a^b f_t(x, t) dx.$$

لیکونکي: هیولیګ، کنیش

د دې لپاره چې د

$$g(t) = \int_a^b f(x, t) dx$$

ناپربکېدنه په ټکي $t_0 \in (c, d)$ کې وښایو، له دې څخه کار اخلو، چې په $\varepsilon > 0$ ولاړګوډیز $[a, b] \times [c, d]$ کې برابر ډوله ناپربکېدونکي دی. هر $\delta > 0$ شتون لري داسې چې

سرلیک

$$|f(x, t) - f(x, t_0)| < \varepsilon$$

باور لري د ټولو x او $|t - t_0| < \delta$ لپاره د دې t لپاره نودی

$$|g(t) - g(t_0)| \leq \int_a^b |f(x, t) - f(x, t_0)| dx < \varepsilon(b - a).$$

له دې سره g ناپرېکېدونکی دی.

که f_t ناپرېکېدونکی وي، نو لاس ته راځي

$$\begin{aligned} \frac{g(t+h) - g(t)}{h} &= \int_a^b \frac{f(x, t+h) - f(x, t)}{h} dx = \\ &= \int_a^b \frac{1}{h} \int_0^h f_t(x, t+s) ds dx, \end{aligned}$$

د کوم سره چې

له دې امله کېدی شي د دفرنسل وېش کمېنت و
دی د ټولو $h < \delta$ لپاره.

$$\int_a^b f_t(x, t) dx = \int_a^b \frac{1}{h} \int_0^h f_t(x, t) ds dx$$

ته د

$$(b - a) \frac{1}{h} h \varepsilon$$

له لارې اټکل شي او د h سره د صفر په لور هڅیږي.
لیکونکي: بوسسلر، هیولیگ، کنیش

بسل-توابع Bessel-Funktionen دا لاندې د انټیگرال انځورونه لري

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(x \sin t - nt) dt, \quad n = 0, 1, \dots$$

دا دا لاندې د دفرنخیال مساوات پوره کوي

$$x^2 J_n''(x) + x J_n'(x) + (x^2 - n^2) J_n(x) = 0.$$

دا کېدی شي د انتیګرا لاندې د دفرنخیال سره وازمایل شي. لومړی دی

$$\begin{aligned} J_n'(x) &= -\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \underbrace{\sin(x \sin t - nt)}_v \underbrace{\sin t}_{v'} dt \\ &= \frac{n}{\pi} \int_0^{\pi} \cos t \cos(x \sin t - nt) dt - \frac{x}{\pi} \int_0^{\pi} \cos^2 t \cos(x \sin t - nt) dt \\ J_n''(x) &= -\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(x \sin t - nt) \sin^2 t dt \end{aligned}$$

که $J_n''(x)$ ، $J_n(x)$ او $J_n'(x)$ د دفرنخیال مساوات په کین لور کښینول شي او له

$\xi = x \sin t - nt$ کښینول شي، نو لاس ته π سره ضرب شي، له کوم سره چې راځي
Se

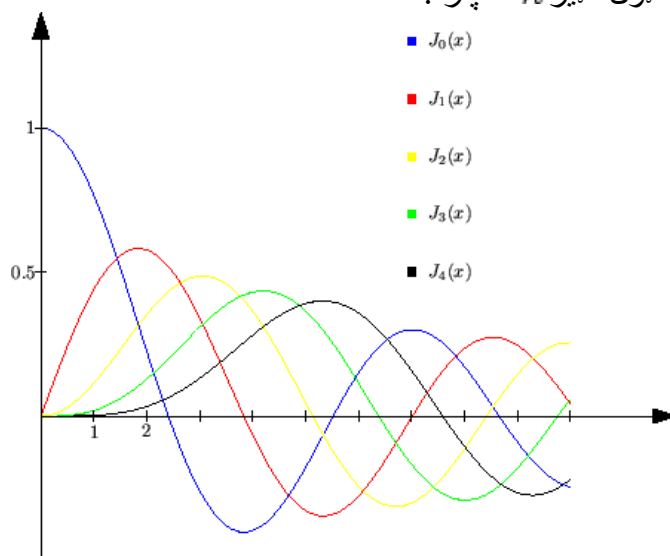
$$\begin{aligned} & -x^2 \int_0^{\pi} \cos \xi \sin^2 t dt - x^2 \int_0^{\pi} \cos^2 t \cos \xi dt + nx \int_0^{\pi} \cos t \cos \xi dt + x^2 \int_0^{\pi} \cos \xi dt - n^2 \int_0^{\pi} \cos \xi dt \\ &= \cdot nx \int_0^{\pi} \cos t \cos \xi dt + x^2 \int_0^{\pi} \cos \xi dt - n^2 \int_0^{\pi} \cos \xi dt \\ &= n \int_0^{\pi} (x \cos t - n) \cos(x \sin t - nt) dt \end{aligned}$$

سرلیک

=

$$n \sin(x \sin t - nt) \Big|_0^\pi = 0$$

د ټول گڼيز n لپاره.



څېره 5 لومړني د بېسل توابع ښايي .
ليکونکي: بوسسلر، هيوليگ، کنيش

لايبيش-قانون Leibniz-Regel

د ناپرېکېدونکو مشتقوړ توابعو a, b او f لپاره دی

$$\frac{d}{dt} \int_{a(t)}^{b(t)} f(x, t) dx = \int_{a(t)}^{b(t)} f_t(x, t) dx + f(b(t), t)b'(t) - f(a(t), t)a'(t)$$

ليکونکي: بوسسلر، هيوليگ، کنيش

که انتيگرال له $g(t)$ سره وښوول شي او ځا په ځا کړو

$$V(t) = (a(t), b(t), t), \quad U(c, d, e) = \int_c^d f(x, e) dx,$$

نو $g = U \circ V$ دی او فرمول د ځنځیري قانون له لارې لاس ته راځي:
 $g'(t) = U'(V(t))V'(t), \quad V' = (a', b', 1).$

له دې سره د U توتېه مشتقونه دا لاندې دي

$$U_c(c, d, e) = -f(c, e),$$

$$U_d(c, d, e) = f(d, e), \quad U_e(c, d, e) = \int_c^d f_e(x, e) dx,$$

او د $g'(t)$ لپاره په افاده یا وېبڼه کې ایښوولو سره غوښتنه راکوي.
 لیکونکي: بوسسلر، هیولیک، کنیش

د لایبنيخ فرمول سره لاس ته راځي

$$\frac{d}{dt} \int_0^{\sqrt{t}} e^{x^2/t} dx = \int_0^{\sqrt{t}} -\frac{x^2}{t^2} e^{x^2/t} dx + e \frac{d}{dt} \sqrt{t}$$

$$= - \int_0^{\sqrt{t}} \frac{x^2}{t^2} e^{x^2/t} dx + \frac{e}{2\sqrt{t}}$$

بیا مشتقول یې راکوي

$$\frac{d}{dt} \left(- \int_0^{\sqrt{t}} \frac{x^2}{t^2} e^{x^2/t} dx + \frac{e}{2\sqrt{t}} \right)$$

=

$$\int_0^{\sqrt{t}} 2 \frac{x^2}{t^3} e^{x^2/t} + \frac{x^4}{t^4} e^{x^2/t} dx - \frac{e}{2t^{3/2}} - \frac{e}{4t^{3/2}}$$

سرليک

$$= \int_0^{\sqrt{t}} \frac{2tx^2 + x^4}{t^4} e^{x^2/t} dx - \frac{3e}{4t^{3/2}}$$

بدیلي لومړی کېدی شي بدلون $x = \sqrt{t}y$, $dx = \sqrt{t}dy$ ولیکي او دا انتیگرال لاس ته راوړي

$$g(t) = \int_0^1 e^{y^2} \sqrt{t} dy$$

د کره یا ځای په ځای پولو سره . نو کېدی شي

$$g'(t) = \frac{d}{dt} \int_0^1 e^{y^2} \sqrt{t} dy = \int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{t}} e^{y^2} dy$$

$$= \int_0^{\sqrt{t}} \frac{1}{2t} e^{x^2/t} dx$$

او

$$g''(t) = \frac{d}{dt} \int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{t}} e^{y^2} dy = - \int_0^1 \frac{1}{4t^{3/2}} e^{y^2} dy$$

$$= - \int_0^{\sqrt{t}} \frac{1}{4t^2} e^{x^2/t} dx$$

په ساده توګه وشمیرل شي. د لومړي مشتق لپاره د فرمول مساوات روښانه نه دي، خو کېدی شي اسان د ټوټه انتیګرالونې سره و ازمایل شي:

$$\begin{aligned}
 - \int_0^{\sqrt{t}} \frac{x^2}{t^2} e^{x^2/t} dx + \frac{e}{2\sqrt{t}} &= - \frac{1}{2t} \int_0^{\sqrt{t}} \underbrace{x}_v \underbrace{\frac{2x}{t} e^{x^2/t}}_{v'} dx + \frac{e}{2\sqrt{t}} \\
 &= - \frac{1}{2t} \left[x e^{x^2/t} \right]_{x=0}^{x=\sqrt{t}} + \int_0^{\sqrt{t}} \frac{1}{2t} e^{x^2/t} dx + \frac{e}{2\sqrt{t}} \\
 &= \int_0^{\sqrt{t}} \frac{1}{2t} e^{x^2/t} dx
 \end{aligned}$$

د دویم برابرېون مشتق کېدی شي په ورته توګه و ښوول شي.
لیکونکي: هیولیک، کنیش

په t پسي د انتیګرال د مشتق

$$\int_{t^2}^{e^t} \frac{\cos(tx)}{x} dx$$

لپاره لاس ته راځي

$$\begin{aligned}
 &\int_{t^2}^{e^t} -\sin(tx) dx + \frac{\cos(te^t)}{e^t} \frac{d}{dt} e^t - \frac{\cos(t^3)}{t^2} \frac{d}{dt} t^2 \\
 &= \frac{1}{t} \cos(te^t) - \frac{1}{t} \cos(t^3) + \cos(te^t) - \frac{2}{t} \cos(t^3) \\
 &= \left(\frac{1}{t} + 1 \right) \cos(te^t) - \frac{3}{t} \cos(t^3)
 \end{aligned}$$

لیکونکي: هیولیک، کنیش

د دفتر نشل مساوات

سرلیک

$$u'(t) - \lambda u(t) = f(t)$$

یو زره یا کوچنی حل u_p کېدی شي دهوموجبن مساوات حل د سوپر $\exp(\lambda t)$ پوزیشن له لارې و کتل شي:

$$u_p(t) = \int_0^t e^{\lambda(t-s)} f(s) ds.$$

د لایبنيخ فرمول په بنسټ دی

$$\begin{aligned} u_p'(t) &= \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{e^{\lambda t}}{e^{\lambda s}} f(s) ds = \int_0^t \lambda \frac{e^{\lambda t}}{e^{\lambda s}} f(s) ds + f(t) \frac{d}{dt} t \\ &= \lambda \int_0^t \lambda e^{\lambda(t-s)} f(s) ds + f(t) \end{aligned}$$

په دفرنشل مساوات کې د $u_p(t)$ او $u_p'(t)$ د ایینولو له لارې کېدی شي حل تصدیق شي.
لیکونکي: هیولیگ، کنیش

د نامعلومو انتیگرالونو مشتقول

Differenzieren uneigentlicher Integrale

که توابع f او f_t ناپربکېدونکي وي او د $t \in (c, d)$ لپاره باور ولري

$$|f(x, t)| \leq \psi(x), \quad \int_0^\infty \psi < \infty$$

$$|f_t(x, t)| \leq \varphi(x), \quad \int_0^{\infty} \varphi < \infty,$$

نو کیدی شي د انتیگرال د نخښی لاندې مشتق و نیول شي:

$$\frac{d}{dt} \int_0^{\infty} f(x, t) dx = \int_0^{\infty} f_t(x, t) dx, \quad c < t < d.$$

په ورته توگه ویناوي د محدودو انتیگرالېدونکو سره د نامعلومو انتیگرالونو لپاره باور لري. لیکونکي: هیولیگ، کنیش

د دې لپاره چې وښایو، چې

$$\int_0^{\infty} \frac{f(x, t+h) - f(x, t)}{h} - f_t(x, t) dx$$

د $h \rightarrow 0$ لپاره د 0 په لور هڅیږي، انتیگرال توتې کيږي:

$$\int_0^{\infty} \dots = \int_0^b \dots + \int_b^{\infty} \dots$$

دویمه زیاتېدونکې یا د جمعې غړی د نیوني له مخې د

$$\left| \int_b^{\infty} \frac{1}{h} \int_0^h f_t(x, t+s) ds - f_t(x, t) dx \right| \leq \int_b^{\infty} \frac{1}{h} h\varphi(x) + \varphi(x) dx = 2 \int_b^{\infty} \varphi(x) dx$$

له لارې اټکل شي. دا انتیگرال له $< \varepsilon$ کيږي. د پوره لویې b لپاره. د دې b

لپاره لومړی زیاتېدونکې دې د پوره کوچني h لپاره، ځکه چې د پای انتیگریشن انټروال لپاره د انتیگرال لاندې مشتق کېدی شي.

لیکونکي: هیولیگ، کنیش

د گاما تابع مشتقونه

$$\Gamma(t) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{t-1} dx, \quad t > 0,$$

دي

$$\Gamma^{(k)}(t) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{t-1} (\ln x)^k dx.$$

مشتقیدنه په حق ده، ځکه چې انټیگرالېدونکي
برابردوله مایورانټ لري:

$$|f(x, t)| \leq e^{-x} x^{r-1} x^k \leq ce^{-x/2}, \quad x \geq 1$$

او

$$|f(x, t)| \leq x^{1/r-1} |\ln x|^k \leq cx^{1/(2r)-1}, \quad x \leq 1$$

د $t \in [1/r, r]$ لپاره. د دې لپاره وکارول شو، چې

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^\alpha e^{-\beta x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha |\ln x|^\beta = 0$$

د ټولو $\alpha, \beta > 0$ لپاره

لیکونکي: بوسسلسر، هیولیک، کنیش

دا د پارامتر په واک کې انټیگرال

$$g(t) = \int_0^{\infty} \sin(xt) \frac{dx}{x}$$

مطلق پولي ته تلونکی نه دی، له دې امله برابر ډوله مایورانټ هم نه لري.
دلته مو د t پسې د انټیگرال لاندې یو فورمال دفرنڅیشن یوه تضاد ته لارښودوي.
فورمال مشتق

$$g'(t) = \int_0^{\infty} \cos(xt) dx$$

یو پولي ته نه تلونکی انټیگرال دی. له بلې خوا یو واریابل بدلون $y = xt$,
 $dy = t dx$

سرلیک

راکوي

$$g(t) = \int_0^{\infty} \sin(y) \frac{dy}{y} = \frac{\pi}{2}.$$

مشتق په دې لاس ته راوړنه کټمټ صفر دی.
لیکونکي: بوسسلر، هیولیک، کنیش

د ۲۰۱۱ زک د مارچ لسم
بری د لوی څښتن سره دی.

د ډاکټر ماخان شینواري چاپ شوي لیکنې:

1988 Vienna (Austria):

لومړی:

H.K. Kaiser , M. Shinwari : Aproximation compact pological algebra :
general algebra 6 ; Page 117 – 122 contributions to

1987 Vienna (Austria):

دویم:

Diss . Interpolation und Aproximation durch Polynime in Universalen Algebren .
Uni. Wien

*Dissertation Interpolation and Aproximation by Polynome in universal Algebras,
at the University of Vienna/Austria*

لاندي د شميرپوهني پښتوتول کتابونه په المان کې د ،، افغانستان کلتوري ودې ټولنه، له
خوا چاپ شوي دي

2000 Bonn (Germany):

دریم: د شميرپوهني ستر کتاب : د شميرپوهني برسيره د انجنري، فزيک او اقتصاد
لپاره ، همداسي د بنوونکو او زده کوونکو لپاره (دا کتاب په ۹۰۰ مخونو کې چاپ
او دا نوي لیکنه به يې ځنو ځايونو غزېدلې او ځني ځايونه ترې لرې شوي دي)

2003 Bonn (Germany):

څلورم: ځمکچپوهنه (هندسه) ، په سلو، زرو کې شميرنه، د گټې – او کټې د کټې
شميرنه ، د احتمالي شميرنه کتاب د بنوونځي ټولې اړتياوې پوره کوي

2003 Bonn (Germany):

پنځم: الجبرونه (د الجبر بنسټونه دي)

2003 Bonn (Germany):

شپږم: د شمیرپوهنې انگرېزي - پښتو ډکشنري.

2003 Bonn (Germany):

اووم: د شمیرپوهنې الماني - پښتو - او پښتو الماني ډکشنري

Mathematical dictionary German/ Pashto and Pashto/German

2003 Bonn (Germany):

اتم: دفرنخیال برابر وړ (دا کتاب په دې څانگه کې یو پیل دی، ساده لیکل شوی)

Differential equation Translation; An Introduction

Bonn (Germany): 2003

نهم: د شمیر پوهنې فرمولونو ټولگه

Mathematical Formulas

2003 Bonn (Germany):

لسم: شمیرپوهنه له عربي په پښتو

1997 Bonn (Germany):

یوولسم: د افغانستان په هکله سپینې خبرې: په المان کې

،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه، له خو

یادونه: له ۲۰۰۰ کال دمخه ډاکتر ماخان شینواري د ،د افغانستان روغې او بیا

آبادولو ټولنه، له خوا درې ساسي مجلې هم را وستلې.

د ډاکتر ماخان ،میري، شینواري لیکنې او ژباړې چې په چاپیدو یې پیل کیږي

2012 Bonn; Germany; Kabul Afghanistan

ژباړې:

: Prof. Brinkmann. (From Brinkmann.du.de)

لاندي د برينکمن ليکنې چې له پرینکمن ن ج څخه ژباړل شوي دي.

۱ - شميرپوهنه د بنوونځي لپاره لومړی ټوک

۲ - شميرپوهنه د بنوونځي لپاره دويم ټوک

۳ - شميرپوهنه د بنوونځي لپاره دريم ټوک

۴ - د احتمالي شميرنه د بنوونځي لپاره

۵ - احصايه يا ستاتيستيک د بنوونځي لپاره

لاندي کتابونه د شتوتگارت د پوهنتون د استادانو د لکچرونو څخه چې د شتوتگارت پوهنتون ن ج څخه خپاره شوي را ژباړل شوي.

۶ - اناليزی ۱

۷ - اناليزي ۲

۸ - کرښيز الجبر

۹ - د شميرپوهني بنسټونه

۱۰ - د فرمولونو ټولگه

۱۱ - فنکشنل اناليز

۱۲ - وکتور شميرنه

نوري ژباړي

۱۳ - له www.grundstudium.info/linearealgebra څخه: کرښيز الجبر

۱۴ - Georg Gutenbrunner گونوپوهنه يا د اعدادو تيوري

onn (Germany):

۱۵ - د شمیرپوهنې ستر کتاب دویم چاپ د پوره تغیراتو سره : دا کتاب د شمیرپوهنې برخې برسیره د

انجنري، فزیک او اقتصاد لپاره ، همداسې د بنوونکو او زده‌کونکو لپاره پوره گټور دی. په

کتاب کې د اړتیا سره زیاتونه او کونه راغلي

۱۶ - ځمک‌کچپوهنه (هندسه) دویم چاپ د پوره تغیراتو سره

۱۷ - الجبر بنسټونه دویم چاپ له تغیراتو سره

۱۸ - ډېری پوهنه یا ست تئوري

۱۹ - د شمیرپوهنې سم اند (منطق ریاضي)

۲۰ - د یو څو شمیرپوهانو ژوندلیک

۲۱ - د شمیر پوهنې گډې ودې لیکنې

۲۲ - داهم ژباړه ده، خو لیکونکی یې متأسفانه راڅخه نابلد شوی: د مشتق او انتیگرال شمیرنو ته تمرینونه او اوبیونې یا حلونه یې

۲۳ - د شمیرپوهنې انگریزي پښتو او عربي + درې ډکشنري

۲۴ - د شمیرپوهنې پښتو انگریزي ډکشنري

۲۵ - د شمیرپوهنې پښتو ډکشنري د شمیرپوهنیزو وییونو په پښتو روښانه ونه

۲۶ - د زره له کومې (دا هغه لیکنې دي، چې ځنې یې په نړیول جالونو کې خپرې شوي دي.)

۲۷ - د افغانستان په هکله سپینې خبرې، چې وبه غزیري.

سرلیک

نوري ليکنې، چې په ژباړه يې پيل شوی، خو لا پوره نه دي

– د شتونکارت پوهنتون لکچرنوټونو څخه ، چې د شتونگارت پوهنتون ن ج څخه خپرېږي:

د گروپونو تيوري

- د بسونځي لپاره فزيک د برينکمن ليکنه

له پنځم ټولگي څخه تر اووم ټولگي پورې ژباړل شوی (دا چې زما دويم مسلک فزيک دی، دا ليکنې ژباړم. دا هم د دې ليکوال يوه ډېره بڼه ليکنه ده، چې -د شميرپوهنې په څير- دلته هم زيات تمرينونه د حل يا اوبيوني سره په کې راغلي او ماته زيات گټور برېښي)

**Get more e-books from www.ketabton.com
Ketabton.com: The Digital Library**