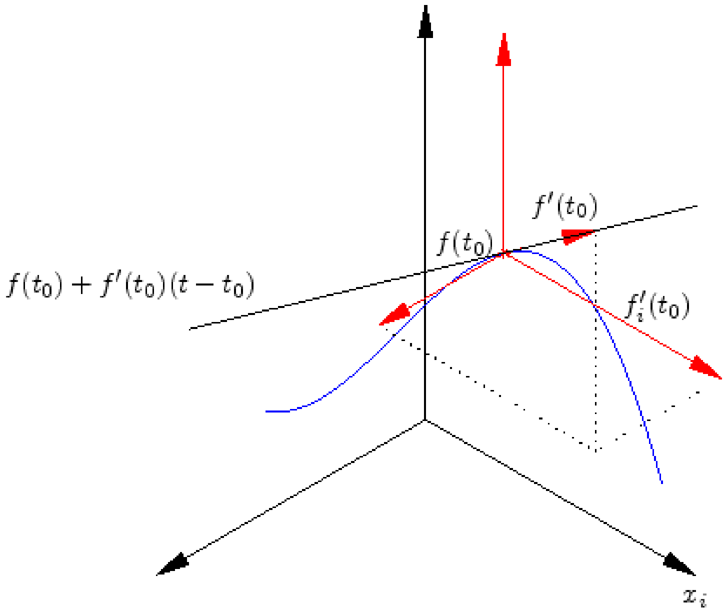
د پوهنتون لپاره لکچرنوټونه

د ډېرو متحولو یا اووښتونو انالیز

یا انالیز دوه



لیکونکي: د شتوتګارت پوهنتون د شمیرپوهني یا ریاضي څانګه

د مات انلاین څخه یا د شتوتګارت پوهنتو ن ن ج څخه

Ketabton.com

ژباړی: د اکبر خان (میرزي) شینواری

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لوی څښتن په نامه

په دې هیله، چې په دې لیکنو او ژباړو به مې زموږ د بې وزلې او له پوهې پاتې ملت - په ما د پوهنې په لار د لګښت - لپاره د پوهنې په لور داسې لږ ونډه اخستې وي.

د کتاب نوم: د ډېرو متحولو یا اووښتونو انالیزې

ډ اکتر ماخان میرړي شینواری

Smakhan1946@gmail.com

د چاپ لړي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ژباړې مننه

د دې لیکنې مل نورې خپرونې د شتوتګارت د پوهنتون د شمیرپوهنې د څانګې د لکچرونو لړی چاپ باندې پیل کیږي

د هر څه له مخه د هغو لیکونکو پروفیسرانو څخه زیاته مننه، چې د لیکنو څخه یې زما د ژباړې لپاره تفاهم لري. ماته د دوي د لیکنو د ژباړې په هیڅ ډول مادي ګټه نه شته او دا کار مې یوازې په یوه د پوهنې توانمندې ، مګر وروسته پاتې ژبې ویونکي ولس ته وړاندې دی، دا دې د دې پروفیسرانو له خوا په پوهنیزه اړخ کې- زموږ په دې اړخ کې هم مرستې ته اړ ولس- سره مرسته وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ژباړې سریزه
ټول...
اساسي کلیمې ۱
ډېرۍ یا سټ او پولې ته تلنه ۱
چاپېریال ۱
د وکتورونو پولې ته تلنه ۱
د وکتورونو لپار د کوشي پولې ته تلنه ۲
وازه ډېرې یا سټ ۳
رابنده ډېرۍ(سټ) ۴
د یوې ډېرۍ ژۍ یا غاړه ۴
کومپاکته ډېرۍ ۵
--- تابع
د ډېرو متحولو توابع ۵
ډېر متحولي پولینومونه ۶
د ډېرمتحولو توابعو ناپرېکېدنه ۱۰
په کومپاکتو ډېریو د ناپرېکېدونکو توابعو افراطي ارزښتونه ۱۲
د وکتورنورمونو برابرارزښتوالی ۱۳
د لیپشیڅ Lipschitz ناپرېکېدنه ۱۴
کونتراهیري کیدونکې ځیرونې یا توابع ۱۶
د باناښ Banachځای په په ځای ټکې جمله ۱۷
---- مشتق یا رابیلیدنه
----ټوټه یا پارشل مشتق ۲۰
ټوټه مشتق
ډېرواړه ټوټه مشتقونه ۲۲
د ډېرومتحولو پولینومونو ټوټه مشتق ۲۴
د یوې تابع ټوټه مشتق بد لیدنوالی
توتال یا تمام مشتق ۳۰
کرښیز اپروکسیمیشن ۳۶
د مولتیواریت توابعو د غلطیو وده یا تکثیر ۳۷
د ډېرمتحولو توابعو د ناټیکاوي زېرنده یا وده
تانجنت ۳۸
تانجنتي سطحه ۴۱
--- د مشتق قوانین
د دېرو متحولو زنځیري قا نون ۴۵

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرلیک

د یوې تابع لوریز مشتق ۵۳
د خورا زوړندې کیوتنې متودونه ۵۵
په څټ – یا معکوس توابع ۵۹
ایمپلیثیت توابع ۶۷
د ویوانې ګړه ۶۹
د نه کرښیزو توابعو د مخته بیونې ۷۵
======== مساوات سیستمونه
--- د تیلور Taylor وده ۶۷
د هیسې Hesse ماتریکس ۸۱
د نیوتن Newton تلنلاړ ۸۵
--- افراطې ارزښتونه ۸۸
کریتیکال ټکی
د ډېرمتحولو توابعو افراطیت ۹۴
د لاګرانژ ضریبونه Lagrange-Multiplikatoren ۱۰۲
د کرښیز مساوات شرایطو سره مربعیز مینیمالونه(را کمونه) ۱۱۰
د کون-تکر Kuhn-Tucker شرایط ۱۱۶
ډېر بعدیز یا –پراخیدنی اینتګرال
--- ډېر بعدیز- یا –پراخیدونی اینتګرال
سیمپلکس Simplex ۱۲۵
غبرګ ایپیپید Parallelepiped ۱۲۶
د اینتګرال ورشو ۱۲۶
د هاوزدورف Hausdorff واټن ۱۲۸
ډېر بعدیز یا –پراخیدنی اینتګرال ۱۲۹
د فوبیني Fubini جمله ۱۳۲
د بعدی یا –پراخیدوني واحدکرې(یوونغوندوسکې) ډکې یا حجم ۱۳۸

(c) ketabton.com: The Digital Library

--- د ډېربعديزو اينګرالونو ترانسفورميشن ۱۴۱
د ډېربعديزو اينتګرالونو ترانسفورميشن
په توته ييز(استونه ډوله) کواوردينات کې د حجم توکي(ډکي-) ۱۵۰
په ګري (غونډوسکي-) کواوردينات کې د حجم(ډکي) توکي. ۱۵۲
کتله او دروندټکی(د سقل مرکز) ۱۵۷
د (بار) وړنې مومنت[moment of inertia](moment of inertia) Trägheitsmomentعزم العطالة
---د منحنيو(کږو)- او سطحو اينتګرال
د منحنيو اينتګرال ۱۶۱
د منحنيو اينتګرال خويونه ۱۶۶
د ليندې اوږدوالی ۱۶۶
د سطحې يوې ټوټې منظم بارامتريک کونه. ۱۶۸
د سطحې اينتګرال ۱۶۹
په توته کواوردينات کې د سطحې توکي ۱۷۴
په غونډوسکي يا کرې کواوردينات کې د سطحې توکي ۱۷۶
---د ډېرواره اينتګرالونې بنسټجمله يا اصلي جمله ۱۷۸
د ډېرواره اينتګرالونې بنسټجمله يا اصلي جمله
ټوټه اينتګرال ۱۸۳
د ګرين Greensche فرمولونه ۱۸۴

(c) ketabton.com: The Digital Library

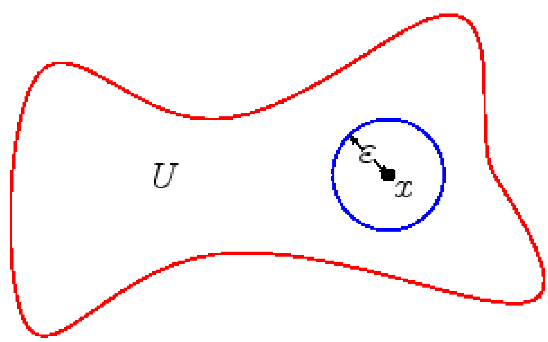
بنسټيزې ياساسي کليمې

ډېرۍ يا سټ او پولې ته تلنه

چاپېريال

دا د يوه ټکي $x \in \mathbb{R}^n$ د ε-چاپېريال په حيث دا لاندې غونډوسکه(غونډارى،توپ که غواړئ: کره) نوموو

$$B_\varepsilon(x) = \{y : |y - x| < \varepsilon\} .$$



په ټوليزه توګه د x چاپېريال U يوه ډېرئ ده، چې يو چاپېريال ε خوندي لري.

ليکونکي: هوليګ او پفايل

د وکتورونوکونورګنت يا پولې ته تلنه

د وکتورونو $x_k \in \mathbb{R}^n$ يوه پرلپسې د يوه وکتور x خواته کنورګ کيږي يا ځي،

$\lim x_k = x$ همداسې $x_k \to x$,

که د ټولو $\varepsilon > 0$ لپاره يو ايندکس k_ε شتون ولري

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $|x_k - x| < \varepsilon$ سره د $k > k_\varepsilon.$ لپاره.

په بل ډول هر ε -چاپيريال $B_\varepsilon(x) = \{y:\ |y - x| < \varepsilon\}$

ټولې ترپاي ډېرو پرلپسې(ترادف) توکو پورې خوندي لري.

د (x_k) کونورګنځ ته ورته د ټولو کمپوننتونو کونوی رګنځ دی، د اپه دې معنا چې کيدی شي يو پراخيدونې يا يوبعدې کونورګنځ کريتيريوم ورته راکښل - يا راونيول شي.

(ليکونکي : بوسلر، هوليګ، شترايت)

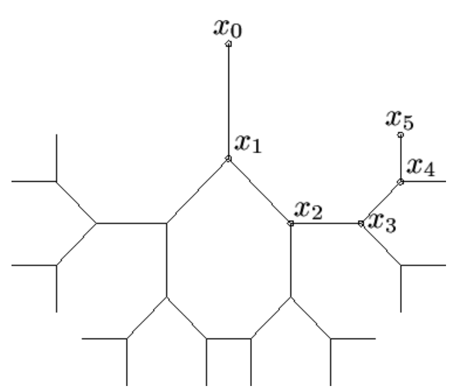
د وکتورونوو لپاره د کوشي **Cauchy** کريتيريوم يا قضيه

يوه د وکتورونوو پرلپسي $x_k \in \mathbb{R}^n$ ټيک هلته پولې ته ځي(کونورګنت ده) ، که دا کوشي **پرلپسې وي.**

داپه دې معنا چې د ټولو $\varepsilon > 0$ لپاره يو k_ε شتون لري د $|x_\ell - x_k| < \varepsilon$ سره د $\ell, k > k_\varepsilon.$ لپاره .

د ا له دې سره په برابره يا همغه معنادی، داسې چې د (x_k) د کمپوننتونو هر يو يې يوه کوشي پرلپسي ده.
(ليکونکي: هيوليګ، شترايت)

د کوشي کريتيريوم د روښانه ونې لپاره يوه بينار(دوه ګونې) ونه راوړو.



(c) ketabton.com: The Digital Library

په یوه ټوټه(کرښه) هره یوه په ضریب $\lambda\ (0<\lambda<1)$ سره لنډیږي او په 45° - کونج اینبول شوی بله ټوټه باندې ورزیاتیږي. په داسې یوه جوړه شوې دوه یزه ونه د داسې سوکڅیسیو په ښاخونو بیل شوي ټکو هره پرلپسې پولې x_k ته ځي یا کونورګیر کیږي. د تعریف سره سم باور لري د دوه یوپه بل پسې پرلپسیو (تصاعدونو) (x_k) لپاره باور لري: $|x_{k+1}-x_k| = c\lambda^k$.

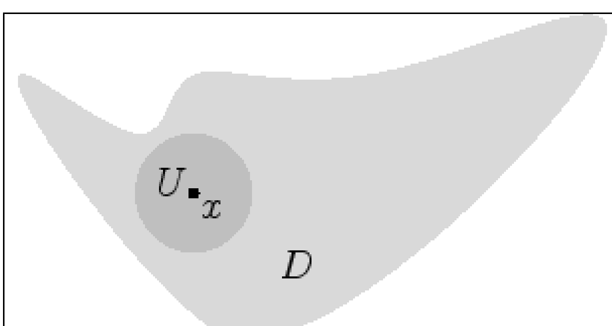
دا راکوي، چې داپرلپسې د کوشي پرلپسې ده، څکه چې:

$$
\begin{aligned}
|x_\ell - x_k| &= |x_\ell - x_{\ell-1} + x_{\ell-1} - \ldots + \ldots - x_{k+1} + x_{k+1} - x_k| \\
& |x_\ell - x_{\ell-1}| + |x_{\ell-1} - x_{\ell-2}| + \ldots + |x_{k+2} - x_{k+1}| + |x_{k+1} - x_k| \\
&\le c\lambda^{\ell-1} + c\lambda^{\ell-2} + \ldots + c\lambda^k \\
&= c\lambda^k\,\frac{1-\lambda^{\ell-k}}{1-\lambda} \le c'\,\lambda^k \\
&\le \varepsilon
\end{aligned}
$$

د $\ell > k > k_\varepsilon$ لپاره

(لیکونکي: هیولیک، شترایت)

وازه ډیرئ یا -سټ **Offene Menge**



یوه ډیرئ $D\subseteq\mathbb{R}^n$ وازه بلل کیږي، که چیرې د ډیرئ هر ټکی $x\in D$ یو چاپیریال ولري، چې دا ټول په D کې پروت وي، په ځانګړې توګه $\mathbb{R}^n$ او تشډیرئ $\emptyset$ وازې دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د یوې په خوښه ډېرۍ D لپاره $\mathring{D} \subseteq D$ د D دننه بنايي، دا په دې معنا چې د ټول ټکو ډېرۍ د یوه چاپېريال سره په D کې پرته ده.

(ليکونکي: هیولیک، پفایف)

رابنده ډېرۍ **Abgeschlossene Mengen**

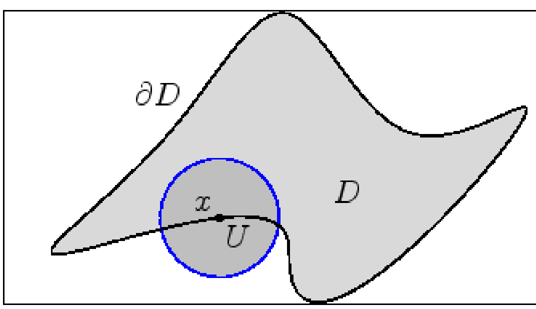
یوه ډېرۍ $D \subseteq \mathbb{R}^n$ رابنده یا بنده بلل کیږي، که دیوې د ټکو $x_k \in D$ پولې ته تلونې پرلپسې په D کې پرته وي. په ځانګړې توګه $\mathbb{R}^n$ او تشډېرۍ $\emptyset$ بندې دي.

د په خوښه ډېرۍ D لپاره دا $\overline{D} \supseteq D$ د D رابندونه بولو، داپه دې معنا چې د پرلپسیو د ټولو پوله ارزښتونه په D کې.

(ليکونکي: هیولیک، پفایف)

د یوې ډېرۍ ژۍ یا غاړه

د یوې ډېرۍ $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ژۍ ∂D له ټولو ټکو x جوړه ده، کومه چې چاپېريال U نه لري، دا یا ټوله په D کې پرته ده او یا د D په کمپلیمنت (پوره کیدونکي) کې پرته ده.



د بدیل په توګه کید شي چې ژۍ د رابند کمون یا تفریق او دننه،

$$\partial D = \overline{D} \setminus \mathring{D}$$

په حیث تعریف شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

(ليکونکي هيوليګ او پفايف)

پوره کيدونکې ډېرئ Kompakte Menge

يوه تړلي او محدوده ډېرئ $D \subseteq \mathbb{R}^n$ کمپليمنت يا پوره کيدونکې بلل کيږي.
لاندې کرکتريستيکا دې ته ورته يا اکويوالنځ دي:

- هره پرلپسې په D کې يوه کونورګنځ برخه ډېرئ لري د پولې سره په D کې.
- د D هر د وازې ډېرئ د سره پټوني يا پوښونې سره يوه پاى پوښونه يا پټونه لري.

(ليکونکي: هيوليګ او پفايف)

مولتيواريانت – يا د ډېرو توابعMultivariate Funktionen

يو ريل يا حقيقى مولتى واريانت(د ډيرو متحولو - يا اوښتونوتوابع هم بلل کيږي)

$$f : \mathbb{R}^n \supseteq D \to \mathbb{R}^m, \quad x \mapsto f(x),$$

د تعريف ډېرئ D يو وکتور $x = (x_1, \ldots, x_n)^t$ په يوه وکتور $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n) = (f_1(x), \ldots, f_m(x))^t$ تنظيموي. پس f د n ريل حقيقي متحولو $x_1, \ldots, x_n$ په واک کې دى.

د تابعورشو يا خيره ورشو د m بعد يا پراخيدوني له مخې سرى د سکالارو $(m = 1)$ او وکتور ارزښتيزو $(m > 1)$ توابعو ترمنځ توپير کوي. که $n = 1$ (او f ناپريکيدونکې وي)، نو f يوه پارامتري شوې کږه يا منحني بلل کيږي.

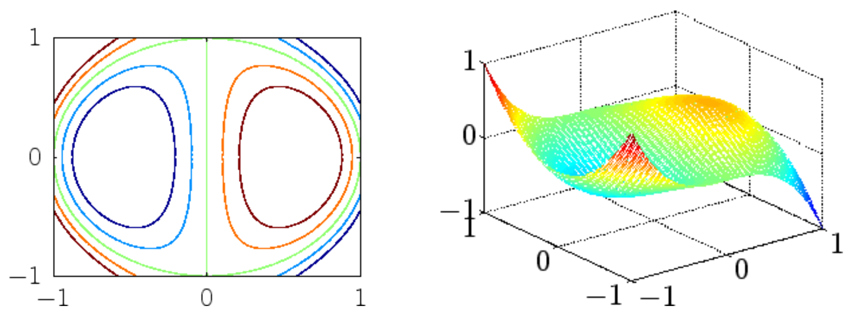
د $m, n \leq 3$ لپاره زيات وخت ايندکسونه نه کارول کيږي او واريابلې له x, y او z سره په نخښه کوو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د بيلګي په توګه

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} f(x,y) \\ g(x,y) \end{pmatrix}.$$

د $m = n = 2$ په حالت کي



لکه دا شکل چي روښانه کوي، Visualisierung ته دګراف سکالار توابع

$$\{(x, f(x)) : \ x \in D\}$$

او د نيوتن سطحي

$$\{x \in D : \ f(x) = c\}$$

وکارول شي.

پولينومونه د ډېرو متحولو سره :

يو پولينوم p په n اوښتونو $x_1, \ldots, x_n$ کي د مونومونو کرښيز کمبينيشن دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$p(x)=\sum_{\alpha} a_\alpha x^\alpha, \quad x^\alpha = x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n} ,$$

د $\alpha_i \in \mathbb{N}_0$ سره، هریو د جمعي ورشو له مخې د لاندو ترمنځ توپیر کوي:

د ټولو درجو $\leq m$: $\sum \alpha = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n \leq m$

د ماکسیمالو درجو $\leq m$: $\max \alpha = \max_i \alpha_i \leq m$

یو د k -درجې پولینوم هوموجین بلل کیږي، که کرښیزترکیب فقط مونوم د $\sum \alpha = k$ سره خوندي ولري. د داسې هوموجینو مونومونو ګڼون یا تعداد $\binom{k+n-1}{n-1}$ په دی.

تعقیب یې د پولینوم پراخیدونی یا بعد د توتال درجې $\leq k$ سره برابر

$$\binom{k+n}{n} = \sum_{k=0}^{m} \binom{k+n-1}{n-1} .$$

دی

د n -متحولو پولینومونو بعد د $\leq m$ ماکسیمال درجې $(m+1)^n$ دی.

د بیواریات یا دوه اووښتونو یا متحولو پولینومونو $(n=2)$ لپاره د هومو جینن مونومونو له لیست څخه

$$\begin{array}{ll} k=0: & 1 \\ k=1: & x,\, y \\ k=2: & x^2,\, xy,\, y^2 \\ k=3: & x^3,\, x^2y,\, y^2x,\, y^3 \\ \ldots , & \end{array}$$

کتل کیږي چې د k درجې لپاره د دوی تعداد

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$k+1=\binom{k+2-1}{2-1}$$

دی

د دوه متحولو پولینومونو د توتال درجې $\leq m$ د بعد لپاره لرو

$$1+2+\cdots+(m+1)=\frac{(m+2)(m+1)}{2}=\binom{m+2}{2}.$$

په ځرګنده توګه $(k+1)^2$ مونومونه شتون لري

$$x^i y^j, \quad i,j \leq m,$$

د $\leq k$ ماکسیمال درجې

په تولیزه توګه (د n -متحولو پولینومونو) لپاره کیدی شي یو اکسپوننت

$$(\alpha_1,\ldots,\alpha_n), \sum \alpha = m$$

د یوه کره مونوتونې پرلپسی یا ترادف سره

$$\begin{aligned}\beta_1 &= \alpha_1+1\\ \beta_2 &= \alpha_1+\alpha_2+2\\ &\cdots\\ \beta_{n-1} &= \alpha_1+\cdots+\alpha_{n-1}+(n-1)\end{aligned}$$

له $\{1,\ldots,m+n-1\}$ څخه و پیژندل شي:

$$\alpha_i=\beta_i-\beta_{i-1}-1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $\beta_0 = 0,\ \beta_n = m + n$ سره. نو $\binom{m+n-1}{n-1}$ امکانات شتون لري

د ټول $\leq k$ درجو n–وارایت مونومونه د $(n+1)$ -متحولو د درجو k هوموجين مونومونه پ هګوته کوي:

$$x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} \leftrightarrow x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} x_{n+1}^{k-\sum \alpha_i}$$

(اخرنی اکسپوننت ټينګ ځای په ځای دی). نو بعد دی

$$\binom{k + (n+1) - 1}{(n+1) - 1}.$$

د مکسيمال $\leq k$ درجو د پولينوم بعد په ورته توګه بيواريات حالت ته شميري.

يو د توتال درجو ≤ 3 پولينوم په 2 متحولو کی لاندې ټوليزه بڼه لري

$$p(x,y) =$$

$$a_{3,0}x^3 + a_{2,1}x^2y + a_{1,2}xy^2 + a_{0,3}y^3$$

$$+a_{2,0}x^2 + a_{1,1}xy + a_{0,2}y^2$$

$$+a_{1,0}x + a_{0,1}y + a_{0,0}\,,$$

او

$$4x^3 - 2xy^2 + 5y^3$$

د 3 درجو هوموجين بيواريات پولينوم لپار يوه بيلګه ده.

ديوه ≤ 2 درجو پولينومم ټوليزه بڼه په درې متحولو کی ده:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$p(x,y,z) =$$

$$a_{2,0,0}x^2 + a_{0,2,0}y^2 + a_{0,0,2}z^2$$

$$+a_{1,1,0}xy + a_{1,0,1}xz + a_{0,1,1}yz$$

$$+a_{1,0,0}x + a_{0,1,0}y + a_{0,0,1}z + a_{0,0,0}\,.$$

د ډېرو اووښتونو یا متحولو توابعوو ناپریکیدنه یا متمادیت

یو تابع f د تعریف ورشو D په یوه ټکي x کې ناپریکیدونکي دی، که

$$D \ni x_k \to x_{k\to\inf} \implies \lim_{k\to\inf} f(x_k) = f(x)\,.$$

که دا د ټولو $x \in D$ لپاره باور ولري ، نو f په ټول D باندې نا پونکی دی

که د تعریف ورشو په ژی ∂D د ټکي x لپاره پوله ارزښت شتونولري، نو کیدی شي f ناپریکید ونکی مخ ته یو ول شي.

د ډېرې متحولو د ترنو لپاره همغه قوانین باور لري،لکه د یوې متحولې تابع لپاره.

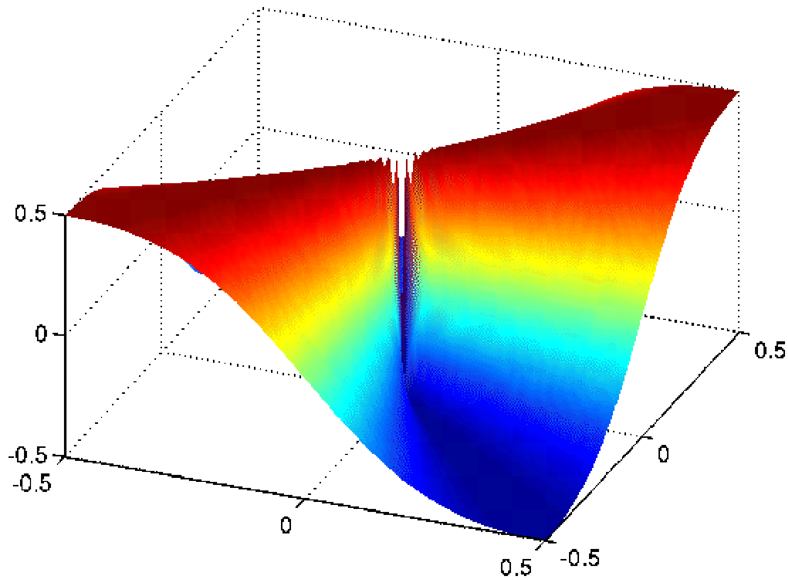
(لیکونکي: هیولیک او شترایت)

یو ناثابت بیواریات تابع $f(\varphi)$ ، چې فقط له کونج او نه د وړانګې $r=\sqrt{x^2+y^2}$ په واک کې یا تابع ده،په صفرټکي کې پریکیدونکي ده. د دې لپاره تیپیکې بیلګه

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2} = \cos\varphi\sin\varphi$$

راړل کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



که په صفرټکي کې یوه کرښه وټاکو،

$$g:\ y = mx \quad \text{همداسې} \quad g : \varphi = c\ ,$$

نو په کرښه تابع- یا خطي تابع ا رزښت ثابت دی،

$$f(x, mx) = \frac{mx^2}{x^2 + (mx)^2} = \frac{m}{1+m^2} = c_m$$

همداسې

$$f(\varphi) = \cos\varphi \sin\varphi = c_\varphi\ ,$$

$$f(x, mx) = \frac{mx^2}{x^2 + (mx)^2} = \frac{m}{1+m^2} = c_m$$

bzw.

$$f(\varphi) = \cos\varphi \sin\varphi = c_\varphi\ ,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پرته له صفرټکي چې هلته تابع ارزښت نه دی تعريف.
پرته له صفرټکي د ټول ټکو لپاره باور لري

$$D \ni (x_k, y_k) \to (x, y) \implies$$

$$\implies f(x_k, y_k) = \frac{x_k y_k}{x_k^2 + y_k^2} \to \frac{xy}{x^2 + y^2} = f(x, y) .$$

په صفرټکي کې تابع بريکيدونکي مخ ته وړلوړ ده. که د $x \to 0$ لپاره په مختلو کرښو باندې پوله ارزښت په پام کې ونيسو، نو لاس ته راړل کيږي

$$\lim_{x \to 0} f(x, mx) = \lim_{x \to 0} \frac{m}{1 + m^2} = \frac{m}{1 + m^2} ,$$

دا په دې معنا چې پوله ارزښتپه هر سرچينه يزې کرښې مختلف دی. له دې سره پوله ارزښت

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x, y)$$

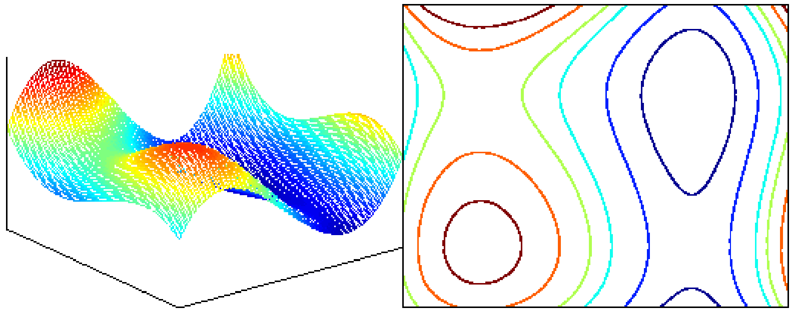
شتون نه لري.

(ليکونکي: بوسلر،هيوليګ، شترايت)

په کومپاکت ډېريو د ناپريکيدونکو-يا متمادي توابعو افراطي ارزښتونه

يو ناپريکيدونکی تابع په يوه کومپاکته ډېرۍ يو مينيموم او هم يو ماکسيموم لري.
په کينه څيره شوي تابع باندي مينيموم اړ ماکسيموم په نخښه شوي دي. په نيو وکرښه ا فراطي ځايونه د رابندو منحنيو له لارې پيژندلکيږي، هغه چې دا ټکي رابندوي يا (په بر کې) رانيسي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



ليکونکي: هيوليک، شترايت

وکتورنورمونو برابروالی

هر وکتورنورم $\| \ \|$ په $\mathbb{R}^n$ کي دا وکليدنورم $| \ |$ ته اکويوالنت يا برابرارزښته دی، دا په دې معنا چې شابتي c_i شتون لري د $c_1\|x\| \le |x| \le c_2\|x\|$ سره د ټولو $x \in \mathbb{R}^n$ لپاره.

(ليکونکی: هيوليک،پفايف)

نابرابرونونه يا نا مساوات سکالارانواريانت دي، دا په دې معنا چې د بدلون $x \mapsto \lambda x$ سره تغير نه خوري. دا بسيا کي، چې وکتورونه x په يوون- يا واحدسفيري يا فضا

$$S: \quad |x| = 1$$

کي تر څيړنې لاندې ونيسو. په S باندې هر نورم د 0 سره نا برابر دی، لهدې امله تابع

$$x \mapsto \frac{\|x\|}{|x|}$$

ناپريکيدونکې دی،،څکه چې S کومپک دی، نو يو مينيموم c_1 شتون لري او يو ماکسيموم c_2.

(c) ketabton.com: The Digital Library

(ليکونکي: هيوليګ او پفايف)

ليپشيخ-ناپريکيدنه *Lipschitz-Stetigkeit*

يو تابع c_2 په يوې ډيرئ D ليپشيخ-ناپريکيدونکی Lipschitz-stetig بللکيږي، که يوه ليپشيخ- ثابته c شتونولري، داسې چې

$$||f(x) - f(y)|| \leq c||x - y||$$

د ټولو $x, y \in D$ لپاره.

که f ناپريکيدونکی اومشتقوړ او D کونکاو يا وتلی يا محدب؟؟وي، نو د ليپشيخ-ثابته د جاکوبي-ماکسيموم Jacobi-Matrix سره اړتکل کيدی شي،:

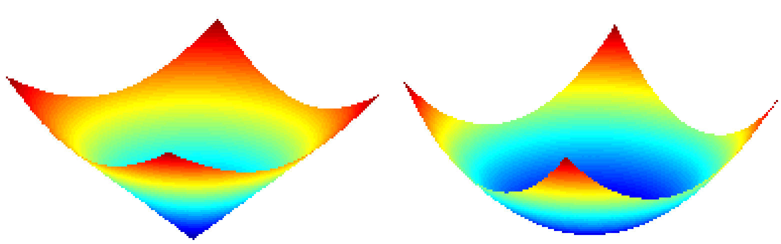
$$c \leq \sup_{x \in D} |f'(x)| .$$

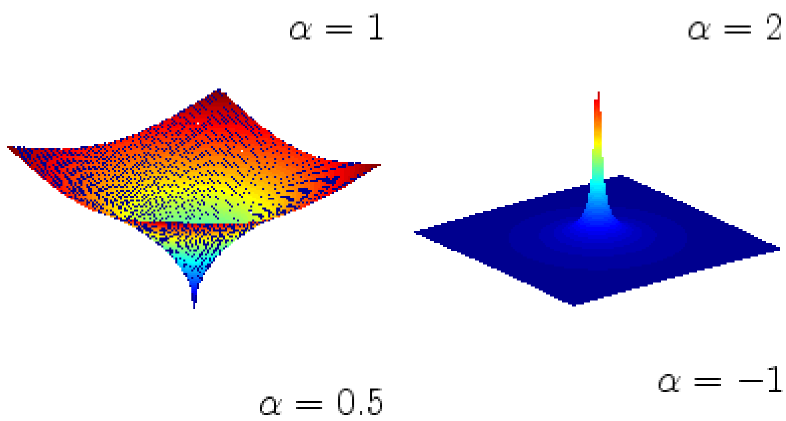
(ليکوني: اپپ، هيوليګ)

د تابع

$$f(x) = r^{\alpha}, \quad r = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2},$$

لپاره ډير حالتونه سره توپير کيږي.





(i) د $\alpha = 1$ لپاره f ګلوبال لیپشیخ ناپریکیدونکی دی. د درېګوډيیا مثلث د نامساوات څخه لاس ته راخي

$$|r - r'| = ||x| - |x'|| \le |x - x'|\,,$$

دا په دې معنا چې $c = 1$ د $D = \mathbb{R}^n$ لپاره لیپشیخ-ثابته ده.

(ii) د $\alpha > 1$ لپاره f په محدود ه دېرئ D باندې لیپشیخ-ناپرېکیدونکی دی. د منځ ارزښت جمیپه بنسټ

$$|r^\alpha - (r')^\alpha| = \alpha s^{\alpha-1}|r - r'|$$

دی سره د r او r' ترمنځ،پهتعقیب يي

$$c = \max_{x \in D} \alpha |x|^{\alpha-1}$$

ټاکل کيدی شي.

(iii) د $0 < \alpha < 1$ لپاره f ناپریکیدونکی دی مګر نه لیپشیخ- ناپریکیدونکی د 0 په یوه چاپریال کې. شرایط

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$|r^\alpha - 0^\alpha| \le c|r - 0|$$

د $r \to 0$ لپاره پوره نه دي

(iv) د $\alpha < 0$ لپاره f په 0 کې پريکيدونکيدی،ځکه چې د $r \to 0$ لپاره r^α د ∞ په لور هڅيږي.

(ليکونکي: بوسلر،هيوليګ،شترايت)

کونترا هيري فنکشن يا -- تابعKontrahierende Abbildung

يو تابع

$$g : D \to D$$

کونتراهيرکيدونکی(کيکاږل کيدونکی) دی، که په يوه مناسب نورم

$$\|g(x) - g(y)\| \le c\,\|x - y\|, \quad x, y \in D\,,$$

کې د $c < 1$ سره باورولري. د دېسره c داسېپه نامه د g کونتراکشنثابته ده،دا کړی شيد يوې کونوکسډيرئ لپاره د جاکوبي ماتريکس په مرسته د

$$\sup_{x \in D} ||g(x)||$$

اټکل کولای شي.

(ليکونکي: بوسلر،هيولير)

د يوه مثبت ديفينيت ماتريکس A لپاره

$$g(x) = x - \omega(Ax - b)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

کونتراهير دی،، که پارامتر ω پوره کوچنی وټاکل شي. باور لري

$$g(x) - g(y) = Q(x - y), \quad Q = E - \omega A \,,$$

دکوم سره چې د Q ا يګن ارزښت ϱ_i د A له ا يګنارزښت λ_i څخه شميرل کيدی شي:

$$\varrho_i = 1 - \omega\lambda_i \,.$$

که څا په څای کړو $\omega = 1/\max_i \lambda_i$ ، نوټول ايګن ارزښتونهپه $[0,1)$ کې پراته دي، او د اويکليدينورم استعمال سره

$c = \|Q\| = 1 - (\min_i \lambda_i)/(\max_i \lambda_i) < 1$ دی.

د بانښ ځاي په ځای ټکيجمله ***Banachscher Fixpunktsatz***

که g يو کونتراهيري تابع يا څيرونه وي، چی دا يوه ناتشه، رابنده ډيرئ $D \subset \mathbb{R}^n$ په خپل ځان ځيره کړي يعنې د ځان تابع وي دا په دې معنا چې باور لري:

- $D = \overline{D}$
- $x \in D \Rightarrow g(x) \in D$
- $\|g(x) - g(y)\| \le c\|x - y\| \quad \forall x, y \in D$

د $c < 1$ سره، نو g يوه يواځنی ټاکلي ځای په ځای ټکی $x_* = g(x_*) \in D$ لري،له $x_0 \in D$ څخه په وتنه يا تلنه کيدی شي x_* دايتراشن پرلپسي

$$x_0,\, x_1 = g(x_0),\, x_2 = g(x_1),\, \ldots$$

اپروکسيميرشي. د ناتيکاوي لپاره باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\|x_* - x_k\| \leq \frac{c^k}{1-c} \|x_1 - x_0\|$$

دا په دې معنا چې ایتراشن پرلپسې د هر پیلارزښت لپاره کرښیز پولې ته ځي.

د ځای په ځای ټکوچمل په پوره متریکي فضاو کې تولیز باور لري. دا چې د نورمترانسلیشن اینواریانځ او هوموجینیتی ته اړتیا نه شته، سرې کړی شي $\|x-y\|$ د یوه تولیز واتن تابع $d(x,y)$ سره بدل کړي.

(لیکونکې: ا پپ،بوسلر،هیولیګ)

دا چې $g(D) \subseteq D$ ، د ټولو $\ell > 0$ لپاره $x_\ell \in D$ باور لري، او د کونتراکشن شرطو ځخه لاس ته رائحي

$$\|x_{\ell+1} - x_\ell\| = \|g(x_\ell) - g(x_{\ell-1})\| \leq c\|x_\ell - x_{\ell-1}\|.$$

ددې نامساوات ایترایشن ځخه لاس ته رائحي

$$\|x_{\ell+1} - x_\ell\| \leq c^\ell \|x_1 - x_0\|.$$

د $j > \ell$ لپاره د دریګوډي نامساوات ځخه لاسته رائحي

$$\begin{aligned}\|x_j - x_\ell\| &\leq \|x_j - x_{j-1}\| + \|x_{j-1} - x_{j-2}\| + \cdots + \|x_{\ell+1} - x_\ell\| \\ &\leq (c^{j-1} + \cdots + c^\ell)\|x_1 - x_0\| = \frac{c^j - c^\ell}{c-1} \|x_1 - x_0\| \\ &\leq \frac{c^\ell}{1-c} \|x_1 - x_0\|,\end{aligned}$$

او له دې سره د کوشي-کونورګنت پرلپسې x_ℓ یوه پوله ارزښت x_* ته. که له نامساوات

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\|g(x_*) - x_*\| \leq \|g(x_*) - g(x_j)\| + \|g(x_j) - x_*\| \leq$$
$$\leq c\,\|x_* - x_j\| + \|x_{j+1} - x_*\|$$

څخه پوله ارزښت $j \to \infty$ ته سړی لاړ شي، نو ګوري، چې x_* د g يو ځای په ځای ټکی دی. دا هم يواځنی بيکس ټکيدی. که ونيسو، چې يوو بل ټکی $\tilde{x}_* \neq x_*$ هم شتون لري، نو د کونتراديکشن شرليطوڅخه برعکس راکوي.

$$\|\tilde{x}_* - x_*\| = \|g(\tilde{x}_*) - g(x_*)\| \leq c\|\tilde{x}_* - x_*\|\,.$$

د ناټيکاوي لپاره اټکل د $\|x_j - x_\ell\|$ لپاره د نامساوات څخه لاس ته راځي دا هم وپولې $j \to \infty$ته د ټک له لاري.

(ليکونکي: بوسلې، هيوليګ)

د نمونيې يا ټيپيکي استعمال لپاره يولړمتظرر کرښيزسيستم تر څيړنې لاندې نيسو:

$$Ax + \varepsilon f(x) = b$$

د يوه مربع ماتريکس A سره. د پوره کوجني ε د کرښيزېبرخې تعريفورشو لپاره، او سړی کړی شي دا سيستم د ايترايشن

$$x \leftarrow g(x) = A^{-1}(b - \varepsilon f(x))$$

سره حل کړي. دلته نيول کيږي، چې A انورتيرکيدونکيدی او تابع f ليپشيڅ – ناپريکيدونکېده د ثابتې c_f سره.

د بانښ فيکسټکي چملېBanachschen Fixpunktsatzes د نيوني يا فرضيي د ازمايښت لپاره سړی ټاکي

$$D = \{y:\ \|y - p\| \leq r\}, \quad p = A^{-1}b\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د په خوښه $x \in D$ لپاره دی

$$\|g(x) - p\| = \varepsilon \|A^{-1} f(x)\| \le \varepsilon \|A^{-1}\| \max_{y \in D} \|f(y)\| .$$

ټاکو

$$\varepsilon \le \frac{r}{\|A^{-1}\| \max_{y \in D} \|f(y)\|} ,$$

نو $g(x) \in D$ دی ،دا په د معنا چی g په D ځبره کوي یا مپینګکوي

د کنترکشنثابتيKontraktionskonstante c لپاره اټکلونه

$$\|g(x) - g(y)\| = \varepsilon \|A^{-1}(f(x) - f(y)\| \le \underbrace{\varepsilon \|A^{-1}\| c_f}_{c} \|x - y\|$$

له f څخه د لیپپشیځ-ثا بتې c_f سره

لاس ته راځي $c < 1$ ، که $$\varepsilon < \frac{1}{\|A^{-1}\| c_f}$$

که و غوښتل شي. دواړه شرایط به روښانه توګه د پوره کوچنی ε لپاره پوره ردي

(لیکونکي: بوسلي،هیلیګ)

ټوټه مشتق Partielle Ableitungen

د یوبټابع f مشتق $\partial_i f$ په i –مه واریلابلي متحولي پسي یونیواریتني ابع
$x_i \mapsto f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$, تابع مشتق دید هغه سره چې واریبلي x_i ،
$j \neq i$ د ثابتیول ې په څېر ترځېړني کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

داسې هم ليکو

$$\partial_i f = f_{x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} .$$

د يونيواريات مشتق د تعريع سره سم باور لري

$$\partial_i f(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(\ldots, x_i + h, \ldots) - f(\ldots, x_i, \ldots)}{h} .$$

پارشل مشتعونه د سکالارو او همد وکتورارزښتيزږ حقيقی توابعو لپاره تعريع دي. په پارشلمشفقنيونه کې په دواړو حالتونوږ کې د تابع تيوپ يا ډول ساتلی پاتې کيږي. د تعريف سره سم باور لري

$$\partial_i \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_i f_1 \\ \vdots \\ \partial_i f_n \end{pmatrix} .$$

پارشل مشتق د کمپوننتونو سره سيمولتان يل همغهوختيز جوړيږي

د توتال يا بيخي انتيګرال همداسې کربنيز اپرو کسسيماشن لپاره د وکتوربنه يا تيوپ د معنا دډکدی. دا ورسره بلد کنونشن يا قرار و وکتورونو داد د متحولې x او هم تابع f لپاره کارول کيږي

(ليکونکي:هيليک، شترايت)

د سکالار تابع لپاره توته مشفق هم سکالار دی.

د بيلګی په توګه د

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 x_2 + 5x_2 x_3$$

لپاره مشتق لاسته راځي

$$\partial_1 f = 2x_1 x_2 \,,$$

$$\partial_2 f = x_1^2 + 5x_3 \,,$$

$$\partial_3 f = 5x_2 \,.$$

د یوه وکتور ارزښتیز تابع لپاره ،لکه د بیلګي په توګه

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, x_3) \\ f_2(x_1, x_2, x_3) \\ f_3(x_1, x_2, x_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2^3 x_3 \\ x_1 x_2 x_3 \\ x_1 + x_3 \end{pmatrix}$$

د کمپوننتونونو تعداد پارشل- یا توټه مشتق سره ساتلی پاتي کیږي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\partial_1 f = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1 \\ \partial_1 f_2 \\ \partial_1 f_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 x_3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\partial_2 f = \begin{pmatrix} \partial_2 f_1 \\ \partial_2 f_2 \\ \partial_2 f_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_2^2 x_3 \\ x_1 x_3 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\partial_3 f = \begin{pmatrix} \partial_3 f_1 \\ \partial_3 f_2 \\ \partial_3 f_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2^3 \\ x_1 x_2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(ليکونکي: بوسلي،شترايت)

دېرواره ټوټه مشتق

دوه واره (يو په بل پسې نيول شوی) ټوټه مشتقونه د

$$\partial_i \partial_j f = f_{x_j x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

سره په نخښه کيږي،

په ورته د توګه د جګو مشتقونو لپاره تګه ليکو

$$\partial_i \partial_j \partial_k \ldots f$$

په بديلي توګه کيدی شي مولتی ايندکس نوتيشن

$$\partial^\alpha f = \partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_n^{\alpha_n} f, \quad \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n),$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

وکارول شي،چېرته چې ایندکس $\alpha_i \in \mathbb{N}_0$ د توپه مشتقونو د توپه مشتقونو تعداد په i -مه متحولی پسې په نخښه کیږي

زیاتون یا جمعه $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ توپه مشتق بلل کیږي

(لیکونکي: هیولیک، شترایت)

تابع

$$f(x) = \exp(\mathrm{i}x^{\mathrm{t}}y) = \exp(\mathrm{i}(x_1y_1 + \ldots + x_ny_n))$$

مسطحه څپه بلل کیږي اود نورو تر څنګ د فوري-انالیوزېFourier-Analysis کې رول یو غوره رول لوبوي

مشتقونه ساده شمیرل کیدی شي. دځنځیري قانون سره لاس ته راځي

$$= \partial_k f(x) \quad \mathrm{i}y_k \exp(\mathrm{i}x^{\mathrm{t}}y)$$

$$\partial_\ell \partial_k f(x) = (\mathrm{i}y_\ell)(\mathrm{i}y_k) \exp(\mathrm{i}x^{\mathrm{t}}y)$$

او له دې سره

$$\partial^\alpha f(x) = (\mathrm{i}y)^\alpha \exp(\mathrm{i}x^{\mathrm{t}}y) = \mathrm{i}^{|\alpha|} y^\alpha \exp(\mathrm{i}x^{\mathrm{t}}y)$$

د $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ او $y^\alpha = y_1^{\alpha_1} \cdots y_n^{\alpha_n}$ سره .

د بیلګېپه توګه د $n = 2$ لپاره دی

$$\partial^{(3,4)} f = \underbrace{\mathrm{i}^7}_{-\mathrm{i}} y_1^3 y_2^4 \exp(\mathrm{i}(x_1y_1 + x_2y_2)) .$$

(لیکونکي: بوسلي، هیولیک،شترایت)

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مولتیواریانتو(ډېرواره اووښتونو) پولینومونو ټوټه مشتق

د یوه مونوم ټوټه مشتق

$$\partial^\alpha x^\beta = \partial_1^{\alpha_1} \ldots \partial_n^{\alpha_n} \left(x_1^{\beta_1} \ldots x_n^{\beta_n} \right)$$

تیک هلته له صفر سره نابرابر دی، چې

ویي او په دې حالت کې دی

$$cx^{\beta-\alpha}, \quad c = \prod_i \beta_i(\beta_i - 1) \cdots (\beta_i - \alpha_i + 1)\,.$$

په توګه

دی $\partial^\alpha x^\beta|_{x=0} = \alpha! \delta_{\alpha\beta}$ د $\alpha! = \prod_k \alpha_k!$ سره.

د ټولو پولینومونو $p(x) = \sum_\beta x^\beta$ لپاره باور لري

$$\partial^\alpha p = 0, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n = k\,,$$

نو p توتالدرجه $< k$ لري.

(لیکونکي: هیولیک، شترایت)

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ښوونې فکرېپېه دې ځانګړي حالت $n = 2$ او $|\alpha| = 3$ وښوول شي. پسې د د مشتق له ورکېدو لاسته ارځي

$$p_{xxx},\, p_{xxy},\, p_{xyy},\, p_{yyy}, \quad p(x,y) = \sum_{j,k} c_{j,k} x^j y^k\,,$$

دا چې p یود توتال درجې ≤ 2 پولینوم دی، دا په د ې معنا چې ټول ضریبونه $c_{j,k}, \quad j+k > 2\,,$ ورکيږي.

$$c_{j,k}, \quad j+k > 2\,,$$

که یو اړونده ترم (د بېلګې په توګه $c_{2,1}x^2y$)صفرنه واي، نو لږتر لږه یو د دریمې درجې یو ټوټه مشتقشته(د بیلګې په توګه p_{xxy})، کوم چط دا ترم نه انولېannulliert کوي.

په ټولیزه توګه هم همداسې دلایل راوړلکيږ ی.

د هر مولتي ایندکس $|\beta| \geq k$ لپاره γ شتون لرید $|\gamma| = k, \quad \partial^\gamma x^\beta \neq 0\,.$ سره.

د بېلګې په توګه سړی کړی شي $n = 3$ ، $k = 4$ اود $\beta = (1,2,3)$ لپاره

$$\gamma = (1,2,1),\ (1,1,2),\ (1,0,3),\ (0,2,2),\ (0,1,3)$$

وټاکي.

(لیکونکي: هیولیګ، شترایت)

(c) ketabton.com: The Digital Library

د یوه تابع د ټوټه مشتق بدلوړوالی

که د یوه تابع f لومړی اودویم ټوټه مشتق ناپرېکیدونکي وي،نوباورلري

$$\partial_i\partial_j f = \partial_j\partial_i f \,.$$

د پوره کېدونکي خویتابع لپاره د ټوټه توابعو مشتق لړئ پرلپسې بدلوړ دي.

په ځانګړې توګه دا د مولتی ایندکس-لیکنډول ته ټیکاوی ورکوي.

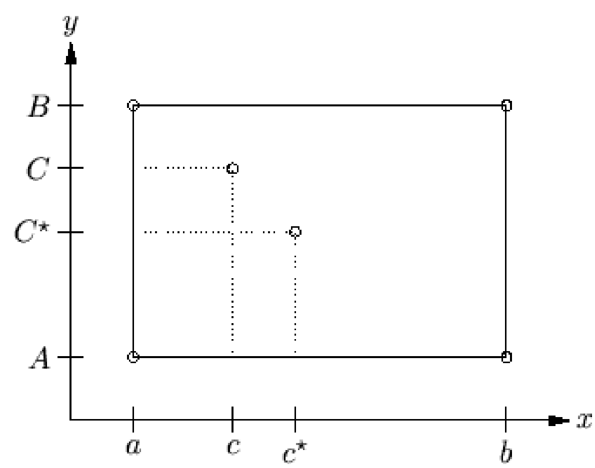
دا چې ټوټه مشتق سره متحولي $x_k,\ k \neq i,j$ ځاي په ځای پاتې کیږي ، بسیا کوي،

چې یو بیواریات تابع $f(x,y)$ په بکاور واچوو یا تر څېړنې لاندې ونیسو.

په یوه واړه ولاړکوډي د (x,y) لپاره د

$$g(x) = f(x,B) - f(x,A), \quad h(y) = f(b,y) - f(a,y)\,,$$

سره مشفقونه په y - همداسې x -لورو په نخښنه کړو.



په کونجونو کي دفرنځ

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$Q = f(b,B) - f(b,A) - f(a,B) + f(a,A)$$

په دوه مختلف ډولونود منځجملې په مرسسته شمیرل کیږي:

Q= $[f(b,B) - f(b,A)] - [f(a,B) - f(a,A)]$

= $g(b) - g(a)$

= $(b-a)g_x(c)$

= $(b-a)[f_x(c,B) - f_x(c,A)]$

= $(b-a)(B-A)f_{xy}(c,C)$

د $a \le c \le b$ او $A \le C \le B$ او لاندې سره

Q=	$[f(b,B) - f(a,B)] - [f(b,A) - f(a,A)]$
Q=	$h(B) - h(A)$
Q=	$(B-A)h_y(C^\star)$
Q=	$(B-A)[f_y(b,C^\star) - f_y(a,C^\star)]$
Q=	$(B-A)(b-a)f_{yx}(c^\star,C^\star)$

د $a \le c^\star \le b$ او $A \le C^\star \le B$ سره.له دې سره لاست اراځي

$$f_{xy}(c,C) = f_{yx}(c^\star,C^\star),$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

او ولاړکوډيز په واړه کونه سره($b \to a,\ B \to A$) ، د دويمګړوله کشتق د ناپرېکيدنې په بنسټ لرو

$$f_{xy}(a,A) = f_{yx}(a,A)\,.$$

او د لاړګوډي په کوجنيوالي،($b \to a,\ B \to A$) د دويم ګړوله مشتق د ناپريکيدني په بنسټ لاسته راځي

$$f_{xy}(a,A) = f_{yx}(a,A)\,.$$

ليکونکي: بوسلې، هيوليګ، شترايت

فنکشن يا تابع يا بلواک

$$f(x,y) = \frac{x^3y - xy^3}{x^2+y^2}$$

د $(x,y) \neq (0,0)$ لپاره په خوښه ناپرېکيدونکي اومشتقوړ دی

لومړ دوه مشقونه

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= \frac{3x^2y - y^3}{x^2+y^2} - 2x\frac{x^3y - xy^3}{(x^2+y^2)^2}, \\ f_y(x,y) &= \frac{x^3 - 3xy^2}{x^2+y^2} - 2y\frac{x^3y - xy^3}{(x^2+y^2)^2}\,, \end{aligned}$$

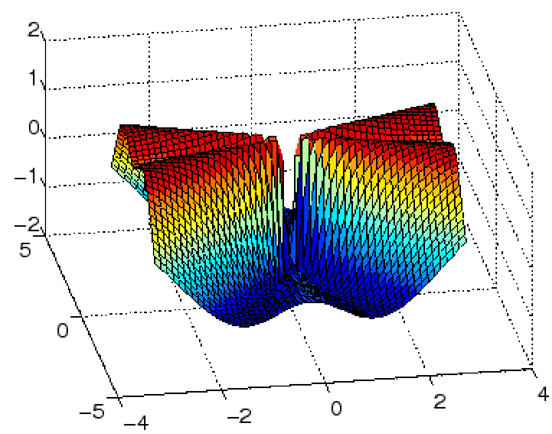
په ټول $\mathbb{R}^2$ ناپريکيدونکي دي، ځکه چې د

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$|f_x(x,y)|, |f_y(x,y)| \le (3+1+2(1+1))\sqrt{x^2+y^2}$$

له امله f_x ا و f_y په ټول په پیل کې د 0 ارزښتونو سره ناپریکیدونکي مخ ته ورلوړدي

ګډوله مشتق (f_{xy} $= f_{yx}$ په $\mathbb{R}^2\backslash(0,0)$)دی مګر په صفرتکي کط پریکیدونکی، کوم چې له مشتق څخهه لید ل کیږي



بدلون ناشونی دی:

$$\begin{aligned} f_{xy}(0,0) &= \frac{d}{dy}\left(f_x(0,y)\right)_{|y=0} = \frac{d}{dy}\left(\frac{-y^3}{y^2}-0\right)_{|y=0} = -1, \\ f_{yx}(0,0) &= \frac{d}{dx}\left(f_y(x,0)\right)_{|x=0} = \frac{d}{dx}\left(\frac{x^3}{x^2}-0\right)_{|x=0} = 1\,. \end{aligned}$$

مختلف پوله ارزښتونه لاسته راځي، په دې اړوند چې په کومه لړئ-پرلپسي توته مشتقونه نیول شوي دي

لیکونکي: هیولیګ، شترایت

(c) ketabton.com: The Digital Library

توتال مشتقونه *Totale Ableitung*

يو حقيقی تابع $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ په يوه ټکي x کي مشتقوړ دی، که د $|h|\to 0$ لپاره.توتال مشتق د ټوټه مشتق جاکوبي -ماتريکس دی:

$$f'=\mathrm{J}\,f=\frac{\partial(f_1,\dots,f_n)}{\partial(x_1,\dots,x_n)}=(\partial_1 f,\dots,\partial_n f)=\begin{pmatrix}\partial_1 f_1 & \dots & \partial_n f_1\\ \vdots & & \vdots\\ \partial_1 f_m & \dots & \partial_n f_m\end{pmatrix}.$$

د يوه سکالارتابع($m=1$) لپاره مشتق ګرادينت $f'=(\mathrm{grad}\ f)^{\mathrm{t}}\,,$ بللکيږي او د يوې کږې($n=1$) پارامتري کولو لپارهدتانجنت وکتور. د

توتال مشتق $f'(x)$ شتون لپاره پوره کيدونکي شرطونه د يوه په x چاپيريال کې د ټوټه مشتقونو نه پرېکيدنه ده.

د توتال مشتق $f'(x)$ د شتون لپاره پوره کيدنکي شرطونه په يوه چاپيريال x کې د ټوټه مشتق ناپرېکدنه ده.

د توتال مشتق سره کيدی شي د يوه تابع په ارګومنتو يا تعريفورشوکې $(x\to x+\Delta x)$ د کوچنيورمونو تغيراتو سره اپرکسيمه $(x\to x+\Delta x)$ شي. د نظم $o(|\Delta x|)$ سره ترمونو څخه صرف نظرکيدنه په نږدې توګه باور لري

$$\Delta f(x)=f(x+\Delta x)-f(x)\approx f'(x)\Delta x\,.$$

د دې دلپاره چې د پولط پرسه $|\Delta x|\to 0$ رامنځ ته کړو، ليکو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n$$

داسي په نامه دفرنشال df او dx_i ،کوم چې د کرښيزو اپروکسيميشن تغيرات تشريح کوي

dx_i چې وښايو چې توتالمشتق ټوټه مشتق خوندي لري، د ساده کونېپه بنسټ يو تابع د دوه متحولو $f(x,y)$ سره رواړو. په دې حالت کي $h=(s,t)^t$ يووکتور دی د دوه کمپوننتونو سره. په د حالت کې $h=(s,t)^t$ يوووکتور دی د وه کمپوونتونو سره. که بيلګي په توګه $t=0$ ځاي په ځای کړو نو لرو

$$f(x+s,y) = f(x,y) + f'(x,y)\,(s,0)^t + o(|(s,0)|)$$

$$= f(x,y) + (\mathrm{J}\,f)_1\, s + o(|s|)\,,$$

چيرته چې $(\mathrm{J}\,f)_1$ د $\mathrm{J}\,f$ لومړی درځيا مته ښايي له s او پوله ارزښت $s \to 0$ د جوړېدوسره، د $f(x,y)$ ټوټه مشتق راکوی دپسې x :

$$(\mathrm{J}\,f)_1 = \lim_{s\to 0} \frac{f(x+s,y)-f(x,y)}{s} = \partial_1 f(x,y)\,.$$

د ټوټه مشتق نا پريکيدنه مقشتوړوالی ايمپليځي کوي، دا په دې معنا چې د توتالمشتق شتونوال.

$$f' = (\partial_1 f, \ldots, \partial_n f)\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دې لپاره چې د ټوټه مشتق د ناپرېکېدنې څخه د توتال مشتق شتون لاس ته راوړو لومړی یوسکالار تابع $f(x,y)$ تر څېړنې نیسو. د منځ ارزښت جملې له مخې د $h=(s,t)$ لپاره باور لري

$$f(x+s,y+t) = f(x+s,y) - f(x,y) + f(x+s,y+t) - f(x+s,y) + f(x,y)$$
$$= s\,f_x(\xi,y) + t\,f_y(x+s,\eta) + f(x,y)\,,$$

د $\xi \in (x,x+s)$ ، $\eta \in (y,y+t)$ سره. د وړاندنیونې(فرضیی) په بنسټ ټوټه مشتقونه f_x او f_y ناپرېکېدونکي دي، دا په دې معنا چې

$$f_x(\xi,y) \to f_x(x,y)\,, \quad f_y(x+s,\eta) \to f_y(x,y)$$

د $|h| \to 0$ لپاره. له دې سره د تابع f توتال مشتقوړوالی لاسته راوړل کیږي:

$$f(x+s,y+t) = f(x,y) + sf_x(x,y) + tf_y(x,y) + o(|h|).$$

په ورته توګه د n متحولو سکالار تابع لپاره دلایل راوړلکیږي. ټولیزحالت یې په ځانله توګه د کمپوننتو له لارې څخه لاسته راځي.

لیکونکي: بوسلې، هیولیګ، شترایت

تابع

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$$

په صفرځای کې پرکیدونکې ده. دا کتل کیدی شي که د بیلګې په توګه سړی په دوه مختلفو سرچینه کرښو پوله ارزښت $0 \to x$ ونیسی یا راوړي:

$$\lim_{x\to 0} f(x,x) = \frac{x^2}{x^2+x^2} = \frac{1}{2} \neq -\frac{1}{2} = \lim_{x\to 0} f(x,-x)\,.$$

په تعقیب یې f په صفرځای کې مشتقوړ نه دی، ځکه چې له مشتقوړوالي څخه ناپربکیدنه منځ ته راځي.

په صفرټکي کي مګر دواړه ټوټه مشتقونه شتون لري. له

$$f(x,0) = f(0,y) = 0$$

لاس ته راځي

$$f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0.$$

دواړه ټوټه مشتقونه مر په صفرټکي کي پريکيدونکي ديٍ.

که په مختلفو کړو باندې د مشتق

$$f_x(x,y) = \frac{y^3 - x^2y}{(x^2+y^2)^2}$$

که پوله ارزښت $(x,y) \to (0,0)$ تر ځېړنې لاندې ونیسو، نو د بېلګې په توګه د $y = x$ لپاره لرو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lim_{x\to 0} f_x(x,x) = \lim_{x\to 0} \frac{0}{(x^2+y^2)^2} = 0$$

او د $y = x^2$ لپاره

$$\lim_{x\to 0} f_x(x,x^2) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2-1}{(1+x^2)^2} = -1 .$$

په اړونده توګه په صفرځای کې د ټوټه مشتق f_y پرې کیدنه شمیرل کیږي. دا ښایی، چې د مشتقوړوالي لپاره د ټوټه مشتقوني شتونوالی پوره کیدونکې نه دی، بلکه برسیره پردې ناپرېکیدنه هم غوښتل کیږي.

لیکونکي: بوسلي، هیولیګ، شترایت

تابع

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} x+2y \\ xy \\ 3x^2+y^2 \end{pmatrix}$$

او $h = (s,t)^t$ دي

$$f'(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ y & x \\ 6x & 2y \end{pmatrix}$$

او

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرليک

$$f(x+s,y+t) = \left(\begin{array}{c} (x+s)+2(y+t) \\ (x+s)(y+t) \\ 3(x+s)^2+(y+t)^2 \end{array} \right).$$

له دې سره يو تابع

$$g(s,t) = f(x+s,y+t) - f(x,y) - f'(x,y)\,(s,t)^t = (0, st, 3s^2+t^2)^t,$$

لاس ته راځي، د کوم سره چې د $(s,t) \to (0,0)$ لپَاره هر کمپوننت ګړندی صفر ته ځي نسبت و $|h| = |(s,t)|$ ته،دا په دې معنا چې $g(s,t) = o(|(s,t)|)$

ليکونکي: هيوليګ، شترايت

د سکالار تابع $f(x,y) = r = \sqrt{x^2+y^2}$ لپاره د ګرادينتت په حيث ورکوي

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \left(\begin{array}{c} \partial_1 f \\ \partial_2 f \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} x/r \\ y/r \end{array} \right).$$

د يوې ګرې $f(t) = (\cos t, \sin t, t)^t$ پارامتريککولو له لارې د مشتق په حيث يود تانجنتوکتورراکوي

$$f'(t) = (-\sin t, \cos t, 1)^t\,.$$

د

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\sin\vartheta\cos\varphi \\ r\sin\vartheta\sin\varphi \\ r\cos\vartheta \end{pmatrix}$$

له لارې تعریف شوي غونډآري کواوردینات لاندې د جاکوب-ماتریکسدی

$$f'(r,\vartheta,\varphi) = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\vartheta,\varphi)} = \begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi & r\cos\vartheta\cos\varphi & -r\sin\vartheta\sin\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi & r\cos\vartheta\sin\varphi & r\sin\vartheta\cos\varphi \\ \cos\vartheta & -r\sin\vartheta & 0 \end{pmatrix}$$

ليکونکي: بوسلې، هيوليګ، شترايت

کرښيزا پروکسيميشن***Lineare Approximation***

په لومړئ نږدېونه کې د ناپريکيدونکي مشتقوړ تابع لپاره باور لري، دا په دې معنا چې د نظم ترمونو $o(|\Delta x|)$ باندې صرفنظرکوني يا پرېښوني له لارې

$$\Delta f(x) = f(x+\Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x\,.$$

ليکونکي ، هيوليګ، شترايت

د مولتيواريت توابعو د غلطيو وده يا تکثير

Fehlerfortpflanzung multivariater Funktionen

د يوه نا پرېکيدونکي مشتقوړ تابع $x \mapsto y = f(x)$ لپاره کيدی شي ديناکوراتو X inakuraten-ارزښتونو $x + \Delta x \approx x$ د f ټوته مشتق په مرسته تشريح کړای شي. د مطلق ناټيکاوي لپاره د $o(|\Delta x|)$ نظم د ترمونوڅخه په صرفنظر باور لري

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) \approx f_{x_1}(x)\Delta x_1 + \cdots + f_{x_n}(x)\Delta x_n\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که $|x_i|,\ |y| \neq 0$ وي، نو د نسبي ناټیکاوي لپاره لاس ته راځي

$$\frac{\Delta y}{|y|} \approx c_1 \frac{\Delta x_1}{|x_1|} + \cdots + c_n \frac{\Delta x_n}{|x_n|}$$

د لاندې کنډېشن عدد Konditionszahlen سره

$$c_i = \frac{\partial y}{\partial x_i} \frac{|x_i|}{|y|} .$$

یادونه (ژباړی) : د کنډیشن سره سړی پهشمیرپوهنه کې هغه شی تشریح کوي، چې یوه پرابلم حل د هغه دد وتون داتا د مضاحمت په واک کې وي. د کنډیشن عدد د دې په واکوالي کچه انځوروي، چې په هغه وتن ناټیکاوی په نا مساعد حالت کې زواکمنه کیږي. دا د تاکلو حل تلنلارو څخه خپلواکه دی. پای.

د کارتیزي کواوردینات څخه د قطبي کواوردینات د φ کونج شمیرني له امله

د مطلق ناټیکاوي لپاره لاس ته راځي

$$\Delta\varphi \approx f_x(x,y)\Delta x + f_y(x,y)\Delta y = -\frac{y\Delta x}{x^2+y^2} + \frac{x\Delta y}{x^2+y^2} .$$

د نسبي ناټیکاوي لپاره لاس ته راځي

$$\frac{\Delta\varphi}{|\varphi|} \approx -\frac{y|x|}{(x^2+y^2)|\varphi|}\frac{\Delta x}{|x|} + \frac{x|y|}{(x^2+y^2)|\varphi|}\frac{\Delta y}{|y|} .$$

د $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$ سره د $|\sin\varphi/\varphi| \leq 1$ له امله لاس ته راځي،
چې د ښي اړخ ارزښت له

(c) ketabton.com: The Digital Library

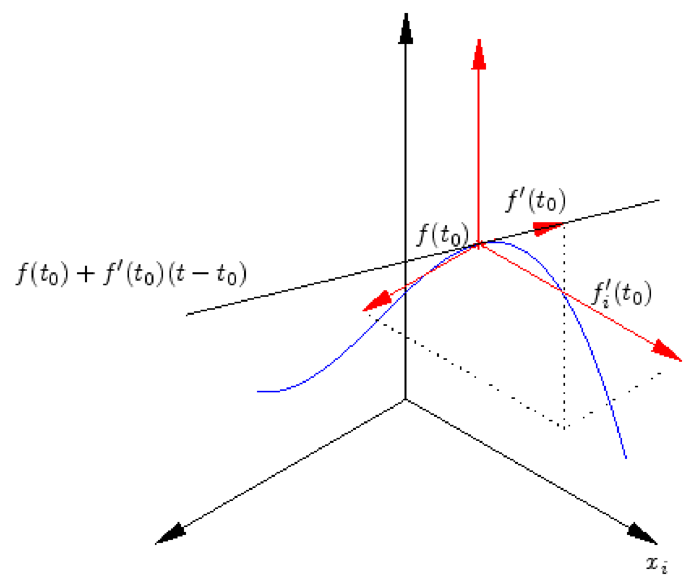
$$\left|\frac{\cos\varphi\ \ \sin\varphi}{\varphi}\right|\left(\frac{|\Delta x|}{|x|}+\frac{|\Delta y|}{|y|}\right)\leq 2\max\left(\frac{|\Delta x|}{|x|},\frac{|\Delta y|}{|y|}\right)$$

لاري اټکل کيدی شي. نسبي ناټيکاوی زيات له زيا ته د يوه ضريب 2قوي کيدی شي.

مطلق ناټيکاوی کيدی شي د يوه ضريب سره چې $1/r$ ته متناسب وي لوی شي. د انتظار سره سم په x او y کې د کونج اندازه کونه د برابر زغم له امله د کوچنۍ وړانګې لپاره ناټيک دی.

ليکونکي: بوسلې، هيوليګ، شترايت

Tangente تانجنت



په ټکي $f\left(t_0\right)$ کې د مشتقوړ پارامتريکي کرښ(منحني) $t \mapsto (f_1(t), \ldots, f_n(t))^t$

تانجنت يوه کرښه

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(t_0) + f'(t_0)(t - t_0)\,, \quad t \in \mathbb{R}$$

ده داسې چې لږ تر لږه د تانجنت وکتور يو کمپونت $f_i'(t_0)$ له صفر سره توپير ولري.

ليکونکي: بوسلي، هيوليک، شترايت

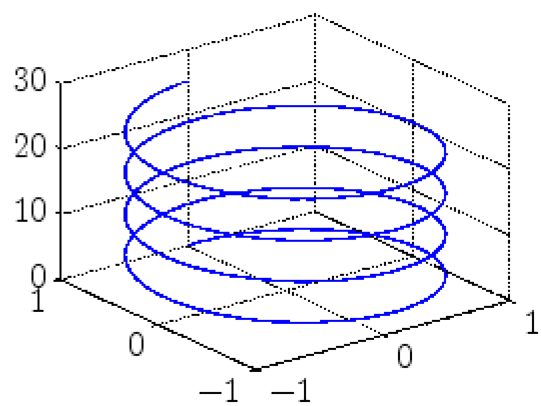
د

$$t \mapsto f(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \\ t \end{pmatrix}$$

له لارې پارامتريکي پيچميخ کرښه باندې تانجنت دی

$$f'(t) = (\cos t, -\sin t, 1)^t$$

.



د بيلګې په توګه په ټکي $f(3\pi) = (0, -1, 3\pi)$ کې د تانجنت لپاره پارامتريکي کيدنه لاس ته راځي:

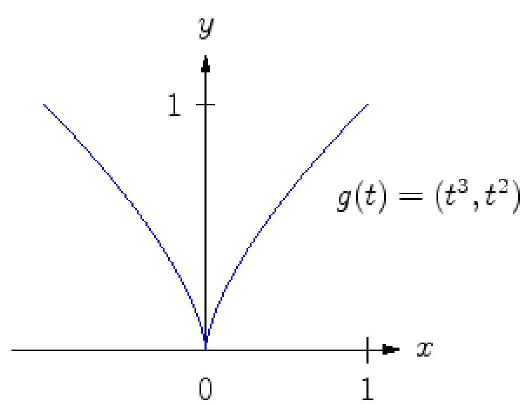
(c) ketabton.com: The Digital Library

$$t \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3\pi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} (t - 3\pi) .$$

ليکونکي: هيوليګ، پفايفر

د $t_0 = 0$ لپاره له $t \mapsto g(t) = \begin{pmatrix} t^3 \\ t^2 \end{pmatrix}$ لارې د پارامتريکي کږې لپاره د دواړو کمپوننتونو مشتق ورکيږي. د کږې لور سملاسي له $(0,-1)^t$ څخه و $(0,1)^t$ ته تغير خوري.

که $g(t)$ د وخت په واک کې ځايزوکتور په حيث تعبير کړو، نو د $t_0 = 0$ لپاره چټکتيا صفرده. له دې سره، سره له دې چېناپريکيدونکي مشتقوړ کواوردينات، يو پريکيدونکی لورتغير ممکن دی.

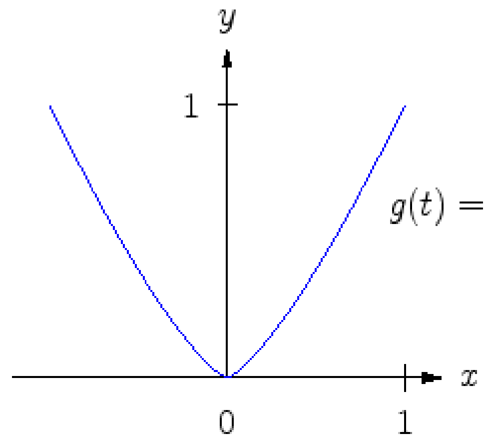


د $g(t) = (t^3, t^4)^t$ لپاره همداسي $g'(0) = (0,0)$ دی. د پارامتر اړونه يا بدلون

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$s = t^3, \quad g(t) = q(s) = \begin{pmatrix} s \\ s^{4/3} \end{pmatrix}$$

ښايی، چې له $s = 0$ سره د تانجنتتغير ناپريکيدونکي دي.



ليکونکي: بوسلي، هيوليک، شترايت

Tangentialebeneتانجنتي سطحه

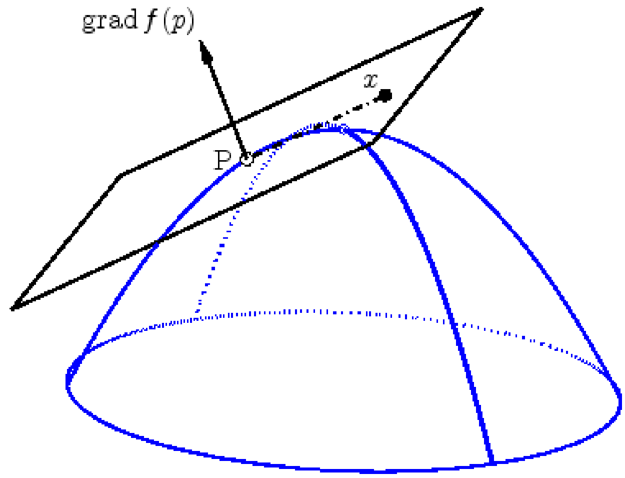
f دې يوناپريکيدونکی مشتقوړ تابع او $(p_1, \ldots, p_n)$ دې يو ټکی وي په له $f(x_1, \ldots, x_n) = c$ لاري ايمپليحيت تعريف شوې سطحه باندې. که $\operatorname{grad} f(p) \neq 0$, وي نو تانجنتي سطحه په ټکي P کې مساوات

$$E: \quad (\operatorname{grad} f(p))^t \, (x - p) = 0 \,.$$

لري.

نورمالوکتور و $\operatorname{grad} f$ ته غبرګ دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library



د يوه تابع $y = g(x_1, \dots, x_{n-1})$ د ګراف لپاره په ځانګړې توګه

$$E: \quad y - g(q) = \sum_{i=1}^{n-1} \partial_i g(q)\,(x_i - q_i)$$

د تانجنتي سطحېمساوات دی په لاندې ډول کې:

$$(q_i, \dots, q_{n-1}, g(q))^t$$

.

توپه مشتق $\partial_i g$ له دې امله دتانجنتي سطحي جګوالی بنايي د i-م کواوردينات محور په لور

ليکونکي: ب، هيوليک، کيمرلي، شترايت

د توتالمشتق $\text{grad}\, f' = (\quad f)^t$ تعريف دی

$$f(x) = f(p) + (\text{grad}\ f)^t(x - p) + o(|x - p|).$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که له ترم $o(|x-p|)$ څخه صرفنظروشي،نو د $f(x)=f(p)=c$ له امله د تانجنتي سطحې مساوات لاس ته راځي.

په ورته توګه د يوه د $y=g\left(x_1,\ldots,x_{n-1}\right)$ له لارې تعريف شوي تابع ګراف لپاره باور لري

$$\Delta y=\sum_{i=1}^{n-1}\partial_i g(q)(\Delta x_i)$$

د $\Delta y=y-g(q)$ او $\Delta x=x-q$ سره. د باقي غړي څخه صرف نظر له امله بيرته د تانجنت سطحې ښوول شوې انځور ته ورځو.

ليکونکي: بوسلې، هيوليک، شترايت

د کګل

$$K:\ f(x,y,z)=x^2+y^2-z^2=0$$

لپاره $\operatorname{grad} f(x,y,z)=(2x,2y,-2z)^t$ دی. له دې سره سړی د تانجنتي سطحې په حيث لاس ته راوړي.

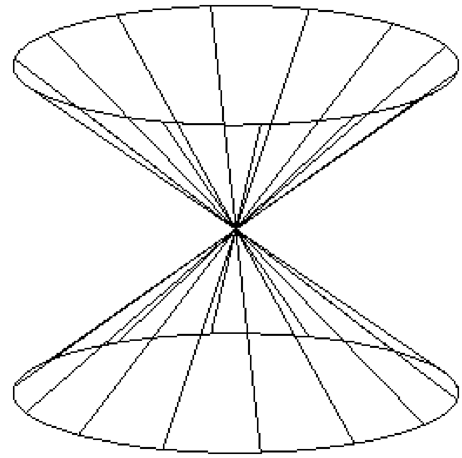
$$E:\ \ -2z_0(z-z_0)+2y(y-y_0)+2x(x-x_0)=0.$$

د بيلګې په توګه تنجنتي سطحه په ټکي $P=(3,4,5)$ کې لاندې مساوات لري

$$E:\ \ -10z+8y+6x=0.$$

په ټکي $Q=(0,0,0)$ کې ګرادينت ورکيږي،د مخروط په ککره يا څوکه کې تانجنتي سطحه شتون نه لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library



لیکونکي: بوسلې، هیولیګ، شترایت

د یوه دیپول(دوه قطبي) پوتنشل

$$f(x) = |x-p|^{-1} - |x+p|^{-1}\,, \quad x = (x_1, x_2)\,,$$

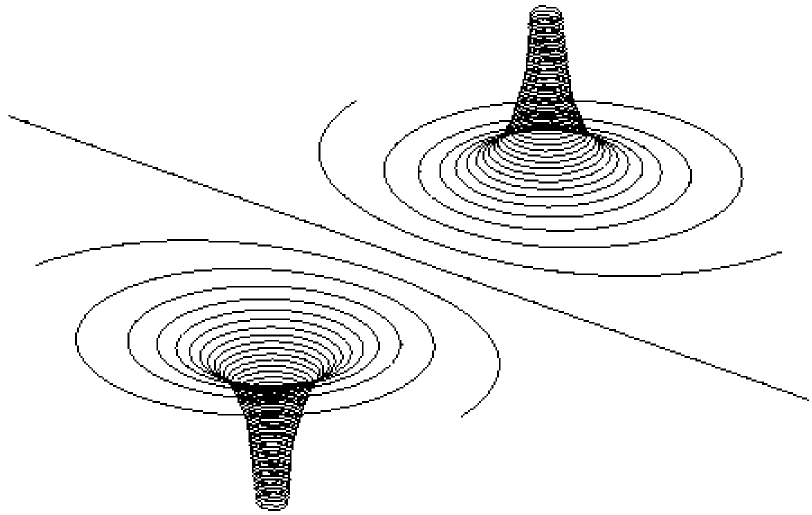
لپاره ،په کوم کې کې چې برق(Ladungen)(دلته باید موخه هغه بار وي،چې دلته شتون لري) په‌ټکو $-P$ او P کې شتون لري د کرادینت په څېر لاس ته راځي

$$\operatorname{grad} f(x) = \frac{(x+p)}{|x+p|^3} - \frac{(x-p)}{|x-p|^3}$$

او له دې سره په یوه ټکي $A = (a_1, a_2)$ کې تنجنتي سطحه

$$x_3 = f(a) + (\operatorname{grad} f(a))^{\mathrm{t}}\ (x-a).$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



د بیلګې په توګه د $A = (0,0)$ لپاره دی

$$x_3 = 0 + (2p^t/|p|^3)(x_1, x_2)^t \,,$$

دا په دې معناچې تانجنتي سطحه په سرچينه کې ځغلي او و P ته ولاړه یا عمود کړښه خوندي لري.

په سیګولاریټیو P او $-P$ کې تانجنتي سطحه شتون نه لري.

لیکونکي: بوسلې، هیولیک، شترایت

مولتیواریات ځنځیري قاعده یا لار

Multivariate Kettenregel

د ناپریکیدونکومشتقوړ توابعو $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^\ell$ او $g : \mathbb{R}^\ell \to \mathbb{R}^n$ یو بل پسې تړلو

$$h = g \circ f : x \mapsto y = f(x) \mapsto z = g(y) \,,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له امله باور لري

$$h'(x) = g'(y) f'(x)\,,$$

دا په دې معنا چې د جاکوبي-ماتريکس h د جاکوبي-ماتريکسونو f او g ضرب دی.د
يوګونې لاس ته راوړنې يا لرنو د ماتريکس ضرب له لارې لاس ته راځي

$$\frac{\partial h_i}{\partial x_k} = \sum_j \frac{\partial g_i}{\partial y_j} \frac{\partial f_j}{\partial x_k}\,.$$

په ځانګړې توګه ځنځيري قانون د ځانګړي حالت $m = n = 1$ لپاره (دا په دېمعنا
چې f يوه پارامتريک شوې کږه او g د متحولې يو سکالار تابع) لاندې څېره يا شکل
لري:

$$\frac{d\,h}{d\,x} = (\operatorname{grad} g)^{\mathrm{t}}\, f'(x)\;.$$

د يوه تابع د توتالمشتق لپاره باور لري

$$\varphi(x+h) = \varphi(x) + \varphi'(x)h + o(|h|)\,.$$

له دې سره د مشتقونو $f'(x)$ او $g'(y)$ د شتون څخه لس ته راځي

$$g(f(x+h)) = g(f(x) + \underbrace{f'(x)h + o(|h|)}_{\tilde{h}}) =$$

$$= g(f(x)) + [g'(y)\,\tilde{h}] + o(|\tilde{h}|)\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا چې

$$[g'(y)\,\tilde{h}] = g'(y) f'(x) h + o(|h|)$$

او $|\tilde{h}| = O(|h|)$ لرود $g \circ f$ د جاکوبي - ماتريکس لپاره غوښتلی فرمول ورکوي.

ليکونکي: هيوليګ، کنش

د ځنځيري قانون د تشکيل يا روښانه وني لپاره لاندې تابع راوړو

$$y = f(x) = \begin{pmatrix} x_3 \sin(x_1) \\ e^{x_2}/x_3 \end{pmatrix}, \quad g(y) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_1 + \ln(y_2) \\ 0 \\ y_2 \cos(y_1) \end{pmatrix}$$

د دې لپاره چې د $h = g \circ f$ د جاکوبي-ماتريکس په $p = (\pi,\, 0,\, 1)^{\mathrm{t}}$ کې وشميرلی شو، تشکيلوو

$$f'(x)_{|x=p} = \begin{pmatrix} \cos(x_1) x_3 & 0 & \sin(x_1) \\ 0 & e^{x_2}/x_3 & -e^{x_2}/x_3^2 \end{pmatrix}_{|x=p} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

همداسې

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$g'(y)_{|y=f(p)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1/y_2 \\ 0 & 0 \\ -y_2\sin(y_1) & \cos(y_1) \end{pmatrix}_{|y=(0,\,1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

او لاس ته راوړو

$$h'(\pi,0,1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

ليکونکي: هيوليک، کنش

د يوه سکالار تابع $f(x,y)$ لپاره د کږې $t \mapsto (x(t),y(t))^t$ په اوږدو د خنځيريقانو له مخې باور لري

$$\frac{d}{dt}f = f_x x' + f_y y'.$$

د بيلګې په توګه د

$$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}\,, \quad x = \sin t\,, \quad y = \cos t$$

لپاره لاندې مشتق لاس ته راځي

$$\frac{d}{dt}f(x(t),y(t)) = \quad \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos(t) + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}(-\sin(t))$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \frac{\sin(t)\cos(t) - \cos(t)\sin(t)}{1}$$

$$= 0$$

دا یوځای اینوول شوي تابع

$$f(x(t), y(t)) = \sqrt{\sin^2(t) + \cos^2(t)} = 1$$

د سیده مشتق سره خوري یا برابر دی.

لیکونکي: هیولیګ، کنش

د یوه پارامتریکي سطحي $(x(s,t), y(s,t), z(s,t))^t$ له لارې د وکتورارزښتیز تابع $(u(x,y,z), v(x,y,z), w(x,y,z))^t$

د جاکوب-ماتریکس نسبت واریا بلو (s,t) ته دی:

$$\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(s,t)} = \begin{pmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_s & x_t \\ y_s & y_t \\ z_s & z_t . \end{pmatrix}$$

د بیلګې په توګه د یوه رادیال تابع

$$(u,v,w) = (x,y,z)/r, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,,$$

لپاره د

$$(x,y,z) = (\cos\varphi, \sin\varphi, z)\,, \quad \varphi \in (-\pi, \pi]\,, \quad z \in \mathbb{R}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له لارې پارامتريک شوي مخروط پوښ دی

$$\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)} = r^{-3}\begin{pmatrix} r^2-x^2 & -xy & -xz \\ -xy & r^2-y^2 & -yz \\ -xz & -yz & r^2-z^2 \end{pmatrix},$$

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\varphi,z)} = \begin{pmatrix} -\sin\varphi & 0 \\ \cos\varphi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

د $s=\sin\varphi$ او $c=\cos\varphi$ سره په دې اساس لاسته راځي

$$\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(\varphi,z)} =$$

$$r^{-3}\begin{pmatrix} r^2-c^2 & -cs & -cz \\ -cs & r^2-s^2 & -sz \\ -cz & -sz & r^2-z^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -s & 0 \\ c & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$r^{-3}\begin{pmatrix} -sr^2 & -cz \\ cr^2 & -sz \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, =$$

د کوم سره چې دی

$$r=\sqrt{1+z^2}$$

.

ليکونکي: بوسلي،هيوليګ، کنش

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دې لپاره چې د دواړو توابعو

$$f(u,v)=\begin{pmatrix} u+v \\ u-v \\ u^2+v^2-1 \end{pmatrix}, \quad g(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$$

د $h=g\circ f$ ګرادينت شمېرل کېږي سرې د f د جاکوب-ماتريکس جوړوي

$$f'=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2u & 2v \end{pmatrix}$$

په همدې تګه د g ګرادينت

$$\operatorname{grad} g=\begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}=2\begin{pmatrix} u+v \\ u-v \\ u^2+v^2-1 \end{pmatrix}.$$

له دې سره د ځنځيري قانون سره لاس ته راځي

$$(\operatorname{grad} h)^{t} = (\operatorname{grad} g)^{t} f'$$

$$= 2\begin{pmatrix} u+v+u-v+2u(u^2+v^2-1) \\ u+v-u+v+2v(u^2+v^2-1) \end{pmatrix}^{t}$$

او د ساده کونې وروسته

$$\operatorname{grad} h=4(u^2+v^2)\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

ليکونکي: بوسلې، هيوليګ،

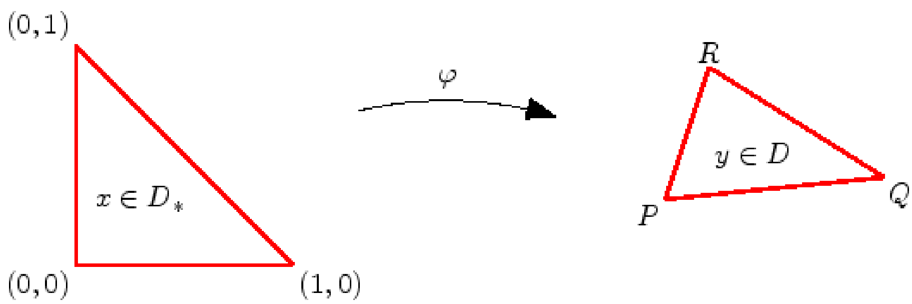
(c) ketabton.com: The Digital Library

په یوه د رېګوډي D باندې د د یوه رفرنځدرېګوډي افین تابع

$D_* : x_1 + x_2 \leq 1, \quad x_i \geq 0,$ د ګوډېټکو Q $P,$ او R سره کیدی شي په

لاندې بڼه ولیکل شي

$$y = \varphi(x) = p + (q-p)x_1 + (r-p)x_2$$



افین تبع د جاکوب-ماتریکس لري

$$\frac{\partial(y_1, y_2)}{\partial(x_1, x_2)} = (q-p, r-p) \ .$$

له دې سره د یوه سکالار تابع $h(x) = g(\varphi(x))$ څخه لاسته راځي

$$(\operatorname{grad} h(x))^t = (\operatorname{grad} g(y))^t \begin{pmatrix} q_1 - p_1 & r_1 - p_1 \\ q_2 - p_2 & r_2 - p_2 \end{pmatrix} .$$

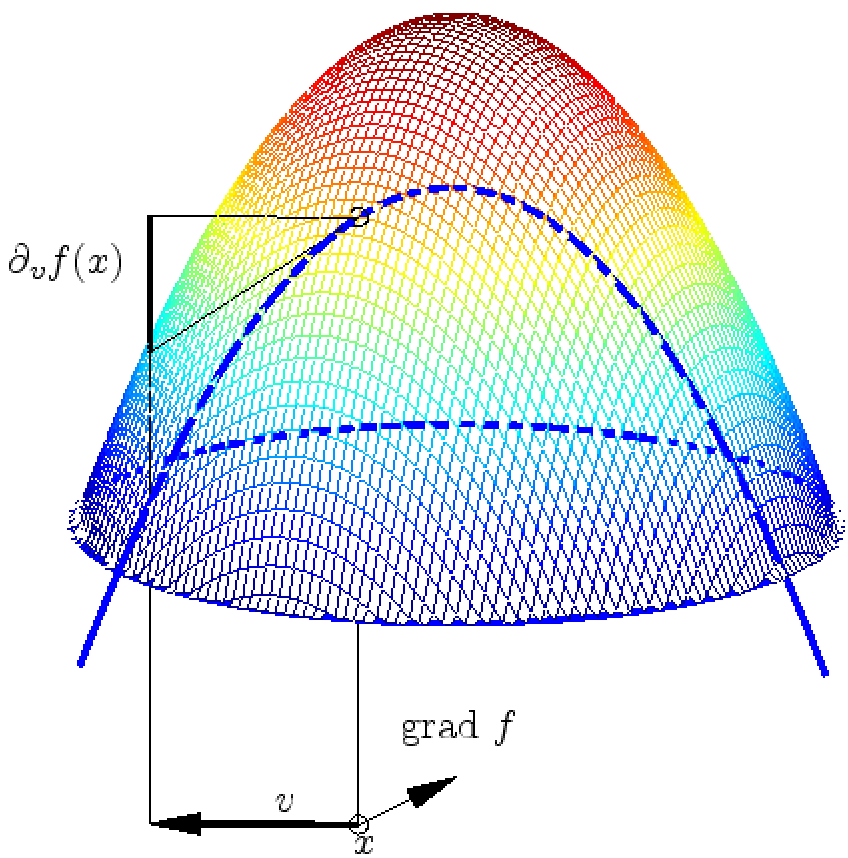
دا تراسفورمیشن د نورو ترځنګ د ستیفیګکایتماتریکسونو Steifigkeitsmatrizen په لیکنوکې د فینیت-توکو-تګلارFinite-Elemente-Verfahren ته اړیینه ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د يوه تابع لوريز مشتق

د يوه فنکشن يا تابع f مشتق د يوه وکتور v په لرو دی

$$\partial_v f(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+hv)-f(x)}{h}.$$



دا کيدی شي د جاکوب-ماتريکس f' په مرسته د ځنځيرقانون په بنسټ د

$$\left(\frac{d}{dt}f(x+tv)\right)_{t=0} = f'(x)v$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له لارې وشمېرل شي. په ځانګړې توګه $\partial_{e_\nu} f$ د e_ν سره د ν ــم یوونوکتور(واحدوکتور) ټوټه مشتق دی نسبت و ν ــم کواوردينات ته.

د سکاالر تابع تابع لپاره دی

$$\partial_v f = (\operatorname{grad} f(x))^{\mathrm{t}} \,.$$

لکه څنګه چېپه مشتق کې متشکلدی، لوريز مشتق شتون لري په دې حالت کې له د f $v \parallel \operatorname{grad}\, f(x)$ v په لور. لوکال تغير د لپاره ما کسيمال دی.

(Autoren: Höllig/Knesch)

د تابع

$$f(x,y) = x^2y^3$$

لوريزمشتق په ټکي $(x,y) = (2,-1)$ کې شميرلکيږي. د دې لپاره لومړی

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} 2xy^3 \\ 3x^2y^2 \end{pmatrix} .$$

ټاکو.

د معلومو کواوردينات د ځايپه ځايکولووروسته د يوه لور $v = (a,b)^{\mathrm{t}}$ لپاره لاسته راځي

$$\partial_v f(2,-1) = (-4, 12) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = -4a + 12b \,.$$

لوريزوکتور د

(c) ketabton.com: The Digital Library

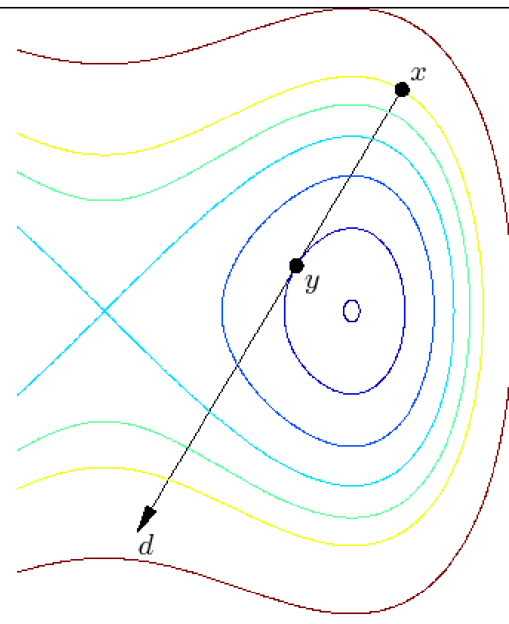
$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} -4 \\ 12 \end{pmatrix}$$

لپاره ماکسیمال کیږي، نو د بیلګې په توګه . $v = (-1,3)$ په لومړئ نږدېونه کې له دې سره

$$f(2-t,-1+3t) \approx f(2,-1) + t\partial_v f(2,-1) = -4 + 40t$$

د f خورا لویه ځایزه یا لوکال ځګیدنه په ګوته کوي یا تشریح کوي

د ډېرې زوړندي یا کښته کیدنې متود

د ډېرې زوړندي کښته کیدنېمتود د مولتیواریات توابعو $f(x_1,\dots,x_n)$ مینیمي کولو په چوپړ $x \to y$ کي دی. د یوه ایترایشنپل عملي کولو ته لومړی منفي ګرادینت $d = -\operatorname{grad} f(x)$ د لوکال بهترین کښته کیدلور په حیث شمیرلکیږي. پسي y د f مینیمال ځای په حیث د d په لورتاکل کیږي: $f(y) = \min_{t\geq 0} f(x+td)\,.$	

لکه په تابع یا څیره کې چې انځوردی، لټونلور و نیوو ډېرئ **Niveaumenge** ته د x له لارې اورتوګونال ده او تابع د نیووډېرئ په y کې یوه کوچني ار زښت ته لمسوي

(c) ketabton.com: The Digital Library

یادونه : د نیوو**Niveaumenge** یا روښانه ونه (ژباړی): پهشمیرنه کې د یوه سکالار پټي یا ورشو ټولو ډېریو یا ستونو ټکي، چې هغه همغه ارزښت سره ترتیب یا تنظیم وي. پای.

د خورا زوړندکښته کیدني متود له لارې تولید شوې پرلپسي $x_0, x_1, \ldots$ کونورګنت کیدی شي د ډېرې ټولیزې نیونې سره وښوول شي. پوره کیدونکی دی، که f د کښته لور ته محدود وي او $\operatorname{grad} f$ په یوه د ډېرئ په یوه چاپیریال U کې لیپشیڅ- ناپریکیدونکې وي، دا په دې معنا چې

$$\| \operatorname{grad} f(x) - \operatorname{grad} f(\tilde{x}) \| \leq L \|x - \tilde{x}\|, \quad x, \tilde{x} \in U .$$

باور لري

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} \| \operatorname{grad} f(x_\ell) \|^2 < \infty .$$

دا په ځانګړې توګه دې کې خوندي ده، چې د پرلپسي $x_0, x_1, \ldots$ هر پډغالي ټکی د f یو انحرافي یا بهتره افراطي ټکي دی. دا چې دا یو ځاییز یا لوکال مینیموم دی ستاتیستیکي په اطمنان، مګر نه جبرأ ترې لاسته راځي.

په الګرریتم کې یوبعدي یا یو پراخېدونکی مینیموم اړتیا ده چې فقط په نږدې توګه وکړای شي. لټونلور d باید نه دي چې د کمیز یا منفي ګرادینت په څېرو ټاکلی شي او یوه ځییزه مینیموم ځاي y و نه ټاکلشي. د کونورګنت لپاره په ساده توګه پریکړیدی، چې هر ایتراشنپل سره د تابع ارزښت یو ردکشن و $\| \operatorname{grad} f(x) \|^2$ ته متناسب ورسیدای شي.

(Autoren: Höllig/Hörner/Pfeil)

د یوه مربع تابع

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) = \frac{1}{2}x^{\mathrm{t}}Ax - b^{\mathrm{t}}x$$

$x \to y$

لپاره د يوه سيومتريک زياتيز يا مثبت ديفينيت ماتريکس A سره يو ايتريشنپل لړي د ډېرزوړندجګيدني بنې متود سره

$$y = x + td,\ d = -\mathrm{grad}f(x) = b - Ax,\ t = \frac{d^{\mathrm{t}}d}{d^{\mathrm{t}}Ad}\,.$$

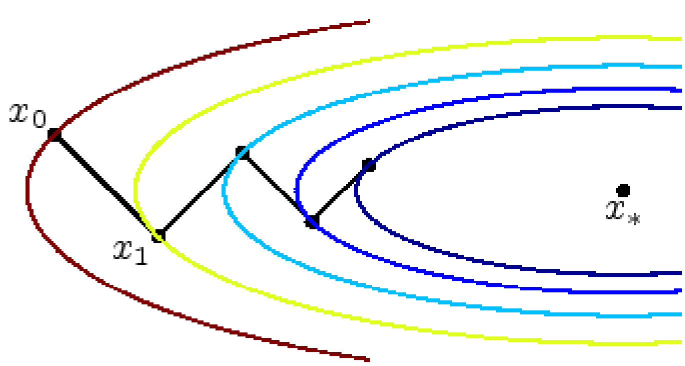
د

$$\begin{aligned} f(x+td) &= \tfrac{1}{2}(x+td)^{\mathrm{t}}A(x+td) - b^{\mathrm{t}}(x+td) \\ &= \tfrac{1}{2}d^{\mathrm{t}}Ad\,t^2 + (x^{\mathrm{t}}Ad - b^{\mathrm{t}}d)\,t + c \end{aligned}$$

مينيموم کيدی شي په دې حالت کې ا کسپليثيت يا روښانه توګه ورکړ شي. د t پسې مشتق صفرځايونوله لارې لسته راځي

$$0 = d^{\mathrm{t}}Ad\,t - (\underbrace{b - Ax}_{d})^{\mathrm{t}}d$$

او له دې سره د نيمکربنيزپارامتر t لپاره فرمول.



(c) ketabton.com: The Digital Library

تابع چې ښايي،کيدی شي ناغوښتلو رپيدنو ياOszillationen ته راشي، که A أيګنارزښت قوي توپير کيدونکی د لوي نظم لري. يوه افراطي پيلګه د

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 100 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

لپاره لاسته راي.

د $x = \begin{pmatrix} c & 1 \end{pmatrix}^t$ لپاره دی

$$d = -\begin{pmatrix} c \\ 100 \end{pmatrix}, \quad Ad = -\begin{pmatrix} c \\ 10^4 \end{pmatrix}$$

او

$$d^t d = c^2 + 10^4, \quad d^t A d = c^2 + 10^6, \quad t = \frac{c^2 + 10^4}{c^2 + 10^6}.$$

له دې سره لرو

$$y = \begin{pmatrix} c \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{c^2 + 10^4}{c^2 + 10^6} \begin{pmatrix} c \\ 100 \end{pmatrix} = \frac{99c^2}{c^2 + 10^6} \begin{pmatrix} 10^4/c \\ -1 \end{pmatrix}.$$

په رښتيا د $c = 100$ لپاره لرو

$$y = \frac{99}{101} \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix}.$$

سرې پيژني، چې مينيموم ته د واټنونو په هر ايتر ايشنپل کې په سرجينه کي فقط له 1% په کچه کميږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په څټ- يا برعکس تابع Umkehrfunktion

$f:\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ دې د يوه ټکي x_* په چاپېريال کې ناپريکيدونکی مشتقوړ تابع وي

د انورتيري جاکوبي-ماتريکس $f'(x_*)$ سره.

نو f د x_* په يوه چاپيريال U کې بيجکتيو دی، دا په دې معنا چې يو ناپريکيدونکی

مشتقوړ برعکستابع $g = f^{-1}$ شتون لري د

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = g(y)\,, \quad x \in U\,.$$

سره.

له دې برسيره د جاکوبي-ماتريکس

$$g'(y) = f'(x)^{-1}$$

لپاره باور لري، د ټولو $x \in U$ لپاره.

(Autoren: Höllig/Streit)

مساوات $f(x) = y$ کړی شي د يوه ټکي (x_*, y_*) په چاپيريال

$$U \times V = \{x:\ |x - x_*| \leq \delta\} \times \{y:\ |y - y_*| \leq \varepsilon\}$$

کې د ليترايشن

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x \leftarrow \varphi(x) = x - f'(x_*)^{-1}(f(x) - y)$$

سره د بانخ Banachځاي په ځاي يا فيکس ټکي جملې سره حل شي.

دې ته بنوول کيږي، چې φ د کره لپاره يو را ټول شوی kontrahierende ځانيزه تابع ده په U .

د کنوتراکشن ثابته کيدی شي د $\sup_{x\in U}\|\varphi'(x)\|$ له لاريتخمين شي، داسيچې د اويکليد يا اقليدس نورم $|\cdot|$ باندې تنظيم ماتريکسنورم وکارول شي. د

$$\begin{aligned}\|\varphi'(x)\| &= \|E - f'(x_*)^{-1}f'(x)\| \\ &= \|E - f'(x_*)^{-1}[f'(x_*) + f'(x) - f'(x_*)]\| \\ &= \|f'(x_*)^{-1}(f'(x) - f'(x_*))\|\end{aligned}$$

له امله ديوون – يا وادماتريکس E سره $\leq c < 1$ سوپريمومو دی د پوره کوچني δ لپاره، ځکه چې $f'(x) \to f'(x_*)$ د $x \to x_*$ لپاره.

خوندي لرنه يا Die Inklusion $\varphi(U) \subseteq U$ د

$$\varphi(x) - x_* = x - x_* - f'(x_*)^{-1}(f(x) - f(x_*) + y_* - y)\,.$$

نورم د تخمين له لارې لاسته راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د f د ناپرېکيدني او مشتقوړوالي په بنسټ باور لر ي

$$f(x) - f(x_*) = f'(x_*)(x - x_*) + R, \quad |R| = o(|x - x_*|)\,.$$

د دې په تعقيب دی

$$|\varphi(x) - x_*| \le \|f'(x_*)^{-1}\|(o(\delta) + \varepsilon) \le \delta$$

د پوره کوچني δ ($o(\delta)/\delta \to 0$) او ε لپاره

له دې سره د باناخ ځاپی ځای ټکي جملې نيوني يا فرضيپوره دي، او د ټولو $y \in V$ لپاره د لاندې سره x شتون لري د لاندې سره

$$x = x - f'(x_*)^{-1}(f(x) - y) \Leftrightarrow f(x) - y = 0\,,$$

دا په دې معنا چې سرې کړی شي مساوات د x پسې حل کړي:
$$g(y) = f^{-1}(y) = x$$
.

فورمال د $x = g(f(x))$ مشتق له لارې د ځنځيري قانون سره سم لاس ته راځي

$$E = g'(y)f'(x)\,.$$

د g د جاکوبي-ماتريکس د f د جاکوبي-ماتريکس معکوس دی. د دې لپاره چېد دې فرمولټيکاوی د ازمايو ، د

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لپاره د $x,\, x+\Delta x \in U$ سره ليکو

$$\begin{aligned} & g(y+\Delta y)-g(y)-f'(x)^{-1}(\Delta y) \\ & \quad = \Delta x - f'(x)^{-1}[f(x+\Delta x)-f(x)+|\Delta x|/2] = f'(x)^{-1}R \end{aligned}$$

د $R=o(|\Delta x|)$ سره د f مشتقوړوالي په بنسټ. دا پاتې دي چې وښوولشي، چې د $|\Delta x|$ د $|\Delta y|$ له لارېکيدی شي تخمين يا اټکل شي.

دا له

$$\Delta x = f'(x)^{-1}(\Delta y - R)$$

لاس ته راځي

د $\|f'(x)^{-1}\|$ په : U محدوديت له امله:

$$|\Delta x| \le c^* \left(|\Delta y| + o\left(|\Delta x|\right)\right) \le \tilde{c}|\Delta y|$$

د پوره کوچني $|\Delta x|$ لپاره د ثابتو c^* او $\tilde{c}$ سره.

(Autoren: Höllig/Streit)

و دې ښيرل شي، چې ايا تابع

$$f:\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xy \\ x/y \end{pmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په ټکي $(x,y)=(2,1)$ کې لوکال معکوسوړ ده. د دې لپاره لومړی د جا کوبي – ماتریکس

$$f'(x,y)=\begin{pmatrix} y & x \\ 1/y & -x/y^2 \end{pmatrix}.$$

جوړیږي.

تر ځیرنې لاندې ټکې کې دی

$$\mathrm{J}\,f=f'(2,1)=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

د $\det \mathrm{J}=-4\neq 0$ له امله د

$$\begin{pmatrix} u_* \\ v_* \end{pmatrix}=f(x,y)=\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

په چاپیریال کې یو معکوس تابع g شتون لري

د دهجاکوبیماتریکس په ټکي (u_*,v_*) کې دی

$$g'(2,2)=\mathrm{J}^{-1}\,f=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

په دې ساده بیلګه کې کیدی شي g د افادود حلولنو له لارې د u او v لپاره د x او y پسې ایکسپلیځیتexplizit ورکړې:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = g(u,v) = \begin{pmatrix} \sqrt{uv} \\ \sqrt{u/v} \end{pmatrix} .$$

له دې سره سړی کړی شي چې فرمول د $g'(2,2)$ لپاره په سیده لاره و ازمایي.

(Autor: Höllig)

کومپلکس اکسپوننشل تابع

$$z = x + \mathrm{i}y \mapsto \exp(z) = u + \mathrm{i}v$$

کیدی شي ریل یا حقیقي د

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \exp(x)\cos y \\ \exp(x)\sin y \end{pmatrix}$$

په خیر ولیکي او دجاکوبي-ما تریکس

$$f'(x,y) = \exp(x) \begin{pmatrix} \cos y & -\sin y \\ \sin y & \cos y \end{pmatrix} .$$

د $\det f'(x,y) = \exp(2x) > 0$ له امله د هر ټکي $(u,v)^{\mathrm{t}}$ په چاپیریال یو

برعکستابع g (د کمپلکس لوګاریتم) شتون لري د لاند/ط مشتق سره

$$g'(u,v) = (f'(x,y))^{-1} = \exp(-x) \begin{pmatrix} \cos y & \sin y \\ -\sin y & \cos y \end{pmatrix} .$$

یو ګلوبال برعکس تابع د

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x, y + 2\pi k) = f(x, y), \quad k \in \mathbb{Z},$$

له امله شتون نه لري. د پریودیوالي یا تل بېرته را ګرځېدني له امله هر ټکي $(u, v) \neq (0, 0)$ ناپای ډېر ترمخ عکسونه لري.

(Autoren: Boßle/Höllig/Streit)

په پولار کواردیناتو باندې اړولو سره،

$$x = r\cos\varphi,\, y = r\sin\varphi, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}\,,$$

د کواوردینات x پسې د وړانګ ې ټوټه مشت ق لپاره باور لري

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{r} = \cos\varphi\,.$$

له بله پلوه له $r = x/\cos(\varphi)$ لاسته راځي

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{\cos(\varphi)}\,.$$

د دې برېښنده تظاد لپاره دلیل دا دی، چې د ټوټه مشتقشمېرنې له لارې همغه اووښتونې ثابتې نه شي ساتل کیدی. په لومړي مساوات کې y ثابت دی اوپه دویمکې φ . په دواړو حالتونو کې تغیروخوړ او اغیزه یې په r کې وکتل شوه. دلته ټکی (x, y) هر ځل په پرته لور یا همداسې د کونج φ سره مایل کرښه حرکت کوي. په ورته توګه ځاییز یا لوکال توګه د r تغیرمختلف دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د سکالار مشتق قانون

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{dx}{dy}\right)^{-1}$$

طبعأ د هر ډوله مشتق لپاره باورنه لري. د يوه بيجکتيو تابع

$$(x, y) \leftrightarrow (u, v)$$

لپاره په ټوليزه توګه

$$x_u \neq (u_x)^{-1}.$$

دی، له دې ورزيات بايد د تابع

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix},$$

جاکوبي-ماتريکس رامنځ ته شي:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}^{-1}.$$

په دې راوړې بيلګه کې

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\,\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\,\cos\varphi \end{pmatrix}.$$

دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

معکوس مشتق د x او y پسې لاندې توه مشتق لري:

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\frac{1}{r}\sin\varphi & \frac{1}{r}\cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_x & r_y \\ \varphi_x & \varphi_y \end{pmatrix}.$$

په ځانګړې توګه لرو، چې $r_x = \cos\varphi$

(Autoren: Boßle/Höllig/Knesch)

ایمپلیڅیت توابع

که د یوه ناپریکیدونکیمشتقوړ تابع

$$f:\ \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$$

لپاره وي

$$f(x_*, y_*) = 0, \quad \det\, f_x(x_*, y_*) \neq 0\,,$$

نودا مساوات سیستم

$$f_\nu(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = 0\,, \quad \nu = 1, \ldots, n\,,$$

د y_* په یوه چاپیریال کې د x پسې حل کړئ:

$$x = \varphi(y)\,.$$

ایمپلیڅیت تعریف شوی تابع φ د x_* په یوه چاپیریال کې ناپریکیدونکی مشتقوړ دی او دا لاندېډ جاکوبي-ماتریکس لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرلیک

$$\varphi' = -(f_x)^{-1} f_y \, .$$

په ورته توګه د توابعو

$$f_j(x_1, x_2, \ldots, x_{n+m}),\ j = 1, \ldots, n\ ,$$

لپاره باور لري د اووښتونو یا متحولو د پرموتیشن پسې، دا په دې معنا چې سړی کړی شي په $x_{j_1}, \ldots, x_{j_n}$ پسې یې حل کړي، که د جاکوبي- ماتریکس f' درځ یا مټه $j_1, \ldots, j_n$ کرښېزخپلواکه وي.

(Autoren: Höllig/Streit)

توابع

$$(x, y) \mapsto u(x, y) = (f(x, y), y)$$

په ټکي (x_*, y_*) کې د په ځېټ تابع جملې وړاندنیونې پوره کوي. په ځا نګړې توګه د x اووښتونو ګڼون یا تعداد د f د کمپوننتونو تعداد په ګوته کوي، او

$$u'(x_*, y_*) = \begin{pmatrix} f_x & f_y \\ 0 & E \end{pmatrix}_{|(x_*, y_*)} ,$$

د E سره یوونماتریکس، په ځېټ-یا برعکس کیدونکیدی. له دې امله سړی کړی شي

$$(\varphi(y), y) = u^{-1}(0, y)$$

کیږدي، د u^{-1} سره د u ناپریکیدونکی مشتقوړ برعکس تابع.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د جاکوبي-ماتریکساکسپلیثیت فرمول له

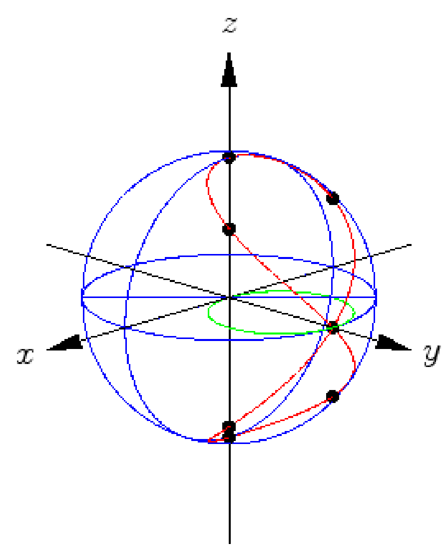
$$0 = (f(\varphi(y), y))_y = f_x \varphi' + f_y \,.$$

لاسته راځي.

د ویواني Vivianische کره یا منحني

$$C: \quad t \mapsto \begin{pmatrix} \sin t \, \cos t \\ \sin(2t) \\ \cos t \end{pmatrix} , \quad t \in [0, 2\pi) \,,$$

د توتي یا استواني سره د یوونفضا د غوڅي له لارې لاسته راځي.



په ایمپلیخیت بڼې کره د

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= x^2 + y^2 + z^2 - 1 &= 0 \\ g(x,y,z) &= x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} &= 0 \end{aligned}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له لارې انځوروړ ده. د ایمپلیځیتتابع جملېسره سړی کړی شي د جاکوبي-ماتریکس

$$\begin{pmatrix} f_x & f_y & f_z \\ g_x & g_y & g_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 2x & 2y-1 & 0 \end{pmatrix}.$$

لرلو سره پریکړه وکړي، چې ایا کره ځان لوکال یا ځاییزد کواوردینات x, y, z څخه د یوې له لارې پارامتریک کیدی شي.

نسبت x ته پارامتریککولو لپاره ، دا په دې معنا چې د y او z پسې حلونه پوره کیدونکېده،داسې چې

$$\frac{\partial(f,g)}{\partial(y,z)} = \begin{pmatrix} 2y & 2z \\ 2y-1 & 0 \end{pmatrix}$$

برعکس وړ ده. دا د $z \neq 0$ او $y \neq 1/2$ لپاره حالت دی. سړی لاسته راوړي

$$y(x) = \frac{1}{2} + \delta\sqrt{\frac{1}{4} - x^2}, \quad z(x) = \delta'\sqrt{\frac{1}{2} - \delta\sqrt{\frac{1}{4} - x^2}}.$$

چیرته چې په اړونده توګه د یوګونو ښاخونو مخنخښه $\delta,\ \delta' \in \{-1, 1\}$ باید و ټاکل شي.

په رینتوني دا پارامتریک کونه په ټکو $(0,1,0)^t$, ،

$(\pm 1/2, 1/2, \pm\sqrt{2}/2)^t$ او $(\pm 1/2, 1/2, \mp\sqrt{2}/2)^t$ سینګړ.لارده. د x پسې

(c) ketabton.com: The Digital Library

پارمتريک کوني لپاره هندسي اړين دی، چې د تانجنت لور و $(1,0,0)^t$ ته ارتوګونال نه ده، دا په دې معنا چې يو ناساده کمپوننت د x په لور لري.

په ورته توګه نسبت y او z ته د پارامتريکوړوالي لپاره پوره کيدونکيشرطونه لاس ته راځي.

په تکي $(0,1,0)^t$ کې لوکال پارمتريک کيدنه شتون نه لري. کره دلته ډبل ټکی لري. د جاکوبي –ماتريکس

$$\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y,z)}\,|_{(0,1,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

فقط رانګ 1 لري.

د n متحولي يا اوونتوني يوه سکالار تابع f لپاره دا جمله د ايمپيلځيت توابعوپه هکله وايي، چې مساوات

$$f(x_1,\dots,x_n)=0$$

د $x\approx x_*$ لپاره د x_k پسې حلکيدی شي، که $\partial_k f(x_*)\neq 0$.
.

د روښانه بيلګي په توګه مسوات

$$f(x,y,z)=xe^y-yz=0$$

راوړو. ګرادينت دی

$$(f_x,f_y,f_z)^t=(e^y,xe^y-z,-y)^t.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $f_x > 0$ له امله $f = 0$ د ټولو (x,y,z) لپاره د x پسې حلوړ دی. دا د مساوات

$$x = yze^{-y}$$

پسې ترلي هم ليدل کيدی

په ورته توګه کتل کيږي، چې د z پسې حل د $y \neq 0$ لپاره هم ممکن دي.

په y پسې مسات ساده نه شي حل کيدی. د ايمپليځيت توابعو په هکله جمله د (x_*, y_*, z_*) په يوه چاپيريال کې تظمينوي که

$$f_y(x_*, y_*, z_*) = x_* e^{y_*} - z_* \neq 0\,.$$

دا د بيلګې په توګه د مساوات د حل $(0,0,1)$ لپاره پوره دی:

$$f_y(0,0,1) = -1\,.$$

په تعقيب يی يو تابع φ شتون لري د

$$f(x,y,z) = 0 \Leftrightarrow y = \varphi(x,z)\,, \quad (x,z) \approx (0,1)\,.$$

سره.

سره له دې چې φ اکسپليځيت د ورکړې وړ نه دی، کيدی شي ګرادينت و ټاکل شي:

$$0 = f(x,\varphi(x,z),z) \Longrightarrow 0 = f_x + f_y\varphi_x\,, \quad 0 = f_z + f_y\varphi_z\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د راوړل شوي ټکي (x_*, y_*, z_*) کې باور لري

$$\varphi_x(0,1) = -f_x(0,0,1)/f_y(0,0,1) = 1/(-1) = -1$$

$$\varphi_z(0,1) = -f_z(0,0,1)/f_y(0,0,1) = 0/(-1) = 0\,.$$

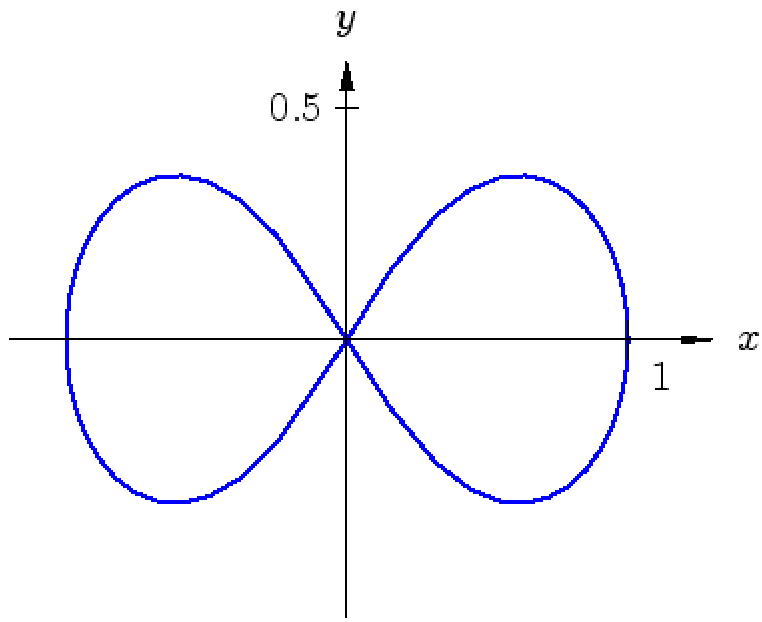
(Autor: Höllig)

د بيواريانت پولينوم p لپاره د

$$p(x,y) = 0$$

له لاربيوه الجبري کږه تعريفيږي. که درجه $p \neq 0$ وي، نو يا x لوکال يو د y تابع دی او يا په څټ. په ټکو کې چې درجه يې ورکيدونکې وي کيدی شي کږه يو سينګولاريټي ولري

(c) ketabton.com: The Digital Library



د $p(x,y) = y^2 - x^2 + x^4 = 0$ له لارې تعریف شوې لیمنیسکاتې ګرادینت

$$\operatorname{grad} p(x,y) = (-2x + 4x^3, 2y)^t$$

فقط په ټکي $(0,0)$ کې په ورکیږي. لکه په خیره کې چې کتل کیږي، نه شي کیدی چې کږه یواځنۍ په x پسې یا په y پسې حل شي.

په دې $(1,0)$ ټکي ا و $(-1,0)$ کې تانجنت و x –محور ته ولاړ یا عمود دی. کږه کږی شي لوکال فقط په x پسې حل شي:

$$x = \sigma \sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - y^2}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $x = \sigma \in \{-1, 1\}$ په چاپيريال کې. برعکس کيدی شي کړه په ټکو $\pm(1/\sqrt{2}, 1/2)$ کې لوکال فقطد x تابع په څير نه د y په څير ورکړ شي:

$$y = \pm\sqrt{x^2 - x^4}\,.$$

په نورو ټول ټکو (x_0, y_0) کې کيدی شي چې سړی يې هم د x او يا y پسې حل کړي.

بيلګه

$$\frac{dy}{dx} = -p_y^{-1} p_x = \frac{4x^3 - 2x}{2y}$$

ده او

$$y - y_0 = \frac{4x_0^3 - 2x_0}{2y_0}\,(x - x_0)$$

په ټک (x_0, y_0) کې د تانجنت مساوات دي.

(Autoren: Höllig/Streit)

په ناکربنيز مساواتسيستم کي د مخ ته بيوني متود

په يوه د پارامتر تابع مساواتسيستم کې

$$f(x, t) = 0, \quad t \in \mathbb{R},$$

د ناپريکيدونکيمشتقوړ f تويه جاکوبي-ماتريکس f_x سره ناسينګولار دی، نو حلونه

(c) ketabton.com: The Digital Library

ناپریکیدونکي مشتقوړ د t په واک کې دي. په ځانګړې توګه کیدی شي کربښز تیلور- ودیزونه

$$x(t+h) \approx x(t) - f_x(x,t)^{-1} f_t(x,t) h$$

د ګاونډیو اپروکسیکیشن لپاره وکارول شي.

دا متود زیات وخت د نیوټن -تګلار د پیل ارزښت د Generierung ته کارول کیږي

لیکوال :هیولیګ، ستر ایت

د تیلور اپروکسیمیشنTaylor-Approximation

Approximation(لاتین: هغه بل، شمیرپوهنیزه ترې پوهیدنه(مفهوم) نږدېوالی)

د یوه ټکي په چاپیریال کې یو $(a_1, \ldots, a_m)(n+1)$-ځله ناپریکیدونکی مشتقوړ د m متحولو x_i سکالار تابع f کیدی شي د یوه تېلور-پولینوم له لارې د ټوټال درجي له لارې اپرکسیمیشي:

$$f(x) = \sum_{|\alpha| \leq n} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(a)(x-a)^\alpha + R, \quad |x-a| < r,$$

د $\alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_m!$ سره.

پاتې غړی لاندې بڼه لري

$$R = \sum_{|\alpha|=n+1} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(u)(x-a)^\alpha, \quad u = a + \theta(x-a),$$

د یوه $\theta \in [0,1]$ لپاره.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ښوونې لپاره د m متحولو د یوه تابع د تیلور وده په یونیواریات حالت بیرته اړولکیږي.
سړی بي د ټولیزو بندیزونو $a = 0$ راوړي او داسې یې ځاي پّ ځای کوي

$$f(x_1, \ldots, x_m) = f(tx_1, \ldots, tx_m)|_{t=1} = g(t)|_{t=1} .$$

د یونیواریات تابع $g(t)$ لپاره د تیلور ـوده په صفرټکي کې ده

$$g(t) = g(0) + g'(0)\,t + \cdots + \frac{1}{n!} g^{(n)}(0) t^n + R$$

د

$$R = \frac{1}{(n+1)!} g^{(n+1)}(\theta t) t^{n+1}, \quad \theta \in [0,1] .$$

سره.

د ځنځیري قانو پسې لرو

$$\begin{aligned} g(0) &= f(0) \\ g'(0) &= \sum_j (\partial_j f(0)) x_j \\ g''(0) &= \sum_i \sum_j (\partial_i \partial_j f(0)) x_i x_j \\ &\vdots \end{aligned}$$

دا په دې معنا چې k-م مشتق m^k ترمونه لري. له دوي څخه هغه راټولیږي، په کومو کې چې د یوګونو متحولو پسې برابرزیات واره مشتق ونیول شي.
د بیلګې په توګه د ټولو $m = 2,\ k = 5$ مشتقونو لپاره، کوم چې درې واره د لومړي کمپوننت او دوه واره د دویم کمپوننت پسې مشتق شوی دی، سړی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\partial_1\partial_1\partial_1\partial_2\partial_2,\ \partial_1\partial_2\partial_1\partial_2\partial_1,\ \partial_1\partial_2\partial_2\partial_1\partial_1,\ \ldots$$

$\partial^\alpha\ ,\ \alpha = (3,2)$
یوځایراوړي. په ټولیزه توګه په دې کنکریت حالت کې ټوټه مشتق
$\binom{5}{3} = 5!/(3!\,2!)$
ترمونه دي. په ټولیزه توګه

$$\binom{k}{\alpha_1}\cdot\binom{k-\alpha_1}{\alpha_2}\cdots\binom{k-\alpha_1-\ldots-\alpha_{m-1}}{\alpha_m} = k!/(\alpha_1!\ \ldots\ \alpha_m!)$$

ترمونه دي، که د ν -م کمپوننت پسې يي α_ν -ځله مشتق ونيول شي.

که د تابع $g(t)$ دا پورته شميرل شوي مشتقونه د تيلور-وديزيينه کې کيږدو، ضريب يا ځلوونې $k!$ لنديږي او سړى لاسته د f غوښتونېوديزينه راوړي.

ليکونکي: بوسلې، هيوليګ، شترايت

د يوه دوه متحولو تابع لپاره تيلور –وديزيينه دا لاندې بڼه لري

$$f(x,y)\ \ f + f_x\,(x-x_0) + f_y\,(y-y_0) =$$

$$+\frac{f_{xx}}{2}\,(x-x_0)^2 + f_{xy}\,(x-x_0)\,(y-y_0) + \frac{f_{yy}}{2}\,(y-y_0)^2$$

$$+\frac{f_{xxx}}{6}\,(x-x_0)^3 + \frac{f_{xxy}}{2}\,(x-x_0)^2\,(y-y_0)$$

$$+\frac{f_{xyy}}{2}\,(x-x_0)\,(y-y_0)^2 + \frac{f_{yyy}}{6}\,(y-y_0)^3 + R\,,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

چېمشتق يې تل په ټکي (x_0, y_0) کې ارزښتول کيږي.

د بيلګې په توګه د

$$f(x,y) = \sin(x - \omega y)$$

او د $(x_0, y_0) = (0,0)$ لپاره د

$$\partial_x^\alpha \partial_y^\beta f(0,0) = \sin^{(\alpha+\beta)}(0)\,(-\omega)^\beta$$

له امله اپروکسيميشن

$$\sin(x - \omega y) =$$

$$= x - \omega y - \frac{1}{3!}\underbrace{(x^3 - 3\omega x^2 y + 3\omega^2 x y^2 - \omega^3 y^3)}_{(x-\omega y)^3} + R$$

د

$$R = \frac{1}{4!}(f_{x^4} + 4f_{x^3y} + 6f_{x^2y^2} + 4f_{xy^3} + f_{y^4})(\theta(x,y))$$

$$= \frac{1}{4!}(x - \omega y)^4 \sin(\theta(x - \omega y)),$$

سره د يوه $\theta \in [0,1]$ لپاره لاسته راوړي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په بدیل ډول سړی د ټیلور-پولینوم د $t = x - \omega y$ ځاي په ځای کولو له لارې لاسته راوړي د ساین تابع په یوه بعدیز لړئ انځورونه کې:

$$\sin(t) = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \dots.$$

د $t = x - \omega y$ سره لاس ته راځي

$$f(x,y) = (x - \omega y) - \frac{1}{3!}(x - \omega y)^3 + \frac{1}{5!}\cos(\theta)(x - \omega y)^5,$$

چېرته چې د یونیواریانت پاتې غړي انځورونه کا رول کيږي

لیکونکي: بوسلې، هیولیګ، شترایت

د بیلګې په توګه پولینوم

$$f(x,y,z) = z^2 - xy$$

د $(0,-2,1)$ په ځای کې ودیز کيږي یا تکامل ورکول کيږي. دا له صفر سره نابرابرمشتقونه دي

$$f_x = -y\,,\ f_y = -x\,,\ f_z = 2z\,,\ f_{xy} = -1\,,\ f_{zz} = 2\,.$$

په ودیزوونټکیکې ارزونې د تیلور-انځورونې

$$1 + 2x + (-0)(y+2) + 2(z-1) + (-1)x(y+2) + \frac{1}{2}2(z-1)^2\,,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاس ته راځي، کوم چې طبعأ د f سره همغږیز دی.

په بدیل ډول کیدی شي وديزینه د بڼهبدلون له لارې هم و کتلی شول

$$y+2=\eta\,,\quad z-1=\zeta$$

او لاس ته راشي

$$f(x,y,z)=(\zeta+1)^2-x(\eta-2)=\zeta^2++2\zeta+1-x\eta+2x\,.$$

د هسي ماتريکس Hesse-Matrix

په ټکي $(a_1,\ldots,a_n)$ کې د يوه سکالار تابع f مربعيز تيلور-اپروکسيميشن کيدی شي په بڼه

$$) = f(a)+(\operatorname{grad} f(a))^t\,(x-a)+\frac{1}{2}(x-a)^t\operatorname{H} f(a)(x-a)+O(|(x-a)|^3)$$

وليکل شي، د کوم سره چې د سيمتريک هسي- ماتريکس

$$\operatorname{H} f(a)=\begin{pmatrix}\partial_1\partial_1 f(a) & \cdots & \partial_1\partial_n f(a)\\ \vdots & & \vdots\\ \partial_n\partial_1 f(a) & \cdots & \partial_n\partial_n f(a)\end{pmatrix}$$

دويم مشتق خوندي لري.

ليکونکې: بوسلې، هيوليګ، شترايت

کتمتوالی د تيلور-وديزييني د مربع ترمونو د Umschreiben له لارې منځ ته راځي. په بيواريات حالت کې ($n=2$)

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x,y) = f + f_x(x-x_0) + f_y(y-y_0)$$

$$+\frac{1}{2!}(f_{xx}(x-x_0)^2 + 2f_{xy}(x-x_0)(y-y_0) + f_{yy}(y-y_0)^2) + R$$

$$= f + f_x(x-x_0) + f_y(y-y_0)$$

$$+\frac{1}{2!}((x-x_0),(y-y_0))\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (x-x_0) \\ (y-y_0) \end{pmatrix} + R,$$

دی، د کوم سره چې په بنی اړخ د تابع تعریفدیرئ (x_0,y_0) پریښوول شي یا ونه لیکل شي. باقي یا پاتېغړي

$$R = \sum_{|\alpha|=3} \frac{1}{\alpha!}\partial^\alpha f(u,v)(x-x_0)^{\alpha_1}(y-y_0)^{\alpha_2},$$

د

$$(u,v) = (1-\theta)(x_0,y_0) + \theta(x,y)$$

سره د $\theta \in [0,1]$ لپاره د لوي نظم $O(|(x,y)|^3)$ دی.

په ټولیز حالت کې شوونه په ورته تګه ده.

لیکونکي: هیولیګ، شترایت

د تابع

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x,y)=\ln(x+1/y)$$

لپاره

$$f_x=\frac{1}{x+1/y},\quad f_y=-\frac{1}{xy^2+y},$$
$$f_{xx}=-\frac{1}{(x+1/y)^2},\quad f_{xy}=\frac{1}{(xy+1)^2},\quad f_{yy}=\frac{2xy+1}{(xy^2+y)^2}\,.$$

دی.

په ځانګړې توګه په ټکي $(0,1)$ کې د ګرادینت او د هسې- ماتریکس لپاره لرو

$$\operatorname{grad} f(0,1)=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix},\quad \mathrm{H}\, f(0,1)=\begin{pmatrix}-1&1\\1&1\end{pmatrix}$$

او له دې سره مربعیز تیلور- ودیزیینه

$$\begin{aligned}f(x,y)&=(1,-1)\begin{pmatrix}x\\y-1\end{pmatrix}\\&\quad+\frac{1}{2}(x,y-1)\begin{pmatrix}-1&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y-1\end{pmatrix}+O(|(x,y)|^3)\\&=x-y+1+\frac{1}{2}(-x^2+2xy-2x+1+y^2-2y)\\&\quad+O(|(x,y)|^3)\,.\end{aligned}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دې لپاره چې په ټکي $(1,1,1)$ کې د

$$f(x,y,z) = (xy)^z$$

تيلور-وديزيينه وټاکو، شميرولومړی

$$f_x = yz(xy)^{z-1}, \quad f_z = \ln(xy)(xy)^z,$$
$$f_{xx} = y^2 z(z-1)(xy)^{z-2}, \quad f_{zz} = (\ln(xy))^2(xy)^z,$$
$$f_{xy} = z(xy)^{z-1} + xyz(z-1)(xy)^{z-2}, \quad f_{xz} = y(xy)^{z-1} + yz\ln(xy)(xy)^{z-1},$$

(f_y ، f_{yy} او f_{yz} د متحولې د بدليدو له لارې لاسته راځي).

له دې سره لاسته راځي

$$\operatorname{grad} f(1,1,1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{H}\, f(1,1,1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

او له دې سره سرى لاس ته راوړي

$$f(x,y,z) = 1 + (1,1,0)\begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z-1 \end{pmatrix}$$

$$+\frac{1}{2}(x-1,y-1,z-1)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z-1 \end{pmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$+ O(|(x,y,z)|^3)$$

$$= \quad 1 + (x-1) + (y-1) + (x-1)(y-1)$$

$$+(x-1)(z-1) + (y-1)(z-1)$$

$$+ O(|(x,y,z)|^3).$$

لیکونکي: بوسلې، هیولیګ، شترایت

د نیوټن تنلار ***Newton-Verfahren***

د یوه نه کرښیز مساواتسیستم

$$f_1(x_*) = \cdots = f_n(x_*) = 0$$

حل $x_* \in \mathbb{R}^n$ کیدی شي د

$$f'(x)\Delta x = f(x)$$
$$x \leftarrow x - \Delta x$$

له لارې تعریف شوی د نیوټن ایتریشن و ټاکل شي.

که f دوه واره ناپریکیدونکی توګه دفررنشیالوړ او د جاکوبي-ماتریکس $f'(x_*)$ برعکسوړ وي، نو د x_* په یوه چاپیریال U کې د پیل ارزښت لپاره دا تلنلار مربعیز کونورګ یا پولې ته تلونکې ده

$$|x_{\mathrm{neu}} - x_*| \le c|x_{\mathrm{alt}} - x_*|^2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په ځانګړې توګه د $x \in U$ لپاره $\det f'(x) \neq 0$ دی، داسې چې د Δx لپاره دا کرښیز سیستم یواځنی حل کیدونکی دی.

لیکونکي: هیولیګ، شترایت

د یوه حل x_* لپاره د نږدېوالي x_{alt} څخه په مخ ته تلنه کیدی شي د f کرښیز اپروکسیمیشن له لارې یو ښه شوی نږدیوالی x_{neu} د ټاکل شي، دا په دې معنا چې له

$$0 = f(x_*) = f(x_{\text{alt}}) + f'(x_{\text{alt}})(x_* - x_{\text{alt}}) + R, \quad R = O(|x_* - x_{\text{alt}}|^2)$$

څخه سږی د x_* پسې حل له لارې او باتې غږي پاتې یا لرې کیدو سره د ایتریشنقانون

$$x_{\text{neu}} = x_{\text{alt}} - \left(f'(x_{\text{alt}})\right)^{-1} f(x_{\text{alt}}).$$

ګټلی شي.

که لومړی مساوات د $f(x_{\text{alt}})$ پسې حل شي،

$$f(x_{\text{alt}}) = -f'(x_{\text{alt}})(x_* - x_{\text{alt}}) - R,$$

او دا د ایتریشن قانون کې ځا په ځای کړي، نو لاس ته ترې راځي

$$x_{\text{neu}} = x_* + \left(f'(x_{\text{alt}})\right)^{-1} R.$$

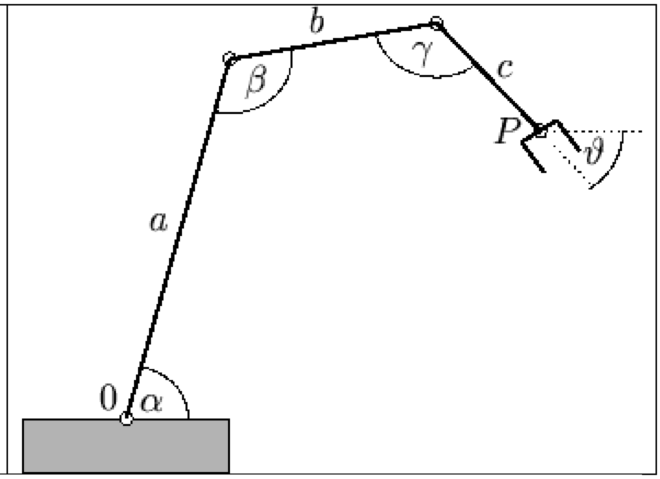
د $f(x)$ د ناپریکیدني او مشتقوړوالي په بنسټ $\left|(f'(x))^{-1}\right|$ په یوه د x_* چاپیریال U کې محدود یا رابند دی او له دې سره

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$|x_{\text{neu}} - x_*| = \left| \left(f'(x_{\text{alt}})\right)^{-1} R \right| \le c \, |x_{\text{alt}} - x_*|^2 \,.$$

ليکونکي: بوسلي، هيوليګ، شترايت

د نيوټن-تلنلارد دې د کتنې لپاره يو
ساده روبوتر په کاراچول
ترخيرنې لاندې نيسو.
دا څيره يا عکس يو د روبوتر لاس
ښايي له درې څرخون بندونو سره.
له دې سره د پوزيشن يا ځاي
P او ϑ د اخرې برخې
لوريزوالی د بندونود کونجونو α،
β، γ نا کرښيز تابع q دي:



$$\begin{aligned} q_1(\alpha,\beta,\gamma) &= a\cos(\alpha) + b\cos(\alpha+\beta-\pi) + c\cos(\alpha+\beta+\gamma-2\pi) \\ q_2(\alpha,\beta,\gamma) &= a\sin(\alpha) + b\sin(\alpha+\beta-\pi) + c\sin(\alpha+\beta+\gamma-2\pi) \\ q_3(\alpha,\beta,\gamma) &= \alpha+\beta+\gamma-2\pi. \end{aligned}$$

د څرګندو ارزښتونو $a=3,\ b=2,\ c=1$ لپاره د

$$\beta' = \alpha+\beta, \quad \vartheta = q_3 = \alpha+\beta+\gamma-2\pi$$

بدلون يا سبستيچيوشن له لارې سرې دا ناکرښيز سيستم لاس ته راوړي

$$\begin{aligned} 0 = f_1(\alpha,\beta') = p_1 - 3\cos\alpha + 2\cos\beta' - \cos\vartheta \\ 0 = f_2(\alpha,\beta') = p_2 - 3\sin\alpha + 2\sin\beta' - \sin\vartheta \,. \end{aligned}$$

د روبوتر لاس ارام حالت $\tilde{p} = (2,2)^t$، $\vartheta = -\pi/2$ حل $\alpha_0 = \pi/2$، $\beta_0' = \pi$ په ګوته کوي د جاکوبي-ماتريکس

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f'(\alpha_0, \beta'_0) = \begin{bmatrix} 3\sin\alpha_0 & -2\sin\beta'_0 \\ -3\cos\alpha_0 & 2\cos\beta'_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

سره.

و ګاونډي ځاي $\vartheta = -\pi/4, p = (2,3)^t$ ته رسيدني ته د نیوټن-تنلارد لومړي پل لپاره دي کرښيز مساواتسيستم

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\alpha \\ \Delta\beta' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{bmatrix},$$

حل شي. له دې سره لاس ته راځي $\Delta\alpha = -\sqrt{2}/6\,,\ \Delta\beta' = -\sqrt{2}/4$ او سړی لاس ته راوړي

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta'_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \beta_0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \Delta\alpha \\ \Delta\beta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi/2 + \sqrt{2}/6 \\ \pi + \sqrt{2}/4 \end{pmatrix}.$$

په پوزيشن p کې ناټيکاوی له دې سره همدا اوس په

$$f(\alpha_1, \beta'_1) \approx (0.1172,\, 0.0976)$$

راکم شو.

بويلي، هيوليک، شترايت

کريیکال ټکي يا افراطي(که انحرافي) ټکی Kritischer Punkt

(c) ketabton.com: The Digital Library

د یوه سکالار تابع f لپاره سړی x افراطي ټکی بولي، که ګراد یا درجه $f(x) = 0$ grad وي. که دوه واره ناپریکیدونکی مشتقوړ وي، نو د افراطي ټکي تیپ یا ډول، دا په دې معنا چې د تابعګراف د x په یوه چاپیریال کې د هسې-ماتریکس له لارې تا کل کیږي. د $\mathrm{H}\,f(x)$ د ایګن ارزښتونو λ_i د مخنخښي له امله د لاندې ترمنځ توپیر کوي:

- هواره ټکی(یعنې په یوه سطحه پروت-) : ټول ایګن ارزښتونه λ_i صفر دي.

- هګېډوله یا بیضوي ټکی: ټول ایګن ارزښتونه λ_i د صفر سره نامساوي دي او برابرېیا همغه مخ نخښې لري. تابع f په دې حالت کې په x کې یو ځایز(لوکال) افراتیت لري

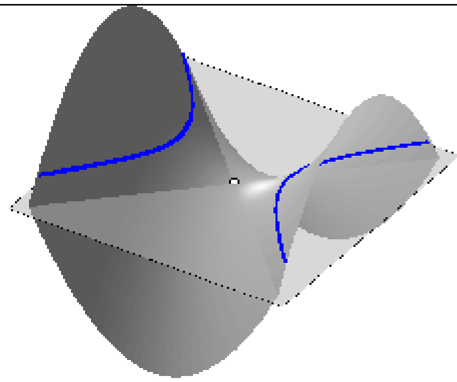
- هایبراپاربولیک ټکی : ایګن ارزښتونه λ_i شته د مختلفو مخنخښو سره. سړی x زینټکی هم بولي.

- پارابولیک ټکی: لږ تر لږه یو ایګن ارزښت λ_i صفر دی اونور ټول ا یګن ارزښتونه برابره مخنخښه لري.

په نخښهوني یا نوموني د جګکرښي له لارې په بی واریات حالت کې پاموړ یا جالبې دي، لکه دا چې په څیره کې کښل شوې دي.

بیضوي ټکی	های پارابولیکي ټکی

(c) ketabton.com: The Digital Library



د دوه متحولو يا اووښتونو د تابع ته کيدی شي ډول يا تيپ د هسي-ماتريکس د ديترمينانت سره ټولګيز کړو. که

$< 0 \quad \det(\mathrm{H}\, f) > 0$

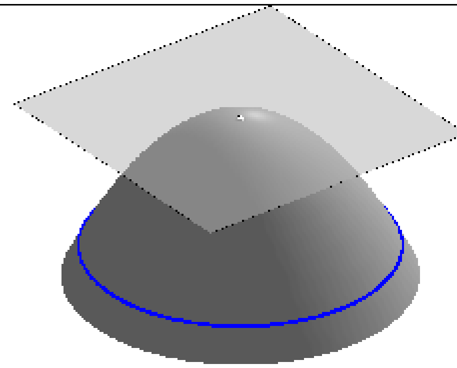
( ) وي،نو دا يو افراطيت دی(يو زينټکی دی).

د يوه مينيموم همداسې ماکسيموم لپاره

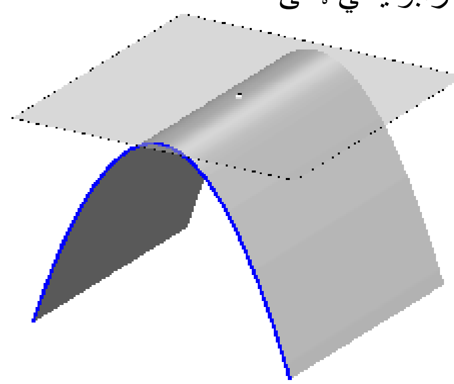
$< 0 \qquad \mathrm{Spur}(\mathrm{H}\, f) > 0$

همداسې

دی. که ديترمينانت له منځه لاړه يا ورکه شي او هسي- ماتريکس صفرنه وي، نو ټکی پارابوليک دی.



پارابوليکي ټکی



ليکونکي: هيوليک، وايس

د تابع

$$f(x,y) = y(1 - x^2 - y^2)$$

افراطي(کريتيکيkritischen) ټکي همداسې تيپ وټاکل شي. د دې لپاره سرې لومړی ګرادينت جوړوي او بيا د هسي – ماتريکس:

$$\operatorname{grad} f = \begin{pmatrix} -2xy \\ 1 - x^2 - 3y^2 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{H}\, f = \begin{pmatrix} -2y & -2x \\ -2x & -6y \end{pmatrix}.$$

له

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\operatorname{grad} f = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad xy = 0 \quad \wedge \quad x^2 = 1 - 3y^2$$

څخه د انحرافي ټکي په څير

$$\left(0, \pm 1/\sqrt{3}\right), \qquad (\pm 1, 0),$$

لاسته راځي. د هسي ماتريکس هر ځل دلاندې سره برابر دی

$$\begin{pmatrix} \mp 2/\sqrt{3} & 0 \\ 0 & \mp 6/\sqrt{3} \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & \mp 2 \\ \mp 2 & 0 \end{pmatrix}$$

د $(x,y) = (0, \pm 1/\sqrt{3})$ لپاره دی $\det(\mathrm{H}\, f) > 0$ او

$$\operatorname{Spur}(\mathrm{H}\, f) = \mp 8/\sqrt{3}\,.$$

له دې سره په $(0, -1/\sqrt{3})$ کې يومينيموم او په $(0, 1/\sqrt{3})$ کې يو ماکسيموم شتون لري.

د $(x,y) = (\pm 1, 0)$ لپاره باور لري

$$\det(\mathrm{H}\, f) = -4 < 0\,,$$

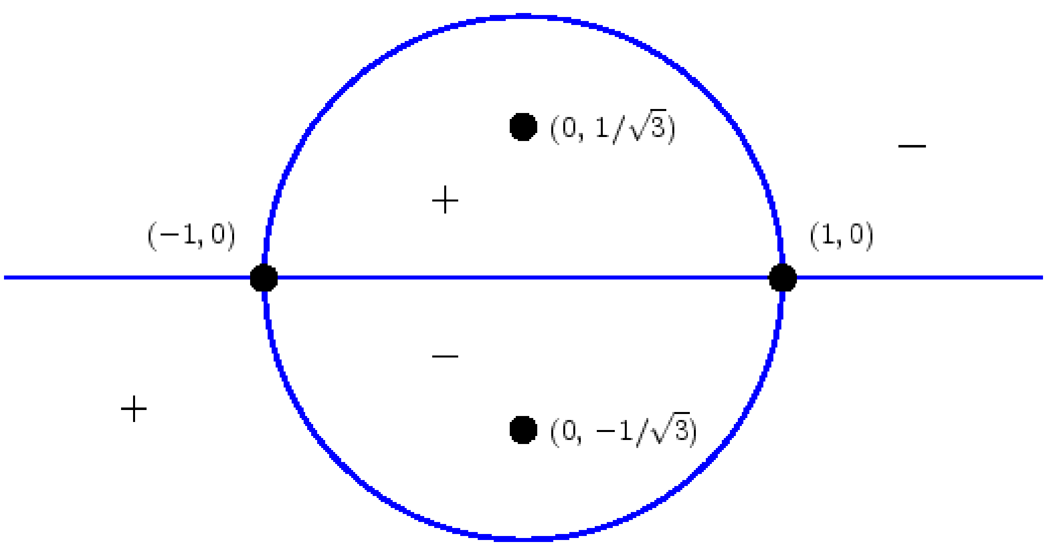
نو دلته يو زينتکی شته.

د کريميکيټکو تيپ کيدی شي د صفرځايتوکواو د f له دې څخه ورکړ شوو مخنخښو وېشنو له لارې وپيژندل شي. د f ضرب بڼې لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x,y)=0 \quad\Longleftrightarrow\quad y=0 \quad\vee\quad x^2+y^2=1\,,$$

داا په دې معنا چې د صفرځايډيرئ د x ـمحور G او يونګردئ C څخه جوړ دی. د G یا C پل اړولو سره مخنخبنه بدليږي. په غوښتکوکي $\operatorname{grad} f$ ورکيږي، ځکه لورمشتقونه د G او C په اوړدوالي کې صفر دي. د مخ نخښي بدليدني په بنسټ دا يو زينتکی دي. د يوون)واحد)ګردئ تيکلي په نيمايي، چې د صفرتکيډيرئ څخه يي ژئ جوړيږيو بايد هر ځل يو افرطيت شتون ولري، ځکه چې ډيرئ کړمپکت ده او f په ژئ صفر دی. د مثبت تابع ارز/ښت سره دا يو ماکسيموم دی او د منفي سره يومينيموم.



ليکونکي: بوسلي، هيوليګ

د تابع

$$f(x,y)=(y-x+x^2)y$$

لپاره

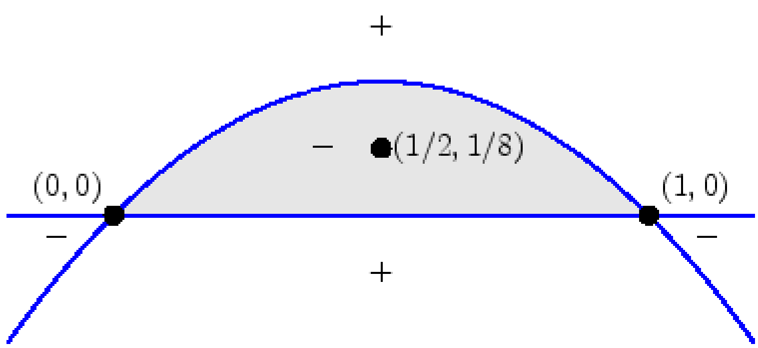
(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\operatorname{grad} f = \begin{pmatrix} (-1+2x)y \\ 2y - x + x^2 \end{pmatrix}$$

دی.

دا انحرافي ټکي critical pointله دې امله $(0,0),\ (1,0),\ (\frac{1}{2},\frac{1}{8})$ دي. تيپ يا ډول

کيدی شي د f د مخنخښي ويش څخه وټاکل شي.



د x –محور سره د پارابولونو غوڅيتکي(د تقاطع نقطي) زين ټکي دي، ځکه چې په f چاپيريال کې زياېز(مثبت۹ او کميز(منفي) ارزښتونه شتون لري. په څره روشو ؟؟ کې صفر په ژئ يا غاړه دی او کميز ارزښت په دننه کې، بايد هلته لړترلړه يو ځايز يا لوکال مينيمومشتون ولري.

شميرپوهنيزدا تبوپيا ډول د هسي-ماتريکس په مرسته فصديقيدی شي.

$$\operatorname{H} f = \begin{pmatrix} 2y & 2x-1 \\ 2x-1 & 2 \end{pmatrix}.$$

د انتقادي يا انحرافي ټکيلپاره لاس ته راوړو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\mathrm{H}\, f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{H}\, f(1,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{H}\, f(1/2,1/8) = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} .$$

په لومړيو داوړو ټکو کې د هسي-ماتريکسديترمينانت کميز دی، ټکي لکه انتظار چې کيده زينټکي دي. په $(1/2,1/8)$ کې ديترمينانت او شپور Spur زياتيز يا مثبت دي، پس دلته يو ځاييز يا لوکال مينيمومو لرو

(Autoren: Höllig/Reble)

د ډېرو متحولو- يا مولتيواريات توابعو افراطيت

xtrema multivariater Funktionen

که $f(x_*)$ د x_* په يوه چاپيريال د يوه ناپريکيدونکي مشتقوړ سکالار تابع f مينيموم(ماکسيموم) وي، نو باور لري

$$\operatorname{grad} f(x_*) = 0 .$$

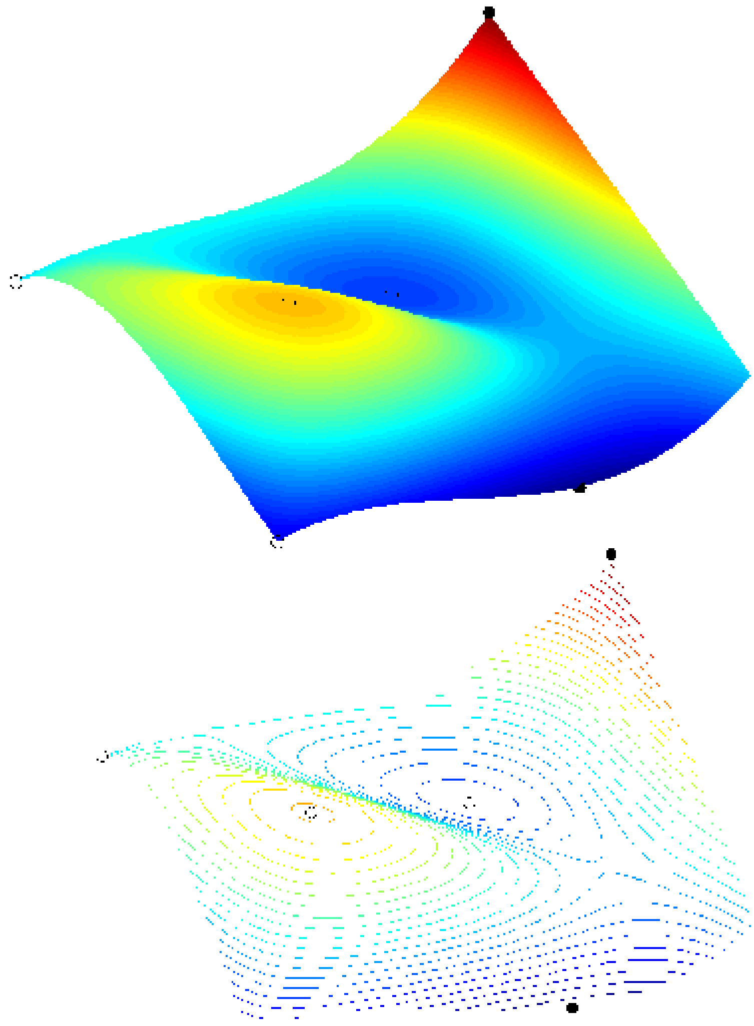
يو پورهکيد ونکيشرط دی، چې برسيره پردې د هسی-ماتريکس ټول ا يګن ارزښتونه په انحرافټکي x_* زياتيز يا مثبت(کميزيا منفي) وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

که ایګن ارزښتونه د مختلفومخنخښو سره شتونولري، نو دا یو زینټکی دی، یعنېځایز یل لوکال افراطیټکی نه دی. که د صفر سره نابرابرو ایګن ارزښتونو د برابر منخنخښي سره لږتر لږه یو ایګن ارزښت صفر وي، نو د احرافي یا انتقادي اټکي x_* تیوپ یا ډول د دویممشتق له لارې نه شي ټولګیز(صنفي) کیدی یعنې چې په کومه ډله یا ټولګي کې دی.
ځاییز مینیموم(ماکسیموم) کیدی شي د تعریف ورشو D د ژئ ټکو په څیر هم رامنځ ته شي. په دې حالت کې باید لوریز مشتق $\partial_v f(x_*)$ د D په منفي ښودونکي لپاره لور v مثبت(منفي) وي.

د یوه سکالار تابع f یو ځاییز افراطي ټکی په یوه ډیرئ D یا انحرافي ټکی دی(دا په دې معنا چې $\operatorname{grad} f = 0$)، یو ژئ ټکی یا د ټوټه – پارشل مشتق پریکیدونکی ځای دی. کیدی شي په دې ځایونو کې مینیموم او ماکسیموم په دې ټکو کې د تابع ارزښتونو د پرتلې له لارې وشمیرل شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



ځیرونه یا تابع مختلف امکانات ښايي. دلته ځاییز افراطي ټکي په ګردئ او ګلوبال یا ټولیز افراطي ټکي په ټکو سره په نخښه شوي دي.

لیکونکي: بوسلي، هیولیک، وایس

د کرښو په اوږدو تابع f راوړو او د په خوښه لور v لپاره تعریفوو

$$g(t) = f(x_* + tv)\,, \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که f په x_* کې يو ځايیز افراطيت ولري، نو g په $t=0$ کې يو افراطيت لري.

پايله يې ده

$$0 = g'(0) = (\operatorname{grad} f(x_*))^{\mathrm{t}} v = \partial_v f(x_*) .$$

دا چې v په خوښه ټاکلی وو، بايد ګرادينت په x_* کې ورکشي.

د مينيموم لپاره د f تعريفورشو تنها په ژئ لاس ته راځي، چې د D په دننه لور ښودونکي وکتور v لپاره لوريز مشتق ورکيږي. تنها په داسې لورو g د $t=0$ په يوه چاپيريال کې په يوه ښې اړخيز چاپيريال کې يو غږيز جګيدونکی دی. د يوه ما کسيموم لپاره په ورته توګه دلا يل راوړل کيږي

که $\operatorname{H} f(x_*)$ فقط مثبت ايګن ارزښتونه ولري، نو د وکتور v لپاره د $|v|=1$ سره باور لري

$$v^{\mathrm{t}} \operatorname{H} f(x_*) v \geqslant c > 0 .$$

د دويم مشتق د ناپريکيدنې له امله دا چاپيريال د c په ځای کې د يوې ثابتې $c/2$ سره همداسې د x_* په يوه چاپيريال U کې ټيک پاتې کيږي. د g د تيلور- وديزيينې سره لاس ته راځي

$$g(t) = g(0) + \underbrace{g'(0)t}_{=0} + \frac{1}{2} g''(\theta t) t^2$$

د $\theta \in [0,1]$ سره. د

$$g''(\theta t) = v^{\mathrm{t}} \operatorname{H} f(x_* + \theta t v) v^{\mathrm{t}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له امله د 0 په نږدې کې د t لپار هلاس ته راځي

$$g(t) \geqslant g(0) + (c/2)t^2\,,$$

دا په دې معنا چې f په هره لور په x_* کې يو ځا ييز مينيموم لري. د ماکسيموم د پوره کيدونکو شرايطو د لاس ته راوړلو لپاره په ورته توګه مخ ته تلل کيږي.

ليکونکي: هيوليګ، وايس

د مربع تابع

$$f(x) = \frac{1}{2}x^t Ax - x^t b + c$$

ګرادينت د سيومتري ماتريکس A سره دی

$$\mathrm{grad}\ f = Ax - b$$

او A د هسې-ماتريکس دی. ځاييز يا لوکال افراطي ځايونه د کربنيز مساوات سيستم $Ax = b$ حلونه دي.

که د A ا يګن ارزښتونه مثبت يا منفي وي، نو $\det A \neq 0$ دی او د مساوات $Ax = b$ يواځنی حل د f يواځنی ځاييزاو همداسې ټوليز افراطيت دی.

د څرګندې بيلګې لپاره

$$f(x, y) = \frac{3}{2}x^2 + 2xy + \frac{3}{2}y^2 + x + 4y - 3$$

دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

د

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

حل $(x,y) = (1,-2)$ دی. دا چې $\det A = 5$ او $\operatorname{Spur} A = 6$ مثبت دي،

نو A مثبت ایګنارزښت لري،او (x,y) د f تولیز مینیموم دی

لیکونکي: هیولیګ، وایس

غواړو د تابع

$$f(x,y) = \cos x + \cos y + \cos(x+y).$$

ځاییز اکسترما پیدا کړو، چې f نسبت x او y ته 2π-پریودیک دی او پسې هم

$f(y,x) = f(x,y) = f(-x,-y)$ بسیا کوي،چې د f $(-\pi,\pi] \times [0,\pi]$.

په ورشوکې وڅیړو. د ټوټه مشتق ژئ ټکي او پریکیدنځایونه په پام کې نه نیول کیږي. نو باید انحرافي ټکي پیدا شي.

له

$$\operatorname{grad} f = \begin{pmatrix} -\sin x - \sin(x+y) \\ -\sin y - \sin(x+y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

لاس ته راځي $\sin x = -\sin(x+y) = \sin y$، نو د $y \in [0,\pi]$ لپاره په

ځانګړې توګه $x = y$ یا $y = \pi - x$. دواړه امکانات یو له بل بیل څیړل کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

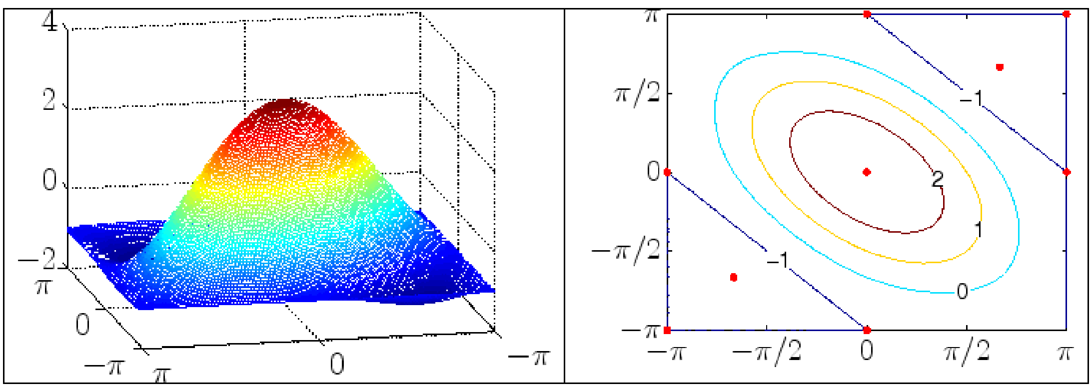
(i) له $x = y$:

$$\sin x = -\sin(2x) = -2\sin x \cos x$$

په اړونده ورشو کې انحرافي ټکي $(0,0)$، (π,π) او $\left(\frac{2\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right)$ لاس ته راځي.

(ii) $y = \pi - x$:

له $\sin(x) = -\sin(\pi) = 0$ انحرافي ټکي $(0,\pi)$ او $(\pi,0)$ لاس ته راځي.



د تابع ارزښتونو د پرتلې څخه، چې د مشتق څخه رانیول کیدی شي، پېژندل کیږي، چې $(0,0)$ یو ځایيز ماکسیموم د ارزښت $f(0,0) = 3$ سره دی او $\left(\frac{2\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right)$ یو تولیزمینیموم د ارزښت $f\left(\frac{2\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{3}{2}$ سره دي.

د بل انحرافي ټکي دول یا ټیپ کیدی شي د هسي ماتریکس Hesse Matrix

$$\mathrm{H}\, f = \begin{pmatrix} -\cos x - \cos(x+y) & -\cos(x+y) \\ -\cos(x+y) & -\cos y - \cos(x+y) \end{pmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

سره وټاکل شي. په ټکي (π,π) کې

$$\mathrm{H}\,f = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

دی.

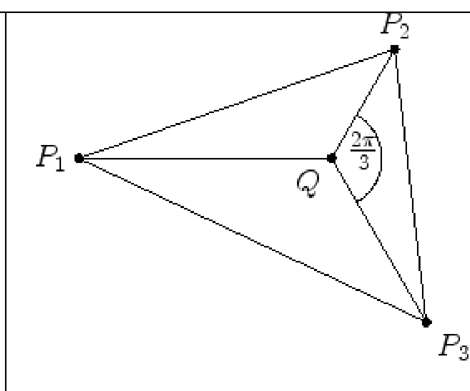
دا چې دیترمینانت منفي دی،نو دا یو زینټکی دی. ټکي $(\pi,0)$ او $(0,\pi)$ د سیومتري له امله یو بل سره enstsprechen ورکوي. د هسې-ماتریکس

$$\mathrm{H}\,f = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{H}\,f = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

هم منفي دیترمینانت لري. له دې امله هم دا یو زینټکی دی.

نو په ټولیزه توګه ټکي $(2k\pi,2l\pi)$ ($k,l \in \mathbb{Z}$) د ټولیز ماکسیموم او ټکي $(\frac{2\pi}{3}+2k\pi, \frac{2\pi}{3}+2l\pi)$ همداسې $(-\frac{2\pi}{3}+2k\pi, -\frac{2\pi}{3}+2l\pi)$ د ټولیزمینیموم په حیث لاس ته راځي

لیکونکي: هیولیګ، وایس

د شتاینر Steiners پرابلم په دې کې پروت دی،چې یو ټکی $Q \in \mathbb{R}^2$ وټاکي، د کوم لپاره چې ورکړ شوو ټکو P_i د واټنونو زیاتون یا جمعه مینیمال شي.دا ساده ځانګړی حالت یې په ځیره کې ورکړ شوی دی. د درې ټکو P_1 ، P_2 ، P_3 لپاره Q یا د یوه ټکي سره سر	

(c) ketabton.com: The Digital Library

	خوري يا د ټول ټکو جوړو لپاره دی $\sphericalangle(P_i, Q, P_j) = 2\pi/3$

د دې لپاره چې غوښتل شوی خویونه(خوي) وښايو، d_i دي د $Q = (x, y)$ او $P_i = (x_i, y_i)$ ترمنځ واټن وښايي، دا په دې معنا چې

$$d_i^2 = (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 \,.$$

د ځنزيريقانون له مخې لاسته راخ

$$2d_i \frac{\partial d_i}{\partial x} = 2\,(x - x_i)$$

لاسته راځي. همداسې

$$\frac{\partial d_i}{\partial x} = \frac{x - x_i}{d_i}$$

اوپه اړونده ډول $\frac{\partial d_i}{\partial y} = \frac{y - y_i}{d_i}$. د واټن تابع ګرادينت ،

$$\operatorname{grad} d_i = \frac{1}{d_i} \begin{pmatrix} x - x_i \\ y - y_i \end{pmatrix},$$

له دې امله يويوون يا واحد وکتور دی، کوم چې له P_i د ټکي Q په لور ښايي.

د

$$f = d_1 + d_2 + d_3$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

مينيموم به شي

ماکسيموم د له ټکو P_i څخه په يوه کې و نه نيول شي، په کومو کې چې $\operatorname{grad} d_i$ پريکيدونکيدی، نو بايد په مينيموم کې

$$\operatorname{grad} f = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

باورولري. د وکتورګرادينت د برابر اوږدوالي په بنسټ له دې لاسته راځي، چې که دا يو په بل کېښول شي يو برابراړخيزدرېګوډی جوړوي. د دوي ترمنځ کونج له دې امله برابره دی په $2\pi/3$.

ليکونکي: بوسلي، هيوليک، وايس

د لانګرانژ ضريبونه(څلووني) *Lagrange-Multiplikatoren*

که د ځنګيزو شرايطو $g_i(x) = 0$ لاندې x_* د سکالار تابع f يوځايېز افراطي ځای وي، نود لاګرانژ ضريب λ_i شتون لري، داسي چې

$$f'(x_*) = \lambda^{\mathrm{t}} g'(x_*)\,.$$

دلته وړاند نيونه کيږي، چې f او g د x_* په يوه چاپيريال کې ناپرېکيدونکي مشتقوړ دي او د جاکوبي-ماتريکس $g'(x_*)$ پوره رانګ لري.

د فقط يوه فرعينژ – شرايط ساده بنه

$$\operatorname{grad} f(x_*) \parallel \operatorname{grad} g(x_*)\,,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لري که $\operatorname{grad} g(x_*) \neq 0$ وي،د ا په دې معنا و چې د f او g نیوو سطحې یو بل په افراطي ځای کې لمسوي.

د لاګرانژ شرطونه پوره کیدونکینه دي، چې پریکړه وکړي، چې یو لوکال افراطیت مو مخ ته پروت دی او یا مینمومو یا ماکسیموم دی. دا د نورو معلوماتو په مرسته کره کیدی شي.

ټولیزه افرا طیت د توابعو د پرتلي په اساس په ټکو کې کیدی شي، کوم چې د لاګرانژ شرطونه پوره کړي، کوم چې په ورکړ شوي حالت کې هغه د ورکړ شوې ډیرئ په ژئ او یا د g' په رانګ ضایع سره.

لیکونکي: بوسلي، هیولیګ، وایس

n دې د اووښتونو ګنونن یا تعداد وي او m دې فرعي یا څنګیز شرایط وي.

د $m \geq n$ لپاره نه ښوول کیږي، ځکه چې یو په خوښه n–وکتور د n د کرښیز کمبینشن په حیث د g' دکرښیزو خپلواکو لیکو په څیرانځوروړ دی.

د $m < n$ لپاره دې $x = (u, v) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$ یو د اووښتونو یا واریبلو ټوټه ونه وي، د کوم سره چې د ممکنه پرموتیشن د $g_u(u_*, v_*)$ په څتوړوالی یا برعکس وړوالی له وړاندې نیول شوی وي. نو د ایمپلیځیت تابع جملې د فرعي شرایطو له مخې ځاییز حلوړ دی:

$$g(u, v) = 0 \Leftrightarrow u = \varphi(v), \quad v \approx v_* .$$

په تعقیب په یوافراطي ټکي د تابع $v \mapsto f(\varphi(v), v)$ ګرادینت ورکیږي:

$$f_u(u_*, v_*)\varphi'(v_*) + f_v(u_*, v_*) = 0 .$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ځنګيز يا فرعي شرايطو $g(\varphi(v),v)=0$ مشتقيدو له لارې پسې لاسته راځي

$$\varphi'(v)=-g_u(u,v)^{-1}g_v(u,v).$$

په ګراديننت کې د φ' اينووولو پسې کتل کيږي، چې د

$$\lambda=f_u(u_*,v_*)g_u(u_*,v_*)^{-1}$$

سره مساوات

$$f_u=\lambda g_u,\quad f_v=\lambda g_v,$$

کوم چې د $f'=\lambda g'$ شرايطو u - او v -کمپوننتونه په ګوته کوي، په ټکي (u_*,v_*) کې پوره دي.

ليکونکي: هيوليک، وايس

تابع

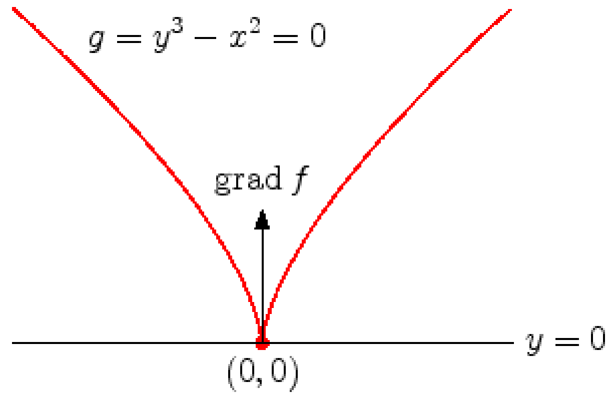
$$f(x,y)=y$$

لاندې فرعي شرطونه لري

$$g(x,y)=y^3-x^2=0$$

په څرګند ډول په $(0,0)$ کې يو ځاييز يا لوکال مينيموم.

(c) ketabton.com: The Digital Library



په هر حالت د لاګرنز-شرطونه $(f_x, f_y) + \lambda(g_x, g_y) = 0$ نه دي پوره:

$$(0,1) + \lambda(-2x_*, 3y_*^2) \neq (0,0)\,.$$

دا له دې امله چېد جاکوبي-ماتريکس $g'(x_*, y_*) = (0,0)$ پوره رانک نه لري. د g ځاييز حالت د جګ نظم ترمونو له لارې تشريح دي. د لاګرانژ-شرطوه په داسې يوه سينګولار ټکي کې استعمالوړ نه دي.

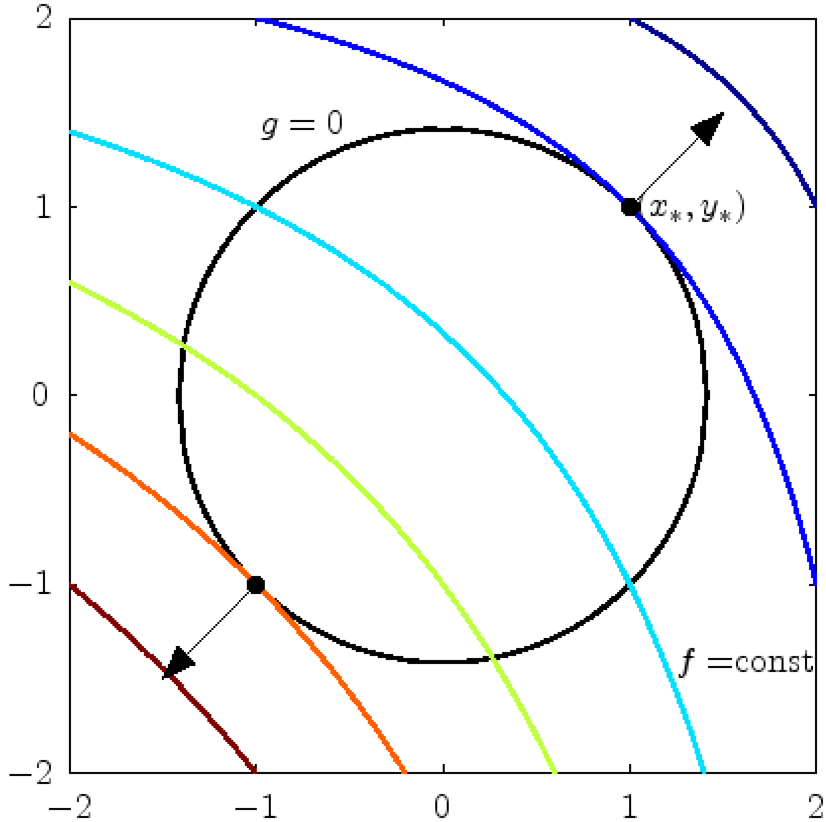
ليکونکي: هيوليک، وايس

د يوه بيواريات تابع $f(x,y)$ د افراطي ځای لپاره د فرعي يا څنګيزو شرايطو $g(x,y) = 0$ لاندې باور لري

$$(f_x, f_y) = \lambda(g_x, g_y)\,,$$

دا په دې معنا چې ګراد g وګراد f ته غبرګ دی. د نورو کلمو سره د f د نيو سطحې په ټکي (x_*, y_*) کې د g له لارې تعريف شوې کرې سره تانجنتي ده يا تانجنت جوړوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



په ځیره کې په روښانه توګه ښوول شوې بیلګه کې

$$f(x,y)=(x-3)(y-3)\to \min\,,\quad g(x,y)=x^2+y^2-2=0$$

د لاګرانژ-شرایط په لاندې توګه دي

$$(y-3,x-3)=\lambda(2x,2y)\,.$$

د λ له منځه وړنه راکوي

$$y(y-3)-x(x-3)=0\quad\Leftrightarrow\quad (y-x)(x+y-3)=0\,.$$

د فرعي شرایطو $x^2+y^2-2=0$ سره په تړاو ممکنه افراطي ځایونه $(1,1)$ او $(-1,-1)$ لاس ته راځي. دا چې یوناپریکیدونکې تابع په یوه کومپکته ډیرئ هم

(c) ketabton.com: The Digital Library

مينيموم او هم ماکسيموم لري، د تابع ارزښتونو پرتله يې ښايي، چې f په $(1,1)$ کې مينيمال او په $(-1,-1)$ کې ماکسيمال کيږي.

ليکونکي: هيوليک، وايس

د

$$f(x,y,z) = x + 2y - z$$

افراطييت غاړو پيدا کړو د لاندې فرعي شريطو لاندې

$$x^2 + y^2 - 8 = 0, \quad x + z - 4 = 0,$$

کوم چې د توتې(استواني) غوڅې(تقاطع) د يوې سطحې سره يوه هګۍ تشريح کوي يا ورکوي.

د فرعي طريطو لاندې د جاکوبې-ماتريکس دی

$$\begin{pmatrix} 2x & 2y & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

دا فقط د $x = y = 0$ لپاره پوره رانګ نه لري. دا حالت د فرعي سرايطو په اساس نه شيرامنځ ته کيدی. يوه افراطيت (x,y,z) ته پسې هر څل د لاګرانژ-ضريبونه λ_1, λ_2 داسې شتون لري،چې

$$(1,2,-1) = (\lambda_1, \lambda_2) \begin{pmatrix} 2x & 2y & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

همداسې

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$2\lambda_1 x + \lambda_2 = 1$$

$$2\lambda_1 y = 2$$

$$\lambda_2 = -1\,.$$

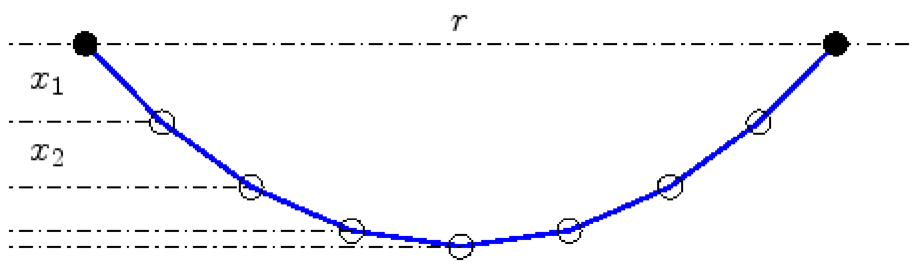
که $\lambda_1 = 1/y$ او $\lambda_2 = -1$ په لومړي برابرون یا مساوات کې ځای په ځای شي، نو $x = y$ ترې لاسته راځي. د فرعي شرایطو څخه ممکنه افرطیت $(2,2,2)$ او $(-2,-2,6)$ لاس ته راوړل کیږي. دا چې په هګئ باندې مینیموم او هم ماکسیموم باید شتون ولري، د تابع ارزښت

$$f(-2,-2,6) = -12 < 4 = f(2,2,2)\,,$$

پرتله کونه یې ښایي، داسې چې f په $(-2,-2,6)$ کې مینیمال او په $(2,2,2)$ کې ماکسیمال کیږي.

(Autoren: Höllig/Weiß)

اوس دې په دوه ټکو ځوړند شوي ځنزیر د ځنزیر غړي $2n$ سره برابروزنځای د 1 ا وږدوالي سره وټاکی شي.



(c) ketabton.com: The Digital Library

د ځيرې ځخه په نخښهونې سره مو د پوتنشل انرګي مينيمي کوني يا کمونې ته بيايي

$$-\left(\frac{x_1}{2}\right)-\left(x_1+\frac{x_2}{2}\right)-\cdots-\left(x_1+\cdots+x_{n-1}+\frac{x_n}{2}\right)$$

په دې پرابلم د سيومتري په استعمال

$$f(x)=-a_1x_1-\cdots-a_nx_n\to\min,$$

$$g(x)=r/2-\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1-x_i^2}=0,$$

د $a_i=n-i+1/2$ سره.

د لاګرانژ-شرطونه په لاندې توګه دي

$$a_i=\lambda\frac{x_i}{\sqrt{1-x_i^2}},\quad i=1,\ldots,n.$$

دا کيدی شي د x_i پسې مربع(ځلورئ-) کونې سره حل شي:

$$x_i^2=\frac{a_i^2}{a_i^2+\lambda^2}.$$

په فرعي شريطو کې د اينوولو سره لاندې برابرون راکوي

$$\frac{r}{2}=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{\lambda^2}{a_i^2+\lambda^2}},$$

له هغه چې λ او له دې سره x_i نومريکټاکل کيدی شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

مربعيزه(څلورئ بيزه) مينيمال کونه د کرښيز برابرونشرليطو سره

Quadratische Minimierung mit linearen Gleichungsbedingungen

مربعيزه اوپټيمي کونې پرابلم Optimierungsproblem

$$\frac{1}{2}x^{\mathrm{t}}Gx - c^{\mathrm{t}}x \to \min, \quad Ax = b\,,$$

ټيک هلته حل کيدونکې دی، که وکتور b د ماتريکس A په څېره- ورشو کې پروت وي او سيومتريک ماتريکس G د A په زړي مثبت سيميديفينيت وي.

ټول حلونه x_* د لاګرانژ-شرطونه

$$\begin{pmatrix} G & A^{\mathrm{t}} \\ A & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_* \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ b \end{pmatrix}$$

د يوه لاګرانژ-ضريب λ سره پوره کوي. حل يواځنی دی، که
$\operatorname{Kern} A \cap \operatorname{Kern} G = 0$ وي.

که G برعکس کيدونکی وي، ن و کيدی شي بلاکسيستم په ګډه يا په دله حل شي.

سړی لومړی د لاګرانژ –ضريب ټاکي

$$AG^{-1}A^{\mathrm{t}}\lambda = AG^{-1}c - b$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

او له

$$Gx_* = c - A^t\lambda .$$

اوپتیمال وکتور لاسته راوړي.

دا داسې په نامه د شور-کمپلیمنت-متود Schur-Komplement-Methode په ځانګړې توګه هلته موخه ور دی، که G^{-1} ساده وټاکل شي او یا فقط فرعي شرایط شتون ولري.

لیکونمکي: هیولیګ، هیورنر، پفایل

Q دې یو ماتریکس وي، چې متډه یا درز یې د A د زړي لپاره یو بنسټ جوړوي، او y یو وکتور چې اجازه ولري، دا په دې معنا چې $Ay = b$. یو اجازه وکتور x کیدی شي چې په لاندې بڼه ولیکل شي

$$x = y + Qz$$

.

که په موخه تابع کې ولیکل شي نو لاس ته ترې راځي

$$(Qz)^t Gy = y^t GQz$$

$$\frac{1}{2}z^t Q^t GQz - (Q^t c - Q^t Gy)^t z + \frac{1}{2}y^t Gy - c^t y .$$

د دې مربع تابع یو مینیموم z_* تیک هلته شتون لري، که $Q^t GQ$ مثبت دیفینیت وي، او په دې حالت کې پوره کړي

$$Q^t GQz_* = Q^t(c - Gy) .$$

دا چې دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$Q^t u = 0 \Leftrightarrow u \in (\mathrm{Kern}\, A)^{\perp} \Leftrightarrow u \in \mathrm{Bild}\, A^t \,,$$

نو ورته کرکتريسک کيدنه لاس ته راځي

$$G(y + Qz_*) - c = A^t(-\lambda)\,,$$

يعني د لاګرانژ-شرايط.

حل z_* يواځنی دی، که G د A په زړي مثبت ديفينيت وي، يعني که $\mathrm{Kern}\, A \cap \mathrm{Kern}\, G = 0$ وي.

د ډلي يا بلوک سيستم لاندې باندې gestaffelte اينووول شوی حل لاس ته راځي، په کوم کې چې لومړی حل

$$Gx_* + A^t\lambda = c$$

د کيڼ لورد AG^{-1} سره ضرب کړي او بدل يا سبستيتوه $b = Ax_*$ يې کړي.

ليکونمکي: هيوليګ، هيوررنر، پفايل

د اوپتيمي کوني پرابلم حل غواړو پيدا کړو

$$x^2 + 2xy + 2y^2 + 4x \longrightarrow \min$$

د لاندې فرعيشرايطو لاندې

$$x - 2y = 1\,.$$

دا پرابلم $\frac{1}{2}x^t Q x - c^t x \longrightarrow \min$، $Ax = b$ د

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$Q = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A = (1, -2), \quad b = 1 .$$

سره په ګوته کوي

په ساده توګه اجازه لرونکي ټکي شتون لري او دا چې Q مثبت ديفينيت دی،یو یواځنی حل (x_*, y_*) شتون لري، کوم چېد لاګرانژ ــشرایطو

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_* \\ y_* \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ټاکل کيدی شي. لاسته راځي

$$x_* = -\frac{2}{5}, \quad y_* = -\frac{7}{10}, \quad \lambda = -\frac{9}{5} .$$

ليکونکي : هیولیګ، وایس

د بیلګي په توګه مربع تابع

$$\frac{3}{2}x_1^2 + 4x_1x_2 - \frac{3}{2}x_2^2 + x_3^2 - 5x_1 + 4x_3$$

د فرعي شرایطو

$$x_1 - 2x_2 + x_3 = -2$$

لاندې مینیمي کيږي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x_1 - 2x_2 + x_3 = -2$$

د

$$G = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = -2$$

دا پرابلم لاندې ستاندارد بڼه لري

$$\frac{1}{2}x^{\mathrm{t}}Gx - c^{\mathrm{t}}x \to \min, \quad Ax = b\,.$$

د دې پرابلم حل باندې چې پریکړه کوو، نو لومړی د A د زړي لپاره یوبنسټ یا باسیس $\{q_1, q_2\}$ ټاکو:

$$(q_1, q_2) = Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\,.$$

بیا جوړوو

$$S = Q^{\mathrm{t}}GQ = \begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}\,.$$

دا چې د S دیترمینانت او شپور مثبت دی، نو S مثبت دیفینیت دی، او له دې سره د اوپټیمیریکولوپرابلم یو یوائنی حل لري. دا کیدی شي د کون-تکر-شرطونو Kuhn-Tucker-Bedingungen سره و ټاکل شي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 0 & 1 \\ 4 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ \hline 1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} x_{*,1} \\ x_{*,2} \\ x_{*,3} \\ \hline \lambda \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} 5 \\ 0 \\ -4 \\ \hline -2 \end{array}\right).$$

سړی $x_* = (1,0,-3)^t$ او $\lambda = 2$ لاس ته راوړي.

په بدیله توګه سړی کړی شي د شور-کمپلمنت-متودوکاروي.

سړی لومړی ماتریکس G برعکس کوي:

$$G^{-1} = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 25/2 \end{pmatrix}.$$

بیا د برابرون $AG^{-1}A^t\lambda = AG^{-1}c - b$ څخه سړی λ ټاکي:

$$-\frac{1}{2}\lambda = -3 + 2 \implies \lambda = 2.$$

د کون-ټرکر-شرایط مو لومړی برابرونډله یا -ګروپ

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{*,1} \\ x_{*,2} \\ x_{*,3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\lambda = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix},$$

مو بیرته حل $x_* = (1,0,-3)^t$ ته بیایي.

لیکونمکي: هیولیګ، هیورنر، پفایل

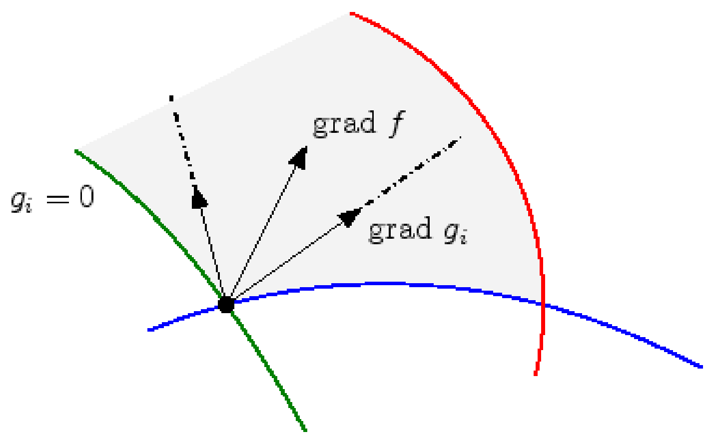
(c) ketabton.com: The Digital Library

د کون-تکر-شرطونه(*Kuhn-Tucker-Bedingungen*)

که x_* د فرعي شرایطو $g_i(x) \geq 0$ لاندې د سکالار تابع f یو مینیموم وي او د فعال برابرونونو $g_i(x_*) = 0$ ، $i \in I$ ګرادینت کرښیز خپلواک وي، نو د لاګرانژ- ضریبونه $\lambda_i \geq 0$ شتون لري، داسي چې ترې لرو

$$\operatorname{grad} f(x_*) = \sum_{i \in I} \lambda_i \operatorname{grad} g_i(x_*) .$$

د لوکال ماکسیموم لپاره په ورته توګه $\lambda_i \leq 0$ دی.



د مینیموم لپاره د کون-تکر شرطونه ځمککچیز یا هنسي په دې معنا دي، چې د موخه تابع ګرادینت چې د فعال فرعي شرایطو څخه خور شوی مخروط (کرښه ، کرښه) کې پروت دی.

پیژنددیری یا ایندکسدیرئ I کیدی شي ایمپلیځیت د شراطو

$$\lambda^{t} g(x_*) = 0 , \qquad \lambda \geq 0 ,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاندې کره شي. که $g_k(x_*) > 0$ وي،نو لرو $\lambda_k = 0$ ، دا په دې معنا چې ناساده یا ناتریویال ضریبونه فعال شرایط په ګوته کوي.

لیکونکي: هیولیګ، وایس

سرې باید د x_* په چاپیریال کې فعال شرایط په پام کې ونیسي، ځکه چې نابرابرونونه $g_j(x) > 0$ ، $j \notin I$ په یوه د x_* چاپیریال کې ټیک پاتیږي. تابع f په روښانه توګه په یوه وړه ډیرئ هم مینمال پاتیږي، چې د برابرون شریطو $g_i(x) = 0$ له لارې ورکول کیږي. له دې امله د لاګرانژ-ضریبونوجملې څخه غوښتل شوی کټمټوالی لاس ته راځي. اوس فقط باید وښوول شي، چې $\lambda_i \geq 0$.

کیدی شي د یوه $k \in I$ لپاره (وړاند) نیونه $\lambda_k < 0$ مو تضا د یا مخامخوالي ته بوزي. د ګرادینت د کربنیز خپلواکوالي یو وکتور v شتون لري د

$$(\text{grad}\ g_k(x_*))^{t} v = 1, \quad (\text{grad}\ g_i(x_*))^{t} v = 0,\ i \in I \backslash k\,,$$

سره، چې د g_i ، $i \neq k$ له لارې تعریف شوې سطحې تنجنتي هوارې (سطحې) باندې پروت دی. $t \mapsto x(t)$ دې په سطحه یوه کرښه(منحني)وي د پیل ټکي $x(0) = x_*$ او پیل لور $x'(0) = v$ سره. د $t \to 0$ لپاره دی

$$g_k(x(t)) = g_k(x_*) + \left((\text{grad}\ g_k(x_*))^{t} v\right)\ t + O(t^2) = 0 + t + O(t^2)\,.$$

په کرښه باندې ټکي د پوره کیدونکي کوچني $t > 0$ لپاره پریښودونکي (یعنې اجازه لرونکي) دي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$g_k(x(t)) \geq 0, \quad g_i(x(t)) = 0,\ i \in I \setminus k\,.$$

د v جوړښت له مخې او f کټمټوالي لپاره دی

$$\frac{d}{dt} f(x(t))_{|t=0} = (\text{grad}\ f(x_*))^t v = \lambda_k (\text{grad}\ g_k(x_*))^t v = \lambda_k < 0\,.$$

تابع fد کرښې په اوږدوالي کمیږي، د $f(x_*)$ د مینیمالوالي سره په تضاد یا مخامخ.

لیکونکي: هیولیګ، وایس

د کون-ترکر-شرایطو ښوولو ته د تابع $f(x,y) = y^2 - x$

افراطیت د

$$y - x^2 \geq 0\,, \quad 2 - x^2 - y^2 \geq 0$$

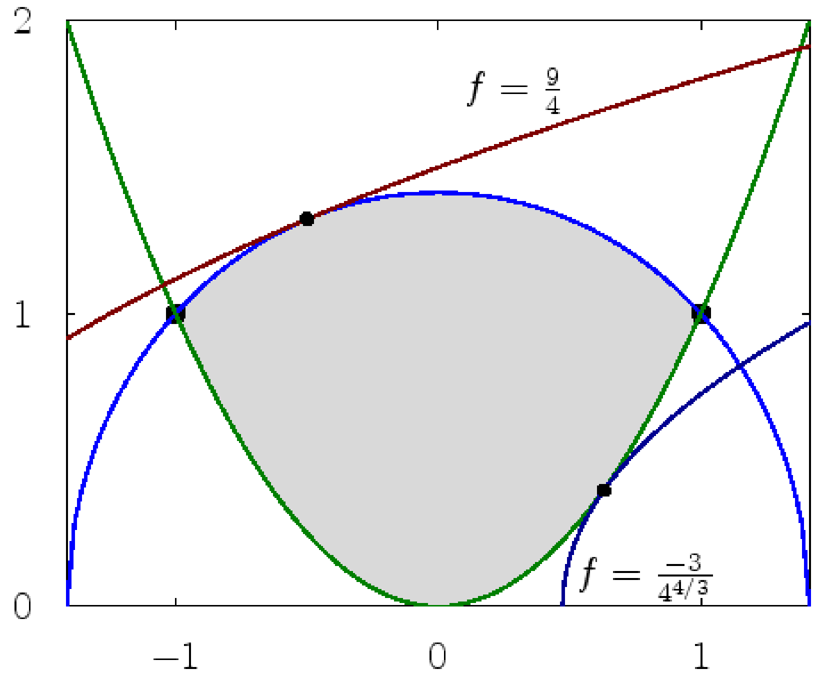
له لارې په تعریف شوي رونځړ ډیرئ D باندې ټاکو.

د کون-تکر-شرطونه دي

$$(-1, 2y) = \lambda(-2x, 1) + \mu(-2x, -2y)$$

$$\lambda(y - x^2) + \mu(2 - x^2 - y^2) = 0\,,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



چيرته چې د لاګرانژ- ضريبونه λ او μ برابرې يا همغه مخنخښي لري. د ځېرې څخه پيژندل کيږي، چې د معال ځن\يز شرايطو د ټولو اجازه لرونکو ټکو لپاره کرښيز خپواک دي)(دا صفر نه دي او د ژيکړې په غوښتکو غبرګ نه دي).له دط امله د کون-تکر شرايط د ټولو اکستريم ارزښتونو لپاره اړيندي. په دې توګه يا داسې چې کوم ځنګيز شرطونه فعال دي، بايد لاندې حالتونه وپيژندل شي:

(i) $\lambda = 0 , \quad \mu = 0$ (کوم ځنګيز شرط فعالنه دی:د $\operatorname{grad} f$ لپاره مساوات

$$(-1, 2y) = (0, 0)$$

د پوره کېدوونه نه دی. په دې لاس ته راړنه د D په دننه کې f اکستريما نه لري.

(ii) $\lambda = 0 , \quad \mu \neq 0$) $2 - x^2 - y^2 \geq 0$ فعال): له

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(-1,2y)=\mu(-2x,-2y)$$

$$2-x^2-y^2=0$$

په تعقیب $\mu=-1<0$ ($y=0$ د $(\pm\sqrt{2},0)\notin D$ له امله ناشونی دی)،

$x=-1/2$ او $y=\sqrt{7}/2$. د یوه لوکال اکتریموم لپاره د کون – تکر – شرطونه پوره دي.

(iii) ($\lambda\neq 0\,,\quad \mu=0$ $y-x^2\geq 0$ فعال): له

$$(-1,2y)=\lambda(-2x,1)$$

$$y-x^2=0$$

لاس ته راځي

$$\lambda=2y=2x^2\geq 0\,,\quad -1=(2x^2)(-2x)\Leftrightarrow x=4^{-1/3}$$

او $y=4^{-2/3}$.

د کون-تکر-شرطونه د یوه لوکال اکستریموم لپاره پوره دي.

(iv) ($\lambda\neq 0\,,\quad \mu\neq 0$ $y-x^2\geq 0$ او $2-x^2-y^2\geq 0$ فعال): له

$$y=x^2\quad\wedge\quad x^2+y^2=2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاس ته $(x,y)=(1,1)$ راځي يا $(x,y)=(-1,1)$. د $\operatorname{grad} f$ لپاره په مساوات کې ځای په ځای کوو نو راکوي

$$(-1,2)=\lambda(-2,1)+\mu(-2,-2) \quad \Rightarrow \quad \lambda=1\,, \quad \mu=-\frac{1}{2}$$

همداسې

$$(-1,2)=\lambda(2,1)+\mu(2,-2) \quad \Rightarrow \quad \lambda=1/3\,, \quad \mu=-\frac{5}{6}$$

د لاګرانژ ضرب د مختلفومخنخښنو له امله یا په بنسټ دواړه ټکي اکستریم ځایونه نه دي.

دا چې f په کومپاکت ډېرئ D هم ماکسیمومو او هم مینیموم لري، کېدی شي په ډول يې د لاګرانژ مخنخښې په لاس پرېکړه وشي يا هم د تابع ارزښتونو د پرتلې په اساس. په تعقیب f په $(-1/2,\sqrt{7}/2)$ کې یو ماکسیموم او په $(4^{-1/3},4^{-2/3})$ کې یو مینیموم لري.

لیکونګي: هیلیک، پفایل

د مینیمي پرابلم لپاره

$$f(x)\to \min\,, \quad a_i\le x_i\le b_i$$

د کون-تکر-شرطونه د لوکالمینیموم لپاره

$$\operatorname{grad} f(x_*)=\sum_i(\lambda_i-\mu_i)\,e_i$$

$$\lambda_i\,,\ \mu_i\ge 0$$

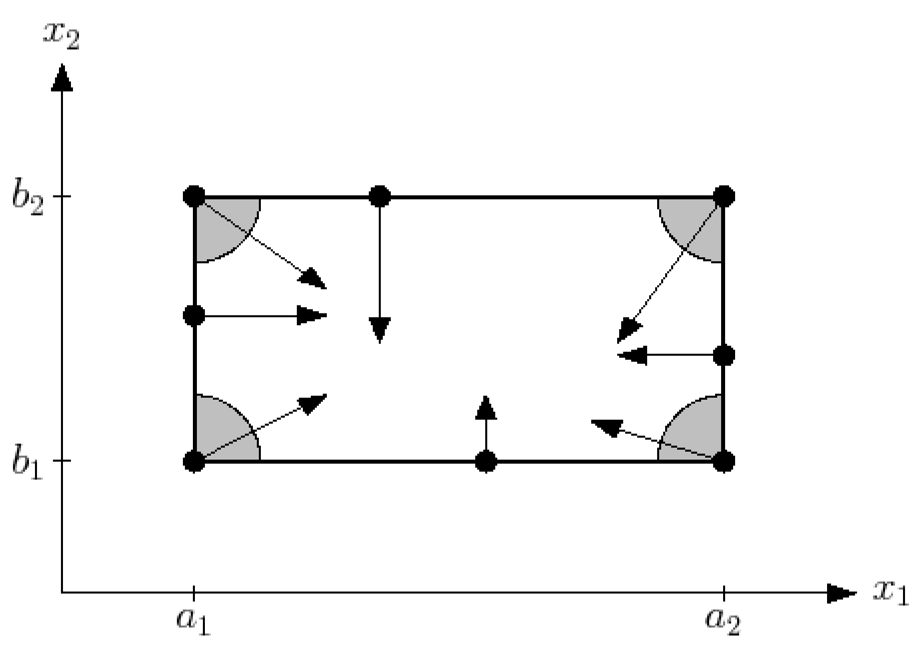
(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lambda^{\mathrm{t}}\,(x_* - a) + \mu^{\mathrm{t}}\,(b - x_*) = 0$$

دي د e_i د i-م یوون-یا واحدوکتور سره. له دې سره ارزښتونه $\pm\infty$ د انتروال د
پولې په توګه پرېښوول شوی یعنط نجازه لري، داسط چې تولې متحولې یا اووښتونې د
همغه ډول نامساوات پوره کوي.

که $a_i < x_{*,i} < b_i$ وي، نو نودواړه د لاګرانژ-ضریبونه λ_i او μ_i صفر دي او
له دې سره د $\operatorname{grad} f(x_*)$ i-م کمپوننت g_i. برعکس که یو له دې نامساواتو د x_i
لپاره فعال وي، په اړونده توګه د لاګرانژ-ضریب د g_i مخنخښه کره کوي:

$$x_{*,i} = a_i \;\rightarrow\; g_i \geq 0\,; \quad x_{*,i} = b_i \;\rightarrow\; g_i \leq 0\,.$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

تابع د بیواریات موخه فنکشن لپاره د $\operatorname{grad} f(x_*)$ ممکنه لورې ښايي د مینیموم لپاره په اړخونو د $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ په ګوډونو یا کونجونو. د مینیموم لپاره د ولاړګوډیز یا مستطیل په دننه کې $\operatorname{grad} f(x_*) = 0$ باور لري.

لیونکي: هیولیک، پفایل

د یوه کرښیز تابع

$$(c_1, \ldots, c_n)x \to \min$$

مینیموم د کرښیزو فرعي شرطونو لاندې

$$Ax \geq b$$

د یوه $m \times n$ -ماتریکس A سره سرې مرښیز پروګرام ښايي.

یو حل $x_* \in \mathbb{R}^n$ د کون-تکر-شرطونه پوره کوي

$$c^t = \lambda^t A, \quad \lambda^t (Ax_* - b) = 0$$

د $\lambda_i \geq 0$ سره.په ورته توګه د ماکسیموم لپاره $\lambda_i \leq 0$ باور لري.

د روښانه بیلګې

$$x + y \to \min, \qquad x \geq 2, \qquad y \geq 1, \qquad x + 2y \geq 8$$

لپاره دی

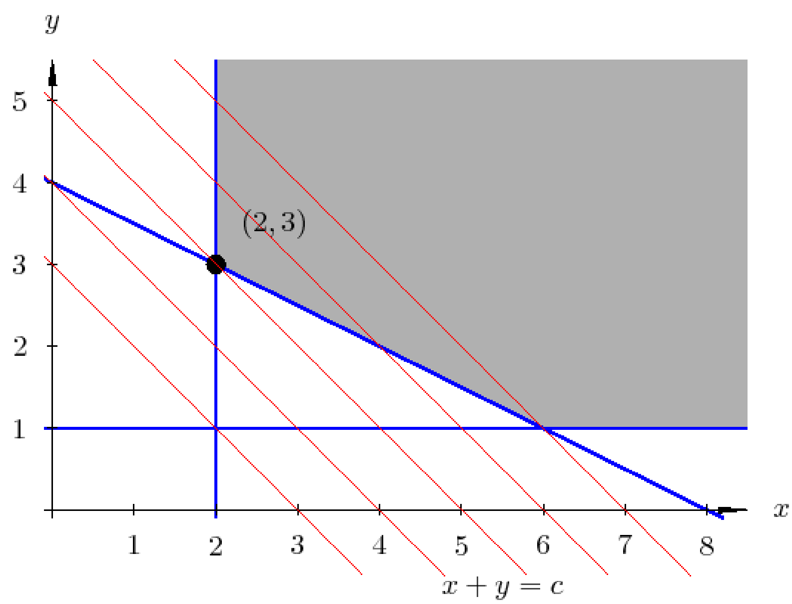
(c) ketabton.com: The Digital Library

$$c = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$$

او سړی د کون-تکر-شرایط لاس ته راوړي

$$1 = \lambda_1 + \lambda_3, \qquad 1 = \lambda_2 + 2\lambda_3, \qquad \lambda_1[x-2] + \lambda_2[y-1] + \lambda_3[x+2y-8] = 0$$

د $\lambda_i, [\dots] \geq 0$ سره. سړی زر پیژندلی شي، چې تیک یو د لاگرانژ -ضریب باید صفر وي، چط په بل ډول په شرایطو کې یو تضاد باید رامنځ ته شي. په دې درې حالتونو کې دوه فرعي شرایط فعال دي. دا (x, y) یواځنی کره کوي:



$$\lambda_1 = 0 \longrightarrow (6,1) \qquad \lambda_2 = 0 \longrightarrow (2,3) \qquad \lambda_3 = 0 \longrightarrow (2,1)$$

له دې سره $(2,1)$ فرعي شر طونهنه پوره کوي او د $\lambda_1 = 0$ لپاره $(2,1)$ او $\lambda_3 = 1$ راکوي، دلته د لاگرانژ د ضرب د همغط یا برابرې مخنخښي اړیین شرطونه

(c) ketabton.com: The Digital Library

نه دې پوره.د تابع مينيموم په $(2,3)$ نيول يا فرض کيږي. په دط حالت کې د لاگرانژ – ضريبونه داسي دي $\lambda = (1/2, 0, 1/2)^t$.

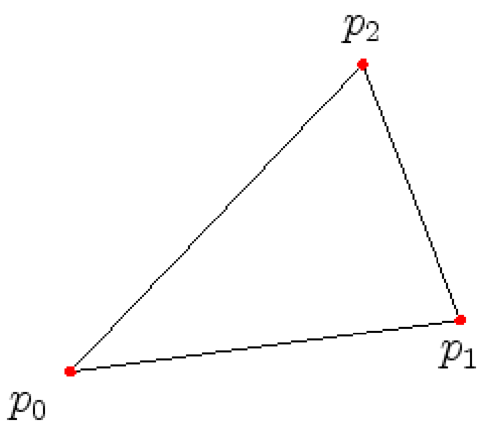
يوځمککچيز يا هدسي جوړښت په ښيره کط ښوول شوی دی. حل تکی $(2,3)$ دی، په کوم کې چې د موخه تابع سطحيزې کرښې معتبره ورشو لمس کړي. دا روښانه ده چې موخه تابع جگيږي(ټيټيږي)، که سطحيزه کرښه دا معتبره ساحه غوڅه(غوڅه نه) کړي.

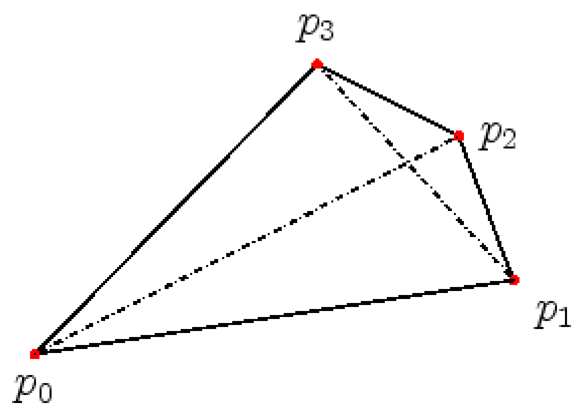
ليکونکي: بوسلي، هيوليگ

سيمپلکس*Simplex*

يو n–بعديز(پراخېدونی) سيمپلکس S د $n+1$ تکو $p_0, \ldots, p_n$ يو konvexe Hülle ده، چې دا ټول په يوه $(n-1)$-بعديز لاندې فضا کې نه دي پراته:

$$S = \{x = \sum_j \alpha_j p_j \; : \; \sum_j \alpha_j = 1, \; \alpha_j \geq 0\}$$





(c) ketabton.com: The Digital Library

n=2 n=3

دوه- او درېبعديز سيمأبمکسونه د درې ګوډي همداسې تيترايدر بلل کيږي.

د يوه سيمپلکس ډکی يا حجم د وکتورونو $p_i - p_0\,,\ i = 1, \dots, n$ د ديترمينانت په مرسته افاده کيدی شي:

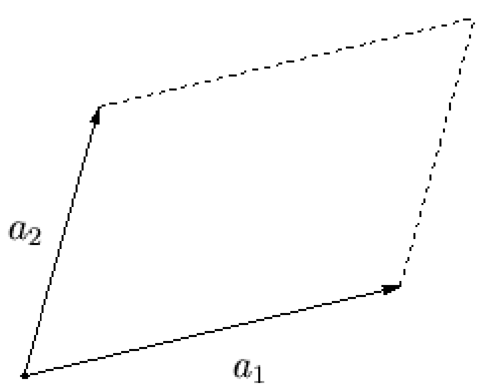
$$\mathrm{vol}\, S = \frac{1}{n!} |\det(p_1 - p_0, \dots, p_n - p_0)|\,.$$

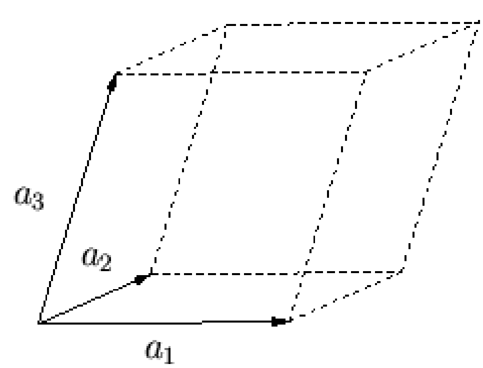
(Autoren: Boßle/Höllig/Streit)

غبرګ اپيپيد(غبرګ اړخيز يا مکعبنما) *Parallelepiped*

يو n -بعديز (يا پراخيدونی)غبرګ اپيپيد P د n کربنيزو وکتورونو a_i څخه غزيږي:

$$P = \{x = \sum_i \alpha_i a_i :\ 0 \le \alpha_i \le 1\}\,.$$





(c) ketabton.com: The Digital Library

n=2 n=3

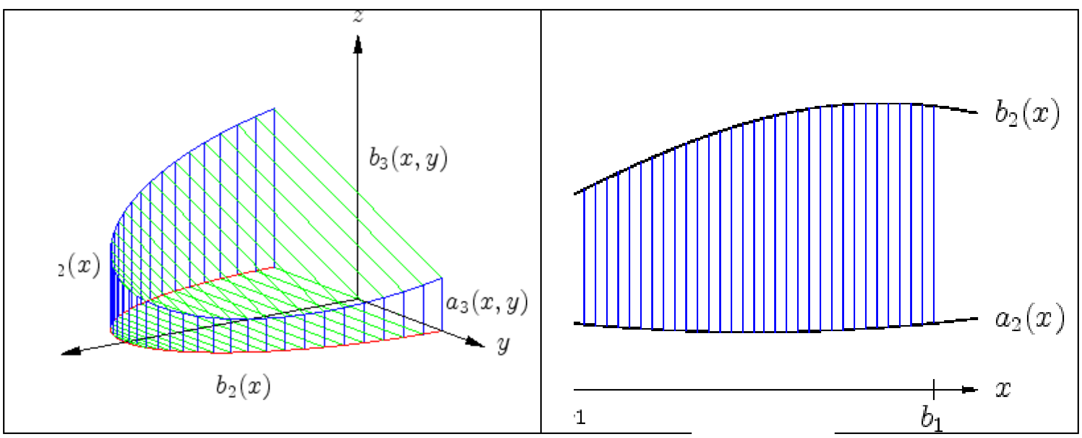
دوه – او درې بعديز غبرګ خواييز غبرک اړخيز همداسې شپاات بلل کيږي.

د غبرګخواييزوډکې(حجم) د ترې غزيدلووکتورونو د ديترمينانت مطلق ارزښت دی:

$$\mathrm{vol}\, P = |\det(a_1, \ldots, a_n)|\,.$$

ليکونکي: هيوليګ، شترايت

د انتيګريشن ورشو



يوه بنستسزه ورشو $V \subseteq \mathbb{R}^n$ د يوه مناسب کواورديناتسيستم ترانسفورميشن $x \to x'$

پسې د د ناپريکيدونکو توابعو a_i او b_i ګراف له لارې رابند دي:

$$\begin{aligned} & a_1 \le x'_1 \le b_1 \\ & a_2(x'_1) \le x'_2 \le b_2(x'_1) \\ & \vdots \\ & a_n(x'_1, \ldots, x'_{n-1}) \le x'_n \le b_n(x'_1, \ldots, x'_{n-1}) \end{aligned}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د بنسټيز ورشوګانو یو تر زئکړو یا منحنیو پای ټولنه رګولار ورشو بلل کيږي. د دې لپاره یو ځاګړی حالت یو سیمپلکس دی چې پولیګونالورشو څخه جوړ وي:

لیکونکي: بوسلی، هیولیک، شترایت

د هوزدورف واټن Hausdorff-Abstand

په یوه متریکیفضا M کې د یوې ډېرئ U لپاره د متریک d سره کیدی شي د

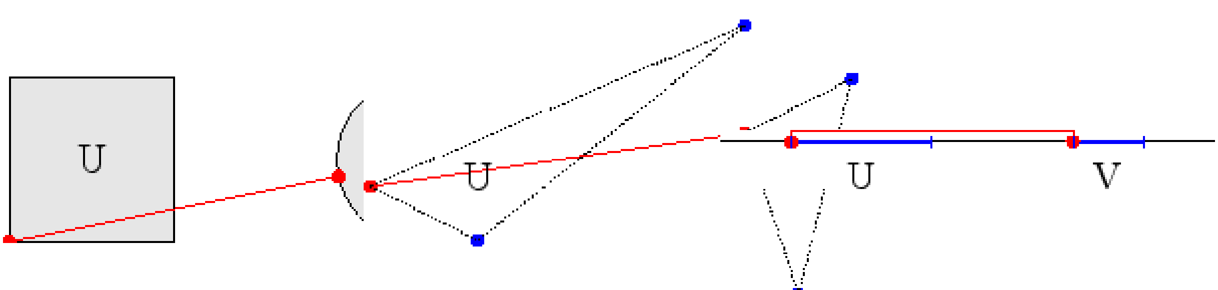
$$\operatorname{dist}(x,U) = \inf_{u\in U} d(x,u)$$

سره د واټن و ته بلل کيږي. په ټولیزه توګه د د وه ډېریو هوزدورف-واټن په لاندې توګه تعریفيږي

$$\operatorname{dist}_H(U,V) = \max\left(\sup_{u\in U}\operatorname{dist}(u,V),\, \sup_{v\in V}\operatorname{dist}(v,U)\right).$$

)لیکونکي: هیولیګ، شترایت

په لاندې څېره کې د ډېریو U او V لپاره یوځو جوړې په هرکې ټکي په نخښه شوې، د هوزدورف –واټن همدایې داویکلید متریک نیول کيږي.



(c) ketabton.com: The Digital Library

لکه د بیلګو ښخه چې لیدل کيږي، $\mathrm{dist}_H(U,V)$ د دوه ټکو U او V لنډ واټن نه دی

لیکونکي : هیولیګ، شترایت

Mehrdimensionales Integral

ډېر بعدیز(ډېر پراخیدونی) انتیګرال

په یوه رګولار ورشو د یوه ناپریکیدونکي تا بع f انتیګرال کیدی شي د ریمن جمعي د پولې په څیر تعریف شي:

$$\int_V f\,dV = \lim_{|\Delta|\to 0} \sum_i f(P_i)\Delta V_i\,, \quad \Delta V_i = \mathrm{vol}(V_i)\,.$$

له دې سره د (توکي) پردیو ساده ورشوګانو V_i (په ټولیزه توګه سیمپلیکسونو یا غبرګ ایپیپیدونو) ټولنې یا اتحاد له لارې V اپروکسمې کیږي، دا په دې معنا چې د V او $\bigcup_i V_i$ د هوزدورف – واټن د صفر په لورهڅیږي. د $|\Delta|$ سره کیدی شي د V_i ماکسیمال کچونه په نخښه شي، P_i په خوښه ټکي په V_i کې دي.

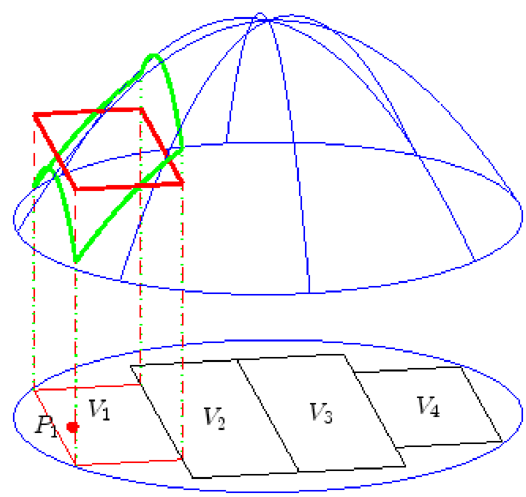
د لیکنې ډول $\Delta V_i \to dV$ د پولې پروسې سومبولي کول دي، او dV سړی ډکی یا حجم بولي. په لنډ ډول $\int_V f$ هم لیکو یا په مفصل ډول

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int\limits_V f\,dV = \int\limits_V f(x_1,\ldots,x_n)\,dx_1\ldots dx_n\,,$$

که څوک د انتیګریشن متحولې راباسي.

د f ناپرېکېدني په اساس د ریمن انتیګرال تعریف هم د توکو ورشوګانو V_i او هم له تکي P_i خپلواک دی.



د یوه زاتیز یا مثبت تابع لپاره انتیګرال د دېرئ ډکی یا حجم دی.

$$\{(x_1,\ldots,x_n,h):\ 0\le h\le f(x),\, x\in V\}\,.$$

په ځانګړې توګه $\int\limits_V 1$ د امتیګریتي ورشو V حجم دی.

په f او V د د هوار والي وړاندنیونه(فرضیه) کېدی شي ضعیفه شي، داسي چې ا نتیګرال په یوه مناسب پوله پروسه باندې تعریف وي.

لیکونکي : بوسلي، هیولیک، شترایت

(c) ketabton.com: The Digital Library

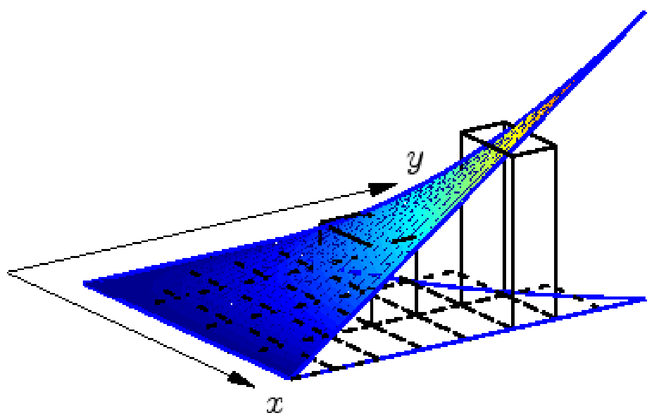
د تابع

$$f(x,y) = xy$$

دې په ورشو

$$V: \quad 0 \le x \le 1, \qquad 0 \le y \le 1 + x^2$$

کې انتیګرال ونیول شي.



خیره د انتیګریشن ورشو په یوه شډل مربع ګیتر یا -منډو ؟؟؟ باندې وېشنه یا توټه کېدنه
بنایي. د منډو پراختیا $h = 1/n$ لپاره دا اپرکسیمسشن لاس ته راوړو

$$h^2 \sum_{0 \le j < n} \sum_{0 \le kh < 1 + (jh)^2} (jh)(kh) = h^4 \sum_{0 \le j < n} j \sum_{0 \le k < n + j^2/n} k\,.$$

د جګودرجو درجو ترمونو تېرېدنې سره دا د دې دبلې جمعې سره برابر دی

$$h^4 \sum_{0 \le j < n} j\left((n + j^2/n)^2/2 + Ch^4 \sum_{0 \le j < n} jn^2/2 + j^3 + j^5/(2n^2) + O(n^2)\right)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{12}\right)+O(h),$$

اوله دې سره انتيګرال ارزښت $\frac{7}{12}$ لري.

ليکونکي: بوسلي، هيوليګ. شترايت

د فابيني جمله Satz von Fubini

په يوه بنسټيزه ورشو د يوه ناپرېکېدونکې تابع انتيګرال

$$V:\ a_j(x_1,\ldots,x_{j-1}) \le x_j \le b_j(x_1,\ldots,x_{j-1})$$

کېدی شي د يوبعدي يا يوپراخېدوني انتيګرالونو د يوبل پسې شمېرنې له لارې لاس ته راشي:

$$\int_V f\,dV = \int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2(x_1)}^{b_2(x_1)}\cdots\int_{a_n(x_1,\ldots,x_{n-1})}^{b_n(x_1,\ldots,x_{n-1})} f(x_1,\ldots,x_n)\,dx_n\cdots dx_2dx_1\,.$$

له دې سره د بنسټيزوورشوګانو د لړئ پرلپسې رول نه لوبوي. په ځانګړې توګه د دېل انتيګرال لپاره د ثابتې انتيګرېشن پولې سره

$$\int_a^b\int_c^d f(x,y)\ dydx = \int_c^d\int_a^b f(x,y)\ dxdy\,.$$

ټوليزه تلنلار کېدی شي په دوهبعدي ځانګړې حالت

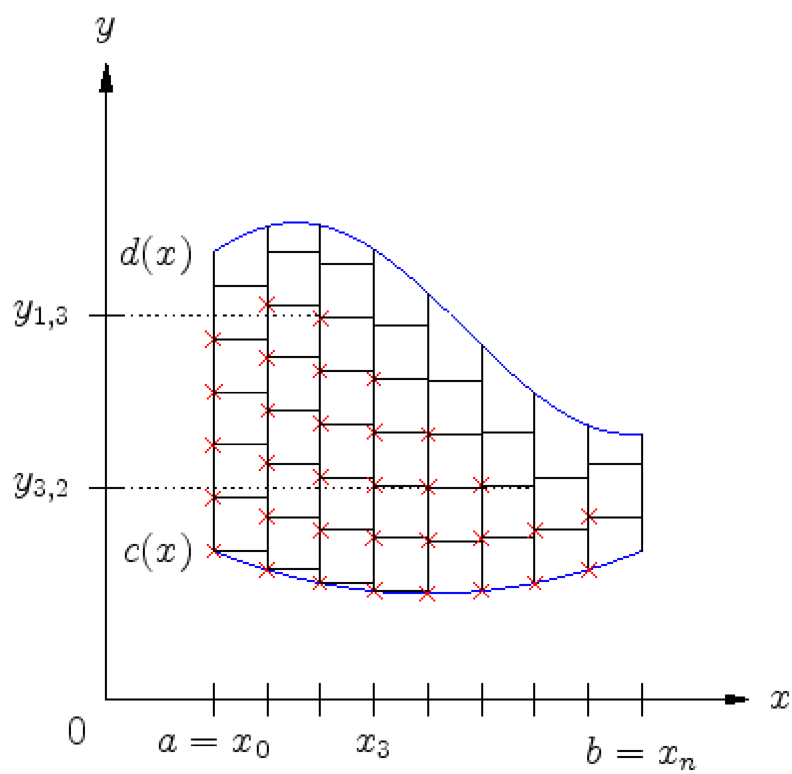
(c) ketabton.com: The Digital Library

$$V: \ a \le x \le b, \quad c(x) \le y \le d(x)$$

لیدوړ وګرځي. د تعریف سره سم سړی $\int_V f$ د ریمن جمعې له لارې اپروکسیمیکوي

$$s_n = h^2 \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{m_j-1} f(x_j, y_{j,k})$$

د $h = (b-a)/n$ ، $x_j = a + jh$ او $y_{j,k} = c(x_j) + kh$ سره.



د f په کومپکټ انتیګریشن ورشو V باندې برابرډوله ناپرېکیدني په بنسټ دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$|f(x_j,y)-f(x_j,y_{j,k})|\le \varepsilon, \quad y_{j,k-1}\le y\le y_{j,k}\,,$$

د $h<h_\varepsilon$ لپاره. د دې په تعقیب کېدی شي دننئ جمعه د یوه بعدي یا یو پراخیدوني انتیګرال سره پرتله شي:

$$s_n = h\sum_{j=1}^{n}\left(\int_{c(x_j)}^{d(x_j)} f(x_j,y)\,dy + r_{n,j}\right)$$

د $|r_{n,j}|\le m_j h\varepsilon$ سره. همدا دلیل کېدی شي په ناپریکیدونکو توابعو $g(x)=\int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y)\,dy$ وکارول شي،، او سړی لاس ته راوړي

$$s_n = \int_a^b g(x)\,dx + \left[r_n + h\sum_j r_{n,j}\right]$$

د $|r_n|\le nh\varepsilon$ سره د $h<h'_\varepsilon$ لپاره. دا چې

$$|[\ldots]|\le \Big((b-a)+\max_x(d(x)-c(x))\Big)\,\varepsilon$$

او $\varepsilon>0$ په خوښه ټاکل کېدی شي، نو پوله $\lim_{n\to\infty} s_n$ د ایتریر شوي iterierten یو بعدي انتیګرال سره سر خوري.

لیکونکي : هیولیګ، شترایت

د تابع

(c) ketabton.com: The Digital Library

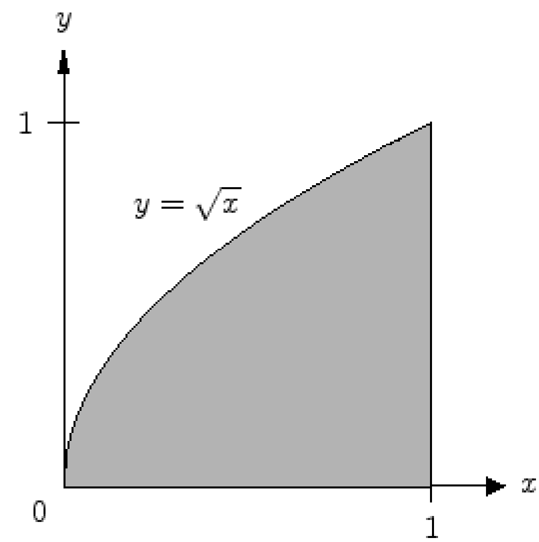
سرليک

$$f(x,y) = y\cos\left(x^2\right)$$

دي داپه ځبره کې انځور شوې ورشو

$$V: \quad 0 \leq x \leq 1\,, \quad 0 \leq y \leq \sqrt{x}$$

کې انتيګرال ونيول شي.



د فوبينيجملې سره کيدی شي انتيګرال د دوه بعدي انتيګريشن له لارې وشميرل شي:

$$\int_V f = \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{x}} y\cos\left(x^2\right)\, dy \right) dx = \int_0^1 \left[\frac{y^2}{2}\cos\left(x^2\right) \right]_{y=0}^{y=\sqrt{x}} dx$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{2} x\cos\left(x^2\right)\, dx = \left[\frac{1}{4}\sin\left(x^2\right) \right]_0^1 = \frac{1}{4}\sin 1\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که انتیګریشن لړئ پرلپسې سره بدل شي، نو لاس ته راځي

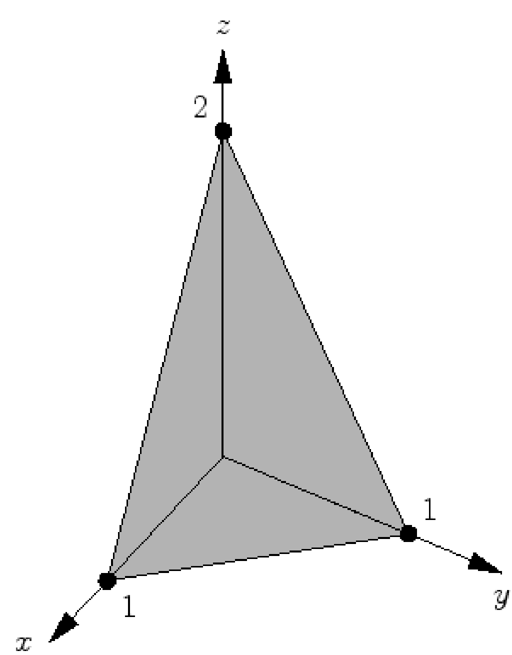
$$\int_V f = \int_0^1 \left(\int_{y^2}^1 y \cos\left(x^2\right) \, dx \right) dy \, .$$

په دې حالت کې دننی انتیګرال اکسپلیڅیت شمیروړ نه دی. د ایټریر شوي انتیګرال د عملي شمیرنې لپاره کیدی شي د انتیګریشن لړئ پرلپسې غوره وي.

لیکونکي : بوسلي، هیولیک، شترایت

د دې لپاره چې تابع

$$f(x,y,z) = x$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

په تیترا ید

$$T: \quad x,y,z \geq 0, \quad x+y+\frac{z}{2} \leq 1$$

باندې وشمیرل شي، نو لومړی به T د بنسټیزې ورشو په توګه ورکړل:

$$T: \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1-x\,, \quad 0 \leq z \leq 2\,(1-x-y)\,.$$

نو بیا دا انتیګرال د فوبیني د جملې په بنسټ شمیرلکیدی شي:

$$\begin{aligned}\int_T f &= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \left(\int_0^{2(1-x-y)} x\,dz \right) dy \right) dx \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} 2x\,(1-x-y)\,dy \right) dx \\ &= \int_0^1 \left(x-2x^2+x^3\right)\,dx = \frac{1}{12}\,.\end{aligned}$$

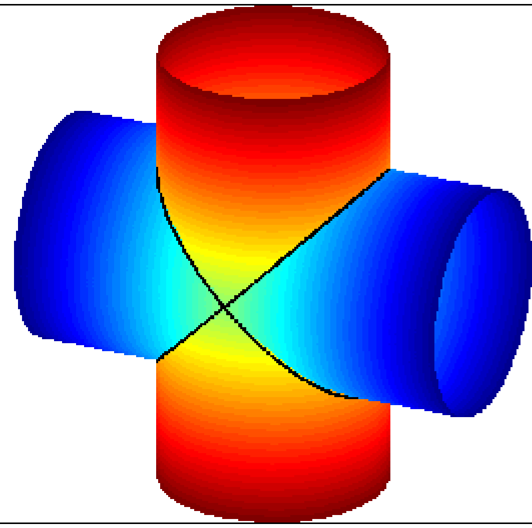
لیکونکي: بوسلي، هیولیګ، شترایت

ډکی یا حجم شمیرلکیږي، چې د دواړو توتو له (ګډ) غوښي

$$Z_1: \; x^2+y^2 \leq r^2, \quad Z_2: \; x^2+z^2 \leq r^2$$

له لارې منځ ته راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د سيومتر ي په بنسټ لومړی د اوکتانتونو ډکي يا حجمونه شميرلکيږي. په لومړي اوکتانت کې د انتيګريشن ورشو د ګردئ يا دايرې څلورمه ده	

$$K:\ 0 \le x \le r, \quad 0 \le y \le \sqrt{r^2 - x^2}.$$

په K باندې د (ګډ) غوڅي بدن جګوالی د $h(x,y) = \sqrt{r^2 - x^2}$ د Z_2 له لارې ورکړ شوی دی. د ډکي يا حجم په حيث لرو

$$\int_K h = \int_0^r \left(\int_0^{\sqrt{r^2-x^2}} \sqrt{r^2 - x^2}\, dy \right) dx = \int_0^r (r^2 - x^2)\, dx = r^3 - \frac{1}{3} r^3 = 2r^3/3\ ,$$

او له دې سره د ټول بدن لپاره حجم $16r^3/3$.

ليکونکي:بيوسلر، هيوليک،شترايت

د n -بعديز يونغونداري(چې وړانګه يې يو واحد دی) ډکی(حجم)

د n - بعدي يوونغونداري ډکی يا حجم V_n دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$B_n = \{x \in \mathbb{R}^n : \ |x| \le 1\}$$

$$V_n = \frac{2\sqrt{\pi^n}}{n\,\Gamma(\frac{n}{2})},$$

د ګاما تابع Γ سره. د $n \le 6$ لپاره ارزښتونه په لاندې جدول کې ورکړشوي دي:

n	1	2	3	4	5	6
V_n	2	π	$4\pi/3$	$\pi^2/2$	$8\pi^2/15$	$\pi^3/6$

ليکونکي:بيوسلر،هيوليګ،شترايت

د ګاما تبع د تعريف له مخې د $B_1 = [-1,1]$ لپاره دی

$$\mathrm{vol}\,B_1 = 2 = \frac{2\sqrt{\pi}}{\Gamma(\frac{1}{2})}$$

.

د ايندکشن پل(قدم) $(n-1) \to n$ لپاره لومړی په پام کې نيسو، چې د B_n هيوپرسطحې $x_n = -1$ او $x_n = 1$ ترمنځ پروت دی او د هيوپرسطحې سره غوڅې(قطاع) $x_n = \xi,\ (-1 \le \xi \le 1)$ يو $(n-1)$ - بعديز غونډاري دی د وړانګې $\sqrt{1-\xi^2}$ سره . د B_n حجم له دې امله کيدی شي د فوبينوسجملې سره په لاندې توګه وشميرلشي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\operatorname{vol} B_n = \int_{-1}^{1} (1-\xi^2)^{\frac{n-1}{2}} \operatorname{vol} B_{n-1}\, d\xi \,.$$

د اینکشن وړاندنیوني

$$\operatorname{vol} B_{n-1} = \frac{2\sqrt{\pi^{n-1}}}{(n-1)\Gamma(\frac{n-1}{2})}$$

سره او د ګاما- تابع د تابعمسااتې،

$$\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)\,,$$

لاس ته راځي

$$\operatorname{vol} B_n = \sqrt{\pi}\,\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}\,\frac{2\sqrt{\pi^{n-1}}}{(n-1)\Gamma(\frac{n-1}{2})}$$

$$= \frac{2\sqrt{\pi^n}\,\frac{n-1}{2}\,\Gamma(\frac{n-1}{2})}{(n-1)\,\Gamma(\frac{n-1}{2})\,\frac{n}{2}\,\Gamma(\frac{n}{2})} = \frac{2\sqrt{\pi^n}}{n\,\Gamma(\frac{n}{2})}\,.$$

له دې سره کېدی شي انتیګرال $\int_{-1}^{1} (1-\xi^2)^{\frac{n-1}{2}}\, d\xi$ د په ځای اینوونې یا سبستیچیوشن $\xi = \sin t$ ، $d\xi = \cos t\, dt$ له لارې وشمېرل شي:

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1-\sin^2 t)^{\frac{n-1}{2}} \cos t\, dt = \int_{-1}^{1} (1-\xi^2)^{\frac{n-1}{2}}\, d\xi$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$2\int_0^{\pi/2} (\cos t)^{n-1}\,\cos t\,dt = \sqrt{\pi}\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}\,. =$$

ليکونکي:بيوسل،هيوليګ،شترايت

د ډېربعديز انتيګرال ترانسفورميشن

د يوه رګولار ورشو $U \subseteq \mathbb{R}^n$ د د يوه په (بيجکتيو)، ناپرېکيدونکي، مشتقوړ ترانسفورميشن g لپاره د

$$\det g'(x) \neq 0, \quad x\in U\,,$$

سره د ناپريکيدونکو توابعو f لپاره باور لري:

$$\int\limits_U f\circ g\,|\det g'|\,dU = \int\limits_V f\,dV\,,\quad V=g(U)\,,$$

له کوم سره چې $\det g'$ د ترانسفورميشن د تابع ديترمينانت بلل کيږي. دا ډکي- يا حجم توکيځای اړونده يا ځاييز تغير تشريح کوي.

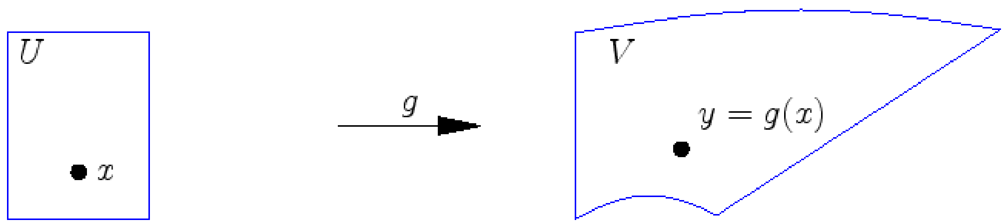
$$dV = |\det g'|\,dU\,.$$

د يوه لو کال اورتوګونال يا عمود کواورديناتو ترانسفورميشن ، دا په دې معنا چې د g' عمودې متې

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$|\det g'| = \prod_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial g}{\partial x_i} \right| ,$$

دي،دا په دې معنا چې د حجمتوکو سکالير ضريب د يوګونو متحولو سکاليري ضريبونو ضرب دی.



د يوه افين ترانسفورروميشن $y = Ax + b$ سره حجمتوکي د

$$dy = |\det A|\, dx .$$

سره تغير خوري.

په ځانګړې توګه د متحولې د سکالې کولو لپاره باور لري، $y_i = \lambda_i x_i$

$$dy_i = \lambda_i\, dx_i .$$

وړاندنيونې يا فرضيې کيدی شي لږ ضعيفې شي.

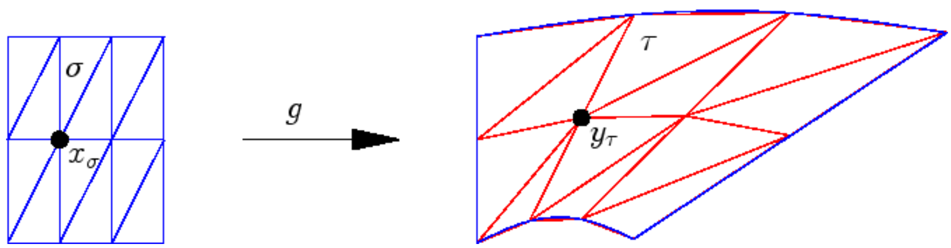
په ځانګړې توګه بايد د g بيجکتيويتي او د g' برعکسوړوالی فقط د U په دننه کې وغوښتل شي. د f پريکيدنه او ټاکلې زينګولاريتې هم ممکن دي، که ددوارو انتيګرالونو شتون تضمين وي.

ليکونکي: هيوليک، موبن

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ښوونې يا ثبوت فکر کيدی شي د دوه بعدي انتيګرال لپاره وښوول شي. د ساده والي لپاره نيول کيږي، چې g دوه ځله ناپرېکيدونکی مشتقوړ دی. دا را کوي، چې د $x \in U$

$$|\det g'(x)| \geq 1/c > 0,$$
$$g(x + \Delta x) - g(x) = g'(x)\Delta x + r, \quad |r| \leq c|\Delta x|^2.$$



لپاره لکه په خيره کېروښانه شوي،يواپروکسيميشن ارګومنت کارول کيږي. د دې لپاره د ورشو U د يوه ترياګوليرکونې(مثلثي کونې) څخه مخ ته ځو، او کېږ ا نتيکرال د ريمن جمعې

$$S_U = \sum_\sigma f(g(x_\sigma))|\det g'(x_\sigma)| \operatorname{vol}\sigma, \qquad x_\sigma \in \sigma$$

له لارې نږدې کوو. درېګوډي(مثلثونو) σ دې ډير زيات خوارهverzerrt نه شي، دا په دې معنا چې

$$h/c' \leq a \leq c'h$$

د ټولو درېګوډيو سيکانتواوږدوالي a لپاره. دا په ځانګي توګه راکوي، چې لوی کونج برابرېدوله په h کې کښته لور ته بنده يا محدود ده. دزئ اپروکسيميشن پوره ښه دی، داسې چې د ريمن/جمعه يا – زياتون د $h \to 0$ لپاره د $\int_U (f \circ g)|\det g'|$ په لور هڅيږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کونجټکو د تابع له لارې $x_\sigma \mapsto y_\tau = g(x_\sigma)$ د ځیره –یا ارزښت ورشو $V = g(U)$ یو درېګوډېزوالی یا مثلث کیدنه منځ ته راځي. کطدی شي د درېګوډي خورېدنه زياته شي،مګر د نه پرېکيدني او له دې سره د g د جاکوبي-ماتريکس د محدوديت اود برعکس تابع g^{-1} اړخونه د اپروکسيميشن پارامتر h سره پرتله کيدونکې پاتيږي. برسيره پردې د $\det g' > 0$ په حالت کې د درېګوډي لوريزوالی ساتلی پاتيږي(په همدې ډول د ډيترمينانت د مخنخښې بدلون سره برعکس يا په څټ کيږي)،داسې چې يوپه بل پريوتل منځ ته نه راځي.

د منځ ته راغلي ځيره – يا ارزښت ورشو منځ ته را ته راغلي درېګوډېزوالي ريمن-جمعه،

$$S_V = \sum_\tau f(y_\tau)\,\mathrm{vol}\,\tau, \qquad y_\tau = g(x_\sigma) \in \tau\,,$$

د $\int_V f$ په لور ځي. دا بايد وښول شي، چې د دواړو ريمن –جمعو کمښت د صفر په لور ځي يه هځيږي. دا د τ درېګوډي د ښه اپروکيميشن څخه لاسته راځي د σ د افيني ځيرې $\tilde\tau$ له لارې:

$$\mathrm{dist}_H(\tilde\tau,\tau) = O(h^2), \quad \tilde\tau = y_\tau + g'(x_\sigma)(\sigma - x_\sigma)\,.$$

دا $\mathrm{vol}\,\tilde\tau = |\det g'(x_\sigma)|\,\mathrm{vol}\,\sigma,$ د دواړو ريمن--جمعود $O(h^3)$ جمعې غړويا زياتونونو اود دوی د تعداد $O(h^{-2})$ ديسکريپانځ دی. له دې سره لاس ته راځي

$$|S_U - S_V| = O(h) \to 0\,.$$

د هوزدورف-وا ټن د تخمين د ښووني لپاره سړی درېګوډي(مثل څونه) سره پرتله کوي

$$\tau = \Delta(y_\tau, y_1, y_2), \quad \tilde\tau = y_\tau + g'(x_\sigma)\Delta(0, x_1 - x_\sigma, x_2 - x_\sigma)$$

د $y_i = g(x_i)$ سره ګاونډي ټکي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y_\tau + \alpha'(y_1 - y_\tau) + \alpha''(y_2 - y_\tau),$$

$$y_\tau + \alpha' g'(x_\sigma)(x_1 - x_\sigma) + \alpha'' g'(x_\sigma)(x_2 - x_\sigma)$$

د $0 \le \alpha', \alpha'' \le 1$ سره. د دويممشتق د ناپرېکېدنې د نيونې په بنسټ لاس ته راځي، چې کمښت برابر ډوله د

$$O(\max(|x_1 - x_\sigma|^2, |x_2 - x_\sigma|^2))$$

له لارې اټکل کېدی شي،څه مو چې ښوول.

ليکونکية هيوليګ، موبښ

د ترانسفورمېشن ښوولو ته کېدی شي يوه ورشو V تر څېړنې ونيول شي، هغه د دوه کربښيز سره تړلو پارابلسګمنت له لارې

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ u^2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u \\ u^2 \end{pmatrix}, \quad 0 \le u \le 1$$

رابنديږي. که د پارابولسګمنتونه وخوزول شي يعني تل بل ځايت ه يووړل شي، نو سړی يو پيجکتيو تابع په يوون – يا واحد مربع U لاس ته راوړي.

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v + u \\ v + u^2 \end{pmatrix}, \quad 0 \le u,\ v \le 1\,.$$

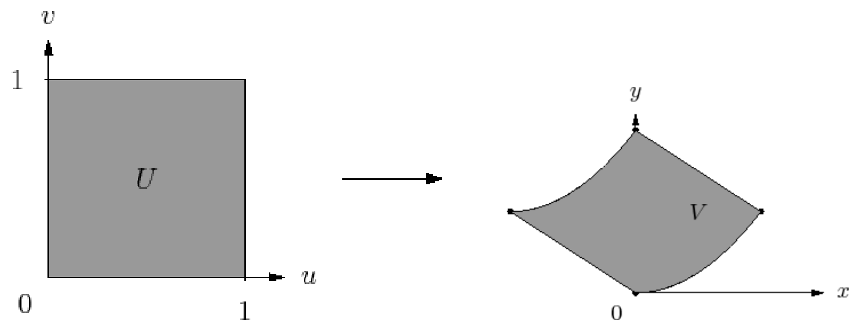
د تابع جاکوبي ماتريکس دی

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2u & 1 \end{pmatrix},$$

او سړی د تابع ديترمينانت په ځېر لاسته راوړي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\det \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = 2u + 1 > 0 \,.$$



له دې سره د ډکي توکی د لاندط سره تغیرېږي

$$dV = dx\,dy = (2u+1)du\,dv = (2u+1)dU \,.$$

په V باندې د $f(x,y) = x + y$ د ا نتیګرال لپاره د ترانسفورمیشن قانون سره لاس ته راځي

$$\int_V (x+y)\,dx\,dy$$

$$= \int_0^1 (\frac{2}{4} + 1 + \frac{1}{2})\,dv = 2 \,.$$

ليکونکي: هيوليګ، موبش

یوتوروس یا کړۍ د بېلګې په توګه د ګردئ - دابرې تیکلي د ځرخونن رامنځ ته کيږي

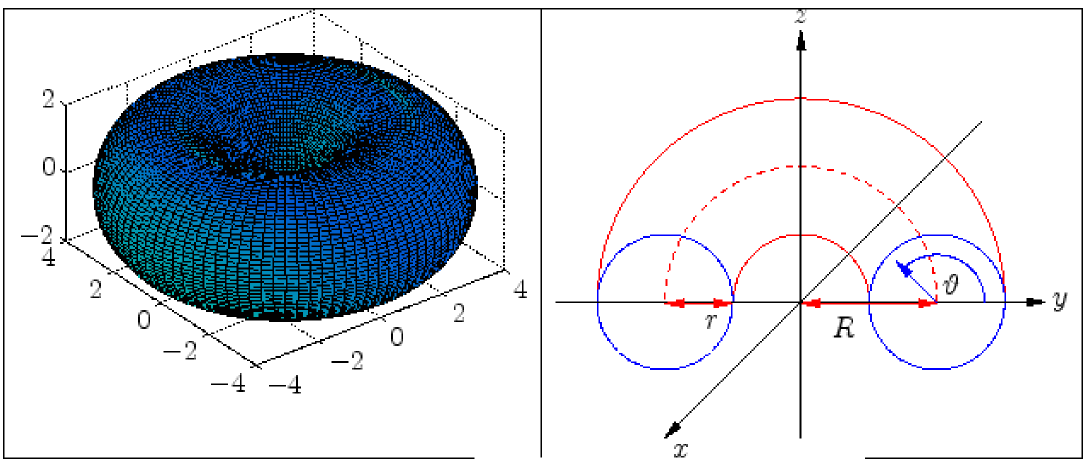
(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R + r\,s\cos\vartheta \\ r\,s\sin\vartheta \end{pmatrix}, \quad 0 \le s \le 1, \quad 0 \le \vartheta \le 2\pi$$

د z- په محور د $r < R$ سره،دا په دې معنا چې

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = p(s, \vartheta, \varphi) = \begin{pmatrix} (R + r\,s\cos\vartheta)\cos\varphi \\ (R + r\,s\cos\vartheta)\sin\varphi \\ r\,s\sin\vartheta \end{pmatrix}$$

یو ممکنه پارامتري کېدنه ده د $0 \le \varphi \le 2\pi$ سره.



د ترانسفورمیشن $p : \begin{pmatrix} s \\ \vartheta \\ \varphi \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ جاکوبي ما تریکس دی

$$p' = (p_s, p_\vartheta, p_\varphi) =$$

$$\begin{pmatrix} r\cos\vartheta\cos\varphi & -r\,s\sin\vartheta\cos\varphi & -(R + r\,s\cos\vartheta)\sin\varphi \\ r\cos\vartheta\sin\varphi & -r\,s\sin\vartheta\sin\varphi & (R + r\,s\cos\vartheta)\cos\varphi \\ r\sin\vartheta & r\,s\cos\vartheta & 0 \end{pmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

داچې متېې یا ستنې یو بل ته اورتوګونال دي،د تابع دیترمینانتو لپاره باور لري

$$|\det p'| = |p_s||p_\vartheta||p_\varphi| = |r||r\,s||R + r\,s\cos\vartheta| =$$

$$= r^2 s(R + r\,s\cos\vartheta).$$

له دې سره د ډکي یا خجم لپاره لاس ته راوړو

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} r^2 s(R + r\,s\cos\vartheta)\,d\varphi\,d\vartheta\,ds$$

$$= 2\pi r^2 \left(\int_0^1 \int_0^{2\pi} sR\,d\vartheta\,ds + \int_0^1 \int_0^{2\pi} r\,s^2 \cos\vartheta\,d\vartheta\,ds \right)$$

$$= 2\pi r^2 \left(\int_0^1 2\pi sR\,ds + 0 \right) = 2\pi^2 R r^2 .$$

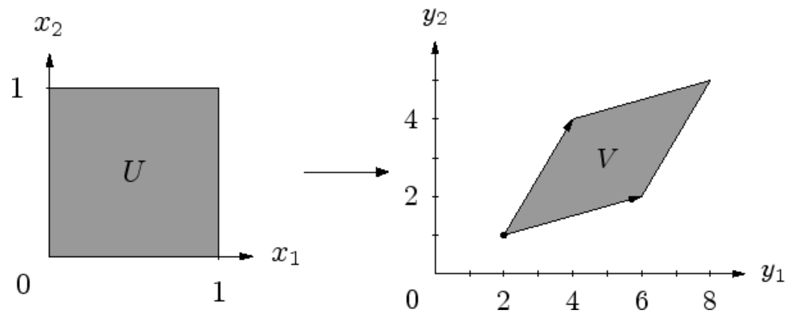
یو غبرګ اړخیزParallelogramm یا موازیالاضلاع V کېدی شي د یوون ګردئ U یوه افین ترانسفورمېشن د ځېرې په حیث انځور شی:

$$U \ni x \mapsto y = Ax + b \in V\,.$$

له دې سره b یو ګوډ تکی دی او د A متېې وکتورونه دي، چې دا غبرګ اړخیز غزوي.
د دې ځېره شوې بېلګې لپاره دی

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



د ترانسفورمیشن تابع دیترمینانت دی

$$\det \frac{\partial(y_1, y_2)}{\partial(x_1, x_2)} = \det A = 10\,.$$

له دې سره د بېلګې په توګه د انتیګرال لپاره په V یو کرښیز تابع لاس ته راځي

$$f(y) = 3y_1 - 4y_2$$

$$\int\limits_V f \quad = \int\limits_U f(Ax+b) 10\, dV$$

په ټولیززه توګه معکوسکیدونکی تابع

$$(x_1, \ldots, x_n)^{\mathrm{t}} \mapsto Ax + b$$

یوونمکعب $U = [0,1]^n$ په غبرګ اړخیز (-اپیپد) جوړوي، چې د ماتریکس متې یا ستن څخه غزیږي.په ورته توګه دې روښانه بېلګې د $n = 2$ لپاره ا نتیګرال په V یو کرښیز تابع $f(y) = c^{\mathrm{t}} y$ دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int_V f = \int_U c^t(Ax+b)|\det A|\,dx = c^t(Ae/2+b)|\det A|$$

د $e = (1,\ldots,1)^t$ سره.

) لیکونکي: هیولیګ، موبش

په توته کواودینات کې ډکیتوکې یا حجم توکي

Volumenelement in Zylinderkoordinaten

د کواوردینات ترانسفورمیشن لپاره

$$x = \varrho\cos\varphi, \quad y = \varrho\sin\varphi, \quad z = z$$

دی

$$dx\,dy\,dz = \varrho d\varrho\,d\varphi\,dz\,.$$

له دې سره په ځانګې توګه د یوه تابع f د انتیګرال لپاره په یوه توته یا استوانه باور لري

$$Z: \quad 0 \le \varrho \le \varrho_0\,, \quad 0 \le z \le z_0$$

$$\int_Z f = \int_0^{z_0}\int_0^{2\pi}\int_0^{\varrho_0} f(\varrho,\varphi,z)\,\varrho\,d\varrho\,d\varphi\,dz\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په ځانګړې توګه د يوه اکسياسيمتريک يا محور سيمتريک تابع $f(\varrho)$ لپاره دی

$$\int_Z f = 2\pi z_0 \int_0^{\varrho_0} f(\varrho)\, \varrho\, d\varrho\,.$$

د سطحې قطبي کواوردينات لپاره د سطحي توکي په ورته توګه ترانسفورمي کيږي.

(Autoren: Höllig/Much)

د کواوردينات ترانسفورميشن

$$(x, y, z) = g(\varrho, \varphi, z)$$

لوکال يا ځای اړونده اورتوګونال دی،دا په دې معنا چې د جاکوبي ماتريکس

$$g' = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\varrho\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \varrho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

اورتوګونال متې يا ستنط لري. په تعقيب د تابعديترمينانت يا فنکشنل ديترمينانت لپاره باور لري

$$|\det g'| = |g_\varrho|\,|g_\varphi|\,|g_z| = 1 \cdot \varrho \cdot 1 = \varrho\,.$$

)ليکونکی: هوليګ، موښ

د ګاوس تابع د انتيګرال ټاکنې ته،

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-x^2\right) dx = \sqrt{\pi}\,,$$

سړی لاندې مرستندوی جوړښت کاروي. سړی د انتیګرال مربع شمېري:

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-x^2\right) dx\right)^2 \left(\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-x^2\right) dx\right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-y^2\right) dy\right)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-x^2 - y^2\right) dx\, dy\,.$$

دا انتیګرال کېدیشي د قطبي کواوردینات په مرسته ساده وټاکل شي:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} \exp\left(-r^2\right) r\, dr\, d\varphi = 2\pi\left[-\frac{1}{2}\exp\left(-r^2\right)\right]_0^{\infty} = \pi\,.$$

))لیکونکی: هولیګ، موبښ

په غونډوسکې یا غونډاري(کورې-) کواوردینات کې د ډکي –یا حجم توکي

د کواوردینات د ترانسفورمیشن لپاره

$$x = r\sin\vartheta\cos\varphi,\quad y = r\sin\vartheta\sin\varphi,\quad z = r\cos\vartheta$$

دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$dx\,dy\,dz = r^2 \sin\vartheta\, dr\, d\vartheta\, d\varphi\,.$$

په ځانګړې توګه په یوه غوړوسکې یا کورې $K:\ 0 \le r \le R$ باندې د یوه تابع f انتیګرال لپاره باور لري

$$\int_K f = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R} f(r,\vartheta,\varphi)\, r^2 \sin\vartheta\, dr\, d\vartheta\, d\varphi\,.$$

په ځانګړي ډول د رادیالسیمتریک تابع $f(r)$ لپاره دی

$$\int_K f = 4\pi \int_0^{R} f(r) r^2 dr\,.$$

)لیکونکی: هولیک، موبن

د کواوردینات ترانسفورمیشن

$$(x,y,z) = g(r,\vartheta,\varphi)$$

لوکال اورتوګونال دی،دا په دې معنا چې د جاکوبي – ماتریکس

$$g' = \begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi & r\cos\vartheta\cos\varphi & -r\sin\vartheta\sin\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi & r\cos\vartheta\sin\varphi & r\sin\vartheta\cos\varphi \\ \cos\vartheta & -r\sin\vartheta & 0 \end{pmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

اورتوګونال مټې لري. په دې پسې د فنکشنلديترمينانت لپاره باور لري

$$|\det g'| = |g_r|\,|g_\vartheta|\,|g_\varphi| = 1 \cdot r \cdot r\sin\vartheta = r^2\sin\vartheta\,.$$

د يوه راديالسيمتريک تابع f لپاره انتيګرال په ϑ او φ راکوي

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\sin\vartheta\,d\vartheta\,d\varphi = 2\pi\,[-\cos\vartheta]_0^{\pi} = 4\pi\,.$$

دا ترمخضريب د $\int_K f$ شمېرنې له امله د يوونغونډاري پورته هوارې سطحه ده.

) ليکونکی: هوليګ، موبش

په غونډوسکې(کرې) $K : r \leq 1$ د r^α انتيګرال دی

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{1} r^2 r^\alpha \sin\vartheta\,dr\;d\vartheta\,d\varphi = 4\pi\int_0^{1} r^{\alpha+2}\,dr\,.$$

فقط د $\alpha > -3$ لپاره شتون لري او په دې حالت کې مساوي دی لاندې سره

$$4\pi\left[\frac{r^{\alpha+3}}{\alpha+3}\right]_0^1 = \frac{4\pi}{\alpha+3}\,.$$

انتيګرال په $\mathbb{R}^3 \setminus K$ دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_1^{\infty} r^{\alpha} r^2 \sin\vartheta dr\, d\vartheta\, d\varphi = 4\pi \int_1^{\infty} r^{\alpha+2}\, dr$$

دا انتیګرال فقط د $\alpha < -3$ لپاره شتون لري او په دې حالت کې د لاندې سره مساویدی

$$4\pi \left[\frac{r^{\alpha+3}}{\alpha+3}\right]_1^{\infty} = \frac{-4\pi}{\alpha+3} .$$

)لیکونکی: هولیګ، موبش

د صفر نیو باندې د h په جګوالي فشار د بارومتري جګوالیفرمول له لارې ټاکل کیږي:

$$p(h) = p_0\, e^{-\frac{\varrho_0 g h}{p_0}} .$$

له دې سره نورمال فشار $p_0 = 101300\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}$ دی، $\varrho_0 = 0.150\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$ د اکسیجن ټینګوالی(غلظت) په صفر نیو(21%د هوا اکسیجن دی) او $g = 9,80\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ د ځمکې بیړه یا تعجیل دی.

ټینګوالی د فشار سره د ایدیال غازمساوات سره تړلی:

$$\varrho = \frac{p}{R_s T}$$

د $R_s = \frac{k_B}{m_{\mathrm{Molekül}}} = 519\frac{\mathrm{N\,m}}{\mathrm{K\,kg}}$ سره د spezifischen دغاز ثابته د اکسیجن لپاره او T په کالوین کچ شوې تودوخې. د ساده ونې له امله دا د ثابتې $-3°C$ په حیث ، یعنې $T = 270$ K ،نیول- یا کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

له دواړو مساواتو څخه کیدی شي په اتموسفیر کې په نږدې توګه د اکسیجن ټوله کتله وشمېرل شي:

$$M = \int_V \varrho \, dV = \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \int_{r_0}^{\infty} \frac{1}{R_s T} p_0 \, e^{-\frac{\varrho_0 g h}{p_0}} \, r^2 \sin\vartheta \, dr \, d\varphi d\vartheta,$$

له کوم سره چې m $r_0 = 6.37 \cdot 10^6$ د ځمکې وړانګه ده. د

$h = r - r_0$ سبستیچیوشن پسې او په ϑ او φ باندې انتیګرال سره لاس ته راځي

$$M = 4\pi \, \frac{p_0}{R_s \cdot T} \, e^{\frac{\varrho_0 g}{p_0} r_0} \int_{r_0}^{\infty} e^{-\frac{\varrho_0 g}{p_0} r} r^2 \, dr \, ,$$

او د دوه واره ټوټه – یا پارشل انتیګرال سره د انتیګرال لپاره لاس ته راځي

$$\int_{r_0}^{\infty} e^{-cr} r^2 \, dr = \left[-\frac{r^2}{c} e^{-cr}\right]_{r_0}^{\infty} + \left[-\frac{2r}{c^2} e^{-cr}\right]_{r_0}^{\infty} + \left[-\frac{2}{c^3} e^{-cr}\right]_{r_0}^{\infty}$$

($c = \frac{\varrho_0 g}{p_0}$). په ټولیزه توګه لاس ته راځي

$$M = \frac{4\pi p_0}{R_s T} \left(c^{-1} r_0^2 + 2c^{-2} r_0 + 2c^{-3}\right) = 2.59 \cdot 10^{19} \text{ kg} \, .$$

د پرتلې لپاره :

ځمککتله - $6 \cdot 10^{24}$ kg $(2.3 \cdot 10^5 \, M)$

سپوږمئ کتله - $7.4 \cdot 10^{22}$ kg $(2.9 \cdot 10^3 \, M)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

کتله اودروندتکی(نقطه ثقل؟)

د یوه بدن K کتله د ټیګوالي $\varrho(x),\, x \in K$, سره د

$$m = \int\limits_K \varrho(x)\,dK$$

له لارې ورکړ شوی ده. په ځانګړې توګه د $\varrho(x) = 1$ لپاره د . K ډکی(حجم) V لاس ته راوړو.

د کتلې دروندتکي ν –م کواوردينات د لاندې سره سم شميرل کيږي

$$s_\nu = m^{-1} \int\limits_K x_\nu \varrho(x)\,dK\,.$$

د $\varrho(x) = 1$ لپاره لرو

$$s_\nu = V^{-1} \int\limits_K x_\nu\,dK\,,$$

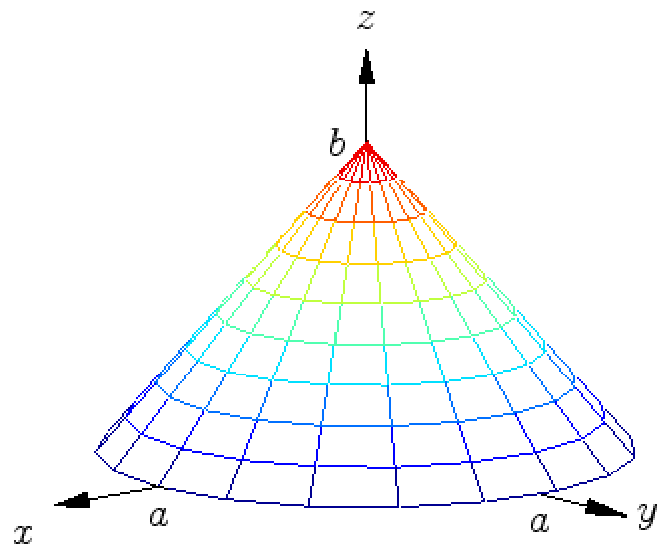
او S هندسي دروندتکی او یا هم په ساده توګه دروندتکی بلل کيږي.

ليکونکي: هيوليګ، کيمرلې، ترايت

يو غونډاری(کره) K د بنسټوړانګې a او جګوالي b سره ډکی(حجم) $V = \frac{\pi}{3}a^2 b$ لري او په توته کواوردينات کېلاندې انځورونه لري

$$K\ :\quad 0 \le \varphi \le 2\pi,\quad 0 \le \varrho \le \frac{a}{b}(b - z),\quad 0 \le z \le b\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



د سيمتري له ا مله د دروندټکي د $x-$ او y -کواورديناتونه صفر دي. د z –کواوردينات داسي شميرل کيږي

$$s_z = \frac{1}{V}\int_K z$$

اوپه توته کواوردينات باندي د ترانسفورميشن وروسته لاس ته راوړو

$$V s_z = \int_0^b \int_0^{a(b-z)/b} \int_0^{2\pi} \varrho\, z\, d\varphi d\varrho dz$$

$$= 2\pi \int_0^b \int_0^{a(b-z)/b} \varrho\, z\, d\varrho dz$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \pi \int_0^b z \left(\frac{a}{b}(b-z)\right)^2 dz$$

$$= \frac{\pi}{12} a^2 b^2 .$$

$$V s_z = \int_0^b \int_0^{a(b-z)/b} \int_0^{2\pi} \varrho \, z \, d\varphi d\varrho dz$$

$$= 2\pi \int_0^b \int_0^{a(b-z)/b} \varrho \, z \, d\varrho dz$$

$$= \pi \int_0^b z \left(\frac{a}{b}(b-z)\right)^2 dz$$

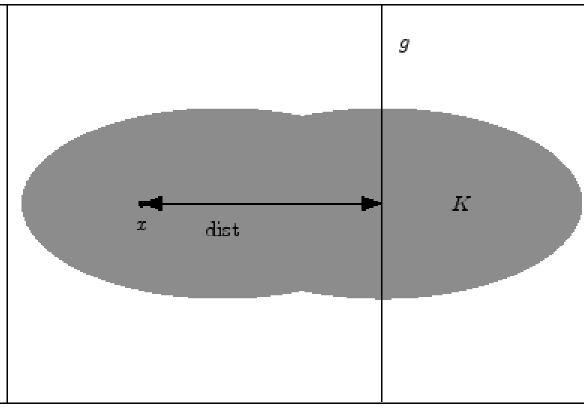
$$= \frac{\pi}{12} a^2 b^2 .$$

له دې سره $S = (0, 0, b/4)$. درونددټکی دی.

ليکونکي: هيوليګ، شترايت

(c) ketabton.com: The Digital Library

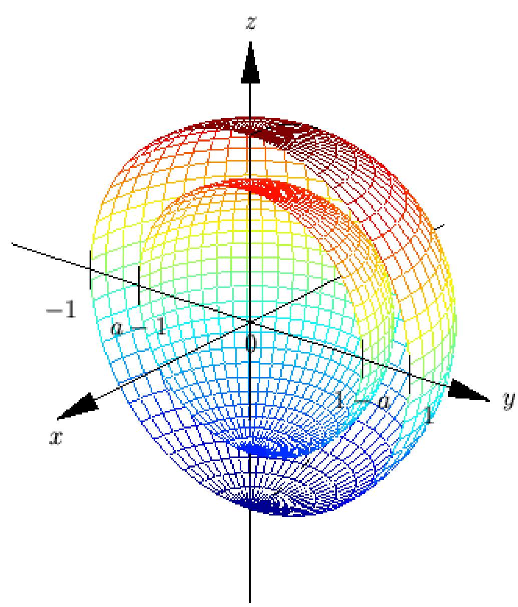
ترايګهايتسمومنت Trägheitsmoment (د کتلي څرکون اړونده لویه)

په یوه محور g د یوه تن K د تینګوالي $\varrho(x),\, x \in K$ سره دی Trägheitsmoment $I = \int_K \mathrm{dist}(x,g)^2 \varrho(x)\, dK\,,$ د کومسره چې dist د واټن تابع بنايي	

لیکونکي: هیولیک، شترایت

تشکیل-یا جوړه شوي تشه غونډوسکه یا کره په کواوردینات سیستم کې لاندې انځورونه لري

$$K \;:\quad 1-a \le r \le 1\,,\quad 0 \le \vartheta \le \pi\,,\quad 0 \le \varphi \le 2\pi\,.$$



د یوه ثابت تینګوالي ϱ لپاره په z –محور د Trägheitsmoment g دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$I = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_{1-a}^{1} \varrho(\underbrace{r\sin\vartheta}_{\mathrm{dist}((x,y,z),g)})^2 \underbrace{(r^2\sin\vartheta)\ dr\,d\vartheta d\varphi}_{dK} =$$

$$= \frac{2\pi\varrho}{5}(1-(1-a)^5)\int_0^{\pi}\sin^3\vartheta\,d\vartheta$$

$$\frac{2\pi\varrho}{5}(1-(1-a)^5)\left[-\cos\vartheta+\frac{1}{3}\cos^3\vartheta\right]_0^{\pi} = \frac{8\pi\varrho}{15}(1-(1-a)^5)$$

که تینګوالي ϱ له شرایطو، چې تشغوندوسکې کتله دې یو وي، سړی غواړي وټاکي،

$$1 = \int_K \varrho = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_{1-a}^{1} \varrho r^2\sin\vartheta\,dr\,d\vartheta d\varphi = \frac{4\pi\varrho}{3}(1-(1-a)^3)\,,$$

نو لاس ته راځي

$$I(a) = \frac{2}{5}\frac{(1-(1-a)^5)}{(1-(1-a)^3)}\,.$$

په ځانګړي توګه د ټولې غوندوسکې د Trägheitsmoment لپاره $I(1)=2/5$ راکوي او د $a=0$ لپاره د پولې ته تلنې له لارې د لوپیتال قانون سره $I(0)=2/3$

لیکونکي: هیولیک، شترایت

د کږې (منحني) انتیګرال

(c) ketabton.com: The Digital Library

د يوه ناپرېکيدونکې تابع f انتيګرال د يوې کږې(منحني) C په اوږدوالي د ريګولار ناپرېکيدونکي مشتقوږ پارامتريککونې

$$t \to p(t) \in \mathbb{R}^n\,, \quad p'(t) \neq 0\,, \quad t \in [a,b]\,,$$

سره

$$\int_C f = \int_a^b f(p(t))|p'(t)|\,dt$$

تعريف دی اود ټاکل شوي پارامتريککونې څخه خپلواک دی.

په ځانګې توګه د $f = 1$ لپاره سرې د کږې اوږدوالی لاس ته راوړي.

په f او p هوارتيا نيونه کيدی شي ضعيفه شي، داسې چې سرې انتيګرال په يوه مناسب پولې پروسه باندې تشريح کړي.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

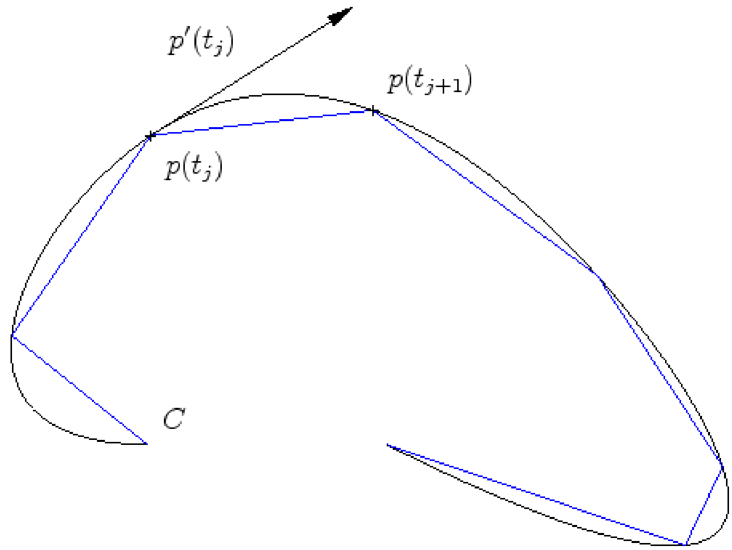
د ريمن زياتون يا جمعې په مرسته کېدی شي تعريف مدلل شي. په کږي د د ټکو پرلپسې

$$p(t_j), \quad t_{j+1} - t_j = \Delta t_j\,,$$

دا لاندې دی

$$\int_C f \approx \sum_j f(p_j)|p\,(t_{j+1}) - p\,(t_j)|\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



د منځ ارزښت جملې په بنسټ باور لري

$$p(t_{j+1}) - p(t_j) = \begin{pmatrix} p_1'(\tau_{1,j}) \\ \vdots \\ p_n'(\tau_{n,j}) \end{pmatrix} \Delta t_j$$

د $\tau_{\nu,j} \in [t_j, t_{j+1}]$ سره.د p' د برابرېدوله ناپرېکيدني له امله په $[a,b]$ لرو

$$|p(t_{j+1}) - p(t_j)| = |p'(t_j)| + r_j |\Delta t_j|$$

د $|r_j| < \varepsilon$ سره د $|\Delta t_j| < \delta$ لپاره. د ټوټه وني د نریوالي له امله ښی اړخ د

$$\int_a^b f(p(t))\,|p'(t)|\,dt$$

په لور هخيږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پورته دليل هم د پارانتی کونط خپلواوالی ښايي، ځکه چې دا د ريکمزاتون کېمنځ ته نه راځي.

په بدیلي توګه کیدی شي مختلف پارامتريککونه د يوې متحولې سبستيچيوشن له لارې يو په واړوي.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

د تابع

$$f(x,y,z) = \exp(-z)$$

انتيګرال به د C پيچي ميخ د n اړونو يا څرخونو په اوږدوالي د پارانتريک کونې

$$C: \quad p(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t \end{pmatrix}, \quad p'(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi n],$$

سره وټاکلشي.

سرې لاس ته راوړي

$$|p'(t)| = \sqrt{2}$$

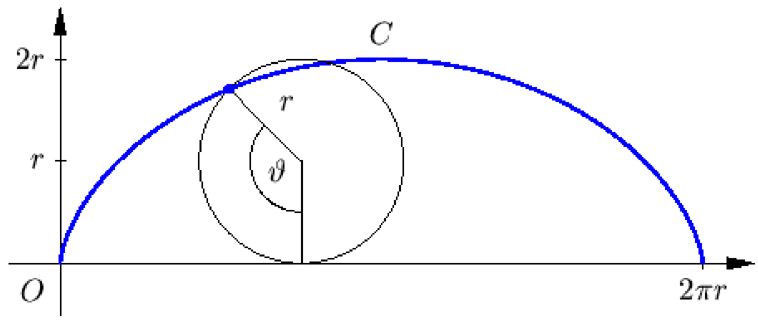
او له دې سره

$$= \int_0^{2\pi n} \exp(-t)\sqrt{2}\, dt \quad \int_C f$$

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ځیوکلوید C اوږدوالی L ټاکل کیږي، هغه چې یو ټکي د یوې دایرې په چاپیریال د وړانګې $r > 0$ سره تشریح کوي، چې په یوه کرښه ګرځي یا څرخي



د پارامتري کونبلپاره

$$C: \quad p(\vartheta) = r \begin{pmatrix} \vartheta - \sin\vartheta \\ 1 - \cos\vartheta \end{pmatrix}, \quad \vartheta \in [0, 2\pi],$$

دی

$$p'(\vartheta) = r \begin{pmatrix} 1 - \cos\vartheta \\ \sin\vartheta \end{pmatrix}, \quad |p'(t)| = r\sqrt{(1-\cos\vartheta)^2 + \sin^2\vartheta} = r\sqrt{2(1-\cos\vartheta)}\,.$$

له دې سره د ځیکلویید د اوږدوالي لپاره لاس ته راځي

$$L = \int_0^{2\pi} r\sqrt{2(1-\cos\vartheta)}\, d\vartheta$$

$$= 2r\int_0^{2\pi} \sin(\vartheta/2)\, d\vartheta = 2r\left[-2\cos(\vartheta/2)\right]_0^{2\pi} = 8r\,,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کوم سره چې کټوټوالی $1-\cos\vartheta = 2\sin^2(\vartheta/2)$ کارول شوی.

ليکونکي اپپ، هیولیګ

د کږې (منحني) انتيګرالخويونه

د کږې انتيګرال $\int_C f$ په f کې کرښيز د ی اونسبت و C ته زيا تيزيا د جمعې په ډول:

- $$\int_C \alpha f + \beta g = \alpha \int_C f + \beta \int_C g$$
- $$\int_C f\, dC = \int_{C_1} f + \int_{C_2} f$$,

که $C = C_1 \cup C_2$ او C_1 او C_2 د ځانله ټکي پورې ټکي پردي وي،

دا له پارامتري کونې څخه خپلواک دی او په ځانګړې توګه د کږې د لوريزوالي څخه هم خپواک دی.

ليکونکي: اپپ، هیولیګ

د ليندې اوږدوالی

د يوې د

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$t \mapsto p(t)\,, \qquad a \le t \le b\,,$$

له لارې پارامتري شوې کږه(منحني) C د $p(a)$ او $p(t)$ ترمنځ د کږې اوږدوالی

$$s(t) = \int_a^t |p'(\tau)|\, d\tau\,,$$

کیدی شي د کانوني کږې پارمتر په حیث وکارول شي. سړی داسې په نا مه د لیندۍ پسې پارامتري کیدنه لاس ته اروړي:

$$q(s) = p(t), \quad |q'| = 1\,.$$

د کاندید تانجنتوکتور له مخې یا پر بنسټ د دې کانوني پارامتري کونې لپاره باور لري

$$\int_C f = \int_0^L f(q(s))\, ds$$

د C د اوږدوالي L سره.

لیکونکي: اېپ، هیولیک

د بېلګې په توګه د لیندۍ $q(s)$ پسې د شپیرالي

$$C: \quad p(t) = \exp(t) \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, \quad p'(t) = \exp(t) \begin{pmatrix} \cos t - \sin t \\ \cos t + \sin t \end{pmatrix}$$

پاراه متري کونه له $t = 0$ تاکل کیږي. سړی لاس ته راوړي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$s(t) \qquad = \int_0^t |p'(\tau)|\, d\tau = \int_0^t \sqrt{2}\exp(\tau)\, d\tau = \sqrt{2}(\exp(t) - 1)$$

همداسې

$$t(s) \qquad = \ln(s/\sqrt{2} + 1)\,.$$

له دې سره لاس ته راځي

$$q(s) = (s/\sqrt{2} + 1)\begin{pmatrix} \cos(\ln(s/\sqrt{2} + 1)) \\ \sin(\ln(s/\sqrt{2} + 1)) \end{pmatrix}.$$

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

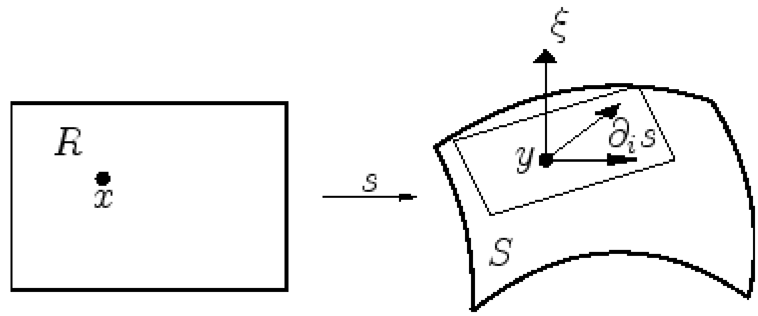
د يوې ټوټې سطحې رګولار پارامتريکونه

يو ناپرېکېدونکی مشتقموړ پارامتري کونه

$$R \ni \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} \mapsto s(x) = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

په يوه رګولار ورشو R باندې يو رګولار د سطحې ټوټه $S = s(R)$ تشريح کوي، که s د R په دننه کې اينجکتيو(په باندې) وي او وکتورونه $\partial_1 s(x), \ldots, \partial_{n-1} s(x)$ د ټولو $x \in \mathring{R}$ لپاره کرښيز خپلواک وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



دا تر مخنخښي پورې یوائځنی ټاکلی یوونوکتور(واحدوکتور) ξ ، چې د $\partial_1 s(x), \ldots, \partial_{n-1} s(x)$ څخه یا له لارې غزېدلی تانجنت سطحې ته اورتوګونال دی، سطحې نورمال بلل کیږي. دا ووکتورونو $\partial_i s(x)$ سره یوځای د $\mathbb{R}^n$ یوه بنسټ جوړوي

لیونکي: هیولیګ، موښ

د سطحې انتیګرال ***Flächenintegral***

د یوه ناپرېکیدونکي تابع f انتیګرال په یوه رګولار سطحې ټوټې د پارمتري کونې سره

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} \mapsto s(x) = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad x \in R,$$

او سطحې نورمالې ξ سره د

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int_S f\, dS = \int_R (f \circ s)\,|\det(\partial_1 s, \ldots, \partial_{n-1} s, \xi)|\, dR$$

په حيث تعريف دی او د تاکل شوي پارمتري کوني څخه خپلواک دی.

د ديترمينانت ارزښت د سطحېتوکي د سکالي شوی ضريب دی:

$$dS = |\det(\partial_1 s, \ldots, \partial_{n-1} s, \xi)|\, dR\,.$$

د $f = 1$ لپاره د ځانګړي حالت په حيث سرې د S سطحې مساحت لاس ته راوړي.

د f او s مساواتوراندنيوني کيدی شي ضعيفې شي، داسې چې ا نتيګرال په يوه مناسب پوله پروسه باندې تعريف شي. برسېره پردې کېدی شي يوه سطحه د ډېرو سطحې ټوټو يوځای شوې يا جوړه شوې وي. د سطحې انتيګرال نو په دې حالت کې د يوګونو ټوټه سطحو باندې د انتيګرالونو زياتون يا جمعه ده.

ليونکي: هيوليک، موښ

د ساده ونې له ا مله دوه پرا خيدونی يا دوه ديمنزنال حالت ترڅيرنې لاندې نيسو.

کېدی شي تعريف د ريمن-زياتون يا –جمعې په مرسته مدلل کړی شي. لکه په څېره کې چې ښوول شوي، سرې د تريانګولي کولو له لارې R اپروکسيمي کوي د درېګوډي د σ کانتي اوږدوالي سره متناسب و ته h. د ګوډتکو د توابعو له لارې دا د S يوترياناګل توليدوي د درېګوډيو τ سره:

$$\tau \ni (x_\tau, y_\tau, z_\tau) = s(u_\sigma, v_\sigma)\,.$$

د سکالي کولو ضريب د درېګوډي د سطحې تغير اپروکسيمي کوي

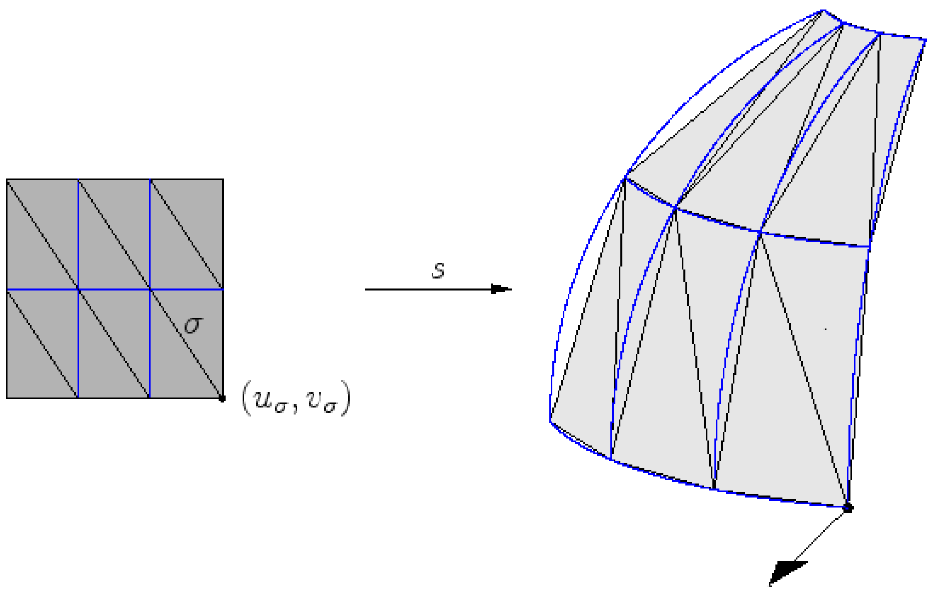
$$\text{area}(\tau) = |\det(s_u(u_\sigma, v_\sigma), s_v(u_\sigma, v_\sigma), \xi)|\, \text{area}(\sigma) + O(h^3)\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

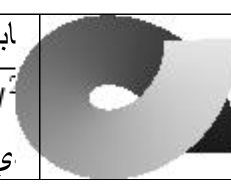
په تعقیب انتیګرال د $h \to 0$ لپاره د ریمنن – زیاتون له لارې

$$\sum_{\sigma} f(x_\tau, y_\tau, z_\tau) |\det(s_u(u_\sigma, v_\sigma), s_v(u_\sigma, v_\sigma), \xi)| \operatorname{area}(\sigma)$$

نږدې کیږي، هغه چې د $h \to 0$ لپاره د انتیګرال په لور هڅیږي



لیونکې: هیولیک، موبش

ابع $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ ې د	

$$(r,\varphi) \mapsto s(r,\varphi) = \begin{pmatrix} (1+r)\cos\varphi \\ (1+r)\sin\varphi \\ \varphi \end{pmatrix}, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi, \; -\frac{1}{2} \le r \le \frac{1}{2}$$

له لارې پارامتري شوې د راتاو پوړظ یا زینې Wendeltreppe S برخه تونو

(c) ketabton.com: The Digital Library

انتیګرال ونیول شي.

د سطحې توکو د سکالي کولو فاکتور د ټاکلو لپاره لومړی شمیرو(ځیره پورته مخ کې):

$$s_r = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad s_\varphi = \begin{pmatrix} -(1+r)\sin\varphi \\ (1+r)\cos\varphi \\ 1 \end{pmatrix}.$$

دا چې ټوټه مشتقونه اورتوګونال دي،دی

$$|\det(s_r, s_\varphi, \xi)| = |s_r|\,|s_\varphi| = \sqrt{(1+r)^2+1}.$$

له دې سره لاس ته راځي

$$\int_S f\,dS = \int_0^{2\pi}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (1+r)\sqrt{(1+r)^2+1}\,dr\,d\varphi = 2\pi\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (1+r)\sqrt{(1+r)^2+1}\,dr$$

$$= \frac{2\pi}{3}\left[\left((1+r)^2+1\right)^{\frac{3}{2}}\right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \frac{2\pi}{3}\left(\left(\frac{13}{4}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{3}{2}}\right).$$

لیونکي: هیولیک، موبش

د یوه تابع $z(x,y)$ د ګراف S د سطحېتوکی دی

$$dS = \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا د پارمتيکولو لپاره د ټوليز تعريف څخه ترلې لاس ته راځي

$$(x,y) \mapsto s(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z(x,y) \end{pmatrix},$$

ځکه چې د سطحې نورمال ξ غبرګ دی و

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ z_x \end{pmatrix}}_{s_x} \times \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ z_y \end{pmatrix}}_{s_y} = \begin{pmatrix} -z_x \\ -z_y \\ 1 \end{pmatrix}$$

ته او د $|\xi| = 1$ له امله دی

$$|\det(s_x, s_y, \xi)| = |s_x \times s_y| = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}.$$

د بیلګې په توګه د کونکرټ یا روښانه تابع $z(x,y) = x^2 + \frac{1}{2}y^2$ د ګراف لپاره دی

$$dS = \sqrt{1 + 4x^2 + y^2},$$

او سړی د $f(x,y) = xy$ لپاره لاس ته راوړي او دا په ولاړګوډیز $[0,1] \times [0,2]$ پرتې سطحې ټوټې

$$\int_S f\,dS = \int_0^1 \int_0^2 xy\sqrt{1 + 4x^2 + y^2}\,dy\,dx$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \frac{1}{3}\int_0^1 \left[x(1+4x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^2 dx = \frac{1}{3}\int_0^1 \left(x(5+4x^2)^{\frac{3}{2}} - x(1+4x^2)^{\frac{3}{2}}\right) dx$$

$$= \frac{1}{3}\left[\left(\frac{1}{20}(5+4x^2)^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{20}(1+4x^2)^{\frac{5}{2}}\right)\right]_0^1 = \frac{61}{15} - \frac{625}{6}\sqrt{5}\,.$$

ليونکي: هيوليک، موبن

د سطحې توکي په توته کواوردينات کې

د سطحې توکي د يوه د

$$\begin{pmatrix} \varphi \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \varrho\cos\varphi \\ \varrho\sin\varphi \\ z \end{pmatrix}$$

له لارې پارامتري شوی د يوې توتې پورته پوبن S د وړانګې ϱ سره دی

$$dS = \varrho\, d\varphi\, dz\,.$$

له دې سره په توتِه کواوردينات کې د يوه تابع f د ا نتيګرال لپاره باور لري

$$\int_S f\ dS = \int_{z_{\min}}^{z_{\max}} \int_0^{2\pi} f(\varrho,\varphi,z)\ \varrho\, d\varphi\, dz\,.$$

ليونکي: هيوليک، موبن

(c) ketabton.com: The Digital Library

د تانجنت وکتور د اورتوګونالیتي له امله

$$s_\varphi = \begin{pmatrix} -\varrho\sin\varphi \\ \varrho\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad s_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

د سکالا کولو کتور د سطحي توکو لپاره دی

$$|\det(s_\varphi, s_z, \xi)| = |s_\varphi|\,|s_z| = \varrho,$$

لکه چي غوښتل مو.

لیونکي: هیولیک، موښ

$$V = [0,1]^2$$

د ځلورئ یا مربع لپاره اصلي جمله داسي ده

$$\int_0^1\int_0^1 \operatorname{grad} f(x,y)\,dx\,dy = \begin{pmatrix} \int_0^1 f(1,y) - f(0,y)\,dy \\ \int_0^1 f(x,1) - f(x,0)\,dx \end{pmatrix}.$$

دا له تابع څخه ترلي لیدل کیږي:

$$n = (\pm 1, 0), (0, \pm 1)$$

د کتمتوالي کمپوننتونه د اونیواریانت(یومتحولي یا اووښوتوني) اصلي جمله په ګوته کوي.
د بیلګي په توګه لومړی کمپوننت و لاندطته ورته یا یو ارزښته یا اکویوالنتدی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f_x(x,y)\,dx - [f(x,y)]_{x=0}^{x=1} \right)\,dy = 0\,.$$

(Aus: Mathematik-Online)

په غونډاري کواوردينات کې د سطحو توکي

د سطحې د توکي د يوه د

$$\begin{pmatrix} \vartheta \\ \varphi \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} R\sin\vartheta\cos\varphi \\ R\sin\vartheta\sin\varphi \\ R\cos\vartheta \end{pmatrix}$$

له لارې لپاره پارمتري شوی فضا Sphäre د وړانګې R سره دی

$$dS = R^2 \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi\,.$$

له دېسره په غونډاري کواوردينات کې د يوه تابع f د انتيګرال لپاره باور لري

$$\int_S f\ dS = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(R,\vartheta,\varphi)\,R^2\sin\vartheta\,d\vartheta\,d\varphi\,.$$

ليونکي: هيوليک، موبش

د تانجنت وکتور د اورتوګوناليټي له امله

(c) ketabton.com: The Digital Library

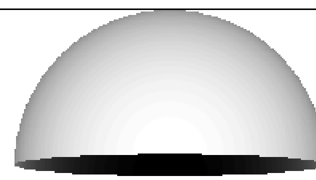
$$s_\vartheta = \begin{pmatrix} R\cos\vartheta\cos\varphi \\ R\cos\vartheta\sin\varphi \\ -R\sin\vartheta \end{pmatrix}, \qquad s_\varphi = \begin{pmatrix} -R\sin\vartheta\sin\varphi \\ R\sin\vartheta\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

د سکالیکولووکتور د سطحې توکو لپاره دی

$$|\det(s_\vartheta, s_\varphi, \xi)| = |s_\vartheta|\,|s_\varphi| = R^2\sin\vartheta\,,$$

لکه چې غوښتل مو.

لیکونکي: هیولیک، موښ

د نیمغونداري(-پیالي یا پوښ) درونډټکی S دې $H\ :\quad x^2+y^2+z^2=1\,,\quad z\geq 0\,,$ د ثابت تیکوالي سره وټاکل شي	

د سیومتري په اساس د درونټکي د x -او y - کواوردیناتونه صفر دي. د z –
کواوردینات لپاره د غونداري کواوردینات د کارولوله امله سرې لاس ته راوړي

$$s_z\,\mathrm{area}(H) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\vartheta)\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi = \pi\,,$$

او د $\mathrm{area}(H) = 2\pi$ سره لاسته راځي $s_z = \frac{1}{2}\,.$.

لیکونکي: هیولیک، موښ

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ډېرواره اتيګرال لپاره اصلي جمله

که n د يوه رګولارورشو $V \subset \mathbb{R}^m$ د باندې لور ته لوريزه يوونور يا واحدنورم وښاييد رګولار $(m-1)$ -- بعد يا پراخېدوني ژئ ∂V سره، نو د يوه ناپرېکېدونکي مشتقوړ تابع f لپاره باور لري

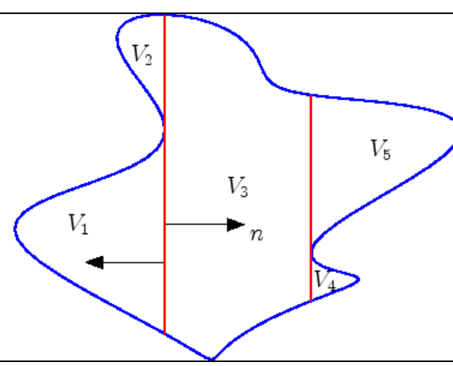
$$\int_V \partial_\nu f = \int_{\partial V} f\, n_\nu, \quad \nu = 1, \ldots, m\,.$$

که سرى دا مساوات سره يوځاى کړي، نو سرى وکتوري کتمتوالى لاس ته راوړي.

$$\int_V \operatorname{grad} f = \int_{\partial V} f\, n\,.$$

(ليکونکي:هوليک، هورنر)

د ښووني فکر د $m = 2$ لپاره ښوول کيږي.

	لومړى په پام کې نيول کيږي، چې د انتيګرال نيولو ورشو په برخه ورشوګانو وېشل کيدى شي، ځکه چې د نورم د لوريزوني له امله د ټوټه کېدنو په دننئ ژئ د ژئ انتيګرالونه لرې کيږي. له دې امله بسيا کوي، يو د انتيګرال نيوني ساده ورشو راوخلو يا تر څېړني ونيسو.

د $m = 2$ لپاره سرى V په ساده ورشوګانو ټوټه کوي په لاندې بڼه

$$V : a \le x \le b, \quad c(x) \le y \le d(x)\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بيا د ډبل انتيګرال لپاره باور لري

$$\int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} f_y(x,y)\,dy dx = \int_a^b (f(x,d(x)) - f(x,c(x))\,dx\,.$$

په ولاړو يا عمودوvertikalen ژيو د y – کمپوننت د صفر عمود دی له دې امله بايد د ژئ ا نتيګرال لپاره پورته اوکښته ژئ په پام کې ونيول شي يا وکتل شي. لاندې ژئ کيدی شي په لاندې بڼه

$$C:\ x \mapsto (x, c(x)), \quad a \le x \le b$$

پارامتريک شي او

$$n = \frac{1}{\sqrt{1+c'(x)^2}} \begin{pmatrix} c'(x) \\ -1 \end{pmatrix}.$$

دا ا چې $dC = \sqrt{1+c'(x)^2}dx$ دی، نو باور لري

$$\int_C f n_2 = \int_a^b f(x,c(x))(-1)\,dx\,.$$

په ورته توګه لاندطژئانتيګرال شمېرل کيږي، او د ارزښتونو زياتون يا جمعه د ډبل انتيګرال سره سر خوري يا همغږيز کيږي.

(ليکونکي:هوليک، هورنر)

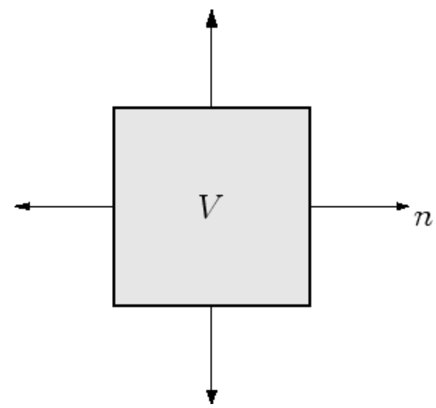
د مربع $V = [0,1]^2$ لپاره اصلي جمله ده

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int_0^1 \int_0^1 \operatorname{grad} f(x,y)\,dx\,dy = \begin{pmatrix} \int_0^1 f(1,y) - f(0,y)\,dy \\ \int_0^1 f(x,1) - f(x,0)\,dx \end{pmatrix}.$$

دا له تابع څخه تړلي لیدل کیږي:

$$n = (\pm 1, 0), (0, \pm 1)$$



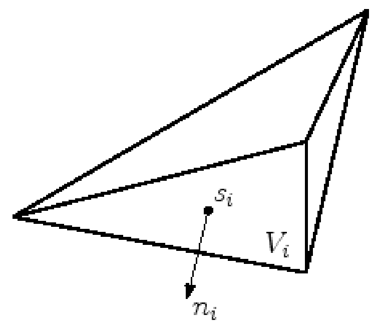
د کښتنوالي کمپوننتونه د یومتحول والي اصلي جمله ده. د بیلګې په توګه لومړی کتپوننت و لاندې ته ورته یا اکویوالنت دی

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f_x(x,y)\,dx - [f(x,y)]_{x=0}^{x=1} \right) dy = 0\,.$$

(Aus: Mathematik-Online)

(c) ketabton.com: The Digital Library

$V \subseteq \mathbb{R}^m$ دې يو سيمپلکس وي، چې د $(m-1)$ -بعدي سيمپلکسونو $V_i\,,\ i=1,\ldots,m+1$ له لارې را بنديږي او n_i د باندې لور ته لوريز يوونورمال يا واحدنورمال نومول کيږي او s_i د V_i درونټکی وي.



د يوه ثابت تابع $f(x)=b$ لپاره د اصلي جملېلاسته راځي

$$0 = \sum_i \mathrm{vol}_{m-1}(V_i) n_i\,.$$

د يوه کربنيز تابع $f(x)=a^{\mathrm{t}}x$ لپاره باور لري

$$\mathrm{vol}_m(V)\,a = \sum_i \mathrm{vol}_{m-1}(V_i)(a^{\mathrm{t}}s_i)n_i\,.$$

دلته وکارول شوی،چې د يوه سيمپلکس S لپاره د دروندټکي s سره مربعيز فرمول Quadraturformel د کربنزې تابع f لپاره ټيک ده

(Aus: Mathematik-Online)

(c) ketabton.com: The Digital Library

د يوه غونډاري لپاره په يوه غونډاريکواوردينات کې د وړانګې R اوپاس –يا پورته يا پوښ سطحې يا هوارې سره باور لري

$$dV = r^2 \sin\vartheta \, dr \, d\vartheta \, d\varphi \,, \quad dS = R^2 \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi$$

او $n = (x, y, z)^t / R$ يوونو رمال دی. د دې پسې يا دېلاسته راوړنې پسې اصلي جمله ده

$$\int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \operatorname{grad} f(r, \vartheta, \varphi) \, r^2 \sin\vartheta d\varphi \, d\vartheta \, dr =$$

$$= R^2 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f(R, \vartheta, \varphi) \begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi \\ \cos\vartheta \end{pmatrix} \sin\vartheta \, d\varphi \, d\vartheta \,.$$

د بېلګې په د روښانه تابع لپاره سړی لاس ته راوړي

$$f(x, y, z) = xz^2 = R^3 \sin\vartheta \cos\varphi \cos^2\vartheta$$

د ګرادينت او fn لپاره

$$\operatorname{grad} f(x, y, z) = \begin{pmatrix} z^2 \\ 0 \\ 2xz \end{pmatrix} ,$$

$$f(x, y, z) n = \frac{1}{R} \begin{pmatrix} x^2 z^2 \\ xyz^2 \\ xz^3 \end{pmatrix} \,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د سیومتري په بنسټ اخرودواړو لیکوباندې انتیګرال صفر راکوي.د لومړئ لیکې لپاره په غونډاري کواوردینات کې صفر لاس ته راځي

$$\int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^4 \cos^2\vartheta\ \sin\vartheta\, d\varphi\, d\vartheta\, dr\ =$$

$$= R^2 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} R^3 \sin^3\vartheta \cos^2\vartheta \cos^2\varphi\, d\varphi\, d\vartheta$$

$$= \frac{4}{15}\pi R^5 .$$

(Aus: Mathematik-Online)

Partielle Integration ***نوټه انتیګرال***

د ځوی توابعو f او g لپاره د کومپاکت وړونکي سره باور لري

$$\int_{\mathbb{R}^m} g\, \partial^\alpha f = (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^m} f\, \partial^\alpha g .$$

(لیکونکي:هولیګ، هورنر)

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا چې f او g کومپاکت وړونکي لري، يوه کوادر V شتونلري،داسې چې د V په ژئ او هم دباندې له V دواړه توابع ورک شي.

د اصلي جملې له مخې د ډېرواره انتيګرالونې لپاره با ور لري

$$\int\limits_{\mathbb{R}^m} \partial_\nu (fg) = \int\limits_V \partial_\nu (fg) = \int\limits_{\partial V} (fg) n_\nu = 0$$

د يوه په خوښه ټوټه مشتق ∂_ν لپاره.له بلې خوا د ضرب قانون له مخې دی

$$\partial_\nu (fg) = g\partial_\nu f + f\partial_\nu g$$

او له دې سره

$$\int\limits_{\mathbb{R}^m} g\partial_\nu f + \int\limits_{\mathbb{R}^m} f\partial_\nu g = 0\,, \quad \text{bzw.} \quad \int\limits_{\mathbb{R}^m} g\partial_\nu f = -\int\limits_{\mathbb{R}^m} f\partial_\nu g\,.$$

د ∂^α په تجزيه په يوګونو ټوټه مشتقونو له لارې او پرلپسې د مساواتو استعمال سره سرې دا ورکړ شوی فرمول لاس ته راوړي، ځکه چې په هوارو يا خويو توابعو کې د ټوټه مشتق سره بدلېدلی شي.

(ليکونکي:هوليګ، هورنر)

د ګرين فرمولونه ***Greensche Formeln***

که n د باندې لور ته لوريز د يوه رګولارورشو $V \subseteq \mathbb{R}^m$ يوونورمال يا واحدنورمال وښايي د رګولارژئ سطحې $S = \partial V$ سره، نود دوه ناپرېکېدونکي مشتقوړ توابعو f او g لپاره باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int_S f\,\frac{\partial g}{\partial n} = \int_V (\mathrm{grad}\, f)^{\mathrm{t}}\ \mathrm{grad}\, g + f\,\Delta g\,.$$

چېرته چې $\frac{\partial g}{\partial n}$ د دباندې لورته مشتق ښايي نورمال دی.

په ځانګړي د $f=1$ لپاره لرو

$$\int_S \frac{\partial g}{\partial n} = \int_V \Delta g\,.$$

يوسيومتري واريانت په ګرين نومول شوې کټمټوالی دی

$$\int_S f\frac{\partial g}{\partial n} - g\frac{\partial f}{\partial n} = \int_V f\Delta g - g\Delta f\,.$$

د دواړو ګرين فرمولونو نه کېدی شي دخوی والي وړاندنيونه ضعيفه شي، داسې چې په مناسب پوله ارزښت تعريف شي.

(ليکونکي:هوليک، هورنر)

د ډېرواره اينتګرال اصلي جملې پسې دی

$$\int_S f\,\partial_\nu g\, n_\nu = \int_V \partial_\nu\,(f\,\partial_\nu g)\ ,\quad \nu = 1,\cdots,m\,.$$

د ضرب قانون سره په ښي اړخ انتيګرال لپاره لاس ته راځي

$$(\partial_\nu f)(\partial_\nu g) + f(\partial_\nu\partial_\nu g)$$

په $\nu = 1,\ldots,n$ باندې زياتون يا جمعې له دې سره د ګرين لومړی فرمول راکوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم فرمول د f او g یدلون له لارې لاس ته راځي. سرې د

$$\int_S f\frac{\partial g}{\partial n} \quad \text{او} \quad \int_S g\frac{\partial f}{\partial n}$$

لپاره کتمتوالی کموي یا سره تفریقوي او په پام کې نیول کیږي، چې د ډکي- یا حجم اینتګرالونو د ګرادینت ضرب له منځه وړي یا پورته کوي؟

(لیکونکي:هولیګ، هورنر)

د فبروری ۲۴ د۲۰۱۱ ز ک.

د لوی څښتن په برکت او مهربانۍ(ژباړی)

هر پیل شوی کار چې پای کیږي، نو ناروغه زړه ورسره، هغه د شاعرانو خبره، باغ باغ کیږي.(ژباړی)

د ډاکتر ماخان شینواري چاپ شوې لیکنې:

<u>1988 Vienna (Austria):</u>

<u>لومړی:</u>

H.K. Kaiser , M. Shinwari : Aproximation compact pological algebra : general algebra 6 ; Page 117 – 122 contributions to

(c) ketabton.com: The Digital Library

1987 Vienna (Austria):

دویم:

Diss . Interpolation und Aproximation durch Polynime in Universalen Algebren . Uni. Wien

Dissertation Interpolation and Aproximation by Polynome in universal Algebras, at the University of Vienna/Austria

لاندې د شمیرپوهنې پښتوټول کتابونه په المان کې د ،، افغانستان کلتوري ودې ټولنه،،له خوا چاپ شوي دي

2000 Bonn (Germany):

دریم: د شمیرپوهنې ستر کتاب : د شمیرپوهنې برسیره د انجنري، فزیک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زده کوونکو لپاره (دا کتاب په ۹۰۰ مخونو کې چاپ او دا نوې لیکنه به یې ځنو ځایونو غزېدلې او ځنې ځایونه ترې لرې شوي دي)

2003 Bonn (Germany):

څلورم: ځمککچپوهنه(هندسه) ، په سلو، زرو کې شمیرنه، د ګټې – او کټې د کتې شمیرنه ، د اختمالوالي شمېرنه کتاب د ښوونځي ټولې اړتیاوې پوره کوي

2003 Bonn (Germany):

پنځم: الجبرونه (د الجبر بنسټونه دي)

2003 Bonn (Germany):

شپږم: د شمیرپوهنې انګرېزي – پښتو ډکشنري.

2003 Bonn (Germany):

اووم: د شمیرپوهنې الماني ـ پښتو- او پښتو الماني ډکشنري

(c) ketabton.com: The Digital Library

Mathematical dictionary German/ Pashto and Pashto/German

2003 Bonn (Germany):

اتم: دفرنځیال برابرون (دا کتاب په دې ځانګه کې یو پیل دی، ساده لیکل شوی)

Differential equation Translation; An Introduction

Bonn (Germany): 2003

نهم: د شمیر پوهنې فرمولونو ټولګه

Mathematical Formulas

2003 Bonn (Germany):

لسم: شمیرپوهنه له عربي په پښتو

1997 Bonn (Germany):

یوولسم: د افغانستان په هکله سپینې خبرې: په المان کې

،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خو

.یادونه: له ۲۰۰۰ کال دمخه ډاکتر ماخان شینواري د ،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خوا درې ساسي مجلې هم را وستلې.

د ډاکتر ماخان ،،میرې،، شینواري لیکنې او ژباړې چې په چاپیدو یې پیل کیږي

2012 Bonn; Germany; Kabul Afghanistan

ژباړې:

لاندې د برینکمن لیکنې چې له پرینکمن ن ج ځخه ژباړل شوي دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرلیک

۱ - شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره لومړی ټوک

۲ – شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره دویم ټوک

۳ – شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره دریم ټوک

۴ - د احتمالوالي شمیرنه د ښوونځي لپاره

۵ – احصایه یا ستاتیستیک دښوونځي لپاره

لاندې کتابونه د شتوتګارت د پوهنتون د استادانو د لکچرونو څخه چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپاره شوي را ژباړل شوي.

۶ – انالیزی ۱

۷ – انالیزې ۲

۸ – کرښیز الجبر

۹ - د شمیرپوهنې بنسټونه

۱۰ - د فرمولونو ټولګه

۱۱ – فنکشنل انالیز

۱۲ – وکتور شمیرنه

نورې ژباړې

۱۳ – له www./grundstudium.info/linearealgebra څخه:کرښیز الجبر

۱۴ – Georg Gutenbrunner ګڼونپوهنه یا د اعدادو تیوري

(c) ketabton.com: The Digital Library

زما لیکنې

Bonn (Germany):

۱۵ - د شمیرپوهنې ستر کتاب دویم چاپ د پوره تغیراتو سره : دا کتاب د شمیرپوهنې برخې برسیره د

انجنري، فزیک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زدهکوونکو لپاره پوره ګټور دی. په

کتاب کې د اړتیا سره زیاتونه او کونه راغلې

۱۶ - ځمککچپوهنه (هندسه) دویم چاپ د پوره تغیراتو سره

۱۷ – الجبر بنسټونه دویم چاپ له تغیراتو سره

۱۸ - ډېرۍ پوهنه یا سټ تیوري

۱۹ – د شمیرپوهنې سم اند (منطق ریاضي)

۲۰ - د یو څو شمیرپوهانو ژوندلیک

۲۱ – د شمیر پوهنې ګډې وډې لیکنې

۲۲- داهم ژباړه ده، خو لیکونکی یې متآسفانه راڅخه نابلد شوی: د مشتق او انتیګرال شمیرنو ته تمرینونه او اوبیونې یا حلونه یې

۲۳ – د شمیرپوهنې انګریزې پښتو او عربي + درې ډکشنري

۲۴ – د شمیرپوهنې پښتو انګرېزي ډکشنري

۲۵ – د شمیرپوهنې پښتو ډکشنري د شمیرپوهنیزو وییونو په پښتو روښانه ونه

۲۶ - د زړه له کومې(دا هغه لیکنې دي، چې ځنې یې په نړیول جالونو کې خپرې شوي دي.)

۲۷ – د افغانستان په هکله سپینې خبرې، چې وبه غزیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

نوري ليکنې، چې په ژباړه یې پیل شوی، خو لا پوره نه دي

– د شتوتکارت پوهنتون لکچرنوټونو څخه ، چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپریږي:

د ګروپونو تیوري

- د ښوونځي لپاره فزیک د برینکمن لیکنه

له پنځم ټولګي څخه تر اووم ټولګي پورې ژباړل شوی (دا چې زما دویم مسلک فزیک دی، دا لیکنې ژباړم. دا هم د دې لیکوال یوه ډېره ښه لیکنه ده، چې -د شمیرپوهنې په څیر- دلته هم زیات تمرینونه د حل یا اوبیونې سره په کې راغلي او ماته زیات ګټور برېښي)

Get more e-books from www.ketabton.com
Ketabton.com: The Digital Library