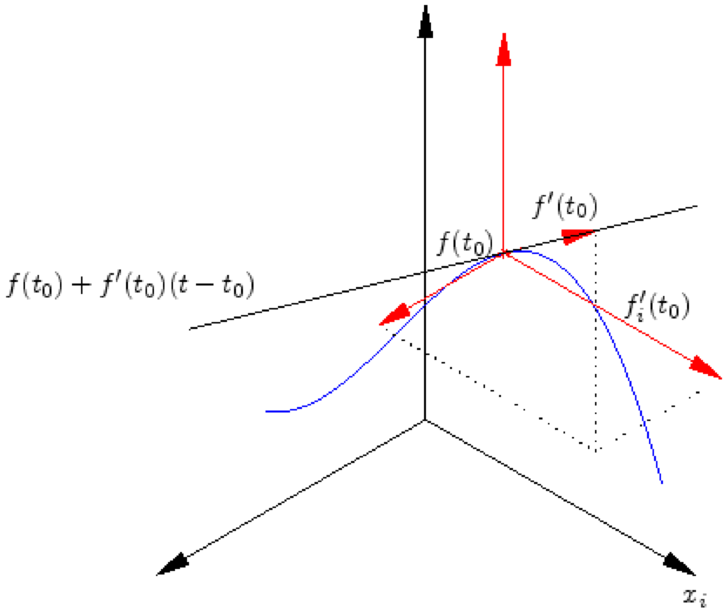
د پوهنتون لپاره لکچرنوټونه

د ډېرو متحولو یا اووښتونو انالیز

یا انالیز دوه



لیکونکي: د شتوتګارت پوهنتون د شمیرپوهنې یا ریاضي څانګه

د مات انلاین څخه یا د شتوتګارت پوهنتو ن ن ج څخه

Ketabton.com

ژباړن: ډاکټر ملاخان (میرزي) شینواری

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لوی څښتن په نامه

په دې هيله، چې په دې ليکنو او ژباړو به مې زموږ د بې وزلې او له پوهې پاتې ملت - په ما د پوهنې په لار د لګښت - لپاره د پوهنې په لور داسې لږ ونډه اخستې وي.

د کتاب نوم: د ډېرو متحولو يا اووښتونو اناليزې

ډ اکتر ماخان ميرړي شينواری

Smakhan1946@gmail.com

د چاپ لړي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ژباړي مننه

د دې لیکنې مل نورې خپرونې د شتوتګارت د پوهنتون د شمیرپوهنې د څانګې د لکچرونو لړۍ چاپ باندې پیل کیږي

د هر څه له مخه د هغو لیکونکو پروفیسرانو څخه زیاته مننه، چې د لیکنو څخه یې زما د ژباړې لپاره تفاهم لري. ماته د دوي د لیکنو د ژباړې په هیڅ ډول مادي ګټه نه شته او دا کار مې یوازې په یوه د پوهنې توانمندې ، مګر وروسته پاتې ژبې ویونکي ولس ته وړاندې دی، دا دې د دې پروفیسرانو له خوا په پوهنیزه اړخ کې- زموږ په دې اړخ کې هم مرستې ته اړ ولس- سره مرسته وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرليک

د ژباړي سريزه
ټول...
اساسي کليمې ۱
ډېرۍ يا سټ او پولې ته تلنه ۱
چاپيريال ۱
د وکتورونو پولې ته تلنه ۱
د وکتورونو لپار د کوشي پولې ته تلنه ۲
وازه ډېرۍ يا سټ ۳
رابنده ډېرۍ(سټ) ۴
د يوې ډېرۍ ژئ يا غاړه ۴
کومپاکته ډېرۍ ۵
--- تابع
د ډېرو متحولو توابع ۵
ډېر متحولي پولينومونه ۶
د ډېرمتحولو توابعو ناپرېکيدنه ۱۰
په کومپاکتو ډېريو د ناپرېکيدونکو توابعو افراطي ارزښتونه ۱۲
د وکتورنورمونو برابرارزښتوالی ۱۳
د ليپشيځ Lipschitz ناپرېکيدنه ۱۴
کونتراهيري کيدونکې ځيرونې يا توابع ۱۶
د باناښ Banachځای په په ځای ټکې جمله ۱۷
---- مشتق يا رابيليدنه
----ټوټه يا پارشل مشتق ۲۰
ټوټه مشتق
ډيرواړه ټوټه مشتقونه ۲۲
د ډېرومتحولو پولينومونو ټوټه مشتق ۲۴
د يوې تابع ټوټه مشتق بد ليدنوالی
توتال يا تمام مشتق ۳۰
کرښيز اپروکسيميشن ۳۶
د مولتيواريت توابعو د غلطيو وده يا تکثير ۳۷
د ډېرمتحولو توابعو د ناټيکاوي زېږنده يا وده
تانجنت ۳۸
تانجنتي سطحه ۴۱
--- د مشتق قوانين
د دېرو متحولو زنځيري قا نون ۴۵

(c) ketabton.com: The Digital Library

د یوي تابع لوریز مشتق ۵۳
د خورا زوړندې کیوتنې متودونه ۵۵
په ځټ – یا معکوس توابع ۵۹
ایمپلیڅیت توابع ۶۷
د ویواني ګړه ۶۹
د نه کرښیزو توابعو د مخته بیوني ۷۵
========= مساوات سیستمونه
--- د تیلور Taylor وده ۶۷
د هیسي Hesse ماتریکس ۸۱
د نیوتن Newton تلنلار ۸۵
--- افراطي ارزښتونه ۸۸
کریتیکال ټکی
د ډېرمتحولو توابعو افراطیت ۹۴
د لاګرانژ ضریبونه Lagrange-Multiplikatoren ۱۰۲
د کرښیز مساوات شرایطو سره مربعیز مینیمالونه(را کمونه) ۱۱۰
د کون-تکر Kuhn-Tucker شرایط ۱۱۶
ډېر بعدیز یا –پراخیدنی اینتګرال
--- ډېر بعدیز- یا –پراخیدونی اینتګرال
سیمپلکس Simplex ۱۲۵
غبرګ اپیپید Parallelepiped ۱۲۶
د اینتګرال ورشو ۱۲۶
د هاوزدورف Hausdorff واټن ۱۲۸
ډېر بعدیز یا –پراخیدنی اینتګرال ۱۲۹
د فوبیني Fubini جمله ۱۳۲
د بعدی یا –پراخیدوني واحدکرۍ(یوونغوندوسکي) ډکې یا حجم ۱۳۸

(c) ketabton.com: The Digital Library

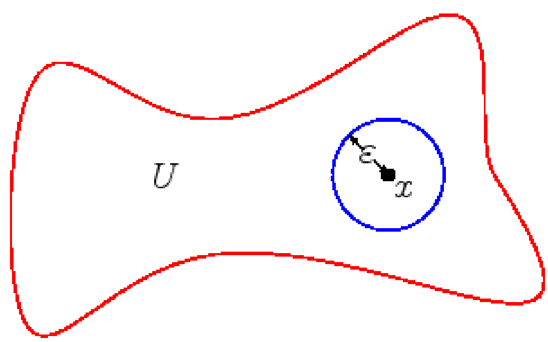
--- د ډېربعديزو اينګرالونو ترانسفورميشن ۱۴۱
د ډېربعديزو اينتګرالونو ترانسفورميشن
په توته ييز(استونه ډوله) کواوردينات کې د حجم توکي(ډکي-) ۱۵۰
په ګري (غونډوسکي-) کواوردينات کې د حجم(ډکي) توکي. ۱۵۲
کتله او دروندټکی(د سقل مرکز) ۱۵۷
د (بار) وړنې مومنت moment of inertia Trägheitsmoment عزم العطالة
---د منحنيو(کږو)- او سطحو اينتګرال
د منحنيو اينتګرال ۱۶۱
د منحنيو اينتګرال خويونه ۱۶۶
د ليندې اوږدوالی ۱۶۶
د سطحې يوې ټوټې منظم بارامتريک کونه. ۱۶۸
د سطحې اينتګرال ۱۶۹
په توته کواوردينات کې د سطحې توکي ۱۷۴
په غونډوسکي يا کرې کواوردينات کې د سطحې توکي ۱۷۶
---د ډېرواره اينتګرالوني بنسټجمله يا اصلي جمله ۱۷۸
د ډېرواره اينتګرالوني بنسټجمله يا اصلي جمله
ټوټه اينتګرال ۱۸۳
د ګرين Greensche فرمولونه ۱۸۴

(c) ketabton.com: The Digital Library

بنسټيزې ياساسي کليمې
ډېرئ يا سټ او پولې ته تلنه

چاپيريال

دا د يوه ټکي $x \in \mathbb{R}^n$ د ε-چاپيريال په حيث دا لاندې غونډوسکه(غونډارى،توپ که غواړئ: کره) نوموو
$B_\varepsilon(x) = \{y : |y - x| < \varepsilon\}$.



په تولېزه توګه د x چاپيريال U يوه ډېرئ ده، چې يو چاپيريال ε خوندي لري.

ليکونکي: هوليګ او پفايل

د وکتورونوکونورګنت يا پولې ته تلنه

د وکتورونو $x_k \in \mathbb{R}^n$ يوه پرلپسې د يوه وکتور x خواته کنورګ کيږي يا ځي،
$\lim x_k = x$ همداسې, $x_k \to x$
که د ټولو $\varepsilon > 0$ لپاره يو اينډکس k_ε شتون ولري

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $|x_k - x| < \varepsilon$ سره د $k > k_\varepsilon.$ لپاره.

په بل ډول هر ε -چاپیریال $B_\varepsilon(x) = \{y : \ |y - x| < \varepsilon\}$

ټولې ترپای ډېرو پرلپسې(ترادف) توکو پورې خوندي لري.

د (x_k) کونورګنځ ته ورته د ټولو کمپوننتونو کونوی رګنځ دی، د اپه دې معنا چې کیدی شي یو پراخیدونې یا یوبعدې کونورګنځ کریتیریوم ورته راکښل - یا راونیول شي.

(لیکونکي : بوسلر، هولیګ، شترایت)

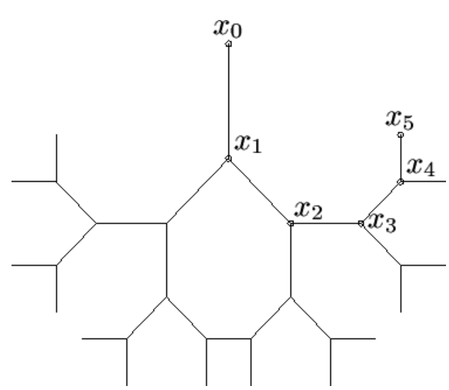
د وکتورونوو لپاره د کوشي**Cauchy** کریتیریوم یا قضیه

یوه د وکتورونوو پرلپسي $x_k \in \mathbb{R}^n$ ټیک هلته پولې ته څي(کونورګنت ده) ، که دا کوشي **پرلپسې وي.**

داپه دې معنا چې د ټولو $\varepsilon > 0$ لپاره یو k_ε شتون لري د $|x_\ell - x_k| < \varepsilon$ سره د $\ell, k > k_\varepsilon.$ لپاره .

د ا له دې سره په برابره یا همغه معنادی، داسې چې د (x_k) د کمپوننتونو هر یو یې یوه کوشي پرلپسي ده.
(لیکونکي: هیولیګ، شترایت)

د کوشي کریتیریوم د روښانه ونې لپاره یوه بینار(دوه ګونې) ونه راوړو.



(c) ketabton.com: The Digital Library

په یوه ټوټه(کرښه) هره یوه په ضریب $\lambda\ (0<\lambda<1)$ سره لنډیږي او په 45° - کونج اینبول شوی بله ټوټه باندې ورزیاتیږي. په داسې یوه جوړه شوې دوه یزه ونه د داسې سوکڅیسیو په ښاخونو بیل شوي ټکو هره پرلپسې پولې x_k ته ځي یا کونورګیر کیږي. د تعریف سره سم باور لري د دوه یوپه بل پسې پرلپسیو (تصاعدونو) (x_k) لپاره باور لري: $|x_{k+1}-x_k| = c\lambda^k$.

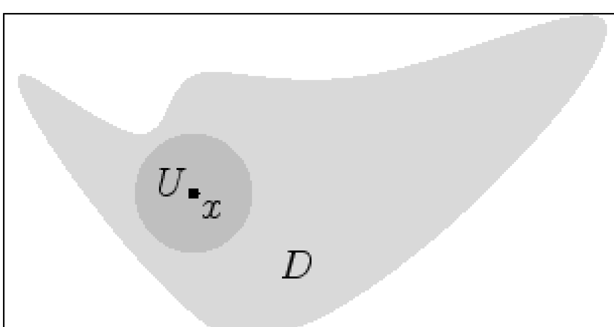
دا راکوي، چې داپرلپسې د کوشي پرلپسې ده، څکه چې:

$$
\begin{aligned}
|x_\ell - x_k| &= |x_\ell - x_{\ell-1} + x_{\ell-1} - \ldots + \ldots - x_{k+1} + x_{k+1} - x_k| \\
& |x_\ell - x_{\ell-1}| + |x_{\ell-1} - x_{\ell-2}| + \ldots + |x_{k+2} - x_{k+1}| + |x_{k+1} - x_k| \\
&\leq c\lambda^{\ell-1} + c\lambda^{\ell-2} + \ldots + c\lambda^k \\
&= c\lambda^k \frac{1-\lambda^{\ell-k}}{1-\lambda} \leq c'\lambda^k \\
&\leq \varepsilon
\end{aligned}
$$

د $\ell > k > k_\varepsilon$ لپاره

(لیکونکي: هیولیک، شترایت)

وازه ډیرئ یا -سټ **Offene Menge**



یوه ډیرئ $D \subseteq \mathbb{R}^n$ وازه بلل کیږي، که چیرې د ډیرئ هر ټکی $x \in D$ یو چاپیریال ولري، چې دا ټول په D کې پروت وي، په ځانګړې توګه $\mathbb{R}^n$ او تشډیرئ $\emptyset$ وازې دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د يوې په خوښه ډېرۍ D لپاره $D \supseteq \mathring{D}$ د D دننه بنايي، دا په دې معنا چې د ټول ټکو ډېرۍ د يوه چاپيريال سره په D کې پرته ده.

(ليکونکي: هيوليک، پفايف)

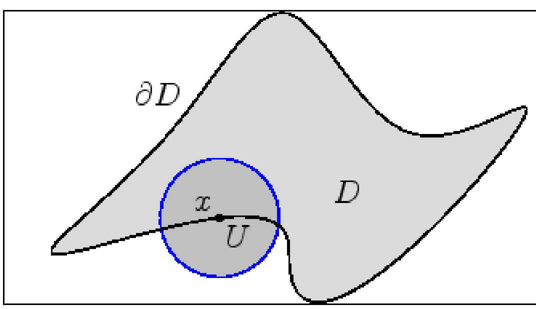
رابنده ډېرۍ **Abgeschlossene Mengen**

يوه ډېرۍ $D \subseteq \mathbb{R}^n$ رابنده يا بنده بلل کيږي، که ديوې د ټکو $x_k \in D$ پولې ته تلونې پرلپسې په D کې پرته وي. په ځانګړې توګه $\mathbb{R}^n$ او تشډېرۍ $\emptyset$ بندې دي.

د په خوښه ډېرۍ D لپاره دا $\overline{D} \supseteq D$ د D رابندونه بولو، داپه دې معنا چې د پرلپسيو د ټولو پوله ارزښتونه په D کې.

(ليکونکي: هيوليک، پفايف)

د يوې ډېرۍ ژۍ يا غاړه

د يوې ډېرۍ $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ژۍ ∂D له ټولو ټکو x جوړه ده، کومه چې چاپيريال U نه لري، دا يا ټوله په D کې پرته ده او يا د D په کمپليمنت (پوره کيدونکي) کې پرته ده.	

د بديل په توګه کيد شي چې ژۍ د رابند کمون يا تفريق او دننه،

$$\partial D = \overline{D} \setminus \mathring{D}$$

په حيث تعريف شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

(لیکونکي هیولیګ او پفایف)

پوره کيدونکې ډېرئ Kompakte Menge

يوه تړلي او محدوده ډېرئ $D \subseteq \mathbb{R}^n$ کمپليمنت يا پوره کيدونکې بلل کيږي.
لاندې کرکتريستيکا دې ته ورته يا اکويوالنځ دي:

- هره پرلپسې په D کې يوه کونورګنځ برخه ډېرئ لري د پولې سره په D کې.
- د D هر د وازې ډېرئ د سره پټوني يا پوښوني سره يوه پاى پوښونه يا پټونه لري.

(لیکونکي: هیولیګ او پفایف)

مولتيواريانت – يا د ډېرو توابع Multivariate Funktionen

يو ريل يا حقيقی مولتی واريانت(د ډيرو متحولو - يا اوښتونوتوابع هم بلل کيږي)

$$f:\mathbb{R}^n \supseteq D \to \mathbb{R}^m, \quad x \mapsto f(x),$$

د تعريف ډېرئ D يو وکتور $x=(x_1,\dots,x_n)^{\mathrm{t}}$ په يوه وکتور $f(x)=f(x_1,\dots,x_n)=(f_1(x),\dots,f_m(x))^{\mathrm{t}}$ تنظيموي. پس f د n ريل حقيقي متحولو $x_1,\dots,x_n$ په واک کې دی.

د تابعورشو يا خيره ورشو د m بعد يا پراخيدوني له مخې سرې د سکالارو $(m=1)$ او وکتور ارزښتيزو $(m>1)$ توابعو ترمنځ توپير کوي. که $n=1$ (او f ناپريکيدونکې وي)، نو f يوه پارامتري شوې کره يا منحني بلل کيږي.

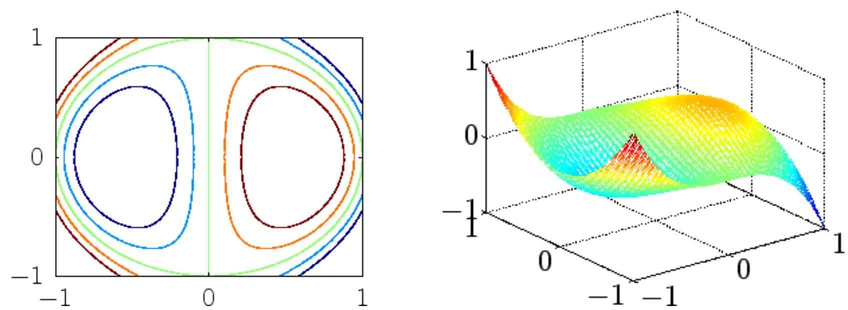
د $m,n\leq 3$ لپاره زيات وخت ايندکسونه نه کارول کيږي او واريابلې له x,y او z سره په نخښه کوو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د بيلګي په توګه

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} f(x,y) \\ g(x,y) \end{pmatrix}.$$

د $m = n = 2$ په حالت کې



لکه دا شکل چې روښانه کوي، Visualisierung ته دګراف سکالار توابع

$$\{(x, f(x)) : \; x \in D\}$$

او د نيوتن سطحي

$$\{x \in D : \; f(x) = c\}$$

وکارول شي.

پولينومونه د ډېرو متحولو سره :

يو پولينوم p په n اوښتونو $x_1, \dots, x_n$ کې د مونومونو کرښيز کمبينيشن دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$p(x) = \sum_\alpha a_\alpha x^\alpha, \quad x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} \ ,$$

د $\alpha_i \in \mathbb{N}_0$ سره، هريو د جمعې ورشو له مخې د لاندو ترمنځ توپير کوي:

د ټولو درجو $\le m$: $\sum \alpha = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n \le m$

د ماکسيمالو درجو $\le m$: $\max \alpha = \max_i \alpha_i \le m$

يو د k -درجې پولينوم هوموجين بلل کيږي، که کرښيزترکيب فقط مونوم د $\sum \alpha = k$ سره خوندي ولري. د داسې هوموجينو مونومونو ګنون يا تعداد $\binom{k+n-1}{n-1}$ په دی.

تعقيب يې د پولينوم پراخيدونی يا بعد د توتال درجې $\le k$ سره برابر

$$\binom{k+n}{n} = \sum_{k=0}^{m} \binom{k+n-1}{n-1} .$$

دی

د n -متحولو پولينومونو بعد د $\le m$ ماکسيمال درجې $(m+1)^n$ دی.

د بيواريات يا دوه اووښتونو يا متحولو پولينومونو $(n=2)$ لپاره د هومو جينن مونومونو له ليست څخه

$$\begin{array}{lr} k=0: & 1 \\ k=1: & x,\, y \\ k=2: & x^2,\, xy,\, y^2 \\ k=3: & x^3,\, x^2y,\, y^2x,\, y^3 \\ \ldots\ , & \end{array}$$

کتل کيږي چې د k درجې لپاره د دوی تعداد

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$k+1=\binom{k+2-1}{2-1}$$

دی

د دوه متحولو پولینومونو د توتال درجې $\leq m$ د بعد لپاره لرو

$$1+2+\cdots+(m+1)=\frac{(m+2)(m+1)}{2}=\binom{m+2}{2}.$$

په ځرګنده توګه $(k+1)^2$ مونومونه شتون لري

$$x^i y^j, \quad i,j \leq m,$$

د $\leq k$ ماکسیمال درجې

په تولیزه توګه (د n -متحولو پولینومونو) لپاره کیدی شي یو اکسپوننت

$$(\alpha_1,\ldots,\alpha_n), \sum \alpha = m$$

د یوه کره مونوتونې پرلپسی یا ترادف سره

$$\begin{aligned}\beta_1 &= \alpha_1+1\\ \beta_2 &= \alpha_1+\alpha_2+2\\ \ldots\\ \beta_{n-1} &= \alpha_1+\cdots+\alpha_{n-1}+(n-1)\end{aligned}$$

له $\{1,\ldots,m+n-1\}$ څخه و پیژندل شي:

$$\alpha_i=\beta_i-\beta_{i-1}-1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $\beta_0 = 0,\ \beta_n = m+n$ سره. نو $\binom{m+n-1}{n-1}$ امکانات شتون لري

د ټول $\leq k$ درجو n–وارایت مونومونه د $(n+1)$ ـمتحولو د درجو k هوموجین مونومونه پ هګوته کوي:

$$x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n} \leftrightarrow x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n} x_{n+1}^{k-\sum \alpha_i}$$

(اخرنی اکسپوننت ټینګ ځای په ځای دی). نو بعد دی

$$\binom{k+(n+1)-1}{(n+1)-1}.$$

د مکسیمال $\leq k$ درجو د پولینوم بعد په ورته توګه بیواریات حالت ته شمیري.

یو د توتال درجو ≤ 3 پولینوم په 2 متحولو کی لاندې ټولیزه بڼه لري

$$p(x,y) =$$

$$a_{3,0}x^3 + a_{2,1}x^2y + a_{1,2}xy^2 + a_{0,3}y^3$$

$$+a_{2,0}x^2 + a_{1,1}xy + a_{0,2}y^2$$

$$+a_{1,0}x + a_{0,1}y + a_{0,0}\,,$$

او

$$4x^3 - 2xy^2 + 5y^3$$

د 3 درجو هوموجین بیواریات پولینوم لپار یوه بیلګه ده.

دیوه ≤ 2 درجو پولینومم ټولیزه بڼه په درې متحولو کی ده:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$p(x,y,z) =$$

$$a_{2,0,0}x^2 + a_{0,2,0}y^2 + a_{0,0,2}z^2$$

$$+a_{1,1,0}xy + a_{1,0,1}xz + a_{0,1,1}yz$$

$$+a_{1,0,0}x + a_{0,1,0}y + a_{0,0,1}z + a_{0,0,0} \,.$$

د ډېرو اووښتونو يا متحولو توابعوو ناپريکيدنه يا متماديت

يو تابع f د تعريف ورشو D په يوه ټکي x کې ناپريکيدونکي دی، که

$$D \ni x_k \to x_{k\to\inf} \implies \lim_{k\to\inf} f(x_k) = f(x) \,.$$

که دا د ټولو $x \in D$ لپاره باور ولري ، نو f په ټول D باندې نا پونکی دی

که د تعريف ورشو په ژی ∂D د ټکي x لپاره پوله ارزښت شتونولري، نو کيدی شي f ناپريکيد ونکی مخ ته يو ول شي.

د ډېرې متحولو د ترنو لپاره همغه قوانين باور لري،لکه د يوې متحولي تابع لپاره.

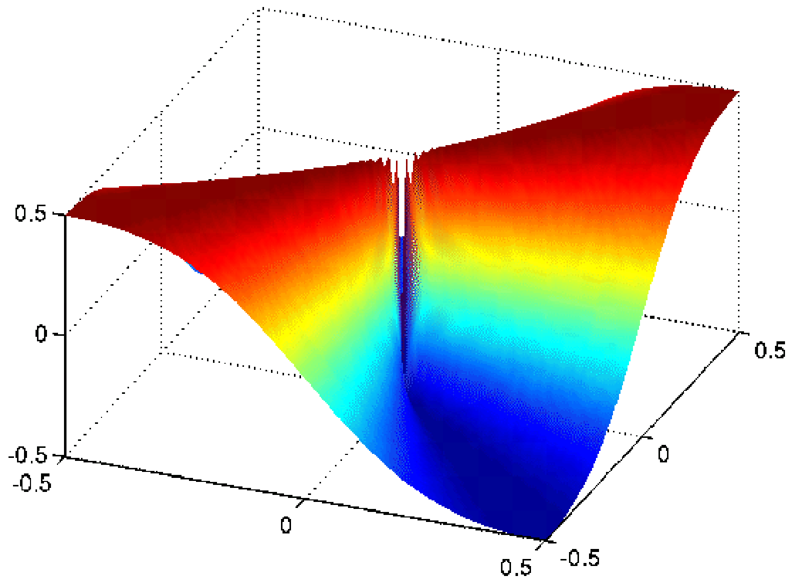
(ليکونکي: هيوليک او شترايت)

يو ناثابت بيواريات تابع $f(\varphi)$ ، چې فقط له کونج او نه د وړانګې $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ په واک کې يا تابع ده،په صفرټکي کې پريکيدونکي ده. د دې لپاره تيپيکې بيلګه

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2 + y^2} = \cos\varphi \sin\varphi$$

راړل کيږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



که په صفرټکي کې يوه کرښه وټاکو،

$$g:\varphi = c \ , \text{همداسې} \ g: \ y = mx$$

نو په کرښه تابع- يا خطي تابع ا رزښت ثابت دی،

$$f(x,mx) = \frac{mx^2}{x^2+(mx)^2} = \frac{m}{1+m^2} = c_m$$

همداسې

$$f(\varphi) = \cos\varphi \sin\varphi = c_\varphi \ ,$$

$$f(x,mx) = \frac{mx^2}{x^2+(mx)^2} = \frac{m}{1+m^2} = c_m$$

bzw. $$f(\varphi) = \cos\varphi \sin\varphi = c_\varphi \ ,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پرته له صفرټکي چې هلته تابع ارزښت نه دی تعریف.
پرته له صفرټکي د ټول ټکو لپاره باور لري

$$D \ni (x_k, y_k) \to (x, y) \implies$$

$$\implies f(x_k, y_k) = \frac{x_k y_k}{x_k^2 + y_k^2} \to \frac{xy}{x^2 + y^2} = f(x, y) .$$

په صفرټکي کې تابع بریکیدونکي مخ ته ورلوړ ده. که د $x \to 0$ لپاره په مختلو کرښو باندې پوله ارزښت په پام کې ونیسو، نو لاس ته راړل کیږي

$$\lim_{x\to 0} f(x, mx) = \lim_{x\to 0} \frac{m}{1+m^2} = \frac{m}{1+m^2} ,$$

دا په دې معنا چې پوله ارزښتپه هر سرچینه یزې کرښې مختلف دی. له دې سره یوله ارزښت

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$$

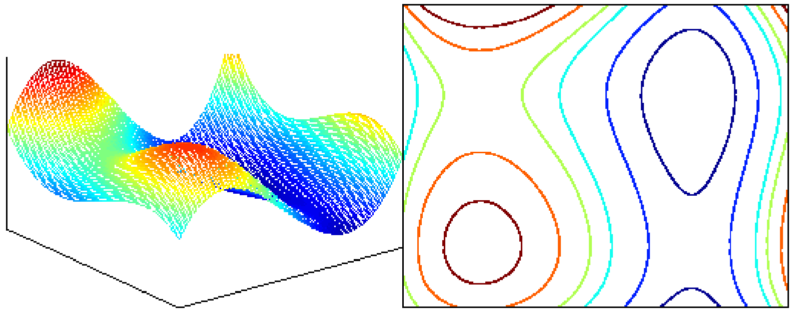
شتون نه لري.

(لیکونکي: بوسلر،هیولیگ، شترایت)

په کومپاکت ډېریو د ناپریکیدونکو-یا متمادي توابعو افراطي ارزښتونه

یو ناپریکیدونکی تابع په یوه کومپاکته ډېرئ یو مینیموم او هم یو ماکسیموم لري.
په کینه څیره شوي تابع باندي مینیموم اړ ماکسیموم په نخښه شوي دي. په نیو وکرښه ا فراطي ځایونه د رابندو منحنیو له لارې پیژندلکیږي، هغه چې دا ټکي رابندوي یا (په بر کې) رانیسي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



ليکونکي: هيوليک، شترايت

وکتورنورمونو برابروالی

هر وکتورنورم $\|\;\|$ په $\mathbb{R}^n$ کې دا وکليدنورم $|\;|$ ته اکويوالنت يا برابرارزښته دی، دا په دې معنا چې شابتې c_i شتون لري د $c_1\|x\| \leq |x| \leq c_2\|x\|$ سره د ټولو $x \in \mathbb{R}^n$ لپاره.

(ليکونکی: هيوليک،پفايف)

نابرابرونونه يا نا مساوات سکالارانواريانت دي، دا په دې معنا چې د بدلون $x \mapsto \lambda x$ سره تغير نه خوري. دا بسيا کې، چې وکتورونه x په يوون- يا واحدسفيري يا فضا

$$S:\quad |x| = 1$$

کې تر څېړنې لاندې ونيسو. په S باندې هر نورم د 0 سره نا برابر دی، لهدې امله تابع

$$x \mapsto \frac{\|x\|}{|x|}$$

ناپريکيدونکې دی،ځکه چې S کومپک دی، نو يو مينيموم c_1 شتون لري او يو ماکسيموم c_2.

(c) ketabton.com: The Digital Library

(ليکونکي: هيوليگ او پفايف)

ليپشيخ-ناپريکيدنه *Lipschitz-Stetigkeit*

يو تابع C_2 په يوې ډيرئ D ليپشيخ-ناپريکيدونکی Lipschitz-stetig بللکيږي، که يوه ليپشيخ- ثابته c شتونولري، داسي چې

$$||f(x)-f(y)|| \leq c||x-y||$$

د ټولو $x, y \in D$ لپاره.

که f ناپريکيدونکی اومشتقوړ او D کونکاو يا وتلی يا محدب؟؟وي، نو د ليپشيخ-ثابته د جاکوبي-ماکسيموم Jacobi-Matrix سره اټکل کيدی شي،:

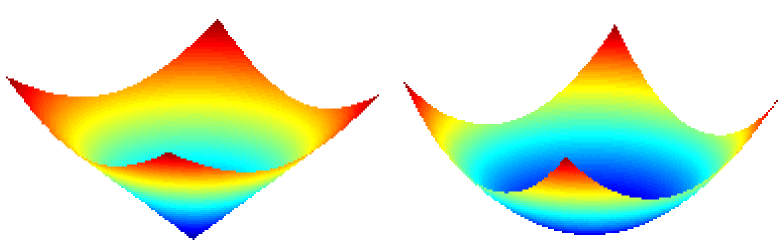
$$c \leq \sup_{x \in D} |f'(x)| .$$

(ليکوني: اپپ، هيوليگ)

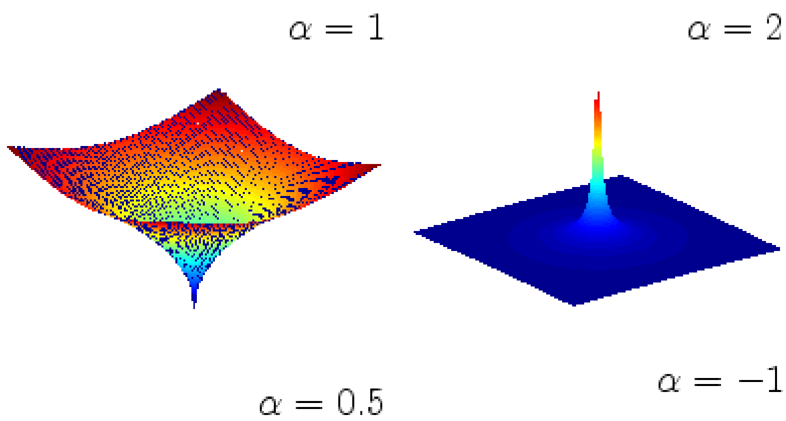
د تابع

$$f(x) = r^\alpha, \quad r = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2},$$

لپاره ډير حالتونه سره توپير کيږي.



(c) ketabton.com: The Digital Library



(i) د $\alpha = 1$ لپاره f ګلوبال لیپشیخ ناپریکیدونکی دی. د درېګوډیپا مثلث د نامساوات څخه لاس ته راځي

$$|r - r'| = ||x| - |x'|| \le |x - x'|\,,$$

دا په دې معنا چې $c = 1$ د $D = \mathbb{R}^n$ لپاره لیپشیخ-ثابته ده.

(ii) د $\alpha > 1$ لپاره f په محدوده ډېرۍ D باندې لیپشیخ-ناپرېکیدونکی دی. د منځ ارزښت جمېپه بنسټ

$$|r^\alpha - (r')^\alpha| = \alpha s^{\alpha-1}|r - r'|$$

د s سره د r او r' ترمنځ،پهتعقیب يي

$$c = \max_{x\in D} \alpha |x|^{\alpha-1}$$

ټاکل کیدی شي.

(iii) د $0 < \alpha < 1$ لپاره f ناپریکیدونکی دی مګر نه لیپشیخ- ناپریکیدونکی د 0 په یوه چاپریال کې. شرایط

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$|r^\alpha - 0^\alpha| \le c|r - 0|$$

د $r \to 0$ لپاره پوره نه دي

(iv) د $\alpha < 0$ لپاره f په 0 کې پریکیدونکیدی،ځکه چې د $r \to 0$ لپاره r^α د ∞ په لور هڅیږي.

(لیکونکي: بوسلر،هیولیګ،شترایت)

کونترا هیري فنکشن یا -- تابعKontrahierende Abbildung

یو تابع

$$g : D \to D$$

کونترا هیرکیدونکی(کیکاږل کیدونکی) دی، که په یوه مناسب نورم

$$\|g(x) - g(y)\| \le c\,\|x - y\|, \quad x, y \in D\,,$$

کې د $c < 1$ سره باورولري. د دپسره c داسې په نامه د g کونتراکشنثابته ده،دا کړی شید یوې کونوکسډیرئ لپاره د جاکوبي ماتریکس په مرسته د

$$\sup_{x \in D} ||g(x)||$$

اټکل کولای شي.

(لیکونکي: بوسلر،هیولیږ)

د یوه مثبت دیفینیت ماتریکس A لپاره

$$g(x) = x - \omega(Ax - b)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

کونتراهیر دی،، که پارامتر ω پوره کوچنی وټاکل شي. باور لري

$$g(x) - g(y) = Q(x - y), \quad Q = E - \omega A\,,$$

دکوم سره چې د Q ا یګن ارزښت ϱ_i د A له ا یګنارزښت λ_i څخه شمیرل کیدی شي:

$$\varrho_i = 1 - \omega\lambda_i\,.$$

که څا په څای کړو $\omega = 1/\max_i \lambda_i$ ، نوټول ایګن ارزښتونهپه $[0,1)$ کې پراته دي، او د اویکلیدینورم استعمال سره

$c = \|Q\| = 1 - (\min_i \lambda_i)/(\max_i \lambda_i) < 1$ دی.

د بانښ ځاي په ځای ټکیجمله ***Banachscher Fixpunktsatz***

که g یو کونتراهیري تابع یا څیرونه وي، چی دا یوه ناتشه، رابنده ډیرئ $D \subset \mathbb{R}^n$ په خپل ځان ځیره کړي یعنې د ځان تابع وي دا په دې معنا چې باور لري:

- $D = \overline{D}$
- $x \in D \Rightarrow g(x) \in D$
- $\|g(x) - g(y)\| \le c\|x - y\| \quad \forall x, y \in D$

د $c < 1$ سره، نو g یوه یواځنی ټاکلي ځای په ځای ټکی $x_* = g(x_*) \in D$ لري،له $x_0 \in D$ څخه په وتنه یا تلنه کیدی شي x_* دایتراشن پرلپسي

$$x_0,\, x_1 = g(x_0),\, x_2 = g(x_1),\, \ldots$$

اپروکسیمیرشي. د ناتیکاوي لپاره باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\|x_* - x_k\| \le \frac{c^k}{1-c}\,\|x_1 - x_0\|$$

دا په دې معنا چې ایتراشن پرلپسې د هر پیلارزښت لپاره کرښيز پولې ته ځي.

د ځای په ځای ټکوچمل په پوره متریکي فضاو کې تولیز باور لري. دا چې د نورمترانسليشن اینواریانځ او هوموجینیتی ته اړتیا نه شته، سرې کړی شي $\|x-y\|$ د یوه تولیز واټن تابع $d(x,y)$ سره بدل کړي.

(لیکونکې: ا پپ،بوسلر،هیولیګ)

دا چې $g(D) \subseteq D$ ، د ټولو $\ell > 0$ لپاره $x_\ell \in D$ باور لري، او د کونتراکشن شرطو ځخه لاس ته راځي

$$\|x_{\ell+1} - x_\ell\| = \|g(x_\ell) - g(x_{\ell-1})\| \le c\,\|x_\ell - x_{\ell-1}\|.$$

ددې نامساوات ایترایشن څخه لاس ته راځي

$$\|x_{\ell+1} - x_\ell\| \le c^\ell\,\|x_1 - x_0\|.$$

د $j > \ell$ لپاره د دریګوډي نامساوات څخه لاسته راځي

$$\begin{aligned} \|x_j - x_\ell\| &\le \|x_j - x_{j-1}\| + \|x_{j-1} - x_{j-2}\| + \cdots + \|x_{\ell+1} - x_\ell\| \\ &\le (c^{j-1} + \cdots + c^\ell)\|x_1 - x_0\| = \tfrac{c^j - c^\ell}{c-1}\,\|x_1 - x_0\| \\ &\le \tfrac{c^\ell}{1-c}\,\|x_1 - x_0\|, \end{aligned}$$

او له دې سره د کوشي-کونورګنت پرلپسې x_ℓ یوه پوله ارزښت x_* ته. که له نامساوات

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\|g(x_*) - x_*\| \leq \|g(x_*) - g(x_j)\| + \|g(x_j) - x_*\| \leq$$
$$\leq c\,\|x_* - x_j\| + \|x_{j+1} - x_*\|$$

څخه پوله ارزښت $j \to \infty$ ته سرى لاړ شي، نو ګوري، چې x_* د g يو ځاى په ځاى ټکى دى. دا هم يواځنى بيکس ټکيدى. که ونيسو، چې يوو بل ټکى $\tilde{x}_* \neq x_*$ هم شتون لري، نو د کونتراديکشن شرليطوڅخه برعکس راکوي.

$$\|\tilde{x}_* - x_*\| = \|g(\tilde{x}_*) - g(x_*)\| \leq c\|\tilde{x}_* - x_*\|\,.$$

د ناټيکاوي لپاره اټکل د $\|x_j - x_\ell\|$ لپاره د نامساوات څخه لاس ته راځي دا هم وپولې $j \to \infty$ته د ټک له لارې.

(ليکونکي: بوسلې، هيوليګ)

د نمونيې يا ټيپيکي استعمال لپاره يولړمتظرر کرښيزسيستم تر څيړنې لاندې نيسو:

$$Ax + \varepsilon f(x) = b$$

د يوه مربع ماتريکس A سره. د پوره کوجني ε د کرښيزېبرخې تعريفورشو لپاره، او سرى کړى شي دا سيستم د ايترايشن

$$x \leftarrow g(x) = A^{-1}(b - \varepsilon f(x))$$

سره حل کړي. دلته نيول کيږي، چې A انورتيرکيدونکيدى او تابع f ليپشيڅ – ناپريکيدونکېده د ثابتې c_f سره.

د بانښ فيکسټکي چملېBanachschen Fixpunktsatzes د نيوني يا فرضيي د ازمايښت لپاره سرى ټاکي

$$D = \{y :\ \|y - p\| \leq r\}, \quad p = A^{-1}b\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د په خوښه $x \in D$ لپاره دی

$$\|g(x) - p\| = \varepsilon\|A^{-1}f(x)\| \le \varepsilon\|A^{-1}\| \max_{y\in D} \|f(y)\|\,.$$

ټاکو

$$\varepsilon \le \frac{r}{\|A^{-1}\| \max_{y\in D} \|f(y)\|}\,,$$

نو $g(x) \in D$ دی ،دا په د معنا چی g په D ځېره کوي یا مپینګکوي

د کنترکشنثابتيKontraktionskonstante c لپاره اټکلونه

$$\|g(x) - g(y)\| = \varepsilon\|A^{-1}(f(x) - f(y)\| \le \underbrace{\varepsilon\|A^{-1}\|c_f}_{c} \|x - y\|$$

له f څخه د لیپپشیخ-ثا بتې c_f سره

$$\varepsilon < \frac{1}{\|A^{-1}\|c_f}$$

لاس ته راځي $c < 1$ ، که

که و غوښتل شي. دواړه شرایط به روښانه توګه د پوره کوچنی ε لپاره پوره ردي

(لیکونکي: بوسلي،هیلیګ)

ټوټه مشتق Partielle Ableitungen

د یوېتابع f مشتق $\partial_i f$ په i –مه واریلابلي متحولي پسي یونیوارینتي ابع
تابع مشتق دید هغه سره چې واریبلي x_i ، $x_i \mapsto f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)\,,$
د ثابتیول ې په څېر ترڅېړني کیږي. $j \neq i$

(c) ketabton.com: The Digital Library

داسې هم لیکو

$$\partial_i f = f_{x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} \,.$$

د یونیواریات مشتق د تعریع سره سم باور لري

$$\partial_i f(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\ldots, x_i + h, \ldots) - f(\ldots, x_i, \ldots)}{h} \,.$$

پارشل مشتعونه د سکالارو او همد وکتورارزښتیزږ حقیقی توابعو لپاره تعریع دي. په پارشلمشفقنیونه کې په دواړو حالتونوږ کې د تابع تیوپ یا ډول ساتلی پاتې کیږي. د تعریف سره سم باور لري

$$\partial_i \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_i f_1 \\ \vdots \\ \partial_i f_n \end{pmatrix} \,.$$

پارشل مشتق د کمپوننتونو سره سیمولتان یل همغهوختیز جوړیږي

د توتال یا بیخي انتیګرال همداسې کرښیز اپرو کسسیماشن لپاره د وکتوربڼه یا تیوپ د معنا دډکدی. دا ورسره بلد کنونشن یا قرار و وکتورونو داد د متحولې x او هم تابع f لپاره کارول کیږي

(لیکونکي:هیلیک، شترایت)

د سکالار تابع لپاره توته مشفق هم سکالار دی.

د بیلګی په توګه د

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 x_2 + 5x_2 x_3$$

لپاره مشتق لاسته راځي

$$\begin{aligned} \partial_1 f &= 2x_1 x_2 \,, \\ \partial_2 f &= x_1^2 + 5x_3 \,, \\ \partial_3 f &= 5x_2 \,. \end{aligned}$$

د يوه وکتور ارزښتيز تابع لپاره ،لکه د بيلګي په توګه

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, x_3) \\ f_2(x_1, x_2, x_3) \\ f_3(x_1, x_2, x_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2^3 x_3 \\ x_1 x_2 x_3 \\ x_1 + x_3 \end{pmatrix}$$

د کمپوننتونونو تعداد پارشل- يا توټه مشتق سره ساتلی پاتي کيږي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\partial_1 f = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1 \\ \partial_1 f_2 \\ \partial_1 f_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 x_3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\partial_2 f = \begin{pmatrix} \partial_2 f_1 \\ \partial_2 f_2 \\ \partial_2 f_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_2^2 x_3 \\ x_1 x_3 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\partial_3 f = \begin{pmatrix} \partial_3 f_1 \\ \partial_3 f_2 \\ \partial_3 f_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2^3 \\ x_1 x_2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(ليکونکي: بوسلي،شترايت)

ډېرواره ټوټه مشتق

دوه واره (يو په بل پسې نيول شوی) ټوټه مشتقونه د

$$\partial_i \partial_j f = f_{x_j x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

سره په نخښه کيږي،

په ورته د توګه د جګو مشتقونو لپاره تګه ليکو

$$\partial_i \partial_j \partial_k \ldots f$$

په بديلي توګه کيدی شي مولتی ايندکس نوتيشن

$$\partial^\alpha f = \partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_n^{\alpha_n} f, \quad \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n),$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

وکارول شي،چېرته چي ايندکس $\alpha_i \in \mathbb{N}_0$ د توېته مشتقونو د توېته مشتقونو تعداد په i - مه متحولی پسې په نخښه کيږي

زياتون يا جمعه $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ توېته مشتق بلل کيږي

(ليکونکي: هيوليک، شترايت)

تابع

$$f(x) = \exp(\mathrm{i}x^{\mathrm{t}}y) = \exp(\mathrm{i}(x_1y_1 + \ldots + x_ny_n))$$

مسطحه څپه بلل کيږي اود نورو تر څنګ د فوري-اناليوزې Fourier-Analysis کي رول يو غوره رول لوبوي

مشتقونه ساده شميرل کيدی شي. دځنځيري قانون سره لاس ته راځي

$$= \partial_k f(x) \quad \mathrm{i}y_k \exp(\mathrm{i}x^{\mathrm{t}}y)$$

$$\partial_\ell \partial_k f(x) = \quad (\mathrm{i}y_\ell)(\mathrm{i}y_k) \exp(\mathrm{i}x^{\mathrm{t}}y)$$

او له دې سره

$$\partial^\alpha f(x) = (\mathrm{i}y)^\alpha \exp(\mathrm{i}x^{\mathrm{t}}y) = \mathrm{i}^{|\alpha|} y^\alpha \exp(\mathrm{i}x^{\mathrm{t}}y)$$

د $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ او $y^\alpha = y_1^{\alpha_1} \cdots y_n^{\alpha_n}$ سره .

د بيلګېپه توګه د $n = 2$ لپاره دی

$$\partial^{(3,4)} f = \underbrace{\mathrm{i}^7}_{-\mathrm{i}} y_1^3 y_2^4 \exp(\mathrm{i}(x_1y_1 + x_2y_2)) .$$

(ليکونکي: بوسلي، هيوليک،شترايت)

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مولتيواريانتو(ډېرواره اووښتونو) پولينومونو ټوټه مشتق

د يوه مونوم ټوټه مشتق

$$\partial^\alpha x^\beta = \partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_n^{\alpha_n} \left(x_1^{\beta_1} \dots x_n^{\beta_n} \right)$$

تيک هلته له صفر سره نابرابر دی، چې

ويي او په دې حالت کې دی

$$cx^{\beta-\alpha}, \quad c = \prod_i \beta_i(\beta_i - 1) \cdots (\beta_i - \alpha_i + 1) \,.$$

په توګه

دی $\partial^\alpha x^\beta|_{x=0} = \alpha! \delta_{\alpha\beta}$ د $\alpha! = \prod_k \alpha_k!$ سره.

د ټولو پولينومونو $p(x) = \sum_\beta x^\beta$ لپاره باور لري

$$\partial^\alpha p = 0, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n = k \,,$$

نو p توتالدرجه $< k$ لري.

(ليکونکي: هيوليک، شترايت)

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ښووني فکريپيه دې ځانګړي حالت $n=2$ او $|\alpha|=3$ وښوول شي. پسې د د مشتق له ورکېدو لاسته ارځي

$$p_{xxx},\, p_{xxy},\, p_{xyy},\, p_{yyy}, \quad p(x,y)=\sum_{j,k} c_{j,k} x^j y^k\,,$$

دا چې p يود توتال درجې ≤ 2 پولينوم دی، دا په د ې معنا چې ټول ضريبونه $c_{j,k},\quad j+k>2\,,$ ورکيږي.

$$c_{j,k},\quad j+k>2\,,$$

که يو اړونده ترم (د بېلګې په توګه $c_{2,1}x^2y$)صفرنه واي، نو لړتر لړه يو د دريمې درجې يو ټوټه مشتقشته(د بيلګې په توګه p_{xxy})، کوم چط دا ترم نه انوليannulliert کوي.

په ټوليزه توګه هم همداسې دلايل راوړلکيږ ی.

د هر مولتي ايندکس $|\beta|\geq k$ لپاره γ شتون لريد $|\gamma|=k,\quad \partial^\gamma x^\beta \neq 0\,.$ سره.

د بېلګې په توګه سړی کړی شي $n=3$ ، $k=4$ اود $\beta=(1,2,3)$ لپاره

$$\gamma=(1,2,1),\ (1,1,2),\ (1,0,3),\ (0,2,2),\ (0,1,3)$$

وټاکي.

(ليکونکي: هيوليګ، شترايت)

(c) ketabton.com: The Digital Library

د یوه تابع د ټوټه مشتق بدلوړوالی

که د یوه تابع f لومړی اودویم ټوټه مشتق ناپرېکيدونکي وي،نوباورلري

$$\partial_i \partial_j f = \partial_j \partial_i f \, .$$

د پوره کېدونکي خويتابع لپاره د ټوټه توابعو مشتق لړئ پرلپسي بدلوړ دي.

په ځانګړې توګه دا د مولتی ايندکسـليکنډول ته ټيکاوی ورکوي.

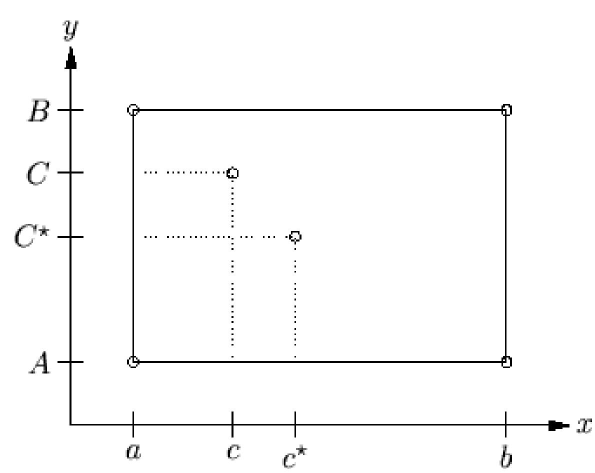
دا چې ټوټه مشتق سره متحولي $x_k, \; k \neq i,j$ ځاي په ځای پاتې کيږي ، بسيا کوي،

چې يو بيواريات تابع $f(x,y)$ په بکاور واچوو يا تر څېړنې لاندې ونيسو.

په يوه واړه ولاړکوډي د (x,y) لپاره د

$$g(x) = f(x,B) - f(x,A), \quad h(y) = f(b,y) - f(a,y) \, ,$$

سره مشفقونه په y - همداسې x -لورو په نخښه کړو.



په کونجونو کي دفرنځ

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$Q = f(b,B) - f(b,A) - f(a,B) + f(a,A)$$

په دوه مختلف ډولونود منځجملې په مرسسته شمیرل کیږي:

$$Q = [f(b,B) - f(b,A)] - [f(a,B) - f(a,A)]$$

$$= g(b) - g(a)$$

$$= (b-a)g_x(c)$$

$$= (b-a)[f_x(c,B) - f_x(c,A)]$$

$$= (b-a)(B-A)f_{xy}(c,C)$$

د $a \le c \le b$ او $A \le C \le B$ او لاندې سره

Q=	$[f(b,B) - f(a,B)] - [f(b,A) - f(a,A)]$
Q=	$h(B) - h(A)$
Q=	$(B-A)h_y(C^\star)$
Q=	$(B-A)[f_y(b,C^\star) - f_y(a,C^\star)]$
Q=	$(B-A)(b-a)f_{yx}(c^\star,C^\star)$

د $a \le c^\star \le b$ او $A \le C^\star \le B$ سره.له دې سره لاست اراځي

$$f_{xy}(c,C) = f_{yx}(c^\star,C^\star)\,,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

او ولاړکوډیز په واړه کونه سره($b \to a,\ B \to A$) ، د دویمګډوله کشتق د ناپرېکیدنې په بنسټ لرو

$$f_{xy}(a,A) = f_{yx}(a,A)\,.$$

او د لاړګوډي په کوجنیوالي،($b \to a,\ B \to A$) د دویم ګډوله مشتق د ناپریکیدني په بنسټ لاسته راځي

$$f_{xy}(a,A) = f_{yx}(a,A)\,.$$

لیکونکي: بوسلې، هیولیګ، شترایت

فنکشن یا تابع یا بلواک

$$f(x,y) = \frac{x^3y - xy^3}{x^2+y^2}$$

د $(x,y) \neq (0,0)$ لپاره په خوښه ناپرېکیدونکي اومشتقوړ دی

لومړ دوه مشقونه

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= \frac{3x^2y - y^3}{x^2+y^2} - 2x\frac{x^3y - xy^3}{(x^2+y^2)^2}, \\ f_y(x,y) &= \frac{x^3 - 3xy^2}{x^2+y^2} - 2y\frac{x^3y - xy^3}{(x^2+y^2)^2}, \end{aligned}$$

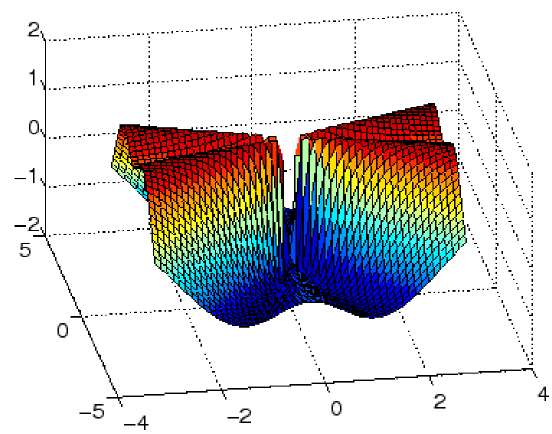
په ټول $\mathbb{R}^2$ ناپریکیدونکي دي، ځکه چې د

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$|f_x(x,y)|, |f_y(x,y)| \leq (3+1+2(1+1))\sqrt{x^2+y^2}$$

له امله f_x او f_y په ټول په پیل کئ د 0 ارزښتونو سره ناپریکیدونکي مخ ته ورلوړدي

ګډوله مشتق (f_{xy} $= f_{yx}$ په $\mathbb{R}^2\backslash(0,0)$)دی مګر په صفرتکي کط پریکیدونکی،
کوم چې له مشتق څخهه لید ل کیږي



بدلون ناشونی دی:

$$\begin{aligned} f_{xy}(0,0) &= \frac{d}{dy}\left(f_x(0,y)\right)_{|y=0} = \frac{d}{dy}\left(\frac{-y^3}{y^2} - 0\right)_{|y=0} = -1, \\ f_{yx}(0,0) &= \frac{d}{dx}\left(f_y(x,0)\right)_{|x=0} = \frac{d}{dx}\left(\frac{x^3}{x^2} - 0\right)_{|x=0} = 1\,. \end{aligned}$$

مختلف پوله ارزښتونه لاسته راځي، په دې اړوند چې په کومه لړئ-پرلپسي توګه مشتقونه نیول شوي دي

لیکونکي: هیولیګ، شترایت

(c) ketabton.com: The Digital Library

توتال مشتقونه *Totale Ableitung*

يو حقيقی تابع $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ په يوه ټکي x کې مشتقوړ دی، که د $|h| \to 0$ لپاره.توتال مشتق د ټوټه مشتق جاکوبي -ماتريکس دی:

$$f' = \mathrm{J}\,f = \frac{\partial(f_1,\ldots,f_n)}{\partial(x_1,\ldots,x_n)} = (\partial_1 f,\ldots,\partial_n f) = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1 & \ldots & \partial_n f_1 \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_1 f_m & \ldots & \partial_n f_m \end{pmatrix}.$$

د يوه سکالارتابع($m=1$) لپاره مشتق ګرادينت $f' = (\mathrm{grad}\ f)^{\mathrm{t}}\ ,$ بللکيږي او د يوې کږې($n=1$) پارامتري کولو لپارهدتانجنت وکتور. د

توتال مشتق $f'(x)$ شتون لپاره پوره کيدونکي شرطونه د يوه په x چاپيرياِل کې د ټوټه مشتقونو نه پرېکيدنه ده.

د توتال مشتق $f'(x)$ د شتون لپاره پوره کيدنکي شرطونه په يوه چاپېرياِل x کې د ټوټه مشتق ناپرېکدنه ده.

د توتال مشتق سره کيدی شي د يوه تابع په ارګومنتو يا تعريفورشوکې $(x \to x + \Delta x)$ د کوچنيورمونو تغيراتو سره اپرکسيمه $(x \to x + \Delta x)$ شي. د نظم $o(|\Delta x|)$ سره ترمونو څخه صرف نظرکيدنه په نږدې توګه باور لري

$$\Delta f(x) = f(x+\Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x\,.$$

د دې دلپاره چې د پولط پرسه $|\Delta x| \to 0$ رامنځ ته کړو، ليکو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n$$

داسې په نامه دفرنشال df او dx_i ،کوم چې د کرښیزو اپروکسیمیشن تغیرات تشریح کوي

dx_i چې وښایو چې توتالمشتق ټوټه مشتق خوندي لري، د ساده کونېپه بنسټ یو تابع د

دوه متحولو $f(x,y)$ سره رواړو. په دې حالت کې $h=(s,t)^t$ یووکتور دی د دوه

کمپوننتونو سره. په د حالت کې $h=(s,t)^t$ یوووکتور دی د وه کمپوونتونو سره. که

بیلګي په توګه $t=0$ ځاي په ځای کړو نو لرو

$$\begin{aligned} f(x+s,y) &= f(x,y)+f'(x,y)\,(s,0)^t + o(|(s,0)|) \\ &= f(x,y)+(\mathrm{J}\,f)_1\,s + o(|s|)\,, \end{aligned}$$

چیرته چې $(\mathrm{J}\,f)_1$ د $\mathrm{J}\,f$ لومړی درځیا مته ښایي له s او پوله ارزښت $s\to 0$ د

جوړېدوسره، د $f(x,y)$ ټوټه مشتق راکوی دپسې x :

$$(\mathrm{J}\,f)_1 = \lim_{s\to 0}\frac{f(x+s,y)-f(x,y)}{s} = \partial_1 f(x,y)\,.$$

د ټوټه مشتق نا پریکیدنه مقشتوړوالی ایمپلیځي کوي، دا په دې معنا چې د توتالمشتق شتونوال.

$$f' = (\partial_1 f, \ldots, \partial_n f)\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دې لپاره چې د ټوټه مشتق د ناپرېکيدنې څخه د توتال مشتق شتون لاس ته راوړو لومړی یوسکالار تابع $f(x,y)$ تر څېړنې نیسو. د منځ ارزښت جملې له مخې د $h=(s,t)$ لپاره باور لري

$$f(x+s,y+t) = \quad f(x+s,y) - f(x,y) + f(x+s,y+t)$$

$$-f(x+s,y) + f(x,y)$$

$$= \quad s\, f_x(\xi,y) + t\, f_y(x+s,\eta) + f(x,y)\,,$$

د $\xi \in (x,x+s)$ ، $\eta \in (y,y+t)$ سره. د وړاندنيونې(فرضیی) په بنسټ ټوټه مشتقونه f_x او f_y ناپرېکيدونکي دي، دا په دې معنا چې

$$f_x(\xi,y) \to f_x(x,y)\,, \quad f_y(x+s,\eta) \to f_y(x,y)$$

د $|h| \to 0$ لپاره. له دې سره د تابع f توتال مشتقوړوالی لاسته راوړل کيږي:

$$f(x+s,y+t) = f(x,y) + sf_x(x,y) + tf_y(x,y) + o(|h|).$$

په ورته توګه د n متحولو سکالار تابع لپاره دلایل راوړلکيږي. ټولیزحالت یې په ځانله توګه د کمپوننتو له لارې څخه لاسته راځي.

لیکونکي: بوسلي، هیولیګ، شترایت

تابع

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$$

په صفرځای کې پرکیدونکې ده. دا کتل کیدی شي که د بیلګې په توګه سرې په دوه مختلفو سرچینه کرښو پوله ارزښت $0 \to x$ ونیسی یا راوړي:

$$\lim_{x\to 0} f(x,x) = \frac{x^2}{x^2+x^2} = \frac{1}{2} \neq -\frac{1}{2} = \lim_{x\to 0} f(x,-x)\,.$$

په تعقیب یې f په صفرځای کې مشتقوړ نه دی، ځکه چې له مشتقوړوالي څخه ناپربکیدنه منځ ته راځي.

په صفرټکي کي مګر دواړه ټوټه مشتقونه شتون لري. له

$$f(x,0) = f(0,y) = 0$$

لاس ته راځي

$$f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0.$$

دواړه ټوټه مشتقونه مر په صفرټکي کي پریکیدونکي دي.

که په مختلفو کرړو باندې د مشتق

$$f_x(x,y) = \frac{y^3 - x^2y}{(x^2+y^2)^2}$$

که پوله ارزښت $(x,y) \to (0,0)$ تر ځېړنې لاندې ونیسو، نو د بېلګې په توګه د $y = x$ لپاره لرو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lim_{x\to 0} f_x(x,x) = \lim_{x\to 0} \frac{0}{(x^2+y^2)^2} = 0$$

او د $y = x^2$ لپاره

$$\lim_{x\to 0} f_x(x,x^2) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2-1}{(1+x^2)^2} = -1 .$$

په اړونده توګه په صفرځای کې د ټوټه مشتق f_y پرې کیدنه شمیرل کیږي. دا ښایی، چې د مشتقوړوالي لپاره د ټوټه مشتقوني شتونوالی پوره کیدونکې نه دی، بلکه برسیره پردې ناپرېکیدنه هم غوښتل کیږي.

لیکونکي: بوسلې، هیولیګ، شترایت

تابع

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} x+2y \\ xy \\ 3x^2+y^2 \end{pmatrix}$$

او $h = (s,t)^t$ دي

$$f'(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ y & x \\ 6x & 2y \end{pmatrix}$$

او

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرليک

$$f(x+s,y+t)=\begin{pmatrix}(x+s)+2(y+t)\\(x+s)(y+t)\\3(x+s)^2+(y+t)^2\end{pmatrix}.$$

له دې سره يو تابع

$$g(s,t)=f(x+s,y+t)-f(x,y)-f'(x,y)\,(s,t)^t=(0,st,3s^2+t^2)^t,$$

لاس ته راځي، د کوم سره چې د $(s,t)\to(0,0)$ لپَاره هر کمپوننت ګړندی صفر ته ځي نسبت و $|h|=|(s,t)|$ ته،دا په دې معنا چې $g(s,t)=o(|(s,t)|)$

ليکونکي: هيوليګ، شترايت

د سکالار تابع $f(x,y)=r=\sqrt{x^2+y^2}$ لپاره د ګرادينتت په حيث ورکوي

$$\operatorname{grad} f(x,y)=\begin{pmatrix}\partial_1 f\\\partial_2 f\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x/r\\y/r\end{pmatrix}.$$

د يوې ګړي $f(t)=(\cos t,\sin t,t)^t$ پارامتريککولو له لارې د مشتق په حيث يود تانجنتوکتورراکوي

$$f'(t)=(-\sin t,\cos t,1)^t\,.$$

د

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\sin\vartheta\cos\varphi \\ r\sin\vartheta\sin\varphi \\ r\cos\vartheta \end{pmatrix}$$

له لارې تعريف شوي غونډآري کواواردينات لاندې د جاکوب-ماتريکسدی

$$f'(r,\vartheta,\varphi) = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\vartheta,\varphi)} = \begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi & r\cos\vartheta\cos\varphi & -r\sin\vartheta\sin\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi & r\cos\vartheta\sin\varphi & r\sin\vartheta\cos\varphi \\ \cos\vartheta & -r\sin\vartheta & 0 \end{pmatrix}$$

ليکونکي: بوسلي، هيوليګ، شترايت

کرښيزا پروکسيميشن***Lineare Approximation***

په لومړئ نږدېونه کې د ناپريکيدونکي مشتقوړ تابع لپاره باور لري، دا په دې معنا چې د نظم ترمونو $o(|\Delta x|)$ باندې صرفنظرکوني يا پرېښوني له لارې

$$\Delta f(x) = f(x+\Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x\,.$$

ليکونکي ، هيوليګ، شترايت

د مولتيواريت توابعو د غلطيو وده يا تکثير

Fehlerfortpflanzung multivariater Funktionen

د يوه نا پرېکيدونکي مشتقوړ تابع $x \mapsto y = f(x)$ لپاره کيدی شي دايناکوراتو X inakuraten-ارزښتونو $x + \Delta x \approx x$ د f توټه مشتق په مرسته تشريح کړای شي. د مطلق ناټيکاوي لپاره د $o(|\Delta x|)$نظم د ترمونوڅخه په صرفنظر باور لري

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) \approx f_{x_1}(x)\Delta x_1 + \cdots + f_{x_n}(x)\Delta x_n\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که $|x_i|,\ |y| \neq 0$ وي، نو د نسبي ناټیکاوي لپاره لاس ته راځي

$$\frac{\Delta y}{|y|} \approx c_1 \frac{\Delta x_1}{|x_1|} + \cdots + c_n \frac{\Delta x_n}{|x_n|}$$

د لاندې کنډېشن عدد Konditionszahlen سره

$$c_i = \frac{\partial y}{\partial x_i} \frac{|x_i|}{|y|} .$$

یادونه (ژباړی) : د کنډیشن سره سړی پهشمیرپوهنه کې هغه شی تشریح کوي، چې یوه پرابلم حل د هغه دد وتون داتا د مضاحمت په واک کې وي. د کنډیشن عدد د دې په واکوالي کچه انځوروي، چې په هغه وتن ناټیکاوی په نا مساعد حالت کې زواکمنه کیږي. دا د تاکلو حل تلنلارو څخه خپلواکه دی. پای.

د کارتیزي کواوردینات څخه د قطبي کواوردینات د φ کونج شمیرنې له امله

د مطلق ناټیکاوي لپاره لاس ته راځي

$$\Delta\varphi \approx f_x(x,y)\Delta x + f_y(x,y)\Delta y = -\frac{y\Delta x}{x^2+y^2} + \frac{x\Delta y}{x^2+y^2} .$$

د نسبي ناټیکاوي لپاره لاس ته راځي

$$\frac{\Delta\varphi}{|\varphi|} \approx -\frac{y|x|}{(x^2+y^2)|\varphi|}\frac{\Delta x}{|x|} + \frac{x|y|}{(x^2+y^2)|\varphi|}\frac{\Delta y}{|y|} .$$

د $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$ سره د $|\sin\varphi/\varphi| \leq 1$ له امله لاس ته راځي،
چې د ښي اړخ ارزښت له

(c) ketabton.com: The Digital Library

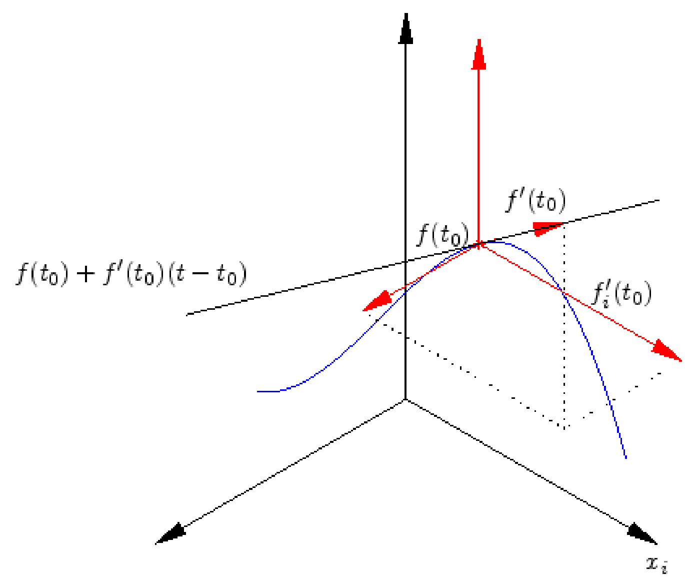
$$\left|\frac{\cos\varphi\ \sin\varphi}{\varphi}\right|\left(\frac{|\Delta x|}{|x|}+\frac{|\Delta y|}{|y|}\right)\leq 2\max\left(\frac{|\Delta x|}{|x|},\frac{|\Delta y|}{|y|}\right)$$

لارې اټکل کيدی شي. نسبي ناټيکاوی زيات له زيا ته د يوه ضريب 2قوي کيدی شي.

مطلق ناټيکاوی کيدی شي د يوه ضريب سره چې $1/r$ ته متناسب وي لوی شي. د انتظار سره سم په x او y کې د کونج اندازه کونه د برابر زغم له امله د کوچنۍ وړانګې لپاره ناټيک دی.

ليکونکي: بوسلې، هيوليګ، شترايت

Tangente تانجنت



په ټکي $f\,(t_0)$ کې د مشتقوړ پارامتريکي کرښې(منحني) $t\mapsto(f_1(t),\ldots,f_n(t))^t$

تانجنت يوه کرښه

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(t_0) + f'(t_0)(t - t_0)\,, \quad t \in \mathbb{R}$$

ده داسې چې لږ تر لږه د تانجنت وکتور يو کمپوننت $f_i'(t_0)$ له صفر سره توپير ولري.

ليکونکي: بوسلي، هيوليک، شترايت

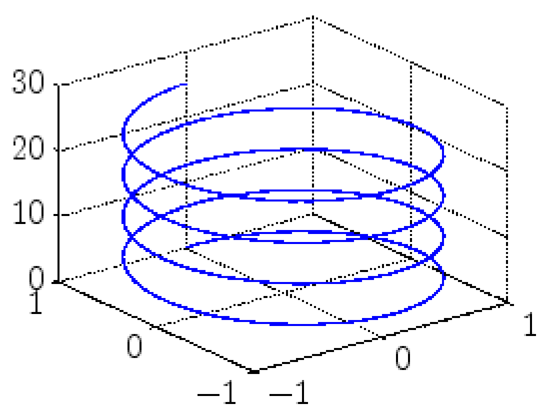
د

$$t \mapsto f(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \\ t \end{pmatrix}$$

له لارې پارامتريکي پيچميخ کربڼه باندې تانجنت دی

$$f'(t) = (\cos t, -\sin t, 1)^t$$

.



د بيلګې په توګه په ټکي $f(3\pi) = (0, -1, 3\pi)$ کې د تانجنت لپاره پارامتريکي
کيدنه لاس ته راځو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

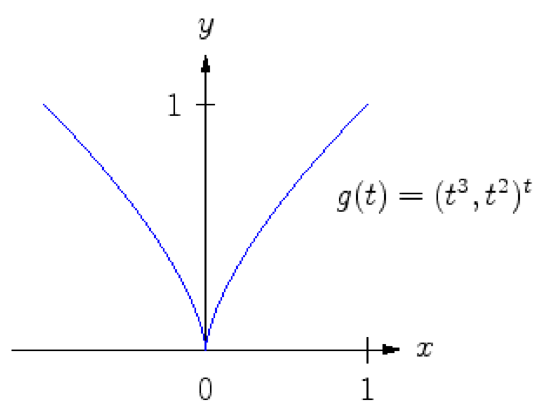
$$t \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3\pi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} (t - 3\pi) \, .$$

ليکونکي: هيوليگ، پفايفر

د $t_0 = 0$ لپاره له $t \mapsto g(t) = \begin{pmatrix} t^3 \\ t^2 \end{pmatrix}$ لارې د پارامتريکي کږې لپاره د دواړو کمپوننتونو مشتق ورکيږي. د کږې لور سملاسي له $(0,-1)^t$ څخه و $(0,1)^t$ ته تغير خوري.

که $g(t)$ د وخت په واک کې ځايزوکتور په حيث تعبير کړو، نو د $t_0 = 0$ لپاره چټکتيا صفرده. له دې سره، سره له دې چېناپريکيدونکي مشتقوړ کواوردينات، يو پريکيدونکی لورتغير ممکن

دی.

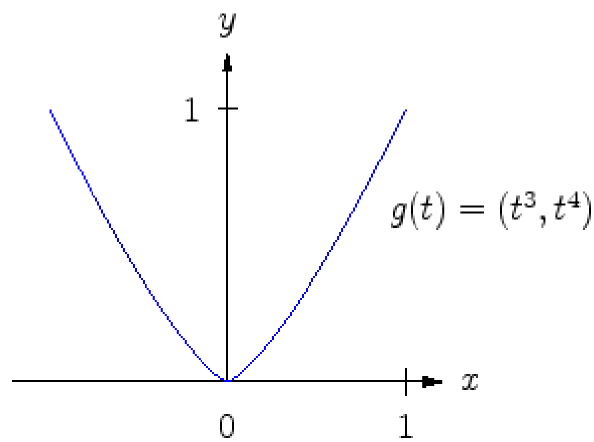


د $g(t) = (t^3, t^4)^t$ لپاره همداسي $g'(0) = (0,0)$ دی. د پارامتر اړونه يا بدلون

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$s = t^3, \quad g(t) = q(s) = \begin{pmatrix} s \\ s^{4/3} \end{pmatrix}$$

ښايی، چې له $s = 0$ سره د تانجنتتغير ناپريکيدونکي دي.



ليکونکي: بوسلي، هيوليک، شترايت

Tangentialebeneتانجنتي سطحه

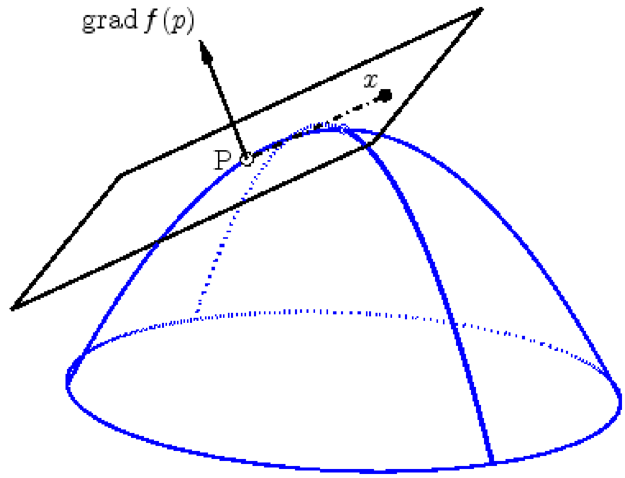
f دې يوناپريکيدونکی مشتقوړ تابع او $(p_1, \ldots, p_n)$ دې يو ټکی وي په له $f(x_1, \ldots, x_n) = c$ لارې ايمپليحيت تعريف شوې سطحه باندې. که $\operatorname{grad} f(p) \neq 0$, وي نو تانجنتي سطحه په ټکي P کې مساوات

$$E: \quad (\operatorname{grad} f(p))^t \, (x - p) = 0 \, .$$

لري.

نورمالوکتور و $\operatorname{grad} f$ ته غبرګ دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library



د يوه تابع $y = g\,(x_1\,, \ldots\,, x_{n-1})$ د ګراف لپاره په ځانګړې توګه

$$E: \quad y - g(q) = \sum_{i=1}^{n-1} \partial_i g(q)\,(x_i - q_i)$$

د تانجنتي سطحېمساوات دی په لاندې ټکي کې:

$$(q_i\,, \ldots\,, q_{n-1}\,, g(q))^t$$

.

ټوټه مشتق $\partial_i g$ له دې امله دتانجنتي سطحي جګوالی ښايي د i -م کواورديناتِ محور په لور

ليکونکي: ب، هيوليک، کيمرلي، شترايت

د توتالمشتق $\text{grad}\, f' = (\quad f)^t$ تعريف دی

$$f(x) = f(p) + (\text{grad}\ \ f)^t(x-p) + o(|x-p|)\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که له ترم $o(|x-p|)$ څخه صرفنظروشي،نو د $f(x)=f(p)=c$ له امله د تانجنتي سطحې مساوات لاس ته راځي.

په ورته توګه د يوه د $y=g\left(x_1,\ldots,x_{n-1}\right)$ له لارې تعريف شوي تابع ګراف لپاره باور لري

$$\Delta y=\sum_{i=1}^{n-1}\partial_i g(q)(\Delta x_i)$$

د $\Delta y=y-g(q)$ او $\Delta x=x-q$ سره. د باقي غړي څخه صرف نظر له امله بيرته د تانجنت سطحې ښوول شوې انځور ته ورځو.

ليکونکي: بوسلې، هيوليک، شترايت

د کګل

$$K:\ f(x,y,z)=x^2+y^2-z^2=0$$

لپاره $\operatorname{grad} f(x,y,z)=(2x,2y,-2z)^t$ دی. له دې سره سړی د تانجنتي سطحې په حيث لاس ته راوړي.

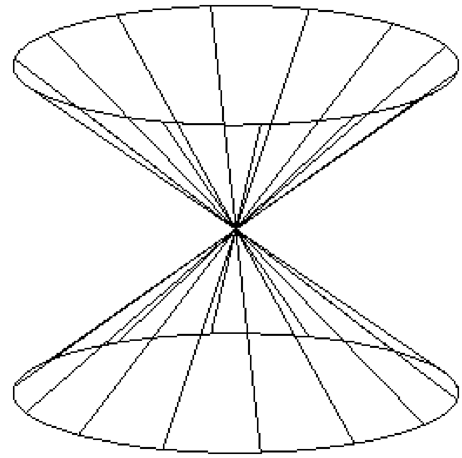
$$E:\ \ -2z_0(z-z_0)+2y(y-y_0)+2x(x-x_0)=0.$$

د بيلګې په توګه تنجنتي سطحه په ټکي $P=(3,4,5)$ کې لاندې مساوات لري

$$E:\ \ -10z+8y+6x=0.$$

په ټکي $Q=(0,0,0)$ کې ګرادينت ورکيږي،د مخروط په ککره يا څوکه کې تانجنتي سطحه شتون نه لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library



ليکونکي: بوسلې، هيوليګ، شترايت

د يوه ډيپول(دوه قطبي) پوتنشل

$$f(x)=|x-p|^{-1}-|x+p|^{-1}\,,\quad x=(x_1,x_2)\,,$$

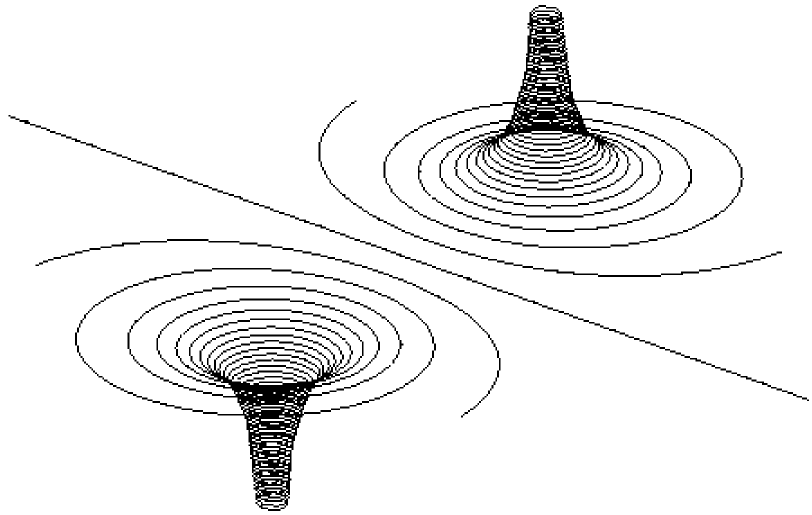
لپاره ،په کوم کې کې چې برق(Ladungen)(دلته بايد موخه هغه بار وي،چې دلته شتون لري) په ټکو $-P$ او P کې شتون لري د کرادينت په څېر لاس ته راځي

$$\operatorname{grad} f(x)=\frac{(x+p)}{|x+p|^3}-\frac{(x-p)}{|x-p|^3}$$

او له دې سره په يوه ټکي $A=(a_1,a_2)$ کې تنجنتي سطحه

$$x_3=f(a)+(\operatorname{grad}f(a))^{\mathrm{t}}\,(x-a).$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



د بیلګې په توګه د $A = (0,0)$ لپاره دی

$$x_3 = 0 + (2p^t/|p|^3)(x_1, x_2)^t\,,$$

دا په دې معناچې تانجنتي سطحه په سرچینه کې ځغلي او و P ته ولاړه یا عمود کرښه خوندي لري.

په سیګولاریټیو P او $-P$ کې تانجنتي سطحه شتون نه لري.

لیکونکي: بوسلې، هیولیک، شترایت

مولتیواریات ځنځیري قاعده یا لار

Multivariate Kettenregel

د ناپریکیدونکومشتقوړ توابعو $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^\ell$ او $g : \mathbb{R}^\ell \to \mathbb{R}^n$ یو بل پسې تړلو

$$h = g \circ f : x \mapsto y = f(x) \mapsto z = g(y)\,,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له امله باور لري

$$h'(x) = g'(y)f'(x)\,,$$

دا په دې معنا چې د جاکوبي-ماتريکس h د جاکوبي-ماتريکسونو f او g ضرب دی.د يوګونې لاس ته راوړنې يا لرنو د ماتريکس ضرب له لارې لاس ته راځي

$$\frac{\partial h_i}{\partial x_k} = \sum_j \frac{\partial g_i}{\partial y_j} \frac{\partial f_j}{\partial x_k}\,.$$

په ځانګړې توګه ځنځيري قانون د ځانګړي حالت $m = n = 1$ لپاره (دا په دېمعنا چې f يوه پارامتريک شوې کږه او g د متحولې يو سکالار تابع) لاندې څېره يا شکل لري:

$$\frac{d\,h}{d\,x} = (\mathrm{grad}\,g)^{\mathrm{t}}\, f'(x)\ .$$

د يوه تابع د توتالمشتق لپاره باور لري

$$\varphi(x+h) = \varphi(x) + \varphi'(x)h + o(|h|)\,.$$

له دې سره د مشتقونو $f'(x)$ او $g'(y)$ د شتون څخه لس ته راځي

$$g(f(x+h)) = g(f(x) + \underbrace{f'(x)h + o(|h|)}_{\tilde h}) =$$

$$= g(f(x)) + [g'(y)\,\tilde h] + o(|\tilde h|)\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا چې

$$[g'(y)\,\tilde{h}] = g'(y)f'(x)h + o(|h|)$$

او $|\tilde{h}| = O(|h|)$ لرود $g \circ f$ د جاکوبي - ماتریکس لپاره غوښتلی فرمول ورکوي.

لیکونکي: هیولیګ، کنش

د ځنځیري قانون د تشکیل یا روښانه ونې لپاره لاندې تابع راوړو

$$y = f(x) = \begin{pmatrix} x_3 \sin(x_1) \\ e^{x_2}/x_3 \end{pmatrix}, \quad g(y) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_1 + \ln(y_2) \\ 0 \\ y_2 \cos(y_1) \end{pmatrix}$$

د دې لپاره چې د $h = g \circ f$ د جاکوبي-ماتریکس په $p = (\pi, 0, 1)^t$ کې وشمیرلی شو، تشکیلوو

$$f'(x)_{|x=p} = \begin{pmatrix} \cos(x_1)x_3 & 0 & \sin(x_1) \\ 0 & e^{x_2}/x_3 & -e^{x_2}/x_3^2 \end{pmatrix}_{|x=p} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

همداسې

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$g'(y)_{|y=f(p)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1/y_2 \\ 0 & 0 \\ -y_2\sin(y_1) & \cos(y_1) \end{pmatrix}_{|y=(0,\,1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

او لاس ته راوړو

$$h'(\pi,0,1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

ليکونکي: هيوليک، کنش

د يوه سکالار تابع $f(x,y)$ لپاره د کږې $(x(t),y(t))^{t}$ $t \mapsto$ په اوږدو د خنځيريقانو له مخې باور لري

$$\frac{d}{dt}f = f_x x' + f_y y'.$$

د بيلګې په توګه د

$$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}\,, \quad x = \sin t\,, \quad y = \cos t$$

لپاره لاندې مشتق لاس ته راځي

$$\frac{d}{dt}f(x(t),y(t)) = \quad \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos(t) + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}(-\sin(t))$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \frac{\sin(t)\cos(t) - \cos(t)\sin(t)}{1}$$

$$= 0$$

دا يوځای اينوول شوي تابع

$$f(x(t), y(t)) = \sqrt{\sin^2(t) + \cos^2(t)} = 1$$

د سيده مشتق سره خوري يا برابر دی.

ليکونکي: هيوليګ، کنش

د يوه پارامتريکي سطحي $(x(s,t), y(s,t), z(s,t))^t$ له لارې د وکتورارزښتيز تابع
$(u(x,y,z), v(x,y,z), w(x,y,z))^t$

د جاکوب-ماتريکس نسبت واريا بلو (s,t) ته دی:

$$\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(s,t)} = \begin{pmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_s & x_t \\ y_s & y_t \\ z_s & z_t \end{pmatrix}.$$

د بيلګي په توګه د يوه راديال تابع

$$(u,v,w) = (x,y,z)/r, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

لپاره د

$$(x,y,z) = (\cos\varphi, \sin\varphi, z), \quad \varphi \in (-\pi, \pi], \quad z \in \mathbb{R}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له لارې پارامتريک شوي مخروط پوښ دی

$$\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)} = r^{-3}\begin{pmatrix} r^2-x^2 & -xy & -xz \\ -xy & r^2-y^2 & -yz \\ -xz & -yz & r^2-z^2 \end{pmatrix},$$

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\varphi,z)} = \begin{pmatrix} -\sin\varphi & 0 \\ \cos\varphi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

د $s = \sin\varphi$ او $c = \cos\varphi$ سره په دې اساس لاسته راځي

$$\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(\varphi,z)} =$$

$$r^{-3}\begin{pmatrix} r^2-c^2 & -cs & -cz \\ -cs & r^2-s^2 & -sz \\ -cz & -sz & r^2-z^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -s & 0 \\ c & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$r^{-3}\begin{pmatrix} -sr^2 & -cz \\ cr^2 & -sz \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, =$$

د کوم سره چې دی

$$r = \sqrt{1+z^2}$$

.

ليکونکي: بوسلې،هيوليګ، کنش

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دې لپاره چې د دواړو توابعو

$$f(u,v) = \begin{pmatrix} u+v \\ u-v \\ u^2+v^2-1 \end{pmatrix}, \quad g(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$$

د $h = g \circ f$ ګرادينت شمېرل کيږي سړی د f د جاکوب-ماتريکس جوړوي

$$f' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2u & 2v \end{pmatrix}$$

په همدې تګه د g ګرادينت

$$\operatorname{grad} g = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} u+v \\ u-v \\ u^2+v^2-1 \end{pmatrix} .$$

له دې سره د ځنځيري قانون سره لاس ته راځي

$$\begin{aligned} (\operatorname{grad} h)^t &= (\operatorname{grad} g)^t f' \\ &= 2 \begin{pmatrix} u+v+u-v+2u(u^2+v^2-1) \\ u+v-u+v+2v(u^2+v^2-1) \end{pmatrix}^t \end{aligned}$$

او د ساده کونې وروسته

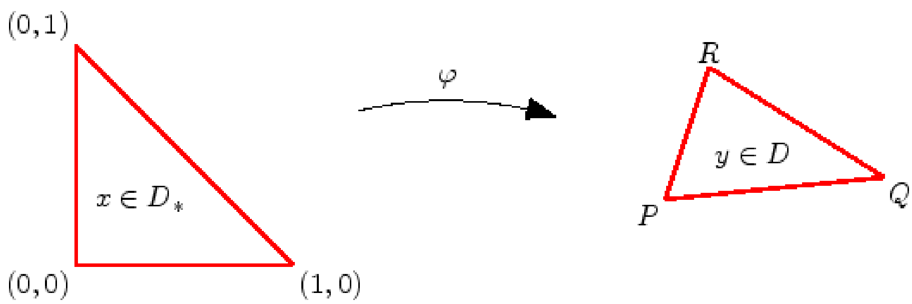
$$\operatorname{grad} h = 4(u^2+v^2) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} .$$

ليکونکي: بوسلې، هيوليګ،

(c) ketabton.com: The Digital Library

په یوه د رېګوډي D باندې د د یوه رفرنځدرېګوډي افین تابع
$D_* : x_1 + x_2 \leq 1, \quad x_i \geq 0\,,$ د کوډټکو Q $P,$ او R سره کیدی شي په
لاندې بڼه ولیکل شي

$$y = \varphi(x) = p + (q-p)x_1 + (r-p)x_2$$



افین تبع د جاکوب-ماتریکس لري

$$\frac{\partial(y_1, y_2)}{\partial(x_1, x_2)} = (q-p, r-p)\ .$$

له دې سره د یوه سکالار تابع $h(x) = g(\varphi(x))$ څخه لاسته راځي

$$(\mathrm{grad}\, h(x))^t = (\mathrm{grad}\, g(y))^t \begin{pmatrix} q_1 - p_1 & r_1 - p_1 \\ q_2 - p_2 & r_2 - p_2 \end{pmatrix}.$$

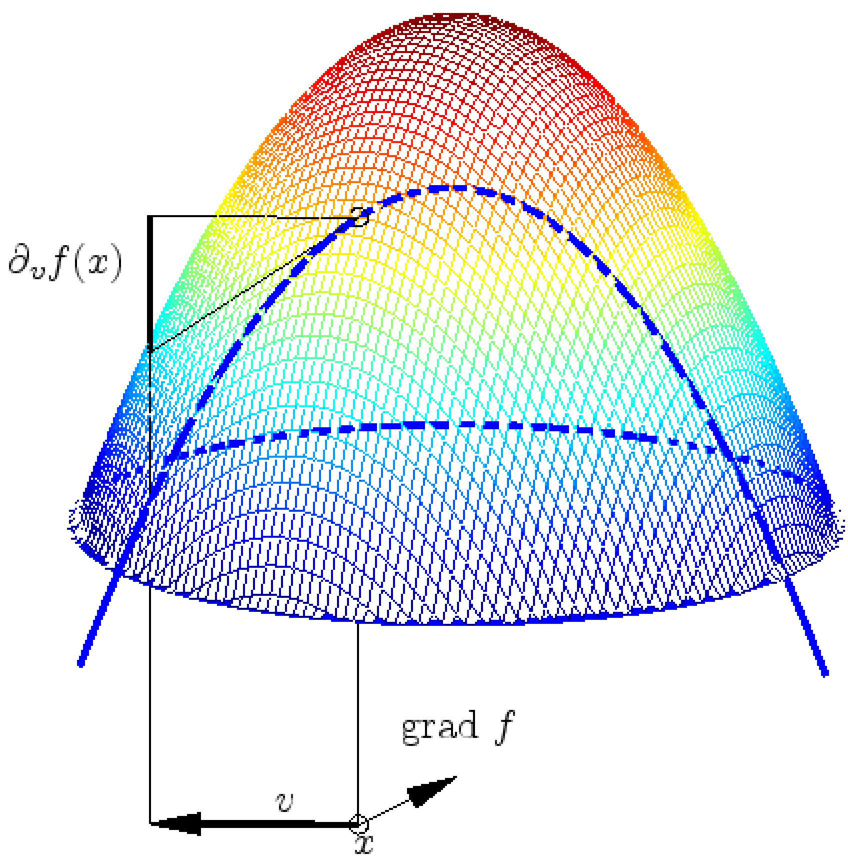
دا تراسفورمیشن د نورو ترڅنګ د ستیفیګکایتماتریکسونو Steifigkeitsmatrizen په لیکنوکې د فینیت-توکو-تګلارFinite-Elemente-Verfahren ته اړیینه ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د يوه تابع لوريز مشتق

د يوه فنکشن يا تابع f مشتق د يوه وکتور v په لرو دی

$$\partial_v f(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+hv)-f(x)}{h}.$$



دا کيدی شي د جاکوب-ماتريکس f' په مرسته د ځنځيرقانون په بنسټ د

$$\left(\frac{d}{dt}f(x+tv)\right)_{t=0} = f'(x)v$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له لارې وشميرل شي. په ځانګړې توګه $\partial_{e_\nu} f$ د e_ν سره د ν–م
يوونوکتور(واحدوکتور) ټوټه مشتق دی نسبت و ν–م کواوردينات ته.

د سکالر تابع تابع لپاره دی

$$\partial_v f = (\operatorname{grad} f(x))^{\mathrm{t}} \ .$$

لکه څنګه چېپه مشتق کې متشکلدی، لوريز مشتق شتون لري په دې حالت کې له f د
v په لور. لوکال تغير د $v \parallel \operatorname{grad} f(x)$ لپاره ما کسيمال دی.

(Autoren: Höllig/Knesch)

د تابع

$$f(x,y) = x^2 y^3$$

لوريزمشتق په ټکي $(x,y) = (2,-1)$ کې شميرلکيږي. د دې لپاره لومړی

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} 2xy^3 \\ 3x^2y^2 \end{pmatrix} .$$

ټاکو.

د معلومو کواوردينات د ځايپه ځايکولووروسته د يوه لور $v = (a,b)^{\mathrm{t}}$ لپاره لاسته
راځي

$$\partial_v f(2,-1) = (-4, 12) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = -4a + 12b \, .$$

لوريزوکتور د

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} -4 \\ 12 \end{pmatrix}$$

لپاره ماکسیمال کيږي، نو د بیلګې په توګه . $v = (-1, 3)$ په لومړئ نږدېونه کې له دې سره

$$f(2-t, -1+3t) \approx f(2, -1) + t\partial_v f(2, -1) = -4 + 40t$$

د f خورا لویه ځایزه یا لوکال ځګیدنه په ګوته کوي یا تشریح کوي

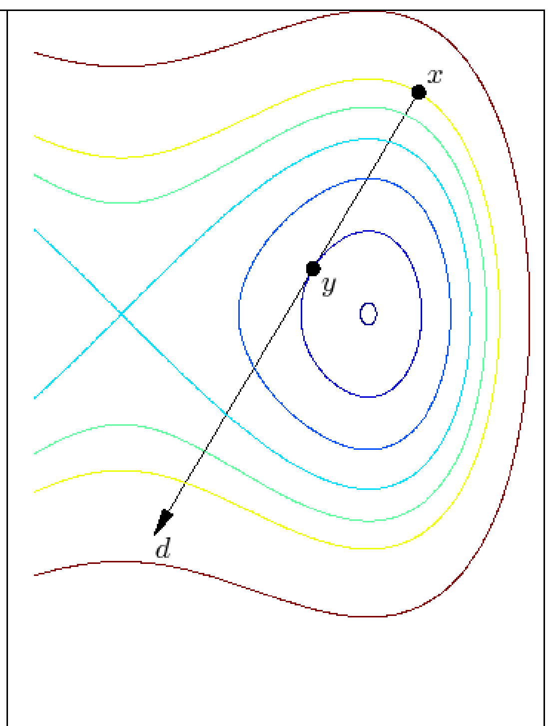
د ډېرې زوړندې یا کښته کیدنې متود

د ډېرې زوړندې کښته کیدنېمتود د مولتيواريات توابعو
$f(x_1, \ldots, x_n)$
مینیمې کولو په چوپر
$x \to y$
کې دی. د یوه ایترایشنپل عملي کولو ته لومړی منفي ګرادینت

$$d = -\mathrm{grad} f(x)$$

د لوکال بهترین کښته کیدلور په حیث شمیرلکیږي. پسې د y f مینیمال ځای په حیث د d په لورتاکل کیږي:

$$f(y) = \min_{t \geq 0} f(x + td) \, .$$



لکه په تابع یا ځیره کې چې انځوردی، لټونلور و نیوو ډېرئ **Niveaumenge** ته د x له لارې اورتوګونال ده او تابع د نیوودېرئ په y کې یوه کوچني ار زښت ته لمسوي

(c) ketabton.com: The Digital Library

یادونه : د نیوو**Niveaumenge** یا روښانه ونه (ژباړی): پهشمیرنه کې د یوه سکالار پټي یا ورشو ټولو ډېریو یا سټونو ټکي، چې هغه همغه ارزښت سره ترتیب یا تنظیم وي. پای.

د خورا زوړندکښته کیدني متود له لارې تولید شوې پرلپسي $x_0, x_1, \ldots$ کونورګنت کیدی شي د ډېرې ټولیزې نیونې سره وښوول شي. پوره کیدونکی دی، که f د کښته لور ته محدود وي او $\operatorname{grad} f$ په یوه د ډېرئ په یوه چاپیریال U کې لیپشیڅ- ناپریکیدونکې وي، دا په دې معنا چې

$$\| \operatorname{grad} f(x) - \operatorname{grad} f(\tilde{x}) \| \leq L \|x - \tilde{x}\|, \quad x, \tilde{x} \in U .$$

باور لري

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} \| \operatorname{grad} f(x_\ell) \|^2 < \infty .$$

دا په ځانګړې توګه دې کې خوندي ده، چې د پرلپسي $x_0, x_1, \ldots$ هر پډغالي ټکی د f یو انحرافي یا بهتره افراطي ټکي دی. دا چې دا یو ځاییز یا لوکال مینیموم دی ستاتیستیکي په اطمنان، مګر نه جبرأ ترې لاسته راځي.

په الګرریتم کې یوبعدي یا یو پراخېدونکی مینیموم اړتیا ده چې فقط په نږدې توګه وکړای شي. لټونلور d باید نه دي چې د کمیز یا منفي ګرادینت په څیرو ټاکلی شي او یوه ځییزه مینیموم ځاي y و نه ټاکلشي. د کونورګنت لپاره په ساده توګه پریکړیدی، چې هر ایتراشنپل سره د تابع ارزښت یو رډکشن و $\| \operatorname{grad} f(x) \|^2$ ته متناسب ورسیدای شي.

(Autoren: Höllig/Hörner/Pfeil)

د یوه مربع تابع

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x)=\frac{1}{2}x^{t}Ax-b^{t}x$$

$x \to y$
لپاره د يوه سيومتريک زياتيز يا مثبت ديفينيت ماتريکس A سره يو ايتريشنپل
لري د ډېرزوړندجګيدني بنې متود سره

$$y=x+td,\ d=-\mathrm{grad}f(x)=b-Ax,\ t=\frac{d^{t}d}{d^{t}Ad}\,.$$

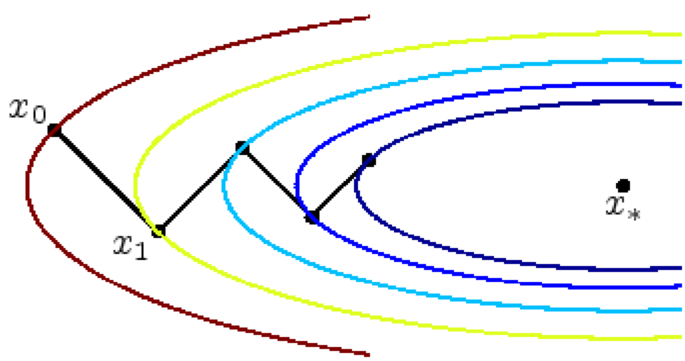
د

$$\begin{aligned} f(x+td) &= \tfrac{1}{2}(x+td)^{t}A(x+td)-b^{t}(x+td) \\ &= \tfrac{1}{2}d^{t}Ad\,t^{2}+(x^{t}Ad-b^{t}d)\,t+c \end{aligned}$$

مينيموم کيدی شي په دې حالت کې ا کسپليثيت يا روښانه توګه ورکړ شي. د t پسې مشتق
صفرځايونوله لارې لسته راځي

$$0=d^{t}Ad\,t-\underbrace{(b-Ax)}_{d}{}^{t}d$$

او له دې سره د نيمکربنيزپارامتر t لپاره فرمول.



(c) ketabton.com: The Digital Library

تابع چې ښايي،کيدی شي ناغوښتلو رپيدنو ياOszillationen ته راشي، که A أيګنارزښت قوي توپير کيدونکی د لوي نظم لري. يوه افراطي پيلګه د

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 100 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

لپاره لاسته راي.

د $x = \begin{pmatrix} c & 1 \end{pmatrix}^t$ لپاره دی

$$d = -\begin{pmatrix} c \\ 100 \end{pmatrix}, \quad Ad = -\begin{pmatrix} c \\ 10^4 \end{pmatrix}$$

او

$$d^t d = c^2 + 10^4, \quad d^t A d = c^2 + 10^6, \quad t = \frac{c^2 + 10^4}{c^2 + 10^6}.$$

له دې سره لرو

$$y = \begin{pmatrix} c \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{c^2 + 10^4}{c^2 + 10^6} \begin{pmatrix} c \\ 100 \end{pmatrix} = \frac{99c^2}{c^2 + 10^6} \begin{pmatrix} 10^4/c \\ -1 \end{pmatrix}.$$

په رښتيا د $c = 100$ لپاره لرو

$$y = \frac{99}{101} \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix}.$$

سړی پيژني، چې مينيموم ته د واټنونو په هر ايترايشنپل کې په سرجينه کې فقط له 1% په کچه کميږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په څټ- یا برعکس تابع Umkehrfunktion

$f:\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ دې د یوه ټکي x_* په چاپیریال کې ناپریکیدونکی مشتقوړ تابع وي د انورتیري جاکوبي-ماتریکس $f'(x_*)$ سره.

نو f د x_* په یوه چاپیریال U کې بیجکتیو دی، دا په دې معنا چې یو ناپریکیدونکی مشتقوړ برعکستابع $g = f^{-1}$ شتون لري د

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = g(y)\,, \quad x \in U\,.$$

سره.

له دې برسیره د جاکوبي-ماتریکس

$$g'(y) = f'(x)^{-1}$$

لپاره باور لري، د ټولو $x \in U$ لپاره.

(Autoren: Höllig/Streit)

مساوات $f(x) = y$ کېږی شي د یوه ټکي (x_*, y_*) په چاپیریال

$$U \times V = \{x:\ |x - x_*| \le \delta\} \times \{y:\ |y - y_*| \le \varepsilon\}$$

کې د لیترایشن

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x \leftarrow \varphi(x) = x - f'(x_*)^{-1}(f(x) - y)$$

سره د بانخ Banachځاي په ځاي یا فیکس ټکي جملې سره حل شي.

دې ته بنوول کيږي، چې φ د کره لپاره یو را ټول شوی kontrahierende ځانیزه تابع ده په U .

د کنوتراکشن ثابته کیدی شي د $\sup_{x\in U} \|\varphi'(x)\|$ له لاریتخمین شي، داسېچې د اویکلید یا اقلیدس نورم $|\cdot|$ باندې تنظیم ماتریکسنورم وکارول شي. د

$$\begin{aligned} \|\varphi'(x)\| &= \|E - f'(x_*)^{-1}f'(x)\| \\ &= \|E - f'(x_*)^{-1}[f'(x_*) + f'(x) - f'(x_*)]\| \\ &= \|f'(x_*)^{-1}(f'(x) - f'(x_*))\| \end{aligned}$$

له امله دیوون – یا وادماتریکس E سره $\leq c < 1$ سوپریمومو دی د پوره کوچني δ لپاره، ځکه چې $f'(x) \to f'(x_*)$ د $x \to x_*$ لپاره.

خوندي لرنه یا Die Inklusion $\varphi(U) \subseteq U$ د

$$\varphi(x) - x_* = x - x_* - f'(x_*)^{-1}(f(x) - f(x_*) + y_* - y)\,.$$

نورم د تخمین له لارې لاسته راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د f د ناپريکيدني او مشتقوړوالي په بنسټ باور لر ي

$$f(x) - f(x_*) = f'(x_*)(x - x_*) + R, \quad |R| = o(|x - x_*|)\,.$$

د دې په تعقيب دی

$$|\varphi(x) - x_*| \le \|f'(x_*)^{-1}\|(o(\delta) + \varepsilon) \le \delta$$

د پوره کوچني δ ($o(\delta)/\delta \to 0$) او ε لپاره

له دې سره د باناخ ځاپی ځای تکي جملې نيونې يا فرضييپوره دي، او د ټولو $y \in V$ لپاره د لاندې سره x شتون لري د لاندې سره

$$x = x - f'(x_*)^{-1}(f(x) - y) \Leftrightarrow f(x) - y = 0\,,$$

دا په دې معنا چې سرې کړی شي مساوات د x پسې حل کړي:

$$g(y) = f^{-1}(y) = x$$

.

فورمال د $x = g(f(x))$ مشتق له لارې د ځنځيري قانون سره سم لاس ته راځي

$$E = g'(y)f'(x)\,.$$

د g د جاکوبي-ماتريکس د f د جاکوبي-ماتريکس معکوس دی. د دې لپاره چېد دې فرمولټيکاوی د ازمايو ، د

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لپاره د $x,\, x+\Delta x \in U$ سره ليکو

$$\begin{aligned} & g(y+\Delta y)-g(y)-f'(x)^{-1}(\Delta y) \\ & \quad = \Delta x - f'(x)^{-1}[f(x+\Delta x)-f(x)+|\Delta x|/2] = f'(x)^{-1}R \end{aligned}$$

د $R = o(|\Delta x|)$ سره د f مشتقوړوالي په بنسټ. دا پاتې دي چې وښوولشي، چې د $|\Delta x|$ د $|\Delta y|$ له لارېکيدی شي تخمين يا اټکل شي.

دا له

$$\Delta x = f'(x)^{-1}(\Delta y - R)$$

لاس ته راځي

د $\|f'(x)^{-1}\|$ په : U محدوديت له امله:

$$|\Delta x| \leq c^* \left(|\Delta y| + o\left(|\Delta x|\right)\right) \leq \tilde{c}|\Delta y|$$

د پوره کوچني $|\Delta x|$ لپاره د ثابتو c^* او $\tilde{c}$ سره.

(Autoren: Höllig/Streit)

و دې ځيرل شي، چې ايا تابع

$$f:\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xy \\ x/y \end{pmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په ټکي $(x,y)=(2,1)$ کې لوکال معکوسوړ ده. د دې لپاره لومړی د جا کوبي – ماتریکس

$$f'(x,y)=\begin{pmatrix} y & x \\ 1/y & -x/y^2 \end{pmatrix}.$$

جوړیږي.

تر څیرنې لاندې ټکې کې دی

$$\mathrm{J}\,f=f'(2,1)=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

د $\det \mathrm{J}=-4\neq 0$ له امله د

$$\begin{pmatrix} u_* \\ v_* \end{pmatrix}=f(x,y)=\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

په چاپیریال کې یو معکوس تابع g شتون لري

د دهجاکوبیماتریکس په ټکي (u_*,v_*) کې دی

$$g'(2,2)=\mathrm{J}^{-1}\,f=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

په دې ساده بیلګه کې کیدی شي g د افادود حلولنو له لارې د u او v لپاره د x او y پسې ایکسپلیڅیتexplizit ورکړي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = g(u,v) = \begin{pmatrix} \sqrt{uv} \\ \sqrt{u/v} \end{pmatrix}.$$

له دې سره سړی کړی شي چې فرمول د $g'(2,2)$ لپاره په سيده لاره و ازمايي.

(Autor: Höllig)

کومپلکس اکسپوننشل تابع

$$z = x + \mathrm{i}y \mapsto \exp(z) = u + \mathrm{i}v$$

کيدی شي ريل يا حقيقي د

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \exp(x)\cos y \\ \exp(x)\sin y \end{pmatrix}$$

په خير وليکي او دجاکوبي-ما تريکس

$$f'(x,y) = \exp(x) \begin{pmatrix} \cos y & -\sin y \\ \sin y & \cos y \end{pmatrix}.$$

د $\det f'(x,y) = \exp(2x) > 0$ له امله د هر ټکي $(u,v)^{\mathrm{t}}$ په چاپيريال يو

برعکستابع g (د کمپلکس لوګاريتم) شتون لري د لاند/ط مشتق سره

$$g'(u,v) = (f'(x,y))^{-1} = \exp(-x) \begin{pmatrix} \cos y & \sin y \\ -\sin y & \cos y \end{pmatrix}.$$

يو ګلوبال برعکس تابع د

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x,y+2\pi k)=f(x,y),\quad k\in\mathbb{Z},$$

له امله شتون نه لري. د پريوديوالي يا تل بېرته را ګرځېدني له امله هر ټکي $(u,v)\neq(0,0)$ ناپاى ډېر ترمخ عکسونه لري.

(Autoren: Boßle/Höllig/Streit)

په پولار کواردیناتو باندې اړولو سره،

$$x=r\cos\varphi,\, y=r\sin\varphi,\quad r=\sqrt{x^2+y^2}\,,$$

د کواوردينات x پسې د وړانګ ې ټوټه مشت ق لپاره باور لري

$$\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\sqrt{x^2+y^2}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{x}{r}=\cos\varphi\,.$$

له بله پلوه له $r=x/\cos(\varphi)$ لاسته راځي

$$\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{1}{\cos(\varphi)}\,.$$

د دې برېښنده تظاد لپاره دليل دا دی، چې د ټوټه مشتقشمېرنې له لارې همغه اووښتونې ثابتې نه شي ساتل کيدی. په لومړي مساوات کې y ثابت دی اوپه دويمکي φ . په دواړو حالتونو کې تغيروخوړ او اغيزه يې په r کې وکتل شوه. دلته ټکی (x,y) هر ځل په پرته لور يا همداسې د کونج φ سره مايل کرښه حرکت کوي. په ورته توګه ځاييز يا لوکال توګه د r تغيرمختلف دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د سکالار مشتق قانون

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{dx}{dy}\right)^{-1}$$

طبعاً د هر ټوټه مشتق لپاره باورنه لري. د یوه بیجکتیو تابع

$$(x,y) \leftrightarrow (u,v)$$

لپاره په ټولیزه توګه

$$x_u \neq (u_x)^{-1} .$$

دی، له دې ورزیات باید د تابع

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} ,$$

جاکوبي-ماتریکس رامنځ ته شي:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}^{-1} .$$

په دې راوړې بیلګه کې

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\,\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\,\cos\varphi \end{pmatrix} .$$

دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

معکوس مشتق د x او y پسې لاندې ډوه مشتق لري:

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\frac{1}{r}\sin\varphi & \frac{1}{r}\cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_x & r_y \\ \varphi_x & \varphi_y \end{pmatrix} .$$

په ځانګړې توګه لرو، چې $r_x = \cos\varphi$

(Autoren: Boßle/Höllig/Knesch)

ایمپلیڅیت توابع

که د یوه ناپریکیدونکیمشتقوړ تابع

$$f:\ \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$$

لپاره وي

$$f(x_*, y_*) = 0, \quad \det\ f_x(x_*, y_*) \neq 0\,,$$

نودا مساوات سیستم

$$f_\nu(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = 0\,, \quad \nu = 1, \ldots, n\,,$$

د y_* په یوه چاپیریال کې د x پسې حل کړئ:

$$x = \varphi(y)\,.$$

ایمپلیڅیت تعریف شوی تابع φ د x_* په یوه چاپیریال کې ناپریکیدونکی مشتقوړ دی
او دا لاندېد جاکوبي-ماتریکس لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرلیک

$$\varphi' = -(f_x)^{-1} f_y \, .$$

په ورته توګه د توابعو

$$f_j(x_1, x_2, \ldots, x_{n+m}),\ j = 1, \ldots, n \ ,$$

لپاره باور لري د اووښتونو یا متحولو د پرموتیشن پسې، دا په دې معنا چې سړی کړی شي په $x_{j_1}, \ldots, x_{j_n}$ پسې یې حل کړي، که د جاکوبي- ماتریکس f' درځ یا متېه $j_1, \ldots, j_n$ کرښيزخپلواکه وي.

(Autoren: Höllig/Streit)

توابع

$$(x, y) \mapsto u(x, y) = (f(x, y), y)$$

په ټکي (x_*, y_*) کې د په ځټ تابع جملې وړاندنیونې پوره کوي. په ځا نګړې توګه د x اووښتونو ګڼون یا تعداد د f د کمپوننتونو تعداد په ګوته کوي، او

$$u'(x_*, y_*) = \begin{pmatrix} f_x & f_y \\ 0 & E \end{pmatrix}_{|(x_*, y_*)} \, ,$$

د E سره یوونماتریکس، په ښټ-یا برعکس کیدونکیدی. له دې امله سړی کړی شي

$$(\varphi(y), y) = u^{-1}(0, y)$$

کیږدي، د u^{-1} سره د u ناپریکیدونکی مشتقوړ برعکس تابع.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د جاکوبي-ماتریکساکسپلیخیت فرمول له

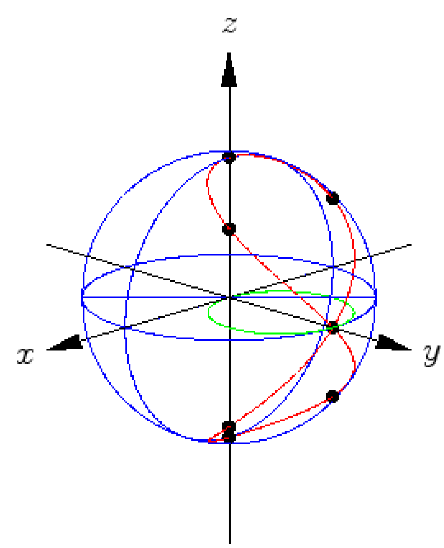
$$0 = (f(\varphi(y), y))_y = f_x\varphi' + f_y \,.$$

لاسته راځي.

د ویوانی Vivianische کره یا منحني

$$C: \quad t \mapsto \begin{pmatrix} \sin t \, \cos t \\ \sin(2t) \\ \cos t \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi) \,,$$

د توتي یا استواني سره د یوونفضا د غوښي له لارې لاسته راځي.



په ایمپلیخیت بڼې کره د

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= x^2 + y^2 + z^2 - 1 &= 0 \\ g(x,y,z) &= x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} &= 0 \end{aligned}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له لارې انځوروړ ده. د ايمپليځيتتابع جملېسره سړی کړی شي د جاکوبي-ماتريکس

$$\begin{pmatrix} f_x & f_y & f_z \\ g_x & g_y & g_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 2x & 2y-1 & 0 \end{pmatrix}.$$

لرلو سره پريکړه وکړي، چې ايا کړه ځان لوکال يا ځاييزد کواوردينات x, y, z څخه د يوې له لارې پارامتريک کيدی شي.

نسبت x ته پارامتريککولو لپاره ، دا په دې معنا چې د y او z پسې حلونه پوره کيدونکېده،داسې چې

$$\frac{\partial(f,g)}{\partial(y,z)} = \begin{pmatrix} 2y & 2z \\ 2y-1 & 0 \end{pmatrix}$$

برعکس وړ ده. دا د $z \neq 0$ او $y \neq 1/2$ لپاره حالت دی. سړی لاسته راوړي

$$y(x) = \frac{1}{2} + \delta\sqrt{\frac{1}{4} - x^2}, \quad z(x) = \delta'\sqrt{\frac{1}{2} - \delta\sqrt{\frac{1}{4} - x^2}}.$$

چيرته چې په اړونده توګه د يوګونو ښاخونو مخنخښه $\delta,\ \delta' \in \{-1, 1\}$ بايد و ټاکل شي.

په رينښتوني دا پارامتريک کونه په ټکو $(0,1,0)^t$، $(\pm 1/2, 1/2, \pm\sqrt{2}/2)^t$ او $(\pm 1/2, 1/2, \mp\sqrt{2}/2)^t$ سينګړ.لارده. د x پسې

(c) ketabton.com: The Digital Library

پارمتريک کونې لپاره هندسي اړين دی، چې د تانجنت لور و $(1,0,0)^t$ ته ارتوګونال نه ده، دا په دې معنا چې يو ناساده کمپوننت د x په لور لري.

په ورته توګه نسبت y او z ته د پارامتريکوړوالي لپاره پوره کيدونکيشرطونه لاس ته راځي.

په تکي $(0,1,0)^t$ کې لوکال پارمتريک کيدنه شتون نه لري. کړه دلته دبل ټکی لري. د جاکوبي –ماتريکس

$$\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y,z)}\,|_{(0,1,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

فقط رانګ 1 لري.

د n متحولي يا اووښتوني يوه سکالار تابع f لپاره دا جمله د ايمپيلئيت توابعوپه هکله وايي، چې مساوات

$$f(x_1,\ldots,x_n)=0$$

د $x \approx x_*$ لپاره د x_k پسې حلکيدی شي، که $\partial_k f(x_*) \neq 0$.

د روښانه بيلګې په توګه مسوات

$$f(x,y,z)=xe^y-yz=0$$

راوړو. ګرادينت دی

$$(f_x,f_y,f_z)^t=(e^y,xe^y-z,-y)^t\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $f_x > 0$ له امله $f = 0$ د ټولو (x, y, z) لپاره د x پسې حلوړ دی. دا د مساوات

$$x = yze^{-y}$$

پسې ترلي هم ليدل کيدی

په ورته توګه کتل کيږي، چې د z پسې حل د $y \neq 0$ لپاره هم ممکن دي.

په y پسې مسات ساده نه شي حل کيدی. د ايمپليځيت توابعو په هکله جمله د (x_*, y_*, z_*) په يوه چاپيريال کې تظمينوي که

$$f_y(x_*, y_*, z_*) = x_* e^{y_*} - z_* \neq 0\,.$$

دا د بيلګې په توګه د مساوات د حل $(0, 0, 1)$ لپاره پوره دی:

$$f_y(0, 0, 1) = -1\,.$$

په تعقيب يې يو تابع φ شتون لري د

$$f(x, y, z) = 0 \Leftrightarrow y = \varphi(x, z)\,, \quad (x, z) \approx (0, 1)\,.$$

سره.

سره له دې چې φ اکسپليځيت د ورکړې وړ نه دی، کيدی شي ګرادينت و ټاکل شي:

$$0 = f(x, \varphi(x, z), z) \Longrightarrow 0 = f_x + f_y\varphi_x\,, \quad 0 = f_z + f_y\varphi_z\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د راوړل شوي ټکي (x_*, y_*, z_*) کې باور لري

$$\varphi_x(0,1) = -f_x(0,0,1)/f_y(0,0,1)$$

$$= 1/(-1) = -1$$

$$\varphi_z(0,1) = -f_z(0,0,1)/f_y(0,0,1)$$

$$= 0/(-1) = 0\,.$$

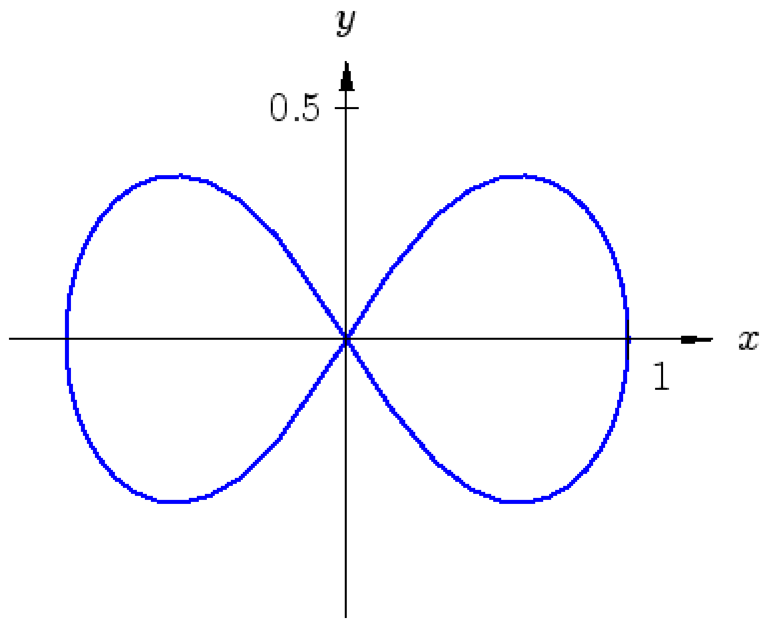
(Autor: Höllig)

د بیواریاتت پولینوم p لپاره د

$$p(x,y) = 0$$

له لاربیوه الجبري کږه تعریفیږي. که درجه $p \neq 0$ وي، نو یا x لوکال یو د y تابع دی او یا په ځښ. په ټکو کې چې درجه یې ورکیدونکې وي کیدی شي کږه یو سینګولاریټي ولري

(c) ketabton.com: The Digital Library



د $p(x,y)=y^2-x^2+x^4=0$ له لارې تعریف شوې لیمنیسکاتې ګرادینت

$$\text{grad }p(x,y)=(-2x+4x^3,2y)^t$$

فقط په ټکي $(0,0)$ کې په ورکیږي. لکه په خیره کې چې کتل کیږي، نه شي کیدی چې کږه یواځنۍ په x پسې یا په y پسې حل شي.

په دې $(1,0)$ ټکي او $(-1,0)$ کې تانجنت و x –محور ته ولاړ یا عمود دی. کږه کړی شي لوکال فقط په x پسې حل شي:

$$x=\sigma\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-y^2}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $x = \sigma \in \{-1, 1\}$ په چاپیریال کې. برعکس کیدی شي کړه په ټکو $\pm(1/\sqrt{2}, 1/2)$ کې لوکال فقطد x تابع په څیر نه د y په څیر ورکړ شي:

$$y = \pm\sqrt{x^2 - x^4}\,.$$

په نورو ټول ټکو (x_0, y_0) کې کیدی شي چې سړی یې هم د x او یا y پسې حل کړي.

بیلګه

$$\frac{dy}{dx} = -p_y^{-1} p_x = \frac{4x^3 - 2x}{2y}$$

ده او

$$y - y_0 = \frac{4x_0^3 - 2x_0}{2y_0}\,(x - x_0)$$

په ټک (x_0, y_0) کې د تانجنت مساوات دي.

(Autoren: Höllig/Streit)

په ناکربنیز مساواتسیستم کي د مخ ته بیونی متود

په یوه د پارامتر تابع مساواتسیستم کې

$$f(x, t) = 0, \quad t \in \mathbb{R},$$

د ناپریکیدونکیمشتقوړ f توته جاکوبي-ماتریکس f_x سره ناسینګولار دی، نو حلونه

(c) ketabton.com: The Digital Library

ناپریکیدونکي مشتقوړ د t په واک کې دي. په ځانګړې توګه کیدی شي کرښیز تیلور-ودیزونه

$$x(t+h) \approx x(t) - f_x(x,t)^{-1} f_t(x,t) h$$

د ګاونډیو اپروکسیکیشن لپاره وکارول شي.

دا متود زیات وخت د نیوټن -تګلار د پیل ارزښت د Generierung ته کارول کیږي

لیکوال :هیولیګ، سترایت

د تیلور اپروکسیمیشنTaylor-Approximation

Approximation(لاتین: هغه بل، شمیرپوهنیزه ترې پوهیدنه(مفهوم) نږدېوالی)

د یوه ټکي په چاپیریال کې یو $(a_1, \dots, a_m)(n+1)$ -ځله ناپریکیدونکی مشتقوړ د m متحولو x_i سکالار تابع f کیدی شي د یوه تیلور-پولینوم له لارې د توتال درجي له لارې اپرکسیمیشي:

$$f(x) = \sum_{|\alpha| \leq n} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(a)(x-a)^\alpha + R\,, \quad |x-a| < r\,,$$

د $\alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_m!$ سره.

پاتې غړی لاندې بڼه لري

$$R = \sum_{|\alpha|=n+1} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(u)(x-a)^\alpha\,, \quad u = a + \theta(x-a)\,,$$

د یوه $\theta \in [0,1]$ لپاره.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ښوونې لپاره د m متحولو د یوه تابع د تیلور وده په یونیواریات حالت بیرته اړولکیږي.
سړی بې د ټولیزو بندیزونو $a = 0$ راوړي او داسې یې ځاي پّ ځای کوي

$$f(x_1, ..., x_m) = f(tx_1, ..., tx_m)|_{t=1} = g(t)|_{t=1} .$$

د یونیواریات تابع $g(t)$ لپاره د تیلور –وده په صفرټکي کې ده

$$g(t) = g(0) + g'(0)\,t + \cdots + \frac{1}{n!}g^{(n)}(0)t^n + R$$

د

$$R = \frac{1}{(n+1)!}g^{(n+1)}(\theta t)t^{n+1}, \quad \theta \in [0,1] .$$

سره.

د ځنځیري قانو پسې لرو

$$\begin{aligned} g(0) &= f(0) \\ g'(0) &= \sum_j (\partial_j f(0))x_j \\ g''(0) &= \sum_i \sum_j (\partial_i \partial_j f(0))x_i x_j \\ &\vdots \end{aligned}$$

دا په دې معنا چې k -م مشتق m^k ترمونه لري. له دوي څخه هغه راټولیږي، په کومو کې چې د یوګونو متحولو پسې برابرزیات واره مشتق ونیول شي.
د بیلګې په توګه د ټولو $m = 2,\ k = 5$ مشتقونو لپاره، کوم چې درې واره د لومړي کمپوننت او دوه واره د دویم کمپوننت پسې مشتق شوی دی، سړی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\partial_1\partial_1\partial_1\partial_2\partial_2,\ \partial_1\partial_2\partial_1\partial_2\partial_1,\ \partial_1\partial_2\partial_2\partial_1\partial_1,\ \ldots$$

$\partial^\alpha\ ,\ \alpha = (3,2)$
یوځایراوړي. په ټولیزه توګه په دې کنکریت حالت کې ټوټه مشتق
$\binom{5}{3} = 5!/(3!\,2!)$
ترمونه دي. په ټولیزه توګه

$$\binom{k}{\alpha_1}\cdot\binom{k-\alpha_1}{\alpha_2}\cdots\binom{k-\alpha_1-\ldots-\alpha_{m-1}}{\alpha_m} = k!/(\alpha_1!\ \ldots\ \alpha_m!)$$

ترمونه دي، که د ν -م کمپوننت پسې یې α_ν -ځله مشتق ونیول شي.

که د تابع $g(t)$ دا پورته شمیرل شوي مشتقونه د تیلور-ودیزیینه کې کیږدو، ضریب یا ځلوونی $k!$ لنډیږي او سرې لاسته د f غوښتونپودیزینه راوړي.

لیکونکي: بوسلې، هیولیګ، شترایت

د یوه دوه متحولو تابع لپاره تیلور –ودیزیینه دا لاندې بڼه لري

$$f(x,y)\ \ f + f_x\,(x-x_0) + f_y\,(y-y_0) =$$

$$+\frac{f_{xx}}{2}\,(x-x_0)^2 + f_{xy}\,(x-x_0)\,(y-y_0) + \frac{f_{yy}}{2}\,(y-y_0)^2$$

$$+\frac{f_{xxx}}{6}\,(x-x_0)^3 + \frac{f_{xxy}}{2}\,(x-x_0)^2\,(y-y_0)$$

$$+\frac{f_{xyy}}{2}\,(x-x_0)\,(y-y_0)^2 + \frac{f_{yyy}}{6}\,(y-y_0)^3 + R\,,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

چېمشتق يې تل په ټکي (x_0, y_0) کې ارزښتول کيږي.

د بيلګې په توګه د

$$f(x,y) = \sin(x - \omega y)$$

او د $(x_0, y_0) = (0,0)$ لپاره د

$$\partial_x^\alpha \partial_y^\beta f(0,0) = \sin^{(\alpha+\beta)}(0)\,(-\omega)^\beta$$

له امله اپروکسيميشن

$$\sin(x - \omega y) =$$

$$= x - \omega y - \frac{1}{3!}\underbrace{(x^3 - 3\omega x^2 y + 3\omega^2 x y^2 - \omega^3 y^3)}_{(x-\omega y)^3} + R$$

د

$$R = \frac{1}{4!}(f_{x^4} + 4f_{x^3y} + 6f_{x^2y^2} + 4f_{xy^3} + f_{y^4})(\theta(x,y))$$

$$= \frac{1}{4!}(x - \omega y)^4 \sin(\theta(x - \omega y)),$$

سره د يوه $\theta \in [0,1]$ لپاره لاسته راوړي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په بدیل ډول سرې د تیلور-پولینوم د $t = x - \omega y$ ځاي په ځای کولو له لارې لاسته راوړي د ساین تابع په یوه بعدیز لړئ انځورونه کې:

$$\sin(t) = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \dots.$$

د $t = x - \omega y$ سره لاس ته راځي

$$f(x,y) = (x - \omega y) - \frac{1}{3!}(x - \omega y)^3 + \frac{1}{5!}\cos(\theta)(x - \omega y)^5,$$

چېرته چې د یونیواریانت پاتې غړي انځورونه کا رول کیږي

لیکونکي: بوسلې، هیولیګ، شترایت

د بیلګې په توګه پولینوم

$$f(x,y,z) = z^2 - xy$$

د $(0,-2,1)$ په ځای کې ودیز کیږي یا تکامل ورکول کیږي. دا له صفر سره نابرابرمشتقونه دي

$$f_x = -y\,,\ f_y = -x\,,\ f_z = 2z\,,\ f_{xy} = -1\,,\ f_{zz} = 2\,.$$

په ودیزوونټکیکي ارزوني د تیلور-انځورونې

$$1 + 2x + (-0)(y+2) + 2(z-1) + (-1)x(y+2) + \frac{1}{2}2(z-1)^2\,,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاس ته راځي، کوم چې طبعأ د f سره همغږیز دی.

په بدیل ډول کیدی شي ودیزینه د بنهبدلون له لارې هم و کتلی شول

$$y+2=\eta\,,\quad z-1=\zeta$$

او لاس ته راشي

$$f(x,y,z)=(\zeta+1)^2-x(\eta-2)=\zeta^2++2\zeta+1-x\eta+2x\,.$$

د هسي ماتریکس Hesse-Matrix

په ټکي $(a_1,\dots,a_n)$ کې د یوه سکالار تابع f مربعیز تیلور-اپروکسیمیشن کیدی شي په بڼه

$$\ldots) = f(a) + (\operatorname{grad} f(a))^t\,(x-a) + \frac{1}{2}(x-a)^t\,\mathrm{H}\,f(a)(x-a) + O(|(x-a)|^3)$$

ولیکل شي، د کوم سره چې د سیمتریک هسې- ماتریکس

$$\mathrm{H}\,f(a) = \begin{pmatrix} \partial_1\partial_1 f(a) & \cdots & \partial_1\partial_n f(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_n\partial_1 f(a) & \cdots & \partial_n\partial_n f(a) \end{pmatrix}$$

دویم مشتق خوندي لري.

لیکونکې: بوسلې، هیولیګ، شترایت

کټمتوالی د تیلور-ودیزییني د مربع ترمونو د Umschreiben له لارې منځ ته راځي. په بیواریات حالت کې ($n=2$)

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x,y) = f + f_x(x-x_0) + f_y(y-y_0)$$

$$+\frac{1}{2!}(f_{xx}(x-x_0)^2 + 2f_{xy}(x-x_0)(y-y_0) + f_{yy}(y-y_0)^2) + R$$

$$= f + f_x(x-x_0) + f_y(y-y_0)$$

$$+\frac{1}{2!}((x-x_0),(y-y_0))\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (x-x_0) \\ (y-y_0) \end{pmatrix} + R,$$

دی، د کوم سره چې په بنی اړخ د تابع تعریفدیرئ (x_0, y_0) پریښوول شي یا ونه لیکل شي. باقي یا پاتېغړي

$$R = \sum_{|\alpha|=3} \frac{1}{\alpha!}\partial^\alpha f(u,v)(x-x_0)^{\alpha_1}(y-y_0)^{\alpha_2},$$

د

$$(u,v) = (1-\theta)(x_0,y_0) + \theta(x,y)$$

سره د $\theta \in [0,1]$ لپاره د لوي نظم $O(|(x,y)|^3)$ دی.

په ټولیز حالت کې شوونه په ورته تګه ده.

لیکونکي: هیولیک، شترایت

د تابع

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x,y) = \ln(x+1/y)$$

لپاره

$$f_x = \frac{1}{x+1/y}, \quad f_y = -\frac{1}{xy^2+y},$$
$$f_{xx} = -\frac{1}{(x+1/y)^2}, \quad f_{xy} = \frac{1}{(xy+1)^2}, \quad f_{yy} = \frac{2xy+1}{(xy^2+y)^2}.$$

دی.

په ځانګړي توګه په ټکي $(0,1)$ کې د ګرادینت او د هسې- ماتریکس لپاره لرو

$$\operatorname{grad} f(0,1) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{H}\, f(0,1) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

او له دې سره مربعیز تیلور- وديزيينه

$$\begin{aligned} f(x,y) = & \quad (1,-1)\begin{pmatrix} x \\ y-1 \end{pmatrix} \\ & +\frac{1}{2}(x,y-1)\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y-1 \end{pmatrix} + O(|(x,y)|^3) \\ = & \quad x-y+1+\frac{1}{2}(-x^2+2xy-2x+1+y^2-2y) \\ & + O(|(x,y)|^3). \end{aligned}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دې لپاره چې په ټکي $(1,1,1)$ کې د

$$f(x,y,z) = (xy)^z$$

تيلور-وديزيينه وټاکو، شميرولومړی

$$f_x = yz(xy)^{z-1}, \quad f_z = \ln(xy)(xy)^z,$$
$$f_{xx} = y^2 z(z-1)(xy)^{z-2}, \quad f_{zz} = (\ln(xy))^2(xy)^z,$$
$$f_{xy} = z(xy)^{z-1} + xyz(z-1)(xy)^{z-2}, \quad f_{xz} = y(xy)^{z-1} + yz\ln(xy)(xy)^{z-1},$$

(f_y ، f_{yy} او f_{yz} د متحولې د بدليدو له لارې لاسته راځي).

له دې سره لاسته راځي

$$\operatorname{grad} f(1,1,1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{H}\, f(1,1,1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

او له دې سره سړی لاس ته راوړي

$$f(x,y,z) = 1 + (1,1,0)\begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z-1 \end{pmatrix}$$

$$+\frac{1}{2}(x-1, y-1, z-1)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z-1 \end{pmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$+ O(|(x,y,z)|^3)$$

$$= 1 + (x-1) + (y-1) + (x-1)(y-1)$$

$$+(x-1)(z-1) + (y-1)(z-1)$$

$$+ O(|(x,y,z)|^3).$$

لیکونکي: بوسلې، هیولیګ، شترایت

د نیوټن تنلار ***Newton-Verfahren***

د یوه نه کرښيز مساواتسیستم

$$f_1(x_*) = \cdots = f_n(x_*) = 0$$

حل $x_* \in \mathbb{R}^n$ کیدی شي د

$$f'(x)\Delta x = f(x)$$
$$x \leftarrow x - \Delta x$$

له لارې تعریف شوی د نیوټن ایتریشن و ټاکل شي.

که f دوه واره ناپریکیدونکی توګه دفررنشیالوړ او د جاکوبي-ماتریکس $f'(x_*)$ برعکسوړ وي، نو د x_* په یوه چاپیریال U کې د پیل ارزښت لپاره دا تلنلار مربعيز کونورګ یا پولې ته تلونکې ده

$$|x_{\mathrm{neu}} - x_*| \leq c|x_{\mathrm{alt}} - x_*|^2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په ځانګړې توګه د $x \in U$ لپاره $\det f'(x) \neq 0$ دی، داسې چې د Δx لپاره دا کرښیز سیستم یواځنی حل کیدونکی دی.

لیکونکي: هیولیګ، شترایت

د یوه حل x_* لپاره د نږدېوالي x_{alt} څخه په مخ ته تلنه کیدی شي د f کرښیز اپروکسیمیشن له لارې یو ښه شوی نږدیوالی x_{neu} د ټاکل شي، دا په دې معنا چې له

$$0 = f(x_*) = f(x_{\text{alt}}) + f'(x_{\text{alt}})(x_* - x_{\text{alt}}) + R, \quad R = O(|x_* - x_{\text{alt}}|^2)$$

څخه سړی د x_* پسې حل له لارې او باتې غړي پاتې یا لرې کیدو سره د ایتریشنقانون

$$x_{\text{neu}} = x_{\text{alt}} - \left(f'(x_{\text{alt}})\right)^{-1} f(x_{\text{alt}}).$$

ګټلی شي.

که لومړی مساوات د $f(x_{\text{alt}})$ پسې حل شي،

$$f(x_{\text{alt}}) = -f'(x_{\text{alt}})(x_* - x_{\text{alt}}) - R,$$

او دا د ایتریشن قانون کې ځا په ځاي کړي، نو لاس ته ترې راځي

$$x_{\text{neu}} = x_* + \left(f'(x_{\text{alt}})\right)^{-1} R.$$

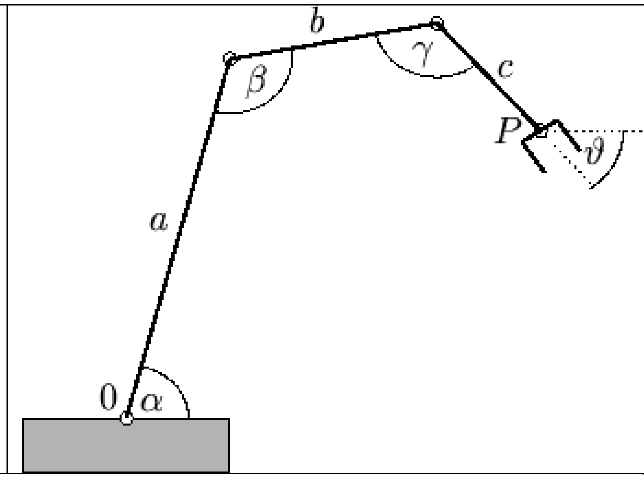
د $f(x)$ د ناپریکیدني او مشتقوړوالي په بنسټ $\left|(f'(x))^{-1}\right|$ په یوه د x_* چاپیریال U کې محدود یا رابند دی او له دې سره

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$|x_{\text{neu}} - x_*| = \left| \left(f'(x_{\text{alt}})\right)^{-1} R \right| \le c\left|x_{\text{alt}} - x_*\right|^2 .$$

لیکونکي: بوسلي، هیولیګ، شترایت

د نیوټن-تلنلارد دې د کتنې لپاره یو ساده روبوتر په کاراچول ترخیرنې لاندې نیسو.
دا څیره یا عکس یو د روبوتر لاس ښایي له درې څرخون بندونو سره.
له دې سره د پوزیشن یا ځاي P او ϑ د اخرې برخې لوریزوالی د بندونود کونجونو α، β، γ نا کرښیز تابع q دي:



$$\begin{aligned}
q_1(\alpha,\beta,\gamma) &= a\cos(\alpha) + b\cos(\alpha+\beta-\pi) + c\cos(\alpha+\beta+\gamma-2\pi)\\
q_2(\alpha,\beta,\gamma) &= a\sin(\alpha) + b\sin(\alpha+\beta-\pi) + c\sin(\alpha+\beta+\gamma-2\pi)\\
q_3(\alpha,\beta,\gamma) &= \alpha+\beta+\gamma-2\pi .
\end{aligned}$$

د څرګندو ارزښتونو $a = 3,\ b = 2,\ c = 1$ لپاره د

$$\beta' = \alpha + \beta, \quad \vartheta = q_3 = \alpha+\beta+\gamma-2\pi$$

بدلون یا سبستیچیوشن له لارې سرې دا ناکرښیز سیستم لاس ته راوړي

$$\begin{aligned}
0 = f_1(\alpha,\beta') &= p_1 - 3\cos\alpha + 2\cos\beta' - \cos\vartheta\\
0 = f_2(\alpha,\beta') &= p_2 - 3\sin\alpha + 2\sin\beta' - \sin\vartheta .
\end{aligned}$$

د روبوتر لاس ارام حالت $\tilde{p} = (2,2)^t$، $\vartheta = -\pi/2$ حل $\alpha_0 = \pi/2$، $\beta_0' = \pi$ په ګوته کوي د جاکوبي-ماتریکس

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f'(\alpha_0, \beta_0') = \begin{bmatrix} 3\sin\alpha_0 & -2\sin\beta_0' \\ -3\cos\alpha_0 & 2\cos\beta_0' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

سره.

و ګاونډي ځاي $\vartheta = -\pi/4, p = (2,3)^t$ ته رسيدنې ته د نيوټن-تنلارد لومړي پل لپاره دې کرښيز مساواتسيستم

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\alpha \\ \Delta\beta' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{bmatrix},$$

حل شي. له دې سره لاس ته راځي $\Delta\alpha = -\sqrt{2}/6\,,\ \Delta\beta' = -\sqrt{2}/4$ او سړی لاس ته راوړي

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \beta_0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \Delta\alpha \\ \Delta\beta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi/2 + \sqrt{2}/6 \\ \pi + \sqrt{2}/4 \end{pmatrix}.$$

په پوزيشن p کې ناتيکاوی له دې سره همدا اوس په

$$f(\alpha_1, \beta_1') \approx (0.1172,\, 0.0976)$$

راکم شو.

بويلې، هيوليک، شترايت

کريیکال ټکي يا افراطي(که انحرافي) ټکی Kritischer Punkt

(c) ketabton.com: The Digital Library

د یوه سکالار تابع f لپاره سړی x افراطي ټکی بولي، که ګراد یا درجه $f(x) = 0$ grad وي. که دوه واره ناپریکیدونکی مشتقوړ وي، نو د افراطي ټکي تیپ یا ډول، دا په دې معنا چې د تابعګراف د x په یوه چاپیریال کې د هسي-ماتریکس له لارې تړا کل کیږي. د $\mathrm{H}\,f(x)$ د ایګن ارزښتونو λ_i د مخنخښې له امله د لاندې ترمنځ توپیر کوي:

- هواره ټکی(یعنې په یوه سطحه پروت-) : ټول ایګن ارزښتونه λ_i صفر دي.

- هګېډوله یا بیضوي ټکی: ټول ایګن ارزښتونه λ_i د صفر سره نامساوي دي او برابرېیا همغه مخ نخښې لري. تابع f په دې حالت کې په x کې یو ځایز(لوکال) افراتیت لري

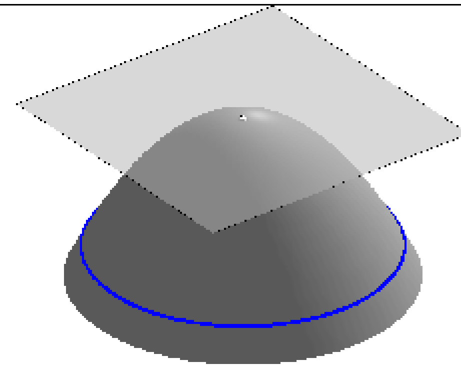
- هایبراپاربولیک ټکی : ایګن ارزښتونه λ_i شته د مختلفو مخنخښو سره. سړی x زینټکی هم بولي.

- پارابولیک ټکی: لږ تر لږه یو ایګن ارزښت λ_i صفر دی اونور ټول ا یګن ارزښتونه برابره مخنخښه لري.

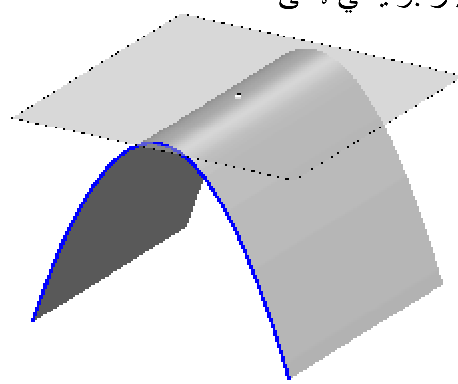
په نخښهوني یا نوموني د جګکرښې له لارې په بی واریات حالت کې پاموړ یا جالبې دي، لکه دا چې په څیره کې کښل شوې دي.

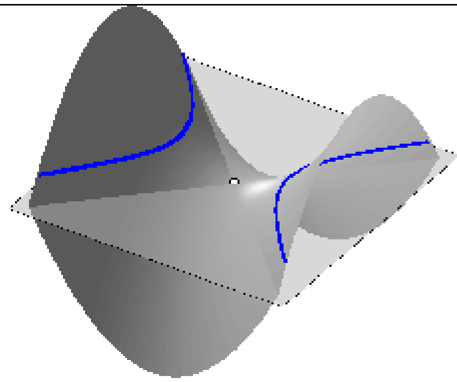
بیضوي ټکی	های پارابولیکي ټکی

(c) ketabton.com: The Digital Library



پارابولیکي ټکی





د دوه متحولو یا اووښتونو د تابع ته
کیدی شي ډول یا ټیپ د هسي-ماتریکس
د دیترمینانت سره ټولګیز کړو. که
$< 0 \quad \det(\mathrm{H}\, f) > 0$
وي،نو ادا (   )
یو افراطیت دی(یو زینتکی دی).
د یوه مینیموم همداسي ماکسیموم لپاره
$< 0 \qquad \mathrm{Spur}(\mathrm{H}\, f) > 0$
همداسي
دی. که دیترمینانت له منځه لاړه یا
ورکه شي او هسي- ماتریکس صفرنه
وي، نو ټکی پارابولیک دی.

لیکونکي: هیولیک، وایس

د تابع

$$f(x, y) = y(1 - x^2 - y^2)$$

افراطي(کریتیکيkritischen) ټکي همداسي ټیپ وټاکل شي. د دې لپاره سرې لومړی ګرادینت جوړوي او بیا د هسي – ماتریکس:

$$\operatorname{grad} f = \begin{pmatrix} -2xy \\ 1 - x^2 - 3y^2 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{H}\, f = \begin{pmatrix} -2y & -2x \\ -2x & -6y \end{pmatrix}.$$

له

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\operatorname{grad} f = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad xy = 0 \quad \wedge \quad x^2 = 1 - 3y^2$$

څخه د انحرافي ټکي په څير

$$\left(0, \pm 1/\sqrt{3}\right), \qquad (\pm 1, 0),$$

لاسته راځي. د هسي ماتریکس هر ځل دلاندې سره برابر دی

$$\begin{pmatrix} \mp 2/\sqrt{3} & 0 \\ 0 & \mp 6/\sqrt{3} \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & \mp 2 \\ \mp 2 & 0 \end{pmatrix}$$

د $(x, y) = \left(0, \pm 1/\sqrt{3}\right)$ لپاره دی $\det(\mathrm{H}\, f) > 0$ او

$$\operatorname{Spur}(\mathrm{H}\, f) = \mp 8/\sqrt{3}\,.$$

له دې سره په $\left(0, -1/\sqrt{3}\right)$ کې یومینیموم او په $\left(0, 1/\sqrt{3}\right)$ کې یو ماکسیموم شتون لري.

د $(x, y) = (\pm 1, 0)$ لپاره باور لري

$$\det(\mathrm{H}\, f) = -4 < 0\,,$$

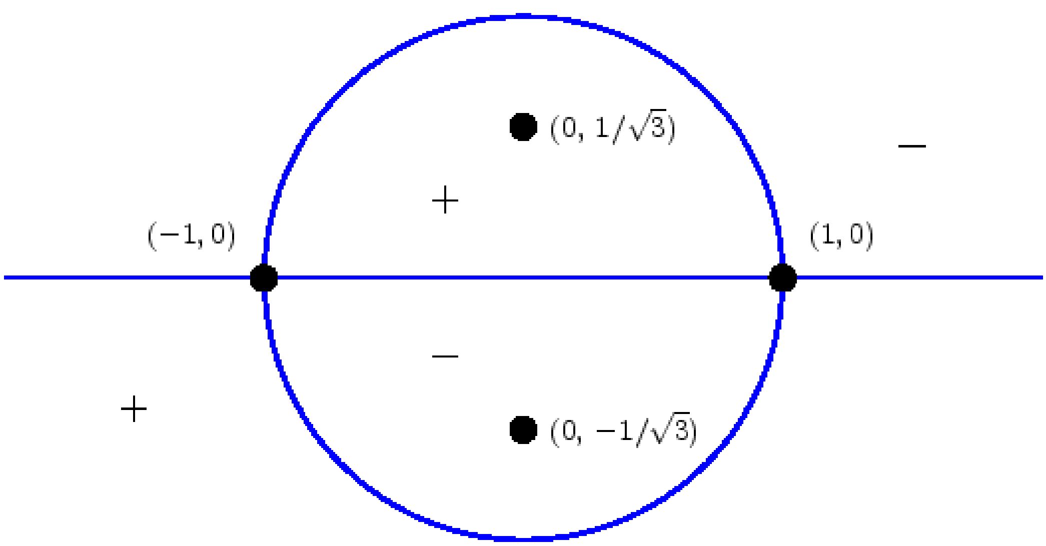
نو دلته یو زینټکی شته.

د کریمیکیټکو تیپ کیدی شي د صفرځایتوکواو د f له دې څخه ورکړ شوو مخنخښنو وېشنو له لارې وپیژندل شي. د f ضرب بڼې لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x,y)=0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad y=0 \quad \vee \quad x^2+y^2=1\,,$$

داا په دي معنا چي د صفرځايډيرئ د x –محور G او يونګردئ C څخه جوړ دئ. د G يا C پل اړولو سره مخنخښه بدليږي. په غوښتکوکي $\operatorname{grad} f$ ورکيږي، ځکه لورمشتقونه د G او C په اوړدوالي کې صفر دي. د مخ نخښي بدليدني په بنسټ دا يو زينتکی دي. د يوون)واحد)ګردئ تيکلي په نيمايي، چې د صفرتکيډيرئ څخه يي ژئ جوړيږيو بايد هر ځل يو افرطيت شتون ولري، ځکه چې ډيرئ کرمپکت ده او f په ژئ صفر دی. د مثبت تابع ارز/ښت سره دا يو ماکسيموم دی او د منفي سره يومينيموم.



ليکونکي: بوسلي، هيوليک

د تابع

$$f(x,y)=(y-x+x^2)y$$

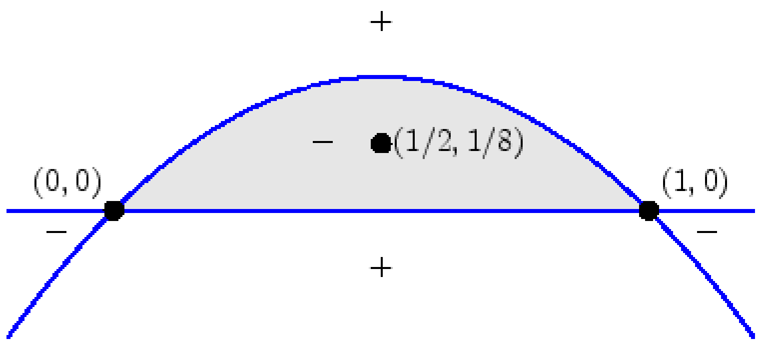
لپاره

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\operatorname{grad} f = \begin{pmatrix} (-1+2x)y \\ 2y - x + x^2 \end{pmatrix}$$

دی.

دا انحرافي ټکي critical pointله دې امله $(0,0),\ (1,0),\ (\frac{1}{2},\frac{1}{8})$ دي. تيپ يا ډول کيدی شي د f د مخنخښي ويش څخه وټاکل شي.



د x –محور سره د پارابولونو غوښتکي(د تقاطع نقطي) زين ټکي دي، څکه چې په f چاپيريال کې زيايز(مثبت٩ او کميز(منفي) ارزښتونه شتون لري. په خړه روشو ؟؟ کې صفر په ژئ يا غاړه دی او کميز ارزښت په دننه کې، بايد هلته لږترلږه يو ځايز يا لوکال مينيمومشتون ولري.

شميرپوهنيزدا تبوپيا ډول د هسي-ماتريکس په مرسته فصديقيدی شي.

$$\operatorname{H} f = \begin{pmatrix} 2y & 2x-1 \\ 2x-1 & 2 \end{pmatrix}.$$

د انتقادي يا انحرافي ټکيلپاره لاس ته راوړو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\mathrm{H}\,f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{H}\,f(1,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{H}\,f(1/2,1/8) = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

په لومړیو داوړو ټکو کې د هسي-ماتریکسدیترمینانت کمیز دی، ټکي لکه انتظار چې کیده زینټکي دي. په $(1/2,1/8)$ کې دیترمینانت او شپور Spur زیاتیز یا مثبت دي، پس دلته یو ځاییز یا لوکال مینیمومو لرو

(Autoren: Höllig/Reble)

د ډېرو متحولو- یا مولتیواریات توابعو افراطیت

xtrema multivariater Funktionen

که $f(x_*)$ د x_* په یوه چاپیریال د یوه ناپریکیدونکي مشتقوړ سکالار تابع f مینیموم(ماکسیموم) وي، نو باور لري

$$\operatorname{grad} f(x_*) = 0\,.$$

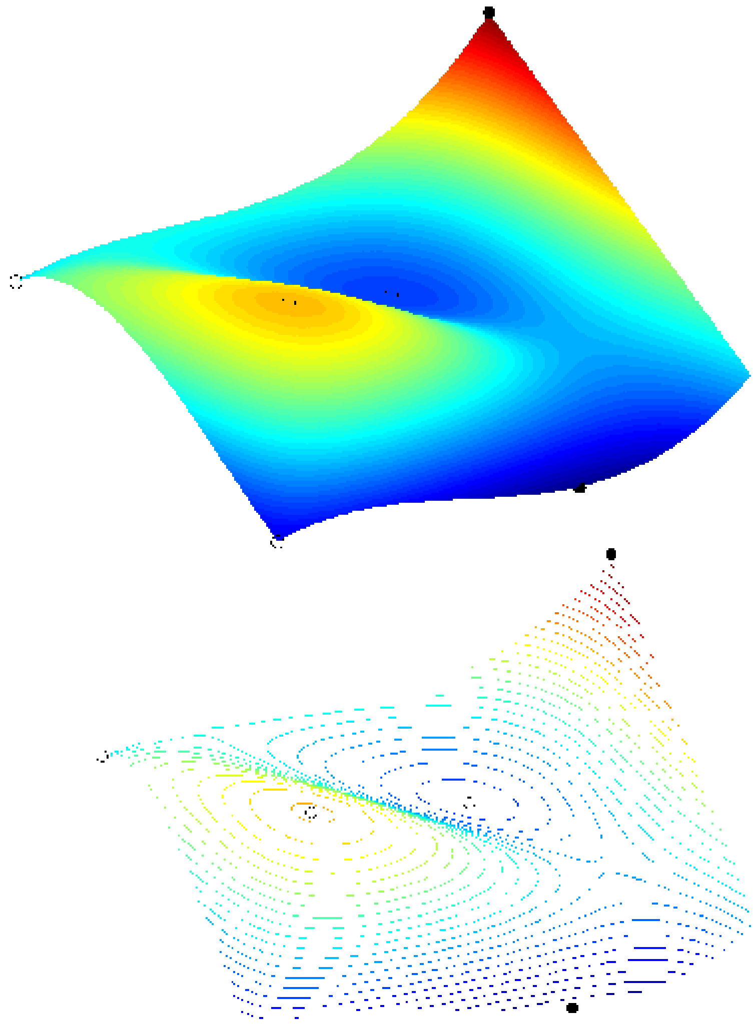
یو پورهکید ونکیشرط دی، چې برسیره پردې د هسی-ماتریکس ټول ا یګن ارزښتونه په انحرافټکي x_* زیاتیز یا مثبت(کمیزیا منفي) وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

که ایګن ارزښتونه د مختلفومخنخښو سره شتونولري، نو دا یو زینتکی دی، یعنېځایز یل لوکال افراطیتکی نه دی. که د صفر سره نابرابرو ایګن ارزښتونو د برابر منخنخښي سره لږتر لږه یو ایګن ارزښت صفر وي، نو د احرافي یا انتقادي اټکي x_* تیوپ یا ډول د دویممشتق له لارې نه شي ټولګیز(صنفي) کیدی یعنې چې په کومه ډله یا ټولګي کې دی.
ځاییز مینیموم(ماکسیموم) کیدی شي د تعریف ورشو D د ژئ ټکو په څیر هم رامنځ ته شي. په دې حالت کې باید لوریز مشتق $\partial_v f(x_*)$ د D په منفي ښودونکي لپاره لور v مثبت(منفي) وي.

د یوه سکالار تابع f یو ځاییز افراطي ټکی په یوه ډیرئ D یا انحرافي ټکی دی(دا په دې معنا چې $\operatorname{grad} f = 0$)، یو ژئ ټکی یا د ټوټه – پارشل مشتق پریکیدونکی ځای دی. کیدی شي په دې ځایونو کې مینیموم او ماکسیموم په دې ټکو کې د تابع ارزښتونو د پرتلې له لارې وشمیرل شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



ځیرونه یا تابع مختلف امکانات ښايي. دلته ځاییز افراطي ټکي په ګردئ او
ګلوبال یا ټولیز افراطي ټکي په ټکو سره په نخښه شوي دي.

لیکونکي: بوسلي، هیولیک، وایس

د کرښو په اوږدو تابع f راوړو او د په خوښه لور v لپاره تعریفوو

$$g(t) = f(x_* + tv)\,, \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که f په x_* کې یو ځاییز افراطیت ولري، نو g په $t=0$ کې یو افراطیت لري.

پایله یې ده

$$0 = g\prime(0) = (\operatorname{grad} f(x_*))^{\mathrm{t}} v = \partial_v f(x_*)\,.$$

دا چې v په خوښه ټاکلی وو، باید ګرادینت په x_* کې ورکشي.

د مینیموم لپاره د f تعریفورشو تنها په ژئ لاس ته راځي، چې د D په دننه لور ښودونکي وکتور v لپاره لوریز مشتق ورکیږي. تنها په داسې لورو g د $t=0$ په یوه چاپیریال کې په یوه ښې اړخیز چاپیریال کې یو غبریز جګیدونکی دی. د یوه ما کسیموم لپاره په ورته توګه دلا یل راوړل کیږي

که $\operatorname{H} f(x_*)$ فقط مثبت ایګن ارزښتونه ولري، نو د وکتور v لپاره د $|v|=1$ سره باور لري

$$v^{\mathrm{t}} \operatorname{H} f(x_*) v \geqslant c > 0\,.$$

د دویم مشتق د ناپریکیدنې له امله دا چاپیریال د c په ځای کې د یوې ثابتې $c/2$ سره همداسې د x_* په یوه چاپیریال U کې ټیک پاتې کیږي. د g د تیلور- ودیزیینې سره لاس ته راځي

$$g(t) = g(0) + \underbrace{g\prime(0)t}_{=0} + \frac{1}{2} g''(\theta t) t^2$$

د $\theta \in [0,1]$ سره. د

$$g''(\theta t) = v^{\mathrm{t}} \operatorname{H} f(x_* + \theta t v) v^{\mathrm{t}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له امله د 0 په نږدې کې د t لپارهلاس ته راځي

$$g(t) \geqslant g(0) + (c/2)t^2 \,,$$

دا په دې معنا چې f په هره لور په x_* کې یو ځا ییز مینیموم لري. د ماکسیموم د پوره کیدونکو شرایطو د لاس ته راوړلو لپاره په ورته توګه مخ ته تلل کیږي.

لیکونکي: هیولیګ، وایس

د مربع تابع

$$f(x) = \frac{1}{2}x^t A x - x^t b + c$$

ګرادینت د سیومتري ماتریکس A سره دی

$$\operatorname{grad} f = Ax - b$$

او A د هسې-ماتریکس دی. ځاییز یا لوکال افراطي ځایونه د کرښیز مساوات سیستم $Ax = b$ حلونه دي.

که د A ا یګن ارزښتونه مثبت یا منفي وي، نو $\det A \neq 0$ دی او د مساوات $Ax = b$ یواځنی حل د f یواځنی ځاییزاو همداسې ټولیز افراطیت دی.

د څرګندې بیلګې لپاره

$$f(x,y) = \frac{3}{2}x^2 + 2xy + \frac{3}{2}y^2 + x + 4y - 3$$

دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

د

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

حل $(x,y) = (1,-2)$ دی. دا چې $\det A = 5$ او $\operatorname{Spur} A = 6$ مثبت دي،
نو A مثبت ایګنارزښت لري،او (x,y) د f تولیز مینیموم دی

لیکونکي: هیولیګ، وایس

غواړو د تابع

$$f(x,y) = \cos x + \cos y + \cos(x+y).$$

ځاییز اکسترما پیدا کړو، چې f نسبت x او y ته 2π-پریودیک دی او پسې هم

$f(y,x) = f(x,y) = f(-x,-y)$ بسیا کوي،چې د f $(-\pi,\pi] \times [0,\pi]$.
په ورشوکې وڅیړو. د ټوټه مشتق ژئ ټکي او پریکیدنځایونه په پام کې نه نیول کیږي. نو
باید انحرافي ټکي پیدا شي.

له

$$\operatorname{grad} f = \begin{pmatrix} -\sin x - \sin(x+y) \\ -\sin y - \sin(x+y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

لاس ته راځي $\sin x = -\sin(x+y) = \sin y$ ، نو د $y \in [0,\pi]$ لپاره په
ځانګړې توګه $x = y$ یا $y = \pi - x$. دواړه امکانات یو له بل بیل څیړل کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

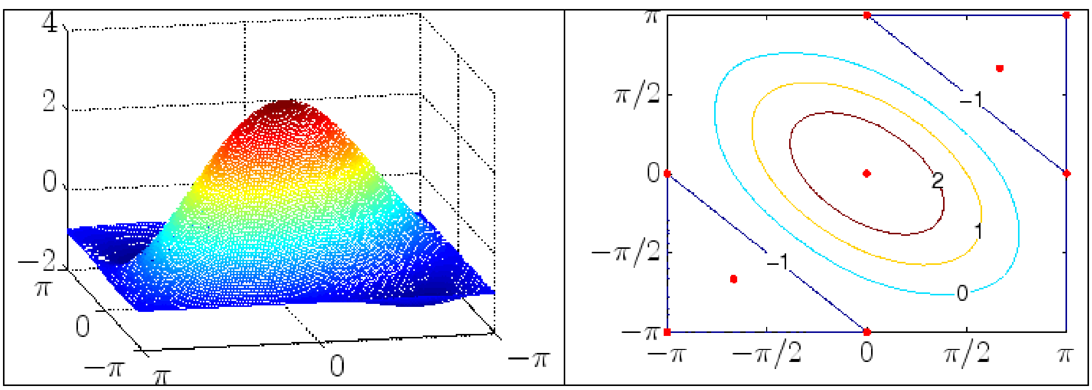
له $x = y$: (i)

$$\sin x = -\sin(2x) = -2\sin x \cos x$$

په اړونده ورشو کې انحرافي ټکي $(0,0)$، (π,π) او $\left(\frac{2\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right)$ لاس ته راځي.

$y = \pi - x$: (ii)

له $\sin(x) = -\sin(\pi) = 0$ انحرافي ټکي $(0,\pi)$ او $(\pi,0)$ لاس ته راځي.



د تابع ارزښتونو د پرتلې څخه، چې د مشتق څخه رانیول کیدی شي، پیژندل کیږي، چې $(0,0)$ یو ځاییز ماکسیموم د ارزښت $f(0,0) = 3$ سره دی او $\left(\frac{2\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right)$ یو تولیزمینیموم د ارزښت $f\left(\frac{2\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{3}{2}$ سره دي.

د بل انحرافي ټکي ډول یا ټیپ کیدی شي د هسي ماتریکس Hesse Matrix

$$\mathrm{H}\, f = \begin{pmatrix} -\cos x - \cos(x+y) & -\cos(x+y) \\ -\cos(x+y) & -\cos y - \cos(x+y) \end{pmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

سره وټاکل شي. په ټکي (π,π) کې

$$\mathrm{H}\,f=\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}.$$

دی.

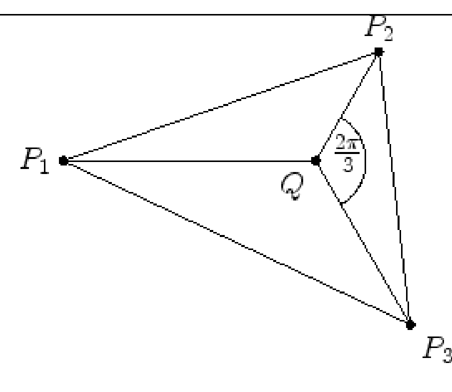
دا چې دیترمینانت منفي دی،نو دا یو زینټکی دی. ټکي $(\pi,0)$ او $(0,\pi)$ د سیومتري
له امله یو بل سره enstsprechen ورکوي. د هسې-ماتریکس

$$\mathrm{H}\,f=\begin{pmatrix}-2 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix},\qquad \mathrm{H}\,f=\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & -2\end{pmatrix}.$$

هم منفي دیترمینانت لري. له دې امله هم دا یو زینټکی دی.

نو په ټولیزه توګه ټکي $(2k\pi,2l\pi)$ ($k,l\in\mathbb{Z}$) د ټولیز ماکسیموم او ټکي $(\frac{2\pi}{3}+2k\pi,\frac{2\pi}{3}+2l\pi)$ همداسې $(-\frac{2\pi}{3}+2k\pi,-\frac{2\pi}{3}+2l\pi)$ د ټولیزمینیموم
په حیث لاس ته راځي

لیکونکي: هیولیګ، وایس

د شتاینرSteiners پرابلم په دې کې پروت دی،چې یو ټکی $Q\in\mathbb{R}^2$ وټاکي، د کوم لپاره چې ورکړ شوو ټکو P_i د واټنونو زیاتون یا جمعه مینیمال شي.دا ساده ځانګړی حالت یې په ځیره کې ورکړ شوی دی. د درې ټکو P_1 ، P_2 ، P_3 لپاره Q یا د یوه ټکي سره سر	

(c) ketabton.com: The Digital Library

	خوري يا د ټول ټکو جوړو لپاره دی $\sphericalangle(P_i, Q, P_j) = 2\pi/3$

د دې لپاره چې غوښتل شوی خویونه(خوي) وښايو، d_i دي د $Q = (x, y)$ او $P_i = (x_i, y_i)$ ترمنځ واټن وښايي، دا په دې معنا چې

$$d_i^2 = (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 \,.$$

د ځنزيريقانون له مخې لاسته راخ

$$2d_i \frac{\partial d_i}{\partial x} = 2\,(x - x_i)$$

لاسته راځي. همداسې

$$\frac{\partial d_i}{\partial x} = \frac{x - x_i}{d_i}$$

اوپه اړونده ډول $\frac{\partial d_i}{\partial y} = \frac{y - y_i}{d_i}$. د واټن تابع ګرادينت ،

$$\operatorname{grad} d_i = \frac{1}{d_i} \begin{pmatrix} x - x_i \\ y - y_i \end{pmatrix} ,$$

له دې امله یویوون یا واحد وکتور دی، کوم چې له P_i د ټکي Q په لور ښايي.

د

$$f = d_1 + d_2 + d_3$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

مينيموم به شي

ماکسيموم د له ټکو P_i څخه په يوه کې و نه نيول شي، په کومو کې چې $\operatorname{grad} d_i$ پريکيدونکيدی، نو بايد په مينيموم کې

$$\operatorname{grad} f = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

باورولري. د وکتورګرادينت د برابر اوږدوالي په بنسټ له دې لاسته راځي، چې که دا يو په بل کينبول شي يو برابراړخيزدرېګوډی جوړوي. د دوي ترمنځ کونج له دې امله برابره دی په $2\pi/3$.

ليکونکي: بوسلي، هيوليک، وايس

د لانګرانژ ضريبونه(څلووني) *Lagrange-Multiplikatoren*

که د ځنګيزو شرايطو $g_i(x) = 0$ لاندې x_* د سکالار تابع f يوځايز افراطي ځای وي، نود لاګرانژ ضريب λ_i شتون لري، داسي چې

$$f'(x_*) = \lambda^{\mathrm{t}} g'(x_*)\,.$$

دلته وړاند نيونه کيږي، چې f او g د x_* په يوه چاپيريال کې ناپرېکيدونکي مشتقوړ دي او د جاکوبي-ماتريکس $g'(x_*)$ پوره رانګ لري.

د فقط يوه فرعينژ – شرايط ساده بنه

$$\operatorname{grad} f(x_*) \parallel \operatorname{grad} g(x_*)\,,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لري که $\operatorname{grad} g(x_*) \neq 0$ وي،د ا په دې معنا و چې د f او g نيوو سطحې يو بل په افراطي ځای کې لمسوي.

د لاګرانژ شرطونه پوره کيدونکينه دي، چې پريکړه وکړي، چې يو لوکال افراطيت مو مخ ته پروت دی او يا مينمومو يا ماکسيموم دی. دا د نورو معلوماتو په مرسته کره کيدی شي.

ټوليزه افرا طيت د توابعو د پرتلي په اساس په ټکو کې کيدی شي، کوم چې د لاګرانژ شرطونه پوره کړي، کوم چې په ورکړ شوي حالت کې هغه د ورکړ شوې ډيرئ په ژئ او يا د g' په رانګ ضايع سره.

ليکونکي: بوسلي، هيوليګ، وايس

n دې د اووښتونو ګڼونن يا تعداد وي او m دې فرعي يا څنګيز شرايط وي.

د $m \geq n$ لپاره نه ښوول کيږي، ځکه چې يو په خوښه n–وکتور د n د کرښيز کمبينشن په حيث د g' دکرښيزو خپلواکو ليکو په څيرانځوروړ دی.

د $m < n$ لپاره دې $x = (u, v) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$ يو د اووښتونو يا واريبلو ټوټه ونه وي، د کوم سره چې د ممکنه پرموتيشن د $g_u(u_*, v_*)$ په څتوړوالی يا برعکس وړوالی له وړاندې نيول شوی وي. نو د ايمپليځيت تابع جملې د فرعي شرايطو له مخې ځاييز حلوړ دی:

$$g(u, v) = 0 \Leftrightarrow u = \varphi(v), \quad v \approx v_* .$$

په تعقيب په يوافراطي ټکي د تابع $v \mapsto f(\varphi(v), v)$ ګرادينت ورکيږي:

$$f_u(u_*, v_*)\varphi'(v_*) + f_v(u_*, v_*) = 0 .$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ځنګیز یا فرعي شرایطو $g(\varphi(v),v)=0$ مشتقیدو له لارې پسې لاسته راځي

$$\varphi'(v) = -g_u(u,v)^{-1} g_v(u,v) .$$

په ګرادینت کې د φ' اینسوولو پسې کتل کیږي، چې د

$$\lambda = f_u(u_*,v_*)g_u(u_*,v_*)^{-1}$$

سره مساوات

$$f_u = \lambda g_u , \quad f_v = \lambda g_v ,$$

کوم چې د $f' = \lambda g'$ شرایطو u - او v -کمپوننتونه په ګوته کوي، په ټکي (u_*,v_*) کې پوره دي.

لیکونکي: هیولیک، وایس

تابع

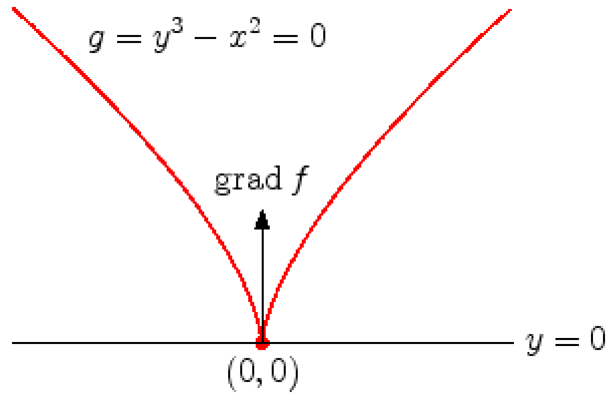
$$f(x,y)=y$$

لاندې فرعي شرطونه لري

$$g(x,y)=y^3-x^2=0$$

په څرګند ډول په $(0,0)$ کې یو ځاییز یا لوکال مینیموم.

(c) ketabton.com: The Digital Library



په هر حالت د لاګرنز-شرطونه $(f_x, f_y) + \lambda(g_x, g_y) = 0$ نه دي پوره:

$$(0,1) + \lambda(-2x_*, 3y_*^2) \neq (0,0) .$$

دا له دې امله چېد جاکوبي-ماتريکس $g'(x_*, y_*) = (0,0)$ پوره رانګ نه لري. د g ځاييز حالت د جګ نظم ترمونو له لارې تشريح دي. د لاګرانژ-شرطوه په داسي يوه سينګولار ټکي کې استعمالوړ نه دي.

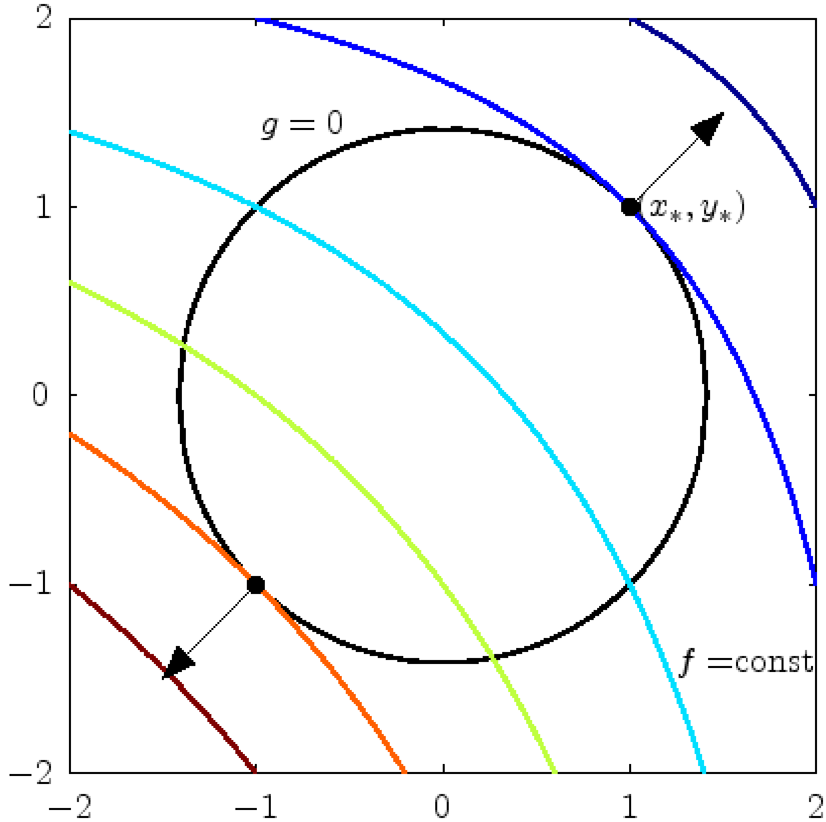
ليکونکي: هيوليګ، وايس

د يوه بيواريات تابع $f(x,y)$ د افراطي ځای لپاره د فرعي يا څنګيزو شرايطو $g(x,y) = 0$ لاندې باور لري

$$(f_x, f_y) = \lambda(g_x, g_y) ,$$

دا په دې معنا چې ګراد g وګراد f ته غبرګ دی. د نورو کلمو سره د f د نيو سطحې په ټکي (x_*, y_*) کې د g له لارې تعريف شوې کرې سره تانجنتي ده يا تانجنت جوړوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



په خيره کې په روښانه توګه ښوول شوې بيلګه کې

$$f(x,y) = (x-3)(y-3) \to \min\,, \quad g(x,y) = x^2 + y^2 - 2 = 0$$

د لاګرانژ-شرايط په لاندې توګه دي

$$(y-3, x-3) = \lambda(2x, 2y)\,.$$

د λ له منځه وړنه راکوي

$$y(y-3) - x(x-3) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (y-x)(x+y-3) = 0\,.$$

د فرعي شرايطو $x^2 + y^2 - 2 = 0$ سره په تړاو ممکنه افراطي ځايونه $(1,1)$ او $(-1,-1)$ لاس ته راځي. دا چې يوناپريکيدونکی تابع په يوه کومپکته ډيرئ هم

(c) ketabton.com: The Digital Library

مينيموم او هم ماکسيموم لري، د تابع ارزښتونو پرتله يې ښايي، چې f په $(1,1)$ کې مينيمال او په $(-1,-1)$ کې ماکسيمال کيږي.

ليکونکي: هيوليګ، وايس

د

$$f(x,y,z) = x + 2y - z$$

افراطييت غاړو پيدا کړو د لاندې فرعي شريطو لاندې

$$x^2 + y^2 - 8 = 0, \quad x + z - 4 = 0\,,$$

کوم چې د توتې(استوانې) غوځی(تقاطع) د يوې سطحې سره يوه هګئ تشريح کوي يا ورکوي.

د فرعي طريطو لاندې د جاکوبپ-ماتريکس دی

$$\begin{pmatrix} 2x & 2y & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

دا فقط د $x = y = 0$ لپاره پوره رانګ نه لري. دا حالت د فرعي سرايطو په اساس نه شيرامنځ ته کيدی. يوه افراطيت (x,y,z) ته پسې هر ځل د لاګرانژ-ضريبونه λ_1, λ_2 داسې شتون لري،چې

$$(1,2,-1) = (\lambda_1, \lambda_2) \begin{pmatrix} 2x & 2y & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

همداسې

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$2\lambda_1 x + \lambda_2 = 1$$

$$2\lambda_1 y = 2$$

$$\lambda_2 = -1\,.$$

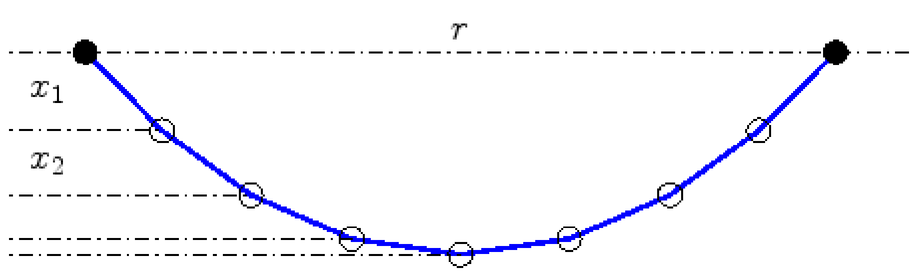
که $\lambda_1 = 1/y$ او $\lambda_2 = -1$ په لومړي برابرون یا مساوات کې ځای په ځای شي، نو $x = y$ ترې لاسته راځي. د فرعي شرایطو څخه ممکنه افرطیت $(2,2,2)$ او $(-2,-2,6)$ لاس ته راوړل کیږي. دا چې په هڅۍ باندې مینیموم او هم ماکسیموم باید شتون ولري، د تابع ارزښت

$$f(-2,-2,6) = -12 < 4 = f(2,2,2)\,,$$

پرتله کونه یې ښایي، داسې چې f په $(-2,-2,6)$ کې مینیمال او په $(2,2,2)$ کې ماکسیمال کیږي.

(Autoren: Höllig/Weiß)

اوس دې په دوه ټکو ځوړند شوي ځنزیر د ځنزیر غړي $2n$ سره برابروزنځای د 1 اوږدوالي سره وټاکی شي.



(c) ketabton.com: The Digital Library

د ځيرې ځخه په نخښهونې سره مو د پوتنشل انرگي مينيمي كوني يا كمونې ته بيايي

$$-\left(\frac{x_1}{2}\right)-\left(x_1+\frac{x_2}{2}\right)-\cdots-\left(x_1+\cdots+x_{n-1}+\frac{x_n}{2}\right)$$

په دې پرابلم د سيومتري په استعمال

$$f(x)=-a_1x_1-\cdots-a_nx_n\rightarrow \min\,,$$

$$g(x)=r/2-\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1-x_i^2}=0\,,$$

د $a_i=n-i+1/2$ سره.

د لاگرانژ-شرطونه په لاندې توگه دي

$$a_i=\lambda\frac{x_i}{\sqrt{1-x_i^2}}\,,\quad i=1,\ldots,n\,.$$

دا كيدى شي د x_i پسې مربع(ځلورئ-) كونې سره حل شي:

$$x_i^2=\frac{a_i^2}{a_i^2+\lambda^2}\,.$$

په فرعي شريطو كې د اينوولو سره لاندې برابرون راكوي

$$\frac{r}{2}=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{\lambda^2}{a_i^2+\lambda^2}}\,,$$

له هغه چې λ او له دې سره x_i نومريكټاكل كيدى شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

مربعیزه(څلورئ ییزه) مینیمال کونه د کرښیز برابرونشرلیطو سره

Quadratische Minimierung mit linearen Gleichungsbedingungen

مربعیزه اوپتیمي کونې پرابلم Optimierungsproblem

$$\frac{1}{2}x^{\mathrm{t}}Gx - c^{\mathrm{t}}x \to \min, \quad Ax = b\,,$$

تیک هلته حل کیدونکې دی، که وکتور b د ماتریکس A په څېره- ورشو کې پروت وي او سیومتریک ماتریکس G د A په زړي مثبت سیمیدیفینیت وي.

تول حلونه x_* د لاګرانژ-شرطونه

$$\begin{pmatrix} G & A^{\mathrm{t}} \\ A & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_* \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ b \end{pmatrix}$$

د یوه لاګرانژ-ضریب λ سره پوره کوي. حل یواځنی دی، که $\operatorname{Kern} A \cap \operatorname{Kern} G = 0$ وي.

که G برعکس کیدونکی وي، ن و کیدی شي بلاکسیستم په ګډه یا په دله حل شي.

سړی لومړی د لاګرانژ –ضریب ټاکي

$$AG^{-1}A^{\mathrm{t}}\lambda = AG^{-1}c - b$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

او له

$$Gx_* = c - A^t\lambda .$$

اوپتیمال وکتور لاسته راوړي.

دا داسې په نامه د شور-کمپلیمنت-متود Schur-Komplement-Methode په ځانګړې توګه هلته موخه ور دی، که G^{-1} ساده وټاکل شي او یا فقط فرعي شرایط شتون ولري.

لیکونمکي: هیولیګ، هیورنر، پفایل

Q دې یو ماتریکس وي، چې مټه یا درز يې د A د زړي لپاره یو بنسټ جوړوي، او y یو وکتور چې اجازه ولري، دا په دې معنا چې $Ay = b$. یو اجازه وکتور x کیدی شي چې په لاندې بڼه ولیکل شي

$$x = y + Qz$$

که په موخه تابع کې ولیکل شي نو لاس ته ترې راځي

$$(Qz)^t Gy = y^t GQz$$

$$\frac{1}{2} z^t Q^t GQz - (Q^t c - Q^t Gy)^t z + \frac{1}{2} y^t Gy - c^t y .$$

د دې مربع تابع یو مینیموم z_* تیک هلته شتون لري، که $Q^t GQ$ مثبت دیفینیت وي، او په دې حالت کې پوره کړي

$$Q^t GQz_* = Q^t (c - Gy) .$$

دا چې دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$Q^{t}u = 0 \Leftrightarrow u \in (\mathrm{Kern}\, A)^{\perp} \Leftrightarrow u \in \mathrm{Bild}\, A^{t}\,,$$

نو ورته کرکتريسک کيدنه لاس ته راځي

$$G(y + Qz_{*}) - c = A^{t}(-\lambda)\,,$$

يعني د لاګرانژ-شرايط.

حل z_{*} يواځنی دی، که G د A په زړي مثبت ديفينيت وي، يعنې که $\mathrm{Kern}\, A \cap \mathrm{Kern}\, G = 0$ وي.

د ډلې يا بلوک سيستم لاندې باندې gestaffelte اينوول شوی حل لاس ته راځي، په کوم کې چې لومړی حل

$$Gx_{*} + A^{t}\lambda = c$$

د کينې لورد AG^{-1} سره ضرب کړي او بدل يا سبستيتوه $b = Ax_{*}$ يې کړي.

ليکونمکي: هيوليګ، هيورنر، پفايل

د اوپټيمي کوني پرابلم حل غواړو پيدا کړو

$$x^2 + 2xy + 2y^2 + 4x \to \min$$

د لاندې فرعيشرايطو لاندې

$$x - 2y = 1\,.$$

دا پرابلم $\frac{1}{2}x^{t}Qx - c^{t}x \to \min$ ، $Ax = b$ د

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$Q = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A = (1, -2), \quad b = 1 .$$

سره په ګوته کوي

په ساده توګه اجازه لرونکي ټکي شتون لري او دا چې Q مثبت ديفينيت دی،يو واځنی حل (x_*, y_*) شتون لري، کوم چېډ لاګرانژ ــشرايطو

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_* \\ y_* \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ټاکل کيدی شي. لاسته راځي

$$x_* = -\frac{2}{5}, \quad y_* = -\frac{7}{10}, \quad \lambda = -\frac{9}{5} .$$

ليکونکي : هيوليګ، وايس

د بيلګي په توګه مربع تابع

$$\frac{3}{2}x_1^2 + 4x_1x_2 - \frac{3}{2}x_2^2 + x_3^2 - 5x_1 + 4x_3$$

د فرعي شرايطو

$$x_1 - 2x_2 + x_3 = -2$$

لاندې مينيمي کيږي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x_1 - 2x_2 + x_3 = -2$$

د

$$G = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = -2$$

دا پرابلم لاندې ستاندارد بڼه لري

$$\frac{1}{2}x^{\mathrm{t}}Gx - c^{\mathrm{t}}x \to \min, \quad Ax = b\,.$$

د دې پرابلم حل باندې چې پريکړه کوو، نو لومړی د A د زړي لپاره يوبنسټ يا باسيس $\{q_1, q_2\}$ ټاکو:

$$(q_1, q_2) = Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

بيا جوړوو

$$S = Q^{\mathrm{t}}GQ = \begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}.$$

دا چې د S ديترمينانت او شپور مثبت دی، نو S مثبت ديفينيت دی، او له دې سره د اوپټيميريکولوپرابلم يو يوائځنی حل لري. دا کيدی شي د کون-تکر-شرطونو -Kuhn-Tucker-Bedingungen سره و ټاکل شي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 0 & 1 \\ 4 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ \hline 1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} x_{*,1} \\ x_{*,2} \\ x_{*,3} \\ \hline \lambda \end{array}\right)=\left(\begin{array}{c} 5 \\ 0 \\ -4 \\ \hline -2 \end{array}\right).$$

سړی $x_* = (1,0,-3)^t$ او $\lambda = 2$ لاس ته راوړي.

په بدیله توګه سړی کړی شي د شور-کمپلمنت-متودوکاروي.

سړی لومړی ماتریکس G برعکس کوي:

$$G^{-1} = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 25/2 \end{pmatrix}.$$

بیا د برابرون $AG^{-1}A^t\lambda = AG^{-1}c - b$ څخه سړی λ ټاکي:

$$-\frac{1}{2}\lambda = -3 + 2 \implies \lambda = 2.$$

د کون-ټرکر-شرایط مو لومړی برابرونډله یا -ګروپ

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{*,1} \\ x_{*,2} \\ x_{*,3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\lambda = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix},$$

مو بیرته حل $x_* = (1,0,-3)^t$ ته بیایي.

لیکونمکي: هیولیګ، هیورنر، پفایل

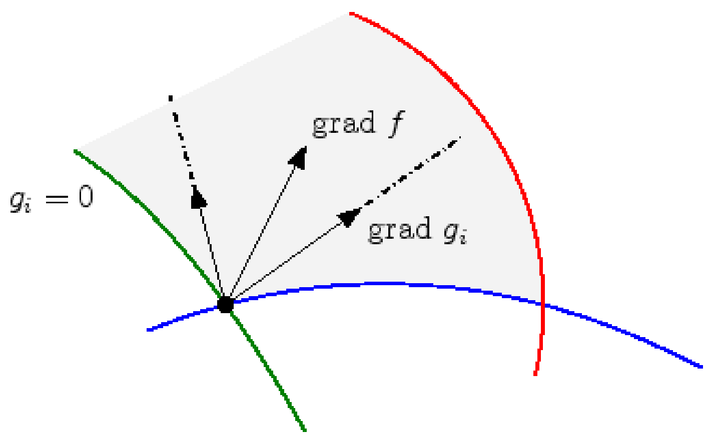
(c) ketabton.com: The Digital Library

د کون-تکر-شرطونه(*Kuhn-Tucker-Bedingungen*)

که x_* د فرعي شرايطو $g_i(x) \geq 0$ لاندې د سکالار تابع f يو مينيموم وي او د فعال برابرونونو $g_i(x_*) = 0$ ، $i \in I$ ګرادينت کرښيز خپلواک وي، نو د لاګرانژ-ضريبونه $\lambda_i \geq 0$ شتون لري، داسي چې ترې لرو

$$\operatorname{grad} f(x_*) = \sum_{i \in I} \lambda_i \operatorname{grad} g_i(x_*) .$$

د لوکال ماکسيموم لپاره په ورته توګه $\lambda_i \leq 0$ دی.



د مينيموم لپاره د کون-تکر شرطونه ځمککچيز يا هنسي په دې معنا دي، چې د موخه تابع ګرادينت چې د فعال فرعي شرايطو څخه خور شوی مخروط (کرښه ، کرښه) کې پروت دی.

پيژنددیری يا ايندکسديریځ I کيدی شي ايمپليثيت د شراطو

$$\lambda^t g(x_*) = 0 , \qquad \lambda \geq 0 ,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاندې کره شي. که $g_k(x_*) > 0$ وي،نو لرو $\lambda_k = 0$ ، دا په دې معنا چې ناساده یا ناتریویال ضریبونه فعال شرایط په ګوته کوي.

لیکونکي: هیولیګ، وایس

سړی باید د x_* په چاپیریال کې فعال شرایط په پام کې ونیسي، ځکه چې نابرابرونونه $g_j(x) > 0$ ، $j \notin I$ په یوه د x_* چاپیریال کې ټیک پاتیږي. تابع f په روښانه توګه په یوه وړه ډیرئ هم مینمال پاتیږي، چې د برابرون شریطو $g_i(x) = 0$ له لارې ورکول کیږي. له دې امله د لاګرانژ-ضریبونوجملې څخه غوښتل شوی کتمتوالی لاس ته راځي. اوس فقط باید وښوول شي، چې $\lambda_i \geq 0$.

کیدی شي د یوه $k \in I$ لپاره (وړاند) نیونه $\lambda_k < 0$ مو تضا د یا مخامخوالي ته بوزي. د ګرادینت د کرښیز خپلواکوالي یو وکتور v شتون لري د

$$(\operatorname{grad} g_k(x_*))^{\mathrm{t}} v = 1, \quad (\operatorname{grad} g_i(x_*))^{\mathrm{t}} v = 0,\ i \in I \backslash k\,,$$

سره، چې د g_i ، $i \neq k$ له لارې تعریف شوې سطحې تنجنتي هوارې (سطحی) باندې پروت دی. $t \mapsto x(t)$ دې په سطحه یوه کږه(منحني)وي د پیل ټکي $x(0) = x_*$ او پیل لور $x'(0) = v$ سره. د $t \to 0$ لپاره دی

$$g_k(x(t)) = g_k(x_*) + \left((\operatorname{grad} g_k(x_*))^{\mathrm{t}} v\right) t + O(t^2) = 0 + t + O(t^2)\,.$$

په کږه باندې ټکي د پوره کیدونکي کوچني $t > 0$ لپاره پریښودونکي (یعنې اجازه لرونکي) دي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$g_k(x(t)) \geq 0, \quad g_i(x(t)) = 0,\ i \in I \setminus k\,.$$

د v جوړښت له مخې او f کټمټوالي لپاره دی

$$\frac{d}{dt}f(x(t))_{|t=0} = (\text{grad}\, f(x_*))^t v = \lambda_k (\text{grad}\, g_k(x_*))^t v = \lambda_k < 0\,.$$

تابع fد کرښې په اوږدوالي کمیږي، د $f(x_*)$ د مینیمالوالي سره په تضاد یا مخامخ.

لیکونکي: هیولیګ، وایس

د کون-ترکر-شرایطو ښوولو ته د تابع $f(x,y) = y^2 - x$

افراطیت د

$$y - x^2 \geq 0\,, \quad 2 - x^2 - y^2 \geq 0$$

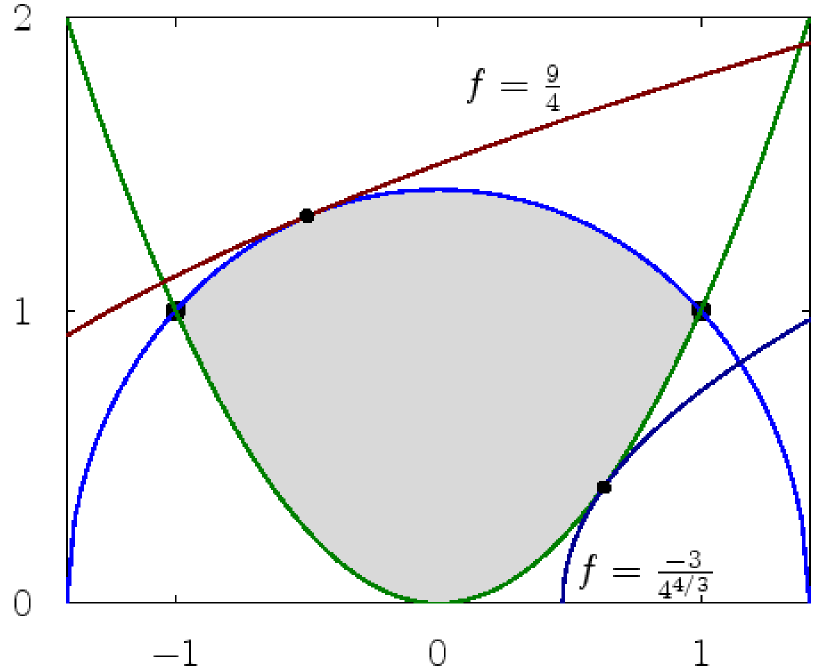
له لارې په تعریف شوي رونخړ ډیرئ D باندې ټاکو.

د کون-تکر-شرطونه دي

$$(-1, 2y) = \lambda(-2x, 1) + \mu(-2x, -2y)$$

$$\lambda(y - x^2) + \mu(2 - x^2 - y^2) = 0\,,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



چیرته چې د لاګرانژ- ضریبونه λ او μ برابري یا همغه مخنخښي لري. د څېرې څخه پیژندل کیږي، چې د معال ځن\یز شرایطو د ټولو اجازه لرونکو ټکو لپاره کربنیز خپواک دي)(دا صفر نه دي او د ژیکړې په غوځتکو غبرګ نه دي).له دط امله د کون-تکر شرایط د ټولو اکستریم ارزښتونو لپاره اړیندي. په دې توګه یا داسې چې کوم ځنګیز شرطونه فعال دي، باید لاندې حالتونه وپیژندل شي:

(i) $\lambda = 0, \quad \mu = 0$ (کوم ځنګیز شرط فعالنه دی):د $\operatorname{grad} f$ لپاره مساوات

$$(-1, 2y) = (0, 0)$$

د پوره کېدووړ نه دی. په دې لاس ته راړنه د D په دننه کې f اکستریما نه لري.

(ii) $\lambda = 0, \quad \mu \neq 0$) $2 - x^2 - y^2 \geq 0$ فعال): له

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(-1,2y)=\mu(-2x,-2y)$$

$$2-x^2-y^2=0$$

په تعقیب $\mu=-1<0$ ($y=0$ د $(\pm\sqrt{2},0)\notin D$ له امله ناشونی دی)،

$x=-1/2$ او $y=\sqrt{7}/2$. د یوه لوکال اکتریموم لپاره د کون – تکر – شرطونه پوره دي.

$\mu=0$, $\lambda\neq 0$ (iii) ($y-x^2\geq 0$ فعال): له

$$(-1,2y)=\lambda(-2x,1)$$

$$y-x^2=0$$

لاس ته راځي

$$\lambda=2y=2x^2\geq 0\,,\quad -1=(2x^2)(-2x)\Leftrightarrow x=4^{-1/3}$$

او $y=4^{-2/3}$.

د کون-تکر-شرطونه د یوه لوکال اکستریموم لپاره پوره دي.

$\mu\neq 0$, $\lambda\neq 0$ (iv) ($y-x^2\geq 0$ او $2-x^2-y^2\geq 0$ فعال): له

$$y=x^2\quad\wedge\quad x^2+y^2=2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاس ته $(x,y)=(1,1)$ راځي يا $(x,y)=(-1,1)$. د $\operatorname{grad} f$ لپاره په مساوات کې ځای په ځای کوو نو راکوي

$$(-1,2)=\lambda(-2,1)+\mu(-2,-2) \quad \Rightarrow \quad \lambda=1\,, \quad \mu=-\frac{1}{2}$$

همداسې

$$(-1,2)=\lambda(2,1)+\mu(2,-2) \quad \Rightarrow \quad \lambda=1/3\,, \quad \mu=-\frac{5}{6}$$

د لاګرانژ ضرب د مختلفومخنخښنو له امله يا په بنسټ دواړه ټکي اکستريم ځايونه نه دي.

دا چې f په کومپاکت ډېرئ D هم ماکسيمومو او هم مينيموم لري، کېدی شي په ډول يې د لاګرانژ مخنخښې په لاس پرېکړه وشي يا هم د تابع ارزښتونو د پرتلې په اساس. په تعقيب f په $(-1/2,\sqrt{7}/2)$ کې يو ماکسيموم او په $(4^{-1/3},4^{-2/3})$ کې يو مينيموم لري.

ليکونکي: هيليک، پفايل

د مينيمي پرابلم لپاره

$$f(x)\rightarrow \min\,, \quad a_i \le x_i \le b_i$$

د کون-تکر-شرطونه د لوکالمينيموم لپاره

$$\operatorname{grad} f(x_*)=\sum_i (\lambda_i-\mu_i)\, e_i$$

$$\lambda_i\,,\ \mu_i \ge 0$$

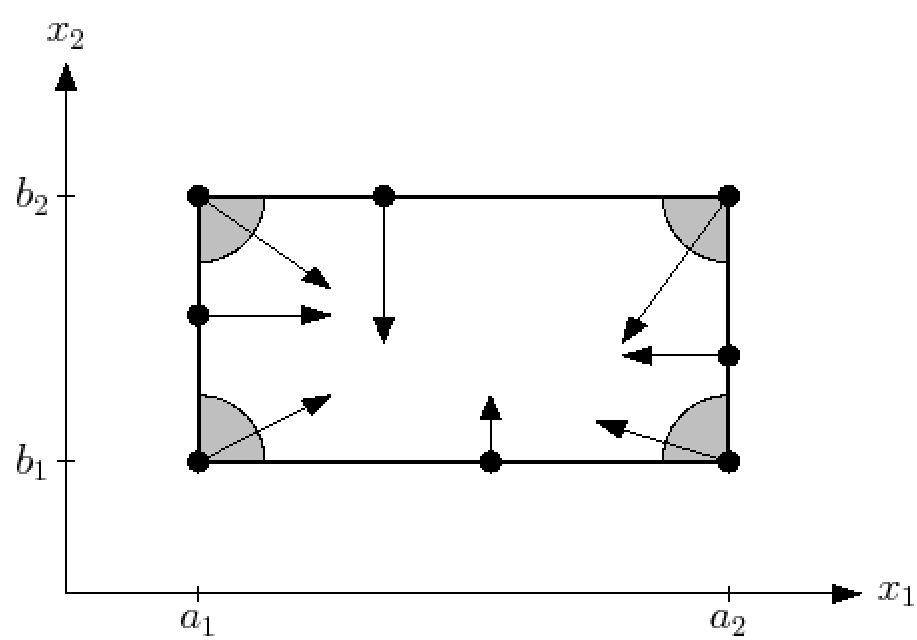
(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lambda^{\mathrm{t}}\,(x_* - a) + \mu^{\mathrm{t}}\,(b - x_*) = 0$$

دي د e_i د i -م يوون-يا واحدوکتور سره. له دې سره ارزښتونه $\pm\infty$ د انتروال د پولې په توګه پرېښوول شوی يعنط نجازه لري، داسط چې تولې متحولې يا اووښتونې د همغه ډول نامساوات پوره کوي.

که $a_i < x_{*,i} < b_i$ وي، نو نودواړه د لاګرانژ-ضريبونه λ_i او μ_i صفر دي او له دې سره د $\operatorname{grad} f(x_*)$ i -م کمپوننت g_i. برعکس که يو له دې نامساواتو د x_i لپاره فعال وي، په اړونده توګه د لاګرانژ-ضريب د g_i مخنخښه کره کوي:

$$x_{*,i} = a_i \;\rightarrow\; g_i \geq 0\;; \quad x_{*,i} = b_i \;\rightarrow\; g_i \leq 0\,.$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

تابع د بیواریات موخه فنکشن لپاره د $\operatorname{grad} f(x_*)$ ممکنه لورې ښايي د مینیموم لپاره په اړخونو د $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ په ګوډونو یا کونجونو. د مینیموم لپاره د ولاړګوډېز یا مستطیل په دننه کې $\operatorname{grad} f(x_*) = 0$ باور لري.

لیونکي: هیولیګ، پفایل

د یوه کرښیز تابع

$$(c_1, \ldots, c_n)x \to \min$$

مینیموم د کرښیزو فرعي شرطونو لاندې

$$Ax \geq b$$

د یوه $m \times n$ -ماتریکس A سره سرې مرښیز پروګرام ښايي.

یو حل $x_* \in \mathbb{R}^n$ د کون-تکر-شرطونه پوره کوي

$$c^t = \lambda^t A, \quad \lambda^t(Ax_* - b) = 0$$

د $\lambda_i \geq 0$ سره.په ورته توګه د ماکسیموم لپاره $\lambda_i \leq 0$ باور لري.

د روښانه بیلګې

$$x + y \to \min, \qquad x \geq 2, \qquad y \geq 1, \qquad x + 2y \geq 8$$

لپاره دی

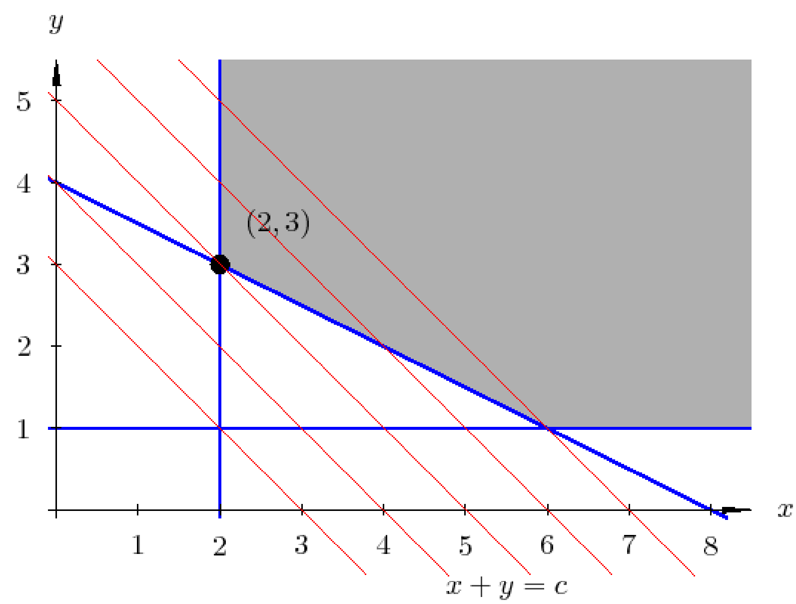
(c) ketabton.com: The Digital Library

$$c = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$$

او سړی د کون-تکر-شرایط لاس ته راوړي

$$1 = \lambda_1 + \lambda_3, \qquad 1 = \lambda_2 + 2\lambda_3, \qquad \lambda_1[x-2] + \lambda_2[y-1] + \lambda_3[x+2y-8] = 0$$

د $\lambda_i, [\dots] \geq 0$ سره. سړی زر پیژندلی شي، چې تیک یو د لاگرانژ -ضریب باید صفر وي، چط په بل ډول په شرایطو کې یو تضاد باید رامنځ ته شي. په دې درې حالتونو کې دوه فرعي شرایط فعال دي. دا (x,y) یواځنی کره کوي:



$$\lambda_1 = 0 \longrightarrow (6,1) \qquad \lambda_2 = 0 \longrightarrow (2,3) \qquad \lambda_3 = 0 \longrightarrow (2,1)$$

له دې سره $(2,1)$ فرعي شر طونهنه پوره کوي او د $\lambda_1 = 0$ لپاره $(2,1)$ او $\lambda_3 = 1$ راکوي، دلته د لاگرانژ د ضرب د همغط یا برابرې مخنخښي اړیین شرطونه

(c) ketabton.com: The Digital Library

نه دي پوره.د تابع مینیموم په $(2,3)$ نیول یا فرض کیږي. په دط حالت کې د لاګرانژ – ضریبونه داسي دي $\lambda = (1/2, 0, 1/2)^t$.

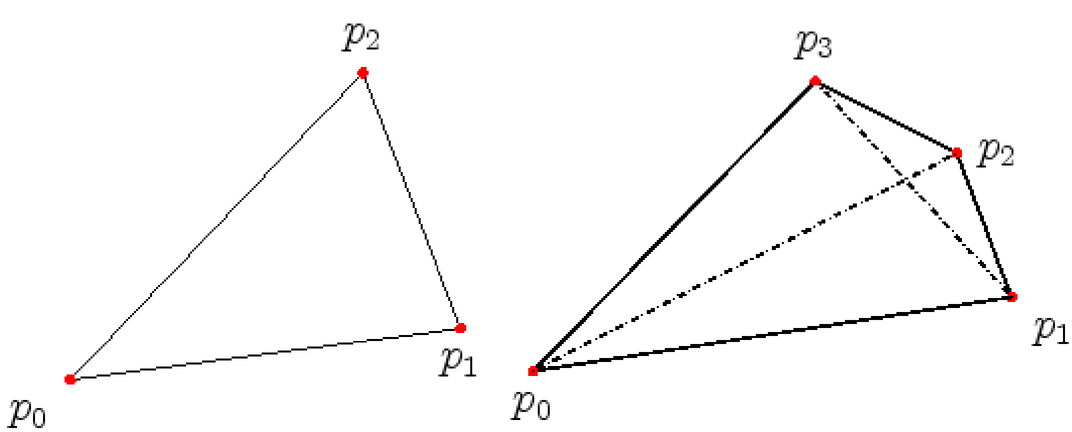
یوځمککچیز یا هدسي جوړښت په څیره کط ښوول شوی دی. حل تکی $(2,3)$ دی، په کوم کې چې د موخه تابع سطحیزې کرښې معتبره ورشو لمس کړي. دا روښانه ده چې موخه تابع جګیږي(ټیټیږي)، که سطحیزه کرښه دا معتبره ساحه غوځه(غوځه نه) کړي.

لیکونکي: بوسلي، هیولیګ

سیمپلکسSimplex

یو n–بعدیز(پراخېدونی) سیمپلکس S د $n+1$ ټکو $p_0, \ldots, p_n$ یو konvexe Hülle ده، چې دا ټول په یوه $(n-1)$-بعدیز لاندې فضا کې نه دي پراته:

$$S = \{x = \sum_j \alpha_j p_j \; : \; \sum_j \alpha_j = 1, \; \alpha_j \geq 0\}$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

n=2 n=3

دوه- او درېبعدیز سیمأبمکسونه د درې ګوډې همداسې تیترایدر بلل کیږي.

د یوه سیمپلکس ډکی یا حجم د وکتورونو $p_i - p_0\,,\ i = 1, \dots, n$ د دیترمینانت په مرسته افاده کیدی شي:

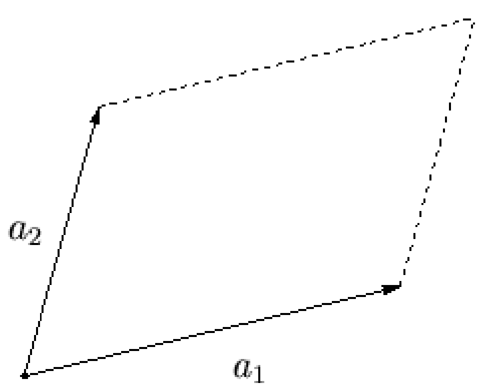
$$\operatorname{vol} S = \frac{1}{n!} |\det(p_1 - p_0, \dots, p_n - p_0)|\,.$$

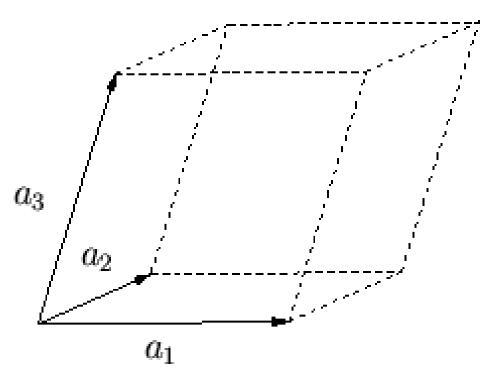
(Autoren: Boßle/Höllig/Streit)

غبرګ اپیپید(غبرګ اړخیز یا مکعبنما)Parallelepiped

یو n -بعدیز (یا پراخیدونی)غبرګ اپیپید P د n کربنیزو وکتورونو a_i څخه غزیږي:

$$P = \{x = \sum_i \alpha_i a_i : \ 0 \le \alpha_i \le 1\}\,.$$





(c) ketabton.com: The Digital Library

n=2 n=3

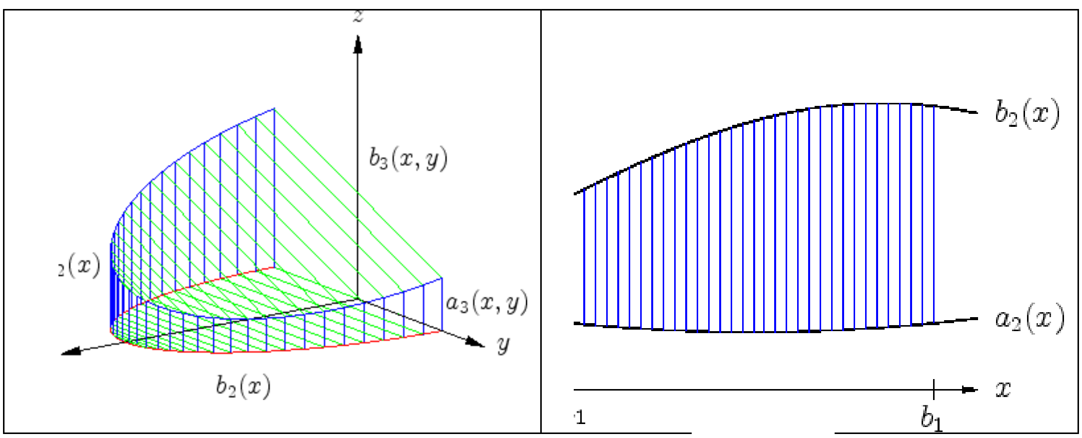
دوه – او درې بعديز غبرګ خواييز غبرک اړخيز همداسې شپاات بلل کيږي.

د غبرګخواييزوډکی(حجم) د ترې غزيدلووکتوررونو د ديترمينانت مطلق ارزښت دی:

$$\text{vol}\, P = |\det(a_1, \ldots, a_n)|\,.$$

ليکونکي: هيوليګ، شترايت

د انتيګريشن ورشو



يوه بنستسزه ورشو $V \subseteq \mathbb{R}^n$ د يوه مناسب کواورديناتسيستم ترانسفورميشن $x \rightarrow x'$

پسې د د ناپريکيدونکو توابعو a_i او b_i ګراف له لارې رابند دي:

$$\begin{aligned}
&a_1 \le x_1' \le b_1 \\
&a_2(x_1') \le x_2' \le b_2(x_1') \\
&\vdots \\
&a_n(x_1', \ldots, x_{n-1}') \le x_n' \le b_n(x_1', \ldots, x_{n-1}')
\end{aligned}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د بنسټيز ورشوګانو يو تر زئکړو يا منحنيو پای ټولنه رګولار ورشو بلل کيږي. د دې لپاره يو ځاګړی حالت يو سيمپلکس دی چې پوليوګونالورشو څخه جوړ وي:

ليکونکي: بوسلی، هيوليک، شترايت

د هوزدورف واټن Hausdorff-Abstand

په يوه متريکيفضا M کې د يوې ډيرئ U لپاره د متريک d سره کيدی شي د

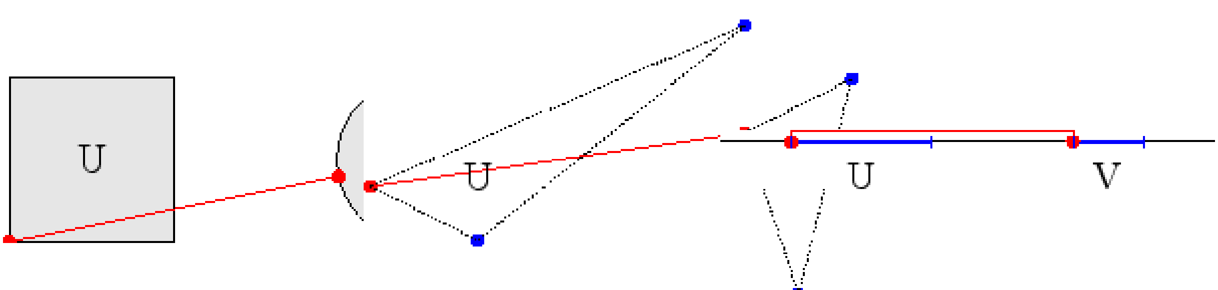
$$\operatorname{dist}(x, U) = \inf_{u \in U} d(x, u)$$

سره د واټن و ته بلل کيږي. په ټوليزه توګه د د وه ډيريو هوزدورف-واټن په لاندې توګه تعريفيږي

$$\operatorname{dist}_H(U, V) = \max\left(\sup_{u \in U} \operatorname{dist}(u, V), \sup_{v \in V} \operatorname{dist}(v, U)\right) .$$

)ليکونکي: هيوليک، شترايت

په لاندې څېره کې د ډېريو U او V لپاره يوڅو جوړې په هرکې ټکي په نخښه شوې، د هوزدورف –واټن همدايي داويکليد متريک نيول کيږي.



(c) ketabton.com: The Digital Library

لکه د بيلګو ښخه چې ليدل کيږي، $\mathrm{dist}_H(U,V)$ د دوه ټکو U او V لنډ واټن نه دی

ليکونکي : هيوليګ، شترايت

Mehrdimensionales Integral

ډېر بعديز(ډېر پراخيدونی) انتيګرال

په يوه رګولار ورشو د يوه ناپريکيدونکي تا بع f انتيګرال کيدی شي د ريمن جمعي د پولې په ځير تعريف شي:

$$\int_V f\,dV = \lim_{|\Delta|\to 0} \sum_i f(P_i)\Delta V_i\,, \quad \Delta V_i = \mathrm{vol}(V_i)\,.$$

له دې سره د (توکي) پرديو ساده ورشوګانو V_i (په ټوليزه توګه سيمپليکسونو يا غبرګ ايپيپيدونو) ټولنې يا اتحاد له لارې V اپروکسمې کيږي، دا په دې معنا چې د V او $\bigcup_i V_i$ د هوزدورف – واټن د صفر په لورهڅيږي. د $|\Delta|$ سره کيدی شي د V_i ماکسيمال کچونه په نخښه شي، P_i په خوښه ټکي په V_i کې دي.

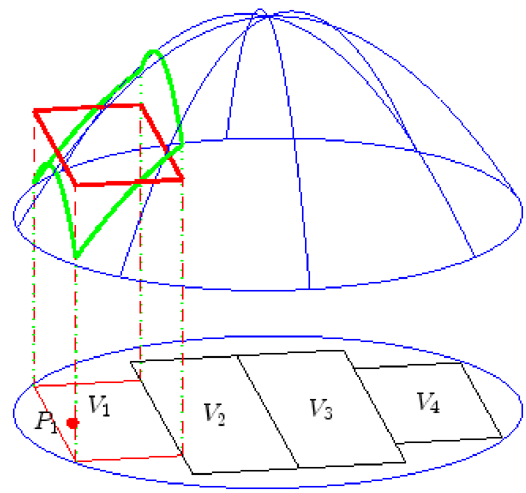
د ليکنې ډول $\Delta V_i \to dV$ د پولې پروسې سومبولي کول دي، او dV سړی ډکی يا حجم بولي. په لنډ ډول $\int_V f$ هم ليکو يا په مفصل ډول

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int_V f\, dV = \int_V f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n \,,$$

که څوک د انتيګريشن متحولې راباسي.

د f ناپرېکېدني په اساس د ريمن انتيګرال تعريف هم د توکو ورشوګانو V_i او هم له ټکي P_i خپلواک دی.



د يوه زاتيز يا مثبت تابع لپاره انتيګرال د ډېرئ ډکی يا حجم دی.

$$\{(x_1, \ldots, x_n, h) : \; 0 \leq h \leq f(x), \, x \in V\} \,.$$

په ځانګړې توګه $\int_V 1$ د امتيګريتي ورشو V حجم دی.

په f او V د د هواروالي وړاندنيونه(فرضيه) کېدی شي ضعيفه شي، داسې چې ا نتيګرال په يوه مناسب پوله پروسه باندې تعريف وي.

ليکونکي : بوسلي، هيوليک، شترايت

(c) ketabton.com: The Digital Library

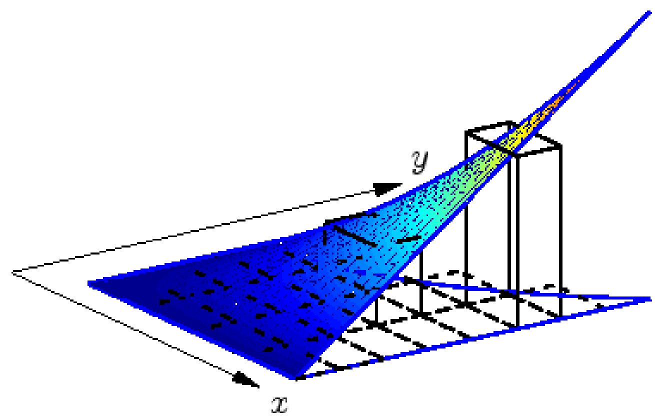
د تابع

$$f(x,y) = xy$$

دې په ورشو

$$V: \quad 0 \le x \le 1, \qquad 0 \le y \le 1 + x^2$$

کې انتيګرال ونيول شي.



خيره د انتيګريشن ورشو په يوه شډل مربع ګيتر يا ـمنډو ؟؟؟ باندې وېشنه يا توټه کېدنه بنايي. د منډو پراختيا $h = 1/n$ لپاره دا اپرکسيمسشن لاس ته راوړو

$$h^2 \sum_{0 \le j < n} \; \sum_{0 \le kh < 1+(jh)^2} (jh)(kh) = h^4 \sum_{0 \le j < n} j \sum_{0 \le k < n+j^2/n} k\,.$$

د جګودرجو درجو ترمونو تېرېدني سره دا د دې ډبلې جمعي سره برابر دی

$$h^4 \sum_{0 \le j < n} j\left((n + j^2/n)^2/2 + Ch^4 \sum_{0 \le j < n} jn^2/2 + j^3 + j^5/(2n^2) + O(n^2)\right.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{12}\right)+O(h)\,,$$

اوله دې سره انتیګرال ارزښت $\frac{7}{12}$ لري.

لیکونکي: بوسلي، هیولیګ. شترایت

د فابیني جمله Satz von Fubini

په یوه بنستیزه ورشو د یوه ناپرېکېدونکي تابع انتیګرال

$$V:\ \ a_j(x_1,\ldots,x_{j-1}) \le x_j \le b_j(x_1,\ldots,x_{j-1})$$

کېدی شي د یوبعدي یا یوپراخېدوني انتیګرالونو د یوبل پسې شمېرني له لارې لاس ته راشي:

$$\int\limits_V f\,dV = \int\limits_{a_1}^{b_1}\int\limits_{a_2(x_1)}^{b_2(x_1)}\cdots\int\limits_{a_n(x_1,\ldots,x_{n-1})}^{b_n(x_1,\ldots,x_{n-1})} f(x_1,\ldots,x_n)\,dx_n\cdots dx_2dx_1\,.$$

له دې سره د بنستیزوورشوګانو د لړئ پرلپسې رول نه لوبوي. په ځانګړې توګه د دبل انتیګرال لپاره د ثابتي انتیګرېشن پولې سره

$$\int\limits_a^b\int\limits_c^d f(x,y)\;dydx = \int\limits_c^d\int\limits_a^b f(x,y)\;dxdy\,.$$

ټولیزه تلنلار کېدی شي په دوهبعدي ځانګړي حالت

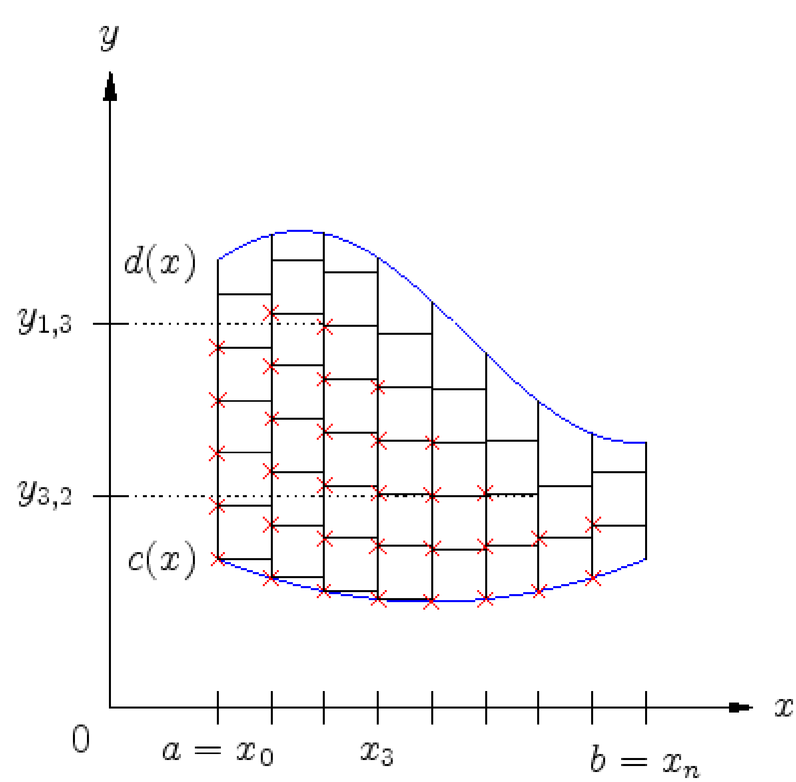
(c) ketabton.com: The Digital Library

$$V: \ a \leq x \leq b, \quad c(x) \leq y \leq d(x)$$

لیدوړ وګرځي. د تعریف سره سم سړی $\int_V f$ د ریمن جمعې له لارې اپروکسیمیکوي

$$s_n = h^2 \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{m_j-1} f(x_j, y_{j,k})$$

د $h = (b-a)/n$ ، $x_j = a + jh$ او $y_{j,k} = c(x_j) + kh$ سره.



د f په کومپکت انتیګریشن ورشو V باندې برابرډوله ناپرېکیدنې په بنسټ دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$|f(x_j,y)-f(x_j,y_{j,k})| \le \varepsilon, \quad y_{j,k-1} \le y \le y_{j,k}\,,$$

د $h < h_\varepsilon$ لپاره. د دې په تعقیب کېدی شي دننئ جمعه د یوه بعدي یا یو پراخیدوني انتیګرال سره پرتله شي:

$$s_n = h\sum_{j=1}^{n}\left(\int_{c(x_j)}^{d(x_j)} f(x_j,y)\,dy + r_{n,j}\right)$$

د $|r_{n,j}| \le m_j h\varepsilon$ سره. همدا دلیل کېدی شي په ناپریکیدونکو توابعو $g(x) = \int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y)\,dy$ وکارول شي،، او سړی لاس ته راوړي

$$s_n = \int_a^b g(x)\,dx + \left[r_n + h\sum_j r_{n,j}\right]$$

د $|r_n| \le nh\varepsilon$ سره د $h < h'_\varepsilon$ لپاره. دا چې

$$\|[\ldots]\| \le \Big((b-a) + \max_x (d(x)-c(x))\Big)\,\varepsilon$$

او $\varepsilon > 0$ په خوښه ټاکل کېدی شي، نو پوله $\lim_{n\to\infty} s_n$ د ایټریر شوي iterierten یو بعدي انتیګرال سره سر خوري.

لیکونکي : هیولیګ، شترایت

د تابع

(c) ketabton.com: The Digital Library

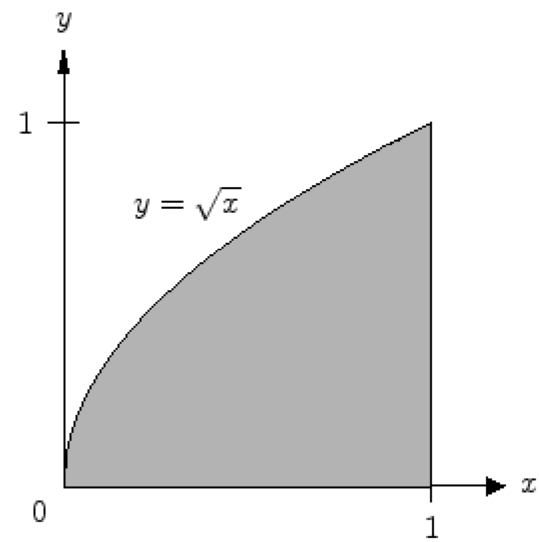
سرلیک

$$f(x,y) = y\cos\left(x^2\right)$$

دي داپه څېره کې انځور شوې ورشو

$$V: \quad 0 \le x \le 1\,, \quad 0 \le y \le \sqrt{x}$$

کې انتیګرال ونیول شي.



د فوبینیجملې سره کیدی شي انتیګرال د دوه بعدي انتیګریشن له لارې وشمیرل شي:

$$\int_V f = \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{x}} y\cos\left(x^2\right)\, dy \right) dx = \int_0^1 \left[\frac{y^2}{2}\cos\left(x^2\right) \right]_{y=0}^{y=\sqrt{x}} dx$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{2} x\cos\left(x^2\right)\, dx = \left[\frac{1}{4}\sin\left(x^2\right) \right]_0^1 = \frac{1}{4}\sin 1\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که انتیګریشن لړئ پرلپسې سره بدل شي، نو لاس ته راځي

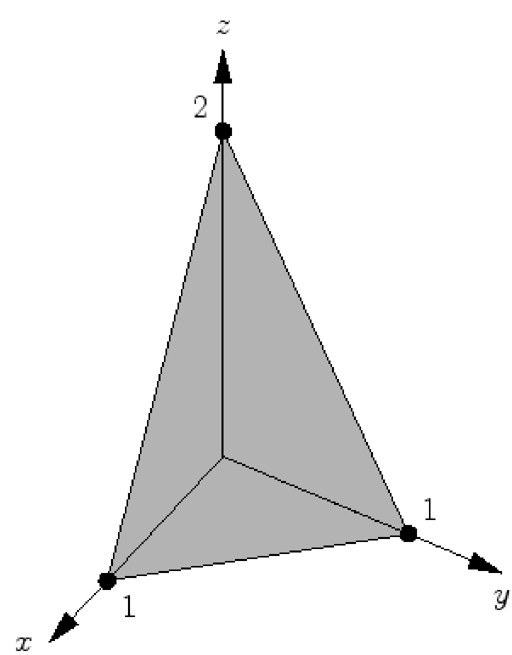
$$\int_V f = \int_0^1 \left(\int_{y^2}^1 y \cos\left(x^2\right)\, dx \right) dy\,.$$

په دې حالت کې دننی انتیګرال اکسپلیڅیت شمیروړ نه دی. د ایتریر شوي انتیګرال د عملي شمیرنې لپاره کیدی شي د انتیګریشن لړئ پرلپسې غوره وي.

لیکونکي : بوسلي، هیولیک، شترایت

د دې لپاره چې تابع

$$f(x,y,z) = x$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

په تیترا ید

$$T: \quad x, y, z \geq 0, \quad x + y + \frac{z}{2} \leq 1$$

باندې وشمیرل شي، نو لومړی به T د بنسټیزې ورشو په توګه ورکړل:

$$T: \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1 - x\,, \quad 0 \leq z \leq 2\,(1 - x - y)\,.$$

نو بیا دا انتیګرال د فوبیني د جملې په بنسټ شمیرلکیدی شي:

$$\begin{aligned}
\int_T f = & \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \left(\int_0^{2(1-x-y)} x\,dz \right) dy \right) dx \\
= & \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} 2x\,(1 - x - y)\;dy \right) dx \\
= & \int_0^1 \left(x - 2x^2 + x^3\right)\;dx = \frac{1}{12}\,.
\end{aligned}$$

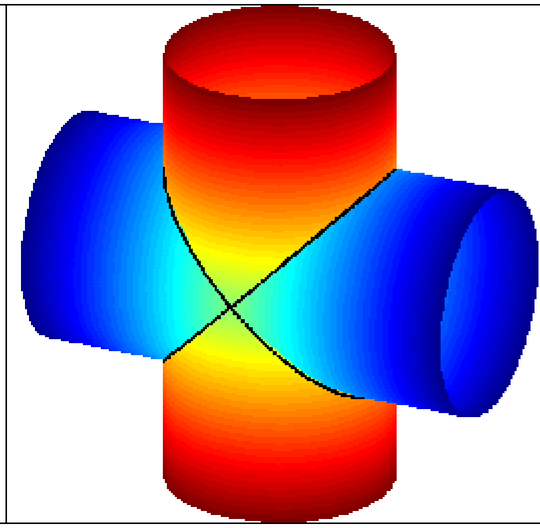
لیکونکي: بوسلي، هیولیګ، شترایت

ډکی یا حجم شمیرلکیږي، چې د دواړو توتو له (ګډ) غوځي

$$Z_1: \;x^2 + y^2 \leq r^2, \quad Z_2: \;x^2 + z^2 \leq r^2$$

له لارې منځ ته راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د سيومتر ي په بنسټ لومړی د اوکتانتونو ډکي يا حجمونه شميرلکيږي. په لومړي اوکتانت کې د انتيګريشن ورشو د ګردئ يا دايرې څلورمه ده	

$$K:\ 0 \le x \le r, \quad 0 \le y \le \sqrt{r^2 - x^2}.$$

په K باندې د (ګډ) غوڅې بدن جګوالی د Z_2 $h(x,y) = \sqrt{r^2 - x^2}$ له لارې ورکړ شوی دی. د ډکې يا حجم په حيث لرو

$$\int_K h = \int_0^r \left(\int_0^{\sqrt{r^2-x^2}} \sqrt{r^2 - x^2}\, dy \right) dx = \int_0^r (r^2 - x^2)\, dx = r^3 - \frac{1}{3} r^3 = 2r^3/3\ ,$$

او له دې سره د ټول بدن لپاره حجم $16r^3/3$.

ليکونکي:بيوسلر،هيوليګ،شترايت

د *n* -بعديز يونغونداري(چې وړانګه يې يو واحد دی) ډکی(حجم)

د n - بعدي يوونغونداري ډکی يا حجم V_n دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$B_n = \{x \in \mathbb{R}^n : \ |x| \leq 1\}$$

$$V_n = \frac{2\sqrt{\pi^n}}{n\,\Gamma(\frac{n}{2})},$$

د ګاما تابع Γ سره. د $n \leq 6$ لپاره ارزښتونه په لاندې جدول کې ورکړشوي دي:

n	1	2	3	4	5	6
V_n	2	π	$4\pi/3$	$\pi^2/2$	$8\pi^2/15$	$\pi^3/6$

ليکونکي:بيوسلر،هيوليک،شترايت

د ګاما تبع د تعریف له مخې د $B_1 = [-1, 1]$ لپاره دی

$$\text{vol}\, B_1 = 2 = \frac{2\sqrt{\pi}}{\Gamma(\frac{1}{2})}$$

.

د ایندکشن پل(قدم) $(n-1) \to n$ لپاره لومړی په پام کې نیسو، چې د B_n هیوپرسطحې $x_n = -1$ او $x_n = 1$ ترمنځ پروت دی او د هیوپرسطحې سره غوڅی(قطاع) $x_n = \xi,\ (-1 \leq \xi \leq 1)$ یو $(n-1)$ - بعديز غونډاری دی د وړانګې $\sqrt{1-\xi^2}$ سره . د B_n حجم له دې امله کیدی شي د فوبینوسجملې سره په لاندې توګه وشمیرلشي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\operatorname{vol} B_n = \int_{-1}^{1} (1-\xi^2)^{\frac{n-1}{2}} \operatorname{vol} B_{n-1}\, d\xi \,.$$

د اينکشن وړاندنيوني

$$\operatorname{vol} B_{n-1} = \frac{2\sqrt{\pi^{n-1}}}{(n-1)\Gamma(\frac{n-1}{2})}$$

سره او د ګاما- تابع د تابعمسالات،

$$\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)\,,$$

لاس ته راځي

$$\operatorname{vol} B_n = \sqrt{\pi}\,\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}\,\frac{2\sqrt{\pi^{n-1}}}{(n-1)\Gamma(\frac{n-1}{2})}$$

$$= \frac{2\sqrt{\pi^n}\,\frac{n-1}{2}\,\Gamma(\frac{n-1}{2})}{(n-1)\,\Gamma(\frac{n-1}{2})\,\frac{n}{2}\,\Gamma(\frac{n}{2})} = \frac{2\sqrt{\pi^n}}{n\,\Gamma(\frac{n}{2})}\,.$$

له دې سره کېدی شي انتيګرال $\int_{-1}^{1} (1-\xi^2)^{\frac{n-1}{2}}\, d\xi$ د په ځای ابينووني يا سبستيچيوشن $\xi = \sin t$ ، $d\xi = \cos t\, dt$ له لارې وشمېرل شي:

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1-\sin^2 t)^{\frac{n-1}{2}} \cos t\, dt = \int_{-1}^{1} (1-\xi^2)^{\frac{n-1}{2}}\, d\xi$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$2\int_0^{\pi/2}(\cos t)^{n-1}\,\cos t\,dt = \sqrt{\pi}\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}\,. =$$

ليکونکي:بيوسل،هيوليګ،شترايت

د ډېربعديز انتيګرال ترانسفورميشن

د يوه رګولار ورشو $U \subseteq \mathbb{R}^n$ د د يوه په (بيجکتيو)، ناپرېکيدونکي، مشتقوړ ترانسفورميشن g لپاره د

$$\det g'(x) \neq 0, \quad x \in U\,,$$

سره د ناپريکيدونکو توابعو f لپاره باور لري:

$$\int\limits_U f\circ g\,|\det g'|\,dU = \int\limits_V f\,dV\,,\quad V = g(U)\,,$$

له کوم سره چې $\det g'$ د ترانسفورميشن د تابع ديترمينانت بلل کيږي. دا ډکي- يا حجم توکيځای اړونده يا ځاييز تغير تشريح کوي.

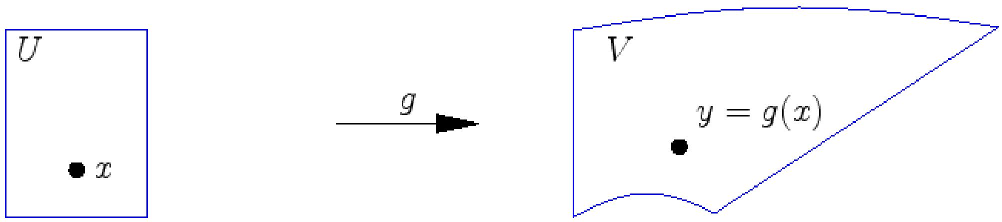
$$dV = |\det g'|\,dU\,.$$

د يوه لو کال اورتوګونال يا عمود کواورديناتو ترانسفورميشن ، دا په دې معنا چې د g' عمودې متې

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$|\det g'| = \prod_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial g}{\partial x_i} \right| ,$$

دي،دا په دې معنا چې د حجمتوکو سکالير ضريب د يوګونو متحولو سکاليري ضريبونو ضرب دی.



د يوه افين ترانسفورروميشن $y = Ax + b$ سره حجمتوکي د

$$dy = |\det A|\, dx \,.$$

سره تغير خوري.

په ځانګړې توګه د متحولې د سکالي کولو لپاره باور لري، $y_i = \lambda_i x_i$

$$dy_i = \lambda_i\, dx_i \,.$$

وړاندنيوني يا فرضيي کيدی شي لږ ضعيفي شي.

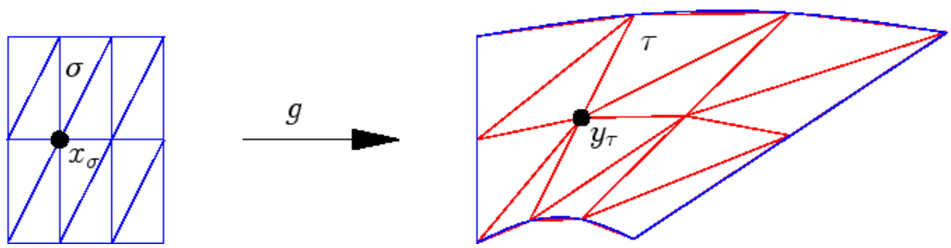
په ځانګړې توګه بايد د g بيجکتيويتي او د g' برعکسوړوالی فقط د U په دننه کې وغوښتل شي. د f پريکيدنه او ټاکلې زينګولاريټي هم ممکن دي، که ددواړو انتيګرالونو شتون تضمين وي.

ليکونکي: هيوليګ، موبښ

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ښووني يا ثبوت فکر کيدی شي د دوه بعدي انتيګرال لپاره وښوول شي. د ساده والي لپاره نيول کيږي، چې g دوه ځله ناپرېکيدونکی مشتقوړ دی. دا را کوي، چې د $x \in U$

$$|\det g'(x)| \geq 1/c > 0,$$
$$g(x+\Delta x) - g(x) = g'(x)\Delta x + r, \quad |r| \leq c|\Delta x|^2 .$$



لپاره لکه په خيره کېروښانه شوي،يواپروکسيميشن ارګومنت کارول کيږي. د دې لپاره د ورشو U د يوه ترياڼګوليرکونې(مثلثي کونې) څخه مخ ته ځو، او کېنو انتيګرال د ريمن جمعې

$$S_U = \sum_\sigma f(g(x_\sigma))|\det g'(x_\sigma)|\,\mathrm{vol}\,\sigma, \qquad x_\sigma \in \sigma$$

له لارې نږدې کوو. درېګوډي(مثلثونو) σ دې ډير زيات خوارهverzerrt نه شي، دا په دې معنا چې

$$h/c' \leq a \leq c'h$$

د ټولو درېګوډيو سيکانټواوږدوالي a لپاره. دا په ځانګې توګه راکوي، چې لوی کونج برابرېدوله په h کې کښنته لور ته بنده يا محدود ده. دزئ اپروکسيميشن پوره ښه دی، داسې چې د ريمن/جمعه يا – زياتون د $h \to 0$ لپاره د $\int_U (f\circ g)|\det g'|$ په لور هڅيږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کونجټکو د تابع له لارې $x_\sigma \mapsto y_\tau = g(x_\sigma)$ د څيره –يا ارزښت ورشو $V = g(U)$ يو درېکوډيزوالی يا مثلث کيدنه منځ ته راځي. کطدی شي د درېکوډي خورېدنه زياته شي،مګر د نه پرېکيدني او له دې سره د g د جاکوبي-ماتريکس د محدوديت اود برعکس تابع g^{-1} اړخونه د اپروکسيميشن پارامتر h سره پرتله کيدونکې پاتيږي. برسيره پردې د $\det g' > 0$ په حالت کې د درېکوډي لوريزوالی ساتلی پاتيږي(په همدې ډول د ديترمينانت د مخنخښې بدلون سره برعکس يا په څټ کيږي)،داسې چې يوپه بل پريوتل منځ ته نه راځي.

د منځ ته راغلي څيره – يا ارزښت ورشو منځ ته را ته راغلي درېکوډيزوالي ريمن-جمعه،

$$S_V = \sum_\tau f(y_\tau)\,\mathrm{vol}\,\tau, \qquad y_\tau = g(x_\sigma) \in \tau\,,$$

د $\int_V f$ په لور ځي. دا بايد وښول شي، چې د دواړو ريمن –جمعو کمښت د صفر په لور ځي يه هڅيږي.
دا د τ درېکوډي د ښه اپروکيميشن څخه لاسته راځي د σ د افينې څيرې $\tilde\tau$ له لارې:

$$\mathrm{dist}_H(\tilde\tau, \tau) = O(h^2), \quad \tilde\tau = y_\tau + g'(x_\sigma)(\sigma - x_\sigma)\,.$$

دا $\mathrm{vol}\,\tilde\tau = |\det g'(x_\sigma)|\,\mathrm{vol}\,\sigma,$ د دواړو ريمن--جمعود $O(h^3)$ جمعې غړويا زياتونونو اود دوی د تعداد $O(h^{-2})$ ديسکريپانځ دی. له دې سره لاس ته راځي

$$|S_U - S_V| = O(h) \to 0\,.$$

د هوزدورف-وا ټن د تخمين د ښوونې لپاره سړی درېکوډي(مثل ثونه) سره پرتله کوي

$$\tau = \Delta(y_\tau, y_1, y_2), \quad \tilde\tau = y_\tau + g'(x_\sigma)\Delta(0, x_1 - x_\sigma, x_2 - x_\sigma)$$

د $y_i = g(x_i)$ سره ګاونډي ټکي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y_\tau + \alpha'(y_1 - y_\tau) + \alpha''(y_2 - y_\tau),$$

$$y_\tau + \alpha' g'(x_\sigma)(x_1 - x_\sigma) + \alpha'' g'(x_\sigma)(x_2 - x_\sigma)$$

د $0 \leq \alpha', \alpha'' \leq 1$ سره. د دویممشتق د ناپرېکېدنې د نیونې په بنسټ لاس ته راځي، چې کمښت برابر ډوله د

$$O(\max(|x_1 - x_\sigma|^2, |x_2 - x_\sigma|^2))$$

له لارې اټکل کېدی شي،څه مو چې ښوول.

لیکونکیة هیولیګ، موبښ

د ترانسفورمېشن ښوولو ته کېدی شي یوه ورشو V تر څېړنې ونیول شي، هغه د دوه کرښیز سره تړلو پارابلسګمنت له لارې

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ u^2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u \\ u^2 \end{pmatrix}, \quad 0 \leq u \leq 1$$

رابندیږي. که د پارابولسګمنتونه وخوزول شي یعني تل بل ځایت ه یووړل شي، نو سړی یو پیجکتیو تابع په یوون – یا واحد مربع U لاس ته راوړي.

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v + u \\ v + u^2 \end{pmatrix}, \quad 0 \leq u,\ v \leq 1\,.$$

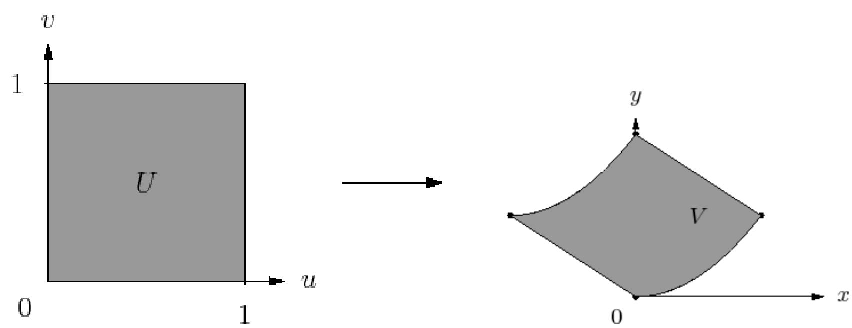
د تابع جاکوبي ماتریکس دی

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2u & 1 \end{pmatrix},$$

او سړی د تابع دیترمینانت په ځېر لاسته راوړي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\det \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = 2u + 1 > 0\,.$$



له دې سره د ډکي توکی د لاندط سره تغيريږي

$$dV = dx\,dy = (2u+1)du\,dv = (2u+1)dU\,.$$

په V باندې د $f(x,y) = x + y$ د ا نتيګرال لپاره د ترانسفورميشن قانون سره لاس ته راځي

$$\int\limits_V (x+y)\,dx\,dy$$

$$= \int\limits_0^1 (\frac{2}{4} + 1 + \frac{1}{2})\,dv = 2\,.$$

ليکونکي: هيوليګ، موبش

يوتوروس يا کړئ د بېلګې په توګه د ګردئ - دابرې تيکلي د څرخونن رامنځ ته کيږي

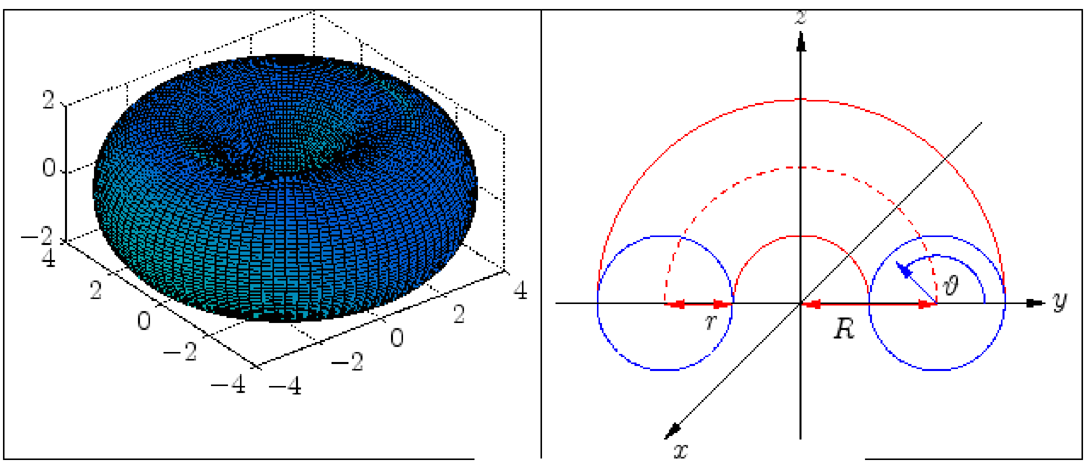
(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R + r\,s\cos\vartheta \\ r\,s\sin\vartheta \end{pmatrix}, \quad 0 \le s \le 1, \quad 0 \le \vartheta \le 2\pi$$

د z- په محور د $r < R$ سره،دا په دې معنا چې

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = p(s,\vartheta,\varphi) = \begin{pmatrix} (R + r\,s\cos\vartheta)\cos\varphi \\ (R + r\,s\cos\vartheta)\sin\varphi \\ r\,s\sin\vartheta \end{pmatrix}$$

يو ممکنه پارامتري کېدنه ده د $0 \le \varphi \le 2\pi$ سره.



د ترانسفورميشن

$$p : \begin{pmatrix} s \\ \vartheta \\ \varphi \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

جاکوبي ما تريکس دی

$$p' = (p_s, p_\vartheta, p_\varphi) =$$

$$\begin{pmatrix} r\cos\vartheta\cos\varphi & -r\,s\sin\vartheta\cos\varphi & -(R + r\,s\cos\vartheta)\sin\varphi \\ r\cos\vartheta\sin\varphi & -r\,s\sin\vartheta\sin\varphi & (R + r\,s\cos\vartheta)\cos\varphi \\ r\sin\vartheta & r\,s\cos\vartheta & 0 \end{pmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

داچې متې يا ستنې يو بل ته اورتوګونال دي،د تابع ديترمينانتو لپاره باور لري

$$|\det p'| = |p_s||p_\vartheta||p_\varphi| = |r||rs||R+ rs\cos\vartheta| =$$

$$= r^2 s(R + rs\cos\vartheta).$$

له دې سره د ډکي يا خجم لپاره لاس ته راوړو

$$\int_0^1\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} r^2 s(R + rs\cos\vartheta)\,d\varphi\,d\vartheta\,ds$$

$$= 2\pi r^2 \left(\int_0^1\int_0^{2\pi} sR\,d\vartheta\,ds + \int_0^1\int_0^{2\pi} rs^2\cos\vartheta\,d\vartheta\,ds\right)$$

$$= 2\pi r^2 \left(\int_0^1 2\pi sR\,ds + 0\right) = 2\pi^2 Rr^2.$$

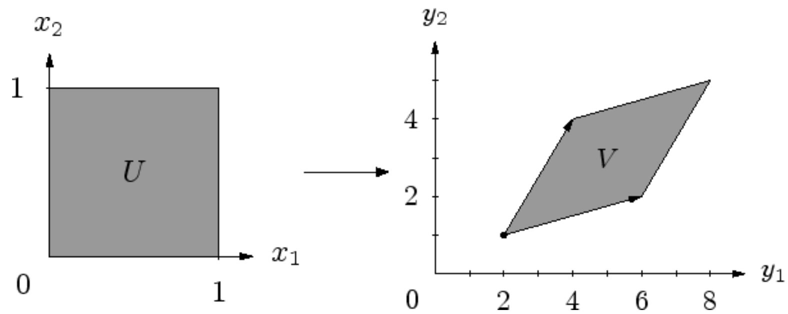
يو غبرګ اړخيزParallelogramm يا موازيالاضلاع V کېدی شي د يوون ګردئ U يوه افين ترانسفورمېشن د څېرې په حيث انځور شی:

$$U \ni x \mapsto y = Ax + b \in V.$$

له دې سره b يو ګوډ تکی دی او د A متې وکتورونه دي، چې دا غبرګ اړخيز غزوي.
د دې څېره شوې بېلګې لپاره دی

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



د ترانسفورمیشن تابع دیترمینانت دی

$$\det \frac{\partial(y_1, y_2)}{\partial(x_1, x_2)} = \det A = 10\,.$$

له دې سره د بېلګې په توګه د انتیګرال لپاره په V یو کرښیز تابع لاس ته راځي

$$f(y) = 3y_1 - 4y_2$$

$$\int_V f \quad = \int_U f(Ax+b) 10\, dV$$

په ټولیززه توګه معکوسکیدونکی تابع

$$(x_1, \ldots, x_n)^{\mathrm{t}} \mapsto Ax + b$$

یوونمکعب $U = [0,1]^n$ په غبرګ اړخیز (-اپیپد) جوړوي، چې د ماتریکس متې یا ستن څخه غزیږي.په ورته توګه دې روښانه بېلګې د $n = 2$ لپاره ا نتیګرال په V یو کرښیز تابع $f(y) = c^{\mathrm{t}} y$ دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int_V f = \int_U c^{\mathrm{t}}(Ax+b)|\det A|\,dx = c^{\mathrm{t}}(Ae/2+b)|\det A|$$

د $e = (1,\ldots,1)^{\mathrm{t}}$ سره.

) ليکونکي: هيوليګ، موبش

په توته کواودينات کې ډکيتوکې يا حجم توکي

Volumenelement in Zylinderkoordinaten

د کواوردينات ترانسفورميشن لپاره

$$x = \varrho\cos\varphi, \quad y = \varrho\sin\varphi, \quad z = z$$

دی

$$dx\,dy\,dz = \varrho d\varrho\,d\varphi\,dz\ .$$

له دې سره په ځانګې توګه د يوه تابع f د انتيګرال لپاره په يوه توته يا استوانه باور لري

$$Z: \quad 0 \le \varrho \le \varrho_0\,, \quad 0 \le z \le z_0$$

$$\int_Z f = \int_0^{z_0}\int_0^{2\pi}\int_0^{\varrho_0} f(\varrho,\varphi,z)\,\varrho\,d\varrho\,d\varphi\,dz\ .$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په ځانګړې توګه د يوه اکسياسيمتريک يا محور سيمتريک تابع $f(\varrho)$ لپاره دی

$$\int_Z f = 2\pi z_0 \int_0^{\varrho_0} f(\varrho)\,\varrho\,d\varrho\,.$$

د سطحې قطبي کواوردينات لپاره د سطحي توکي په ورته توګه ترانسفورمي کيږي.

(Autoren: Höllig/Much)

د کواوردينات ترانسفورميشن

$$(x, y, z) = g(\varrho, \varphi, z)$$

لوکال يا ځای اړونده اورتوګونال دی،دا په دې معنا چې د جاکوبي ماتريکس

$$g' = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\varrho\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \varrho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

اورتوګونال متې يا ستنط لري. په تعقيب د تابعديترمينانت يا فنکشنل ديترمينانت لپاره باور لري

$$|\det g'| = |g_\varrho|\,|g_\varphi|\,|g_z| = 1 \cdot \varrho \cdot 1 = \varrho\,.$$

)ليکونکی: هوليګ، موښ

د ګاوس تابع د انتيګرال ټاکنې ته،

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-x^2\right) dx = \sqrt{\pi}\,,$$

سړی لاندې مرستندوی جوړښت کاروي. سړی د انتيګرال مربع شمېري:

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-x^2\right) dx\right)^2 \left(\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-x^2\right) dx\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-y^2\right) dy\right)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-x^2 - y^2\right) dx\, dy\,.$$

دا انتيګرال کېديشي د قطبي کواوردينات په مرسته ساده وټاکل شي:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} \exp\left(-r^2\right) r\, dr\, d\varphi = 2\pi\left[-\frac{1}{2}\exp\left(-r^2\right)\right]_0^{\infty} = \pi\,.$$

))ليکونکی: هوليک، موبش

په غونډوسکې يا غونډاري(کورې-) کواوردينات کې د ډکي –يا حجم توکي

د کواوردينات د ترانسفورميشن لپاره

$$x = r\sin\vartheta\cos\varphi, \quad y = r\sin\vartheta\sin\varphi, \quad z = r\cos\vartheta$$

دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$dx\,dy\,dz = r^2 \sin\vartheta\,dr\,d\vartheta\,d\varphi\,.$$

په ځانګړې توګه په یوه غوډوسکې یا کورې $K:\ 0 \le r \le R$ باندې د یوه تابع f انتیګرال لپاره باور لري

$$\int_K f = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R} f(r,\vartheta,\varphi)\,r^2 \sin\vartheta\,dr\,d\vartheta\,d\varphi\,.$$

په ځانګړي ډول د رادیالسیمتریک تابع $f(r)$ لپاره دی

$$\int_K f = 4\pi \int_0^{R} f(r) r^2 dr\,.$$

)لیکونکی: هولیک، موبښ

د کواوردینات ترانسفورمیشن

$$(x,y,z) = g(r,\vartheta,\varphi)$$

لوکال اورتوګونال دی،دا په دې معنا چې د جاکوبي – ماتریکس

$$g' = \begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi & r\cos\vartheta\cos\varphi & -r\sin\vartheta\sin\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi & r\cos\vartheta\sin\varphi & r\sin\vartheta\cos\varphi \\ \cos\vartheta & -r\sin\vartheta & 0 \end{pmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

اورتوګونال متې لري. په دې پسې د فنکشنلديترمينانت لپاره باور لري

$$|\det g'| = |g_r|\,|g_\vartheta|\,|g_\varphi| = 1 \cdot r \cdot r\sin\vartheta = r^2\sin\vartheta\,.$$

د يوه راديالسيمتريک تابع f لپاره انتيګرال په ϑ او φ راکوي

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi = 2\pi\left[-\cos\vartheta\right]_0^{\pi} = 4\pi\,.$$

دا ترمخضريب د $\int_K f$ شمېرنې له امله د يوونغونډاري پورته هوارې سطحه ده.

) ليکونکی: هوليګ، موبش

په غونډوسکې(کرې) $K : r \le 1$ د r^α انتيګرال دی

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{1} r^2 r^\alpha \sin\vartheta\, dr\; d\vartheta\, d\varphi = 4\pi\int_0^1 r^{\alpha+2}\, dr\,.$$

فقط د $\alpha > -3$ لپاره شتون لري او په دې حالت کې مساوي دی لاندې سره

$$4\pi\left[\frac{r^{\alpha+3}}{\alpha+3}\right]_0^1 = \frac{4\pi}{\alpha+3}\,.$$

انتيګرال په $\mathbb{R}^3 \setminus K$ دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_1^{\infty} r^{\alpha} r^2 \sin\vartheta dr\, d\vartheta\, d\varphi = 4\pi \int_1^{\infty} r^{\alpha+2}\, dr$$

دا انتیګرال فقط د $\alpha < -3$ لپاره شتون لري او په دې حالت کې د لاندې سره مساویدی

$$4\pi \left[\frac{r^{\alpha+3}}{\alpha+3}\right]_1^{\infty} = \frac{-4\pi}{\alpha+3}\,.$$

)لیکونکی: هولیګ، موښ

د صفر نیو باندې د h په جګوالي فشار د بارومتري جګوالیفرمول له لارې ټاکل کیږي:

$$p(h) = p_0\, e^{-\frac{\varrho_0 g h}{p_0}}\,.$$

له دې سره نورمال فشار $p_0 = 101300 \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}$ دی، $\varrho_0 = 0.150 \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$ د اکسیجن ټینګوالی(غلظت) په صفر نیو(د هوا اکسیجن 21% دی) او $g = 9{,}80 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ د ځمکې بیړه یا تعجیل دی.

ټینګوالی د فشار سره د ایدیال غازمساوات سره تړلی:

$$\varrho = \frac{p}{R_s T}$$

د $R_s = \frac{k_B}{m_{\text{Molekül}}} = 519 \frac{\mathrm{N\,m}}{\mathrm{K\,kg}}$ سره د spezifischen دغاز ثابته د اکسیجن لپاره او T په کالوین کچ شوې تودوخې. د ساده ونې له امله دا د ثابتې $-3°C$ په حیث ، یعنې $T = 270$ K ،نیول- یا کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

له دواړو مساواتو څخه کیدی شي په اتموسفیر کې په نږدې توګه د اکسیجن ټوله کتله وشمېرل شي:

$$M = \int_V \varrho \, dV = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_{r_0}^{\infty} \frac{1}{R_s T} p_0 \, e^{-\frac{\varrho_0 g h}{p_0}} \, r^2 \sin\vartheta \, dr \, d\varphi d\vartheta,$$

له کوم سره چې m $r_0 = 6.37 \cdot 10^6$ د ځمکې وړانګه ده. د

$h = r - r_0$ سبستیچیوشن پسې او په ϑ او φ باندې انتیګرال سره لاس ته راځي

$$M = 4\pi \, \frac{p_0}{R_s \cdot T} \, e^{\frac{\varrho_0 g}{p_0} r_0} \int_{r_0}^{\infty} e^{-\frac{\varrho_0 g}{p_0} r} r^2 \, dr \, ,$$

او د دوه واره ټوټه – یا پارشل انتیګرال سره د انتیګرال لپاره لاس ته راځي

$$\int_{r_0}^{\infty} e^{-cr} r^2 \, dr = \left[-\frac{r^2}{c} e^{-cr}\right]_{r_0}^{\infty} + \left[-\frac{2r}{c^2} e^{-cr}\right]_{r_0}^{\infty} + \left[-\frac{2}{c^3} e^{-cr}\right]_{r_0}^{\infty}$$

($c = \frac{\varrho_0 g}{p_0}$). په ټولیزه توګه لاس ته راځي

$$M = \frac{4\pi p_0}{R_s T} \left(c^{-1} r_0^2 + 2c^{-2} r_0 + 2c^{-3}\right) = 2.59 \cdot 10^{19} \text{ kg} \, .$$

د پرتلې لپاره :

ځمککتله - $6 \cdot 10^{24}$ kg $(2.3 \cdot 10^5 \, M)$

سپوږمۍ کتله - $7.4 \cdot 10^{22}$ kg $(2.9 \cdot 10^3 \, M)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

کتله اودروندتکی(نقطه ثقل؟)

د یوه بدن K کتله د ټیګوالي $\varrho(x),\, x \in K\,,$ سره د

$$m = \int\limits_K \varrho(x)\, dK$$

له لارې ورکړ شوی ده. په ځانګړې توګه د $\varrho(x) = 1$ لپاره د . K ډکی(حجم) V لاس ته راوړو.

د کتلې دروندتکي νـــم کواوردینات د لاندې سره سم شمیرل کیږي

$$s_\nu = m^{-1} \int\limits_K x_\nu \varrho(x)\, dK\,.$$

د $\varrho(x) = 1$ لپاره لرو

$$s_\nu = V^{-1} \int\limits_K x_\nu\, dK\,,$$

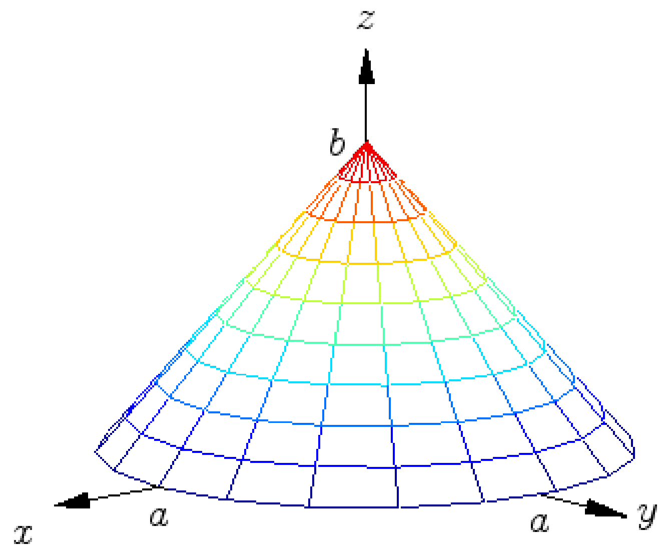
او S هندسي دروندتکی او یا هم په ساده توګه دروندتکی بلل کیږي.

لیکونکي: هیولیګ، کیمرلې، ترایت

یو غونډاری(کره) K د بنسټوړانګې a او جګوالي b سره ډکی(حجم) $V = \frac{\pi}{3}a^2b$ لري او په توته کواوردینات کېلاندې انځورونه لري

$$K\ :\quad 0 \le \varphi \le 2\pi, \quad 0 \le \varrho \le \frac{a}{b}(b-z), \quad 0 \le z \le b\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



د سيمتري له ا مله د دروندټکي د x – او y -کواورديناتونه صفر دي. د z –کواوردينات داسې شميرل کيږي

$$s_z = \frac{1}{V}\int_K z$$

اوپه توته کواوردينات باندې د ترانسفورميشن وروسته لاس ته راوړو

$$V s_z = \int_0^b \int_0^{a(b-z)/b} \int_0^{2\pi} \varrho\, z\, d\varphi d\varrho dz$$

$$= 2\pi \int_0^b \int_0^{a(b-z)/b} \varrho\, z\, d\varrho dz$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \pi \int_0^b z \left(\frac{a}{b}(b-z)\right)^2 dz$$

$$= \frac{\pi}{12} a^2 b^2 \, .$$

$$V s_z = \int_0^b \int_0^{a(b-z)/b} \int_0^{2\pi} \varrho \, z \, d\varphi d\varrho dz$$

$$= 2\pi \int_0^b \int_0^{a(b-z)/b} \varrho \, z \, d\varrho dz$$

$$= \pi \int_0^b z \left(\frac{a}{b}(b-z)\right)^2 dz$$

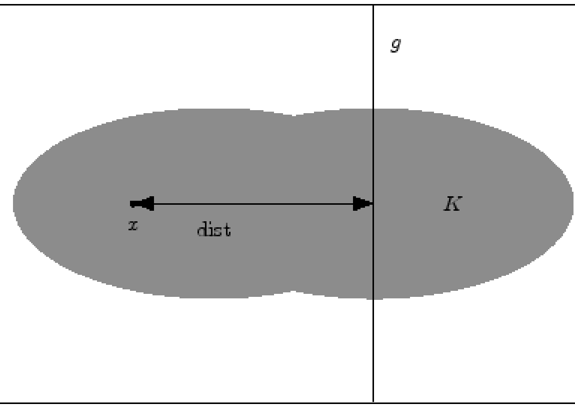
$$= \frac{\pi}{12} a^2 b^2 \, .$$

له دې سره $S = (0, 0, b/4)$. دروندټکی دی.

ليکونکي: هيوليګ، شترايت

(c) ketabton.com: The Digital Library

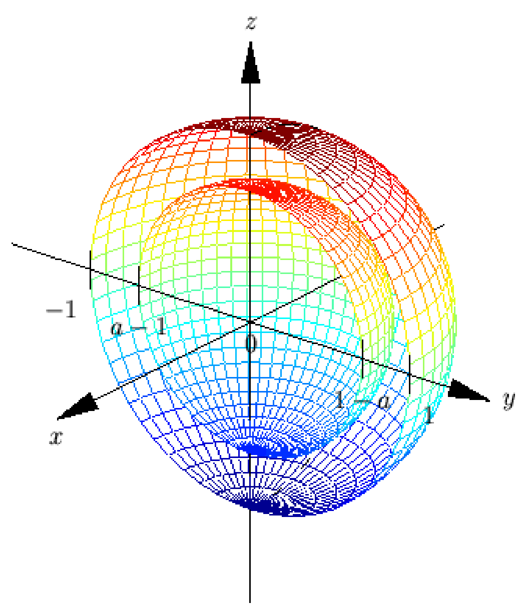
ترايګهايتسمومنت Trägheitsmoment (د کتلي ځرکون اړونده لويه)

په يوه محور g د يوه تن K د تينګوالي $\varrho(x),\, x \in K$ سره Trägheitsmoment دی $I = \int_K \operatorname{dist}(x,g)^2 \varrho(x)\, dK\,,$ د کومسره چې dist د واټن تابع ښايي	

ليکونکي: هيوليک، شترايت

تشکيل-يا جوړه شوې تشه غونډوسکه يا کره په کواوردينات سيستم کې لاندې انځورونه لري

$$K : \quad 1-a \le r \le 1\,, \quad 0 \le \vartheta \le \pi\,, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi\,.$$



د يوه ثابت تينګوالي ϱ لپاره په z–محور د Trägheitsmoment g دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$I = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_{1-a}^{1} \varrho(\underbrace{r\sin\vartheta}_{\mathrm{dist}((x,y,z),g)})^2\underbrace{(r^2\sin\vartheta)\;dr\,d\vartheta d\varphi}_{dK} =$$

$$= \frac{2\pi\varrho}{5}(1-(1-a)^5)\int_0^{\pi}\sin^3\vartheta\,d\vartheta$$

$$\frac{2\pi\varrho}{5}(1-(1-a)^5)\left[-\cos\vartheta+\frac{1}{3}\cos^3\vartheta\right]_0^{\pi} = \frac{8\pi\varrho}{15}(1-(1-a)^5)$$

که تینګوالي ϱ له شرایطو، چې تشغوندوسکې کتله دې یو وي، سړی غواړي وټاکي،

$$1 = \int_K \varrho = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_{1-a}^{1} \varrho r^2\sin\vartheta\,dr\,d\vartheta d\varphi = \frac{4\pi\varrho}{3}(1-(1-a)^3)\,,$$

نو لاس ته راځي

$$I(a) = \frac{2}{5}\frac{(1-(1-a)^5)}{(1-(1-a)^3)}\,.$$

په ځانګړي توګه د ټولې غوندوسکې د Trägheitsmoment لپاره $I(1) = 2/5$ راکوي او د $a = 0$ لپاره د پولې ته تلنې له لارې د لوپیتال قانون سره $I(0) = 2/3$

لیکونکي: هیولیک، شترایت

د کږې (منحني) انتیګرال

(c) ketabton.com: The Digital Library

د یوه ناپرېکیدونکې تابع f انتیګرال د یوې کرښې(منحني) C په اودوالي د ریګولار ناپرېکیدونکي مشتقوړ پارامتریککونې

$$t \to p(t) \in \mathbb{R}^n\,, \quad p'(t) \neq 0\,, \quad t \in [a,b]\,,$$

سره

$$\int_C f = \int_a^b f(p(t))|p'(t)|\,dt$$

تعریف دی اود ټاکل شوي پارامتریککونې څخه خپلواک دی.

په ځانګې توګه د $f = 1$ لپاره سړی د کرښې اوږدوالی لاس ته راوړي.

په f او p هوارتیا نیونه کیدی شي ضعیفه شي، داسې چې سړی ا نتیګرال په یوه مناسب پولې پروسه باندې تشریح کړي.

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

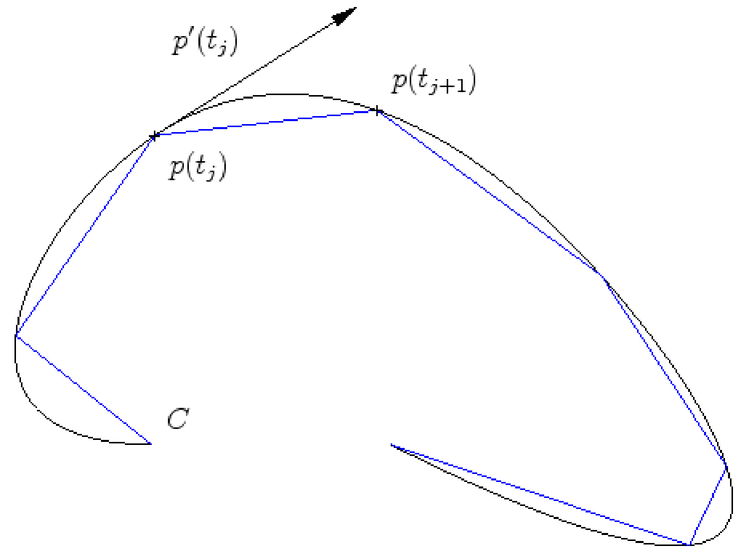
د ریمن زیاتون یا جمعې په مرسته کېدی شي تعریف مدلل شي. په کرښي د د ټکو پرلپسې

$$p(t_j), \quad t_{j+1} - t_j = \Delta t_j\,,$$

دا لاندې دی

$$\int_C f \approx \sum_j f(p_j)|p\,(t_{j+1}) - p\,(t_j)|\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



د منځ ارزښت جملې په بنسټ باور لري

$$p(t_{j+1}) - p(t_j) = \begin{pmatrix} p_1'(\tau_{1,j}) \\ \vdots \\ p_n'(\tau_{n,j}) \end{pmatrix} \Delta t_j$$

د $\tau_{\nu,j} \in [t_j, t_{j+1}]$ سره.د p' د برابرډوله ناپرېکيدني له امله په $[a,b]$ لرو

$$|p(t_{j+1}) - p(t_j)| = |p'(t_j)| + r_j |\Delta t_j|$$

د $|r_j| < \varepsilon$ سره د $|\Delta t_j| < \delta$ لپاره. د ټوټه ونې د نريوالي له امله بنى اړخ د

$$\int_a^b f(p(t)) \, |p'(t)| \, dt$$

په لور هڅيږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پورته دلیل هم د پارانتی کونط خپلواوالی ښايي، ځکه چې دا د ریکمزاتون کېمنځ ته نه راځي.

په بدیلي توګه کیدی شي مختلف پارامتریککونه د یوې متحولې سبستیچیوشن له لارې یو په واړوي.

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

د تابع

$$f(x,y,z) = \exp(-z)$$

انتیګرال به د C پیچي میخ د n اړونو یا څرخونو په اوږدوالي د پارانتریک کونې

$$C: \quad p(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t \end{pmatrix}, \quad p'(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi n],$$

سره وټاکلشي.

سرې لاس ته راوړي

$$|p'(t)| = \sqrt{2}$$

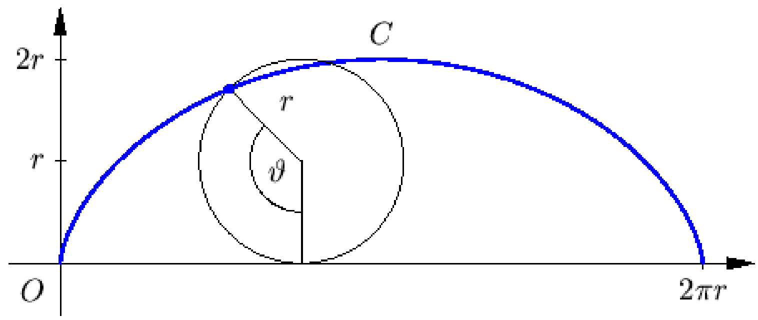
او له دې سره

$$\int_C f = \int_0^{2\pi n} \exp(-t)\sqrt{2}\, dt$$

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ځيوکلويد C اوږدوالی L ټاکل کيږي، هغه چې يو ټکي د يوې دايرې په چاپېريال د
وړانګې $r > 0$ سره تشريح کوي، چې په يوه کرښه ګرځي يا ځرخي



د پارامتري کونبلپاره

$$C: \quad p(\vartheta) = r\begin{pmatrix} \vartheta - \sin\vartheta \\ 1 - \cos\vartheta \end{pmatrix}, \quad \vartheta \in [0, 2\pi],$$

دی

$$p'(\vartheta) = r\begin{pmatrix} 1 - \cos\vartheta \\ \sin\vartheta \end{pmatrix}, \quad |p'(t)| = r\sqrt{(1-\cos\vartheta)^2 + \sin^2\vartheta} = r\sqrt{2(1-\cos\vartheta)}\,.$$

له دې سره د ځيکلوييد د اوږدوالي لپاره لاس ته راځي

$$L = \int_0^{2\pi} r\sqrt{2(1-\cos\vartheta)}\,d\vartheta$$

$$= 2r\int_0^{2\pi} \sin(\vartheta/2)\,d\vartheta = 2r\left[-2\cos(\vartheta/2)\right]_0^{2\pi} = 8r\,,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کوم سره چې کټوټوالی $1-\cos\vartheta = 2\sin^2(\vartheta/2)$ کارول شوی.

لیکونکي اپپ، هیولیګ

د کږې (منحني) انتیګرالخویونه

د کږې انتیګرال $\int_C f$ په f کې کرښیز د ی اونسبت و C ته زیا تیزیا د جمعې په ډول:

- $$\int_C \alpha f + \beta g = \alpha \int_C f + \beta \int_C g$$
- $$\int_C f\, dC = \int_{C_1} f + \int_{C_2} f$$,

که $C = C_1 \cup C_2$ او C_1 او C_2 د ځانله ټکي پورې ټکي پردي وي،

دا له پارامتري کونې څخه خپلواک دی او په ځانګړې توګه د کږې د لوریزوالي څخه هم خپواک دی.

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

د لیندې اوږدوالی

د یوې د

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$t \mapsto p(t)\,, \qquad a \le t \le b\,,$$

له لارې پارامتري شوې کږه(منحني) C د $p(a)$ او $p(t)$ ترمنځ د کږې اوږدوالی

$$s(t) = \int_a^t |p'(\tau)|\, d\tau\,,$$

کيدی شي د کانوني کږې پارمتر په حيث وکارول شي. سړی داسې په نا مه د ليندې پسې پارامتري کيدنه لاس ته اروړي:

$$q(s) = p(t), \quad |q'| = 1\,.$$

د کانديد تانجنتوکتور له مخې يا پر بنسټ د دې کانوني پارامتري کونې لپاره باور لري

$$\int_C f = \int_0^L f(q(s))\, ds$$

د C د اوږدوالي L سره.

ليکونکي: اېپ، هيوليک

د بېلګې په توګه د ليندې $q(s)$ پسې د شپيرالې

$$C: \quad p(t) = \exp(t) \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, \quad p'(t) = \exp(t) \begin{pmatrix} \cos t - \sin t \\ \cos t + \sin t \end{pmatrix}$$

پاراه متري کونه له $t = 0$ تاکل کيږي. سړی لاس ته راوړي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$s(t) = \int_0^t |p'(\tau)|\, d\tau = \int_0^t \sqrt{2}\exp(\tau)\, d\tau = \sqrt{2}(\exp(t) - 1)$$

همداسې

$$t(s) = \ln(s/\sqrt{2} + 1)\,.$$

له دې سره لاس ته راځي

$$q(s) = (s/\sqrt{2} + 1)\begin{pmatrix} \cos(\ln(s/\sqrt{2}+1)) \\ \sin(\ln(s/\sqrt{2}+1)) \end{pmatrix}.$$

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

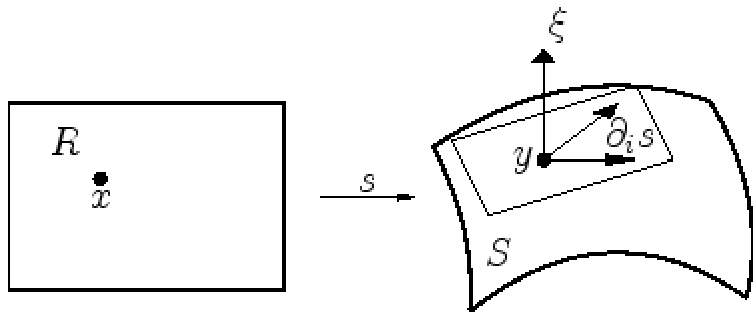
د يوې ټوټې سطحې رګولار پارامتريکونه

يو ناپرېکېدونکی مشتقموړ پارامتري کونه

$$R \ni \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} \mapsto s(x) = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

په يوه رګولار ورشو R باندې يو رګولار د سطحې ټوټه $S = s(R)$ تشريح کوي، که s د R په دننه کې اينجکتيو(په باندې) وي او وکتورونه $\partial_1 s(x), \ldots, \partial_{n-1} s(x)$ د ټولو $x \in \mathring{R}$ لپاره کرښيز خپلواک وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



دا تر مخنخښې پورې يوائځنى ټاکلى يوونوكتور(واحدوكتور) ξ ، چې د $\partial_1 s(x), \ldots, \partial_{n-1} s(x)$ څخه يا له لارې غزېدلى تانجنت سطحې ته اورتوګونال دى، سطحې نورمال بلل كيږي. دا ووكتورونو $\partial_i s(x)$ سره يوځاى د $\mathbb{R}^n$ يوه بنسټ جوړوي

ليونكي: هيوليګ، موښ

د سطحې انتيګرال *Flächenintegral*

د يوه ناپرېكيدونكي تابع f انتيګرال په يوه رګولار سطحې توټې د پارمتري كونې سره

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} \mapsto s(x) = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad x \in R,$$

او سطحې نورمالې ξ سره د

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int_S f\, dS = \int_R (f \circ s)\,|\det(\partial_1 s, \dots, \partial_{n-1} s, \xi)|\, dR$$

په حیث تعریف دی او د تاکل شوي پارمتري کوني څخه خپلواک دی.

د دیترمینانت ارزښت د سطحېتوکي د سکالي شوی ضریب دی:

$$dS = |\det(\partial_1 s, \dots, \partial_{n-1} s, \xi)|\, dR\,.$$

د $f = 1$ لپاره د ځانګړي حالت په حیث سرې د S سطحې مساحت لاس ته راوړي.

د f او s مساواتوړاندنیوني کیدی شي ضعیفي شي، داسې چې ا نتیګرال په یوه مناسب پوله پروسه باندې تعریف شي. برسېره پردې کېدی شي یوه سطحه د ډېرو سطحې ټوټو یوځای شوې یا جوړه شوې وي. د سطحې انتیګرال نو په دې حالت کې د یوګونو ټوټه سطحو باندې د انتیګرالونو زیاتون یا جمعه ده.

لیونکي: هیولیک، موښ

د ساده ونې له ا مله دوه پرا خیدونې یا دوه دیمنزنال حالت ترخیرني لاندې نیسو.

کېدی شي تعریف د ریمن-زیاتون یا –جمعې په مرسته مدلل کړی شي. لکه په څېره کې چې ښوول شوي، سرې د تریانګولي کولو له لارې R اپروکسیمي کوي د درېګوډي د σ کانتي اوږدوالي سره متناسب و ته h. د ګوډتکو د توابعو له لارې دا د S یوتریانګل تولیدوي د درېګوډیو τ سره:

$$\tau \ni (x_\tau, y_\tau, z_\tau) = s(u_\sigma, v_\sigma)\,.$$

د سکالی کولو ضریب د درېګوډي د سطحې تغیر اپروکسیمي کوي

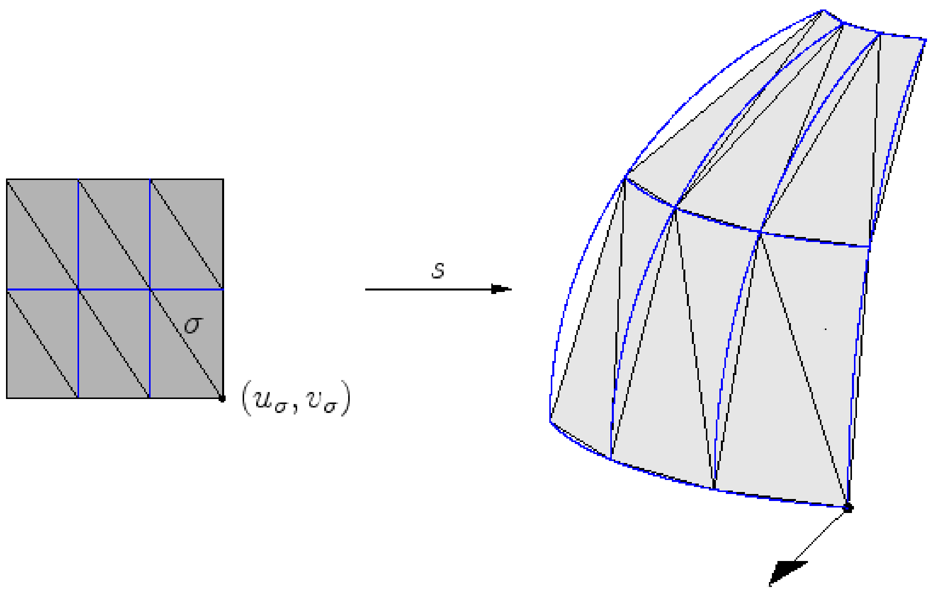
$$\mathrm{area}(\tau) = |\det(s_u(u_\sigma, v_\sigma), s_v(u_\sigma, v_\sigma), \xi)|\, \mathrm{area}(\sigma) + O(h^3)\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

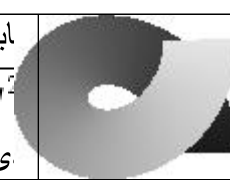
په تعقیب انتیګرال د $h \to 0$ لپاره د ریمنن – زیاتون له لارې

$$\sum_{\sigma} f(x_\tau, y_\tau, z_\tau) |\det(s_u(u_\sigma, v_\sigma), s_v(u_\sigma, v_\sigma), \xi)| \operatorname{area}(\sigma)$$

نږدې کیږي، هغه چې د $h \to 0$ لپاره د انتیګرال په لور هڅیږي



لیونکي: هیولیک، موبڼ

ابع $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ ي د	

$$(r,\varphi) \mapsto s(r,\varphi) = \begin{pmatrix} (1+r)\cos\varphi \\ (1+r)\sin\varphi \\ \varphi \end{pmatrix}, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi, \ -\frac{1}{2} \le r \le \frac{1}{2}$$

له لارې پارامتري شوي د راتاو پوړظ یا زینې Wendeltreppe S برخه توتو

(c) ketabton.com: The Digital Library

انتيګرال ونيول شي.

د سطحې توکو د سکالي کولو فاکتور د ټاکلو لپاره لومړی شميرو(ځيره پورته مخ کې):

$$s_r = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad s_\varphi = \begin{pmatrix} -(1+r)\sin\varphi \\ (1+r)\cos\varphi \\ 1 \end{pmatrix}.$$

دا چې ټوټه مشتقونه اورتوګونال دي،دی

$$|\det(s_r, s_\varphi, \xi)| = |s_r|\,|s_\varphi| = \sqrt{(1+r)^2+1}.$$

له دې سره لاس ته راځي

$$\int_S f\,dS = \int_0^{2\pi}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (1+r)\sqrt{(1+r)^2+1}\,dr\,d\varphi = 2\pi\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (1+r)\sqrt{(1+r)^2+1}\,dr$$

$$= \frac{2\pi}{3}\left[\left((1+r)^2+1\right)^{\frac{3}{2}}\right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \frac{2\pi}{3}\left(\left(\frac{13}{4}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{3}{2}}\right).$$

ليونکي: هيوليک، موبش

د يوه تابع $z(x,y)$ د ګراف S د سطحېتوکی دی

$$dS = \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا د پارمتيکولو لپاره د ټوليز تعريف څخه ترلې لاس ته راځي

$$(x,y) \mapsto s(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z(x,y) \end{pmatrix},$$

ځکه چې د سطحې نورمال ξ غبرګ دی و

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ z_x \end{pmatrix}}_{s_x} \times \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ z_y \end{pmatrix}}_{s_y} = \begin{pmatrix} -z_x \\ -z_y \\ 1 \end{pmatrix}$$

ته او د $|\xi| = 1$ له امله دی

$$|\det(s_x, s_y, \xi)| = |s_x \times s_y| = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}.$$

د بيلګې په توګه د کونکرټ يا روښانه تابع $z(x,y) = x^2 + \frac{1}{2}y^2$ د ګراف لپاره دی

$$dS = \sqrt{1 + 4x^2 + y^2},$$

او سرى د $f(x,y) = xy$ لپاره لاس ته راوړي او دا په ولاړګوډيز $[0,1] \times [0,2]$ پرتې سطحې ټوټې

$$\int_S f\,dS = \int_0^1 \int_0^2 xy\sqrt{1 + 4x^2 + y^2}\,dy\,dx$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \frac{1}{3}\int_0^1 \left[x(1+4x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^2 dx = \frac{1}{3}\int_0^1 \left(x(5+4x^2)^{\frac{3}{2}} - x(1+4x^2)^{\frac{3}{2}}\right) dx$$

$$= \frac{1}{3}\left[\left(\frac{1}{20}(5+4x^2)^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{20}(1+4x^2)^{\frac{5}{2}}\right)\right]_0^1 = \frac{61}{15} - \frac{625}{6}\sqrt{5}\,.$$

ليونکي: هيوليک، موبش

د سطحې توکي په توته کواوردينات کې

د سطحې توکي د يوه د

$$\begin{pmatrix} \varphi \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \varrho\cos\varphi \\ \varrho\sin\varphi \\ z \end{pmatrix}$$

له لارې پارامتري شوی د يوې توتې پورته پوښ S د وړانګې ϱ سره دی

$$dS = \varrho\, d\varphi\, dz\,.$$

له دې سره په توتپه کواوردينات کې د يوه تابع f د ا نتيګرال لپاره باور لري

$$\int_S f\ dS = \int_{z_{\min}}^{z_{\max}} \int_0^{2\pi} f(\varrho,\varphi,z)\ \varrho\, d\varphi\, dz\,.$$

ليونکي: هيوليک، موبش

(c) ketabton.com: The Digital Library

د تانجنت وکتور د اورتوګونالیتي له امله

$$s_\varphi = \begin{pmatrix} -\varrho\sin\varphi \\ \varrho\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad s_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

د سکالا کولو کتور د سطحي توکو لپاره دی

$$|\det(s_\varphi, s_z, \xi)| = |s_\varphi|\,|s_z| = \varrho,$$

لکه چې غوښتل مو.

لیونکي: هیولیک، موښ

$$V = [0,1]^2$$

د ځلورئ یا مربع لپاره اصلي جمله داسې ده

$$\int_0^1\int_0^1 \operatorname{grad} f(x,y)\,dx\,dy = \begin{pmatrix} \int_0^1 f(1,y) - f(0,y)\,dy \\ \int_0^1 f(x,1) - f(x,0)\,dx \end{pmatrix}.$$

دا له تابع څخه ترلي لیدل کیږي:

$$n = (\pm 1, 0), (0, \pm 1)$$

د کثمتوالي کمپوننتونه د اونیواریانت(یومتحولي یا اووښوتوني) اصلي جمله په ګوته کوي.
د بیلګې په توګه لومړی کمپوننت و لاندطته ورته یا یو ارزښته یا اکویوالنتدی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f_x(x,y)\,dx - [f(x,y)]_{x=0}^{x=1} \right)\,dy = 0\,.$$

(Aus: Mathematik-Online)

په غونډاري کواوردينات کې د سطحو توکي

د سطحې د توکي د يوه د

$$\begin{pmatrix} \vartheta \\ \varphi \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} R\sin\vartheta\cos\varphi \\ R\sin\vartheta\sin\varphi \\ R\cos\vartheta \end{pmatrix}$$

له لارې لپاره پارمتري شوی فضا Sphäre د وړانګې R سره دی

$$dS = R^2 \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi\,.$$

له دېسره په غونډاري کواوردينات کې د يوه تابع f د انتيګرال لپاره باور لري

$$\int_S f\ dS = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(R,\vartheta,\varphi)\,R^2 \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi\,.$$

ليونکي: هيوليک، موښ

د تانجنت وکتور د اورتوګوناليټي له امله

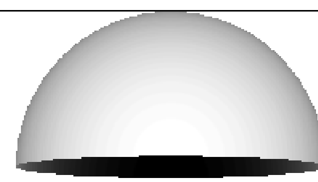
(c) ketabton.com: The Digital Library

$$s_\vartheta = \begin{pmatrix} R\cos\vartheta\cos\varphi \\ R\cos\vartheta\sin\varphi \\ -R\sin\vartheta \end{pmatrix}, \qquad s_\varphi = \begin{pmatrix} -R\sin\vartheta\sin\varphi \\ R\sin\vartheta\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

د سکالیکولووکتور د سطحې توکو لپاره دی

$$|\det(s_\vartheta, s_\varphi, \xi)| = |s_\vartheta|\,|s_\varphi| = R^2 \sin\vartheta\,,$$

لکه چې غوښتل مو.
لیکونکي: هیولیګ، موبش

د نیمغونداري(-پیالي یا پوښ) درونډټکی S دې $H\ :\quad x^2+y^2+z^2=1\,,\quad z\ge 0\,,$ د ثابت تیګوالي سره وټاکل شي	

د سیومتري په اساس د درونټکي د x -او y - کواوردیناتونه صفر دي. د z –
کواوردینات لپاره د غونداري کواوردینات د کارولوله امله سرې لاس ته راوړي

$$s_z\,\text{area}(H) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\vartheta)\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi = \pi\,,$$

او د $\text{area}(H) = 2\pi$ سره لاسته راځي $s_z = \frac{1}{2}\,.$.

لیکونکي: هیولیګ، موبش

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ډېرواره اتيګرال لپاره اصلي جمله

که n د يوه رګولارورشو $V \subset \mathbb{R}^m$ د باندې لور ته لوريزه يوونتورم يا واحدنورم وښاييد رګولار $(m-1)$ -- بعد يا پراخېدوني ژئ ∂V سره، نو د يوه ناپرېکېدونکي مشتقوړ تابع f لپاره باور لري

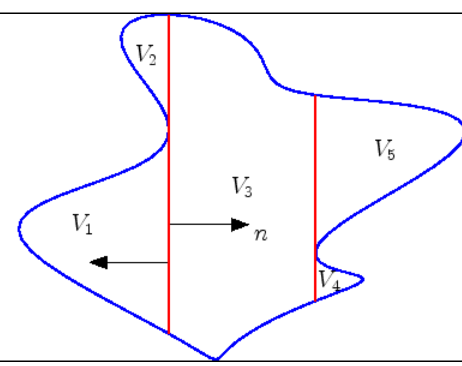
$$\int_V \partial_\nu f = \int_{\partial V} f\, n_\nu, \quad \nu = 1, \ldots, m\,.$$

که سرې دا مساوات سره يوځای کړي، نو سرې وکتوري کتمتوالی لاس ته راوړي.

$$\int_V \operatorname{grad} f = \int_{\partial V} f\, n\,.$$

(ليکونکي:هوليک، هورنر)

د ښووني فکر د $m = 2$ لپاره ښوول کيږي.

	لومړی په پام کې نيول کيږي، چې د انتيګرال نيولوو ورشو په برخه ورشوګانو وېشل کيدی شي، ځکه چې د نورم د لوريزوني له امله د ټوټه کېدنو په دننئ ژئ د ژئ انتيګرالونه لرې کيږي. له دې امله بسيا کوي، يو د انتيګرال نيوني ساده ورشو راوخلو يا تر څېړني ونيسو.

د $m = 2$ لپاره سرې V په ساده ورشوګانو ټوټه کوي په لاندې بڼه

$$V: a \leq x \leq b, \quad c(x) \leq y \leq d(x)\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بيا د ډبل انتيګرال لپاره باور لري

$$\int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} f_y(x,y)\,dy dx = \int_a^b (f(x,d(x)) - f(x,c(x))\,dx\,.$$

په ولاړو يا عمودوvertikalen ژيو د y – کمپوننت د صفر عمود دی له دې امله بايد د ژئ ا نتيګرال لپاره پورته اوکښته ژئ په پام کې ونيول شي يا وکتل شي. لاندې ژئ کيدی شي په لاندې بڼه

$$C:\ \ x \mapsto (x, c(x)), \quad a \leq x \leq b$$

پارامتريک شي او

$$n = \frac{1}{\sqrt{1+c'(x)^2}} \begin{pmatrix} c'(x) \\ -1 \end{pmatrix}.$$

دلا چې $dC = \sqrt{1+c'(x)^2}dx$ دی، نو باور لري

$$\int_C f n_2 = \int_a^b f(x,c(x))(-1)\,dx\,.$$

په ورته توګه لاندطژئانتيګرال شمېرل کيږي، او د ارزښتونو زياتون يا جمعه د ډبل انتيګرال سره سر خوري يا همغږيز کيږي.

(ليکونکي:هوليک، هورنر)

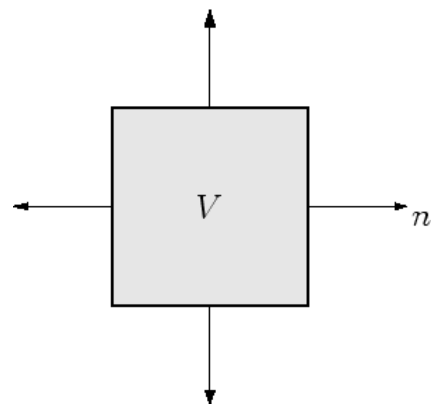
د مربع $V = [0,1]^2$ لپاره اصلي جمله ده

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int_0^1 \int_0^1 \operatorname{grad} f(x,y)\, dx\, dy = \begin{pmatrix} \int_0^1 f(1,y) - f(0,y)\, dy \\ \int_0^1 f(x,1) - f(x,0)\, dx \end{pmatrix}.$$

دا له تابع څخه تړلي ليدل کيږي:

$$n = (\pm 1, 0), (0, \pm 1)$$



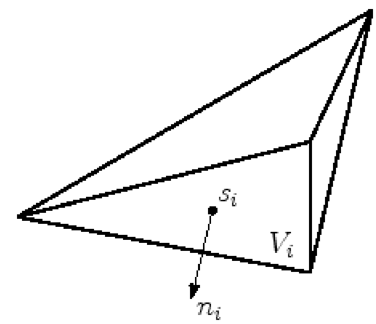
د کتمتوالي کمپوننتونه د يومتحول والي اصلي جمله ده. د بيلګې په توګه لومړی کتپوننت و لاندې ته ورته يا اکويوالنت دی

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f_x(x,y)\, dx - [f(x,y)]_{x=0}^{x=1} \right) dy = 0\,.$$

(Aus: Mathematik-Online)

(c) ketabton.com: The Digital Library

$V \subseteq \mathbb{R}^m$ دې يو سيمپلکس وي، چې د $(m-1)$ -بعدي سيمپلکسونو $V_i\,,\; i=1,\ldots,m+1$ له لارې را بنديږي او n_i د باندې لور ته لوريز يوونورمال يا واحدنورمال نومول کيږي او s_i د V_i درونټکی وي.



د يوه ثابت تابع $f(x)=b$ لپاره د اصلي جملېلاسته راځي

$$0=\sum_i \mathrm{vol}_{m-1}(V_i)n_i\,.$$

د يوه کرښيز تابع $f(x)=a^{\mathrm{t}}x$ لپاره باور لري

$$\mathrm{vol}_m(V)\,a=\sum_i \mathrm{vol}_{m-1}(V_i)(a^{\mathrm{t}}s_i)n_i\,.$$

دلته وکارول شوی،چې د يوه سيمپلکس S لپاره د دروندټکي s سره مربعيز فرمول Quadraturformel د کرښزې تابع f لپاره ټيک ده

(Aus: Mathematik-Online)

(c) ketabton.com: The Digital Library

د یوه غونداري لپاره په یوه غونډاریکواوردینات کې د وړانګې R اوپاس –یا پورته یا پوښ سطحې یا هوارې سره باور لري

$$dV = r^2 \sin\vartheta \, dr \; d\vartheta \, d\varphi \,, \quad dS = R^2 \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi$$

او $n = (x, y, z)^t / R$ یوونونورمال دی. د دې پسې یا دېلاسته راوړنې پسې اصلي جمله ده

$$\int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \operatorname{grad} f(r, \vartheta, \varphi) \, r^2 \sin\vartheta d\varphi \, d\vartheta \, dr =$$

$$= R^2 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f(R, \vartheta, \varphi) \begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi \\ \cos\vartheta \end{pmatrix} \sin\vartheta \, d\varphi \, d\vartheta \,.$$

د بېلګې په د روښانه تابع لپاره سرې لاس ته راوړي

$$f(x, y, z) = xz^2 = R^3 \sin\vartheta \cos\varphi \cos^2\vartheta$$

د ګرادینت او fn لپاره

$$\operatorname{grad} f(x, y, z) = \begin{pmatrix} z^2 \\ 0 \\ 2xz \end{pmatrix} ,$$

$$f(x, y, z) n = \frac{1}{R} \begin{pmatrix} x^2 z^2 \\ xyz^2 \\ xz^3 \end{pmatrix} .$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د سیومتري په بنسټ اخرودواړو لیکوباندې انتیګرال صفر راکوي.د لومړئ لیکې لپاره په غونډاري کواوردینات کې صفر لاس ته راځي

$$\int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^4 \cos^2 \vartheta \, \sin \vartheta \, d\varphi \, d\vartheta \, dr =$$

$$= R^2 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} R^3 \sin^3 \vartheta \cos^2 \vartheta \cos^2 \varphi \, d\varphi \, d\vartheta$$

$$= \frac{4}{15} \pi R^5 .$$

(Aus: Mathematik-Online)

Partielle Integration نوټه انتیګرال

د ځوی توابعو f او g لپاره د کومپاکت وړونکي سره باور لري

$$\int_{\mathbb{R}^m} g \, \partial^\alpha f = (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^m} f \, \partial^\alpha g .$$

(لیکونکي:هولیګ، هورنر)

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا چې f او g کومپاکت وړونکي لري، يوه کوادر V شتونلري،داسې چې د V په ژئ او هم دباندې له V دواړه توابع ورک شي.

د اصلي جملې له مخې د ډېرواره انتيګرالونې لپاره با ور لري

$$\int_{\mathbb{R}^m} \partial_\nu(fg) = \int_V \partial_\nu(fg) = \int_{\partial V} (fg) n_\nu = 0$$

د يوه په خوښه ټوټه مشتق ∂_ν لپاره.له بلې خوا د ضرب قانون له مخې دی

$$\partial_\nu(fg) = g\partial_\nu f + f\partial_\nu g$$

او له دې سره

$$\int_{\mathbb{R}^m} g\partial_\nu f + \int_{\mathbb{R}^m} f\partial_\nu g = 0\,, \quad \text{bzw.} \quad \int_{\mathbb{R}^m} g\partial_\nu f = -\int_{\mathbb{R}^m} f\partial_\nu g\,.$$

د ∂^α په تجزيه په يوګونو ټوټه مشتقونو له لارې او پرلپسې د مساواتو استعمال سره سرې دا ورکړ شوی فرمول لاس ته راوړې، ځکه چې په هوارو يا خويو توابعو کې د ټوټه مشتق سره بدلېدلی شي.

(ليکونکي:هوليګ، هورنر)

د ګرين فرمولونه ***Greensche Formeln***

که n د باندې لور ته لوريز د يوه رګولارورشو $V \subseteq \mathbb{R}^m$ يوونرمال يا واحدنورمال وښايي د رګولارژئ سطحې $S = \partial V$ سره، نود دوه ناپرېکېدونکي مشتقوړ توابعو f او g لپاره باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int_S f \frac{\partial g}{\partial n} = \int_V (\mathrm{grad}\, f)^{\mathrm{t}} \ \mathrm{grad}\, g + f \, \Delta g \, .$$

چېرته چې $\frac{\partial g}{\partial n}$ د دباندې لورته مشتق ښايي نورمال دی.

په ځانګړي د $f = 1$ لپاره لرو

$$\int_S \frac{\partial g}{\partial n} = \int_V \Delta g \, .$$

يوسيومتري واريانت په ګرين نومول شوې کټمټوالی دی

$$\int_S f \frac{\partial g}{\partial n} - g \frac{\partial f}{\partial n} = \int_V f \Delta g - g \Delta f \, .$$

د دواړو ګرين فرمولونو نه کېدی شي دخوی والي وړاندنيونه ضعيفه شي، داسې چې په مناسب پوله ارزښت تعريف شي.

(ليکونکي:هوليک، هورنر)

د ډېرواره اينتګرال اصلي جملې پسې دی

$$\int_S f \, \partial_\nu g \, n_\nu = \int_V \partial_\nu \left(f \, \partial_\nu g \right) \, , \quad \nu = 1, \cdots, m \, .$$

د ضرب قانون سره په ښي اړخ انتيګرال لپاره لاس ته راځي

$$(\partial_\nu f)(\partial_\nu g) + f(\partial_\nu \partial_\nu g)$$

په $\nu = 1, \ldots, n$ باندې زياتون يا جمعې له دې سره د ګرين لومړی فرمول راکوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم فرمول د f او g یدلون له لارې لاس ته راځي. سړی د

$$\int_S f \frac{\partial g}{\partial n} \quad \text{او} \quad \int_S g \frac{\partial f}{\partial n}$$

لپاره کتمتوالی کموي یا سره تفریقوي او په پام کې نیول کیږي، چې د ډکي- یا حجم اینتگرالونو د گرادینت ضرب له منځه وړي یا پورته کوي؟

(لیکونکي:هولیگ، هورنر)

د فبروری ۲۴ د۲۰۱۱ ز ک.

د لوی ښښتن په برکت او مهربانئ(ژباړی)

هر پیل شوی کار چې پای کیږي، نو ناروغه زړه ورسره، هغه د شاعرانو خبره، باغ باغ کیږي.(ژباړی)

د ډاکتر ماخان شینواري چاپ شوې لیکنې:

1988 Vienna (Austria):

لومړی:

H.K. Kaiser , M. Shinwari : Aproximation compact pological algebra : general algebra 6 ; Page 117 – 122 contributions to

(c) ketabton.com: The Digital Library

1987 Vienna (Austria):

دویم:

Diss . Interpolation und Aproximation durch Polynime in Universalen Algebren . Uni. Wien

Dissertation Interpolation and Aproximation by Polynome in universal Algebras, at the University of Vienna/Austria

لاندې د شميرپوهنې پښتوټول کتابونه په المان کې د ،، افغانستان کلتوري ودې ټولنه،،له خوا چاپ شوي دي

2000 Bonn (Germany):

دريم: د شميرپوهنې ستر کتاب : د شميرپوهنې برسيره د انجنري، فزيک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زده کوونکو لپاره (دا کتاب په ۹۰۰ مخونو کې چاپ او دا نوې ليکنه به يې ځنو ځايونو غزېدلې او ځنې ځايونه ترې لرې شوي دي)

2003 Bonn (Germany):

څلورم: ځمککچپوهنه(هندسه) ، په سلو، زرو کې شميرنه، د ګټې – او کټې د کټې شميرنه ، د اختمالوالي شمېرنه کتاب د ښوونځي ټولې اړتياوې پوره کوي

2003 Bonn (Germany):

پنځم: الجبرونه (د الجبر بنسټونه دي)

2003 Bonn (Germany):

شپږم: د شميرپوهنې انګريزي – پښتو ډکشنري.

2003 Bonn (Germany):

اووم: د شميرپوهنې الماني ـ پښتو- او پښتو الماني ډکشنري

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرلیک

Mathematical dictionary German/ Pashto and Pashto/German

2003 Bonn (Germany):

اتم: دفرنځیال برابرون (دا کتاب په دې ځانګه کې یو پیل   دی، ساده لیکل شوی)

Differential equation Translation; An Introduction

Bonn (Germany): 2003

نهم: د شمیر پوهنې فرمولونو ټولګه

Mathematical Formulas

2003 Bonn (Germany):

لسم: شمیرپوهنه له عربي په پښتو

1997 Bonn (Germany):

یوولسم: د افغانستان په هکله سپینې خبرې: په   المان کې

،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خو

.یادونه: له ۲۰۰۰ کال دمخه ډاکتر ماخان شینواري د ،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خوا درې ساسي مجلې هم را وستلي.

د ډاکتر ماخان ،،میرې،، شینواري لیکنې او ژباړې چې په چاپیدو یې پیل کیږي

2012 Bonn; Germany; Kabul Afghanistan

ژباړې:

لاندې د برینکمن لیکنې چې له پرینکمن ن ج څخه ژباړل شوي دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرلیک

۱ - شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره لومړی ټوک

۲ – شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره دویم ټوک

۳ – شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره دریم ټوک

۴ - د احتمالوالي شمیرنه د ښوونځي لپاره

۵ – احصایه یا ستاتیستیک دښوونځي لپاره

لاندې کتابونه د شتوتګارت د پوهنتون د استادانو د لکچرونو څخه چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپاره شوي را ژباړل شوي.

۶ – انالیزی ۱

۷ – انالیزې ۲

۸ – کرښیز الجبر

۹ - د شمیرپوهنې بنسټونه

۱۰ - د فرمولونو ټولګه

۱۱ – فنکشنل انالیز

۱۲ – وکتور شمیرنه

نورې ژباړې

۱۳ – له www./grundstudium.info/linearealgebra څخه:کرښیز الجبر

۱۴ – Georg Gutenbrunner ګڼونپوهنه یا د اعدادو تیوري

(c) ketabton.com: The Digital Library

زما لیکنې

Bonn (Germany):

۱۵ - د شمیرپوهنې ستر کتاب دویم چاپ د پوره تغیراتو سره : دا کتاب د شمیرپوهنې برخې برسیره د

انجنري، فزیک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زدهکوونکو لپاره پوره ګټور دی. په

کتاب کې د اړتیا سره زیاتونه او کونه راغلي

۱۶ - ځمککچپوهنه (هندسه) دویم چاپ د پوره تغیراتو سره

۱۷ – الجبر بنسټونه دویم چاپ له تغیراتو سره

۱۸ - ډېرۍ پوهنه یا سټ تیوري

۱۹ – د شمیرپوهنې سم اند (منطق ریاضي)

۲۰ - د یو څو شمیرپوهانو ژوندلیک

۲۱ – د شمیر پوهنې ګډې وډې لیکنې

۲۲- داهم ژباړه ده، خو لیکونکی یې متآسفانه راڅخه نابلد شوی: د مشتق او انتیګرال شمیرنو ته تمرینونه او اوبیونې یا حلونه یې

۲۳ – د شمیرپوهنې انګریزې پښتو او عربي + دري ډکشنري

۲۴ – د شمیرپوهنې پښتو انګرېزي ډکشنري

۲۵ – د شمیرپوهنې پښتو ډکشنري د شمیرپوهنیزو ویيونو په پښتو روښانه ونه

۲۶ - د زړه له کومې(دا هغه لیکنې دي، چې ځنې یې په نړیول جالونو کې خپرې شوي دي.)

۲۷ – د افغانستان په هکله سپینې خبرې، چې وبه غزیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

نوري ليکنې، چې په ژباړه يې پيل شوی، خو لا پوره نه دي

– د شتوتکارت پوهنتون لکچرنوټونو څخه ، چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپريږي:

د ګروپونو تيوري

- د ښوونځي لپاره فزيک د برينکمن ليکنه

له پنځم ټولګي څخه تر اووم ټولګي پورې ژباړل شوی (دا چې زما دويم مسلک فزيک دی، دا ليکنې ژباړم. دا هم د دې ليکوال يوه ډېره ښه ليکنه ده، چې -د شميرپوهنې په څير- دلته هم زيات تمرينونه د حل يا اوبيونې سره په کې راغلي او ماته زيات ګټور برېښي)

Get more e-books from www.ketabton.com
Ketabton.com: The Digital Library