

د فرمولونو ټولګه

لیکونکی:

ډاکټر ماخان (میری) شینواری

**Ketabton.com**

2016

## د فرمولونو ټولګه

راتولونکی : ډاکټر ماخان میړی شینواری

سریزه: بی له سریزی

### Aussagenlogik وینا سم اندیا - منطق

#### سم اندیزی ترنی

وینیدول نه A B او A B یا A یا A یا B له A لاس ته راخی B و ته ورته ده	لیکنیدول $\neg A$ $A \wedge B$ $A \vee B$ $A \neq B$ $A \Rightarrow B$ $A \Leftrightarrow B$	نخبه ونه نه والی د او ترنه د یا ترنه ناورته والی (انتیوالتخ) ترې لاس ته راتلنه ورته والی
--	--	--

لاری یا قوانین

$$\neg(A \wedge B) = (\neg A) \vee (\neg B)$$

Morgansche Regeln د مورگان لاری - قانون

$$\neg(A \vee B) = (\neg A) \wedge (\neg B)$$

$$(A \wedge B) \vee C = (A \vee C) \wedge (B \vee C)$$

Distributivgesetze دپستریبوتیو قانون

$$(A \vee B) \wedge C = (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$$

$$A \vee \neg A = w \quad A \wedge \neg A = f$$

weitere Regeln نور قوانین

$$A \vee w = w \quad A \wedge w = A$$

$$A \vee f = A \quad A \wedge f = f$$

کوانتورونه Quantoren د شتون - یا موجودیت کوانتور:  $\exists$  (لر تر لره یو... شته)

تولکوانتور:  $\forall$  (د ټولو ... لپاره)

# دېری Mengen

دېریو کارونی یا - عملی Mengenoperationen

تولنه:  $A \cup B$

غوخی یا تقاطع:  $A \cap B$

$A \setminus B$

کمبنت یا تفریق:

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

سیومتريک کمبنت:

قوانین

$$C \setminus (A \cap B) = (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$$

د مورگان قانون Morgansche Regeln

$$C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$$

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

دېستریبوتیو قانون Distributivgesetze

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

اریکی

Relation

$$a R b \Leftrightarrow (a, b) \in R \subseteq A \times B$$

$$(a, a) \in R$$

reflexiv: هنداریزی

$$(a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \in R$$

symmetrisch: سیومتريک:

$$(a, b) \in R \wedge (b, a) \in R \Rightarrow a = b$$

antisymmetrisch: انتی سیومتريک:

$$(a, b) \in R \wedge (b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in R$$

transitiv: ترانزیتیو یا پسې تلونی

:

توتال يا تول

$$(a, b) \in R \vee (b, a) \in R$$

total:

ورته يا اكويوالنت اريكي : هنداريزي، سيومتريک او ترانزيتيو

نيم نظم : هنداريزي، او ترانزيتيو

Äquivalenzrelation: reflexiv, symmetrisch und transitiv

Halbordnung: reflexiv, antisymmetrisch und transitiv

## کومبيناټوريک Kombinatorik

د بينوم ضربيونه

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{1\cdots(k-1)k}$$

قوانين

$$\binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1$$

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

$$0 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k, \quad n \geq 1$$

$$\binom{n}{k} = \sum_{i=0}^k \binom{n-k-1+i}{i}, \quad k < n$$

$$\binom{n}{k} = \sum_{i=0}^{n-k} \binom{k-1+i}{i}, \quad k > 0$$

کمبينيټونونه

mit Reihenfolge

د پرلپسي لړۍ سره

ohne Reihenfolge

بي له پرلپسي لړۍ

	د تکرار سره	$n^k$	$\binom{n+k-1}{k}$
	بې له تکراره	$n(n-1)\cdots(n-k+1)$	$\binom{n}{k}$

## کمپلکس یا گډوله اعدا یا – گڼونه **komplexe Zahlen**

Betrag (مطلق) ارزښت

$$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

ارگومنټ (د x ارزښتونه) Argument

$$\sin \varphi = y/r \quad \cos \varphi = x/r$$

او

قطبي بڼه Polarform:

$$x + iy = z = r e^{i\varphi}$$

$\varphi$	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$x$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0
$y$	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1

$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$ $\frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{ z_2 ^2} z_1 \bar{z}_2 = (r_1/r_2) e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$ $z^{1/n} = r^{1/n} e^{i\varphi/n} e^{2\pi i k/n}$ $ z - a  =  z - b $ $ z - a  = s  z - b  \Leftrightarrow  z - w  = r$ $w = \frac{1}{1 - s^2} a - \frac{s^2}{1 - s^2} b, \quad r = \frac{s}{ 1 - s^2 }  b - a $	<p>اوپلر-موپوري</p> <p>وېش</p> <p>رېښه</p> <p>منځنۍ ولاړه یا – عمود گردۍ – یا دایر همساوات</p>
--	--

## وکتورونه Vektoren

Betrag  
مطلق (ارزښت)

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

Dreiecksungleichung  
درېکودي نامساوات

$$|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$$

Skalarprodukt  
سکالار ضرب

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \varphi$$

Vektorprodukt  
وکتوري ضرب

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}, \quad |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \varphi$$

Grassmann-Identität  
د ګرسمن کټمټوالي

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c}) \vec{a}$$

Lagrange-Identität  
د لاګرانژ کټمټوالي

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c})$$

Spatprodukt  
شپات ضرب

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$$

ځيوکليکي - يا تل بيرته راګرځيدونى بدلون

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}] = [\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}]$$

zyklische Vertauschung:

Vektor in وکتورونه په  
 $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$

$$\vec{x} = (\vec{x} \cdot \vec{u})\vec{u} + (\vec{x} \cdot \vec{v})\vec{v} + (\vec{x} \cdot \vec{w})\vec{w}$$

ONB

کي

Polarkoordinaten  
قطبیکو اور دیناتونہ

$$x = r \cos \varphi$$
$$y = r \sin \varphi, \quad r \geq 0, \varphi \in (-\pi, \pi]$$

Zylinderkoordinaten  
تونہ یی یا استوانہ یی  
کو اور دیناتونہ

$$x = \varrho \cos \varphi \quad \varrho \geq 0$$
$$y = \varrho \sin \varphi, \quad \varphi \in (-\pi, \pi]$$
$$z = z \quad z \in \mathbb{R}$$

Kugelkoordinaten  
گونڈوسکی یا غونڈاری  
کو اور دیناتونہ

$$x = r \cos \varphi \sin \vartheta \quad r \geq 0$$
$$y = r \sin \varphi \sin \vartheta, \quad \varphi \in (-\pi, \pi]$$
$$z = r \cos \vartheta \quad \vartheta \in [0, \pi]$$

(Autor: M. Reble)

## Geraden und Ebenen (ھواری) کرینی او سطحی

Gerade کرینہ

$$\vec{x} = \vec{p} + \lambda \vec{u}$$

Parameterform: د پارامترینہ

$$(\vec{x} - \vec{p}) \times \vec{u} = \vec{0}$$

Momentenform: مومتن یا لحضوبینہ

Ebene سطحہ

$$\vec{x} = \vec{p} + \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}$$

Parameterform: پارامتر بنہ

$$\vec{x} \cdot \vec{n} = h$$

Hesse-Normalform: د ہسپنورمال بنہ

Abstand Punkt-  
Gerade  
واتن نکے- کرینہ

$$d = \frac{|(\vec{q} - \vec{p}) \times \vec{u}|}{|\vec{u}|}$$



Abstand  
windschiefer  
واتن بادی مایل

$$d = \frac{|[(\vec{q} - \vec{p}), \vec{u}, \vec{v}]|}{|\vec{u} \times \vec{v}|}$$

Geraden  
کریبته

Abstand Punkt-  
Ebene  
واتن تکی- سطحه

$$d = |\vec{p} \cdot \vec{n} - h| / |\vec{n}|$$

لیکونکی : میبیل

## Ellipse , Parabel, Hyperbel هگی (ایلیپس)، پارابول، های پارابل

ایلیپسی یا هگی: دوه سوزون تکو (نقطه محراق) ته واتن

$$F_{\pm} = (\pm f, 0)$$

ثابت *konstant*

$$|\overrightarrow{PF_-}| + |\overrightarrow{PF_+}| = 2a$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad b^2 = a^2 - f^2$$

$$r^2 = \frac{b^2}{1 - (f/a)^2 \cos^2(\varphi)}$$

پارابول *Parabel*

$F = (0, f)$  یوه سوزون تکی  
او ورون کریبته  
 $g : y = -f$  ته برابر واتن

$$4fy = x^2$$

$$r = \frac{4f \sin(\varphi)}{\cos^2(\varphi)}$$

هایپارابول: دوه سوزون تکو ته کمبنت یا تفریق

$$F_{\pm} = (\pm f, 0)$$

ثابت

$$|\overrightarrow{PF_-}| - |\overrightarrow{PF_+}| = \pm 2a$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad b^2 = f^2 - a^2$$

$$r^2 = -\frac{b^2}{1 - (f/a)^2 \cos^2 \varphi}$$

لیکونکی: م. ربل

(Autor: M. Reble)

## Funktionen توابع یا خیرونه

Exponentialfunktion اکسپوننشل تابع  $y = b^x \Leftrightarrow x = \log_b y, \quad y = e^x \Leftrightarrow x = \ln y$

$$e^{x+y} = e^x e^y$$

$$b^x = e^{x \ln b}$$

Logarithmen  
لوگاریتمونه

$$\ln 1 = 0, \quad \ln e = 1$$

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y$$

$$\ln(x^n) = n \ln x$$

$$\log_a y = \ln y / \ln a$$

Trigonometrische  
Funktionen  
تریگونومیتریکي توابع

$x$	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
$\cos x$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0

$\tan x$	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	-
----------	---	-----------------------	---	------------	---

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \sin y \cos x$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$

$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}$$

Hyperbelfunktionen هاييار ابول توابع

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$\sinh(x \pm y) = \sinh x \cosh y \pm \sinh y \cosh x$$

$$\cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y$$

### Folgen und Reihen پرلپسي اولري

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n > n_\varepsilon \quad |a_n - a| < \varepsilon$$

پولي ته تلنه Konvergenz:

$a$  د  $a_n$  پوله بلل كيږي:

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

د پولي ته تلني نظم  $P$  Konvergenz-Ordnung:

$$|a_{n+1} - a_n| \leq c |a_n - a|^p$$

Cauchy-Kriterium

کوشي-قضيه

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n, m > n_\varepsilon \quad |a_n - a_m| < \varepsilon$$

د همغريزوالي قضيه Monotonie-Kriterium: ر اېنډې همغريزې پرلپسې پولې ته تلونکې دي.

د پرتلي قضيه Vergleichs-Kriterium:

$$c_n \rightarrow a \Rightarrow b_n \rightarrow a \quad a_n \leq b_n \leq c_n, \quad a_n \rightarrow a$$

او

خانگري پوله ارزښتونه

Spezielle Grenzwerte ( $n \rightarrow \infty$ )	$(1 + \frac{a}{n})^n \rightarrow e^a$ $\sqrt[n]{a} \rightarrow 1 \quad (a > 0)$ $\frac{1}{n} \sqrt[n]{n!} \rightarrow \frac{1}{e}$ $\frac{n!}{n^n} \rightarrow 0$ $a^n n^k \rightarrow 0 \quad ( a  < 1)$	$\sqrt[n]{n} \rightarrow 1$ $\sqrt[n]{n!} \rightarrow \infty$ $\frac{a^n}{n!} \rightarrow 0$ $\frac{n^k}{a^n} \rightarrow 0 \quad (a > 1)$
--	---	---

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

د لپاره اړينه قضيه

په لړيوکې پولې ته تلنه  
د مایورانت قضيه  $\sum b_n \quad |a_n| < b_n$   
پولې ته ځي او

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq q < 1$$

د وېش قضيه

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leq q < 1$$

د رېښې قضيه

$$a_n, b_n > 0, \quad a_n/b_n \rightarrow c > 0$$

د پرتله کونې قضيه

$$\Rightarrow a_n, b_n$$

همغه يا برابرپولي ته د تلني حالت لري

$$f(x) \quad a_n = f(n) \quad \text{د انټيگرال قضيه}$$

او همغريز لوېدونکي دي

$$\sum_n a_n \Rightarrow \int_c^\infty f(x) dx$$

له دې لاس ته راځي او همغه ډېولي ته تلني حالت لري.

د لايبنيخ Leibniz قضيه:  $a_n$  اترنيري کيږي او همغريزه صفر پرلپسي ده.

ځانگړي لړۍ

Spezielle Reihen

$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$	$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
$\sum_{k=0}^n x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$	$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x} \quad ( x  < 1)$
$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$	$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x) \quad ( x  < 1)$
$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sin x$	$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} = \cos x$

Harmonische Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ , konvergent für  $\alpha > 1$ , divergent für  $\alpha \leq 1$

هارموني لري د لپاره پولي ته ځي د لپاره پولط ته نه ځي يا پوله نه لري

(Autor: M. Reble)

## Differentiation دفرنشيشن

Linearität  
کرښيزوالی

$$(r f(x) + s g(x))' = r f'(x) + s g'(x)$$

Produktregel  
د ضرب قانون

$$(fg)' = f'g + fg'$$

Quotientenregel  
د وېش قانون

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

Kettenregel  
خنجري قانون

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) g'(x)$$

Umkehrfunktion  
معكوس تابع (په خټ-)

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}, \quad y = f(x)$$

Logarithmische

$$f'(x) = f(x) (\ln f(x))', \quad f(x) > 0$$

Ableitung

لوگاریتمي مشتق

Leibniz-Regel  
د لایبنيچ قانون

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)}$$

غوره مشتقونه:

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
$c$	$0$	$x^n$	$n x^{n-1}$
$e^x$	$e^x$	$\sin x$	$\cos x$
$a^x (a > 0)$	$a^x \ln a$	$\cos x$	$-\sin x$
$\ln  x $	$1/x$	$\tan x$	$1/\cos^2 x$
$\arcsin x ( x  < 1)$	$1/\sqrt{1-x^2}$	$\sinh x$	$\cosh x$
$\arccos x ( x  < 1)$	$-1/\sqrt{1-x^2}$	$\cosh x$	$\sinh x$
$\arctan x$	$1/(1+x^2)$	$\tanh x$	$1/\cosh^2 x$
$\operatorname{arsinh} x$	$1/\sqrt{1+x^2}$	$\operatorname{arcosh} x (x > 1)$	$1/\sqrt{x^2-1}$
$\operatorname{artanh} x ( x  < 1)$	$1/(1-x^2)$		

Mittelwertsatz

منخارزبت جمله

$$\exists c \in (a, b) : f(b) - f(a) = f'(c) (b - a)$$

Verallgemeinerter

Mittelwertsatz

تولیزه منخ ارزبنت قضیه

$$\exists c \in (a, b) : \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Regel von l'Hospital

دل، پیتال قاعده

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad (\text{bei } \frac{0}{0} \text{ und } \frac{\infty}{\infty})$$

Satz von Taylor

د تیلور جمله

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n + R_n$$

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - a)^{n+1}$$

Newton-Verfahren

د نیوٹن تئلار

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Leibniz-  
Regel  
د لا یبنیخ قانون

$$\frac{d}{dt} \int_{a(t)}^{b(t)} f(x, t) dx = \int_{a(t)}^{b(t)} f_t(x, t) dx + b'(t) f(b(t), t) - a'(t) f(a(t), t)$$

Extremum  
افراطیت

$$f'(x) = 0$$

Notwendig : اربن

د مینیموم (مکسیموم) لپاره پوره کېدونکي شرطونه : ورزیا یا بر علاوه

$$f''(x) > 0 (< 0)$$

Wendepunkt

اورونتیکی

$$f''(x) = 0$$

: ; Notwendig  
 $f'''(x) \neq 0$

پوره کېدونکي: ورزيات

(Autor: M. Reble)

## Integration اینتیکرېشن

Hauptsatz  
اصلي جمله

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

partielle  
Integration  
توټه اینتیکرېشن

$$\int f'(x)g(x) = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x) dx$$

Substitution  
بدلون يا تعویض

$$\int_a^b f(g(x)) g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y) dy, \quad y = g(x), dy = g'(x) dx$$

wichtige  
Substitutionen  
غوره بدلونونه

$$\sqrt{a^2 - x^2}$$

$$\text{Subst.: } x = a \sin t$$

$$\sqrt{a^2 + x^2}$$

$$\text{Subst.: } x = a \sinh t$$

$$R(\sin x, \cos x) \quad \text{Subst.: } t = \tan \frac{x}{2}, dx = \frac{2}{1+t^2} dt$$

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

لومړنی توابع



## Stammfunktionen

$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$
$x^n (n \neq -1)$	$x^{n+1}/(n+1)$	$1/x$	$\ln x $
$e^x$	$e^x$	$\ln x$	$x \ln x - x$
$\sin x$	$-\cos x$	$\cos x$	$\sin x$
$\tan x$	$-\ln \cos x $	$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$		

دکی یا حجم

څرخیدونی بدن یا جسم: څرخون د  $x$  په محور:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$

څرخون د  $y$  په محور (د  $f$  همغږیز چگیدونکي لپاره):

$$V = 2\pi \int_0^b x(f(b) - f(x)) dx$$

د څرخیدونې بدن پوښ یا پورته سطحه

$$M = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

د لیندې اوږدوالس

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx \quad L = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$$

د تراپخ قانون

$$\int_a^b f(x) dx = h (f(a)/2 + f(a+h) + \dots + f(b-h) + f(b)/2) + R_h$$

$$R_h = -\frac{b-a}{12} f''(\xi) h^2, \quad \xi \in (a, b)$$

(Autor: M. Reble)

## Grundlegende Strukturen بنسټیز جوړښتونه

### گروپونه

Assoziativgesetz قانون اسوخیاتیو:

$$a \diamond (b \diamond c) = (a \diamond b) \diamond c$$

Neutrales Element بی اغیزه توکی  $a \diamond e = e \diamond a = a$ :

Inverses Element معکوستوکی

$$a \diamond a^{-1} = a^{-1} \diamond a = e$$

د ابل گروپ

Kommutativ کموئاتیو قانون:  $a \diamond b = b \diamond a$

بدن یا تن

$(K, +)$  د ابل گروپ دب ist abelsche Gruppe

$(K \setminus \{0\}, \cdot)$  د ابل گروپ دی ist abelsche Gruppe

Distributivgesetz: دیستریبوتیو قانون

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

Vektorraum وکتورفضا

$(V, +)$  په  $K$  د ابل گروپ

$$(\lambda_1 + \lambda_2) \cdot v = \lambda_1 \cdot v + \lambda_2 \cdot v$$

$$\lambda \cdot (v_1 + v_2) = \lambda \cdot v_1 + \lambda \cdot v_2$$

$$(\lambda_1 \lambda_2) \cdot v = \lambda_1 \cdot (\lambda_2 \cdot v)$$

$$1 \cdot v = v$$

سکالار ضرب

$$v \neq 0 \quad \langle v, v \rangle > 0$$

د لپاره

$$\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$$

$$\langle \lambda u, v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle$$

$$\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$$

اورتوگونال بستونه orthogonal Basis :

$$x = \sum_{k=1}^n c_k u_k, c_k = \frac{\langle x, u_k \rangle}{\langle u_k, u_k \rangle}$$

$$|x|^2 = \sum_{k=1}^n |c_k|^2 |u_k|^2$$

کوشي - شورخ Cauchy-Schwarz

$$|\langle u, v \rangle| \leq |u| |v|, |u| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$$

نورم Norm :

$$\|v\| > 0, v \neq 0$$

$$\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$$

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$$

کربنيز تابع

Additivität جمعوالی :

$$L(v_1 + v_2) = L(v_1) + L(v_2)$$

$$L(\lambda v) = \lambda L(v)$$

هوموجينيتي Homogenität :

بيلد او کيرن Bild und Kern (پښتويي: څيره يا عکس اوزری)

Bild

$$(L) = \{w \in W : \exists v \in V \text{ له } L(v) = w \text{ بيلد يا عکس}\}$$

سره

کرن يا زری

$$\ker(L) = \{v \in V : L(v) = 0\}$$

$$\dim V = \dim \ker(L) + \dim \text{Bild}(L)$$

(Autor: M. Reble)

## Matrizen ماتریکسونه

د ماتریکونو س ضرب Matrix-Multiplikation

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^m a_{ik} b_{kj}$$

$$A(BC) = (AB)C, \quad (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}, \quad (AB)^* = B^*A^*$$

کموټاتور Kommutator

$$[A, B] = AB - BA$$

رانگ Rang: د کرښیز خپلواکو (تابعو) لیک یا متو تعداد یا گڼون

$$\text{Rang } A = \text{Rang } A^t$$

$$\text{Rang}(BAC) = \text{Rang}(A) \quad B, C \text{ invertierbar (معکوسور)}$$

شپور Spur: د دیاگونالیا دو هکونجټرو توکو زیاتون یا جمعه:

$$A = \sum_{k=1}^n a_{kk}$$

Spur

$$\text{Spur}(AB) = \text{Spur}(BA)$$

هر میتیک (سیمیک) hermitesch (symmetrisch)

:  $A^* = A$  ( $A^t = A$ )

$$A^* = A \quad (A^t = A)$$

فقط حقیقیایگن رزینتونه، ONB (Orthonormalbasis) د ایگن وکتورونو څخه شتون لري

یونیتار (اورتوگونال)

$$A^* = A^{-1} \quad (A^t = A^{-1})$$

$$|\det A| = 1$$

متي ONB جوړوي

نورمال

normal

$$AA^* = A^*A$$

⇔ یونیتار دو هکونتری (وتر) کیدونکی

Drehmatrix  
څرخونم تاریکس

$$\det A = 1 \text{ او } A \text{ اوتوگونال}$$

څرخونمحور و ایکن ارزښت 1 ته ایگنوکتور دی

$$\cos \alpha = \frac{1}{2}(\text{Spur } A - 1)$$

Drehwinkel: څرخونکونج

Spiegelung هندارونه

$$E : d^t x = 0 : M = E - 2 \frac{dd^t}{d^t d}$$

Ebene سطحه

$$G : x = \lambda v : M = 2 \frac{vv^t}{v^t v} - E$$

Gerade کرښه

Eigenwerte / -vektoren  
ایگنوکتور ایکن ارزښت

$$Av = \lambda v, v \neq 0 \Leftrightarrow \det(A - \lambda E) = 0$$

$$\sum \lambda_i = \text{Spur } A, \quad \prod \lambda_i = \det A$$

$A^t$  ایکن ارزښت  $\lambda$  لري

$$A^{-1} \text{ ایگنوکتور } v \text{ او ایکن ارزښت } 1/\lambda \text{ لري}$$

$A^n$  ایگنوکتور  $v$  او ایکن ارزښت  $\lambda^n$  لري

$$Q^{-1}v \text{ او ایکن ارزښت } \lambda \text{ لري} \quad Q^{-1}AQ$$

دوه کوچتري کونه یا وتري کونه:

د ایکنارزښتونو لپاره: البر = هندسي . دپرواروالی

$$B^{-1}AB = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

$$B = (b_1, \dots, b_n)$$

د ایگنوکتورونو بنسټ

جوردان-بنه:

بلوکوتري-يا دو هکونجتری ماتریکس Blockdiagonalmatrix

$$J = B^{-1}AB = \text{diag}(J_1, \dots, J_m)$$

بلوکونه په دیاگونال ایگن ارزښت  $\lambda$  لري،

1 په پورته څنګیز دیاگونال کې

د ماتریکس توانونه Matrix-Potenzen

$$A = Q^{-1}JQ \Rightarrow A^n = Q^{-1}J^nQ$$

$$|\lambda_i| < 1 \Leftrightarrow A^n \rightarrow 0$$

زینګولار ارزښت تجزیه کونه

$$U^*AV = \text{diag}(s_1, s_2, \dots), \quad U, V \text{ unitär}$$

زینګولار ارزښتونه

$$s_1 \geq s_2 \geq \dots \geq s_k > 0 \quad k = \text{Rang } A$$

د  $A^*A$  د ایگن ارزښت ریښې دي  $s_i$

د  $V$  متي د  $A^*A$  ایگن وکتورونه دي

د  $U$  متي د  $AA^*$  ایگن وکتورونه دي

(Autor: M. Reble)

دیترمینانتونه او کرښیز مساوات سیستم

## Determinanten und lineare Gleichungssysteme

دیترمینانتونه

$$\det A^t = \det A, \quad \det(AB) = \det A \det B$$

$$\det A^{-1} = (\det A)^{-1}, \quad \det A^n = (\det A)^n$$

د دوه متو (لیکو) بدلېدنه مخ نڅښه بدلوي.

د یو متي دېرواره یوې بلې ته زیاتول دیترمینانت ته تغیر نه ورکوي

وديزينه:

$$\det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{k+j} a_{k,j} \det \tilde{A}_{k,j}$$

ليکي (پسي)  $k$  (ودسزينه د

$$= \sum_{i=1}^n (-1)^{i+l} a_{i,l} \det \tilde{A}_{i,l}$$

متي (پسي)  $l$  (ودسزينه د

$$\det A = 0 \Leftrightarrow \text{صفر ايگن ارزښت دی}$$

$$\Leftrightarrow Ax = b \text{ يواځني حل نه لري}$$

$$\Leftrightarrow A \text{ پوره رانگ نه لري}$$

$$\Leftrightarrow A \text{ اينوارينت نه دی}$$

کرښيز مساوات سيستمونه: يا ټيک يو، هيڅ يا ناپای ډېر حلونه لري.

د گاوس ترانسفر ميشنونه: د کرښيز مساوات سيستم حلډېرئ د دوه مساواتو په بدلون تغير نه خوري.

$$r \neq 0$$

د يوه مساوات ضرب د سره.

د دوه مساواتو زياتون

د کر امرقاعده

$$x_i = \frac{\det(a_1, \dots, a_{i-1}, b, a_{i+1}, \dots, a_n)}{\det(a_1, \dots, a_n)}$$

برابروي پرابلم

$$|Ax - b| \rightarrow \min \Leftrightarrow A^t Ax = A^t b$$

(Autor: M. Reble)

## کوادرېکونه Quadriken

شډله (پهبرخ) وېشنه

$$Q: x^t Ax + 2b^t x + c = 0, \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} c & b^t \\ b & A \end{pmatrix}$$

$$\text{Rang } \tilde{A} = \text{Rang } A$$

مخروطي کوادرېکونه:

$$\text{Rang } \tilde{A} = \text{Rang } A + 1$$

منځتيکوادرېکونه:

$$\text{Rang } \tilde{A} = \text{Rang } A + 2$$

پارابوليکوادرېکونه:

$$Am = -b$$

منځتيکی

نورمالي بني

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

(ډبل) مخروط

د مخروطي کوادرېکونو

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$$

غوځوونکي سطحه

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0$$

منځای هاپیرابول

منځکي کواډریکونه

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0$$

یو پوښیز هاپرا بلوید

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0$$

ایلپسویید

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0$$

هاپار ابولیکه توته یا استوانه

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0$$

ایلپیتیکي توته

$$-\frac{x^2}{a^2} + 1 = 0$$

غبرگسطحي

پار ابولیکي کواډریکونه

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 2z = 0$$

ایلپیتیکي پار ابولویید

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + 2z = 0$$

هاپریولیکي پار ابولویید

$$\frac{x^2}{a^2} + 2y = 0$$

پار ابولیکي توته یا حیولیندر

## Differentiation دفرنځیشن

$$\text{grad } f = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)^t$$

گرادینت



$$f' = J f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

جاکوبي ماتریکس

$$H f = \begin{pmatrix} \partial_1 \partial_1 f & \cdots & \partial_1 \partial_n f \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_n \partial_1 f & \cdots & \partial_n \partial_n f \end{pmatrix}$$

هسسی ماتریکس

$$h(x) = g(y), y = f(x) : h'(x) = g'(y) f'(x)$$

خنزیری قانون

$$f(x+h) = \sum_{|\alpha| \leq n} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(x) h^\alpha + R$$

د تیلور و دیزینه

$$\theta \in [0, 1] \quad R = \sum_{|\alpha|=n+1} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(x + \theta h) h^\alpha$$

لپاره

د یوه

پاتی غری

نظم 2:

$$f(x+h) = f(x) + (\text{grad } f(x))^t h + \frac{1}{2} h^t H f(x) h + O(|h|^3)$$

تانجنتی سطحه

$$(u, v) \mapsto p(u, v) \quad f(x, y, z) = c$$

همداسی

سطحه

$$n = p_u \times p_v \quad n = \text{grad } f$$

همداسی

نور مالوکتور

$$\partial_v f(x) = (\text{grad } f)^t v$$

لوریز مشتق

$$\det f_x(x_*, y_*) \neq 0 \Rightarrow f(x, y) = 0$$

د  $x$  پسې حل

ایمائیختیت تابع

$$\det f'(x_0) \neq 0$$

وی.

معکوس تابع لوکال معکوس کیدونکی دی، که

$$(f^{-1})'(y) = (f'(x))^{-1}, y = f(x)$$

لپاره .

د

$$\text{grad } f(x) = 0$$

کریټیکال ټکی

ایلیټیش: د  $H$  ټول ایگنوارزبنتونه همغه برابره منخنځنه لري

لوکال افراطیت  $\rightarrow$

هاپارابولیک: ایگن ارزبنتونه شته د مختلفو منخنځنوسره

زینټکی  $\rightarrow$

پارابولیش: لوټرلره یو ایگنارزبنت صفر دی، او نور ټول ایگن ارزبنتونه برابری منخنځنی لري.

لاگرانژ ضرب

$$g_i(x) = 0$$

لاندي

$x_*$

د فرعي شرایطو

افراطي ارزبنتونه

$$\Rightarrow f'(x_*) = \lambda^t g'(x_*)$$

د کون-تاکر Kuhn-Tucker شرطونه:

$$\begin{aligned}
 & \text{افراطي ارزبنتونه} \quad x_* \quad \text{د فرعي شرطونو} \quad g_i(x) \geq 0 \quad \text{لاندي} \\
 & \Rightarrow f'(x_*) = \lambda^t g'(x_*), \quad \lambda^t g(x_*) = 0 \\
 & \lambda_i \leq 0 \quad \text{ما کسيموم} \quad \lambda_i \geq 0 \quad \text{مينيموم}
 \end{aligned}$$

(Autor: M. Reble)

اينت

## اينتيگرالونه Integration

بدلون

$$\int_U f(g(x)) |\det g'(x)| dx = \int_{g(U)} f(y) dy$$

دسطحي مسطح يا هدار توكي

$$dA = dx dy$$

كار تيزي كواورديناتونه:

$$dA = r dr d\varphi$$

قطبي كواوردينات :  
د ډكي يا حجم توكي

$$dV = dx dy dz$$

كار تيزي كواورديناتونه :

د كزي انتيگرال

$$\int_C f = \int_a^b f(c(t)) |c'(t)| dt$$

د سطحي توكي

$$dS = |s_u \times s_v| du dv$$

پارامترې كونه :

$$z(x, y) : dS = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy$$

تابع :

$$dS = \rho d\varphi dz$$

د توتي پوښ:

$$dS = r^2 \sin \vartheta d\varphi d\vartheta$$

د غونډاري سطحه:

Schwerpunkt  
درونديکي

$$x_S = \frac{1}{m} \int_V x \rho(x) dV$$

Trägheitsmoment  
بارتيکي

$$I = \int_V \text{dist}(x, g)^2 \rho(x) dV$$

Hauptsatz  
اصلي جمله

$$\int_V \text{grad } f = \int_{\partial V} f n^\circ$$

Greensche  
Integralformeln  
د گرين امتيگرا ل بڼه

$$\int_{\partial V} f \frac{\partial g}{\partial n} = \int_V \text{grad } f \cdot (\text{grad } g)^t + f \Delta g$$

$$\int_{\partial V} \left( f \frac{\partial g}{\partial n} - g \frac{\partial f}{\partial n} \right) = \int_V (f \Delta g - g \Delta f)$$

(Autor: Marcus Reble)

## spezielle Differentialgleichungen ځانگي دفرنشل مساوات

د لومړۍ درجې کرښيز دفرنشل مساوات

Lineare DGL 1. Ordnung

$$y' = p(x)y + q(x)$$

$$y(x_0) = y_0 \Rightarrow c = y_0$$

د  $P$  د بن ستتابع او سره

$$y = y_p + y_h$$

$$y_h = c \exp(P(x) - P(x_0)), \quad y_p = \int_{x_0}^x \exp(P(x) - P(s)) q(s) ds$$

د برنولي دفرنشل مساوات

Bernoulli DGL

$$y' + p(x)y = q(x)y^k$$

$$u = y^{1-k}$$

بلون:

$$\frac{1}{1-k} u' = -p(x)u + q(x)$$

### Separable DGL

سیپارابلې دم

$$y' = p(x) g(y)$$

د متحولو بیلول

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int p(x) dx$$

هوموجین دف مساوات

$$y' = f(y/x)$$

$$xz(x) = y(x)$$

بدلون

$$z' = \frac{1}{x} (f(z) - z)$$

تیک دف مساوات

$$y' = f(y/x)$$

د تیکوالي لپاره اریموالی

$$p_y = q_x$$

$$p(x, y) + q(x, y) y' = 0$$

$$F(x, y) = c$$

ایمپلیسیت حل

$$F_y = q \quad F_x = p$$

سره حل

او د

ثات ضریبونه

$$u'' + pu' + qu = 0$$

$$\lambda_1, \lambda_2$$

د کرکتریسٹیکي پولینوم صفر خایونه

دوه حقیقي

$$u_h = a \exp(\lambda_1 t) + b \exp(\lambda_2 t)$$

یو دبل

$$u_h = a \exp(\lambda t) + b t \exp(\lambda t)$$

$$\lambda_{1,2} = \mu \pm \varrho i$$

سره

کنجوگيري کمپلکس له

$$u_h = \exp(\mu t) (a \cos(\varrho t) + b \sin(\varrho t))$$

## Gedämpfte harmonische Schwingung

$$u'' + 2ru' + \omega_0^2 u = c \cos(\omega t)$$

$$r^2 > \omega_0^2$$

قوي Dämpfung:

$$r^2 = \omega_0^2$$

کريټيکل Dämpfung:

$$r^2 < \omega_0^2$$

ضعيف Dämpfung:

$$u_p = \tilde{c} \cos(\omega t + \delta)$$

$$\tilde{c} = c / \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2r\omega)^2}$$

سرہ

$$\delta = \arg(\omega_0^2 - \omega^2 - i 2r\omega)$$

او

$$\omega^2 = \omega_0^2 - 2r^2$$

رېزونانث:

د پارټيکولار حلونو لپاره خانگري ايسوونې

## spezielle Ansätze für partikuläre Lösungen

نظم 1. Ordnung

$$y' = py + q(x)$$

$$q(x) = \sum_{j=0}^n c_j x^j \rightarrow y_p = \sum_{j=0}^n d_j x^j$$

$$q(x) = c \exp(\lambda x), \lambda \neq p \rightarrow y_p = \frac{c}{\lambda - p} \exp(\lambda x)$$

$$q(x) = c \exp(px) \rightarrow y_p = cx \exp(px)$$

$$q(x) = a \cos(\omega x) + b \sin(\omega x) \rightarrow y_p = c \cos(\omega x) + d \sin(\omega x)$$

2. Ordnung . نظم

$$u'' + pu' + qu = f(t)$$

$$f(t) = \sum_{j=0}^n c_j t^j \rightarrow u_p = \sum_{j=0}^n u_j t^j$$

، که وي

$$p \neq 0 \quad q \neq 0$$

$$f(t) = \exp(\lambda t) \rightarrow u_p = c \exp(\lambda t)$$

و که وي

$$\lambda^2 + p\lambda + q \neq 0$$

که  $\lambda$  د کرکترېستيکي پولینوم يو ساده يعني يو (ډبل) صفرخای وي، بايد  $c$  د  $ct$  (  $ct^2$  ) په خای کېښيږي شي.

$$f(t) = \exp(\alpha t) (a \sin(\omega t) + b \cos(\omega t))$$

$$\rightarrow u_p = \exp(\alpha t) (c \sin(\omega t) + d \cos(\omega t))$$

که  $\alpha \pm i\omega$  د کرکترېستيکي پولینوم صفرخایونه وي، بايد  $u_p$  د  $t$  سره ضرب شي.

ټوليز:

د  $u_p$  ضربونو ټاکل د په خای اېښونې له لارې

$$y = y_h + y_p$$

همداسې

ټوليز حل دی

$$u = u_h + u_p$$

په ګډوله حالتونو کې د يوگونو حالتونو اېښوولو Superposition

Überlagerung د څپو يو په بل پرطوتل (فيزیک، ماتماتيک)

(Autor: Joachim Wipper)

## Allgemeine Theorie ټوليزه تيوري

د پيانو جمله

$$u' = f(t, u), u(t_0) = u_0$$

ناپربکيدون کی: پيل ارزنت پرابلم لڙ تر لڙه يو ناپربکيدونکی مشتقور حل لري.  $f$   
 لپيشيخ ناپربکيدونکی نسبت  $u$  ته: د پيل ارزنت پرابلم حل پراخنی دی.  $f$

پیکارد-ايتريشن Picard-Iteration

$$u^{\ell+1}(t) = u_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, u^\ell(\tau)) d\tau, \quad u^0(t) = u_0$$

د پيل شرايطو په واک کې والی

$$|v(t) - w(t)| \leq |v(t_0) - w(t_0)| \exp(L(t - t_0))$$

د  $L$  سره نسبت  $u$  ته.  $f$   
 د بني اړخ خپلواکوالی

$$u(t_0) = v(t_0) \quad u' = f(t, u), \quad v' = g(t, v)$$

$$|u(t) - v(t)| \leq \varepsilon(t - t_0) \exp(L(t - t_0))$$

$$\varepsilon = \max_{(s,w) \in D} |f(s, w) - g(s, w)|$$

د نظم ريډکشن Reduktion der Ordnung

$$u'' = f(u, u')$$

$$v \frac{dv}{du} = f(u, v) \quad u' = v(u)$$

بدلون راکوي  
 ستابيليتي

$$u' = f(u)$$

کرېتيکل ټکی  $u_*$

$$v = u - u_* \quad v' = f'(u_*)v$$

کرېتيزوالی:  
 ستابيليتي:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = u_*, u(0) \approx u_* \Leftrightarrow \operatorname{Re} \lambda_i < 0 \quad \forall \lambda_i$$

نه ستابيليتي

$$\Leftrightarrow \exists \lambda_i : \operatorname{Re} \lambda_i > 0$$

$$f'(u_*) \quad \lambda_i$$

د سره د ایگن رازنت

# Lineare Systeme کرینیز سیستمونه

Wronski-Determinante – دپترمینانتونه

$$\Gamma' = A(t)\Gamma$$

$$(\det \Gamma)' = \text{Spur } A(t)(\det \Gamma), \quad \Gamma$$

بنسټیزه ماتریکس

د ثابتو ورپیشن

$$u' = A(t)u + b(t)$$

$$c' = \Gamma^{-1}(t) b(t) \quad u_p = \Gamma c$$

اینهونه راکوي

$$u(t) = u_h(t) + u_p(t) = \Gamma(t) \left[ \Gamma(t_0)^{-1} u(t_0) + \int_{t_0}^t \Gamma(s)^{-1} b(s) ds \right]$$

ثابت ضربونه

$$u'(t) = A u(t)$$

که  $v$  ایگنوکتورویو ایگن ارزښت  $\lambda$  ته، نو

$$u(t) = \exp(\lambda t) v$$

حل دی

کمپلکس ایگنارزښت و ایگنوکتور

$$\lambda = \sigma + i\rho$$

$$a + ib$$

ته دی

$$\text{Re}(\exp(\lambda t) v) = \exp(\sigma t) (a \cos(\rho t) - b \sin(\rho t))$$

او

$$\text{Im}(\exp(\lambda t) v) = \exp(\sigma t) (a \sin(\rho t) + b \cos(\rho t))$$

حقیقی حل دی.

جوردان-بڼه

$$u'(t) = A u(t) + b(t)$$

$$v' = Jv + Q^{-1}b \quad u = Qv \quad Q^{-1}AQ = J$$

راکوي، چې سوکڅیسو کمپوننت ډوله

دا سیستم

بدلون

حل کیدی شي.

$$v'_i = \lambda_i v_i + (Q^{-1}b)_i$$

د دوه کونجټري یا وتر  $J$  سره.

سره یوځای شوی یا سره نڅلولی سیستم

اویلر-دیرنڅیالمساوات Euler-Differentialgleichung

$$a_n t^n u^{(n)} + \dots + a_0 u = f(t)$$

$$v(s) \quad t = e^s, \quad v(s) = u(t)$$

لپاره کرینیز دفرنڅیال مساوات راکوي د ثابت ضربونو سره

د

بدلون



ستابيليتي

$$u' = Au$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |u(t)| = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Re} \lambda_i < 0 \forall \lambda_i$$

ستابيل :

$$\det A > 0 \wedge \operatorname{Spur} < 0 \quad (2 \times 2)$$

د - ماتريكس لپاره:

بپاځيزه يا ناپيلی ستابيل: بنده او پيل ارزښت شتون لري.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |u(t)| = \infty \Leftrightarrow \exists \lambda_i : \operatorname{Re} \lambda_i > 0$$

د کوم لپاره چې د 0 په لور پولي ته نه ځي. ايستابيل:

## Laplace-Transformation لاپلاس- ترانسفورميشن

$U = \mathcal{L}u, \quad U(s) = \int_0^{\infty} u(t) \exp(-st) dt$ $u(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} U(s) \exp(st) ds$	<p>لاپلاس- ترانسفورميشن</p> <p>معكوس- ترانسفورميشن</p>
--	--

$au(t) + bv(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} aU(s) + bV(s)$	کرسبیزوالی
$u^{(n)}(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} s^n U(s) - s^{n-1}u(0) - s^{n-2}u'(0) - \dots - u^{(n-1)}(0)$ $t^n u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} (-1)^n U^{(n)}(s)$	دفرنخیشن
$\int_0^t u(\tau) d\tau \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{U(s)}{s}, \quad u(t)/t \xrightarrow{\mathcal{L}} \int_s^\infty U(\tau) d\tau$	انتیگریشن
$u(t-a) \xrightarrow{\mathcal{L}} \exp(-as)U(s), \quad u(t) = 0 \text{ für } t < 0$ $\exp(at)u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} U(s-a)$	راکبنه
$u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{1 - \exp(-Ts)} \int_0^T u(t) \exp(-st) dt$	T - پر یو دیکي تابع
$u(at) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{a} U(s/a)$	سکاله کونه
$(u * v)(t) = \int_0^t u(\tau) v(t-\tau) d\tau \xrightarrow{\mathcal{L}} U(s)V(s)$	- غیرگونه

$u(t)$	$U(s)$	$u(t)$	$U(s)$	خانگري توابع
1	$1/s$	$t^n$	$n!/s^{n+1}$	
$e^{at}$	$\frac{1}{s-a}$	$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$	
$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$	$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$	
$e^{-at} \cos(\omega t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$	$e^{-at} \sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$	

پیل ارزینت پرابلم  $U/\Phi - u(0) = F$  د  $\Phi(s) = 1/(s+p)$  سره  
۱. درجه

د په خټ ترانسفورمیشن وروسته  $u' + pu = f, p \in \mathbb{R}$  د  $\varphi = e^{-pt}$  سره  $u = \varphi * f + u(0)\varphi$

پیل ارزینت پرابلم  
۲. درجه

Anfangswertproblem 1. Ordnung $u' + pu = f, p \in \mathbb{R}$	$U/\Phi - u(0) = F$ mit $\Phi(s) = 1/(s + p)$ nach Rücktransformation $u = \varphi \star f + u(0)\varphi$ mit $\varphi = e^{-pt}$
Anfangswertproblem 2. Ordnung $u'' + pu' + qu = f, p, q \in \mathbb{R}$	$U/\Phi - (s + p)u(0) - u'(0) = F$ mit $\Phi(s) = 1/(s^2 + ps + q)$ nach Rücktransformation $u = \varphi \star f + u(0)\varphi' + (u(0)p + u'(0))\varphi$ $\lambda \neq \varrho$ Nullstellen von $1/\Phi \Rightarrow \varphi = (e^{\lambda t} - e^{\varrho t})/(\lambda - \varrho)$ $\lambda$ doppelte Nullstelle von $1/\Phi \Rightarrow \varphi = te^{\lambda t}$

## Sturm-Liouville-Probleme د شتورم-لیوویل-پرابلم

د خان سره ادیونگیری

$$Lu = -(pu')' + qu$$

دفرنشل اوپراتور

ترانفرمیشن په خان سره ادیونگیری بڼې

$$au'' + bu' + cu = f \quad a(x) \neq 0$$

$$-(pu')' + qu = g \quad \text{د لاندې سره} \quad \text{صرب له سره راکوي} \quad -p/a$$

$$p(x) = \exp\left(\int \frac{b(x)}{a(x)} dx\right)$$

$$q(x) = -c(x)p(x)/a(x)$$

$$g(x) = -f(x)p(x)/a(x).$$

آیگنارزبنت پرابلم

$$L\psi = \lambda \varrho \psi$$

د ژئ شرطونو سره

$$\alpha_0 \psi(a) + \alpha_1 \psi'(a) = 0, \beta_0 \psi(b) + \beta_1 \psi'(b) = 0$$

ایکن تابع بلل کیری، ایکن ارزینت  $\psi$

پخپله ادیونگیری ایکن ارزینت پر ابلمونه  
ایکن ارزینونه حقیقی دی  
همغھیا برابر ایگا ارزینت ته ایگت وابع کر بنیز بلواک دی  
مختلفو ایکن ارزینتونو ته ایکن توابع  $q$  - اورتوگونال دی  
ایکن ارزینتونه په کلکخ همغریزه پرلپسی  
 $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots$

جوروی

## Differentiation دفر نخیشن

گرادینت

$$\text{grad } U = (\partial_x U, \partial_y U, \partial_z U)^t$$

$$\text{grad } \vec{F} = (\text{grad } F_x, \text{grad } F_y, \text{grad } F_z)^t$$

$$\text{div } \vec{F} = \partial_x F_x + \partial_y F_y + \partial_z F_z$$

دیورگنت (پولی ته نه تلنه)

خرخون Rotation

$$\text{rot } \vec{F} = \begin{pmatrix} \partial_y F_z - \partial_z F_y \\ \partial_z F_x - \partial_x F_z \\ \partial_x F_y - \partial_y F_x \end{pmatrix}$$

$$\left( \text{rot } \vec{F} \right)_i = \sum_{j,k=1}^3 \varepsilon_{ijk} \partial_j F_k$$

$$\text{rot } \vec{F} = \partial_x F_y - \partial_y F_x$$

په همدې توگه

لاپاس - اوپراتور Laplace-Operator

$$\Delta U = \text{div}(\text{grad } U) = \partial_x^2 U + \partial_y^2 U + \partial_z^2 U$$

شمیرقوانین تول اوپراتورونه کر بنیز دی

$$\text{rot}(\text{grad } U) = \vec{0}$$

$$\text{div}(\text{rot } \vec{F}) = 0$$

$$\text{rot}(\text{rot } \vec{F}) = \text{grad}(\text{div } \vec{F}) - \Delta \vec{F}$$

$$\text{grad}(UV) = U \text{grad } V + V \text{grad } U$$

$$\text{grad}(\vec{F} \cdot \vec{G}) = (\text{grad } \vec{F})^t \vec{G} + (\text{grad } \vec{G})^t \vec{F}$$

$$\text{div}(U\vec{F}) = U \text{div } \vec{F} + \vec{F} \cdot \text{grad } U$$

$$\text{div}(\vec{F} \times \vec{G}) = \vec{G} \cdot \text{rot } \vec{F} - \vec{F} \cdot \text{rot } \vec{G}$$

$$\text{rot}(U\vec{F}) = U \text{rot } \vec{F} - \vec{F} \times \text{grad } U$$

نوٹہ- یا استوانہ کو اور دیناتونہ (پروتولار ارزبنتونہ)

$$(x, y, z) = (\varrho \cos \varphi, \varrho \sin \varphi, z), \quad \varphi \in [0, 2\pi)$$

$$\vec{e}_\varrho = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$U(x, y, z) = \Phi(\varrho, \varphi, z)$$

$$\vec{F}(x, y, z) = \Psi_\varrho \vec{e}_\varrho + \Psi_\varphi \vec{e}_\varphi + \Psi_z \vec{e}_z$$

$$\text{grad } U = \partial_\varrho \Phi \vec{e}_\varrho + \frac{1}{\varrho} \partial_\varphi \Phi \vec{e}_\varphi + \partial_z \Phi \vec{e}_z$$

$$\Delta U = \frac{1}{\rho} \partial_\rho (\rho \partial_\rho \Phi) + \frac{1}{\rho^2} \partial_\varphi^2 \Phi + \partial_z^2 \Phi$$

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{1}{\rho} \partial_\rho (\rho \Psi_\rho) + \frac{1}{\rho} \partial_\varphi \Psi_\varphi + \partial_z \Psi_z$$

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{F} &= \left( \frac{1}{\rho} \partial_\varphi \Psi_z - \partial_z \Psi_\varphi \right) \vec{e}_\rho + (\partial_z \Psi_\rho - \partial_\rho \Psi_z) \vec{e}_\varphi \\ &\quad + \frac{1}{\rho} (\partial_\rho (\rho \Psi_\varphi) - \partial_\varphi \Psi_\rho) \vec{e}_z \end{aligned}$$

اکسیال سیمتریک ورشوکانط یا پتی Axialsymmetrische Felder

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

په واک کی دی  $\Phi$  همداسی  $\Psi$  د

$$\operatorname{grad} \Phi = \partial_\rho \Phi \vec{e}_\rho$$

$$\Delta \Phi = \frac{1}{\rho} \partial_\rho (\rho \partial_\rho \Phi)$$

$$\operatorname{div} (\Psi \vec{e}_\rho) = \frac{1}{\rho} \partial_\rho (\rho \Psi)$$

$$\operatorname{rot} (\Psi \vec{e}_\rho) = \vec{0}$$

$$\operatorname{div} (\Psi \vec{e}_\varphi) = 0$$

$$\operatorname{rot} (\Psi \vec{e}_\varphi) = \frac{1}{\rho} \partial_\rho (\rho \Psi) \vec{e}_z$$

د غونډوسکی یا کری کو اور دیناتونه Kugelkoordinaten

$$(x, y, z) = (r \cos \varphi \sin \vartheta, r \sin \varphi \sin \vartheta, r \cos \vartheta), \quad \varphi \in [0, 2\pi), \quad \vartheta \in [0, \pi]$$

$$\vec{e}_r = \begin{pmatrix} \cos \varphi \sin \vartheta \\ \sin \varphi \sin \vartheta \\ \cos \vartheta \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\vartheta = \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \vartheta \\ \sin \varphi \cos \vartheta \\ -\sin \vartheta \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$U(x, y, z) = \Phi(r, \vartheta, \varphi)$$

$$\vec{F}(x, y, z) = \Psi_r \vec{e}_r + \Psi_\vartheta \vec{e}_\vartheta + \Psi_\varphi \vec{e}_\varphi$$

$$\text{grad } U = \partial_r \Phi \vec{e}_r + \frac{1}{r} \partial_\vartheta \Phi \vec{e}_\vartheta + \frac{1}{r \sin \vartheta} \partial_\varphi \Phi \vec{e}_\varphi$$

$$\Delta U = \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \partial_r \Phi) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \partial_\varphi^2 \Phi + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \partial_\vartheta (\sin \vartheta \partial_\vartheta \Phi)$$

$$\text{div } \vec{F} = \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \Psi_r) + \frac{1}{r \sin \vartheta} \partial_\varphi \Psi_\varphi + \frac{1}{r \sin \vartheta} \partial_\vartheta (\sin \vartheta \Psi_\vartheta)$$

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{F} &= \frac{1}{r \sin \vartheta} (\partial_\vartheta (\sin \vartheta \Psi_\varphi) - \partial_\varphi \Psi_\vartheta) \vec{e}_r \\ &+ \frac{1}{r \sin \vartheta} (\partial_\varphi \Psi_r - \sin \vartheta \partial_r (r \Psi_\varphi)) \vec{e}_\vartheta \\ &+ \frac{1}{r} (\partial_r (r \Psi_\vartheta) - \partial_\vartheta \Psi_r) \vec{e}_\varphi \end{aligned}$$

راديال سيمتريكي ورشوكاني Radialsymmetrische Felder

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

په واک کي دي

همداسي  $\Psi$  د فقط د  $\Phi$

$$\text{grad } \Phi = \partial_r \Phi \vec{e}_r$$

$$\Delta \Phi = \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \partial_r \Phi)$$

$$\text{div}(\Psi \vec{e}_r) = \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \Psi)$$

$$\text{rot}(\Psi \vec{e}_r) = \vec{0}$$

(Autor: Marcus Reble)

## Integration انتيگرالونه

پارامتريک کونه

$$C : [a, b] \ni t \mapsto \vec{r}(t)$$

Kurve کزه

$$S : D \ni (u, v) \mapsto \vec{r}(u, v)$$

Fläche سطحه

Kurvenintegral د کزې انتیگرال

$$\int_C U = \int_a^b U(\vec{r}(t)) |\vec{r}'(t)| dt$$

Arbeitsintegral د کار انتیگرال

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt$$

د سطحی انیگرال

Flächenintegral

$$\iint_S U dS = \iint_D U(\vec{r}(u, v)) |\vec{n}(u, v)| du dv, \quad \vec{n} = \partial_u \vec{r} \times \partial_v \vec{r}$$

Flussintegral

جریان انتیگرال

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_D \vec{F}(\vec{r}(u, v)) \cdot \vec{n}(u, v) du dv, \quad \vec{n} = \partial_u \vec{r} \times \partial_v \vec{r}$$

Fluss durch Funktionsgraph

جریان له

فنکشنگراف څخه

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_D -F_x \partial_x f - F_y \partial_y f + F_z dx dy, \quad z = f(x, y)$$

Fluss durch Zylindermantel

جریان له توی

پوښ څخه

$$\varrho = \varrho(\varphi) : \int_0^{2\pi} \int_{z_{\min}}^{z_{\max}} F_\varrho \varrho - F_\varphi \partial_\varphi \varrho dz d\varphi$$



$$\varrho = \varrho(z) : \int_0^{2\pi} \int_{z_{\min}}^{z_{\max}} F_{\varrho} \varrho - F_z \varrho \partial_z \varrho dz d\varphi$$

$$2\pi a (z_{\max} - z_{\min}) f(a) \quad \vec{F} = f(\varrho) \vec{e}_{\varrho} \quad \varrho = a$$

خانگری      د لپاره      د      سره

Fluss durch  
Kugeloberfläch  
e

$$\int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} F_r a^2 \sin \vartheta d\varphi d\vartheta$$

mit  $r = a$

$$4\pi a^2 f(a) \quad \vec{F} = f(r) \vec{e}_r$$

speziell      für

vektorielle

Kurvenintegrale وکتوري  
گري انتيگرالونه

$$\int_C \vec{F} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) |\vec{r}'(t)| dt = \left( \int_C F_x, \int_C F_y, \int_C F_z \right)^t$$

$$\int_C \vec{F} \times d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \times \vec{r}'(t) dt = \begin{pmatrix} \int_C (F_y dz - F_z dy) \\ \int_C (F_z dx - F_x dz) \\ \int_C (F_x dy - F_y dx) \end{pmatrix}$$

vektorielle

Flächenintegrale

وکتوري سطحي  
انتيگرالونه

$$\iint_S \vec{F} dS = \left( \iint_S F_x dS, \iint_S F_y dS, \iint_S F_z dS \right)^t$$

$$\iint_S U d\vec{S} = \iint_S U(\vec{r}) \vec{n}^\circ dS$$

$$\iint_S \vec{F} \times d\vec{S} = \iint_S \vec{F}(\vec{r}) \times \vec{n}^\circ dS$$

د گاوس جمله

Satz von  
Gauß

$$\iiint_V \operatorname{div} \vec{F} dV = \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

$$\iiint_V \operatorname{grad} U dV = \iint_S U d\vec{S}$$

$$\iiint_V \operatorname{rot} \vec{F} dV = - \iint_S \vec{F} \times d\vec{S}$$

$$\iint_A \operatorname{div} \vec{F} dA = \int_C \vec{F} \times d\vec{r}, \quad A \subset \mathbb{R}^2$$

د گري Griesche انتیگرال فرمولونه

Griesche  
Integralformel  
n

$$\iint_S (U \operatorname{grad} W) \cdot d\vec{S} = \iiint_V (\operatorname{grad} U \cdot \operatorname{grad} W + U \Delta W) dV$$

$$\iint_S (U \operatorname{grad} W - W \operatorname{grad} U) \cdot d\vec{S} = \iiint_V (U \Delta W - W \Delta U) dV$$

د ستوکس جمله

Satz von  
Stokes

$$\iint_S (\operatorname{rot} \vec{F}) \cdot d\vec{S} = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$- \iint_S (\operatorname{grad} U) \times d\vec{S} = \int_C U d\vec{r}$$

$$\iint_A \operatorname{rot} \vec{F} dA = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}, \quad A \subset \mathbb{R}^2$$

سکالار پوتنشل

### Skalares Potential

$$\text{grad}U = \vec{F}$$

د  $U$  سکالر ورشو سره

د شتون له پاره اړین شرطونه

$$\text{notwendige Bedingung für Existenz: } \text{rot } \vec{F} = \vec{0},$$

په یوه ساده سره اړوند ورشو باندې پوره کیدونکي

hinreichend auf einfach zusammenhängenden Gebieten  $D$

$C$  خوبه، په  $C$  کې له  $A$  څخه د  $B$  لور ځغلیدونکي لار

$C$  ein beliebiger, in  $D$  von  $A$  nach  $B$  verlaufender Weg:

د انټیگرال د لارې  
خپلواکوالی

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = U(B) - U(A) \Rightarrow$$

Wegunabhängigkeit

des Integrals

### Vektorpotential

$$\text{Vektorfeld } \vec{A} \text{ mit } \text{rot } \vec{A} = \vec{F}$$

وکتور ورشو یا پټی

د شتون له پاره اړین شرطونه

$$\text{notwendige Bedingung für Existenz: } \text{div } \vec{F} = 0,$$

په یوه ساده سره اړوند ورشو باندې پوره کیدونکي

hinreichend auf einfach zusammenhängenden Gebieten

## بنسټیز توابع Grundfunktionen

]

Komplexe  
Funktion گډوله توابع

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y), \quad z = x + iy = re^{i\varphi}$$

Möbius-  
Transformation

$$w = f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad f^{-1}(w) = \frac{-dw + b}{cw - a}$$

Geraden / Kreise werden auf Geraden / Kreise abgebildet

کرینې همداسې دایرې (گردی) په کرینو همداسې په گردیو تنظیمیږي

$(z_i, w_i) :$   
Festlegung durch drei Punkte د درې ټکو له لارې کره کیدنه

$$\frac{w - w_2}{w - w_3} : \frac{w_1 - w_2}{w_1 - w_3} = \frac{z - z_2}{z - z_3} : \frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_3}$$

Exponentialfunktion

$$e^z = e^x (\cos y + i \sin y)$$

Komplexer  
Logarithmus

$$\text{Ln } z = \ln r + i(\varphi + 2\pi k), \quad k \in \mathbb{Z}$$

Potenzfunktion

$$z^{p/q} = r^{p/q} \exp(p(\varphi + 2\pi j)i/q), \quad j = 0, \dots, q - 1$$

## komplexe Differenzierbarkeit und konforme Abbildungen

Cauchy-Riemann

$f$   
komplex differenzierbar:

Differentialgleichungen

$$f'(z) = f_x(z) = -if_y(z) \Leftrightarrow u_x = v_y, \quad u_y = -v_x$$

$$\Rightarrow \Delta u = \Delta v = 0$$

konjugiert harmonische

$\Delta u = 0$  auf  $D$  einfach zusammenhängend

Funktion

$$\Rightarrow \exists v : \Delta v = 0 \text{ und } f = u + iv \text{ komplex differenzierbar}$$

Isotropie

$z \mapsto w(z)$   
Abbildung

und Winkeltreue

dreht Richtungen um Winkel  $\arg f'(z)$ streckt Längen um Faktor  $|f'(z)|$ 

Orthogonalität krummliniger Gitter bleibt erhalten

elementare  
Abbildungen  
خیره ونی یا تابعگانی

خیره ونه یا تابع Abbildung	له مخه خیره یا - تابع Urbild	Bild خیره یا تابع
$w = z^\alpha$	Sektor $0 < \arg z < \gamma$	Sektor $0 < \arg w < \gamma\alpha$
$w = \frac{z+1}{iz-i}$ $\Leftrightarrow z = \frac{iw+1}{iw-1}$	Einheitskreisscheibe یونگر دی کتره یا تونه $ z  < 1$	obere Halbebene پورتنی نیمهواره $\operatorname{Im} w > 0$
$w = e^z$ $\Leftrightarrow z = \operatorname{Ln} w$	Streifen $0 < \operatorname{Im} z < \gamma$ کرنبی	Sektor برخه $0 < \arg w < \gamma$

## Integration

Kurvenintegral

$$\int_C f dz = \int_a^b f(z(t)) z'(t) dt, \quad C : t \mapsto z(t), \quad t \in [a, b]$$

Stammfunktion

$f$   
im Gebiet  $D$  komplex differenzierbar,  $C$  ein in  $D$  verlaufender  
Weg von  $z_0$  nach  $z_1$  :

$$\int_C f' dz = f(z_1) - f(z_0) = [f]_{z_0}^{z_1}$$

Singularitäten

schwache Singularität:  $\lim_{z \rightarrow a} (z - a)f(z) = 0$

Pol  $n$ -ter Ordnung:  $|z - a|^{n-1}|f(z)| \rightarrow \infty$  für  $z \rightarrow a$ ,  
 $(z - a)^n f(z)$  beschränkt für  $z \rightarrow a$

wesentliche Singularität:  $(z - a)^n f(z)$  für kein  $n$  beschränkt

Cauchys Theorem

$f$  analytisch in  $D$  bis auf endlich viele schwache Singularitäten,  
 $C \subset D$  geschlossene Kurve, homotop zu einem Punkt:

$$\int_C f(z) dz = 0$$

Cauchysche Integralformel

$f$  analytisch,  $n(C, z)$  Umlaufzahl von  $C$  bzgl.  $z$ :

$$n(C, z)f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{w - z} dw$$

Integralformel für

Ableitungen

$f$  analytisch,  $n(C, z) = 1$ :

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{(w - z)^{n+1}} dw$$

Mittelwerteigenschaft

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z + re^{it}) dt$$

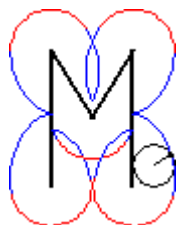
Maximumprinzip

$$\max_{z \in D} |f(z)| \leq \max_{z \in \partial D} |f(z)|$$

(Autoren: Höllig/Hörner/Wipper)

[\[vorangehende Seite\]](#) [\[nachfolgende Seite\]](#) [\[Gesamtverzeichnis\]](#) [\[Seitenübersicht\]](#)

automatisch erstellt am 31.1.2006



[\[Home\]](#) [\[Lexikon\]](#) [\[Aufgaben\]](#) [\[Tests\]](#) [\[Kurse\]](#) [\[Begleitmaterial\]](#) [\[Hinweise\]](#)  
[\[Mitwirkende\]](#) [\[Publikationen\]](#) [\[Suche\]](#)

Mathematik-Online-Kurs: Formelsammlung - Komplexe Analysis

## Residuenkalkül

[\[vorangehende Seite\]](#) [\[nachfolgende Seite\]](#) [\[Gesamtverzeichnis\]](#) [\[Seitenübersicht\]](#)

Residuum

$f$   $D \setminus \{a\}$ ,  
analytisch in

$$C \subset D$$

entgegen dem Uhrzeigersinn durchlaufener Kreis um  $a$

$$\operatorname{Res}_{z=a} f(z) = \operatorname{Res}_a f = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) dz$$

einfache Polstelle: 
$$\operatorname{Res}_a f = \lim_{z \rightarrow a} (z - a) f(z)$$

Pol  $n$ -ter Ordnung:

$$\operatorname{Res}_a f = \lim_{z \rightarrow a} \frac{1}{(n-1)!} \left( \frac{d}{dz} \right)^{n-1} \left( (z-a)^n f(z) \right)$$

Residuensatz

$C$  entgegen dem Uhrzeigersinn orientierter Rand eines beschränkten Gebietes  $D$ ,  $a_j$  Singularitäten von  $f$  in  $D$ :

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i \sum_j \operatorname{Res}_{a_j} f$$

Trigonometrische

Integranden

$$\int_0^{2\pi} r(\cos t, \sin t) dt$$

geht mit der Substitution  $z = e^{it}$  über in

$$\int_{|z|=1} f(z) dz, \quad f(z) = r\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right) \frac{1}{iz}$$

Rationale

Integranden

$f$   
rational ohne reelle Polstellen, Zählergrad mindestens um 2 kleiner als Nennergrad:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} a > 0} \operatorname{Res}_a f$$

Transzendente

Integranden

$f$   
rational ohne reelle Polstellen, Zählergrad kleiner als Nennergrad:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\lambda x} dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} a > 0} \operatorname{Res}_a (f(z) e^{i\lambda z}), \quad \lambda \in \mathbb{R}^+$$

Algebraische

Integranden

$f$   
rational ohne Polstellen auf der positiven reellen Achse, höchstens einfacher Pol bei 0, Zählergrad mindestens um 2 kleiner als Nennergrad:

$$\int_0^{\infty} f(x) x^\alpha dx = \frac{2\pi i}{1 - e^{2\pi i \alpha}} \sum_{a \neq 0} \operatorname{Res}_a (f(z) z^\alpha), \quad 0 < \alpha < 1$$

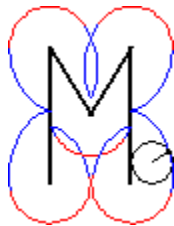


---

[\[vorangehende Seite\]](#) [\[nachfolgende Seite\]](#) [\[Gesamtverzeichnis\]](#) [\[Seitenübersicht\]](#)

---

automatisch erstellt am 31.1.2006



[\[Home\]](#) [\[Lexikon\]](#) [\[Aufgaben\]](#) [\[Tests\]](#) [\[Kurse\]](#) [\[Begleitmaterial\]](#) [\[Hinweise\]](#)  
[\[Mitwirkende\]](#) [\[Publikationen\]](#) [\[Suche\]](#)

---

Mathematik-Online-Kurs: Formelsammlung - Komplexe Analysis

## Potenzreihen

---

[\[vorangehende Seite\]](#) [\[nachfolgende Seite\]](#) [\[Gesamtverzeichnis\]](#) [\[Seitenübersicht\]](#)

---

Taylor-  
Polynom

$$p_n(z) = \sum_{j=0}^n \frac{f^{(j)}(a)}{j!} (z-a)^j$$

Restglied:

$$f(z) - p_n(z) = \left( \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}(w-z)} dw \right) (z-a)^{n+1}$$

Taylor-Reihe

$f$  analytisch in  $D : |z-a| < r$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n \quad c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

Konvergenzradius  $r$ : Abstand zur nächsten Singularität

$$r = \left( \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |c_n|^{1/n} \right)^{-1}$$

Laurent-Reihe

$f$  analytisch in  $D : r_1 < |z-a| < r_2$

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - a)^n \quad c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{(w - a)^{n+1}} dw$$

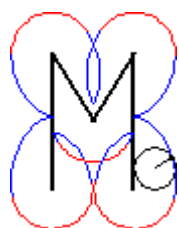
Konvergenzgebiet: maximaler Kreisring um  $a$  ohne Singularitäten,  $r_1, r_2$  :  
 Abstand der begrenzenden Singularitäten zu  $a$

$$r_1 = \overline{\lim}_{n \rightarrow -\infty} |c_n|^{-1/n} \quad r_2 = \left( \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |c_n|^{1/n} \right)^{-1}$$

(Autoren: Höllig/Hörner/Wipper)

[\[vorangehende Seite\]](#) [\[nachfolgende Seite\]](#) [\[Gesamtverzeichnis\]](#) [\[Seitenübersicht\]](#)

automatisch erstellt am 31.1.2006



[\[Home\]](#) [\[Lexikon\]](#) [\[Aufgaben\]](#) [\[Tests\]](#) [\[Kurse\]](#) [\[Begleitmaterial\]](#) [\[Hinweise\]](#)  
[\[Mitwirkende\]](#) [\[Publikationen\]](#) [\[Suche\]](#)

Mathematik-Online-Kurs: Formelsammlung - Komplexe Analysis

## Differentialgleichungen

[\[vorangehende Seite\]](#) [\[nachfolgende Seite\]](#) [\[Gesamtverzeichnis\]](#) [\[Seitenübersicht\]](#)

Regulärer Punkt

Die Differentialgleichung

$$r(z)u''(z) + q(z)u'(z) + p(z)u(z) = 0$$

ist bei  $a$  regulär, wenn

$q/r$  und  $p/r$  analytisch in einer Umgebung von  $a$  sind.

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n (z - a)^n$$

Entwicklung:

$$u_n = f_n(u_{n-1}, u_{n-2}, \dots, u_0), \quad n \geq 2$$

Rekursion:

$$u_0 = u(a) \quad u_1 = u'(a)$$

mit durch Anfangsbedingungen  $u_n$  und  $u_n$  eindeutig bestimmten Koeffizienten

Singulärer Punkt

Die Differentialgleichung  
 $r(z)u''(z) + q(z)u'(z) + p(z)u(z) = 0$   
 hat bei  $a$  einen regulären  
 singulären Punkt, wenn  
 $q/r = q_0/(z-a) + O(1)$  und  
 $p/r = p_0/(z-a)^2 + O(1/(z-a))$

Charakteristische Gleichung:  
 $\varphi(\lambda) = \lambda(\lambda - 1) + q_0\lambda + p_0 = 0$

$$u = (z-a)^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} u_n (z-a)^n, \quad u_0 \neq 0$$

Entwicklung:

Rekursion:  
 $\varphi(\lambda + n)u_n = f_n(u_{n-1}, u_{n-2}, \dots, u_0), \quad n \geq 1$

Differenz der Nullstellen ganzzahlig: eine Lösung zur Nullstelle mit  
 größtem Realteil, zweite Lösung mit Variation der Konstanten

Hypergeometrische  
 Differentialgleichung

$$z(1-z)u''(z) + (c - (a+b+1)z)u'(z) - abu(z) = 0,$$

$$-c \notin \mathbb{N}_0$$

$$u(z) = F(a, b, c, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n (1)_n} z^n, \quad (t)_n = t(t+1) \cdots (t+n-1)$$

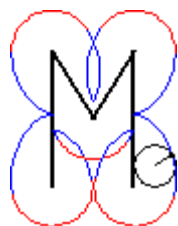
Bessel-Differentialgleichung

$$z^2 u''(z) + z u'(z) + (z^2 - \alpha^2) u(z) = 0, \quad \alpha \notin \mathbb{Z}$$

linear unabhängige Lösungen:

$$J_{\pm\alpha} = \left(\frac{z}{2}\right)^{\pm\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(\pm\alpha + n + 1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n}$$

(Autoren: Höllig/Hörner/Wipper)



# Fourier-Reihen

Reelle Fourier-Reihe

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$$

mit

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(kt) dt, \quad k \geq 0$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(kt) dt, \quad k \geq 1$$

Komplexe Fourier-Reihe

$$f(x) \sim \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikx} \quad \text{mit} \quad c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt$$

شمير بدلون د فوريي  
ضريبونو له پاره

$$a_0 = 2c_0, \quad a_k = c_k + c_{-k}, \quad b_k = i(c_k - c_{-k}) \quad \text{für } k \geq 1$$

Umrechnungsformel  
n für Fourier-  
Koeffizienten

$$c_0 = a_0/2, \quad c_k = (a_k - ib_k)/2, \quad c_{-k} = (a_k + ib_k)/2 \quad \text{für } k \geq 1$$

سيموترSymmetrien

$f$   
gerade:

$$b_k = 0, \quad a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \cos(kt) dt, \quad c_k = c_{-k}$$

$f$   
ungerade:

$$a_k = 0, \quad b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \sin(kt) dt, \quad c_k = -c_{-k}$$

سكالار  
ضرب Skalarprodukt  
نورم, Norm

$$\langle f, g \rangle_{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx \quad \|f\|_{2\pi}^2 = \langle f, f \rangle_{2\pi}$$

Fourier-  
Projektion فوريي  
برپوسٽون

$$(p_n f)(x) = \sum_{|k| \leq n} \langle f, e^{ikt} \rangle_{2\pi} e^{ikx}$$
$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin((n+1/2)(x-t))}{\sin((x-t)/2)} f(t) dt$$

Konvergenzrate د  
پولي ته ټلني كچه

$$\|f - p_n f\|_{2\pi} \leq (n+1)^{-k} \|f^{(k)}\|_{2\pi}$$

برزيول-ورته  
والی Parseval-  
Identität

$$\|f\|_{2\pi}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^2$$
$$= \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

## Diskrete Fourier-Transformation

د فوريي  
Fourier ماتريکسونه  
-Matrizen

$$W_n = \begin{pmatrix} w_n^{0 \cdot 0} & \dots & w_n^{0 \cdot (n-1)} \\ \vdots & & \vdots \\ w_n^{(n-1) \cdot 0} & \dots & w_n^{(n-1) \cdot (n-1)} \end{pmatrix}, \quad w_n = \exp(2\pi i/n)$$

$$(W_n)^{-1} = \frac{1}{n} W_n^*$$

$$W_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{pmatrix}$$

Diskrete  
Fourier-  
Transformation

$$f = W_n c \Leftrightarrow f_j = \sum_{k=0}^{n-1} w_n^{jk} c_k, \quad j = 0, \dots, n-1$$

Inverse diskrete  
Fourier-  
Transformation

$$c = \frac{1}{n} W_n^* f \Leftrightarrow c_k = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} w_n^{-kj} f_j, \quad k = 0, \dots, n-1$$

## Fourier-Transformation

Fourier-  
Transformation

$$\hat{f} = \mathcal{F}f, \quad \hat{f}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ixy} dx$$

Inverse Fourier-  
Transformation

$$f = \mathcal{F}^{-1}\hat{f}, \quad f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(y) e^{ixy} dy$$

د ترانسفورميشن لاري يا قوانين Transformationsregeln

Linearität کربنيزوالی

$$af(x) + bg(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} a\hat{f}(y) + b\hat{g}(y)$$

Symmetrie سيومتري

$$\hat{f}(y) \xrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi f(-x)$$

Konjugation

$$\overline{f(x)} \xrightarrow{\mathcal{F}} \overline{\hat{f}(-y)}$$

Skalierung

$$f(ax) \xrightarrow{\mathcal{F}} \hat{f}(y/a)/|a|$$

Verschiebung

$$f(x - a) \xrightarrow{\mathcal{F}} e^{-ia y} \hat{f}(y)$$

$$e^{ia x} f(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} \hat{f}(y - a)$$

Differentiation

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^n f(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} (iy)^n \hat{f}(y)$$

$$(-ix)^n f(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} \left(\frac{d}{dy}\right)^n \hat{f}(y)$$

Faltung

$$(f \star g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x - \tau)g(\tau)d\tau \xrightarrow{\mathcal{F}} \hat{f}(y)\hat{g}(y)$$

$$f(x)g(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(y - \tau)\hat{g}(\tau) d\tau$$

## Spezielle Funktionen

$f$	$\hat{f}$
1	$2\pi\delta(y)$
1 für $x \in [-a, a]$ , 0 sonst	$2a \operatorname{sinc}(ay)$
$\operatorname{sign}(x)$	$2/(iy)$
$e^{-a x }$	$2a/(a^2 + y^2)$
$e^{-ax^2}$	$\sqrt{\pi/a} e^{-y^2/(4a)}$

Satz د پلانشرل جمله  
von Plancherel

$$2\pi \langle f, g \rangle = \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle, \quad \sqrt{2\pi} \|f\| = \|\hat{f}\| = \left( \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(y)|^2 dy \right)^{1/2}$$

Poisson-  
Summationsformel

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} f(j) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \hat{f}(2\pi l)$$

Heisenbergs  
Unschärfeprinzip

$$\|xf\| \|y\hat{f}\| \geq \frac{1}{2} \|f\| \|\hat{f}\|$$

Rekonstruktionssatz  
z

Hat  $f$  Bandbreite  $h$ , d.h.  $\hat{f}(y) = 0$  für  $|y| > h$ , dann gilt

$$f(x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} f(j\pi/h) \operatorname{sinc}(hx - j\pi)$$



# Multivariate Fourier-Transformation

Fourier-Transformation  $\hat{f} = \mathcal{F}f, \quad \hat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-iy^t x} dx, \quad y \in \mathbb{R}^n$

Inverse Fourier-Transformation  $f = \mathcal{F}^{-1}\hat{f}, \quad f(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(y)e^{iy^t x} dy, \quad x \in \mathbb{R}^n$

## Transformationsregeln

Linearität  $af(x) + bg(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} a\hat{f}(y) + b\hat{g}(y)$

Symmetrie  $\hat{f}(y) \xrightarrow{\mathcal{F}} (2\pi)^n f(-x)$

Transformation  $f(Ax) \xrightarrow{\mathcal{F}} |\det(A)|^{-1} \hat{f}((A^{-1})^t y), \quad \det(A) \neq 0$

Verschiebung  $f(x - v) \xrightarrow{\mathcal{F}} \exp(-iv^t y) \hat{f}(y)$

$$\exp(iv^t x) f \xrightarrow{\mathcal{F}} \hat{f}(y - v)$$

Differentiation  $\partial^\alpha f(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} i^{|\alpha|} y^\alpha \hat{f}(y), \quad \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$

$$x^\alpha f(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} i^{|\alpha|} \partial^\alpha \hat{f}(y)$$

Faltung

$$(f \star g)(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} \widehat{f}(y)\widehat{g}(y)$$

Spezielle  
Funktionen

$f$	$\widehat{f}$
1 für $x \in [-a, a]^n$ , 0 sonst	$(2a)^n \operatorname{sinc}(ay_1) \cdots \operatorname{sinc}(ay_n)$
$\exp(- x )$	$\frac{2^n \pi^{(n-1)/2} \Gamma((n+1)/2)}{(1+ y ^2)^{(n+1)/2}}$
$\exp(- x ^2/2)$	$(2\pi)^{n/2} e^{- y ^2/2}$

Norminvarianz

$$(2\pi)^{n/2} \|f\| = \|\widehat{f}\| = \left( \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{f}(y)|^2 dy \right)^{1/2}$$

د ډاکټر ماخان شينواري چاپ شوي او ناچاپ ليکني:

1988 Vienna (Austria):

لومړی:

H.K. Kaiser , M. Shinwari : Aproximation compact pological algebra : contributions to

general algebra 6 ; Page 117 – 122

1987 Vienna (Austria):

دوېچ:

Diss . Uni. Interpolation und Aproximation durch Polynime in Universalen Algebren .

Wien

*Dissertation at the Interpolation and Aproximation by Polynome in universal Algebras,*

*University of Vienna/Austria*

لاندې د شميرپوهنې پښتوټول کتابونه په المان کې د ،، افغانستان کلتوري ودې ټولنه، له خوا چاپ شوي دي

2000 Bonn (Germany):

درېم: د شميرپوهنې ستر کتاب : د شميرپوهنې برسیره د انجنري، فزيک او اقتصاد لپاره ،

همداسې د بنوونکو او زده کوونکو لپاره ( دا کتاب په ۹۰۰ مخونو کې چاپ او دا نوې ليکنه به يې

خنو خايونو غزېدلې او خني خايونه ترې لري شوي دي)

2003 Bonn (Germany):

خلورم: خُمکچپوهنه( هندسه) ، په سلو، زرو کې شميرنه، د گټې – او کټې د کټې شميرنه ، د

اخيتمالوالي شميرنه کتاب د بنوونځي ټولي اړتياوي پوره کوي

2003 Bonn (Germany):

پنځم: الجبرونه ( د الجبر بنسټونه دي)

2003 Bonn (Germany):

شپږم: د شميرپوهنې انگرېزي - پښتو ډکشنري.

2003 Bonn (Germany):

اووم: د شميرپوهنې الماني - پښتو - او پښتو الماني ډکشنري

*Mathematical dictionary German/Pashto and Pashto/German*

2003 Bonn (Germany):

اتم: دفرنخيال برابرېون ( دا کتاب په دې څانگه کې يو پيل دی، ساده ليکل شوی)

Differential equation Translation; An Introduction

Bonn (Germany): 2003

نهم: د شمير پوهنې فرمولونو ټولگه

*Mathematical Formulas*

2003 Bonn (Germany):

لسم: شميرپوهنه له عربي په پښتو

1997 Bonn (Germany):

يوولسم: د افغانستان په هکله سپينې خبرې: په المان کې

،،د افغانستان روغي او بيا ابادولو ټولنه،، له خو

يادونه: له ۲۰۰۰ کال دمخه ډاکتر ماخان شينواري د ،،د افغانستان روغي او بيا ابادولو ټولنه،،

له خوا درې ساسي مجلې هم را وستلې.

د ډاکتر ماخان ،،ميري،، شينواري ليکنې او ژباړې چې په ۲۰۱۲ کې چاپ شوي.

ژباړې:

: Prof. Brinkmann. (From Brinkmann.du.de)

لاندي د برينکمن ليکنې چې له پرينکمن ن ج څخه ژباړل شوي دي.

۱ - شمير پوهنه د بنوونځي لپاره لومړی ټوک

۲ - شمير پوهنه د بنوونځي لپاره دويم ټوک

۳ - شمير پوهنه د بنوونځي لپاره دريم ټوک

۴ - د احتمالي شميرنه د بنوونځي لپاره

۵ - احصايه يا ستاتيستيک د بنوونځي لپاره

لاندي کتابونه د شتوتگارت د پوهنتون د استادانو د لکچرونو څخه چې د شتوتگارت پوهنتون ن ج

څخه خپاره شوي را ژباړل شوي.

۶ - اناليزی ۱

۷ - اناليزی ۲

۸ - کرينيز الجبر

۹ - د شمير پوهني بنسټونه

۱۰ - د فرمولونو ټولگه

۱۱ - فنکشنل اناليز

۱۲ - وکتور شمیرنه

۱۳ - له [www.grundstudium.info/linearealgebra](http://www.grundstudium.info/linearealgebra) څخه: کرښيز الجبر

۱۴ - Georg Guttenbrunner گڼونپوهنه يا د اعدادو تيوري

زما ليکنې

Bonn (Germany):

۱۵ - د شميرپوهنې ستر کتاب دويم چاپ د پوره تغيراتو سره : دا کتاب د شميرپوهنې برخې برسیره د انجنري، فزيک او اقتصاد لپاره ، همداسې د بنوونکو او زدهکونکو لپاره پوره گټور دی. په کتاب کې د اړتيا سره زياتونه او کونه راغلي

۱۶ - ځمکچپوهنه ( هندسه ) دويم چاپ د پوره تغيراتو سره

۱۷ - الجبر بنسټونه دويم چاپ له تغيراتو سره

۱۸ - ډبرې پوهنه يا سټ تيوري

۱۹ - د شميرپوهنې سم اند ( منطق رياضي )

۲۰ - د يو څو شميرپوهانو ژوندليک

۲۱ - د شمير پوهنې گډې وډې ليکنې

۲۲ - داهم ژباړه ده، خو ليکونکي يې متأسفانه راڅخه نابلد شوی:

د مشتق او انتيگرال شميرنو ته تمرينونه او اوبيوني يا حلونه يې

۲۳ - د شميرپوهنې انگريزي پښتو او عربي + دري ډکشنري

۲۴ - د شمیرپوهنې پښتو انگرېزي ډکشنري

۲۵ - د شمیرپوهنې پښتو ډکشنري د شمیرپوهنیزو وییونو په پښتو روښانه ونه

۲۶ - د زره له کومې (دا هغه لیکنې دي، چې ځنې یې په نړیول جالونو کې خپرې شوي دي.)

۲۷ - د افغانستان په هکله سپینې خبرې، چې و به غزیري.

نوري لیکنې، چې په ژباړه یې پیل شوی، خو لا پوره نه دي

- د شتوتکارت پوهنتون لکچرنوټونو څخه، چې د شتوتکارت پوهنتون ن ج څخه خپریري:

د گروپونو تیوري

- د بنوونځي لپاره فزیک د برینکمن لیکنه

له پنځم ټولگي څخه تر اووم ټولگي پورې ژباړل شوی ( دا چې زما دویم مسلک فزیک دی، دا لیکنې ژباړم. دا هم د دې لیکوال یوه ډېره بڼه لیکنه ده، چې د شمیرپوهنې په څیر- دلته هم زیات تمرینونه د حل یا اوبیوني سره په کې راغلي او ماته زیات گټور برېښي).

د اوم څخه تر دولسم ټولگي پورې د شمیرپوهنې کتابونه، چې لنډ وخت کې به ن ج ته پورته شي.

د دولسم ټولگي کتاب په دري، چې دا به هم زرتزره ن ج ته پورته شي.

**Get more e-books from [www.ketabton.com](http://www.ketabton.com)  
Ketabton.com: The Digital Library**