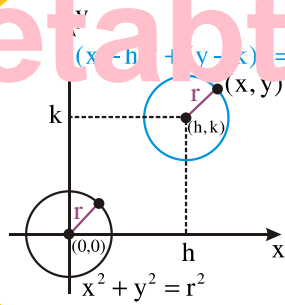


$x=0, 1, 2, 3$

Function:
 $y = x^3$

$y=0, 1, 8, 27$

Ketabton.com





ملي سرود

دا عزت د هر افغان دی
هر بچی یې قهرمان دی
د بلوڅو د ازبکو
د ترکمنو د تاجکو
پامیریان، نورستانیان
هم ایماق، هم پشه پان
لکه لمر پر شنه آسمان
لکه زره وي جاویدان
وایو الله اکبر وایو الله اکبر

دا وطن افغانستان دی
کور د سولې کور د تورې
دا وطن د ټولو کور دی
د پښتون او هزاره وو
ورسره عرب، گوجر دي
براهوي دي، قزلباش دي
دا هیواد به تل ځلیري
په سینه کې د آسیا به
نوم د حق مودی رهبر

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

رياضي
لسم
ٲولگی

١٣٩٨
هـ . ش .

د کتاب خانگرتیاوې

مضمون: ریاضي

مؤلفین: د تعلیمي نصاب د ریاضیاتو دیپارتمنت د درسي کتابونو مؤلفین

ادیت کونکي: د پښتو ژبې د ادیت دیپارتمنت غړي

ټولگی: لسم

د متن ژبه: پښتو

انکشاف ورکوونکی: د تعلیمي نصاب د پراختیا او درسي کتابونو د تألیف لوی ریاست

خپروونکی: د پوهنې وزارت د اړیکو او عامه پوهاوي ریاست

د چاپ کال: ۱۳۹۸ هجري شمسي

د چاپ ځای: کابل

چاپخونه:

برېښنالیک پته: curriculum@moe.gov.af

د درسي کتابونو د چاپ، وېش او پلورلو حق د افغانستان اسلامي جمهوریت د پوهنې

وزارت سره محفوظ دی. په بازار کې یې پلورل او پېرودل منع دي. له سرغړوونکو سره

قانوني چلند کېږي.

د پوهنې د وزیر پیغام

اقرأ باسم ربك

د لوی او ښوونکي خدای ﷻ شکر په ځای کوو، چې مور ته یې ژوند رابښلی، او د لوست او لیک له نعمت څخه یې برخمن کړي یو، او د الله تعالی پر وروستي پیغمبر محمد مصطفی ﷺ چې الهي لومړنی پیغام ورته (لوستل) و، درود وایو.

څرنگه چې ټولو ته ښکاره ده ۱۳۹۷ هجري لمريز کال د پوهنې د کال په نامه ونومول شو، له دې امله به د گران هېواد ښوونیز نظام، د ژورو بدلونونو شاهد وي. ښوونکی، زده کوونکی، کتاب، ښوونځی، اداره او د والدینو شوراگانې د هېواد د پوهنیز نظام سپرگوني بنسټیز عناصر بلل کيږي، چې د هېواد د ښوونې او روزنې په پراختیا او پرمختیا کې مهم رول لري. په داسې مهم وخت کې د افغانستان د پوهنې وزارت د مشرتابه مقام، د هېواد په ښوونیز نظام کې د ودې او پراختیا په لور بنسټیزو بدلونونو ته ژمن دی.

له همدې امله د ښوونیز نصاب اصلاح او پراختیا، د پوهنې وزارت له مهمو لومړیتوبونو څخه دي. همدارنگه په ښوونځیو، مدرسو او ټولو دولتي او خصوصي ښوونیزو تاسیساتو کې، د درسي کتابونو محتوا، کیفیت او توزیع ته پاملرنه د پوهنې وزارت د چارو په سر کې ځای لري. مور په دې باور یو، چې د باکیفیته درسي کتابونو له شتون پرته، د ښوونې او روزنې اساسي اهدافو ته رسېدلی نشو.

پورتنيو موخو ته د رسېدو او د اغېزناک ښوونیز نظام د رامنځته کولو لپاره، د راتلونکي نسل د روزونکو په توگه، د هېواد له ټولو زړه سواندو ښوونکو، استادانو او مسلکي مدیرانو څخه په درناوي هیله کوم، چې د هېواد بچیانو ته دې د درسي کتابونو په تدریس، او د محتوا په لېږدولو کې، هېڅ ډول هڅه او هاند ونه سپموي، او د یوه فعال او په دیني، ملي او انتقادي تفکر سمبال نسل په روزنه کې، زیار او کوبښښ وکړي. هره ورځ د ژمنې په نوي کولو او د مسؤلیت په درک سره، په دې نیت لوست پیل کړي، چې د نن ورځې گران زده کوونکي به سبا د یوه پرمختللي افغانستان معماران، او د ټولني متمدن او گټور اوسېدونکي وي.

همدا راز له خوږو زده کوونکو څخه، چې د هېواد ارزښتناکه پانگه ده، غوښتنه لرم، څو له هر فرصت څخه گټه پورته کړي، او د زده کړې په پروسه کې د څیرکو او فعالو گډونوالو په توگه، او ښوونکو ته په درناوي سره، له تدریس څخه ښه او اغېزناکه استفاده وکړي.

په پای کې د ښوونې او روزنې له ټولو پوهانو او د ښوونیز نصاب له مسلکي همکارانو څخه، چې د دې کتاب په لیکلو او چمتو کولو کې یې نه سترې کېدونکې هلې ځلې کړې دي، مننه کوم، او د لوی خدای ﷻ له دربار څخه دوی ته په دې سپیڅلې او انسان جوړوونکې هڅې کې بریا غواړم.

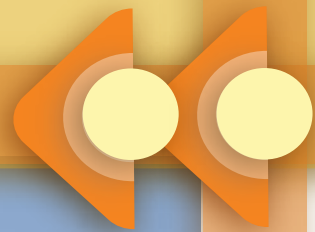
د معیاري او پرمختللي ښوونیز نظام او د داسې ودان افغانستان په هیله چې وگړي یې خپلواک، پوه او سوکاله وي.

د پوهنې وزیر

دکتور محمد میرویس بلخي

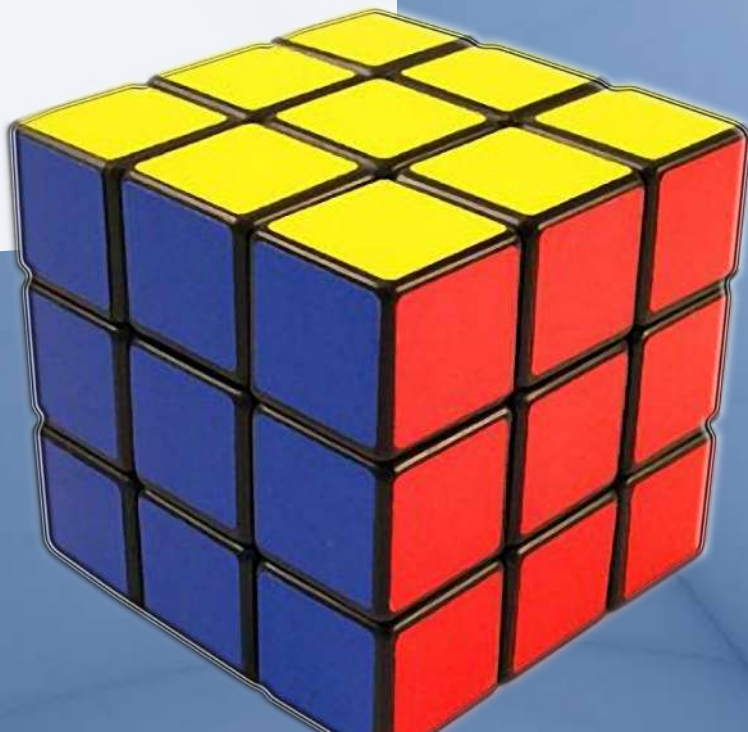
- عنوان** **فهرست** **منخ**
- ۳** **لومړی څپرکی (پولینوم)** **۳**
- الجبري افادې، د پولینوم درجه او د پولینوم ډولونه، د پولینوم د قیمت او پولینوم د ضربونو د مجموعی پیدا کول، د پولینوم څلور گوني عملیې
د باقی مانده قضیه، فکتور قضیه او ترکیبی وېش
د څپرکي لنډیز او پوښتنې
- ۵۳** **دویم څپرکی: رابطه** **۵۳**
- مرتبې جوړې او کارتیزیني مستوي، د کارتیزیني ضرب حاصل او گراف یې
رابطه او معکوسه رابطه.
معادله رابطه.
د څپرکي لنډیز او پوښتنې
- ۶۹** **دریم څپرکی: تابع** **۶۹**
- د تابع د لیکلو طریقه او د یوې تابع د قیمت پیدا کول، د تابع د تعریف د ساحې پیدا کول، د یوې تابع گراف او د گراف له مخې
د یوې تابع پېژندنه، د گراف له مخې د یوې تابع د تعریف او د قیمتونو د ناحیو او د تابع قیمتونو پیدا کول، ځینې خاصې تابع گانې او گرافونه یې. متزایدې او متناقصې تابع گانې، جفتې او طاقې تابع گانې
د گرافونو انتقال (عمودي انتقال، افقي انتقال او د عمودي او افقي انتقالونو ترکیب، د تابع گانو عملیې
د تابع گانو ترکیب، معکوسه تابع، یو په یو تابع، د تابع او د هغې د معکوسي تابع گراف، پولینومي تابع گانې (لومړۍ او دویمه درجه تابعگاني) او گرافونه یې
ناطقې تابع گانې او گراف یې (عمودې، افقي او مایل مجانبونه)
د څپرکي لنډیز او پوښتنې
- ۱۴۹** **څلورم څپرکی: مثلثاتي تابع گانې** **۱۴۹**
- زاویه او د زاویې د اندازه کولو واحدونه، د یوې زاویې معیاري حالت او کوټر مینل زاویې
مثلثاتي تابع گانې او د ځینو خاصو زاویو مثلثاتي نسبتونه
 $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$ او 360° زاویو مثلثاتي نسبتونه
د یوې حاده زاویې او نورو زاویو د مثلثاتي نسبتونو په منځ کې اړیکې
د مثلثاتي تابع گانو گراف
د څپرکي لنډیز او پوښتنې
- ۲۲۳** **پنځم څپرکی: د مثلثاتو تطبیقات** **۲۲۳**
- د مرکبو زاویو د مثلثاتي نسبتونه، د دوو زاویو د مجموعې او تفاضل مثلثاتي فورمولونه
د α زاویې د مثلثاتي نسبتونو له مخې د 2α او 3α زاویو د مثلثاتي نسبتونو پیدا کول، د زاویو د
مثلثاتي نسبتونو د مجموعې او تفاضل بدلول، د زاویو د مثلثاتي نسبتونو د ضرب د حاصل په شکل،

- عنوان** **فهرست** **مخ**
- د زاویو د مثلثاتي نسبتونو د ضرب د حاصل بدللول په جمع یا یې په تفاضل باندې، د قوس اوږدوالی، د یوې دایرې قطاع او مساحت یې، د دایرې قطعه او مساحت، د مثلث مساحت د دوو ضلعو او ددې دوو ضلعو ترمنځ د زاویې له جنسه، د مثلث مساحت د مثلث د دريو ضلعوله جنسه (د هیرون فورمول) د یوه مثلث د محیطي او محاطي دایرو شعاع گانې
د څپرکي لنډیز او پوښتنې
- ۲۷۷** **شپږم څپرکی: مختلط عددونه**
موهومي عددونه او د موهومي عددونو څلورگونې عملیې
د مختلطو عددونو د جمعې او تفریق عملیې
د مختلطو عددونو ضرب، د یو مختلط عدد مزدوج، د مختلط عدد ضربی معکوس
د مختلطو عددونو وېش
د مختلطو عددونو په ساحه کې دویمې درجې یو مجهوله معادلو حل
د څپرکي لنډیز او پوښتنې
- ۳۰۵** **اووم څپرکی تحلیلي هندسه**
د وضعیه کمیاتو سیستم او د دوو نقطو ترمنځ فاصله
د هغې نقطې د وضعیه کمیاتو پیداکول چې یو قطعه خط په یوه نسبت باندې وېشي
د یوه مستقیم خط میل
د یوه مستقیم خط معادله (د یو مستقیم خط معیاري معادله، دهغه مستقیم خط معادله چې میل او یوه نقطه یې معلومه وي، دوې نقطې یې معلومې وي. له محورونو سره یې د تقاطع نقطې معلومې وي، د مستقیم خط نورمال معادله او د مستقیم خط عمومي معادله)
د یوه مستقیم خط د عمومي معادلې بدللول، د مستقیم خط د معادلو په نورو شکلونو باندې.
د یوې نقطې فاصله له یوه مستقیم خط څخه، د دوو موازي خطونو تر منځ فاصله
دایره او د دایرې معادله، د یوه مستقیم خط حالتونه له یوې دایرې سره، د مماس معادله او د مماس اوږدوالی
د مثلث د مساحت پیداکول چې د راسونو و وضعیه کمیات یې معلوم وي.
د څپرکي لنډیز او پوښتنې
- ۳۵۹** **اتم څپرکی احصائیه**
د فربیکونسي څو ضلعي گراف، د ساقې او پانې گراف، ربعي (څلورمې)، صندوقچه یې گراف، د نارمل منحنی د مرکزي ټاکوونکو پرته کول، ربعي انحراف، واریانس، معیاري انحراف،
د څپرکي لنډیز او پوښتنې
- ۳۹۱** **نهم څپرکی د ریاضي منطق**
د شهودي درک استدلال، تمثیلي استدلال، استقرایي استدلال، د ریاضي د استقرا استدلال، استنتاجي استدلال، د مثال د نفی کولو استدلال، غیر مستقیم ثبوت، د ریاضي منطق او د بیان استنتاج، د څپرکي لنډیز او پوښتنې



لومړی څپرکی
پولینوم
(Polynome) پولینوم
یا (Polynomial)

$$\begin{aligned}(3x^2 + 5x + 2) + (5x + 6) \\&= 3x^2 + 5x + 2 + 5x + 6 \\&= 3x^2 + 5x + 5x + 6 + 2 \\&= 3x^2 + 10x + 8\end{aligned}$$





الجبري افادې

(Algebraic Expressions)

ایا ویلای شئ چې په $\frac{x^4-1}{x^2}$ ،

افادو کې کومه یوه ناطقه او کومه یوه غیر ناطقه

افادو کې کومه یوه ناطقه او کومه یوه غیر ناطقه

الجبري افاده ده؟

متحول او ثابت (variable and constant): متحول یو سمبول (Symbol) دی چې

د یوه غیر خالي سټ د هر عنصر په ځای وضع کېږي. یا یو تورې چې قیمتونه یې تغیر کوي د مثال په

ډول که $A = \{x / x \in \mathbb{IN} \text{ او } x \leq 10\}$ وي.

نو د A په سټ کې x له یوه څخه تر 10 پورې د طبیعي عددونو قیمتونه اخیستلای شي. x ، ته

متحول (Variable) وایي. عموماً متحولونه د انگلیسي ژبې د کوچنیو تورو، لکه: x, y, z او

نورو په واسطه بنودل کېږي.

د یوه عدد قیمت تغیر نه کوي، لکه: د 4 عدد هیڅکله له 5 یا 3 او یا کوم بل عدد سره مساوي

کېدای نه شي، نو ټول حقیقي عددونه ثابت (Constants) دي.

د حقیقي عددونو سربیره د انگلیسي ژبې توري، لکه: a, b, c, \dots او نور هم د ثابتو پر ځای کارول

کېږي.

الجبري افاده (Algebraic Expression): کېدای شي الجبري افاده له یوه ثابت، یو

متحول او یا د ثابتو او متحولونو له ترکیب څخه جوړه شوې وي. د الجبري افادو لاندې مثالونه

وگورئ.

$5\sqrt{x}$ ، $4x+5+\frac{15}{t^2}$ ، $\sqrt{3}x$ ، x^2-x+1 ، x ، -12 ، 12 او داسې نور.

په $3x^2$ الجبري افاده کې 3 ته ضریب (Coefficient) وایي. په $\frac{1}{2}y$ کې د $-\frac{1}{2}$ عدد او په x کې (1) ضریب دی. $-3x^5y^5$ او $15x^5y^5$ مشابه حدونه (Liketerms) دي چې مشابه متحولونه او مساوي توانونه لري، خو عددي ضریبونه یې سره توپیر لري.

د الجبري افادو ډولونه: الجبري افادې په درو ډولونو دي.

1- پولینومي الجبري افادې (Polynomial algebraic expressions)

پولینوم: هغه یوه یا څو حده الجبري افاده چې د تورو توانونه یې د مکملو عددونو په سټ کې شامل وي، پولینوم نومېږي او $x^3 - x + 1$ ، $2x^2 + x - 1$ ، $x - 1$ ، 12 پولینومونه دي، خو $x^{-2} + x - 1$ ، $\frac{1}{x} + x$ او $x^3 + \sqrt{x} + \frac{y}{x^2}$ پولینومونه نه دي یا د پولینوم مشخصې دا دي:

- د ټولو متحولونو توانونه یې مکمل عددونه وي.

- په مخرج کې متحول ونه لري.

- متحول تر جذر لاندې نه وي.

لومړی مثال: په لاندې راکړل شوو الجبري افادو کې کوم یو پولینوم او کوم یو یې پولینوم نه دي؟

e) $x^{-3} + x^2$, d) $x^{\frac{1}{2}}$, c) $\frac{1}{y^2} - \frac{2}{x^3}$, b) $2\sqrt{x}$, a) $\sqrt{2x}$

i) $6a^2 - 4a$, h) 88 , g) $9x^2 - \frac{7}{x^2}$ f) $8p^2 + p^{2.2}$

حل: a, h او i پولینومونه دي، خو b, c, d, e, f, g پولینومونه نه دي. په یاد ولرئ چې هر

پولینوم، یوه ناطقه الجبري افاده ده، خو هره ناطقه الجبري افاده پولینوم نه دی. د مثال په ډول:

$$x^3 + \frac{y}{x^2} + \frac{y}{x} + y^3$$

یوه ناطقه الجبري افاده ده، خو پولینوم نه دی.

12 هم یو پولینوم دی، ځکه چې: $12 = 12x^0$ دی او صفر هم د مکملو عددونو په سټ کې شامل

دی، خو $5\sqrt{x}$ او $\frac{5}{x^3}$ پولینومونه نه دي، ځکه $5\sqrt{x} = 5x^{\frac{1}{2}}$ ، $\frac{5}{x^3} = 5x^{-3}$ چې $\frac{1}{2}$ او -3

د مکملو عددونو په سټ کې شامل نه دي.

پولینوم د یو توري په واسطه، لکه: P بنودل کېږي، یو پولینوم چې له یو متحول څخه جوړ شوی وي عمومي شکل یې په لاندې ډول دی چې د معیاري شکل په نامه یادېږي.

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0$$

n یو مکمل عدد او $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$ ضریبونه دي چې حقیقي عددونه دي. که $a_n \neq 0$ وي، نو n د پولینوم درجه ده.

فعالیت

له $8\sqrt{x}$ ، $2x^3 - x^2$ ، $\frac{3}{x^2} + \frac{5}{x} + 6$ ، x ، $\frac{1}{x}$ ، $\sqrt{8x^3}$ ، $-8x^2$ او الجبري افادو څخه کومه یوه یې پولینوم دی او کومه یوه پولینوم نه دی؟

دویم مثال: د $P(x) = -5x^3 + x^2 - x + 12$ په پولینوم کې، $a_2 = 1$ ، $a_n = -5$ ، $n = 3$ او $a_1 = 0$ ، $a_n = 11$ ، $n = 2$ او $a_0 = 12$ دی. او د $11x^2 - 1$ په پولینوم کې، $a_1 = 0$ ، $a_n = 11$ ، $n = 2$ او $a_0 = -1$ دی.

2- ناطقه الجبري افاده (Rational algebraic expression):

که یوه الجبري افاده د $\frac{p}{q}$ ($q \neq 0$) په شکل ولیکلای شو چې p او q پولینومونه وي. داسې الجبري افادې ته ناطقه الجبري افاده وایي. د مثال په ډول $x^2 - \frac{1}{x^2}$ چې د $\frac{x^4 - 1}{x^2}$ په شکل یې هم لیکلای شو چې یو متحول لري یوه ناطقه الجبري افاده ده. څرنگه چې هرې الجبري افادې ته یو

مخرج ورکولای شو، نو $(x^2 - 1)$ هم یوه ناطقه الجبري افاده ده، ځکه چې $\frac{x^2 - 1}{1} = x^2 - 1$ دی.

3- غیر ناطقه الجبري افاده (Irrational algebraic expression):

داسې يوې الجبري افادې ته چې د دوو پولينومونو د خارج قسمت په بڼه يې نه شولیکلاي، غیر ناطقه

الجبري افاده ده، لکه: \sqrt{xy} ، $\frac{1}{\sqrt{x^2+5}}$ او $\sqrt{y^2+1}$ د غیر ناطقو الجبري افادو مثالونه دي.

یوه الجبري افاده کېدای شي چې ناطقه، غیر ناطقه او یا پولینومي الجبري افاده وي. پولینوم هغه یو یا

خو حده الجبري افاده ده چې د تورو توانونه یې د مکملو عددونو په سټ کې شامل وي.

پوښتنې

1- په لاندې الجبري افادو کې کومه یوه ناطقه، غیر ناطقه او پولینومي الجبري افاده ده؟

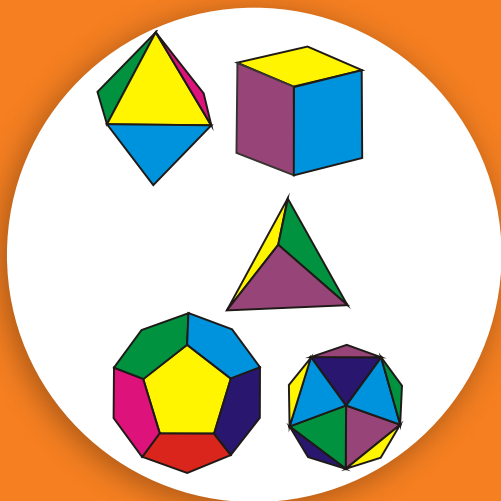
$$13 \quad 3x^2 + \frac{xy}{2} \quad x + \frac{1}{x} \quad \frac{m+3}{6} \quad \frac{3x^2}{2} \quad \sqrt{x} - \frac{1}{2} \quad \frac{1}{x}$$

2- په لاندې الجبري افادو کې کومه یوه یې یو پولینوم او کومه یوه یې پولینوم نه دی؟

$$\frac{1}{7}x^3 - x \quad -20a^3b + 28ab^4 \quad 3x^2 + \frac{xy}{2} \\ -0.03 \quad 3x \quad 8x^{-8} \quad 8\sqrt{x} \quad \frac{1}{x} - \frac{x^2}{5}$$

3. د $Px^4 - ax^3 + bx^2 + cx + d$ په پولینوم کې، a_1, a_2, a_3, a_n او a_0 وښیاست.

4. د $P(x) = \frac{x^3}{2} - 2x^2 - 1$ په پولینوم کې، a_1, a_2, a_3 او a_0 وښیاست.



د پولینوم درجه او د پولینوم ډولونه

آیا ویلای شئ چې د:

$$12y^5x^3 + x^4y^3 - 2x^3 - x^2 - x$$

12 د پولینومونو درجې څو دي؟

مونوم عدد، یو متحول یا د یو عدد او یو یا څو متحولینو د ضرب حاصل دی. $16x$ یا $3x$ ته مونوم یا (Monomial) (یو حده) الجبري افاده وایي. $x-4$ یا $ab-y$ ته باینوم (Binome) یا (Binomial) (دوه حده) الجبري افاده وایي او د $2x^3 - x - 1$ الجبري

افاده ترینوم (Trinomial) (درې حده) الجبري افاده ده او $\sqrt{2x} - \frac{1}{y} + 1$ الجبري افادې ته مولتینوم (Multinomial) وایي. په یوه پولینوم کې مونومونه د پولینوم د حدونو په نامه یادېږي او هر مونوم یو پولینوم دی.

ځینې وختونه پولینوم له یو، دوه، درې او څو متحولونو څخه جوړ شوی وي. د $2x^3 - 8x^2 + 7x + 11$ پولینوم د یو متحول، $2x^3 - 3y$ پولینوم د دوه متحولونو او $x + y + z$ د درېو متحولونو لرونکی پولینوم دی چې په لاندې جدول کې ښودل شوي دي.

متحول	مونوم (یو حده)	باینوم (دوه حده)	ترینوم (درې حده)
یو متحول	$5x^3$	$5y^2 + 3y$	$3x^2 + 2x - 4$
دوه متحولونه	$7x^2y$	$7x^2 - 4y^3$	$6x^2 + 5x - 3y^2$
درې متحولونه	$4xyz^2$	$8a^2b + 4c$	$3a^2b^2 + 6c^2 - z^5a$

یادونه: باید پام مو وي چې $2\sqrt{xy}$, $\frac{5}{x}$ او y^{-3} هریو یې مونوم نه دی.

د $ax^2 + bx + c$ ، $2x - y$ ، 15 ، $-3x$ او $4x^2 - 4y$ الجبري افادو کې مونوم، باينوم او ترينوم وښايست.

د يوه پولينوم درجه (Degree of a Polynome): که پولينوم له يوه توري څخه جوړ شوی وي، د هغه توري لوړ توان د پولينوم درجه ده، لکه: د $-x^3 + 2x + 1 + x^5$ د پولينوم درجه 5 ده. که پولينوم له ډېرو تورو څخه جوړ شوی وي، د زيات توان لرونکي مونوم درجه د پولينوم درجه ده، لکه: د $2x^2y^3 - 5xy^5 + x^3y$ د پولينوم درجه 6 ده، ($1 + 5 = 6$) او دا پولينوم نظر x ته دريمه درجه او نظر y ته پنځمه درجه پولينوم دی. که د يوه پولينوم درجه يوه وي، خطي پولينوم (Liner Polynome) او که د پولينوم درجه دوه وي، دويمه درجه پولينوم (Quadratic Polynome) او که درجه يې درې وي، دريمه درجه پولينوم (Cubic Polynomial) ورته وايي. او هم د $3x^2$ مونوم دويمه درجه، د $3x^2y^3$ مونوم درجه 5 او د 12 مونوم درجه صفرده.

داسې پولينوم ته ثابت پولينوم وايي، ځکه چې $12 = 12x^0$

ثابت پولينوم: هغه پولينوم دی چې درجه يې صفر وي. يا هغه پولينوم دی چې د ټولو متحولونو ضريبونه يې صفر وي.

لومړی مثال: د m او n قيمتونه پيدا کړئ، که $(2m - 4)x^2 + (5 - n)x + 13$ يو ثابت پولينوم وي.

حل: څرنګه چې دا يو ثابت پولينوم دی، نو د هر حد د متحول ضريب يې صفر دی.

$$2m - 4 = 0 \qquad 5 - n = 0 \qquad \text{نو:}$$

$$2m = 4 \qquad n = 5$$

$$m = 2$$

صفرې پولينوم (Zero Polynome): که د ثابت پولينوم ثابت حد صفر وي، داسې پولينوم ته صفرې پولينوم وايي، لکه: $P(x) = 0$ ، د صفرې پولينوم درجه تعريف شوې نه ده.

دویم مثال: د a قیمت پیدا کړئ که چېرې $(b-4)x^3 - (2c+6)x + (a-b+c)$ یوصفري پولینوم وي.

حل: په صفري پولینوم کې هر حد صفر وي، نو:

$$\begin{array}{lll} b-4=0 & 2c+6=0 & a-b+c=0 \\ b=4 & 2c=-6 & a-4-3=0 \\ & c=-3 & a=7 \end{array}$$

دریم مثال: د $P(x) = x^2 - 1 + 3x^5$ ، $g(x) = 2xy^2 - x^2y^3$ او $h(x) = \sqrt{3}$ د پولینومونو درجې پیدا کړئ.

حل: د $P(x)$ د پولینوم درجه 5 د $g(x)$ د پولینوم درجه هم 5 ده، $h(x)$ د $(n=5)$ خو د پولینوم درجه صفر ده.

فعالیت

د هر پولینوم درجه خو ده؟ او هم د دې پولینومونو درجې نظر هر توري ته پیدا کړئ.
 $x^2 - x^3 + 2x + 5x^5$ ، $x-1$ ، 15 ، $2m^3n^2 - 3mn^3 - mn$

مکمل او ناقص پولینومونه: مکمل پولینوم هغه پولینوم دی چې له لور توان څخه تر ثابت عدد پورې ټول حدونه ولري $x^3 + 1 + 2x - x^2$ ، $x-1$ او 51 مکمل پولینومونه دي، خو $x^2 - 1$ او $x^3 + x + 1$ ناقص پولینومونه دي. مور کولای شو دا ناقص پولینومونه د مکملو پولینومو په شکل ولیکو، لکه: $x^2 - 1 = x^2 + 0 \cdot x - 1$ او $x^3 + x - 1 = x^3 + 0 \cdot x^2 + x - 1$

منظم او غیر منظم پولینومونه: د $2x^3 - 3x^2 + 4x - 1$ یا $3x^4 - x + 1 + x^3 + x^2 - 11 + 12x + 13x^2 - x^3$ پولینومونه منظم، خو د $3x^4 - x + 1 + x^3 + x^2$ پولینوم یو غیر منظم پولینوم دی. کولای شو چې یو غیر منظم پولینوم د منظم پولینوم په شکل ولیکو، لکه: همدا پولینوم په دوه ډوله د منظم پولینوم په شکل لیکلای شو. $3x^4 + x^3 + x^2 - x + 1$ یا $1 - x + x^2 + x^3 + 3x^4$

نزولي او صعودي پولینومونه

(Descending and ascending Polynomes)

که یو پولینوم د متحول له لورې توان څخه ټیټ توان ته ترتیب شوی وي، نزولي او که له ټیټ توان څخه لورې توان ته ترتیب شوی وي، صعودي ترتیب ورته وایي.

د مثال په ډول $x^4 + 3x^3 + x^2 + x + 1$ په نزولي ترتیب او د $1 + x + x^2 + 3x^3 + x^4$ پولینوم په صعودي ترتیب لیکل شوی دی.

که یو پولینوم له دوو یا څو تورو څخه جوړ شوی وي، نو موږ کولای شو نظر هر توري ته یې په صعودي یا نزولي ډول ترتیب کړو، لکه: د $x^3y + 3x^2y^2 + 2xy^3 - 5y^4$ پولینوم نظر x ته په نزولي ډول او نظر y ته په صعودي ډول ترتیب شوی دی.

فعالیت

دا پولینومونه په صعودي ډول ترتیب کړئ:

$$4x - 5 + 6x^2 + 8x^3, 2y^2 - 4y + 3 - 3y^4 + y^3, 2a^3 - 5 + 4a^4 + a^5 + 3a^2 + a$$

څلورم مثال: د $P(y) = 4xy^4 - 3x^3y^2 + 2x^2y^3 + x^4 + y^5$ پولینوم نظر y ته په صعودي ترتیب ولیکئ:

$$P(y) = x^4 - 3x^3y^2 + 2x^2y^3 + 4xy^4 + y^5$$

معادل پولینومونه: هغه پولینومونه دي چې یو متحول ولري او د مشابه حدونو ضریبونه یې سره مساوي وي.

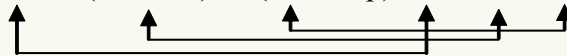
پنځم مثال: که د $x^2 + 3x + 2$ او $m(x - 1)^2 + n(x - 1) + P$ پولینومونه سره معادل وي، د n, m او p قیمتونه پیدا کړئ.

حل

$$m(x^2 - 2x + 1) + nx - n + p = x^2 + 3x + 2$$

$$mx^2 - 2mx + m + nx - n + p = x^2 + 3x + 2$$

$$mx^2 + (-2m + n)x + (m - n + p) = 1x^2 + 3x + 2$$



په نتیجه کې:

$$m = 1$$

$$-2m + n = 3 \quad \Rightarrow n = 5$$

$$m - n + p = 2 \quad \Rightarrow p = 6$$

متجانس پولینومونه (Homogeneous Polynomials): چې د ټولو حدونو توانونه یې سره

مساوي وي، لکه: $2x^2 + y^2 - z^2$ یو متجانس پولینوم دی.

شپږم مثال: که د $3x^2y + 5x^mz - 7y^{n-3}z^2$ پولینوم متجانس وي، د m او n قیمتونه پیدا کړئ.

حل:

$$m + 1 = 2 + 1 \quad n - 3 + 2 = m + 1$$

$$m = 2 \quad n - 1 = m + 1$$

$$n - 1 = 2 + 1$$

$$n = 4$$

که پولینوم له یوه توري څخه جوړ شوی وي، د دې توري لوړ توان د پولینوم درجه ده او که پولینوم له ډېرو تورو څخه جوړ شوی وي، د لوړ توان لرونکي مونوم درجه د دې پولینوم درجه ده. هغه پولینومونه چې یو متحول ولري او د مشابه حدونو ضربونه یې سره مساوي وي، د معادلو پولینومونو په نامه یادېږي او هغه پولینوم چې د ټولو حدونو توانونه یې سره مساوي وي، متجانس پولینوم دی.

پوښتنې

1- په لاندې افادو کې مونوم، باينوم او ترينوم وښايست او درجې يې پيدا كړئ.

$$\frac{1}{2}x^2y^5, \quad x^2 - y + 4, \quad x - 1$$

$$x - x^2 - x^3, \quad 12x, \quad -12$$

2- په لاندې پولينومونو کې مڪمل او ناقص پولينومونه وښايست او بيا ناقص پولينومونه د مڪملو پولينومونو په شكل وليكئ.

$$x, \quad x + 1, \quad x^2 - 1, \\ 2x^2 - 2x - 2, \quad 15, \quad x^3 + x - 1$$

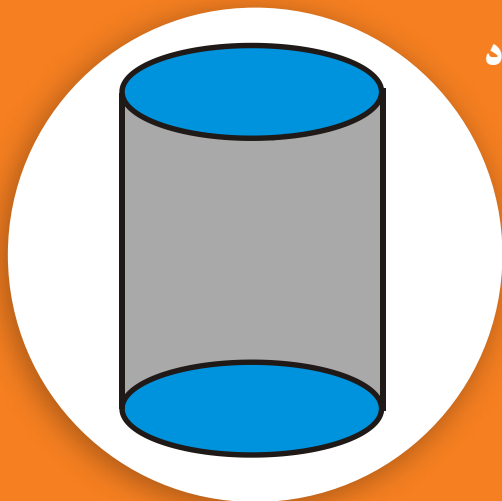
3- لومړی د لاندې پولينومونو درجې پيدا كړئ او بيا يې په نزولي ډول ترتيب كړئ.

$$4x - 5 + 6x^2 + 8x^3 \\ 2y^2 - 4y + 3 - 3y^4 + y^3 \\ 1 - x^3 + x^2 + 2x^4 - x^5 + x$$

4- كه $P(x-1)^2 + n(x+3) + c = 2x^2 - x + 22$ وي د n, p او c قيمتونه پيدا كړئ.

5- د a, b او c قيمتونه پيدا كړئ كه $P(x) = 7x^4 - (2a-3)x^3 + 5x - (c-3)$ او $Q(x) = (3b+4)x^4 + 2x^3 + 5x$ معادل پولينومونه وي.

6- كه $5xy^2 + 8x^p z - 3y^{m-3} z^2$ يو متجانس پولينوم وي، د m او p قيمتونه پيدا كړئ.



د پولینوم د قیمت او د پولینوم د ضریبونو د مجموعې پیدا کول

آیا ویلای شئ د $x = -1$ لپاره د

$$P(x) = x^3 - x^2 - x - 1$$

پولینوم قیمت

څو دی؟ یا $P(-1) = ?$

که په یوه پولینوم کې د متحول پر ځای یو حقیقي عدد (د متحول خاص قیمت) وضع کړو، یو حقیقي عدد په لاس راځي چې دا حقیقي عدد د دې پولینوم قیمت دی. د $x = 2$ لپاره د $P(x) = 3x + 2$ پولینوم قیمت $P(2) = 3 \cdot 2 + 2 = 8$ دی.

لومړی مثال: د $P(x) = 2x^2 - 7x + 1$ پولینوم قیمتونه د $P(5)$ ، $P(-1)$ او $P(0)$ لپاره پیدا کړئ.

حل:

$$P(5) = 2 \cdot 5^2 - 7(5) + 1 = 50 - 35 + 1 = 16$$

$$P(0) = 1$$

$$P(-1) = 2(-1)^2 - 7(-1) + 1 = 2 + 7 + 1 = 10$$

فعالیت

د $P(x) = x^5 - x^3 - x - 1$ پولینوم لپاره $P(0)$ ، $P(-1)$ او $P(1)$ پیدا کړئ.

دویم مثال: که $P(x) = 16x^3 - 8x^2 + \frac{3}{4}$ وي، نو $P(-\frac{1}{4})$ پیدا کړئ.

حل:

$$\begin{aligned} P\left(-\frac{1}{4}\right) &= 16\left(-\frac{1}{4}\right)^3 - 8\left(-\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{3}{4} = 16\left(-\frac{1}{64}\right) - 8\left(\frac{1}{16}\right) + \frac{3}{4} \\ &= -\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{-1-2+3}{4} = \frac{-3+3}{4} = \frac{0}{4} = 0 \end{aligned}$$

دریم مثال: لکه: څرنګه چې پوهېږئ د دایرې محیط (Circumference) د

$$C = 2\pi r \quad \text{له فورمول څخه لاس ته راځي چې که چېرې } \pi = \frac{22}{7} \quad \text{او د دایرې شعاع}$$

$$r = 3\frac{1}{2} \text{ cm} \quad \text{نو د دې دایرې محیط (C) پیدا کړئ.}$$

حل

$$C = 2\pi r = 2 \cdot \frac{22}{7} \cdot \frac{7}{2} \text{ cm} = 22 \text{ cm}$$

څلورم مثال: که a, b, c او c د مثلث د ضلعو اوږدوالی او P د مثلث د محیط نیمایي وي یعنې

$$p = \frac{a+b+c}{2}, \quad \text{د مثلث مساحت د دې فورمول په واسطه لاس ته راځي.}$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

که په یوه مثلث کې د ضلعو اوږدوالی $a = 9 \text{ cm}$, $b = 12 \text{ cm}$, او $c = 15 \text{ cm}$ وي، ددې مثلث

مساحت پیدا کړئ.

حل

$$p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{9+12+15}{2} = \frac{36}{2} = 18 \text{ cm}$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{18(18-9)(18-12)(18-15)} \\ = \sqrt{18 \cdot 9 \cdot 6 \cdot 3} = \sqrt{2 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3} = \sqrt{2^2 \cdot 3^2 \cdot 9^2} = 2 \cdot 3 \cdot 9 = 54 \text{ cm}^2$$

فعالیت

د استوانې حجم د $V = \pi r^2 h$ له فورمول څخه لاس ته راځي چې V د استوانې حجم، r د قاعدې شعاع او h د استوانې لوړوالی دی. که د یوې استوانې $r = 5 \text{ cm}$ او $h = 2 \text{ cm}$ وي، ددې استوانې حجم پیدا کړئ.

د پولینوم د ضربونو د مجموعې پیدا کول:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \quad \text{که د ضربونو مجموعه یې}$$

$$a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0 \quad \text{ده.}$$

پنځم مثال: د $p(x) = 2x^3 + 5x^2 - 3x + 1$ پولینوم د ضربونو مجموعه په لاس راوړئ.

حل: پیدا کوو: $P(1) = 2 \cdot 1^3 + 5 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 + 1 = 2 + 5 - 3 + 1 = 5$

که پولینوم له څو تورو څخه جوړ شوی وي، د هر توري پر ځای یو (1) وضع کوو، لکه: د $x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$ د ضریبونو د مجموعې د پیدا کولو لپاره د X او Y پر ځای یو (1) وضع کوو:

$$1^4 + 4 \cdot 1^3 \cdot 1 + 6 \cdot 1^2 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 \cdot 1^3 + 1^4 = 1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16$$

شپږم مثال: د $(x-3y)^4$ د ضریبونو مجموعه پیدا کړئ.

حل:

$$(1-3 \cdot 1)^4 = (1-3)^4 = (-2)^4 = 16$$

اووم مثال: د $(7x^2 - 5x - 1)^{600} (2x^3 - 1)^{17} (x+2)^4$ د ضریبونو مجموعه په لاس

راوړئ.

حل:

$$(7 \cdot 1^2 - 5 \cdot 1 - 1)^{600} (2 \cdot 1^3 - 1)^{17} (1+2)^4 = (1)^{600} (1)^{17} (3)^4 = 81$$

اتم مثال: که ددې توپ شعاع 6cm وي، ددې توپ حجم پیدا کړئ.



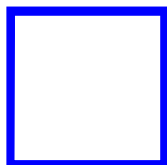
حل:

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{4}{3} \pi (6\text{cm})^3 = \frac{4}{3} \pi (216\text{cm}^3) = 288\pi\text{cm}^3$$

د X د راکرل شوي قیمت لپاره د $P(x)$ په پولینوم کې د X پر ځای راکرل شوی قیمت وضع کوو، د پولینوم قیمت په لاس راځي که په یوه پولینوم کې د توري (متحول) پر ځای یو وضع شي د پولینوم د ضریبونو مجموعه په لاس راځي.

1. که $p(x) = -x^4 - x^3 - x^2 - x - 1$ وي $p(-1)$ او $p(\frac{1}{2})$ پیدا کری.
2. د $p(x) = kx^3 - x^2 + 3x - 1$ په پولینوم کې که $p(2) = 17$ وي د k قیمت پیدا کری.
3. که د $mx^2 - 2x + 1$ د ضربونو مجموعه 18 وي د m قیمت پیدا کری.
4. د $x = -\frac{1}{2}$ لپاره د $p(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ پولینوم قیمت پیدا کری.
5. د $A = x^2 - 4x + 4$ □ $B = -4x^3 + 10x^2$ □ $C = -x + 3x^4 - 6x^3$ او $D = x^2 + 4x - 4$ په پولینومونو کې د $x = 4$ لپاره د کوم پولینوم قیمت له 100 څخه زیات دی؟
- a) C b) D c) A d) B
6. په لاندې پولینومونو کې د $x = 5$ لپاره د کوم پولینوم قیمت تر ټولو زیات دی؟
- a) $x^2 - 2x + 6$
 b) $3x^4 + 6x + 12$
 c) $-x^3 - 40x - 300$
 d) $x^5 - 120x^4 + 10$
7. که $p(x) = x^4 - x^3 - x^2 - x - 1$ وي، $p(-1)$ ، $p(0)$ ، $p(\frac{1}{2})$ او $p(-\frac{1}{2})$ پیدا کری.
8. د $x = 2$ لپاره د $\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{8}x^3 + \frac{3}{8}x^2 + \frac{5}{8}x + \frac{7}{8}$ پولینوم قیمت پیدا کری.

د پولینوم څلورگوني عمليې



$$3W-4$$



$$W+2$$

که د مربع هره ضلع $3w-4$ او د متساوي الاضلاع مثلث هره ضلع $w+2$ وي، يوه الجبري افاده وليکئ چې د دواړو شکلونو محيط ښکاره کړي.

که $B = 9x - 5$ او $A = 8x^2 - 2x + 3$ وي، $A + B$ او $A - B$ پيدا کړئ.

1 د جمعي عمليه: مشابه حدونه (Like terms) يوله بل سره جمع کېږي او هم مشابه حدونه يو له بله تفریق کېږي، دا دواړه عمليې په افقي او عمودي ډول سر ته رسيدلای شي.
لومړی مثال: که $A = -3cd^2 - 2cd + 5$ او $B = 9cd - 7cd^2 - 5$ وي $A + B$ پيدا کړئ.
حل:

$$\begin{aligned} A + B &= (-3cd^2 - 2cd + 5) + (9cd - 7cd^2 - 5) \\ &= -3cd^2 - 2cd + 5 + 9cd - 7cd^2 - 5 = -10cd^2 + 7cd \end{aligned}$$

فعاليت

که $A = ab^2 + 3a$ ، $B = 2ab^2 + 3a - 2$ او $C = 2a + 4$ وي، د دې درې واړو پولینومونو د جمعي حاصل پيدا کړئ. ($A + B + C = ?$)

دويم مثال: جمع يې کړئ که: $B = 3x - 5 - 2x^2$ ، $A = 1 + 2x + 3x^2$ او $C = x^2 - 5x + 4$ هم که
 $B = a^3b^2 - 2a^2b^3 + 4b - 4$ ، $A = a^4b - 2a^3b^2 - 3a^2b^3 - 4c - 2b$ او $C = a^4b + a^3b^2 - 2c$ وي.

حل: لومړی پولینومونه په منظم ډول لیکو او بيا مشابه حدونه سره جمع کوو.

$$\begin{array}{r}
 3x^2 + 2x + 1 \\
 -2x^2 + 3x - 5 \\
 + \quad x^2 - 5x + 4 \\
 \hline
 2x^2
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 a^4b - 2a^3b^2 - 3a^2b^3 - 4c - 2b \\
 \quad \quad \quad a^3b^2 - 2a^2b^3 \quad \quad + 4b - 4 \\
 \hline
 a^4b + a^3b^2 \quad \quad - 2c \\
 \hline
 2a^4b \quad \quad - 5a^2b^3 - 6c + 2b - 4
 \end{array}$$

2- **د تفریق عملیه:** د تفریق په عملیه کې د مفروق جمعې معکوس له مفروق منه سره جمع کوو. یا په بل عبارت د مفروق علامې تغیروو او له مفروق منه سره یې جمع کوو.

لومړی مثال: د B پولینوم د A له پولینوم څخه تفریق کړئ، که $A = -x^3 + x^2 + x - 7$

او $B = -x^3 + x^2 + 4x + 3$ وی او هم که $A = 2b^2 - 2c^2 - 2d^2 - 2e^2$

او $B = b^2 - 3c^2 - 3d^2 - 3e^2 - f^2$ وي.

حل:

$$\begin{array}{r}
 A = -x^3 + x^2 + x - 7 \\
 -B = \mp x^3 \pm x^2 \pm 4x \pm 3 \\
 \hline
 A - B = \quad \quad -3x - 10
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 A = 2b^2 - 2c^2 - 2d^2 - 2e^2 \\
 B = \pm b^2 \mp 3c^2 \mp 3d^2 \mp 3e^2 \mp f^2 \\
 \hline
 A - B = b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2
 \end{array}$$

یا

$$\begin{aligned}
 & -x^3 + x^2 + x - 7 - (-x^3 + x^2 + 4x + 3) \\
 & = -x^3 + x^2 + x - 7 + x^3 - x^2 - 4x - 3 \\
 & = -3x - 10
 \end{aligned}$$

باید په یاد ولرو چې د یو پولینوم د ساده کولو لپاره مشابه حدونه (Like terms) سره جمع یا تفریقوو. د مثال په ډول

- $x^2 + 6x^4 - 8 + 9x^2 + 2x^4 - 6x^2 = 8x^4 + 4x^2 - 8$
- $3x - x - 1 + 3 - 2x = 2$
- $2x^2 - x - x^2 - x - 2 = x^2 - 2x - 2$
- $6xy - xy - x - y + 2x = 5xy + x - y$
- $mn - 4 + mn - 5 = 2mn - 9$

فعالیت

په لاندې پولینومونو کې مشابه حدونه (Like terms) وښیاست.

$$-t + 5t^2 - 6t^2 + 6t - 3$$

$$9rs - 2r^2s^2 + 4r^2s^2 + 3rs - 7$$

$$3p - 4p^2 + 6p + 10p^2$$

$$2fg + f^2g - fg^2 - 2fg + 3f^2g + 5fg^2$$

دویم مثال: د $a^4 + 2a^3b - 3ab^3 + a^2b^2$ له پولینوم سره کوم پولینوم جمع کړو چې د جمعې حاصل یې $2a^4 - 3a^3b - 3ab^3 - b^4 + a^2b^2$ شي؟
حل:

$$2a^4 - 3a^3b + a^2b^2 - 3ab^3 - b^4$$

$$-a^4 \pm 2a^3b \pm a^2b^2 \mp 3ab^3$$

$$a^4 - 5a^3b$$

$$-b^4$$

فعالیت

د $4x + 6 - 2x^2$ او $3x^2 - x^3 - 3$ پولینومونو مجموعه د $x^3 + x^2 - 2x$ او $-2x^3 + 3x - 7$

پولینومونو له مجموعې څخه تفریق کړئ.

دریم مثال: تفریق یې کړئ.

$$202x^4y - 303x^3y^2 - 101x^2y^3 - 404xy^4 - 505y^5$$

$$-101x^4y \mp 303x^3y^2 \pm 101x^2y^3 \mp 404xy^4 \pm 505y^5$$

$$101x^4y \quad -202x^2y^3 \quad -1010y^5$$

$$3ax - 5bx - 8cx - 11dx$$

$$\pm 3ax \mp 5bx \mp 8cx \mp 11dx$$

$$0$$

څلورم مثال: مشابه حدونه (Like terms) سره جمع او ساده یې کړئ.

$$20 - k - k - 10 - 6 - k^2 = -k^2 - 2k + 4$$

$$8 - 10 + x - 7 + x = 2x - 9$$

$$y^2 - 1 + y^2 - 1 = 2y^2 - 2$$

$$ab + a - b - a = ab - b$$

$$4b^3 - 2b^2 - 2 + b - 4b^3 + b^2 + b^2 - b + 2 = 0$$

$$x^2 - 5x - 2x^2 + 5 = -x^2 - 5x + 5$$

باید په یاد ولرو چې که Q, P او R پولینومونه وي، نو

$$P + Q = Q + P \dots\dots\dots \text{(د جمعې د عملې تبدیلی خاصیت)}$$

$$P + (Q + R) = (P + Q) + R \dots\dots \text{(د جمعې د اتحادی خاصیت)}$$

$$P(Q + R) = PQ + PR \dots\dots\dots \text{(د ضرب توزیعی خاصیت پر جمع باندې)}$$

$$(Q + R)P = QP + RP$$

یا

د پولینومونو د جمعې او تفریق په عملیو کې مشابه حدونه سره جمع او یا یو له بله تفریق کېږي د پولینومونو د جمعې په عملیه کې د تبدیلی او اتحادی خاصیتونه صدق کوي او د تفریق په عملیه کې د مفروق جمعې معکوس له مفروق منه سره جمع کېږي او د ضرب توزیعی قانون پر جمع باندې په پولینومونو کې هم صدق کوي.

پوښتنې

1. د دوو پولینومونو مجموعه $x^2 + 2x - y^2$ ده، که یو پولینوم $x^2 - 2xy + 3$ وي، بل پولینوم پیدا کړئ.

2. د $3x^4 + 5x^3 + 2x^2 - x + 1$ پولینوم له $4x^4 + 2x^2 + x^3 - x + 1$ پولینوم څخه تفریق کړئ.

3. د $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ ، پولینوم څخه د $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ پولینوم تفریق کړئ.

4. که $A = a^3 + 2a^2 - 6a + 7$ ، $B = a^3 + 2a + 5$ او $C = 2a^3 - a^2 + 2a - 8$ وي

ددې درې وارو پولینومونو مجموعه پیدا کړئ. ($A + B + C = ?$)

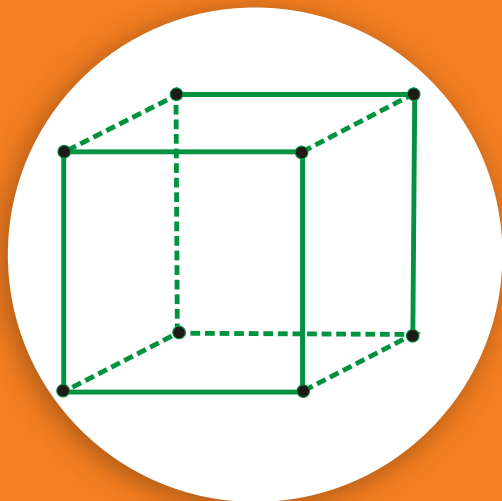
5. د $(ab^2 + 3a) + (2ab^2 + 3a - 2) + (2a + 4)$ افادې د جمعې حاصل مساوي دی، په:

$$a) -3ab^2 + 8a + 2 \quad b) 3ab^2 + 8a \quad c) 3ab^2 + 8a + 2$$

6. جمع یې کړئ.

$$(3a^2b^2 + 2a^2 - 5ab) + (-3ab + a^2 - 2) + (1 + 6ab)$$

7. که دوه الوتکې له یوه هوايي ډگر څخه یو د بل مخالف لورې ته والزي، که 2 ساعتونه وروسته د یوې الوتکې واټن له هوايي ډگر څخه $x^2 + 2x + 400$ میله وي او دبلې الوتکې واټن له هوايي ډگر څخه $3x^2 - 50x + 100$ میله وي، ددې دواړو الوتکو تر منځ واټن (فاصله) پیدا کړئ.



د پولینومونو ضرب

د هغه مکعب حجم به څومره وي چې هره

ضلع یې $(x+1)$ سانتی متره وي؟

د مونوم ضرب په مونوم کې: که د $3r^2s^3$ مونوم د $5r^4s^5$ په مونوم کې ضرب کړو، د ضرب حاصل یې $(3r^2s^3)(5r^4s^5) = 15r^6s^8$ کېږي.

فعالیت

د $(7x^2y)(-3x^4yz^8)$ او $(-\frac{1}{3}x)(-x)$ او $(-30a^2b)(-5ab)$ سره ضرب کړئ.

لومړی مثال: د لاندې مونومونو د ضرب حاصل پیدا کړئ.

$$\frac{1}{4}(4)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{16}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{16}{16} = 1$$

$$(-2a)^3(-2a)^2 = -32a^5$$

$$x(x^m) = x^{m+1} = x^{1+m}$$

$$\left(\frac{5}{2}mn\right)\left(\frac{5}{2}mn\right)\left(\frac{5}{2}mn\right) = \frac{125}{8}m^3n^3$$

$$(-a^b)(-a) = a^{b+1} = a^{1+b}$$

$$(0.01p)(0.01p) = 0.0001p^2$$

$$(0.1x^2)(0.1x^2) = 0.01x^4$$

$$(-5y^a)(5y) = -25y^{a+1}$$

$$(-4s^2t^2)(2st^3) = -8s^3t^5$$

$$-a^{2x}(-2a) = 2a^{2x+1}$$

$$\left(-\frac{1}{2}a\right)\left(-\frac{1}{2}a\right) = \frac{1}{4}a^2$$

$$(-0.1)(-0.1)(-0.1) = -0.001$$

$$(-mn)(-mn^2) = m^2n^3$$

د مونوم ضرب په پولینوم کې:

دویم مثال: د ضرب لاندې حاصل لاس ته راوړئ.

$$x^3(x - x^2y^4) = x^4 - x^5y^4$$

$$(2m^2n^3)(1 - 4mn^4) = 2m^2n^3 - 8m^3n^7$$

$$-3b(5b^4 - 8b + 12) = -15b^5 + 24b^2 - 36b$$

$$-4s^2t^2(5s^2t + 6st - 2s^2t^2) = -20s^4t^3 - 24s^3t^3 + 8s^4t^4$$

فعالیت

د هغه مکعب حجم پیدا کړئ چې اوږدوالی یې، $2x$ ، سوری یې x او لوړوالی یې $x + 2$ وي.

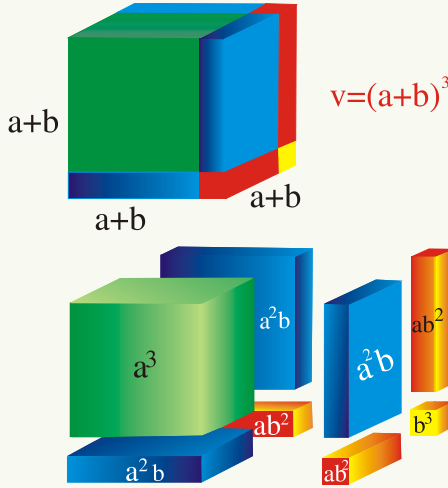
د پولینوم ضرب په پولینوم کې:

دریم مثال: a : د $(x-4)(x-5)$ د ضرب حاصل لاس ته راوړئ.

حل: $(x-4)(x-5) = x^2 - 5x - 4x + 20 = x^2 - 9x + 20$

	x	-4
x	x^2	$-4x$
-5	$-5x$	20

b) $(a+b)(a+b)(a+b) = (a+b)(a^2 + 2ab + b^2) = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$



c: که $P(x) = x^3 + 2x$ او $Q(x) = 2x^2 - x + 1$ وي. $P(x) \cdot Q(x)$ پیدا کړئ.

$$P(x) \cdot Q(x) = (x^3 + 2x) \cdot (2x^2 - x + 1)$$

$$= x^3 \cdot 2x^2 + x^3(-x) + x^3 \cdot 1 + 2x \cdot 2x^2 + 2x(-x) + 2x \cdot 1$$

$$= 2x^5 - x^4 + x^3 + 4x^3 - 2x^2 + 2x = 2x^5 - x^4 + 5x^3 - 2x^2 + 2x$$

څلورم مثال: لاندې افادې د $a^3 + b^3$ او $a^3 - b^3$ مطابقتونو په مرسته ضرب کړئ.

حل

$$\text{a) } (x^m + y^n)(x^{2m} - x^m y^n + y^{2n}) = (x^m + y^n)[(x^m)^2 - (x^m)(y^n) + (y^n)^2] \\ = (x^m)^3 + (y^n)^3 = x^{3m} + y^{3n}$$

$$\text{b) } (\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})(x + \sqrt{xy} + y)(x - \sqrt{xy} + y) \\ = (\sqrt{x} - \sqrt{y})(x + \sqrt{xy} + y)(\sqrt{x} + \sqrt{y})(x - \sqrt{xy} + y) \\ = [(\sqrt{x})^3 - (\sqrt{y})^3][(\sqrt{x})^3 + (\sqrt{y})^3] = [(\sqrt{x})^3]^2 - [(\sqrt{y})^3]^2 \\ = (x^{\frac{3}{2}})^2 - (y^{\frac{3}{2}})^2 = x^3 - y^3$$

په یاد ولرئ چې که P, Q, R پولینومونه وي

$$P \cdot Q = Q \cdot P \quad (\text{د ضرب د تبدیلی خاصیت})$$

$$P \cdot (Q \cdot R) = (P \cdot Q) \cdot R \quad (\text{د ضرب اتحادی خاصیت})$$

فعالیت

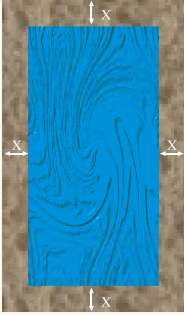
په کې وڅېړئ. که $P(x) = 2x^2 - x - 1$ او $Q(x) = 4x - 8$ وي، د ضرب د تبدیلی او اتحادی خاصیتونه

په لاندې جدول کې د هندسی شکلونو مساحت (Area) پیدا کړئ.

هندسي شکلونه	راکړ شوی اوږدوالی	مساحت
مستطیل	اوږدوالی یې $n + 5$ اوسوری یې $n - 4$	$n^2 + n - 20$
مستطیل	اوږدوالی یې $3y + 3$ اوسوری یې $2y - 1$	$6y^2 + 3y - 3$
مثلث	قاعدہ یې $2b - 5$ او لوړوالی یې $b^2 + 2$	$b^3 - \frac{5}{2}b^2 + 2b - 5$
مربع	هره ضلع یې $m + 13$ ده	$m^2 + 26m + 169$
مربع	هره ضلع یې $2g - 4$ ده	$4g^2 - 16g + 16$
دایره	شعاع یې $3c + 2$ ده	$(9c^2 + 12c + 4)\pi$

فعالیت

د $(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac)$ د ضرب حاصل په لاس راوړئ.



پوښتنه: د یوه حوض څلورو خواوو ته له سمتهو څخه پخه شوې لاره ده، که د دې لارې سور x متره وي او د حوض اوږدوالی او سور په ترتیب سره 50m او 25m وي د لارې مساحت معلوم کړئ.

حل: د لارې او حوض مجموعي مساحت

$$A = (25 + 2x)(50 + 2x) = 1250 + 150x + 4x^2$$

د حوض مساحت: $(25\text{m})(50\text{m}) = 1250\text{m}^2$

د لارې مساحت: $1250 + 150x + 4x^2 - 1250 = 4x^2 + 150x$

پولینومونو په ضرب کې کېدای شي، مونوم په مونوم کې، مونوم په پولینوم کې او یا پولینوم په پولینوم کې ضرب کړو او د ضرب په عملیه کې د تبدیلی، اتحادي او د ضرب توزیعي خاصیت په جمع باندې هم صدق کوي.

پوښتنې

1. ضرب یې کړئ: $(4x^2y^2z)(-5xy^3z^2)$ ، $-2xy(2x^2 + 2y^2 - 2)$

2. یو بکس چې لوړوالی یې x انچه، اوږدوالی یې $(x+1)$ او سور یې $2x-4$ انچه دی، که

لوړوالی یې 3 انچه وي، د دې بکس حجم مساوي دی، په:

a) 40in^3 b) 24in^3 c) 48in^3 d) 20in^3

3. د $(\frac{a^p}{a^{-q}})^{p-q} (\frac{a^q}{a^{-r}})^{q-r} (\frac{a^r}{a^{-p}})^{r-p}$ د ضرب حاصل مساوي دی، په:

a) 1 b) -1 c) صفر d) درې واړه سم نه دي



د پولینوم وېش پر مونوم

آیا د

$$\frac{4m^2}{n}, \frac{1}{\frac{a}{\frac{1}{b}}}, \frac{3mn^2}{-mn}, \frac{-x^2}{x}$$

$$\text{د وېش حاصل په لاس } \frac{14x^5}{2x^2} \text{ او د } \frac{-n^a}{n^b}$$

راوړلای شئ؟ (هیڅ یو مخرچ له صفر سره مساوي نه دی).

د مونوم وېش پر مونوم (Dividing monomial by monomial):

لومړی مثال: وېې وېشئ:

$$\frac{36a^5b^5c^7}{12a^4bc^3} = 3ab^4c^4, \quad \frac{6x^9y^3}{4x^6y^2} = \frac{3}{2}x^3y, \quad \frac{-a^2}{-a^x} = a^{2-x}, \quad \frac{-n^a}{n^b} = -n^{a-b}$$

د پولینوم وېش پر مونوم:

$$(x^4 + 5x^3 - 7x^2) \div x^2$$

$$\frac{x^4 + 5x^3 - 7x^2}{x^2} = \frac{x^4}{x^2} + \frac{5x^3}{x^2} - \frac{7x^2}{x^2} = x^2 + 5x - 7 \quad (x^2 \neq 0)$$

دویم مثال: وېې وېشئ.

$$\frac{x^8y^2 - x^4y^6 - 4x^3y^9}{x^3y} = x^5y - xy^5 - 4y^8 \quad (x^3y \neq 0)$$

$$\frac{r^6s^2 - r^5s - 4r^3s^4}{r^2s} = r^4s - r^3 - 4rs^3 \quad (r^2s \neq 0)$$

فعالیت

د وېش حاصل په لاس راوړئ. (مخرجونه خلاف د صفر دي)

$$a: \frac{27x^6y^{13} - 18x^{12}y^8}{9x^3y^8}$$

$$b: \frac{x^2}{y^2 - 1} \div \frac{x^2}{y - 1}$$

$$c: \frac{10b^3c^7}{6b^2c^7}$$

د پولینوم وېش پر پولینوم: څه وخت چې یو پولینوم پر بل پولینوم وېشو، مقسوم

(Dividend) او مقسوم علیه (Divisor) دواړه باید په منظم ډول ترتیب شي.

دریم مثال: د $(13x + 2x^4 + 12 + 3x^3 - 4x^2) \div (3 + x^2 - 2x)$ د وېش حاصل په

لاس راوړئ.

$$\begin{array}{r|l}
 2x^4 + 3x^3 - 4x^2 + 13x + 12 & x^2 - 2x + 3 \\
 \pm 2x^4 \mp 4x^3 \pm 6x^2 & \hline
 7x^3 - 10x^2 + 13x & \\
 \pm 7x^3 \mp 14x^2 \pm 21x & \hline
 4x^2 - 8x + 12 & \\
 \pm 4x^2 \mp 8x \pm 12 & \hline
 0 &
 \end{array}$$

فعالیت

د $(a^5 + b^5) \div (a + b)$ د وېش حاصل په لاس راوړئ.

څلورم مثال: د وېش حاصل یې پیدا کړئ $(x^3 - 19x - 30) \div (x + 3)$.

حل:

$$\begin{array}{r|l}
 x^3 & -19x - 30 & x + 3 \\
 \pm x^3 \pm 3x^2 & & \hline
 -3x^2 - 19x & & \\
 \mp 3x^2 \mp 9x & & \hline
 -10x - 30 & & \\
 \mp 10x \mp 30 & & \hline
 0 & &
 \end{array}$$

پنځم مثال: د $4x^3 - 10x^2 + 12x + 6$ له پولینوم سره کوم عدد جمع کړو چې په $(2x + 1)$

پوره ووېشل شي؟

حل

$$\begin{array}{r}
 4x^3 - 10x^2 + 12x + 6 \quad 2x + 1 \\
 \underline{4x^3 \pm 2x^2} \\
 -12x^2 + 12x \\
 \underline{\mp 12x^2 \mp 6x} \\
 18x + 6 \\
 \underline{-18x \pm 9} \\
 -3
 \end{array}$$

په نتیجه کې که له پورتنی پولینوم سره 3 جمع کړو، نو په $(2x+1)$ پوره د وېشلو وړ دی. باید پام مو وي، د وېش عملیې ته به تر هغو پورې دوام ورکوو چې پاتې (باقی مانده) صفر او یا د باقی مانده درجه د مقسوم علیه له درجې څخه د یو په اندازه کمه شي.

فعالیت

د دوو پولینومونو د ضرب حاصل $6y^3 - 11y^2 + 6y - 1$ دی. که یو پولینوم $3y^2 - 4y + 1$ وي، بل پولینوم پیدا کړئ.

سپرم مثال: د x په کوم قیمت $12x^4 + 3x^3 - 13x^2 + x + 5$ پولینوم پر $3x^2 - 1$ باندي پوره وېشل کېږي؟

حل

$$\begin{array}{r}
 12x^4 + 3x^3 - 13x^2 + x + 5 \quad 3x^2 - 1 \\
 \underline{12x^4 \mp 4x^2} \\
 3x^3 - 9x^2 + x \\
 \underline{-3x^3 \mp x} \\
 -9x^2 + 2x + 5 \\
 \underline{\mp 9x^2 \pm 3} \\
 2x + 2
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{l}
 4x^2 + x - 3 \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 2x + 2 = 0 \\
 2x = -2 \\
 x = -1
 \end{array}$$

نو د $x = -1$ لپاره پورتنی پولینوم پر $3x^2 - 1$ پوره وېشل کېږي.

د پولینومونو په وېش کې کېدای شي چې مونوم پر مونوم، پولینوم پر مونوم او یا پولینوم پر پولینوم وېشو. لومړی باید مقسوم او مقسوم علیه په نزولي ډول ترتیب شي او د وېش عمليې ته تر هغه پورې دوام ورکوو، تر څو د پاتې (باقي) درجه د مقسوم علیه له درجې څخه د یو په اندازه کمه شي.

پوښتنې

1. د P په کوم قیمت $3x^3 - 7x^2 - 9x + p$ پولینوم پر $x - 13$ پوره وېشل کېږي؟

2. د وېش حاصل یې پیدا کړئ.

$$(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc) \div (a + b + c)$$

$$(x^2 + x - 6) \div (x - 2)$$

$$(x^5 - y^5) \div (x - y)$$

$$\frac{j^5k^2 - 3j^8k^4}{2j^4k}$$

$$\frac{12x^5 + 9x^4 + 15x^2}{3x^3}$$

$$\frac{27a^6b^{13} - 18a^{12}b^8}{9a^3b^8}$$

$$(x^3 - a^3) \div (x^2 - ax + a^2)$$

$$(9x^4 + 2x^2 + 7x + 2) \div (3x + 2)$$

$$(8x^3 + 27y^3) \div (2x + 3y)$$

$$(7x - 12 + 2x^4 - 8x^3 - x^2) \div (2x^2 + 5)$$

د باقي مانده قضيه (Remainder Theorem)

$$\begin{array}{r}
 2x + 1 \\
 x-3 \overline{) 2x^2 - 5x - 1} \\
 \underline{-(2x^2 - 6x)} \\
 0 + 1x - 1 \\
 \underline{-(x - 3)} \\
 0 + 2 \text{ پاتې}
 \end{array}$$

آيا د وېش د عملېې له سرته رسولو پرته ويلای شئ چې که د $x^3 - 6x^2 - x - 6$ پولينوم په $x - 4$ ووېشو پاتې(باقي) به څو وي؟

که د $P(x)$ پولينوم په $x - a$ ووېشل شي باقي (پاتې) د $P(a)$ سره مساوي ده. يا $R = P(a)$
نومړی مثال: که د $P(x) = 2x^2 + 3x + 4$ پولينوم پر $(x + 3)$ ووېشل شي، نو باقي (Remainder) له $P(-3)$ سره مساوي ده.

$$P(-3) = 2(-3)^2 + 3(-3) + 4 = 13$$

حل:

اوس يې ازمايو او د وېش عملیه سرته رسوو.

$$\begin{array}{r|l}
 2x^2 + 3x + 4 & x + 3 \\
 \underline{2x^2 + 6x} & 2x - 3 \\
 -3x + 4 & \\
 \underline{+3x + 9} & \\
 13 &
 \end{array}$$

قضيه: که د $P(x)$ پولينوم په $(x - a)$ ووېشو، نو باقي يا پاتې $R = P(a)$ ده.

ثبوت: که د $P(x)$ پولينوم په $(x - a)$ ، ووېشو او خارج قسمت $Q(x)$ او پاتې R وي، نو لرو چې:

$$P(x) = Q(x)(x - a) + R \quad x - a = 0$$

$$P(a) = Q(a)(a - a) + R \quad x = a$$

$$P(a) = R$$

دويم مثال: که د $2x^3 - x^2 - 7$ پولينوم پر $(x - 2)$ ووېشل شي، پاتې به څو وي؟

حل:

$$P(2) = 2(2)^3 - (2)^2 - 7 = 16 - 4 - 7 = 5$$

$$R = 5$$

فعالیت

د پورتنی قضیې په مرسته یې پاتې (باقي مانده) پیدا کړئ.

• که $x^3 - x^2 - 226x + 1410$ پر $(x + 17)$ ووبشل شي.

• که $x^3 - 2x^2 + 3x + 5$ پر $(x - 4)$ ووبشل شي.

• که $x^3 + 18x^2 + 164x + 199$ پر $(x + 8)$ ووبشل شي.

دریم مثال: که د $5x^2 + x - 9$ پولینوم پر $(x + \frac{1}{2})$ ووبشل شي، د وېش د عملیې له سرته

رسولو څخه پرته وویاست چې څو پاتې کېږي؟

حل

$$P(-\frac{1}{2}) = 5(-\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{2} - 9$$

$$x + \frac{1}{2} = 0$$

$$= 5(\frac{1}{4}) - \frac{1}{2} - 9 = \frac{5}{4} - \frac{1}{2} - 9 = \frac{5 - 2 - 36}{4} = -\frac{33}{4}$$

$$x = -\frac{1}{2}$$

څلورم مثال: که د $P(y) = 10y^3 + 7y^2 - y - 11$ پولینوم پر $(2y + 1)$ ووبشو، د وېش

د عملیې له سرته رسولو پرته یې پاتې (باقي) پیدا کړئ.

حل

$$P(-\frac{1}{2}) = 10(-\frac{1}{2})^3 + 7(-\frac{1}{2})^2 - (-\frac{1}{2}) - 11$$

$$2y + 1 = 0 \Rightarrow 2y = -1$$

$$P(-\frac{1}{2}) = 10(-\frac{1}{8}) + 7(\frac{1}{4}) + \frac{1}{2} - 11$$

$$\Rightarrow y = -\frac{1}{2}$$

$$= -\frac{5}{4} + \frac{7}{4} + \frac{1}{2} - 11 = \frac{-5 + 7 + 2 - 44}{4} = \frac{-40}{4} = -10$$

$$R = -10$$

فعالیت

د 4 مثال په پوښتنه کې د وېش عملیه سرته ورسوئ او باقی یې په لاس راوړئ.

پنځم مثال: که د $4x^4 + 12x^3 - 13x^2 - 33x + 18$ پولینوم پر $(x + 4)$ ووېشل شي،

باقي یې پیدا کړئ.

حل:

$$\begin{aligned} P(-4) &= 4(-4)^4 + 12(-4)^3 - 13(-4)^2 - 33(-4) + 18 \\ &= 1024 - 768 - 208 + 132 + 18 = 1174 - 976 = 198 \end{aligned}$$

اوس د وېش عملیه سرته رسوو.

$$\begin{array}{r|l} 4x^4 + 12x^3 - 13x^2 - 33x + 18 & x + 4 \\ -4x^4 \pm 16x^3 & \hline \hline -4x^3 - 13x^2 & \\ \mp 4x^3 \mp 16x^2 & \\ \hline 3x^2 - 33x & \\ \pm 3x^2 \pm 12x & \\ \hline -45x + 18 & \\ \mp 45x \mp 180 & \\ \hline 198 & \end{array}$$

که د $P(x)$ پولینوم پر $P(x-a)$ ووېشل شي، د وېش د عملیې له سرته رسولو پرته یې د باقی مانده

قضیې (Remainder Theorem) په مرسته باقی پیدا کولای شو چې باقی مانده (R) له (a)

P سره مساوي ده.

پوښتنې

1. د باقي مانده قضیې (Remainder theorem) په مرسته یې باقي (پاتې) پیدا کړئ.

$$(5x^3 - x^2 + 4x + 1) \div (x - 3) \quad , \quad (6p^3 + 2p^2 - p + 20) \div (p - \frac{1}{2})$$

$$(6x^2 + 15) \div (4x + 9) \quad , \quad (4y^2 - y - 6) \div (y - 1.6)$$

2. د باقي مانده قضیې په مرسته وویاست چې د k په کوم قیمت د $5x^3 - k^2x^2 + 3kx - 6$

پولینوم پر $(x + 2)$ وپېشل شي، ترڅو -44 باقي شي؟

3. د k په کوم قیمت که د $2k^2y^4 - ky^2 + 1$ پولینوم، پر $(y - \frac{1}{2})$ وپېشل شي، ترڅو 2 باقي شي؟

4. که چېرې $m^2x^4 - 10x^2 + 2$ پولینوم پر $(x - 1)$ وپېشو او باقي 17 وي، د m قیمت به څو وي؟

د فکتور قضیه (The Factor Theorem)

$$(x^5 + 1) \div (x + 1)$$

$$P(-1) = [(-1)^5 + 1] \\ = -1 + 1 = 0$$

آیا $P(x) = x^3 - 4x^2 + x + 2$ د $(x - 1)$ پو لاینوم یو فکتور دی؟

که د $P(x)$ پو لاینوم پر $(x - a)$ ووېشل شي او $P(a) = 0$ شي، نو $x - a$ ددې پو لاینوم یو فکتور دی.

ثبوت: د باقی مانده قضیې په اساس $R = P(a)$ دی، نو که د $P(x)$ پو لاینوم پر $(x - a)$ ووېشل شي او د وېش حاصل (خارج قسمت) یې $Q(x)$ وي، نو لرو چې: $P(x) = Q(x)(x - a) + R$ که $R = 0$ وي، نو: $P(x) = Q(x)(x - a)$

لیدل کېږي چې $(x - a)$ د $P(x)$ پو لاینوم یو فکتور دی. او یا که $(x - a)$ د $P(x)$ د پو لاینوم یو فکتور وي، نو $P(a) = 0$ دی.

لومړی مثال: وښیاست چې $(x - 2)$ د $P(x) = x^3 + 3x^2 + 4x - 28$ د پو لاینوم یو فکتور دی.

حل

$$P(x) = x^3 + 3x^2 + 4x - 28$$

$$x - 2 = 0$$

$$P(2) = 2^3 + 3(2)^2 + 4 \cdot 2 - 28 = 8 + 3(4) + 8 - 28 = 0$$

$$x = 2$$

څرنگه چې R یا $P(2) = 0$ دی، نو $(x - 2)$ د $P(x)$ د پو لاینوم یو فکتور دی.

فعالیت

د وېش د عملیې له سرته رسولو پرته، د فکتور د قضیې په مرسته وښیاست چې $x - 1$ د $P(x) = 2x^3 - 13x^2 + 26x - 15$ پو لاینوم یو فکتور دی.

دویم مثال: د فکتور د قضیې په مرسته وښیاست چې $(x - 2)$ د $P(x) = x^5 - 32$ پو لاینوم یو فکتور دی.

حل

$$P(x) = x^5 - 32$$

$$P(2) = 2^5 - 32 = 32 - 32 = 0$$

څرنگه چې $R = P(2) = 0$ ده، نو $(x-2)$ د $x^5 - 32$ پولینوم یو فکتور دی.

دریم مثال: وښیاست چې $(x+1)$ د $P(x) = 2x^3 + 5x^2 + 7x + 4$ پولینوم یو فکتور دی.

$$\text{حل: } P(-1) = 2(-1)^3 + 5(-1)^2 + 7(-1) + 4 = -2 + 5 - 7 + 4 = 0$$

څرنگه چې R یا $P(-1)$ له صفر سره مساوي دی، نو $(x-1)$ د دې پولینوم یو فکتور دی.

څلورم مثال: د k په کوم قیمت، $(x-1)$ د $P(x) = 2x^4 - 3x^3 - x - 2k$ پولینوم یو فکتور دی؟

حل

$$P(1) = 2(1)^4 - 3(1)^3 - 1 - 2k = 2 - 3 - 1 - 2k = -2 - 2k$$

$$-2 - 2k = 0$$

$$-2k = 2$$

$$k = -1$$

د $k = -1$ لپاره باقي مانده صفر کېږي، نو $x-1$ د دې پولینوم یو فکتور دی.

فعالیت

د فکتور د قضیې په مرسته وښیاست چې آیا د کینې خوا دوه حدې (باینومونه) د اړوندو پولینومونو فکتورونه دي او که نه؟

$$(x-6) : (x^6 - 36x^3 + 1296)$$

$$(y+5) : (y^3 + 125)$$

$$\left(x + \frac{1}{2}\right) : (20x^3 + 7x + 6)$$

$$\left(x - \frac{1}{2}\right) : \left(x^3 - \frac{1}{8}\right)$$

$$(x-0.1) : (10x^3 - 11x^2 + 1)$$

$$(x+2) : (x^5 + 32)$$

د فکتور د قضیې معکوس (Converse of Factor Theorem):

که $(x-a)$ د $P(x)$ پولینوم یو فکتور وي، نو $P(a) = 0$ دی او د a عدد $P(x) = 0$ پولینومي معادلې یو جذر (Root) دی.

لومړی مثال: که $(x-2)$ د $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ پولینوم یو فکتور وي، نو

و بنیاست چې $P(2) = 0$ دی او 2 د $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$ معادلې یو جذر دی.
حل: که 2 د $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$ معادلې یو جذر وي، نو $(x - 2)$ ددې پولینوم یو فکتور دی $P(2) = 0$.

$$P(2) = 2^3 - 6(2)^2 + 11(2) - 6 = 8 - 24 + 22 - 6 = 0$$

دویم مثال: که -2 د $x^3 + 4x^2 + kx + 8 = 0$ معادلې یو جذر وي، د k قیمت پیدا کړئ.
حل:

$$(-2)^3 + 4(-2)^2 + k(-2) + 8 = 0$$

$$-8 + 16 + k(-2) + 8 = 0$$

$$-2k = -8 + 8 - 16$$

$$k = 8$$

دریم مثال: و بنیاست چې 3 د $x^3 - 6x^2 + 5x + 12 = 0$ پولینومي معادلې یو جذر دی.
حل:

$$(3)^3 - 6(3)^2 + 5(3) + 12 = 0$$

$$27 - 54 + 15 + 12 = 0$$

$$54 - 54 = 0$$

$$0 = 0$$

نو لیدل کېږي چې 3 ددې پولینومي معادلې یو جذر دی.

فعالیت

و بنیاست چې 2 د $x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = 0$ معادلې یو جذر دی.

څلورم مثال: د k د کوم قیمت لپاره 3 د $2x^4 - 6x^3 - 7x^2 + kx - 15 = 0$ معادلې یو جذر دی؟

حل:

$$2(3)^4 - 6(3)^3 - 7(3)^2 + 3k - 15 = 2(81) - 6(27) - 7(9) + 3k - 15 = 0$$

$$162 - 162 - 63 + 3k - 15 = 0$$

$$3k = 15 + 63 + 162 - 162 = 78$$

$$3k = 78$$

$$k = 26$$

که $(x-a)$ د $P(x)$ پولینوم یو فکتور وي، نو $P(a) = 0$ دی او که د $P(x)$ په پولینوم کې $P(a) = 0$ شی نو $(x-a)$ د $P(x)$ پولینوم یو فکتور دی.

پوښتنې

1- د k د کوم قیمت لپاره $(x-2)$ د $P(x) = 2x^4 - x^3 + kx^2 + kx - 12$ پولینوم یو فکتور دی؟

2- آیا $(x+3)$ د $P(x) = x^5 - x^3 + 27x^2 - 27$ پولینوم یو فکتور دی؟

3- د فکتور د قضیې په مرسته وښیاست چې $(x+7)$ د $P(x) = x^3 + 8x^2 + 8x + 7$ د پولینوم یو فکتور دی، که نه؟

4- د ویش د عملیې د سرته رسولو پرته وښیاست چې آیا $(y-7)$ د

$P(y) = y^4 + 2y^3 - 6y^2 - 14y - 7$ پولینوم یو فکتور دی که نه؟

5- وښیاست چې آیا $(m + \frac{1}{2})$ د $P(x) = 2m^2 + 4m - 2$ پولینوم یو فکتور دی که نه؟

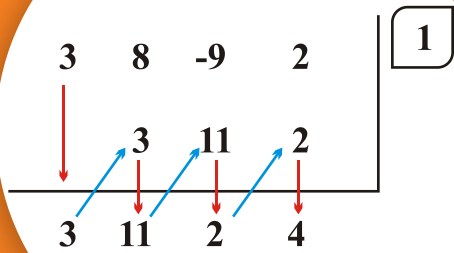
6- د $x^3 + x^2 - 10x + 8$ پولینوم د فکتور د قضیې په مرسته تجزیه کړئ.

7- که $(x-1)$ او $(x+1)$ د $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + 2$ د پولینوم فکتورونه وي، د a او b قیمتونه پیدا کړئ.

8- د k د کوم قیمت لپاره $(x-5)$ د $Q(x) = x^3 - 5x^2 - 16x + k$ پولینوم یو فکتور دی؟

9- د k د کوم قیمت لپاره (-1) ، د $x^3 - 9x^2 + 14x + k = 0$ پولینومي معادلې یو جذر دی؟

ترکیبی وېش (Synthetic Division)



آیا د وېش عملیې له سرته رسولو پرته، د وېش حاصل او باقی پیدا کولای شئ. که د $P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 5x - 5$ پولینوم پر $(x - 2)$ ووېشل شي؟

د $P(x)$ پولینوم پر $(x - a)$ ، د وېشلو لپاره ترکیبی وېش (Horner's Method) یوه لنډه طریقه ده چې په عمومي ډول د دې هدفونو لپاره ترې کار اخیستل کېږي. $x - 1$ د مختلفو قیمتونو لپاره د $P(x)$ پولینوم د قیمت پیدا کول. $x - 2$ د $P(x) = 0$ معادلې د ناطق جذر د پیدا کولو لپاره. $x - 3$ د الجبري افادو د تجزیې لپاره.

لومړی مثال: که د $P(x) = 4x^4 + 12x^3 - 13x^2 - 33x + 18$ پولینوم پر $(x + 4)$ باندي ووېشو د وېش د عملیې له سرته رسولو پرته د ترکیبی وېش (تقسیم) په مرسته یې د وېش حاصل (Quotient) او باقی مانده (Remainder) پیدا کړئ.

حل:

لومړی کرښه	4	12	-13	-33	18	-4	$x + 4 = 0$
دویمه کرښه		-16	16	-12	180		$x = -4$
دریمه کرښه	4	-4	3	-45	198		

چې د وېش حاصل (خارج قسمت) یې $4x^3 - 4x^2 + 3x - 45$ او پاتي یا باقی مانده یې 198 ده، په دې معنا چې: $P(x) = (x + 4)(4x^3 - 4x^2 + 3x - 45) + 198$ پورتنی عملیه په لاندې پړاوونو کې ښودلای شو. د لومړی کرښې عددونه د مقسوم ضریبونه دي چې نظر د x توان ته په نزولي ډول ترتیب شوي دي. 1. د 4 عدد له لومړی کرښې څخه دریمې کرښې ته رابنکته شوی دی.

2. 4 په (-4) کې ضرب شوی دی چې (-16) کېږي او (-16) د 12 د عدد لاندې په دویمه کرښه کې لیکل شوی دی.
3. د 12 او (-16) د جمعې حاصل چې (-4) کېږي، په دریمه کرښه کې لیکو.
4. د (-4) عدد په (-4) کې ضربوو چې 16 کېږي او د (-13) لاندې یې په دویمه کرښه کې لیکو.
5. د 16 او (-13) د جمعې حاصل چې 3 کېږي، په دریمه کرښه کې لیکل شوی دی.
6. د 3 او (-4) د ضرب حاصل چې (-12) کېږي، د (-33) لاندې په دویمه کرښه کې لیکل شوی دی.
7. د (-33) او (-12) د جمعې حاصل چې (-45) کېږي، په دریمه کرښه کې لیکو.
8. د (-45) او (-4) د ضرب حاصل چې 180 کېږي، تر 18 لاندې په دویمه کرښه لیکل شوی دی.
9. د 180 او 18 د جمعې حاصل 198 په دریمه کرښه کې دی، 198 باقی مانده دی او $4x^3 - 4x^2 + 3x - 45$ د وېش حاصل دی.

$$Q(x) = 4x^3 - 4x^2 + 3x - 45 \text{ او } R = 198$$

$$P(x) = (4x^3 - 4x^2 + 3x - 45)(x + 4) + 198$$

پاتې + (د وېش حاصل) X (مقسوم علیه) = مقسوم

فعالیت

د وېش عمليې د سرته رسولو په مرسته د پورتنۍ پوښتنې د وېش حاصل او باقی مانده پیدا کړئ.

دویم مثال: د ترکیبي وېش او د وېش د عمليې د سرته رسولو په مرسته یې د وېش حاصل او باقی مانده پیدا کړئ.

$$(4x^4 - 5x^2 + 2x - 3) \div (x - 2)$$

په یاد ولرئ کوم حدونه چې موجود نه وي، د هغوی د ضریبونو پر ځای صفر لیکو یا په بل عبارت پولینوم د مکمل پولینوم په شکل په نزولي ډول ترتیبوو.

4	0	-5	2	-3	2
	8	16	22	48	
4	8	11	24	45	

اوس د وپش عملیه سرته رسوو:

$$\begin{array}{r}
 4x^4 \quad -5x^2 + 2x - 3 \\
 -4x^4 \mp 8x^3 \\
 \hline
 8x^3 - 5x^2 \\
 -8x^3 \mp 16x^2 \\
 \hline
 11x^2 + 2x \\
 -11x^2 \mp 22x \\
 \hline
 24x - 3 \\
 -24x \mp 48 \\
 \hline
 45
 \end{array}
 \quad \left| \begin{array}{l}
 x - 2 \\
 \hline
 4x^3 + 8x^2 + 11x + 24
 \end{array} \right.$$

د وپش حاصل $4x^3 + 8x^2 + 11x + 24$ او باقي (45) ده.

دریم مثال: $(x^5 - x^3 + 27x^2 - 28) \div (x + 3)$ د ترکیبې وپش په مرسته یې د وپش حاصل

او پاتې (باقي) پیدا کړئ.

$$\begin{array}{r}
 x^5 - x^3 + 27x^2 - 28 = x^5 - 0 \cdot x^4 - x^3 + 27x^2 + 0 \cdot x - 28 \\
 \begin{array}{r}
 1 \quad 0 \quad -1 \quad 27 \quad 0 \quad -28 \\
 -3 \quad 9 \quad -24 \quad -9 \quad 27 \\
 \hline
 1 \quad -3 \quad 8 \quad 3 \quad -9 \quad -1
 \end{array}
 \quad \left| \begin{array}{l}
 -3 \\
 \hline
 \end{array} \right.
 \end{array}$$

$$x + 3 = 0$$

$$x = -3$$

د وپش حاصل (خارج قسمت) یې $x^4 - 3x^3 + 8x^2 + 3x - 9$ او پاتې (باقي مانده) عبارت له

(-1) څخه دی.

څلورم مثال: د $(2t^3 - 7t^2 - 2t + 14) \div (2t - 3)$ د وپش حاصل (خارج قسمت) او پاتې

(باقي) پیدا کړئ.

حل:

$$\begin{array}{r}
 2 \quad -7 \quad -2 \quad 14 \\
 3 \quad -6 \quad -12 \\
 \hline
 2 \quad -4 \quad -8 \quad 2
 \end{array}
 \quad \left| \begin{array}{l}
 \frac{3}{2} \\
 \hline
 \end{array} \right.$$

$$\frac{2t-3}{2} = t - \frac{3}{2}$$

$$t - \frac{3}{2} = 0$$

$$t = \frac{3}{2}$$

نو $2t^2 - 4t - 8$ د وېش حاصل نه دی، بلکې د وېش حاصل $(t^2 - 2t - 4)$ دی. (مقسوم او مقسوم علیه دواړه په 2 وېشل شوي دي).

پنځم مثال: د ترکیبي وېش (Synthetic division) په مرسته د وېش حاصل (quotient)

او پاتې یې (remainder) پیدا کړئ.

$$(4V^3 - 2V^2 + 5) \div (V - 5)$$

4	-2	0	5		
	20	90	450		5
4	18	90	455		

نو $R = 455$ او $Q(x) = 4v^2 + 18v + 90$ ده.

فعالیت

د ترکیبي وېش په مرسته یې د وېش حاصل او پاتې پیدا کړئ.

$$(x^5 + 6x^3 - 5x^4 + 5x - 15) \div (x - 3)$$

که د $P(x)$ پولینوم پر $(x-a)$ باندې ووېشو، نو مقسوم د مکمل نزولي پولینوم په شکل ترتیبوو او د ترکیبي وېش په مرسته یې د وېش د عملیې له سرته رسولو پرته د وېش حاصل او باقی مانده لاس ته راوړلای شو چې د وېش د حاصل درجه د یوه په اندازه د مقسوم علیه له درجې څخه کمه ده.

پوښتنې

1- د ترکیبي وېش په مرسته یې د وېش حاصل او باقی مانده پیدا کړئ.

$$(10x^2 + 2x + 1) \div (x + 1)$$

$$(2x^3 - 7x^2 - 2x + 12) \div (2x - 3)$$

$$(5x^3 - 3x + 7) \div (x + 4)$$

$$(6x^2 + 15) \div (4x + 9)$$

$$(6p^3 + 2p^2 - p + 20) \div \left(p - \frac{1}{2}\right)$$

2- د ترکیبي وېش په مرسته یې پاتې (باقي مانده) او د وېش حاصل پیدا کړئ.

$$(y^5 - 17y^3 - 9) \div (y - 3)$$

$$(4x^3 - 2x^2 + 5) \div (x - 5)$$

$$(x^3 + 8x^2 + 8x + 7) \div (x + 7)$$

د ترکیبې وېش په مرسته د پولینوم د فکتور او د پولینوم د قیمت پیدا کول

$$\begin{array}{r} 1 + 2 - 5 - 6 \\ - 1 - 1 + 6 \\ \hline 1 \quad 1 - 6 \quad 0 \end{array} \quad \boxed{-1}$$

آیا د ترکیبې وېش په مرسته ویلای شئ چې

$$d \text{ د } (x+3) \text{ د } x^3 + 9x^2 + 27x + 27$$

پولینوم یو فکتور دی؟

لومړی مثال: د ترکیبې وېش په مرسته وښیاست چې $(x-1)$ د

$$P(x) = 2x^4 - x^3 - x^2 + x - 1$$

پولینوم یو فکتور دی.

$$\begin{array}{r} 2 \quad -1 \quad -1 \quad 1 \quad -1 \quad | \quad 1 \\ \quad \quad 2 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad | \quad \quad \\ \hline 2 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \end{array}$$

څرنګه چې $R = 0$ دی، نو $(x-1)$ ددې پولینوم یو فکتور دی. یا دا چې:

$$2x^4 - x^3 - x^2 + x - 1 = (x-1)(2x^3 + x^2 + 1)$$

یا د باقی مانده قضیې په مرسته:

$$P(1) = 2 \cdot 1^4 - 1^3 - 1^2 + 1 - 1 = 2 - 1 - 1 + 1 - 1 = 0$$

دویم مثال: آیا $(x+10)$ د $x^3 + 3x^2 - 150$ پولینوم یو فکتور دی او که نه؟

$$\begin{array}{r} 1 \quad 3 \quad 0 \quad -150 \quad | \quad -10 \\ \quad \quad -10 \quad 70 \quad -700 \quad | \quad \quad \\ \hline 1 \quad -7 \quad 70 \quad -850 \end{array}$$

څرنګه چې $R = -850$ دی ($R \neq 0$)، نو $(x+10)$ د $x^3 + 3x^2 - 150$ پولینوم فکتور نه دی.

دریم مثال: که $P(x) = 3x^3 - 12x^2 + 25 + 5x$ وی، د $x = 2$ لپاره د ترکیبې وېش په مرسته ددې پولینوم قیمت پیدا کړئ.

حل: لومړی پولینوم په نزولي ډول ترتیبوو.

$$P(x) = 3x^3 - 12x^2 + 5x + 25$$

$$\begin{array}{cccc|c} 3 & -12 & 5 & 25 & 2 \\ & 6 & -12 & -14 & \\ \hline 3 & -6 & -7 & 11 & \end{array}$$

نو: $P(2) = 11$ دی.

فعالیت

د ترکیبي وېش په مرسته د $P(x) = x^3 - x^2 + 10x + 5$ پولینوم قیمت د $x = 1$ او $x = 3$ لپاره پیدا کړئ.

څلورم مثال: د ترکیبي وېش په مرسته وښیاست چې $(r - 4)$ د $r^4 - 256$ یو فکتور دی.

$$r^4 - 256 = r^4 + 0 \cdot r^3 + 0 \cdot r^2 + 0 \cdot r - 256$$

حل:

$$r - 4 = 0$$

$$r = 4$$

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -256 \\ & 4 & 16 & 64 & 256 \\ \hline 1 & 4 & 16 & 64 & 0 \end{array} \quad 4$$

$$Q(x) = r^3 + 4r^2 + 16r + 64$$

$$R = 0$$

نو $(r - 4)$ د $r^4 - 256$ یو فکتور دی.

د ترکیبي وېش په مرسته د یوې معادلې د جذرونو پیدا کول:

پنځم مثال: که د (1) عدد د $x^3 + 4x^2 + x - 6 = 0$ معادلې یو جذر وي، د ترکیبي وېش په مرسته یې نور جذرونه پیدا کړئ.

حل:

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 1 & -6 & \\ \hline & 1 & 5 & 6 & 1 \\ \hline 1 & 5 & 6 & 0 & \end{array}$$

نود وېش حاصل يې $x^2 + 5x + 6$ دی.

$$x^3 + 4x^2 + x - 6 = (x - 1)(x^2 + 5x + 6)$$

$$x^2 + 5x + 6 = 0$$

$$(x + 3)(x + 2) = 0$$

$$x = -3 \quad x = -2$$

د دې معادلې دوه نور جذرونه -2 او -3 دي.

د ترکیبي وېش په مرسته د پولینوم فکتور، د پولینوم قیمت او د پولینومي معادلې جذر پیدا کولای شو، که چېرې د $P(x)$ پولینوم په $(x - a)$ ووېشو او $(R = 0)$ وی، نو $(x - a)$ د دې پولینوم یو فکتور دی او د (a) عدد د $P(x) = 0$ پولینومي معادلې یو جذر دی.

پوښتنې

1- د ترکیبي وېش په مرسته وښیاست چې $(x + \frac{1}{2})$ د $20x^3 + 7x + 6$ پولینوم یو فکتور دی

او $(x + 1)$ د $x^4 - 2x^2 + x + 2$ پولینوم یو فکتور دی.

2- آیا $(x - 0, 1)$ د $10x^3 - 11x^2 + 1$ د پولینوم یو فکتور دی؟ ولې؟

3- د ترکیبي وېش په مرسته د $6 - y - 6y^2 + y^3$ پولینوم قیمت د $y = 6$ لپاره پیدا کړئ.

4- که (1) د $x^3 + x^2 - 10x + 8 = 0$ معادلې یو جذر وي، د ترکیبي وېش په مرسته یې نور

جذرونه پیدا کړئ.

5- که د (-2) عدد د $x^3 + 4x^2 + kx + 8 = 0$ معادلې یو جذر وي، د ترکیبي وېش په مرسته

د k قیمت پیدا کړئ؟

د څپرکي لنډيز

- الجبري افادې په درې ډوله دي (ناطقه الجبري افاده، غير ناطقه الجبري افاده، پولینومي الجبري افاده).
- هغه حدونه چې متحولونه او درجې يې سره مساوي وي، مشابه حدونه (Like terms) نومېږي، لکه: $3x^2$ او $5x^2$ يا $4x^2y^2$ او $-6x^2y^2$ - مشابه حدونه دي.
- پولینوم هغه يو يا څو حده الجبري افاده ده چې د حروفو توانونه يې د مکملو عددونو په سټ کې شامل وي.
- د يوه پولینوم درجه چې له يوه توري (متحول) څخه جوړ شوی وي، د هغه توري له لوړ توان څخه عبارت ده او که له يوه څخه د زياتو تورو څخه جوړ شوی وي، د زيات توان لرونکي مونوم درجه ددې پولینوم درجه ده.
- د يوه حد عددي فکتور (Numerical Factor) ته ضرب وايي، لکه: په $3x^2$ کې 3 د x^2 ضرب دی.
- ټول ثابت عددونه پولینومونه دي چې ثابت پولینومونه نومېږي او درجه يې صفر ده، د صفري پولینوم درجه تعريف شوې نه ده.
- هغه پولینومونه چې يو متحول ولري او د مشابه حدونو ضربونه يې سره مساوي وي، د معادلو پولینومونو په نوم يادېږي.
- د متحول په راکړ شوي قيمت کې د يوه پولینوم قيمت هغه عدد دی چې په پولینوم کې د متحول د راکړل شوي قيمت له وضع کېدو څخه په لاس راځي.
- هغه پولینومونه چې د متحول له لوړ توان څخه تر ثابت عدده پورې، ټول حدونه په کې موجود وي، مکمل پولینوم او که يو يا څو حدونه، ونه لري، د ناقص پولینوم په نوم يادېږي.
- که د يوه پولینوم متحول له ټيټ توان څخه تر لوړ توان پورې ترتيب شي، منظم صعودي او که له لوړ توان څخه تر ټيټ توان پورې ترتيب شي، منظم نزولي پولینوم نومېږي.
- د پولینوم د جمعې په عمليه کې مشابه حدونه (Like terms) يو له بل سره جمع کېږي، د تفريق

- په عملیه کې د مفروق علامې ته تغیر ورکولو او نوره عملیه د جمعې د عملیې په شان سرته رسول کېږي (د مفروق جمعي معکوس له مفروق منه سره جمع کېږي).
- د پولینومونو د جمعې او ضرب په عملیو کې د تبدیلی او اتحادی خاصیتونه او هم د ضرب توزیعی خاصیت پر جمع باندې صدق کوي.
 - د ضرب په عملیه کې کولای شو، مونوم په مونوم کې، مونوم په پولینوم کې او یا پولینوم په پولینوم کې ضرب کړو.
 - په همدې ډول کولای شو، د وېش په عملیه کې مونوم پر مونوم، پولینوم پر مونوم یا پولینوم پر پولینوم باندې ووېشو.
 - که د $P(x)$ پولینوم پر $(x - a)$ ووېشو د باقی مانده قضیې په اساس پاتې (باقي) له $P(a)$ سره مساوي ده.
 - که د $P(x)$ پولینوم پر $(x - a)$ ووېشو او باقی صفر شي، نو $(x - a)$ د $P(x)$ د پولینوم یو فکتور دی.
 - د فکتور د معکوسې قضیې په اساس که $(x - c)$ د $M(x)$ پولینوم یو فکتور وي، نو $P(c) = 0$ او د c عدد د $M(x) = 0$ پولینومي معادلې یو جذر دی.
 - د ترکیبي وېش په مرسته کولای شو چې که $P(x)$ پولینوم پر $(x - a)$ ووېشو، د وېش حاصل او باقی لاس ته راوړو او هم د ترکیبي وېش په مرسته د متحول په راکړ شوي قیمت کې د $P(x)$ د پولینوم قیمت پیدا کولای شو.
 - د ترکیبي وېش په مرسته $P(x) = 0$ د پولینومي معادلې جذرونه پیدا کولای شو.
 - د باقی مانده قضیې په مرسته الجبري افاده هم تجزیه کولای شو.

د څپرکي پوښتنې:

1- د k قیمت په داسې حال کې پیدا کړئ چې:

a: که $(x+5)$ د $P(x) = x^3 + kx + 125$ پولینوم یو فکتور وي.

b: که $(x-1)$ د $Q(x) = 2x^4 - 3x^3 - x - 2k$ پولینوم یو فکتور وي.

c: که $(x-2)$ د $P(x) = x^3 + 3x^2 - x + k$ پولینوم یو فکتور وي.

2- د ترکیبي وېش په مرسته یې دوېش حاصل (Quotient) او پاتې (Remainder) پیدا کړئ.

$$(x^5 + 4x^4 + x^2 - 3x - 28) \div (x+4) \quad , \quad (5x^4 - 6x^2 + 3x - 4) \div (x+4)$$

$$(30x^3 - 20x^2 - 100x + 1000) \div (x-10) \quad , \quad (10x^2 - 31x + 24) \div (x - \frac{3}{2})$$

3- د فکتور د قضیې په مرسته وښیاست چې $(x-1)$ د $P(x) = x^3 - 4x^2 + x + 2$ پولینوم یو فکتور دی.

4- د فکتور د قضیې په مرسته وښیاست چې $(x - \frac{1}{2})$ د $P(x) = x^3 - \frac{1}{8}$ پولینوم یو فکتور دی.

5- د ترکیبي وېش په مرسته د $x = -\frac{1}{2}$ لپاره د $P(x) = 5x^2 + x - 9$ پولینوم قیمت پیدا کړئ.

6- د ترکیبي وېش په مرسته د $x = 3$ لپاره د $k(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x + 1$ پولینوم قیمت پیدا کړئ.

7- د ترکیبي وېش په مرسته وښیاست چې د 3 عدد د $x^3 - 3x^2 + x - 3 = 0$ پولینومي معادلې یو حل (جذر) دی.

8- د فکتور د قضیې په مرسته وښیاست چې د 1- او 2 عددونه د $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ معادلې حلونه (جذرونه) دي.

9- د ترکیبي وېش په مرسته د k قیمت پیدا کړئ چې که $(x+3)$ د

$$P(x) = 3x^3 + kx^2 - 22x + 24$$

10- د ترکیبي وېش په مرسته یې د وېش حاصل او باقی پیدا کړئ.

$$(4x^4 - 5x^2 + 2x - 3) \div (x - 2) \quad (x^3 - x^2 - 14x + 11) \div (x - 4)$$

$$(7x^4 + 41x^2 - 6) \div (x + 6) \quad (5x^3 - 3x + 7) \div (x + 4)$$

11- د b او c قیمتونه په داسې حال کې پیدا کړئ چې که د $P(x) = x^4 + 6x^3 - 20x^2 + bx + c$

پولینوم پر $x^2 - 3x + 2$ ووېشو، باقی صفر شي.

12- د m قیمت په داسې حال کې پیدا کړئ چې که د $k(x) = 2x^3 + 5x^2 - mx + 4$

پولینوم پر $(x^2 + 2x - 1)$ ووېشو او باقی صفر شي.

13- که $k = 3a(x - 1)^2 - a(x - 1) - 4$ او $L = 16 + b(x - 1) - 3b(x - 1)^2$ وي

$Kb + La$ پیدا کړئ.

14- د x په کوم قیمت د $P(x) = 12x^4 + 3x^3 - 13x^2 + x + 5$ پولینوم پر $(3x^2 - 1)$

پوره وېشل کېږي؟

15- د P د کوم قیمت لپاره د $K(x) = 3x^3 - 7x^2 - 9x + P$ پولینوم پر $(x - 13)$ پوره

د وېشلو وړ دی؟

16- که د $P(x) = 2x^3 - x^2 + 3x - 1$ پولینوم پر $(2x + 1)$ ووېشل شي، د وېش د عملیې

د سرته رسولو پرته ویلای شی چې پاتې (باقي مانده) به څومره وي؟

$$\text{a) } -3 \quad \text{b) } -\frac{3}{2} \quad \text{c) } 3 \quad \text{d) } \frac{7}{2}$$

17- د m قیمت به څو وي، که د $P(x) = 5x^2 + 6x - 7$ پولینوم پر $(x + m)$ ووېشل شي

تر څو باقي مانده (1) شي؟

$$\text{a) } 2 \quad \text{b) } \frac{-4}{5} \quad \text{c) } -4 \quad \text{d) } \text{او } a \text{ سم دي}$$

18- که د $P(x) = x^3 + 3x^2 - 5x - 8$ پولینوم، پر $(x + 3)$ ووېشل شي د وېش د عملیې

له سرته رسولو پرته وویاست چې باقی څومره ده؟

$$\text{a) } \text{صفر} \quad \text{b) } 13 \quad \text{c) } -23 \quad \text{d) } 7$$

19- که چېرې $x = 4$ ، $y = -3$ او $z = 2$ وي، د لاندې الجبري افادو قیمت پیدا کړئ.

$$a: x^2yz + zxy^2 + 3xyz^2 \quad b: \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}y^2 + \frac{1}{4}z^2$$

20 - د x د راکړل شوو قیمتونو لپاره د ترکیبي وېش په مرسته د لاندې پولینومو قیمتونه پیدا کړئ.

$$P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 2x + 5, \quad x = 2$$

$$P(x) = 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6, \quad x = -1$$

$$P(x) = 2x^4 - 5x^3 + 4x - 1, \quad x = 1$$

$$P(x) = 4x^4 + 6x^3 + x^2 + x - 3, \quad x = -2$$

21 - د لاندې معادلو یو، یو جذر راکړل شوی دی، د ترکیبي وېش په مرسته یې نور جذرونه پیدا کړئ.

$$x^3 - 3x^2 + x - 3 = 0 \quad \text{یو جذر یې (3) دی.}$$

$$x^3 - 5x^2 + 7x + 13 = 0 \quad \text{یو جذر یې (-1) دی.}$$

$$x^4 - 5x^2 + 4 = 0 \quad \text{یو جذر یې (-1) دی.}$$

$$x^4 - x^3 - 9x^2 - 11x - 4 = 0 \quad \text{یو جذر یې (-1) دی.}$$

22 - که $P(x) = 0$ وي، د دې پولینوم درجه څو ده؟

تعریف شوې نه دی (d) صفر (c) -1 (b) 1 (a)

23 - د هغه مستطیل له مساحت څخه چې بعدونه یې $(x+5)$ او $(x+2)$ وي، د هغه مستطیل مساحت تفریق کړئ چې بعدونه یې $(x+3)$ او $(x+1)$ وي.

24 - که $A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ او $a = 13$ ، $b = 5$ ، $c = 12$ او $p = \frac{a+b+c}{2}$ وي، د A قیمت پیدا کړئ.

25 - که $(x-1)^3$ او $x^3 + ax^2 + bx + c$ معادل پولینومونه وي، د b قیمت مساوي دی په:

a) 1 b) 3 c) -3 d) -1

26 - د $(a - \frac{2}{a-1}) (a \div \frac{a+1}{a-1})$ افادې حاصل مساوي دی په:

a) $a(a+1)$ b) $a(a-2)$ c) $\frac{a-2}{a}$ d) $\frac{a-1}{a}$

27 - د ضرب حاصل مساوي دی په: $(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y})(x+y)$

a) $x^2 - y^2$ b) $x^2 + y^2$ c) $2x^2 - y$ d) $x - y$

28 - لاندې پولینومونه په نزولي ډول (Descending Order) ترتیب او هم وویاست چې درجې یې څو دي؟

a) $-5x^2 + 3x^5 + 9$ b) $-x^2 + xy^2z^3 - x^5$ c) 3

29 - د $Q(x) = x^2 + 3x - 5$ په پولینوم کې $Q(-1)$ مساوي دی، په:

a) 7 b) -7 c) 1 d) -1

30 - که $P(x) = x^2 - 2x + 3$ او $Q(x) = 2x^2 + 3x - 1$ وي، د لاندې افادو قیمتونه پیدا کړئ.

$P(x) - Q(x)$ $P(0) + Q(0)$ $P(1) - Q(-1)$

$P(x) - P(x)$ $[P(x) + Q(x)] + p(x)$

31 - لاندې پولینومونه نظر Y ته په نزولي ډول ترتیب کړئ.

$4x^2y - 3xy^2 + x^3 + y^3$ $4xy^3 - 3x^3y + 2x^2y^2 + x^4 + y^4$

32 - په لاندې الجبري افادو کې پولینومونه، ناطقې الجبري افادې او غیر ناطقې الجبري افادې په نښه کړئ.

13 , $\sqrt{2}x$, 0

$\frac{3x^2}{2}$, $\sqrt{x} - \frac{1}{x}$, $y^2 - \frac{1}{y^2}$

33 - د $(1 + 2x + 3x^2) + (3x - 5 - 2x^2) + (-x^2 - 5x + 4)$ افادې حاصل مساوي دی په:

a) 1 b) صفر c) -1 d) 2

34 - د دوو الجبري افادو د ضرب حاصل $(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc)$ دی. که یوه افاده یې $(a + b + c)$ وي، بله افاده پیدا کړئ.

35 - د وېش حاصل يې پيدا کړئ.

$$(12x^4 + 3x^3 - 13x^2 + x + 5) \div (3x^2 - 1) \quad (a^3 + b^3) \div (a + b)$$
$$(4x^3 - 10x^2 + 12x + 6) \div (2x + 1) \quad (a^5 - b^5) \div (a - b)$$
$$\frac{x^{a-2}}{x} \quad \frac{-m^a}{m^b}$$

36 - ضرب يې کړئ.

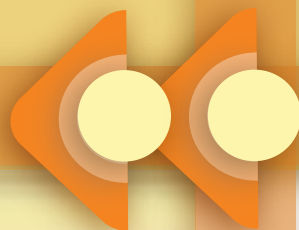
$$(a^{2x} - 2)(a^{2x} - 2) \quad \left(\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right)$$
$$(e^x + 1)(e^x - 1) \quad (m^2 - 2n^2)(2m^2 - n^2)$$
$$(0.1x^2)(0.1x^2)(0.1x^2) \quad \left(2\frac{1}{2}mn\right)\left(2\frac{1}{2}mn\right)\left(2\frac{1}{2}mn\right)$$

37 - لومړی لاندې افادې ساده او بيا يې جمع کړئ.

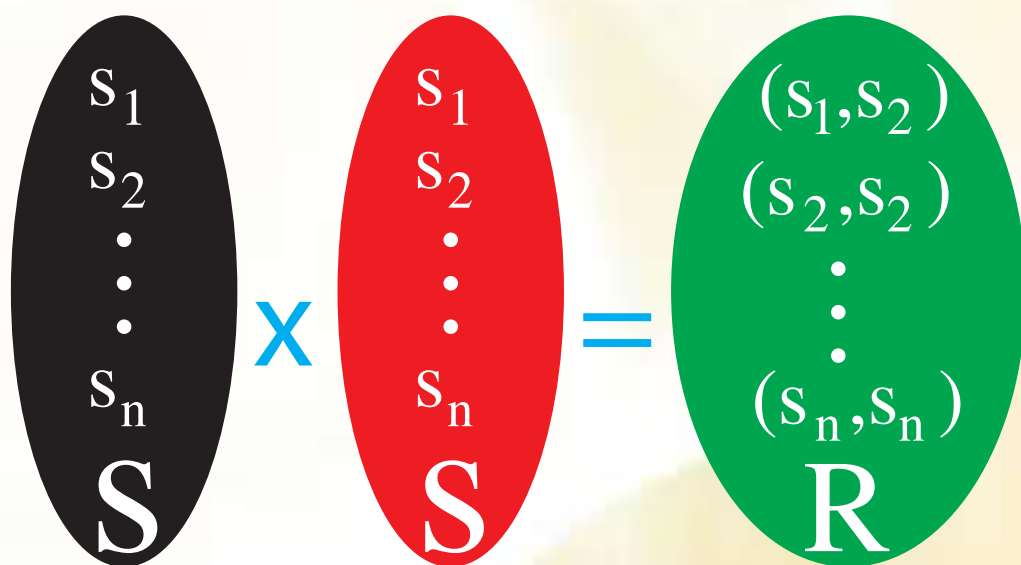
$$(a - 1) + 1 - (a - 1) - 3 \quad -(10mn - m) - (m^2 + m) + m^2$$
$$(y^2 - 1) + (y^2 - 1) \quad [-4(a - b) - 5] + [(2a + b) - (a - b)]$$
$$10[-\{-(x^2 - 1) + 5\} - x(x - 2)] \quad 10(x + 1) - (x + 1) - 3(x + 2)$$
$$mn - 4 + mn - 5$$

38 - دکومې لاندینې راکړل شوي يو حده درجه صفر ده؟

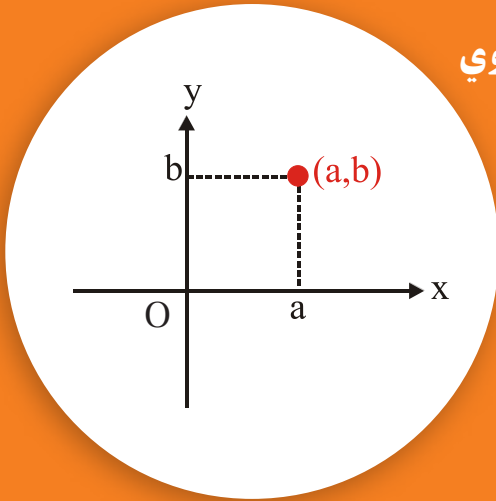
a) x b) $\sqrt{2} x$ c) $\sqrt{2}$



دویم خیرکی رابطه



مرتبې جوړې او کارټيزيني مستوي



- د (a, b) مرتبه جوړه په کوم حالت کې د (c, d) له مرتبې جوړې سره مساوي کېدای شي؟
- آیا د (a, b) مرتبه جوړه د (b, a) له مرتبې جوړې سره مساوي ده؟

که a او b د یوه سټ او یا د مختلفو ستونو عناصرو وي او a ته لومړنی عنصر او b ته دویم عنصر ووايو، نو (a, b) ته مرتبه جوړه وايي او (b, a) هم یو مرتبه جوړه ده، خو $(a, b) \neq (b, a)$ د مرتبه جوړه په هغه صورت کې د (c, d) له مرتبې جوړې سره مساوي کېدای شي چې $a=c$ او $b=d$ وي.

لومړی مثال: که $(x - 2, y + 1) = (1, 3)$ وي د x او y قیمتونه پیدا کړئ.

$$y + 1 = 3$$

$$\boxed{y = 2}$$

$$x - 2 = 1$$

$$\boxed{x = 3}$$

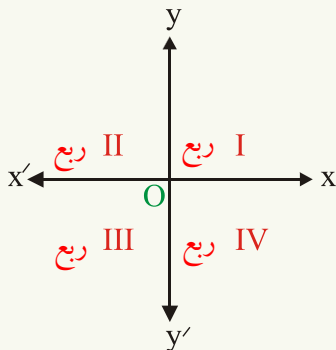
فعالیت

که $(a + 1, 2b - 3) = (0, -1)$ وي، د a او b قیمتونه پیدا کړئ.

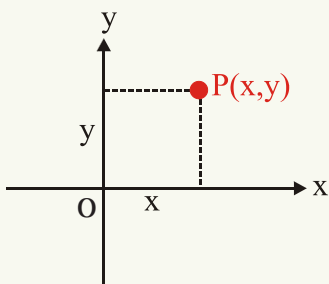
کارټيزيني مستوي (Cartesian Plane)

دوه، عمود او افقي خطونه رسم کړئ او د تقاطع ټکي ته یې مبدأ (Origin) وايي، افقي خط ته د X محور او عمود خط ته د Y محور وايي. د $X'OX$ او د $Y'OY$ سره وېش، هغه مستوي چې دا محورونه په کې واقع دي د کارټيزيني مستوي په نامه یادېږي. دواړه محورونه مستوي په څلورو برخو وېشي چې هرې برخې ته یې ربع (ناحیه) (Quadrant) وایي.

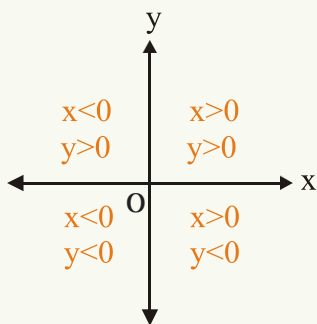
وايي، د ساعت د عقربې د حرکت په مخالف جهت (Anti clockwise) په ترتيب سره لومړنۍ دويمه، دريمه او څلورمه ربع ده، لکه: څنگه چې په شکل کې ليدل کېږي.



په دې مستوي کې د P د نقطې موقعيت د (x,y) د حقيقي عددونو د مرتبې جوړې په واسطه داسې ښودل کېږي چې د P د نقطې افقي فاصله د Y له محور څخه X او د P د نقطې عمودي فاصله د X له محور څخه y ده.



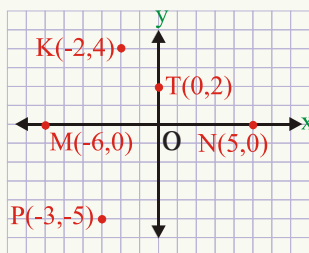
که د P نقطه د Y د محور ښي خوا ته واقع وي، د x قيمت مثبت دی او که د Y د محور کيڼي خوا ته واقع وي، د x قيمت منفي دی او که د P نقطه د Y پر محور پرته وي $x = 0$ دی.



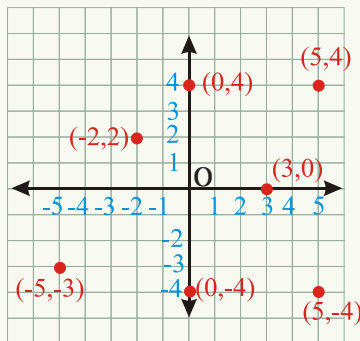
همدارنگه که د P نقطه د X له محور څخه پورته واقع وي، د y قيمت مثبت او که د X له محور څخه لاندي واقع وي د y قيمت منفي دی. او که د p نقطه د X پر محور پرته وي، $y = 0$ کېږي، په لنډ ډول په شکل کې ښودل شوي دي

چې x او y ته کارټيزيني مختصات (Cartesian Coordinates) وايي چې په $P(x, y)$ کې لومړنۍ عنصر x ته فاصله (abscissa) او دويم عنصر y ته ترتيب (Ordinate) وايي چې د مختصاتو مبدا $(0,0)$ ده، څرگنده ده چې د حقيقي عددونو (x, y) د هرې مرتبې جوړې لپاره په مستوي کې يوه نقطه او د مستوي د هرې نقطې لپاره د حقيقي عددونو يوه جوړه شته دی.

دويم مثال: د $M(-6,0)$ او $N(5,0)$ $T(0,2)$, $K(-2,4)$, $P(-3,-5)$ نقطې د وضعيه کمياتو په مستوي کې وټاکئ.



درېم مثال: د هرې نقطې لپاره چې په لاندې شکل کې ښودل شوي دي، اړونده مرتبه جوړه وليکئ.



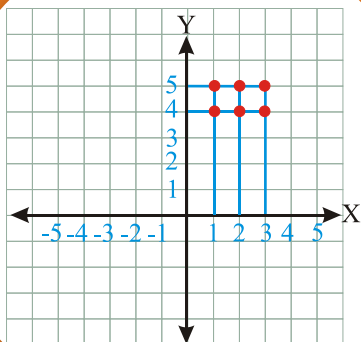
فعاليت

د $(2,-1)$, $(-1,2)$, $(-2,-1)$, $(2,1)$, $(2,0)$ او $(0,1)$ نقطې د وضعيه کمياتو په سيستم کې وټاکئ.

پوښتنې

- 1 - که د P د نقطې فاصله مثبت او ترتیب یې منفي وي، د P نقطه په کومه ربع کې واقع ده؟
- 2 - که د یوه شکل څلور رأسونه $A(3,3), B(-3,3), C(-3,-3)$ او $D(3,-3)$ وي، دا کوم ډول هندسي شکل دی؟
- 3 - د وضعیه کمیاتو په مستوي کې هغه مثلث چې رأسونه یې $A(2,0), B(0,2)$ او $C(0,0)$ وي رسم کړئ او وویاست چې دا کوم ډول مثلث دی؟
- 4 - د $P_3(1,5), P_2(-3,2), P_1(2,-3)$ نقطې د وضعیه کمیاتو په سیستم کې وټاکئ.
- 5 - وویاست چې لاندې مرتبې جوړې په کومه ربع کې واقع دي؟
- $(1,5)$ ، $(-5,1)$
- $(-4,-6)$ ، $(4,-5)$
- $(-\frac{1}{2}, -2)$ ، $(-\frac{1}{2}, 2)$
- $(2\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ ، $(2,0)$
- $(0,-1)$

د کارټیزي ضرب حاصل او گراف يې



آيا په مخامخ شکل کې $A \times B$ ښودلای
شي؟

فعاليت

- که $A = \{1, 2, 3\}$ او $B = \{4, 5\}$ وي:
- $A \times B$ پيدا کړئ.
- د $A \times B$ د عناصرو شمېر پيدا کړئ.
- آيا $A \times B = B \times A$ دی؟
- آيا $A \times A$ او $B \times B$ پيدا کولای شي؟

که A او B دوه غیر خالي سټونه وي، $(A \times B)$ په لاندې ډول تعريف شوي دي:

$$A \times B = \{(x, y) | x \in A \wedge y \in B\}$$

په دې معنا چې د A او B د ضرب حاصل $(A \times B)$ داسې یوست دی چې عناصر يې د (x, y)

د هغه مرتبو جوړوست دی چې x د A د سټ او y د B د سټ غړي وي، که $A \neq B$ وي نو:

$$A \times B \neq B \times A$$

وي، د $A \times B$ د عناصرو شمېر له $(m \times n)$ څخه عبارت دی.

لومړی مثال: که $A = \{0, 1, 2\}$ او $B = \{3, 4\}$ وي $A \times B$ او $B \times A$ او $A \times A$ پيدا کړئ.

حل

$$A \times B = \{0, 1, 2\} \times \{3, 4\} = \{(0, 3), (0, 4), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4)\}$$

$$B \times A = \{3, 4\} \times \{0, 1, 2\} = \{(3, 0), (3, 1), (3, 2), (4, 0), (4, 1), (4, 2)\}$$

$$A \times A = \{0, 1, 2\} \times \{0, 1, 2\} = \{(0, 0), (0, 1), (0, 2), (1, 0), (1, 1), (1, 2), (2, 0), (2, 1), (2, 2)\}$$

فعالیت

که $A = \{-4, -1, 0\}$ او $B = \{1, 4\}$ وي $A \times A, A \times B$ او $B \times B$ پيدا کړئ.

دویم مثال: که $IN = \{1, 2, 3, \dots\}$ او $L = \{0\}$ وي، نو $IN \times L$ پيدا کړئ.

حل:

$$IN \times L = \{(1, 0), (2, 0), (3, 0), (4, 0), \dots\} = \{(x, 0) / x \in IN\}$$

دریم مثال: که $IN = \{1, 2, 3, \dots\}$ او $W = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ وي $W \times N$ پيدا کړئ.

حل:

$$W \times IN = \{(0, 1), (0, 2), (0, 3), \dots, (1, 1), (1, 2), (1, 3), \dots, (2, 1), (2, 2), \dots, \}$$

$$= \{(x, y) / x \in W \wedge y \in IN\}$$

د کارټيزني حاصل ضرب گراف: (Graph of Cartesian Product)

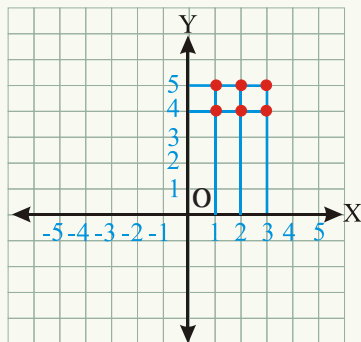
کولای شو چې د کارټيزني ضرب حاصل د وضعيه کمياتو په مستوي کې هم وښودلای شو.

څلورم مثال: که $A = \{1, 2, 3\}$ او $B = \{4, 5\}$ وي $A \times B$ پيدا کړئ او د وضعيه کمياتو په

مستوي کې يې وښیاست.

حل:

$$A \times B = \{(1, 4), (1, 5), (2, 4), (2, 5), (3, 4), (3, 5)\}$$

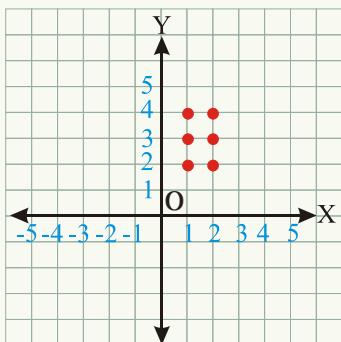


د X پر محور د $1, 2, 3$ عددونه او د Y پر محور د 4 او 5 عددونه ټاکو له $1, 2$ او 3 څخه عمود خطونه او له 4 او 5 څخه افقي خطونه رسموو، ددې دواړو خطونو د تقاطع نقطې د $A \times B$ مرتبې جوړې ښکاره کوي.

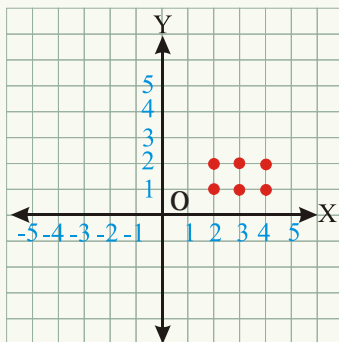
پنجم مثال: که $A = \{1,2\}$ او $B = \{2,3,4\}$ وي $A \times B$ او $B \times A$ پیدا کړئ او په شکل کې بې وښیاست.

$$A \times B = \{1,2\} \times \{2,3,4\} = \{(1,2), (1,3), (1,4), (2,2), (2,3), (2,4)\}$$

$$B \times A = \{2,3,4\} \times \{1,2\} = \{(2,1), (2,2), (3,1), (3,2), (4,1), (4,2)\}$$



$A \times B$

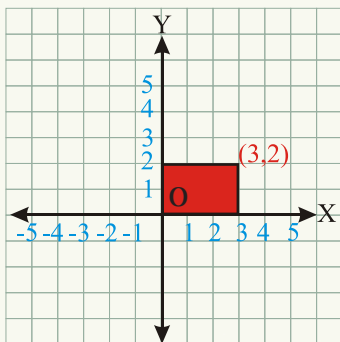


$B \times A$

شپږم مثال: که $A = \{x / x \in \mathbb{R}, 0 \leq x \leq 3 = [0,3]\}$ او $B = \{y / y \in \mathbb{R}, 0 \leq y \leq 2 = [0,2]\}$ وي $A \times B$ په شکل کې بې وښیاست.

حل

$$A \times B = \{(x, y) / 0 \leq x \leq 3 \wedge 0 \leq y \leq 2\}$$



فعالیت

که چېرې $A = \{1,2\}$ او $B = \{3,4\}$ وي $A \times B$ پیدا او په شکل کې بې وښیاست.

پوڻتني

1 - ڪه:

i) $B = \{2,4\}$

$$A = \{-1,1,3\}$$

ii) $B = \{2,3\}$

$$A = \{-1,1\}$$

وي $A \times B$ پيدا او په شڪل ڪي پي وڻياست.

2 - د لومري پوڻتني د ستونو لپاره $B \times A$ پيدا او په شڪل ڪي پي وڻياست.

3 - ڪه $A = \{1,2,3\}$ وي $A \times A$ پيدا ڪري.

4 - ڪه $A = \{2,4,6\}$ او $B = \{1,3,5\}$ وي $A \times B, B \times A, A \times A$ او $B \times B$ پيدا ڪري



رابطه (Relation)

عطا الله د عزت الله ورور دی
(عطا الله R عزت الله)
ورورولي هم يوه رابطه ده.

یوست چې د شيانو او مفهومونو له مرتبو جوړو څخه جوړ شوی وي، له یوې رابطې څخه عبارت دی. یا که A او B دوه غیر خالي ستونه (non empty sets) وي، نو د $A \times B$ هر فرعي سټ له A څخه په B کې یوه رابطه ده، که $(a, b) \in R$ وي، ویل کېږي چې a له b سره رابطه لري او د (aRb) په شکل لیکل کېږي.

که R له A څخه په B کې یوه رابطه وي، نو $R \subset A \times B$ ده او که R د $A \times A$ یو فرعي سټ وي، نو R په A کې یوه رابطه ده.

لومړی مثال: که $A = \{x, y\}$ او $B = \{1, 2\}$ وي، $A \times B$ پیدا کړئ، او له A څخه په B کې څلور رابطې ولیکئ.

حل

$$A \times B = \{(x,1), (x,2), (y,1), (y,2)\}$$

$$R_1 = \{(x,1), (x,2)\}$$

$$R_2 = \{(y,1)\}$$

$$R_3 = \{(y,2)\}$$

$$R_4 = \{(x,1), (y,1)\}$$

چې د $A \times B$ د عناصرو شمېر څلور او د $A \times B$ د ټولو فرعي ستونو شمېر $2^4 = 16$ دی، نو له A څخه په B کې د ټولو رابطو شمېر 16 دي.

دویم مثال: که $A = \{1, 3, 5, \dots, 19\}$ چې د A دست د عناصرو شمېر 10 دی او $B = \{2, 4, 6\}$ وي چې د B د عناصرو شمېر (3) دی، د $A \times B$ د عناصرو شمېر (ټولې مرتبې جوړې)

$10 \times 3 = 30$ دي او له A څخه په B کې د ټولو رابطو شمېر 2^{30} دی.

پام مووي چې: ϕ او $A \times B$ هم په فرعي ستونو کې شامل دی.

دریم مثال: که $A = \{1, 2, 3\}$ او $B = \{a, b\}$ وي له A څخه په B کې (3) رابطې وليکئ.
حل:

$$A \times B = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}$$

درې رابطې عبارت دي له:

$$R_1 = \{(1, a), (1, b), (2, a), (3, a), (3, b)\}$$

$$R_2 = \{(1, b), (2, a), (3, a), (3, b)\}$$

$$R_3 = \{(2, a), (2, b), (3, a)\}$$

فعالیت

که $R = \{(x, y) / x + y = 5\}$ په $A = \{1, 2, 3, 4\}$ کې یوه رابطه وي، د R عناصر وليکئ.

څلورم مثال: که $R = \{(x, y) / x - y = 2\}$ په $A = \{1, 2, 3, 4\}$ کې یوه رابطه وي، د R عناصر وليکئ.

حل: $R = \{(3, 1), (4, 2)\}$ ده.

د رابطې د تعریف ساحه (Domain) او د قیمتونو ساحه (Range) یې:

پوهېږو چې که R له A څخه په B کې یوه رابطه وي، نو $R \subseteq A \times B$ ده، په دې معنا چې R یو سټ دی چې عناصر یې د (x, y) مرتبې جوړې دي چې $x \in A$ او $y \in B$ ده.

د R د تعریف ساحه د مرتبو جوړو لومړني عناصر دي چې په Dom_R سره ښودل کېږي. همدارنگه د R د قیمتونو ساحه (Range) د مرتبو جوړو دویمي عناصر دي، په Range_R سره ښودل کېږي.

لومړی مثال: که $A = \{1, 2\}$ او $B = \{x, y\}$ وي او R له A څخه په B کې یوه رابطه وي، لومړی د دې رابطې عناصر وليکئ، بیا د رابطې د تعریف ساحه (Dom_R) او د قیمتونو ساحه (Range_R) یې وليکئ.

حل

$$R = \{(1, x), (2, x), (1, y), (2, y)\}$$

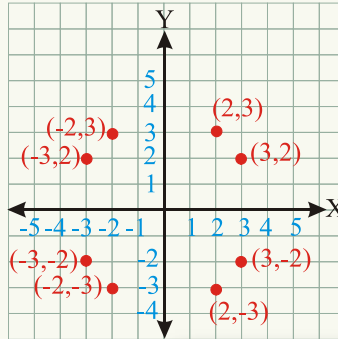
$$\text{Dom}_R = \{1, 2\} \quad \text{Range}_R = \{x, y\}$$

دويم مثال: که د $R = \{(x, y) / x^2 + y^2 = 13\}$ رابطه د $A = \{-3, -2, 1, 2, 3\}$ په سټ کې تعريف شوي وي، لومړی د (R) عناصر د مرتبو جوړو په شکل وليکئ، (Dom_R) او (Range_R) پيدا کړئ او بيا يې گراف رسم کړئ.

$$R = \{(-3, -2), (-3, 2), (-2, -3), (-2, 3), (2, -3), (2, 3), (3, -2), (3, 2)\}$$

$$\text{Dom}_R = \{-3, -2, 2, 3\}$$

$$\text{Range}_R = \{-3, -2, 2, 3\}$$

**فعالیت**

که $R = \{(x, y) / y = 2x\}$ وي او د R د تعريف ناحیه $\{0, 4, 8\}$ وي، د R د قيمتونو ناحیه معلومه کړئ.

معکوسه رابطه (Inverse of a Relation)

که R له A څخه په B کې يوه رابطه وي، د R معکوس چې په R^{-1} سره بنودل کېږي او له

$$R^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in R\}$$

څخه عبارت ده:

$$(x, y) \in R \Leftrightarrow (y, x) \in R^{-1}$$

د R د تعريف ساحه د R^{-1} د قيمتونو ساحه او د R^{-1} د تعريف ساحه د R د قيمتونو له ساحې څخه عبارت ده.

مثال: که $R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$ د طبيعي عددونو په سټ کې يوه رابطه وي، د R د رابطې

معکوسه رابطه يا R^{-1} پيدا کړئ.

$$R^{-1} = \{(2, 1), (3, 2), (4, 3)\}$$

حل:

معادله رابطه (Equivalent Relation): د R رابطه د A په سټ کې يوه معادله رابطه ده، که درې لاندني خاصیتونه ولري:

1- انعکاسي خاصیت (Reflexive Property): د هر عنصر $x \in A$ لپاره $(x, x) \in R$ وي يا $\forall x \in A \Rightarrow (x, x) \in R$

2- تناظري خاصیت (Symmetric Property): که $(x, y) \in R$ په R کې شامله وي، نو $(y, x) \in R$ هم په R کې شامله وي يا: $\forall (x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R$

3 - انتقالي خاصیت (Transitive Property): که $(x, y) \in R$ او هم $(y, z) \in R$ وي په نتیجه کې $(x, z) \in R$ مرتبه جوړه هم په R کې شامله وي يا:

$$(x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R$$

مثال: د مساوات رابطه د حقيقي عددونو په سټ کې يوه معادله رابطه ده:

- 1- په حقيقي عددونو کې د هر x لپاره $x=x$ دی، $5=5$ (انعکاسي خاصیت)
- 2- د هر $x, y \in \mathbb{R}$ لپاره که $x=y$ وي، نو $y=x$ ده (تناظري خاصیت)
- 3- د هر $x, y, z \in \mathbb{R}$ لپاره که $x=y$ او $y=z$ وي په نتیجه کې $x=z$ دی (انتقالي خاصیت)

پوښتنې

1- که $A = \{1, 2\}$ او $B = \{0, 4, 6\}$ وي.

له A څخه په B کې درې رابطې وليکئ.

له B څخه په A کې څلور رابطې وليکئ.

په A کې څلور رابطې وليکئ.

2- که $A = \{1, 2, 3, 4\}$ او $B = \{1, 3, 5\}$ وي او $R = \{(x, y) \mid y < x\}$ ، له A څخه په B کې يوه رابطه وي، د R عناصر وليکئ.

3- که $R = \{(x, y) \mid y + 1 = 2x^2\}$ د طبيعي عددونو په سټ کې يوه رابطه وي او د تعريف ساحه يې ټول طبيعي عددونو وي، د قیمتونو ساحه (Range) يې پيدا کړئ.

دڅپرکي لنډيز

- (a, b) : چې دليکلو ترتيب په کې اهميت لري، مرتبه جوړه نومېږي چې a ته لومړنۍ مختصه او b ته دويمه مختصه وايي، په عمومي ډول $(a, b) \neq (b, a)$
- د (a, b) او (c, d) دوه مرتبې جوړې په داسې حال کې سره مساوي دي چې $a = c$ او $b = d$ وي.

- **د کارټيزيني ضرب حاصل**: د A او B دستونو کارټيزيني ضرب چې په $A \times B$ سره ښودل کېږي په دې ډول تعريف شوي دي: $A \times B = \{(x, y) | x \in A \wedge y \in B\}$
- که د A سټ د عناصرو شمېر په m او د B د سټ د عناصرو شمېر په n سره وښايو، د $A \times B$ د عناصرو شمېر $m \times n$ دی.

• کولای شو چې د A او B ، دستونو ضرب $(A \times B)$ د وضعيه کمياتو په مستوي کې وښايو.

- **رابطه**: د $A \times B$ هر فرعي سټ له A څخه په B کې د R يوه رابطه ده.
- $R \subset A \times A$ او که $R \subset A \times A$ وي، نو په دې صورت کې R په A کې يوه رابطه ده.

$$(x, y) \in R \Leftrightarrow x R y$$

- که د A سټ د عناصرو شمېر په n سره وښايو، د A د فرعي سټونو شمېر 2^n دی.
- که د A سټ د عناصرو شمېر په m او د B د سټ د عناصرو شمېر په n سره وښايو له A څخه په B کې د رابطو شمېر 2^{mn} دی
- که R له A څخه په B کې يوه رابطه وي، د R د تعريف ساحه (Dom_R) د مرتبو جوړو د لومړنيو عناصرو سټ او د قيمتونو ساحه ($Range_R$) يې د مرتبو جوړو د دويمو عناصرو سټ دی.

- **معکوسه رابطه**: که R له A څخه په B کې يوه رابطه وي، د R معکوسه رابطه په R^{-1} سره ښودل کېږي چې:

$$R^{-1} = \{(y, x) | (x, y) \in R\}$$

$$(x, y) \in R \Leftrightarrow (y, x) \in R^{-1}$$

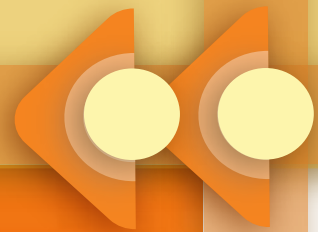
ښکاره خبره ده چې R^{-1} د تعريف ساحه د R د قيمتونو له ساحې سره او د R^{-1} د قيمتونو ساحه د R د تعريف له ساحې سره مساوي ده.

- **معادله رابطه**: د R په A کې يوه معادله رابطه ده که چېرې لاندې درې خاصيتونه ولري.

- 1- انعکاسي خاصيت.
- 2- تناظري خاصيت.
- 3- انتقالي خاصيت.

دڅپرکي پوښتنې

- 1- که $A = \{1,3,5\}$ او $B = \{2,4,6\}$ وي $A \times B$, $A \times A$ او $B \times A$ پيدا کړئ.
- 2- که $A = \{1,2,3\}$ او $B = \{0,1\}$ وي $A \times B$ په شکل کې وښیاست.
- 3- که $(x - 2y, 2x + y) = (3, 1)$ وي د x او y قیمتونه پيدا کړئ.
- 4- په $A = \{1,3,5\}$ کې د R رابطه داسې په لاس راوړئ چې R د مساوات رابطه وي.
- 5- که $A = \{a, b\}$ وي د A^2 عناصر وليکئ.
- 6- که د $R = \{(x, y) | y = x^2\}$ رابطه د حقيقي عددونو په سټ کې تعريف شوي وي د R رابطې گراف رسم کړئ.
- 7- که $R = \{(x, y) | y^2 = x\}$ رابطه د حقيقي عددونو په سټ کې تعريف شوي وي د R د رابطې گراف رسم کړئ.
- 8- که $R = \{(1, -1), (2, -2), (3, -3)\}$ وي د R^{-1} د تعريف او قیمتونو ساحې وټاکئ.
- 9- که $R = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5)\}$ وي د R او R^{-1} د تعريف او قیمتونو ساحې وټاکئ.
- 10- که $A = \{3, 6, 12\}$ او $B = \{-1, 0\}$ وي په A کې د رابطو شمېر او له A څخه په B کې درابطو شمېر پيدا کړئ.
- 11- که د $(4a + 1, 2b + a)$ او $(5, 3a - 4b)$ دوه مرتبي جوړي سره مساوي وي د a او b قیمتونه پيدا کړئ.
- 12- که $A = \{a, b, c\}$ او $B = \{x, y\}$ وي $A \times B$ او $B \times A$ پيدا کړئ.



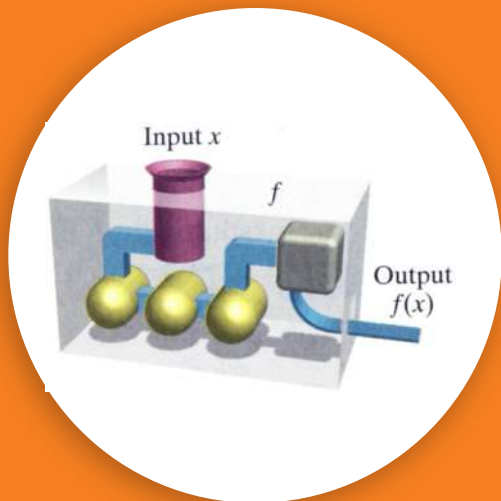
دریم خیرکی تابع

$x=0, 1, 2, 3$

Function:
 $y = x^3$

$y=0, 1, 8, 27$

تابع (function)



آيا تابع او رابطه يو له بله سره توپير لري؟

فعاليت

- آيا هره تابع يوه رابطه ده او هره رابطه يوه تابع ده ؟
- آيا د مرتبو جوړو هر ست يوه تابع ده؟
- آيا کولای شئ چې يوې تابع ته د يو ماشين په شان فکر وکړئ؟

د لومړي ځل لپاره د تابع مفهوم د يوه الماني رياضي پوه ليبنز (Leibniz)، (1646-1716) له خوا معرفي شوه.

تابع يوه رابطه يا يوه قاعده ده چې يو کميت ته د بل کميت سره اړيکه ورکوي، د تابع د مفهوم د بڼه پوهيدو لپاره لاندې مثالونه تر غور لاندې ونيسئ.

1 - د يوې مربع مساحت (A) د مربع په ضلعي (X) پورې اړه لري. هغه معادله چې د مربع مساحت ته د مربع په ضلعي پورې اړيکه ورکوي له $A = x^2$ څخه عبارت ده.

x د مربع ضلع	1	2	3	4	5	...
A د مربع مساحت	1	4	9	16	25	...

يا په بل عبارت د مربع مساحت د مربع د ضلعي تابع دی يا $A = f(x)$

2 - د نړۍ د نفوسو شمېر (P) په وخت (t) پورې اړه لري، لکه: څرنگه چې په لاندې جدول کې ليدل کېږي په تقريبي ډول د نړۍ د نفوسو شمېر د ميليون په حساب ښودل شوی دی.

کال (t)	1900	1910	1920	1930	1940	1950	1960	1970	1980	1990	2000
نفوس په ميليون (p)	1650	1750	1860	2070	2300	2560	3040	3710	4450	5280	6080

لیدل کېږي چې نفوس (Population) یا P د وخت (t) تابع ده یا $p = f(t)$

3 - د دایرې مساحت (A) ، د دایرې په شعاع (r) پورې اړه لري ($A = \pi r^2$)

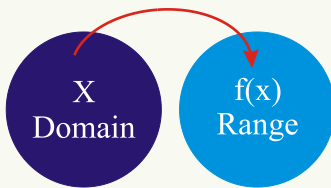
4 - د کرې حجم (V) د کرې په شعاع (r) پورې اړه لري چې د $V = \frac{4}{3} \pi r^3$ د معادلې په واسطه بنودل کېږي.

له پورتنیو مثالونو څخه دا نتیجه اخیستل کېږي چې د تابع په مفهوم کې اړیکه مرکزي حیثیت لري د مثال په ډول د هر انسان عمر له یوه عدد سره اړیکه لري، په یوه مغازه کې هر جنس له یوه ټاکلي قیمت سره اړیکه لري، هر موټر د یوې ټاکلې شمېرې جوازسپر پورې اړه لري او د هر عدد مکعب، یو عدد دی ($2^3 = 8$ ، $3^3 = 27$).

په پورتنیو مثالونو کې لیدل کېږي چې مساحت (A)، نفوس (P) او حجم (V) د مربع ضلعې (X)، وخت (t) او د کرې شعاع (r) تابع دي چې مساحت، نفوس او حجم هر یوه ته مربوط (مقید) متحول (dependent Variable) او د مربع ضلعې، د کرې شعاع او د وخت کمیتونو ته ازاد متحول یا مستقل متحول (Independent Variable) وایي کولای شو چې تابع داسې تعریف کړو:

تعریف

تابع د دوو ستونو تر منځ یوه داسې رابطه یا قاعده ده چې د لومړني سټ هر عنصر یوازې او یوازې د دویم سټ له یو عنصر سره اړیکه ولري چې لومړنی سټ د تعریف د ناحیې (Domain) او دویم سټ د قیمتونو د ناحیې (Range) په نوم یادېږي.



یا تابع د هغه مرتبو جوړو سټ دی چې لومړني عناصر یې تکرار شوي نه وي. که $S = \{(1, 4)(2, 3)(3, 2)(4, 3)(5, 4)\}$ وي، نو د S رابطه د یوې تابع ښودونکي ده، ځکه چې د مرتبو جوړو لومړني عناصر یې تکرار شوي نه دي.

$$\text{Domain}(s) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$\text{Range}(s) = \{2, 3, 4\}$$

فعالیت

که $T = \{(1, 4), (2, 3), (3, 2), (2, 4), (1, 5)\}$ وي آیا T یوه تابع بنسبي؟

لومړی مثال: په لاندې جدولونو کې کوم یو، یوه تابع ښکاره کوي؟

(جدول I)	(جدول II)	(جدول III)
Domain Range	Domain Range	Domain Range
د عدد مکعب (عدد)	د عدد مربع (عدد)	د عدد مربع جذر (عدد)
-2 → 8	-2 → 4	0 → 0
-1 → -1	-1 → 1	1 → 1
0 → 0	0 → 0	1 → -1
1 → 1	1 → 1	4 → 2
2 → 8	2 → 4	4 → -2
		9 → 3
		9 → -3

I او II جدولونه تابع ښکاره کوي، لیکن III جدول تابع نه ښکاره کوي، ځکه چې د لومړني سټ (Domain) یو عنصر د دویم سټ (Range) له دوو عنصرو سره اړیکه لري، یا په بل عبارت د مرتبو جوړو لومړني عناصر تکرار شوي دي چې مرتبې جوړې یې:

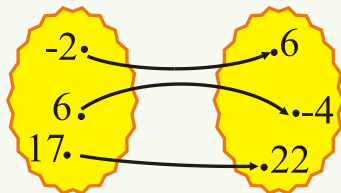
$(1, 1), (1, -1), (4, 2), (4, -2), (0, 0), (9, 3), (9, -3)$ دي او یا دا چې د لومړني سټ د یو عنصر لپاره په دویم سټ کې دوه تصویرونه (Images) موجود دي، ډېره ښه به دا وي چې یوې تابع ته د یو ماشین فکر وکړو، کوم شکل چې د څپرکې په لومړۍ مخ کې راکړل شوی دی، خام مواد یا ورودی (input) یا Domain او خروجي output یا $f(x)$ Range په نامه یادېږي. که A او B د حقیقي عددونو ستونه وي له A څخه B ته هره تابع د حقیقي تابع په نامه یادېږي. مو وي چې: $Range \subseteq codomain$ دی.

دویم مثال: که $f = \{(-5, 3m), (-5, 2m-10), (1, 2)\}$ د یوې تابع ښودونکي وي، د m قیمت پیدا کړئ.

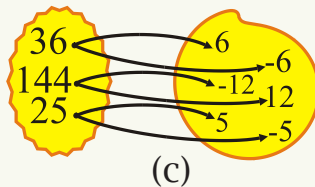
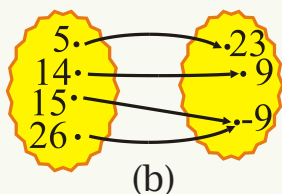
حل: څرنګه چې $-5 = -5$ دي، نو باید $3m = 2m - 10$ سره وي، په نتیجه کې $m = -10$

کېږي په دې معنا ددې لپاره چې f یوه تابع وي، باید $m = -10$ وي.

درېم مثال: له لاندېنښو دیاګرامونو څخه کوم یو یې یوه تابع بنسبي؟



(a)



حل: د a او b دیاگرامونه تابع بنیې، لیکن د c دیاگرام د یوې تابع بنودونکی نه دی. تابع د X او Y د دوو ستونو ترمنځ یوه داسې رابطه ده چې د x د سټ یا (Domain) هر عنصر یوازې د Y د سټ (Range) د یو عنصر سره اړیکه لري چې X ته ازاد متحول او Y ته مقید (مربوط) متحول وایي یا تابع د هغه مرتبو جوړو سټ دی چې لومړني عناصر یې تکرار شوي نه وي.

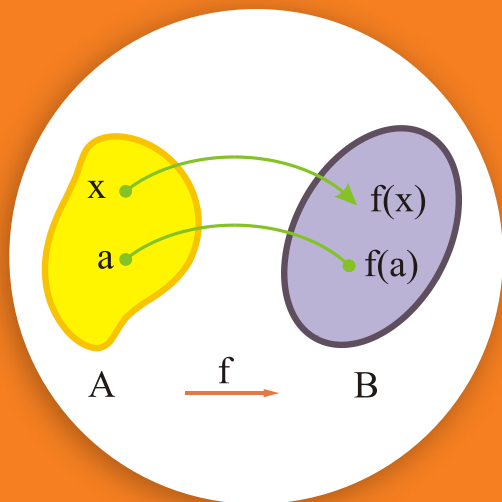
پوښتنې

<p>1</p> <table border="1"> <thead> <tr><th>Domain</th><th>Range</th></tr> </thead> <tbody> <tr><td>-1</td><td>1</td></tr> <tr><td>0</td><td>2</td></tr> <tr><td>1</td><td>3</td></tr> </tbody> </table>	Domain	Range	-1	1	0	2	1	3	<p>2</p> <table border="1"> <thead> <tr><th>Domain</th><th>Range</th></tr> </thead> <tbody> <tr><td>2</td><td>1</td></tr> <tr><td>4</td><td>3</td></tr> <tr><td>6</td><td>5</td></tr> </tbody> </table>	Domain	Range	2	1	4	3	6	5				
Domain	Range																				
-1	1																				
0	2																				
1	3																				
Domain	Range																				
2	1																				
4	3																				
6	5																				
<p>3</p> <table border="1"> <thead> <tr><th>Domain</th><th>Range</th></tr> </thead> <tbody> <tr><td>1</td><td>3</td></tr> <tr><td>3</td><td>5</td></tr> <tr><td>5</td><td>7</td></tr> <tr><td></td><td>9</td></tr> </tbody> </table>	Domain	Range	1	3	3	5	5	7		9	<p>4</p> <table border="1"> <thead> <tr><th>Domain</th><th>Range</th></tr> </thead> <tbody> <tr><td>-1</td><td>0</td></tr> <tr><td>-2</td><td>5</td></tr> <tr><td>-3</td><td>8</td></tr> </tbody> </table>	Domain	Range	-1	0	-2	5	-3	8		
Domain	Range																				
1	3																				
3	5																				
5	7																				
	9																				
Domain	Range																				
-1	0																				
-2	5																				
-3	8																				
<p>5</p> <table border="1"> <thead> <tr><th>Domain</th><th>Range</th></tr> </thead> <tbody> <tr><td>-1</td><td>3</td></tr> <tr><td>0</td><td>3</td></tr> <tr><td>1</td><td>3</td></tr> <tr><td>2</td><td>3</td></tr> </tbody> </table>	Domain	Range	-1	3	0	3	1	3	2	3	<p>6</p> <table border="1"> <thead> <tr><th>Domain</th><th>Range</th></tr> </thead> <tbody> <tr><td>2</td><td>8</td></tr> <tr><td>3</td><td>8</td></tr> <tr><td>4</td><td>9</td></tr> <tr><td>5</td><td>9</td></tr> </tbody> </table>	Domain	Range	2	8	3	8	4	9	5	9
Domain	Range																				
-1	3																				
0	3																				
1	3																				
2	3																				
Domain	Range																				
2	8																				
3	8																				
4	9																				
5	9																				

1 - د مخامخ جدولونو څخه کوم یو یې د تابع بنودونکی دی؟

2 - د لاندې مرتبو جوړو له ستونو څخه کومه یوه یې یوه تابع بنیې؟ د تعریف ساحه (Domain) او د قیمتونو ساحه (Range) یې تعیین کړئ.

- 1- $\{(2,4), (3,6), (4,8), (5,10)\}$
- 2- $\{(-1,4), (0,3), (1,2), (2,1)\}$
- 3- $\{(10,-10), (5,-5), (0,0), (5,5), (10,10)\}$
- 4- $\{(-10,10), (-5,5), (0,0), (5,5), (10,10)\}$
- 5- $\{(0,11), (1,1), (2,1), (3,2), (4,2), (5,2)\}$
- 6- $\{(1,1), (2,1), (3,1), (1,2), (2,2), (3,2)\}$



د تابع د لیکلو طریقه او د یوې تابع د قیمت پیدا کول

- څه وخت یوه معادله د یوې تابع ښکارندویه ده؟
- یوه رابطه څه وخت یوه تابع ښیي؟
- یو جدول څه وخت یوه تابع ښیي؟

د لومړي ځل لپاره سویسي ریاضي پوه اویولر (1707-1783) (Euler) دا عبارت چې x د y تابع ده، د $y = f(x)$ مساوات په شکل وښوده چې $f(x)$ د x لپاره د y یا $f(x)$ د تابع قیمت دی. که f له A څخه B ته یوه تابع وي، په لاندې ډول ښودل کېږي چې

$$f : A \rightarrow B$$

$$y = f(x) \quad \text{یا}$$

په شکل کې x له (input) او $f(x)$ له (output) څخه عبارت دی، تابع گانې د h, g, f او نورو تورو په واسطه ښودل کېږي.

تابع عموماً په 4 طریقو ښودل کېږي.

- 1 - د عبارتونو (جملو) په واسطه (Verbally)
- 2 - د یوه جدول په واسطه یا عددي (Numerically)
- 3 - مشاهده وي: د گراف په واسطه (Visually)
- 4 - د یو واضح فورمول یا معادلې په واسطه یا په الجبري ډول (Algebraically)

فعالیت

که $f(x)$ او $g(x)$ په جدولونو کې په لاندې ډول راکړل شوي وي، د x په راکړل شوو قیمتونو کې ددې تابع گانو قیمت پیدا کړئ. یا په بل عبارت د تابع د تعریف ساحه (Domain) درکړل شوي ده، د تابع اړونده قیمتونه (Range) یې پیدا کړئ.

$$f(x) = \frac{1}{2}x - 4$$

x=	-1	-2	0	2	4
f(x)=	?	?	?	?	?

$$g(x) = x^3 - 1$$

x=	0	-1	1	2
g(x)=	?	?	?	?

لومړی مثال: که $f(x) = x^2 + 3x - 2$ وي $f(2)$ ، $f(0)$ ، $f(-3)$ او $f(a)$ پيدا کړئ.

حل:

د تابع قيمتونه	تابع (Rule)	د تعريف ساحه
8	$f(2) = 2^2 + 3 \cdot 2 - 2 = 4 + 6 - 2$	2
-2	$f(0) = 0^2 + 3 \cdot 0 - 2 = -2$	0
-2	$f(-3) = (-3)^2 + 3(-3) - 2 = 9 - 9 - 2$	-3
$a^2 + 3a - 2$	$f(a) = a^2 + 3a - 2$	a

يا $f(2) = 8$ ، $f(0) = -2$ ، $f(-3) = -2$ ، $f(a) = a^2 + 3a - 2$ يا **دویم مثال:** که $f(x) = x^2 + 3x + 5$ وي، $f(-x)$ ، $f(x+3)$ او $f(2)$ پيدا کړئ.

حل

$$f(2) = 2^2 + 3 \cdot 2 + 5 = 4 + 6 + 5 = 15$$

$$f(x+3) = (x+3)^2 + 3(x+3) + 5 = x^2 + 6x + 9 + 3x + 9 + 5 = x^2 + 9x + 23$$

$$f(-x) = (-x)^2 + 3(-x) + 5 = x^2 - 3x + 5$$

فعالیت

که $g(x) = x^2 - 2x + 7$ وي $g(-x)$ ، $g(x+4)$ او $g(-5)$ پيدا کړئ.

درېم مثال: که $h(x) = 3 - 2x$ او $f(x) = 2x + 6$ وي $f(-1)$ ، $h(6)$ او $f(-1) + h(6)$ پيدا کړئ.

حل:

$$f(-1) = 2(-1) + 6 = -2 + 6 = 4$$

$$h(6) = 3 - 2 \cdot 6 = 3 - 12 = -9$$

$$f(-1) + f(3) = 4 + 2 \cdot 3 + 6 = 4 + 12 = 16$$

خاورم مثال: که $f(x) = ax^2 - bx + 1$ او $f(3) = 10, f(1) = 0$ وي د a او b قيمتونه پيدا

کړئ.

حل:

$$10 = 9a - 3b + 1, \quad 0 = a - b + 1$$

$$10 = 9a - 3b + 1$$

$$0 = a - b + 1$$

$$10 = 6a - 2$$

$$10 = 18 - 3b + 1$$

$$12 = 6a$$

$$3b = 19 - 10$$

$$a = 2$$

$$3b = 9$$

$$b = 3$$

پنځم مثال: له لاندېنيو معادلو څخه کومه يوه بې يوه تابع بنسټي؟

$$a: \quad x^2 + y = 4$$

$$b: \quad x^2 + y^2 = 4$$

حل: هغه وخت يوه معادله يوه تابع بنسټي چې د x د هر قيمت لپاره د y يو قيمت موجود شي.

$$a: \quad x^2 + y = 4 \Rightarrow y = 4 - x^2$$

د x د هر قيمت لپاره y يو قيمت لري، د مثال په ډول که $x = 1$ وي، $y = 4 - 1^2 = 3$ ، نو

$$y = 4 - x^2 \text{ يوه تابع ده.}$$

$$b: \quad x^2 + y^2 = 4 \Rightarrow y = \pm\sqrt{4 - x^2}$$

د x د يوه قيمت لپاره y دوه قيمتونه لري، نو y يوه تابع نه ده.

د مثال په ډول که $x = 1$ وي، $y = \pm\sqrt{3}$ يا $(1, \sqrt{3})$ او $(1, -\sqrt{3})$ چې لومړني عناصر بې

تکرار شوي دي.

فعالیت

وښیاست چې د $y - x^2 = 1$ او د $x^3 - y = 2$ معادلې د تابع ښودونکي دي او د $x^2 + y^2 = 4$ معادله د یوې تابع ښودونکي نه ده.

یوه تابع د $y = f(x)$ په شکل لیکل کېږي، د تابع د قیمت د پیدا کولو لپاره د x قیمت د تابع په معادله کې وضع کوو، د تابع قیمت په لاس راځي او یوه معادله هغه وخت د یوې تابع ښکارندویه وي چې د هر x لپاره یو y وجود ولري.

پوښتنې

1- که $g(x) = x^2 + x - 2$ او $f(x) = 2x^2 + 3x - 1$ وي $g(2) - g(-3)$ ، $f(-3)$ ، $f(-2)$ او $\frac{f(0) \cdot g(-2)}{f(-3)}$ پیدا کړئ.

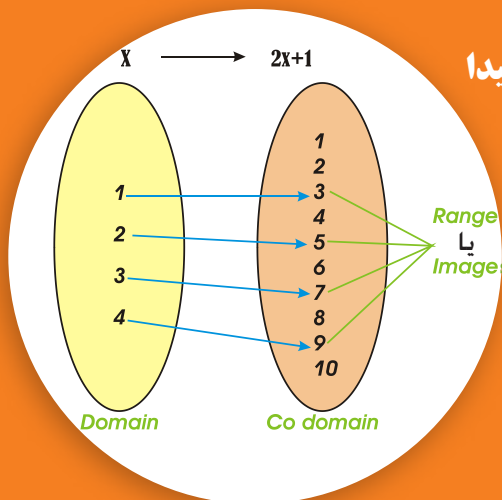
2- که $f(x) = x^2 - x$ او $g(x) = \sqrt{x+4}$ وي. $f(-2)$ ، $g(0)$ او $f(x-1)$ پیدا کړئ.

3- که $g(x) = 3\sqrt{x}$ او $h(x) = 1 + 4x$ وي $h(16)$ ، $h(-3)$ او $g(-4)$ پیدا کړئ.

4- $f(x) = \frac{15}{x-3}$ ، $g(x) = 16 + 3x - x^2$ او $h(x) = \sqrt{25 - x^2}$ وي $f(6)$ ، $g(-7)$ او $f(0) + g(4) - h(-3)$ پیدا کړئ.

5- که $g(x) = \sqrt{x+40} - 2$ وي $g(12)$ ، $g(5)$ ، $g(4)$ ، $g(0)$ او $g(-2)$ پیدا کړئ.

6- آیا د $x^2 + xy = 1$ معادله یوه تابع ښيي؟



د یوې تابع د تعریف د ساحې پیدا کول

آیا کېدای شي چې د هرې تابع د تعریف ساحه ټول حقيقي عددونه وي؟

فعالیت

- د x کوم قیمتونه د تابع د تعریف په ساحه کې شامل وي؟
- د $f(x) = \frac{1}{x-4}$ تابع د تعریف ساحه وټاکئ.
- آیا $g(x) = 3\sqrt{x}$ تابع د تعریف په ساحه کې $x = -4$ شامل دی؟

د یوې تابع د تعریف په ساحه (Domain) کې د x ټول هغه قیمتونه شامل وي چې تابع په هغه قیمتونو کې تعریف شوي وي یا د تابع قیمت یو حقيقي عدد وي.

لومړی مثال: د لاندې تابع گانو د تعریف ساحه (Domain) وټاکئ.

$$f(x) = \frac{1}{x-3}$$

$$h(x) = x^2 - 7x$$

$$K(x) = \frac{6x}{x^2 - 9}$$

$$g(x) = \sqrt{x}$$

$$R(x) = \sqrt{3x+12}$$

حل:

- د $f(x) = \frac{1}{x-3}$ تابع په $x = 3$ کې تعریف شوي نه ده، ځکه چې $x = 3$ لپاره د تابع مخرغ صفر کېږي یا د $x = 3$ لپاره د تابع قیمت یو حقيقي عدد نه دی نو:

$$\text{Dom } f = \{x \in \mathbb{R} / x \neq 3\}$$

- د $g(x) = \sqrt{x}$ په تابع کې ددې لپاره چې د تابع قیمت یو حقيقي عدد (Real number)

وي، بايد $x \geq 0$ وي، نو $\text{Dom } g = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 0\}$ يا $\text{dom } g = [0, \infty)$
 • $h(x) = x^2 - 7x$ په تابع کې، څرنگه چې د x د هر قيمت لپاره د $h(x)$ تابع تعريف شوي ده، نو: (د حقيقي عددونو سټ) $\text{Dom } h = \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$

• د $k(x) = \frac{6x}{x^2 - 9}$ يا $k(x) = \frac{6x}{(x-3)(x+3)}$ تابع د تعريف ساحه عبارت ده له:
 $\text{Dom } k(x) = \{x \in \mathbb{R} / x \neq 3, x \neq -3\}$
 • د $R(x) = \sqrt{3x+12}$ په تابع کې بايد $3x+12 \geq 0$ وي، نو $x \geq -4$ کېږي.
 $\text{Dom } R = \{x \in \mathbb{R} / x \geq -4\} = [-4, \infty)$

فعاليت

د لاندې تابع گانو د تعريف ساحه (Domain) پيدا کړئ.

$$f(x) = x^2 + 3x - 17, \quad g(x) = \frac{5x}{x^2 - 49}, \quad h(x) = \sqrt{9x - 27}$$

دويم مثال: د $y = \sqrt{x-3}$ تابع د تعريف ساحه پيدا کړئ.

$$x - 3 \geq 0 \Rightarrow x \geq 3$$

$$\text{Dom } y = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 3\} = [3, \infty)$$

درېم مثال: د لاندې تابع گانو د تعريف ساحه پيدا کړئ.

$$f(x) = \sqrt{x-2} \quad \text{Dom } f = \{x / x \geq 2\} \quad \text{يا} \quad [2, \infty)$$

$$g(x) = \frac{2x+3}{x-4} \quad \text{dom } g = \mathbb{R} - \{4\} \quad \text{يا} \quad (-\infty, 4) \cup (4, \infty)$$

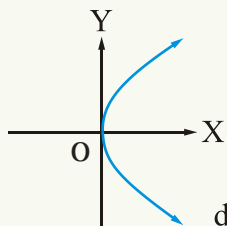
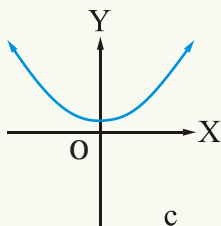
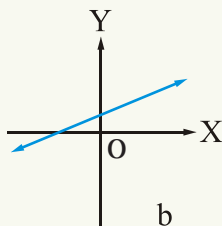
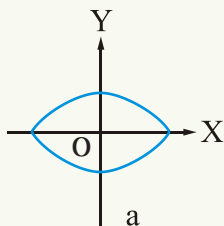
$$\text{dom } g = \{x \in \mathbb{R} / x \neq 4\} \quad \text{يا د سټ په شکل:}$$

$$h(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 3}$$

$$\text{Dom } h = \{x / x \leq -1 \text{ يا } x \geq 3\} \quad \text{يا} \quad (-\infty, -1] \cup [3, \infty)$$

د یوې تابع گراف او د گراف له مخې د یوې تابع پیژندنه (Graph of a function and vertical line test)

په راکرل شوو شکلونو کې کوم گراف د یوې تابع گراف دی؟



فعالیت

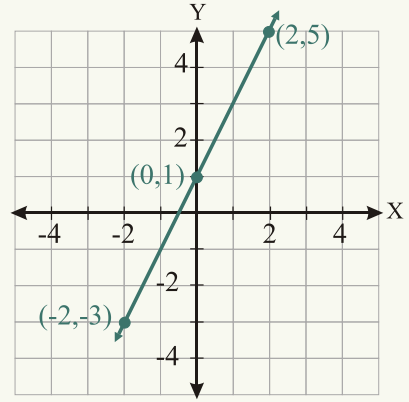
- د Y له محور سره یو موازي خط رسم کړئ.
- وگورئ چې دا خط د تابع گراف په څو نقطو کې قطع کوي؟
- که دا خط گراف په یوه نقطه کې قطع کړي آیا دا گراف به د یوې تابع گراف وي؟
- که دا خط، گراف له یوې نقطې څخه په زیاتو نقطو کې قطع کړي آیا دا گراف به د یوې تابع گراف وي؟

که $f(x)$ یوه حقیقي تابع وي، د $f(x)$ د تابع گراف د $(x, f(x))$ د هغه مرتبو جوړو سټ دی چې د $y=f(x)$ په معادله کې صدق وکړي.

یا د یوې تابع گراف د XOY د مستوي د هغو نقطو سټ دی چې $\{(x, y) / y = f(x)\}$ صدق کړي او $x \in \text{dom } f(x)$ وي.

لومړي مثال: د $y = f(x) = 2x + 1$ تابع گراف رسم کړئ.

input	تابع	output	مرتبې جوړې
x	$2x + 1$	$y = f(x)$	(x, y)
0	$2(0) + 1$	1	$(0, 1)$
2	$2(2) + 1$	5	$(2, 5)$
-2	$2(-2) + 1$	-3	$(-2, -3)$



دویم مثال: د $f(x) = x^2 + 1$ او $y = -1$ تابع گانو گراف رسم کړئ.

د تعریف او د قیمتونو ساحې یې هم پیدا کړئ.

حل:

$$f(x) = x^2 + 1$$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
f(x)	10	5	2	1	2	5	10

د $(-3, 10)$, $(-2, 5)$, $(-1, 2)$, $(0, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 5)$, $(3, 10)$ مرتبو جوړو په نظر

کې نیولو سره د تابع گراف رسم کړئ:

$$f(-3) = (-3)^2 + 1 = 9 + 1 = 10$$

$$f(-2) = (-2)^2 + 1 = 4 + 1 = 5$$

$$f(-1) = (-1)^2 + 1 = 1 + 1 = 2$$

$$f(0) = 0^2 + 1 = 0 + 1 = 1$$

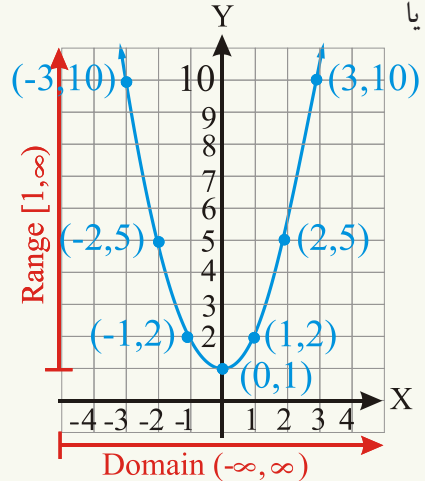
$$f(1) = 1^2 + 1 = 2$$

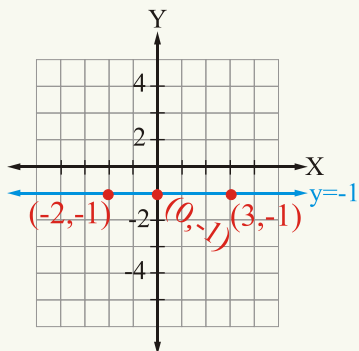
$$f(2) = 2^2 + 1 = 5$$

$$f(3) = 3^2 + 1 = 10$$

$$\text{Dom } f = (-\infty, \infty)$$

$$\text{Range } f = (1, \infty)$$





$$f(x) = -1$$

Input	Output	مرتبہ جوړه
x	$y = f(x)$	(x, y)
-2	-1	$(-2, -1)$
0	-1	$(0, -1)$
3	-1	$(3, -1)$

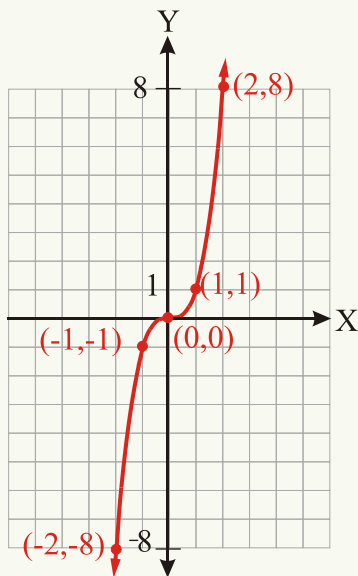
$$\text{Dom } y = \mathbb{R}$$

$$\text{Range } y = -1$$

فعالیت

د $f(x) = x^2 - 4$ تابع گراف رسم کریئ.

دریم مثال: د $y = f(x) = x^3$ تابع گراف رسم کریئ.

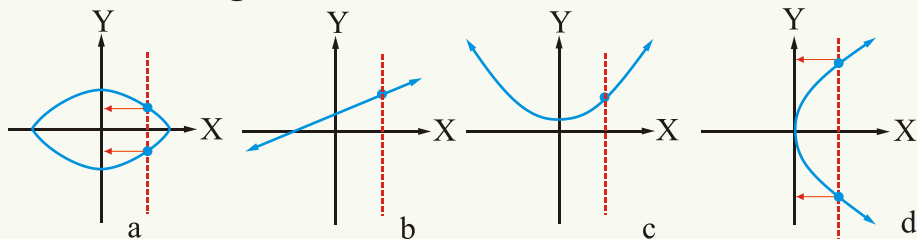


$$f(x) = x^3$$

x	2	1	0	-1	-2
$y = f(x)$	8	1	0	-1	-8

که یو عمودي خط (د y له محور سره موازي) یو گراف یوازې په یوه نقطه کې قطع کړي، نو دا گراف د یوې تابع گراف دی او که له یوې نقطې څخه یې په زیاتو نقطو کې قطع کړي، نو دا گراف د یوې تابع گراف نه دی.

څلورم مثال: په لاندې راکړل شوو گرافونو کې لیدل کېږي چې b او c د تابع گانو گرافونه دي، ځکه چې عمود خط یې گرافونه په یوه نقطه کې قطع کړي دي، لیکن a او d گرافونه د تابع گرافونه نه دي، ځکه چې عمودي خط گرافونه له یوې څخه په زیاتو نقطو (دوو نقطو) کې قطع کړي دي یا د یوه X لپاره د Y یا $f(x)$ دوه قیمتونه وجود لري، نو د a او d گرافونه د تابع گرافونه نه دي.



د تابع د تعریف په ناحیه domain کې هغه عددونه شامل وي چې تابع په کې تعریف شوي وي یا د تابع قیمت یو حقيقي عدد وي. د یوې تابع گراف د XOY په مستوي کې د S د نقطو سټ دی، په دې ډول چې $S = \{(x, y) | y = f(x)\}$ چې X د تابع د تعریف په ساحه کې شامل وي، که د Y له محور سره موازي خط گراف یوازې په یوه نقطه کې قطع کړي، دا گراف د یوې تابع گراف دی.

پوښتنې

1 - د لاندې تابع گانو د تعریف ساحې (Domains) پیدا کړئ.

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$$

$$g(x) = 2x - 5$$

$$h(x) = \sqrt{x^2 - 4}$$

$$f(x) = \sqrt{x+1}$$

$$g(x) = |x - 3|$$

$$h(x) = \frac{3}{x-4}$$

$$f(x) = \frac{7x}{x^2 - 16}$$

$$g(x) = \frac{2}{(x+3)(x-7)}$$

$$h(x) = \frac{4}{x^2 + 11x + 24}$$

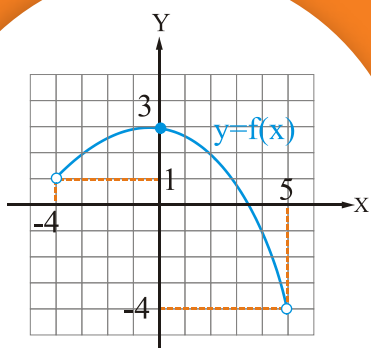
$$f(x) = \frac{3}{x^2 + 4}$$

2 - د $f(x) = x^2$ او $f(x) = -x^2$ د تابع گانو گرافونه رسم کړئ.

3 - د $g(x) = 2x - 1$ تابع گراف رسم کړئ که $x = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$ وي.

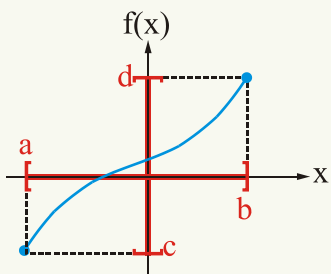
4 - د $x = y^2 - 2$ گراف رسم کړئ او آیا دا د یوې تابع گراف دی؟ ولې؟

د گراف له مخې د یوې تابع د تعریف او د قیمتونو د ناحیو او د تابع د قیمتونو پیدا کول:

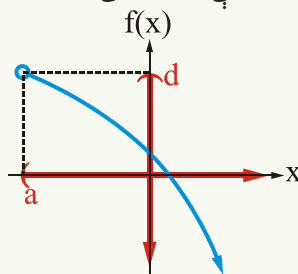


$Dom f(x) = (-4, 5)$
 $Range f(x) = (-4, 3]$

آیا د توابعو په لاندېنیو را کرل شوو گرافونو کې د تابع د تعریف ساحه (Domain) او د قیمتونو ساحه (Range) یې ټاکلای شئ؟

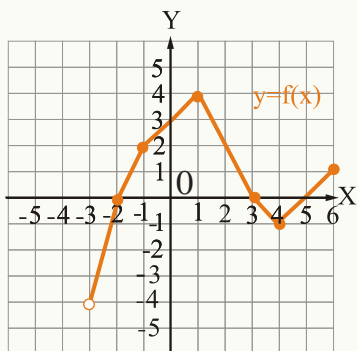


$Dom f = [a, b]$
 $Range f = [c, d]$



$Dom f = (a, \infty)$
 $Range f = (-\infty, d]$

فعالیت

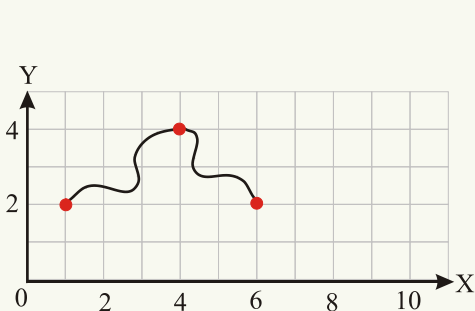


شکل وگورئ لاندېنیو پوښتنو ته ځواب ورکړئ:

- د شکل له مخې د f تابع د تعریف او قیمتونو ساحه پیدا کړئ.
- آیا د -4 عدد د f د تابع د قیمتونو په ساحه کې شامل دی؟ ولې؟
- آیا د -3 عدد د f د تعریف په ساحه کې شامل دی؟ ولې؟
- آیا د 6 عدد د f د تعریف په ساحه کې شامل دی؟

لیدل کېږي چې $f(-1) = 2$ او $f(1) = 4$ دي او هم د شکل له مخې د تابع د تعریف ساحه له -3 څخه تر 6 پورې ده، لیکن $-3 \notin \text{dom } f$ او $6 \in \text{dom } f$ ، نو $\text{dom } f = (-3, 6]$ او په همدې ډول د $f(x)$ تابع د قیمتونو ساحه (Range) له -4 څخه تر 4 پورې ده، خو $-4 \notin \text{Range } f$ نو $\text{Range } f = (-4, 4]$.

لومړی مثال: په راکړل شوو شکلونو کې د تابع گانو د تعریف او د قیمتونو ساحې پیدا کړئ.



(1)



(2)

حل:

د لومړي شکل په گراف کې د تعریف ساحه د 1 او 6 تر منځ ټول حقيقي عددونه دي او د قیمتونو

ساحه یې د 2 او 4 تر منځ ټول حقيقي عددونه دي یا: $1 \leq x \leq 6$ او $2 \leq y \leq 4$

د (2) شکل په گراف کې $2 \leq x \leq 10$ یا $\text{Dom} = [2, 10]$

$1 \leq y \leq 8$ یا $\text{Range} = [1, 8]$

دویم مثال: لاندې شکل په پام کې ونیسئ.

• $f(-2)$ ، $f(3)$ او $f(5)$ پیدا کړئ.

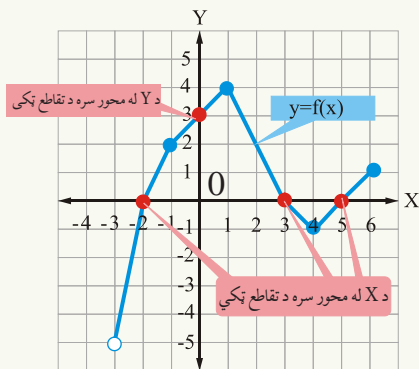
• د X او Y له محورونو سره د گراف د تقاطع د

نقطو وضعیه کمیات پیدا کړئ.

حل: څرنګه چې د X له محور سره د گراف د تقاطع په

ټکي کې $y = 0$ وي، نو $f(-2) = 0$ ، $f(3) = 0$

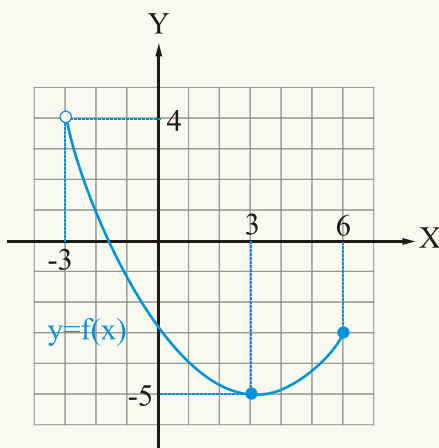
او $f(5) = 0$ دي، نو گراف د X محور د



$(-2, 0)$, $(3, 0)$ او $(5, 0)$ په نقطو کې قطع کوي.

څرنگه چې د y له محور سره د گراف د تقاطع په ټکي کې $x = 0$ دی $f(0) = 3$ ، نو گراف د y محور د $(0, 3)$ په نقطه کې قطع کوي.

درېم مثال: په لاندې شکل کې د f تابع Domain او Range پیدا کړئ $f(3)$ او $f(6)$ هم په لاس راوړئ.



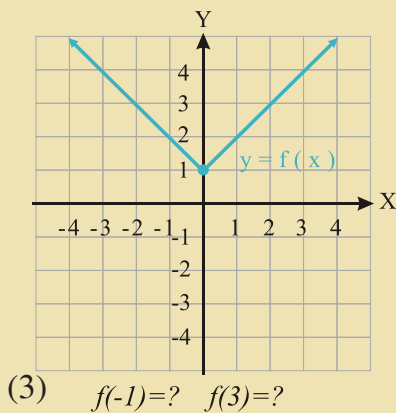
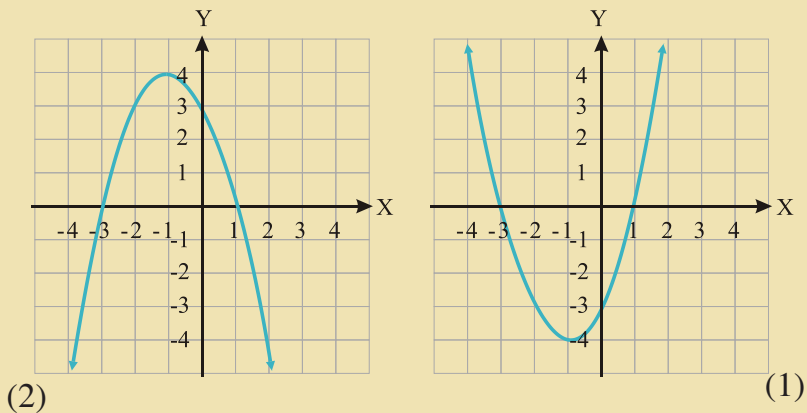
حل: لیدل کېږي چې د تعریف ساحه یې له -3 - څخه تر 6 پورې ده، خو -3 د تعریف په ساحه کې شامل نه دی.

$$\text{Domain } f(x) = -3 < x \leq 6 \text{ یا } (-3, 6]$$

او د قیمتونو ساحه یې: $\text{Range } f(x) = -5 \leq y < 4$ یا $[-5, 4)$ ، $f(6) = -3$ او $f(3) = -5$ ده.

پوښتنې

په راځرل شوو شکلونو کې:



a- تابع د تعريف ساحه

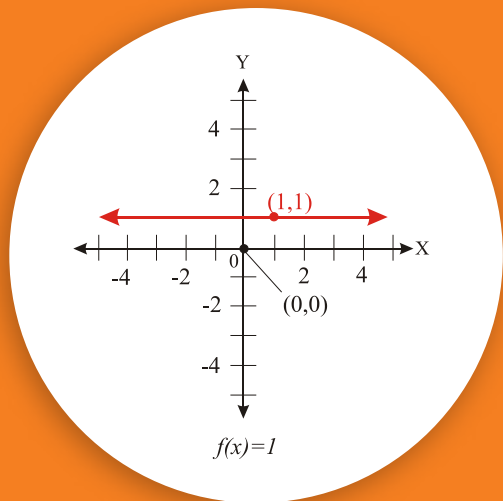
b- تابع د قيمتونو ساحه

c- د X له محور سره د گراف د تقاطع ټکي

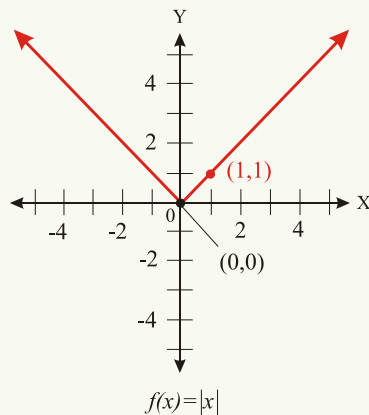
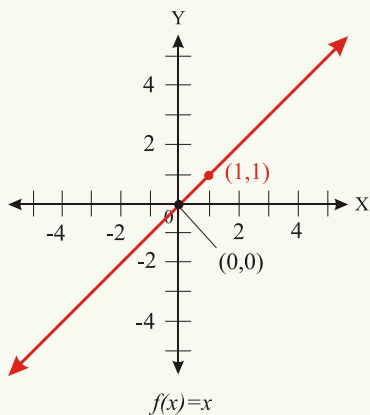
d- د Y له محور سره د تقاطع ټکي او په دريم شکل کې د تابع غوښتل شوي قيمتونه پيدا کړئ.

ځينې خاصې تابع گانې او گرافونه يې

د هغو تابع گانو نومونه واخلي چې گرافونه يې راكړل شوي دي



توابع ډېر ډولونه لري چې ځينې خاصې تابع گانې ترڅېړنې لاندې نيسو:
ثابته تابع، د عينيت تابع، د مطلقه قيمت تابع، څو معادله يي تابع او د علامې تابع



فعاليت

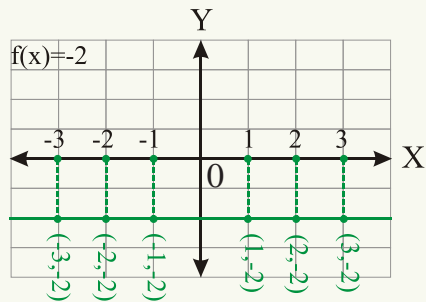
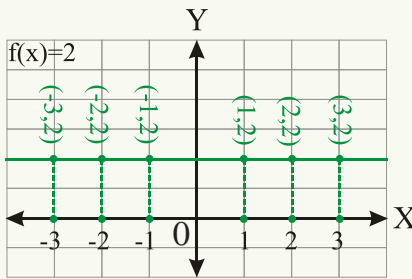
- ثابتي تابع ته ولې ثابته تابع وايي؟
- آیا د عينيت تابع د تعريف او د قيمتونو ساحې سره مساوي وي؟
- آیا د مطلقه قيمت د تابع د قيمتونو ساحه منفي قيمتونه اخېستلای شي؟

ثابته تابع (Constant Function)

که X او Y د حقيقي عددونو ستونه وي، د $f: x \rightarrow y$ يا $f(x) = y$ په تابع کې که Y له يوه ثابت عدد سره مساوي وي يا $y = f(x) = c$ چې c يو ثابت عدد دی، نو Y د ثابتې تابع په نوم يادېږي. د مثال په ډول: $f(x) = 2$ ، $f(x) = -3$ او $f(x) = -2$ او داسې نورې ثابتې تابع گانې دي.

لومړی مثال: $f(x) = 2$ او $f(x) = -2$ تابع گانو گرافونه رسم کړئ.

$f(x) = 2$							$f(x) = -2$						
$x =$	1	2	3	-1	-2	-3	$x =$	1	2	3	-1	-2	-3
$f(x) =$	2	2	2	2	2	2	$f(x) =$	-2	-2	-2	-2	-2	-2

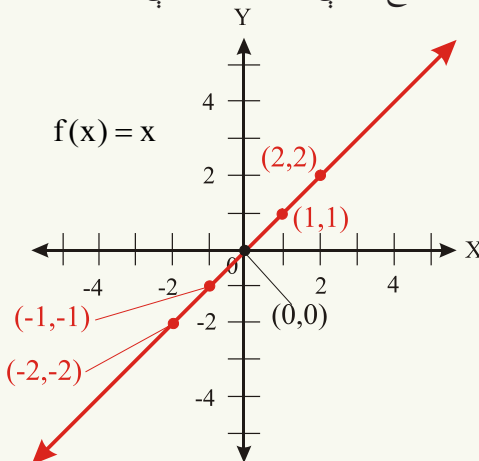


په دې معنا چې په ثابتې تابع کې د تعريف د ساحې د هر عنصر تصوير همغه ثابت عدد دی.

د عينيت تابع (Identity function): هغه تابع ده چې د تعريف د ساحې هر عنصر ته له

خپل ځان سره ارتباط ورکړي يا $f(x) = x$ د عينيت د تابع په نامه يادېږي.

مثال: د $f(x) = x$ د تابع گراف رسم کړئ.



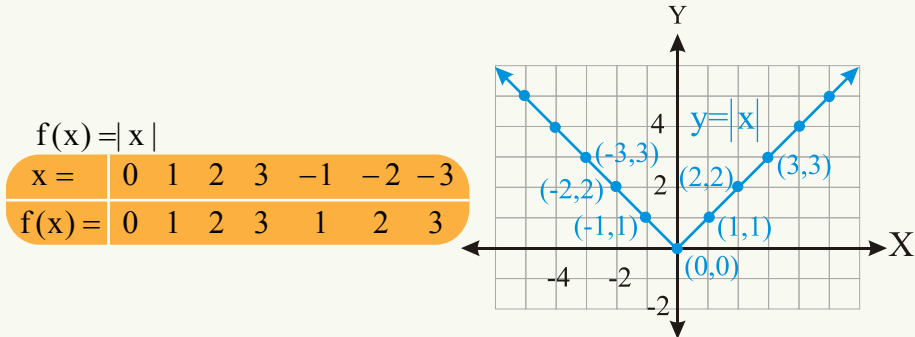
$f(x) = x$						
$x =$	0	1	2	-1	-2	...
$f(x) =$	0	1	2	-1	-2	...

د مطلقه قیمت تابع (Absolute value function)

د مطلقه قیمت تابع $f(x) = |x|$ په لاندې ډول تعریف شوی ده:

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

لومړی مثال: د $f(x) = |x|$ تابع گراف رسم کړئ.



لیدل کېږي چې د مطلقه قیمت د تابع د تعریف ساحه ټول حقيقي عددونه او د قیمتونو ساحه یې $[0, \infty)$ ده.

څو معادله یې تابع (Piecewise function) او گراف یې

آیا کېدای شي چې یوه تابع د تعریف په ساحه کې د دوو یا څو معادلو په واسطه تعریف شوي وي؟

لومړی مثال: که $f(x) = \begin{cases} 2x + 3: & x < 4 \\ x^2 - 1: & 4 \leq x \leq 10 \end{cases}$ وي، نو $f(-5)$, $f(8)$ او د f تابع د تعریف

ساحه پیدا کړئ.

حل: څرنګه چې $4 < -5$ دی، نو په لومړۍ معادله کې وضع کېږي، لرو چې:

$$f(-5) = 2(-5) + 3 = -10 + 3 = -7$$

او څرنګه چې د 8 عدد د 4 او 10 ترمنځ واقع دی $4 < 8 < 10$ ، نو په دویمه معادله کې وضع کېږي لرو چې:

$$f(8) = 8^2 - 1 = 64 - 1 = 63$$

د f تابع د تعریف ساحه په لومړۍ معادله کې $(-\infty, 4)$ او په دویمه معادله کې $[4, 10]$ ده، نو د

f د تعريف ساحه د $(-\infty, 10]$ څخه عبارت ده.

فعاليت

$$g(x) = \begin{cases} -\frac{11}{60}x + 15 & : 0 \leq x < 60 \\ \frac{1}{5}x - 8 & : 60 \leq x \leq 90 \end{cases} \quad \text{که چېرې وي،}$$

وښايست چې $g(80) = 8$ او $g(30) = 9.5$ دی.

د څو معادله يي تابع گراف (Graph of function defined piecewise)

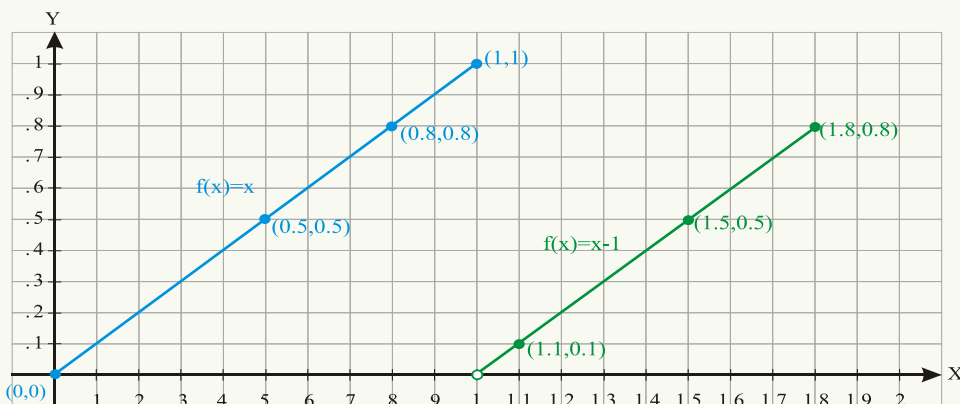
دويم مثال: د $f(x)$ تابع د تعريف او قيمتونو ساحې پيدا او گراف يې هم رسم کړئ که:

$$f(x) = \begin{cases} x & : 0 \leq x \leq 1 \\ x - 1 & : 1 < x \leq 2 \end{cases} \text{ وي.}$$

حل: د لومړۍ معادلې د تعريف ساحه $[0,1]$ او د دويمې معادلې د تعريف ساحه $(1,2]$ ده چې په

نتيجه کې د $f(x)$ د تعريف ساحه $[0,2]$ ده.

د گراف د رسمولو لپاره، د دواړو برخو گراف رسموو په ډول:



$$y = f(x) = x$$

x	0	0.5	0.8	1
y = f(x)	0	0.5	0.8	1

$$y = f(x) = x - 1$$

x	1,1	1,5	1,8
f(x)	0,1	0,5	0,8

په نتیجه کې دوه مستقیم خطونه په لاس راځي چې دواړه د $f(x)$ تابع گراف دی.

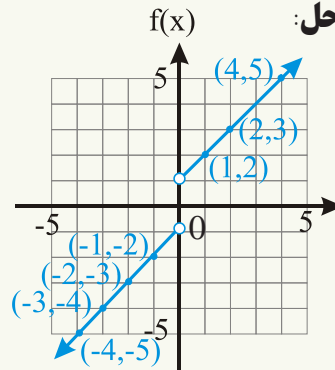
فعالیت

که: $f(x) = \begin{cases} x \Leftarrow 0 \leq x \leq 4 \\ x-1 \Leftarrow 0 < x < -4 \end{cases}$ وي، $f(0), f(-2), f(2)$ پیدا کړئ او ددې تابع گراف هم رسم کړئ.

دریم مثال: د $f(x) = \begin{cases} x-1 \Leftarrow x < 0 \\ x+1 \Leftarrow x > 0 \end{cases}$ تابع گراف رسم د تعریف او د قیمتونو ساحې یې وټاکئ.

حل:

x	1	2	4	-1	-2	-3	-4
f(x)	2	3	5	-2	-3	-4	-5



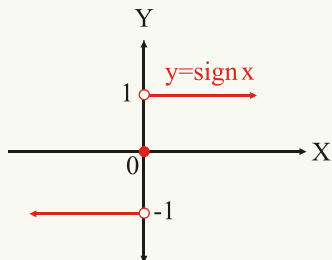
لیدل کېږي چې د تابع د تعریف په ساحه کې صفر شامل نه دی ($x \neq 0$) یا

$Dom f(x) = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ او د قیمتونو ناحیه (Range) یې عبارت دی له:

$$(-\infty, -1) \cup (1, \infty) \text{ یا } y < -1 \text{ او } y > 1$$

د علامې تابع (Sign Function): د علامې تابع چې په $\text{sgn}(x)$ سره ښودل کېږي د څو معادله یې تابع یو مثال دی چې په لاندې ډول تعریف شوي ده:

$\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & : x > 0 \\ 0 & : x = 0 \\ -1 & : x < 0 \end{cases}$ د دې تابع د تعريف ناحيه د حقيقي عددونو سټ او د قيمتونو ساحه



(Range) يې $\{-1, 0, 1\}$ ده.

$$\text{Dom}_{\text{sgn}} = \mathbb{R} \quad \text{Range}_{\text{sgn}} = \{-1, 0, 1\}$$

$f(x) = c$ ثابت تابع ، $f(x) = x$ د عينيت تابع او $f(x) = |x|$ د مطلقه قيمت تابع ده چې د تعريف ساحه يې ټول حقيقي عددونه او د قيمتونو ساحه يې صفر او مثبت حقيقي عددونه دي.

پوښتنې

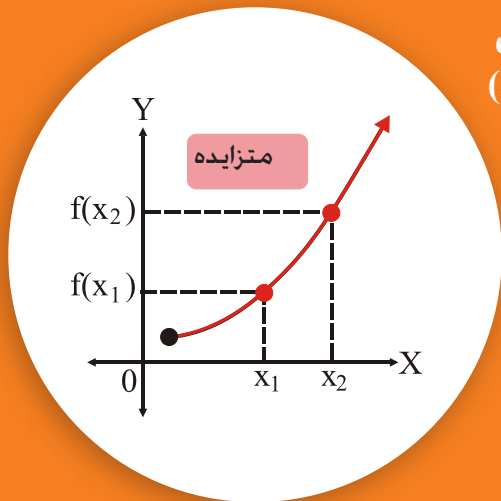
1- د $f(x) = -5$ ، $g(x) = \frac{1}{2}$ او $h(x) = 4$ تابع گانو گرافونه رسم کړئ.

2- د $f(x) = |x| - 3$ تابع گراف رسم کړئ.

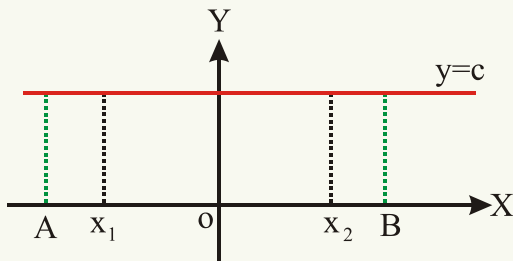
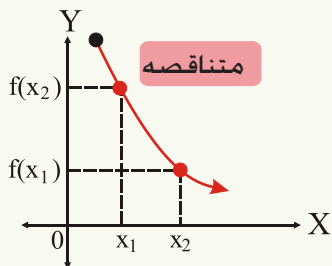
3- که $f(x) = \begin{cases} -x & : x < 0 \\ x & : x \geq 0 \end{cases}$ وي $f(0)$ ، $f(-2,3)$ او $f(16)$ پيدا کړئ.

4- که $h(x) = \begin{cases} x+1 & : -1 \leq x < 0 \\ -x+1 & : 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$ وي د $h(x)$ تابع د تعريف ساحه پيدا کړئ.

متزایدي او متناقصې تابع گانې (Increasing and decreasing functions)



- په راکړل شوو گرافونو کې کوم گراف د متزایدي تابع گراف دی؟
- کوم گراف د متناقصې تابع گراف دی؟
- کوم گراف نه متزاید دی او نه متناقص؟



- 1 - یوه تابع په یوه انټروال کې متزایده ده که $x_1 < x_2$ وي، په نتیجه کې $f(x_1) < f(x_2)$ شي.
 - 2 - یوه تابع په یوه انټروال کې متناقصه ده که $x_1 < x_2$ وي، په نتیجه کې $f(x_1) > f(x_2)$ شي.
 - 3 - که $x_1 < x_2$ وي او په نتیجه کې $f(x_1) = f(x_2)$ شي دا تابع نه متناقصه ده او نه متزایده. لکه: څرنګه چې په شکل کې لیدل کېږي دا یوه ثابت تابع ده.
- مثال:** د $f(x) = x^2$ او $f(x) = -x^2$ د تابع گانو گراف په کومو انټروالونو کې متزاید او په کومو انټروالونو کې متناقص دی؟

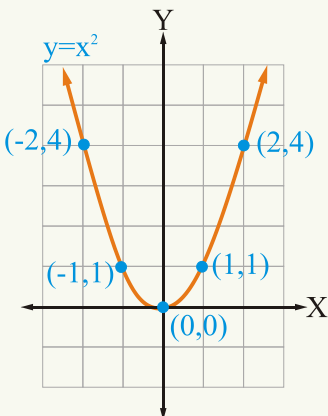
x	0	1	-1	2	-2
$f(x) = x^2$	0	1	1	4	4

x	0	1	-1	2	-2
$f(x) = -x^2$	0	-1	-1	-4	-4

$$-1 < 2$$

$$f(-1) < f(2)$$

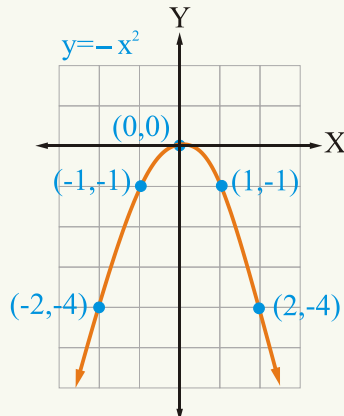
$$1 < 4$$



$$-1 < 2$$

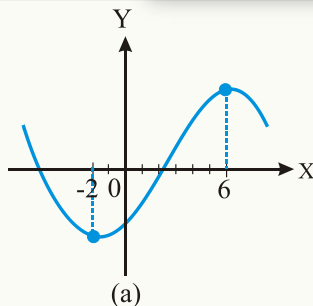
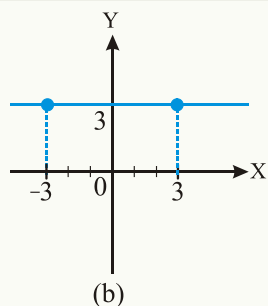
$$f(-1) > f(2)$$

$$-1 > -4$$



ليدل کيږي چې د $f(x) = x^2$ تابع د $(-\infty, 0)$ په انټروال کې متناقصه او د $(0, \infty)$ په انټروال کې متزايدة ده، ليکن د $f(x) = -x^2$ تابع په $(-\infty, 0)$ انټروال کې متزايدة او د $(0, \infty)$ په انټروال کې متناقصه ده.

فعاليت

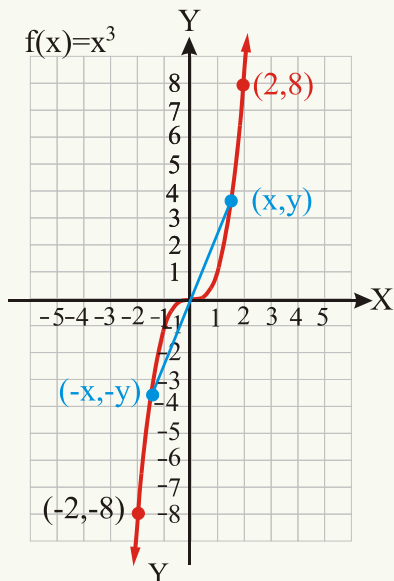


په راکرل شوو شکلونو کې د تابع گراف په کومو انټروالونو کې متزايد په کومو کې متناقص دی، کوم گراف نه متزايد او نه متناقص دی؟

جفتي او طاقی تابع گانې (Even and Odd Functions):

1- د $f(x)$ تابع يوه جفته تابع ده که چېرې $f(-x) = f(x)$ وي، په دې معنا که په تابع کې x پر $-x$ عوض کړو، د تابع په قيمت کې تغير رانه شي.

2- د $f(x)$ تابع يوه طاقه تابع ده که چېرې $f(-x) = -f(x)$ وي يا دا چې که په تابع کې د



X پر خای $-X$ عوض کرو، د تابع قیمت منفي شي.

لومړی مثال: د $f(x) = x^2$ او $f(x) = x^3$ په

تابع گانو کې کومه تابع جفته او کومه يوه طاقه ده؟

حل: په دواړو تابع گانو کې

د X پر خای $-X$ عوض کوو:

$$f(-x) = (-x)^3 = (-x)(-x)(-x) = -x^3$$

نو د $f(x) = x^3$ تابع يوه طاقه تابع ده،

ځکه چې $f(-x) = -f(x)$ کېږي لکه:

$$\text{په } f(x) = x^2 \text{ او د } f(-2) = -f(2) = -8$$

تابع کې لرو چې:

$$f(-x) = (-x)^2 = (-x)(-x) = x^2$$

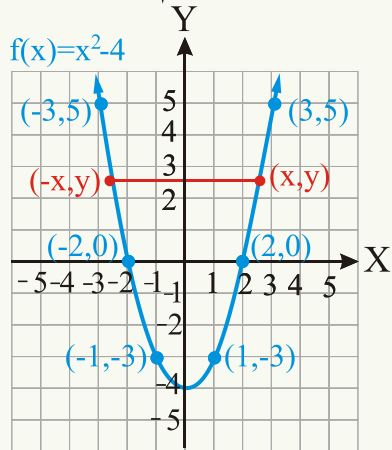
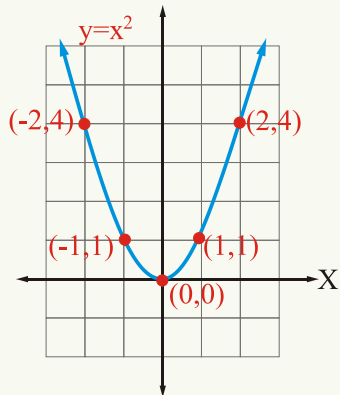
نو $f(x) = x^2$ يو جفته تابع ده، ځکه چې

$$f(-2) = f(2) = 4 \text{ کېږي لکه: } f(-x) = f(x)$$

ليدل کېږي چې د جفتو تابع گانو گرافونه نظر د Y محور ته

او د طاقو تابع گانو گرافونه نظر د وضعيه کمياتو مبدا ته سره

متناظر دي.



دویم مثال: د $f(x) = x^2 - 4$ او

$g(x) = x^2 + 3x + 2$ په تابع گانو کې کومه يوه

جفته او کومه يوه طاقه ده؟

حل:

$$f(-x) = (-x)^2 - 4 = x^2 - 4 = f(x)$$

نو دا تابع جفته ده، په شکل کې هم ليدل کېږي، دوه

نقطې د $(3,5)$ او $(-3,5)$ تابع د $x = 3$ او $x = -3$

لپاره د تابع قیمت سره مساوي دی چې د (5) عدد دی.

$$f(-3) = f(3) = 5$$

يعنې: همدارنگه د $x = 2$ او $x = -2$ لپاره د تابع قيمت سره مساوي دی چې صفر دی، نو په نتيجه کې تابع جفته ده.

$$g(x) = (-x)^2 + 3(-x) + 2 = x^2 - 3x + 2$$

چې دا تابع نه جفته او نه طاقه ده.

درېم مثال: که f له حقيقي عددونو څخه حقيقي عددونو ته يوه طاقه تابع وي او

$$f(-2) = k + 5 \quad \text{او} \quad f(2) = 2k + 3$$

وي، د k قيمت پيدا کړئ.

حل: څرنگه چې f يوه طاقه تابع ده، نو: $f(-x) = -f(x)$

$$f(-2) = -f(2)$$

د طاقې تابع د تعريف په اساس:

$$k + 5 = -(2k + 3)$$

$$k + 5 = -2k - 3$$

$$3k = -8$$

$$k = -\frac{8}{3}$$

که د $f(x)$ په تابع کې $x_1 < x_2$ وي او په نتيجه کې $f(x_1) < f(x_2)$ شي تابع متزايد او که $x_1 < x_2$ وي او $f(x_1) > f(x_2)$ شي، تابع متناقصه ده که $f(-x) = f(x)$ وي تابع جفته او که $f(-x) = -f(x)$ شي تابع طاقه ده د جفتو تابع گانو گراف نظر د Y محور ته او د طاقو تابع گانو گراف نظر د وضعيه کمياتو مبداء ته سره متناظر دي.

پوښتنې

1- د لاندېنيو تابع گانو څخه کومه يوه يې متزايد، کومه يوه يې متناقصه او کومه يوه نه متزايد او نه متناقصه ده؟

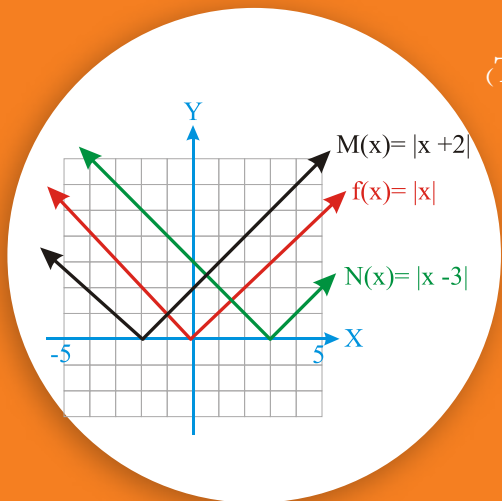
$$f(x) = x^3 + x, \quad f(x) = x^2 + x, \quad f(x) = x^2 - x^4$$

2- د لاندېنيو راکرل شوو تابع گانو څخه کومه يوه جفته او کومه يوه طاقه ده؟

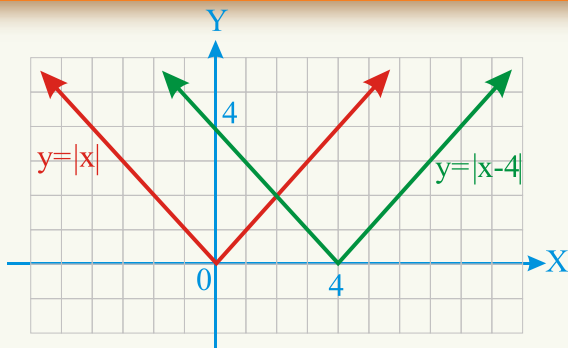
$$f(x) = x, \quad f(x) = |x|$$

$$f(x) = x^4, \quad f(x) = x^5$$

د گرافونو انتقال (Translation)



آيا کولای شئ چې ووايئ راکړل شوي گرافونه
يو له بله سره څه اړيکه لري؟



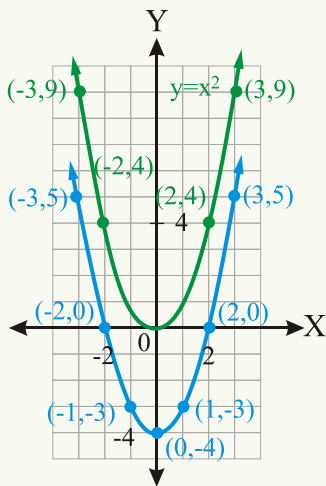
فعاليت

- د $f(x) = x^2$ تابع گراف رسم کړئ.
- د $f(x) = x^2 + 4$ تابع گراف رسم کړئ.
- د $f(x) = x^2 - 4$ تابع گراف رسم کړئ.
- ووايست چې پورتنی گرافونه يو له بله سره څه ډول اړيکه لري؟

که د $f(x) = x^2$ گراف رسم کړو، څنگه کولای شو د $f(x) = x^2$ د گراف له انتقال څخه د

$f(x) = x^2 - 4$ تابع گراف رسم کړو؟

د $y = x^2$ د گراف د (x, y) د هرې نقطې لپاره د $(x, y - 4)$ اړونده نقطه د $y = x^2 - 4$ په گراف واقع ده، نو د $y = x^2$ تابع گراف هره نقطه د 4 واحدو په اندازه بنسټه خواته انتقال کوي ترڅو د $y = x^2 - 4$ گراف لاس ته راشي، لکه: څنگه چې په شکل کې لیدل کېږي، دا انتقال



د عمودي انتقال (Vertical Translation) په نوم يادېږي.

انتقال په دوه ډوله دی: عمودي انتقال او افقي انتقال.

1- عمودي انتقال (Vertical Translation):

عمودي انتقال پورته او يا ښکته خواته وي.

که $c > 0$ وي:

1: که د $y = f(x)$ د تابع گراف د c په اندازه پورته خواته

انتقال شوی وي، نو د $y = f(x) + c$ گراف لاس ته راځي.

2: که د $y = f(x)$ د تابع گراف د c په اندازه ښکته خواته

انتقال شوی وي، نو د $y = f(x) - c$ گراف لاس ته راځي.

لومړی مثال:

د $y = x^2 + 2$ او $y = x^2 - 3$ تابع گانو

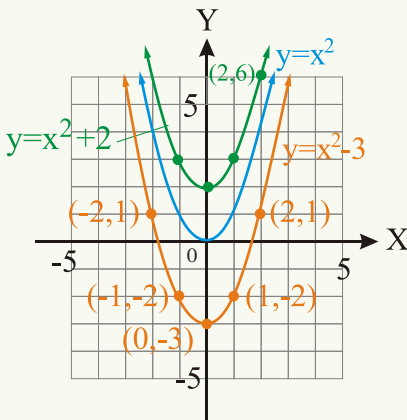
گرافونه د $y = x^2$ تابع له گراف سره څرنگه اړیکه لري؟ درې واړه گرافونه د وضعيه کمياتو

په عين سيستم کې رسم کړئ.

حل: د $y = x^2$ تابع گراف د (2) واحدو په اندازه پورته خواته انتقالوو، ترڅو د $y = x^2 + 2$

تابع گراف په لاس راشي او که د $y = x^2$ تابع گراف د (3) واحدو په اندازه ښکته خواته نقل کړو،

د $y = x^2 - 3$ تابع گراف لاس ته راځي:



$x =$	0	1	2	-1
$y = x^2$	0	1	4	1
$y = x^2 + 2$	2	3	6	3
$y = x^2 - 3$	-3	-2	1	-2

يا عمودي انتقال داسې هم تعريفولای شو:

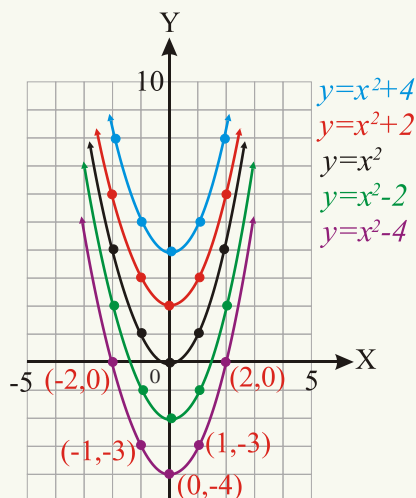
که د تابع په گراف کې د y پر ځای $y - a$ وضع کړو داسې چې a يو ثابت عدد دی، نو گراف د

$|a|$ په اندازه په عمودي ډول انتقال کوي که $a > 0$ وي، انتقال په عمودي ډول پورته خواته او که

$a < 0$ وي گراف د $|a|$ په اندازه په عمودي ډول ښکته خواته انتقال کوي.

دويم مثال: د $y = x^2$ تابع گراف له انتقاله څخه د $y = x^2 + 2$, $y = x^2 - 2$, $y = x^2 + 4$ او $y = x^2 - 4$ تابع گانو گرافونه د وضعيه کمياتو په عين سيستم کې رسم او يو له بله سره بې پرته کړئ.

$y = x^2$		$y = x^2 + 2$		$y = x^2 + 4$		$y = x^2 - 2$		$y = x^2 - 4$	
x	y	x	y	x	y	x	y	x	y
0	0	0	2	0	4	0	-2	0	-4
± 1	1	± 1	3	± 1	5	± 1	-1	± 1	-3
± 2	4	± 2	6	± 2	8	± 2	2	± 2	0



افقي انتقال: (Horizontal Translation)

که د تابع په گراف کې د x پر ځای $x - b$ وضع شي چې b يو ثابت عدد دی. د تابع گراف د $|b|$ په اندازه په افقي ډول انتقال کوي، که $b > 0$ وي گراف بڼي خواته او که $b < 0$ وي، گراف کېڼي خواته انتقال کوي.

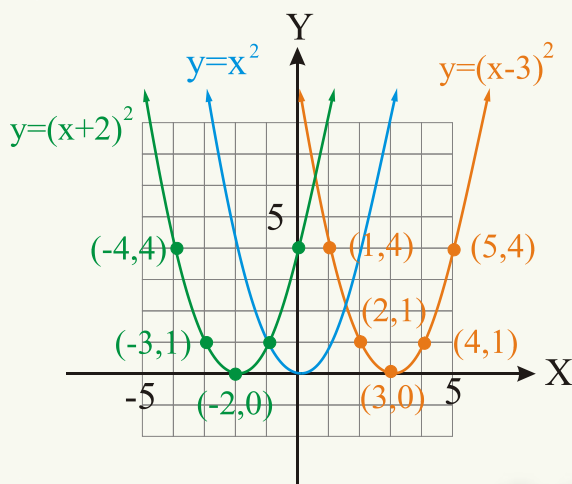
دويم مثال: د $y = x^2$ گراف له انتقال څخه د $y = (x + 2)^2$ او $y = (x - 3)^2$ گرافونه رسم کړئ.

حل: لکه څنګه چې په شکل کې ليدل کېږي که د $y = x^2$ تابع گراف د 2 واحدو په اندازه کېڼي

خواته انتقال کړو، د $y = (x+2)^2$ گراف لاس ته راځي، که د $y = x^2$ گراف 3 واحده بڼي خواته انتقال کړو، د $y = (x-3)^2$ د تابع گراف لاس ته راځي، لکه: څنگه چې په شکل کې هم لیدل کېږي.

x	-2	0	-1	-3	-4	...
$y = (x+2)^2$	0	4	1	1	4	...

x =	3	4	2	5	1	...
$y = (x-3)^2$	0	1	1	4	4	...



فعالیت

د $f(x) = |x|$ تابع گراف له انتقال څخه د $g(x) = |x+2|$ او $h(x) = |x-3|$ تابع گانو گرافونه د وضعیه کمیانو په عین سیستم کې رسم کړئ.

د عمودي او افقي انتقالونو ترکیب:

(Combining Horizontal and Vertical Shifts)

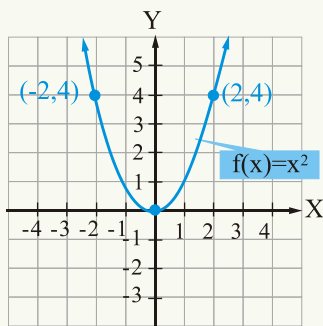
څلورم مثال: د $g(x) = (x+1)^2$ او $h(x) = (x+1)^2 - 3$ د تابع گانو گرافونه رسم کړئ.

حل: لومړی د $f(x) = x^2$ تابع گراف رسموو چې د دویمې درجې تابع د معیاري گراف په نامه یادېږي لومړی د گراف پر مخ د $(0,0)$ ، $(2,4)$ او $(-2,4)$ درې نقطې ټاکو.

بیا د $g(x) = (x+1)^2$ تابع گراف رسموو چې د $f(x) = x^2$ د تعریف له ساحې سره د (1) عدد جمع کوو، ترڅو چې د $f(x) = x^2$ گراف کینې خواته د یو واحد په اندازه نقل شي، په دویم شکل کې ښودل شوی دی. په پای کې د $f(x) = (x+1)^2 - 3$ تابع گراف درسمولو لپاره د دویم شکل گراف د 3 واحدونو په اندازه په عمودي ډول ښکته خواته انتقالوو چې گراف یې په دریم شکل کې ښودل شوی دی:

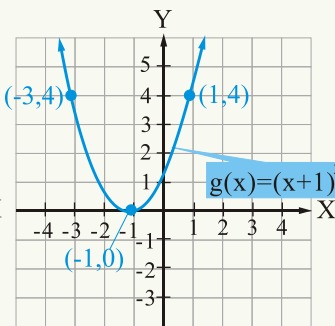
$$f(x) = x^2$$

x	0	2	-2
f(x)	0	4	4



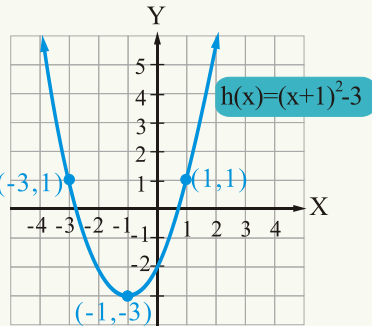
$$g(x) = (x+1)^2$$

x	-1	1	-3
f(x)	0	4	4



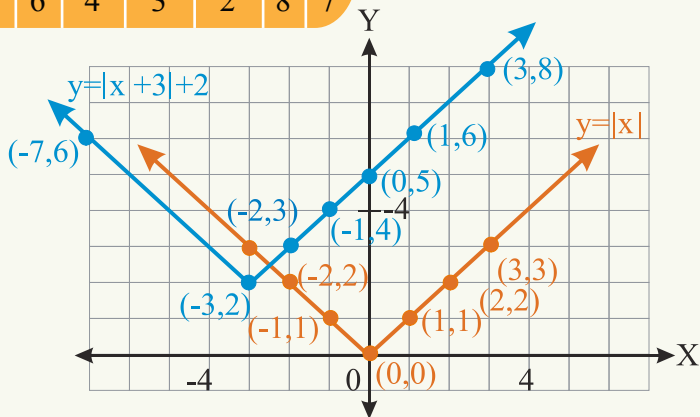
$$f(x) = (x+1)^2 - 3$$

x	1	-3	-1
f(x)	1	1	-3



پنځم مثال: د $y = |x|$ تابع گراف له انتقال کولو څخه د $y = |x+3| + 2$ تابع گراف رسم کړئ.

x	0	1	-1	-2	-3	3	2
$y = x $	0	1	1	2	3	3	2
$y = x+3 + 2$	5	6	4	3	2	8	7



انتقال په (2) ډول دی، (عمودي او افقي)

عمودي انتقال: که C یو مثبت عدد وي.

1- که چېرې د $y = f(x)$ تابع گراف د C واحدونو په اندازه په عمودي ډول پورته خواته انتقال شي، د $y = f(x) + c$ تابع گراف لاس ته راځي.

2- که د $y = f(x)$ تابع گراف د C واحدونو په اندازه په عمودي ډول ښکته خواته انتقال شي د $y = f(x) - c$ تابع گراف لاس ته راځي.

افقي انتقال: که C یو مثبت عدد وي.

1- که د $y = f(x)$ تابع گراف د C واحدونو په اندازه کيښي خواته انتقال شي، د $y = f(x + c)$ گراف لاس ته راځي.

2- که د $y = f(x)$ تابع گراف د C واحدونو په اندازه ښي خواته انتقال شي، د $y = f(x - c)$ د تابع گراف لاس ته راځي.

پوښتنې

1- د $y = x^2$ تابع گراف له انتقال څخه د لاندېنيو تابع گانو گرافونه رسم کړئ.

$$g(x) = x^2 - 2, \quad g(x) = x^2 - 1, \quad g(x) = (x - 2)^2$$

2- د $f(x) = \sqrt{x}$ تابع گراف رسم کړئ او ددې له انتقال څخه د $f(x) = \sqrt{x} + 2$ او $f(x) = \sqrt{x + 2}$ تابع گانو گرافونه رسم کړئ.

3- د $f(x) = |x|$ تابع گراف رسم کړئ او ددې گراف له انتقال څخه د

$$g(x) = |x + 4|, \quad g(x) = |x - 4|, \quad h(x) = |x - 4|$$

4- د $f(x) = x^3$ تابع گراف له انتقال څخه د $g(x) = x^3 - 3$ او $g(x) = (x - 3)^3$ تابع گانو گرافونه رسم کړئ.

د تابع گانو عمليې

(Operations on functions)

$$f(x) = \sqrt{4-x}$$

$$g(x) = \sqrt{3+x}$$

$$(f+g)(x) = ?$$

که $f(x) = x+2$ او $g(x) = 2x+11$

وي $(f+g)(x)$ او $(f-g)(x)$ پيدا

کولای شی؟

د تابع گانو څلورگونې عمليې په لاندې ډول تعريف شوي دي:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \quad (f-g)(x) = f(x) - g(x)$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) \quad \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad (g(x) \neq 0)$$

$$\text{dom}(f+g)(x) = \text{dom } f \cap \text{dom } g$$

$$\text{dom}(f-g)(x) = \text{dom } f \cap \text{dom } g$$

$$\text{dom}(f \cdot g)(x) = \text{dom } f \cap \text{dom } g$$

$$\text{dom}\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \text{dom } f \cap \text{dom } g - \{x / g(x) = 0\}$$

لومړی مثال: که $f(x) = 2x+1$ او $g(x) = x^2 - 4$ وي، $(f+g)(x)$ پيدا کړئ او هم د دې تابع د تعريف ساحه په لاس راوړئ.

حل:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(f+g)(x) = (2x+1) + (x^2 - 4) = 2x - 3 + x^2 = x^2 + 2x - 3$$

$$\text{dom } g = \mathbb{R} \quad \text{او} \quad \text{dom } f = \mathbb{R}$$

$$\text{dom}(f+g)(x) = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$$

دویم مثال: که $f(x) = x^2 - 3$ او $g(x) = 4x + 5$ وي، $(f+g)(x)$ او $(f+g)(3)$ پيدا کړئ.

حل:

$$(f + g)(x) = (x^2 - 3) + (4x + 5) = x^2 + 4x + 2$$

$$(f + g)(3) = 3^2 + 4(3) + 2 = 9 + 12 + 2 = 23$$

$$\text{dom } g = \mathbb{R} \quad \square \quad \text{dom } f = \mathbb{R}$$

$$\text{dom}(f + g)(x) = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$$

فعالیت

کہ $f(x) = 3x^2 + 4x - 1$ او $g(x) = 2x + 7$ وي، $(f + g)(x)$ او $(f + g)(4)$ پيدا کریں۔

دریم مثال: کہ $f(x) = 2x - 1$ او $g(x) = x^2 + x - 2$ وي، $(f - g)(x)$ او $(f \cdot g)(x)$

پيدا کریں او د تعریف ساحې یې ہم وپاکیں۔

حل

$$(f - g)(x) = (2x - 1) - (x^2 + x - 2) = 2x - 1 - x^2 - x + 2 = -x^2 + x + 1$$

خرنگه چې $\text{dom } f = \mathbb{R}$ او $\text{dom } g = \mathbb{R}$

$$\text{dom}(f - g)(x) = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$$

$$(f \cdot g)(x) = (2x - 1)(x^2 + x - 2) = 2x^3 + x^2 - 5x + 2$$

$$\text{dom}(f \cdot g)(x) = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{2x - 1}{x^2 + x - 2} = \frac{2x - 1}{(x + 2)(x - 1)}$$

$$\text{dom}\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} - \{x / g(x) = 0\}$$

$$\text{dom}\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \{x \in \mathbb{R} / x \neq -2 \text{ او } x \neq 1\}$$

فعالیت

کہ $f(x) = x - 5$ او $g(x) = x^2 - 1$ وي، نو $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ ، $(f \cdot g)(x)$ او $(f - g)(x)$ پيدا کریں۔

خلورم مثال: که $f(x) = x+3$ او $g(x) = x-1$ وي، $(f-g)(x)$ ، $(f \cdot g)(x)$ او $(\frac{f}{g})(x)$ پيدا کړئ.

حل:

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = x+3 - (x-1) = x+3 - x+1 = 4$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = (x+3)(x-1) = x^2 + 2x - 3$$

څرنگه چې د $f(x)$ د تعريف په ساحه کې ټول حقيقي عددونه شامل دي (X هر حقيقي عدد اخيستلای شي) يا $dom f = IR$ په همدې ډول: $dom g = IR$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x+3}{x-1} \quad (x \neq 1) \quad \begin{array}{l} dom(f-g)(x) = IR \cap IR = IR \\ dom(f \cdot g)(x) = IR \cap IR = IR \end{array}$$

$$dom\left(\frac{f}{g}\right)(x) = IR - \{1\}$$

$$dom\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \{x \in IR / x \neq 1\} \quad \text{يا}$$

$$dom\left(\frac{f}{g}\right)(x) = (-\infty, 1) \cup (1, \infty) \quad \text{يا}$$

پنځم مثال: که $f(x) = \sqrt{4-x}$ او $g(x) = \sqrt{3+x}$ وي، $f+g$ ، $f-g$ ، $f \cdot g$ او $\frac{f}{g}$ پيدا کړئ او د تعريف ناحیه (Domain) يې وټاکئ.

حل:

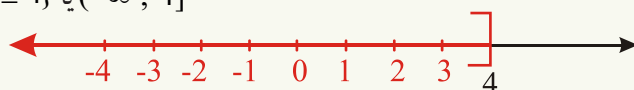
$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = \sqrt{4-x} + \sqrt{3+x}$$

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = \sqrt{4-x} - \sqrt{3+x}$$

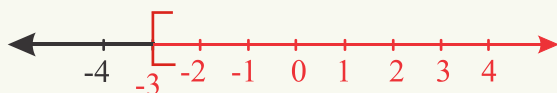
$$\begin{aligned} (f \cdot g)(x) &= f(x) \cdot g(x) = (\sqrt{4-x})(\sqrt{3+x}) = \sqrt{(4-x)(3+x)} \\ &= \sqrt{12+x-x^2} \end{aligned}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\sqrt{4-x}}{\sqrt{3+x}} = \sqrt{\frac{4-x}{3+x}}$$

$$dom f : \{4-x \geq 0, x \leq 4\} \text{ يا } (-\infty, 4]$$

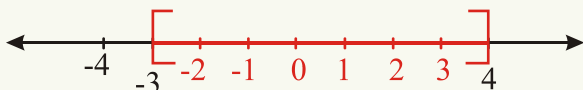


$$\text{dom } g: \{x/3 + x \geq 0, x \geq -3\} \text{ یا } [-3, \infty)$$

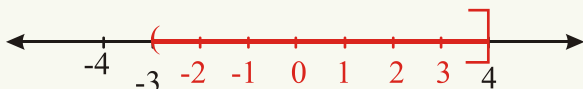


$$(-\infty, 4] \cap [-3, \infty) = [-3, 4]$$

چې $[-3, 4]$ د $f+g$, $f-g$ او $f \cdot g$ د تابع گانو د تعريف ساحه ده.



$$\text{Dom } \frac{f}{g} = (-3, 4] \text{ نو: } g(-3) = 0 \text{ چې خرنګه کې تعريف په ناحیه کې څرنگه چې}$$



له ثابت عدد سره د تابع د ضرب حاصل

که c یو ثابت عدد او f یوه تابع وي، نو حاصل ضرب یې عبارت دی له:

$$(c \cdot f)(x) = c \cdot f(x)$$

شپږم مثال: که $f(x) = x^2 - x + 2$ او $c = 5$ وي.

$$(5 \cdot f)(x) = 5 \cdot f(x) = 5(x^2 - x + 2) = 5x^2 - 5x + 10$$

پوښتنې

لاندې تابع گانې په پام کې ونیسئ .

$$1 - (f+g)(x), (f-g)(x), (f \cdot g)(x) \text{ او } \left(\frac{f}{g}\right)x \text{ پیدا کړئ.}$$

2- د تعريف ناحیې یې وټاکئ.

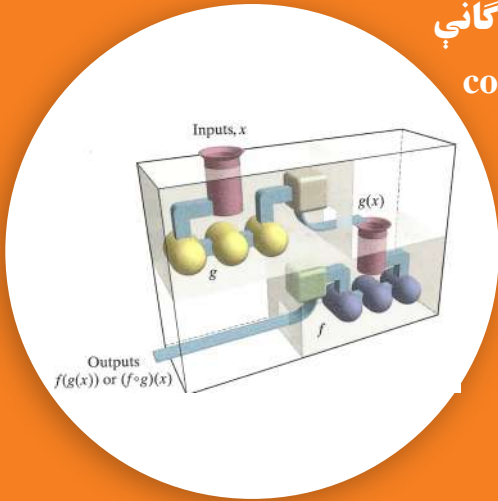
$$a: f(x) = 2x + 3 \quad , \quad g(x) = x - 1 \quad , \quad b: f(x) = x - 5 \quad , \quad g(x) = 3x^2$$

$$c: f(x) = 2x^2 - x - 3 \quad , \quad g(x) = x + 1 \quad , \quad d: f(x) = \sqrt{x} \quad , \quad g(x) = x - 5$$

$$e: f(x) = \sqrt{x+4} \quad , \quad g(x) = \sqrt{x-1} \quad , \quad f: f(x) = \sqrt{3x} \quad , \quad g(x) = \sqrt{x^2 - 1}$$

د تابع گانو ترکیب یا مرکبې تابع گانې

composition of functions or composite functions



فعالیت

- که $f(x) = x^2 - 2$ او $g(x) = x + 3$ وي، $(f \circ g)(x)$ او $(g \circ f)(x)$ پیدا کړئ.
- په کوم حالت کې $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$ وي.
- $(f \circ f)(x)$ او $(g \circ g)(x)$ پیدا کړئ.

که چېرې f او g د x تابع گانې وي د f ترکیب له g سره د $(f \circ g)(x)$ یا $f(g(x))$ سره بنودل کېږي $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f[g(x)]$ د $(f \circ g)(x)$ د تعریف ساحه عبارت له x څخه ده چې x د g د تعریف په ساحه کې او $g(x)$ د f د تعریف په ساحه کې شامل وي.

یا: د $(f \circ g)$ تعریف ساحه: $\text{Dom}(f \circ g) = \{x \in \mathbb{R} / x \in \text{dom } g, g(x) \in \text{dom } f\}$

1- چې x د g د تعریف په ساحه کې شامل وي.

2- $g(x)$ د f د تعریف په ساحه کې شامل وي.

په پورتنی شکل کې $(f \circ g)(x)$ تابع د دوو ماشینو په واسطه بنودل شوي ده چې په لومړی ماشین کې ورودی x ، (in put) دی او خروجی (output) یې $g(x)$ ده، په دویم ماشین کې (input) یې $g(x)$ او (output) یې $(f \circ g)(x)$ دی. که

$$x \xrightarrow{g} \boxed{g(x)} \xrightarrow{f} f(g(x))$$

په f د $g(x)$ د تعریف په ساحه کې شامل نه وي، نو په

$$x \xrightarrow{f} \boxed{f(x)} \xrightarrow{g} g(f(x))$$

دویم ماشین (f) کې داخلیدلای نه شي.

لومړی مثال: که $f(x) = x^2 - 1$ او $g(x) = 3x$ وي $(f \circ g)(x)$ او $(g \circ f)(x)$ پيدا کړئ.

حل:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(3x) = (3x)^2 - 1 = 9x^2 - 1$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2 - 1) = 3(x^2 - 1) = 3x^2 - 3$$

ليدل کېږي چې:

$$(f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x)$$

$$9x^2 - 1 \neq 3x^2 - 3$$

دویم مثال: که $f(x) = 3x - 4$ او $g(x) = x^2 + 6$ وي $(f \circ g)(x)$ او $(g \circ f)(x)$ پيدا کړئ.

حل: په حقيقت کې په $(f \circ g)(x)$ کې د $g(x)$ تابع د f په تابع کې د (Domain) يا x ځای نیسي

$$f(g(x)) = f(x^2 + 6) = 3(x^2 + 6) - 4 = 3x^2 + 18 - 4 = 3x^2 + 14$$

$$g(f(x)) = (g \circ f)(x) = g(3x - 4) = (3x - 4)^2 + 6 = 9x^2 - 24x + 22$$

ښکاره خبره ده چې د $(f \circ g)(x)$ او $(g \circ f)(x)$ د تعريف ساحه ټول حقيقي عددونه دي.

فعالیت

که $f(x) = x + 6$ او $g(x) = x - 6$ وي، وښیاست چې $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$ دی.

دریم مثال: که $g(x) = 1 - x$ او $f(x) = \sqrt{x}$ وي:

لومړی د $f \circ g$ او $g \circ f$ د تعريف ساحې پيدا کړئ، بيا $f \circ g$ او $g \circ f$ په لاس راوړئ.

حل: د f تابع د تعريف ساحه $[0, \infty)$ او د g تابع د تعريف ساحه ټول حقيقي عددونه $(-\infty, \infty)$ دي.

يا: $\text{Dom}f = [0, \infty)$ $\text{Dom}g = (-\infty, \infty)$

يا: $\text{Dom}(f \circ g) = \{x / x \in \text{dom}g, g(x) \in \text{dom}f\}$

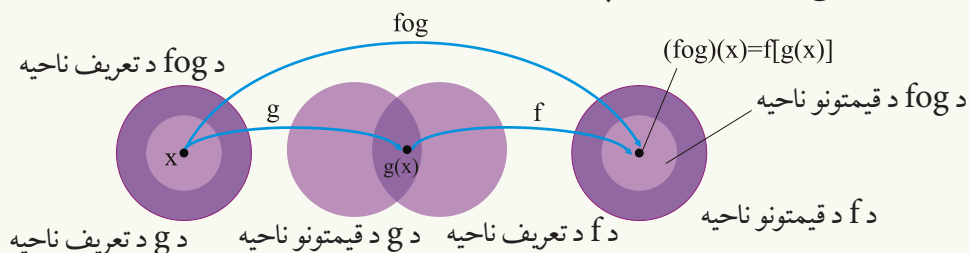
$$\text{Dom}(f \circ g) = \{x / x \in \mathbb{R}, 1-x \geq 0\}, -x \geq -1 \Rightarrow x \leq 1 = (-\infty, 1]$$

$$\text{Dom}(g \circ f) = \{x / x \in \text{dom } f, f(x) \in \text{dom } g\} = \{x / x \geq 0, \sqrt{x} \in \mathbb{R}\} = (0, \infty)$$

$$(f \circ g)(x) = f(1-x) = \sqrt{1-x}$$

$$(g \circ f)(x) = g(\sqrt{x}) = 1 - \sqrt{x}$$

د مرکبو تابع گانو د تعريف د ساحې د لا روښانتيا لپاره لاندې شکل وگورئ.



څلورم مثال: که $h(x) = \sqrt{3x^2 + 1}$ وي، په دوو طريقو سره وښايست چې د $h(x)$ تابع د کومو

دوو تابع گانو له ترکيب څخه په لاس راغلي ده؟

حل: د $h(x)$ تابع کولای شو د $(g \circ f)(x)$ او $(j \circ k)(x)$ دوو تابع گانو د ترکيب په شکل وليکو.

په دې ډول که: $f(x) = 3x^2 + 1$ او $g(x) = \sqrt{x}$ وي.

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(3x^2 + 1) = \sqrt{3x^2 + 1}$$

په همدې ډول کولای شو د $h(x)$ تابع د $(j \circ k)(x)$ د دوو تابع گانو د ترکيب په شکل وليکو. په دې

ډول چې: $j(x) = \sqrt{x+1}$ او $k(x) = 3x^2$ وي.

$$(j \circ k)(x) = j(k(x)) = j(3x^2) = \sqrt{3x^2 + 1}$$

پنځم مثال: که $f(x) = \frac{x}{x+2}$ ، $(x \neq -2)$ وي، $f(f(x))$ او $(f \circ f)(2)$ پيدا کړئ.

حل:

$$(f \circ f)(x) = \frac{\frac{x}{x+2}}{\frac{x}{x+2} + 2} = \frac{\frac{x}{x+2}}{\frac{x+2x+4}{x+2}} = \frac{x}{x+2} \cdot \frac{x+2}{3x+4} = \frac{x}{3x+4}$$

$$(f \circ f)(2) = ? \quad (f \circ f)(x) = \frac{x}{3x+4} \Rightarrow (f \circ f)(2) = \frac{2}{3 \cdot 2 + 4} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$

$$(f \circ f \circ f)(x) = \frac{\frac{x}{x+2}}{3\left(\frac{x}{x+2}\right)+4} = \frac{\frac{x}{x+2}}{\frac{3x}{x+2}+4} = \frac{\frac{x}{x+2}}{\frac{3x+4x+8}{x+2}}$$

$$= \frac{x}{x+2} \cdot \frac{x+2}{7x+8} = \frac{x}{7x+8}$$

فعالیت

که $f(x) = x^2 - 2$ او $g(x) = x + 3$ وي، $(f \circ g)(x)$ ، $(g \circ f)(x)$ ، $(g \circ f)(-2)$ او $(f \circ g)(3)$ پيدا کړئ.

پوښتنې

1- که $f(x) = -3x + 2$ او $g(x) = x^3$ وي:

$(\frac{g}{f})(x)$ ، $(f \cdot g)(x)$ ، $(g - f)(x)$ ، $(f - g)(x)$ ، $(f + g)(x)$ پيدا او د تعريف ساحې يې هم وټاکئ.

2- که $f(x) = x^2 - 3$ او $g(x) = \sqrt{x-3}$ وي، $(f \cdot g)(x)$ ، $(\frac{f}{g})(x)$ او $(\frac{g}{f})(x)$ پيدا کړئ.

3- که $f(x) = x^2 + 1$ ، $g(x) = \frac{1}{x}$ ، $h(x) = \sqrt{4-x^2}$ او $k(x) = \sqrt{3x+4}$ وي، د $(f \cdot g)(x)$ ، $(\frac{f}{g})(x)$ ، $(h \cdot k)(x)$ او $(\frac{h}{k})(x)$ تابع گانو د تعريف ساحې پيدا کړئ.

4- که $f(x) = 3x - 2$ ، $g(x) = x^2$ وي $(g \circ f)(3)$ او $(f \circ g)(1)$ پيدا کړئ.

5- که $f(x) = \sqrt{x}$ او $g(x) = \sqrt{2-x}$ وي، $f \circ g$ او $g \circ f$ پيدا کړئ.

6- که $f(x) = \frac{x}{x+1}$ ، $g(x) = x^{10}$ او $h(x) = x + 3$ وي $(f \circ g \circ h)(x)$ پيدا کړئ.



معکوسه تابع (Inverse Function)

فعالیت

- په شکل کې د دواړو تابع گانو ترمنځ کومه اړیکه شتون لري؟
- آیا د هرې تابع معکوس، هم یوه تابع وي؟
- که د یوې تابع معکوس هم یوه تابع وي، داسې تابع په څه نامه یادېږي؟
- که $f = \{(1,2)(3,5)(6,7)\}$ او $g = \{(2,1)(5,3)(7,6)\}$ وي آیا د g تابع د f معکوسه تابع ده او که نه؟ ولې؟
- که $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$ وي، آیا f د g تابع معکوسه تابع ده؟

په پورتنی شکل کې یو تېرمامیټر لیدل کېږي او پوهېږو چې د سانتی گریډ او فارنهایت د تودوخې د درجو ترمنځ د $f = \frac{9}{5}c + 32$ اړیکه شته دی، که دا معادله د (C) له پاره حل شي لرو چې:

$$f = \frac{9}{5}c + 32 \Rightarrow f - 32 = \frac{9}{5}c + 32 - 32$$

$$\Rightarrow \frac{5}{9}(f - 32) = \frac{5}{9}\left(\frac{9}{5}c\right)$$

$$c = \frac{5}{9}(f - 32)$$

د C تابع د f معکوسه تابع ده.

د (x, y) رابطې معکوس له (y, x) څخه عبارت ده چې د معکوسې تابع د تعریف ساحه د تابع

د قیمتونو د ساحې او د معکوسې تابع د قیمتونو ساحه، د تابع د تعریف له ساحې څخه عبارت ده.

$$\text{Range } f^{-1} = \text{domain } f \quad \text{او} \quad \text{domain } f^{-1} = \text{Range } f$$

د f د تابع معکوس په f^{-1} ښودل کېږي، پام مو وي چې:

$$f^{-1}(x) \neq \frac{1}{f(x)}$$

لومړی مثال: که $f(x) = \{(1,5)(3,7)(8,-10)\}$ وي.

نو $f^{-1}(x) = \{(5,1)(7,3)(-10,8)\}$ ده. ځکه چې:

$$f(3) = 7 \quad f^{-1}(7) = 3$$

$$f(1) = 5 \quad f^{-1}(5) = 1$$

$$f(8) = -10 \quad f^{-1}(-10) = 8$$

نو $f^{-1}(x)$ هم یوه تابع ده.

خو که $f(x) = \{(1,2)(3,2)(4,5)\}$ وي، $f^{-1}(x) = \{(2,1)(2,3)(5,4)\}$ ده.

لیدل کېږي چې $f^{-1}(x)$ یوه تابع نه ده، ځکه د $x = 2$ لپاره دوه مختلف تصویرونه په (Range)

کې وجود لري. $f(2) = 1$ او $f(2) = 3$.

نو د هرې تابع معکوس یوه تابع نه وي، یا په بل عبارت هره تابع معکوس منونکي نه وي.

څه وخت چې یوه تابع د مرتبو جوړو په شکل راکړل شوي وي، که د لومړیو او دویمو عناصرو ځایونه

یې یو تر بله تبدیل کړو، هغه رابطه چې لاسته راځي، د لومړنۍ تابع معکوسه ده، هغه تابع چې

معکوس یې هم تابع وي، نو تابع معکوس منونکي ده.

دویم مثال: آیا د f او g تابع گانې چې په لاندې ډول د مرتبو جوړو په شکل راکړل شوي دي

معکوس منونکي دي که نه؟

$$f = \{(1,2), (-2,3), (3,1), (0,-1)\} \quad g = \{(2,4), (3,1), (0,2), (5,1)\}$$

حل: که د مرتبو جوړو د لومړنیو او دویمو عناصرو ځایونه یو تر بله تبدیل شي، نو لرو چې:

$$f^{-1} = \{(2,1), (3,-2), (1,3), (-1,0)\}$$

لیدل کېږي چې f^{-1} یا د f تابع معکوس هم یوه تابع ده، ځکه چې د f^{-1} د مرتبو جوړو لومړنۍ

عناصر تکرار شوي نه دي. او $g^{-1} = \{(4,2), (1,3), (2,0), (1,5)\}$

ليدل کپري چې g^{-1} يا د $g(x)$ معکوس تابع نه ده، ځکه د $x = 1$ لپاره دوه قيمتونه د 3 او 5 وجود لري، نو د g تابع معکوس منونکی تابع نه ده.

په لنډ ډول څرنگه چې f يو په يو تابع ده، نو معکوس منونکي هم ده او د g تابع چې يو په يو تابع نه ده، نو معکوس منونکي هم نه ده.

نتيجه: يوازې د يو په يو تابع معکوس هم يوه تابع وي.

يو په يو تابع (one-to-one function)

د $f(x)$ تابع يوه يو په يو تابع ده که چېرې $x_1 \neq x_2$ وي او په نتيجه کې $f(x_1) \neq f(x_2)$ شي.

يا: $a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)$ او که $a = b \Rightarrow f(a) = f(b)$

که يوه تابع يو په يو وي، نو معکوس يې هم يوه تابع ده.

درېم مثال: که $f(x) = -4x + 12$ او $g(x) = \sqrt{25 - x^2}$ وي، وښايست چې کومه يوه له

دې تابع گانو څخه يو په يو تابع ده؟

حل: که $a \neq b$ وي، $-4a + 12 \neq -4b + 12$ دی.

نو $f(x)$ يوه يو په يو تابع ده.

$$f(2) = -4(2) + 12 = -8 + 12 = 4$$

د مثال په ډول: که $x = 2$ وي:

که $x = 3$ وي:

$$f(3) = -4(3) + 12 = -12 + 12 = 0$$

$$a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)$$

$$2 \neq 3 \Rightarrow 4 \neq 0$$

نو $f(x)$ يو په يو تابع ده. او $g(x) = \sqrt{25 - x^2}$ لپاره:

$$g(3) = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4$$

که $x = 3$ وي.

$$g(-3) = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4$$

که $x = -3$ وي.

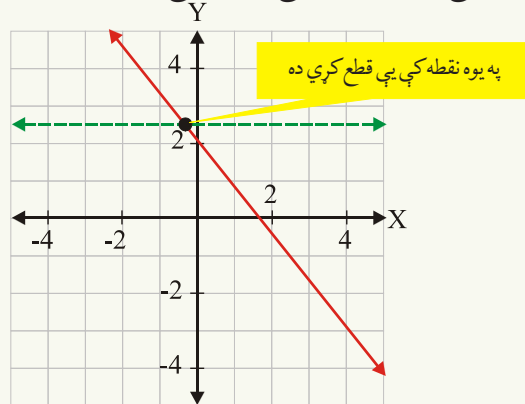
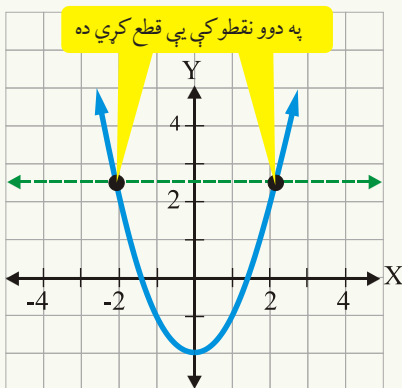
$f(3) = f(-3)$ لېکن $3 \neq -3$ نو $g(x)$ يو په يو تابع نه ده.

فعاليت

که $f(x) = 3x + 8$ او $g(x) = x^2$ وي، وښايست چې کومه يوه تابع يو په يو تابع ده او کومه يوه تابع يو په يو تابع نه ده؟ ولې؟

د گراف له مخې د یو په یو تابع پېژندنه: که یو افقي خط چې د X له محور سره موازي وي د تابع گراف په یوه نقطه کې قطع کړي، دا یو په یو تابع ده، که افقي خط د تابع گراف له یوې نقطې څخه په زیاتو نقطو کې قطع کړي، نو دا گراف د یو په یو تابع گراف نه دی.

څلورم مثال: په را کرل شوو شکلونو کې لیدل کېږي چې د X له محور سره موازي خط لومړنی تابع گراف په یوه نقطه کې او د دویمې تابع گراف یې په دوو نقطو کې قطع کړی دی، نو لومړنی تابع یو په یو تابع ده، خو دویمه تابع یو په یو تابع نه ده.



د معکوسي تابع تعریف: که f یوه یو په یو تابع وي چې د تعریف ساحه یې X او د قیمتونو ساحه یې Y ده، نو د g تابع د f د تابع معکوسه تابع ده، که د g د تعریف ساحه Y او د قیمتونو ساحه یې X وي او یا د g تابع په هغه صورت کې د f د تابع معکوسه ده که چېرې:

$$(f \circ g)(x) = x$$

$$(g \circ f)(x) = x$$

$$(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) = x$$

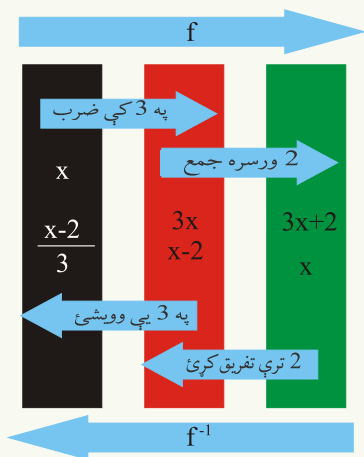
پنځم مثال: که $f(x) = 3x + 2$ وي، د $f(x)$ د تابع معکوسه تابع $f^{-1}(x)$ پیدا کړئ.

حل:

$$y = f(x) = 3x + 2$$

$$x = 3y + 2$$

$$3y = x - 2$$



$$y = \frac{x-2}{3}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{x-2}{3} = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$$

$$f(f^{-1}(x)) = f^{-1}(f(x)) = x$$

دا مثال په لنډ ډول په شکل کې هم ښودل شوی دی.

له بلې خوا که $f^{-1}(x) = \frac{x-2}{3}$ په $g(x)$ سره وښودل

شي، $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) = x$ دی.

ځکه چې:

$$(f \circ g)(x) = 3\left(\frac{x-2}{3}\right) + 2 = x - 2 + 2 = x$$

$$(g \circ f)(x) = \frac{3x+2-2}{3} = \frac{3x}{3} = x$$

یا: $f^{-1}(f(x)) = x$ او $f(f^{-1}(x)) = x$

شپږم مثال: که $f(x) = x^3 + 1$ وي $f^{-1}(x)$ او که $g(x) = x^2$ وي $g^{-1}(x)$ پیدا کړئ.

حل:

$$y = x^3 + 1$$

$$x = y^3 + 1 \Rightarrow y^3 = x - 1 \Rightarrow y = \sqrt[3]{x-1}$$

که Y په $f^{-1}(x)$ سره وښیو، نو $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-1}$

$$g(x) = x^2 \Rightarrow y = x^2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{y}$$

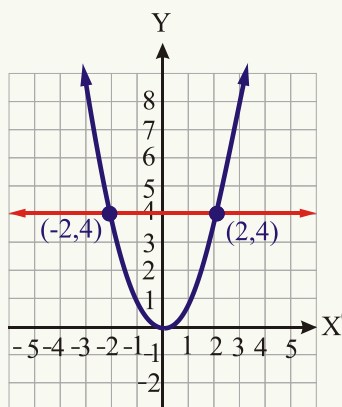
X پر Y او Y پر X بدلوو.

$$y = \pm\sqrt{x} \quad \text{یا} \quad g^{-1}(x) = \pm\sqrt{x}$$

لیدل کېږي چې $g^{-1}(x)$ یوه تابع نه ده، ځکه چې که $x = 2$

او یا $x = -2$ وي، او $g(-2) = 4$ او $g(2) = 4$ کېږي شکل

وگورئ نو د $g(x)$ تابع معکوس پذیره نه ده.



اووم مثال: د x د کوم قیمت لپاره د $f(x) = 5x - 2$ تابع له خپل معکوس سره مساوي کېږي؟

حل: که $y = 5x - 2$ وي، نو معکوس یې

$$x = 5y - 2 \Rightarrow 5y = x + 2$$

$$y = \frac{x+2}{5} \quad f^{-1}(x) = \frac{x+2}{5}$$

$$\frac{x+2}{5} = 5x - 2 \Rightarrow 24x = 12$$

$$x = \frac{1}{2}$$

نو د $x = \frac{1}{2}$ په قیمت سره د $f(x)$ تابع له خپلې معکوسې تابع سره مساوي کېږي.

اتم مثال: وښیاست چې د $f(x) = 7x - 2$ او $g(x) = \frac{1}{7}x + \frac{2}{7}$ تابعګانې یو د بل معکوسې

تابع ګانې دي.

حل:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{1}{7}x + \frac{2}{7}\right) = 7\left(\frac{1}{7}x + \frac{2}{7}\right) - 2 = x$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(7x - 2) = \frac{1}{7}(7x - 2) + \frac{2}{7} = x$$

نو د $f(x)$ او $g(x)$ تابع ګانې یو د بل معکوسې تابعګانې دي، نو نتیجه کېږي چې د تابع او د تابع د معکوسې تابع ترکیب د عینیت ($f(x) = x$) تابع ده.

فعالیت

که $f(x) = \frac{2x+1}{x-2}$ وي، $f^{-1}(x)$ پیدا کړئ او هم وښیاست چې $(f \circ f^{-1})(x) = x$ کېږي.

د تابع او دهغې د معکوسې تابع ګراف: د $f(x)$ د یو په یو تابع او د هغې د معکوسې تابع

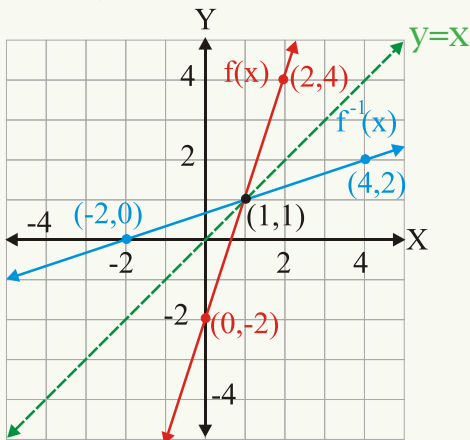
$f^{-1}(x)$ د ګرافونو ترمنځ یوه رابطه موجوده ده، ځکه که چېرې (a, b) د $f(x)$ تابع د ګراف پر

مخ یوه نقطه وي، نو د (b, a) نقطه د $f^{-1}(x)$ تابع د ګراف پر مخ واقع ده چې (a, b) او (b, a)

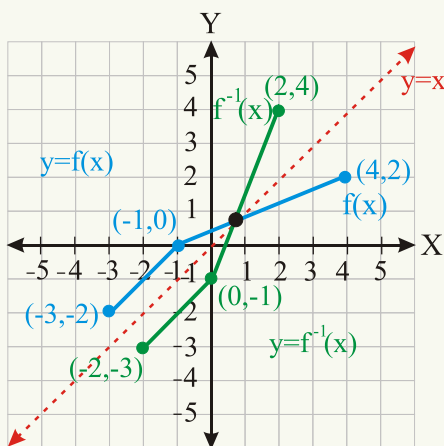
نقطې له نظره د $y = x$ خط ته سره متناظرې دي.

نهم مثال: که $f(x) = 3x - 2$ وي، نو ښکاره ده چې $f^{-1}(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$ د $f(x)$ معکوسه تابع ده. د دواړو تابع گانو گرافونه د وضعيه کمياتو په عين سيستم کې رسم او يو له بله سره يې پرتله کړئ چې گرافونه نظر د $y = x$ خط ته سره متناظر دي.

x	0	1	2
$f(x)$	-2	1	4
x	-2	1	4
$f^{-1}(x)$	0	1	2



ليدل کېږي چې د دواړو تابع گانو گرافونه نظر د $y = x$ خط ته سره متناظر دي. **لسم مثال:** که $f(x)$ د $(-1, 0)$, $(-3, -2)$ او $(4, 2)$ مرتبو جوړو لرونکي وي د $f(x)$ او $f^{-1}(x)$ د تابع گانو گرافونه د وضعيه کمياتو په عين سيستم کې رسم کړي او وښايست چې دواړه گرافونه نظر د $y = x$ خط ته سره متناظر دي.



ليدل کېږي چې د $f(x)$ او $f^{-1}(x)$ تابع گانو گرافونه نظر د $y=x$ خط ته سره متناظر دي.

- د يو په يو تابع معکوس هم يوه تابع ده.
- د X له محور سره موازي خط (افقي خط) د يو په يو تابع گراف په يوه نقطه کې قطع کوي.
- د $y = f(x)$ تابع د معکوس د پيدا کولو لپاره د تابع معادله د X لپاره حلوو، بيا X پر Y او Y پر X بدلوو په لاس راغلی تابع $y = f^{-1}(x)$ ده چې د $f(x)$ د تابع معکوسه تابع ده.
- د $f(x)$ د تابع او د $f^{-1}(x)$ د معکوسې تابع گرافونه نظر د $y=x$ خط ته سره متناظر دي.
- $dom f(x) = Range f^{-1}(x)$ او $dom f^{-1}(x) = Range f(x)$ دي.

پوښتنې

1- د لاندېنيو تابع گانو معکوس پيدا کړئ او ووايئ چې د کومې تابع معکوس هم يوه تابع ده؟

$$f = \{(-1,0), (-2,1), (4,3), (3,4)\} \quad h = \{(1,4), (2,3), (4,1)\}$$

$$g = \{(1,2), (2,3), (3,2), (4,1)\} \quad k = \{(3,0), (2,-1), (1,2), (0,1), (-1,2)\}$$

2- د لاندېنيو هرې يوې تابع معکوسه تابع پيدا کړئ او د خپل ځواب صحت د $f(f^{-1}(x)) = x$

$$f(x) = x + 3$$

$$f(x) = 2x$$

$$f(x) = 2x + 3$$

سره وازمائيئ.

$$f(x) = x^3 + 2$$

$$f(x) = (x + 2)^3$$

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

3- د لاندېنيو تابع گانو گرافونه رسم کړئ او د X له محور سره د موازي خط (افقي خط) په واسطه

وښايست چې ددوی معکوس هم يوه تابع ده.

$$f(x) = 1 - x^2 \quad g(x) = \frac{7 - 2x}{5}$$

4- له لاندېنيو تابع گانو څخه کومه يوه يو په يو تابع ده.

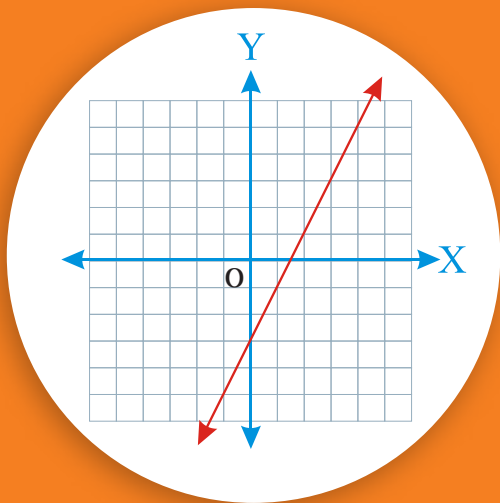
$$y = 4x - 5$$

$$y = 6 - x$$

$$y = (x - 2)^2$$

$$y = 9$$

$$y = \frac{1}{x + 2}$$



پولینومی تابع گانې

- آیا پوهېږي چې لومړی درجې تابع ته ولې خطي تابع وايي؟
- آیا د لومړی درجې تابع گراف یو مستقیم خط دی؟

پولینومونه مو په لومړي فصل کې تر څېړنې لاندې ونيول. هغه پولینوم چې له یوه تورې (متحول) څخه جوړ شوی وي د پولینومي تابع په نامه یادېږي.

خطي تابع (Liner function) یا لومړۍ درجه تابع

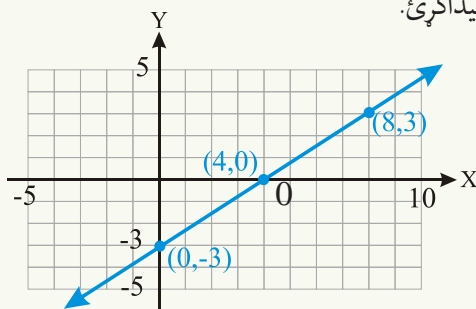
هغه پولینومي تابع ده چې درجه یې یوه وي، د لومړی درجې تابع عمومي شکل $f(x) = ax + b$ دی چې $a \neq 0$ او a, b حقيقي عددونه دي.

د مثال په ډول: $f(x) = 2x$, $f(x) = x - 1$, $f(x) = 3x + 4$ او $f(x) = \frac{1}{2}x$ خطي تابع گانې دي.

لومړی مثال: د $f(x) = \frac{3}{4}x - 3$ تابع گراف رسم کړئ او د X او Y له محورونو سره د گراف د تقاطع نقطې پیدا کړئ.

$$f(x) = \frac{3}{4}x - 3$$

x =	8	4	0
f(x)	3	0	-3



د X له محور سره د گراف د تقاطع نقطه $(4, 0)$ او د Y له محور سره د گراف د تقاطع نقطه $(0, -3)$ ده.

ليدل کيږي چې د لومړۍ درجې تابع گراف يو مستقيم خط دی او له همدې سببه ورته خطي تابع هم وايي، د خطي تابع د گراف د رسمولو لپاره همدومره کافي ده چې د X او Y له محورونو سره يې د تقاطع ټکي پيدا کړو او مستقيم خط رسم کړو، لکه: چې په شکل کې ليدل کېږي.

فعاليت

د $y = x - 1$ او $y = f(x) = x + 1$ تابع گانو گراف رسم او د X او Y له محورونو سره يې د تقاطع د نقطو وضعيه کميات هم پيدا کړئ.

دويم مثال: د $f(x) = \frac{2}{3}x + 2$ خطي تابع گراف رسم کړئ.

حل: د Y له محور سره د گراف د تقاطع په نقطه کې $(x = 0)$ دی، نو:

$$f(0) = \frac{2}{3}(0) + 2 = 2$$

نو د Y له محور سره د گراف د تقاطع نقطه $(0, 2)$ ده.

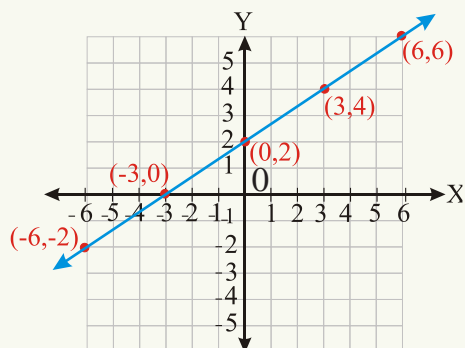
او د X له محور سره د گراف د تقاطع په نقطه کې د y يا $f(x)$ قيمت صفر دی $f(x) = 0$

$$0 = \frac{2}{3}x + 2 \Rightarrow x = -3$$

نو د X له محور سره د گراف د تقاطع ټکی $(-3, 0)$ دی.

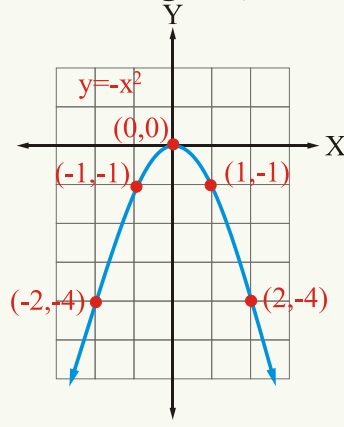
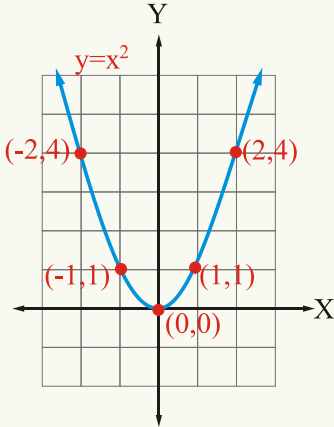
د $(0, 2)$ او $(-3, 0)$ نقطې يو له بله سره نښلوو او مستقيم خط رسموو او هم کولای شو چې د گراف يو څو نورې نقطې وټاکو چې پر همدې مستقيم خط باندې پرتې دي.

$x =$	0	3	-3	6	-6	...
$f(x) =$	2	4	0	6	-2	...



دويمه درجه تابع (Quadratic Function) او گراف يې:

دا گرافونه د کوم ډول تابع گرافونه دي؟



• دا دواړه گرافونه سره څه توپير لري؟

• له $k(x) = x^2$, $h(x) = x^2 + 3x$, $g(x) = x^2 + 1$, $f(x) = x^2 + 7x + 12$ او

$r(x) = 2x - 1$ څخه کومه يوه يې دويمه درجه تابع نه ده؟

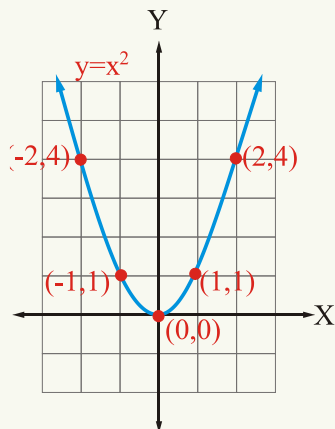
هغه پولينومي تابع چې درجه يې يوه وي، لومړی درجه يا د خطي تابع (Liner Function) په نامه

يادېږي او که د پولينومي تابع درجه (2) وي، د دويمې درجې تابع په نوم يادېږي.

فعاليت

- د دويمې درجې تابع گراف په کوم نوم يادېږي؟
- د دويمې درجې تابع د گراف د تناظر محور کوم خط دی؟
- د دويمې درجې تابع گراف څه وخت پورته خواته او کوم وخت بنځته خواته خلاصېږي؟
- د دويمې درجې تابع د گراف رأس په کوم وخت کې اصغري (Minimum) او په کوم وخت کې اعظمي (Maximum) دی؟
- آیا د دويمې درجې تابع گراف د رأس د نقطې وضعيه کميات پيدا کولای شي؟
- په کوم حالت کې د دويمې درجې تابع گراف د X او Y محورونه قطع کولای شي؟
- آیا د X او Y له محورونو سره د دويمې درجې تابع د گراف د تقاطع د نقطو وضعيه کميات پيدا

کولای شی؟



x	0	1	2	-1	-2
y	0	1	4	1	4

د دویمې درجې تابع عمومي شکل $f(x) = ax^2 + bx + c$

دی چې a ، b او c حقیقي عددونه او $a \neq 0$ دی.

د دویمې درجې تابع گراف: تر ټولو ساده دویمه درجه تابع

د $f(x) = y = x^2$ تابع ده چې $a = 1$ او $b = c = 0$

که X ته یو شو قیمتونه ورکړل شي د تابع یا Y اړونده قیمتونه

لاس ته راوړلای شو، گراف یې رسم کېدای شي لکه: څنگه

چې په شکل کې لیدل کېږي.

د دویمې درجې تابع گراف د پارابولا (Parabola) په نوم

یادېږي چې دا گراف نظر د Y محور ته متناظر دی، هغه خط

چې د پارابول له رأس څخه تېر شي او د Y له محور سره

موازي وي، د تناظر د محور په نامه یادېږي چې د Y محور ددې تابع د گراف د تناظر محور دی.

هغه نقطه چې د تناظر محور په کې گراف قطع کوي، د پارابول د رأس (Vertex) په نامه یادېږي. که

$a > 0$ وي، د پارابول خوله پورته خواته خلاصېږي او د گراف د رأس ټکی اصغري دی د $y = x^2$ د

تابع گراف د $(-\infty, 0)$ په انټروال کې متناقص او د $(0, \infty)$ په انټروال کې گراف متزايد دی.

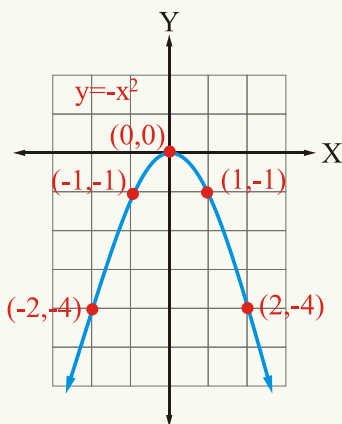
لومړی مثال: د $y = -x^2$ تابع گراف رسم کړئ.

حل:

د پارابول خوله بنځته خواته خلاصېږي، ځکه چې $a < 0$

دی، د $(-\infty, 0)$ په انټروال کې گراف متزايد او د $(0, \infty)$

په انټروال کې گراف متناقص دی.



x	0	1	-1	2	-2
y	0	-1	-1	-4	-4

فعالیت

د $y = x^2 + 4$ تابع گراف رسم کری.

دویم مثال: د $f(x) = x^2$, $g(x) = 2x^2$, او $h(x) = \frac{1}{2}x^2$ تابع گانو گرافونه د وضعیه کمیاتو په عین سیستم کې رسم او یو له بله سره یې پرتله کری.

$$g(x) = 2x^2$$

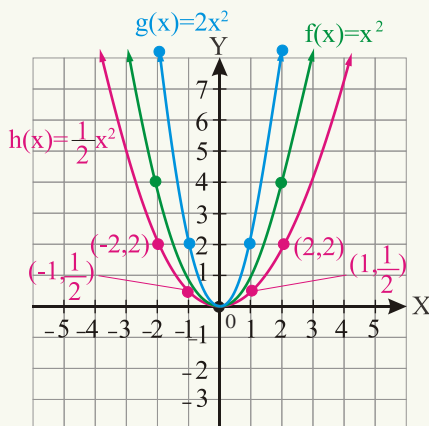
$x =$	0	1	-1	2	-2
$g(x) =$	0	2	2	8	8

$$f(x) = x^2$$

$x =$	0	1	-1	2	-2
$f(x) =$	0	1	1	4	4

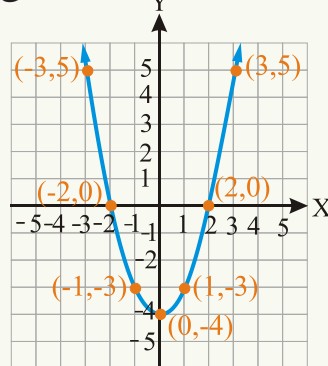
$$h(x) = \frac{1}{2}x^2$$

$x =$	0	1	-1	2	-2
$h(x) =$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	2	2



دریم مثال: د $y = x^2 - 4$ تابع گراف رسم کری.

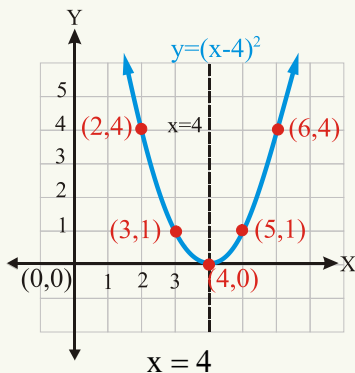
x	0	1	-1	2	-2	3	-3
y	-4	-3	-3	0	0	5	5



په حقیقت کې د $y = x^2$ تابع گراف 4 واحد بنکنه خواته نقل شوی دی.

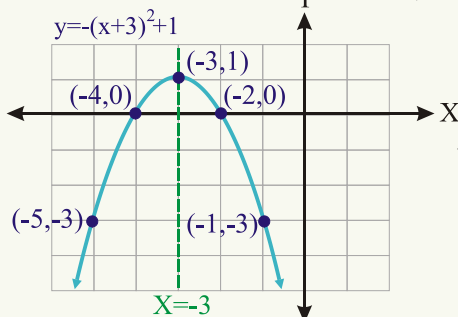
څلورم مثال: د $y = (x - 4)^2$ تابع گراف رسم کری.

حل: که x ته یو څو قیمتونه ورکړو او د y اړونده قیمتونه پیدا کړو د تابع گراف رسمیدلای شي لکه:



x	4	5	3	6	2	...
y	0	1	1	4	4	...

لیدل کبېري چې گراف د $(-\infty, 4)$ په انټروال کې متناقص او د $(4, \infty)$ په انټروال کې متزايد دی. له شکل څخه لیدل کېږي چې د $y = x^2$ گراف په افقي ډول 4 واحدې بنې خواته انتقال شوی دی د پارابول رأس د $(4, 0)$ ټکی دی او د تناظر محور یې $x = 4$ مستقیم خط دی.



x	-3	-2	-4	-5	-1
y	1	0	0	-3	-3

پنځم مثال: د $y = -(x+3)^2 + 1$ تابع گراف رسم کړئ.

د $y = x^2$ گراف درې واحدې کینې خواته او یو واحد په عمودي ډول پورته خواته نقل شوی دی او د پارابول رأس د $(-3, 1)$ ټکی د گراف اعظمي نقطه او د تناظر محور یې $x = -3$ دی چې په شکل کې هم لیدل کېږي.

فعالیت

د $y = 3x^2$ او $y = -3x^2$ تابع گانو گرافونه رسم کړئ.

د X او Y له محورونو سره د گراف د تقاطع ټکي:

ددې لپاره چې په اسانۍ سره پارابول رسم کړو، د X او Y له محور سره یې د تقاطع ټکي پیدا کوو (که چېرې د X له محور سره تقاطع ولري)

د Y له محور سره د تقاطع ټکي پيدا کولو لپاره د $y = ax^2 + bx + c$ معادله کې $x=0$ وضع کېږي په نتيجه کې $y=c$ دی.

د X له محور سره د تقاطع د پيدا کولو لپاره $y = 0$ وضع کوو، نو لرو چې:

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$0 = ax^2 + bx + c \Rightarrow ax^2 + bx + c = 0$$

څرنگه چې پوهېږئ $ax^2 + bx + c = 0$ يوه دويمه درجه معادله ده او جذرونه يې

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ دی، پوهېږو چې ددې معادلې جذرونه هغه وخت حقيقي عددونه دي}$$

چې $b^2 - 4ac \geq 0$ وي، که $b^2 - 4ac < 0$ گراف د X محور قطع کولای نه شي، په لنډ

ډول يې په لاندې جدول کې وگورئ:

د $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) تابع گراف

a	د دويمې درجې تابع گراف په هغه صورت کې د X محور په دوو نقطو کې قطع کوي چې $b^2 - 4ac > 0$ وي.
b	په هغه صورت کې د X محور په يوه نقطه کې قطع کوي چې $b^2 - 4ac = 0$ وي.
c	په هغه صورت کې د X محور قطع کولای نه شي چې $b^2 - 4ac < 0$ وي.

د پارابولا د راس د نقطې د وضعيه کمياتو پيدا کول:

د تکميل مربع په طريقه هم کولای شو چې د پارابول د راس د نقطې وضعيه کميات پيدا کړو.

$$y = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c$$

$$y = a\left[\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) + c\right]$$

$$= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}\right] + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - a\left(\frac{b^2}{4a^2}\right) + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c$$

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

$$f(x) = a(x - h)^2 + k$$

د پارابولا د رأس د ټکي وضعیه کمیات $(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a})$ او یا (h, k) دي او څرنګه چې د تناظر محور د پارابولا له رأس څخه تېرېږي، نو $x = -\frac{b}{2a}$ د تناظر د محور معادله ده. که چېرې $a > 0$ وي، رأس اصغري (Minimum) او که $a < 0$ وي، رأس اعظمي (Maximum) دی.

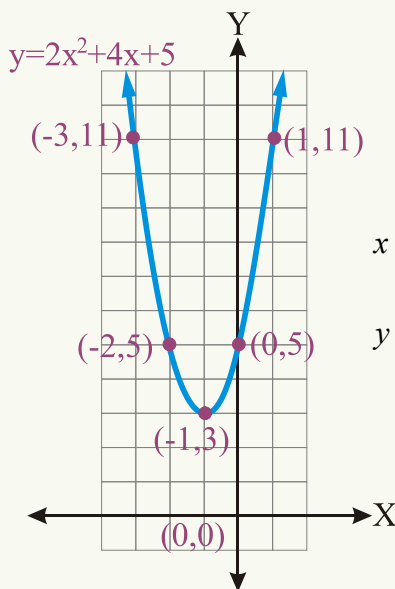
شپږم مثال: د $f(x) = 2x^2 + 4x + 5$ تابع گراف رسم کړئ.

1- د X له محور سره د تقاطع ټکي پیدا کوو. څرنګه چې $a = 2$ ، $b = 4$ او $c = 5$ دی. $\Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \cdot 2 \cdot 5 = -24 < 0$ دا چې $\Delta < 0$ ده نو گراف د X محور نه قطع کوي.

2- د Y له محور سره د گراف د تقاطع ټکي پیدا کوو په دې حالت کې $x = 0$ دی.

د $y = ax^2 + bx + c$ په تابع کې که $x = 0$ شي $y = c$ کېږي، نو $(0, c)$ د Y له محور سره د گراف د تقاطع نقطه ده. $f(0) = 2 \cdot 0^2 + 4 \cdot 0 + 5 = 5$.

نو په دې مثال کې $(0, 5)$ د Y له محور سره د تقاطع نقطه ده.



$$f(x) = 2x^2 + 4x + 5$$

x =	-1	-2	0	1	-3
f(x) =	3	5	5	11	11

3- د رأس د نقطې وضعیه کمیات عبارت دي له:

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2 \cdot 2} = -\frac{4}{4} = -1$$

$$y = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{4 \cdot 2 \cdot 5 - 4^2}{4 \cdot 2} = \frac{40 - 16}{8} = \frac{24}{8} = 3$$

$(-1, 3)$ د پارابولا د رأس د نقطې وضعیه کمیات دي او

رأس اصغري دی، ځکه چې $a > 0$ دی.

$$4- \text{د تناظر د محور معادله } x = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{4} = -1$$

د گراف د تناظر د محور معادله $x = -1$ ده، د

گراف د رسمولو لپاره کولای شو د گراف یو څو

نورې نقطې هم پیدا کړو:

اووم مثال: د $y = -3x^2 - 2x + 1$ تابع گراف رسم کړئ.

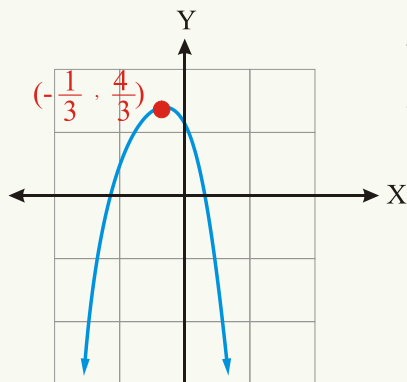
$$y = -3\left(x^2 + \frac{2}{3}x\right) + 1$$

د X د ضرب نیمایي مربع جمع او هم تفریقوو.

$$y = -3\left[x^2 + \frac{2}{3}x + \left(\frac{1}{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2\right] + 1$$

$$y = -3\left[x^2 + \frac{2}{3}x + \left(\frac{1}{3}\right)^2\right] - 3\left(-\frac{1}{9}\right) + 1 = -3\left[\left(x + \frac{1}{3}\right)^2\right] + \frac{4}{3}$$

$$y = -3\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{4}{3}$$



$$y = -3x^2 - 2x + 1$$

$$y = -3\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{4}{3}$$

په نتیجه کې $x = -\frac{1}{3}$ د تناظر د محور معادله ده، ځکه چې: $x + \frac{1}{3} = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{3}$ او $\left(-\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)$ د رأس د ټکي وضعیه کمیات دي او څرنګه چې $a < 0$ دی، نو د پارابولا رأس اعظمي دی.

یادونه: که دویمه درجه تابع د $y - k = a(x - h)^2$

یا $y = a(x - h)^2 + k$ په شکل ولیکل شي $x = h$

د تناظر د محور معادله او د رأس د نقطې وضعیه کمیات دي.

$f(x) = ax + b$ ($a \neq 0$) د لومړي درجې یا خطي

تابع عمومي شکل دی.

او $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) د دویمي درجې معادلې عمومي شکل دی.

د دویمي درجې تابع گراف ته پارابول (Parabola) وايي که $a > 0$ وي، رأس اصغري او که $a < 0$ وه، رأس اعظمي دی. $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$ د پارابولا د رأس وضعیه کمیات او $x = -\frac{b}{2a}$ د پارابول د تناظر د محور معادله ده. که $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ پارابولا د X محور په دوو نقطو کې او که $\Delta = 0$ نو پارابولا د X محور په یوه نقطه کې قطع کوي او که $\Delta < 0$ وي، پارابولا د X محور قطع کولای نه شي.

پوښتنې

1 - د $h(x) = -\frac{3}{2}x + 3$ تابع گراف رسم کړئ.

2 - د $g(x) = 2x + 1$ او $g(x) = 2x - 1$ تابع گانو گرافونه د وضعیه کمیاتو په عین سیستم

کې رسم او سره پرتله یې کړئ.

3 - د $f(x) = x^2$ ، $f(x) = 2x^2$ ، $f(x) = 3x^2$ ، $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ او $f(x) = \frac{1}{3}x^2$

تابع گانو گرافونه د وضعیه کمیاتو په عین سیستم کې رسم کړئ او یو له بله سره یې پرتله کړئ

4 - د لاندې تابع گانو د گراف د تناظر محور معادلې پیدا کړئ.

$f(x) = x^2 + 8x + 13$ ، $f(x) = x^2 - 12x + 30$ ، $f(x) = 3x^2 - 2x + 6$

5 - د $f(x) = (x - 2)^2$ ، $g(x) = (x + 1)^2$ او $h(x) = (x - 3)^2$ تابع گانو گرافونه رسم

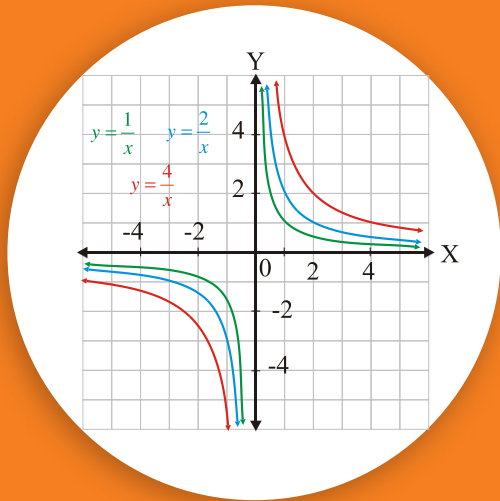
کړئ او وواياست چې د $f(x) = x^2$ له گراف سره څه اړیکه لري؟

6 - د $y = -x^2 - 1$ تابع د گراف د راس وضعیه کمیات عبارت دي له:

a : (-1, 1) b: (1, -1) c: (0, -1) d: (0, 1)

7 - د $y = (x - 1)^2 - 2$ تابع د گراف د راس وضعیه کمیات عبارت دي له:

a : (1, 1) b: (-1, 2) c: (-1, -2) d: (1, -2)



ناطقې يا نسبتې تابع گانې (Rational functions)

دا شکل د کوم ډول تابع گانو گرافونه دي؟

فعالیت

- آیا د ناطقې تابع د عمودي مجانب پیدا کولای شی؟
- آیا د هرې ناطقې تابع د تعریف په ساحه کې ټول حقیقي عددونه شاملیدلای شي؟
- آیا د یوې ناطقې تابع افقي مجانب پیدا کولای شی؟
- آیا هره ناطقه تابع عمودي مجانب لري؟

تعریف

ناطقه تابع هغه تابع ده چې د دوو پولینومي تابع گانو له خارج قسمت څخه جوړه شوي وي که $f(x) = \frac{p(x)}{g(x)}$ وي، په داسې حال کې چې $g(x) \neq 0$ ، $p(x)$ او $g(x)$ پولینومونه وي، نو $f(x)$ یوه ناطقه تابع ده.

د ناطقې تابع د تعریف ساحه ټول حقیقي عددونه دي، پرته د x له هغو قیمتونو څخه چې د ناطقې تابع مخرج پرې صفر کېږي، د مثال په ډول: $f(x) = \frac{1}{x}$ ، $h(x) = \frac{x^3 - 1}{x}$ ، $g(x) = \frac{x-1}{x^2 - x - 6}$ ، $g(x) = 3$ او $P(x) = 2x^2 - 3$ ناطقې تابع گانې دي.

فعالیت

آیا $k(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{x+2}$ یوه ناطقه تابع ده؟ ولې؟

د ناطقې تابع د تعريف د ساحې پيدا كول

(Finding Domain of Rational function)

لومړی مثال: د لاندېنيو ناطقو تابع گانو د هرې يوې د تعريف ساحه پيدا كړئ.

$$f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}, \quad g(x) = \frac{x}{x^2 - 9}, \quad h(x) = \frac{x + 3}{x^2 + 9}$$

حل: د $f(x)$ په تابع كې د $x = 3$ لپاره د تابع مخرج صفر كېږي، نو د 3 عدد د $f(x)$ د ناطقې

تابع د تعريف په ساحه كې شامل نه دی يا: $\{x / x \in IR, x \neq 3\}$ $Dom f(x)$

د $g(x)$ په تابع كې كه چېرې $x = 3$ يا $x = -3$ شي، نو مخرج يې صفر كېږي، نو د 3 او -3

عددونه د $g(x)$ د تابع د تعريف په ساحه كې شامل نه دي.

$$Dom g(x) = \{x / x \in IR, x \neq 3, x \neq -3\}$$

څرنګه چې د $h(x)$ تابع مخرج د x په هيڅ قيمت نه صفر كېږي، نو د $h(x)$ تابع د تعريف ساحه

ټول حقيقي عددونه دي.

$$Dom h(x) = IR \quad \text{يا} \quad Dom h(x) = (-\infty, \infty)$$

فعاليت

د لاندېنيو ناطقو تابع گانو د تعريف ساحې تعين كړئ.

$$f(x) = \frac{x^2 - 25}{x - 5}, \quad g(x) = \frac{x}{x^2 - 25}, \quad h(x) = \frac{x + 5}{x^2 + 25}$$

دويم مثال: د لاندېنيو ناطقو تابع گانو د تعريف او قيمتونو ساحې پيدا كړئ.

$$f(x) = \frac{x + 3}{x - 4} \quad g(x) = \frac{x - 3}{x + 5}$$

حل: د $f(x)$ تابع د تعريف ساحه پرته له (4) څخه ټول حقيقي عددونه دي.

$$\text{dom } f(x) = IR \setminus \{4\} \quad \text{یا} \quad IR - \{4\}$$

$$y = f(x) = \frac{x+3}{x-4} \Rightarrow y(x-4) = x+3$$

$$xy - x = 4y + 3$$

$$(y-1)x = 4y + 3$$

$$xy - 4y = x + 3 \Rightarrow x = \frac{4y+3}{y-1}$$

$$\text{Range } f(x) = IR \setminus \{1\} \quad \text{یا} \quad IR - \{1\}$$

د (X) g تابع د تعريف ساحه ټول حقيقي عددونه دي، پرته له (-5) څخه:

$$\text{dom } g(x) = IR - \{-5\} \quad \text{یا} \quad \{x \in IR / x \neq -5\}$$

$$g(x) = y = \frac{x-3}{x+5} \Rightarrow y(x+5) = x-3 \Rightarrow xy + 5y = x-3$$

$$x = \frac{-5y-3}{y-1} \quad \text{Range } g(x) = IR - \{1\} \quad \text{یا} \quad \{y \in IR / y \neq 1\}$$

فعالیت

د لاندې راځپل شوو ناطقو تابع گانو د تعريف او قيمتونو ساحې پيدا كړئ.

$$h(x) = \frac{1}{x^3}, \quad k(x) = \frac{x+1}{3}, \quad r(x) = \frac{4x-1}{2-x}, \quad m(x) = \frac{x}{3x-2}$$

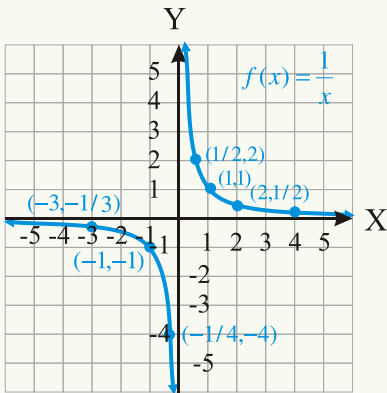
د ناطقې تابع د گراف رسمول (Graphing Rational function):

درېم مثال: د $f(x) = \frac{1}{x}$ تابع گراف رسم كړئ.

حل: كه $x = 0$ شي، نو د تابع مخرج صفر كېږي، صفر د $f(x)$ د تابع د تعريف په ساحه كې شامل نه دی.

$$\text{Dom } f = IR - \{0\}$$

x	... -4	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4...
f(x)	... $-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	-4	-3	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$...



اوس د $f(x) = \frac{1}{x}$ د تابع وضعیت مطالعه کوو:
 څرنگه چې $x = 0$ د $f(x)$ تابع د تعریف په ناحیه کې شامل نه دی، ددې تابع د گراف د رسمولو لپاره x ته داسې قیمتونه ورکوو چې له دواړو خواوو څخه صفر ته نژدې شي (تقرب وکړي)، که x له کینې خوا څخه صفر ته نژدې شي ($x \rightarrow 0^-$) د تابع قیمت $-\infty$ ته نژدې کېږي ($f(x) \rightarrow -\infty$) او که x له بڼې خوا څخه صفر ته نژدې کېږي، ($x \rightarrow 0^+$) د تابع قیمت $+\infty$ ته تقرب کوي ($f(x) \rightarrow \infty$) لاندې جدول وگورئ.
 a: x له کینې خوا څخه صفر ته نژدې کېږي.

x	... -1	-0.5	-0.1	-0.01	-0.001	$x \rightarrow 0^-$
$f(x) = \frac{1}{x}$... -1	-2	-10	-100	-1000	$f(x) \rightarrow -\infty$

b: x له بڼې خوا څخه صفر ته نژدې کېږي.

x	$0^+ \leftarrow x$	0.001	0.01	0.1	0.5	1...
$f(x) = \frac{1}{x}$	$\infty \leftarrow f(x)$	1000	100	10	2	1...

عمودي مجانب (Vertical Asymptotes)

که په یوه ناطقه تابع $f(x) = \frac{p(x)}{g(x)}$ کې چې صورت او مخرج یې مشترک فکتور، ونه لري او $p(a) \neq 0$ وي، که $g(a) = 0$ شي، نو د $x = a$ خط د $f(x)$ د تابع عمودي مجانب دی چې د y له محور سره موازي دی. د عمودي مجانبونو شمېر د مخرج د جذرونو له شمېر سره مساوي دي یا په بل عبارت که $x \rightarrow a$ په نتیجه کې $f(x) \rightarrow +\infty$ یا $f(x) \rightarrow -\infty$ ، نو د $x = a$ عمودي خط ددې تابع عمودي مجانب دی یا که:

$$x \rightarrow a \Rightarrow |f(x)| \rightarrow \infty \text{ د تابع عمودي مجانب دی.}$$

x هر څومره چې د a قيمت ته نژدې شي، خو د تابع گراف د $x = a$ مستقيم خط قطع کولای نه شي، ځکه چې د a عدد د تابع د تعريف په ساحه کې شامل نه دی، لکه: د $f(x) = \frac{1}{x}$ تابع د تعريف په ساحه کې صفر شامل نه دی، نو $x = 0$ يا د Y محور د $f(x) = \frac{1}{x}$ تابع عمودي مجانب دی.

څلورم مثال: د $f(x) = \frac{2x}{x-3}$ ، $g(x) = \frac{x}{x^2-25}$ او $h(x) = \frac{x+5}{x^2+25}$ تابع گانو عمودي مجانبونه پيدا کړئ.

حل:

1 - د $f(x)$ تابع د عمودي مجانب د پيدا کولو لپاره د x هغه قيمت پيدا کوو چې د $f(x)$ تابع مخرغ پرې صفر کېږي. نو د 3 عدد د $f(x)$ د تابع د تعريف په ساحه کې شامل نه دی.

$$\text{dom} f(x) = \{x / x \in \mathbb{R}, x \neq 3\}$$

نو د $x = 3$ خط د $f(x)$ تابع عمودي مجانب دی.

2 -

$$g(x) = \frac{x}{x^2-25} = \frac{x}{(x-5)(x+5)}$$

$$x-5=0 \Rightarrow x=5$$

$$x+5=0 \Rightarrow x=-5$$

د $x=5$ او $x=-5$ لپاره د $g(x)$ تابع مخرغ صفر کېږي، نو د 5 او -5 عددونه د $g(x)$ د تابع د تعريف په ساحه کې شامل نه دي.

$$\text{dom} g(x) = \{x / x \in \mathbb{R}, x \neq -5, x \neq 5\}$$

نو د $g(x)$ د تابع عمودي مجانبونه د $x=5$ او $x=-5$ خطونه دي.

3 - څرنګه چې د x په هر قيمت د $h(x) = \frac{x+5}{x^2+25}$ تابع مخرغ نه صفر کېږي، نو عمودي مجانب نه لري يا ددې تابع د تعريف ساحه ټول حقيقي عددونه دي.

افقي مجانب (Horizontal Asymptote)

که په يوه ناطقه تابع کې د صورت او مخرغ درجې سره مساوي وي، نو ښکاره خبره ده چې دوېش

حاصل (خارج قسمت) به یو ثابت عدد وي، که دې ثابت عدد ته b ووايو، نو د $y = b$ افقي خط ددې تابع افقي مجانب دی چې دا خط یا د X محور او یا د X له محور سره موازي خط دی چې په حقیقت کې د b عدد د صورت او مخرج د لویو توانونو د ضربونو له نسبت څخه عبارت دی او یا صورت پر مخرج ویشو.

د مثال په ډول د $f(x) = \frac{2x^2}{x^2 - 1}$ د تابع افقي مجانب د $y = 2$ خط دی. افقي مجانب داسې تعریفوو:

که $x \rightarrow \infty$ یا $x \rightarrow -\infty$ او په نتیجه کې $f(x) \rightarrow b$ نو $y = b$ مستقیم خط د $f(x)$ تابع افقي مجانب دی او یا که $|x| \rightarrow \infty$ او $y \rightarrow b$ ، نو $y = b$ مستقیم خط ددې تابع افقي مجانب دی. **پنځم مثال:** د $f(x) = \frac{2x}{x-1}$ تابع گراف رسم کړئ.

حل:

1 - X له محور سره د گراف د تقاطع نقطه: د X له محور سره د تقاطع په نقطه کې

$$0 = \frac{2x}{x-1} \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0$$

نو د تابع گراف د X محور په $x = 0$ یا د $(0, 0)$ په نقطه کې قطع کوي.

$$2 - \text{د } Y \text{ له محور سره د گراف د تقاطع نقطه: } f(0) = \frac{2 \cdot 0}{0-1} = \frac{0}{-1} = 0$$

نو گراف د X او Y محورونه د $(0, 0)$ په نقطه کې قطع کوي یا په بل عبارت ددې تابع گراف د وضعیه کمیاتو له مبدأ څخه تېرېږي.

3 - د تابع د عمودي مجانب معادله: $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$ دی دا خط رسم کړئ.

4 - د تابع د گراف افقي مجانب $\frac{2}{1} = 2$ دی، نو $y = f(x) = 2$ د تابع افقي مجانب دی، یا

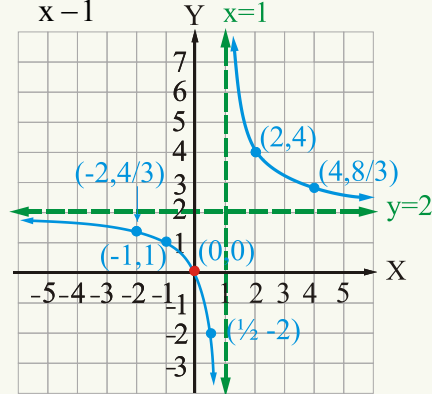
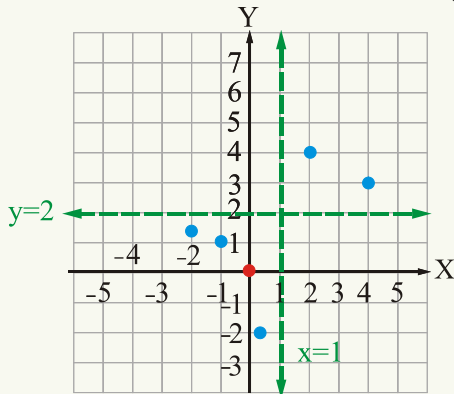
$$\frac{2x}{x-1} = 2 + \frac{2}{x-1}$$

5 - د گراف یو څو نورې نقطې هم پیدا کوو، لکه:

x	0	-2	-1	$\frac{1}{2}$	2	4
$y = f(x)$	0	$\frac{4}{3}$	1	-2	4	$\frac{8}{3}$

له محورونو سره د تقاطع نقطې ټاکو، د تابع مجانبونه رسموو او بیا یې گراف، لکه: څنگه چې په

$$f(x) = \frac{2x}{x-1} \quad \text{شکل کې لیدل کېږي، رسموو.}$$



فعالیت

د $f(x) = \frac{3x}{x-2}$ تابع گراف رسم کړئ.

شپږم مثال: د $f(x) = \frac{x+2}{x-2}$ د تابع افقي او عمودي مجانبونه پیدا کړئ او گراف یې رسم کړئ.

حل: د عمودي او افقي مجانبونو معادلې عبارت دي له:

1 - د عمودي مجانب معادله $x = 2$

2 - د افقي مجانب معادله $f(x) = y = 1$

3 - د Y له محور سره تقاطع:

که $x = 0$ شي، نو $f(x) = -1$ دي، گراف د Y محور په $(0, -1)$ کې قطع کوي.

4 - د X له محور سره تقاطع $f(x) = 0$ شي، نو:

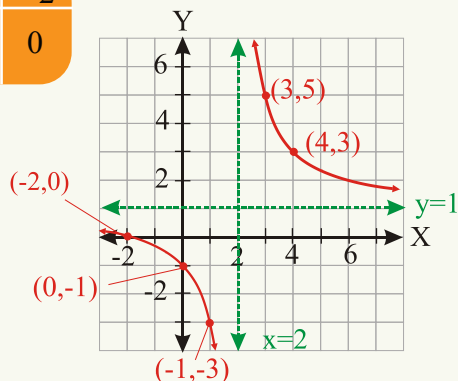
$$x + 2 = 0$$

$$x = -2$$

نو د $(-2, 0)$ په نقطه کې گراف د X محور قطع کوي.

5 - ددې لپاره چې گراف په اسانه ډول رسم شي، په لاندې جدول کې د گراف د هرې څانگې قيمتونه وگورئ.

x	-1	0	1	3	4	5	-2
f(x)	$-\frac{1}{3}$	-1	-3	5	3	$2\frac{1}{3}$	0



که صورت پر مخرج وېشو $\frac{x+2}{x-2} = 1 + \frac{4}{x-2}$ په حقيقت کې د $f(x) = \frac{1}{x}$ تابع گراف د يو واحد په اندازه پورته خواته او د (2) واحدونو په اندازه ښي خواته انتقال شوی دی او $y = f(x) = 1$ د تابع افقي مجانب دی.

مايل مجانب: (slant or Oblique asymptote)

څه وخت چې د يوې ناطقې تابع د صورت درجه د يو په اندازه د مخرج له درجې څخه زياته وي ښکاره خبره ده چې تابع افقي مجانب نه لري په دې حالت کې تابع مايل مجانب لري.

اووم مثال: د $f(x) = \frac{x^2+1}{x-1}$ تابع گراف رسم کړئ.

حل:

1 - د مايل مجانب د پيدا کولو لپاره صورت پر مخرج وېشو، نو لرو چې:

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x-1} = x+1 + \frac{2}{x-1}$$

مايل مجانب

که $|x|$ هر څومره لوی شي $\frac{2}{x-1}$ صفر ته نژدې کېږي، نو په نتيجه کې گراف د $y = f(x) = x+1$

مستقيم خط ته نژدې کېږي چې همدا د $y = x+1$ خط د $f(x)$ تابع مايل مجانب دی.

2 - د Y له محور سره يې د تقاطع نقطه:

$$f(0) = 0 + 1 + \frac{2}{0-1} = 1 - 2 = -1$$

گراف د $(0, -1)$ په نقطه کې د Y محور قطع کوي.

3 - ښکاره خبره ده چې گراف د X محور قطع

کولای نه شي، ځکه چې $x = \sqrt{-1}$ کېږي.

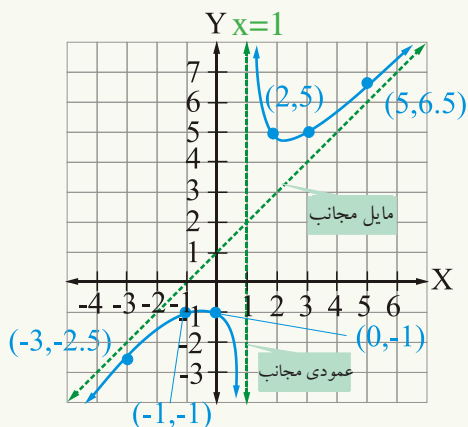
4 - عمودي مجانب يې

$$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ دی.}$$

5 - ښکاره ده چې افقي مجانب نه لري.

6 - يو څو نورې نقطې پيدا کوو او د تابع گراف

رسموو:



x	2	3	5	-1	-3
f(x)	5	5	6.5	-1	-2.5

اټم مثال: د $f(x) = \frac{x^2+1}{x-2}$ تابع گراف رسم کړئ.

1 - د تابع عمودي مجانب د $x = 2$ خط دی، ځکه چې $x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$

$$\frac{x^2+1}{x-2} = x+2 + \frac{5}{x-2} \text{ وپشلولو چې:}$$

که $|x|$ لوی شي $\frac{5}{x-2}$ صفر ته نږدې کېږي او د تابع گراف د $y = x + 2$ خط ته نږدې کېږي

چې $y = x + 2$ خط ددې تابع مایل مجانب دی.

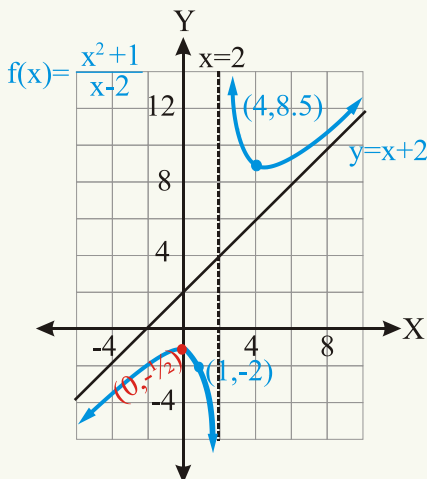
3 - د Y له محور سره تقاطع $-\frac{1}{2}$ ده، ځکه که $x = 0$ شي $f(0) = \frac{0+1}{0-2} = -\frac{1}{2}$

4 - گراف د X له محور سره تقاطع نه لري، ځکه چې که $f(x) = 0$ شي، نو: $0 = \frac{x^2+1}{x-2}$

(چې په حقيقي عددونو کې تعريف شوی نه دی) $x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x = \sqrt{-1}$

د مجانبونو په رسمولو او د Y له محور سره د تقاطع ټکی او خو نورو قيمتونو په مرسته د تابع گراف

رسمولای شو.



x	0	1	4
f(x)	$-\frac{1}{2}$	-2	8.5

که $f(x) = \frac{P(x)}{g(x)}$ په تابع کې په ترتيب سره m او n د صورت او مخرغ درجې وي نو:

1- که $m < n$ وي د X محور افقي مجانب دی.

2- که $m = n$ وي $y = b$ د تابع افقي مجانب دی چې b د m او n د درجو حدونو د ضريبونو

نسبت دی يا که چېرې $f(x) = \frac{a_n x^n + \dots + a_0}{b_n x^n + \dots + b_0}$ ، $(b_n \neq 0)$ وي، نو $y = \frac{a_n}{b_n}$ د f(x) تابع افقي مجانب دی.

3- که $m > n$ وي، نو افقي مجانب نه لري.

4- که د صورت درجه د يو په اندازه د مخرغ له درجې څخه زياته وي، نو د تابع گراف مايل مجانب لري چې په بې نهايت کې له گراف سره موازي کېږي، يوه ناطقه تابع يو يا څو عمودي مجانبونه درلودلای شي، خو يو افقي يا مايل مجانب به لري.

پوښتنې

1 - د $f(x) = \frac{3x^2}{x^2 - 4}$ تابع افقي او عمودي مجانبونه پيدا كړئ.

2 - آیا د $f(x) = \frac{x^4}{x^2 + 1}$ تابع عمودي مجانب لري؟ ولې؟

3 - د لاندې راکرل شوو تابع گانو د تعريف ساحې پيدا كړئ او د عمودي مجانبونو معادلې يې وليكئ.

$$f(x) = \frac{5x}{x-4}, \quad g(x) = \frac{3x^2}{(x-5)(x+4)}, \quad h(x) = \frac{x+7}{x^2-49}, \quad k(x) = \frac{x+7}{x^2+49}$$

4 - له لاندې تابع گانو څخه کومه يوه چې عمودي مجانب ولري، پيدا يې كړئ.

$$f(x) = \frac{x}{x+4}, \quad g(x) = \frac{x+3}{x(x+4)}$$

$$h(x) = \frac{x}{x(x+4)}, \quad k(x) = \frac{x}{x^2+4}$$

5 - د لاندې ناطقو تابع گانو گرافونه رسم كړئ.

$$f(x) = \frac{4x}{x-2}, \quad g(x) = \frac{2x}{x-4}$$

6 - د $f(x) = \frac{3x+1}{x-3}$ تابع افقي مجانب عبارت دی له:

$$a: \quad y=2 \qquad b: \quad y=3$$

$$c: \quad y=-2 \qquad d: \quad y=-3$$

7 - د $f(x) = \frac{1}{x+2}$ او $f(x) = \frac{3}{x+2}$ تابع گانو گرافونه رسم كړئ او د $f(x) = \frac{1}{x}$ د تابع

له گراف سره يې پرتله كړئ.

8 - د $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$ تابع مايل مجانب پيدا كړئ.

د څپرګي لنډيز

• تابع د دوو ستونو تر منځ داسې يوه رابطه يا قاعده (Rule) ده چې د لومړني سټ هر عنصر يوازې او يوازې د دويم سټ له يو عنصر سره اړيکه ولري. لومړني سټ ته د تابع د تعريف ساحه (Domain) او دويم سټ ته د قيمتونو ساحه (Range) وايي يا تابع د هغو مرتبو جوړو سټ دی چې لومړني عناصر يې تکرار شوي نه وي.

• يوه تابع د $y = f(x)$ په شکل ليکل کېږي، په يوه نقطه کې د تابع د قيمت د پيدا کولو لپاره د x راکړل شوی قيمت د تابع په معادله کې وضع کوو، د تابع قيمت په هغه نقطه کې په لاس راځي او يوه معادله هغه وخت د يوې تابع ښودونکی وي چې د هر x لپاره يو y وجود ولري.

• د يوې تابع د تعريف په ساحه (Domain) کې هغه عددونه شامل وي چې تابع په کې تعريف شوي وي يا د تابع قيمت يو حقيقي عدد وي. د يوې تابع گراف د XOY په مستوي کې د S د هغو نقطو سټ دی په دې ډول چې $f(x) = \{(x, y) | y = f(x)\}$ او x د تابع د تعريف په ساحه کې شامل وي، که د y له محور سره موازي خط گراف يوازې په يوه نقطه کې قطع کړي، دا گراف د يوې تابع گراف دی.

• $f(x) = c$ ثابته تابع، $f(x) = ax + b$ خطي تابع، $f(x) = x, (a \neq 0)$ د عينيت تابع او $f(x) = |x|$ د مطلقه قيمت تابع ده چې د تعريف ساحه يې ټول حقيقي عددونه او د قيمتونو ساحه يې صفر او مثبت حقيقي عددونه دي.

• د علامې تابع دا ډول تعريف شوي ده:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{sgn}(x) = \begin{cases} 1 : x > 0 \\ 0 : x = 0 \\ -1 : x < 0 \end{cases}$$

د دې تابع د تعريف ساحه ټول حقيقي عددونه او د قيمتونو ساحه يې $\{-1, 0, 1\}$ ده.

• د دويمې درجې تابع عمومي شکل $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) دی او د دويمې درجې تابع گراف ته پارابولا (parabola) وايي که $a > 0$ وي، رأس اصغري او که $a < 0$ وي، رأس اعظمي دی. $(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a})$ د پارابولا د رأس وضعيه کميات او $x = -\frac{b}{2a}$ د پارابول د تناظر د

محور معادله ده. که $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ پارابولا د X محور په دوو نقطو کې او که $\Delta = 0$ ، نو

پارابولا د X محور په یوه نقطه کې قطع کوي او که $\Delta < 0$ ، وي پارابول د X محور نه قطع کوي.

• که د $f(x)$ په تابع کې $x_1 < x_2$ وي او په نتیجه کې $f(x_1) < f(x_2)$ شي، تابع متزایده، که

$x_1 < x_2$ وي او $f(x_1) > f(x_2)$ شي، تابع متناقصه ده او هم که $f(-x) = f(x)$ وي، تابع

جفته او که $f(-x) = -f(x)$ شي، تابع طاقه ده.

• انتقال په (2) ډوله دی (عمودي او افقي انتقال)

• **عمودي انتقال:** که C یو مثبت عدد وي.

که د $y = f(x)$ تابع گراف د C واحدونو په اندازه په عمودي ډول پورته خواته انتقال شي د

$$y = f(x) + c$$

تابع گراف لاس ته راځي.

که د $y = f(x)$ تابع گراف د C واحدونو په اندازه په عمودي ډول بښکته خواته انتقال شي، د

$$y = f(x) - c$$

تابع گراف لاس ته راځي.

افقي انتقال: که C یو مثبت عدد وي.

که د $y = f(x)$ تابع گراف د C واحدونو په اندازه کینې خواته انتقال شي، د $y = f(x + c)$

گراف لاس ته راځي.

که د $y = f(x)$ تابع گراف د C واحدونو په اندازه بښي خواته انتقال شي، د $y = f(x - c)$

تابع گراف لاس ته راځي.

• تابع گانو عملیې په لاندې ډول تعریف شوي دي:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad (g(x) \neq 0)$$

$$\text{dom}(f + g)(x) = \text{dom } f \cap \text{dom } g$$

$$\text{dom}(f - g)(x) = \text{dom } f \cap \text{dom } g$$

$$\text{dom}(f \cdot g)(x) = \text{dom } f \cap \text{dom } g$$

$$\text{dom}\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \text{dom } f \cap \text{dom } g - \{x / g(x) = 0\}$$

• د مرکبو تابع گانو د تعريف ساحه:

$$Dom(fog)(x) = \{x / x \in domg, g(x) \in domf\}$$

$$Dom(gof)(x) = \{x / x \in domf, f(x) \in domg\}$$

• د يو په يو تابع معكوس هم يوه تابع ده.

• د X له محور سره موازي خط (افقي خط) د يو په يو تابع گراف په يوه نقطه کې قطع کوي.

• د $y = f(x)$ يو په يو تابع د معكوس د پيدا كولو لپاره معادله د X لپاره حلوو، بيا X پر Y او Y پر X بدلوو په لاس راغلی تابع $f^{-1}(x)$ ده چې د $f(x)$ د تابع معكوسه تابع ده. د $f(x)$ او د $f(x)$ د معكوسې تابع گرافونه نظر د $y=x$ خط ته سره متناظر دي.

• که د $f(x) = \frac{P(x)}{g(x)}$ په ناطقه تابع کې په ترتيب سره m او n عددونه د صورت او مخرج درجې وي، نو:

1- که $m < n$ وي، د X محور افقي مجانب دی.

2- که $m = n$ وي، $y = b$ د تابع افقي مجانب دی چې b د m او n درجو لرونکو حدونو د ضريبونو نسبت دی يا که چېرې $f(x) = \frac{a_n x^n + \dots + a_0}{b_n x^n + \dots + b_0}$ وي، نو $y = \frac{a_n}{b_n}$ د $f(x)$ د تابع افقي مجانب دی.

3- که $m > n$ وي، نو افقي مجانب نه لري.

4- که د صورت درجه د يو په اندازه د $f(x)$ د مخرج له درجې څخه زياته وي، نو تابع مايل مجانب لري.

• يوه ناطقه تابع يو يا څو عمودي مجانبونه درلودلای شي، خو يو افقي يا مايل مجانب به لري.

د څپرکي پوښتنې

1- دلاندېنيو مرتبو جوړو له ستونو څخه کوم يو يې د يوې تابع بنودونکي دي؟ د تعريف او د قيمتونو ساحې يې پيدا کړئ.

1- $\{(1,2), (3,4), (5,5)\}$

2- $\{(3,4), (3,5), (4,4), (4,5)\}$

3- $\{(-3,-3), (-2,-2), (-1,-1), (0,0)\}$

4- $\{(1,4), (1,5), (1,6)\}$

2- که $g(x) = x^2 + 2x + 3$ وي، $g(-1)$ ، $g(-x)$ او $g(x+5)$ پيدا کړئ.

3- که $h(x) = x^4 + x^2 + 1$ وي، $h(2)$ ، $h(-1)$ ، $h(-x)$ او $h(3a)$ پيدا کړئ.

4- د لاندېنيو تابع گانو د تعريف ساحې پيدا کړئ.

$$f(x) = 2x$$

$$f(x) = (x-3)^{\frac{1}{2}}$$

$$f(x) = \sqrt{16-x^2}$$

$$f(x) = \frac{2}{x^2-4}$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{3}{x^2+25}}$$

$$f(x) = \sqrt{x^2-4x-5}$$

5- که چېرې $f(x) = \begin{cases} x+3 & : x < 0 \\ 4x+7 & : x \geq 0 \end{cases}$ وي، $f(0)$ ، $f(3)$ او $f(-2)$ پيدا کړئ.

6- که چېرې $g(x) = \begin{cases} x+3 & : x \geq -3 \\ -(x+3) & : x < -3 \end{cases}$ وي، $g(0)$ ، $g(-6)$ او $g(-3)$ پيدا کړئ.

7- که چېرې $h(x) = \begin{cases} \frac{x^2-9}{x-3} & \Leftarrow x \neq 3 \\ 6 & \Leftarrow x = 3 \end{cases}$ وي، $h(0)$ ، $h(3)$ او $h(5)$ پيدا کړئ.

8- له لاندېنيو معادلو څخه کومه يوه يې تابع تعريفوي؟

$$x + y = 16$$

$$x^2 + y = 16$$

$$x^2 + y^2 = 16$$

$$x = y^2$$

$$y = \sqrt{x+4}$$

$$x + y^3 = 8$$

9 - په لاندېنيو تابع گانو کې کومه طاقه، کومه يوه جفته او کومه يوه، نه طاقه او نه جفته ده؟

$$f(x) = x^4 - 2x^2 + 5, \quad f(x) = x^2 + 2x - 1, \quad f(x) = \frac{2}{x-6}$$

10 - د $f(x) = x^2 - 1$ او $f(x) = (x-1)^2$ تابع گانو گرافونه رسم او د $f(x) = x^2$ سره يې پرتله کړئ.

11 - د لاندېنيو تابع گانو $(f+g)$, $(f-g)$, $(f \cdot g)$ او $(\frac{f}{g})$ پيدا کړئ او د تعريف ساحې يې وټاکئ.

$$\begin{aligned} f(x) &= 4x - 1 & g(x) &= 6x + 3 \\ f(x) &= \sqrt{2x + 5} & g(x) &= \sqrt{4x - 9} \\ f(x) &= 4x^2 - 11x + 2 & g(x) &= x^2 + 5 \end{aligned}$$

12 - که $f(x) = 4x^2 - 2x$ او $g(x) = 8x + 1$ وي، نو:

$$\begin{aligned} (f+g)(3) & & (f+g)(-5) & & (f \cdot g)(4) \\ (\frac{f}{g})(4) & & (f \circ g)(2) & & (g \circ f)(-5) \end{aligned}$$

پيدا کړئ.

13 - fog او gof پيدا کړئ که:

$$\begin{aligned} f(x) &= 8x + 12 & g(x) &= 3x - 1 \\ f(x) &= 5x + 3 & g(x) &= -x^2 + 4x + 3 \\ f(x) &= -x^3 + 2 & g(x) &= 4x \\ f(x) &= \frac{1}{x} & g(x) &= x^2 \\ f(x) &= \sqrt{x + 2} & g(x) &= 8x^2 - 6 \end{aligned}$$

14 - د $y=f(x)$ تابع د گراف په پام کې نيولو سره ووياست چې د $y = f(x) - 5$ تابع گراف د 5 واحدو په اندازه:

- a- بنکنه خواته انتقال شوي دی.
- b- پورته خوا ته انتقال شوي دی.
- c- ښي خواته انتقال شوي دی.
- d- کيڼي خواته انتقال شوي دی.

15 - که د $f(x)$ تابع په لاندې ډول تعريف شوی وي گراف يې رسم کړئ، د تعريف او قيمتونو

ساحې بي وټاکئ.

$$f(x) = \begin{cases} -x+2 & : x > 1 \\ x^2 & : -1 < x < 1 \\ x+2 & : x < -1 \end{cases}$$

16 - د $f(x) = \frac{2x}{x+1}$ تابع د تعريف او قيمتونو ساحې وټاکئ.

17 - د $f(x) = \sqrt{2x-1}$ تابع د تعريف او قيمتونو ساحې وټاکئ.

18 - د لاندېنيو ناطقو تابع گانو د تعريف ساحې پيدا کړئ او کومه تابع چې عمودي مجانب ولري، د عمودي مجانبونو معادلې يې هم پيدا کړي.

$$f(x) = \frac{5x}{x-4} \qquad g(x) = \frac{7x}{x-8} \qquad h(x) = \frac{x+8}{x^2-64}$$

$$f(x) = \frac{x+8}{x^2+64} \qquad g(x) = \frac{x+7}{x^2-49} \qquad h(x) = \frac{x+7}{x^2-36}$$

19 - د $f(x) = x^2 + 2$, $f(x) = x^2 + 1$, $f(x) = x^2 - 1$, او $f(x) = x^2 - 2$ تابع گانو گرافونه د وضعيه کمياتو په عين سيستم کې رسم او د $f(x) = x^2$ د تابع له گراف سره يې پرتله کړئ.

20 - د لاندېنيو دويمې درجې تابع گانو د رأسونو وضعيه کميات اود تناظر د محورونو معادلې پيدا کړئ.

$$y = (x-2)^2 \qquad y = (x+3)^2 - 4$$

21 - د $y = -\frac{x}{2}$ تابع گراف رسم کړئ.

22 - د $f(x) = \frac{x^2-5}{x+2}$ تابع عمودي او مايل مجانبونه پيدا کړئ.

23 - د $h(x) = \frac{x+1}{x-4}$ تابع د افقي مجانب معادله عبارت ده له:

- a) $y = -1$ b) $y = 1$
 c) $y = -\frac{1}{4}$ d) $y = 4$

24 - د $f(x) = \begin{cases} 3x+1 & : x < 2 \\ -x & : x \geq 2 \end{cases}$ د تابع گراف رسم کړئ.

25 - $g(x) = |x| - 5$ د تابع گراف رسم او د قیمتونو ساحه یې پیدا کړئ.

26 - د علامې تابع د قیمتونو په ساحه کې کوم عددونه شامل وي؟

27 - د لاندېنیو تابع گاتو معکوسه تابع پیدا کړئ او وښیاست چې $f(f^{-1}(x)) = x$ دی.

$$f(x) = \frac{1}{8}x$$

$$f(x) = 8x - 1$$

$$f(x) = x^2 + 6$$

$$f(x) = \frac{4x+6}{5}$$

$$f(x) = x^3 - 1$$

28 - آیا د $g(x) = x^2$ تابع معکوس منونکي ده؟ (معکوس یې هم یوه تابع ده)

29 - که $(fog)(x) = (gof)(x)$ وي، د f او g تابع گانې سره څه اړیکه لري؟

30 - د X او Y له محورونو سره د $g(x) = 3 - \frac{3}{2}x$ د گراف، د تقاطع د نقطو وضعیه کمیات

پیدا کړئ.

31 - د $f(x) = -3$ تابع گراف رسم کړئ.

32 - د $f(x) = 2x^2 + 4x + 5$ تابع د گراف د رأس د نقطې وضعیه کمیات پیدا کړئ.

33 - د $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ ، $f(x) = 3x^2$ ، $f(x) = 2x^2$ او $f(x) = \frac{1}{3}x^2$ تابع گانو گرافونه

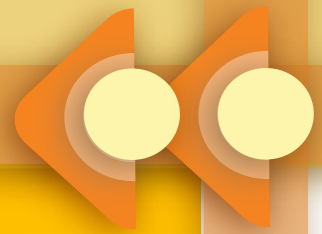
د وضعیه کمیاتو په عین سیستم کې رسم او د $f(x) = x^2$ تابع د گراف سره یې پرتله کړئ.

34 - د $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x}$ د ناطقې تابع مایل مجانب عبارت دی له:

a: $y = x$

b: $y = x - 1$

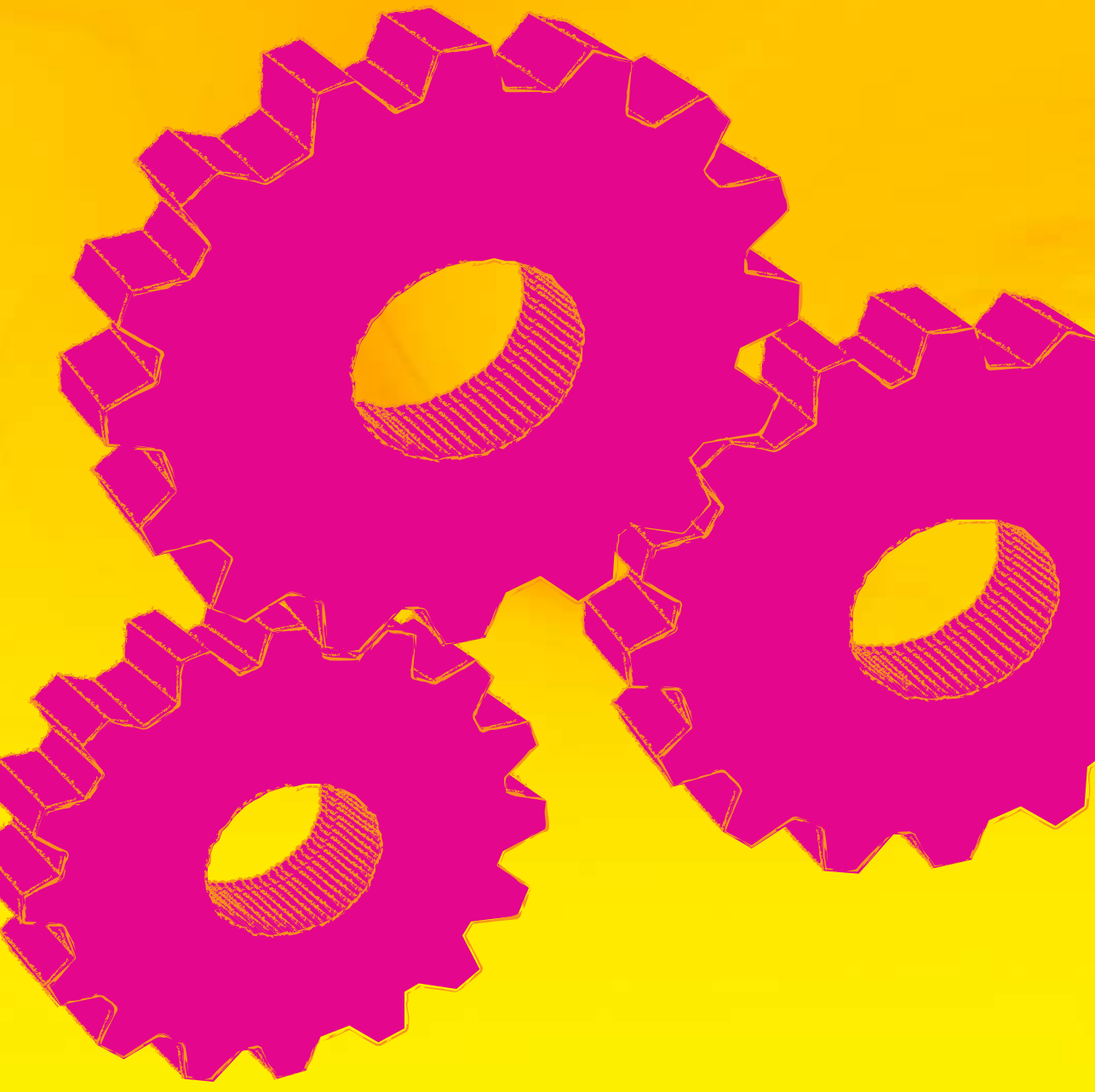
c: $y = x + 1$



څلورم څپرکی

مثلثاتي تابع گانې





زاویه او رادیان (Angle and Radian) زاویه او د زاویې د اندازه کولو واحدونه:

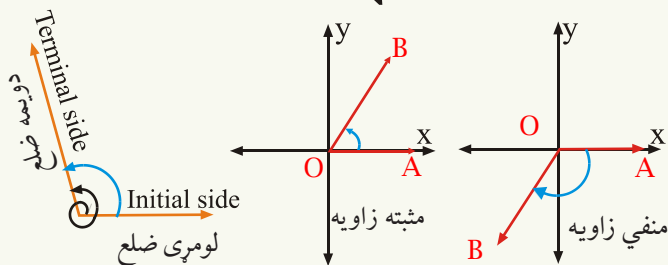
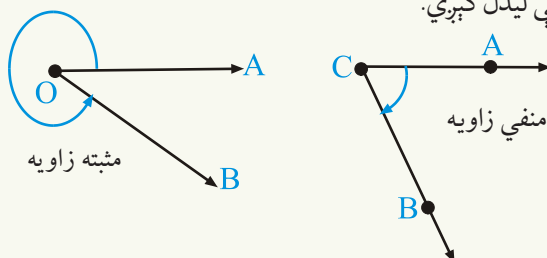


آیا زاویه په مثلثاتو او هندسه کې یو له بله توپیر لري؟
آیا په هندسه کې منفي زاویې شته دي؟

له هندسې څخه پوهېږو، زاویه هغه شکل دی چې د دوه نیمو خطونو له یو ځای کیدو څخه چې مشترکه مبدأ ولري، تشکیل شوی وي چې مشترکه مبدأ د زاویې له رأس څخه عبارت ده. په هندسه کې زاویه له 1° څخه تر 360° پورې وي، خو په مثلثاتو کې په هره اندازه زاویه درلودلای شو. له بلې خوا په مثلثاتو کې مثبتې او منفي زاویې هم شته دي.

په مثلثاتو کې زاویه د یو خط له دوران څخه په دې ډول چې د خط یو انجام ثابت وي، لاس ته راځي. چې د لومړي خط دوران د دویمې ضلعې موقعیت اختیاري وي (یوه ضلع د رأس په نقطه کې دوران کوي). د ساعت د عقربې د حرکت مطابق دوران (clockwise) منفي او د ساعت د عقربې د حرکت مخالف (Counter clockwise) دوران مثبت فرض شوی دی.

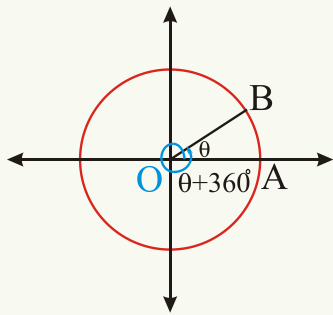
چې لومړۍ ضلعې ته (Initial side) او د دوران پای ته دویمه ضلع (Terminal side) وایي. لکه: څرنگه چې په شکل کې لیدل کېږي.



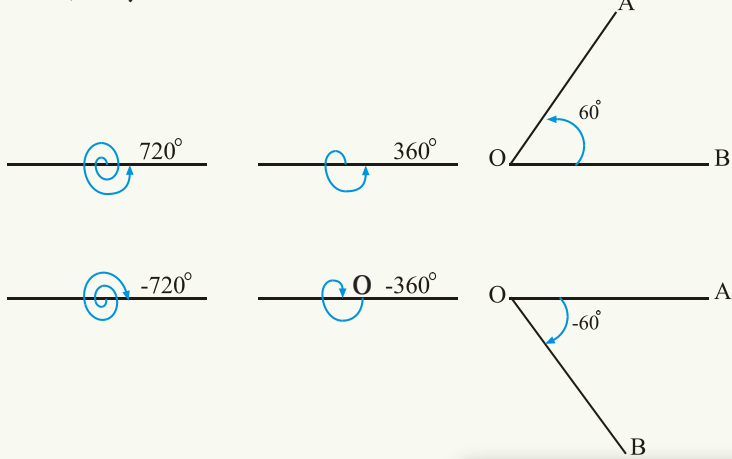
که په شکل کې د OA نیم خط ته د مختصاتو د مبدأ پر شاوخوا د ساعت د عقربې د حرکت په مخالف جهت کې دوران ورکړو، د θ زاویه لاس ته راځي.

که د OA نیم خط ته د 360° په اندازه (یو پوره دوران) دوران ورکړو، او دوران ته دوام ورکړو، تر څو د OA نیم خط د OB موقعیت ته ورسېږي. په دې حالت کې جوړه شوې زاویه $\theta + 360^\circ$ ده. او که د دوو پوره دورانونو وروسته د B ټکي ته ورسېږو، طی شوی زاویه به $\theta + 720^\circ$ او په همدې ډول

که د OA نیم خط ته K دورانونه ورکړو او د B ټکي ته ورسېږو، نو د زاویې اندازه به $\theta + K \cdot 360^\circ$ وي، لکه: څرنگه چې لیدل کېږي، په مثلثاتو کې له 360° څخه لویې زاویې هم شته دي.



لومړی مثال: د 60° \square 360° \square 360° \square 720° او -720° زاویې رسم کړئ.



فعالیت

د 45° , 90° , -180° او 180° زاویې رسم کړئ.

د زاویې د اندازه کولو واحدونه: زاویه د درجې، گراد او رادیان په مرسته اندازه کېږي.

درجه: د یو دوران (Rotation) $\frac{1}{360}$ برخه له درجې څخه عبارت ده، یا د یوې قایمې زاوېې $\frac{1}{90}$ برخې ته درجه وایي.

$$1^\circ = 60' \quad 1' = 60'' \quad 1^\circ = 60 \cdot 60 = 3600''$$

$$\left(\frac{1}{60}\right)^\circ = 1' \quad , \quad \left(\frac{1}{60}\right)' = 1'' \quad \left(\frac{1}{3600}\right)^\circ = 1''$$

دویم مثال: $35^\circ 15' 27''$ د درجې په اعشاري شکل ولیکئ او $(48,3625)^\circ$ په درجه، دقیقه او ثانیه (DMS) وپوړئ.

حل

$$35^\circ 15' 27'' = 35^\circ + \left(\frac{15}{60}\right)^\circ + \left(\frac{27}{3600}\right)^\circ = 35^\circ + 0,25^\circ + 0,0075^\circ = 35,2575^\circ$$

$$48,3625^\circ = 48^\circ + 0,3625^\circ = 48^\circ + (0,3625 \cdot 60)' = 48^\circ + (21,75)'$$

$$= 48^\circ + (21)' + (0,75 \cdot 60)'' = 48^\circ \quad 21' \quad 45''$$

فعالیت

$36^\circ 47' 12''$ په درجه وپوړئ او $55,967663^\circ$ په درجه، دقیقه او ثانیه (DMS) (Degree, Minute, Second) وپوړئ.

گراډ: گراډ هم د زاوېې د اندازه کولو واحد دی، د یو دوران $\frac{1}{400}$ برخې ته گراډ وایي. د گراډ $\frac{1}{100}$

برخې ته دقیقه گراډ او د دقیقه گراډ $\frac{1}{100}$ مې برخې ته ثانیه گراډ وایي.

$$1g = 100'g \quad , \quad 1'g = 100''g \quad , \quad 1g = 10000''g$$

د درجې بدلول په گراډ او د گراډ بدلول په درجې باندې: کولای شو چې درجه په گراډ او گراډ په درجه وپوړو.

دریم مثال: 45° درجې په گراډ او $100g$ په درجه وپوړئ.

حل: څرنګه چې یو مکمل دوران 360° یا $400g$ دی نو:

$$360^\circ = 400g$$

$$1^\circ = \frac{400}{360}g = \frac{10}{9}g$$

$$45^\circ = 45\left(\frac{10}{9}\right)g = 50g$$

$$400g = 360^\circ$$

$$1g = \left(\frac{360}{400}\right)^\circ = \left(\frac{9}{10}\right)^\circ$$

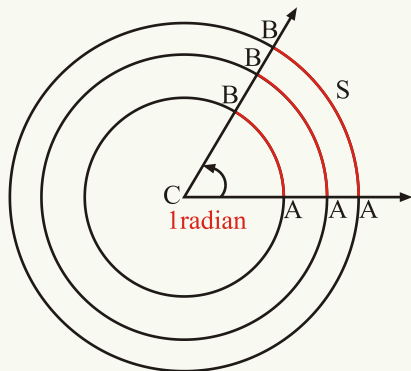
$$100g = 100\left(\frac{9}{10}\right)^\circ = 90^\circ$$

اویا:

$$\frac{d}{180} = \frac{g}{200}, \quad \frac{d}{180} = \frac{100}{200}$$

$$d = \frac{180 \cdot 100}{200} = 90^\circ$$

راډیان (Radian): د درجې او گراد سربېره د زاوېې د اندازه کولو بل واحد راډیان دی. راډیان

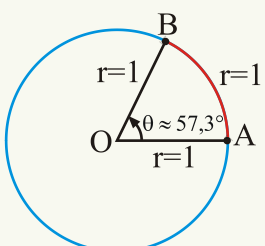


د هغوي مرکزي زاوېې اندازه ده چې د مقابل قوس اوږدوالی يې د شعاع له اوږدوالی سره مساوي وي. راډیان په عالي رياضياتو کې ډېر استعمالېږي. په شکل کې د \widehat{ACB} مرکزي زاويه چې شعاع يې r او د AB قوس اوږدوالی له r سره مساوي دی، نو د \widehat{ACB} زاويه 1 Radian ده.

$$\widehat{ACB} = 1 \text{ radian} = 1^R$$

که د AB قوس د دایرې له شعاع r سره مساوي وي، θ د راډیان په حساب مساوي ده په:

$$\hat{\theta} = \frac{\widehat{AB}}{r} = \frac{s}{r} \text{ او یا } s = r\theta$$



په مثلثاتي دایره یا واحده دایره (Unit Circle) کې چې شعاع يې د اوږدوالی واحد او مرکز يې د وضعيه کمياتو په مبدا کې واقع وي، د راډیان په حساب د مرکزي زاوېې اندازه له مقابل قوس سره مساوي ده.

$$\theta = \frac{\widehat{AB}}{r} = \frac{\widehat{AB}}{1} = \widehat{AB} = S \text{ radian}$$

څرنګه چې د دایرې محیط $C = 2\pi r$ دی، نو $\frac{2\pi r}{r} = 2\pi \text{ radian}$ په دې معنا چې یو پوره دوارن 360° یا $2\pi^R$ دی.

$$2\pi^R = 360^\circ$$

$$1^R = \frac{360^\circ}{2\pi} = \frac{180^\circ}{\pi} \approx \frac{180^\circ}{3.14159} \approx (57.29578)^\circ \approx 57^\circ 17' 45'' \approx (57.3)^\circ$$

$$1^\circ = \frac{2\pi}{360^\circ} = \frac{\pi}{180^\circ} \approx \frac{3.14159}{180^\circ} \approx 0.01745 \text{ Radians}$$

څلورم مثال: د $\frac{\pi}{3} \text{ radian}$ د مرکزي زاوېې د مقابل قوس اوږدوالی پیدا کړئ، که د دایرې قطر 30m وي.

حل: څرنګه چې $r = \frac{d}{2} = \frac{30m}{2} = 15m$ دی، نو $s = r\theta = 15\left(\frac{\pi}{3}\right) = 5\pi m \approx 15,7m$

فعالیت

د 1Rad مرکزي زاوېې د مقابل قوس اوږدوالی به څو سانتي متره وي؟ که د دایرې شعاع 10cm وي.

د درجې او ګراد بدلول په رادېان او د رادېان بدلول په درجه او ګراد:

څرنګه چې $360^\circ = 400g = 2\pi^R$ دی، نو $\frac{d}{360^\circ} = \frac{g}{400} = \frac{R}{2\pi}$ او یا $\frac{d}{180} = \frac{g}{200} = \frac{R}{\pi}$

$$360^\circ = 2\pi^R \quad \text{او یا}$$

$$1^\circ = \left(\frac{2\pi}{360}\right)^R = \left(\frac{\pi}{180}\right)^R$$

په همدې ډول څرنګه چې: $2\pi^R = 360^\circ$

$$1^R = \left(\frac{360}{2\pi}\right)^\circ = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ$$

$$1^R = \frac{200g}{\pi} = \frac{200g}{3,1415} \approx 63,66198g$$

پنجم مثال: د 75° , 220° , -400° , $-100g$ او 40° زاویې په رادیان واروی.

څرنگه چې $1^\circ = \left(\frac{\pi}{180}\right)^R$ ده، نو:

$$75^\circ \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{5\pi}{12} \text{ radian}$$

$$220 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{11\pi}{9} \text{ radian},$$

$$-400^\circ \cdot \frac{\pi}{180} = -\frac{20\pi}{9} \text{ radian}$$

$$40^\circ \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{2\pi}{9} \text{ radian}$$

څرنگه چې یو پوره دوران $2\pi^R$ او یا $400g$ دی، نو:

$$1g = \left(\frac{2\pi}{400}\right)^R = \left(\frac{\pi}{200}\right)^R$$

$$-100g = \left(-100 \cdot \frac{\pi}{200}\right)^R = \left(-\frac{\pi}{2}\right)^R$$

پوښتنه: که د گراد په حساب له یوې زاویې څخه 30 واحد کم کړو، په لاس راغلی عدد، د زاویې

اندازه په درجه راکوي، دا زاویه څو رادیانه ده؟

حل

$$\frac{10}{9}D - 30 = D$$

$$\frac{270}{180} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow R = \frac{3\pi}{2} \text{ Radian}$$

$$\frac{10}{9}D - D = 30 \Rightarrow \frac{10D - 9D}{9} = 30 \Rightarrow D = 270^\circ$$

نو دا زاویه $\frac{3\pi}{2}$ رادیانه ده.

شپږم مثال: a: $\left(\frac{5\pi}{6}\right)$, $\frac{\pi}{5}$, $\frac{4\pi}{9}$ او 6π رادیان په درجه واروی.

(b): د یو دوران (Revolution) $\frac{1}{4}$ برخه څو رادیانه کېږي؟

حل

$$1^R = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ, \quad \frac{\pi}{5} \cdot \frac{180}{\pi} = 36^\circ$$

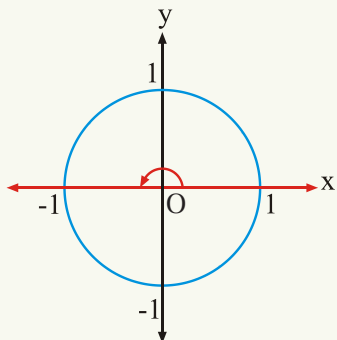
$$a: \left(\frac{5\pi}{6}\right) \cdot \left(\frac{180}{\pi}\right) = 150^\circ, \quad 6\pi \cdot \frac{180}{\pi} = 1080^\circ, \quad \frac{4\pi}{9} \cdot \frac{180}{\pi} = 80^\circ$$

$$b: = \frac{1}{4} \cdot 2\pi^R = \frac{\pi}{2} \text{ radian}$$

لاندي شکلونه وگورئ.

$$\frac{1}{2} \text{ Rev}$$

$$\frac{1}{2} \cdot 2\pi = \pi^R$$

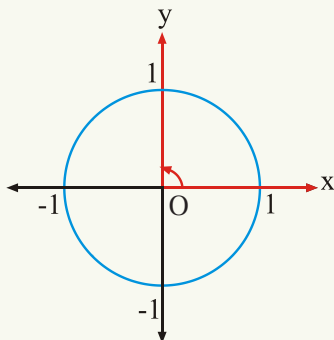


1 Re volution

2 π Radians

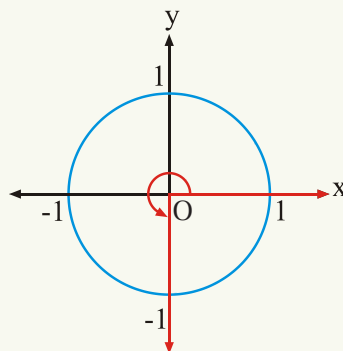
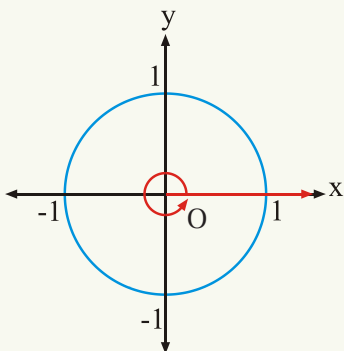
$$\frac{1}{4} \text{ Rev}$$

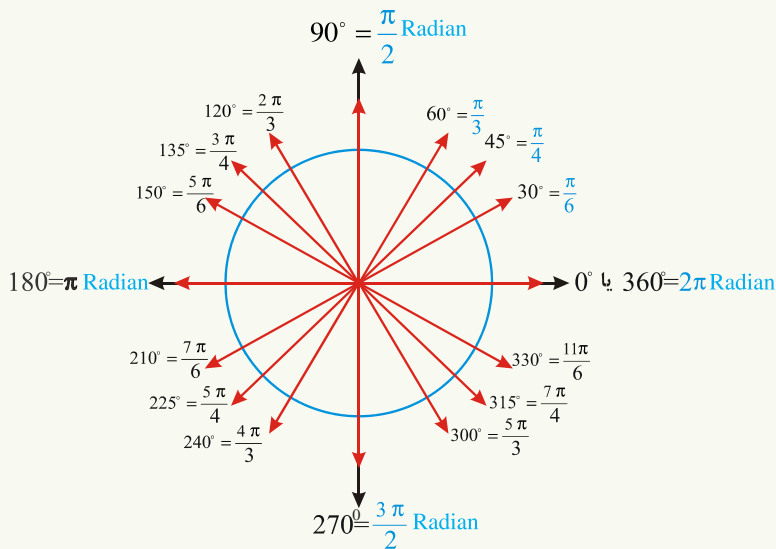
$$\frac{1}{4} \cdot 2\pi = \frac{\pi}{2} \text{ Radain}$$



$\frac{3}{4}$ Re volution

$\frac{3}{4} \cdot 2\pi = \frac{3\pi}{2}$ Radians





د درجې او رادېان
تر منځ د اړیکې
د ښه څرگندېدو
لپاره لاندې شکل
هم وگورئ:

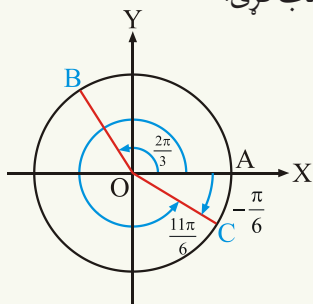
فعالیت

$\frac{\pi}{12}$ ، $\frac{3\pi}{4}$ او $-\frac{5\pi}{4}$ رادېانه زاوې په درجه واړوئ.

اووم مثال

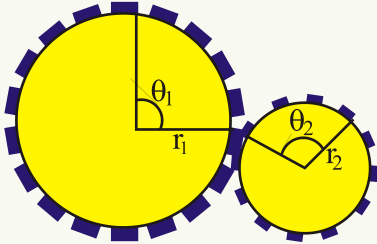
(a) د $\frac{2\pi}{3}$ ، $\frac{11\pi}{6}$ او $-\frac{\pi}{6}$ زاوې په شکل کې وښیاست:

(b) په شکل کې لوی او کوچنی څرخ ښودل شوی دی، که د θ_1 او θ_2 د زاویو مقدار د رادېان په حساب وي، د θ_2 د زاوې مقدار د θ_1 ، r_1 او r_2 له جنسه حساب کړئ.
د (a) حل:



له شکل څخه لیدل کېږي چې د $\frac{11\pi}{6}$ او $-\frac{\pi}{6}$ زاویو دویمې ضلعې یو پر بل منطبقې دي.

د (b) حل:



$$\theta_2 r_2 = \theta_1 r_1 \Rightarrow \theta_2 = \frac{\theta_1 r_1}{r_2}$$

اتم مثال: که د ساعت د ثانیې عقربې 40 ثانیې دوران کړی وي، د ثانیې د عقربې په واسطه طی شوي مثبتې زاویه په رادینان پیدا کړئ.

حل: څرنګه چې 60 ثانیې یو پوره دوران یا 2π رادینان کېږي، نو $\frac{40}{60} = \frac{2}{3} \text{ Rev}$ او څرنګه چې یو دوران $2\pi \text{ Radian}$ دی، نو: $\frac{2}{3} \cdot 2\pi^R = \frac{4\pi}{3} \text{ Radian}$

همدارنګه د ساعت د دوو عقربو ترمنځ د زاویې د پیدا کولو لپاره له $\theta = |5,5 \text{ min} - 30 \text{ hr}|$ څخه کار اخلو. د مثال په توګه د 3 بجو او 40 دقیقو په وخت کې د ساعت ګرد او دقیقه ګرد په منځ کې زاویه څو درجې ده؟

$$\theta = |5,5 \cdot 40 - 30 \cdot 3| = 130^\circ$$

پوښتنې

1 - که د یوې مرکزي زاویې مقابل قوس 50cm او د دایرې شعاع 25cm وي، مرکزي زاویه به

څو رادینانه وي؟

2 - $32,4222^\circ$ په درجې، دقیقې او ثانیې واړوی

3 - د یو دوران $\frac{1}{8}$ برخه څو رادینانه، څو درجې او څو ګراډه کېږي؟

4 - $\frac{5\pi}{4}$ رادینانه څو ګراډه او $7,5^\circ$ څو رادینانه کېږي؟

5- $225^\circ, -315^\circ, 720^\circ$ او 45° زاويې په راډيان او گراد واروئ

6- د يو دوران $\frac{1}{9}$ ، $\frac{1}{24}$ ، $\frac{1}{18}$ او $\frac{4}{5}$ برخې شو راډيانه او شو درجې کېږي؟

7- $\frac{11\pi}{3}$ ، $\frac{9\pi}{4}$ ، $\frac{\pi}{6}$ ، $-\frac{\pi}{6}$ ، $-\frac{\pi}{10}$ ، $\frac{2\pi}{5}$ او $-\frac{5\pi}{12}$ راډيانه په درجو واروئ

8- که د يو ساعت د ثانيې د عقربې اوږدوالی 6cm وي، په 40 ثانيو کې د ثانيې عقربه شو سانتي متره فاصله طی کوي؟

9- که د دايرې شعاع 3cm او مرکزي زاويه $\frac{5}{3}$ راډيانه وي. د دې مرکزي زاويې د مقابل قوس اوږدوالی به شو سانتي متره وي؟

10- که د يو ساعت د ثانيې د عقربې دوران 35 ثانيې وي، نو د ثانيې عقربې به شو راډيانه مثبت زاويه طی کړي وي؟

11- د دوو زاويو مجموعه 152° ده، که د يوې زاويې اندازه د درجې په حساب له بلې زاويې سره دگراد په حساب برابره وي، د هرې زاويې اندازه د راډيان په حساب خومره ده؟

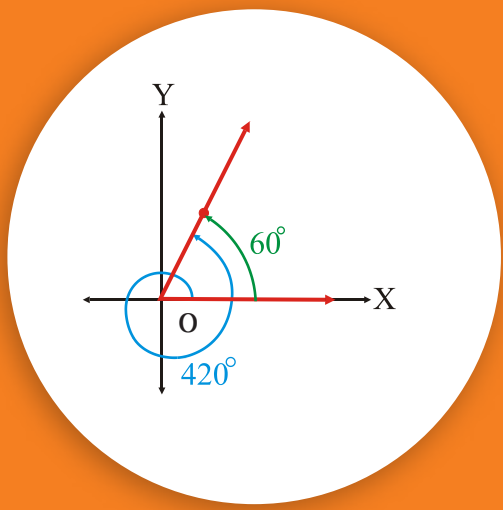
12- 1620° شو راډيانه کېږي؟

a) $4\pi^R$ b) $8\pi^R$ c) $9\pi^R$ d) $10\pi^R$

13- خلور دورانونه شو راډيانه کېږي؟

a) $2\pi^R$ b) $4\pi^R$ c) $6\pi^R$ d) $8\pi^R$

14- که د يوې دايرې شعاع 10m وي، د 45 radian مرکزي زاويې، مقابل قوس به شو متره وي؟

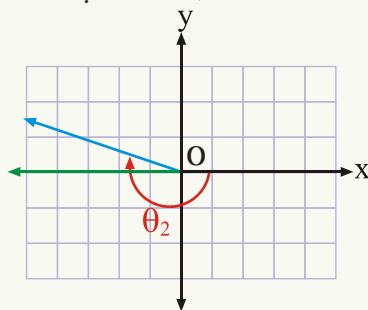
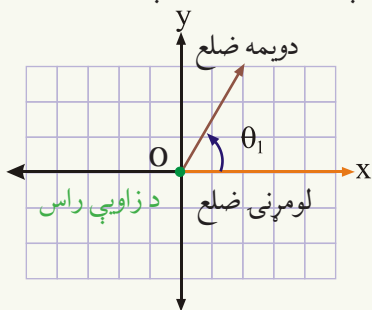


د یوې زاوې معیاري حالت او کوټرمینل زاوې

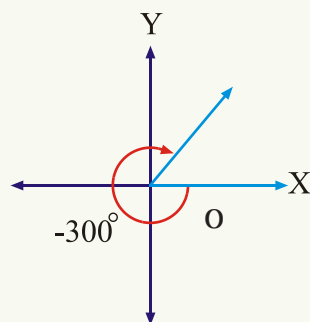
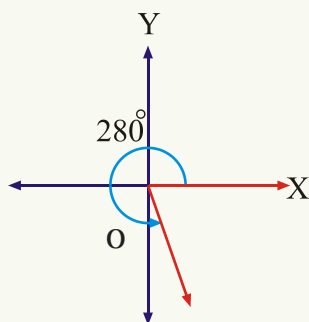
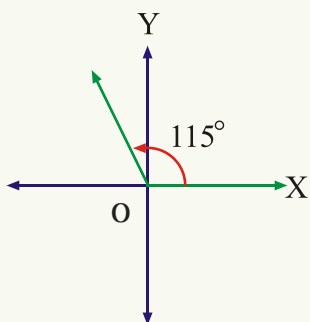
آیا ویلای شئ چې د 60° او 420° زاویو
دویمې ضلعې یو پر بل منطبق دي؟ ولې؟

د یوې زاوې معیاري حالت (Standard position of an angle):

که د یوې زاوې رأس د وضعیه کمیاتو په مبدأ کې او لومړنی ضلع یې د X د محور په مثبت جهت پرته وي، نو دا زاویه په معیاري حالت کې ده.
د مثال په توګه: په لاندې شکلونو کې د θ_1 او θ_2 زاوې په معیاري حالت کې بنودل شوي دي.



لومړی مثال: 115° ، 280° او -300° زاوې په معیاري حالت کې رسم کړئ.



که په معیاري حالت کې د یوې زاوې دویمه ضلع د X او یا د Y پر محور منطبق شي، داسې زاوې ته ربعي زاویه (Quadrantale angle) وایي.

د مثال په توگه: $90^\circ, 180^\circ, 270^\circ, 360^\circ$ او داسې نورې زاوې ربعي زاوې دي.

فعالیت

د $130^\circ, 50^\circ, 500^\circ$ او -210° زاوې په معیاري حالت کې رسم کړئ.

کوټرمینل زاوې (Conterminal angles)

دوې یا څو زاوې چې په معیاري حالت کې یې دویمې ضلعي یو پر بل منطبق شي، د کوټرمینل زاویو په نامه یادېږي.

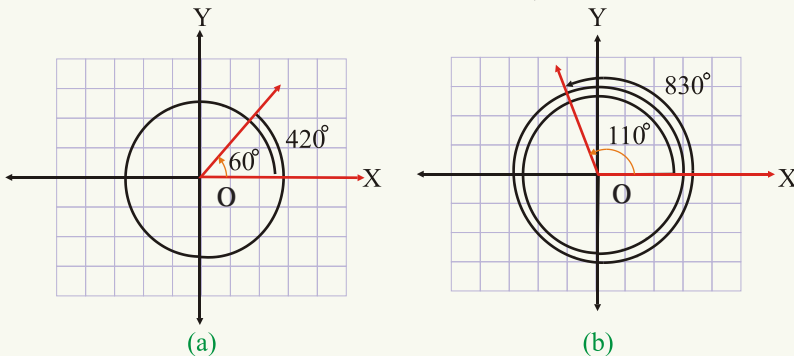
دویم مثال: په شکل کې وښیاست چې د 60° او 420° زاوې او همدارنگه د 110° او 830°

زاوې چې په معیاري حالت کې دي، یو له بلې سره کوټرمینل زاوې دي.

حل: څرنگه چې په معیاري حالت کې د دې زاویو لومړنی ضلعي یو پر بل منطبق دي، لکه څنګه چې په شکل کې لیدل کېږي د 60° او 420° زاویو دویمې ضلعي (Conterminal sides) یو

پر بل منطبق دي. نو د تعریف په اساس دا دواړه زاوې سره کوټرمینل دي.

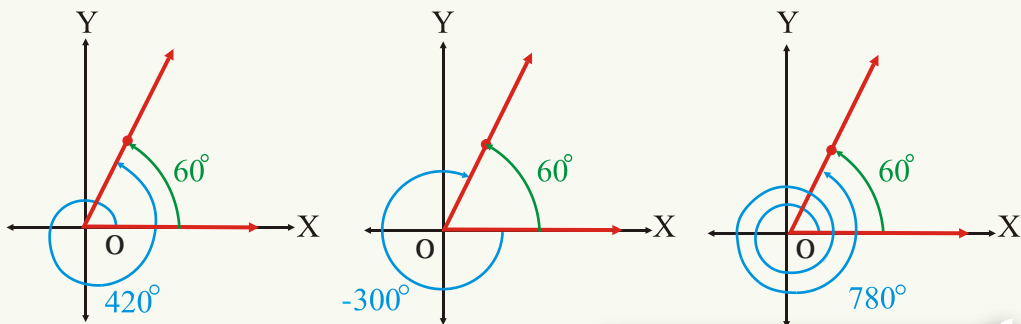
همدارنگه د 110° او 830° زاوې هم سره کوټرمینل دي.



درېم مثال: په معیاري حالت کې د 60° زاوې سره درې کوټرمینل زاوې رسم کړئ او په شکل

کې یې هم وښیاست.

حل: $60^\circ + 360^\circ = 420^\circ$, $60^\circ - 360^\circ = -300^\circ$, $60^\circ + 2 \cdot 360^\circ = 780^\circ$



فعالیت

ایا د 230° ، 590° او 230° ، -130° زاویې سره کوترمینل دي؟ رسم یې کړئ.

څرنگه چې کوترمینل زاویې یو له بله سره د یوه پوره دوران (360°) یا $2\pi^R$ او یا څو دورانونه $n \cdot 360^\circ$ او یا $n \cdot 2\pi$ توپیر لري، نو د θ د زاویې سره کوترمینل زاویې عبارت دي له:

$\theta + 2\pi$	$\theta + 360^\circ$
$\theta + 2 \cdot 2\pi$	$\theta + 2 \cdot 360^\circ$
$\theta + 3 \cdot 2\pi$	$\theta + 3 \cdot 360^\circ$
-----	-----
$\theta + 2n\pi$	$\theta + n \cdot 360^\circ$

څلورم مثال:

(a) له 30° زاویې سره څلور کوترمینل زاویې پیدا کړئ.
 (b) له 90° زاویې سره دوه کوترمینل زاویې پیدا او په شکل کې یې وښیاست.

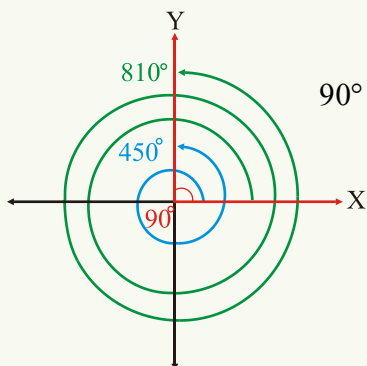
حل (a)

$$30^\circ + 360^\circ = 390^\circ \quad \text{یا} \quad \frac{\pi}{6} + 2\pi = \frac{13\pi}{6} \quad \text{Radian}$$

$$30^\circ + 2 \cdot 360^\circ = 750^\circ \quad \text{یا} \quad \frac{\pi}{6} + 2 \cdot 2\pi = \frac{25\pi}{6} \quad \text{Radian}$$

$$30^\circ + 3 \cdot 360^\circ = 1110^\circ \quad \text{یا} \quad \frac{\pi}{6} + 3 \cdot 2\pi = \frac{37\pi}{6} \quad \text{Radian}$$

$$30^\circ + 4 \cdot 360^\circ = 1470^\circ \quad \text{یا} \quad \frac{\pi}{6} + 4 \cdot 2\pi = \frac{49\pi}{6} \quad \text{Radian}$$



$$90^\circ + 360^\circ = 450^\circ$$

$$90^\circ + 2 \cdot 360^\circ = 810^\circ$$

(b) حل

پنجم مثال: آیا 50° , 410° , 800° , 80° , 40° , -680° او د 60° او 410° زاویې سره کوټرمینل دي؟

حل: څرنگه چې $410^\circ = 50^\circ + 360^\circ$ دی، نو د 50° او 410° زاویې سره کوټرمینل دي او $800^\circ = 80^\circ + 2 \cdot 360^\circ$ نو د 80° او 800° زاویې هم سره کوټرمینل دي. همدارنگه $-680^\circ = 40^\circ - 2 \cdot 360^\circ$ نو 40° او -680° زاویې هم سره کوټرمینل دي، خو $410^\circ \neq 60^\circ + 360^\circ$ ، نو د 410° او 60° زاویې سره کوټرمینل نه دي.

که د یوې زاویې رأس د وضعیه کمیانو په مبدا کې او لومړنی ضلع یې د X د محور پر مثبت جهت منطبق وي، نو دا زاویه په معیاري حالت کې ده. که په معیاري حالت کې د دوو یا څو زاویو دویمې ضلعي یو پر بل منطبق وي، داسې زاویې د کوټرمینل زاویو په نوم یادېږي.

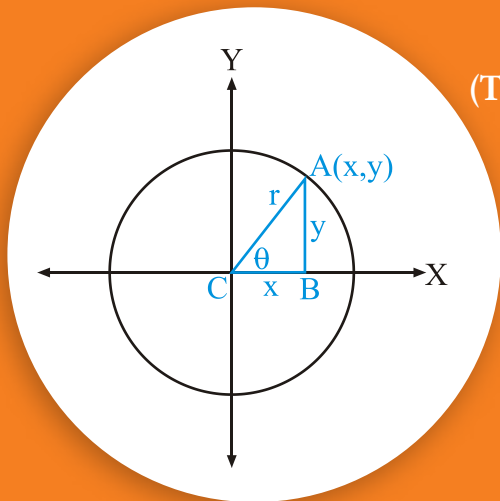
پوښتنې

- 1 - د $90^\circ, 120^\circ, -270^\circ$ او 240° زاویې په معیاري حالت کې رسم کړئ.
- 2 - تر ټولو کوچنی مثبت زاویه پیدا کړئ چې له لاندېنیو زاویو سره کوټرمینل وي.
 135° 90° 60° 539° 450° -125° -40°
- 3 - آیا د $(-80^\circ, 280^\circ)$ او د $(35^\circ, 395^\circ)$ زاویې سره کوټرمینل دي؟
- 4 - له 40° زاویې سره، شپږ کوټرمینل زاویې پیدا کړئ.
- 5 - آیا د $(-930^\circ, 150^\circ)$ او د $(180^\circ, 900^\circ)$ زاویې سره کوټرمینل دي، په شکل کې یې هم

وښیاست؟

مثلثاتي تابعگاني

(Trigonometric Functions)



آيا ويلاى شى چې د θ د زاويې مثلثاتي نسبتونه د θ د زاويې د ضلعو په اوږدوالي پورې اړه لري او که نه؟

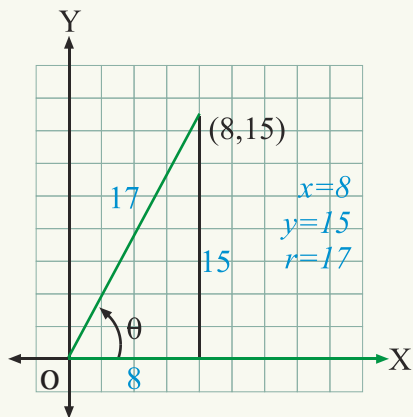
څرنگه چې پوهېږو چې د د يوې حادې زاويې (θ) مثلثاتي نسبتونه (Trigonometric ratios) په يوه قايمه الزاويه مثلث کې په لاندې ډول تعريف شوي دي.

$$\sin \theta = \frac{AB}{AC} = \frac{y}{r}, \quad \cos \theta = \frac{BC}{AC} = \frac{x}{r}$$

$$\tan \theta = \frac{AB}{BC} = \frac{y}{x}, \quad \cot \theta = \frac{BC}{AB} = \frac{x}{y}$$

$$\sec \theta = \frac{AC}{BC} = \frac{r}{x}, \quad \csc \theta = \frac{AC}{AB} = \frac{r}{y}$$

او په نتيجه کې ليدل کېږي چې: $\csc \theta = \frac{1}{\sin \theta}$, $\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}$ او $\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}$.



لومړی مثال: که په معياري حالت کې د θ زاويې

دويمه ضلع د (8,15) له ټکي څخه تېره شي، د θ

زاويې مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

د فيثاغورث د قضیې په اساس لرو چې:

$$r^2 = x^2 + y^2.$$

$$r^2 = 8^2 + (15)^2 = 64 + 225 = 289$$

$$r = \sqrt{289} = 17$$

$$\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{15}{17}, \quad \cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{8}{17}$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{15}{8}, \quad \cot \theta = \frac{x}{y} = \frac{8}{15}$$

$$\sec \theta = \frac{r}{x} = \frac{17}{8}, \quad \csc \theta = \frac{r}{y} = \frac{17}{15}$$

د زاویو د ځینو مثلثاتي نسبتونو ترمنځ اساسي اړیکې:

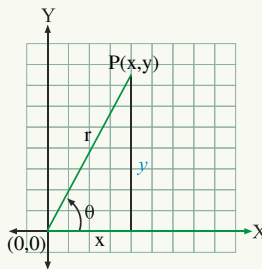
د فیثاغورث د قضیې په اساس د شکل له مخې لیکلای شو چې:

$$y^2 + x^2 = r^2 \dots\dots\dots I$$

$$\frac{y^2}{r^2} + \frac{x^2}{r^2} = \frac{r^2}{r^2}$$

$$\left(\frac{y}{r}\right)^2 + \left(\frac{x}{r}\right)^2 = 1$$

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$



دواړو خواوې په r^2 وېشو:

همدارنگه که د (I) معادلې دواړه خواوې په y^2 وېشو، نو لرو چې:

$$\frac{y^2}{y^2} + \frac{x^2}{y^2} = \frac{r^2}{y^2} \Rightarrow 1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2 = \left(\frac{r}{y}\right)^2$$

$$1 + \cot^2 \theta = \csc^2 \theta$$

او که د (I) معادلې دواړه خواوې په x^2 وېشو:

$$\frac{y^2}{x^2} + \frac{x^2}{x^2} = \frac{r^2}{x^2} \Rightarrow \left(\frac{y}{x}\right)^2 + 1 = \left(\frac{r}{x}\right)^2$$

$$1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta$$

له بلې خوا:

$$\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\frac{y}{r}}{\frac{x}{r}} = \frac{y}{x} = \tan \theta$$

$$\frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{\frac{x}{r}}{\frac{y}{r}} = \frac{x}{y} = \cot \theta$$

او له دې ځايه څخه نتيجه کېږي چې:

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1, \sin \theta \cdot \csc \theta = 1, 1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta, \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

$$\tan \theta \cdot \cot \theta = 1, \cos \theta \cdot \sec \theta = 1, 1 + \cot^2 \theta = \csc^2 \theta, \cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$$

څرنگه چې دا اړيکې د θ د هر قيمت لپاره سمې دي، نو په دې اساس مثلثاتي مطابقتونه هم ورته وايي.

فعاليت

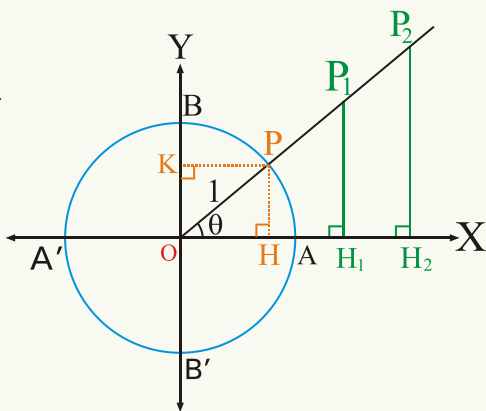
که په معياري حالت کې د θ دويمه ضلع د (12,5) له ټکي څخه تېره شي، د θ زاوېې مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

د مثلثاتي تابع گانو پورتنې قيمتونه يوازې د θ زاوېې د اندازې پورې اړه لري، د P د ټکي پر موقعيت پورې چې د θ پر دويمه ضلع واقع دی اړه نه لري چې دا حقيقت په شکل کې د $\triangle OH_1P_1 \cong \triangle OPH$ او $\triangle OH_2P_2$ مثلثونو د مشابهت په اساس ليدل کېږي.

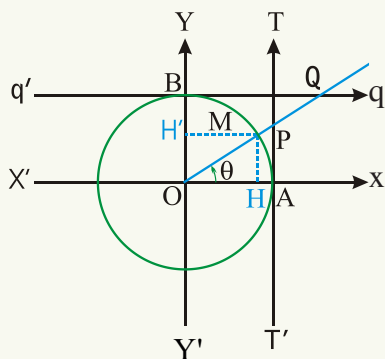
$$|OP| = 1$$

$$\cos \theta = \frac{|OH|}{|OP|} = \frac{|OH_1|}{|OP_1|} = \frac{|OH_2|}{|OP_2|}$$

$$\sin \theta = \frac{|PH|}{|OP|} = \frac{|P_1H_1|}{|OP_1|} = \frac{|P_2H_2|}{|OP_2|}$$



که د θ زاویه د راډیان په حساب وي. θ آزاد متحول او $\sec \theta, \cot \theta, \tan \theta, \cos \theta, \sin \theta$ او $\csc \theta$ مقید (مربوط) متحولونه دي. په دې معنا چې



$\csc \theta$ او $\sec \theta, \cot \theta, \tan \theta, \cos \theta, \sin \theta$

مثلثاتي تابعگانې دي چې مقدار يې د θ د ضلعو

اوږدوالی پورې اړه نه لري، بلکې د θ د زاویې په

مقدار پورې اړه لري.

څرنگه چې مثلثاتي دایره

(Trigonometric Circle) هغه دایره ده چې د

شعاع اوږدوالی يې د اوږدوالی واحد دی.

په مثلثاتي دایره کې چې مرکز يې د وضعیه کمیانو په

مبدأ کې او د XX' او YY' محورونه د دې دایرې افقي او عمودي قطرونه دي. د قرارداد په اساس

$Y'OY$ ته د ساینو محور او $X'OX$ ته د کوساینو محور وایي. د TAT' محور چې د A په ټکي کې

له دایرې سره مماس دی، د ټانجانټ محور او د $q'Bq$ محور چې د B په ټکي کې پر دایره مماس

دی، د کوټانجانټ محور بلل کېږي. د ساینو او کوساینو د محورونو مبدأ د دایرې مرکز او د ټانجانټ

د محور مبدأ، د A ټکي د کوټانجانټ د محور مبدأ، د B ټکي دی.

که چېرې د A له ټکي څخه په مثبت جهت کې د M تر ټکي حرکت وکړو او د \hat{MOA} زاویې ته

θ ووايو، د θ د زاویې مثلثاتي توابع په لاندې ډول هم تعريفېږي.

$$(r = OM = OA = OB = 1)$$

$$\sin \theta = \frac{HM}{OM} = \frac{\overline{OH'}}{\overline{OM}} = \frac{\overline{OH'}}{1} = \overline{OH'}$$

$$\cos \theta = \frac{\overline{OH}}{\overline{OM}} = \frac{\overline{OH}}{1} = \overline{OH}$$

$$\tan \theta = \frac{HM}{OH} = \frac{\overline{AP}}{\overline{OA}} = \overline{AP}$$

$$\sec \theta = \frac{OM}{OH} = \frac{OP}{OA} = \overline{OP}$$

$$\cot \theta = \frac{\overline{OH}}{HM} = \frac{BQ}{OB} = \overline{BQ}$$

$$\csc \theta = \frac{OM}{HM} = \frac{OQ}{OB} = \overline{OQ}$$

په دې اساس مثلثاتي نسبتونو ته مثلثاتي خطونه هم وایي.

په همدې ډول که د θ دویمه ضلع او یا د قوس پای په دویمه، دریمه یا څلورمه ناحیه (ربع) کې وي.

کولی شو چې مثلثاتي نسبتونه یې پر لاس راوړو:
د مثلثاتي نسبتونو علامې په څلورو ناحیو(ربعو) (quadrants) کې په لاندې ډول دي.

$\sec \theta, \cos \theta$	$\tan \theta, \cot \theta$	$\sin \theta, \csc \theta$	ربع
+	+	+	I
-	-	+	II
-	+	-	III
+	-	-	IV

$\sin \theta > 0$	$\sin \theta > 0$
$\cos \theta < 0$	$\cos \theta > 0$
$\tan \theta < 0$	$\tan \theta > 0$
$\cot \theta < 0$	$\cot \theta > 0$
$\sec \theta < 0$	$\sec \theta > 0$
$\csc \theta > 0$	$\csc \theta > 0$
$\sin \theta < 0$	$\sin \theta < 0$
$\cos \theta < 0$	$\cos \theta > 0$
$\tan \theta > 0$	$\tan \theta < 0$
$\cot \theta > 0$	$\cot \theta < 0$
$\sec \theta < 0$	$\sec \theta > 0$
$\csc \theta < 0$	$\csc \theta < 0$

دویم مثال: له لاندې شکل سره سم که په معیاري حالت کې د θ د زاوې دویمه ضلع، په دویمه

ناحیه (ربع) کې واقع وي او $\cos \theta = \frac{-3}{5}$ وي، د θ د زاوې نور مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

حل: لومړی د P د ټکي وضعیه کمیات پیدا کوو: څرنگه چې $\cos \theta = \frac{-3}{5}$ دی، په دویمه ربع

کې د X قیمت منفي دی، نو $x = -3$ او
د فیثاغورث د قضیې له مخې لرو

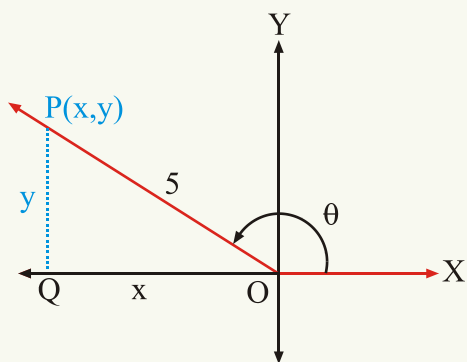
چې:

$$5^2 = (-3)^2 + y^2$$

$$y^2 = 25 - 9 = 16$$

$$y = \pm\sqrt{16}$$

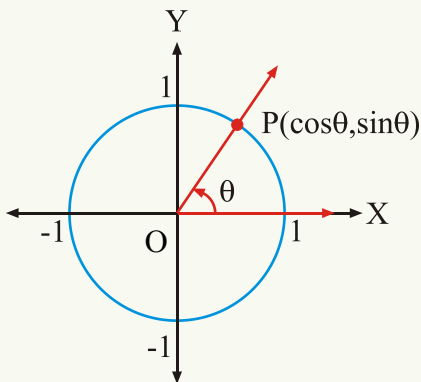
$$y = 4$$



(ځکه چې د P ټکی په دویمه ربع کې دی، $y > 0$ دی)

$$\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{4}{5}, \quad \cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{-3}{5}, \quad \tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{4}{-3}$$

$$\csc \theta = \frac{r}{y} = \frac{5}{4}, \quad \sec \theta = \frac{r}{x} = \frac{5}{-3}, \quad \cot \theta = \frac{x}{y} = \frac{-3}{4}$$



څرنگه چې د X محور ته د \cos محور او د Y محور ته د \sin محور وايي، مور کولای شو چې په مثلثاتي دایره کې د P د ټکي وضعیه کميات له $P(\cos \theta, \sin \theta)$ او يا $P(x, y)$ سره وښايو.

د θ د زاوې مثلثاتي توابع يوازې د θ د زاوې په مقدار پورې اړه لري چې θ آزاد متحول او د θ مثلثاتي نسبتونه مقيد متحولونه دي.

په لومړي ناحیه (ربعه) کې ټول مثلثاتي نسبتونه مثبت، په دویمه ناحیه (ربع) کې $\sin \theta$ او $\csc \theta$

مثبت، په دریمه ناحیه (ربع) کې $\tan \theta, \cot \theta$ مثبت او په څلورمه ناحیه (ربع) کې $\cos \theta, \sec \theta$ مثبت او نور منفي دي.

پوښتنې

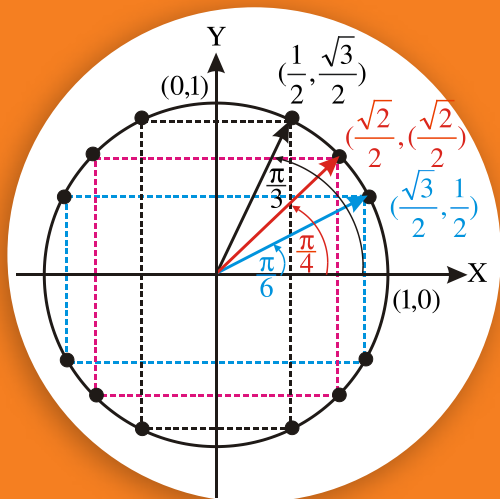
1- د لاندېنيو زاويو د مثلثاتي نسبتونو نښې (علامې) په شفاهي ډول وواياست.

$$\sin 120^\circ \quad \tan 170^\circ \quad \tan 60^\circ \quad \cos 330^\circ \quad \sec 200^\circ$$

$$\cot 271^\circ \quad \csc 91^\circ \quad \sin 271^\circ \quad \csc 181^\circ \quad \csc 315^\circ$$

2- که θ په معياري حالت کې د راډيان په حساب وي او د θ دویمه ضلع له لاندې راکړل شوو ټکو څخه تېره شي، $\sin \theta$ ، $\cos \theta$ او $\tan \theta$ پيدا کړئ.

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \quad \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \quad \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \quad \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$



د ځينو خاصو زاويو مثلثاتي نسبتونه

آيا کولای شئ چې ووايئ $\sin 30^\circ = \cos 60^\circ$ دی؟

د 45° مثلثاتي نسبتونه: په يوه قايم الزاويه متساوي الساقين مثلث کې، دوې قايمې څنډې يې يو، يو واحد په پام کې ونيسئ.

$$r^2 = 1^2 + 1^2$$

$$r^2 = 2 \Rightarrow r = \sqrt{2}$$

$$\sin 45^\circ = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\text{مقابلہ ضلع}}{\text{وتر}} = \frac{y}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

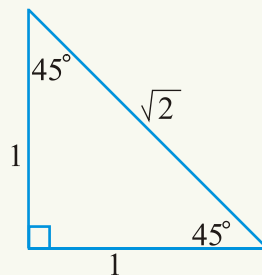
$$\cos 45^\circ = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\text{مجاورہ ضلع}}{\text{وتر}} = \frac{x}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan 45^\circ = \tan \frac{\pi}{4} = \frac{\text{مقابلہ ضلع}}{\text{مجاورہ ضلع}} = \frac{y}{x} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\cot 45^\circ = \cot \frac{\pi}{4} = \frac{\text{مجاورہ ضلع}}{\text{مقابلہ ضلع}} = \frac{x}{y} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\sec 45^\circ = \sec \frac{\pi}{4} = \frac{\text{وتر}}{\text{مجاورہ ضلع}} = \frac{r}{x} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$$

$$\csc 45^\circ = \csc \frac{\pi}{4} = \frac{\text{وتر}}{\text{مقابلہ ضلع}} = \frac{r}{y} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$$



فعالیت

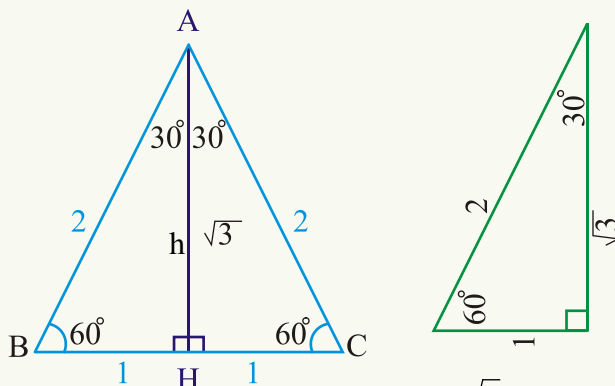
یو متساوي الساقين قائمه زاويه مثلث داسې په پام کې ونیسئ چې هره قائمه ضلع یې b واحد وي، د 45° زاويې مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

که د ABC متساوي الاضلاع مثلث چې هره ضلع یې دوه واحد وي، په پام کې ونیسو، د A له رأس څخه د AH ارتفاع رسموو، څرنگه چې د \hat{A} زاويه نیمایي شوې ده چې نیمایي یې 30° ده، نو:

$$h^2 + 1^2 = 2^2$$

$$h^2 = 4 - 1 = 3$$

$$h = \sqrt{3}$$



$$\sin 30^\circ = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 30^\circ = \tan \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\cot 30^\circ = \cot \frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$$

$$\sec 30^\circ = \sec \frac{\pi}{6} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\csc 30^\circ = \csc \frac{\pi}{6} = \frac{2}{1} = 2$$

فعالیت

یو داسې متساوي الاضلاع مثلث په پام کې ونیسئ چې هره ضلع یې a واحد وي د $30^\circ = \frac{\pi}{6}$ زاويې مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

همدارنگه که شکل ته پام وکړو:

$$\sin 60^\circ = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60^\circ = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

$$\cot 60^\circ = \cot \frac{\pi}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\sec 60^\circ = \sec \frac{\pi}{3} = 2$$

$$\csc 60^\circ = \csc \frac{\pi}{3} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

ليدل کېږي چې $30^\circ + 60^\circ = 90^\circ$:

$$\sin 30^\circ = \cos 60^\circ$$

$$\cos 30^\circ = \sin 60^\circ$$

$$\tan 30^\circ = \cot 60^\circ$$

$$\sec 30^\circ = \csc 60^\circ$$

$$\csc 30^\circ = \sec 60^\circ$$

$$\cot 30^\circ = \tan 60^\circ$$

يا په عمومي ډول هر وخت چې د دوو زاويو مجموعه 90° وي، که يوه زاويه θ وي، بله زاويه به

$(90^\circ - \theta)$ وي.

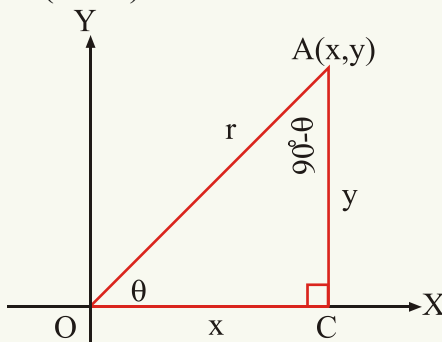
$$\sin(90^\circ - \theta) = \frac{x}{r}, \cos \theta = \frac{x}{r} \Rightarrow \sin(90^\circ - \theta) = \cos \theta$$

$$\cos(90^\circ - \theta) = \frac{y}{r}, \sin \theta = \frac{y}{r} \Rightarrow \cos(90^\circ - \theta) = \sin \theta$$

$$\tan(90^\circ - \theta) = \frac{x}{y}, \cot \theta = \frac{x}{y} \Rightarrow \tan(90^\circ - \theta) = \cot \theta$$

$$\sec(90^\circ - \theta) = \frac{r}{y}, \csc \theta = \frac{r}{y} \Rightarrow \sec(90^\circ - \theta) = \csc \theta$$

$$\csc(90^\circ - \theta) = \frac{r}{x}, \sec \theta = \frac{r}{x} \Rightarrow \csc(90^\circ - \theta) = \sec \theta$$



فعالیت

په همدې ډول وښیاست چې: $\cot(90^\circ - \theta) = \tan \theta$

لکه: څنگه چې د نهم ټولګي په مثلثاتو کې مو ويلي دي چې د زاویو د مثلثاتي نسبتونو جدول هم په همدې اساس جوړ شوی دی:

لومړی مثال: د 39° زاویې مثلثاتي نسبتونه راګرځول شوي دي، د 51° زاویې مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

$$\begin{array}{lll} \sin 39^\circ = 0,6293 & \tan 39^\circ = 0,8098 & \sec 39^\circ = 1,287 \\ \cos 39^\circ = 0,7771 & \cot 39^\circ = 1,235 & \csc 39^\circ = 1,589 \end{array}$$

حل: څرنگه چې $39^\circ + 51^\circ = 90^\circ$ کېږي، نو:

$$\begin{array}{ll} \sin 51^\circ = \cos 39^\circ = 0,7771 & \cos 51^\circ = \sin 39^\circ = 0,6293 \\ \tan 51^\circ = \cot 39^\circ = 1,235 & \cot 51^\circ = \tan 39^\circ = 0,8098 \\ \sec 51^\circ = \csc 39^\circ = 1,589 & \csc 51^\circ = \sec 39^\circ = 1,287 \end{array}$$

پوښتنې

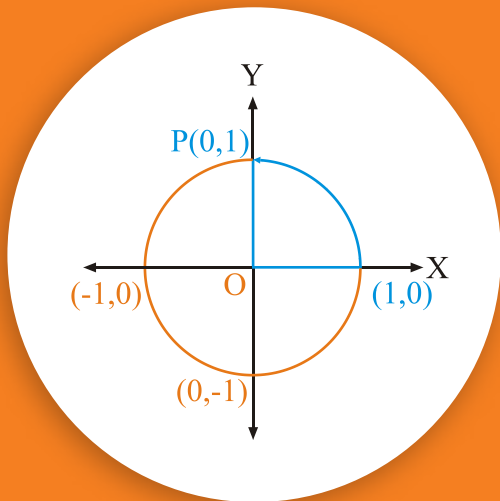
1 - که:

$$\begin{array}{llll} \sin 17^\circ = 0,2927 & \cos 17^\circ = 0,9563 & \sec 17^\circ = 1,046 & \csc 17^\circ = 3,420 \\ \tan 17^\circ = 0,3057 & \cot 17^\circ = 3,271 & & \end{array}$$

وي د 73° زاویې مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

2 - د لاندې اړیکو څخه کومه یوه یې ناسمه ده؟

$$\begin{array}{ll} \sin 28^\circ = \cos 62^\circ & \cos 12^\circ 10' 20'' = \sin 77^\circ 49' 40'' \\ \sec 12^\circ = \sec 88^\circ & \tan 70^\circ = \cot 20^\circ \end{array}$$



د $270^\circ, 180^\circ, 90^\circ, 0^\circ$ او
360° زاویو مثلثاتي نسبتونه:

آیا $\tan 90^\circ$ او $\tan 270^\circ$ تعریف شوي دي؟

د $90^\circ = \frac{\pi}{2}$ زاويې مثلثاتي نسبتونه:

څرنگه چې $P(0,1)$ ټکی په مثلثاتي دایره باندې د 90° زاويې په دویمه ضلع واقع دی، نو:

$$r = 1 \quad x = 0 \quad y = 1$$

$$\sin \frac{\pi}{2} = \sin 90^\circ = \frac{y}{r} = \frac{1}{1} = 1$$

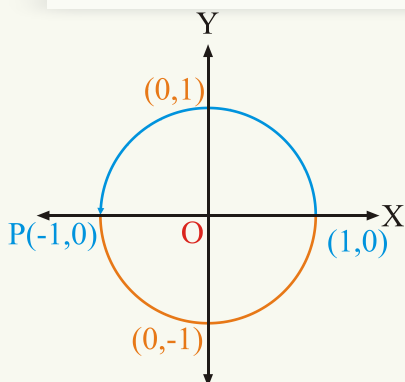
$$\cos \frac{\pi}{2} = \cos 90^\circ = \frac{x}{r} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\tan \frac{\pi}{2} = \tan 90^\circ = \frac{y}{x} = \frac{1}{0} \quad (\text{تعریف شوی نه دی}) \quad \cot \frac{\pi}{2} = \cot 90^\circ = \frac{x}{y} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\sec \frac{\pi}{2} = \sec 90^\circ = \frac{r}{x} = \frac{1}{0} \quad (\text{تعریف شوی نه دی}) \quad \csc \frac{\pi}{2} = \csc 90^\circ = \frac{r}{y} = \frac{1}{1} = 1$$

فعالیت

آیا کولای شئ، ووايي چې $\cot 0^\circ$ او $\csc 0^\circ$ تعریف شوي نه دي؟ ولې؟



د 180° زاويې مثلثاتي نسبتونه: څرنگه چې د

$p(-1,0)$ ټکی په مثلثاتي دایره باندې د 180° زاويې

په دویمه ضلع باندې پروت دی، نو:

$$r = 1 \quad x = -1 \quad y = 0$$

$$\sin 180^\circ = \sin \pi = \frac{y}{r} = \frac{0}{1} = 0 \quad \cos 180^\circ = \cos \pi = \frac{x}{r} = \frac{-1}{1} = -1$$

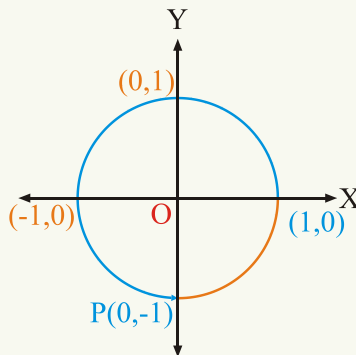
$$\tan 180^\circ = \tan \pi = \frac{y}{x} = \frac{0}{-1} = 0 \quad \cot 180^\circ = \cot \pi = \frac{x}{y} = \frac{-1}{0} = \text{(تعریف شوی نه دی)}$$

فعالیت

$\sec 180^\circ$ او $\csc 180^\circ$ پیدا کریں۔

د $\frac{3\pi}{2} = 270^\circ$ زاویہ مثلثاتی نسبتوںہ:

خرنگہ چہی د $P(0, -1)$ تکی بہ مثلثاتی دایرہ بانڈی د 270° زاویہ پر دویمہ ضلع واقع دی۔



$$r = 1 \quad x = 0 \quad y = -1$$

$$\sin \frac{3\pi}{2} = \sin 270^\circ = \frac{y}{r} = \frac{-1}{1} = -1 \quad \cos \frac{3\pi}{2} = \cos 270^\circ = \frac{x}{r} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\tan \frac{3\pi}{2} = \tan 270^\circ = \frac{y}{x} = \frac{-1}{0} \text{ (تعریف نه دی)} \quad \cot \frac{3\pi}{2} = \cot 270^\circ = \frac{x}{y} = \frac{0}{-1} = 0$$

$$\sec \frac{3\pi}{2} = \sec 270^\circ = \frac{r}{x} = \frac{1}{0} \text{ (تعریف نه دی)} \quad \csc \frac{3\pi}{2} = \csc 270^\circ = \frac{r}{y} = \frac{1}{-1} = -1$$

په یاد ولرئ چې د 360° او 0° زاویو مثلثاتي نسبتونه سره مساوي دي، کولای شئ چې ووايئ ولې؟

د $360^\circ = 2\pi$ زاويې مثلثاتي نسبتونه:

څرنگه چې د $p(1,0)$ نقطه د 360° د زاويې په دويمه ضلعه باندې پرته ده، نو:

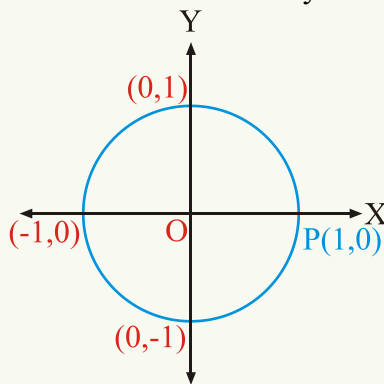
$$x = 1 \quad y = 0 \quad r = 1$$

$$\sin 2\pi = \sin 360^\circ = \frac{y}{r} = \frac{0}{1} = 0 \quad \cos 2\pi = \cos 360^\circ = \frac{x}{r} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\tan 2\pi = \tan 360^\circ = \frac{y}{x} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\cot 2\pi = \cot 360^\circ = \frac{x}{y} = \frac{1}{0} \text{ (تعريف شوي نه دي)}$$

$$\sec 2\pi = \sec 360^\circ = \frac{r}{x} = \frac{1}{1} = 1, \quad \csc 2\pi = \csc 360^\circ = \frac{r}{y} = \frac{1}{0} \text{ (تعريف شوي نه دي)}$$



فعالیت

د 0° زاويې ټول مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

$0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$ او 360° زاویو ته محوري زاويې وايي چې د هرې زاويې دوه، دوه مثلثاتي نسبتونه تعريف شوي نه دي.

پوښتنې

1- لاندې جدول پک کړئ:

θ	0°	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin \theta$					
$\cos \theta$					
$\tan \theta$					

$\tan 270^\circ = ?$ -2

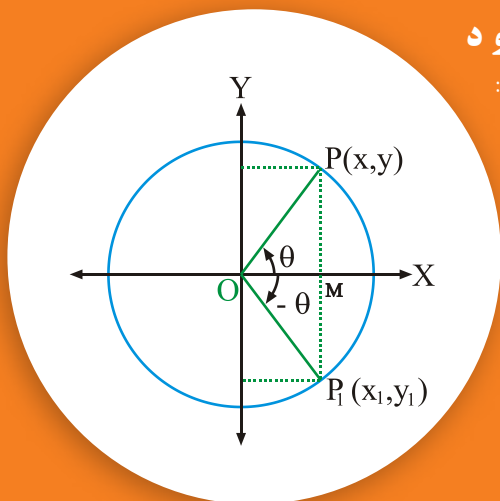
a) -1 b) 1 c) 0 d) تعريف شوي نه دي

$\cos 90^\circ = ?$ -3

a) -1 b) 1 c) 0 d) تعريف شوي نه دي

4- آیا $\cos \frac{3\pi}{2} = \cos \frac{9\pi}{2}$ دی؟ ولې؟

د یوې حاده زاوې او نورو زاویو د مثلثاتي نسبتونو په منځ کې اړیکې:



څرنگه چې مو په نهم ټولگي کې ولیدل چې مثلثاتي جدول یوازې د یوې حادې مثبتې زاوې مثلثاتي نسبتونه را ښيي ددې لپاره چې د منفي او منفرجه زاویو مثلثاتي نسبتونه هم له مثلثاتي جدول څخه پیدا کړای شو، نو باید ددې زاویو او د یوې حاده مثبتې زاوې د مثلثاتي نسبتونو په منځ کې اړیکې پیدا کړو.

د $\hat{\theta}$ او $-\hat{\theta}$ زاویو د مثلثاتي نسبتونو تر منځ اړیکې:

د θ حاده زاویه مثبت او له θ سره مساوي زاویه، د ساعت د عقربې د حرکت په جهت کې $-\theta$ زاویه په معیاري حالت په مثلثاتي دایره کې رسموو.

د $P(x, y)$ ټکی د θ پر دویمه ضلع او د $P_1(x_1, y_1)$ ټکی د $-\theta$ د زاوې پر دویمه ضلع واقع دی.

څرنگه چې په پورته شکل کې د $\triangle OMP$ او $\triangle OMP_1$ مثلثونه یو له بله سره مساوي دي.

$$x_1 = x \quad |y_1| = |y| \quad -y_1 = y \Rightarrow y_1 = -y$$

$$\sin(-\theta) = \frac{y_1}{r} = \frac{y_1}{1} = y_1 = -y = -\sin \theta$$

$$\cos(-\theta) = \frac{x}{r} = x = \cos \theta$$

$$\tan(-\theta) = \frac{\sin(-\theta)}{\cos(-\theta)} = \frac{-\sin \theta}{\cos \theta} = -\tan \theta$$

$$\cot(-\theta) = \frac{\cos(-\theta)}{\sin(-\theta)} = \frac{\cos \theta}{-\sin \theta} = -\cot \theta$$

لومړی مثال: د $(-30^\circ = -\frac{\pi}{6})$ زاوې مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

$$\sin(-30^\circ) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$\cos(-30^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

حل

$$\tan(-30^\circ) = -\tan 30^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\cot(-30^\circ) = -\cot 30^\circ = -\sqrt{3}$$

$$\sec(-30^\circ) = \sec 30^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\csc(-30^\circ) = -\csc 30^\circ = -2$$

فعالیت

و بنیاست چپ: $\csc(-\theta) = -\csc \theta$, $\sec(-\theta) = \sec \theta$

دویم مثال: د $-\frac{3\pi}{2}$ زاویې مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

$$\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = -\sin \frac{3\pi}{2} = -(-1) = 1$$

حل:

$$\cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = \cos \frac{3\pi}{2} = 0$$

فعالیت

د $-\frac{3\pi}{2}$ زاویې نور څلور مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

$$\sin(-\theta) = -\sin \theta$$

$$\cos(-\theta) = \cos \theta$$

$$\tan(-\theta) = -\tan \theta$$

$$\cot(-\theta) = -\cot \theta$$

$$\sec(-\theta) = \sec \theta$$

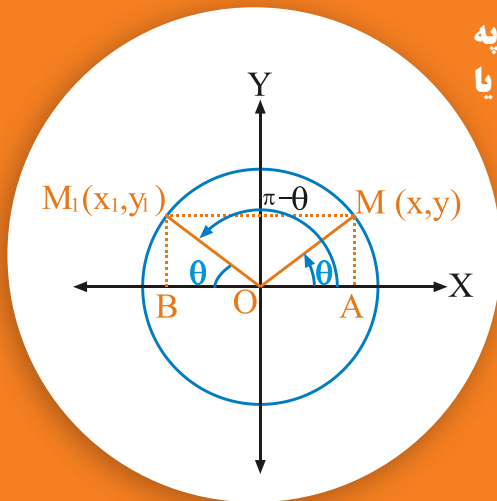
$$\csc(-\theta) = -\csc \theta$$

پوښتنې

1 - د 360° یا -2π راډیان مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

2 - د 45° یا $-\frac{\pi}{4}$ راډیان د (-30°) او (-60°) زاویو مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

3 - د 90° یا $-\frac{\pi}{2}$ راډیان مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.



د دوه زاويو د مثلثاتي نسبتونو په منځ کې اړیکې چې مجموعه او يا توپيريې π يا 180° وي

- آیا د 150° او 135° زاويو مثلثاتي نسبتونه پيدا کولای شئ؟
- آیا $\sin 135^\circ$ او $\sin 45^\circ$ سره مساوي دي؟ ولې؟
- آیا ویلای شئ چې $\sin 130^\circ$ او $\sin 50^\circ$ یو له بله سره څه اړیکه لري؟

دوې زاويې چې مجموعه يې π يا 180° وي، په پام کې نيسو. که θ يوه حاده مثبتې زاويه وي بله زاويه $(\pi - \theta)$ ده. دا دواړه زاويې په مثلثاتي دایره کې په معیاري حالت کې رسموو. د $M(x, y)$ ټکی د θ د زاويې په دویمه ضلع باندې او د $M_1(x_1, y_1)$ ټکی د $(\pi - \theta)$ يا $(180 - \theta)$ د زاويې پر دویمه ضلع باندې واقع دی. څرنګه چې په پورته شکل کې د OAM او OM_1B مثلثونه سره مساوي دي.

$$(r=1) \quad |x_1| = |x| \quad -x_1 = x \Rightarrow x_1 = -x \quad y_1 = y$$

$$\sin(180^\circ - \theta) = \sin(\pi - \theta) = \frac{y_1}{r} = \frac{y_1}{1} = y_1 = \sin \theta$$

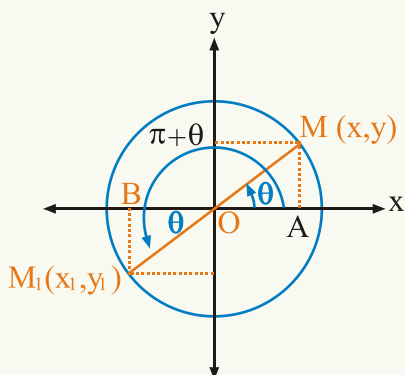
$$\cos(180^\circ - \theta) = \cos(\pi - \theta) = \frac{x_1}{r} = \frac{-x}{r} = \frac{-x}{1} = -x = -\cos \theta$$

$$\tan(180^\circ - \theta) = \tan(\pi - \theta) = \frac{\sin(180^\circ - \theta)}{\cos(180^\circ - \theta)} = \frac{\sin \theta}{-\cos \theta} = -\tan \theta$$

فعالیت

- د $(\pi - \theta)$ زاويې نور درې مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

د هغو دوو زاويو د مثلثاتي نسبتونو ترمنځ اړیکې چې توپيريې 180° او يا π راډيان وي.



که حاده زاویه θ وي، بله زاویه $(\pi + \theta)$ کېږي. د $M(x, y)$ ټکی پر مثلثاتي دایره باندې د θ پر دویمه ضلع او د $M_1(x_1, y_1)$ ټکی د $(\pi + \theta)$ یا $(180^\circ + \theta)$ د زاویې پر دویمه ضلع باندې واقع دی.

څرنګه چې د $\triangle OAM$ او $\triangle OBM_1$ مثلثونه سره

مساوي دي: $y_1 = -y$, $x_1 = -x$

$$\sin(180^\circ + \theta) = y_1 = -y = -\sin \theta$$

$$\cos(180^\circ + \theta) = x_1 = -x = -\cos \theta$$

$$\tan(180^\circ + \theta) = \frac{\sin(180^\circ + \theta)}{\cos(180^\circ + \theta)} = \frac{-\sin \theta}{-\cos \theta} = \tan \theta$$

$$\cot(180^\circ + \theta) = \frac{\cos(180^\circ + \theta)}{\sin(180^\circ + \theta)} = \frac{-\cos \theta}{-\sin \theta} = \cot \theta$$

$$\sec(180^\circ + \theta) = \frac{1}{\cos(180^\circ + \theta)} = \frac{1}{-\cos \theta} = -\sec \theta$$

$$\csc(180^\circ + \theta) = \frac{1}{\sin(180^\circ + \theta)} = \frac{1}{-\sin \theta} = -\csc \theta$$

لومړی مثال: د 120° او 240° زاویو مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

حل

$$\sin 120^\circ = \sin(\pi - 60^\circ) = \sin(180^\circ - 60^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 120^\circ = \cos(\pi - 60^\circ) = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$\tan 120^\circ = \tan(\pi - 60^\circ) = -\tan 60^\circ = -\sqrt{3}$$

$$\sin 240^\circ = \sin(180^\circ + 60^\circ) = -\sin 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 240^\circ = \cos(180^\circ + 60^\circ) = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$\tan 240^\circ = \tan(180^\circ + 60^\circ) = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

فعالیت

د 120° او 240° زاویو نور درې، درې مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

دویم مثال: د $\frac{3\pi}{4}$ او $\frac{4\pi}{3}$ زاویو \sin ، \cos او \tan پیدا کړئ.
حل:

$$\pi - \frac{3\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

$$\sin\left(\pi - \frac{3\pi}{4}\right) = \sin \frac{3\pi}{4} = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos\left(\pi - \frac{3\pi}{4}\right) = \cos \frac{3\pi}{4} = -\cos \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

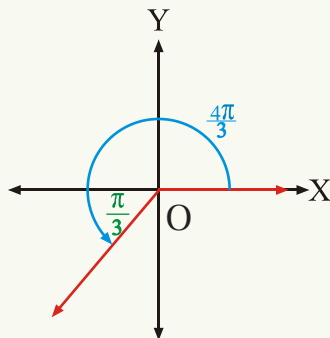
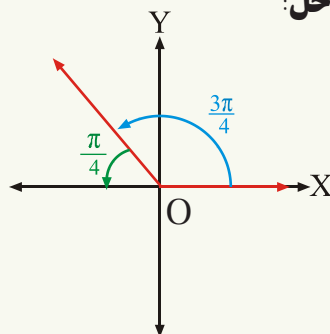
$$\tan\left(\pi - \frac{3\pi}{4}\right) = \tan \frac{3\pi}{4} = -\tan \frac{\pi}{4} = -1$$

$$\frac{4\pi}{3} - \pi = \frac{\pi}{3}$$

$$\sin \frac{4\pi}{3} = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\sin \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos \frac{4\pi}{3} = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\cos \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$

$$\tan \frac{4\pi}{3} = \tan\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$



څرنگه چې $(180^\circ - \theta)$ د زاویې دویمه ضلع په دویمه ناحیه (ربع) کې پرته ده. په دویمه ناحیه کې $\sin \theta$ او $\csc \theta$ مثبت او د $(180^\circ - \theta)$ زاویې نور مثلثاتي نسبتونه منفي دي او څرنگه چې د $(180^\circ + \theta)$ یا $(\pi + \theta)$ زاویې دویمه ضلع په دریمه ربع کې پرته ده، نو ددې زاویې $\tan \theta$ او $\cot \theta$ مثبت او د $(180^\circ + \theta)$ د زاویې نور مثلثاتي نسبتونه منفي دي.

پوښتنې

1- د 225° زاوې مثلثاتي نسبتونه پيدا كړئ.

2- د 210° زاوې مثلثاتي نسبتونه پيدا كړئ.

3- د 150° زاوې مثلثاتي نسبتونه پيدا كړئ.

$$\cot \frac{3\pi}{4} = ? -4$$

a) $-\frac{1}{2}$

b) 1

c) 0

d) -1

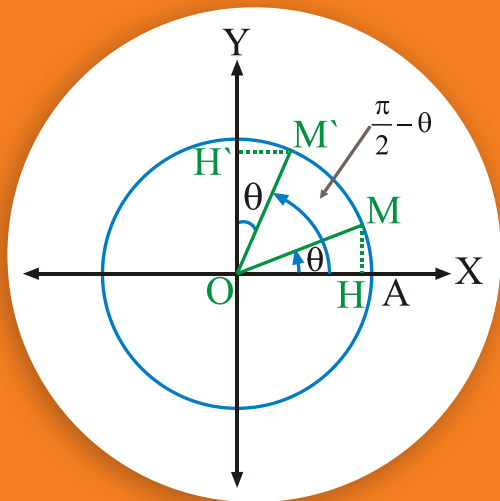
$$\sec(225^\circ) = ? -5$$

a) $\frac{2}{\sqrt{2}}$

b) $-\frac{2}{\sqrt{2}}$

c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

d) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$



د دوو زاویو د مثلثاتي نسبتونو
تر منځ اړیکې چې مجموعه یې

90° یا $\frac{\pi}{2}$ راډیانه وي.

- آیا $\sin 60^\circ = \cos 30^\circ$ دی؟ ولې؟
- د 60° او 150° زاویو مثلثاتي نسبتونه سره
څه اړیکه لري؟

د \widehat{AOM} زاویه θ او د $\widehat{AOM'}$ زاویه له $(\frac{\pi}{2} - \theta)$ څخه عبارت ده چې د θ او $\frac{\pi}{2} - \theta$ زاویو مجموعه 90° یا $\frac{\pi}{2}$ کېږي. څرنگه چې د $\triangle OHM$ او $\triangle OH'M'$ مثلثونه سره مساوي دي.

$$\overline{OH'} = \overline{OH}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos \theta$$

$$\overline{H'M'} = \overline{HM}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin \theta$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)} = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \cot \theta$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)} = \frac{1}{\cot \theta} = \tan \theta$$

فعالیت

وښیاست چې: $\sec(90 - \theta) = \csc \theta$ او $\csc(90 - \theta) = \sec \theta$ دي.

لومړی مثال: که:

$$\sin 23^\circ = 0,3907 \quad \cos 23^\circ = 0,9205 \quad \tan 23^\circ = 0,4245$$

$$\cot 23^\circ = 2,356 \quad \sec 23^\circ = 1,086 \quad \csc 23^\circ = 2,559$$

وي، د 67° زاوې مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

حل:

$$\sin 67^\circ = \cos 23^\circ = 0.9205$$

$$\cot 67^\circ = \tan 23^\circ = 0.4245$$

$$\cos 67^\circ = \sin 23^\circ = 0.3907$$

$$\sec 67^\circ = \csc 23^\circ = 2.559$$

$$\tan 67^\circ = \cot 23^\circ = 2.356$$

$$\csc 67^\circ = \sec 23^\circ = 1.086$$

فعالیت

که:

$$\sin 8^\circ 10' = 0.1421 \quad \cos 8^\circ 10' = 0.9899$$

$$\tan 8^\circ 10' = 0.1435 \quad \cot 8^\circ 10' = 6.968$$

$$\sec 8^\circ 10' = 1.010 \quad \csc 8^\circ 10' = 7.040$$

وي، د $81^\circ 50'$ زاوې مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

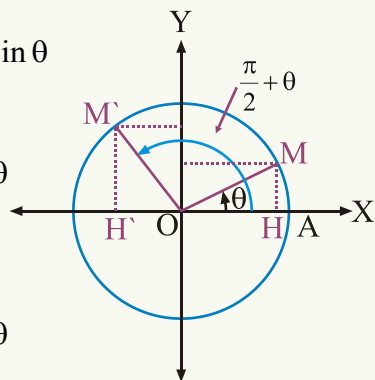
د هغو زاوېو مثلثاتي نسبتونه چې توپیر یې $\frac{\pi}{2}$ یا 90° وي په لاندې ډول دي:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \sin\left[\frac{\pi}{2} - (-\theta)\right] = \cos(-\theta) = \cos \theta$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \cos\left[\frac{\pi}{2} - (-\theta)\right] = \sin(-\theta) = -\sin \theta$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)} = \frac{\cos \theta}{-\sin \theta} = -\cot \theta$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)} = \frac{-\sin \theta}{\cos \theta} = -\tan \theta$$



$$\sec\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)} = \frac{1}{-\sin \theta} = -\csc \theta$$

$$\csc\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)} = \frac{1}{\cos \theta} = \sec \theta$$

دویم مثال: د 120° زاویې مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

حل

$$\sin 120^\circ = \sin(90^\circ + 30^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 120^\circ = \cos(90^\circ + 30^\circ) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$\tan 120^\circ = \tan(90^\circ + 30^\circ) = -\cot 30^\circ = -\sqrt{3}$$

$$\cot 120^\circ = \cot(90^\circ + 30^\circ) = -\tan 30^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\sec 120^\circ = \sec(90^\circ + 30^\circ) = -\csc 30^\circ = -2$$

$$\csc 120^\circ = \csc(90^\circ + 30^\circ) = \sec 30^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos \theta \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \cos \theta$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin \theta \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sin \theta$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cot \theta \qquad \tan\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\cot \theta$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \tan \theta \qquad \cot\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\tan \theta$$

$$\sec\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \csc \theta \qquad \sec\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\csc \theta$$

$$\csc\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sec \theta \qquad \csc\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \sec \theta$$

پوښتنې

1- د 135° زاوې مثلثاتي نسبتونه پيدا كړئ.

2- د 150° زاوې مثلثاتي نسبتونه پيدا كړئ.

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = ? \quad -3$$

a) $\cos x$

b) $\sin x$

c) $-\cos x$

d) $-\sin x$

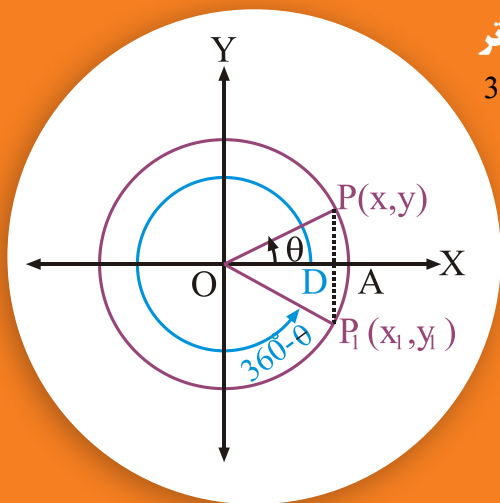
$$\cot\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = ? \quad -4$$

a) $\tan \theta$

b) $-\tan \theta$

c) $\cot \theta$

d) $-\cot \theta$



د هغه زاويو د مثلثاتي نسبتونو تر منځ اړيکې چې مجموعه يې 360° يا 2π وي.

آيا ښودلای شئ چې

$$\sin(360^\circ - \theta) = -\sin \theta$$

$$\cos(360^\circ - \theta) = \cos \theta$$

دي؟

په پورته شکل کې د $\triangle OPD$ او $\triangle OP_1D$ مثلثونو له مساوي والی څخه لرو چې:

$$x_1 = x \quad |y_1| = |y|$$

$$-y_1 = y \Rightarrow y_1 = -y$$

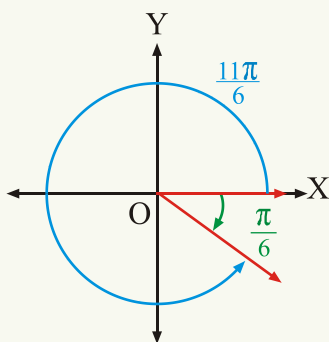
$$\sin(360^\circ - \theta) = y_1 = -y = -\sin \theta$$

$$\cos(360^\circ - \theta) = x_1 = x = \cos \theta$$

$$\tan(360^\circ - \theta) = \frac{\sin(360^\circ - \theta)}{\cos(360^\circ - \theta)} = \frac{-\sin \theta}{\cos \theta} = -\tan \theta$$

فعالیت

په همدې ډول د θ او $360^\circ - \theta$ زاويو د \sec, \cot او \csc د مثلثاتي نسبتونو ترمنځ اړيکې پيدا کړئ او د θ او $(-\theta)$ زاويو مثلثاتي نسبتونو له اړيکو سره يې پرتله کړئ.



مثال: د 330° يا $\frac{11\pi}{6}$ راډيانه زاويې مثلثاتي نسبتونه پيدا

کړئ.

حل:

$$\sin \frac{11\pi}{6} = \sin(2\pi - \frac{\pi}{6}) = \sin 330^\circ = \sin(360^\circ - 30^\circ) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$\cos \frac{11\pi}{6} = \cos(2\pi - \frac{\pi}{6}) = \cos 330^\circ = \cos(360^\circ - 30^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan \frac{11\pi}{6} = \tan(2\pi - \frac{\pi}{6}) = \tan 330^\circ = \tan(360^\circ - 30^\circ) = -\tan 30^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\cot \frac{11\pi}{6} = \cot(2\pi - \frac{\pi}{6}) = \cot 330^\circ = \cot(360^\circ - 30^\circ) = -\cot 30^\circ = -\sqrt{3}$$

$$\sec \frac{11\pi}{6} = \sec(2\pi - \frac{\pi}{6}) = \sec 330^\circ = \sec(360^\circ - 30^\circ) = \sec 30^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\csc \frac{11\pi}{6} = \csc(2\pi - \frac{\pi}{6}) = \csc 330^\circ = \csc(360^\circ - 30^\circ) = -\csc 30^\circ = -2$$

فعالیت

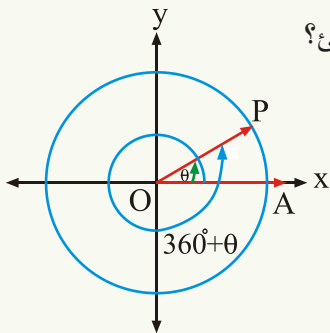
د 315° زاویې مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

د کوټر مینل زاویو مثلثاتي نسبتونه:

• آیا $\sin 450^\circ$ ، $\tan 390^\circ$ او $\csc 450^\circ$ پیدا کولای شئ؟

• آیا $\sin 90^\circ$ ، $\sin 450^\circ$ او $\sin 790^\circ$ سره

برابر دي؟ ولې؟



په معیاري حالت کې د θ حاده زاویې او $360^\circ + \theta$ زاویو دویمې ضلعې یو پر بل پرتې دي، نو:

$$\sin(360^\circ + \theta) = \sin \theta$$

$$\cos(360^\circ + \theta) = \cos \theta$$

$$\tan(360^\circ + \theta) = \tan \theta$$

$$\cot(360^\circ + \theta) = \cot \theta$$

$$\csc(360^\circ + \theta) = \csc \theta$$

$$\sec(360^\circ + \theta) = \sec \theta$$

لومړی مثال: د 405° زاوې مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.
حل

$$\sin 405^\circ = \sin\left(2\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \sin(360^\circ + 45^\circ) = \sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 405^\circ = \cos\left(2\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \cos(360^\circ + 45^\circ) = \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan 405^\circ = \tan\left(2\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \tan(360^\circ + 45^\circ) = \tan 45^\circ = 1$$

$$\cot 405^\circ = \cot\left(2\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \cot(360^\circ + 45^\circ) = \cot 45^\circ = 1$$

$$\sec 405^\circ = \sec\left(2\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \sec(360^\circ + 45^\circ) = \sec 45^\circ = \sqrt{2}$$

$$\csc 405^\circ = \csc\left(2\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \csc(360^\circ + 45^\circ) = \csc 45^\circ = \sqrt{2}$$

دویم مثال: د 1500° زاوې مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

$$\sin 1500^\circ = \sin(4 \cdot 360^\circ + 60^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 1500^\circ = \cos(4 \cdot 360^\circ + 60^\circ) = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\tan 1500^\circ = \tan(4 \cdot 360^\circ + 60^\circ) = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

$$\cot 1500^\circ = \cot(4 \cdot 360^\circ + 60^\circ) = \cot 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\sec 1500^\circ = \sec(4 \cdot 360^\circ + 60^\circ) = \sec 60^\circ = 2$$

$$\csc 1500^\circ = \csc(4 \cdot 360^\circ + 60^\circ) = \csc 60^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

دریم مثال: د 900° او -930° زاویو \sin ، \cos او \tan پیدا کړئ.
حل

$$-930^\circ + 3 \cdot 360^\circ = 150^\circ$$

$$\sin(-930^\circ) = \sin 150^\circ = \sin(180^\circ - 30^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

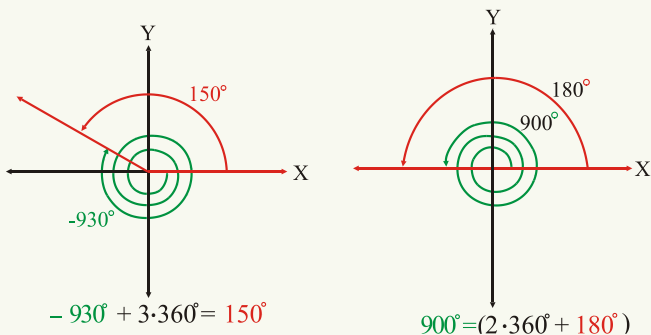
$$\cos(-930^\circ) = \cos 150^\circ = \cos(180^\circ - 30^\circ) = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan(-930^\circ) = \tan 150^\circ = \tan(180^\circ - 30^\circ) = \tan 30^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\sin 900^\circ = \sin(2 \cdot 360^\circ + 180^\circ) = \sin 180^\circ = 0$$

$$\cos 900^\circ = \cos(2 \cdot 360^\circ + 180^\circ) = \cos 180^\circ = -1$$

$$\tan 900^\circ = \tan(2 \cdot 360^\circ + 180^\circ) = \tan 180^\circ = 0$$



خلورم مثال: د $-\frac{5\pi}{2}$ او $\frac{7\pi}{3}$ زاویو مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

$$-\frac{5\pi}{2} = (-2\pi - \frac{\pi}{2})$$

حل:

$$\sin(-\frac{5\pi}{2}) = \sin(-\frac{\pi}{2}) = -\sin \frac{\pi}{2} = -1$$

$$\sin \frac{7\pi}{3} = \sin(2\pi + \frac{\pi}{3}) = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos(-\frac{5\pi}{2}) = \cos(-\frac{\pi}{2}) = \cos \frac{\pi}{2} = 0$$

$$\cos \frac{7\pi}{3} = \cos(2\pi + \frac{\pi}{3}) = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\tan(-\frac{5\pi}{2}) = \tan(-\frac{\pi}{2}) = \frac{\sin(-\frac{\pi}{2})}{\cos(-\frac{\pi}{2})} = \frac{-1}{0}$$

تعریف شوی نه دی

$$\tan \frac{7\pi}{3} = \tan(2\pi + \frac{\pi}{3}) = \tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

$$\cot(-\frac{5\pi}{2}) = \cot(-\frac{\pi}{2}) = \frac{\cos(-\frac{\pi}{2})}{\sin(-\frac{\pi}{2})} = \frac{0}{-1} = 0$$

$$\cot(\frac{7\pi}{3}) = \cot(2\pi + \frac{\pi}{3}) = \cot \frac{\pi}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

فعالیت

د $\frac{7\pi}{3}$ او $(-\frac{5\pi}{2})$ زاویو نور دوه، دوه مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

$$\sin(2\pi - \theta) = \sin(360^\circ - \theta) = -\sin \theta$$

$$\cos(2\pi - \theta) = \cos(360^\circ - \theta) = \cos \theta$$

$$\tan(2\pi - \theta) = \tan(360^\circ - \theta) = -\tan \theta$$

$$\cot(2\pi - \theta) = \cot(360^\circ - \theta) = -\cot \theta$$

$$\sec(2\pi - \theta) = \sec(360^\circ - \theta) = \sec \theta$$

$$\csc(2\pi - \theta) = \csc(360^\circ - \theta) = -\csc \theta$$

$$\sin(2\pi + \theta) = \sin(360^\circ + \theta) = \sin \theta$$

$$\cos(2\pi + \theta) = \cos(360^\circ + \theta) = \cos \theta$$

$$\tan(2\pi + \theta) = \tan(360^\circ + \theta) = \tan \theta$$

$$\cot(2\pi + \theta) = \cot(360^\circ + \theta) = \cot \theta$$

$$\sec(2\pi + \theta) = \sec(360^\circ + \theta) = \sec \theta$$

$$\csc(2\pi + \theta) = \csc(360^\circ + \theta) = \csc \theta$$

پوښتنې

1- د 480° او 390° زاویو مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

2- د 600° او 300° زاویو مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

3- د 1830° او د $(1095^\circ 20')$ زاویو مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

4- د $\frac{25\pi}{6}$ زاوې مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

5- د $\frac{5\pi}{3}$ زاوې مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

6- د $\frac{41\pi}{6}$ ، $\frac{4\pi}{3}$ او $\frac{3\pi}{4}$ زاویو مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

7- د -300° ، 780° او 420° زاویو مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

8- $\cos(-3\pi) = ?$

a) 1

b) -1

c) 0

d) $\frac{1}{2}$

9- $\cos(-15\pi) = ?$

a) 1

b) -1

c) 0

d) درې واړه سم نه دي.

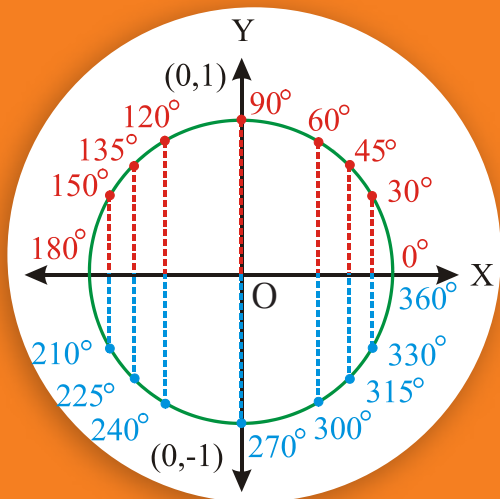
10- $\sin(-1110^\circ) = ?$

a) $\frac{1}{2}$

b) $-\frac{1}{2}$

c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

d) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$



د مثلثاتي تابع گانو گراف

- آیا کولای شی وویاست چې د $f(x) = \sin x$ او $f(x) = \cos x$ د تابعگانو د تناوب دوره خو مره ده؟
- آیا ویلای شی چې د $f(x) = \sin x$ او $f(x) = \cos x$ د توابعو domain کوم عددونه دي؟

د $f(x) = \sin x$ تابع د گراف رسمول (graph of the sine function):

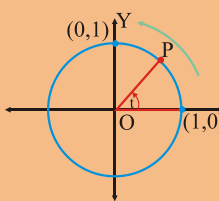
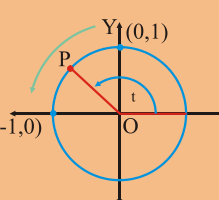
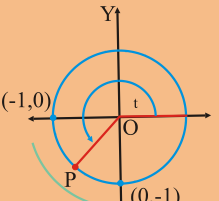
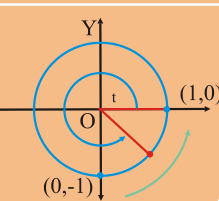
د $f(x) = \sin x$ تابع د تعريف ناحیه (domain) د ټولو حقيقي عددونو سټ دی او Range يې $[-1,1]$ دی. د دې تابع د تناوب دوره 2π ده، ځکه پوهېږئ چې د يوې تابع د تعريف ساحه ټول هغه حقيقي عددونه (Real numbers) دي چې تابع په کې تعريف شوی وي. د هر حقيقي عدد x لپاره يوه د x راډيان زاويه او له مثلثاتي دايرې سره د x راډيان د زاويې د تقاطع ټکی، هر وخت تعريف شوی دی. که x د راډيان په حساب وي، ددې ټولو زاويو اندازه $2k\pi + x$ راډيان ده، نو د sine او cosine د تابع گانو د تعريف ساحه ټول حقيقي عددونه دي. څرنگه چې $\sin x$ او $\cos x$ په مثلثاتي دايره باندې د يوه ټکي وضعيه کميات دي، نو د $f(x) = y = \sin x$ او $f(x) = y = \cos x$ د تابع گانو Range د (1) او (-1) تر منځ دی، يا د $[-1,1]$ انټروال د $y = \sin \theta$ او $y = \cos \theta$ د تابع گانو Range دی.

فعاليت

وښیاست چې $-1 \leq \sin \theta, \cos \theta \leq 1$ دی.

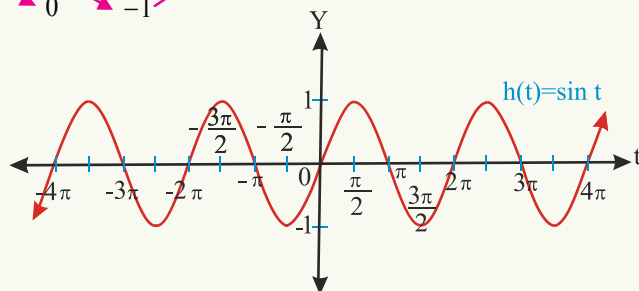
باید په یاد ولرو چې د f تابع ته متناوبه تابع ویل کېږي، که چېرې د t يو عدد د صفر خلاف موجود وي، په دې شرط چې که لومړی $x \in D_f$ وي $x + t$ او $x - t$ هم د f د تابع د تعريف په ساحه (domain) کې شامل وي او $f(x+t) = f(x)$ وي. تر ټولو کوچنی داسې عدد، لکه: (t) چې د $f(x+t) = f(x)$ په اړیکه کې صدق وکړي. دا د (t)

عدد د f د تابع د اصلي تناوب په نوم یادېږي. که f د تابع د تناوب دوره وي. نو $f(-t)$ هم f د تابع د تناوب دوره ده. څرنگه چې پوهېږئ $\sin(x + 2K\pi) = \sin x$ او $\cos(x + 2K\pi) = \cos x$ دی چې K یو تام عدد دی، نو د $\sin x$ او $\cos x$ توابع متناوبې توابع دي او تر ټولو کوچنی عدد چې په پورتنیو اړیکو کې صدق کوي 2π دی، نو د دې دواړو توابعو اصلي تناوب 2π دی. له شکل سره سم په معیاري حالت کې یو د t راډیان زاویه په پام کې ونیسئ په داسې حال کې چې د t د زاویې دویمه ضلع مثلثاتي دایره د P په ټکي کې قطع کوي، نو د P د ټکي د y مختصه له $\sin t$ څخه عبارت ده. $h(t) = \sin t$ او $\sin t$ تغیرات په لاندې جدول او شکل کې وگورئ:

د t په قیمت کې تغیر	د P د ټکي حرکت	$\sin t$	اړونده شکل
له 0 څخه تر $\frac{\pi}{2}$ پورې	له $(1,0)$ څخه تر $(0,1)$	له صفر څخه تر یوه پورې تزايد کوي	
له $\frac{\pi}{2}$ څخه تر π پورې	له $(0,1)$ څخه تر $(-1,0)$	له یوه څخه تر صفره پورې تناقص کوي	
له π څخه تر $\frac{3\pi}{2}$ پورې	له $(-1,0)$ څخه تر $(0,-1)$	له صفره څخه تر -1 پورې تناقص کوي	
له $\frac{3\pi}{2}$ څخه تر 2π پورې	له $(0,-1)$ څخه تر $(1,0)$	له -1 څخه تر صفره پورې تزايد کوي	

په همدې ډول په هر 2π کې تکرارېږي په نتیجه کې $\sin(t \pm 2\pi) = \sin t$ دی.
لاندې جدول او شکل وگورئ:

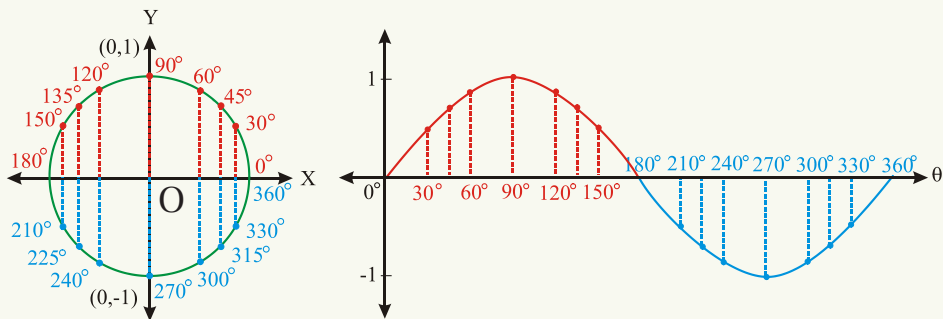
t	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
h(t) = sint	0	1	0	-1	0



او یا کولای شو، که د یو دوران زاوې د درجې په حساب وي، د $\sin t$ تغیرات په لاندې جدول او شکل کې وښایو:

$$h(t) = \sin t$$

t	واقعي	تقریبي	180°	0	0.00
0°	0	0.00	210°	$-\frac{1}{2}$	-0.50
30°	$\frac{1}{2}$	0.50	225°	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-0.71
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0.71	240°	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-0.87
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0.87	270°	-1	-1.00
90°	1	1.00	300°	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-0.87
120°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0.87	315°	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-0.71
135°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0.71	330°	$-\frac{1}{2}$	-0.50
150°	$\frac{1}{2}$	0.50	360°	0	0.00



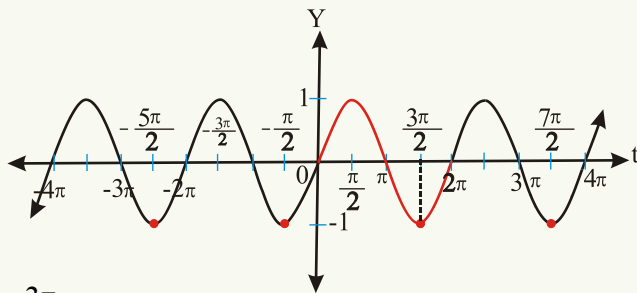
دې ته په پام سره چې $\sin t$ د تابع د تناوب دوره 2π ده، نو $\sin(t \pm 2\pi) = \sin t$ دی، نو د $\sin t$ د تابع گراف په $[0, 2\pi]$ ، $[2\pi, 4\pi]$ ، $[4\pi, 6\pi]$ ، $[-2\pi, 0]$ او داسې نورو انټروالو کې یو شان دی.

فعالیت

په $4\pi, 2\pi, \pi, 0, -\pi, -2\pi, -3\pi, -4\pi$ کې د $\sin t$ د تابع قیمتونه پیدا کړئ.

لومړی مثال: د t هغه ټول قیمتونه وښایست چې د $\sin t$ قیمت په کې (-1) وي.

حل: څرنګه چې د $\sin t$ قیمت د (1) او (-1) تر منځ دی او په هر 2π کې په افقي محور باندې تکرارېږي، نو بې شمېره قیمتونه شته چې په هغه کې د $\sin t$ قیمت -1 دی. د نمونې په ډول څو ټکي په سور رنګ په شکل کې ښودل شوي دي.

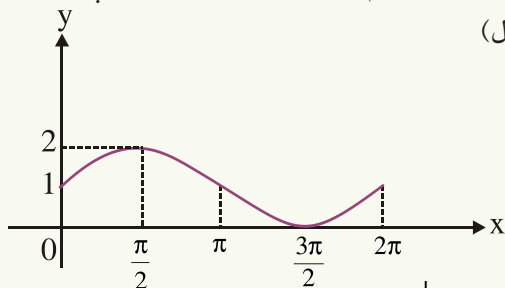


د $\sin t$ په گراف کې له صفر څخه تر 2π پورې یوازې یو ټکی (نقطه) د $(\frac{3\pi}{2}, -1)$ شته چې په

سره رنګ ښودلی شوی دی. ټول هغه قیمتونه چې $\sin t$ په کې (-1) دی، له $t = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$ څخه عبارت دي چې k یو تام عدد دی.

دویم مثال: د $y = \sin x + 1$ تابع گراف په $[0, 2\pi]$ انټروال کې رسم کړئ.

حل: ددې لپاره د تابع د تعریف ساحه $[0, 2\pi]$ او Range یې $[0, 2]$ دی، ددې تابع د گراف د رسمولو لپاره همدا بس دی چې د $y = \sin x$ گراف رسم کړو او د یوه واحد په اندازه یې د Y پر محور پورته خوا ته انتقال کړو. (عمودی انتقال)



x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$y = \sin x + 1$	1	2	1	0	1

د sine او cosine د تابع گانو پریود او لمن (Amplitude):

که $b > 0$ وي د $f(t) = \sin bt$ او $g(t) = \cos bt$ گرافونه، د صفر او 2π تر منځ یوه

دوره (Cycle) جوړوي، ددې دواړو تابع گانو پریود $\frac{2\pi}{b}$ دی ($b > 0$). د مثال په ډول د $y = \cos 3t$

پریود $\frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{3}$ دی او د $y = \sin \frac{1}{2}t$ تابع پریود $\frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$ دی او د $y = a \sin bt$

او $y = a \cos bt$ د تابع گانو لمن د $|a|$ دی ($a \neq 0$)، د مثال په ډول د $y = -2 \sin 4t$ لمن

$$|a| = |-2| = 2 \quad \text{او پریود یې } \frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \text{ دی.}$$

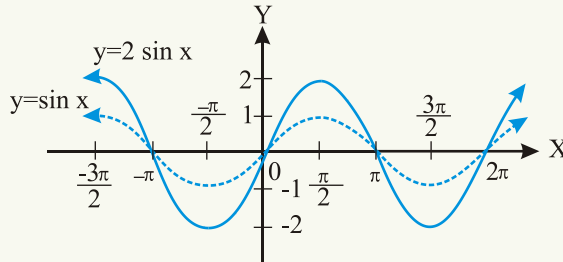
دریم مثال: د $y = 2 \sin x$ تابع گراف رسم او د $y = \sin x$ د تابع له گراف سره یې پرتله کړئ.

حل: ددې تابع گراف توپیر د $y = \sin x$ د تابع له گراف سره دا دی چې $-2 \leq y \leq 2$ دی

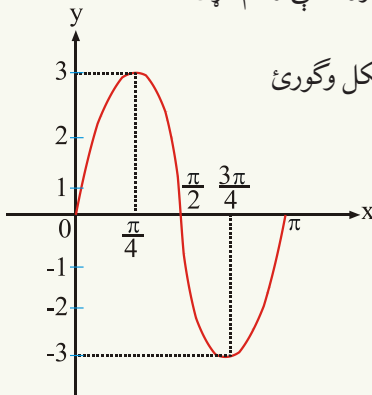
چې د 2 عدد ته لمن (amplitude) وايي. ځکه چې د $|2| = 2$ دی. ددې تابع پریود هم 2π

دی، لاندې جدول او شکل وگورئ:

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
sin x	0	1	0	-1	0
2 sin x	0	2	0	-2	0



څلورم مثال: د $y = 3 \sin 2x$ تابع گراف په $[0, \pi]$ انټروال کې رسم کړئ.



حل: د دې تابع پریود $\frac{2\pi}{2} = \pi$ دی، لاندې جدول او شکل وگورئ

x	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π
2x	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
sin 2x	0	1	0	-1	0
3 sin 2x	0	3	0	-3	0

د $\sin t$ د تابع د تعریف ساحه ټول حقیقي عددونه دي، د $\sin t$ د تابع گراف د y محور په $(0,0)$ او د X محور په $(0,0)$ ، π ، 2π ، 3π ، 4π او $-\pi$ ، -2π ، -3π ، -4π او نورو کې قطع

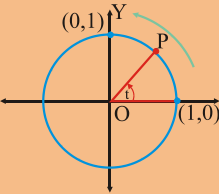
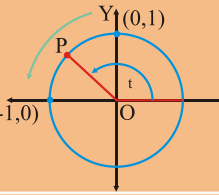
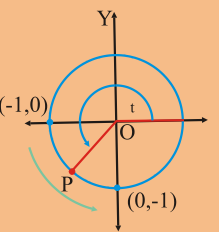
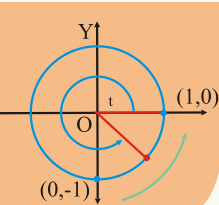
کوي، د $\sin t$ تابع له صفر څخه تر $\frac{\pi}{2}$ پورې متزایده، له $\frac{\pi}{2}$ څخه تر π پورې متناقصه، له π

څخه تر $\frac{3\pi}{2}$ پورې متناقصه او له $\frac{3\pi}{2}$ څخه تر 2π پورې متزایده ده.

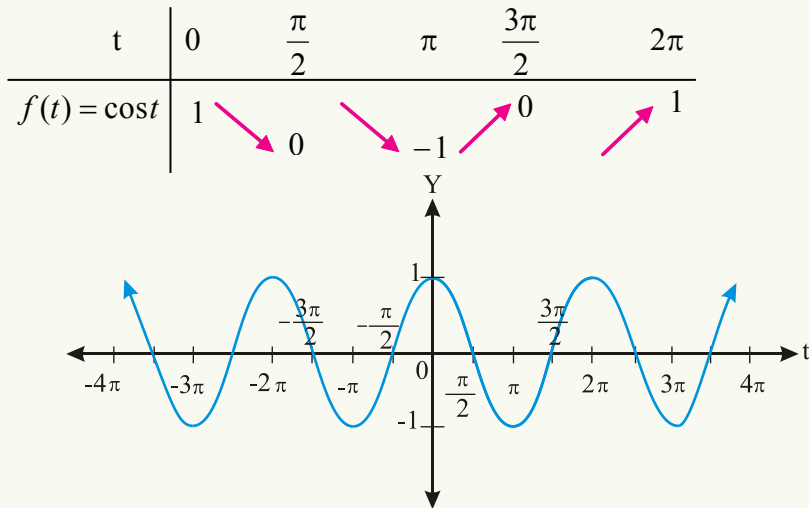
d f(t) = cos t د تابع گراف (Graph of the cosine function)

د دې تابع د تعریف ساحه (domain) هم د ټولو حقیقي عددونو سټ دی او Range یې $[-1,1]$

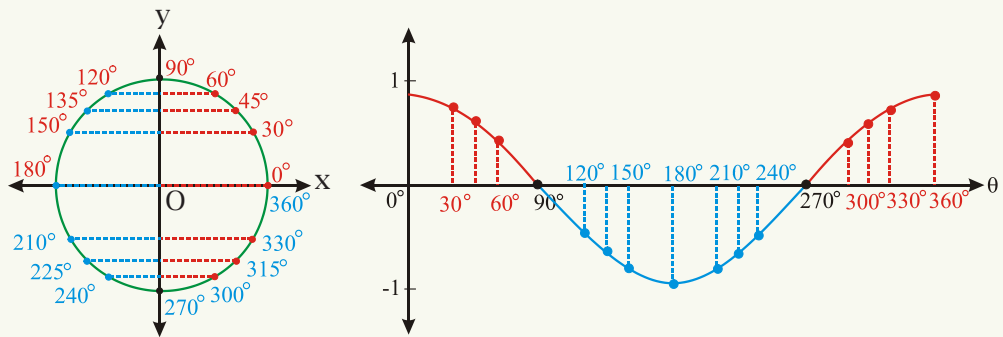
دی، د $\cos x$ د تابع د تناوب دوره هم 2π ده، له شکل سره سم په معیاري حالت (Standard position) کې د \hat{t} رادیان یوه زاویه په پام کې ونیسئ چې د \hat{t} د زاویې دویمه ضلع مثلثاتي دایره د p په ټکي کې قطع کوي، نو د p د ټکي د x مختصه د $\cos t$ څخه عبارت ده. $f(t) = \cos t$ د تابع گراف د رسمولو لپاره لاندې جدول او شکلونه وگورئ.

د t په قیمت کې تغیر	د P د ټکي حرکت	$\cos t$ یا د P ټکي د x مختصه	اړونده شکل
له 0 څخه تر $\frac{\pi}{2}$	له $(1,0)$ څخه تر $(0,1)$ پورې	له یوه څخه تر صفره پورې تناقص کوي	
له $\frac{\pi}{2}$ څخه تر π	له $(0,1)$ څخه تر $(-1,0)$ پورې	له صفر څخه تر -1 پورې تناقص کوي.	
له π څخه تر $\frac{3\pi}{2}$	له $(-1,0)$ څخه تر $(0,-1)$ پورې	له -1 څخه تر صفره پورې تزايد کوي.	
له $\frac{3\pi}{2}$ څخه تر 2π	له $(0,-1)$ څخه تر $(1,0)$ پورې	له صفر څخه تر یوه پورې تزايد کوي	

په همدې ډول په هر 2π کې تکرارېږي. په نتیجه کې $\cos(t \pm 2\pi) = \cos t$ دی. لاندې جدول او شکل وگورئ.



کولای شو، د درجې په حساب د $f(t) = \cos t$ تابع گراف هم رسم کړو:



د $f(t) = y = \cos t$ تابع د تناوب دوره 2π ده، ځکه چې د $\cos t$ د تابع گراف د $[0, 2\pi]$ ، $[2\pi, 4\pi]$ ، $[4\pi, 6\pi]$ او $[-2\pi, 0]$ او داسې نورو کې یو شان دی.

د $\cos t$ د تابع د تعریف ساحه د حقیقي عددونو سټ او Range یا د y قیمت یې د -1 او 1 تر منځ دی، یا د $[-1, 1]$ انټروال د $\cos t$ د تابع Range دی.

$$f(t) = \cos t$$

t	واقعي	تقريبي
0°	1	1.00
30°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0.87
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0.71
60°	$\frac{1}{2}$	0.50
90°	0	0.00
120°	$-\frac{1}{2}$	-0.50
135°	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-0.71
150°	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-0.87

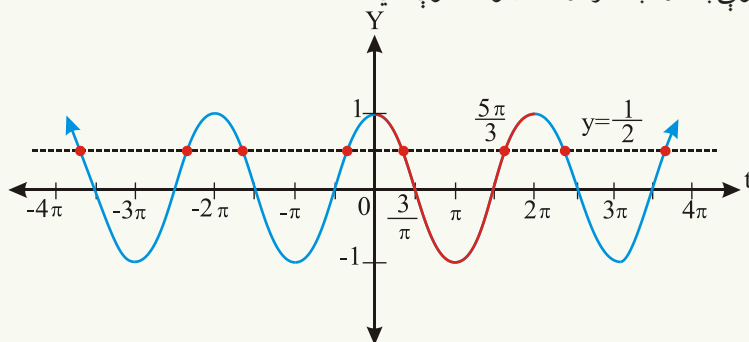
180°	-1	-1.00
210°	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-0.87
225°	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-0.71
240°	$-\frac{1}{2}$	-0.50
270°	0	0.00
300°	$\frac{1}{2}$	0.50
315°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0.711
330°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0.87
360°	1	1.00

فعالیت

د $g(t) = \cos t$ تابع گراف د t په کومو قیمتونو کې د y محور قطع کوي؟

لومړی مثال: د t ټول هغه قیمتونه وښایست چې د $\cos t$ د تابع قیمت په کې له $\frac{1}{2}$ سره مساوی وي.

حل: څرنګه چې بې شمېره زاوې شته دی چې په هغه قیمتونو کې $y = \cos t = \frac{1}{2}$ دي، په شکل کې څو ټکي د نمونې په ډول په سره رنګ ښودل شوي دي.



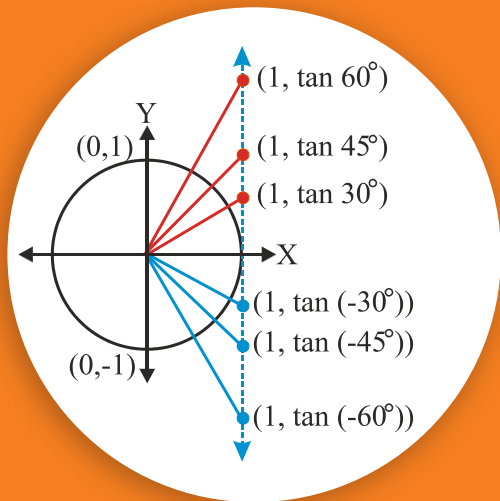
د $[0, 2\pi]$ په انټروال کې داسې دوه ټکي شته چې $\cos t = \frac{1}{2}$ شي چې له $(\frac{\pi}{3}, \frac{1}{2})$ او $(\frac{5\pi}{3}, \frac{1}{2})$ څخه عبارت دي. ټول هغه قيمتونه چې په هغو کې $\cos t = \frac{1}{2}$ وي، له $t = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ يا $t = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$ څخه عبارت دي. چې k يو تام عدد دی.

د \sin او \cos تابع گانو د تعريف ساحه ټول حقيقي عددونه دي، $y = \cos t$ تابع له صفره څخه تر $\frac{\pi}{2}$ پورې متناقصه او له $\frac{\pi}{2}$ څخه تر π هم متناقصه ده. ليکن له π څخه تر $\frac{3\pi}{2}$ متزايدة او له $\frac{3\pi}{2}$ څخه تر 2π پورې هم متزايدة ده. د $y = \sin t$ او $y = \cos t$ ، د تابع گانو پريود 2π دی، په دې معنا چې: $\sin(t \pm 2\pi) = \sin t$ ، $\cos(t \pm 2\pi) = \cos t$.

د $f(t) = \sin t$ تابع طاقه او $f(t) = \cos t$ تابع يوه جفته تابع ده، ځکه چې: $\sin(-t) = -\sin t$ او $\cos(-t) = \cos t$ دی يا د $\sin t$ د تابع گراف نظر مبداء ته متناظر او د $\cos t$ د تابع گراف نظر د y محور ته متناظر دی.

پوښتنې

- 1- د لاندې تابع گانو گرافونه په را کرل شوو انټروالونو کې رسم کړئ.
 $f(t) = \sin t : [2\pi, 6\pi]$ $g(t) = \cos t : [\pi, 3\pi]$
- 2- د $[-2\pi, 6\pi]$ په انټروال کې د t د کوم قيمت لپاره $\sin t = 1$ دی؟
- 3- د $[-2\pi, 6\pi]$ په انټروال کې د t د کوم قيمت لپاره $\cos t = 0$ دی؟
- 4- د $g(t) = -\frac{1}{2} \sin t$ د تابع گراف په $[-2\pi, 6\pi]$ انټروال کې رسم کړئ.



د تانجانټ د تابع گراف

آيا پوهېږئ چې د \tan تابع يوه متزايده تابع ده؟

څرنگه چې $\tan t = \frac{y}{x} = \frac{\sin t}{\cos t}$ دی، په دې شرط چې $\cos t \neq 0$ وي، نو د \tan تابع د تعريف

ساحه ټول حقيقي عددونه دي، پرته له هغو زاويو څخه چې \cos يې صفر وي، د $\frac{\pi}{2}$ او $\frac{3\pi}{2}$ او يا

$$\frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ او } \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \text{ د زاويو کوساينونه صفر دي.}$$

څرنگه چې د $\frac{\pi}{2}$ زاويې د دويمې ضلعي د تقاطع ټکي له مثلثاتي دايرې سره د $(0,1)$ ټکي دي، نو د

$$\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}, \frac{9\pi}{2}, \dots \text{ په جمع کولو سره د } (2\pi) \text{ دوران}$$

زاويې په لاس راځي چې ددې زاويو د \tan قيمتونه تعريف شوي نه دي او د $t = k\pi \pm \frac{\pi}{2}$ مستقيم خطونه د \tan د تابع عمودي مجانبونه دي.

په همدې ډول د $(0,-1)$ ټکي د $\frac{3\pi}{2}$ زاويې پر دويمه ضلع واقع دي، د $\frac{3\pi}{2}$ له زاويې سره د يو پوره

$$\frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}, \frac{11\pi}{2}, \dots \text{ دوران } (2\pi) \text{ له جمع کولو څخه د } -\frac{5\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}, \frac{11\pi}{2}, \dots \text{ زاويې په لاس}$$

راځي چې د \tan د تابع د تعريف په ساحه کې شامل نه دي.

يا د \tan د تابع د تعريف په ناحيه (domain) کې ټول حقيقي عددونه شامل دي پرته د $\frac{\pi}{2}$ له

طاق مضرب څخه، او يا $\{t / t \in \mathbb{R}, t = k\pi + \frac{\pi}{2}\}$ او د $\mathbb{R} - \{t / t \in \mathbb{R}, t = k\pi + \frac{\pi}{2}\}$ د تابع Range

ټولو حقيقي عددونو سټ دی. د ټانجانټ د تابع پریود π دی. د t راډیان زاویې لپاره لرو چې:

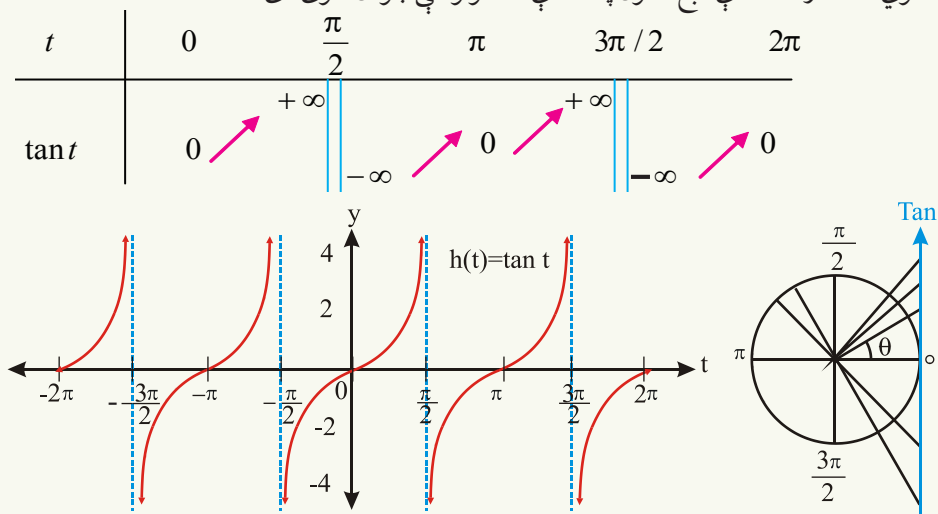
$$\tan(t \pm \pi) = \tan t$$

څه وخت چې د \hat{t} زاویه له صفره تر $\frac{\pi}{2}$ پورې تزیاید وکړی، نو $\tan t$

هم له صفره څخه تر $+\infty$ پورې تزیاید کوي ($\tan \frac{\pi}{2}$ تعریف شوی نه دی). په دویمه ربع کې هم

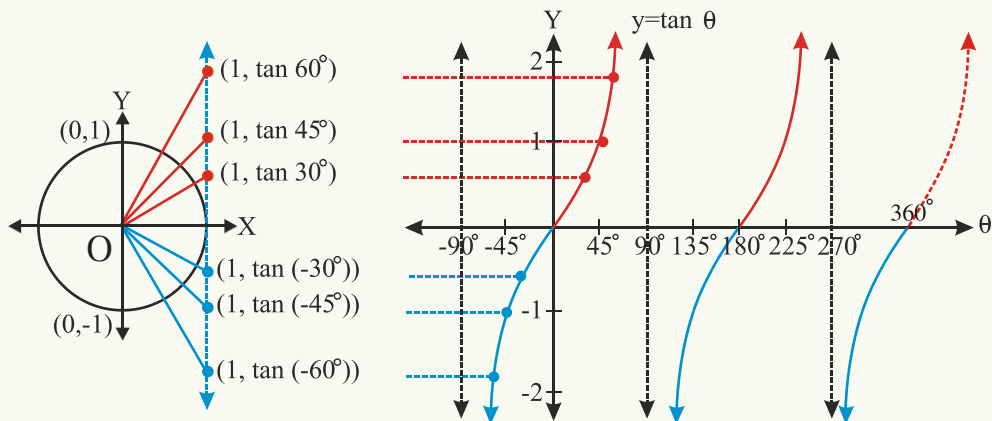
څه وخت چې د t زاویه له $\frac{\pi}{2}$ څخه تر π پورې تزیاید وکړی، $\tan t$ هم له $-\infty$ څخه تر صفره پورې تزیاید کوي.

په همدې ډول په دریمه ناحیه کې هغه وخت چې د \hat{t} زاویه له π څخه تر $\frac{3\pi}{2}$ پورې تزیاید وکړی، د \hat{t} د زاویې ټانجانټ له صفره څخه تر $+\infty$ پورې تزیاید کوي. په څلورمه ناحیه کې د \hat{t} د زاویې ټانجانټ له $-\infty$ څخه تر صفره پورې تزیاید کوي. لاندې جدول د ټانجانټ د تابع تحول بڼکاره کوي، همدارنگه د دې تابع تحول په لاندې شکلونو کې بڼودل شوی دی:



که θ د درجې په حساب وي، د ټانجانټ تابع قیمتونه او شکل په لاندې ډول وگوری:

	θ	-90°	-60°	-45°	-30°	0°	30°	45°	60°
		90°	120°	135°	150°	180°	210°	255°	240°
tan θ	حقيقي	تعريف شوی نه دی	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
	تقریبي	تعريف شوی نه دی	-1.73	-1	-0.58	0	0.58	1	1.73



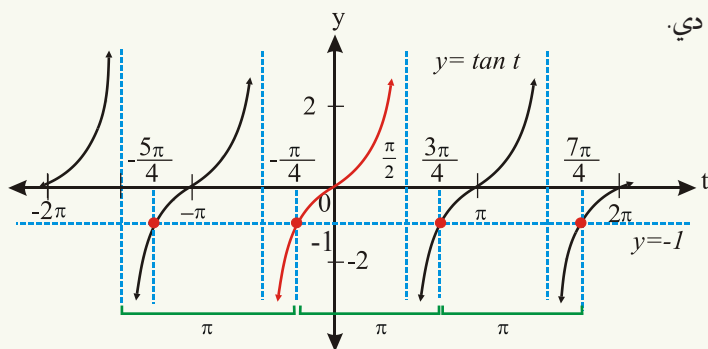
خرنگه چې د $(\pi, 2\pi)$ او د $(0, \pi)$ په فاصله کې د پانجانټ د تابع تغیرات یو شی دي، نو د \tan تابع پریود π دی او د \tan تابع یوه متزایده تابع ده. له بلې خوا که $b > 0$ وي، د $f(t) = \tan bt$

تابع د $\frac{\pi}{2}$ او $-\frac{\pi}{2}$ تر منځ یوه دوره (Cycle) جوړوي، د دې تابع پریود $\frac{\pi}{b}$ دی. د مثال په ډول د

$$f(t) = \tan 2t \text{ پریود } \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{b} \text{ دی.}$$

مثال: د t ټول هغه قیمتونه پیدا کړئ چې $\tan t = -1$ وي.

حل: خرنګه چې د $\tan t$ قیمتونه د π په فاصله کې تکرارېږي، نو د t بې شمېره قیمتونه شته چې $y = \tan t$ له -1 سره مساوي وي چې په لاندې شکل کې څو ټکي د نمونې په ډول ښودل شوي دي.



خرنگه چې د $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ په انټروال کې یوازې د $(-\frac{\pi}{4}, -1)$ یو ټکی لري، نو د t ټول قیمتونه

$$\tan t = -1 \text{ دي مساوي دی په: } t = -\frac{\pi}{4} + K\pi \text{ (K یو تام عدد دی).}$$

د \tan تابع هر وخت متزايدة ده او پرته د $\frac{\pi}{2}$ د طاق مضرب له زاویو څخه پرته په ټولو حقيقي

عددونو کې تعريف شوې ده. او د تناوب دوره يې π ده، ځکه چې: $\tan(t \pm \pi) = \tan(t)$.

څرنگه چې $\tan(-t) = -\tan t$ دی، نو $y = \tan t$ يوه طاقه تابع ده او د $\frac{\pi}{2}$ په تام مضرب کې عمودي محانب هم لري.

د \sin ، \cos او \tan تابع گانو د مشخصو لنډيز:

تابع	سمبول	Domain	Range	پریود	طاقه / جفته
\sin	$f(t) = \sin t$	د ټولو حقيقي عددونو سټ	ټول حقيقي عددونه د 1 او -1 ترمنځ	2π	طاقه
\cos	$f(t) = \cos t$	ټول حقيقي عددونه	ټول حقيقي عددونه د 1 او -1 ترمنځ	2π	جفته
\tan	$f(t) = \tan t$	ټول حقيقي عددونه پرته د $\frac{\pi}{2}$ له طاق مضرب څخه	ټول حقيقي عددونه	π	طاقه

$$D_{\sin} = D_{\cos} = \mathbb{R}$$

$$R_{\sin} = R_{\cos} = [-1, 1]$$

يا په بل عبارت:

$$D_{\tan} = \{x \in \mathbb{R} : \cos x \neq 0\}$$

پوښتنې

1- د t د زاویې په کوم قیمت د $\tan t$ د تابع قیمت په $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ انټروال کې له صفره کوچنی دی؟

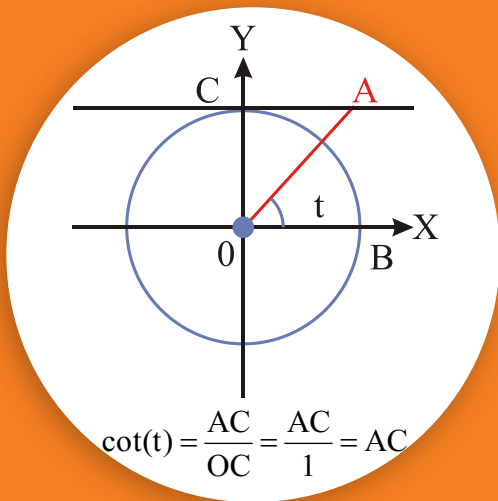
2- د $y = 3 \tan \theta$ تابع گراف رسم کړئ.

3- د $\tan \theta$ تابع پریود مساوي دی په:

a) 2π b) π c) 3π d) درې واړه سم نه دي

4- که د θ زاویه له 0° څخه تر 90° پورې تحول وکړي، د $\tan \theta$ تحول عبارت دی له:

له $-\infty$ څخه تر $+\infty$ c) له $+\infty$ څخه تر $-\infty$ b) له 0 څخه تر $+\infty$ a) له $-\infty$ څخه تر 0



د کونټانجانټ د تابع گراف

- آیا د کونټانجانټ د تابع د تناوب دوره پېژنئ؟
- که $\sin t = 0$ وي، آیا $\cot(t)$ تعريف شوی دی؟ که نه، ولې؟

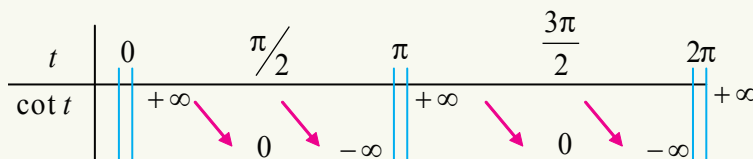
څرنگه چې $\cot(t) = \frac{\cos t}{\sin t}$ دی، که $\sin t = 0$ وي، $\cot(t)$ تعريف شوی نه دی چې t یو تام عدد وي.

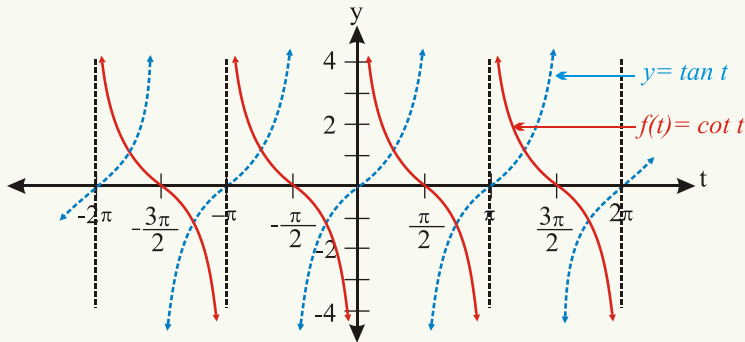
د \cot د تابع تعريف ساحه (domain) ټول حقيقي عددونه دي پرته د π له تام مضرب څخه، یا په بل عبارت $\{t \in \mathbb{R} / t = k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ یا $\text{dom}_{\cot} = \{t \in \mathbb{R} / \sin t \neq 0\}$ د دې تابع Range ټول حقيقي عددونه دي.

د $f(t) = \cot(t)$ د تابع گراف د π په تام مضرب کې عمودي مجانب (Vertical asymptotes) لري ($t = k\pi$) چې k یو تام عدد دی.

څه وخت چې د t زاویه له صفره تر $\frac{\pi}{2}$ پورې زیاته شي، د $\cot(t)$ قیمت له $+\infty$ څخه تر صفره پورې کمېږي ($\cot 0^\circ$ نه دی تعريف شوی) په دویمه ناحیه کې څه وخت چې د t زاویه

له $\frac{\pi}{2}$ څخه تر π پورې زیاته شي، $\cot(t)$ له صفره تر $-\infty$ پورې کمېږي (تناقص کوي). دې ته په پام سره چې د \cot د تابع د تناوب دوره π ده، نو په دریمه او څلورمه ناحیه کې د $\cot(t)$ د تابع تغیرات د لومړۍ او دویمې ناحیې په شان دي. پورتنی حقیقت په لاندې جدول او شکل کې لیدلای شئ.





د $\sec(t)$ تابع گراف (Graph of the secant Function)

د $\sec(t)$ او $\cos(t)$ گرافونه یو له بله سره څه اړیکه لري؟

د $f(t) = \sec(t)$ تابع گراف د $\cos t$ د تابع له گراف سره معکوسه اړیکه لري، ځکه چې

$\sec(t) = \frac{1}{\cos(t)}$ دی. که $\sec t$ د $\frac{1}{\cos t}$ په شکل په پام کې ونیسو، څه وخت چې د t زاوې

قیمت له صفر څه تر $\frac{\pi}{2}$ یا 90° پورې زیات شي، د $\cos t$ قیمت له (1) څخه صفر ته نژدې

کېږي، د $\frac{1}{\cos t}$ یا $\sec t$ قیمت له 1 څخه تر $+\infty$ زیاتېږي، که $t = 90^\circ$ شي، $\sec t$ تعریف

شوی نه دی، که له 90° لږ څه زیاته شي د $\sec t$ قیمت $-\infty$ کېږي او په $t = \pi = 180^\circ$ کې د -1 سره مساوي کېږي. په همدې ډول که t له 180° څخه تر 270° پورې زیاته شي، نو د $\cos t$ قیمت له -1 څخه صفر ته نژدې کېږي او $\sec(t)$ له -1 څخه تر $-\infty$ پورې کمېږي.

په $t = \frac{3\pi}{2} = 270^\circ$ کې د $\sec t$ قیمت غیر معین کېږي په همدې ډول، څه وخت چې د t

قیمت له 270° څخه تر 360° زیات شي، نو $\cos(t)$ له صفر څخه تر یوه پورې قیمت اخلي

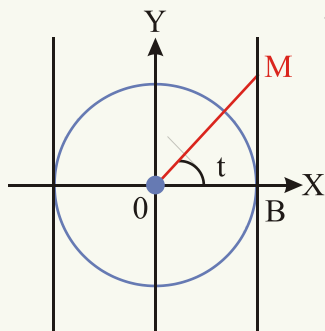
او $\sec(t)$ د $+\infty$ څخه تر (1) پورې تناقص کوي. لیدل کېږي چې:

$$\text{Domain } \sec t = \mathbb{R} - \left\{ t \mid t = (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

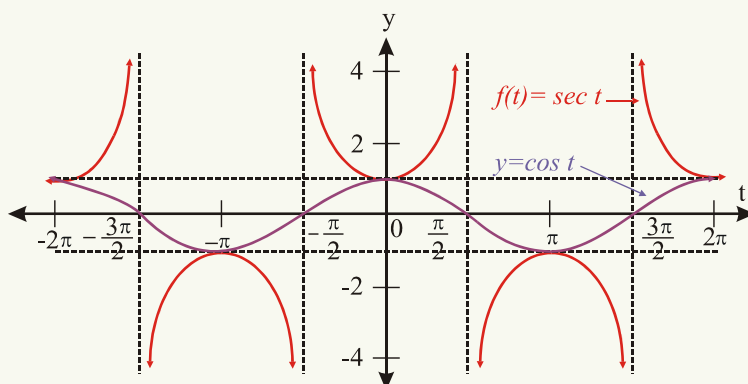
او $\text{Range } \sec(t) = \mathbb{R} - \{t \mid -1 \leq t \leq 1\}$ یا ټول حقیقي عددونه پرته د $[-1, 1]$ له انټروال څخه یا په بل عبارت د $f(t) = \sec(t)$ تابع د تعریف ساحه (Domain) د ټولو حقیقي عددونو

سټ دی پرته د $\frac{\pi}{2}$ د طاق مضرب څخه او د $f(t) = \sec(t)$ د تابع Range ټول حقیقي عددونه دي چې لوی یا مساوي د یو او یا کوچنی یا مساوي له -1 وي، لکه: څنگه چې لیدل کېږي د

$\sec(t)$ تابع پریود هم 2π دی او د $f(t) = \sec(t)$ تابع د $t = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ کې عمودي
مجانبونه لري چې k یو تام عدد دی.



$$\sec t = \frac{\overline{OM}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OM}}{1} = \overline{OM}$$



t	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
t	0°	90°	180°	270°	360°
$F(t) = \sec t$	1	$+\infty$	-1	$+\infty$	1

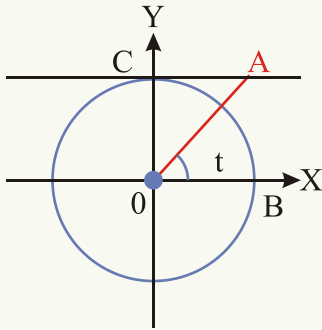
فعالیت

د $f(t) = \frac{4}{3}\sec(t)$ تابع گراف رسم کریئ.

د cosecant د تابع گراف (Graph of the cosecant Function)

د $f(t) = \sin(t)$ تابع گراف د $f(t) = \csc(t)$ د تابع له گراف سره څه اړیکه لري؟

څرنګه چې $\csc t = \frac{1}{\sin t}$ دی، $\csc t$ او $\sin t$ یو د بل معکوس دي. څه وخت چې $\sin(t) = 0$ وي، $\csc t$ تعریف شوی نه دی، د $f(t) = \csc(t)$ د تابع د تعریف ناحیه ټول حقيقي عددونه دي پرته له هغو زاویو څخه چې د π تام مضرب وي، (هغه زاویې چې sine یې صفر وي) چې په دې قیمتونو کې عمودي مجانبونه هم لري او د $f(t) = \csc(t)$ د تابع Range ټول هغه حقيقي عددونه دي چې لوی یا مساوي د یو، کوچنی یا مساوي له (-1) سره وي. او ددې تابع پریود هم 2π دی.



څه وخت چې د t زاویه له 0° څخه تر 90° پورې زیاته شي، نو $\sin t$ له صفر څخه تر (1) پورې زیاتېږي (تزايد کوي) او $\csc(t)$ له $+\infty$ څخه تر (1) پورې کمېږي (تناقص کوي)، څه وخت چې $t = 90^\circ$ شي، $\csc(t) = 1$ کېږي او که د t زاویه له 90° څخه تر 180° زیاته شي، نو $\sin(t)$ له یوه څخه صفر ته راکمېږي او $\csc(t)$ له (1) څخه $+\infty$ ته زیاتېږي (تزايد کوي). کله چې $t = 180^\circ$ شي نو $\sin(t) = 0$ او د $\csc(t)$ قیمت غیر معین شي او که t زاویه 180° څخه تر 270° پورې زیاته شي، $\sin(t)$ له صفر څخه تر (-1) پورې کمېږي او $\csc(t)$ له $-\infty$ څخه تر (-1) پورې زیاتېږي، د $t = 270^\circ$ په قیمت $\csc(t)$ له (-1) سره مساوي کېږي. په همدې ډول کله چې د t زاویه له 270° څخه تر 360° پورې زیاته شي (تزايد وکړي)، نو $\sin t$ له -1 څخه صفر ته نژدې کېږي او $\csc(t)$ له (-1) څخه تر $-\infty$ پورې کمېږي. په $t = 360^\circ$ کې د $\csc(t)$ قیمت غیر معین شي (تعریف شوی نه دی). $t = k\pi$ کې تابع عمودي مجانبونه لري.

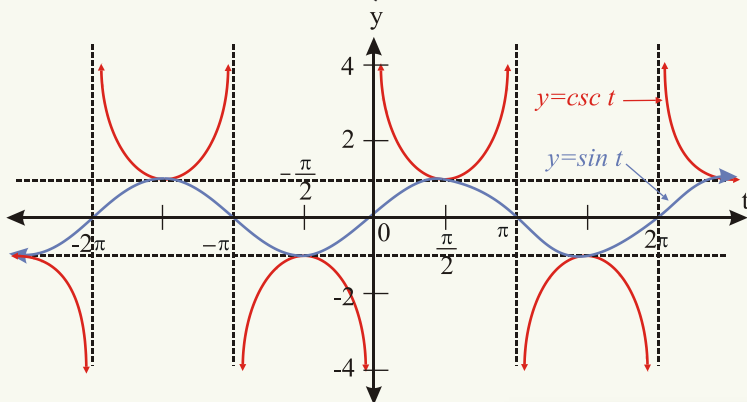
په شکل کې د مثلثاتي دایرې د C په ټکي کې یو مماس رسموو، د \hat{OCA} په قیام الزاویه مثلث کې لرو چې:

$$\csc(t) = \csc \hat{OCA} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{OA}}{1} = \overline{OA} \quad (\hat{t} = \hat{OCA})$$

د \overline{OA} د خط يا $\csc(t)$ تحول په لاندې جدول کې لاندو:

t	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$F(t) = \csc t$	$+\infty$	1	$+\infty$	-1	$-\infty$

ليدل کېږي چې که د t زاويه له صفر څخه تر 360° يا (2π) پورې قيمتونه واخلي، نو $\csc(t) \geq 1$ او يا $\csc(t) \leq -1$ کېږي، نو لاندې شکل وگورئ.



فعالیت

د $h(t) = -3\csc t$ د تابع گراف رسم کړئ.

لاندې جدول ته وگورئ:

سمبول	Domain	Range	پریود	طاقه یا جفته
$f(t) = \sec t$	ټول حقيقي عددونه پرته د $\frac{\pi}{2}$ له طاق مضرب څخه	ټول حقيقي عددونه کوچني یا مساوي په -1 لوی یا مساوي په (1)	2π	جفته

$f(t) = \csc(t)$	ټول حقيقي عددونه پرته د π له تام مضرب څخه	ټول حقيقي عددونه کوچني يامساوي په -1 لوی يا مساوي په 1	2π	طاقه
$f(t) = \cot(t)$	ټول حقيقي عددونه پرته د π له تام مضرب څخه	ټول حقيقي عددونه	π	طاقه

له مثلثاتي تابع گانو څخه دا نتیجه په لاس راځي چې: د θ يا t د زاويې په زياتوالي سره د $\sin \theta$ او $\tan \theta$ مثلثاتي نسبتونه هم زياتيږي، خو د $\cos \theta$ او $\cot \theta$ قيمت کميږي.

پوښتنې

1 - د $f(t) = \cot(t)$ تابع د t په کوم قيمت کې تعريف شوې نه ده او ولې؟

2 - څه وخت چې د θ زاويه له $\frac{\pi}{2}$ څخه تر π پورې تحول وکړي، د $\cot \theta$ تحول عبارت دی:

a) $1 \rightarrow -\infty$ b) $0 \rightarrow -\infty$ c) دواړه سمې نه دي

3 - که $\hat{t} = \pi$ وي، $\cot(t)$ عبارت دی له:

a) صفر b) -1 c) نه دی تعريف شوی

4 - د \sec او \csc تابع گانو $Range$ عبارت دی له:

a) $\mathbb{R} - \{t \mid -1 < t < 1\}$ b) ټول حقيقي عددونه c) $\mathbb{R} - \{t \mid -1 \leq t \leq 1\}$

5 - د $f(t) = \csc(t)$ تابع د تعريف ساحه ($Domain$) عبارت ده، له:

(a) ټول حقيقي عددونه پرته د π له تام مضرب څخه

(b) ټول حقيقي عددونه پرته د $\frac{\pi}{2}$ له طاق مضرب څخه

(c) ټول حقيقي عددونه پرته د 2π له تام مضرب څخه (d) درې واړه سمې نه دي

6 - د $f(t) = \csc(t)$ تابع د $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ په انټروال کې:

a) متزايدة ده b) متناقصه ده c) نه متزايدة او نه متناقصه ده

د څپرکې لنډيز

• د $\frac{R}{\pi} = \frac{g}{200} = \frac{d}{180}$ د فورمول په مرسته کولای شو، زاویه له یوه واحد څخه بل واحد ته واړوو.

• یو راډیان هغه مرکزي زاویه ده چې د مقابل قوس اوږدالی یې د شعاع له اوږدوالي سره مساوي وي.

• θ د راډیان په حساب مساوي ده په: $\theta = \frac{s}{r}$ چې s د مرکزي زاوېې مقابل قوس او r د دایرې شعاع ده.

• که د یوې زاوېې رأس د وضعیه کمیاتو په مبدأ کې او لومړنی ضلع یې د X د محور په مثبت جهت منطبق وي، زاویه په معیاري حالت کې ده.

• که په معیاري حالت کې د دوو یا څو زاویو دویمې ضلعې یو پر بل منطبقې وي، دا زاوېې کوټر مینل زاوېې نومېږي.

• مثلثاتي دایره هغه دایره ده چې د شعاع اوږدوالی یې د اوږدوالي واحد وي.

$\sin(90 - \theta) = \cos \theta$	$\sin(-\theta) = -\sin \theta$	$\sin(\pi - \theta) = \sin \theta$
$\cos(90 - \theta) = \sin \theta$	$\cos(-\theta) = \cos \theta$	$\cos(\pi - \theta) = -\cos \theta$
$\tan(90 - \theta) = \cot \theta$	$\tan(-\theta) = -\tan \theta$	$\tan(\pi - \theta) = -\tan \theta$
$\cot(90 - \theta) = \tan \theta$	$\cot(-\theta) = -\cot \theta$	$\cot(\pi - \theta) = -\cot \theta$
$\sec(90 - \theta) = \csc \theta$	$\sec(-\theta) = \sec \theta$	$\sec(\pi - \theta) = -\sec \theta$
$\csc(90 - \theta) = \sec \theta$	$\csc(-\theta) = -\csc \theta$	$\csc(\pi - \theta) = \csc \theta$
$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \cos \theta$	$\sin(\pi + \theta) = -\sin \theta$	$\sin(2\pi - \theta) = -\sin \theta$
$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sin \theta$	$\cos(\pi + \theta) = -\cos \theta$	$\cos(2\pi - \theta) = \cos \theta$
$\tan\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\cot \theta$	$\tan(\pi + \theta) = \tan \theta$	$\tan(2\pi - \theta) = -\tan \theta$
$\cot\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\tan \theta$	$\cot(\pi + \theta) = -\cot \theta$	$\cot(2\pi - \theta) = -\cot \theta$
$\sec\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\csc \theta$	$\sec(\pi + \theta) = -\sec \theta$	$\sec(2\pi - \theta) = \sec \theta$
$\csc\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \sec \theta$	$\csc(\pi + \theta) = -\csc \theta$	$\csc(2\pi - \theta) = -\csc \theta$

• د θ او $(\theta + 2k\pi)$ زاوې چې k یو تام عدد دی، کوټرمینل زاوې دي چې ټول مثلثاتي نسبتونه یې سره مساوي دي.

• د $\sin\theta$ او $\cos\theta$ د توابعو *domain* ټول حقيقي عددونه او *Range* یې $[-1,1]$ دی.

• د $y = \sin\theta$ تابع یوه طاقه تابع ده، ځکه چې $\sin(-\theta) = -\sin\theta$ ددې تابع گراف نظر د وضعیه

کمیاتو مبدأ ته متناظر دی او د $y = \cos\theta$ تابع جفته تابع ده، ځکه چې $\cos(-\theta) = \cos\theta$

او د $\cos\theta$ تابع گراف نظر y محور ته متناظر دی.

• د 0° ، $\frac{\pi}{2}$ ، π ، $\frac{3\pi}{2}$ او 2π د زاویو دوه، دوه مثلثاتي نسبتونه تعریف شوي نه دي.

• د \sin ، \cos ، \sec او \csc تابع گانو د تناوب دوره 2π او د \tan او \cot د تابع گانو د

تناوب دوره (پریود)، π ده.

• د \tan تابع هر وخت متزاید او د \cot تابع هر وخت متناقصه تابع ده.

• د \cos او \sec تابع گانې جفتې او د \sin ، \tan ، \cot او \csc تابع گانې طاقې دي.

• که د یوې تابع گراف نظر د y محور ته متناظر وي، دا ډول تابع گانې جفتې دي یا د هر x لپاره،

$$f(-x) = f(x) \quad x \in \text{dom}f$$

• که د یوې تابع گراف نظر د وضعیه کمیاتو مبدأ ته سره متناظر وه، طاقه تابع ده چې د هر x لپاره،

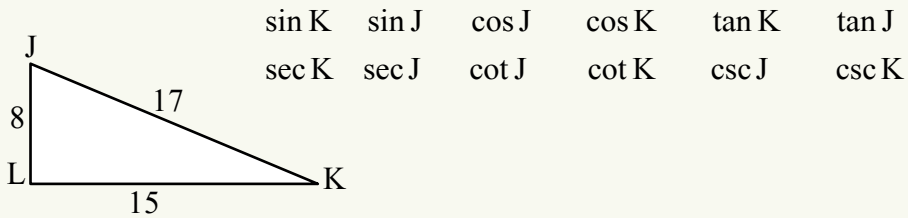
$$f(-x) = -f(x) \quad x \in \text{dom}f$$

د مثلثاتي توابعو تحول په لنډ ډول په لاندې جدول کې ښودل شوی دی.

تابع \ θ	0°	I	$\frac{\pi}{2}$	II	π	III	$\frac{3\pi}{2}$	IV	2π
Sin	0		1		0		-1		0
Cos	1		0		-1		0		1
Tan	0		$+\infty$		0		$+\infty$		0
Cot	$+\infty$		0		$-\infty$		0		$-\infty$
Sec	1		$+\infty$		-1		$-\infty$		1
Csc	$+\infty$		1		$+\infty$		-1		$-\infty$

د څپرګي پوښتنې

- 1 - $42,6033^\circ$ په درجه، دقیقه او ثانیه بدلې کړئ؟
 2 - که د یو ساعت د ثانیې د عقربې دوران 3 دقیقې او 25 ثانیې وي، د ثانیې عقربې به څو راډیانه مثبت زاویه طی کړي وي؟
 3 - د JKL په مثلث کې لاندې قیمتونه پیدا کړئ؟



- 4 - که د یوې دایرې شعاع 20cm او د مرکزي زاوې مقابل قوس یې $s = 85\text{cm}$ وي، مرکزي زاویه څو راډیانه ده؟
 5 - د 1 radian او 2radian مرکزي زاویو د مقابلو قوسو اوږدوالی پیدا کړئ. په دې ډول چې د دایرې قطر 10 cm وي.
 6 - د لاندې زاویو دویمې ضلعې (terminal side) چېرې واقع کېږي؟

$$\frac{3\pi}{2}, -7\pi, -\frac{11\pi}{2}, -500^\circ, 900^\circ, -\pi$$

- 7 - لاندې زاوې چې په راډیان راکړل شوي دي، په درجه یې وپوړئ.
 $\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{15}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, \frac{17\pi}{45}$

- 8 - په 54 دقیقو کې د یوه ساعت د ثانیې او د ساعت عقربه هره یوه څو راډیانه طی کوي؟
 9 - که د یوه ټراکتور د کوچني ټایر قطر یو متر او د لوی ټایر قطر 120cm وي، څه وخت چې کوچنی ټایر د 70° درجو په اندازه وڅرخېږي لوی ټایر څو راډیانه طی کوي؟
 10 - یو څرخ په یو ساعت کې 300ReV دورانونه کوي، دا څرخ په یوه ثانیه کې څو راډیانه ګرځي؟

- 11 - د یوه مثلث زاوې په ترتیب سره $4x$ درجې، $\frac{70x}{9}$ گراډه او $\frac{\pi x}{20}$ راډیانه دي. هره یوه

زاویه خو درجې ده؟

$$\hat{C} + \hat{D} = 200g, \quad \hat{A} + \hat{D} = 240^\circ \text{، که د یوې څلور ضلعې زاوېې دي،}$$

$$\text{او } \hat{B} + \hat{D} = \frac{2\pi^R}{3} \text{ وي: د دې څلور ضلعې زاوېې د درجې په حساب پیدا کړئ.}$$

$$13 - \text{د یوه دوران } \frac{1}{12} \text{ برخه مساوي ده په:}$$

$$\text{درې واړه سمې دي د) } \frac{100}{3} \text{ g} \quad \text{c) } \frac{\pi}{6} \text{ radian} \quad \text{b) } = 30^\circ \quad \text{a)}$$

14 - د دوو زاویو مجموعه 17° او تفاضل یې 17° گراډه دی، دا دواړه زاویې پیدا کړئ.

15 - د درجې په حساب د دوو زاویو مجموعه X او تفاضل یې د گراډ په حساب هم X دی، دا دواړه زاویې پیدا کړئ.

16 - لاندې زاویې د درجې په اعشاري شکل ولیکئ.

$$47^\circ \quad 15' \quad 36'' \quad 15^\circ \quad 24' \quad 45''$$

17 - لاندې زاویې په درجه، دقیقه او ثانیې (DMS) وارپوئ:

$$23.16^\circ \quad 4.2075^\circ$$

$$18 - \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right), \quad \tan\frac{3\pi}{4} \quad \text{او} \quad \cot\frac{7\pi}{6} \quad \text{زاویو مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ}$$

19 - د $[-2\pi, 2\pi]$ په انټروال کې د θ په کوم قیمت، $\sin\theta = 1$ دی؟

20 - د $[-2\pi, 2\pi]$ په انټروال کې د $\tan\theta$ تابع، د θ په کومو قیمتونو کې عمودي مجانب لري؟

21 - له (i) څخه تر (iii) پورې کومه یوه اړیکه سمه نه ده؟

$$(i) \quad \sin(-x) = -\sin x \quad (ii) \quad \cos(-x) = -\cos x$$

$$(iii) \quad \tan(-x) = -\tan x$$

(a) i او ii سمې دي. (b) یوازې ii سمه ده.

(c) i او iii سمې دي. (d) درې واړه سمې دي.

(e) هېڅ یو.

22 - $\cos \frac{47\pi}{2}$ ، $\sin(-13\pi)$ او $\tan \frac{8\pi}{3}$ پیدا کړئ؟

23 - داسې زاویه پیدا کړئ چې که د گراد په حساب یې له مقدار ه 23 واحد کم کړو، د زاوې مقدار په درجه لاس ته راشي.

24 - د دريو زاویو مجموعه 240 گراډه ده، که لومړنی زاویه 40 گراډه، دویمه $\frac{3\pi}{4}$ راډیانه وي، دریمه زاویه څو درجې ده؟

25 - د 4185° زاوې مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

26 - د (-3660°) زاوې مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

27 - د $y = \cos \theta$ تابع د $[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$ په انټروال کې:

a) متزایده ده b) متناقصه ده c) هم متزایده او هم متناقصه ده

28 - د $y = \tan \theta$ تابع پر یوډ عبارت دی، له:

a) 2π b) π c) $\frac{\pi}{2}$ d) $\frac{3\pi}{2}$

29 - د $f(t) = \cos(t)$ تابع:

a) جفته ده b) طاقه ده c) نه جفته او نه طاقه ده

30 - هغه تابع چې گراف یې نظر مبدأ ته متناظر وي.

a) جفته ده b) طاقه ده c) نه جفته او نه طاقه ده

31 - د $y = \cos \theta$ تابع د تناوب دوره عبارت ده، له:

a) π b) $\frac{3\pi}{2}$ c) 2π d) 3π

32 - $\sin 67^\circ$ له $\sin 787^\circ$ سره څه اړیکه لري؟

a) $\sin 787^\circ > \sin 67^\circ$ b) $\sin 787^\circ < \sin 67^\circ$ c) $\sin 67^\circ = \sin 787^\circ$

33 - کومه یوه له لاندې اړیکو څخه سمه ده؟

a) $\sec 135^\circ = -\csc 45^\circ$

b) $\sec 135^\circ = \csc 45^\circ$

d) $\sec 135^\circ = \sec 45^\circ$

c) $\sec 135^\circ = -\sec 45^\circ$

34 - کومه یوه له لاندې اړیکو څخه سمه ده؟

a) $\tan 240^\circ = \tan 60^\circ$

b) $\tan 240^\circ = -\tan 60^\circ$

c) $\tan 240^\circ = \cot 60^\circ$

d) $\tan 240^\circ = -\cot 60^\circ$

$\cot 0^\circ = ?$ - 35

a) 1

b) -1

c) 0

d) تعریف شوی نه دی.

$\cos 9\pi = ?$

- 36

a) 1

b) -1

c) 0

d) $\frac{1}{2}$

$\sin(-\frac{13\pi}{2}) = ?$

- 37

a) 1

b) -1

c) 0

d) درې واړه سم نه دي

38 - د 2430° له زاويې مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

$\sin(270^\circ - \theta) = ?$

- 39

a) $\sin \theta$

b) $-\sin \theta$

c) $\cos \theta$

d) $-\cos \theta$

$\sin(-\frac{9\pi}{2}) = ?$

- 40

a) 1

b) -1

c) 0

d) تعریف شوی نه دی

$\sec(-\frac{9\pi}{2}) = ?$

- 41

a) 1

b) -1

c) 0

d) تعریف شوی نه دی

$\tan(-15\pi) = ?$

- 42

a) 1

b) -1

c) 0

d) تعریف شوی نه دی

$\sec(-1530^\circ) =$

- 43

$\cot(-2430^\circ) = ?$ a) 1 b) -1 c) 0 d) تعریف شوی نه دی
- 44

$\sin\left(\frac{235\pi}{2}\right) = ?$ a) 1 b) -1 c) 0 d) تعریف شوی نه دی
- 45

$\cos\left(\frac{407\pi}{2}\right) = ?$ a) 1 b) -1 c) 0 d) تعریف شوی نه دی
- 46

a) 1 b) 0 c) -1 d) ∞

$\tan(90 + \theta)$ - مساوی دی په: - 47

$\tan(270 + \theta) = ?$ a) $\cot\theta$ b) $-\cot\theta$ c) $-\tan\theta$ d) $\tan\theta$
- 48

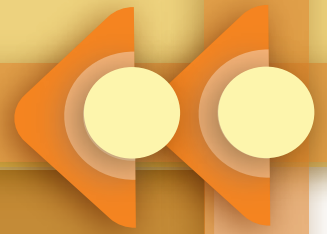
$\sin(-1980^\circ) = ?$ a) $\cot\theta$ b) $-\cot\theta$ c) $\tan\theta$ d) $-\tan\theta$
- 49

$\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = ?$ a) 1 b) -1 c) 0 d) $\frac{1}{2}$
- 50

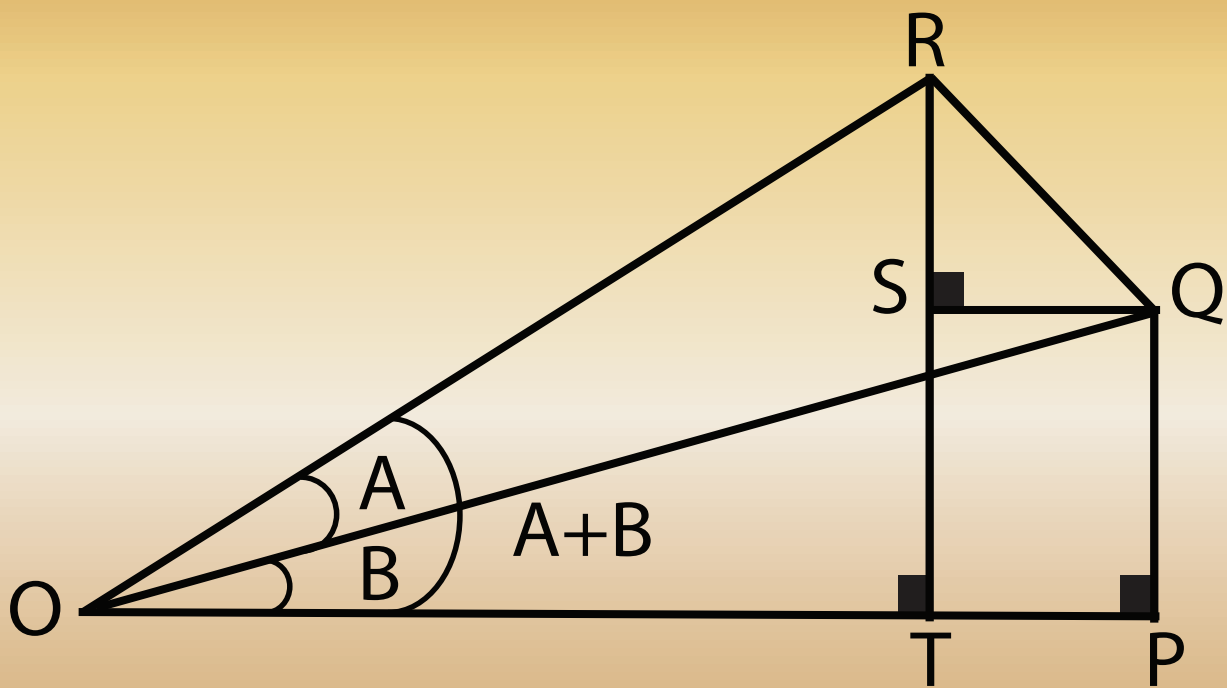
a) 1 b) -1 c) 0 d) $\frac{1}{2}$

51 - له لاندې اړیکو څخه کومه یوه یې سمه ده؟

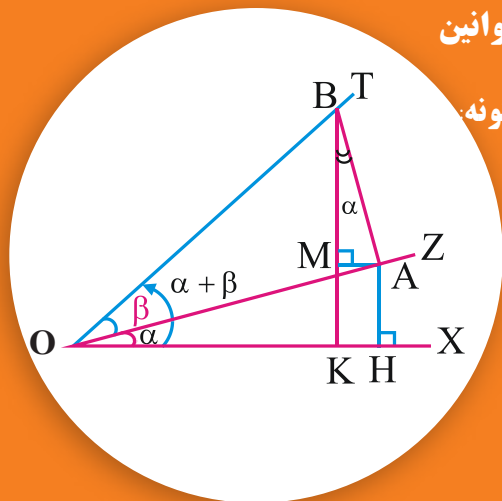
a) $\sin \frac{3\pi}{4} = \sin \frac{\pi}{4}$ b) $\sin \frac{3\pi}{4} > \sin \frac{\pi}{4}$ c) $\sin \frac{3\pi}{4} < \sin \frac{\pi}{4}$



پنجم خیرکی
د مثلثاتو تطبیقات



د مرکبو زاویو د مثلثاتي نسبتونو قوانین
د جمعې او تفاضل فورمولونه
د دوو زاویو د مجموعې مثلثاتي نسبتونه:



آیا د

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta$$

رابطې سموالی ښودلای شی؟

1- د $\sin(\alpha + \beta)$ محاسبه کول: د \widehat{XOZ} زاویه له α او د \widehat{ZOT} زاویه له β سره مساوي جلا کوو او داسې پې يو د بل څنګ ته ږدو چې دوه مجاورې زاوې جوړې کړي بیا د OT د قطعه خط پر مخ د OB قطعه خط د واحد په اندازه جلا کوو. د B له ټکي څخه د BA خط پر OZ عمود رسموو، بیا د A له ټکي څخه د AH خط پر OX عمود رسموو، شکل ته په پام سره لرو چې:

$$\sin\beta = \frac{\overline{AB}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{AB}}{1} = \overline{AB}$$

$$\cos\beta = \frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OA}}{1} = \overline{OA}$$

$$\sin\alpha = \frac{\overline{HA}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{HA}}{\cos\beta} \Rightarrow \overline{HA} = \sin\alpha \cos\beta$$

$$\cos\alpha = \frac{\overline{OH}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OH}}{\cos\beta} \Rightarrow \overline{OH} = \cos\alpha \cos\beta$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{\overline{KB}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{KB}}{1} = \overline{KB}$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \frac{\overline{OK}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OK}}{1} = \overline{OK}$$

د A له ټکي څخه پر KB باندې د AM عمود رسموو چې د KHAM څلور ضلعي مستطیل دی، په نتیجه کې $KM=HA$ او $MA=KH$ دی.

د MBA زاویه د α له زاوې سره مساوي ده (ددې دواړو زاویو ضلعي یو پر بل باندې عمود دي). د BMA په قایم الزاویه مثلث کې لرو چې:

$$\cos(\widehat{MBA}) = \cos \alpha = \frac{\overline{MB}}{\overline{AB}} = \frac{MB}{\sin \beta} \Rightarrow \overline{MB} = \cos \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\widehat{MBA}) = \sin \alpha = \frac{\overline{MA}}{\overline{AB}} = \frac{MA}{\sin \beta} = \frac{\overline{KH}}{\sin \beta} \Rightarrow \overline{KH} = \sin \alpha \sin \beta$$

که د $\overline{KB} = \overline{KM} + \overline{MB}$ په رابطه کې د KB، KM او \overline{MB} پر ځای یې قیمتونه وضع کړو، لرو چې: $(KM = AH = \sin \alpha \cos \beta)$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

د 2: $\cos(\alpha + \beta)$ محاسبه کول: په همدې ډول که د $\overline{OK} = \overline{OH} - \overline{KH}$ په رابطه کې د KH، OK او OH پر ځای یې قیمتونه وضع کړو، نو لرو چې:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

د 3: $\tan(\alpha + \beta)$ محاسبه کول:

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta}$$

صورت او مخرج په $\cos \alpha \cos \beta$ وپشو:

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\frac{\sin \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta} + \frac{\cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}}{\frac{\cos \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta} - \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}} = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

لومړی مثال: $\sin 120^\circ$ ، $\cos 120^\circ$ او $\tan \frac{5\pi}{12}$ پیدا کړئ. **حل**

$$\begin{aligned}\sin \frac{7\pi}{12} &= \sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = \sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

$$\sin 120^\circ = \sin(90^\circ + 30^\circ) = \sin 90^\circ \cos 30^\circ + \cos 90^\circ \sin 30^\circ$$

$$\sin 120^\circ = 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 0 \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 120^\circ = \cos(90^\circ + 30^\circ) = \cos 90^\circ \cos 30^\circ - \sin 90^\circ \sin 30^\circ$$

$$= 0 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$\tan \frac{5\pi}{12} = \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\tan \frac{\pi}{4} + \tan \frac{\pi}{6}}{1 - \tan \frac{\pi}{4} \cdot \tan \frac{\pi}{6}} = \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 - 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{3 + \sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}}$$

$$= \frac{3 + \sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}}$$

د دوو زاویو د تفاضل مثلثاتي نسبتونه:

$$\sin 120^\circ = \sin(180^\circ - 60^\circ) = ?$$

که د جمعې په فورمولونو کې د β پر ځای $-\beta$ وضع کړو، نو لرو چې:

$$\sin[\alpha + (-\beta)] = \sin \alpha \cos(-\beta) + \cos \alpha \sin(-\beta)$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha (-\sin \beta)$$

پوهېږو چې:

$$\cos(-\beta) = \cos \beta$$

$$\sin(-\beta) = -\sin \beta$$

$$\tan(-\beta) = -\tan \beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos[\alpha + (-\beta)] = \cos \alpha \cos(-\beta) - \sin \alpha \sin(-\beta)$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$\tan[(\alpha + (-\beta))] = \frac{\tan \alpha + \tan(-\beta)}{1 - \tan \alpha \cdot \tan(-\beta)}$$

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \cdot \tan \beta}$$

فعالیت

په همدې ډول وښیاست چې: $\cot(\alpha - \beta) = \frac{\cot \alpha \cdot \cot \beta + 1}{\cot \beta - \cot \alpha}$ دی.

لومړي مثال: $\cos \frac{\pi}{12}$ او $\sin 150^\circ$ پيدا کړئ.

حل:

$$\begin{aligned} \cos \frac{\pi}{12} &= \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) = \cos \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{6} + \sin \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{6} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin 150^\circ &= \sin(180^\circ - 30^\circ) = \sin 180^\circ \cos 30^\circ - \cos 180^\circ \sin 30^\circ \\ &= 0 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - (-1) \cdot \frac{1}{2} = -(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

دویم مثال: د تفاضل د فورمولونو په مرسته ښکاره کړئ چې $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin \theta$ دی.

حل:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos \frac{\pi}{2} \cos \theta + \sin \frac{\pi}{2} \sin \theta = 0 \cdot \cos \theta + 1 \cdot \sin \theta = \sin \theta$$

دریم مثال: وښیاست چې $\cos(270^\circ - \theta) = -\sin \theta$ دی.

حل:

$$\begin{aligned}\cos(270^\circ - \theta) &= \cos 270^\circ \cos \theta + \sin 270^\circ \sin \theta \\ \cos(270^\circ - \theta) &= 0 \cdot \cos \theta + (-1) \sin \theta = -\sin \theta\end{aligned}$$

خلورم مثال: $\tan 120^\circ$ پيدا ڪريئ:
حل:

$$\begin{aligned}\tan 120^\circ &= \tan(180^\circ - 60^\circ) = \frac{\tan 180^\circ - \tan 60^\circ}{1 + \tan 180^\circ \cdot \tan 60^\circ} = \frac{0 - \sqrt{3}}{1 + 0 \cdot \sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{1} \\ &= -\sqrt{3}\end{aligned}$$

فعاليت

وڻياست چڻي: $\sin 211^\circ \cos 59^\circ + \cos 211^\circ \sin 59^\circ = -1$ او
 $\cos 211^\circ \cos 149^\circ - \sin 211^\circ \sin 149^\circ = 1$

$$\begin{aligned}\sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \\ \sin(\alpha - \beta) &= \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta\end{aligned}$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

$$\begin{aligned}\cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \\ \cos(\alpha - \beta) &= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta\end{aligned}$$

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$$

پوښتنې

1- وښیاست چې:

$$\tan(45 - \theta) = \frac{1 - \tan \theta}{1 + \tan \theta}$$

2- وښیاست چې:

$$\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin \alpha \cos \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta) = 2 \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos 277^\circ \cos 97^\circ + \sin 277^\circ \sin 97^\circ = ? \quad -3$$

a) -1 b) 1 c) 0 d) $\frac{1}{2}$

4- د جمعې د فورمولونو په مرسته $\sin 240^\circ$ ، $\cos 240^\circ$ او $\tan 240^\circ$ پیدا کړئ.

5- د جمعې او تفاضل د فورمولونو په مرسته وښیاست چې:

$$\frac{1}{2} [\cos(x + y) + \cos(x - y)] = \cos x \cdot \cos y \text{ دى.}$$

6- د جمعې د فورمولونو په مرسته د 210° زاوېې مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

7- $\sin 105^\circ$ ، $\cos 105^\circ$ او $\tan 105^\circ$ پیدا کړئ ($105^\circ = 60^\circ + 45^\circ$)

8- که $\sin x = -\frac{3}{4}$ وي او $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$ وي، $\cos(\frac{\pi}{4} + x)$ پیدا کړئ.

9- وښیاست چې: $\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = -2 \sin \alpha \sin \beta$ دى.

$$\sin 2^\circ \cos 88^\circ + \cos 2^\circ \sin 88^\circ = ? \quad -10$$

a) -1 b) 1 c) 0 d) $\frac{1}{2}$

د 2α مثلثاتی نسبتونه د α له
جنسه:

$$\sin \frac{x}{3} \cos \frac{x}{3} + \cos \frac{x}{3} \sin \frac{x}{3} = ?$$

$$\cos^2 x - \sin^2 x = ?$$

آیا بنودلای شی چې:

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

دی؟

$$\sin 2\alpha = \sin(\alpha + \alpha) = \sin \alpha \cos \alpha + \cos \alpha \sin \alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos(\alpha + \alpha) = \cos \alpha \cos \alpha - \sin \alpha \sin \alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

خرنگه چې $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$ دی:

$$\cos 2\alpha = 1 - \sin^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

او همدارنگه $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$ دی، نو:

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - (1 - \cos^2 \alpha) = \cos^2 \alpha - 1 + \cos^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$$

$$\tan 2\alpha = \tan(\alpha + \alpha) = \frac{\tan \alpha + \tan \alpha}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \alpha} = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

لومړی مثال: که $\sin \theta = \frac{4}{5}$ او د θ دویمه ضلع په دویمه ناحیه (ربع) کې واقع وي $\sin 2\theta$ ،

$\cos 2\theta$ او $\tan 2\theta$ پیدا کړئ.

حل: $\cos \theta = -\sqrt{1 - \sin^2 \theta}$ (د θ دویمه ضلع په دویمه ربع کې ده).

$$\cos \theta = -\sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = -\sqrt{1 - \frac{16}{25}} = -\sqrt{\frac{25-16}{25}} = -\sqrt{\frac{9}{25}} = -\frac{3}{5}$$

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta = 2\left(\frac{4}{5}\right)\left(-\frac{3}{5}\right) = -\frac{24}{25}$$

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = \left(\frac{-3}{5}\right)^2 - \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{9}{25} - \frac{16}{25} = -\frac{7}{25}$$

$$\tan 2\theta = \frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta} = \frac{-\frac{24}{25}}{-\frac{7}{25}} = \frac{24}{7}$$

فعالیت

که $\cos \alpha = \frac{4}{5}$ ، وی او د α دویمه ضلع په لومړی ربع کې پرته وی، $\tan 2\alpha$ پیدا کړئ.

او که $\sin \beta = \frac{12}{13}$ او د β دویمه ضلع په دویمه ربع کې وی $\sin 2\beta$ پیدا کړئ.

دویم مثال: د 60° زاویې د مثلثاتي نسبتونو له جنسه د 120° زاویې مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

حل

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\sin 120^\circ = 2 \sin 60^\circ \cos 60^\circ = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\cos 120^\circ = \cos^2 60^\circ - \sin^2 60^\circ = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} \Rightarrow \tan 120^\circ = \frac{2 \tan 60^\circ}{1 - \tan^2 60^\circ} = \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{1 - 3} = -\sqrt{3}$$

په همدې ډول:

$$\sin \theta = 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}$$

$$\cos \theta = \cos^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2} = 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} - 1 = 1 - 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}, \quad \tan \theta = \frac{2 \tan \frac{\theta}{2}}{1 - \tan^2 \frac{\theta}{2}}$$

دریم مثال: که $90^\circ < \theta < 180^\circ$ او $\cos \theta = -\frac{3}{4}$ و یی، د $\cos 2\theta$ قیمت پیدا کړئ.
حل:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

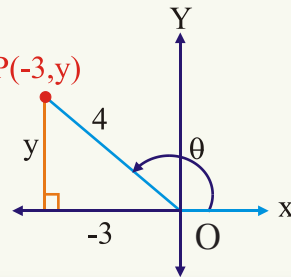
$$(-3)^2 + y^2 = 4^2$$

$$y = \pm \sqrt{4^2 - (-3)^2}$$

$y = \sqrt{7}$ (ځکه چې د y قیمت په دویمه ربع کې مثبت دی.) $P(-3, y)$

$$\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = \left(-\frac{3}{4}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right)^2 = \frac{1}{8}$$



فعالیت

که $90^\circ < \theta < 180^\circ$ او $\cos \theta = -\frac{1}{3}$ و یی، د $\sin \frac{\theta}{2}$ قیمت پیدا کړئ.

همدارنگه کولای شو چې د $\sin \theta$ ، $\cos \theta$ او $\tan \theta$ قیمتونه د $\tan \frac{\theta}{2}$ له جنسه پیدا کړو:

$$\sin \theta = \frac{2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}}{1} = \frac{2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}}{\sin^2 \frac{\theta}{2} + \cos^2 \frac{\theta}{2}}$$

پوهېږو چې:

$$\sin^2 \frac{\theta}{2} + \cos^2 \frac{\theta}{2} = 1$$

(صورت او مخرج پر $\cos^2 \frac{\theta}{2}$ وپشو:)

$$\sin \theta = \frac{\frac{2 \sin \frac{\theta}{2} \cdot \cos \frac{\theta}{2}}{\cos^2 \frac{\theta}{2}}}{\frac{\sin^2 \frac{\theta}{2} + \cos^2 \frac{\theta}{2}}{\cos^2 \frac{\theta}{2}}} = \frac{\frac{2 \sin \frac{\theta}{2}}{\cos \frac{\theta}{2}}}{\frac{\sin^2 \frac{\theta}{2}}{\cos^2 \frac{\theta}{2}} + 1} = \frac{2 \tan \frac{\theta}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\theta}{2}}$$

$$\cos \theta = \cos^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{\cos^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}}{1} = \frac{\cos^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}}{\sin^2 \frac{\theta}{2} + \cos^2 \frac{\theta}{2}}$$

$$\cos \theta = \frac{\frac{\cos^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}}{2}}{\frac{\sin^2 \frac{\theta}{2} + \cos^2 \frac{\theta}{2}}{2}} = \frac{\frac{\cos^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}}{2}}{\frac{\sin^2 \frac{\theta}{2}}{2} + \frac{\cos^2 \frac{\theta}{2}}{2}}$$

$$\cos \theta = \frac{1 - \tan^2 \frac{\theta}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\theta}{2}}, \quad \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\frac{2 \tan \frac{\theta}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\theta}{2}}}{\frac{1 - \tan^2 \frac{\theta}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\theta}{2}}} = \frac{2 \tan \frac{\theta}{2}}{1 - \tan^2 \frac{\theta}{2}}$$

همدارنگه کولای شو چې د θ زاوېې مثلثاتي نسبتونه د 2θ زاوېې د مثلثاتي نسبتونو له جنسه په لاس راوړو:

$$2 \cos^2 \theta - 1 = \cos 2\theta$$

$$2 \cos^2 \theta = 1 + \cos 2\theta$$

$$\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}$$

$$\cos \theta = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos 2\theta}{2}}$$

$$\text{يا} \quad \cos \frac{\theta}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{2}}$$

پہ ہمدی ڈول:

$$1 - 2 \sin^2 \theta = \cos 2\theta$$

$$-2 \sin^2 \theta = -1 + \cos 2\theta$$

$$\sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$$

$$\sin \theta = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos 2\theta}{2}} \quad \text{یا} \quad \sin \frac{\theta}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{2}}$$

پہ نتیجہ کی:

$$\tan \theta = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos 2\theta}{1 + \cos 2\theta}} \quad \text{یا} \quad \tan \frac{\theta}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}}$$

لومری مثال: د 30° زاویہ مثلثاتی نسبتونہ د 60° لہ جنسہ پہ لاس راویئ.

حل:

$$\sin 30^\circ = \sqrt{\frac{1 - \cos 60^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{1}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \sqrt{\frac{1 + \cos 60^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{1}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{3}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 30^\circ = \sqrt{\frac{1 - \cos 60^\circ}{1 + \cos 60^\circ}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

دویم مثال: کہ $180^\circ < \theta < 270^\circ$ او $\sin \theta = -\frac{2}{3}$ وی د $\cos \frac{\theta}{2}$ قیمت پیدا کریئ.

حل:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$x^2 + (-2)^2 = 3^2 \quad x = \pm \sqrt{3^2 - (-2)^2} = -\sqrt{5}$$

$$\cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{-\sqrt{5}}{3} \quad (\text{خکھه چي د } x \text{ قیمت په دویمه ربع کې منفي دی})$$

ڇرنگه ڇڻي $180^\circ < \theta < 270^\circ$ ده، نو $\frac{180^\circ}{2} < \frac{\theta}{2} < \frac{270^\circ}{2}$ يا $90^\circ < \theta < 135^\circ$ ده په
 دې معنا ڇڻي د $\cos \frac{\theta}{2}$ علامه منفي ده.

$$\cos \frac{\theta}{2} = -\sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{2}}$$

$$\cos \frac{\theta}{2} = -\sqrt{\frac{1 + (\frac{\sqrt{5}}{3})}{2}} = -\sqrt{\frac{1}{2}(1 + \frac{\sqrt{5}}{3})} = -\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{6}}$$

فعاليت

وښايست ڇڻي: $\cos \theta = 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} - 1$ او $\sin \theta = 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}$ دي.

درېم مثال: که $\cos \theta = \frac{4}{5}$ وي او د θ دويمه ضلع په لومړني ربع کې وي $\sin \frac{\theta}{2}$ ، $\cos \frac{\theta}{2}$ او $\tan \frac{\theta}{2}$ قيمتونه پيدا کړئ.

حل:

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sqrt{1 - (\frac{4}{5})^2} = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \frac{3}{5}$$

$$\sin \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{4}{5}}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{5}}{2}} = \sqrt{\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$\cos \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{4}{5}}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{9}{5}}{2}} = \sqrt{\frac{9}{5} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

$$\tan \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{4}{5}}{1 + \frac{4}{5}}} = \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}$$

خلورم مثال: ونبیاست چې $\frac{\sin 3\theta}{\sin \theta} - \frac{\cos 3\theta}{\cos \theta} = 2$ دی.
حل:

$$\begin{aligned}\frac{\sin 3\theta}{\sin \theta} - \frac{\cos 3\theta}{\cos \theta} &= \frac{\sin 3\theta \cos \theta - \cos 3\theta \sin \theta}{\sin \theta \cos \theta} = \frac{\sin(3\theta - \theta)}{\sin \theta \cos \theta} \\ &= \frac{\sin 2\theta}{\sin \theta \cos \theta} = \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{\sin \theta \cos \theta} = 2\end{aligned}$$

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta \quad , \quad \sin \theta = 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}$$

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = 2 \cos^2 \theta - 1 = 1 - 2 \sin^2 \theta$$

$$\cos \theta = \cos^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2} = 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} - 1 = 1 - 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

$$\tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}$$

$$\tan \theta = \frac{2 \tan \frac{\theta}{2}}{1 - \tan^2 \frac{\theta}{2}}$$

$$\sin \theta = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos 2\theta}{2}}$$

$$\cos \theta = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos 2\theta}{2}}$$

$$\tan \theta = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos 2\theta}{1 + \cos 2\theta}}$$

پوښتنې

1- د 120° زاوېې د مثلثاتي نسبتونو له مخې د 240° زاوېې مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

2 - که $\sin \theta = \frac{3}{5}$ وي او د θ دويمه ضلع په لومړنۍ ربع کې وي، $\sin 2\theta$ ، $\cos 2\theta$ او $\tan 2\theta$ پيدا کړئ.

3 - که $\sin \theta = \frac{4}{5}$ وي او د θ دويمه ضلع په دويمه ربع کې وي $\cos \theta / 2$ پيدا کړئ.

4 - $\sin \frac{\pi}{12}$ د $\sin \frac{\pi}{6}$ له جنسه پيدا کړئ.

5 - که $\sin \theta = \frac{12}{13}$ وي او د θ دويمه ضلع په دويمه ربع کې وي، $\sin \theta / 2$ او $\tan \theta / 2$ پيدا کړئ.

6 - د 15° زاوېې مثلثاتي نسبتونه د 30° زاوېې له جنسه پيدا کړئ.

7 - که $\sin \beta = \frac{12}{13}$ وي او د β دويمه ضلع په دويمه ربع کې وي، د $\sin 2\beta$ قيمت مساوی دی په:

a) $\frac{120}{169}$ b) $-\frac{120}{169}$ c) $-\frac{169}{120}$ d) درې واړه سم نه دي

8 - $\frac{\cos 3\beta}{\cos \beta} - \frac{\sin 3\beta}{\sin \beta} = ?$

a) 2 b) 1 c) -2 d) -1

د 3α زاويي مثلثاتي نسبتونه د α زاويي د مثلثاتي نسبتونو له جنسه:

$$4 \cos^3 45^\circ - 3 \cos 45^\circ = ?$$

آيا بنودلای شئ چې دا رابطه

$$\cos 90^\circ = 4 \cos^3 30^\circ - 3 \cos 30^\circ$$

سمه ده؟

خرنگه چې:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\sin 3\alpha = \sin(2\alpha + \alpha) = \sin 2\alpha \cos \alpha + \cos 2\alpha \sin \alpha$$

$$\sin 3\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha \cdot \cos \alpha + (1 - 2 \sin^2 \alpha) \sin \alpha$$

$$= 2 \sin \alpha \cos^2 \alpha + \sin \alpha - 2 \sin^3 \alpha \quad (\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha)$$

$$= 2 \sin \alpha (1 - \sin^2 \alpha) + \sin \alpha - 2 \sin^3 \alpha \quad (\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha)$$

$$= 2 \sin \alpha - 2 \sin^3 \alpha + \sin \alpha - 2 \sin^3 \alpha$$

$$\boxed{\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha}$$

لومړي مثال: د $\sin 180^\circ$ د $\sin 60^\circ$ له جنسه په لاس راوړئ.
حل:

$$\sin 180^\circ = 3 \sin 60^\circ - 4 \sin^3 60^\circ = 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 4 \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{12\sqrt{3}}{8}$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{0}{2} = 0$$

خرنگه چې:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos 3\alpha = \cos(2\alpha + \alpha) = \cos 2\alpha \cos \alpha - \sin 2\alpha \sin \alpha$$

$$= (2 \cos^2 \alpha - 1) \cos \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha \sin \alpha$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \cos^3 \alpha - \cos \alpha - 2 \sin^2 \alpha \cos \alpha \\
&= 2 \cos^3 \alpha - \cos \alpha - 2 \cos \alpha (1 - \cos^2 \alpha) \quad (\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha) \\
&= 2 \cos^3 \alpha - \cos \alpha - 2 \cos \alpha + 2 \cos^3 \alpha
\end{aligned}$$

$$\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$$

فعالیت

$\cos 270^\circ$ د $\cos 90^\circ$ له جنسہ پیدا کریں۔

دویم مثال: $\cos 180^\circ$ د $\cos 60^\circ$ له جنسہ پیدا کریں۔

حل:

$$\cos 180^\circ = 4 \cos^3 60^\circ - 3 \cos 60^\circ = 4 \left(\frac{1}{2}\right)^3 - 3 \cdot \frac{1}{2} = 4 \cdot \frac{1}{8} - \frac{3}{2} = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -1$$

د $\tan 3\alpha$ پیدا کول:

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

$$\tan 3\alpha = \tan(2\alpha + \alpha) = \frac{\tan 2\alpha + \tan \alpha}{1 - \tan 2\alpha \cdot \tan \alpha} = \frac{\frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} + \tan \alpha}{1 - \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} \cdot \tan \alpha}$$

$$= \frac{\frac{2 \tan \alpha + \tan \alpha - \tan^3 \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{2 \tan \alpha + \tan \alpha - \tan^3 \alpha}{1 - \tan^2 \alpha - 2 \tan^2 \alpha} = \frac{3 \tan \alpha - \tan^3 \alpha}{1 - 3 \tan^2 \alpha}$$

دریم مثال: $\tan 135^\circ$ د $\tan 45^\circ$ له جنسہ پہ لاس راوړئ۔

حل:

$$\tan 135^\circ = \frac{3 \tan 45^\circ - \tan^3 45^\circ}{1 - 3 \tan^2 45^\circ} = \frac{3 \cdot 1 - 1}{1 - 3 \cdot 1} = \frac{2}{-2} = -1$$

خلورم مثال: ونياسٽ چي $4 \sin \theta \sin(60^\circ - \theta) \sin(60^\circ + \theta) = \sin 3\theta$
حل:

$$\begin{aligned} & 4 \sin \theta (\sin 60^\circ \cos \theta - \cos 60^\circ \sin \theta) (\sin 60^\circ \cos \theta + \cos 60^\circ \sin \theta) \\ &= 4 \sin \theta \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta - \frac{1}{2} \sin \theta \right) \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta + \frac{1}{2} \sin \theta \right) \\ &= 4 \sin \theta \left(\frac{3}{4} \cos^2 \theta - \frac{1}{4} \sin^2 \theta \right) = \sin \theta (3 \cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \\ & \sin \theta [3(1 - \sin^2 \theta) - \sin^2 \theta] = \sin \theta \cdot 3 - 3 \sin^3 \theta - \sin^3 \theta \\ &= 3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta = \sin 3\theta \end{aligned}$$

د $(\alpha + \beta + \square)$ **مثلاثي نسبتونه:**

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta + \square) &= \sin[\alpha + (\beta + \square)] = \sin \alpha \cos(\beta + \square) + \cos \alpha \sin(\beta + \square) \\ &= \sin \alpha (\cos \beta \cos \square - \sin \beta \sin \square) + \cos \alpha (\sin \beta \cos \square + \cos \beta \sin \square) \\ &= \sin \alpha \cos \beta \cos \square - \sin \alpha \sin \beta \sin \square + \sin \beta \cos \alpha \cos \square + \sin \square \cos \alpha \cos \beta \\ \cos[\alpha + (\beta + \square)] &= \cos \alpha \cos(\beta + \square) - \sin \alpha \sin(\beta + \square) \\ &= \cos \alpha (\cos \beta \cos \square - \sin \beta \sin \square) - \sin \alpha (\sin \beta \cos \square + \cos \beta \sin \square) \\ &= \cos \alpha \cos \beta \cos \square - \cos \alpha \sin \beta \sin \square - \cos \square \sin \alpha \sin \beta - \cos \beta \sin \alpha \sin \square \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tan(\alpha + \beta + \square) &= \tan[\alpha + (\beta + \square)] = \frac{\tan \alpha + \tan(\beta + \square)}{1 - \tan \alpha \cdot \tan(\beta + \square)} \\ \tan(\alpha + \beta + \square) &= \frac{\tan \alpha + \frac{\tan \beta + \tan \square}{1 - \tan \beta \tan \square}}{1 - \tan \alpha \frac{\tan \beta + \tan \square}{1 - \tan \beta \cdot \tan \square}} \\ &= \frac{\tan \alpha - \tan \alpha \tan \beta \tan \square + \tan \beta + \tan \square}{1 - \tan \beta \tan \square} \\ &= \frac{1 - \tan \beta \tan \square - \tan \alpha \tan \beta - \tan \alpha \cdot \tan \square}{1 - \tan \beta \cdot \tan \square} \end{aligned}$$

$$\frac{\tan \alpha + \tan \beta + \tan \gamma + \tan \alpha \cdot \tan \beta \cdot \tan \gamma}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta - \tan \beta \tan \gamma - \tan \alpha \tan \gamma}$$

پنجم مثال: $\sin 135^\circ$ د $\sin(30^\circ + 45^\circ + 60^\circ)$ له جنسه په لاس راوړئ.
حل

$$\begin{aligned} \sin 135^\circ &= \sin(30^\circ + 45^\circ + 60^\circ) = \sin 30^\circ \cos 45^\circ \cos 60^\circ \\ &\quad - \sin 30^\circ \sin 45^\circ \sin 60^\circ + \sin 45^\circ \cos 30^\circ \cos 60^\circ + \sin 60^\circ \cos 30^\circ \cos 45^\circ \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{8} - \frac{\sqrt{6}}{8} + \frac{\sqrt{6}}{8} + \frac{3\sqrt{2}}{8} = \frac{\sqrt{2}}{8} + \frac{3\sqrt{2}}{8} = \frac{4\sqrt{2}}{8} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

پوښتنې

1- $\sin 90^\circ$ ، $\cos 90^\circ$ او $\tan 90^\circ$ په ترتيب سره د $\sin 30^\circ$ ، $\cos 30^\circ$ او $\tan 30^\circ$ له جنسه پيدا كړئ.

2- $\cos 135^\circ$ او $\tan 135^\circ$ پيدا كړئ. $135^\circ = (30^\circ + 45^\circ + 60^\circ)$

3- $8 \cos^3 \theta - 6 \cos \theta = ?$

a) $\cos 3\theta$ b) $2 \cos 3\theta$ c) $-2 \cos 3\theta$

4- $\cos(\hat{A} - \hat{B} + \hat{C})$ د \hat{A} ، \hat{B} او \hat{C} زاويو د مثلثاتي نسبتونو له جنسه پيدا كړئ.

5- وښايست چې:

$$4 \cos x \cos(60^\circ - x) \cos(60^\circ + x) = \cos 3x$$

$$\tan x \tan(60^\circ - x) \tan(60^\circ + x) = \tan 3x$$

د زاویو د مثلثاتی نسبتونو د مجموعي او تفاضل بدلول د ضرب د حاصل په شکل

$$\sin 30^\circ + \sin 60^\circ = ?$$

$$\tan 45^\circ + \tan 60^\circ = ?$$

آیا د $\sin 30^\circ + \sin 60^\circ$ قیمت پیدا کولای شئ؟

څرنګه چې پوهېږو:

$$\sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B \dots (I)$$

$$\sin(A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B \dots (II)$$

که $A + B = P$ او $A - B = q$ فرض کړو او (I) او (II) رابطې سره جمع کړو، نولرو چې:

$$\sin(A + B) + \sin(A - B) = 2 \sin A \cos B$$

$$A + B = p$$

$$\underline{- A - B = -q}$$

$$2B = P - q$$

$$B = \frac{P - q}{2}$$

$$A + B = p$$

$$\underline{A - B = q}$$

$$2A = P + q$$

$$A = \frac{P + q}{2}$$

$$\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$$

په نتیجه کې لرو چې:

که له I رابطې څخه II رابطه تفریق کړو، نولرو چې:

$$\sin(A + B) - \sin(A - B) = 2 \cos A \sin B$$

$$\sin p - \sin q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$$

په همدې ډول:

$$\cos(A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B \dots \text{III}$$

$$\cos(A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B \dots \text{IV}$$

که III رابطه د IV سره جمع کړو، لرو چې:

$$\cos(A + B) + \cos(A - B) = 2 \cos A \cos B$$

$$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$$

که له III رابطې څخه IV رابطه تفریق کړو، نو:

$$\cos(A + B) - \cos(A - B) = -2 \sin A \sin B$$

$$\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$$

فعالیت

د $\sin 60^\circ + \sin 30^\circ$ او $\cos 60^\circ + \cos 30^\circ$ قیمتونه پیدا کړئ.

$$\tan p + \tan q = \frac{\sin p}{\cos p} + \frac{\sin q}{\cos q} = \frac{\sin p \cos q + \cos p \sin q}{\cos p \cos q} = \frac{\sin(p+q)}{\cos p \cos q}$$

$$\tan p - \tan q = \frac{\sin p}{\cos p} - \frac{\sin q}{\cos q} = \frac{\sin p \cos q - \cos p \sin q}{\cos p \cos q} = \frac{\sin(p-q)}{\cos p \cos q}$$

$$\frac{\sin 7\theta + \sin 3\theta}{\cos 7\theta + \cos 3\theta} = \tan 5\theta \quad \text{لومړی مثال (a): وښیاست چې:}$$

$$\frac{\sin 7\theta + \sin 3\theta}{\cos 7\theta + \cos 3\theta} = \frac{2 \sin \frac{7\theta+3\theta}{2} \cos \frac{7\theta-3\theta}{2}}{2 \cos \frac{7\theta+3\theta}{2} \cos \frac{7\theta-3\theta}{2}} = \frac{\sin 5\theta \cos 2\theta}{\cos 5\theta \cos 2\theta} = \tan 5\theta$$

b: وښايست چې $\sin 3x + \sin x = 2 \cdot \sin 2x \cdot \cos x$ دی:

$$\sin 3x + \sin x = 2 \sin \frac{3x+x}{2} \cos \frac{3x-x}{2} = 2 \cdot \sin 2x \cdot \cos x$$

حل:

فعاليت

وښايست چې $\cot p - \cot q = \frac{\sin(q-p)}{\sin p \sin q}$ او $\cot p + \cot q = \frac{\sin(p+q)}{\sin p \sin q}$

دويم مثال: وښايست چې: $\frac{\cos 2\theta - \cos 2\beta}{\sin 2\theta + \sin 2\beta} = \tan(\beta - \theta)$ او

$$\cos 4\theta - \cos 2\theta = -2 \sin 3\theta \sin \theta$$

حل:

$$\frac{\cos 2\theta - \cos 2\beta}{\sin 2\theta + \sin 2\beta} = \frac{-2 \sin \frac{2\theta+2\beta}{2} \sin \frac{2\theta-2\beta}{2}}{2 \sin \frac{2\theta+2\beta}{2} \cos \frac{2\theta-2\beta}{2}} = \frac{-2 \sin(\theta+\beta) \sin(\theta-\beta)}{2 \sin(\theta+\beta) \cos(\theta-\beta)}$$

$$= -\frac{\sin(\theta-\beta)}{\cos(\theta-\beta)} = -\tan(\theta-\beta) = \tan(\beta-\theta)$$

$$\cos 4\theta - \cos 2\theta = -2 \sin \frac{4\theta+2\theta}{2} \sin \frac{4\theta-2\theta}{2} = -2 \sin 3\theta \sin \theta$$

د زاويو د مثلثاتي نسبتونو د ضرب د حاصل بدلول په جمع او يا تفاضل باندې:

$$\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$$

$$\begin{aligned} A+B &= P \\ A-B &= q \end{aligned}$$

خرنگه چې:

$$\sin(A+B) + \sin(A-B) = 2 \sin A \cos B$$

يا

$$2 \sin A \cos B = \sin(A+B) + \sin(A-B)$$

$$\sin A \cos B = \frac{1}{2} [\sin(A+B) + \sin(A-B)]$$

خرنگه چې: $\sin(A+B) - \sin(A-B) = 2 \cos A \sin B$ دی.

$$2 \cos A \sin B = \sin(A + B) - \sin(A - B) \quad \text{نو:}$$

$$\cos A \sin B = \frac{1}{2} [\sin(A + B) - \sin(A - B)]$$

$$\begin{aligned} \cos(A + B) + \cos(A - B) &= 2 \cos A \cos B && \text{خرنگه چي:} \\ 2 \cos A \cos B &= \cos(A + B) + \cos(A - B) && \text{نو:} \end{aligned}$$

$$\cos A \cos B = \frac{1}{2} [\cos(A + B) + \cos(A - B)]$$

$$\begin{aligned} \cos(A + B) - \cos(A - B) &= -2 \sin A \sin B && \text{خرنگه چي:} \\ -2 \sin A \sin B &= \cos(A + B) - \cos(A - B) && \text{نو:} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin A \sin B &= -\frac{1}{2} [\cos(A + B) - \cos(A - B)] \\ &= \frac{1}{2} [\cos(A - B) - \cos(A + B)] \end{aligned}$$

لومړی مثال: وښايست چې:

$$\text{a: } \frac{\sin 8x + \sin 5x + \sin 2x}{\cos 8x + \cos 5x + \cos 2x} = \tan 5x$$

$$\text{b: } \cos 75^\circ - \cos 15^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

د a حل:

$$\begin{aligned} &= \frac{2 \sin \frac{8x + 2x}{2} \cos \frac{8x - 2x}{2} + \sin 5x}{2 \cos \frac{8x + 2x}{2} \cos \frac{8x - 2x}{2} + \cos 5x} \\ &= \frac{2 \sin 5x \cos 3x + \sin 5x}{2 \cos 5x \cos 3x + \cos 5x} = \frac{\sin 5x(2 \cos 3x + 1)}{\cos 5x(2 \cos 3x + 1)} = \tan 5x \end{aligned}$$

د b حل:

$$\begin{aligned}\cos 75^\circ - \cos 15^\circ &= -2 \cdot \sin \frac{75^\circ + 15^\circ}{2} \sin \frac{75^\circ - 15^\circ}{2} = -2 \sin 45^\circ \sin 30^\circ \\ &= -2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

دویم مثال: د جمعې یا تفاضل شکل ته یې واروئ.

$$2 \cos 95^\circ \sin 13^\circ = \sin(95^\circ + 13^\circ) - \sin(95^\circ - 13^\circ) = \sin 108^\circ - \sin 82^\circ$$

$$\begin{aligned}\cos 38^\circ \cos 61^\circ &= \frac{1}{2} [\cos(38^\circ + 61^\circ) + \cos(38^\circ - 61^\circ)] \\ &= \frac{1}{2} [\cos 99^\circ + \cos(-23^\circ)] = \frac{1}{2} [\cos 99^\circ + \cos 23^\circ]\end{aligned}$$

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} \left[\cos 2x + \cos \frac{\pi}{2}\right] = \frac{1}{2} \cos 2x$$

دریم مثال:

$$\cos 34^\circ \sin 28^\circ = \frac{1}{2} [\sin(34^\circ + 28^\circ) - \sin(34^\circ - 28^\circ)] = \frac{1}{2} (\sin 62^\circ - \sin 6^\circ)$$

$$\begin{aligned}2 \cos 45^\circ \cos 15^\circ &= \cos(45^\circ + 15^\circ) + \cos(45^\circ - 15^\circ) = \cos 60^\circ + \cos 30^\circ \\ &= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

$$\sin 10\theta \cos 4\theta = \frac{1}{2} [\sin(10\theta + 4\theta) + \sin(10\theta - 4\theta)] = \frac{1}{2} (\sin 14\theta + \sin 6\theta)$$

څلورم مثال: وښیاست چې: $\frac{1}{2} [\cos(x + y) + \cos(x - y)] = \cos x \cos y$ **حل:**

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} [\cos(x + y) + \cos(x - y)] &= \frac{1}{2} [(\cos x \cos y - \sin x \sin y) \\ &+ (\cos x \cos y + \sin x \sin y)] = \frac{1}{2} [(\cos x \cos y + \cos x \cos y)] \\ &= \frac{1}{2} (2 \cos x \cos y) = \cos x \cos y\end{aligned}$$

$$\frac{\sin 8\theta \cos \theta - \sin 6\theta \cos 3\theta}{\cos 2\theta \cos \theta - \sin 3\theta \sin 4\theta} = \tan 2\theta \quad \text{پنجم مثال: وشیاست چہی}$$

حل:

$$\begin{aligned} \frac{\sin 8\theta \cos \theta - \sin 6\theta \cos 3\theta}{\cos 2\theta \cos \theta - \sin 3\theta \sin 4\theta} &= \frac{\frac{1}{2}(\sin 9\theta + \sin 7\theta) - \frac{1}{2}(\sin 9\theta + \sin 3\theta)}{\frac{1}{2}(\cos 3\theta + \cos \theta) + \frac{1}{2}(\cos 7\theta - \cos \theta)} \\ &= \frac{\sin 7\theta - \sin 3\theta}{\cos 3\theta + \cos 7\theta} = \frac{2 \cos 5\theta \sin 2\theta}{2 \cos 5\theta \cos(-2\theta)} = \frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta} = \tan 2\theta \end{aligned}$$

$$\sin A + \sin B = 2 \cdot \sin \frac{A+B}{2} \cdot \cos \frac{A-B}{2}$$

$$\sin A - \sin B = 2 \cdot \cos \frac{A+B}{2} \cdot \sin \frac{A-B}{2}$$

$$\cos A + \cos B = 2 \cdot \cos \frac{A+B}{2} \cdot \cos \frac{A-B}{2}$$

$$\cos A - \cos B = -2 \cdot \sin \frac{A+B}{2} \cdot \sin \frac{A-B}{2}$$

$$\tan A + \tan B = \frac{\sin(A+B)}{\cos A \cos B} \quad \tan A - \tan B = \frac{\sin(A-B)}{\cos A \cos B}$$

$$\sin A \cos B = \frac{1}{2}[\sin(A+B) + \sin(A-B)]$$

$$\cos A \sin B = \frac{1}{2}[\sin(A+B) - \sin(A-B)]$$

$$\cos A \cos B = \frac{1}{2}[\cos(A+B) + \cos(A-B)]$$

$$\sin A \sin B = -\frac{1}{2}[\cos(A+B) - \cos(A-B)] = \frac{1}{2}[\cos(A-B) - \cos(A+B)]$$

پوښتنې

1- وښیاست چې:

$$\frac{\cos 37^\circ + \sin 37^\circ}{\cos 37^\circ - \sin 37^\circ} = \cot 8^\circ$$

2- د زاویو د مثلثاتي نسبتونو د ضرب حاصل د جمعې یا تفاضل شکل ته واړوئ.

$$\sin 5x \cos 8x$$

$$\sin 3\theta \cos 5\theta$$

$$\cos 30^\circ \cos 60^\circ$$

$$\sin 32^\circ \cdot \cos 24^\circ$$

$$\cos 5x \sin 8x$$

$$\cos 7\theta \sin 5\theta$$

$$\sin 88^\circ \sin 12^\circ$$

$$2 \sin 60^\circ \cdot \sin 20^\circ$$

$$2 \cos 8\theta \cdot \sin 4\theta$$

$$2 \cos 75\alpha \cdot \sin 25\alpha$$

$$\sin \frac{A+B}{2} \cdot \cos \frac{A-B}{2}$$

3- د زاویو د مثلثاتي نسبتونو د جمعې او تفریق حاصل، ضرب ته واړوئ.

$$\cos 56^\circ + \cos 22^\circ$$

$$\sin 84^\circ - \sin 76^\circ$$

$$\sin 94^\circ - \sin 86^\circ$$

$$\cos 86^\circ + \cos 22^\circ$$

$$\cos 84^\circ - \cos 76^\circ$$

$$\sin 8\theta + \sin 4\theta$$

$$\cos 95^\circ - \cos 41^\circ$$

$$\sin \frac{P+Q}{2} - \sin \frac{P-Q}{2}$$

$$\sin \frac{5x}{3} - \sin \frac{5x}{6}$$

$$\cos \frac{3A}{4} + \cos \frac{4A}{3}$$

$$\cos 84^\circ + \cos 76^\circ$$

$$\cos \frac{A+B}{2} + \cos \frac{A-B}{2}$$

4- وښیاست چې:

$$\frac{\sin 4A - \sin 2A}{\cos 4A + \cos 2A} = \tan A$$

$$\frac{\cos \beta + \cos 9\beta}{\sin \beta + \sin 9\beta} = \cot 5\beta$$

$$\sin 10^\circ \cdot \sin 30^\circ \cdot \sin 50^\circ \cdot \sin 70^\circ = \frac{1}{16}$$

$$\cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 60^\circ \cdot \cos 80^\circ = \frac{1}{16}$$

5- که $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$ وي، (د یو مثلث د داخلي زاویو مجموعه) وښیاست چې:

$$\sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$$

$$\sin 10^\circ + \sin 50^\circ - \sin 70^\circ = 0$$

6- وبنیاست چڼي:

$$\sin 30^\circ \cos 60^\circ + \cos 30^\circ \sin 60^\circ = ?$$

-7

- a) -1 b) 1 c) 0 d) $\frac{1}{2}$

8- د جمعې يا تفاضل د فورمولونو په واسطه وبنیاست چڼي:

$$\sin(180^\circ + \theta) = -\sin \theta$$

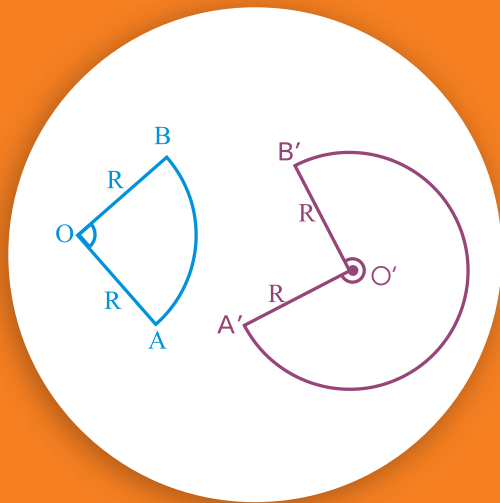
$$\cos(180^\circ + \theta) = -\cos \theta$$

$$\sin(360^\circ - \theta) = -\sin \theta$$

$$\sin(270^\circ + \theta) = -\cos \theta$$

$$\cos(270^\circ + \theta) = \sin \theta$$

$$\cos(360^\circ - \theta) = \cos \theta$$



د قوس اوږدوالی (Arc length)

که د یوې دایرې شعاع 5cm وي، د دې دایرې د 45° مرکزي زاوېې د مقابل قوس اوږدوالی به شو cm وي؟

که د دوو قوسونو شعاع گانې سره مساوي وي، د دې دوو قوسونو اوږدوالی د راډیان په حساب د قوس له مقدار سره متناسب دی، لکه: څنگه چې په شکل کې لیدل کېږي.

$$\frac{\widehat{AB}}{m\widehat{AB}} = \frac{\widehat{A'B'}}{m\widehat{A'B'}}$$

چې \widehat{AB} او $\widehat{A'B'}$ د دې دواړو قوسونو مقدار د راډیان په حساب دي. که د قوس مقدار دوه چنده شي، د قوس اوږدوالی هم دوه چنده کېږي. که د یو قوس مقدار θ° او شعاع یې R وي، د θ° د زاوېې د مقابل اوږدوالی L او د دایرې محیط C وي، نو لرو چې:

$$\frac{L}{\theta^\circ} = \frac{C}{360^\circ}$$

څرنګه چې د دایرې محیط $C = 2\pi R$ دی، نو:

$$\frac{L}{\theta^\circ} = \frac{2\pi R}{360^\circ} \Rightarrow L = \frac{\theta^\circ}{180^\circ} \pi R$$

باید پام مو وي، که د قوس یا θ مقدار د راډیان په حساب وي، نو $L = R\theta$ کېږي.

لومړی مثال: د 45° مرکزي زاوېې د مقابل قوس اوږدوالی پیدا کړئ، که د دایرې شعاع 14cm وي.

حل:

$$L = \frac{45^\circ}{180^\circ} \cdot \pi \cdot 14 \text{ cm} = \frac{14}{4} \pi \text{ cm} \approx \frac{14}{4} \cdot \frac{22}{7} \text{ cm} = 11 \text{ cm}$$

دویم مثال: د $\frac{\pi}{4}$ مرکزی زاوې د مقابل قوس اوږدوالی پیدا کړئ، که د دایرې شعاع 14cm وي.

$$L = R \theta$$

$$L = 14 \text{ cm} \cdot \frac{\pi}{4} \approx 14 \text{ cm} \cdot \frac{22}{7} \cdot \frac{1}{4} = 11 \text{ cm}$$

دریم مثال: که په یوه دایره کې، د 45° مرکزی زاوې د مقابل قوس اوږدوالی $3\pi \text{ cm}$ وي، د دې دایرې شعاع پیدا کړئ.

حل: څرنګه چې: $45^\circ = \frac{\pi}{4}$ radian، نو:

$$L = R \theta$$

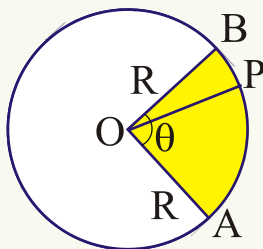
$$R = \frac{L}{\theta} = \frac{3\pi \text{ cm}}{\frac{\pi}{4}} = 3\pi \cdot \frac{4}{\pi} = 12 \text{ cm}$$

دیوې دایرې قطاع (Sector of a circle): دیوې دایرې د \widehat{AB} قوس چې د دایرې مرکز O او شعاع پې R ده، په پام کې نیسو، د \overline{OP} د ټولو خطونو مجموعې ته چې P د AB د قوس یوه نقطه ده، قطاع ویل کېږي.

که د \widehat{AB} قوس اندازه θ رادېان وي، ته د قطاع زاویه وايي.

یا قطاع په دې ډول هم تعریفولای شو:

دیوې دایرې د سطحې هغه برخه چې د دایرې د دوو شعاع ګانو تر منځ واقع وي، قطاع بلل کېږي.



د قطاع د مساحت پيدا كول: که د دایرې شعاع R وي، د دې دایرې د θ رادیان د قطاع

مساحت مساوي دی په: $S = \frac{1}{2} R^2 \theta$ چې S د قطاع مساحت او R د دایرې شعاع ده، ځکه چې:

$$\left. \begin{array}{l} 2\pi R^2 \\ \theta R^2 \end{array} \right\} \Rightarrow S = \frac{\pi R^2 \cdot \theta}{2\pi} = \frac{1}{2} R^2 \theta$$

او یاکه د θ زاویه د درجې په حساب وي.

$$\left. \begin{array}{l} 360^\circ \\ \theta^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow S = \pi R^2 \frac{\theta}{360^\circ}$$

لومړی مثال: که د یوې دایرې شعاع 10cm وي، د دایرې د هغه قطاع مساحت پيدا کړئ چې د قطاع زاویه یې $\theta = 90^\circ$ وي.

حل: څرنګه چې $90^\circ = \frac{\pi}{2}$ Radian دی:

$$S = \frac{1}{2} R^2 \theta$$

$$S = \frac{1}{2} (10\text{cm})^2 \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2} \cdot 100\text{cm}^2 \cdot \frac{\pi}{2} = 25\pi\text{cm}^2$$

دویم مثال: که د یوې دایرې شعاع 10cm وي، د دایرې د هغه قطاع مساحت پيدا کړئ چې د قطاع زاویه یې $\theta = 72^\circ$ وي.

$$72^\circ = 72 \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{2\pi}{5} \text{ Radian}$$

$$S = \frac{1}{2} R^2 \theta = \frac{1}{2} \cdot 100\text{cm}^2 \cdot \frac{2\pi}{5} = 20\pi\text{cm}^2$$

دریم مثال: که د دایرې شعاع 6cm او د دې دایرې د یوې قطاع مساحت $15\pi\text{cm}^2$ وي. د قطاع د قوس اوږدوالی پيدا کړئ.

حل:

$$S = \frac{1}{2} R^2 \theta \quad \text{یا} \quad 15\pi\text{cm}^2 = \frac{1}{2} (6\text{cm})^2 \theta$$

$$15\pi\text{cm}^2 = 18\theta$$

$$\theta = \frac{15\pi}{18} = \frac{5\pi}{6} \text{ Radian}$$

$$\text{طول قوس } L = R\theta = 6\text{cm} \cdot \frac{5\pi}{6} = 5\pi\text{cm} = 5 \cdot 3,14\text{cm} \approx 15,7\text{cm}$$

څلورم مثال: يوه دايره چې شعاع لري، ددې دايرې محيط، مساحت او د 60° مرکزي زاويې د مقابل قوس اوږدوالی يې پيدا کړئ او هم ددې دايرې د قطاع مساحت پيدا کړئ چې $\theta = 60^\circ$ وي.

حل: څرنګه چې $60^\circ = \frac{\pi}{3}$ Radian دی، نو:

$$C = 2\pi R \approx 2 \cdot \frac{22}{7} \cdot 7\text{cm} = 44\text{cm}, \quad A = \pi R^2 \approx \frac{22}{7} \cdot 49\text{cm}^2 = 154\text{cm}^2$$

$$L = R\theta = 7 \cdot \frac{\pi}{3} = \frac{7\pi}{3}\text{cm}, \quad A = \frac{1}{2}R^2\theta = \frac{1}{2} \cdot 49\text{cm}^2 \cdot \frac{\pi}{3} \approx 25,6\text{cm}^2$$

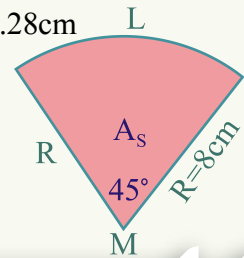
پنځم مثال: که د يوې دايرې شعاع 8cm او د قطاع زاويه يې 45° وي، د قطاع مساحت، د قطاع د مقابل قوس اوږدوالی او ددې قطاع محيط پيدا کړئ.

حل:

$$A_s = \pi R^2 \frac{\theta}{360^\circ} = (8\text{cm})^2 (3,14) \cdot \frac{45^\circ}{360^\circ} \approx 25,12\text{cm}$$

$$L = 2\pi R \frac{\theta}{360^\circ} = 2 \cdot 8\text{cm} \cdot 3,14 \cdot \frac{45^\circ}{360^\circ} \approx 6,28\text{cm}$$

$$d = 2\pi R \frac{\theta}{360^\circ} + 2R = 6,28\text{cm} + 2 \cdot 8\text{cm} \approx 22,28\text{cm}$$



فعاليت

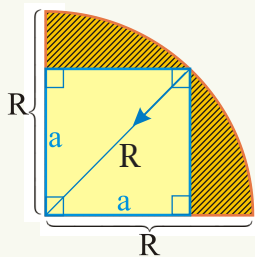
که د دايرې شعاع 10cm وي، د هغه قطاع ګانو مساحت پيدا کړئ چې د قوس اندازه يې 180° ، 216° او 324° وي.

شپږم مثال: د لاندې شکل په شان په 90° قطاع کې د R په شعاع مربع محاط شوي ده، د خط شوي برخې مساحت پیدا کړئ.

حل: څرنګه چې د دایرې شعاع R ده، د دایرې په څلورمه برخه کې د مربع قطر $d = R = a\sqrt{2}$

دی، که a د مربع ضلع وي، نو د مربع یوه ضلع $a = \frac{R}{\sqrt{2}}$ او د مربع مساحت $S = \frac{R^2}{2}$

دی، څرنګه چې د دایرې د څلورمې برخې مساحت $\frac{1}{4}\pi R^2$ دی.

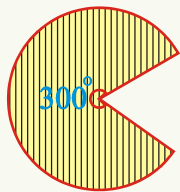


نود خط شوی برخې مساحت مساوي دی په: $\frac{1}{4}\pi R^2 - \frac{1}{2}R^2 = \frac{R^2}{4}(\pi - 2)$

اووم مثال: په شکل کې د دایرې قطاع چې شعاع یې 1cm او مرکزي زاویه یې 300° ده. د دې شکل محیط څو سانتي متره کېږي؟

$$360^\circ \quad 2\pi R$$

$$300^\circ \quad x \quad x = \frac{300^\circ \cdot 2\pi R}{360^\circ} = \frac{5\pi R}{3} \text{ cm}$$



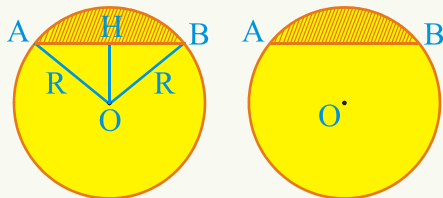
$$= \left(\frac{5}{3}\pi R + 2\right) \text{ cm}$$

د دایرې قطعه (Segment of a circle): د دایرې د سطحې یوې برخې ته چې د قوس

او مقابل وتر تر منځ واقع وي، قطعه وایي.

د دایرې قطعه د قطعې د قوس په حساب

بنودل کېږي. د مثال په ډول که د AB



قوس $\frac{\pi}{6}$ رادیان وي، قطعې ته هم $\frac{\pi}{6}$

راډيان وايي.

د قطعي مساحت: د θ راډيان د قطعي مساحت چې د دایرې شعاع R وي، مساوي دی، په:

$$S = \frac{1}{2} R^2 (\theta - \sin \theta)$$

ځکه که د AB قوس θ راډيان وي او د O نقطه د A او B له نقطو سره ونښلوي، نو لرو چې: د AOB د مثلث مساحت - د AOB د قطاع مساحت = د قطعي مساحت

$$S_{\triangle AOB} \text{ د مثلث مساحت} - S_{OAB} \text{ د قطاع مساحت} = S \text{ د قطعي مساحت}$$

په لاندې شکل کې لیدل کېږي چې د $\triangle AOB$ مثلث متساوي الساقين دی، نو په دې اساس:

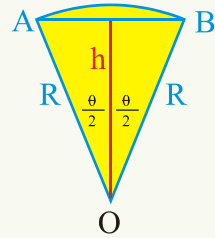
$$\cos \frac{\theta}{2} = \frac{h}{R}$$

$$h = R \cos \frac{\theta}{2} \text{ ارتفاع}$$

$$\sin \frac{\theta}{2} = \frac{AB}{2R}$$

$$AB = 2R \sin \frac{\theta}{2} \text{ د مثلث قاعده:}$$

قاعده . ارتفاع



$$\text{د } \triangle AOB \text{ مثلث مساحت} = \frac{h \cdot AB}{2} = \frac{h \cdot AB}{2}$$

څرنگه چې $\sin \theta = 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}$ دی.

$$\text{په نتیجه کې: } \text{مثلث مساحت} = \frac{R \cos \frac{\theta}{2} \cdot 2R \sin \frac{\theta}{2}}{2} = \frac{R^2 \sin \theta}{2} = \frac{1}{2} R^2 \sin \theta$$

څرنگه چې $S_{OAB} = \frac{R^2 \sin \theta}{2}$ د مثلث مساحت او د قطاع مساحت $A_s = \frac{1}{2} R^2 \theta$ دی. نو:

$$S = \frac{1}{2} R^2 \theta - \frac{1}{2} R^2 \sin \theta = \frac{1}{2} R^2 (\theta - \sin \theta) \text{ د قطعي مساحت}$$

لومړی مثال: د پورته شکل په شان که د یوې دایرې شعاع $R = 6.8 \text{ cm}$ وي او د دې دایرې د یوې قطاع زاویه $\theta = 71^\circ$ وي، د قطاع مساحت، د ABO د مثلث مساحت او د دې دایرې د

قطعي مساحت پيدا ڪريئ.
حل:

$$R = 6,8\text{cm}$$

$$\theta = 71^\circ$$

$$A = \pi R^2 \frac{\theta}{360^\circ} = (6.8\text{cm})^2 \cdot 3.14 \frac{71^\circ}{360^\circ} \approx 28.64\text{cm}^2$$

$$h = R \cos \frac{\theta}{2} = 6.8\text{cm} \cdot \cos \frac{71^\circ}{2} \approx 5.54\text{cm}$$

$$\cos 35^\circ 30' = 0.8141$$

$$b = 2 \cdot R \sin \frac{\theta}{2} = 2 \cdot 6.8\text{cm} \cdot \sin \frac{71^\circ}{2} \approx 7.9\text{cm}$$

$$\sin 35^\circ 30' = 0.5807$$

$$A = \frac{1}{2} R^2 \sin \theta = \frac{1}{2} (6.8\text{cm})^2 \cdot \sin 71^\circ \approx 21.96\text{cm}^2$$

$$\sin 71^\circ = 0.9455$$

د مثلث مساحت - د قطاع مساحت = د قطعي مساحت

$$= 28,64\text{cm}^2 - 21,96\text{cm}^2 = 6,68\text{cm}^2$$

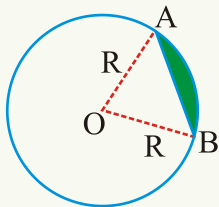
دويم مثال: د هغه قطعي مساحت پيدا ڪريئ چي شعاع يي R او قوس يي \widehat{AB} وي، كه:

$$\widehat{AB} = 60^\circ, R = 12\text{cm}$$

حل: خرنگه چي $60^\circ = \frac{\pi}{3} R$ دي، نو:

$$S = \frac{1}{2} R^2 (\theta - \sin \theta) = \frac{1}{2} (12\text{cm})^2 \left(\frac{\pi}{3} - \sin \frac{\pi}{3} \right) = \frac{1}{2} \cdot 144\text{cm}^2 \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$= 72\text{cm}^2 \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 24\pi\text{cm}^2 - 36\sqrt{3}\text{cm}^2 = (24\pi - 36\sqrt{3})\text{cm}^2$$



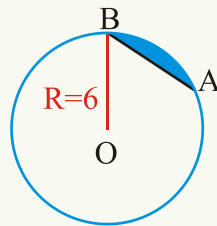
فعالیت

د هغې دایرې د قطعي مساحت پیدا کړئ چې شعاع یې 6cm او $\widehat{AB} = 120^\circ$ قوس وي.

دریم مثال: د هغه قطعي مساحت پیدا کړئ چې د 6cm وتر په واسطه جلا شوی وي او د دایرې شعاع هم 6cm وي.

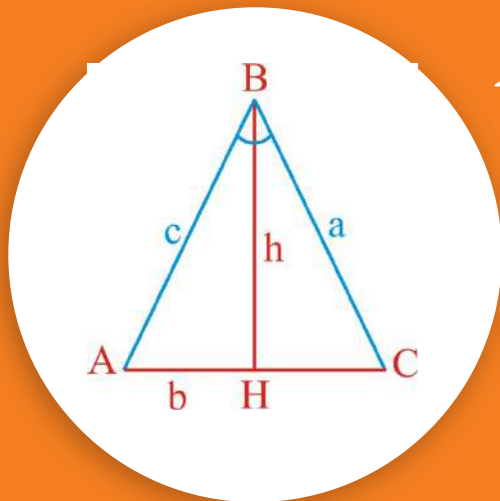
حل: څرنګه چې د قطعي قوس $\frac{\pi}{3}$ رادیانه دی:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} R^2 (\theta - \sin \theta) = \frac{1}{2} (6\text{cm})^2 \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\ &= 18\text{cm}^2 \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = (6\pi - 9\sqrt{3})\text{cm}^2 \\ &\approx 6(3.14)\text{cm}^2 - 9(1.73)\text{cm}^2 = 3.27\text{cm}^2 \end{aligned}$$



پوښتنې

- 1- د هغې قطاع مساحت پیدا کړئ چې د $\frac{\pi}{6}$ رادیان مرکزي زاوې په مقابل کې واقع وي، که د دایرې شعاع 20cm وي.
- 2- د هغې قطاع اړونده مرکزي زاویه پیدا کړئ چې مساحت یې 55.5cm^2 او د دایرې شعاع 12cm وي.
- 3- که د یوې دایرې شعاع 10m وي، د هغو قوسونو اوږدوالی پیدا کړئ چې د 3.8 رادیان او 27 رادیانه مرکزي زاویو په مقابل کې واقع وي.



د مثلث د مساحت پیدا کول د دوو ضلعو او ددې دوو ضلعو تر منځ د زاویې له جنسه:

که په یوه مثلث کې د دوو ضلعو اوږدوالی
4cm او 8cm وي او ددې ضلعو تر منځ
زاویه 30° وي آیا ددې مثلث مساحت پیدا
کولای شئ؟

د $\triangle ABC$ مثلث په پام کې نیسو او د B له راس څخه د \overline{BH} ارتفاع د \overline{AC} پر ضلع باندې
رسموو:

څرنګه چې $\sin A = \frac{BH}{c} = \frac{h}{c}$ دی، په نتیجه کې $h = c \sin A$ کېږي له هندسې څخه پوهېږو

چې د یوه مثلث مساحت (ارتفاع \cdot قاعده) $S = \frac{b \cdot h}{2}$ دی.

$$S_{ABC} = \frac{b \cdot h}{2}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} b c \sin A \quad (h = c \sin A)$$

فعالیت

د پورتنیو مثلث د A او C له رأسونو څخه ارتفاع ګانې رسم کړئ او وښیاست چې:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} ac \sin B \quad \text{او} \quad S_{ABC} = \frac{1}{2} ab \sin C \quad \text{دی.}$$

لومړی مثال: د هغه مثلث مساحت پیدا کړئ چې د دوو ضلعو اوږدوالی یې $a = 3,5\text{cm}$ او
 $c = 6\text{cm}$ او د دواړو ضلعو تر منځ زاویه یې $B = 47,5^\circ$ وي.
حل:

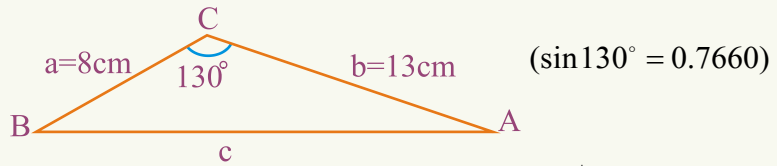
$$A = \frac{1}{2} ac \sin B$$

$$\sin 47.5^\circ = 0.73727733$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot 3.5\text{cm} \cdot 6\text{cm} \cdot \sin 47.5^\circ \approx 7.74\text{cm}^2$$

دویم مثال: د لاندې شکل د مثلث مساحت پیدا کړئ.
حل:

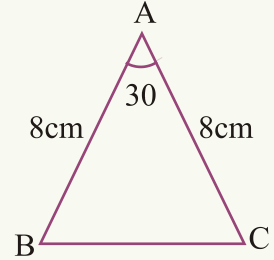
$$A = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{2} (8)(13) \sin 130^\circ \approx 39.83\text{cm}^2$$



دریم مثال: د $\triangle ABC$ په متساوي الساقين مثلث کې $\overline{AB} = \overline{AC} = 8\text{cm}$ او $A = 30^\circ$ ده، ددې مثلث مساحت پیدا کړئ.

$$S = \frac{1}{2} AB \cdot AC \sin 30^\circ$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 8 \cdot \frac{1}{2} = 16\text{cm}^2$$



د مثلث د مساحت پیدا کول د دريو ضلعو له جنسه (د هیرون فورمول)

ددې کار لپاره د یوې زاوېې د نیمایي sin، د مثلث د ضلعو د اوږدوالي له جنسه په لاس راوړو: د ABC په هر مثلث کې لاندې اړیکې صدق کوي.

$$\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}, \sin \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}}, \sin \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}$$

چې a, b, c د مثلث ضلعې او p د مثلث د محیط نیمایي ده ($p = \frac{a+b+c}{2}$) په تیرو لوستو کې مولوستل چې:

$$\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos A}{2}} \quad \square \quad \sin \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos B}{2}} \quad \square \quad \sin \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos C}{2}}$$

په هر مثلث کې $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ چې دا رابطه د *cosine* د قضیې په نوم یادېږي، دلته د دې رابطې له ثبوت څخه صرف نظر کوو او په خپل وخت کې به وروسته ثبوت شي، د $\cos A$ پر ځای یې قیمت وضع کوو.

$$\begin{aligned} \sin \frac{A}{2} &= \sqrt{1 - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}} = \sqrt{\frac{2bc - b^2 - c^2 + a^2}{4bc}} = \sqrt{\frac{a^2 - (b^2 - 2bc + c^2)}{4bc}} \\ &= \sqrt{\frac{a^2 - (b - c)^2}{4bc}} = \sqrt{\frac{(a - b + c)(a + b - c)}{4bc}} \end{aligned}$$

څرنگه چې: $a + b + c = 2p$ دی.

$$a - b + c = a + b + c - 2b = 2p - 2b = 2(p - b)$$

$$a + b - c = a + b + c - 2c = 2p - 2c = 2(p - c)$$

د $(a - b + c)$ او $(a + b - c)$ قیمتونه وضع کوو، نو لرو چې:

$$\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{2(p - b)2(p - c)}{4bc}} = \sqrt{\frac{(p - b)(p - c)}{bc}}$$

فعالیت

په همدې ډول وبنیاست چې:

$$\sin \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p - a)(p - c)}{ac}}, \quad \sin \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p - a)(p - b)}{ab}}$$

په همدې ډول کولای شو چې د مثلث د ضلعو له جنسه د یوې زاوې نیمایي *cosine* په لاس راوړو:

$$\cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p - a)}{bc}} \quad \square \quad \cos \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{p(p - b)}{ac}} \quad \square \quad \cos \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{p(p - c)}{ab}}$$

ثبوت: ڇرنگه ڇڻي $\cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos A}{2}}$ ڏي.

د $\cos A$ قيمت وضع ڪو:

$$\begin{aligned} \cos \frac{A}{2} &= \sqrt{1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}} = \sqrt{\frac{2bc + b^2 + c^2 - a^2}{4bc}} = \sqrt{\frac{(b+c)^2 - a^2}{4bc}} \\ &= \sqrt{\frac{(b+c+a)(b+c-a)}{4bc}} \end{aligned}$$

$$b+c+a-2a=2p-2a$$

$$b+c-a=2p-2a=2(p-a)$$

$$\cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$$

په نتيجه ڪي لرو ڇڻي:

فعاليت

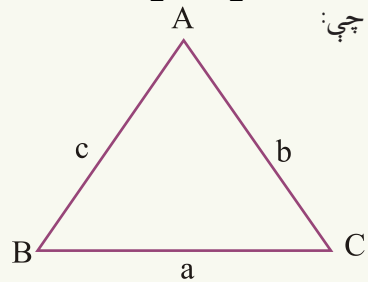
ڇرنگه ڇڻي $\tan \frac{A}{2} = \frac{\sin \frac{A}{2}}{\cos \frac{A}{2}}$ ڏي، وٺيائست ڇڻي: $\tan \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$

پوهيڙو ڇڻي $\sin A = 2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}$ ڏي ڪه د $\sin \frac{A}{2}$ او $\cos \frac{A}{2}$ قيمتونه وضع ڪرو لرو ڇڻي:

$$\sin A = 2 \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}} \cdot \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$$

$$\sin A = 2 \sqrt{\frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{(bc)^2}}$$

$$\sin A = \frac{2}{bc} \cdot \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$



ڇرنگه ڇڻي د $S = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{2} ac \sin B = \frac{1}{2} bc \sin A$ مثلث مساحت ڏي.

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} bc \cdot \sin A$$

د $\sin A$ قیمت وضع کوو:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} bc \cdot \frac{2}{bc} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

د پورتنیو مساواتو له پرتله کولو څخه لرو چې:

$$\sin A = \frac{2}{bc} \cdot S = \frac{2S}{bc} \quad \square \quad \sin B = \frac{2S}{ac} \quad \square \quad \sin C = \frac{2S}{ab}$$

دریم مثال: د هغه مثلث مساحت پیدا کړئ چې د ضلعو اوږدوالی یې په لاندې ډول راکړل شوی وي.

$$a = 5\text{cm} \quad b = 4\text{cm} \quad c = 3\text{cm}$$

حل:

$$P = \frac{a + b + c}{2} = \frac{5\text{cm} + 4\text{cm} + 3\text{cm}}{2} = 6\text{cm}$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{6(6-5)(6-4)(6-3)}$$

$$= \sqrt{6 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} = \sqrt{36} = 6\text{cm}^2$$

فعالیت

د هغه مثلث مساحت پیدا کړئ چې: $a = 4\text{cm}$ او $b = 5\text{cm}$, $c = 6\text{cm}$ وي.

څلورم مثال: که دیوه مثلث ضلعي $a = 18\text{cm}$ ، $b = 24\text{cm}$ او $c = 30\text{cm}$ وي. د دې مثلث مساحت پیدا کړئ.

حل

$$P = \frac{a + b + c}{2} = \frac{18 + 24 + 30}{2} = 36\text{cm}$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$= \sqrt{36(36-18)(36-24)(36-30)} = \sqrt{36 \cdot 18 \cdot 12 \cdot 6} = 216\text{cm}^2$$

پنجم مثال: دهغه مثلث مساحت پیدا کړئ چې د ضلعو اوږدوالی یې $b = 42,3\text{ft}$ ، $a = 29,7\text{ft}$ او $c = 38,4\text{ft}$ وي.

حل:

$$p = \frac{a + b + c}{2} = \frac{29.7 + 42.3 + 38.4}{2} = 55,2\text{ft}$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{55.2(55.2-29.7)(55.2-42.3)(55.2-38.4)} \\ = \sqrt{55.2(25.5)(12.9)(16.8)} = 552\text{ft}^2$$

د یو مثلث د محیطي دایرې د شعاع پیدا کول:

محیطي دایره هغه دایره ده چې مثلث د دایرې په داخل کې واقع وي او دایره د مثلث په درې واړو راسونو باندې مماس وي، او د محیطي دایرې مرکز د مثلث د درې واړو عمودي ناصفونو د تقاطع نقطه ده.

Δ

د شکل په شان د ABC مثلث د ضلعو اوږدوالی د a ، b او c څخه عبارت دی چې د O ټکی چې د دایرې مرکز دی د مثلث د ضلعو د درې واړو عمودي ناصفونو (Bisector Perpendicular) د تقاطع ټکی هم دی.

څرنګه چې د BOC مثلث متساوي الساقین دی، نو ارتفاع د \hat{BOC} زاویه او د مثلث قاعده نیمایي کوي. په نتیجه کې:

$$\hat{A} = \hat{BOL} = \hat{LOC}$$

$$\sin \hat{A} = \sin \hat{BOL} = \sin \hat{LOC}$$

ځکه چې مرکزي زاویه د محیطي زاویې دوه برابره ده چې د عین قوس په مقابل کې واقع وي.

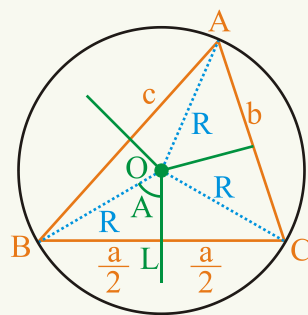
$$\sin \hat{A} = \frac{\frac{a}{2}}{R} = \frac{a}{2R}$$

$$R = \frac{a}{2 \sin A} = \frac{a}{2 \cdot \frac{2S}{bc}} = \frac{abc}{4S} \quad (\sin A = \frac{2S}{bc})$$

او د $R = \frac{a}{2 \sin A}$ څخه لرو چې:

$$a = R \cdot 2 \sin A$$

$$\frac{a}{\sin A} = 2R$$



په همدې ډول

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R \text{ يا } R = \frac{a}{2 \sin A} = \frac{b}{2 \sin B} = \frac{c}{2 \sin C}$$

لومړی مثال: د ABC مثلث د محيطي دایرې شعاع پیدا کړئ چې ضلعي یې $a = 11\text{cm}$ ، $b = 12\text{cm}$ او $c = 13\text{cm}$ وي.

حل:

$$R = \frac{abc}{4s} = \frac{11 \cdot 12 \cdot 13}{4\sqrt{18 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}} = 6,98\text{cm} \quad , \quad p = \frac{11+12+13}{2} = 18\text{cm}$$

فعالیت

د هغه مثلث د محيطي دایرې شعاع پیدا کړئ چې د ضلعو اوږدوالی یې 18cm ، 24cm او 30cm وي.

دویم مثال: د هغه مثلث د محيطي دایرې شعاع پیدا کړئ چې د ضلعو اوږدوالی یې $a = 3\text{cm}$ ، $b = 5\text{cm}$ او $c = 6\text{cm}$ وي.

حل:

$$R = \frac{abc}{4 \cdot \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}} = \frac{3 \cdot 5 \cdot 6}{4 \cdot \sqrt{7 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 1}} = \frac{90}{4 \cdot \sqrt{56}} = \frac{45}{2 \cdot \sqrt{56}} \approx 3\text{cm}$$

د یو مثلث د محاطي دایرې د شعاع پیدا کول:

د مثلث محاطي دایره هغه دایره ده چې دایره د مثلث په دننه کې واقع وي او دایره د مثلث په دننه کې د مثلث د درې واړه ضلعو سره مماس وي، د محاطي دایرې مرکز د مثلث د درې واړو ناصف الزاویو د تقاطع ټکی (O) دی.

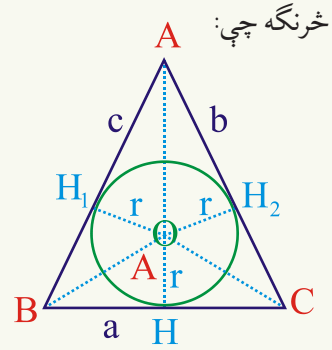
د OAB + د OAC + د OBC مثلثونو مساحت = د ABC مثلث له مساحت سره

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br + \frac{1}{2}cr = \frac{1}{2}r(a+b+c) = \frac{1}{2}r \cdot 2p$$

$$S = r \cdot p \Rightarrow r = \frac{S}{p}$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$r = \frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p}$$



دریم مثال: د هغه مثلث د محاطي دایرې شعاع او د محاطي دایرې مساحت پیدا کړئ چې د ضلعو اوږدوالی یې 7cm، 8cm او 9cm وي.

حل

$$p = \frac{7+8+9}{2} = 12\text{cm}$$

$$S = \sqrt{12(12-7)(12-8)(12-9)} = 26.83\text{cm}^2$$

$$r = \frac{s}{p} = \frac{26.83\text{cm}^2}{12\text{cm}} = 2.23\text{cm}$$

$$= \pi r^2 = \frac{22}{7} \cdot (2.23\text{cm})^2 \approx 15.6\text{cm}^2$$

په: د محاطي دایرې مساحت مساوي دی،

څلورم مثال: د یو قائم الزاویه مثلث دوه قائمې ضلعې په ترتیب سره 3cm او 4cm دي، د محیطي او محاطي دایرو شعاع گانې یې پیدا کړئ.

حل:

$$p = \frac{3+4+5}{2} = 6\text{cm}$$

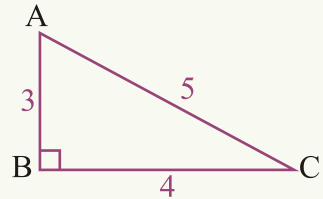
$$(\overline{AC})^2 = (\overline{AB})^2 + (\overline{BC})^2$$

$$AC = \sqrt{9+16} = 5$$

$$R = \frac{abc}{4s} = \frac{3 \cdot 4 \cdot 5}{4 \cdot \sqrt{6(6-3)(6-4)(6-5)}} = \frac{60}{4 \cdot \sqrt{6 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}} = \frac{60}{4 \cdot 6} = \frac{60}{24}$$

$$= \frac{5}{2}\text{cm} = 2.5\text{cm}$$

$$r = \frac{s}{p} = \frac{6}{6} = 1\text{cm}$$



پنځم مثال: د MTN په قایم الزاویه مثلث کې که قایمې ضلعې یې m او n راکړ شوي وي، د دې مثلث مساحت او د محیطي دایرې شعاع یې پیدا کړئ.

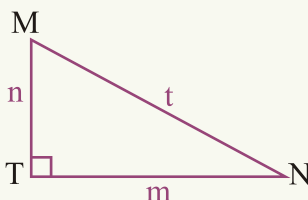
حل:

$$(\overline{MN})^2 = m^2 + n^2$$

$$t = MN = \sqrt{m^2 + n^2}$$

$$S = \frac{n \cdot m}{2}, R = \frac{m \cdot n \cdot t}{4S} = \frac{m \cdot n \cdot \sqrt{m^2 + n^2}}{4 \frac{nm}{2}} = \frac{mn\sqrt{m^2 + n^2}}{2mn}$$

$$R = \frac{\sqrt{m^2 + n^2}}{2} \text{ محیطی دایری شعاع}$$



فعالیت

د هغه مثلث د محیطي دایرې شعاع پیدا کړئ، که چېرې د ضلعو اوږدوالی یې 34cm ، 35cm او 36cm وي.

د متساوي الاضلاع مثلث ارتفاع، مساحت او د محیطي او محیطي دایرو د شعاع گانو پیدا کول:

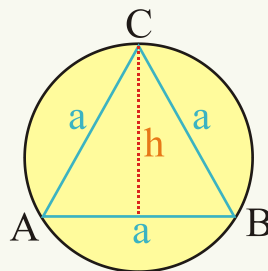
$$\sin A = \sin 60^\circ = \frac{h}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow h = \frac{a}{2} \sqrt{3}$$

د فیثاغورث د قضیې په اساس لرو چې:

$$h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2$$

$$h^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{4a^2 - a^2}{4} = \frac{3a^2}{4}$$

$$h = \frac{\sqrt{3}a}{2} = \frac{a}{2} \sqrt{3}$$



$$S = \frac{h \cdot a}{2} = \frac{\sqrt{3}a}{2} \cdot a = \frac{\sqrt{3}a^2}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{a^2}{4} \sqrt{3}$$

$$R = \frac{abc}{4s} = \frac{a^3}{4 \cdot \frac{a^2}{4} \sqrt{3}} = \frac{a^3}{a^2 \sqrt{3}} = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{a}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{a}{3} \sqrt{3}$$

$$r = \frac{s}{p} = \frac{\frac{a^2}{4} \cdot \sqrt{3}}{\frac{3a}{2}} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \cdot \frac{2}{3a} = \frac{a}{6} \sqrt{3}$$

شپږم مثال: د یو متساوي الاضلاع مثلث محیط 18cm دی. د دې مثلث مساحت، ارتفاع او د محیطي او محاطي دایرو شعاع گانې پیدا کړئ.

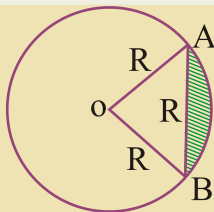
حل: د دې مثلث یوه ضلع (a) مساوي ده، په:

$$a = \frac{1}{3} \cdot 18\text{cm} = 6\text{cm}$$

$$S = \frac{a^2}{4} \sqrt{3} = \frac{(6\text{cm})^2}{4} \sqrt{3} = 15,6\text{cm}^2 \quad h = \frac{a}{2} \sqrt{3} = \frac{6\text{cm}}{2} \sqrt{3} = 5,2\text{cm}$$

$$R = \frac{a}{3} \sqrt{3} = \frac{6\text{cm}}{3} \sqrt{3} = 3,5\text{cm} \quad r = \frac{a}{6} \sqrt{3} = \frac{6\text{cm}}{6} \sqrt{3} \approx 1,7\text{cm}$$

پوښتنې



1- د شکل مطابق د OAB مثلث متساوي الاضلاع دی چې هره ضلع یې R ده. د O په مرکز دایره رسم شوې ده چې د A او B له ټکو څخه تیرېږي. د AB په وتر سره د قطعې مساحت مساوي دی په:

- a) $(\frac{\pi}{6} - \frac{1}{4})R^2$ b) $(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{5})R^2$ c) $(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2})R^2$
d) $(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{2}}{2})R^2$ e) $(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4})R^2$

- 2- که د یو متساوی الساقین مثلث د هر ساق اوږدوالی 6cm او د ساقو تر منځ زاویه یې 30° وي د مثلث مساحت پیدا کړئ.
- 3- که د یوه مثلث د دوو ضلعو اوږدوالی $5\sqrt{2}\text{cm}$ او 6cm وي، او دواړو ضلعو تر منځ زاویه یې 45° وي، د دې مثلث مساحت پیدا کړئ.
- 4- که د یوه مثلث د ضلعو اوږدوالی په ترتیب سره 3cm ، 4cm او 5cm وي، د دې مثلث مساحت پیدا کړئ.
- 5- د هغه مثلث مساحت پیدا کړئ چې د ضلعو اوږدوالی یې $a = 7\text{cm}$ ، $b = 9\text{cm}$ او $c = 12\text{cm}$ وي.
- 6- د هغه قایم الزاویه مثلث د محیطي دایرې شعاع پیدا کړئ، که قایمې ضلعې یې 12cm او 5cm وي.
- 7- که د ABC ، د متساوي الساقین مثلث قاعده $a = 8\text{cm}$ او د دې مثلث محاطي شعاع $r = 3\text{cm}$ وي. د محیطي دایرې شعاع اوږدالی یې پیدا کړئ.
- 8- که د یوه قایم الزاویه مثلث مساحت 84cm^2 وي او د یوې ارتفاع اوږدوالی یې $3,36\text{cm}$ وي، د دې مثلث د محیطي شعاع اوږدوالی پیدا کړئ.

د څپرګي لنډيز

• د جمعې او تفاضل فورمولونه:

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta & \sin(\alpha - \beta) &= \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \\ \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta & \cos(\alpha - \beta) &= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \\ \tan(\alpha + \beta) &= \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta} & \tan(\alpha - \beta) &= \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} \end{aligned}$$

• د 2α د زاوې مثلثاتي نسبتونه د α د مثلثاتي نسبتونو له جنسه:

$$\begin{aligned} \sin 2\alpha &= 2 \sin \alpha \cos \alpha \\ \cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha \\ \tan 2\alpha &= \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} \end{aligned}$$

• د يوې زاوې مثلثاتي نسبتونه، د زاوې د دوه چند مثلثاتي نسبتونو له جنسه:

$$\sin \alpha = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos 2\alpha}{2}} \quad , \quad \cos \alpha = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos 2\alpha}{2}} \quad , \quad \tan \alpha = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}}$$

• د يوې زاوې د نيمايي مثلثاتي نسبتونه د زاوې د مثلثاتي نسبتونو له جنسه:

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} \quad , \quad \cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}} \quad , \quad \tan \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}$$

• د يوې زاوې د درې چنده مثلثاتي نسبتونه د هغې زاوې د مثلثاتي نسبتونو له جنسه:

$$\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha \quad , \quad \cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$$

$$\tan 3\alpha = \frac{3 \tan \alpha - \tan^3 \alpha}{1 - 3 \tan^2 \alpha}$$

• د دريو زاويو د مجموعې $(\alpha + \beta + \theta)$ مثلثاتي نسبتونه:

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta + \theta) &= \sin \alpha \cos \beta \cos \theta + \sin \beta \cos \alpha \cos \theta \\ &\quad + \sin \theta \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \sin \theta \\ \cos(\alpha + \beta + \theta) &= \cos \alpha \cos \beta \cos \theta - \cos \alpha \sin \beta \sin \theta \\ &\quad - \cos \beta \sin \alpha \sin \theta - \cos \theta \sin \alpha \sin \beta \end{aligned}$$

$$\tan(\alpha + \beta + \theta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta + \tan \theta - \tan \alpha \cdot \tan \beta \cdot \tan \theta}{1 - \tan \alpha \tan \beta - \tan \beta \tan \theta - \tan \alpha \tan \theta}$$

د ضرب فورمولونه (هغه فورمولونه چې د دوو زاویو د مجموعې یا تفاضل مثلثاتي نسبتونه په ضرب بدلوي).

$$\sin A + \sin B = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$$

$$\sin A - \sin B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$$

$$\cos A + \cos B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$$

$$\cos A - \cos B = -2 \sin \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$$

• هغه فورمولونه چې د دوه زاویو د مثلثاتي نسبتونو ضرب د جمعې او یا د تفاضل په شکل بدلوي:

$$\sin A \cos B = \frac{1}{2} [\sin(A+B) + \sin(A-B)]$$

$$\cos A \sin B = \frac{1}{2} [\sin(A+B) - \sin(A-B)]$$

$$\cos A \cos B = \frac{1}{2} [\cos(A+B) + \cos(A-B)]$$

$$\sin A \sin B = -\frac{1}{2} [\cos(A+B) - \cos(A-B)] = \frac{1}{2} [\cos(A-B) - \cos(A+B)]$$

• د R په شعاع د دایرې د مرکزي زاوې (θ°) د مقابل قوس اوږدوالی مساوي دی په:

$$L = \pi R \frac{\theta^\circ}{180^\circ}$$

• د R په شعاع د دایرې مرکزي زاوې θ راډیان د مقابل قوس اوږدوالی مساوي دی په:

$$L = R\theta$$

• د دایرې د سطحې هغه برخه چې د دوو شعاعو تر منځ واقع وي، قطاع بلل کېږي:

• د قطاع مساحت در $A_{\text{sector}} = \frac{1}{2} R^2 \theta$ د فورمول په مرسته لاسته راځي:

• د دایرې د سطحې هغه برخه چې د قوس او د مقابل وتر تر منځ واقع وي، قطعه بلل کېږي:

• د قطعې مساحت د $A_{\text{Segment}} = \frac{1}{2} R^2 (\theta - \sin \theta)$ د فورمول په مرسته پیدا کېږي:

• د دوو ضلعو او ددې دوو ضلعو تر منځ زاوېې له جنسه د مثلث مساحت مساوي دی په:

$$S = \frac{1}{2} ac \sin B, \quad S = \frac{1}{2} bc \sin A, \quad S = \frac{1}{2} ab \sin C$$

• د یوې زاوېې د نیمایي مثلثاتي نسبتونه د مثلث د ضلعو د اوږدوالی له جنسه:

$$\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}} \quad \sin \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}} \quad \sin \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-a)}{ab}}$$

$$\cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}} \quad \cos \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}} \quad \cos \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}}$$

$$\tan \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$$

• د مثلث مساحت د مثلث د ضلعو د اوږدوالی له جنسه:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

• د یوه مثلث د محیطي دایرې شعاع (R) مساوي دی په:

$$R = \frac{a}{2 \sin A} = \frac{b}{2 \sin B} = \frac{c}{2 \sin C} \Rightarrow 2R = \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$R = \frac{abc}{4S} \quad \text{یا}$$

• د یوه مثلث د محیطي دایرې شعاع د $r = \frac{S}{p}$ یا $r = \frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p}$ فرمول څخه په لاس راځي.

د څپرګي پوښتنې

1- وښیاست چې د متساوي الاضلاع مثلث مساحت $S = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$ دی، که a د مثلث یوه ضلع وي؟

2- که د یوه مثلث د ضلعو اوږدوالی $a = 7\text{cm}$ ، $b = 8\text{cm}$ او $c = 9\text{cm}$ وي، د دې مثلث مساحت پیدا کړئ؟

3- د جمعې د فورمولونو په مرسته $\cos 165^\circ$ او $\sin 165^\circ$ پیدا کړئ؟

4- $\sin(-165^\circ) = ?$ مساوي دی په:

a) $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

b) $\frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$

c) $\frac{-\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

5- وښیاست چې: $\frac{\cos 2\theta}{\sin \theta} - \frac{\sin 2\theta}{\cos \theta} = \frac{\cos 3\theta}{\sin \theta \cos \theta}$ دی.

6- د جمعې او تفاضل د فورمولونو په مرسته، د لاندینو زاویو مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ؟

$\sin(30^\circ + 45^\circ)$ $\cos(150^\circ - 45^\circ)$ $\tan(30^\circ + 60^\circ)$

$\sin(135^\circ + 180^\circ)$ $\sin(135^\circ - 180^\circ)$ $\tan(180^\circ - 45^\circ)$

7- د دوو زاویو د مثلثاتي نسبتونو د مجموعې او تفاضل د فورمولونو په مرسته، د لاندینو رابطو سموالی وښیاست.

$\sin(90^\circ - \theta) = \cos \theta$ $\cos(90^\circ + \theta) = -\sin \theta$ $\cos(90^\circ - \theta) = \sin \theta$

$\sin(270^\circ + \theta) = -\cos \theta$ $\cos(180^\circ - \theta) = -\cos \theta$ $\sin(180^\circ - \theta) = \sin \theta$

8- که $0^\circ < \theta < 90^\circ$ او $\sin \theta = \frac{2}{5}$ وي، د $\cos 2\theta$ ، $\sin 2\theta$ ، $\cos \frac{\theta}{2}$ او $\sin \frac{\theta}{2}$ قیمتونه په لاس راوړئ؟

9- وښیاست چې:

$\frac{\sin 2\theta}{\cos \theta} = 2 \sin \theta$ ، $\cos 2\theta + 1 = 2 \cos^2 \theta$ ، $\cos 2\theta + 2 \sin^2 \theta = 1$

$2 \cos^2 \theta - 2 \sin^2 \theta = 2 \cos 2\theta$ ، $\frac{\cos 2\theta}{\cos \theta + \sin \theta} = \cos \theta - \sin \theta$

10- که دیوه مثلث د ضلعو اوږدوالی په ترتیب سره 5cm ، 7cm او 8cm وي، د دې مثلث د محیطي او محاطي دایرو شعاع گانې پیدا کړئ؟

$$\sin(180^\circ + \theta) = ? \quad -11$$

$$a) \sin \theta \quad b) -\cos \theta \quad c) -\sin \theta \quad d) \cos \theta$$

12- د جمعی او تفاضل د فورمولونو په مرسته وښیاست چې:

$$\sin(360^\circ - \theta) = -\sin \theta \quad \text{او} \quad \tan(180^\circ + \theta) = \tan \theta \quad , \quad \sec(360^\circ - \theta) = \sec \theta$$

$$\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = ? \quad -13$$

$$a) 2 \sin \alpha \sin \beta \quad b) 2 \cos \alpha \cos \beta \quad c) -2 \sin \alpha \sin \beta$$

$$14- \text{وښیاست چې: } \frac{\sin \alpha}{\sec 4\alpha} + \frac{\cos \alpha}{\csc 4\alpha} = \sin 5\alpha \quad \text{دی؟}$$

15- لاندې د مثلثاتی نسبتونو ضرب حاصلونه د مجموعي او یا تفاضل په شکل ولیکئ؟

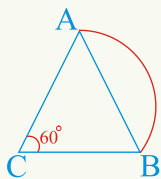
$$\cos 100^\circ \sin 50^\circ \quad , \quad \cos 40^\circ \cos 60^\circ$$

$$\sin 8\theta \cos 10\theta \quad , \quad \sin \frac{3\theta}{2} \sin \frac{5\theta}{2}$$

16- لاندې د مثلثاتی نسبتونو مجموعي او یا تفاضل د ضرب د حاصل په څېر ولیکئ؟

$$\sin 80^\circ - \sin 72^\circ \cdot \sin 12\theta + \sin 8\theta$$

$$17- \text{وښیاست چې: } \frac{\sin 5\theta + \sin 3\theta}{\cos 5\theta - \cos 3\theta} = -\cot \theta \quad \text{دی.}$$



18- دیوې دایرې مساحت 180cm^2 دی، د دې دایرې د 80° قطاع مساحت پیدا کړئ.

19- د شکل مطابق د 60° مرکزي زاوې د مقابل قوس اوږدوالی (1cm) دی. د دې قوس شعاع او د د وتر اوږدوالی یې پیدا کړئ؟

$$\frac{\tan 60^\circ - \tan 30^\circ}{1 + \tan 60^\circ \cdot \tan 30^\circ} = ? \quad -20$$

a) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ b) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ c) $\sqrt{3}$ d) $-\sqrt{3}$

21- که $\sin \theta = \frac{3}{5}$ او د θ دویمه ضلع په لومړی ربع کې وي، $\sin 2\theta$ ، $\cos 2\theta$ او $\tan 2\theta$ پیدا کړئ؟

22- وبنیاست چې: $\tan(45^\circ + \theta) = \frac{\cos \theta + \sin \theta}{\cos \theta - \sin \theta}$ دی؟

23- $\cos 37^\circ \cos 53^\circ - \sin 37^\circ \sin 53^\circ$ مساوي دی په:

a) 1 b) -1 c) 0 d) درې واړه ناسم دي

24- $\cos 60^\circ \cos 14^\circ + \sin 60^\circ \sin 14^\circ$ مساوي دی په:

a) $\cos 74^\circ$ b) $\cos 46^\circ$ c) $\sin 74^\circ$ d) $\sin 46^\circ$

25- $\cos 14^\circ \cos 31^\circ - \sin 14^\circ \sin 31^\circ$ مساوي دی په:

a) $\cos 17^\circ$ b) $\cos 45^\circ$ c) $\sin 17^\circ$ d) $-\sin 17^\circ$

26- $\cos 80^\circ \cos 35^\circ + \sin 80^\circ \sin 35^\circ$ مساوي دی په:

a) $\cos 115^\circ$ b) $\sin 115^\circ$ c) $\cos 45^\circ$ d) $\sin 45^\circ$

27- که $\cos \alpha = \frac{3}{5}$ ، $\sin \beta = \frac{5}{13}$ وي، α او β په لومړنی ربع کې واقع وي $\cos(\alpha - \beta)$ پیدا کړئ؟

28- که $\cos \theta = -\frac{8}{17}$ ، $\cos \square = -\frac{3}{5}$ وي او د θ او \square دویمې ضلعې په دریمه ربع کې

واقع وي. $\cos(\theta - \square)$ پیدا کړئ؟

29- وبنیاست چې: $\frac{\cos(x - y) - \cos(x + y)}{\cos(x - y) + \cos(x + y)} = \tan x \cdot \tan y$ دی.

$\cos(0^\circ - t) = ?$ -30

a) $\sin t$ b) $\cos t$ c) $-\sin t$ d) $-\cos t$
-31 وښياست چې: $\frac{\cos \theta \cdot \sin 2\theta}{1 + \cos 2\theta} = \sin \theta$ دی؟

$\frac{\cos 8x + \cos 4x}{\cos 8x - \cos 4x} = -\cot 6x \cot 2x$ -32 وښياست چې:

$\frac{\sin 4x + \sin 6x}{\cos 4x - \cos 6x} = \cot x$, $\frac{\sin x - \sin 3x}{\cos x + \cos 3x} = -\tan x$
 $\frac{\sin x - \sin 3x}{\cos x - \cos 3x} = -\cot 2x$, $\frac{\sin t + \sin 3t}{\cos t + \cos 3t} = \tan 2t$

$\cos(x + y) \cos y + \sin(x + y) \sin y$ -33 افاده مساوي ده په:

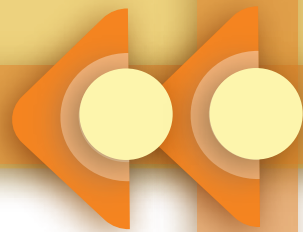
a) $\sin x$ b) $\cos x$ c) $-\sin x$ d) $-\cos x$
 $\sin(x - y) \cos y + \cos(x - y) \sin y = ?$ -34

a) $\sin x$ b) $\cos x$ c) $-\sin x$ d) $-\cos x$
-35 د هغې قطاع مساحت چې شعاع يې $2m$ او مرکزي زاويه يې $0,5 \text{ radian}$ وي، مساوي ده په:

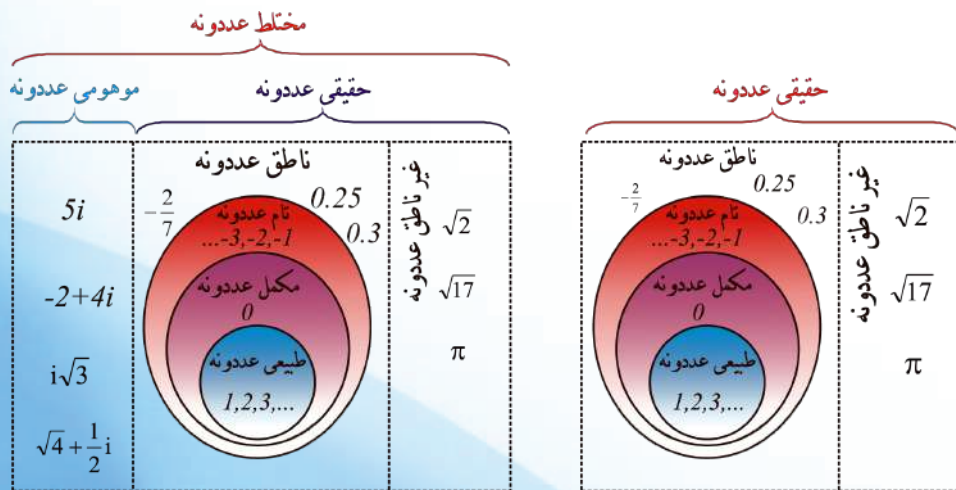
a) $3m^2$ b) $2m^2$ c) $1m^2$ d) درې واړه سمې نه دي

-36 که د يوې دایرې د يوې قطاع مساحت 200cm^2 او مرکزي زاويه يې 2 radian وي، د دې دایرې شعاع مساوي ده په:

a) 14.14cm b) -14.14cm c) 14cm d) درې واړه غلط دي.



شپریم خیرکی مختلط عددونه



مختلط عددونه (Complex Numbers)

$$z = \sqrt{3} - 2i$$

Real Part of $z = ?$
Imaginary Part of
 $z = ?$

آيا ويلاى شى چې د $x^2 + 9 = 0$ معادله ولې د حقيقي عددونو په سټ کې حل نه لري؟
آيا پوهېږئ چې د حقيقي عددونو سټ د مختلطو عددونو د سټ يو فرعي سټ دی؟

موهومي عددونه (Imaginary Numbers):

$\sqrt{-1} = i$ يا $i^2 = -1$ دی د i توری له يوناني کلمې (iota) څخه اخيستل شوی دی چې $\sqrt{-1} = i$ ته، د موهومي عددونو واحد وايي.

لومړی مثال: $\sqrt{-16}$ پيدا کړئ.

$$\text{حل: } \sqrt{-16} = \sqrt{(-1) \cdot 16} = \sqrt{-1} \sqrt{16} = i \sqrt{16} = \pm 4i$$

دويم مثال: د $x^2 + a^2 = 0$ معادله حل کړئ.
حل:

$$x^2 + a^2 = 0$$

$$x^2 = -a^2$$

$$x = \pm \sqrt{-a^2} = \pm \sqrt{(-1) \cdot (a^2)} = \pm a \sqrt{-1} = \pm ai$$

ai او $-ai$ موهومي عددونه دي (چې a يو حقيقي عدد دی).

د (i) طاقتونه (Powers of i):

ليدل کېږي چې د $i^2 = -1$ يا $i = \sqrt{-1}$ په مرسته موهومي عددونه ساده کولای شو. په یاد ولرئ چې د حقيقي عددونو مربع مثبت او د موهومي عددونو مربع منفي ده.

$$i = \sqrt{-1} \quad i^2 = (\sqrt{-1})^2 = -1 \quad i^3 = i^2 \cdot i = (-1) \cdot (i) = -i$$

$$i^4 = (\sqrt{-1})^4 = [(\sqrt{-1})^2]^2 = (-1)^2 = 1 \quad \text{يا} \quad i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1)(-1) = 1$$

$$i^5 = i^4 \cdot i = (1)(i) = i \quad i^6 = (i^4) \cdot (i^2) = (1) \cdot (-1) = -1$$

$$i^7 = (i)^6 \cdot (i) = (-1) \cdot (i) = -i \quad i^8 = i^7 \cdot i = (-i) \cdot (i) = -i^2 = -(-1) = 1$$

(i) ته موهومي واحد وايي.

له دې ځايه نتيجه په لاس راځي، که د موهومي واحد توان $n=4$ يا يوداسې عددوي چې پر څلورو د وېش وړوي، نو له يوه (1) سره مساوي دی.

دریم مثال:

$$i^8 = i^4 \cdot i^4 = 1 \cdot 1 = 1$$

$$i^{12} = i^4 \cdot i^4 \cdot i^4 = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$$

$$i^{16} = i^4 \cdot i^4 \cdot i^4 \cdot i^4 = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$$

⋮

$$i^{4n} = i^4 \cdot i^4 \dots i^4 = 1$$

$$i^{4n+1} = i^{4n} \cdot i = 1 \cdot i = i$$

$$i^{4n+2} = i^{4n} \cdot i^2 = 1 \cdot (-1) = -1$$

$$i^{4n+3} = i^{4n} \cdot i^2 \cdot i = 1(-1)i = -i$$

فعالیت

$(i)^{61}, (i)^{-37}$ و $(i)^{256}$ طاقتونو قیمت پیدا کړئ.

څلورم مثال: i^{54}, i^{1998} او i^{89} پیدا کړئ.

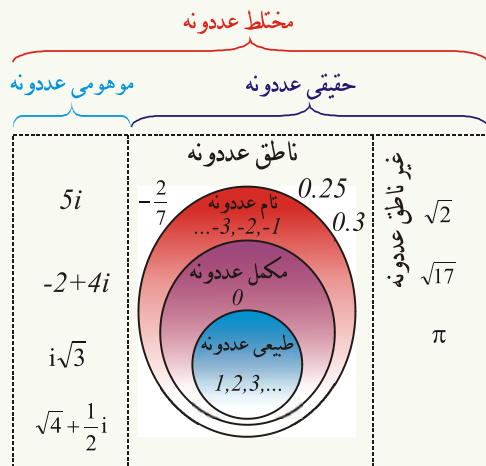
حل: که د 54 عدد پر 4 ووېشو، پاتې (باقي) يې 2 ده، نو:

$$i^{54} = i^{52} \cdot i^2 = i^{4 \cdot 13} \cdot i^2 = (i^4)^{13} \cdot i^2 = (1) \cdot i^2 = (1) \cdot (-1) = -1$$

$$i^{1998} = i^{4(499)} \cdot i^2 = 1 \cdot i^2 = i^2 = -1$$

$$i^{89} = i^{4 \cdot 22} \cdot i = 1 \cdot i = i$$

هغه عددونه چې $\sqrt{-1}$ يې يو فکتور وي، د موهومي عددونو په نوم يادېږي. د i طبيعي توانونه يو له $i, 1, -i, -1$ او 1 عددونو څخه دي. د حقيقي عددونو مربع مثبت اود موهومي عددونو مربع منفي ده.



د عددونو ستونه د تاریخ په اوږدوکې د اړتیاوو او د ریاضي د علم له انکشاف سره سم منځ ته راغلي دي، لکه: څرنګه چې پوهېږئ، د طبیعي عددونو سټ $IN = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ ټولو مسألو ته ځواب نه شي ویلای. د مثال په ډول د $3x = 0$ معادله د طبیعي عددونو په سټ کې حل نه لري، ښکاره خبره ده چې ځواب یې $x = 0$ دی، نو یو بل سټ ته

اړتیا پیدا شوه چې د مکملو عددونو سټ $W = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ دی. دا سټ هم ځینو پوښتنو ته ځواب نه شي ورکولای، لکه: د $x + 2 = 0$ معادله د مکملو عددونو په سټ کې حل نه لري، ځکه چې ځواب یې $x = -2$ دی چې -2 د مکملو عددونو په سټ کې شامل نه دی، نو یو بل سټ ته اړتیا پیدا شوه چې منفي عددونه هم ولري چې د تامو عددونو د سټ (Integer Numbers set) یا $I = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ په نامه یادېږي، خو د عددونو په دې سټ کې هم د $2x + 1 = 2$ معادلې حل نشته، ځکه چې حل یې $x = \frac{1}{2}$ دی، نو د ناطقو عددونو سټ (Rational Numbers Set) منځ ته راغی خو د $x^2 - 2 = 0$ معادله د ناطقو یا ګویا عددونو په سټ کې هم حل نه لري، ځکه چې، ددې معادلې حل $x = \sqrt{2}$ دی چې $\sqrt{2}$ د غیرو ناطقو عددونو (Irrational Numbers) په سټ کې شامل دی، نو د غیر ناطقو عددونو سټ منځ ته راغی د ناطقو او غیر ناطقو عددونو د سیټونو مجموعې ته د حقیقي عددونو سټ (Real Numbers Set) وایي. خود حقیقي عددونو سټ هم ځینو پوښتنو ته ځواب نه شي ورکولای، لکه: د $x^2 + 16 = 0$ یا د $x^2 + 1 = 0$ د معادلو حل د حقیقي عددونو په سټ کې نه شته دی.

یا په بل عبارت منفي عددونه د حقيقي عددونو په سټ کې جفت جذر نه لري، لکه: $\sqrt{-25}$, $\sqrt{-16}$ او نور، خو هغه معادلي چې د حقيقي عددونو په سټ کې حل نه لري، د مختلطو عددونو په سټ کې حل لري. په 1795م. کال کې یو جرمني ریاضي پوه گوس (Gauss) د مختلطو عددونو مفهوم په لاندې ډول وړاندی کړ. که یو مختلط عدد په Z سره وښایو $z = a + bi$ چې د یو مختلط عدد معیاري شکل دی چې a د Z عدد حقيقي برخه (Real Part of z) او bi د Z د مختلط عدد موهومي برخه (Imaginary Part of z) ده، د مختلطو عددونو سټ داسې تعریف کېږي. $C = \{z | z = a + bi, a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$ د Z یو مختلط عدد د یوې مرتبې جوړې په شکل هم لیکلای شو: $z = a + bi = (a, b)$, $z = a - bi = (a, -b)$ که $a=0$ شي: $Z = 0 + bi = bi$ چې bi ته خالص موهومي عدد (Pure imaginary number) وايي او که $b = 0$ وي، نو $z = a + 0 \cdot i = a$ چې a یو خالص حقيقي عدد (Pure real number) دی) په یاد ولرئ چې مختلط عددونه، لکه: حقيقي عددونه د ترتیب خاصیت نه لري.

صفری مختلط عدد (Zero Complex Number):

هغه عدد دی چې حقيقي او موهومي دواړه برخې یې صفرونه وي. $(b = 0 \quad a = 0)$ ، نو

$$z = a + bi = 0 + 0i = 0 \text{ صفری مختلط عدد دی.}$$

فعالیت

په $4 + 3i$ او $2 - 5i$ مختلطو عددونو کې حقيقي او موهومي برخې وښیاست.

لومړی مثال: د $1 - i$, $\sqrt{3} - 3i$, $5i$ او $2 - 5i$ په مختلطو عددونو کې حقيقي او موهومي

برخې وښیاست.

حل: په $1 - i$ کې حقيقي برخه یې 1 او موهومي برخه یې $-i$ ده.

د $\sqrt{3} - 3i$ مختلط عدد کې حقيقي برخه يې $\sqrt{3}$ او موهومي برخه يې $-3i$ ده، په $2 - 5i$ مختلط عدد کې حقيقي برخه يې 2 او موهومي برخه يې $-5i$ ده. په $5i$ کې حقيقي برخه صفر او موهومي برخه يې $5i$ ده.

دويم مثال: د $6i$, -9 , 0 , $9 - i$ او $i - 1$ مختلط عددونه په معياري شکل (Standard Form) وليکئ.

حل: څرنگه چې $z = a + bi$ ته د مختلط عدد معياري شکل وايي چې a ته د مختلط عدد حقيقي برخه او bi يې موهومي برخه ده. په لاندې جدول کې پورتنی مختلط عددونه په معياري شکل بنودل شوي دي.

مختلط عددونه	معياري شکل ($z = a + bi$)
$6i$	$0 + 6i$
-9	$-9 + 0i$
0	$0 + 0i$
$9 - i$	$9 - i$
$i - 1$	$-1 + i$

$z = a + bi$ د يوه مختلط عدد معياري شکل دی چې a ته د مختلط عدد حقيقي برخه او bi يې موهومي برخه ده، که $a=0$ وي، نو bi خالصه موهومي برخه او که $b=0$ وي، نو a د مختلط عدد خالصه حقيقي برخه ده او هغه معادلې چې د حقيقي عددونو په سټ کې حل نه لري، د مختلطو عددونو په سټ کې حل لري.

پوښتنې

1- د $(i)^{-33}$, $(i)^{79}$, $(i)^{202}$, $(2i)^2$ او $(3i)^2$ قیمتونه پیدا کړئ.

2- لاندې عددونه د مختلطو عددونو په معیاري شکل ولیکئ.

$$-i-4, \quad 5i, \quad -4i+\sqrt{2}, \quad -3i$$

3- $7-i$, $5+3i$, $-3i$ مختلط عددونه د مرتبو جوړو په شکل ولیکئ.

4- $-i$ په مختلط عدد کې حقیقي برخه مساوي ده په:

a) 1 , b) -1 , c) 0 , d) 2

5- د $\sqrt{-16}$ عدد جذر مساوي دی په:

a) ± 4 , b) -4 , c) $\pm 4i$, d) ± 2

د موهومي عددونو څلورگونې عمليې

$$4i + 3i = 7i$$

$$4i - 3i = i$$

$$4i - (-3i) = 7i$$

آيا د $3i$ او $4i$ موهومي عددونه جمع کولای

شي؟

آيا د $10i$ او $50i$ موهومي عددونو د ضرب

حاصل يو حقيقي عدد دی؟

د موهومي عددونو جمع او تفریق: موهومي عددونه کولای شو چې په لاندې ډول يې جمع او تفریق کړو.

a: د جمعي عمليه: د دوو موهومي عددونو د جمعي حاصل يو موهومي عدد دی.

لوړې مثال: د $(7i + 8i)$ او $5i$ او $\sqrt{7}i$ د جمعي حاصل پيدا کړئ.

حل:

$$7i + 8i = (7 + 8)i = 15i$$

$$\sqrt{7}i + 5i = (\sqrt{7} + 5)i$$

b: د تفریق عمليه: د دوو عددونو د تفریق حاصل يو موهومي عدد دی.

دويم مثال: $7i - 4i$ او $9i - 13i$ د تفریق حاصل پيدا کړئ.

$$7i - 4i = (7 - 4)i = 3i$$

$$9i - 13i = (9 - 13)i = -4i$$

c: د ضرب عمليه: د دوو موهومي عددونو د ضرب حاصل يو حقيقي (Real number) عدد دی.

درېم مثال: د $(10i) \cdot (5i)$ او $(\sqrt{9}i) \cdot (\sqrt{4}i)$ د ضرب حاصل پيدا کړئ.

حل:

$$(10i) \cdot (5i) = (10) \cdot (5) \cdot i \cdot i = 50i^2 = -50$$

ځکه چې $i^2 = -1$ دی نو $50i^2 = 50 \cdot (-1) = -50$ چې -50 يو حقيقي عدد

(Real number) دی.

$$(\sqrt{4}i) \cdot (\sqrt{9}i) = \sqrt{4 \cdot 9} \cdot i \cdot i = \sqrt{36} \cdot i^2 = 6 \cdot (-1) = -6$$

د موهومي عددونو د ضرب په عملیه کې د تبدیلی خاصیت (Commutative Property)

$$\boxed{(ai) \cdot (bi) = (bi) \cdot (ai) = -ab}$$

صدق کوي يعنې:

فعالیت

$$\left(\frac{2}{3}i\right) \cdot \left(-\frac{3}{5}i\right) \text{ د ضرب حاصل په لاس راوړئ.}$$

d: د وېش عملیه: د دوو موهومي عددونو د وېش حاصل یو حقیقي عدد دی.

څلورم مثال: $\frac{\sqrt{-7}}{\sqrt{-5}}$ ، $\frac{5i}{7i}$ او $\frac{\sqrt{13}i}{\sqrt{3}i}$ د وېش حاصل په لاس راوړئ.

حل:

- 1) $\frac{5i}{7i} = \frac{5}{7}$ ($\frac{5}{7}$ یو حقیقي عدد دی)
- 2) $\frac{\sqrt{13}i}{\sqrt{3}i} = \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{3}}$ ($\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{3}}$ یو حقیقي عدد دی)
- 3) $\frac{\sqrt{-7}}{\sqrt{-5}} = \frac{\sqrt{-1} \cdot \sqrt{7}}{\sqrt{-1} \cdot \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{7}i}{\sqrt{5}i} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}}$

فعالیت

$$36i \text{ پر } -2i \text{ ووېشئ.}$$

د موهومي عددونو د جمعې او ضرب په عملیو کې د تبدیلی خاصیت صدق کوي. د دوو موهومي عددونو د ضرب او وېش حاصل یو حقیقي عدد دی.

پوښتنې

(1) جمع یې کړئ: $\sqrt{-1}b + \sqrt{-1}c$ ، $\sqrt{-7} + \sqrt{-4}$ ، $\sqrt{7}i + \sqrt{7}i$

(2) تفریق یې کړئ: $\sqrt{5}i - \sqrt{5}i$ ، $12i - 7i$ ، $5i - 2i$

(3) لاندې موهومي عددونه سره ضرب او تقسیم کړئ.

$$\frac{13i}{26i} , \frac{16i}{-4i} \quad (3i) \cdot (5i) , (\sqrt{7}i) \cdot (-7i) , \left(\frac{7}{4}i\right) \cdot \left(-\frac{2}{9}i\right)$$



د مختلطو عددونو د جمعې او تفریق عمليې:

آیا د $3x - 2yi = 6 + i$ له مساوات څخه د x او y قیمتونه په لاس راوړلای شئ؟
 آیا پوهېږئ چې کوم عدد ته د مختلطو عددونو د جمعې د عمليې د عینیت عنصر وایي؟

مساوي مختلط عددونه (Equal Complex Numbers):

هغه وخت سره مساوي دي چې د دواړو عددونو حقيقي او موهومي برخې یو له بله سره مساوي وي. د $z_1 = a + bi$ او $z_2 = x + yi$ عددونه هغه وخت سره مساوي دي چې $x=a$ او $y=b$ وي.

لومړی مثال: که چېرې $z_1 = x_1 + 2y_1i$ او $z_2 = 3 - 5i$ وي، نو هغه وخت $z_1 = z_2$ دی چې: $x_1 = 3$ او $y_1 = -\frac{5}{2}$ وي.

فعالیت

1- که چېرې $z_1 = \sqrt{2}x + \sqrt{3}yi$ او $z_2 = -5 - 6i$ وي، د $z_1 = z_2$ له مخې د x او y قیمتونه پیدا کړئ.

2- که چېرې $2 + mi = k + 3i$ وي د m او k حقيقي عددونو قیمت پیدا کړئ.

د مختلطو عددونو د جمعې عمليې:

ده. که چېرې $z_1 = a + bi$ او $z_2 = c + di$ وي، نو:

$$z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d) \cdot i$$

یا په بل عبارت د دوو مختلطو عددونو د جمعې حاصل یو بل داسې مختلط عدد دی چې حقیقي برخه یې د دواړو عددونو د حقیقي برخو او موهومي برخه یې د دې دواړو عددونو د موهومي برخو له مجموعې څخه په لاس راغلي وي.

دویم مثال: که چېرې $z_1 = 2 - 3i$ او $z_2 = 3 + 4i$ وي، $z_1 + z_2$ پیدا کړئ

$$z_1 + z_2 = (2 - 3i) + (3 + 4i) = (2 + 3) + (-3 + 4)i = 5 + i$$

په همدې ډول:

$$(3 - 4i) + (-2 + 6i) = (3 - 2) + (-4 + 6)i = 1 + 2i$$

$$(-9 + 7i) + (3 - 15i) = (-9 + 3) + (7 - 15)i = -6 - 8i$$

$0 + 0i$ د مختلطو عددونو د جمعې د عملې د عینت عنصر (additive identity) دی، ځکه

$$(a + bi) + (0 + 0i) = (a + 0) + (b + 0)i = a + bi \quad \text{چې:}$$

همدارنگه د $a + bi$ عدد جمعې معکوس (additive inverse) د $-a - bi$ عدد دی، ځکه

$$(a + bi) + (-a - bi) = (a - a) + (b - b)i = 0 + 0i$$

چې:

فعالیت

د $(3x - yi) + (5x + 3yi)$ د جمعې حاصل په لاس راوړئ.

د مختلطو عددونو د تفریق عملیه: د دوو مختلطو عددونو د تفریق حاصل یو بل داسې

مختلط عدد دی چې حقیقي برخه یې د حقیقي برخو او موهومي برخه یې د موهومي برخو د تفریق

له حاصل څخه په لاس راغلي وي یعنې: $(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$

لومړی مثال: $(-4 + 3i) - (6 - 7i) = (-4 + 3i) + (-6 + 7i) = -10 + 10i$

دویم مثال: $(12 - 5i) - (8 - 3i) = (12 - 8) + (-5 + 3)i = 4 - 2i$

دوه مختلط عددونه هغه وخت سره مساوي دي چې د دواړو عددونو حقيقي او موهومي برخې يو له بله سره مساوي وي. د دوو مختلطو عددونو د جمعې حاصل يو داسې مختلط عدد دی چې حقيقي برخه يې د حقيقي برخو او موهومي برخه يې د موهومي برخو له مجموعې څخه په لاس راغلي وي، په همدې ډول د دوو مختلطو عددونو د تفریق حاصل يو داسې مختلط عدد دی چې حقيقي برخه يې د دواړو عددونو د حقيقي برخو او موهومي برخه يې د دواړو عددونو د موهومي برخو له حاصل تفریق څخه په لاس راغلي وي.

پوښتنې

1- لاندې مختلط عددونه جمع کړئ.

$$(2 + 5i) + (3 + 4i) \quad , \quad (13 - 12i) + (13 + 12i)$$

$$(-3 + 6i) + (10 - 7i) \quad , \quad (\sqrt{3} - ci) + (d + 5ci)$$

2- لاندې مختلط عددونه يو له بله تفریق کړئ.

$$(5 - i) - (7 + 3i)$$

$$(2\sqrt{3} + 5 \cdot \sqrt{7} i) - (\sqrt{3} + 3\sqrt{7} i)$$

$$(3c + 4di) - (3c + 8di)$$

3- د لاندې مختلطو عددونو جمعې معکوس پيدا کړئ.

$$2 + 3i \quad , \quad (2, -3) \quad , \quad \sqrt{2} + \sqrt{3} i$$

4- که $(x, y \in IR)$ او $3x + 2iy - ix + 5y = 7 + 5i$ وي، د x او y قيمتونه پيدا کړئ.

5- لاندې عمليې سرته ورسوئ او خپل ځوابونه د $a + bi$ په شکل وليکئ

$$(2 + 3i) + (-5 + 2i)$$

$$(-5 - 4i) - (-2 - \sqrt{2}i)$$

$$(2 + 3i) + (-5 - i)$$

$$(6 - 5i) + (3 + 2i)$$

$$(3.7 + 6.1i) - (1 + 5.9i)$$

$$\left(8 + \frac{3}{4}i\right) - \left(-7 + \frac{2}{3}i\right)$$

$$\left(-6 - \frac{5}{8}i\right) + \left(4 + \frac{1}{2}i\right)$$

$$(-2 + 5i) + (3 - i)$$

$$\left(3 + \frac{3}{5}i\right) - \left(-11 + \frac{7}{15}i\right)$$

$$\left(-4 - \frac{5}{6}i\right) + \left(13 + \frac{3}{8}i\right)$$

$$(-7 - \sqrt{-72}) + (8 + \sqrt{-50})$$

$$(\sqrt{3} + \sqrt{-2}) - (\sqrt{12} + \sqrt{8})$$

6- د لاندې مختلطو عددونو جمعې معکوس پیدا کړئ.

$$2 - 3i$$

$$8 + 11i$$

$$1 - i$$

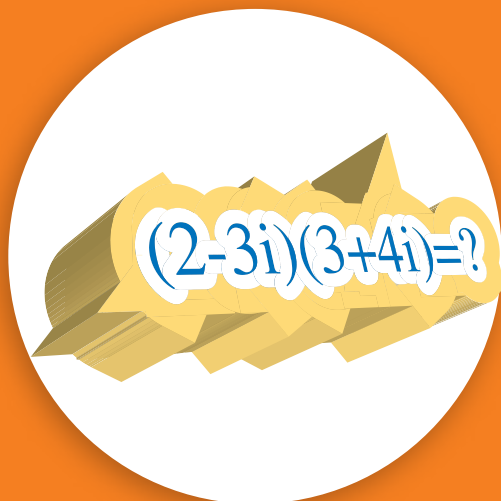
$$-1 + i$$

$$5 - 8i$$

$$-13 + 13i$$

$$-5i$$

$$2i$$



د مختلطو عددونو ضرب

آيا کولای شئ چې د $(2-3i)(3+4i)$ مختلطو عددونو د ضرب حاصل په لاس راوړئ؟

د $i^2 = -1$ په نظر کې نیولو سره د دوو مختلطو عددونو ضرب په لاندې ډول دی که:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (a + bi) \cdot (c + di) = ac + adi + bci + bdi \\ &= ac + adi + bci + bdi^2 \\ &= ac + (ad + bc)i + bd(-1) \\ z_1 \cdot z_2 &= (ac - bd) + (ad + bc)i \end{aligned}$$

لومړی مثال: د $(5-4i) \cdot (7-2i)$ د ضرب حاصل په لاس راوړئ.
حل:

$$\begin{aligned} (5-4i)(7-2i) &= 5(7) + 5(-2i) + (-4i)(7) - 4i(-2i) = 35 - 10i - 28i + 8i^2 \\ &= 35 - 38i + 8(-1) \\ &= 35 - 38i - 8 \\ &= 27 - 38i \end{aligned}$$

فعالیت

د $(2-3i)(3+4i)$ د ضرب حاصل په لاس راوړئ.

څرنگه چې $(a + bi)(1 + 0i) = a \cdot 1 + a \cdot 0i + bi \cdot 1 + bi \cdot 0i = a + bi$ دی، نو $1 + 0i$ ته د مختلطو عددونو د ضرب د عمليې د عینیت عنصر (Multiplicative identity) وایي لکه:

$$(3 + 5i)(1 + 0i) = 3 + 5i$$

د یوه مختلط عدد مزدوج (Conjugate of a Complex Number):

د $z = x + yi$ د مختلط عدد مزدوج $\bar{z} = x - yi$ دی په دې ډول چې:

$$z \cdot \bar{z} = (x + yi) \cdot (x - yi) = x^2 - (yi)^2 = x^2 + y^2$$

$$z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2$$

$$z + \bar{z} = (x + yi) + (x - yi) = 2x \quad , \quad 2x \operatorname{Re}(z)$$

$$z - \bar{z} = (x + yi) - (x - yi) = 2yi \quad , \quad 2yi \operatorname{Im}(z)$$

دویم مثال: د $z = 3 + 4i$ د عدد مزدوج $\bar{z} = 3 - 4i$ دی، $z + \bar{z}$ ، $z - \bar{z}$ او $z \cdot \bar{z}$ په لاس

راوړئ:

$$z \cdot \bar{z} = (3 + 4i) \cdot (3 - 4i) = 3(3) + 3(-4i) + 4i(3) + 4i(-4i)$$

$$= 9 - 16i^2 = 9 - 16(-1) = 9 + 16 = 25$$

$$z + \bar{z} = (3 + 4i) + (3 - 4i) = 6$$

(6 یو حقیقي عدد دی)

$$z - \bar{z} = (3 + 4i) - (3 - 4i) = 8i$$

(8i یو موهومي عدد دی)

فعالیت

د $z_1 = 5 - 3i$ ، $z_2 = 7 + i$ او $z_3 = \sqrt{5} + \sqrt{7}i$ مختلطو عددونو مزدوجونه پیدا کړئ.

څرنګه چې ومولیدل، د یو مختلط عدد د مزدوج د پیدا کولو لپاره، یوازې د موهومي برخې علامه تغیروو لکه:

مزدوج یې	عدد
i	-i
1+i	1-i
-4-2i	-4+2i
-5i-6	5i-6

د یو مختلط عدد ضربی معکوس (Multiplicative inverse)

پوهېږو چې د $a + bi$ د عدد مزدوج $a - bi$ دی او

$$(a + bi) \cdot (a - bi) = a^2 - (b^2 i^2) = a^2 - b^2(-1) = a^2 + b^2$$

د $a + bi$ عدد د ضربی معکوس د پیدا کولو له پاره د $\frac{1}{a + bi}$ عدد د مختلط عدد په معیاری شکل لیکو، نو د $\frac{1}{a + bi}$ د عدد صورت او مخرج په $a - bi$ کې ضربوو. (د $a - bi$ د مخرج مزدوج دی)

$$\frac{1}{a + bi} \cdot \frac{a - bi}{a - bi} = \frac{(a - bi)}{(a + bi)(a - bi)} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i$$

$$\frac{1}{a + bi} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i$$

د $(a + bi)$ د عدد ضربی معکوس $(\frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i)$ دی.

دریم مثال: د $2 - 3i$ د عدد ضربی معکوس پیدا کړئ.

$$\frac{1}{2 - 3i} \cdot \frac{2 + 3i}{2 + 3i} = \frac{2 + 3i}{4 - 9i^2} = \frac{2 + 3i}{4 + 9} = \frac{2 + 3i}{13} = \frac{2}{13} + \frac{3}{13}i$$

څلورم مثال: د $x^2 + 4$ افاده تجزیه کړئ.

$$x^2 + 4 = x^2 - (-1) \cdot 4 = x^2 - (i)^2 \cdot 4 = x^2 - (2i)^2 = (x - 2i)(x + 2i)$$

فعالیت

د $5 + 3i$ او $\sqrt{2} - 4i$ مختلطو عددونو ضربی معکوس پیدا کړئ.

که چېرې $z = x + yi$ او $w = x' + y'i$ دوه مختلط عددونه وي، نو $z \cdot w$ په دې ډول تعریف

$$z \cdot w = (xx' - yy') + (xy' + x'y)i$$

شوی دی.

د یو مختلط عدد د مزدوج د پیدا کولو لپاره یوازې د موهومي برخې علامه تغیر او $a + bi$ د مختلط

عدد ضربی معکوس $(\frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i)$ دی.

پوښتنې

1- لاندې مختلط عددونه سره ضرب کړئ:

$$\begin{aligned}(2+i)(3-2i) & , & (3+i)(3-i) \\ (-2+3i)(4-2i) & , & (2-5i)(2+5i) \\ (5+2i)(5-3i) & , & (\sqrt{6}+i)(\sqrt{6}-i) \\ (\sqrt{3}+\sqrt{2}i)(\sqrt{3}-\sqrt{2}i) & & \end{aligned}$$

2- د لاندې مختلطو عددونو ضربې معکوس پیدا کړئ:

$$1-i , 2+4i , 5-3i , 3a-4bi , (7,4)$$

3- لاندې افادې تجزیه کړئ:

$$x^2+16 , x^2+8 , x^2+5 , x^2+7$$

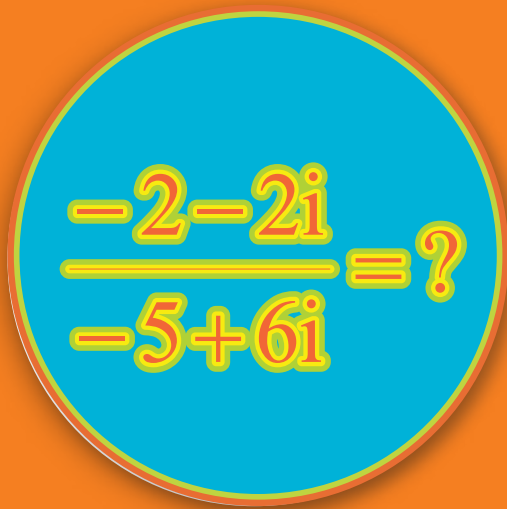
4- د $(-3+2i)^2$ او $(2+i)^2$ قیمتونه په لاس راوړئ:

5- که $z=4-3i$ وي، $8z-z^2$ پیدا کړئ.

6- دا معادله حل کړئ: $x+yi=(2-3i)(2+3i)$.

7- وښیاست چې: $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$ ، د i مربع جذر دی.

8- وښیاست چې: $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$ د $-i$ دریم جذر دی.



د دوو مختلطو عددونو وېش Division of two complex numbers

آيا د $\frac{-2-2i}{-5+6i}$ د وېش حاصل (خارج قسمت) په لاس راوړلای شى؟

څرنگه چې د $\frac{a+bi}{c+di}$ عدد په مخرچ کې c حقيقي عدد او di موهومي عدد دى، نو لومړى بايد مخرچ په حقيقي عدد بدل کړو، ددې لپاره صورت او مخرچ، د مخرچ په مزدوج کې ضربوو چې دې عمليې ته گویاکول (Rationalization) وايي.

لومړى مثال: د $\frac{4+3i}{2+5i}$ د وېش حاصل په لاس راوړئ.

حل: د $2+5i$ مزدوج $2-5i$ دى، صورت او مخرچ د مخرچ په مزدوج يا $2-5i$ کې ضربوو.

$$\begin{aligned} \frac{4+3i}{2+5i} &= \frac{4+3i}{2+5i} \cdot \frac{2-5i}{2-5i} = \frac{8-20i+6i-15i^2}{4-10i+10i-25i^2} = \frac{8-14i-15(-1)}{4-25(-1)} \\ &= \frac{23-14i}{29} = \frac{23}{29} - \frac{14}{29}i \end{aligned}$$

ليدل کېږي چې د وېش په حاصل کې حقيقي او موهومي برخې سره جلا دي.

فعاليت

د $\frac{1+i}{1-i}$ د وېش حاصل په لاس راوړئ او خپل ځواب د مختلط عدد په معياري شکل وليکئ.

تعریف

که $z_1 = a + bi$ او $z_2 = c + di$ وي، په لاندې ډول تعريف شوی دی

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \frac{ac - adi + bci - bdi^2}{c^2 - d^2i^2} = \frac{ac + bd - (ad - bc)i}{c^2 + d^2}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} - \frac{ad - bc}{c^2 + d^2}i$$

دویم مثال: د $z_1 = 2 - 3i$ عدد پر $z_2 = 1 + i$ وېشئ او بیا یې امتحان کړئ.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2 - 3i}{1 + i} = \frac{(2 - 3i)(1 - i)}{(1 + i)(1 - i)} = \frac{-1 - 5i}{2} = -\frac{1}{2} - \frac{5}{2}i$$

$$(1 + i)\left(-\frac{1}{2} - \frac{5}{2}i\right) = -\frac{1}{2} - \frac{5}{2}i - \frac{1}{2}i - \frac{5}{2}i^2 = -\frac{1}{2} - 3i + \frac{5}{2} = 2 - 3i$$

دریم مثال: د $\frac{3+2i}{5-i}$ د وېش حاصل په لاس راوړئ.

حل:

$$\frac{3+2i}{5-i} = \frac{(3+2i)(5+i)}{(5-i)(5+i)} = \frac{15+3i+10i+2i^2}{25-i^2} = \frac{15+13i-2}{25+1} = \frac{13+13i}{26} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$$

که $z = x + yi$ او $w = x' + y'i$ دوه مختلط عددونه وي، نو $\frac{z}{w}$ داسې تعريف شوی دی.

$$\frac{z}{w} = \frac{xx' + yy'}{x'^2 + y'^2} + \frac{x'y - xy'}{x'^2 + y'^2}i, \quad (x'^2 + y'^2 \neq 0)$$

د یو مختلط عدد د مزدوج خاصیتونه:

که z_1 او z_2 دوه مختلط عددونه وي:

$$1) \quad \overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$$

$$2) \quad \overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$$

3) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = \overline{z_2} \cdot \overline{z_1}$

4) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

5) $z + \bar{z} = 2x$

6) $z - \bar{z} = 2yi$

7) $\overline{\overline{z}} = z$

لومړی مثال: که $z_1 = 4 + 5i$ او $z_2 = -3 + 2i$ وي، وښیاست چې:

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} \quad \text{او} \quad \overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$$

حل:

$$z_1 + z_2 = (4 + 5i) + (-3 + 2i) = 1 + 7i \Rightarrow \overline{z_1 + z_2} = 1 - 7i$$

$$\overline{z_1} + \overline{z_2} = (4 - 5i) + (-3 - 2i) = 1 - 7i$$

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2} \quad \text{په پایله کې}$$

$$z_1 \cdot z_2 = (4 + 5i) \cdot (-3 + 2i) = -12 - 10 + (8 - 15)i = -22 - 7i$$

$$\Rightarrow \overline{z_1 \cdot z_2} = -22 + 7i$$

$$\overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = (4 - 5i) \cdot (-3 - 2i) = -12 - 8i + 15i + 10i^2 = -12 - 8i + 15i - 10 \\ = -22 + 7i$$

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = -22 + 7i \quad \text{په پایله کې}$$

دویم مثال: که $z = x + yi$ وي $z + \bar{z}$ او $z - \bar{z}$ پیدا کړئ.

$$\text{حل: } z + \bar{z} = (x + yi) + (x - yi) = 2x, \quad z - \bar{z} = (x + yi) - (x - yi) = 2yi$$

فعالیت

که $z = 2 + 3i$ وي، $\overline{\overline{z}}$ ، $\overline{z + \bar{z}}$ او $\overline{z - \bar{z}}$ پیدا کړئ.

پوښتنې

1- د وېش حاصل يې پيدا کړئ:

$$\frac{7-i}{3-5i}, \quad \frac{5-2i}{6-i}, \quad \frac{3-4i}{2-5i}, \quad \frac{1+i}{1-i}$$

2- که $z_1 = -a - 3bi$ او $z_2 = 2a - 3bi$ وي. وښايست چې:

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} \quad \text{او} \quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$$

دی.

3- د وېش حاصل پيدا کړئ او خپل ځوابونه د $a + bi$ په شکل وليکئ.

$$a: \frac{2}{5-i} \quad b: \frac{3-i}{2+i} \quad c: \frac{2-3i}{3}$$

4- د $\frac{6 + \sqrt{-36}}{3 + \sqrt{-9}}$ د وېش حاصل مساوي دی په:

$$a: 1 \quad b: 2 \quad c: 3i \quad d: -2$$

5- خپل ځوابونه د $a + bi$ په شکل وليکئ.

$$\frac{3+4i}{4i} \quad \frac{-5}{2-3i} \quad \frac{6}{1+3i}$$

$$\frac{7}{7-2i} \quad \frac{-4+8i}{2-4i} \quad \frac{3-2i}{-6+4i}$$

$$\frac{1}{i}$$

د مختلطو عددونو په ساحه کې د دویمې درجې یو مجهوله معادلې حل:

$$x^2 + x + 4 = 0$$

$$x_1 = ?$$

$$x_2 = ?$$

آیا د $x^2 + x + 4 = 0$ معادلې جذرونه پیدا

کولای شئ؟

د یوې دویمې درجې یو مجهوله معادلې عمومي شکل $ax^2 + bx + c = 0$ ، $(a \neq 0)$ دی. که $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ معادله دوه د مختلفو علامو لرونکي حقيقي جذرونه لري. که $\Delta = 0$ معادله دوه مساوی جذرونه لري. که $\Delta < 0$ معادله د حقيقي عددونو په ست کې حل نه لري، خو د مختلطو عددونو په ساحه کې دوه جذرونه لري.

لومړی مثال: د $x^2 - 10x + 26 = 0$ معادله حل کړئ.

حل: $a = 1$ $b = -10$ $c = 26$ دی.

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{10 \pm \sqrt{(-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 26}}{2 \cdot 1} = \frac{10 \pm \sqrt{-4}}{2}$$

$$= \frac{10 \pm 2i}{2} = 5 \pm i \quad \Rightarrow \quad x_1 = 5 + i \quad x_2 = 5 - i$$

فعالیت

دا جذرونه په پورتنۍ معادله کې وضع او امتحان یې کړئ.

دویم مثال: د $4x^2 + 4ix + 15 = 0$ معادله حل کړئ.

حل:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (4i)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 15 = 16i^2 - 240 = -256$$

$$\pm \sqrt{\Delta} = \pm \sqrt{-256} = \pm \sqrt{256(-1)} = \pm 16i$$

$$x_1 = \frac{-4i + 16i}{2 \cdot 4} = \frac{12i}{8} = \frac{3}{2}i$$

$$x_2 = \frac{-4i - 16i}{8} = -\frac{5}{2}i$$

دریم مثال: $x^2 + 3ix - 2 = 0$ معادله د محمد بن موسی د فورمول په مرسته، د مختلطو عددونو په ساحه کې حل کړئ.

$$\Delta = b^2 - 4ac = (3i)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 3^2 \cdot i^2 + 8 = -9 + 8 = -1$$

$$\pm \sqrt{\Delta} = \pm \sqrt{-1} = \pm i$$

$$x_{1,2} = \frac{-3i \pm i}{2 \cdot 1} \quad x_1 = \frac{-4i}{2} = -2i \quad x_2 = \frac{-2i}{2} = -i$$

فعالیت

د $x^2 + 3 = 0$ ، $x^2 - 6x + 18 = 0$ او $x^2 - 4x + 13 = 0$ معادلې حل کړئ.

پوښتنې

(1) هغه دویمه درجه معادله پیدا کړئ چې جذرونه یې $(3 + 2i)$ او $(3 - 2i)$ وي.
(2) لاندې معادلې حل کړئ.

$$x^2 - 4x + 13 = 0 \quad , \quad x^2 - 6x + 18 = 0 \quad , \quad -4x^2 + 3x - 5 = 0$$

$$x^2 + 8x + 41 = 0 \quad , \quad x^4 - 1 = 0 \quad , \quad 3x^2 + x + 2 = 0$$

(3) داسې دویمې درجې معادلې په لاس راوړئ چې جذرونه یې په لاندې ډول راکړل شوي دي.

$2 + 5i$, $2 - 5i$	$1 + i$, $1 - i$
$4i$, $-4i$	$5i$, $-5i$
$2i$, $3i$	i , $\frac{1}{i}$
$\frac{2}{3} + \frac{1}{2}i$, $\frac{2}{3} - \frac{1}{2}i$	$2 - i$, $2 + i$

د څپرکي لنډيز

• منفي عددونه د حقيقي عددونو په سټ کې جفت جذرنه لري، خو د مختلطو عددونو په سټ کې منفي عددونه جفت جذر لري.

• مختلط عددونه د حقيقي او موهومي عددونو له يو ځای کېدو څخه په لاس راځي.

• د حقيقي عددونو مربع مثبت، خو د موهومي عددونو مربع منفي ده

$$i^2 = -1 \Rightarrow i = \sqrt{-1}$$

• داسې عددونو ته چې $\sqrt{-1}$ يې يو فکتور وي، موهومي عددونه وايي.

• د مختلطو عددونو سټ C په لاندې ډول تعريف شوی دی:

$$C = \{z / z = a + bi, a, b \in \mathbb{R}, i = \sqrt{-1}\}$$

• د يو مختلط عدد معياري شکل $z = a + bi$ دی چې a ته د z د عدد حقيقي برخه او bi ته د z

موهومي برخه وايي يا $a = \text{Re}(z)$ او $bi = \text{Im}(z)$

• د i د مختلفو توانونو د پيدا کولو لپاره د i توان پر 4 وېشو چې له يوه سره مساوي کېږي او که پوره

پرې نه وېشل کېږي، نو د i د توري توان پر 4 د وېشلو له پاتې (باقي مانده) سره مساوی دی، لکه:

$$i^{4k+r} = i^r \quad \text{يا} \quad i^{4k+r} = (i^4)^k \cdot i^r = (1)^k \cdot i^r = i^r$$

• که د $z = a + bi$ په مختلط عدد کې $b = 0$ وي، نو a ته خالص حقيقي عدد او که

$a = 0$ وي، bi ته خالص موهومي عدد وايي.

• هغه مختلط عدد چې حقيقي او موهومي برخې يې دواړه صفرونه وي، صفري مختلط عدد ورته

وايي. ($a = 0, b = 0$)

• دوه مختلط عددونه هغه وخت سره مساوي دي چې د دواړو عددونو حقيقي او موهومي برخې

يو له بله سره مساوي وي. $\text{Re}(z_1) = \text{Re}(z_2)$ او $\text{Im}(z_1) = \text{Im}(z_2)$

• د دوو مختلطو عددونو د جمعې حاصل يو بل داسې مختلط عدد دی چې حقيقي برخه يې د

دواړو عددونو د حقيقي برخو او موهومي برخو يې د دواړو عددونو د موهومي برخو له مجموعې

څخه عبارت ده.

- د دوو مختلطو عددونو د تفریق حاصل داسې یو مختلط عدد دی چې حقیقي برخه یې د دواړو عددونو د حقیقي برخو او موهومي برخه یې د دواړو عددونو د موهومي برخو د تفریق له حاصل څخه عبارت ده.

• که $Z_1 = x_1 + y_1i$ او $Z_2 = x_2 + y_2i$ وي، نو د مختلطو عددونو د جمعې، تفریق، ضرب او وېش عمليې داسې تعریف شوي دي.

$$Z_1 + Z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i$$

$$Z_1 - Z_2 = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)i$$

$$Z_1 \cdot Z_2 = x_1x_2 - y_1y_2 + (x_1y_2 + y_1x_2)i$$

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{y_1x_2 - y_2x_1}{x_2^2 + y_2^2}i, \quad (Z_2 \neq 0)$$

• د $Z = x + yi$ مختلط عدد مزدوج له $\bar{Z} = x - yi$ څخه عبارت دی.

$$Z\bar{Z} = x^2 + y^2$$

$$Z + \bar{Z} = 2x$$

$$Z - \bar{Z} = 2yi$$

$$\overline{Z_1 + Z_2} = \overline{Z_1} + \overline{Z_2}$$

$$\overline{Z_1 - Z_2} = \overline{Z_1} - \overline{Z_2}$$

$$\overline{Z_1 \cdot Z_2} = \overline{Z_1} \cdot \overline{Z_2} = \overline{Z_2} \cdot \overline{Z_1}$$

$$\overline{\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)} = \frac{\overline{Z_1}}{\overline{Z_2}}$$

• د $z = a + bi$ عدد جمعې معکوس $-a - bi$ دی او ضربې معکوس یې

$$\frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i$$

- $0 + 0i = (0,0)$ د مختلطو عددونو د جمعې د عمليې د عینیت عنصر او $1 + 0i$ د ضرب د عمليې د عینیت عنصر دی.
- هغه دویمه درجې معادلې چې د حقیقي عددونو په ست کې حل نه لري، د مختلطو عددونو په ست کې حل لري.

د فصل پوښتنې:

(1) i^{51} مساوي دي په:

- a) 1 b) -1 c) i d) -i

(2) i^{-98} موهومي عدد مساوي دی په:

- a) 1 b) -1 c) i d) -i

(3) i^{67} موهومي عدد مساوي دی په:

- a) -i b) 1 c) -1 d) i

(4) $7i - 4i$ مساوي دی په:

- a) -3i b) 3i c) 3 d) -3

(5) $3i \cdot 4i$ مساوي دی په:

- a) -12 b) 12 c) 12i d) -12i

(6) $\frac{64i}{8i}$ مساوي دی په:

- a) -8 b) 8 c) 8i d) -8i

(7) $\frac{7}{9}i \cdot \frac{2}{9}i$ مساوي دی په:

- a) $-\frac{14}{81}$ b) $\frac{14}{81}$ c) $-\frac{14}{81}i$ d) $\frac{14}{81}i$

(8) $\frac{\sqrt{-11}}{\sqrt{-5}}$ مساوي دی په:

- a) $\sqrt{\frac{11}{5}}$ b) $\frac{-11}{5}$ c) $\frac{-11}{5}i$ d) $\frac{11}{5}i$

(9) $\frac{\sqrt{-1}\sqrt{5}}{\sqrt{-1} \cdot 5}$ مساوي دی په:

- a) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ b) $-\frac{\sqrt{5}}{5}$ c) $\frac{5}{3}i$ d) درې واړه سم نه دي

$$(10) \quad -\frac{xi}{\sqrt{yi}} \text{ مساوي دی په:}$$

$$\text{a) } \frac{x}{\sqrt{y}} \quad \text{b) } \frac{-x}{\sqrt{y}} \quad \text{c) } \frac{xi}{\sqrt{y}} \quad \text{d) } \frac{x}{y}$$

(11) لاندې مختلط عددونه جمع کړئ.

$$(3 + 4i) + (2 + 5i) \quad (a + bi) + (c + di)$$

$$(1 + i) + (1 - i) \quad (2 + 3i) + (2 - 3i)$$

(12) لاندې مختلط عددونه تفریق کړئ.

$$(4 + 3i) - (4 + 4i) \quad (3 - 2i) - (3 + 2i)$$

$$(4 + 4i) - (4 + 3i) \quad (1 + i) - (1 - i)$$

$$(13) \quad (2a + ib) - (2a - ib) \text{ مساوي دي په:}$$

$$\text{a) } -ib \quad \text{b) } -2ib \quad \text{c) } 2ib \quad \text{d) } 4a$$

$$(14) \quad (2 - 3i)(2 + 3i) \text{ د ضرب حاصل مساوي دی په:}$$

$$\text{a) } -13 \quad \text{b) } 13i \quad \text{c) } 13 \quad \text{d) } 9i$$

(15) لاندې مختلط عددونه د $a + bi$ په شکل وليکئ.

$$4(2 + 5i) - (3 - 4i) \quad (4 - 3i)(2 + i)$$

$$i(3 - 2i)^2 \quad i^{51}$$

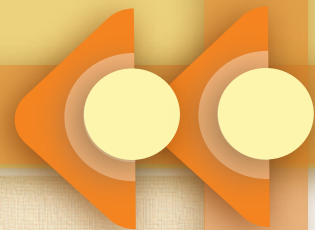
(16) که $z_1 = 2 - 4i$ او $z_2 = 1 - i$ وي، وبنیاست چې:

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2} \quad , \quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} \quad , \quad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$$

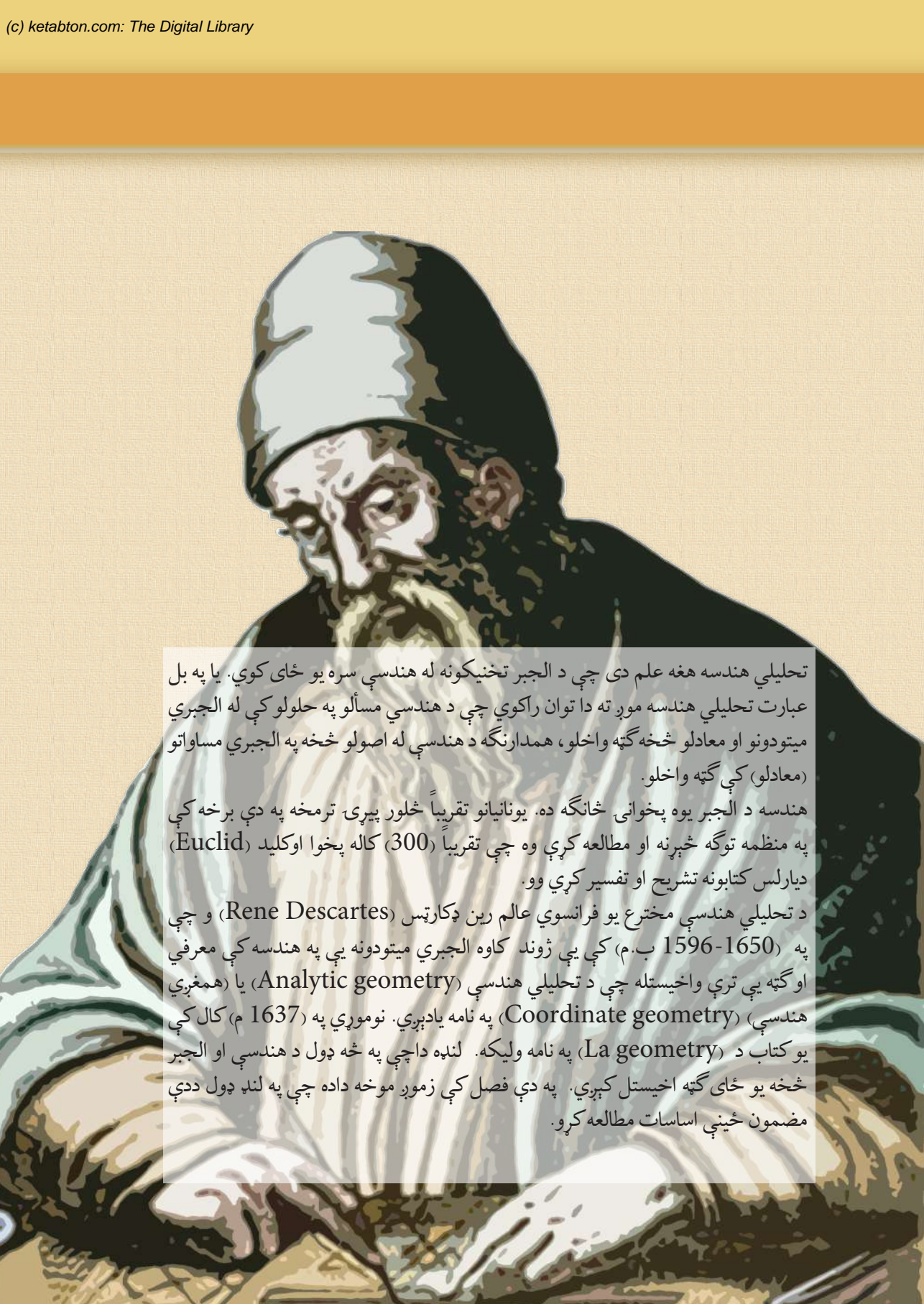
(17) د لاندې مختلطو عددونو جمعي او ضربي معکوس پیدا کړئ.

$$3x - \frac{1}{2}yi \quad 2a - bi \quad 2 + 5i \quad -7 + 3i \quad -6 + 2i \quad 3 - i \quad \sqrt{2} + i$$

(18) د $5x^2 + 2x + 1 = 0$ معادله حل کړئ.



اووم خپرکی تحلیلی هندسه



تحليلي هندسه هغه علم دی چې د الجبر تخنیکونه له هندسې سره یو ځای کوي. یا په بل عبارت تحلیلي هندسه مور ته دا توان راکوي چې د هندسي مسألو په حلولو کې له الجبري میتودونو او معادلو څخه گټه واخلو، همدارنگه د هندسې له اصولو څخه په الجبري مساواتو (معادلو) کې گټه واخلو.

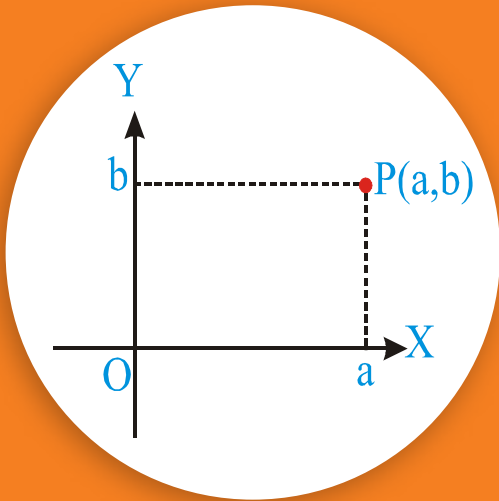
هندسه د الجبر یوه پخوانی څانگه ده. یونانیانو تقریباً څلور پېړۍ ترمخه په دې برخه کې په منظمه توگه څېړنه او مطالعه کړې وه چې تقریباً (300) کاله پخوا اوکلید (Euclid) دیارلس کتابونه تشریح او تفسیر کړي وو.

د تحلیلي هندسې مخترع یو فرانسوي عالم رین دکارتس (Rene Descartes) و چې په (1596-1650 ب.م) کې یې ژوند کاوه الجبري میتودونه یې په هندسه کې معرفي او گټه یې ترې واخیستله چې د تحلیلي هندسې (Analytic geometry) یا (همغږي هندسې) (Coordinate geometry) په نامه یادېږي. نوموړي په (1637 م) کال کې یو کتاب د (La geometry) په نامه ولیکه. لنډه داچې په څه ډول د هندسې او الجبر څخه یو ځای گټه اخیستل کېږي. په دې فصل کې زموږ موخه داده چې په لنډ ډول ددې مضمون ځینې اساسات مطالعه کړو.

د وضعیه کمیاتو سیستم یا

کوارډنټ سیستم

(Coordinate system)



آیا د $(2,0)$ ، $(-4,7)$ ، $(2,2)$ ، $(0,-1)$ او د $(0,-2)$ نقطې د وضعیه کمیاتو په سیستم کې ټاکلای شی؟

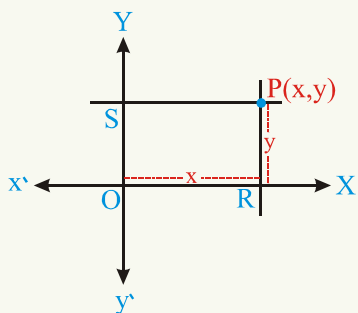
فعالیت

د وضعیه کمیاتو په مستوي کې د XX' او YY' یو پر بل دوه عمود خطونه رسم کړئ. ددې دوو خطونو د تقاطع ټکي (نقطې) ته O وایې چې د O نقطې ته د وضعیه کمیاتو د محورونو مبدا (Origin) وایي.

دوه یو پر بل عمود خطونه د کوارډنټ د محورونو (Coordinate axes) په نامه یادېږي. چې د XOX' افقي خط د X محور او د YOY' عمودي خط د Y له محور څخه عبارت دی. ښکاره ده ټول عددونه چې د X پر محور د مبدا ښي خوا ته واقع دي، مثبت او که د مبدا کښي خوا ته واقع وي، منفي دي. همدرانگه هغه عددونه چې د Y پر محور له مبدا پورته واقع دي، مثبت او که له مبدا لاندي واقع دي، منفي عددونه دي.

فرضوو چې که P په مستوي کې یوه نقطه وي، کولای شو چې د P نقطه د یوې مرتبې جوړې (OrderPair) په واسطه وښایو. په دې ډول چې د P له نقطې څخه د X او Y له محورونو سره موازي مستقیم خطونه رسموو. چې دا مستقیم خطونه د Y محور د S په نقطه کې او د X محور د R په نقطه کې قطع کوي. چې د $OR = x$ مستقیمه فاصله او $OS = y$ ده. په نتیجه کې د P د نقطې موقعیت د (x, y) د مرتبې جوړې په واسطه د وضعیه کمیاتو په سیستم کې ټاکل کېږي.

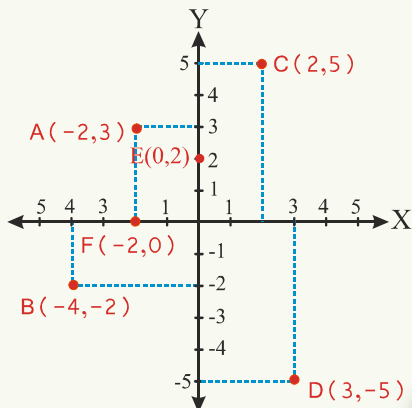
په مستوي کې هره مرتبه جوړه د یوې نقطې په واسطه او د مستوي هره نقطه د (x, y) د حقیقي عددونو د مرتبې جوړې په واسطه ښودل کېږي. چې x او y د X او Y له محورونو څخه د P د



نقطې مستقیمې فاصلې دي چې دې سیستم ته کارتیزني یا کوارډنټ سیستم (Coordinate System) وايي. د مرتبې جوړې لومړنۍ مرکبې ته د X مختصه او دویمې ته د Y مختصه (Y-Coordinate) وايي. د کوارډنټ محورونه مستوي په څلورو ناحیو (ربعو) (quadrants) وېشي. په دې ډول چې په لومړنۍ ناحیه (ربع) کې، $x > 0$ ، $y > 0$ ، په دویمه ربع کې $x < 0$ ، $y > 0$ ، په دریمه ربع کې $x < 0$ ، $y < 0$ او په څلورمه ربع کې $x > 0$ او $y < 0$ دي.

لومړی مثال: د $A(-2,3)$ ، $B(-4,-2)$ ، $C(2,5)$ ، $D(3,-5)$ ، $E(0,2)$ او $F(-2,0)$

نقطې د وضعیه کمیاتو په سیستم کې وټاکئ.
حل:



فعالیت

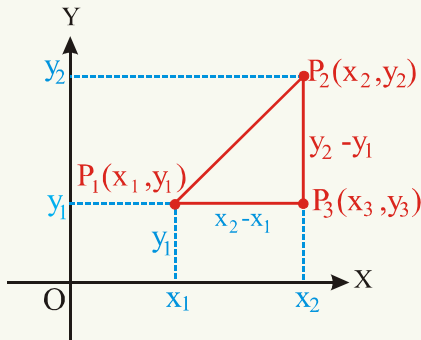
- وښیاست کومې نقطې چې د X پر محور پرتې دي، د Y مختصې یې صفر او کومې نقطې چې د Y پر محور پرتې دي، د X مختصې یې صفر دي.
- وویاست چې د $(2,3)$ ، $(-2,3)$ ، $(2,-3)$ ، $(-2,-3)$ ، $(0,4)$ او $(4,0)$ نقطې په کومو ربعو کې واقع دي.

د دوو نقطو ترمنځ فاصله (Distance between two points):

آیا کولای شئ چې وایاست، د $A(4,8)$ او $B(1,2)$ د نقطو ترمنځ فاصله څو واحد ده؟ که $P_1(x_1, y_1)$ او $P_2(x_2, y_2)$ په مستوي کې دوې نقطې وي. موږ کولای شو چې د P_1 او

P_2 ترمنڻ فاصلہ يا $d = |P_1 P_2|$ د دوو نقطو ترمنڻ فاصلہ د $P_1 P_3 P_2$ د قائم الزاويه مثلث له مخي د فيثاغورث د قضيه په اساس پيدا ڪرو، لڪه څرنگه چي په شڪل کي ليدل ڪري.

$$\begin{aligned} \overline{(P_1 P_2)}^2 &= \overline{(P_1 P_3)}^2 + \overline{(P_2 P_3)}^2 \\ d = |P_1 P_2| &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \\ &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \end{aligned}$$

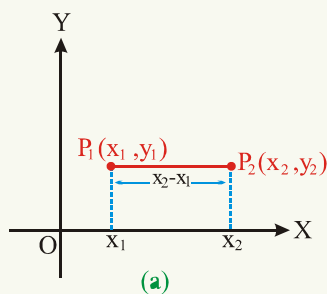


پام مو وي چي ڪه د $P_1(x_1, y_1)$ او $P_2(x_2, y_2)$ نقطي پر افقي خط باندي واقع وي، په دي حالت کي $y_1 = y_2$ ڪري، لڪه: څرنگه چي د (a) په شڪل کي ليدل ڪري.

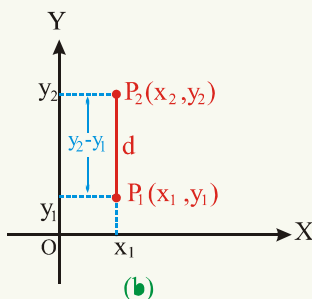
$$d = |P_1 P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + 0} = |x_2 - x_1|$$

او ڪه د P_1 او P_2 نقطي پر عمودي خط باندي واقع وي، په دي حالت کي $x_1 = x_2$ دي، لڪه: چي د (b) په شڪل کي ښودل شوي دي.

$$d = |P_1 P_2| = \sqrt{0 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(y_2 - y_1)^2} = |y_2 - y_1|$$



(a)



(b)

دويم مثال: د $P_1(3, -2)$ او $P_2(-1, -5)$ نقطو ترمنڻ فاصلہ پيدا ڪري.
حل:

$$\begin{aligned} \overline{P_1P_2} &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \\ &= \sqrt{(-1 - 3)^2 + [-5 - (-2)]^2} = \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2} = \sqrt{25} = 5 \end{aligned}$$

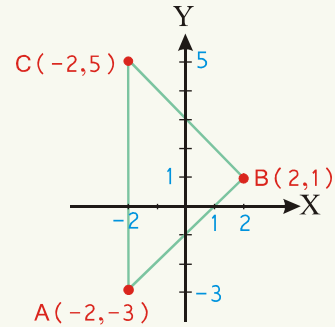
فعالیت

د $P_1(8,0)$ او $P_2(2,0)$ نقطو ترمنځ فاصله پیدا کړئ.

دریم مثال: د فاصلې د فورمول په مرسته وښیاست چې $A(-2,-3)$ ، $B(2,1)$ او $C(-2,5)$ د یو قائم الزاویه مثلث راسونه دي.

حل:

$$\begin{aligned} |AB| &= \sqrt{[2 - (-2)]^2 + [1 - (-3)]^2} = \sqrt{32} \\ |BC| &= \sqrt{(-2 - 2)^2 + (5 - 1)^2} = \sqrt{32} \\ |CA| &= \sqrt{[-2 - (-2)]^2 + [5 - (-3)]^2} = \sqrt{64} \\ |AB|^2 + |BC|^2 &= 32 + 32 = 64 \\ |CA|^2 &= 64 \end{aligned}$$



څرنگه چې: $|CA|^2 = |AB|^2 + |BC|^2$ دی نو د $\triangle ABC$ مثلث یو قائمه زاویه مثلث دی.

فعالیت

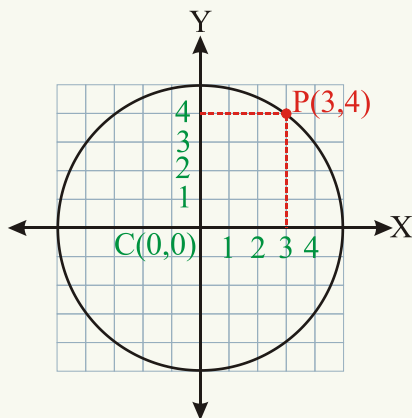
وښیاست چې $A(-6,3)$ ، $B(3,-5)$ او $C(-1,5)$ نقطې د قائمه زاویه مثلث راسونه دي.

څلورم مثال: که $C(0,0)$ د دایرې مرکز او د $P(3,4)$ نقطه د دایرې د محیط یوه نقطه وی،

ددې دایرې د شعاع اوږدوالی پیدا کړئ.

حل:

$$\begin{aligned}\overline{PC} = R &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(3 - 0)^2 + (4 - 0)^2} \\ &= \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5\end{aligned}$$



د وضعيه كمياتو په مستوي كې هغه نقطې چې د X پر محور پرتې دي، د Y مختصې يې صفر او كومي نقطې چې د Y پر محور پرتې دي د X مختصې يې صفر دي.

د $P(x_1, y_1)$ او $Q(x_2, y_2)$ د دوو نقطو تر منځ فاصله د
له فورمول څخه په لاس راځي. $d = |PQ| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

1- په لاندې راکړل شوو نقطو کې د کومې نقطې فاصله د وضعیه کمیاتو له مبدا څخه 15 واحد ده؟

a: $(\sqrt{176}, 7)$

b: $(10, -10)$

c: $(1, 15)$

d: $(\frac{15}{2}, \frac{15}{2})$

2- وښیاست چې د $A(0, 2)$ ، $B(\sqrt{3}, 1)$ او $C(0, -2)$ نقطې د یو قایمه زاویه مثلث راسونه دي.

3- د $(0, 5)$ او $(0, -3)$ نقطو ترمنځ فاصله پیدا کړئ.

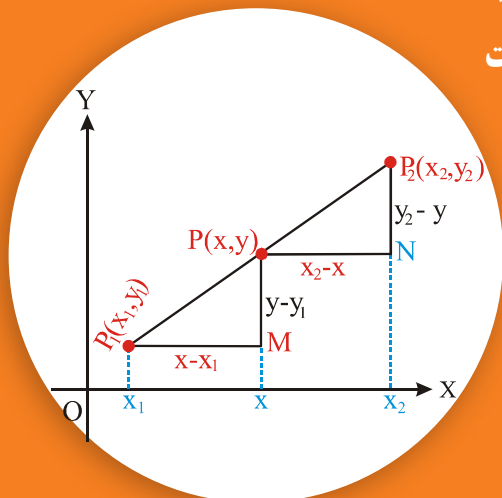
4- د $A(-\frac{1}{2}, 3)$ او $B(-1, \frac{-3}{4})$ نقطو ترمنځ فاصله پیدا کړئ.

5- د $(7, 11)$ او $(1, 3)$ نقطو ترمنځ فاصله پیدا کړئ.

6- د $(3, 6)$ او $(1, 2)$ نقطو ترمنځ فاصله پیدا کړئ.

7- د $(3, 7)$ او $(12, 19)$ نقطو ترمنځ فاصله پیدا کړئ.

د هغې نقطې د وضعیه کمیاتو پیدا کول چې یو قطعه خط په یوه نسبت باندي وېشي:



آیا کولای شئ د هغه مستقیم خط د تنصیف د نقطې وضعیه کمیات پیدا کړئ چې د $A(3,1)$ او $B(-2,4)$ له نقطو څخه تېرېږي؟ که د P د نقطې وضعیه کمیات (x, y) وي

چې د $\overline{P_1 P_2}$ مستقیم خط د r په نسبت وېشي یا $r = \frac{P_1 P}{P P_2}$ وي. د $P_1 M P$ او $P N P_2$ د مثلثونو له مشابهت څخه لرو چې:

$$\frac{P_1 P}{P P_2} = \frac{P_1 M}{P N} = \frac{x - x_1}{x_2 - x} = r$$

$$x - x_1 = r x_2 - r x$$

$$x + r x = r x_2 + x_1$$

$$(1 + r)x = r x_2 + x_1$$

$$x = \frac{x_1 + r x_2}{1 + r}$$

$$\frac{P_1 P}{P P_2} = \frac{P M}{P_2 N} = \frac{y - y_1}{y_2 - y} = r$$

$$y - y_1 = r y_2 - r y$$

$$y + r y = r y_2 + y_1$$

$$(1 + r)y = r y_2 + y_1$$

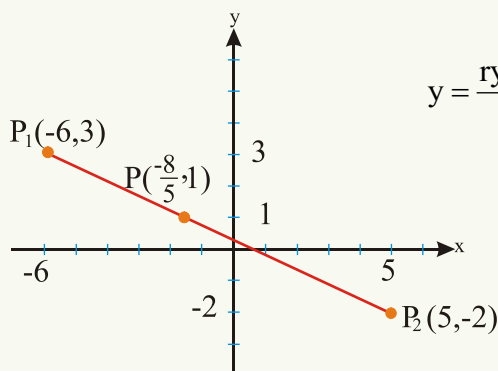
$$y = \frac{y_1 + r y_2}{1 + r}$$

لومړی مثال: د P نقطې وضعیه کمیات پیدا کړئ، که هغه مستقیم خط چې د $P_1(-6,3)$ او $P_2(5,-2)$ له نقطو څخه تېرېږي د $\frac{2}{3}$ په نسبت وېشي یا $\frac{P_1 P}{P P_2} = \frac{2}{3}$ وي.

$$x_1 = -6 \quad x_2 = 5 \quad r = \frac{2}{3}$$

$$x = \frac{r x_2 + x_1}{1 + r} = \frac{\frac{2}{3} \cdot 5 - 6}{1 + \frac{2}{3}} = -\frac{8}{5}$$

حل

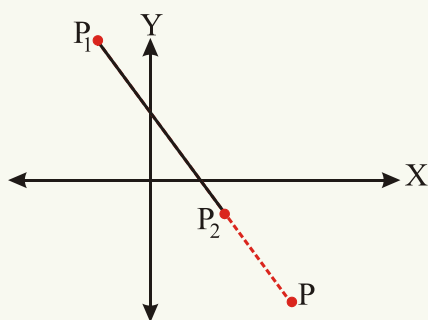


$$y = \frac{ry_2 + y_1}{1+r} = \frac{\frac{2}{3}(-2) + 3}{1 + \frac{2}{3}} = \frac{-\frac{4}{3} + 3}{1 + \frac{2}{3}} = 1$$

نو د $P(-\frac{8}{5}, 1)$ نقطې وضعیه کمیات
دي چې د $\overline{P_1 P_2}$ خط د $\frac{2}{3}$ په نسبت
وېشي.

متوجه باید اوسو چې که د P نقطه د

$\overline{P_1 P_2}$ قطعه خط داخلياً د r په نسبت و وېشي، $r > 0$ او که خارجاً يې و وېشي، نو $r < 0$ دی.



د مثال په ډول په شکل کې لیدل کېږي چې که د P نقطه

د $\overline{P_1 P_2}$ قطعه داخلياً د r په نسبت و وېشي یا په بل

عبارت که $P_1 P$ او PP_2 همجهت وي، $r > 0$

او که د P نقطه د $\overline{P_1 P_2}$ قطعه خط خارجاً د r

په نسبت و وېشي یا دا چې $P_1 P$ او PP_2 مختلف

الجهت وي، $r < 0$ دی، نو $\frac{P_1 P}{PP_2} = -r$ لکه:

چې په پورتنی شکل کې لیدل کېږي.

دویم مثال: د P د نقطې وضعیه کمیات پیدا کړئ، که هغه مستقیم خط چې د $P_1(-8, 4)$ او

$P_2(2, -1)$ له نقطو څخه تېرېږي.

a: داخلياً يې د $\frac{2}{3}$ په نسبت و وېشي. b: خارجاً يې د $\frac{2}{3}$ په نسبت و وېشي.

د a حل:

$$r = \frac{2}{3}$$

$$x = \frac{rx_2 + x_1}{1+r} = \frac{\frac{2}{3} \cdot 2 - 8}{1 + \frac{2}{3}} = \frac{-20}{5} = -4, \quad y = \frac{ry_2 + y_1}{1+r} = \frac{\frac{2}{3}(-1) + 4}{1 + \frac{2}{3}} = \frac{10}{5} = 2$$

نو د p د نقطې وضعیه کمیات چې د $\overline{P_1 P_2}$ قطعه خط داخلاً د $\frac{2}{3}$ په نسبت وېشي له $(-4, 2)$

څخه عبارت دي

د b حل: څرنګه چې د p نقطه د $\overline{P_1 P_2}$ قطعه خط خارجاً د $\frac{2}{3}$ په نسبت وېشي، نو:

$$r = -\frac{2}{3}$$

$$x = \frac{\left(-\frac{2}{3}\right) \cdot 2 - 8}{1 - \frac{2}{3}} = -28, \quad y = \frac{\left(-\frac{2}{3}\right)(-1) + 4}{1 - \frac{2}{3}} = 14$$

د p د نقطې وضعیه کمیات چې د $\overline{P_1 P_2}$ قطعه خط خارجاً د $\frac{2}{3}$ په نسبت وېشي له $(-28, 14)$

څخه عبارت دي.

فعالیت

د p د نقطې وضعیه کمیات پیدا کړئ، په داسې حال کې هغه قطعه خط چې د $A(4, 6)$ او

$B(-2, 3)$ له نقطو څخه تېرېږي، داخلاً یې د $\frac{1}{2}$ په نسبت و وېشي.

که د p نقطه د $\overline{P_1 P_2}$ د مستقیم خط د تنصیف نقطه وي، په دې حالت کې $r = 1$ دی او د p

$$\text{نقطې وضعیه کمیات عبارت دي له: } x = \frac{x_1 + x_2}{2} \text{ او } y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

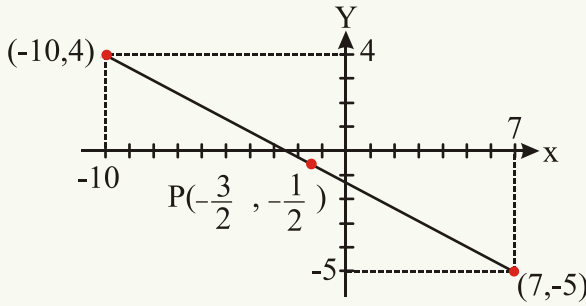
دریم مثال: د هغه قطعه خط د تنصیف د نقطې وضعیه کمیات پیدا کړئ چې د $(-10, 4)$ او

$(7, -5)$ له نقطو څخه تېرېږي.

حل:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-10 + 7}{2} = -\frac{3}{2}$$

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{4 - 5}{2} = -\frac{1}{2}$$



د p د نقطې وضعیه کمیات چې د $\overline{P_1 P_2}$ قطعه خط د r په نسبت وېشي.

د $\overline{P_1 P_2}$ قطعه خط د تنصیف د نقطې وضعیه کمیات او د $x = \frac{rx_2 + x_1}{1+r}$ ، $y = \frac{ry_2 + y_1}{1+r}$

عبارت دي له: $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$ ، $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$ که د p نقطه د $\overline{P_1 P_2}$ قطعه خط داخلياً د r

په نسبت و وېشي، نو r مثبت او که خارجاً يې و وېشي، نو r منفي دی.

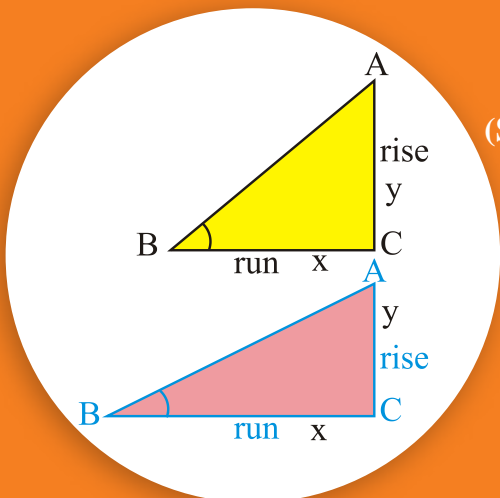
پوښتنې

1 - د \overline{AB} مستقیم خط د تنصیف د نقطې وضعیه کمیات $(2, -1)$ دي، که $A(-1, -3)$ وي،
د B د نقطې وضعیه کمیات پیدا کړئ.

2 - دهغه قطعه خط د تنصیف نقطې وضعیه کمیات پیدا کړئ چې د $A(3, 1)$ او $B(-2, -4)$
له نقطو څخه تېرېږي.

3 - دهغې نقطې وضعیه کمیات پیدا کړئ په داسې حال کې هغه قطعه خط چې د $A(4, 6)$ او
 $B(-2, 3)$ له نقطو څخه تېرېږي

a: داخلياً يې د $\frac{1}{2}$ په نسبت و وېشي. b: خارجاً يې د $\frac{1}{2}$ په نسبت و وېشي.

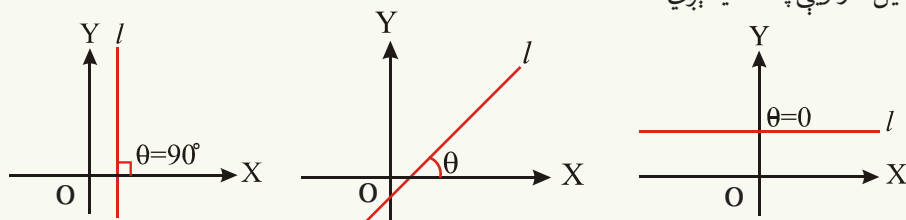


د یو مستقیم خط میل

(Slope of a straight Line)

کولای شئ چې ووايئ د کومې مایلې سطحې میل زیات دی؟

د \square زاویه چې د l مستقیم خط یې د X د محور له مثبت جهت سره جوړوي، د مستقیم خط د میل د زاويې په نامه یادېږي.



لکه څرنگه چې په شکل کې لیدل کېږي که د l خط د X له محور سره موازي وي $\square = 0$ او که د Y له محور سره موازي وي، نو $\square = 90^\circ$ ده.

څه وخت چې موږ پر مایله سطحه (inclined plane) پورته خواته حرکت کوو، په یو وخت کې افقي فاصله (run) او عمودي فاصله (rise) طی کوو. که د AB د مستقیم خط میل په m و ښایو.

$$m = \frac{\text{rise}}{\text{run}} = \frac{y}{x} = \tan \theta$$

د مستقیم خط میل د هغه زاويې له \tan څخه عبارت دی چې مستقیم خط یې د X د محور له مثبت جهت سره جوړوي، که $0 < \theta < 90^\circ$ وي، نو د مستقیم خط میل مثبت او که $90^\circ < \theta < 180^\circ$ وي میل منفي دی او که $\theta = 0$ وي $\tan 0^\circ = 0$ دی، نو میل یې صفر او که $\theta = 90^\circ$ وي، نو په دې حالت کې د مستقیم خط میل تعریف شوی نه دی، ځکه چې $\tan 90^\circ$ تعریف شوي نه دی.

فعالیت

د X او Y د محورونو د میل په برخه کې څه فکر کوئ؟

د هغه مستقیم خط میل چې عمود نه وي او د $P(x_1, y_1)$ او $Q(x_2, y_2)$ له نقطو څخه تېرېږي.

$$m = \tan \theta = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

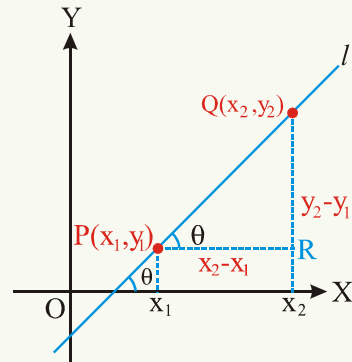
ځکه لکه څرنګه چې په شکل کې لیدل کېږي.

$$\widehat{RPQ} = \hat{\theta}$$

$$\overline{PR} = x_2 - x_1$$

$$\overline{QR} = y_2 - y_1$$

$$m = \tan \theta = \frac{\overline{QR}}{\overline{PR}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$



که د A ، B ، او C درې نقطې داسې ولرو چې د \overline{AB} د مستقیم خط میل د \overline{BC} د مستقیم خط له میل سره مساوي وي، نو د A ، B ، او C نقطې په یوه مستقیم خط باندې واقع دي.

لومړی مثال: د هغه مستقیم خط میل پیدا کړئ چې د $P_1(2, 4)$ او $P_2(6, 10)$ له نقطو څخه

تېرېږي.

حل:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{10 - 4}{6 - 2} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

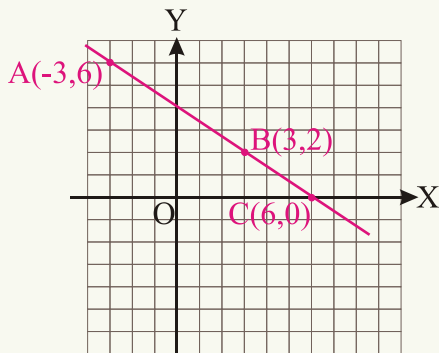
$$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{4 - 10}{2 - 6} = \frac{-6}{-4} = \frac{3}{2}$$

یا:

دویم مثال: و بنیاست چې د $A(-3, 6)$ ، $B(3, 2)$ او $C(6, 0)$ درې نقطې پر یوه مستقیم خط

باندې واقع دي.

$$\overline{AB} \text{ مستقیم خط میل د } = \frac{2 - 6}{3 - (-3)} = \frac{-4}{6} = -\frac{2}{3}$$

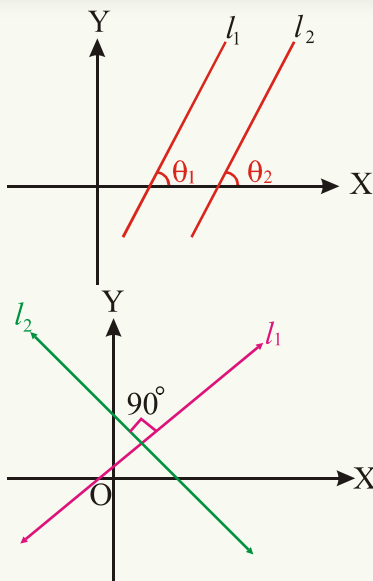


$$\text{د } \overline{BC} \text{ د مستقیم خط میل} = \frac{0-2}{6-3} = -\frac{2}{3}$$

خرنگه چې د \overline{AB} او \overline{BC} مستقیمو خطونو میلونه سره مساوي دي. نو د A، B، او C نقطې په یوه مستقیم خط باندې واقع دي.
نتیجه: د یوه مستقیم خط میل د مستقیم خط په ټولو نقطو کې سره مساوي دی.

فعالیت

- د هغه مستقیم خط میل پیدا کړئ چې د $(-2,4)$ او $(5,1)$ له نقطو څخه تېرېږي.
- د مستقیم خط د میل په مرسته وښایست چې د $(4,-5)$ ، $(7,5)$ او $(10,15)$ نقطې پر یوه مستقیم خط پرتې دي.



که د l_1 او l_2 دوه مستقیم خطونه وي او میلونه یې په ترتیب سره m_1 او m_2 وي، نو:

1- که l_2 د l_1 سره موازي وي $m_1 = m_2$ دی.
 ځکه چې د شکل مطابق $\theta_1 = \theta_2$ دی
 $\tan \theta_1 = \tan \theta_2$
 $m_1 = m_2$

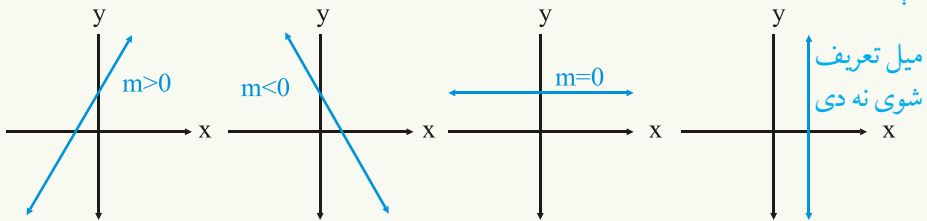
2- که l_1 او l_2 یو پر بل عمود وي، نو:
 $m_1 m_2 + 1 = 0$ یا $m_1 = -\frac{1}{m_2}$
 دې $m_1 \cdot m_2 = -1$

د یو مستقیم خط میل چې د $P_1(x_1, y_1)$ او د

$P_2(x_2, y_2)$ له نقطو څخه تېرېږي، د

له فورمول څخه په لاس راځي د X د محور او د هغو مستقیمو $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$

خطونو میل چې د X له محور سره موازي وي صفر او د Y د محور او د هغو مستقیمو خطونو میل چې د Y له محور سره موازي وي تعریف شوی نه دی. که د یوه مستقیم خط د میل زاویه حاده وي، میل یې مثبت او که منفرجه وي، میل یې منفي دی او که د مستقیم خط د میل زاویه صفر وي، میل یې صفر دی.

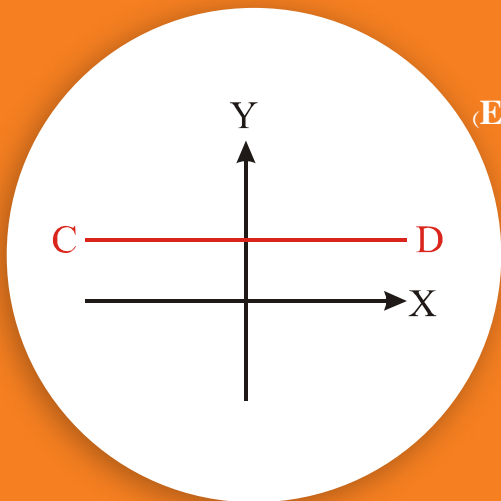


پوښتنې

- 1 - د هغه مستقیم خط میل پیدا کړئ چې د $(3, -2)$ او $(2, 7)$ له نقطو څخه تېرېږي.
- 2 - که $A(8, 6)$ ، $B(-4, 2)$ او $C(-2, -6)$ د یو مثلث رأسونه وي، د مثلث د هرې ضلعې میل پیدا کړئ.
- 3 - د مستقیم خط د میل په مرسته و بنیاست چې د $(a, 2b)$ ، $(c, a + b)$ او $(2c - a, 2a)$ نقطې پر یو مستقیم خط باندې واقع دي.
- 4 - د \overline{AB} مستقیم خط چې د $A(1, -2)$ او $B(2, 4)$ له نقطو او د \overline{CD} مستقیم خط چې د $C(4, 1)$ او $D(-8, 2)$ له نقطو څخه تېرېږي، دا دواړه خطونه سره:
 - a: موازي دي b: عمود دي c: هېڅ یو
- 5 - د $y = 3$ مستقیم خط او د $x = 3$ مستقیم خط یو له بله سره څه اړیکه لري؟
 - a - موازي دي b - عمود دي c - هېڅ یو
- 6 - د $x = -1$ او $x = 3$ خطونه سره: a - موازي دي b - عمود دي c - هېڅ یو
- 7 - د $y = -\sqrt{3}$ مستقیم خط میل مساوي دی په:
 - a - 1 b - صفر c - 1 d - تعریف شوي نه دی
- 8 - د $x = 0, 03$ مستقیم خط میل مساوي دی په:
 - a - 1 b - صفر c - 1 d - تعریف شوی نه دی.

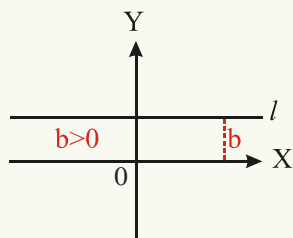
د یو مستقیم خط معادله

(Equation of a straight Line)



آیا کولای شی د \overline{CD} د مستقیم خط معادله پیدا کړئ چې د X له محور سره موازي وي.

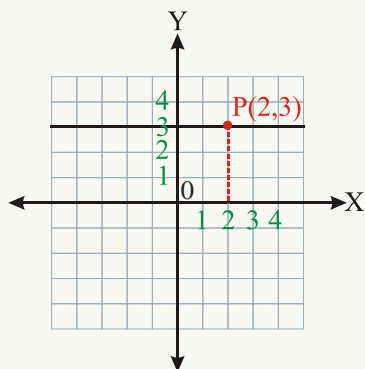
1- د هغه مستقیم خط معادله چې د X له محور سره موازي وي.



ټولې نقطې چې د l پر مستقیم خط پرتې وي، د X له محور څخه مساوي فاصلې لري یا په بل عبارت د ټولو هغو نقطو د Y مختصې چې د X له محور سره پر موازي خط واقع دي سره مساوي دي. که د X له محور څخه د l د خط فاصلې ته (b) ووايو د l د مستقیم خط معادله $y = b$ ده.

که $b > 0$ وي، نو د l خط د X له محور څخه پورته او که $b < 0$ وي، نو د l خط د X له محور لاندې او که $b = 0$ وي، نو د l خط د X پر محور پروت دی.

لومړی مثال: د هغه مستقیم خط معادله پیدا کړئ چې د $(2, 3)$ له نقطې څخه تېرېږي او د X له محور سره موازي وي.

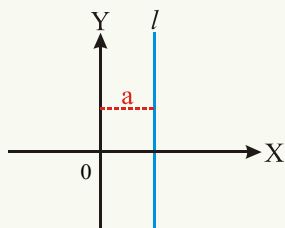


حل: $y = 3$ ددې خط معادله ده

فعالیت

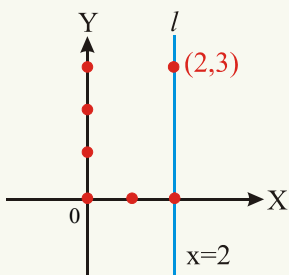
د X له محور معادله پیدا کړئ.

2- د هغه مستقیم خط معادله چې د Y له محور سره موازي وي: ټولې نقطې چې



د l پر خط چې د Y له محور سره موازي دی، پرتې وي، د Y له محور څخه مساوي فاصلې لري که د Y له محور څخه د l د مستقیم خط فاصلې ته a ووايو چې a ددې نقطو لومړنۍ مختصه ده، نو د l د خط معادله $x = a$ ده.

که $a > 0$ وي د l خط د Y د محور ښي خوا ته او که $a < 0$ وي د l خط د Y د محور کښي خوا ته او که $a = 0$ وي، نو د l خط د Y پر محور منطبق دی.



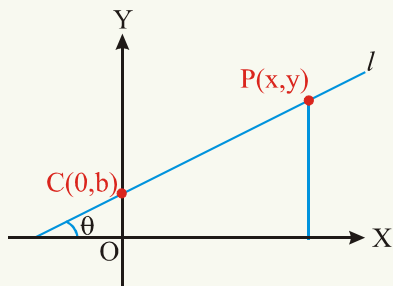
دویم مثال: د هغه مستقیم خط معادله پیدا کړئ چې د $(2,3)$ له نقطې څخه تېر شي او د Y له محور سره موازي وي.
حل: $x = 2$ ددې خط معادله ده.

فعالیت

د Y د محور معادله ولیکئ.

3. د هغه مستقیم خط معادله چې میل او د Y له محور سره یې د تقاطع نقطه معلومه وي یا د مستقیم خط معیاري معادله:

که $P(x, y)$ د l مستقیم خط یوه نقطه وي او $C(0, b)$ د Y له محور سره د مستقیم خط د تقاطع نقطه وي، نو د l د مستقیم خط میل عبارت دی له:



$$m = \frac{y-b}{x-0} = \frac{y-b}{x}$$

$$y = mx + b \quad \text{یا} \quad y - b = mx$$

که $b = 0$ وي، د مستقیم خط معادله $y = mx$ ده چې په دې حالت کې مستقیم خط د وضعیه کمیاتوله مبدا څخه تېرېږي.

دریم مثال: د هغه مستقیم خط معادله پیدا کړئ چې:

a- میل یې 2 او د Y محور په 5 کې قطع کړي.

b- د Y محور په $\frac{4}{3}$ کې قطع کړي او پر هغه خط عمود وي چې میل یې 6 - دی.

حل:

$$y = mx + b \Rightarrow y = 2x + 5 \quad \text{a: } m = 2 \text{ او } b = 5$$

$$b: \text{ ددې خط میل } m_2 = -\frac{1}{m_1} = -\frac{1}{-6} = \frac{1}{6}$$

$$m = \frac{1}{6} \text{ او } b = \frac{4}{3} \text{ دی؛ نو:}$$

$$y = mx + b \Rightarrow y = \frac{1}{6}x + \frac{4}{3}$$

دا معادله کولای شو، د $6y = x + 8$ ، $6y - x = 8$ او یا $x - 6y + 8 = 0$ په شکل ولیکو.

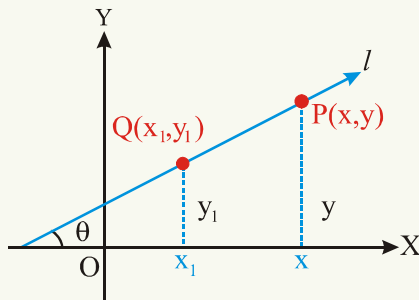
4 - د هغه مستقیم خط معادله چې میل او یوه نقطه یې معلومه وي:

د l د مستقیم خط معادله چې میل یې m او د $Q(x_1, y_1)$ له نقطې څخه تېرېږي.

که $p(x, y)$ د l د مستقیم خط یوه اختیاري نقطه وي. څرنگه چې د $Q(x_1, y_1)$ او $P(x, y)$

نقطې په یوه مستقیم خط واقع دي، نو د l د مستقیم خط میل مساوي دی په:

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1} \Rightarrow y - y_1 = m(x - x_1)$$



څلورم مثال: د هغه مستقيم خط معادله پيدا كړئ چې ميل يې (-2) او د $(5,1)$ له نقطې څخه تېرېږي.

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 1 = -2(x - 5)$$

$$y = -2x + 11$$

$$2x + y - 11 = 0 \quad \text{يا}$$

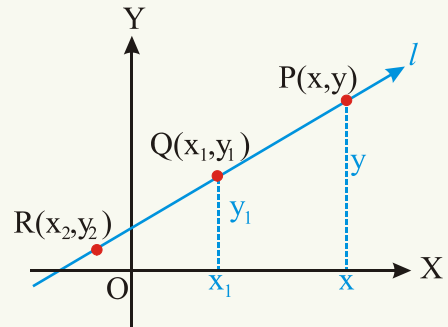
5: د هغه مستقيم خط معادله چې د دوي نقطې يې معلومې وي:

د l د خط ميل چې عمودنه وي، د $Q(x_1, y_1)$ او $R(x_2, y_2)$ له نقطو څخه تېرېږي او $P(x, y)$ د دې خط يوه كفي نقطه وي، څرنگه چې د مستقيم خط ميل په هره نقطه كې سره مساوي دي، نو لرو چې:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y - y_2}{x - x_2} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1) \quad \text{يا}$$



پنځم مثال: د هغه مستقيم خط معادله پيدا كړئ چې د $(-2,1)$ او $(6,-4)$ له نقطو څخه تېرېږي.

حل:

$$y - 1 = \frac{-4 - 1}{6 - (-2)} [x - (-2)]$$

$$y_1 = 1, \quad x_1 = -2$$

$$y_2 = -4, \quad x_2 = 6$$

$$y - 1 = \frac{-5}{8} (x + 2) \quad \text{يا} \quad 5x + 8y + 2 = 0$$

6: د هغه مستقيم خط معادله چې له محورونو سره يې تقاطع معلومه وي:

که $P(x, y)$ د l د مستقيم خط يوه كفي نقطه وي او د l مستقيم خط د X محور په a كې او د Y محور په b كې قطع كړي يا د X محور د $A(a, 0)$ او د Y محور د $B(0, b)$ په نقطه كې قطع كوي چې د B ، A او P نقطې د l پر مستقيم خط واقع دي.

د هغه مستقیم خط له معادلې څخه چې دوی نقطې یې معلومې وي لرو چې:

$$x_1 = a, y_1 = 0 \quad x_2 = 0, y_2 = b$$

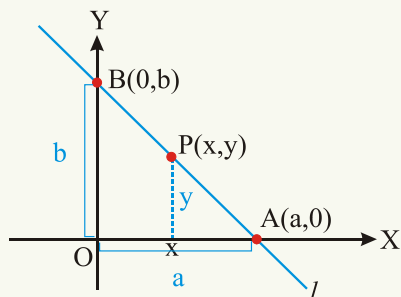
$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1), \quad y - 0 = \frac{b - 0}{0 - a}(x - a) \Rightarrow -ay = b(x - a)$$

$$-ay = bx - ab$$

$$bx + ay = ab$$

دواړه خواوې پر ab ویشو

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$



شپږم مثال: د هغه مستقیم خط معادله پیدا کړئ چې د X محور په $(2, 0)$ او د Y محور په

$(0, -4)$ کې قطع کوي.

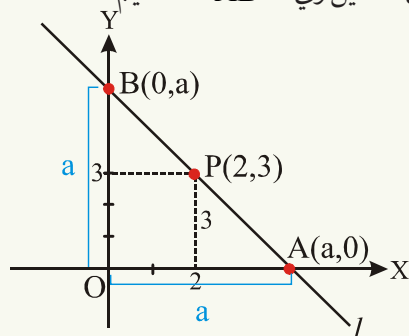
حل: $a = 2$ او $b = -4$ ده.

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{-4} = 1$$

$$2x - y - 4 = 0 \quad \text{یا}$$

اووم مثال: په شکل کې که د OAB مثلث متساوی الساقین وي، د \overline{AB} د مستقیم خط معادله



په داسې حالت کې پیدا کړئ چې ددې مثلث د \overline{AB}

ضلع د $P(2, 3)$ له نقطې څخه تېرېږي.

حل: د \overline{AB} د مستقیم خط میل مساوي دی په:

$$\overline{AB} = \frac{a - 0}{0 - a} = -1$$

نو اوس د هغه مستقیم خط معادله چې میل یې (-1) او د $P(2,3)$ له نقطې څخه تېرېږي عبارت ده له:

$$y - 3 = -1(x - 2) \text{ یا } x + y - 5 = 0$$

د هغه مستقیم خط معادله چې میل او د Y له محور سره یې تقاطع معلومه وي عبارت ده له:

$$y = mx + b \text{ د هغه مستقیم خط معادله چې میل او یوه نقطه یې معلومه وي عبارت ده له:}$$

د هغه مستقیم خط معادله چې دوې نقطې یې معلومې وي عبارت ده له:

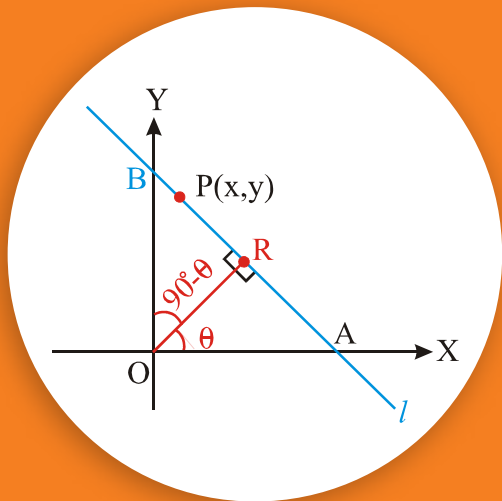
$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \text{ اود هغه مستقیم خط معادله چې له محورونو سره یې د تقاطع}$$

$$\text{نقطې معلومې وي: } 1 = \frac{x}{a} + \frac{y}{b} \text{ ده.}$$

پوښتنې

- 1- د لاندې مستقیمو خطونو معادلې پیدا کړئ چې:
 - a: د هغه افقي خط معادله پیدا کړئ چې له $(7, -9)$ نقطې څخه تېرېږي.
 - b: د هغه مستقیم خط معادله چې د X پر محور عمود او له $(-5, 3)$ نقطې څخه تېرېږي.
- 2- د لاندې مستقیمو خطونو معادلې پیدا کړئ چې:
 - a: میل یې 7 او د $(-6, 5)$ له نقطې څخه تېر شي.
 - b: میل یې صفر او د $(8, -3)$ له نقطې څخه تېرېږي.
 - c: د $(-8, 5)$ له نقطې څخه تېرېږي او میل یې تعریف شوی نه وي.
 - d: د $(-5, -3)$ او $(9, -1)$ له نقطو څخه تېرېږي.
 - e: میل یې 4- او د Y محور په 9- کې قطع کړي.
- 3- د هغه مثلث د ضلعو معادلې پیدا کړئ چې راسونه یې $A(-3, 2)$ ، $B(5, 4)$ او $C(3, -8)$ وي.
- 4- د هغه مستقیم خط معادله پیدا کړئ چې د $(-4, -6)$ له نقطې څخه تېرېږي او پر هغه خط عمود وي چې میل یې $\frac{-3}{2}$ وي.
- 5- د هغه مستقیم خط معادله پیدا کړئ چې د $(11, -5)$ له نقطې څخه تېرېږي او له هغه خط سره موازی وي چې میل یې 24- وي.

7 - د مستقیم خط نورمال معادله



آیا ویلای شئی دیوه مستقیم خط نورمال خط

کوم خط ته وایي؟

د l د مستقیم خط معادله که p د هغه عمود خط اوږدوالی وي چې د وضعیه کمیاتو له مبدا څخه د l پر خط عمود وي او θ د عمود خط د میل زاویه وي.

عبارت ده له: $x \cos \theta + y \sin \theta = P$ یا $x \cos \theta + y \sin \theta - P = 0$

د l مستقیم خط د X محور د A په نقطه کې او د Y محور د B په نقطه کې قطع کوي، که $P(x, y)$ د \overline{AB} د مستقیم خط یوه کیفی نقطه وي او د \overline{OR} خط د l پر خط عمود وي، نو: $|\overline{OR}| = P$ دی چې د \overline{OR} خط ته د l د خط نورمال خط وایي او P د نورمال اوږدوالی دی. د $\triangle ORA$ او $\triangle ORB$ په قایمه زاویه مثلثونو کې لرو چې:

$$\cos \theta = \frac{P}{OA} \quad \text{یا} \quad OA = \frac{P}{\cos \theta}$$

$$\cos(90^\circ - \theta) = \frac{P}{OB} \quad \text{یا} \quad OB = \frac{P}{\cos(90^\circ - \theta)} = \frac{P}{\sin \theta}$$

له مثلثاتو پوهېږو: $\cos(90^\circ - \theta) = \sin \theta$

څرنګه چې د \overline{AB} مستقیم خط د X محور په $(OA, 0)$ او د Y محور په $(0, OB)$ کې قطع کوي، نو د \overline{AB} د مستقیم خط معادله عبارت ده له:

$$\frac{x}{OA} + \frac{y}{OB} = 1$$

$$\frac{x}{P} + \frac{y}{P} = 1$$

$$\frac{\cos\theta}{\cos\theta} + \frac{\sin\theta}{\sin\theta} = 1$$

$$x \cos\theta + y \sin\theta = P$$

یا:

چې $x \cos\theta + y \sin\theta = P$ یا $x \cos\theta + y \sin\theta - P = 0$ د مستقیم خط نورمال معادله ده.

لومړی مثال: که د هغه عمود خط اوږدوالی چې د وضعیه کمیاتوله مبدا څخه د l پر خط عمود وي 5 واحد وي او ددې عمود خط د میل زاویه 120° وي، د l د مستقیم خط میل، نورمال معادله یې او د Y له محور سره یې د تقاطع نقطه پیدا کړئ.

حل: $\theta = 120^\circ$ او $P = 5$ دی.

$$x \cos 120^\circ + y \sin 120^\circ = 5$$

$$-\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y = 5 \quad \left(\cos 120^\circ = -\frac{1}{2}, \quad \sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$x - \sqrt{3}y + 10 = 0$$

د l خط د میل د پیدا کولو لپاره د $y = mx + b$ په شکل لیکو:

$$y = \frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{10}{\sqrt{3}}$$

نو د l خط میل $m = \frac{1}{\sqrt{3}}$ او د Y محور د $(0, \frac{10}{\sqrt{3}})$ په نقطه کې قطع کوي.

فعالیت

د هغه مستقیم خط نورمال معادله پیدا کړئ چې د نورمال اوږدوالی یې 10 واحد او نورمال یې د X د محور له مثبت جهت سره د 30° زاویه جوړوي.

8- **د مستقیم خط عمومي معادله:** (General equation of a straight Line)

د $ax + by + c = 0$ معادله د x او y دوه متحول له لري a ، b ، او c ثابت عددونه دي چې a او b

دواړه په یو وخت کې صفر نه وي، د مستقیم خط د عمومي معادلې په نامه یادېږي.

- 1) که $a \neq 0$ او $b = 0$ وي، نو $x = -\frac{c}{a}$ يا $ax + c = 0$ دا د هغه مستقیم خط معادله ده چې د Y له محور سره موازي وي ددې خط مستقیمه فاصله د Y له محور څخه $-\frac{c}{a}$ ده.
- 2) که $a = 0$ او $b \neq 0$ وي، نو معادله د $by + c = 0$ شکل نيسي يا $y = -\frac{c}{b}$ چې دا د هغه مستقیم خط معادله ده چې د X له محور سره موازي دی. د X له محور څخه ددې خط مستقیمه فاصله $\frac{-c}{b}$ ده.
- 3) که $a \neq 0$ او $b \neq 0$ وي، نو:

$$by = -ax - c \quad \text{يا} \quad y = \frac{-a}{b}x - \frac{c}{b} = mx + b$$

دا د هغه مستقیم خط معادله ده چې ميل يې $m = \frac{-a}{b}$ دی او د y محور په $\frac{-c}{b}$ کې قطع کوي.

1- د مستقیم خط د عمومي معادلې بدلول په معیاري شکل:

د $ax + by + c = 0$ عمومي معادله د معیاري معادلې په شکل عبارت ده له:

$$by = -ax - c \quad \text{يا} \quad y = \frac{-a}{b}x - \frac{c}{b} = mx + b$$

چې ددې خط ميل $m = \frac{-a}{b}$ او د Y محور په $\frac{-c}{b}$ کې قطع کوي.

دویم مثال: د $5x - 12y + 39 = 0$ مستقیم خط عمومي معادله په معیاري شکل واړوی.

حل:

$$12y = 5x + 39 \quad \text{يا} \quad y = \frac{5}{12}x + \frac{39}{12}$$

چې ميل يې $m = \frac{5}{12}$ او د Y محور په $\frac{39}{12}$ کې قطع کوی.

2- د مستقیم خط د عمومي معادلې بدلول د هغه مستقیم خط د معادلې په شکل

چې ميل او يوه نقطه يې معلومه وي.

د $ax + by + c = 0$ په معادله کې د مستقیم خط میل $\frac{-a}{b}$ او یوه نقطه یې $(\frac{-c}{a}, 0)$ ده، نو:

$$y = \frac{-a}{b} \left(x + \frac{c}{a}\right) \qquad m = \tan \theta = \frac{-a}{b}$$

دریم مثال: د $5x - 12y + 39 = 0$ د مستقیم خط عمومي معادله د هغه خط د معادلې په شکل تبدیله کړئ چې میل او یوه نقطه یې معلومه وي.

حل: د $5x - 12y + 39 = 0$ مستقیم خط یوه نقطه $(\frac{-39}{5}, 0)$ ده او میل یې

$$\frac{5}{12} \text{ دی، نو:}$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 0 = \frac{5}{12} \left(x + \frac{39}{5}\right) \Rightarrow y = \frac{5}{12}x + \frac{39}{12}$$

3- د عمومي معادلې بدلول د هغه مستقیم خط د معادلې په شکل چې دوی نقطې یې معلومې وي.

هغه خط چې معادله یې $ax + by + c = 0$ وي، د $(\frac{-c}{a}, 0)$ او $(0, \frac{-c}{b})$ له نقطو تېرېږي.

$$y_1 = 0 \qquad x_1 = \frac{-c}{a} \qquad y_2 = \frac{-c}{b} \qquad x_2 = 0$$

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1)$$

$$y - 0 = \frac{\frac{-c}{b} - 0}{0 + \frac{c}{a}} \left(x + \frac{c}{a}\right) = \frac{\frac{-c}{b}}{\frac{c}{a}} \left(x + \frac{c}{a}\right) = -\frac{c}{b} \cdot \frac{a}{c} \left(x + \frac{c}{a}\right)$$

$$y = \frac{-a}{b} \left(x + \frac{c}{a}\right)$$

څلورم مثال: د $5x - 12y + 39 = 0$ مستقیم خط عمومي معادله د هغه مستقیم خط د معادلې

په شکل ولیکئ چې دوی نقطې یې معلومې وي.

حل: د $5x - 12y + 39 = 0$ خط د $P_1(-\frac{39}{5}, 0)$ او $P_2(0, \frac{39}{12})$ له نقطو څخه تېرېږي.

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1)$$

يا $\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$$\frac{y - 0}{x + \frac{39}{5}} = \frac{\frac{39}{12} - 0}{0 + \frac{39}{5}}$$

4- د يو مستقيم خط د عمومي معادلې بدلول د هغه مستقيم خط د معادلې په شکل چې د X او Y له محورونو سره يې د تقاطع نقطې معلومې وي.

$$ax + by + c = 0$$

$$ax + by = -c$$

دواړه خواوې په $(-c)$ وېشو:

$$\frac{ax}{-c} + \frac{by}{-c} = 1$$

$$\frac{x}{-\frac{c}{a}} + \frac{y}{-\frac{c}{b}} = 1$$

يا

پنځم مثال: د $5x - 12y + 39 = 0$ معادله د هغه مستقيم خط معادلې ته واړوئ چې له محورونو سره يې د تقاطع نقطې معلومې وي.

$$5x - 12y = -39$$

$$\frac{5x}{-39} - \frac{12y}{-39} = 1$$

دواړه خواوې په -39 وېشو:

$$\frac{x}{-\frac{39}{5}} + \frac{y}{\frac{39}{12}} = 1$$

په دې معنا چې دا مستقيم خط د X محور د $(-\frac{39}{5}, 0)$ او د Y محور د $(0, \frac{39}{12})$ په نقطه کې قطع کوي.

فعالیت

د $3x - 2y = 6$ مستقیم خط د تقاطع د نقطو وضعیه کمیات د X او Y ، له محورونو سره پیدا کړئ.

5: د یوه مستقیم خط د عمومي معادلې بدلول په نورمال شکل:

څرنگه چې پوهېږو د مستقیم خط نورمال معادله $x \cos \theta + y \sin \theta = P$ ده او عمومي معادله $ax + by + c = 0$ یا $ax + by = -c$ ده چې دواړه د یوه مستقیم خط ښودونکي دي، نو د ضریبونو نسبتونه یې د k د یوه ثابت عدد سره مساوي دی.

$$\frac{a}{\cos \theta} = \frac{b}{\sin \theta} = \frac{-c}{P} = k$$

$$\frac{P}{-c} = \frac{\cos \theta}{a} = \frac{\sin \theta}{b} = \frac{\sqrt{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}}{\pm \sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{1}{\pm \sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\frac{\cos^2 \theta}{a^2} = \frac{\sin^2 \theta}{b^2} = \frac{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}{a^2 + b^2} \quad \text{ځکه چې:}$$

$$\text{په نتیجه کې: } \cos \theta = \frac{a}{\pm \sqrt{a^2 + b^2}} \quad \text{او} \quad \sin \theta = \frac{b}{\pm \sqrt{a^2 + b^2}} \quad \text{کېږي.}$$

د $x \cos \theta + y \sin \theta - p = 0$ په معادله کې د $\cos \theta$ او $\sin \theta$ د قیمتونو په لیکلو سره لرو چې:

$$\frac{ax}{\pm \sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{by}{\pm \sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{c}{\pm \sqrt{a^2 + b^2}} = 0$$

$$\frac{ax + by}{\pm \sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{-c}{\pm \sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\frac{b}{\sin \theta} = k, \quad \frac{a}{\cos \theta} = k$$

او یا

$$\text{نو: } k \cos \theta = a, \quad k \sin \theta = b, \quad k^2 \cos^2 \theta = a^2, \quad k^2 \sin^2 \theta = b^2$$

$$k^2 \cos^2 \theta + k^2 \sin^2 \theta = a^2 + b^2$$

$$k^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = a^2 + b^2$$

$$k = \pm \sqrt{a^2 + b^2}$$

یا:

د $ax + by = -c$ معادلې دواړه خواوې په K وېشو، نو لرو چې:

$$\frac{ax + by + c}{\pm\sqrt{a^2 + b^2}} = 0 \quad \text{یا} \quad \frac{a}{\pm\sqrt{a^2 + b^2}}x + \frac{b}{\pm\sqrt{a^2 + b^2}}y = -\frac{c}{\pm\sqrt{a^2 + b^2}}$$

ددې لپاره چې د p قیمت هر وخت مثبت وي، نو د مخرج د جذر علامه د C مخالفه علامه ده او که $c = 0$ وي، د جذر علامه د b د علامې په شان ده.

شپږم مثال: $2x - 3y + 6 = 0$ معادله په نورمال شکل واپړئ.

حل: د معادلې دواړه خواوې په $\sqrt{2^2 + (-3)^2} = \pm\sqrt{13}$ باندې وېشو. ددې لپاره چې ښي خوا مثبت وي د $\sqrt{13}$ علامه باید منفي ونيول شي:

$$-\frac{2}{\sqrt{13}}x + \frac{3}{\sqrt{13}}y - \frac{6}{\sqrt{13}} = 0 \quad \text{یا} \quad \frac{2x - 3y + 6}{-\sqrt{13}} = 0$$

نو θ په دویمه ناحیه (ریښه) کې ده.

له مثلثاتي جدول څخه لرو چې $\theta = 123^\circ 40'$ ده، نو ددې مستقیم خط نورمال معادله عبارت ده

$$x \cos 123^\circ 40' + y \sin 123^\circ 40' - \frac{6}{\sqrt{13}} = 0 \quad \text{له:}$$

فعالیت

د $5x - 12y + 39 = 0$ مستقیم خط معادله په نورمال شکل تبدیله کړئ.

دیوه مستقیم خط نورمال معادله $x \cos \theta + y \sin \theta - p = 0$ او د مستقیم خط عمومي معادله $ax + by + c = 0$ ده. د مستقیم خط عمومي معادله د نورمال معادلې په شکل عبارت له:

$$\frac{ax}{\pm\sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{by}{\pm\sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{c}{\pm\sqrt{a^2 + b^2}} = 0$$

پوښتنې

1 - د $x \cos 60^\circ + y \sin 60^\circ - 7 = 0$ مستقيم خط نورمال معادله د مستقيم خط په

عمومي معادله تبديله کړئ.

2 - د $x \cos 225^\circ + y \sin 225^\circ - 6 = 0$ مستقيم خط نورمال معادله، د مستقيم خط

په عمومي معادله واړوئ.

3 - د مستقيم خط لاندې عمومي معادلې په نورمال شکل واړوئ.

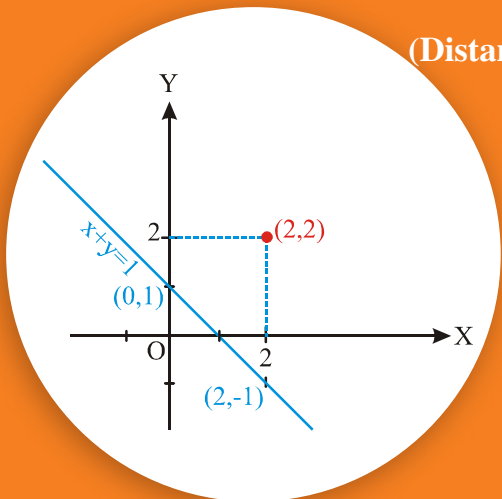
$$15y - 8x + 3 = 0$$

$$2x + 5y - 2 = 0$$

$$2x + 4y + 7 = 0$$

د یوې نقطې فاصله له یوه مستقیم خط څخه:

(Distance of a point from a line)



آیا د $(2,2)$ نقطې فاصله د $x + y = 1$ له

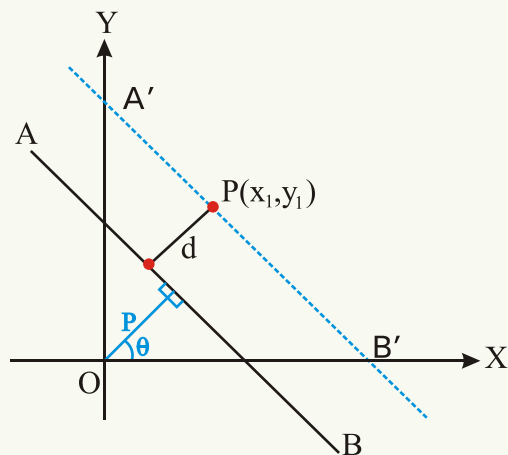
خط څخه پیدا کولای شی؟

که د P نقطې فاصله، لکه: څنگه چې په شکل کې لیدل کېږي د \overline{AB} له خط څخه چې د P نقطه پر \overline{AB} واقع نه وي، d فرض کړو (د \overline{AB} خط نه عمود وي او نه افقي) د p له نقطې څخه د $\overline{A'B'}$ مستقیم خط له \overline{AB} سره موازي رسم کړئ، په دې حالت کې د AB د خط نورمال معادله عبارت ده له: $x \cos \theta + y \sin \theta - p = 0$ څرنگه چې د $A'B'$ مستقیم خط د AB له خط سره موازي دی، نو د $A'B'$ د خط نورمال معادله عبارت ده له:

$$d = x \cos \theta + y \sin \theta - p \quad \text{یا} \quad x \cos \theta + y \sin \theta - (p + d) = 0$$

څرنگه چې د $P(x_1, y_1)$ نقطه د $\overline{A'B'}$ پر مستقیم خط پرته ده، نو په پورتنۍ معادله کې په ترتیب سره د x او y ، پرځای x_1 او y_1 ږدو، نولرو چې:

$$d = x_1 \cos \theta + y_1 \sin \theta - p$$



چې دا معادله د \overline{AB} له خط څخه د p د نقطې فاصله ښيي، که چېرې د AB د خط معادله په نورمال شکل راکړل شوي وي او که د \overline{AB} د خط معادله په عمومي شکل $(ax + by + c = 0)$ راکړل شوي وي، نو:

$$p = \frac{-c}{\pm\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \text{او} \quad \cos\theta = \frac{a}{\pm\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \sin\theta = \frac{b}{\pm\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \text{څرنگه چې:}$$

که دا قیمتونه د AB د مستقیم خط په نورمال معادله کې وضع کړو، لرو چې:

$$d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\pm\sqrt{a^2 + b^2}}$$

د فاصلې په معادله کې که د P نقطه او د وضعیه کمیاتو مبدا د AB د خط یوې خواته واقع وي، نو d قیمت منفي کېږي. او که د P نقطه او مبدا د AB د خط دواړو خواوو ته واقع وي د d قیمت مثبت دی. څرنگه چې فاصله هر وخت مثبت ده، نو باید چې مطلقه قیمت یې په پام کې ونیسو. (د C علامه د مخرج د جذر د علامې مخالفه علامه ده)

لومړی مثال: د $P(-2, 8)$ د نقطې فاصله د $4x + 3y - 11 = 0$ له خط څخه پیدا کړئ.
حل: $a = 4$ ، $b = 3$ او $c = -11$ ده، څرنگه چې د C علامه منفي ده، نو د جذر علامه باید مثبت وي.

$$d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|4(-2) + 3(8) - 11|}{\sqrt{(4)^2 + (3)^2}} = \frac{|-8 + 24 - 11|}{\sqrt{25}} = \frac{5}{5} = 1$$

فعالیت

د $(5, 8)$ نقطې فاصله د $3x - 2y + 7 = 0$ له مستقیم خط څخه پیدا کړئ.

د دوو موازي خطونو تر منځ فاصله:

(Distance between two parallel lines)

د دوو موازي خطونو تر منځ فاصله پر یو ددې خطونو د یوې نقطې فاصله ده، له بل موازي خط څخه:

دویم مثال: د $2x - 5y + 13 = 0$ او $2x - 5y + 6 = 0$ موازي مستقیمو خطونو تر منځ فاصله پیدا کړئ.

حل: یوه نقطه په یو ددې موازي خطونو باندې پیدا کوو، د مثال په ډول که د

$$2x - 5y + 13 = 0$$

په معادله کې $x = 1$ وي، نو $y = 3$ کېږي.

اوس نو د $(1,3)$ نقطې فاصله د $2x - 5y + 6 = 0$ له مستقیم خط څخه د فاصلې د فورمول په مرسته په لاس راوړو.

$$d = \frac{ax_1 + by_1 + c}{\pm \sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$d = \frac{|2(1) - 5(3) + 6|}{\sqrt{(2)^2 + (-5)^2}} = \frac{|2 - 15 + 6|}{\sqrt{4 + 25}} = \frac{7}{\sqrt{29}}$$

یادونه: د وضعیه کمیاتو له مبدا څخه د $ax + by + c = 0$ مستقیم خط فاصله د $\frac{|C|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ څخه عبارت ده.

فعالیت

د $3x + 2y = 10$ او $y = -\frac{3}{2}x + 7$ د موازي خطونو ترمنځ فاصله پیدا کړئ.

دریم مثال: د $2x + y + 2 = 0$ او $6x + 3y - 8 = 0$ د مستقیمو موازي خطونو ترمنځ فاصله پیدا کړئ.

حل: که د $2x + y + 2 = 0$ په معادله کې $x = 0$ وي، $y = -2$ کېږي. اوس د $(0, -2)$ او د $6x + 3y - 8 = 0$ د مستقیم خط فاصله په لاس راوړو:

$$d = \frac{ax_1 + by_1 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|6(0) + 3(-2) - 8|}{\sqrt{36 + 9}} = \frac{14}{3\sqrt{5}}$$

د $P(x_1, y_1)$ د نقطې فاصله له یوه مستقیم خط څخه د $d = x_1 \cos\theta + y_1 \sin\theta - P$ او یا د $d = \frac{ax_1 + by_1 + c}{\pm \sqrt{a^2 + b^2}}$ له فورمول څخه په لاس راځي.

پوښتنې

1- د هرو دوو جوړو موازي خطونو ترمنځ فاصله پيدا كړئ چې معادلې يې په لاندې ډول دي:

$$3x - 4y + 3 = 0 \quad \text{او} \quad 3x - 4y + 7 = 0$$

$$12x + 5y - 6 = 0 \quad \text{او} \quad 12x + 5y + 13 = 0$$

$$x + 2y - 5 = 0 \quad \text{او} \quad 2x + 4y = 1$$

2- د $P(6, -1)$ نقطې فاصله له $6x - 4y + 9 = 0$ مستقيم خط څخه پيدا كړئ.

3- د $3x + 6y - 8 = 0$ او $2x + 4y + 5 = 0$ موازي خطونو ترمنځ فاصله مساوي ده

په:

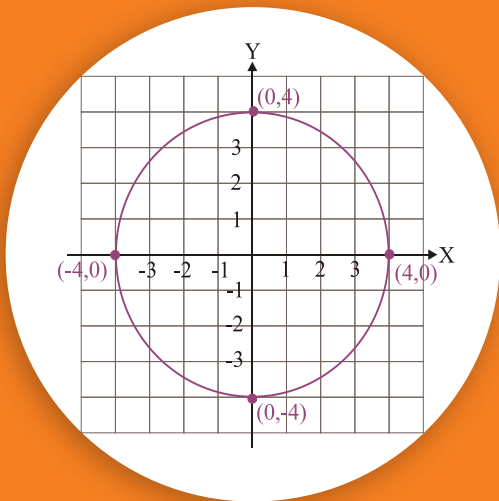
a) $\frac{31}{\sqrt{5}}$ b) $\frac{31}{6\sqrt{5}}$ c) $6\sqrt{5}$ d) هېڅ يو

4- د $(1, 2)$ د نقطې فاصله د $\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y + 2 = 0$ مستقيم خط څخه مساوي ده په:

a: 2 b: 1 c: 3 d: $\frac{1}{2}$

5- د $(-2, 7)$ نقطې فاصله له $24x + 7y - 2 = 0$ مستقيم خط څخه مساوي ده په:

a: 0,04 b: $\frac{1}{25}$ c: 4×10^{-2} d: درې واړه سم دي



دایره (Circle)

آیا د هغې دایرې معادله پیدا کولای شئ چې مرکز یې د وضعیه کمیاتو په مبدأ کې او شعاع یې 4 واحد وي؟

تعریف

دایره د هغو نقطو سټ دی چې له یوې ثابتې نقطې څخه یې فاصلې مساوي وي. چې دې ثابتې نقطې ته د دایرې مرکز (Center) او مساوي فاصلې ته د دایرې شعاع (Radius) وایي.

د دایرې معادله (Equation of circle): که $C(h, k)$ د دایرې مرکز، r د دایرې شعاع او $P(x, y)$ د دایرې په محیط یوه نقطه وي، د شکل له مخې د فیثاغورث د قضیې په اساس لرو چې:

$$(\overline{CP})^2 = (x - h)^2 + (y - k)^2$$

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

$$(\overline{CP} = r)$$

چې دې معادلې ته د دایرې معیاري معادله وایي. که د دایرې مرکز د وضعیه کمیاتو په مبدأ کې وي، نو

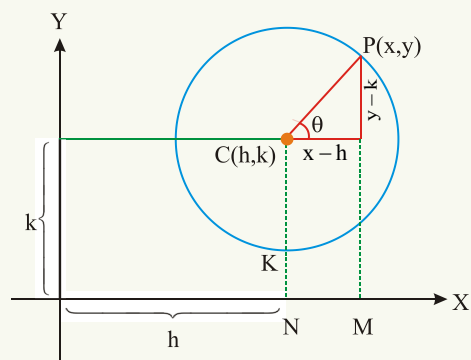
په دې حالت کې $h = k = 0$ دی او د دایرې

معادله: $(x - 0)^2 + (y - 0)^2 = r^2$ یا

$$x^2 + y^2 = r^2$$

ده، او که $r = 0$ وي داسې دایرې ته نقطوي

دایره (Point circle) وایي.



لومړی مثال: د هغې دایرې معادله پیدا کړئ چې مرکز یې $(-3, 5)$ او د شعاع اوږدوالی یې 7 واحد وي.

حل: $k = 5$, $r = 7$ او $h = -3$

$$(x + 3)^2 + (y - 5)^2 = 7^2$$

$$x^2 + y^2 + 6x - 10y - 15 = 0$$

فعالیت

د هغې دایرې معادله پیدا کړئ چې مرکز یې د وضعیه کمیاتو په مبدا کې او شعاع یې 3 واحد وي.

د یوې دایرې عمومي معادله (General form of an equation of a circle):

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

$$x^2 - 2hx + h^2 + y^2 - 2ky + k^2 - r^2 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + h^2 + k^2 - r^2 = 0$$

یا:

که $-h = g$ ، $-k = f$ او $h^2 + k^2 - r^2 = c$ فرض شي، نو لرو چې:

$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \quad \text{یا} \quad (x + g)^2 + (y + f)^2 = g^2 + f^2 - c$$

چې دې معادلې ته د دایرې عمومي معادله وايي چې مرکز یې $(-g, -f)$ او شعاع یې $r = \sqrt{g^2 + f^2 - c}$ ده.

که $g^2 + f^2 - c > 0$ وي دایره حقيقي ده.

که $g^2 + f^2 - c = 0$ دایره نقطوي ده.

که $g^2 + f^2 - c < 0$ دایره مجازي ده. (دایره وجود نه لري)

$$\text{او یا که د } x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + h^2 + k^2 - r^2 = 0$$

په معادله کې $-2h = a$ ، $-2k = b$ او $h^2 + k^2 - r^2 = c$ عوض کړو لرو چې

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

چې دا هم د دایرې عمومي معادله ده، ځینې وختونه د دایرې

عمومي معادله داسې هم ښودل کېږي.

$$Ax^2 + By^2 + Dx + Ey - F = 0$$

په دې ډول چې $A = B$ او هم علامه وي، نو دا هم د دایرې عمومي معادله ده.

خاص حالتونه:

1- که د $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ د دایرې په معادله کې $h = 0$ وي، نو د دایرې مرکز د Y پر محور پروت دی او د دایرې معادله دا شکل $x^2 + (y-k)^2 = r^2$ غوره کوي.

2- او که $k = 0$ وي، د دایرې مرکز د X پر محور پروت دی او د دایرې معادله دا: $(x-h)^2 + y^2 = r^2$ ده.

3- که $k = r$ وي، دایره د X پر محور مماس ده او د دایرې معادله $(x-h)^2 + (y-r)^2 = r^2$ ده.

4- او که $h = r$ وي، دایره د Y پر محور مماس ده او د دایرې معادله $(x-r)^2 + (y-k)^2 = r^2$ ده.

5- یوه دایره هغه وخت د وضعیه کمیاتو له مبدا څخه تېرېږي چې د $h^2 + k^2 = r^2$ رابطه صدق کړي.

6- یوه دایره هغه وخت د X او Y پر محورونو مماس ده چې معادله یې دا $(x-r)^2 + (y-r)^2 = r^2$ شکل ولري.

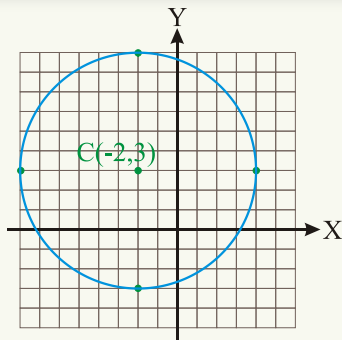
دویم مثال: د $x^2 + (y-5)^2 = 10$ دایرې مرکز د Y پر محور پروت دی.

د $(x-1)^2 + (y-5)^2 = 25$ دایره د X له محور سره مماس ده.

د $(x+3)^2 + y^2 = 9$ دایرې مرکز د X پر محور پروت دی.

فعالیت

په شکل کې وښایست چې د دویم مثال، د لومړۍ دایرې مرکز د Y پر محور پروت دی، دویمه دایره د X له محور سره مماس ده او د دویمې دایرې مرکز د X پر محور واقع دی.



دریم مثال: د هغې دایرې عمومي او معیاري معادلې پیدا

کړئ چې د مرکز وضعیه کمیات یې $(-2, 3)$ او شعاع یې

6 واحد وي او هم دا دایره رسم کړئ.

(د دایرې معیاري معادله)

$$(x+2)^2 + (y-3)^2 = 6^2$$

(د دایرې عمومي معادله)

$$x^2 + y^2 + 4x - 6y - 23 = 0$$

څلورم مثال: وښیاست چې $5x^2 + 5y^2 + 24x + 36y + 10 = 0$ د یوې دایرې معادله ده او هم ددې دایرې د مرکز وضعیه کمیات او د شعاع اوږدوالی پیدا کړئ.

حل: د معادلې دواړه خواوې پر 5 وپښو، نو لرو چې:

$$x^2 + y^2 + \frac{24}{5}x + \frac{36}{5}y + 2 = 0$$

چې $g = \frac{12}{5}$ ، $f = \frac{18}{5}$ او $c = 2$ دی.

د دایرې مرکز $(-g, -f) = \left(-\frac{12}{5}, -\frac{18}{5}\right)$

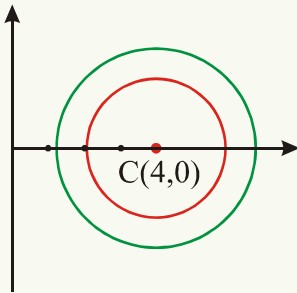
$$r = \sqrt{g^2 + f^2 - c} = \sqrt{\frac{144}{25} + \frac{324}{25} - 2} = \sqrt{\frac{418}{25}} = \frac{\sqrt{418}}{5}$$

او د دایرې شعاع:

پنځم مثال: د هغې دایرې معادله پیدا کړئ چې د $x^2 + y^2 - 8x + 4 = 0$ له دایرې سره متحد المركز (Concneric) وي او د $x + 2y + 6 = 0$ له مستقیم خط سره مماس وي.

حل: د $x^2 + y^2 - 8x + 4 = 0$ دایرې مرکز $C_1(-g, -f)$

دی.



$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

$$2g = -8 \Rightarrow g = -4 \Rightarrow -g = 4$$

$$2f = 0 \Rightarrow f = 0$$

د $C_1(4,0)$ نقطه د هغې دایرې مرکز هم دی چې غواړو معادله یې

پیدا کړو، نو د C_1 وضعیه کمیات د $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ په معادله کې وضع کوو، لرو

$$(x-4)^2 + (y-0)^2 = r^2$$

چې:

ددې لپاره چې د C_2 د دایرې شعاع پیدا کړو، نو څرنګه چې دایره د $x + 2y + 6 = 0$ له مستقیم خط سره مماس ده. نو د $(4,0)$ د نقطې فاصله له دې مستقیم خط څخه د دایرې شعاع ده

$$d = r = \frac{|4(1) + 2(0) + 6|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{10}{\sqrt{5}} \quad \text{یا} \quad r^2 = \frac{100}{5} = 20$$

نو ددې دایرې معادله عبارت ده له: $(x-4)^2 + y^2 = 20$ یا $x^2 + y^2 - 8x - 4 = 0$
شپږم مثال: د هغې دایرې معادله پیدا کړئ چې د $B(6,5)$ او $A(4,1)$ له نقطو څخه تېرېږي او
مرکز یې د $4x + y - 16 = 0$ پر مستقیم خط پروت وي.

حل: که د ایرې مرکز $C(h,k)$ وي، نو د دایرې معادله $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ ده، څرنگه

چې مرکز یې د $4x + y - 16 = 0$ پر مستقیم خط واقع دی، نو $4h + k = 16$ دی.
 $|AC|^2 = |BC|^2$ او $|AC| = |BC|$ او $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$

$$(h-4)^2 + (k-1)^2 = (h-6)^2 + (k-5)^2$$

$$4h + 8k = 44$$

$$\underline{\pm 4h \pm k = \pm 16}$$

$$7k = 28$$

$$k = 4 \quad \Rightarrow \quad h = 3$$

$$r^2 = (3-4)^2 + (4-1)^2 = 10$$

$$(x-3)^2 + (y-4)^2 = 10 \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 - 6x - 8y + 15 = 0$$

چې دا د غوښتل شوې دایرې عمومي معادله ده.

فعالیت

د هغې دایرې معادله پیدا کړئ چې د $(0,0)$ او $(2,0)$ له نقطو څخه تېرېږي او د $y-1=0$ له
خط سره مماس وي.

اووم مثال: د هغې دایرې د مرکز وضعیه کمیات او د شعاع اوږدوالی پیدا کړئ چې معادله یې
 $x^2 + y^2 - 4x + 4y - 9 = 0$

حل:

$$x^2 + y^2 - 4x + 4y - 9 = 0$$

$$x^2 - 4x + y^2 + 4y - 9 = 0$$

$$x^2 - 4x + (-2)^2 - (-2)^2 + y^2 + 4y + 2^2 - 2^2 - 9 = 0$$

$$(x-2)^2 + (y+2)^2 = 17$$

نو مرکز يې $(2-2)$ او شعاع يې $r = \sqrt{17}$

د هغې دایرې معادله چې مرکز يې د وضعیه کمیاتو په مبدا کې واقع وي له $x^2 + y^2 = r^2$ څخه

عبارت ده او که مرکز يې د وضعیه کمیاتو په مبدا کې واقع نه وي او (h, k) يې مرکز وي: معادله

$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \quad \text{یا} \quad (x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

او یا $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ ده.

پوښتنې

1 - د هغې دایرې معادله پیدا کړئ چې:

a: د مرکز مختصات يې $(5, -2)$ او $r = 4$ وي

b: د مرکز مختصات يې $(\sqrt{2}, -3\sqrt{3})$ او شعاع يې $r = 2\sqrt{2}$ وي.

c: مرکز يې $(0, 0)$ او د $(1, 2)$ له نقطې څخه تېرېږي.

d: د مرکز مختصات يې $(0, 0)$ او د $(-3, -4)$ له نقطې څخه تېرېږي.

e: د مرکز مختصات يې $(8, -6)$ او د وضعیه کمیاتو له مبدا څخه تېرېږي

2 - لومړۍ وښیاست چې لاندې راکړل شوی معادلې د دایرې معادلې دي، بیا يې د مرکز وضعیه

کمیات او د شعاع اوږدوالی پیدا کړئ.

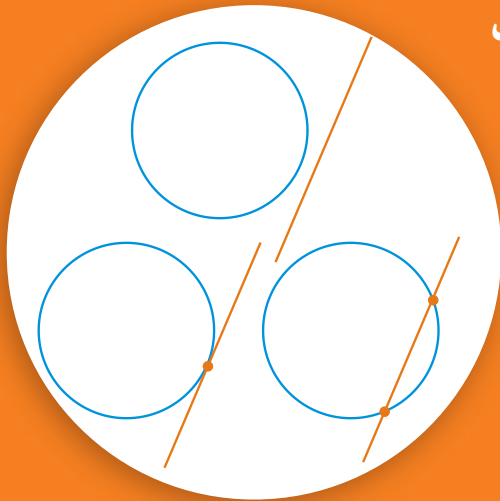
$$x^2 + y^2 + 12x - 10y = 0 \quad , \quad 5x^2 + 5y^2 + 14x + 12y = 0$$

$$x^2 + y^2 - 6x + 4y + 13 = 0 \quad , \quad 3x^2 + 3y^2 - 2x + 4y - 1 = 0$$

$$a(x^2 + y^2) + 2gx + 2fy + c = 0$$

د یو مستقیم خط حالتونه له یوې

دایرې سره:



کولای شئ چې ووايستد $3x - 4y + 20 = 0$

مستقیم خط د $x^2 + y^2 = 25$ دایره په خو

نقطو کې قطع کوي؟

د $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ دایرې معادله په پام کې نیسو او غواړو چې د یو مستقیم خط حالت له دایرې سره وڅېړو چې آیا دا مستقیم خط دایره په دوو نقطو کې قطع کوي، یا مستقیم خط پر دایره مماس دی او یا دا چې مستقیم خط دایره نه قطع کوي.

د x او یا y قیمت د مستقیم خط له معادلې څخه په لاس راوړو او د دایرې په معادله کې یې وضع کوو. یوه دویمه درجه یو مجهوله معادله په لاس راځي.

(1) که په دې معادله کې $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ وي، مستقیم خط دایره په دوو نقطو کې قطع کوي.

(2) که $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ وي مستقیم خط له دایرې سره مماس دی.

(3) او که $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ مستقیم خط دایره نه قطع کوي.

لومړی مثال: آیا د $2x = y + 7$ مستقیم خط د $x^2 + y^2 - 8x - 2y + 12 = 0$ دایره قطع کوي؟ د تقاطع د نقطو وضعیه کمیات یې پیدا کړئ.

حل: د مستقیم خط له معادلې څخه $y = 2x - 7$ ده چې د y دا قیمت د دایرې په معادله کې وضع کوو.

$$x^2 + (2x - 7)^2 - 8x - 2(2x - 7) + 12 = 0$$

$$5x^2 - 40x + 75 = 0$$

$$x^2 - 8x + 15 = 0 \text{ یا}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4 \cdot 15 = 64 - 60 = 4 > 0$$

نو دا مستقیم خط دایره په دوو نقطو کې قطع کوي او د تقاطع د نقطو وضعیه کمیات یې عبارت دي له:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{8 \pm \sqrt{4}}{2}$$

$$x_1 = 5, \quad x_2 = 3$$

د y قیمت د پیدا کولو لپاره د $x_1 = 5$ او $x_2 = 3$ قیمتونه د مستقیم خط په معادله کې وضع کوو، نو لرو چې:

$$y_1 = 2x_1 - 7 = 2 \cdot 5 - 7 = 3$$

$$y_2 = 2x_2 - 7 = 2 \cdot 3 - 7 = -1$$

نو دا خط دایره د $(3, -1)$ او $(5, 3)$ په نقطو کې قطع کوي.

دویم مثال: آیا د $x + 3y - 5 = 0$ مستقیم خط د $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 5 = 0$ له دایرې سره مماس دی که نه؟

حل: د مستقیم خط له معادلې څخه لرو چې $x = 5 - 3y$ دی، د x دا قیمت د دایرې په معادله کې وضع کوو:

$$(5 - 3y)^2 + y^2 - 2(5 - 3y) + 4y - 5 = 0$$

$$y^2 - 2y + 1 = 0$$

او $\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 = 0$ نو دا مستقیم خط له دایرې سره مماس دی او د تماس د نقطې وضعیه کمیات یې عبارت دي له:

$$y = \frac{2 \pm \sqrt{0}}{2} = 1$$

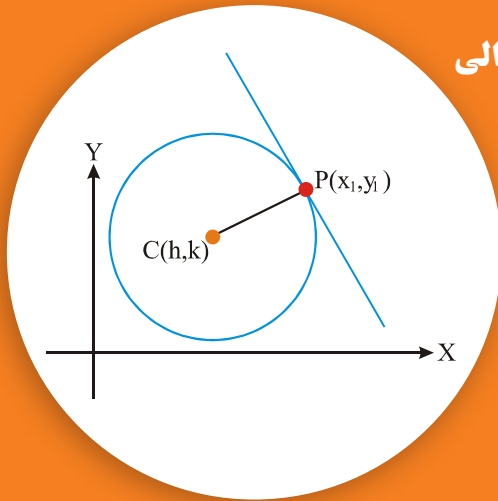
$$x = 5 - 3 \cdot 1 = 2$$

نو مستقیم خط د $(2, 1)$ په نقطه کې پر دایره مماس دی.

فعالیت

آیا د $x - y + 1 = 0$ مستقیم خط د $x^2 + y^2 - 5 = 0$ له دایرې سره مماس دی، که دایره په دوو نقطو کې قطع کوي او یا دا چې دایره نه قطع کوي؟

د مماس معادله او د مماس اوږدوالی



آیا د هغه مماس معادله پیدا کولای شئ چې د
 $x^2 + y^2 = 13$ په نقطه کې د $P(-3, -2)$
 په دایره مماس وي؟

که یو مستقیم خط پر هغه دایره چې مرکز یې $C(h, k)$ او د $p_1(x_1, y_1)$ په نقطه کې پر دایره مماس وي، نو د شعاع میل مساوي دی په: $m = \frac{k - y_1}{h - x_1}$
 او څرنګه چې شعاع د تماس په نقطه کې پر مماس عمود ده، نو د مماس میل له $-\frac{h - x_1}{k - y_1}$ سره مساوي دی.

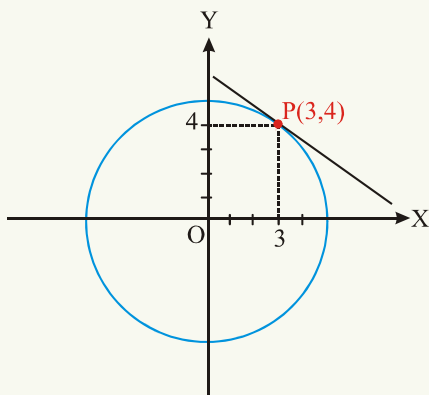
څرنګه چې د مستقیم خط یوه نقطه $P_1(x_1, y_1)$ او میل یې $-\frac{h - x_1}{k - y_1}$ دی.
 د مستقیم خط د $y - y_1 = m(x - x_1)$ معادلې په نظر کې نیولو سره لرو چې:

$$y - y_1 = -\frac{h - x_1}{k - y_1}(x - x_1)$$

چې دا د هغه مماس معادله ده چې د $P_1(x_1, y_1)$ په نقطه کې پر دایره مماس دی.
 او که د دایرې مرکز د وضعیه کمیاتو په مبدا کې وي، نو په دې حالت کې $h = k = 0$ دی او د مماس معادله دا شکل اختیاروي.

$$yy_1 + xx_1 = x_1^2 + y_1^2 \quad \text{یا} \quad y - y_1 = -\frac{x_1}{y_1}(x - x_1)$$

څرنګه چې $x_1^2 + y_1^2 = r^2$ ، نو د مماس معادله $yy_1 + xx_1 = r^2$ ده.



لومړی مثال: د هغه مستقیم خط معادله پیدا

کړئ چې د $(3,4)$ په نقطه کې د $x^2 + y^2 = 25$

پر دایره مماس وي:

حل: څرنګه چې د دایرې مرکز د وضعیه کمیانو

په مبدا کې دی، نو: $y \cdot 4 + x \cdot 3 = 25$

نود مماس معادله عبارت ده له: $3x + 4y = 25$

او یا $.3x + 4y - 25 = 0$

دویم مثال: د هغه مستقیم خط معادله پیدا کړئ چې د $P(3,5)$ په نقطه کې پر هغې دایرې مماس

دي چې مرکزي $(1,2)$ دی.

$$h = 1 \quad k = 2$$

$$x_1 = 3 \quad y_1 = 5$$

$$y - y_1 = -\frac{h - x_1}{k - y_1}(x - x_1)$$

$$m = -\frac{1-3}{2-5} = -\frac{2}{3}$$

$$y - 5 = -\frac{2}{3}(x - 3)$$

$$2x + 3y = 21$$

$$2x + 3y - 21 = 0$$

یا:

د مماس اوږدوالی

که د $P_1(x_1, y_1)$ له نقطې څخه چې له دایرې د باندې واقع ده، د $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

پر دایره د P_1T . مماس د شکل په شان رسم شي، د (T) د تماس نقطه د دایرې له مرکز (C) سره

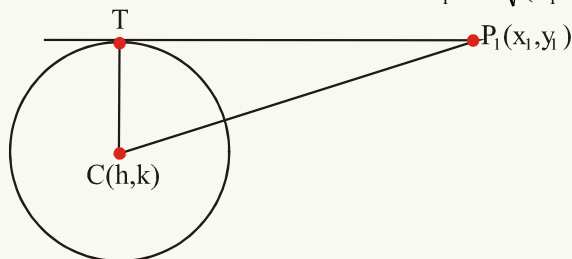
ونښلوو، د فیثاغورث د قضیې په اساس د P_1TC په قائمه زاویه مثلث کې لرو چې:

$$(\overline{P_1C})^2 = (\overline{P_1T})^2 + (\overline{CT})^2$$

$$(P_1 T)^2 = (P_1 C)^2 - (CT)^2 \quad \text{يا}$$

له بلې خوا: $(P_1 C)^2 = (x_1 - h)^2 + (y_1 - k)^2$ او $\overline{CT} = r$ نو د مماس اوږدوالی مساوي

$$\overline{P_1 T} = \sqrt{(x_1 - h)^2 + (y_1 - k)^2 - r^2} \quad \text{دی په:}$$



په یاد ولرئ چې د مماس په امتداد د مماس د اوږدوالی د پیدا کولو لپاره د دایرې له کومې خارجي نقطې څخه د X او Y قیمتونه د دایرې په معادله کې وضع کوو.

دریم مثال: د $(-5,10)$ له نقطې څخه د $5x^2 + 5y^2 + 14x + 12y - 10 = 0$ پر دایره د

مماس اوږدوالی پیدا کړئ.

حل: د معادلې دواړه خواوې پر 5 وېشو، نو لرو چې: $x^2 + y^2 + \frac{14}{5}x + \frac{12}{5}y - 2 = 0$

$$\text{د مماس اوږدوالی} = \sqrt{(-5)^2 + (10)^2 - 14 + 24 - 2} = \sqrt{133}$$

فعالیت

د هغه مماس اوږدوالی پیدا کړئ چې د $P(-2,2)$ له نقطې څخه د $x^2 + y^2 - 6x + 8y = 0$ پر دایره باندې مماس وي.

د دایرې په معادله کې د مستقیم خط د یو مجهول په وضع کولو سره، یوه دویمه درجه یو مجهوله معادله په لاس راځي، که په دې معادله کې $\Delta > 0$ وي، مستقیم خط دایره په دوو

نقطه‌کسی قطع کوي او که $\Delta = 0$ وي خط پر دایره مماس دی او که $\Delta < 0$ وي، مستقیم خط دایره نه قطع کوي.

د هغه مستقیم خط معادله چې د $P_1(x_1, y_1)$ په نقطه کې پر هغه دایره چې مرکز یې (h, k) دی مماس وي، عبارت ده له:

$$y - y_1 = -\frac{h - x_1}{k - y_1}(x - x_1)$$

که د دایرې مرکز د وضعیه کمیاتو په مبدا کې وي، نو د مماس معادله: $yy_1 + xx_1 = x_1^2 + y_1^2$ یا $yy_1 + xx_1 = r^2$ ده، د مماس اوږدوالی د $P(x, y)$ له نقطې څخه چې د دایرې د باندې واقع ده او د دایرې مرکز (h, k) دی مساوی ده په:

$$PT = \sqrt{(x - h)^2 + (y - k)^2} - r$$

پوښتنې

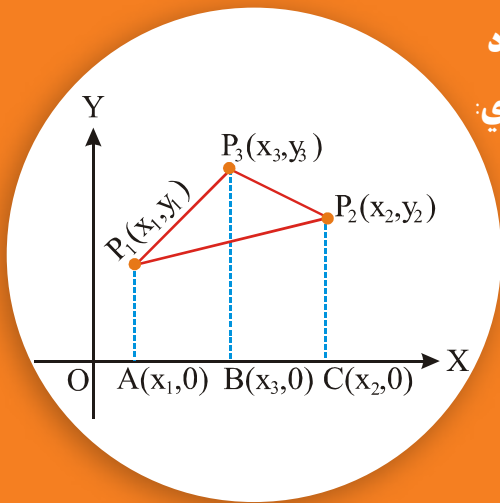
1 - د لاندې مستقیمو خطونو حالتونه له دایرو سره چې معادلې یې په لاندې ډول راکړل شوي دي وڅېړئ.

د دایرو معادلې	د مستقیمو خطونو معادلې
$x^2 + y^2 - 4x - y - 3 = 0$	$3x - 2y + 3 = 0$
$2(x^2 + y^2) - 3x + 2y - 6 = 0$	$x - y - 1 = 0$
$x^2 + y^2 - x - 9y + 14 = 0$	$5x - y = 1$

2- د هغه مستقیم خط معادله پیدا کړئ چې په $(2, -3)$ نقطه کې د $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 3 = 0$ له دایرې سره مماس وي.

3 - د هغه مماس اوږدوالی پیدا کړئ چې د $(-5, 4)$ له نقطې څخه د $5x^2 + 5y^2 - 10x + 15y - 131 = 0$ پر دایره مماس رسم شوی وي

4- د هغه مماس اوږدوالی پیدا کړئ چې د $(-2, -5)$ له نقطې څخه د $x^2 + y^2 + 8x + 5y = 7$ پر دایره مماس رسم شوی وي.



د مثلث د مساحت پيدا کول چې د راسونو وضعيه کميات يې معلوم وي:

آيا دهغه مثلث مساحت پيدا کولای شئ
چې راسونه يې $(-3, 6)$ ، $(3, 2)$ او $(6, 0)$
وي؟

که P_1 ، P_2 او P_3 لکه چې په شکل کې ليدل کېږي د يوه مثلث راسونه وي. د X پر محور $P_1 A$ ، $P_2 C$ او $P_3 B$ درې عمود خطونه رسم کړئ.

د $P_3 B C P_2$ ذونقې مساحت + $P_1 A B P_3$ ذونقې مساحت = د $P_1 P_2 P_3$ مثلث مساحت
- $P_1 A C P_2$ د ذونقې مساحت

لکه څرنگه چې پوهېږو:

د ذونقې مساحت = (د موازي ضلعو د نيمايي مجموعه) \times (د موازي ضلعو ترمنځ فاصله)

نو:

$$\begin{aligned} \Delta P_1 P_2 P_3 \text{ مساحت} &= \frac{1}{2} (|P_1 A| + |P_3 B|) (|AB|) + \frac{1}{2} (|P_3 B| + |P_2 C|) (|BC|) \\ &\quad - \frac{1}{2} (|P_1 A| + |P_2 C|) (|AC|) \\ &= \frac{1}{2} [(y_1 + y_3)(x_3 - x_1)] + \frac{1}{2} [(y_3 + y_2)(x_2 - x_3)] - \frac{1}{2} [(y_1 + y_2)(x_2 - x_1)] \\ &= \frac{1}{2} (x_3 y_1 + x_3 y_3 - x_1 y_1 - x_1 y_3 + x_2 y_3 + x_2 y_2 \\ &\quad - x_3 y_3 - x_3 y_2 - x_2 y_1 - x_2 y_2 + x_1 y_1 + x_1 y_2) \\ &= \frac{1}{2} [x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)] \end{aligned}$$

مثال: کہ چہرے $A(4,-5)$ ، $B(5,-6)$ ، اور $C(3,1)$ د یوہ مثلث راسونہ وی، ددے مثلث مساحت پیدا کریں۔

حل: $x_1 = 4$ ، $y_1 = -5$ ، $x_2 = 5$ ، $y_2 = -6$ ، $x_3 = 3$ ، $y_3 = 1$

$$\Delta ABC \text{ مثلث مساحت} = \frac{1}{2} [x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]$$

$$= \frac{1}{2} [4(-6 - 1) + 5(1 + 5) + 3(-5 + 6)]$$

$$= \frac{1}{2} (-28 + 30 + 3) = \frac{1}{2} \cdot 5 = \frac{5}{2} = 2.5$$

□

کہ $P_1(x_1, y_1)$ ، $P_2(x_2, y_2)$ ، اور $P_3(x_3, y_3)$ وی، نو

د مثلث مساحت د $\frac{1}{2} [x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]$ لہ فورمول شخہ پہ لاس راخی۔

یونینتی

- 1 - د ہغہ مثلث مساحت پیدا کریں چہ راسونہ ہی $A(0,0)$ ، $B(8,6)$ ، اور $C(12,4)$ وی۔
- 2 - کہ دیوہ مثلث راسونہ $A(4,0)$ ، $B(-4,0)$ ، اور $C(0,3)$ وی، ددے مثلث مساحت پیدا کریں۔
- 3 - د ہغہ خلور ضلعي مساحت پیدا کریں چہ راسونہ ہی $A(1,0)$ ، $B(6,2)$ ، اور $C(8,6)$ وی۔ $D(2,4)$

د څپرکي لنډيز:

- د وضعيه کمياتو په مستوي کې هغه نقطې چې د X پر محور پرتې دي، د Y مختصه يې صفر او کومې نقطې چې د Y پر محور پرتې دي د X مختصه يې صفر ده

• د $P(x_1, y_1)$ او $Q(x_2, y_2)$ د دوو نقطو ترمنځ فاصله د $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ له فورمول څخه په لاس راځي.

- د p د نقطې وضعيه کميات چې د $\overline{P_1 P_2}$ قطعه خط د r په نسبت وېشي عبارت دي له:
عبارت دي له: $x = \frac{rx_2 + x_1}{1+r}$ او $y = \frac{ry_2 + y_1}{1+r}$

- د p نقطه د $\overline{P_1 P_2}$ خط داخلياً د r په نسبت ووېشي نو r مثبت او که خارجاً يې و وېشي، نو r منفي دی.

- د يو مستقيم خط ميل چې د $P_1(x_1, y_1)$ او $P_2(x_2, y_2)$ له نقطو څخه تېرېږي د $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$ له فورمول څخه په لاس راځي د X د محور او د هغو خطونو ميل چې د X له محور سره موازي وي صفر او د Y د محور او د هغو خطونو ميل چې د Y له محور سره موازي وي، تعريف شوي نه دي. که د يوه مستقيم خط د ميل زاويه حاده وي، ميل يې مثبت او که منفرجه وي ميل يې منفي دی.

- د هغې مستقيم خط معادله چې ميل او د Y له محور سره يې تقاطع معلومه وي، عبارت ده له:
 $y = mx + b$

- د هغه مستقيم خط معادله چې ميل او يوه نقطه يې معلومه وي، عبارت ده له:
 $y - y_1 = m(x - x_1)$

د هغه مستقيم خط معادله چې دوي نقطې يې معلومې وي عبارت ده له:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \text{ اويا } \frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

له محورونو سره یې د تقاطع نقطې معلومې وي: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ ده.

• د یوه مستقیم خط نورمال معادله $x \cos \theta + y \sin \theta - p = 0$ او د مستقیم خط عمومي معادله $ax + by + c = 0$ ده.

• د $P(x_1, y_1)$ د نقطې فاصله له یوه مستقیم خط څخه د $d = x \cos \theta + y \sin \theta - P$ او یا $d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\pm \sqrt{a^2 + b^2}}$ له فورمول څخه په لاس راځي.

• د هغې دایرې معادله چې مرکز یې د وضعیه کمیاتو په مبدا کې واقع وي له $x^2 + y^2 = r^2$ څخه عبارت ده او که مرکز یې د وضعیه کمیاتو په مبدا کې واقع نه وي او (h, k) یې مرکز وي، معادله یې: $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

یا $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ او یا $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$

• د دایرې په معادله کې د مستقیم خط د یو مجهول په وضع کولو سره، یوه دویمه درجه یو مجهوله معادله په لاس راځي، که په دې معادله کې $\Delta > 0$ وي، مستقیم خط دایره په دوو نقطو کې قطع کوي او که $\Delta = 0$ وي خط پر دایره مماس دی او که $\Delta < 0$ وي، خط دایره نه قطع کوي.

• د هغه مستقیم خط معادله چې د $P_1(x_1, y_1)$ په نقطه کې پر هغه دایره چې مرکز یې (h, k) دی مماس وي عبارت ده له: $y - y_1 = -\frac{h - x_1}{k - y_1}(x - x_1)$ او که د دایرې مرکز د وضعیه کمیاتو په مبدا کې وي، نو د مماس معادله یې:

$yy_1 + xx_1 = x_1^2 + y_1^2$ یا $yy_1 + xx_1 = r^2$ ده او د PT مماس اوږدوالی د $P(x_1, y_1)$ له نقطې څخه چې له دایرې د باندې واقع ده او مرکز یې (h, k) دی، مساوي ده په:

$$\overline{PT} = \sqrt{(x - h)^2 + (y - k)^2 - r^2}$$

□

• که د یوه مثلث رأسونه $P_1(x_1, y_1)$ ، $P_2(x_2, y_2)$ او $P_3(x_3, y_3)$ وي، نو $P_1 P_2 P_3$ د مثلث مساحت د $\frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]$ له فورمول څخه په لاس راځي.

د څپرکي پوښتنې:

1 - د لاندې هرې جوړې نقطو ترمنځ فاصله پیدا کړئ او همدارنگه ددې مستقیمو خطونو د تنصیف د نقطو وضعیه کمیات پیدا کړئ چې د A او B له دوو نقطو څخه تېرېږي.

$$A(3,1), B(-2,-4) \quad A(-8,3), B(2,-1)$$

$$A(-\sqrt{5}, -\frac{1}{3}), B(-3\sqrt{5}, 5)$$

2 - که $A(\sqrt{3}, -1)$ ، $B(0, 2)$ او $C(h, -2)$ د یوه قایم الزاویه مثلث راسونه وي او د $\hat{A} = 90^\circ$ وي، د (h) قیمت پیدا کړئ.

3 - د p د نقطې وضعیه کمیات پیدا کړئ، په داسې حال کې هغه مستقیم خط چې د $A(1, 4)$ او $B(5, 6)$ له نقطو څخه تېرېږي د $\frac{AP}{PB} = 2$ په نسبت و وېشي.

4 - د هغه مستقیم خط معادله پیدا کړئ چې میل یې (-2) او د Y محور په 3 کې قطع کړي.

$$5 - د $x = \sqrt{7}$ او $y = -\sqrt{7}$ د خطونو میل پیدا کړئ.$$

6 - د Y د محور میل مساوي دی په:

$$a) -1 \quad b) 1 \quad c) 0 \quad d) \text{تعریف شوی نه دی}$$

7 - د یوه مستقیم خط میل $m = \frac{2}{3}$ دی، د هغه خط میل چې پر دې خط عمود وي، مساوي دی په:

$$a) \frac{2}{3} \quad b) -\frac{2}{3} \quad c) \frac{3}{2} \quad d) -\frac{3}{2}$$

8 - د هغو مستقیمو خطونو میل پیدا کړئ چې د لاندې راکړل شوو نقطو له جوړو څخه تېرېږي.

$$(4, 8) \text{ او } (4, 6) \quad (2, 7) \text{ او } (3, -2) \quad (5, 11) \text{ او } (-2, 4)$$

9 - د $4x - y + 2 = 0$ او $12x - 3y + 1 = 0$ مستقیمو خطونو:

a) موازي دي b) عمود دي c) نه موازي او نه عمود دي

10 - د $3x - 4y + 3 = 0$ او $3x - 4y + 7 = 0$ مستقیمو خطونو ترمنځ فاصله پیدا کړئ.

11 - د هغه مستقیم خط معادله پیدا کړئ چې د $(-4, 7)$ له نقطې تېر شي او د

$$2x - 7y + 4 = 0 \text{ له مستقیم خط سره موازي وي.}$$

- 12 - د $P(6,-1)$ نقطې فاصله د $6x - 4y + 9 = 0$ له مستقیم خط څخه پیدا کړئ.
- 13 - د p د نقطې وضعیه کمیات په داسې حال کې پیدا کړئ چې $P_1 P_2$ مستقیم خط چې د $P_1(2,-5)$ او $P_2(6,3)$ له نقطو څخه تېرېږي د $\frac{3}{4}$ په نسبت ووېشي.
- 14 - د لاندې مستقیمو خطونو معادلې نورمال شکل ته واړوئ.
 $2x + 5y - 2 = 0$ $2x - 3y + 6 = 0$
- 15 - د هغه مستقیم خط میل چې د $(4,0)$ او $(-4,0)$ له نقطو څخه تېرېږي مساوي دی په:
- a) 1 b) -1 c) 0 d) تعریف شوي نه دی
- 16 - د هغه مستقیم خط معادله پیدا کړئ چې د نورمال اوږدوالی یې 10 واحد او نورمال خط یې د X محور له مثبت جهت سره د 30° زاویه جوړوي.
- 17 - د هغه مثلث مساحت پیدا کړئ چې راسونه یې $A(2,3)$ ، $B(-1,1)$ او $C(4,-5)$ وي.
- 18 - د هغه مثلث مساحت چې راسونه یې $A(1,4)$ ، $B(2,-3)$ او $C(3,-10)$ دي مساوي دی په:
- a) 1 b) 2 c) 0 d) هېڅ یو
- 19 - د $x + 2y = 6$ د مستقیم خط د تقاطع نقطې د $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 39 = 0$ له دایرې سره پیدا کړئ.
- 20 - د هغې دایرې معادله پیدا کړئ چې د $A(1,1)$ ، $B(2,-1)$ او $C(3,-2)$ له نقطو څخه تېرېږي.
- 21 - د هغې دایرې معادله پیدا کړئ چې د $A(3,-1)$ او $B(0,1)$ له نقطو څخه تېرېږي او مرکز یې د $4x - 3y - 3 = 0$ پر مستقیم خط واقع وي.
- 22 - د $4x^2 + 4y^2 - 8x + 12y - 25 = 0$ دایرې د مرکز وضعیه کمیات او شعاع اوږدوالی یې پیدا کړئ.
- 23 - د هغې دایرې معادله پیدا کړئ چې د $A(4,1)$ او $B(6,5)$ له نقطو څخه تېرېږي او مرکز یې د $4x + y - 16 = 0$ پر مستقیم خط باندې واقع وي.

- 24 - که دیوه مثلث رأسونه $A(5,-6)$ ، $B(-3,5)$ او $C(-1,2)$ وي، دا مثلث:
- مختلف الاضلاع دی c) متساوی الساقین دی b) متساوی الاضلاع دی a)
- 25 - که دیوه مثلث رأسونه په ترتیب سره $(5,4)$ ، $(4,10)$ او $(7,8)$ وي دا مثلث:
- مختلف الاضلاع دی c) متساوی الساقین دی b) متساوی الاضلاع دی a)
- 26 - که $P(-8,4)$ او $Q(2,-1)$ وي د A د نقطې مختصات پیدا کړئ که د A نقطه د PQ خط داخلاً او خارجاً د $\frac{2}{3}$ په نسبت و وېشي.
- 27 - د $x - y + 1 = 0$ مستقیم خط د تقاطع نقطې له $x^2 + y^2 = 5$ دایرې سره پیدا کړئ.
- 28 - که د $x + ay - 5 = 0$ مستقیم خط د $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$ پر دایره مماس وي، د a قیمت پیدا کړئ.
- 29 - د هغې دایرې معادله چې د $(0,0)$ او $(2,0)$ له نقطو څخه تېرېږي او د $y - 1 = 0$ له مستقیم خط سره مماس وي، عبارت ده له:
- a) $x^2 + y^2 - 4x = 0$ b) $x^2 + y^2 - 2x = 0$ c) $x^2 + y^2 + 2x = 0$
- 30 - هغه دایره چې معادله یې $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 14 = 0$ ده:
- a) حقیقي ده b) نقطوي ده c) موهومي ده
- 31 - هغه دایره چې معادله یې $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 5 = 0$ ده:
- a) موهومي ده b) نقطوي ده c) حقیقي ده
- 32 - که $A(4,-3)$ او $B(-2,-5)$ وي د A او B د نقطو ترمنځ فاصله پیدا کړئ او هم د \overline{AB} د خط د تنصیف نقطې وضعیه کمیات پیدا کړئ.
- 33 - که دیوه مثلث رأسونه $A(-6,3)$ ، $B(3,-5)$ او $C(-1,5)$ وي، وښیاست چې دا مثلث قایم الزاویه مثلث دی.
- 34 - وښیاست چې $A(0,0)$ ، $B(a,0)$ ، $C(0,b)$ او $D(a,b)$ د یو مستطیل رأسونه دي او هم وښیاست چې د مستطیل د قطرونو اوږدوالی سره مساوي دی.
- 35 - وښیاست چې $A(3,1)$ ، $B(6,2)$ او $C(9,3)$ نقطې پر یوه مستقیم خط واقع دي.

36 - دهغه مستقيمو خطونو معادلې پيدا کړئ چې د لاندې هرو جوړولو له نقطو څخه تېرېږي.

(5,8)	(1,2)	(3,5)	(8,15)
(-1,-3)	(2,-1)	(-2,-1)	(3,-4)
(0,3)	(5,0)	(0,2)	(-2,0)

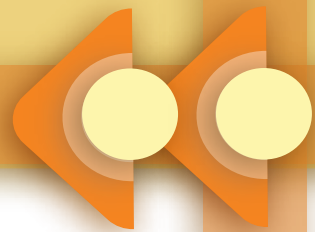
37 - دهغه مستقيم خط معادله چې د (5,8) او (-1,10) له نقطو څخه تېرېږي عبارت ده له:

$$a: y = -\frac{1}{3}x + 9\frac{2}{3}$$

$$b: y = -\frac{x}{3} + 9\frac{2}{3}$$

$$c: y = -\frac{1}{3}x + \frac{29}{3}$$

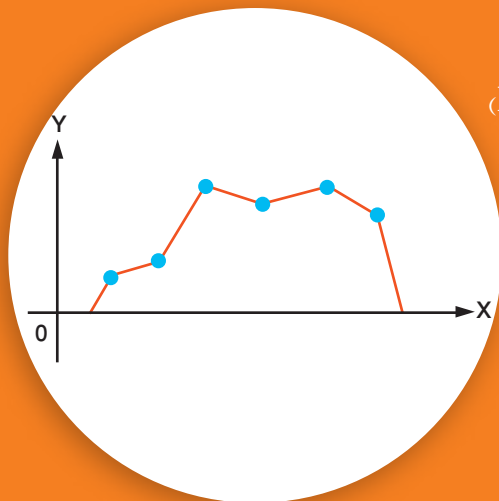
d: درې واړه سم دي



اتم خیر کی احصائیہ



د فریکونسي څو ضلعي گراف (Frequency Polygon graph)



مخامخ شکل په پام کې ونیسئ، آیا کولای شئ د راکړل شوي منحنی لاندې مساحت پیدا کړئ؟
آیا ویلای شئ چې تر منحنی لاندې مساحت له څه شي سره برابر دی؟

فعالیت

د فریکونسيو مخامخ جدول په نظر کې ونیسئ:

کلاسونه	د کلاس (صنف) مرکز	فریکونسي
10-13	11.5	3
13-16	14.5	6
16-19	17.5	7
19-22	20.5	4

- د هر کلاس (صنف) مرکز د لومړي مختصې او اړونده فریکونسي یې د دویمې مختصې په حیث د مرتبو جوړو په شکل په نظر کې ونیسئ.
 - ددې مرتبو جوړو موقعیت د قایمو وضعیه کمیانو په سیستم کې وټاکئ.
 - هغه نقطې چې په مستوي کې له دې مرتبو جوړو څخه په لاس راځي، سره ونښلوئ.
- آیا کولای شئ چې ددې گراف لاندې مساحت پیدا کړئ؟
- د X پر محور د گراف دواړو خواوو ته $(8.5, 0)$ او $(38.5, 0)$ نقطې زیاتې کړئ. په لاس راغلی گراف د فریکونسي جدول له مستطیلي گراف سره یوځای رسم کړئ او د مستطیلونو مساحت د منحنی لاندې مساحت سره پرتله کړئ.
- په څو ضلعي گراف کې د هر کلاس مرکز پر افقي محور اود هر کلاس مطلقه فریکونسي یا نسبي

فريکونسي پر عمودي محور بنودل کېږي، د کلاس مرکز (منځني نقطه) او د کلاس د فريکونسيو په مقابل کې په مستوي کې يوه نقطه ټاکل کېږي چې عرض يې د کلاس مرکز او اوږدوالی يې د هماغه کلاس له فريکونسيو سره برابر دی، د جدول د کلاسونو په شمېر په مستوي کې په هماغه اندازه نقطې په لاس راځي. که د کلاسونو په اول او اخر کې دوي نورې د $(x_1 - c, 0)$ ، $(x_n + c, 0)$ اختياري نقطې زياتې کړئ، څرنگه چې c د هر کلاس وسعت دی يعنې (پاسني سرحد منفي د هماغه صنف لاندینی سرحد) چې ددې نقطو له نښلولو څخه يو گراف په لاس راځي چې د فريکونسي څو ضلعي گراف نومېږي.

مثال: د لاندې جدول د ډيټا (Data) مستطيلي (هستوگرام) او د فريکونسيو څو ضلعي گرافونه يې رسم کړئ.

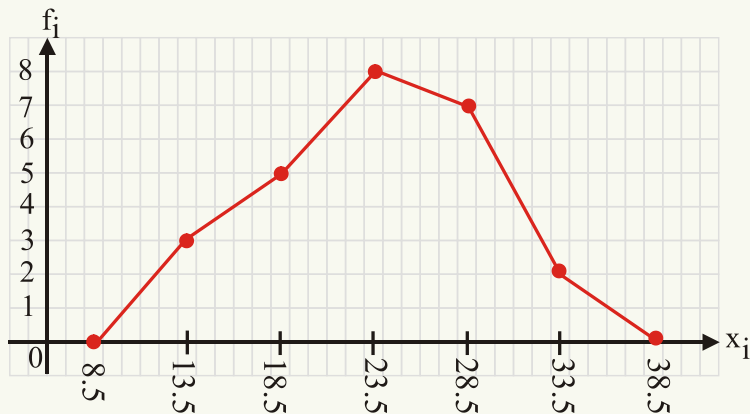
CL = د کلاسونو حدود	11-16	16-21	21-26	26-31	31-36
f_i = مطلقه فريکونسي	3	5	8	7	2
X_i = د کلاسونو مرکز	13.5	18.5	23.5	28.5	33.5

پوهېږو چې $c = 5$ ده، ددې لپاره چې دوه اختياري نقطې په لاس راوړو، نو:

$$(x_1 - 5, 0) = (13.5 - 5, 0) = (8.5, 0)$$

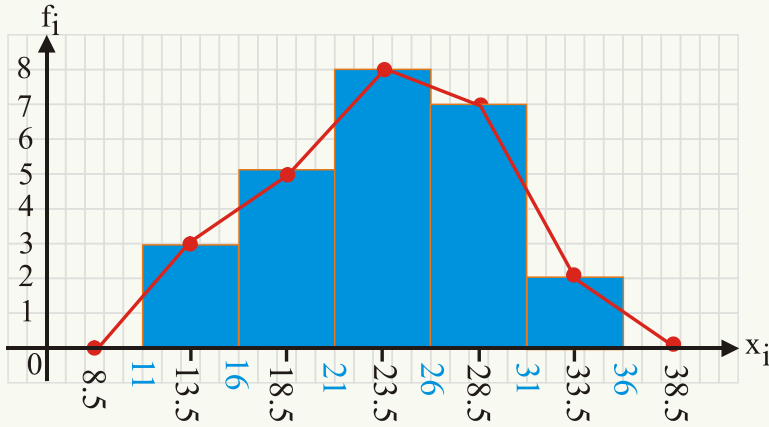
$$(x_n + 5, 0) = (33.5 + 5, 0) = (38.5, 0)$$

ددې نقطو $(8.5, 0)$ او $(38.5, 0)$ په اضافه کولو سره گراف رسموو:



د فريکونسي څو ضلعي گراف

مستطیلي گراف د فریکونسيو خو ضلعي گراف سره:



له پورتنی گراف څخه لیدل کیږي چې:

- د فریکونسيو خو ضلعي گراف راسونه تر مطالعې لاندې د فریکونسيو له جدول د اړونده مستطیل د پورتنی ضلعي منځني نقطه سره واقع دي.
- د فریکونسيو خو ضلعي گراف د لاندې سطحې مساحت د مستطیلي گراف له مساحت سره برابر دی.
- د نسبي فریکونسيو خو ضلعي گرافونه زیات د متصلو ډیټاوو (Data) له پاره کارول کېږي.

پوښتنې

1 - د نهم اولسم ټولگيو د 24 زده کوونکو د تنې لوړوالی د سانتي متر په حساب په لاندې ډول راکړل شوی دی.

138	107	136	128	148	118
142	129	115	123	133	123
121	128	122	144	126	135
152	98	117	153	141	126

د پورتنۍ ډیټا (Data) لپاره د فریکونسي یو جدول ترتیب کړئ. ډیټا (Data) په شپږو طبقو ووېشئ، ددې ډیټا (Data) د ښودلو لپاره کوم ډول گراف ښه دی، د فریکونسيو څو ضلعي گراف رسم کړئ.



د ساقې او پاڼې گراف

مور د عددونو په نړۍ کې ژوند کوو، هر تن د خپل هیواد د ټولني د یو غړی په حیث یوه خاصه شمېره لري چې د نورو مشخصو په شان د اهمیت وړ ده. آیا وبلاى شی چې دا شمېره څه شی ده؟ او آیا تاسو هم خپله شمېره پېژنئ؟

فعالیت

• په لاندې جدول کې د سانتي متر په حساب د 20 نویو پیدا شوو ماشومانو د تنې لوړوالی چې په تصادفي ډول انتخاب شوی دی، راکړل شوی دی.

45	46	47	43	49	40	42	46	45	43
43	43	48	49	47	49	48	49	47	45

• پورتنی ډیټا (Data) له کوچني عدد څخه لوی عدد ته ترتیب کړئ.
- لیدل کېږي چې په دې ټولو عددونو کې د 4 رقم مشترک دی، کولای شو چې دا رقمونه په لاندې ډول ولیکو.

$$40 + (0,2,3,3,3,3,5,5,5,6,6,7,7,7,8,8,9,9,9,9)$$

• له 0 تر 9 پورې رقمونه هر یو رقم څو وارې تکرار شوی دی. پورتنی رقمونه په لاندې شکل لیکو.

4	0			
	2			
	3	3	3	3
	5	5	5	
	6	6		
	7	7	7	
	8	8		
	9	9	9	9

• که د عددونو پورتنی شکل د 90° زاویې په اندازه کینې خوا ته دوران ورکړی، دا شکل له کوم ډول گراف سره مشابه دی؟

ډیتا عموماً د عددونو په شکل وي. له دې عددونو څخه څرنګه چې په پورتنی فعالیت کې ولیدل شول، کولای شو، گراف یې جوړ کړو چې دا گراف د ساقې او پانې د گراف په نامه یادېږي. او که دې گراف ته د 90° زاویې په اندازه کینې خواته دوران ورکړو، میله یې گراف لاس ته راځي. د مثال په ډول که ډیتا د صفر او 100 ترمنځ وي، کولای شو، لکه: د 37 عدد 3 په ساقه او (7) د پانې په حیث ولیکو.

د ساقې او پانې گراف د هغو ډیتا (Data) لپاره چې تر ټولو لوی او تر ټولو کوچنی ډیتا (Data) ترمنځ توپیر یې لږ وي، مناسب دی.

لومړی مثال: د کتابونو په یو پلورنځي کې 20 ډوله کتابونه چې هر ډول شمېر یې په لاندې جدول کې راکړل شوی دی، ددې ډیتا (Data) د ساقې او پانې گراف رسم کړئ.

10	11	15	23	27	28	38	38	39	39
40	41	44	45	46	46	52	57	58	65

حل: ښکاره ده چې د ډیتا (Data) د کینې خوا اولني عددونه 1.2.3.4.5 او 6 دي. چې دا عددونه د ساقې لپاره په نظر کې نیسو. او د هرې څانګې اړونده ډیتا ورته ددې عددونو مخکې لیکو چې په لاندې ډول لاس ته راځي.

ساقه	پانې					
1	0	1	5			
2	3	7	8			
3	8	8	9	9		
4	0	1	4	5	6	6
5	2	7	8			
6	5					

که د کتاب مخ ته د ساعت د ستنې حرکت په مخالفه خوا کې د 90° زاوې په اندازه دوران ورکړو. دا گراف د میله یي گراف په شکل بدلېږي چې په لاندې ډول یې لیکلای شو.

6						6
5						6
4			9	5		
3	5	8	9	4	8	
2	1	7	8	1	7	
1	0	3	8	0	2	5
	1	2	3	4	5	6

دویم مثال: د ریاضي په یوه امتحان کې لاندې نتیجې له زده کوونکو څخه پلاس راغلي دي، ددې دیتا لپاره د ساقې او پانې گراف رسم کړئ.

25 45 46 50 50 50 55 55 55 55
55 57 58 58 60 60 62 65 67 72

حل: د ساقې د رسم لپاره له لسيزو رقمونو او د پانې د ترسیم لپاره له یوويزو رقمونو څخه استفاده کوو:

ساقه	پانې
2	5
3	
4	5 6
5	0 0 0 5 5 5 5 5 7 8 8
6	0 0 2 5 7
7	2

1- د لاندې ډیټا (Data) لپاره د ساقې او پانې گراف رسم کړئ.

7.9	8.3	10.9	11.7	8.4	9.1	6.8	12.5
11.2	7.8	12	11.3	8.4	13	6.8	

پاملرنه: د ساقې او پانې د گراف د ښودلو لپاره د 8.3 عدد د 83 په شکل او د 11.2 عدد د 112 په شکل او د 12 عدد د 120 په شکل لیکو.

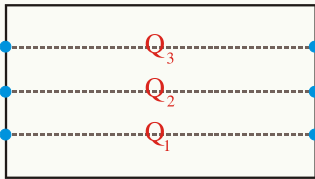
ربعي (څلورمې)



په مخامخ شکل کې که دا د خلکو ټولنه نظر د دوی د تنې د لوړوالي په نسبت په څلورو مساوي برخو و وېشل شي، هره برخه یې په کوم نامه یادوي؟

فعالیت

مخامخ شکل یو مستطیل دی چې د Q_1 , Q_2 , او Q_3 خطونو په واسطه په څلورو مساوي برخو وېشل شوی دی.



- د مستطیل د مساحت څو فیصده مساحت د Q_1 د خط لاندې، څو فیصده مساحت د Q_1 د خط له پاسه واقع دی؟
- د مستطیل څو فیصده مساحت د Q_2 تر خط لاندې او څو فیصده مساحت د Q_2 د خط له پاسه دی؟
- د مستطیل څو فیصده مساحت د Q_3 تر خط لاندې او څو فیصده مساحت د Q_3 د خط له پاسه دی؟

هغه عددونه چې ترتیب شوي ډیټا په څلورو مساوي برخو وېشي، دغه عددونو ته لومړۍ ربع، دویمه ربعه او دریمه ربع وایي او په Q_1 , Q_2 , او Q_3 سره بنودل کېږي.

لومړۍ ربع هغه مقدار دی چې 25% ډیټا له هغې لاندې او 75% ډیټا له هغې پورته واقع وي.

دویمه ربع هغه مقدار دی چې 50% ډیټا له هغې لاندې او 50% ډیټا له هغې پورته واقع وي.

دریمه ربع هغه مقدار دی چې 75% ډیټا ترې لاندې او 25% ډیټا یې له پاسه واقع وي.

که ډیټا (Data) په صعودي ډول ترتیب کړو، د ډیټا (Data) میانه د Q_2 سره مساوي لومړنۍ نیمایي

ډیټا (Data) میانه له Q_1 سره مساوي او همدارنگه د دویمې نیمایي میانه له Q_3 سره مساوي ده.

د ربعو د پیدا کولو په وخت کې لاندې پړاونه په پام کې ونیسئ.

- دیتا (Data) په صعودي ډول ترتیب کړئ.
- ترتیب شوی دیتا ته له (1) څخه تر n پورې شمېره (کوډ) ورکړئ.
- د P ام موقعیت (P=1,2,3) دلاندې رابطې په مرسته په لاس راځي.

$$C_{QP} = \frac{P \cdot n}{4} + \frac{1}{2}$$

• د ربعي د موقعیت په اساس، د ربعي مقدار وټاکئ.

مثال: فرض کړئ په لاس راغلي دیتا (مشاهدي) په لاندې ډول راکړل شوي وي.

140 100 120 80 85 90

د لومړي او دريمې ربعي ځايونه وټاکئ.

د لومړي او دريمې ربعي مقدارونه پلاس راوړئ.

د دیتا شمېره: 6 5 4 3 2 1

دیتا: 140 120 100 90 85 80

د لومړي او دريمې ربعي ځايونه عبارت دي له:

$$C_{Q_1} = \frac{1 \cdot 6}{4} + \frac{1}{2} = 2$$

$$C_{Q_3} = \frac{3 \cdot 6}{4} + \frac{1}{2} = 5$$

نو د لومړي او دريمې، ربعي مقدارونه مساوي دي په:

$$Q_1 = 85$$

$$Q_3 = 120$$

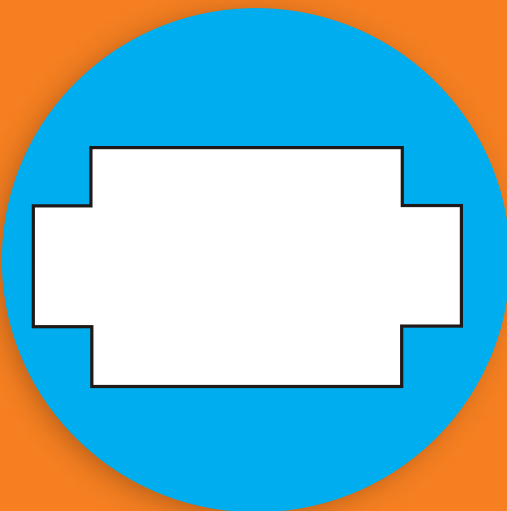
پوښتنې

فرض کړئ په لاس راغلي دیتا په لاندې ډول راکړل شوي وي.

85 140 160 120 80 90 100

- لومړي او دريمه ربعي (خلورمې) پيدا کړئ.
- له ميانې تر مخه عددونه وليکئ.
- له ميانې وروسته عددونه په لاس راوړئ.

صندوقچه یې گراف



د یوې تختې کاغذ له څلورو کنجونو څخه څلور مربعگانې چې هره ضلع یې 5cm وي، جلا کړئ، بیا د کاغذ څنډې له پورته خواڅخه قات کړئ. کوم شکل چې په لاس راځي، له څه شي سره ورته والی لري؟

فعالیت

د هغه ناروغانو شمېر چې د 17 ورځو، په موده کې یوه روغتون ته راغلي دي، په لاندې ډول ثبت شوي دي.

11	10	15	23	14	27	16	17	24
28	13	31	31	18	25	26	19	

- میانه یې پیدا کړئ.
- هغه عددونه ولیکي چې د میانې تر مخې نیمایي کې پراته دي.
- ددې عددونو لپاره میانه پیدا کړئ.
- هغه عددونه ولیکئ چې د میانې په وروسته نیمایي کې پراته دي.
- ددې عددونو لپاره میانه پیدا کړئ.

• دویمه ربع (څلورمه) یا Q_2 کوم عدد دی؟

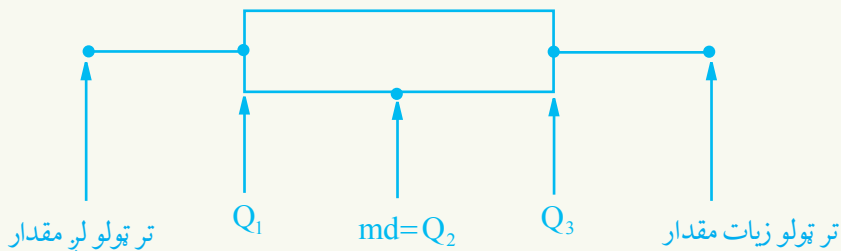
صندوقچه یې یا جعبه یې گراف: دا یو داسې تصویري گراف دی چې د ډیټا (Data) تیت

والی د نورو گرافونو په نسبت ښه روښانه کوي، د اگراف د لاندېنیو اندازو پر بنیاد د ډیټا (Data) گراف ښکاره کوي.

الف) تر ټولو کوچنی ډیټا ب) لومړنی ربع (څلورمه) ج) میانه

د) دریمه ربع ه) تر ټولو لویه ډیټا

صندوقچه یې گراف د ربعو او له زیات نه زیات او کم تر کمه ډیټا (Data) ښودونکی دی.



کولای شو د صندوقچه یې گراف د رسمولو پراوونه په لاندې ډول ولیکو:

الف) تر ټولو کوچنی ډیټا پیدا کړئ.

ب) تر ټولو لویه ډیټا پیدا کړئ

د) لومړی ربع پیدا کړئ

ج) میانه پیدا کړئ

و) گراف رسم کړئ.

ه) دریمه ربع پیدا کړئ

مثال: که په یو ښار کې د 15 ورځو په موده کې د ترافیکي پیښو شمېر په لاندې ډول راکړل شوي

وي، صندوقچه یې گراف یې رسم کړئ.

12	10	15	23	14	27	16	34
	41	43	32	18	25	31	19

حل: پورتنی ډیټا په ترتیب لیکو.

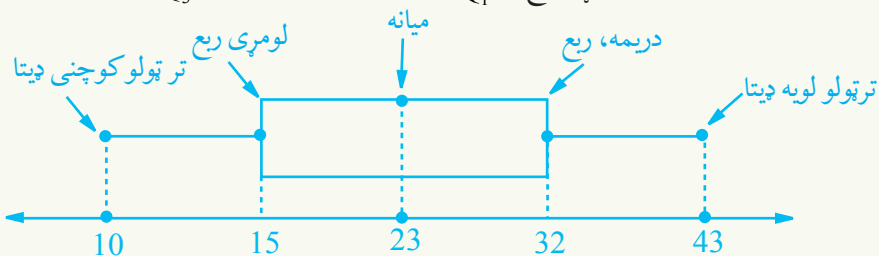
10 12 14 15 16 18 19 23 25 27 31 32 34 41 43

نو: تر ټولو کوچنی ډیټا = 10 تر ټولو لویه ډیټا = 43

دریمه ربع = $Q_3 = 32$

لومړی ربع = $Q_1 = 15$

میانه = 23



پورتنی گراف صندوقچه یې گراف دی چې 50% ډیټا د صندوق په داخل کې (د لومړي، دریمي او ربعي ترمنځ) پرتې دي، 25% یې 10 او 15 ترمنځ او 25% ډیټا د 32 او 43 ترمنځ پرتې ده.

د نارمل منحني د مرکزي

ټاکوونکو پرتله کول

$$\text{mod} = ?$$

$$\text{med} = ?$$

$$\bar{x} = ?$$

آيا کولای شو چې د نارمل منحني په مرسته

مرکزي ټاکوونکی پلاس راورو؟

لاندې کوم منحني چې وینئ، په احصائیه کې یوله مشهورو منحني گانو څخه دی، کولای شو چې زیاتې طبیعي پیښې ددې منحني په مرسته وښایو. نارمل منحني یو متناظره منحني دی چې د یوه زنگ په شان شکل لري.

• آیا د اوسط، میانې او موډ د مرکزي ټاکوونکو ځایونه په دې منحني کې بنودلای شی؟

فعالیت

- که په یوه ټولگي کې ټول زده کوونکي ښې نمرې واخلي:
- آیا څه فکر کوئ چې ددوی د نمرو اوسط هم ښه دی؟
- آیا د اوسط لوړوالی د ټولگي د تعلیمي وضعي پر ښه والي دلالت کوي؟
- ددې لپاره چې د ټولگي وضع ښه ارزيايي کړی، نیم ټولگی باید ښې نمرې واخلي.
- هغه کومه نمره ده چې د نیمايي ټولگي د زده کوونکو نمرې له هغې زیاتې وي؟

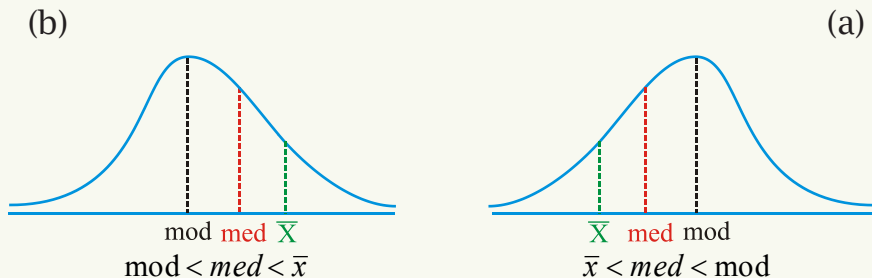
• که میانه له اوسط خخه ډېره کوچنۍ وي، له دې خخه څه شی په لاس راځي؟

• که میانه له اوسط خخه ډېره لویه وي، له دې خخه څه شی په لاس راځي؟

د پورتنی فعالیت او د منحنی له متناظر والی خخه نتیجه په لاس راځي چې د میانې او اوسط ځای په نارمل منحنی کې یو دی او څرنگه چې نارمل منحنی اعظمی نقطه لري، نو له همدې سببه د موډ ځای هم له اوسط او میانې سره مساوي دی یعنې:

$$\bar{X} = \text{mod} = \text{md}$$

که نارمل منحنی، متناظره نه وي، په دې حالت کې لرو چې:



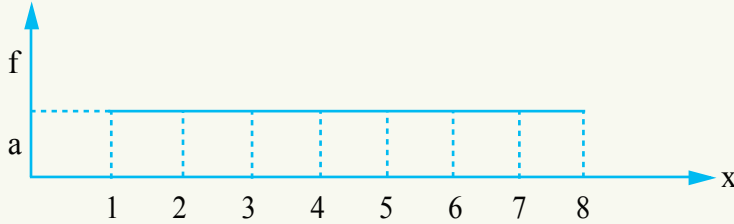
- که چېرې اوسط او میانه سره مساوي وي، له اوسط او میانې خخه تر مخه او له اوسط او میانې خخه وروسته ډیتاګانې سره مساوي دي.

- که اوسط د میانې کینې خوا ته پروت وي، د هغو ډیتا شمېر چې د اوسط بڼې خواته پرتي دي، د هغو ډیتا (Data) له شمېر خخه چې د اوسط کینې خواته پرتي دي، زیات دی، لکه: د a به شکل کې.

- که اوسط د میانې بڼې خواته پروت وي، د هغو ډیتا (Data) شمېر چې د اوسط بڼې خواته پرتي دي، د هغو ډیتاوو (Data) له شمېر خخه چې د اوسط کینې خوا ته پرتي دي، لږ دي.

لکه د b به شکل کې

مثال: په لاندې ګراف کې اوسط او میانه پیدا کړئ.



حل:

میانه =

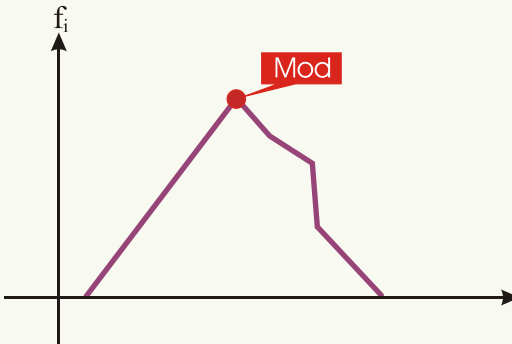
$$\text{اوسط} = \text{med} = \frac{4+5}{2} = \frac{9}{2} = 4.5$$

$$\bar{x} = \frac{a \cdot 1 + a \cdot 2 + a \cdot 3 + a \cdot 4 + a \cdot 5 + a \cdot 6 + a \cdot 7 + a \cdot 8}{a + a + a + a + a + a + a + a}$$

$$\bar{x} = \frac{36a}{8a} = 4.5$$

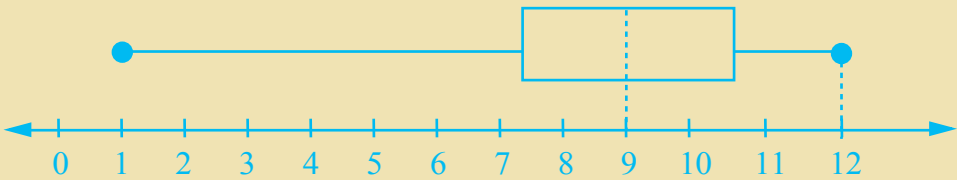
مثال: په لاندې ګراف کې د مود تقریبي قیمت پرته له محاسبې په ګوته کړئ.

حل:



پوښتنې

1- دلاندې صندوقچه يې گراف په نظر کې نيولو سره لاندې اړوندو پوښتنو ته ځوابونه ورکړئ.



- په پورتنی گراف کې میانه څومره ده؟
- په دې ډیتا کې لومړنۍ، ربع د 8 عدد دی، دا عدد، څه شی بڼیې؟
- دریمه ربع څو ده؟ دا عدد، د څه شی بڼوونکی ده؟
- دا چې میانه د صندوق کینې خواته ده، د څه شی ښکارندویه دی؟
- دا چې د کینې خوا د عددونو شمېر نظر بڼې خوا ته زیات دی دا زیاتوالی د څه ښکاره کوونکی دی؟

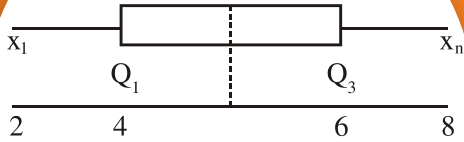
2- د یوه هېواد د فوټبال ملي ټیم د لوبغاړو عمرونه په لاندې ډول دي.

25	24	26	19	31	18	23	22	25	26
25	27	23	29	25	25	33	31	26	

د لاندې نتیجو څخه کومه یوه سمه ده؟

- د هغو لوبغاړو شمېر چې عمرونه یې له اوسط څخه لوړ وي، ډېر دي.
- د هغو لوبغاړو شمېر چې عمرونه یې له میانې څخه لوړ وي، ډېر دي.
- د هغو لوبغاړو شمېر چې عمرونه یې له اوسط څخه ښکته وي، ډېر دي.
- د هغو لوبغاړو شمېر چې عمرونه یې له اوسط څخه ډېر وي د هغه لوبغاړو له شمېر سره مساوي دی چې عمرونه یې له اوسط څخه لږ دي.

ربعي انحراف



$$X_n - X_1 = ?$$

$$Q_3 - Q_1 = ?$$

که د بوې ټولنې د احصائيوې تغيراتو لمن لويه وي، آیا فکر کوئ چې د ډيټا د تحول ساحه به له ټولنې څخه نامناسبه پایله وړاندې کړي؟

فعالیت

له یو موزیم څخه د لیدونکو شمېر په 12 ورځو کې په لاندې ډول دی.

0 1 2 8 7 6 5 9 10 6 15 11

- ددې ډيټا (Data) د تحول ساحه پلاس راوړئ.
- په عمومي ډول پورتنۍ ډيټاوې د کومو دوو عددونو ترمنځ تیت شوي دي؟
- یو په څلورمه برخه ډيټا له پورته اوبنکته خوا څخه حذف کړئ او بیا د پاتې ډيټا (Data) د تحول ساحه پیدا کړئ.
- دا د تحول دوه ساحې چې په لاس راغلي دي، یو له بله سره یې پرتله کړئ، کومه یو ه یې ډېر تیت والي ښيي؟
- په ځینو وختونو کې د تحول ساحه د دوو ډېرو کوچنیو او یا ډېرو لویو مقدارونو له سببه، نامناسبه تعبیرونه له ټولنې څخه مور ته په لاس راکوي.
- نو له دې امله د نورو ټاکنو څخه چې د ربعو د انحراف په نامه یادېږي، گټه اخیستل کېږي، تر څو د ټولنې د تحول ساحه په ښه ډول وټاکي.

که Q_1 او Q_3 په ترتیب سره د ډيټا د سټ، لومړۍ ربع او دریمه ربع وي، نو د ربعو انحراف په (Q) سره ښودل کېږي او په لاندې ډول تعریف شوي دي.

$$Q = Q_3 - Q_1$$

ربعي انحراف یو له هغو ټاکنو څخه دی چې د ډيټا (Data) تیت والې ښکاره کوي. داسې چې د لومړۍ او دریمې ربعي له تعریف څخه پوهېږو چې 50% ټولنه د $Q_3 - Q_1$ په فاصله کې پرته ده. په هره اندازه چې دا فاصله لږه وي، ډيټا سره نژدې دي، یا په بل عبارت د هغوی

تیت والې لږ دی.

ځېنې وختونه د ربعو (څلورمو) انحراف د $Q = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$ په شکل تعریفوي او دې ته د ربعو نیمایې لمن وایي.
مثال: دلاندې عددونو د ربعو (څلورمو) انحراف پیدا کړئ.

36 35 29 30 31 25 24 23 22 22 20

حل: لومړی عددونه په صعودي ډول ترتیب کوو او بیا ورته یوه شمېره ټاکو:

20 22 22 23 24 25 29 30 31 35 36
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11

$$C_{Q_n} = \frac{P \cdot n}{4} + \frac{1}{2}$$

$$C_{Q_3} = \frac{3 \cdot 11}{4} + \frac{1}{2} = \frac{33}{4} + \frac{1}{2} = \frac{33+2}{4} = \frac{35}{4} = 8.75$$

$$Q_3 = 30.75$$

نوله دې ځایه:

$$C_{Q_1} = \frac{1 \cdot 11}{4} + \frac{1}{2} = \frac{11}{4} + \frac{1}{2} = \frac{11+2}{4} = \frac{13}{4} = 3.25$$

همدارنگه:

$$Q_1 = 22.25$$

نوله دې ځایه:

د لومړنی او دریمې، ربعي قیمتونه
په ترتیب سره 22.25 او 30.75 دي نو:

$$Q = Q_3 - Q_1 = 30.75 - 22.25 = 8.5$$

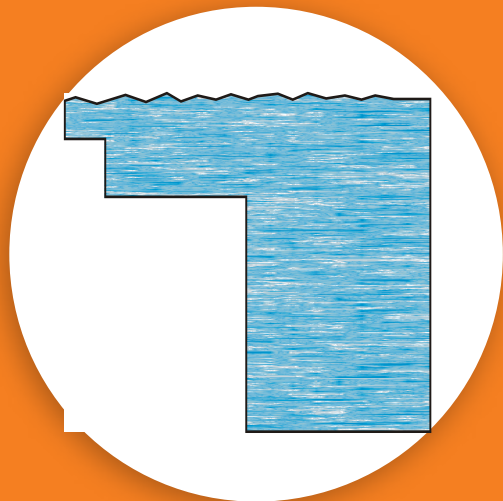
پوښتنې

1 - د لاندې ډیټا د تحول ساحه، د ربعو (څلورمو) انحراف او موډ پیدا کړئ او وویاست چې د ډیټا گڼوالی په کومه ساحه کې ډېر دی.

5 11 12 14 15 15 16 17 30

2 - د لاندې ډیټا د تحول ساحه او د څلورمو انحراف پیدا او د لومړي پوښتنې د تحول د ساحې او د څلورمو د انحراف سره یې پرتله یې کړئ.

27 24 21 29 28 26 23 22



واریانس (variance)

که ستاسو لامبو بڼه زده نه وي او وځواړی چې په داسې ډنډ کې ولامبی چې ژور والی یې په ټولو برخو کې یو شان نه وي. ددې لپاره چې په ډاډه زړه ولامبی، کوم معلومات باید ولری؟

فعالیت

که د لمبا په یو ډنډ کې د یوځای ژوروالی 1.5 متره او ډبل ځای ژوروالی یې 2.5 متره وي.

- ددې ډنډ د دواړو ځایونو د ژوروالي اوسط پیدا کړئ.
 - ددې دوو ډنډونو د انحرافونو مربع له حسابي اوسط څخه پیدا کړئ.
 - ددې دوو ډنډونو د انحرافو د مربعگانو مجموعه پیدا کړئ.
 - د پورتنیو ډنډونو (Data) مجموعه د مجموعې د غړو پر شمېر و وېشئ.
- د x_1, x_2, \dots, x_n ډنډ د واریانس د پیدا کولو لپاره لاندې پړاوونه په نظر کې ونیسئ:
- د ډنډ اوسط پیدا کړئ یعنې:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

- د انحرافونو د مربعگانو مجموعه یعنې:

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = (x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2$$

په لاس راوړئ.

- پورتنی مجموعه د مجموعې د غړو پر شمېر (n) و وېشئ او په S^2 یې وښیئ:

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}$$

چې دلته S^2 د واریانس په نامه یادېږي. واریانس برابر دی د انحرافونو د مربع اوسط له اوسط څخه. **پاملرنه:** ځینې وختونه واریانس د پیدا کولو لپاره له دې لاندې فورمول څخه هم گټه اخلي.

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} - \bar{x}^2$$

ثبوت: پورتنی فورمول کولای شو، په لاندې ډول لاس ته راوړو.

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \Rightarrow \sum_{i=1}^n x_i = n\bar{x} \quad \text{پوهېږو چې:}$$

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i^2 - 2x_i\bar{x} + \bar{x}^2)}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} - \frac{\sum_{i=1}^n 2x_i\bar{x}}{n} + \frac{\sum_{i=1}^n \bar{x}^2}{n}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} - 2\bar{x} \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} + \frac{n\bar{x}^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} - 2\bar{x} \cdot \bar{x} + \bar{x}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} - \bar{x}^2$$

مثال: د لاندې ډیټا (Data) واریانس د دواړو فورمولونو په مرسته پیدا کړئ.

1 5 6 7 9

الف: د $S^2 = \frac{\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2}{5}$ له فورمول څخه څرنگه چې $i = 1, 2, 3, 4, 5$

$$\bar{x} = \frac{1+5+6+7+9}{5} = 5.6$$

$$S^2 = \frac{(1-5.6)^2 + (5-5.6)^2 + (6-5.6)^2 + (7-5.6)^2 + (9-5.6)^2}{5}$$

$$= \frac{(-4.6)^2 + (-0.6)^2 + (0.4)^2 + (1.4)^2 + (3.4)^2}{5}$$

$$= \frac{21.16 + 0.36 + 0.16 + 1.96 + 11.56}{5} = \frac{35.2}{5} = 7.04$$

ب: له دې فورمول $S^2 = \frac{\sum_{i=1}^5 x_i^2}{5} - \bar{x}^2$ څخه هم کولی شو چې همدا قیمت په لاس راوړو

$$S^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2}{5} - \bar{x}^2 = \frac{192}{5} - (5.6)^2$$

$$= 38.4 - 31.36 = 7.04$$

يادونه: که دیتا په گروپونو (کلاسونو) کې ترتیب شوي وي او د کلاسونو مرکزونه x_1, x_2, \dots, x_n او f_1, f_2, \dots, f_n فریکونسي هم راکړل شوي وي. په دې حالت کې د واریانس د پیدا کولو لپاره له لاندې فورمول څخه کار واخلو:

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n f_i (x_i - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^n f_i} = \frac{\sum_{i=1}^n f_i (x_i - \bar{x})^2}{N}$$

داسې چې $N = \sum_{i=1}^n f_i$ دی.

د واریانس د واحد ټاکل مشکل دي. په عمومي ډول په عمل کې مطلقه قیمت یې نیول کېږي، څپنې وخت د متحول د واحد مربع د واریانس د واحد په حیث گڼل کېږي.

پوښتنې

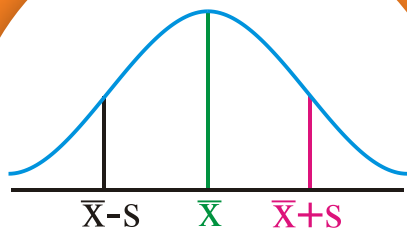
د هغو ساعتونو شمېر چې زده کوونکو په یوه اونۍ کې د لوبو کولو لپاره ټاکلي دي، په لاندې ډول راکړل شوي دي.

3 2 1 4 3 2 2

ددې ډیټا (Data) وریانس پیدا کړئ.

معیاری انحراف

که S دوریانس جذر \bar{x} دیتا اوسط وي
مخامخ شکل کوم ډول ټاکنکی توضیح کوي؟



$$\bar{x} - S < \bar{x} < \bar{x} + S$$

فعالیت

که S^2 د x_1, x_2, \dots, x_n دیتا واریانس وي. آیا څه فکر کوئ چې د S^2 او S واحدونه سره څه توپیر لري؟ فرض کړئ چې په یوه اونۍ کې یوې کارخانې ته د توکو د فرمایشونو د تسلیمې وخت له ځېنو ټاکنکو سره، لکه: انحراف، د انحراف مطلقه قیمت د انحرافو مربع په لاندې جدول کې راکړل شوی وي، څرنگه چې:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^5 x_i}{n} = \frac{8+9+6+4+8}{5} = \frac{35}{5} = 7$$

ورکړې وخت په ورځ x_i	\bar{x}	انحراف $x_i - \bar{x}$	د انحراف مطلقه قیمت $ x_i - \bar{x} $	د انحرافونو مربع $(x_i - \bar{x})^2$
8	7	1	1	1
9	7	2	2	4
6	7	-1	1	1
4	7	-3	3	9
8	7	1	1	1

- د ډیټا (جامو) د ورکړې د وخت اوسط پیدا کړئ.
 - د انحرافو د مطلقه قیمت اوسط یا په لنډ ډول د انحراف اوسط (AD) پیدا کړئ.
 - د توکو د ورکړې وخت واریانس پیدا کړئ.
 - د واریانس مربع جذر محاسبه کړئ.
 - د واریانس د مربع جذر واحد د واریانس له واحد سره پرتله کړئ.
 - د واریانس له فورمول څخه موزده کړل چې په توان ورپلو سره نه یوازې دا چې د واریانس اندازه کولو مقیاس له شک سره مخامخ کوي، بلکې انحرافونه هم لوی ښيي.
 - ددې لپاره چې دا ستونزې له مینځه یوسو، په کار ده چې د واریانس مربع جذر په لاس راوړو.
 - د واریانس جذر د ډیټا (Data) د تیت والي، یو بل ټاکوونکی د معیاري انحراف یا مطلق تیت والي په نوم را پیژني.
 - معیاري انحراف چې د S په سمبول ښودل کېږي، د واریانس له مربع جذر سره مساوي دی.
- په دې معنا:

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} - \bar{x}^2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} - \left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}\right)^2}$$

د معیاري انحراف یا د مطلق تیت والي واحد هم هغه د متحول واحد دی.
پورتنی رابطه په لاندې ډول ثبوت کېږي:

$$\begin{aligned} S^2 &= \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i^2 - 2\bar{x}x_i + \bar{x}^2) \\ &= \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - 2\bar{x} \sum_{i=1}^n x_i + \sum_{i=1}^n \bar{x}^2 \right) = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - 2n\bar{x}^2 + n\bar{x}^2 \right) \\ &= \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2 \right) = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \right)^2 \right) = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^n x_i)^2}{n} \right) \\ S^2 &= \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} - \left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \right)^2 \Rightarrow S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} - \left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \right)^2} \end{aligned}$$

مثال: د 5 ناروغانو د بدن د حرارت درجې په لاندې ډول راکړل شوي دي.

38 39 39 40 41

معياري انحراف يې پيدا کړئ
حل:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \frac{38+39+39+40+41}{5} = \frac{197}{5} = 39.4$$

$$S^2 = \frac{(38-39.4)^2 + (39-39.4)^2 + (39-39.4)^2 + (40-39.4)^2 + (41-39.4)^2}{5}$$

$$S^2 = \frac{(-1.4)^2 + (-0.4)^2 + (-0.4)^2 + (0.6)^2 + (1.6)^2}{5}$$

$$S^2 = \frac{1.96+0.16+0.16+0.36+2.56}{5} = \frac{5.2}{5} = 1.04$$

$$S = \sqrt{1.04} = 1.01980$$

پاملرنه: د فريکونسيو له جدول څخه، معياري انحراف په تقريبي ډول په لاندې ډول په لاس راځي:

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n f_i (x_i - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^n f_i}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n f_i x_i^2}{\sum_{i=1}^n f_i} - \bar{x}^2}$$

چې \bar{x} د ډيټا، اوسط، x_i د کلاس مرکز او f_i د کلاس فريکونسي نښي.

پوښتنې

د څلورو ټلويزوني سټيشنونو د ښوونې او روزنې د پروگرامونو د خپرولو د ساعتونو شمېر په لاندې ډول راکړل شوی دی، د ډيټا معياري انحراف پيدا کړئ.

1 3 4 5

• **د فریکونسي څو ضلعي گراف:** د هغو مرتبو جوړو نقطې چې عرض يې د کلاس مرکز او اوږدوالی يې د هماغه کلاس له فریکونسي سره مساوي دی، يوه له بلې سره ونښلوو، د فریکونسي څو ضلعي گراف په لاس راځي، د فریکونسي په څو ضلعي گراف کې دوې نورې اختياري نقطې د صفر په فریکونسي د کلاسونو (گروپونو) په لومړۍ او اخيرنۍ برخه کې ډېروو، تر څو د فریکونسي څو ضلعي گراف له محور سره ونښلوي.

• **د ساقې او پانې گراف:** د ساقې او پانې د گراف د رسمولو لپاره له عددونو څخه گټه اخيستل کېږي. احصائوي ډيټا د عددونو په شکل راوړو، بيا له دې عددونو څخه د ساقې او پانې گراف رسموو. دا ډول گراف د هغو ډيټا (Data) لپاره چې د رقمونو د شمېر له مخې تر ټولو لوی او کوچنی رقم تر منځ توپير لري، مناسب دی.

• **ربعي:** هغه عدد چې مرتبه جامعه په دوو مساوي برخو ووېشي، د ميانې په نوم يادېږي. اوس هغه عددونه په نظر کې ونيسئ چې مرتبه جامعه په څلورو مساوي برخو وېشي، دا عددونه په Q_1, Q_2 او Q_3 سره ښودل کېږي، دې عددونو ته په ترتيب سره لومړۍ ربع، دويمه ربع او د دريمه ربع وايي. ښکاره ده چې Q_2 ميانه ده.

• **صندوقچه يې يا جعبه يې گراف:** له دې گراف څخه د هغې ډيټا (Data) لپاره چې سره نژدې دي يا هغه ډيټاوې چې د اوسط پر شاوخوا راټولې شوي دي او يا هم هغه ډيټا چې تر ټولو لويو يا تر ټولو کوچنيو ډيټاکانو پر شاوخوا راټولې شوي وي، گټه اخيستل کېږي، دا گراف يو تصويرې گراف دی چې تر ټولو لويې ډيټا، تر ټولو کوچنۍ ډيټا، ميانې، لومړۍ ربعې او دريمې ربعې په اساس ښکاره کوي.

• **د نارمل منحني په بنياد د مرکزي ټاکونکو پرتله کول:** څه وخت چې وغواړو مرکزي ټاکونکي (اوسط، ميانه، او موډ) له نارمل منحني څخه په گټه اخيستني سره پرتله کړو: په دې حالت کې که نارمل منحني متناظر وي، نو اوسط، ميانه او موډ سره مساوي دي. که نارمل منحني متناظر نه وي، نو مرکزي ټاکونکي نظر خپل موقعيت ته د منحني بڼې خوا يا کيڼې خواته قيمتونه اخلي.

• **ربعي انحراف:** که Q_1 او Q_3 په ترتيب سره د ډيټا (Data) لومړۍ ربع او دريمه ربع وي، کولای شو چې د څلورمو (ربعي) انحراف (Q) په لاندې ډول وليکو

$$Q = Q_3 - Q_1$$

له پورتنۍ تعريف څخه ښکاري چې %50 ټولنه د $Q_3 - Q_1$ په فاصله کې پرته ده. په هره اندازه

چې دا فاصله لږه وي، ډیټا گڼې دي او د ډیټا تیت والی لږ دی.

• **واریانس:** د تیت والی ټاکونکي هغه مقدارونه دي چې د ډیټا (Data) د تیت والی حالت نسبت یو بل ته او نسبت یې اوسط ته ټاکي.

واریانس د تیت والی له ټاکونکو څخه یو مهم ټاکونکی دی چې په S^2 سره بنودل کېږي او له لاندې رابطې څخه په لاس راځي:

$$S^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}$$

د واریانس پیدا کول د فریکونسي په جدول کې له دې فورمول څخه په لاس راځي:

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n f_i (x_i - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^n f_i} \quad (x_i \text{ د کلاس مرکز دی})$$

• **معیاري انحراف:** د واریانس مربع جذر په S بڼي چې معیاري انحراف ورته وایي:

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}}$$

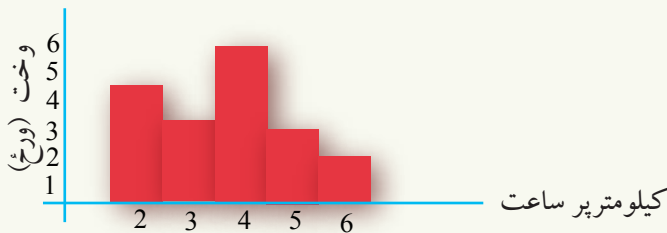
د معیاري انحراف پیدا کول د فریکونسي له جدول څخه د لاندې فورمول څخه په لاس راځي:

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n f_i (x_i - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^n f_i}} \quad (x_i \text{ د کلاس مرکز دی})$$

د څپرکي پوښتنې

1 - لاندې گراف د باد سرعت په 19 ورځو کې ښکاره کوي، په گراف کې د راکړل شوو اطلاعاتو پر بنسټ د باد سرعت لپاره د فريکونسي څو ضلعي گراف رسم کړئ. که چېرې يوې کشتۍ ته د حرکت لپاره لږ تر لږه په يوه ساعت کې 5 کيلو متره د باد سرعت ته اړتيا وي، نو څو ورځې دکشتۍ د حرکت کولو لپاره مناسبې دي؟

په دې پوښتنه کې ولې د فريکونسي څو ضلعي گراف، نظر مستطيلي گراف ته مناسب دی؟



2 - د فريکونسي څو ضلعي گراف هغه گراف دی چې په افقي محور او د عمودي محور پر مخ ښودل کېږي.

(ب) نسبي فريکونسي، د کلاسونو مرکز

(الف) د کلاسونو مرکز، نسبي فريکونسي

(د) د کلاس مرکز، مطلقه فريکونسي

(ج) د کلاسونو حدود، مطلقه فريکونسي

3 - دساقې او پانې گراف راکړل شوی دی:

- له دې گراف څخه په لاس راغلي ډيټا وليکئ.

ساقه	پانې
1	0 3 3 4
2	0 2 4 8 8
3	2

4 - کوم گراف ته د 90° په اندازه (د ساعت د عقربې د حرکت په مخالف لوري ته) دوران ورکړو، تر څو ميله يې گراف لاس ته راشي.

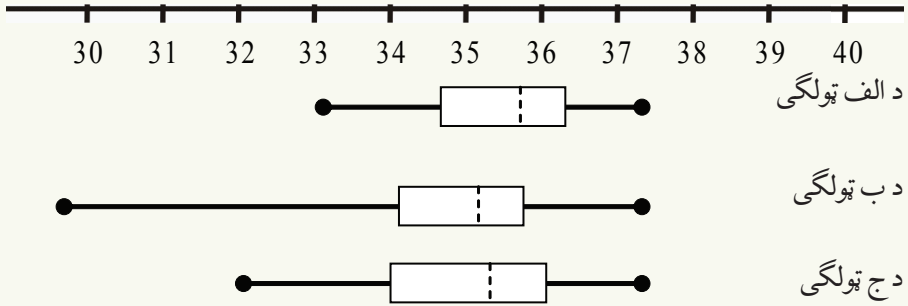
ب) مستطيلي گراف

الف) د ساقې او پانې گراف

د) دايروي گراف

ج) د فريكونسي د خو ضلعي گراف

5: لاندې گراف د الف، ب او ج د دريو ټولگيو د رياضي ازموينې نمرې ښکاره کوي، گراف ته په پاملرنې سره لاندې پوښتنو ته ځواب ورکړئ.



- د کوم ټولگي د تحول ساحه زياته ده؟
- د کوم ټولگي د نمرې ميانه تر ټولو زياته ده؟ او د کوم ټولگي د نمرې ميانه تر ټولو لږه ده؟
- د کوم ټولگي د نمرې تیت والی تر ټولو ډېر دی.
- ددې دريو ټولگيو د ازموينې نمرې له کمزوري څخه د قوي په لور ترتيب کړئ.

6: په گراف کې د a مقدار عبارت دی له:

الف) ميانه ب) اوسط ج) دريمه ربع د) موډ

7: د غذايي موادو د توليد دوه فابريکې د A او B په نامه، د 48 گرامو په قطيو کې بسکيت خرڅوي.

• په تصادفي ډول د دواړو فابريکو د بسکيت له قطيو څخه 5 قطي ټاکل شوي دي او په پوره غور سره يې وزنونه معلوم شوي دي چې په لاندې ډول دي.

A:	48.08	48.32	47.96	47.84	47.96
B:	49.16	48.84	48.88	49.08	49

• په قطيو کې کومه فابريکه زيات بسکيت خرڅوي؟ د پوښتنې د حل لپاره له کوم ټاکونکي څخه استفاده کوي؟

• د بسکيت په وپشلو کې کومې فابريکې يو شان عمل کړی دی؟

8: که د ډيټا د تحول ساحه صفر وي. د ډيټا په برخه کې څه نتيجه اخلي؟

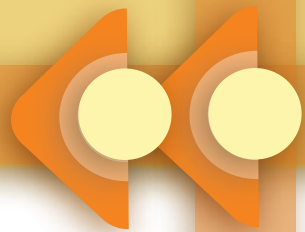
9: د هغه ساعتونو شمېر چې زده کوونکو په يوه اونۍ کې د لويو لپاره ټاکلې دي، په لاندې ډول راکړل شوي دي.

1 5 7 9

ددې ډيټا (Data) ورايانس پيدا کړئ.

10: په لاندې جدول کې ورايانس پيدا کړئ.

x_i	25	35	45
f_i	10	25	15



نہم خپرکی د ریاضی منطق





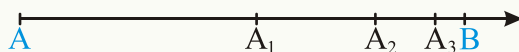
د شهودي درک استدلال:

پخوا تر ډېر و پيرپو پورې خلکو فکر کاوه چې
 ځمکه هواره ده او ستوري د ځمکې پر شاوخوا
 څرخيږي.
 آیا پوهېږي چې ځمکه کروي ده؟
 آیا لمر د ځمکې پر شاوخوا او که ځمکه د لمر
 پر شاوخوا څرخيږي؟

تعريف: هغه طبيعي يا حسي پوهه چې دهغې په مرسته ديوې موضوع سموالی يا حقيقت او يا يو مفهوم پر ته له استدلاله قبلوو، له شهودی درک څخه عبارت دی چې کيدلی شي، دوخت په مختلفو مرحلو کې يوله بله سره توپير ولري.

فعاليت

د لاندې شکل په نظر کې نيولو سره د مستقيم خط پر مخ د A او B دوې نقطې په پام کې ونيسئ.



يو سړی غواړي چې ددې مستقيم خط پر مخ د A له نقطې څخه د B نقطې ته لاړ شي چې د AB د قطعه خط منځنی نقطه A_1 کې توقف وکړي او بل وار چې د A_1 نقطې ته رسيدلي دی، ددې لپاره چې د B نقطې ته ورسېږي، بيا د A_2 په نقطه (د A_1B د قطعه خط دتصنيف نقطه) کې توقف وکړي، که په همدې ډول دوام ورکړي، نو لاندې پوښتنو ته ځوابونه ورکړئ:

- آیا په پورته ډول چې د خط پر مخ د هرو دوو نقطو په منځنی نقطه کې توقف وکړي، پای لری؟
- که په همدې ډول تر پایه دوام ورکړي، دا سړی به د B نقطې ته ورسېږي؟
- که دا سړی توقف و نه کړي او يا له لارې بيرته راونه گرځي، نو نه يوازې چې د B نقطې ته به ورسېږي، بلکې ترې تېر به هم شي. په دې اساس ددې مسلئې د واقعيت او ستاسو د شهودي درک ترمنځ څه توپير شته؟

له پورتنې فعالیت څخه لاندې نتیجه لاس ته راځي:

نتیجه: د شهودي درك نتیجه هر وخت صحیح نه وي، خو کېدای شي چې د قضیو دحل لپاره یو بڼه بنسټ وي.

له هغه مثال څخه چې په پورتنې فعالیت کې مو ترې استفاده وکړه او یاداسې نور مثالونه دا ددې په معنا نه دي چې د شهودي درك استدلال گمراه کوونکی دی، بلکې برعکس په زیاتو حالتونو کې د شهودي درك استدلال د مسلئ دحل، د انگیزې د پیدا کولو او د نورو سوالونو د طرح کولو سبب گرځي.

لومړی مثال: د شهودي درك په استدلال سره په اسانۍ سره حکم کولای شو چې دوه موازي خطونه یو بل نه قطع کوي.

څرنګه چې ددې مسلې په قبلولو کې استدلال په کار وړل شوی نه دی، په واقعیت یو احساس دی چې پر اساس یې د احکم منل کېږي، نو دا ډول نتیجه اخیستنه د شهودي درك په نامه یادوو.

دویم مثال: که یوه نقطه د داسې دایرې د باندې پرته وي چې قطر یې 4 واحد وي. ددې نقطې د فاصلې د مطالعه کولو لپاره چې له 2 واحد څخه زیاته ده، نه شو ویلای چې دا استدلال یو شهودي درك دی، ځکه دمسئلې د وضاحت لپاره لازمه ده چې استدلال وکړو. څرنګه چې د دایرې د مرکز فاصله له محیط څخه 2 واحد ده. نقطه د دایرې د باندې واقع ده، نو له دې امله د دایرې له مرکز څخه د نقطې فاصله د 2 واحد څخه لویه ده. یعنې پرته له استدلال څخه د طبیعي پوهې او یا غریزه یې احساس په واسطه نه شو کولای، مسئله درك او صحت یې قبول کړو.

پوښتنې

- 1- د دوو نقطو ترمنځ لنډه فاصله له یوه مستقیم خط څخه عبارت ده، آیا ددې مسئلې درك کول یو شهودي درك دی؟ څرنګه استدلال کوئ؟
- 2- له لاندې حکمونو څخه کوم یو یې د شهودي استدلال په طریقه د درك وړدی؟
 - a- د یوې متوازي الاضلاع مقابلې زاوې سره مساوي دي.
 - b- د لوزي (معین) قطرونه یو پر بل عمود او یو بل نیمایي کوي.
 - c- په یوه قایم الزاویه مثلث کې و تر، له هرو دوو ضلعو څخه لوی دی.



تمثيلي يا گماني استدلال

ووايه زما په لاسونو کې څه شی دی؟ تقريباً
گرد دی، رنگ يې سپين دی او دسپينو په منځ
کې يو ژړ شى دی؟

د منطق يوه ښوونکي غوښتل چې دخپل يوه زده کوونکي قياسي استدلال وازمايي، خپل مخ يې هغه ته ورواړوه او ورته وپې ويل:

پوهېږئ چې گمان او يا تمثيل حقيقت ته د رسيدو پل دی. د لوست په جريان کې مو زده کړل چې تمثيلي استدلال موږ حقيقت ته نژدې کوي، ليکن هر وخت سوچه حقيقت نه دی.

ښوونکي په داسې حال کې چې په خپلو لاسونو کې يې د چرگې هگې پټه کړي وه، له زده کوونکي وپوښتل: ووايه زما په لاسونو کې څه شی دی؟ تقريباً گرد دی، رنگ يې سپين دی او دسپينو په منځ کې يو ژړ شى دی.

زده کوونکى چې په همدې وخت کې له زراعتى فارم نه راغلى و، له ژور فکر کولو وروسته يې ښوونکى ته مخ ورواړوه او وپې ويل:

استاده فکر کوم چې دسپين شوي شلغم(تپير) په منځ کې گازره ده.

تعريف

د دوو پېښو ترمنځ د ورته والي پيداکول او دهغوى په باره کې د يوشان نتيجه اخيستلوته تمثيلي يا قياسي (گماني) استدلال وايي.

فعاليت

يوه ښوونکى يو شوخ زده کوونکى چې لوست يې اخلا لوه، له ټولگي څخه وويست. دټولگي د باندې يې د خپل ټولگي بل زده کوونکى وليده چې هغه هم له ټولگي څخه د باندې و تلى دی. دپورتنی تعريف په نظر کې نيولو سره له لاندې اړيکو څخه کوم يو يې يو تمثيلي يا قياسي استدلال دی.

- دويم زده کوونکي د لوست په وخت کې تفريح کوي.

- دویم زده کوونکي هم شوخي کړي ده.

- ناروغه دی، نه غواړي چې په ټولگی کې واوسي.

له تعریف او د زده کوونکو له فعالیت څخه لاندې نتیجه په لاس راځي:

نتیجه: قیاس یا تمثیل په حقیقت کې د مختلفو مفهومونو په منځ کې د ورته والي پیدا کول دي. له دې سببه تمثیلونه کېدای شي، د ډېرو مفهومونو یا دریاضي د قضیو د درک کولو لپاره شهودي زمينه پیدا کړي. تمثیلي استدلال د ثبوت په حیث نه شمارل کېږي، بلکې د ثبوت لپاره زمينه برابروي.

لومړی مثال: په عامه ژبه (مارخورلی له برگ پرې څخه ډارېږي) دا یو قیاسي استدلال دی، ځکه چې برگ پرې له مار سره پر تله شوی دی او د هغوی په منځ کې ورته والی لیدل شوی دی.

دویم مثال: له تمثیلي استدلال څخه په ګټه، ددې حقیقت درکول چې د دوو منفي عددونو حاصل ضرب مثبت عدد او د یو منفي او یو مثبت عدد حاصل ضرب منفي عدد دی، داسې په لاس راوړو: مثلاً ددې حقیقت د درک کولو لپاره چې که چېرې د یوه زده کوونکي لیاقت د (+) په علامه او نا لایق والی د (-) په علامې سره په پام کې ونیسو او ددې دواړو عملونو د حاصل (دی) لپاره (+) او (نه دی) لپاره (-) په پام کې ونیسو، له تمثیل او یا قیاس څخه ګټه اخلو او که دوی سره ترکیب کړو په نتیجه کې لرو چې:



پوښتنې

1 - دا بیان چې (بختور کال د هغه کال له پسرلي نه معلومیږي)، په لاندې کوم استدلال باندې دلالت کوي.

a- شهودي درک استدلال.

b- قیاسي استدلال. c- هیڅ ډول استدلال په کې نشته دی.

2- د قیاسي استدلال په مرسته په کوم مثلث کې د فیثاغورث د قضیې په اساس لاندې نتیجه ثبوت کېدلای شي:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

استقرایې استدلال:



یو زده کوونکی په لومړنی صنفی ازموینه کې 100 نمرې اخلي او په دویم او دریم صنفی ازموینو کې هم 100 نمرې اخلي. په اخرنی ازموینه کې څه نتیجه اخیستلای شی چې دا زده کوونکی به څو نمرې واخلي؟

فعالیت

د مسلسلو طاقتو طبیعي عددونو د جمعې حاصل په پام کې نیسو، ددې کار لپاره له یو 1 له عدد څخه پیل وکړئ او تش ځایونه پکې وپیل.

$$1+3 = \square = (\quad)^2$$

$$1+3+5 = \square = (\quad)^2$$

$$1+3+5+7 = \square = (\quad)^2$$

$$1+3+5+7+9 = \square = (\quad)^2$$

پورتنیو پوښتنو ته په پاملرنې سره لیدل کېږي چې د طاقتو طبیعي عددونو د جمعې حاصل د طبیعي عددونو د شمېر له پوره مربع سره مساوي دی.

- آیا کولای شو نتیجه واخلو چې هر وخت د طاقتو مسلسلو عددونو د جمعې حاصل ددې عددونو د شمېر له مربع سره مساوي دی؟

- کوشنې وکړئ له n طاقتو مسلسلو عددونو د جمعې د حاصل لپاره فورمول په لاس راوړئ.

دپورتنی فعالیت د سرته رسولو په اساس لاندې نتیجه په لاس راځي.

نتیجه: استقرایې استدلال د یو شمېر مشاهدو پر بنسټ د عمومي نتیجې اخیستنې طریقه ده. په

حقیقت کې یوې کوچنۍ نمونې ته په لویه نمونه عمومیت ورکول دي.

لومړی مثال: (موتی د خروار نمونه ده) دا خبره استقرایې استدلال ته اشاره کوي، ځکه په دې مثال

کې له یوې کوچنۍ نمونې څخه د کل نتیجه اخیستل کېږي، په حقیقت کې له مسئلې څخه د یوشمېر مشاهد و پر بنسټ نتیجه اخیستل شوي ده، نو له استقرایي استدلال څخه کار اخیستل شوی دی.

دویم مثال: یو زده کوونکی په اتفاقي ډول په څو مرحلو کې درې مسلسل عددونه سره ضرب کړل او وپې لیدل چې د ضرب حاصل د 6 عدد مضرب دی. له دې کار څخه نتیجه اخلي چې (د هر دروو مسلسلو عددونو د ضرب حاصل د 6 عدد مضرب دی).

نوموړې زده کوونکي کوم استدلال کړي دي.

الف: شهودي استدلال ب: قیاسي (گمانی) ج: استقرایي استدلال د: هېڅ یو
حل: استقرایي استدلال

پوښتنې

1- هغه طریقه چې د یوه محدوده شمېر ډیټا پر اساس ترینه عمومي نتیجه اخیستل کېږي، څرنگه یو استدلال دی.

الف: قیاسي یا تمثیلي استدلال ب: استقرایي استدلال

ج: د شهودي درک استدلال

2- د عددونو ترتیب ته په پاملرنې سره لاندې تش ځایونه ډک کړئ:

$$1 \times 8 + 1 = \square$$

$$12 \times 8 + 2 = \square$$

$$123 \times 8 + 3 = \square$$

$$1234 \times 8 + 4 = \square$$

3-

(a) د دویمې پوښتنې حل ته په پام سره کېدای شي چې د عددونو پورتنی ترتیب ته تر بې نهایت پورې دوام ورکړي؟

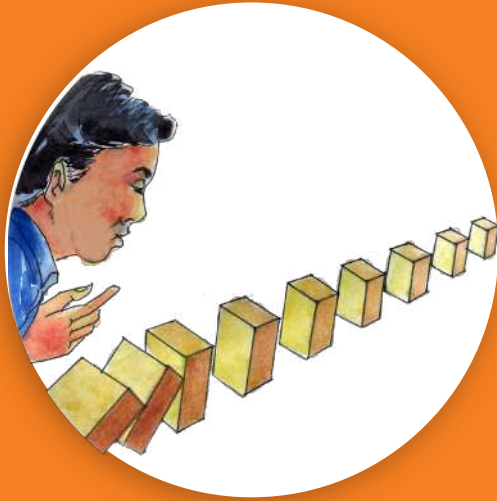
(b) د محاسبه کولو پرته او د پورتنیو پوښتنو په پاملرنې سره اټکل کړئ چې کوم عددونه د لاندې پوښتنو په تش ځایونو کې را تلای شي:

$$12345 \times 8 + 5 = \square$$

$$123456 \times 8 + 6 = \square$$

درياضي د استقرا استدلال

د دوو مينو لوبه :



آيا تاسو کله د دوو مينو لوبه تر سره کړې ده؟

پوهېږئ چې د دوو مينو په لوبه کې د لومړۍ خښتې لويدل، د دويمې خښتې پرمخ چې يوه دبلې خنگ ته پرته وي، په ترتيب سره لومړنۍ پر دويمه، دويمه پر دريمه... تر پايه پورې پر مخکې ولوبېږي، داد خښتو يو پر بله لويدل چې د پورته شکل په شان په مساوي فاصلو يو دبل خنگ ته پريوزې، د علاقه مندانو لپاره يو په زړه پورې تصوير ښکاره کوي.

ليدل کېږي چې د k ام خښتې لويدل د $k+1$ ام د خښتې د لويدلو سبب گرځي، اوس نو که د خښتو لويدل له يوې ټاکلي شمېرې څخه پيل شي، له هغې څخه وروسته خښتې يو پر له پسې راوليږي او ټولې خښتې د ځمکې مخ نيسي.

فعاليت

پوهېږئ چې $100=1+8+27+64$ دی، که دا عددونه د مکعبونو د مجموعې په شکل په لاندې ډول وليکو:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 10^2$$

- آيا هر وخت د مسلسلو طبيعي عددونو د مکعبونو مجموعه د عددونو د مجموعې له مربع سره مساوي ده؟
- آيا کولای شئ د پورتنۍ پوښتنې د حل لپاره يوه عمومي طريقه ووايست، د پورتنۍ پوښتنې د ځواب لپاره لاندې جدول ډک کړئ.

د متوالي عددونو شمېر	د متوالي طبيعي عددونو معکوبونه	د معکوبونو مجموعه	د عددونو د مجموعې مربع
1	1^3		1^2
2	$1^3 + 2^3$		
3	$1^3 + 2^3 + 3^3$	36	
4	$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3$		10^2
n	$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3$		$\left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$

د $n=1$ ، $n=2$ ، $n=3$ او $n=4$ د طبيعي مسلسلو عددونو د مکعبونو د مجموعې

لپاره د فورمول سمالي وازمائی.

$$\left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$$

- اوس که د n مسلسلو طبيعي عددونو لپاره پورتنی فورمول قبول کړو يعنې که:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$$

وي، نو د $n+1$ د مسلسلو طبيعي عددونو لپاره يې ثبوت کړی يا داچې وښیاست:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 + (n+1)^3 = \left[\frac{(n+1)(n+2)}{2} \right]^2$$

د پورتنی فعالیت له سرته رسولو څخه لاندې نتیجه لاس ته راځي.

نتیجه: که چېرې $P(n)$ د n طبيعي عددونو په برخه کې يو حکم راکړل شوی وي، که د $n=1$ لپاره $P(1)$ صحيح وي، په دویم پر او کې که د $P(k)$ له سمالي څخه $P(k+1)$ په لاس راشي، نو دا ادعا د $P(n)$ د هر n طبيعي عدد لپاره هم سمه ده.

لومړی مثال: وښیاست چې $P(n) = 4^{2n} - 1$ د هر طبيعي عدد لپاره پر 5 د وېش وړ دی.
حل: د $n=1$ لپاره سمه ده ځکه چې:

$$n=1, \quad P(1) = 4^{2 \cdot 1} - 1 = 4^2 - 1 = 16 - 1 = 15$$

ليدل کېږي چې $P(1) = 15$ پر 5 د وېش وړ دی.

قبولو چې د k طبيعي عدد لپاره پورتنی ادعا سمه ده يعنې: $P(k) = 4^{2k} - 1$ پر 5 د وېش وړ

دی.

څرنگه چې پر 5 د وېش وړ دی، نو کولای شو په لاندې ډول یې ولیکو

$$P(k) = 4^{2k} - 1 = 5r \dots\dots\dots (*)$$

غواړو وښایو چې د $n = k + 1$ لپاره دا ادعا سمه ده، نو لرو چې:

$$n = k + 1 \quad , \quad P(k+1) = 4^{2(k+1)} - 1 \dots\dots\dots (**)$$

د (*) د رابطې دواړه خواوې په 4^2 کې ضربوو.

$$4^2 (4^{2k} - 1) = 5r \cdot 4^2$$

$$4^{2k+2} - 4^2 = 5r \cdot 16 \Rightarrow 4^{2(k+1)} - 1 = 15 + 16 \cdot (5r)$$

$$4^{2(k+1)} - 1 = 5(3 + 16r)$$

د پورتنۍ مساوات له ښې خوا $5 \cdot (3 + 16r)$ څخه ښکاري چې د مساوات کینه خوا پر 5 د وېش وړ ده.

نو اړخني مساوات ښکاره کوي چې $P(k+1) = 4^{2(k+1)} - 1$ هم پر 5 د وېش وړ دی، څرنگه چې د $P(k)$ له سموالي څخه د $P(k+1)$ سموالي نتیجه شوه، نو د ریاضي استقرا د اصل په اساس پورتنۍ ادعا $P(n)$ د هر طبیعي عدد (n) لپاره سمه ده.

یادونه: د ریاضي د استقرا په مرسته د ریاضي د حکمونو د ثبوتولو لپاره لومړی $P(1)$ په لاس راوړو، بیا $P(k)$ د استقرا د حکم په حیث په پام کې نیسو او په همدې ترتیب له فرضیې څخه حکم ثبوتوو.

دویم مثال: د ریاضي د استقرا په مرسته ثبوت کړئ چې لاندې رابطه د هر طبیعي عدد n لپاره سمه ده:

$$1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \dots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

حل: په پورتنۍ رابطه کې د $n = 1$ لپاره لرو چې:

$$n = 1 \quad , \quad P(1) = 1 \times 2 = \frac{1(1+1)(1+2)}{3} = \frac{1 \times 2 \times 3}{3} = 2$$

$$\Rightarrow 2 = 2$$

نود $n = 1$ لپاره پورتنۍ رابطه سمه ده، که د $n = k$ لپاره یې سمه قبوله کړو، نو د $n = k + 1$ لپاره یې داسې ثبوتوو، لرو چې:

$$n = k, P(k) = 1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \dots + k \times (k+1) = \frac{k(k+1)(k+2)}{3}$$

داستقرا فرضیه:

د $P(k)$ په فرضولو سره $P(n)$ رابطه د $n = k+1$ په نظر کې نیولو سره د رابطې سموالی ښکاره کړو، نو لروچې:

$$\begin{aligned} n = k+1, P(k+1) &= 1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \dots + (k+1)(k+2) \\ &= \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3} \end{aligned}$$

د استقرا حکم:

د استقرا د فرضیې په نظر کې نیولو سره لروچې:

$$\begin{aligned} P(k+1) &= [1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \dots + k(k+1)] + (k+1)(k+2) \\ &= \frac{k(k+1)(k+2)}{3} + (k+1)(k+2) = \frac{k(k+1)(k+2) + 3(k+1)(k+2)}{3} \\ &= \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3} \\ \Rightarrow 1 \times 2 + 2 \times 3 + \dots + (k+1)(k+2) &= \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3} \end{aligned}$$

دا رابطه د $n = k+1$ لپاره سمه ده، نو په دې ډول د $P(n)$ رابطه د هر طبیعي عدد (n) لپاره سمه ده.

پوښتنې

1 - د ریاضي د استقرا په مرسته وښیاست چې د هر طبیعي عدد n لپاره لروچې:

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

2 - د ریاضي د استقرا په مرسته وښیاست چې:

$$2 + 6 + 10 + \dots + (4n-2) = 2n^2 \quad (\text{i})$$

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2 \quad (\text{ii})$$



استنتاجی (نتیجوی) استدلال:

آیا کولای شو د شپې په تیاره کې له رڼا څخه پرته
شیان وینو؟

فعالیت

- درې مختلف داسې ستونه ولیکئ چې د هر سټ عناصر درې اختیاري مسلسل طبیعي عددونه وي.
- د هر سټ د عناصرو د ضرب حاصل جلا، جلا په لاس راوړئ.
 - آیا ویلای شو چې دا د ضرب حاصلونه:
 - (I): پر 2 د وېش وړ دي؟ ولې؟
 - (II): پر 3 د وېش وړ دي؟ ولې؟
 - آیا ویلای شو چې د درېو مسلسلو طبیعي عددونو د ضرب حاصل هروخت پر 6 د وېش وړ دي؟ ولې؟
 - د درېو مسلسلو طبیعي عددونو د ضرب حاصل مولی پر 6 د وېش وړ قبول کړو، د پورتنی فعالیت له سرته رسولو څخه لاندې نتیجه لاس ته راځي.

نتیجه: داسې طریقې ته چې د حقایقو سموالی یې په لومړۍ پړاو کې ومنو او عمومي نتیجه ترې لاس ته راوړو، استنتاجی استدلال یا د نتیجې اخیستنې طریقه ورته وایي یا په بل عبارت استنتاجی استدلال هغه طریقه ده چې سموالی مو ثبوت کړی یا منلی وي.

څه وخت چې له استنتاجی استدلال څخه استفاده کوو، ډاډمن یو چې نتیجه یې هر وخت سمه ده.

لومړی مثال: د لاندې جدول پړاونو ته په دقت سره وگورئ مورځرنګه له عددونو سره چې د هر پړاو حقیقت او سموالی منو، بل پړاوت ته څو او نتیجه په لاس راوړو. د یادونې وړ ده چې په جدول کې په اختیاري ډول عدد ټاکل شوی دی، تاسو کولای شئ چې ددې عدد پر ځای بل هر عدد چې موغوبنستی وي، وټاکئ، وگورئ چې د هر عدد لپاره نتیجه یوشان ده.

12	7	4	یو عدد په خپله خوبښه وټاکئ.
17	12	9	له لومړي عدد سره 5 جمع کړئ.
34	24	18	اوس یې دوه برابره کړئ.
30	20	14	له حاصل څخه د 4 عدد کم کړئ.
15	10	7	پر 2 یې ووېشئ.
3	3	3	هغه عدد چې لومړی موټاکلی و، له عدد څخه کم کړئ.

اساسي خبره داده چې مورځرنګه په حقیقت کې د هغه عبارت پر بنسټ چې سموالی یې مورځرنګه قبول کړی دی، بله نتیجه لاس ته راوړو، دا مسله مورځرنګه ډاډ من کوي چې دهر اختیاري عدد په ټاکلو سره نتیجه هر وخت یوشان له 3 سره مساوي ده.

پوښتنې

- 1 - ښکاره کړئ چې د دوو طاقو عددونو د جمعې حاصل هر وخت یو جفت عدد دی.
- 2 - ثبوت کړئ چې هر صحیح طاق عدد د $2k + 1$ په شکل دی.
- 3 - د سرو زرو په 9 سکوکو یوه تقلبي ده چې له نورو سکو څخه یې وزن کم دی. څرنګه کولای شو چې د نورو وزنونو څخه د استفادې کولو پرته د پله یي ترازو په واسطه له دوه واړه تللو سره تقلبي سکه پلاس راوړو؟



د مثال د نفي کولو استدلال:

یوموتی د خروار نمونه ده.

که د یوجنس یوه کوچنی نمونه بې کیفیته وي.

آیا کولای شو ادعا وکړو چې ددې جنس لویه

کنله ښه کیفیت لري؟

فعالیت

کولای شو، ډېر طبیعي عددونه د مسلسلو عددونو د جمعې د حاصل په ډول ولیکو، لکه:

$$9 = 2 + 3 + 4$$

- پورتنی مثال ته په پاملرنې سره لاندې تش ځایونه ډک کړئ؟

$$15 = \square + 2\square + 4 + 5$$

$$\square = \square + 5 + \square + 7$$

$$\square = 12 + \square + \square + 14$$

$$74 = 17 + \square + 19 + \square$$

- آیا کولای شو چې هر طبیعي عدد د مسلسلو عددونو د جمعې د حاصل په شکل ولیکو؟

- که چېرې ځواب مو (نه) وي، نومثال یې وویاست.

د پورتنی فعالیت له سرته رسولو څخه لاندې نتیجه لاس ته راځي.

نتیجه: کله چې له مثال سره وښایو چې عمومي نتیجه سمه نه ده او د ادعا ناسموالی ښکاره کړو دې

ته د مثال د نفي کولو استدلال وایي.

مثال: د مسلې د ثبوت لپاره همدو مره کافي ده چې وښایو چې د X او Y دوه غیر ناطق عددونه

لیکن ددوی د جمعې حاصل $x+y$ یو ناطق عدد دی.

ددې لپاره که د $x = 1 + \sqrt{2}$ او $y = 1 - \sqrt{2}$ وټاکو، لرو چې:

$$x + y = (1 + \sqrt{2}) + (1 - \sqrt{2}) = 1 + 1 = 2$$

لیدل کېږي چې ددې دواړو عددونو د جمعې حاصل د 2 عدد دی چې یو ناطق عدد دی، په داسې حال کې چې x او y غیر ناطق (گنگ) عددونه دي، نو دا ادعا نه شو کولای چې د دوو غیر ناطقو عددونو د جمعې حاصل هر وخت یو غیر ناطق عدد دی.

پوښتنې

1- د مثال د نفی کولو په استدلال سره وښیاست چې (د هر مثبت حقیقي عدد مربع د عدد له مکعب څخه کوچنی ده)

2- دلاندې کوم یو بیان لپاره د نفی مثال وجود نه لري؟

(a) د دوو ناطقو عددونو مجموعه یو ناطق عدد دی.

(b) د هر مثبت عدد مربع له عدد څخه لویه ده.

(c) دوې زاوې چې متناظرې ضلعي یې سره موازي وي، دا دوې زاوې سره مساوي هم دي.

(d) د دوو طاقو عددونو مجموعه یو جفت عدد دی.

(e) د دوو غیر ناطقو عددونو د ضرب حاصل، غیر ناطق عدد نه دی.

$a^2 = \text{جفت} \Rightarrow a = ?$

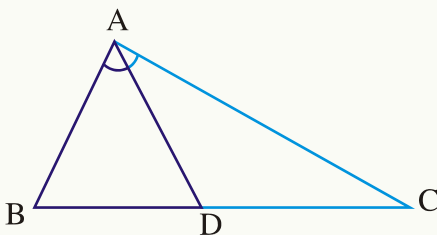
$b^2 = \text{طاق} \Rightarrow b = ?$

د خلف برهان يا غير مستقيم ثبوت:

که د يوه عدد مربع جفت وي آیا خپله عدد جفت دی که طاق؟
 آیا کولای شو چې دا ادعا وکړو، که د هر عدد مربع جفته وي، خپله عدد جفت دی؟
 که وښايو چې خپله عدد طاق نه دی، څه نتیجه اخلي؟

فعالیت

د ABC مثلث د لاندې شکل په شان په پام کې ونیسئ:



- د \hat{A} د زاوېې ناصف رسم کړئ.
- که $\overline{BD} \neq \overline{CD}$ وي، نو د \overline{AB} او \overline{AC} ضلعې سره څه اړیکه لري؟
- که فرض کړو چې که $\overline{BD} \neq \overline{CD}$ وي، خو $\overline{AB} \neq \overline{AC}$ دی، دا مسئله مور کومې نتیجه ته رسوي؟

نتیجه: که د خپلې ادعا د عکس په فرضولو او یاد قبلولو په نتیجه کې د فرض شوي ادعا خلاف ته ورسېږو، نو په دې حالت کې زموږ فرض شوی ادعا سمه ده، دا ډول استدلال د غیر مستقیم ثبوت (برهان خلف) په نامه یادېږي.

يادونه: په ياد ولرئ څه وخت چې له غير مستقيم ثبوت څخه گټه اخلو، لاندې پړاوونه په پام کې

نيسو:

لومړی پړاو: فرضوو چې مطلوبه ادعا سمه نه ده.

دويم پړاو: ښکاره کوو چې دا فرض د اسې نتيجه په لاس راكوي چې پيژندل شوي حقيقتونه نفي كوي.

درېم پړاو: اوس چې نتيجه نفي شوي ده، نومعلومه خبره ده چې د لومړی پړاو فرض سم نه دی، نو مطلوب سم دی.

مثال: وښايست که n^2 يو جفت طبعي عدد وي، نو n هم جفت دی؟

ددې مسلئې د ثبوت لپاره فرضوو، سره ددې چې n^2 جفت دی، خو n يو طاق عدد دی، نو کولای

شو چې n د $n = 2k + 1$ په شکل وليکو، په داسې حال کې چې k يو تام عدد دی، نو ددې

$$n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4(k^2 + k) + 1$$

عدد مربع مساوي ده په:

$$\Rightarrow n^2 = 4(k^2 + k) + 1$$

پورتنی مساوات ښکاره کوي چې n^2 يو طاق عدد دی چې دا د فرض خلاف ده، نو په نتيجه کې دا

فرض چې n يو طاق عدد دی، ناسمه ده او دې نتيجه چې ته رسېږو چې n هم يو جفت عدد دی، ځکه

دا فرض چې n طاق عدد دی، مور دې نتيجه چې ته ورسولو چې n^2 هم طاق عدد دی

پوښتنه

وښايست چې $\sqrt{3}$ يو غير ناطق عدد دی.

د ریاضی منطق او دیان استنتاج



له څنگ ملگری څخه د یو خبر اوریدل به څه نتیجه ولري؟
آیا خبر سم دی که ناسم؟

تعریف

یوې خبري جملې ته بیان وايي چې نتیجه یې په سموالي یا ناسم والي پای ته ورسېږي.

فعالیت

- لاندې جملې په پام کې ونیسئ او وښیاست چې له هغو څخه کومه یوه یې بیان نه دی او منطقي نتیجه یې څه ده؟
- i) نن ورځ باران نه اوري.
 - ii) آیا نن ورځ باران نه اوري؟
 - iii) بارانه اووره..
 - iv) څه زیات باران اوري!

له پورتنی فعالیت څخه لاندې نتیجه لاس ته راځي.
نتیجه:

- 1 - هره جمله نه شی کېدای چې بیان وي. یوه جمله کېدای شي یوه حکمي، تعجبي پوښتنه او یا یو خبر وي.
 - 2 - هره خبري جمله سمه یا ناسمه ده.
- یادونه:** که یو بیان ته P ووايو، د سم بیان د لیکلو طریقه $P \equiv T$ او د ناسم بیان د لیکلو طریقه

$P \equiv F$ دی، سر بیره پر دې $\sim P$ د P د بیان نفي نښي.
هغه جدول ته چې د یو بیان ارزیابي په کې صورت نیسي، د صحت د جدول په نامه یادېږي، نو د P د هریان لپاره لروچې:

P	$\sim P$
T	F
F	T

مثال: د (مسکا د لسم ټولګي زده کوونکې ده $P =$) بیان لپاره د صحت جدول ترتیب کړئ.
حل: د پورتنی بیان د ارزیابي لپاره پوهېږو چې نو موږی بیان سم او یا ناسم دی.
که بیان سم وي، نو کولای شو چې ولیکو $P \equiv T$ او $\sim P \equiv F$ دی.
نو د P د بیان د نفي حالت عبارت دی له « P سم نه دی» یعنې: $\sim P \equiv F$ دی. دا بیان د دې په معنا دی چې مسکا د لسم ټولګي زده کوونکې نه ده، یعنې P ناسم دی.
که $P \equiv F$ وي، نو په دې حالت کې $\sim P = T$ دی. د پورتنی ځواب صحت په لاندې جدول کې گورو:

P	$\sim P$
T	F
F	T

د بیانونو ترکیب

که د p او q دوه بیانونه را کړ شوي وي، په دې حالت کې:

- 1 - $p \wedge q$ ترکیب د p او q د بیانونو د عطفی ترکیب یا (منطقي "او") په نامه یادېږي، د "∧" علامه د (او) په معنا په کار وړل شوي ده.
- 2 - $p \vee q$ ترکیب د p او q د بیانونو د فصلي ترکیب (منطقي "یا") په نامه یادېږي، د "∨" علامه د (یا) په معنا په کار وړل شوي ده.
- 3 - $p \Rightarrow q$ د مشروط ترکیب او یا د (که p نو q ویل کېږي) په نامه یادېږي، د \Rightarrow علامه ښکاره کوي چې p د شرطی ترکیب اساس چې q ترې نتیجه کېږي.
- 4 - $p \Leftrightarrow q$ د دوو خواوو د شرطی ترکیب په نامه او یا د (که او یوازې که) په نامه یادېږي. د (\Leftrightarrow) علامه ښکاره کوي چې که p د شرطی ترکیب اساس وي q ترې نتیجه کېږي او که q د شرطی ترکیب اساس وي، p ترې نتیجه کېږي. په دې ډول د p د بیانونو او (که او یوازې که) ترکیب لاندې د صحت په جدول کې گورو:

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	F	F
F	T	F	T	T	F
F	F	F	F	T	T

لومړی مثال: که چېرې $P \equiv (2 + 4 = 6)$ او $q \equiv$ بیانونه را کرل شوي وي د $p, q, \sim p, \sim q, p \wedge q, p \vee q, \sim(p \wedge q), \sim(p \vee q)$ د بیانونو نتیجې پلاس راوړی.

حل: پورتنیو بیانونو ته په توجه سره ددې بیانونو ارزښت عبارت دی له:

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$\sim(p \wedge q)$	$\sim(p \vee q)$
T	F	F	T	F	T	T	F

دویم مثال: د سموالي (صحت) د جدول په تر ټیولو سره ښکاره کړئ چې د $P \vee (p \Rightarrow q)$ بیان هر وخت سم دی.

حل:

p	q	$p \Rightarrow q$	$p \vee (p \Rightarrow q)$
T	T	T	T
T	F	F	T
F	T	T	T
F	F	T	T

د سموالي د جدول په اخیرني ستون کې وینو چې د $p \vee (p \Rightarrow q)$ بیان هر وخت سم دی.

پوښتنې

- 1 - د صحت د جدول په تر تېولو سره وښیاست چې د $(p \Rightarrow q) \vee \sim (\sim p \vee q)$ بیان هر وخت سم دی - متوجه اوسئ چې P او $\sim P$ یوله بله مستقل نه دی.
- 2 - د صحت د جدول په جوړولو سره وښیاست چې د $(p \Rightarrow q)$ او د $\sim (p \vee q)$ د بیانونو ارزښت سره مساوي دی یعنې:

$$p \Rightarrow q \equiv \sim (p \vee q)$$

د فصل لندیز

د ریاضي استدلال:

هغه طریقه چې د هغې په واسطه د ریاضي د یو بیان سموالی په لاس راځي، د ریاضي د استدلال په نامه یادېږي.

شهودی درک:

هغه طبیعي یا حسي پوهه چې د هغې په مرسته د یوې موضوع سموالی یا حقیقت او یا یو مفهوم پرته له استدلاله قبلوو، له شهودي درک څخه عبارت ده چې د وخت په مختلفو مرحلو کې یوله بله سره توپیر لري.

تمثیلي یا قیاسي استدلال:

د دوو پېښو تر منځ د ورته والی پیدا کول او د هغوی په باره کې یوشان نتیجې اخیستلو ته تمثیلي یا قیاسي استدلال وايي.

استقرایي استدلال:

هغه طریقه چې د یو شمېر مشاهد و پر اساس ور څخه عمومي نتیجه اخیستل کېږي یعنې د جز نه کل په لاس راځي د استقرایي استدلال په نامه یادېږي.

د ریاضي د استقرا استدلال:

که چېرې $P(n)$ د n د طبیعي عددونو په برخه کې یو حکم راکړل شوی وي، که د $n=1$ لپاره $P(1)$ سم وي او په دویم پړاو کې د $p(k)$ له سموالي څخه د $p(k+1)$ سموالی په لاس راشي، نو د $P(n)$ بیان د هر طبیعي عدد (n) لپاره سم دی او درياضي د استقرا د استدلال په نامه یادېږي.

نتیجوي استدلال:

له هغه حقیقتونو څخه په گټه اخیستنه چې صحیح والی یې په پیل کې منل شوی وي، عمومي نتیجه لاس ته راوړل شي، د استنتاجي استدلال یا د نتیجې اخیستنې د طریقې په نامه یادېږي. یا په بل عبارت هغه طریقه ده چې سم والی مو ثبوت یا قبول کړی وي.

د نفی مثال استدلال:

کله چې له مثال سره وښایو چې عمومي نتیجه سمه نه ده او د ادعا ناسموالی په عمومي ډول ښکاره کړو، دې ته د مثال د نفی کولو استدلال وایي.

غیر مستقیم ثبوت:

که د خپلې ادعا یا قضیې د عکس په فرضولو یا قبولولو د فرض شوي ادعا خلاف ته ورسېږو، نو په دې حالت کې فرضیه ناسمه او خلاف یې سم دی. دې ډول استدلال ته غیرمستقیم ثبوت (برهان خلف) وایي.

بیان:

یوې خبرې جملې ته چې نتیجه یې سمه یا ناسمه وي، د بیان په نامه یادېږي، یوه جمله چې نتیجه یې سمه او یا ناسمه نه وي، بیان نه دی.

د بیانونو ترکیب:

که د p او q دوه بیانونه را کړل شوي وي، په دې حالت کې:

1- $p \wedge q$ د ترکیب د p او q دوه بیانونه د عطفي ترکیب یا (منطقي "او") په نامه یادېږي.

چې د p او q د بیان په شکل ویل کېږي.

2- $p \vee q$ د ترکیب د p او q د بیانونو د فصلي ترکیب (منطقي "یا") په نامه یادېږي، د

(\vee) علامه د (یا) په معنا په کار وړل شوي ده.

3- (که چېرې نو) او یا د " \Rightarrow " منطقي علامه د $p \Rightarrow q$ د p او q مشروط بیان دی، که p نو

q ویل کېږي، د \Rightarrow علامه ښکاره کوی چې p د شرطي ترکیب اساس دی، ددې لپاره چې q له هغې نتیجه شي.

4- که یوازې که یا دا " \Leftrightarrow " منطقي علامه د p او q د بیانونو دوو خواوو شرطي ترکیب دی چې د

(p) که او یوازې که (q) دی.

- 1 - له لاندې ځوابونو څخه ستاسو په نظر کوم یو سم دی؟
- الف- په مشاهداتو کې خطا د استقرایي طریقې له ستونزو څخه یوه ستونزه ده.
ب- د ریاضي د استدلال له قوي طریقو څخه یوه هم استقرایي طریقه ده.
ج- د ریاضي په استقرایي طریقې کې یوه ستونزه د مشاهداتو کموالی دی.
د- د الف او ج ځوابونه سم دي.
- 2 - له لاندې ځوابونو څخه کوم یو بې سم نه دی؟
استقرایي استدلال
- الف- د ریاضي له مسألو څخه یوه قوي طریقه ده.
ب- د مسألو په برخه کې مور ته د عمومي قوانینو لارښوونه کوي.
ج- دمسألو دحل لپاره له ریاضي پرته یوه طریقه ده.
د - دمسألو د حلولو لپاره د ریاضي طریقه نه ده.
- 3 - د شهود په برخه کې له لاندې ځوابونو څخه کوم یو بې سم (صحیح) دی؟
- الف- دداسې نتیجې د اخیستنې لپاره چې سل په سلو کې سمه ده.
ب- له شهود څخه په گټه اخیستنه پر ډاډ سره نه شوو ویلای چې نتیجه سل په سلو کې سمه ده.
ج شهود د ریاضي د ښه درک کولو لپاره دی.
د: له شهود څخه په گټه اخیستنه، کولای شو د ثبوت لپاره قطعي گمان له حتمي استدلال سره وکړو.
- 4 - له لاندې ځوابونو څخه کوم یو بې سم نه دی؟
- الف: استقرایي استدلال له جز څخه کل ته رسيدل دي.
ب: استقرایي استدلال له کل څخه جز ته رسيدل دي.
ج: له استقرایي استدلال څخه نه شو کولای چې د ریاضي د دقیق ثبوت لپاره گټه واخلو.
د: استقرایي استدلال د یو شمېر مشاهدو پر اساس یوه کلي نتیجه ده.
- 5 - د استنتاجي استدلال پر اساس له لاندې ځوابونو څخه کوم یو بې سم نه دی؟
- الف: که واوره اوري ځمکه نمجنه کېږي، ځمکه نمجنه ده، نو واوره وریډلي ده.
ب: د یوه ښوونځي ټول فارغان له کمپیوتر سره بلد او په ریاضي ښه پوهېږي، ضمیر چې له همدې ښوونځي څخه فارغ شوی دی. نو له کمپیوتر سره ښه بلد او په ریاضي ښه پوهېږي.
ج: که یوه څلور ضلعي مربع وي، نو قطرونه یې یو پر بل عمود دي، که د څلور ضلعي قطرونه یو پر بل عمود وي، نو دا څلور ضلعي مربع ده.

د: که د یوه مثلث دوې ضلعې سره مساوي وي، متساوي الساقين مثلث دی او که د مثلث درې ضلعې سره مساوي وي، متساوي الاضلاع مثلث دی، نو هر متساوي الاضلاع مثلث، متساوي الساقين مثلث دی.

6 - د قیاسي استدلال په واسطه وښیاست د هرې زاوېې لپاره $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ ده.

7 - د استقرایي استدلال په واسطه وښیاست چې د n مسلسلو تاقو طبیعي عددونو مجموعه له n^2 سره مساوي ده.

8 - له استقرایي استدلال سره وښیاست چې د هر طبیعي عدد n لپاره لاندې مساوات سم دی.

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

9 - د استنتاجي استدلال په اساس ثبوت کړئ چې د دوو جفتو عددونو د جمعې حاصل هر وخت جفت عدد دی؟

10 - له یوه مثال سره وښیاست چې د $2^n + 3$ افاده د هر طبیعي عدد لپاره هر وخت لومړنی عدد نه دی.

11 - د غیر مستقیم ثبوت د استدلال په واسطه وښیاست که n یو طبیعي اختیاری عدد وی او هم n^2 طاق وي، نو n هم طاق دی.

12 - د (باران اوري او وریخ نشته دی، نو باران نه اوري) د ترکیبي بیانونو لپاره د صحت جدول جوړ کړئ، په داسې حال کې که

($\alpha =$ باران اوري) او (وریخ ده $= \beta$) سره وښایو. (1) عدد د سم اود (0) عدد د ناسم لپاره په کار یوسي.

α	β	$-\alpha$	$-\beta$	$\alpha \wedge -\beta$	$\alpha \wedge -\beta \Rightarrow -\alpha$
1	1				
1	0				
0	1				
0	0				

**Get more e-books from www.ketabton.com
Ketabton.com: The Digital Library**