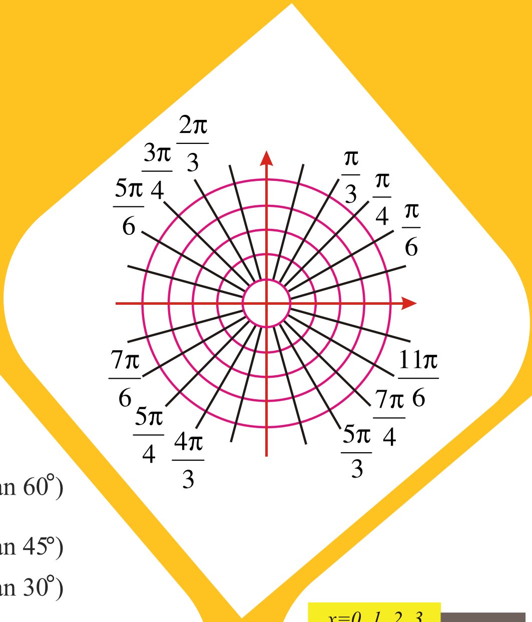
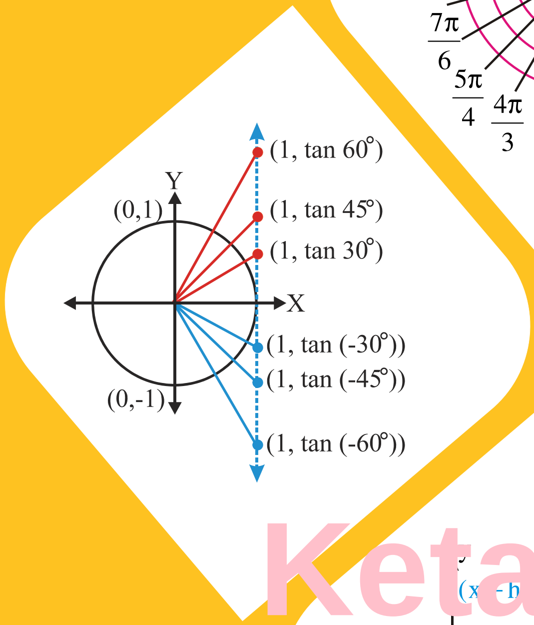
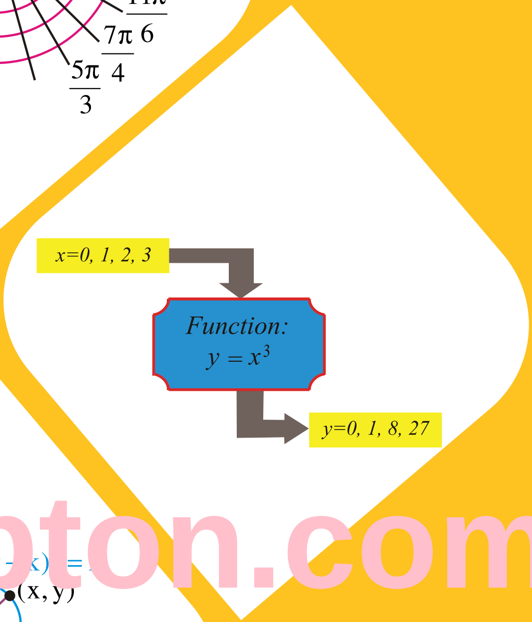
د پوهنې وزارت

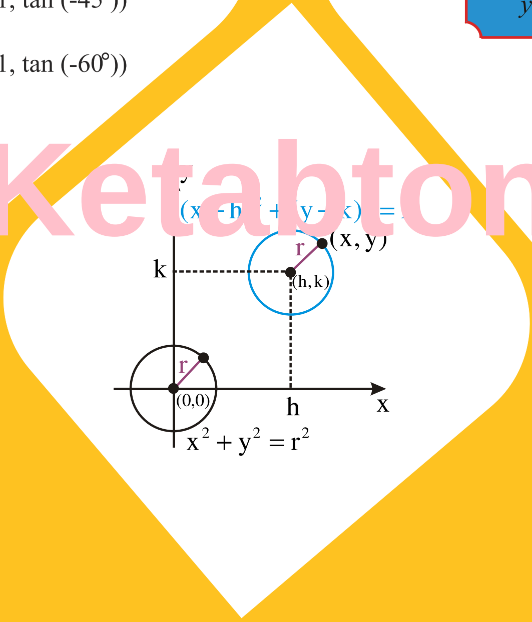
ریاضی

لسم تولګی









Ketabton.com

ریاضی لسم تولګی

۱۳۹۸

(c) ketabton.com: The Digital Library

ملي سرود

دا وطن افغانستان دی
دا عزت د هر افغان دی
کور د سولې کور د تورې
هر بچی یې قهرمان دی
دا وطن د ټولو کور دی
د بلوڅو د ازبکو
د پښتون او هزاره وو
د ترکمنو د تاجکو
ورسره عرب، گوجر دي
پامیریان، نورستانیان
براهوي دي، قزلباش دي
هم ایماق، هم پشه یان
دا هیواد به تل ځلیږي
لکه لمر پر شنه آسمان
په سینه کې د آسیا به
لکه زړه وي جاویدان
نوم د حق مو دی رهبر
وایو الله اکبر وایو الله اکبر

(c) ketabton.com: The Digital Library

بسم الله الرحمن الرحيم

رياضي لسم ټولګی

۱۳۹۸
هـ . ش.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کتاب ځانګړتیاوې

مضمون: رياضي

مؤلفين: د تعليمي نصاب د رياضياتو ديپارتمنت د درسي کتابونو مؤلفين

اېډيټ کوونکي: د پښتو ژبې د اېډيټ ديپارتمنت غړي

ټولګی: لسم

د متن ژبه: پښتو

انکشاف ورکوونکی: د تعليمي نصاب د پراختيا او درسي کتابونو د تألیف لوی رياست

خپروونکی: د پوهنې وزارت د اړيکو او عامه پوهاوي رياست

د چاپ کال: ۱۳۹۸ هجري شمسي

د چاپ ځای: کابل

چاپخونه:

برېښناليک پته: curriculum@moe.gov.af

د درسي کتابونو د چاپ، وېش او پلورلو حق د افغانستان اسلامي جمهوريت د پوهنې وزارت سره محفوظ دی. په بازار کې یې پلورل او پېرودل منع دي. له سرغړوونکو سره قانوني چلندکيږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پوهنې د وزير پيغام

اقرأ باسم ربک

د لوی او بښونکي خدای ﷻ شکر په ځای کوو، چې موږ ته يې ژوند رابښلی، او د لوست او ليک له نعمت څخه يې برخمن کړي يو، او د الله تعالی پر وروستي پيغمبر محمد مصطفی ﷺ چې الهي لومړنی پيغام ورته (لوستل) و، درود وايو.

څرنگه چې ټولو ته ښکاره ده ۱۳۹۷ هجري لمريز کال د پوهنې د کال په نامه ونومول شو، له دې امله به د گران هېواد ښوونيز نظام، د ژورو بدلونونو شاهد وي. ښوونکی، زده‌کوونکی، کتاب، ښوونځی، اداره او د والدينو شوراگانې د هېواد د پوهنيز نظام شپږگوني بنسټيز عناصر بلل کيږي، چې د هېواد د ښوونې او روزنې په پراختيا او پرمختيا کې مهم رول لري. په داسې مهم وخت کې د افغانستان د پوهنې وزارت د مشرتابه مقام، د هېواد په ښوونيز نظام کې د ودې او پراختيا په لور بنسټيزو بدلونونو ته ژمن دی.

له همدې امله د ښوونيز نصاب اصلاح او پراختيا، د پوهنې وزارت له مهمو لومړيتوبونو څخه دي. همدارنگه په ښوونځيو، مدرسو او ټولو دولتي او خصوصي ښوونيزو تأسيساتو کې، د درسي کتابونو محتوا، کيفيت او توزيع ته پاملرنه د پوهنې وزارت د چارو په سر کې ځای لري. موږ په دې باور يو، چې د باکيفيته درسي کتابونو له شتون پرته، د ښوونې او روزنې اساسي اهدافو ته رسېدلی نشو.

پورتنيو موخو ته د رسېدو او د اغېزناک ښوونيز نظام د رامنځته کولو لپاره، د راتلونکي نسل د روزونکو په توگه، د هېواد له ټولو زړه سواندو ښوونکو، استادانو او مسلکي مديرانو څخه په درناوي هيله کوم، چې د هېواد بچيانو ته دې د درسي کتابونو په تدريس، او د محتوا په لېږدولو کې، هيڅ ډول هڅه او هاند ونه سپموي، او د يوه فعال او په ديني، ملي او انتقادي تفکر سمبال نسل په روزنه کې، زيار او کوښښ وکړي. هره ورځ د ژمنې په نوي کولو او د مسؤوليت په درک سره، په دې نيت لوست پيل کړي، چې د نن ورځې گران زده‌کوونکي به سبا د يوه پرمختللي افغانستان معماران، او د ټولنې متمدن او گټور اوسېدونکي وي.

همدا راز له خوږو زده کوونکو څخه، چې د هېواد ارزښتناکه پانگه ده، غوښتنه لرم، څو له هر فرصت څخه گټه پورته کړي، او د زده کړې په پروسه کې د ځيرکو او فعالو گډونوالو په توگه، او ښوونکو ته په درناوي سره، له تدريس څخه ښه او اغېزناکه استفاده وکړي.

په پای کې د ښوونې او روزنې له ټولو پوهانو او د ښوونيز نصاب له مسلکي همکارانو څخه، چې د دې کتاب په ليکلو او چمتو کولو کې يې نه ستړې کېدونکي هلې ځلې کړې دي، مننه کوم، او د لوی خدای ﷻ له دربار څخه دوی ته په دې سپېڅلې او انسان جوړوونکې هڅې کې بريا غواړم.

د معياري او پرمختللي ښوونيز نظام او د داسې ودان افغانستان په هيله چې وگړي يې خپلواک، پوه او سوکاله وي.

د پوهنې وزير

دکتور محمد ميرويس بلخي

(c) ketabton.com: The Digital Library

عنوان	فهرست	مخ

لومړی څپرکی (پولینوم) ۳
الجبري افادې، د پولینوم درجه او د پولینوم ډولونه، د پولینوم د قیمت او پولینوم دضربیونو د مجموعی پیدا کول، د پولینوم څلورګوني عملیې
د باقي مانده قضیه، فکټور قضیه او ترکیبي وېش
د څپرکي لنډيز او پوښتنې
دویم څپرکی: رابطه ۵۳
مرتبې جوړې او کارتيز يني مستوي، د کارتيزيني ضرب حاصل ا و ګراف يې
رابطه او معکوسه رابطه.
معادله رابطه.
د څپرکي لنډيز او پوښتنې
دریم څپرکی : تابع ۶۹
د تابع دليکلو طريقه او دیوې تابع د قيمت پيدا کول، د تابع د تعريف د ساحې پيدا کول، د يوې تابع ګراف او د ګراف له مخې
د يوې تابع پېژندنه، د ګراف له مخې د يوې تابع د تعريف او د قيمتونو د ناحيو او د تابع قيمتونو پيدا کول، ځينې خاصې تابع ګانې او ګرافونه يې.متزايدې او متناقصې تابع ګانې، جفتې او طاقې تابع ګانې
د ګرافونو انتقال (عمودي انتقال، افقي انتقال او دعمودي او افقي انتقالونو ترکيب، د تابع ګانو عمليې
د تابع ګانو ترکيب، معکوسه تابع، يو په يو تابع، د تابع او د هغې د معکوسي تابع ګراف، پولينومي تابع ګاني (لومړی او دويمه درجه تابعګاني) او ګرافونه يې
ناطقې تابع ګانې او ګراف يې (عمودي، افقي او مايل مجانبونه)
د څپرکي لنډيز او پوښتنې
څلورم څپرکی: مثلثاتي تابع ګانې ۱۴۹
زاويه او د زاويې د اندازه کولو واحدونه، ديوې زاويې معياري حالت او کوټر مينل زاويې
مثلثاتي تابع ګانې او د ځينو خاصو زاويو مثلثاتي نسبتونه
د $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$ او 360° زاويو مثلثاتي نستونه
د يوې حاده زاويې او نورو زاويو د مثلثاتي نسبتونو په منځ کې اړيکې
د مثلثاتي تابع ګانو ګراف
د څپرکي لنډيز او پوښتنې
پنځم څپرکی: د مثلثاتو تطبيقات ۲۲۳
د مرکبو زاويو د مثلثاتي نسبتونه، د دوو زاويو د مجموعې او تفاضل مثلثاتي فورمولونه
د α زاويې د مثلثاتي نسبتونو له مخې د 2α او 3α زاويو د مثلثاتي نسبتونو پيداکول، د زاويو د مثلثاتي نسبتونو د مجموعې او تفاضل بدلول، د زاويو د مثلثاتي نسبتونو د ضرب د حاصل په شکل،

(c) ketabton.com: The Digital Library

عنوان **فهرست** **مخ**

د زاویو د مثلثاتي نسبتونو د ضرب د حاصل بدلول په جمع یا یې په تفاضل باندې، د قوس اوږدوالی، د یوې دایرې قطاع او مساحت یې، د دایرې قطعه او مساحت، د مثلث مساحت د دوو ضلعو او ددې دوو ضلعو ترمنځ د زاویې له جنسه، د مثلث مساحت د مثلث د دریو ضلعوله جنسه (د هیرون فورمول) د یوه مثلث د محیطي او محاطي دایرو شعاع ګانې

د څپرکي لنډیز او پوښتنې

شپږم څپرکی: مختلط عددونه **۲۷۷**

موهومي عددونه او د موهومي عددونو څلورګوني عملیې

د مختلطو عددونو د جمعې او تفریق عملیې

د مختلطو عددونو ضرب، د یو مختلط عدد مزدوج، د مختلط عدد ضربي معکوس

د مختلطو عددونو وېش

د مختلطو عددونو په ساحه کې ددویمې درجې یو مجهوله معادلو حل

د څپرکی لنډیز او پوښتنې

اووم څپرکی تحلیلي هندسه **۳۰۵**

د وضعیه کمیاتو سیستم او د دوو نقطو ترمنځ فاصله

د هغې نقطې د وضعیه کمیاتو پیداکول چې یو قطعه خط په یوه نسبت باندې وېشي

د یوه مستقیم خط میل

د یوه مستقیم خط معادله (د یو مستقیم خط معیاري معادله، دهغه مستقیم خط معادله چې میل او یوه نقطه یې معلومه وي، دوې نقطې یې معلومې وي. له محورونو سره یې د تقاطع نقطې معلومې وي، د مستقیم خط نورمال معادله او د مستقیم خط عمومي معادله)

د یوه مستقیم خط د عمومي معادلې بدلول، د مستقیم خط د معادلو په نورو شکلونو باندې.

د یوې نقطې فاصله له یوه مستقیم خط څخه، د دوو موازي خطونو تر منځ فاصله

دایره او د دایرې معادله، د یوه مستقیم خط حالتونه له یوې دایرې سره، د مماس معادله او د مماس اوږدوالی

د مثلث د مساحت پیداکول چې د راسونو و ضعیه کمیات یې معلوم وي.

د څپرکي لنډیز او پوښتنې

اتم څپرکی احصائیه **۳۵۹**

د فریکونسي څو ضلعي ګراف، د ساقې او پاڼې ګراف، ربعي (څلورمې)، صندوقچه یي ګراف، د نارمل منحنې د مرکزي تمایل پرتله کول، ربعي انحراف، واریانس، معیاري انحراف،

د څپرکي لنډیز او پوښتنې

نهم څپرکی د ریاضي منطق **۳۹۱**

د شهودي درک استدلال، تمثیلي استدلال، استقرایي استدلال، د ریاضي د استقرا استدلال، استنتاجي استدلال، د مثال د نفي کولو استدلال، غیر مستقیم ثبوت، د ریاضي منطق او د بیان استنتاج، د څپرکي لنډیز او پوښتنې

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی څپرکی

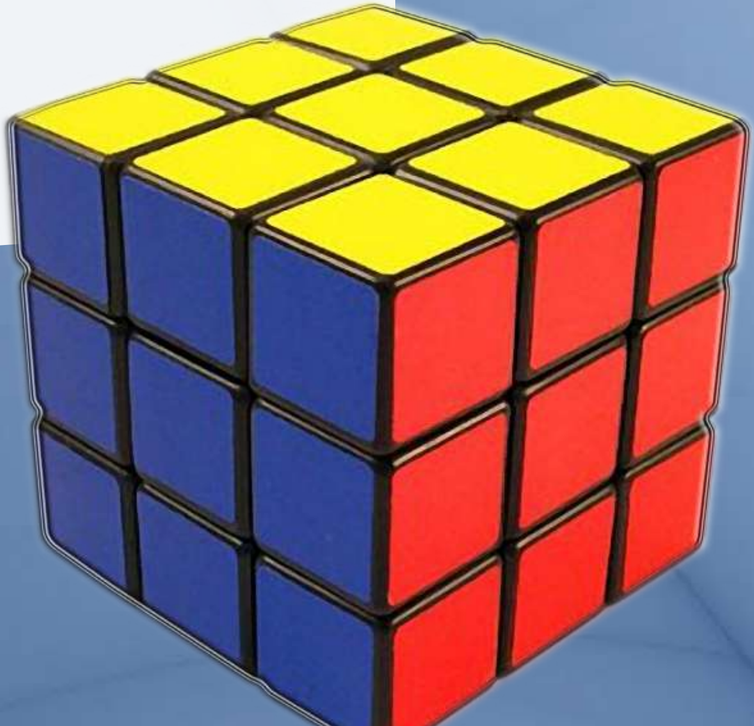
پولینوم

پولینوم(Polynome)

یا (Polynomial)

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(3x^2+5x+2)+(5x+6)$$
$$=3x^2+5x+2+5x+6$$
$$=3x^2+5x+5x+6+2$$
$$=3x^2+10x+8$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

الجبري افادي
(Algebraic Expressions)

ایـــا ویـــلای شـئ چـې پـه $\frac{x^4-1}{x^2}$ ،

$\sqrt{y^2+1}$ او $x^3+\frac{y}{x^2}+\frac{y^2}{x}+y^3$ الجبري

افادو کې کومـه یوه ناطقه اوکومه یوه غیر ناطقه

الجبري افاده ده؟

متحول او ثابت (variable and constant): متحول یو سمبول (Symbol) دی چې د یوه غیر خالي سټ د هر عنصر په ځای وضع کېږي.یا یو توری چې قیمتونه یې تغیر کوي د مثال په ډول که $A=\{x/x\in IN$ او $x\leq 10\}$ وي.

نو د A په سټ کې x له یوه څخه تر 10 پورې د طبیعي عددونو قیمتونه اخیستلای شي. x ، ته متحول(Variable) وایي. عموماً متحولونه د انګلیسي ژبې د کوچنیو تورو، لکه: z, y, x او نورو په واسطه ښودل کېږي.

د یوه عدد قیمت تغیر نه کوي، لکه: د 4 عدد هیڅکله له 5 یا 3 او یا کوم بل عدد سره مساوي کېدای نه شي، نو ټول حقیقي عددونه ثابت (Constants) دي.

د حقیقي عددونو سربیره د انګلیسي ژبې توري، لکه: $a, b c ...$ او نور هم د ثابتو پر ځای کارول کېږي.

الجبري افاده (Algebraic Expression): کېدای شي الجبري افاده له یوه ثابت، یو متحول او یا د ثابتو او متحولونو له ترکیب څخه جوړه شوې وي. د الجبري افادو لاندې مثالونه وګورئ.

$5\sqrt{x}$ ، $4x+5+\frac{15}{t^2}$ ، $\sqrt{3}x$ ، x^2-x+1 ، x ، -12 ، 12 او داسې نور.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په $3x^2$ الجبري افاده کې 3 ته ضریب (Coefficient) وايي. په $-\frac{1}{2}y$ کې د $-\frac{1}{2}$ عدد او په x کې (1) ضریب دی. $-3x^5y^5$ او $15x^5y^5$ مشابه حدونه (Liketerms) دي چې مشابه متحولونه او مساوي توانونه لري، خو عددي ضریبونه یې سره توپیر لري.

د الجبري افادو ډولونه: الجبري افادې په درو ډولونو دي.

1- **پولینومي الجبري افادې** (Polynomial algebraic expressions)

پولینوم: هغه یوه یا څو حده الجبري افاده چې د تورو توانونه یې د مکملو عددونو په سټ کې شامل وي، پولینوم نومېږي او $x^3 - x + 1$، $2x^2 + x - 1$، $x - 1$، 12 پولینومونه دي، خو $x^{-2} + x - 1$، $\frac{1}{x} + x$ او $x^3 + \sqrt{x} + \frac{y}{x^2}$ پولینومونه نه دي یا د پولینوم مشخصې دا دي:

- د ټولو متحولونو توانونه یې مکمل عددونه وي.
- په مخرج کې متحول ونه لري.
- متحول تر جذر لاندې نه وي.

لومړی مثال: په لاندې راکړل شوو الجبري افادو کې کوم یو پولینوم او کوم یو یې پولینوم نه دي؟

$$\text{e)}\,x^{-3} + x^2 \quad , \quad \text{d)}\,x^{\frac{1}{2}} \quad , \quad \text{c)}\,\frac{1}{y^2} - \frac{2}{x^3} \quad , \quad \text{b)}\,2\sqrt{x} \quad , \quad \text{a)}\,\sqrt{2}x$$

$$\text{i)}\,6a^2 - 4a \quad , \quad \text{h)}\,88 \quad , \quad \text{g)}\,9x^2 - \frac{7}{x^2} \quad \text{f)}\,8p^2 + p^{2.2}$$

حل: h,a او i پولینومونه دي، خو f, e, d, c, b او g پولینومونه، نه دي. په یاد ولرئ چې هر پولینوم، یوه ناطقه الجبري افاده ده، خو هره ناطقه الجبري افاده پولینوم نه دی. د مثال په ډول:

$x^3 + \frac{y}{x^2} + \frac{y}{x} + y^3$ یوه ناطقه الجبري افاده ده، خو پولینوم نه دی.

12 هم یو پولنیوم دی، ځکه چې: $12 = 12x^0$ دی او صفر هم د مکملو عددونو په سټ کې شامل دی، خو $5\sqrt{x}$ او $\frac{5}{x^3}$ پولینومونه نه دي، ځکه $5\sqrt{x} = 5x^{\frac{1}{2}}$، $\frac{5}{x^3} = 5x^{-3}$ چې $\frac{1}{2}$ او -3

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مکملو عددونو په سټ کې شامل نه دي.

پولينوم د يو توري په واسطه، لکه: P ښودل کېږي، يو پولينوم چې له يو متحول څخه جوړ شوی وي عمومي شکل يې په لاندې ډول دی چې د معياري شکل په نامه يادېږي.

$$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\ldots+a_1x+a_0$$

n يو مکمل عدد او $a_1,a_2 \ldots a_{n-1},a_n$ ضريبونه دي چې حقيقي عددونه دي. که $a_n \neq 0$ وي، نو n د پولينوم درجه ده.

فعاليت

له $\sqrt{8}x^3,-8x^2$, $\frac{1}{x}$, x , $\frac{3}{x^2}+\frac{5}{x}+6$, $2x^3-x^2$ او $8\sqrt{x}$ الجبري افادو څخه کومه يوه يې پولينوم دی او کومه يوه پولينوم نه دی؟

دويم مثال: د $P(x)=-5x^3+x^2-x+12$ په پولينوم کې، $n=3$، $a_n=-5$، $a_2=1$، $a_1=-1$ او $a_0=12$ دی. او د $11x^2-1$ په پولينوم کې، $n=2$، $a_n=11$، $a_1=0$، او $a_0=-1$ دی.

2- ناطقه الجبري افاده (Rational algebraic expression):

که يوه الجبري افاده د $\frac{p}{q}(q \neq 0)$ په شکل وليکلای شو چې p او q پولينومونه وي. داسې الجبري افادې ته ناطقه الجبري افاده وايي. د مثال په ډول $x^2-\frac{1}{x^2}$ چې د $\frac{x^4-1}{x^2}$ په شکل يې هم ليکلای شو چې يو متحول لرې يوه ناطقه الجبري افاده ده. څرنګه چې هرې الجبري افادې ته يو مخرج ورکولای شو، نو (x^2-1) هم يوه ناطقه الجبري افاده ده، ځکه چې $\frac{x^2-1}{1}=x^2-1$ دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

3- غیر ناطقه الجبري افاده (Irrational algebraic expression):

داسې يوې الجبري افادې ته چې د دوو پولينومونو د خارج قسمت په بڼه يې نه شو ليکلای، غير ناطقه الجبري افاده ده، لکه: $\sqrt{xy}$، $\frac{1}{\sqrt{x^2+5}}$ او $\sqrt{y^2+1}$ د غير ناطقو الجبري افادو مثالونه دي.

يوه الجبري افاده کېدای شي چې ناطقه، غير ناطقه او يا پولينومي الجبري افاده وي. پولينوم هغه يو يا څو حده الجبري افاده ده چې د تورو توانونه يې د مکملو عددونو په سټ کې شامل وي.

پوښتني

1- په لاندې الجبري افادو کې کومه يوه ناطقه، غير ناطقه او پولينومي الجبري افاده ده؟

$$\frac{1}{x}\ ,\ \sqrt{x}-\frac{1}{2}\ ,\ \frac{3x^2}{2}\ ,\ \frac{m+3}{6}\ ,\ x+\frac{1}{x}\ ,\ 3x^2+\frac{xy}{2}$$ او 13

2- په لاندې الجبري افادو کې کومه يوه يې يو پولينوم او کومه يوه يې پولينوم نه دی؟

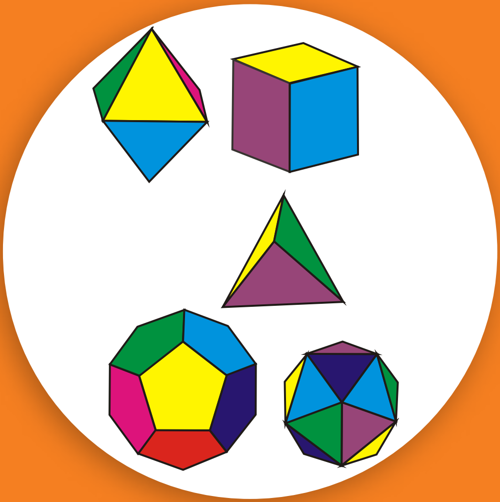
$$3x^2+\frac{xy}{2}\ ,\ -20a^3b+28ab^4\ ,\ \frac{1}{7}x^3-x$$

$$\frac{1}{x}-\frac{x^2}{5}\ ,\ 8\sqrt{x}\ ,\ 8x^{-8}\ ,\ 3x\ ,\ -0.03$$

3. د $Px^4-ax^3+bx^2+cx+d$ په پولينوم کې، a_1,a_2,a_3,a_n او a_0 وښياست.

4. د $P(x)=\frac{x^3}{2}-2x^2-1$ په پولينوم کې، a_1,a_2,a_3 او a_0 وښياست.

(c) ketabton.com: The Digital Library



د پولینوم درجه او د پولینوم ډولونه

آیا ویلای شئ چې د:

$12y^5x^3 + x^4y^3 \square 2x^3 \square + x^2 - x$ او

12 د پولینومونو درجې څو دي؟

مونوم عدد، یو متحول یا د یو عدد او یو یا څو متحولینو د ضرب حاصل دی. $3x$ یا $16x$ ته مونوم یا (Monomial) (یو حده) الجبري افاده وایي. $x-4$ یا $ab-y$ ته باینوم (Binome) یا (Binomial) (دوه حده) الجبري افاده وایي او د $2x^3-x-1$ الجبري افاده ترینوم (Trinomial) (درې حده) الجبري افاده ده او $\sqrt{2x}-\frac{1}{y}+1$ الجبري افادې ته مولټینوم (Multinomial) وایي. په یوه پولینوم کې مونومونه د پولینوم د حدونو په نامه یادېږي او هر مونوم یو پولینوم دی.

ځیني وختونه پولینوم له یو، دوه، درې او څو متحولونو څخه جوړ شوی وي.

د $2x^3-8x^2+7x+11$ پولینوم د یو متحول، $2x^3-3y$ پولینوم د دوه متحولونو او $x+y+z$ د دریو متحولونو لرونکی پولینوم دی چې په لاندې جدول کې ښودل شوي دي.

متحول	مونوم (یو حده)	باینوم (دوه حده)	ترینوم (درې حده)
یو متحول	$5x^3$	$5y^2+3y$	$3x^2+2x-4$
دوه متحولونه	$7x^2y$	$7x^2-4y^3$	$6x^2+5x-3y^2$
درې متحولونه	$4xyz^2$	$8a^2b+4c$	$3a^2b^2+6c^2-z^5a$

یادونه: باید پام مو وي چې $2\sqrt{xy}, \frac{5}{x}$ او y^{-3} هریو یې مونوم نه دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیت

د ax^2+bx+c، $2x-y$، 15، $-3x$ او $4x^2-4y$ الجبري افادو کې مونوم، باینوم او ترینوم وښیاست.

د یوه پولینوم درجه (Degree of a Polynome): که پولینوم له یوه توري څخه جوړ شوی وي، د هغه توري لوړ توان د پولینوم درجه ده، لکه: د $-x^3+2x+1+x^5$ د پولینوم درجه 5 ده. که پولینوم له ډېرو تورو څخه جوړ شوی وي، د زیات توان لرونکي مونوم درجه د پولینوم درجه ده، لکه: د $2x^2y^3-5xy^5+x^3y$ د پولینوم درجه 6 ده، $(1+5=6)$ او دا پولینوم نظر x ته دریمه درجه او نظر y ته پنځمه درجه پولینوم دی. که د یوه پولینوم درجه یوه وي، خطي پولینوم (Liner Polynome) او که د پولینوم درجه دوه وي، دویمه درجه پولینوم (Quadratic Polynome) او که درجه یې درې وي، دریمه درجه پولینوم (Cubic Polynomial) ورته وایي. او هم د $3x^2$ مونوم دویمه درجه، د $3x^2y^3$ مونوم درجه 5 او د 12 مونوم درجه صفرده. داسې پولینوم ته ثابت پولینوم وایي، ځکه چې $12=12x^0$

ثابت پولینوم: هغه پولینوم دی چې درجه یې صفر وي.یا هغه پولینوم دی چې د ټولو متحولونو ضریبونه یې صفر وي.

لومړی مثال: د m او n قیمتونه پیدا کړئ، که $(2m-4)x^2+(5-n)x+13$ یو ثابت پولینوم وي.

حل: څرنګه چې دا یو ثابت پولینوم دی، نو د هر حد د متحول ضریب یې صفر دی.

نو:

$$5-n=0 \qquad 2m-4=0$$
$$n=5 \qquad 2m=4$$
$$m=2$$

صفري پولینوم (Zero Polynome): که د ثابت پولینوم ثابت حد صفر وي، داسې پولینوم ته صفري پولینوم وایي، لکه: $P(x)=0$ ، د صفري پولینوم درجه تعریف شوې نه ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم مثال: د a قیمت پیدا کړئ که چېرې $(b-4)x^3-(2c+6)x+(a-b+c)$ یوصفري پولینوم وي.

حل: په صفري پولینوم کې هر حد صفر وي، نو:

$$b-4=0 \qquad 2c+6=0 \qquad a-b+c=0$$
$$b=4 \qquad 2c=-6 \qquad a-4-3=0$$
$$c=-3 \qquad a=7$$

دریم مثال: د $P(x)=x^2-1+3x^5$ ، $g(x)=2xy^2-x^2y^3$ او $h(x)=\sqrt{3}$ د پولینومونو درجې پیدا کړئ.

حل: د $P(x)$ د پولینوم درجه 5 د $g(x)$ د پولینوم درجه هم 5 ده ، $(n=5)$ خو د $h(x)$ د پولینوم درجه صفر ده.

فعالیت

د هر پولینوم درجه څو ده؟ او هم د دې پولینومونو درجې نظر هر توري ته پیدا کړئ.

$x^2-x^3+2x+5x^5 \quad , \quad x-1 \quad , \quad 15 \quad , \quad 2m^3n^2-3mn^3-mn$

مکمل او ناقص پولینومونه: مکمل پولینوم هغه پولینوم دی چې له لوړ توان څخه تر ثابت عدد پورې ټول حدونه ولري $x^3+1+2x-x^2$, $x-1$ او 51 مکمل پولینومونه دي، خو x^2-1 او x^3+x+1 ناقص پولینومونه دي. موږ کولای شو دا ناقص پولینومونه د مکملو پولینومو په شکل ولیکو، لکه: $x^2-1=x^2+0\cdot x-1$ او $x^3+x-1=x^3+0\cdot x^2+x-1$

منظم او غیر منظم پولینومونه: د $2x^3-3x^2+4x-1$ یا $-11+12x+13x^2-x^3$ پولینومونه منظم، خو د $3x^4-x+1+x^3+x^2$ پولینوم یو غیر منظم پولینوم دی. کولای شو چې یو غیر منظم پولینوم د منظم پولینوم په شکل ولیکو، لکه: همدا پولینوم په دوه ډوله د منظم پولینوم په شکل لیکلای شو. $3x^4+x^3+x^2-x+1$ یا $1-x+x^2+x^3+3x^4$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نزولي او صعودي پولينومونه
:(Descending and ascending Polynomes)

که یو پولینوم د متحول له لوړ توان څخه ټیټ توان ته ترتیب شوی وي، نزولي او که له ټیټ توان څخه لوړ توان ته ترتیب شوی وي، صعودي ترتیب ورته وایي.

د مثال په ډول $x^4+3x^3+x^2+x+1$ په نزولي ترتیب او د $1+x+x^2+3x^3+x^4$ پولینوم په صعودي ترتیب لیکل شوی دی.

که یو پولینوم له دوو یا څو تورو څخه جوړ شوی وي، نو موږ کولای شو نظر هر توري ته یې په صعودي یا نزولي ډول ترتیب کړو، لکه: د $x^3y+3x^2y^2+2xy^3-5y^4$ پولینوم نظر x ته په نزولي ډول او نظر y ته په صعودي ډول ترتیب شوی دی.

فعالیت

دا پولینومونه په صعودي ډول ترتیب کړئ:

$$4x-5+6x^2+8x^3\ ,\ 2y^2-4y+3-3y^4+y^3\ ,\ 2a^3-5+4a^4+a^5+3a^2+a$$

څلورم مثال: د $P(y)=4xy^4-3x^3y^2+2x^2y^3+x^4+y^5$ پولینوم نظر y ته په صعودي ترتیب ولیکئ:

حل

$$P(y)=x^4-3x^3y^2+2x^2y^3+4xy^4+y^5$$

معادل پولینومونه: هغه پولینومونه دي چې یو متحول ولري او د مشابه حدونو ضریبونه یې سره مساوي وي.

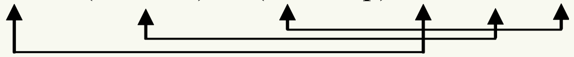
پنځم مثال: که د x^2+3x+2 او $m(x-1)^2+n(x-1)+P$ پولینومونه سره معادل وي، د n,m او p قیمتونه پیدا کړئ.

حل

$$m(x^2-2x+1)+nx-n+p=x^2+3x+2$$

$$mx^2-2mx+m+nx-n+p=x^2+3x+2$$

$$mx^2+(-2m+n)x+(m-n+p)=1x^2+3x+2$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

په نتيجه کې:

$$
\begin{aligned}
m &= 1 \\
-2m + n &= 3 \qquad \Rightarrow n = 5 \\
m - n + p &= 2 \qquad \Rightarrow p = 6
\end{aligned}
$$

متجانس پولينومونه (Hemogence Polynomes): چې د ټولو حدونو توانونه يې سره مساوي وي، لکه: د $2x^2 + y^2 - z^2$ يو متجانس پولينوم دی.

شپږم مثال: که د $3x^2y + 5x^mz - 7y^{n-3}z^2$ پولينوم متجانس وي، د m او n قيمتونه پيدا کړئ.

حل:

$$
\begin{aligned}
m + 1 &= 2 + 1 \qquad & n - 3 + 2 &= m + 1 \\
m &= 2 & n - 1 &= m + 1 \\
& & n - 1 &= 2 + 1 \\
& & n &= 4
\end{aligned}
$$

که پولينوم له يوه توري څخه جوړ شوی وي، د دې توري لوړ توان د پولينوم درجه ده او که پولينوم له ډېرو تورو څخه جوړ شوی وي، د لوړ توان لرونکي مونوم درجه د دې پولينوم درجه ده. هغه پولينومونه چې يو متحول ولري او د مشابه حدونو ضريبونه يې سره مساوي وي، د معادلو پولينومونو په نامه يادېږي او هغه پولينوم چې د ټولو حدونو توانونه يې سره مساوي وي، متجانس پولينوم دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

1- په لاندې افادو کې مونوم، باینوم او ترینوم وښیاست او درجې یې پیدا کړئ.

$\frac{1}{2}x^2y^5$, x^2-y+4 , $x-1$

$x-x^2-x^3$, $12x$, -12

2- په لاندې پولینومونو کې مکمل او ناقص پولینومونه وښیاست او بیا ناقص پولینومونه د مکملو پولنیومونو په شکل ولیکئ.

x , $x+1$, x^2-1 ,

$2x^2-2x-2$, 15 , x^3+x-1

3- لومړی د لاندې پولینومونو درجې پیدا کړئ او بیا یې په نزولي ډول ترتیب کړئ.

$4x-5+6x^2+8x^3$

$2y^2-4y+3-3y^4+y^3$

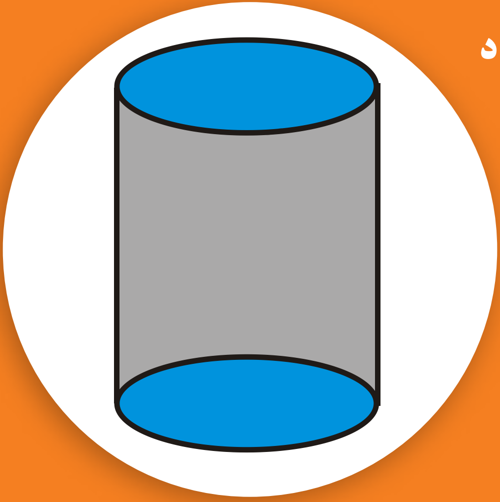
$1-x^3+x^2+2x^4-x^5+x$

4- که $P(x-1)^2+n(x+3)+c=2x^2-x+22$ وي د n,p او c قیمتونه پیدا کړئ.

5- د b,a او c قیمتونه پیدا کړئ که $P(x)=7x^4-(2a-3)x^3+5x-(c-3)$ او $Q(x)=(3b+4)x^4+2x^3+5x$ معادل پولینومونه وي.

6- که $5xy^2+8x^pz-3y^{m-3}z^2$ یو متجانس پولینوم وي، د m او p قیمتونه پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library



د پولینوم د قیمت او د پولینوم د ضریبونو د مجموعې پیدا کول

آیا ویلای شئ د $x=-1$ لپاره د

$P(x)=x^3-x^2-x-1$ پولینوم قیمت

څو دی؟ یا $P(-1)=?$

که په یوه پولینوم کې د متحول پر ځای یو حقیقي عدد (د متحول خاص قیمت) وضع کړو، یو حقیقي عدد په لاس راځي چې دا حقیقي عدد دې پولینوم قیمت دی. د $x=2$ لپاره د $P(x)=3x+2$ پولینوم قیمت 8 $P(2)=3\cdot2+2=8$ دی.

لومړی مثال: د $P(x)=2x^2-7x+1$ پولینوم قیمتونه د $P(5)$، $P(-1)$ او $P(0)$ لپاره پیدا کړئ.

حل:

$$P(5)=2\cdot5^2-7(5)+1=50-35+1=51-35=16$$

$$P(0)=1$$

$$P(-1)=2(-1)^2-7(-1)+1=2+7+1=10$$

فعالیت

د $P(x)=x^5-x^3-x-1$ پولینوم لپاره $P(0)$، $P(-1)$ او $P(1)$ پیدا کړئ.

دویم مثال: که $P(x)=16x^3-8x^2+\frac{3}{4}$ وي، نو $P(-\frac{1}{4})$ پیدا کړئ.

حل:

$$P(-\frac{1}{4})=16(-\frac{1}{4})^3-8(-\frac{1}{4})^2+\frac{3}{4}=16(-\frac{1}{64})-8(\frac{1}{16})+\frac{3}{4}$$

$$=-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+\frac{3}{4}=\frac{-1-2+3}{4}=\frac{-3+3}{4}=\frac{0}{4}=0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دريم مثال: لکه: څرنګه چې پوهېږئ د دايرې محيط (Circumference) د $C = 2\pi r$ له فورمول څخه لاس ته راځي چې که چېرې $\pi = \dfrac{22}{7}$ او د دايرې شعاع $r = 3\dfrac{1}{2}cm$ وي، نو د دې دايرې محيط (C) پيدا کړئ.

حل

$$C = 2\pi r = 2\cdot\frac{22}{7}\cdot\frac{7}{2}cm = 22cm$$

څلورم مثال: که b, a او c د مثلث د ضلعو اوږدوالی او p د مثلث د محيط نيمايي وي يعنې $p = \dfrac{a+b+c}{2}$، د مثلث مساحت د دې فورمول په واسطه لاس ته راځي.

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

که په يوه مثلث کې د ضلعو اوږدوالی $a = 9cm$, $b = 12cm$ او $c = 15cm$ وي، ددې مثلث مساحت پيدا کړئ.

حل

$$p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{9+12+15}{2} = \frac{36}{2} = 18cm$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{18(18-9)(18-12)(18-15)}$$

$$= \sqrt{18\cdot9\cdot6\cdot3} = \sqrt{2\cdot9\cdot9\cdot2\cdot3\cdot3} = \sqrt{2^2\cdot3^2\cdot9^2} = 2\cdot3\cdot9 = 54cm^2$$

فعاليت

د استوانې حجم د $V = \pi r^2 h$ له فورمول څخه لاس ته راځي چې V د استوانې حجم، r د قاعدې شعاع او h د استوانې لوړوالی دی. که د يوې استوانې $r = 5cm$ او $h = 21cm$ وي، ددې استوانې حجم پيدا کړئ.

د پولينوم د ضريبونو د مجموعې پيدا کول:

که $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ وي، د ضريبونو مجموعه يې $a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0$ ده.

پنځم مثال: د $p(x) = 2x^3 + 5x^2 - 3x + 1$ پولينوم د ضريبونو مجموعه په لاس راوړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل: $p(1)$ پیدا کوو: $P(1)=2\cdot1^3+5\cdot1^2-3\cdot1+1=2+5-3+1=5$

که پولینوم له څو تورو څخه جوړ شوی وي، د هر توري پر ځای یو (1) وضع کوو، لکه: د $x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4$ د ضریبونو د مجموعې د پیداکولو لپاره د x او y پر ځای یو (1) وضع کوو:

$$1^4+4\cdot1^3\cdot1+6\cdot1^2\cdot1^2+4\cdot1\cdot1^3+1^4=1+4+6+4+1=16$$

شپږم مثال: د $(x-3y)^4$ د ضریبونو مجموعه پیداکړئ.

حل:

$$(1-3\cdot1)^4=(1-3)^4=(-2)^4=16$$

اووم مثال: د $(7x^2-5x-1)^{600}(2x^3-1)^{17}(x+2)^4$ د ضریبونو مجموعه په لاس راوړئ.

حل:

$$(7\cdot1^2-5\cdot1-1)^{600}(2\cdot1^3-1)^{17}(1+2)^4=(1)^{600}(1)^{17}(3)^4=81$$

اتم مثال: که ددې توپ شعاع 6cm وي، ددې توپ حجم پیداکړئ.

حل:

$$V=\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{4}{3}\pi(6cm)^3=\frac{4}{3}\pi(216cm^3)=288\pi cm^3$$

د x د راکړل شوي قیمت لپاره د $P(x)$ په پولینوم کې د x پر ځای راکړل شوی قیمت وضع کوو، د پولینوم قیمت په لاس راځي که په یوه پولینوم کې د توري (متحول) پر ځای یو وضع شي د پولینوم د ضریبونو مجموعه په لاس راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

1. که $p(x)=-x^4-x^3-x^2-x-1$ وي $p(-1)$ او $p(\frac{1}{2})$ پیداکړئ.
2. د $p(x)=kx^3-x^2+3x-1$ په پولینوم کې که $p(2)=17$ وي د k قیمت پیداکړئ.
3. که د mx^2-2x+1 د ضریبونو مجموعه 18 وي د m قیمت پیداکړئ.
4. د $x=-\frac{1}{2}$ لپاره د $p(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$ پولینوم قیمت پیداکړئ.
5. د $A=x^2-4x+4$ □ $B=-4x^3+10x^2$ □ $C=-x+3x^4-6x^3$ او $D=x^2+4x-4$ په پولینومونو کې د $x=4$ لپاره دکوم پولینوم قیمت له 100 څخه زیات دی؟

a) C b) D c) A d) B

6. په لاندې پولینومونو کې د $x=5$ لپاره دکوم پولینوم قیمت تر ټولو زیات دی؟

a) x^2-2x+6

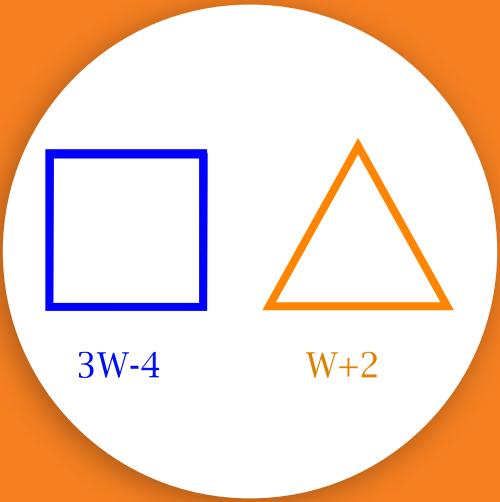
b) $3x^4+6x+12$

c) $-x^3-40x-300$

d) x^5-120x^4+10

7. که $p(x)=x^4-x^3-x^2-x-1$ وي، $p(-1)$ ، $p(0)$ ، $p(\frac{1}{2})$ او $p(-\frac{1}{2})$ پیداکړئ.
8. د $x=2$ لپاره د $\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{8}x^3+\frac{3}{8}x^2+\frac{5}{8}x+\frac{7}{8}$ پولینوم قیمت پیداکړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library



د پولينوم څلورګوني عمليې

که د مربع هره ضلع $3w-4$ او د متساوي الاضلاع مثلث هره ضلع $w+2$ وي، يوه الجبري افاده وليکئ چې د دواړو شکلونو محيط ښکاره کړي.

که $A=8x^2-2x+3$ او $B=9x-5$ وي، $A+B$ او $A-B$ پيدا کړئ.

1 **د جمعې عمليه**: مشابه حدونه (Like terms) يو له بل سره جمع کېږي او هم مشابه حدونه يو له بله تفريق کېږي، دا دواړه عمليې په افقي او عمودي ډول سر ته رسيدلای شي.

لومړی مثال: که $A=-3cd^2-2cd+5$ او $B=9cd-7cd^2-5$ وي $A+B$ پيدا کړئ.

حل:

$$A+B=(-3cd^2-2cd+5)+(9cd-7cd^2-5)$$
$$=-3cd^2-2cd+5+9cd-7cd^2-5=-10cd^2+7cd$$

فعاليت

که $A=ab^2+3a$ ، $B=2ab^2+3a-2$ او $C=2a+4$ وي، د دې درې واړو پولينومونو د جمعې حاصل پيدا کړئ. $(A+B+C=?)$

دويم مثال: جمع يې کړئ که: $A=1+2x+3x^2$ ، $B=3x-5-2x^2$ او $C=x^2-5x+4$ او هم که $A=a^4b-2a^3b^2-3a^2b^3-4c-2b$, $B=a^3b^2-2a^2b^3+4b-4$ او $C=a^4b+a^3b^2-2c$ وي.

حل: لومړی پولينومونه په منظم ډول ليکو او بيا مشابه حدونه سره جمع کوو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\begin{array}{r} 3x^2+2x+1 \\ -2x^2+3x-5 \\ +\quad x^2-5x+4 \\ \hline 2x^2 \end{array} \qquad \begin{array}{llll} a^4b-2a^3b^2 & -3a^2b^3 & -4c-2b & \\ a^3b^2 & -2a^2b^3 & +4b-4 & \\ a^4b+a^3b^2 & & -2c & \\ \hline 2a^4b & -5a^2b^3 & -6c+2b-4 & \end{array}$$

2- **د تفریق عملیه**: د تفریق په عملیه کې د مفروق جمعي معکوس له مفروق منه سره جمع کوو. یا په بل عبارت د مفروق علامې تغیروو او له مفروق منه سره یې جمع کوو.

لومړی مثال: د B پولینوم د A له پولینوم څخه تفریق کړئ، که $A=-x^3+x^2+x-7$ او $B=-x^3+x^2+4x+3$ وی او هم که $A=2b^2-2c^2-2d^2-2e^2$ او $B=b^2-3c^2-3d^2-3e^2-f^2$ وي.

حل:

$$\begin{array}{l} A=2b^2-2c^2-2d^2-2e^2 \\ B=\pm b^2\mp 3c^2\mp 3d^2\mp 3e^2\mp f^2 \\ \hline A-B=b^2+c^2+d^2+e^2+f^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} A=-x^3+x^2+x-7 \\ -B=\mp x^3\pm x^2\pm 4x\pm 3 \\ \hline A-B=\qquad -3x-10 \end{array}$$

یا

$-x^3+x^2+x-7-(-x^3+x^2+4x+3)$

$=-x^3+x^2+x-7+x^3-x^2-4x-3$

$=-3x-10$

باید په یاد ولرو چې د یو پولینوم د ساده کولو لپاره مشابه حدونه (Like terms) سره جمع یا تفریقوو. د مثال په ډول

a) $x^2+6x^4-8+9x^2+2x^4-6x^2=8x^4+4x^2-8$

b) $3x-x-1+3-2x=2$

c) $2x^2-x-x^2-x-2=x^2-2x-2$

d) $6xy-xy-x-y+2x=5xy+x-y$

e) $mn-4+mn-5=2mn-9$

(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیت

په لاندې پولینومونو کې مشابه حدونه (Like terms) وښیاست.

$-t+5t^2-6t^2+6t-3$ $\qquad$ $9rs-2r^2s^2+4r^2s^2+3rs-7$

$3p-4p^2+6p+10p^2$ $\qquad$ $2fg+f^2g-fg^2-2fg+3f^2g+5fg^2$

دویم مثال: د $a^4+2a^3b-3ab^3+a^2b^2$ له پولینوم سره کوم پولینوم جمع کړو چې د جمعې حاصل یې $2a^4-3a^3b-3ab^3-b^4+a^2b^2$ شي؟

حل:

$$\begin{array}{l} 2a^4-3a^3b+a^2b^2-3ab^3-b^4 \\ \underline{-a^4\pm2a^3b\pm a^2b^2\mp3ab^3} \\ a^4-5a^3b \qquad\qquad -b^4 \end{array}$$

فعالیت

د $4x+6-2x^2$ او $3x^2-x^3-3$ پولینومونو مجموعه د $-2x^3+3x-7$ او x^3+x^2-2x پولینومونو له مجموعې څخه تفریق کړئ.

دریم مثال: تفریق یې کړئ.

$$\begin{array}{l} 202x^4y-303x^3y^2-101x^2y^3-404xy^4-505y^5 \\ \underline{-101x^4y\mp303x^3y^2\pm101x^2y^3\mp404xy^4\pm505\,y^5} \\ 101x^4y \qquad -202x^2y^3 \qquad -1010y^5 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 3ax-5bx-8cx-11dx \\ \underline{\pm3ax\mp5bx\mp8cx\mp11dx} \\ \qquad\qquad 0 \end{array}$$

څلورم مثال: مشابه حدونه (Like terms) سره جمع او ساده یې کړئ.

$20-k-k-10-6-k^2=-k^2-2k+4$ $\qquad$ $8-10+x-7+x=2x-9$

$y^2-1+y^2-1=2y^2-2$ $\qquad$ $ab+a-b-a=ab-b$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$4b^3 - 2b^2 - 2 + b - 4b^3 + b^2 + b^2 - b + 2 = 0$$

$$x^2 - 5x - 2x^2 + 5 = -x^2 - 5x + 5$$

باید په یاد ولرو چې که Q, P او R پولینومونه وي، نو

(د جمعې د عمليې تبديلي خاصيت)........................ $P + Q = Q + P$

(د جمعې د عمليې اتحادي خاصيت)...... $P + (Q + R) = (P + Q) + R$

(د ضرب توزيعي خاصيت پر جمع باندې)......... $P(Q + R) = PQ + PR$

يا $(Q + R)P = QP + RP$

د پولينومونو د جمعې او تفريق په عمليو کې مشابه حدونه سره جمع او يا يو له بله تفريق کېږي د پولينومونو د جمعې په عمليه کې د تبديلي او اتحادي خاصيتونه صدق کوي او د تفريق په عمليه کې د مفروق جمعي معکوس له مفروق منه سره جمع کېږي او د ضرب توزيعي قانون پر جمع باندې په پولينومونو کې هم صدق کوي.

پوښتنې

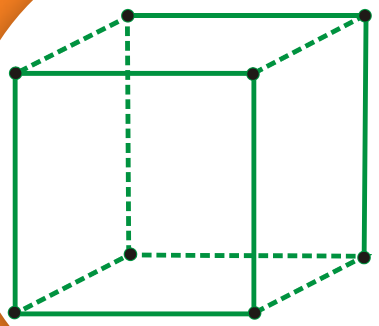
1. د دوو پولينومونو مجموعه $x^2 + 2x - y^2$ ده، که يو پولينوم $x^2 - 2xy + 3$ وي، بل پولينوم پيدا کړئ.
2. د $3x^4 + 5x^3 + 2x^2 - x + 1$ پولينوم له $4x^4 + 2x^2 + x^3 - x + 1$ پولينوم څخه تفريق کړئ.
3. د $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$،پولينوم څخه د $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ پولينوم تفريق کړئ.
4. که $A = a^3 + 2a^2 - 6a + 7$, $B = a^3 + 2a + 5$ او $C = 2a^3 - a^2 + 2a - 8$ وي ددې درې واړو پولينومونو مجموعه پيدا کړئ. $(A + B + C = ?)$
5. د $(ab^2 + 3a) + (2ab^2 + 3a - 2) + (2a + 4)$ افادې د جمعې حاصل مساوي دی، په:

   a) $-3ab^2 + 8a + 2$ b) $3ab^2 + 8a$ c) $3ab^2 + 8a + 2$
6. جمع يې کړئ.

   $(3a^2b^2 + 2a^2 - 5ab) + (-3ab + a^2 - 2) + (1 + 6ab)$
7. که دوه الوتکې له يوه هوايي ډګر څخه يو د بل مخالف لوري ته والوزي، که 2 ساعتونه وروسته د يوې الوتکې واټن له هوايي ډګر څخه $x^2 + 2x + 400$ ميله وي او دبلې الوتکې واټن له هوايي ډګر څخه $3x^2 - 50x + 100$ ميله وي، ددې دواړو الوتکو تر منځ واټن(فاصله) پيدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پولينومونو ضرب



د هغه مکعب حجم به څومره وي چې هره ضلع يې $(x+1)$ سانتي متره وي؟

د مونوم ضرب په مونوم کې: که د $3r^2s^3$ مونوم د $5r^4s^5$ په مونوم کې ضرب کړو، د ضرب حاصل يې $(3r^2s^3)(5r^4s^5)=15r^6s^8$ کيږي.

فعاليت

د $(7x^2y)(-3x^4yz^8)$ ، $(-\frac{1}{3}x)(-x)$ او $(-30a^2b)(-5ab)$ سره ضرب کړئ.

لومړی مثال: د لاندې مونومونو د ضرب حاصل پيدا کړئ.

$(-5y^a)(5y)=-25y^{a+1}$

$(-4s^2t^2)(2st^3)=-8s^3t^5$

$-a^{2x}(-2a)=2a^{2x+1}$

$(-\frac{1}{2}a)(-\frac{1}{2}a)=\frac{1}{4}a^2$

$(-0.1)(-0.1)(-0.1)=-0.001$

$(-mn)(-mn^2)=m^2n^3$

$\frac{1}{4}(4)^2(\frac{1}{2})^2=(\frac{16}{4})(\frac{1}{4})=\frac{16}{16}=1$

$(-2a)^3(-2a)^2=-32a^5$

$x(x^m)=x^{m+1}=x^{1+m}$

$(\frac{5}{2}mn)(\frac{5}{2}mn)(\frac{5}{2}mn)=\frac{125}{8}m^3n^3$

$(-a^b)(-a)=a^{b+1}=a^{1+b}$

$(0.01p)(0.01p)=0.0001p^2$

$(0.1x^2)(0.1x^2)=0.01x^4$

د مونوم ضرب په پولينوم کې:

دويم مثال: د ضرب لاندې حاصل لاس ته راوړئ.

$(2m^2n^3)(1-4mn^4)=2m^2n^3-8m^3n^7$

$x^3(x-x^2y^4)=x^4-x^5y^4$

$-3b(5b^4-8b+12)=-15b^5+24b^2-36b$

$-4s^2t^2(5s^2t+6st-2s^2t^2)=-20s^4t^3-24s^3t^3+8s^4t^4$

(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیت

د هغه مکعب حجم پیداکړئ چې اوږدوالی یې، $2x$، سور یې x او لوړوالی یې $x+2$ وي.

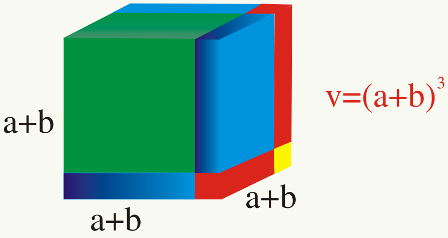
د پولینوم ضرب په پولینوم کې:

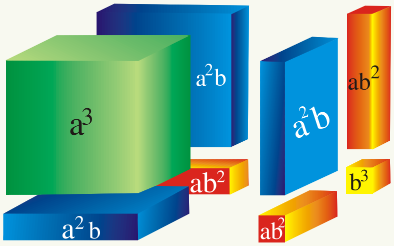
دریم مثال: **a:** د $(x-4)(x-5)$ د ضرب حاصل لاس ته راوړئ.

حل: $(x-4)(x-5)=x^2-5x-4x+20=x^2-9x+20$

	x	−4
x	x^2	$-4x$
−5	$-5x$	20

b) $(a+b)(a+b)(a+b)=(a+b)(a^2+2ab+b^2)=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$





c: که $P(x)=x^3+2x$ او $Q(x)=2x^2-x+1$ وي. $P(x)\cdot Q(x)$ پیداکړئ.

$$P(x)\cdot Q(x)=(x^3+2x)\cdot(2x^2-x+1)$$

$$=x^3\cdot 2x^2+x^3(-x)+x^3\cdot 1+2x\cdot 2x^2+2x(-x)+2x\cdot 1$$

$$=2x^5-x^4+x^3+4x^3-2x^2+2x=2x^5-x^4+5x^3-2x^2+2x$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

خلورم مثال: لاندي افادې د a^3+b^3 او a^3-b^3 مطابقتونو په مرسته ضرب کړئ.

حل

a) $(x^m+y^n)(x^{2m}-x^my^n+y^{2n})=(x^m+y^n)[(x^m)^2-(x^m)(y^n)+(y^n)^2]$

$=(x^m)^3+(y^n)^3=x^{3m}+y^{3n}$

b) $(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})(x+\sqrt{xy}+y)(x-\sqrt{xy}+y)$

$=(\sqrt{x}-\sqrt{y})(x+\sqrt{xy}+y)(\sqrt{x}+\sqrt{y})(x-\sqrt{xy}+y)$

$=[(\sqrt{x})^3-(\sqrt{y})^3][(\sqrt{x})^3+(\sqrt{y})^3]=[(\sqrt{x})^3]^2-[(\sqrt{y})^3]^2$

$=(x^{\frac{3}{2}})^2-(y^{\frac{3}{2}})^2=x^3-y^3$

په یاد ولرئ چې که Q,P او R پولینومونه وي

(د ضرب د تبدیلی خاصیت) $P\cdot Q=Q\cdot P$

(د ضرب اتحادی خاصیت) $P\cdot(Q\cdot R)=(P\cdot Q)\cdot R$

فعالیت

که $P(x)=2x^2-x-1$ او $Q(x)=4x-8$ وي، د ضرب د تبدیلي او اتحادي خاصیتونه په کې وڅېړئ.

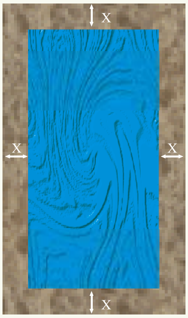
په لاندې جدول کې د هندسی شکلونو مساحت (Area) پیدا کړئ.

هندسي شکلونه	راکړ شوی اوږدوالی	مساحت
مستطیل	اوږدوالی یې $n+5$ اوسور یې $n-4$	n^2+n-20
مستطیل	اوږدوالی یې $3y+3$ اوسور یې $2y-1$	$6y^2+3y-3$
مثلث	قاعده یې $2b-5$ او لوړوالی یې b^2+2	$b^3-\frac{5}{2}b^2+2b-5$
مربع	هره ضلع یې $m+13$، ده	$m^2+26m+169$
مربع	هره ضلع یې $2g-4$ ده	$4g^2-16g+16$
دایره	شعاع یې $3c+2$ ده	$(9c^2+12c+4)\pi$

(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیت

د $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac)$ د ضرب حاصل په لاس راوړئ.



پوښتنه: د یوه حوض خلورو خواوو ته له سمنټو څخه پخه شوې لاره ده، که د دې لارې سور x متره وي او د حوض اوږدوالی او سور په ترتیب سره 50m او 25m وي د لارې مساحت معلوم کړئ.

حل: د لارې او حوض مجموعي مساحت

$$A=(25+2x)(50+2x)=1250+150x+4x^2$$

د حوض مساحت: $(25m)(50m)=1250m^2$

د لارې مساحت: $1250+150x+4x^2-1250=4x^2+150x$ د

پولینومونو په ضرب کې کېدای شي، مونوم په مونوم کې، مونوم په پولینوم کې او یا پولینوم په پولینوم کې ضرب کړو او د ضرب په عملیه کې د تبدیلی، اتحادي او د ضرب توزیعي خاصیت په جمع باندې هم صدق کوي.

پوښتني

1. ضرب یې کړئ: $(4x^2y^2z)(-5xy^3z^2)$, $-2xy(2x^2+2y^2-2)$

2. یو بکس چې لوړوالی یې x انچه، اوږدوالی یې $(x+1)$ او سور یې $2x-4$ انچه دی، که لوړوالی یې 3 انچه وي، د دې بکس حجم مساوي دی، په:

a) $40\,in^3$ b) $24\,in^3$ c) $48\,in^3$ d) $20\,in^3$

3. د $(\frac{a^p}{a^{-q}})^{p-q}(\frac{a^q}{a^{-r}})^{q-r}(\frac{a^r}{a^{-p}})^{r-p}$ د ضرب حاصل مساوي دی، په:

a) 1 b) -1 c) صفر d) دري واړه سم نه دي

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پولینوم وېش پر مونوم

آیا د

$$\frac{-x^2}{x}\ ,\ \frac{3mn^2}{-mn}\ ,\ \frac{\frac{1}{a}}{\frac{1}{b}}\ ,\ \frac{\frac{4m^2}{n}}{n}$$

او د $\frac{-n^a}{n^b}$ او د $\frac{14x^5}{2x^2}$ د وېش حاصل په لاس

راوړلای شئ؟(هیڅ یو مخرج له صفر سره مساوي نه دی).

د مونوم وېش پر مونوم (Dividing monomial by monomial):

لومړی مثال: ویې وېشئ:

$$\frac{36a^5b^5c^7}{12a^4bc^3}=3ab^4c^4\ ,\ \frac{6x^9y^3}{4x^6y^2}=\frac{3}{2}x^3y\ ,\ \frac{-a^2}{-a^x}=a^{2-x}\ ,\ \frac{-n^a}{n^b}=-n^{a-b}$$

د پولینوم وېش پر مونوم:

$$(x^4+5x^3-7x^2)\div x^2$$

$$\frac{x^4+5x^3-7x^2}{x^2}=\frac{x^4}{x^2}+\frac{5x^3}{x^2}-\frac{7x^2}{x^2}=x^2+5x-7 \qquad (x^2\neq 0)$$

دویم مثال: ویې وېشئ.

$$\frac{x^8y^2-x^4y^6-4x^3y^9}{x^3y}=x^5y-xy^5-4y^8 \qquad (x^3y\neq 0)$$

$$\frac{r^6s^2-r^5s-4r^3s^4}{r^2s}=r^4s-r^3-4rs^3 \qquad (r^2s\neq 0)$$

فعالیت

د وېش حاصل په لاس راوړئ. (مخرجونه خلاف د صفر دي)

$$a:\frac{27x^6y^{13}-18x^{12}y^8}{9x^3y^8} \qquad b:\frac{x^2}{y^2-1}\div\frac{x^2}{y-1} \qquad c:\frac{10b^3c^7}{6b^2c^7}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پولینوم وېش پر پولینوم: څه وخت چې یو پولینوم پر بل پولینوم وېشو، مقسوم (Dividend) او مقسوم علیه (Divisor) دواړه باید په منظم ډول ترتیب شي.

دریم مثال: د $(13x+2x^4+12+3x^3-4x^2)\div(3+x^2-2x)$ د وېش حاصل په لاس راوړئ.

$$\begin{array}{l|l} 2x^4+3x^3-4x^2+13x+12 & x^2-2x+3 \\ \underline{\pm 2x^4 \mp 4x^3 \pm 6x^2} & 2x^2+7x+4 \\ 7x^3-10x^2+13x & \\ \underline{\pm 7x^3 \mp 14x^2 \pm 21x} & \\ 4x^2-8x+12 & \\ \underline{\pm 4x^2 \mp 8x \pm 12} & \\ 0 & \end{array}$$

فعالیت

د $(a^5+b^5)\div(a+b)$ د وېش حاصل په لاس راوړئ.

څلورم مثال: د وېش حاصل يې پیدا کړئ $(x^3-19x-30)\div(x+3)$.

حل:

$$\begin{array}{l|l} x^3 \qquad -19x-30 & x+3 \\ \underline{\underline{\ }x^3 \pm 3x^2} & x^2-3x-10 \\ -3x^2-19x & \\ \underline{\mp 3x^2 \mp 9x} & \\ -10x-30 & \\ \underline{\mp 10x \mp 30} & \\ 0 & \end{array}$$

پنځم مثال: د $4x^3-10x^2+12x+6$ له پولینوم سره کوم عدد جمع کړو چې په $(2x+1)$ پوره ووېشل شي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل

$$\begin{array}{l|l} 4x^3-10x^2+12x+6 & 2x+1 \\ \underline{-4x^3 \pm 2x^2} & 2x^2-6x+9 \\ \quad -12x^2+12x & \\ \quad \underline{\mp 12x^2 \mp 6x} & \\ \qquad 18x+6 & \\ \qquad \underline{-18x \pm 9} & \\ \qquad -3 & \end{array}$$

په نتيجه کې که له پورتني پولينوم سره 3 جمع کړو، نو په $(2x+1)$ پوره د وېشلو وړ دی.
باید پام مو وي، د وېش عمليې ته به تر هغو پورې دوام ورکوو چې پاتې(باقي مانده) صفر او یا د باقي مانده درجه د مقسوم علیه له درجې څخه د یو په ا ندازه کمه شي.

فعالیت

د دوو پولینومونو د ضرب حاصل $6y^3-11y^2+6y-1$ دی. که یو پولینوم $3y^2-4y+1$ وي، بل پولینوم پیدا کړئ.

شپږم مثال: د x په کوم قیمت $12x^4+3x^3-13x^2+x+5$ پولینوم پر $3x^2-1$ باندې پوره وېشل کېږي؟

حل

$$\begin{array}{l|l} 12x^4+3x^3-13x^2+x+5 & 3x^2-1 \\ \underline{-12x^4 \qquad \mp 4x^2} & 4x^2+x-3 \\ \quad 3x^3-9x^2+x & \\ \quad \underline{-3x^3 \qquad \mp x} & \\ \qquad -9x^2+2x+5 & \\ \qquad \underline{\mp 9x^2 \qquad \pm 3} & \\ \qquad\qquad 2x+2 & \end{array}$$

$$2x+2=0$$
$$2x=-2$$
$$x=-1$$

نو د $x=-1$ لپاره پورتنی پولینوم پر $3x^2-1$ پوره وېشل کېږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پولینومونو په وېش کې کېدای شي چې مونوم پر مونوم، پولینوم پر مونوم او یا پولینوم پر پولینوم ووېشو. لومړی باید مقسوم او مقسوم علیه په نزولي ډول ترتیب شي او د وېش عملیې ته تر هغه پورې دوام ورکوو، تر څو د پاتې (باقي) درجه د مقسوم علیه له درجې څخه د یو په اندازه کمه شي.

پوښتنې

1. د P په کوم قیمت $3x^3-7x^2-9x+p$ پولینوم پر $x-13$ پوره وېشل کېږي؟

2. د وېش حاصل یې پیدا کړئ.

$(a^3+b^3+c^3-3abc)\div(a+b+c)$

$(x^2+x-6)\div(x-2)$

$(x^5-y^5)\div(x-y)$

$\dfrac{j^5k^2-3j^8k^4}{2j^4k}$

$\dfrac{12x^5+9x^4+15x^2}{3x^3}$

$\dfrac{27a^6b^{13}-18a^{12}b^8}{9a^3b^8}$

$(x^3-a^3)\div(x^2-ax+a^2)$

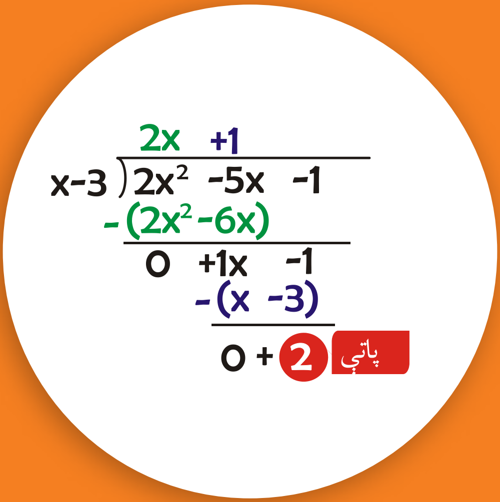
$(9x^4+2x^2+7x+2)\div(3x+2)$

$(8x^3+27y^3)\div(2x+3y)$

$(7x-12+2x^4-8x^3-x^2)\div(2x^2+5)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د باقي مانده قضيه
(Remainder Theorem)



آيا د وېش د عمليې له سرته رسولو پرته وېلای شئ چې که د x^3-6x^2-x-6 پولينوم په $x-4$ ووېشو پاتې(باقي) به څو وي؟

که د $P(x)$ پولينوم په $x-a$ ووېشل شي باقي (پاتې) د $P(a)$ سره مساوي ده. يا $R=P(a)$

لومړی مثال: که د $P(x)=2x^2+3x+4$ پولينوم پر ($x+3$) ووېشل شي، نو باقي (Remainder) له $P(-3)$ سره مساوي ده.

حل:

$$P(-3)=2(-3)^2+3(-3)+4=13$$

اوس يې ازمايو او د وېش عمليه سرته رسوو.

$$\begin{array}{r|l} 2x^2+3x+4 & x+3 \\ \hline \underline{-}\,2x^2\pm 6x & 2x-3 \\ \hline -3x+4 & \\ \mp 3x \mp 9 & \\ \hline 13 & \end{array}$$

قضيه: که د $P(x)$ پولينوم په $(x-a)$ ووېشو، نو باقي يا پاتې $R=P(a)$ ده.

ثبوت: که د $P(x)$ پولينوم په $(x-a)$ ، ووېشو او خارج قسمت $Q(x)$ او پاتې R وي، نو لرو چې:

$$P(x)=Q(x)(x-a)+R \qquad x-a=0$$
$$P(a)=Q(a)(a-a)+R \qquad x=a$$
$$P(a)=R$$

دويم مثال: که د $2x^3-x^2-7$ پولينوم پر $(x-2)$ ووېشل شي، پاتې به څو وي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل:

$$P(2)=2(2)^3-(2)^2-7=16-4-7=5$$
$$R=5$$

فعالیت

د پورتنی قضیې په مرسته یې پاتې(باقي مانده) پیدا کړئ.

- که $x^3-x^2-226x+1410$ پر $(x+17)$ وویشل شي.
- که x^3-2x^2+3x+5 پر $(x-4)$ وویشل شي.
- که $x^3+18x^2+164x+199$ پر $(x+8)$ وویشل شي.

دریم مثال: که د $5x^2+x-9$ پولینوم پر $(x+\frac{1}{2})$ وویشل شي، د وېش د عملیې له سرته رسولو څخه پرته ووایاست چې څو پاتې کېږي؟

حل

$$x+\frac{1}{2}=0$$
$$x=-\frac{1}{2}$$

$$P(-\frac{1}{2})=5(-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{2}-9$$
$$=5(\frac{1}{4})-\frac{1}{2}-9=\frac{5}{4}-\frac{1}{2}-9=\frac{5-2-36}{4}=-\frac{33}{4}$$

څلورم مثال: که د $P(y)=10y^3+7y^2-y-11$ پولینوم پر $(2y+1)$ وویشو، د وېش د عملیې له سرته رسولو پرته یې پاتې(باقي) پیدا کړئ.

حل

$$2y+1=0\Rightarrow 2y=-1$$
$$\Rightarrow y=-\frac{1}{2}$$

$$P(-\frac{1}{2})=10(-\frac{1}{2})^3+7(-\frac{1}{2})^2-(-\frac{1}{2})-11$$
$$P(-\frac{1}{2})=10(-\frac{1}{8})+7(\frac{1}{4})+\frac{1}{2}-11$$
$$=-\frac{5}{4}+\frac{7}{4}+\frac{1}{2}-11=\frac{-5+7+2-44}{4}=\frac{-40}{4}=-10$$
$$R=-10$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیت

د 4 مثال په پوښتنه کې د وېش عملیه سرته ورسوئ او باقي يې په لاس راوړئ.

پنځم مثال: که د $4x^4+12x^3-13x^2-33x+18$ پولینوم پر $(x+4)$ ووېشل شي، باقي يې پيدا کړئ.

حل:

$$P(-4)=4(-4)^4+12(-4)^3-13(-4)^2-33(-4)+18$$
$$=1024-768-208+132+18=1174-976=198$$

اوس د وېش عملیه سرته رسوو.

$$\begin{array}{l|l} 4x^4+12x^3-13x^2-33x+18 & x+4 \\ \hline -4x^4 \pm 16x^3 & 4x^3-4x^2+3x-45 \\ \quad -4x^3-13x^2 & \\ \quad \mp 4x^3 \mp 16x^2 & \\ \qquad 3x^2-33x & \\ \qquad \pm 3x^2 \pm 12x & \\ \qquad\quad -45x+18 & \\ \qquad\quad \mp 45x \mp 180 & \\ \qquad\qquad 198 & \end{array}$$

که د P(x) پولینوم پر P(x-a) ووېشل شي، د وېش د عملیې له سر ته رسوولو پرته يې د باقي مانده قضیې (Remainder Theorem) په مرسته باقي پیدا کولای شو چې باقي مانده (R) له (a) P سره مساوي ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتني

1.د باقي مانده قضيې (Remainder theorem) په مرسته يې باقي (پاتې) پيدا کړئ.

$(5x^3 - x^2 + 4x + 1) \div (x - 3)$ ، $(6p^3 + 2p^2 - p + 20) \div (p - \frac{1}{2})$

$(6x^2 + 15) \div (4x + 9)$ ، $(4y^2 - y - 6) \div (y - 1.6)$

2. د باقي مانده قضيې په مرسته وواياست چې د k په کوم قيمت د $5x^3 - k^2x^2 + 3kx - 6$ پولينوم پر $(x + 2)$ ووېشل شي، تر څو $44-$ باقي شي؟

3. د k په کوم قيمت که د $2k^2y^4 - ky^2 + 1$ پولينوم، پر $(y - \frac{1}{2})$ ووېشل شي، ترڅو 2 باقي شي؟

4. که چېرې $m^2x^4 - 10x^2 + 2$ پولينوم پر $(x - 1)$ ووېشو او باقي 17 وي، د m قيمت به څو وي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

د فکتور قضیه
(The Factor Theorem)

$(x^5+1)\div(x+1)$

$$P(-1)=[(-1)^5+1]$$
$$=-1+1=0$$

آیا $(x-1)$ د $P(x)=x^3-4x^2+x+2$ پولینوم یو فکتور دی؟

که د $P(x)$ پولینوم پر $(x-a)$ ووېشل شي او $P(a)=0$ شي، نو $x-a$ ددې پولینوم یو فکتور دی.

ثبوت: د باقي مانده قضیې په اساس $R=P(a)$ دی، نو که د $P(x)$ پولینوم پر $(x-a)$ ووېشل شي او د وېش حاصل(خارج قسمت) یې $Q(x)$ وي، نو لرو چې: $P(x)=Q(x)(x-a)+R$ که $R=0$ وي، نو: $P(x)=Q(x)(x-a)$

لیدل کېږي چې $(x-a)$ د $P(x)$ پولینوم یو فکتور دی. او یا که $(x-a)$ د $P(x)$ د پولینوم یو فکتور وي، نو $P(a)=0$ دی.

لومړی مثال: وښیاست چې $(x-2)$ د $P(x)=x^3+3x^2+4x-28$ د پولینوم یو فکتور دی.

حل

$x-2=0$ $P(x)=x^3+3x^2+4x-28$

$x=2$ $P(2)=2^3+3(2)^2+4\cdot2-28=8+3(4)+8-28=0$

څرنګه چې R یا $P(2)=0$ دی، نو $(x-2)$ د $P(x)$ د پولینوم یو فکتور دی.

فعالیت

د وېش د عملیې له سرته رسولو پرته، د فکتور د قضیې په مرسته وښیاست چې $x-1$ د $P(x)=2x^3-13x^2+26x-15$ پولینوم یو فکتور دی.

دویم مثال: د فکتور د قضیې په مرسته وښیاست چې $(x-2)$ د $P(x)=x^5-32$ پولینوم یو فکتور دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل

$$P(x) = x^5 - 32$$

$$P(2) = 2^5 - 32 = 32 - 32 = 0$$

څرنګه چې $R = P(2) = 0$ ده، نو $(x-2)$ د $x^5 - 32$ پولینوم یو فکتور دی.

دریم مثال: وښیاست چې $(x+1)$ د $P(x) = 2x^3 + 5x^2 + 7x + 4$ پولینوم یو فکتور دی.

حل: $P(-1) = 2(-1)^3 + 5(-1)^2 + 7(-1) + 4 = -2 + 5 - 7 + 4 = 0$

څرنګه چې R یا $P(-1)$ له صفر سره مساوي دی، نو $(x-1)$ د دې پولینوم یو فکتور دی.

څلورم مثال: د k په کوم قیمت، $(x-1)$ د $P(x) = 2x^4 - 3x^3 - x - 2k$ پولینوم یو فکتور دی؟

حل

$$P(1) = 2(1)^4 - 3(1)^3 - 1 - 2k = 2 - 3 - 1 - 2k = -2 - 2k$$

$$-2 - 2k = 0$$

$$-2k = 2$$

$$k = -1$$

د $k = -1$ لپاره باقي مانده صفر کېږي، نو $x - 1$ د دې پولینوم یو فکتور دی.

فعالیت

د فکتور د قضیې په مرسته وښیاست چې آیا د کینې خوا دوه حدې (باینومونه) د اړوندو پولینومونو فکتورونه دي او که نه؟

$(y+5) : (y^3 + 125)$

$(x-6) : (x^6 - 36x^3 + 1296)$

$(x - \frac{1}{2}) : (x^3 - \frac{1}{8})$

$(x + \frac{1}{2}) : (20x^3 + 7x + 6)$

$(x+2) : (x^5 + 32)$

$(x - 0.1) : (10x^3 - 11x^2 + 1)$

د فکتور د قضیې معکوس (Converse of Factor Theorem):

که $(x-a)$ د $P(x)$ پولینوم یو فکتور وي، نو $P(a) = 0$ دی او د a عدد $P(x) = 0$ پولینومي معادلې یو جذر (Root) دی.

لومړی مثال: که $(x-2)$ د $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ پولینوم یو فکتور وي، نو

(c) ketabton.com: The Digital Library

وښياست چې $P(2)=0$ دی او 2 د $x^3-6x^2+11x-6=0$ معادلې يو جذر دی.

حل: که 2 د $x^3-6x^2+11x-6=0$ معادلې يو جذر وي، نو $(x-2)$ددې پولينوم يو فکتور دی $P(2)=0$ دی.

$$P(2)=2^3-6(2)^2+11(2)-6=8-24+22-6=0$$

دويم مثال: که 2- د $x^3+4x^2+kx+8=0$ معادلې يو جذر وي، د k قيمت پيدا کړئ.

حل:

$$(-2)^3+4(-2)^2+k(-2)+8=0$$
$$-8+16+k(-2)+8=0$$
$$-2k=-8+8-16$$
$$k=8$$

دريم مثال: وښياست چې 3 د $x^3-6x^2+5x+12=0$ پولينومي معادلې يو جذر دی.

حل:

$$(3)^3-6(3)^2+5(3)+12=0$$
$$27-54+15+12=0$$
$$54-54=0$$
$$0=0$$

نو ليدل کېږي چې 3 ددې پولينومي معادلې يو جذر دی.

فعاليت

وښياست چې 2 د $x^3-4x^2+5x-2=0$ معادلې يوجذر دی.

څلورم مثال: د k دکوم قيمت لپاره 3 د $2x^4-6x^3-7x^2+kx-15=0$ معادلې يو جذر دی؟

حل:

$$2(3)^4-6(3)^3-7(3)^2+3k-15=2(81)-6(27)-7(9)+3k-15=0$$
$$162-162-63+3k-15=0$$
$$3k=15+63+162-162=78$$
$$3k=78$$
$$k=26$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که (x–a) د $P(x)$ پولینوم یو فکټور وي، نو $P(a)=0$ دی او که د $P(x)$ په پولینوم کې $P(a)=0$ شي نو $(x-a)$ د $P(x)$ پولینوم یو فکټور دی.

پوښتنې

1 – د k د کوم قیمت لپاره $(x-2)$ د $P(x)=2x^4-x^3+kx^2+kx-12$ پولینوم یو فکټور دی؟

2 – آیا $(x+3)$ د $P(x)=x^5-x^3+27x^2-27$ پولینوم یو فکټور دی؟

3 – د فکټور د قضیې په مرسته وښیاست چې $(x+7)$ د $P(x)=x^3+8x^2+8x+7$ د پولینوم یو فکټور دی، که نه؟

4 – د وېش د عملیې د سرته رسولو پرته وښیاست چې آیا $(y-7)$ د $P(y)=y^4+2y^3-6y^2-14y-7$ پولینوم یو فکټور دی که نه؟

5 - وښیاست چې آیا $(m+\frac{1}{2})$ د $P(x)=2m^2+4m-2$ پولینوم یو فکټور دی که نه؟

6- د $x^3+x^2-10x+8$ پولینوم د فکټور د قضیې په مرسته تجزیه کړئ.

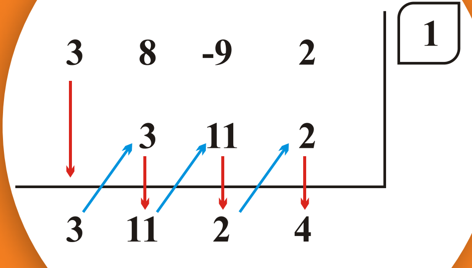
7– که $(x-1)$ او $(x+1)$ د $P(x)=x^3+ax^2+bx+2$ د پولینوم فکټورونه وي، د a او b قیمتونه پیدا کړئ.

8 – د k، د کوم قیمت لپاره $(x-5)$ د $Q(x)=x^3-5x^2-16x+k$ پولینوم یو فکټور دی؟

9 – د k د کوم قیمت لپاره (-1)، د $x^3-9x^2+14x+k=0$ پولینومي معادلې یو جذر دی؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

ترکيبي وېش
(Synthetic Division)



1

آيا د وېش عمليې له سرته رسولو پرته، د وېش حاصل او باقي پيداکولای شئ.
که د $P(x) = 2x + 3x^3 - x^2 - 5$ پولينوم پر $(x-2)$ ووېشل شي؟

د $P(x)$ پولينوم پر $(x-a)$، د وېشلو لپاره ترکيبي وېش (Horner's Method) يوه لنډه طريقه ده چې په عمومي ډول د دې هدفونو لپاره ترې کار اخيستل کېږي.

1 – د x د مختلفو قيمتونو لپاره د $P(x)$ پولينوم د قيمت پيداکول.

2 – د $P(x) = 0$ معادلې د ناطق جذر د پيداکولو لپاره.

3 – د الجبري افادو د تجزيې لپاره.

لومړی مثال: که د $P(x) = 4x^4 + 12x^3 - 13x^2 - 33x + 18$ پولينوم پر $(x+4)$ باندې ووېشو د وېش د عمليې له سرته رسولو پرته د ترکيبي وېش (تقسيم) په مرسته يې د وېش حاصل (Quotient) او باقي مانده (Remainder) پيداکړئ.

حل:

$x + 4 = 0$

$x = -4$

لومړی کرښه	4	12	−13	−33	18	−4
دويمه کرښه		−16	16	−12	180	
درېيمه کرښه	4	−4	3	−45	198	

چې د وېش حاصل (خارج قسمت) يې $4x^3 - 4x^2 + 3x - 45$ او پاتي يا باقي مانده يې 198 ده، په دې معنا چې: $P(x) = (x+4)(4x^3 - 4x^2 + 3x - 45) + 198$
پورتنۍ عمليه په لاندې پړاوونو کې ښودلای شو.

د لومړۍ کرښې عددونه د مقسوم ضريبونه دي چې نظر د x توان ته په نزولي ډول ترتيب شوي دي.

1. د 4 عدد له لومړۍ کرښې څخه درېيمې کرښې ته راښکته شوی دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

2. 4 په (4−) کې ضرب شوی دی چې (16−) کېږي او (16−) د 12 د عدد لاندې په دویمه کربنه کې لیکل شوی دی.
3. د 12 او (16−) د جمعې حاصل چې (4−) کېږي، په دریمه کربنه کې لیکو.
4. د(4−) عدد په (4−) کې ضربوو چې 16 کېږي او د (13 −) لاندې یې په دویمه کربنه کې لیکو.
5. د16 او (13−) د جمعې حاصل چې 3 کېږي، په دریمه کربنه کې لیکل شوی دی.
6. د 3 او (4−)د ضرب حاصل چې (12−) کېږي، د (33-) لاندې په دویمه کربنه کې لیکل شوی دی.
7. د(33−) او (12−) د جمعې حاصل چې (45 −) کېږي، په دریمه کربنه کې لیکو.
8. د(45−) او (4−) د ضرب حاصل چې 180 کېږي، تر 18 لاندې په دویمه کربنه لیکل شوی دی.
9. د180 او 18 د جمعې حاصل 198 په دریمه کربنه کې دی، 198باقي مانده دی او $4x^3-4x^2+3x-45$ د وېش حاصل دی.

$Q(x)=4x^3-4x^2+3x-45$ او $R=198$

$P(x)=(4x^3-4x^2+3x-45)(x+4)+198$

باقي + (د وېش حاصل)x(مقسوم علیه)= مقسوم

فعالیت

د وېش عملیې د سرته رسولو په مرسته د پورتنی پوښتنې د وېش حاصل او باقي مانده پیدا کړئ.

دویم مثال: د ترکیبي وېش او د وېش د عملیې د سرته رسولو په مرسته یې د وېش حاصل او باقي مانده پیدا کړئ.

$(4x^4-5x^2+2x-3)\div(x-2)$

په یاد ولرئ کوم حدونه چې موجود نه وي، د هغوی د ضریبونو پر ځای صفر لیکو یا په بل عبارت پولینوم د مکمل پولینوم په شکل په نزولي ډول ترتیبوو.

4	0	-5	2	-3	2
	8	16	22	48	
4	8	11	24	45	

(c) ketabton.com: The Digital Library

اوس د وېش عمليه سرته رسوو:

$$\begin{array}{l|l} 4x^4 \qquad -5x^2+2x-3 & x-2 \\ \hline -4x^4 \mp 8x^3 & 4x^3+8x^2+11x+24 \\ \quad 8x^3-5x^2 & \\ \quad -8x^3 \mp 16x^2 & \\ \qquad 11x^2+2x & \\ \qquad -11x^2 \mp 22x & \\ \qquad\quad 24x-3 & \\ \qquad\quad -24x \mp 48 & \\ \qquad\qquad 45 & \end{array}$$

د وېش حاصل $4x^3+8x^2+11x+24$

او باقي (45) ده.

دريم مثال: $(x^5-x^3+27x^2-28)\div(x+3)$ د ترکيبي وېش په مرسته يې د وېش حاصل او پاتې(باقي) پيدا کړئ.

حل: $x^5-x^3+27x^2-28 = x^5-0\cdot x^4-x^3+27x^2+0\cdot x-28$

$$\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & -1 & 27 & 0 & -28 & -3 \\ & -3 & 9 & -24 & -9 & 27 & \\ \hline 1 & -3 & 8 & 3 & -9 & -1 & \end{array}$$

$x+3=0$

$x=-3$

د وېش حاصل(خارج قسمت) يې $x^4-3x^3+8x^2+3x-9$ او پاتې(باقي مانده) عبارت له (-1) څخه دی.

څلورم مثال: د $(2t^3-7t^2-2t+14)\div(2t-3)$ د وېش حاصل(خارج قسمت) او پاتې (باقي) پيدا کړئ.

حل:

$$\frac{2t-3}{2}=t-\frac{3}{2}$$

$$t-\frac{3}{2}=0$$

$$t=\frac{3}{2}$$

$$\begin{array}{cccc|c} 2 & -7 & -2 & 14 & \frac{3}{2} \\ & 3 & -6 & -12 & \\ \hline 2 & -4 & -8 & 2 & \end{array}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو $2t^2-4t-8$ د وېش حاصل نه دی، بلکې د وېش حاصل (t^2-2t-4) دی. (مقسوم او مقسوم علیه دواړه په 2 وېشل شوي دي).

پنځم مثال: د ترکیبي وېش (Synthetic division) په مرسته د وېش حاصل (quotient) او پاتې يې (remainder) پیدا کړئ.

$$(4V^3-2V^2+5)\div(V-5)$$

4	−2	0	5	
	20	90	450	5
4	18	90	455	

نو $Q(x)=4v^2+18v+90$ او $R=455$ ده.

فعالیت

د ترکیبي وېش په مرسته يې د وېش حاصل او پاتې پیدا کړئ.

$$(x^5+6x^3-5x^4+5x-15)\div(x-3)$$

که د $P(x)$ پولینوم پر $(x-a)$ باندې ووېشو، نو مقسوم د مکمل نزولي پولینوم په شکل ترتیبوو او د ترکیبي وېش په مرسته يې د وېش د عملیې له سرته رسولو پرته د وېش حاصل او باقي مانده لاس ته راوړلای شو چې د وېش د حاصل درجه د یوه په اندازه د مقسوم علیه له درجې څخه کمه ده.

پوښتنې

1- د ترکیبي وېش په مرسته يې د وېش حاصل او باقي مانده پیدا کړئ.

$(2x^3-7x^2-2x+12)\div(2x-3)$ $\qquad$ $(10x^2+2x+1)\div(x+1)$

$(6x^2+15)\div(4x+9)$ $\qquad$ $(5x^3-3x+7)\div(x+4)$

$(6p^3+2p^2-p+20)\div(p-\frac{1}{2})$

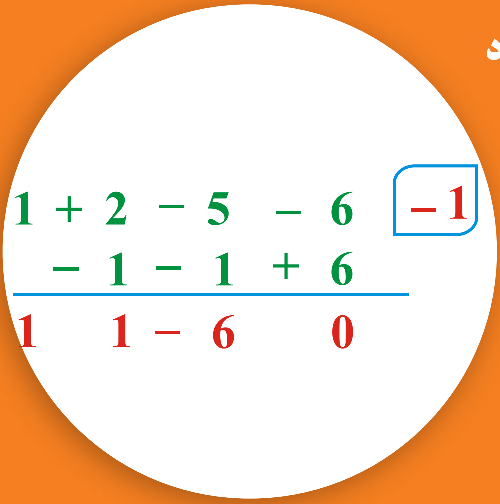
2- د ترکیبي وېش په مرسته يې پاتې (باقي مانده) او د وېش حاصل پیدا کړئ.

$(4x^3-2x^2+5)\div(x-5)$, $(y^5-17y^3-9)\div(y-3)$

$(x^3+8x^2+8x+7)\div(x+7)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ترکيبي وېش په مرسته د پولينوم د فکتور او د پولينوم د قيمت پيدا کول



آيا د ترکيبي وېش په مرسته وېلای شئ چې $(x+3)$ د $x^3+9x^2+27x+27$ پولينوم يو فکتور دی؟

لومړی مثال: د ترکيبي وېش په مرسته وښياست چې $(x-1)$ د $P(x)=2x^4-x^3-x^2+x-1$ پولينوم يو فکتور دی.

2	−1	−1	1	−1	1
	2	1	0	1	
2	1	0	1	0	

خرنگه چې $R=0$ دی، نو $(x-1)$ ددې پولينوم يو فکتور دی. يا دا چې:

$$2x^4-x^3-x^2+x-1=(x-1)(2x^3+x^2+1)$$

يا د باقي مانده قضيې په مرسته:

$$P(1)=2\cdot1^4-1^3-1^2+1-1=2-1-1+1-1=0$$

دويم مثال: آيا $(x+10)$ د x^3+3x^2-150 پولينوم يو فکتور دی او که نه؟

1	3	0	−150	−10
	−10	70	−700	
1	−7	70	−850	

خرنگه چې $R=-850$ دی $(R\neq0)$، نو $(x+10)$ د x^3+3x^2-150 پولينوم فکتور نه دی.

دريم مثال: که $P(x)=3x^3-12x^2+25+5x$ وی، د $x=2$ لپاره د ترکيبي وېش په مرسته ددې پولينوم قيمت پيداکړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل: لومړی پولینوم په نزولي ډول ترتیبوو.

$$P(x) = 3x^3 - 12x^2 + 5x + 25$$

$$\begin{array}{cccc|c} 3 & -12 & 5 & 25 & 2 \\ & 6 & -12 & -14 & \\ \hline 3 & -6 & -7 & 11 & \end{array}$$

نو: $P(2) = 11$ دی.

فعالیت

د ترکیبي وېش په مرسته د $P(x) = x^3 - x^2 + 10x + 5$ پولینوم قیمت د $x = 1$ او $x = 3$ لپاره پیدا کړئ.

څلورم مثال: د ترکیبي وېش په مرسته وښیاست چې $(r-4)$ د $r^4 - 256$ یو فکتور دی.

$$r^4 - 256 = r^4 + 0 \cdot r^3 + 0 \cdot r^2 + 0 \cdot r - 256$$

حل:

$$r - 4 = 0$$
$$r = 4$$

$$\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -256 & \\ & 4 & 16 & 64 & 256 & 4 \\ \hline 1 & 4 & 16 & 64 & 0 & \end{array}$$

$$Q(x) = r^3 + 4r^2 + 16r + 64$$
$$R = 0$$

نو $(r-4)$ د $r^4 - 256$ یو فکتور دی.

د ترکیبي وېش په مرسته د یوې معادلې د جذرونو پیدا کول:

پنځم مثال: که د (1) عدد د $x^3 + 4x^2 + x - 6 = 0$ معادلې یو جذر وي، د ترکیبي وېش په مرسته یې نور جذرونه پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل:

1	4	1	−6	
	1	5	6	1
1	5	6	0	

نو د وېش حاصل یې x^2+5x+6 دی.

$$x^3+4x^2+x-6=(x-1)(x^2+5x+6)$$
$$x^2+5x+6=0$$
$$(x+3)(x+2)=0$$
$$x=-3 \qquad x=-2$$

د دې معادلې دوه نور جذرونه -2 او -3 دي.

د ترکیبي وېش په مرسته د پولینوم فکتور، د پولینوم قیمت او د پولینومي معادلې جذر پیداکولای شو، که چېرې د $P(x)$ پولینوم په $(x-a)$ ووېشو او $(R=0)$ وي، نو $(x-a)$ د دې پولینوم یو فکتور دی او د (a) عدد د $P(x)=0$ پولینومي معادلې یو جذر دی.

پوښتنې

1- د ترکیبي وېش په مرسته وښیاست چې $(x+\frac{1}{2})$ د $20x^3+7x+6$ پولینوم یوفکتور دی او $(x+1)$ د x^4-2x^2+x+2 پولینوم یو فکتور دی.

2- آیا $(x-0{,}1)$ د $10x^3-11x^2+1$ د پولینوم یو فکتور دی؟ ولې؟

3- د ترکیبي وېش په مرسته د $6-y-6y^2+y^3$ پولینوم قیمت د $y=6$ لپاره پیداکړئ.

4- که (1) د $x^3+x^2-10x+8=0$ معادلې یو جذر وي، د ترکیبي وېش په مرسته یې نور جذرونه پیداکړئ.

5- که د (-2) عدد د $x^3+4x^2+kx+8=0$ معادلې یو جذر وي، د ترکیبي وېش په مرسته د k قیمت پیداکړئ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ښېرکي لنډيز

- الجبري افادې په درې ډوله دي(ناطقه الجبري افاده، غير ناطقه الجبري افاده، پولينومي الجبري افاده).
- هغه حدونه چې متحولونه او درجې يې سره مساوي وي، مشابه حدونه (Like terms) نومېږي، لکه: $3x^2$ او $5x^2$ يا $4x^2y^2$ او $-6x^2y^2$ مشابه حدونه دي.
- پولينوم هغه يو يا څو حده الجبري افاده ده چې د حروفو توانونه يې د مکملو عددونو په سټ کې شامل وي.
- د يوه پولينوم درجه چې له يوه توري (متحول) څخه جوړ شوی وي، د هغه توري له لوړ توان څخه عبارت ده او که له يوه څخه د زياتو تورو څخه جوړ شوی وي، د زيات توان لرونکي مونوم درجه ددې پولينوم درجه ده.
- د يوه حد عددي فکټور (Numerical Factor) ته ضريب وايي، لکه: په $3x^2$ کې 3 د x^2 ضريب دی.
- ټول ثابت عددونه پولينومونه دي چې ثابت پولينومونه نومېږي او درجه يې صفر ده، د صفري پولينوم درجه تعريف شوې نه ده.
- هغه پولينومونه چې يو متحول ولري او د مشابه حدونو ضريبونه يې سره مساوي وي، د معادلو پولينومونو په نوم يادېږي.
- د متحول په راکړ شوي قيمت کې د يوه پولينوم قيمت هغه عدد دی چې په پولينوم کې د متحول د راکړل شوي قيمت له وضع کېدو څخه په لاس راځي.
- هغه پولينومونه چې د متحول له لوړ توان څخه تر ثابت عدده پورې، ټول حدونه په کې موجود وي، مکمل پولينوم او که يو يا څو حدونه، ونه لري، د ناقص پولينوم په نوم يادېږي.
- که د يوه پولينوم متحول له ټيټ توان څخه تر لوړ توان پورې ترتيب شي، منظم صعودي او که له لوړ توان څخه تر ټيټ توان پورې ترتيب شي، منظم نزولي پولينوم نومېږي.
- د پولينوم د جمعې په عمليه کې مشابه حدونه (Like terms) يو له بل سره جمع کېږي، د تفريق

(c) ketabton.com: The Digital Library

په عملیه کې د مفروق علامې ته تغیر ورکوو او نوره عملیه د جمعې د عملیې په شان سرته رسول کېږي (د مفروق جمعي معکوس له مفروق منه سره جمع کېږي.

• د پولینومونو د جمعې او ضرب په عملیو کې د تبدیلي او اتحادي خاصیتونه او هم د ضرب توزیعي خاصیت پر جمع باندې صدق کوي.

• د ضرب په عملیه کې کولای شو، مونوم په مونوم کې، مونوم په پولینوم کې او یا پولینوم په پولینوم کې ضرب کړو.

• په همدې ډول کولای شو، د وېش په عملیه کې مونوم پر مونوم، پولینوم پر مونوم یا پولینوم پر پولینوم باندې ووېشو.

• که د $P(x)$ پولینوم پر $(x-a)$ ووېشو د باقي مانده قضیې په اساس پاتې(باقي) له $\mathrm{P(a)}$ سره مساوي ده.

• که د $P(x)$ پولینوم پر $(x-a)$ ووېشو او باقي صفر شي، نو $(x-a)$ د $P(x)$ د پولینوم یو فکتور دی.

• د فکتور د معکوسې قضیې په اساس که $\mathrm{(x-c)}$ د $\mathrm{M(x)}$ پولینوم یو فکتور وي، نو $\mathrm{P(c)=0}$ او د c عدد د $M(x)=0$ پولینومي معادلې یو جذر دی.

• د ترکیبي وېش په مرسته کولای شو چې که $P(x)$ پولینوم پر $(x-a)$ ووېشو، د وېش حاصل او باقي لاس ته راوړو او هم د ترکیبي وېش په مرسته د متحول په راکړ شوي قیمت کې د $P(x)$ د پولینوم قیمت پیدا کولای شو.

• د ترکیبي وېش په مرسته $P(x)=0$ د پولینومي معادلې جذرونه پیدا کولای شو.

• د باقي مانده قضیې په مرسته الجبري افاده هم تجزیه کولای شو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د څېرکي پوښتنې:

1 – د k قیمت په داسې حال کې پیدا کړئ چې:

a: که $(x+5)$ د $P(x)=x^3+kx+125$ پولینوم یو فکتور وي.

b: که $(x-1)$ د $Q(x)=2x^4-3x^3-x-2k$ پولینوم یو فکتور وي.

c: که $(x-2)$ د $P(x)=x^3+3x^2-x+k$ پولینوم یو فکتور وي.

2 – د ترکیبي وېش په مرسته یې د وېش حاصل (Quotient) او پاتې (Remainder) پیدا کړئ.

$(5x^4-6x^2+3x-4)\div(x+4)$, $(x^5+4x^4+x^2-3x-28)\div(x+4)$

$(10x^2-31x+24)\div(x-\frac{3}{2})$, $(30x^3-20x^2-100x+1000)\div(x-10)$

3 – د فکتور د قضیې په مرسته وښیاست چې $(x-1)$ د $P(x)=x^3-4x^2+x+2$ د پولینوم یو فکتور دی.

4 – د فکتور د قضیې په مرسته وښیاست چې $(x-\frac{1}{2})$ د $P(x)=x^3-\frac{1}{8}$ پولینوم یو فکتور دی.

5 – د ترکیبي وېش په مرسته د $x=-\frac{1}{2}$ لپاره د $P(x)=5x^2+x-9$ پولینوم قیمت پیدا کړئ.

6 – د ترکیبي وېش په مرسته د $x=3$ لپاره د $k(x)=2x^3-3x^2+4x+1$ پولینوم قیمت پیدا کړئ.

7 – د ترکیبي وېش په مرسته وښیاست چې د 3 عدد د $x^3-3x^2+x-3=0$ پولینومي معادلې یو حل (جذر) دی.

8 – د فکتور د قضیې په مرسته وښیاست چې د 1– او 2 عددونه د $x^4-5x^2+4=0$ معادلې حلونه (جذرونه) دي.

9 – د ترکیبي وېش په مرسته د k قیمت پیدا کړئ چې که $(x+3)$ د $P(x)=3x^3+kx^2-22x+24$ پولینوم یو فکتور وي.

10 – د ترکیبي وېش په مرسته یې د وېش حاصل او باقي پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$(4x^4-5x^2+2x-3)\div(x-2)$ $(x^3-x^2-14x+11)\div(x-4)$

$(7x^4+41x^2-6)\div(x+6)$ $(5x^3-3x+7)\div(x+4)$

11- د b او c قیمتونه په داسې حال کې پیدا کړئ چې که د $P(x)=x^4+6x^3-20x^2+bx+c$ پولینوم پر x^2-3x+2 وویشو، باقي صفر شي.

12 - د m قیمت په داسې حال کې پیدا کړئ چې که د $k(x)=2x^3+5x^2-mx+4$ پولینوم پر (x^2+2x-1) وویشو او باقي صفر شي.

13 - که $k=3a(x-1)^2-a(x-1)-4$ او $L=16+b(x-1)-3b(x-1)^2$ وي $Kb+La$ پیدا کړئ.

14 - د x په کوم قیمت د $P(x)=12x^4+3x^3-13x^2+x+5$ پولینوم پر $(3x^2-1)$ پوره وېشل کېږي؟

15 - د P د کوم قیمت لپاره د $K(x)=3x^3-7x^2-9x+P$ پولینوم پر $(x-13)$ پوره د وېشلو وړ دی؟

16 - که د $P(x)=2x^3-x^2+3x-1$ پولینوم پر $(2x+1)$ وویشل شي، د وېش د عملیې د سرته رسولو پرته ویلای شئ چې پاتې (باقي مانده) به څومره وي؟

a) -3 b) $-\frac{3}{2}$ c) 3 d) $\frac{7}{2}$

17 - د m قیمت به څو وي، که د $P(x)=5x^2+6x-7$ پولینوم پر $(x+m)$ وویشل شي تر څو باقي مانده (1) شي؟

a) 2 b) $\frac{-4}{5}$ c) -4 d) a او b سم دي

18- که د $P(x)=x^3+3x^2-5x-8$ پولینوم، پر $(x+3)$ وویشل شي د وېش د عملیې له سرته رسولو پرته وواياست چې باقي څومره ده؟

a) صفر b) 13 c) -23 d) 7

19- که چېرې $x=4$, $y=-3$ او $z=2$ وي، د لاندې الجبري افادو قیمت پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$a: x^2yz + zxy^2 + 3xyz^2$ $\qquad$ $b: \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}y^2 + \frac{1}{4}Z^2$

20 – د x د راکړل شوو قیمتونو لپاره د ترکیبي وېش په مرسته د لاندې پولینومو قیمتونه پیدا کړئ.

$P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 2x + 5 \quad , \quad x = 2$

$P(x) = 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6 \quad , \quad x = -1$

$P(x) = 2x^4 - 5x^3 + 4x - 1 \quad , \quad x = 1$

$P(x) = 4x^4 + 6x^3 + x^2 + x - 3 \quad , \quad x = -2$

21 – د لاندې معادلو یو، یو جذر راکړل شوی دی، د ترکیبي وېش په مرسته یې نور جذرونه پیدا کړئ.

$x^3 - 3x^2 + x - 3 = 0$ یو جذر یې (3) دی.

$x^3 - 5x^2 + 7x + 13 = 0$ یو جذر یې (-1) دی.

$x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ یو جذر یې (-1) دی.

$x^4 - x^3 - 9x^2 - 11x - 4 = 0$ یو جذر یې (-1) دی.

22 – که $P(x) = 0$ وي، د دې پولینوم درجه څو ده؟

a) 1 $\qquad$ b) -1 $\qquad$ c) صفر $\qquad$ d) تعریف شوې نه دی

23 – د هغه مستطیل له مساحت څخه چې بعدونه یې $(x+5)$ او $(x+2)$ وي، د هغه مستطیل مساحت تفریق کړئ چې بعدونه یې $(x+3)$ او $(x+1)$ وي.

24 – که $A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ او $a = 13$, $b = 5$, $c = 12$ او $p = \frac{a+b+c}{2}$ وي، د A قیمت پیدا کړئ.

25 – که $(x-1)^3$ او $x^3 + ax^2 + bx + c$ معادل پولینومونه وي، د b قیمت مساوي دی په:

a) 1 $\qquad$ b) 3 $\qquad$ c) −3 $\qquad$ d) −1

26 – د $(a - \frac{2}{a-1})$ $(a \div \frac{a+1}{a-1})$ افادې حاصل مساوي دی په:

(c) ketabton.com: The Digital Library

a) $a(a+1)$ b) $a(a-2)$ c) $\frac{a-2}{a}$ d) $\frac{a-1}{a}$

27 - د $(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})(x+y)$ د ضرب حاصل مساوي دی په:

a) x^2-y^2 b) x^2+y^2 c) $2x^2-y$ d) $x-y$

28 -لاندې پولینومونه په نزولي ډول (Descending Order) ترتیب او هم وواياست چې درجې يې څو دي؟

a) $-5x^2+3x^5+9$ b) $-x^2+xy^2z^3-x^5$ c) 3

29 - د $Q(x)=x^2+3x-5$ په پولینوم کې $Q(-1)$ مساوي دی، په:

a) 7 b) -7 c) 1 d) -1

30 - که $P(x)=x^2-2x+3$ او $Q(x)=2x^2+3x-1$ وي، د لاندې افادو قیمتونه پیدا کړئ.

$P(x)-Q(x)$ $P(0)+Q(0)$ $P(1)-Q(-1)$

$P(x)-P(x)$ $[P(x)+Q(x)]+p(x)$

31 - لاندې پولینومونه نظر y ته په نزولي ډول ترتیب کړئ.

$4x^2y-3xy^2+x^3+y^3$ $4xy^3-3x^3y+2x^2y^2+x^4+y^4$

32 - په لاندې الجبري افادو کې پولینومونه، ناطقې الجبري افادې او غیر ناطقې الجبري افادې په نښه کړئ.

13 , $\sqrt{2}x$, 0

$\frac{3x^2}{2}$, $\sqrt{x}-\frac{1}{x}$, $y^2-\frac{1}{y^2}$

33 - د $(1+2x+3x^2)+(3x-5-2x^2)+(-x^2-5x+4)$ افادې حاصل مساوي دی په:

a) 1 b) صفر c) -1 d) 2

34 - د دوو الجبري افادو د ضرب حاصل $(a^3+b^3+c^3-3abc)$ دی. که یوه افاده يې $(a+b+c)$ وي، بله افاده پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

35 - د وېش حاصل يې پيدا کړئ.

$(12x^4+3x^3-13x^2+x+5)\div(3x^2-1)$ $\qquad$ $(a^3+b^3)\div(a+b)$

$(4x^3-10x^2+12x+6)\div(2x+1)$ $\qquad$ $(a^5-b^5)\div(a-b)$

$\dfrac{x^{a-2}}{x}$ $\qquad$ $\dfrac{-m^a}{m^b}$

36 - ضرب يې کړئ.

$(a^{2x}-2)(a^{2x}-2)$ $\qquad$ $(\frac{1}{4}x+\frac{1}{2})(\frac{1}{2}x+\frac{1}{4})$

$(e^x+1)(e^x-1)$ $\qquad$ $(m^2-2n^2)(2m^2-n^2)$

$(0.1x^2)(0.1x^2)(0.1x^2)$ $\qquad$ $(2\frac{1}{2}mn)(2\frac{1}{2}mn)(2\frac{1}{2}mn)$

37 - لومړی لاندې افادې ساده او بيا يې جمع کړئ.

$(a-1)+1-(a-1)-3$ $\qquad$ $-(10mn-m)-(m^2+m)+m^2$

$(y^2-1)+(y^2-1)$ $\qquad$ $[-4(a-b)-5]+[(2a+b)-(a-b)]$

$10[-\{-(x^2-1)+5\}-x(x-2)]$ $\qquad$ $10(x+1)-(x+1)-3(x+2)$

$mn-4+mn-5$

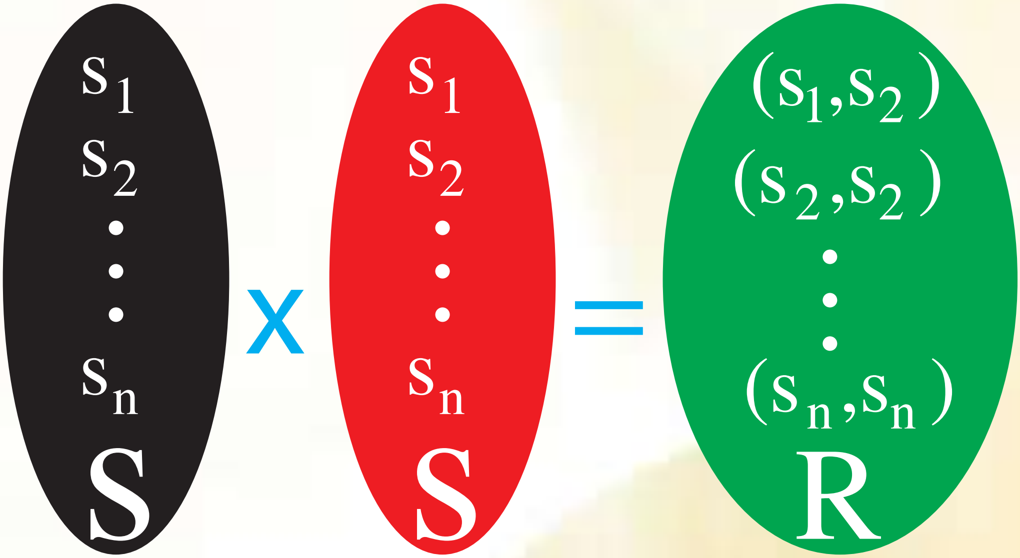
38 - د کومې لاندينې راکړل شوې يو حده درجه صفر ده؟

a) x $\qquad$ b) $\sqrt{2}\ x$ $\qquad$ c) $\sqrt{2}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

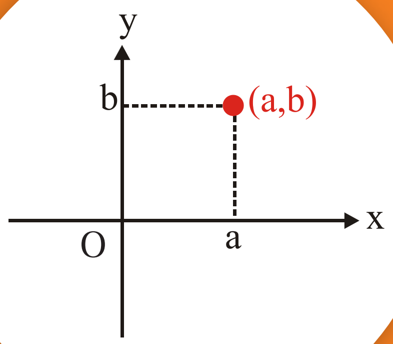
دویم څپرکی
رابطه

(c) ketabton.com: The Digital Library



(c) ketabton.com: The Digital Library

مرتبې جوړې او کارتيزيني مستوي



• د (a,b) مرتبه جوړه په کوم حالت کې د (c,d) له مرتبې جوړې سره مساوي کېدای شي؟
• آيا د (a,b) مرتبه جوړه د (b,a) له مرتبې جوړې سره مساوي ده؟

که a اوb د يوه سټ او يا د مختلفو سټونو عناصر وي او a ته لومړنی عنصر او b ته دويم عنصر ووايو، نو (a,b)ته مرتبه جوړه وايي او (b,a) هم يو مرتبه جوړه ده، خو $(a,b) \neq (b,a)$ د (a,b) مرتبه جوړه په هغه صورت کې د (c,d) له مرتبې جوړې سره مساوی کېدای شي چې a=c او b=d وي.

لومړی مثال: که $(x-2, y+1) = (1,3)$ وي د x او y قيمتونه پيدا کړئ.

حل

$$x-2=1 \qquad y+1=3$$

$$\boxed{x=3} \qquad \boxed{y=2}$$

فعاليت

که $(a+1, 2b-3) = (0,-1)$ وي، د a او b قيمتونه پيدا کړئ.

کارتيزيني مستوي (Cartesian Plane)

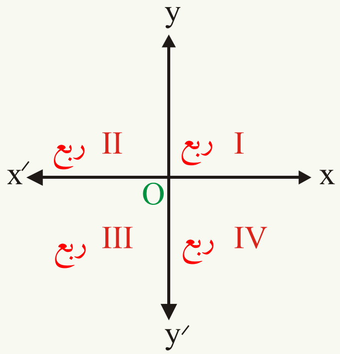
دوه، عمود او افقي خطونه رسم کړئ او د تقاطع ټکي ته يې مبدأ (Origin) وايي، افقي خط ته د X محور او عمود خط ته د Y محور وايي.

د X محوره X'OX او د Y محور په Y'OY سره وښيي، هغه مستوي چې دا محورونه په کې واقع دي د کارتيزيني مستوي په نامه يادېږي.

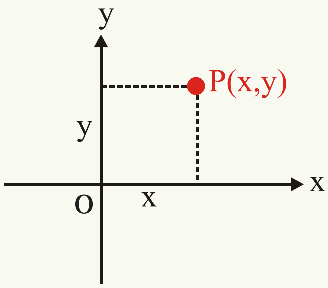
دواړه محورونه مستوي په څلورو برخو وېشي چې هرې برخې ته يې ربع (ناحيه)(Quadrant)

(c) ketabton.com: The Digital Library

وايي، د ساعت د عقربي د حرکت په مخالف جهت (Anti clockwise) په ترتيب سره لومړنی دويمه، دريمه او څلورمه ربع ده، لکه: څنګه چې په شکل کې ليدل کېږي.

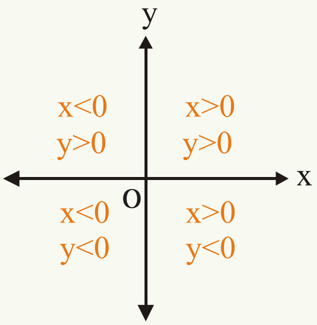


په دې مستوي کې د P دنقطې موقعيت د (x,y) د حقيقي عددونو د مرتبې جوړې په واسط داسې ښودل کېږي چې دP د نقطې افقي فاصله د Y له محور څخه x او د P د نقطې عمودي فاصله د x له محور څخه y ده.



که د P نقطه د Y د محورښي خواته واقع وي، د x قيمت مثبت دی او که د Y د محور کيڼې خواته واقع وي، د x قيمت منفي دی او که د P نقطه د Y پر محور پرته وي $x = 0$ دی.

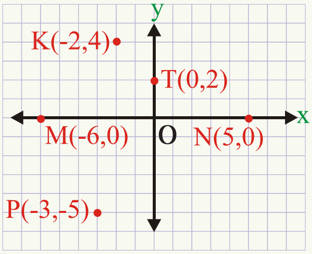
همدارنګه که د P نقطه د X له محور څخه پورته واقع وي، د y قيمت مثبت او که د X له محور څخه لاندې واقع وي د y قيمت منفي دی. $(y < 0)$ او که د p نقطه د X پر محور پرته وي، $y = 0$ کېږي، په لنډ ډول په شکل کې ښودل شوي دي



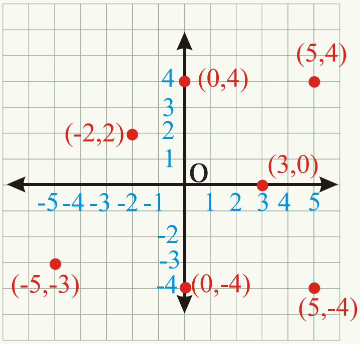
(c) ketabton.com: The Digital Library

چې x او y ته کارتیزیني مختصات (Cartesion Coordinates) وايي چې په $P(x,y)$ کې لومړنی عنصر x ته فاصله (abscissa) او دویم عنصر y ته ترتیب (Ordinate) وايي چې د مختصاتو مبدا $(0,0)$ ده، څرګنده ده چې د حقیقي عددونو (x,y) د هرې مرتبې جوړې لپاره په مستوي کې یوه نقطه او د مستوي د هرې نقطې لپاره د حقیقي عددونو یوه جوړه شته دی.

دویم مثال: د $P(-3,-5)$, $K(-2,4)$, $T(0,2)$, $N(5,0)$ او $M(-6,0)$ نقطې د وضعیه کمیاتو په مستوي کې وټاکئ.



دریم مثال: د هرې نقطې لپاره چې په لاندې شکل کې ښودل شوې دي، اړونده مرتبه جوړه ولیکئ.



فعالیت

د $(2,-1)$, $(-1,2)$, $(-2,-1)$, $(2,1)$, $(2,0)$ او $(0,1)$ نقطې دوضعیه کمیاتو په سیستم کې وټاکئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

1 - که د P د نقطې فاصله مثبت او ترتیب یې منفي وي، د P نقطه په کومه ربع کې واقع ده؟

2 - که د یوه شکل څلور رأسونه $A(3,3)$, $B(-3,3)$, $C(-3,-3)$ او $D(3,-3)$ وي، دا کوم ډول هندسي شکل دی؟

3 - د وضعیه کمیاتو په مستوي کې هغه مثلث چې رأسونه یې $A(2,0)$, $B(0,2)$ او $C(0,0)$ وي رسم کړئ او ووایاست چې د اکوم ډول مثلث دی؟

4 - د $P_1(2,-3)$, $P_2(-3,2)$, $P_3(1,5)$ نقطې د وضعیه کمیاتو په سیستم کې وټاکئ.

5 - ووایاست چې لاندې مرتبې جوړې په کومه ربع کې واقع دي؟

$(1,5)$, $(-5,1)$

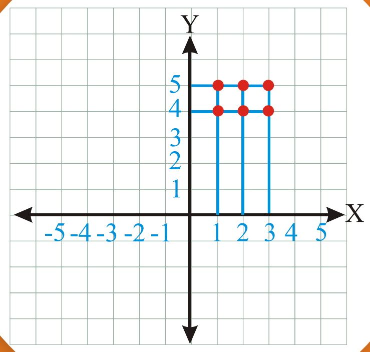
$(-4,-6)$, $(4,-5)$

$(-\frac{1}{2},-2)$, $(-\frac{1}{2},2)$

$(2\frac{1}{2},\frac{1}{4})$, $(2,0)$

$(0,-1)$

(c) ketabton.com: The Digital Library



د کارتيزني ضرب حاصل او گراف يې

آيا په مخامخ شکل کې $A\times B$ ښودلای شئ؟

فعاليت

که $A\{1,2,3\}$ او $B=\{4,5\}$ وي:

- $A\times B$ پيدا کړئ.
- د $A\times B$ د عناصرو شمېر پيدا کړئ.
- آيا $A\times B=B\times A$ دی؟
- آيا $A\times A$ او $B\times B$ پيداکولای شئ؟

که A او B دوه غير خالي ستونه وي، $(A\times B)$ په لاندې ډول تعريف شوي دي:

$$A\times B=\{(x,y)|x\in A\wedge y\in B\}$$

په دې معنا چې د A او د B د ضرب حاصل $(A\times B)$ داسې يوسټ دی چې عناصر يې د (x,y) د هغه مرتبو جوړوسټ دی چې x د A د سټ او y د B د سټ عنصروي، که $A\neq B$ وي نو: $A\times B\neq B\times A$ دی که د A د سټ د عنصرونو شمېر m او د B دسټ د عنصرونو شمېر n وي، د $A\times B$ د عناصرو شمېر له $(m\times n)$ څخه عبارت دی.

لومړی مثال: که $A=\{0,1,2\}$ او $B=\{3,4\}$ وي $A\times B, B\times A$ او $A\times A$ پيدا کړئ.

حل

$$A\times B=\{0,1,2\}\times\{3,4\}=\{(0,3),(0,4),(1,3)(1,4),(2,3),(2,4)\}$$

$$B\times A=\{3,4\}\times\{0,1,2\}=\{(3,0),(3,1),(3,2)(4,0),(4,1),(4,2)\}$$

$$A\times A=\{0,1,2\}\times\{0,1,2\}=\{(0,0),(0,1),(0,2)(1,0),(1,1),(1,2),(2,0),(2,1),(2,2)\}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیت

که $A=\{-4,-1,0\}$ او $B=\{1,4\}$ وي $A\times A, A\times B$ او $B\times B$ پیداکړئ.

دویم مثال: که $IN=\{1,2,3...\}$ او $L=\{0\}$ وي، نو $IN\times L$ پیداکړئ.

حل:

$$IN\times L=\{(1,0),(2,0),(3,0),(4,0)...\}=\{(x,0)/x\in IN\}$$

دریم مثال: که $IN=\{1,2,3...\}$ او $W=\{0,1,2,3...\}$ وي $W\times N$ پیداکړئ.

حل

$$W\times IN=\{(0,1),(0,2),(0,3),...,(1,1),(1,2),(1,3),...,(2,1),(2,2),...,\}$$
$$=\{(x,y)/x\in w\wedge y\in IN\}$$

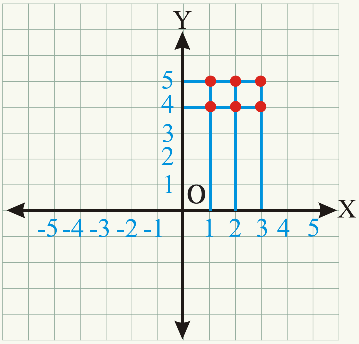
د کارتیزني حاصل ضرب ګراف: (Graph of Cartesian Product)

کولای شو چې د کارتیزني ضرب حاصل د وضعیه کمیاتو په مستوي کې هم وښودلای شو.

څلورم مثال: که $A=\{1,2,3\}$ او $B=\{4,5\}$ وي $A\times B$ پیداکړئ او د وضعیه کمیاتو په مستوي کې یې وښیاست.

حل

$$A\times B=\{(1,4),(1,5),(2,4),(2,5),(3,4),(3,5)\}$$

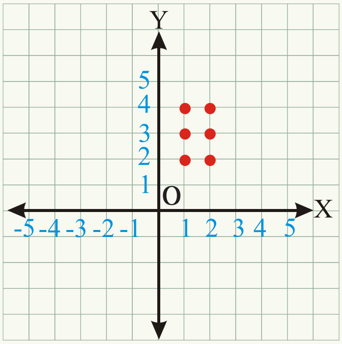


د X پرمحور د 1,2,3 عددونه او د Y پر محور د 4 او 5 عددونه ټاکو له 2,1 او3 څخه عمود خطونه او له 4 او 5 څخه افقي خطونه رسمو، ددې دواړو خطونو د تقاطع نقطې د $A\times B$ مرتبې جوړې ښکاره کوي.

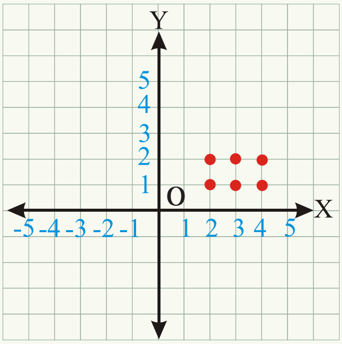
(c) ketabton.com: The Digital Library

پنځم مثال: که $A=\{1,2\}$ او $B=\{2,3,4\}$ وي $A\times B$ او $B\times A$ پیدا کړئ او په شکل کې يې وښياست.

$$A\times B=\{1,2\}\times\{2,3,4\}=\{(1,2),(1,3),(1,4),(2,2),(2,3),(2,4)\}$$
$$B\times A=\{2,3,4\}\times\{1,2\}=\{(2,1),(2,2),(3,1),(3,2),(4,1),(4,2)\}$$



$A\times B$

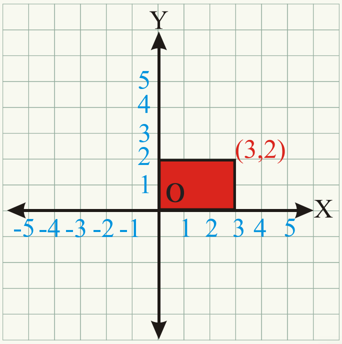


$B\times A$

شپږم مثال: که $A=\{x/x\in IR,0\le x\le 3=[0,3]\}$ او $B=\{y/y\in IR,0\le y\le 2=[0,2]\}$ وي $A\times B$ په شکل کې يې وښياست.

حل

$$A\times B=\{(x,y)/0\le x\le 3\wedge 0\le y\le 2\}$$



فعالیت

که چیرې $A=\{1,2\}$ او $B=\{3,4\}$ وي $A\times B$ پیدا او په شکل کې يې وښياست.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

1 - که:

$A = \{-1,1,3\}$ i) $B = \{2,4\}$

$A = \{-1,1\}$ ii) $B = \{2,3\}$

وي $A \times B$ پيدا او په شکل کې يې وښياست.

2 - د لومړۍ پوښتنې د ستونو لپاره $B \times A$ پيدا او په شکل کې يې وښياست.

3 - که $A = \{1,2,3\}$ وی $A \times A$ پيداکړئ.

4 - که $A = \{2,4,6\}$ او $B = \{1,3,5\}$ وی $A \times B, B \times A, A \times A$ او $B \times B$ پيداکړئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

رابطه
(Relation)

عطاالله د عزت الله ورور دی
(عطا الله R عزت الله)
ورورولي هم یوه رابطه ده.

یوسټ چې د شیانو او مفهومونو له مرتبو جوړو شخه جوړ شوی وي، له یوې رابطې شخه عبارت دی. یاکه A او B دوه غیر خالي سټونه (non empty sets) وي، نو د $A\times B$ هرفرعي سټ له A شخه په B کې یوه رابطه ده، که $R\in(a,b)$ وي، ویل کېږي چې a له b سره رابطه لري او د (aRb) په شکل لیکل کېږي.

که R له A شخه په B کې یوه رابطه وي، نو $R\subset A\times B$ ده او که R د $A\times A$ یو فرعي سټ وي، نو R په A کې یوه رابطه ده.

لومړی مثال: که $A=\{x,y\}$ او $B=(1,2)$ وي، $A\times B$ پیدا کړئ، او له A شخه په B کې خلور رابطې ولیکئ.

حل

$$A\times B=\{(x,1),(x,2),(y,1),(y,2)\}$$
$$R_1=\{(x,1),(x,2)\}$$
$$R_2=\{(y,1)\}$$
$$R_3=\{(y,2)\}$$
$$R_4=\{(x,1),(y,1)\}$$

چې د $A\times B$ د عناصرو شمېر خلور او د $A\times B$ د ټولو فرعي سټونو شمېر $2^4=16$ دی، نو له A شخه په B کې د ټولو رابطو شمېر 16 دی.

دویم مثال: که $A=\{1,3,5,...19\}$ چې د A د سټ د عناصرو شمېر 10 دی او $B=\{2,4,6\}$ وي چې د B د عناصرو شمېر (3) دی، د $A\times B$ د عناصرو شمېر(ټولې مرتبې جوړې)

(c) ketabton.com: The Digital Library

$10 \times 3 = 30$ دي او له A څخه په B کې د ټولو رابطو شمېر 2^{30} دی.

پام مووي چې: ϕ او $A \times B$ هم په فرعي سټونو کې شامل دی.

دریم مثال: که $A = \{1,2,3\}$ او $B = \{a,b\}$ وي له A څخه په B کې (3) رابطې ولیکئ.

حل:

$$A \times B = \{(1,a),(1,b),(2,a),(2,b),(3,a),(3,b)\}$$

درې رابطې عبارت دي له:

$$R_1 = \{(1,a),(1,b),(2,a),(3,a),(3,b)\}$$
$$R_2 = \{(1,b),(2,a),(3,a),(3,b)\}$$
$$R_3 = \{(2,a),(2,b),(3,a)\}$$

فعالیت

که $R = \{(x,y)/x+y=5)\}$ په $A = \{1,2,3,4\}$ کې یوه رابطه وي، د R عناصر ولیکئ.

څلورم مثال: که $R = \{(x,y)/x-y=2\}$ په $A = \{1,2,3,4\}$ کې یوه رابطه وي، د R عناصر ولیکئ.

حل: $R = \{(3,1),(4,2)\}$ ده.

د رابطې د تعریف ساحه (Domain) او د قیمتونو ساحه (Range) یې:

پوهېږو چې که R له A څخه په B کې یوه رابطه وي، نو $R \subseteq A \times B$ ده، په دې معنا چې R یو سټ دی چې عناصر یې د (x,y) مرتبې جوړې دي چې $x \in A$ او $y \in B$ ده.

د R د تعریف ساحه د مرتبو جوړو لومړني عناصر دي چې په Dom_R سره ښودل کېږي. همدارنګه د R د قیمتونو ساحه (Range) د مرتبو جوړو دویمي عناصر دي، په $Range_R$ سره ښودل کېږي.

لومړی مثال: که $A = \{1,2\}$ او $B = \{x,y\}$ وي او R له A څخه په B کې یوه رابطه وي، لومړی د دې رابطې عناصر ولیکئ، بیا د رابطې د تعریف ساحه (Dom_R) او د قیمتونو ساحه ($Range_R$) یې ولیکئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل

$R = \{(1, x), (2, x), (1, y), (2, y)\}$

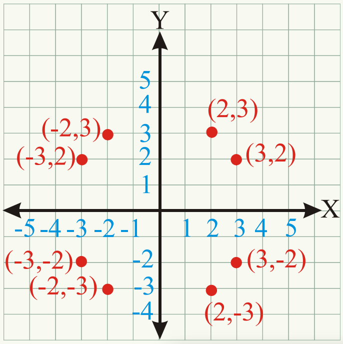
$Dom_R = \{1,2\} \qquad Range_R = \{x, y\}$

دويم مثال: که د $R = \{(x, y) / x^2 + y^2 = 13\}$ رابطه د $A = \{-3,-2,1,2,3\}$ په سټ کې تعريف شوې وي، لومړی د (R) عناصر د مرتبو جوړو په شکل وليکئ، (Dom_R) او ($Range_R$) پيدا کړئ او بيا يې ګراف رسم کړئ.

$R = \{(-3,-2), (-3,2), (-2,-3), (-2,3), (2,-3), (2,3), (3,-2), (3,2)\}$

$Dom_R = \{-3,-2,2,3\}$

$Range_R = \{-3,-2,2,3\}$



فعاليت

که $R = \{(x, y) / y = 2x\}$ وي او د R د تعريف ناحيه $\{0,4,8\}$ وي، د R د قيمتونو ناحيه معلومه کړئ.

معکوسه رابطه (Inverse of a Relation)

که R له A څخه په B کې يوه رابطه وي، د R معکوس چې په R^{-1} سره ښودل کيږي او له $R^{-1} = \{(y, x) | (x, y) \in R\}$ څخه عبارت ده:

$(x, y) \in R \Leftrightarrow (y, x) \in R^{-1}$

د R دتعريف ساحه د R^{-1} د قيمتونو ساحه او د R^{-1} د تعريف ساحه د R د قيمتونو له ساحې څخه عبارت ده.

مثال: که $R = \{(1,2)(2,3)(3,4)\}$ د طبيعي عددونو په سټ کې يوه رابطه وي، د R د رابطې معکوسه رابطه يا R^{-1} پيدا کړئ.

حل:

$R^{-1} = \{(2,1)(3,2)(4,3)\}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

معادله رابطه (Equivalent Relation): د R رابطه د A په سټ کې یوه معادله رابطه ده، که درې لاندنې خاصیتونه ولري:

1- انعکاسي خاصیت (Reflexive Property): د x د هر عنصر $x \in A$ لپاره $(x,x) \in R$ وي یا $\forall x \in A \Rightarrow (x,x) \in R$

2- تناظري خاصیت (Symmetric Property): ( ): که (x,y) په R کې شامله وي، نو (y,x) هم په R کې شامله وي یا: $\forall (x,y) \in R \Rightarrow (y,x) \in R$

3 - انتقالي خاصیت (Transitive Property): که $(x,y) \in R$ او هم $(y,z) \in R$ وي په نتیجه کې (x,z) مرتبه جوړه هم په R کې شامله وي یا:

$$(x,y) \in R \wedge (y,z) \in R \Rightarrow (x,z) \in R$$

مثال: د مساوات رابطه د حقیقي عددونو په سټ کې یوه معادله رابطه ده:

1- په حقیقي عددونو کې د هر x لپاره x=x دی، 5=5 (انعکاسي خاصیت)

2- د هر $x, y \in IR$ لپاره که x=y وي، نو y=x ده(تناظري خاصیت)

3- د هر $x,y,z \in IR$ لپاره که $x = y$ او y=z وي په نتیجه کې x=z دی(انتقالي خاصیت)

پوښتنې

1- که $A = \{1,2\}$ □ $B = \{0,4,6\}$ وي.

له A څخه په B کې درې رابطې ولیکئ.

له B څخه په A کې څلور رابطې ولیکئ.

په A کې څلور رابطې ولیکئ.

2- که $A = \{1,2,3,4\}$ او $B = \{1,3,5\}$ وي او $R = \{(x,y) | y < x\}$ ، له A څخه په B کې یوه رابطه وي، د R عناصر ولیکئ.

3- که $R = \{(x,y) | y + 1 = 2x^2\}$ د طبیعي عددونو په سټ کې یوه رابطه وي او د تعریف ساحه یې ټول طبیعي عددونو وي، د قیمتونو ساحه (Range) یې پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دڅپرکي لنډيز

- (a,b): چې دليکلو ترتيب په کې اهميت لري، مرتبه جوړه نوميږي چې a ته لومړنی مختصه او b ته دويمه مختصه وايي، په عمومی ډول $(a,b) \neq (b,a)$
- د (a,b) او (c,d) دوه مرتبې جوړې په داسې حال کې سره مساوي دي چې $a=c$ او $b=d$ وي.
- **د کارتيزيني ضرب حاصل**: د A او B دستونو کارتيزيني ضرب چې په $A\times B$ سره ښودل کيږي په دې ډول تعريف شوی دی: $A\times B=\{(x,y)\,|\,x\in A\wedge y\in B\}$
- که د A سټ د عناصرو شمېر په m او د B د سټ د عناصرو شمېر په n سره وښايو، د $A\times B$ د عناصر شمېر $m\times n$ دی.
- کولای شوچې د A اوB، دستونو ضرب $(A\times B)$ د وضعيه کمياتو په مستوي کې وښايو.
- **رابطه**: د $A\times B$ هر فرعي سټ له A خخه په B کې د R يوه رابطه ده.

$R\subset A\times B$ او که $R\subset A\times A$ وي، نو په دې صورت کې R په A کې يوه رابطه ده.

$(x\ ,\ y)\in R\Leftrightarrow x\,R\,y$

- که د A سټ د عناصرو شمېر په n سره وښايو، د A د فرعي ستونو شمېر 2^n دی.
- که د A سټ د عناصرو شمېر په m او د B دسټ د عناصرو شمېر په n سره وښايو له A څخه په B کې د رابطو شمېر 2^{mxn} دی
- که R له A څخه په B کې يوه رابطه وي، د R د تعريف ساحه (Dom_R) د مرتبو جوړو دلومړنيو عناصرو سټ او د قيمتونو ساحه $(Range_R)$ يې دمرتبو جوړو د دويمو عناصرو سټ دی.
- **معکوسه رابطه**: که R له A څخه پهB کې يوه رابطه وي، د R معکوسه رابطه په R^{-1} سره ښودل کيږي چې:

$$R.^{-1}=\{(y,x)|(x,y)\in R\}$$

$$(x,y)\in R\Leftrightarrow(y,x)\in R^{-1}$$

ښکاره خبره ده چې R^{-1} د تعريف ساحه د R دقيمتونو له ساحې سره او د R^{-1} دقيمتونو ساحه د R د تعريف له ساحې سره مساوي ده.

- **معادله رابطه**: R د A په سټ کې يوه معادله رابطه ده که چېرې لاندې درې خاصيتونه ولري.

1- انعکاسي خاصيت. 2- تناظري خاصيت. 3- انتقالي خاصيت.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دځپرکي پوښتنې

1- که $A=\{1,3,5\}$ او $B=\{2,4,6\}$ وي $B\times A, A\times B$ او $A\times A$ پيدا کړئ.

2- که $A=\{1,2,3\}$ او $B=\{0,1\}$ وي $A\times B$ په شکل کې وښياست.

3- که $(x-2y,2x+y)=(3,1)$ وي د x او y قيمتونه پيدا کړئ.

4- په $A=\{1,3,5\}$ کې د R رابطه داسې په لاس راوړئ چې R د مساوات رابطه وي.

5- که $A=\{a,b\}$ وي د A^2 عناصر وليکئ.

6- که د $R=\{(x,y)|y=x^2\}$ رابطه د حقيقي عددونو په سټ کې تعريف شوي وي د R رابطې گراف رسم کړئ.

7- که $R=\{(x,y)|y^2=x\}$ رابطه د حقيقي عددونو په سټ کې تعريف شوي وي د R د رابطې گراف رسم کړئ.

8- که $R=\{(1,-1),(2,-2)(3,-3)\}$ وي د R^{-1} د تعريف او قيمتونو ساحې وټاکئ.

9- که $R=\{(1,2)(1,3)(1,4)(1,5)\}$ وي R د او R^{-1} د تعريف او قيمتونو ساحې وټاکئ.

10- که $A=\{3,6,12\}$ او $B=\{-1,0\}$ وي په A کې د رابطو شمېر او له A څخه په B کې د رابطو شمېر پيدا کړئ.

11- که د $(4a+1,2b+a)$ او $(5,3a-4b)$ دوه مرتبې جوړې سره مساوي وي د a او b قيمتونه پيدا کړئ.

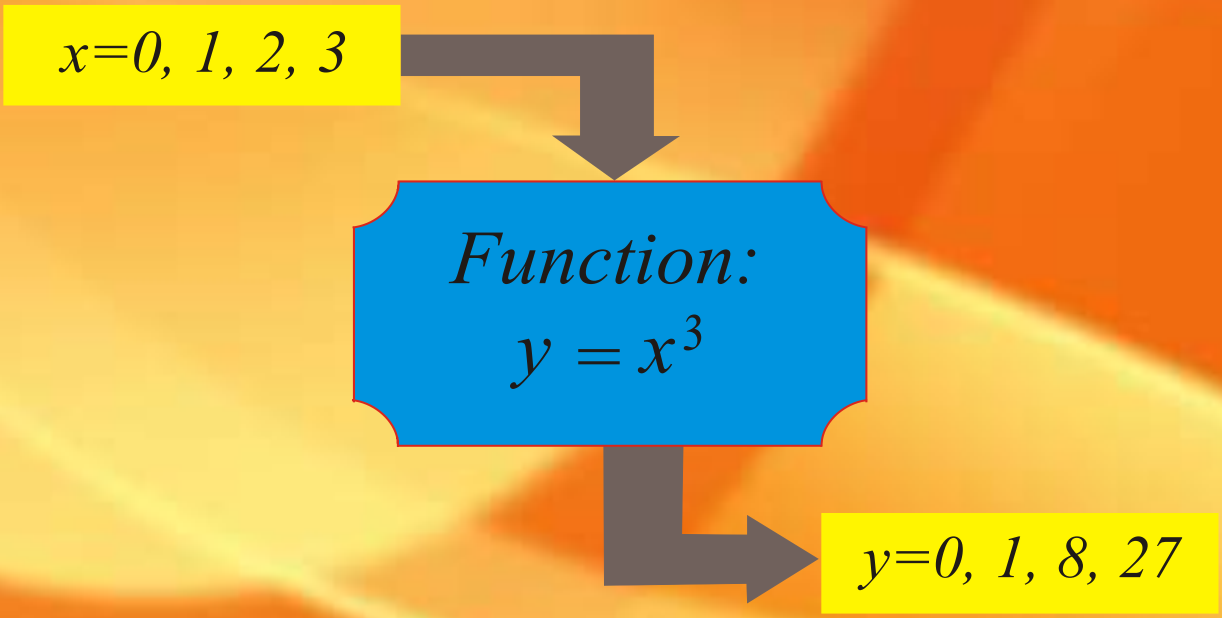
12- که $A=\{a,b,c\}$ او $B=\{x,y\}$ وي $A\times B$ او $B\times A$ پيدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دریم څپرکی

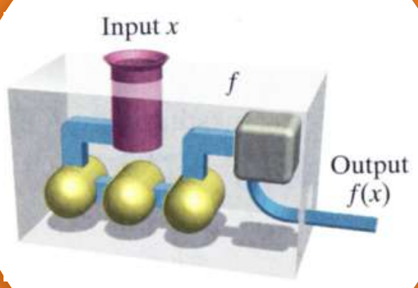
تابع

(c) ketabton.com: The Digital Library



(c) ketabton.com: The Digital Library

تابع (function)



آیا تابع او رابطه یو له بله سره توپیر لري؟

فعالیت

- آیا هره تابع یوه رابطه ده او هره رابطه یوه تابع ده ؟
- آیا د مرتبو جوړو هر سټ یوه تابع ده؟
- آیا کولای شئ چې یوې تابع ته د یو ماشین په شان فکر وکړئ؟

د لومړي ځل لپاره د تابع مفهوم د یوه الماني رياضي پوه لیبنز (Leibniz)، (1716 – 1646) له خوا معرفي شوه.

تابع یوه رابطه یا یوه قاعده ده چې یو کمیت ته د بل کمیت سره اړیکه ورکوي، د تابع د مفهوم د ښه پوهیدو لپاره لاندې مثالونه تر غور لاندې ونیسئ.

1 - د یوې مربع مساحت (A) د مربع په ضلعې (x) پورې اړه لري. هغه معادله چې د مربع مساحت ته د مربع په ضلعې پورې اړیکه ورکوي له $A = x^2$ څخه عبارت ده.

د مربع ضلع x	1	2	3	4	5	...
د مربع مساحت A	1	4	9	16	25	...

یا په بل عبارت د مربع مساحت د مربع د ضلعې تابع دی یا $A = f(x)$

2 - د نړۍ د نفوسو شمېر (p) په وخت (t) پورې اړه لري، لکه: څرنګه چې په لاندې جدول کې لیدل کېږي په تقریبي ډول د نړۍ د نفوسو شمېر د میلیون په حساب ښودل شوی دی.

کال (t)	1900	1910	1920	1930	1940	1950	1960	1970	1980	1990	2000
نفوس په میلیون (p)	1650	1750	1860	2070	2300	2560	3040	3710	4450	5280	6080

(c) ketabton.com: The Digital Library

ليدل کېږي چې نفوس (Population) يا P د وخت (t) تابع ده يا $p = f(t)$

3 - د دايرې مساحت (A) ، د دايرې په شعاع (r) پورې اړه لري ($A = \pi r^2$)

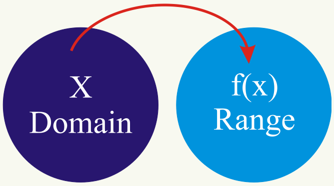
4 - د کرې حجم (V) د کرې په شعاع (r) پورې اړه لري چې د $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ د معادلې په واسطه ښودل کېږي.

له پورتنيو مثالونو څخه دا نتيجه اخيستل کېږي چې د تابع په مفهوم کې اړيکه مرکزي حيثيت لري د مثال په ډول د هر انسان عمر له يوه عدد سره اړيکه لري، په يوه مغازه کې هر جنس له يوه ټاکلي قيمت سره اړيکه لري، هر موټر د يوې ټاکلې شمېرې جوازسېر پورې اړه لري او د هر عدد مکعب، يو عدد دی ($2^3 = 8 \quad , \quad 3^3 = 27$).

په پورتنيو مثالونو کې ليدل کېږي چې مساحت (A)، نفوس (P) اوحجم (V) د مربع ضلعې (x)، وخت (t) او د کرې شعاع (r) تابع دي چې مساحت، نفوس او حجم هر يوه ته مربوط (مقيد) متحول (dependent Variable) او د مربع ضلعې، د کرې شعاع او د وخت کميتونو ته ازاد متحول يا مستقل متحول (Independent Variable) وايي کولای شو چې تابع داسې تعريف کړو:

تعريف

تابع د دوو سټونو تر منځ يوه داسې رابطه يا قاعده ده چې د لومړني سټ هر عنصر يوازې او يوازې د دويم سټ له يو عنصر سره اړيکه ولري چې لومړني سټ د تعريف د ناحيې (Domain) او دويم سټ د قيمتونو د ناحيې (Range) په نوم يادېږي.



يا تابع د هغه مرتبو جوړو سټ دی چې لومړني عناصر يې تکرار شوي نه وي.

که $S = \{(1,4)(2,3)(3,2)(4,3)(5,4)\}$ وي، نو د S رابطه د يوې تابع ښودونکې ده، ځکه چې د مرتبو جوړو لومړني عناصر يې تکرار شوي نه دي.

$$\text{Domain}(s) = \{1,2,3,4,5\}$$

$$\text{Range}(s) = \{2,3,4\}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیت

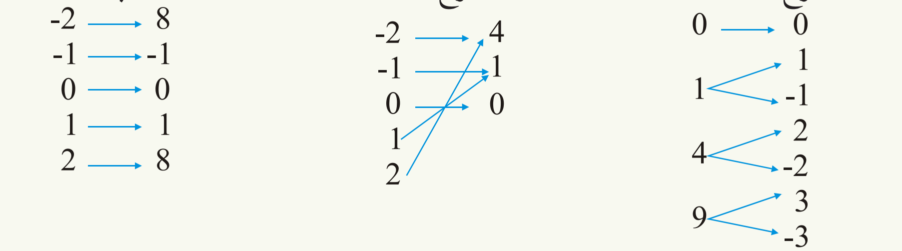
که $T = \{(1,4),(2,3),(3,2),(2,4),(1,5)\}$ وي آیا T یوه تابع بښيي؟

لومړی مثال: په لاندې جدولونو کې کوم یو، یوه تابع ښکاره کوي؟

(جدول I) — Domain (عدد) ، Range د عدد مکعب

(جدول II) — Domain (عدد) ، Range د عدد مربع

(جدول III) — Domain (عدد) ، Range د عدد مربع جذر



I او II جدولونه تابع ښکاره کوي، لیکن III جدول تابع نه ښکاره کوي، ځکه چې د لومړنی سټ یا (Domain) یو عنصر د دویم سټ (Range) له دوو عنصرو سره اړیکه لري، یا په بل عبارت د مرتبو جوړو لومړني عناصر تکرار شوي دي چې مرتبې جوړې یې :

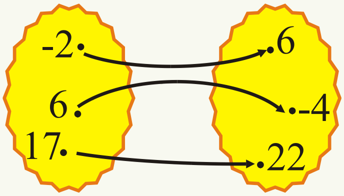
$(1 , 1),(1 , -1),(4 , 2),(4 , -2),(0,0),(9 ,3),(9 , -3)$ دي او یا دا چې د لومړنی سټ د یو عنصر لپاره په دویم سټ کې دوه تصویرونه (Images) موجود دي، ډېره ښه به دا وي چې یوې تابع ته د یو ماشین فکر وکړو، کوم شکل چې د څپرکي په لومړي مخ کې راکړل شوی دی، خام مواد یا ورودي (input) یا Domain او خروجي output یا $f(x)$ د Range په نامه یادېږي.

که A او B د حقیقي عددونو ستونه وي له A څخه B ته هره تابع د حقیقي تابع په نامه یادېږي. پام مو وي چې : $Range \subseteq codomain$ دی.

دویم مثال: که $f = \{(-5,3m) , (-5,2m-10) , (1,2)\}$ د یوې تابع ښودونکې وي، د m قیمت پیدا کړئ.

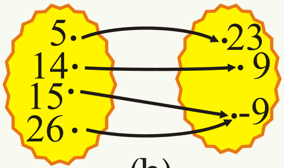
حل: څرنګه چې $-5 = -5$ دي، نو باید $3m = 2m - 10$ سره وي، په نتیجه کې $m = -10$ کېږي په دې معنا دې لپاره چې f یوه تابع وي، باید $m = -10$ وي.

دریم مثال: له لاندېنیو دیاګرامونو څخه کوم یو یې یوه تابع ښيي؟

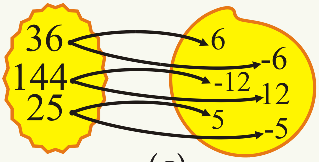


(a)

(c) ketabton.com: The Digital Library



(b)



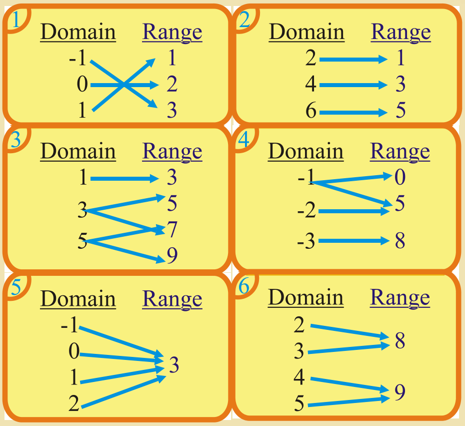
(c)

حل: د a او b دیاګرامونه تابع ښيي، لیکن د c دیاګرام د یوې تابع ښودونکی نه دی.

تابع د X او Y د دوو سټونو ترمنځ یوه داسې رابطه ده چې د x د سټ یا (Domain) هر عنصر یوازې د Y د سټ (Range) د یو عنصر سره اړیکه لري چې X ته ازاد متحول او Y ته مقید (مربوط) متحول وايي یا تابع د هغه مرتبو جوړو سټ دی چې لومړني عناصر یې تکرار شوي نه وي.

پوښتني

1 – د مخامخ جدولونو څخه کوم یو یې د تابع ښودونکی دی؟



2 – د لاندې مرتبو جوړو له سټونو څخه کومه یوه یې یوه تابع ښيي؟ د تعریف ساحه (Domain) او د قیمتونو ساحه (Range) یې تعین کړئ.

1 – $\{(2,4)\ ,\ (3,6)\ ,\ (4,8)\ ,\ (5,10)\}$

2 – $\{(-1,4)\ ,\ (0,3)\ ,\ (1,2)\ ,\ (2,1)\}$

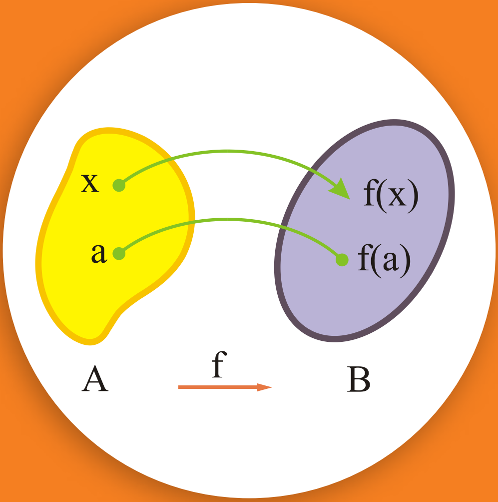
3 – $\{(10,-10)\ ,\ (5,-5)\ ,\ (0,0)\ ,\ (5,5)\ ,\ (10,10)\}$

4 – $\{(-10,10)\ ,\ (-5,5)\ ,\ (0,0)\ ,\ (5,5)\ ,\ (10,10)\}$

5 – $\{(0,11),(1,1),(2,1),(3,2),(4,2),(5,2)\}$

6 – $\{(1,1)\ ,\ (2,1)\ ,\ (3,1)\ ,\ (1,2)\ ,\ (2,2)\ ,\ (3,2)\}$

(c) ketabton.com: The Digital Library



د تابع د لیکلو طریقه او د یوې تابع د قیمت پیدا کول

- څه وخت یوه معادله د یوې تابع ښکارندویه ده؟
- یوه رابطه څه وخت یوه تابع ښيي؟
- یو جدول څه وخت یوه تابع ښيي؟

د لومړي ځل لپاره سویسي ریاضي پوه اویولر (1707- 1783) (Euler) دا عبارت چې y د x تابع ده، د $y = f(x)$ مساوات په شکل وښوده چې $f(x)$ د x لپاره د y یا f(x) د تابع قیمت دی. که f له A څخه B ته یوه تابع وي، په لاندې ډول ښودل کېږي چې

$$f : A \to B$$

$$y = f(x) \qquad \text{يا}$$

په شکل کې x له (input) او f(x) له (output) څخه عبارت دی، تابع ګانې د f,g,h او نورو تورو په واسطه ښودل کېږي.

تابع عموماً په 4 طریقو ښودل کېږي.

1 – د عبارتونو (جملو) په واسطه (Verbally)

2 – د یوه جدول په واسطه یا عددي (Numerically)

3 - مشاهده وي: د ګراف په واسطه (Visually)

4 - د یو واضح فورمول یا معادلې په واسطه یا په الجبري ډول (Algebraically)

فعالیت

که f(x) او g(x) په جدولونو کې په لاندې ډول راکړل شوي وي، د x په راکړل شوو قیمتونو کې ددې تابع ګانو قیمت پیدا کړئ. یا په بل عبارت د تابع د تعریف ساحه (Domain) درکړل شوې ده، د تابع ارونده قیمتونه (Range) يې پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$g(x)=x^3-1$

x=	0	-1	1	2
g(x)=	?	?	?	?

$f(x)=\frac{1}{2}x-4$

x=	-1	-2	0	2	4
f(x)=	?	?	?	?	?

لومړی مثال: که $f(x)=x^2+3x-2$ وي $f(2)$ ، $f(0)$ ، $f(-3)$ او $f(a)$ پیدا کړئ.

حل:

د تابع قیمتونه	تابع (Rule) $f(x)=x^2+3x-2$	د تعریف ساحه
8	$f(2)=2^2+3\cdot2-2=4+6-2$	2
-2	$f(0)=0^2+3\cdot0-2=-2$	0
-2	$f(-3)=(-3)^2+3(-3)-2=9-9-2$	-3
a^2+3a-2	$f(a)=a^2+3a-2$	a

یا $f(2)=8$ ، $f(0)=-2$ ، $f(-3)=-2$ ، $f(a)=a^2+3a-2$

دویم مثال: که $f(x)=x^2+3x+5$ وي، $f(-x)$ ، $f(x+3)$ او $f(2)$ پیدا کړئ.

حل

$$f(2)=2^2+3\cdot2+5=4+6+5=15$$

$$f(x+3)=(x+3)^2+3(x+3)+5=x^2+6x+9+3x+9+5=x^2+9x+23$$

$$f(-x)=(-x)^2+3(-x)+5=x^2-3x+5$$

فعالیت

که $g(x)=x^2-2x+7$ وي $g(-x)$ ، $g(x+4)$ او $g(-5)$ پیدا کړئ.

دریم مثال: که $h(x)=3-2x$ او $f(x)=2x+6$ وي $f(-1)$، $h(6)$ او $f(-1)+f(3)$ پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل:

$$f(-1) = 2(-1) + 6 = -2 + 6 = 4$$
$$h(6) = 3 - 2 \cdot 6 = 3 - 12 = -9$$
$$f(-1) + f(3) = 4 + 2 \cdot 3 + 6 = 4 + 12 = 16$$

څلورم مثال: که $f(x) = ax^2 - bx + 1$ او $f(3) = 10, f(1) = 0$ وي د a او b قیمتونه پیدا کړئ.

حل:

$$10 = 9a - 3b + 1 \quad , \quad 0 = a - b + 1$$

$$10 = 9a - 3b + 1$$
$$0 = _\,3a \mp 3b \pm 3$$

$$10 = 6a - 2 \qquad\qquad 10 = 18 - 3b + 1$$
$$12 = 6a \qquad\qquad 3b = 19 - 10$$
$$a = 2 \qquad\qquad 3b = 9$$
$$b = 3$$

پنځم مثال: له لاندېنیو معادلو څخه کومه یوه یې یوه تابع ښیي؟

$$a: \quad x^2 + y = 4 \qquad\qquad b: x^2 + y^2 = 4$$

حل: هغه وخت یوه معادله یوه تابع ښیي چې د x د هر قیمت لپاره د y یو قیمت موجود شي.

$$a: \quad x^2 + y = 4 \Rightarrow y = 4 - x^2$$

د x د هر قیمت لپاره y یو قیمت لري، د مثال په ډول که $x = 1$ وي، $y = 4 - 1^2 = 3$، نو $y = 4 - x^2$ یوه تابع ده.

$$b: \quad x^2 + y^2 = 4 \Rightarrow y = \pm\sqrt{4 - x^2}$$

د x د یوه قیمت لپاره y دوه قیمتونه لري، نو y یوه تابع نه ده.

د مثال په ډول که $x = 1$ وي، $y = \pm\sqrt{3}$ یا $(1 , \sqrt{3})(1 , -\sqrt{3})$ چې لومړني عناصر یې تکرار شوي دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیت

وښیاست چې د $y-x^2=1$ او د $x^3-y=2$ معادلې د تابع ښودونکې دي او د $x^2+y^2=4$ معادله د یوې تابع ښودونکې نه ده.

یوه تابع د $y=f(x)$ په شکل لیکل کیږي، د تابع د قیمت د پیدا کولو لپاره د x قیمت د تابع په معادله کې وضع کوو، د تابع قیمت په لاس راځي او یوه معادله هغه وخت د یوې تابع ښکارندویه وي چې د هر x لپاره یو y وجود ولري.

پوښتنې

1– که $g(x)=x^2+x-2$ او $f(x)=2x^2+3x-1$ وي $g(2)-g(-3)$ ، $g(-2),f(-3)$

او $\dfrac{f(0)\cdot g(-2)}{f(-3)}$ پیدا کړئ.

2 – که $f(x)=x^2-x$ او $g(x)=\sqrt{x+4}$ وي $f(-2)$ ، $g(0)$ او $f(x-1)$ پیدا کړئ.

3– که $g(x)=3\sqrt{x}$ او $h(x)=1+4x$ وي $h(16)$ ، $h(-3)$ او $g(-4)$ پیداکړئ.

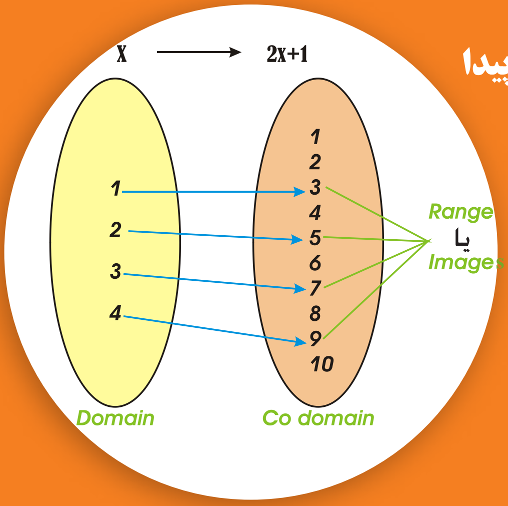
4 – $f(x)=\dfrac{15}{x-3}$ ، $g(x)=16+3x-x^2$ او $h(x)=\sqrt{25-x^2}$ وي $g(-7),f(6)$

او $f(0)+g(4)-h(-3)$ پیداکړئ.

5 – که $g(x)=\sqrt{x+40}-2$ وي $g(12)$ ، $g(5)$ ، $g(4)$ ، $g(0)$ او $g(-2)$ پیداکړئ.

6 – آیا د $x^2+xy=1$ معادله یوه تابع ښیي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library



د يوې تابع د تعريف د ساحې پيدا کول

آيا کېدای شي چې د هرې تابع د تعريف ساحه ټول حقيقي عددونه وي؟

فعاليت

- د x کوم قيمتونه دتابع د تعريف په ساحه کې شامل وي؟
- د $f(x)=\dfrac{1}{x-4}$ تابع د تعريف ساحه وټاکئ.
- آيا $g(x)=3\sqrt{x}$ تابع د تعريف په ساحه کې $x=-4$ شامل دی؟

د يوې تابع د تعريف په ساحه (Domain) کې د x ټول هغه قيمتونه شامل وي چې تابع په هغه قيمتونو کې تعريف شوې وي يا د تابع قيمت يو حقيقي عدد وي.

لومړی مثال: د لاندې تابع گانو د تعريف ساحه (Domain) وټاکئ.

$$f(x)=\frac{1}{x-3} \qquad h(x)=x^2-7x \qquad K(x)=\frac{6x}{x^2-9}$$

$$g(x)=\sqrt{x} \qquad R(x)=\sqrt{3x+12}$$

حل:

- د $f(x)=\dfrac{1}{x-3}$ تابع په $x=3$ کې تعريف شوې نه ده، ځکه چې $x=3$ لپاره د تابع مخرج صفر کېږي يا د $x=3$ لپاره د تابع قيمت يو حقيقي عدد نه دی نو:

$$\text{Dom}\,f=\{x\in IR\,/\,x\neq 3\}$$

- د $g(x)=\sqrt{x}$ په تابع کې ددې لپاره چې د تابع قيمت يو حقيقي عدد (Real number)

(c) ketabton.com: The Digital Library

وي، باید $x \geq 0$ وي، نو $Dom\, g = \{x \in IR / x \geq 0\}$ یا $\mathrm{dom\, g} = [0\ ,\ \infty)$

- $h(x) = x^2 - 7x$ په تابع کې، ځرنګه چې د x د هر قیمت لپاره د $h(x)$ تابع تعریف شوي ده، نو: (د حقیقي عددونو سټ) $\mathrm{Dom\ h} = \mathrm{IR} = (-\infty\ ,\ \infty)$

- د $k(x) = \dfrac{6x}{x^2 - 9}$ یا $\mathrm{k(x)} = \dfrac{6x}{(x-3)(x+3)}$ تابع د تعریف ساحه عبارت ده له:

$$Dom\, k(x) = \{x \in IR / \quad x \neq 3\ ,\quad x \neq -3\}$$

- د $\mathrm{R(x)} = \sqrt{3x + 12}$ په تابع کې باید $3x + 12 \geq 0$ وي، نو $x \geq -4$ کېږي.

$$Dom\, R = \{x \in IR / x \geq -4\} = [-4, \infty)$$

فعالیت

د لاندې تابع ګانو د تعریف ساحه (Domain) پیدا کړئ.

$$\mathrm{f(x)} = x^2 + 3x - 17 \quad , \quad \mathrm{g(x)} = \frac{5x}{x^2 - 49} \quad , \quad \mathrm{h(x)} = \sqrt{9x - 27}$$

دویم مثال: د $y = \sqrt{x - 3}$ د تابع د تعریف ساحه پیدا کړئ.

$$x - 3 \geq 0 \qquad \Rightarrow x \geq 3$$

$$\mathrm{Dom\ y} = \{x \in \mathrm{IR} / \ x \geq 3\} = [3\ ,\ \infty)$$

دریم مثال: د لاندې تابع ګانو د تعریف ساحه پیدا کړئ.

$\mathrm{f(x)} = \sqrt{x - 2} \qquad \mathrm{Dom\ f} = \{x / \quad x \geq 2\}$ یا $[2, \infty]$

$g(x) = \dfrac{2x + 3}{x - 4} \qquad dom\, g = IR - \{4\}$ یا $(-\infty, 4) \cup (4, \infty)$

یا د سټ په شکل: $dom\, g = \{x \in IR / x \neq 4\}$

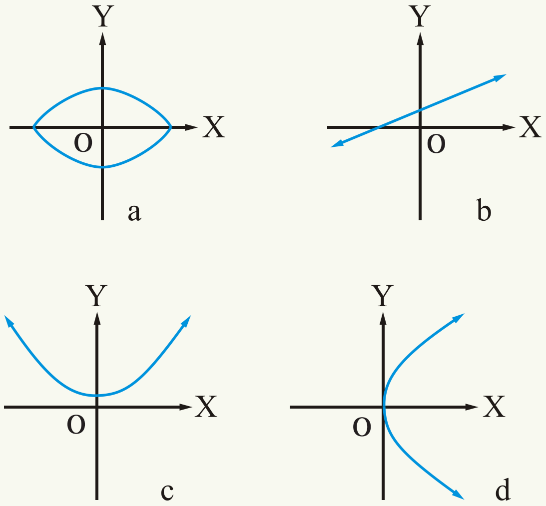
$$\mathrm{h(x)} = \sqrt{x^2 - 2x - 3}$$

$\mathrm{Dom\ h} = \{x / \ x \leq -1$ یا $x \geq 3\}$ یا $(-\infty, -1] \cup [3, \infty)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د يوې تابع ګراف او د ګراف له مخې د يوې تابع پيژندنه
(Graph of a function and vertical line test)

په راکړل شوو شکلونو کې کوم ګراف د يوې تابع ګراف دی؟



فعاليت

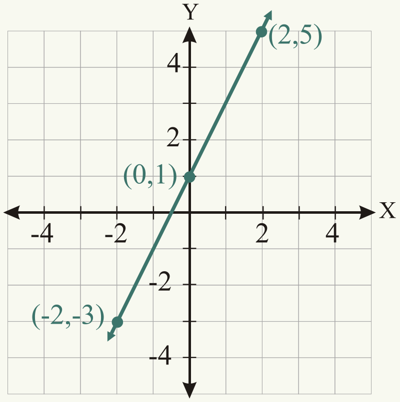
- د y له محور سره يو موازي خط رسم کړئ.
- وګورئ چې دا خط د تابع ګراف په څو نقطو کې قطع کوي؟
- که دا خط ګراف په يوه نقطه کې قطع کړي آيا دا ګراف به د يوې تابع ګراف وي؟
- که دا خط، ګراف له يوې نقطې څخه په زياتو نقطو کې قطع کړي آيا دا ګراف به د يوې تابع ګراف وي؟

که $f(x)$ يوه حقيقي تابع وي، د $f(x)$ د تابع ګراف د $(x, f(x))$ د هغه مرتبو جوړو سټ دی چې د $y=f(x)$ په معادله کې صدق وکړي.

يا د يوې تابع ګراف د XOY د مستوي د هغو نقطو سټ دی چې $\{(x,y) / y=f(x)\}$ صدق کړي او $x \in dom\ f(x)$ وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی مثال: د $y = f(x) = 2x+1$ تابع ګراف رسم کړئ.



input	تابع	output	مرتبې جوړې
x	$2x+1$	$y=f(x)$	(x,y)
0	$2(0)+1$	1	$(0,1)$
2	$2(2)+1$	5	$(2,5)$
-2	$2(-2)+1$	-3	$(-2,-3)$

دویم مثال: د $f(x)=x^2+1$ او $y=-1$ تابع ګانو ګراف رسم کړئ.

د تعریف او د قیمتونو ساحې یې هم پیدا کړئ.

حل:

$f(x)=x^2+1$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
f(x)	10	5	2	1	2	5	10

د $(3\,,10)$, $(2,5)$, $(1,2)$, $(0,1)$, $(-1\,,2)$, $(-2\,,5)$, $(-3,10)$ مرتبو جوړو په نظر کې نیولو سره د تابع ګراف رسم کړئ:

یا

$f(-3)=(-3)^2+1=9+1=10$

$f(-2)=(-2)^2+1=4+1=5$

$f(-1)=(-1)^2+1=1+1=2$

$f(0)=0^2+1=0+1=1$

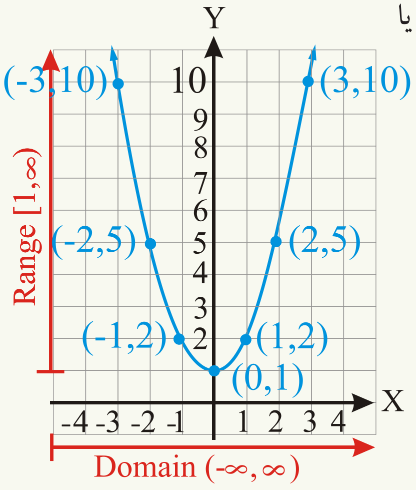
$f(1)=1^2+1=2$

$f(2)=2^2+1=5$

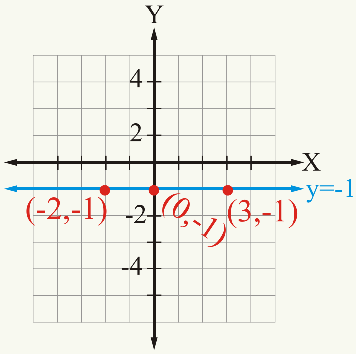
$f(3)=3^2+1=10$

$\text{Dom} f=(-\infty,\infty)$

$\text{Range} f=(1,\infty)$



(c) ketabton.com: The Digital Library



$f(x) = -1$

Input	Output	مرتبه جوړه
x	$y = f(x)$	(x, y)
-2	-1	$(-2, -1)$
0	-1	$(0, -1)$
3	-1	$(3, -1)$

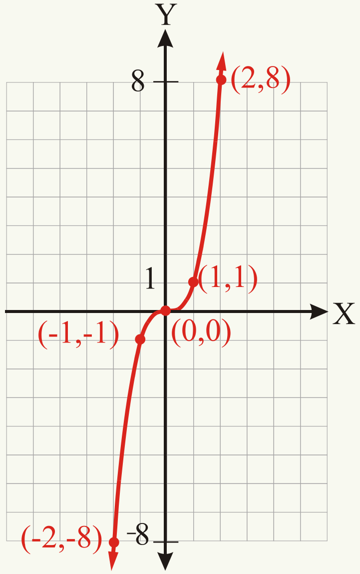
$\text{Dom } y = IR$

$\text{Range } y = -1$

فعالیت

د $f(x) = x^2 - 4$ تابع ګراف رسم کړئ.

دریم مثال: د $y = f(x) = x^3$ تابع ګراف رسم کړئ.



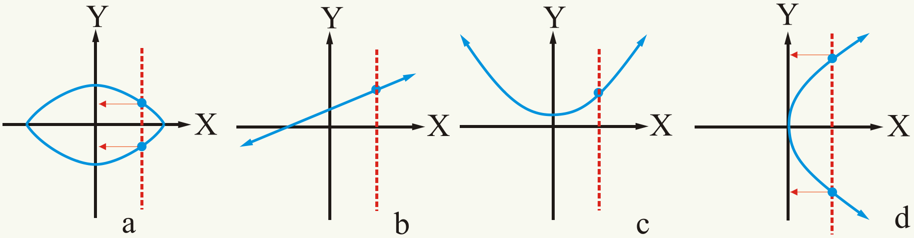
$f(x) = x^3$

x	2	1	0	-1	-2
$y = f(x)$	8	1	0	-1	-8

که یو عمودي خط (د y له محور سره موازي) یو ګراف یوازې په یوه نقطه کې قطع کړي، نو دا ګراف د یوې تابع ګراف دی او که له یوې نقطې څخه یې په زیاتو نقطو کې قطع کړي، نو دا ګراف د یوې تابع ګراف نه دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

څلورم مثال: په لاندې راکړل شوو ګرافونو کې لیدل کېږي چې b او c د تابع ګانو ګرافونه دي، ځکه چې عمود خط يې ګرافونه په يوه نقطه کې قطع کړي دي، لیکن د a او d ګرافونه د تابع ګرافونه نه دي، ځکه چې عمودي خط ګرافونه له يوې څخه په زياتو نقطو (دوو نقطو) کې قطع کړي دي يا د يوه x لپاره د y يا f(x) دوه قیمتونه وجود لري، نو د a او d ګرافونه د تابع ګرافونه نه دي.



د تابع د تعریف په ناحیه domain کې هغه عددونه شامل وي چې تابع په کې تعریف شوي وي يا د تابع قیمت يو حقیقي عدد وي. د يوې تابع ګراف د XOY په مستوي کې د S د نقطو سټ دی، په دې ډول چې $S = \{(x, y) \mid y = f(x)\}$ چې x د تابع د تعریف په ساحه کې شامل وي، که د y له محور سره موازي خط ګراف يوازې په يوه نقطه کې قطع کړي، دا ګراف د يوې تابع ګراف دی.

پوښتنې

1 - د لاندې تابع ګانو د تعریف ساحې (Domains) پیدا کړئ.

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 9} \qquad g(x) = 2x - 5 \qquad h(x) = \sqrt{x^2 - 4}$$

$$f(x) = \sqrt{x + 1} \qquad g(x) = |x - 3| \qquad h(x) = \frac{3}{x - 4}$$

$$f(x) = \frac{7x}{x^2 - 16} \qquad g(x) = \frac{2}{(x + 3)(x - 7)} \qquad h(x) = \frac{4}{x^2 + 11x + 24}$$

$$f(x) = \frac{3}{x^2 + 4}$$

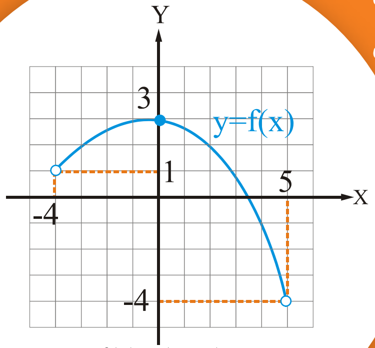
2 - د $f(x) = x^2$ او $f(x) = -x^2$ د تابع ګانو ګرافونه رسم کړئ.

3 - د $g(x) = 2x - 1$ تابع ګراف رسم کړئ که $x = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3,$ وي.

4 - د $x = y^2 - 2$ ګراف رسم کړئ او آيا دا د يوې تابع ګراف دی؟ ولې؟

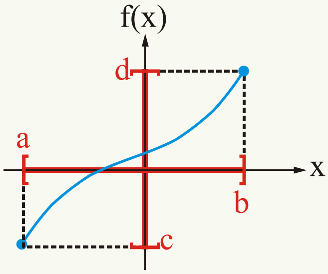
(c) ketabton.com: The Digital Library

د ګراف له مخې د يوې تابع د تعريف او د قيمتونو د ناحيو او د تابع د قيمتونو پيدا کول:

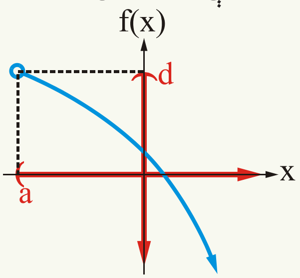


Dom f(x)=(-4,5)
Range f(x)=(-4,3]

آيا د توابعو په لاندينيو راکړل شوو ګرافونو کې د تابع د تعريف ساحه (Domain) او د قيمتونو ساحه (Range) يې ټاکلای شئ؟



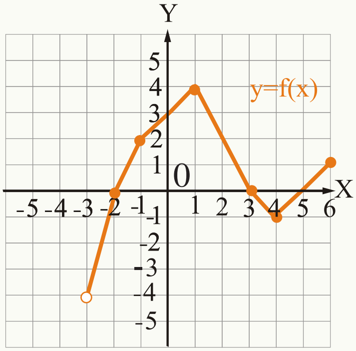
Dom f=[a,b]
Rage f= [c,d]



Dom f = (a,∞)
Rang f =(-∞,d)

فعاليت

شکل وګورئ لاندينيو پوښتنو ته ځواب ورکړئ:

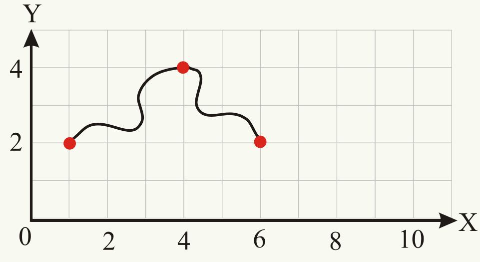


- د شکل له مخې د f تابع د تعريف او قيمتونو ساحه پيدا کړئ.
- آيا د 4 − عدد د f د تابع د قيمتونو په ساحه کې شامل دی؟ ولې؟
- آيا د 3 − عدد د f د تعريف په ساحه کې شامل دی؟ ولې؟
- آيا د 6 عدد د f د تعريف په ساحه کې شامل دی؟

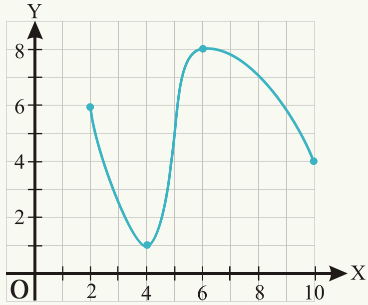
(c) ketabton.com: The Digital Library

لیدل کېږي چې $f(-1)=2$ او $f(1)=4$ دي او هم د شکل له مخې د تابع د تعریف ساحه له 3- څخه تر 6 پورې ده، لیکن $-3 \notin dom\ f$ او $6 \in dom\ f$ ، نو $dom\ f=(-3,6]$ او په همدې ډول د f(x) تابع د قیمتونو ساحه (Range) له 4- څخه تر 4 پورې ده، خو $-4 \notin Range\ f$ نو $Range\ f=(-4,4]$.

لومړی مثال: په راکړل شوو شکلونو کې د تابع ګانو د تعریف او د قیمتونو ساحې پیداکړئ.



(1)



(2)

حل:

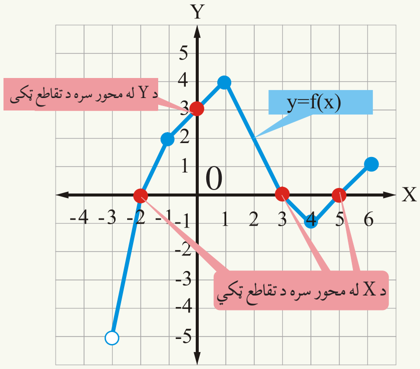
د لومړي شکل په ګراف کې د تعریف ساحه د 1 او 6 تر منځ ټول حقیقي عددونه دي او د قیمتونو ساحه یې د 2 او 4 تر منځ ټول حقیقي عددونه دي یا: $1 \le x \le 6$ او $2 \le y \le 4$

د (2) شکل په ګراف کې $2 \le x \le 10$ یا $Dom=[2\ ,\ 10]$

$1 \le y \le 8$ یا $Range=[1\ ,\ 8]$

دویم مثال: لاندې شکل په پام کې ونیسئ.

- $f(-2)$, $f(3)$ او $f(5)$ پیداکړئ.
- د X او Y له محورونو سره د ګراف د تقاطع د نقطو وضعیه کمیات پیداکړئ.



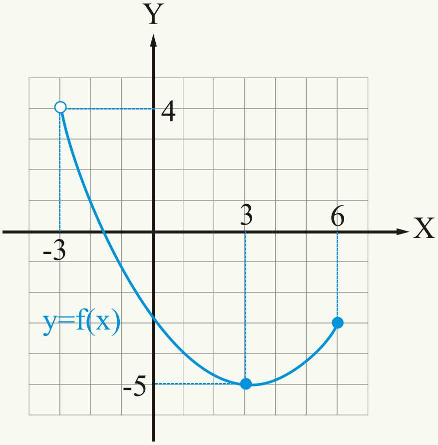
حل: څرنګه چې د X له محور سره د ګراف د تقاطع په ټکي کې $y=0$ وي، نو $f(-2)=0$, $f(3)=0$ او $f(5)=0$ دي، نو ګراف د X محور د

(c) ketabton.com: The Digital Library

$(-2,0)$, $(3,0)$ او $(5\ ,\ 0)$ په نقطوکې قطع کوي.

خرنګه چې د y له محور سره د ګراف د تقاطع په ټکي کې $x = 0$ دی $f(0) = 3$ ، نو ګراف د y محور د $(0,3)$ په نقطه کې قطع کوي.

دریم مثال: په لاندې شکل کې د f تابع Domain او Range پیدا کړئ او f (3) او f (6) هم په لاس راوړئ.



حل: لیدل کیږي چې د تعریف ساحه یې له 3 - څخه تر 6 پورې ده، خو 3 - د تعریف په ساحه کې شامل نه دی.

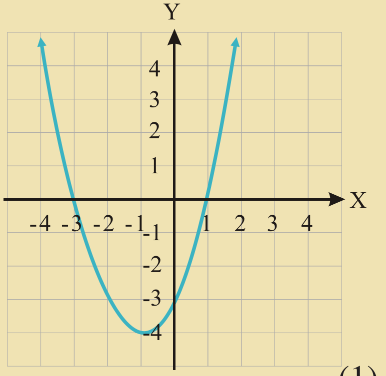
$Domain\ f(x) = -3 < x \le 6$ یا $(-3\ ,6]$

او د قیمتونو ساحه یې: $Range\ f(x) = -5 \le y < 4$ یا $[-5\ ,\ 4)$ ، $f(6) = -3$ او $f(3) = -5$ ده.

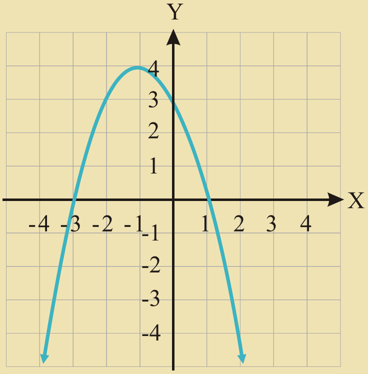
(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتني

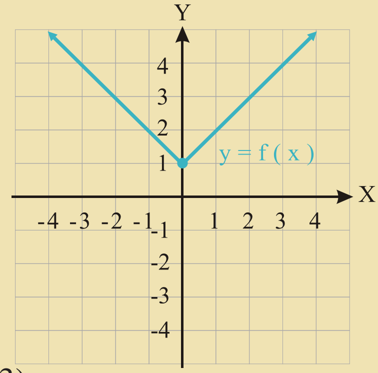
په راکړل شوو شکلونو کې:



(1)



(2)



(3) $f(-1)=?$ $f(3)=?$

a- د تابع د تعریف ساحه

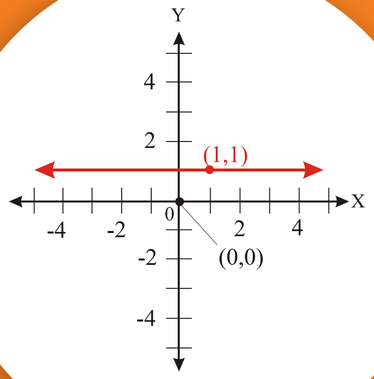
b- د تابع د قیمتونو ساحه

c- د X له محور سره د ګراف د تقاطع ټکي

d- د Y له محور سره د تقاطع ټکي او په دریم شکل کې د تابع غوښتل شوي قیمتونه پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځینې خاصې تابع ګانې او ګرافونه یې

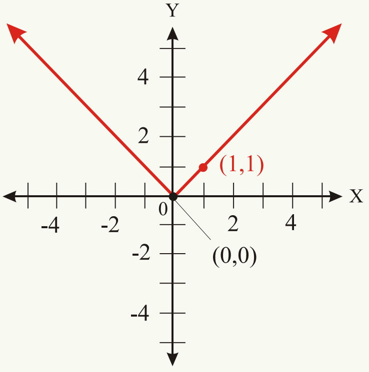


$f(x)=1$

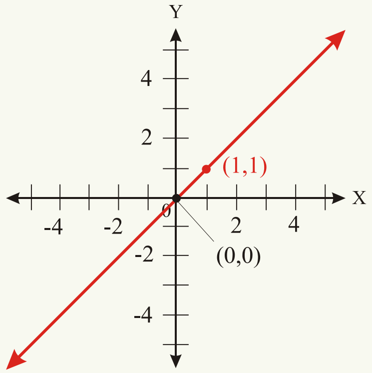
د هغو تابع ګانو نومونه واخلئ چې ګرافونه یې راکړل شوي دي

توابع ډېر ډولونه لري چې ځینې خاصې تابع ګانې ترڅېړنې لاندې نیسو:

ثابته تابع، د عینیت تابع، د مطلقه قیمت تابع، څو معادله یي تابع او د علامې تابع



$f(x)=|x|$



$f(x)=x$

فعالیت

- ثابتې تابع ته ولې ثابته تابع وایي؟
- آیا د عینیت تابع د تعریف او د قیمتونو ساحې سره مساوي وي؟
- آیا د مطلقه قیمت د تابع د قیمتونو ساحه منفي قیمتونه اخیستلای شي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

ثابته تابع (Constant Function)

که x او y د حقیقي عددونو سټونه وي، د $f: x \rightarrow y$ یا $f(x) = y$ په تابع کې که y له یوه ثابت عدد سره مساوي وي یا $y = f(x) = c$ چې (c) یو ثابت عدد دی، نو د y ثابتې تابع په نوم یادېږي.

د مثال په ډول: $f(x) = 2$, $f(x) = -3$ او $f(x) = -2$ او داسې نورې ثابتې تابع ګانې دي.

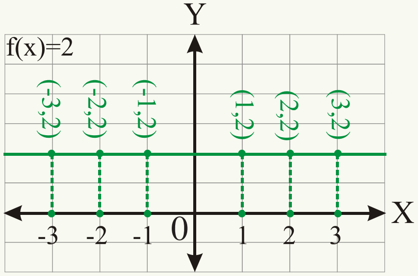
لومړی مثال: $f(x) = 2$ او $f(x) = -2$ تابع ګانو ګرافونه رسم کړئ.

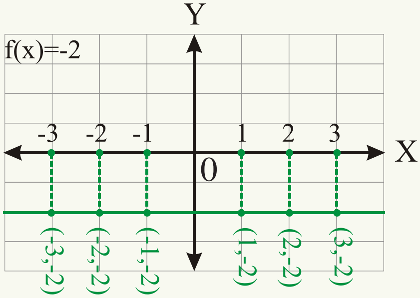
$f(x) = 2$

x =	1	2	3	−1	−2	−3
f(x) =	2	2	2	2	2	2

$f(x) = -2$

x =	1	2	3	−1	−2	−3
f(x) =	−2	−2	−2	−2	−2	−2

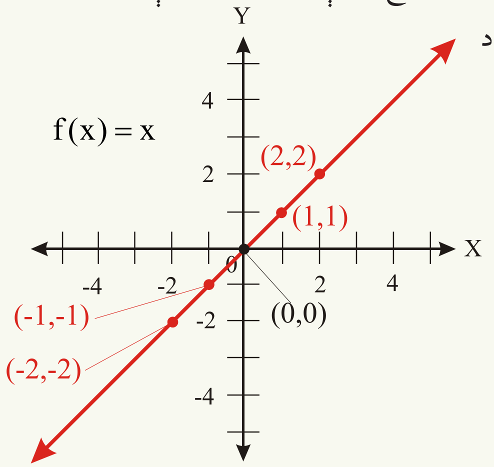




په دې معنا چې په ثابته تابع کې د تعریف د ساحې د هر عنصر تصویر همغه ثابت عدد دی.

د عینیت تابع (Identity function): هغه تابع ده چې د تعریف د ساحې هر عنصر ته له خپل ځان سره ارتباط ورکړي یا $f(x) = x$ د عینیت د تابع په نامه یادېږي.

مثال: د $f(x) = x$ د تابع ګراف رسم کړئ.



$f(x) = x$

x =	0	1	2	−1	−2	...
f(x) =	0	1	2	−1	−2	...

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مطلقه قیمت تابع (Absolute value function)

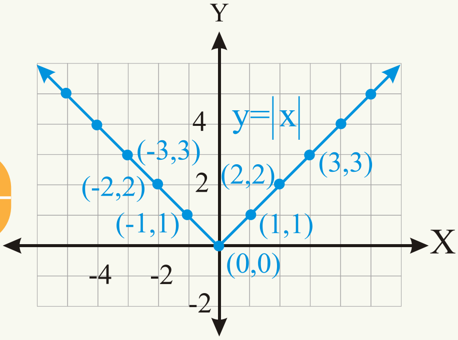
د مطلقه قمیت تابع $f(x)=|x|$ په لاندې ډول تعریف شوی ده:

$$f(x)=\begin{cases} x & , x\geq 0 \\ -x & , x<0 \end{cases}$$

لومړی مثال: د $f(x)=|x|$ تابع گراف رسم کړئ.

$f(x)=|x|$

x =	0	1	2	3	−1	−2	−3
f(x) =	0	1	2	3	1	2	3



لیدل کیږي چې د مطلقه قیمت د تابع د تعریف ساحه ټول حقیقي عددونه او د قیمتونو ساحه یې $[0,\infty)$ ده.

څو معادله یي تابع (Piecewise function) او گراف یي

آیا کیدای شي چې یوه تابع د تعریف په ساحه کې د دوو یا څو معادلو په واسطه تعریف شوې وي؟

لومړي مثال: که $f(x)=\begin{cases} 2x+3 : x<4 \\ x^2-1 : 4\leq x\leq 10 \end{cases}$ وي، نو $f(-5)$, $f(8)$ او د f تابع د تعریف ساحه پیدا کړئ.

حل: څرنگه چې $-5<4$ دی، نو په لومړی معادله کې وضع کیږي، لرو چې:

$$f(-5)=2(-5)+3=-10+3=-7$$

او څرنگه چې د 8 عدد د 4 او 10 ترمنځ واقع دی $4<8<10$ ، نو په دویمه معادله کې وضع کیږي لرو چې:

$$f(8)=8^2-1=64-1=63$$

د f تابع د تعریف ساحه په لومړی معادله کې $(-\infty\ ,\ 4)$ او په دویمه معادله کې $[4\ ,\ 10]$ ده، نو د

(c) ketabton.com: The Digital Library

f د تعریف ساحه د $]10\,,\,-\infty)$ خخه عبارت ده.

فعالیت

که چېرې $g(x)=\begin{cases}-\dfrac{11}{60}x+15 & : 0\le x<60\\ \dfrac{1}{5}x-8 & : 60\le x\le 90\end{cases}$ وي،

وښیاست چې $g(80)=8$ او $g(30)=9.5$ دی.

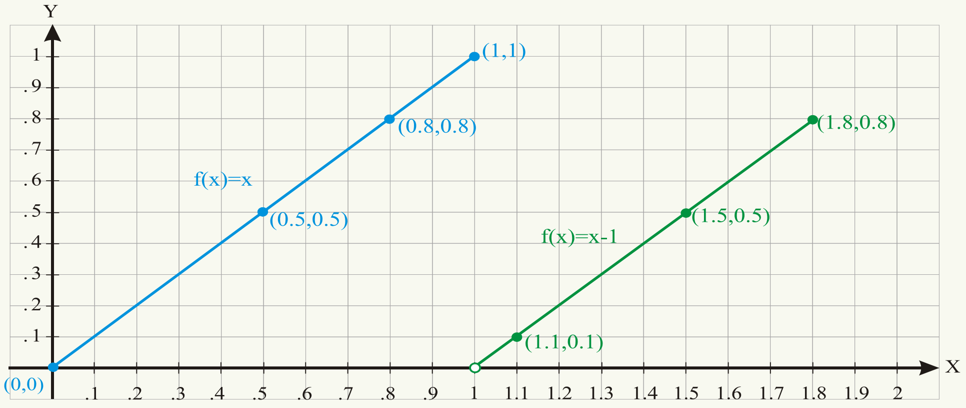
د څو معادله يي تابع ګراف (Graph of function defined piecewise)

دویم مثال: د $f(x)$ تابع د تعریف او قیمتونو ساحې پیدا او ګراف يې هم رسم کړئ که:

$f(x)=\begin{cases}x: 0\le x\le 1\\ x-1: 1<x\le 2\end{cases}$ وي.

حل: د لومړی معادلې د تعریف ساحه $[0,1]$ او د دویمې معادلې د تعریف ساحه $(1,2]$ ده چې په نتیجه کې د $f(x)$ د تعریف ساحه $[0,2]$ ده.

د ګراف د رسمولو لپاره، د دواړو برخو ګراف رسموو په دې ډول:



(c) ketabton.com: The Digital Library

$y = f(x) = x$

x	0	0.5	0.8	1
y = f(x)	0	0.5	0.8	1

$y = f(x) = x - 1$

x	1,1	1,5	1,8
$f(x)$	0,1	0,5	0,8

په نتیجه کې دوه مستقیم خطونه په لاس راځي چې دواړه د f (x) تابع ګراف دی.

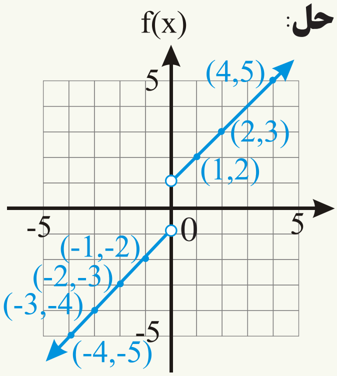
فعالیت

که: $f(x) = \begin{cases} x \Leftarrow 0 \le x \le 4 \\ x - 1 \Leftarrow 0 < x < -4 \end{cases}$ وي، $f(0), f(-2), f(2)$ پیداکړئ او ددې تابع ګراف هم رسم کړئ.

دریم مثال: د $f(x) = \begin{cases} x - 1 \Leftarrow x < 0 \\ x + 1 \Leftarrow x > 0 \end{cases}$ تابع ګراف رسم د تعریف او د قیمتونو ساحې یې وټاکئ.

حل:

x	1	2	4	-1	-2	-3	-4
$f(x)$	2	3	5	-2	-3	-4	-5



لیدل کېږي چې د تابع د تعریف په ساحه کې صفر شامل نه دی $(x \neq 0)$ یا

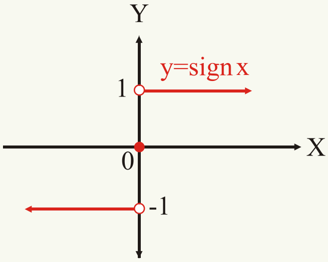
$Dom\ f(x) = (-\infty\ ,\ 0) \cup (0, \infty)$ او د قیمتونو ناحیه (Range) یې عبارت دی له:

$(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ یا $y > 1$ او $y < -1$

د علامې تابع (Sign Function): د علامې تابع چې په sgn (x) سره ښودل کېږي د خو معادله یې تابع یو مثال دی چې په لاندې ډول تعریف شوې ده:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$sgn(x)=\begin{cases}1 & : x>0\\ 0 & : x=0\\ -1 & : x<0\end{cases}$$ د دې تابع د تعریف ناحیه د حقیقي عددونو سټ او د قیمتونو ساحه (Range) یې $\{-1,0,1\}$ ده.



$$Dom_{sgn}=IR \qquad Range_{sgn}=\{-1\,,\,0\,,1\}$$

$f(x)=c$ ثابته تابع ، $f(x)=x$ د عینیت تابع او $f(x)=|x|$ د مطلقه قیمت تابع ده چې د تعریف ساحه یې ټول حقیقي عددونه او د قیمتونو ساحه یې صفر او مثبت حقیقي عددونه دي.

پوښتني

1- د $f(x)=-5$ ، $g(x)=\frac{1}{2}$ او $h(x)=4$ تابع ګانو ګرافونه رسم کړئ.

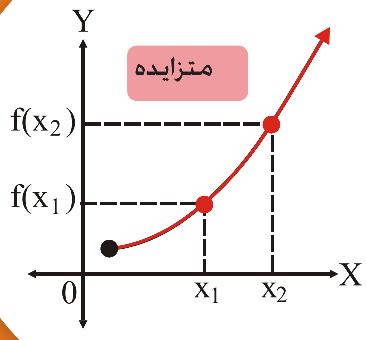
2 – د $f(x)=|x|-3$ تابع ګراف رسم کړئ.

3- که $f(x)=\begin{cases}-x : x<0\\ x : x\geq 0\end{cases}$ وي $f(0)$, $f(-2,3)$ او $f(16)$ پیدا کړئ.

4- که $h(x)=\begin{cases}x+1 : -1\leq x<0\\ -x+1 : 0\leq x\leq 1\end{cases}$ وي د $h(x)$ تابع د تعریف ساحه پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

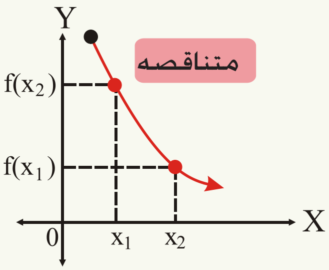
متزايدي او متناقصي تابع ګانې
(Increasing and decreasing functions)

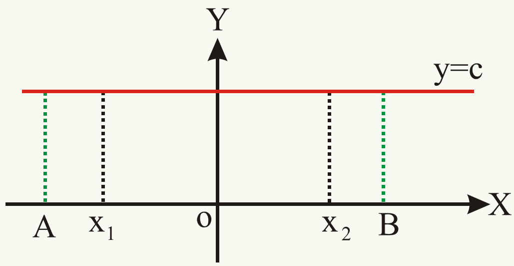


• په راکړل شوو ګرافونو کې کوم ګراف د متزایدی تابع ګراف دی؟

• کوم ګراف د متناقصی تابع ګراف دی؟

• کوم ګراف نه متزاید دی او نه متناقص؟





1 – یوه تابع په یوه انټروال کې متزایده ده که $x_1 < x_2$ وي، په نتیجه کې $f(x_1) < f(x_2)$ شي.

2 – یوه تابع په یوه انټروال کې متناقصه ده که $x_1 < x_2$ وي، په نتیجه کې $f(x_1) > f(x_2)$ شي.

3 – که $x_1 < x_2$ وي او په نتیجه کې $f(x_1) = f(x_2)$ شي دا تابع نه متناقصه ده او نه متزایده.

لکه: څرنګه چې په شکل کې لیدل کیږي دا یوه ثابته تابع ده.

مثال: د $f(x) = x^2$ او $f(x) = -x^2$ د تابع ګانو ګراف په کومو انټروالونو کې متزاید او په کومو انټروالو کې متناقص دی؟

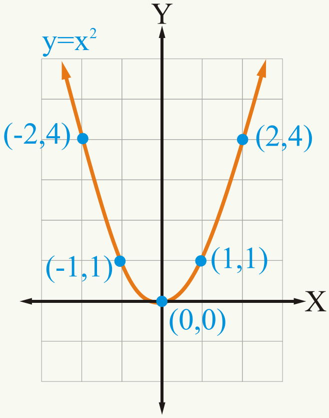
x	0	1	-1	2	-2
$f(x) = x^2$	0	1	1	4	4

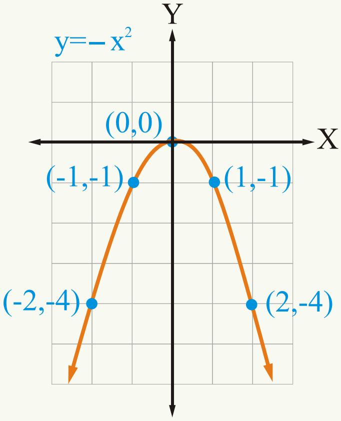
x	0	1	-1	2	-2
$f(x) = -x^2$	0	-1	-1	-4	-4

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$-1<2$$
$$f(-1)<f(2)$$
$$1<4$$

$$-1<2$$
$$f(-1)>f(2)$$
$$-1>-4$$

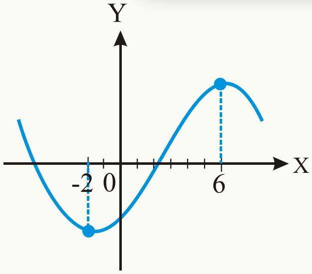




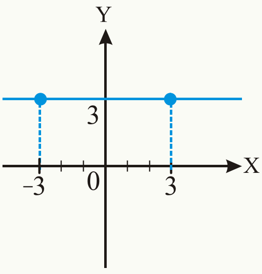
لیدل کېږي چې د $f(x)=x^2$ تابع د $(-\infty,0)$ په انټروال کې متناقصه او د $(0 , \infty)$ په انټروال کې متزایده ده، لیکن د $f(x)=-x^2$ تابع په $(-\infty,0)$ انټروال کې متزایده او د $(0,\infty)$ په انټروال کې متناقصه ده.

فعالیت

په راکړل شوو شکلونو کې د تابع ګراف په کومو انټروالونو کې متزاید په کومو کې متناقص دی، کوم ګراف نه متزاید او نه متناقص دی؟



(a)



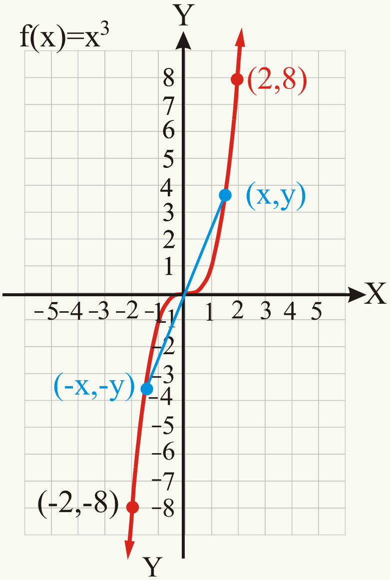
(b)

جفتي او طاقي تابع ګانې (Even and Odd Functions):

1– د $f(x)$ تابع یوه جفته تابع ده که چېرې $f(-x)=f(x)$ وي، په دې معنا که په تابع کې د x پر ځای x− عوض کړو، د تابع په قیمت کې تغیر رانه شي.

2- د $f(x)$ تابع یوه طاقه تابع ده که چېرې $f(-x)=-f(x)$ وي یا دا چې که په تابع کې د

(c) ketabton.com: The Digital Library



x پر ځای x− عوض کړو، د تابع قیمت منفي شي.

لومړی مثال: د $f(x)=x^2$ او $f(x)=x^3$ په تابع ګانو کې کومه تابع جفته او کومه یوه طاقه ده؟

حل: په دواړو تابع ګانو کې د x پر ځای x − عوض کوو:

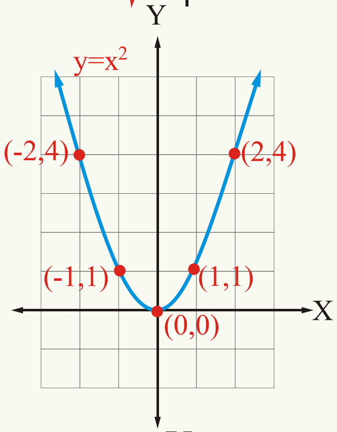
$$f(-x)=(-x)^3=(-x)(-x)(-x)=-x^3$$

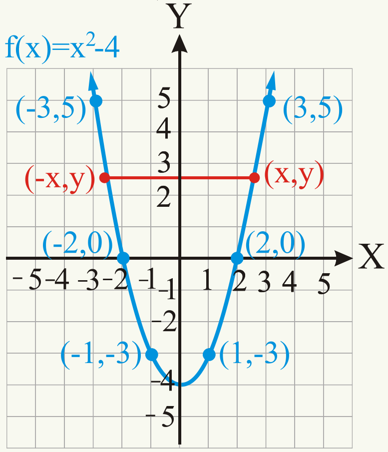
نو د $f(x)=x^3$ تابع یوه طاقه تابع ده، ځکه چې $f(-x)=-f(x)$ کېږي لکه: $f(-2)=-f(2)=-8$ او د $f(x)=x^2$ په تابع کې لرو چې:

$$f(-x)=(-x)^2=(-x)(-x)=x^2$$

نو $f(x)=x^2$ یو جفته تابع ده، ځکه چې $f(-x)=f(x)$ کېږي لکه: $f(-2)=f(2)=4$

لیدل کېږي چې د جفتو تابع ګانو ګرافونه نظر د Y محور ته او د طاقو تابع ګانو ګرافونه نظر د وضعیه کمیاتو مبدا ته سره متناظر دي.





دویم مثال: د $f(x)=x^2-4$ او $g(x)=x^2+3x+2$ په تابع ګانو کې کومه یوه جفته او کومه یوه طاقه ده؟

حل:

$$f(-x)=(-x)^2-4=x^2-4=f(x)$$

نو دا تابع جفته ده، په شکل کې هم لیدل کېږي، دوه نقطې د (3,5) او (−3,5) تابع د $x=3$ او $x=-3$ لپاره د تابع قیمت سره مساوي دی چې د (5) عدد دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

يعني: $f(-3)=f(3)=5$

همدارنګه د $x=2$ او $x=-2$ لپاره د تابع قيمت سره مساوي دی چې صفر دی، نو په نتيجه کې تابع جفته ده.

$$g(x)=(-x)^2+3(-x)+2=x^2-3x+2$$

چې دا تابع نه جفته او نه طاقه ده.

دریم مثال: که f له حقیقي عددونو څخه حقیقي عددونو ته یوه طاقه تابع وي او $f(-2)=k+5$ او $f(2)=2k+3$ وي، د k قیمت پیدا کړئ.

حل: څرنګه چې f یوه طاقه تابع ده، نو: $f(-x)=-f(x)$

د طاقې تابع د تعريف په اساس: $f(-2)=-f(2)$

$$k+5=-(2k+3)$$
$$k+5=-2k-3$$
$$3k=-8$$
$$k=-\frac{8}{3}$$

که د $f(x)$ په تابع کې $x_1<x_2$ وي او په نتيجه کې $f(x_1)<f(x_2)$ شي تابع متزايده او که $x_1<x_2$ وي او $f(x_1)>f(x_2)$ شي، تابع متناقصه ده که $f(-x)=f(x)$ وي تابع جفته او که $f(-x)=-f(x)$ شي تابع طاقه ده د جفتو تابع ګانو ګراف نظر د Y محور ته او د طاقو تابع ګانو ګراف نظر د وضعيه کمياتو مبدأ ته سره متناظر دي.

پوښتني

1- د لاندېنيو تابع ګانو څخه کومه يوه يې متزايده، کومه يوه يې متناقصه او کومه يوه نه متزايده او نه متناقصه ده؟

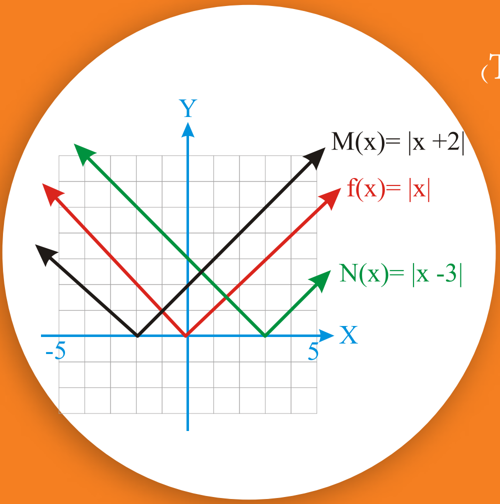
$$f(x)=x^2-x^4 \quad , \quad f(x)=x^2+x \quad , \quad f(x)=x^3+x$$

2- د لاندېنيو راکړل شوو تابع ګانو څخه کومه يوه جفته او کومه يوه طاقه ده؟

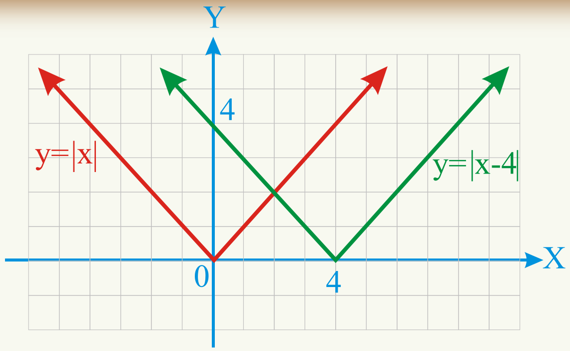
$$f(x)=|x| \quad , \quad f(x)=x$$
$$f(x)=x^5 \quad , \quad f(x)=x^4$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ګرافونو انتقال (Translation)



آیا کولای شئ چې وواییئ راکړل شوي ګرافونه
یو له بله سره څه اړیکه لري؟



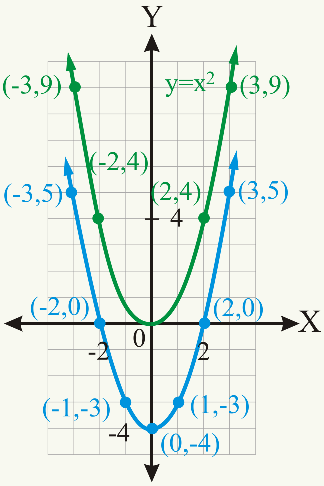
فعالیت

- د $f(x)=x^2$ تابع ګراف رسم کړئ.
- د $f(x)=x^2+4$ تابع ګراف رسم کړئ.
- د $f(x)=x^2-4$ تابع ګراف رسم کړئ.
- وواياست چې پورتني ګرافونه یو له بله سره څه ډول اړیکه لري؟

که د $f(x)=x^2$ ګراف رسم کړو، څنګه کولای شو د $f(x)=x^2$ د ګراف له انتقال څخه د $f(x)=x^2-4$ تابع ګراف رسم کړو؟

د $y=x^2$ د ګراف د (x,y) د هرې نقطې لپاره د $(x,y-4)$ اړونده نقطه د $y=x^2-4$ په ګراف واقع ده، نو د $y=x^2$ تابع ګراف هره نقطه د 4 واحدو په اندازه ښکته خواته انتقال کوي تر څو د $y=x^2-4$ ګراف لاس ته راشي، لکه: څنګه چې په شکل کې لیدل کیږي، دا انتقال

(c) ketabton.com: The Digital Library



د عمودي انتقال (Vertical Translation) په نوم يادېږي.

انتقال په دوه ډوله دی: عمودي انتقال او افقي انتقال.

1- **عمودي انتقال** (Vertical Translation):

عمودي انتقال پورته او یا ښکته خواته وي.

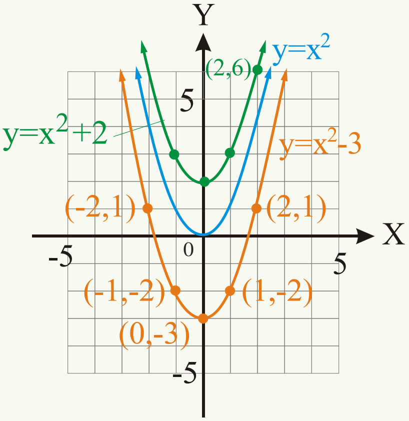
که $c>0$ وي:

1: که د $y=f(x)$ د تابع ګراف د c په اندازه پورته خواته انتقال شوی وي، نو د $y=f(x)+c$ ګراف لاس ته راځي.

2: که د $y=f(x)$ د تابع ګراف د c په اندازه ښکته خواته انتقال شوی وي، نو د $y=f(x)-c$ ګراف لاس ته راځي.

لومړی مثال: د $y=x^2+2$ او $y=x^2-3$ تابع ګانو ګرافونه د $y=x^2$ تابع له ګراف سره څرنګه اړیکه لري؟ درې واړه ګرافونه د وضعیه کمیاتو په عین سیستم کې رسم کړئ.

حل: د $y=x^2$ تابع ګراف د (2) واحدو په اندازه پورته خواته انتقالوو، ترڅو د $y=x^2+2$ د تابع ګراف په لاس راشي او که د $y=x^2$ تابع ګراف د (3) واحدو په اندازه ښکته خواته نقل کړو، د $y=x^2-3$ تابع ګراف لاس ته راځي:



x =	0	1	2	−1
$y=x^2$	0	1	4	1
$y=x^2+2$	2	3	6	3
$y=x^2-3$	−3	−2	1	−2

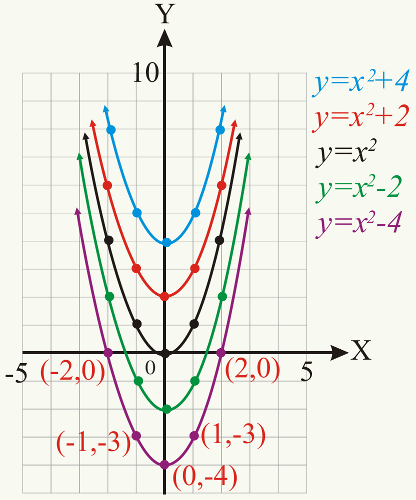
یا عمودي انتقال داسې هم تعریفولای شو:

که د تابع په ګراف کې د y پر ځای y − a وضع کړو داسې چې a یو ثابت عدد دی، نو ګراف د $|a|$ په اندازه په عمودي ډول انتقال کوي که $a>0$ وي، انتقال په عمودي ډول پورته خواته او که $a<0$ وي ګراف د $|a|$ په اندازه په عمودي ډول ښکته خواته انتقال کوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دويم مثال: د $y = x^2$ تابع ګراف له انتقاله څخه د $y = x^2 + 2$, $y = x^2 - 2$ ، $y = x^2 + 4$ او $y = x^2 - 4$ تابع ګانو ګرافونه د وضعيه کمياتو په عين سيستم کې رسم او يو له بله سره يې پرتله کړئ.

$y=x^2$		$y=x^2+2$		$y=x^2+4$		$y=x^2-2$		$y=x^2-4$	
x	y	x	y	x	y	x	y	x	y
0	0	0	2	0	4	0	−2	0	−4
±1	1	±1	3	±1	5	±1	−1	±1	−3
±2	4	±2	6	±2	8	±2	2	±2	0



افقي انتقال: (Horizontal Translation)

که د تابع په ګراف کې د x پر ځای $x - b$ وضع شي چې b يو ثابت عدد دی. د تابع ګراف د $|b|$ په اندازه په افقي ډول انتقال کوي، که $b > 0$ وي ګراف ښي خواته او که $b < 0$ وي، ګراف کيڼې خواته انتقال کوي.

دريم مثال: د $y = x^2$ ګرا ف له انتقال څخه د $y = (x+2)^2$ او $y = (x-3)^2$ ګرافونه رسم کړئ.

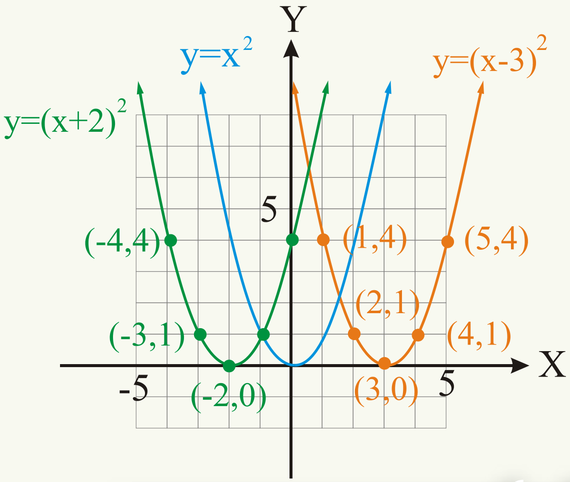
حل: لکه څنګه چې په شکل کې ليدل کيږي که د $y = x^2$ تابع ګراف د 2 واحدو په اندازه کيڼې

(c) ketabton.com: The Digital Library

خواته انتقال کړو، د $y=(x+2)^2$ ګراف لاس ته راځي، که د $y=x^2$ ګراف 3 واحده ښي خواته انتقال کړو، د $y=(x-3)^2$ د تابع ګراف لا س ته راځي، لکه: څنګه چې په شکل کې هم لیدل کېږي.

x	-2	0	-1	-3	-4	....
$y=(x+2)^2$	0	4	1	1	4	....

$x=$	3	4	2	5	1	....
$y=(x-3)^2$	0	1	1	4	4	....



فعالیت

د $f(x)=|x|$ تابع ګراف له انتقال څخه د $g(x)=|x+2|$ او $h(x)=|x-3|$ تابع ګانو ګرافونه د وضعیه کمیاتو په عین سیستم کې رسم کړئ.

د عمودي او افقي انتقالونو ترکیب:

(Combining Horizontal and Vertical Shifts)

څلورم مثال: د $g(x)=(x+1)^2$ او $h(x)=(x+1)^2-3$ د تابع ګانو ګرافونه رسم کړئ.

حل: لومړی د $f(x)=x^2$ تابع ګراف رسموو چې د دویمې درجې تابع د معیاري ګراف په نامه یادېږي لومړی د ګراف پر مخ د $(0,0)$ ، $(2,4)$ او $(-2,4)$ درې نقطې ټاکو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیا د $g(x)=(x+1)^2$ تابع گراف رسموو چې د $f(x)=x^2$ د تعریف له ساحې سره د (1) عدد جمع کوو، ترڅو چې د $f(x)=x^2$ گراف کیڼې خواته د یو واحد په اندازه نقل شي، په دویم شکل کې ښودل شوی دی. په پای کې د $f(x)=(x+1)^2-3$ تابع گراف د رسمولو لپاره د دویم شکل گراف د 3 واحدونو په اندازه په عمودي ډول ښکته خواته انتقالوو چې گراف یې په دریم شکل کې ښودل شوی دی:

$f(x)=x^2$

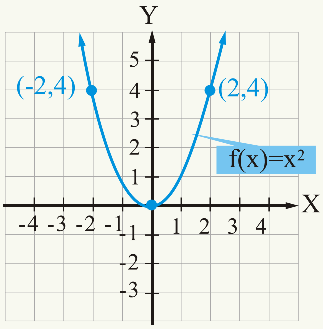
x	0	2	−2
f(x)	0	4	4

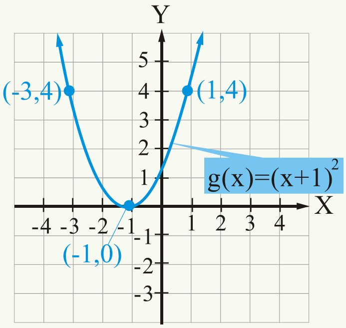
$g(x)=(x+1)^2$

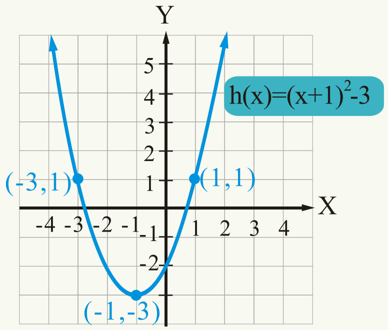
x	−1	1	−3
f(x)	0	4	4

$f(x)=(x+1)^2-3$

x	1	−3	−1
f(x)	1	1	−3

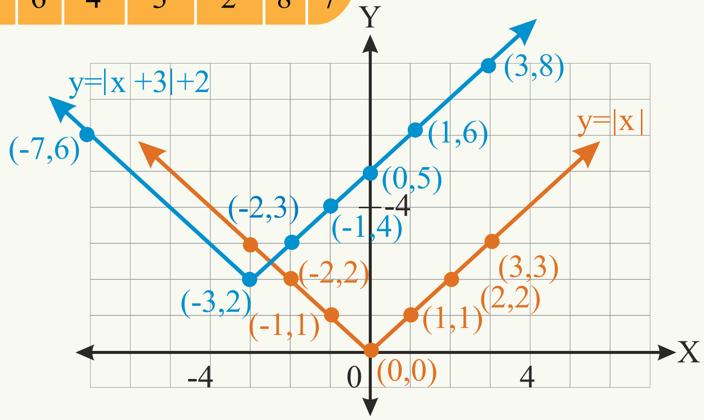






پنځم مثال: د $y=|x|$ تابع گراف له انتقال کولو څخه د $y=|x+3|+2$ تابع گراف رسم کړئ.

x	0	1	−1	−2	−3	3	2
$y=\|x\|$	0	1	1	2	3	3	2
$y=\|x+3\|+2$	5	6	4	3	2	8	7



(c) ketabton.com: The Digital Library

انتقال په (2) ډول دی، (عمودي او افقي)

عمودي انتقال: که c يو مثبت عدد وي.

1- که چېرې د $y = f(x)$ تابع ګراف د c واحدونو په اندازه په عمودي ډول پورته خواته انتقال شي، د $y = f(x) + c$ تابع ګراف لاس ته راځي.

2- که د $y = f(x)$ تابع ګراف د c واحدونو په اندازه په عمودي ډول ښکته خواته انتقال شي د $y = f(x) - c$ تابع ګراف لاس ته راځي.

افقي انتقال: که c يو مثبت عدد وي.

1- که د $y = f(x)$ تابع ګراف د c واحدونو په اندازه کيڼې خواته انتقال شي، د $y = f(x+c)$ ګراف لاس ته راځي.

2- که د $y = f(x)$ تابع ګراف د c واحدونو په اندازه ښي خواته انتقال شي، د $y = f(x-c)$ د تابع ګراف لاس ته راځي.

پوښتنې

1- د $y = x^2$ تابع ګراف له انتقال څخه د لاندېنيو تابع ګانو ګرافونه رسم کړئ.

$g(x) = x^2 - 2 \quad , \quad g(x) = x^2 - 1 \quad , \quad g(x) = (x-2)^2$

2- د $f(x) = \sqrt{x}$ تابع ګراف رسم کړئ او ددې له انتقال څخه د $f(x) = \sqrt{x} + 2$ او $f(x) = \sqrt{x+2}$ تابع ګانو ګرافونه رسم کړئ.

3- د $f(x) = |x|$ تابع ګراف رسم کړئ او ددې ګراف له انتقال څخه د $g(x) = |x| + 4$, $g(x) = |x+4|$ او $h(x) = |x-4|$ تابع ګانو ګرافونه رسم کړئ.

4- د $f(x) = x^3$ تابع ګراف له انتقال څخه د $g(x) = x^3 - 3$ او $g(x) = (x-3)^3$ تابع ګانو ګرافونه رسم کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x)=\sqrt{4-x}$$
$$g(x)=\sqrt{3+x}$$
$$(f+g)(x)=?$$

د تابع ګانو عمليې
(Operations on functions)

که $f(x)=x+2$ او $g(x)=2x+11$ وي $(f+g)(x)$ او $(f-g)(x)$ پيدا کولای شی؟

د تابع ګانو څلورګوني عمليې په لاندې ډول تعريف شوي دي:

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x) \qquad (f-g)(x)=f(x)-g(x)$$

$$(f\cdot g)(x)=f(x).\,g(x) \qquad (\frac{f}{g})(x)=\frac{f(x)}{g(x)} \qquad (g(x)\neq 0)$$

$$\text{dom}\,(f+g)(x)=\text{dom } f\cap \text{ dom}\,g$$
$$\text{dom}\,(f-g)(x)=\text{dom } f\cap \text{ dom}\,g$$
$$\text{dom}\,(f\cdot g)(x)=\text{dom } f\cap \text{ dom}\,g$$
$$\text{dom}\,(\frac{f}{g})(x)=\text{dom } f\cap \text{ dom}\,g - \{x/g(x)=0\}$$

لومړی مثال: که $f(x)=2x+1$ او $g(x)=x^2-4$ وي، $(f+g)(x)$ پيداکړئ او هم د دې تابع د تعريف ساحه په لاس راوړئ.

حل:

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$$
$$(f+g)(x)=(2x+1)+(x^2-4)=2x-3+x^2=x^2+2x-3$$
$$dom\ g=IR \quad \text{او} \quad dom\ f=IR$$
$$dom(f+g)(x)=IR\cap IR=IR$$

دويم مثال: که $f(x)=x^2-3$ او $g(x)=4x+5$ وي، $(f+g)(x)$ او $(f+g)(3)$ پيداکړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل:

$$(f+g)(x)=(x^2-3)+(4x+5)=x^2+4x+2$$

$$(f+g)(3)=3^2+4(3)+2=9+12+2=23$$

$$\text{dom } g=IR \quad \square \quad \text{dom } f=IR$$

$$\text{dom}(f+g)(x)=IR\cap IR=IR$$

فعالیت

که $f(x)=3x^2+4x-1$ او $g(x)=2x+7$ وي، $(f+g)(x)$ او $(f+g)(4)$ پیدا کړئ.

دریم مثال: که $f(x)=2x-1$ او $g(x)=x^2+x-2$ وي، $(f-g)(x)$ $(f\cdot g)(x)$ او $(\frac{f}{g})(x)$ پیدا کړئ او د تعریف ساحې یې هم وټاکئ.

حل

$$(f-g)(x)=(2x-1)-(x^2+x-2)=2x-1-x^2-x+2=-x^2+x+1$$

خرنگه چې $dom\ f=IR$ او $dom\ g=IR$

$$dom(f-g)(x)=IR\cap IR=IR$$

$$(f\cdot g)(x)=(2x-1)(x^2+x-2)=2x^3+x^2-5x+2$$

$$dom(f\cdot g)(x)=IR\cap IR=IR$$

$$(\frac{f}{g})(x)=\frac{2x-1}{x^2+x-2}=\frac{2x-1}{(x+2)(x-1)}$$

$$\text{dom}(\frac{f}{g})(x)=IR\cap IR-\{x/g(x)=0\}$$

$$\text{dom}(\frac{f}{g})(x)=\{x\in IR/x\neq -2 \text{ او } x\neq 1\}$$

فعالیت

که $f(x)=x-5$ او $g(x)=x^2-1$ وي، نو $(\frac{f}{g})(x)$ ، $(f\cdot g)(x)$ او $(f-g)(x)$ پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

څلورم مثال: که $f(x)=x+3$ او $g(x)=x-1$ وي، $(f-g)(x)$, $(f\cdot g)(x)$ او $(\frac{f}{g})(x)$ پیدا کړئ.

حل:

$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=x+3-(x-1)=x+3-x+1=4$$
$$(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)=(x+3)(x-1)=x^2+2x-3$$

څرنګه چې د $f(x)$ د تعریف په ساحه کې ټول حقیقي عددونه شامل دي (x هر حقیقي عدد اخیستلای شي) یا $dom\ f=IR$ په همدې ډول: $dom\ g=IR$

$$dom(f-g)(x)=IR\cap IR=IR$$
$$dom(f\cdot g)(x)=IR\cap IR=IR$$

$$(\frac{f}{g})(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{x+3}{x-1}\quad(x\neq 1)$$
$$dom(\frac{f}{g})(x)=IR-\{1\}$$

یا
$$dom(\frac{f}{g})(x)=\{x\in IR/x\neq 1\}$$

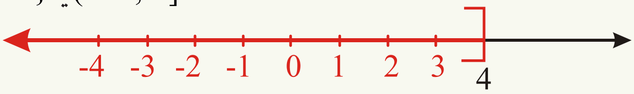
یا
$$dom(\frac{f}{g})(x)=(-\infty,1)\cup(1,\infty)$$

پنځم مثال: که $f(x)=\sqrt{4-x}$ او $g(x)=\sqrt{3+x}$ وي، $f+g$, $f-g$ $f\cdot g$ او $\frac{f}{g}$ پیدا کړئ او د تعریف ناحیه (Domain) یې وټاکئ.

حل:

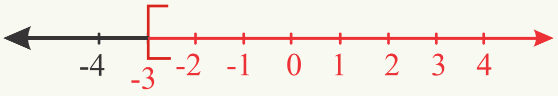
$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=\sqrt{4-x}+\sqrt{3+x}$$
$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=\sqrt{4-x}-\sqrt{3+x}$$
$$(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)=(\sqrt{4-x})(\sqrt{3+x})=\sqrt{(4-x)(3+x)}$$
$$=\sqrt{12+x-x^2}$$
$$(\frac{f}{g})(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\sqrt{4-x}}{\sqrt{3+x}}=\sqrt{\frac{4-x}{3+x}}$$

$dom\,f:\{4-x\geq 0\ ,\ x\leq 4\}$ یا $(-\infty\ ,\ 4]$



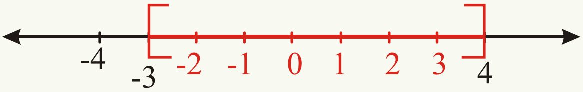
(c) ketabton.com: The Digital Library

$\mathrm{dom}\, g : \{x / 3 + x \geq 0 , x \geq -3\}$ یا $[-3 , \infty)$

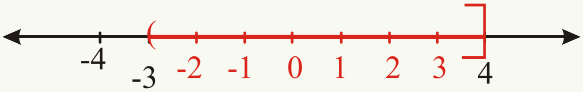


$(-\infty , 4] \cap [-3 , \infty) = [-3 , 4]$

چې $[-3,4]$ د $f+g$, $f-g$ او $f \cdot g$ د تابع ګانو د تعریف ساحه ده.



د $dom\dfrac{f}{g}$ د تعریف په ناحیه کې خرنګه چې $g(-3) = 0$ دی، نو: $Dom\dfrac{f}{g} = (-3 , 4]$



له ثابت عدد سره د تابع د ضرب حاصل

که c یو ثابت عدد او f یوه تابع وي، نو حاصل ضرب یې عبارت دی له:

$(c\,f)(x) = c \cdot f(x)$

شپږم مثال: که $f(x) = x^2 - x + 2$ او $c = 5$ وي.

$(5\ f)(x) = 5 \cdot f(x) = 5(x^3 - x + 2) = 5x^3 - 5x + 10$

پوښتني

لاندې تابع ګانې په پام کې ونیسئ .

1 - $(f+g)(x)$, $(f-g)(x)$, $(f \cdot g)(x)$ او $(\dfrac{f}{g})x$ پیدا کړئ.

2- د تعریف ناحیې یې وټاکئ.

$a : f(x) = 2x + 3$ ، $g(x) = x - 1$ ، $b : f(x) = x - 5$ ، $g(x) = 3x^2$

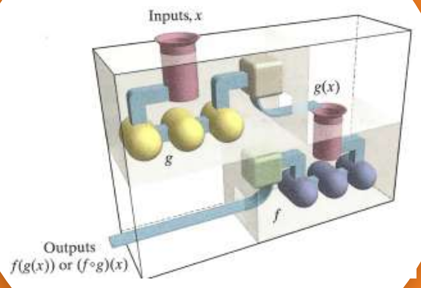
$c : f(x) = 2x^2 - x - 3$ ، $g(x) = x + 1$ ، $d : f(x) = \sqrt{x}$ ، $g(x) = x - 5$

$e : f(x) = \sqrt{x+4}$ ، $g(x) = \sqrt{x-1}$ ، $f : f(x) = \sqrt{3x}$ ، $g(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د تابع ګانو ترکیب یا مرکبي تابع ګاني

composition of functions or composite functions



فعالیت

- که $f(x)=x^2-2$ او $g(x)=x+3$ وي، $(f\,o\,g)(x)$ او $(g\,o\,f)(x)$ پیداکړئ.
- په کوم حالت کې $(f\,o\,g)(x)=(g\,o\,f)(x)$ وي.
- $(f\,o\,f)(x)$ او $(g\,o\,g)(x)$ پیداکړئ.

که چېرې f او g د x تابع ګانې وي د f ترکیب له g سره د $(f\,o\,g)(x)$ یا $f(g(x))$ سره ښودل کېږي $(f\,o\,g)(x)=f(g(x))=f[g(x)]$

د $(f\,o\,g)(x)$ د تعریف ساحه عبارت له x څخه ده چې x د g د تعریف په ساحه کې او $g(x)$ د f د تعریف په ساحه کې شامل وي.

یا: د (f o g) تعریف ساحه: $\text{Dom}(fog)x=\{x\in IR\,/\,x\in \text{dom}\,g\,,g(x)\in \text{dom}\,f\}$

1- چې x د g د تعریف په ساحه کې شامل وي.

2- $g(x)$ د f د تعریف په ساحه کې شامل وي.

په پورتني شکل کې $(f\,o\,g)(x)$ تابع د دوو ماشینو په واسطه ښودل شوې ده چې په لومړی ماشین کې ورودي x ، (in put) دی او خروجي (output) یې g(x) ده، په دویم ماشین کې (input) یې $g(x)$ او (output) یې $(fog)(x)$ دی. که g(x) د f د تعریف په ساحه کې شامل نه وي، نو په دویم ماشین (f) کې داخلېدلای نه شي.

$$x\xrightarrow{g}\boxed{g(x)}\xrightarrow{f}f(g(x))$$

$$x\xrightarrow{f}\boxed{f(x)}\xrightarrow{g}g(f(x))$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی مثال: که $f(x)=x^2-1$ او $g(x)=3x$ وي $(f o g)(x)$ او $(g o f)(x)$ پیدا کړئ.

حل:

$$(f o g)(x)=f(g(x))=f(3x)=(3x)^2-1=9x^2-1$$
$$(g o f)(x)=g((f(x))=g(x^2-1)=3(x^2-1)=3x^2-3$$

لیدل کیږي چې:

$$(f o g)(x)\neq(g o f)(x)$$
$$9x^2-1\neq 3x^2-3$$

دویم مثال: که $f(x)=3x-4$ او $g(x)=x^2+6$ وي $(f o g)(x)$ او $(g o f)(x)$ پیدا کړئ.

حل: په حقیقت کې په $(f o g)(x)$ کې د $g(x)$ تابع د f په تابع کې د (Domain) یا x ځای نیسي

$$f(g(x))=f(x^2+6)=3(x^2+6)-4=3x^2+18-4=3x^2+14$$
$$g(f(x))=(g o f)(x)=g(3x-4)=(3x-4)^2+6=9x^2-24x+22$$

ښکاره خبره ده چې د $(f o g)(x)$ او $(g o f)(x)$ د تعریف ساحه ټول حقیقي عددونه دي.

فعالیت

که $f(x)=x+6$ او $g(x)=x-6$ وي، وښیاست چې $(f o g)(x)=(g o f)(x)$ دی.

دریم مثال: که $g(x)=1-x$ او $f(x)=\sqrt{x}$ وي:

لومړی د fog او gof د تعریف ساحې پیدا کړئ، بیا $f o g$ او gof په لاس راوړئ.

حل: د f تابع د تعریف ساحه $[0\,,\,\infty)$ او د g تابع د تعریف ساحه ټول حقیقي عددونه $(-\infty,\infty)$ دي.

یا: $\text{Domf}=[0,\infty)$ $\qquad$ $\text{Domg}=(-\infty,\infty)$

یا: $\text{Dom}(fog)=\{x/x\in \text{domg}\ ,\ g(x)\in \text{domf}\}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

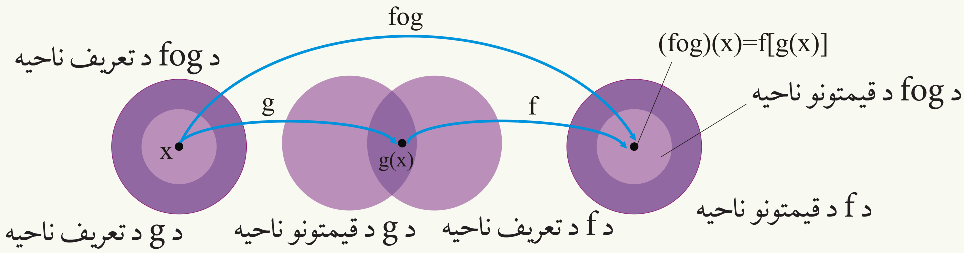
$$Dom(fog)=\{x/x\in IR\ ,\ 1-x\geq 0\}\ ,\ -x\geq -1\Rightarrow\ x\leq 1=(-\infty,1]$$

$$Dom\ (g\,o\,f)=\{x/x\in dom\,f\,,f(x)\in dom\,g\}=\{x/x\geq 0\,,\sqrt{x}\in IR\}=(0,\infty]$$

$$(f\,o\,g)(x)=f(1-x)=\sqrt{1-x}$$

$$(g\,o\,f)(x)=g(\sqrt{x})=1-\sqrt{x}$$

د مرکبو تابع گانو د تعریف د ساحې د لا روښانتیا لپاره لاندې شکل وگورئ.



خلورم مثال: که $h(x)=\sqrt{3x^2+1}$ وي، په دوو طریقو سره وښیاست چې د $h(x)$ تابع د کومو دوو تابع گانو له ترکیب څخه په لاس راغلې ده؟

حل: د $h(x)$ تابع کولای شو د $(g\,o\,f)(x)$ او $(j\,o\,k)(x)$ دوو تابع گانو د ترکیب په شکل ولیکو.

په دې ډول که: $f(x)=3x^2+1$ او $g(x)=\sqrt{x}$ وي.

$$(g\,o\,f)(x)=g\big(f(x)\big)=g(3x^2+1)=\sqrt{3x^2+1}$$

په همدې ډول کولای شو د $h(x)$ تابع د $(j\,o\,k)(x)$ د دوو تابع گانو د ترکیب په شکل ولیکو. په دې ډول چې: $j(x)=\sqrt{x+1}$ او $k(x)=3x^2$ وي.

$$(j\,o\,k)(x)=j\big(k(x)\big)=j(3x^2)=\sqrt{3x^2+1}$$

پنځم مثال: که $f(x)=\dfrac{x}{x+2}$ ، $(x\neq -2)$ وي، $f(f(x))$ ، $(f\,o\,f)(2)$ او $(f\,o\,f\,o\,f)(x)$ پیدا کړئ.

حل:

$$(f\,o\,f)(x)=\frac{\frac{x}{x+2}}{\frac{x}{x+2}+2}=\frac{\frac{x}{x+2}}{\frac{x+2x+4}{x+2}}=\frac{x}{x+2}\cdot\frac{x+2}{3x+4}=\frac{x}{3x+4}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(fof)(2)=?\quad (fof)(x)=\frac{x}{3x+4}\Rightarrow (fof)(2)=\frac{2}{3\cdot 2+4}=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$$

$$(fofof)(x)=\frac{\frac{x}{x+2}}{3(\frac{x}{x+2})+4}=\frac{\frac{x}{x+2}}{\frac{3x}{x+2}+4}=\frac{\frac{x}{x+2}}{\frac{3x+4x+8}{x+2}}$$

$$=\frac{x}{x+2}\cdot\frac{x+2}{7x+8}=\frac{x}{7x+8}$$

فعالیت

که $f(x)=x^2-2$ او $g(x)=x+3$ وي، $(f\,o\,g)(x)$ ، $(g\,o\,f)(x)$ ، $(g\,o\,f)(-2)$ او $(fog)(3)$ پیداکړئ.

پوښتني

1- که $f(x)=-3x+2$ او $g(x)=x^3$ وي:

$(f+g)(x)\,,(f-g)(x)\,,(g-f)(x)\,,(f\cdot g)(x)\,,\ (\frac{g}{f})(x)$ پیدا او د تعریف ساحې یې هم وټاکئ.

2- که $f(x)=x^2-3$ او $g(x)=\sqrt{x-3}$ وي، $(f\cdot g)(x)\,,(\frac{f}{g})(x)$ او $(\frac{g}{f})(x)$ پیدا کړئ.

3- که $f(x)=x^2+1\,,\ g(x)=\frac{1}{x}\ ,$ $h(x)=\sqrt{4-x^2}$ او $k(x)=\sqrt{3x+4}$ وي، د $(f\cdot g)(x)\ ,\ (\frac{f}{g})(x)\,,(h\cdot k)(x)$ او $(\frac{h}{k})(x)$ تابع گانو د تعریف ساحې پیداکړئ.

4- که $f(x)=3x-2\ ,\ g(x)=x^2$ وي $(g\,o\,f)(3)$ او $(f\,o\,g)(1)$ پیداکړئ.

5- که $f(x)=\sqrt{x}$ او $g(x)=\sqrt{2-x}$ وي، $f\,o\,g\quad g\,o\,f$ او $f\,o\,f$ پیداکړئ.

6- که $f(x)=\frac{x}{x+1}\ ,\ g(x)=x^{10}$ او $h(x)=x+3$ وي $(f\,o\,goh)(x)$ پیداکړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

معکوسه تابع (Inverse Function)

فعالیت

- په شکل کې د دواړو تابع ګانو ترمنځ کومه اړیکه شتون لري؟
- آیا د هرې تابع معکوس، هم یوه تابع وي؟
- که د یوې تابع معکوس هم یوه تابع وي، داسې تابع په څه نامه یادیږي؟
- که $f=\{(1,2)(3,5)(6,7)\}$ او $g=\{(2,1)(5,3)(7,6)\}$ وي آیا د g تابع د f معکوسه تابع ده او که نه؟ ولې؟
- که $(f\,o\,g)(x)=(g\,o\,f)(x)$ وي، آیا د g او f تابع معکوسه تابع ده؟

په پورتني شکل کې یو ترمامیتر لیدل کېږي او پوهېږو چې د سانتي ګرېډ او فارنهایټ د تودوخې د درجو ترمنځ د $f=\frac{9}{5}c+32$ اړیکه شته دی، که دا معادله د (c) له پاره حل شي لرو چې:

$$f=\frac{9}{5}c+32 \Rightarrow f-32=\frac{9}{5}c+32-32$$

$$\Rightarrow \frac{5}{9}(f-32)=\frac{5}{9}(\frac{9}{5}c)$$

$$c=\frac{5}{9}(f-32)$$

د c تابع د f معکوسه تابع ده.

د (x,y) رابطې معکوس له (y,x) څخه عبارت ده چې د معکوسې تابع د تعریف ساحه د تابع

(c) ketabton.com: The Digital Library

د قیمتونو د ساحې او د معکوسې تابع د قیمتونو ساحه، د تابع د تعریف له ساحې څخه عبارت ده.

$Range\, f^{-1} = dom\, f$ او $domain\, f^{-1} = Range\, f$

د f د تابع معکوس په f^{-1} ښودل کېږي، پام مو وي چې: $(f^{-1}(x) \neq \frac{1}{f(x)}$

لومړی مثال: که $f(x) = \{(1,5)(3,7)(8,-10)\}$ وي.

نو $\{(5,1)(7,3)(-10,8)\} = f^{-1}(x)$ ده. ځکه چې:

$$f(3) = 7 \qquad f^{-1}(7) = 3$$
$$f(1) = 5 \qquad f^{-1}(5) = 1$$
$$f(8) = -10 \qquad f^{-1}(-10) = 8$$

نو $f^{-1}(x)$ هم یوه تابع ده.

خو که $f(x) = \{(1,2)(3,2)(4,5)\}$ وي، $f^{-1}(x) = \{(2,1)(2,3)(5,4)\}$ ده.

لیدل کېږي چې $f^{-1}(x)$ یوه تابع نه ده، ځکه د $x = 2$ لپاره دوه مختلف تصویرونه په (Range) کې وجود لري. $f(2) = 1$ او $f(2) = 3$.

نو د هرې تابع معکوس یوه تابع نه وي، یا په بل عبارت هره تابع معکوس منونکې نه وي.

څه وخت چې یوه تابع د مرتبو جوړو په شکل راکړل شوې وي، که د لومړیو او دویمو عناصر ځایونه یې یو تر بله تبدیل کړو، هغه رابطه چې لاسته راځي، د لومړنی تابع معکوسه ده، هغه تابع چې معکوس یې هم تابع وي، نو تابع معکوس منونکې ده.

دویم مثال: آیا د f او g تابع ګانې چې په لاندې ډول د مرتبو جوړو په شکل راکړل شوي دي معکوس منونکې دي که نه؟

$$f = \{(1,2), (-2,3), (3,1), (0,-1)\} \quad g = \{(2,4), (3,1), (0,2), (5,1)\}$$

حل: که د مرتبو جوړو د لومړنیو او دویمو عناصرو ځایونه یو تر بله تبدیل شي، نو لرو چې:

$$f^{-1} = \{(2,1), (3,-2), (1,3), (-1,0)\}$$

لیدل کېږي چې f^{-1} یا د f تابع معکوس هم یوه تابع ده، ځکه چې د f^{-1} د مرتبو جوړو لومړنی عناصر تکرار شوي نه دي. او $g^{-1} = \{(4,2), (1,3), (2,0), (1,5)\}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لیدل کېږي چې g^{-1} یا د $g(x)$ معکوس تابع نه ده، ځکه د $x=1$ لپاره دوه قیمتونه د 3 او 5 وجود لري، نو د g تابع معکوس منونکی تابع نه ده.

په لنډ ډول څرنګه چې f یو په یو تابع ده، نو معکوس منونکي هم ده او د g تابع چې یو په یو تابع نه ده، نو معکوس منونکي هم نه ده.

نتیجه: یوازې د یو په یو تابع معکوس هم یوه تابع وي.

یو په یو تابع (one-to-one function)

د $f(x)$ تابع یوه یو په یو تابع ده که چېرې $x_1 \neq x_2$ وي او په نتیجه کې $f(x_1) \neq f(x_2)$ شي.

یا : $a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)$ او که $a = b \Rightarrow f(a) = f(b)$

که یوه تابع یو په یو وي، نو معکوس یې هم یوه تابع ده.

دریم مثال: که $f(x) = -4x+12$ او $g(x)=\sqrt{25-x^2}$ وي، وښیاست چې کومه یوه له دې تابع ګانو څخه یو په یو تابع ده؟

حل:که $a \neq b$ وي، $-4a+12 \neq -4b+12$ دی.

نو $f(x)$ یوه یو په یوتابع ده.

د مثال په ډول: که $x=2$ وي:

$$f(2) = -4(2)+12 = -8+12 = 4$$

که $x=3$ وي:

$$f(3) = -4(3)+12 = -12+12 = 0$$

$$a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)$$

$$2 \neq 3 \Rightarrow 4 \neq 0$$

نو $f(x)$ یو په یو تابع ده. او $g(x)=\sqrt{25-x^2}$ لپاره:

که $x=3$ وي.

$$g(3) = \sqrt{25-9} = \sqrt{16} = 4$$

که $x=-3$ وي.

$$g(-3) = \sqrt{25-9} = \sqrt{16} = 4$$

$f(3)=f(-3)$ لېکن $3 \neq -3$ نو $g(x)$ یو په یو تابع نه ده.

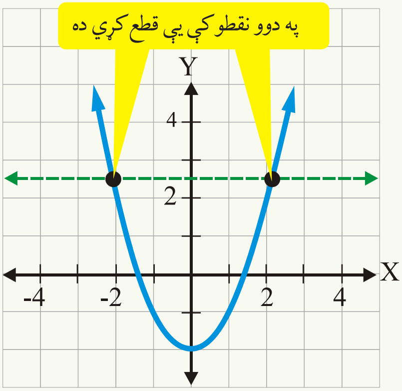
فعالیت

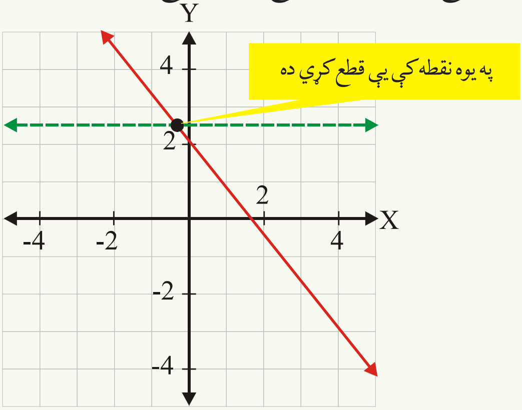
که $f(x)=3x+8$ او $g(x)=x^2$ وي، وښیاست چې کومه یوه تابع یو په یو تابع ده او کومه یوه تابع یو په یو تابع نه ده؟ ولې؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ګراف له مخې د يو په يو تابع پېژندنه: که يو افقي خط چې د x له محور سره موازي وي د تابع ګراف په يوه نقطه کې قطع کړي، دا يو په يو تابع ده، که افقي خط د تابع ګراف له يوې نقطې څخه په زياتو نقطو کې قطع کړي، نو دا ګراف د يو په يو تابع ګراف نه دی.

ځلورم مثال: په راکړل شوو شکلونو کې ليدل کېږي چې د x له محور سره موازي خط لومړنی تابع ګراف په يوه نقطه کې او د دويمي تابع ګراف يې په دوو نقطو کې قطع کړی دی، نو لومړنی تابع يو په يو تابع ده، خو دويمه تابع يو په يو تابع نه ده.





د معکوسې تابع تعريف: که f يوه يو په يو تابع وي چې د تعريف ساحه يې x او د قيمتونو ساحه يې y ده، نو د g تابع د f د تابع معکوسه تابع ده، که د g د تعريف ساحه y او د قيمتونو ساحه يې x وي او يا د g تابع په هغه صورت کې د f د تابع معکوسه ده که چېرې:

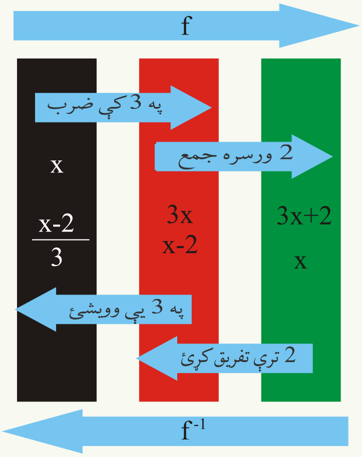
$$(f \circ g)(x) = x$$
$$(g \circ f)(x) = x$$
$$(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) = x$$

پنځم مثال: که $f(x) = 3x + 2$ وي، د $f(x)$ د تابع معکوسه تابع $f^{-1}(x)$ پيدا کړئ.

حل:

$$y = f(x) = 3x + 2$$
$$x = 3y + 2$$
$$3y = x - 2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$y=\frac{x-2}{3}$$

$$f^{-1}(x)=\frac{x-2}{3}=\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}$$

$$f(f^{-1}(x))=f^{-1}(f(x))=x$$

دا مثال په لنډ ډول په شکل کې هم ښودل شوی دی.

له بلې خواکه $f^{-1}(x)$ په $g(x)=\frac{x-2}{3}$ سره وښودل شي، $(f\,o\,g)(x)=(g\,o\,f)(x)=x$ دی.

ځکه چې:

$$(f\,o\,g)(x)=3(\frac{x-2}{3})+2=x-2+2=x$$

$$(g\,o\,f)(x)=\frac{3x+2-2}{3}=\frac{3x}{3}=x$$

يا: $f^{-1}(f(x))=x$ او $f(f^{-1}(x))=x$

شپږم مثال: که $f(x)=x^3+1$ وي $f^{-1}(x)$ او که $g(x)=x^2$ وي $g^{-1}(x)$ پيدا کړئ.

حل:

$$y=x^3+1$$

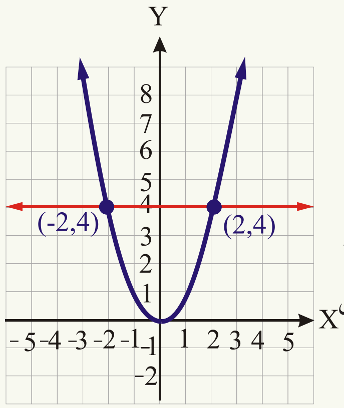
$$x=y^3+1 \qquad \Rightarrow y^3=x-1 \Rightarrow y=\sqrt[3]{x-1}$$

که y په $f^{-1}(x)$ سره وښيو، نو $f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x-1}$

$$g(x)=x^2 \Rightarrow y=x^2 \Rightarrow x=\pm\sqrt{y}$$

x پر y او y پر x بدلوو.

$$y=\pm\sqrt{x} \quad \text{يا} \quad g^{-1}(x)=\pm\sqrt{x}$$



ليدل کېږي چې $g^{-1}(x)$ يوه تابع نه ده، ځکه چې که $x=2$ او يا $x=-2$ وي، $g(-2)=4$ او $g(2)=4$ کېږي شکل وګورئ نو د g(x) تابع معکوس پذيره نه ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

اووم مثال: د x د کوم قيمت لپاره د $f(x)=5x-2$ تابع له خپل معکوس سره مساوي کېږي؟

حل: که $y=5x-2$ وي، نو معکوس يې

$$x=5y-2 \Rightarrow \qquad 5y=x+2$$

$$y=\frac{x+2}{5} \qquad f^{-1}(x)=\frac{x+2}{5}$$

$$\frac{x+2}{5}=5x-2 \Rightarrow \qquad 24x=12$$

$$x=\frac{1}{2}$$

نو د $x=\frac{1}{2}$ په قيمت سره د $f(x)$ تابع له خپلې معکوسې تابع سره مساوي کېږي.

اتم مثال: وښياست چې د $f(x)=7x-2$ او $g(x)=\frac{1}{7}x+\frac{2}{7}$ تابعگاني يو د بل معکوسې تابع گاني دي.

حل:

$$(f\,o\,g)(x)=f(g(x))=f(\frac{1}{7}x+\frac{2}{7})=7(\frac{1}{7}x+\frac{2}{7})-2=x$$

$$(g\,o\,f)(x)=f(g(x))=g(7x-2)=\frac{1}{7}(7x-2)+\frac{2}{7}=x$$

نو د $f(x)$ او $g(x)$ تابع گانې يو د بل معکوسې تابعگاني دي، نو نتيجه کېږي چې د تابع او د تابع د معکوسې تابع ترکيب د عينيت $(f(x)=x)$ تابع ده.

فعاليت

که $f(x)=\frac{2x+1}{x-2}$ وي، $f^{-1}(x)$ پيدا کړئ او هم وښياست چې $(f\,o\,f^{-1})(x)=x$ کېږي.

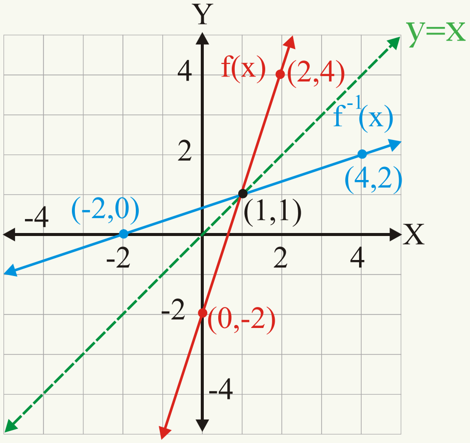
د تابع او دهغې د معکوسې تابع گراف: د $f(x)$ د يو په يو تابع او د هغې د معکوسی تابع $f^{-1}(x)$ د گرافونو ترمنځ يوه رابطه موجوده ده، ځکه که چېرې (a,b) د $f(x)$ تابع د گراف پر مخ يوه نقطه وي، نو د (b,a) نقطه د $f^{-1}(x)$ تابع د گراف پرمخ واقع ده چې (a,b) او (b,a) نقطې له نظره د $y=x$ خط ته سره متناظرې دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

نهم مثال: که $f(x)=3x-2$ وي، نو ښکاره ده چې $f^{-1}(x)=\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$ د $f(x)$ معکوسه تابع ده. د دواړو تابع ګانو ګرافونه د وضعیه کمیاتو په عین سیستم کې رسم او یو له بله سره یې پرتله کړئ چې ګرافونه نظر د $y=x$ خط ته سره متناظر دي.

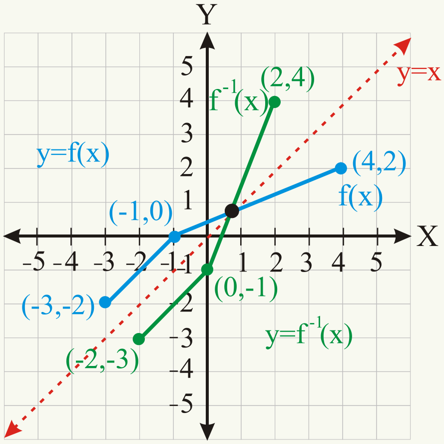
x	0	1	2
$f(x)$	-2	1	4

x	-2	1	4
$f^{-1}(x)$	0	1	2



لیدل کېږي چې د دواړو تابع ګانو ګرافونه نظر د $y=x$ خط ته سره متناظر دي.

لسم مثال: که $f(x)$ د $(-3,-2),(-1,0)$ او $(4,2)$ مرتبو جوړو لرونکي وي د $f(x)$ او $f^{-1}(x)$ د تابع ګانو ګرافونه د وضعیه کمیاتو په عین سیستم کې رسم کړي او وښیاست چې دواړه ګرافونه نظر د $y=x$ خط ته سره متناظر دي.



(c) ketabton.com: The Digital Library

ليدل كېږي چې د f (x) او $f^{-1}(x)$ تابع ګانو ګرافونه نظر د y=x خط ته سره متناظر دي.

- د یو په یو تابع معکوس هم یوه تابع ده.
- د X له محور سره موازي خط (افقي خط) د یو په یو تابع ګراف په یوه نقطه کې قطع کوي.
- د $y = f(x)$ تابع د معکوس د پیدا کولو لپاره د تابع معادله د x لپاره حلوو، بیا x پر y او y پر x بدلوو په لاس راغلې تابع $y = f^{-1}(x)$ ده چې د $f(x)$ د تابع معکوسه تابع ده.
- د $f(x)$ د تابع او د $f(x)$ د معکوسې تابع ګرافونه نظر د $y = x$ خط ته سره متناظر دي.
- $dom\, f(x) = Range\, f^{-1}(x)$ او $Range\, f(x) = dom\, f^{-1}(x)$ دي.

پوښتنې

1- د لاندېنیو تابع ګانو معکوس پیدا کړئ او ووایئ چې د کومې تابع معکوس هم یوه تابع ده؟

$$f = \{(-1,0),(-2,1),(4,3),(3,4)\} \quad h = \{(1,4),(2,3),(4,1)\}$$
$$g = \{(1,2),(2,3),(3,2),(4,1)\} \quad k = \{(3,0),(2,-1),(1,2),(0,1),(-1,2)\}$$

2 – د لاندېنیو هرې یوې تابع معکوسه تابع پیدا کړئ او د خپل ځواب صحت د $f(f^{-1}(x)) = x$ سره وازمایئ.

$$f(x) = 2x+3 \qquad f(x) = 2x \qquad f(x) = x+3$$
$$f(x) = \frac{1}{x} \qquad f(x) = (x+2)^3 \qquad f(x) = x^3+2$$

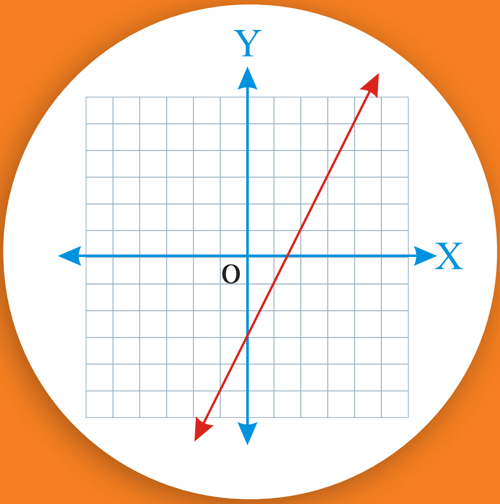
3 – د لاندېنیو تابع ګانو ګرافونه رسم کړئ او د X له محور سره د موازي خط (افقي خط) په واسطه وښیاست چې ددوی معکوس هم یوه تابع ده.

$$g(x) = \frac{7-2x}{5} \qquad f(x) = 1-x^2$$

4 – له لاندېنیو تابع ګانو څخه کومه یوه یو په یو تابع ده.

$$y = \frac{1}{x+2} \qquad y = 9 \qquad y = (x-2)^2 \qquad y = 6-x \qquad y = 4x-5$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



پولینومي تابع ګانې

- آیا پوهیږئ چې لومړۍ درجې تابع ته ولې خطي تابع وایي؟
- آیا د لومړۍ درجې تابع ګراف یو مستقیم خط دی؟

پولینومونه مو په لومړي فصل کې تر څېړنې لاندې ونیول. هغه پولینوم چې له یوه توري (متحول) څخه جوړ شوې وي د پولینومي تابع په نامه یادېږي.

خطي تابع (Liner function) یا لومړۍ درجه تابع

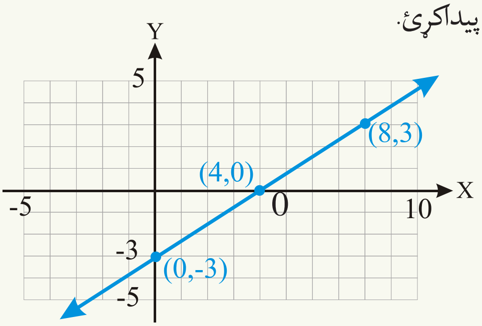
هغه پولینومي تابع ده چې درجه یې یوه وي، د لومړۍ درجې تابع عمومي شکل $f(x)=ax+b$ دی چې $a\neq 0$ او b , a حقیقي عددونه دي.

د مثال په ډول: $f(x)=3x+4$, $f(x)=x-1$, $f(x)=2x$ او $f(x)=\frac{1}{2}x$ خطي تابع ګانې دي.

لومړی مثال: د $f(x)=\frac{3}{4}x-3$ تابع ګراف رسم کړئ او د X او Y له محورونو سره د ګراف د تقاطع نقطې پیداکړئ.

$$f(x)=\frac{3}{4}x-3$$

x =	8	4	0
f(x)	3	0	−3



د X له محور سره د ګراف د تقاطع نقطه (4 ,0) او د Y له محور سره د ګراف د تقاطع نقطه (0,−3) ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ليدل کېږي چې د لومړۍ درجې تابع ګراف يو مستقيم خط دی او له همدې سببه ورته خطي تابع هم وايي، د خطي تابع د ګراف د رسمولو لپاره همدومره کافي ده چې د X او Y له محورونو سره يې د تقاطع ټکي پيدا کړو او مستقيم خط رسم کړو، لکه: چې په شکل کې ليدل کېږي.

فعاليت

د $y = f(x) = x + 1$ او $y = x - 1$ تابع ګانو ګراف رسم او د X او Y له محورنو سره يې د تقاطع د نقطو وضعيه کميات هم پيدا کړئ.

دويم مثال: د $f(x) = \frac{2}{3}x + 2$ خطي تابع ګراف رسم کړئ.

حل: د Y له محور سره د ګراف د تقاطع په نقطه کې (x = 0) دی، نو:

$$f(0) = \frac{2}{3}(0) + 2 = 2$$

نو د Y له محور سره د ګراف د تقاطع نقطه (0 ,2) ده.

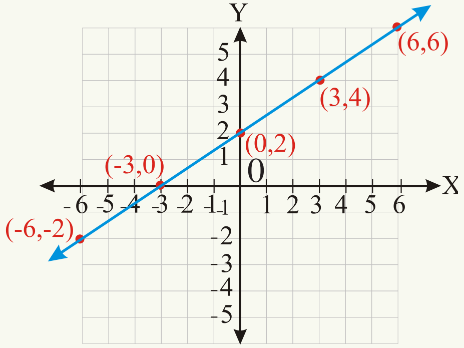
او د X له محور سره د ګراف د تقاطع په نقطه کې د y يا f (x) قيمت صفر دی $f(x) = 0$

$$0 = \frac{2}{3}x + 2 \Rightarrow x = -3$$

نو د X له محور سره د ګراف د تقاطع ټکی $(-3, 0)$ دی.

د (0 , 2) او (0 , 3−) نقطې يو له بله سره نښلوو او مستقيم خط رسموو او هم کولای شو چې د ګراف يو څو نورې نقطې وټاکو چې پر همدې مستقيم خط باندې پرتې دي.

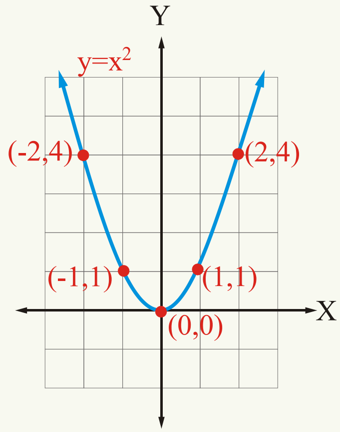
x =	0	3	−3	6	−6	...
f(x) =	2	4	0	6	−2	...

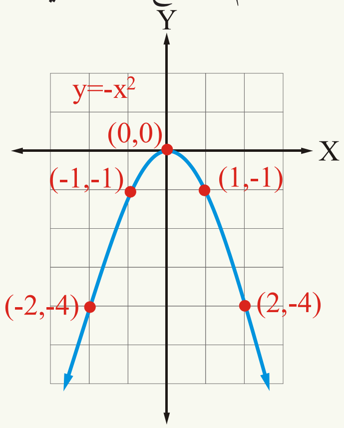


(c) ketabton.com: The Digital Library

دويمه درجه تابع (Quadratic Function) او ګراف يې:

دا ګرافونه د کوم ډول تابع ګرافونه دي؟





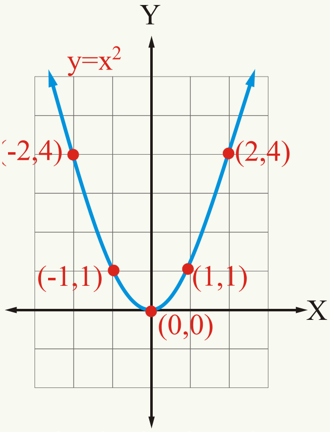
- دا دواړه ګرافونه سره څه توپير لري؟
- له $k(x)=x^2 , h(x)=x^2+3x , g(x)=x^2+1 , f(x)=x^2+7x+12$ او $r(x)=2x-1$ څخه کومه يوه يې دويمه درجه تابع نه ده؟

هغه پولينومي تابع چې درجه يې يوه وي، لومړۍ درجه يا د خطي تابع (Liner Function) په نامه ياديږي او که د پولينومي تابع درجه (2) وي، د دويمې درجې تابع په نوم ياديږي.

فعاليت

- د دويمې درجې تابع ګراف په کوم نوم ياديږي؟
- د دويمې درجې تابع د ګراف د تناظر محور کوم خط دی؟
- د دويمې درجې تابع ګراف څه وخت پورته خواته او کوم وخت ښکته خواته خلاصيږي؟
- د دويمې درجې تابع د ګراف رأس په کوم وخت کې اصغري (Minimum) او په کوم وخت کې اعظمي (Maximum) دی؟
- آيا د دويمې درجې تابع ګراف د رأس د نقطې وضعيه کميات پيدا کولای شي؟
- په کوم حالت کې د دويمې درجې تابع ګراف د X او Y محورونه قطع کولای شي؟
- آيا د X او Y له محورونو سره د دويمې درجې تابع د ګراف د تقاطع د نقطو وضعيه کميات پيدا

(c) ketabton.com: The Digital Library



x	0	1	2	-1	-2
y	0	1	4	1	4

کولای شئ؟

د دویمې درجې تابع عمومي شکل $f(x)=ax^2+bx+c$ دی چې b ، a او c حقیقي عددونه او $a\neq 0$ دی.

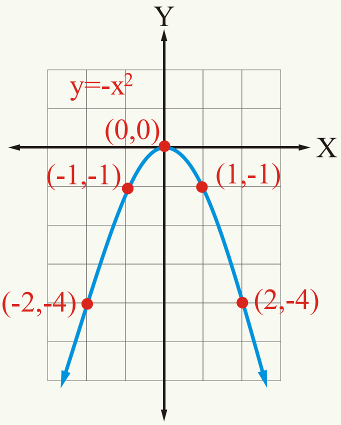
د دویمې درجې تابع ګراف: ترټولو ساده دویمه درجه تابع د $f(x)=y=x^2$ تابع ده چې $a=1$ او $b=c=0$ که x ته یو څو قیمتونه ورکړل شي د تابع یا y اړونده قیمتونه لاس ته راوړلای شو، ګراف یې رسم کېدای شي لکه: څنګه چې په شکل کې لیدل کېږي.

دویمې درجې تابع ګراف د پارابولا (Parabola) په نوم یادېږي چې داګراف نظر د y محور ته متناظر دی، هغه خط چې د پارابول له رأس څخه تېر شي او د y له محور سره موازي وي، د تناظر د محور په نامه یادېږي چې د y محور ددې تابع د ګراف د تناظر محور دی. هغه نقطه چې د تناظر محور په کې ګراف قطع کوي، د پارابول د رأس (Vertex) په نامه یادېږي. که a>0 وي، د پارابول خوله پورته خواته خلاصېږي او د ګراف د رأس ټکی اصغري دی د $y=x^2$ د تابع ګراف د $(-\infty,0)$ په انټروال کې متناقص او د $(0,\infty)$ په انټروال کې ګراف متزاید دی.

لومړی مثال: د $y=-x^2$ تابع ګراف رسم کړئ.

حل:

د پارابول خوله ښکته خواته خلاصېږي، ځکه چې $a<0$ دی، د $(-\infty,0)$ په انټروال کې ګراف متزاید او د $(0,\infty)$ په انټروال کې ګراف متناقص دی.



x	0	1	-1	2	-2
y	0	-1	-1	-4	-4

(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیت

د $y = x^2 + 4$ تابع ګراف رسم کړئ.

دویم مثال: د $f(x) = x^2$ ، $g(x) = 2x^2$ او $h(x) = \frac{1}{2}x^2$ تابع ګانو ګرافونه د وضعیه کمیاتو په عین سیستم کې رسم او یو له بله سره يې پرتله کړئ.

$g(x) = 2x^2$

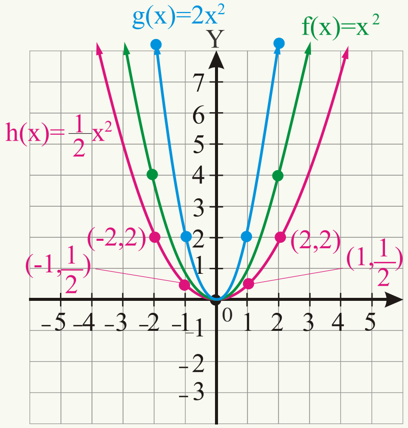
$x =$	0	1	-1	2	-2
$g(x) =$	0	2	2	8	8

$f(x) = x^2$

$x =$	0	1	-1	2	-2
$f(x) =$	0	1	1	4	4

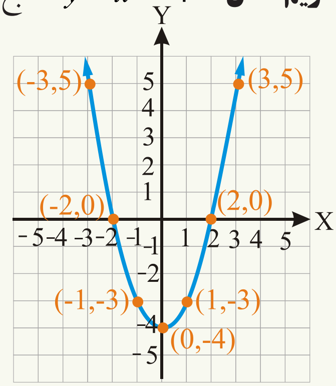
$h(x) = \frac{1}{2}x^2$

$x =$	0	1	-1	2	-2
$h(x) =$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	2	2



دریم مثال: د $y = x^2 - 4$ د تابع ګراف رسم کړئ.

x	0	1	-1	2	-2	3	-3
y	-4	-3	-3	0	0	5	5

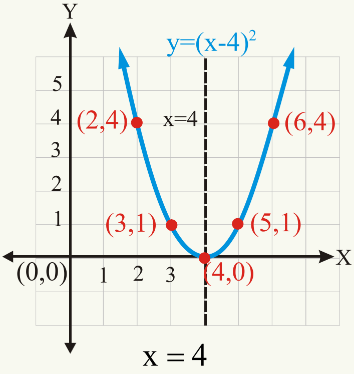


په حقیقت کې د $y = x^2$ تابع ګراف 4 واحده ښکته خواته نقل شوی دی.

څلورم مثال: د $y = (x-4)^2$ تابع ګراف رسم کړئ.

حل: که x ته یو څو قیمتونه ورکړو او د y اړونده قیمتونه پیدا کړو د تابع ګراف رسمیدلای شي لکه:

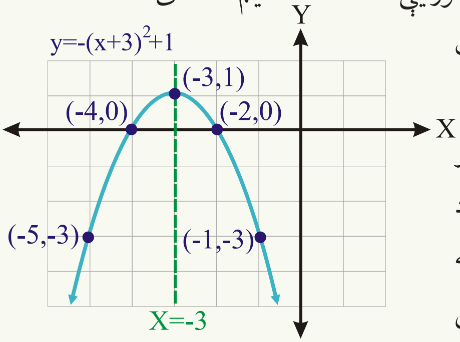
(c) ketabton.com: The Digital Library



x	4	5	3	6	2	...
y	0	1	1	4	4	...

ليدل کېږي چې ګراف د $(-\infty\ ,\ 4)$ په انټروال کې متناقص او د $(4,\infty)$ په انټروال کې متزايد دی. له شکل څخه ليدل کېږي چې د $y=x^2$ ګراف په افقي ډول 4 واحده ښي خواته انتقال شوی دی د پارابول رأس د $(4\ ,0)$ ټکی دی او د تناظر محور يې $x=4$ مستقيم خط دی.

پنځم مثال: د $y=-(x+3)^2+1$ تابع ګراف رسم کړئ.



د $y=x^2$ ګراف درې واحده کيڼې خواته او يو واحد په عمودي ډول پورته خواته نقل شوی دی او د پارابول راس د $(-3,1)$ ټکی د ګراف اعظمي نقطه او د تناظر محور يې $x=-3$ دی چې په شکل کې هم ليدل کېږي.

x	-3	-2	-4	-5	-1
y	1	0	0	-3	-3

فعاليت

د $y=3x^2$ او $y=-3x^2$ تابع ګانو ګرافونه رسم کړئ.

د X او Y له محورونو سره د ګراف د تقاطع ټکي:

ددې لپاره چې په اسانۍ سره پارابول رسم کړو، د X او Y له محور سره يې د تقاطع ټکي پيدا کوو (که چېرې د X له محور سره تقاطع ولري)

(c) ketabton.com: The Digital Library

د Y له محور سره د تقاطع ټکي پیداکولو لپاره د $y = ax^2 + bx + c$ معادله کې x=0 وضع کېږي په نتیجه کې y=c دی.

د X له محور سره د تقاطع د پیداکولو لپاره $y = 0$ وضع کوو، نو لرو چې:

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$0 = ax^2 + bx + c \Rightarrow ax^2 + bx + c = 0$$

څرنګه چې پوهېږو $ax^2 + bx + c = 0$ یوه دویمه درجه معادله ده او جذرونه یې $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ دی، پوهېږو چې ددې معادلې جذرونه هغه وخت حقیقي عددونه دي چې $b^2 - 4ac \geq 0$ وي، که $b^2 - 4ac < 0$ ګراف د X محور قطع کولای نه شي، په لنډ ډول یې په لاندې جدول کې وګورئ:

د $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ تابع ګراف

a	د دویمې درجې تابع ګراف په هغه صورت کې د X محور په دوو نقطو کې قطع کوي چې $b^2 - 4ac > 0$ وي.
b	په هغه صورت کې د X محور په یوه نقطه کې قطع کوي چې $b^2 - 4ac = 0$ وي.
c	په هغه صورت کې د X محور قطع کولای نه شي چې $b^2 - 4ac < 0$ وي.

د پارابولا د راس د نقطې د وضعیه کمیاتو پیدا کول:

د تکمیل مربع په طریقه هم کولای شو چې د پارابول د رأس د نقطې وضعیه کمیات پیدا کړو.

$$y = ax^2 + bx + c = a(x^2 + \frac{b}{a}x) + c$$

$$y = a\left[(x^2 + \frac{b}{a}x + (\frac{b}{2a})^2 - (\frac{b}{2a})^2\right] + c$$

$$= a\left[(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a^2}\right] + c = a(x + \frac{b}{2a})^2 - a(\frac{b^2}{4a^2}) + c = a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a} + c$$

$$y = a(x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

$$f(x) = a(x - h)^2 + k$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پارابولا د رأس د ټکي وضعیه کمیات $\left(-\frac{b}{2a}\,,\,\frac{4ac-b^2}{4a}\right)$ او یا (h,k) دي او څرنګه چې د تناظر محور د پارابولا له رأس څخه تېرېږي، نو $x=-\frac{b}{2a}$ د تناظر د محور معادله ده.

که چېرې $a>0$ وي، رأس اصغري (Minimum) او که $a<0$ وي، رأس اعظمي (Maximum) دی.

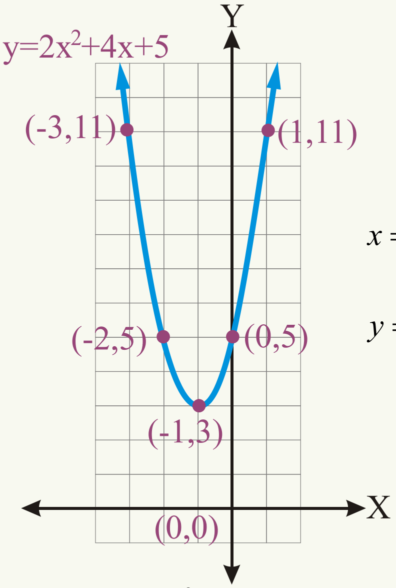
شپږم مثال: د $f(x)=2x^2+4x+5$ تابع ګراف رسم کړئ.

1- د X له محور سره د تقاطع ټکي پیداکوو. څرنګه چې $a=2$ ، $b=4$ او $c=5$ دی.

$\Delta=b^2-4ac=4^2-4\cdot2\cdot5=-24<0$ ادچې $\Delta<0$ ده نوګراف د X محور نه قطع کوي.

2- د Y له محور سره د ګراف د تقاطع ټکي پیداکوو په دې حالت کې $x=0$ دی.

د $y=ax^2+bx+c$ په تابع کې که $x=0$ شي $y=c$ کېږي، نو $(0,c)$ د Y له محور سره د ګراف د تقاطع نقطه ده. $f(0)=2\cdot0^2+4\cdot0+5=5$



نو په دې مثال کې $(0,5)$ د y له محور سره د تقاطع نقطه ده.

3 – د رأس د نقطې وضعیه کمیات عبارت دي له:

$$x=-\frac{b}{2a}=-\frac{4}{2\cdot2}=\frac{-4}{4}=-1$$

$$y=\frac{4ac-b^2}{4a}=\frac{4\cdot2\cdot5-4^2}{4\cdot2}=\frac{40-16}{8}=\frac{24}{8}=3$$

$(-1,3)$ د پارابولا د رأس د نقطې وضعیه کمیات دي او رأس اصغري دی، ځکه چې $a>0$ دی.

4 – د تناظر د محور معادله $x=-\frac{b}{2a}=\frac{-4}{4}=-1$

د ګراف د تناظر د محور معادله $x=-1$ ده، د ګراف د رسمولو لپاره کولای شو د ګراف یو څو نورې نقطې هم پیدا کړو:

$f(x)=2x^2+4x+5$

x =	−1	−2	0	1	−3
f(x) =	3	5	5	11	11

(c) ketabton.com: The Digital Library

اووم مثال: د $y=-3x^2-2x+1$ تابع ګراف رسم کړئ.

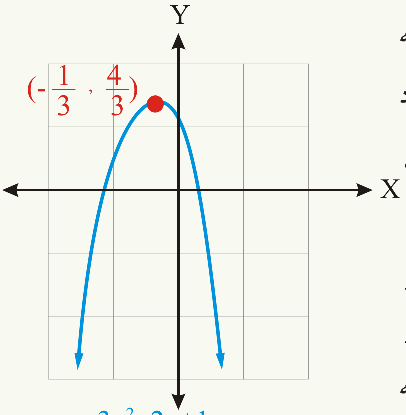
$$y=-3(x^2+\frac{2}{3}x)+1$$

د x د ضریب نیمایي مربع جمع او هم تفریقوو.

$$y=-3\left[x^2+\frac{2}{3}x+(\frac{1}{3})^2-(\frac{1}{3})^2\right]+1$$

$$y=-3\left[x^2+\frac{2}{3}x+(\frac{1}{3})^2\right]-3(-\frac{1}{9})+1=-3\left[(x^2+\frac{2}{3}x+(\frac{1}{3})^2\right]+\frac{4}{3}$$

$$y=-3(x+\frac{1}{3})^2+\frac{4}{3}$$



y=-3x² -2x+1

y=-3(x+1/3)²+4/3

په نتیجه کې $x=-\frac{1}{3}$ د تناظر د محور معادله ده، ځکه چې : $x+\frac{1}{3}=0\Rightarrow x=-\frac{1}{3}$ او $(-\frac{1}{3},\frac{4}{3})$ د رأس د ټکي وضعیه کمیات دي او څرنګه چې $a<0$ دی، نو د پارابولا رأس اعظمي دی.

یاددونه: که دویمه درجه تابع د $y-k=a(x-h)^2$ یا $y=a(x-h)^2+k$ په شکل ولیکل شي $x=h$ د تناظر د محور معادله او (h,k) د رأس د نقطې وضعیه کمیات دي.

$f(x)=ax+b$ $(a\neq 0)$ د لومړی درجې یا خطي تابع عمومي شکل دی.

او $y=ax^2+bx+c$, $(a\neq 0)$ د دویمې درجې معادلې عمومي شکل دی.

د دویمې درجې تابع ګراف ته پارابول (Parabola) وایې که $a>0$ وي، رأس اصغري او که $a<0$ وه، رأس اعظمي دی. $(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a})$ د پارابولا د رأس وضعیه کمیات او $x=-\frac{b}{2a}$ د پارابول د تناظر د محور معادله ده. که $\Delta=b^2-4ac>0$ پارابولا د X محور په دوو نقطوکې او که $\Delta=0$ نو پارابولا د x محور په یوه نقطه کې قطع کوي او که $\Delta<0$ وي، پارابولا د X محور قطع کولای نه شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتني

1 - د $h(x)=-\frac{3}{2}x+3$ د تابع ګراف رسم کړئ.

2 – د $g(x)=2x+1$ او $g(x)=2x-1$ تابع ګانو ګرافونه د وضعیه کمیاتو په عین سیستم

کې رسم او سره پرتله یې کړئ.

3–د $f(x)=x^2$, $f(x)=2x^2$, $f(x)=3x^2$, $f(x)=\frac{1}{2}x^2$ او $f(x)=\frac{1}{3}x^2$

تابع ګانو ګرافونه د وضعیه کمیاتو په عین سیستم کې رسم کړئ او یو له بله سره یې پرتله کړئ

4 – د لاندې تابع ګانو د ګراف د تناظر محور معادلې پیدا کړئ.

$f(x)=3x^2-2x+6$ ، $f(x)=x^2-12x+30$ ، $f(x)=x^2+8x+13$

5 – د $f(x)=(x-2)^2$, $g(x)=(x+1)^2$ او $h(x)=(x-3)^2$ تابع ګانو ګرافونه رسم

کړئ او وواياست چې د $f(x)=x^2$ له ګراف سره څه اړیکه لري؟

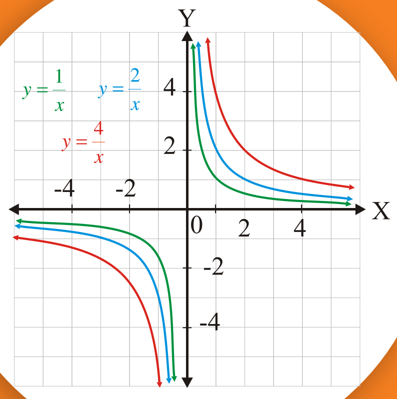
6 – د $y=-x^2-1$ تابع د ګراف د راس وضعیه کمیات عبارت دي له:

a : $(-1,1)$ b: $(1,-1)$ c: $(0,-1)$ d : $(0,1)$

7 – د $y=(x-1)^2-2$ تابع د ګراف د راس وضعیه کمیات عبارت دي له:

a : $(1,1)$ b: $(-1,2)$ c: $(-1,-2)$ d : $(1,-2)$

(c) ketabton.com: The Digital Library



ناطقي يا نسبتي تابع ګاني
(Rational functions)

دا شکل د کوم ډول تابع ګانو ګرافونه دي؟

فعالیت

- آیا د ناطقې تابع د عمودي مجانب معادله پیداکولای شئ ؟
- آیا د هرې ناطقې تابع د تعریف په ساحه کې ټول حقیقي عددونه شاملیدلای شي؟
- آیا د یوې ناطقې تابع افقي مجانب پیداکولای شئ؟
- آیا هره ناطقه تابع عمودي مجانب لري؟

تعریف

ناطقه تابع هغه تابع ده چې د دوو پولینومي تابع ګانو له خارج قسمت څخه جوړه شوې وي که $f(x)=\dfrac{p(x)}{g(x)}$ ، $g(x)\neq 0$ وي، په داسې حال کې چې $p(x)$ او $g(x)$ پولینومونه وي، نو $f(x)$ یوه ناطقه تابع ده.

د ناطقې تابع د تعریف ساحه ټول حقیقي عددونه دي، پرته د x له هغو قیمتونو څخه چې د ناطقې تابع مخرج پرې صفر کېږي، د مثال په ډول: $f(x)=\dfrac{1}{x}$ ، $h(x)=\dfrac{x^3-1}{x}$

$g(x)=\dfrac{x-1}{x^2-x-6}$ ، $g(x)=3$ او $P(x)=2x^2-3$ ناطقې تابع ګانې دي.

فعالیت

آیا $k(x)=\dfrac{\sqrt{x-1}}{x+2}$ یوه ناطقه تابع ده؟ ولې ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ناطقي تابع د تعریف د ساحې پیدا کول

(Finding Domain of Rational function)

لومړی مثال: د لاندېنیوناطقو تابع ګانو د هرې یوې د تعریف ساحه پیدا کړئ.

$$f(x)=\frac{x^2-9}{x-3} \quad , \quad g(x)=\frac{x}{x^2-9} \quad , \quad h(x)=\frac{x+3}{x^2+9}$$

حل: د $f(x)$ په تابع کې د $x=3$ لپاره د تابع مخرج صفر کېږي، نو د 3 عدد د $f(x)$ د ناطقې تابع د تعریف په ساحه کې شامل نه دی یا: $Dom\ f(x)=\{x/x\in IR \ ,\ x\neq 3\}$

د $g(x)$ په تابع کې که چېرې $x=3$ یا $x=-3$ شي، نو مخرج یې صفر کېږي، نو د 3 او 3 - عددونه د $g(x)$ د تابع د تعریف په ساحه کې شامل نه دي.

$$Dom\ g(x)=\{x/x\in IR \ ,\ x\neq 3 \ ,\ x\neq -3\}$$

څرنګه چې د $h(x)$ تابع مخرج د x په هیڅ قیمت نه صفر کېږي، نو د $h(x)$ تابع د تعریف ساحه ټول حقیقي عددونه دي.

$$Dom\ h(x)=IR \quad \text{یا} \quad Dom\ h(x)=(-\infty\ ,\ \infty)$$

فعالیت

د لاندېنیو ناطقو تابع ګانو د تعریف ساحې تعین کړئ.

$$f(x)=\frac{x^2-25}{x-5} \quad , \quad g(x)=\frac{x}{x^2-25} \quad , \quad h(x)=\frac{x+5}{x^2+25}$$

دویم مثال: د لاندېنیو ناطقو تابع ګانو د تعریف او قیمتونو ساحې پیدا کړئ.

$$f(x)=\frac{x+3}{x-4} \qquad g(x)=\frac{x-3}{x+5}$$

حل: د $f(x)$ تابع د تعریف ساحه پرته له (4)څخه ټول حقیقي عددونه دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$dom\ f(x) = IR \setminus \{4\}$ یا $IR - \{4\}$

$$y = f(x) = \frac{x+3}{x-4} \Rightarrow y(x-4) = x+3$$

$$xy - x = 4y + 3$$
$$(y-1)x = 4y + 3$$

$$xy - 4y = x + 3 \Rightarrow \quad x = \frac{4y+3}{y-1}$$

$Range\ f(x) = IR \setminus \{1\}$ یا $IR - \{1\}$

د g (x) تابع د تعریف ساحه ټول حقیقي عددونه دي، پرته له (-5) څخه:

$$dom\, g(x) = IR - \{-5\} \text{ یا } \{x \in IR / x \neq -5\}$$

$$g(x) = y = \frac{x-3}{x+5} \Rightarrow y(x+5) = x-3 \Rightarrow xy + 5y = x - 3$$

$$x = \frac{-5y-3}{y-1} \qquad Range\, g(x) = IR - \{1\} \text{ یا } \{y \in IR / y \neq 1\}$$

فعالیت

د لاندې راکړل شوو ناطقو تابع ګانو د تعریف او قیمتونو ساحې پیدا کړئ.

$$h(x) = \frac{1}{x^3} \quad , \quad k(x) = \frac{x+1}{3} \quad , \quad r(x) = \frac{4x-1}{2-x} \quad , \quad m(x) = \frac{x}{3x-2}$$

د ناطقي تابع د ګراف رسمول (Graphing Rational function):

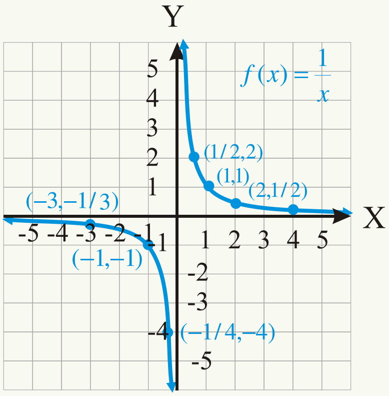
دریم مثال: د $f(x) = \dfrac{1}{x}$ تابع ګراف رسم کړئ.

حل: که $x = 0$ شي، نو د تابع مخرج صفر کېږي، صفر د $f(x)$ د تابع د تعریف په ساحه کې شامل نه دی.

$$Dom\ f = IR - \{0\}$$

x	$\ldots -4$	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	$4\ldots$
f(x)	$\ldots -\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	-4	-3	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}\ldots$

(c) ketabton.com: The Digital Library



اوس د $f(x)=\frac{1}{x}$ د تابع وضعیت مطالعه کوو:

څرنګه چې $x=0$ د $f(x)$ تابع د تعریف په ناحیه کې شامل نه دی، ددې تابع د ګراف د رسمولو لپاره x ته داسې قیمتونه ورکوو چې له دواړو خواوو څخه صفر ته نژدې شي (تقرب وکړي)، که x له کینې خوا څخه صفر ته نژدې شي $(x\to 0^-)$ د تابع قیمت $-\infty$ ته نږدې کیږي $(f(x)\to -\infty)$ او که x له ښي خوا څخه صفر ته نژدی کیږي، $(x\to 0^+)$ د تابع قیمت $+\infty$ ته تقرب کوي $(f(x)\to \infty)$ لاندې جدول وګورئ.

a: x له کیڼې خوا څخه صفر ته نژدې کیږي.

x	...−1	−0.5	−0.1	−0.01	−0.001	$x\to 0^-$
$f(x)=\frac{1}{x}$	...−1	−2	−10	−100	−1000	$f(x)\to -\infty$

b : x له ښي خوا څخه صفر ته نژدې کیږي.

x	$0^+\leftarrow x$	0.001	0.01	0.1	0.5	1...
$f(x)=\frac{1}{x}$	$\infty\leftarrow f(x)$	1000	100	10	2	1...

عمودي مجانب (Vertical Asymptotes)

که په یوه ناطقه تابع $f(x)=\frac{p(x)}{g(x)}$ کې چې صورت او مخرج یې مشترک فکتور، ونه لري او $p(a)\neq 0$ وي، که $g(a)=0$ شي، نو د $x=a$ خط د $f(x)$ د تابع عمودي مجانب دی چې د y له محور سره موازي دی. د عمودي مجانبونو شمیر د مخرج د جذرونو له شمیر سره مساوي دي یا په بل عبارت که $x\to a$ په نتیجه کې $f(x)\to +\infty$ یا $f(x)\to -\infty$، نو د $x=a$ عمودي خط ددې تابع عمودي مجانب دی یا که:

$x\to a \Rightarrow |f(x)|\to\infty$ نو $x=a$ د تابع عمودي مجانب دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

x هر څومره چې د a قیمت ته نژدې شي، خو د تابع ګراف د $x=a$ مستقیم خط قطع کولای نه شي، ځکه چې د a عدد د تابع دتعریف په ساحه کې شامل نه دی، لکه: د $f(x)=\frac{1}{x}$ تابع د تعریف په ساحه کې صفر شامل نه دی، نو $x=0$ یا د Y محور د $f(x)=\frac{1}{x}$ تابع عمودي مجانب دی.

څلورم مثال: د $f(x)=\frac{2x}{x-3}$ ، $g(x)=\frac{x}{x^2-25}$ او $h(x)=\frac{x+5}{x^2+25}$ تابع ګانو عمودي مجانبونه پیداکړئ.

حل:

1 - د f(x) تابع د عمودي مجانب د پیداکولو لپاره د x هغه قیمت پیداکوو چې د f(x) تابع مخرج پرې صفر کېږي. نو د 3 عدد د $f(x)$ د تابع د تعریف په ساحه کې شامل نه دی.

$$domf(x)=\{x/x\in IR \;\; , \;\; x\neq 3\}$$

نو د $x=3$ خط د f(x) تابع عمودي مجانب دی.

2 -

$$g(x)=\frac{x}{x^2-25}=\frac{x}{(x-5)(x+5)}$$

$$x-5=0\Rightarrow x=5$$

$$x+5=0\Rightarrow x=-5$$

د x=5 او $x=-5$ لپاره د g(x) تابع مخرج صفر کېږي، نو د 5 او 5 - عددونه د g(x) د تابع د تعریف په ساحه کې شامل نه دي.

$$dom\,g(x)=\{x/\in IR \;\; , \;\; x\neq -5 \;\; , \;\; x\neq 5\}$$

نو د $g(x)$ د تابع عمودي مجانبونه د $x=5$ او $x=-5$ خطونه دي.

3 - څرنګه چې د x په هر قیمت د $h(x)=\frac{x+5}{x^2+25}$ تابع مخرج نه صفر کېږي، نو عمودي مجانب نه لري یا ددې تابع د تعریف ساحه ټول حقیقي عددونه دي.

افقي مجانب (Horizontal Asymptote)

که په یوه ناطقه تابع کې د صورت او مخرج درجې سره مساوي وي، نو ښکاره خبره ده چې دوېش

(c) ketabton.com: The Digital Library

حاصل (خارج قسمت) به یو ثابت عدد وي، که دې ثابت عدد ته b ووایو، نو د $y=b$ افقي خط ددې تابع افقي مجانب دی چې دا خط یا د X محور او یا د X له محور سره موازي خط دی چې په حقیقت کې د b عدد د صورت او مخرج د لویو توانونو د ضریبونو له نسبت څخه عبارت دی او یا صورت پر مخرج ویشو.

د مثال په ډول د $f(x)=\dfrac{2x^2}{x^2-1}$ د تابع افقي مجانب د $y=2$ خط دی.

افقي مجانب داسې تعریفوو:

که $x\to\infty$ یا $x\to-\infty$ او په نتیجه کې $f(x)\to b$ نو $y=b$ مستقیم خط د f(x) تابع افقي مجانب دی او یا که $|x|\to\infty$ او $y\to b$، نو $y=b$ مستقیم خط ددې تابع افقي مجانب دی.

پنځم مثال: د $f(x)=\dfrac{2x}{x-1}$ تابع ګراف رسم کړئ.

حل:

1 - **د** X **له محور سره د ګراف د تقاطع نقطه**: د X له محور سره د تقاطع په نقطه کې $f(x)=0$ کېږي، په نتیجه کې لرو چې: $0=\dfrac{2x}{x-1}\Rightarrow 2x=0\Rightarrow x=0$

نو د تابع ګراف د X محور په $x=0$ یا د $(0,0)$ په نقطه کې قطع کوي.

2 - **د** Y **له محور سره د ګراف د تقاطع نقطه**: $f(0)=\dfrac{2\cdot 0}{0-1}=\dfrac{0}{-1}=0$

نو ګراف د X او Y محورونه د $(0,0)$ په نقطه کې قطع کوي یا په بل عبارت ددې تابع ګراف د وضیعه کمیاتو له مبدأ څخه تیریږي.

3 - د تابع د عمودي مجانب معادله: $x-1=0\Rightarrow x=1$ دی دا خط رسم کړئ.

4 - د تابع د ګراف افقي مجانب $\dfrac{2}{1}=2$ دی، نو $y=f(x)=2$ د تابع افقي مجانب دی، یا $\dfrac{2x}{x-1}=2+\dfrac{2}{x-1}$ افقي مجانب یې هم رسم کړئ.

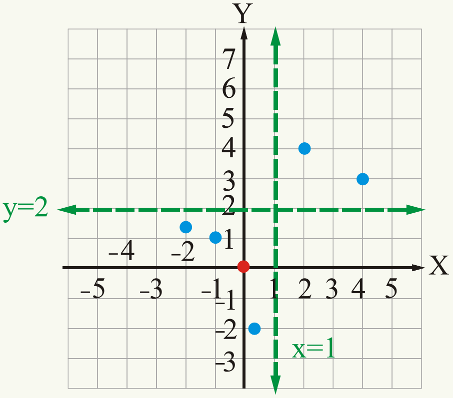
5 - د ګراف یو څو نورې نقطې هم پیداکوو، لکه:

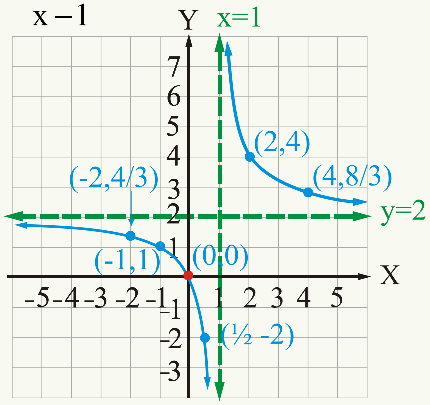
x	0	-2	-1	$\frac{1}{2}$	2	4
$y=f(x)$	0	$\frac{4}{3}$	1	-2	4	$\frac{8}{3}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له محورونو سره د تقاطع نقطې ټاکو، د تابع مجانبونه رسموو او بیا یې ګراف، لکه: څنګه چې په شکل کې لیدل کېږي، رسموو.

$$f(x)=\frac{2x}{x-1}$$





فعالیت

د $f(x)=\dfrac{3x}{x-2}$ تابع ګراف رسم کړئ.

شپږم مثال: د $f(x)=\dfrac{x+2}{x-2}$ د تابع افقي او عمودي مجانبونه پیدا کړئ او ګراف یې رسم کړئ.

حل: د عمودي او افقي مجانبونو معادلې عبارت دي له:

1 - د عمودي مجانب معادله $x=2$

2 - د افقي مجانب معادله $f(x)=y=1$

3 - د Y له محور سره تقاطع:

که $x=0$ شي، نو $f(x)=-1$ دی، ګراف د Y محور په $(0,-1)$ کې قطع کوي.

4 - د X له محور سره تقاطع $f(x)=0$ شي، نو:

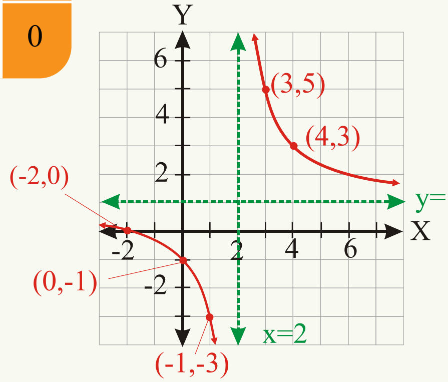
$$x+2=0$$
$$x=-2$$

نو د $(-2,0)$ په نقطه کې ګراف د X محور قطع کوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

5 - ددې لپاره چې ګراف په اسانه ډول رسم شي، په لاندې جدول کې د ګراف د هرې څانګې قیمتونه وګورئ.

x	−1	0	1	3	4	5	−2
f(x)	$-\frac{1}{3}$	−1	−3	5	3	$2\frac{1}{3}$	0



که صورت پر مخرج وویشو $\frac{x+2}{x-2}=1+\frac{4}{x-2}$

په حقیقت کې د $f(x)=\frac{1}{x}$ تابع ګراف د یو واحد په اندازه پورته خواته او د (2) واحدونو په اندازه ښي خواته انتقال شوی دی او y= f(x) = 1 د تابع افقي مجانب دی.

مایل مجانب: (slant or Oblique asymptote)

څه وخت چې د یوې ناطقې تابع د صورت درجه د یو په اندازه د مخرج له درجې څخه زیاته وي ښکاره خبره ده چې تابع افقي مجانب نه لري په دې حالت کې تابع مایل مجانب لري.

اووم مثال: د $f(x)=\frac{x^2+1}{x-1}$ تابع ګراف رسم کړئ.

حل:

1 - د مایل مجانب د پیداکولو لپاره صورت پر مخرج ویشو، نو لرو چې:

$$f(x)=\frac{x^2+1}{x-1}=\underbrace{x+1}+\frac{2}{x-1}$$

مایل مجانب

که $|x|$ هر څومره لوی شي $\frac{2}{x-1}$ صفر ته نژدې کیږي، نو په نتیجه کې ګراف د $y=f(x)=x+1$ مستقیم خط ته نژدې کیږي چې همدا د $y=x+1$ خط د $f(x)$ تابع مایل مجانب دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

2 – د Y له محور سره یې د تقاطع نقطه:

$$f(0)=0+1+\frac{2}{0-1}=1-2=-1$$

ګراف د $(0,-1)$ په نقطه کې د Y محور قطع کوي.

3 - ښکاره خبره ده چې ګراف د X محور قطع

کولای نه شي، ځکه چې $x=\sqrt{-1}$ کېږي.

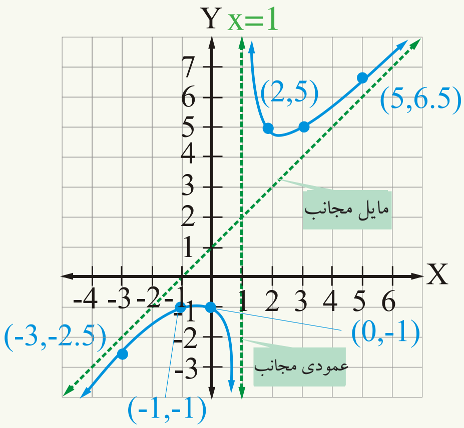
4 - عمودي مجانب یې

$x-1=0 \Rightarrow x=1$ دی.

5 - ښکاره ده چې افقي مجانب نه لري.

6 - یو څو نورې نقطې پیدا کوو او د تابع ګراف

رسموو:



x	2	3	5	-1	-3
f(x)	5	5	6.5	-1	-2.5

اتم مثال: د $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x-2}$ تابع ګراف رسم کړئ.

1 - د تابع عمودي مجانب د $x=2$ خط دی، ځکه چې $x-2=0 \Rightarrow x=2$

2 - x^2+1 پر $(x-2)$ وېشو لرو چې: $\dfrac{x^2+1}{x-2}=x+2+\dfrac{5}{x-2}$

که $|x|$ لوی شي $\dfrac{5}{x-2}$ صفر ته نږدې کېږي او د تابع ګراف د $y=x+2$ خط ته نژدې کېږي

چې $y=x+2$ خط ددې تابع مایل مجانب دی.

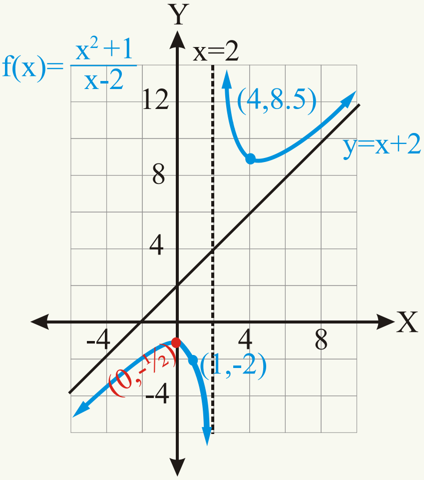
3 – دY له محور سره تقاطع $-\dfrac{1}{2}$ ده، ځکه که $x=0$ شي $f(0)=\dfrac{0+1}{0-2}=-\dfrac{1}{2}$

4 – ګراف د X له محور سره تقاطع نه لري، ځکه چې که $f(x)=0$ شي، نو: $0=\dfrac{x^2+1}{x-2}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(چي په حقيقي عددونو کې تعریف شوی نه دی) $x^2+1=0 \Rightarrow x=\sqrt{-1}$

د مجانبونو په رسمولو او د Y له محور سره د تقاطع ټکی او څو نورو قيمتونو په مرسته د تابع ګراف رسمولای شو.



x	0	1	4
f(x)	$-\frac{1}{2}$	-2	8.5

که $f(x)=\frac{P(x)}{g(x)}$ په تابع کې په ترتیب سره m او n د صورت او مخرج درجې وي نو:

1 – که $m<n$ وي د x محور افقي مجانب دی.

2 – که $m=n$ وي $y=b$ د تابع افقي مجانب دی چې b د m او n درجو حدونو د ضریبونو نسبت دی یا که چیرې $f(x)=\frac{a_nx^n+...+a_0}{b_nx^n+...+b_0}$، $(b_n\neq 0)$ وي، نو $y=\frac{a_n}{b_n}$ د f(x) تابع افقي مجانب دی.

3 – که $m>n$ وي، نو افقي مجانب نه لري.

4 – که د صورت درجه د یو په اندازه د مخرج له درجې څخه زیاته وي، نو د تابع ګراف مایل مجانب لري چې په بې نهایت کې له ګراف سره موازي کیږي، یوه ناطقه تابع یو یا څو عمودي مجانبونه درلودلای شي، خو یو افقي یا مایل مجانب به لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

1 – د $f(x)=\dfrac{3x^2}{x^2-4}$ تابع افقي او عمودي مجانبونه پيدا کړئ.

2 – آیا د $f(x)=\dfrac{x^4}{x^2+1}$ تابع عمودي مجانب لري؟ ولې؟

3 – د لاندې راکړل شوو تابع ګانو د تعريف ساحې پيدا کړئ او د عمودي مجانبونو معادلې يې وليکئ.

$$f(x)=\frac{5x}{x-4}\ ,\ g(x)=\frac{3x^2}{(x-5)(x+4)}\ ,\ h(x)=\frac{x+7}{x^2-49}\ ,\ k(x)=\frac{x+7}{x^2+49}$$

4 – له لاندې تابع ګانو څخه کومه يوه چې عمودي مجانب ولري، پيدا يې کړئ.

$$f(x)=\frac{x}{x+4}\qquad ,\qquad g(x)=\frac{x+3}{x(x+4)}$$

$$h(x)=\frac{x}{x(x+4)}\qquad ,\qquad k(x)=\frac{x}{x^2+4}$$

5 – د لاندې ناطقو تابع ګانو ګرافونه رسم کړئ.

$$f(x)=\frac{4x}{x-2}\quad ,\quad g(x)=\frac{2x}{x-4}$$

6 - د $f(x)=\dfrac{3x+1}{x-3}$ تابع افقي مجانب عبارت دی له:

$a:\quad y=2$ $\qquad b:\quad y=3$

$c:\quad y=-2$ $\qquad d:\quad y=-3$

7 - د $f(x)=\dfrac{1}{x+2}$ او $f(x)=\dfrac{3}{x+2}$ تابع ګانو ګرافونه رسم کړئ او د $f(x)=\dfrac{1}{x}$ د تابع له ګراف سره يې پرتله کړئ.

8 – د $f(x)=\dfrac{x^2}{x-1}$ تابع مايل مجانب پيدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ځېرکي لنډيز

• تابع د دوو سټونو تر منځ داسې يوه رابطه يا قاعده (Rule) ده چې د لومړني سټ هر عنصر يوازې او يوازې د دويم سټ له يو عنصر سره اړيکه ولري. لومړني سټ ته د تابع د تعريف ساحه (Domain) او دويم سټ ته د قيمتونو ساحه (Range) وايي يا تابع د هغو مرتبو جوړو سټ دی چې لومړني عناصر يې تکرار شوي نه وي.

• يوه تابع د $y = f(x)$ په شکل ليکل کېږي، په يوه نقطه کې د تابع د قيمت د پيدا کولو لپاره د x راکړل شوی قيمت د تابع په معادله کې وضع کوو، د تابع قيمت په هغه نقطه کې په لاس راځي او يوه معادله هغه وخت د يوې تابع ښودونکې وي چې د هر x لپاره يو y وجود ولري.

• د يوې تابع د تعريف په ساحه (Domain) کې هغه عددونه شامل وي چې تابع په کې تعريف شوې وي يا د تابع قيمت يو حقيقي عدد وي. د يوې تابع گراف د XOY په مستوي کې د S د هغو نقطو سټ دی په دې ډول چې $S = \{(x, y) | y = f(x)\}$ او x د تابع د تعريف په ساحه کې شامل وي، که د y له محور سره موازي خط گراف يوازې په يوه نقطه کې قطع کړي، دا گراف د يوې تابع گراف دی.

• $f(x) = c$ ثابته تابع، $f(x) = ax + b$ خطي تابع، $(a \neq 0)$, $f(x) = x$ د عينيت تابع او $f(x) = |x|$ د مطلقه قيمت تابع ده چې د تعريف ساحه يې ټول حقيقي عددونه او د قيمتونو ساحه يې صفر او مثبت حقيقي عددونه دي.

• د علامې تابع دا ډول تعريف شوې ده:

$$f : IR \to IR \qquad sgn(x) = \begin{cases} 1 : x > 0 \\ 0 : x = 0 \\ -1 : x < 0 \end{cases}$$

ددې تابع د تعريف ساحه ټول حقيقي عددونه او د قيمتونو ساحه يې $\{-1, 0, 1\}$ ده.

• د دويمې درجې تابع عمومي شکل $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ دی او د دويمې درجې تابع گراف ته پارابولا (parabola) وايي که $a > 0$ وي، رأس اصغري او که $a < 0$ وي، رأس اعظمي دی. $(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a})$ د پارابولا د رأس وضعيه کميات او $x = -\frac{b}{2a}$ د پارابول د تناظر د

(c) ketabton.com: The Digital Library

محور معادله ده. که $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ پارابولا د X محور په دوو نقطوکې او که $\Delta = 0$ ، نو پارابولا د x محور په یوه نقطه کې قطع کوي او که $\Delta < 0$ ، وي پارابول د x محور نه قطع کوي.

- که د $f(x)$ په تابع کې $x_1 < x_2$ وي او په نتیجه کې $f(x_1) < f(x_2)$ شي، تابع متزایده، که $x_1 < x_2$ وي او $f(x_1) > f(x_2)$ شي، تابع متناقصه ده او هم که $f(-x) = f(x)$ وي، تابع جفته او که $f(-x) = -f(x)$ شي، تابع طاقه ده.
- انتقال په (2) ډوله دی (عمودي او افقي انتقال)
- **عمودي انتقال**: که c یو مثبت عدد وي.

که د $y = f(x)$ تابع گراف د c واحدونو په اندازه په عمودي ډول پورته خواته انتقال شي د $y = f(x) + c$ تابع گراف لاس ته راځي.

که د $y = f(x)$ تابع گراف د c واحدونو په اندازه په عمودي ډول ښکته خواته انتقال شي، د $y = f(x) - c$ تابع گراف لاس ته راځي.

افقي انتقال: که c یو مثبت عدد وي.

که د $y = f(x)$ تابع گراف د c واحدونو په اندازه کیڼې خواته انتقال شي، د $y = f(x+c)$ گراف لاس ته راځي.

که د $y = f(x)$ تابع گراف د c واحدونو په اندازه ښي خواته انتقال شي، د $y = f(x-c)$ تابع گراف لاس ته راځي.

- د تابع گانو عملیې په لاندې ډول تعریف شوي دي:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \qquad (f-g)(x) = f(x) - g(x)$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) \qquad (\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad (g(x) \neq 0)$$

$$dom(f+g)(x) = dom\,f \cap dom\,g$$
$$dom(f-g)(x) = dom\,f \cap dom\,g$$
$$dom(f \cdot g)(x) = dom\,f \cap dom\,g$$
$$dom(\frac{f}{g})(x) = dom\,f \cap dom\,g - \{x / g(x) = 0\}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

• د مرکبو تابع ګانو د تعریف ساحه:

$$Dom(fog)(x) = \{x / x \in domg \quad , \quad g(x) \in domf\}$$
$$Dom(gof)(x) = \{x / x \in domf \quad , \quad f(x) \in domg\}$$

• د يو په يو تابع معکوس هم يوه تابع ده.

• د X له محور سره موازي خط (افقي خط) د يو په يو تابع ګراف په يوه نقطه کې قطع کوي.

• د $y = f(x)$ يو په يو تابع د معکوس د پيدا کولو لپاره معادله د x لپاره حلوو، بيا x پر y او y پر x بدلوو په لاس راغلی تابع $f^{-1}(x)$ ده چې د $f(x)$ د تابع معکوسه تابع ده. د f(x) او د f(x) د معکوسې تابع ګرافونه نظر د y=x خط ته سره متناظر دي.

• که د $f(x) = \dfrac{P(x)}{g(x)}$ په ناطقه تابع کې په ترتيب سره m او n عددونه د صورت او مخرج درجې وي، نو:

1 – که $m < n$ وي، د X محور افقي مجانب دی.

2 – که $m = n$ وي، $y = b$ د تابع افقي مجانب دی چې b د m او n درجو لرونکو حدونو د ضريبونو نسبت دی يا که چېرې $f(x) = \dfrac{a_n x^n + ... + a_0}{b_n x^n + ... + b_0}$ وي، $(b_n \neq 0)$ نو $y = \dfrac{a_n}{b_n}$ د f (x) د تابع افقي مجانب دی.

3 – که $m > n$ وي، نو افقي مجانب نه لري.

4 – که د صورت درجه د يو په اندازه د f(x) د مخرج له درجې څخه زياته وي، نو تابع مايل مجانب لري.

• يوه ناطقه تابع يو يا څو عمودي مجانبونه درلودلای شي، خو يو افقي يا مايل مجانب به لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د څپرکي پوښتني

1 - د لاندېنيو مرتبو جوړو له ستونو څخه کوم يو يې د يوې تابع ښودونکي دی؟ د تعريف او د قيمتونو ساحي يې پيدا کړئ.

$1-\quad \{(1,2),(3,4),(5,5)\}$

$2-\quad \{(3,4),(3,5),(4,4),(4,5)\}$

$3-\quad \{(-3,-3),(-2,-2),(-1,-1),(0,0)\}$

$4-\quad \{(1,4),(1,5),(1,6)\}$

2 - که $g(x)=x^2+2x+3$ وي، $g(-x), g(-1)$ او $g(x+5)$ پيدا کړئ.

3 - که $h(x)=x^4+x^2+1$ وي، $h(-x), h(-1), h(2)$ او $h(3a)$ پيدا کړئ.

4 - د لاندېنيو تابع ګانو دتعريف ساحي پيدا کړئ.

$f(x)=2x \qquad f(x)=(x-3)^{\frac{1}{2}}$

$f(x)=\sqrt{16-x^2} \qquad f(x)=\dfrac{2}{x^2-4}$

$f(x)=\sqrt{\dfrac{3}{x^2+25}} \qquad f(x)=\sqrt{x^2-4x-5}$

5 - که چېرې $f(x)=\begin{cases} x+3 & : \quad x<0 \\ 4x+7 & : \quad x\geq 0 \end{cases}$ وي، $f(0), f(3)$ او $f(-2)$ پيدا کړئ.

6 - که چېرې $g(x)=\begin{cases} x+3 & : \quad x\geq -3 \\ -(x+3) & : \quad x<-3 \end{cases}$ وي، $g(-6), g(0)$ او $g(-3)$ پيدا کړئ.

7- که چېرې $h(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-9}{x-3} & \Leftarrow \quad x\neq 3 \\ 6 & \Leftarrow \quad x=3 \end{cases}$ وي، $h(0), h(3)$ او $h(5)$ پيدا کړئ.

8 - له لاندېنيو معادلو څخه کومه يوه يې تابع تعريفوي؟

$x+y=16 \qquad x^2+y=16 \qquad x^2+y^2=16$

$x=y^2 \qquad y=\sqrt{x+4} \qquad x+y^3=8$

(c) ketabton.com: The Digital Library

9 - په لاندېنیو تابع گانو کې کومه طاقه، کومه یوه جفته او کومه یوه، نه طاقه او نه جفته ده؟

$$f(x)=x^4-2x^2+5 \quad , \quad f(x)=x^2+2x-1 \quad . \quad f(x)=\frac{2}{x-6}$$

10 - د $f(x)=(x-1)^2, f(x)=x^2-1$ تابع گانو گرافونه رسم او د $f(x)=x^2$ سره یې پرتله کړئ.

11 - د لاندېنیو تابع گانو $(f+g), (f-g), (f\cdot g)$ او $(\frac{f}{g})$ پیدا کړئ او د تعریف ساحې یې وټاکئ.

$f(x)=4x-1 \qquad g(x)=6x+3$

$f(x)=\sqrt{2x+5} \qquad g(x)=\sqrt{4x-9}$

$f(x)=4x^2-11x+2 \qquad g(x)=x^2+5$

12 - که $f(x)=4x^2-2x$ او $g(x)=8x+1$ وي، نو:

$(f+g)(3) \qquad (f+g)(-5) \qquad (f\cdot g)(4)$

$(\frac{f}{g})(4) \qquad (fog)(2) \qquad (gof)(-5)$

پیدا کړئ.

13 - fog او gof پیدا کړئ که:

$f(x)=8x+12 \qquad g(x)=3x-1$

$f(x)=5x+3 \qquad g(x)=-x^2+4x+3$

$f(x)=-x^3+2 \qquad g(x)=4x$

$f(x)=\frac{1}{x} \qquad g(x)=x^2$

$f(x)=\sqrt{x+2} \qquad g(x)=8x^2-6$

14 - د y=f(x) تابع د گراف په پام کې نیولو سره ووایاست چې د $y=f(x)-5$ تابع گراف د 5 واحدو په اندازه:

a- ښکته خواته انتقال شوي دی. b- پورته خوا ته انتقال شوي دی.

c- ښي خواته انتقال شوي دی. d- کیڼې خواته انتقال شوي دی.

15 - که د f(x) تابع په لاندې ډول تعریف شوی وي گراف یې رسم کړئ، د تعریف او قیمتونو

(c) ketabton.com: The Digital Library

ساحې يې وټاکئ.

$$f(x)=\begin{cases}-x+2 & : \quad x>1 \\ x^2 & : \quad -1<x<1 \\ x+2 & : \quad x<-1\end{cases}$$

16 - د $f(x)=\dfrac{2x}{x+1}$ تابع د تعريف او قيمتونو ساحې وټاکئ.

17 - د $f(x)=\sqrt{2x-1}$ تابع د تعريف او قيمتونو ساحې وټاکئ.

18 - د لاندېنيو ناطقو تابع ګانو د تعريف ساحې پيدا کړئ او کومه تابع چې عمودي مجانب ولري، د عمودي مجانبونو معادلې يې هم پيدا کړي.

$\mathrm{f(x)}=\dfrac{5x}{x-4}$ $\quad$ $\mathrm{g(x)}=\dfrac{7x}{x-8}$ $\quad$ $\mathrm{h(x)}=\dfrac{x+8}{x^2-64}$

$\mathrm{f(x)}=\dfrac{x+8}{x^2+64}$ $\quad$ $\mathrm{g(x)}=\dfrac{x+7}{x^2-49}$ $\quad$ $\mathrm{h(x)}=\dfrac{x+7}{x^2-36}$

19 - د $f(x)=x^2+2$ ، $f(x)=x^2+1$ ، $f(x)=x^2-1$ او $f(x)=x^2-2$ تابع ګانو ګرافونه د وضعيه کمياتو په عين سيستم کې رسم او د $f(x)=x^2$ د تابع له ګراف سره يې پرتله کړئ.

20 - د لاندېنيو دويمې درجې تابع ګانو د رأسونو وضعيه کميات اود تناظر د محورونو معادلې پيدا کړئ.

$$y=(x-2)^2 \qquad y=(x+3)^2-4$$

21 - د $y=-\dfrac{x}{2}$ تابع ګراف رسم کړئ.

22 - د $f(x)=\dfrac{x^2-5}{x+2}$ تابع عمودي او مايل مجانبونه پيدا کړئ.

23 - د $h(x)=\dfrac{x+1}{x-4}$ تابع د افقي مجانب معادله عبارت ده له:

$a)\quad y=-1$ $\qquad$ $b)\quad y=1$

$c)\quad y=-\dfrac{1}{4}$ $\qquad$ $d)\quad y=4$

(c) ketabton.com: The Digital Library

24 - د $f(x)=\begin{cases}3x+1 & : x<2\\ -x & : x\geq 2\end{cases}$ د تابع گراف رسم کړئ.

25- $g(x)=|x|-5$ د تابع گراف رسم او د قیمتونو ساحه یې پیدا کړئ.

26 - د علامې تابع د قیمتونو په ساحه کې کوم عددونه شامل وي؟

27 - د لاندېنیو تابع گانو معکوسه تابع پیدا کړئ او وښیاست چې $f(f^{-1}(x))=x$ دی.

$f(x)=\frac{1}{8}x$ $\qquad f(x)=8x-1$ $\qquad f(x)=x^2+6$

$f(x)=\frac{4x+6}{5}$ $\qquad f(x)=x^3-1$

28 -آیا د $g(x)=x^2$ تابع معکوس منونکي ده؟ (معکوس یې هم یوه تابع ده)

29 - که $(fog)(x)=(gof)(x)$ وي، د f او g تابع گانې سره څه اړیکه لري؟

30 - د X او Y له محورونو سره د $g(x)=3-\frac{3}{2}x$ د گراف، د تقاطع د نقطو وضعیه کمیات پیدا کړئ.

31 - د $f(x)=-3$ تابع گراف رسم کړئ.

32 - د $f(x)=2x^2+4x+5$ تابع د گراف د رأس د نقطې وضعیه کمیات پیدا کړئ.

33 - د $f(x)=\frac{1}{2}x^2$, $f(x)=3x^2$, $f(x)=2x^2$ او $f(x)=\frac{1}{3}x^2$ تابع گانو گرافونه د وضعیه کمیاتو په عین سیستم کې رسم او د $f(x)=x^2$ تابع د گراف سره یې پرتله کړئ.

34 - د $f(x)=\frac{x^2-1}{x}$ د ناطقې تابع مایل مجانب عبارت دی له:

$a:\ y=x$

$b:\ y=x-1$

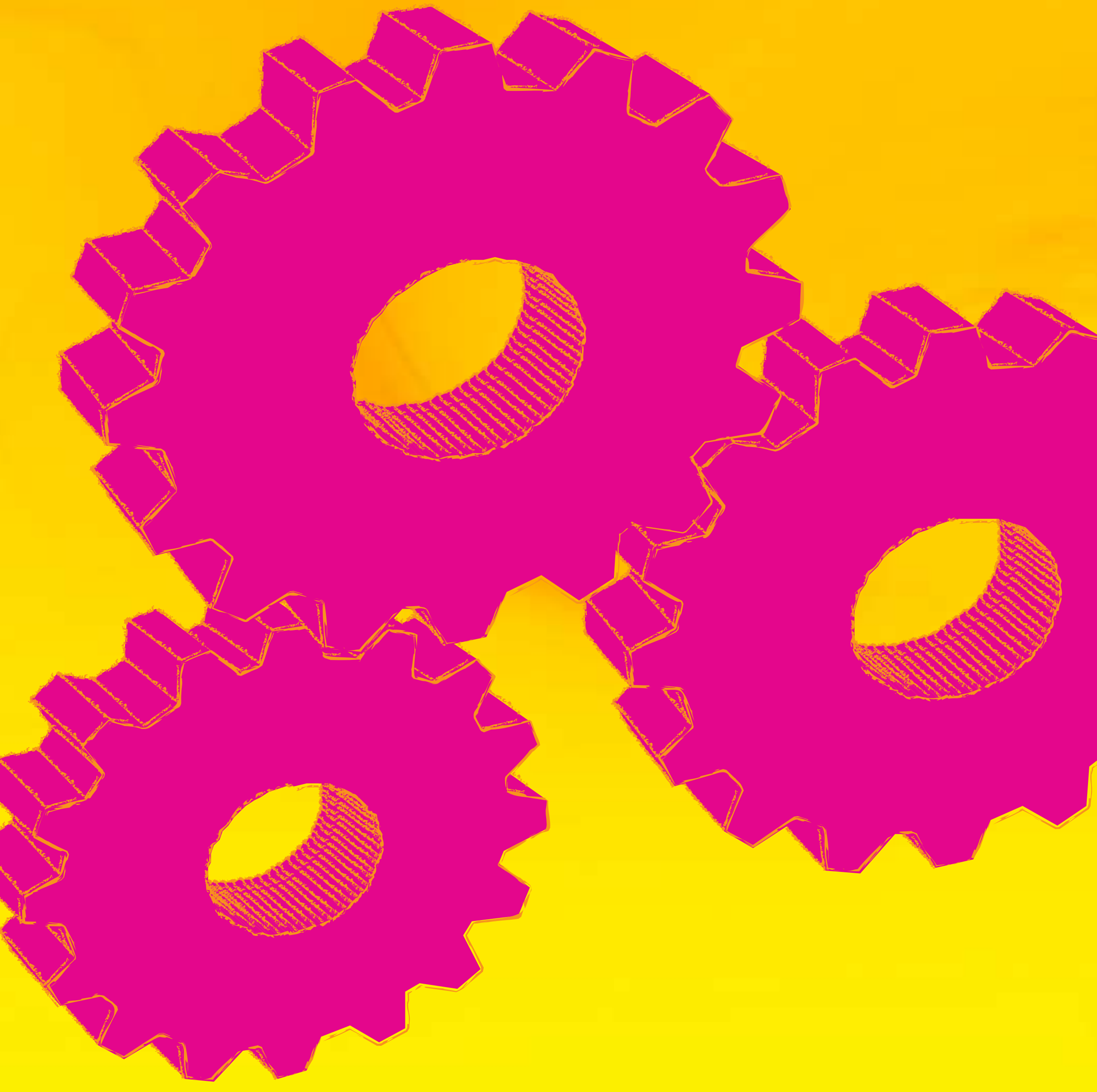
$c:\ y=x+1$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ثلورم ثپرکی

مثلثاتي تابع گاني

(c) ketabton.com: The Digital Library



(c) ketabton.com: The Digital Library

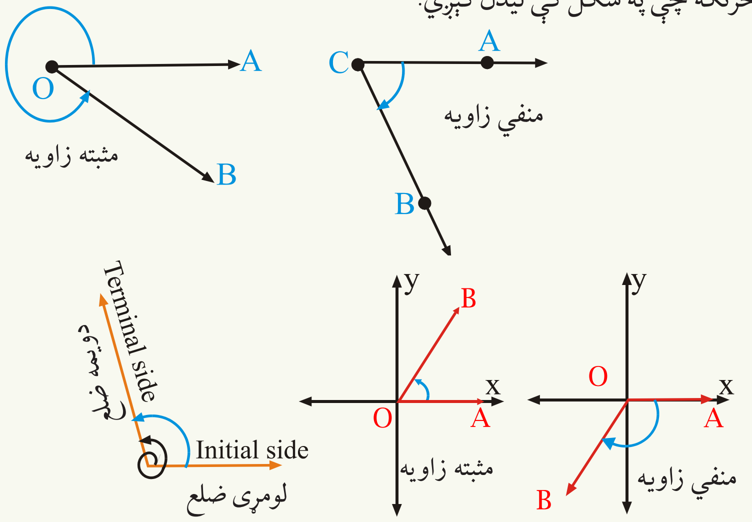
زاویه او راډیان(Angle and Radian)
زاویه او د زاویې د اندازه کولو واحدونه:

آیا زاویه په مثلثاتو او هندسه کې یو له بله توپیر لري؟
آیا په هندسه کې منفي زاویې شته دي؟

له هندسي څخه پوهېږو، زاویه هغه شکل دی چې د دوه نیمو خطونو له یو ځای کېدو څخه چې مشترکه مبدأ ولري، تشکیل شوی وي چې مشترکه مبدأ د زاویې له رأس څخه عبارت ده. په هندسه کې زاویه له 1° څخه تر 360° پورې وي، خو په مثلثاتو کې په هره اندازه زاویه درلودلای شو. له بلې خوا په مثلثاتو کې مثبتې او منفي زاویې هم شته دي.

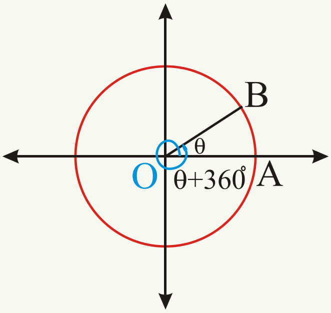
په مثلثاتو کې زاویه د یو خط له دوران څخه په دې ډول چې د خط یو انجام ثابت وي، لاس ته راځي. چې د لومړي خط دوران د دویمې ضلعې موقعیت اختیاروي(یوه ضلع د رأس په نقطه کې دوران کوي). د ساعت د عقربې د حرکت مطابق دوران(clockwise) منفي او د ساعت د عقربې د حرکت مخالف(Counter clockwise) دوران مثبت فرض شوی دی.

چې لومړی ضلعې ته (Initial side) او د دوران پای ته دویمه ضلع (Terminal side) وایي. لکه: څرنګه چې په شکل کې لیدل کېږي.



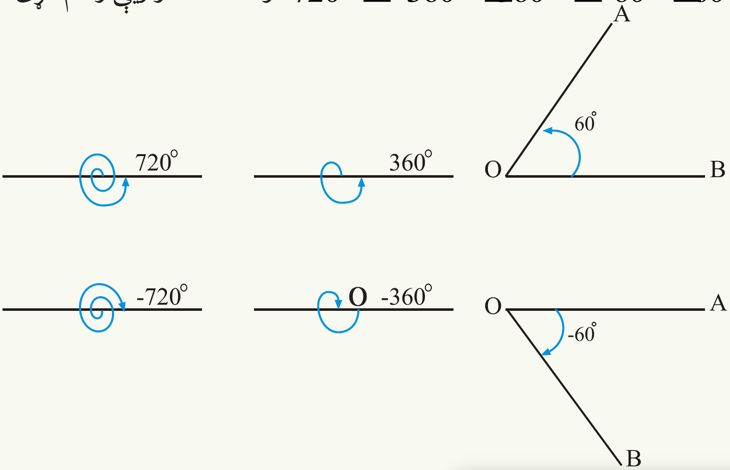
(c) ketabton.com: The Digital Library

که په شکل کې د $\overrightarrow{OA}$ نیم خط ته د مختصاتو د مبدأ پر شاوخوا د ساعت د عقربې د حرکت په مخالف جهت کې دوران ورکړو، د θ زاویه لاس ته راځي.



که د $\overrightarrow{OA}$ نیم خط ته د 360° په اندازه(یو پوره دوارن) دوران ورکړو، او دوران ته دوام ورکړو، تر څو د$\overrightarrow{OA}$ نیم خط د OB موقعیت ته ورسیږي. په دې حالت کې جوړه شوې زاویه $\theta+360^\circ$ ده. او که د دوو پوره دورانونو وروسته د B ټکي ته ورسیږو، طی شوی زاویه به $\theta+720^\circ$ او په همدې ډول که د $\overrightarrow{OA}$ نیم خط ته K دورانونه ورکړو او د B ټکي ته ورسیږو، نو د زاویې اندازه به $\theta+K\cdot360^\circ$ وي، لکه: څرنګه چې لیدل کیږي، په مثلثاتو کې له 360° څخه لویې زاویې هم شته دی.

لومړی مثال: د 60° ، -60° ، 360° ، -360° ، 720° او -720° زاویې رسم کړئ.



فعالیت

د 45° , 90° , -180° او 180° زاویې رسم کړئ.

د زاویې د اندازه کولو واحدونه: زاویه د درجې، ګراد او راډیان په مرسته اندازه کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

درجه: د یو دوران (Rotation) $\frac{1}{360}$ برخه له درجې څخه عبارت ده، یا دیوې قایمې زاویې $\frac{1}{90}$ برخې ته درجه وایي.

$$1^\circ = 60' \qquad 1' = 60'' \qquad 1^\circ = 60 \cdot 60 = 3600''$$

$$(\frac{1}{60})^\circ = 1' \quad , \quad (\frac{1}{60})' = 1'' \qquad (\frac{1}{3600})^\circ = 1''$$

دویم مثال: $35^\circ\ 15'\ 27''$ د درجې په اعشاري شکل ولیکئ او $(48{,}3625)^\circ$ په درجه، دقیقه او ثانیه (DMS) واړوئ.

حل

$$35^\circ\ 15'\ 27'' = 35^\circ + (\frac{15}{60})^\circ + (\frac{27}{3600})^\circ = 35^\circ + 0{,}25^\circ + 0{,}0075^\circ = 35{,}2575^\circ$$

$$48{,}3625^\circ = 48^\circ + 0{,}3625^\circ = 48^\circ + (0{,}3625 \cdot 60)' = 48^\circ + (21{,}75)'$$

$$= 48^\circ + (21)' + (0{,}75 \cdot 60)'' = 48^\circ \quad 21' \quad 45''$$

فعالیت

$36^\circ\ 47'\ 12''$ په درجه واړوئ او $55{,}967663^\circ$ په درجه، دقیقه او ثانیه (DMS) (Degree, Minute, Second) واړوئ.

ګراد: ګراد هم د زاویې د اندازه کولو واحد دی، د یو دوران $\frac{1}{400}$ برخې ته ګراد وایي. د ګراد $\frac{1}{100}$ برخې ته دقیقه ګراد او د دقیقه ګراد $\frac{1}{100}$ مې برخې ته ثانیه ګراد وایي.

$$1g = 100'g \quad , \quad 1'g = 100''g \quad , \quad 1g = 10000''g$$

د درجې بدلول په ګراد او د ګراد بدلول په درجې باندې: کولای شو چې درجه په ګراد او ګراد په درجه واړوو.

دریم مثال: 45° درجې په ګراد او $100g$ په درجه واړوئ.

حل: څرنګه چې یو مکمل دوران 360° یا $400g$ دی نو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$360^o = 400g$

$1^0 = \frac{400}{360}g = \frac{10}{9}g$

$45^o = 45(\frac{10}{9})g = 50g$

$400g = 360^o$

$1g = (\frac{360}{400})^o = (\frac{9}{10})^o$

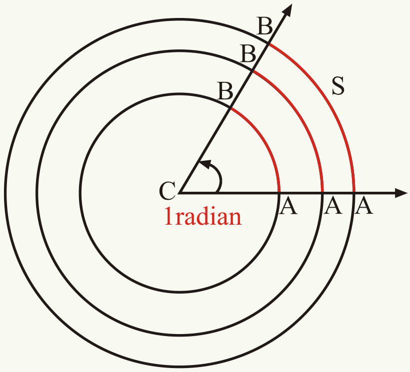
$100g = 100(\frac{9}{10})^o = 90^o$

اویا:

$$\frac{d}{180} = \frac{g}{200} \quad , \quad \frac{d}{180} = \frac{100}{200}$$

$$d = \frac{180 \cdot 100}{200} = 90^o$$

راډیان(Radian): د درجې او ګراد سربېره د زاويې د اندازه کولو بل واحد راډیان دی. راډیان د هغوي مرکزي زاويې اندازه ده چې د مقابل قوس اوږدوالی يې د شعاع له اوږدوالی سره مساوي وي. راډیان په عالي رياضياتو کې ډېر استعمالېږي. په شکل کې د $\hat{ACB}$ مرکزي زاويه چې شعاع يې r او د AB قوس اوږدوالی له r سره مساوي دی، نو د $\hat{ACB}$ زاويه 1Radian ده.

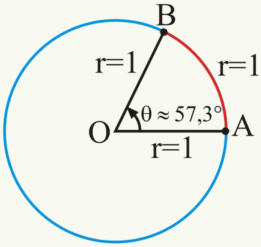


$$\hat{ACB} = 1\text{radian} = 1^R$$

که د AB قوس د دايرې له شعاع r سره مساوي وي، θ د راډیان په حساب مساوي ده په:

$$\hat{\theta} = \frac{\overset{\frown}{AB}}{r} = \frac{s}{r} \text{ او يا } s = r\theta$$

په مثلثاتي دايره يا واحده دايره(Unite Circle) کې چې شعاع يې د اوږدوالی واحد او مرکز يې د وضعيه کمياتو په مبدا کې واقع وي، د راډیان په حساب د مرکزي زاويې اندازه له مقابل قوس سره مساوي ده.



(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\theta = \frac{\overset{\frown}{AB}}{r} = \frac{\overset{\frown}{AB}}{1} = \overset{\frown}{AB} = S \quad \text{radian}$$

خرنګه چې د دايرې محيط $C = 2\pi r$ دی، نو $\frac{2\pi\, r}{r} = 2\pi \;\; radian$ په دې معنا چې يو پوره دوارن 360° يا $2\pi^R$ دی.

$$2\pi^R = 360^\circ$$

$$1^R = \frac{360^\circ}{2\pi} = \frac{180^\circ}{\pi} \approx \frac{180^\circ}{3.14159} \approx (57.29578)^\circ \approx 57^\circ 17'45'' \approx (57.3)^\circ$$

$$1^\circ = \frac{2\pi}{360^\circ} = \frac{\pi}{180^\circ} \approx \frac{3.14159}{180^\circ} \approx 0.01745 \,\text{Randians}$$

څلورم مثال: د $\frac{\pi}{3}$ $radian$ د مرکزي زاويې د مقابل قوس اوږدوالی پيدا کړئ، که د دايرې قطر $30m$ وي.

حل: خرنګه چې: $r = \frac{d}{2} = \frac{30m}{2} = 15m$ دی، نو: $s = r\theta = 15(\frac{\pi}{3}) = 5\pi \; m \approx 15{,}7m$

فعاليت

د $1Rad$ مرکزي زاويې د مقابل قوس اوږدوالی په څو سانتي متره وي؟ که د دايرې شعاع $10cm$ وي.

د درجې او ګراد بدلول په راډيان او د راډيان بدلول په درجه او ګراد:

خرنګه چې $360^o = 400g = 2\pi^R$ دی،نو $\frac{d}{360^\circ} = \frac{g}{400} = \frac{R}{2\pi}$ او يا $\frac{d}{180} = \frac{g}{200} = \frac{R}{\pi}$

او يا

$$360^o = 2\pi^R$$

$$1^o = (\frac{2\pi}{360})^R = (\frac{\pi}{180})^R$$

په همدې ډول خرنګه چې: $2\pi^R = 360^o$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$1^R=(\frac{360}{2\pi})^o=(\frac{180}{\pi})^o$$

$$1^R=\frac{200g}{\pi}=\frac{200g}{3{,}1415}\approx 63{,}66198g$$

پنځم مثال: د 75° , 220° , -400° , $-100g$ او 40° زاويې په راډيان واړوئ.

ځرنګه چې $1^o=(\frac{\pi}{180})^R$ ده، نو:

$$220\cdot\frac{\pi}{180}=\frac{11\pi}{9}\text{radain},\qquad 75^\circ\cdot\frac{\pi}{180}=\frac{5\pi}{12}\text{radain}$$

$$40^\circ\cdot\frac{\pi}{180^\circ}=\frac{2\pi}{9}\text{ radian}\qquad -400^\circ\cdot\frac{\pi}{180}=-\frac{20\pi}{9}\text{ radain}$$

ځرنګه چې يو پوره دوران $2\pi^R$ او يا $400g$ دی، نو:

$$1g=(\frac{2\pi}{400})^R=(\frac{\pi}{200})^R$$

$$-100g=(-100\cdot\frac{\pi}{200})^R=(-\frac{\pi}{2})^R$$

پوښتنه: که د ګراد په حساب له يوې زاويې څخه 30 واحده کم کړو، په لاس راغلی عدد، د زاويې اندازه په درجه راکوي، دا زاويه څو راډيانه ده؟

حل

$$\frac{270}{180}=\frac{R}{\pi}\Rightarrow R=\frac{3\pi}{2}\text{Radian}\qquad \frac{10}{9}D-30=D$$

$$\frac{10}{9}D-D=30\Rightarrow\frac{10D-9D}{9}=30\Rightarrow D=270^\circ$$

نو دا زاويه $\frac{3\pi}{2}$ راډيانه ده.

شپږم مثال: a: $(\frac{5\pi}{6})$, $\frac{\pi}{5}$, $\frac{4\pi}{9}$ او 6π راډيان په درجه واړوئ.

(b): د يو دوران(Revolution) $\frac{1}{4}$ برخه څو راډيانه کېږي؟

حل

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$1^R = \left(\frac{180}{\pi}\right)^o \quad , \quad \frac{\pi}{5} \cdot \frac{180}{\pi} = 36^\circ$$

$$a : \left(\frac{5\pi}{6}\right) \cdot \left(\frac{180}{\pi}\right) = 150^\circ \quad , \quad 6\pi \cdot \frac{180}{\pi} = 1080^\circ \quad , \quad \frac{4\pi}{9} \cdot \frac{180}{\pi} = 80^\circ$$

$$b : = \frac{1}{4} \cdot 2\pi^R = \frac{\pi}{2} \text{radian}$$

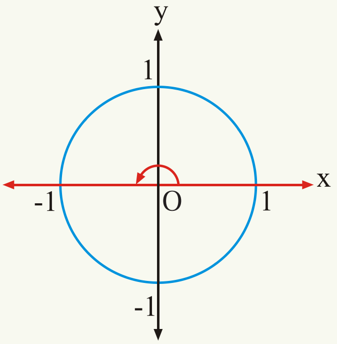
لاندې شکلونه وګورئ.

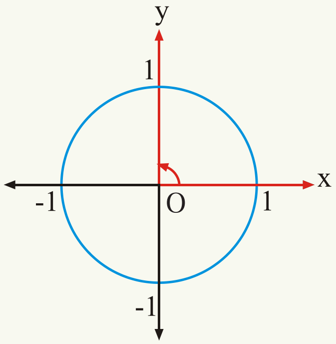
$\frac{1}{2}$ Rev

$\frac{1}{2} \cdot 2\pi = \pi^R$

$\frac{1}{4}$ Rev

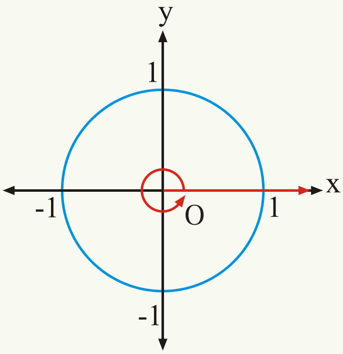
$\frac{1}{4} \cdot 2\pi = \frac{\pi}{2}$ Radain

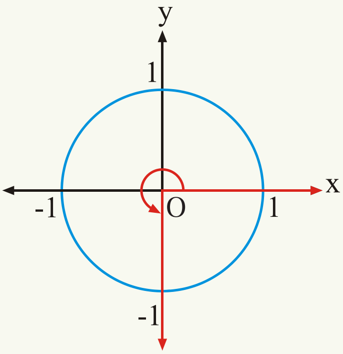




1 Revolution , $\frac{3}{4}$ Revolution

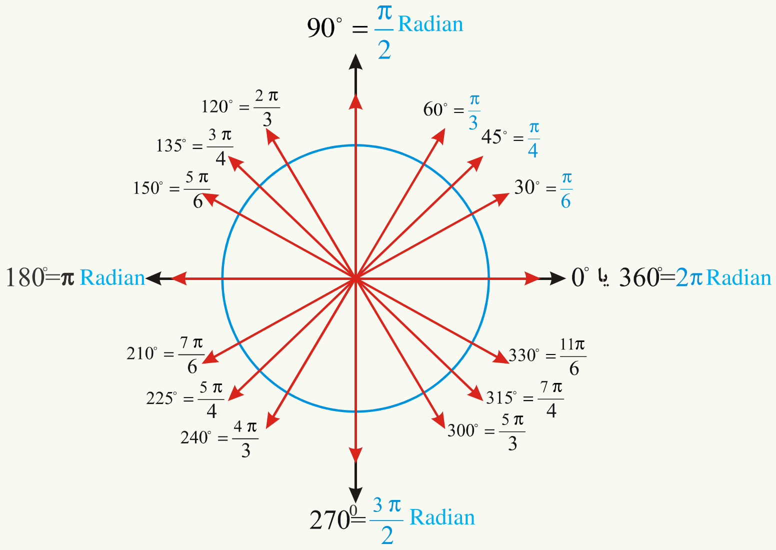
2 π Radians , $\frac{3}{4} \cdot 2\pi = \frac{3\pi}{2}$ Radians





(c) ketabton.com: The Digital Library

د درجې او راډیان تر منځ د اړیکې د ښه څرګندیدو لپاره لاندې شکل هم وګورئ:



فعالیت

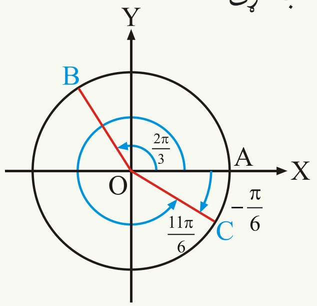
$\frac{\pi}{12}$, $\frac{3\pi}{4}$ او $\frac{5\pi}{4}$ – راډیانه زاویې په درجه واړوئ.

اووم مثال

(a) د $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{11\pi}{6}$ او $\frac{\pi}{6}$ – زاویې په شکل کې وښیاست:

(b) په شکل کې لوی او کوچنی خرخ ښودل شوی دی، که د θ_1 او θ_2 د زاویو مقدار د راډیان په حساب وي، د θ_2 د زاویې مقدار د θ_1، r_1 او r_2 له جنسه حساب کړئ.

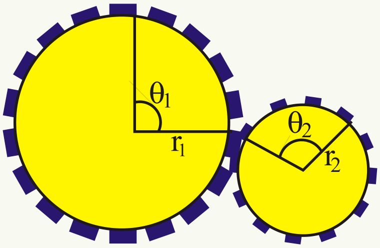
د (a) حل:



(c) ketabton.com: The Digital Library

له شکل ښخه لیدل کېږي چې د $\frac{11\pi}{6}$ او $\frac{\pi}{6}$ – زاویو دویمې ضلعې یو پر بل منطبقې دي.

د (b) حل:



$$\theta_2 r_2 = \theta_1 r_1 \quad \Rightarrow \theta_2 = \frac{\theta_1 r_1}{r_2}$$

اتم مثال: که د ساعت د ثانیې عقربې 40 ثانیې دوران کړی وي، د ثانیې د عقربې په واسطه طې شوې مثبته زاویه په راډیان پیدا کړئ.

حل: څرنګه چې 60 ثانیې یو پوره دوران یا 2π راډیان کېږي، نو $\frac{40}{60} = \frac{2}{3} \mathrm{Rev}$ او څرنګه چې یو دوران 2π *Radian* دی، نو: $\frac{2}{3} \cdot 2\pi^R = \frac{4\pi}{3}$ Radian

همدارنګه د ساعت د دوو عقربو تر منځ د زاویې د پیدا کولو لپاره له $\theta = |5{,}5\,\mathrm{min} - 30\mathrm{hr}|$ ښخه کار اخلو.

د مثال په توګه د 3 بجو او 40 دقیقو په وخت کې د ساعت ګرد او دقیقه ګرد په منځ کې زاویه څو درجې ده؟

$$\theta = |5{,}5 \cdot 40 - 30 \cdot 3| = 130^\circ$$

پوښتنې

1 - که د یوې مرکزي زاویې مقابل قوس 50cm او د دایرې شعاع 25cm وي، مرکزي زاویه به څو راډیانه وي؟

2 - $32{,}4222^\circ$ په درجې، دقیقې او ثانیې واړوئ.

3 - د یو دوران $\frac{1}{8}$ برخه څو راډیانه، څو درجې او څو ګراده کېږي؟

4 - $\frac{5\pi}{4}$ راډیانه څو ګراده او $-7{,}5^\circ$ – څو راډیانه کېږي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

5- $225^{o}, -315^{o}, 720^{o}$ او 45° زاويې په راډيان اوګراد واړوئ

6 - د يو دوران $\frac{1}{9}$ ، $\frac{1}{24}$ ، $\frac{1}{18}$ او $\frac{4}{5}$ برخې څو راډيانه او څو درجې کېږي؟

7 - $\frac{11\pi}{3}$ ، $\frac{9\pi}{4}$ ، $\frac{\pi}{6}$ ، $-\frac{\pi}{6}$ ، $-\frac{\pi}{10}$ ، $\frac{2\pi}{5}$ او $-\frac{5\pi}{12}$ راډيانه په درجو واړوئ

8 - که د يو ساعت د ثانيې د عقربې اوږدوالی 6cm وي، په 40 ثانيو کې د ثانيې عقربه څو سانتي متره فاصله طی کوي؟

9 - که د دايرې شعاع 3cm او مرکزي زاويه $\frac{5}{3}$ راډيانه وي. د دې مرکزي زاويې د مقابل قوس اوږدوالی به څو سانتي متره وي؟

10 - که د يو ساعت د ثانيې د عقربې دوران 35 ثانيې وي، نو د ثانيې عقربې به څو راډيانه مثبته زاويه طی کړې وي؟

11 - د دوو زاويو مجموعه 152° ده، که د يوې زاويې اندازه د درجې په حساب له بلې زاويې سره د ګراد په حساب برابره وي، د هرې زاويې اندازه د راډيان په حساب څومره ده؟

12- 1620° څو راډيانه کېږي؟

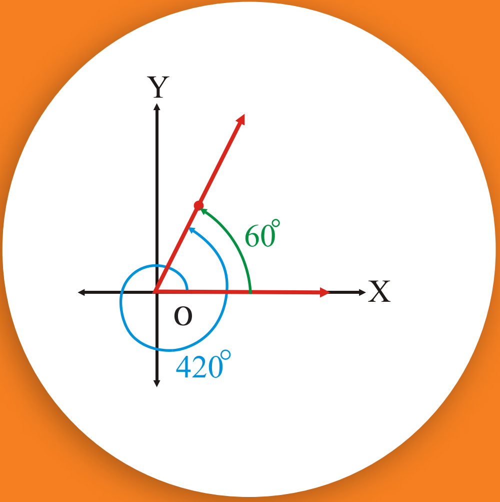
a) $4\pi^{R}$ b) $8\pi^{R}$ c) $9\pi^{R}$ d) $10\pi^{R}$

13 - څلور دورانونه څو راډيانه کېږي؟

a) $2\pi^{R}$ b) $4\pi^{R}$ c) $6\pi^{R}$ d) $8\pi^{R}$

14 - که د يوې دايرې شعاع 10m وي، د 45 radian مرکزي زاويې، مقابل قوس به څو متره وي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library



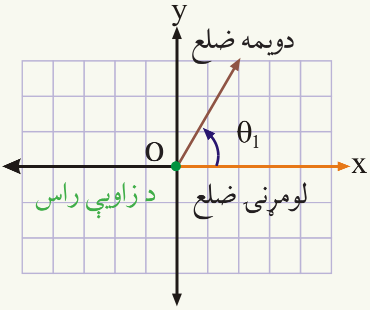
د يوې زاويې معياري حالت او کوټرمينل زاويې

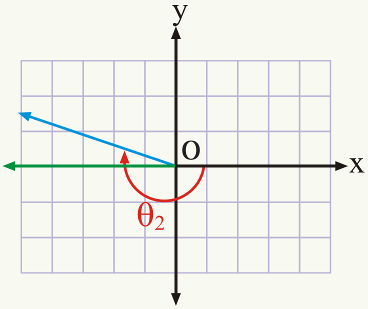
آيا ويلای شئ چې د 60° او 420° زاويو دويمې ضلعې يو پر بل منطبق دي؟ ولې؟

د يوې زاويې معياري حالت (Standard position of an angle):

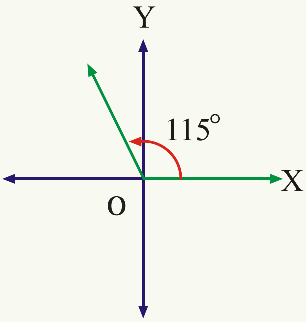
که د يوې زاويې رأس د وضعيه کمياتو په مبدأ کې او لومړنی ضلع يې د X د محور په مثبت جهت پرته وي، نو دا زاويه په معياري حالت کې ده.

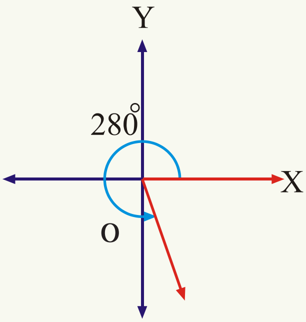
د مثال په توګه: په لاندې شکلونو کې د θ_1 او θ_2 زاويې په معياري حالت کې ښودل شوي دي.

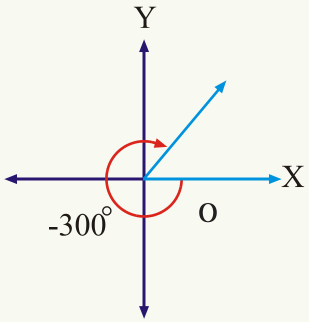




لومړی مثال: 115°، 280° او -300° زاويې په معياري حالت کې رسم کړئ.







(c) ketabton.com: The Digital Library

که په معياري حالت کې د يوې زاويې دويمه ضلع د X او يا د Y پر محور منطبق شي، داسې زاويې ته ربعي زاويه(Quadrantale angle) وايي.

د مثال په توګه: $90^\circ, 180^\circ, 270^\circ, 360^\circ$ او داسې نورې زاويې ربعي زاويې دي.

فعاليت

د $130^\circ, 50^\circ, 500^\circ$ او -210° زاويې په معياري حالت کې رسم کړئ.

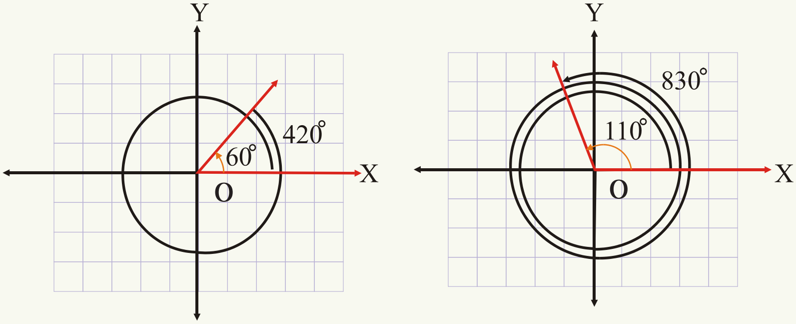
کوټرمينل زاويې (Conterminal angles):

دوې يا څو زاويې چې په معياري حالت کې يې دويمې ضلعې يو پر بل منطبقې شي، د کوټرمينل زاويو په نامه يادېږي.

دويم مثال: په شکل کې وښياست چې د 60° او 420° زاويې او همدارنګه د 110° او 830° زاويې چې په معياري حالت کې دي، يو له بلې سره کوټرمينل زاويې دي.

حل: څرنګه چې په معياري حالت کې د دې زاويو لومړنۍ ضلعې يو پر بل منطبق دي، لکه څنګه چې په شکل کې ليدل کېږي د 60° او 420° زاويو دويمې ضلعې(Conterminal sides) يو پر بل منطبق دي. نو د تعريف په اساس دا دواړه زاويې سره کوټرمينل دي.

همدارنګه د 110° او 830° زاويې هم سره کوټرمينل دي.

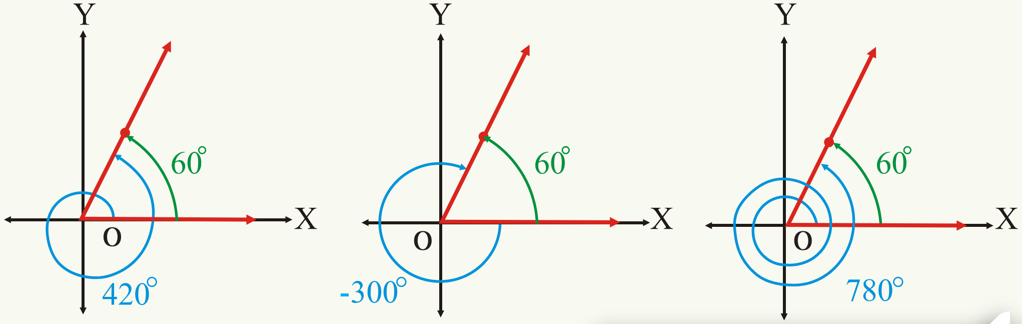


(a) (b)

دريم مثال: په معياري حالت کې د 60° زاويې سره درې کوټرمينل زاويې رسم کړئ او په شکل کې يې هم وښياست.

حل: $60^\circ + 360^\circ = 420^\circ, \quad 60^\circ - 360^\circ = -300^\circ, 60^\circ + 2 \cdot 360^\circ = 780^\circ$

(c) ketabton.com: The Digital Library



فعالیت

ایا د 230°، 590° او 230°، -130° زاويې سره کوټرمينل دي؟ رسم يې کړئ.

خرنګه چې کوټرمينل زاويې يو له بله سره د يوه پوره دوران (360°) يا $2\pi^R$ او يا څو دورانونه $n\cdot 360^\circ$ او يا $n\cdot 2\pi$ توپير لري، نو د θ د زاويې سره کوټرمينل زاويې عبارت دي له:

$\theta+2\pi$	$\theta+360^\circ$
$\theta+2\cdot 2\pi$	$\theta+2\cdot 360^\circ$
$\theta+3\cdot 2\pi$	$\theta+3\cdot 360^\circ$
-----	-----
$\theta+2n\pi$	$\theta+n\cdot 360^\circ$

خلورم مثال:

(a) له 30° زاويې سره څلور کوټرمينل زاويې پيدا کړئ.

(b): له 90° زاويې سره دوه کوټرمينل زاويې پيدا او په شکل کې يې وښياست.

حل(a)

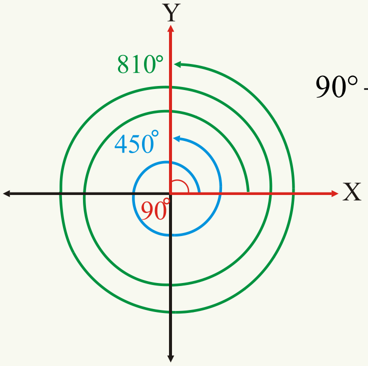
$$30^\circ+360^\circ=390^\circ \text{ یا } \frac{\pi}{6}+2\pi=\frac{13\pi}{6} \text{ Radian}$$

$$30^\circ+2\cdot 360^\circ=750^\circ \text{ یا } \frac{\pi}{6}+2\cdot 2\pi=\frac{25\pi}{6} \text{ Radian}$$

$$30^\circ+3\cdot 360^\circ=1110^\circ \text{ یا } \frac{\pi}{6}+3\cdot 2\pi=\frac{37\pi}{6} \text{ Radian}$$

$$30^\circ+4\cdot 360^\circ=1470^\circ \text{ یا } \frac{\pi}{6}+4\cdot 2\pi=\frac{49\pi}{6} \text{ Radian}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



حل(b

$90°+2\cdot360°=810°$ $\quad$ $90°+360°=450°$

پنځم مثال: آیا $\underline{410°, 50°}$ $\underline{800°, 80°}$ $\underline{-680°, 40°}$ او د $60°$ او $410°$ زاويې سره کوټرمينل دي؟

حل: څرنګه چې $410°=50°+360°$ دی، نو د $50°$ او $410°$ زاويې سره کوټرمينل دي او $800^0=80°+2\cdot360°$ نو د $80°$ او $800°$ زاويې هم سره کوټرمينل دي. همدرانګه $-680°=40°-2\cdot360°$ نو $40°$ او $-680°$ زاويې هم سره کوټرمينل دي، خو $410°\neq60°+360°$، نو د $410°$ او $60°$ زاويې سره کوټرمينل نه دي.

که د يوې زاويې رأس د وضعيه کمياتو په مبدآ کې او لومړنی ضلع يې د X د محور پر مثبت جهت منطبق وي، نو دا زاويه په معياري حالت کې ده. که په معياري حالت کې د دوو يا څو زاويو دويمې ضلعې يو پر بل منطبق وي، داسې زاويې د کوټرمينل زاويو په نوم يادېږي.

پوښتنې

1 - د $90°, 120°, 270°-$ او $240°$ زاويې په معياري حالت کې رسم کړئ.

2 - تر ټولو کوچنی مثبته زاويه پيدا کړئ چې له لاندينيو زاويو سره کوټرمينل وي.

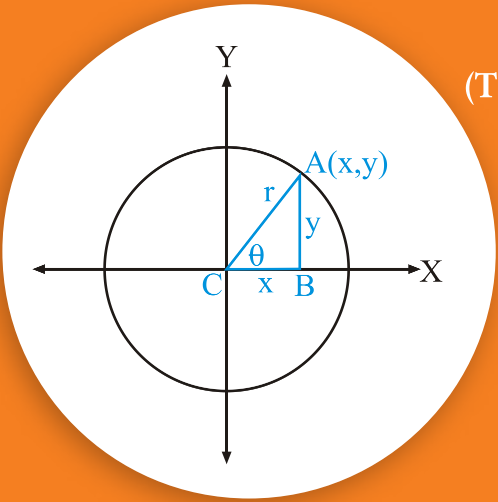
$-40°$ $\quad$ $-125°$ $\quad$ $450°$ $\quad$ $539°$ $\quad$ $60°$ $\quad$ $90°$ $\quad$ $135°$

3 - آيا د ($-80°$ ، $280°$) او د ($35°$ ، $395°$) زاويې سره کوټرمينل دي؟

4 - له $40°$ زاويې سره، شپږ کوټرمينل زاويې پيدا کړئ.

5 - آيا د $(-930°, 150°)$ او د $(180°, 900°)$ زاويې سره کوټرمينل دي، په شکل کې يې هم وښياست؟

(c) ketabton.com: The Digital Library



مثلثاتي تابعګاني
(Trigonometric Functions)

آیا ویلای شئ چې د θ د زاویې مثلثاتي نسبتونه د θ د زاویې د ضلعو په اوږدوالی پورې اړه لري او که نه؟

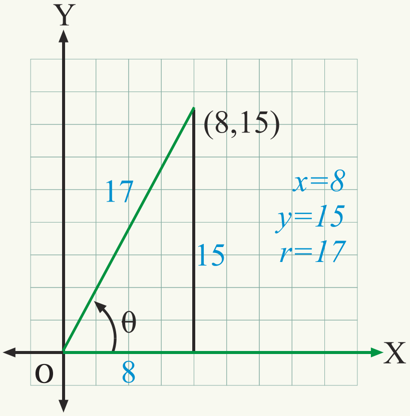
خرنګه چې پوهېږو چې د یوې حادې زاویې (θ) مثلثاتي نسبتونه (Trigonometric ratios) په یوه قایمه الزاویه مثلث کې په لاندې ډول تعریف شوي دي.

$$\sin\theta = \frac{AB}{AC} = \frac{y}{r}\ ,\quad \cos\theta = \frac{BC}{AC} = \frac{x}{r}$$

$$\tan\theta = \frac{AB}{BC} = \frac{y}{x}\ ,\quad \cot\theta = \frac{BC}{AB} = \frac{x}{y}$$

$$\sec\theta = \frac{AC}{BC} = \frac{r}{x}\ ,\quad \csc\theta = \frac{AC}{AB} = \frac{r}{y}$$

او په نتیجه کې لیدل کېږي چې: $\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}$, $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$ او $\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$.



لومړی مثال: که په معیاري حالت کې د θ زاویې دویمه ضلع د $(8,15)$ له ټکي څخه تېره شي، د θ زاویې مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

د فیثاغورث د قضیې په اساس لروچې:

$r^2 = x^2 + y^2$ دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$r^2 = 8^2 + (15)^2 = 64 + 225 = 289$$

$$r = \sqrt{289} = 17$$

$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{15}{17} \;,\; \cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{8}{17}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{15}{8} \;,\; \cot\theta = \frac{x}{y} = \frac{8}{15}$$

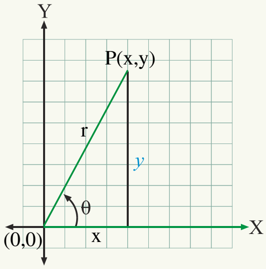
$$\sec\theta = \frac{r}{x} = \frac{17}{8} \;,\; \csc\theta = \frac{r}{y} = \frac{17}{15}$$

د زاویو د ځینو مثلثاتي نسبتونو ترمنځ اساسي اړیکي:

د فیثاغورث د قضیې په اساس د شکل له مخې لیکلای شوچې:

$$y^2 + x^2 = r^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{I}$$

دواړو خواوې په r^2 وېشو:



$$\frac{y^2}{r^2} + \frac{x^2}{r^2} = \frac{r^2}{r^2}$$

$$(\frac{y}{r})^2 + (\frac{x}{r})^2 = 1$$

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

همدارنګه که د (I) معادلې دواړه خواوې په y^2 ووېشو، نو لرو چې:

$$\frac{y^2}{y^2} + \frac{x^2}{y^2} = \frac{r^2}{y^2} \Rightarrow 1 + (\frac{x}{y})^2 = (\frac{r}{y})^2$$

$$1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$$

اوکه د (I) معادلې دواړه خواوې په x^2 ووېشو:

$$\frac{y^2}{x^2} + \frac{x^2}{x^2} = \frac{r^2}{x^2} \Rightarrow (\frac{y}{x})^2 + 1 = (\frac{r}{x})^2$$

$$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$$

له بلې خوا:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\frac{y}{r}}{\frac{x}{r}}=\frac{y}{x}=\tan\theta \qquad \frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{\frac{x}{r}}{\frac{y}{r}}=\frac{x}{y}=\cot\theta$$

او له دي ځایه څخه نتیجه کېږي چي:

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1\ ,\ \sin\theta\cdot\csc\theta=1\ ,\ 1+\tan^2\theta=\sec^2\theta\ ,\ \tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$\tan\theta\cdot\cot\theta=1\ ,\ \cos\theta\cdot\sec\theta=1\ ,\ 1+\cot^2\theta=\csc^2\theta\ ,\ \cot\theta=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

څرنګه چي دا اړیکي د θ د هر قیمت لپاره سمي دي، نو په دي اساس مثلثاتي مطابقتونه هم ورته وايي.

فعالیت

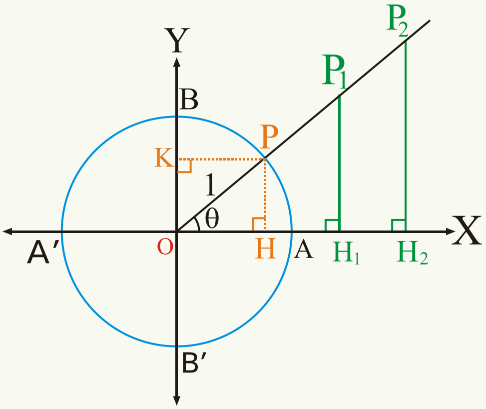
که په معیاري حالت کي د θ دویمه ضلع د $(12,5)$ له ټکي څخه تېره شي، د θ د زاویې مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

د مثلثاتی تابع ګانو پورتني قیمتونه یوازې د θ زاویې د اندازې پورې اړه لري، د P د ټکي پر موقعیت پورې چې د θ پر دویمه ضلع واقع دی اړه نه لري چي دا حقیقت په شکل کي د $\overset{\Delta}{OH_1P_1}$ □ $\overset{\Delta}{OPH}$ او $\overset{\Delta}{OH_2P_2}$ مثلثونو د مشابهت په اساس لیدل کېږي.

$|OP|=1$

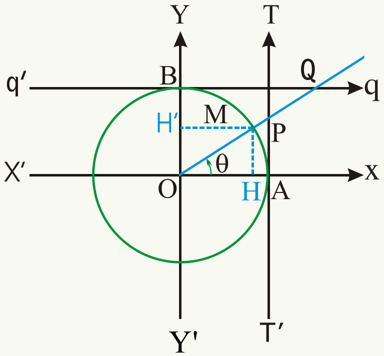
$$\cos\theta=\frac{|OH|}{|OP|}=\frac{|OH_1|}{|OP_1|}=\frac{|OH_2|}{|OP_2|}$$

$$\sin\theta=\frac{|PH|}{|OP|}=\frac{|P_1H_1|}{|OP_1|}=\frac{|P_2H_2|}{|OP_2|}$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

که د θ زاویه د راډیان په حساب وي. θ آزاد متحول او $\sin\theta, \cos\theta, \tan\theta, \cot\theta, \sec\theta$ او $\csc\theta$ مقید (مربوط) متحولونه دي. په دې معنا چې $\sin\theta, \cos\theta, \tan\theta, \cot\theta, \sec\theta$ او $\csc\theta$ مثلثاتي تابعګانې دي چې مقدار يې د θ د ضلعو اوږدوالي پورې اړه نه لري، بلکې د θ د زاويې په مقدار پورې اړه لري.



څرنګه چې مثلثاتي دايره (Trigonometric Circle) هغه دايره ده چې د شعاع اوږدوالی يې د اوږدوالي واحد دی.

په مثلثاتي دايره کې چې مرکز يې د وضعيه کمياتو په مبداکې او د XX' او YY' محورونه د دې دايرې افقي او عمودي قطرونه دي. د قرارداد په اساس $y'oy$ ته د ساينو محور او $x'ox$ ته د کوساينو محور وايي. د TAT' محور چې د A په ټکي کې له دايرې سره مماس دی، د ټانجانټ محور او د $q'Bq$ محور چې د B په ټکي کې پر دايره مماس دی، د کوټانجانټ محور بلل کيږي. د ساينو او کوساينو د محورونو مبدأ د دايرې مرکز او د ټانجانټ د محور مبدأ، د A ټکی د کوټانجانټ د محور مبدأ، د B ټکی دی.

که چيرې د A له ټکي څخه په مثبت جهت کې د M تر ټکي حرکت وکړو او د $M\hat{O}A$ زاويې ته θ ووايو، د θ د زاويې مثلثاتي توابع په لاندې ډول هم تعريفيږي.

$$(r = OM = OA = OB = 1)$$

$$\sin\theta = \frac{HM}{OM} = \frac{\overline{OH'}}{OM} = \frac{\overline{OH'}}{1} = \overline{OH'} \qquad \cos\theta = \frac{\overline{OH}}{OM} = \frac{\overline{OH}}{1} = \overline{OH}$$

$$\tan\theta = \frac{HM}{OH} = \frac{\overline{AP}}{OA} = \overline{AP} \qquad \sec\theta = \frac{OM}{OH} = \frac{OP}{OA} = \overline{OP}$$

$$\cot\theta = \frac{\overline{OH}}{HM} = \frac{BQ}{OB} = \overline{BQ} \qquad \csc\theta = \frac{OM}{HM} = \frac{OQ}{OB} = \overline{OQ}$$

په دې اساس مثلثاتي نسبتونو ته مثلثاتي خطونه هم وايي.

په همدې ډول که د θ دويمه ضلع او يا دقوس پای په دويمه، دريمه يا څلورمه ناحيه(ربع) کې وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

کولی شو چې مثلثاتي نسبتونه يې پر لاس راوړو:

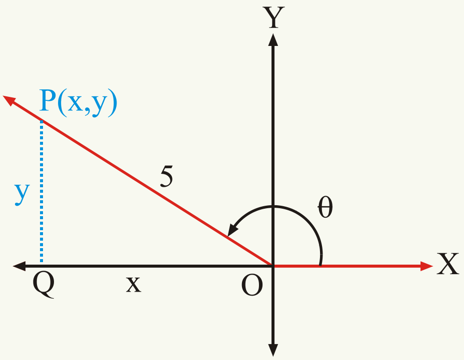
د مثلثاتي نسبتونو علامې په څلورو ناحيو(ربعو) (quadrants) کې په لاندې ډول دي.

$\sin\theta > 0$	$\sin\theta > 0$
$\cos\theta < 0$	$\cos\theta > 0$
$\tan\theta < 0$	$\tan\theta > 0$
$\cot\theta < 0$	$\cot\theta > 0$
$\sec\theta < 0$	$\sec\theta > 0$
$\csc\theta > 0$	$\csc\theta > 0$
$\sin\theta < 0$	$\sin\theta < 0$
$\cos\theta < 0$	$\cos\theta > 0$
$\tan\theta > 0$	$\tan\theta < 0$
$\cot\theta > 0$	$\cot\theta < 0$
$\sec\theta < 0$	$\sec\theta > 0$
$\csc\theta < 0$	$\csc\theta < 0$

$\sec\theta, \cos\theta$	$\tan\theta, \cot\theta$	$\sin\theta, \csc\theta$	ربع
+	+	+	I
−	−	+	II
−	+	−	III
+	−	−	IV

دويم مثال: له لاندې شکل سره سم که په معياري حالت کې د θ د زاويې دويمه ضلع، په دويمه ناحيه(ربع) کې واقع وي او $\cos\theta = \frac{-3}{5}$ وي، د θ د زاويې نور مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

حل: لومړی د P د ټکي وضعيه کميات پيدا کوو: څرنګه چې $\cos\theta = \frac{-3}{5}$ دی، په دويمه ربع کې د x قيمت منفي دی، نو $x = -3$ او $r = 5$ د فيثاغورث د قضيې له مخې لرو چې:



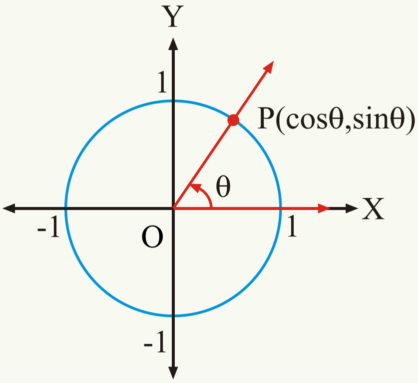
$$5^2 = (-3)^2 + y^2$$
$$y^2 = 25 - 9 = 16$$
$$y = \pm\sqrt{16}$$
$$y = 4$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(ځکه چې د P ټکی په دویمه ربع کې دی، $y>0$ دی)

$$\sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{4}{5}\ ,\quad \cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{-3}{5}\ ,\quad \tan\theta=\frac{y}{x}=\frac{4}{-3}$$

$$\csc\theta=\frac{r}{y}=\frac{5}{4}\ ,\quad \sec\theta=\frac{r}{x}=\frac{5}{-3}\ ,\quad \cot\theta=\frac{x}{y}=\frac{-3}{4}$$



څرنګه چې د X محور ته د cos محور او د Y محور ته د sine محور وايي، موږ کولای شو چې په مثلثاتي دايره کې د P د ټکي وضعيه کميات له $P(\cos\theta,\sin\theta)$ او يا $P(x,y)$ سره وښايو.

د θ د زاويې مثلثاتي توابع يوازې د θ د زاويې په مقدار پورې اړه لري چې θ آزاد متحول او د θ مثلثاتي نسبتونه مقيد متحولونه دي.

په لومړي ناحيه(ربعه) کې ټول مثلثاتي نسبتونه مثبت، په دويمه ناحيه(ربع) کې $\sin\theta$ او $\csc\theta$ مثبت، په دريمه ناحيه(ربع) کې $\tan\theta,\cot\theta$ مثبت او په څلورمه ناحيه(ربع) کې $\cos\theta,\sec\theta$ مثبت او نور منفي دي.

پوښتني

1- د لاندېنيو زاويو د مثلثاتي نسبتونو نښې(علامې) په شفاهي ډول ووایاست.

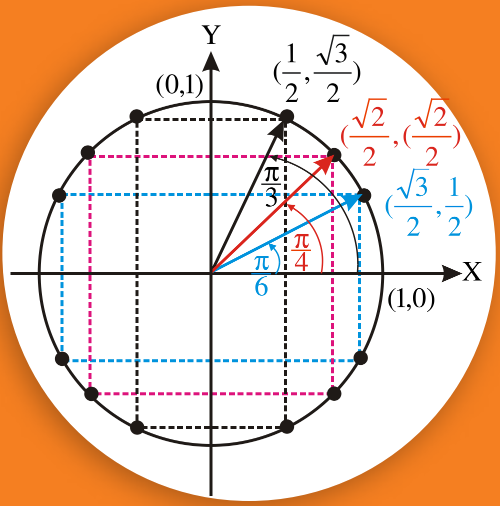
$\sin120^\circ$ $\tan170^\circ$ $\tan60^\circ$ $\cos330^\circ$ $\sec200^\circ$

$\cot271^\circ$ $\csc91^\circ$ $\sin271^\circ$ $\csc181^\circ$ $\csc315^\circ$

2- که θ په معياري حالت کې د راډيان په حساب وي او د θ دويمه ضلع له لاندې راکړل شوو ټکو څخه تېره شي، $\sin\theta$ ، $\cos\theta$ او $\tan\theta$ پيداکړئ.

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\ ,\quad \left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\ ,\quad \left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\ ,\quad \left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



د ځینو خاصو زاویو مثلثاتي نسبتونه

آیا کولای شئ چې وواییځ $\sin 30^\circ = \cos 60^\circ$ دی؟

د 45° مثلثاتي نسبتونه: په یوه قایم الزاویه متساوي الساقین مثلث کې، دوې قایمې ځنډې یې یو، یو واحد په پام کې ونیسئ.

$$r^2 = 1^2 + 1^2$$

$$r^2 = 2 \Rightarrow r = \sqrt{2}$$

$$\sin 45^\circ = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\text{مقابله ضلع}}{\text{وتر}} = \frac{y}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

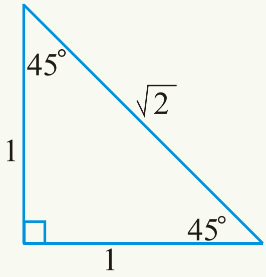
$$\cos 45^\circ = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\text{مجاوره ضلع}}{\text{وتر}} = \frac{x}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan 45^\circ = \tan\frac{\pi}{4} = \frac{\text{مقابله ضلع}}{\text{مجاوره ضلع}} = \frac{y}{x} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\cot 45^\circ = \cot\frac{\pi}{4} = \frac{\text{مجاوره ضلع}}{\text{مقابله ضلع}} = \frac{x}{y} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\sec 45^\circ = \sec\frac{\pi}{4} = \frac{\text{وتر}}{\text{مجاوره ضلع}} = \frac{r}{x} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$$

$$\csc 45^\circ = \csc\frac{\pi}{4} = \frac{\text{وتر}}{\text{مقابله ضلع}} = \frac{r}{y} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$$



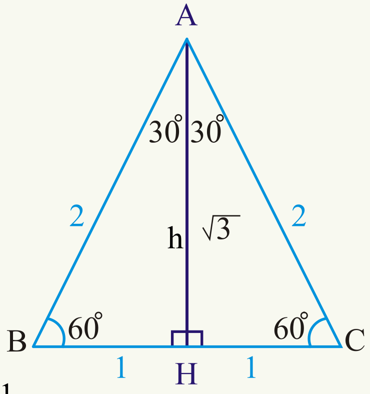
(c) ketabton.com: The Digital Library

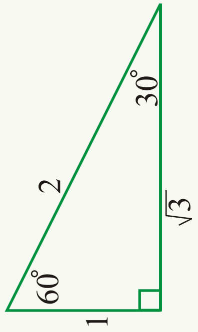
فعالیت

يو متساوي الساقين قايمه زاويه مثلث داسې په پام کې ونيسئ چې هره قايمه ضلع يې b واحده وي، د 45° زاويې مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

که د $\overset{\Delta}{ABC}$ متساوي الاضلاع مثلث چې هره ضلع يې دوه واحده وي، په پام کې ونيسو، د A له رأس څخه د AH ارتفاع رسموو، څرنګه چې د $\hat{A}$ زاويه نيمايي شوې ده چې نيمايي يې 30° ده، نو:

$$h^2+1^2=2^2$$
$$h^2=4-1=3$$
$$h=\sqrt{3}$$





$$\sin 30° = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \qquad \cos 30° = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 30° = \tan\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \cot 30° = \cot\frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$$

$$\sec 30° = \sec\frac{\pi}{6} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \qquad \csc 30° = \csc\frac{\pi}{6} = \frac{2}{1} = 1$$

فعالیت

يو داسې متساوي الاضلاع مثلث په پام کې ونيسئ چې هره ضلع يې a واحده وي د $30^{o}=\frac{\pi}{6}$ زاويې مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

همدارنګه که شکل ته پام وکړو:

$$\sin 60^\circ = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos 60^\circ = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\tan 60^\circ = \sqrt{3} \qquad \cot 60^\circ = \cot\frac{\pi}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\sec 60^\circ = \sec\frac{\pi}{3} = 2 \qquad \csc 60^\circ = \csc\frac{\pi}{3} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

لیدل کیږي چې $30^\circ + 60^\circ = 90^\circ$ کیږي:

$$\sin 30^\circ = \cos 60^\circ \qquad \cos 30^\circ = \sin 60^\circ \qquad \tan 30^\circ = \cot 60^\circ$$

$$\sec 30^\circ = \csc 60^\circ \qquad \csc 30^\circ = \sec 60^\circ \qquad \cot 30^\circ = \tan 60^\circ$$

یا په عمومي ډول هر وخت چې د دوو زاویو مجموعه 90° وي، که یوه زاویه θ وي، بله زاویه به $(90^\circ - \theta)$ وي.

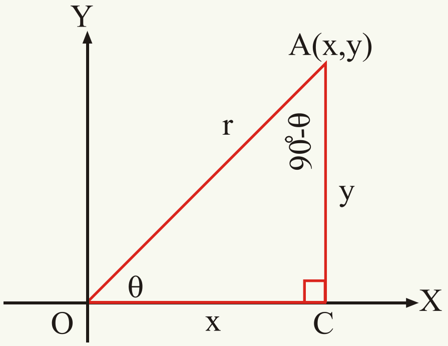
$$\sin(90^\circ - \theta) = \frac{x}{r} \ , \ \cos\theta = \frac{x}{r} \ \Rightarrow \sin(90^\circ - \theta) = \cos\theta$$

$$\cos(90^\circ - \theta) = \frac{y}{r} \ , \ \sin\theta = \frac{y}{r} \ \Rightarrow \cos(90^\circ - \theta) = \sin\theta$$

$$\tan(90^\circ - \theta) = \frac{x}{y} \ , \ \cot\theta = \frac{x}{y} \ \Rightarrow \tan(90^\circ - \theta) = \cot\theta$$

$$\sec(90^\circ - \theta) = \frac{r}{y} \ , \ \csc\theta = \frac{r}{y} \ \Rightarrow \sec(90^\circ - \theta) = \csc\theta$$

$$\csc(90^\circ - \theta) = \frac{r}{x} \ , \ \sec\theta = \frac{r}{x} \ \Rightarrow \csc(90^\circ - \theta) = \sec\theta$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیت

په همدې ډول وښیاست چې: $\cot(90^\circ - \theta) = \tan\theta$

لکه: څنګه چې د نهم ټولګي په مثلثاتو کې مو ویلي دي چې د زاویو د مثلثاتي نسبتونو جدول هم په همدې اساس جوړ شوی دی:

لومړی مثال: د 39° زاویې مثلثاتي نسبتونه راکړل شوي دي، د 51° زاویې مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

$\sin 39^\circ = 0{,}6293$ $\quad \tan 39^\circ = 0{,}8098$ $\quad \sec 39^\circ = 1{,}287$

$\cos 39^\circ = {,}7771$ $\quad \cot 39^\circ = 1{,}235$ $\quad \csc 39^\circ = 1{,}589$

حل: څرنګه چې $39^\circ + 51^\circ = 90^\circ$ کېږي، نو:

$\sin 51^\circ = \cos 39^\circ = 0{,}7771$ $\quad \cos 51^\circ = \sin 39 = 0{,}6293$

$\tan 51^0 = \cot 39^\circ = 1{,}235$ $\quad \cot 51^\circ = \tan 39^\circ = 0{,}8098$

$\sec 51^\circ = \csc 39 = 1{,}589$ $\quad \csc 51^\circ = \sec 39^\circ = 1{,}287$

پوښتنې

1 – که:

$\sin 17^\circ = 0{,}2927 \quad \cos 17^\circ = 0{,}9563 \quad \sec 17^\circ = 1{,}046 \quad \csc 17^\circ = 3{,}420$

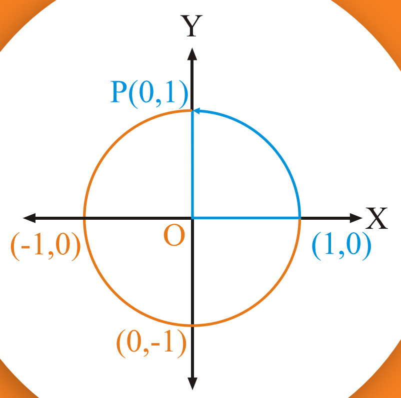
$\cot 17^\circ = 3{,}271$ □ $\tan 17^\circ = 0{,}3057$ وي د 73° زاویې مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

2 – د لاندې اړیکو څخه کومه یوه یې ناسمه ده؟

$\sin 28^\circ = \cos 62^\circ$ $\quad \cos 12^\circ\ 10'\ 20'' = \sin 77^\circ\ 49'\ 40''$

$\sec 12^\circ = \sec 88^\circ$ $\quad \tan 70^\circ = \cot\ 20^\circ$

(c) ketabton.com: The Digital Library



د $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$ او 360° زاويو مثلثاتي نسبتونه:

آیا $\tan 90^o$ او $\tan 270^o$ تعریف شوي دي؟

د $\frac{\pi}{2} = 90^o$ زاويې مثلثاتي نسبتونه:

څرنګه چې $P(0,1)$ ټکی په مثلثاتي دايره باندې د 90° زاويې په دويمه ضلع واقع دی، نو:

$$r = 1 \qquad x = 0 \qquad y = 1$$

$$\cos\frac{\pi}{2} = \cos 90^\circ = \frac{x}{r} = \frac{0}{1} = 0 \qquad \sin\frac{\pi}{2} = \sin 90^\circ = \frac{y}{r} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\cot\frac{\pi}{2} = \cot 90^\circ = \frac{x}{y} = \frac{0}{1} = 0 \qquad \tan\frac{\pi}{2} = \tan 90^\circ = \frac{y}{x} = \frac{1}{0}$$ (تعریف نه شوی دی)

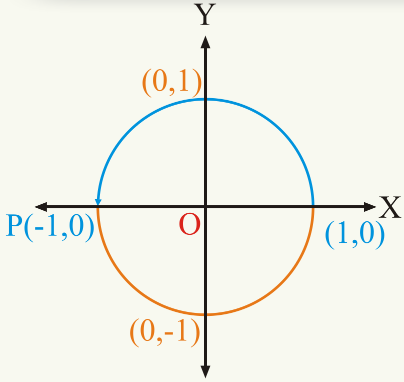
$$\csc\frac{\pi}{2} = \csc 90^\circ = \frac{r}{y} = \frac{1}{1} = 1 \qquad \sec\frac{\pi}{2} = \sec 90^\circ = \frac{r}{x} = \frac{1}{0}$$ (تعریف نه شوی دی)

فعالیت

آیا کولای شئ، ووایئ چې $\cot 0^\circ$ او $\csc 0^\circ$ تعریف شوي نه دي؟ ولې؟

د 180° زاويې مثلثاتي نسبتونه: څرنګه چې د $p(-1,0)$ ټکی په مثلثاتي دايره باندې د 180° زاويې په دويمه ضلع باندې پروت دی، نو:

$r = 1$ $\quad x = -1$ او $y = 0$ دی.



(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\sin 180^\circ = \sin \pi = \frac{y}{r} = \frac{0}{1} = 0 \qquad \cos 180^\circ = \cos \pi = \frac{x}{r} = \frac{-1}{1} = -1$$

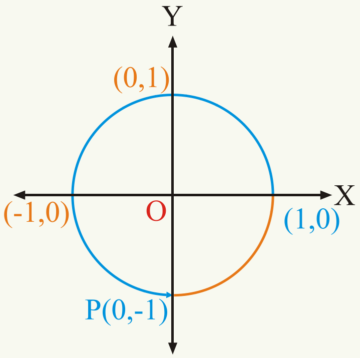
$$\tan 180^\circ = \tan \pi = \frac{y}{x} = \frac{0}{-1} = 0 \qquad \cot 180^\circ = \cot \pi = \frac{x}{y} = \frac{-1}{0} =$$ (تعریف شوی نه دی)

فعالیت

$\sec 180^\circ$ او $\csc 180^\circ$ پیداکړئ.

د $\frac{3\pi}{2} = 270^o$ زاويې مثلثاتي نسبتونه:

خرنگه چې د $P(0,-1)$ ټکی په مثلثاتي دایره باندې د 270° زاويې پر دويمه ضلع واقع دی.



$r = 1 \qquad x = 0 \qquad y = -1$

$$\sin\frac{3\pi}{2} = \sin 270^\circ = \frac{y}{r} = \frac{-1}{1} = -1 \qquad \cos\frac{3\pi}{2} = \cos 270^\circ = \frac{x}{r} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\tan\frac{3\pi}{2} = \tan 270^\circ = \frac{y}{x} = \frac{-1}{0}$$ (تعریف نه دی) $$\cot\frac{3\pi}{2} = \cot 270^\circ = \frac{x}{y} = \frac{0}{-1} = 0$$

$$\sec\frac{3\pi}{2} = \sec 270^\circ = \frac{r}{x} = \frac{1}{0}$$ (تعریف نه دی) $$\csc\frac{3\pi}{2} = \csc 270^\circ = \frac{r}{y} = \frac{1}{-1} = -1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په یاد ولرئ چې د 360° او 0° زاویو مثلثاتي نسبتونه سره مساوي دي، کولای شئ چې ووایئ ولې؟

د $360^{\circ} = 2\pi$ زاويې مثلثاتي نسبتونه:

خرنګه چې د $p(1,0)$ نقطه د 360° د زاويې په دویمه ضلعه باندې پرته ده، نو:

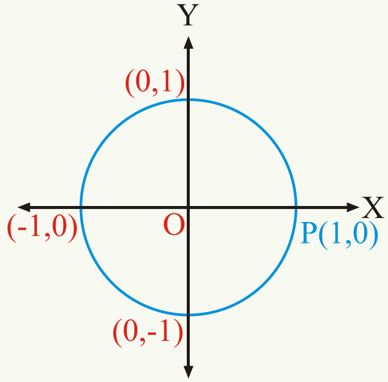
$x = 1 \qquad y = 0 \qquad r = 1$

$\sin 2\pi = \sin 360^{0} = \frac{y}{r} = \frac{0}{1} = 0 \qquad \cos 2\pi = \cos 360^{o} = \frac{x}{r} = \frac{1}{1} = 1$

$\tan 2\pi = \tan 360^{o} = \frac{y}{x} = \frac{0}{1} = 0$

$\cot 2\pi = \cot 360^{o} = \frac{x}{y} = \frac{1}{0}$ (تعریف شوې نه دي)

$\sec 2\pi = \sec 360^{o} = \frac{r}{x} = \frac{1}{1} = 1$ ، $\csc 2\pi = \csc 360^{o} = \frac{r}{y} = \frac{1}{0}$ (تعریف شوې نه دي)



فعالیت

د 0° زاويې ټول مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

$0^{o}, 90^{o}, 180^{o}, 270^{o}$ او 360° زاویو ته محوري زاويې وايي چې د هرې زاويې دوه، دوه مثلثاتي نسبتونه تعریف شوي نه دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

1- لاندې جدول ډک کړئ.

θ	0°	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin\theta$					
$\cos\theta$					
$\tan\theta$					

2- $\tan 270^\circ = ?$

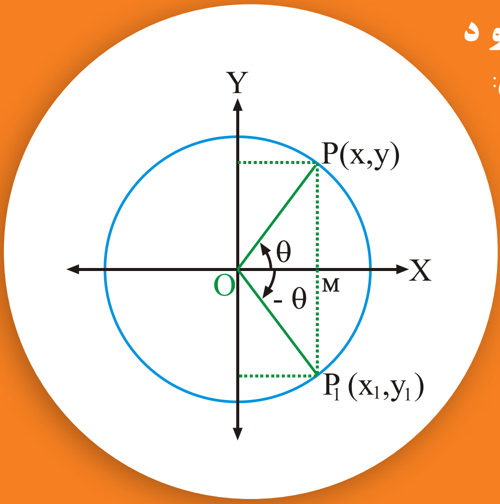
a) -1 b) 1 c) 0 d) تعریف شوی نه دی

3- $\cos 90^\circ = ?$

a) -1 b) 1 c) 0 d) تعریف شوی نه دی

4- آیا $\cos\frac{9\pi}{2} = \cos\frac{3\pi}{2}$ دی؟ ولې؟

(c) ketabton.com: The Digital Library



د يوې حاده زاويې او نورو زاويو د مثلثاتي نسبتونو په منځ کې اړيکې:

ځرنګه چې مو په نهم ټولګي کې وليدل چې مثلثاتي جدول يوازې د يوې حادې مثبتې زاويې مثلثاتي نسبتونه را ښيي ددې لپاره چې د منفي او منفرجه زاويو مثلثاتي نسبتونه هم له مثلثاتي جدول څخه پيدا کړای شو، نو بايد ددې زاويو او د يوې حاده مثبتې زاويې د مثلثاتي نسبتونو په منځ کې اړيکې پيدا کړو.

د $\hat{\theta}$ او $-\hat{\theta}$ زاويو د مثلثاتي نسبتونو تر منځ اړيکې:

د θ حاده زاويه مثبت او له θ سره مساوي زاويه، د ساعت د عقربې د حرکت په جهت کې $-\theta$ زاويه په معياري حالت په مثلثاتي دايره کې رسموو.

د $P(x,y)$ ټکی د θ پر دويمه ضلع او د $P_1(x_1,y_1)$ ټکی د $-\theta$ د زاويې پر دويمه ضلع واقع دی.

ځرنګه چې په پورته شکل کې د $O\overset{\Delta}{M}P$ او $O\overset{\Delta}{M}P_1$ مثلثونه يو له بله سره مساوي دي.

$$x_1 = x \qquad |y_1| = |y| \qquad -y_1 = y \quad \Rightarrow \quad y_1 = -y$$

$$\sin(-\theta) = \frac{y_1}{r} = \frac{y_1}{1} = y_1 = -y = -\sin\theta$$

$$\cos(-\theta) = \frac{x}{r} = x = \cos\theta$$

$$\tan(-\theta) = \frac{\sin(-\theta)}{\cos(-\theta)} = \frac{-\sin\theta}{\cos\theta} = -\tan\theta$$

$$\cot(-\theta) = \frac{\cos(-\theta)}{\sin(-\theta)} = \frac{\cos\theta}{-\sin\theta} = -\cot\theta$$

لومړی مثال: د $(-30^\circ = -\frac{\pi}{6})$ زاويې مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

حل

$$\cos(-30^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \sin(-30^\circ) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\tan(-30^\circ) = -\tan 30^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \cot(-30^\circ) = -\cot 30^\circ = -\sqrt{3}$$

$$\sec(-30^\circ) = \sec 30^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}} \qquad \csc(-30^\circ) = -\csc 30^\circ = -2$$

فعالیت

و ښیاست چې: $\csc(-\theta) = -\text{cec}\theta$ ، $\text{Sec}(-\theta) = \text{Sec}\theta$.

دویم مثال: د $-\frac{3\pi}{2}$ د زاویې مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

حل:

$$\sin(-\frac{3\pi}{2}) = -\sin\frac{3\pi}{2} = -(-1) = 1$$

$$\cos(-\frac{3\pi}{2}) = \cos\frac{3\pi}{2} = 0$$

فعالیت

د $-\frac{3\pi}{2}$ زاویې نور خلور مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

$$\sin(-\theta) = -\sin\theta \qquad \cos(-\theta) = \cos\theta$$

$$\tan(-\theta) = -\tan\theta \qquad \cot(-\theta) = -\cot\theta$$

$$\sec(-\theta) = \sec\theta \qquad \csc(-\theta) = -\csc\theta$$

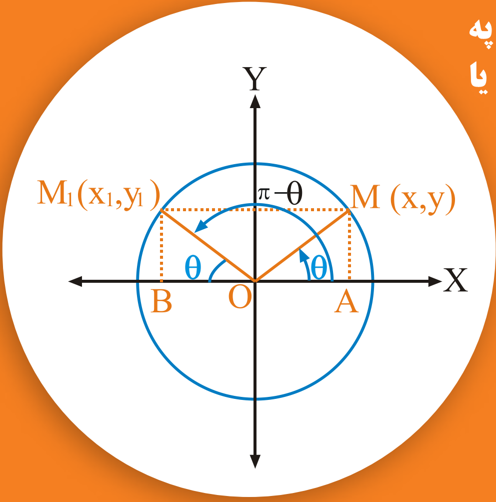
پوښتنې

1 – د -360° یا -2π راډیان مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

2 – د -45° یا $-\frac{\pi}{4}$ راډیان د (-30°) او (-60°) زاویو مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

3 – د -90° یا $-\frac{\pi}{2}$ راډیان مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library



د دوه زاويو د مثلثاتي نسبتونو په منځ کې اړيکې چې مجموعه او يا توپير يې π يا 180° وي

- آيا د 150° او 135° زاويو مثلثاتي نسبتونه پيداکولای شئ؟
- آيا $\sin 135^\circ$ او $\sin 45^\circ$ سره مساوي دي؟ ولې؟
- آيا ويلای شئ چې $\sin 130^\circ$ او $\sin 50^\circ$ يو له بله سره څه اړيکه لري؟

دوې زاويې چې مجموعه يې π يا 180° وي، په پام کې نيسو. که θ يوه حاده مثبته زاويه وي بله زاويه $(\pi-\theta)$ ده. دا دواړه زاويې په مثلثاتي دايره کې په معياري حالت کې رسموو.
د $M(x,y)$ ټکی د θ د زاويې په دويمه ضلع باندې او د $M_1(x_1,y_1)$ ټکی د $(\pi-\theta)$ يا $(180-\theta)$ د زاويې پر دويمه ضلع باندې واقع دی. خرنګه چې په پورته شکل کې د $\overset{\Delta}{OAM}$ او $\overset{\Delta}{OM_1B}$ مثلثونه سره مساوي دي.

$$(r=1) \qquad |x_1|=|x| \quad -x_1=x \ \Rightarrow\ x_1=-x \qquad y_1=y$$

$$\sin(180^\circ-\theta)=\sin(\pi-\theta)=\frac{y_1}{r}=\frac{y_1}{1}=y_1=\sin\theta$$

$$\cos(180^\circ-\theta)=\cos(\pi-\theta)=\frac{x_1}{r}=\frac{-x}{r}=\frac{-x}{1}=-x=-\cos\theta$$

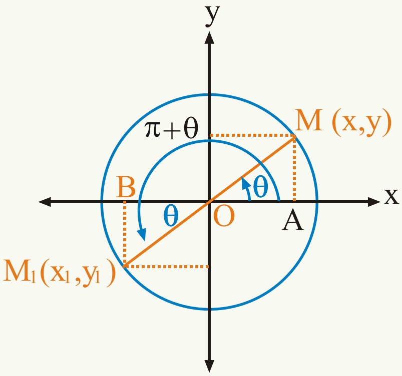
$$\tan(180^\circ-\theta)=\tan(\pi-\theta)=\frac{\sin(180^\circ-\theta)}{\cos(180^\circ-\theta)}=\frac{\sin\theta}{-\cos\theta}=-\tan\theta$$

فعاليت

- د $(\pi-\theta)$ زاويې نور درې مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

د هغو دوو زاويو د مثلثاتي نسبتونو ترمنځ اړيکې چې توپير يې 180° او يا π راډيان وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



که حاده زاویه θ وي، بله زاویه $(\pi+\theta)$ کیږي. د $M(x,y)$ ټکی پر مثلثاتي دایره باندې د θ پر دویمه ضلع او د $M_1(x_1,y_1)$ ټکی د $(\pi+\theta)$ یا $(180^\circ+\theta)$ د زاویې پر دویمه ضلع باندې واقع دی.

څرنګه چې د $\overset{\Delta}{OAM}$ او $\overset{\Delta}{OBM_1}$ مثلثونه سره مساوي دي: $y_1=-y\ ,\ x_1=-x$

$$\sin(180^\circ+\theta)=y_1=-y=-\sin\theta$$

$$\cos(180^\circ+\theta)=x_1=-x=-\cos\theta$$

$$\tan(180^\circ+\theta)=\frac{\sin(180^\circ+\theta)}{\cos(180^\circ+\theta)}=\frac{-\sin\theta}{-\cos\theta}=\tan\theta$$

$$\cot(180^\circ+\theta)=\frac{\cos(180^\circ+\theta)}{\sin(180^\circ+\theta)}=\frac{-\cos\theta}{-\sin\theta}=\cot\theta$$

$$\sec(180^\circ+\theta)=\frac{1}{\cos(180^\circ+\theta)}=\frac{1}{-\cos\theta}=-\sec\theta$$

$$\csc(180^\circ+\theta)=\frac{1}{\sin(180^\circ+\theta)}=\frac{1}{-\sin\theta}=-\csc\theta$$

لومړی مثال: د 120° او 240° زاویو مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

حل

$$\sin 120^\circ=\sin(\pi-60^\circ)=\sin(180^\circ-60^\circ)=\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 120^\circ=\cos(\pi-60^\circ)=-\cos 60^\circ=-\frac{1}{2}$$

$$\tan 120^\circ=\tan(\pi-60^\circ)=-\tan 60^\circ=-\sqrt{3}$$

$$\sin 240^\circ=\sin(180^\circ+60^\circ)=-\sin 60^\circ=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\cos 240^\circ = \cos(180^\circ + 60^\circ) = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$$

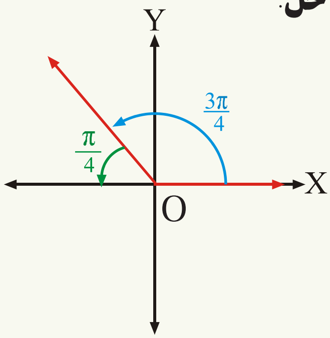
$$\tan 240^\circ = \tan(180^\circ + 60^\circ) = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

فعالیت

د 120° او 240° زاویو نور درې، درې مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

دویم مثال: د $\frac{3\pi}{4}$ او $\frac{4\pi}{3}$ زاویو sin ، cos او tan پیدا کړئ.

حل:

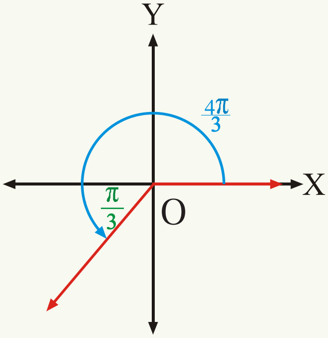


$$\pi - \frac{3\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

$$\sin(\pi - \frac{3\pi}{4}) = \sin\frac{3\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos(\pi - \frac{3\pi}{4}) = \cos\frac{3\pi}{4} = -\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan(\pi - \frac{3\pi}{4}) = \tan\frac{3\pi}{4} = -\tan\frac{\pi}{4} = -1$$



$$\frac{4\pi}{3} - \pi = \frac{\pi}{3}$$

$$\sin\frac{4\pi}{3} = \sin(\pi + \frac{\pi}{3}) = -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\frac{4\pi}{3} = \cos(\pi + \frac{\pi}{3}) = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$

$$\tan\frac{4\pi}{3} = \tan(\pi + \frac{\pi}{3}) = \tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

خرنګه چې $(180^\circ - \theta)$ د زاویې دویمه ضلع په دویمه ناحیه(ربع) کې پرته ده. په دویمه ناحیه کې $\sin\theta$ او $\csc\theta$ مثبت او د $(180^\circ - \theta)$ زاویې نور مثلثاتي نسبتونه منفي دي او خرنګه چې د $(180 + \theta)$ یا $(\pi + \theta)$ زاویې دویمه ضلع په دریمه ربع کې پرته ده، نو ددې زاویې $\tan\theta$ او $\cot\theta$ مثبت او د $(180 + \theta)$ د زاویې نور مثلثاتي نسبتونه منفي دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

1- د 225° زاويې مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

2- د 210° زاويې مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

3- د 150° زاويې مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

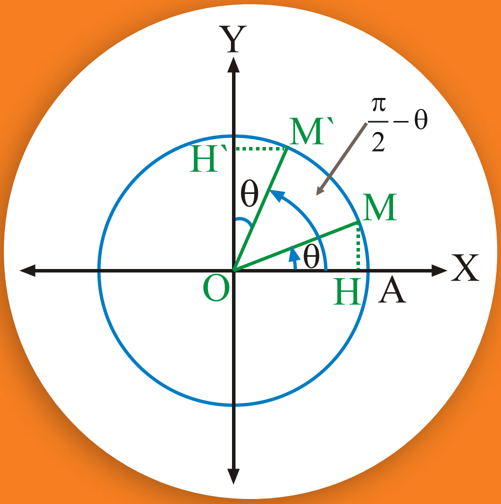
4- $\cot\frac{3\pi}{4} = ?$

a) $-\frac{1}{2}$ b) 1 c) 0 d) -1

5- $\sec(225^\circ) = ?$

a) $\frac{2}{\sqrt{2}}$ b) $-\frac{2}{\sqrt{2}}$ c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ d) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

(c) ketabton.com: The Digital Library



د دوو زاویو د مثلثاتي نسبتونو تر منځ اړیکي چې مجموعه یې

90° یا $\frac{\pi}{2}$ راډیانه وي.

- آیا $\sin 60^o = \cos 30^o$ دی؟ ولې؟
- د 150° او 60° زاویو مثلثاتي نسبتونه سره څه اړیکه لري؟

د $A\hat{O}M$ زاویه θ او د $A\hat{O}M'$ زاویه له $(\frac{\pi}{2}-\theta)$ څخه عبارت ده چې د θ او $\frac{\pi}{2}-\theta$ زاویو مجموعه 90° یا $\frac{\pi}{2}$ کېږي. څرنګه چې د $\overset{\Delta}{OHM}$ او $\overset{\Delta}{OH'M'}$ مثلثونه سره مساوي دي.

$\overline{OH'} = \overline{OH}$

$\sin(\frac{\pi}{2}-\theta) = \cos\theta$

$\overline{H'M'} = \overline{HM}$

$\cos(\frac{\pi}{2}-\theta) = \sin\theta$

$$\tan(\frac{\pi}{2}-\theta) = \frac{\sin(\frac{\pi}{2}-\theta)}{\cos(\frac{\pi}{2}-\theta)} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \cot\theta$$

$$\cot(\frac{\pi}{2}-\theta) = \frac{1}{\tan(\frac{\pi}{2}-\theta)} = \frac{1}{\cot\theta} = \tan\theta$$

فعالیت

وښیاست چې: $\sec(90-\theta) = \csc\theta$ او $\csc(90-\theta) = \sec\theta$ دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی مثال: که:

$$\sin 23^{\circ} = 0{,}3907 \qquad \cos 23^{\circ} = 0{,}9205 \qquad \tan 23^{\circ} = 0{,}4245$$

$$\cot 23^{\circ} = 2{,}356 \qquad \sec 23^{\circ} = 1{,}086 \qquad \csc 23^{\circ} = 2{,}559$$

وي، د 67° زاويې مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

حل:

$$\cot 67^{\circ} = \tan 23^{\circ} = 0.4245 \qquad \sin 67^{\circ} = \cos 23^{\circ} = 0.9205$$

$$\sec 67^{\circ} = \csc 23^{\circ} = 2.559 \qquad \cos 67^{\circ} = \sin 23^{\circ} = 0.3907$$

$$\csc t67^{\circ} = \sec 23^{\circ} = 1.086 \qquad \tan 67^{\circ} = \cot 23^{\circ} = 2.356$$

فعاليت

که:

$$\sin 8^{\circ}\ 10' = 0.1421 \qquad \cos 8^{\circ}\ 10' = 0.9899$$

$$\tan 8^{\circ}\ 10' = 0.1435 \qquad \cot 8^{\circ}\ 10' = 6.968$$

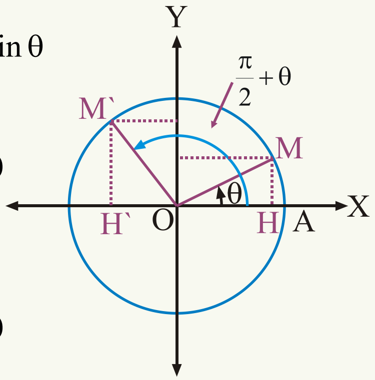
$$\sec 8^{\circ}\ 10' = 1.010 \qquad \csc 8^{\circ}\ 10' = 7.040$$

وي، د $81^{\circ}\ 50'$ زاويې مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

د هغو زاويو مثلثاتي نسبتونه چې توپير يې $\frac{\pi}{2}$ يا 90° وي په لاندې ډول دي:

$$\sin(\frac{\pi}{2} + \theta) = \sin[\frac{\pi}{2} - (-\theta)] = \cos(-\theta) = \cos\theta$$

$$\cos(\frac{\pi}{2} + \theta) = \cos[\frac{\pi}{2} - (-\theta)] = \sin(-\theta) = -\sin\theta$$



$$\tan(\frac{\pi}{2} + \theta) = \frac{\sin(\frac{\pi}{2} + \theta)}{\cos(\frac{\pi}{2} + \theta)} = \frac{\cos\theta}{-\sin\theta} = -\cot\theta$$

$$\cot(\frac{\pi}{2} + \theta) = \frac{\cos(\frac{\pi}{2} + \theta)}{\sin(\frac{\pi}{2} + \theta)} = \frac{-\sin\theta}{\cos\theta} = -\tan\theta$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\sec(\frac{\pi}{2}+\theta)=\frac{1}{\cos(\frac{\pi}{2}+\theta)}=\frac{1}{-\sin\theta}=-\csc\theta$$

$$\csc(\frac{\pi}{2}+\theta)=\frac{1}{\sin(\frac{\pi}{2}+\theta)}=\frac{1}{\cos\theta}=\sec\theta$$

دويم مثال: د 120° زاويې مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

حل

$$\sin 120^\circ=\sin(90^\circ+30^\circ)=\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 120^\circ=\cos(90^\circ+30^\circ)=-\sin 30^\circ=-\frac{1}{2}$$

$$\tan 120^\circ=\tan(90^\circ+30^\circ)=-\cot 30^\circ=-\sqrt{3}$$

$$\cot 120^\circ=\cot(90^\circ+30^\circ)=-\tan 30^\circ=-\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\sec 120^\circ=\sec(90^\circ+30^\circ)=-\csc 30^\circ=-2$$

$$\csc 120^\circ=\csc(90^\circ+30^\circ)=\sec 30^\circ=\frac{2}{\sqrt{3}}$$

$\sin(\frac{\pi}{2}-\theta)=\cos\theta$ $\qquad$ $\sin(\frac{\pi}{2}+\theta)=\cos\theta$

$\cos(\frac{\pi}{2}-\theta)=\sin\theta$ $\qquad$ $\cos(\frac{\pi}{2}+\theta)=-\sin\theta$

$\tan(\frac{\pi}{2}-\theta)=\cot\theta$ $\qquad$ $\tan(\frac{\pi}{2}+\theta)=-\cot\theta$

$\cot(\frac{\pi}{2}-\theta)=\tan\theta$ $\qquad$ $\cot(\frac{\pi}{2}+\theta)=-\tan\theta$

$\sec(\frac{\pi}{2}-\theta)=\csc\theta$ $\qquad$ $\sec(\frac{\pi}{2}+\theta)=-\csc\theta$

$\csc(\frac{\pi}{2}-\theta)=\sec\theta$ $\qquad$ $\csc(\frac{\pi}{2}+\theta)=\sec\theta$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

1- د 135° زاويې مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

2- د 150° زاويې مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

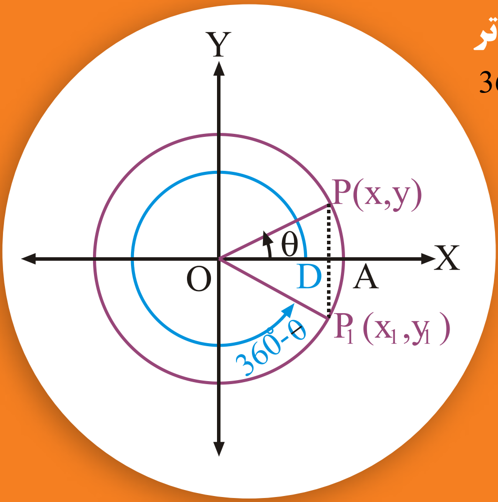
3- $\sin(\frac{\pi}{2}-x)=?$

a) $\cos x$ b) $\sin x$ c) $-\cos x$ d) $-\sin x$

4- $\cot(\frac{\pi}{2}+\theta)=?$

a) $\tan\theta$ b) $-\tan\theta$ c) $\cot\theta$ d) $-\cot\theta$

(c) ketabton.com: The Digital Library



د هغه زاويو د مثلثاتي نسبتونو تر منځ اړيکي چي مجموعه يي 360° يا 2π وي.

آيا بنودلای شئ چي

$\sin(360^\circ - \theta) = -\sin\theta$ او

$\cos(360^\circ - \theta) = \cos\theta$ اړيکي سمي

دي؟

په پورته شکل کي د $\overset{\Delta}{OPD}$ او $\overset{\Delta}{OP_1D}$ مثلثونو له مساوي والی څخه لرو چي:

$x_1 = x \quad |y_1| = |y|$ $\qquad -y_1 = y \Rightarrow y_1 = -y$

$\sin(360^\circ - \theta) = y_1 = -y = -\sin\theta$

$\cos(360^\circ - \theta) = x_1 = x = \cos\theta$

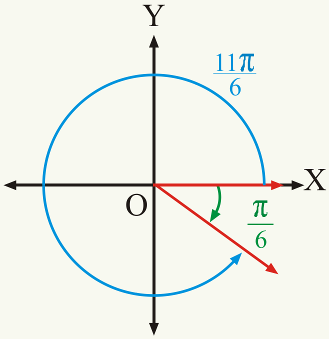
$$\tan(360^\circ - \theta) = \frac{\sin(360^\circ - \theta)}{\cos(360^\circ - \theta)} = \frac{-\sin\theta}{\cos\theta} = -\tan\theta$$

فعاليت

په همدي ډول د θ او $360^\circ - \theta$ زاويو د $\sec, \cot$ او $\csc$ د مثلثاتي نسبتونو ترمنځ اړيکي پيداکړئ او د θ او $(-\theta)$ زاويو مثلثاتي نسبتونو له اړيکو سره يي پرتله کړئ.

مثال: د 330° يا $\frac{11\pi}{6}$ راډيانه زاويي مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

حل:



(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\sin\frac{11\pi}{6}=\sin(2\pi-\frac{\pi}{6})=\sin 330^\circ=\sin(360^\circ-30^0)=-\sin 30^\circ=-\frac{1}{2}$$

$$\cos\frac{11\pi}{6}=\cos(2\pi-\frac{\pi}{6})=\cos 330^\circ=\cos(360^\circ-30^\circ)=\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan\frac{11\pi}{6}=\tan(2\pi-\frac{\pi}{6})=\tan 330^\circ=\tan(360^\circ-30^\circ)=-\tan 30^\circ=-\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\cot\frac{11\pi}{6}=\cot(2\pi-\frac{\pi}{6})=\cot 330^\circ=\cot(360^\circ-30^\circ)=-\cot 30^\circ=-\sqrt{3}$$

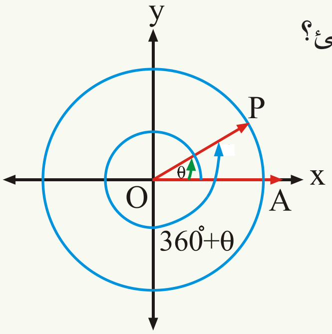
$$\sec\frac{11\pi}{6}=\sec(2\pi-\frac{\pi}{6})=\sec 330^\circ=\sec(360^\circ-30^\circ)=\sec 30^\circ=\frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\csc\frac{11\pi}{6}=\csc(2\pi-\frac{\pi}{6})=\csc 330^\circ=\csc(360^\circ-30^\circ)=-\csc 30^\circ=-2$$

فعالیت

د 315° زاویې مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

د کوټرمینل زاویو مثلثاتي نسبتونه:



- آیا $\sin 450^\circ$، $\tan 390^\circ$ او $\csc 450^\circ$ پیدا کولای شئ؟
- آیا $\sin 90^\circ$، $\sin 450^\circ$ او $\sin 790^\circ$ سره برابر دي ؟ ولې؟

په معیاري حالت کې د θ حاده زاویې او $\theta+360^\circ$ زاویو دویمې ضلعې یو پر بل پرتې دي، نو:

$$\sin(360^\circ+\theta)=\sin\theta \qquad \cos(360^\circ+\theta)=\cos\theta$$

$$\tan(360^\circ+\theta)=\tan\theta \qquad \cot(360^\circ+\theta)=\cot\theta$$

$$\csc(360^\circ+\theta)=\csc\theta \qquad \sec(360^\circ+\theta)=\sec\theta$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی مثال: د 405° زاويې مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

حل

$$\sin 405^\circ = \sin(2\pi + \frac{\pi}{4}) = \sin(360^\circ + 45^\circ) = \sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 405^\circ = \cos(2\pi + \frac{\pi}{4}) = \cos(360^\circ + 45^\circ) = \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan 405^\circ = \tan(2\pi + \frac{\pi}{4}) = \tan(360^\circ + 45^\circ) = \tan 45^\circ = 1$$

$$\cot 405^\circ = \cot(2\pi + \frac{\pi}{4}) = \cot(360^\circ + 45^\circ) = \cot 45^\circ = 1$$

$$\sec 405^\circ = \sec(2\pi + \frac{\pi}{4}) = \sec(360^\circ + 45^\circ) = \sec 45^\circ = \sqrt{2}$$

$$\csc 405^\circ = \csc(2\pi + \frac{\pi}{4}) = \csc(360^\circ + 45^\circ) = \csc 45^\circ = \sqrt{2}$$

دويم مثال: د 1500° زاويې مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

$$\sin 1500^\circ = \sin(4 \cdot 360^\circ + 60^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 1500^\circ = \cos(4 \cdot 360^\circ + 60^\circ) = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\tan 1500^\circ = \tan(4 \cdot 360^\circ + 60^\circ) = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

$$\cot 1500^\circ = \cot(4 \cdot 360^\circ + 60^\circ) = \cot 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\sec 1500^\circ = \sec(4 \cdot 360^\circ + 60^\circ) = \sec 60^\circ = 2$$

$$\csc 1500^\circ = \csc(4 \cdot 360^\circ + 60^\circ) = \csc 60^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

دريم مثال: د 900° او -930° زاويو sin ، cos او tan پيدا کړئ.

حل

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$-930^\circ + 3\cdot 360^\circ = 150^\circ$$

$$\sin(-930^\circ) = \sin 150^\circ = \sin(180^\circ - 30^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

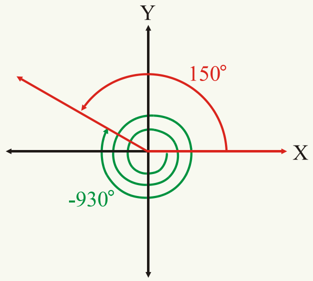
$$\cos(-930^\circ) = \cos 150^\circ = \cos(180^\circ - 30^\circ) = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan(-930^\circ) = \tan 150^\circ = \tan(180^\circ - 30^\circ) = \tan 30^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

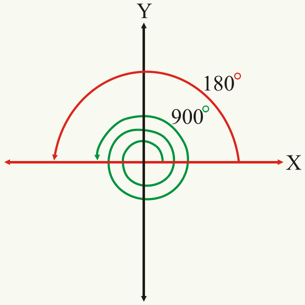
$$\sin 900^\circ = \sin(2\cdot 360^\circ + 180^\circ) = \sin 180^\circ = 0$$

$$\cos 900^\circ = \cos(2\cdot 360^\circ + 180^\circ) = \cos 180^\circ = -1$$

$$\tan 900^\circ = \tan(2\cdot 360^\circ + 180^\circ) = \tan 180^\circ = 0$$



$-930^\circ + 3\cdot 360^\circ = 150^\circ$



$900^\circ = (2\cdot 360^\circ + 180^\circ)$

خلورم مثال: د $-\frac{5\pi}{2}$ او $\frac{7\pi}{3}$ زاویو مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

حل:

$$-\frac{5\pi}{2} = (-2\pi - \frac{\pi}{2})$$

$$\sin\frac{7\pi}{3} = \sin(2\pi + \frac{\pi}{3}) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\frac{7\pi}{3} = \cos(2\pi + \frac{\pi}{3}) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\tan\frac{7\pi}{3} = \tan(2\pi + \frac{\pi}{3}) = \tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

$$\cot(\frac{7\pi}{3}) = \cot(2\pi + \frac{\pi}{3}) = \cot\frac{\pi}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\sin(-\frac{5\pi}{2}) = \sin(-\frac{\pi}{2}) = -\sin\frac{\pi}{2} = -1$$

$$\cos(-\frac{5\pi}{2}) = \cos(-\frac{\pi}{2}) = \cos\frac{\pi}{2} = 0$$

$$\tan(-\frac{5\pi}{2}) = \tan(-\frac{\pi}{2}) = \frac{\sin(-\frac{\pi}{2})}{\cos(-\frac{\pi}{2})} = \frac{-1}{0}$$ تعریف شوی نه دی

$$\cot(-\frac{5\pi}{2}) = \cot(-\frac{\pi}{2}) = \frac{\cos(-\frac{\pi}{2})}{\sin(-\frac{\pi}{2})} = \frac{0}{-1} = 0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیت

د $\frac{7\pi}{3}$ او $(-\frac{5\pi}{2})$ زاویو نور دوه، دوه مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

$$\sin(2\pi-\theta)=\sin(360^\circ-\theta)=-\sin\theta$$
$$\cos(2\pi-\theta)=\cos(360^\circ-\theta)=\cos\theta$$
$$\tan(2\pi-\theta)=\tan(360^\circ-\theta)=-\tan\theta$$
$$\cot(2\pi-\theta)=\cot(360^\circ-\theta)=-\cot\theta$$
$$\sec(2\pi-\theta)=\sec(360^\circ-\theta)=\sec\theta$$
$$\csc(2\pi-\theta)=\csc(360^\circ-\theta)=-\csc\theta$$

$$\sin(2\pi+\theta)=\sin(360^\circ+\theta)=\sin\theta$$
$$\cos(2\pi+\theta)=\cos(360^\circ+\theta)=\cos\theta$$
$$\tan(2\pi+\theta)=\tan(360^\circ+\theta)=\tan\theta$$
$$\cot(2\pi+\theta)=\cot(360^\circ+\theta)=\cot\theta$$
$$\sec(2\pi+\theta)=\sec(360^\circ+\theta)=\sec\theta$$
$$\csc(2\pi+\theta)=\csc(360^\circ+\theta)=\csc\theta$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

1- د 480° او 390° زاویو مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

2- د 600° او 300° زاویو مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

3- د 1830° او د $(1095^{\circ}\ 20')$ زاویو مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

4- د $\frac{25\pi}{6}$ زاویې مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

5- د $\frac{5\pi}{3}$ زاویې مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

6- د $\frac{41\pi}{6}$, $\frac{4\pi}{3}$ او $\frac{3\pi}{4}$ زاویو مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

7- د -300°, 780° او 420° زاویو مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

8- $\cos(-3\pi) = ?$

a) 1 b) -1 c) 0 d) $\frac{1}{2}$

9- $\cos(-15\pi) = ?$

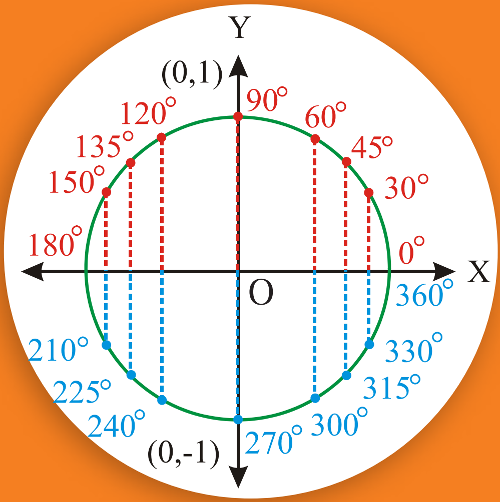
a) 1 b) -1 c) 0 d) درې واړه سم نه دي

10- $\sin(-1110^{\circ}) = ?$

a) $\frac{1}{2}$ b) $-\frac{1}{2}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ d) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مثلثاتي تابع ګانو ګراف



- آیا کولای شئ وواياست چې د $f(x)=\sin x$ او $f(x)=\cos x$ د تابعګانو د تناوب دوره څومره ده؟
- آیا ویلای شئ چې د $f(x)=\sin x$ او $f(x)=\cos x$ د توابعو domain کوم عددونه دي؟

د $f(x)=\sin x$ تابع د ګراف رسمول (graph of the sine function):

د $f(x)=\sin x$ د تابع د تعریف ناحیه (domain) د ټولو حقیقي عددونو سټ دی او Range یې $[-1,1]$ دی. د دې تابع د تناوب دوره 2π ده، ځکه پوهیږئ چې د یوې تابع د تعریف ساحه ټول هغه حقیقي عددونه (Real numbers) دي چې تابع په کې تعریف شوې وي.

د هر حقیقي عدد x لپاره یوه د x راډیان زاویه او له مثلثاتي دایرې سره د x راډیان د زاویې د تقاطع ټکی، هر وخت تعریف شوی دی. که x د راډیان په حساب وي، ددې ټولو زاویو اندازه $2k\pi+x$ راډیان ده، نو د sine او cosine د تابع ګانو د تعریف ساحه ټول حقیقي عددونه دي.

خرنګه چې sinx او cosx په مثلثاتي دایره باندې د یوه ټکي وضعیه کمیات دي، نو د $f(x)=y=\sin x$ او $f(x)=y=\cos x$ د تابع ګانو د Range د (1) او (-1) تر منځ دی، یا د $[-1,1]$ انټروال د $y=\sin\theta$ او $y=\cos\theta$ د تابع ګانو Range دی.

فعالیت

وښیاست چې $-1\le \sin\theta,\cos\theta\le 1$ دی.

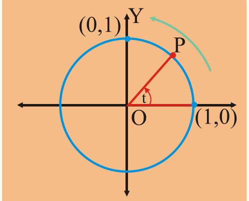
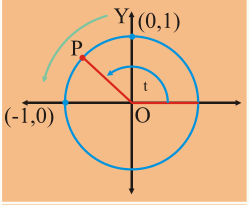
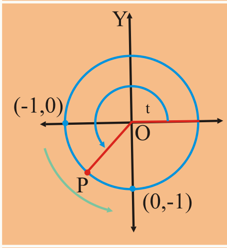
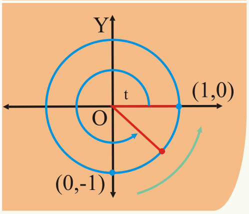
باید په یاد ولرو چې د f تابع ته متناوبه تابع ویل کیږي، که چېرې د t یو عدد د صفر خلاف موجود وي، په دې شرط چې که لومړی $x\in D_F$ وي $x+t$ او $x-t$ هم د f د تابع د تعریف په ساحه (domain) کې شامل وي او $f(x+t)=f(x)$ وي.

تر ټولو کوچنی داسې عدد، لکه: (t) چې د $f(x+t)=f(x)$ په اړیکه کې صدق وکړي. دا د (t)

(c) ketabton.com: The Digital Library

عدد د f د تابع د اصلي تناوب په نوم يادېږي. که (t) د f د تابع د تناوب دوره وي. نو (-t) هم دf د تابع د تناوب دوره ده. څرنګه چې پوهېږئ $\sin(x+2K\pi)=\sin x$ او $\cos(x+2K\pi)=\cos x$ دی چې K یو تام عدد دی، نو د sinx او cosx توابع متناوبې توابع دي او تر ټولو کوچنی عدد چې په پورتنیو اړیکو کې صدق کوي 2π دی، نو د دې دواړو توابعو اصلي تناوب 2π دی.

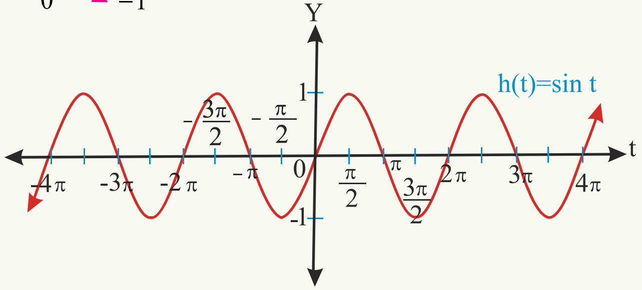
له شکل سره سم په معیاري حالت کې یو د $\hat{t}$ راډیان زاویه په پام کې ونیسئ په داسې حال کې چې د t د زاویې دویمه ضلع مثلثاتي دایره د p په ټکي کې قطع کوي، نو دp د ټکي د y مختصه له sin t څخه عبارت ده. $h(t)=\sin t$ د t او sint تغیرات په لاندې جدول او شکل کې وګورئ:

اړونده شکل	sin t	د P د ټکي حرکت	د t په قیمت کې تغیر
	له صفر څخه تر یوه پورې تزاید کوي	له (1,0) څخه تر (0,1)	له 0 څخه تر $\frac{\pi}{2}$ پورې
	له یوه څخه تر صفره پورې تناقص کوي	له (0,1) څخه تر (−1,0)	له $\frac{\pi}{2}$ څخه تر π پورې
	له صفره څخه تر -1 پورې تناقص کوي	له (−1,0) څخه تر (0,−1)	له π څخه تر $\frac{3\pi}{2}$ پورې
	له -1 څخه تر صفره پورې تزاید کوي	له (0,−1) څخه تر (1,0)	له $3\frac{\pi}{2}$ څخه تر 2π پورې

(c) ketabton.com: The Digital Library

په همدې ډول په هر 2π کې تکرارېږي په نتيجه کې $\sin(t \pm 2\pi) = \sin t$ دی.
لاندې جدول او شکل وګورئ:

t	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$h(t) = \sin t$	0 ↗	1 ↘	0 ↘	-1 ↗	0

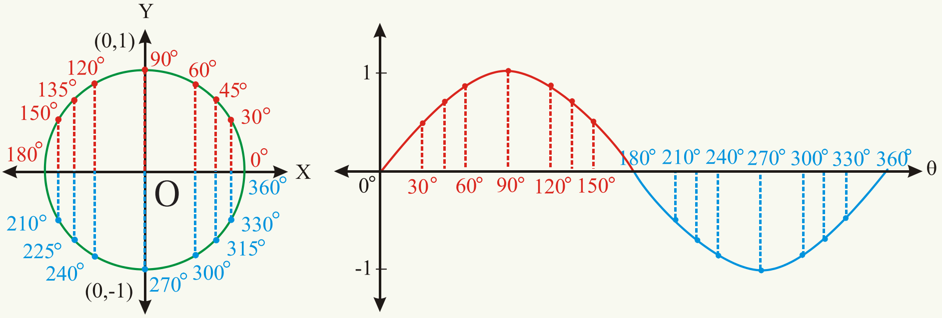


او يا کولای شو، که د یو دوران زاویې د درجې په حساب وي، د sin t تغيرات په لاندې جدول او شکل کې وښايو:

$h(t) = \sin t$

t	واقعي	تقريبي
0°	0	0.00
30°	$\frac{1}{2}$	0.50
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0.71
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0.87
90°	1	1.00
120°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0.87
135°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0.71
150°	$\frac{1}{2}$	0.50
180°	0	0.00
210°	$-\frac{1}{2}$	-0.50
225°	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-0.71
240°	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-0.87
270°	-1	-1.00
300°	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-0.87
315°	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-0.71
330°	$-\frac{1}{2}$	-0.50
360°	0	0.00

(c) ketabton.com: The Digital Library



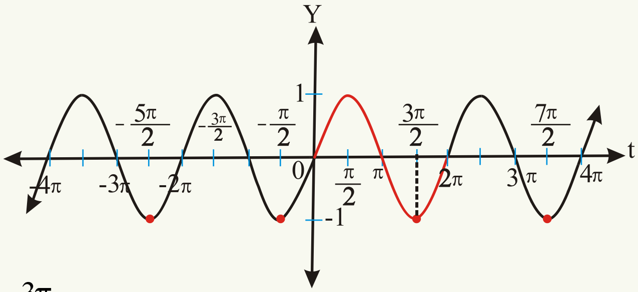
دې ته په پام سره چې sint د تابع د تناوب دوره 2π ده، نو $\sin(t\pm2\pi)=\sin t$ دی، نو د $\sin t$ د تابع گراف په $[0,2\pi]$، $[2\pi,4\pi]$ ، $[4\pi,6\pi]$، $[-2\pi,0]$ او داسې نورو انټروالو کې یو شان دی.

فعالیت

په $-3\pi, -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, 4\pi$ او -4π کې د $\sin t$ د تابع قیمتونه پیدا کړئ.

لومړی مثال: د t هغه ټول قیمتونه وښیاست چې د $\sin t$ قیمت په کې (-1) وي.

حل: څرنگه چې د sint قیمت د (1) او (-1) تر منځ دی او په هر 2π کې په افقي محور باندې تکرارېږي، نو بې شمېره قیمتونه شته چې په هغه کې د sint قیمت 1 - دی. د نمونې په ډول څو ټکي په سور رنگ په شکل کې ښودل شوي دي.

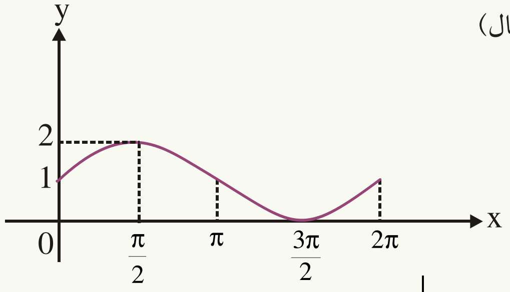


د sint په گراف کې له صفر څخه تر 2π پورې یوازې یو ټکی(نقطه) د $(\frac{3\pi}{2},-1)$ شته چې په سره رنگ ښودلی شوی دی. ټول هغه قیمتونه چې sint په کې (-1) دی، له $t=\frac{3\pi}{2}+2k\pi$ څخه عبارت دي چې k یو تام عدد دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم مثال: د $y = \sin x + 1$ تابع گراف په $[0,2\pi]$ انټروال کې رسم کړئ.

حل: ددې لپاره د تابع د تعریف ساحه $[0,2\pi]$ او Range یې $[0,2]$ دی، ددې تابع د گراف د رسمولو لپاره همدا بس دی چې د $y = \sin x$ گراف رسم کړو او د یوه واحد په اندازه یې د Y پر محور پورته خوا ته انتقال کړو.(عمودی انتقال)



x	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$y = \sin x + 1$	1	2	1	0	1

د sine او $\cos ine$ د تابع گانو پریود او لمن(Amplitude):

که $b > 0$ وي د $f(t) = \sin bt$ او $g(t) = \cos bt$ گرافونه، د صفر او 2π تر منځ یوه دوره(Cycle) جوړوي، ددې دواړو تابع گانو پریود $\frac{2\pi}{b}$ دی ($b > 0$). د مثال په ډول د $y = \cos 3t$ پریود $\frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{3}$ دی او د $y = \sin \frac{1}{2}t$ تابع پریود $\frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$ دی او د $y = a\sin bt$ او $y = a\cos bt$ د تابعگانو لمن د $|a|$ دی($a \neq 0$)، د مثال په ډول د $y = -2\sin 4t$ لمن $|a| = |-2| = 2$ او پریود یې $\frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ دی.

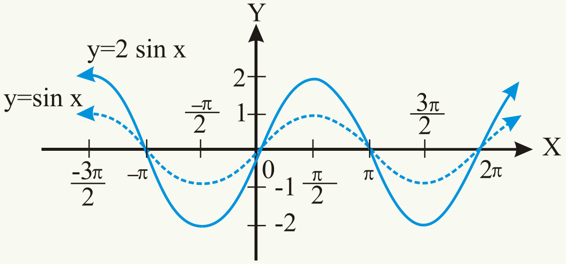
دریم مثال: د $y = 2\sin x$ تابع گراف رسم او د $y = \sin x$ د تابع له گراف سره یې پرتله کړئ.

حل: د دې تابع گراف توپیر د $y = \sin x$ د تابع له گراف سره دا دی چې $-2 \le y \le 2$ دی چې د 2 عدد ته لمن(amplitude) وایي. ځکه چې د $|2| = 2$ دی. ددې تابع پریو د هم 2π

(c) ketabton.com: The Digital Library

دی، لاندې جدول او شکل وګورئ:

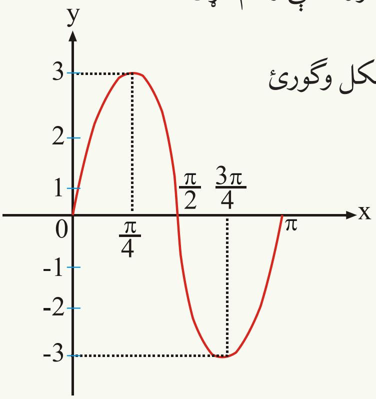
x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
sin x	0	1	0	-1	0
2 sin x	0	2	0	-2	0



څلورم مثال: د $y = 3\sin 2x$ تابع ګراف په $[0,\pi]$ انټروال کې رسم کړئ.

حل: د دې تابع پریود $\pi = \frac{2\pi}{2}$ دی، لاندې جدول او شکل وګورئ

x	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π
2x	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
sin 2x	0	1	0	-1	0
3 sin 2x	0	3	0	-3	0



د sint د تابع د تعریف ساحه ټول حقیقي عددونه دي، د sint د تابع ګراف د y محور په (0،0) او د X محور په (0.0)، π، 2π، 3π، 4π ... او $-\pi$، -2π، -3π -4π او نورو کې قطع

کوي، د $\sin t$ تابع له صفر څخه تر $\frac{\pi}{2}$ پورې متزایده، له $\frac{\pi}{2}$ څخه تر π پورې متناقصه، له π

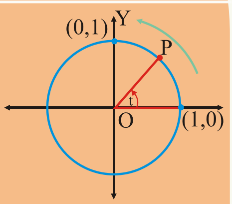
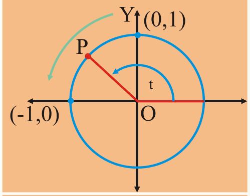
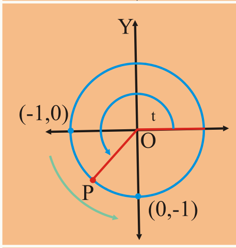
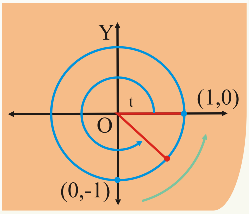
څخه تر $\frac{3\pi}{2}$ پورې متناقصه او له $\frac{3\pi}{2}$ څخه تر 2π پورې متزایده ده.

د $f(t) = \cos t$ د تابع ګراف (Graph of the cosine function)

د دې تابع د تعریف ساحه(domain) هم د ټولو حقیقي عددونو سټ دی او Range یې $[-1,1]$

(c) ketabton.com: The Digital Library

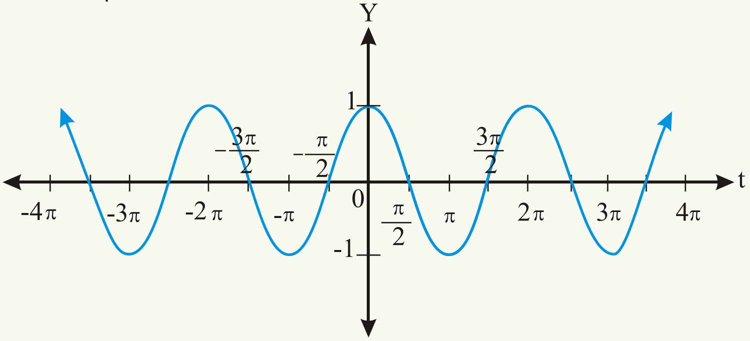
دی، د cosx د تابع د تناوب دوره هم 2π ده، له شکل سره سم په معیاري حالت(Standard position) کې د $\hat{t}$ رادیان یوه زاویه په پام کې ونیسئ چې د $\hat{t}$ د زاویې دویمه ضلع مثلثاتي دایره د p په ټکي کې قطع کوي، نو د p د ټکي د x مختصه د cost څخه عبارت ده. $f(t)=\cos t$
د تابع ګراف د رسمولو لپاره لاندې جدول او شکلونه وګورئ.

اړونده شکل	cost یا د p د ټکي د x مختصه	د P د ټکي حرکت	د t په قیمت کې تغیر
	له یوه څخه ترصفره پورې تناقص کوي	له (1,0) څخه تر (0,1) پورې	له 0 څخه تر $\frac{\pi}{2}$
	له صفر څخه تر -1 پورې تناقص کوي.	له (0,1) څخه تر $(-1,0)$ پورې	له $\frac{\pi}{2}$ څخه تر π
	له-1 څخه تر صفره پورې تزاید کوي.	له $(-1,0)$ څخه تر $(0,-1)$ پورې	له π څخه تر $\frac{3\pi}{2}$
	له صفر څخه تر یوه پورې تزاید کوي	له $(0,-1)$ څخه تر (1,0) پورې	له $3\frac{\pi}{2}$ څخه تر 2π

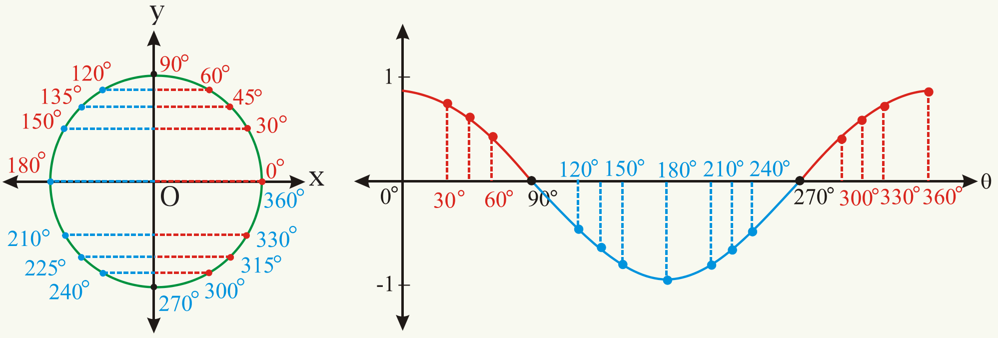
(c) ketabton.com: The Digital Library

په همدې ډول په هر 2π کې تکراريږي. په نتيجه کې $\cos(t\pm 2\pi)=\cos t$ دی. لاندې جدول او شکل وګورئ.

t	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$f(t)=\cos t$	1 ↘	0 ↘	-1 ↗	0 ↗	1



کولای شو، د درجې په حساب د $f(t)=\cos t$ تابع ګراف هم رسم کړو:



د $f(t)=y=\cos t$ تابع د تناوب دوره 2π ده، ځکه چې د $\cos t$ د تابع ګراف د $[0,2\pi]$، $[2\pi,4\pi]$، $[4\pi,6\pi]$ او $[-2\pi,0]$ او داسې نورو کې یو شان دی.

د $\cos t$ د تابع د تعریف ساحه د حقیقي عددونو سټ او Range یا د y قیمت يې د 1 او -1 تر منځ دی، یا د $[-1,1]$ انټروال د $\cos t$ د تابع Range دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$f(t)=\cos t$

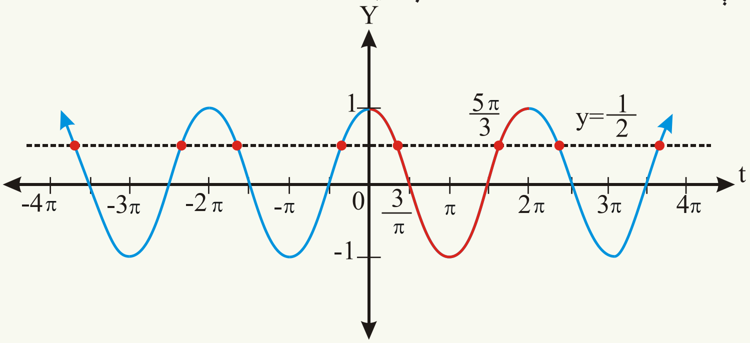
t	واقعي	تقريبي
0°	1	1.00
30°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0.87
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0.71
60°	$\frac{1}{2}$	0.50
90°	0	0.00
120°	$-\frac{1}{2}$	-0.50
135°	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-0.71
150°	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-0.87
180°	-1	-1.00
210°	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-0.87
225°	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-0.71
240°	$-\frac{1}{2}$	-0.50
270°	0	0.00
300°	$\frac{1}{2}$	0.50
315°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0.711
330°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0.87
360°	1	1.00

فعاليت

د $g(t)=\cos t$ تابع ګراف د t په کومو قيمتونو کې د y محور قطع کوي؟

لومړی مثال: د t ټول هغه قيمتونه وښياست چې د cost د تابع قيمت په کې له $\frac{1}{2}$ سره مساوي وي.

حل: څرنګه چې بې شمېره زاويې شته دي چې په هغه قيمتونو کې $y=\cos t=\frac{1}{2}$ دي، په شکل کې څو ټکي د نمونې په ډول په سره رنګ ښودل شوي دي.



(c) ketabton.com: The Digital Library

د $[0,2\pi]$ په انټروال کې داسې دوه ټکې شته چې $\cos t = \frac{1}{2}$ شي چې له $(\frac{\pi}{3},\frac{1}{2})$ او $(\frac{5\pi}{3},\frac{1}{2})$ څخه عبارت دي. ټول هغه قیمتونه چې په هغو کې $\cos t = \frac{1}{2}$ وي، له $t = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ یا $t = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$ څخه عبارت دي. چې k یو تام عدد دی.

د sin او cos تابع ګانو د تعریف ساحه ټول حقیقي عددونه دي، $y = \cos t$ تابع له صفره څخه تر $\frac{\pi}{2}$ پورې متناقصه او له $\frac{\pi}{2}$ څخه تر π هم متناقصه ده. لیکن له π څخه تر $\frac{3\pi}{2}$ متزایده او له $\frac{3\pi}{2}$ څخه تر 2π پورې هم متزایده ده. د $y = \sin t$ او $y = \cos t$، د تابع ګانو پریود 2π دی، په دې معنا چې: $\sin(t \pm 2\pi) = \sin t$, $\cos(t \pm 2\pi) = \cos t$ دی.

د $f(t) = \sin t$ تابع طاقه او $f(t) = \cos t$ تابع یوه جفته تابع ده، ځکه چې: $\sin(-t) = -\sin t$ او $\cos(-t) = \cos t$ دی یا د $\sin t$ د تابع ګراف نظر مبداء ته متناظر او د $\cos t$ تابع ګراف نظر د y محور ته متناظر دی.

پوښتنې

1- د لاندې تابع ګانو ګرافونه په راکړل شوو انټروالونو کې رسم کړئ.

$f(t) = \sin t : [2\pi, 6\pi]$ $\qquad$ $g(t) = \cos t : [\pi, 3\pi]$

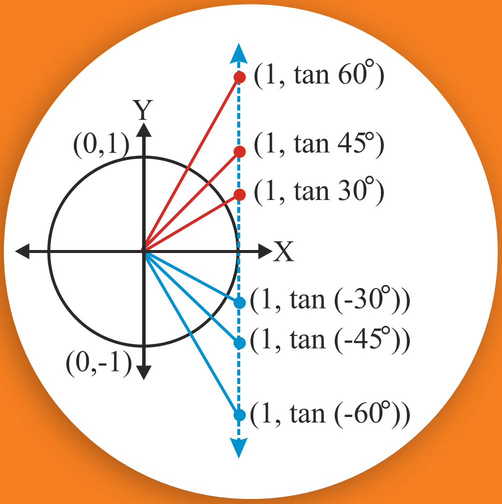
2- د $[-2\pi, 6\pi]$ په انټروال کې د t د کوم قیمت لپاره $\sin t = 1$ دی؟

3- د $[-2\pi, 6\pi]$ په انټروال کې د t دکوم قیمت لپاره $\cos t = 0$ دی؟

4- د $g(t) = -\frac{1}{2}\sin t$ د تابع ګراف په $[-2\pi, 6\pi]$ انټروال کې رسم کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ټانجانټ د تابع ګراف



آیا پوهیږئ چې د tan تابع یوه متزایده تابع ده؟

څرنګه چې $\tan t = \frac{y}{x} = \frac{\sin t}{\cos t}$ دی، په دې شرط چې $\cos t \neq 0$ وي، نو د tan تابع د تعریف ساحه ټول حقیقي عددونه دي، پرته له هغو زاویو څخه چې cos یې صفر وي، د $\frac{\pi}{2}$ او $\frac{3\pi}{2}$ او یا $\frac{\pi}{2}+2k\pi$ او $\frac{3\pi}{2}+2k\pi$ د زاویو کوساینونه صفر دي.

څرنګه چې د $\frac{\pi}{2}$ زاویې د دویمې ضلعې د تقاطع ټکی له مثلثاتي دایرې سره د $(0,1)$ ټکی دی، نو د $\frac{\pi}{2}$ زاویې سره د یو پوره دوران (2π) په جمع کولو سره د $\cdots -\frac{7\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{9\pi}{2} \cdots$ زاویې په لاس راځي چې ددې زاویو د tan قیمتونه تعریف شوي نه دي او د $t = k\pi \pm \frac{\pi}{2}$ مستقیم خطونه د tan د تابع عمودي مجانبونه دي.

په همدې ډول د $(0,-1)$ ټکی د $\frac{3\pi}{2}$ زاویې پر دویمه ضلع واقع دی، د $\frac{3\pi}{2}$ له زاویې سره د یو پوره دوران (2π) له جمع کولو څخه د $\cdots -\frac{5\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}, \frac{11\pi}{2} \cdots$ زاویې په لاس راځي چې د tan د تابع د تعریف په ساحه کې شامل نه دي.

یا د tan د تابع د تعریف په ناحیه (domain) کې ټول حقیقي عددونه شامل دي پرته له د $\frac{\pi}{2}$ له طاق مضرب څخه، او یا $IR - \{t / t \in IR, t = k\pi + \frac{\pi}{2}\}$ او د ټانجانټ د تابع Range د

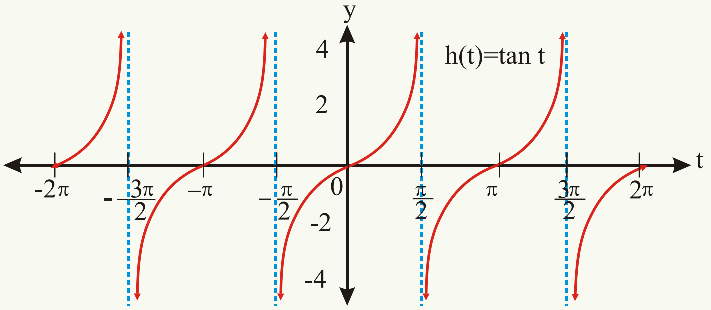
(c) ketabton.com: The Digital Library

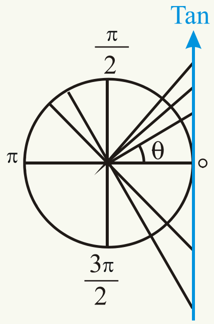
ټولو حقیقي عددونو سټ دی. د ټانجانټ د تابع پریود π دی. د t راډیان زاویې لپاره لرو چې:

$\tan(t\pm\pi)=\tan t$ دی. څه وخت چې د $\hat{t}$ زاویه له صفره تر $\frac{\pi}{2}$ پورې تزاید وکړېږ، نو tan t هم له صفره څخه تر $+\infty$ پورې تزاید کوي ($\tan\frac{\pi}{2}$ تعریف شوی نه دی). په د ویمه ربع کې هم څه وخت چې د t زاویه له $\frac{\pi}{2}$ څخه تر π پورې تزاید وکړي، tan t هم له $-\infty$ څخه تر صفره پورې تزاید کوي.

په همدې ډول په دریمه ناحیه کې هغه وخت چې د $\hat{t}$ زاویه له π څخه تر $\frac{3\pi}{2}$ پورې تزاید وکړي، د $\hat{t}$ د زاویې ټانجانټ له صفره څخه تر $+\infty$ پورې تزاید کوي. په څلورمه ناحیه کې د $\hat{t}$ د زاویې ټانجانټ له $-\infty$ څخه تر صفره پورې تزاید کوي. لاندې جدول د ټانجانټ د تابع تحول ښکاره کوي، همدارنګه د دې تابع تحول په لاندې شکلونو کې ښودل شوی دی:

t	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$3\pi/2$		2π
$\tan t$	0	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	0

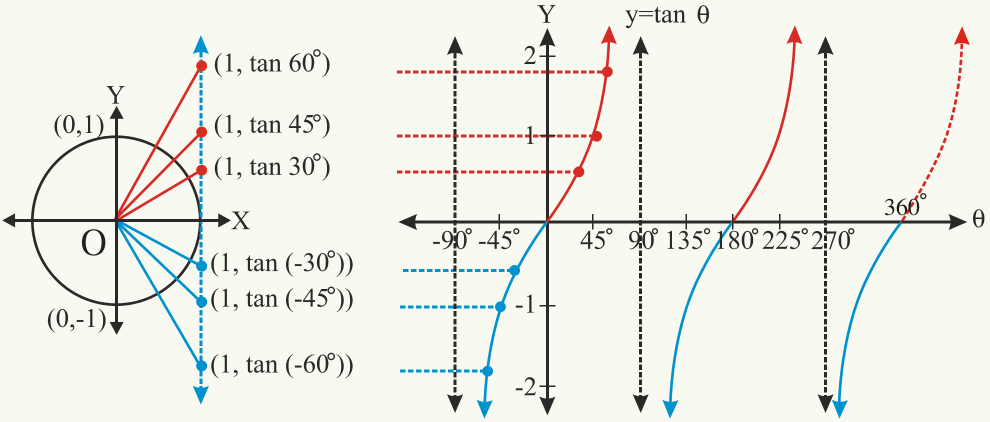




که θ د درجې په حساب وي، د ټانجانټ تابع قیمتونه او شکل په لاندې ډول وګورئ.

	θ	-90° / 90°	-60° / 120°	-45° / 135°	-30° / 150°	0° / 180°	30° / 210°	45° / 255°	60° / 240°
tan θ	حقیقي	تعریف شوی نه دی	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
	تقریبي	تعریف شوی نه دی	−1.73	-1	−0.58	0	0.58	1	1.73

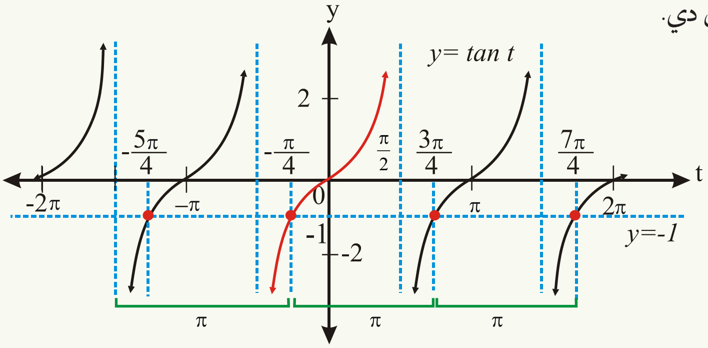
(c) ketabton.com: The Digital Library



خرنگه چې د $(\pi, 2\pi)$ او د $(0, \pi)$ په فاصله کې د ټانجانټ د تابع تغيرات يو شی دي، نو د $\tan$ تابع پريود π دی او د $\tan$ تابع يوه متزايده تابع ده. له بلې خواکه $b > 0$ وي، د $f(t) = \tan bt$ تابع د $\frac{\pi}{2}$ او $-\frac{\pi}{2}$ تر منځ يوه دوره(Cycle) جوړوي، د دې تابع پريود $\frac{\pi}{b}$ دی. د مثال په ډول د $f(t) = \tan 2t$ پريود $\frac{\pi}{b} = \frac{\pi}{2}$ دی.

مثال: د t ټول هغه قيمتونه پيداکړئ چې $\tan t = -1$ وي.

حل: خرنگه چې د $\tan t$ قيمتونه د π په فاصله کې تکراريږي، نو د t بې شمېره قيمتونه شته چې $y = \tan t$ له 1 - سره مساوي وي چې په لاندې شکل کې څو ټکي د نمونې په ډول ښودل شوي دي.



خرنگه چې د $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ په انټروال کې يوازې د $(-\frac{\pi}{4}, -1)$ يو ټکی لري، نو د t ټول قيمتونه چې $\tan t = -1$ دي مساوي دی په: $t = -\frac{\pi}{4} + K\pi$ (K يو تام عدد دی).

(c) ketabton.com: The Digital Library

د tan تابع هر وخت متزایده ده او پرته د $\frac{\pi}{2}$ د طاق مضرب له زاویو څخه پرته په ټولو حقیقي عددونو کې تعریف شوې ده. او د تناوب دوره یې π ده، ځکه چې: $\tan(t\pm\pi)=\tan(t)$.

څرنگه چې $\tan(-t)=-\tan t$ دی، نو $y=\tan t$ یوه طاقه تابع ده او د $\frac{\pi}{2}$ په تام مضرب کې عمودي مجانب هم لري.

د sine ، cosine او tangent تابع گانو د مشخصو لنډیز:

تابع	سمبول	Domain	Range	پریود	طاقه / جفته
$\sin e$	$f(t)=\sin t$	د ټولو حقیقي عددونو سټ	ټول حقیقي عددونه د 1 او 1 - ترمنځ	2π	طاقه
$\cos ine$	$f(t)=\cos t$	ټول حقیقي عددونه	ټول حقیقي عددونه د 1 او 1 - ترمنځ	2π	جفته
$\tan gent$	$f(t)=\tan t$	ټول حقیقي عددونه پرته د $\frac{\pi}{2}$ له طاق مضرب څخه	ټول حقیقي عددونه	π	طاقه

یا په بل عبارت:

$$D_{\sin}=D_{\cos}=IR \qquad R_{\sin}=R_{\cos}=[-1,1]$$

$$D_{\tan}=\{x\in IR \quad : \quad \cos x\neq 0\}$$

پوښتنې

1 – د t د زاویې په کوم قیمت د $\tan t$ د تابع قیمت په $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ انټروال کې له صفره کوچنی دی؟

2 – د $y=3\tan\theta$ تابع گراف رسم کړئ.

3 – د $\tan\theta$ تابع پریود مساوي دی په:

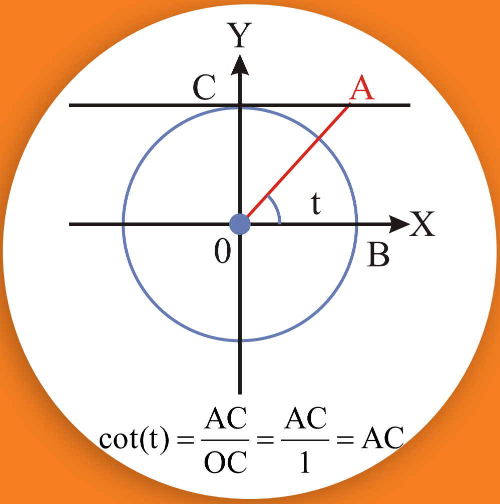
a) 2π b) π c) 3π d) درې واړه سم نه دي

4 – که د θ زاویه له 0° څخه تر 90° پورې تحول وکړي، د $\tan\theta$ تحول عبارت دی له:

a) $-\infty$ له 1- څخه تر b) $+\infty$ له صفر څخه تر c) $+\infty$ له $-\infty$ څخه تر

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کوټانجانټ د تابع گراف



- آیا د کوټانجانټ د تابع د تناوب دوره پېژنئ؟
- که $\sin t = 0$ وي، آیا $\cot(t)$ تعریف شوی دی؟ که نه، ولې؟

خرنگه چې $\cot(t)=\frac{\cos t}{\sin t}$ دی، که $\sin t = 0$ وي، $\cot(t)$ تعریف شوی نه دی چې t یو تام عدد وي.

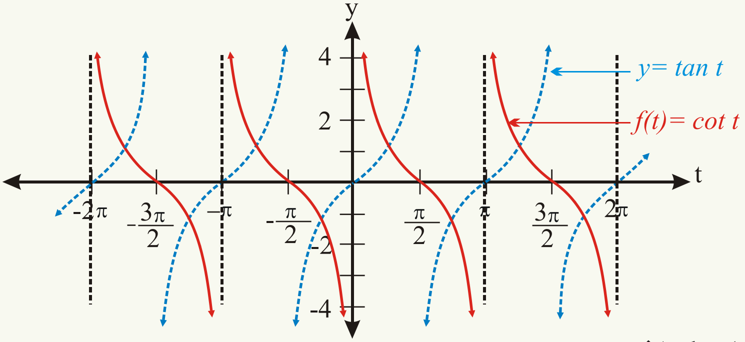
د cot تابع د تعریف ساحه (domain) ټول حقیقي عددونه دي پرته د π له تام مضرب څخه، یا په بل عبارت $IR-\{t/t\in IR, t=k\pi, k\in z\}$ یا $dom_{cot}=\{t\in IR/\sin t\neq 0\}$ او د دې تابع Range ټول حقیقي عددونه دي.

د $f(t)=\cos(t)$ د تابع گراف د π په تام مضرب کې عمودي مجانب (Vertical asymptotes) لري $(t=k\pi)$ چې k یو تام عدد دی.

څه وخت چې د t زاویه له صفره تر $\frac{\pi}{2}$ پورې زیاته شي، د $\cot(t)$ قیمت له $+\infty$ څخه تر صفره پورې کمېږي ($\cot 0°$ نه دی تعریف شوی) په دویمه ناحیه کې څه وخت چې د t زاویه له $\frac{\pi}{2}$ څخه تر π پورې زیاته شي، $\cot(t)$ له صفره تر $-\infty$ پورې کمېږي (تناقص کوي). دې ته په پام سره چې د cot د تابع د تناوب دوره π ده، نو په درېمه او څلورمه ناحیه کې د $\cot(t)$ د تابع تغیرات د لومړۍ او دویمې ناحیې په شان دي. پورتنۍ حقیقت په لاندې جدول او شکل کې لیدلای شئ.

t	0		$\pi/2$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$\cot t$	‖ $+\infty$	↘	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$

(c) ketabton.com: The Digital Library



د secant(t) تابع گراف (Graph of the secant Function)

د (t) sec او (t) cos گرافونه یو له بله سره څه اړیکه لري؟

د $f(t)=\sec(t)$ د تابع گراف د $\cos t$ د تابع له گراف سره معکوسه اړیکه لري، ځکه چې $\sec(t)=\frac{1}{\cos(t)}$ دی. که $\sec t$ د $\frac{1}{\cos t}$ په شکل په پام کې ونیسو، څه وخت چې د t زاویې قیمت له صفر څه تر $\frac{\pi}{2}$ یا 90° پورې زیات شي، د $\cos t$ قیمت له (1) څخه صفر ته نژدې کېږي، د $\frac{1}{\cos t}$ یا $\sec t$ قیمت له 1 څخه تر $+\infty$ زیاتېږي، که $t=90^\circ$ شي، $\sec t$ تعریف شوی نه دی، که t له 90° لږ څه زیاته شي د $\sec t$ قیمت $-\infty$ کېږي او په $t=\pi=180^\circ$ کې د -1 سره مساوي کېږي. په همدې ډول که t له 180° څخه تر 270° پورې زیاته شي، نو د $\cos t$ قیمت له -1 څخه صفر ته نژدې کېږي او $\sec(t)$ له -1 څخه تر $-\infty$ پورې کمېږي.

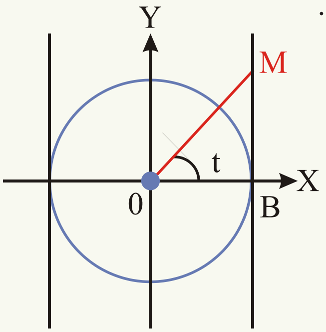
په $t=\frac{3\pi}{2}=270^\circ$ کې د $\sec t$ قیمت غیر معین کېږي په همدې ډول، څه وخت چې د t قیمت له 270° څخه تر 360° زیات شي، نو $\cos(t)$ له صفر څخه تر یوه پورې قیمت اخلي او $\sec(t)$ د $+\infty$ څخه تر (1) پورې تناقص کوي. لیدل کېږي چې:

$$\text{Domain } \sec t = IR - \{t \mid t=(2k+1)\frac{\pi}{2}, k\in z\}$$

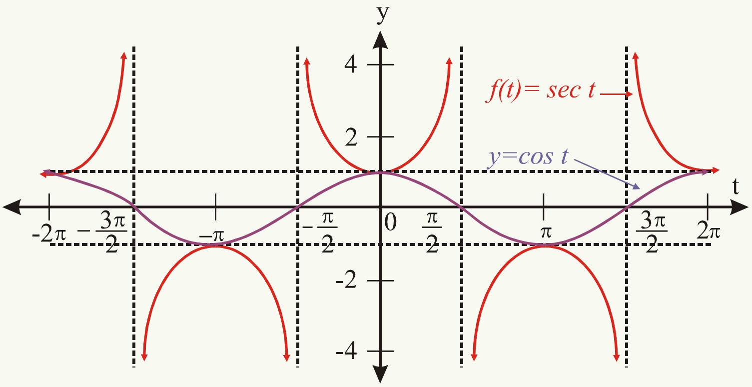
او $\text{Range } \sec(t) = IR - \{t \mid -1\le t\le 1\}$ یا ټول حقیقي عددونه پرته د $[-1,1]$ له انټروال څخه یا په بل عبارت د $f(t)=\sec(t)$ تابع د تعریف ساحه (*Domain*) د ټولو حقیقي عددونو سټ دی پرته د $\frac{\pi}{2}$ د طاق مضرب څخه او د $f(t)=\sec(t)$ د تابع Range ټول حقیقي عددونه دي چې لوی یا مساوي د یو او یا کوچنی یا مساوي له -1 وي، لکه: ځنګه چې لیدل کېږي د

(c) ketabton.com: The Digital Library

$\sec(t)$ تابع پریود هم 2π دی او د $f(t)=\sec(t)$ تابع د $t=(2k+1)\frac{\pi}{2}$ کې عمودي مجانبونه لري چې k یو تام عدد دی.



$$\sec t=\frac{\overline{OM}}{OB}=\frac{\overline{OM}}{1}=\overline{OM}$$



t	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
t	$0°$	$90°$	$180°$	$270°$	360
$F(t)=\sec t$	$1 \nearrow +\infty$	‖ $-\infty \nearrow$	$-1 \searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty \searrow$	1

فعالیت

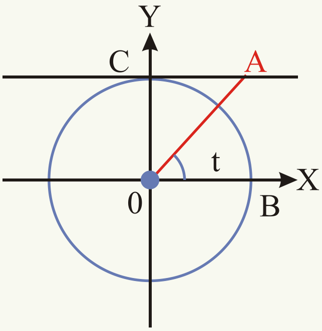
د $f(t)=\frac{4}{3}\sec(t)$ تابع ګراف رسم کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د cosecant د تابع گراف (Graph of the cosecant Function)

د $f(t)=\sin(t)$ تابع گراف د $f(t)=\csc(t)$ د تابع له گراف سره څه اړیکه لري؟

خرنگه چې $\csc t = \frac{1}{\sin t}$ دی، sint او csct یو د بل معکوس دي. څه وخت چې $\sin(t)=0$ وي، $\csc t$ تعریف شوی نه دی، د $f(t)=\csc(t)$ د تابع د تعریف ناحیه ټول حقیقي عددونه دي پرته له هغو زاویو څخه چې د π تام مضرب وي، (هغه زاویې چې sine یې صفر وي) چې په دې قیمتونو کې عمودي مجانبونه هم لري او د $f(t)=\csc(t)$ د تابع Range ټول هغه حقیقي عددونه دي چې لوی یا مساوي د یو، کوچنی یا مساوي له (-1) سره وي. او ددې تابع پریود هم 2π دی.



څه وخت چې د t زاویه له $0°$ څخه تر $90°$ پورې زیاته شي، نو $\sin t$ له صفر څخه تر (1) پورې زیاتیږي (تزاید کوي) او $\csc(t)$ له $+\infty$ څخه تر (1) پورې کمیږي (تناقص کوي)، څه و خت چې $t=90°$ شي، $\csc(t)=1$ کیږي او که د t زاویه له $90°$ څخه تر $180°$ زیاته شي، نو $\sin(t)$ له یوه څخه صفر ته راکمیږي او $\csc(t)$ له (1) څخه $+\infty$ ته زیاتیږي (تزاید کوي). کله چې $t=180°$ شي نو $\sin(t)=0$ او د $\csc(t)$ قیمت غیر معین شي او که t زاویه $180°$ څخه تر $270°$ پورې زیاته شي، $\sin(t)$ له صفر څخه تر (-1) پورې کمیږي او $\csc(t)$ له $-\infty$ څخه تر (-1) پورې زیاتیږي، د $t=270°$ په قیمت $\csc(t)$ د (-1) سره مساوي کیږي.

په همدې ډول کله چې د t زاویه له $270°$ څخه تر $360°$ پورې زیاته شي (تزاید وکړي)، نو $\sin t$ له -1 څخه صفر ته نژدې کیږي او $\csc(t)$ له (-1) څخه تر $-\infty$ پورې کمیږي. په $t=360°$ کې د $\csc(t)$ قیمت غیر معین شي (تعریف شوی نه دی). $t=k\pi$ کې تابع عمودي مجانبونه لري.

په شکل کې د مثلثاتي دایرې د C په ټکي کې یو مماس رسموو، د $O\overset{\Delta}{C}A$ په قایم الزاویه مثلث کې لرو چې:

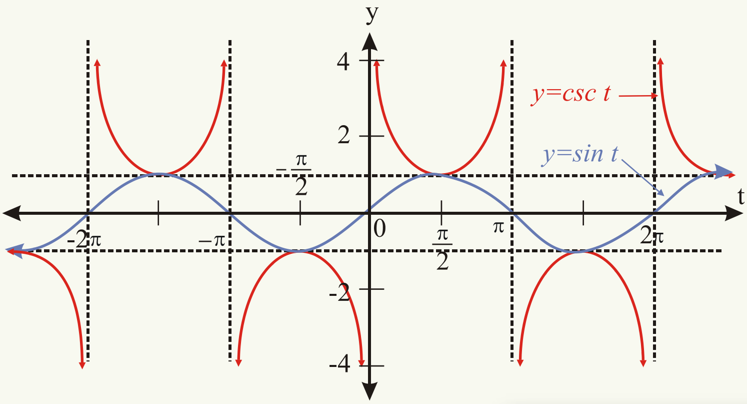
$$\csc(t)=\csc O\hat{A}C = \frac{\overline{OA}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{OA}}{1} = \overline{OA} \qquad (\hat{t}=O\hat{A}C)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $\overline{OA}$ د خط یا $\csc(t)$ تحول په لاندې جدول کې لنډېږي:

t	0		$\pi/2$		π		$3\pi/2$		2π
$F(t)=\csc t$	$+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	-1	↘	$-\infty$

لیدل کېږي چې که د t زاویه له صفر څخه تر $360°$ یا (2π) پورې قیمتونه واخلي، نو $\csc(t)\le -1$ او یا $\csc(t)\ge 1$ کېږي، نو لاندې شکل وګورئ.



فعالیت

د $h(t)=-3\csc t$ د تابع ګراف رسم کړئ.

لاندې جدول ته وګورئ:

سمبول	Domain	Range	پریود	طاقه یا جفته
$f(t)=\sec t$	ټول حقیقي عددونه پرته د $\frac{\pi}{2}$ له طاق مضرب څخه	ټول حقیقي عددونه کوچني یامساوي په -1، لوی یا مساوي په (1)	2π	جفته

(c) ketabton.com: The Digital Library

طاقه	2π	ټول حقيقي عددونه کوچني يامساوي په -1 لوی يا مساوي په 1	ټول حقيقي عددونه پرته د π له تام مضرب څخه	$f(t)=\csc(t)$
طاقه	π	ټول حقيقي عددونه	ټول حقيقي عددونه پرته د π له تام مضرب څخه	$f(t)=\cot(t)$

له مثلثاتي تابع ګانو څخه دا نتيجه په لاس راځي چې: د θ يا (t) د زاويې په زياتوالي سره د $\sin\theta$ او $\tan\theta$ مثلثاتي نسبتونه هم زياتيږي، خو د $\cos\theta$ او $\cot\theta$ قيمت کميږي.

پوښتني

1 - د $f(t)=\cot(t)$ تابع د t په کوم قيمت کې تعريف شوې نه ده او ولې؟

2 - څه وخت چې د θ زاويه له $\frac{\pi}{2}$ څخه تر π پورې تحول وکړي، د $\cot\theta$ تحول عبارت دی:

a) $1 \to -\infty$ b) $0 \to -\infty$ c) دواړه سمې نه دي

3 - که $\hat{t}=\pi$ وی، $\cot(t)$ عبارت دی له:

$a)$ صفر $b)\ -1$ $c)$ نه دی تعريف شوی

4 - د $\sec$ او $\csc$ تابع ګانو $Range$ عبارت دی له:

a) $IR-\{t\,|\,-1<t<1\}$ $b)$ ټول حقيقي عددونه c) $IR-\{t\,|\,-1\le t\le 1\}$

5 - د $f(t)=\csc(t)$ تابع د تعريف ساحه $(Domain)$ عبارت ده، له:

a) ټول حقيقي عددونه پرته د π له تام مضرب څخه

b) ټول حقيقي عددونه پرته د $\frac{\pi}{2}$ له طاق مضرب څخه

c) ټول حقيقي عددونه پرته د 2π له تام مضرب څخه d) دري واړه سمې نه دي

6 - د $f(t)=\csc(t)$ تابع د $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ په انټروال کې:

$a)$ متزايده ده $b)$ متناقصه ده $c)$ نه متزايده او نه متناقصه ده

(c) ketabton.com: The Digital Library

د خېرکي لنډيز

• د $\frac{d}{180}=\frac{g}{200}=\frac{R}{\pi}$ د فورمول په مرسته کولای شو، زاویه له یوه واحد څخه بل واحد ته واړوو.

• یو راډیان هغه مرکزي زاویه ده چې د مقابل قوس اوږدوالی یې د شعاع له اوږدوالي سره مساوي وي.

• θ د راډیان په حساب مساوي ده په: $\theta=\frac{s}{r}$ چې s د مرکزي زاویې مقابل قوس او r د دایرې شعاع ده.

• که د یوې زاویې رأس د وضعیه کمیاتو په مبدأ کې او لومړنی ضلع یې د X د محور په مثبت جهت منطبق وي، زاویه په معیاري حالت کې ده.

• که په معیاري حالت کې د دوو یا څو زاویو دویمې ضلعې یو پر بل منطبقې وي، دا زاویې کوټرمینل زاویې نومېږي.

• مثلثاتي دایره هغه دایره ده چې د شعاع اوږدوالی یې د اوږدوالي واحد وي.

$\sin(90-\theta)=\cos\theta$ $\cos(90-\theta)=\sin\theta$ $\tan(90-\theta)=\cot\theta$	$\sin(-\theta)=-\sin\theta$ $\cos(-\theta)=\cos\theta$ $\tan(-\theta)=-\tan\theta$	$\sin(\pi-\theta)=\sin\theta$ $\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$ $\tan(\pi-\theta)=-\tan\theta$
$\cot(90-\theta)=\tan\theta$ $\sec(90-\theta)=\csc\theta$ $\csc(90-\theta)=\sec\theta$	$\cot(-\theta)=-\cot\theta$ $\sec(-\theta)=\sec\theta$ $\csc(-\theta)=-\csc\theta$	$\cot(\pi-\theta)=-\cot\theta$ $\sec(\pi-\theta)=-\sec\theta$ $\csc(\pi-\theta)=\csc\theta$
$\sin(\frac{\pi}{2}+\theta)=\cos\theta$ $\cos(\frac{\pi}{2}+\theta)=-\sin\theta$ $\tan(\frac{\pi}{2}+\theta)=-\cot\theta$	$\sin(\pi+\theta)=-\sin\theta$ $\cos(\pi+\theta)=-\cos\theta$ $\tan(\pi+\theta)=\tan\theta$	$\sin(2\pi-\theta)=-\sin\theta$ $\cos(2\pi-\theta)=\cos\theta$ $\tan(2\pi-\theta)=-\tan\theta$
$\cot(\frac{\pi}{2}+\theta)=-\tan\theta$ $\sec(\frac{\pi}{2}+\theta)=-\csc\theta$ $\csc(\frac{\pi}{2}+\theta)=\sec\theta$	$\cot(\pi+\theta)=-\cot\theta$ $\sec(\pi+\theta)=-\sec\theta$ $\csc(\pi+\theta)=-\csc\theta$	$\cot(2\pi-\theta)=-\cot\theta$ $\sec(2\pi-\theta)=\sec\theta$ $\csc(2\pi-\theta)=-\csc\theta$

(c) ketabton.com: The Digital Library

• د θ او $(\theta+2k\pi)$ زاويې چې k يو تام عدد دی، کوټرمينل زاويې دي چې ټول مثلثاتي نسبتونه يې سره مساوي دي.

• د $\sin\theta$ او $\cos\theta$ د توابعو *domain* ټول حقيقي عددونه او *Range* يې $[-1,1]$ دی.

• د $y=\sin\theta$ تابع يوه طاقه تابع ده، ځکه چې $\sin(-\theta)=-\sin\theta$ ددې تابع ګراف نظر د وضعيه کمياتو مبدأ ته متناظر دی او د $y=\cos\theta$ تابع جفته تابع ده، ځکه چې $\cos(-\theta)=\cos\theta$ او د cos تابع ګراف نظر y محور ته متناظر دی.

• د 0° ، $\frac{\pi}{2}$ ، π ، $\frac{3\pi}{2}$ او 2π د زاويو دوه، دوه مثلثاتي نسبتونه تعريف شوې نه دي.

• د sin ، cos ، sec او csc تابع ګانو د تناوب دوره 2π او د tan او cot د تابع ګانو د تناوب دوره(پريود)، π ده.

• د tan تابع هر وخت متزايد او د cot تابع هر وخت متناقصه تابع ده.

• د cos او sec تابع ګانې جفتې او د sin، tan، cot او csc تابع ګانې طاقې دي.

• که د يوې تابع ګراف نظر د y محور ته متناظر وي، دا ډول تابع ګانې جفتې دي يا د هر x لپاره، $x\in domf$ د $f(-x)=f(x)$ رابطه صدق وکړي.

• که د يوې تابع ګراف نظر د وضعيه کمياتو مبدأ ته سره متناظر وه، طاقه تابع ده چې د هر x لپاره، $x\in domf$ د $f(-x)=-f(x)$ رابطه صدق وکړي.

د مثلثاتي توابعو تحول په لنډ ډول په لاندې جدول کې ښودل شوی دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

تابع / θ	0°	I	$\frac{\pi}{2}$	II	π	III	$\frac{3\pi}{2}$	IV	2π
Sin	0	↗	1	↘	0	↘	-1	↗	0
Cos	1	↘	0	↘	-1	↗	0	↗	1
Tan	0	↗	$+\infty$ / $-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$ / $-\infty$	↗	0
Cot	$+\infty$	↘	0	↘	$-\infty$ / $+\infty$	↘	0	↘	$-\infty$
Sec	1	↗	$+\infty$ / $-\infty$	↗	-1	↘	$-\infty$ / $+\infty$	↘	1
Csc	$+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$ / $-\infty$	↗	-1	↘	$-\infty$

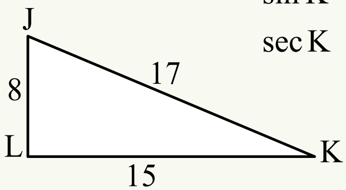
(c) ketabton.com: The Digital Library

د څپرکي پوښتنې

1 – $42{,}6033^\circ$ په درجه، دقيقه او ثانيه بدلې کړئ؟

2 – که د يو ساعت د ثانيې د عقربې دوران 3 دقيقې او25 ثانيې وي، د ثانيې عقربې به څو راډيانه مثبته زاويه طی کړې وي؟

3 – د JKL په مثلث کې لاندې قيمتونه پيدا کړئ؟



sin K	sin J	cos J	cos K	tan K	tan J
sec K	sec J	cot J	cot K	csc J	csc K

4 –که د يوې دايرې شعاع 20cm او د مرکزي زاويې مقابل قوس يې $s = 85\text{cm}$ وي، مرکزي زاويه څو راډيانه ده؟

5 – د 1 radian او $2\,radian$ مرکزي زاويو د مقابلو قوسو اوږدوالی پيدا کړئ. په دې ډول چې د دايرې قطر 10 cm وي.

6 – د لاندې زاويو دويمې ضلعې (terminal side) چېرې واقع کېږي؟

$\frac{3\pi}{2}$, -7π , $-\frac{11\pi}{2}$, -500° , 900° , $-\pi$

7 – لاندې زاويې چې په راډيان راکړل شوي دي، په درجه يې واړوئ.

$\frac{\pi}{8}$, $\frac{\pi}{15}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{17\pi}{45}$

8 – په 54 دقيقو کې د يوه ساعت د ثانيې او د ساعت عقربه هره يوه څو راډيانه طی کوي؟

9 – که د يوه ټراکتور د کوچني ټاير قطر يو متر او د لوی ټاير قطر 120cm وي، څه وخت چې کوچنی ټاير د 70° درجو په اندازه وڅرخېږي لوی ټاير څو راډيانه طی کوي؟

10 – يو څرخ په يو ساعت کې 300ReV دورانونه کوي، دا څرخ په يوه ثانيه کې څو راډيانه ګرځي؟

11 – د يوه مثلث زاويې په ترتيب سره $4x$ درجې، $\frac{70x}{9}$ ګراده او $\frac{\pi x}{20}$ راډيانه دي. هره يوه

(c) ketabton.com: The Digital Library

زاویه څو درجې ده؟

12- $\hat{A}$ ، $\hat{B}$ ، $\hat{C}$ او $\hat{D}$ دیوې څلور ضلعي زاویې دي،که $\hat{A}+\hat{D}=240^\circ$ ، $\hat{C}+\hat{D}=200g$

او $\hat{B}+\hat{D}=\frac{2\pi}{3}^{R}$ وي: د دې څلور ضلعې زاویې د درجې په حساب پیدا کړئ.

13 - دیوه دوران $\frac{1}{12}$ برخه مساوي ده په:

a) $=30^\circ$ b) $\frac{\pi}{6}$ radian c) $\frac{100}{3}$g d) درې واړه سمې دي

14 - د دوو زاویو مجموعه 17° او تفاضل یې 17 گراده دی، دا دواړه زاویې پیدا کړئ.

15 - د درجې په حساب د دوو زاویو مجموعه x او تفاضل یې د گراد په حساب هم x دی، دا دواړه زاویې پیدا کړئ.

16 -لاندې زاویې د درجې په اعشاري شکل ولیکئ.

$47^\circ\ 15'\ 36''$ $\qquad$ $15^\circ\ 24'\ 45''$

17 - لاندې زاویې په درجه، دقیقه او ثانیې (DMS) واړوئ.

23.16° $\qquad$ 4.2075°

18 - $\sin(-\frac{\pi}{3})$ ، $\tan\frac{3\pi}{4}$ او $\cot\frac{7\pi}{6}$ زاویو مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ

19 - د $[-2\pi, 2\pi]$ په انټروال کې د θ په کوم قیمت، $\sin\theta=1$ دی؟

20 - د $[-2\pi, 2\pi]$ په انټروال کې د $\tan\theta$ تابع، د θ په کومو قیمتونو کې عمودي مجانب لري؟

21 - له (i) څخه تر (iii) پورې کومه یوه اړیکه سمه نه ده؟

(i) $\sin(-x)=-\sin x$ $\qquad$ (ii) $\cos(-x)=-\cos x$

(iii) $\tan(-x)=-\tan x$

a) i او ii سمې دي. $\qquad$ *b*) یوازې ii سمه ده.

c) i او iii سمې دي. $\qquad$ *d*) درې واړه سمې دي.

e) هیڅ یو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

22 - $\cos\frac{47\pi}{2}$ ، $\sin(-13\pi)$ او $\tan\frac{8\pi}{3}$ پیدا کړئ؟

23 –داسې زاویه پیدا کړئ چې که دگراد په حساب یې له مقدار ه 23 واحده کم کړو، د زاویې مقدار په درجه لاس ته راشي.

24 - د دريو زاويو مجموعه 240گراده ده، که لومړنۍ زاويه 40 گراده، دويمه $\frac{3\pi}{4}$ راډيانه وي، دريمه زاويه څو درجې ده؟

25 - د $4185°$ زاويې مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

26 - د $(-3660°)$ زاويې مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

27 - د $y=\cos\theta$ تابع د $[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$ په انټروال کې:

$a)$ متزايده ده　　$b)$ متناقصه ده　　$c)$ هم متزايده او هم متناقصه ده

28 - د $y=\tan\theta$ تابع پريود عبارت دی، له:

a) 2π　　b) π　　c) $\frac{\pi}{2}$　　d) $\frac{3\pi}{2}$

29 - د $f(t)=\cos(t)$ تابع:

a) جفته ده　　b) طاقه ده　　c) نه جفته او نه طاقه ده

30 - هغه تابع چې گراف يې نظر مبدأ ته متناظر وي.

a) جفته ده　　b) طاقه ده　　c) نه جفته او نه طاقه ده

31 - د $y=\cos\theta$ تابع د تناوب دوره عبارت ده، له:

a) π　　b) $\frac{3\pi}{2}$　　c) 2π　　d) 3π

32 - $\sin 67°$ له $\sin 787°$ سره څه اړيکه لري؟

a) $\sin 787° > \sin 67°$　　b) $\sin 787° < \sin 67°$　　c) $\sin 67° = \sin 787°$

33 –کومه يوه له لاندې اړيکو څخه سمه ده؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

a) $\sec 135° = -\csc 45°$ b) $\sec 135° = \csc 45°$
d) $\sec 135° = \sec 45°$ c) $\sec 135° = -\sec 45°$

34 - کومه یوه له لاندې اړیکو څخه سمه ده؟

a) $\tan 240° = \tan 60°$ b) $\tan 240° = -\tan 60°$
c) $\tan 240° = \cot 60°$ d) $\tan 240° = -\cot 60°$

35 - $\cot 0° = ?$

$a)$ 1 $b)$ -1 $c)$ 0 $d)$ تعریف شوی نه دی.

36 - $\cos 9\pi = ?$

$a)$ 1 $b)$ -1 $c)$ 0 $d)$ $\frac{1}{2}$

37 - $\sin(-\frac{13\pi}{2}) = ?$

$a)$ 1 $b)$ -1 $c)$ 0 $d)$ درې واړه سم نه دي

38 - د $-2430°$ له زاویې مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

39 - $\sin(270° - \theta) = ?$

$a)$ $\sin\theta$ $b)$ $-\sin\theta$ $c)$ $\cos\theta$ $d)$ $-\cos\theta$

40 - $\sin(-\frac{9\pi}{2}) = ?$

$a)$ 1 $b)$ -1 $c)$ 0 $d)$ تعریف شوی نه دی

41 - $\sec(-\frac{9\pi}{2}) = ?$

$a)$ 1 $b)$ -1 $c)$ 0 $d)$ تعریف شوی نه دی

42 - $\tan(-15\pi) = ?$

$a)$ 1 $b)$ -1 $c)$ 0 $d)$ تعریف شوی نه دی

43 - $\sec(-1530°) =$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$a)\ 1$ $b)\ -1$ $c)\ 0$ $d)$ تعریف شوی نه دی

44 - $\cot(-2430°) = ?$

$a)\ 1$ $b)\ -1$ $c)\ 0$ $d)$ تعریف شوی نه دی

45 - $\sin(\frac{235\pi}{2}) = ?$

$a)\ 1$ $b)\ -1$ $c)\ 0$ $d)$ تعریف شوی نه دی

46 - $\cos(\frac{407\pi}{2}) = ?$

a) 1 b) 0 c) -1 d) ∞

47 - $\tan(90+\theta)$ مساوی دی په:

$a)\ \cot\theta$ $b)\ -\cot\theta$ $c)\ -\tan\theta$ $d)\ \tan\theta$

48 - $\tan(270+\theta) = ?$

$a)\ \cot\theta$ $b)\ -\cot\theta$ $c)\ \tan\theta$ $d)\ -\tan\theta$

49 - $\sin(-1980°) = ?$

$a)\ 1$ $b)\ -1$ $c)\ 0$ $d)\ \frac{1}{2}$

50 - $\sin(-\frac{3\pi}{2}) = ?$

$a)\ 1$ $b)\ -1$ $c)\ 0$ $d)\ \frac{1}{2}$

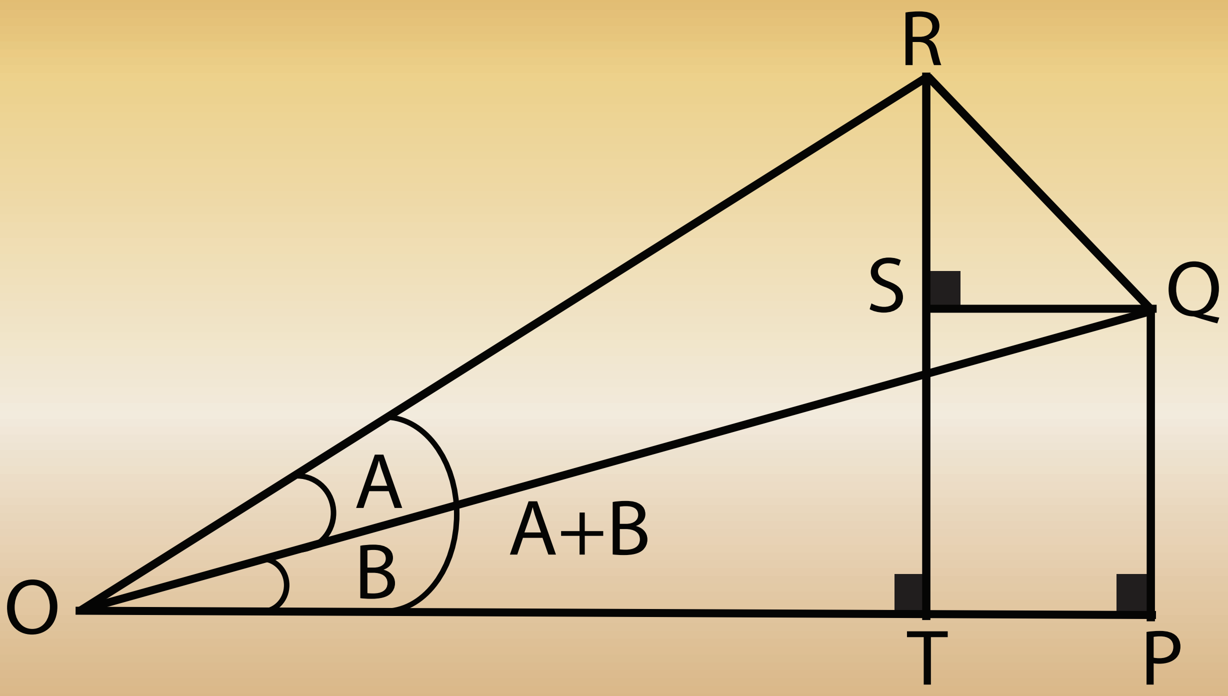
51 – له لاندې اړیکو څخه کومه یوه يې سمه ده؟

a) $\sin\frac{3\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4}$ b) $\sin\frac{3\pi}{4} > \sin\frac{\pi}{4}$ c) $\sin\frac{3\pi}{4} < \sin\frac{\pi}{4}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

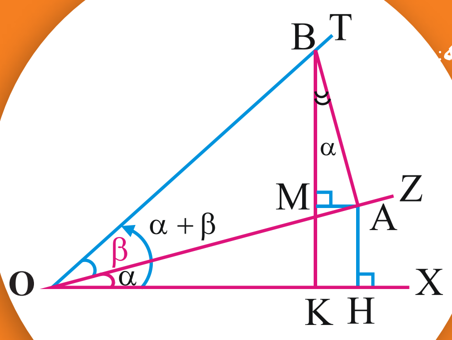
پنځم څپرکی
د مثلثاتو تطبیقات

(c) ketabton.com: The Digital Library



(c) ketabton.com: The Digital Library

د مرکبو زاویو د مثلثاتي نسبتونو قوانین
د جمعي او تفاضل فورمولونه
د دوو زاویو د مجموعي مثلثاتي نسبتونه:



آیا د

$\mathrm{Sin}(\alpha+\beta)=\mathrm{Sin}\alpha\cos\beta+\mathrm{Cos}\alpha\mathrm{Sin}\beta$

رابطې سموالی ښودلای شئ؟

1- د $Sin(\alpha+\beta)$ محاسبه کول: د $X\hat{O}Z$ زاویه له α او د $Z\hat{O}T$ زاویه له β سره مساوي جلا کوو او داسې یې یو د بل څنګ ته ږدو چې دوه مجاورې زاویې جوړې کړي بیا د OT د قطعه خط پر مخ د OB قطعه خط د واحد په اندازه جلا کوو. د B له ټکي څخه د BA خط پر OZ عمود رسموو، بیا د A له ټکي څخه د AH خط پر OX عمود رسموو، شکل ته په پام سره لرو چې:

$$\mathrm{Sin}\beta=\frac{\overline{AB}}{\overline{OB}}=\frac{\overline{AB}}{1}=\overline{AB}$$

$$\mathrm{Cos}\beta=\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}}=\frac{\overline{OA}}{1}=\overline{OA}$$

$$\mathrm{Sin}\alpha=\frac{\overline{HA}}{\overline{OA}}=\frac{\overline{HA}}{\cos\beta}\Rightarrow\overline{HA}=\sin\propto\cos\beta$$

$$\mathrm{Cos}\alpha=\frac{\overline{OH}}{\overline{OA}}=\frac{\overline{OH}}{\cos\beta}\Rightarrow\overline{OH}=\cos\alpha\cos\beta$$

$$\sin(\alpha+\beta)=\frac{\overline{KB}}{\overline{OB}}=\frac{\overline{KB}}{1}=\overline{KB}$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\frac{\overline{OK}}{\overline{OB}}=\frac{\overline{OK}}{1}=\overline{OK}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د A له ټکي څخه پر KB باندې د AM عمود رسموو چې د KHAM څلور ضلعي مستطیل دی، په نتیجه کې KM=HA او MA=KH دی.

د $M\hat{B}A$ زاویه د α له زاویې سره مساوي ده (ددې دواړو زاویو ضلعې یو پر بل باندې عمود دي). د BMA په قایم الزاویه مثلث کې لرو چې:

$$\cos(M\hat{B}A)=\cos\alpha=\frac{\overline{MB}}{\overline{AB}}=\frac{MB}{\sin\beta}\Rightarrow\overline{MB}=\cos\alpha\ \sin\beta$$

$$\sin(M\hat{B}A)=\sin\alpha=\frac{\overline{MA}}{\overline{AB}}=\frac{MA}{\sin\beta}=\frac{\overline{KH}}{\sin\beta}\Rightarrow\overline{KH}=\sin\alpha\ \sin\beta$$

که د $\overline{KB}=\overline{KM}+\overline{MB}$ په رابطه کې د KM، KB او $\overline{MB}$ پر ځای یې قیمتونه وضع کړو، لرو چې: $(KM=AH=\sin\alpha\cos\beta)$

$$\boxed{\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\ \cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}$$

2: د $\cos(\alpha+\beta)$ **محاسبه کول**: په همدې ډول که د $\overline{OK}=\overline{OH}-\overline{KH}$ په رابطه کې د KH، OK او OH پر ځای یې قیمتونه وضع کړو، نو لرو چې:

$$\boxed{\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\ \cos\beta-\sin\alpha\ \sin\beta}$$

3: د $\tan(\alpha+\beta)$ **محاسبه کول**:

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\alpha\ \cos\beta+\cos\alpha\ \sin\beta}{\cos\alpha\ \cos\beta-\sin\alpha\ \sin\beta}$$

صورت او مخرج په $\cos\alpha\cos\beta$ ویشو:

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}+\dfrac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}-\dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

لومړی مثال: $\sin\frac{7\pi}{12}$، $\sin120°$، $\cos120°$ او $\tan\frac{5\pi}{12}$ پیدا کړئ.

حل

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\sin\frac{7\pi}{12}=\sin(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4})=\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$\sin 120°=\sin(90°+30°)=\sin 90°\cos 30°+\cos 90°\sin 30°$$

$$\sin 120°=1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+0\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 120°=\cos(90°+30°)=\cos 90°\cos 30°-\sin 90°\sin 30°$$

$$=0\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-1\cdot\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$$

$$\tan\frac{5\pi}{12}=\tan(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6})=\frac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan\frac{\pi}{6}}{1-\tan\frac{\pi}{4}\cdot\tan\frac{\pi}{6}}=\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{3}}{1-1\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}}=\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{3}}{1-\frac{\sqrt{3}}{3}}=\frac{\frac{3+\sqrt{3}}{3}}{\frac{3-\sqrt{3}}{3}}$$

$$=\frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}$$

د دوو زاويو د تفاضل مثلثاتي نسبتونه:

$$\sin 120^\circ=\sin(180^\circ-60^\circ)=?$$

که د جمعې په فورمولونوکې د β پر ځای $-\beta$ وضع کړو، نو لرو چې:

$$\sin[\alpha+(-\beta)]=\sin\alpha\cos(-\beta)+\cos\alpha\sin(-\beta)$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha(-\sin\beta)$$

پوهېږو چې:

$$\cos(-\beta)=\cos\beta$$

$$\sin(-\beta)=-\sin\beta$$

$$\tan(-\beta)=-\tan\beta$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\ \cos\beta-\cos\alpha\ \sin\beta$$

$$\cos[\alpha+(-\beta)]=\cos\alpha\cos(-\beta)-\sin\alpha\sin(-\beta)$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\ \cos\beta+\sin\alpha\ \sin\beta$$

$$\tan[(\alpha+(-\beta)]=\frac{\tan\alpha+\tan(-\beta)}{1-\tan\alpha\cdot\tan(-\beta)}$$

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\cdot\tan\beta}$$

فعاليت

په همدې ډول وښياست چې: $\cot(\alpha-\beta)=\dfrac{\cot\alpha\cdot\cot\beta+1}{\cot\beta-\cot\alpha}$ دی.

لومړي مثال: $\cos\dfrac{\pi}{12}$ او $\sin 150°$ پیدا کړئ.

حل:

$$\cos\frac{\pi}{12}=\cos(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6})=\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6}+\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$\sin 150°=\sin(180°-30°)=\sin 180°\cos 30°-\cos 180°\sin 30°$$

$$=0\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-(-1)\cdot\frac{1}{2}=-(-\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$$

دویم مثال: د تفاضل د فورمولونو په مرسته ښکاره کړئ چې $\cos(\dfrac{\pi}{2}-\theta)=\sin\theta$ دی.

حل:

$$\cos(\frac{\pi}{2}-\theta)=\cos\frac{\pi}{2}\cos\theta+\sin\frac{\pi}{2}\sin\theta=0\cdot\cos\theta+1\cdot\sin\theta=\sin\theta$$

دریم مثال: وښیاست چې $\cos(270°-\theta)=-\sin\theta$ دی.

حل:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\cos(270° - \theta) = \cos 270° \cos\theta + \sin 270° \sin\theta$$
$$\cos(270° - \theta) = 0 \cdot \cos\theta + (-1)\sin\theta = -\sin\theta$$

خلورم مثال: $\tan 120^\circ$ پيداکړئ:

حل:

$$\tan 120^\circ = \tan(180^\circ - 60^\circ) = \frac{\tan 180^\circ - \tan 60^\circ}{1 + \tan 180^\circ \cdot \tan 60^\circ} = \frac{0 - \sqrt{3}}{1 + 0 \cdot \sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{1}$$
$$= -\sqrt{3}$$

فعاليت

وښياست چې: $\sin 211° \cos 59° + \cos 211° \sin 59° = -1$ او $\cos 211° \cos 149° - \sin 211° \sin 149° = 1$ دی.

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta$ $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta$	$\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha \tan\beta}$
$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$ $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta$	$\tan(\alpha-\beta) = \dfrac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha \tan\beta}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

1- وښیاست چې:

$$\tan(45-\theta)=\frac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}$$

2- وښیاست چې:

$$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\cos\beta$$

$$\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)=2\sin\alpha\ \sin\beta$$

3- $\cos 277^{\circ}\cos 97^{\circ}+\sin 277^{\circ}\sin 97^{\circ}=?$

a) -1 b) 1 c) 0 d) $\frac{1}{2}$

4- د جمعې د فورمولونو په مرسته $\sin 240°$، $\cos 240°$ او $\tan 240°$ پیداکړئ.

5- د جمعې او تفاضل د فورمولونو په مرسته وښیاست چې:

$\frac{1}{2}[\cos(x+y)+\cos(x-y]=\cos x\cdot\cos y$ دی.

6- د جمعې د فورمولونو په مرسته د $210°$ زاویې مثلثاتي نسبتونه پیداکړئ.

7- $\sin 105°$، $\cos 105°$ او $\tan 105°$ پیداکړئ $(105^{\circ}=(60^{\circ}+45^{\circ}))$

8- که $\sin x=-\frac{3}{4}$ وي او $\frac{3\pi}{2}<x<2\pi$ وي، $\cos(\frac{\pi}{4}+x)$ پیداکړئ.

9- وښیاست چې: $\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)=-2\sin\alpha\sin\beta$ دی.

10- $\sin 2°\cos 88°+\cos 2°\sin 88°=?$

a) -1 b) 1 c) 0 d) $\frac{1}{2}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د 2α مثلثاتي نسبتونه د α له جنبه:

$$\sin\frac{x}{3}\cos\frac{x}{3}+\cos\frac{x}{3}\sin\frac{x}{3}=?$$

$$\cos^2 x-\sin^2 x=?$$

آیا پوهېږئ چې:

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$$

دی؟

$$\sin 2\alpha=\sin(\alpha+\alpha)=\sin\alpha\cos\alpha+\cos\alpha\sin\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha=\cos(\alpha+\alpha)=\cos\alpha\cos\alpha-\sin\alpha\sin\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$$

څرنګه چې $\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha$ دی:

$$\cos 2\alpha=1-\sin^2\alpha-\sin^2\alpha=1-2\sin^2\alpha$$

او همدارنګه $\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha$ دی، نو:

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-(1-\cos^2\alpha)=\cos^2\alpha-1+\cos^2\alpha=2\cos^2\alpha-1$$

$$\tan 2\alpha=\tan(\alpha+\alpha)=\frac{\tan\alpha+\tan\alpha}{1-\tan\alpha\cdot\tan\alpha}=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

لومړی مثال: که $\sin\theta=\frac{4}{5}$ او د θ دویمه ضلع په دویمه ناحیه (ربع) کې واقع وي، $\sin 2\theta$، $\cos 2\theta$ او $\tan 2\theta$ پیدا کړئ.

حل: $\cos\theta=-\sqrt{1-\sin^2\theta}$ (د θ دویمه ضلع په دویمه ربع کې ده).

$$\cos\theta=-\sqrt{1-(\frac{4}{5})^2}=-\sqrt{1-\frac{16}{25}}=-\sqrt{\frac{25-16}{25}}=-\sqrt{\frac{9}{25}}=-\frac{3}{5}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = 2(\frac{4}{5})(-\frac{3}{5}) = -\frac{24}{25}$$

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = (\frac{-3}{5})^2 - (\frac{4}{5})^2 = \frac{9}{25} - \frac{16}{25} = -\frac{7}{25}$$

$$\tan 2\theta = \frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta} = \frac{-\frac{24}{25}}{\frac{-7}{25}} = \frac{24}{7}$$

فعالیت

که $\cos\alpha = \frac{4}{5}$، وي او د α دویمه ضلع په لومړی ربع کې پرته وي، $\tan 2\alpha$ پیداکړئ.

او که $\sin\beta = \frac{12}{13}$ او د β دویمه ضلع په دویمه ربع کې وي $\sin 2\beta$ پیداکړئ.

دویم مثال: د $60°$ زاویې د مثلثاتي نسبتونو له جنسه د $120°$ زاویې مثلثاتي نسبتونه پیداکړئ.

حل

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\sin 120° = 2\sin 60°\cos 60° = 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

$$\cos 120° = \cos^2 60° - \sin^2 60° = (\frac{1}{2})^2 - (\frac{\sqrt{3}}{2})^2 = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} \Rightarrow \tan 120° = \frac{2\tan 60°}{1-\tan^2 60°} = \frac{2\cdot\sqrt{3}}{1-3} = -\sqrt{3}$$

په همدې ډول:

$$\sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\cos\theta=\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}=2\cos^2\frac{\theta}{2}-1=1-2\sin^2\frac{\theta}{2}\quad,\quad \tan\theta=\frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}$$

دریم مثال: که $90°<\theta<180°$ او $\cos\theta=-\frac{3}{4}$ وي، د $\cos 2\theta$ قیمت پیدا کړئ.

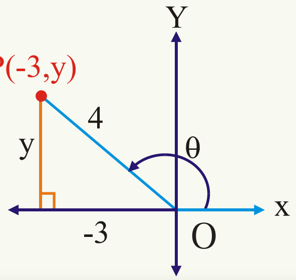
حل:

$$x^2+y^2=r^2$$
$$(-3)^2+y^2=4^2$$
$$y=\pm\sqrt{4^2-(-3)^2}$$

$y=\sqrt{7}$ (ځکه چې د y قیمت په دویمه ربع کې مثبت دی.)

$$\sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{\sqrt{7}}{4}$$

$$\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta=(-\frac{3}{4})^2-(\frac{\sqrt{7}}{4})^2=\frac{1}{8}$$



فعالیت

که $90°<\theta<180°$ او $\cos\theta=-\frac{1}{3}$ وي، د $\sin\frac{\theta}{2}$ قیمت پیدا کړي.

همدارنګه کولای شو چې د $\sin\theta$، $\cos\theta$ او $\tan\theta$ قیمتونه د $\tan\frac{\theta}{2}$ له جنسه پیدا کړو:

$$\sin\theta=\frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{1}=\frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{\sin^2\frac{\theta}{2}+\cos^2\frac{\theta}{2}}$$

پوهیږو چې:

$$\sin^2\frac{\theta}{2}+\cos^2\frac{\theta}{2}=1$$

(صورت او مخرج پر $\cos^2\frac{\theta}{2}$ ویشو.)

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\sin\theta=\frac{\dfrac{2\sin\frac{\theta}{2}\cdot\cos\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}}}{\dfrac{\sin^2\frac{\theta}{2}+\cos^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}}}=\frac{\dfrac{2\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}}{\dfrac{\sin^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}}+1}=\frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}$$

$$\cos\theta=\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}=\frac{\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}}{1}=\frac{\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}}{\sin^2\frac{\theta}{2}+\cos^2\frac{\theta}{2}}$$

$$\cos\theta=\frac{\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}}{\sin^2\frac{\theta}{2}+\cos^2\frac{\theta}{2}}=\frac{\dfrac{\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}}}{\dfrac{\sin^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}}+\dfrac{\cos^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}}}$$

$$\cos\theta=\frac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}\quad,\quad\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\dfrac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}}{\dfrac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}}=\frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}$$

همدارنگه کولای شو چې د θ زاويې مثلثاتي نسبتونه د 2θ زاويې د مثلثاتي نسبتونو له جنسه په لاس راوړو:

$$2\cos^2\theta-1=\cos 2\theta$$

$$2\cos^2\theta=1+\cos 2\theta$$

$$\cos^2\theta=\frac{1+\cos 2\theta}{2}$$

$$\cos\theta=\pm\sqrt{\frac{1+\cos 2\theta}{2}}\qquad \text{يا}\qquad \cos\frac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په همدې ډول:

$$1-2\sin^2\theta=\cos 2\theta$$
$$-2\sin^2\theta=-1+\cos 2\theta$$
$$\sin^2\theta=\frac{1-\cos 2\theta}{2}$$

$$\sin\theta=\pm\sqrt{\frac{1-\cos 2\theta}{2}} \quad \text{يا} \quad \sin\frac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$$

په نتيجه کې:

$$\tan\theta=\pm\sqrt{\frac{1-\cos 2\theta}{1+\cos 2\theta}} \quad \text{يا} \quad \tan\frac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}$$

لومړی مثال: د $30°$ زاويې مثلثاتي نسبتونه د $60°$ له جنسه په لاس راوړئ.

حل:

$$\sin 30°=\sqrt{\frac{1-\cos 60°}{2}}=\sqrt{\frac{1-\frac{1}{2}}{2}}=\sqrt{\frac{\frac{1}{2}}{2}}=\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}$$

$$\cos 30°=\sqrt{\frac{1+\cos 60°}{2}}=\sqrt{\frac{1+\frac{1}{2}}{2}}=\sqrt{\frac{\frac{3}{2}}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 30°=\sqrt{\frac{1-\cos 60°}{1+\cos 60°}}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

دويم مثال: که $180°<\theta<270°$ او $\sin\theta=-\frac{2}{3}$ وي د $\cos\frac{\theta}{2}$ قيمت پيداکړئ.

حل:

$$x^2+y^2=r^2$$
$$x^2+(-2)^2=3^2 \qquad x=\pm\sqrt{3^2-(-2)^2}=-\sqrt{5}$$

$$\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{-\sqrt{5}}{3}$$ (ځکه چې د x قيمت په دويمه ربع کې منفي دی)

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځرنګه چې $180^\circ < \theta < 270^\circ$ ده، نو $\frac{180^\circ}{2} < \frac{\theta}{2} < \frac{270^\circ}{2}$ یا $90^\circ < \theta < 135^\circ$ ده په دې معنا چې د $\cos\frac{\theta}{2}$ علامه منفي ده.

$$\cos\frac{\theta}{2} = -\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$$

$$\cos\frac{\theta}{2} = -\sqrt{\frac{1+(\frac{\sqrt{5}}{3})}{2}} = -\sqrt{\frac{1}{2}(1+\frac{\sqrt{5}}{3})} = -\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{6}}$$

فعالیت

وښیاست چې: $\cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2} - 1$ او $\sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$ دی.

دریم مثال: **که** $\cos\theta = \frac{4}{5}$ وي او د θ دویمه ضلع په لومړنی ربع کې وي $\sin\frac{\theta}{2}$، $\cos\frac{\theta}{2}$ او $\tan\frac{\theta}{2}$ قیمتونه پیداکړئ.

حل:

$$\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{1-(\frac{4}{5})^2} = \sqrt{1-\frac{16}{25}} = \frac{3}{5}$$

$$\sin\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{4}{5}}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{5}}{2}} = \sqrt{\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$\cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{4}{5}}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{9}{5}}{2}} = \sqrt{\frac{9}{5}\cdot\frac{1}{2}} = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

$$\tan\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}} = \sqrt{\frac{1-\frac{4}{5}}{1+\frac{4}{5}}} = \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

خلورم مثال: وښياست چې $2 = \dfrac{\sin 3\theta}{\sin\theta} - \dfrac{\cos 3\theta}{\cos\theta}$ دی.

حل:

$$\frac{\sin 3\theta}{\sin\theta} - \frac{\cos 3\theta}{\cos\theta} = \frac{\sin 3\theta\cos\theta - \cos 3\theta\sin\theta}{\sin\theta\cos\theta} = \frac{\sin(3\theta - \theta)}{\sin\theta\cos\theta}$$

$$= \frac{\sin 2\theta}{\sin\theta\cos\theta} = \frac{2\sin\theta\cos\theta}{\sin\theta\cos\theta} = 2$$

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta \quad ، \quad \sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\sin^2\theta$$

$$\cos\theta = \cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2} = 2\cos^2\frac{\theta}{2} - 1 = 1 - 2\sin^2\frac{\theta}{2}$$

$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta} \qquad \tan\theta = \frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1 - \tan^2\frac{\theta}{2}}$$

$$\sin\theta = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos 2\theta}{2}} \qquad \cos\theta = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos 2\theta}{2}}$$

$$\tan\theta = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos 2\theta}{1 + \cos 2\theta}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

1- د $120°$ زاويې د مثلثاتي نسبتونو له مخې د $240°$ زاويې مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

2 - که $\sin\theta = \frac{3}{5}$ وي او د θ دويمه ضلع په لومړنی ربع کې وي، $\sin 2\theta$، $\cos 2\theta$ او $\tan 2\theta$ پيدا کړئ.

3 - که $\sin\theta = \frac{4}{5}$ وي او د θ دويمه ضلع په دويمه ربع کې وي $\cos\theta/2$ پيدا کړئ.

4 - $\sin\frac{\pi}{12}$ د $\sin\frac{\pi}{6}$ له جنسه پيدا کړئ.

5 - که $\sin\theta = \frac{12}{13}$ وي او د θ دويمه ضلع په دويمه ربع کې وي، $\sin\theta/2$ او $\tan\theta/2$ پيدا کړئ.

6 - د $15°$ زاويې مثلثاتي نسبتونه د $30°$ زاويې له جنسه پيدا کړئ.

7 - که $\sin\beta = \frac{12}{13}$ وي او د β دويمه ضلع په دويمه ربع کې وي، د $\sin 2\beta$ قيمت مساوی دی په:

a) $\frac{120}{169}$ b) $-\frac{120}{169}$ c) $= -\frac{169}{120}$ d) درې واړه سم نه دي

8 - $\frac{\cos 3\beta}{\cos\beta} - \frac{\sin 3\beta}{\sin\beta} = ?$

a) 2 b) 1 c) -2 d) -1

(c) ketabton.com: The Digital Library

د 3α زاويي مثلثاتي نسبتونه د α زاويي د مثلثاتي نسبتونو له جنسه:

$$4\cos^3 45^\circ - 3\cos 45^\circ = ?$$

آيا ښودلای شئ چي دا رابطه

$$\cos 90^\circ = 4\cos^3 30^\circ - 3\cos 30^\circ$$

سمه ده؟

څرنګه چي:

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

$$\sin 3\alpha = \sin(2\alpha+\alpha) = \sin 2\alpha\cos\alpha + \cos 2\alpha\sin\alpha$$

$$\sin 3\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha\cdot\cos\alpha + (1-2\sin^2\alpha)\sin\alpha$$

$$= 2\sin\alpha\cos^2\alpha + \sin\alpha - 2\sin^3\alpha \qquad (\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha)$$

$$= 2\sin\alpha(1-\sin^2\alpha) + \sin\alpha - 2\sin^3\alpha \qquad (\cos 2\alpha = 1-2\sin^2\alpha)$$

$$= 2\sin\alpha - 2\sin^3\alpha + \sin\alpha - 2\sin^3\alpha$$

$$\boxed{\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha}$$

لومړي مثال: $\sin 180^\circ$ د $\sin 60^\circ$ له جنسه په لاس راوړئ.

حل:

$$\sin 180^\circ = 3\sin 60^\circ - 4\sin^3 60^\circ = 3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{12\sqrt{3}}{8}$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{0}{2} = 0$$

څرنګه چي:

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

$$\cos 3\alpha = \cos(2\alpha+\alpha) = \cos 2\alpha\cos\alpha - \sin 2\alpha\sin\alpha$$

$$= (2\cos^2\alpha - 1)\cos\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha\sin\alpha$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= 2\cos^3\alpha - \cos\alpha - 2\sin^2\alpha\cos\alpha$$

$$= 2\cos^3\alpha - \cos\alpha - 2\cos\alpha(1-\cos^2\alpha) \quad (\sin^2\alpha = 1-\cos^2\alpha)$$

$$= 2\cos^3\alpha - \cos\alpha - 2\cos\alpha + 2\cos^3\alpha$$

$$\boxed{\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha}$$

فعالیت

د $\cos 270°$ د $\cos 90°$ له جنسه پیدا کړئ.

دویم مثال: د $\cos 180°$ د $\cos 60°$ له جنسه پیدا کړئ.

حل:

$$\cos 180° = 4\cos^3 60° - 3\cos 60° = 4\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 3\cdot\frac{1}{2} = 4\cdot\frac{1}{8} - \frac{3}{2} = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -1$$

د $\tan 3\alpha$ پیدا کول:

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

$$\tan 3\alpha = \tan(2\alpha+\alpha) = \frac{\tan 2\alpha + \tan\alpha}{1-\tan 2\alpha\cdot\tan\alpha} = \frac{\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} + \tan\alpha}{1-\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}\cdot\tan\alpha}$$

$$= \frac{\frac{2\tan\alpha + \tan\alpha - \tan^3\alpha}{1-\tan^2\alpha}}{\frac{1-\tan^2\alpha - 2\tan^2\alpha}{1-\tan^2\alpha}} = \frac{2\tan\alpha + \tan\alpha - \tan^3\alpha}{1-\tan^2\alpha - 2\tan^2\alpha} = \frac{3\tan\alpha - \tan^3\alpha}{1-3\tan^2\alpha}$$

دریم مثال: $\tan 135°$ د $\tan 45°$ له جنسه په لاس راوړئ.

حل:

$$\tan 135° = \frac{3\tan 45° - \tan^3 45°}{1-3\tan^2 45°} = \frac{3\cdot 1 - 1}{1-3\cdot 1} = \frac{2}{-2} = -1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

خلورم مثال: وښياست چې $4\sin\theta\sin(60^\circ-\theta)\sin(60^\circ+\theta)=\sin 3\theta$

حل:

$$4\sin\theta(\sin 60^\circ\cos\theta-\cos 60^\circ\sin\theta)(\sin 60^\circ\cos\theta+\cos 60^\circ\sin\theta)$$

$$=4\sin\theta(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta-\frac{1}{2}\sin\theta)(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta+\frac{1}{2}\sin\theta)$$

$$=4\sin\theta(\frac{3}{4}\cos^2\theta-\frac{1}{4}\sin^2\theta)=\sin\theta(3\cos^2\theta-\sin^2\theta)$$

$$\text{Sin}\,\theta[3(1-\sin^2\theta)-\sin^2\theta]=\sin\theta\cdot 3-3\sin^3\theta-\sin^3\theta$$

$$=3\sin\theta-4\sin^3\theta=\sin 3\theta$$

د $(\alpha+\beta+\square)$ مثلثاتي نسبتونه:

$$\sin(\alpha+\beta+\square)=\sin[\alpha+(\beta+\square)]=\sin\alpha\cos(\beta+\square)+\cos\alpha\sin(\beta+\square)$$

$$=\sin\alpha(\cos\beta\cos\square+\sin\beta\sin\square)+\cos\alpha(\sin\beta\cos\square+\cos\beta\sin\square)$$

$$\boxed{=\sin\alpha\cos\beta\cos\square+\sin\alpha\sin\beta\sin\square+\sin\beta\cos\alpha\cos\square+\sin\square\cos\alpha\cos\beta}$$

$$\cos[\alpha+(\beta+\square)]=\cos\alpha\cos(\beta+\square)-\sin\alpha\sin(\beta+\square)$$

$$=\cos\alpha(\cos\beta\cos\square+\sin\beta\sin\square)-\sin\alpha(\sin\beta\cos\square+\cos\beta\sin\square)$$

$$\boxed{=\cos\alpha\cos\beta\cos\square+\cos\alpha\sin\beta\sin\square+\cos\square\sin\alpha\sin\beta-\cos\beta\sin\alpha\sin\square}$$

$$\tan(\alpha+\beta+\square)=\tan[\alpha+(\beta+\square)]=\frac{\tan\alpha+\tan(\beta+\square)}{1-\tan\alpha\cdot\tan(\beta+\square)}$$

$$\tan(\alpha+\beta+\square)=\frac{\tan\alpha+\dfrac{\tan\beta+\tan\square}{1-\tan\beta\tan\square}}{1-\tan\alpha\dfrac{\tan\beta+\tan\square}{1-\tan\beta\cdot\tan\square}}$$

$$=\frac{\dfrac{\tan\alpha-\tan\alpha\tan\beta\tan\square+\tan\beta+\tan\square}{1-\tan\beta\tan\square}}{\dfrac{1-\tan\beta\tan\square+\tan\alpha\tan\beta-\tan\alpha\cdot\tan\square}{1-\tan\beta\cdot\tan\square}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$=\frac{\tan\alpha+\tan\beta+\tan\square-\tan\alpha\cdot\tan\beta\cdot\tan\square}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta-\tan\beta\tan\square-\tan\alpha\tan\square}$$

پنځم مثال: $\sin 135^\circ$ د $\sin(30^\circ+45^\circ+60^\circ)$ له جنسه په لاس راوړئ.

حـل:

$$\sin 135^\circ=\sin(30^\circ+45^\circ+60^\circ)=\sin 30^\circ\cos 45^\circ\cos 60^\circ$$
$$-\sin 30^\circ\sin 45^\circ\sin 60^\circ+\sin 45^\circ\cos 30^\circ co60^\circ+\sin 60^\circ\cos 30^\circ\cos 45^\circ$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt2}{2}\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt2}{2}\cdot\frac{\sqrt3}{2}\cdot+\frac{\sqrt2}{2}\cdot\frac{\sqrt3}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{\sqrt3}{2}\cdot\frac{\sqrt3}{2}\cdot\frac{\sqrt2}{2}$$
$$=\frac{\sqrt2}{8}-\frac{\sqrt6}{8}+\frac{\sqrt6}{8}+\frac{3\sqrt2}{8}=\frac{\sqrt2}{8}+\frac{3\sqrt2}{8}=\frac{4\sqrt2}{8}=\frac{\sqrt2}{2}$$

پوښتني

1- $\sin 90^\circ$ ، $\cos 90^\circ$ او $\tan 90^\circ$ په ترتيب سره د $\sin 30^\circ$ ، $\cos 30^\circ$ او $\tan 30^\circ$ له جنسه پيدا کړئ.

2- $\cos 135^\circ$ او $\tan 135^\circ$ پيداکړئ. $135^\circ=(30^\circ+45^\circ+60^\circ)$

3- $8\cos^3\theta-6\cos\theta=?$

a) $\cos 3\theta$ b) $2\cos 3\theta$ c) $-2\cos 3\theta$

4 – $\text{Cos}(\hat A-\hat B+\hat C)$ د $\hat A$, $\hat B$ او $\hat C$ زاويو د مثلثاتي نسبتونو له جنسه پيداکړئ.

5- وښياست چې:

$$4\cos x\cos(60^\circ-x)\cos(60^\circ+x)=\cos 3x$$
$$\tan x\tan(60^\circ-x)\tan(60^\circ+x)=\tan 3x$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د زاويو د مثلثاتي نسبتونو د مجموعې او تفاضل بدلول د ضرب دحاصل په شكل

$\sin 30° + \sin 60° = ?$

$\tan 45° + \tan 60° = ?$

آيا د $\sin 30° + \sin 60°$ قيمت پيداكولای شئ؟

خرنگه چې پوهېږو:

$\sin(A+B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B....(I)$

$\sin(A-B) = \sin A\cos B - \cos A\sin B....(II)$

كه $A+B=P$ او $A-B=q$ فرض كړو او (I) او (II) رابطې سره جمع كړو، نولرو چې:

$\sin(A+B) + \sin(A-B) = 2\sin A\cos B$

$$\begin{array}{ll} A+B=p & A+B=p \\ \underline{A-B=q} & \underline{{}_{-}A\mp B=-q} \\ 2A=P+q & 2B=P-q \\ A=\dfrac{P+q}{2} & B=\dfrac{P-q}{2} \end{array}$$

په نتيجه كې لرو چې:

$$\boxed{\sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}}$$

كه له I رابطې څخه II رابطه تفريق كړو، نو لرو چې:

$\sin(A+B) - \sin(A-B) = 2\cos A\sin B$

$$\boxed{\sin p - \sin q = 2\cos\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په همدې ډول:

$$\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B....III$$
$$\cos(A-B)=\cos A\cos B+\sin A\sin B....IV$$

که III رابطه د IV سره جمع کړو، لرو چې:

$$\cos(A+B)+\cos(A-B)=2\cos A\cos B$$

$$\boxed{\cos p+\cos q=2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}}$$

که له III رابطې څخه IV رابطه تفريق کړو، نو:

$$\cos(A+B)-\cos(A-B)=-2\sin A\sin B$$
$$\cos p-\cos q=-2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$$

فعالیت

د $\sin 60°+\sin 30°$ او $\cos 60°+\cos 30°$ قیمتونه پیدا کړئ.

$$\tan p+\tan q=\frac{\sin p}{\cos p}+\frac{\sin q}{\cos q}=\frac{\sin p\cos q+\cos p\sin q}{\cos p\cos q}=\frac{\sin(p+q)}{\cos p\cos q}$$
$$\tan p-\tan q=\frac{\sin p}{\cos p}-\frac{\sin q}{\cos q}=\frac{\sin p\cos q-\cos p\sin q}{\cos p\cos q}=\frac{\sin(p-q)}{\cos p\cos q}$$

لومړی مثال(a): وښیاست چې: $\frac{\sin 7\theta+\sin 3\theta}{\cos 7\theta+\cos 3\theta}=\tan 5\theta$

$$\frac{\sin 7\theta+\sin 3\theta}{\cos 7\theta+\cos 3\theta}=\frac{2\sin\frac{7\theta+3\theta}{2}\cos\frac{7\theta-3\theta}{2}}{2\cos\frac{7\theta+3\theta}{2}\cos\frac{7\theta-3\theta}{2}}=\frac{\sin 5\theta\cos 2\theta}{\cos 5\theta\cos 2\theta}=\tan 5\theta$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

b: وښياست چې $\sin 3x + \sin x = 2\cdot\sin 2x\cdot\cos x$ دی:

حل:

$$\sin 3x + \sin x = 2\sin\frac{3x+x}{2}\cos\frac{3x-x}{2} = 2\cdot\sin 2x\cdot\cos x$$

فعاليت

وښياست چې $\cot p + \cot q = \dfrac{\sin(p+q)}{\sin p \sin q}$ او $\cot p - \cot q = \dfrac{\sin(q-p)}{\sin p \sin q}$

دويم مثال: وښياست چې $\dfrac{\cos 2\theta - \cos 2\beta}{\sin 2\theta + \sin 2\beta} = \tan(\beta-\theta)$ او

$$\cos 4\theta - \cos 2\theta = -2\sin 3\theta \sin\theta$$

حل:

$$\frac{\cos 2\theta - \cos 2\beta}{\sin 2\theta + \sin 2\beta} = \frac{-2\sin\frac{2\theta+2\beta}{2}\sin\frac{2\theta-2\beta}{2}}{2\sin\frac{2\theta+2\beta}{2}\cos\frac{2\theta-2\beta}{2}} = \frac{-2\sin(\theta+\beta)\sin(\theta-\beta)}{2\sin(\theta+\beta)\cos(\theta-\beta)}$$

$$= -\frac{\sin(\theta-\beta)}{\cos(\theta-\beta)} = -\tan(\theta-\beta) = \tan(\beta-\theta)$$

$$\cos 4\theta - \cos 2\theta = -2\sin\frac{4\theta+2\theta}{2}\sin\frac{4\theta-2\theta}{2} = -2\sin 3\theta\sin\theta$$

د زاويو د مثلثاتي نسبتونو د ضرب د حاصل بدلول په جمع او يا تفاضل باندې:

خرنګه چې: $A+B=P$، $A-B=q$

$$\sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$

يا

$$\sin(A+B) + \sin(A-B) = 2\sin A\cos B$$

$$2\sin A\cos B = \sin(A+B) + \sin(A-B)$$

$$\boxed{\sin A\cos B = \frac{1}{2}[\sin(A+B) + \sin(A-B)]}$$

خرنګه چې: $\sin(A+B) - \sin(A-B) = 2\cos A\sin B$ دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو: $2\cos A\sin B = \sin(A+B) - \sin(A-B)$

$$\boxed{\cos A\sin B = \frac{1}{2}[\sin(A+B) - \sin(A-B)]}$$

خرنګه چې: $\cos(A+B) + \cos(A-B) = 2\cos A\cos B$

نو: $2\cos A\cos B = \cos(A+B) + \cos(A-B)$

$$\boxed{\cos A\cos B = \frac{1}{2}[\cos(A+B) + \cos(A-B)]}$$

خرنګه چې: $\cos(A+B) - \cos(A-B) = -2\sin A\sin B$

نو: $-2\sin A\sin B = \cos(A+B) - \cos(A-B)$

$$\boxed{\begin{aligned}\sin A\sin B &= -\frac{1}{2}[\cos(A+B) - \cos(A-B)]\\ &= \frac{1}{2}[\cos(A-B) - \cos(A+B)]\end{aligned}}$$

لومړی مثال: وښياست چې:

$$a: \quad \frac{\sin 8x + \sin 5x + \sin 2x}{\cos 8x + \cos 5x + \cos 2x} = \tan 5x$$

$$b: \quad \cos 75° - \cos 15° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

د a حل:

$$= \frac{2\sin\frac{8x+2x}{2}\cos\frac{8x-2x}{2} + \sin 5x}{2\cos\frac{8x+2x}{2}\cos\frac{8x-2x}{2} + \cos 5x}$$

$$= \frac{2\sin 5x\cos 3x + \sin 5x}{2\cos 5x\cos 3x + \cos 5x} = \frac{\sin 5x(2\cos 3x + 1)}{\cos 5x(2\cos 3x + 1)} = \tan 5x$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د b حل:

$$\cos 75° - \cos 15° = -2 \cdot \sin\frac{75°+15°}{2}\sin\frac{75°-15°}{2} = -2\sin 45°\sin 30°$$

$$= -2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

دويم مثال: د جمعي يا تفاضل شکل ته يې واړوئ.

$$2\cos 95°\sin 13° = \sin(95°+13°) - \sin(95°-13°) = \sin 108° - \sin 82°$$

$$\cos 38°\cos 61° = \frac{1}{2}[\cos(38°+61°) + \cos(38°-61°)]$$

$$= \frac{1}{2}[\cos 99° + \cos(-23°)] = \frac{1}{2}[\cos 99° + \cos 23°]$$

$$\cos(x+\frac{\pi}{4})\cos(x-\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}[\cos 2x + \cos\frac{\pi}{2}] = \frac{1}{2}\cos 2x$$

دريم مثال:

$$\cos 34°\sin 28° = \frac{1}{2}[\sin(34°+28°) - \sin(34°-28°)] = \frac{1}{2}(\sin 62° - \sin 6°)$$

$$2\cos 45°\cos 15° = \cos(45°+15°) + \cos(45°-15°) = \cos 60° + \cos 30°$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin 10\theta\cos 4\theta = \frac{1}{2}[\sin(10\theta+4\theta) + \sin(10\theta-4\theta)] = \frac{1}{2}(\sin 14\theta + \sin 6\theta)$$

ځلورم مثال: وښياست چې: $\frac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)] = \cos x\cos y$

حل:

$$\frac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)] = \frac{1}{2}[(\cos x\cos y - \sin x\sin y)$$

$$+ (\cos x\cos y + \sin x\sin y)] = \frac{1}{2}[(\cos x\cos y + \cos x\cos y)]$$

$$= \frac{1}{2}(2\cos x\cos y) = \cos x\cos y$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پنځم مثال: وښیاست چې: $\dfrac{\sin 8\theta\cos\theta-\sin 6\theta\cos 3\theta}{\cos 2\theta\cos\theta-\sin 3\theta\sin 4\theta}=\tan 2\theta$

حل:

$$\frac{\sin 8\theta\cos\theta-\sin 6\theta\cos 3\theta}{\cos 2\theta\cos\theta-\sin 3\theta\sin 4\theta}=\frac{\frac{1}{2}(\sin 9\theta+\sin 7\theta)-\frac{1}{2}(\sin 9\theta+\sin 3\theta)}{\frac{1}{2}(\cos 3\theta+\cos\theta)+\frac{1}{2}(\cos 7\theta-\cos\theta)}$$

$$=\frac{\sin 7\theta-\sin 3\theta}{\cos 3\theta+\cos 7\theta}=\frac{2\cos 5\theta\sin 2\theta}{2\cos 5\theta\cos(-2\theta)}=\frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta}=\tan 2\theta$$

$$\sin A+\sin B=2\cdot\sin\frac{A+B}{2}\cdot\cos\frac{A-B}{2}$$

$$\sin A-\sin B=2\cdot\cos\frac{A+B}{2}\cdot\sin\frac{A-B}{2}$$

$$\cos A+\cos B=2\cdot\cos\frac{A+B}{2}\cdot\cos\frac{A-B}{2}$$

$$\cos A-\cos B=-2\cdot\sin\frac{A+B}{2}\cdot\sin\frac{A-B}{2}$$

$$\tan A+\tan B=\frac{\sin(A+B)}{\cos A\cos B}\qquad \tan A-\tan B=\frac{\sin(A-B)}{\cos A\cos B}$$

$$\sin A\cos B=\frac{1}{2}[\sin(A+B)+\sin(A-B)]$$

$$\cos A\sin B=\frac{1}{2}[\sin(A+B)-\sin(A-B)]$$

$$\cos A\cos B=\frac{1}{2}[\cos(A+B)+\cos(A-B)]$$

$$\text{SinA}\sin B=-\frac{1}{2}[\cos(A+B)-(\cos A-B)]=\frac{1}{2}[\cos(A-B)-\cos(A+B$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتني

1- وښياست چې:

$$\frac{\cos 37^\circ + \sin 37^\circ}{\cos 37^\circ - \sin 37^\circ} = \cot 8^\circ$$

2- د زاويو د مثلثاتي نسبتونو د ضرب حاصل د جمعي يا تفاضل شكل ته واړوئ.

$\sin 5x \cos 8x$ $\quad$ $\sin 3\theta \cos 5\theta$ $\quad$ $\cos 30^\circ \cos 60^\circ$

$\sin 32^\circ \cdot \cos 24^\circ$ $\quad$ $\cos 5x \sin 8x$ $\quad$ $\cos 7\theta \sin 5\theta$

$\sin 88^\circ \sin 12^\circ$ $\quad$ $2\sin 60^\circ \cdot \sin 20^\circ$

$2\cos 8\theta \cdot \sin 4\theta$ $\quad$ $2\cos 75\alpha \cdot \sin 25\alpha$ $\quad$ $\sin\frac{A+B}{2} \cdot \cos\frac{A-B}{2}$

3- د زاويو د مثلثاتي نسبتونو د جمعي او تفريق حاصل، ضرب ته واړوئ.

$\cos 56^\circ + \cos 22^\circ$ $\quad$ $\sin 84^\circ - \sin 76^\circ$ $\quad$ $\sin 94^\circ - \sin 86^\circ$

$\cos 86^\circ + \cos 22^\circ$ $\quad$ $\cos 84^\circ - \cos 76^\circ$ $\quad$ $\sin 8\theta + \sin 4\theta$

$\cos 95^\circ - \cos 41^\circ$ $\quad$ $\sin\frac{P+Q}{2} - \sin\frac{P-Q}{2}$ $\quad$ $\sin\frac{5x}{3} - \sin\frac{5x}{6}$

$\cos\frac{3A}{4} + \cos\frac{4A}{3}$ $\quad$ $\cos 84^\circ + \cos 76^\circ$ $\quad$ $\cos\frac{A+B}{2} + \cos\frac{A-B}{2}$

4- وښياست چې:

$$\frac{\sin 4A - \sin 2A}{\cos 4A + \cos 2A} = \tan A \quad , \quad \frac{\cos\beta + \cos 9\beta}{\sin\beta + \sin 9\beta} = \cot 5\beta$$

$$\sin 10^\circ \cdot \sin 30^\circ \cdot \sin 50^\circ \cdot \sin 70^\circ = \frac{1}{16}$$

$$\cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 60^\circ \cdot \cos 80^\circ = \frac{1}{16}$$

5- كه $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$ وي، (ديو مثلث د داخلي زاويو مجموعه) وښياست چې:

$$\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

6- وښیاست چې:

$$\sin 10^{\circ} + \sin 50^{\circ} - \sin 70^{\circ} = 0$$

7-

$$\sin 30^{\circ}\cos 60^{\circ} + \cos 30^{\circ}\sin 60^{\circ} = ?$$

a) -1 b) 1 c) 0 d) $\frac{1}{2}$

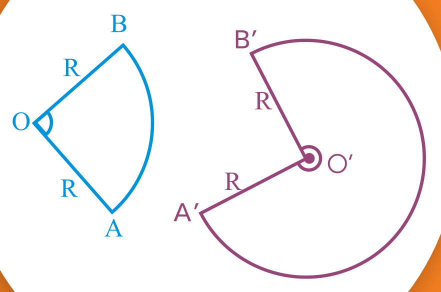
8- د جمعې یا تفاضل د فورمولونو په واسطه وښیاست چې:

$$\sin(180^{\circ}+\theta) = -\sin\theta \qquad \cos(180^{\circ}+\theta) = -\cos\theta$$

$$\sin(360^{\circ}-\theta) = -\sin\theta \qquad \sin(270^{\circ}+\theta) = -\cos\theta$$

$$\cos(270^{\circ}+\theta) = \sin\theta \qquad \cos(360^{\circ}-\theta) = \cos\theta$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



د قوس اوږدوالی
(Arc length)

که دیوې دایرې شعاع 5cm وي، د دې دایرې د 45° مرکزي زاویې د مقابل قوس اوږدوالی به څو cm وي؟

که د دووقوسونو شعاع ګانې سره مساوي وي، د دې دوو قوسونو اوږدوالی د راډیان په حساب د قوس له مقدار سره متناسب دی، لکه: څنګه چې په شکل کې لیدل کیږي.

$$\frac{\overset{\frown}{AB}}{m\overset{\frown}{AB}} = \frac{\overset{\frown}{A'B'}}{m\overset{\frown}{A'B'}}$$

چې $m\overset{\frown}{AB}$ او $m A'B'$ ددې دواړو قوسونو مقدار د راډیان په حساب دي. که د قوس مقدار دوه چنده شي، د قوس اوږدوالی هم دوه چنده کیږي.

که د یو قوس مقدار θ° او شعاع یې R وي، د θ° د زاویې د مقابل اږدوالی L او د دایرې محیط C وي، نو لرو چې:

$$\frac{L}{\theta^\circ} = \frac{C}{360^\circ}$$

څرنګه چې د دایرې محیط $C = 2\pi R$ دی، نو:

$$\frac{L}{\theta^\circ} = \frac{2\pi R}{360^\circ} \Rightarrow L = \frac{\theta^\circ}{180^\circ}\pi R$$

باید پام مو وي، که د قوس یا θ مقدار د راډیان په حساب وي، نو $L = R\theta$ کیږي.

لومړی مثال: د 45° مرکزي زاویې د مقابل قوس اوږدوالی پیدا کړئ، که د دایرې شعاع 14cm وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل:

$$L = \frac{45^\circ}{180^\circ} \cdot \pi \cdot 14\,cm = \frac{14}{4}\pi\,cm \approx \frac{14}{4} \cdot \frac{22}{7}\,cm = 11\,cm$$

دويم مثال: د $\frac{\pi}{4}$ مرکزي زاويې د مقابل قوس اوږدوالی پيدا کړئ، که د دايرې شـعاع 14cm وي.

$$L = R\,\theta$$

$$L = 14\,cm\frac{\pi}{4} \approx 14\,cm \cdot \frac{22}{7} \cdot \frac{1}{4} = 11\,cm$$

دريـم مثال: که په يوه دايره کې، د 45° مرکزي زاويې د مقابل قوس اوږدوالی $3\pi cm$ وي، د دې دايرې شعاع پيدا کړئ.

حل: څرنگه چې: $45^\circ = \frac{\pi}{4}$ radian، نو:

$$L = R\theta$$

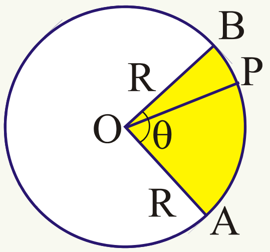
$$R = \frac{L}{\theta} = \frac{3\pi cm}{\frac{\pi}{4}} = 3\pi \cdot \frac{4}{\pi} = 12\,cm$$

د يـوې دايرې قطاع (Sector of a circle): د يوې دايرې د $\overset{\frown}{AB}$ قوس چې د دايرې مرکز O او شعاع يې R ده، په پام کې نيسو، د $\overline{OP}$ د ټولو خطونو مجموعې ته چې P د $\overset{\frown}{AB}$ د قوس يوه نقطه ده، قطاع ويل کېږي.

که د $\overset{\frown}{AB}$ قوس اندازه θ راډيان وي، θ ته د قطاع زاويه وايي.

يا قطاع په دې ډول هم تعريفولای شو:

د يوې دايرې د سطحې هغه برخه چې د دايرې د دوو شعاع گانو تر منځ واقع وي، قطاع بلل کېږي.



(c) ketabton.com: The Digital Library

د قطاع د مساحت پیدا کول: که د دایرې شعاع R وي، د دې دایرې د θ راډیان د قطاع مساحت مساوي دی په: $S=\frac{1}{2}R^2\theta$ چې S د قطاع مساحت او R د دایرې شعاع ده، ځکه چې:

$$\begin{matrix} 2\pi^{R} & \square R^2 \\ \theta^{R} & S \end{matrix} \Bigg\} \Rightarrow S=\frac{\pi R^2\cdot\theta}{2\pi}=\frac{1}{2}R^2\theta$$

او یاکه د θ زاویه د درجې په حساب وي.

$$\begin{matrix} 360^\circ & \pi R^2 \\ \theta^\circ & S \end{matrix} \Bigg\} \Rightarrow S=\pi R^2\frac{\theta}{360^\circ}$$

لومړی مثال: که د یوې دایرې شعاع 10cm وي، د دایرې د هغه قطاع مساحت پیداکړئ چې د قطاع زاویه یې $\theta=90^\circ$ وي.

حل: څرنګه چې Radian $90^\circ=\frac{\pi}{2}$ دی:

$$S=\frac{1}{2}R^2\theta$$

$$S=\frac{1}{2}(10cm)^2\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{1}{2}\cdot100cm^2\cdot\frac{\pi}{2}=25\pi cm^2$$

دویم مثال: که د یوې دایرې شعاع 10cm وي، د دایرې د هغه قطاع مساحت پیداکړئ چې د قطاع زاویه یې $\theta=72^\circ$ وي.

حل:

$$72^\circ=72\cdot\frac{\pi}{180^\circ}=\frac{2\pi}{5}\ \text{Radian}$$

$$S=\frac{1}{2}R^2\theta=\frac{1}{2}\cdot100cm^2\cdot\frac{2\pi}{5}=20\pi\, cm^2$$

دریم مثال: که د دایرې شعاع 6cm او د دې دایرې د یوې قطاع مساحت $15\pi cm^2$ وي. د قطاع د قوس اوږداولی پیداکړئ.

حل:

$S=\frac{1}{2}R^2\theta$ یا $15\pi cm^2=\frac{1}{2}(6cm)^2\theta$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$15\pi cm^2 = 18\theta$$

$$\theta = \frac{15\pi}{18} = \frac{5\pi}{6} \text{ Radian}$$

طول قوس $L = R\theta = 6cm\frac{5\pi}{6} = 5\pi cm = 5\cdot 3{,}14cm \approx 15{,}7cm$

څلورم مثال: یوه دایره چې 7cm شعاع لري، ددې دایرې محیط، مساحت او د 60° مرکزي زاویې د مقابل قوس اوږدوالی یې پیدا کړئ او هم ددې دایرې د قطاع مساحت پیدا کړئ چې $\theta = 60°$ وي.

حل: څرنګه چې $60° = \frac{\pi}{3}$ Radian دی، نو:

$$C = 2\pi R \approx 2\cdot\frac{22}{7}\cdot 7cm = 44cm \;,\; A = \pi R^2 \approx \frac{22}{7}\cdot 49cm^2 = 154cm^2$$

$$L = R\theta = 7\cdot\frac{\pi}{3} = \frac{7\pi}{3}cm \quad , \quad A = \frac{1}{2}R^2\theta = \frac{1}{2}\cdot 49cm^2\cdot\frac{\pi}{3} \approx 25.6cm^2$$

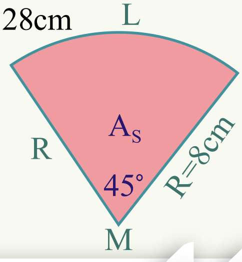
پنځم مثال: که د یوې دایرې شعاع 8cm او د قطاع زاویه یې 45° وي، د قطاع مساحت، د قطاع د مقابل قوس اوږدوالی او ددې قطاع محیط پیدا کړئ.

حل:

د قطاع مساحت $A_s = \pi R^2\frac{\theta}{360°} = (8cm)^2(3{,}14)\cdot\frac{45°}{360°} \approx 25{,}12cm$

د قطاع مقابل قوس $L = 2\pi R\frac{\theta}{360°} = 2\cdot 8cm\cdot 3.14\cdot\frac{45°}{360°} \approx 6.28cm$

د قطاع محیط $= 2\pi R\frac{\theta}{360°} + 2R = 6.28cm + 2\cdot 8cm \approx 22.28cm$



فعالیت

که د دایرې شعاع 10cm وي، د هغه قطاعګانو مساحت پیدا کړئ چې د قوس اندازه یې 180°، 216° او 324° وي.

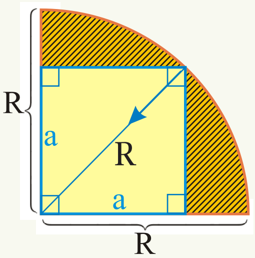
(c) ketabton.com: The Digital Library

شپږم مثال: د لاندې شکل په شان په $90°$ قطاع کې د R په شعاع مربع محاط شوي ده، د خط شوي برخې مساحت پیدا کړئ.

حل: څرنګه چې د دایرې شعاع R ده،د دایرې په څلورمه برخه کې د مربع قطر $d = R = a\sqrt{2}$

دی، که a د مربع ضلع وي، نو د مربع یوه ضلع $a = \frac{R}{\sqrt{2}}$ او د مربع مساحت $S = \frac{R^2}{2}$

دی، څرنګه چې د دایرې د څلورمې برخې مساحت $\frac{1}{4}\pi R^2$ دی.

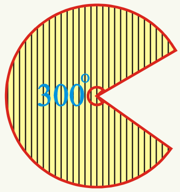


نود خط شوی برخې مساحت مساوي دی په: $\frac{1}{4}\pi R^2 - \frac{1}{2}R^2 = \frac{R^2}{4}(\pi - 2)$

اووم مثال: په شکل کې د دایرې قطاع چې شعاع یې $1cm$ او مرکزي زاویه یې $300°$ ده. د دې شکل محیط څو سانتي متره کېږي؟

$360°$ $\quad 2\pi R$

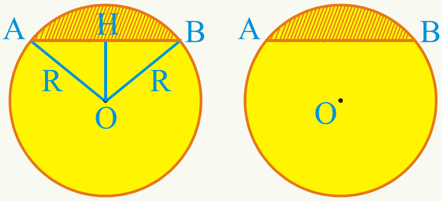
$300°$ $\quad x$ $\qquad x = \frac{300° \cdot 2\pi R}{360°} = \frac{5\pi R}{3} cm$



د دې شکل محیط $= (\frac{5}{3}\pi R + 2)cm$

د دایرې قطعه (Segment of a circle): د دایرې د سطحې یوې برخې ته چې د قوس او مقابل وتر تر منځ واقع وي، قطعه وایي.

د دایرې قطعه د قطعې د قوس په حساب ښودل کېږي. د مثال په ډول که د $\overset{\frown}{AB}$ قوس $\frac{\pi}{6}$ راډیان وي، قطعې ته هم $\frac{\pi}{6}$



(c) ketabton.com: The Digital Library

راډیان وایي.

د قطعې مساحت: د θ راډیان د قطعې مساحت چې ددایرې شعاع R وي، مساوي دی، په:

$$S=\frac{1}{2}R^2(\theta-\sin\theta)$$

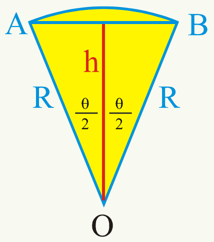
ځکه که د AB قوس θ راډیان وي او د O نقطه د A او B له نقطو سره ونښلوو، نو لرو چې:

د AOB د مثلث مساحت - د AOB د قطاع مساحت = د قطعې مساحت

$S_{\overset{\Delta}{AOB}}$ د مثلث مساحت $-$ S_{OAB} د قطاع مساحت $=S$ د قطعې مساحت

په لاندې شکل کې لیدل کېږي چې د $A\overset{\Delta}{O}B$ مثلث متساوي الساقین دی، نو په دې اساس:

$$\cos\frac{\theta}{2}=\frac{h}{R}$$



$h=R\cos\frac{\theta}{2}$ ارتفاع

$$\sin\frac{\theta}{2}=\frac{\frac{AB}{2}}{R}$$

د مثلث قاعده: $AB=2R\sin\frac{\theta}{2}$

$$A\overset{\Delta}{O}B \text{ د مثلث مساحت } = \frac{\text{قاعده . ارتفاع}}{2}=\frac{h\cdot AB}{2}$$

څرنګه چې $\sin\theta=2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$ دی.

په نتیجه کې: $\text{مثلث مساحت}=\frac{R\cos\frac{\theta}{2}\cdot 2R\sin\frac{\theta}{2}}{2}=\frac{R^2\sin\theta}{2}=\frac{1}{2}R^2\sin\theta$

څرنګه چې $\frac{R^2\sin\theta}{2}=S_{OAB}$ د مثلث مساحت او د قطاع مساحت $A_s=\frac{1}{2}R^2\theta$ دی.

نو:

$$S=\frac{1}{2}R^2\theta-\frac{1}{2}R^2\sin\theta=\frac{1}{2}R^2(\theta-\sin\theta) \text{ د قطعې مساحت}$$

لومړی مثال: د پورته شکل په شان که د یوې دایرې شعاع $R=6.8cm$ وي او د دې دایرې د یوې قطاع زاویه $\theta=71^\circ$ وي، د قطاع مساحت، د ABO د مثلث مساحت او د دې دایرې د

(c) ketabton.com: The Digital Library

قطعي مساحت پیدا کړئ.

حل:

$R = 6,8cm$

$\theta = 71°$

د قطاع مساحت $A = \pi R^2 \frac{\theta}{360°} = (6.8cm)^2 \cdot 3.14 \frac{71°}{360°} \approx 28.64cm^2$

د مثلث ارتفاع $h = R\cos\frac{\theta}{2} = 6.8cm \cdot \cos\frac{71°}{2} \approx 5.54cm$

$\cos 35°30' = 0.8141$

د مثلث قاعده $b = 2 \cdot R\sin\frac{\theta}{2} = 2 \cdot 6.8cm \cdot \sin\frac{71°}{2} \approx 7.9cm$

$\sin 35°30' = 0.5807$

د مثلث مساحت $A = \frac{1}{2}R^2\sin\theta = \frac{1}{2}(6.8cm)^2 \cdot \sin 71° \approx 21.96cm^2$

$\sin 71° = 0.9455$

د مثلث مساحت - د قطاع مساحت = د قطعي مساحت

د قطعي مساحت $= 28,64cm^2 - 21,96cm^2 = 6,68cm^2$

دویم مثال: د هغه قطعي مساحت پیدا کړئ چې شعاع یې R او قوس یې $\overset{\frown}{AB}$ وي، که:

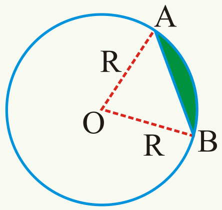
$\overset{\frown}{AB} = 60°\ ,\ R = 12cm$ وي.

حل: خرنگه چې $60° = \frac{\pi^R}{3}$ دی، نو:

$$S = \frac{1}{2}R^2(\theta - \sin\theta) = \frac{1}{2}(12cm)^2(\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}\cdot 144cm^2(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2})$$

$$= 72cm^2(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}) = 24\pi\, cm^2 - 36\sqrt{3}\, cm^2 = (24\pi - 36\sqrt{3})cm^2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

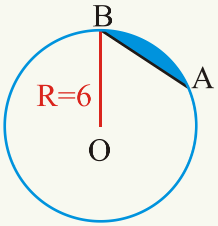


فعالیت

د هغې دایرې د قطعې مساحت پیدا کړئ چې شعاع یې 6cm او $\overset{\frown}{AB} = 120°$ قوس وي.

دریم مثال: د هغه قطعې مساحت پیدا کړئ چې د 6cm وتر په واسطه جلا شوی وي او د دایرې شعاع هم 6cm وي.

حل: څرنګه چې د قطعې قوس $\frac{\pi}{3}$ راډیانه دی:



$$S = \frac{1}{2}R^2(\theta - \sin\theta) = \frac{1}{2}(6cm)^2(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2})$$
$$= 18cm^2(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}) = (6\pi - 9\sqrt{3})cm^2$$
$$\approx 6(3.14)cm^2 - 9(1.73)cm^2 = 3.27cm^2$$

پوښتنې

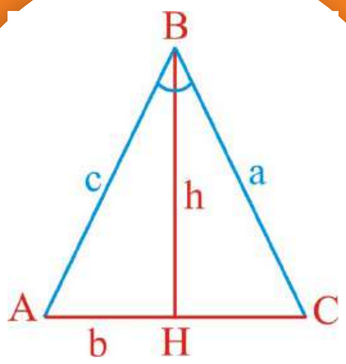
1- د هغې قطاع مساحت پیدا کړئ چې د $\frac{\pi}{6}$ راډیان مرکزي زاویې په مقابل کې واقع وي، که د دایرې شعاع 20cm وي.

2- د هغې قطاع اړونده مرکزي زاویه پیدا کړئ چې مساحت یې $55.5cm^2$ او د دایرې شعاع 12cm وي.

3- که د یوې دایرې شعاع 10m وي، د هغو قوسونو اوږدوالی پیدا کړئ چې د 3,8 راډیان او 27 راډیانه مرکزي زاویو په مقابل کې واقع وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مثلث د مساحت پیدا کول د دوو ضلعو او ددې دوو ضلعو تر منځ د زاویې له جنسه:



که په یوه مثلث کې د دوو ضلعو اوږدوالی 4cm او 8cm وي او ددې ضلعو تر منځ زاویه $30°$ وي آیا ددې مثلث مساحت پیدا کولای شئ؟

د $\overset{\Delta}{ABC}$ مثلث په پام کې نیسو او د B له راس څخه د $\overline{BH}$ ارتفاع د $\overline{AC}$ پر ضلع باندې رسموو:

څرنګه چې $\sin A = \frac{BH}{c} = \frac{h}{c}$ دی، په نتیجه کې $h = c\sin A$ کېږي له هندسې څخه پوهېږو

چې د یوه مثلث مساحت ($S = \frac{\text{ارتفاع . قاعده}}{2}$) دی.

$$S_{ABC} = \frac{b \cdot h}{2}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} b c \sin A \qquad (h = c\sin A)$$

فعالیت

د پورتنې مثلث د A او C له رأسونو څخه ارتفاع ګانې رسم کړئ او وښیاست چې:

$S_{ABC} = \frac{1}{2} ab\sin C$ او $S_{ABC} = \frac{1}{2} ac\sin B$ دی.

لومړی مثال: د هغه مثلث مساحت پیدا کړئ چې د دوو ضلعو اوږدوالی یې $a = 3{,}5\text{cm}$ او $c = 6\text{cm}$ او د دواړو ضلعو ترمنځ زاویه یې $B = 47{,}5°$ وي.

حل:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$A=\frac{1}{2}ac\sin B$$

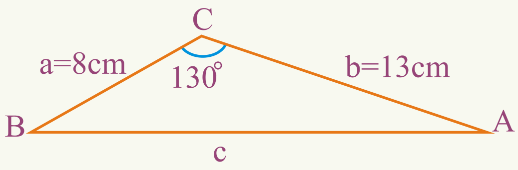
$$\sin 47.5^{\circ}=0.73727733$$

$$A=\frac{1}{2}\cdot 3{,}5cm\cdot 6cm\cdot \sin 47{,}5^{\circ}\approx 7{,}74cm^2$$

دویم مثال: د لاندې شکل د مثلث مساحت پیدا کړئ.

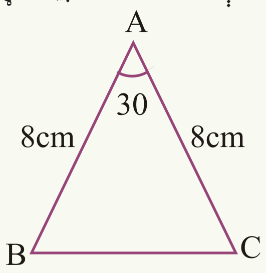
حل:

$$A=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}(8)(13)\sin 130^{\circ}\approx 39.83\,cm^2$$



$(\sin 130^{\circ}=0.7660)$

دریم مثال: د $\overset{\Delta}{ABC}$ په متساوي الساقين مثلث کې $\overline{AB}=\overline{AC}=8cm$ او $A=30^{\circ}$ ده، ددې مثلث مساحت پیدا کړئ.



$$S=\frac{1}{2}AB\cdot AC\sin 30^{\circ}$$

$$S=\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 8\cdot \frac{1}{2}=16\,cm^2$$

د مثلث د مساحت پیدا کول د دریو ضلعو له جنسه (د هیرون فورمول)

ددې کار لپاره د یوې زاویې د نیمايي sin، د مثلث د ضلعو د اوږدوالي له جنسه په لاس راوړو:

د ABC په هر مثلث کې لاندې اړیکې صدق کوي.

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}},\ \sin\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}},\ \sin\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}$$

چې a,b,c د مثلث ضلعې او p د مثلث د محیط نیمايي ده $\left(p=\frac{a+b+c}{2}\right)$ په تیرو لوستو کې مولوستل چې:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}\ \square\sin\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos B}{2}}\ \square\sin\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos C}{2}}$$

په هر مثلث کې $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ چې دا رابطه د $\cos ine$ د قضيې په نوم يادېږي، دلته د دې رابطې له ثبوت څخه صرف نظر کوو او په خپل وخت کې به وروسته ثبوت شي، د $\cos A$ پر ځای يې قيمت وضع کوو.

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{2}}=\sqrt{\frac{2bc-b^2-c^2+a^2}{4bc}}=\sqrt{\frac{a^2-(b^2-2bc+c^2)}{4bc}}$$

$$=\sqrt{\frac{a^2-(b-c)^2}{4bc}}=\sqrt{\frac{(a-b+c)(a+b-c)}{4bc}}$$

څرنګه چې $a+b+c=2p$ دی.

$$a-b+c=a+b+c-2b=2p-2b=2(p-b)$$
$$a+b-c=a+b+c-2c=2p-2c=2(p-c)$$

د $(a-b+c)$ او $(a+b-c)$ قيمتونه وضع کوو، نو لرو چې:

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{2(p-b)2(p-c)}{4bc}}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$$

فعاليت

په همدې ډول وښياست چې:

$\sin\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}}$ ، $\sin\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}$ وي.

په همدې ډول کولای شو چې د مثلث د ضلعو له جنسه د يوې زاويې نيمايي $\cos ine$ په لاس راوړو:

$$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}\ \square\cos\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}}\ \square\cos\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ثبوت: څرنګه چې $\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}$ دی.

د $\cos A$ قیمت وضع کوو:

$$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{1+\frac{\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{2}}=\sqrt{\frac{2bc+b^2+c^2-a^2}{4bc}}=\sqrt{\frac{(b+c)^2-a^2}{4bc}}$$

$$=\sqrt{\frac{(b+c+a)(b+c-a)}{4bc}}$$

$$b+c+a-2a=2p-2a$$

$$b+c-a=2p-2a=2(p-a)$$

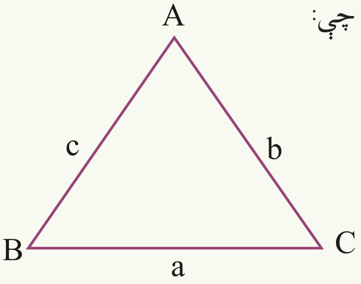
په نتیجه کې لرو چې:

$$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$$

فعالیت

څرنګه چې $\tan\frac{A}{2}=\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}$ دی، وښیاست چې: $\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$

پوهیږو چې $\sin A=2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$ دی که د $\sin\frac{A}{2}$ او $\cos\frac{A}{2}$ قیمتونه وضع کړو لرو چې:



$$\sin A=2\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}\cdot\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$$

$$\sin A=2\sqrt{\frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{(bc)^2}}$$

$$\sin A=\frac{2}{bc}\cdot\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

څرنګه چې د $S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}bc\sin A$ مثلث مساحت دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}bc\cdot\sin A$$

د $\sin A$ قیمت وضع کوو:

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}bc\cdot\frac{2}{bc}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$
$$S_{ABC}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

د پورتنیو مساواتو له پرتله کولو څخه لرو چې:

$$\sin A=\frac{2}{bc}\cdot S=\frac{2S}{bc} \quad \square \quad \sin B=\frac{2S}{ac} \quad \square \quad \sin C=\frac{2S}{ab}$$

دریم مثال: د هغه مثلث مساحت پیدا کړئ چې د ضلعو اوږدوالی یې په لاندې ډول راکړل شوی وي.

$a=5cm \qquad b=4cm \qquad c=3cm$

حل:

$$P=\frac{a+b+c}{2}=\frac{5cm+4cm+3cm}{2}=6cm$$
$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\sqrt{6(6-5)(6-4)(6-3)}$$
$$=\sqrt{6\cdot1\cdot2\cdot3}=\sqrt{36}=6\,cm^2$$

فعالیت

د هغه مثلث مساحت پیدا کړئ چې: $b=5cm$, $c=6cm$ او $a=4cm$ وي.

څلورم مثال: که د یوه مثلث ضلعې $a=18cm$، $b=24cm$ او $c=30cm$ وي. د دې مثلث مساحت پیدا کړئ.

حل

$$P=\frac{a+b+c}{2}=\frac{18+24+30}{2}=36cm$$
$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$
$$=\sqrt{36(36-18)(36-24)(36-30)}=\sqrt{36\cdot18\cdot12\cdot6}=216\ cm^2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پنځم مثال: د هغه مثلث مساحت پیداکړئ چې د ضلعو اوږدوالی یې $a = 29{,}7ft$ ، $b = 42{,}3ft$ او $c = 38{,}4ft$ وی.

حل:

$$p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{29.7+42.3+38.4}{2} = 55{,}2ft$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{55.2(55.2-29.7)(55.2-42.3)(55.2-38.4)}$$

$$= \sqrt{55.2(25.5)(12.9)(16.8)} = 552ft^2$$

د یو مثلث د محیطي دایرې د شعاع پیدا کول:

محیطي دایره هغه دایره ده چې مثلث د دایرې په داخل کې واقع وي او دایره د مثلث په درې واړو راسونو باندې مماس وي، او د محیطي دایرې مرکز د مثلث د درې واړو عمودي ناصفونو د تقاطع نقطه ده.

د شکل په شان د $\overset{\Delta}{ABC}$ مثلث د ضلعو اوږدوالی د a، b او c څخه عبارت دی چې د O ټکی چې د دایرې مرکز دی د مثلث د ضلعو د درې واړو عمودي ناصفونو (Bisector Perpendicular) د تقاطع ټکی هم دی.

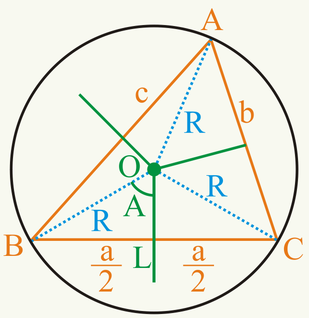
څرنګه چې د BOC مثلث متساوي الساقین دی، نو ارتفاع د $B\hat{O}C$ زاویه او د مثلث قاعده نیمایي کوي . په نتیجه کې: $\hat{A} = B\hat{O}L = L\hat{O}C$

$$\sin\hat{A} = \sin B\hat{O}L = \sin L\hat{O}C$$

ځکه چې مرکزي زاویه د محیطي زاویې دوه برابره ده چې د عین قوس په مقابل کې واقع وي.

$$\sin\hat{A} = \frac{\frac{a}{2}}{R} = \frac{a}{2R}$$

$$R = \frac{a}{2\sin A} = \frac{a}{2\cdot\frac{2s}{bc}} = \frac{abc}{4s} \qquad (\sin A = \frac{2S}{bc})$$



او د $R = \dfrac{a}{2\sin A}$ څخه لرو چې:

$$a = R\cdot 2\sin A$$

$$\frac{a}{\sin A} = 2R$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په همدې ډول

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R \text{ یا } R=\frac{a}{2\sin A}=\frac{b}{2\sin B}=\frac{c}{2\sin C}$$

لومړی مثال: د ABC مثلث د محیطي دایرې شعاع پیدا کړئ چې ضلعې یې $a=11cm$ ، $b=12cm$ او $c=13cm$ وي.

حل:

$$R=\frac{abc}{4s}=\frac{11\cdot12\cdot13}{4\sqrt{18\cdot7\cdot6\cdot5}}=6{,}98cm \quad , \quad p=\frac{11+12+13}{2}=18cm$$

فعالیت

د هغه مثلث د محیطي دایرې شعاع پیدا کړئ چې د ضلعو اوږدوالی یې 18cm ، 24cm او 30cm وي.

دویم مثال: د هغه مثلث د محیطي دایرې شعاع پیدا کړئ چې د ضلعو اوږدوالی یې $a=3cm$ ، $b=5cm$ او $c=6cm$ وي.

حل:

$$R=\frac{abc}{4\cdot\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}=\frac{3\cdot5\cdot6}{4\cdot\sqrt{7\cdot4\cdot2\cdot1}}=\frac{90}{4\cdot\sqrt{56}}=\frac{45}{2\cdot\sqrt{56}}\approx3cm$$

د یو مثلث د محاطي دایرې د شعاع پیدا کول:

د مثلث محاطي دایره هغه دایره ده چې دایره د مثلث په دننه کې واقع وي او دایره د مثلث په دننه کې د مثلث د درې واړه ضلعو سره مماس وي، د محاطي دایرې مرکزد مثلث د درې واړو ناصف الزاویو د تقاطع ټکی (O) دی.

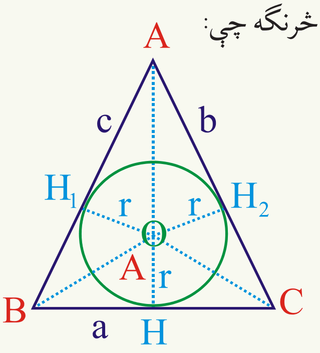
د $\overset{\Delta}{OAB}$ + د $\overset{\Delta}{OCA}$ + د $\overset{\Delta}{OBC}$ مثلثونو مساحت = د $\overset{\Delta}{ABC}$ مثلث له مساحت سره

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}ar+\frac{1}{2}br+\frac{1}{2}cr==\frac{1}{2}r(a+b+c)=\frac{1}{2}r\cdot2p$$

$$S=r\cdot p \quad \Rightarrow r=\frac{s}{p}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

خرنگه چې:



$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$r=\frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p}$$

دريم مثال: د هغه مثلث د محاطي دايرې شعاع او د محاطي دايرې مساحت پيداکړئ چې د ضلعو اوږدوالی يې 7cm ، 8cm او 9cm وي.

حل

$$p=\frac{7+8+9}{2}=12cm$$

$$S=\sqrt{12(12-7)(12-8)(12-9)}=26.83cm^2$$

$$r=\frac{s}{p}=\frac{26.83cm^2}{12cm}=2.23cm$$

د محاطي دايرې مساحت مساوي دی، په: $=\pi r^2=\frac{22}{7}\cdot(2.23cm)^2\approx 15.6cm^2$

څلورم مثال: د يو قايم الزاويه مثلث دوه قايمې ضلعې په ترتيب سره 3cm او 4cm دي، د محيطي او محاطي دايرو شعاګانې يې پيدا کړئ.

حل:

$$(\overline{AC})^2=(\overline{AB})^2+(\overline{BC})^2$$

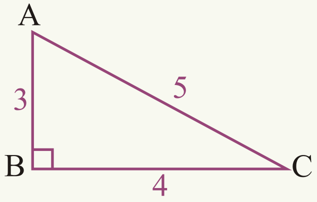
$$AC=\sqrt{9+16}=5$$

$$p=\frac{3+4+5}{2}=6cm$$

$$R=\frac{abc}{4s}=\frac{3\cdot4\cdot5}{4\cdot\sqrt{6(6-3)(6-4)(6-5)}}=\frac{60}{4\cdot\sqrt{6\cdot3\cdot2\cdot1}}=\frac{60}{4\cdot6}=\frac{60}{24}$$

$$=\frac{5}{2}cm=2,5cm$$

$$r=\frac{s}{p}=\frac{6}{6}=1cm$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

پنځم مثال: د MTN په قایم الزاویه مثلث کې چې که قایمې ضلعې یې m او n راکړ شــوي وي، د دې مثلث مساحت او د محیطي دایرې شعاع یې پیدا کړئ.

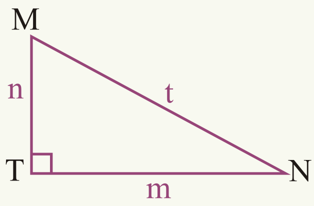
حل:

$$(\overline{MN})^2 = m^2 + n^2$$

$$t = MN = \sqrt{m^2 + n^2}$$

$$S = \frac{n \cdot m}{2} \ , \ R = \frac{m \cdot n \cdot t}{4S} = \frac{m \cdot n \cdot \sqrt{m^2 + n^2}}{4\frac{n\,m}{2}} = \frac{m\,n\sqrt{m^2 + n^2}}{2mn}$$

محیطی دایری شعاع $R = \dfrac{\sqrt{m^2 + n^2}}{2}$



فعالیت

د هغه مثلث د محاطي دایرې شعاع پیدا کړئ، که چېرې د ضلعو اوږدوالی یې 34cm ، 35cm او 36cm وي.

د متساوي الاضلاع مثلث ارتفاع، مساحت او د محیطي او محاطي دایرو د شعاع ګانو پیدا کول:

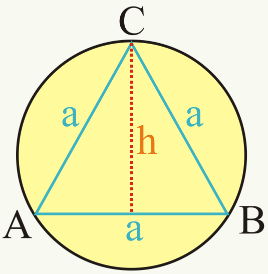
$$\sin A = \sin 60° = \frac{h}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow h = \frac{a}{2}\sqrt{3}$$

د فیثاغورث د قضیې په اساس لرو چې:

$$h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2$$

$$h^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{4a^2 - a^2}{4} = \frac{3a^2}{4}$$

$$h = \frac{\sqrt{3}a}{2} = \frac{a}{2}\sqrt{3}$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

د ABC مثلث مساحت $S=\frac{h\cdot a}{2}=\frac{\frac{\sqrt{3}a}{2}\cdot a}{2}=\frac{\sqrt{3}a^2}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{a^2}{4}\sqrt{3}$

$$R=\frac{abc}{4s}=\frac{a^3}{4\cdot\frac{a^2}{4}\sqrt{3}}=\frac{a^3}{a^2\sqrt{3}}=\frac{a}{\sqrt{3}}=\frac{a}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{a}{3}\sqrt{3}$$

$$r=\frac{s}{p}=\frac{\frac{a^2}{4}\cdot\sqrt{3}}{\frac{3a}{2}}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{2}{3a}=\frac{a}{6}\sqrt{3}$$

شپږم مثال: د يو متســاوي الاضلاع مثلث محيط 18cm دی. د دي مثلث مساحت، ارتفاع او د محيطي او محاطي دايرو شعاع گاني پيدا کړئ.

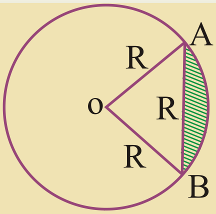
حل: د دي مثلث يوه ضلع (a) مساوي ده، په:

$$a=\frac{1}{3}\cdot 18cm=6cm$$

$$S=\frac{a^2}{4}\sqrt{3}=\frac{(6cm)^2}{4}\sqrt{3}=15{,}6cm^2 \qquad h=\frac{a}{2}\sqrt{3}=\frac{6cm}{2}\sqrt{3}=5{,}2cm$$

$$R=\frac{a}{3}\sqrt{3}=\frac{6cm}{3}\sqrt{3}=3{,}5cm \qquad r=\frac{a}{6}\sqrt{3}=\frac{6cm}{6}\sqrt{3}\approx 1{,}7cm$$

پوښتني



1- د شکل مطابق د *OAB* مثلث متساوي الاضلاع دی چي هره ضلع يي R ده. د O په مرکز دايره رسم شوي ده چي د A او B له ټکو څخه تيريږي. د AB په وتر سره د قطعې مساحت مساوي دی په:

a) $(\frac{\pi}{6}-\frac{1}{4})R^2$ b) $(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{5})R^2$ c) $(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2})R^2$

d) $(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{2}}{2})R^2$ e) $(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4})R^2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

2- که د یو متساوی الساقین مثلث د هر ساق اوږدوالی $6cm$ او د ساقو تر منځ زاویه یې 30° وي د مثلث مساحت پیدا کړئ.

3- که د یوه مثلث د دوو ضلعو اوږدوالی $5\sqrt{2}cm$ او $6cm$ وي، او دواړو ضلعو تر منځ زاویه یې 45° وي، د دې مثلث مساحت پیدا کړئ.

4- که د یوه مثلث د ضلعو اوږدوالی په ترتیب سره $3cm$ ، $4cm$ او $5cm$ وي، د دې مثلث مساحت پیدا کړئ.

5- د هغه مثلث مساحت پیدا کړئ چې د ضلعو اوږدوالی یې $a = 7cm$ ، $b = 9cm$ او $c = 12cm$ وي.

6- د هغه قایم الزاویه مثلث د محیطي دایرې شعاع پیدا کړئ، که قایمې ضلعې یې $12cm$ او $5cm$ وي.

7- که د ABC ، د متساوي الساقین مثلث قاعده $a = 8cm$ او د دې مثلث محاطي شعاع $r = 3cm$ وي. د محیطي دایرې شعاع اوږدوالی یې پیدا کړئ.

8- که د یوه قایم الزاویه مثلث مساحت $84cm^2$ وي او د یوې ارتفاع اوږدوالی یې $3,36cm$ وي، د دې مثلث د محیطي شعاع اوږدوالی پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ځېرکي لنډيز

• د جمعي او تفاضل فورمولونه:

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$ او $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$ او $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta} \qquad \tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

• د 2α د زاويې مثلثاتي نسبتونه د α د مثلثاتي نسبتونو له جنسه:

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$$

$$\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

• د يوې زاويې مثلثاتي نسبتونه، د زاويې د دوه چند مثلثاتي نسبتونو له جنسه:

$$\sin\alpha=\pm\sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}}\ ,\ \cos\alpha=\pm\sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{2}}\ ,\ \tan\alpha=\pm\sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}}$$

• د يوې زاويې د نيمايي مثلثاتي نسبتونه د زاويې د مثلثاتي نسبتونو له جنسه:

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}\quad,\quad \cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}\quad,\quad \tan\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

• د يوې زاويې د درې چنده مثلثاتي نسبتونه د هغې زاويې د مثلثاتي نسبتونو له جنسه:

$$\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha \quad,\quad \cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$$

$$\tan 3\alpha=\frac{3\tan\alpha-\tan^3\alpha}{1-3\tan^2\alpha}$$

• د دريو زاويو د مجموعې $(\alpha+\beta+\theta)$ مثلثاتي نسبتونه:

$$\sin(\alpha+\beta+\theta)=\sin\alpha\cos\beta\cos\theta+\sin\beta\cos\alpha\cos\theta$$
$$+\sin\theta\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\sin\theta$$

$$\cos(\alpha+\beta+\theta)=\cos\alpha\cos\beta\cos\theta-\cos\alpha\sin\beta\sin\theta$$
$$-\cos\beta\sin\alpha\sin\theta-\cos\theta\sin\alpha\sin\beta$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\tan(\alpha+\beta+\theta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta+\tan\theta-\tan\alpha\cdot\tan\beta\cdot\tan\theta}{1-\tan\alpha\tan\beta-\tan\beta\tan\theta-\tan\alpha\tan\theta}$$

د ضرب فورمولونه (هغه فورمولونه چې د دوو زاويو د مجموعې يا تفاضل مثلثاتي نسبتونه په ضرب بدلوي).

$$\sin A+\sin B=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

$$\sin A-\sin B=2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$$

$$\cos A+\cos B=2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

$$\cos A-\cos B=-2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$$

- هغه فورمولونه چې د دوه زاويو د مثلثاتي نسبتونو ضرب د جمعې او يا د تفاضل په شکل بدلوي:

$$\sin A\cos B=\frac{1}{2}[\sin(A+B)+\sin(A-B)]$$

$$\cos A\sin B=\frac{1}{2}[\sin(A+B)-\sin(A-B)]$$

$$\cos A\cos B=\frac{1}{2}[\cos(A+B)+\cos(A-B)]$$

$$\sin A\sin B=-\frac{1}{2}[\cos(A+B)-\cos(A-B)]=\frac{1}{2}[\cos(A-B)-\cos(A+B)]$$

- د R په شعاع د دايرې د مرکزي زاويې (θ°) د مقابل قوس اوږدوالی مساوي دی په:

$$L=\pi R\frac{\theta^\circ}{180^\circ}$$

- د R په شعاع د دايرې مرکزي زاويې θ راډيان د مقابل قوس اوږدوالی مساوي دی په:

$$L=R\theta$$

- د دايرې د سطحې هغه برخه چې د دوو شعاعو تر منځ واقع وي، قطاع بلل کيږي:
- د قطاع مساحت د $A_{sector}=\frac{1}{2}R^2\theta$ د فورمول په مرسته لاسته راځي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

- د دايرې د سطحې هغه برخه چې د قوس او د مقابل وتر تر منځ واقع وي، قطعه بلل کيږي:
- د قطعې مساحت د $A_{Segment} = \frac{1}{2}R^2(\theta - \sin\theta)$ د فورمول په مرسته پيدا کيږي:
- د دوو ضلعو او ددې دوو ضلعو تر منځ زاويې له جنسه د مثلث مساحت مساوي دى په:

$$S = \frac{1}{2}ac\sin B\ ,\quad S = \frac{1}{2}bc\sin A\ ,\quad S = \frac{1}{2}ab\sin C$$

- **د يوې زاويې د نيمايي مثلثاتي نسبتونه د مثلث د ضلعو د اوږدوالى له جنسه:**

$$\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}\quad \sin\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}}\quad \sin\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-a)}{ab}}$$

$$\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}\quad \cos\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}}\quad \cos\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}}$$

$$\tan\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$$

- **د مثلث مساحت د مثلث د ضلعو د اوږدوالى له جنسه:**

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

- د يوه مثلث د محيطي دايرې شعاع(R) مساوي دى په:

$$R = \frac{a}{2\sin A} = \frac{b}{2\sin B} = \frac{c}{2\sin C} \Rightarrow 2R = \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

يا $R = \frac{abc}{4S}$

- د يوه مثلث د محاطي دايرې شعاع د $r = \frac{s}{p}$ يا $r = \frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p}$ فرمول څخه په لاس راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د څپرکي پوښتنې

1- وښیاست چې د متساوي الاضلاع مثلث مساحت $S=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ دی، که a د مثلث یوه ضلع وي؟

2- که د یوه مثلث د ضلعو اوږدوالی $a=7cm$ ، $b=8cm$ او $c=9cm$ وي، د دې مثلث مساحت پیدا کړئ؟

3- د جمعې د فورمولونو په مرسته $\cos 165°$ او $\sin 165°$ پیدا کړئ؟

4- $\sin(-165°)=?$ مساوي دی په:

$a)\ \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ $\quad b)\ \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$ $\quad c)\ \frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

5- وښیاست چې: $\frac{\cos 3\theta}{\sin\theta\cos\theta}=\frac{\sin 2\theta}{\cos\theta}-\frac{\cos 2\theta}{\sin\theta}$ دی.

6- د جمعې او تفاضل د فورمولونو په مرسته، د لاندنیو زاویو مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ؟

$\sin(30°+45°)$ $\quad \cos(150°-45°)$ $\quad \tan(30°+60°)$

$\sin(135°+180°)$ $\quad \sin(135°-180°)$ $\quad \tan(180°-45°)$

7- د دوو زاویو د مثلثاتي نسبتونو د مجموعې او تفاضل د فورمولونو په مرسته، د لاندېنیو رابطو سموالی وښیاست.

$\sin(90°-\theta)=\cos\theta$ $\quad \cos(90°+\theta)=-\sin\theta$ $\quad \cos(90°-\theta)=\sin\theta$

$\sin(270°+\theta)=-\cos\theta$ $\quad \cos(180°-\theta)=-\cos\theta$ $\quad \sin(180°-\theta)=\sin\theta$

8- که $0°<\theta<90°$ او $\sin\theta=\frac{2}{5}$ وي، د $\cos 2\theta$ ، $\sin 2\theta$ ، $\cos\frac{\theta}{2}$ او $\sin\frac{\theta}{2}$ قیمتونه په لاس راوړئ؟

9- وښیاست چې:

$\frac{\sin 2\theta}{\cos\theta}=2\sin\theta$, $\cos 2\theta+1=2\cos^2\theta$, $\cos 2\theta+2\sin^2\theta=1$

$2\cos^2\theta-2\sin^2\theta=2\cos 2\theta$, $\frac{\cos 2\theta}{\cos\theta+\sin\theta}=\cos\theta-\sin\theta$

(c) ketabton.com: The Digital Library

10- که د یوه مثلث د ضلعو اوږدوالی په ترتیب سره $5cm$ ، $7cm$ او $8cm$ وي، د دې مثلث د محیطي او محاطي دایرو شعاع ګاني پیدا کړئ؟

11- $\sin(180^\circ + \theta) = ?$

$a)\ \sin\theta \qquad b)\ -\cos\theta \qquad c)\ -\sin\theta \qquad d)\ \cos\theta$

12- د جمعې او تفاضل د فورمولونو په مرسته وښیاست چې:

$\sec(360^\circ - \theta) = \sec\theta \ , \quad \tan(180^\circ + \theta) = \tan\theta$ او $\sin(360^\circ - \theta) = -\sin\theta$

13- $\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = ?$

$a)\ 2\sin\alpha\sin\beta \qquad b) 2\cos\alpha\cos\beta \qquad c) -2\sin\alpha\sin\beta$

14- وښیاست چې: $\dfrac{\sin\alpha}{\sec 4\alpha} + \dfrac{\cos\alpha}{\csc 4\alpha} = \sin 5\alpha$ دی؟

15- لاندې د مثلثاتی نسبتونو ضرب حاصلونه د مجموعې او یا تفاضل په شکل ولیکئ؟

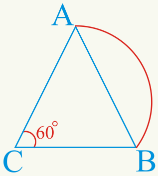
$\cos 40^\circ \cos 60^\circ \quad , \quad \cos 100^\circ \sin 50^\circ$

$\sin\dfrac{3\theta}{2}\sin\dfrac{5\theta}{2} \quad , \quad \sin 8\theta \cos 10\theta$

16- لاندې د مثلثاتی نسبتونو مجموعې او یا تفاضل د ضرب د حاصل په څیر ولیکئ؟

$\sin 80^\circ - \sin 72^\circ \ . \ \sin 12\theta + \sin 8\theta$

17- وښیاست چې: $\dfrac{\sin 5\theta + \sin 3\theta}{\cos 5\theta - \cos 3\theta} = -\cot\theta$ دی.



18- د یوې دایرې مساحت $180cm^2$ دی، ددې دایرې د 80° قطاع مساحت پیدا کړئ.

19- د شکل مطابق د 60° مرکزي زاویې د مقابل قوس اوږدوالی $(1cm)$ دی. د دې قوس شعاع او د وتر اوږدوالی یې پیدا کړئ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

-20 $\frac{\tan 60° - \tan 30°}{1 + \tan 60° \cdot \tan 30°} = ?$

$a)\ -\frac{1}{\sqrt{3}}$ $\quad b)\frac{1}{\sqrt{3}}$ $\quad c)\sqrt{3}$ $\quad d)-\sqrt{3}$

-21 که $\sin\theta = \frac{3}{5}$ او د θ دویمه ضلع په لومړی ربع کې وي، $\sin 2\theta$، $\cos 2\theta$ او $\tan 2\theta$ پیدا کړئ؟

-22 وښیاست چې: $\tan(45° + \theta) = \frac{\cos\theta + \sin\theta}{\cos\theta - \sin\theta}$ دی؟

-23 $\cos 37° \cos 53° - \sin 37° \sin 53°$ مساوي دی په:

$a)\ 1$ $\quad b)\ -1$ $\quad c)\ 0$ $\quad d)$ دړې واړه ناسم دي

-24 $\cos 60° \cos 14° + \sin 60° \sin 14°$ مساوي دی په:

$a)\cos 74°$ $\quad b)\cos 46°$ $\quad c)\sin 74°$ $\quad d)\sin 46°$

-25 $\cos 14° \cos 31° - \sin 14° \sin 31°$ مساوي دی په:

$a)\cos 17°$ $\quad b)\cos 45°$ $\quad c)\sin 17°$ $\quad d)-\sin 17°$

-26 $\cos 80° \cos 35° + \sin 80° \sin 35°$ مساوي دی په:

$a)\cos 115°$ $\quad b)\sin 115°$ $\quad c)\cos 45°$ $\quad d)\sin 45°$

-27 که $\cos\alpha = \frac{3}{5}$، $\sin\beta = \frac{5}{13}$ وي، α او β په لومړنی ربع کې واقع وي $\cos(\alpha - \beta)$ پیدا کړئ؟

-28 که $\cos\theta = -\frac{8}{17}$، $\cos \square = -\frac{3}{5}$ وي او د θ او $\square$ دویمې ضلعې په دریمه ربع کې واقع وي. $\cos(\theta - \square)$ پیدا کړئ؟

-29 وښیاست چې: $\tan x \cdot \tan y = \frac{\cos(x - y) - \cos(x + y)}{\cos(x - y) + \cos(x + y)}$ دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

30- $\cos(0^\circ - t) = ?$

$a)\sin t \qquad b)\cos t \qquad c)-\sin t \qquad d)-\cos t$

31- وښياست چې: $\dfrac{\cos\theta \cdot \sin 2\theta}{1+\cos 2\theta} = \sin\theta$ دی؟

32- وښياست چې:

$$\frac{\cos 8x + \cos 4x}{\cos 8x - \cos 4x} = -\cot 6x \cot 2x$$

$$\frac{\sin x - \sin 3x}{\cos x + \cos 3x} = -\tan x \quad , \quad \frac{\sin 4x + \sin 6x}{\cos 4x - \cos 6x} = \cot x$$

$$\frac{\sin t + \sin 3t}{\cos t + \cos 3t} = \tan 2t \quad , \quad \frac{\sin x - \sin 3x}{\cos x - \cos 3x} = -\cot 2x$$

33- $\cos(x+y)\cos y + \sin(x+y)\sin y$ افاده مساوي ده په:

$a)\sin x \qquad b)\cos x \qquad c)-\sin x \qquad d)-\cos x$

34- $\sin(x-y)\cos y + \cos(x-y)\sin y = ?$

$a)\sin x \qquad b)\cos x \qquad c)-\sin x \qquad d)-\cos x$

35 – د هغې قطاع مساحت چې شعاع يې $2m$ او مرکزي زاويه يې $0,5\ radian$ وي، مساوي ده په:

$a)\ 3m^2 \qquad b)\ 2m^2 \qquad c)\ 1m^2 \qquad d)$ درې واړه سمې نه دي

36 – که د يوې دايرې د يوې قطاع مساحت $200cm^2$ او مرکزي زاويه يې 2 radian وي، د دې دايرې شعاع مساوي ده په:

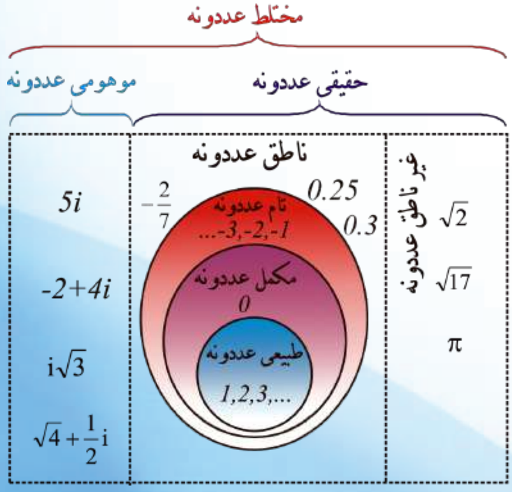
a) 14.14cm   b) −14.14cm   c) 14cm   d) درې واړه غلط دي.

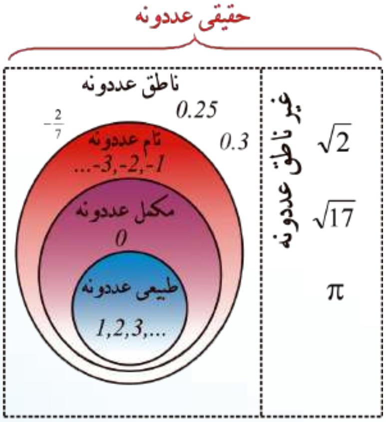
(c) ketabton.com: The Digital Library

شپږم څپرکی

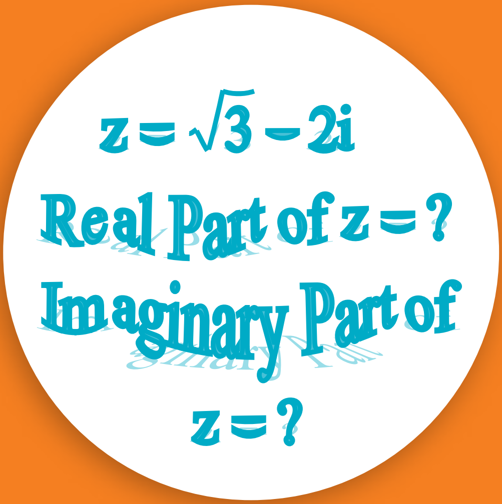
مختلط عددونه

(c) ketabton.com: The Digital Library





(c) ketabton.com: The Digital Library



مختلط عددونه
(Complex Numbers)

آیا ویلای شئ چې د $x^2+9=0$ معادله ولې د حقیقي عددونو په سټ کې حل نه لري؟
آیا پوهیږئ چې د حقیقي عددونو سټ د مختلطو عددونو د سټ یو فرعي سټ دی؟

موهومي عددونه (Imaginary Numbers):

$i=\sqrt{-1}$ یا $i^2=-1$ دی د i توری له یوناني کلمې (iota) څخه اخیستل شوی دی چې $i=\sqrt{-1}$ ته، د موهومي عددونو واحد وایي.

لومړی مثال: $\sqrt{-16}$ پیدا کړئ.

حل: $\sqrt{-16}=\sqrt{(-1)\cdot 16}=\sqrt{-1}\sqrt{16}=i\sqrt{16}=\pm 4i$

دویم مثال: د $x^2+a^2=0$ معادله حل کړئ.

حل:

$$x^2+a^2=0$$
$$x^2=-a^2$$
$$x=\pm\sqrt{-a^2}=\pm\sqrt{(-1)\cdot(a^2)}=\pm a\sqrt{-1}=\pm ai$$

ai او ai − موهومي عددونه دي (چې a یو حقیقي عدد دی).

د (i) طاقتونه (Powers of i):

لیدل کیږي چې د $i^2=-1$ یا $i=\sqrt{-1}$ په مرسته موهومي عددونه ساده کولای شو . په یاد ولرئ چې د حقیقي عددونو مربع مثبت او د موهومي عددونو مربع منفي ده.

$i=\sqrt{-1}$ $\qquad$ $i^2=(\sqrt{-1})^2=-1$ $\qquad$ $i^3=i^2\cdot i=(-1)\cdot(i)=-i$

$i^4=(\sqrt{-1})^4=[(\sqrt{-1}^2)]^2=(-1)^2=1$ یا $i^4=i^2\cdot i^2=(-1)(-1)=1$

$i^5=i^4\cdot i=(1)(i)=i$ $\qquad$ $i^6=(i)^4\cdot(i)^2=(1)\cdot(-1)=-1$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$i^7 = (i)^6 \cdot (i) = (-1)\cdot(i) = -i \qquad i^8 = i^7 \cdot i = (-i)\cdot(i) = -i^2 = -(-1) = 1$$

(i) ته موهومي واحد وايي.

له دې ځایه نتیجه په لاس راځي، که د موهومي واحد توان $n=4$ یا یوداسې عددوي چې پر څلورو د وېش وړوي، نو له یوه (1) سره مساوي دی.

دریم مثال:

$$i^8 = i^4 \cdot i^4 = 1\cdot 1 = 1$$
$$i^{12} = i^4 \cdot i^4 \cdot i^4 = 1\cdot 1\cdot 1 = 1$$
$$i^{16} = i^4 \cdot i^4 \cdot i^4 \cdot i^4 = 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1 = 1$$
$$\vdots$$
$$i^{4n} = i^4 \cdot i^4 \ldots i^4 = 1$$
$$i^{4n+1} = i^{4n} \cdot i = 1\cdot i = i$$
$$i^{4n+2} = i^{4n} \cdot i^2 = 1\cdot(-1) = -1$$
$$i^{4n+3} = i^{4n} \cdot i^2 \cdot i = 1(-1)i = -i$$

فعالیت

$(i)^{61}, (i)^{-37}$ و $(i)^{256}$ طاقتونو قیمت پیدا کړئ.

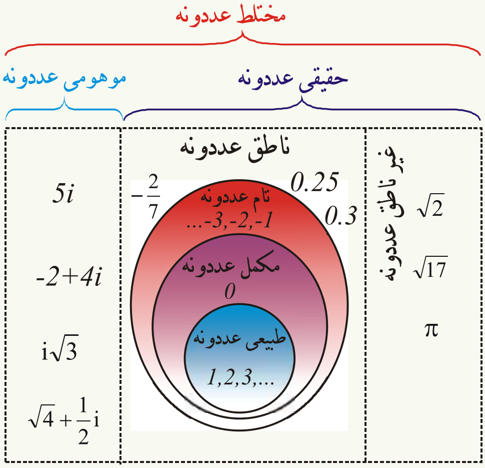
څلورم مثال: i^{54}، i^{1998} او i^{89} پیدا کړئ.

حل: که د 54 عدد پر 4 ووېشو، پاتې (باقي) یې 2 ده، نو:

$$i^{54} = i^{52} \cdot i^2 = i^{4\cdot 13} \cdot i^2 = (i^4)^{13} \cdot i^2 = (1)\cdot i^2 = (1)\cdot(-1) = -1$$
$$i^{1998} = i^{4(499)} \cdot i^2 = 1\cdot i^2 = i^2 = -1$$
$$i^{89} = i^{4\cdot 22} \cdot i = 1\cdot i = i$$

هغه عددونه چې $\sqrt{-1}$ یې یو فکتور وي، د موهومي عددونو په نوم یادېږي. د i طبیعي توانونه یو له i،1،i- او 1- عددونو څخه دي. د حقیقي عددونو مربع مثبت اود موهومي عددونو مربع منفي ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library



د عددونو سیټونه د تاریخ په اوږدوکې د اړتیاوو او د ریاضي د علم له انکشاف سره سم منځ ته راغلي دي، لکه: څرنګه چې پوهیږئ، د طبیعي عددونو سټ $IN = \{1,2,3,4....\}$ ټولو مسألو ته ځواب نه شي ویلای. د مثال په ډول د $3x = 0$ معادله د طبیعي عددونو په سټ کې حل نه لري، ښکاره خبره ده چې ځواب یې $x = 0$ دی، نو یو بل سټ ته اړتیا پیدا شوه چې د مکملو عددنو سټ $W = \{0,1,2,3,...\}$ دی. دا سټ هم ځینو پوښتنو ته ځواب نه شي ورکولای، لکه: د $x + 2 = 0$ معادله د مکملو عددونو په سټ کې حل نه لري، ځکه چې ځواب یې $x = -2$ دی چې 2 - د مکملو عددونو په ست کې شامل نه دی، نو یو بل سټ ته اړتیا پیدا شوه چې منفي عددونه هم ولري چې د تامو عددونو د سټ (Integer Numbers set) یا $I = \{...,-2,-1,0,1,2,3,...\}$ په نامه یادیږي، خو د عددونو په دې سټ کې هم د $2x + 1 = 2$ د معادلې حل نشته، ځکه چې حل یې $x = \frac{1}{2}$ دی، نو د ناطقو عددونو سټ (Rational Numbers Set) منځ ته راغی خو د $x^2 - 2 = 0$ معادله د ناطقو یاګویا عددونو په سټ کې هم حل نه لري، ځکه چې، ددې معادلې حل $x = \sqrt{2}$ دی چې $\sqrt{2}$ د غیرو ناطقو عددونو (Irrational Numbers set) په سټ کې شامل دی، نو د غیر ناطقو عددونو سټ منځ ته راغی د ناطقو او غیر ناطقو عددونو د سیټونو مجموعې ته د حقیقي عددونو سټ (Real Numbers Set) وایي.

خود حقیقي عددونو سټ هم ځینو پوښتنو ته ځواب نه شي ورکولای، لکه: د $x^2 + 16 = 0$ یا د $x^2 + 1 = 0$ د معادلو حل د حقیقي عددونو په سټ کې نه شته دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

يا په بل عبارت منفي عددونه د حقيقي عددونو په سټ کې جفت جذر نه لري، لکه: $\sqrt{-16}$, $\sqrt{-25}$
او نور، خو هغه معادلې چې د حقيقي عددونو په سټ کې حل نه لري، د مختلطو عددونو په سټ کې حل لري. په 1795م. کال کې يو جرمني رياضي پوه ګوس (Gauss) د مختلطو عددونو مفهوم په لاندې ډول وړاندی کړ. که يو مختلط عدد په z سره وښايو $z = a + bi$ چې د يو مختلط عدد معياري شکل دی چې a د z عدد حقيقي برخه (Real Part of z) او bi د z د مختلط عدد موهومي برخه (Imaginary Part of z) ده، د مختلطو عددونو سټ داسې تعريف کېږي.
$C = \{z \mid z = a + bi \ , \ a, b \in \mathbb{R} \ , \ i^2 = -1\}$ د z يو مختلط عدد د يوې مرتبې جوړې په شکل هم ليکلای شو : $z = a - bi = (a, -b)$, $z = a + bi = (a, b)$ که a=0 شي:
$Z = 0 + bi = bi$ چې bi ته خالص موهومي عدد (Pure imaginary number) وايي او
که $b = 0$ وي، نو $z = a + 0 \cdot i = a$ (چې a يو خالص حقيقي عدد (Pure real number) دی) په ياد ولرئ چې مختلط عددونه، لکه: حقيقي عددونه د ترتيب خاصيت نه لري.

صفري مختلط عدد (Zero Complex Number):

هغه عدد دی چې حقيقي او موهومي دواړه برخې يې صفرونه وي. $(a = 0 \quad b = 0)$ ، نو
$z = a + bi = 0 + 0i = 0$ صفري مختلط عدد دی.

فعاليت

په $4 + 3i$ او $2 - 5i$ مختلطو عددونو کې حقيقي او موهومي برخې وښياست.

لومړی مثال: د $1 - i$, $\sqrt{3} - 3i$, $5i$ او $2 - 5i$ په مختلطو عددونو کې حقيقي او موهومي برخې وښياست.

حل: په $1 - i$ کې حقيقي برخه يې 1 او موهومي برخه يې $-i$ ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $\sqrt{3}-3i$ مختلط عدد کې حقیقي برخه یې $\sqrt{3}$ او موهومي برخه یې $-3i$ ده، په $2-5i$ مختلط عدد کې حقیقي برخه یې 2 او موهومي برخه یې $-5i$ ده.

په $5i$ کې حقیقي برخه صفر او موهومي برخه یې $5i$ ده.

دویم مثال: د $6i$, -9 , 0 , $9-i$ او $i-1$ مختلط عددونه په معیاري شکل (Standard Form) ولیکئ.

حل: څرنګه چې $z=a+bi$ ته د مختلط عدد معیاري شکل وایي چې a ته د مختلط عدد حقیقي برخه او bi یې موهومي برخه ده. په لاندې جدول کې پورتني مختلط عددونه په معیاري شکل بنودل شوي دي.

مختلط عددونه	معیاری شکل $(z=a+bi)$
$6i$	$0+6i$
-9	$-9+0i$
0	$0+0i$
$9-i$	$9-i$
$i-1$	$-1+i$

$z=a+bi$ د یوه مختلط عدد معیاري شکل دی چې a ته د مختلط عدد حقیقي برخه او bi یې موهومي برخه ده، که a=0 وي، نو bi خالصه موهومي برخه او که b=0 وي، نو a د مختلط عدد خالصه حقیقي برخه ده او هغه معادلې چې د حقیقي عددونو په سټ کې حل نه لري، د مختلطو عددونو په سټ کې حل لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

1- د $(i)^{-33}, (i)^{79}, (i)^{202}, (2i)^2$ او $(3i)^2$ قیمتونه پیداکړئ.

2- لاندې عددونه د مختلطو عددونو په معیاري شکل ولیکئ.

$$-i-4 \quad , \quad 5i \quad , \quad -4i+\sqrt{2} \quad , \quad -3i$$

3 - $7-i\ ,\ 5+3i\ ,\ -3i$ $\quad \sqrt{5}-\sqrt{7}i$ مختلط عددونه د مرتبو جوړو په شکل ولیکئ.

4- د $-i$ په مختلط عدد کې حقیقي برخه مساوي ده په:

a) 1 , b) -1 , c) 0 , d) 2

5- د $\sqrt{-16}$ عدد جذر مساوي دی په:

a) ± 4 , b) -4 , c) $\pm 4i$, d) ± 2

(c) ketabton.com: The Digital Library

د موهومي عددونو څلورګوني عملیې

$$4i+3i=7i$$
$$4i-3i=i$$
$$4i-(-3i)=7i$$

آیا د $3i$ او $4i$ موهومي عددونه جمع کولای شئ؟

آیا د $10i$ او $50i$ موهومي عددونو د ضرب حاصل یو حقیقي عدد دی؟

د موهومي عددونو جمع او تفریق: موهومي عددونه کولای شو چې په لاندې ډول یې جمع او تفریق کړو.

a: د جمعې عملیه: د دوو موهومي عددونو د جمعې حاصل یو موهومي عدد دی.

لومړی مثال: د $(7i+8i)$ او $5i$ او $\sqrt{7}i$ د جمعې حاصل پیدا کړئ.

حل:

$$7i+8i=(7+8)i=15i$$
$$\sqrt{7}i+5i=(\sqrt{7}+5)i$$

b: د تفریق علمیه: د دوو عددونو د تفریق حاصل یو موهومي عدد دی.

دویم مثال: $7i-4i$ او $9i-13i$ د تفریق حاصل پیدا کړئ.

$$7i-4i=(7-4)i=3i$$
$$9i-13i=(9-13)i=-4i$$

c: د ضرب عملیه: د دوو موهومي عددونو د ضرب حاصل یو حقیقي (Real number) عدد دی.

دریم مثال: د $(10i)\cdot(5i)$ او $(\sqrt{4}i)\cdot(\sqrt{9}i)$ د ضرب حاصل پیدا کړئ.

حل:

$$(10i)\cdot(5i)=(10)\cdot(5)\cdot i\cdot i=50i^2=-50$$

ځکه چې $i^2=-1$ دی نو $50i^2=50\cdot(-1)=-50$ چې -50 یو حقیقي عدد (Real number) دی.

همدارنګه $(\sqrt{4}i)\cdot(\sqrt{9}i)=\sqrt{4\cdot 9}\cdot i\cdot i=\sqrt{36}\cdot i^2=6\cdot(-1)=-6$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د موهومي عددونو د ضرب په عمليه کې د تبديلي خاصيت (Commutative Property)

صدق کوي يعني: $\boxed{(ai)\cdot(bi)=(bi)\cdot(ai)=-ab}$

فعاليت

$(\frac{2}{3}i)\cdot(-\frac{3}{5}i)$ د ضرب حاصل په لاس راوړئ.

d : **د وېش عمليه**: د دوو موهومي عددونو دوېش حاصل يو حقيقي عدد دی.

څلورم مثال: $\frac{\sqrt{-7}}{\sqrt{-5}}$ ، $\frac{5i}{7i}$ او $\frac{\sqrt{13}\,i}{\sqrt{3}\,i}$ د وېش حاصل په لاس راوړئ.

حل:

1) $\frac{5i}{7i}=\frac{5}{7}$ ($\frac{5}{7}$ يو حقيقي عدد دی)

2) $\frac{\sqrt{13}\,i}{\sqrt{3}\,i}=\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{3}}$ ($\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{3}}$ يو حقيقي عدد دی)

3) $\frac{\sqrt{-7}}{\sqrt{-5}}=\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}}\cdot\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{7}\,i}{\sqrt{5}\,i}=\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}}$

فعاليت

$36i$ پر $-2i$ ووېشئ.

د موهومي عددونو د جمعې او ضرب په عمليو کې د تبديلي خاصيت صدق کوي. د دوو موهومي عددونو د ضرب او وېش حاصل يو حقيقي عدد دی.

پوښتنې

1) جمع يې کړئ. $\sqrt{7}\,i+\sqrt{7}\,i$ ، $\sqrt{-7}+\sqrt{-4}$ ، $\sqrt{-1}b+\sqrt{-1}c$

2) تفريق يې کړئ. $5i-2i$ ، $12i-7i$ ، $\sqrt{5}\,i-\sqrt{5}\,i$

3) لاندې موهومي عددونه سره ضرب او تقسيم کړئ.

$(\frac{7}{4}i)(-\frac{2}{9}i)$ ، $(\sqrt{7}\,i)\cdot(-7i)$ ، $(3i)\cdot(5i)$ ، $\frac{16i}{-4i}$ ، $\frac{13i}{26i}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مختلطو عددونو د جمعې او تفریق عملیې:

$(1+2i)+(-1-2i)=0$

آیا د $3x-2yi=6+i$ له مساوات څخه د x او y قیمتونه په لاس راوړلای شئ؟

آیا پوهیږئ چې کوم عدد ته د مختلطو عددونو د جمعې د عملې د عینیت عنصر وایي؟

مساوي مختلط عددونه (Equal Complex Numbers): دوه مختلط عددونه هغه وخت سره مساوي دي چې د دواړو عددونو حقیقي او موهومي برخې یو له بله سره مساوي وي. د $z_1=a+bi$ او $z_2=x+yi$ عددونه هغه وخت سره مساوي دي چې x=a او y=b وي.

لومړی مثال: که چیرې $z_1=x_1+2y_1i$ او $z_2=3-5i$ وي، نو هغه وخت $z_1=z_2$ دی چې: $x_1=3$ او $y_1=-\frac{5}{2}$ وي.

فعالیت

1- که چیرې $z_1=\sqrt{2}\,x+\sqrt{3}\,yi$ او $z_2=-5-6i$ وي، د $z_1=z_2$ له مخې د x او y قیمتونه پیدا کړئ.

2- که چیرې $2+mi=k+3i$ وي د m او k حقیقي عددونو قیمت پیدا کړئ.

د مختلطو عددونو د جمعې عملیه: د مختلطو عددونو د جمعې عملیه داسې تعریف شوې ده. که چیرې $z_1=a+bi$ او $z_2=c+di$ وي، نو:

$$z_1+z_2=(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)\cdot i$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

يا په بل عبارت د دوو مختلطو عددونو د جمعې حاصل يو بل داسې مختلط عدد دی چې حقيقي برخه يې د دواړو عددونو د حقيقي برخو او موهومي برخه يې د دې دواړو عددونو د موهومي برخو له مجموعې څخه په لاس راغلې وي.

دويم مثال: که چېرې $z_1 = 2-3i$ او $z_2 = 3+4i$ وي، $z_1 + z_2$ پيدا کړئ

$$z_1 + z_2 = (2-3i)+(3+4i) = (2+3)+(-3+4)i = 5+i$$

په همدې ډول:

$$(3-4i)+(-2+6i) = (3-2)+(-4+6)i = 1+2i$$

$$(-9+7i)+(3-15i) = (-9+3)+(7-15)i = -6-8i$$

$0+0i$ د مختلطو عددونو د جمعې د عمليې د عينت عنصر (additive identity) دی، ځکه چې: $(a+bi)+(0+0i) = (a+0)+(b+0)i = a+bi$.

همدارنګه د $a+bi$ عدد جمعي معکوس (additive inverse) د $-a-bi$ عدد دی، ځکه چې:

$$(a+bi)+(-a-bi) = (a-a)+(b-b)i = 0+0i$$

فعاليت

د $(3x-yi)+(5x+3yi)$ د جمعې حاصل په لاس راوړئ.

د مختلطو عددونو د تفريق عمليه: د دوو مختلطو عددونو د تفريق حاصل يو بل داسې مختلط عدد دی چې حقيقي برخه يې د حقيقي برخو او موهومي برخه يې د موهومي برخو د تفريق له حاصل څخه په لاس راغلې وي يعنې: $(a+bi)-(c+di) = (a-c)+(b-d)i$

لومړی مثال: $(-4+3i)-(6-7i) = (-4+3i)+(-6+7i) = -10+10i$

دويم مثال: $(12-5i)-(8-3i) = (12-8)+(-5+3)i = 4-2i$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دوه مختلط عددونه هغه وخت سره مساوي دي چې د دواړو عددونو حقيقي او موهومي برخې يو له بله سره مساوي وي. د دوو مختلطو عددونو د جمعې حاصل يو داسې مختلط عدد دی چې حقيقي برخه يې د حقيقي برخو اوموهومي برخه يې د موهومي برخو له مجموعی څخه په لاس راغلې وي، په همدې ډول د دوو مختلطو عددونو د تفريق حاصل يو داسې مختلط عدد دی چې حقيقي برخه يې د دواړو عددونو د حقيقي برخو او موهومي برخه يې د دواړو عددونو د موهومي برخو له حاصل تفريق څخه په لاس راغلې وي.

پوښتنې

1- لاندې مختلط عددونه جمع کړئ.

$(2+5i)+(3+4i)$ ، $(13-12i)+(13+12i)$

$(-3+6i)+(10-7i)$ ، $(\sqrt{3}-ci)+(d+5ci)$

2- لاندې مختلط عددونه يو له بله تفريق کړئ.

$(5-i)-(7+3i)$

$(2\sqrt{3}+5\cdot\sqrt{7}\,i)-(\sqrt{3}+3\sqrt{7}\,i)$

$(3c+4di)-(3c+8di)$

3- د لاندې مختلطو عددونو جمعي معکوس پيدا کړئ.

$2+3i$, $(2,-3)$, $\sqrt{2}+\sqrt{3}\,i$

4 – که $(x, y \in IR)$ او $3x+2iy-ix+5y=7+5i$ وي، د x او y قيمتونه پيدا کړئ.

5- لاندې عمليې سرته ورسوئ او خپل ځوابونه د $a+bi$ په شکل وليکئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

$(2+3i)+(-5+2i)$

$(-5-4i)-(-2-\sqrt{2}i)$

$(2+3i)+(-5-i)$

$(6-5i)+(3+2i)$

$(3.7+6.1i)-(1+5.9i)$

$(8+\frac{3}{4}i)-(-7+\frac{2}{3}i)$

$(-6-\frac{5}{8}i)+(4+\frac{1}{2}i)$

$(-2+5i)+(3-i)$

$(3+\frac{3}{5}i)-(-11+\frac{7}{15}i)$

$(-4-\frac{5}{6}i)+(13+\frac{3}{8}i)$

$(-7-\sqrt{-72})+(8+\sqrt{-50})$

$(\sqrt{3}+\sqrt{-2})-(\sqrt{12}+\sqrt{8})$

6- د لاندي مختلطو عددونو جمعي معکوس پیداکړئ.

$2-3i$	$8+11i$	$1-i$	$-1+i$
$5-8i$	$-13+13i$	$-5i$	$2i$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مختلطو عددونو ضرب

آیا کولای شئ چې د $(2-3i)(3+4i)$ مختلطو عددونو د ضرب حاصل په لاس راوړئ؟

د $i^2=-1$ په نظر کې نیولو سره د دوو مختلطو عددونو ضرب په لاندې ډول دی که:

$z_1=a+bi$ او $z_2=c+di$ وي.

$$z_1\cdot z_2=(a+bi)\cdot(c+di)=ac+adi+bci+bidi$$
$$=ac+adi+bci+bdi^2$$
$$=ac+(ad+bc)i+bd(-1)$$
$$z_1\cdot z_2=(ac-bd)+(ad+bc)i$$

لومړی مثال: د $(5-4i)\cdot(7-2i)$ د ضرب حاصل په لاس راوړئ.

حل:

$$(5-4i)(7-2i)=5(7)+5(-2i)+(-4i)(7)-4i(-2i)=35-10i-28i+8i^2$$
$$=35-38i+8(-1)$$
$$=35-38i-8$$
$$=27-38i$$

فعالیت

د $(2-3i)(3+4i)$ د ضرب حاصل په لاس راوړئ.

څرنګه چې $(a+bi)(1+0i)=a\cdot1+a\cdot0i+bi\cdot1+bi\cdot0i=a+bi$ دی، نو $1+0i$ ته د مختلطو عددونو د ضرب د عملیې د عینیت عنصر (Multiplicative identity) وایي لکه:

$$(3+5i)(1+0i)=3+5i$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د یوه مختلط عدد مزدوج (Conjugate of a Complex Number):

د $z = x + yi$، د مختلط عدد مزدوج $\bar{z} = x - yi$ دی په دې ډول چې:

$$z \cdot \bar{z} = (x + yi) \cdot (x - yi) = x^2 - (yi)^2 = x^2 + y^2$$

$$z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2$$

$$z + \bar{z} = (x + yi) + (x - yi) = 2x \quad , \quad 2x\ Re(z)$$

$$z - \bar{z} = (x + yi) - (x - yi) = 2yi \quad , \quad 2yi\ Im(z)$$

دویم مثال: د $z = 3 + 4i$ د عدد مزدوج $\bar{z} = 3 - 4i$ دی، $z + \bar{z}$, $z - \bar{z}$ او $z \cdot \bar{z}$ په لاس راوړئ:

$$z \cdot \bar{z} = (3 + 4i) \cdot (3 - 4i) = 3(3) + 3(-4i) + 4i(3) + 4i(-4i)$$

$$= 9 - 16i^2 = 9 - 16(-1) = 9 + 16 = 25$$

$z + \bar{z} = (3 + 4i) + (3 - 4i) = 6$ (6 یو حقیقي عدد دی)

$z - \bar{z} = (3 + 4i) - (3 - 4i) = 8i$ (8i یو موهومي عدد دی)

فعالیت

د $z_1 = 5 - 3i$, $z_2 = 7 + i$ او $z_3 = \sqrt{5} + \sqrt{7}i$ مختلطو عددونو مزدوجونه پیدا کړئ.

څرنګه چې وموليدل، د یو مختلط عدد د مزدوج د پیداکولو لپاره، یوازې د موهومي برخې علامه تغیرو لکه:

مزدوج یې	عدد
i	-i
1+i	1-i
-4-2i	-4+2i
-5i-6	5i-6

د یو مختلط عدد ضربي معکوس (Multiplicative inverse)

پوهیږو چې د $a + bi$ د عدد مزدوج $a - bi$ دی او

$(a + bi) \cdot (a - bi) = a^2 - (b^2 i^2) = a^2 - b^2(-1) = a^2 + b^2$ دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $a+bi$ عدد د ضربي معکوس د پیداکولو له پاره د $\frac{1}{a+bi}$ عدد د مختلط عدد په معیاري شکل لیکو، نو د $\frac{1}{a+bi}$ د عدد صورت او مخرج په $a-bi$ کې ضربوو. ($a-bi$ د مخرج مزدوج دی)

$$\frac{1}{a+bi}\cdot\frac{a-bi}{a-bi}=\frac{(a-bi)}{(a+bi)(a-bi)}=\frac{a-bi}{a^2+b^2}=\frac{a}{a^2+b^2}-\frac{b}{a^2+b^2}i$$

$$\frac{1}{a+bi}=\frac{a}{a^2+b^2}-\frac{b}{a^2+b^2}i$$

د $(a+bi)$ د عددضربي معکوس $(\frac{a}{a^2+b^2}-\frac{b}{a^2+b^2}i)$ دی.

دریم مثال: د $2-3i$ د عدد ضربي معکوس پیدا کړئ.

$$\frac{1}{2-3i}\cdot\frac{2+3i}{2+3i}=\frac{2+3i}{4-9i^2}=\frac{2+3i}{4+9}=\frac{2+3i}{13}=\frac{2}{13}+\frac{3}{13}i$$

څلورم مثال: د x^2+4 افاده تجزیه کړئ.

$$x^2+4=x^2-(-1)\cdot4=x^2-(i)^2\cdot4=x^2-(2i)^2=(x-2i)(x+2i)$$

فعالیت

د $5+3i$ او $\sqrt{2}-4i$ مختلطو عددونو ضربي معکوس پیدا کړئ.

که چېرې $z=x+yi$ او $w=x'+y'i$ دوه مختلط عددونه وي، نو $z\cdot w$ په دې ډول تعریف شوی دی.

$$z\cdot w=(xx'-yy')+(xy'+x'y)i$$

د یو مختلط عدد د مزدوج د پیداکولو لپاره یوازې د موهومي برخې علامه تغیرو او $a+bi$ د مختلط عدد ضربي معکوس $(\frac{a}{a^2+b^2}-\frac{b}{a^2+b^2}i)$ دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتني

1- لاندې مختلط عددونه سره ضرب کړئ.

$(2+i)(3-2i)$, $(3+i)(3-i)$

$(-2+3i)(4-2i)$, $(2-5i)(2+5i)$

$(5+2i)(5-3i)$, $(\sqrt{6}+i)(\sqrt{6}-i)$

$(\sqrt{3}+\sqrt{2}i)(\sqrt{3}-\sqrt{2}i)$

2- د لاندې مختلطو عددونو ضربي معکوس پیدا کړئ.

$1-i$, $2+4i$, $5-3i$, $3a-4bi$, $(7,4)$

3- لاندې افادې تجزیه کړئ.

x^2+16 , x^2+8 , x^2+5 , x^2+7

4- د $(-3+2i)^2$ او $(2+i)^2$ قیمتونه په لاس راوړئ.

5- که $z=4-3i$ وي، $8z-z^2$ پیدا کړئ.

6- دا معادله حل کړئ. $x+yi=(2-3i)(2+3i)$.

7- وښیاست چې: $\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$ ، د i مربع جذر دی.

8- وښیاست چې: $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$ د $-i$ دریم جذر دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{-2-2i}{-5+6i}=?$$

د دوو مختلطو عددونو وېش

Division of two complex numbers

آیا د $\frac{-2-2i}{-5+6i}$ د وېش حاصل (خارج قسمت) په لاس راوړلای شئ؟

څرنګه چې د $\frac{a+bi}{c+di}$ عدد په مخرج کې c حقیقي عدد او di موهومي عدد دی، نو لومړی باید مخرج په حقیقي عدد بدل کړو، ددې لپاره صورت او مخرج، د مخرج په مزدوج کې ضربوو چې دې عملیې ته ګویاکول (Rationalization) وایي.

لومړی مثال: د $\frac{4+3i}{2+5i}$ د وېش حاصل په لاس راوړئ.

حل: د $2+5i$ مزدوج $2-5i$ دی، صورت او مخرج د مخرج په مزدوج یا $2-5i$ کې ضربوو.

$$\frac{4+3i}{2+5i}=\frac{4+3i}{2+5i}\cdot\frac{2-5i}{2-5i}=\frac{8-20i+6i-15i^2}{4-10i+10i-25i^2}=\frac{8-14i-15(-1)}{4-25(-1)}$$

$$=\frac{23-14i}{29}=\frac{23}{29}-\frac{14}{29}i$$

لیدل کېږي چې د وېش په حاصل کې حقیقي او موهومي برخې سره جلا دي.

فعالیت

د $\frac{1+i}{1-i}$ د وېش حاصل په لاس راوړئ او خپل ځواب د مختلط عدد په معیاري شکل ولیکئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

تعریف

که $z_1 = a + bi$ او $z_2 = c + di$ وي، $\frac{z_1}{z_2}$ په لاندې ډول تعریف شوی دی

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{ac - adi + bci - bdi^2}{c^2 - d^2i^2} = \frac{ac + bd - (ad - bc)i}{c^2 + d^2}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} - \frac{ad-bc}{c^2+d^2}i$$

دویم مثال: د $z_1 = 2 - 3i$ عدد پر $z_2 = 1 + i$ وویشئ او بیا یې امتحان کړئ.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2-3i}{1+i} = \frac{(2-3i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{-1-5i}{2} = -\frac{1}{2} - \frac{5}{2}i$$

$$(1+i)(-\frac{1}{2} - \frac{5}{2}i) = -\frac{1}{2} - \frac{5}{2}i - \frac{1}{2}i - \frac{5}{2}i^2 = -\frac{1}{2} - 3i + \frac{5}{2} = 2 - 3i$$

دریم مثال: د $\frac{3+2i}{5-i}$ د وېش حاصل په لاس راوړئ.

حل:

$$\frac{3+2i}{5-i} = \frac{(3+2i)(5+i)}{(5-i)(5+i)} = \frac{15+3i+10i+2i^2}{25-i^2} = \frac{15+13i-2}{25+1} = \frac{13+13i}{26} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$$

که $z = x + yi$ او $w = x' + y'i$ دوه مختلط عددونه وی، نو $\frac{z}{w}$ داسې تعریف شوی دی.

$$\frac{z}{w} = \frac{xx' + yy'}{x'^2 + y'^2} + \frac{x'y - xy'}{x'^2 + y'^2}i \quad , \quad (x'^2 + y'^2 \neq 0)$$

د یو مختلط عدد د مزدوج خاصیتونه:

که z_1 او z_2 دوه مختلط عددونه وي:

1) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

2) $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

3) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = \overline{z_2} \cdot \overline{z_1}$ 4) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

5) $z + \overline{z} = 2x$ 6) $z - \overline{z} = 2yi$

7) $\overline{\overline{z}} = z$

لومړی مثال: که $z_1 = 4 + 5i$ او $z_2 = -3 + 2i$ وي، وښیاست چې:

$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$ او $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

حل:

$$z_1 + z_2 = (4+5i) + (-3+2i) = 1 + 7i \Rightarrow \overline{z_1 + z_2} = 1 - 7i$$

$$\overline{z_1} + \overline{z_2} = (4-5i) + (-3-2i) = 1 - 7i$$

په پایله کې $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

$$z_1 \cdot z_2 = (4+5i)\cdot(-3+2i) = -12 - 10 + (8-15)i = -22 - 7i$$

$$\Rightarrow \overline{z_1 \cdot z_2} = -22 + 7i$$

$$\overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = (4-5i)\cdot(-3-2i) = -12 - 8i + 15i + 10i^2 = -12 - 8i + 15i - 10$$

$$= -22 + 7i$$

په پایله کې: $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = -22 + 7i$

دویم مثال: که $z = x + yi$ وي $z + \overline{z}$ او $z - \overline{z}$ پیداکړئ.

حل: $z - \overline{z} = (x+yi) - (x-yi) = 2yi$, $z + \overline{z} = (x+yi) + (x-yi) = 2x$

فعالیت

که $z = 2 + 3i$ وي، $\overline{\overline{Z}}, Z + \overline{Z}$ او $Z - \overline{Z}$ پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

1- د وېش حاصل يې پيدا کړئ:

$$\frac{7-i}{3-5i}\ ,\quad \frac{5-2i}{6-i}\ ,\quad \frac{3-4i}{2-5i}\ ,\quad \frac{1+i}{1-1}$$

2- که $z_1=-a-3bi$ او $z_2=2a-3bi$ وي. وښياست چې:

$\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$ او $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$ دی.

3- د وېش حاصل پيداکړئ او خپل ځوابونه د $a+bi$ په شکل وليکئ.

$$a:\frac{2}{5-i}\qquad b:\frac{3-i}{2+i}\qquad c:\frac{2-3i}{3}$$

4- د $\frac{6+\sqrt{-36}}{3+\sqrt{-9}}$ د وېش حاصل مساوي دی په:

$a:1\qquad b:2\qquad c:3i\qquad d:-2$

5- خپل ځوابونه د $a+bi$ په شکل وليکئ.

$$\frac{3+4i}{4i}\qquad \frac{-5}{2-3i}\qquad \frac{6}{1+3i}$$

$$\frac{7}{7-2i}\qquad \frac{-4+8i}{2-4i}\qquad \frac{3-2i}{-6+4i}$$

$$\frac{1}{i}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مختلطو عددونو په ساحه کې د دويمې درجې يو مجهوله معادلې حل:

$$x^2+x+4=0$$
$$x_1=?$$
$$x_2=?$$

آيا د $x^2+x+4=0$ معادلې جذرونه پيدا کولای شئ؟

د يوې دويمې درجې يو مجهوله معادلې عمومي شکل $ax^2+bx+c=0$ ، $(a\neq 0)$ دی.

که $\Delta=b^2-4ac>0$ معادله دوه د مختلفو علامو لرونکي حقيقي جذرونه لري.

که $\Delta=0$ معادله دوه مساوي جذرونه لري.

که $\Delta<0$ معادله د حقيقي عددونو په سټ کې حل نه لري، خو د مختلطو عددونو په ساحه کې دوه جذرونه لري.

لومړی مثال: د $x^2-10x+26=0$ معادله حل کړئ.

حل: $a=1 \quad b=-10 \quad c=26$ دي.

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{10\pm\sqrt{(-10)^2-4\cdot1\cdot26}}{2\cdot1}=\frac{10\pm\sqrt{-4}}{2}$$
$$=\frac{10\pm2i}{2}=5\pm i \qquad \Rightarrow \qquad x_1=5+i \qquad x_2=5-i$$

فعاليت

دا جذرونه په پورتنۍ معادله کې وضع او امتحان يې کړئ.

دويم مثال: د $4x^2+4i\ x+15=0$ معادله حل کړئ.

حل:

$$\Delta=b^2-4ac=(4i)^2-4\cdot4\cdot15=16i^2-240=-256$$
$$\pm\sqrt{\Delta}=\pm\sqrt{-256}=\pm\sqrt{256(-1)}=\pm16i$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x_1 = \frac{-4i+16i}{2\cdot 4} = \frac{12i}{8} = \frac{3}{2}i$$
$$x_2 = \frac{-4i-16i}{8} = -\frac{5}{2}i$$

دريم مثال: $x^2+3ix-2=0$ معادله د محمد بن موسی د فورمول په مرسته، د مختلطو عددونو په ساحه کې حل کړئ.

$$\Delta = b^2-4ac = (3i)^2-4\cdot 1\cdot(-2) = 3^2\cdot i^2+8 = -9+8 = -1$$
$$\pm\sqrt{\Delta} = \pm\sqrt{-1} = \pm i$$
$$x_{1,2} = \frac{-3i\pm i}{2\cdot 1} \qquad x_1 = \frac{-4i}{2} = -2i \qquad x_2 = \frac{-2i}{2} = -i$$

فعالیت

د $x^2+3=0$ ، $x^2-6x+18=0$ او $x^2-4x+13=0$ معادلې حل کړئ.

پوښتنې

1) هغه دويمه درجه معادله پيدا کړئ چې جذرونه يې $(3+2i)$ او $(3-2i)$ وي.

2) لاندې معادلې حل کړئ.

$$x^2-4x+13=0 \;,\; x^2-6x+18=0 \;,\; -4x^2+3x-5=0$$
$$x^2+8x+41=0 \;,\; x^4-1=0 \;,\; 3x^2+x+2=0$$

3) داسې دويمې درجې معادلې په لاس راوړئ چې جذرونه يې په لاندې ډول راکړل شوي دي.

$2+5i \;,\; 2-5i$	$1+i \;,\; 1-i$
$4i \;,\; -4i$	$5i \;,\; -5i$
$2i \;,\; 3i$	$i \;,\; \frac{1}{i}$
$\frac{2}{3}+\frac{1}{2}i \;,\; \frac{2}{3}-\frac{1}{2}i$	$2-i \;,\; 2+i$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د څپرکي لنډيز

• منفي عددونه د حقيقي عددونو په سټ کې جفت جذرنه لري، خو د مختلطو عددونو په سټ کې منفي عددونه جفت جذر لري.

• مختلط عددونه د حقيقي او موهومي عددونو له يو ځای کېدو څخه په لاس راځي.

• د حقيقي عددونو مربع مثبت، خو د موهومي عددونو مربع منفي ده

$$i^2 = -1 \Rightarrow i = \sqrt{-1}$$

• داسې عددونو ته چې $\sqrt{-1}$ يې يو فکتور وي، موهومي عددونه وايي.

• د مختلطو عددونو سټ C په لاندې ډول تعريف شوی دی:

$$C = \{z / z = a + bi, \mathrm{a, b} \in \mathrm{IR}, \mathrm{i} = \sqrt{-1}\}$$

• د يو مختلط عدد معياري شکل $\mathrm{z = a + bi}$ دی چې a ته د z د عدد حقيقي برخه او bi ته د z موهومي برخه وايي يا $a = \mathrm{Re}(z)$ او $\mathrm{bi = Img(z)}$

• د i د مختلفو توانونو د پيداکولو لپاره د i توان پر 4 وېشو چې له يوه سره مساوي کېږي او که پوره پرې نه وېشل کېږي، نو د i د توري توان پر 4 د وېشلو له پاتې (باقي مانده) سره مساوي دی، لکه:

$$\mathrm{(i)^{1379} = i^{4 \cdot 344} \cdot i^3 = (1)(i)^3 = -i} \quad \text{يا} \quad i^{4k+r} = i^r$$

• که د $\mathrm{z = a + bi}$ په مختلط عدد کې $b = 0$ وي، نو a ته خالص حقيقي عدد او که $a = 0$ وي، bi ته خالص موهومي عدد وايي.

• هغه مختلط عدد چې حقيقي او موهومي برخې يې دواړه صفرونه وي، صفري مختلط عدد ورته وايي. $\mathrm{(a = 0, b = 0)}$

• دوه مختلط عددونه هغه وخت سره مساوي دي چې د دواړو عددونو حقيقي او موهومي برخې يو له بله سره مساوي وي. $\mathrm{Re}(z_1) = \mathrm{Re}(z_2)$ او $\mathrm{Im\,g}(z_1) = \mathrm{Im\,g}(z_2)$

• د دوو مختلطو عددونو د جمعې حاصل يو بل داسې مختلط عدد دی چې حقيقي برخه يې د دواړو عددونو د حقيقي برخو او موهومی برخه يې د دواړو عددونو د موهومي برخو له مجموعې

(c) ketabton.com: The Digital Library

څخه عبارت ده.

• د دوو مختلطو عددونو د تفریق حاصل داسې یو مختلط عدد دی چې حقیقي برخه یې د دواړو عددونو د حقیقي برخو او موهومي برخه یې د دواړو عددونو د موهومي برخو د تفریق له حاصل څخه عبارت ده.

•که $z_1 = x_1 + y_1 i$ او $z_2 = x_2 + y_2 i$ وي، نو د مختلطو عددونو د جمعې، تفریق، ضرب او وېش عملیې داسې تعریف شوي دي.

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i$$
$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)i$$
$$z_1 . z_2 = x_1 x_2 - y_1 y_2 + (x_1 y_2 + y_1 x_2)i$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{y_1 x_2 - y_2 x_1}{x_2^2 + y_2^2}.i \quad , \quad (z_2 \neq 0)$$

• د $z = x + yi$ مختلط عدد مزدوج له $\overline{Z} = x - yi$ څخه عبارت دی.

$$z\overline{z} = x^2 + y^2 \qquad \overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$$
$$z + \overline{z} = 2x \qquad \overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$$
$$z - \overline{z} = 2yi \qquad \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = \overline{z_2} \cdot \overline{z_1}$$
$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$$

• د $z = a + bi$ عدد جمعي معکوس $-a - bi$ دی او ضربي معکوس یې $\frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i$ دی.

• $0 + 0i = (0,0)$ د مختلطو عددونو د جمعې د عملیې د عینیت عنصر او $1 + 0i$ د ضرب د عملیې د عینیت عنصر دی.

• هغه دویمه درجې معادلې چې د حقیقي عددونو په سټ کې حل نه لري، د مختلطو عددونو په سټ کې حل لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د فصل پوښتنې:

1) $(i)^{51}$ مساوي دي په:

a) 1 b) -1 c) i d) $-i$

2) i^{-98} موهومي عدد مساوي دی په:

a) 1 b) -1 c) i d) $-i$

3) i^{67} موهومي عدد مساوي دی په:

a) $-i$ b) 1 c) -1 d) i

4) $7i-4i$ مساوي دی په:

a) $-3i$ b) $3i$ c) 3 d) -3

5) $3i\cdot 4i$ مساوي دی په:

a) -12 b) 12 c) $12i$ d) $-12i$

6) $\frac{64i}{8i}$ مساوي دی په:

a) -8 b) 8 c) $8i$ d) $-8i$

7) $\frac{7}{9}i\cdot\frac{2}{9}i$ مساوي دی په:

a) $-\frac{14}{81}$ b) $\frac{14}{81}$ c) $-\frac{14}{81}i$ d) $\frac{14}{81}i$

8) $\frac{\sqrt{-11}}{\sqrt{-5}}$ مساوي دی په:

a) $\sqrt{\frac{11}{5}}$ b) $\frac{-11}{5}$ c) $\frac{-11}{5}i$ d) $\frac{11}{5}i$

9) $\frac{\sqrt{-1}\sqrt{5}}{\sqrt{-1}\cdot 5}$ مساوي دی په:

a) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ b) $-\frac{\sqrt{5}}{5}$ c) $\frac{5}{3}i$ d) دري واړه سم نه دي

(c) ketabton.com: The Digital Library

10) $-\frac{xi}{\sqrt{yi}}$ مساوي دی په:

a) $\frac{x}{\sqrt{y}}$ b) $\frac{-x}{\sqrt{y}}$ c) $\frac{xi}{\sqrt{y}}$ d) $\frac{x}{y}$

11) لاندې مختلط عددونه جمع کړئ.

$(3+4i)+(2+5i)$ $(a+bi)+(c+di)$

$(1+i)+(1-i)$ $(2+3i)+(2-3i)$

12) لاندې مختلط عددونه تفریق کړئ.

$(4+3i)-(4+4i)$ $(3-2i)-(3+2i)$

$(4+4i)-(4+3i)$ $(1+i)-(1-i)$

13) $(2a+ib)-(2a-ib)$ مساوي دي په:

a) $-ib$ b) $-2ib$ c) $2ib$ d) $4a$

14) $(2-3i)(2+3i)$ د ضرب حاصل مساوي دی په:

a) -13 b) $13i$ c) 13 d) $9i$

15) لاندې مختلط عددونه د $a+bi$ په شکل ولیکئ.

$4(2+5i)-(3-4i)$ $(4-3i)(2+i)$

$i(3-2i)^2$ i^{51}

16) که $z_1=2-4i$ او $z_2=1-i$ وي، وښیاست چې:

$\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$, $\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$, $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

17) د لاندې مختلطو عددونو جمعي او ضربي معکوس پیدا کړئ.

$3x-\frac{1}{2}yi$ $2a-bi$ $2+5i$ $-7+3i$ $-6+2i$ $3-i$ $\sqrt{2}+i$

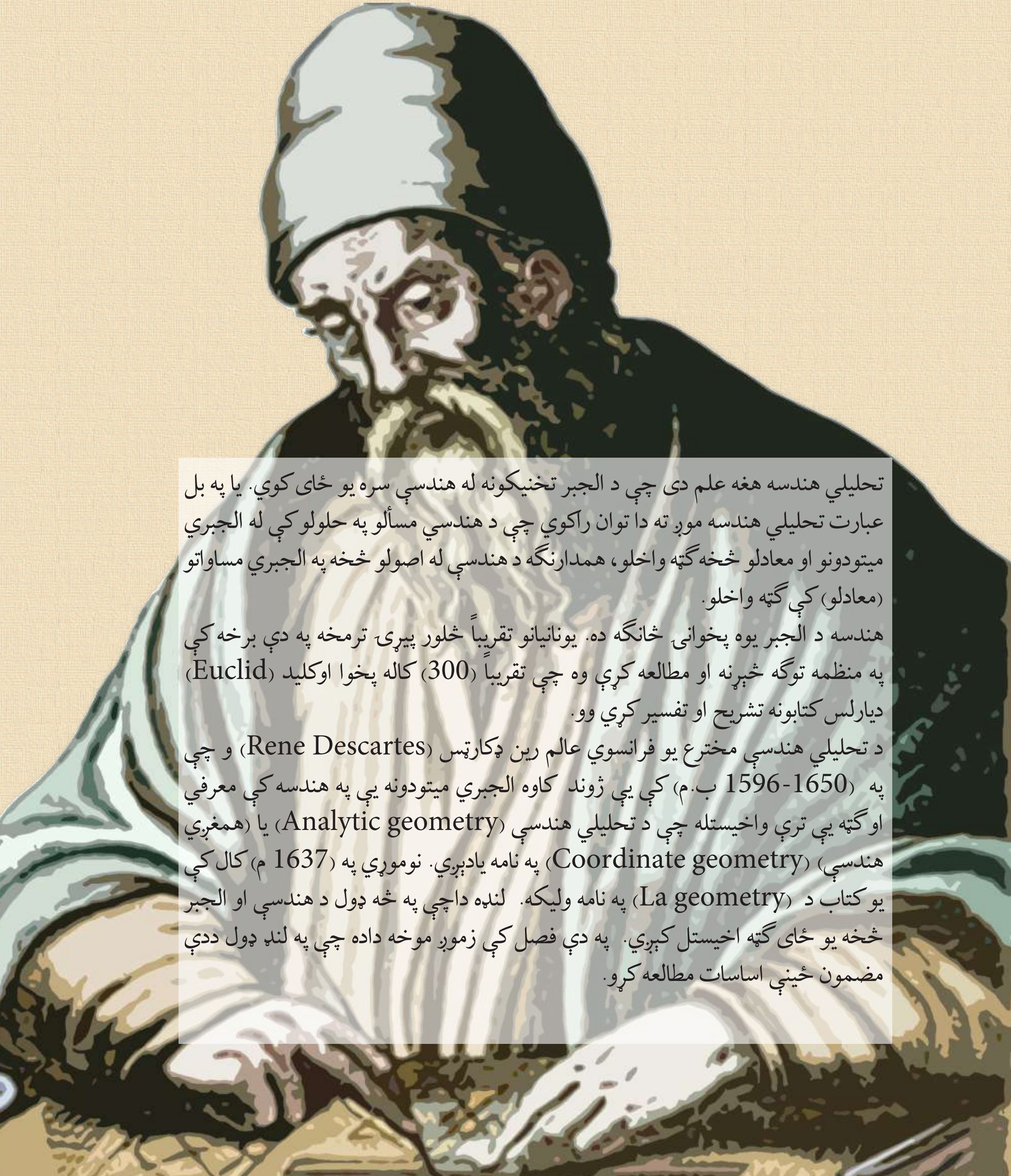
18) د $5x^2+2x+1=0$ معادله حل کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

اووم څپرکی

تحليلي هندسه

(c) ketabton.com: The Digital Library



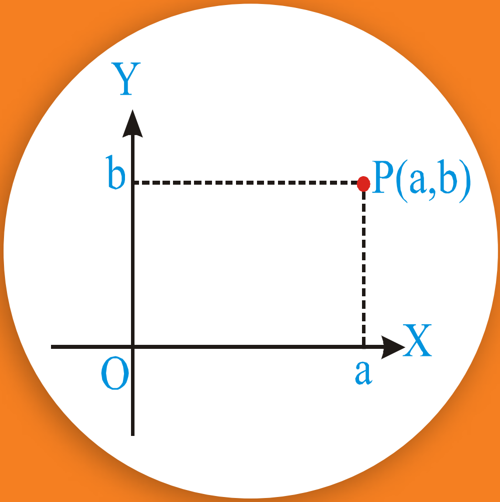
تحليلي هندسه هغه علم دی چې د الجبر تخنيکونه له هندسې سره يو ځای کوي. يا په بل عبارت تحليلي هندسه موږ ته دا توان راکوي چې د هندسي مسألو په حلولو کې له الجبري ميتودونو او معادلو څخه ګټه واخلو، همدارنګه د هندسې له اصولو څخه په الجبري مساواتو (معادلو) کې ګټه واخلو.

هندسه د الجبر يوه پخوانۍ څانګه ده. يونانيانو تقريباً څلور پيړۍ ترمخه په دې برخه کې په منظمه توګه څېړنه او مطالعه کړې وه چې تقريباً (300) کاله پخوا اوکليد (Euclid) ديارلس کتابونه تشريح او تفسير کړي وو.

د تحليلي هندسې مخترع يو فرانسوي عالم رين ډکارټس (Rene Descartes) و چې په (1596-1650 ب.م) کې يې ژوند کاوه الجبري ميتودونه يې په هندسه کې معرفي او ګټه يې ترې واخيستله چې د تحليلي هندسې (Analytic geometry) يا (همغږي هندسې) (Coordinate geometry) په نامه يادېږي. نوموړي په (1637 م) کال کې يو کتاب د (La geometry) په نامه وليکه. لنډه داچې په څه ډول د هندسې او الجبر څخه يو ځای ګټه اخيستل کېږي. په دې فصل کې زموږ موخه داده چې په لنډ ډول ددې مضمون ځينې اساسات مطالعه کړو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د وضعیه کمیاتو سیستم یا کوارډنټ سیستم
(Coordinate system)



آیا د $(0,-1)$ ، $(2,2)$ ، $(-4,7)$ ، $(2,0)$ او د $(0,-2)$ نقطې د وضعیه کمیاتو په سیستم کې ټاکلای شئ؟

فعالیت

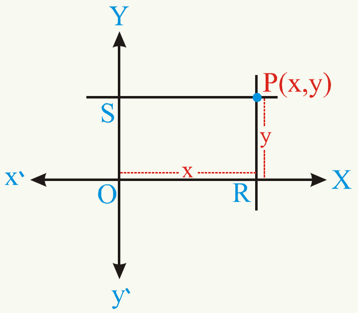
د وضعیه کمیاتو په مستوي کې د XX' او YY' یو پر بل دوه عمود خطونه رسم کړئ. ددې دوو خطونو د تقاطع ټکي (نقطې) ته (O) وایي چې د O نقطې ته د وضعیه کمیاتو د محورونو مبدا (Origin) وایي.

دوه یو پر بل عمود خطونه د کوارډنټ د محورونو (Coordinate axises) په نامه یادېږي. چې د XOX' افقي خط د X محور او د YOY' عمودي خط د Y له محور څخه عبارت دی. بنکاره ده ټول عددونه چې د X پر محور د مبدا ښي خواته واقع دي، مثبت او که د مبدا کیڼې خواته واقع وي، منفي دي. همدرانګه هغه عددونه چې د Y پر محور له مبدا پورته واقع دي، مثبت او که له مبدا لاندې واقع دي، منفي عددونه دي.

فرضوو چې که p په مستوي کې یوه نقطه وي، کولای شو چې د p نقطه د یوې مرتبې جوړې $(OrderPair)$ په واسطه وښایو. په دې ډول چې د p له نقطې څخه د X او Y له محورونو سره موازي مستقیم خطونه رسموو. چې دا مستقیم خطونه د Y محور د S په نقطه کې او د X محور د R په نقطه کې قطع کوي. چې د $\overline{OR}$ مستقیمه فاصله $\overline{OR}=x$ او $\overline{OS}=y$ ده. په نتیجه کې د p د نقطې موقعیت د (x,y) د مرتبې جوړې په واسطه د وضعیه کمیاتو په سیستم کې ټاکل کېږي.

په مستوي کې هره مرتبه جوړه د یوې نقطې په واسطه او د مستوي هره نقطه د (x,y) د حقیقي عددونو د مرتبې جوړې په واسطه ښودل کېږي. چې x او y د X او Y له محورونو څخه د p د

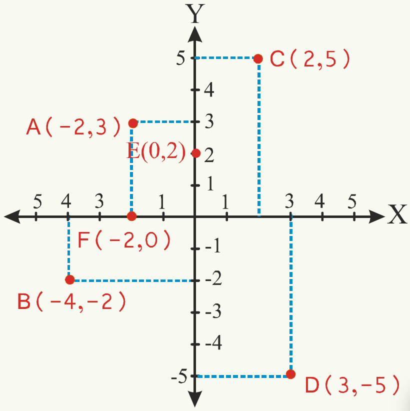
(c) ketabton.com: The Digital Library



نقطې مستقیمې فاصلې دي چې دې سیستم ته کارتیزني یا کوارډنټ سیستم (Coordinate System) وایي. د مرتبې جوړې لومړنی مرکبې ته د x مختصه او دویمې ته د y مختصه (Y-Coordinate) وایي. د کوارډنټ محورونه مستوي په څلورو ناحیو (ربعو) (quadrants) وېشي. په دې ډول چې په لومړنی ناحیه (ربع) کې، $x > 0$ ، $y > 0$ په دویمه ربع کې $x < 0$ ، $y > 0$ په دریمه ربع کې $x < 0$ ، $y < 0$ او په څلورمه ربع کې $x > 0$ او $y < 0$ دي.

لومړی مثال: د $A(-2,3)$ ، $B(-4,-2)$ ، $C(2,5)$ ، $D(3,-5)$ ، $E(0,2)$ او $F(-2,0)$ نقطې د وضعیه کمیاتو په سیستم کې وټاکئ.

حل:



فعالیت

• وښیاست کومې نقطې چې د X پر محور پرتې دي، د y مختصې یې صفر او کومې نقطې چې د Y پر محور پرتې دي، د x مختصې یې صفر دي.

• ووایاست چې د (2,3)، (−2,3)، (2,−3)، (−2,−3)، (0,4) او (4,0) نقطې په کومو ربعو کې واقع دي.

د دوو نقطو ترمنځ فاصله (Distance between two points):

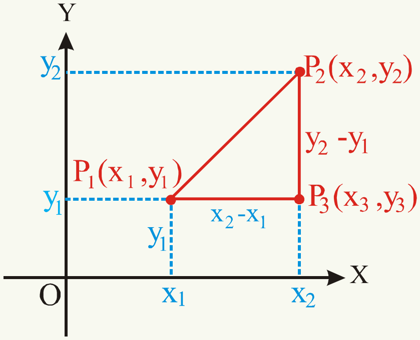
آیا کولای شئ چې و وایاست، د $A(4,8)$ او $B(1,2)$ د نقطو تر منځ فاصله څو واحده ده؟

که $P_1\ (x_1 , y_1)$ او $P_2\ (x_2 , y_2)$ په مستوي کې دوې نقطې وي. موږ کولای شو چې د P_1 او

(c) ketabton.com: The Digital Library

P_2 ترمنځ فاصله یا $d = \left| P_1 P_2 \right|$ د دوو نقطو ترمنځ فاصله د $P_1\overset{\Delta}{P_3}P_2$ د قایم الزاویه مثلث له مخې د فیثاغورث د قضیې په اساس پیداکړو، لکه څرنګه چې په شکل کې لیدل کېږي.

$$(\overline{P_1 P_2})^2 = (\overline{P_1 P_3})^2 + (\overline{P_2 P_3})^2$$
$$d = \left|P_1 P_2\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$
$$= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

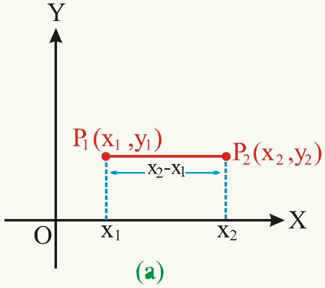


پام مو وي چې که د $P_1\ (x_1, y_1)$ او $P_2\ (x_2, y_2)$ نقطې پر افقي خط باندې واقع وي، په دې حالت کې $y_1 = y_2$ کېږي، لکه: څرنګه چې د (a) په شکل کې لیدل کېږي.

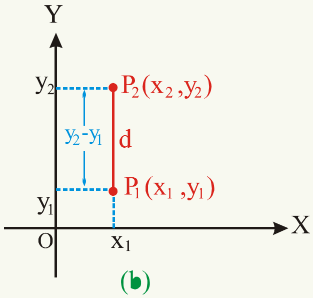
$$d = \left|P_1 P_2\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + 0} = \left|x_2 - x_1\right|$$

او که د P_1 او P_2 نقطې پر عمودي خط باندې واقع وي، په دې حالت کې $x_1 = x_2$ دی، لکه: چې د (b) په شکل کې ښودل شوي دي.

$$d = \left|P_1 P_2\right| = \sqrt{0 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(y_2 - y_1)^2} = \left|y_2 - y_1\right|$$



(a)



(b)

دویم مثال: د $P_1\ (3,-2)$ او $P_2\ (-1,-5)$ نقطو ترمنځ فاصله پیداکړئ.

حل:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\overline{P_1P_2}=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$
$$=\sqrt{(-1-3)^2+[-5-(-2)]^2}=\sqrt{(-4)^2+(-3)^2}=\sqrt{25}=5$$

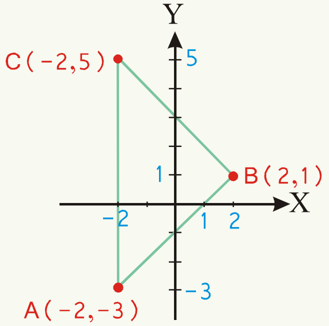
فعالیت

د $P_1\,(8,0)$ او $P_2\,(2,0)$ نقطو ترمنځ فاصله پیدا کړئ.

دریم مثال: د فاصلې د فورمول په مرسته وښیاست چې $A(-2,-3)$ ، $B(2,1)$ او $C(-2,5)$ د یو قایم الزاویه مثلث رأسونه دي.

حل:

$$|AB|=\sqrt{[2-(-2)]^2+[1-(-3)]^2}=\sqrt{32}$$
$$|BC|=\sqrt{(-2-2)^2+(5-1)^2}=\sqrt{32}$$
$$|CA|=\sqrt{[-2-(-2)]^2+[5-(-3)]^2}=\sqrt{64}$$
$$|AB|^2+|BC|^2=32+32=64$$
$$|CA|^2=64$$



څرنګه چې: $|CA|^2=|AB|^2+|BC|^2$ دی نو د $A\overset{\Delta}{B}C$ مثلث یو قایمه زاویه مثلث دی.

فعالیت

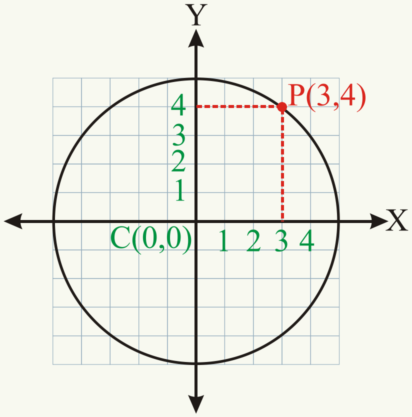
وښیاست چې $A(-6,3)$ ، $B(3,-5)$ او $C(-1,5)$ نقطې د قایمه زاویه مثلث راسونه دي.

څلورم مثال: که $C(0,0)$ د دایرې مرکز او د $P(3,4)$ نقطه د دایرې د محیط یوه نقطه وی، ددې دایرې د شعاع اوږدوالی پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل:

$$\overline{PC} = R = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(3-0)^2 + (4-0)^2}$$
$$= \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$



د وضعیه کمیاتو په مستوي کې هغه نقطې چې د X پر محور پرتې دي، د Y مختصې یې صفر او کومې نقطې چې د Y پر محور پرتې دي د X مختصې یې صفر دي.

د $P(x_1, y_1)$ او $Q(x_2, y_2)$ د دوو نقطو تر منځ فاصله د $d = |PQ| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ له فورمول څخه په لاس راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

1- په لاندې راکړل شوو نقطوکې د کومې نقطې فاصله د وضعیه کمیاتو له مبدا څخه 15 واحده ده؟

$a:(\sqrt{176},7)$

$b:(10,-10)$

$C:(1,15)$

$d:(\frac{15}{2},\frac{15}{2})$

2- وښیاست چې د $A(0,2)$ ، $B(\sqrt{3},1)$ او $C(0,-2)$ نقطې د یو قایمه زاویه مثلث راسونه دي.

3 - د $(0,5)$ او $(0,-3)$ نقطو تر منځ فاصله پیدا کړئ.

4 - د $A(-\frac{1}{2},3)$ او $B(-1,\frac{-3}{4})$ نقطو تر منځ فاصله پیدا کړئ.

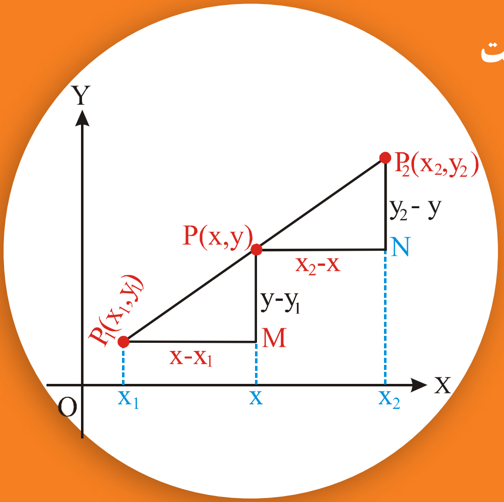
5 - د $(7,11)$ او $(1,3)$ نقطو ترمنځ فاصله پیداکړئ.

6 - د $(3,6)$ او $(1,2)$ نقطو ترمنځ فاصله پیداکړئ.

7 - د $(3,7)$ او $(12,19)$ نقطو ترمنځ فاصله پیداکړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د هغې نقطې د وضعيه کمياتو پيدا کول چې يو قطعه خط په يوه نسبت باندې وېشي:



آيا کولای شئ د هغه مستقيم خط د تنصيف د نقطې وضعيه کميات پيدا کړئ چې د $A(3,1)$ او $B(-2,4)$ له نقطو څخه تېرېږي؟

که د p د نقطې وضعيه کميات (x,y) وي

چې د $\overline{P_1P_2}$ مستقيم خط د r په نسبت وېشي يا $\frac{P_1P}{PP_2}=r$ وي. د $P_1\overset{\Delta}{M}P$ او $P\overset{\Delta}{N}P_2$ د مثلثونو له مشابهت څخه لرو چې:

$$\frac{P_1P}{PP_2}=\frac{PM}{P_2N}=\frac{y-y_1}{y_2-y}=r$$

$$y-y_1=ry_2-ry$$

$$y+ry=ry_2+y_1$$

$$(1+r)y=ry_2+y_1$$

$$y=\frac{y_1+ry_2}{1+r}$$

$$\frac{P_1P}{PP_2}=\frac{P_1M}{PN}=\frac{x-x_1}{x_2-x}=r$$

$$x-x_1=rx_2-rx$$

$$x+rx=rx_2+x_1$$

$$(1+r)x=rx_2+x_1$$

$$x=\frac{x_1+rx_2}{1+r}$$

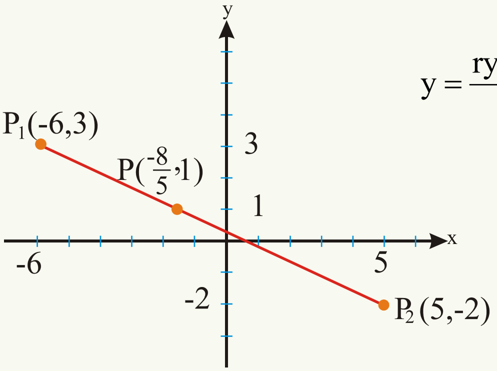
لومړی مثال: د P نقطې وضعيه کميات پيدا کړئ، که هغه مستقيم خط چې د $P_1(-6,3)$ او $P_2(5,-2)$ له نقطو څخه تېرېږي د $\frac{2}{3}$ په نسبت و وېشي يا $\frac{P_1P}{PP_2}=\frac{2}{3}$ وي.

حل

$$x_1=-6 \qquad x_2=5 \qquad r=\frac{2}{3}$$

$$x=\frac{rx_2+x_1}{1+r}=\frac{\frac{2}{3}\cdot 5-6}{1+\frac{2}{3}}=-\frac{8}{5}$$

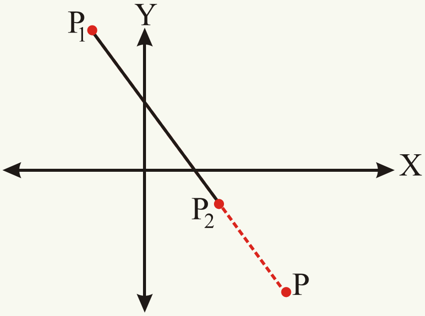
(c) ketabton.com: The Digital Library



$$y=\frac{ry_2+y_1}{1+r}=\frac{\frac{2}{3}(-2)+3}{1+\frac{2}{3}}=\frac{\frac{-4}{3}+3}{1+\frac{2}{3}}=1$$

نو د p نقطې وضعیه کمیات $P(\frac{-8}{5},1)$ دي چې د $\overline{P_1P_2}$ خط د $\frac{2}{3}$ په نسبت وېشي.

متوجه باید اوسو چې که د p نقطه د $\overline{P_1P_2}$ قطعه خط داخلاً د r په نسبت و وېشي، $r>0$ او که خارجاً يې و وېشي، نو $r<0$ دی.



د مثال په ډول په شکل کې لیدل کېږي چې که د p نقطه د $\overline{P_1P_2}$ قطعه داخلاً د r په نسبت ووېشي یا په بل عبارت که P_1P او PP_2 همجهت وي، $r>0$ او که د p نقطه د $\overline{P_1P_2}$ قطعه خط خارجاً د r په نسبت ووېشي یا داچې P_1P او PP_2 مختلف الجهت وي، $r<0$ دی، نو $\frac{P_1P}{PP_2}=-r$ لکه: چې په پورتني شکل کې لیدل کېږي.

دويم مثال: د p د نقطې وضعیه کمیات پیدا کړئ، که هغه مستقیم خط چې د $P_1\ (-8,4)$ او $P_2\ (2,-1)$ له نقطو څخه تېرېږي.

a : داخلاً يې د $\frac{2}{3}$ په نسبت و وېشي. b: خارجاً يې د $\frac{2}{3}$ په نسبت و وېشي.

د a حل:

$$r=\frac{2}{3}$$

$$x=\frac{rx_2+x_1}{1+r}=\frac{\frac{2}{3}\cdot 2-8}{1+\frac{2}{3}}=\frac{-20}{5}=-4\ ,\ y=\frac{ry_2+y_1}{1+r}=\frac{\frac{2}{3}(-1)+4}{1+\frac{2}{3}}=\frac{10}{5}=2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو د p د نقطې وضعیه کمیات چې د $\overline{P_1P_2}$ قطعه خط داخلاً د $\frac{2}{3}$ په نسبت وېشي له $(-4,2)$ څخه عبارت دي

د b حل: څرنګه چې د p نقطه د $\overline{P_1P_2}$ قطعه خط خارجاً د $\frac{2}{3}$ په نسبت وېشي، نو:

$$r=-\frac{2}{3}$$

$$x=\frac{(\frac{-2}{3})\cdot 2-8}{1-\frac{2}{3}}=-28\quad,\quad y=\frac{(\frac{-2}{3})(-1)+4}{1-\frac{2}{3}}=14$$

د p د نقطې وضعیه کمیات چې د $\overline{P_1P_2}$ قطعه خط خارجاً د $\frac{2}{3}$ په نسبت وېشي له $(-28,14)$ څخه عبارت دي.

فعالیت

د p د نقطې وضعیه کمیات پیدا کړئ، په داسې حال کې هغه قطعه خط چې د $A(4,6)$ او $B(-2,3)$ له نقطو څخه تېرېږي، داخلاً یې د $\frac{1}{2}$ په نسبت و وېشي.

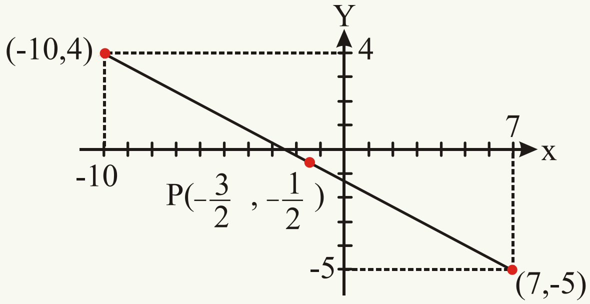
که د p نقطه د $\overline{P_1P_2}$ د مستقیم خط د تنصیف نقطه وي، په دې حالت کې $r=1$ دی او د p نقطې وضعیه کمیات عبارت دي له: $x=\frac{x_1+x_2}{2}$ او $y=\frac{y_1+y_2}{2}$

دریم مثال: د هغه قطعه خط د تنصیف د نقطې وضعیه کمیات پیدا کړئ چې د $(-10,4)$ او $(7,-5)$ له نقطو څخه تېرېږي.

حل:

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{-10+7}{2}=-\frac{3}{2}\qquad y=\frac{y_1+y_2}{2}=\frac{4-5}{2}=-\frac{1}{2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



د p د نقطي وضعيه کميات چې د $\overline{P_1 P_2}$ قطعه خط د r په نسبت وېشي.

د $x=\frac{rx_2+x_1}{1+r}$, $y=\frac{ry_2+y_1}{1+r}$ او د $P_1 P_2$ قطعه خط د تنصيف د نقطي وضعيه کميات عبارت دي له: $y=\frac{y_1+y_2}{2}$ □ $x=\frac{x_1+x_2}{2}$ که د p نقطه د $\overline{P_1 P_2}$ قطعه خط داخلاً د r په نسبت و وېشي، نو r مثبت او که خارجاً يې و وېشي، نو r منفي دی.

پوښتني

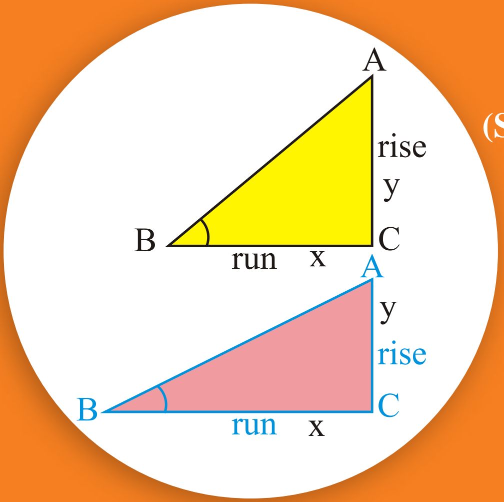
1 - د $\overline{AB}$ مستقيم خط د تنصيف د نقطي وضعيه کميات $(2,-1)$ دي، که $A(-1,-3)$ وي، د B د نقطي وضعيه کميات پيدا کړئ.

2 - د هغه قطعه خط د تنصيف نقطي وضعيه کميات پيداکړئ چې د $A(3,1)$ او $B(-2,-4)$ له نقطو څخه تېرېږي.

3 - د هغې نقطي وضعيه کميات پيداکړئ په داسې حال کې هغه قطعه خط چې د $A(4,6)$ او $B(-2,3)$ له نقطو څخه تېرېږي

a: داخلاً يې د $\frac{1}{2}$ په نسبت و وېشي. b: خارجاً يې د $\frac{1}{2}$ په نسبت و وېشي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

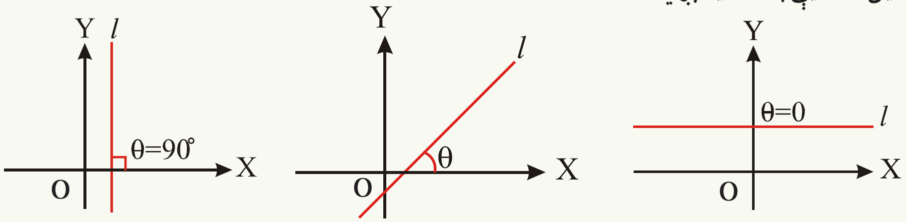


د یو مستقیم خط میل

(Slope of a straight Line)

کولای شئ چې ووایئ د کومې مایلې سطحې میل زیات دی؟

د □ زاویه چې د l مستقیم خط یې د X د محور له مثبت جهت سره جوړوي، د مستقیم خط د میل د زاویې په نامه یادیږي.



لکه څرنګه چې په شکل کې لیدل کیږي که د l خط د X له محور سره موازي وي 0 =□ او که د Y له محور سره موازي وي، نو $90°$ =□ ده.

څه وخت چې موږ پر مایله سطحه (inclined plane) پورته خواته حرکت کوو، په یو وخت کې افقي فاصله (run) او عمودي فاصله (rise) طې کوو. که د AB د مستقیم خط میل په m و ښایو.

$$m = \frac{rise}{run} = \frac{y}{x} = \tan\theta$$

د مستقیم خط میل د هغه زاویې له tan څخه عبارت دی چې مستقیم خط یې د x د محور له مثبت جهت سره جوړوي، که $0 < \theta < 90°$ وي، نو د مستقیم خط میل مثبت او که $90° < \theta < 180°$ وي میل منفي دی او که $\theta = 0$ وي $\tan 0° = 0$ دی، نو میل یې صفر او که $\theta = 90°$ وي، نو په دې حالت کې د مستقیم خط میل تعریف شوی نه دی، ځکه چې $\tan\ 90°$ تعریف شوی نه دی.

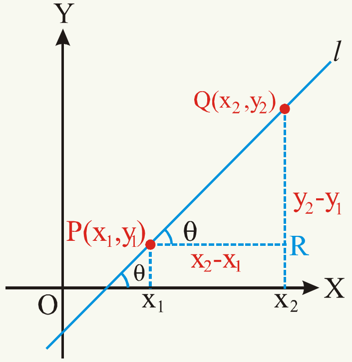
(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیت

د X او Y د محورونو د میل په برخه کې څه فکر کوئ؟

د هغه مســتقیم خط میل چې عمود نه وي او د $P(x_1 y_1)$ او $Q(x_2, y_2)$ له نقطو څخه تیرېږي.

$\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \tan\theta = m$ دی، څکه لکه څرنګه چې په شکل کې لیدل کېږي.



$$R\hat{P}Q = \hat{\theta}$$

$$\overline{PR} = x_2 - x_1$$

$$\overline{QR} = y_2 - y_1$$

$$m = \tan\theta = \frac{QR}{PR} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

که د A، B، او C دري نقطې داسې ولرو چې د $\overline{AB}$ د مستقیم خط میل د $\overline{BC}$ د مستقیم خط له میل سره مساوي وي، نو د A، B، او C نقطې په یوه مستقیم خط باندې واقع دي.

لومړی مثال: د هغه مستقیم خط میل پیداکړئ چې د $P_1\ (2,4)$ او $P_2\ (6,10)$ له نقطو څخه تیرېږي.

حل:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{10-4}{6-2} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

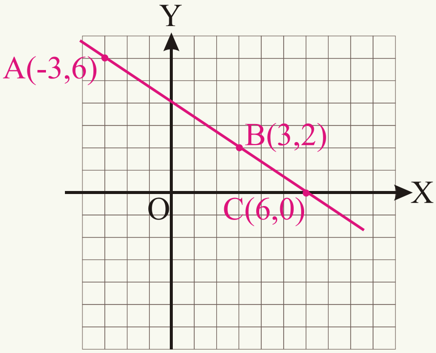
یا:

$$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{4-10}{2-6} = \frac{-6}{-4} = \frac{3}{2}$$

دویم مثال: و ښیاست چې د $A(-3,6)$، $B(3,2)$ او $C(6,0)$ دري نقطې پر یوه مستقیم خط باندې واقع دي.

$$\text{د } \overline{AB} \text{ مستقیم خط میل} = \frac{2-6}{3-(-3)} = \frac{-4}{6} = -\frac{2}{3}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



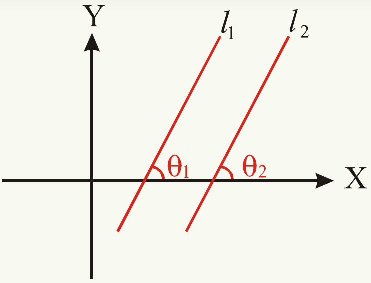
$= -\frac{2}{3} = \frac{0-2}{6-3}$ د $\overline{BC}$ د مستقیم خط میل

څرنګه چې د $\overline{AB}$ او $\overline{BC}$ مستقیمو خطونو میلونه سره مساوي دي.نو د A، B او C نقطې په یوه مستقیم خط باندې واقع دي.

نتیجه: د یوه مستقیم خط میل د مستقیم خط په ټولو نقطو کې سره مساوي دی.

فعالیت

- د هغه مستقیم خط میل پیدا کړئ چې د $(-2,4)$ او $(5,1)$ له نقطو څخه تېرېږي.
- د مستقیم خط د میل په مرسته وښیاست چې د $(4,-5)$، $(7,5)$ او $(10,15)$ نقطې پر یوه مستقیم خط پرتې دي.



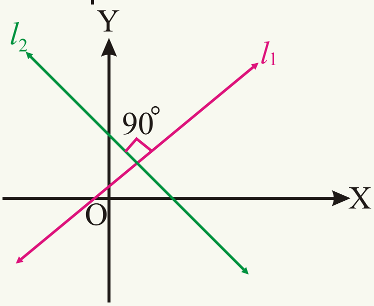
که د l_1 او l_2 دوه مستقیم خطونه وي او میلونه یې په ترتیب سره m_1 او m_2 وي، نو:

1- که l_1 د l_2 سره موازي وي $m_1 = m_2$ دی.

ځکه چې د شکل مطابق $\theta_1 = \theta_2$ دی

$\tan\theta_1 = \tan\theta_2$

$m_1 = m_2$



2- که l_1 او l_2 یو پر بل عمود وي، نو:

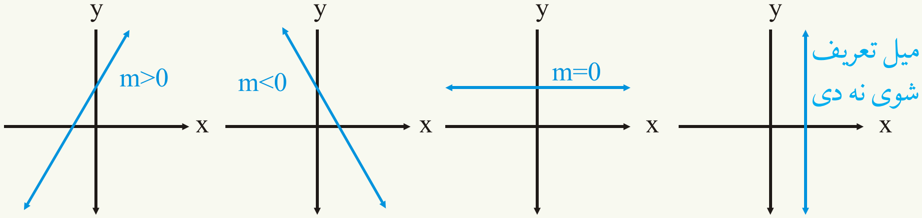
$m_1 = -\frac{1}{m_2}$ یا $m_1 m_2 + 1 = 0$ یا

$m_1 \cdot m_2 = -1$ دی.

د یو مستقیم خط میل چې د $P_1(x_1, y_1)$ او د $P_2(x_2, y_2)$ له نقطو څخه تېرېږي، د $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$ له فورمول څخه په لاس راځي د X د محور او د هغو مستقیمو

(c) ketabton.com: The Digital Library

خطونو میل چې د X له محور سره موازي وي صفر او د Y د محور او د هغو مستقیمو خطونو میل چې د Y له محور سره موازي وي تعریف شوی نه دی. که د یوه مستقیم خط د میل زاویه حاده وي، میل یې مثبت او که منفرجه وي، میل یې منفي دی او که د مستقیم خط د میل زاویه صفر وي، میل یې صفر دی.



پوښتني

1 - د هغه مستقیم خط میل پیدا کړئ چې د $(3,-2)$ او $(2,7)$ له نقطو څخه تیریږي.

2 -که $A(8,6)$ ، $B(-4,2)$ او $C(-2,-6)$ د یو مثلث رأسونه وي، د مثلث د هرې ضلعې میل پیدا کړئ.

3 - د مستقیم خط د میل په مرسته و ښیاست چې د $(a,2b)$ ، $(c,a+b)$ او $(2c-a,2a)$ نقطې پر یو مستقیم خط باندې واقع دي.

4 - د $\overline{AB}$ مستقیم خط چې د $A(1,-2)$ او $B(2,4)$ له نقطو او د $\overline{CD}$ مستقیم خط چې د $C(4,1)$ او $D(-8,2)$ له نقطو څخه تیریږي، دا دواړه خطونه سره:

a: موازي دي b: عمود دي c: هیڅ یو

5 - د $y=3$ مستقیم خط او د $x=3$ مستقیم خط یو له بله سره څه اړیکه لري؟

a - موازي دي b - عمود دي c - هیڅ یو

6 - د $x=-1$ او $x=3$ خطونه سره: a - موازي دي b - عمود دي c - هیڅ یو

7 - د $y=-\sqrt{3}$ مستقیم خط میل مساوي دی په:

a - 1 b- صفر c- -1 d- تعریف شوی نه دی

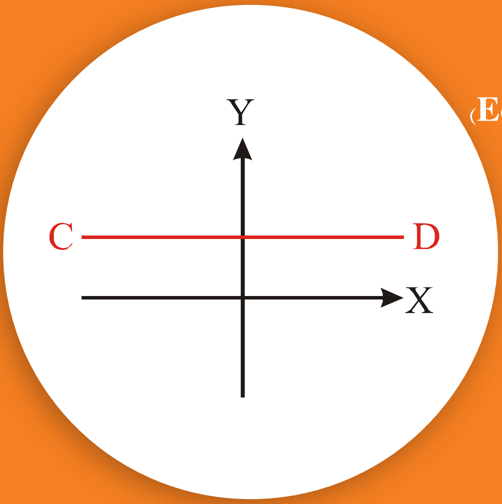
8 - د $x=0{,}03$ مستقیم خط میل مساوي دی په:

a - 1 b- صفر c- -1 d- تعریف شوی نه دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

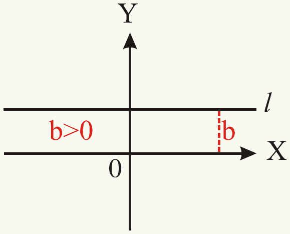
د یو مستقیم خط معادله

(Equation of a straight Line)



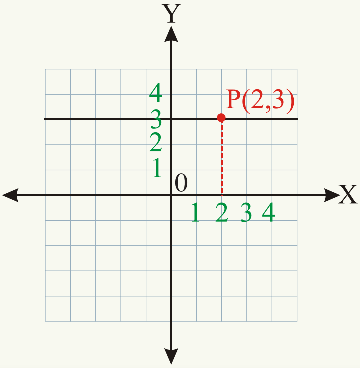
آیاکولای شئ د $\overline{CD}$ د مستقیم خط معادله پیداکړئ چې د X له محور سره موازي وي.

1-د هغه مستقیم خط معادله چې د X له محور سره موازي وي.



ټولې نقطې چې د l پر مستقیم خط پرتې وي، د X له محور څخه مساوي فاصلې لري یا په بل عبارت د ټولو هغو نقطو د y مختصې چې د X له محور سره پر موازي خط واقع دي سره مساوي دي. که د X له محور څخه د l د خط فاصلې ته (b) ووایو د l د مستقیم خط معادله $y = b$ ده.

که $b > 0$ وي، نو د l خط د X له محور څخه پورته او که $b < 0$ وي، نو د l خط د X له محور لاندې او که $b = 0$ وي، نو د l خط د X پر محور پروت دی.



لومړی مثال: د هغه مستقیم خط معادله پیداکړئ چې د (2,3) له نقطې څخه تیریږي او د X له محور سره موازي وي.

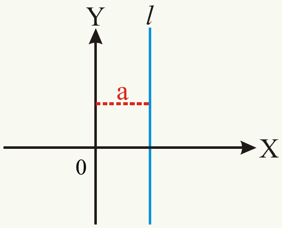
حل: $y = 3$ ددې خط معادله ده

فعالیت

د X د محور معادله پیداکړئ.

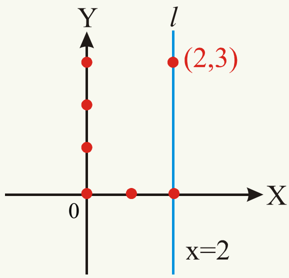
(c) ketabton.com: The Digital Library

2 - د هغه مستقیم خط معادله چې د Y له محور سره موازي وي: ټولې نقطې چې



د l پر خط چې د Y له محور سره موازي دی، پرتې وي، د Y لـه محور څخه مساوي فاصلې لري که د Y لـه محور څخه د l د مستقیم خط فاصلې تـه a و وایو چې a ددې نقطو لومړنی مختصه ده، نو د l د خط معادله $x = a$ ده.

که $a > 0$ وي د l خط د Y د محور ښي خواته او که $a < 0$ وي د l خط د Y د محور کیڼي خواته او که $a = 0$ وي، نو د l خط د Y پر محور منطبق دی.



دویم مثال: د هغه مستقیم خط معادله پیدا کړئ چې د (2,3) له نقطې څخه تېر شي او د Y له محور سره موازي وي.

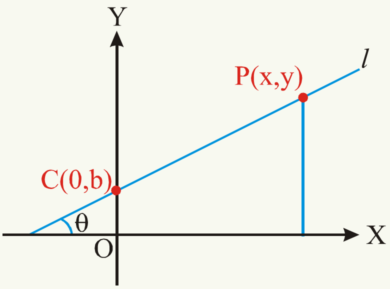
حل: $x = 2$ ددې خط معادله ده.

فعالیت

د Y د محور معادله ولیکئ.

3. د هغه مستقیم خط معادله چې میل او د Y له محور سره یې د تقاطع نقطه معلومه وي یا د مستقیم خط معیاري معادله:

که $P(x,y)$ د l مستقیم خط یوه نقطه وي او $C(0,b)$ د Y له محور سره د مستقیم خط د تقاطع نقطه وي، نو د l د مستقیم خط میل عبارت دی له:



$$m = \frac{y-b}{x-0} = \frac{y-b}{x}$$

$$y - b = mx \quad \text{یا} \quad y = mx + b$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که $b=0$ وي، د مستقیم خط معادله $y=mx$ ده چې په دې حالت کې مستقیم خط د وضعیه کمیاتو له مبدا څخه تېرېږي.

دریم مثال: د هغه مستقیم خط معادله پیدا کړئ چې:

a- میل یې 2 او د Y محور په 5 کې قطع کړي.

b- د Y محور په $\frac{4}{3}$ کې قطع کړي او پر هغه خط عمود وي چې میل یې -6 دی.

حل:

a: $m=2$ او $b=5$ $\quad y=mx+b \Rightarrow y=2x+5$

b: ددې خط میل $m_2=-\frac{1}{m_1}=-\frac{1}{-6}=\frac{1}{6}$

$b=\frac{4}{3}$ او $m=\frac{1}{6}$ دی؛ نو:

$$y=mx+b \Rightarrow y=\frac{1}{6}x+\frac{4}{3}$$

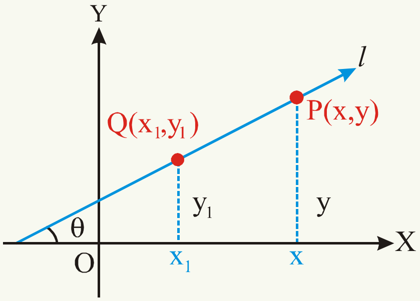
دا معادله کولای شو، د $6y=x+8$، $6y-x=8$ او یا $x-6y+8=0$ په شکل ولیکو.

4 - د هغه مستقیم خط معادله چې میل او یوه نقطه یې معلومه وي:

د l د مستقیم خط معادله چې میل یې m او د $Q(x_1,y_1)$ له نقطې څخه تېرېږي.

که $p(x,y)$ د l د مستقیم خط یوه اختیاري نقطه وي. څرنګه چې د $Q(x_1,y_1)$ او $P(x,y)$ نقطې په یوه مستقیم خط واقع دي، نو د l د مستقیم خط میل مساوي دی په:

$$m=\frac{y-y_1}{x-x_1} \Rightarrow y-y_1=m(x-x_1)$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

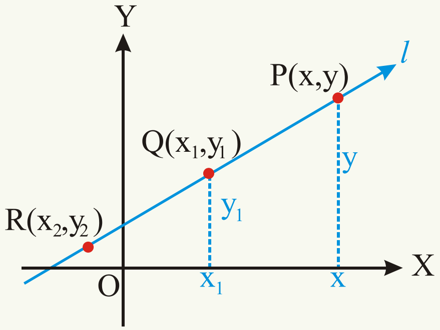
ځلورم مثال: د هغه مستقیم خط معادله پیدا کړئ چې میل یې (-2) او د $(5,1)$ له نقطې څخه تېرېږي.

حل:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y - 1 = -2(x - 5)$$
$$y = -2x + 11$$
یا $$2x + y - 11 = 0$$

5: **د هغه مستقیم خط معادله چې دوې نقطې یې معلومې وي**:

د l د خط میل چې عمود نه وي، د $Q(x_1, y_1)$ او $R(x_2, y_2)$ له نقطو څخه تېرېږي او $P(x, y)$ ددې خط یوه کیفي نقطه وي، څرنګه چې د مستقیم خط میل په هره نقطه کې سره مساوي دي، نو لرو چې:



$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y - y_2}{x - x_2} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

یا $$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

پنځم مثال: د هغه مستقیم خط معادله پیدا کړئ چې د $(-2,1)$ او $(6,-4)$ له نقطو څخه تېرېږي.

حل:

$$y_1 = 1 \quad , \quad x_1 = -2$$
$$y_2 = -4 \quad , \quad x_2 = 6$$

$$y - 1 = \frac{-4 - 1}{6 - (-2)}[x - (-2)]$$

$$y - 1 = \frac{-5}{8}(x + 2)$$ یا $$5x + 8y + 2 = 0$$

6: **د هغه مستقیم خط معادله چې له محورونو سره یې تقاطع معلومه وي**:

که $P(x, y)$ د l د مستقیم خط یوه کیفي نقطه وي او د l مستقیم خط د X محور په a کې او د Y محور په b کې قطع کړي یا د X محور د $A(a,0)$ او د Y محور د $B(0,b)$ په نقطه کې قطع کوي چې د B ، A او p نقطې د l پر مستقیم خط واقع دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د هغه مستقیم خط له معادلې څخه چې دوې نقطې يې معلومې وي لرو چې:

$x_1 = a\ ,\ y_1 = 0 \quad x_2 = 0\ , y_2 = b$

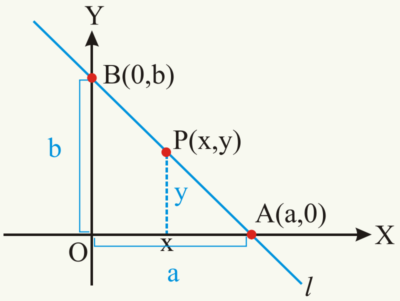
$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)\ ,\ y - 0 = \frac{b - 0}{0 - a}(x - a) \Rightarrow -ay = b(x - a)$$

$-ay = bx - ab$

$bx + ay = ab$

دواړه خواوې پر ab وېشو

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$



شپږم مثال: د هغه مستقیم خط معادله پيدا کړئ چې د x محور په $(2,0)$ او د Y محور په $(0,-4)$ کې قطع کوي.

حل: $a = 2$ او $b = -4$ ده.

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

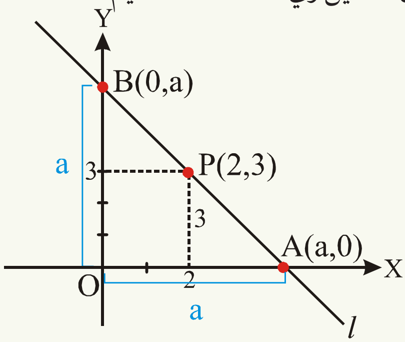
$$\frac{x}{2} + \frac{y}{-4} = 1$$

يا $2x - y - 4 = 0$

اووم مثال: په شکل کې که د $O\overset{\Delta}{A}B$ مثلث متساوی الساقين وي، د $\overline{AB}$ د مستقيم خط معادله په داسې حالت کې پيدا کړئ چې ددې مثلث د $\overline{AB}$ ضلع د $P(2,3)$ له نقطې څخه تيرېږي.

حل: د $\overline{AB}$ د مستقيم خط ميل مساوي دی په:

$$\text{د } \overline{AB} \text{ مستقيم خط ميل} = \frac{a - 0}{0 - a} = -1$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

نو اوس د هغه مستقیم خط معادله چې میل یې (-1) او د $P(2,3)$ له نقطې څخه تېرېږي عبارت ده له:

$$y-3=-1(x-2) \text{ يا } x+y-5=0$$

د هغه مستقیم خط معادله چې میل او د Y له محور سره یې تقاطع معلومه وي عبارت ده له: $y=mx+b$ د هغه مستقیم خط معادله چې میل او یوه نقطه یې معلومه وي عبارت ده له:

$y-y_1=m(x-x_1)$ ، د هغه مستقیم خط معادله چې دوې نقطې یې معلومې وي عبارت ده له:

$y-y_1=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$ او د هغه مستقیم خط معادله چې له محورونو سره یې د تقاطع نقطې معلومې وي: $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$ ده.

پوښتنې

1- د لاندې مستقیمو خطونو معادلې پیداکړئ چې:

a: د هغه افقي خط معادله پیداکړئ چې له $(7,-9)$ نقطې څخه تېرېږي.

b: د هغه مستقیم خط معادله چې د X پر محور عمود او له $(-5,3)$ نقطې څخه تېرېږي.

2- د لاندې مستقیمو خطونو معادلې پیداکړئ چې:

a: میل یې 7 او د $(-6,5)$ له نقطې څخه تېر شي.

b: میل یې صفر او د $(8,-3)$ له نقطې څخه تېرېږي.

c: د $(-8,5)$ له نقطې څخه تېرېږي او میل یې تعریف شوی نه وي.

d: د $(-5,-3)$ او $(9,-1)$ له نقطو څخه تېرېږي.

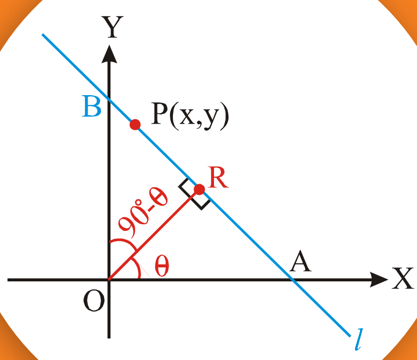
e: میل یې -4 او د Y محور په -9 کې قطع کړي.

3- د هغه مثلث د ضلعو معادلې پیداکړئ چې راسونه یې $A(-3,2)$ ، $B(5,4)$ او $C(3,-8)$ وي.

4- د هغه مستقیم خط معادله پیداکړئ چې د $(-4,-6)$ له نقطې څخه تېرېږي او پر هغه خط عمود وي چې میل یې $\dfrac{-3}{2}$ وي.

5- د هغه مستقیم خط معادله پیداکړئ چې د $(11,-5)$ له نقطې څخه تېرېږي او له هغه خط سره موازي وي چې میل یې -24 وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



7 - د مستقیم خط نورمال معادله

آیا ویلای شـئ د یوه مسـتقیم خط نورمال خط کوم خط ته وایي؟

د l د مســتقیم خط معادله که p د هغه عمود خط اوږدوالی وي چې د وضعیه کمیاتو له مبدا څخه د l پر خط عمود وي او θ د عمود خط د میل زاویه وي.

عبارت ده له: $x\cos\theta + y\sin\theta = P$ یا $x\cos\theta + y\sin\theta - P = 0$

د l مســتقیم خـط د X محـور د A پـه نقطه کې او د Y محـور د B په نقطه کې قطع کوي، که $P(x,y)$ د $\overline{AB}$ د مســتقیم خط یوه کیفي نقطه وي او د $\overline{OR}$ خط د l پر خط عمود وي، نو: $|\overline{OR}| = P$ دی چې د $\overline{OR}$ خط ته د l د خط نورمال خط وایي او P د نورمال اوږدوالی دی.

د $O\hat{R}A$ او $O\hat{R}B$ په قایمه زاویه مثلثونو کې لرو چې:

$$\cos\theta = \frac{P}{OA} \quad \text{یا} \quad OA = \frac{P}{\cos\theta}$$

$$\cos(90° - \theta) = \frac{P}{OB} \quad \text{یا} \quad OB = \frac{P}{\cos(90° - \theta)} = \frac{P}{\sin\theta}$$

له مثلثاتو پوهېږو: $\cos(90° - \theta) = \sin\theta$

څرنګه چې د $\overline{AB}$ مســتقیم خط د X محور په $(OA,0)$ او د Y محور په $(0,OB)$ کې قطع کوي، نو د $\overline{AB}$ د مستقیم خط معادله عبارت ده له:

$$\frac{x}{OA} + \frac{y}{OB} = 1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{x}{\frac{P}{\cos\theta}}+\frac{y}{\frac{P}{\sin\theta}}=1$$

یا: $x\cos\theta + y\sin\theta = P$

چې $x\cos\theta + y\sin\theta = P$ یا $x\cos\theta + y\sin\theta - P = 0$ د l د مستقیم خط نورمال معادله ده.

لومړی مثال: که د هغه عمود خط اوږدوالی چې د وضعیه کمیاتو له مبدا څخه د l پرخط عمود وي 5 واحده وي او ددې عمود خط د میل زاویه $120°$ وي، د l د مستقیم خط میل، نورمال معادله یې او د Y له محور سره یې د تقاطع نقطه پیدا کړئ.

حل: $\theta = 120°$ او $P = 5$ دی.

$$x\cos120° + y\sin120° = 5$$

$$-\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y=5 \qquad (\cos120° = -\frac{1}{2} \quad , \quad \sin120° = \frac{\sqrt{3}}{2})$$

$$x-\sqrt{3}y+10=0$$

د l خط د میل د پیداکولو لپاره د ا معادله د $y = mx + b$ په شکل لیکو:

$$y=\frac{x}{\sqrt{3}}+\frac{10}{\sqrt{3}}$$

نو د l خط میل $m=\frac{1}{\sqrt{3}}$ او د Y محور د $(0,\frac{10}{\sqrt{3}})$ په نقطه کې قطع کوي.

فعالیت

د هغه مستقیم خط نورمال معادله پیدا کړئ چې د نورمال اوږدوالی یې 10 واحده او نورمال یې د X د محور له مثبت جهت سره د $30°$ زاویه جوړوي.

8- د مستقیم خط عمومي معادله: (General equation of a straight Line)

د $ax + by + c = 0$ معادله د x او y دوه متحوله لري a، b، او c ثابت عددونه دي چې a او b دواړه په یو وخت کې صفر نه وي، د مستقیم خط دعمومي معادلې په نامه یادېږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

1) که $a \neq 0$ او $b = 0$ وي، نو $x = -\frac{c}{a}$ یا $ax + c = 0$ دا د هغه مستقیم خط معادله ده چې د Y له محور سره موازي وي ددې خط مستقیمه فاصله د Y له محور څخه $-\frac{c}{a}$ ده.

2) که $a = 0$ او $b \neq 0$ وي، نو معادله د $by + c = 0$ شکل نیسي یا $y = -\frac{c}{b}$ چې دا د هغه مستقیم خط معادله ده چې د X له محور سره موازي دی. د X له محور څخه ددې خط مستقیمه فاصله $\frac{-c}{b}$ ده.

3) که $a \neq 0$ او $b \neq 0$ وي، نو:

$$by = -ax - c \quad \text{یا} \quad y = \frac{-a}{b}x - \frac{c}{b} = mx + b$$

دا د هغه مستقیم خط معادله ده چې میل یې $m = \frac{-a}{b}$ دی او د y محور په $\frac{-c}{b}$ کې قطع کوي.

1- د مستقیم خط د عمومي معادلې بدلول په معیاري شکل:

د $ax + by + c = 0$ عمومي معادله د معیاري معادلې په شکل عبارت ده له:

$$by = -ax - c \quad \text{یا} \quad y = \frac{-a}{b}x - \frac{c}{b} = mx + b$$

چې ددې خط میل $m = \frac{-a}{b}$ او د Y محور په $\frac{-c}{b}$ کې قطع کوي.

دویم مثال: د $5x - 12y + 39 = 0$ مستقیم خط عمومي معادله په معیاري شکل واړوئ.

حل:

$$12y = 5x + 39 \quad \text{یا} \quad y = \frac{5}{12}x + \frac{39}{12}$$

چې میل یې $m = \frac{5}{12}$ او د Y محور په $\frac{39}{12}$ کې قطع کوی.

2- د مستقیم خط د عمومي معادلې بدلول د هغه مستقیم خط د معادلې په شکل چې میل او یوه نقطه یې معلومه وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $ax+by+c=0$ په معادله کې د مستقیم خط میل $\frac{-a}{b}$ او یوه نقطه یې $(\frac{-c}{a},0)$ ده، نو:

$$y=\frac{-a}{b}(x+\frac{c}{a}) \qquad\qquad m=\tan\theta=\frac{-a}{b}$$

دریم مثال: د $5x-12y+39=0$ د مستقیم خط عمومي معادله د هغه خط د معادلې په شکل تبدیله کړئ چې میل او یوه نقطه یې معلومه وي.

حل: د $5x-12y+39=0$ مستقیم خط یوه نقطه $(\frac{-39}{5},0)$ ده او میل یې $\frac{5}{12}$ دی، نو:

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

$$y-0=\frac{5}{12}(x+\frac{39}{5})\Rightarrow y=\frac{5}{12}x+\frac{39}{12}$$

3 - د عمومي معادلې بدلول د هغه مستقیم خط د معادلې په شکل چې دوې نقطې یې معلومې وي.

هغه خط چې معادله یې $ax+by+c=0$ وي، د $(\frac{-c}{a},0)$ او $(0,\frac{-c}{b})$ له نقطو تېرېږي.

$$y_1=0 \qquad x_1=\frac{-c}{a} \qquad y_2=\frac{-c}{b} \qquad x_2=0$$

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$

$$y-0=\frac{\frac{-c}{b}-0}{0+\frac{c}{a}}(x+\frac{c}{a})=\frac{\frac{-c}{b}}{\frac{c}{a}}(x+\frac{c}{a})=-\frac{c}{b}\cdot\frac{a}{c}(x+\frac{c}{a})$$

$$y=\frac{-a}{b}(x+\frac{c}{a})$$

څلورم مثال: د $5x-12y+39=0$ مستقیم خط عمومي معادله د هغه مستقیم خط د معادلې په شکل ولیکئ چې دوې نقطې یې معلومې وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل: د $5x-12y+39=0$ خط د $P_2(0,\frac{39}{12})$ او $P_1(\frac{-39}{5},0)$ له نقطو څخه تېرېږي.

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$ یا $$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$

$$\frac{y-0}{x+\frac{39}{5}}=\frac{\frac{39}{12}-0}{0+\frac{39}{5}}$$

4- د یو مستقیم خط د عمومي معادلې بدلول د هغه مستقیم خط د معادلې په شکل چې د X او Y له محورونو سره یې د تقاطع نقطې معلومې وي.

$$ax+by+c=0$$
$$ax+by=-c$$

دواړه خواوې په $(-c)$ وېشو:

$$\frac{ax}{-c}+\frac{by}{-c}=1$$

یا

$$\frac{x}{\frac{-c}{a}}+\frac{y}{\frac{-c}{b}}=1$$

پنځم مثال: د $5x-12y+39=0$ معادله د هغه مستقیم خط معادلې ته واړوئ چې له محورونو سره یې د تقاطع نقطې معلومې وي.

$$5x-12y=-39$$

دواړه خواوې په -39 وېشو:

$$\frac{5x}{-39}-\frac{12y}{-39}=1$$

:

$$\frac{x}{-\frac{39}{5}}+\frac{y}{\frac{39}{12}}=1$$

په دې معنا چې دا مسـتقیم خط د X محور د $(-\frac{39}{5},0)$ او د Y محور د $(0,\frac{39}{12})$ په نقطه کې قطع کوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیت

د $3x-2y=6$ مســتقیم خط د تقاطع د نقطو وضعیه کمیات د X او Y، له محورونو ســره پیدا کړئ.

5: د یوه مستقیم خط د عمومي معادلې بدلول په نورمال شکل:

څرنگه چې پوهېږو د مســتقیم خط نورمال معادله $x\cos\theta + y\sin\theta = P$ ده او عمومي معادله یې $ax+by+c=0$ یا $ax+by=-c$ ده چې دواړه د یوه مستقیم خط ښودونکي دي، نو د ضریبونو نسبتونه یې د k د یوه ثابت عدد سره مساوي دی.

$$\frac{a}{\cos\theta}=\frac{b}{\sin\theta}=\frac{-c}{P}=k$$

$$\frac{P}{-c}=\frac{\cos\theta}{a}=\frac{\sin\theta}{b}=\frac{\sqrt{\cos^2\theta+\sin^2\theta}}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{1}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$$

ځکه چې: $\frac{\cos^2\theta}{a^2}=\frac{\sin^2\theta}{b^2}=\frac{\cos^2\theta+\sin^2\theta}{a^2+b^2}$

په نتیجه کې: $\sin\theta=\frac{b}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$ او $\cos\theta=\frac{a}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$ کېږي.

د $x\cos\theta+y\sin\theta-p=0$ په معادله کې د $\sin\theta$ او $\cos\theta$ د قیمتونو په لیکلو سره لرو چې:

$$\frac{ax}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{by}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{c}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}=0$$

$$\frac{ax+by}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{-c}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$$

او یا $\frac{b}{\sin\theta}=k \quad , \quad \frac{a}{\cos\theta}=k$

نو: $k\sin\theta=b$ ، $k\cos\theta=a$ او $k^2\sin^2\theta=b^2$ ، $k^2\cos^2\theta=a^2$

$$k^2\cos^2\theta+k^2\sin^2\theta=a^2+b^2$$

$$k^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)=a^2+b^2$$

یا: $k=\pm\sqrt{a^2+b^2}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $ax+by=-c$ معادلې دواړه خواوې په K وېشو، نو لرو چې:

$$\frac{a}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}x+\frac{b}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}y=-\frac{c}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$$ يا $$\frac{ax+by+c}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}=0$$

ددې لپاره چې د p قيمت هر وخت مثبت وي، نو د مخرج د جذر علامه د c مخالفه علامه ده او که $c=0$ وي، د جذر علامه د b د علامې په شان ده.

شپږم مثال: $2x-3y+6=0$ معادله په نورمال شکل واړوئ.

حل: د معادلې دواړه خواوې په $\sqrt{2^2+(-3^2)}=\pm\sqrt{13}$ باندې وېشو. ددې لپاره چې ښي خوا مثبت وي د $\sqrt{13}$ علامه بايد منفي ونيول شي:

$$\frac{2x-3y+6}{-\sqrt{13}}=0$$ يا $$-\frac{2}{\sqrt{13}}x+\frac{3}{\sqrt{13}}y-\frac{6}{\sqrt{13}}=0$$

نو θ په دويمه ناحيه (ربعه) کې ده.

له مثلثاتي جدول څخه لرو چې $\theta=123^\circ\,40'$ ده، نو ددې مستقيم خط نورمال معادله عبارت ده له:

$$x\cos 123^\circ 40' + y\sin 123^\circ 40' - \frac{6}{\sqrt{13}}=0$$

فعاليت

د $5x-12y+39=0$ مستقيم خط معادله په نورمال شکل تبديله کړئ.

د يوه مستقيم خط نورمال معادله $x\cos\theta+y\sin\theta-p=0$ او د مستقيم خط عمومي معادله $ax+by+c=0$ ده. د مستقيم خط عمومي معادله د نورمال معادلې په شکل عبارت له:

$$\frac{ax}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{by}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{c}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}=0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

1 - د $x\cos 60^\circ + y\sin 60^\circ - 7 = 0$ مستقیم خط نورمال معادله د مستقیم خط په عمومي معادله تبدیله کړئ.

2 - د $x\cos 225^\circ + y\sin 225^\circ - 6 = 0$ مستقیم خط نورمال معادله، د مستقیم خط په عمومي معادله واړوئ.

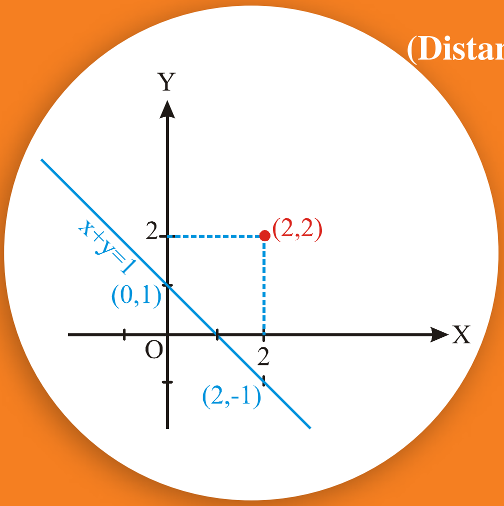
3 - د مستقیم خط لاندې عمومي معادلې په نورمال شکل واړوئ.

$2x + 4y + 7 = 0$ $\quad$ $2x + 5y - 2 = 0$ $\quad$ $15y - 8x + 3 = 0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د يوې نقطې فاصله له يوه مستقيم خط څخه:

(Distance of a point from a line)



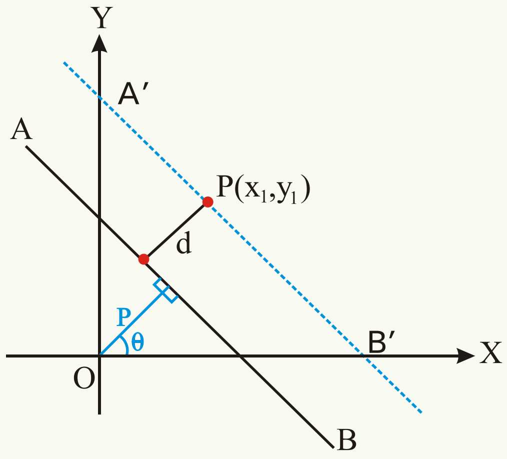
آيا د $(2,2)$ نقطې فاصله د $x+y=1$ له خط څخه پيداکولای شئ؟

کـــه د P نقطې فاصله، لکه: څنګه چې په شــکل کـې ليدل کيږي د $\overline{AB}$ له خط څخه چې د P نقطه پر $\overline{AB}$ واقع نه وي، d فرض کړو (د $\overline{AB}$ خط نه عمود وي او نه افقي)
د p له نقطې څخه د $\overline{A'B'}$ مستقيم خط له $\overline{AB}$ سره موازي رسم کړئ، په دی حالت کې د AB د خط نورمال معادله عبارت ده له: $x\cos\theta + y\sin\theta - p = 0$
څرنګــه چــې د $A'B'$ مســتقيم خط د AB له خط ســره موازي دی، نــو د $A'B'$ د خط نورمال معادله عبارت ده له:

$$x\cos\theta + y\sin\theta - (p+d) = 0 \quad \text{يا} \quad d = x\cos\theta + y\sin\theta - p$$

څرنګه چې د $P(x_1,y_1)$ نقطه د $\overline{A'B'}$ پر مستقيم خط پرته ده، نو په پورتنۍ معادله کې په ترتيب سره د x او y، پرځای x_1 او y_1 ږدو، نو لرو چې:

$$\boxed{d = x_1\cos\theta + y_1\sin\theta - P}$$



چــې دا معادله د $\overline{AB}$ له خــط څخه د p د نقطې فاصله ښــيي، کــه چېرې د AB د خط معادله په نورمال شــکل راکړل شــوي وي او که د $\overline{AB}$ د خط معادله په عمومي شکل $(ax+by+c=0)$ راکړل شوي وي، نو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځرنګه چې: $\sin\theta=\dfrac{b}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$ ، $\cos\theta=\dfrac{a}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$ او $p=\dfrac{-c}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$

که دا قیمتونه د AB د مستقیم خط په نورمال معادله کې وضع کړو، لرو چې:

$$d=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$$

د فاصلې پــه معادله کې که د P نقطه او د وضعیه کمیاتو مبدا د ABد خط یوې خواته واقع وي، نو د d قیمــت منفــي کېږي. او کــه د pنقطه او مبدا د AB د خط دواړو خواوو ته واقع وي د d قیمت مثبت دی. ځرنګه چې فاصله هر وخت مثبت ده، نو باید چې مطلقه قیمت یې په پام کې ونیسو. (د c علامه د مخرج د جذر د علامې مخالفه علامه ده)

لومړی مثال: د $P(-2,8)$ د نقطې فاصله د $4x+3y-11=0$ له خط څخه پیدا کړئ.

حل: $a=4$ ، $b=3$ او $c=-11$ ده، ځرنګه چې د c علامه منفي ده، نو د جذر علامه باید مثبت وي.

$$d=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|4(-2)+3(8)-11|}{\sqrt{(4)^2+(3)^2}}=\frac{|-8+24-11|}{\sqrt{25}}=\frac{5}{5}=1$$

فعالیت

د $(5,8)$ نقطې فاصله د $3x-2y+7=0$ له مستقیم خط څخه پیدا کړئ.

د دوو موازي خطونو تر منځ فاصله:

(Distance between two parallel lines):

د دوو مــوازي خطونــو ترمنځ فاصلــه پر یو ددې خطونو د یــوې نقطې فاصله ده، لــه بل موازي خط څخه:

دویم مثال: د $2x-5y+13=0$ او $2x-5y+6=0$ موازي مستقیمو خطونو ترمنځ فاصله پیدا کړئ.

حل: یوه نقطه په یو ددې موازي خطونو باندې پیدا کوو، د مثال په ډول که د

$$2x-5y+13=0$$

په معادله کې $x=1$ وي، نو $y=3$ کېږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

اوس نو د $(1,3)$ نقطې فاصله د $2x-5y+6=0$ له مسـتقیم خط څخه د فاصلې د فورمول $d=\frac{ax_1+by_1+c}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$ په مرسته په لاس راوړو.

$$d=\frac{|2(1)-5(3)+6|}{\sqrt{(2)^2+(-5)^2}}=\frac{|2-15+6|}{\sqrt{4+25}}=\frac{7}{\sqrt{29}}$$

یادونه: د وضعیه کمیاتو له مبدا څخه د $ax+by+c=0$ مستقیم خط فاصله د $\frac{|C|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ څخه عبارت ده.

فعالیت

د $3x+2y=10$ او $y=-\frac{3}{2}x+7$ د موازي خطونو ترمنځ فاصله پیدا کړئ.

دریم مثال: د $2x+y+2=0$ او $6x+3y-8=0$ د مستقیمو موازي خطونو ترمنځ فاصله پیداکړئ.

حل: که د $2x+y+2=0$ په معادله کې $x=0$ وي، $y=-2$ کیږي. اوس د $(0,-2)$ او د $6x+3y-8=0$ د مستقیم خط فاصله په لاس راوړو:

$$d=\frac{ax_1+by_1+c}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|6(0)+3(-2)-8|}{\sqrt{36+9}}=\frac{14}{3\sqrt{5}}$$

د $P(x_1,y_1)$ د نقطې فاصله له یوه مستقیم خط څخه د $d=x_1\cos\theta+y_1\sin\theta-P$ او یا د $d=\frac{ax_1+by_1+c}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$ له فورمول څخه په لاس راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

1- د هـرو دوو جـوړو موازي خطونو ترمنځ فاصله پيداکـړئ چې معادلې يې په لاندې ډول دي:

$3x-4y+3=0$ او $3x-4y+7=0$

$12x+5y-6=0$ او $12x+5y+13=0$

$x+2y-5=0$ او $2x+4y=1$

2 - د $P(6,-1)$ نقطې فاصله له $6x-4y+9=0$ مستقيم خط څخه پيداکړئ.

3 - د $3x+6y-8=0$ او $2x+4y+5=0$ مـوازي خطونـو ترمنځ فاصله مسـاوي ده په:

a) $\frac{31}{\sqrt{5}}$ b) $\frac{31}{6\sqrt{5}}$ c) $6\sqrt{5}$ d) هيڅ يو

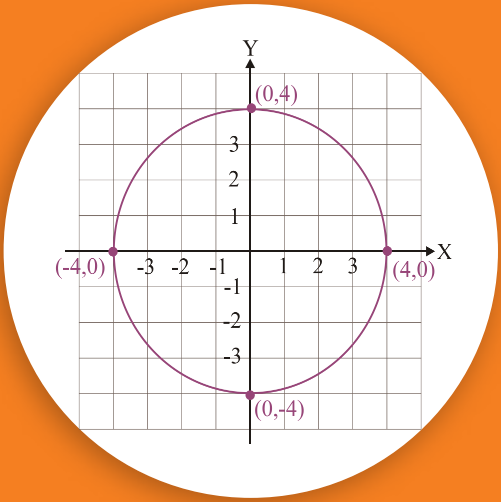
4 - د $(1,2)$ د نقطې فاصله د $\frac{3}{5}x-\frac{4}{5}y+2=0$ مستقيم خط څخه مساوي ده په:

$a:2$ $b:1$ $c:3$ $d:\frac{1}{2}$

5 - د $(-2,7)$ نقطې فاصله له $24x+7y-2=0$ مستقيم خط څخه مساوي ده په:

$a:0{,}04$ $b:\frac{1}{25}$ $c:4\times10^{-2}$ d: درې واړه سم دي

(c) ketabton.com: The Digital Library



دايره (Circle)

آیــا د هغې دايرې معادله پیداکولای شــئ چې مرکز يې د وضعيه کمياتو په مبدأ کې او شــعاع يې 4 واحده وي؟

تعريف

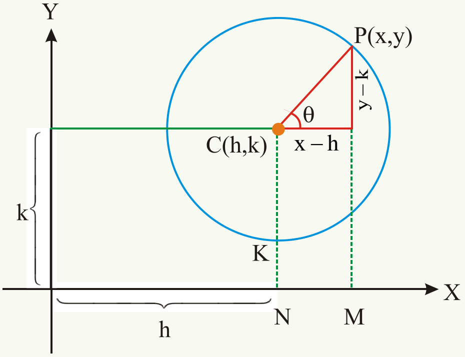
دايره د هغو نقطو سټ دی چې له يوې ثابتې نقطې څخه يې فاصلې مساوي وي. چې دې ثابتې نقطې ته د دايرې مرکز (Center) او مساوي فاصلې ته د دايرې شعاع (Radius) وايي.

د دايرې معادله (Equation of circle): که $C(h,k)$ د دايرې مرکز، r د دايرې شــعاع او $P(x,y)$ د دايرې په محيط يوه نقطه وي، د شــکل له مخې د فيثاغورث د قضيې په اســاس لرو چې:

$$(\overline{CP})^2 = (x-h)^2 + (y-k)^2$$

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2 \qquad (\overline{CP} = r)$$

چې دې معادلې ته د دايرې معياري معادله وايي. که د دايرې مرکز د وضعيه کمياتو په مبدا کې وي، نو په دې حالت کې $h = k = 0$ دی او د دايرې معادلــه: $(x-0)^2 + (y-0)^2 = r^2$ يــا $x^2 + y^2 = r^2$ ده، او که $r = 0$ وي داســې دايرې ته نقطوي دايره (Point circle) وايي.



(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی مثال: د هغې دايرې معادله پيدا کړئ چې مرکز يې $(-3,5)$ او د شعاع اوږدوالی يې (7) واحده وي.

حل: $r=7$, $k=5$ او $h=-3$

$$(x+3)^2+(y-5)^2=7^2$$

$$x^2+y^2+6x-10y-15=0$$

فعاليت

د هغې دايرې معادله پيدا کړئ چې مرکز يې د وضعيه کمياتو په مبدا کې او شعاع يې 3 واحده وي.

د يوې دايرې عمومي معادله (General form of an equation of a circle):

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

$$x^2-2hx+h^2+y^2-2ky+k^2-r^2=0$$

يا:

$$x^2+y^2-2hx-2ky+h^2+k^2-r^2=0$$

که $-k=f$ ، $-h=g$ او $h^2+k^2-r^2=c$ فرض شي، نو لرو چې:

$(x+g)^2+(y+f)^2=g^2+f^2-c$ يا $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$

چې دې معادلې ته د دايرې عمومي معادله وايي چې مرکز يې $(-g,-f)$ او شعاع يې $r=\sqrt{g^2+f^2-c}$ ده.

که $g^2+f^2-c>0$ وي دايره حقيقي ده.

که $g^2+f^2-c=0$ دايره نقطوي ده.

که $g^2+f^2-c<0$ دايره مجازي ده. (دايره وجود نه لري)

او يا که د $x^2+y^2-2hx-2ky+h^2+k^2-r^2=0$

په معادله کې $-2h=a$ ، $-2k=b$ او $h^2+k^2-r^2=c$ عوض کړو لرو چې

$x^2+y^2+ax+by+c=0$ چې دا هم د دايرې عمومي معادله ده، ځينې وختونه د دايرې عمومي معادله داسې هم ښودل کيږي.

$Ax^2+By^2+Dx+Ey-F=0$ په دې ډول چې $A=B$ او هم علامه وي، نو دا هم د دايرې عمومي معادله ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

خاص حالتونه:

1- که د $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ د دايرې په معادله کې $h=0$ وي، نو د دايرې مرکز د Y پر محور پروت دی او د دايرې معادله دا شکل $x^2+(y-k)^2=r^2$ غوره کوي.

2 - او که $k=0$ وي، د دايرې مرکز د X پرمحور پروت دی او د دايرې معادله دا: $(x-h)^2+y^2=r^2$ ده.

3- که $k=r$ وي، دايره د X پر محور مماس ده او د دايرې معادله $(x-h)^2+(y-r)^2=r^2$ ده.

4- او که $h=r$ وي، دايره د Y پر محور مماس ده او د دايرې معادله $(x-r)^2+(y-k)^2=r^2$ ده.

5 - يوه دايره هغه وخت د وضعيه کمياتو له مبدا څخه تيرېږي چې د $h^2+k^2=r^2$ رابطه صدق کړي.

6- يوه دايره هغه وخت د X او Y پر محورونو مماس ده چې معادله يې دا $(x-r)^2+(y-r)^2=r^2$ شکل ولري.

دويم مثال: د $x^2+(y-5)^2=10$ دايرې مرکز د Y پر محور پروت دی.

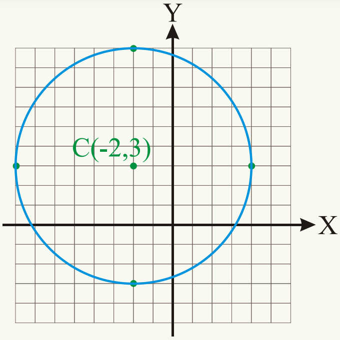
د $(x-1)^2+(y-5)^2=25$ دايره د X له محور سره مماس ده.

د $(x+3)^2+y^2=9$ د دايرې مرکز د X پر محور پروت دی.

فعاليت

په شکل کې وښياست چې د دويم مثال، د لومړې دايرې مرکز د Y پر محور پروت دی، دويمه دايره د X له محور سره مماس ده او د دويمې دايرې مرکز د X پر محور واقع دی.

دريم مثـال: د هغې دايرې عمومي او معياري معادلې پيدا کړئ چې د مرکز وضعيه کميات يې $(-2,3)$ او شـعاع يې 6 واحده وي او هم دا دايره رسم کړئ.



(د دايرې معياري معادله)

$$(x+2)^2+(y-3)^2=6^2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(د دایرې عمومي معادله)

$$x^2+y^2+4x-6y-23=0$$

څلورم مثال: وښیاست چې $5x^2+5y^2+24x+36y+10=0$ دیوې دایرې معادله ده او هم ددې دایرې د مرکز وضعیه کمیات او د شعاع اوږدوالی پیدا کړئ.

حل: د معادلې دواړه خواوې پر 5 وېشو، نو لرو چې:

$$x^2+y^2+\frac{24}{5}x+\frac{36}{5}y+2=0$$

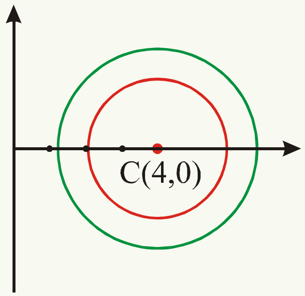
چې $g=\frac{12}{5}$ ، $f=\frac{18}{5}$ او $c=2$ دی.

د دایرې مرکز $(-g,-f)=(\frac{-12}{5},\frac{-18}{5})$

او د دایرې شعاع: $r=\sqrt{g^2+f^2-c}=\sqrt{\frac{144}{25}+\frac{324}{25}-2}=\sqrt{\frac{418}{25}}=\frac{\sqrt{418}}{5}$

پنځم مثال: د هغې دایرې معادله پیدا کړئ چې د $x^2+y^2-8x+4=0$ له دایرې سره متحد المرکز (Concnteric) وي او د $x+2y+6=0$ له مستقیم خط سره مماس وي.

حل: د $x^2+y^2-8x+4=0$ دایرې مرکز $C_1(-g,-f)$ دی.



$$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$$

$$2g=-8\Rightarrow g=-4\Rightarrow -g=4$$

$$2f=0 \quad\Rightarrow\quad f=0$$

د $C_1\ (4,0)$ نقطه د هغې دایرې مرکز هم دی چې غواړو معادله یې پیداکړو، نو د C_1 وضعیه کمیات د $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ په معادله کې وضع کوو، لرو چې: $(x-4)^2+(y-0)^2=r^2$

ددې لپاره چې د C_2 ددایرې شعاع پیداکړو، نو څرنګه چې دایره د $x+2y+6=0$ له مستقیم خط سره مماس ده. نو د $(4,0)$ د نقطې فاصله له دې مستقیم خط څخه د دایرې شعاع ده

$$d=r=\frac{|4(1)+2(0)+6|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{10}{\sqrt{5}} \quad \text{یا} \quad r^2=\frac{100}{5}=20$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو ددې دايرې معادله عبارت ده له: $(x-4)^2+y^2=20$ يا $x^2+y^2-8x-4=0$

شپږم مثال: د هغې دايرې معادله پيدا کړئ چې د $B(6,5)$ او $A(4,1)$ له نقطو څخه تېرېږي او مرکز يې د $4x+y-16=0$ پر مستقيم خط پروت وي.

حل: که د ايرې مرکز $C(h,k)$ وي، نو د دايرې معادله $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ ده، څرنګه چې مرکز يې د $4x+y-16=0$ پر مستقيم خط واقع دی، نو $4h+k=16$ دی.

$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ او $|AC|=|BC|$ او $|AC|^2=|BC|^2$

$$(h-4)^2+(k-1)^2=(h-6)^2+(k-5)^2$$
$$4h+8k=44$$
$$\underline{\pm 4h \pm k=\pm 16}$$
$$7k=28$$
$$k=4 \quad \Rightarrow \quad h=3$$
$$r^2=(3-4)^2+(4-1)^2=10$$
$$(x-3)^2+(y-4)^2=10 \quad \Rightarrow \quad x^2+y^2-6x-8y+15=0$$

چې دا د غوښتل شوې دايرې عمومي معادله ده.

فعاليت

د هغې دايرې معادله پيدا کړئ چې د $(0,0)$ او $(2,0)$ له نقطو څخه تېرېږي او د $y-1=0$ له خط سره مماس وي.

اووم مثال: د هغې دايرې د مرکز وضعيه کميات او د شعاع اوږدوالی پيدا کړئ چې معادله يې $x^2+y^2-4x+4y-9=0$

حل:

$$x^2+y^2-4x+4y-9=0$$
$$x^2-4x+y^2+4y-9=0$$
$$x^2-4x+(-2^2)-(-2^2)+y^2+4y+2^2-2-9=0$$
$$(x-2)^2+(y+2)^2=17$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو مرکز یې $(2-2)$ او شعاع یې $r=\sqrt{17}$

د هغې دایرې معادله چې مرکز یې د وضعیه کمیاتو په مبدا کې واقع وي له $x^2+y^2=r^2$ څخه عبارت ده او که مرکز یې د وضعیه کمیاتو په مبدا کې واقع نه وي او (h,k) یې مرکز وي: معادله یې $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ یا $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ او یا $x^2+y^2+ax+by+c=0$ ده.

پوښتنې

1 - د هغې دایرې معادله پیدا کړئ چې:

a: د مرکز مختصات یې $(5,-2)$ او $r=4$ وي

b: د مرکز مختصات یې $(\sqrt{2},-3\sqrt{3})$ اوشعاع یې $r=2\sqrt{2}$ وي.

c: مرکز یې $(0,0)$ اود $(1,2)$ له نقطې څخه تېرېږي.

d: د مرکز مختصات یې $(0,0)$ او د $(-3,-4)$ له نقطې څخه تېرېږي.

e: د مرکز مختصات یې $(8,-6)$ او د وضعیه کمیاتو له مبدا څخه تېرېږي

2 - لومړی وښیاست چې لاندې راکړل شوې معادلې د دایرې معادلې دي، بیا یې د مرکز وضعیه کمیات او د شعاع اوږدوالی پیدا کړئ.

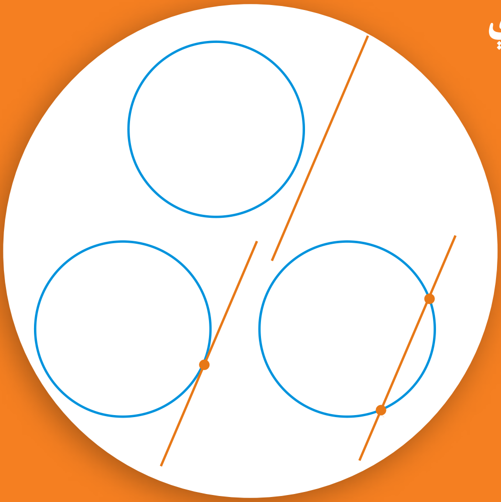
$5x^2+5y^2+14x+12y=0$ ، $x^2+y^2+12x-10y=0$

$3x^2+3y^2-2x+4y-1=0$ ، $x^2+y^2-6x+4y+13=0$

$a(x^2+y^2)+2gx+2fy+c=0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د یو مستقیم خط حالتونه له یوې دایرې سره:



کولای شئ چې وواياست د $3x-4y+20=0$ مستقیم خط د $x^2+y^2=25$ دایره په څو نقطو کې قطع کوي؟

د $x^2+y^2+ax+by+c=0$ دایرې معادله په پام کې نیسو او غواړو چې د یو مستقیم خط حالت له دایرې سره وڅېړو چې آیا دا مستقیم خط دایره په دوو نقطو کې قطع کوي، یا مستقیم خط پر دایره مماس دی او یا دا چې مستقیم خط دایره نه قطع کوي.

د x او یا y قیمت د مستقیم خط له معادلې څخه په لاس راوړو او د دایرې په معادله کې یې وضع کوو. یوه دویمه درجه یو مجهوله معادله په لاس راځي.

1) که په دې معادله کې $\Delta=b^2-4ac>0$ وي، مستقیم خط دایره په دوو نقطو کې قطع کوي.

2) که $\Delta=b^2-4ac=0$ وي مستقیم خط له دایرې سره مماس دی.

3) او که $\Delta=b^2-4ac<0$ مستقیم خط دایره نه قطع کوي.

لومړی مثال: آیا د $2x=y+7$ مستقیم خط د $x^2+y^2-8x-2y+12=0$ دایره قطع کوي؟ د تقاطع د نقطو وضعیه کمیات یې پیدا کړئ.

حل: د مستقیم خط له معادلې څخه $y=2x-7$ ده چې د y دا قیمت د دایرې په معادله کې وضع کوو.

$$x^2+(2x-7)^2-8x-2(2x-7)+12=0$$
$$5x^2-40x+75=0$$
$$x^2-8x+15=0$$ یا

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4\cdot 15 = 64 - 60 = 4 > 0$$

نو دا مستقیم خط دایره په دوو نقطو کې قطع کوي او د تقاطع د نقطو وضعیه کمیات یې عبارت دي له:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{8 \pm \sqrt{4}}{2}$$

$$x_1 = 5 \quad , \quad x_2 = 3$$

د y قیمت د پیداکولو لپاره د $x_1 = 5$ او $x_2 = 3$ قیمتونه د مستقیم خط په معادله کې وضع کوو، نو لرو چې:

$$y_1 = 2x_1 - 7 = 2\cdot 5 - 7 = 3$$

$$y_2 = 2x_2 - 7 = 2\cdot 3 - 7 = -1$$

نو دا خط دایره د $(3,-1)$ او $(5,3)$ په نقطو کې قطع کوي.

دویم مثال: آیا د $x + 3y - 5 = 0$ مستقیم خط د $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 5 = 0$ له دایرې سره مماس دی که نه؟

حل: د مستقیم خط له معادلې څخه لرو چې $x = 5 - 3y$ دی، د x دا قیمت د دایرې په معادله کې وضع کوو:

$$(5 - 3y)^2 + y^2 - 2(5 - 3y) + 4y - 5 = 0$$

$$y^2 - 2y + 1 = 0$$

او $\Delta = (-2)^2 - 4\cdot 1 = 0$ نو دا مستقیم خط له دایرې سره مماس دی او د تماس د نقطې وضعیه کمیات یې عبارت دي له:

$$y = \frac{2 \pm \sqrt{0}}{2} = 1$$

$$x = 5 - 3\cdot 1 = 2$$

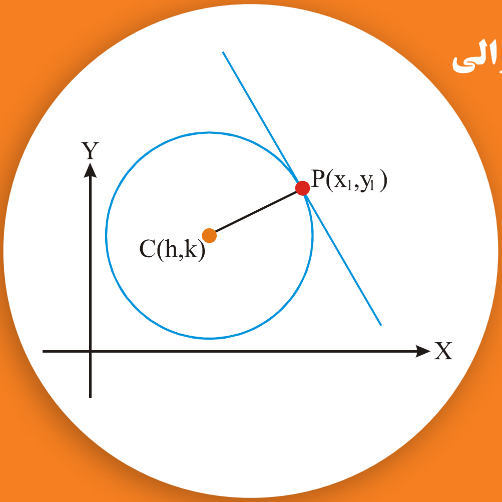
نو مستقیم خط د $(2,1)$ په نقطه کې پر دایره مماس دی.

فعالیت

آیا د $x - y + 1 = 0$ مستقیم خط د $x^2 + y^2 - 5 = 0$ له دایرې سره مماس دی، که دایره په دوو نقطو کې قطع کوي او یا دا چې دایره نه قطع کوي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مماس معادله او د مماس اوږدوالی



آیا د هغه مماس معادله پیداکولای شــی چې د $x^2+y^2=13$ دایره باندې په نقطه کې $P(-3,-2)$ په دایره مماس وي؟

کــه یو مســتقیم خط پر هغــه دایره چې مرکز یې $C(h,k)$ او د $p_1(x_1,y_1)$ پــه نقطه کې پر دایره مماس وي، نو د شعاع میل مساوي دی په: $m=\dfrac{k-y_1}{h-x_1}$

او څرنګه چې شعاع د تماس په نقطه کې پر مماس عمود ده، نو د مماس میل له $-\dfrac{h-x_1}{k-y_1}$ سره مساوي دی.

څرنګه چې د مستقیم خط یوه نقطه $P_1\ (x_1\ ,y_1\ )$ او میل یې $-\dfrac{h-x_1}{k-y_1}$ دی.

د مستقیم خط د $y-y_1=m(x-x_1\ )$ معادلې په نظر کې نیولو سره لرو چې:

$$y-y_1=-\frac{h-x_1}{k-y_1}(x-x_1\ )$$

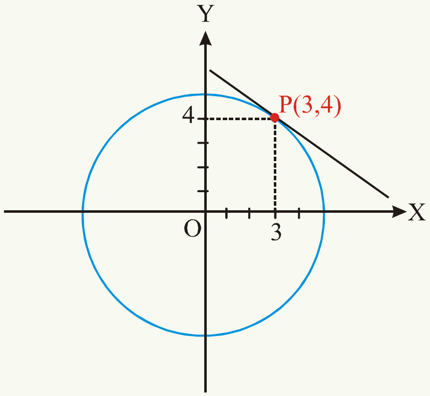
چې دا د هغه مماس معادله ده چې د $P_1\ (x_1\ ,y_1\ )$ په نقطه کې پر دایره مماس دی.

او کــه د دایــرې مرکــز د وضعیه کمیاتو په مبدا کې وي، نو پــه دې حالت کې $h=k=0$ دی او د مماس معادله دا شکل اختیاروي.

$$yy_1+xx_1=x_1^2+y_1^2 \quad \text{یا} \quad y-y_1=-\frac{x_1}{y_1}(x-x_1\ )$$

څرنګه چې $x_1^2+y_1^2=r^2$ ، نو د مماس معادله $yy_1+xx_1=r^2$ ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library



لومړی مثال: د هغه مستقیم خط معادله پیدا کړئ چې د $(3,4)$ په نقطه کې د $x^2 + y^2 = 25$ پر دایره مماس وي:

حل: څرنګه چې د دایرې مرکز د وضعیه کمیاتو په مبدا کې دی، نو: $y \cdot 4 + x \cdot 3 = 25$

نو د مماس معادله عبارت ده له: $3x + 4y = 25$

او یا $3x + 4y - 25 = 0$.

دویم مثال: د هغه مستقیم خط معادله پیدا کړئ چې د $P(3,5)$ په نقطه کې پر هغې دایرې مماس دي چې مرکز یې $(1,2)$ دی.

$h = 1 \qquad k = 2$

$x_1 = 3 \qquad y_1 = 5$

$$y - y_1 = -\frac{h - x_1}{k - y_1}(x - x_1)$$

$$m = -\frac{1-3}{2-5} = -\frac{2}{3}$$

$$y - 5 = -\frac{2}{3}(x - 3)$$

$$2x + 3y = 21$$

یا:

$$2x + 3y - 21 = 0$$

د مماس اوږدوالی

که د $P_1\ (x_1, y_1)$ له نقطې څخه چې له دایرې د باندې واقع ده، د $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ پر دایره د P_1T مماس د شکل په شان رسم شي، د (T) د تماس نقطه د دایرې له مرکز (C) سره ونښلوو، دفیثاغورث د قضیې په اساس د $P_1\ TC$ په قایمه زاویه مثلث کې لرو چې:

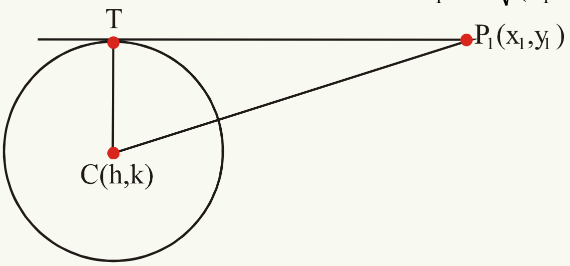
$$(\overline{P_1\ C})^2 = (\overline{P_1\ T})^2 + (\overline{CT})^2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$(P_1T)^2 = (P_1C)^2 - (CT)^2$ یا

له بلې خوا: $(\overline{P_1C})^2 = (x_1-h)^2 + (y_1-k)^2$ او $\overline{CT} = r$ نو د مماس اوږدوالی مساوي

دی په: $\overline{P_1T} = \sqrt{(x_1-h)^2 + (y_1-k)^2 - r^2}$



په یاد ولرئ چې د مماس په امتداد د مماس د اوږدوالی د پیداکولو لپاره د دایرې له کومې خارجي نقطې څخه د x او y قیمتونه د دایرې په معادله کې وضع کوو.

دریم مثال: د $(-5,10)$ له نقطې څخه د $5x^2 + 5y^2 + 14x + 12y - 10 = 0$ پر دایره د مماس اوږدوالی پیدا کړئ.

حل: د معادلې دواړه خواوې پر 5 ویشو، نو لرو چې: $x^2 + y^2 + \frac{14}{5}x + \frac{12}{5}y - 2 = 0$

$\sqrt{(-5)^2 + (10)^2 - 14 + 24 - 2} = \sqrt{133}$ = د مماس اوږدوالی

فعالیت

د هغه مماس اوږدوالی پیداکړئ چې د $P(-2,2)$ له نقطې څخه د $x^2 + y^2 - 6x + 8y = 0$ پر دایره باندې مماس وي.

د دایرې په معادله کې د مستقیم خط د یو مجهول په وضع کولو سره، یوه دویمه درجه یو مجهوله معادله په لاس راځي، که په دې معادله کې $\Delta > 0$ وي، مستقیم خط دایره په دوو

(c) ketabton.com: The Digital Library

نقطــوکــې قطع کوي او که $\Delta = 0$ وي خط پر دايره مماس دی او که $\Delta < 0$ وي، مســتقيم خط دايره نه قطع کوي.

د هغــه مســتقيم خط معادله چــې د $P_1(x_1, y_1)$ په نقطه کــې پر هغه دايره چــې مرکز يې (h,k) دی مماس وي، عبارت ده له:

$$y - y_1 = -\frac{h - x_1}{k - y_1}(x - x_1)$$

که د دايرې مرکز د وضعيه کمياتو په مبداکې وي، نو د مماس معادله: $yy_1 + xx_1 = x_1^2 + y_1^2$

يا $yy_1 + xx_1 = r^2$ ده، د مماس اوږدوالی د $P(x, y)$ له نقطې څخه چې د دايرې د باندې واقع ده او د دايرې مرکز (h,k) دی مساوی ده په:

$$\overline{PT} = \sqrt{(x - h)^2 + (y - k)^2 - r^2}$$

پوښتنې

1 - د لاندې مســتقيو خطونو حالتونه له دايرو ســره چې معادلې يې په لاندې ډول راکړل شــوي دي وڅېړئ.

د مستقيمو خطونو معادلې	د دايرو معادلې
$3x - 2y + 3 = 0$	$x^2 + y^2 - 4x - y - 3 = 0$
$x - y - 1 = 0$	$2(x^2 + y^2) - 3x + 2y - 6 = 0$
$5x - y = 1$	$x^2 + y^2 - x - 9y + 14 = 0$

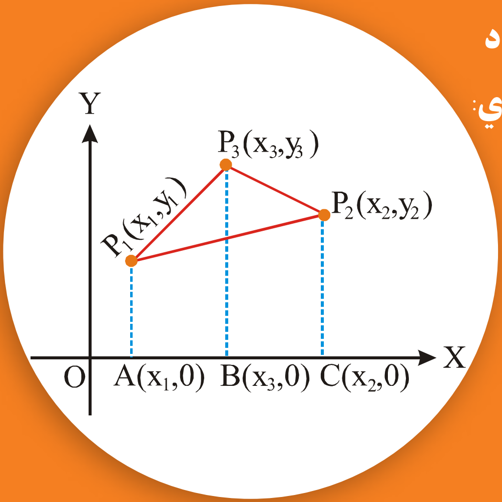
2- د هغه مستقيم خط معادله پيدا کړئ چې په $(2,-3)$ نقطه کې د $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 3 = 0$ له دايرې سره مماس وي.

3 - د هغه مماس اوږدوالی پيدا کړئ چې د $(-5,4)$ له نقطې څخه د $5x^2 + 5y^2 - 10x + 15y - 131 = 0$ پر دايره مماس رسم شوی وي

4- د هغه مماس اوږدوالی پيدا کړئ چې د $(-2,-5)$ له نقطې څخه د $x^2 + y^2 + 8x + 5y = 7$ پر دايره مماس رسم شوی وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مثلث د مساحت پیدا کول چې د راسونو وضعیه کمیات یې معلوم وي:



آیا د هغه مثلث مساحت پیداکولای شئ چې رأسونه یې $(-3,6)$ ، $(3,2)$ او $(6,0)$ وي؟

که P_1 ، P_2 او P_3 لکه چې په شکل کې لیدل کېږي د یوه مثلث راسونه وي. د X پر محور $\overline{P_1A}$ ، $\overline{P_2C}$ او $\overline{P_3B}$ درې عمود خطونه رسم کړئ.

د $P_1P_2P_3$ مثلث مساحت = د P_1ABP_3 ذوذنقې مساحت + د P_3BCP_2 ذوذنقې مساحت $-$ د P_1ACP_2 ذوذنقې مساحت

لکه څرنګه چې پوهېږو:

د ذوذنقې مساحت = (د موازي ضلعو د نیمايي مجموعه) × (د موازي ضلعو ترمنځ فاصله)

نو:

$$\text{د } \overset{\Delta}{P_1P_2P_3} \text{ مثلث مساحت} = \frac{1}{2}(|P_1A|+|P_3B|)(|AB|)+\frac{1}{2}(|P_3B|+|P_2C|)(|BC|)$$

$$-\frac{1}{2}(|P_1A|+|P_2C|)(|AC|)$$

$$=\frac{1}{2}[(y_1+y_3)(x_3-x_1)]+\frac{1}{2}[(y_3+y_2)(x_2-x_3)]-\frac{1}{2}[(y_1+y_2)(x_2-x_1)]$$

$$=\frac{1}{2}(x_3y_1+x_3y_3-x_1y_1-x_1y_3+x_2y_3+x_2y_2$$

$$-x_3y_3-x_3y_2-x_2y_1-x_2y_2+x_1y_1+x_1y_2)$$

$$=\frac{1}{2}[x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)]$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: که چېرې $A(4,-5)$ ، $B(5,-6)$ او $C(3,1)$ د یوه مثلث راسونه وي، ددې مثلث مساحت پیداکړئ.

حل: $x_1=4\ ,\ y_1=-5\ ,\ x_2=5\ ,\ y_2=-6\quad x_3=3\quad y_3=1$

$$\overset{\Delta}{ABC} \text{ د مثلث مساحت } =\frac{1}{2}[x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)]$$

$$=\frac{1}{2}\left[4(-6-1)+5(1+5)+3(-5+6)\right]$$

$$=\frac{1}{2}(-28+30+3)=\frac{1}{2}\cdot 5=\frac{5}{2}=2.5$$

□

که د $P_1P_2P_3$ مثلث رأسونه $P_1(x_1,y_1)$ ، $P_2(x_2,y_2)$ او $P_3(x_3,y_3)$ وی، نو

د مثلث مسـأحت د $\frac{1}{2}[x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)]$ له فورمول څخه په لاس راځي.

پوښتنې

1 - د هغه مثلث مساحت پیداکړئ چې رأسونه یې $A(0,0)$ ، $B(8,6)$ او $C(12,4)$ وي.

2 - کـه د یـوه مثلث رأسـونه $A(4,0)$ ، $B(-4,0)$ او $C(0,3)$ وي، ددې مثلث مسـاحـت پیدا کړئ.

3 - د هغـه څلور ضلعي مسـاحـت پیـداکړئ چې رأسـونه یې $A(1,0)$ ، $B(6,2)$ ، $C(8,6)$ او $D(2,4)$ وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ښېرکي لنډيز:

• د وضعیه کمیاتو په مستوي کې هغه نقطې چې د X پر محور پرتې دي، د y مختصه یې صفر او کومې نقطې چې د Y پر محور پرتې دي د x مختصه یې صفر ده

• د $P(x_1, y_1)$ او $Q(x_2, y_2)$ د دوو نقطو تر منځ فاصله $d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ له فورمول څخه په لاس راځي.

• د p د نقطې وضعیه کمیات چې د $\overline{P_1 P_2}$ قطعه خط د r په نسبت وېشي عبارت دي له: $y=\frac{ry_2+y_1}{1+r}$ □ $x=\frac{rx_2+x_1}{1+r}$ او د $\overline{P_1 P_2}$ د قطعه خط د تنصیف د نقطې وضعیه کمیات عبارت دي له:

$y=\frac{y_1+y_2}{2}$ □ $x=\frac{x_1+x_2}{2}$ که د p نقطه د $\overline{P_1 P_2}$ خط داخلاً د r په نسبت ووېشي نو r مثبت او که خارجاً یې و وېشي، نو r منفي دی.

• د یو مستقیم خط میل چې د $P_1\ (x_1, y_1)$ او $P_2\ (x_2, y_2)$ له نقطو څخه تېرېږي د $m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$ له فورمول څخه په لاس راځي د X د محور او د هغو خطونو میل چې د X له محور سره موازي وي صفر او د Y د محور او د هغو خطونو میل چې د Y له محور سره موازي وي، تعریف شوي نه دي. که د یوه مستقیم خط د میل زاویه حاده وي، میل یې مثبت او که منفرجه وي میل یې منفي دی.

• د هغې مستقیم خط معادله چې میل او د Y له محور سره یې تقاطع معلومه وي، عبارت ده له: $y=mx+b$.

د هغه مستقیم خط معادله چې میل او یوه نقطه یې معلومه وي، عبارت ده له:

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

د هغه مستقیم خط معادله چې دوې نقطې یې معلومې وي عبارت ده له:

$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$ اویا $\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ او د هغه مستقیم خط معادله چې

(c) ketabton.com: The Digital Library

له محورونو سره يې د تقاطع نقطې معلومې وي: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ ده.

• د يوه مستقيم خط نورمال معادله $x\cos\theta + y\sin\theta - p = 0$ او د مستقيم خط عمومي معادله $ax+by+c=0$ ده.

• د $P(x_1, y_1)$ د نقطې فاصله له يوه مستقيم خط څخه د $d = x\cos\theta + y\sin\theta - P$ او يا د $d=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$ له فورمول څخه په لاس راځي.

• د هغې دايرې معادله چې مرکز يې د وضعيه کمياتو په مبدا کې واقع وي له $x^2+y^2=r^2$ څخه عبارت ده او که مرکز يې د وضعيه کمياتو په مبدا کې واقع نه وي او (h,k) يې مرکز وي، معادله يې: $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$

يا $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ او يا $x^2+y^2+ax+by+c=0$

• د دايرې په معادله کې د مستقيم خط د يو مجهول په وضع کولو سره، يوه دويمه درجه يو مجهوله معادله په لاس راځي، که په دې معادله کې $\Delta>0$ وي، مستقيم خط دايره په دوو نقطو کې قطع کوي او که $\Delta=0$ وي خط پر دايره مماس دی او که $\Delta<0$ وي، خط دايره نه قطع کوي.

• د هغه مستقيم خط معادله چې د $P_1(x_1, y_1)$ په نقطه کې پر هغه دايره چې مرکز يې (h,k) دی مماس وي عبارت ده له: $y-y_1=-\frac{h-x_1}{k-y_1}(x-x_1)$

او که د دايرې مرکز د وضعيه کمياتو په مبدا کې وي، نو د مماس معادله يې:

$yy_1+xx_1=x_1^2+y_1^2$ يا $yy_1+xx_1=r^2$ ده او د PT مماس اوږدوالی د $P(x_1, y_1)$ له نقطې څخه چې له دايرې د باندې واقع ده او مرکز يې (h,k) دی، مساوي ده په:

$$\overline{PT}=\sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2-r^2}$$

• که د يوه مثلث رأسونه $P_1(x_1, y_1)$، $P_2(x_2, y_2)$ او $P_3(x_3, y_3)$ وي، نو $\square P_1P_2P_3$ د مثلث مساحت د $\frac{1}{2}[x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)]$ له فورمول څخه په لاس راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د څپرکي پوښتنې:

1 - د لاندې هرې جوړې نقطو ترمنځ فاصله پیداکړئ او همدرانګه ددې مستقیمو خطونو د تنصیف د نقطو وضعیه کمیات پیداکړئ چې د A او B له دوو نقطو څخه تېرېږي.

$A(3,1)\ ,B(-2,-4)$ $\qquad$ $A(-8,3)\ \ ,B(2,-1)$

$A(-\sqrt{5},-\frac{1}{3})\ ,\ B(-3\sqrt{5},5)$

2 - که $A(\sqrt{3},-1)$ ، $B(0,2)$ او $C(h,-2)$ د یوه قایم الزاویه مثلث راسونه وي او د $\hat{A}=90°$ وي، د (h) قیمت پیداکړئ.

3 - د p د نقطې وضعیه کمیات پیداکړئ، په داسې حال کې هغه مستقیم خط چې د $A(1,4)$ او $B(5,6)$ له نقطو څخه تېرېږي د $\frac{AP}{PB}=2$ په نسبت و وېشي.

4 - د هغه مستقیم خط معادله پیداکړئ چې میل یې (-2) او د Y محور په 3 کې قطع کړي.

5 - د $x=\sqrt{7}$ او $y=-\sqrt{7}$ د خطونو میل پیداکړئ.

6 - د y د محور میل مساوي دی په:

$a)\ -1$ $\qquad$ $b)\ 1$ $\qquad$ $c)\ 0$ $\qquad$ $d)$ تعریف شوی نه دی

7 - دیوه مستقیم خط میل $m=\frac{2}{3}$ دی، د هغه خط میل چې پر دې خط عمودوي، مساوي دی په:

$a)\ \frac{2}{3}$ $\qquad$ $b)\ -\frac{2}{3}$ $\qquad$ $c)\ \frac{3}{2}$ $\qquad$ $d)\ \frac{-3}{2}$

8 - د هغو مستقیمو خطونو میل پیداکړئ چې د لاندې راکړل شوو نقطو له جوړو څخه تېرېږي.

$(4,8)$ او $(4,6)$ $\qquad$ $(3,-2)$ او $(2,7)$ $\qquad$ $(-2,4)$ او $(5,11)$

9 - د $4x-y+2=0$ او $12x-3y+1=0$ مستقیم خطونه:

a) موازي دي $\qquad$ b) عمود دي $\qquad$ c) نه موازي او نه عمود دي

10 - د $3x-4y+3=0$ او $3x-4y+7=0$ مستقیمو خطونو ترمنځ فاصله پیداکړئ.

11 - د هغه مستقیم خط معادله پیداکړئ چې د $(-4,7)$ له نقطې تېر شي او د $2x-7y+4=0$ له مستقیم خط سره موازي وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

12 - د $P(6,-1)$ نقطې فاصله د $6x-4y+9=0$ له مستقیم خط څخه پیدا کړئ.

13 - د p د نقطې وضعیه کمیات په داسې حال کې پیدا کړئ چې $\overline{P_1P_2}$ مستقیم خط چې د $P_1\ (2,-5)$ او $P_2\ (6,3)$ له نقطو څخه تېرېږي د $\frac{3}{4}$ په نسبت ووېشئ.

14 - د لاندې مستقیمو خطونو معادلې نورمال شکل ته واړوئ.

$2x+5y-2=0 \qquad 2x-3y+6=0$

15 - د هغـه مسـتقیم خـط میل چې د $(4,0)$ او $(-4,0)$ له نقطو څخه تېرېږي مسـاوي دی په:

a) 1 b) -1 c) 0 d) تعریف شوي نه دی

16 - د هغه مسـتقیم خط معادله پیدا کړئ چې د نورمال اوږدوالی یې 10 واحده او نورمال خط یې د X محور له مثبت جهت سره د $30°$ زاویه جوړوي.

17 - د هغه مثلث مساحت پیدا کړئ چې راسونه یې $A(2,3)$ ، $B(-1,1)$ او $C(4,-5)$ وي.

18 - د هغه مثلث مساحت چې رأسونه یې $A(1,4)$ ، $B(2,-3)$ او $C(3,-10)$ دي مساوی دی په:

a) 1 b) 2 c) 0 d) هېڅ یو

19 - د $x+2y=6$ د مستقیم خط د تقاطع نقطې د $x^2+y^2-2x-2y-39=0$ له دایرې سره پیدا کړئ.

20 - د هغـې دایـرې معادله پیدا کړی چې د $A(1,1)$, $B(2,-1)$ او $C(3,-2)$ له نقطو څخه تېرېږي.

21 - د هغـې دایـرې معادله پیداکړئ چې د $A(3,-1)$ او $B(0,1)$ له نقطو څخه تېرېږي او مرکز یې د $4x-3y-3=0$ پر مستقیم خط واقع وي.

22 - د $4x^2+4y^2-8x+12y-25=0$ دایـرې د مرکـز وضعیـه کمیـات او د شـعاع اوږدوالی یې پیداکړئ.

23 - د هغـې دایرې معادله پیـداکړی چې د $A(4,1)$ او $B(6,5)$ له نقطو څخه تېرېږي او مرکز یې د $4x+y-16=0$ پر مستقیم خط باندې واقع وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

24 - که د یوه مثلث رأسونه $A(5,-6)$ ، $B(-3,5)$ او $C(-1,2)$ وي، دا مثلث:

مختلف الاضلاع دی c) متساوی الساقین دی b) متساوی الاضلاع دی a)

25 - که د یوه مثلث رأسونه په ترتیب سره $(5,4)$ ، $(4,10)$ او $(7,8)$ وي دا مثلث:

مختلف الاضلاع دی c) متساوي الساقین دی b) متساوي الاضلاع دی a)

26 - کـه $P(-8,4)$ او $Q(2,-1)$ وي د A د نقطـې مختصات پیدا کړئ که د A نقطه د PQ خط داخلاً او خارجاً د $\frac{2}{3}$ په نسبت و وېشي.

27 - د $x-y+1=0$ مستقیم خـط د تقاطـع نقطې له $x^2+y^2=5$ دایرې سـره پیدا کړئ.

28 - کـه د $x+ay-5=0$ مسـتقیم خط د $x^2+y^2-2x+4y=0$ پـر دایره مماس وي، د a قیمت پیدا کړئ.

29 - د هغې دایرې معادله چې د $(0,0)$ او $(2,0)$ له نقطو څخه تېرېږي او د $y-1=0$ له مستقیم خط سره مماس وي، عبارت ده له:

a) $x^2+y^2-4x=0$ b) $x^2+y^2-2x=0$ c) $x^2+y^2+2x=0$

30 - هغه دایره چې معادله یې $x^2+y^2-6x+4y+14=0$ ده:

موهومي ده c) نقطوي ده b) حقیقي ده a)

31 - هغه دایره چې معادله یې $x^2+y^2+2x-4y+5=0$

موهومي ده a) نقطوي ده b) حقیقي ده c)

32 - کـه $A(4,-3)$ او $B(-2,-5)$ وي د A او B د نقطـو ترمنځ فاصله پیدا کړئ او هم د $\overline{AB}$ د خط د تنصیف نقطې وضعیه کمیات پیدا کړئ.

33 - کـه د یوه مثلث رأسـونه $A(-6,3)$ ، $B(3,-5)$ او $C(-1,5)$ وي، وښیاسـت چې دا مثلث قایم الزاویه مثلث دی.

34 - وښیاست چې $A(0,0)$ ، $B(a,0)$ ، $C(0,b)$ او $D(a,b)$ د یو مستطیل رأسونه دي او هم وښیاست چې د مستطیل د قطرونو اوږدوالی سره مساوي دی.

35 - وښیاست چې $A(3,1)$ ، $B(6,2)$ او $C(9,3)$ نقطې پر یوه مستقیم خط واقع دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

36 - د هغـه مسـتقيمو خطونـو معادلې پيدا کړئ چـې د لاندې هروجوړو لـه نقطو څخه تېرېږي.

(5,8)	(1,2)	(3,5)	(8,15)
(−1,−3)	(2,−1)	(−2,−1)	(3,−4)
(0,3)	(5,0)	(0,2)	(−2,0)

37 - د هغـه مسـتقيم خط معادله چې د (5,8) او (−1,10) له نقطو څخـه تېرېږي عبارت ده له:

$a: \quad y = -\frac{1}{3}x + 9\frac{2}{3}$

$b: \quad y = -\frac{x}{3} + 9\frac{2}{3}$

$c: \quad y = -\frac{1}{3}x + \frac{29}{3}$

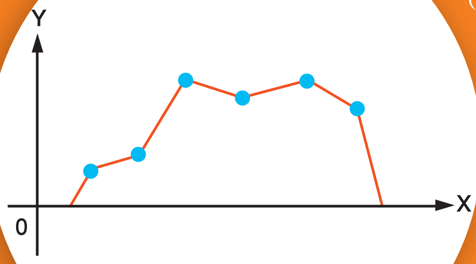
d: درې واړه سم دي

(c) ketabton.com: The Digital Library

اتم خپرکی احصائیه

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library



د فریکونسي څو ضلعي ګراف
(Frequency Polygon graph)

مخامخ شکل په پام کې ونیسئ، آیا کولای شئ د راکړل شوي منحني لاندې مساحت پیدا کړئ؟ آیا ویلای شئ چې تر منحني لاندې مساحت له څه شي سره برابر دی؟

فعالیت

د فریکونسیو مخامخ جدول په نظر کې ونیسئ.

کلاسونه	د کلاس (صنف)مرکز	فریکونسی
10-13	11.5	3
13-16	14.5	6
16-19	17.5	7
19-22	20.5	4

- د هر کلاس (صنف) مرکز د لومړي مختصې او اړونده فریکونسي یې د دویمې مختصې په حیث د مرتبو جوړو په شکل په نظر کې ونیسئ.
- ددې مرتبو جوړو موقعیت د قایمو وضعیه کمیاتو په سیستم کې وټاکئ.
- هغه نقطې چې په مستوي کې له دې مرتبو جوړو څخه په لاس راځي، سره ونښلوئ.

آیا کولای شئ چې ددې ګراف لاندې مساحت پیدا کړئ؟
- د X پر محور د ګراف دواړو خواوو ته (8.5,0) او (38.5,0) نقطې زیاتې کړئ. په لاس راغلی ګراف د فریکونسي جدول له مستطیلي ګراف سره یوځای رسم کړئ او د مستطیلونو مساحت د منحني لاندې مساحت سره پرتله کړئ.

په څو ضلعي ګراف کې د هر کلاس مرکز پر افقي محور اود هر کلاس مطلقه فریکونسي یا نسبي

(c) ketabton.com: The Digital Library

فریکونسي پر عمودي محور ښودل کېږي، د کلاس مرکز (منځني نقطه) او د کلاس د فریکونسیو په مقابل کې په مستوي کې یوه نقطه ټاکل کېږي چې عرض یې د کلاس مرکز او اوږدوالی یې د هماغه کلاس له فریکونسیو سره برابر دی، د جدول د کلاسونو په شمېر په مستوي کې په هماغه اندازه نقطې په لاس راځي. که د کلاسونو په اول او اخر کې دوي نورې د $(x_n + c\ ,0)$, $(x_1 - c\ ,0)$ اختیاري نقطې زیاتې کړئ، څرنګه چې c د هر کلاس وسعت دی یعني (پاسني سرحد منفي د هماغه صنف لاندینی سرحد) چې ددې نقطو له نښلولو څخه یو ګراف په لاس راځي چې د فریکونسي څو ضلعي ګراف نومیږي.

مثال: د لاندې جدول د ډیټا (Data) مستطیلي (هستوګرام) او د فریکونسیو څو ضلعي ګرافونه یې رسم کړئ.

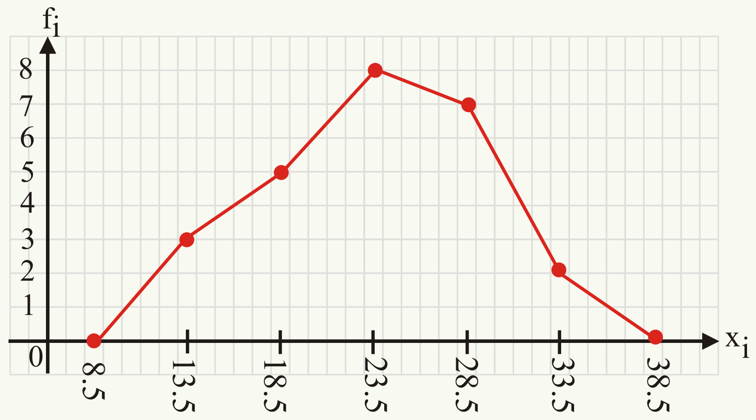
31-36	26-31	21-26	16-21	11-16	د کلاسونو حدود = CL
2	7	8	5	3	مطلقه فریکونسي = f_i
33.5	28.5	23.5	18.5	13.5	د کلاسونو مرکز = X_i

پوهېږو چې $c = 5$ ده، ددې لپاره چې دوه اختیاري نقطې په لاس راوړو، نو:

$$(x_1 - 5\ ,\ 0) = (13.5 - 5\ ,\ 0) = (8.5\ ,\ 0)$$

$$(x_n + 5\ ,\ 0) = (33.5 + 5\ ,\ 0) = (38.5\ ,\ 0)$$

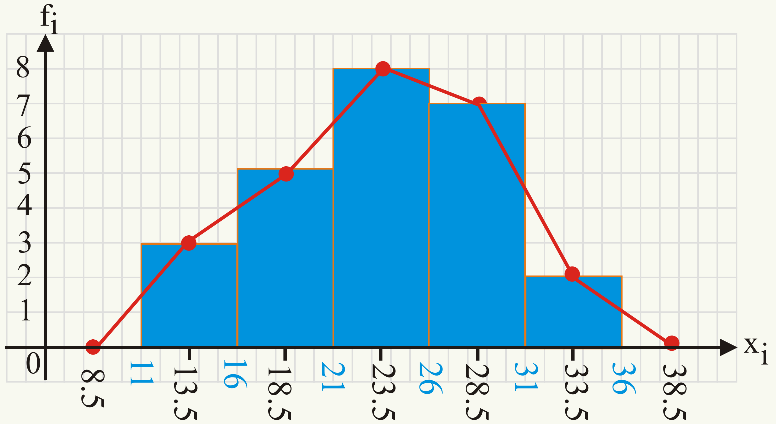
ددې نقطو $(8.5\ ,0)$ او $(38.5\ ,0)$ په اضافه کولو سره ګراف رسموو:



د فریکونسي څو ضلعي ګراف

(c) ketabton.com: The Digital Library

مستطیلي ګراف د فریکونسي څو ضلعي ګراف سره:



له پورتني ګراف څخه لیدل کیږي چې:

- د فریکونسیو څو ضلعي ګراف راسونه تر مطالعې لاندې دفریکونسیو له جدول د اړونده مستطیل د پورتنی ضلعې منځني نقطه سره واقع دي.
- د فریکونسیو څو ضلعي ګراف د لاندې سطحې مساحت د مستطیلي ګراف له مساحت سره برابر دی.
- د نسبي فریکونسیو څو ضلعي ګرافونه زیات د متصلو ډیټاوو (Data) له پاره کارول کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

1 - د نهم اولسم ټولګیو د 24 زده کوونکو د تنې لوړوالی د سانتي متر په حساب په لاندې ډول راکړل شوی دی.

138	107	136	128	148	118
142	129	115	123	133	123
121	128	122	144	126	135
152	98	117	153	141	126

د پورتنې ډیټا (Data) لپاره د فریکونسي یو جدول ترتیب کړئ.ډیټا (Data) په شپږو طبقو وویشئ، ددې ډیټا (Data) د ښودلو لپاره کوم ډول ګراف ښه دی، د فریکونسیو څو ضلعي ګراف رسم کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ساقې او پاڼې ګراف

موږ د عددونو په نړۍ کې ژوند کوو، هر تن د خپل هیواد د ټولنې د يو غړي په حيث يوه خاصه شمېره لري چې د نورو مشخصو په شان د اهميت ور ده. آيا ويلای شئ چې دا شمېره څه شی ده؟ او آيا تاسو هم خپله شمېره پيژنئ؟

فعاليت

• په لاندې جدول کې د سانتي متر په حساب د 20 نويو پيدا شوو ماشومانو د تنې لوړوالی چې په تصادفي ډول انتخاب شوی دی، راکړل شوی دی.

45	46	47	43	49	40	42	46	45	43
43	43	48	49	47	49	48	49	47	45

• پورتنی ډيټا (Data) له کوچني عدد څخه لوی عدد ته ترتيب کړئ.

- ليدل کېږي چې په دې ټولو عددونو کې د 4 رقم مشترک دی، کولای شو چې دا رقمونه په لاندې ډول وليکو.

40 + (0,2,3,3,3,3,5,5,5,6,6,7,7,7,8,8,9,9,9,9)

• له 0 تر 9 پورې رقمونه هر يو رقم څو واري تکرار شوی دی.

پورتنی رقمونه په لاندې شکل ليکو.

4	0			
	2			
	3	3	3	3
	5	5	5	
	6	6		
	7	7	7	
	8	8		
	9	9	9	9

(c) ketabton.com: The Digital Library

- که د عددونو پورتنی شکل د 90° زاویې په اندازه کیڼې خوا ته دوران ورکړئ، دا شکل له کوم ډول ګراف سره مشابه دی؟

ډیټا عموماً د عددونو په شکل وي. له دې عددونو څخه ځرنګه چې په پورتني فعالیت کې ولیدل شول، کولای شو، ګراف یې جوړ کړو چې دا ګراف د ساقې او پاڼې د ګراف په نامه یادېږي.
او که دې ګراف ته د 90° زاویې په اندازه کیڼې خواته دوران ورکړو، میله یي ګراف لاس ته راځي.
د مثال په ډول که ډیټا د صفر او 100 ترمنځ وي، کولای شو، لکه: د 37 عدد 3 په ساقه او (7) د پاڼې په حیث ولیکو.
د ساقې او پاڼې ګراف د هغو ډیټا (Data) لپاره چې تر ټولو لوی او تر ټولوکوچنی ډیټا (Data) ترمنځ توپیر یې لږ وي، مناسب دی.

لومړی مثال: د کتابونو په یو پلورنځي کې 20 ډوله کتابونه چې هر ډول شمېر یې په لاندې جدول کې راکړل شوی دی، ددې ډیټا (Data) د ساقې او پاڼې ګراف رسم کړئ.

10	11	15	23	27	28	38	38	39	39
40	41	44	45	46	46	52	57	58	65

حل: ښکاره ده چې د ډیټا (Data) د کیڼې خوا اولني عددونه 5.4.3.2.1 او 6 دي. چې دا عددونه د ساقې لپاره په نظر کې نیسو. او د هرې څانګې اړونده ډیټا ورته ددې عددونو مخکې لیکو چې په لاندې ډول لاس ته راځي.

ساقه	پاڼې
1	0 1 5
2	3 7 8
3	8 8 9 9
4	0 1 4 5 6 6
5	2 7 8
6	5

(c) ketabton.com: The Digital Library

که د کتاب مخ ته د ساعت د ستنې حرکت په مخالفه خوا کې د 90° زاويې په اندازه دوران ورکړو. داګراف د ميله يي ګراف په شکل بدليږي چې په لاندې ډول يې ليکلای شو.

فريکونسي

6				6		
5				6		
4			9	5		
3	5	8	9	4	8	
2	1	7	8	1	7	
1	0	3	8	0	2	5
	1	2	3	4	5	6

دويم مثال: د رياضي په يوه امتحان کې لاندې نتيجې له زده کوونکو څخه پلاس راغلي دي، ددې ډيټا لپاره د ساقې او پاڼې ګراف رسم کړئ.

25 45 46 50 50 50 55 55 55 55
55 57 58 58 60 60 62 65 67 72

حل: د ساقې د رسم لپاره له لسيزو رقمونو او د پاڼې د ترسيم لپاره له يوويزو رقمونو څخه استفاده کوو:

ساقه	پاڼې									
2	5									
3										
4	5	6								
5	0	0	0	5	5	5	5	5	7	8	8
6	0	0	2	5	7					
7	2									

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

1- د لاندې ډيټا (Data) لپاره د ساقې اوپاڼې ګراف رسم کړئ.

7.9	8.3	10.9	11.7	8.4	9.1	6.8	12.5
11.2	7.8	12	11.3	8.4	13	6.8	

پاملرنه: د ساقې او پاڼې د ګراف د ښودلو لپاره د 8.3 عدد د 83 په شکل او د 11.2 عدد د 112په شکل او د 12 عدد د 120 په شکل ليکو.

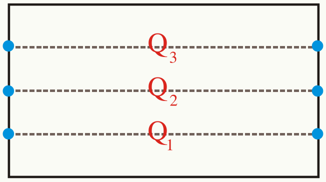
(c) ketabton.com: The Digital Library

ربعي (څلورمي)

په مخامخ شکل کې که دا د خلکو ټولنه نظر د دوی د تني د لوړوالي په نسبت په څلورو مساوي برخو و وېشل شي، هره برخه یې په کوم نامه یادوي ؟

فعالیت

مخامخ شکل یو مستطیل دی چې د Q_1, Q_2 او Q_3 خطونو په واسطه په څلورو مساوي برخو وېشل شوی دی.



- د مستطیل د مساحت څو فیصده مساحت د Q_1 د خط لاندې، څو فیصده مساحت د Q_1 د خط له پاسه واقع دی؟
- دمستطیل څو فیصده مساحت د Q_2 تر خط لاندې او څوفیصده مساحت د Q_2 د خط له پاسه دی؟
- د مستطیل څو فیصده مساحت د Q_3 تر خط لاندې او څو فیصده مساحت د Q_3 د خط له پاسه دی؟

هغه عددونه چې ترتیب شوي ډیټا په څلورو مساوي برخو وېشي، دغه عددونو ته لومړی ربع، دویمه ربعه او دریمه ربع وایي او په Q_1, Q_2 او Q_3 سره ښودل کېږي.

لومړي ربع هغه مقدار دی چې 25% ډیټا له هغې لاندې او 75% ډیټا له هغې پورته واقع وي.

دویمه ربع هغه مقدار دی چې 50% ډیټا له هغې لاندې او 50% ډیټا له هغې پورته واقع وي.

دریمه ربع هغه مقدار دی چې 75% ډیټا ترې لاندې او 25% ډیټا یې له پاسه واقع وي.

که ډیټا (Data)په صعودي ډول ترتیب کړو، د ډیټا (Data)میانه د Q_2 سره مساوي لومړنی نیمايي ډیټا (Data) میانه له Q_1 سره مساوي او همدارنګه د دویمې نیمايي میانه له Q_3 سره مساوي ده. د ربعو د پیداکولو په وخت کې لاندې پړاونه په پام کې ونیسئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

- ډیټا (Data)په صعودي ډول ترتیب کړئ.
- ترتیب شوی ډیټا ته له (1) څخه تر n پورې شمېره (کوډ) ورکړئ.
- د P ام موقعیت ($P=1,2,3$) دلاندې رابطې په مرسته په لاس راځي.

$$C_{QP}=\frac{P\cdot n}{4}+\frac{1}{2}$$

• د ربعي د موقعیت په اساس، د ربعي مقدار وټاکئ.

مثال: فرض کړئ په لاس راغلي ډیټا (مشاهدې) په لاندې ډول راکړل شوي وي.

90 85 80 120 100 140

د لومړي او دریمې ربعې ځایونه وټاکئ.

د لومړي او دریمې ربعې مقدارونه پلاس راوړئ.

د ډیټا شمېره:	6	5	4	3	2	1
ډیټا :	140	120	100	90	85	80

د لومړي او دریمې ربعې ځایونه عبارت دي له:

$$C_{Q_1}=\frac{1\cdot 6}{4}+\frac{1}{2}=2$$

$$C_{Q_3}=\frac{3\cdot 6}{4}+\frac{1}{2}=5$$

نو د لومړي او دریمې، ربعې مقدارونه مساوي دي په:

$Q_1=85$ $Q_3=120$

پوښتنې

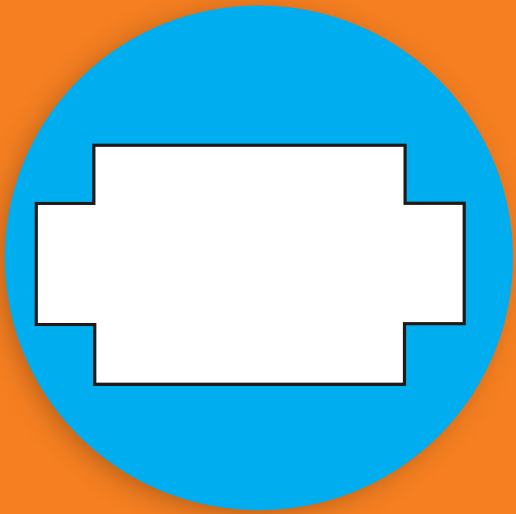
فرض کړئ په لاس راغلي ډیټا په لاندې ډول راکړل شوي وي.

100 90 80 120 160 140 85

- لومړی او دریمه ربعې (څلورمې) پیدا کړئ.
- له میانې تر مخه عددونه ولیکئ.
- له میانې وروسته عددونه په لاس راوړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

صندوقچه يي گراف



د يوې تختې کاغذ له څلورو کنجونو څخه څلور مربعګانې چې هره ضلع يې 5cm وي، جلا کړئ، بيا د کاغذ څنډې له پورته خواڅخه قات کړئ.

کوم شکل چې په لاس راځي، له څه شي سره ورته والی لري؟

فعاليت

د هغه ناروغانو شمېر چې د 17 ورځو، په موده کې يوه روغتون ته راغلي دي، په لاندې ډول ثبت شوي دي.

24	17	16	27	14	23	15	10	11
	19	26	25	18	31	31	13	28

- ميانه يې پيدا کړئ.
- هغه عددونه وليکئ چې د ميانې تر مخې نيمايي کې پراته دي.
- ددې عددونو لپاره ميانه پيدا کړئ.
- هغه عددونه وليکئ چې د ميانې په وروسته نيمايي کې پراته دي.
- ددې عددونو لپاره ميانه پيدا کړئ.
- دويمه ربع (څلورمه) يا Q_2 کوم عدد دی؟

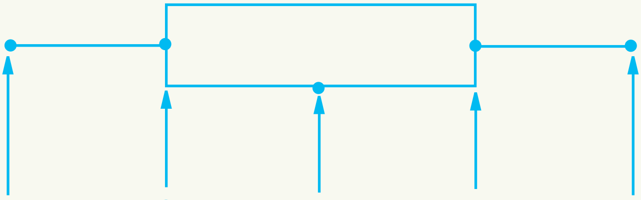
صندوقچه يي يا جعبه يي گراف: دا يو داسې تصويري گراف دی چې د ډيټا (Data) تيت والی د نورو گرافونو په نسبت ښه روښانه کوي، د ا گراف د لاندېنيو اندازو پر بنياد د ډيټا (Data) گراف ښکاره کوي.

الف) تر ټولو کوچنی ډيټا ب) لومړنی ربع (څلورمه) ج) ميانه

د) دريمه ربع هـ) تر ټولو لويه ډيټا

صندوقچه يي گراف د ربعو او له زيات نه زيات او کم تر کمه ډيټا (Data) ښودونکی دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library



کولای شو د صندوقچه يي ګراف د رسمولو پړاوونه په لاندې ډول وليکو:

الف) تر ټولو کوچنی ډيټا پيدا کړئ. ب) تر ټولو لويه ډيټا پيدا کړئ

ج) ميانه پيدا کړئ د) لومړی ربع پيدا کړئ

هـ) دريمه ربع پيدا کړئ و) ګراف رسم کړئ.

مثال: که په يو ښار کې د 15 ورځو په موده کې د ترافيکي پيښو شمېر په لاندې ډول راکړل شوي وي، صندوقچه يي ګراف يې رسم کړئ.

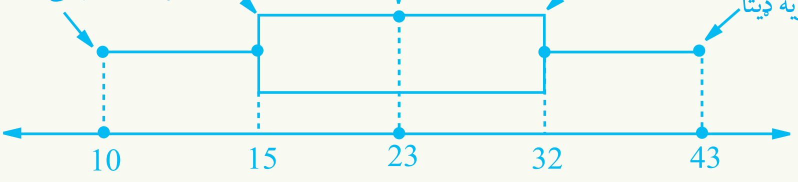
12	10	15	23	14	27	16	34
	41	43	32	18	25	31	19

حل: پورتنی ډيټا په ترتيب ليکو.

10 12 14 15 16 18 19 23 25 27 31 32 34 41 43

نو: تر ټولو کوچنی ډيټا = 10 تر ټولو لويه ډيټا= 43

ميانه = 23 لومړی ربع = $Q_1 = 15$ دريمه ربعه = $Q_3 = 32$



پورتنی ګراف صندوقچه يي ګراف دی چې 50% ډيټا دصندوق په داخل کې (د لومړی، دريمي او ربعي ترمنځ) پرتې دي، 25% يې 10 او 15 ترمنځ او 25% ډيټا د 32 او 43 ترمنځ پرته ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د نارمل منحني د مرکزي ټاکوونکو پرتله کول

$$mod = ?$$
$$med = ?$$
$$\overline{x} = ?$$

آیا کولای شو چې د نارمل منحني په مرسته مرکزي ټاکوونکی پلاس راوړو؟

لاندې کوم منحني چې وينئ، په احصائيه کې يوله مشهورو منحني ګانو څخه دی، کولای شو چې زياتې طبيعي پيښې ددې منحني په مرسته وښايو. نارمل منحني يو متناظره منحني دی چې د يوه زنګ په شان شکل لري.

- آيا د اوسط، مياني او موډ د مرکزي ټاکوونکو ځايونه په دې منحني کې ښودلای شئ؟

فعالیت

- که په يوه ټولګي کې ټول زده کوونکي ښې نمرې واخلي:
- آيا څه فکر کوئ چې ددوی د نمرو اوسط هم ښه دی؟
- آيا د اوسط لوړوالی د ټولګي د تعليمي وضعي پر ښه والي دلالت کوي؟
- ددې لپاره چې د ټولګي وضع ښه ارزيابي کړی، نيم ټولګی بايد ښې نمرې واخلي.
- هغه کومه نمره ده چې د نيمايي ټولګي د زده کوونکو نمرې له هغې زياتې وي؟

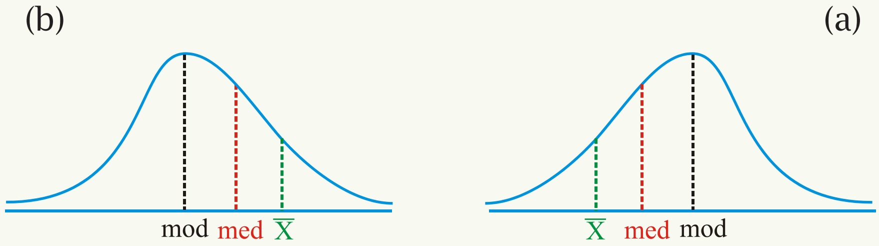
(c) ketabton.com: The Digital Library

- که میانه له اوسط څخه ډېره کوچنۍ وي، له دې څخه څه شی په لاس راځي؟
- که میانه له اوسط څخه ډېره لویه وي، له دې څخه څه شی په لاس راځي؟

د پورتني فعالیت او د منحني له متناظر والي څخه نتیجه په لاس راځي چې د میانې او اوسط ځای په نارمل منحني کې یو دی او څرنګه چې نارمل منحني اعظمي نقطه لري، نو له همدې سببه د موډ ځای هم له اوسط او میانې سره مساوي دی یعنې:

$$\overline{X} = \text{mod} = \text{md}$$

که نارمل منحني، متناظره نه وي، په دې حالت کې لرو چې:



$\text{mod} < med < \overline{x}$ $\qquad$ $\overline{x} < med < \text{mod}$

- که چېرې اوسط او میانه سره مساوي وي، له اوسط او میانې څخه تر مخه او له اوسط او میانې څخه وروسته ډېټاګانې سره مساوي دي.

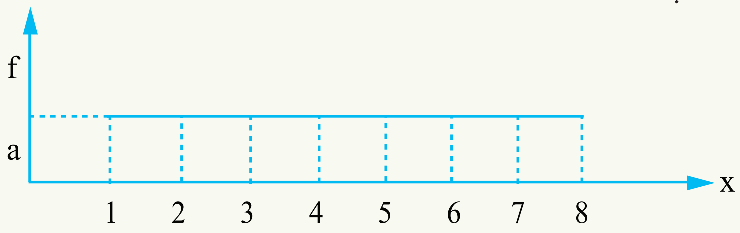
-که اوسط د میانې کیڼې خوا ته پروت وي، د هغو ډېټا شمېر چې د اوسط ښي خواته پرتې دي، د هغو ډېټا (Data) له شمېر څخه چې د اوسط کیڼې خواته پرتې دي، زیات دی، لکه: د a په شکل کې.

-که اوسط د میانې ښي خواته پروت وي، د هغه ډېټا (Data) شمېر چې د اوسط ښي خواته پرتې دي، د هغه ډېټاوو (Data) له شمېر څخه چې د اوسط کیڼې خوا ته پرتې دي، لږ دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لکه د b به شکل کې

مثال: په لاندې ګراف کې اوسط او میانه پیدا کړئ.



حل:

= میانه

$$med = \frac{4+5}{2} = \frac{9}{2} = 4.5$$

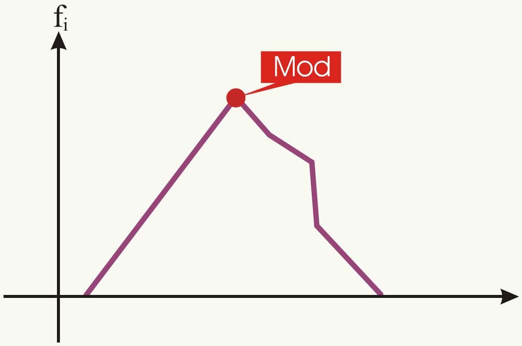
= اوسط

$$\bar{x} = \frac{a\cdot1+a\cdot2+a\cdot3+a\cdot4+a\cdot5+a\cdot6+a\cdot7+a\cdot8}{a+a+a+a+a+a+a+a}$$

$$\bar{x} = \frac{36a}{8a} = 4.5$$

مثال: په لاندې ګراف کې د موډ تقریبي قیمت پرته له محاسبې په ګوته کړئ.

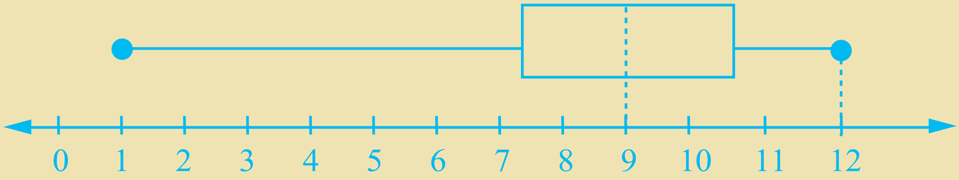
حل:



(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

1- دلاندې صندوقچه یې ګراف په نظر کې نیولو سره لاندې اړوندو پوښتنو ته ځوابونه ورکړئ.



• په پورتني ګراف کې میانه څومره ده؟

• په دې ډیټا کې لومړنی، ربع د 8 عدد دی، دا عدد، څه شی ښیي؟

• دریمه ربع څو ده؟ دا عدد، د څه شي ښودونکی ده؟

• دا چې میانه د صندوق کیڼې خواته ده، د څه شي ښکارندویه دی؟

• داچې د کیڼې خوا د عددونو شمېر نظر ښي خوا ته زیات دی دا زیاتوالی د څه ښکاره کوونکی دی؟

2- د یوه هېواد د فوټبال ملي ټیم د لوبغاړو عمرونه په لاندې ډول دي.

25	24	26	19	31	18	23	22	25	26
25	27	23	29	25	25	33	31	26	

د لاندې نتیجو څخه کومه یوه سمه ده؟

• د هغو لوبغاړو شمېر چې عمرونه یې له اوسط څخه لوړ وي، ډېر دي.

• د هغو لوبغاړو شمېر چې عمرونه یې له میانې څخه لوړ وي، ډېر دي.

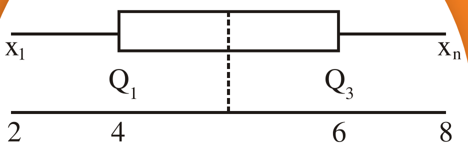
• د هغو لوبغاړو شمېر چې عمرونه یې له اوسط څخه ښکته وي، ډېر دي.

• د هغو لوبغاړو شمېر چې عمرونه یې له اوسط څخه ډېر وي د هغه لوبغاړو له شمېر سره مساوي دی چې عمرونه یې له اوسط څخه لږ دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ربعي انحراف

که د یوې ټولنې د احصائیوي تغیراتو لمن لویه وي، آیا فکر کوئ چې د ډیټا د تحول ساحه به له ټولنې څخه نامناسبه پایله وړاندې کړي؟



$X_n - X_1 = ?$

$Q_3 - Q_1 = ?$

فعالیت

له یو موزیم څخه د لیدونکو شمېر په 12 ورځو کې په لاندې ډول دی.

0 1 2 8 7 6 5 9 10 6 15 11

- ددې ډیټا (Data) د تحول ساحه پلاس راوړئ.
- په عمومي ډول پورتنی ډیټاوې د کومو دوو عددونو ترمنځ تیت شوي دي؟
- یو په څلورمه برخه ډیټا له پورته اوښکته خوا څخه حذف کړئ او بیا د پاتې ډیټا (Data) د تحول ساحه پیدا کړئ.
- دا د تحول دوه ساحې چې په لاس راغلي دي، یو له بله سره یې پرتله کړئ، کومه یو ه یې ډېر تیت والي ښیي؟
- په ځینو وختونو کې د تحول ساحه د دوو ډېرو کوچنیو او یا ډېرو لویو مقدارونو له سببه، نامناسبه تعبیرونه له ټولنې څخه موږ ته په لاس راکوي.

نو له دې امله د نورو ټاکونکو څخه چې د ربعو د انحراف په نامه یادېږي، ګټه اخیستل کېږي، تر څو د ټولنې د تحول ساحه په ښه ډول وټاکي.

که Q_1 او Q_3 په ترتیب سره د ډیټا د سټ، لومړی ربع او دریمه ربع وي، نو د ربعو انحراف په (Q) سره ښودل کېږي او په لاندې ډول تعریف شوی دی.

$$Q = Q_3 - Q_1$$

ربعي انحراف یو له هغو ټاکونکو څخه دی چې د ډیټا (Data) تیت والي ښکاره کوي.

داسې چې د لومړي او دریمې ربعې له تعریف څخه پوهېږو چې 50% ټولنه د $Q_3 - Q_1$ په فاصله کې پرته ده. په هره اندازه چې دا فاصله لږه وي، ډیټا سره نژدې دي، یا په بل عبارت د هغوی

(c) ketabton.com: The Digital Library

تیت والي لري دی.

ځېنې وختونه د ربعو (څلورمو) انحراف د $Q=\frac{Q_3-Q_1}{2}$ په شکل تعریفوي او دې ته د ربعو نیمایي لمن وایي.

مثال: دلاندې عددونو د ربعو (څلورمو) انحراف پیدا کړئ.

36 35 29 30 31 25 24 23 22 22 20

حل: لومړی عددونه په صعودي ډول ترتیب کوو او بیا ورته یوه شمېره ټاکو:

20	22	22	23	24	25	29	30	31	35	36
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

$$C_{Q_n}=\frac{P\cdot n}{4}+\frac{1}{2}$$

$$C_{Q_3}=\frac{3\cdot 11}{4}+\frac{1}{2}=\frac{33}{4}+\frac{1}{2}=\frac{33+2}{4}=\frac{35}{4}=8.75$$

نوله دې ځایه:

$$Q_3=30.75$$

همدارنګه:

$$C_{Q_1}=\frac{1\cdot 11}{4}+\frac{1}{2}=\frac{11}{4}+\frac{1}{2}=\frac{11+2}{4}=\frac{13}{4}=3.25$$

نوله دې ځایه:

$$Q_1=22.25$$

د لومړنی او دریمې، ربعي قیمتونه په ترتیب سره 22.25 او 30.75 دي نو:

$$Q=Q_3-Q_1=30.75-22.25=8.5$$

پوښتنې

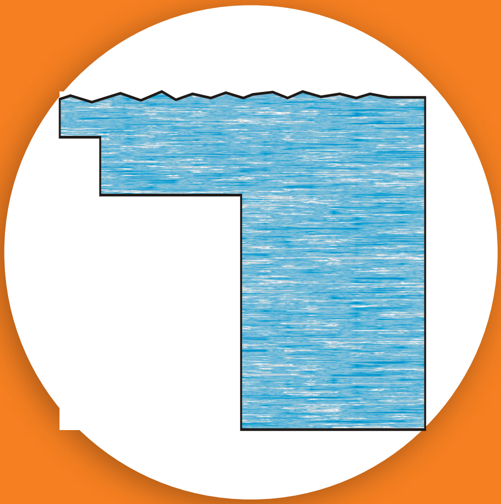
1 - د لاندې ډیټا د تحول ساحه، د ربعو (څلورمو) انحراف او موډ پیدا کړئ او ووایاست چې د ډیټا ګڼوالی په کومه ساحه کې ډېر دی.

5 11 12 14 15 15 16 17 30

2 - د لاندې ډیټا د تحول ساحه او د څلورمو انحراف پیدا او د لومړۍ پوښتنې د تحول د ساحې او د څلورمو د انحراف سره یې پرتله یې کړئ.

27 24 21 29 28 26 23 22

(c) ketabton.com: The Digital Library



واريانس (variance)

که ستاسو لامبو ښه زده نه وي او وغواړئ چې په داسي ډنډ کي ولامبئ چې ژور والی يې په ټولو برخوکي يو شان نه وي. ددې لپاره چې په ډاډه زړه ولامبئ، کوم معلومات بايد ولرئ؟

فعاليت

که د لمبا په يو ډنډکې د يوځای ژوروالی 1.5 متره او دبل ځای ژوروالی يې 2.5 متره وي.

- ددي ډنډ د دواړوو ځايونو د ژوروالي اوسط پيدا کړئ.
- ددي دوو ډيتاوو د انحرافونو مربع له حسابي اوسط څخه پيدا کړئ.
- ددي دوو ډيتاوو د انحرافو د مربعګانو مجموعه پيدا کړئ.
- د پورتنيو ډيتاوو (Data) مجموعه د مجموعې د غړو پر شمېر و وېشئ.

د $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ډيتا د واريانس د پيداکولو لپاره لاندې پړاوونه په نظر کي ونيسئ.

- د ډيتا اوسط پيداکړئ يعني:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} xi}{n}$$

- د انحرافونو د مربعګانو مجموعه يعني:

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 = (x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+ \quad \ldots+(x_n-\bar{x})^2$$

په لاس راوړئ.

-پورتنی مجموعه د مجموعې د غړو پر شمېر (n) و وېشئ او په s^2 يې وښيي:

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n} = \frac{(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\ldots+(x_n-\bar{x})^2}{n}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

چې دلته S^2 د واریانس په نامه یادېږي. واریانس برابر دی د انحرافونو د مربع اوسط له اوسط څخه.
پاملرنه: ځینې وختونه واریانس د پیداکولو لپاره له دې لاندې فورمول څخه هم ګټه اخلي.

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - \bar{x}^2$$

ثبوت: پورتنې فورمول کولای شو، په لاندې ډول لاس ته راوړو.

پوهېږو چې :

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i = n\bar{x}$$

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i^2 - 2x_i\bar{x} + \bar{x}^2)}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - \frac{\sum_{i=1}^{n} 2x_i\bar{x}}{n} + \frac{\sum_{i=1}^{n} \bar{x}^2}{n}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - 2\bar{x}\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} + \frac{n\bar{x}^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - 2\bar{x}\cdot\bar{x} + \bar{x}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - \bar{x}^2$$

مثال: د لاندې ډیتا (Data) وریانس د دواړو فورمولونو په مرسته پیدا کړئ.

1 5 6 7 9

الف: د $S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{5}(xi - \bar{x})^2}{5}$ له فورمول څخه خرنګه چې $i = 1,2,3,4,5$

$$\bar{x} = \frac{1+5+6+7+9}{5} = 5.6$$

$$S^2 = \frac{(1-5.6)^2 + (5-5.6)^2 + (6-5.6)^2 + (7-5.6)^2 + (9-5.6)^2}{5}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \frac{(-4.6)^2 + (-0.6)^2 + (0.4)^2 + (1.4)^2 + (3.4)^2}{5}$$

$$= \frac{21.16 + 0.36 + 0.16 + 1.96 + 11.56}{5} = \frac{35.2}{5} = 7.04$$

ب: له دې فورمول $S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{5} x_i^2}{5} - \bar{x}^2$ څخه هم کولی شو چې همدا قیمت په لاس راوړو

$$S^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2}{5} - \bar{x}^2 = \frac{192}{5} - (5.6)^2$$

$$= 38.4 - 31.36 = 7.04$$

یادونه: که ډیټا په ګروپونو (کلاسوونو) کې ترتیب شوي وي او د کلاسونو مرکزونه $x_1, x_2, ..., x_n$ او $f_1, f_2, ..., f_n$ فریکونسي هم راکړل شوي وي. په دې حالت کې د واریانس د پیدا کولو لپاره له لاندې فورمول څخه کار واخلو:

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i (x_i - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^{n} f_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i (x_i - \bar{x})^2}{N}$$

داسې چې $N = \sum_{i=1}^{n} f_i$ دی.

د واریانس د واحد ټاکل مشکل دي. په عمومي ډول په عمل کې مطلقه قیمت یې نیول کېږي، ځېنې وخت د متحول د واحد مربع د واریانس د واحد په حیث ګڼل کېږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

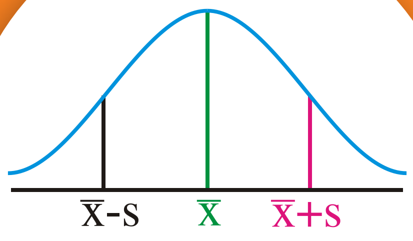
د هغو ساعتونو شمېر چې زده کوونکو په یوه اونۍ کې د لوبو کولو لپاره ټاکلي دي، په لاندې ډول راکړل شوي دي.

3 2 1 4 3 2 2

ددې ډیټا (Data) وریانس پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

معياري انحراف



که S دوريانس جذر $\bar{x}$ دډيټا اوسط وي مخامخ شکل کوم ډول ټاکونکی توضيح کوي؟

فعاليت

که S^2 د $x_1, x_2, ..., x_n$ ډيټا واريانس وي. آيا څه فکر کوئ چې د S^2 او S واحدونه سره څه توپير لري؟ فرض کړئ چې په يوه اونۍ کې يوې کارخانې ته د توکو د فرمايشونو د تسليمۍ وخت له ځينو ټاکونکو سره، لکه: انحراف، د انحراف مطلقه قيمت د انحرافو مربع په لاندې جدول کې راکړل شوي وي، څرنګه چې:

$$\bar{x}=\frac{\sum_{i=1}^{5} x_i}{n}=\frac{8+9+6+4+8}{5}=\frac{35}{5}=7$$

ورکړې وخت په ورځ x_i	$\bar{x}$	انحراف $x_i-\bar{x}$	دانحراف مطلقه قيمت $\lvert x_i-\bar{x}\rvert$	د انحرافونو مربع $(x_i-\bar{x})^2$
8	7	1	1	1
9	7	2	2	4
6	7	-1	1	1
4	7	-3	3	9
8	7	1	1	1

(c) ketabton.com: The Digital Library

• د ډیټا (جامو) د ورکړې د وخت اوسط پیدا کړئ.
• د انحرافو د مطلقه قیمت اوسط یا په لنډ ډول د انحراف اوسط (AD) پیداکړئ.
• د توکو د ورکړې وخت واریانس پیدا کړئ.
• د واریانس مربع جذر محاسبه کړئ.
• د واریانس د مربع جذر واحد د واریانس له واحد سره پرتله کړئ.

د واریانس له فورمول څخه مو زده کړل چې په توان ورلو سره نه یوازې داچې د واریانس اندازه کولو مقیاس له شک سره مخامخ کوي، بلکې انحرافونه هم لوی ښیي.

ددې لپاره چې دا ستونزې له مینځه یوسو، په کار ده چې د وریانس مربع جذر په لاس راوړو.

د واریانس جذر د ډیټا (Data) د تیت والي، یو بل ته‌کوونکی د معیاري انحراف یا مطلق تیت والي په نوم را پیژني.

معیاری انحراف چې د S په سمبول ښودل کیږي، د واریانس له مربع جذر سره مساوي دی.

په دې معنا:

$$S=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n}}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^{2}}{n}-\bar{x}^2}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^{2}}{n}-\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}\right)^2}$$

د معیاری انحراف یا د مطلق تیت والې واحد هم هغه د متحول واحد دی.

پورتنی رابطه په لاندې ډول ثبوت کیږي:

$$S^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n}=\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i^{2}-2\bar{x}x_i+\bar{x}^2)$$

$$=\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^{2}-2\bar{x}\sum_{i=1}^{n}x_i+\sum_{i=1}^{n}\bar{x}^2\right)=\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^{2}-2n\bar{x}^{\,2}+n\bar{x}^{\,2}\right)$$

$$=\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^{2}-n\bar{x}^{\,2}\right)=\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^{2}-n\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}\right)^2\right)=\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^{2}-\frac{(\sum_{i=1}^{n}x_i)^2}{n}\right)$$

$$S^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^{2}}{n}-\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}\right)^2\Rightarrow S=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^{2}}{n}-\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}\right)^2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: د 5 ناروغانو د بدن د حرارت درجې په لاندې ډول راکړل شوي دي.

38 39 39 40 41

معیاري انحراف يې پیدا کړئ

حل:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{38+39+39+40+41}{5} = \frac{197}{5} = 39.4$$

$$S^2 = \frac{(38-39.4)^2+(39-39.4)^2+(39-39.4)^2+(40-39.4)^2+(41-39.4)^2}{5}$$

$$S^2 = \frac{(-1.4)^2+(-0.4)^2+(-0.4)^2+(0.6)^2+(1.6)^2}{5}$$

$$S^2 = \frac{1.96+0.16+0.16+0.36+2.56}{5} = \frac{5.2}{5} = 1.04$$

$$S = \sqrt{1.04} = 1.01980$$

پاملرنه: د فریکونسیو له جدول څخه، معیاري انحراف په تقریبي ډول په لاندې ډول په لاس راځي:

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i - (\bar{x})^2}{\sum_{i=1}^{n} f_i}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i^2}{\sum_{i=1}^{n} f_i} - \bar{x}^2}$$

چې $\bar{x}$ د ډیټا، اوسط، x_i د کلاس مرکز او f_i د کلاس فریکونسي ښيي.

پوښتني

د څلورو ټلویزوني ستېشنونو د ښوونې او روزنې د پروګرامونو د خپرولو د ساعتونو شمېر په لاندې ډول راکړل شوی دی، د ډیټا معیاري انحراف پیدا کړئ.

1 3 4 5

(c) ketabton.com: The Digital Library

• **د فریکونسي څو ضلعي گراف**:د هغو مرتبو جوړو نقطې چې عرض یې د کلاس مرکز او اوړدوالی یې د هماغه کلاس له فریکونسي سره مساوي دی، یوه له بلې سره ونښلوو، د فریکونسي څو ضلعي گراف په لاس راځي، د فریکونسي په څو ضلعي گراف کې دوې نورې اختیاري نقطې د صفر په فریکونسي د کلاسونو (گروپونو) په لومړۍ او اخیرنی برخه کې ډېروو، تر څو د فریکونسي څو ضلعي گراف له محور سره ونښلوي.

• **د ساقې او پاڼې گراف**: د ساقې او پاڼې د گراف د رسمولو لپاره له عددونو څخه گټه اخیستل کېږي. احصائیوی ډیتا د عددونو په شکل راوړو، بیا له دې عددونو څخه د ساقې او پاڼې گراف رسموو. دا ډول گراف د هغو ډیتا (Data) لپاره چې د رقمونو د شمېر له مخې تر ټولو لوی او کوچنی رقم تر منځ توپیر لږ وي، مناسب دی.

• **ربعي**: هغه عدد چې مرتبه جامعه په دوو مساوی برخو ووېشي، د میانې په نوم یادېږي. اوس هغه عددونه په نظر کې ونیسئ چې مرتبه جامعه په څلورو مساوي برخو وېشي، دا عددونه په Q_2, Q_1 او Q_3 سره ښودل کېږي، دې عددونو ته په ترتیب سره لومړی ربع، دویمه ربع او د دریمه ربع وایي. ښکاره ده چې Q_2 میانه ده.

• **صندوقچه یې یا جعبه یې گراف**: له دې گراف څخه د هغې ډیتا (Data) لپاره چې سره نژدې دي یا هغه ډیتاوې چې د اوسط پر شاوخوا راټولې شوي دي او یا هم هغه ډیتا چې ترټولو لویو یا ترټولو کوچنیو ډیتاگانو پرشاوخوا راټولې شوي وي، گټه اخیستل کېږي، داگراف یو تصویري گراف دی چې ترټولو لویې ډیتا، ترټولو کوچنی ډیتا، میانې، لومړی ربعې او دریمې ربعې په اساس ښکاره کوي.

• **د نارمل منحني په بنیاد د مرکزي ټاکونکو پرتله کول**: څه وخت چې وغواړو مرکزي ټاکونکي (اوسط، میانه، او موډ) له نارمل منحنې څخه په گټه اخیستنې سره پرتله کړو: په دې حالت کې که نارمل منحني متناظر وي، نو اوسط، میانه او موډ سره مساوي دي. که نارمل منحني متناظر نه وي، نو مرکزي ټاکونکي نظرخپل موقعیت ته د منحني ښې خوا یا کیڼې خواته قیمتونه اخلي.

• **ربعي انحراف**: که Q_1 او Q_3 په ترتیب سره د ډیتا (Data)لومړی ربع او دریمه ربع وي، کولای شوو چې د څلورمو (ربعي) انحراف (Q) په لاندې ډول ولیکو

$$Q = Q_3 - Q_1$$

له پورتني تعریف څخه ښکاری چې 50% تولنه د $Q_3 - Q_1$ په فاصله کې پرته ده. په هره اندازه

(c) ketabton.com: The Digital Library

چې دا فاصله لړه وي، ډېټاګڼې دي او د ډېټا تيت والی لږ دی.

• **واريانس**: د تيت والی ټاکونکي هغه مقدارونه دي چې د ډېټا (Data) د تيت والی حالت نسبت يوبل ته او نسبت يې اوسط ته ټاکي.

واريانس د ډېټ والي له ټاکونکو څخه يو مهم ټاکونکی دی چې په S^2 سره ښودل کېږي او له لاندې رابطې څخه په لاس راځي:

$$S^2 = \frac{(x_1 - \overline{x})^2 + (x_2 - \overline{x})^2 + \ldots + (x_n - \overline{x})^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}{n}$$

د واريانس پيدا کول د فريکونسي په جدول کې له دې فورمول څخه په لاس راځي:

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i (x_i - \overline{x})^2}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$$

(x_i دکلاس مرکز دی)

• **معياري انحراف**: د واريانس مربع جذر په S ښيي چې معياري انحراف ورته وايي:

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}{n}}$$

د معياري انحراف پيدا کول د فريکونسي له جدول څخه د لاندې فورمول څخه په لاس راځي:

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i (x_i - \overline{x})^2}{\sum_{i=1}^{n} f_i}}$$

(x_i دکلاس مرکز دی)

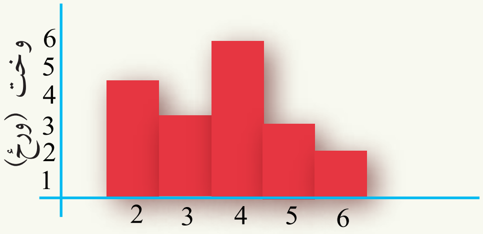
(c) ketabton.com: The Digital Library

د څېرکي پوښتنې

1 - لاندې ګراف د باد سرعت په 19 ورځو کې ښکاره کوي، په ګراف کې د راکړل شوو اطلاعاتو پر بنسټ د باد سرعت لپاره د فریکونسي څو ضلعي ګراف رسم کړئ.

که چېرې یوې کشتۍ ته د حرکت لپاره لږ تر لږه په یوه ساعت کې 5 کیلو متره د باد سرعت ته اړتیا وي، نو څو ورځې د کشتۍ د حرکت کولو لپاره مناسبې دي؟

په دې پوښتنه کې ولې د فریکونسي څو ضلعي ګراف، نظر مستطیلي ګراف ته مناسب دی؟



2 - د فریکونسي څو ضلعي ګراف هغه ګراف دی چې .... په افقي محور او .... د عمودي محور پر مخ ښودل کېږي.

الف) د کلاسونو مرکز، نسبي فریکونسي

ب) نسبي فریکونسي، د کلاسونو مرکز

ج) د کلاسونو حدود، مطلقه فریکونسي

د) د کلاس مرکز، مطلقه فریکونسي

3 - دساقې او پاڼې ګراف راکړل شوی دی:

- له دې ګراف څخه په لاس راغلي ډیټا ولیکئ.

ساقه	پاڼې
1	0 3 3 4
2	0 2 4 8 8
3	2

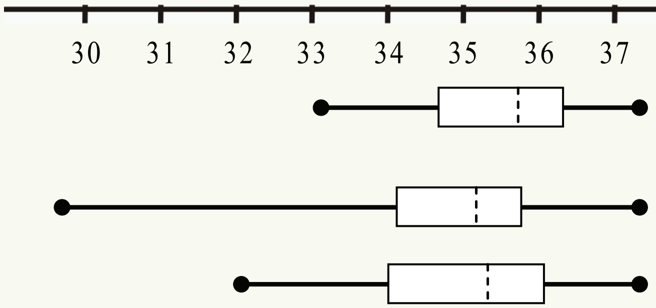
4 - کوم ګراف ته د 90° په اندازه (د ساعت د عقربې د حرکت په مخالف لوري ته) دوران ورکړو، تر څو میله یي ګراف لاس ته راشي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

الف) د ساقې او پاڼې گراف   ب) مستطیلي گراف

ج) د فریکونسي د څو ضلعي گراف   د) دایروی گراف

5: لاندې گراف د الف،ب او ج د دریو ټولگیو د ریاضي ازموینې نمرې ښکاره کوي، گراف ته په پاملرنې سره لاندې پوښتنو ته ځواب ورکړئ.



- د کوم ټولگي د تحول ساحه زیاته ده؟
- د کوم ټولگي د نمرو میانه تر ټولو زیاته ده؟ او د کوم ټولگي د نمرو میانه تر ټولو لږه ده؟
- د کوم ټولگي د نمرو تیت والی تر ټولو ډېر دی.
- ددې دریو ټولگیو د ازموینې نمرې له کمزورې څخه د قوي په لور ترتیب کړئ.

6 : په گراف کې د a مقدار عبارت دی له:

الف) میانه   ب) اوسط   ج) دریمه ربع   د) موډ

(c) ketabton.com: The Digital Library

7: د غذايي موادو د توليد دوه فابريکې د A او B په نامه، د 48 گرامو په قطيو کې بسکيت خرڅوي.

• په تصادفي ډول د دواړو فابريکو د بسکيت له قطيو څخه 5 قطي ټاکل شوي دي او په پوره غور سره يې وزنونه معلوم شوي دي چې په لاندې ډول دي.

A :	48.08	48.32	47.96	47.84	47.96
B :	49.16	48.84	48.88	49.08	49

• په قطيو کې کومه فابريکه زيات بسکيت خرڅوي؟ د پوښتنې د حل لپاره له کوم ټاکونکي څخه استفاده کوی؟

• د بسکيت په وېشلو کې کومې فابريکې يو شان عمل کړی دی؟

8: که د ډيتا د تحول ساحه صفر وي. د ډيتا په برخه کې څه نتيجه اخلئ؟

9 : د هغه ساعتونو شمېر چې زده کوونکو په يوه اونی کې د لوبو لپاره ټاکلې دي، په لاندې ډول راکړل شوي دي.

1 5 7 9

ددې ډيتا (Data) ورايانس پيدا کړئ.

10: په لاندې جدول کې واريانس پيدا کړئ.

x_i	25	35	45
f_i	10	25	15

(c) ketabton.com: The Digital Library

نهم څپرکی

د رياضي منطق

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

د شهودي درک استدلال:

پخوا تر ډېر و پیړیو پورې خلکو فکر کاوه چې ځمکه هواره ده او ستورې د ځمکې پر شاوخوا څرخیږي.
آیا پوهیږې چې ځمکه کروي ده؟
آیا لمر دځمکې پر شــاوخوا او که ځمکه د لمر پرشاوخوا څرخیږي؟

تعریف: هغه طبیعي یا حسي پوهه چې دهغې په مرسته دیوې موضوع سموالی یا حقیقت او یا یو مفهوم پر ته له استدلاله قبلوو، له شهودی درک څخه عبارت دی چې کیدلی شي، دوخت په مختلفو مرحلو کې یوله بله سره توپیر ولري.

فعالیت

د لاندې شکل په نظر کې نیولو سره د مستقیم خط پر مخ د A او B دوې نقطې په پام کې ونیسئ.

یو سرې غواړي چې ددې مستقیم خط پر مخ د A له نقطې څخه د B نقطې ته لاړشي چې د $\overline{AB}$ د قطعه خط منځنۍ نقطه A_1 کې توقف وکړي او بل وار چې د A_1 نقطې ته رسیدلي دی، ددې لپاره چې د B نقطې ته ورسیږي، بیاد A_2 په نقطه (د $\overline{A_1B}$ د قطعه خط دتنصیف نقطه) کې توقف وکړي، که په همدې ډول دوام ورکړي، نو لاندې پوښتنو ته ځوابونه ورکړئ:

- آیا په پورته ډول چې د خط پر مخ د هرو دوو نقطو په منځنۍ نقطه کې توقف وکړي، پای لري؟
- که په همدې ډول تر پایه دوام ورکړي، دا سرې به د B نقطې ته ورسیږي؟
- که دا سرې توقف و نه کړي او یا له لارې بیرته راونه ګرځي، نو نه یوازې چې د B نقطې ته به ورسیږي، بلکې ترې تېر به هم شي. په دې اساس ددې مسلئې د واقعیت او ستاسو د شهودي درک ترمنځ څه توپیر شته؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

له پورتني فعالیت څخه لاندې نتیجه لاس ته راځي:

نتیجه: د شهودي درک نتیجه هر وخت صحیح نه وي، خو کېدای شي چې د قضیو دحل لپاره یو ښه بنسټ وي.

له هغه مثال څخه چې په پورتني فعالیت کې مو ترې استفاده وکړه او یاداسې نور مثالونه دا ددې په معنا نه دي چې دشهودي درک استدلال گمراه کوونکی دی، بلکې بر عکس په زیاتو حالتونوکې دشهودي درک استدلال د مسلؤ دحل، د انگیزې د پیداکولو او د نورو سوالونو د طرح کولو سبب گرځي.

لومړی مثال: د شهودي درک په استدلال سره په اسانی سره حکم کولای شو چې دوه موازي خطونه یو بل نه قطع کوي.

څرنگه چې ددې مسلې په قبلولو کې استدلال په کار ورل شوی نه دی، په واقعیت یو احساس دی چې پر اساس یې داحکم منل کېږي، نو دا ډول نتیجه اخیستنه دشهودي درک په نامه یادوو.

دویم مثال: که یوه نقطه د داسې دایرې د باندې پرته وي چې قطر یې 4 واحده وي. ددې نقطې د فاصلې د مطالعه کولو لپاره چې له 2 واحده څخه زیاته ده، نه شو ویلای چې دا استدلال یو شهودي درک دی، ځکه دمسئلې د وضاحت لپاره لازمه ده چې استدلال وکړو. څرنگه چې د دایرې د مرکز فاصله له محیط څخه 2 واحد ده. نقطه د دایرې د باندې واقع ده، نوله دې امله د دایرې له مرکز څخه د نقطې فاصله د 2 واحده څخه لویه ده. یعني پرته له استدلال څخه د طبیعي پوهې او یا غریزه یې احساس په واسطه نه شو کولای، مسئله درک او صحت یې قبول کړو.

پوښتني

1- د دوو نقطو ترمنځ لنده فاصله له یوه مستقیم خط څخه عبارت ده، آیا ددې مسئلې درک کول یو شهودي درک دی؟ څرنگه استدلال کوئ؟

2- له لاندې حکمونو څخه کوم یو یې د شهودي استدلال په طریقه د درک وړدی؟

a- دیوې متوازي الاضلاع مقابلې زاویې سره مساوي دي.

b- د لوزې (معین) قطرونه یو پر بل عمود او یوبل نیمایي کوي.

c- په یوه قایم الزاویه مثلث کې و تر، له هرو دوو ضلعو څخه لوی دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

تمثيلي يا ګماني استدلال

ووايه زما په لاسونو کې څه شی دی؟ تقريباً ګرد دی، رنګ يې سپين دی او دسپينو په منځ کې يو ژيړ شی دی؟

د منطق يوه ښوونکي غوښتل چې دخپل يوه زده کوونکي قياسي استدلال وازمايي، خپل مخ يې هغه ته ورواړوه او ورته ويې ويل:
پوهېږئ چې ګمان او يا تمثيل حقيقت ته د رسيدو پل دی. د لوست په جريان کې مو زده کړل چې تمثيلي استدلال موږ حقيقت ته نژدې کوي، ليکن هر وخت سوچه حقيقت نه دی.
ښوونکي په داسې حال کې چې په خپلو لاسونوکې يې د چرګې هګۍ پټه کړې وه، له زده کوونکي وپوښتل: ووايه زما په لاسونو کې څه شی دی؟ تقريباً ګرد دی، رنګ يې سپين دی او دسپينو په منځ کې يو ژيړ شی دی.
زده کوونکی چې په همدې وخت کې له زراعتي فارم نه راغلی و، له ژور فکر کولو وروسته يې ښوونکي ته مخ وروګرځوه او ويې ويل:
استاده فکر کوم چې دسپين شوي شلغم(ټيپر) په منځ کې ګازره ده.

تعريف

د دوو پېښو ترمنځ د ورته والي پيداکول او دهغوی په باره کې د يوشان نتيجې اخيستلوته تمثيلي يا قياسي (ګماني) استدلال وايي.

فعاليت

يوه ښوونکي يو شوخ زده کوونکی چې لوست يې اخلالوه، له ټولګي څخه وويست. دټولګي د باندې يې د خپل ټولګي بل زده کوونکی وليده چې هغه هم له ټولګي څخه د باندې و تلی دی. دپورتني تعريف په نظر کې نيولو سره له لاندې اړيکو څخه کوم يو يې يو تمثيلي يا قياسي استدلال دی.
- دويم زده کوونکي د لوست په وخت کې تفريح کوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

- دویم زده کوونکي هم شوخي کړي ده.
- ناروغه دی، نه غواړي چې په ټولګی کې واوسي.

له تعریف او د زده کوونکو له فعالیت څخه لاندې نتیجه په لاس راځي:

نتیجه: قیاس یا تمثیل په حقیقت کې د مختلفو مفهومونو په منځ کې د ورته والي پیداکول دي. له دې سببه تمثیلونه کېدای شي، د ډېرو مفهومونو یا دریاضي د قضیو د درک کولو لپاره شهودي زمینه پیداکړي. تمثیلي استدلال د ثبوت په حیث نه شمارل کېږي، بلکې د ثبوت لپاره زمینه برابروي.

لومړی مثال: په عامه ژبه(مارخوړلی له برګ پړي څخه ډارېږي) دا یو قیاسي استدلال دی، ځکه چې برګ پړی له مار سره پر تله شوی دی او د هغوی په منځ کې ورته والی لیدل شوی دی.

دویم مثال: له تمثیلي استدلال څخه په ګټه، ددې حقیقت درکول چې د دوو منفي عددونو حاصل ضرب مثبت عدد او د یو منفي او یو مثبت عدد حاصل ضرب منفي عدد دی، داسې په لاس راوړو: مثلاً ددې حقیقت د درک کولو لپاره چې که چېرې د یوه زده کوونکي لیاقت د (+) په علامه او نا لایق والی د (-) په علامې سره په پام کې ونیسو او ددې دواړو عملونو د حاصل د(دی) لپاره (+) او (نه دی) لپاره (-) په پام کې ونیسو، له تمثیل او یا قیاس څخه ګټه اخلو او که دوی سره ترکیب کړو په نتیجه کې لرو چې:

لایق، دی = مثبت ← (+) (+) = + ، لایق، نه دی = منفي ← (+) (-) = -

نالایق، دی = منفي ← (-) (+) = - ، نالایق، نه دی = مثبت ← (-) (-) = +

پوښتنې

1 - دا بیان چې(بختور کال د هغه کال له پسرلي نه معلومیږي،) په لاندې کوم استدلال باندې دلالت کوي.

a- شهودي درک استدلال.

b- قیاسي استدلال. c- هیڅ ډول استدلال په کې نشته دی.

2- د قیاسي استدلال په مرسته په کوم مثلث کې د فیثاغورث د قضیې په اساس لاندې نتیجه ثبوت کېدلای شي:

$$\sin^2 \propto + \cos^2 \propto = 1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

استقرايي استدلال:

يو زده کوونکی په لومړنی صنفي ازموينه کې 100 نمرې اخلي او په دويم او دريم صنفي ازموينو کې هم 100 نمرې اخلي.
په اخرنۍ ازموينه کې څه نتيجه اخيستلای شئ چې دا زده کوونکی به څونمرې واخلي؟

فعاليت

د مسلسلو طاقو طبيعي عددونو د جمعې حاصل په پام کې نيسو، ددې کار لپاره له يو 1 له عدد څخه پيل وکړئ او تش ځايونه ډک کړئ.

$1+3=\square=(\quad)^2$

$1+3+5=\square=(\quad)^2$

$1+3+5+7=\square=(\quad)^2$

$1+3+5+7+9=\square=(\quad)^2$

پورتنيو پوښتنو ته په پاملرنې سره ليدل کېږي چې د طاقو طبيعي عددونو د جمعې حاصل د طبيعي عددونو د شمېر له پوره مربع سره مساوي دی.
- آيا کولای شو نتيجه واخلو چې هر وخت د طاقو مسلسلو عددونو د جمعې حاصل ددې عددونو د شمېر له مربع سره مساوي دی؟
- کوښښ وکړئ له n طاقو مسلسلو عددونو د جمعې د حاصل لپاره فورمول په لاس راوړئ.

ديورتني فعاليت د سرته رسولو په اساس لاندې نتيجه په لاس راځي.

نتيجه: استقرايي استدلال د يو شمېر مشاهدو و پر بنسټ د عمومي نتيجې اخيستنې طريقه ده. په حقيقت کې يوې کوچنۍ نمونې ته په لويه نمونه عموميت ورکول دي.

لومړی مثال: (موتۍ د خروار نمونه ده) داخبره استقرايي استدلال ته اشاره کوي، څکه په دې مثال

(c) ketabton.com: The Digital Library

کې له یوې کوچنی نمونې څخه د کل نتیجه اخیستل کیږي، په حقیقت کې له مسئلې څخه د یوشمېر مشاهد و پر بنسټ نتیجه اخیستل شوي ده، نو له استقرايي استدلال څخه کار اخیستل شوی دی.

دویم مثال: یو زده کوونکی په اتفاقي ډول په څومرحلو کې درې مسلسل عددونه سره ضرب کړل او ویې لیدل چې د ضرب حاصل د 6 عدد مضرب دی. له دې کار څخه نتیجه اخلي چې (د هر درو مسلسلو عددونو د ضرب حاصل د 6 عدد مضرب دی)

نوموړې زده کوونکي کوم استدلال کړی دی.

الف: شهودي استدلال ب: قیاسي (ګماني) ج: استقرايي استدلال د: هیڅ یو

حل: استقرایي استدلال

پوښتنې

1- هغه طریقه چې د یوه محدوده شمېر ډېټا پر اساس ترینه عمومي نتیجه اخیستل کیږي، څرنګه یو استدلال دی.

الف: قیاسي یا تمثیلي استدلال ب: استقرايي استدلال

ج: د شهودي درک استدلال

2 – د عددونو ترتیب ته په پاملرنې سره لاندې تش ځایونه ډک کړئ:

$1\times8+1=\square$

$12\times8+2=\square$

$123\times8+3=\square$

$1234\times8+4=\square$

3-

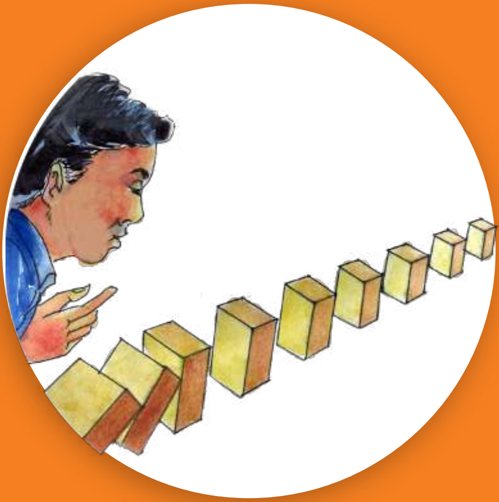
a) د دویمې پوښتنې حل ته په پام سره کیدای شي چې د عددونو پورتنې ترتیب ته تر بې نهایت پورې دوام ورکړي؟

b) د محاسبه کولو پرته او د پورتنیو پوښتنو په پاملرنې سره اټکل کړئ چې کوم عددونه د لاندې پوښتنو په تش ځایونو کې را تلای شي:

$12345\times8+5=\square$

$123456\times8+6=\square$

(c) ketabton.com: The Digital Library



درياضي د استقرا استدلال

د دوو مينو لوبه :

آيا تاسوکله د دوو مينو لو به تر
سره کړې ده؟

پوهیږئ چې د دوو مینو په لوبه کې د لومړی خښتې لویدل، د دویمې خښتې پرمخ چې یوه دبلې څنګ ته پرته وي، په ترتیب سره لومړنی پر دویمه، دویمه پر دریمه... تر پا یه پورې پر مخکه ولوېږي، داد خښتو یو پر بله لوېدل چې د پورته شکل په شان په مساوي فاصلو یو دبل څنګ ته پریوزي، د علاقه مندانو لپاره یو په زړه پورې تصویر ښکاره کوي.

لیدل کیږي چې د k ام خښتې لویدل د $k+1$ ام د خښتې دلوېدلو سبب ګرځي، اوس نو که د خښتو لوېدل له یوې ټاکلې شمېرې څخه پیل شي، له هغې څخه وروسته خښتې یو پر له پسې راولیږي او ټولې خښتې د ځمکې مخ نیسي.

فعالیت

پوهیږئ چې $64+27+8+1=100$ دی، که دا عددونه د مکعبونو د مجموعې په شکل په لاندې ډول ولیکو:

$$1^3+2^3+3^3+4^3=10^2$$

- آیا هر وخت د مسلسلو طبیعي عددونو د مکعبونو مجموعه د عددونو د مجموعې له مربع سره مساوي ده؟
- آیا کولای شئ د پورتنی پوښتنې د حل لپاره یوه عمومي طریقه ووایاست، د پورتنی پوښتنې د ځواب لپاره لاندې جدول ډک کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د متوالي عددونو شمېر	دمتوالي طبيعي عددونو معکبونه	د معکبونو مجموعه	د عددونو د مجموعې مربع
1	1^3		1^2
2	1^3+2^3		
3	$1^3+2^3+3^3$	36	
4	$1^3+2^3+3^3+4^3$		10^2
n	$1^3+2^3+3^3+...+n^3$		$\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

- د $n=1$، $n=2$، $n=3$ او $n=4$ د طبيعي مسلسلو عددونو د مکعبونو د مجموعې لپاره د $\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$ فورمول سموالی وازمايئ.

- اوس که د n مسلسلو طبيعي عددونو لپاره پورتنی فورمول قبول کړو يعني که:

$$1^3+2^3+3^3+...+n^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

وي، نو د $n+1$ د مسلسلو طبيعي عددونو لپاره يې ثبوت کړئ يا داچې وښياست:

$$1^3+2^3+3^3+...+n^3+(n+1)^3=\left[\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right]^2$$

د پورتني فعاليت له سرته رسولو څخه لاندې نتيجه لاس ته راځي.

نتيجه: که چېرې $P(n)$ د n طبيعي عددونو په برخه کې يو حکم راکړل شوی وي، که د $n=1$ لپاره $P(1)$ صحيح وي، په دويم پړ او کې که د $P(k)$ له سموالي څخه $P(k+1)$ په لاس راشي، نو دا ادعا د $P(n)$ د هر n طبيعي عدد لپاره هم سمه ده.

لومړی مثال: وښياست چې $P(n)=4^{2n}-1$ د هر طبيعي عدد لپاره پر 5 د وېش وړ دی.

حل: د $n=1$ لپاره سمه ده ځکه چې:

$$n=1 \quad , \quad P(1)=4^{2\cdot1}-1=4^2-1=16-1=15$$

ليدل کېږي چې $P(1)=15$ پر 5 د وېش وړ دی.

قبلوو چې د k طبيعي عدد لپاره پورتنی ادعا سمه ده يعني: $P(k)=4^{2k}-1$ پر 5 د وېش وړ

(c) ketabton.com: The Digital Library

دی.
څرنګه چې پر 5 د وېش وړ دی، نو کولای شو په لاندې ډول یې ولیکو

$$P(k)=4^{2k}-1=5r.......................(*)$$

غواړو وښایو چې د $n=k+1$ لپاره دا ادعا سمه ده، نو لرو چې:

$$n=k+1 \qquad , \qquad P(k+1)=4^{2(k+1)}-1...........(**)$$

د (*) د رابطې دواړه خواوې په 4^2 کې ضربوو.

$$4^2(4^{2k}-1)=5r\cdot 4^2$$

$$4^{2k+2}-4^2=5r\cdot 16 \Rightarrow 4^{2(k+1)}-1=15+16\cdot(5r)$$

$$4^{2(k+1)}-1=5(3+16r)$$

د پورتني مساوات له ښي خوا $5\cdot(3+16r)$ څخه ښکاري چې د مساوات کینه خوا پر 5 د وېش وړ ده.

نو اخرني مساوات ښکاره کوي چې $P(k+1)=4^{2(k+1)}-1$ هم پر 5 دوېش وړ دی، څرنګه چې د $P(k)$ له سموالي څخه د $P(k+1)$ سموالي نتیجه شوه، نو د ریاضي د استقرا د اصل په اساس پورتنی ادعا $P(n)$ د هر طبیعي عدد (n) لپاره سمه ده.

یادونه: د ریاضي د استقرا په مرسته د ریاضي د حکمونو د ثبوتولو لپاره لومړی $P(1)$ په لاس راوړو، بیا $P(k)$ د استقرا د حکم په حیث په پام کې نیسو او په همدې ترتیب له فرضیې څخه حکم ثبوتوو.

دویم مثال: د ریاضي د استقرآ په مرسته ثبوت کړئ چې لاندې رابطه د هرطبیعي عدد n لپاره سمه ده:

$$1\times 2+2\times 3+3\times 4+...+n(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

حل: په پورتنی رابطه کې د $n=1$ لپاره لرو چې:

$$n=1 \qquad , \qquad P(1)=1\times 2=\frac{1(1+1)(1+2)}{3}=\frac{1\times 2\times 3}{3}=2$$

$$\Rightarrow 2=2$$

نود $n=1$ لپاره پورتنی رابطه سمه ده، که د $n=k$ لپاره یې سمه قبوله کړو، نو د $n=k+1$ لپاره یې داسې ثبوتوو، لرو چې:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$n=k\ ,\ P(k)=1\times2+2\times3+3\times4+...+k\times(k+1)=\frac{k(k+1)(k+2)}{3}$$

داستقرا فرضيه:

د $P(k)$ په فرضولو سره $P(n)$ رابطه د $n=k+1$ په نظر کې نيولو سره د رابطې سموالی ښکاره کړو، نو لرو چې:

$$n=k+1,\quad P(k+1)=1\times2+2\times3+3\times4+...+(k+1)(k+2)$$
$$=\frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}$$

د استقرا حکم:

د استقرا د فرضيې په نظر کې نيولو سره لرو چې:

$$P(k+1)=[1\times2+2\times3+3\times4+...+k(k+1)]+(k+1)(k+2)$$
$$=\frac{k(k+1)(k+2)}{3}+(k+1)(k+2)=\frac{k(k+1)(k+2)+3(k+1)(k+2)}{3}$$
$$=\frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}$$
$$\Rightarrow 1\times2+2\times3+...+(k+1)(k+2)=\frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}$$

دا رابطه د $n=k+1$ لپاره سمه ده، نو په دې ډول د $P(n)$ رابطه د هر طبيعي عدد (n) لپاره سمه ده.

پوښتنې

1 – د رياضي د استقرا په مرسته وښياست چې د هر طبيعي عدد n لپاره لرو چې:

$$1^2+2^2+...+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

2 – د رياضي د استقرا په مرسته وښياست چې :

(i) $2+6+10+...+(4n-2)=2n^2$

(ii) $1+3+5+...+(2n-1)=n^2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

استنتاجی(نتیجوی) استدلال:

آیاکولای شو د شپې په تیاره کې له رڼا څخه پرته شیان ووینو؟

فعالیت

درې مختلف داسې ستونه ولیکئ چې د هر ستې عناصر درې اختیاري مسلسل طبیعي عددونه وي.

- د هرستې د عناصرو د ضرب حاصل جلا، جلا په لاس راوړئ.

- آیا ویلای شو چې دا د ضرب حاصلونه:

(I): پر 2 د وېش وړ دي؟ ولې؟

(II): پر 3 د وېش وړ دي؟ ولې؟

- آیا ویلای شو چې د دریو مسلسلو طبیعي عددونو د ضرب حاصل هروخت پر 6 د وېش وړ دي؟ ولې؟

- د دریو مسلسلو طبیعي عددونو د ضرب حاصل مووِلی پر 6 د وېش وړ قبول کړو، د پورتني فعالیت له سرته رسولو څخه لاندې نتیجه لاس ته راځي.

نتیجه: داسې طریقې ته چې د حقایقو سموالی یې په لومړی پړاو کې ومنو او عمومي نتیجه ترې لاس ته راوړو، استنتاجي استدلال یا د نتیجې اخیستنې طریقه ورته وایي یا په بل عبارت استنتاجي استدلال هغه طریقه ده چې سموالی مو ثبوت کړی یا منلی وي.

څه وخت چې له استنتاجي استدلال څخه استفاده کوو، ډاډمن یو چې نتیجه یې هر وخت سمه ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی مثال: د لاندې جدول پړاونو ته په دقت سره وګورئ موږ څرنګه له عددونو سره چې د هر پړاوحقیقت او سموالی منو، بل پړاوته ځو او نتیجه په لاس راوړو.

د یادونې وړ ده چې په جدول کې په اختیاري ډول عدد ټاکل شوی دی، تاسوکولای شئ چې ددې عدد پرځای بل هر عدد چې موغوښتی وي، وټاکئ، وګورئ چې د هر عدد لپاره نتیجه یوشان ده.

یو عدد په خپله خوښه وټاکئ.	4	7	12
له لومړي عدد سره 5 جمع کړئ.	9	12	17
اوس یې دوه برابره کړئ.	18	24	34
له حاصل څخه د 4 عدد کم کړئ.	14	20	30
پر 2 یې وویشئ.	7	10	15
هغه عدد چې لومړی موټاکلی و، له عدد څخه کم کړئ.	3	3	3

اساسي خبره داده چې موږ په حقیقت کې د هغه عبارت پر بنسټ چې سموالی یې موږ قبول کړی دی، بله نتیجه لاس ته راوړو، دا مسله موږ داډ من کوي چې دهر اختیاري عدد په ټاکلو سره نتیجه هر وخت یوشان له 3 سره مساوي ده.

پوښتنې

1 – ښکاره کړئ چې د دوو طاقو عددونو د جمعې حاصل هر وخت یو جفت عدد دی.

2 – ثبوت کړئ چې هر صحیح طاق عدد د $2k+1$ په شکل دی.

3 – د سرو زرو په 9 سکوکې یوه تقلبي ده چې له نورو سکو څخه یې وزن کم دی.

څرنګه کولای شو چې د نورو وزنونو څخه د استفادې کولو پرته د پله یې ترازو په واسطه له دوه واره تللو سره تقلبي سکه پلاس راوړو؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مثال د نفي کولو استدلال:

يوموټی د خروار نمونه ده.
که د يوجنس يوه کوچنی نمونه بې کيفيته وي.
آيا کولای شو ادعا وکړو چې ددې جنس لويه
کتله بنه کيفيت لري؟

فعاليت

کولای شو، ډېر طبيعي عددونه د مسلسلو عددونو د جمعې د حاصل په ډول وليکو، لکه:

$9 = 2 + 3 + 4$

- پورتني مثال ته په پاملرنې سره لاندې تش ځايونه ډک کړئ؟

$$15= \square + 2 \square + 4 + 5$$

$$\square = \square + 5 + \square + 7$$

$$\square = 12 + \square + \square + 14$$

$$74 = 17 + \square + 19 + \square$$

- آيا کولای شو چې هر طبيعي عدد د مسلسلو عددونو د جمعې د حاصل په شکل وليکو؟
- که چېرې ځواب مو (نه) وي، نومثال يې ووياست.

د پورتني فعاليت له سرته رسولوڅخه لاندې نتيجه لاس ته راځي.

نتيجه: کله چې له مثال سره وښايو چې عمومي نتيجه سمه نه ده او د ادعا ناسموالی ښکاره کړو دې

ته د مثال د نفي کولو استدلال وايي.

مثال: د مسلئې د ثبوت لپاره همدو مره کافي ده چې وښايو چې د x او y دوه غير ناطق عددونه

(c) ketabton.com: The Digital Library

لیکن ددوی د جمعې حاصل x+y یو ناطق عدد دی.

ددې لپاره که د $x = 1+\sqrt{2}$ او $y = 1-\sqrt{2}$ وټاکو، لروچې:

$$x + y = (1+\sqrt{2}) + (1-\sqrt{2}) = 1+1 = 2$$

لیدل کېږي چې ددې دواړو عددونو د جمعې حاصل د 2 عدد دی چې یوناطق عدد دی، په داسې حال کې چې x او y غیر ناطق (ګنګ) عددونه دي، نو دا ادعا نه شو کولای چې د دووغیر ناطقو عددونو د جمعې حاصل هر وخت یو غیر ناطق عدد دی.

پوښتنې

1- د مثال د نفې کولو په استدلال سره وښیاست چې(د هر مثبت حقیقې عدد مربع دعدد له مکعب څخه کوچنی ده)

2- دلاندې کوم یو بیان لپاره د نفې مثال و جود نه لري؟

a) د دوو ناطقو عددونو مجموعه یو ناطق عدد دی.

b) د هر مثبت عدد مربع له عدد څخه لویه ده.

c) دوې زاویې چې متناظرې ضلعې یې سره موازې وې، دا دوې زاویې سره مساوې هم دي.

d) د دوو طاقو عددونو مجموعه یو جفت عدد دی.

e) د دوو غیر ناطقو عددونو د ضرب حاصل، غیر ناطق عدد نه دی.

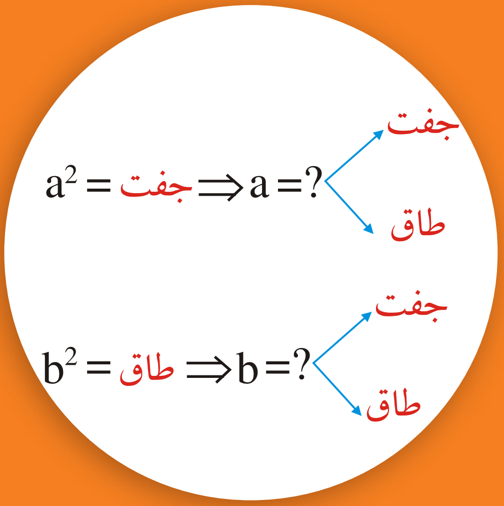
(c) ketabton.com: The Digital Library

د خلف برهان یا غیر مستقیم ثبوت:

که د یوه عدد مربع جفت وي آیا خپله عدد جفت دی که طاق؟

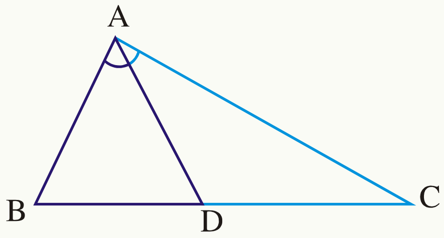
آیا کولای شو چې دا ادعا وکړو، که د هر عدد مربع جفته وي، خپله عدد جفت دی؟

که وښایو چې خپله عدد طاق نه دی، څه نتیجه اخلئ؟



فعالیت

د ABC مثلث د لاندې شکل په شان په پام کې ونیسئ:



- د $\hat{A}$ د زاویې ناصف رسم کړئ.
- که $\overline{BD} \neq \overline{CD}$ وي، نو د $\overline{AB}$ او $\overline{AC}$ ضلعې سره څه اړیکه لري؟
- که فرض کړو چې که $\overline{BD} \neq \overline{CD}$ و ي، خو $\overline{AC} \neq \overline{AB}$ دی، دا مسئله موږ کومې نتیجې ته رسوي؟

نتیجه: که د خپلې ادعا د عکس په فرضولو او یا د قبلولو په نتیجه کې د فرض شوې ادعا خلاف ته ورسیږو، نو په دې حالت کې زموږ فرض شوی ادعا سمه ده، دا ډول استدلال د غیر مستقیم ثبوت (برهان خلف) په نامه یادیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

یادونه: په یاد ولرئ څه وخت چې له غیر مستقیم ثبوت څخه ګټه اخلو، لاندې پړاوونه په پام کې نیسو:

لومړی پړاو: فرضوو چې مطلوبه ادعا سمه نه ده.

دویم پړاو: ښکاره کوو چې دا فرض د اسې نتیجه په لاس راکوي چې پېژندل شوي حقیقتونه نفي کوي.

دریم پړاو: اوس چې نتیجه نفي شوي ده، نومعلومه خبره ده چې د لومړي پړاو فرض سم نه دی، نو مطلوب سم دی.

مثال: وښیاست که n^2 یو جفت طبعي عدد وي، نو n هم جفت دی؟

ددې مسلئې د ثبوت لپاره فرضوو، سره ددې چې n^2 جفت دی، خو n یو طاق عدد دی، نو کولای شو چې n د $n = 2k + 1$ په شکل ولیکو، په داسې حال کې چې k یو تام عدد دی، نو ددې عدد مربع مساوي ده په:

$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4(k^2 + k) + 1$$

$$\Rightarrow n^2 = 4(k^2 + k) + 1$$

پورتنې مساوات ښکاره کوي چې n^2 یو طاق عدد دی چې دا د فرض خلاف ده، نو په نتیجه کې دا فرض چې n یو طاق عدد دی، ناسمه ده او دې نتیجې ته رسېږو چې n هم یو جفت عدد دی، ځکه دا فرض چې n طاق عدد دی، مورږ دې نتیجې ته ورسولو چې n^2 هم طاق عدد دی

پوښتنه

وښیاست چې $\sqrt{3}$ یو غیر ناطق عدد دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د رياضي منطق او دبيان استنتاج

له څنګ ملګرى څخه د يو خبر اوريدل به څه نتيجه ولري؟
آيا خبر سم دى که ناسم؟

تعريف

يوې خبري جملې ته بيان وايي چې نتيجه يې په سموالي يا ناسم والي پاى ته ورسيږي.

فعاليت

لاندې جملې په پام کې ونيسئ او وښياست چې له هغو څخه کومه يوه يې بيان او کومه يوه يې بيان نه دى او منطقي نتيجه يې څه ده؟

i) نن ورځ باران نه اوري.
ii) آيا نن ورځ باران نه اوري؟
iii) بارانه اووره..
iv) څه زيات باران اوري!

له پورتني فعاليت څخه لاندې نتيجه لاس ته راځي.

نتيجه:

1 - هره جمله نه شي کېداى چې بيان وي. يوه جمله کېداى شي يوه حکمي، تعجبي پوښتنه او يا يو خبر وي.

2 - هره خبري جمله سمه يا ناسمه ده.

يادونه: که يو بيان ته P ووايو، د سم بيان د ليکلو طريقه $P \equiv T$ او د ناسم بيان د ليکلو طريقه

(c) ketabton.com: The Digital Library

$P \equiv F$ دی، سر بیره پر دې $\sim P$ د P د بیان نفي ښيي.
هغه جدول ته چې د یو بیان ارزیابي په کې صورت نیسي، د صحت د جدول په نامه یادېږي، نو د P د هربیان لپاره لروچې:

P	~ P
T	F
F	T

مثال: د (مسکا د لسم ټولګي زده کوونکې ده =P) بیان لپاره د صحت جدول ترتیب کړئ.
حل: د پورتني بیان د ارزیابۍ لپاره پوهېږو چې نو موړی بیان سم او یا ناسم دی.
که بیان سم وي، نو کولای شو چې ولیکو $P \equiv T$ او $\sim P \equiv F$ دی.
نو د P د بیان د نفي حالت عبارت دی له « P سم نه دی» یعنې : $\sim P \equiv F$ دی. دا بیان د دې په معنا دی چې مسکا د لسم ټولګي زده کوونکې نه ده، یعنې P ناسم دی.
که $P \equiv F$ وي، نو په دې حالت کې $\sim P = T$ دی. د پورتني ځواب صحت په لاندې جدول کې ګورو:

P	~ P
T	F
F	T

د بیانونو ترکیب

که د p او q دوه بیانونه راکړشوي وي، په دې حالت کې:
1 - د $p \wedge q$ ترکیب د p او q د بیانونو د عطفي ترکیب یا (منطقي " او") په نامه یادېږي، د "$\wedge$" علامه د (او) په معنا په کار وړل شوي ده.
2 -د $p \vee q$ ترکیب د p او q د بیانونو د فصلي ترکیب (منطقي " یا ") په نامه یادېږي، د "$\vee$" علامه د (یا) په معنا په کار وړل شوي ده.
3 - د $p \Rightarrow q$ د مشروط ترکیب او یا د (که p نو q ویل کېږي) په نامه یادېږي، د $\Rightarrow$ علامه ښکاره کوي چې p د شرطي ترکیب اساس چې q ترې نتیجه کېږي.
4 - د $p \Leftrightarrow q$ د دوو خواوو د شرطي ترکیب په نامه او یا د (که او یوازې که) په نامه یادېږي.
د ($\Leftrightarrow$) علامه ښکاره کوي چې که p د شرطي ترکیب اساس وي q ترې نتیجه کېږي او که q دشرطي ترکیب اساس وي، p ترې نتیجه کېږي. په دې ډول د p د بیانونو او (که اویوازې که) ترکیب لاندې د صحت په جدول کې ګورو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	F	F
F	T	F	T	T	F
F	F	F	F	T	T

لومړی مثال: که چیرې $P \equiv (2+4=6)$ او (دمنفي عدد مربع) $\equiv q$ بیانونه راکړل شوي وي د q، p، $\sim p$، $\sim q$، $p \vee q$، $p \wedge q$، $\sim(p \wedge q)$ او $\sim(p \vee q)$ د بیانونو نتیجې پلاس راوړی.

حل: پورتنیو بیانونو ته په توجه سره ددې بیانونو ارزښت عبارت دی له:

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$\sim(p \wedge q)$	$\sim(p \vee q)$
T	F	F	T	F	T	T	F

دویم مثال: د سموالي (صحت) دجدول په تر تیبولو سره ښکاره کړئ چې د $P \vee (p \Rightarrow q)$ بیان هر وخت سم دی.

حل:

p	q	$p \Rightarrow q$	$p \vee (p \Rightarrow q)$
T	T	T	T
T	F	F	T
F	T	T	T
F	F	T	T

د سموالي دجدول په اخیرني ستون کې وینو چې د $p \vee (p \Rightarrow q)$ بیان هر وخت سم دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتني

1 – د صحت د جدول په تر تیبولو سره وښیاست چې د $(p \Rightarrow q) \vee \sim (\sim p \vee q)$ بیان هر وخت سم دی- متوجه اوسئ چې p او p ~ یوله بله مستقل نه دی.

2 – د صحت د جدول په جوړولو سره وښیاست چې د $(p \Rightarrow q)$ او د $\sim (p \vee q)$ د بیانونو ارزښت سره مساوي دی یعني:

$$p \Rightarrow q \equiv \sim (p \vee q)$$

د فصل لنډیز

د ریاضي استدلال:

هغه طریقه چې د هغې په واسطه د ریاضي د یوبیان سموالی په لاس راځي، د ریاضي د استدلال په نامه یادېږي.

شهودی درک:

هغه طبیعي یا حسي پوهه چې د هغې په مرسته دیوې موضوع سموالی یا حقیقت او یا یو مفهوم پرته له استدلاله قبلوو، له شهودي درك څخه عبارت ده چې د وخت په مختلفو مرحلوکې یوله بله سره توپیر لري.

تمثیلي یا قیاسي استدلال:

د دوو پیښو تر منځ د ورته والی پیداکول او د هغوی په باره کې یوشان نتیجې اخیستلو ته تمثیلي یا قیاسي استدلال وایي.

استقرایی استدلال:

هغه طریقه چې د یو شمېر مشاهد و پر اساس ور څخه عمومي نتیجه اخیستل کېږي یعني د جز نه کل په لاس راځي د استقرایي استدلال په نامه یادېږي.

د ریاضي د استقرا استدلال:

که چېرې $P(n)$ د n د طبیعي عددونو په برخه کې یو حکم راکړل شوی وي، که د n=1 لپاره $P(1)$ سم وي او په دویم پړاوکې د $p(k)$ له سموالي څخه د $p(k+1)$ سموالی په لاس راشي، نو د $p(n)$ بیان د هر طبیعي عدد (n) لپاره سم دی او دریاضي د استقرا د استدلال په نامه یادېږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

نتیجوي استدلال:
له هغه حقیقتونو څخه په ګټه اخیستنه چې صحیح والی یې په پیل کې منل شوی وي، عمومي نتیجه لاس ته راوړل شي، د استنتاجي استدلال یا د نتیجې اخیستنې د طریقې په نامه یادېږي.
یا په بل عبارت هغه طریقه ده چې سم والی مو ثبوت یا قبول کړی وي.

د نفی مثال استدلال:
کله چې له مثال سره وښایو چې عمومي نتیجه سمه نه ده او د ادعا ناسموالی په عمومي ډول ښکاره کړو، دې ته د مثال د نفي کولو استدلال وایي.
غیر مسقیم ثبوت:
که د خپلې ادعا یا قضیې د عکس په فرضولو یا قبلولو د فرض شوي ادعا خلاف ته ورسېږو، نو په دې حالت کې فرضیه ناسمه او خلاف یې سم دی. دې ډول استدلال ته غیرمستقیم ثبوت (برهان خلف) وایي.

بیان :
یوې خبرې جملې ته چې نتیجه یې سمه یا ناسمه وي، د بیان په نامه یادېږي، یوه جمله چې نتیجه یې سمه اویا ناسمه نه وي، بیان نه دی.

د بیانونو ترکیب:
که د p او q دوه بیانونه راکړل شوي وي، په دې حالت کې:
1- د $p\wedge q$ ترکیب د p او q دوه بیانونه د عطفي ترکیب یا (منطقي "او") په نامه یادېږي.
چې د p او q د بیان په شکل ویل کېږي.

2- د $p\vee q$ ترکیب د p او q د بیانونو د فصلي ترکیب (منطقی " یا ") په نامه یادېږي، د ($\vee$) علامه د (یا) په معنا په کار وړل شوې ده.

3- (که چېرې نو) او یا د "$\Rightarrow$" منطقي علامه د $p\Rightarrow q$ د p او q مشروط بیان دی، که p نو q ویل کېږي، د $\Rightarrow$ علامه ښکاره کوی چې p د شرطي ترکیب اساس دی، ددې لپاره چې q له هغې نتیجه شي.
4- که یوازې که یا دا "$\Leftrightarrow$" منطقي علامه د p او q د بیانونو دوو خواوو شرطي ترکیب دی چې د (p که اویوازې که q) دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د فصل پوښتني

1 – له لاندې ځوابونو څخه ستاسو په نظر کوم يو سم دی؟

الف- په مشاهداتو کې خطا د استقرايي طريقې له ستونزو څخه يوه ستونزه ده.

ب- د رياضي د استدلال له قوي طريقو څخه يوه هم استقرايي طريقه ده.

ج- د رياضي په استقرايي طريقې کې يوه ستونزه د مشاهداتو کموالی دی.

د- د الف او ج ځوابونه سم دي.

2 – له لاندې ځوابونو څخه کوم يو يې سم نه دی؟

استقرايي استدلال

الف- د رياضي له مسألو څخه يوه قوي طريقه ده.

ب- د مسألو په برخه کې مورږ ته د عمومي قوانينو لارښوونه کوي.

ج- دمسألو دحل لپاره له رياضي پرته يوه طريقه ده.

د – دمسألو د حلولو لپاره د رياضي طريقه نه ده.

3 – د شهود په برخه کې له لاندې ځوابونو څخه کوم يو يې سم (صحيح) دی؟

الف- دداسې نتيجې د اخيستنې لپاره چې سل په سلو کې سمه ده.

ب- له شهود څخه په ګټه اخيستنه پر ډاډ سره نه شوويلای چې نتيجه سل په سلو کې سمه ده.

ج شهود د رياضي د ښه درک کولو لپاره دی.

د: له شهود څخه په ګټه اخيستنه، کولای شو د ثبوت لپاره قطعي ګمان له حتمي استدلال سره وکړو.

4 – له لاندې ځوابونو څخه کوم يو يې سم نه دی؟

الف: استقرايي استدلال له جز څخه کل ته رسيدل دي.

ب: استقرايي استدلال له کل څخه جز ته رسيدل دي.

ج: له استقرايي استدلال څخه نه شو کولای چې د رياضي د دقيق ثبوت لپاره ګټه واخلو.

د: استقرايي استدلال ديو شمېر مشاهد و پر اساس يوه کلي نتيجه ده.

5 – د استنتاجي استدلال پر اساس له لاندې ځوابونو څخه کوم يو يې سم نه دی؟

الف: که واوره اوري ځمکه نمجنه کېږي، ځمکه نمجنه ده، نو واوره وريدلي ده.

ب: د يوه ښوونځي ټول فارغان له کمپيوټر سره بلد او په رياضي ښه پوهېږي، ضمير چې له همدې ښوونځي څخه فارغ شوی دی. نو له کمپيوټر سره ښه بلد او په رياضي ښه پوهېږي.

ج: که يوه څلور ضلعي مربع وي، نو قطرونه يې يو پربل عمود دي، که د څلور ضلعي قطرونه يو پر بل عمود وي، نو دا څلور ضلعي مربع ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د: که د یوه مثلث دوې ضلعې سره مساوي وي، متساوي الساقین مثلث دی او که د مثلث درې ضلعې سره مساوي وي، متساوي الاضلاع مثلث دی، نو هر متساوي الاضلاع مثلث، متساوي الساقین مثلث دی.

6 – د قیاسي استدلال په واسطه وښیاست د هرې زاویې لپاره $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ ده.

7 – د استقرایي استدلال په واسطه وښیاست چې د n مسلسلو تاقو طبیعي عددونو مجموعه له n^2 سره مساوي ده.

8 – له استقرایي استدلال سره وښیاست چې د هر طبیعي عدد n لپاره لاندې مساوات سم دی.

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

9 – د استنتاجي استدلال په اساس ثبوت کړئ چې د دوو جفتو عددونو د جمعې حاصل هر وخت جفت عدد دی؟

10 – له یوه مثال سره وښیاست چې د $2^n + 3$ افاده د هر طبیعي عدد لپاره هر وخت لومړنی عدد نه دی.

11 – د غیر مستقیم ثبوت د استدلال په واسطه وښیاست که n یو طبیعي اختیاری عدد وی او هم n^2 طاق وي، نو n هم طاق دی.

12 – د (باران اوري او وریځ نشته دی، نو باران نه اوري) د ترکیبي بیانونو لپاره د صحت جدول جوړ کړئ، په داسی حال کې که

($\alpha =$ باران اوري)) او ((وریځ ده $= \beta$)) سره وښایو. (1) عدد د سم اود (0) عدد د ناسم لپاره په کار یوسي.

$\propto$	β	$-\propto$	$-\beta$	$\propto \wedge -\beta$	$\propto \wedge -\beta \Rightarrow -\propto$
1	1				
1	0				
0	1				
0	0				

Get more e-books from www.ketabton.com
Ketabton.com: The Digital Library