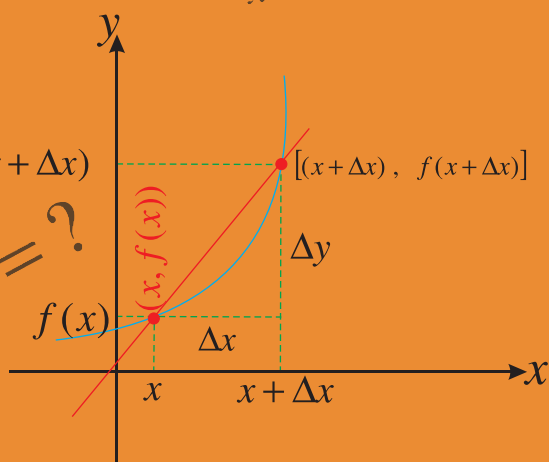




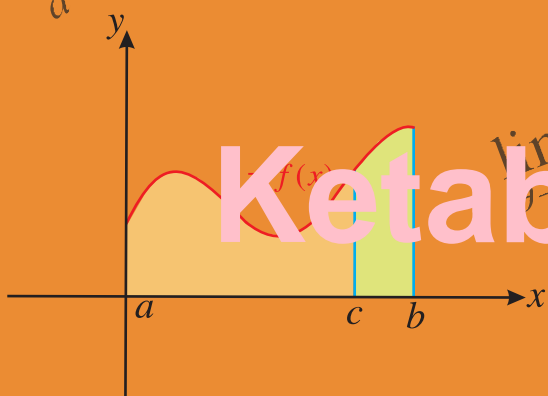
# ریاضی ۱۲

ټولګی

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = ?$$



$$\int_a^b f(x) dx = ?$$

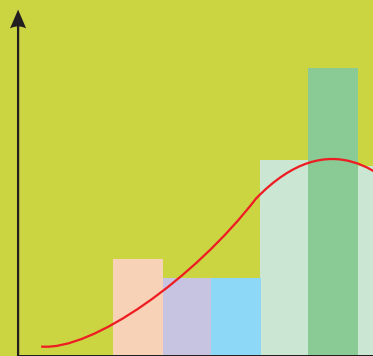


$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = ?$$

Ketabton.com

د چاپ کال: ۱۳۹۸

ریاضی ۱۲ ټولګی





## ملي سرود

دا عزت د هر افغان دی  
هر بچی یې قهرمان دی  
د بلوڅو د ازبکو  
د ترکمنو د تاجکو  
پامیریان، نورستانیان  
هم ایماق، هم پشه پان  
لکه لمر پر شنه آسمان  
لکه زره وي جاویدان  
وایو الله اکبر وایو الله اکبر

دا وطن افغانستان دی  
کور د سولې کور د تورې  
دا وطن د ټولو کور دی  
د پښتون او هزاره وو  
ورسره عرب، گوجر دي  
براهوي دي، قزلباش دي  
دا هیواد به تل ځلیري  
په سینه کې د آسیا به  
نوم د حق مودی رهبر

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



د پوهنې وزارت

# ریاضی ۱۲

ټولګی

د چاپ کال: ۱۳۹۸ هـ . ش .



## د کتاب خانگرتیاوې

مضمون: ریاضي

مؤلفین: د تعلیمي نصاب د ریاضیاتو د خانگې علمي او مسلکي غړي

ادیت کوونکي: د پښتو ژبې د ادیت علمي او مسلکي غړي

ټولگی: دولسم

د متن ژبه: پښتو

انکشاف ورکوونکي: د تعلیمي نصاب د پراختیا او درسي کتابونو د تألیف لوی ریاست

خپروونکي: د پوهنې وزارت د اړیکو او عامه پوهاوي ریاست

د چاپ کال: ۱۳۹۸ هجري شمسي

د چاپ ځای: کابل

چاپ خونه:

برېښنالیک پته: curriculum@moe.gov.af

د درسي کتابونو د چاپ، وېش او پلورلو حق د افغانستان اسلامي جمهوریت د پوهنې وزارت

سره محفوظ دی. په بازار کې یې پلورل او پېرودل منع دي. له سرغړوونکو سره قانوني

چلند کېږي.



## د پوهنې د وزیر پیغام

اقراً باسم ربک

د لوی او بښونکي خدای ﷻ شکر په ځای کوو، چې مور ته یې ژوند رابښلی، او د لوست او لیک له نعمت څخه یې برخمن کړي یو، او د الله تعالی پر وروستي پیغمبر محمد مصطفی ﷺ چې الهي لومړنی پیغام ورته (لوستل) و، درود وایو.

څرنگه چې ټولو ته ښکاره ده ۱۳۹۷ هجري لمريز کال د پوهنې د کال په نامه ونومول شو، له دې امله به د گران هېواد ښوونیز نظام، د ژورو بدلونونو شاهد وي. ښوونکي، زده کوونکي، کتاب، ښوونځي، اداره او د والدینو شوراگانې د هېواد د پوهنیز نظام شپږگوني بنسټیز عناصر بلل کيږي، چې د هېواد د ښوونې او روزنې په پراختیا او پرمختیا کې مهم رول لري. په داسې مهم وخت کې د افغانستان د پوهنې وزارت د مشرتابه مقام، د هېواد په ښوونیز نظام کې د ودې او پراختیا په لور بنسټیزو بدلونونو ته ژمن دی.

له همدې امله د ښوونیز نصاب اصلاح او پراختیا، د پوهنې وزارت له مهمو لومړیتوبونو څخه دي. همدارنگه په ښوونځیو، مدرسو او ټولو دولتي او خصوصي ښوونیزو تاسیساتو کې، د درسي کتابونو محتوا، کیفیت او توزیع ته پاملرنه د پوهنې وزارت د چارو په سر کې ځای لري. مور په دې باور یو، چې د باکیفیته درسي کتابونو له شتون پرته، د ښوونې او روزنې اساسي اهدافو ته رسېدلی نشو.

پورتنیو موخو ته د رسېدو او د اغېزناک ښوونیز نظام د رامنځته کولو لپاره، د راتلونکي نسل د روزونکو په توگه، د هېواد له ټولو زړه سواندو ښوونکو، استادانو او مسلکي مدیرانو څخه په درناوي هیله کوم، چې د هېواد بچیانو ته دې د درسي کتابونو په تدریس، او د محتوا په لېږدولو کې، هېڅ ډول هڅه او هاند ونه سپموي، او د یوه فعال او په دیني، ملي او انتقادي تفکر سمبال نسل په روزنه کې، زیار او کوبښښ وکړي. هره ورځ د ژمنې په نوي کولو او د مسؤلیت په درک سره، په دې نیت لوست پیل کړي، چې د نن ورځې گران زده کوونکي به سبا د یوه پرمختللي افغانستان معماران، او د ټولني متمدن او گټور اوسېدونکي وي.

همدا راز له خوږو زده کوونکو څخه، چې د هېواد ارزښتناکه پانگه ده، غوښتنه لرم، خو له هر فرصت څخه گټه پورته کړي، او د زده کړې په پروسه کې د څیرکو او فعالو گډونوالو په توگه، او ښوونکو ته په درناوي سره، له تدریس څخه ښه او اغېزناکه استفاده وکړي.

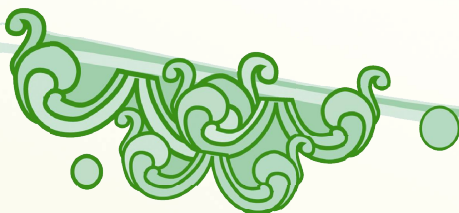
په پای کې د ښوونې او روزنې له ټولو پوهانو او د ښوونیز نصاب له مسلکي همکارانو څخه، چې د دې کتاب په لیکلو او چمتو کولو کې یې نه ستړې کېدونکې هلې ځلې کړې دي، مننه کوم، او د لوی خدای ﷻ له دربار څخه دوی ته په دې سپېڅلي او انسان جوړوونکې هڅې کې بریا غواړم.

د معیاري او پرمختللي ښوونیز نظام او د داسې ودان افغانستان په هیله چې وگړي یې خپلواک، پوه او سوکاله وي.

د پوهنې وزیر

دکتور محمد میرویس بلخي





## فهرست

مخونه

۱-۴۰

سرلیکونه

لومړی څپرکی لېمیت

- د لېمیت مفهوم
- د نښې او کینې خوا لېمیتونه
- د لېمیت خاصیتونه
- د نسبي تابع گانو لېمیتونه
- د  $\frac{\infty}{\infty}$  مبهم شکل
- د  $\infty - \infty$  او  $0 \cdot \infty$  مبهم شکلوونه
- د  $0^0, \infty^0, 1^\infty$  مبهم شکلوونه
- د مثلثاتي تابع گانو لېمیت
- د تابع گانو متمادیت
- د متمادی تابع گانو خاصیتونه
- د څپرکي لنډیز او پوښتنې

۴۱-۸۲

دویم څپرکی مشتقات

- د یوې تابع مشتق
- د مشتق هندسي تعبیر
- د مشتق قوانین
- د مرکبو تابع گانو مشتق
- د مثلثاتي تابع گانو مشتق
- ضمني مشتقات
- لوړ مرتبه یي مشتقات
- د څپرکي لنډیز او پوښتنې

۸۳-۱۳۲

درېم څپرکی د مشتق د استعمال ځایونه

- د یوې تابع بحراني ټکی (اعظمي او اصغري)
- د انعطاف د ټکي ټاکل له دویم مشتق څخه په گټې اخیستنې سره
- د منحنی گانو رسمول
- د توابعو د گرافونو مجانېونه
- د هوموگرافیک تابع گانو گراف
- د دریمې درجې یو مجهوله تابع گراف
- د رول قضیه
- د متوسط قیمت قضیه
- د لوییتال قاعده
- د بحراني ټکو تطبیق
- د څپرکي لنډیز او پوښتنې



مخونه  
۱۳۳-۱۷۲

سرلیکونه

څلورم څپرکی انتیگرال

- د ریمان مجموعه
- د انتیگرال مفهوم
- د غیر معین انتیگرال خواص
- معین انتیگرال
- د معین انتیگرال خواص
- د مشتق او انتیگرال اساسي قضیې
- په تعویضي طریقې سره انتیگرال نیول
- په قسمي طریقې سره انتیگرال نیول
- د څپرکي لنډیز او پوښتنې

۱۷۳-۱۹۸

پنځم څپرکی د لوگاریتمي او اکسپوننشیل تابعگانو مشتق او انتیگرال

- د لوگاریتمي او اکسپوننشیل تابعگانو مشتق
- د معکوسو تابعگانو مشتق
- قسمي کسرونه
- د اکسپوننشیل تابعگانو انتیگرالونه
- د لوگاریتمي تابعگانو انتیگرال
- د قسمي کسرونو په مرسته د انتیگرال محاسبه
- د څپرکي لنډیز او پوښتنې

۱۹۹-۲۲۲

شپږم څپرکی د انتیگرال تطبیقات

- د یوه منحنی په واسطه د محصور شوي سطحې د مساحت محاسبه
- د دوو منحنیگانو ترمنځ د محصور شوي سطحې د مساحت محاسبه
- د گراف له دوران څخه د په لاس راغلي جسم حجم
- د قوس د اوږدوالي محاسبه
- د څپرکي لنډیز او پوښتنې

۲۲۳-۲۶۰

اووم څپرکی احصائیه

- د احتمال د تابع توزیع
- د دوه جملهيي توزیع او د برنولي آزمایښت
- د پواسن د احتمال توزیع
- نورمال توزیع
- د نورمال توزیع منحنی لاندې مساحت او د هغې سټنډرډ کول
- نمونه اخیستل
- د نمونې د اوسط توزیع
- د مرکزي لېمیت قضیه
- د نمونېيي توزیع نسبت
- د څپرکي لنډیز او پوښتنې

۲۶۱-۲۸۲

اتم څپرکی احتمالات

- پرېکړې او نښتې فضاگانې
- هم چانسې پیښې
- د نښتو یا پیوسته فضاگانو احتمال
- مشروط احتمال
- د حاصل ضرب اصل
- د ناڅاپي پیښو استقلالیت
- د څپرکي لنډیز او پوښتنې



# لومړۍ څپرکۍ لېمیت

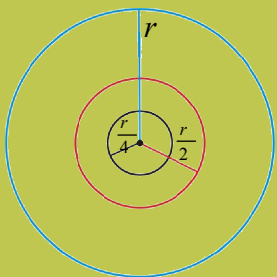






### د لېمیت مفهوم

په یوه مستوي کې درې دایرې داسې رسم کړئ چې د  $O$  ټکي د دایرو متحد مرکز او شعاع گانې یې په ترتیب سره  $r, \frac{r}{2}, \frac{r}{4}$  وي، دې عملیې ته خو ځلې دوام ورکولای شئ؟



فعالیت

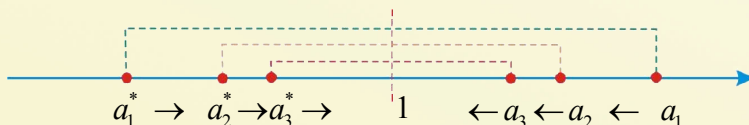
د  $a_n = (1 + \frac{1}{n})$  او  $a_n^* = (1 - \frac{1}{n})$  ترادفونه د  $n \in \mathbb{N}$  لپاره په پام کې ونیسئ او لاندې فعالیت ترسره کړئ:

- د عددونو په محور باندې د  $a_1$  او  $a_1^*$  موقعیت (ځای) وښیئ.
- ویلای شئ چې د  $a_2$  او  $a_2^*$  قیمتونه د  $[a_1^*, a_1]$  د فاصلې دننه یا د باندې پراته دي.
- د  $a_1, a_1^*, a_2$  او  $a_2^*$  منځنی ټکي یو له بل سره پرتله کړئ.
- پورته پړاوونو ته په پاملرنې سره ویلای شئ چې د  $a_3$  او  $a_3^*$  د ټکو موقعیت د عددونو پر محور په کوم ځای کې واقع دي.
- آیا ویلای شئ چې د  $n$  د تر ټولو لویو قیمتونو په اخیستلو سره د  $a_n$  او  $a_n^*$  ردیفونه کومو قیمتونو ته نژدې کېږي؟

له پورتنی فعالیت څخه لاندې پایله لیکلای شو:

**پایله:** لیدل کېږي چې د  $a_n$  ترادف له ښي لوري څخه د 1 او د  $a_n^*$  ترادف له کین لوري څخه د 1 عدد ته د  $n$  په زیاتېدو سره نژدې کېږي، یعنې:

– د  $a_n$  ترادف کله چې  $n$  بې نهایت ته تقریب وکړي، مساوي په (1) سره کېږي او همداشان د  $a_n^*$  د ترادف  $n - 1$  حد که  $n$  بې نهایت ته نژدې شي هم مساوي له (1) سره کېږي.



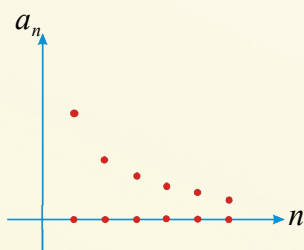
ددې لپاره چې د لېمیت مفهوم مو ښه څرگند کړی وي، په لومړي پړاو کې هغه په څو ترادفونو کې د گراف په پام کې نیولو سره تر څېړنې لاندې نیسو.

**مثال:** لاندې ورکړل شوي ردیفونه د  $n$  د تر ټولو لویو قیمتونو لپاره کوم قیمت ته تقرب کوي یا نژدې کېږي، موضوع په گرافیکي ډول تشریح کړئ، په داسې حال کې چې:

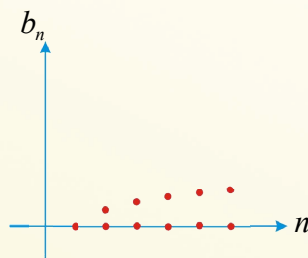
$$a_n = \left(\frac{2n+3}{n}\right) \dots (i) \quad b_n = \left(\frac{n-1}{n}\right) \dots (ii) \quad c_n = (-1)^n \frac{1}{n} \dots (iii)$$

**حل:** پوهېږو چې د  $n$  د بېلابېلو قیمتونو لپاره گرافیکي ښودنه په لاندې ډول ده.

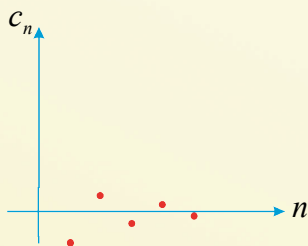
$n$	1	2	3	4	5	6	7	$\rightarrow \infty$
$a_n$	5	$\frac{7}{2}$	3	$\frac{11}{4}$	$\frac{13}{5}$	$\frac{15}{6}$	$\frac{17}{7}$	$\rightarrow 2$



$n$	1	2	3	4	5	$\rightarrow \infty$
$b_n$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\rightarrow 1$



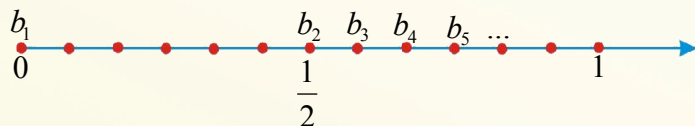
$n$	1	2	3	4	5	$\rightarrow \infty$
$c_n$	-1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{5}$	$\rightarrow 0$



له پورتنیو گرافونو څخه لیدل کېږي چې راکړل شوي ترادفونه د  $n$  د قیمتونو په زیاتېدو سره د ترادفونو قیمت یوه ټاکلې عدد ته نژدې کېږي، لکه: د  $a_n$  ترادف د 2 عدد ته د  $b_n$  ترادف د 1 عدد ته او د  $c_n$  ترادف صفر ته تقرب کوي چې  $n$  ته د ډېرو لویو قیمتونو په ورکولو سره موضوع په آسانی سره روښانه کېږي. د ترادف د قیمتونو له جدول څخه د لېمیت قیمت څرگندېږي، د لېمیت په شته والی کې ریډیف یوه ټاکلې عدد ته نژدې کېږي. دغه ټاکلې عدد ته لېمیت (limit) وايي. چې په  $\lim$  سره ښودل کېږي.

ددې لپاره د  $b_n = \frac{n-1}{n}$  ترادف په پام کې نیسو، لرو چې:

$n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	...
$b_n$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{6}{7}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{9}{10}$	$\frac{10}{11}$	...



او یا که چېرې  $I$  .....  $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}$  ،  $II$  .....  $\frac{n+1}{n}, \dots, \frac{5}{4}, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}, 2$  او

$(III)$  .....  $2n, \dots, 6, 4, 2$  د عددونو ترادفونه په پام کې ونیسو، لیدل کېږي چې که  $n$  د بې نهایت لورې

ته نژدې شي، نو د  $I$  ترادف صفر ته نژدې کېږي د  $II$  ترادف د  $(1)$  عدد ته نژدې کېږي د  $III$  ترادف بې نهایت  $(\infty)$  ته نژدې کېږي.

**د متحول تقرب:** ویل کېږي چې د  $x$  متحول د  $a$  عدد ته تقرب کوي، په داسې حال کې چې  $x$  په اختیاري ډول د  $a$  عدد ته نژدې کېږي، یعنې د  $x$  او  $a$  ترمنځ تفاوت له هر کوچني عدد ( $\delta > 0$ ) څخه کوچنی وي یا په لاندې ډول:

$$\forall \delta > 0: |x - a| < \delta \quad \text{یا} \quad x \rightarrow a \quad \text{یا} \quad |x - a| \rightarrow 0$$

**له بڼې لوري د متحول تقرب:**  $(x \rightarrow a^+)$  که چېرې د  $x$  د قیمتونو یو متناقص ترادف موجود وي په داسې حال کې چې په تدریجي ډول د  $a$  اختیاري عدد ته نژدې شي.

$$x: a + 0.1, a + 0.01, a + 0.001, a + 0.0001, \dots \rightarrow a^+$$

**له کین لوري د متحول تقرب:**  $(x \rightarrow a^-)$  که چېرې د  $x$  د قیمتونو یو متزاید ترادف موجود وي په داسې حال کې چې  $x$  په تدریجي ډول د  $a$  اختیاري عدد ته نژدې شي.

$$x: a - 0.1, a - 0.01, a - 0.001, a - 0.0001, \dots \rightarrow a^-$$

نو د  $x$  د متحول تقرب د  $a$  عدد ته معادل دی د  $x$  د متحول تقرب له بڼې لوري او د  $x$  د متحول تقرب له چپ لوري، یعنې:

$$x \rightarrow a \Leftrightarrow (x \rightarrow a^+, x \rightarrow a^-)$$



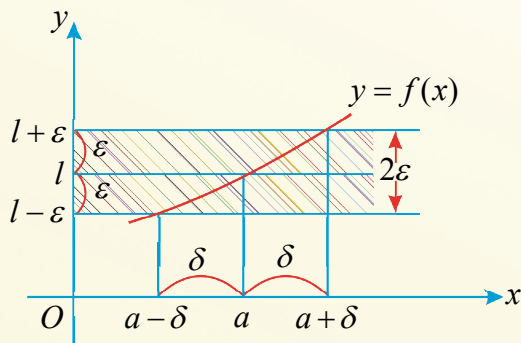
**لومړی بېلگه:** د  $x$  متحول د 9 عدد ته نژدې کړئ یا په بل عبارت د  $x \rightarrow 9$  مفهوم توضیح کړئ.  
**حل:**

$$x: 9.1, 9.01, 9.001, 9.0001, \dots \rightarrow 9^+$$

$$x: 8.9, 8.99, 8.999, 8.9999, \dots \rightarrow 9^-$$

**تعریف:** که چېرې د  $f(x)$  تابع په یوه غیر تړلي انټروال کې چې د  $a$  عدد په هغه کې ګډون لري کېدای شي چې تابع په  $a$  کې نه وي تعریف شوی. که چېرې د  $x$  متحول د  $a$  عدد ته نژدې، شي نو د  $f(x)$  تابع د  $l$  عدد ته نژدې کېږي، نو ویل کېږي چې د  $f(x)$  تابع لېمیت عبارت له  $l$  څخه دی، کله چې د  $x$  متحول د  $a$  عدد ته

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \quad \text{یا} \quad f(x) \rightarrow l \quad \text{تقرب وکړئ، نو داسې یې لیکو:}$$



$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \Leftrightarrow (|x - a| \rightarrow 0 \Rightarrow |f(x) - l| \rightarrow 0)$$



د  $f(x) = 2x$  تابع په ګرافيکي ډول وښیئ چې که  $x$  د (3) عدد ته نژدې شي  $f(x)$  د (6) عدد ته نژدې کېږي.

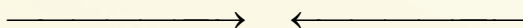
## د بني او کين خوا لېمیتونه

مخامخ تصویر ته پاملرنه وکړئ وویئ چې  
مخامخ ونې ته له کومو خواوو څخه نژدې کېدای شو.



په لاندې جدول کې د  $x \neq 1$  ،  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$  ته ځینې قیمتونه ورکړل شوی.

$x$	0.98	0.99	0.999	?	1.001	1.01	1.02
$f(x)$	1.98	1.99	1.999	?	2.001	2.01	2.02



- د تابع گراف رسم کړئ.
  - که  $x$  د  $(1)$  عدد ته نژدې شي، نو  $f(x)$  کوم عدد ته نژدې کېږي.
- له پورتنی فعالیت څخه لاندې پایله لیکلای شو:

د بني خوا لېمیت: د  $f(x)$  تابع د  $a$  په عدد کې د بني لوري  $l_1$  لېمیت لري که چېرې د هر  $\varepsilon > 0$  لپاره یو کوچنی عدد  $\delta > 0$  موجود وي داسې چې که:  $x \in (a, a + \delta) \Rightarrow f(x) \in (l_1 - \varepsilon, l_1 + \varepsilon)$  یا

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = l_1$$

د کین خوا لېمیت: د  $f(x)$  تابع د  $a$  په عدد کې د کین لوري  $l_2$  لېمیت لري. که چېرې د هر  $\varepsilon > 0$  لپاره د  $\delta > 0$  یو عدد پیدا شي داسې چې  $x \in (a - \delta, a) \Rightarrow f(x) \in (l_2 - \varepsilon, l_2 + \varepsilon)$  یا

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = l_2$$

د  $f(x)$  تابع هغه وخت چې  $x \rightarrow a$  ته نژدې شي د  $l$  لېمیت لري، یعنی:  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$  په دې شرط چې:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = l = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$$

دويمه بېلگه: وښيي چې  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = 6$  سره دی.

حل: د ښي او کښي خوا لېمیتونه تر څېړنې لاندې نيسو:

$x$	3.5	3.1	3.01	3.001	...	$3^+$
$f(x)$	6.5	6.1	6.01	6.001	...	6

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = 6$$

$x$	2.5	2.9	2.99	2.999	...	$3^-$
$f(x)$	5.5	5.9	5.99	5.999	...	6

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = 6$$

ليدل کېږي چې د ښي خوا او کښي خوا لېمیتونه سره مساوي دي، نو  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = 6$  دی.

**دويمه طريقه:** د لېمیت د تعريف په پام کې نيولو سره فرضوو چې د هر اختياري کوچني عدد  $\varepsilon$  لپاره يو  $\delta$

شتون لري داسې چې:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

$$|x - 3| < \delta \Rightarrow \left| \frac{x^2 - 9}{x - 3} - 6 \right| = \left| \frac{(x - 3)(x + 3)}{x - 3} - 6 \right| = |x + 3 - 6| = |x - 3| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \varepsilon = \delta$$

له پورتنۍ اړیکې څخه دا معلومېږي چې  $\varepsilon$  له  $\delta$  سره اړیکه لري، که  $\delta$  ته قیمت ورکړو  $\varepsilon$  قیمت اخلي او که  $\varepsilon$  ته قیمت ورکړو  $\delta$  قیمت اخلي، بنا پر دې هغه تعريف چې د لېمیت لپاره موجود دی سم دی او تابع لېمیت

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = 6 \text{ لري، يعنې:}$$

### پوښتنه

وښيي چې د  $f(x) = \frac{|x - 2|}{x - 2}$  تابع کله چې  $x \rightarrow 2$  لېمیت نه لري.

## د لمیت خاصیتونه (Properties of Limit)

د مخامخ مساوات دلیمیتونو دواړه خواوې کله چې

$x \rightarrow -1$  وکړي، سره مساوي دي او که نه؟

$$\lim_{x \rightarrow -1} (x^2 \pm x) = \lim_{x \rightarrow -1} x^2 \pm \lim_{x \rightarrow -1} x$$



فعالیت

ددې فعالیت د سرته رسولو لپاره لاندې پوښتنو ته ځوابونه پیدا کړئ:

• که  $x$  د 2 عدد ته نژدې شي، نو د  $f(x) = x + 2$  تابع لمیت به څو وي؟

• که  $x \rightarrow 3$  ته تقرب وکړي، نو د  $g(x) = 2x$  تابع لمیت پیدا کړئ.

•  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow 2} g(x)$  پیدا کړئ.

•  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow 2} g(x)$  پیدا کړئ.

•  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \div \lim_{x \rightarrow 2} g(x)$  پیدا کړئ.

له پورتنی فعالیت څخه لاندې پایلې لیکلای شو:

که  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$  او  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$  وي، نو:

$$1) \lim_{x \rightarrow a} Kf(x) = K \lim_{x \rightarrow a} f(x) = KA$$

$$2) \lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x) = A \pm B$$

$$3) \lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x) = A \cdot B$$

$$4) \lim_{x \rightarrow a} \left[ \frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{A}{B}, \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = B \neq 0$$

$$5) \lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)} = \sqrt[n]{A}, \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \geq 0$$

له پورتنیو خواصو څخه درې خاصیتونه ثبوتوو او پاتې یې د زده‌کونکو کورنۍ دنده ده.

بې نهایت کوچنی تابع گانې: د  $\varepsilon(x)$  تابع کله چې  $x \rightarrow a$  ته نژدې شي، بې نهایت کوچنی بللې کېږي، که

چېرې  $\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0$  وي.



1- ددې لپاره چې  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$  سره شي، لازم او كافي ده چې د  $f(x)$  تابع د يوه ثابت عدد  $b$  او يوې بې نهايت كوچني تابع  $\varepsilon(x)$  كله چې  $x \rightarrow a$  د مجموعې په شكل وښودل شي، يعنې:

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= b + \varepsilon(x) \\ \lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) &= 0 \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$$

2- كه چېرې  $\varepsilon(x)$  ،  $x \rightarrow a$  ته نژدې شي، بې نهايت كوچنی تابع وي، خو صفر نه وي، نو  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{\varepsilon(x)} = \infty$  د بې نهايت كوچنی تابع گانو مجموعه بيا هم يوه بې نهايت كوچنی تابع ده.

3- د بې نهايت كوچنیو تابع گانو د ضرب حاصل بيا هم يوه بې نهايت كوچنی تابع ده.

4- كه چېرې  $\varepsilon(x)$  يوه بې نهايت كوچنی تابع او  $u(x)$  داسې يوه تابع وي چې لېمیت يې صفر نه وي، نو د  $v(x) = \frac{\varepsilon(x)}{u(x)}$  تابع يوه بې نهايت كوچنی تابع ده.

**مثال:**

I د  $\varepsilon(x) = x^2 - 9$  تابع كله چې  $x \rightarrow 3$ ، يوه بې نهايت كوچنی تابع ده ځكه چې:

$$\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 9) = 0$$

II  $\varepsilon(x) = \frac{1}{2x}$  تابع كله چې  $x \rightarrow \infty$  ته نژدې شي بې نهايت كوچنی تابع ده:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \varepsilon(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2x} = 0$$

**پوښتنې:** د تېرو خاصیتونو په مرسته لاندې سوالونه حل کړئ.

$$1) \lim_{x \rightarrow 2} (2x^2 - 1) = \lim_{x \rightarrow 2} 2x^2 - \lim_{x \rightarrow 2} 1 = 2 \lim_{x \rightarrow 2} x^2 - \lim_{x \rightarrow 2} 1 = 2 \cdot 2^2 - 1 = 7$$

$$2) \lim_{x \rightarrow -3} (x-1)^2 = \lim_{x \rightarrow -3} (x-1) \cdot \lim_{x \rightarrow -3} (x-1) = (-4)(-4) = 16$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x-3}{x+1} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} 4x - \lim_{x \rightarrow 0} 3}{\lim_{x \rightarrow 0} x + \lim_{x \rightarrow 0} 1} = \frac{0-3}{0+1} = -3$$

د پورتنیو پوښتنو له حل څخه د لېمیت یو خاصیت داسې بیان او ثبوتوو:

1. د څو تابع گانو د مجموعې لېمیت د نوموړو هرې تابع د لېمیتونو له مجموعې سره مساوي دي، يعنې: كه

چېرې د  $f(x_1)$ ،  $f(x_2)$  تابع گانې وي، نو لرو چې:

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x_1) + f(x_2)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x_1) + \lim_{x \rightarrow a} f(x_2)$$

**ثبوت:** كه  $\lim_{x \rightarrow a} f(x_1) = b_1$  ،  $\lim_{x \rightarrow a} f(x_2) = b_2$  او  $\varepsilon_1$  او  $\varepsilon_2$  بې نهايت كوچنی تابع گانې وي، نو:

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x_1) \pm f(x_2)] = b_1 \pm b_2$$

$$\left. \begin{aligned} f(x_1) &= b_1 + \varepsilon_1 \quad \dots \quad I \\ f(x_2) &= b_2 + \varepsilon_2 \quad \dots \quad II \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(x_1) \pm f(x_2) = (b_1 + \varepsilon_1) \pm (b_2 + \varepsilon_2) = b_1 \pm b_2 + (\varepsilon_1 \pm \varepsilon_2)$$

خرنگه چې  $(\varepsilon_1 \pm \varepsilon_2)$  د بې نهایت کوچنیو تابع گانو مجموعه او تفاضل ده او د بې نهایت کوچنیو تابع گانو مجموعه او تفاضل بیا هم یوه بې نهایت کوچنی تابع ده، نو:

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x_1) \pm f(x_2)] = b_1 \pm b_2 = \lim_{x \rightarrow a} f(x_1) \pm \lim_{x \rightarrow a} f(x_2)$$

2. د دوو یا څو تابع گانو د ضرب د حاصل لېمیت د نوموړو تابع گانو د لېمیتونو د ضرب له حاصل سره مساوي دی:

**ثبوت:**

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x_1) \cdot f(x_2)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x_1) \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x_2) = b_1 \cdot b_2$$

$$\left. \begin{array}{l} f(x_1) = b_1 + \varepsilon_1 \\ f(x_2) = b_2 + \varepsilon_2 \end{array} \right\} \Rightarrow f(x_1) \cdot f(x_2) = (b_1 + \varepsilon_1)(b_2 + \varepsilon_2)$$

$$f(x_1) \cdot f(x_2) = b_1 \cdot b_2 + b_1 \cdot \varepsilon_2 + b_2 \cdot \varepsilon_1 + \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2$$

خرنگه چې  $\varepsilon_1$  او  $\varepsilon_2$  ډېر کوچني عددونه دي، نو د ضرب حاصل یې د  $b_1$  او  $b_2$  سره او همداشان په خپلو کې بې نهایت کوچنی کېږي، نو:

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x_1) \cdot f(x_2)] = b_1 \cdot b_2 = \lim_{x \rightarrow a} f(x_1) \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x_2)$$

3. د دوو تابع گانو د نسبت لېمیت د هغو تابع گانو د لېمیتونو له نسبت څخه عبارت دی، لکه په لاندې ډول:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{b_1}{b_2}, \quad g(x) = b_2 \neq 0$$

**ثبوت:**

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = b_1 + \varepsilon_1 \\ g(x) = b_2 + \varepsilon_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{b_1 + \varepsilon_1}{b_2 + \varepsilon_2}$$

د مساوات له دواړو خواوو څخه  $\frac{b_1}{b_2}$  تفریق کوو:

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{b_1}{b_2} &= \frac{b_1 + \varepsilon_1}{b_2 + \varepsilon_2} - \frac{b_1}{b_2} = \frac{b_2(b_1 + \varepsilon_1) - b_1(b_2 + \varepsilon_2)}{b_2(b_2 + \varepsilon_2)} \\ &= \frac{b_2 b_1 + b_2 \varepsilon_1 - b_1 b_2 - b_1 \varepsilon_2}{b_2(b_2 + \varepsilon_2)} = \frac{b_2 \varepsilon_1 - b_1 \varepsilon_2}{b_2(b_2 + \varepsilon_2)} \\ &\Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{b_2 \varepsilon_1 - b_1 \varepsilon_2}{b_2(b_2 + \varepsilon_2)} + \frac{b_1}{b_2} = \frac{b_2 \varepsilon_1 - b_1 \varepsilon_2 + b_1 b_2 + b_1 \varepsilon_2}{b_2(b_2 + \varepsilon_2)} \\ &= \frac{b_2(b_1 + \varepsilon_1)}{b_2(b_2 + \varepsilon_2)} = \frac{b_1 + \varepsilon_1}{b_2 + \varepsilon_2} \Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{b_1 + \varepsilon_1}{b_2 + \varepsilon_2} \end{aligned}$$

خرنگه چې  $\varepsilon_1$  او  $\varepsilon_2$  ډېر کوچني مثبت عددونه ( $0 < \varepsilon < 1$ ) دي، نو کله چې  $x \rightarrow a$  وکړي صفر کېږي او په پایله کې په لاس راځي چې:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{b_1}{b_2}$$

**د سانډويچ قضیه:** که چېرې د  $f(x)$ ,  $g(x)$  او  $h(x)$  تابع گانې د هر  $x$  لپاره په یوه غیر تړلي انټروال کې چې  $a$  عدد په کې شامل دی (ولو که  $x \neq a$ ) او  $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$  شرط صدق وکړي په هغه صورت کې چې  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b = \lim_{x \rightarrow a} h(x)$  وي، نو  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b$  دی.

**مثال:** که د  $u(x)$  تابع دغه خاصیت ( $1 - \frac{x^2}{4} \leq u(x) \leq 1 + \frac{x^2}{2}$ ) ولري، نو  $\lim_{x \rightarrow a} u(x)$  په لاس راوړئ.

**حل:** لیدل کېږي چې  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \frac{x^2}{4}) = 1 = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \frac{x^2}{2})$  دی، نو د سانډويچ د قضیې په پام کې نیولو سره لرو چې:

$$\lim_{x \rightarrow 0} u(x) = 1$$

**قضیه:** که چېرې  $f(x)$  او  $g(x)$  داسې تابع گانې وي چې  $f(x) \leq g(x)$  نو د لمبیت د شتون په صورت کې یې لمبیت  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} g(x)$  سره دی.

**مثال:** د  $f(x) = \frac{15x-4}{5x+6}$  او  $g(x) = \frac{15x+4}{5x-6}$  تابع گانې په پام کې نیسو په واضح ډول معلومېږي چې د  $x > 1$  لپاره لرو  $f(x) < g(x)$  دی.

**حل:**

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{15x-4}{5x+6} = \frac{15}{5} = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{15x+4}{5x-6} = \frac{15}{5} = 3$$

پوښتنې



لاندې لمبیتونه د امکان په صورت کې پیدا کړئ.

1)  $\lim_{x \rightarrow 0} 6x^3 - 2x^2 + 5x + 3$

2)  $\lim_{x \rightarrow -1} x^7 - 2x - 5$

3)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(9x+2)^2 - 4}{x}$

4)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x^2 + 7x}{(2x-5)^2 - 9}$

5)  $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{x-2}$

6)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x}{x^2 - 4x + 1}$

## د نسبتې تابع گانو لمبیتونه

آیا پوهیږئ چې مخامخ اړیکې په څه نامه یادېږي؟

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$$

$$\infty - \infty$$

$$0 \cdot \infty$$



- د  $y = x^2 - 1$  تابع لمبیت هغه وخت پیدا کړئ چې  $x \rightarrow -2$  ته تقرب وکړي.
  - د  $y = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$  تابع لمبیت هغه وخت پیدا کړئ چې  $x \rightarrow 1$  ته تقرب وکړي.
  - د  $y = \frac{x^2 - 1}{x + 1}$  تابع لمبیت هغه وخت پیدا کړئ چې  $x \rightarrow \infty$  ته تقرب وکړي.
- له پورتنی فعالیت څخه لاندې پایله لیکلای شو:

### پایله

- د ځینو تابع گانو لمبیت مستقیماً د قیمت په وضع کولو سره لاسته راځي.
- ځنې تابع گانې د  $\frac{0}{0}$ ,  $\frac{\infty}{\infty}$ ,  $\infty - \infty$ ,  $0 \cdot \infty$  ... مبهم شکلونه لري چې د ابهام د له منځه وړلو څخه وروسته د تابع لمبیت لاسته راځي چې په لاندې ډول یې تر څېړنې لاندې نیسو:

I- د  $\frac{0}{0}$  مبهم شکل:



- د  $f(x) = \frac{x-1}{x^2-1}$  تابع قیمت د  $x = -1$  په نقطه کې وڅېړئ.
  - د  $f(x)$  تابع لمبیت کله چې  $x \rightarrow 1$  وي د ابهام کومه بڼه لري.
  - آیا د  $f(x)$  تابع په داسې ډول ساده کولای شو چې د  $x = 1$  لپاره یو معین قیمت ولري؟
- د پورتنی فعالیت پایله داسې بیانوو:

که چېرې یوه تابع د  $\frac{0}{0}$  په شکل مبهمه بڼه ولري، د لمبیت د پیدا کولو لپاره یې لومړۍ تابع د تجزیې په مرسته ساده کوو د ابهام عامل (خبیثه فکتور) له منځه وړو او بیا یې د لمبیت قیمت په لاس راوړو.

**مثال:** لاندې لمیټونه پیدا کړئ.

$$1) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{x + 2}, \quad 2) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 6x + 8}{x - 2}, \quad 3) \lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt{x} - 4}{x - 16}$$

**حل:** لومړی د لمیټ بڼه ټاکو:

$$1) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{x + 2} = \frac{(-2)^2 - 4}{-2 + 2} = \frac{0}{0}$$

څرنگه چې پاسنې لمیټونه د  $\frac{0}{0}$  بڼه لري، نو د تجزیې په مرسته یې وروسته له ساده کولو څخه د لمیټ قیمت په

لاندې ډول په لاس راوړو:

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x+2)} = \lim_{x \rightarrow -2} (x-2) = -2 - 2 = -4$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 6x + 8}{x - 2} = \frac{2^2 - 12 + 8}{2 - 2} = \frac{0}{0}$$

**حل:** بیا هم لمیټ د  $\frac{0}{0}$  مبهم شکل لري:

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x-4)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x-4) = 2 - 4 = -2$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt{x} - 4}{x - 16} = \frac{0}{0}$$

**حل:** لیدل کېږي چې نوموړی لمیټ بیا هم د  $\frac{0}{0}$  بڼه لري، نو د لمیټ د لاسته راوړلو لپاره د کسر صورت او

مخرج د صورت په مزدوج کې ضربوو:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt{x} - 4}{x - 16} \cdot \frac{\sqrt{x} + 4}{\sqrt{x} + 4} &= \lim_{x \rightarrow 16} \frac{(x-16)}{(x-16)(\sqrt{x} + 4)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 16} \frac{1}{\sqrt{x} + 4} = \frac{1}{8} \end{aligned}$$



$$1) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3-x}{\sqrt{x+1}-2} = ? \quad 2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{5}{2x-3} + 5}{x^2 - 1} = ? \quad 3) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2} = ?$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{2x}{x^2+1} - \frac{4}{5}}{x-2} = ? \quad 5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+3} - \frac{1}{3}}{x} = ?$$

## II- د $\frac{\infty}{\infty}$ مبهم شکل

آيا د مخامخ تابع لېمیت ټاکلی شی؟

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 3x + 8}{2x^2 - 2}$$



فعالیت

- د  $f(x) = 2x^4 + x^3 - 4x - 1$  تابع لېمیت چې  $x \rightarrow \infty$  وڅېړئ.
- د  $g(x) = x^3 - 2x - 4$  تابع لېمیت چې  $x \rightarrow \infty$  وڅېړئ.
- د  $y = \frac{5}{x-2}$  تابع لېمیت چې  $x \rightarrow \infty$  وڅېړئ.
- د  $\frac{f(x)}{g(x)}$  تابع لېمیت هغه وخت په لاس راوړئ چې  $x \rightarrow 0$  وکړي.
- د  $\frac{f(x)}{g(x)}$  تابع لېمیت هغه وخت په لاس راوړئ چې  $x \rightarrow \infty$  وکړي.

له پاسني فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راځي:

**پایله:** هغه توابع چې د  $\frac{\infty}{\infty}$  بڼه ولري د لېمیت د پیدا کولو لپاره یې داسې کرڼه کوو:

د تابع صورت او مخرج په هغه متحول چې تر ټولو لوی توان ولري وېشو، وروسته له ساده کولو څخه یې

لېمیت په لاس راځي.

**لومړی مثال:**  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{3x^2 - 2}$  پیدا کړئ.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{3x^2 - 2} = \frac{\infty - 1}{\infty - 2} = \frac{\infty}{\infty}$$

**حل:** لومړی د لېمیت بڼه ټاکو:

خرنگه چې پوښتنه د  $\frac{\infty}{\infty}$  شکل لري، نو صورت او مخرچ په  $x^2$  باندې وېشو:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{3x^2 - 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2}{x^2} - \frac{1}{x^2}}{\frac{3x^2}{x^2} - \frac{2}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{2}{x^2}}{3 - \frac{2}{x^2}} = \frac{1 - \frac{1}{\infty}}{3 - \frac{2}{\infty}} = \frac{1 - 0}{3 - 0} = \frac{1}{3}$$

**دویم مثال:** د  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2}{x - 2}$  پیدا کړئ.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2}{x - 2} = \frac{\infty}{\infty} \quad \text{حل:}$$

خرنگه چې پوښتنه د  $\frac{\infty}{\infty}$  شکل لري، نو صورت او مخرچ د  $x$  له ټولو په لوړ توان وېشو:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2}{x^2} - \frac{2}{x^2}}{\frac{x}{x^2} - \frac{2}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{2}{x^2}}{\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}} = \frac{1 - \frac{2}{\infty}}{\frac{1}{\infty} - \frac{2}{\infty}} = \frac{1 - 0}{0} = \frac{1}{0} = \infty$$

**دریم مثال:** د  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - 1}{x^2 - 2}$  پیدا کړئ.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - 1}{x^2 - 2} = \frac{\infty}{\infty} \quad \text{حل:}$$

خرنگه چې پوښتنه د  $\frac{\infty}{\infty}$  شکل لري، نو صورت او مخرچ د  $x$  له ټولو په لوړ توان وېشو:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - 1}{x^2 - 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x}{x^2} - \frac{1}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} - \frac{2}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{2}{x^2}} = \frac{\frac{1}{\infty} - \frac{1}{\infty}}{1 - \frac{2}{\infty}} = \frac{0}{1 - 0} = \frac{0}{1} = 0$$

**یادونه:** هغه تابع گانې چې د  $\frac{\infty}{\infty}$  بڼه ولري، پرته له دې چې عملیه پرې سرته ورسوو کولای شو، په لاندې

ډول د هغوی لېمیت په لاس راوړو:

د  $f(x) = \frac{a_0x^m + a_1x^{m-1} + \dots + a_m}{b_0x^n + b_1x^{n-1} + \dots + b_n}$  تابع په پام کې ونیسئ که چېرې  $(x \rightarrow \infty)$  کړی وي، نو دلته درې حالتونه ممکن دي:

- 1- د  $m = n$  لپاره د نوموړي کسر لېمیت عبارت دی له  $\frac{a_0}{b_0}$ .
- 2- د  $m < n$  لپاره د نوموړي کسر لېمیت عبارت له صفر څخه دی.
- 3- د  $m > n$  لپاره د نوموړي کسر لېمیت عبارت له  $\pm \infty$  څخه دی.

**څلورم مثال:** لاندې لېمیتونه پیدا کړئ.

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 + 6x^4 - x^3 + x - 1}{-x^4 + 2x^2 - 3} \quad 2) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-8 + 6x^3 - x^2 + x}{5x^3 - x^4 + 6x - 1} \quad 3) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2}{x + 1}$$

**حل:**

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 + 6x^4 - x^3 + x - 1}{-x^4 + 2x^2 - 3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^4}{-x^4} = -6 \quad 1- \text{څرنګه چې } m = n \text{ دی، نو:}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-8 + 6x^3 - x^2 + x}{5x^3 - x^4 + 6x - 1} = 0 \quad 2- \text{څرنګه چې } m < n \text{ دی، نو د نوموړي تابع لېمیت صفر دی.}$$

3- څرنګه چې  $m > n$  دی، نو د نوموړي تابع لېمیت مساوي له  $\infty$  سره دی:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2}{x + 1} = \infty$$

**يادونه:** زده کوونکي دې ورکړل شوي ځوابونه په کور کې د عمليې د سرته رسولو څخه وروسته په لاس

راوړي.





لاندي لميتونه پيدا ڪري؟

1)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6}{x^2 - x}$

2)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + x^2 + x + 6}{x^3 - 3x + 4}$

3)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5 + x^2 - x + 9}{x^4 + x^2 - x + 5}$

4)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + x^2 - x + 7}{x^3 - x + 5}$

5)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2}{x + 1}$

III- د  $(\infty - \infty)$  او  $(0 \cdot \infty)$  مبهم شکلونه

د مخامخ لېمیتونو قیمتونه پیدا کړئ.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x^2 - 4} - \frac{x - 1}{x^2 - 4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 9) \cdot \frac{2x^3 - 4}{x - 3}$$



فعالیت

- د  $a + 1$  مزدوج ولیکئ.
- د  $\sqrt{x} - 1$  مزدوج ولیکئ.
- د  $f(x) = \sqrt{x} - \sqrt{x+1}$  لېمیت پیدا کړئ، کله چې  $x \rightarrow \infty$  تقرب وکړي.
- د  $f(x) = (2x - 1)(x + 1)$  تابع لېمیت وټاکئ، کله چې  $x \rightarrow \infty$  تقرب وکړي.

له پورتنی فعالیت څخه پایله داسې بیانوو:

د هغو تابع گانو چې د  $(\infty - \infty)$  او  $(0 \cdot \infty)$  مبهم شکلونه ولري، د لېمیت د پیدا کولو لپاره یې د کسرونو له جمع کولو، ضرب او مزدوج څخه گټه اخلو او هغه داسې ساده کوو، تر څو چې د  $\frac{0}{0}$  او یا  $\frac{\infty}{\infty}$  بڼه غوره کړي، وروسته یې لېمیت په لاس راوړو.

مثال: لاندې لېمیتونه پیدا کړئ.

$$1) \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{9}{x-1} - \frac{8x+10}{x^2-1} \right) = ? \quad 2) \lim_{x \rightarrow 1} (x-1) \left( \frac{1}{x^2+2x-3} \right) = ?$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{9}{x-1} - \frac{8x+10}{x^2-1} \right) = \frac{9}{1-1} - \frac{8 \cdot 1 + 10}{1^2 - 1} = \frac{9}{0} - \frac{18}{0} = \infty - \infty$$

حل 1:

څرنگه چې نوموړی لېمیت د  $(\infty - \infty)$  بڼه لري، نو لیکلای شو چې:

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{9x + 9 - 8x - 10}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{x^2 - 1} = \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{(x - 1)(x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x + 1} = \frac{1}{2}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 1} (x-1) \left( \frac{1}{x^2 + 2x - 3} \right) = ?$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x-1) \left( \frac{1}{x^2 + 2x - 3} \right) = (1-1) \left( \frac{1}{1^2 + 2 - 3} \right) = 0 \cdot \frac{1}{3-3} = 0 \cdot \frac{1}{0} = 0 \cdot \infty \quad \text{حل 2:}$$

ليدل کپري چې نوموړی لمبیت د  $(0 \cdot \infty)$  مبهم شکل لري، نو:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2 + 2x - 3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(x-1)(x+3)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+3} = \frac{1}{4}$$



پوښتنې

لاندي لمبیتونه پيدا کړئ.

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x})$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1-x^2} \right)$$

$$3) \lim_{x \rightarrow \infty} (x^5 - 8x^3)$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 5} \left[ (x^2 - 25) \frac{1}{x-5} \right]$$

$$5) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+a} - \sqrt{x})$$

د  $1^\infty, \infty^0, 0^0$  مبهم شکلونه

د مخامخ لېمیت مبهم شکل وټاکئ؟

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\frac{1}{x}} = ?$$



• د  $y = x^x$  تابع لېمیت په هغه صورت کې پیدا کړئ چې  $x \rightarrow 0$  وکړي.

• د  $y = (1+x)^{\frac{1}{x}}$  لېمیت بڼه په هغه صورت کې وټاکئ چې  $x \rightarrow \infty$  وکړي.

• د کومې عملیې په مرسته کولای شو چې د  $1^\infty, \infty^0, 0^0$  مبهم شکلونو ابهام له منځه ورسو؟

د پورتنی فعالیت پایله داسې بیانوو:

که چېرې یوه تابع پورتنی مبهم شکلونه ځانته غوره کړي، هغه د طبیعي لوگارتم په مرسته د  $0 \cdot \infty$  شکل ته د اړولو

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x))^{g(x)} \Rightarrow \ln(\lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)}) = \lim_{x \rightarrow a} (\ln f(x)^{g(x)}) = \lim_{x \rightarrow a} [g(x) \ln f(x)]$$

وړ دي، یعنې:

**یادونه:**

I- که چېرې  $n \rightarrow \infty$  وکړي د  $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$  ترادف  $e = 2.71828182$  عدد ته تقرب کوي.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$$

چې په لاندې جدول کې ښکارېږي:

$n$	$\frac{1}{n}$	$1 + \frac{1}{n}$	$(1 + \frac{1}{n})^n$
1	1	2	2
2	0.5	1.5	2.25
5	0.2	1.2	2.48832
10	0.1	1.1	2.59374246
100	0.01	1.01	2.704813829
1000	0.001	1.001	2.716923932
10000	0.0001	1.0001	2.718145926
100000	0.00001	1.00001	2.718268237
1000000	0.000001	1.000001	2.718280469
1000000000	$10^{-9}$	$1 + 10^{-9}$	2.718281828

نو  $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e = 2.718281828$  دی چې  $e = 2.71 \dots$  عدد ته د Euler عدد وایي.

II- لاندې لیمیتونه پیدا کریں:

$$1) \lim_{\alpha \rightarrow 0} (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{\alpha}{x})^{\beta x} = e^{\alpha \beta}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

**ثبوت:** پوهیرو چې خلور وارہ پوشتی د  $1^\infty$  مبہم شکلونہ لری.

$$1) x = \frac{1}{\alpha} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{x}, \quad \alpha \rightarrow 0 \Rightarrow x \rightarrow \infty \Rightarrow \lim_{\alpha \rightarrow 0} (1 + \alpha)^\alpha = \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{\alpha}{x})^{\beta x} = e^{\alpha \beta}$$

$$u = \frac{\alpha}{x} \Rightarrow x = \frac{\alpha}{u}, \quad x \rightarrow \infty \Rightarrow u \rightarrow 0$$

$$\lim_{u \rightarrow 0} (1 + u)^{\beta \frac{\alpha}{u}} = \lim_{u \rightarrow 0} \left[ (1 + u)^{\frac{1}{u}} \right]^{\alpha \beta}$$

$$x = \frac{1}{u} \rightarrow u = \frac{1}{x}, \quad u \rightarrow 0 \Rightarrow x \rightarrow \infty$$

$$\lim_{u \rightarrow 0} \left[ (1 + u)^{\frac{1}{u}} \right]^{\alpha \beta} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ (1 + \frac{1}{x})^x \right]^{\alpha \beta} = e^{\alpha \beta}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{x} \ln(1+x) \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} \right]$$

$$\ln \left[ \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} \right], \quad x = \frac{1}{u} \Rightarrow u = \frac{1}{x}, \quad x \rightarrow 0 \Rightarrow u \rightarrow \infty$$

$$\ln \left[ \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} \right] = \ln \left[ \lim_{u \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{u})^u \right] = \ln e = 1$$

$$4) y = e^x - 1 \Rightarrow e^x = 1 + y \Rightarrow x = \ln(1 + y)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\ln(1 + y)} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\ln(1 + y)}{y}} = \frac{1}{\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + y)}{y}} \\ &= \frac{1}{\lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{y} \ln(1 + y)} = \frac{1}{\lim_{y \rightarrow 0} \ln(1 + y)^{\frac{1}{y}}}, y = \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{1}{y}, y \rightarrow 0 \Rightarrow x \rightarrow \infty \\ &= \frac{1}{\ln \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^x} = \frac{1}{\ln e} = \frac{1}{1} = 1 \end{aligned}$$

د  $1^\infty$  مبهم شکل عمومي حالت: که چېرې د اکسپوننشل تابع لېمیت يعنې  $\lim_{x \rightarrow a} [u(x)]^{v(x)}$  د  $1^\infty$  مبهم شکل

ځانته غوره کړي په دې حالت کې  $\alpha = u - 1$  سره تعویضوو، په نتیجه کې:

$$\lim_{x \rightarrow a} u^v = \lim_{x \rightarrow a} [(1 + u - 1)]^{\frac{v}{u-1} u-1} = \lim_{x \rightarrow a} \left[ (1 + \alpha)^\alpha \right]^{\frac{v}{\alpha}} = \lim_{x \rightarrow a} \left[ (1 + \alpha)^\alpha \right]^{\lim_{x \rightarrow a} (v\alpha)}$$

څرنگه چې  $\alpha = u - 1$  دی که چېرې  $u \rightarrow 1$  نو  $\alpha \rightarrow 0$  ته نژدې کېږي په پایله کې:

$$\lim_{x \rightarrow a} [u(x)]^{v(x)} = \left[ \lim_{\alpha \rightarrow 0} (1 + \alpha)^\alpha \right]^{\lim_{x \rightarrow a} [v(u-1)]} = e^{\lim_{x \rightarrow a} [v(u-1)]} = e^P$$

$$\lim_{x \rightarrow a} [u(x)]^{v(x)} = e^P, \quad P = \lim_{x \rightarrow a} [v(u-1)]$$

لومړی مثال: د  $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{2}{x})^x$  لېمیت قیمت په لاس راوړئ.

حل: لومړی د لېمیت بڼه ټاکو معلومېږي چې لېمیت د  $1^\infty$  مبهم شکل لري، نو له فورمول څخه کار اخلو:

$$u = 1 + \frac{2}{x}, \quad v = x$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{2}{x})^x = e^P, \quad P = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ x(1 + \frac{2}{x} - 1) \right] = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{2}{x})^x = e^P = e^2$$

دویم مثال: د  $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^{\frac{x-5}{2}}$  قیمت محاسبه کړئ.

حل: لومړی د لېمیت بڼه ټاکو  $1^\infty$   $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^{\frac{x-5}{2}} = 1^\infty$

خرنگه چې معلومېږي نوموړی لېمیت د  $1^\infty$  مبهم شکل لري، نو له فورمول څخه کار اخلو:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{x-5}{2}} = e^P$$

$$u = 1 + \frac{1}{x}, \quad v = \frac{x-5}{2}$$

$$P = \lim_{x \rightarrow a} [v(u-1)] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \frac{x-5}{2} \left(1 + \frac{1}{x} - 1\right) \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \frac{x-5}{2} \left(\frac{1}{x}\right) \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-5}{2x} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{x-5}{2}} = e^P = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$$

دریم مثال:  $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x}} = ?$

حل: د تېر په شان بیا هم لومړی د لېمیت بڼه ټاکو،  $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x}} = 1^\infty$

خرنگه چې معلومېږي لېمیت د  $1^\infty$  مبهم شکل لري د فورمول په مرسته یې محاسبه کوو:

$$u = \cos x, \quad v = \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x}} = e^P$$

$$P = \lim_{x \rightarrow a} [v(u-1)] = \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{x} (\cos x - 1) \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos x - 1)(\cos x + 1)}{x(\cos x + 1)}$$

$$\frac{\cos^2 x + \cos x - \cos x - 1}{x(\cos x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - \sin^2 x - \cos^2 x}{x(\cos x + 1)}$$

$$= -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\cos x + 1} = -1 \cdot \frac{0}{2} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x}} = e^P = e^0 = 1$$



لاندې لېمیتونه محاسبه کړئ.

1)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+2}$

2)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\ln x}$

3)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{x+2}$

4)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2}$

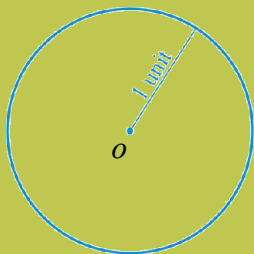
5)  $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x)^{\frac{1}{x}}$

## د مثلثاتي تابع گانو لمبیت

## Trigonometric functions limits

که د یوې دایرې شعاع یو واحد (1 unit) وي، نوموړي

دایرې ته څه ډول دایره وایي.



- د وضعیت کمیانو په سیستم کې د  $C(o, r)$  په مثلثاتي دایره کې د  $\theta$  مرکزي زاویه رسم کړئ.
  - د  $C$  له بهرني ټکي څخه په دایره باندې د  $ox$  پر محور د  $\overline{CA}$  مماس او  $\overline{MB}$  عمود رسم کړئ.
  - د  $C$  ټکي د دایرې له مرکز سره وصل کړئ.
  - د مرکزي زاویې د مقابل قوس د اندازه کولو واحد په گوته کړئ.
- له پورتنی فعالیت څخه قضیه داسې بیان او ثبوتوو:

**قضیه:** د یوې زاویې د سین او د هغې زاویې د نسبت لمبیت مساوي په (1) دي، کله چې زاویه صفر ته تقرب وکړي.

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$$

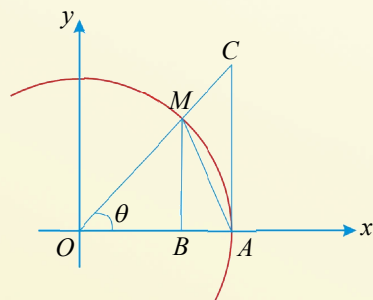
**ثبوت:** په لاندې شکل کې د  $MOA$  او  $COA$  د مثلثونو او  $OMA$  د قطاع مساحتونه په لاس راوړو:

$$\text{مساحت } MOA = \frac{1}{2} \cdot \overline{OA} \cdot \overline{BM} = \frac{1}{2} \cdot r \cdot \overline{BM} = \frac{\overline{BM}}{2} \cdot r$$

$$\text{مساحت } \widehat{OAM} = \frac{1}{2} \theta r^2$$

د  $\theta$  د زاویې پراخوالی باید په رادین لاسته راوړو.

$$\text{مساحت } \triangle COA = \frac{1}{2} \cdot \overline{OA} \cdot \overline{AC} = \frac{1}{2} \cdot r \cdot \overline{AC} = \frac{\overline{AC}}{2} \cdot r$$



د  $MOA$  او  $COA$  د مثلثونو مساحتونه د  $OMA$  د قطاع له مساحت سره پرتله کوو:

$$\frac{1}{2} r \overline{BM} < \frac{1}{2} \theta r^2 < \frac{\overline{AC}}{2} \cdot r$$



د نامساواتو دواړه خواوې په  $\frac{2}{r^2}$  کې ضربوو:

$$\frac{BM}{r} < \theta < \frac{AC}{r} \Rightarrow \sin \theta < \theta < \tan \theta \Rightarrow 1 < \frac{\theta}{\sin \theta} < \frac{1}{\cos \theta}$$

$$\Rightarrow \cos \theta < \frac{\sin \theta}{\theta} < 1 \Rightarrow \lim_{\theta \rightarrow 0} \cos \theta \leq \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} \leq \lim_{\theta \rightarrow 0} 1$$

د سانډويچ د قضيې پر بنسټ معلومېږي چې  $\lim_{\theta \rightarrow 0} \cos \theta = 1$  او همدارنگه  $\lim_{\theta \rightarrow 0} 1 = 1$  دی، نو

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$$

پوهېږو چې د هرې زاوې ساین د (1) او (-1) د عددونو تر منځ تحول کوي:

$$-1 \leq \sin \theta \leq 1$$

$$-\frac{1}{\theta} \leq \frac{\sin \theta}{\theta} \leq \frac{1}{\theta}$$

$$-\lim_{\theta \rightarrow \infty} \frac{1}{\theta} \leq \lim_{\theta \rightarrow \infty} \frac{\sin \theta}{\theta} \leq \lim_{\theta \rightarrow \infty} \frac{1}{\theta}$$

د سانډويچ د قضيې پر اساس لیکلای شو چې:

$$\left. \begin{array}{l} -\lim_{\theta \rightarrow \infty} \frac{1}{\theta} = 0 \\ \lim_{\theta \rightarrow \infty} \frac{1}{\theta} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{\theta \rightarrow \infty} \frac{\sin \theta}{\theta} = 0$$

په پایله کې ویلای شو چې د یوې زاوې ساین او د هغې زاوې د نسبت له میت مساوي په صفر دی هغه وخت چې زاویه بې نهایت ته نژدې شي.

**لومړی مثال:**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x}$  پیدا کړئ.

**حل:** که  $2x = \alpha$  نو  $x = \frac{\alpha}{2}$  کېږي، څرنگه چې  $x \rightarrow 0$  کړی دی، نو  $\alpha \rightarrow 0$  کوي، نو لیکلای شو:

$$\frac{\sin \alpha}{\frac{\alpha}{2}} = 2 \frac{\sin \alpha}{\alpha}$$

له پورته مساواتو څخه لاس ته راځي:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow 2 \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 2 \cdot 1 = 2$$

دویم مثال:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 \tan 2x}{7x}$  حل کریں۔

حل:

$$\frac{5 \tan 2x}{7x} = \frac{5 \frac{\sin 2x}{\cos 2x}}{7x} = \frac{5 \sin 2x}{7x \cos 2x} = \frac{5 \cdot 2x \frac{\sin 2x}{2x}}{7x \cos 2x} = \frac{10 \frac{\sin 2x}{2x}}{7 \cos 2x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 \tan 2x}{7x} = \frac{10 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x}}{7 \lim_{x \rightarrow 0} \cos 2x} = \frac{10}{7}$$

دریم مثال:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x}$  حل کریں۔

حل: پوهیرو چپی  $1 - \cos 2x = 2 \sin^2 x$  سرہ دی، نو:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 x}{x}$$

$$= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 2 \cdot 1 \cdot 0 = 0$$

خلورم مثال:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{\sin 5x}$  پیدا کریں:

حل:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{\sin 5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin 3x}{\cos 3x}}{\sin 5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x \frac{\sin 3x}{3x}}{5x \frac{\sin 5x}{5x}} = \frac{3x \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x}}{5x \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{5x}} = \frac{3 \cdot 1}{5 \cdot 1} = \frac{3}{5}$$

پنجم مثال:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 4x - \cos 6x}{x^2}$  پہ لاس راویں۔

حل: پوهیرو چپی  $\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$  نو:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin \frac{4x + 6x}{2} \sin \frac{4x - 6x}{2}}{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin 5x \sin(-x)}{x^2} = -2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 \sin 5x}{5x} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{x}$$

کہ  $5x = y$  سرہ وی، او  $x \rightarrow 0$  نو  $y \rightarrow 0$  کوی، نو:

$$= 10 \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 10 \cdot 1 \cdot 1 = 10$$



لاندي لميتونه محاسبه کری.

1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x + \frac{\pi}{6})}{x + \frac{\pi}{6}}$

2)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x}$

3)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \tan^2 x}$

4)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x}$

5)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{\sin 3x}$

6)  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin 5x \cos 3x$

7)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(2x-1)}{4x^2-1}$

8)  $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{\cos 2x - \cos x + 1}$

9)  $\lim_{x \rightarrow 1} (\cos^2 x + \sin^2 x)$

## د تابع گانو متمادیت

### Continuity of functions

شکلونو ته پام وکړئ.

لومړی او دویم پلونه یو له بل څخه څه توپیر لري، خپل

نظر بیان کړئ.



د تابع گانو گرافونه مختلف شکلونه لري چې ځینې یې په یوه قلم پرته له دې چې د قلم څوکه له کاغذ څخه پورته شي رسمېږي، متصلې یا متمادی تابع گانې بلل کېږي او ځینې یې په یوه قلم نه شي رسمېدلای یعنې د رسم په وخت کې باید د قلم څوکه یو ځل یا څو ځلې د کاغذ څخه پورته شي، ځکه په یوه برخه کې یې گراف غوڅ وي، دغه ډول تابع گانې په نوموړې ټکې کې غیر متصلې یا غیر متمادی تابع گانې بلل کېږي.



فعالیت

- د  $f(x) = x^2 + 4x$  تابع گراف رسم کړئ.
  - د  $f(x)$  د تابع لېمیت د  $x = 1$  په نقطه کې پیدا کړئ.
  - د  $f(x)$  د تابع قیمت د  $x = 1$  په نقطه کې پیدا او وروسته دواړه اړیکې سره پرتله کړئ.
- له پاسني فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راځي:

**پایله:** د  $y = f(x)$  تابع د  $x = a$  په ټکي کې متمادی بلله کېږي چې لاندې شرطونه په کې صدق وکړي.

1- د  $f(x)$  تابع د  $a$  په ټکي کې تعریف شوي وي.

2- راکرل شوي تابع د  $a$  په ټکي کې لېمیت ولري.

3- د  $f(a)$  قیمت باید د  $f(x)$  له لېمیت سره مساوي وي:  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

**لومړی مثال:** وښیئ چې د  $f(x) = x^2 + 2x - 1$  تابع د  $x_0 = 2$  په ټکي کې متمادی ده.

**حل:** څرنګه چې د تابع د تعریف ساحه ټول حقیقي عددونه دي، نو د متمادیت له شرطونو څخه لیکلای شو:

$$1) 2 \in \text{Dom } f(x) = \mathbb{R}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 2x - 1) = 4 + 4 - 1 = 7 \quad \left. \vphantom{\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 2x - 1)} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) = 7$$

$$3) f(2) = 2^2 + 4 - 1 = 7$$

څرنګه چې د متمادیت درې واړه شرطونه په کې حقیقت لري، بناءً تابع متمادی ده.

**دویم مثال:** د  $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$  تابع متمادیت د  $x_0 = -1$  په ټکي کې وڅېړئ.

**حل:** د  $f(x)$  د تابع د تعریف ساحه عبارت ده، له:  $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$$\text{او } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x-1}{x+1} = \frac{-3}{0} = \infty \text{ سره دی.}$$

څرنګه چې لیدل کېږي  $-1$  د تابع د تعریف په ساحه کې شامل نه دی، بناءً نوموړی تابع د  $-1$  په ټکي کې متمادی نه ده.

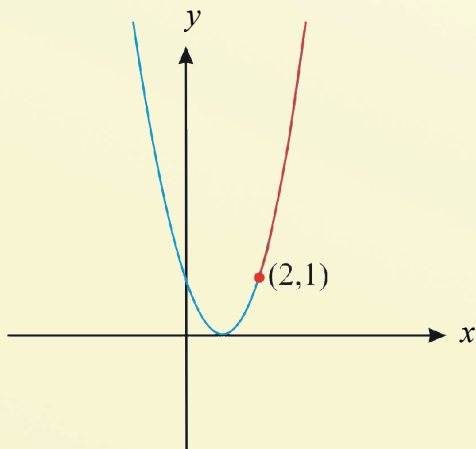
**دریم مثال:** د  $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 1 & ; x < 2 \\ x^2 - 3 & ; x \geq 2 \end{cases}$  تابع متمادیت د  $x = 2$  په ټکي کې وڅېړئ.

**حل:** لومړی د تابع د بنی او کینې خوا لېمیتونه څېړو:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 - 3) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 - 2x + 1) = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$$

په پایله کې ویلای شو چې تابع په نوموړي ټکي کې

متمادی ده، لکه چې په شکل کې لیدل کېږي.



**څلورم مثال:** که  $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & ; x \geq 1 \\ 1-x & ; x < 1 \end{cases}$  وي، نو د  $x=1$  په ټکي کې د تابع متمادیت وڅېړئ.

**حل:**

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1 - x = 0 \\ f(1) = 0 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} 2x + 1 = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 1 - x = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$$

نو تابع په  $x=1$  کې غیر متمادی ده.

**پایله:** که چېرې د  $g(x)$  تابع د  $x=a$  په ټکي کې  $f(x)$  په  $x=g(a)$  کې متمادی وي، نو  $f(g(x))$  په  $x=a$  کې هم متمادی ده، یعنې:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = f(\lim_{x \rightarrow a} g(x)) = f(g(a))$$

$$1) \lim_{x \rightarrow a} (f(x))^\alpha = (\lim_{x \rightarrow a} f(x))^\alpha, \quad \alpha \in IR$$

$$2) \lim_{x \rightarrow a} a^{f(x)} = a^{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow a} \log_a f(x) = \log_a (\lim_{x \rightarrow a} f(x))$$

$$4) \lim_{x \rightarrow a} \sin f(x) = \sin(\lim_{x \rightarrow a} f(x))$$

**پنځم مثال:** که  $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x + 3}$  وي او  $x \neq -3$  وي.

آیا د  $f(x)$  تابع د  $x = -3$  په ټکي کې متمادی ده؟

**حل:** څرنګه چې تابع د  $x = -3$  په نقطه کې نه ده تعریف شوی یا په بل عبارت د  $-3$  عدد د تابع د تعریف په ساحه کې نه دی شامل، نو له دې امله تابع د  $x = -3$  په ټکي کې متمادی نه ده.

**غیر متمادیت:** که چېرې د  $f(x)$  تابع په  $x = a$  کې یو له لاندې درې شرطونو څخه و نه لري وایو چې  $f$  په  $a$  کې غیر متمادی ده او  $a$  یې د انفصال ټکی دی. انفصال په درې ډوله دی.

**لومړی ډول:** د  $f$  تابع د  $a$  په ټکي کې د بني او کین لوري لېمیتونه ولري، خو مساوي نه وي.

**دویم ډول:** کم تر کمه یو له دوو لېمیتونو (د بني او کین لوري لېمیتونه) څخه موجود نه وي.

**دریم ډول:** که چېرې تابع د  $a$  په ټکي کې لېمیت ولري، خو  $a$  د  $f$  د تعریف په ساحه کې شامل نه وي. (یوازې

یو خالي ټکی وي.)



په ورکړ شويو ټکو کې د تابع متماديت وڅېړئ.

a)  $f(x) = x^2 + 5(x-2)^7$  ;  $x = 3$

b)  $f(x) = \frac{x+3}{(x^2+2x-5)}$  ;  $x = -1$

c)  $h(x) = \frac{\sqrt{8-x^2}}{2x^2-5}$  ;  $x = -2$

d)  $f(x) = \frac{1}{(x-3)^3}$  ;  $x = 3$

e)  $f(x) = |x-3|$  ;  $x = 3$

f)  $g(x) = \frac{|x|}{x}$  ;  $x = 0$

g)  $f(x) = \begin{cases} x^3 + x & ; x \neq 0 \\ x & \\ 3 & ; x = 2 \end{cases}$

h)  $f(x) = \frac{x^2-9}{x+3}$  ;  $x = 2$

## د متمادي تابع گانو خاصیتونه

د مخامخ مساواتو په اړه سوچ وکړئ چې حقیقت لري او که نه؟

$$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

$$(f \div g)(x) = f(x) \div g(x) , g(x) \neq 0$$



- که  $f(x) = x^2 - 1$  وي د تابع متمادیت وڅېړئ.
  - که  $g(x) = x + 3$  وي د تابع متمادیت وڅېړئ.
  - د  $f(x) + g(x)$  د تابع گانو متمادیت وڅېړئ.
- د پورتنی فعالیت پایله داسې بیانوو:

**پایله:** که د  $f(x)$  او  $g(x)$  تابع گانې د  $x = c$  په ټکي کې متمادي وي، نو له لاندې تابع گانو څخه یې هره یوه په  $x = c$  یا یوه انټروال کې متمادي ده.

1- د تابع گانو جمع  $f(x) + g(x)$

2- د تابع گانو تفریق  $f(x) - g(x)$

3- د تابع گانو ضرب  $f(x) \cdot g(x)$

4- د تابع گانو تقسیم  $\frac{f(x)}{g(x)} ; g(x) \neq 0$

**لومړۍ بېلگه:** که  $f(x) = x^2 + 3$  او  $g(x) = x^2 + 3x - 2$  وي، نو:

1-  $f$  او  $g$  د  $x = 1$  په ټکي کې متمادي دي او که نه؟

2- وڅېړئ چې:

الف)  $f(x) + g(x) = (f + g)(x)$  وي.



ب)  $f(x) \cdot g(x) = (f \cdot g)(x)$  د  $x = 1$  په نقطه کې متمادی ده او که غیر متمادی.

**حل:** لومړی هره یوه تابع بېلابېله څېرو چې متمادی ده که نه؟

1)  $Df(x) = IR$

2)  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 3) = 4$

3)  $f(1) = (1^2 + 3) = 4$

نود  $f$  تابع د  $x = 1$  په نقطه کې متمادی ده.

1)  $Dg(x) = IR$

2)  $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 3x - 2) = 1^2 + 3 \cdot 1 - 2 = 2$

3)  $g(1) = (1^2 + 3 \cdot 1 - 2) = 2$

په همدې شان د  $g$  تابع د  $x = 1$  په ټکي کې هم متمادی ده.

2- اوس د تابع گانو د جمعې او ضرب د حاصل متمادیت څېرو:

**(الف)**

$$f(x) + g(x) = x^2 + 3 + x^2 + 3x - 2 = 2x^2 + 3x + 1$$

1)  $D(f(x) + g(x)) = IR$

2)  $\lim_{x \rightarrow 1} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow 1} (2x^2 + 3x + 1) = 6$

3)  $f(1) + g(1) = (1 + 3 + 1 + 3 - 2) = 6$

$$\lim_{x \rightarrow 1} [f(x) + g(x)] = f(1) + g(1) = 6$$

$$(f + g)(x) = x^2 + 3 + x^2 + 3x - 2 = 2x^2 + 3x + 1$$

1)  $D[(f + g)(x)] = IR$

2)  $\lim_{x \rightarrow 1} [(f + g)(x)] = \lim_{x \rightarrow 1} [2x^2 + 3x + 1] = 6$

3)  $(f + g)(1) = (2x^2 + 3x + 1)(1) = 6$

$$\lim_{x \rightarrow 1} [(f + g)(x)] = (f + g)(1) = 6$$

په پایله کې د متمادی تابع گانو د جمعې حاصل د  $x = 1$  په نقطه کې متمادی دی.

ب

$$f(x) \cdot g(x) = (x^2 + 3)(x^2 + 3x - 2) = x^4 + 3x^3 + x^2 + 9x - 6$$

$$1) D(f \cdot g)(x) = IR$$

$$2) (f \cdot g)_{(1)} = 1^4 + 3 \cdot 1^3 + 1^2 + 9 \cdot 1 - 6 = 8$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 1} (f \cdot g)(x) = 8$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (f \cdot g)(x) = (f \cdot g)(1) = 8$$

په پایله کې د متمادی تابع گانو د ضرب حاصل د  $x = 1$  په نقطه کې متمادی ده.

**دویمه بېلگه:** که  $g(x) = 3x - 2$  او  $f(x) = x + 1$  وي، وڅېړئ چې آیا  $f(x) \cdot g(x)$  د  $x = 2$

په نقطه کې متمادی ده؟

**حل:**

$$1) Dg(x) = IR$$

$$1) Df(x) = IR$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 3x - 2 = 3 \cdot 2 - 2 = 4$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 1) = 3$$

$$3) g(2) = 3x - 2 = 3 \cdot 2 - 2 = 4$$

$$3) f(2) = x + 1 = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = g(2) = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) = 3$$

$$f(x) \cdot g(x) = (x + 1)(3x - 2) = 3x^2 - 2x + 3x - 2 = 3x^2 + x - 2$$

$$D(f \cdot g)(x) = IR$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} [f(x) \cdot g(x)] = 3(4) + 2 - 2 = 12$$

$$(f \cdot g)(2) = 3(4) + 2 - 2 = 12$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} [f(x) \cdot g(x)] = (f \cdot g)(2) = 12$$

په پایله کې لاس ته راځي چې  $f(x) \cdot g(x)$  د  $x = 2$  په ټکي کې متمادی ده.



1- وڻيئ چي لاندې تابع گانې په ورڪر شويو نقطو کي متمادي دي او ڪه نه؟

1)  $f(x) = x^3 - 2(x+1)^5$  ;  $x = 2$

2)  $g(x) = \frac{x^2 + 3}{(x^2 - x + 5)(x^2 + 2x)}$  ;  $x = -1$

3)  $h(x) = \frac{x\sqrt{x} + 1}{(x+2)^3}$  ;  $x = 4$

2- تشریح ڪري چي وڻي د  $f(x) = \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{2}}{x}$  تابع په  $x = 0$  کي غير متمادي ده.

## د څپرکي مهم ټکی

**د متحول تقرب:** ویل کېږي چې د  $x$  متحول د  $a$  عدد ته تقرب کوي، په داسې حال کې چې  $x$  په اختیاري ډول د  $a$  عدد ته نژدې کېږي، یعنې د  $x$  او  $a$  ترمنځ تفاوت له هر کوچني عدد ( $\delta > 0$ ) څخه کوچني دی یا په لاندې ډول:

$$\forall \delta > 0: |x - a| < \delta \quad \text{یا} \quad x \rightarrow a \quad \text{یا} \quad |x - a| \rightarrow 0$$

**له بني لوري د متحول تقرب:** ( $x \rightarrow a^+$ ) که چېرې د  $x$  د قیمتونو یو متناقص ترادف موجود وي، په داسې حال کې چې په تدریجي ډول د  $a$  اختیاري عدد ته نژدې شي.

$$x: a + 0.1, a + 0.01, a + 0.001, a + 0.0001, \dots \rightarrow a^+$$

**له کین لوري د متحول تقرب:** ( $x \rightarrow a^-$ ) که چېرې د  $x$  د قیمتونو یو متزاید ترادف موجود وي، په داسې حال کې چې  $x$  په تدریجي ډول د  $a$  اختیاري عدد ته نژدې شي.

$$x: a - 0.1, a - 0.01, a - 0.001, a - 0.0001, \dots \rightarrow a^-$$

نو د  $x$  د متحول تقرب د  $a$  عدد ته معادل دی د  $x$  د متحول تقرب له بني لوري او د  $x$  د متحول تقرب له چپ لوري؛ یعنې:

$$x \rightarrow a \Leftrightarrow (x \rightarrow a^+, x \rightarrow a^-)$$

**تعریف:** که چېرې د  $f(x)$  تابع په یوه غیر ترلي انټروال کې چې د  $a$  عدد په هغې کې شامل وي کېدای شي چې تابع په  $a$  کې نه وي تعریف شوی. که چېرې د  $x$  متحول د  $a$  عدد ته نژدې شي، نو د  $f(x)$  تابع د  $l$  عدد ته نژدې کېږي، نو ویل کېږي چې د  $f(x)$  د تابع لېمیت عبارت له  $l$  څخه دی، کله چې د  $x$  متحول د  $a$  عدد ته

$$\text{تقرب وکړي، نو داسې یې لیکو:} \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \quad \text{یا} \quad \begin{matrix} x \rightarrow a \\ f(x) \rightarrow l \end{matrix}$$

**د لېمیت ځانګړتیاوې:** که  $f$  او  $g$  دوی تابع ګانې وي،  $C, L$  او  $M$  حقیقي عددونه وي، داسې چې  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$  او  $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = M$ ، نو لاندې رابطې لیکلای شو:

$$1) \quad \lim_{x \rightarrow c} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow c} f(x) + \lim_{x \rightarrow c} g(x) = L + M$$

$$2) \quad \lim_{x \rightarrow c} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow c} f(x) - \lim_{x \rightarrow c} g(x) = L - M$$

$$3) \quad \lim_{x \rightarrow c} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow c} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow c} g(x) = L \cdot M$$

$$4) \quad \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow c} f(x)}{\lim_{x \rightarrow c} g(x)} = \frac{L}{M}, \quad M \neq 0, \quad g(x) \neq 0$$

$$5) \quad \lim_{x \rightarrow c} \sqrt{f(x)} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow c} f(x)} = \sqrt{L}$$

بې نهایت کوچنی تابع گانې: د  $\varepsilon(x)$  تابع کله چې  $x \rightarrow a$  ته نژدې شي، بې نهایت کوچنی بللې کېږي، که چېرې  $\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0$  وي.

د سانډويچ قضیه: که چېرې د  $f(x)$ ,  $g(x)$  او  $h(x)$  تابع گانې د هر  $x$  لپاره په یوه غیر تړلي انټروال کې چې د  $a$  عدد په کې شامل دی (ولو که  $x \neq a$ ) او  $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$  شرط صدق وکړي په هغه صورت کې چې  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b = \lim_{x \rightarrow a} h(x)$  وي، نو  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b$  دی.

• که چېرې یوه تابع د  $\frac{0}{0}$  مبهمه بڼه ولري، د لېمیت د پیدا کولو لپاره یې لومړی تابع د تجزیې په مرسته ساده کوو او بیا یې لېمیت په لاس راوړو.

•  $f(x) = \frac{a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \dots + a_m}{b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \dots + b_n}$  د تابع د لېمیت د پیدا کولو لپاره چې  $x \rightarrow \infty$  وکړي، عبارت دی له:

$$1. \quad \text{د } m = n \text{ لپاره د نوموړي کسر لیمیت عبارت دی له } \frac{a_0}{b_0}$$

$$2. \quad \text{د } m < n \text{ لپاره د نوموړي کسر لیمیت عبارت له صفر څخه دی.}$$

$$3. \quad \text{د } m > n \text{ لپاره د نوموړي کسر لیمیت عبارت دی له } \pm \infty$$

• د هغو تابع گانو چې  $(\infty - \infty)$  او  $(0 \cdot \infty)$  بڼه ولري د لېمیت د پیدا کولو لپاره یې د کسرونو د جمعې،

ضرب او مزدوج څخه گټه اخلو، تر څو د  $\frac{0}{0}$  یا  $\frac{\infty}{\infty}$  بڼه غوره کړي چې وروسته یې لېمیت په لاس راوړو.

• هغه تابع گانې چې د  $1^\infty$  مبهم شکلونه لري له دې فورمول څخه

$$\lim_{x \rightarrow a} [u(x)]^{v(x)} = e^P, \quad P = \lim_{x \rightarrow a} [v(u-1)]$$

لاندې رابطه کله چې  $\theta \rightarrow 0$  وکړي همپشه سمه ده.

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$$

• د  $y = f(x)$  تابع د  $x = a$  په ټکی کې متمادي بلل کېږي، کله چې:

$$1. \quad \text{د } a \text{ د } f(x) \text{ د تابع په دومین کې شامل وي.}$$

$$2. \quad \text{راکړل شوی تابع د } a \text{ په نقطه کې لېمیت ولري.}$$

$$3. \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

## د لومړي څپرکي پوښتنې

لاندې پوښتنو ته څلور ځوابونه ورکړل شوي دي، سم ځواب يې په نښه کړي.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x - \sin x}{x} - 1$$

- a) 2                      b) -2                      c) 1                      d) 3

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 + x - 2} - 2$$

- a)  $-\frac{5}{3}$                       b)  $\frac{5}{3}$                       c) 0                      d) 1

$$\lim_{x \rightarrow 1.4} (2x + 0.3) - 3$$

- a) 1                      b) 3                      c) 0                      d) هيڅ يو

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\tan 2x} - 4$$

- a) 1                      b) 0                      c)  $\frac{3}{2}$                       d)  $\frac{2}{3}$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - 4}{\sqrt{x} - 2} - 5$$

- a)  $2 + \sqrt{2}$                       b) 2                      c)  $\sqrt{2}$                       d) 4

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{1 + \cos 2x} - 6$$

- a) 1                      b)  $\frac{1}{2}$                       c)  $\frac{1}{4}$                       d) 4

7- لاندې لېمیتونه پیدا کړئ.

$$1) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x + 5}{2x^2 + 1}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow -1} \sqrt{3 + x}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6}{x^2 - 7}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + x^2 + x + 6}{x^3 - 3x + 4}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2}{x + 1}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + 5x - 18}{x^2 + 3x - 10}$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x - 4}{x - \sqrt{3x - 2}}$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 3x - 10}$$

$$9) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\tan x}$$

$$10) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x \cos x}$$

$$11) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 3x - 10}{x^2 - x - 2}$$

$$13) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(a+x) + \sin(a-x)}{\tan(a+x) + \tan(a-x)}$$

$$15) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x \sin x - \tan x}{x^2 \sin x}$$

$$17) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin 2x \sin x + \sin^2 x}{x^2}$$

$$19) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin 3x \sin 2x}{x \tan 3x}$$

$$21) \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin 3(\pi + u)}{\sin 8(\pi + u)}$$

$$23) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - x + 3}{x^2 - 8x + 5}$$

$$25) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{9x^2 - x + 5}{\sqrt{9x^4 + 1}}$$

$$12) \lim_{x \rightarrow -2} \left( \frac{x+3}{x+2} + \frac{2}{x^2 + 2x} \right)$$

$$14) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{2x^2 - 1} - \frac{x^2}{2x + 2}$$

$$16) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 3x + \sin^2 x}{ax^2}$$

$$18) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin 2x}{x + \sin 3x}$$

$$20) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{\sqrt{x-2} \cdot \sqrt{x+2}} + \frac{1}{\sqrt{x+2}}$$

$$22) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x^2}{\sin \pi x}$$

$$24) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x + 4}{4x + \sqrt{x}}$$

$$26) \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1-x^2} \right)$$



# دویم خیر کی مشتق



د مشتق لومړنی سوچ د پیردي فرمات (P. Fermat) فرانسوي رياضي پوه په  
واسطه او دقیق مفهوم يې د مشهور رياضي پوه اساق نیوټن (Isaac Newton)  
او گوتفريد ویلیم لایبنز (Gottfried Wilhelm Leibniz) الماني په واسطه  
منځ ته راغی او تکمیل شوی دی.



## مشتقات

### Derivatives

د  $f(x) = x^2 - 1$  تابع په پام کې ونیسئ د مخامخ کسر لیمیت پیدا کړئ.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = ?$$

### د یوې منحنی میل

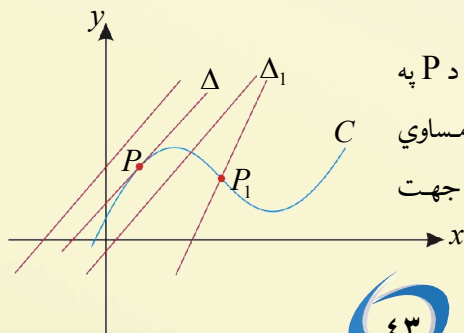
- که د یوه مستقیم خط دوه ټکي  $A(x_1, y_1)$  او  $B(x_2, y_2)$  معلوم وي، نو د دې مستقیم خط میل له کومې رابطې څخه په لاس راځي.
  - آیا د یوه مستقیم خط میل ثابت او مساوي دي؟ که په یوه ځانگړې ټکي پورې اړه لري؟
  - آیا د مستقیم خط میل د هغې زاويې سره اړه لري چې مستقیم خط یې د  $x$  د محور له مثبت لورې سره جوړوي؟
  - آیا د مستقیم خط او منحنی میلیونه یو شان پیدا کېږي؟
- له پورتنیو پوښتنو څخه څرگندېږي چې د منحنی میل په اسانۍ سره نشو پیدا کولای، ځکه چې منحنی خط په هر ټکي کې خپل مسیر ته بدلون ورکوي او په مختلفو ټکو کې بېلابېل میلیونه لري، نو له دې کبله لومړی د یوه منحنی خط میل د هغه په یوه ټکي کې تعریفوو او بیا یې د محاسبې لپاره یو فورمول په لاس راوړو.



فعالیت

- د وضعیه کمیانو په مستوي کې د  $C$  منحنی خط رسم او د  $P$  او  $P_1$  دوه ټکي پرې وټاکئ.
- د  $P_1$  په ټکي کې د  $\Delta_1$  قاطع او د  $P$  په ټکي کې د  $\Delta$  مماس رسم کړئ.
- که د  $P_1$  ټکی د  $C$  په منحنی باندې داسې حرکت وکړي چې د  $P$  ټکي ته نژدې شي، په پایله کې د  $\Delta_1$  مستقیم خط له  $\Delta$  مستقیم خط سره څه اړیکه پیدا کوي؟

د پورتنی فعالیت پایله داسې بیانوو:

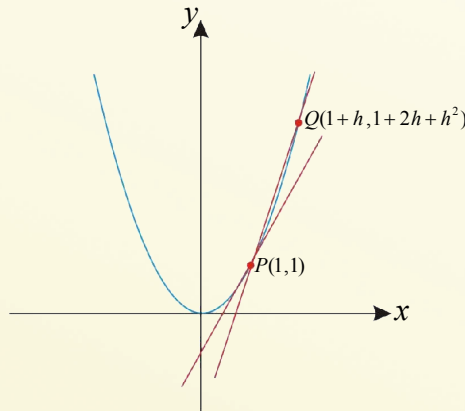


د  $\Delta$  د مستقیم خط میل چې د  $C$  له منحنی سره د  $P$  په نقطه کې مماس دی د هغې زاويې له  $(\tan)$  سره مساوي دی چې مستقیم خط یې د  $x$  د محور له مثبت جهت سره جوړوي.

**لومړی مثال:** د  $y = f(x) = x^2$  له منحنی سره د مماس میل د  $P(1,1)$  په ټکي کې پیدا کړئ.

**حل:** څرنگه چې د منحنی میل د مماس له میل سره د  $P$  په ټکي کې برابر دي، نو د دې مماس میل له هغه فورمول څخه چې د دوي نقطې يې معلومې وي، نشو پیدا کولای، ځکه دلته یوازې د یوې نقطې مختصات ورکړل شوی دي. ولې کولای شو د دې مماس د میل تخميني قیمت د هغه قاطع خط له میل څخه چې د  $P$  او  $Q$  له ټکو څخه تېرېږي، پیدا کړو، په هغه صورت کې چې د  $Q$  ټکی د  $P$  ټکي ته نژدې شي د  $PQ$  د مماس میل 2 ته تقرب کوي چې په لاندې جدول کې لیدل کېږي.

$x$	2	1.5	1.1	1.01	1.001
$y$	4	2.25	1.21	1.0201	1.002001
$m_{PQ} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$	3	2.5	2.1	2.01	2.001



په عمومي ډول هغه لومړی مختصه چې د  $P(1,1)$  ټکي ته نژدې ده په  $1+h$  ښودلای شو چې  $h$  یو کوچنی مثبت یا منفي عدد دی، خو  $h \neq 0$  دی نو لیکلای شو:

$$f(1+h) = (1+h)^2 = 1+2h+h^2$$

نو دا  $(1+h, 1+2h+h^2)$  ټکی د منحنی پر مخ راکړل شوی پروت دی، نو په پایله کې هغه مستقیم خط چې له  $P(1,1)$  او  $Q(1+h, 1+2h+h^2)$  له ټکو څخه تیرېږي، میل يې عبارت دی له:

$$m_{PQ} = \frac{(1+2h+h^2)-1}{(1+h)-1} = \frac{2h+h^2}{h} = 2+h$$

که چېرې په شکل کې  $h \rightarrow 0$  نو  $Q \rightarrow P$  کوي، قاطع خط د  $P(1,1)$  په نقطه کې مماس کېږي چې د

$$\overline{PQ} = \lim_{h \rightarrow 0} (2+h) = 2 \text{ : یعنی: د تابع مشتق وایي؛ یعنې:}$$

د لمبیت دا عملیه مور ته دا امکان په لاس را کوي چې د  $y = x^2$  د تابع د منحنی میل په یوه اختیاري ټکي  $P(x, y)$  کې په لاس راوړو. که د  $Q$  د ټکي اختیاري مختصات  $[x+h, (x+h)^2]$  وي او د  $PQ$  میل ته  $m$  او د  $P$  په ټکي کې د مماس میل په  $m_T$  سره وښو لرو چې:

$$m = \frac{(x+h)^2 - x^2}{x+h-x} = \frac{x^2 + 2hx + h^2 - x^2}{h} = \frac{2xh + h^2}{h} = 2x + h$$

$$m_T = \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h) = 2x$$

نو په عمومي بڼه لیکلای شو، که چېرې  $P[x, f(x)]$ ,  $Q[x+h, f(x+h)]$  د نوموړي منحنی دوې اختیاري نقطې وي، نو لاندې خارج قسمت چې د Newton د رابطې په نامه مشهور دی، لیکلای شو:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{x+h-x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

په حقیقت کې دا د هغه مستقیم خط میل دی چې د  $P$  او  $Q$  له ټکو څخه تېرېږي.

او د منحنی میل د هغې په هر اختیاري ټکي کې عبارت دی له:

$$m_T = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

**دویم مثال:** د  $f(x) = x - x^2$  د منحنی سره د مماس میل د  $P(2,0)$  په ټکي کې پیدا کړئ.

**حل:** د Newton خارج قسمت تشکیل او د  $x = 2$  په ټکي کې د منحنی میل حسابوو:

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= m_T = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2+h) - (2+h)^2 - 2 + 2^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2+h-4-4h-h^2-2+4}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h-4h-h^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(1-4-h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (-3-h) = -3 \end{aligned}$$

### منحنی یا وسطي تغیر

که یو جسم د یوه مستقیم خط پر مخ د حرکت په حال کې وي، طبیعي ده چې وهل شوی فاصله د زمان تابع ده یعنې  $S = f(t)$  د  $t_1$  او  $t_2$  دوو وختونو خارج قسمت  $\frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}$  د جسم د وسطي سرعت په نامه یادېږي او سرعت د  $t_0$  په وخت کې عبارت له هغه حد یا لمبیت څخه دی چې لحظوي سرعت بلل

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} \text{ کېږي.}$$

د پورتنی رابطې لېمیت د  $t$  او  $t_0$  په وخت کې داسې لیکو:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{S - S_0}{t - t_0} = \frac{\Delta S}{\Delta t}$$

په پایله کې ویلای شو چې د تابع او متحول د زیاتوالي خارج قسمت ته متوسط تغییر وایي، یعنې:

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}$$

**مثال:** د  $y = f(x) = x^2$  په تابع کې د  $f$  متوسط تغییرات د  $[2, 5]$  په انتروال کې پیدا کړئ.

**حل:** څرنگه چې  $x_1 = 2$  او  $x_2 = 5$  دی، نو د تعریف په مرسته لیکلای شو:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(5) - f(2)}{5 - 2} = \frac{5^2 - 2^2}{5 - 2}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{25 - 4}{5 - 2} = \frac{21}{3} = 7$$



پوښتنې

(1) د لاندې تابع گانو د  $x$  د متحول لپاره د  $\Delta x$  او  $\Delta y$  تر اید په پام کې نیولو سره  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  او میل یې په غوښتل

شوو ټکو کې پیدا کړئ.

1)  $\frac{\Delta y}{\Delta x} = ?$  ,  $f(x) = 2x^2 - 4$  , (0)

2)  $\frac{\Delta y}{\Delta x} = ?$  ,  $f(x) = 2x - x^2$  , (3)

3)  $\frac{\Delta y}{\Delta x} = ?$  ,  $f(x) = 3x^2 - 5x + 4$  , (2, -1)

(2) د  $f(t) = 5t^3 - 3t + 1$  د تابع متوسط تغییرات د  $[2, 4]$  په انتروال کې پیدا کړئ.

## د یوې تابع مشتق

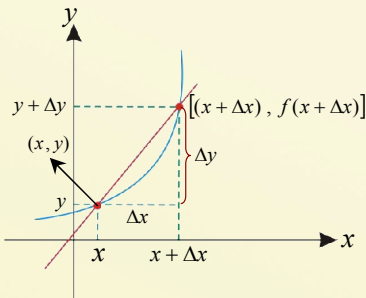
مخامخ لېمیت څه را نښيي آیا په بل ډول یې لیکلای

شو؟

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$



- که چېرې د  $y = f(x)$  تابع د  $[a, b]$  په انټروال کې متمادی وي، که د  $x$  متحول د  $\Delta x$  په اندازه زیاتوالی پیدا کړی آیا تابع تزیاید کوي په دې حالت کې، د متحول او تابع د زیاتوالي رابطه ولیکی.
  - د تابع تزیاید د متحول پر تزیاید  $(\frac{\Delta y}{\Delta x})$  داسې ولیکی چې په مساوات کې بدلون رانشي.
  - که له دواړو خواوو څخه لېمیت ونیول شي، په هغه صورت کې چې  $\Delta x$  صفر ته تقرب وکړي، د دې حد یا لېمیت د څه په نامه یادېږي؟
- د پورتنی فعالیت پایله داسې بیانوو:



$$y = f(x)$$

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x)$$

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - y$$

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \quad / \quad \div \Delta x$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

**تعریف:** د تابع او مستقل متحول د تزیاید د نسبت لېمیت کله چې د مستقل متحول تزیاید صفر ته تقرب وکړي د

تابع مشتق بلل کېږي، لکه:  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$  او هغه په  $f'(x)$  یا  $y'$ ،  $\frac{dy}{dx}$ ، سره ښودل کېږي.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx} = y' = f'(x)$$

**لومړی مثال:** که  $f(x) = 2x$  وي، د دې تابع مشتق پیدا کړی.

**حل:** د مشتق د تعريف څخه په گټه اخيستنې سره ليکلاى شو چې:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2(x + \Delta x) - 2x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x + 2\Delta x - 2x}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2\Delta x}{\Delta x} \Rightarrow f'(x) = 2$$

**دويم مثال:** د  $f(x) = x^3$  د تابع مشتق پيدا کړئ.

**حل:**

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^3 - x^3}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^3 + 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - x^3}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(3x^2 + 3x(\Delta x) + (\Delta x)^2)}{\Delta x} = 3x^2 + 3x(0) + 0^2 \Rightarrow f'(x) = 3x^2$$

**دريم مثال:** د  $f(x) = \sqrt{x}$ ,  $x \geq 0$  مشتق پيدا کړئ.

**حل:** مخکې له حل څخه  $x \geq 0$  حالت په پام کې نيسو:

**الف:** که  $x > 0$  وي، نو د مشتق د تعريف په مرسته ليکو:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x}$$

صورت او مخرج د صورت په مزدوج کې ضربوو:

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x})(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})}{\Delta x(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

**ب:** که  $x = 0$  شي نو  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}}$  موجود نه دی،

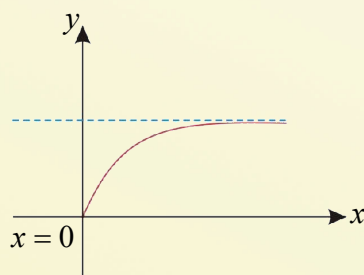
نو د  $y = \sqrt{x}$  تابع د  $x = 0$  په ټکي کې د اشتقاق وړ نه ده

لکه چې په شکل کې ليدل کېږي، يعنې که  $x$  ډېر لوی شي، نو د

مماس ميل صفر ته نژدې کېږي او د  $x = 0$  په ټکي کې

$\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$  د مماس ميل ډېر لويږي چې مماس په يوه عمود خط

بدلېږي.



پوښتنې

دلاندې توابعو مشتق د تعريف په مرسته پيدا کړئ.

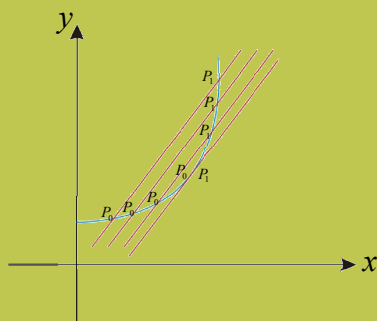
1)  $f(x) = x - x^2$

2)  $f(x) = -2x^2$

3)  $f(x) = 2x^2 + x$

### د مشتق هندسي تعبير

په مخامخ شکل کې څه ونیئ د هغه په اړه مناقشه وکړئ.



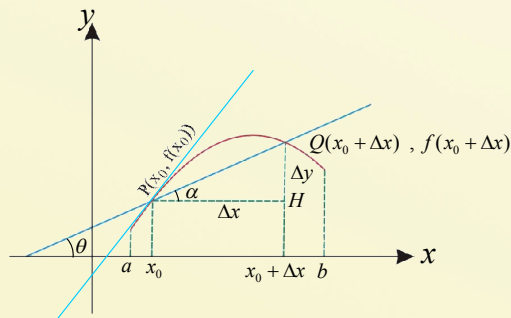
### فعالیت

- د وضعیه کمیاتو په مستوي کې د  $C$  منحنی یا د  $f(x)$  تابع داسې چې د  $[a, b]$  په انټروال کې متمادي وي
- گراف یې رسم او د  $P(x_0, f(x_0))$  او  $Q(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$  ټکي د منحنی پرمخ وټاکئ.
- د  $\Delta$  مستقیم خط داسې رسم کړئ چې د منحنی د  $P$  او  $Q$  له ټکو څخه تېر شي.
- آیا ویلای شئ چې د  $\Delta$  مستقیم خط د  $x$  د محور له مثبت جهت سره څه ډول زاویه جوړوي؟
- ووايي چې د  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  یا  $\frac{HQ}{HP}$  نسبت د څه په نامه یادېږي؟
- که د  $Q$  ټکی د  $P$  ټکي ته ډېر نژدې شي ( $\Delta x \rightarrow 0$ )، نو د  $\Delta$  مستقیم خط په څه ډول کرښه بدلېږي په شکل کې بې وښیئ.
- د  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  لېمیت کله چې  $\Delta x \rightarrow 0$  وکړي، په  $P(x_0, f(x_0))$  ټکي کې وڅیړئ.

د پورتنی فعالیت پایله داسې بیانوو:

د  $f(x)$  منحنی د تابع مشتق، د  $P(x_0, f(x_0))$  په ټکي کې د مماس له میل سره برابر دی، یعنې:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y' = \tan \alpha = \tan \theta = m_{\Delta}$$



**تعریف:** د مماس میل د منحنی د تماس په ټکي کې د تابع له مشتق څخه په هغه ټکي کې عبارت دی، یا په بل عبارت د هغې زاوې له پانجنټ څخه عبارت دی چې د  $\Delta$  مستقیم خط یې د  $x$  د محور له مثبت جهت سره جوړوي.



**لومړی مثال:** د هغه مماس میل او معادله چې د  $f(x) = 2x^3 - 1$  په منحنی د  $A(1,1)$  په ټکي کې رسمېږي پيدا کړئ.

**حل:** پوهېږو چې  $m = \tan \alpha = f'(x)$  دی، نو لیکلای شو چې:

$$f(x) = 2x^3 - 1$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2(x + \Delta x)^3 - 1 - (2x^3 - 1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2[x^3 + 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + (\Delta x)^3]}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x^3 + 6x^2\Delta x + 6x(\Delta x)^2 + 2(\Delta x)^3 - 1 - 2x^3 + 1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x[6x^2 + 6x\Delta x + 2(\Delta x)^2]}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [6x^2 + 6x(\Delta x) + (\Delta x)^2] = 6x^2 \end{aligned}$$

بناءً د مماس د میل قیمت د  $A(1,1)$  په ټکي کې مساوي دی په:  $m = f'(x) = f'(1) = 6x^2 = 6 \cdot 1^2 = 6$   
نو د مماس معادله په لاندې ډول ده:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 1 = 6(x - 1) \Rightarrow y = 6x - 5$$

**دویم مثال:** د  $y = x^2 + 1$  تابع د مماس د میل قیمت په  $x_0 = 2$  ټکي کې په لاس راوړئ.

**حل:**

$$\begin{aligned} y' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x_0 + \Delta x)^2 + 1 - (x_0^2 + 1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x_0^2 + 2(\Delta x)x_0 + (\Delta x)^2 + 1 - x_0^2 - 1}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x_0 + (\Delta x)) = 2x_0 \end{aligned}$$

$$m = y' = 2x_0 = 2 \cdot 2$$

$$y' = m = 4$$

**درېم مثال:** د  $y = f(x) = x^2$  تابع ورکړل شوې ده، غواړو د  $x = x_0$  په ټکي او په ځانگړي توگه د  $x_0 = 2$  په ټکي کې د تابع مشتق پيدا کړئ:

$$x = x_0$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x_0^2 + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x_0\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta x(2x_0 + \Delta x)}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x$$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x_0 + \Delta x) = 2x_0$$

اوس د لېمیت د لاس ته راوړلو له لارې لیکلای شو:



خرنگه چې  $x_0 = 2$  دی، نو  $f'(2) = 2 \cdot 2 = 4$  یعنی د  $x_0 = 2$  په ټکي کې د  $y = f(x) = x^2$  د تابع لومړی مشتق له 4 سره برابر دی. دا په دې معنا چې د مستقیم خط میل د  $x_0 = 2$  په ټکي کې 4 دی.

**څلورم مثال:** د  $f(x) = x^3$  تابع مشتق پیدا کړئ.

**حل:**

$$\begin{array}{l} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \\ \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x_0 + \Delta x)^3 - x_0^3}{\Delta x} \\ \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x_0^3 + 3x_0^2\Delta x + 3x_0(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - x_0^3}{\Delta x} \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3x_0^2\Delta x + 3x_0(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3}{\Delta x} \\ \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta x(3x_0^2 + 3x_0\Delta x + (\Delta x)^2)}{\Delta x} \\ \frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x_0^2 + 3x_0\Delta x + (\Delta x)^2 \end{array} \right.$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (3x_0^2 + 3x_0\Delta x + (\Delta x)^2) = 3x_0^2$$

نو  $f(x)$  د تابع مشتق د  $x_0$  په ټکي کې برابر دی له:  $f'(x_0) = 3x_0^2$

**پنځم مثال:** د  $x_0$  په ټکي کې د  $f(x) = \frac{1}{x}$  تابع مشتق پیدا کړئ.

**حل:**

$$\begin{array}{l} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \\ f(x_0) = \frac{1}{x_0} \\ f(x_0) + \Delta y = \frac{1}{x_0 + \Delta x} \\ \Delta y = \frac{1}{x_0 + \Delta x} - f(x_0) \\ \Delta y = \frac{1}{x_0 + \Delta x} - \frac{1}{x_0} \\ \Delta y = \frac{x_0 - (x_0 + \Delta x)}{x_0(x_0 + \Delta x)} \end{array}$$

د مساوات دواړه خواوې په  $\Delta x$  وپشو:

$$\begin{array}{l} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x_0 - x_0 - \Delta x}{x_0(x_0 + \Delta x)} \\ \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-\Delta x}{x_0(x_0 + \Delta x)} \\ \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-1}{x_0(x_0 + \Delta x)} \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-1}{x_0(x_0 + \Delta x)} \\ \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-1}{x_0(x_0 + \Delta x)} \\ f'(x_0) = \frac{-1}{x_0(x_0 + 0)} = \frac{-1}{x_0^2} \end{array}$$

نو  $f'(x_0) = -\frac{1}{x_0^2}$  د  $x_0$  په ټکي کې د  $f(x)$  تابع مشتق دی.

## پوښتنې

1. په لاندې پوښتنو کې د تابع گانو مشتق پیدا کړئ.

1)  $f(x) = 5x^2 - 2$

2)  $f(x) = \frac{2}{x}$

2. په ورکړل شویو ټکو کې د لاندې تابع گانو مشتق پیدا کړئ.

1)  $f(x) = 4x^2$  ,  $x_0 = \frac{1}{2}$

2)  $f(x) = 3x - 1$  ,  $x_0 = -1$

## د مشتق قوانین

آیا کولای شی چې د مخامخ تابع مشتق پرته د تزايد له لارې په بله طریقه پیدا کړی؟

$$f(x) = 2x^2$$

### 1- د یوه ثابت عدد مشتق:



د  $y = C$  تابع ( $C$  ثابت عدد) په پام کې ونیسئ.

- تابع ته د  $\Delta x$  په اندازه تزايد ورکړئ، د تابع د تزايد په اړه څه فکر کوئ؟
- د تابع او متحول د تزايد نسبت تشکیل کړئ.
- د پورته مساواتو له دواړو خواوو لېمپټ ونیسئ په هغه صورت کې چې  $\Delta x \rightarrow 0$  وکړي.

د پورتنی فعالیت پایله داسې بیانوو:

د هرې ثابتې  $f(x) = C$  تابع مشتق له صفر سره مساوي دی، ځکه چې د هرې ثابتې تابع گراف یوه افقي کرښه ده چې میل یې صفر دی.

**ثبوت:**

$y = C$	$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{C - C}{\Delta x}$
$y + \Delta y = C$	
$\Delta y = C - y$	$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{0}{\Delta x}$
$\Delta y = C - C$	$y' = 0$

**مثال:** د  $f(x) = \pi^4$  او  $y = 100$  تابع گانو مشتق پیدا کړئ.

**حل:** څرنګه چې  $\pi^4$  او 100 ثابت عددونه دي، نو:

$$f(x) = C \Rightarrow f'(x) = 0$$

$$f(x) = \pi^4 \Rightarrow f'(x) = 0$$

$$f(x) = 100 \Rightarrow f'(x) = 0$$

## 2- دیوی طاقت لرونکی تابع مشتق:



د  $y = x^n$  تابع چې  $n \in IR$  او  $n \geq 1$  وي، په پام کې ونیسئ.

- متحول ته د  $\Delta x$  په اندازه تزايد ورکړئ، آیا تابع هم تزايد کوي که تزايد کوي په کومه اندازه، اړیکه یې ولیکئ؟
- له پورته اړیکې څخه د  $\Delta y$  قیمت پیدا کړئ، د متحول او تابع د تزايد نسبت تشکیل کړئ.
- د پورته مساوات له اطرافو څخه په هغه صورت کې لېمیت ونیسئ چې  $\Delta x \rightarrow 0$  وکړي.

د پورته فعالیت پایله داسې ثبوتوو:

که چېرې  $f(x) = x^n$  راکړل شوی وي، نو  $f'(x) = nx^{n-1}$  سره کېږي.

**ثبوت:**

$$y = x^n$$

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^n \Rightarrow \Delta y = (x + \Delta x)^n - y$$

$$\Delta y = (x + \Delta x)^n - x^n$$

$$\Delta y = (x + \Delta x - x)[(x + \Delta x)^{n-1} + (x + \Delta x)^{n-2}x + (x + \Delta x)^{n-3}x^2 + \dots + x^{n-1}]$$

$$\Delta y = \Delta x[(x + \Delta x)^{n-1} + (x + \Delta x)^{n-2}x + (x + \Delta x)^{n-3}x^2 + \dots + x^{n-1}]$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x[(x + \Delta x)^{n-1} + (x + \Delta x)^{n-2}x + (x + \Delta x)^{n-3}x^2 + \dots + x^{n-1}]}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [(x + \Delta x)^{n-1} + (x + \Delta x)^{n-2}x + (x + \Delta x)^{n-3}x^2 + \dots + x^{n-1}]$$

$$y' = \underbrace{x^{n-1} + x^{n-1} + x^{n-1} + \dots + x^{n-1}}_{\text{خپلې } n \text{ } x^{n-1}}$$

$$y' = nx^{n-1}$$

**لومړی مثال:** د  $f(x) = x^5$  تابع مشتق د  $x = \frac{1}{2}$  په ټکې کې وټاکئ.

**حل:**

$$f(x) = x^5 \Rightarrow f'(x) = 5x^{5-1} \Rightarrow f'(x) = 5x^4$$

$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = 5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 5 \cdot \frac{1}{16} = \frac{5}{16}$$



**پوښتنې**

د لاندې تابع گانو مشتق پیدا کړئ.

1)  $f(x) = x^{-2}$

2)  $x(t) = gt^2$

3)  $t(x) = x^8$

4)  $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$

5)  $f(x) = 10^{10}$

## 3- د حاصل جمع مشتق:



د  $u$  او  $v$  مشتق منونکي تابع گانې په پام کې ونیسئ.

- آیا د  $y = u + v$  تابع د مشتق وړ ده؟
  - د  $y = u + v$  په تابع کې  $u(x)$  ته د  $\Delta u$  په اندازه او  $v(x)$  ته د  $\Delta v$  په اندازه تزايد ورکړئ، د  $y$  د تزايد په اړه څه فکر کوئ؟ د هغې اندازه وليکئ.
  - لومړی د تابع تزايد پیدا او بیا د رابطې دواړه خواوې په  $\Delta x$  وویښئ او وروسته یې لېمیت په هغه صورت کې پیدا کړئ چې  $\Delta x \rightarrow 0$  وکړي.
- د پورته فعالیت پایله داسې ثبوتوو:

**ثبوت:**

د یو حاصل جمع مشتق د حدونو د مشتقاتو د جمعې له حاصل سره مساوي ده:

$$y = u + v$$

$$y + \Delta y = u + \Delta u + v + \Delta v$$

$$\Delta y = u + \Delta u + v + \Delta v - y$$

$$\Delta y = u + \Delta u + v + \Delta v - u - v$$

$$\Delta y = \Delta u + \Delta v$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u + \Delta v}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

$$y' = u' + v' \quad \text{څرنگه چې } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = u' \text{ او } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = v' \text{ دی، نو:}$$

## 4- د حاصل تفریق مشتق

که  $y = u - v$  وي، نو  $y' = u' - v'$  دی.

ثبوت یې د زده کونکو کورنۍ دننه ده.

**لومړی مثال:** د  $y = 2x + 1$  تابع مشتق پیدا کړئ.

**حل:** لیدل کېږي چې  $u = 2x$  او  $v = 1$  دی، نو:

$$u' = 1 \cdot 2x^{1-1} = 2x^0$$

$$u' = 2$$

$$v' = 0$$



$$y' = u' + v' \Rightarrow y' = (2x)' + (1)' \Rightarrow y' = 2 + 0 \Rightarrow y' = 2 \text{ بناءً:}$$

**دویم مثال:** د  $f(x) = 4x^2 - 3x + 5$  د تابع مشتق پیدا کړئ.

**حل:** په دې تابع کې  $u = 4x^2$ ,  $v = 3x$ , او  $w = 5$  دی چې  $u' = 8x$ ,  $v' = 3$ , او  $w' = 0$  کېږي، نو:

$$y' = u' + v' + w'$$

$$y' = (4x^2)' - (3x)' + (5)'$$

$$y' = 8x - 3$$

**دریم مثال:** د لاندې تابع گانو مشتقونه پیدا کړئ:

**حل:**

$$1) y = 12x - 7$$

$$y' = (12x)' - (7)'$$

$$y' = 12$$

$$2) f(x) = 9x^2 - 12x + 4$$

$$f'(x) = (9x^2)' - (12x)' + (4)'$$

$$f'(x) = 18x - 12$$

$$3) f(x) = 6x^3 - 2x^2 + 6x - 1$$

$$f'(x) = (6x^3)' - (2x^2)' + (6x)' - (1)'$$

$$f'(x) = 18x^2 - 4x + 6$$

5- د حاصل ضرب مشتق:



که د  $u$  او  $v$  توابع مشتق منونکي وي، نو  $u \cdot v$  هم مشتق منونکي ده، د  $y = u \cdot v$  تابع په پام کې ونیسئ.

- په پورتنۍ تابع کې  $u$  ته د  $\Delta u$  په اندازه،  $v$  ته د  $\Delta v$  په اندازه تزايد ورکړئ او د تابع تزايد پیدا کړئ.
- د  $\Delta y$  د تزايد له پیدا کولو وروسته د مساوات اطراف په  $\Delta x$  وویشئ.
- د پورتنۍ رابطې له دواړو خواوو څخه په هغه صورت کې لېمیت ونیسئ چې  $\Delta x \rightarrow 0$  وکړي.

له پورتنۍ فعالیت پایله داسې ثبوتوو:

**ثبوت:**

$$y = u \cdot v$$

$$y + \Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v) \Rightarrow \Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v) - y$$

$$\Delta y = u \cdot v + u \cdot \Delta v + v \cdot \Delta u + \Delta u \cdot \Delta v - u \cdot v$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{u \cdot \Delta v + v \cdot \Delta u + \Delta u \cdot \Delta v}{\Delta x} = v \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} + u \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x} + \Delta u \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = v \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + u \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta u \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

$$y' = v \cdot u' + u \cdot v' + 0 \cdot v'$$

$$y' = u'v + v'u$$

لومړی مثال: د  $y = x^3(x^2 - 3)$  د تابع مشتق پیدا کړئ؟

حل: پوهېږو چې  $y = u \cdot v$  شکل لري چې په دې صورت کې  $y' = uv' + vu'$  دی.

$$\left. \begin{array}{l} u = x^3 \Rightarrow u' = 3x^2 \\ v = x^2 - 3 \Rightarrow v' = 2x \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} y' = u'v + v'u \\ y = x^3(x^2 - 3) \\ y' = 3x^2(x^2 - 3) + 2x(x^3) \\ y' = 3x^4 - 9x^2 + 2x^4 = 5x^4 - 9x^2 \end{array}$$

دویم مثال: د  $y = (5x - 1)^2$  د تابع مشتق پیدا کړئ.

حل: د  $y$  تابع کولای شو د فکتورونو د ضرب په شکل داسې ولیکو:

$$y = (5x - 1)^2 = (5x - 1)(5x - 1)$$

$$\left. \begin{array}{l} u = 5x - 1 \Rightarrow u' = 5 \\ v = 5x - 1 \Rightarrow v' = 5 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} y' = u'v + v'u \\ y' = 5(5x - 1) + 5(5x - 1) \\ y' = 25x - 5 + 25x - 5 = 50x - 10 \end{array}$$

### 6- د حاصل تقسیم مشتق:



که د  $u$  او  $v$  تابع گانې مشتق منونکی وي، نو  $\frac{u}{v}$  کله چې  $v \neq 0$  وي، هم مشتق منونکی ده، اوس د  $y = \frac{u}{v}$

تابع په پام کې ونیسئ.

- $u$  او  $v$  ته په ترتیب سره د  $\Delta u$  او  $\Delta v$  په اندازه تزايد ورکړئ او د  $y$  تابع تزايد پیدا کړئ.
  - د مساوات دواړه خواوې په  $\Delta x$  ویشئ.
  - د پورتنی رابطې له اطراف څخه په هغه صورت کې چې  $\Delta x \rightarrow 0$  وکړي، لېمېټ ونیسي.
- د پورتنی فعالیت پایله داسې ثبوتوو:



## ثبوت:

$$y = \frac{u}{v} \Rightarrow y + \Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} \Rightarrow \Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - y$$

$$\Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v} = \frac{uv + v \cdot \Delta u - uv - u \cdot \Delta v}{v(v + \Delta v)}$$

$$\Delta y = \frac{v \cdot \Delta u - u \cdot \Delta v}{v(v + \Delta v)}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{v \cdot \Delta u - u \cdot \Delta v}{v(v + \Delta v)} = \frac{v \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} - u \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v + \Delta v)}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{v \frac{\Delta u}{\Delta x} - u \frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v + \Delta v)} \right) = \frac{v \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} - u \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}}{v \cdot \lim_{\Delta v \rightarrow 0} (v + \Delta v)}$$

$$y' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

لومړی مثال: د  $y = \frac{2+3x}{1-2x}$  تابع مشتق پیدا کړئ.

حل: لیدل کېږي چې تابع د  $\frac{u}{v}$  بڼه لري چې مشتق یې عبارت دی له:

$$\left. \begin{array}{l} u = 2 + 3x \Rightarrow u' = 3 \\ v = 1 - 2x \Rightarrow v' = -2 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} y = \frac{u}{v} \Rightarrow y' = \frac{u'v - v'u}{v^2} \\ y' = \frac{3(1-2x) - [-2(2+3x)]}{(1-2x)^2} \\ = \frac{3 - 6x + 4 + 6x}{(1-2x)^2} = \frac{7}{(1-2x)^2} \end{array}$$

یادونه: که چېرې وغواړو چې د یوې تابع مشتق په یوه ټاکلې نقطه لکه  $x_0$  کې پیدا کړو د تابع په مشتق کې ټاکلی

قیمت وضع کوو چې په پایله کې د تابع مشتق په هغه نقطه کې لاس راځي، لکه:

دویم مثال: د  $f(y) = \frac{2y^2 - 3}{1 - 3y}$  تابع مشتق د  $y = 0$  په ټکي کې پیدا کړئ:

حل: د تابع د حاصل تقسیم له مشتق څخه لرو:

$$\left. \begin{array}{l} u = 2y^2 - 3 \Rightarrow u' = 4y \\ v = 1 - 3y \Rightarrow v' = -3 \end{array} \right\} \begin{array}{l} f'(y) = \frac{4y(1-3y) - [-3(2y^2-3)]}{(1-3y)^2} = \frac{4y - 12y^2 + 6y^2 - 9}{(1-3y)^2} \\ f'(y) = \frac{-6y^2 + 4y - 9}{(1-3y)^2} \\ f'(0) = \frac{-6(0)^2 + 4(0) - 9}{(1-0)^2} \\ f'(0) = -9 \end{array}$$

دريم مثال: د  $f(t) = \frac{-3}{2t-1}$  تابع مشتق پيدا كړئ.

حل: پوهېږو چې تابع د  $\frac{u}{v}$  بڼه لري، نو د  $y = \frac{u}{v}$  له فورمول څخه په گټه اخېستنې سره داسې عمل کوو:

$$\left. \begin{array}{l} y = \frac{u}{v} \Rightarrow y' = \frac{u'v - v'u}{v^2} \\ u = -3 \Rightarrow u' = 0 \\ v = 2t - 1 \Rightarrow v' = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow f'(t) = \frac{0 \cdot (2t-1) - 2(-3)}{(2t-1)^2} = \frac{6}{(2t-1)^2}$$



پوښتنې

د لاندې توابعو مشتق پيدا كړئ:

1)  $f(x) = \frac{3}{5}x(x-2)$

2)  $g(x) = (2x-3)(x-3)$

3)  $f(x) = (2x-1)^2$

4)  $f(t) = \frac{t^2}{1-2t}$

5)  $f(x) = \frac{1}{x^2-2}$

6)  $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$

7)  $f(x) = 3x^5 - 5x^2$

8)  $f(x) = 7x+3$

## 7- د یوې جذرالمرعب تابع مشتق:



د  $y = \sqrt{x}$  تابع په پام کې ونیسي.

- د  $y = \sqrt{x}$  تابع متحول ته د  $\Delta x$  په اندازه تزايد ورکړئ د تابع تزايد پيدا کړئ.
  - د لاس ته راغلي رابطې له دواړو خواوو څخه لېمیت په هغه صورت کې ونیسي چې  $\Delta x \rightarrow 0$  وکړي.
- د پورتنی فعالیت پایله داسې ثبوتوو:

**ثبوت:**

$$y = \sqrt{x} \Rightarrow y + \Delta y = \sqrt{x + \Delta x}$$

$$\Delta y = \sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}$$

د مساوات د ښي اړخ صورت او مخرج د صورت په مزدوج کې ضربوو:

$$\Delta y = \frac{(\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x})(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{x + \Delta x - x}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{\Delta x}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} \Rightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\boxed{y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}}$$

**لومړی مثال:** د  $f(x) = \sqrt{x}(x^2 - 1)$  د تابع مشتق پيدا کړئ.

**حل:** لیدل کېږي چې تابع د  $u \cdot v$  بڼه لري، نو:

$$\left. \begin{array}{l} u = \sqrt{x} \Rightarrow u' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ v = x^2 - 1 \Rightarrow v' = 2x \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}}(x^2 - 1) + 2x \cdot \sqrt{x} \\ f'(x) &= \frac{x^2 - 1}{2\sqrt{x}} + 2x\sqrt{x} = \frac{x^2 - 1 + 4x(\sqrt{x})^2}{2\sqrt{x}} \\ &= \frac{x^2 - 1 + 4x^2}{2\sqrt{x}} = \frac{5x^2 - 1}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

8- د  $\sqrt{u}$  تابع مشتق

- که چېرې  $y$  د  $u$  او  $x$  تابع او مشتق منوونکي وي د  $y$  اړیکه  $u$  ته او  $u$ ،  $x$  ته څه فکر کوئ؛
- د  $u$  متحول ته د  $\Delta u$  په اندازه تزايد ورکړئ د  $\Delta y$  د تزايد په اړه څه فکر کوئ.
- د مساواتو له دواړو خواوو څخه لمبیت ونیسئ چې  $\Delta x \rightarrow 0$  وکړي.

$$y + \Delta y = \sqrt{u + \Delta u}$$

$$\Delta y = \sqrt{u + \Delta u} - \sqrt{u}$$

د مساوات د بڼې اړخ صورت او مخرج د صورت په مزدوج کې ضربوو:

$$\Delta y = \frac{(\sqrt{u + \Delta u} - \sqrt{u})(\sqrt{u + \Delta u} + \sqrt{u})}{\sqrt{u + \Delta u} + \sqrt{u}}$$

$$\Delta y = \frac{u + \Delta u - u}{\sqrt{u + \Delta u} + \sqrt{u}}$$

د مساوات دواړه خواوې په  $\Delta x$  وېشو او بیا د مساوات له دواړو خواوو څخه لمبیت نیسو چې  $\Delta x \rightarrow 0$  وکړي.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\sqrt{u + \Delta u} + \sqrt{u}}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\sqrt{u + \Delta u} + \sqrt{u}} \cdot \frac{1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0 \Rightarrow \Delta u \rightarrow 0} \frac{\frac{\Delta u}{\Delta x}}{\sqrt{u + \Delta u} + \sqrt{u}}$$

$$y' = \frac{u'}{\sqrt{u} + \sqrt{u}} = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

**د ویم مثال:** د  $h(x) = (x^2 + x)\sqrt{x}$  د تابع مشتق پیدا کړئ.

**حل:** د  $y = u \cdot v$  او  $y = \sqrt{x}$  د فورمولونو له مشتق څخه په ګټه اخیستنې سره لرو:

$$\left. \begin{array}{l} u = x^2 + x \Rightarrow u' = 2x + 1 \\ v = \sqrt{x} \Rightarrow v' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} h'(x) = (2x + 1)\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}(x^2 + x) \\ h'(x) = 2x\sqrt{x} + \sqrt{x} + \frac{x^2 + x}{2\sqrt{x}} \\ h'(x) = \frac{4x^2 + 2x + x^2 + x}{2\sqrt{x}} = \frac{5x^2 + 3x}{2\sqrt{x}} \end{array}$$

**دریم مثال:** د  $f(x) = (\sqrt[3]{x} - 1)(x + 3)$  تابع د مشتق قیمت په  $x = 8$  ټکي کې په لاس راوړئ.

**حل:** د  $y = u \cdot v$  او  $y = \sqrt[3]{u}$  تابع له مشتق څخه په گټه اخیستنې سره لیکلای شو:

$$\left. \begin{array}{l} u = \sqrt[3]{x} - 1 \Rightarrow u' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \\ v = x + 3 \Rightarrow v' = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}(x + 3) + 1(\sqrt[3]{x} - 1) \\ f'(x) = \frac{x + 3}{3\sqrt[3]{x^2}} + (\sqrt[3]{x} - 1) \end{array}$$

$$f'(8) = \frac{8 + 3}{3\sqrt[3]{8^2}} + \sqrt[3]{8} - 1 = \frac{11}{12} + 1 = \frac{23}{12}$$

اوس د تابع مشتق د  $x = 8$  په نقطه کې پیدا کوو:

**پوښتنې**

1- د لاندې توابعو مشتقونه پیدا کړئ.

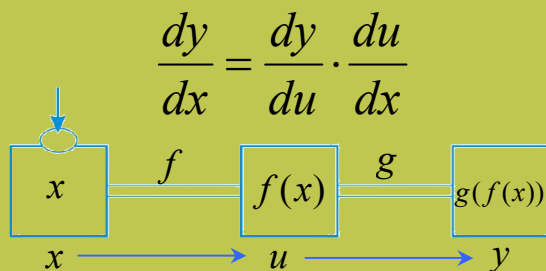
$$f(x) = \frac{1}{x+1}, \quad y = 3x^{-3}, \quad f(x) = x^2 + 3$$

2- که  $f(x) = x^2 - 3x$  او  $g(x) = \sqrt{x} - 1$  وي، د دې تابع گانو د جمعې، ضرب او تقسیم مشتقونه پیدا

$$\text{کړئ. } [(f + g)', (f \cdot g)', (f \div g)' \quad g \neq 0]$$

## د مرکبو تابع گانو مشتق (زنځيري قاعده) Chain Rule

د مخامخ اړيکې او شکل په اړه خپل نظر بيان کړئ.



- که چېرې  $y$  د  $u$  او  $u$  د  $X$  تابع وي او د اشتقاق وړ وي.
  - وویاست چې  $y$  د  $u$  او  $u$  له  $X$  سره څه اړیکه لري؟
  - آیا د  $\Delta y = \Delta y \cdot \frac{\Delta u}{\Delta u}$  مساوات حقیقت لري؟
  - د پورتنی مساوات دواړې خواوې په  $\Delta x$  وویشئ.
  - که د بني اړخ د کسرونو د مخرجونو ځایونه بدل شي، په پورتنی رابطه کې بدلون راځي؟
  - د پورتنی مساوات له اطراف څخه په هغه صورت کې لېمیت ونیسي چې  $\Delta x \rightarrow 0$  وکړي.
- د پورتنی فعالیت پایله داسې ثبوتوو:
- د تابع، تابع مشتق ثبوت او پایله یې په لاندې ډول ده.

**ثبوت:**

$$\Delta y = \Delta y \cdot \frac{\Delta u}{\Delta u}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta u}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

خرنگه چې  $\lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} = y'_{(u)}$  او  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = u'_{(x)}$  دی، نو:  $y'_{(x)} = y'_{(u)} \cdot u'_{(x)}$

د دې زنځيري قاعدې پر بنسټ لاندې پایلې لیکلای شو:

$$1- \text{که } y = u^n \text{ وي؛ نو } y' = nu^{n-1} \cdot u' \text{ کېږي.}$$

$$-2 \text{ که } y = \sqrt[n]{u} \text{ وي، نو } y' = \frac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}} \text{ کېږي.}$$

**مثال:** د لاندې تابع گانو مشتق پيدا کړئ:

$$1) y = (2x^2 - 1)^3$$

$$2) y = \sqrt{1-x^2}$$

$$3) y = (x^2 - 3)^2 \cdot 2x^3$$

$$4) y = \sqrt[3]{x^2 - 2x^3}$$

$$5) y = (x^2 - 2)^{-3}$$

**حل:** د زنځيري قاعدې په مرسته ليکلای شو چې:

$$1) y = \underbrace{(2x^2 - 1)}_u^3$$

$$u = 2x^2 - 1 \Rightarrow u'_{(x)} = 4x$$

$$y = u^3 \Rightarrow y'_u = 3u^2$$

$$\left. \begin{array}{l} u = 2x^2 - 1 \Rightarrow u'_{(x)} = 4x \\ y = u^3 \Rightarrow y'_u = 3u^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} y'_{(x)} &= y'_{(u)} \cdot u'_{(x)} \\ y' &= 3(2x^2 - 1)^2 \cdot 4x = 3(4x^4 - 4x^2 + 1) \cdot 4x \\ &= (12x^4 - 12x^2 + 3) \cdot 4x = 48x^5 - 48x^3 + 12x \\ &= 12x(4x^4 - 4x^2 + 1) = 12x(2x^2 - 1)^2 \end{aligned}$$

$$2) y = \sqrt{1-x^2}$$

$$u = 1-x^2 \Rightarrow u'_{(x)} = -2x$$

$$y = \sqrt{u} \Rightarrow y' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$y = u \cdot v \Rightarrow y' = u'v + v'u$$

ليدل کېږي چې تابع د ضرب د حاصل بڼه لري، نو:

$$3) y = (x^2 - 3)^2 \cdot 2x^3$$

$$u = (x^2 - 3)^2$$

$$u'_{(x)} = 2(x^2 - 3)(2x)$$

$$v = 2x^3 \Rightarrow v'_{(x)} = 6x^2$$

$$\left. \begin{array}{l} u = (x^2 - 3)^2 \\ u'_{(x)} = 2(x^2 - 3)(2x) \\ v = 2x^3 \Rightarrow v'_{(x)} = 6x^2 \end{array} \right\} \begin{aligned} y' &= [(x^2 - 3)^2]' \cdot 2x^3 + [2x^3]' \cdot (x^2 - 3)^2 \\ y' &= [2(x^2 - 3) \cdot 2x] 2x^3 + 6x^2 (x^2 - 3)^2 \\ &= 8x^4 (x^2 - 3) + 6x^2 (x^2 - 3)^2 \\ &= 8x^6 - 24x^4 + 6x^2 (x^4 - 6x^2 + 9) \\ &= 8x^6 - 24x^4 + 6x^6 - 36x^4 + 54x^2 \\ &= 14x^6 - 60x^4 + 54x^2 \end{aligned}$$

$$4) y = \sqrt[3]{x^2 - 2x^3}$$

$$u = x^2 - 2x^3$$

$$u'_{(x)} = 2x - 6x^2$$

$$y = \sqrt[n]{u} \Rightarrow y' = \frac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$$

$$y' = \frac{2x - 6x^2}{3\sqrt[3]{(x^2 - 2x^3)^2}}$$

$$5) y = (x^2 - 2)^{-3}$$

$$u = x^2 - 2$$

$$u'_{(x)} = 2x$$

$$y = u^n \Rightarrow y' = nu^{n-1} \cdot u'$$

$$y' = -3(x^2 - 2)^{-4} \cdot 2x = \frac{-6x}{(x^2 - 2)^4}$$

## يادونه:

I. که چېرې د  $f$  تابع د  $(x_0)$  په ټکي کې مشتق ولري، نو  $f'(x_0)$  د هغه مماس ميل دی چې د  $((x_0), f(x_0))$  په نقطه کې له منحنی یا د تابع له گراف سره رسمېږي.

**مثال:** د  $f(x) = x^3$  تابع ميل د  $x_0 = 1$  په ټکي کې پيدا کړئ.

**حل:** څرنگه چې  $x_0 = 1$  دی، نو:  $f(x_0) = 1$  سره کېږي او  $P(1,1)$  چې د تماس ټکي دی، ميل يې عبارت دی، له:

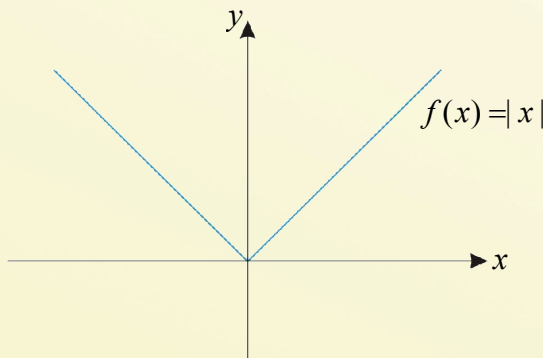
$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2 + x + 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + x + 1) = 3 \Rightarrow f'(1) = 3 \end{aligned}$$

II. که د  $f$  تابع د  $x = x_0$  په ټکي کې د مشتق وړ وي، نو دا تابع د  $x_0$  په ټکي کې متمادي ده، خو برعکس يې سم نه ده، يعنې کېدای شي، يوه تابع په يوه ټکي کې متمادي وي، ولې په هغه ټکي کې د مشتق وړ نه وي.

**مثال:** د  $f(x) = |x|$  تابع مشتق د په  $x = 0$  ټکي کې پيدا کړئ.

**حل:** پوهېږو چې مشتق په حقيقت کې د نيوتن د نسبت د لېمیت محاسبه ده چې د بني او کين اړخ لېمیتونه يې په صفر کې سره وڅېړل شي.

$$\begin{aligned} f'(0^+) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1 \\ f'(0^-) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1 \end{aligned}$$





ليدل کبيري چې  $f'(0^+) \neq f'(0^-)$  دی، نو تابع په  $x = 0$  کې د مشتق وړ نه ده، ولې تابع د صفر په ټکي کې متمادي ده.



د لاندې توابعو مشتق پيدا کړئ.

1)  $y = (x^2 + 2)^2$

2)  $f(x) = (x^3 - 4x^2 + 1)^{-4}$

3)  $y = (1 - 2x^3)^4$

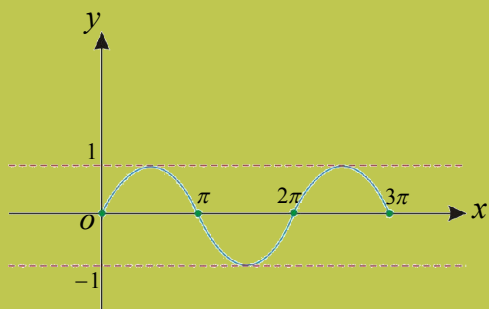
4)  $h(z) = \sqrt{\frac{1-z}{1+z}}$

5)  $f(t) = \sqrt[3]{3t+1}$

6)  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2+x^2+x^3}}$

## د مثلثاتي تابع گانو مشتق

مخامخ گراف څه ډول تابع راښيي؟



- مثلثاتي دايره او راډيان تعريف كړئ.
  - آيا دا  $-1 \leq \sin x \leq 1$  اړيکه حقيقت لري او که نه؟
  - د  $y = \sin x$  تابع په پام کې ونيسئ متحول ته د  $\Delta x$  په اندازه بدلون ورکړئ او د تابع بدلون په پام کې ونيسئ.
  - د  $\sin(x + \Delta x) - \sin x$  مثلثاتي رابطې ته انکشاف ورکړئ؟
  - د پورتنۍ رابطې له انکشاف څخه وروسته د  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  نسبت جوړ او د مساوات له دواړو خواوو څخه په هغه صورت کې لېمېټ ونيسئ چې  $\Delta x \rightarrow 0$  وکړي.
- له پورته فعاليت څخه پايله داسې ثبوتوو:
- د -1  $y = \sin x$  تابع مشتق:**

**ثبوت:**

$$y = \sin x$$

$$y + \Delta y = \sin(x + \Delta x)$$

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x$$

$$\Delta y = 2 \cos \frac{x + \Delta x + x}{2} \cdot \sin \frac{x + \Delta x - x}{2} = 2 \cos \frac{2x + \Delta x}{2} \cdot \sin \frac{\Delta x}{2}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \cdot 2 \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \sin \frac{\Delta x}{2} = 2 \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \sin \frac{\Delta x}{2\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sin \frac{\Delta x}{2\Delta x} \Rightarrow y'(x) = \cos x \cdot 1$$

$$y' = \cos x$$

$$y = \sin x \Rightarrow y' = \cos x$$

که چېرې  $f(x) = \sin u$  وي په داسې حال کې چې  $u$  د  $x$  تابع وي، نو ليکلای شو:

$$f(u) = \sin u \Rightarrow y' = u' \cos u$$

لومړی مثال: د  $f(x) = \sin 4x$  تابع مشتق پیدا کړئ.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = \sin 4x \\ u = 4x \Rightarrow u' = 4 \\ f(x) = \sin u \Rightarrow y'_u = \cos u \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} f(x) = \sin u \Rightarrow f'(x) = u' \cos u \\ f(x) = \sin 4x \Rightarrow f'(x) = 4 \cos 4x \end{array}$$

دویم مثال: د  $f(x) = x^3 \cdot \csc x$  تابع مشتق پیدا کړئ.

حل:

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = x^3 \cdot \csc x = x^3 \cdot \frac{1}{\sin x} \\ u = x^3 \Rightarrow u' = 3x^2 \\ v = \frac{1}{\sin x} \Rightarrow v' = \frac{-uv'}{v^2} = \frac{-\cos x}{\sin^2 x} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} f(x) = x^3 \cdot \csc x \\ f'(x) = 3x^2 \cdot \csc x + \frac{-\cos x}{\sin^2 x} \cdot x^3 \\ = 3x^2 \csc x - x^3 \cot x \cdot \csc x \cdot x \\ = 3x^2 \csc x - x^3 \cot x \cdot \csc x \end{array}$$



پوښتنې

د لاندې توابعو مشتق په لاس راوړئ:

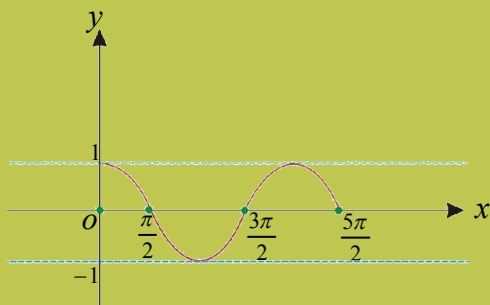
a)  $y = \sin 5x$

b)  $y = \frac{\sin x}{1+x}$

c)  $y = \sqrt{1+\sin x}$

د  $y = \cos x$  تابع مشتق

مخامخ گراف څه ډول تابع راښيي؟



فعالیت

- د  $y = f(x) = \cos x$  په تابع کې متحول ته د  $\Delta x$  او تابع ته د  $\Delta y$  په اندازه تزايد ورکړئ.
- د  $\cos(x + \Delta x) - \cos x$  مثلثاتي رابطې ته انکشاف ورکړئ.
- د پورتنۍ انکشافې رابطې په مرسته د  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  نسبت تشکیل او له اطرافو څخه لېمېټ ونیسئ چې  $\Delta x \rightarrow 0$  وکړي.

د پورتنۍ فعالیت پایله داسې ثبوتوو:

2- د  $y = \cos x$  تابع مشتق

ثبوت:

$$y = \cos x$$

$$y + \Delta y = \cos(x + \Delta x)$$

$$\Delta y = \cos(x + \Delta x) - \cos x$$

$$\Delta y = -2 \sin \frac{x + \Delta x + x}{2} \cdot \sin \frac{x + \Delta x - x}{2}$$

$$\Delta y = -2 \sin \frac{2x + \Delta x}{2} \cdot \sin \frac{\Delta x}{2}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sin \frac{\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = -\sin x \cdot 1$$

$$y = \cos x \Rightarrow y' = -\sin x$$

يا په لنډ ډول هغه داسې ثبوتوو:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$$

$$(\cos x)' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} \cdot (-2 \sin x \cos x)$$

پوهېږو  $\sqrt{1 - \sin^2 x} = \cos x$  چې سره دى، نو:

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\cos x} (-2 \sin x \cdot \cos x)$$

$$\boxed{(\cos x)' = -\sin x}$$

که چېرې  $y = \cos u$  وي، په داسې حال کې چې  $u$  د  $x$  تابع وي، نو ليکلای شو:

$$\boxed{y = \cos u \Rightarrow y' = -u' \sin u}$$

**لومړی مثال:** د لاندې توابعو مشتق پيدا کړئ.

1)  $f(x) = \sin 2x = 2 \sin x \cos x$

2)  $f(x) = x - \sin x \cos x$

**حل:** پوهېږو چې  $y = u \cdot v \Rightarrow y' = u' \cdot v + v' u$  دى، نو:

1)  $f(x) = \sin 2x = 2 \sin x \cos x$

$$f'(x) = (2 \sin x)' \cos x + (\cos x)' \cdot 2 \sin x = 2 \cos^2 x - 2 \sin^2 x$$

$$f'(x) = 2(\cos^2 x - \sin^2 x) \Rightarrow y' = 2 \cos 2x$$

2)  $f(x) = x - \sin x \cos x$

$$f'(x) = (x)' - (\sin x \cdot \cos x)' = (x)' - [(\sin x)' \cdot \cos x + (\cos x)' \cdot \sin x]$$

$$f'(x) = (x)' - [\cos x \cos x + (-\sin x \sin x)] = 1 - \cos 2x$$

پوښتنې

د لاندې تابع گانو لومړی مشتق پيدا کړئ.

1)  $f(x) = (\sec 2x + \tan 2x)^2$

2)  $f(x) = \sin^2 x$

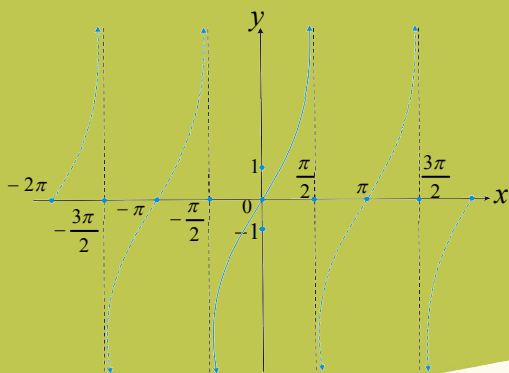
3)  $f(x) = \sec x$

4)  $f(x) = \csc x$

5)  $f(x) = \frac{5 \sin^2 2x}{3 \cos 5x}$

### د $y = \tan x$ تابع مشتق

مخامخ گراف څه ډول تابع راښيي.



فعالیت

- د  $y = \tan x$  تابع د نسبت په شکل وليکئ.
- له پورتنی نسبت څخه مشتق ونیسئ، هغه له څه سره مساوي کېږي.
- له پورته فعالیت څخه پایله داسې ثبوتوو:

### 3- د $y = \tan x$ تابع مشتق:

ثبوت:

$$f(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$f'(x) = \frac{(\sin x)' \cos x - (\cos x)' \sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos x \cos x - (-\sin x)(\sin x)}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$y = \tan x$$

$$y'_{(x)} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

پاتې فورمولونه زده کوونکو ته پرېږدو.

لومړی مثال: د لاندې مثلثاتي تابع مشتق پیدا کړئ.

$$y = \tan^3 x$$

حل: پوهېږو چې که  $y = u^n$  وي نو مشتق یې  $y' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$  سره دی، نو:

$$\left. \begin{array}{l} u = \tan x \\ u' = \sec^2 x \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} y = \tan^3 x \\ y' = 3 \tan^2 x \sec^2 x \end{array}$$

**دویم مثال:** د  $y = \sec x \cdot \cot x$  تابع مشتق پیدا کریں۔

**حل:** خرننگہ چې تابع د  $y = u \cdot v$  شکل لري، نو:

$$y = \sec x \cdot \cot x$$

$$u = \sec x \Rightarrow u' = \sec x \tan x$$

$$v = \cot x \Rightarrow v' = -\csc^2 x$$

د  $u, v, u'$  او  $v'$  قیمتونه د  $y' = u' \cdot v + u \cdot v'$  په فورول کې وضع کوو:

$$y' = \sec x \tan x \cdot \cot x + \sec x (-\csc^2 x)$$

$$= \sec x \tan x \frac{1}{\tan x} - \csc^2 x \sec x$$

$$= \sec x - \csc^2 x \sec x$$



پوښتنې

د لاندې تابع گانو مشتق پیدا کریں۔

a)  $y = \tan x \cot x$

b)  $y = (x^2 + x - 1) \tan^2 x$

c)  $y = \frac{1}{\tan x}$

d)  $y = \tan x \sec x - \cot x$

## ضمني مشتقات

مخامخ مساوات په عبارت سره وليکئ.

$$y'(x) = -\frac{f'(x)}{f'(y)}$$



فعالیت

- د  $y = 2x^2 - 4$  تابع مشتق پیدا کړئ.
- د  $y^2 + xy = 1$  تابع څو متحوله تابع ده؟ گراف یې څه ډول شکل لري؟
- د پورتنی تابع مشتق پیدا کولای شی.

د یوې منحنی خط معادله د وضعیه کمیانو په سیستم کې عبارت له  $y = f(x)$  څخه ده، له دې ځایه  $0 = y - f(x)$  کېږي او  $y - f(x)$  یوه دوه متحوله تابع د  $x$  او  $y$  له جنسه ده، که  $F(x, y) = y - f(x)$  تابع په پام کې ونیسو، نو د دې منحنی معادله د  $F(x, y)$  شکل غوره کوي، د مثال په ډول:  $F(x, y) = x^2 + y^2 - 25$  وي، نو د  $F(x, y) = 0$  له معادلې څخه لیکلای شو چې  $0 = x^2 + y^2 - 25$  یا  $x^2 + y^2 = 25$  چې د دې دوو بېلابېلو تابعو معادلې  $y = \pm\sqrt{25 - x^2}$  دي. په عمومي ډول د  $F(x, y) = 0$  معادله کېدای شي چې د څو تابع گانو معادله د  $y = f(x)$  په بڼه وي، پاملرنه وکړئ.

د  $y = f(x)$  په تابع کې چې  $x$  او  $y$  یو له بل څخه جلا وي، نو مشتق یې په آسانی پیدا کولای شو، ولې په ځینو رابطو کې  $y$  له  $x$  سره یو ځای بیان شوی دي لکه په  $xy^2 - y + 1 = 0$  چې د مشتق په نیولو کې که د  $x$  له جنسه مشتق نیسو، نو  $y$  یو ثابت عدد فرضوو او که د  $y$  له جنسه مشتق نیسو  $x$  ثابت فرضوو، لکه:

$$xy^2 - y + 1 = 0$$

$$(xy^2)' - (y)' + (1)' = 0 \Rightarrow 1y^2 + x(2y'y) - y' = 0 \Rightarrow y^2 = -2xyy' + y' = y'(-2xy + 1)$$

$$y' = \frac{y^2}{-2xy + 1}$$



په عمومي حالاتو کې که تابع غیر صریح وي په دې معنا چې مستقل متحول او د تابع متحول پکې څرگند نه وي، نو ددې ډول تابع مشتق د ضمني مشتق په نامه یادېږي او د هغه مشتق په لاندې ډول محاسبه کوو.

$$y'_{(x)} = -\frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}} = -\frac{\text{د تابع مشتق نظر } x \text{ ته (} y \text{ ثابت دی)}}{\text{د تابع مشتق نظر } y \text{ ته (} x \text{ ثابت دی)}}$$

**لومړی مثال:** د  $y = \sin \frac{x}{y} + 1$  ضمني تابع مشتق د  $(\pi, 1)$  په ټکي کې پیدا کړئ.

**حل:** د  $y - \sin \frac{x}{y} - 1 = 0$  رابطې څخه  $y'_{(x)} = \frac{-f'_{(x)}}{f'_{(y)}}$  پیدا کوو.

$$y - \sin \frac{x}{y} - 1 = 0$$

$$\left. \begin{aligned} f'_{(x)} &= y'_x - (\sin \frac{x}{y})'_x - (1)'_x \\ &= 0 - \frac{1}{y} \cos \frac{x}{y} - 0 = -\frac{1}{y} \cos \frac{x}{y} \\ f'_{(y)} &= y'_y - (\sin \frac{x}{y})'_y - (1)'_y \\ &= 1 - \cos \frac{x}{y} (\frac{x}{y})'_y - 0 = 1 - \frac{-x}{y^2} \cdot \cos \frac{x}{y} = 1 + \frac{x}{y^2} \cos \frac{x}{y} \end{aligned} \right\} \Rightarrow y'_{(x)} = -\frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}} = -\frac{-\frac{1}{y} \cos \frac{x}{y}}{1 + \frac{x}{y^2} \cos \frac{x}{y}}$$

اوس په  $y'_{(x)}$  رابطه کې د  $x$  او  $y$  قیمتونه وضع کوو چې د  $(\pi, 1)$  په لاس راځي.

$$y'_{(\pi,1)} = \frac{\frac{1}{y} \cos \frac{x}{y}}{1 + \frac{x}{y^2} \cos \frac{x}{y}} = \frac{\frac{1}{1} \cos \pi}{1 + \frac{\pi}{1} \cos \pi} = \frac{-1}{1 + \pi(-1)} = \frac{1}{\pi - 1}$$

**دویم مثال:** د  $x^2 y + 2y^3 = 3x + 2$  رابطې ضمني مشتق پیدا کړئ.

**حل:**

$$x^2 y + 2y^3 = 3x + 2$$

$$x^2 y + 2y^3 - 3x - 2 = 0$$

$$f'_{(x)} = 2xy + 0 - 3 - 0 = 2xy - 3$$

$$f'_{(y)} = x^2 + 6y^2 - 0 - 0 = x^2 + 6y^2$$

$$f'_{(x)} = -\frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}} = -\frac{2xy - 3}{x^2 + 6y^2} = \frac{-2xy + 3}{x^2 + 6y^2}$$

**دویم مثال:** د  $y^6 - y - x^2 = 0$  تابع ضمنی مشتق پیدا کړئ.

**حل:**

$$f'_{(x)} = -2x$$

$$f'_{(y)} = 6y^5 - 1$$

$$y'_{(x)} = -\frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}} = -\frac{-2x}{6y^5 - 1} = \frac{2x}{6y^5 - 1}$$

او یا په بله طریقه:

$$y^6 - y - x^2 = 0$$

$$6y^5 y' - y' - 2x = 0$$

$$(6y^5 - 1)y' = 2x$$

$$y' = \frac{2x}{6y^5 - 1}$$

### د تابع دویم ضمنی مشتق

د ضمنی رابطې د دویمې مرتبې د ضمنی مشتق د پیدا کولو لپاره د فورمول په مرسته لومړی د ضمنی اړیکې لومړی مشتق پیدا کوو او بیا له دې رابطې څخه مشتق نیسو.

**لومړی مثال:** د  $x^2 - y^2 = 1$  رابطې دویمه ضمنی مشتق  $y''_{(x)}$  پیدا کړئ.

**حل:**

$$x^2 - y^2 = 1$$

$$x^2 - y^2 - 1 = 0$$

$$f'_{(x)} = (x^2)'_x - (y^2)'_x - (1)'_x = 2x - 0 - 0 = 2x$$

$$f'_{(y)} = (x^2)'_y - (y^2)'_y - (1)'_y = 0 - 2y - 0 = -2y$$

$$y'_{(x)} = -\frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}} = -\frac{2x}{-2y} = \frac{x}{y}$$

او یا په بله طریقه:

$$y'_{(x)} = -\frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}} = -\frac{(x^2)'_x - (y^2)'_x - (1)'_x}{(x^2)'_y - (y^2)'_y - (1)'_y} = -\frac{2x - 0 - 0}{0 - 2y - 0} = \frac{x}{y} \Rightarrow y'_{(x)} = \frac{x}{y}$$

اوس د  $y' = \frac{x}{y}$  له رابطې څخه دویمه ضمنی مشتق نیسو:

$$y''_{(x)} = \frac{(x)'_y - y'x}{y^2} = \frac{y - y'x}{y^2} = \frac{y - \frac{x}{y} \cdot x}{y^2} = \frac{y^2 - x^2}{y^3} = \frac{-1}{y^3} \Rightarrow y''_{(x)} = \frac{-1}{y^3}$$

**دویم مثال:** د  $x^2 + xy + y^2 - 3 = 0$  په معادله کې د  $y$  مشتق نسبت  $x$  ته د  $(1,1)$  په ټکي کې پیدا او پر منحني د مماس معادله وليکي.

**حل:** څرنګه چې د  $(1,1)$  ټکي په معادله کې صدق کوي، نو نوموړی ټکي د منحني پرمخ واقع دی، د  $y'(x)$  د پیدا کولو لپاره په ورکړ شوي معادلې کې لیکلای شو:

$$f'(x) = 2x + y$$

$$f'(y) = x + 2y$$

$$y'(x) = -\frac{f'(x)}{f'(y)} = -\frac{2x + y}{x + 2y}, \quad x + 2y \neq 0$$

$$y' = -\frac{2x + y}{x + 2y} = -\frac{2 + 1}{1 + 2} = -1$$

$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 1 = -(x - 1) \Rightarrow y = -x + 2$$

او یا په بله طریقه هم کولای شو د تابع ضمني مشتق په لاس راوړو:

$$x^2 + xy + y^2 - 3 = 0$$

$$2x + y + x \cdot y' + 2yy' = 0$$

$$2x + y + (x + 2y)y' = 0$$

$$(x + 2y)y' + 2x + y = 0$$

$$(x + 2y)y' = -2x - y$$

$$y' = \frac{-2x - y}{x + 2y}$$

**دریم مثال:** د  $x^2y^3 = 5y^3 + x$  غیر صریح تابع ضمني مشتق پیدا کړئ.

**حل:**

$$x^2y^3 - 5y^3 - x = 0$$

$$f'(x) = 2xy^3 - 0 - 1 = 2xy^3 - 1$$

$$f'(y) = 3x^2y^2 - 15y^2 - 0$$

$$y'(x) = -\frac{f'(x)}{f'(y)} = -\frac{2xy^3 - 1}{3x^2y^2 - 15y^2} = \frac{1 - 2xy^3}{3x^2y^2 - 15y^2}$$

پوښتنې



1- د  $x \sin y + y \cos x = 5$  د غیر صریح تابع ضمني مشتق پیدا کړئ.

2- د  $x^3 + xy^2 + y = 3$  رابطې څخه ضمني مشتق ونیسئ.

3- د  $x^2 + y^2 = 4x + 4y$  رابطې څخه ضمني مشتق ونیسئ.

## لوړ مرتبه يي مشتقات

$$f(x) = \sin x$$

$$f(x) = \cos x$$

د مخامخ تابع درې ځلې مشتق ونیسئ؟

د مخامخ تابع پنځه ځلې مشتق ونیسئ؟



- د  $y = 2x^4 - 3x^3 - 2x - 1$  تابع مشتق پیدا کړئ.
  - د پورته تابع دویم مشتق پیدا کړئ.
  - د پورتنی مشتق د تابع دریم ځل مشتق ونیسئ.
  - د پورتنی تابع نور څو ځلې مشتق نیولی شو؟
  - د پورتنی تابع څووم مشتق له صفر سره مساوي دی؟
- د پورتنی فعالیت پایله داسې بیانوو:

که د  $y = f(x)$  مشتق منونکی وي، لومړی مرتبه مشتق یې په  $y' = f'(x)$ ، دویمه مرتبه مشتق یې په  $y'' = f''(x)$  دریمه مرتبه مشتق یې په  $y''' = f'''(x)$  ... په کلي ډول  $n$  - ام مرتبه مشتق د  $y = f(x)$  تابع په  $y^{(n)} = f^{(n)}(x)$  علامی سره بڼیو.

**لومړی مثال:** د  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 1$  تابع دریم مشتق په لاس راوړئ.  
**حل:**

$$y = x^3 - 3x^2 + 4x - 1$$

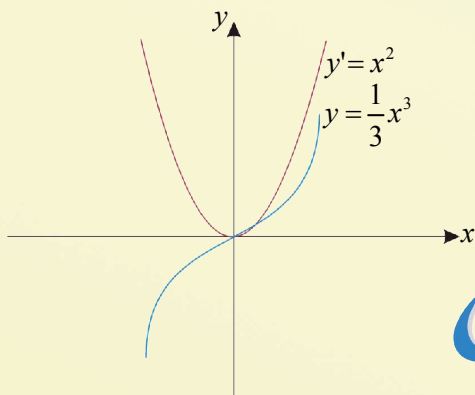
$$y' = 3x^2 - 6x + 4$$

$$y'' = 6x - 6$$

$$y''' = 6$$

**دویم مثال:** د  $y = \frac{1}{3}x^3$  تابع گراف او د هغې د لومړی مرتبې مشتق تابع گراف رسم کړئ.

**حل:**



$$y = \frac{1}{3}x^3$$

$$y' = \frac{3}{3}x^2 = x^2$$

$$y' = x^2$$

**دریم مثال:** که  $y = \sin x + \cos x$  وي، د  $(y^{(9)})^2 + y^2$  قیمت پیدا کړئ.

**حل:** لومړی د تابع نهمه مرتبه مشتق یا  $(y^{(9)})$  په لاس راوړو:

$$y = \sin x + \cos x$$

$$y'_{(x)} = \cos x + (-\sin x) = \cos x - \sin x$$

$$y''_{(x)} = -\sin x - (\cos x) = -\sin x - \cos x$$

$$y'''_{(x)} = -\cos x - (-\sin x) = \sin x - \cos x$$

⋮

$$f^{(9)}_{(x)} = \cos x - \sin x$$

$$(y^{(9)})^2 + y^2 = (\cos x - \sin x)^2 + (\sin x + \cos x)^2$$

$$= \cos^2 x - 2 \sin x \cos x + \sin^2 x + \sin^2 x + 2 \sin x \cos x + \cos^2 x$$

$$= 2 \sin^2 x + 2 \cos^2 x = 2(\sin^2 x + \cos^2 x) = 2$$

**خلورم مثال:** د  $y = 2x^6 - 3x^5 - 2x^3 - 3x^2 - 1$  د تابع پنځه ځلې مشتق پیدا کړئ.

$$y = 2x^6 - 3x^5 - 2x^3 - 3x^2 - 1$$

$$y' = 12x^5 - 15x^4 - 6x^2 - 6x$$

$$y'' = 60x^4 - 60x^3 - 12x - 6$$

$$y''' = 240x^3 - 180x^2 - 12$$

$$y^{(4)} = 720x^2 - 360x$$

$$y^{(5)} = 1440x - 360$$

**یادونه:** که چېرې  $n$  - ام درجهيي څو جملهيي تابع  $f_{(n)}(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \dots + c_nx^n$   $c_n \neq 0$

راکړی شوی وي  $n$  - ام مشتق یې په لاندې ډول په لاس راځي:

$$f_{(n)}(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \dots + c_nx^n \quad c_n \neq 0$$

$$f'_{(x)} = c_1 + 2c_2x + 3c_3x^2 + \dots + nc_nx^{n-1}$$

$$f''_{(x)} = 2c_2 + 6c_3x + \dots + n(n-1)c_nx^{n-2}$$

$$f'''_{(x)} = 6c_3 + 12c_4x + \dots + n(n-1)(n-2)c_nx^{n-3}$$

$$f^n(x) = n(n-1)(n-2) \dots c_n = n!c_n$$

په عمومي ډول که  $k > n$  وي، نو:  $f^k(x) = 0$



د لاندې تابعگانو تر هغې مشتق ونیسئ چې د مشتق تابع له صفر سره مساوي شي.

1)  $y = 4x^4 - 3x^3 - 2x$

2)  $y = (5x - 2)^3$

3)  $y = a + b + c^2 - x - ax - bx - cx^3 - c^3x$

4)  $y = \sin x$

- که چېرې د  $P(x, f(x))$  او  $Q(x+h, f(x+h))$  ټکي د  $f(x)$  تابع دوه اختياري ټکي وي، نو لاندي اړيکه د Newton خارج قسمت په نامه يادېږي:

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{x+\Delta x - x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

د منحنی د مماس ميل په يوه اختياري ټکي کې عبارت دی، له:

$$m_T = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

**د يوې تابع مشتق:** د تابع او متحول د تزايد، د نسبت لېمیت کله چې  $\Delta x \rightarrow 0$  وکړي، د مشتق په نامه

يادېږي او په  $f'(x)$  سره ښودل کېږي.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x) = y'$$

که چېرې د  $f(x)$  تابع د  $(x_0)$  په يوه ټکي کې د مشتق وړ وي، نو  $f'(x)$  د مماس ميل د منحنی سره د  $(x_0, f(x_0))$  په ټکي کې دی.

که د  $f$  تابع د  $x = x_0$  په ټکي کې د مشتق وړ وي، نو دا تابع په  $x_0$  کې متمادي ده، خو ددې برعکس سمه نه ده، يعنې کېدای شي يوه تابع په يوه ټکي کې متمادي وي، ولې په هغه ټکي کې د مشتق وړ نه وي. د  $f(x)$  د تابع مشتق د  $C$  پر منحنی  $P(x_0, f(x_0))$  په ټکي کې د مماس له ميل سره برابر دی.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y' = \tan \alpha = \tan \theta = m_\Delta$$

د تماس په ټکي کې له يوې منحنی سره د مماس ميل د هغې تابع د مشتق په نوم يادېږي.

که د يوې تابع مشتق ونيول شي، نو يوه تابع په لاس راځي چې دا د مشتق تابع بلل کېږي.

که د  $f$  تابع د  $(x_0 - r, x_0 + r)$  په فاصله کې  $(x_0 = x)$  په شاوخوا کې تعريف شوی وي او د هغې لېمیت موجود وي، په دې حالت کې کولای شو چې يو مماس خط د  $f(x)$  د تابع په منحنی د  $x = x_0$  په ټکي کې

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

رسم کړو، د دې مماس ميل عبارت دی له:

1)  $f(x) = C \Rightarrow f'(x) = 0$

2)  $f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = n \cdot x^{n-1}$

3)  $f(x) = u \pm v \Rightarrow f'(x) = u' \pm v'$

4)  $f(x) = u \cdot v \Rightarrow f'(x) = u'v + v'u$

5)  $f(x) = \frac{u}{v}$  ,  $v \neq 0 \Rightarrow f'(x) = \frac{u'v - v'u}{v^2}$

6)  $f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

7)  $f(x) = \sqrt{u} \Rightarrow f'(x) = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$

8)  $f(x) = \sqrt[n]{u} \Rightarrow f'(x) = \frac{u'}{n \cdot \sqrt[n]{u^{n-1}}}$

د مرکبو توابعو مشتق:  $y'_{(x)} = y'_{(u)} \cdot u'_{(x)}$

د مثلثاتي تابع گانو مشتق:

1)  $y = \sin x \Rightarrow y' = \cos x$  ,  $y = \sin u \Rightarrow y' = u' \cos u$

2)  $y = \cos x \Rightarrow y' = -\sin x$  ,  $y = \cos u \Rightarrow y' = -u' \sin u$

که د  $y = f(x)$  تابع مشتق منونکی وي، په بشپړ ډول  $n$ -ام ځلې مشتق يې  $y^{(n)} = f^{(n)}(x)$  دی.

## د دویم څپرکي پوښتني

لاندې پوښتنو ته څلور ځوابونه درکړل شوي دي، سم ځواب په نښه کړئ:

1-  $f(x) = x^2 - x$  منحنی میل د  $P(3, 0)$  په ټکي کې عبارت دی له:

- a) 3                      b) -3                      c) 5                      d) -5

2- د  $f(x) = 2x^2$  په تابع کې د  $f$  متوسط بدلون د  $[3, 4]$  په انتروال کې عبارت دی له:

- a) 18                      b) 14                      c) -14                      d) 32

3- د  $y = 2x^2 - 3x^{-1}$  تابع مشتق عبارت دی له:

- a)  $y' = 4x^2 + 3$                       b)  $y' = 4x + \frac{1}{2}x$                       c)  $y' = 4x + \frac{3}{x^2}$                       d)  $y' = 4x$

4- د  $f(x) = \sqrt{x-1}$  تابع مشتق عبارت دی له:

- a) 0                      b)  $\frac{1}{2\sqrt{x-1}}$                       c)  $\frac{x-1}{2\sqrt{x}}$                       d)  $\frac{-1}{2\sqrt{x-1}}$

5- د  $f(x) = 2x^2 + x$  تابع د  $x = 1$  په ټکي کې د مماس خط معادله عبارت ده له:

- a)  $y = 5x - 2$                       b)  $y = x - 3$                       c)  $y = 5$                       d)  $y = 5x$

6- د  $y = \frac{2x}{-x+4}$  تابع مشتق عبارت دی له:

- a)  $y' = -4x + 8$                       b)  $y' = -2$                       c)  $y' = \frac{4x+8}{(-x+4)}$                       d)  $y' = \frac{8}{(-x+4)^2}$

7- د  $y = (2-x^2)^3$  تابع مشتق عبارت دی له:

- a)  $y' = -6x^5 + 2x^3 - 24x$                       b)  $y' = 3(2-x^2)^2$                       c)  $y' = 3(-2x)^2$                       d) هېڅ یو

8- د  $y = \sin x$  تابع مشتق عبارت دی له:

- a)  $y' = \sin x$                       b)  $y' = \cos x$                       c)  $y' = -\sin x$                       d)  $y' = -\cos x$

9- د  $y = (1+x^4)^{-\frac{1}{5}}$  تابع مشتق عبارت دی له:

- a)  $y' = -\frac{4}{5}x^3(1+x^2)^{-\frac{6}{5}}$                       b)  $y' = -\frac{1}{5}(1+x^2)^{-\frac{6}{5}}$   
c)  $y' = -4x^3$                       d) هېڅ یو

10- د  $y = \frac{\cos}{1-\cos x}$  تابع مشتق عبارت دی له:

- a)  $y' = \frac{\sin x}{(1-\cos x)^2}$                       b)  $y' = \frac{-\sin x}{(1-\cos x)}$                       c)  $y' = \frac{-\sin x}{(1-\cos x)^2}$                       d) هېڅ یو



لاندي پوڻتنې حل ڪريئ.

1. د  $f(x) = \frac{2 \tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$  تابع مشتق پيدا ڪريئ؟

2. د  $f(x) = \frac{x + \sqrt{x - x^2}}{\sqrt{x} + \sqrt{1 - x}}$  تابع مشتق پيدا ڪريئ؟

3. د  $f(x) = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1)$  تابع مشتق پيدا ڪريئ.

4. د  $f(x) = (\sqrt[3]{x} - 1)(\sqrt[3]{x} + 4)$  تابع مشتق پيدا ڪريئ.

5. د  $f(x) = \sin x \cdot \cos x$  د تابع مشتق د  $\frac{\pi}{4}$  په ٽڪي ڪي پيدا ڪريئ.

6. د  $f(x) = \frac{(\sin x + \cos x)^2}{1 + \sin 2x}$  تابع مشتق پيدا ڪريئ.

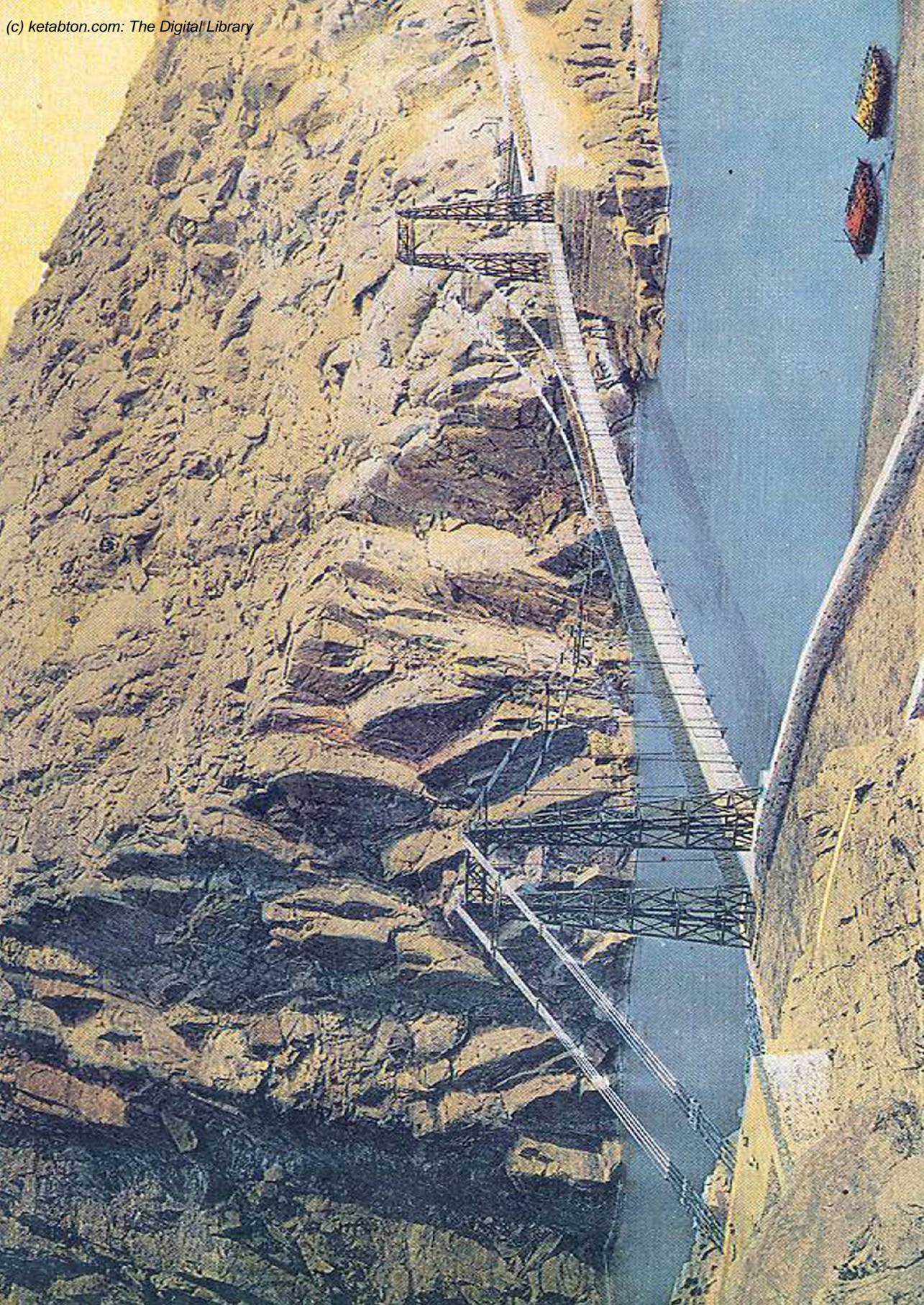
7. د  $y = \cos x$  تابع اتمه مرتبه مشتق پيدا ڪريئ.

8. د  $y = \sin^2 x + \cos^2 x$  تابع نهمه مرتبه مشتق پيدا ڪريئ.

9. د  $x^2 + xy + y^2 = 3$  تابع ضمني مشتق پيدا ڪريئ.

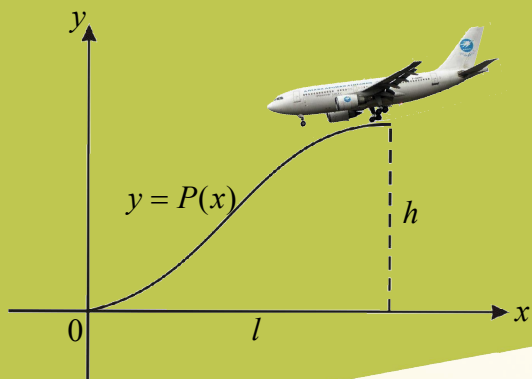
# دریم خپرکی

## د مشتق د استعمال خایونه



## د مشتق د استعمال ځايونه

د مخامخ شکل د ارتفاع په اړه خپل نظر بيان کړئ.

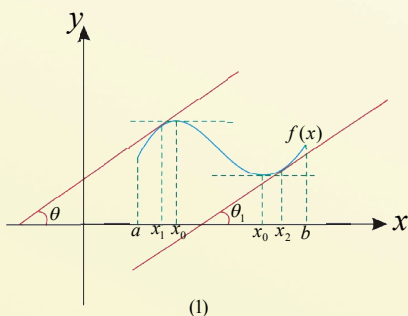


له مشتق څخه په ډېرو ځايونو کې، لکه: (په فزيک کې د حرکت، سرعت او تعجيل اړوند معادلې د مشتق څخه په گټه اخېستې سره حلېږي همدارنگه په کيميا کې هم، د تابع د تحولات، د ځينو لېميتونو په پيدا کولو کې) کار اخيستل کېږي چې ځينې ځايونه يې دلته تر څېړنې لاندې نيسو.

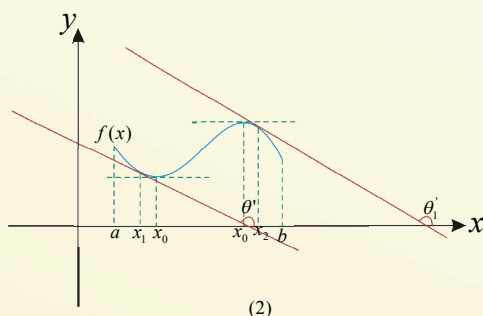
### I- د يوې تابع تحولات:



لاندې شکلونو ته پاملرنه وکړئ:



(1)



(2)

- متزايدې او متناقصې توابع څه ډول توابع دي؟
- د (1) شکل په  $(a, b)$  انتروال کې د  $x_0$ ،  $x_1$  او  $x_2$  په ټکو کې درسم شويو مماسونو ميلونه د (2) شکل له مماسونو سره پرتله کړئ.
- په (1) او (2) شکلونو کې تر ټولو لوړ ټکی او تر ټولو ټيټ ټکی په گوته کړئ.

- په پورته شکلونو کې وښیې چې کومه تابع په کومه ساحه کې متزايدة او په کومه ساحه کې تابع متناقصه ده؟
- په متزايدة، متناقصه او ثابت تابع کې مشتق وڅېړئ.

د پورته فعالیت پایله داسې بیانوو:

1- که د  $f(x)$  تابع په  $[a, b]$  انټروال کې متمادي او په  $(a, b)$  انټروال کې د مشتق وړ وي، نو که

چېرې په ورکړل شوي انټروال کې  $f'(x) > 0$  وي، تابع په هغه انټروال کې متزايدة بلل کېږي.

2- که چېرې د  $f(x)$  تابع په  $[a, b]$  انټروال کې متمادي او د  $(a, b)$  په انټروال کې د مشتق وړ وي

که به ورکړ شوي انټروال کې  $f'(x) < 0$  وي، نو تابع په هغه فاصله کې متناقصه بلل کېږي.

**یادونه:** د تابع له تزايد څخه مطلب دا دی چې د  $X$  د متحول قیمت په زیاتېدو سره د تابع قیمت زیات او د

تابع له تناقص څخه مطلب دا دی چې د  $X$  د متحول قیمت په زیاتېدو سره د  $Y$  یا تابع قیمت کم پاتې

شي.

**لومړی مثال:** وښیې چې د  $f(x) = x^3 + 3x + 1$  تابع گراف متزايد ده.

**حل:** څرنګه چې تابع کسري بڼه نه لري، نو ټول حقيقي عددونه د تعريف ساحه کېدای شي او هم پوهېږو

چې د تابع د تزايد شرط  $f'(x) > 0$  دی، نو لازمه ده چې د تابع مشتق تر مطالعې لاندې ونیسو:

$$f(x) = x^3 + 3x + 1$$

$$f'(x) = 3x^2 + 3$$

لیدل کېږي چې د مشتق لومړی حد تام مربع دی، نو د  $x$  د ټولو قیمتونو لپاره همېشه مثبت دی. کله چې

(+3) ورسره جمع شي بیا هم قیمت یې مثبت دی، نو د  $f'(x) > 0$  دی، نو تابع متزايدة ده.

**دویم مثال:** د  $f(x) = x^3 - 3x + 5$  تابع په کوم انټروال کې متناقصه ده؟

**حل:** څرنګه چې د  $f(x)$  تابع په هر انټروال کې متمادي او د مشتق وړ ده، نو د متناقص تابع لپاره

لرو  $f'(x) < 0$  دی، یعنی:

$$f'(x) = 3x^2 - 3 < 0$$

$$f'(x) = 0$$

$$3x^2 - 3 = 0$$

$$3x^2 = 3$$

$$x = \pm 1$$

ليدل کيږي چې د تابع مشتق د  $-1 < x < 1$  په انټروال کې منفي دی، نو تابع په همدې انټروال کې  $(-1, 1)$  متناقصه ده.

**درېم مثال:** د  $f(x) = 5x - 4$  تابع تحولات وڅېړئ.

**حل:** لومړی د تابع د تعريف ساحه پيدا او وروسته د تابع د تزايد شرط په کې څېړو:

$$D_f \rightarrow IR$$

$$f(x) = 5x - 4$$

$$f'(x) = 5 > 0$$

څرنگه چې  $f'(x) > 0$  نو د ټولو قيمتونو لپاره همپشه مثبت دی. نو تابع متزايد ده.

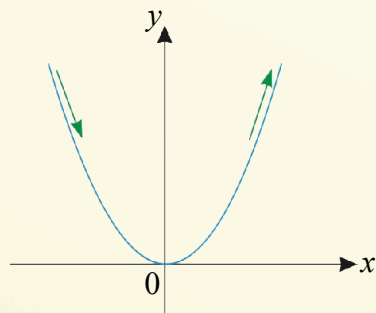
**څلورم مثال:** د  $y = x^2$  د تابع گراف ته څير شئ او وبنسئ چې ورکړل شوي تابع په کوم انټروال کې متزايد او په کوم انټروال کې متناقصه ده.

**حل:** پوهېږو چې که تابع متناقصه وي  $y' < 0$  او که تابع متزايد وي  $y' > 0$  څخه دی، نو ليکلای شو چې:

$$y = x^2 \Rightarrow y' = 2x$$

$$y' < 0 \Rightarrow 2x < 0 \Rightarrow x < 0$$

$$y' > 0 \Rightarrow 2x > 0 \Rightarrow x > 0$$



$x$	$-\infty$	$-2$	$-1$	$0$	$1$	$2$	$+\infty$
$y'$	$-$	$-$	$-$	$0$	$+$	$+$	$+$
$y$	$+\infty$	$4$	$1$	$0$	$1$	$4$	$+\infty$

د تابع له گراف څخه ليدل کيږي چې تابع د  $(-\infty, 0)$  په انټروال کې متناقصه او په  $(0, +\infty)$  انټروال کې متزايد ده.



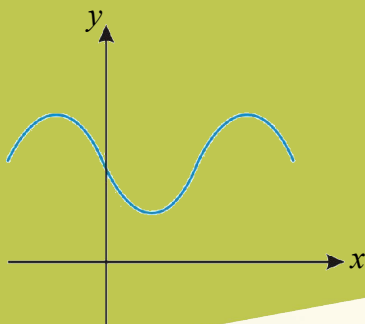
1- د  $f(x) = ax + b$  تابع تحولات وښیئ؟

2- د  $y = \frac{-3}{4}x - 1$  تابع تحولات وښیئ؟

3- وښیاست چې د  $f(x) = 2x^2 + 3x + 1$  تابع په کوم انټروال کې متزایده ده؟

4- د  $y = x^2 + 3x + 2$  تابع د تزاید انټروال وټاکئ؟

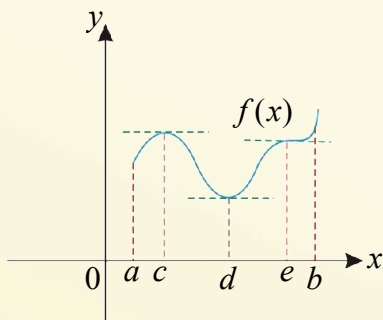
## د یوې تابع بحراني (Critical Point) ټکي (اعظمي Maximum او اصغري Minimum)



په مخامخ شکل کې تر ټولو لوړ ټکی او تر ټولو ټیټ ټکی  
وښیئ او ووايئ چې دا ټکي د څه په نامه یادېږي؟



که په لاندینې شکل کې د  $f(x)$  تابع د  $(a, b)$  په انټروال کې د مشتق وړ وي.



- د متحول د قیمت په زیاتوالي په کوم انټروال کې د تابع قیمت لوېږي.
- د متحول د قیمت په کموالي په کوم انټروال کې د تابع قیمت کمېږي.
- د تابع تحولات په  $(c, d)$  او  $(d, e)$  انټروال کې وڅېړئ.
- د  $f(x)$  تابع مشتق په کومو ټکو کې له صفر سره مساوي دی.

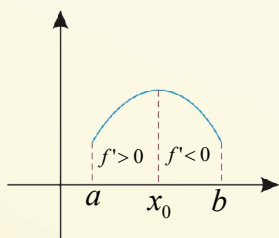
د پورته فعالیت پایله داسې بیانوو:



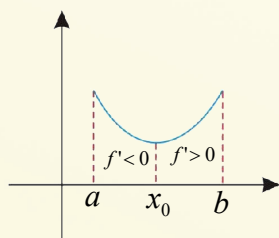
د یوې تابع په گراف کې د  $y$  پر محور تر ټولو لوړې نقطې ته اعظمي (maximum) او تر ټولو ټیټې نقطې ته د تابع اصغري (minimum) نقطه وایي، د  $x$  د هغو قیمتونو لپاره چې تابع اعظمي او یا اصغري قیمتونه اخلي د بحراني (Critical Point) نقطو په نامه یادېږي.

### تعریف:

- 1- **ثابته تابع:** که چېرې د یوې تابع لومړی مشتق همیشه له صفر سره مساوي وي تابع ته ثابته تابع وایي.
- 2- **متزایده تابع:** که چېرې د یوې تابع لومړی مشتق د  $(a, b)$  په فاصله کې مثبت وي تابع په هغه فاصله کې متزایده بلل کېږي، یعنې  $y' > 0$  چې په لاندې شکلونو کې لیدل کېږي.
- 3- **متناقصه تابع:** که چېرې د یوې تابع لومړی مشتق د  $(a, b)$  په فاصله کې منفي وي یعنې  $y' < 0$  وي، تابع په هغه فاصله کې متناقصه بلل کېږي چې په لاندې شکلونو کې لیدل کېږي.



(1)



(2)

- 1- **اعظمي ټکی:** که چېرې د  $y = f(x)$  تابع د  $x_0$  په معین ټکي کې د تزاید له حالت څخه د تناقص له حالت ته بدل شي یا په بل عبارت د  $x_0$  په دې معین ټکي کې د مشتق اشاره له مثبت څخه منفي ته بدله شي د  $x_0$  په نقطه کې د تابع قیمت د اعظمي (maximum) په نامه یادېږي.
- 2- **اصغري ټکی:** که چېرې د  $y = f(x)$  تابع د  $x_0$  په معین ټکي کې د تناقص له حالت څخه تزاید له حالت ته بدل شي یا په بل عبارت د  $x_0$  په دې معین ټکي کې د مشتق اشاره له منفي څخه مثبت ته بدله شي د  $x_0$  په نقطه کې د تابع قیمت د اصغري (minimum) په نامه یادېږي.
- 3- **د انعطاف ټکی:** که چېرې مشتق خپله اشاره د  $x_0$  په یوه معین ټکي کې له مثبت څخه صفر ته او بیا مثبت ته یا له منفي څخه صفر او بیا منفي ته بدله کړي د  $x_0$  د انعطاف د نقطې *Inflection Point* په نامه یادېږي.

**لومړی مثال:** د  $f(x) = x^3 - \frac{7}{2}x^2 + 2x$  تابع راکړل شوی ده دا تابع خو د (Extreme) ټکي لري.

**حل:** د تابع لومړی مشتق پیدا کوو بیا هغه مساوي په صفر وضع کوو او د  $x$  قیمتونه په لاس راوړو.

$$f'(x) = 3x^2 - 7x + 2$$

$f'(x) = 0$	$x$	$-\infty$	$\frac{1}{3}$	$1$	$2$	$+\infty$	
$3x - 1 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{3}$	$f'(x)$	$+$	$0$	$-$	$-$	$0$	$+$
$x - 2 = 0 \Rightarrow x_2 = 2$	$f(x)$	$-\infty$	$\frac{17}{54}$	$-2$	$-2$	$+\infty$	
			Max		Min		

په پایله کې ویلای شو چې اصلي تابع دریمه درجه ده، نو د  $f(x)$  د تابع مشتق د  $(\frac{1}{3})$  او  $(2)$  په دوو نقطو

کې خپله علامه بدلولي، نو دوه بحراني (Extreme) ټکي لري.

**دویم مثال:** د  $f(x) = \frac{x+1}{x^2-2x}$  تابع موضعي Extreme ټکي یا نسبتي ټکي مشخص کړئ.

**حل:** لومړی د تابع مشتق په لاس راوړو، وروسته یې علامې ټاکو:

لیدل کېږي چې تابع د  $y = \frac{u}{v}$  شکل لري، نو  $y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2-2x}$$

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x - (2x-2)(x+1)}{(x^2-2x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-x^2 - 2x + 2}{(x^2-2x)^2}$$

دیوه کسر قیمت هغه وخت له صفر سره مساوي دی چې د تابع صورت مساوي له صفر سره وي.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -x^2 - 2x + 2 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 12$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2 + \sqrt{12}}{-2} = -2.73$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2 - \sqrt{12}}{-2} = 0.73$$

$x$	$-3$	$-2.73$	$-1$	$0.73$	$1$	
$f'(x)$	$-$	$-$	$0$	$+$	$0$	$-$
$f(x)$	$-\frac{2}{15}$		Min	0	Max	$-2$

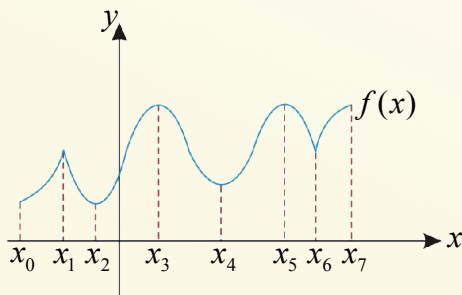
په جدول کې ښکاري چې  $f'$  د  $x_1$  او  $x_2$  دواړو خواوو ته خپله علامه بدلوي، نو تابع دوه بحراني Extreme ټکي لري، يعنې تابع اعظمي او اصغري ټکي لري.

### مطلق اعظمي او مطلق اصغري ټکي Absolute Maximum & Absolute Minimum

کېدای شي يوه تابع په يوه انټروال کې څو موضعي بحراني ټکي ولري، خو په يوه ټاکلي انټروال کې تابع يوازې يوه مطلقه اعظمي او يوه مطلقه اصغري نقطه لري. په شکل کې يې وښیئ؟



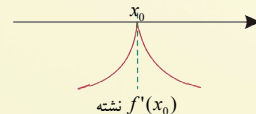
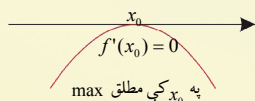
لاندینی شکل ته څیر شي:



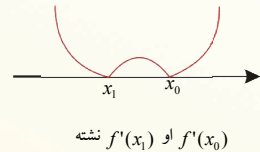
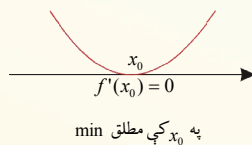
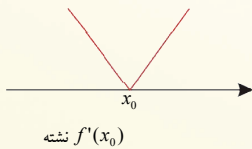
- د  $f(x)$  په تابع کې اعظمي او اصغري ټکي وښیئ.
- د  $f(x)$  تابع بحراني ټکي په گوته کړئ.
- پورتنی تابع په ورکړل شوي انټروال کې څو موضعي بحراني ټکي لري.
- پورتنی تابع په ورکړل شوي انټروال کې څو اصغري او اعظمي لري.

د پورته فعالیت پایله داسې بیانوو:

**مطلق اعظمي Absolute Maximum:** په عمومي ډول د  $(x_0, f(x_0))$  ټکی مطلق اعظمي بلل کېږي، که چېرې د  $f(x)$  د تعریف په ساحه کې د هر  $x$  لپاره  $f(x) \leq f(x_0)$  وي، نو  $f(x_0)$  ته مطلق اعظمي وايي لاندې شکلونه وگورئ.



**مطلق اصغري Absolute Minimum:** په عمومي ډول د  $(x_0, f(x_0))$  نقطه مطلقه اصغري بلل کېږي، که چېرې د  $f$  د تعريف په ساحه کې د هر  $x$  لپاره  $f(x) \geq f(x_0)$  وي، نو په دې حالت کې  $f(x_0)$  ته مطلقه اصغري وايي، د  $x$  هغه قيمتونه چې د هغوی لپاره تابع يا اعظمي او يا اصغري قيمتونه اخلي د  $x$  دغه قيمتونه د Extreme په نامه يادېږي.



**لومړی مثال:** د  $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{1}{2}$  د تابع مطلق اصغري پيدا کړئ.

**حل:** د  $f(x)$  د تابع مشتق نيسو او د مشتق د تابع حلونه په لاس راوړو:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{1}{2}$$

$$f'(x) = x + 3$$

$$f'(x) = 0$$

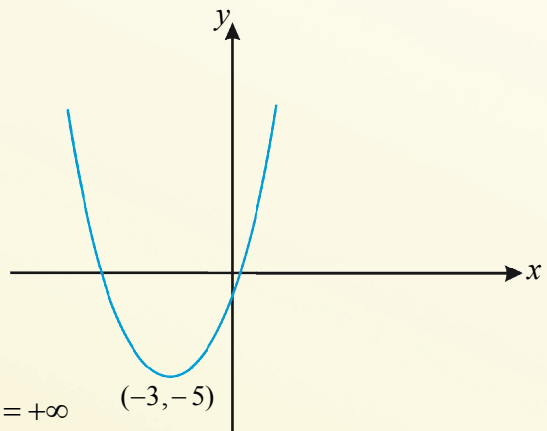
$$x + 3 = 0$$

$$x = -3$$

$$f(-3) = -5$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{1}{2} \right) = +\infty$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 + 3 \lim_{x \rightarrow \infty} x - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2} = +\infty$$



$x$	$-\infty$	$-4$	$-3$	$1$	$2$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$	$0$	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$+\infty$	$9$	$-5$	$3$	$15$	$+\infty$
		$\frac{2}{2}$	Min		$\frac{2}{2}$	

په پايله کې د  $x = -3$  په ټکي کې چې د تابع قيمت  $(-5)$  دی او تابع په  $(-3, -5)$  ټکي کې مطلق اصغري لري.

**دويم مثال:** د  $f(x) = x^3 - 3x + 2$  د تابع اعظمي او اصغري ټکي پيدا او رسم يې کړئ.

**حل:** د اعظمي او اصغري ټکو د پيدا کولو لپاره لومړی د تابع لومړی مشتق پيدا او بيا د مشتق د تابع صفري ټکي په لاس راوړو.

$$f(x) = x^3 - 3x + 2$$

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

$$f'(x) = 0$$

$$3x^2 - 3 = 0$$

$$3x^2 = 3$$

$$x^2 = 1$$

$$x_1 = 1, \quad x_2 = -1$$

$$f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) + 2$$

$$= -1 + 3 + 2$$

$$= 4$$

$$f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1 + 2 = 1 - 3 + 2 = 0$$

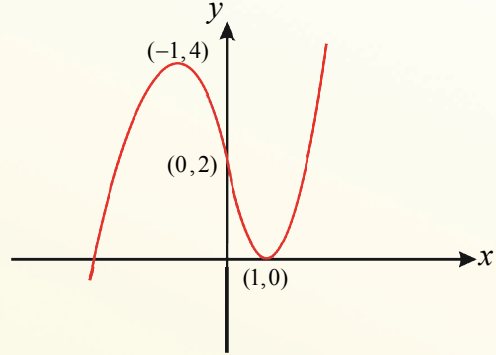
$$f(0) = 0 - 3 \cdot 0 + 2 = 2$$

$$f(2) = 2^3 - 3 \cdot 2 + 2 = 4$$

$$f(1) = 0, \quad f(0) = 2, \quad f(-1) = 4$$

$$\text{Max } f(-1) = 4$$

$$\text{Min } f(1) = 0$$



$x$	$-\infty$	$-2$	$-1$	$0$	$1$	$2$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$+$	$0$	$-$	$-$	$0$	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$6$	$4$	$2$	$0$	$4$	$+\infty$
			Max		Min		

له جدول څخه ليدل کېږي چې تابع د  $(-\infty, -1)$  او  $(1, +\infty)$  په انټروالونو کې متزايد او  $(-1, 1)$  په انټروال کې متناقصه ده، نو د  $(1, 0)$  نقطه اصغري او د  $(-1, 4)$  نقطه اعظمي ده.

د يوې تابع د گراف رسمولو لپاره لاندې ټکي بايد په پام کې ونيسو:

1. د تابع متماديت او نامتماديت مطالعه کړو.
2. د قايمو محوراتو سره د گراف تقاطع.
3. د لومړي مشتق د اشارې مطالعه د تابع د تزايد او تناقص لپاره.
4. د تابع د اعظمي او اصغري ټکو لپاره د مشتق صفري ټکي پيدا کول.
5. د مجانبونو ټاکل.
6. د جدول ترتيبول او د هغوی په مرسته د گراف رسمول.

**دریم مثال:** د  $y = 2 + x - x^2$  تابع گراف رسم کړئ؟

**حل:** لیدل کېږي چې تابع د متحول د ټولو قیمتونو لپاره تعریف شوي ده.

1- ددې تابع د تقاطع ټکی د  $x$  او  $y$  له محورونو سره پیدا کوو:

د  $y$  له محور سره د گراف تقاطع د ټکو د پیدا کولو لپاره په ورکړ شوي تابع کې  $x = 0$  وضع کوو:

$$x = 0 \quad y = 2 + 0 - 0 = 2$$

نو پورتنی گراف د  $y$  محور په  $(0, 2)$  نقطه کې قطع کوي.

د  $x$  د محور سره د گراف د تقاطع د ټکو د پیدا کولو لپاره  $y$  مساوي په صفر وضع کوو او د  $x$  قیمت پیدا کوو:

$$y = 0, \quad 2 + x - x^2 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 2}}{-2} = -\frac{-1 \pm 3}{2}$$

$$x_1 = -1, \quad x_2 = 2$$

نو پورتنی گراف د  $x$  محور په  $(-1, 0)$  او  $(2, 0)$  نقطو کې قطع کوي.

2- د تابع اعظمي او اصغري ټکي پیدا کوو، ددې کار لپاره د تابع اول او دویم مشتق خپرو.

$$y = 2 + x - x^2$$

خرنگه چې د تابع په اعظمي او اصغري نقطو کې د تابع لومړی مشتق صفر دی نو  $y' = 0$  سره وضع کوو:

$$y' = 1 - 2x$$

$$y' = 0, \quad 1 - 2x = 0$$

$$-2x = -1 \Rightarrow 2x = 1$$

$$x = \frac{1}{2}$$

تابع په  $x = \frac{1}{2}$  نقطه کې یو اعظمي یو یا اصغري قیمت لري، دهغې دپیژندنې له پاره د تابع دویم مشتق په  $x = \frac{1}{2}$

$$y'' = -2 < 0$$

ټکو کې خپرو:

خرنگه چې  $y''$  تل منفي دی، نو په  $x = \frac{1}{2}$  کې هم منفي دی، ځکه نو تابع په  $x = \frac{1}{2}$  ټکی کې یو اعظمي

قیمت لري خرنګه چې د  $x = \frac{1}{2}$  لپاره  $y = 2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = 2\frac{1}{4}$  کېږي، نو د تابع اعظمي نقطه داده:

$$\left(\frac{1}{2}, 2\frac{1}{4}\right)$$

دامنحني دانعطاف نقطه نه لري، ځکه چې دهر  $x$  لپاره  $y'' < 0$  دی.

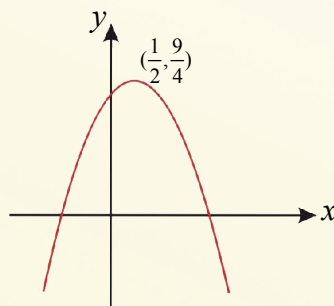
3- په  $\pm \infty$  کې دگراف خپرل:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y = \lim_{x \rightarrow \infty} (2 + x - x^2) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2 + x - x^2) = -\infty$$

د زیاتې روښانتیا لپاره لاندې جدول ترتیب شوی، او د تابع ټول بدلونونه په هغو کې په ګوته کوو او وروسته نوموړی گراف رسموو.

$x$	-1	$\frac{1}{2}$	2
$y'$	+	0	-
$y$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\searrow$
	0	$2\frac{1}{4}$	0



### پوښتنې

1- د لاندې توابعو موضعي Extreme ټکی و ټاکئ.

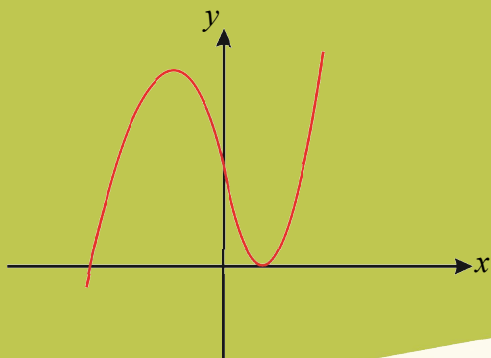
a)  $f(x) = x^2 - 3x + 2$

b)  $f(x) = \frac{x+1}{x^2}$

c)  $y = 3x^2 - 4x + 1$

2- د  $f(x) = 3x^3 - 4x^2$  د تابع مطلقه min پیدا کړئ.

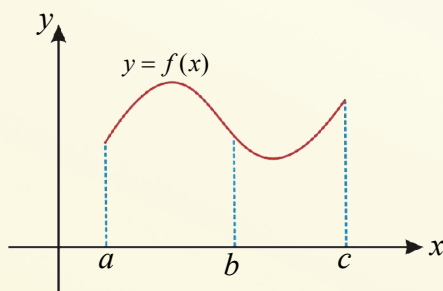
## د انعطاف د نقطې ټاکل



هغه ټکي چې د یوې تابع گراف په هغې کې خپل محدبیت، مقعریت ته او یا ددې پر عکس بدلوي د څه په نامه یادېږي؟ آیا په دې ټکي کې د دویم مشتق علامه او قیمت څېړلای شئ؟



لاندینی شکل په پام کې ونیسئ:

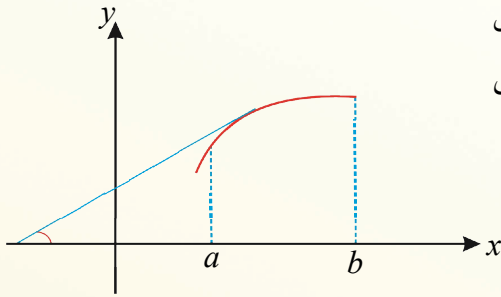


- د  $y = f(x)$  د تابع منحنی د  $(a, b)$  په انټروال کې څه ډول منحنی بلل کېږي؟
- د  $y = f(x)$  د تابع منحنی د  $(b, c)$  په انټروال کې څه ډول منحنی بلل کېږي؟
- د  $(a, b)$  په انټروال کې په منحنی یو مماس رسم کړئ او له هغه مماس سره یې پرتله کړئ چې د  $(b, c)$  په انټروال کې په منحنی رسمېږي.

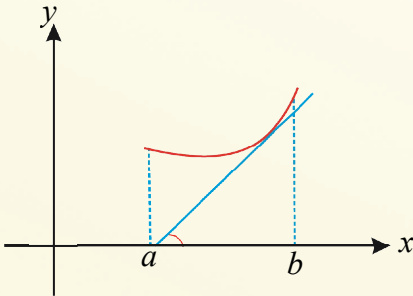
د پورتنی فعالیت پایله داسې بیانوو:

1. د  $y = f(x)$  د تابع منحنی په یوه انټروال کې پرسیدلی یا محدب بلل کېږي، که چېرې په دې انټروال کې په منحنی مماس رسم شي، نو مماس د منحنی له پاسه یا پورته خواته پروت وي، په دې صورت کې د تابع دویم مشتق منفي  $y'' < 0$  په لاس راځي.





په دې ډول که د  $y = f(x)$  د تابع دویم مشتق د انټروال په ټولو ټکو کې منفي وي، نو د تابع گراف یا منحنی په دې انټروال کې محدب پاتې کېږي.



2. د  $y = f(x)$  د تابع منحنی په یوه انټروال کې ننوتې یا مقعره بلل کېږي، که چېرې په نوموړي انټروال کې په منحنی مماس رسم شي، نو مماس له منحنی څخه لاندې یا بنکته خوا پروت وي، که د  $y = f(x)$  د تابع دویم مشتق د انټروال په ټولو ټکو کې مثبت  $y'' > 0$  وي، منحنی په دې انټروال کې مقعره بلل کېږي.

**تعریف:** هغه نقطه چې تابع له مقعريت څخه محدبیت ته او یا ددې پر عکس جهت بدلوي، او لومړی مشتق یې موجود او دویم مشتق یې صفر شي د انعطاف (Inflection) نقطه بلل کېږي. که د  $y = f(x)$  تابع د  $x = x_0$  په ټکي کې چې د تابع دویم مشتق صفر شي ( $f''(x_0) = 0$ ) وي تابع د  $x = x_0$  په ټکي کې د انعطاف نقطه لري او ددې برعکس تابع د انعطاف نقطه نه لري.

**لومړی مثال:** د  $f(x) = x^2 - 5x + 4$  د تابع گراف رسم محدبیت او مقعريت یې وڅېړئ.

**حل:** تابع د متحول د ټولو قیمتونو لپاره تعریف شوی ده.

1- د  $y$  له محور سره تقاطع

$$\left. \begin{matrix} x = 0 \\ y = 4 \end{matrix} \right\} \Rightarrow (0, 4)$$

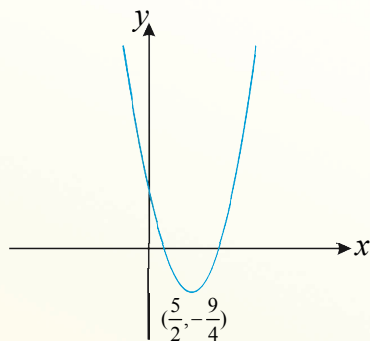
2- د  $x$  له محور سره تقاطع

$$\left. \begin{matrix} y = 0 \\ x^2 - 5x + 4 = 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow x^2 - 5x + 4 = (x - 4)(x - 1) \Rightarrow x_1 = 4, \quad x_2 = 1$$

د  $x$  له محور سره د تقاطع ټکي  $(4, 0)$  او  $(1, 0)$  دي.

$x$	$-\infty$	$0$	$1$	$\frac{5}{2}$	$4$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$+\infty$	$4$	$0$	$-\frac{9}{4}$	$0$	$+\infty$

$\frac{5}{2}$   
min



د گراف، مقعریت او محدبیت د څېړلو لپاره د تابع دویم مشتق په لاس راوړو:

$$f(x) = x^2 - 5x + 4 \Rightarrow y' = 2x - 5$$

$$f''(x) = 2 > 0$$

څرنګه چې  $y'' > 0$  دی، نو په پایله کې ویلای شو چې منحنی نوتې یا مقعره ده.

**دویم مثال:** هغه انټروالونه وټاکئ چې په هغې کې د  $y = x^3 + 9x^2 - 6x + 1$  تابع گراف محدب یا مقعر وي.

وي.

حل:

$$y = x^3 + 9x^2 - 6x + 1$$

$$y' = 3x^2 + 18x - 6 \Rightarrow y'' = 6x + 18$$

$$y'' < 0 \Rightarrow 6x + 18 < 0$$

$$6x < -18 \Rightarrow x < -3$$

$$y'' > 0 \Rightarrow 6x + 18 > 0$$

$$6x > -18$$

$$x > -3$$

$x$	$-\infty$	$-3$	$+\infty$
$y''$	$-$	$0$	$+$
$y$	$\cap$		$\cup$

مقعر انعطاف محدب

څرنګه چې لیدل کېږي د تابع دویم مشتق په  $(-\infty, -3)$  انټروال کې منفي او د  $(-3, +\infty)$  انټروال کې

مثبت دي، نو دا ډول گراف په لومړي انټروال کې محدب او په دویم کې مقعر دی.

دریم مثال: د  $f(x) = x^5 - 5x^3$  تابع د انعطاف ټکی و ټاکی؟

حل:

$$f(x) = x^5 - 5x^3 \Rightarrow f'(x) = 5x^4 - 15x^2$$

$$f''(x) = 20x^3 - 30x$$

$$f''(x) = 0$$

$$20x^3 - 30x = 0$$

$$x(20x^2 - 30) = 0$$

$$x_1 = 0$$

$$20x^2 - 30 = 0$$

$$x^2 = \frac{3}{2} \Rightarrow x_2 = \sqrt{\frac{3}{2}}, \quad x_3 = -\sqrt{\frac{3}{2}}$$

$x$	$-\infty$	$-\sqrt{\frac{3}{2}}$	$0$	$\sqrt{\frac{3}{2}}$	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	$0$	$+$	$0$	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$\cap$	$-1.65$	$\cup$	$\cap$
				$-6\sqrt{\frac{3}{2}}$	$\cup$

لیدل کېږي چې په  $x = \sqrt{\frac{3}{2}}$  او  $x = 0$  کې د تابع دویم مشتق صفر دی یا  $f''(x) = 0$  علامه بدلوي او په دې ټکو کې مماس رسمیدلی شي چې هغه ټکی د انعطاف ټکی دی.



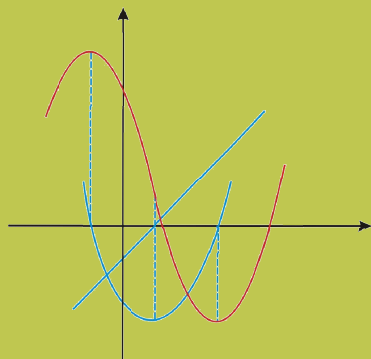
1. د  $f(x) = x^2 - 4$  تابع محدبیت او مقعریت وټاکی.

2. د  $f(x) = -2x^2 - 1$  تابع د انعطاف نقطه وټاکی.

## د منحنی گانو رسمول

### د دویمې درجې تابع گانو گراف

د مخامخ شکل په اړه خپل نظر بیان کړئ.



- د  $f(x) = x + 1$  د تابع گراف د  $f(x) = -x + 1$  د تابع له گراف سره پرتله کړئ.
- د  $y = ax^2 + bx + c$  د تابع د تعریف ساحه و ټاکئ آیا دا تابع متمادي ده؟
- د نوموړی تابع لومړی مشتق پیدا او د Maximum او Minimum ټکي او د تناظر محور یې وټاکئ.
- د تابع لیمیت په هغه صورت کې پیدا کړئ چې  $x \rightarrow \pm\infty$  وکړي.
- له محورونو سره د تقاطع ټکي و ټاکئ.
- د تحولونو جدول ترتیب او نوموړی منحنی رسم کړئ.

د پورته فعالیت پایله داسې بیانوو:

1- د تابع د تعریف ساحه: لیدل کېږي چې تابع د متحول د ټولو قیمتونو لپاره تعریف شوی ده، یعنې:

$$D_f \rightarrow (-\infty, +\infty)$$

نو تابع د خپل تعریف په ساحه کې متمادي ده.

2- د تابع د بحراني ټکو او د تناظر محور ټاکل:

$$f'(x) = 2ax + b = 0$$

$$f'(x) = 0$$

$$2ax + b = 0$$

$$2ax = -b$$

$$x = \frac{-b}{2a}$$

د  $x = \frac{-b}{2a}$  قیمت په اصل تابع کې وضع کوو:

$$y = a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c \Rightarrow a \cdot \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{2a} + c = 0$$

$$y = \frac{b^2 - 2b^2 + 4ac}{4a} = \frac{-b^2 + 4ac}{4a} \Rightarrow \frac{4ac - b^2}{4a}$$

د  $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$  ټکی بحراني یعنی اعظمي یا اصغري دی.

الف: که  $a > 0$  وي، نو:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

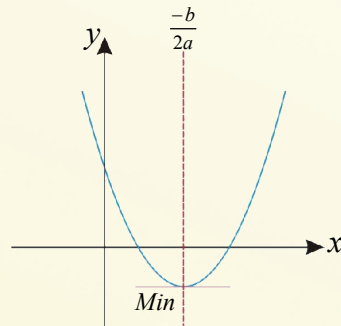
تابع په  $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$  ټکي کې *Min* لري.

ب: که  $a < 0$  وي، نو:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

تابع په  $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$  ټکي کې *Max* لري.

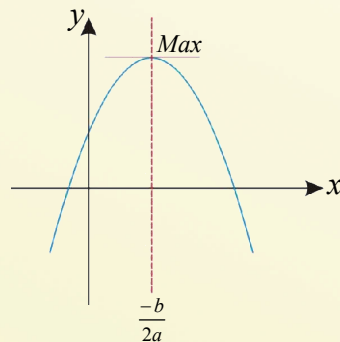
3- د گراف د رسمولو لپاره جدول ترتیب او گراف یې رسموو:

$a > 0$			
$x$	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$y'$		-	+
$y$	$+\infty$	$\searrow \frac{4ac - b^2}{4a}$	$\nearrow +\infty$



خرنگه چې  $a > 0$  د منحنی خوله (جهت) پورته خواته او د  $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4}\right)$  اصغري نقطه ده.

$a < 0$			
$x$	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$y'$		+	-
$y$	$-\infty$	$\nearrow \frac{4ac - b^2}{4a}$	$\searrow -\infty$



خرنگه چې  $a < 0$  د منحنی خوله (جهت) ښکته خواته او د  $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4}\right)$  اعظمي نقطه ده.

**لومړی مثال:** د  $f(x) = x^2 - 4x + 3$  تابع تحولات مطالعه او گراف یې رسم کړئ.  
**حل:**

1- د تابع د تعریف ساحه  $(-\infty, +\infty)$  تابع د ټولو حقیقي قیمتونو لپاره تعریف شوی ده، نو تابع په دې انټروال کې متمادی ده.

2- د تابع د منحنی تقاطع د  $x$  له محور سره:

$$\left. \begin{aligned}
 y &= 0 \\
 x^2 - 4x + 3 &= 0 \\
 (x-1)(x-3) &= 0 \\
 x-1 = 0 &\Rightarrow x=1 \\
 x-3 = 0 &\Rightarrow x=3
 \end{aligned} \right\} (1,0) , (3,0)$$

3- د تابع د منحنی تقاطع د  $y$  له محور سره:

$$\left. \begin{aligned}
 x &= 0 \\
 y &= 0 - 4 \cdot 0 + 3 \\
 y &= 3
 \end{aligned} \right\} (0,3)$$

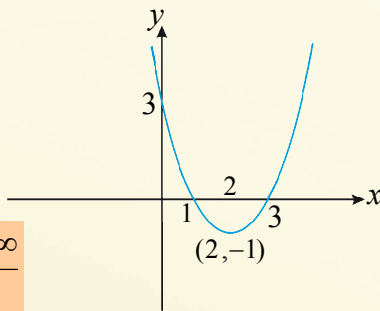
4- د تابع د extreme ټکو د پیدا کولو لپاره د لومړي مشتق صفري ټکي پیدا او جدول یې ترتیبوو:

$$f'(x) = 2x - 4 = 0 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = 2$$

$$f(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 + 3 = -1 \Rightarrow V(2, -1) \text{ min}$$

$$x \rightarrow \pm\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow \pm\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [x^2 - 4x + 3] = +\infty$$



$x$	$-\infty$	0	1	2	3	$+\infty$
$y'$	-	-	-	+	+	+
$y$	$-\infty \searrow$	3 $\searrow$	0 $\searrow$	-1 $\nearrow$	0 $\nearrow$	$+\infty$

*Min*

**دویم مثال:** د  $f(x) = -x^2 + 2x$  تابع تحولات مطالعه او گراف یې رسم کړئ.

**حل:** لیدل کېږي چې تابع د ټولو قیمتونو لپاره تعریف شوی ده، نو:

1- د تابع د تعریف ساحه عبارت ده له:  $(-\infty, +\infty)$  چې په دې ساحه کې تابع متمادی ده.

2- د تابع د منحنی د تقاطع ټکی د  $x$  له محور سره:

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ -x^2 + 2x &= 0 \\ x(-x + 2) &= 0 \\ x_1 &= 0 & (0, 0) \\ -x + 2 &= 0 \\ x_2 &= 2 & (2, 0) \end{aligned}$$

د تقاطع ټکی

3- د تابع د منحنی تقاطع د  $y$  له محور سره:

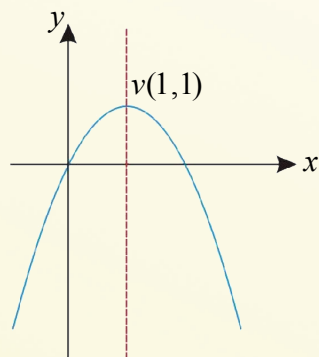
$$\begin{aligned} x &= 0 \\ f(x) &= -x^2 + 2x \\ f(x) &= 0 + 2 \cdot 0 \\ f(x) &= 0 & (0, 0) \end{aligned}$$

4- د تابع د extreme نقطو د پیدا کولو لپاره د تابع لومړی مشتق پیدا کوو او جدول یې ترتیب او گراف یې

رسموو:

$$\begin{aligned} D_f &\rightarrow (-\infty, +\infty) \\ f(x) &= -x^2 + 2x \\ f'(x) &= -2x + 2 = 0 \\ -2x + 2 &= 0 \\ -2x &= -2 \\ x &= 1 \\ f(1) &= 1 \end{aligned}$$

$\Rightarrow V(1, 1)Max$



$x$	$-\infty$	$0$	$1$	$2$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$+$	$-$	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$0$	$1$	$0$	$-\infty$

Max

په جدول کې لیدل کېږي چې د مشتق علامه د مثبت څخه منفي ته او یا د تزايد حالت څخه تناقص ته شکل بدلوي، نو تابع د  $(1, 1)$  په ټکي کې اعظمي ده.

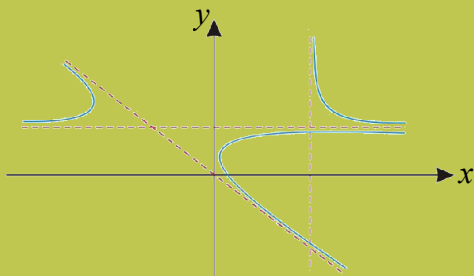
پوښتنې

1. د  $f(x) = 2x^2 - x - 1$  تابع گراف رسم کړئ.

2. د  $f(x) = x^2 - x - 2$  تابع د گراف بدلونونه وڅېړئ او گراف یې رسم کړئ.

## د توابعو د گرافونو مجانبونه

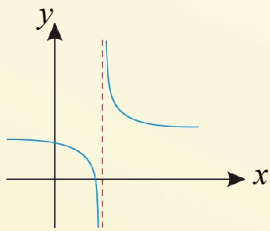
شکل ته پام وکړئ ټکی ټکی کرښې د څه په نامه یادېږي، نومونه یې واخلي.



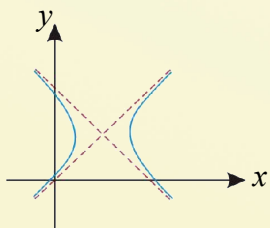
فعالیت

- مجانبونه څه ډول کرښې دي؟
  - مجانبونه، منحنی گانې په کومو ټکو کې قطع کوي؟
- د پورتنی فعالیت پایله داسې بیانوو:

**مجانبونه:** هغه مستقیمې کرښې دي چې د منحنی د گراف لپاره د لارښود حیثیت لري او د منحنی کرښه قطع کړي، هغه تابع گانې چې د متحول د ځینو قیمتونو لپاره غیر متمادي وي، مجانبونه لري او په درې ډوله دي.



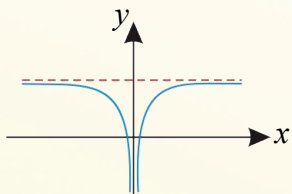
1- **عمودي مجانب:** د  $y = f(x)$  تابع عمودي مجانب لري چې  $x \rightarrow a$  او  $y \rightarrow \infty$  وکړي، یعنې  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$  شي یا په بل عبارت په کسري تابع گانو کې که چېرې د کسر مخرج مساوي په صفر شي، نوموړی تابع بې نهایت خوا ته تقرب کوي، نو ددې ډول مجانب د پیدا کولو لپاره د کسر مخرج له صفر سره مساوي وضع کوو.



2- **مایل مجانب:** د  $y = f(x)$  کسري تابع کله چې د صورت او مخرج د تقسیم حاصل د یوه مستقیم خط په شکل ( $y = ax + b$ ) لاسته راشي داسې چې  $a \neq 0$  وي په لاس راځي او دا هغه وخت امکان لري چې تابع د مایل مجانب لرونکی وي، یعنې د متحول د صورت درجه د متحول د مخرج له درجې څخه د یو واحد په اندازه لوړه وي.



په یاد ولرئ چې که یوه تابع د افقي مجانب لرونکي وي، مایل مجانب نه لري او بر عکس که چېرې مایل مجانب ولري افقي مجانب نه لري.



**3- افقي مجانب:** یوه تابع هغه وخت د افقي مجانب لرونکې ده چې که  $x \rightarrow \pm\infty$  وکړي د تابع قیمت یو ثابت مقدار شي او یا په بل عبارت یوه تابع هغه وخت د افقي مجانب لرونکې ده چې که  $x \rightarrow \pm\infty$  وکړي، نو  $y \rightarrow c$  ته تقرب کوي، یعنی  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = c$  شي.

**لومړی مثال:** د  $f(x) = \frac{x+1}{2x-4}$  تابع عمودي او افقي مجانب پیدا کړئ.

**حل:** د عمودي مجانب د پیدا کولو لپاره د کسر مخرج مساوي په صفر وضع کوو، لرو چې:

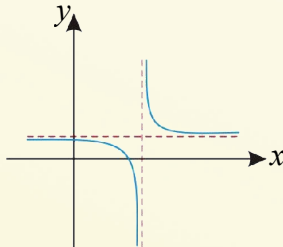
$$2x - 4 = 0 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = 2$$

نو  $x = 2$  د تابع عمودي مجانب دی.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left( \frac{x+1}{2x-4} \right) = \frac{1}{2}$$

افقي مجانب عبارت دی له:  $y = \frac{1}{2}$

$x$	-1	0	+1
$y$	0	$-\frac{1}{4}$	-1



**دویم مثال:** د  $y = \frac{x^2 + 2x - 1}{x}$  تابع د منحنی مجانبونه وټاکئ.

**حل:**

1- مایل مجانب: ددې مجانب د پیدا کولو لپاره د تابع صورت د تابع پر مخرج وېشو:

$$y = \frac{x^2 + 2x - 1}{x} = x + 2 - \frac{1}{x} \Rightarrow y = x + 2$$

2- عمودي مجانب: ددې مجانب د پیدا کولو لپاره د تابع مخرج مساوي په صفر وضع کوو:

$$y = \frac{x^2 + 2x - 1}{x} \Rightarrow x = 0$$

3- افقي مجانب: څرنګه چې تابع مایل مجانب لري، نو افقي مجانب نه لري.

دریم مثال: د  $f(x) = \frac{(x-3)(x+2)}{(x+1)(x-2)}$  تابع مجانبونه وټاکئ.

حل:

1- عمودي مجانب: د تابع مخرج مساوي په صفر وضع کوو:

$$(x+1)(x-2) = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} x+1=0 \\ x_1 = -1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x-2=0 \\ x_2 = 2 \end{array}$$

نو  $x = -1$  او  $x = 2$  د تابع عمودي مجانبونه دي.

2- افقي مجانب: د افقي مجانب د پیدا کولو لپاره د تابع لېمیت په لاس راوړو:

$$y = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-3)(x+2)}{(x+1)(x-2)} = 1$$

نو  $y = 1$  د تابع افقي مجانب دی.

3- څرنګه چې تابع افقي مجانب لري، نو مايل مجانب نه لري.

د مجانبونو د ټاکلو عمومي طریقه:

که چېرې د  $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$  په ناطقه تابع کې  $m$  او  $n$  په ترتیب سره د صورت او مخرج درجې وي، نو:

**الف:** که  $m < n$  وي، نو د  $x$  محور افقي مجانب دی.

**ب:** که  $m = n$  وي، نو  $y = b$  افقي مجانب دی، داسې چې  $b$  د  $m$  او  $n$  د درجو د حدودو د ضریبونو نسبت دی.

**ج:** که چېرې  $m > n$  وي، نو افقي مجانب نه لري، ولې د مايل مجانب احتمال یې شته.

**د:** که چېرې  $m = n + 1$  وي (که د صورت درجه د یوه واحد په اندازه له مخرج څخه لویه وي) تابع هرو مرو مايل مجانب لري، په دې حالت کې افقي مجانب نه لري.



## پوننتي

د لاندې توابعو مجانبونه وټاکئ.

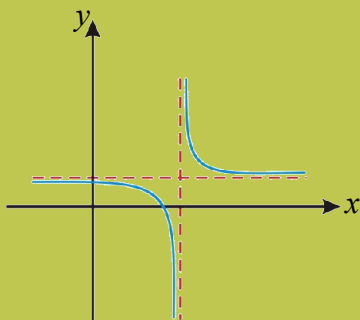
$$1) f(x) = \frac{3x-6}{x^2-x-2}$$

$$2) f(x) = \frac{-2x^2}{x^2+1}$$

$$3) f(x) = \frac{8}{x^2-4}$$

## د هوموگرافیک تابع گانو گراف

شکل ته پاملرنه وکړئ دا شکل د څه ډول تابع گراف دی؟ افقي او عمودي مجانبونه یې وښیئ.



- هوموگرافیک تابع څه ډول تابع ده، په یوه مثال کې یې واضح کړئ.

- د  $y = \frac{1}{x}$  د تابع گراف رسم کړئ.

- د نوموړي تابع مجانبونه لومړی پیدا او بیا یې رسم کړئ.

- د تابع د گراف تقاطع د  $x$  او  $y$  له محورونو سره پیدا کړئ.

د پورتنی فعالیت پایله داسې بیانوو:

هغه تابعگانې چې د  $y = \frac{ax+b}{cx+d}$  شکل ولري، هوموگرافیک تابع گانې بلل کېږي، داسې چې  $c \neq 0$  وي. دا

ډول توابع دوه مجانبونه لري چې:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{ax}{x} + \frac{b}{x}}{\frac{cx}{x} + \frac{d}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a + \frac{b}{x}}{c + \frac{d}{x}} \Rightarrow y = \frac{a}{c} \quad \text{1- افقي مجانب یې:}$$

$$cx + d = 0 \Rightarrow cx = -d \Rightarrow x = -\frac{d}{c} \quad \text{2- عمودي (قایم) مجانب یې:}$$

لومړی مثال: د  $f(x) = \frac{2x-1}{x-3}$  د تابع بدلونونه وڅېړئ او گراف یې رسم کړئ.

حل:

$$x - 3 = 0$$

$$x = 3$$

1. څرنگه چې د تابع مخرج د  $x = 3$  په قیمت کې صفر کېږي، نو تابع پرته له  $x = 3$  څخه د متحول په ټولو

قیمتونو کې معینه ده، یعنې د تابع د تعریف ساحه ټاکو:  $\text{Domain} = \mathbb{R} \setminus \{3\}$

2. د تابع د منحنی تقاطع د  $x$  له محور سره:

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = 0 \\ 2x - 1 = 0 \\ 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \end{array} \right\} \left( \frac{1}{2}, 0 \right)$$

3. د تابع د منحنی تقاطع د  $y$  له محور سره:

$$x = 0 \Rightarrow f(0) = \frac{2 \cdot 0 - 1}{0 - 3} = \frac{1}{3} \quad \left\} \left( 0, \frac{1}{3} \right)$$

4. د مجانو نو ټاکل:

الف- افقي مجانب:  $y = 2$  ،  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x-1}{x-3} = 2$  یا  $f(x) = \frac{a}{c} = \frac{2}{1} = 2$

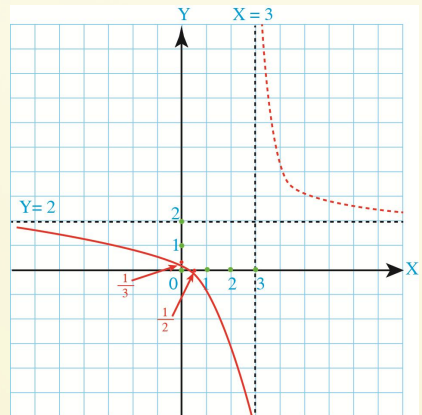
ب- عمودي مجانب:  $x = 3$   $\Rightarrow x - 3 = 0$  یا  $x = -\frac{d}{c} = -\frac{-3}{1} = 3$

5. د تابع د extreme ټکي پيدا کوو او جدول يې ترتيب او گراف يې رسموو:

$$f'(x) = \frac{2(x-3) - (2x-1)}{(x-3)^2} = \frac{-5}{(x-3)^2} < 0$$

$$f''(x) = \frac{0 \cdot (x-3)^2 - (-5) \cdot 2(x-3)}{(x-3)^4} = \frac{10(x-3)}{(x-3)^4} = \frac{10}{(x-3)^3}$$

$x$	$-\infty$	$\int$	$+\infty$
$f'(x)$	-		-
$f''(x)$	-		+
$f(x)$	$2 \rightarrow -\infty$	نه دی تعريف شوی	$+\infty \rightarrow 2$



دویم مثال: د  $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$  د تابع د گراف بدلونونه و څېړئ او گراف يې رسم کړئ.

حل:  $x+1=0 \Rightarrow x=-1$

1- د تابع د تعريف ساحه  $D_f \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{-1\}$  يعني تابع په  $x=-1$  ټکي کې تعريف شوی نه ده.

2- د تابع د منحنی تقاطع د  $x$  له محور سره:  $y=0 \Rightarrow x-1=0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow (1,0)$

3- د تابع د منحنی تقاطع د  $y$  له محور سره:  $x=0 \Rightarrow y=\frac{0-1}{0+1}=-1 \Rightarrow y=-1 \Rightarrow (0,-1)$

4- د مجانبونو ټاکل:

الف- عمودي مجانب:  $x+1=0 \Rightarrow x=-1$

ب- افقي مجانب:  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x-1}{x+1} \Rightarrow f(x) = y=1$

5- د تابع extreme نقطې پیدا کوو، جدول یې ترتیب او گراف یې رسموو:

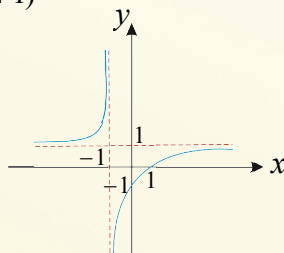
$$f(x) = \frac{x-1}{x+1}$$

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (x+1) - 1 \cdot (x-1)}{(x+1)^2} = \frac{x+1-x+1}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2} > 0$$

$$f''(x) = \frac{0 \cdot (x+1)^2 - 2 \cdot 2(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{-4(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{-4}{(x+1)^3}$$

$x$	$-\infty$	
$f'(x)$	+	+
$f''(x)$	+	-
$f(x)$	1	$+\infty$

(نقطې تعریف شوي)



درېم مثال: غواړو د  $f(x) = \frac{2x-5}{x}$  تابع گراف رسم کړو.

حل:

1- د تابع د تعريف ساحه تر څېړنې لاندې نيسو ليدل کېږي چې تابع پرته له  $x=0$  څخه نور د متحول د ټولو

قيمتونو لپاره معينه ده، يعنې:  $D_f \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$

2- د محور اتو سره د تقاطع ټکي

الف- د  $x$  له محور سره تقاطع:

$$f(x) = 0 \Rightarrow \frac{2x-5}{x} = 0$$

$$2x-5=0$$

$$2x=5 \Rightarrow x = \frac{5}{2} \quad \left. \vphantom{\frac{5}{2}} \right\} \Rightarrow (2.5, 0)$$

ب- د  $y$  له محور سره تقاطع: د  $x=0$  لپاره د  $f(x)$  تابع تعريف شوې نه ده، نو له  $y$  محور سره تقاطع نه لري.

3- مجانبونه:

الف- عمودي مجانب: څرنگه چې په مخرج کې يوازې  $x$  موجود دی، نو  $x=0$  يې عمودي مجانب دی چې د  $y$  محور کېږي.

ب- افقي مجانب:  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[ \frac{2x-5}{x} \right] = 2$  نو  $y=2$  د تابع افقي مجانب دی.

4- د بحراني ټکو پيدا کول: د بحراني ټکو د پيدا کولو لپاره د تابع لومړی مشتق پيدا کوو

$$f(x) = \frac{2x-5}{x}$$

$$f'(x) = \frac{2 \cdot x - (2x-5)}{x^2} = \frac{2x - 2x + 5}{x^2}$$

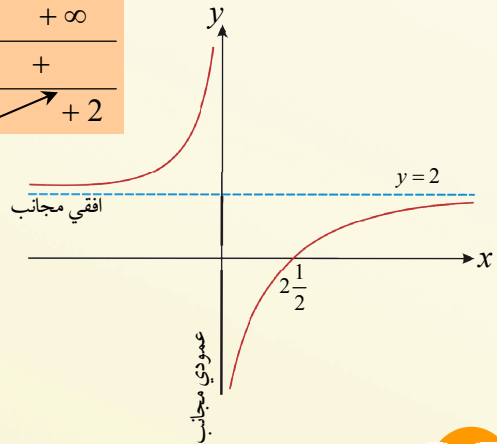
$$f'(x) = \frac{5}{x^2} > 0$$

څرنگه چې  $f'(x) > 0$  دی، نو تابع متزايدة ده.

د گراف د رسمولو لپاره د تابع تحولات په جدول کې ترتيبوو:

$x$	$-\infty$		$0$		$2.5$		$+\infty$
$f'(x)$		+		+		+	
$f(x)$	$2$	$\nearrow$	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$	$\nearrow$	$+2$

نه دی تعريف شوی



پوښتنې

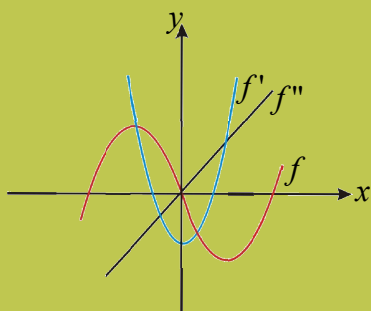
1. د  $f(x) = \frac{x-1}{x+3}$  تابع بدلونونه وڅېړئ او رسم يې کړئ.

2. د  $f(x) = \frac{x}{x-4}$  تابع بدلونونه وڅېړئ او رسم يې کړئ.

## د دریمې درجې یو مجهوله تابع گراف

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d, \quad a \neq 0$$

مخامخ شکل د ځینو توابعو گرافونه رابښي تاسې د هرې تابع د گراف په هکله خپل نظر بیان کړئ.



- د  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  تابع په اړه فکر وکړئ او ووايئ چې تابع څومه درجه تابع ده؟
  - د نوموړي تابع ضریبونه او ثابت حد ولیکئ.
  - د نوموړي تابع دویم مشتق پیدا کړئ.
- د پورته فعالیت پایله داسې بیانوو:

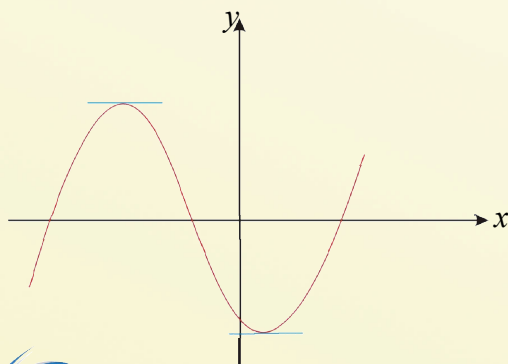
1. د  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ، په دریمه درجه تابع کې چې  $a > 0$  وي داسې په پام کې نیسو. که چېرې د تابع لومړی مشتق پیدا کړو دویمه درجه تابع په لاس راځي، نو د  $f'(x) = 0$  لپاره د دویمې درجې د معادلې حل په پام کې نیسو او  $\Delta$  یې مطالعه کوو که چېرې د معادلې  $\Delta$  له صفر څخه لوی ( $\Delta f' > 0$ ) وي، نو معادله (د تابع مشتق) دوه حله لري، که چېرې  $a > 0$  وي منحنی له کین لوري څخه ښي لوري ته یوه نسبي اعظمي نقطه (Local Maximum) او یوه نسبي اصغري (Local Minimum) لري.

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$a > 0 \Rightarrow \Delta f' > 0$$

$x$	$-\infty$	$x_1$	$x_2$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0
$f(x)$	$-\infty$			$+\infty$





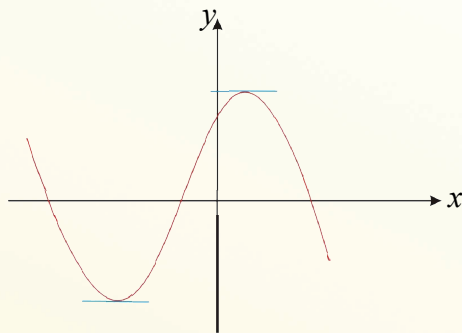
2. د  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  ، په تابع کې که  $a < 0$  ،  $f'(x) = 0$  او  $\Delta f'(x) > 0$  معادله دوه جذرونه لري، که چېرې  $\Delta f' > 0$  نو منحنی له کین لوري څخه بنی لوري ته یوه نسبي اصغری (Local Minimum) او یوه نسبي اعظمی (Local Maximum) نقطه لري.

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

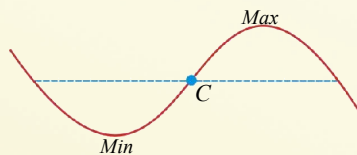
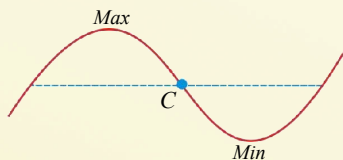
$$a < 0 \Rightarrow \Delta f' > 0$$

$x$		$x_1$		$x_2$	
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	$+\infty$				$-\infty$



3. که د دریمې درجې تابع منحنی نسبي بحراني Extreme ولري، د Extreme دټکو د منحنی ټکي یاد انعطاف د نقطې مختصات یې:

$$I(x_c, y_c) = \left( \frac{x_{\max} + x_{\min}}{2}, \frac{y_{\max} + y_{\min}}{2} \right)$$



4. د دریمې درجې تابع د تناظر ټکی د تابع د انعطاف ټکی:

$$f'(x) = 0$$

$$3ax^2 + 2bx + c = 0$$

چې د تناظر ټکي یې وروسته د نوموړي معادلې له حل څخه د تناظر مرکز  $x = -\frac{b}{3a}$  په لاس راځي.

5. د  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  په تابع کې که  $a < 0$  وي او له  $f'(x) = 0$  سره وضع شي او  $\Delta f'(x) = 0$  نو معادله یو یا دوه مساوي جذرونه لري په هغه صورت کې چې  $f'(x) \leq 0$  وي، نو په دې صورت تابع، متناقصه ده او که چېرې  $f'(x) \geq 0$  وي، نو په دې صورت کې تابع متزايدة ده.



**لومړی مثال:** د  $f(x) = (x-1)(x+2)^2$  تابع تحولات وڅېړئ او گراف یې رسم کړئ.

**حل:** لومړی د تابع Extreme ټکو مختصات په لاس راوړو، وروسته د لومړي مشتق په مرسته گورو چې تابع په کومه برخه کې متزايدة او په کومه برخه کې متناقصه ده. له محورونو سره د تقاطع ټکي پيدا کوو او د اعظمي او اصغري نقطو د تشخیص او د انعطاف نقطو د پيدا کولو لپاره د تابع دویم مشتق په کار وړو د تحولاتو جدول یې ترتیبوو او بیا یې گراف رسموو:

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 4$$

$$f'(x) = 3x^2 + 6x$$

$$3x^2 + 6x = 0$$

$$x(3x + 6) = 0$$

$$x_1 = 0, \quad 3x + 6 = 0 \Rightarrow x_2 = -2$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, \quad x_2 = -2$$

$$f(0) = 0^3 + 3 \cdot 0^2 - 4 = -4$$

$$f(-2) = (-2)^3 + 3(-2)^2 - 4$$

$$= -8 + 12 - 4 = 0$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow 6x + 6 = 0$$

$$6x = -6$$

$$x = -1$$

د انعطاف د نقطې د لاسته راوړلو لپاره  $x = -1$  په اصلي تابع کې وضع کوو چې د  $f(x)$  قیمت لاسته

راځي:

$$f(-1) = (-1-1)(-1+2)^2 = -2$$

د انعطاف ټکی:  $I(-1, -2)$

له محورونو سره تقاطع:

الف- د  $x$  له محور سره تقاطع:

$$y = 0$$

$$(x-1)(x+2)^2 = 0$$

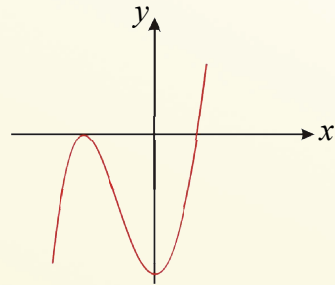
$$\left. \begin{array}{l} x-1=0 \\ x=1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} (x+2)^2=0 \\ x+2=0 \\ x_2=-2 \end{array} \right\} \Rightarrow (1,0), (-2,0)$$

ب- د  $y$  له محور سره تقاطع:

$$x = 0$$

$$y = 0^3 + 3 \cdot 0^2 - 4 = -4 \Rightarrow (0, -4)$$

$x$	$-\infty$	$-2$	$-1$	$0$	$+\infty$
$f'(x)$	+	-	-	+	
$f''(x)$	-	-	+	+	
$f(x)$	$-\infty$	$0$	$-2$	$-4$	$+\infty$
		max		min	



**دویم مثال:** د  $f(x) = -x^3 + 3x^2$  د تابع تحولات وڅېړئ او گراف یې رسم کړئ.

**حل:** د تابع لومړی مشتق پیدا کوو او وروسته یې صفري نقطې ټاکو او د تابع اعظمي او اصغري نقطې په

لاس راوړو.

-1

$$f(x) = -x^3 + 3x^2$$

$$f'(x) = -3x^2 + 6x$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -3x^2 + 6x = 0 \Rightarrow x(-3x + 6) = 0$$

$$x_1 = 0, \quad -3x + 6 = 0 \Rightarrow -3x = -6 \Rightarrow x_2 = 2$$

اعظمي او اصغري ٽڪي عبارت دي له:

$$\left. \begin{aligned} f(0) &= -0^3 + 3 \cdot 0^2 = 0 \\ f(2) &= -2^3 + 3 \cdot 2^2 = 4 \end{aligned} \right\} \Rightarrow (0,0), (2,4)$$

2- محورونو سره تقاطع:

الف- د  $x$  له محور سره تقاطع:

$$\left. \begin{aligned} y &= 0 \\ -x^3 + 3x^2 &= 0 \\ x^2(-x+3) &= 0 \\ x_1 = 0, \quad -x+3 &= 0 \\ x_2 &= 3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow (0,0), (3,0)$$

ب- د  $y$  له محور سره تقاطع:

$$\left. \begin{aligned} x &= 0 \\ f(x) &= -0^3 + 3 \cdot 0^2 = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow (0,0)$$

3- د انعطاف د نقطې د پيدا ڪولو لپاره  $f''(x)$  مطالعه ڪوو:





$$f''(x) = -6x + 6 = 0$$

$$x = 1$$

$$f(x) = -x^3 + 3x^2$$

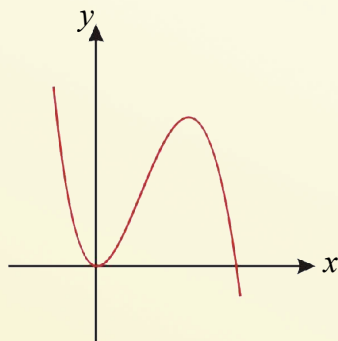
$$f(1) = 2 \Rightarrow I(1, 2)$$

4- اوس ٻي جدول ترتيبو او گراف ٻي رسمو:

$x$	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	+	-
$f''(x)$	+	+	0	-	-
$f(x)$	$+\infty$	0	2	4	$-\infty$
$f(x)$					

نسبي Min

نسبي Max



**دریم مثال:** د  $f(x) = x^3 - 3x^2 + x + 1$  د تابع د تناظر د مرکز مختصات پیدا کړئ.

**حل:** پوهېږو چې د تناظر مرکز د  $x = \frac{-b}{3a}$  له رابطې څخه لاسته راځي، نو:

$$x = \frac{-b}{3a} = \frac{-(-3)}{3 \cdot 1} = 1 \Rightarrow f(1) = 1^3 - 3(1)^2 + 1 + 1 = 0$$

د تناظر د مرکز مختصات  $C(1, 0)$



پوښتنې

1. د لاندې تابع گانو د تحولونو جدول ترتیب او گرافونه یې رسم کړئ.

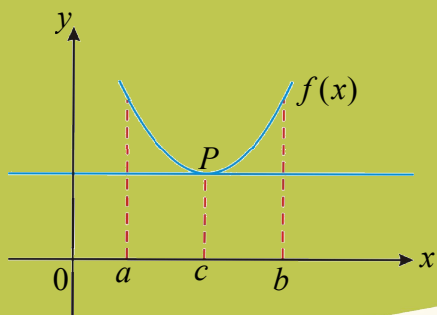
$$a) f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x + 1 \quad , \quad b) f(x) = -(x-1)^3$$

2- د  $f(x) = -2x^2 + 6x - 3$  د تناظر د مرکز مختصات پیدا کړئ.

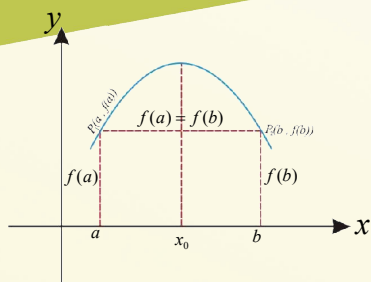
## د رول قضیه

### Rolle Theorem

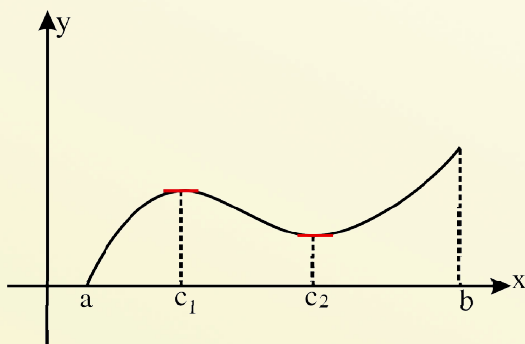
په مخامخ شکل کې د  $f(x)$  تابع او د  $\Delta$  مستقیم خط یوله بل سره څه اړیکې لري او  $f'(c)$  له څه سره مساوي دی.



### فعالیت



- په مخامخ شکل کې د  $(a, b)$  په انټروال کې د  $f(x)$  په منحنی باندې داسې ټکۍ یا ټکي شته چې له هغو څخه په منحنی داسې مماس رسم شي چې د  $x$  له محور سره موازي وي.
- د  $f(x)$  تابع په کوم انټروال کې متمادي او په کومه فاصله کې د مشتق ورده.
- که چېرې  $f(a) = f(b)$  وي، نو د  $x_0$  ټکي په  $(a, b)$  انټروال کې وڅېړئ. له پورتنی فعالیت څخه لاندې قضیه بیانولای شو:



**قضیه:** که چېرې د  $f(x)$  تابع په انټروال کې متمادي او د  $a < x < b$  په انټروال کې د مشتق وړ وي او  $f(a) = f(b)$  وي، نو لږ تر لږه د  $x_0$  یو ټکی په  $a < x_0 < b$  انټروال کې شته چې د  $f'(x_0) = 0$  شي.

**ثبوت:** څرنگه چې د  $f(x)$  تابع په ورکړل شوی انټروال کې متمادي او د مشتق وړ ده، نو بحراني Extreme ټکی لري.

1- که  $f(x) = c$  ثابته تابع وي، نو واضح ده چې  $f'(x) = 0$  ده.

2- که د  $f(x)$  تابع ثابته نه وي، او  $x_2, x_1 \in (a, b)$  او  $f(x_1) > 0$  وي، نو تابع په  $x_0 \in [a, b]$  کې یو Maximum قیمت لري چې  $f(x_0) \geq f(x_1) > 0$  شي او همدا راز که  $f(x_2) < 0$  وي، نو تابع یو اصغري Minimum قیمت لري.

څرنگه چې په Extreme نقطو کې د تابع مشتق صفر دی، نو  $f'(x_0) = 0$  کېږي.

**لومړی مثال:** د رول قضیه د  $f(x) = \cos x$  د تابع لپاره په  $[a, b] = [\pi, 5\pi]$  فاصله کې تطبیق کړئ.

**حل:** څرنگه چې  $f(\pi) = f(5\pi) = -1$  سره دی، نو د  $f(x)$  تابع د هره  $x$  لپاره د مشتق وړ ده، نو د  $(\pi, 5\pi)$  په انټروال کې متمادي او په  $(\pi, 5\pi)$  په انټروال کې مشتق منونکی ده چې د Rolle د قضیې مطابق په  $(\pi, 5\pi)$  کې لږ تر لږه یو  $x_0$  موجود دی چې د هغه قیمت لپاره  $(\cos x)' = 0$  شي. څرنگه چې  $(\cos x)' = -\sin x$  دی، نو باید  $-\sin x = 0$  معادلې لږ تر لږه یو حل په  $(\pi, 5\pi)$  کې موجود وي.  $-\sin x = 0 \Rightarrow \sin x = 0$  دا معادله په  $(\pi, 5\pi)$  کې درې ځله  $2\pi, 3\pi, 4\pi$  قیمتونه اخیستلای شي.

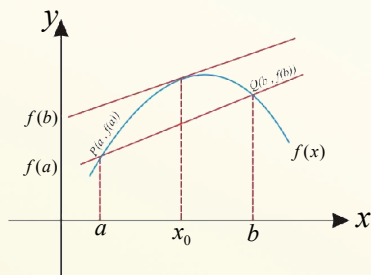
**دویم مثال:** د رول قضیه د  $f(x) = \sqrt{1-x^2}$  تابع په  $[a, b] = [-1, 1]$  فاصله کې تطبیق کړئ.

**حل:** لیدل کېږي چې تابع د پیل او پای په ټکو کې د مشتق وړ نه ده، ولې د رول د قضیې د تطبیق وړ ده ځکه  $f(-1) = f(1) = 0$  دی  $f(0)$  تابع په  $[-1, 1]$  کې متمادي ده او په  $[-1, 1]$  کې د  $x_0$  یو عدد شته چې  $f'(x_0) = 0$  شي او هغه  $x_0 = 0$  دی.

د  $y'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u}}$  فورمول څخه په گټه اخیستنې سره مشتق په لاس راوړو:

$$f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow f'(0) = \frac{0}{\sqrt{1-0^2}} = 0$$

### د متوسط قیمت قضیه (لاگرانز قضیه):



مخامخ شکل په پام کې ونیسئ:

• د یوې مستقیمې کرښې میل له کومې رابطې څخه په

لاس راځي؟

• د  $PQ$  د مستقیمې کرښې میل پیدا کړئ.

• د  $PQ$  د کرښې میل د  $f(x)$  د تابع له مشتق سره څه اړیکه لري؟

له پورتنی فعالیت څخه قضیه داسې بیانوو:

**قضیه:** که چیرې  $f(x)$  د  $[a, b]$  په فاصله کې متمادي او د  $(a, b)$  په فاصله کې د مشتق وړ وي د

$(a, b)$  له انټروال څخه د  $c$  یو عدد شته دی داسې چې:  $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$

یعنې:  $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$  دی.

**ثبوت:** یوه مرستندویه تابع په پام کې نیسو، لیدل کېږي چې:

$$g(a) = f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot a = \frac{f(a)b - f(b)a}{b - a} \quad \text{..... I}$$

$$g(b) = f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot b = \frac{f(a)b - f(b)a}{b - a} \quad \text{..... II}$$

نو  $g(a) = g(b)$  سره دی درول د قضیې پر بنسټ سره د  $c$  عدد د  $(a, b)$  انټروال کې شته دی چې

نو:  $g'(c) = 0$

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \Rightarrow g'(x) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0 \Rightarrow f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$\Rightarrow f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$



**مثال:** د  $f(x) = 2x^3 - 8x + 1$  په تابع کې د متوسط قیمت قضیه په  $[a, b] = [1, 3]$  کې وڅیړئ.

**حل:** لیدل کېږي چې د  $f(x)$  تابع په  $[1, 3]$  کې متمادي او په  $(1, 3)$  کې د مشتق وړ ده، نو د متوسط

قیمت له قضیې سره سم په  $(1, 3)$  کې یو  $x_0$  شته داسې چې:

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{36}{2} = 18$$

$$f'(x_0) = 6x^2 - 8 = 18 \Rightarrow x_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{26}{6}}$$

د C د پیدا کولو لپاره لرو:

څرنګه چې  $x = \sqrt{\frac{26}{6}}$  په  $(1, 3)$  کې ګډون لري، نو  $x_0 = \sqrt{\frac{13}{3}}$  دی.

او  $x = -\sqrt{\frac{26}{6}}$  په  $(1, 3)$  فاصله کې واقع نه ده، نو د قبول وړ نه ده.

پوښتنې



1- که چېرې د  $f(x) = \sqrt{x(4-1)}$  تابع د  $[0, 4]$  په انټروال کې راکړل شوې وي د  $x_0$  قیمت داسې

پیدا کړئ چې د رول قضیه په پورتنیې تابع کې صدق وکړي.

2- که د  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x$  تابع راکړل شوې وي د  $x_0$  قیمت د  $[0, 3]$  په فاصله کې داسې وټاکئ چې

د رول قضیه په هغې کې صدق وکړي.

## 3- د هوییتال قاعده (L' Hopital)

مخامخ مساوات څه بیانوي؟

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$



- د  $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}$  تابع لېمیت په هغه صورت کې پیدا کړئ چې  $x \rightarrow 1$  ته تقرب وکړي.
  - د پورتنی تابع د صورت او مخرج مشتق پیدا او د تابع له لېمیت سره یې پرتله کړئ.
  - د  $f(x) = \frac{3x^4 - 3x^2 - 4x - 1}{2x^2 - 4x^3 + 2x^4}$  تابع لېمیت په هغه صورت کې پیدا کړئ چې  $x \rightarrow \infty$  ته تقرب وکړي.
  - د پورتنی تابع د صورت او مخرج مشتق پیدا او د تابع له لېمیت سره یې پرتله کړئ.
- له پورتنی فعالیت څخه دا قاعده بیانوو:

## د هوییتال قاعده:

که د  $f(x)$  او  $g(x)$  تابع گانې د  $(a, b)$  په انټروال کې تعریف او د مشتق وړ وي. که چېرې  $\frac{f(x)}{g(x)}$  د لېمیت نسبت  $x \rightarrow a$  قیمت کې د  $\frac{0}{0}$  مبهم شکل او په  $x \rightarrow \infty$  کې د  $\frac{\infty}{\infty}$  شکل ونیسي. په دې حالت کې د تابع د لېمیت د پیدا کولو لپاره د  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  مشتق پیدا کوو او په هغه کې قیمتونه وضع کوو که بیا هم د تابع شکل مبهم وي، مشتق نیولو ته ادامه ورکوو تر څو د ابهام شکل ختم شي د مثال په ډول:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 + x - 10}{x^2 - 4} = \frac{2 \cdot 2^2 + 2 - 10}{2^2 - 4} = \frac{0}{0}$$

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{4x + 1}{2x} = \frac{4 \cdot 2 + 1}{2 \cdot 2} = \frac{9}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2x + 5)(x - 2)}{(x - 2)(x + 2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x + 5}{x + 2} = \frac{2 \cdot 2 + 5}{2 + 2} = \frac{9}{4}$$

یا

**مثال:** د لوییتال له قاعدې څخه په گټه اخیستنې سره د لاندې توابعو لېمیتونه پیدا کړئ.

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \sin 2x}{x - \sin 2x}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^4 - 81}{x - 3}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 4x + 6}{7x^2 - 2x + 1}$$

**لومړی ځواب:**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \sin 2x}{x - \sin 2x} = \frac{0 + \sin 2 \cdot 0}{0 - \sin 2 \cdot 0} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x + \sin 2x)'}{(x - \sin 2x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + 2 \cos 2x}{1 - 2 \cos 2x} = \frac{1 + 2}{1 - 2} = -3$$

**دویم ځواب:**

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^4 - 81}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3^4 - 81}{3 - 3} = \frac{81 - 81}{3 - 3} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x^4 - 81)'}{(x - 3)'} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{4x^3}{1} = \frac{4 \cdot 3^3}{1} = 108$$

**دریم ځواب:**

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 4x + 6}{7x^2 - 2x + 1} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(3x^2 - 4x + 6)'}{(7x^2 - 2x + 1)'}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x - 4}{14x - 2} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(6x - 4)'}{(14x - 2)'} = \frac{6}{14} = \frac{3}{7}$$

**پوښتنې**

د لوییتال له قاعدې څخه په گټه اخیستنې سره لاندې لېمیتونه پیدا کړئ.

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$$

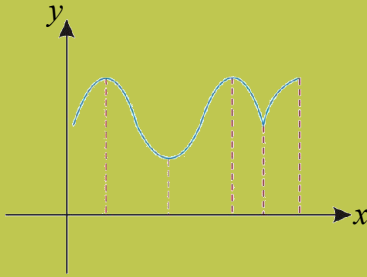
$$b) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5 - 1}{x^3 - 1}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x^3}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5}{3x^3}$$

## د بحراني ټکو تطبیق

په مخامخ شکل کې تر ټولو لوړ ټکی او تر ټولو ټیټ ټکی وښیئ او دا ټکی د څه په نامه یادېږي.



مثالونه:

1 مثال- دوه عددونه پیدا کړئ چې مجموعه یې 20 او د ضرب حاصل یې لوی ممکن قیمت ولري.

**حل:** که لومړی عدد ته  $x$  وویل شي، نو دویم عدد  $20 - x$  دی او د ضرب حاصل یې د تابع په شکل داسې:  $f(x) = x(20 - x)$  لیکو، څرنگه چې د  $x$  عدد په  $[0, 20]$  انټروال کې تحول کوي، نو د تابع مطلق اعظمي قیمت په  $[0, 20]$  کې لټوو:

$$f(x) = 20x - x^2$$

$$f'(x) = 0$$

$$20 - 2x = 0$$

$$-2x = -20$$

$$x = 10$$

$$f(10) = 20 \cdot 10 - 10^2 = 200 - 100 = 100$$

$$f(0) = 20 \cdot 0 - 0^2 = 0$$

$$f(20) = 20 \cdot 20 - 20^2 = 400 - 400 = 0$$

لیدل کېږي چې  $(10, 100)$  د تابع اعظمي نقطه ده، نو مطلوب عددونه  $x_1 = 10$  او  $x_2 = 10$  چې د ضرب حاصل یې 100 دی.

2 مثال- د یوه خوځنده جسم د حرکت معادله د  $x = (t - 2)(t - 3)$  په بڼه راکړل شوې ده، د جسم متوسط سرعت د  $t_1 = 3$  او  $t_2 = 4$  د وخت په وپټو کې پیدا کړئ.

**حل:** د منځني سرعت د تعریف په مرسته لیکلای شو چې:

$$\text{منځنی سرعت} = \frac{x_{(t_2)} - x_{(t_1)}}{t_2 - t_1} = \frac{x_{(4)} - x_{(3)}}{4 - 3} = \frac{2 - 0}{4 - 3} = 2$$

3مثال- د کرې د حجم او سطحې د مشتقونو تر منځ منځنی نسبت پیدا کړئ.

حل:

$$\text{د کرې حجم} = v_{(x)} = \frac{4}{3} \pi x^3 \Rightarrow \frac{dv}{dx} = \frac{4}{3} \pi \cdot 3x^2 = 4\pi x^2$$

$$\text{د کرې مساحت} = S_{(x)} = 4\pi x^2 \Rightarrow \frac{ds}{dx} = 4\pi \cdot 2x = 8\pi x$$

$$\frac{dv}{ds} = \frac{4\pi x^2}{8\pi x} \Rightarrow \frac{dv}{ds} = \frac{1}{2} x$$

4مثال- د سانتي گراد (C) او فارنهایت (F) د حرارت تر منځ  $C = \frac{5}{9}(F - 32)$  اړیکه شته، تاسې د (C) او (F)

تر منځ منځنی نسبت وټاکئ.

حل: د منځنی سرعت د تعریف  $(V_m = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x})$  په مرسته لیکلای شو:

$$\frac{\Delta C}{\Delta F} = \frac{C(F + \Delta F) - C(F)}{\Delta F} = \frac{\frac{5}{9}(F + \Delta F - 32) - \frac{5}{9}(F - 32)}{\Delta F} = \frac{5}{9}$$

5مثال- یوه ځمکه چې مستطیلي شکل لري، محیط یې 200m دی، کېدای شي اعظمي Maximum

مساحت یې پیدا کړئ.

حل: په ورکړل شوي محیط سره کولای شو، ډېر مستطیلونه رسم کړو، ولې شرط دا دی چې هغه مستطیل زموږ

مطلوب دی چې مساحت یې تر ټولو زیات وي، نو که د مستطیل اوږدوالی په  $x$  او سور یې په  $y$  وښیو، نو

لیکلای شو:

$$\text{میحط} = 2x + 2y = 200$$

$$\text{میحط} = x + y = 100 \Rightarrow y = 100 - x$$

$$\text{مساحت} = x \cdot y$$

$$S = x(100 - x) = 100x - x^2, \quad D_s = IR$$

$$x > 0, \quad y > 0 \Rightarrow 100 - x > 0 \Rightarrow x < 100$$

اوس د  $S = 100x - x^2$  په تابع کې  $0 < x < 100$  انټروال کې د تابع اعظمي مساحت داسې پیدا کوو:

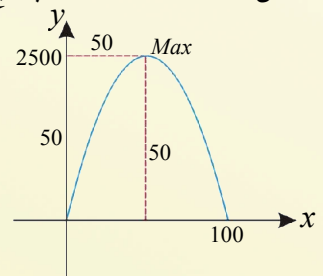
$$S' = 100 - 2x$$

$$S' = 0 \Rightarrow 100 - 2x = 0 \Rightarrow x = 50 \Rightarrow S_{(50)} = 2500$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} S(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} S(x) = 0$$

$x$	0	50	100
$S'$		+	0
$S$	0	↗	↘
		2500	0



په پایله کې له شکل څخه هم لیدل کېږي چې تر ټولو لوی مساحت هغه وخت لاسته راځي چې د مستطیل طول 50 واحد وي، نو مساحت 2500 واحد مربع کېږي.

6 مثال- که د دوو عددونو مجموعه 200 وي، هغه عددونه داسې وټاکئ چې د مربعاتو مجموعه یې اصغري شي.

**حل:** که چېرې دا عددونه X او Y وي، نو  $x + y = 200$  او که  $x$ ،  $T_{(x)} = x^2 + y^2$  فرض کړو، نو:

$$\begin{aligned} T_{(x)} &= x^2 + y^2 \\ &= x^2 + (200 - x)^2 \\ &= x^2 + x^2 - 400x + (200)^2 \\ &= 2x^2 - 400x + 40000 \end{aligned}$$

$$T'_{(x)} = 4x - 400$$

$$T'_{(x)} = 0$$

$$4x - 400 = 0$$

$$x = 100$$

په پایله کې ویلای شو چې د مربعاتو تر ټولو کوچنی مجموعه عبارت ده له:  $T_{(100)} = 20000$

7 مثال- د A ټکی د  $y = \frac{2}{x}$  د منحنی له پاسه حرکت کوي، تر ټولو کوچنی انټروال د A د نقطې او د مختصاتو د

مبدې ترمنځ لاسته راوړو.

**حل:** د  $y = \frac{2}{x}$  تابع منحنی پر مخ د A د نقطې مختصات  $A(x, \frac{2}{x})$  دي، نو:

$$\overline{OA} = \sqrt{x^2_{(A)} + y^2_{(A)}} = \sqrt{x^2 + \frac{4}{x^2}}$$

$$\overline{OA}^2 = x^2 + \frac{4}{x^2} = d^2 \Rightarrow d'_{(x)} = (x^2)' + (\frac{4}{x^2})' = 2x - \frac{8x}{x^4} = 2x - \frac{8}{x^3}$$

$$d'_{(x)} = \frac{2x^4 - 8}{x^3}$$

$$d'_{(x)} = 0$$

$$2x^4 = 8$$

$$x_1 = \sqrt{2} \quad , \quad x_2 = -\sqrt{2}$$

$$d_{\sqrt{2}} = (\sqrt{2})^2 + \frac{4}{(\sqrt{2})^2} = 2 + \frac{4}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

$$d_{-\sqrt{2}} = 4$$

په پایله کې تر ټولو کوچنی فاصله له مبدا څخه 2 واحد ده.

8مثال- یو مکعب مستطیل چې قاعده یې مربع ده، په پام کې نیسو، که د دريو وارو بعدونو مجموعه 24 وي، د مکعب تر ټولو لوی حجم پیدا کړئ.

حل: که د مکعب مستطیل د قاعدې ضلعي ته  $x$  او جگوالي ته یې  $y$  وویل شي، نو:

$$x + x + y = 24 \Rightarrow y = 24 - 2x$$

څرنګه چې  $y \geq 0$  دی، نو  $0 \leq x \leq 12$  کېږي او د مکعب مستطیل حجم عبارت دي له:

$$V = x^2 \cdot y \Rightarrow V = x^2(24 - 2x) = 24x^2 - 2x^3$$

$$V = 24x^2 - 2x^3$$

$$V'(x) = 48x - 6x^2$$

$$V'(x) = 0$$

$$48x - 6x^2 = 0$$

$$x(48 - 6x) = 0$$

$$x_1 = 0$$

$$48 - 6x = 0$$

$$-6x = -48$$

$$x = 8$$

$$V(0) = 24 \cdot 0^2 - 2 \cdot 0^3$$

$$= 0 - 0 = 0$$

$$V'(0) = 0$$

$$V(8) = 24 \cdot (8)^2 - 2 \cdot (8)^3$$

$$= 1536 - 1024 = 512$$

$$V(8) = 512$$

$$V(12) = 24 \cdot (12)^2 - 2 \cdot (12)^3 = 3456 - 3456 = 0$$

$$V(12) = 0$$



نو د مکعب مستطیل تر ټولو لوی حجم  $512 \text{ cm}^3$  دی.



1- د  $y = x^3 + x^2 + x + 1$  تابع تحولات پیدا او منحنی یې رسم کړئ.

2- که د اوسپنې له یوې تختې څخه چې هره ضلع یې  $1 \text{ m}$  طول لري یو سر خلاص بکس جوړېږي. دهغه له

څلورو کنجونو څخه څلور مساوي مربع ګانې پرې کړئ او بیا هغه قات کړئ کوچنی مربع ګانې په کومه اندازه

پرې شي چې نوموړی بکس ممکن اعظمي حجم ولري.

3- د  $y = x^2$  ګراف ته ډېره نژدې نقطه له  $A(3,0)$  نقطې سره پیدا کړئ.

## د څپرکي مهم ټکي

- د  $f(x)$  يوه تابع هغه وخت متزايد بلل کېږي چې د  $[a, b]$  په انټروال کې متمادی او په  $(a, b)$  خلاص انټروال کې د مشتق وړ او  $f'(x) > 0$ .
- د  $f(x)$  يوه تابع هغه وخت متناقصه بلل کېږي چې د  $[a, b]$  په انټروال کې متمادی او په  $(a, b)$  خلاص انټروال کې د مشتق وړ او  $f'(x) < 0$ .
- د تابع له تر ايد څخه مطلب دا دی چې د  $x$  د متحول په زياتېدو سره د تابع قيمت زيات او د تابع له تناقص څخه مطلب دا دی چې د  $x$  متحول په زياتېدو سره د تابع قيمت کم شي.
- په يوه تابع کې تر ټولو لوړې نقطې ته مطلق اعظمي (Absolute Maximum) او تر ټولو ټيټې نقطې ته مطلق اصغري (Absolute Minimum) وايي، د  $x$  هغه قيمتونه چې د هغوی لپاره تابع يا اعظمي او يا اصغري قيمتونه اخلي د Extreme په نامه يادېږي.
- مطلق Maximum: د  $(x_0, f(x_0))$  نقطه مطلقه اعظمي بلل کېږي، که چېرې د  $f(x)$  د تعريف په ساحه کې د هر  $x$  لپاره  $f(x) \leq f(x_0)$  وي، نو  $f(x_0)$  ته مطلقه اعظمي وايي.
- مطلق Minimum: د  $(x_0, f(x_0))$  نقطه مطلقه اصغري بلل کېږي، که چېرې د  $f(x)$  د تعريف په ساحه کې د هر  $x$  لپاره  $f(x) \geq f(x_0)$  وي، نو  $f(x_0)$  ته مطلقه اصغري وايي.
- د  $y = f(x)$  د تابع منحنی په يوه انټروال کې محدب بلل کېږي، که چېرې په دې انټروال کې په منحنی مماس رسم شي، نو مماس د منحنی پورته خواته پروت وي او د تابع دويم مشتق منفي په لاس راځي.
- د  $y = f(x)$  د تابع منحنی په يوه انټروال کې مقعر بلل کېږي، که چېرې په نوموړي انټروال کې په منحنی مماس رسم شي، نو مماس د منحنی بنسټه خوا پروت وي، او د تابع دويم مشتق مثبت په لاس راځي.
- هغه ټکی چې د تابع له مقعريت څخه محدبیت ته او يا برعکس خپل لوری بدلوي، د انعطاف (Inflection) ټکی بلل کېږي.
- هغه تابع گانې چې د  $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$  بڼه ولري، د هوموگرافیک تابع گانو په نامه يادېږي، په دې شرط چې  $c \neq 0$  وي.



• که چپری د  $f(x)$  تابع د  $a \leq x \leq b$  په انټروال کې متمادی او د  $a < x < b$  په انټروال کې د مشتق وړ او  $f(a) = f(b)$  وي، نولر ترلره د  $x_0$  یو ټکی په  $a < x_0 < b$  په انټروال کې شته چې  $f'(x_0) = 0$  دی، دا قضیه د رول د قضیې په نامه یادېږي.

• که چپری  $f(x)$  په  $[a, b]$  فاصله کې متمادی او د  $(a, b)$  په خلاصه فاصله کې د مشتق وړ وي د  $x_0$  یو عدد د  $a$  او  $b$  ترمنځ شته چې  $f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$  دی دا د متوسط قیمت قضیه بلل کېږي.

### د هویپیتال قاعده:

که د  $f(x)$  او  $g(x)$  تابع گانې د  $(a, b)$  په انټروال کې تعریف او د مشتق وړ وي.

که چپری  $\frac{f(x)}{g(x)}$  د لېمیت نسبت کله چې  $x \rightarrow a$  د  $\frac{0}{0}$  مبهم شکل او په هغه صورت کې چې  $x \rightarrow \infty$  کې

د  $\frac{\infty}{\infty}$  شکل ونیسي په دې حالت کې د تابع د لېمیت د پیدا کولو لپاره د  $\frac{f'(x)}{g'(x)}$  لېمیت پیدا کوو او په هغه کې

قیمتونه وضع کوو که بیا هم د تابع شکل مبهم وي، مشتق نیولو ته دوام ورکوو ... تر څو د ابهام شکل ختم شي.

## د دریم څپر کې پوښتنې

لاندي پوښتنو ته څلور ځوابونه ورکړل شوي دي، سم ځواب په نښه کړئ:

1- که یوه تابع په  $[a, b]$  انتروال کې متمادی او د مشتق وړ وي، نو هغه وخت متزايد ده چې :

a)  $f'(x) = 0$     b)  $f'(x) < 0$     c)  $f'(x) > 0$     d)  $f'(x) \geq 0$

2- په یوه تابع کې تر ټولو لوړې نقطې ته:

a) هېڅ یو    b) Absolute Maximum وایي    c) Inflection وایي    d) Absolute Minimum وایي

3- د  $f(x) = \frac{x+1}{x^2+2x}$  په تابع کې د Extreme ټکي عبارت دی له:

a) نه لري    b) درې ټکي    c) یو ټکي    d) دوه ټکي

4- هغه ټکي چې تابع له مقعریت څخه محدبیت ته بدلوي:

a) هېڅ یو    b) اصغري ټکي دی    c) دانعطاف ټکي دی    d) اعظمی ټکي دی

5- د  $f(x) = ax^2 + bx + c$  د تابع د تعریف ساحه عبارت له:

a)  $(-\infty, +\infty)$     b)  $(-\infty, 0)$     c)  $(0, -\infty)$     d) هېڅ یو

6- د  $f(x) = \frac{2x-1}{x+2}$  تابع عمودي مجانب عبارت دی له:

a)  $x = 1$     b)  $x = 2$     c)  $x = -1$     d)  $x = -2$

7- د هوموگرافیک تابع عمودي مجانب عبارت دی له:

a)  $y = \frac{a}{c}$     b)  $x = -\frac{d}{c}$     c)  $y = \frac{c}{a}$     d)  $y = -\frac{c}{d}$

8- د  $g(x) = \frac{4x^2-6x}{x^2-4}$  تابع افقي مجانب عبارت دی له:

a) 4    b) 6    c) -6    d) -4

9- لاندي کومه الجبري اړیکه حقیقت لري:

a)  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$     b)  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f'(x)$     c)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$     d) هېڅ یو

لاندي پوښتني ځواب کړئ:

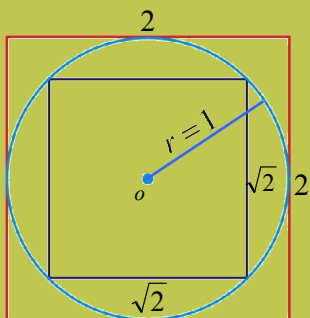
1. د  $f(x) = x^2 - x$  د تابع د منحنی میل د  $P(3,0)$  په ټکي کې پیدا کړئ.
2. د  $f(x) = -x^2$  په تابع کې د  $[3, 4]$  په انټروال کې د منحنی د بدلون ټکي پیدا کړئ.
3. د نیوټن د خارج قسمت په مرسته د لاندنیو تابع گانو مشتق پیدا کړئ.  
1)  $f(x) = 2x$       2)  $f(x) = 3x^2 - 1$       3)  $f(x) = \sqrt{2}x$
4. د لاندنیو تابع گانو په ورکړل شوو نقطو کې مشتق پیدا کړئ.  
1)  $f(x) = 2x - 1$  ,  $x_0 = -1$       2)  $f(x) = x^2$  ,  $x_0 = 2$
5. د لاندي تابع گانو مشتق پیدا کړئ.  
1)  $f(x) = 2x - 4x^2$       2)  $f(x) = 3x^3 - 1$
6. په ورکړل شوو ټکو کې د تابع گانو مشتق محاسبه کړئ.  
1)  $f(x) = 7x^2 - 3x$  ,  $x_0 = -1$   
2)  $f(x) = 6x^2 - 2x - 1$  ,  $x_0 = \frac{1}{2}$
7. د  $f(x) = 3x^5 - 4x^2 - 3x$  د تابع څلور ځلې مشتق ونیسئ او د هغې گراف رسم کړئ.
8. د لاندي تابع گانو مشتق پیدا کړئ.
- 1)  $f(x) = x^3 \sec x$       2)  $f(x) = \sin(3x - 1)$       3)  $f(x) = \cos^2 2x$
9. کوم مثبت عدد دی چې د خپل معکوس سره جمع شي د جمعې حاصل یې تر ټولو کوچنی شي؟
10. د  $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$  تابع گراف رسم کړئ.
11. د  $f(x) = \frac{4x^2}{x^2 + 1}$  تابع گراف رسم کړئ.
12. د  $f(x) = \sin x$  مثلثاتي تابع گراف رسم کړئ.
13. د  $f(x) = \tan x$  مثلثاتي تابع گراف رسم کړئ.

# خلورم خپرکی انتیگرال



## د ریمان مجموعہ

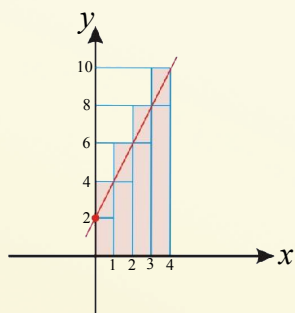
### Riemann's Sum



په مخامخ شکل کې که د دایرې شعاع یو واحد ده، د دایرې د محیطي او محاطي څلور ضلعي گانو مساحت حساب کړئ او وویاست چې ددې دایرې مساحت له مخامخ څلور ضلعي گانو له مساحت سره څه اړیکه لري؟



### فعالیت



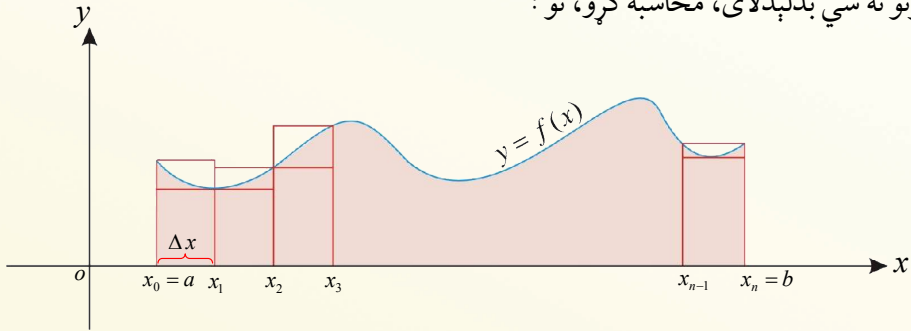
- هغه مساحت چې د  $x$  د محور او  $f(x) = 2x + 2$  د تابع د گراف په منځ کې د  $[0, 4]$  په انټروال کې محصور شوی دی، خط خط کړئ.
- د  $y = 2x + 2$  تابع په گراف کې د څلورو لاندینو او پورتنیو مستطیلونو مساحتونه چې په شکل کې ښودل شوي دي، پیدا کړئ.

- د پورتنیو مستطیلونو د مساحت مجموعه او د لاندینو مستطیلونو د مساحت مجموعه د تابع د گراف د لاندیني مساحت سره په ورکړ شوي واټن کې څه اړیکه لري؟
- د پورته په څېر فعالیت د اتو مساوي لاندینو مستطیلونو او د اتو مساوي پورتنیو مستطیلونو لپاره تکرار کړئ او پایله یې د گراف د لاندې مساحت سره په نوموړي واټن کې پرتله کړئ.
- که چېرې د پورتنیو مستطیلونو د مساحتونو مجموعه او لاندینو مستطیلونو<sup>1</sup> د جوړولو لپاره د تابع په گراف کې د فاصلې وېش زیات کړو د پورتنیو او لاندینو مستطیلونو د مساحتونو مجموعه کوم قیمت ته نژدې کېږي.

<sup>1</sup> - که چېرې د  $x$  په محور د فاصلو تقسیمات زیات کړو او یا که چېرې په یوه فاصله کې د مستطیلونو شمېر زیات شي، په هم هغه اندازه د گراف لاندې مساحت د دقیق په لاس راځي.

له پورتني فعالیت څخه لاندې تعريف لاسته راځي:

**تعريف:** فرضوو چې د  $y = f(x)$  تابع د  $[a, b]$  په تړلي انټروال کې متمادي او تعريف شوي وي که چېرې د ناحيې مساحت چې د  $x$  د محور او  $y = f(x)$  د تابع د گراف ترمنځ واقع دی چې په هندسي شکلونو نه شي بدله لای، محاسبه کړو، نو:



د  $[a, b]$  تړلي انټروال په  $n$  مستطیلونو وېشو، څرنگه چې د هر مستطیل عرض د  $(\Delta x = \frac{b-a}{n})$  رابطې څخه په لاس راځي او د مستطیلونو طول عبارت دی تابع قیمت په هماغه نقطه کې دی. او د مستطیلونو د هر انټروال اوږدوالی د  $i = 1, 2, 3, \dots, n$  لپاره په لاندې ډول دی:

$$x_0 = a, x_1 = a + \Delta x, x_2 = a + 2\Delta x, \dots, x_i = a + i\Delta x, \dots, x_n = b$$

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], [x_2, x_3], \dots, [x_{i-1}, x_i], \dots, [x_{n-1}, x_n]$$

که په شکل کې د لاندینيو مستطیلونو مساحت په  $f(x_{i-1})\Delta x$  او د پورتنيو مستطیلونو مساحت په  $f(x_i)\Delta x$  وښودل شي، نو لرو چې:

$$\text{د لاندینيو مستطیلونو د مساحتونو مجموعه} = f(x_0)\Delta x + f(x_1)\Delta x + \dots + f(x_{n-1})\Delta x = \sum_{i=1}^n f(x_{i-1})\Delta x$$

$$\text{د پورتنيو مستطیلونو د مساحتونو مجموعه} = f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \dots + f(x_n)\Delta x = \sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta x$$

$$\sum_{i=1}^n f(x_{i-1})\Delta x < A < \sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta x \quad \text{نو: وښیو، په } A \text{ مساحت په } A \text{ وښیو، نو:}$$

که چېرې د رابطې له اطراف څخه لېمیت ونیسو، نو لرو چې:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_{i-1})\Delta x \leq \lim_{n \rightarrow \infty} A \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta x$$

د سانډويچ د قضيې پر بنسټ ليكلای شو چې:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x = A = \lim_{n \rightarrow \infty} 2f(x_{i-1}) \Delta x$

نو  $\sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x$  ته د ريمان مجموع او ددې مجموعې لېميټ يعنې  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x$  ته د ريمان د

مجموعې لېميټ وايي.

**لومړی مثال:** د  $[0, 2]$  انټروال په څلور مساوي برخو ووېشئ، د  $y = x^2 + 1$  منحنې او  $x$  محور تر منځ

مساحت پيدا کړئ.

**حل:** که چېرې  $[0, 2]$  انټروال په څلورو مساوي برخو ووېشو، نو د مستطيلونو عرض داسې په لاس

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{2-0}{4} = \frac{1}{2}$$

ددې مستطيلونو دهر انټروال اوږدوالی عبارت دي له:

$$x_0 = a = 0, \quad x_1 = a + \Delta x = \frac{1}{2}$$

$$x_2 = a + 2\Delta x = 1, \quad x_3 = a + 3\Delta x = \frac{3}{2}$$

$$x_4 = 2$$

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], [x_2, x_3], [x_3, x_4]$$

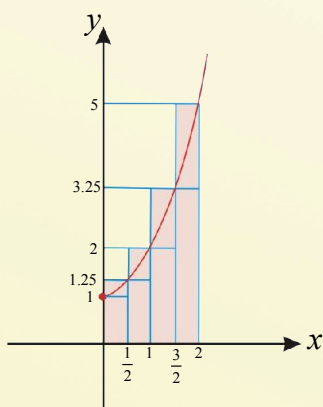
$$\left[0, \frac{1}{2}\right], \left[\frac{1}{2}, 1\right], \left[1, \frac{3}{2}\right], \left[\frac{3}{2}, 2\right]$$

په لاس راغلي قيمتونه د  $X$  په ځای په تابع کې وضع کوو.

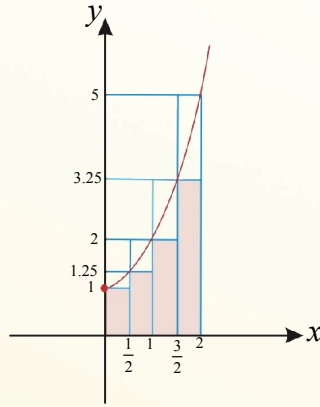
$$f(x) = x^2 + 1, \quad f(0) = 1$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 1.25, \quad f(1) = 2$$

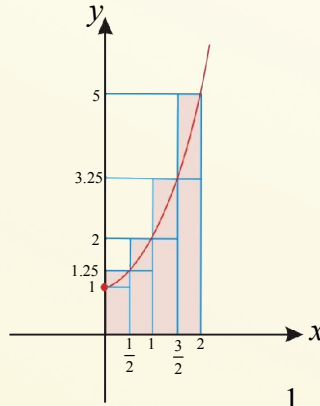
$$f\left(\frac{3}{2}\right) = 3.25, \quad f(2) = 5$$







د لاندېنيو مستطيلونو د مساحتونو مجموعه  $= 1 \times \frac{1}{2} + 1.25 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{2} + 3.25 \times \frac{1}{2} = 3.75$



د پورتنیو مستطيلونو د مساحتونو مجموعه  $= 1.25 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{2} + 3.25 \times \frac{1}{2} + 5 \times \frac{1}{2} = 5.75$

$$3.75 < A < 5.75$$

**دويم مثال:**  $f(x) = 1 + x$  تابع دريمان د مجموعې لمبیت په  $[1, 10]$  انټروال کې پيدا کړئ.

**حل:**

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{10-1}{n} = \frac{9}{n}$$

$$x_i = a + \Delta x i = 1 + \left[\frac{9}{n}\right] i, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \sum_{i=1}^n (1 + x_i) \Delta x \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \Delta x \sum_{i=1}^n (1 + x_i) \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \Delta x \sum_{i=1}^n 1 + \Delta x \sum_{i=1}^n x_i \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{9}{n} \sum_{i=1}^n 1 + \Delta x \sum_{i=1}^n (a + \Delta x i) \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{9}{n} \sum_{i=1}^n 1 + \frac{9}{n} \sum_{i=1}^n \left(1 + \frac{9}{n} i\right) \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{9}{n} \sum_{i=1}^n 1 + \frac{9}{n} \left( \sum_{i=1}^n 1 + \sum_{i=1}^n i \right) \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{9}{n} \cdot n + \frac{9}{n} \left( n + \frac{9}{n} \cdot \frac{n(n+1)}{2} \right) \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ 9 + \frac{9}{n} \left( n + \frac{9n^2 + 9n}{2n} \right) \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ 9 + \frac{9}{n} \left( \frac{2n^2 + 9n^2 + 9n}{2n} \right) \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ 9 + \frac{9}{n} \left( \frac{11n^2 + 9n}{2n} \right) \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ 9 + \frac{99n^2 + 81n}{2n^2} \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ 9 + \frac{99n^2}{2n^2} + \frac{81n}{2n^2} \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ 9 + \frac{99}{2} + \frac{81}{2n} \right] \\ &= 9 + \frac{99}{2} = 58.5 \end{aligned}$$

باید به یاد ولرو:

$$\sum_{i=1}^n c = cn$$

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

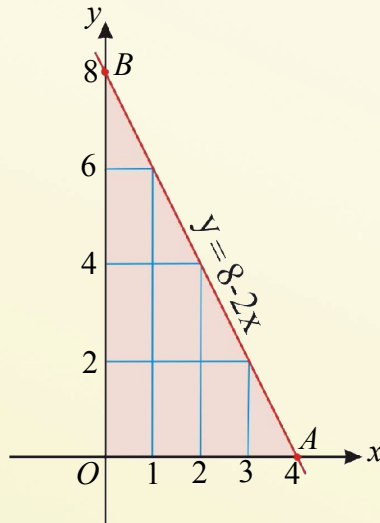


1. د  $[0,3]$  انټروال په بشپړو مساوي برخو له وېشلو څخه وروسته د  $y = 3x$  مستقیم خط او د  $x$  د محور تر منځ مساحت محاسبه کړئ.

2. د  $\Delta x = 0.5$  قیمت لپاره او د لاندې جدول د قیمتونو په پام کې نیولو سره گراف رسم، د لاندینيو مستطیلونو د مساحتونو مجموعه او د پورتنیو مستطیلونو د مساحتونو مجموعه پیدا کړئ.

x	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3
y	14	20	26	32	38	44	50

3. د  $y = 8 - 2x$  تابع گراف د لاندې  $OAB$  مثلث مساحت د  $[0,4]$  په انټروال کې د ریمان د مجموعې د لېمیت څخه په گټه اخیستنې سره پیدا کړئ.



## د انتیگرال مفهوم

### Concept of Integral

خرنگه چې پوهېږئ د شکلونو لاندېني او پورتنی مساحتونه د انتیگرال په واسطه محاسبه کېږي. آيا کولای شو چې د مخامخ شکل پورتنی مساحت په لاس راوړو.



د هغې تابع انتیگرال چې مشتق یې معین وي او یا په بل عبارت د ریمان مجموعي لېمیت ته انتیگرال وايي (دا)  $\int$  د انتیگرال علامه ده، د  $sum$  د کلیمې یا د ریمان د مجموعي د  $S$  توري غزیدلی حالت دی، لکه:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x = \int f(x) dx$  چې دلته  $f(x)$  تابع او  $dx$  د  $f(x)$  تابع د انتیگرال متحول نظر  $x$  ته دی.

انتیگرالونه عموماً په دوه ډوله دي. معین او غیر معین انتیگرالونه، هغه انتیگرالونه چې په ترتیب سره یې تر څېړنې لاندې نیسو:

### I- غیرمعین انتیگرال Indefinite Integral



فعالیت

- که د  $F(x) = 2x^2 - 1$  تابع وي له دې تابع څخه مشتق ونیسئ.
  - ددې تابع له مشتق څخه انتیگرال ونیسئ.
  - په لاس راغلی انتیگرال له لومړنۍ تابع سره پرتله کړئ او ووايئ چې  $(-1)$  په نوموړي تابع کې د څه په نامه یادېږي.
  - که په پورتنی تابع کې  $(-1)$  په  $C$  ونوموو د  $f(x)$  تابع له څه سره مساوي ده؟
  - پورتنی فعالیت د  $F(x) = x^6 + 1$  تابع لپاره تکرار کړئ او ووايئ چې  $f(x)$  له څه سره مساوي ده.
- له پورتنی فعالیت څخه لاندې تعریف په لاس راځي:

**تعریف:** که چېرې د  $f(x)$  تابع د  $[a, b]$  په تړلي انټروال کې تعریف او  $F(x)$  د  $f(x)$  یوه لومړنۍ تابع وي. د  $F(x) + C$  تابع گانو سټ په داسی حال کې چې  $C$  یو ثابت عدد وي د  $f(x)$  تابع غیرمعین

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

انتیگرال په نامه یادېږي او داسې لیکل کېږي:

لومړی مثال:  $\int x dx$  پیدا کړئ.

$$\text{حل: } \int x dx = \frac{x^{1+1}}{1+1} + C = \frac{x^2}{2} + C$$

دویم مثال:  $\int \frac{1}{\sqrt[7]{x^3}} dx$  حساب کړئ.

$$\text{حل: } \int \frac{1}{\sqrt[7]{x^3}} dx = \int x^{-\frac{3}{7}} dx = \frac{x^{-\frac{3}{7}+1}}{-\frac{3}{7}+1} + C = \frac{x^{\frac{4}{7}}}{\frac{4}{7}} + C = \frac{7}{4} \sqrt[7]{x^4} + C$$

دریم مثال:  $\int x^{\frac{3}{2}} dx$  پیدا کړئ.

$$\text{حل: } \int x^{\frac{3}{2}} dx = \frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} + C = \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + C = \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} + C = \frac{2}{5} \sqrt{x^5} + C$$



پوښتنې

لاندې انټیګرالونه محاسبه کړئ:

a)  $\int \sqrt[5]{x^3} dx$

d)  $\int \frac{x^2}{\sqrt[4]{x^2}} dx$

b)  $\int \frac{1}{x^4} dx$

e)  $\int \sqrt[8]{x^4} \cdot x dx$

c)  $\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx$

## د غیرمعین انتیگرال خواص

$$\left. \begin{aligned} \int k \, dx \\ \int [f(x) \pm g(x)] \, dx \\ \int [f(x) \cdot g(x)] \, dx \\ \int \frac{f(x)}{g(x)} \, dx \quad , \quad g(x) \neq 0 \end{aligned} \right\} = ?$$

### Properties of indefinite integral

تاسې د لمبیت او مشتق خواص مخکې مطالعه کړي؟ آیا کیدای شي چې ورته خواص په غیر معین انتیگرال کې هم وي؟



د مشتقاتو له خواصو څخه په کار اخیستنې د لاندې تابع گانو مشتق پیدا کړئ.

$$f(x) = 3x^4$$

$$f(x) = 2x^3 - \frac{1}{x^2}$$

$$f(x) = \sin x + \cos x$$

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

له پورتنی فعالیت څخه لاندې پایلې په لاس راوړو:

څرنګه چې د تابع گانو د مشتق د پیدا کولو لپاره له ځانګړو قوانینو څخه ګټه اخیستل کېږي، غیرمعین انتیګرالونه

هم د داسې خواصو لرونکي دي چې هغه پرته له ثبوت څخه قبلوو:

$$1- \text{که } k \text{ یو ثابت عدد وي، نو لرو چې: } \int k dx = k \int dx = kx + C$$

**مثال:** د  $\int 5 dx$  انتګرال پیدا کړئ.

$$\text{حل: } \int 5 dx = 5 \int dx = 5x + C$$

$$2- \text{که چېرې } n \neq -1 \text{ وي، نو: } \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

**مثال:** د  $\int x^4 dx$  انتیگرال پیدا کړئ.

**حل:** 
$$\int x^4 dx = \frac{x^{4+1}}{4+1} + C = \frac{1}{5}x^5 + C$$

3- که چېرې  $a$  یو ثابت عدد او  $f(x)$  تابع وي، نو:

$$\int a f(x) dx = a \int f(x) dx$$

**مثال:** د  $\int 2x^2 dx$  انتیگرال محاسبه کړئ.

**حل:** 
$$\int 2x^2 dx = 2 \int x^2 dx = 2 \frac{x^3}{3} + C = \frac{2}{3}x^3 + C$$

4- که چېرې  $f(x)$  او  $g(x)$  دوی تابع گانې وي په دې صورت کې د تابع گانو د جمع او تفریق د حاصل انتیگرال مساوي دی په:

$$\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$$

**مثالونه:**

a) 
$$\int (2x^2 + 3) dx = \int 2x^2 dx + \int 3 dx = \frac{2x^3}{3} + 3x + C$$

b) 
$$\int (8 - 2x) dx = 8 \int dx - 2 \int x dx = 8x - x^2 + C$$

5- که چېرې د تابع گانو ترادف تر انتیگرال لاندې وي، په دې صورت کې د دوی انتیگرال مساوي دی په:

$$\int [f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)] dx = \int f_1(x) dx + \int f_2(x) dx + \dots + \int f_n(x) dx$$

**مثال:**

$$\begin{aligned} \int [x^3 - 6x^2 + 9x + 1] dx &= \int x^3 dx - \int 6x^2 dx + \int 9x dx + \int dx \\ &= \frac{x^4}{4} - \frac{6x^3}{3} + \frac{9x^2}{2} + x + C \end{aligned}$$

6- که  $f(x)$  او  $g(x)$  دوی تابع گانې وي، په دې حالت کې د تابع گانو د ضرب د حاصل انتیگرال، مساوي نه دی د انتیگرالونو د ضرب له حاصل سره په جلا توگه، یعنی:

$$\int [f(x) \cdot g(x)] dx \neq \int f(x) dx \cdot \int g(x) dx$$

**مثال:** که چېرې  $f(x) = x + 1$  او  $g(x) = x - 2$  وي، نو:

**حل الف:** لومړی په تابع گانو د ضرب عملیه تطبیق کوو او وروسته یې انتیگرال په لاس راوړو:

$$\begin{aligned} \int [f(x) \cdot g(x)] dx &= \int [(x+1)(x-2)] dx = \int (x^2 - 2x + x - 2) dx \\ &= \int (x^2 - x - 2) dx \\ &= \int x^2 dx - \int x dx - \int 2 dx \\ &= \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x + C \end{aligned}$$

**حل ب:** اوس د هرې تابع انتیگرال بېلا بېل محاسبه کوو او وروسته یې سره ضربوو په لاس راغلي قیمتونه سره پرتله کوو.

$$\begin{aligned} \int f(x) dx \cdot \int g(x) dx &= \int (x+1) dx \cdot \int (x-2) dx = (\int x dx + \int dx) (\int x dx - \int 2 dx) \\ &= \left(\frac{x^2}{2} + x + C\right) \left(\frac{x^2}{2} - 2x + C\right) = \left(\frac{x^2}{2} + x\right) \left(\frac{x^2}{2} - 2x\right) + C \\ &\Rightarrow \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x + C \neq \left(\frac{x^2}{2} + x\right) \left(\frac{x^2}{2} - 2x\right) + C \end{aligned}$$

په پایله کې څرگنده شوه چې نوموړی مساوات حقیقت نه لري.

7- که چېرې  $f(x)$  او  $g(x)$  دوه تابع گانې وي په دې صورت کې د توابعو د تقسیم د حاصل انتیگرال مساوي

$$\int \frac{f(x)}{g(x)} dx \neq \frac{\int f(x) dx}{\int g(x) dx} \quad \text{یعنې: حاصل تقسیم سره، یعنی:}$$

**مثال:** که چېرې  $f(x) = x^2 + 2x$  او  $g(x) = x$  وي، نو لرو:

**د الف جزء حل:** لومړی د تابع گانو د تقسیم د حاصل انتیگرال په لاس راوړو.

$$\int \frac{f(x)}{g(x)} dx = \int \frac{x^2 + 2x}{x} dx = \int \left(\frac{x^2}{x} + \frac{2x}{x}\right) dx = \int (x + 2) dx = \int x dx + \int 2 dx = \frac{1}{2} x^2 + 2x + C$$



د ب جزء حل : اوس د صورت او مخرج د تابع گانو انتیگرالونه بېلا بېل په لاس راوړو او وروسته یې سره پرتله کوو.

$$\frac{\int f(x)dx}{\int g(x)dx} = \frac{\int (x^2 + 2x)dx}{\int xdx} = \frac{\int x^2 dx + \int 2x dx}{\int xdx}$$
$$= \frac{\frac{1}{3}x^3 + x^2}{\frac{1}{2}x^2} + C = \frac{\frac{1}{3}x^3}{\frac{1}{2}x^2} + \frac{x^2}{\frac{1}{2}x^2} + C$$

په پایله کې څرگنده شوه چې

$$\int \frac{f(x)}{g(x)} dx \neq \frac{\int f(x)dx}{\int g(x)dx}$$



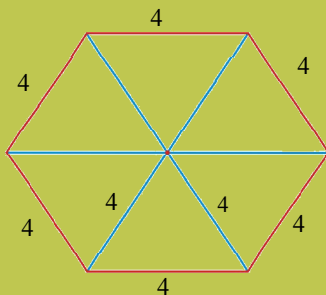
د انتیگرال له خاصیتونو څخه په گټه اخیستنې سره لاندې انتیگرالونه محاسبه کړئ:

- $\int -17dx = ?$
- $\int \frac{(1+x)^2}{1+x} dx = ?$
- $\int 2x^4 dx = ?$
- $\int \frac{1}{x^5} dx = ?$
- $\int (2x^2 + 4x^3 - 5x + 9)dx = ?$
- $\int (2x+3)^6 dx = ?$
- $\int \frac{x^3 + 2x^2}{x^2} dx = ?$
- $\int (2+x)dx = ?$

## معین انتیگرال

### Definite Integral

د شپږ ضلعي دننه مثلثونو د مساحتونو مجموعه پيدا او د شپږ ضلعي له مساحت سره يې پرتله کړئ.



- د  $f(x) = 2x$  تابع گراف د  $[2, 5]$  په انټروال کې د  $n = 5$  لپاره رسم کړئ او د گراف لاندېنی مساحت پيدا کړئ
  - په شکل کې د گراف لاندېنی مساحت د کومو دوو عددونو ترمنځ پروت دی.
- د پورتنۍ فعالیت پایله داسې بیانوو:

**تعریف:** که چېرې د  $f(x)$  تابع په  $[a, b]$  انټروال کې متمادي وی، نو د  $f(x)$  تابع د ریمان مجموعې لېمیت ته کله چې  $n$  بې نهایت ته نژدې شی او د فرعي انټروالونو ( $\Delta x$ ) لوی اوږدوالی صفر ته نژدې شي، د  $f(x)$  تابع له  $x = a$  څخه تر  $x = b$  پورې د معین انتیگرال په نوم یادېږي، یعنې:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x = \int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

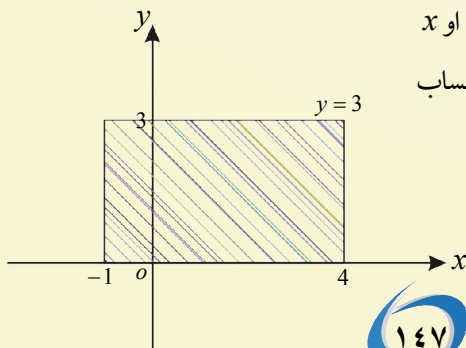
چې  $a$  ته د انتیگرال لاندېنی سرحد او  $b$  ته د انتیگرال پورتنی سرحد وایي.

**لومړی مثال:** د  $\int_1^3 x^2 dx$  انتیگرال قیمت پيدا کړئ.

**حل:** لومړی د  $F(x)$  لومړنی تابع پيدا کوو او بیا د مطلوب انتیگرال قیمت ټاکو:

$$\int_1^3 x^2 dx = \left[ \frac{x^3}{3} \right]_1^3 = \frac{3^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{27-1}{3} = \frac{26}{3}$$

**دویم مثال:** هغه مساحت چې د  $y = 3$  خط او  $x$  محور ترمنځ په  $[-1, 4]$  انټروال کې محصور دی حساب کړئ.



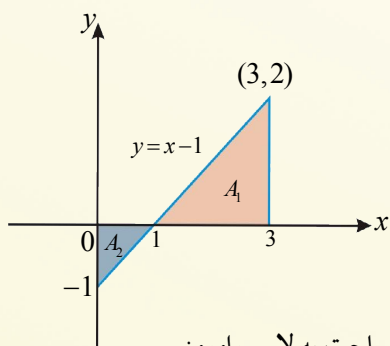
**حل:** د  $\int_{-1}^4 3 dx$  معین انتیگرال دیوه مستطیل مساحت راښيي چې په تېر شکل کې لیدل کېږي.

ددې مستطیل مساحت د مستطیل د عرض او طول د ضرب له حاصل سره مساوي دی.

$$3[4 - (-1)] = 3 \cdot 5 = 15$$

له انتیگرال څخه په ګټه اخیستنې سره د مستطیل مساحت په لاندې ډول محاسبه کوو.

$$\int_{-1}^4 3 dx = [3x]_{-1}^4 = 3[4 - (-1)] = 15$$



**درېم مثال:** هغه مساحت چې د  $y = x - 1$  مستقیم

خط او  $x$  محور ترمنځ په  $[0, 3]$  انټروال کې

محصور دی په لاس راوړئ.

**حل:**

له شکل څخه په ګټه اخیستنې سره لومړی د ښي خوا د لوی مثلث مساحت په لاس راوړو:

$$A_1 = \frac{1}{2}(2 \cdot 2) = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2$$

$$A_2 = \frac{1}{2}[1(-1)] = \frac{1}{2}(-1) = -\frac{1}{2}$$

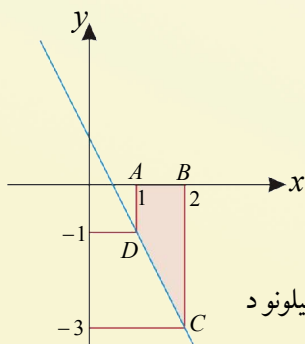
د کوچني مثلث مساحت عبارت دی له:

$$A_1 + A_2 = 2 - \frac{1}{2} = 1.5$$

د  $A_2$  او  $A_1$  د مساحتونو مجموعه عبارت ده له:

$$\int_0^3 (x-1) dx = \left[\frac{x^2}{2} - x\right]_0^3 = \left[\frac{3^2}{2} - 3\right] - 0 = \frac{9}{2} - 3 = 1.5$$

په پایله کې د نوموړي انتیگرال قیمت عبارت دی له:



### پوښتنې

1. د مخامخ شکل څخه په کار اخیستنې سره هغه مساحت چې د

$y = -2x + 1$  د مستقیم خط او د  $x$  محور ترمنځ په  $[1, 2]$  انټروال کې

محصور دی په لاس راوړئ.

2. د  $f(x) = x^2$  تابع د لاندېنيو مستطیلونو د مساحت مجموعه او پورتنیو مستطیلونو د

مساحت مجموعه په  $[0, 1]$  انټروال کې د  $n = 4$  لپاره په لاس راوړئ.

## د معین انتیگرال خواص

## Properties of definite integral

آیا کولای شو چې د غیر معین انتیگرال د ځانگړونو څخه په گټه اخیستنې سره مخامخ اړیکې پوره کړو.

$$\left. \begin{aligned} \int_a^b c \, dx \\ \int_a^b [f(x) \pm g(x)] \, dx \\ \int_a^b f(x) \, dx \end{aligned} \right\} = ?$$



• د  $\sum_{k=1}^4 3k^2$  مجموعه حساب کړئ.

• د  $\int_a^b x \, dx$  د انتیگرال قیمت د  $[-1, 1]$  په انټروال کې پیدا کړئ.

• د  $\int_0^2 (1+3x) \, dx$  انتیگرال محاسبه کړئ.

د پورتنی فعالیت پایله داسې بیانوو:

د ځینو انتیگرالونو محاسبه د قیمت په وضع کولو سره امکان لري او ځینې یې امکان نه لري، دې ته اړتیا پیدا کېږي، ترڅو معین انتیگرال ثبوت کړو.

1. د ثابتې تابع انتیگرال د  $[a, b]$  په انټروال کې یعنې  $\int_a^b C \, dx$  عبارت دی، له:

$$\int_a^b C \, dx = C \int_a^b dx = C[x]_a^b = C(b-a)$$

**ثبوت:** د  $[a, b]$  انټروال په  $n$  مساوي برخو، یعنې  $\Delta x_i = \frac{b-a}{n}$  وپشو او د هر  $x_i$  لپاره د  $i$  - ام انټروال

$$f(x_i) = C \quad i = 0, 1, 2, \dots, n$$

$$S_n = \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x_i = \sum_{i=1}^n C \Delta x_i = C(\Delta x_1 + \Delta x_2 + \dots + \Delta x_n) = C\left(\frac{b-a}{n} + \frac{b-a}{n} + \dots + \frac{b-a}{n}\right)$$

$$= C(b-a)\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n}\right) = C(b-a)\frac{n}{n} = C(b-a) \Rightarrow \int_a^b C \, dx = C(b-a)$$

**مثال:**  $\int_3^4 dx$  معین انتیگرال حساب کریں:

**حل:**  $\int_3^4 dx = [x]_3^4 = 4 - 3 = 1$

2. کہ  $f(x)$  تابع  $[a, b]$  پہ انٹروال کے انتیگرال منونکی وی او  $k$  یو ثابت حقیقی عدد وی، نو لرو چپی:

$$\int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$$

**ثبوت:** کہ چہرے  $[a, b]$  انٹروال د  $x_i, i = 1, 2, \dots, n$  پہ  $n$  مساوی برخو وویشو، نو د ریمان د مجموعی او انتیگرال د تعریف له مخی لیکلائی شو:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n k f(x_i) \Delta x = \lim_{n \rightarrow \infty} k \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x \\ &= k \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x = k \int_a^b f(x) dx \\ &\Rightarrow \int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx \end{aligned}$$

**مثال:** د  $\int_{-2}^2 4 dx$  پاکلی انتیگرال محاسبہ کریں:

**حل:**  $\int_{-2}^2 4 dx = 4 \int_{-2}^2 dx = 4[x]_{-2}^2 = 4(2 - (-2)) = 4 \cdot 4 = 16$

3. کہ د  $F(x)$  تابع یوہ لومرنی تابع د  $f(x)$  او پہ  $[a, b]$  انٹروال کے متمادی وی، نو:

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

**ثبوت:**

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x &= \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = -(-F(b) + F(a)) \\ &= -(F(a) - F(b)) = - \int_b^a f(x) dx \Rightarrow \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx \end{aligned}$$

**مثال:** د  $\int_2^3 2x dx = - \int_3^2 2x dx$  انتیگرال مساوات پیدا کریں:

**حل:** لومړی د کېن لوری انتیگرال او وروسته د بڼې خوا انتیگرال محاسبه کوو:

$$\int_2^3 2x \, dx = \left[ \frac{2x^2}{2} \right]_2^3 = \frac{2(3)^2}{2} - \frac{2(2)^2}{2} = \frac{2(9)}{2} - \frac{2(4)}{2} = \frac{18}{2} - \frac{8}{2} = \frac{18-8}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

$$\int_3^2 2x \, dx = \left[ \frac{2x^2}{2} \right]_3^2 = \frac{2(2)^2}{2} - \frac{2(3)^2}{2} = \frac{2(4)}{2} - \frac{2(9)}{2} = \frac{8}{2} - \frac{18}{2} = \frac{8-18}{2} = -\frac{10}{2} = -5$$

د لاسته راغلو قیمتونو په پام کې نیولو سره پایله په لاس راځي:

$$\int_2^3 2x \, dx = -\int_3^2 2x \, dx$$

4- که د  $f(x)$  تابع په  $[a, b]$  انټروال کې متمادي وي په هغه صورت کې لرو چې:  $\int_a^a f(x) \, dx = 0$

**ثبوت:** څرنگه چې  $\Delta x = 0$  دی، نو:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x &= \int_a^a f(x) \, dx = F(a) - F(a) = 0 \\ \Rightarrow \int_a^a f(x) \, dx &= 0 \end{aligned}$$

**مثال:** د  $\int_3^3 3x^2 \, dx$  انتیگرال محاسبه کړئ.

$$\text{حل: } \int_3^3 3x^2 \, dx = \left[ \frac{3x^3}{3} \right]_3^3 = [x^3]_3^3 = [3^3 - 3^3] = 27 - 27 = 0$$

5- که  $f(x)$  او  $g(x)$  تابع گانې په  $[a, b]$  انټروال کې انتیگرال منونکي وي، نو:

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)] \, dx = \int_a^b f(x) \, dx \pm \int_a^b g(x) \, dx$$

**ثبوت:**

$$\begin{aligned} \int_a^b [f(x) \pm g(x)] \, dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n [f(x_i) \pm g(x_i)] \Delta x \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x \pm \sum_{i=1}^n g(x_i) \Delta x \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x \pm \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n g(x_i) \Delta x = \int_a^b f(x) \, dx \pm \int_a^b g(x) \, dx \end{aligned}$$

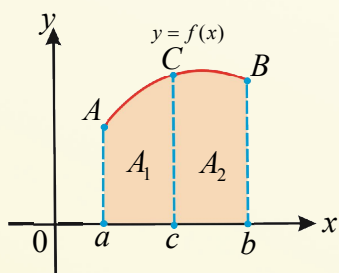
مثالونه:

حل:

$$a) \int_0^1 (4 + 3x^2) dx = \int_0^1 4 dx + \int_0^1 3x^2 dx = 4 \int_0^1 dx + 3 \int_0^1 x^2 dx = 4[x]_0^1 + 3 \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = 4 + 1 = 5$$

$$b) \int_0^3 (x^2 - 1) dx = \int_0^3 x^2 dx - \int_0^3 dx = \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^3 - [x]_0^3 = \frac{27}{3} - 3 = \frac{27-9}{3} = \frac{18}{3} = 6$$

6. که چېرې د  $f(x)$  تابع د  $(a, b)$  په یوه تړلی انتروال کې څرنگه چې  $a < c < b$  دی د  $a$  او  $b$  او  $c$  ټکی پکی شامل



دې انتیگرال منونکي وي، نو:  $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$

**ثبوت:** دلته د  $[a, b]$  انتروال په دوو انتروالونو د  $[a, c]$  او

$[c, b]$  تقسیموو، وروسته د  $f(x)$  تابع انتیگرال په نوموړو

انتروالونو کې په پام کې نیسو.

د انتیگرال اصلي مفهوم ته په پام  $A = \int_a^b f(x) dx$  په حقیقت کې د هغې سطحې مساحت دی چې د

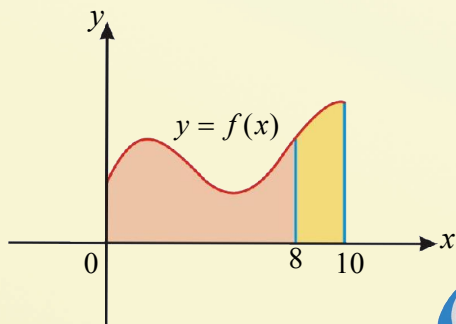
$f(x)$  تابع د گراف او  $x$  د محور ترمنځ د  $[a, b]$  په انتروال کې محصوره ده. په داسې حال کې چې د هغې

سطحې مساحتونه چې د  $f(x)$  گراف او د  $x$  د محور ترمنځ د  $[a, c]$  او  $[c, b]$  په انتروالونو کې محصوره ده

او په شکل کې واضح لیدل کېږي عبارت ده له:  $A_2 = \int_c^b f(x) dx$ ،  $A_1 = \int_a^c f(x) dx$

په پایله کې ویلای شو چې:  $A = A_1 + A_2 \Rightarrow \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$

**مثال:** که چېرې  $\int_0^{10} f(x) dx = 17$  او  $\int_0^8 f(x) dx = 12$  وي، نو د  $\int_8^{10} f(x) dx$  انتیگرال قیمت محاسبه کړئ.



حل:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

$$\int_0^{10} f(x) dx = \int_0^8 f(x) dx + \int_8^{10} f(x) dx$$

اوس د  $\int_8^{10} f(x) dx$  انتیگرال قیمت په لاس راوړو:

$$\int_8^{10} f(x) dx = \int_0^{10} f(x) dx - \int_0^8 f(x) dx = 17 - 12 = 5$$

7. که چېرې د  $f(x) \leq g(x)$  تابع گانې په  $[a, b]$  انټروال کې انتیگرال منومنکي وي، نو لرو:

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

**ثبوت:**

$$\int_a^b g(x) dx - \int_a^b f(x) dx = \int_a^b [g(x) - f(x)] dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n [g(x) - f(x)] \Delta x$$

نو څرنگه  $g(x) - f(x) \geq 0$  او  $\Delta x \geq 0$  دی، نو د سلسلې هر حد مثبت دی، نو د هغې لېمیت هم منفي نه

دی یعنې:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n [g(x_i) - f(x_i)] \Delta x \geq 0 \Rightarrow \int_a^b [g(x) - f(x)] dx \geq 0$$

$$\int_a^b g(x) dx - \int_a^b f(x) dx \geq 0 \Rightarrow \int_a^b g(x) dx \geq \int_a^b f(x) dx$$

**مثال:** که چېرې  $f(x) = 1 - \frac{x^2}{4}$  او  $g(x) = 1 + \frac{x^2}{2}$  وي، نو د  $x > 1$  لپاره وبنیاست چې

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx \text{ دی.}$$

**حل:**

$$\int_a^b \left(1 - \frac{x^2}{4}\right) dx \leq \int_a^b \left(1 + \frac{x^2}{2}\right) dx$$

$$\int_a^b 1 dx - \int_a^b \frac{x^2}{4} dx \leq \int_a^b 1 dx + \int_a^b \frac{x^2}{2} dx$$

$$[x]_a^b - \frac{1}{12}[x^3]_a^b \leq [x]_a^b + \frac{1}{6}[x^3]_a^b$$



پوهېرو چې  $(b-a) > 0$  دی، نو:

$$(b-a) - \frac{1}{12}(b^3 - a^3) \leq (b-a) + \frac{1}{6}(b^3 - a^3) \quad / \div (b-a)$$

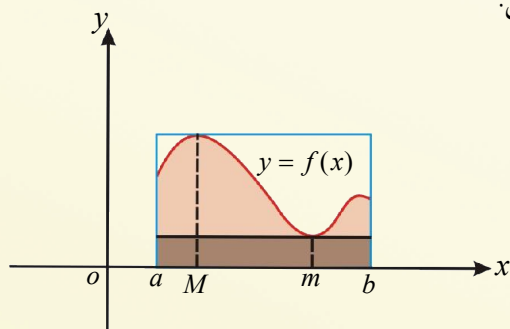
$$1 - \frac{1}{12}(a^2 + ab + b^2) \leq 1 + \frac{1}{6}(a^2 + ab + b^2)$$

$$-\frac{1}{12} \leq +\frac{1}{6} \quad / \div (a^2 + ab + b^2)$$

$$-\frac{1}{12} < \frac{1}{6}$$

8. که د  $f(x)$  تابع په  $[a, b]$  انټروال کې متمادی او  $m, M$  قیمتونه په ترتیب سره د تابع مطلق اعظمي او مطلق

اصغري قیمتونه په نوموړی انټروال کې وی، نو  $m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$



**ثبوت:** څرنگه چې  $m \leq f(x) \leq M$  دی، نو لرو چې:

$$\int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b M dx$$

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

چې دا وروستی اړیکه د انټیگرال د تخمینې

قضیې په نامه یادېږي.

**مثال:**  $\int_0^1 e^{-x^2} dx$  انټیگرال په تخمینې توګه حساب کړئ.

**حل:** څرنگه چې د  $f(x) = e^{-x^2}$  تابع په  $[0, 1]$  انټروال کې متمادی ده او  $M = f(0) = e^0 = 1$  مطلق

اعظمي او  $m = f(1) = e^{-1}$  مطلق اصغري دی، نو لرو چې:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

$$e^{-1}(1-0) \leq \int_0^1 e^{-x^2} dx \leq 1(1-0)$$

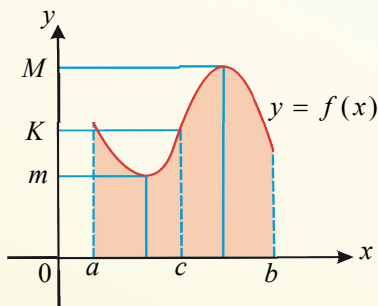
$$e^{-1} \leq \int_0^1 e^{-x^2} dx \leq 1$$

$$e^{-1} = \frac{1}{e} \approx 0,3679 \Rightarrow 0,3679 \leq \int_0^1 e^{-x^2} dx \leq 1$$

په پایله کې د انتیگرال تخمینی قیمت د 1 او 0.3679 قیمتونو ترمنځ قرار لري.

9. که د  $f(x)$  تابع په  $[a, b]$  انټروال کې متمادی وي، نو د  $c$  یو حقیقي عدد شته چې:  $a \leq c \leq b$  دی، نو:

$$\int_a^b f(x) dx = f(c)(b-a)$$



**ثبوت:** د  $a < b$  لپاره  $m$  او  $M$  قیمتونه په ترتیب د

تابع مطلق اصغري او اعظمي قیمتونه د  $[a, b]$  په

انټروال کې وي، لکه: مخامخ شکل د انتیگرال د

تخمیني قضیې څخه په کار اخیستنې د

$c \in [a, b]$  لپاره لرو چې:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a) \Rightarrow m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M$$

فرضوو  $K = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$  وي، نو  $m \leq K \leq M$  دی او د هر  $c$  حقیقي عدد لپاره،  $a \leq c \leq b$

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \Rightarrow \int_a^b f(x) dx = f(c)(b-a) \text{ نو: } K = f(c)$$

چې دا وروستی اړیکه د متوسط قیمت د قضیې په نامه یادېږي څرنگه چې  $f(c)$  د تابع متوسط قیمت په

$[a, b]$  انټروال کې دی.

**مثال:** د  $f(x) = x^2$  تابع په  $[1, 4]$  انټروال کې په پام کې ونیسئ آیا کولای شئ

$$\int_1^4 x^2 dx = \left[ \frac{x^3}{3} \right]_1^4 = \left[ \frac{64}{3} - \frac{1}{3} \right] = \left[ \frac{64-1}{3} \right] = \frac{63}{3} = 21$$

**حل:** څرنگه چې  $f(x) = x^2$  تابع ده، اوس که د  $x$  په ځای د  $c$  قیمت په تابع کې وضع کړو

نو:  $f(c) = c^2$  سره کېږي چې دلته د متوسط قیمت د قضیې د فورمول څخه د  $c$  قیمت داسې په لاس

$$\int_a^b f(x) dx = f(c)(b-a) \text{ راځي:}$$

اوس په پورتنی رابطه کې یې قیمت اېږدو، لرو چې:

$$\int_1^4 x^2 dx = c^2(4-1)$$

$$21 = 3c^2 \Rightarrow c^2 = \frac{21}{3} \Rightarrow c^2 = 7 \Rightarrow c = \sqrt{7}$$

$$k = f(c) , f(c) = c^2 = (\sqrt{7})^2 = 7 \Rightarrow f(c) = 7 , k = 7$$

ښکاره شوه چې د تابع یو قیمت مساوي په  $k$  او  $1 < \sqrt{7} < 4$  دی.

له مخکې څخه پوهېږو چې د مستطیل مساحت د سور او اوږدوالي له ضرب سره برابر دی، نو د متوسط قیمت په فورمول کې  $f(c)$  اوږدوالي او  $b - a$  سور دی، نو د منحنی لاندې مساحت په  $[1, 4]$  انټروال کې مساوي له هغه مستطیل سره دی چې اضلاع یې 7 او 3 دی.



## پوښتنې

1. لاندې معین انټیگرالونه محاسبه کړئ.

$$a) \int_{-1}^1 (x^3 + 2) dx = ?$$

$$e) \int_{-2}^3 3x dx$$

$$b) \int_2^5 7x dx = ?$$

$$f) \int_{-1}^2 (x^3 - \frac{1}{2}x^4) dx = ?$$

$$c) \int_{-2}^4 (-x) dx = ?$$

$$g) \int_{-4}^4 (2x^2 - \frac{1}{8}x^4) dx = ?$$

$$d) \int_{-1}^3 (2|x| - 3x) dx = ?$$

$$h) \int_1^3 \sqrt{x} dx$$

$$2. \text{ د } \int_{-1}^4 f(x) dx \text{ انټیگرال قیمت د } [-1, 4] \text{ په انټروال کې داسې پیدا کړئ چې } \int_{-1}^1 f(x) dx = 5$$

$$\text{او } \int_1^4 f(x) dx = -2 \text{ وي.}$$

3. د  $f(x) = x$  تابع په  $[0, 2]$  انټروال کې په نظر کې ونیسئ او د  $c$  قیمت په لاس راوړئ.

## 10- د انتیگرال او مشتق اساسي قضیې

یو موټر په  $72 \frac{m}{sec}$  چټکتیا سره په حرکت کې دی،  
دریور برک ته فشار ورکوي او موټر له 6 ثانیو وروسته  
ددرېرې په دې وخت کې وهل شوي فاصله پیدا کړی.

$$S(t) = v_0 \cdot t$$



فعالیت

- له مشتق د تعریف څخه په گټې اخیستنې سره د  $f(x) = x^2$  د تابع مشتق د  $h = 0$  په ټکي کې پیدا کړئ.
  - د په لاس راغلی تابع انتیگرال په  $[0, 1]$  انټروال کې محاسبه کړئ.
  - د په لاس راغلو دواړو حالتونو قیمتونه سره پرتله کړئ.
- له پورتنی فعالیت څخه په لاس راځي چې:

د انتیگرال او مشتق تر منځ یوه منطقي اړیکه شته چې له دې اړیکې څخه په کار اخیستنې سره کولای شو، د انتیگرال اصلي او اساسي قضیې په لاندې ډول ثبوت کړو:

### 1- د انتیگرال او مشتق لومړی اساسي قضیه:

که چېرې د  $f(x)$  تابع د  $[a, b]$  په انټروال کې متمادي وي او  $x$  په دې انټروال کې شامل وي، لرو چې:

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

څرنگه چې د  $f(x)$  تابع په  $[a, b]$  انټروال کې مشتق منونکې ده، نو د هر  $x \in [a, b]$  لپاره  $F'(x) = f(x)$  دی.

**ثبوت:** څرنگه چې د  $f(x)$  تابع په  $[a, b]$  انټروال کې متمادي ده، نو د هر  $x \in [a, b]$  لپاره د  $f(x)$  تابع په  $[a, x]$  انټروال کې متمادي ده په پایله کې د  $f(x)$  تابع په دې انټروال کې انتیگرال منونکې هم ده.

اوس د  $F(x)$  تابع مشتق د تعریف مطابق لیکو او بیا د  $x$  متحول ته د  $h$  په اندازه تزیاد ورکوو، لکه په لاندې ډول:

$$F'(x) = f(x)$$

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(a) + F(a) - F(x)}{h}$$

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(a) - (F(x) - F(a))}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x)|_a^{x+h} - F(x)|_a^x}{h}$$

اوس د  $f(x)$  تابع په  $f(t)$  عوض کوو:

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(t)|_a^{x+h} - F(t)|_a^x}{h}$$

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt}{h}$$

نظر دريم خاصيت ته لرو چې:  $\int_a^b f(t) dt = -\int_b^a f(t) dt$

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt}{h}$$

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_a^x f(t) dt + \int_x^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_x^{x+h} f(t) dt}{h}$$

د متوسط قيمت د قضیې څخه  $f(c) = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt$  چې  $c$  د  $x$  او  $x+h$  تر منځ واقع دی، نو کله چې

$h$  صفر ته تقرب وکړي،  $c$ ،  $x$  ته تقرب کوي، همدارنگه د  $f$  تابع له متمادیت څخه لرو:

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt = \lim_{c \rightarrow x} f(c) = f(x)$$

په پایله کې:  $F'(x) = f(x)$

**مثال:** د  $f(x) = \int_2^{x^2+1} \frac{1}{t^2+1}$  مشتق پیدا کړئ.

**حل:**

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt \quad \text{یا} \quad F(x) = \int_a^{g(x)} f(t) dt$$

$$u = g(x) = x^2 + 1$$

$$f(t) = \frac{1}{t^2 + 1}$$

$$F'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$F'(x) = \frac{1}{(x^2 + 1)^2 + 1} \cdot (x^2 + 1)' = \frac{1}{(x^2 + 1)^2 + 1} \cdot 2x$$

$$F'(x) = \frac{2x}{(x^2 + 1)^2 + 1}$$

د زنځیري قاعدې له مخې لرو:

## 2- د انتیگرال او مشتق دویمه اساسي قضیه:

که چېرې  $F(x)$  د  $f(x)$  تابع لومړنی تابع په  $[a, b]$  انټروال کې متمادی وي، په دې صورت کې لرو چې:

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$$

**ثبوت:** له مخکې قضیې څخه پوهېږو چې که  $F(x) = \int_a^x f(t) dt$  دی له دې ځایه د

هر  $x \in [a, b]$  لپاره  $F'(x) = f(x)$  نو د دې دوو مقدارونو خلاف یو ثابت مقدار شته چې:

$$f(x) - F'(x) = k \Rightarrow f(x) = F'(x) + k$$

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

$$F'(x) = f(x)$$

$$\int_a^x f(t) dt = f(x) = F'(x) + k$$

$$\int_a^x f(t) dt - F(x) = k$$

که د  $x$  په ځای په پورتنۍ رابطه کې  $a$  وضع کړو، نو:

$$\int_a^a f(t) dt - F(a) = k \quad , \quad 0 - F(a) = k \Rightarrow k = -F(a)$$

که د  $k$  قیمت په لومړۍ رابطه کې وضع کړو، نو:  $\int_a^x f(t) dt - F(x) = -F(a)$

که د  $x$  په ځای په دې رابطه کې  $b$  وضع شي، نو:  $\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$

### یادونه:

$$\int \sin x dx = -\cos x + c$$

$$\int \cos x dx = \sin x + c$$

$$\int \sec^2 x dx = \tan x + c$$

$$\int \cos ec^2 x dx = -\cot x + c$$

چې اخیری رابطه په  $\int_a^b f(t) dt = [F(x)]_a^b$  به شکل

ښودل کېږي دغه وروستی اړیکه د لومړنی تابع او

د  $\int_a^b f(t) dt$  انتیگرال ترمینځ اړیکه ښيي چې د

نیوټن “لایبنز” رابطې په نوم هم یادېږي.

مثال: د  $\int_0^1 x^2 dx$  انٹیگرال حاصل پیدا کریں:

$$\int_0^1 x^2 dx = F(1) - F(0) = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3} \cdot 1^3 - \frac{1}{3} \cdot 0^3 = \frac{1}{3} \quad \text{حل:}$$



پوئنتنی

1. لاندی مشتقات پیدا کریں:

$$a) F(t) = \int_{\sin t}^{\cos t} \frac{1}{4-x^2} dx$$

$$b) F(t) = \int_0^{\cos t} \frac{1}{4-x^2} dx$$

$$c) F(t) = \int_{-\pi}^t \frac{\cos y}{1+y^2} dy$$

$$d) F(x) = \int_1^x \frac{\sin t}{t} dt$$

2. کہ پہ  $t = f(t)$  تابع کی  $F(0) = 2$  وی، د  $F(b)$  مقدار پہ 0, 0.2, 0.4, ... 1، تکو کی پیدا کریں:

$$3. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx \quad \text{پیدا کریں.}$$

### 11- په تعویضي طریقي سره انتیگرال نیونه

– آیا کولای شئ چې مخامخ انتیگرال د نامعین انتیگرال له خواصو څخه په کار اخیستنې سره حل کړئ.  
 – که نه شی کولای، نو د جذر لاندې افاده په یوه متحول سره عوض کړئ او بیا هغه حساب کړئ او وویئ چې په انتیگرال کې د وضع کولو دا طریقه په څه نوم یادېږي.

$$\int 2x\sqrt{1+x^2} dx$$



- د  $\int_0^4 \sqrt{2x+1} dx$  انتیگرال کې د جذر لاندې افاده په  $u$  سره عوض کړئ.
- د  $u$  مشتق ونیسي او د  $dx$  قیمت پیدا کړئ.
- څرنګه چې نوموړی انتیگرال یو معین انتیگرال دی، نو د  $u = 2x + 1$  په معادله کې د  $x = 0$  او  $x = 4$  قیمتونه وضع او د انتیگرال حدودونه د  $u$  له جنسه په لاس راوړئ، وروسته د انتیگرال قیمت محاسبه کړئ.

له پورتنی فعالیت څخه لاندې پایلې ته رسېږو:

که د  $f(x)$  تابع په  $[a, b]$  انټروال کې مشتق منونکی وي،  $u = g(x)$  او  $F'(x) = f(x)$  سره تعویض شي، څرنګه چې  $du = g'(x)dx$  دی، له زنځیري قاعدې څخه لیکلای شو:

$$\int_a^b f(g(x))g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du$$

لومړی مثال: د  $\int_1^2 \frac{dx}{(3-5x)^2}$  انتیگرال قیمت پیدا کړئ.



**حل:** د قوس دننه افاده په  $u$  عوض کوو:

$$u = 3 - 5x, \quad du = -5 dx \quad dx = -\frac{du}{5}$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ u = 3 - 5x \Rightarrow u = 3 - 5 \cdot 1 = -2 \Rightarrow u = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ u = 3 - 5x \Rightarrow u = 3 - 5 \cdot 2 = 3 - 10 \Rightarrow u = -7 \end{cases}$$

$$\int_1^2 \frac{dx}{(3-5x)^2} = \int_{-2}^{-7} \frac{1}{u^2} \left(-\frac{1}{5}\right) du = -\frac{1}{5} \int_{-2}^{-7} \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{5} \left[-\frac{1}{u}\right]_{-2}^{-7} = \left[\frac{1}{5u}\right]_{-2}^{-7} = \frac{1}{5} \left[-\frac{1}{7} + \frac{1}{2}\right] = \frac{1}{14}$$

**دویم مثال:** د  $\int_0^1 x^2 (1+2x^3)^5 dx$  انٹیگرال حساب کړئ.

**حل:** د قوس دننه افاده په  $u$  عوض کوو.

$$u = 1 + 2x^3, \quad du = 6x^2 dx \Rightarrow x^2 dx = \frac{1}{6} du$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ u = 1 + 2x^3 \Rightarrow u = 1 + 2 \cdot 0 = 1 \Rightarrow u = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ u = 1 + 2x^3 \Rightarrow u = 1 + 2 \cdot 1 = 3 \Rightarrow u = 3 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^2 (1+2x^3)^5 dx &= \int_1^3 u^5 \frac{1}{6} \cdot du = \frac{1}{6} \int_1^3 u^5 du = \frac{1}{6} \left[\frac{u^6}{6}\right]_1^3 = \frac{1}{6} \left[\frac{3^6}{6} - \frac{1}{6}\right] \\ &= \frac{1}{6} \left[\frac{729}{6} - \frac{1}{6}\right] = \frac{1}{6} \left[\frac{728}{6}\right] \\ &= \frac{728}{36} = \frac{182}{9} = 20.\bar{2} \end{aligned}$$



- د  $\int x^2 \sqrt{x^3+1} dx$  انٹیگرال کې د جذر لاندې افاده د  $u$  په متحول سره تعویض کړئ.
- له  $u$  څخه مشتق ونیسئ او په لاس راغلی قیمت په لومړني انٹیگرال کې وضع او هغه حساب کړئ.

• له پورته څخه د  $F(x) + C$  په لاس راغلي تابع څخه مشتق ونیسئ او له هغې څخه لومړنی تابع په لاس راوړئ.

له پورتنی فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راځي:

که د  $F(u)$  تابع د  $f(u)$  لومړنی تابع وي، د  $u = g(x)$  د متحول په تعویض سره یوه بله تابع چې مستقل متحول یې  $x$  او متمادي مشتق ولري له زنځیري قاعدې څخه په کار اخیستنې سره لرو:

$$\int f(g(x))g'(x) dx = \int f(u) du$$

**لومړی مثال:**  $\int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}} dx$  انتیگرال حساب کړئ.

**حل:** د جذر لاندې افاده په  $u$  سره عوض کوو.

$$u = 1 - 4x^2, \quad du = -8x dx$$

$$x dx = -\frac{1}{8} du$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}} dx &= \int \frac{1}{\sqrt{u}} \left(-\frac{1}{8}\right) du = -\frac{1}{8} \int \frac{1}{\sqrt{u}} du = -\frac{1}{8} \int u^{-\frac{1}{2}} du = -\frac{1}{8} \left( \frac{u^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} \right) + C \\ &= -\frac{1}{8} \left( \frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \right) + C = -\frac{1}{8} \left( \frac{\sqrt{u}}{\frac{1}{2}} \right) + C = -\frac{1}{8} (2\sqrt{u}) + C = -\frac{1}{4} \sqrt{1-4x^2} + C \end{aligned}$$

**دویم مثال:**  $\int x^3 \cos(x^4 + 2) dx$  حساب کړئ.

**حل:** که چېرې  $u = x^4 + 2$  وضع کړو په لاس راځي:

$$u = x^4 + 2, \quad du = 4x^3 dx, \quad x^3 dx = \frac{1}{4} du$$

$$\begin{aligned} \int x^3 \cos(x^4 + 2) dx &= \int \cos u \cdot \frac{1}{4} du \\ &= \frac{1}{4} \int \cos u du \\ &= \frac{1}{4} \sin u + C \\ &= \frac{1}{4} \sin(x^4 + 2) + C \end{aligned}$$



لاندې انتيگرالونہ د تعويض له لارې محاسبہ کریں:

a)  $\int \cos 3x \, dx = ?$

b)  $\int_1^2 x\sqrt{x-1} \, dx = ?$

c)  $\int_0^7 \sqrt{4+3x} \, dx = ?$

d)  $\int 2\sqrt[3]{(1-4x)^2} \, dx = ?$

e)  $\int 2x(x^2+3)^4 \, dx = ?$

f)  $\int_0^5 \frac{x \, dx}{x^2+10} = ?$

g)  $\int \sqrt{\cos x} \sin x \, dx = ?$

## 12- په قسمي طريقې سره انټیگرال نیونه Integration by Parts



د حجروي وېش په وخت کې یوه حجره په دوو یا څو حجرو وېشل کېږي. آیا کولای شئ دا لاره (روش) په نورو شیانو کې، لکه: تېره، شگه او نورو کې ووبنو که ځواب هو وي، نو دا لاره د څه په نامه یادېږي.



• د  $\int \frac{xdx}{x^2+1}$  انټیگرال په تعویضي طریقه حل کړئ.

• د  $\int_{-1}^1 3x^2 \sqrt{x^3+1} dx$  انټیگرال قیمت په تعویضي طریقه پیدا کړئ.

• آیا کولای شئ چې د  $\int x^2 \sin x dx$  انټیگرال په تعویضي طریقه حل کړئ.

له پورتنی فعالیت څخه دې پایلې ته رسېږو:

د  $\int f(x)g(x) dx$  په انټیگرال کې  $f(x)$  او  $g(x)$  دوی مشتق منونکی تابع گانې دي چې یوه له بلې سره د

ضرب وړ وي یا نه وي، خو د انټیگرال محاسبه یې اسانه کار نه دی، که چېرې  $f(x) = u$  او  $g(x) = v$  وضع

کړو، د ضرب حاصل مشتق یې مساوي په:  $(u \cdot v)' = u' \cdot v + v' \cdot u$  دی.

له پورتنی رابطې څخه  $v' \cdot u$  په لاس راوړو اوله اطراف څخه انټیگرال نیسو:

$$v' \cdot u = (u \cdot v)' - u' \cdot v$$

$$\int v' \cdot u dx = u \cdot v - \int u' \cdot v dx \quad \text{یا} \quad \int u dv = u \cdot v - \int v du$$

چې پورتنی رابطې ته د غیرمعین انټیگرال فورمول په قسمي طریقه وايي.

که د  $u$  او  $v$  تابع گانې په  $[a, b]$  انټروال کې تعریف شوی وي، لاندې فورمول د معین انټیگرال فورمول په قسمي

لاره (طریقه) بلل کېږي.

$$\int_a^b v' u dx = u \cdot v \Big|_a^b - \int_a^b v u' dx \quad \text{یا} \quad \int_a^b u dv = u \cdot v \Big|_a^b - \int_a^b v du$$

لومړی مثال: د  $\int x \sin x dx$  انټیگرال پیدا کړئ.

حل:

$$u = x, \quad du = dx$$

$$dv = \sin x dx, \quad v = -\cos x$$

$$\int u dv = u \cdot v - \int v du$$

$$\begin{aligned} \int x \sin x dx &= x(-\cos x) - \int -\cos x dx \\ &= -x \cos x + \sin x + C \end{aligned}$$

دویم مثال: د  $\int_0^1 -x e^x dx$  انټیگرال حساب کړئ.

حل:

$$u = -x, \quad du = -dx, \quad -du = dx$$

$$dv = e^x dx, \quad v = e^x$$

$$\int_a^b v' \cdot u dx = u \cdot v \Big|_a^b - \int_a^b v \cdot u' dx$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 -x e^x dx &= [-x e^x]_0^1 + \int_0^1 e^x dx \\ &= -e^1 + 0 \cdot e^0 + [e^x]_0^1 \\ &= -e^1 + e^1 - e^0 = -e^0 \\ &= -1 \end{aligned}$$

یادونه:

$$\int e^x dx = e^x + c$$

پوښتنې

لاندې انټیگرالونه حساب کړئ.

a)  $\int \theta \cos \theta d\theta = ?$

c)  $\int x^5 \cos(x^3) dx = ?$

b)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos 2x dx = ?$

d)  $\int_0^1 x e^x dx = ?$

## د څپرکي مهم ټکي

د **ريمان مجموعه**: فرضوو د  $y = f(x)$  تابع په  $[a, b]$  انټروال کې متمادي او تعريف شوی وي او د هغې ناحيې مساحت چې د  $x$  محور او د  $y = f(x)$  منحنی ترمنځ واقع دی چې په هندسي شکلونو نه شي بدلهدلای، محاسبه کړو.

د  $[a, b]$  انټروال په  $n$  مستطیلونو تقسیموو څرنگه چې د هر مستطیل عرض د  $(\Delta x = \frac{b-a}{n})$  رابطې څخه په لاس راځي او د مستطیلونو طول عبارت دی د تابع قیمت په هم هغه ټکي کې، دا فاصلې په لاندې ډول دي:

او د مستطیلونو انټروالونه د  $i = 1, 2, 3, \dots, n$  لپاره په لاندې ډول دي:

$$x_0 = a, \quad x_1 = a + \Delta x, \quad x_2 = a + 2\Delta x, \quad \dots, \quad x_i = a + i\Delta x, \quad \dots, \quad x_n = b$$

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], [x_2, x_3], \dots, [x_{i-1}, x_i], \dots, [x_{n-1}, x_n]$$

که د لاندینيو مستطیلونو مساحت په  $f(x_{i-1})\Delta x$  او د پورتنیو مستطیلونو مساحت په  $f(x_i)\Delta x$  وښودل شي او د محصور شوي سطحې مساحت په  $A$  وښیو، نو لرو چې:

$$\sum_{i=1}^n f(x_{i-1})\Delta x < A < \sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta x$$

**نامعین انټیگرالونه**: که چېرې د  $f(x)$  تابع په  $[a, b]$  انټروال کې تعريف او  $F(x)$  د  $f(x)$  یوه لومړنۍ تابع وي. د  $F(x) + C$  توابعو سټ چې  $c$  یو ثابت عدد وي د غیرمعین انټگرال په نامه یادېږي او داسې

$$\int f(x) dx = F(x) + C \quad \text{لیکل کېږي:}$$

د نامعین انټیگرالونو خواص (ځانگړتیاوې):

$$\int k dx = k \int dx = kx + C$$

$$\int a f(x) dx = a \int f(x) dx$$

$$\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$$

$$\int [f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)] dx = \int f_1(x) dx + \int f_2(x) dx + \dots + \int f_n(x) dx$$

$$\int [f(x) \cdot g(x)] dx \neq \int f(x) dx \cdot \int g(x) dx$$

$$\int \frac{f(x)}{g(x)} dx \neq \frac{\int f(x) dx}{\int g(x) dx}, \quad g(x) \neq 0$$

**معین انتیگرال:** د  $f(x)$  تابع د ریمان مجموعې لېمیت ته په  $[a, b]$  انټروال کې کله چې  $n$  بې نهایت ته نژدې شي د  $\Delta x$  فرعي انټروالونو اوږدوالی صفر ته نژدې کېږي چې د  $f(x)$  تابع معین انتیگرال د  $x = a$  څخه تر  $x = b$  پورې په نوم یادېږي.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x = \int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

ته د انتیگرال لاندې سرحد او  $b$  ته د انتیگرال پورتنی سرحد وایي.

**د معین انتیگرال خواص (ځانگړتیاوې):**

$$\int_a^b C dx = C(b - a)$$

$$\int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$$

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

$$\int_a^a f(x) dx = 0$$

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

$$f(x) \leq g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b - a)$$

$$\int_a^b f(x) dx = f(c)(b - a) \Rightarrow f(c) = \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) dx$$

### د انتیگرال او مشتق لومړی اساسي قضیه:

که چېرې د  $f(x)$  تابع په  $[a, b]$  انټروال کې متمادی وي او  $x$  په دې انټروال کې شامل وي، لرو چې:

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

څرنگه چې د  $f(x)$  تابع په  $[a, b]$  انټروال کې د مشتق وړ ده، نو د هر  $x \in [a, b]$  لپاره  $F'(x) = f(x)$  دی.

### د انتیگرال او مشتق دویمه اساسي قضیه:

- که چېرې  $F(x)$  تابع د  $f(x)$  لومړنی تابع په  $[a, b]$  انټروال کې متمادی وي، په دې صورت کې لرو چې:

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$$

- که  $F(u)$  د  $f(u)$  لومړنی تابع وي او له  $u = g(x)$  متحول سره تعویض شي چې مستقل متحول یې  $x$  او متمادی مشتق ولري. له زنځیري قاعدې څخه په کار اخیستنې سره لرو:

$$\int f(g(x))g'(x) dx = \int f(u) du$$

- که  $F(x)$  تابع په  $[a, b]$  انټروال کې مشتق منونکي وي او  $u = g(x)$  همدارنگه له  $F'(x) = f(x)$  سره تعویض شي، څرنگه چې  $du = g'(x)dx$  دی، له زنځیري قاعدې څخه لیکلای شو:

$$\int_a^b f(g(x)) g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u) du$$

- د  $\int f(x)g(x)dx$  انتیگرال کې  $f(x)$  او  $g(x)$  دوې مشتق منونکي تابع گانې وي چې په خپل منځ کې قابل د ضرب وي او یا نه وي، خو د انتیگرال محاسبه یې آسانه کار نه دی، که چېرې  $f(x) = u$  او  $g(x) = v$  سره عوض شي، د هغوی د حاصل ضرب مشتق عبارت دی له:

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + v' \cdot u$$



له پورتنی اړیکې څخه  $v' \cdot u$  په لاس راوړو او له دواړو خواوو څخه انتیگرال نیسو:

$$\int v' \cdot u \, dx = u \cdot v - \int u' \cdot v \, dx \quad \text{یا} \quad \int u \, dv = u \cdot v - \int v \, du$$

چې اخیری اړیکې ته د غیر معین انتیگرال فورمول په قسمي طریقه وایي.

• که د  $u$  او  $v$  تابع گانې په  $[a, b]$  انټروال کې تعریف شوی وي لاندې فورمول، د معین انتیگرال

فورمول په قسمي لاره (طریقه) بلل کېږي:

$$\int_a^b v' u \, dx = u \cdot v \Big|_a^b - \int_a^b v u' \, dx \quad \text{یا} \quad \int_a^b u \, dv = u \cdot v \Big|_a^b - \int_a^b v \, du$$

## د څپرکي پوښتنې

1- د لاندې معینو انتیگرالونو قیمت پیدا کړئ.

$$a) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$b) \int_{-4}^4 [2x^2 - \frac{1}{8}x^4] dx$$

$$c) \int_2^4 \frac{1}{x^2} dx$$

$$d) \int_0^3 4 dx$$

$$e) \int_1^3 \sqrt{x} dx$$

$$f) \int_1^2 (x^2 - x^5) dx$$

$$g) \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos^2 x} dx$$

$$h) \int_{-2}^0 [\frac{x^3}{4} + \frac{x^2}{3}] dx$$

$$i) \int_2^3 (x^3 + x^2) dx$$

$$j) \int_{-2}^2 [x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 3x - 4] dx$$

$$k) \int_0^{\pi} \sin x dx$$

$$l) \int_1^2 x^2 dx$$

2- لاندې غیر معین انتیگرالونه په لاس راوړئ.

$$a) \int [\sin x + 8x^3] dx$$

$$b) \int [x^5 + \frac{4}{x^4} + x^3 + \frac{2}{x^2} + x] dx$$

$$c) \int x(1 - 2x^2) dx$$

$$d) \int \sin x dx$$

$$e) \int \frac{\sin 2x}{2 \sin x} dx$$

$$f) \int \frac{(1-x)^2}{1-x} dx$$

$$g) \int \sqrt[5]{x^3} dx$$

$$h) \int \frac{3x^2 + 8x}{x} dx$$

$$i) \int (2x^2 + 3) dx$$

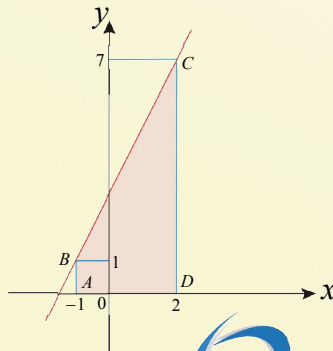
$$j) \int \frac{x^2}{\sqrt{x^3 + 2}} dx$$

$$k) \int \frac{(1+x)(1-x)}{x-x^3} dx$$

$$l) \int (3x^2 + 4x - 1) dx$$

3- د لاندې محصور رنگ شوې سطحې مساحت د شکل له مخې پیدا کړئ.

$$\int_{-1}^2 (2x + 3) dx$$



4- لاندې انتیگرالونه د تعویضي طریقې په مرسته پیدا کړئ.

a)  $\int 3 \cos(2x+1) dx$

g)  $\int_0^2 \frac{dt}{(3-2t)^2}$

b)  $\int \sqrt{3x+5} dx$

h)  $\int_0^2 x^2 \cdot \sqrt{9-x^3} dx$

c)  $\int \frac{2 dx}{x+2}$

i)  $\int \frac{1}{(x-10)^7} dx$

d)  $\int (3x+6)^3 dx$

j)  $\int_0^1 (1-x^2)^3 x dx$

e)  $\int x^3 \sqrt{x^4+2} dx$

k)  $\int (4-3x)^7 dx$

f)  $\int (x^3+2)^2 3x^2 dx$

l)  $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt[4]{x^3+2}}$

5- لاندې انتیگرالونه د قسمي طریقې په مرسته پیدا کړئ.

a)  $\int x \cos x dx$

f)  $\int x \sqrt{1+x} dx$

b)  $\int_0^{\pi} \sin x \cos x dx$

g)  $\int x^2 \cdot e^{2x} dx$

c)  $\int e^x \cdot \cos x dx$

h)  $\int e^{2x} \sin 3x dx$

d)  $\int_0^{2\pi} x \cos 3x dx$

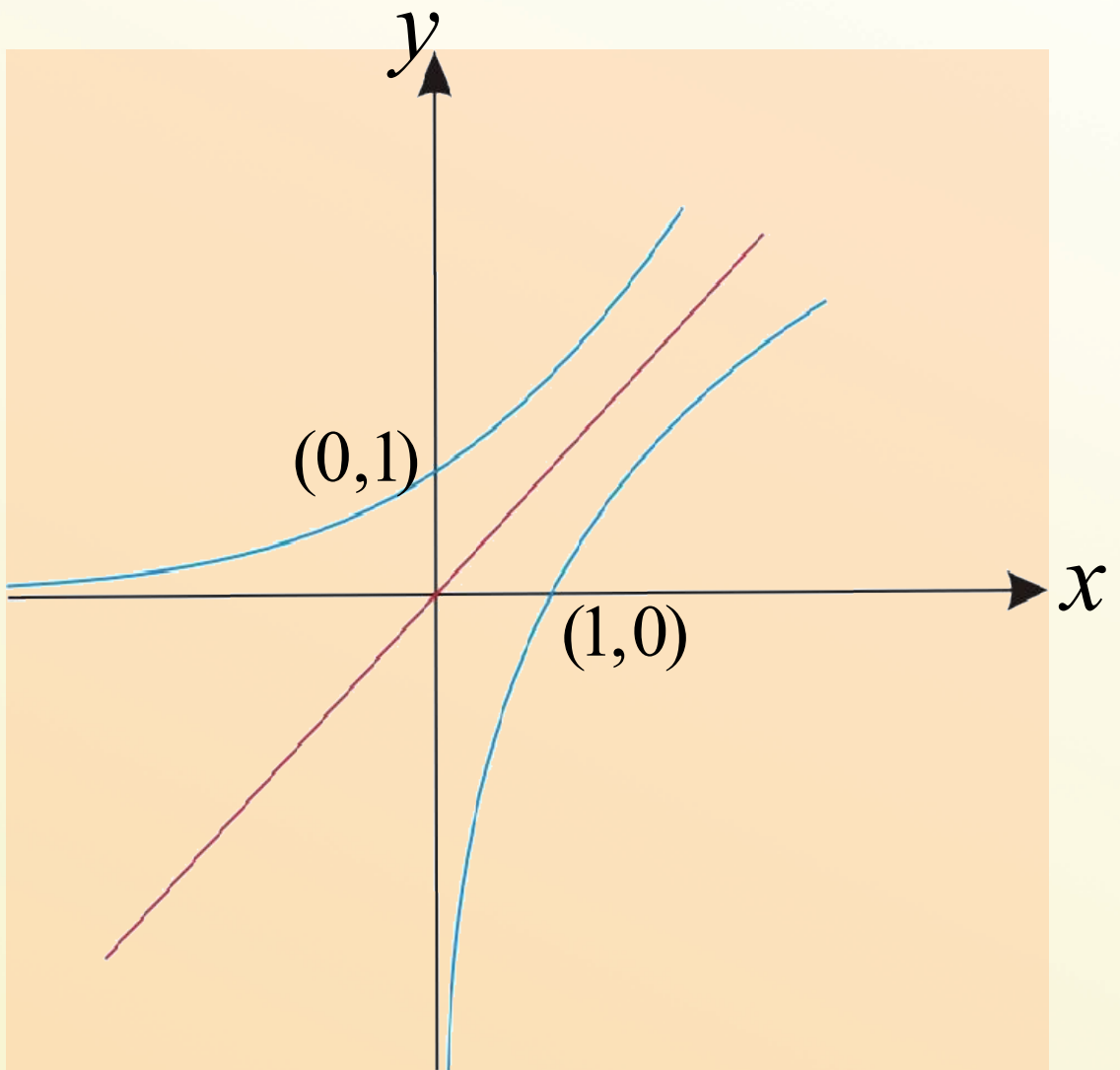
i)  $\int x^2 \cdot e^{-x} dx$

e)  $\int x e^{-x} dx$

# پنجم خیر کی

د لوگاریتمی او اکسپوننشیل تابع گانو مشتق او

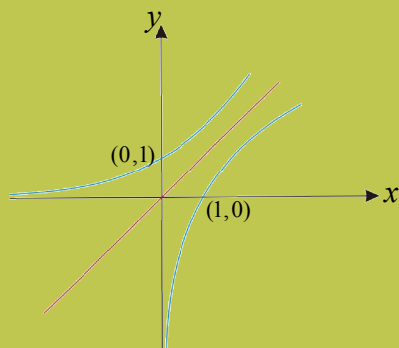
انتیگرال



## د لوگاریتمی او اکسپوننشیل تابع گانو مشتق

مخامخ شکل د څه ډول تابع گانو گراف راښيي، نومونه

بې واخلي.



- لوگاریتم تعریف او خواص بې ولیکئ.
  - لوگاریتمی او اکسپوننشیل تابع گانې یوه له بلې سره څه اړیکې لري.
  - که  $\log_b x$  یوه متصله تابع وي، نو  $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$  له کوم عدد سره مساوي ده.
  - د  $y = f(x)$  د تابع له دواړو خواوو څخه طبیعي لوگاریتم ونیسئ، اړیکه بې ولیکئ.
- د پورتنی فعالیت پایله داسې بیانوو:

په عمومي ډول که  $f(x) = \ln x$  او  $g(x) = a^x$  وي؛ نو  $g'(x) = a^x \ln a$  او  $f'(x) = \frac{1}{x}$  دی.

ثبوت:

-1

$$y = g(x) = a^x$$

$$\ln y = \ln a^x = x \ln a$$

د مساوات له دواړو خواوو څخه نظر  $x$  ته مشتق نیسو:

$$\frac{y'}{y} = x' \ln a + x(\ln a)'$$

$$\frac{y'}{y} = \ln a + 0$$

$$\frac{1}{y} y' = \ln a$$

$$y' = y \ln a \Rightarrow g'(x) = a^x \ln a$$

$$f(x) = \ln x$$

$$(\ln x)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln \frac{x+h}{x}}{h}$$

$$\begin{aligned} (\ln x)' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \ln\left(\frac{x+h}{x}\right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \ln\left(1 + \frac{h}{x}\right) = \frac{1}{x} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x}{h} \ln\left(1 + \frac{h}{x}\right) \\ &= \frac{1}{x} \lim_{h \rightarrow 0} \ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}} \end{aligned}$$

که  $u = \frac{x}{h}$  وضع شي نو  $\frac{h}{x} = \frac{1}{u}$  دی څرنگه چې  $h \rightarrow 0$  تقرب وکړي، نو  $u \rightarrow \infty$  ته نژدې کېږي، لیکلای شو چې:

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \lim_{u \rightarrow \infty} \ln\left(1 + \frac{1}{u}\right)^u = \frac{1}{x} \ln \lim_{u \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{u}\right)^u$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \ln e = \frac{1}{x} \quad \text{دې، نو: } \lim_{u \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{u}\right)^u = e \text{ پوهېږو چې}$$

### قضیه

$$1. \quad \text{که د } f(x) = \log_a x \text{ تابع مشتق منوونکی وي، نو مشتق یې } f'(x) = \frac{1}{x} \log_a e$$

$$2. \quad \text{که } f(x) = \log_a g(x) \text{ او } g(x) \text{ مشتق منوونکی وي، نو } (\log_a g(x))' = \frac{g'(x)}{g(x)} \log_a e$$

### ثبوت:

-1

$$f(x) = \log_a x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x} \log_a e$$

$$f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(x+h) - \log_a x}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \log_a \frac{x+h}{x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \log_a \left(1 + \frac{h}{x}\right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{x} \cdot \frac{x}{h} \log_a \left(1 + \frac{h}{x}\right) = \frac{1}{x} \lim_{h \rightarrow 0} \log_a \left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x} \log_a \lim_{h \rightarrow 0} \left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}$$

اوس که  $u = \frac{x}{h}$  وضع شي، نو  $\frac{h}{x} = \frac{1}{u}$  کېږي، که  $h \rightarrow 0$  صفر ته تقرب وکړي، نو  $u \rightarrow \infty$  کوي، یعنې:

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x} \log_a \lim_{u \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{u}\right)^u = \frac{1}{x} \log_a e$$

$$2- \text{غواړو ثبوت كړو چې: } (\log_a g(x))' = \frac{g'(x)}{g(x)} \log_a e$$

د زنځيري قاعدې له مخې:

$$f'(x) = (\log_a g(x))' = (\log_a g(x))' \cdot g'(x) = \frac{1}{g(x)} \log_a e \cdot g'(x)$$

$$= \frac{g'(x)}{g(x)} \log_a e$$

$$(\log_a g(x))' = (\ln g(x))' = \frac{g'(x)}{g(x)} \quad \text{كه } a = e \text{ وضع شي، نو لرو:}$$

**پايله:**

1- د Exponential تابع گانو مشتق د لوگاریتم په مرسته کولای شو په اسانۍ سره په لاس راوړو.

که  $y = e^x$  وي ددې تابع مشتق  $y' = e^x$  دی، ځکه که د  $y = e^x$  رابطې څخه طبعي لوگاریتم ونیسو، په لاس راځي:

$$y = e^x \Rightarrow \ln y = x \ln e = x$$

$$(\ln y)' = (x)' \Rightarrow \frac{y'}{y} = 1 \Rightarrow y' = y \cdot 1 = e^x$$

2- که  $y = e^u$  او  $u$  تابع د  $x$  وي، نو:  $y' = u' e^u$

3- که  $y = a^u$  کله چې  $a > 0$  او  $a \neq 1$  وي، نو:  $y' = u' a^u \ln a$

4- د لوگاریتمي تابع گانو د مشتق پیدا کولو لپاره په بېلابېلو قاعدو سره له دې اړیکې څخه گټه اخلو:

$$y = \log_a u \Rightarrow y' = (\log_a u)' = \frac{u'}{u} \log_a e$$

$$y' = \frac{u'}{u} \log_a e = \frac{u'}{u} \cdot \frac{1}{\log_e a} \Rightarrow y' = \frac{u'}{u \ln a}$$

**لومړی مثال:** د  $f(x) = \ln(x^2 + 1)$  تابع مشتق پیدا کړئ.

**حل:** که  $g(x) = x^2 + 1$  وضع کړو، نو لرو:

$$g(x) = x^2 + 1$$

$$g'(x) = 2x$$

$$(\ln g(x))' = \frac{g'(x)}{g(x)}$$

$$(\ln(x^2 + 1))' = \frac{(x^2 + 1)'}{x^2 + 1} = \frac{1}{x^2 + 1} \cdot 2x \Rightarrow f'(x) = (\ln(x^2 + 1))' = \frac{2x}{x^2 + 1}$$



**دویم مثال:** د  $f(x) = \ln(x^2 - 5x + 4)$  تابع مشتق پیدا کړئ.

**حل:**

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = \ln(x^2 - 5x + 4) \\ g(x) = x^2 - 5x + 4 \Rightarrow g'(x) = 2x - 5 \end{array} \right\} \begin{array}{l} (\ln g(x))' = \frac{g'(x)}{g(x)} \\ (\ln(x^2 - 5x + 4))' = \frac{g'(x)}{g(x)} = \frac{2x - 5}{x^2 - 5x + 4} \end{array}$$

**دریم مثال:** د  $f(x) = \ln \sqrt{\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}}$  او  $f(x) = \log_a \sqrt{\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}}$  تابع گانو مشتق پیدا کړئ.

**حل:** پوهېږو چې  $\log_a \sqrt{\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}} = \log_a \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}\right)^{\frac{1}{2}}$  دی، نو لیکلای شو چې:

$$\log_a \sqrt{\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}} = \log_a \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \log_a \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = \frac{1}{2} (\log_a (x^2 + 1) - \log_a (x^2 - 1))$$

$$(\log_a \sqrt{\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}})' = \frac{1}{2} (\log_a (x^2 + 1) - \log_a (x^2 - 1))'$$

$$= \frac{1}{2} \left[ \frac{(x^2 + 1)'}{(x^2 + 1)} \log_a e - \frac{(x^2 - 1)'}{(x^2 - 1)} \log_a e \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[ \frac{2x}{x^2 + 1} \log_a e - \frac{2x}{x^2 - 1} \log_a e \right] = \frac{1}{2} \cdot 2x \log_a e \left[ \frac{1}{x^2 + 1} - \frac{1}{x^2 - 1} \right]$$

$$= \frac{-2x}{x^4 - 1} \log_a e$$

**حل:** پوهېږو چې  $\ln \sqrt{\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}} = \ln \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}\right)^{\frac{1}{2}}$  دی، نو لیکلای شو چې:

$$\ln \sqrt{\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}} = \ln \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (\ln(x^2 + 1) - \ln(x^2 - 1))$$

$$(\ln \sqrt{\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}})' = \frac{1}{2} [\ln(x^2 + 1) - \ln(x^2 - 1)]' = \frac{1}{2} [(\ln(x^2 + 1))' - (\ln(x^2 - 1))']$$

$$= \frac{1}{2} \left( \frac{2x}{x^2 + 1} - \frac{2x}{x^2 - 1} \right) = \frac{-2x}{x^4 - 1}$$

**خلورم مثال:** د  $y = e^{(x^2+1)}$  تابع مشتق پیدا کړئ.

**حل:** پوهېږو چې که  $y = e^u$  وي نو  $y' = u'e^u$

$$y = e^{(x^2+1)} \Rightarrow y' = (x^2 + 1)' \cdot e^{x^2+1} = 2x \cdot e^{x^2+1}$$

**پنځم مثال:** د  $y = \sqrt[3]{2}$  تابع مشتق په لاس راوړئ.

**حل:** پوهېږو چې که چېرې  $y = a^u$  وي، نو  $y' = u'a^u \ln a$  سره دی، نو:

$$y = \sqrt[3]{2} = (2)^{\frac{1}{3}} \Rightarrow y' = \left(\frac{1}{3}\right)' \cdot 2^{\frac{1}{3}} \ln 2 = \frac{-1}{x^2} \cdot 2^{\frac{1}{3}} \cdot \ln 2$$

**شپږم مثال:** د  $y = x^{2x}$  تابع مشتق پیدا کړئ.

**حل:** که د معادلې له دواړو خواوو څخه طبيعي لوگارتم ونیسو، په لاس راځي چې:

$$y = x^{2x}$$

$$\ln y = \ln x^{2x}$$

$$\ln y = 2x \ln x$$

$$(\ln y)' = (2x \ln x)' \Rightarrow \frac{y'}{y} = 2 \ln x + 2x \cdot \frac{1}{x}$$

$$y' = 2(\ln x + 1) \cdot y \Rightarrow y' = 2(\ln x + 1) \cdot x^{2x}$$

**اووم مثال:** د  $y = 10^x$  تابع مشتق حساب کړئ.

**حل:** پوهېږو چې  $y = a^x \Rightarrow y' = a^x \ln a$  دی، نو:

$$y = 10^x$$

$$y' = 10^x \cdot \ln 10$$

**اټم مثال:** د  $y = e^{3x}$  تابع مشتق پیدا کړئ.

**حل:** که  $u = 3x$  وضع شي، نو:  $u'(x) = 3$

$$y = e^u$$

$$y' = e^u \cdot u' = e^{3x} \cdot 3$$

$$y' = 3e^{3x}$$

**نهم مثال:** د لاندې تابع گانو مشتق پیدا کړئ.

1)  $y = \log(x^4 + 1)$

2)  $y = \log_3(\log_2 x)$

3)  $y = \log_{x^2-1} x^2 + 1$

**حل:** پوهېرو چې د لوگارتمي توابعو مشتق په مختلفو قاعدو سره د لاندې قضيې څخه په گټه اخېستې سره په لاس راوړو:

$$y = \log_a u$$

$$y' = (\log_a u)' = \frac{u'}{u} \log_a e = \frac{u'}{u \log_e a} = \frac{u'}{u \ln a}$$

$$1) y = \log(x^4 + 1) \Rightarrow y' = \frac{4x^3}{(x^4 + 1) \ln 10}$$

$$2) y = \log_3(\log_2 x) \Rightarrow y' = \frac{(\log_2 x)'}{\ln 3 \log_2 x} = \frac{\frac{1}{x \ln 2}}{\ln 3 \log_2 x} = \frac{1}{(\ln 2)(\ln 3)x \log_2 x}$$

$$= \frac{1}{\ln 2 \cdot \ln 3 \cdot x \cdot \frac{\log_e x}{\log_e 2}} = \frac{1}{\ln 2 \cdot \ln 3 \cdot x \cdot \frac{\ln x}{\ln 2}} = \frac{1}{\ln 3 x \ln x}$$

$$3) y = \log_{x^2-1} x^2 + 1 = \frac{\log_e(x^2 + 1)}{\log_e(x^2 - 1)} = \frac{\ln(x^2 + 1)}{\ln(x^2 - 1)}$$

پوهېرو چې  $y = \frac{u}{v} \Rightarrow y' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$  دی؛ نولرو:

$$y' = \frac{\frac{2x}{x^2+1} \cdot \ln(x^2-1) - \frac{2x}{x^2-1} \ln(x^2+1)}{[\ln(x^2-1)]^2}$$



د لاندې توابعو مشتق پیدا کړئ:

a)  $f(x) = \ln \sin 3x$

b)  $f(x) = \ln \sqrt{3x^2 + 7}$

c)  $f(x) = \ln(5x^2 - 6x + 5)$

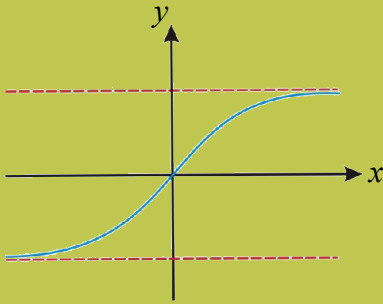
d)  $f(x) = \log_{10} 3x^2$

e)  $f(x) = y = x^x$

f)  $y = \frac{(x+1)^2(\sqrt{x-1})}{(x+4)^3 e^x}$

## د معکوسو تابع گانو مشتق

مخامخ شکل د څه ډول تابع گراف راښيي؟



که چېرې  $f$  او  $g$  یوه د بلې دوې معکوسې تابع گانې وي، یعنې  $y = f(x) \Leftrightarrow x = g(y)$  وي، نو:

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} \quad \text{یا} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

ځکه چې د تابع او ضمني تابع گانو له مشتق څخه لیکلای شو:

$$\left. \begin{array}{l} y = f(x) \\ x = g(y) \end{array} \right\} \Rightarrow y'_x \cdot x'_y = y'_y \Rightarrow y'_x \cdot x'_y = 1 \Rightarrow y'_x = \frac{1}{x'_y}$$

**مثال:** د  $y = a^x$  تابع مشتق د هغې د معکوسې تابع په مرسته پیدا کړئ.

**حل:**

$$y = a^x \Rightarrow x = \log_a y$$

$$\Rightarrow y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\log_a y)'} = \frac{1}{\frac{1}{y} \log_a e} = \frac{1}{\frac{1}{y}} \log_e a = y \log_e a$$

$$y' = a^x \ln a$$

## د مثلثاتي معکوسو تابع گانو مشتق

د مثلثاتي معکوسو تابع گانو مشتق د لاندې اړیکو په مرسته لاسته راوړو:

$$1) (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$2) (\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$3) (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$4) (\text{arc cot } x)' = \frac{-1}{1+x^2}$$

## ثبوت:

$$1) y = \arcsin x \Leftrightarrow x = \sin y$$

$$(\arcsin x)' = ?$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}}$$

$$\Rightarrow (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$2) y = \arccos x \Leftrightarrow x = \cos y$$

$$(\arccos x)' = ?$$

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\cos y)'} = \frac{1}{-\sin y} = \frac{-1}{\sqrt{1 - \cos^2 y}}$$

$$\Rightarrow (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$3) y = \arctan x \Leftrightarrow x = \tan y$$

$$\Rightarrow (\arctan x)' = y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\tan y)'} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \cos^2 y$$

$$= \frac{\cos^2 y}{1} = \frac{\cos^2 y}{\sin^2 y + \cos^2 y}$$

د کسر صورت او مخرج په  $\cos^2 y$  ویشو:

$$(\arctan x)' = \frac{\cos^2 y}{\sin^2 y + \cos^2 y} = \frac{1}{\tan^2 y + 1} = \frac{1}{1 + x^2}$$

$$\Rightarrow (\arctan x)' = \frac{1}{1 + x^2}$$

$$4) y = \text{arc cot } x \Leftrightarrow x = \cot y$$

$$(\text{arc cot } x)' = ?$$

$$(\text{arc cot } x)' = y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\cot y)'} = \frac{1}{\frac{-1}{\sin^2 y}}$$

$$= -\sin^2 y = \frac{-\sin^2 y}{1} = \frac{-\sin^2 y}{\sin^2 y + \cos^2 y}$$

د کسر صورت او مخراج په  $\sin^2 y$  وېشو:

$$= -\frac{\sin^2 y}{\sin^2 y + \cos^2 y} = \frac{-1}{1 + \cot^2 y} = -\frac{1}{1 + x^2}$$

**لومړی مثال:** د  $y = (\arctan x)^5$  تابع مشتق پیدا کړئ.

$$y' = 5(\arctan x)^4 (\arctan x)' = 5(\arctan x)^4 \frac{1}{1 + x^2}$$

**دویم مثال:** د  $y = \log_5(\arctan x)$  تابع مشتق پیدا کړئ.

$$y' = [\log_5(\arctan x)]' = (\log_5 u)' = \frac{u'}{u \log_5 e}$$

$$= \frac{\frac{1}{1 + x^2}}{\arctan x \log_5 e} = \frac{1}{(1 + x^2)(\arctan x \ln 5)}$$

**درېم مثال:** د  $y = \text{arc tan } e^x$  تابع د مشتق مقدار د  $x = 0$  ټکي کې پیدا کړئ.

$$y' = [\text{arc tan } e^x]' = (\text{arc tan } u)' = \frac{u'}{1 + u^2} = \frac{e^x}{1 + e^{2x}}$$

$$y'(0) = \frac{e^0}{1 + e^0} = \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2}$$



پوڻڻي

1. د لاندې تابع گانو مشتق پيدا کړئ.

1)  $y = (\arcsin x)^3$

2)  $y = \log_2(\arccos x)$

## قسمي کسرونه

د یو کسر تجزیه کول په قسمي کسرونو:

پوهېږو چې د  $\frac{2}{x+1}$  او  $\frac{1}{x^2-1}$  د جمعې حاصل  $\frac{2x-1}{x^2-1}$  دی، آیا کولای شئ چې له دې کسر څخه د  $\frac{1}{x+1}$  او  $\frac{2}{x^2-1}$  کسرونه لاسته راوړئ.

$$\frac{2}{x+1} + \frac{1}{x^2-1} = \frac{2x-1}{x^2-1}$$



فعالیت

- د  $\frac{2}{x-5}$  او  $\frac{5}{x-2}$ ،  $\frac{7}{x+1}$  کسرونه سره جمع کړئ.
- د پورته کسرونو د جمعې حاصل، بېرته په لومړنیو کسرونو واړوئ.
- واقعي کسرونه څه ډول کسرونه دي، تعریف یې کړئ.

د پورتنۍ فعالیت پایله داسې بیانوو:

**تعریف:** د یوه واقعي کسر هغه کوچنی کسرونه چې د جمعې د عواملو په شکل لیکل شوي وي، که چېرې هغوی سره جمع کړو، راکړل شوی واقعي کسر به په لاس راشي، نو دا جمع شوي لومړني کسرونه د قسمي کسرونو په نامه یادېږي.

د یوه واقعي کسر د تجزیه کولو لپاره لاندې حالتونه په پام کې نیسو:

### لومړی حالت:

که چېرې د  $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$  ناطق کسر مخرج  $(P_n(x))$  له خطي بېلابېلو ضربي عواملو څخه جوړ شوي وي او تکرار نه وي په لاندې بڼه بدله لای شي:

$$\frac{P_m(x)}{P_n(x)} = \frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{x-x_2} + \frac{C}{x-x_3} + \dots + \frac{N}{x-x_n}$$

(... C, B, A حقیقي عددونه دي)

**لومړی مثال:** د  $\frac{4x^2 - x - 39}{x^3 - 4x^2 - 7x + 10}$  کسر په قسمي کسرونو تجزیه کړئ.

**حل:** د مخرج پولینوم په لومړنیو ضربي عواملو تجزیه کوو، نو په لاس راځي:



$$x^3 - 4x^2 - 7x + 10 = (x-5)(x-1)(x+2)$$

لیدل کېږي چې نوموړی کسر له درو قسمي کسرونو څخه جوړ شوی دی، صورتونه یې  $A, B, C$  ټاکو:

$$\frac{4x^2 - x - 39}{x^3 - 4x^2 - 7x + 10} = \frac{A}{x-5} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+2}$$

$$\frac{4x^2 - x - 39}{x^3 - 4x^2 - 7x + 10} = \frac{A(x-1)(x+2) + B(x-5)(x+2) + C(x-1)(x-5)}{(x-5)(x-1)(x+2)}$$

$$\frac{4x^2 - x - 39}{x^3 - 4x^2 - 7x + 10} = \frac{Ax^2 + Ax - 2A + Bx^2 - 3Bx - 10B + Cx^2 - 6Cx + 5C}{(x-5)(x-1)(x+2)}$$

$$\frac{4x^2 - x - 39}{x^3 - 4x^2 - 7x + 10} = \frac{(A+B+C)x^2 + (A-3B-6C)x + (-2A-10B+5C)}{(x-5)(x-1)(x+2)}$$

لیدل کېږي چې د دواړو خواوو د کسرونو منځرغونه سره برابر دي، نو باید صورتونه هم سره برابر وي، نو د مطابقت د خواصو (د ورته حدونو ضریبونه سره مساوي وي) څخه په گټه اخستې سره لیکو:

$$\begin{cases} A + B + C = 4 \\ A - 3B - 6C = -1 \\ -2A - 10B + 5C = -39 \end{cases}$$

د پورته سیستم له حل څخه وروسته  $A = 2, B = 3, C = -1$  په لاس راځي، نو:

$$\frac{4x^2 - x - 39}{x^3 - 4x^2 - 7x + 10} = \frac{2}{x-5} + \frac{3}{x-1} - \frac{1}{x+2}$$

**دویم مثال:** د  $\frac{3x^3 - 6x^2 - 20x - 1}{x^2 - 2x - 8}$  کسر په قسمي کسرونو تجزیه کړئ:

**حل:** لومړی نوموړی کسر په واقعي کسر بدلولو او بیا پورتنی طریقو پرې تطبیقوو:

$$\begin{aligned} \frac{3x^3 - 6x^2 - 20x - 1}{x^2 - 2x - 8} &= 3x + \frac{4x - 1}{x^2 - 2x - 8} \Rightarrow \frac{4x - 1}{x^2 - 2x - 8} = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{x+2} \\ &= \frac{A(x+2) + B(x-4)}{(x-4)(x+2)} = \frac{(A+B)x + (2A-4B)}{x^2 - 2x - 8} \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} A + B &= 4 \\ 2A - 4B &= -1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow A = \frac{5}{2}, \quad B = \frac{3}{2}$$

$$\frac{3x^3 - 6x^2 - 20x - 1}{x^2 - 2x - 8} = 3x + \frac{5}{2(x-4)} + \frac{3}{2(x+2)}$$

**دویم حالت:**

که د کسر د مخرج ضربي عوامل لومړی درجه پولینوم وي چې ځینې یې تکرار راغلی وي، یعنې که د  $x - x_0$  عامل  $n$  ځلې په مخرج کې تکرار شوی وي، نو لیکلای شو چې:

$$\frac{P_m(x)}{P_n(x)} = \frac{A}{x - x_0} + \frac{B}{(x - x_0)^2} + \dots + \frac{N}{(x - x_0)^n}$$

**لومړی مثال:** د  $\frac{3x^2 - 6x + 2}{x^3 - 4x^2 + 5x - 2}$  واقعي کسر په قسمي کسرونو تجزیه کړئ:

**حل:** د مخرج د پولینوم ضربي عوامل په لاس راوړو:

$$x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = (x - 1)(x - 2)(x - 1)$$

$$\begin{aligned} \frac{3x^2 - 6x + 2}{x^3 - 4x^2 + 5x - 2} &= \frac{3x^2 - 6x + 2}{(x - 2)(x - 1)^2} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x - 1} + \frac{C}{(x - 1)^2} \\ &= \frac{A(x - 1)^2 + B(x - 2)(x - 1) + C(x - 2)}{(x - 2)(x - 1)^2} \\ &= \frac{(A + B)x^2 + (-2A - 3B + C)x + (A + 2B - 2C)}{(x - 2)(x - 1)^2} \end{aligned}$$

$$\left. \begin{array}{l} A + B = 3 \\ -2A - 3B + C = -6 \\ A + 2B - 2C = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} A = 2 \\ B = 1 \\ C = 1 \end{array}$$

$$\Rightarrow \frac{3x^2 - 6x + 2}{x^3 - 4x^2 + 5x - 2} = \frac{2}{x - 2} + \frac{1}{x - 1} + \frac{1}{(x - 1)^2}$$

**دریم حالت:**

که د مخرج ضربي عوامل دویمه درجه پولینوم چې د تجزیې وړ نه وي او تکرار هم نه وي راغلی، نو د  $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$

واقعي پولینوم د یو قسمي کسر  $\frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c}$  بڼه لري.

**لومړی مثال:** د  $\frac{5x^2 + 8x + 9}{x^3 + 3x^2 + 6x + 4}$  کسر په قسمي کسرونو تجزیه کړئ.

**حل:** د مخرخ پولینوم ضربی عوامل عبارت دی له:

$$x^3 + 3x^2 + 6x + 4 = (x+1)(x^2 + 2x + 4)$$

څرنگه چې د  $x^2 + 2x + 4$  درې جمله یې د حقیقی عددونو په سټ کې حل نه لري، نو په دې ساحه کې د

تجزیې وړ نه ده. له دې امله لیکو:

$$\frac{5x^2 + 8x + 9}{x^3 + 3x^2 + 6x + 4} = \frac{Ax + B}{x^2 + 2x + 4} + \frac{C}{x + 1} = \frac{(Ax + B)(x + 1) + C(x^2 + 2x + 4)}{(x^2 + 2x + 4)(x + 1)}$$

$$= \frac{(A + C)x^2 + (A + B + 2C)x + (B + 4C)}{(x^2 + 2x + 4)(x + 1)}$$

$$\left. \begin{array}{l} A + C = 5 \\ A + B + 2C = 8 \\ B + 4C = 9 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} A = 3 \\ B = 1 \\ C = 2 \end{array} \Rightarrow \frac{5x^2 + 8x + 9}{x^3 + 3x^2 + 6x + 4} = \frac{3x + 1}{x^2 + 2x + 4} + \frac{2}{x + 1}$$



پوښتنې

لاندي کسرونه په قسمي کسرونو تجزيه کړئ:

-1

a)  $\frac{-x^2 + 2x - 12}{x^3 + 2x^2 + 6x + 5}$

b)  $\frac{4x^2 - 3x + 8}{x^3 - 2x + 4}$

c)  $\frac{2x^4 - 8x^3 + 7x^2 - 3x + 4}{x^2 - 9x + 3}$

-2

a)  $\frac{1}{x^4(x+1)}$

b)  $\frac{3x^2 - 6x + 2}{x^3 - 4x^2 + 5x - 2}$

c)  $\frac{x^4 + 1}{x^2(x-1)}$

d)  $\frac{3x^2 + 5x + 10}{x^3 + 2x^2 - 4x - 8}$

e)  $\frac{3x^2 - 18x + 36}{x^3 - 6x^2 + 9x}$

-3

a)  $\frac{3x + 7}{(x^2 + x + 1)(x^2 - 4)}$

b)  $\frac{x^2 + 3x + 4}{x^4 - 2x^2 + 1}$

c)  $\frac{x^2 + 13x + 10}{x^3 - 5x^2}$

d)  $\frac{x^5}{x^4 - 1}$

## د اکسپوننشل تابع گانو انټیگرالونه

مخامخ اړیکې سره پرتله کړئ.

$$\log_a b = x$$

$$a^x = b$$



- د  $f(x) = a^x$  تابع څه ډول تابع ده، نوم یې واخلي.
  - د لوگاریتمي تابع یوه بېلگه وليکئ.
  - د  $\log_a x = C$  اړیکه په اکسپوننشل ډول وليکئ.
- له پورتنی فعالیت څخه لیکلای شو چې:

د  $f(x) = e^x$  طبعی اکسپوننشل تابع لپاره لرو  $\int e^x dx = e^x + C$  نو په عمومي ډول

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}, \quad a \neq 1, \quad a \in \mathbb{R}^+$$

**ثبوت:** له تعویضي طریقې څخه په کار اخیستنې سره لرو:

$$u = a^x$$

$$du = \ln a \cdot a^x dx$$

$$dx = \frac{du}{\ln a \cdot a^x} = \frac{du}{u \ln a}$$

$$\int a^x dx = \int u \frac{du}{u \ln a} = \frac{1}{\ln a} \int dx$$

$$\frac{1}{\ln a} u = \frac{1}{\ln a} a^x = \frac{a^x}{\ln a} \Rightarrow \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$$

**لومړی مثال:** د  $f(x) = 2^{x-3}$  اکسپوننشیل تابع انټیگرال غواړو پیدا کړو:

د توان له قانون څخه لرو:

$$2^{x-3} = \frac{2^x}{2^3} = \frac{1}{8} 2^x$$

$$\int 2^{x-3} dx = \int \frac{1}{8} 2^x dx = \frac{1}{8} \int 2^x dx$$

$$\frac{1}{8} \int 2^x dx = \frac{1}{8} \cdot \frac{2^x}{\ln 2} + C$$

**دویم مثال:** د لاندې اکسپوننشیل تابع گانو انټیگرالونه پیدا کړئ.

1)  $\int 3^{x+1} dx = ?$

2)  $\int 6^{x-1} dx = ?$

**حل:**

1)  $\int 3^{x+1} dx = ?$

$$3^{x+1} = 3^x \cdot 3$$

$$\int 3^x \cdot 3 dx = 3 \int 3^x dx = 3 \cdot \frac{3^x}{\ln 3} + C$$

2)  $\int 6^{x-1} dx = ?$

$$6^{x-1} = \frac{6^x}{6} = \frac{1}{6} \cdot 6^x$$

$$\int \frac{1}{6} 6^x dx = \frac{1}{6} \int 6^x dx = \frac{1}{6} \cdot \frac{6^x}{\ln 6} + C$$



**پوښتنې**

د لاندې اکسپوننشیل تابع گانو انټیگرالونه محاسبه کړئ.

a)  $\int 3^{x-1} dx$

b)  $\int 2^{-x} dx$

c)  $\int a^{x+b} dx$

d)  $\int \frac{1}{a^x} dx$

e)  $\int 2^x \cdot 3^x dx$

f)  $\int \frac{2^x}{3^x} dx$

g)  $\int \frac{4^{x+3}}{2^x} dx$

h)  $\int \frac{5^x + 3^x}{2^x} dx$

i)  $\int (1 + 2^x) dx$

## د لوگاریتمی تابع گانو انتیگرال

وښیئ چې د تابع په کوم حالت کې نزولي او په کوم حالت کې صعودي ده.

$$y = a^x$$

$$\int a^x dx = ?$$



فعالیت

- لوگاریتم په څو ډوله دی، د هر ډول عمومي رابطه ولیکئ.
- د  $x = a^y$  او  $y = \log_a x$  معادلې یو له بل سره څه اړیکه لري.
- د  $x = b^y$  او  $y = \log_b x$  تابع گانو گراف رسم کړئ.
- آیا کولای شو چې د لوگاریتمی تابع گانو انتیگرال ونیسو؟

له پورتنی فعالیت څخه پایله داسې بیانوو:

که  $f(x) = \ln x$  ( $x \in \mathbb{R}^+$ ) وي د طبیعي لوگاریتم د تابع لپاره لیکلای شو:  $\int \ln x dx = x \cdot \ln x - x + C$

که  $f(x) = \log_a x$  ( $x, a \in \mathbb{R}^+, a \neq 1$ ) وي د معمولي لوگاریتم د تابع لپاره لیکلای شو:

$$\int \log_a x dx = x \log_a \frac{x}{e}$$

**ثبوت:**

1- که  $a = e$  وضع شی، نو:

$$\int \log_a x dx = x \log_a \frac{x}{e} + C$$

$$\int \log_e x dx = \int \ln x dx = x \log_e \frac{x}{e} = x(\log_e x - \log_e e)$$

$$\int \ln x dx = x \ln x - x + C = x(\ln x - 1) + C$$

$$\int \log_a x dx = x \log_a \frac{x}{e} + C$$

$$u = \log_a x, \quad du = \frac{1}{x} \log_a e dx$$

$$dv = dx, \quad v = x$$

$$\int \log_a x dx = x \log_a x - \int x \frac{1}{x} \log_a e dx$$

$$= x \log_a x - \log_a e \int dx$$

$$= x \log_a x - x \log_a e = x(\log_a x - \log_a e) = x \log_a \frac{x}{e} + C$$

$$\int \log_a x dx = x \log_a \frac{x}{e} + C$$

**مثال:** د  $\int \ln 3x dx$  غیرمعین انتیگرال غواړو پیدا کړو:

**حل:**

$$\int \ln 3x dx = \int (\ln 3 + \ln x) dx = \int \ln 3 dx + \int \ln x dx$$

$$= x \ln 3 + x \ln x - x$$

$$= x(\ln 3 + \ln x) - x = x(\ln 3x - 1)$$

**یادونه:**

(I) د تعویض Substitution له لارې کولای شو د غیرمعین انتیگرال حل پیدا کړو.

**لومړی مثال:** لاندې انتیگرالونه پیدا کړئ.

**حل:**

$$a) I = \int \frac{1}{2} e^{-2x-3} dx$$

$$-2x - 3 = u, \quad -2 = \frac{du}{dx}, \quad dx = -\frac{1}{2} du$$

$$I = \int \frac{1}{2} e^u \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) du = -\frac{1}{4} \int e^u du = -\frac{1}{4} e^u + C = -\frac{1}{4} e^{-2x-3} + C$$

$$b) I = \int \frac{2dx}{x+2}$$

$$x+2 = u, \quad 1 = \frac{du}{dx}, \quad dx = du$$

$$I = \int \frac{2du}{u} = 2 \int \frac{du}{u} = 2 \ln|u| + C = 2 \ln|x+2| + C$$

**دویم مثال:** د  $f(x) = e^{2x}$  تابع انتیگرال ونیسئ:

**حل:**

$$f(x) = e^{2x} \Rightarrow \int f(x) dx = \int e^{2x} dx = ?$$

$$u = 2x \Rightarrow du = 2dx$$

$$dx = \frac{du}{2}$$

$$f(x) = e^{2x} \Rightarrow \int f(x) dx = \int e^u \cdot \frac{du}{2} = \frac{1}{2} \int e^u du$$

$$\int e^{2x} dx = \frac{e^u}{2} + C = \frac{e^{2x}}{2} + C = \frac{1}{2} e^{2x} + C$$

$$F(x) = \frac{1}{2} e^{2x} + C \Rightarrow F'(x) = \frac{1}{2} e^{2x} \cdot 2 = e^{2x} = f(x) \text{ آزماینت:}$$

**دریم مثال:** د  $f(x) = x \cdot \ln x^2$  انتیگرال حساب کړئ.

**حل:**

$$f(x) = x \cdot \ln x^2 \Rightarrow \int f(x) dx = \int (x \cdot \ln x^2) dx = ?$$

$$u = x^2$$

$$du = 2x dx \Rightarrow dx = \frac{1}{2} du$$

$$\int f(x) dx = \int x \cdot \ln u \cdot \frac{1}{2x} du = \frac{1}{2} \int \ln u du = \frac{1}{2} [u \cdot \ln u - u + C] = \frac{1}{2} u \cdot \ln u - \frac{1}{2} u + C$$

$$= \frac{1}{2} x^2 \cdot \ln x^2 - \frac{1}{2} x^2 + C$$

(II) معین انتیگرالونه هم د بدلون (تعویض) له لارې حل کبړي.

**لومړی مثال:** د  $\int_{-1}^1 e^{2x} dx$  انتیگرال پیدا کړئ.

$$f(x) = e^{2x} \Rightarrow \int_{-1}^1 e^{2x} dx$$

$$u = 2x \Rightarrow du = 2 dx \Rightarrow dx = \frac{1}{2} du$$

$$\left. \begin{array}{l} x = -1, u = 2x \Rightarrow u = 2(-1) = -2 \\ x = 1, u = 2x \Rightarrow u = 2(1) = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \int_{-1}^1 e^{2x} dx = \frac{1}{2} \int_{-2}^2 e^u du = \frac{1}{2} [e^u]_{-2}^2 = 3.627$$



دویم مثال: د  $f(x) = \int_1^2 2x \cdot \ln x^2 dx$  انتیگرال قیمت پیدا کریں۔

$$u = x^2$$

$$du = 2x dx \Rightarrow dx = \frac{1}{2x} du$$

$$\left. \begin{array}{l} x = 1, \quad u = x^2 = 1 \\ x = 2, \quad u = x^2 = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow \int_1^2 2x \cdot \ln x^2 dx = \int_1^4 2x \cdot \ln u \cdot \frac{1}{2x} du = \int_1^4 \ln u du$$

$$= [u \cdot \ln u - u]_1^4 = [4 \cdot \ln 4 - 4] - [1 \cdot \ln 1 - 1] \approx 2.545$$



پوئنتنی

لانڈی انتیگرالونہ حل کریں۔

a)  $\int \ln 2x^3 dx$

b)  $\int \ln \sqrt{x} dx$

c)  $\int \log \frac{x}{2} dx$

d)  $\int 3 \log \frac{1}{x} dx$

e)  $\int_1^2 \frac{4}{e^{2x-4}} dx$

## د قسمي کسرونو په مرسته د انټیگرال محاسبه

د مخامخ کسر قسمي کسرونه پیدا کړئ.

$$\frac{5}{x^2 - 3x + 2} = \frac{?}{(x-2)} + \frac{?}{(x-1)}$$

مخکې مو د قسمي کسرونو تجزیه مطالعه کړه اوس غواړو چې د هغو تابع گانوانټیگرالونه د قسمي کسرونو په واسطه تر څېړنې لاندې ونیسو.

**لومړی مثال:**  $\int \frac{7x-12}{x^2-6x+8} dx$  محاسبه کړئ.

**حل:** د قسمي کسرونو د تجزیې په مرسته لیکلای شو:

$$\frac{7x-12}{x^2-6x+8} dx = \frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{(x-4)}$$

$$\frac{A(x-4) + B(x-2)}{(x-2)(x-4)} = \frac{Ax-4A+Bx-2B}{(x-2)(x-4)} = \frac{(A+B)x-4A-2B}{(x-2)(x-4)}$$

$$A+B=7$$

$$-4A-2B=-12$$

$$A=7-B$$

$$-4(7-B)-2B=-12$$

$$-28+4B-2B=-12$$

$$-28+2B=-12$$

$$2B=16 \Rightarrow B=8$$

$$A=7-8=-1$$

$$\frac{7x-12}{x^2-6x+8} = -\frac{1}{x-2} + \frac{8}{x-4}$$

نولیکلای شو چې:

$$\int \frac{7x-12}{x^2-6x+8} dx = \int \frac{-1}{x-2} dx + \int \frac{8}{x-4} dx$$

$$\int \frac{7x-12}{x^2-6x+8} dx = -\int \frac{1}{x-2} dx + 8 \int \frac{1}{x-4} dx$$

$$= -\ln|x-2| + 8\ln|x-4| + C = \ln(x-2)^{-1} + \ln(x-4)^8 + C$$

$$= \ln[(x-2)^{-1} \cdot (x-4)^8] = \ln\left[\frac{(x-4)^8}{x-2}\right] + C$$

دویم مثال: د  $\int \frac{-5x+9}{x^2+x-6} dx$  انٹیگرال محاسبه کری.

حل: مخرج په فکتورونو تجزیه کوو:  $x^2 + x - 6 = (x-2)(x+3)$

نو:

$$\frac{-5x+9}{x^2+x-6} = \frac{-5x+9}{(x-2)(x+3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+3}$$

$$\frac{A(x+3)+B(x-2)}{(x-2)(x+3)} = \frac{Ax+3A+Bx-2B}{(x-2)(x+3)} = \frac{(A+B)x+3A-2B}{(x-2)(x+3)}$$

$$(A+B)x+3A-2B = -5x+9$$

$$A+B = -5 \Rightarrow A = -5-B$$

$$3A-2B = -5x+9$$

د  $A$  او  $B$  عددی قیمتونه عبارت دي له:

$$3(-5-B)-2B = 9$$

$$-15-5B = 9$$

$$-5B = 24$$

$$B = -\frac{24}{5}$$

$$A = -5 + \frac{24}{5} = \frac{-25+24}{5} = -\frac{1}{5}$$

$$\frac{-5x+9}{x^2+x-6} = \frac{-\frac{1}{5}}{x-2} - \frac{\frac{24}{5}}{x+3}$$

$$\int \frac{-5x+9}{x^2+x-6} = \int \frac{-\frac{1}{5}}{x-2} dx - \int \frac{\frac{24}{5}}{x+3} dx = -\frac{1}{5} \int \frac{1}{x-2} dx - \frac{24}{5} \int \frac{1}{x+3} dx$$

$$= -\frac{1}{5} \ln(x-2) - \frac{24}{5} \ln(x+3)$$

$$= \ln(x-2)^{\frac{1}{5}} + \ln(x+3)^{-\frac{24}{5}} = \ln \left[ (x-2)^{\frac{1}{5}} \cdot (x+3)^{-\frac{24}{5}} \right] + C$$

پوښتنې

لاندي انٹیگرالونه د قسمی کسرونو په طریقہ حل کری.

a)  $\int \frac{x+2}{x^3-3x^2-x+3} dx$

b)  $\int \frac{x-2}{x^2-6x+5} dx$

c)  $\int \frac{x^6}{x^4+3x^2+2} dx$

## د څپرکي مهم ټکي

- که  $f(x) = e^x$  وي، نو ددې تابع مشتق عبارت له  $f'(x) = e^x$  دی.
- که  $f(x) = a^x$  وي، د دې تابع مشتق  $f'(x) = a^x \cdot \ln a$  دی.
- که  $f(x) = \log_a x$  وي، نو د تابع مشتق  $f'(x) = \frac{1}{x \ln a} \log_a e$  دی.
- که  $f(x) = \log_a g(x)$  وي، نو د تابع مشتق  $(\log_a g(x))' = \frac{g'(x)}{g(x)} \log_a e$  دی.
- **قسمي کسرونه:** د یوه واقعي کسر هغه کوچنی کسرونه چې د جمعي د عواملو په شکل لیکل شوي دي که هغوی جمع کړو، راکړل شوي واقعي کسر په لاس راځي، قسمي کسرونه بلل کېږي.

- که چېرې د  $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$  د کسري پولینوم مخرج  $(P_n(x))$  د خطي بېلابېلو ضربي عواملو څخه جوړوي چې تکرار نه وي راغلی په لاندې بڼه بدلیدلای شي:

$$\frac{P_m(x)}{P_n(x)} = \frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{x-x_2} + \frac{C}{x-x_3} + \dots + \frac{N}{x-x_n}$$

- که د لومړي درجه پولینوم مخرج ضربي عوامل چې ځینې یې تکرار راغلي وي، یعنې که د  $x-x_0$  عامل  $n$  ځلې تکرار شوی وي، نو لیکلای شو چې:

$$\frac{P_m(x)}{P_n(x)} = \frac{A}{x-x_0} + \frac{B}{(x-x_0)^2} + \dots + \frac{N}{(x-x_0)^n}$$

- که د مخرج ضربي عوامل دویمه درجه پولینوم د تجزیې وړ نه وي او تکرار هم نه وي راغلی، نو د  $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$  واقعي پولینوم یو ټوټه کسر  $\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$  بڼه لري.
- د اکسپوننشل تابع گانو انتیگرال لپاره لیکلای شو:

$$\int e^x dx = e^x + C \quad , \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad , \quad (a \in \mathbb{R}^+ , a \neq 1)$$

- د لوگارتمي توابعو د انتیگرال لپاره لیکلای شو:

$$\int \ln x dx = x \ln x - x + C \quad , \quad \int \log_a x dx = x \log_a \frac{x}{e} + C$$

- ځینې تابع گانې چې پرته د بدلون له لارې حل کېږي، لیکو:

$$f(x) = e^x \Rightarrow \int f(x) dx = \int e^x dx = e^x + C$$

## د پنځم څپرکي پوښتنې

لاندې پوښتنې حل کړئ.

1. د  $f(x) = \ln\left(\frac{x-2}{x+2}\right)$  تابع مشتق پیدا کړئ.

2. د  $f(x) = \ln\sqrt{x-1}$  تابع مشتق پیدا کړئ.

3. د  $y = 2x^{2x}$  تابع مشتق پیدا کړئ.

4. د  $f(x) = \log\sqrt{x^3}$  تابع مشتق پیدا کړئ.

5. لاندې کسرونه په قسمي کسرونو تجزیه کړئ.

1)  $\frac{x+1}{x^2-x-6}$

2)  $\frac{x^2-x+1}{x^3+2x^2+x}$

3)  $\frac{2x^2+3}{(x^2+1)^2}$

6. لاندې انتیگرالونه پیدا کړئ.

1)  $\int 5t^7 dt$

2)  $\int \frac{x^3-3}{x^2} dx$

3)  $\int (2\cos x - 5\sin x + e^x) dx$

4)  $\int \sqrt{\cos x} \sin x dx$

5)  $\int xe^{-x} dx$

6)  $\int \left(\frac{5}{(2x+1)(x-2)}\right) dx$

7)  $\int_{-1}^1 3x^2 \sqrt{x^3+1} dx$

7- د لاندې تابع گانو مشتق پیدا کړئ.

a)  $y = \ln(x^2 + x + 1)$

b)  $y = \ln(\sin x)$

c)  $y = e^{x^2+1}$

d)  $y = \sqrt[3]{2}$

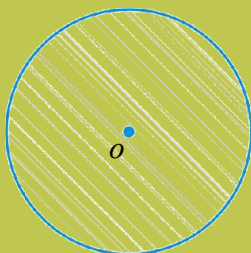
# شپر م خپر کی د انتیگرال تطبیقات



## د منحنی گانو پواسطه د محصور شوي سطحې د مساحت محاسبه

### Accounting of area bounded by one curve

د مخامخ شکل مساحت چې یوه سطحه د یوې منحنی په واسطه تړل شوې دایره ده. د مساحت فورمول یی وویاست.



د  $y = 1 - x^2$  تابع په پام کې ونیسئ.

- د تابع بحراني (Critical Point) ټکي او د  $x$  محور سره د تقاطع ټکي پیدا او گراف یې رسم کړئ.
- د  $y = 1 - x^2$  تابع او  $x$  محور تر منځ د سطحې د مساحت قیمت د انټیگرال په مرسته پیدا کړئ.
- پورتنی فعالیت د  $y = -x^2 + 2x$  تابع لپاره تکرار کړئ او د  $x$  د محور تر منځ محصور شوی مساحت محاسبه کړئ.

له پورتنی فعالیت څخه لاندې پایلې لاسته راځي:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \quad \text{—}$$

د  $y = f(x)$  منحنی او د  $x$  محور او د  $x = a$  ,  $x = b$  د کرښو له خوا رابند (محصور) دی.

— که د  $f(x)$  تابع په  $[a, b]$  تړلی انټروال کې مثبت او متمادي وي، یعنې  $y = f(x) \geq 0$  په دې

صورت کې  $f(x)$  تابع گراف تل د  $x$  محور پورته خواته او که  $y = f(x) \leq 0$  وي، په دې حالت

کې  $f(x)$  تابع گراف د  $x$  محور لاندې خواته واقع ده او منفي دی.

**لومړی مثال:** د  $x = 4 - y^2$  تابع د منحنی او د  $y$  د محور تر منځ محصور شوی مساحت پیدا کړئ.



**حل:** لومړی د تابع بحراني ټکي او د  $y$  محور سره د تقاطع ټکي پيدا کوو، وروسته يې شکل رسموو، د بحراني ټکي د پيدا کولو لپاره لومړی د تابع مشتق نيسو او له صفر سره يې مساوي کوو او له محورونو سره د تقاطع ټکو د په لاس راوړلو لپاره تابع له صفر سره برابروو.

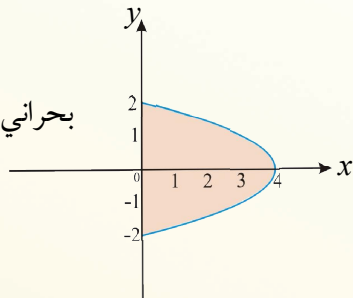
$$x = 4 - y^2 \Rightarrow x' = -2y = 0$$

$$x' = 0 \Rightarrow y = 0$$

$$y = 0, \quad x = 4 - y^2 \Rightarrow x = 4 - 0 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow (4, 0) \text{ بحراني ټکی}$$

$$x = 0, \quad 4 - y^2 = 0 \Rightarrow y^2 = 4$$

$$y = \pm 2 \Rightarrow (0, 2), (0, -2) \text{ د محورونو سره د تقاطع ټکي}$$



څرنگه چې د  $x = 4 - y^2$  معادله په  $[-2, 2]$  انټروال کې نظر  $x$  محور ته دواړه ټکي متناظر دي، نو د نښې مساحت په پام کې نيولو سره، د انټيگرال د مساحت سرحدات په لاندې ډول په لاس راوړو:

$$A = \int_{-2}^2 (4 - y^2) dy = 2 \int_0^2 (4 - y^2) dy = 2 \left[ 4y - \frac{y^3}{3} \right]_0^2$$

$$A = 2 \left[ \left( 4 \cdot 2 - \frac{2^3}{3} \right) - 0 \right] = 2 \left( 8 - \frac{8}{3} \right) = 2 \left( \frac{24 - 8}{3} \right) = 2 \left( \frac{16}{3} \right) = \frac{32}{3}$$

**دویم مثال:** د  $x$  محور او د  $y = 1 - \frac{1}{2}x^2$  تابع منحنی د محصور شوي سطحې مساحت محاسبه کړئ.

**حل:** د محصور شوي سطحې د مساحت ټاکلو لپاره لومړی بحراني ټکي او د  $x$  له محور سره د تقاطع ټکي په لاس راوړو.

$$y = 1 - \frac{1}{2}x^2, \quad y' = -x$$

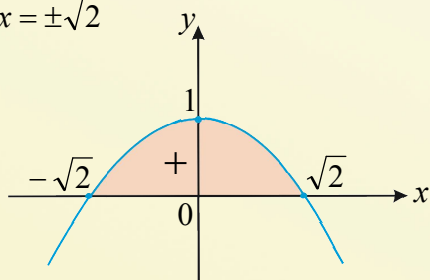
$$y' = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$x = 0, \quad y = 1 - \frac{1}{2}x^2 = 1 \Rightarrow y = 1 - \frac{1}{2}0^2 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow (0, 1) \text{ بحراني ټکی}$$

$$y = 0, \quad 1 - \frac{1}{2}x^2 = 0 \Rightarrow -\frac{1}{2}x^2 = -1 \Rightarrow x^2 = 2, \quad x = \pm\sqrt{2}$$

$$x_1 = \sqrt{2}, \quad x_2 = -\sqrt{2}$$

له محورونو سره د تقاطع ټکي  $(\sqrt{2}, 0)$ ,  $(-\sqrt{2}, 0)$



$$A = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{1}{2}x^2\right) dx = 2 \int_0^{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{1}{2}x^2\right) dx = 2 \left[ x - \frac{1}{6}x^3 \right]_0^{\sqrt{2}}$$

$$A = 2 \left( \sqrt{2} - \frac{(\sqrt{2})^3}{6} - 0 \right) = 2 \left( \frac{6\sqrt{2} - (\sqrt{2})^3}{6} \right) = 2 \left( \frac{6\sqrt{2} - \sqrt{8}}{6} \right)$$

$$= \left( \frac{6\sqrt{2} - 2\sqrt{2}}{3} \right) = \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

$$A = 1.8853$$

**دریم مثال:** د  $y = x^2 - 3$  تابع گراف د  $x$  له محور سره یوه سطحه رابند وي، د دې سطحې مساحت پیدا کړئ.

**حل:** لومړی د سطحې د ټاکلو لپاره د تابع گراف رسموو او د تابع بحراني ټکي او د تقاطع ټکي په لاس راوړو:

$$y = x^2 - 3 \Rightarrow y' = 2x$$

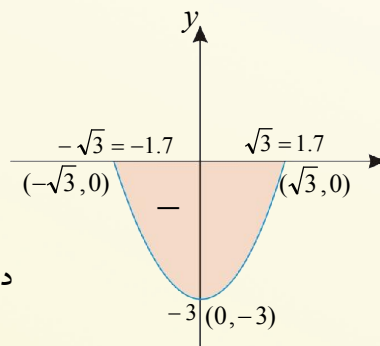
$$y' = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$x = 0, y = x^2 - 3 \Rightarrow y = 0^2 - 3$$

$$\Rightarrow y = -3 \Rightarrow (0, -3) \text{ بحراني ټکي}$$

$$y = 0, x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x^2 = 3$$

$$x = \pm\sqrt{3} \Rightarrow (\sqrt{3}, 0), (-\sqrt{3}, 0) \text{ د محورونو سره د تقاطع ټکي}$$



څرنګه چې د  $y = x^2 - 3$  تابع په  $[\sqrt{3}, -\sqrt{3}]$  انټروال کې د محور سره د تقاطع ټکي متناظر قیمتونه لري، نو گراف یې د  $x$  له محور څخه لاندې دی او انټیګرال یې منفي دی، نو له ټول مساحت څخه د انټیګرال د سرحدونو نیمایي مساحت پیدا کوو او په 2 کې یې ضربوو:

$$A_1 = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (x^2 - 3) dx = -2 \int_0^{\sqrt{3}} (x^2 - 3) dx = -2 \left( \int_0^{\sqrt{3}} x^2 dx - 3 \int_0^{\sqrt{3}} dx \right) = -2 \left( \left[ \frac{1}{3}x^3 \right]_0^{\sqrt{3}} - [3x]_0^{\sqrt{3}} \right)$$

$$= -2 \left( \frac{1}{3}[(\sqrt{3})^3] - 0 \right) - 3[\sqrt{3} - 0] = -2 \left( \frac{1}{3}(\sqrt{3})^3 - 3\sqrt{3} \right)$$

$$= -\frac{2}{3}(\sqrt{3})^3 + 6\sqrt{3} = -\frac{2}{3}(1.7)^3 + 6(1.7) = -\frac{2}{3}(4.913) + 10.2 = -\frac{9.826}{3} + 10.2$$

$$= -3.2753 + 10.2 = 6.9247$$

**خلورم مثال:** د  $y = x^2 - 3x$  تابع گراف رسم د منحنی او  $x$  محور تر منځ د سطحې مساحت په  $[-1, 4]$  انټروال کې وټاکئ.

**حل:** لومړی د منحنی بحراني ټکی او له له محورونو سره د تقاطع ټکي پیدا کوو:

$$y = x^2 - 3x$$

$$y' = 2x - 3 = 0 \Rightarrow 2x = 3, x = \frac{3}{2}$$

$$x = \frac{3}{2}, y = x^2 - 3x \Rightarrow y = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 3\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$y = \frac{9}{4} - \frac{9}{2} = -\frac{9}{4}, (x, y) = \left(\frac{3}{2}, -\frac{9}{4}\right) \text{ بحراني ټکی}$$

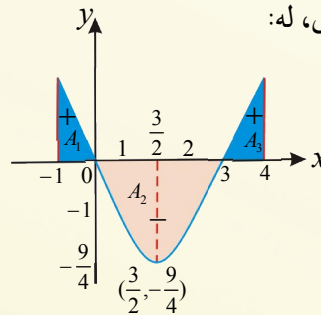
څرنگه چې  $y'' = 2 > 0$  دی، نو د  $\left(\frac{3}{2}, -\frac{9}{4}\right)$  ټکي د تابع مطلق اصغري ټکي دي او د تقاطع ټکي یې د

له محور سره عبارت دی، له:

$$y = 0 \Rightarrow x^2 - 3x = 0$$

$$\Rightarrow x(x - 3) = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 3$$



$$A = A_1 - A_2 + A_3 = \int_{-1}^0 (x^2 - 3x) dx - \int_0^3 (x^2 - 3x) dx + \int_3^4 (x^2 - 3x) dx$$

$$A = \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2\right]_{-1}^0 - \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2\right]_0^3 + \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2\right]_3^4$$

$$A = \left[\left(\frac{1}{3} \cdot 0 - \frac{3}{2} \cdot 0\right) - \left(\frac{1}{3} \cdot (-1)^3 - \frac{3}{2} \cdot (-1)^2\right)\right] - \left[\left(\frac{1}{3} \cdot 3^3 - \frac{3}{2} \cdot 3^2\right) - \left(\frac{1}{3} \cdot 0 - \frac{3}{2} \cdot 0\right)\right] +$$

$$\left[\left(\frac{1}{3} \cdot (4)^3 - \frac{3}{2} \cdot (4)^2\right) - \left(\frac{1}{3} \cdot (3)^3 - \frac{3}{2} \cdot (3)^2\right)\right]$$

$$= -\left(-\frac{1}{3} - \frac{3}{2}\right) - \left(\frac{1}{3} \cdot 27 - \frac{3}{2} \cdot 9\right) + \left(\frac{1}{3} \cdot 64 - \frac{3}{2} \cdot 16\right) - \left(\frac{1}{3} \cdot 27 - \frac{3}{2} \cdot 9\right)$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{3}{2} - \frac{27}{3} + \frac{27}{2} + \frac{64}{3} - \frac{48}{2} - \frac{27}{3} + \frac{27}{2}$$

$$= \frac{1 - 27 + 64 - 27}{3} + \frac{3 + 27 - 48 + 27}{2} = \frac{65 - 54}{3} + \frac{57 - 48}{2} = \frac{11}{3} + \frac{9}{2} = \frac{22 + 27}{6} = \frac{49}{6}$$

**پنجم مثال:** د  $y = x^2 - 2x$  منحنی او  $X$  محور ترمنځ مساحت د  $[-1, 2]$  په انټروال کې پیدا کړئ.

**حل:** لومړی بحراني ټکي وروسته د  $x$  له محور سره د تقاطع ټکي په لاس راوړو:

$$y = x^2 - 2x \Rightarrow y' = 2x - 2 = 0$$

$$2x = 2 \Rightarrow x = 1$$

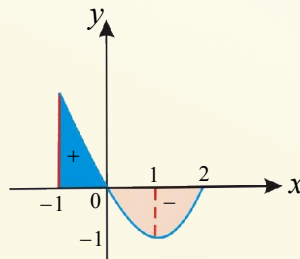
$$x = 1, \quad y = x^2 - 2x = 1^2 - 2(1) = -1 \Rightarrow (1, -1) \text{ بحراني ټکي}$$

څرنګه چې  $y'' = 2 > 0$  دی، نو تابع د  $(1, -1)$  په ټکي کې مطلق اصغري لري او د  $x$  له محور سره یې تقاطع په لاندې ډول ده.

$$y = 0, \quad x^2 - 2x = 0$$

$$x(x - 2) = 0$$

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 2$$



څرنګه چې منحنی د  $[-1, 2]$  په انټروال کې له مبدأ څخه تیرېږي او د منحنی یوه برخه د  $[-1, 0]$  په انټروال کې د  $x$  محور پورته خواته او بله برخه یې د  $[0, 2]$  په فاصلې کې د  $x$  محور ښکته خواته پرته ده انټیګرال یې منفي دی:

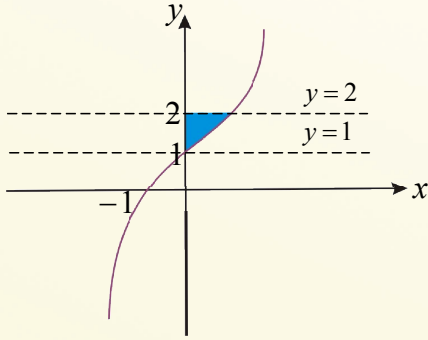
$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^0 (x^2 - 2x) dx - \int_0^2 (x^2 - 2x) dx = \left[ \frac{1}{3}x^3 - x^2 \right]_{-1}^0 - \left[ \frac{1}{3}x^3 - x^2 \right]_0^2 \\ &= \left( 0 - \left( -\frac{1}{3} - 1 \right) \right) - \left( \left( \frac{8}{3} - 4 \right) - 0 \right) = -\left( -\frac{1}{3} - 1 \right) - \left( \frac{8}{3} - 4 \right) = -\left( \frac{-1-3}{3} \right) - \left( \frac{8-12}{3} \right) \\ &= -\left( \frac{-4}{3} \right) - \left( \frac{-4}{3} \right) = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = \frac{8}{3} \end{aligned}$$



1- د  $f(x) = \sin x$  منحنی او د  $x$  محور تر منځ مساحت په  $[-2\pi, 2\pi]$  انټروال کې حساب کړئ.

2- د  $y = x^3 + 1$  تابع منحنی او  $y = 1$ ،  $y = 2$

کرنو تر منځ مساحت وټاکئ.

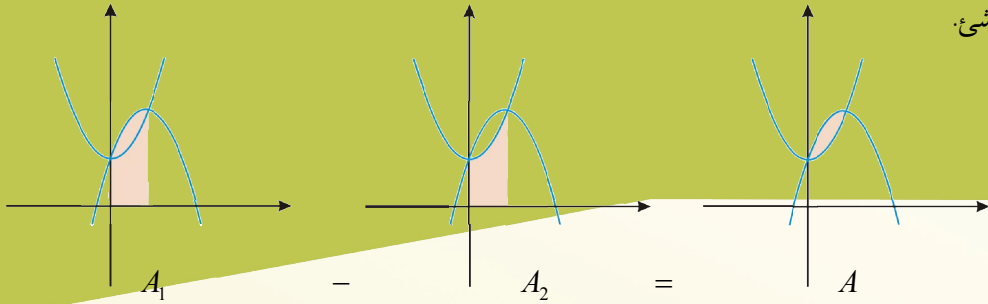


3- د  $y = \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 1} + x}$  منحنی او د  $x = 0$  او  $x = 1$  کرنو تر منځ مساحت حساب کړئ.

## د دوو محصور شویو منحنی گانو تر منځ د مساحت محاسبه

### Accounting of area bounded by tow curves

لاندې شکلونه په پام کې ونیسئ د  $A = A_1 - A_2$  اړیکې د سموالي په اړه څه ویلای شئ.



که د  $y_1 = 1 - x^2$  او  $y_2 = x^2 - 1$  تابع گانې را کړل شوی وي.

- د  $y_1 = y_2$  رابطې څخه د  $x$  قیمت په لاس راوړئ.
- د لاس ته راغلو قیمتونو په پام کې نیولو سره د هغوی گراف رسم کړئ.
- څرنګه چې د  $y_1$  تابع گراف د  $y_2$  تابع د گراف څخه لوړ دی، نو د تابع گانو د انټیګرال د تفریق حاصل  $(y_1 - y_2)$  د  $x$  په ټاکل شوی انټیوال کې حساب کړئ.
- نوموړی فعالیت د  $y = x^2$  تابع د منحنی او  $y = x + 2$  د کرښې لپاره تکرار کړئ او د محصورې شوي سطحې مساحت حساب کړئ.

د پورتنی فعالیت څخه لاندې پایلې لاسته راځي:

– که چېرې د  $y_1 = f(x)$  او  $y_2 = g(x)$  دوو منحنی گانو د محصور شوي سطحې د محاسبې لپاره په هغه صورت کې چې  $f(x) > g(x)$  وي، یعنې د  $f(x)$  تابع گراف د  $g(x)$  تابع د پاسه واقع وي، نو لومړی د دواړو منحنی گانو د تقاطع ټکي پیدا کوو وروسته د پاسني او لاندېني منحنی د  $x$  د محور سره مساحت په  $[a, b]$  انټیوال کې محاسبه کوو:

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx$$

– که چېرې د  $g(x)$  تابع گراف د  $f(x)$  تابع د گراف د پاسه واقع وي، نو لرو چې:

$$A = \int_a^b [g(x) - f(x)] dx = \int_a^b g(x) dx - \int_a^b f(x) dx$$

**لومړی مثال:** د  $f(x) = 2x - x^2$  او  $g(x) = x^2$  منحنی گانو د گرافونو ترمنځ د پرتې سطحې مساحت حساب کړئ.

**حل:** لومړی د دواړو منحنی گانو د تقاطع ټکی پیدا کوو:

$$f(x) = 2x - x^2, \quad g(x) = x^2$$

$$f(x) = g(x) \Rightarrow 2x - x^2 = x^2$$

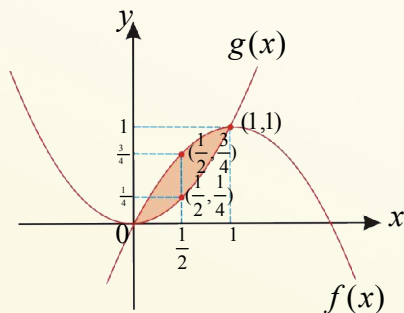
$$2x - x^2 - x^2 = 0$$

$$2x - 2x^2 = 0$$

$$2x(1 - x) = 0$$

$$2x = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

$$1 - x = 0 \Rightarrow x_2 = 1$$



لیدل کېږي چې د دواړو منحنی گانو تقاطع  $(1,1)$  او  $(0,0)$  ده اوس د محصور شوي سطحې مساحت پیدا کوو.

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx = \int_0^1 [2x - x^2 - x^2] dx = \int_0^1 [2x - 2x^2] dx = \left[ \frac{2x^2}{2} - \frac{2x^3}{3} \right]_0^1$$

$$= \left[ x^2 - \frac{2}{3}x^3 \right]_0^1 = \left( 1 - \frac{2}{3} \right) - 0 = \frac{3-2}{3} = \frac{1}{3}$$

**دویم مثال:** د  $f(x) = x^2 - 6x + 2$  تابع او  $g(x) = 2 - x$  کرښې د گرافونو ترمنځ د پرتې سطحې مساحت حساب کړئ.

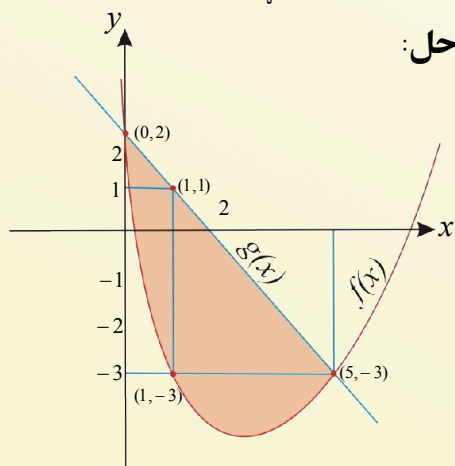
$$\left. \begin{array}{l} f(x) = x^2 - 6x + 2 \\ g(x) = 2 - x \end{array} \right\} \Rightarrow f(x) = g(x)$$

$$x^2 - 6x + 2 = 2 - x \Rightarrow x^2 - 6x + 2 - 2 + x = 0$$

$$x^2 - 5x = 0 \Rightarrow x(x - 5) = 0$$

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 5$$

د کرښې او منحنی د تقاطع ټکي  $(0,2)$ ،  $(5,-3)$



له شکل څخه ښکاري چې د  $g(x)$  کرښې گراف د  $f(x)$  گراف پورته خوا ته واقع دی، په دې معنا چې

$$g(x) > f(x)$$

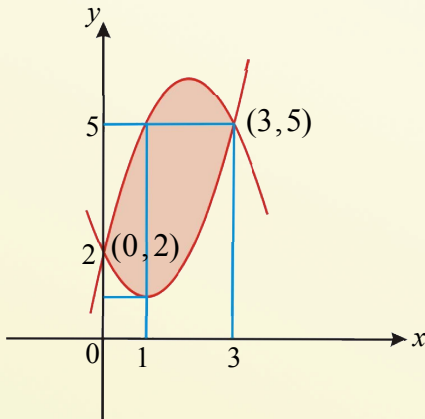
$$\begin{aligned} A &= \int_a^b [g(x) - f(x)] dx = \int_0^5 (2 - x - x^2 + 6x - 2) dx \\ &= \int_0^5 (-x - x^2 + 6x) dx = \int_0^5 (-x^2 + 5x) dx \\ &= \left[ -\frac{x^3}{3} + 5\frac{x^2}{2} \right]_0^5 = \left( -\frac{125}{3} + 5 \cdot \frac{25}{2} \right) - 0 = -\frac{125}{3} + \frac{125}{2} \\ &= \frac{-250 + 375}{6} = \frac{125}{6} \end{aligned}$$

**درېم مثال:** د  $f(x) = -x^2 + 4x + 2$  او  $g(x) = x^2 - 2x + 2$  تابع گانو د گرافونو تر منځ د پرته

سطحي مساحت پيدا کړئ.

**حل:** څرنګه چې د دواړو گرافونو د تقاطع ټکي د انټيګرال حدونه جوړوي، نو د دې ټکو د پيدا کولو لپاره

$f(x) = g(x)$  وضع کوو:



$$\left. \begin{aligned} f(x) &= -x^2 + 4x + 2 \\ g(x) &= x^2 - 2x + 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(x) = g(x)$$

$$-x^2 + 4x + 2 = x^2 - 2x + 2$$

$$\Rightarrow -x^2 + 4x + 2 - x^2 + 2x - 2 = 0$$

$$-2x^2 + 6x = 0 \Rightarrow x(-2x + 6) = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = 0, \quad -2x = -6 \Rightarrow x_2 = 3$$

د دواړو منحنی گانو د تقاطع ټکي  $(0, 2)$  ،  $(3, 5)$

د  $x$  له محور سره د تقاطع ټکي عبارت له  $(5, 3)$  ،  $(2, 0)$  دی اوله شکل څخه لیدل کېږي چې د  $f(x)$

گراف د  $g(x)$  له گراف څخه پورته واقع دی، نو لرو:

$$\begin{aligned} A &= \int_a^b [f(x) - g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx = \int_0^3 (-x^2 + 4x + 2) dx - \int_0^3 (x^2 - 2x + 2) dx \\ &= \left[ -\frac{x^3}{3} + \frac{4x^2}{2} + 2x \right]_0^3 - \left[ \frac{x^3}{3} - \frac{2x^2}{2} + 2x \right]_0^3 \\ &= -\frac{1}{3} \cdot 27 + 2 \cdot 9 + 6 - 0 - \left[ \frac{1}{3} \cdot 27 + 9 - 6 + 0 \right] \\ &= -9 + 18 - 9 + 9 = 9 \end{aligned}$$



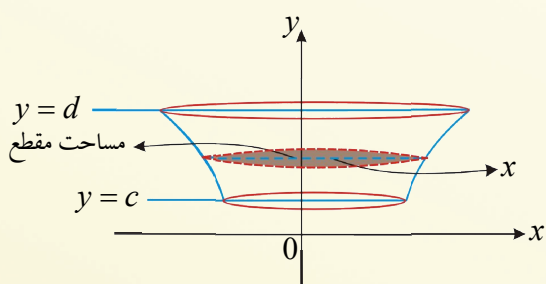


- 1- د  $y = x^2$  او  $y = -x^2 + 4x$  منحنی گانو د گرافونو تر منځ د پرتې سطحې مساحت پیدا کړئ.
- 2- د  $y^2 = 2x - 2$  پارابول او  $y = x - 5$  کرښې د گرافونو تر منځ د سطحې مساحت حساب کړئ.
- 3- د  $y^2 = 2x + 6$  منحنی او  $y = x - 1$  کرښې د گرافونو تر منځ د سطحې مساحت محاسبه کړئ.



چې ارتفاع يې  $\Delta x = b - a$  ده او د دې استوانې سطح د دایروي شکل په واسطه محصوره شوې ده چې دې سطحو ته مقطع وايي او پوهېږو چې د دایرې مساحت نظر  $x$  محور ته  $A(x) = \pi r^2$  دی او ددې مقطع شعاع شکل ته په کتو سره د  $y$  محور سره موازي ده، نو  $y = r$  کېږي او د حجم فورمول يې نظر ریمان مجموع ته په لاندې ډول دی:

$$v = \lim_{n \rightarrow \infty} V_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n A(x) \Delta x = \int_a^b \pi r^2 dx = \int_a^b \pi y^2 dx = \int_a^b \pi [f(x)]^2 dx$$



- که د  $x = f(y)$  تابع د منحنی مساحت  $y = c$  او  $y = d$  کرښو ترمنځ محصور شوی وي دداسې استوانې د مقطع مساحت نظر  $y$  محور ته  $A(y) = \pi r^2$  دی چې ارتفاع يې  $\Delta y = d - c$  او شعاع يې  $x = r$  سره ده هغه حجم چې له دې دوران څخه په لاس راځي په لاندې ډول دی:

$$v = \lim_{n \rightarrow \infty} V_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n A(y) \Delta y = \int_a^b \pi r^2 dy = \int_a^b \pi x^2 dy = \int_a^b \pi [f(y)]^2 dy$$

د دوراني جسمونو حجم د انتیگرال په مرسته په لاس راځي، لکه:

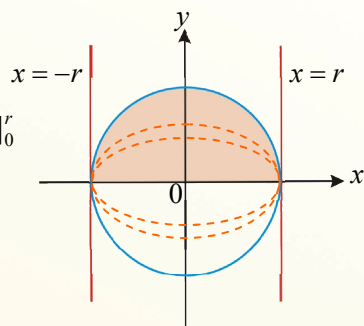
1- د انتیگرال په مرسته د کرې حجم پیدا کړئ.

**ثبوت:** پوهېږو چې که چېرې نیمه دایره د خپل قطر په شاوخوا وخرځي کره لاس ته راځي او د دایرې معادله  $x^2 + y^2 = r^2$  ده، اوس د نیمې دایرې حجم له څرخېدو وروسته په لاس راوړو او هغه دوه برابره کوو چې د دایرې بشپړ حجم په لاس راشي

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$y^2 = r^2 - x^2$$

$$\begin{aligned}
 V &= \int_{-r}^r \pi y^2 dx = \pi \int_{-r}^r (r^2 - x^2) dx \\
 &= 2\pi \int_0^r (r^2 - x^2) dx = 2\pi \left[ r^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_0^r \\
 &= 2\pi \left[ (r^3 - \frac{r^3}{3}) - 0 \right] \\
 &= 2\pi \left( \frac{3r^3 - r^3}{3} \right) \\
 &= 2\pi \left( \frac{2r^3}{3} \right)
 \end{aligned}$$



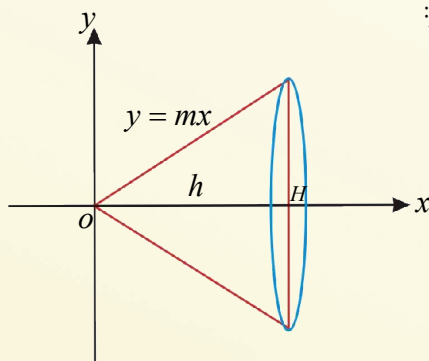
$$V (\text{د کرې حجم}) = \frac{4}{3} \pi r^3$$

2- د انتیگرال په مرسته د مخروط حجم پیدا کړئ.

**ثبوت:** څرنګه چې مخروطي سطح د  $y = mx$  کرني له دوران څخه د  $x$  د محور په چاپېریال په لاس

راځي نو:

$$\begin{aligned}
 V &= \int_0^h \pi y^2 dx \\
 &= \int_0^h \pi m^2 x^2 dx = \pi m^2 \int_0^h x^2 dx \\
 &= \pi m^2 \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^h = \pi m^2 \left( \frac{h^3}{3} \right) \\
 &= \frac{\pi h}{3} (mh)^2
 \end{aligned}$$



له پورته شکل څخه لیدل کېږي چې د مخروط قاعده دایروي بڼه لري اوشعاع یې د  $h$  محور سره موازي ده، یعنې  $y \parallel r$  او همدارنګه د مخروط ارتفاع ( $h$ ) د  $x$  په محور باندې منطبق ده، نو د  $y = mx$  په اړیکه

کې یې قیمت وضع کوو:

$$\begin{aligned}
 y = mx &\Rightarrow r = mh \\
 &= \frac{\pi h}{3} r^2
 \end{aligned}$$

$$V = \pi r^2 \times \frac{h}{3}$$

خرنگه چې د مخروط قاعده دایروي ده، د دایرې مساحت  $\pi r^2$  دی، لرو چې:

$$V = \pi r^2 \cdot \frac{h}{3}$$

$$V (\text{د مخروط حجم}) = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

3- د الپس حجم چې د  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  د منحنی او  $x$  محور په چاپیر د لوی قطر په شاوخوا له دوران وروسته

جوړېږي، په لاس راوړئ.

**ثبوت:** د الپس د نیمایي حجم د لوی قطر په شاوخوا په لاس راوړو او هغه دوه چنده کړو چې د بشپړ الپس حجم په لاس راشي.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2} \Rightarrow y^2 = b^2 - \frac{b^2}{a^2} x^2$$

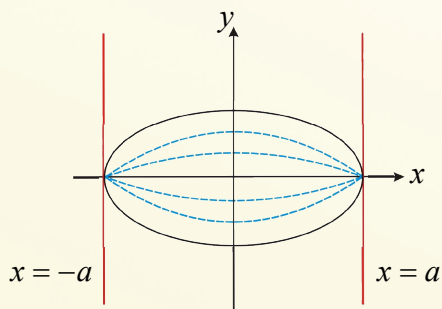
$$V = \int_{-a}^a \pi y^2 dx = \pi \int_{-a}^a \left[ b^2 - \frac{b^2}{a^2} x^2 \right] dx$$

$$= 2\pi \int_0^a \left[ b^2 - \frac{b^2}{a^2} x^2 \right] dx = 2\pi \left[ b^2 x - \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x^3}{3} \right]_0^a$$

$$= 2\pi \left[ (b^2 a - \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{a^3}{3}) - 0 \right] = 2\pi \left[ b^2 a - \frac{b^2 a}{3} \right]$$

$$= 2\pi \left[ \frac{3b^2 a - b^2 a}{3} \right] = 2\pi \left[ \frac{2b^2 a}{3} \right]$$

$$V = \frac{4}{3} \pi b^2 a \Rightarrow \text{د الپس دوران د لوی قطر په شاوخوا حجم} = \frac{4}{3} \pi b^2 a$$



که چېرې د الپس محراقونه د  $y$  په محور پراته وي او د هغه انتگرال حساب کړو د الپس د کوچني قطر په شاوخوا حجم په لاندې ډول په لاس راځي:

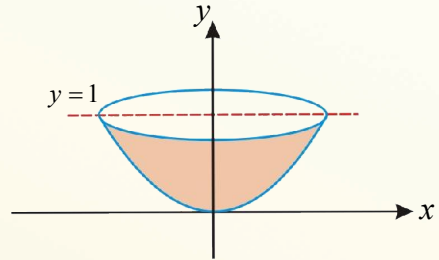
$$\text{د الپس دوران د کوچني قطر په شاوخوا حجم} = \frac{4}{3} \pi a^2 b$$

**لومړی مثال:** د هغه جسم حجم چې د  $y = x^2$  او  $y = 1$  کرښې ترمنځ پرتې مستوي مساحت د دوران څخه د  $y$  په محور په لاس راځي، پیدا کړئ.

**حل:** لومړی شکل رسموو وروسته یې مساحت حسابوو:

$$V = \int_a^b \pi x^2 dy = \pi \int_0^1 y dy = \frac{1}{2} \pi y^2 \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \pi$$

$$\Rightarrow V = \frac{\pi}{2}$$



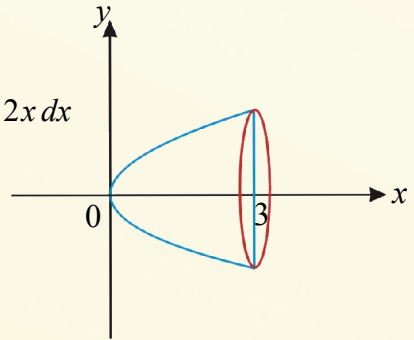
**دویم مثال:** د  $y = \sqrt{2x}$  تابع او  $y = 3$  کرښې ترمنځ د څرخیدلی جسم مساحت پیدا کړئ.

**حل:**

$$V = \int_a^b \pi y^2 dx = \int_0^3 \pi [\sqrt{2x}]^2 dx = \pi \int_0^3 [\sqrt{2x}]^2 dx = \pi \int_0^3 2x dx$$

$$V = 2\pi \int_0^3 x dx = 2\pi \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^3$$

$$V = 9\pi$$



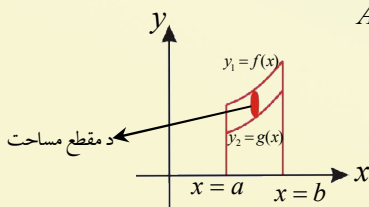
**یادونه:** که د  $y_1 = f(x)$  او  $y_2 = g(x)$  تابع گانې په  $[a, b]$  انټروال کې متمادي وی د هغه دوراني جسم حجم د  $f(x)$  او  $g(x)$  منحنی گانو او د  $x = a$ ،  $x = b$  کرښو ترمنځ جوړېږي له لاندې رابطې څخه لاسته راځي:

$\Delta x$  د استوانې ارتفاع

$$A(x) = (\text{د استوانې د مقطع مساحت}) = \pi y_1 - \pi y_2 = \pi(y_1 - y_2)$$

د هغې استوانې د حجم فورمول چې د  $f(x)$  تابع گراف د

$g(x)$  تابع گراف څخه پورته قرار لري.



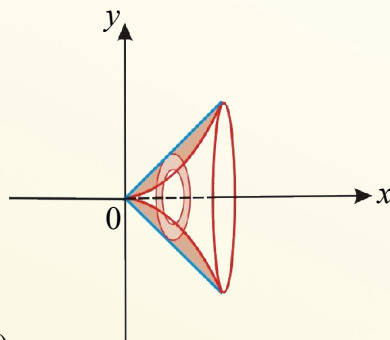
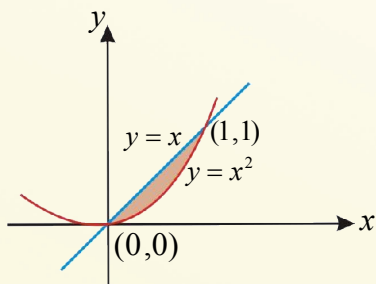
$$V = \int_a^b \pi (y_1^2 - y_2^2) dx = \pi \int_a^b (y_1^2 - y_2^2) dx$$

د هغه استوانې د حجم فورمول چې د  $g(x)$  تابع گراف د  $f(x)$  گراف څخه پورته واقع وي.

$$V = \int_a^b \pi(y_2^2 - y_1^2) dx = \pi \int_a^b (y_2^2 - y_1^2) dx$$

**مثال:** د هغه جسم حجم پیدا کړئ چې د  $y = x^2$  منحنی او  $y = x$  کرني ترمنځ د پرتې سطحې مساحت له دوران څخه د  $x$  محور په شاوخوا په لاس راځي، محاسبه کړئ.

**حل:**



$$\left. \begin{array}{l} y_1 = x^2 = f(x) \\ y_2 = x = g(x) \end{array} \right\} \Rightarrow y_2 > y_1, g(x) > f(x)$$

$$\begin{aligned} &= \int_a^b \pi(y_2^2 - y_1^2) dx = \int_0^1 \pi(x^2 - (x^2)^2) dx \\ &= \pi \int_0^1 (x^2 - x^4) dx = \pi \left[ \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right]_0^1 \\ &= \pi \left[ \left( \frac{1}{3} - 0 \right) - \left( \frac{1}{5} - 0 \right) \right] = \pi \left[ \frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right] \\ V &= \pi \left[ \frac{5-3}{15} \right] = \pi \left[ \frac{2}{15} \right] = \frac{2\pi}{15} \end{aligned}$$

**پوښتنې**

- د هغه جسم حجم چې د  $y = \sin x$  تابع او د  $x = 0$  او  $x = \pi$  دوو کرنيو ترمنځ محصور شوی مساحت له دوران څخه د  $x$  محور په چاپېر جوړېږي پیدا کړئ.
- د هغه جسم حجم پیدا کړئ چې د  $y = x^3$  منحنی او  $y = 8$ ،  $x = 0$  کرنيو ترمنځ محصور شوی مساحت له دوران څخه د  $y$  محور په چاپېر جوړېږي، حساب کړئ؟

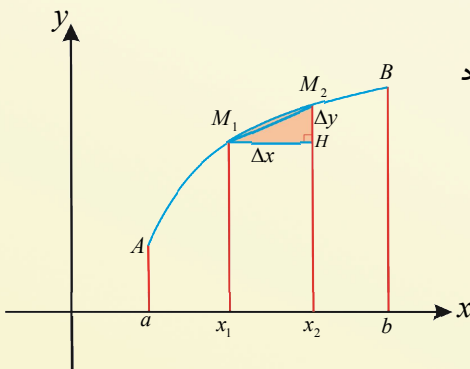
## د قوس د اوږدوالی محاسبه

### Accounting the Length of Arc

څرنګه کولای شو چې د مخامخ پری اوږدوالی پیدا کړو؟



- د قایمو مختصاتو په سیستم کې د  $y = f(x)$  تابع په  $[a, b]$  انټروال کې په پام کې ونیسئ او هغې ته  $\widehat{AB}$  وواپئ، داسې چې تابع په نوموړی فاصله کې متمادي او د مشتق وړ وي.
- د  $[a, b]$  انټروال په دريو مساوي برخو ویشو او د  $x_1$  او  $x_2$  د قوس اوږدوالی په  $M_1$  او  $M_2$  بڼیو.
- د  $M_1$  له ټکي څخه یوه ټوټه کرښه د  $M_2$  په ټکي او یوه بله کرښه، د هغې په مخامخ کرښه رسموو او د دواړو ټوټه کرښو، د تقاطع ټکي  $H$  ونوموئ.
- د  $M_1H$  د کرښې فاصلې ته  $\Delta x$  او  $M_2H$  ته  $\Delta y$  وایي او د  $M_1HM_2$  د قایم الزاویه مثلث د مخامخ قوس اوږدوالی د فیثاغورث د قضیې په مرسته حساب کړئ.



له پورتنی فعالیت څخه کولای شو چې د  $M_1HM_2$  مثلث د مخامخ قوس اوږدوالی داسې ثبوت کړو.

### ثبوت:

له قایم الزاویه  $M_1HM_2$  مثلث څخه په گټې اخیستنې سره لرو چې:

$$(M_1 M_2)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$$

$$M_1 M_2 = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$



د مشتق له تعريف څخه پوهېږو:

$$f'(t) = \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad , \quad g'(t) = \frac{\Delta y}{\Delta t}$$

$$\Delta x = f'(t) \cdot \Delta t \quad , \quad \Delta y = g'(t) \cdot \Delta t$$

$$M_1 M_2 = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{[f'(t) \cdot \Delta t]^2 + [g'(t) \cdot \Delta t]^2}$$

$$M_1 M_2 = \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2} \cdot \Delta t$$

نو د ريمان له مجموعې څخه لرو:

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2} \cdot \Delta t$$

$$L = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2} dt$$

**لومړی مثال:** د  $x^2 + y^2 = r^2$  د دايرې محيط محاسبه کړئ:

**حل:** څرنگه چې د دايرې پارامترې معادله په دې ډول ده:

$$\begin{cases} x = r \cos t \\ y = r \sin t \end{cases}$$

که چېرې  $0 \leq t \leq \pi$  وي، نو د دايرې نيمایي محيط پيدا کړئ.

$$P = \int_0^\pi \sqrt{x'^2 + y'^2} dt$$

$$x' = -r \sin t \quad , \quad y' = r \cos t$$

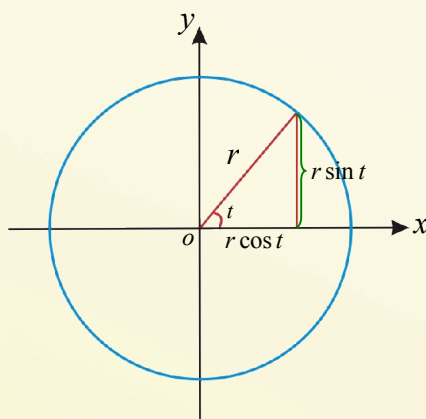
$$P = \int_0^\pi \sqrt{(-r \sin t)^2 + (r \cos t)^2} dt$$

$$P = \int_0^\pi \sqrt{r^2 \sin^2 t + r^2 \cos^2 t} dt$$

$$P = \int_0^\pi \sqrt{r^2 (\sin^2 t + \cos^2 t)} dt = \int_0^\pi \sqrt{r^2} dt$$

$$P = [rt]_0^\pi = (r \cdot \pi - r \cdot 0) = \pi r \quad \text{د دايرې نيمایي محيط}$$

$$\text{د دايرې مکمل محيط} = 2\pi r$$



## يادونه:

1- د  $y = f(x)$  منحنی معادله په  $a \leq x \leq b$  انټروال کې راکړل شوې ده، د  $x$  د پارامتر په پام کې نیولو سره د

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)} dx \quad \text{منحنی د قوس اوږدوالی داسې محاسبه کوو:}$$

**مثال:** د  $y = f(x) = x^{\frac{3}{2}}$  منحنی د قوس اوږدوالی په  $0 \leq x \leq 4$  فاصله کې حساب کړئ.

$$\text{حل: } f(x) = x^{\frac{3}{2}} \Rightarrow f'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$$

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)} dx = \int_0^4 \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\right)^2} \cdot dx$$

$$= \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x} dx = \int_0^4 \sqrt{u} \cdot \frac{4}{9} du = \frac{4}{9} \int_0^4 u^{\frac{1}{2}} du$$

$$= \frac{4}{9} \left[ \frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} \right]_0^4 = \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{3} [u^{\frac{3}{2}}]_0^4 = \frac{8}{27} [\sqrt{u^3}]_0^4$$

$$u = 1 + \frac{9}{4}x$$

$$du = \frac{9}{4} dx$$

$$= \frac{8}{27} \left[ \sqrt{\left(1 + \frac{9}{4}x\right)^3} \right]_0^4 = \frac{8}{27} \left[ \sqrt{\left(1 + \frac{9}{4} \cdot 4\right)^3} - 1 \right] = \frac{8}{27} (\sqrt{10^3} - 1) \quad dx = \frac{4}{9} du$$

$$L = \frac{8}{27} (10\sqrt{10} - 1)$$

2- د  $x = f(y)$  منحنی په  $a \leq y \leq b$  انټروال کې راکړل شوې ده، د  $y$  د پارامتر د په پام کې نیولو سره

$$L = \int_a^b \sqrt{f'^2(y) + 1} dy \quad \text{لرو چې:}$$

**مثال:** د  $x = f(y) = y^{\frac{3}{2}}$  منحنی د قوس اوږدوالی په  $1 \leq y \leq 4$  انټروال کې حساب کړئ.

حل:

$$f(y) = y^{\frac{3}{2}}, \quad f'(y) = \frac{3}{2} \cdot y^{\frac{1}{2}}$$

$$L = \int_a^b \sqrt{f'^2(y) + 1} \, dy = \int_1^4 \sqrt{\left(\frac{3}{2} \cdot y^{\frac{1}{2}}\right)^2 + 1} \, dy$$

$$= \int_1^4 \sqrt{\frac{9}{4}y + 1} \, dy = \int_1^4 \sqrt{u} \cdot \frac{4}{9} \, du$$

$$u = \frac{9}{4}y + 1$$

$$= \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{3} [u^{\frac{3}{2}}]_1^4 = \frac{8}{27} \left[ \sqrt{\left(\frac{9}{4}y + 1\right)^3} \right]_1^4$$

$$du = \frac{9}{4} dy$$

$$= \frac{8}{27} \left[ \sqrt{(10)^3} - \sqrt{\left(\frac{9}{4} + 1\right)^3} \right]$$

$$dy = \frac{4}{9} du$$

$$= \frac{8}{27} \left[ \sqrt{1000} - \sqrt{\left(\frac{13}{4}\right)^3} \right] = \frac{8}{27} \left[ 10\sqrt{10} - \sqrt{\frac{2197}{64}} \right]$$



پوڻتني

1. د  $x = t^2$  او  $y = t^3$  د منحنی گانو د قوس اوږدوالی د  $1 \leq x \leq 2$  د فاصلې تر منځ پیدا کړئ.

2. د  $f(x) = \frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}}$  د منحنی د قوس اوږدوالی په  $0 \leq x \leq 1$  انټروال کې پیدا کړئ.

## د څپرکي مهم ټکي

- د  $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$  انټيگرال د یوې سطحې د مساحت اندازه یا پراخوالی رابښي چې  $y = f(x)$  د منحنی او د  $x$  د محور او د  $x = a$  او  $x = b$  کرښو له خوا رابند دی.
- که د  $f(x)$  تابع په  $[a, b]$  انټروال کې مثبت او متمادي وي، یعنې  $y = f(x) \geq 0$  په دې صورت کې د  $f(x)$  تابع تل د  $x$  د محور پورته خواته او که  $y = f(x) \leq 0$  وي، په دې حالت کې د  $f(x)$  د  $x$  د محور لاندې خواته واقع او انټيگرال یې منفي دی.

**د دوو منحنی گانو په واسطه د محصور شوی سطحې د مساحت محاسبه:**

- که چېرې د  $f(x)$  تابع د  $g(x)$  تابع د گراف په پورتنی برخه کې واقع وي، نو لرو:

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx$$

- که چېرې د  $g(x)$  تابع گراف د  $f(x)$  تابع په پاسنی برخه کې واقع وي؛ لرو چې:

$$A = \int_a^b [g(x) - f(x)] dx = \int_a^b g(x) dx - \int_a^b f(x) dx$$

**د گراف له دوران څخه د په لاس راغلي جسم حجم**

- که چېرې د  $y = f(x)$  متمادي تابع مساحت د  $x = a$  او  $x = b$  کرښو په واسطه محصور شوی وي، نو د هغه جسم حجم چې د پورتنی تابع د منحنی له دوران څخه د  $x$  محور په شاوخوا لاسته راځي تقریباً استوانه یي شکل لري .

چې ارتفاع یې  $\Delta x = b - a$  ده او د دې استوانې سطح د دایروي سطحو په واسطه محصوره شوې ده چې دې سطحو ته مقطع وایي او پوهېږو چې د دایرې مساحت نظر د  $x$  محور ته  $A(x) = \pi r^2$  دی او ددې مقطع شعاع نظر شکل ته د  $y$  له محور سره موازي دی؛ نو  $y = r$  کېږي او د حجم فورمول یې نظر د ریمان مجموعې ته په

$$v = \lim_{n \rightarrow \infty} V_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n A(x) \Delta x = \int_a^b \pi r^2 dx = \int_a^b \pi y^2 dx = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

لاندي ډول دی:

- که د  $x = f(y)$  تابع مساحت د  $y = c$  ،  $y = d$  کرښو ترمنځ محصور شوی وي دداسې استوانې مقطع نظر  $y$  محور ته  $A(y) = \pi r^2$  چې ارتفاع یې  $\Delta x = d - c$  او شعاع یې  $x = r$  سره ده هغه حجم چې ددې دوران له مساحت څخه په لاس راځي په لاندي ډول دی:

$$v = \lim_{n \rightarrow \infty} V_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n A(y) \Delta y = \int_a^b \pi r^2 dy = \int_a^b \pi x^2 dy = \pi \int_a^b [f(y)]^2 dy$$

د قوس د اوږدوالي محاسبه:

$$L = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2} dt \quad \text{د قوس د اوږدوالي د محاسبې فورمول:}$$

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)} dx \quad (1)$$

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(y)} dy \quad (2)$$

### د شپږم څپرکي پوښتنې

1. د  $y^2 - x - 5 = 0$  منحنی او د  $y$  د محور تر منځ د پرتې سطحې مساحت محاسبه کړئ.
2. د هغې سطحې مساحت چې د  $y = \sin x$  منحنی په  $[0, 2\pi]$  انټروال کې او د  $x$  د محور تر منځ پرته ده، پیدا کړئ.
3. د  $y = x^2 - 2x$  او  $y = 6x - x^2$  منحنی گانو تر منځ د پرتې سطحې مساحت حساب کړئ.
4. د  $y = -x^2 + 4x - 3$  منحنی او  $x$  د محور تر منځ د پرتې سطحې مساحت پیدا کړئ.
5. د  $y = x^3 - 6x^2 + 8x$  او  $y = x^2 - 4x$  منحنی گانو تر منځ د پرتې سطحې مساحت پیدا کړئ.
6. د هغه جسم حجم وټاکئ چې د  $y = \sin x - \cos x$  منحنی او  $x = 0$ ،  $x = \frac{\pi}{2}$  کرښو د  $x$  محور په شاوخوا له دوران څخه په لاس راځي، حساب کړئ.
7. د هغې سطحې حجم چې د  $y = \frac{1}{4}x^2 + 2$  منحنی له دوران څخه د  $x$  د محور پر شاوخوا په  $[0, 4]$  انټروال کې جوړ شوي وي.
8. د هغې رابندې شوې سطحې د جسم حجم چې د  $y = x^2$  منحنی او د  $x^2 + y^2 = 2$  دایرې له دوران څخه د  $x$  محور په شاوخوا جوړ شوي وي، پیدا کړئ.
9. د هغه جسم حجم چې د  $y = \frac{1}{2}x + 1$  کرښې دوران او د  $x$  محور په  $[2, 6]$  انټروال کې جوړېږي، په لاس راوړئ.
10. د  $y = -x + 4$  منحنی د قوس اوږدوالی په  $-2 \leq x \leq 2$  انټروال کې حساب کړئ.
11. د  $y = \frac{4}{3}x + \frac{4}{3}$  تابع د منحنی د قوس اوږدوالی په  $2 \leq x \leq 5$  انټروال کې پیدا کړئ.

# اووم خپرکی احصائیه

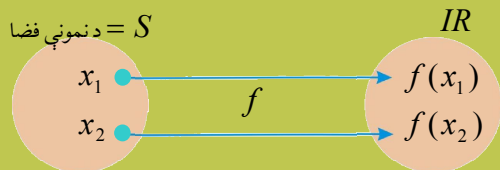
# مود ټول افغانان يو.



## د احتمال د تابع توزیع

د تصادفي ازماينښت، نمونه يي فضا او د ناڅاپه متحول

کلمې ستاسو په ذهن کې څه څه را ژوندي کوي.

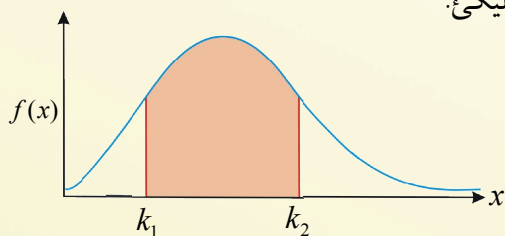


- هغه تصادفي متحول چې په احصائيه او احتمالاتو کې ترې گټه اخلي، له هغه متحول سره چې په

الجبر کې مولوستي دی، څه توپير لري؟

- که  $x_1, x_2, \dots, x_n$  د يوه سټ عناصر او  $P(x = x_i) = f(x_i)$  تابع ولرو، هغه مرتبې جوړې چې د

نوموړې تابع څخه په لاس راځي، جوړې او بيا يې وليکئ.



- مخامخ شکل ته په کتنې سره د  $k_1$  او  $k_2$

مقدارونو ترمنځ او  $f(x)$  د منحنی لاندې

محدود شوی مساحت د انټیگرال په شکل

وښیئ.

- د لاندې جدول په پام کې نیولو سره د  $[E(x = x_i)] = \sum_{i=1}^2 x_i f(x_i)$  ،  $[x_i - E(x_i)]^2$  او

$[x_i - E(x_i)]^2 f(x_i)$  مجموعه په لاس راوړئ.

$x_i$	0	1
$f(x_i)$	0.5	0.5



د پورتنی فعالیت پایله داسې بیانوو:

– هغه تصادفي متحول چې په احصائیه او احتمالانو کې تر څېړنې لاندې نیول کېږي عبارت له هغې تابع

څخه دی چې د تعریف ناحیه یې نمونه یي فضا او د قیمتونو ناحیه یې حقیقي اعداد دي.

– که  $P(x = x_i) = f(x_i)$  ولرو، نو د  $[x_1, f(x_1)], [x_2, f(x_2)], \dots, [x_n, f(x_n)]$  مرتبو جوړو ته د

مجزا (غیر متمادي) احتمال تابع وایي.

- د تجمعی او متمادی احتمال تابع کولای شو، په دې بڼه  $F(x) = P(X \leq x)$  وښیو.
- که چېرې  $f(x)$  د احتمال تابع او  $x$  تصادفي متحول وي، په دې صورت کې د دې احتمال چې  $x$  د  $k_1$  او  $k_2$  په منځ کې وي برابر دی له:

$$P(k_1 \leq x \leq k_2) = \int_{k_1}^{k_2} f(x) dx$$

- که چېرې  $x$  پیوسته ناڅاپه (تصادفي) متحول او  $k_1 < k_2$  څخه وي، په دې صورت کې:

$$P(k_1 \leq x \leq k_2) = F(k_2) - F(k_1)$$

- که چېرې  $x$  ناڅاپه مجزا متحول وي، په دې حالت کې اوسط (*Expected Value*) د  $x$

تصادفي مجزا متحول چې د  $E(x)$  په بڼه ښودل کېږي، برابر دی له:

$$E(x) = x_1 f(x_1) + x_2 f(x_2) + \dots + x_n f(x_n) = \sum_{i=1}^n x_i f(x_i)$$

$E(x)$  د  $x$  اوسط هم بلل کېږي چې هغه په  $\bar{x}$  ښیي همدارنگه که چېرې  $x$  غیر متمادي تصادفي

متحول وي، په دې صورت کې د  $x$  وریانس چې په  $S^2$  ښودل کېږي برابر دی له:

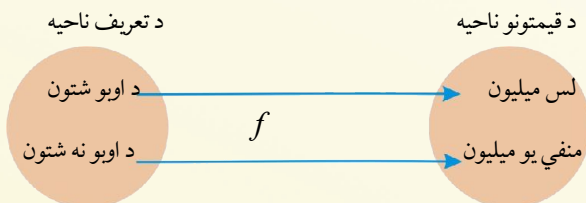
$$S^2 = \sum_{i=1}^n [x_i - E(x_i)]^2 f(x_i)$$

**مثال:** یو شخصي شرکت غواړي د یوې غونډۍ پر سر د اوبو یوه څاه وکني، د اوبو څاه په یو میلیون افغانۍ تمامېږي که نوموړی څاه اوبه ورکړي د شرکت مالک لس میلیونه افغانۍ اجوره اخلي، پرته له هغې به د څاه د کیندلو یو میلیون افغانۍ مصرف په زیان ورکړي.

الف\_ دا موضوع د یوې تابع په بڼه وښیئ.

ب\_ که د دې احتمال چې کیندل شوي څاه اوبه ورکړي 0.2 او د نه ورکولو احتمال یې 0.8 وي، په دې صورت کې د احتمال تابع، اوسط (*Expected Value*)، وریانس او د  $x$  تصادفي متحول معیاري انحراف پیدا کړي.

**د الف حل:**



**د ب حل:** د تصادفي متحول د احتمال تابع اوسط، وریانس او معیاري انحراف په لاندې جدول کې ښودل

شوی دی:

تصادفي متحول	د احتمال تابع	اوسط	د تصادفي متحول د مربعاتو انحراف د تصادفي متحول له اوسط څخه	واریانس	انحراف معیاري
$x_i$	$f(x_i)$	$E(x) = \sum x_i f(x_i)$	$[x_i - E(x)]^2$	$S^2 = [x_i - E(x)]^2 f(x_i)$	$S$
-1	0.8	$-1 \cdot 0.8 = -0.8$	$(-1 - 1.2)^2 = 4.84$	$4.84 \cdot 0.8 = 3.872$	4.4
10	0.2	$10 \cdot 0.2 = 2$	$(10 - 1.2)^2 = 77.44$	$77.44 \cdot 0.2 = 15.488$	
	0.1	1.2		$\sum S^2 = 19.360$	



فرض کړو چې د یوه موټر پلورنځي د 100 ورځو خرڅلاو په لاندې ډول دی:

د ورځو شمېر	60	30	8	2
د پېرودل شوو موټرو شمېر	0	1	2	3

د  $x$  تصادفي متحول د احتمال تابع او د تجمعي احتمال تابع پیدا کړئ.

د تجمعي احتمال له تابع څخه په گټه اخیستنې سره ووايئ چې په یوه ورځ کې حداکثر احتمال د (2) موټرونو او

حداقل احتمال د دوو موټرونو په کومه کچه ده؟

## د دوه جمله‌يي توزیع او د برنولي آزمويست



يوگډون کوونکي د پوهنتون د کانکور په آزمويسته کې له 160 سوالونو څخه 100 سوالونه حل کړل. تاسې څه سوچ کوئ چې داگډون کوونکي په آزمويسته کې بريالی کېږي او يا بې نتيجه پاتې کېږي؟

د احتمال دوه جمله‌يي توزیع يوه غيرمتمادي توزیع ده چې د مختلفو پېښو د توصيف لپاره په کار وړل کېږي اکثراً بېښې چې په نړۍ کې منځ ته راځي دوه حالتونه لري.



د لاندې آزمويستي پېښو له شرطونو څخه څه ډول پایلې په لاس راوړلای شئ.

- څو ځلې دوه سکې واچول شي چې سمدلاسه دواړه شپږ راشي.
  - څو ځلې دوه تاسه واچول شي چې د شمېرو مجموعه يې له 7 څخه کوچنی شي.
  - له يوې جعبې څخه څو ځلې د يوې مری (مهره) اخېستل چې د تورو او سپينو مری لرونکي ده.
  - له يوې جعبې څخه چې د تورو او سپينو مریو لرونکې ده څو ځلې يوه مری واخېستل شي چې اخېستل شوی مری سپينه وي (چې اخېستل شوي مری بيا په جعبه کې واچول شي)
  - که چېرې  $m$  برياليتوب له  $n$  آزمويست څخه ( $m < n$ ) چې ترتيب په کې مهم نه دی دا ټاکنه د څه په نامه يادېږي او فورمول يې وليکئ.
  - که د  $m$  شکلونو د برياليتوب احتمال د  $n$  آزمويست څخه په  $P$  او  $n - m$  شکلونو د ناکامې احتمال د  $n$  له آزمويست څخه په  $q$  وښودل شي، نو د  $m$  له کاميابي احتمال د آزمويست د  $n$  له شکلونو څخه به څو وي؟
  - زده کوونکي له پنځو څلور ځوابه آزمويستو سره مخامخ کېږي. هغوی په ناڅاپه ډول پوښتنو ته ځوابونه ورکوي، فرض کړئ که د (سم ځواب) برياليتوب په  $T$  او (ناسم ځواب) نه برياليتوب د  $F$  په توری وښودل شي په دې صورت کې د هر يوه سم او ناسم ځواب احتمال به څومره وي؟
- له پورتنی فعالیت څخه څرگندېږي چې د برنولي آزمويست يو ناڅاپه آزمويست دی چې کولای شو پایله يې په دوو حالتونو برياليتوب او نابرياليتوب دسته بندي کړو.

د برنولي توزیع کولای شو چې په  $P(x = m) = P^m (1 - P)^{1-m} = P^m \cdot q^{1-m}$  په بڼه وښیو په داسې حال کې چې  $P$  د بریالیتوب احتمال او  $q = 1 - p$  د نابریالیتوب احتمال دی.

که چېرې یو آزمایش  $n$  ځلې تکرار کړو، یو ترادف په لاس راځي، داسې چې که د هر آزمایش د بریالیتوب احتمال  $P$  او نابریالیتوب احتمال  $q$  وي، په دې صورت کې د  $n$  ځلې آزمایش څخه د  $m$  ځلې بریالیتوب

$$P(X \leq m) = \binom{n}{m} P^m q^{n-m} \quad 0 \leq m \leq n$$

پورتنی اړیکه کولای شو چې په دې ډول  $B(m, n, p)$  هم وښیو.

د پورتنی فورمول په پام کې نیولو سره کولای شو، د دوه جمله یي د توزیع اوسط په  $\bar{x} = np$  او د دوی د توزیع معیاري انحراف د  $S = \sqrt{npq}$  په بڼه وښیو.

**مثال:** د یوه ناروغ د ښه کېدو احتمال د شکرې له ناروغی څخه 0.4 دی، که چېرې 15 تنه په دې ناروغی اخته وي، ددې څومره احتمال شته چې پنځه تنه ښه شي او همدا شان پیدا کړی چې له 3 څخه تر 4 تنو پورې جوړ شي.

**حل:** څرنګه چې  $n = 15$  ،  $m = 5$  ،  $q = 0.6$  ،  $P = 0.4$  دی نو:

$$\begin{aligned} P(m=5) &= \binom{n}{m} P^m \cdot q^{n-m} = \binom{15}{5} (0.4)^5 (0.6)^{10} \\ &= \frac{15!}{5!(15-5)!} \cdot 0.01024 \cdot 0.00604661760 = \frac{360360}{120} \cdot 0.00006191 \\ &= \frac{22.3098876}{120} = 0.1859 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(3 \leq m \leq 4) &= \sum_{i=3}^4 \binom{15}{i} (0.4)^i (0.6)^{15-i} = (3^{15})(0.4)^3 (0.6)^{15-3} + (4^{15})(0.4)^4 (0.6)^{15-4} \\ &= \frac{15!}{3!(15-3)!} (0.064)(0.6)^{12} + \frac{15!}{4!(15-4)!} (0.0256)(0.6)^{11} \\ &= \frac{2730}{6} (0.000139264) + \frac{3270}{24} (0.0000928512) \\ &= \frac{0.38019072}{6} + \frac{0.3036}{24} = 0.063365 + 0.012650 \end{aligned}$$

$$P(3 \leq m \leq 4) = 0.076015$$

پوښتنې

په یوه کلي کې 200 کورنۍ اوسېږي که هره کورنۍ 4 ماشومان ولري ددې احتمال پیدا کړی چې هره کورنۍ

- حد اقل یو زوی لري.
- یوازې دوه زامن لري.
- یوه یا دوې لوڼې ولري.

## د پواسن د احتمال توزیع

$$1) b(x, n, p) = \binom{x}{n} p^x q^{n-x}$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} b(x, n, p) = \frac{\lambda^x \cdot e^{-\lambda}}{x!}$$

$$3) P(x, \lambda) = \frac{\lambda^x \cdot e^{-\lambda}}{x!}$$

که چېرې د برنولي دوه جمله یي توزیع فورمول په پام کې ونیسو، ایا ویلای شئ که چېرې د برنولي په دوه جمله یي توزیع کې د  $P$  قیمت صفر ته تقریب وکړي او د  $n$  قیمت لایتناهي ته تقریب وکړي، نو د برنولي دوه جمله یي توزیع څه سره مساوي کېږي.



که  $n = 5, p = 0.1, m = 2$  وي د  $P(x = m) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^m}{m!}$  قیمتونه په داسې حال کې چې

او د پواسن فورمول له قیمتونو سره یې پرتله  $P(X = m) = \binom{n}{m} P^m q^{n-m}$  او  $\lambda = np$  وي محاسبه کړئ او د پواسن توابعو له قیمتونو سره یې پرتله

کړئ، ویلای شئ چې د کوم فورمول په کار وړل، ساده دی؟

د پواسن فورمول کولای شي چې د  $m$  شکلونو د کامیابۍ احتمال د  $n$  آزمایشونو څخه کله چې  $n$  لوی

او د کامیابۍ احتمال  $P$  کوچنی وي، د تقریبي محاسبې لپاره کارول کېږي.

$$P(X = m) = \frac{e^{-x} \lambda^m}{m!} \quad \text{دا فورمول عبارت دی له:}$$

چې  $\lambda = np$  او  $e = 2.71828$  دی.

په یاد ولرئ چې د پواسن په توزیع کې اوسط او هم وریانس له  $\lambda$  سره برابر دی.

**مثال:** 200 تنو مسافرینو دیوې الوتکې ټکټ اخېستلی دی د مخکنیو تجارو په اساس که د هغه مسافرینو چې ټکټ یې رانیولی دی د نه راتگ احتمال 0.01 وي. ددې احتمال چې 3 تنه مسافرین بېرته را نه شي خومره دی.

**حل:** په دې مسئله کې د(نه راتلل) کامیابي ده او همدارنگه لیدل کېږي چې  $n = 200$  ډېر لوی او  $P = 0.01$  یعنی د کامیابي احتمال کوچنی دی، نو لرو:

$$P(X = m) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^m}{m!} \quad \lambda = n p = 200 \cdot 0.01 = 2$$
$$P(3) = \frac{(2.71828)^{-2} \cdot 2^3}{3!} = \frac{1}{(2.71828)^2} \cdot 8 = \frac{1}{7.3890461584} \cdot 8$$
$$= \frac{0.13533 \cdot 8}{6} = \frac{1.08268}{6} = 0.1804$$

اوس که چېرې دا احتمال د دو جمله یي په فورمول محاسبه کړو، لرو چې:

$$P(X = m) = \binom{n}{m} P^m q^{n-m}$$
$$\left. \begin{array}{l} n = 200 \\ p = 0.01 \end{array} \right\} \Rightarrow q = 0.99$$
$$P(3) = P(X = 3) = \binom{200}{3} (0.01)^3 (0.99)^{200-3}$$
$$= \frac{200!}{3! \cdot 197!} (0.01)^3 (0.99)^{197} = 0.1814$$

خرنگه چې لیدل کېږي دواړه ځوابونه سره معادل دي، نو واضح ده چې د پواسن د فورمول له لارې احتمال محاسبه ساده ده.

## يادونه:

د پواسن د فورمول په واسطه کولای شو چې په يوه ټاکلي وخت کې د ورتللو د شمېر احتمال په لاندې ډول

وښيو:

$$P(X = m) = \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^m}{m!}$$

په پورتنی فورمول کې  $t$  د ښودل شوی وخت نسبت پر ټول وخت چې اوسط هغې ته ورکړل شوی وي  $m$  د ورتللو شمېر د  $t$  په واحد وخت کې د  $\lambda$  د ورتگ شمېر اوسط په واحد د وخت کې دی.

**مثال:** که په يوه ساعت کې د يوه بانک د مراجعینو شمېر په متوسط ډول 60 تنه وي، ددې احتمال چې څلور تنه په لومړيو دريو دقيقو کې راغلی وي، څومره دی.

**حل:**

$$\lambda = 60 \quad , \quad t = \frac{3}{60} = \frac{1}{20}$$

$$m = 4 \quad , \quad \lambda t = 60 \cdot \frac{1}{20} = 3$$

$$P(m = 4) = \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^m}{m!} = \frac{e^{-3} (3)^4}{4!} = \frac{(2.71828)^{-3} (3)^4}{4!} = \frac{1}{(2.71828)^3 \cdot 24} \cdot 81$$

$$= \frac{1}{20.0854} \cdot 81 = \frac{4.03278}{24} = 0.168032$$





د چاپ د یوه ماشین د جوړولو لپاره په یوه کال کې په متوسط ډول ورتګ دوه ځلې ده، فرض کوو چې د پواسن توزیع په دې اړه صدق کوي.

**الف:** د ماشین د جوړولو لپاره د ورتګ د احتمال توزیع په یوه کال کې حساب کړئ.

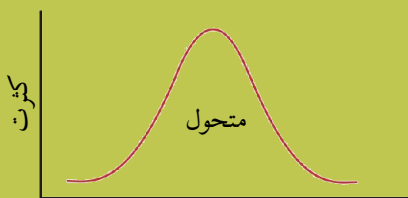
**ب:** د توزیع اوسط او معیاري انحراف څومره دی؟

**ج:** فرض کړئ که د هر ورتګ مصرف 100 افغانۍ وي، د هر ماشین د جوړولو مصرف پیدا کړئ؟

**د:** ددې احتمال چې په هر کال کې دیوه ماشین د جوړولو مصرف له 300 افغانیو څخه زیات وي، څومره

دی؟

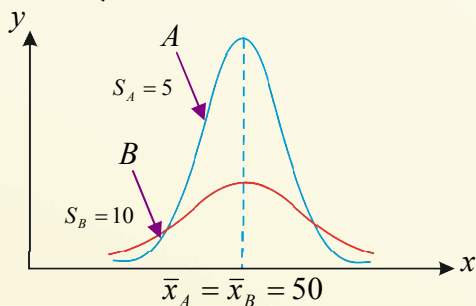
## د نورمال توزیع



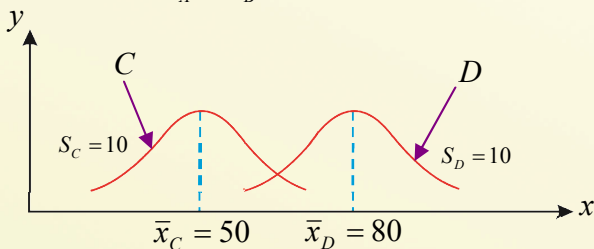
پوهېږو چې د نورمالې منحني شکل مشابه او متناظر له زانگولی سره ده، په نورماله منحني کې د پراکنده گۍ مرکزي شاخصونه (معياري انحراف او اوسط) څه ډول ځایونه (موقعیتونه) نیولی شي.



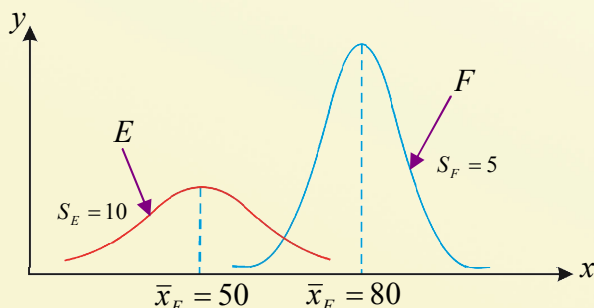
څو نورمالې توزیع گانې له بېلابېلو سطحو او معیاري انحرافونو سره په لاندې شکلونو کې ورکړل شوي دي.



الف شکل



ب شکل



ج شکل

لاندینې فعالیت له پورتنیو شکلونو څخه په گټه اخیستنې سره په شفاهې ډول بیان کړئ؟

• د الف په شکل کې د  $A$  او  $B$  د تصادفي متحول توزیع د څه ډول معیاري انحراف او اوسط لرونکې ده؟

• د ب په شکل کې  $C$  او  $D$  توزیع د څه ډول معیاري انحراف او اوسط لرونکې دی؟

• د ج په شکل کې  $E$  او  $F$  توزیع د څه ډول معیاري انحراف او اوسط لرونکې دی؟

• د نورمال منحنی شکل دواړو خواوو ته ترکوم ځایه غزیدلی دی؟

د پورتنی فعالیت له سرته رسولو څخه داسې پایله په لاس راځي چې:

د نورمال منحنی توزیع کېدای شي چې په څلورو طریقو یو له بل سره توپیر ولري. د نورمال توزیع ریاضیکي

معادله چې د  $f(x)$  احتمال توزیع تابع ښودونکی ده، په لاندې ډول ښوول کېږي.

$$f(x) = \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\bar{x}}{s}\right)^2}$$

$$f(x) = N(x, \bar{x}, s) \quad \text{او یا}$$

په داسې حال کې چې  $e = 2.71828$  او  $\pi$  هم ثابت عدد  $3.14189$  دی  $\bar{x}$  اوسط،  $s$  معیاري

انحراف،  $x$  متمادی تصادفي مقدار او  $f(x)$  د منحنی جگوالی رابښي.

د نورمالې توزیع له متمادی توزیعگانو څخه ده. د نورمالې توزیع په واسطه کولای شو، د اندازه کولو توپیر په

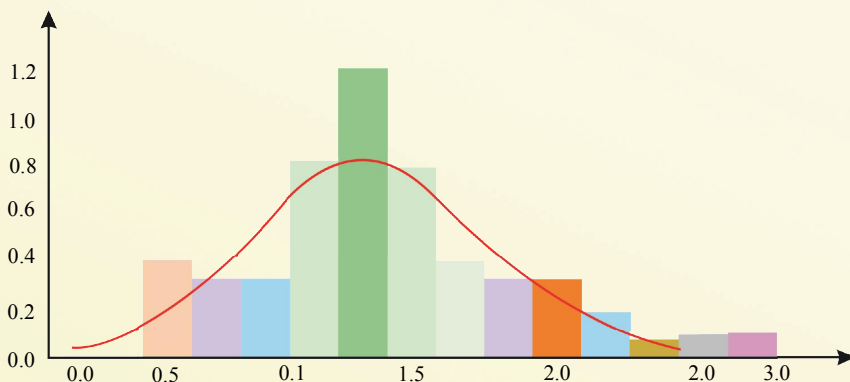
ښه توګه سره نژدې کړو.

**مثال:** د موټرونو ماشین د تیلو سوزولو په وخت کې یوه اندازه مضر لوگی تولیدوي، د هغه مضر لوگی مقدار چې له 46 موټرونو تولیدېږي، د یوه تن په واسطه چې لورنزن نومېده په 1980 کال کې وڅېړل شو. یوه اندازه لوگی د نایتروجن اوکسایدونه لري. لاندې مستطیلي گراف د نایتروجن اوکساید میزان د  $(\frac{gr}{mil})$  د 46 موټرونو د نورمال احتمال توزیع اوسط او وریانس چې د نوموړی کس له خوا تر څېړنې لاندې نیول شوی. ددې مستطیلي گراف د ستونونو مساحت متناسب دی له هغو 46 نمونه‌يي شمېر له اندازه‌گیری سره چې ددې ستون د افقي ټکو تر منځ قرار لري.

د مثال په ډول په څلورم ستون کې (چې له 1 څخه تر 1.2 پورې په افقي محور قرار لري) د

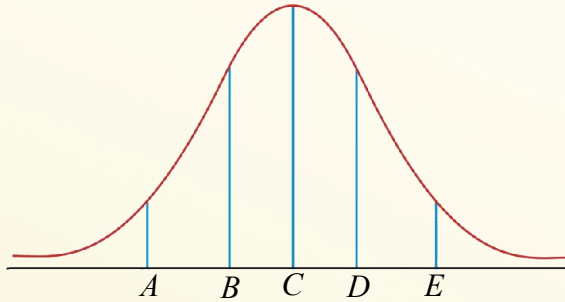
$$0.174 = 0.2 \cdot 0.870 \text{ مساحت لرونکی دی چې د } \frac{4}{46} \text{ سره برابر دی، ځکه 8 دیتا له 1 څخه تر 1.2}$$

پورې پراته دي.





لاندېنی شکل په پام کې ونیسئ؛ د  $A, B, C, D$  او  $E$  ټکو موقعیت د معیاري انحراف د اوسط له جنسه پیدا کړئ.

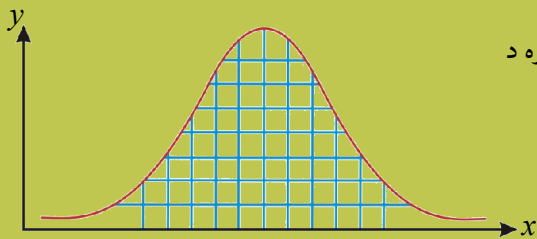


## د نورمال توزیع منحنی لاندې مساحت او د هغې سټنډرډ کول

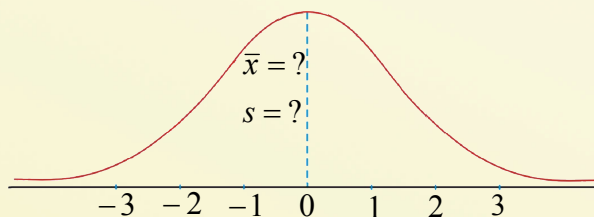
مخامخ شکل په پام کې ونیسئ:

د  $y = f(x)$  د منحنی لاندې مساحت د محاسبې لپاره د

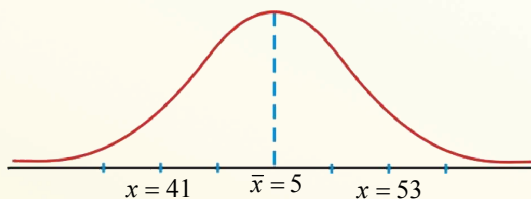
څه ډول لارو وړاندیز کوئ.



- که چېرې د  $x$  تصادفي متمادي متحول د احتمال نورمال توزیع چې اوسط یې  $\bar{x}$  او معیاري انحراف یې  $s$  وي، ددې احتمال چې دا تصادفي متحول د  $x_1$  او  $x_2$  تر منځ کمیت غوره کړي د انټیگرال په بڼه یې ولیکئ.
- سوچ کولای شئ چې د احتمال نورمال توزیع د ریاضي شکل انټیگرال محاسبه به ساده کار وي.
- که چېرې د نورمال تصادفي متحول په  $z = \frac{x - \bar{x}}{s}$  ډول ولیکو، د  $f(x)$  د احتمال توزیع تابع له څه سره برابره ده؟
- ویلای شئ چې اوسط او معیاري انحراف په لاندې شکل کې له کومو عددونو سره برابر دی؟



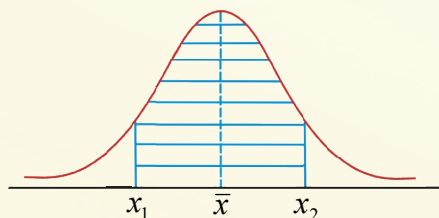
- که په لاندې شکل کې چې د  $x = 41$  او  $x = 53$  قیمتونه په نورمال ډول د  $\bar{x} = 50$  اوسط او  $S = 5$  معیار انحراف بنودل شوی دی، نو د  $z = \frac{x - \bar{x}}{s}$  مقدار په لاس راوړئ.



له پورتنی فعالیت څخه دا پایله په لاس راځي چې د احتمال د محاسبې لپاره داسې چې د  $x$  پیوسته تصادفي متحول د  $x_1$  او  $x_2$  ترمنځ یو کمیت ونیسئ، نو باید د  $x$  د احتمال د توزیع له تابع څخه انتگرال ونیسو او د منحنی لاندې سطحه د  $x_1$  او  $x_2$  فاصلو ترمنځ په لاندې ډول محاسبه کړو:

$$f(x_1 < x < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\bar{x}}{s}\right)^2} dx$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} N(x, \bar{x}, s) dx$$



د نورمال توزیع احتمال محاسبه ساده کار نه دی، د نورمال توزیع گانو د منحنی لاندې مساحت محاسبه اوږدو جدولونو ته اړتیا لري چې عملاً دا کار گران دی، کولای شو چې د جدول د جوړولو شکل د احصائیوي data د سټنډرډ کولو په واسطه حل کړو.

په دې معنا چې کولای شو په  $x$  پورې اړوند تصادفي متحول چې د نورمال توزیع لرونکی دی، د لاندې

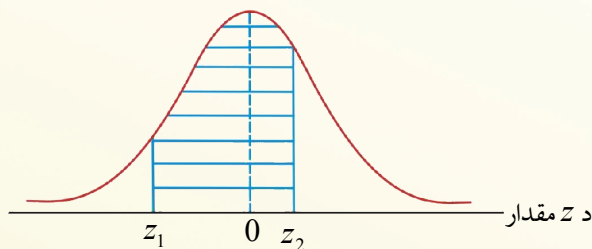
$$z = \frac{x - \bar{x}}{s}$$

اړیکې په واسطه سټنډرډ کړو.

دلته  $z$  د سټنډرډ نورمال متحول په نامه او منحنی ته د سټنډرډ نورمال منحنی په نامه یا د نورمال احتمال منحنی نومول کېږي، په یاد ولری چې د  $z$  سټنډرډ وي، متحول تل د صفر اوسط لرونکی او یو معیار انحراف یې دی، همدارنگه د نورمال منحنی او افقي محور ترمنځ مساحت له ټاکل شوي واحد سره برابر وي.

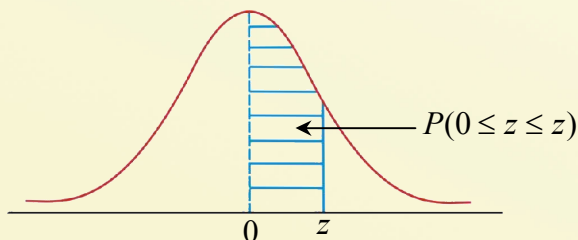
لاندي مساحت د يوه منحنی يوه برخه د نورمال احتمال چې له احتمال سره مستقيم تناسب لري او کولای شو چې د  $z = \frac{x - \bar{x}}{s}$  بدلولو سره يې په لاندي ډول وښيو.

$$f(z_1 < z < z_2) = \int_{z_1}^{z_2} \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \int_{z_1}^{z_2} N(z, 0, 1) dz$$

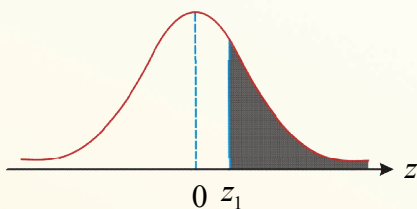


د  $x$  متحول منحنی لاندي مساحت چې د  $x = x_1$  او  $x = x_2$  ترمنځ واقع دی، د  $z$  متحول له منحنی مساحت سره چې د  $z = z_1$  او  $z = z_2$  ترمنځ پراته مساوي دي. په پایله کې کولای شو چې د نورمال د توزیع سټینډرډ د جدول په لرلو سره د نورمال توزیع احتمال د ناڅاپه متحول د هر ممکنه قیمت لپاره په لاس راوړای شو.

د سټینډرډ نورمال د توزیع احتمال د جدول د استعمال له لارې کولای شو، په لنډ ډول توضیح کړو. هغه جدول چې ددې لوست په پای کې راغلی دی، د سټینډرډ نورمال توزیع اړوند په احتمالاتو کې گډون لري. لاندي جدول ددې لوست يوه برخه د جدول پای رانښيي، هغه ارقام چې د جدول د پاسه لیکل شوي دي، رانښيي چې  $z$  د مثبتو مقدارونو لپاره تنظیم شوي دي چې د منحنی لاندي مساحت له صفر ټکي څخه تر  $z$  پورې رانښيي.

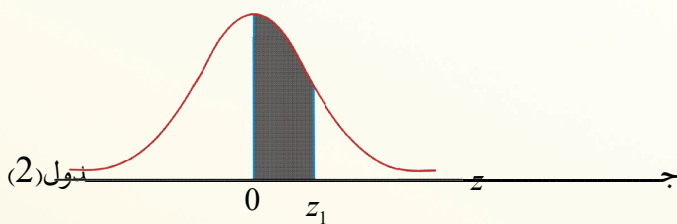






جدول (1)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9278	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9268	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997



Z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0311	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0754
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0978	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2226
0.6	0.2258	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2454	0.2486	0.2549
0.7	0.2580	0.2612	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2996	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4409	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4727	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990
3.1	0.4990	0.4991	0.4991	0.4991	0.4992	0.4992	0.4992	0.4992	0.4993	0.4993
3.2	0.4993	0.4993	0.4994	0.4994	0.4994	0.4994	0.4994	0.4995	0.4995	0.4995
3.3	0.4995	0.4995	0.4995	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4997
3.4	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4998
3.5	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998
3.6	0.4998	0.4998	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999
3.7	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999
3.8	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999
3.9	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000

د مثال په ډول که چېرې  $z = 1.56$  وي لومړی هغه سطر پیدا کړئ چې په هغه کې  $z$  د 1.5 معادل دی، که چېرې ددې کړنې په اوږدوالي پرمخ لاړ شو، تر څو هغه ستون ته ورسېږي چې له پاسه 0.06 لیکل شوی دی له 0.9406 عدد سره مخامخ کېږو چې د منحنی د لاندې اړوندې سطحې له  $z = 0$  څخه تر

$$P(0 \leq Z \leq 1.56) = 0.9406 \quad \text{نو لیکلای شو چې:}$$

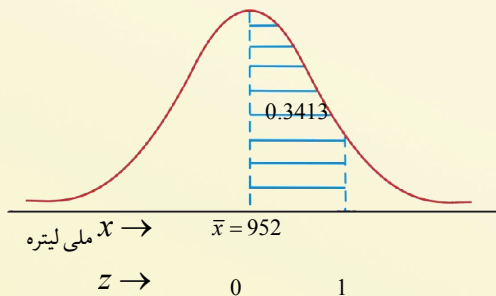
**لومړی مثال:** د څښلو(نوشابې) د بوتلونو د ډکولو دستگاه داسې تنظیم شوې ده، که 952 ملي لیتر نوشابه په بوتل کې واچوي ددې نوشابې میزان چې د نورمال توزیع اوسط یې 952 ملي لیتره او معیاري انحراف یې 4 ملي لیتره دی. ددې احتمال چې بوتل د 952 او 956 ملي لیټرو ترمنځ نوشابه ولري، څومره دی.

**حل:** لومړی  $z$  د  $x$  له جنسه پیدا کوو:

$$z_1 = \frac{x - \bar{x}}{s} = \frac{952 - 952}{4} = \frac{0}{4} = 0$$

$$z_2 = \frac{956 - 952}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

نو پر دې اساس د  $x$  د تعریف ناحیه له 952 څخه تر 956 د  $z$  تعریف د ناحیې له صفر څخه تر 1 بدلېږي. د لوست د پېل له جدول (2) څخه په گټه اخیستنې سره لرو  $P(0 \leq z \leq 1) = 0.3413$  احتمال داسې دی چې هغه بوتل چې له 952 څخه تر 956 ملي لیټرو نوشابه ولري، یا په بل عبارت 34.13 فیصده ډک شوي بوتلونه له 952 څخه تر 956 ملي لیټره نوشابه لري؛ یعنې:



$$\begin{aligned} P(0 \leq z \leq 1) &= P(z_2) - P(z_1) \\ &= P(1) - P(0) \\ &= 0.3413 - 0 \\ &= 0.3413 \end{aligned}$$

**دویم مثال:** په یوه خاص مضمون کې د زده کوونکو د نمبرو د نورمال توزیع اوسط 70 او معیاري انحراف یې 8 دی له نورمال سټنډرډ جدول څخه په گټه اخیستنې سره له 54 څخه تر 84 نمبرو ترمنځ فیصدي پیدا کړئ.

**حل:** د مسألې حل په لاندې ډول په ترسیمي بڼه بنودل شوی دی.

$$z_1 = \frac{54 - 70}{8} = -2 \quad \text{د } x = 54 \text{ لپاره لرو:}$$

$$z_2 = \frac{84 - 70}{8} = 1.75 \quad \text{د } x = 84 \text{ لپاره لرو:}$$

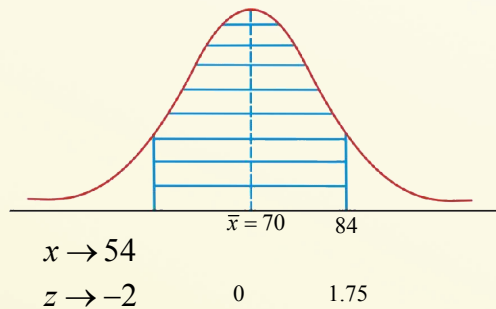
څرنګه چې د سټنډرډ نورمال منحني لاندې مساحت په یو محدود انټروال کې په پام کې نیول شوی دی، نو له نورمال سټنډرډ جدول (2) څخه لرو:

$$P(-2 \leq z \leq 0) = P(0 \leq z \leq 2) = 0.9772$$

$$P(0 \leq z \leq 1.75) = 0.9599$$

د ټاکل شوي مساحت د پام وړ احتمال دی.

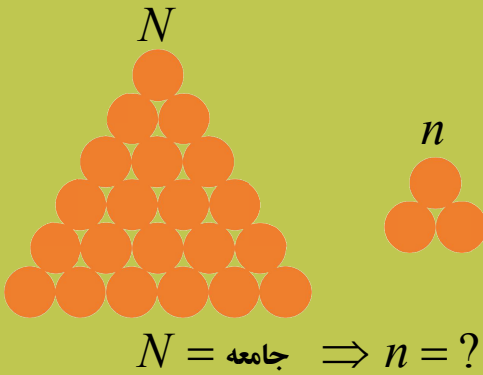
$$P(-2 \leq z \leq 0) + P(0 \leq z \leq 1.75) = 0.4772 + 0.4599 \\ = 0.9371$$



د لومړي مثال په پام کې نیولو سره محاسبه کړئ چې د بوتلونو څو فیصده له 948 څخه تر 956 ملي لیټرو پورې نوسابه لري.

## نمونه اخېستل

په دې متل کې ((موتی د خروارو نمونه ده)) څرنگه تحلیلوی.



- که چېرې وغواړئ چې د افغانستان د 12 ټولګي د زده‌کونکو ونې (قد) اندازه کړئ ددې کار لپاره څه ډول لارې وړاندیز کوئ.
- نمونه په دوو ډولونو وېشل کېږي، ساده نمونه او ناڅاپه نمونه، تاسې ددې نمونو کومې یوې ته غوره والی ورکوي؟ ولې؟
- د نمونه گیرۍ لپاره ښکاره خپل دلایل شته آیا کولای شئ یو یا دوه دلیلونه یې ووايي.
- سوچ کولای شي چې د اوسط او معیاري انحراف عددي ځانګړنې چې د ټولني د توزیع او د نمونې د توزیع لپاره ورڅخه ګټه اخېستل کېږي، یو شان وي.
- آیا د نمونه گیري او لیدل شویو ناڅاپه متحولینو د مقدارونو ترمنځ توپیر شته؟
- له پورتنی فعالیت څخه پوهېږو چې د نمونه اخېستنې بېلې بېلې لارې شته دی.
- ناڅاپه نمونه اخېستنه: د ټولني ټول عناصر په ټاکل کېدو کې هم چانس دی.
- سیستماتیک نمونه اخېستنه: د ټولني عناصر په منظم ډول کود وهل شوی دی.
- طبقه‌يي نمونه اخېستنه: ټولنه په بېلابېلو متجانسو ډلو وېشل شوی وي.
- خوشه‌يي نمونه اخېستنه: که ټولنه ډېره لویه وي، هغه په بېلابېلو څانګو وېشو او له هرې څانګې څخه یوه نمونه ټاکو.
- د هرې ټولني عددي ځانګړنې (اوسط، معیاري انحراف) ته د ټولني پارامتر وايي.
- د هرې ټولني د عددي نمونه گیري ځانګړنې (اوسط، معیار انحراف) ته آماره وايي.
- د نمونې پایلې د مشاهده د مقدارونو په عنوان د ناڅاپه متحولینو په بڼه په پام کې نیسو.
- د  $x_1, x_2, \dots, x_n$  ناڅاپه متحولونو یوه ناڅاپه نمونه د  $x$  تصادفي متحول ویل کېږي.

که چبرې تابع يې په دې ډول تعريف شوی وي.

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1) \cdot f(x_2) \dots f(x_n)$$

**مثال:** فرض کوو چې په يوه قطی کې 5 سپینې او 7 تورې گلولې وي، د قطی له منځ څخه 5 گلولې يوه يوه ځای په ځای کول (د يوه عنصر دویم ځل ټاکل مجاز) ټاکو.

د ټاکل شوی ناڅاپه نمونې تصادفي متحولین په ژبه بيان کړئ او اړونده توزیع يې پيدا کړئ.

**حل:** د  $x_1, x_2$  او  $x_3$  ناڅاپه متحولونه په پام کې ونیسئ په لومړی پړاو کې د  $x_1$  ناڅاپه متحول لپاره د صفر عدد د تورې گلولې لپاره او د (1) عدد د سپینې گلولې د ټاکلو په لومړی پړاو کې ځانته غوره کړئ او د  $x_2$  متحول هم د صفر عدد د تورې گلولې لپاره او د (1) عدد د سپینې گلولې د ټاکلو لپاره په دویم پړاو کې ځانته غوره کړي په همدې بڼه د  $x_3$  ناڅاپه متحول په دویم پړاو کې هم د صفر عدد د تورې گلولې لپاره ټاکو چې په دې پړاو کې (1) عدد سپینه گلوله ځانته غوره کوي، په دې حالت کې د  $x_1, x_2$  او  $x_3$  ناڅاپي متحولونه د برنولي ناڅاپه متحولین دي. د  $p = \frac{5}{12}$  له پارامتر او د  $i = 1, 2, 3$  مقدارونو څخه لرو:

$$f(x_i) = \left(\frac{5}{12}\right)^{x_i} \left(1 - \frac{5}{12}\right)^{1-x_i}$$

څرنګه چې نمونه اخېستن ناڅاپه ده، نو د  $x_1, x_2, x_3$  ناڅاپه متحولین یو له بل څخه بېل دي، نو تابع يې عبارت دی له:

$$f(x_1, x_2, x_3) = P(x_1 = x_1, x_2 = x_2, x_3 = x_3)$$

په یاد ولرئ چې د عناصرو هره ناڅاپه نمونې له مجهول پارامترونو سره تړلي نه دي، هغې ته آماره وايي.



1. که  $N = 25$  د يوې ټولني حجم وي که وغواړو چې پنځه ګونه ناڅاپه نمونه يې پيدا کړو، د هغو نمونو شمېر چې په لاس راځي څومره ده؟
2. ساده او ناڅاپه نمونې سره له مثاله بيان کړئ؟
3. فرض کوو چې له يوې ټولني څخه مو ناڅاپه نمونه رانيولې ده څه فکر کوئ چې له ددې نمونې سره به څه وکړو؟

## د نمونې د اوسط توزیع

دولت غواړي ویوهېرې چې د یوه ښار د وگړو متوسطه

گټه (سپما) څومره ده؟

ددې کار لپاره ناڅاپه نمونه ټاکي او د نمونې اوسط محاسبه کوي.

اوس باید ددې محاسبه شوې مقدار څخه کوم کمیت تخمین کړئ؟

$$\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = ?$$



فعالیت

- د لاندې data د دريو زده‌کونکو د ورزشي لوبو د نمبرو پایله راښيي:

نوم	داود	سليمان	پژواک
نمبرې	2	3	4

- د نمبرو د احتمال توزیع یې وليکئ.
- د زده‌کونکو د نمبرو اوسط او معیاري انحراف حساب کړئ.
- راکړل شوی نمبرې د مرتبو جوړو په مرسته (ممکنې دوه گونې نمونې د ځای په نیولو) ارایه او د هرې نمونې اوسط د جدول په بڼه وښیئ.
- د نمونو د اوسط د احتمال توزیع جدول (د  $\bar{x}$  د کثرت د توزیع جدول) وليکئ.
- د  $\bar{x}$  د کثرت توزیع جدول مستطیلي گراف رسم کړئ.
- د اوسط د  $\bar{x}$  متحول د زده‌کونکو د نمبرو له اوسط سره پرتله کړئ.

له پورتنی فعالیت څخه دا پایله په لاس راځي:

که  $x_1, x_2, \dots, x_n$  د یوې ټولنې د  $f(x)$  احتمال تابع ناڅاپه نمونه وي، په دې صورت کې د ناڅاپه نمونې احتمال توزیع عبارت دی له:

$x$	$x_1$	$x_2$	...	$x_n$
$f(x)$	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	...	

$$E(\bar{x}_n) = \mu \quad \text{د } \bar{x}_n \text{ متحول اوسط،}$$

$$U(\bar{x}_n) = \frac{1}{n} \delta \quad \text{د } \bar{x}_n \text{ متحول وریانس،}$$

$$S_n^2 = S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \quad \text{د نمونې وریانس}$$

$$E(S^2) = \delta^2 \quad \text{د نمونه‌يي وریانس اوسط،}$$

په داسې حال کې چې  $\bar{x}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$  نمونه‌يي اوسط،  $\mu$  د ټولنې اوسط  $\delta^2$  د ټولنې وریانس  $S^2$  د نمونې وریانس دی.

**مثال:** د لاندې ټولنې، ټولې دوه گونې ممکنه ناڅاپه نمونې د ځای په ځای کولو سره ټاکو:

$$f(x) = \frac{1}{3}, \quad x = 1, 2, 3$$

**الف:** د  $x$  د احتمال توزیع ولیکئ.

**ب:** د ټولنې اوسط او وریانس حساب کړئ.

**ج:** د  $\bar{x}$  د توزیع جدول تشکیل او مستطیلي گراف یې رسم کړئ.

**د:**  $E(\bar{x})$  او  $V(\bar{x})$  حساب کړئ.

**حل:**

$x$	1	2	3
$f(x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

**الف:**



ب:

$$\mu = E(x) = \sum_{x=1}^3 x f(x) = \frac{1}{3}(1+2+3) = 2$$

$$E(x^2) = \sum_{x=1}^3 x^2 f(x) = \frac{1}{3}(1^2 + 2^2 + 3^2) = \frac{14}{3}$$

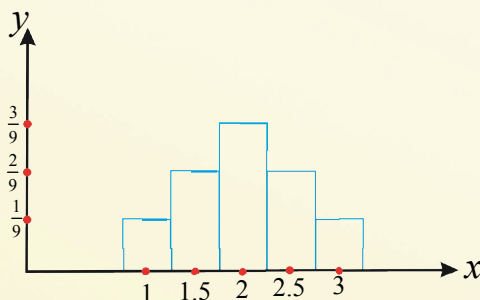
$$\delta_x^2 = E(x^2) - (E(x))^2 = \frac{14}{3} - 2^2 = \frac{2}{3}$$

ج: د لاندې جدول ټولې دوه‌گونې ممکنو نمونو د ځای نیول، د هر یوه اوسط راښيي:

نمونه	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(3,1)	(3,2)	(3,3)
$\bar{x}$	1	1.5	2	1.5	2	2.5	2	2.5	3

د  $\bar{x}$  د توزیع د کثرت جدول په لاندې ډول ښودل کېږي:

$\bar{x}$	1	1.5	2	2.5	3
$f(\bar{x})$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

د  $\bar{x}$  مستطیلي گراف په لاندې ډول رسمېږي:

د:

$$\mu_{\bar{x}} = E(\bar{x}) = \sum \bar{x} f(\bar{x}) = 1 \cdot \frac{1}{9} + 1.5 \cdot \frac{2}{9} + 2 \cdot \frac{3}{9} + 2.5 \cdot \frac{2}{9} + 3 \cdot \frac{1}{9} = \frac{18}{9} = 2$$

$$E(\bar{x}^2) = \sum \bar{x}^2 f(\bar{x}) = 1^2 \cdot \frac{1}{9} + (1.5)^2 \cdot \frac{2}{9} + 2^2 \cdot \frac{3}{9} + (2.5)^2 \cdot \frac{2}{9} + 3^2 \cdot \frac{1}{9} = \frac{13}{3}$$

$$\delta_{\bar{x}}^2 = V(\bar{x}) = E(\bar{x}^2) - (E(\bar{x}))^2 = \frac{13}{3} - 4 = \frac{1}{3}$$

$$E(x) = E(\bar{x}) = 2$$

نو لیدل کېږي چې:

$$V(\bar{x}) = \frac{\delta_x^2}{n} = \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

پوښتنه



1. فرض کوو چې یوه ټولنه د 2, 4, 6 او 8 څلورو عددونو څخه جوړه شوې وي، په دې صورت کې توزیع، اوسط او وریانس ددې ټولنې محاسبه او وروسته له دې ټولنې څخه دوه گونې ناڅاپه نمونه د ځای په نیولو سره وټاکئ او د نمونې توزیع اوسط یعنې  $\bar{x}$  په لاس راوړئ. د کثرت څو ضلعي گراف یې رسم کړئ، د  $\bar{x}$  اوسط او وریانس حساب کړي.

## د مرکزي لمبیت قضیه

پوهېرو چې د ټولنې کمیت ته د ټولنې پارامتر او د نمونې کمیت ته نمونه یي اوسط ویل کېږي د  $S_x$  او  $\bar{x}$  د نمونو احصائیه د کوم پارامتر په اړه اطلاعات زموږ په اختیار کې ږدي.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} = ?$$



فعالیت

- که د لویې ټولنې حجم  $\frac{S}{\sqrt{n}}$  وي، د کوچنۍ ټولنې حجم په  $\frac{S}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$  (چې  $N$  د ټولنې د عناصرو شمېر،  $n$  د نمونه عناصرو شمېر او  $S$  معیاري انحراف دی) وښیو څه وخت کېدای شي چې د لویې ټولنې حجم له کوچنۍ ټولنې سره برابر شي؟
  - که د  $x_1, x_2, \dots, x_n$  نورمال توزیع یو له بل څخه بیل وي آیا د هغوی د جمع حاصل د نورمال توزیع لرونکی ده؟
  - که  $x_1, x_2, \dots, x_n$  ناڅاپه ځانګړي متحولونه په یو شان توزیع شوي وي او د  $\mu$  اوسط لرونکی وي او  $\sigma^2$  وریانس وي ویلای شو چې د  $S_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n$  د توزیع وریانس او اوسط څو دی؟  
له پورتنی فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راځي:
- که چېرې  $N$  د یوې لویې ټولنې اوسط  $\mu$  متناهي اوسط او  $\delta^2$  متناهي وریانس لرونکی یوه ناڅاپه  $n$  ګونه نمونه وټاکو، په دې صورت کې د نمونې اوسط یعنې  $\bar{x}$  د تقریبي نورمال توزیع د  $\mu = \mu_{\bar{x}}$  اوسط  $\delta_x^2 = \frac{\delta^2}{n}$  وریانس دی او  $Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\delta}{\sqrt{n}}}$  ناڅاپه متحول د نورمال ستندرد توزیع دی. په داسې حال کې چې  $\frac{N-n}{N-1}$  ضریب د  $N$  د لویو قیمتونو لپاره (1) ته نژدې کېږي. په حقیقت کې یې لمبیت هغه وخت چې  $n \rightarrow \infty$  وکړی، برابر له (1) سره دی.

**مثال:** له يوه لوی ټولګي څخه چې د زده‌کوونکو د رياضي مضمون نمبرو نورماله توزیع د 71 اوسط او معیاري انحراف یې 9 دی. یوه 9 ټاپې نمونه ټاکو، ددې احتمال چې ددې نمونې د نمبرو اوسط له 80 څخه زیات وي حساب کړئ. همدارنګه که چېرې په تصادفي ډول یو زده‌کوونکی وټاکو، په دې صورت کې احتمال ددې چې نمبر یې له 80 څخه زیات وي، محاسبه کړئ.

**حل:** څرنګه چې  $\bar{x}$  د نورمال توزیع د  $\mu$  په اوسط او معیاري انحراف لرونکی دی، نو لرو:

$$\begin{aligned} P(z > 80) &= P\left(z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\delta}{\sqrt{n}}} > \frac{80 - 71}{\frac{9}{\sqrt{9}}}\right) = P(z > 3) \\ &= 1 - P(z \leq 3) = 1 - 0.9987 = 0.0013 \end{aligned}$$

همدارنګه د  $n = 1$  لپاره لرو:

$$\begin{aligned} P(z > 80) &= P\left(z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\delta}{\sqrt{n}}} > \frac{80 - 71}{\frac{9}{\sqrt{1}}}\right) = P(z > 1) \\ &= 1 - P(z \leq 1) = 1 - 0.8413 = 0.1587 \end{aligned}$$

**پاملرنه:**

د  $P(z)$  قیمت له (2) جدول څخه په لاس راوړو.



1- د هغو جعبو وزن چې د یوه ماشین په واسطه تړل کېږي، د نورمال توزیع اوسط یې  $\mu = 250\text{gr}$  او معیاري انحراف یې  $\delta = 20\text{gr}$  وي مطلوب دی، د هغه احتمال محاسبه چې د ناڅاپه نمونې د اوسط وزن  $n = 16$  تایي د جعبو کوچنی له  $240\text{gr}$  وي.

## د نمونه‌يي توزیع نسبت

د  $A$  په یوه ښار کې  $n$  کسان غواړي د  $B$  یوکس د ښاروال په صفت وټاکي، که دا کسان تر پوښتنې لاندې راشي او  $x$  د موافقو کسانو شمېر وښيي، د دې کسانو نسبي کثرت مساوي په څه دي.



- که چېرې  $x$  د دوو جملو توزیع لرونکی وي، کولای شو ولیکو چې:

$$f(x) = \binom{n}{x} P^x (1-p)^{n-x} \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

که چېرې  $\hat{P} = \frac{x}{n} \Rightarrow x = n\hat{P}$  وي د  $x$  قیمت په تعویض سره په پورتنی فورمول کې  $f(\hat{P})$  ولیکي:

- د  $\hat{P} = \frac{x}{n}$  په فورمول کې که د  $x$  تصادفي متحول د  $n$  ناڅاپه متحولینو د  $x_1, x_2, \dots, x_n$  له مجموع څخه

تشکیل شوی وي،  $\hat{P}$  د نمونې اوسط سره څه اړیکه لري؟

که چېرې  $x$  ناڅاپه متحول،  $n$  د برنولي د آزمایشونو مجموعه،  $P$  د هر آزمایش بریالیتوب احتمال وي، په

دې صورت کې  $\hat{P}$  د نمونې د نسبت آماره  $E(x) = np$  اوسط  $V(x) = npq$  د  $x$  ناڅاپه متحول وریانس

وي. د دوه جمله‌يي د توزیع په پاملرنې سره د  $\hat{P}$  توزیع په دې فورمول سره کولای شو.

$$f(n\hat{P}) = \binom{n}{n\hat{P}} p^{n\hat{P}} (1-p)^{n(1-\hat{P})} \quad \hat{P} = 0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, 1$$

د  $\hat{P}$  ناڅاپه متحولینو اوسط (*Expected Value*) او وریانس په لاندې صورت لیکلای شو:

$$\mu_p = E(\hat{P}) = P$$

$$\delta^2 \hat{P} = V(\hat{P}) = \frac{pq}{n} = \frac{p(1-p)}{n}$$

$$z = \frac{x - np}{\sqrt{npq}} = \frac{\hat{P} - p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}$$

د نورمال سټینډرډ توزیع یې عبارت دی له:

**مثال:** د کالیو د بڼه والي احتمال  $P = 0.3$  دی، یوه ساده ناڅاپه نمونه  $n = 6$  ګونه ټاکو. که چېرې  $x$  د ناقصو کالیو ښودونکی وي، د  $x$  او  $\hat{P}$  احتمال توزیع ولیکئ.

**حل:** د  $x$  ناڅاپه متحول د دوه جمله‌يي توزیع د  $P = 0.3$  او  $n = 6$  پارامترونه وي.

$$f(x) = P(X = x) = B(x, 6, 0.3) \quad x = 0, 1, \dots, 6$$

د دوه جمله‌يي توزیع جدول څخه په ګټه اخیستنې سره لاندې احتمالونه محاسبه او د توزیع د جدول احتمال یې لیکو:

$x$	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	0.1176	0.3025	0.3241	0.1852	0.0595	0.0102	0.0007

د  $\hat{P}$  ناڅاپه متحول د  $0, \frac{1}{6}, \frac{2}{6}, \frac{3}{6}, \frac{4}{6}, \frac{5}{6}, 1$  او 1 قیمتونه نیسي:

$$P(\hat{P} = 0) = P(X = 0) = 0.1176$$

$$P(\hat{P} = \frac{1}{6}) = P(X = 1) = 0.3025$$

او پاتې نور په مشابه ډول محاسبه کېږي، پام وکړئ چې:

$$P(\hat{P} = \frac{x}{n}) = P(X = x)$$

او د  $\hat{P}$  د احتمال توزیع عبارت دی:

$\hat{P}$	0	1.6	2.6	3.6	5.6	1
$f(\hat{P})$	0.1176	0.3025	0.3241	0.0595	0.0102	0.0007

$$P(\hat{P} \leq 0.6) = P(x \leq 3.6) = P(x \leq 3) = \sum_{x=0}^3 B(x, 6, 0.3) = 0.9294$$

په پورتنی مثال کې:

$$P(\hat{P} \leq 0.27) = P(x \leq 1.62) = P(x \leq 1) = 0.1176 + 0.3025 = 0.4201$$

اویا:



### پوښتنې

1. ددې احتمال چې د یوه تن د غوښتنلیک فرم په پوره ډول پرته له غلطی (تېروتنې) څخه ډک کړي

$P = 0.7$  وي، یوه نمونه د  $n = 200$  ګونه د استخدام ډک شوي فارمونه مو ټاکلی وي.

– ددې احتمال محاسبه کړئ چې  $\hat{P}$  د  $\pm 0.05$  داخلي فاصله کې د ټولنې له بنسټ څخه ولوېږي.

– ددې احتمال محاسبه کړي چې  $\hat{P}$  د 0.6 څخه زیات وي.

## د څپرکي مهم ټکي

- ناڅاپه متحول هغه اصطلاح ده چې د يوې تابع په عنوان په احصائيه او احتمالاتو کې ترې گټه اخېستل کېږي.
- د يوه غير متمادي ناڅاپه متحول د احتمال تابع هغه تابع ده چې د تعريف ناحيه يې هغه عددونه دي چې ناڅاپه متحول کولای شي هغه غوره کړي او د قيمتونو له ناحيې سره د تعريف د ناحيې د عناصرو اړونده احتمالونه گډون لري.
- د تجمعي احتمال تابع هغه تابع ده چې د تعريف ناحيه کې يې هغه عددونه گډون ولري چې د  $x$  ناڅاپه متحول يې ځانته غوره کوي او د قيمتونو ناحيه يې د  $f(x)$  ټول تصويرونه موجود دي.
- د يوه متمادي متحول د احتمال تابع هغه تابع ده چې د تعريف ناحيه يې د  $x$  ټول متمادي مقدارونه غوره کړي او د قيمتونو ناحيه يې  $F(x)$  ټول تصويرونه وي.
- د  $x$  غير متمادي ناڅاپه متحول اوسط Expected value او وريانس په وار سره عبارت دي له:

$$E(x) = \sum_{i=1}^n x_i f(x_i) = \bar{x}$$

$$V(x) = S^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - E(x_i))^2 f(x_i)$$

$$P(X = m) = P^m (1 - P)^{1-m}$$

• د برنولي توزيع،

$$P(X = m) = \binom{n}{m} P^m q^{n-m}$$

• د دوه جملهيي توزيع،

$$\bar{x} = np \quad , \quad S = \sqrt{npq}$$

• د دوه جملهيي توزيع اوسط او معياري انحراف عبارت له:  $S = \sqrt{npq}$  ،  $\bar{x} = np$

• د پواسن د احتمال توزيع يوه غير متمادي احتمال توزيع ده چې فورمول يې عبارت دی له:

$$P(x = m) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^m}{m!}$$

- که  $N$  له يوې نورمالې جامعې څخه د  $n$  ځلې (تايي) ناڅاپه نمونه وټاکو د  $\bar{x}$  د نمونې اوسط آماره د نورمال توزيع لرونکي له  $\mu(\bar{x}) = \mu$  اوسط سره او  $\delta_{\bar{x}}^2 = \frac{\delta^2}{n}$  او  $z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\delta}{\sqrt{n}}}$  د سټنډرډ نورمال توزيع سره ده.

- نورماله توزيع: د نورمال توزيع شکل له زنگولۍ سره مشابه او متناظر دی، په نورمال توزيع کې مرکزي شاخصونه يو له بل سره برابر دي او د پيوسته ناڅاپه متحولونو د ناحيې تعريف محدود دی چې د احتمال توزيع

$$f(x) = \frac{1}{\delta\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\bar{x}}{\delta}\right)^2}$$

يې عبارت ده له:



چې  $\mu$  د ټولني اوسط او  $\delta$  د ټولني معياري انحراف دی.

- د  $f(x)$  تابع د منحنی لاندې مساحت د محاسبې لپاره د  $a$  او  $b$  په فاصلو کې کولای شو له دې انتیگرال

$$P(a \leq x \leq b) = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b \frac{1}{\delta\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\delta}\right)^2} dx$$

خخه گټه واخلو:

- که چېرې  $x$  د دوه جملهيي توزیع د  $n$  شمېرد برنولي پر له پسې ازمايښتونه،  $P$  د کاميابي احتمال او

$q = 1 - p$  د هر ازمايښت د نابرياليتوب احتمال وي، په دې صورت کې د احصائيې د اوسط نمونه او د  $x$

ناخپه متحول وريانس په ترتيب سره عبارت دی له:  $\hat{P} = \frac{x}{n}$  ،  $E(x) = np$  او  $V(x) = npq$

همدارنگه د دوه جملهيي توزیع، اوسط، وريانس او د سټنډرډ توزیع او  $\hat{P}$  ناخپه متحول په ترتيب سره عبارت دی له:

$$E(\hat{P}) = P \quad , \quad f(\hat{P}) = \binom{n}{n\hat{P}} P^{n\hat{P}} q^{(1-P)}$$

$$z = \frac{\hat{P} - P}{\sqrt{\frac{pq}{n}}} \quad , \quad V(\hat{P}) = \frac{pq}{n}$$

- ددې  $z = \frac{x - \mu}{\delta}$  اړيکې په واسطه کولای شو چې هره احصائيوي مجموعه د نورمال توزیع لرونکی

وي هغه په سټنډرډ نورمال بدل کړو.

- نمونه په دوو برخو وېشل کېږي، ساده نمونه او ناخپه نمونه.

- د نمونه گيري طريقي په عمومي ډول عبارت دي له: ناخپه نمونه گيري، منظمه نمونه گيري، گروپي

نمونه گيري، خوشه يي نمونه گيري.

- د  $x$  نمونې ناخپه متحولينو اړوند تابع په دې صورت تعريفېږي.

$$f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)$$

- که چېرې  $x$  د ټولني يوه ناخپه نمونه د  $f(x)$  د احتمال تابع په لرلو سره وي  $E(\bar{x}_n) = \mu$  اوسط،

$$V(\bar{x}_n) = \frac{1}{n} \delta^2 \quad \text{د اوسط وريانس،} \quad \delta^2 \quad \text{د ټولني وريانس او} \quad S^2 \quad \text{ته د نمونو وريانس وايي.}$$

## د خپرکي پوښتني

1. دوه سکې څلور ځلې پورته واچوئ او د خط راتللو شمېر په پام کې ونيسئ:
  - ناڅاپه متحولونه د تابع په بڼه وښيي.
  - د هر ځل د پورته اچونې احتمال نمونه يي فضا سره نسبت ورکړئ.
  - د تابع د تجمعي او مجزا احتمال وليکئ.
2. که چېرې د يوې جوړې بوټونو د نقيصي احتمال  $P = 0.1$  وي، د ناقصو بوټونو اوسط او معياري انحراف په يوه نمونه کې  $n = 400$  جوړو بوټونو پيدا کړئ.
3. د يوه شرکت په گدام کې 500 پاڼې کمپيوټرونه شته چې د هغې له جملې څخه يې 50 پاڼې نقص لري، يو اخېستونکی له هغې څخه 10 پاڼې کمپيوټرونه اخلي، ددې احتمال څومره دی چې هغه 8 پاڼې جوړ اخېستی وي؟
4. لاندې اطلاعات چې اوسط او معياري انحراف د دوو پارامترونو په اړوند دی د نورمال توزیع د رسمولو لپاره ترې گټه واخلي. لومړی يو افقي محور رسم کړئ او د  $\bar{x} + s$  ,  $\bar{x} - s$  ,  $\bar{x} + 2s$  او  $\bar{x} - 2s$  ټکي پرې وټاکئ وروسته يو ټکی د  $h$  اختياري جگوالي په اندازه د  $\bar{x}$  له پاسه په پام کې ونيسئ او  $\bar{x} + s$  له پاسه يو ټکی د  $0.6h$  په جگوالي وټاکئ، يعنې يو ټکی چې مختصات يې  $(\bar{x} + s, 0.6h)$  وي، څرنگه چې د نورمال منحنی متناظر دی، همدا عمل په ځانگړې توگه په  $\bar{x} - s$  هم سرته ورسوئ. اوس د  $\bar{x} + 2s$  ,  $\bar{x} - 2s$  د پاسه دوه ټکي د  $h$  او  $0.15h$  په جگوالي په پام کې ونيسئ، پام وکړئ چې د نورمال منحنی د دقيق رسمولو لپاره د  $0.6067h$  او  $0.1354h$  په ځای له  $0.6h$  او  $0.15h$  څخه گټه واخلي. په پايله کې دا ټکي د يوه منحنی په واسطه وصل او ووايئ چې دا منحنی په کومو فاصلو کې محدب او په کومو فاصلو کې مقعره ده.
5. په يوه روغتون يوه څېړنه رابښي چې د مراجعينو شمېر د شنبې په ورځ وروسته له وخت څخه د 6 او 8 ترمنځ 25 تنه دی. فرض کړئ چې د پواسن د احتمال توزیع په دې حالت کې صدق وکړي.
  - د روغتون د مراجعينو د احتمال توزیع د دوشنبې له ورځې، وروسته له وخت څخه د 6 او 8 ساعتونو ترمنځ پيدا او گراف يې رسم کړئ؟ آیا دا توزیع خمېده ده؟
  - ددې توزیع د اوسط او معياري انحراف مقدار په لاس راوړئ.
  - آیا دا ممکنه ده چې د دوشنبې په ورځ وروسته له وخت څخه د 6 او 8 ساعتونو ترمنځ به له 7 تنو څخه زيات روغتون ته مراجعه کړي وي؟ ولې؟
6. فرض کوو چې د يوه کتاب د يوه مخ د تېروتنو شمېر د پواسن د توزیع يا  $\lambda = \frac{1}{2}$  پارامتر لرونکی دی د محاسبي احتمال يې مطلوب دی داسې چې:

- حد اقل یوه ټاپیې تېروتنه په هغه مخ کې وي.
  - دقیقاً 5 ټاپیې تېروتنې په هغه مخ کې دي.
  - د 3 او 6 ترمنځ ټاپیې تېروتنې په هغه کې وي.
7. فرض کوو چې د هغه پستون قطر چې د یوه اتوماتیکي ماشین په واسطه جوړېږي په نورمال یا اوسط ډول 25 ملي متر او معیاري انحراف یې 0.5 ملي متره توزیع شوی وي.
- کله چې د پستون قطر د 25.2 او 25.9 ترمنځ وي احتمال یې څومره دی.
  - د پستونونو کوم نسبت د 25 ملي قطر لرونکی او له هغې څخه کم دی.
  - که چېرې 1000 پستونه جوړ شي، له هغوی څخه څو دانې ددې وړ دي چې 24.07 ملي مترو څخه کم قطر ولري.
  - د تولید شویو پستونونو څو فیصده د 24.56 ملي متره معادل قطر یا له هغه څخه زیات لري.
8. که چېرې  $x_1, x_2, \dots, x_n$  د  $x$  ناڅاپه متحول یوه تصادفي نمونه وي ایا د  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ ،  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$  او  $\frac{x_1 + x_2}{x_4}$  او  $x_1 + 3x_2 - x_3$  تابع آماره دی.
9. که چېرې  $x$  یو ناڅاپه متحول او د  $\mu$  او  $\delta^2$  پارامترونه وي ایا د  $\frac{3x_1 - 2x_3 - \delta}{8\mu + x_2}$ ،  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)$  او  $x_1 + x_3 - \mu$  توابع  $\mu$  او  $\delta^2$  مجهول وي آیا پورتنیو تابعگانو ته احصائیه ویلی شو؟
10. ټولنه د برق په څلورو ډلو کې گډون لري، که د عمرونو اوږدوالی یې د ساعتونو په حساب سره عبارت له 108 104 112 103 دي یوه ډله ناڅاپه ټاکو، فرض کوو چې د  $x$  ناڅاپه متحول ټاکل شوی د ډلو د عمر اوږدوالی راوبنیئ:
- د  $x$  د احتمال توزیع ولیکئ.
  - $E(x)$  او  $V(x)$  محاسبه کړئ.
11. د یوه ښار د وگړو دگنې اندازه چې د غیرنورمال توزیع  $\mu = 90$  افغانی اوسط او د 25 افغانی معیاري انحراف سره دی که چېرې د 225 کسيز د وگړو د یوې نمونې دگنې مجموعه له 2100 افغانیو څخه زیاته وي، احتمال یې څومره دی؟
12. پوهېږو چې 56% وگړي د  $A$  نوماند طرف دار دی، څومره ددې احتمال شته چې  $n = 50$  دوه گونې یوه نمونه کې حداقل 60% وگړي د  $A$  نوماند طرفدار وي.
13. په 12 مثال کې که چېرې  $P = 0.4$  وي، یعنې ددې احتمال چې یو وگړی د  $A$  کانديد طرفدار وي 0.4 دی، یوه  $n = 200$  گونه نمونه وټاکو، نو څومره ددې احتمال شته چې لاقبل 100 وگړي د  $A$  کانديد طرفدار وي.

# اتم خپرکی احتمالات





## بېلې شوې (غیرمتمادي) او نښتې (متمادي) فضاگانې

په مخامخ شکلونو کې د لومړي او دویم نل څخه په وار سره اوبه په ځمکه توپیري ویلای شئ چې له دې نلونو څخه په ځمکه د اوبو د شاخکو د توپیدو توپیر په څه کې دی؟



- د یو رمل په اچولو سره ویلای شي چې د نمونه يي فضا ټولې ممکنې پایلې کومې دي؟
- آیا له ونې څخه د یوې پخې منې د لویدلو د وخت وړاندوینه کولای شئ چې وروسته له څو ثانویو، دقیقو او یا ساعتونو څخه پر ځمکه ولوېږي؟
- نظر وخت ته د منې د لویدلو نمونه يي فضا ولیکي.
- د رمل دانې د اچولو تجربې نمونه يي فضا د عناصرو شمېر او له ونې څخه د منې د لویدلو وخت څنګه پرتله کولای شي.

د پورتنی فعالیت له سرته رسولو څخه لاندې پایله په لاس راځي:

د یوې ناڅاپه تجربې نمونه يي فضا عبارت له هغه ټاکلي او یا نا ټاکلي سټ یا مجموعې څخه ده چې ځینې عناصر یې د شمېر وړ او ځینې یې د شمېر وړ نه وي. هغه نمونه يي فضاګانې چې عناصر یې د شمېر (countable) او تشخیص وړ وي د غیرمتمادي نمونه يي فضا په نامه یادېږي او هغه نمونه يي فضاګانې چې عناصر یې د شمېر وړ نه وي د نښتې (متصلې) یا متمادي نمونه يي فضا په نامه یادېږي.

**لومړی مثال:** له لاندې نمونه يي فضاګانو څخه کومه یوه نښتې (متمادي) او کومه یوه غیرمتمادي ده.

**الف:** د دوو رمل دانو اچول

**ب:** د 8 او 12 ترمنځ د یوه حقیقي عدد ټاکل.

**ج:** له 30 زده کوونکو څخه د 3 تنو ټاکل

د: د یوې کرې د حرارت د یوې درجې لوړېدل د 100 درجو د ساتني گړېد څخه تر 1000 درجو ساتني گړېد پورې.

ه: د 30° او 45° زاویو ترمنځ یوه زاویه ټاکل.

حل: څرنګه چې (الف او ج) نمونه یي فضاګانې د محدودو غړو له شمېر څخه جوړې شوې، نو غیر متمادي فضا ولې (ب، د او ه) له نامحدود حقيقي عددونو څخه تشکیل (جوړ) چې د شمېر وړ نه دي، نو نښتی یا متمادی فضاګانې دي.

دویم مثال: خیبر د کور د ګلانو د اوبولو لپاره یو واټریمپ اخیستی دی.

که چېرې د واټریمپ عمر د ساعت له مخې په پام کې ونیسو، په دې حالت کې د واټریمپ د عمر د اوږدوالی نمونه یي فضا چې کېدای شي هر مثبت حقيقي عدد د واټریمپ د وړاندېدو په صورت کې د کار د مودې قیمت شي، په دې ډول د داسې ناڅاپه حادثې پېښېدل هر حقيقي عدد کېدای شي چې دا نمونه یي فضا یوه غیر متمادي، یا نښتی نمونه یي فضا د، یعنې  $t$  د واټریمپ د وړاندېدو وخت،  $S = \{t \in IR : t \geq 0\}$  چې په پورتنۍ نمونه یي فضا کې  $t$  د واټریمپ د عمر اوږدوالی رابني.

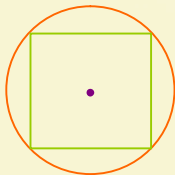
### یادونه:

- 1- د لومړی مثال الف او ج جزونو کې محدودې نمونه یي فضاګانو څخه بحث شوی چې عناصر یې د شمېر وړ دي، د ب او د جزونو کې نامحدودې نمونه یي فضاګانې ذکر شوي چې عناصر یې د شمېر وړ نه دي، نو ځکه ټول مثبت حقيقي عددونه اخیستلای شي.
- 2- په دویم مثال کې نمونه یي فضا متصله یا غیر محدوده ده چې د حقيقي عددونو د انټروال په توګه ښودل کېږي.



### پوښتنې

- 1- یو غشي وېشونکی د یوه دایروي د سګ په دننه چې وړانګه یې I ده، په پام کې ونیسي. د غشي د لګېدو ځای د دایرې په دننه کې چې مرکز ته نژدې ولګېږي، د هغې نمونه یي فضا ارایه کړې. وویاست چې دا څنګه یوه نمونه یي فضا ده.
- 2- په مخامخ شکل کې په ناڅاپي یا تصادفي ډول د دایرې په دننه کې یو ټکي و ټاکي، احتمال ددې شته چې مطلوب ټکي د مربع په دننه کې وي.
- 3- یو طبعي دوه رقمی عدد و ټاکي، هغه احتمال پیدا کړئ چې عدد د 4 مضرب وي.



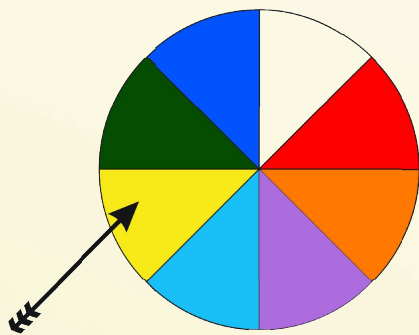
## هم چانس په پېښې



د يوې نورمال رمل دانې په اچولو کې د (1) او يا (5) شمېرې مخ ته راتللو لپاره شرط څه دی؟  
د 2 او 5 شمېرې د راتللو چانس يو له بل سره څه اړيکه لري؟



د مخامخ شکل په څېر يوه دایره په پام کې ونیسئ، که چېرې په راکړې شوې دایره کې يو ښکاري غشي وولي لاندې پوښتنو ته ځواب ورکړئ.



- په سور رنگه ناحیه او شین رنگه ناحیه کې د غشي لگېدل یو له بل سره څه اړيکه لري؟
  - د غشي د لگېدو چانس د کچې په اړه د نارنجي او سپینو رنگونو سره په پرتله باندې څه ویلای شي؟
  - په تور رنگ د غشي د لگېدو چانس څومره ده؟
  - د تجربې، نمونه یې فضا ولیکئ.
  - لومړني ناڅاپه پېښې لست کړي او د هر یوه احتمال پیدا کړئ؟
  - د لومړنیو پېښو د احتمالونو د مجموع په برخه کې څه ویلای شي؟
- د پورتنی فعالیت له اجرا کولو څخه لاندې پایله په لاس راوړو:

هغه لومړنی ساده پېښې چې د هغوی د پېښېدلو چانس د یوې تجربې په اجرا کولو کې سره برابر وي، د هم چانس په پېښو په نامه یادېږي، لکه:

که چېرې  $S = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  یوه نمونه یې فضا وي، نو  $\{e_i\}$  د هر  $i = 1, 2, \dots, n$  لپاره یوه ناڅاپه لومړني پېښه ده که  $0 \leq P(\{e_i\}) \leq 1$  ،  $i = 1, 2, \dots, n$  دي.

سربېره پر دې د لومړنیو پېښو د احتمالونو مجموع مساوي له یوه سره ده.

$$P(\{e_1\}) + P(\{e_2\}) + \dots + P(\{e_n\}) = \sum_{i=1}^n P(e_i) = 1$$



**مثال:** خلور تنه په يوه لوبه کې گليون کوي. تاسې د هر يوه د گټلو احتمال پيدا کړئ په داسې حال کې چې نمونهيي فضا هم چانسو وي.

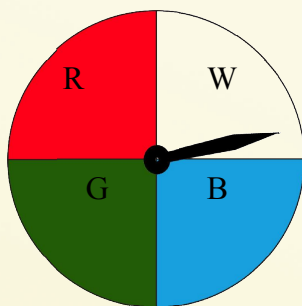
**حل:** که چېرې  $S = \{a, b, c, d\}$  نمونه يې فضا وي، نو د هرې ناخاپه لومړنۍ پېښې احتمال  $\frac{1}{4}$  دي.

$$P(a) = P(b) = P(c) = P(d) = \frac{1}{4}$$
 لرو چې:

پاسنۍ لومړنۍ پېښې سره هم چانسو دي.



پوښتنې

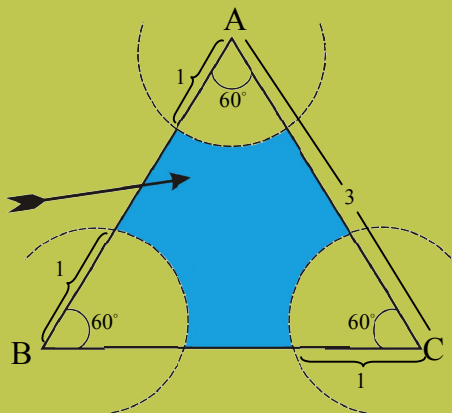


1- مخامخ شکل په پام کې ونيسي ، که چېرې د عقربې (ستني) د درېدلو احتمال په آسماني او سپين رنگ 0.30 او د سره رنگ پرمخ 0.26 وي، د شنه رنگ پرمخ د درېدلو احتمال به څومره وي؟

2- لاندې د کثرت جدول د رمل يوې دانې د اچولو لپاره په پام کې ونيسي. هغه احتمال پيدا کړئ چې د رمل دانه (5) شمېره راشي.

د رمل شمېره	1	2	3	4	5	6
کثرت	7	9	8	7	3	10

3- د رمل يوه دانه داسې ډکه شوی چې د جفت شمېرو د راتللو احتمال د طاق شمېرو دوه برابره وي، که يو چا په شرط وهلو کې (5) شمېره ټاکلي وي، د هغې احتمال پيدا کړئ.

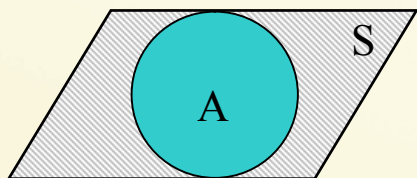


### د نښتې يا پيوسته(متمادي) فضاگانو احتمال

د يوه متساوي الاضلاع مثلث دننه چې هره ضلعه يې 3 واحده ده، يو غشي ولو، ددې احتمال چې د غشي د لگېدلو ټکې د مثلث د هر رأس نه د يو واحد په اندازه لوی وي، څو دی؟



- آیا ویلای شي چې د یوې ټوټه کرښې، د یوې مستوي د یوې برخې او یا د فضا د حجم څو ټکې یو پر بل پسې موجود دی؟



- د هغو ټکو د پېښدلو احتمال چې د A په برخه کې چې د S د لویې برخې فرعي مساحت دی، لکه څرنګه چې په شکل کې لیدل کېږي د A او S د ساحو د مساحتونو له نسبت سره څه اړیکه لري؟

- آیا کولای شئ دا مسئله په فضا کې د یوه جسم حجم د یوې برخې د احتمال د محاسبې لپاره عمومیت ورکړئ؟

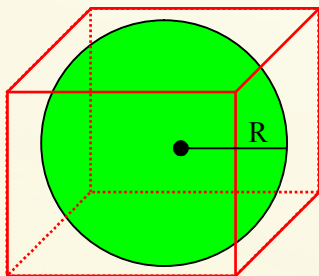
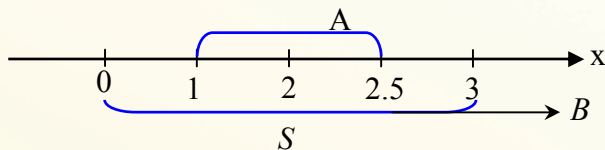
د پورتنی فعالیت له سرته رسولو څخه لاندې پایله لاسته راځي.

پیوسته(متمادي) نمونېي فضا د نامعینو ټکو مجموعه ده چې شکل یې د عددونو په محور ، په مستوي کې لکه سطح او یا په فضا کې لکه حجمونه دی، څرنګه چې ددې ټکو ښوونه ممکن نه ده، نو د احتمال د نسبت پیدا کولو لپاره د ټوټه کرښو د اوږدوالي، د اشکالو سطحو او یا د جسمونو له حجم څخه استفاده کوو. معمولاً د عددونو له محور څخه په ګټه اخیستنې سره د  $x$  یو متحول، د یوه مساحت د یوې برخې لپاره د دوو متحولینو لکه  $X$  او  $Y$  او په همدې ترتیب د حجمونو لپاره له دريو متحولونو، لکه:  $x, y, z$  او څخه ګټه اخلو.

**لومړی مثال:** د عددونو په محور د  $(0, 3)$  په انټروال کې د  $x$  یو ټکی په ناڅاپي یا اتفاقي ډول ټاکو ددې احتمال پیدا کړئ چې  $1 < x < 2.5$  وي؟

**حل:** د حقيقي عددونو محور رسم کړئ د  $S$  او  $A$  فاصلې د هغه پر مخ ټاکو، د شکل په پام کې نیولو سره د  $A$  پېښې د پېښېدو احتمال څخه لرو:

$$P(A) = \frac{\text{د } A \text{ ټوټه کربنې اوږدوالي}}{\text{د } B \text{ ټوټه کربنې اوږدوالي}} = \frac{2.5-1}{3-0} = \frac{1.5}{3} = \frac{1}{2}$$



**دویم مثال:** په ناڅاپه ډول یو ټکی د یوه مکعب په دننه کې چې ضلعه یې 2 واحده وي ټاکو ددې احتمال پیدا کړئ چې نوموړي ټکی د مکعب د محاطي کُرې په دننه کې وي.

**حل:** که چېرې کره د هغه مکعب په دننه کې چې ضلعه یې  $a$  واحده ده، محاطه وي، نو د کرې شعاع  $r = \frac{a}{2}$  کېدای شي:

$A$  ناڅاپه پېښه د کرې د حجم او  $S$  نمونه یي فضا سره مساوي چې د مکعب حجم دی، نو لرو:

$$r = \frac{a}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

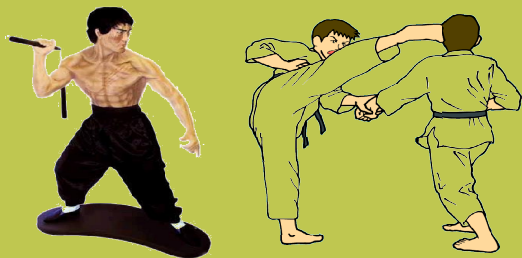
$$P(A) = \frac{\text{د کرې حجم}}{\text{د مکعب حجم}} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{a^3} = \frac{\frac{4}{3}\pi(1)^3}{2^3} = \frac{\pi}{6}$$



- 1- د حقيقي عددونو په محور د  $A$  او  $B$  دوه ټکي په ناڅاپي يا تصادفي ډول داسې ټاکو چې  $-2 \leq B \leq 0$  او  $0 \leq A \leq 3$  وي، ددې احتمال پیدا کړئ چې د  $d$  واټن د  $A$  او  $B$  ترمنځ وي او له 3 واحدو څخه لوی وي.
- 2- که چېرې یو ټکی په ناڅاپي يا تصادفي ډول د دایرې د سطحې پر مخ وټاکو، ددې احتمال پیدا کړئ چې نوموړي ټکی نظر د دایرې محیط ته د دایرې مرکز ته نژدې وي.

## مشروط احتمال

له يوه ولايت څخه (20) تنه نارينه او ښځينه زده کوونکي د کانکور په آزمونه کې د طب پوهنځي ته بريالي شوي دي، د هغوي له جملې څخه يې 5 تنه ښه کاراته بازان دي؛ که په 15 تنو برياليو نارينه وو کې 4 تنه يې ښه کارته بازان وي. د نوموړو محصلينو له مينځ څخه په اتفاقي ډول يو تن ټاکو احتمال د دې پيدا کړئ چې:



- ټاکل شوی محصل يوه کارته بازه نجلی وي؟
- په پورتنی سوال کې هغه نجلی په کوم شرط سره د طب پوهنځي ته بريالی شوي ده؟



له 2500 زده کوونکو څخه 1600 تنه يې په مطالعه کولو عادت لري.

چې له 80% زده کوونکو څخه يې 70% نارينه زده کوونکي وي او په مطالعه کولو عادت ولري، که د ټولو زده کوونکو لپاره احتمال يو شان وي، د لاندې پېښو په پام کې نيولو سره د يوه تن زده کوونکي ټاکل د ښوونځي له زده کوونکو څخه:

R: له مطالعې سره عادت لري.

M: نارينه زده کوونکي دی.

F: يوه ښځينه زده کوونکې ده.

د لاندې پوښتنو په حل فکر وکړئ:

- ددې احتمال پيدا کړئ چې د مطالعه کوونکو له منځ څخه ټاکل شوي زده کوونکي نارينه وي؟
- ددې احتمال پيدا کړئ چې د مطالعه کوونکو له منځ څخه ټاکل شوی تن يوه ښځينه وي؟
- ددې احتمال پيدا کړئ چې ټاکل شوي زده کوونکي يو نارينه وي په دې شرط چې په مطالعه عادت وي.

د پورته فعالیت د سرته رسولو څخه لاندې پایله په لاس راوړو:

په حقیقت کې د هغه نارينه زده کوونکي د ټاکلو احتمال په دې شرط چې په مطالعه عادت ولري.

د لاندې احتمالات وېش له حاصل څخه عبارت دی که چېرې  $\Omega$  ټوله نمونیه فضا او  $|\Omega|$  نمونیه فضا د عناصرو شمیر وي، نو لرو:

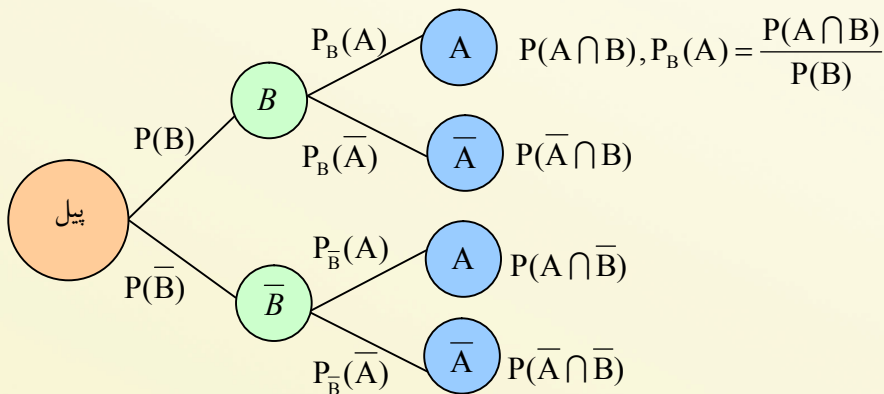
$$= \frac{|M \cap R|}{|R|} = \frac{\frac{|M \cap R|}{|\Omega|}}{\frac{|R|}{|\Omega|}} = \frac{P(M \cap R)}{P(R)} = P_R(M)$$

د هغه نارینه زده‌کونکو د ټاکلو احتمال چې په مطالعه عادت وي.

$P_R(M)$  د هغې پېښې له احتمال څخه عبارت دی چې ټاکلي زده‌کونکي نارینه وي، په دې شرط چې هغه په مطالعه عادت وي.

**تعریف:** که چېرې  $S$  نمونیه فضا  $A$  او  $B$  د نمونیه فضا دوه ناڅاپي پېښې وي، په داسې حال کې چې  $P(B) \neq 0$  وي. په دې حالت کې نوموړی احتمال یعنې  $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$  چې د  $A$  ناڅاپي پېښې احتمال نظر د  $B$  ناڅاپي پېښې ته مشروط احتمال بلل کېږي.

د پورته تعریف په پام کې نیولو سره نظر د مسیر لومړي قاعدې ته د ونه‌یز دیاگرام په مرسته هم په لاس راوړای شو.



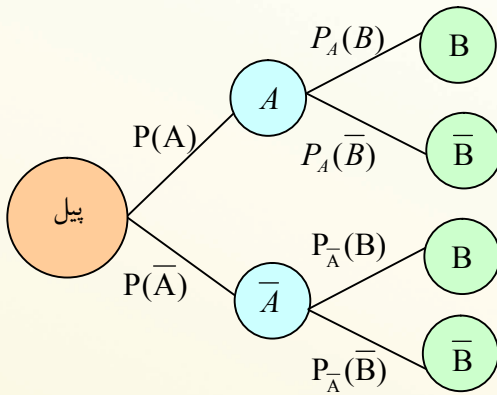
د مشروط احتمال له فورمول څخه لاندې مهمې پایلې په لاس راځي:

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P_B(A) \quad 1- \text{د مسیر له لومړي قاعدې څخه لرو:}$$

$$P(A \cap \bar{B}) = P(\bar{B}) \cdot P_{\bar{B}}(A) \quad \text{د مسیر له دویمې قاعدې څخه په گټه اخیستنې سره لرو:}$$

$$P(A) = P(B) \cdot P_B(A) + P(\bar{B}) \cdot P_{\bar{B}}(A)$$

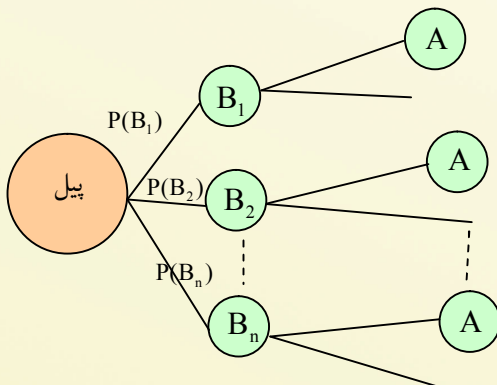
$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad 2- \text{ونه‌یزه (درختي) دیاگرام له مخې}$$



له لومړي پایلې څخه په لاس راځي چې:  $P_A(B) = \frac{P_B(A) \cdot P(B)}{P(B) \cdot P_B(A) + P(\bar{B}) \cdot P_{\bar{B}}(A)}$

3- که چېرې نوموړی حالت د  $\Omega$  نمونه یي فضا ناڅاپي پېښو د  $B_n, \dots, B_2, B_1$  اختیاري وېش لپاره عمومیت ورکړو. د ونې په ډول د دیاگرام په پام کې نیولو سره کولای شو، لاندې فورمول په لاس راوړو.

$$P_A(B_i) = \frac{P_{B_i}(A) \cdot P(B_i)}{P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + \dots + P(B_n) \cdot P_{B_n}(A)} = \frac{P(A \cap B_i)}{\sum_{k=1}^n P(B_k) \cdot P_{B_k}(A)} \quad i=1, 2, \dots, n$$



**لومړی مثال:** یوزده کوونکی ښوونځي ته د تللو لپاره 50% هره ورځ د موټر څخه گټه اخلي چې 70% په ټاکلي

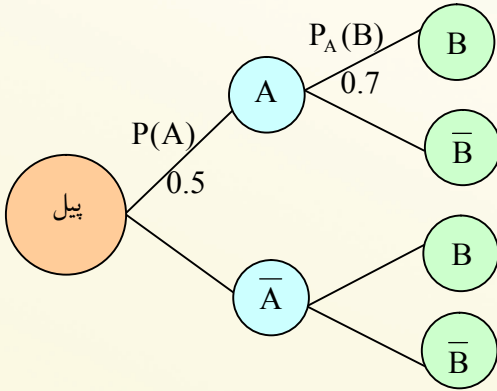
وخت ښوونځي ته رسېږي. په منځني ډول نوموړي 60% په ټاکلي وخت ښوونځي ته حاضرېږي که چېرې پېښې:

A: د موټر په واسطه راتلل      B: په ټاکلي وخت رسېدل

وي په دي صورت کې د A مشروط احتمال نظر B ته یعنې  $P_B(A)$  مطلوب دی؟

**حل:** د نوموړي احتمال د پیدا کولو لپاره د ونهیز یا درختي ډیاگرام په پام کې نیولو سره نظر فورمول ته په لاندې

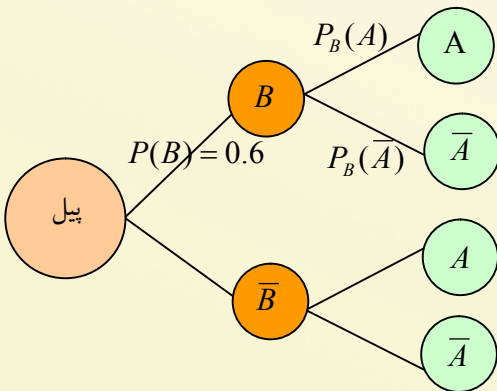
$$P_B(A) = \frac{P(A) \cdot P_A(B)}{P(B)} = \frac{0.5 \cdot 0.7}{0.6} = 0.5833 = 58.33\%$$
 ډول په لاس راځي:



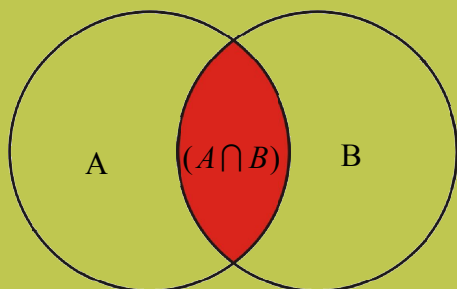
نوپه دې اساس د موټر په واسطه د رسېدلو احتمال په دې شرط چې په ټاکلي وخت په ښوونځي کې وي 58.33% سلنې سره برابر دی.



له لاندې ډیاگرام څخه په گټه اخیستنې سره د مشروط احتمال په ټاکلي وخت رسېدل ښوونځي ته په دې شرط چې د موټر په واسطه سرته رسېدلي وي، یعنې  $P_A(B)$  د ناڅاپه پېښې احتمال ښوونځي ته په ټاکلي وخت رسېدل، په دې شرط چې د موټر په واسطه نه وي راغلي یعنې  $P_A(B)$  مطلوب دي.



## د حاصل ضرب اصل



د  $A$  ناڅاپه پېښې مشروط احتمال په  $B$ ، د  $A$  او  $B$  ناڅاپه پېښې احتمال یو له بل سره څه اړیکه لري؟

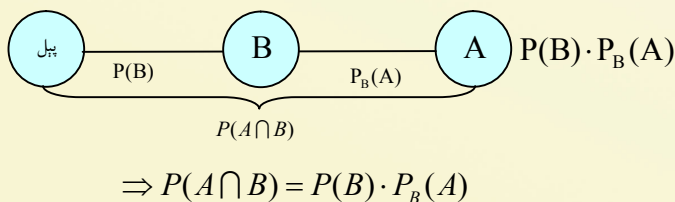


- که چېرې  $A$  او  $B$  دوی ناڅاپه پېښې د  $S$  په نمونه یي فضا کې وي.
- د  $A$  ناڅاپه پېښې مشروط احتمال  $B$  ته ولیکئ.
- د ونهیز دیاگرام څخه په گټه اخیستنې سره د  $P_B(A) \cdot P(B)$  قیمت په لاس راوړئ.
- د  $(A \cap B)$  ناڅاپه پېښو احتمال د  $A$  او  $B$  ناڅاپه پېښو څخه او یا د  $A$  مشروط له  $B$  څخه په گټه اخیستنې سره ولیکئ.
- د فعالیت د دوو پورتنیو بندونو د محاسبې پایلې یو له بل سره پرتله کړئ.
- آیا کولای شو چې موضوع د ډېرو ناڅاپه پېښو لپاره عمومیت ورکړو.
- د پورتنی فعالیت له سرته رسولو څخه لاندې پایله په لاس راوړو.

د  $S$  په یوه نمونه یي فضا کې د  $A$  او  $B$  د دوو ناڅاپه پېښو لپاره د مشروط احتمال د تعریف په پام کې نیولو سره

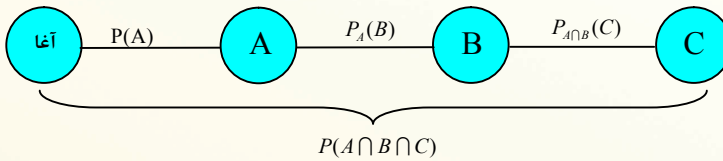
$$\text{لرو: } P(A \cap B) = P(B) \cdot P_B(A)$$

دا مسئله کولای شو چې د ونهیز دیاگرام په مرسته هم په لاس راوړو:





دا مطلب د دريو  $A$ ،  $B$  او  $C$  پيسنو لپاره په لاندې ډول پراخو.



$$\Rightarrow P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P_A(B) \cdot P_{A \cap B}(C)$$

پورتنی قاعده د حاصل ضرب په نامه یادېږي او کولای شو، هغه د یو شمېر اختیاري ناڅاپي پيسنو لپاره هم په لاس راوړو.

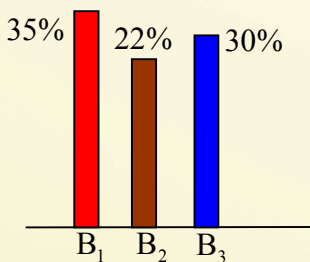
**مثال:** د  $B_1, B_2$  او  $B_3$  دريو ولايتونو په پارلماني ټاکنو کې چې د هر يوه لپاره د ټاکنو د گډون کوونکو فیصدي او د جمهوري گوند برخه فیصدي ورکړل شوي ده؟

په کوم احتمال د ټاکنو گډون کوونکي او يا رايې اچوونکي جمهوري گوند ټاکلي وي.

**حل:** په لاندې ډول ناڅاپي پيسې تعريف او نوموړو:

$V$ : هغه رايې ورکوونکي چې جمهوري گوند يې ټاکلی دی.

$B_i$ : د ولايت رايې ورکوونکي  $B_i - (i=1, 2, 3)$  لاندې ارقام ورکړل شوي وي.



ولايت	د راي ورکوونکو فیصدي	جمهوري گوند ته رايې ورکوونکي
$B_1$	33.2%	35
$B_2$	46.5%	22
$B_3$	20.3%	30

د  $B_i (i=1, 2, 3)$  ناڅاپه پيسې په حقيقت کې يې د  $S$  نمونه يي فضا يو وېش جوړ کړی چې د هغوی لپاره صورت نيسي.

1-  $B_i$  يو له بل سره دوه په دوه مستقل او گډ عناصر نه لري.

2- د  $S$  نمونه يي فضا لپاره  $B_1 \cup B_2 \cup B_3 = \bigcup_{i=1}^3 B_i$  دی، نو  $B_i \cap V (i=1, 2, 3)$  پيسه يو له بل

سره يو په يو مستقل د هغوی لپاره صورت نيسي.  $V = \bigcup_{i=1}^3 (B_i \cap V)$

له دې اړیکې څخه کولای شو، د دواړو خواوو د احتمال لپاره ولیکو:

$$\begin{aligned} P(V) &= P\left(\bigcup_{i=1}^3 (B_i \cap V)\right) = \sum_{i=1}^3 P(B_i \cap V) = \sum_{i=1}^3 P(B_i) \cdot P_{B_i}(V) \\ &= P(B_1) \cdot P_{B_1}(V) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(V) + P(B_3) \cdot P_{B_3}(V) \\ &= 0.332 \cdot 0.35 + 0.465 \cdot 0.22 + 0.203 \cdot 0.3 = 0.1162 + 0.1023 + 0.0609 \\ &= 0.2794 = 27.94\% \end{aligned}$$

**تعریف:** که چېرې د  $B_1, B_2, \dots, B_n$  څرنګه چې  $P(B_i) \neq 0$  وي  $i = 1, \dots, n$  پېښو عمومي حالت د  $S$  په نمونه یي فضا کې یوه پېښه وي، نو  $P(A)$  د کامل احتمال په نامه یاد او د  $A$  اختیاري ناڅاپي پېښې لپاره لرو:

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(B_i) \cdot P_{B_i}(A)$$

د مشروط احتمال د تعریف، د اصل حاصل ضرب له قضیې څخه د کامل احتمال د مسئلې په پام کې نیولو څخه لاندې فورمول چې د بائیز (Baye's) د فورمول په نامه یادېږي، په آسانی سره په لاس راځي، داسې چې  $B_i$  چې  $i = 1, \dots, n$  د  $S$  نمونه یي فضا یو پېښې لپاره چې  $P(B_i) \neq 0$ ،  $i = 1, \dots, n$  د  $A$  د ناڅاپه پېښې احتمال چې  $P(A) \neq 0$  سره وي، لرو:

$$P_A(B_i) = \frac{P(A \cap B_i)}{P(A)} = \frac{P(B_i) \cdot P_{B_i}(A)}{\sum_{k=1}^n P(B_k) \cdot P_{B_k}(A)}$$

د بائیز (Bayes) فورمول:

د بائیز فورمول ډېر استعمال لري لکه د  $n = 2$  لپاره  $B_2 = \bar{B}_1, B_1 = \bar{B}_2$  په پام کې ونیسو، په حقیقت کې  $B_1$  او  $B_2$  د  $S$  نمونه یي فضا پېښې وي لرو:

$$P_A(B) = \frac{P(B) \cdot P_B(A)}{P(B) \cdot P_B(A) + P(\bar{B}) \cdot P_{\bar{B}}(A)}$$

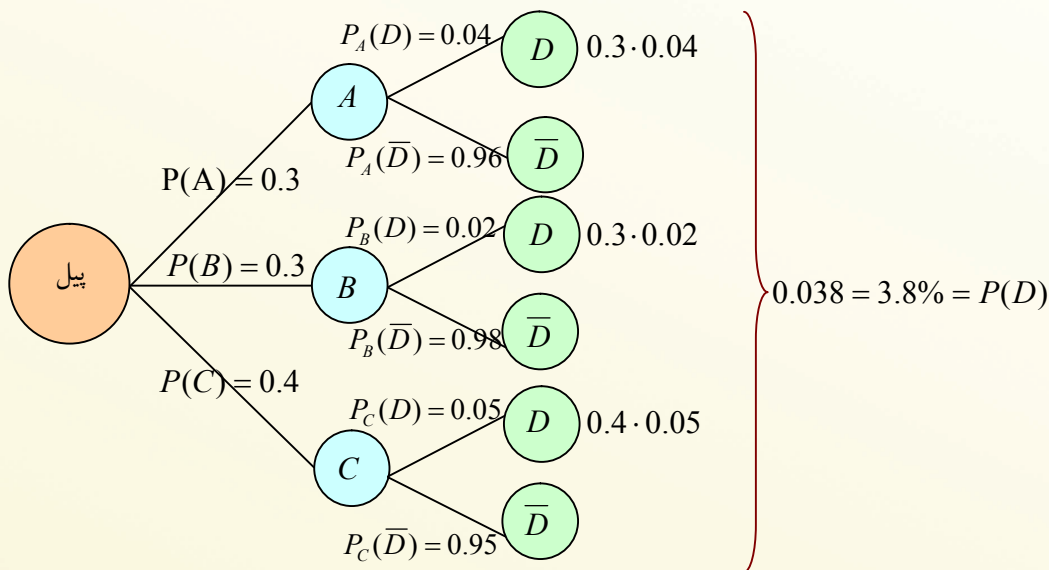
پورتنۍ فورمول د  $n = 2$  د بائیز له فورمول څخه عبارت دي.

**مثال:** په یوه فابریکه کې د  $A$ ،  $B$  او  $C$  درې ماشینونه په ترتیب سره 30%، 30% او 40% برخه د برق ګروپونه تولیدوي. که چېرې په ماشینونو کې د ګروپونو د خرابېدو کچه په ترتیب سره 4%، 2% او 5% وي او نوموړي ګروپونه په ګډه سره څرخ شي، مطلوب دي:

(a) ددې احتمال چې یو اخیستل شوی ګروپ وران یا خراب وي.

(b) په کوم احتمال خراب خرڅ شوی گروپ د C ماشین پورې اړه لري.

(c) یو نوی تولید شوی گروپ لرو، په کوم احتمال سره به د B په ماشین پورې مربوط وي.



د b جز:

$$P_D(C) = \frac{P(D \cap C)}{P(D)} = \frac{P(C) \cdot P_C(D)}{P(D)} = \frac{0.4 \cdot 0.05}{0.038} = \frac{0.02}{0.038} = 0.526 = 52.6\%$$

د c جز:

$$P_{\bar{D}}(B) = \frac{P(\bar{D} \cap B)}{P(\bar{D})} = \frac{P(B) \cdot P_B(\bar{D})}{P(\bar{D})} = \frac{0.3 \cdot 0.98}{0.3 \cdot 0.96 + 0.3 \cdot 0.98 + 0.4 \cdot 0.95}$$

$$= \frac{0.294}{0.288 + 0.294 + 0.38} = \frac{0.294}{0.962} = 0.3056 = 30.56\%$$



1- د 1000 دانو رملونو په منځ کې د یوې دانې په شپږ واړه مخونه یوازې د 6 شمېره وهل شوي ده. د هغوي له منځ څخه یوه ناڅاپه د رمل دانه ټاکل شوي او درې ځلې اچول شوي ده. درې ځلې 6 راغلي. پیدا کړئ، هغه احتمال چې په ټاکل شوي دانه په سم ډول شمېرې وهل شوي وي؟

## د ناڅاپه پېښو استقلالیت

له مشروط احتمال څخه پوهیږو چې د A او B دوو ناڅاپو پېښو یا حادثو د B د پېښې پېښدل د A په پېښه تاثیر اچوي په دې سبب لازمه ده چې د احتمال د محاسبې په وخت کې د A او B پېښه په پام کې ونیسو.

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

د هغه حالت لپاره چې د A ناڅاپه پېښې پېښدل پر B ناڅاپه پېښې اغېزه ونه لري او برعکس. د A او B د ضرب د حاصل احتمال د  $A \cap B$  پېښې له احتمال سره څه اړیکه لري.

**تعریف:** د A او B دوې ناڅاپه پېښې چې یوه پر بله اغېزه لرونکې نه وي د ناڅاپه مستقلمو پېښو په نامه یادېږي.

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$



- د S نمونه یي فضا او د A او B دوې یوه له بلې څخه مستقلمې پېښې چې د S نمونه یي فضا کې شامل وي، په پام کې ونیسئ.
  - د مشروط احتمال فورمول څخه په هغه صورت کې چې A او B یوه له بلې څخه مستقلمې دوې پېښې وي د  $P_B(A)$  او  $P(A)$  احتمالونه یو له بل څخه څه توپیر لري؟
  - د  $P(A \cap B)$  ناڅاپه پېښې احتمال له څه سره مساوي دي؟
  - د  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$  د پېښو د احتمال له فورمول څخه په هغه صورت کې چې A او B گډ ټکی ونه لري، څه پایله اخلي؟
- د پورتني فعالیت له سرته رسولو څخه لاندې پایله په لاس راځي:
- 1: د A او B دوې پېښې مستقلمې بلل کېږي، که چېرې:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \text{ (د ضرب د حاصل اصل)}$$

2: که چېرې A او B پېښې د گډو ټکو لرونکې نه وي، نو

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cap B) = 0$$

$$\Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) \text{ (د جمع د حاصل اصل)}$$

**لومړی مثال:** که چېرې د یوه ښوونځي د زده کوونکو د سترگو رنگ او دکاوت یو پر بل پرته له اغېزې فرض شوي وي. د لاندې پېښو په پام کې نیولو سره په ناڅاپه ډول د یوه زده کوونکي ټاکلو لپاره:

H: ټاکل شوي تن یو هوشیار ډکي زده کوونکي وي.

B: ټاکل شوي زده کوونکي تورې سترگې ولري.

هغه احتمال پیدا کړئ چې ټاکل شوي زده کوونکي په ناڅاپه توگه هوشیار ډکي او تورې سترگې ولري.

**حل:** ددې لپاره چې ټاکل شوي زده کوونکي هوشیار او تورې سترگې ولري لیکلای شو:

خرنگه چې  $P_B(H) = P(H)$  سربېره پردي  $P(B \cap H) = \frac{P(B \cap H)}{P(B)}$  نو:

$$P(B \cap H) = P(H) \cdot P(B)$$

**عمومي حالت:** د  $A_1, A_2, \dots, A_n$  ( $n \geq 2$ ) ناڅاپه پېښې احتمالاً یو له بلې څخه مستقلې بلل کېږي که چېرې د هرو دوو یا څو پېښو په ترکیب کې د ضرب د حاصل قاعده صدق وکړي پرته له هغې پېښې احتمالاً یوه له بلې سره تړلي نومول کېږي.

**پایله:**

**1:** پاملرنه باید وشي چې د ضرب د حاصل له قاعدې څخه په گټه اخیستنې سره په لاندې متقاطع جدول کې هم کولای شو چې  $A \cap B, A \cap \bar{B}, \bar{A} \cap B, \bar{A} \cap \bar{B}$  ناڅاپه پېښو احتمالي پایلې د  $A$  او  $B$  پېښو لپاره چې احتمالونه یې  $a$  او  $b$  وي، په آسانی په لاس راوړو. د  $A$  او  $B$  د مستقل والي څخه پوهېږو چې د  $A$  او  $\bar{B}$ ،  $\bar{A}$  او  $B$  په پای کې  $\bar{A}$  او  $\bar{B}$  هم یوه له بلې څخه مستقلې دي، نو لرو:

	$B$	$\bar{B}$	
$A$	$P(A \cap B) = a \cdot b$	$P(A \cap \bar{B}) = a(1-b)$	$a$
$\bar{A}$	$P(\bar{A} \cap B) = b(1-a)$	$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = (1-a)(1-b)$	$1-a$
	$b$	$1-b$	$1$

**2:** د  $A, B$  او  $C$  درې ناڅاپه پېښې چې یوه له بلې څخه مستقلې دي، لرو:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

$$P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C)$$

$$P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C)$$

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$$

**دویم مثال:** په یوه کڅوړه کې دوې سپینې او دوې تورې مری پرتې دي. دوې مری یوه په بلې پسې له کڅوړې څخه پورته کوو، په داسې حال کې چې:

a- د لومړۍ مری د پورته کولو نه وروسته هغه بېرته په کڅوړه کې ردو.

b- پرته له دې چې مری واپس کېښودل شي.

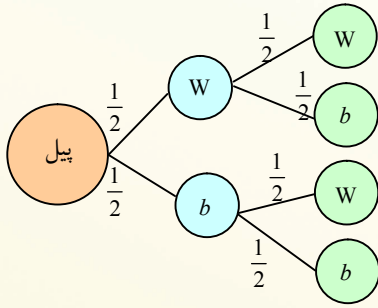
د  $A$  پېښه: په لومړۍ ځل سپینه مری راووزي.  $B$ : دویم ځل مری سپینه وي.

له یوې بلې څخه مستقلې یا تړلي (وابسته) دي.

**حل:**

$$(a) \text{ خرنګه چې } P(A) = \frac{1}{2} \text{ او } P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \text{ وي او}$$

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{4} \text{ دي، نو } A \text{ او } B \text{ یوه له بلې څخه مستقلې دي.}$$

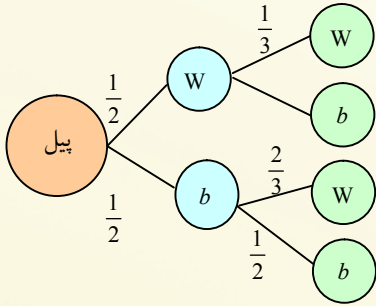


(b) څرنگه چې:

$$P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{2}, \quad P(A) = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$$

نو A او B یوه له بلې څخه ترلې یا وابسته دي.



درېم مثال: د لاندې متقاطع جدول خالي ځایونه چې په نښه شوي دي، ډک یې کړئ:

	B	$\bar{B}$	
A	0.12	$P(A \cap \bar{B}) = ?$	Ⓚ
$\bar{A}$	$P(\bar{A} \cap B) = ?$	$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = ?$	Ⓚ
	Ⓚ	0.6	

حل: څرنگه چې  $P(\bar{B}) = 0.6$  دي، نو لرو:

$$P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 1 - 0.6 = 0.4$$

$$P(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.12}{0.4} = 0.30$$

$$\Rightarrow P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0.3 = 0.70$$

او د پېښو د تقاطع څخه لرو چې:

$$P(A \cap \bar{B}) = P(A) \cdot P(\bar{B}) = 0.3 \cdot 0.6 = 0.18$$

$$P(\bar{A} \cap B) = P(\bar{A}) \cdot P(B) = 0.7 \cdot 0.4 = 0.28$$

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}) = 0.7 \cdot 0.6 = 0.42$$

په همدې ترتیب په جدول کې د قیمتونو په وضع کولو سره مسئله تکمیلېږي.



يو سټ چې عناصر يې 2, 3, 5 او 30 دی د يوه رقم د انتخاب احتمال يې 0.25 دی په ناڅاپي ډول له نوموړي سټ څخه يو رقم انتخابوو، که چېرې  $A_k$  ناڅاپه پېښه د هغه رقم چې انتخاب شوی او د تقسيم قابليت په  $k$  ولري، آيا  $A_2, A_3$  او  $A_5$  ناڅاپي پېښې دوه په دوه مستقل دي او که نه؟

### د څپرکي مهم ټکي

#### بېلې شوي (غیر متمادي) نمونه يي فضا:

هغه نمونه يي فضا چې عناصر يې د شمېر او تشخيص وړ وي، د غير متمادي نمونه يي فضا په نامه يادېږي، لکه د رمل يا د سکې اچولو تجربې نمونه يي فضا.

#### نښتي (متمادي) نمونه يي فضا:

هغه نمونه يي فضا چې عناصر يې د شمېر وړ نه وي د پيوسته يا متمادي نمونه يي فضا په نامه يادېږي چې د حقيقي عددونو پر محور د فاصلې په بڼه او يا په فضا کې د هندسي شکلونو يا حجمونو په ډول څرگندېږي.

#### هم چانس پېښې:

د يوې نمونه يي فضا لومړني پېښې چې د هغوی پېښې د تجربې په پای کې په برابر احتمال پېښېږي، هم چانس پېښې بلل کېږي. د هم چانس پېښو د احتمال مجموع له يوه سره مساوي ده.

#### د نښتي (پيوسته) فضا احتمال:

د ټوټه کړښو، سطحو او حجمونو مساعد حالتونه د يوې پام وړ ناڅاپي پېښې لپاره په يوه تجربې نمونه يي فضا کې شامل ټوټه کړښو، سطحو او حجمونه عبارت دي د متصلې فضا له احتمال څخه.

#### مشروط احتمال:

که چېرې  $A$  او  $B$  د  $S$ ، د نمونه يي فضا د يوې ناڅاپه پېښې چې  $P(B) \neq 0$  وي په دي حالت کې

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

ته د  $A$  ناڅاپه پېښې د مشروط احتمال په نامه يادېږي په دي شرط چې د  $B$  پېښه له

مخکې پېښه شوي وي.

#### يوه له بلې څخه مستقلي پېښې:

د  $A$  او  $B$  دوه ناڅاپه پېښې يوه له بلې څخه مستقلي بلل کېږي که چېرې:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \text{ (د ضرب د حاصل اصل)}$$

## د څپرکي پوښتنې

1. د لاندې نمونه يي فضاگانو څخه کومه يوه سره نښتی يا پيوسته او کومه يوه غيرمتمادي ده؟  
الف: د يوې رمل دانې اچولو تجربه  
ب: د يوې سکې د اچولو تجربه  
ج: د يو غشي لگېدل په يوه دايره  
د: د يوې فلزي ميلي د اوږدوالي زياتېدلو تجربه نظر حرارت ته
2. د يو چار تراش چې اوږدوالی يې  $L$  دی په ناڅاپه ډول په سور اړه کوو، تر څو دوه برخې شي څومره احتمال شته چې د کين اړخ اړه شوې برخه د بني اړخ له درې برابره څخه کوچنی وي.
3. د يوه خصوصي شرکت يو کارگر هره ورځ د 8 او 8:50 ساعتونو په منځ کې کورته نژدې تم ځاي کې چې د مامورينو په موټر کې کارته د تگ لپاره گڼون وکړي او په 8:15 ، 8:30 او 8:45 وختونو تم ځای ته رسېږي څومره احتمال ددې شته چې نوموړې تن له 5 دقيقو څخه لږ منتظر پاتي شي.
4. د  $[0.3]$  تړلې فاصلې څخه په ناڅاپه ډول دوه عددونه ټاکو، ددې احتمال پيدا کړئ چې د عددونو مجموعه د 5 څخه کوچنی او له 2 څخه لويه وي.
5. په ناڅاپه ډول يو ټکی د مخروط دننه چې د قاعدې شعاع يې  $R$  او جگوالی  $R\sqrt{3}$  دی ټاکو، پيدا کړئ ددې احتمال چې ټکی د محاطي کړي دننه په دي مخروط کې قرار لري.
6. د يو خودکار قلم خرابېدل دوه دليلونه لري:
  - 1- د ميخانيکيت خرابېدل
  - 2- د خودکار د نيچې خرابېدلکه چېرې د يو خودکار قلم د خرابېدو احتمال 0.088 او ددې احتمال چې د خرابېدو دليل (1) ، شمېره وي مساوي په 0.05 او د دويم نقص احتمال مساوي په 0.002 وي وڅېړئ: چې دوه پورتنی دلايل مستقلي او يا غير مستقلي پېښې دي؟
7. خيبر غواړي هغه څلور کلي گانې چې په جيب کې يې لري او سره يو شان دي د کورد دروازې قلف خلاص کړي په کوم احتمال سره وروسته د دريمې کلي له آزمويلو سره چې له جيب څخه يې را باسي د قلف اړوند کلي وي، په هغه صورت کې چې:
  - a) هره آزمویل شوي کلي په هغه صورت کې چې اصلي کلي نه وي دوباره په همغه جيب کې اچوي.
  - b) هره آزمویل شوي کلي په هغه صورت کې چې اصلي کلي نه وي په بل جيب کې اچوي.



**Get more e-books from [www.ketabton.com](http://www.ketabton.com)  
Ketabton.com: The Digital Library**