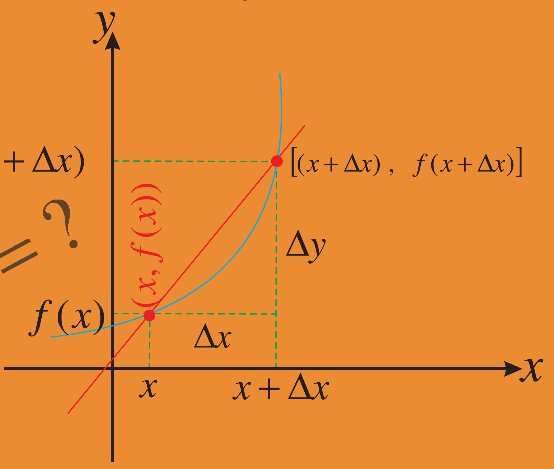
د پوهني وزارت

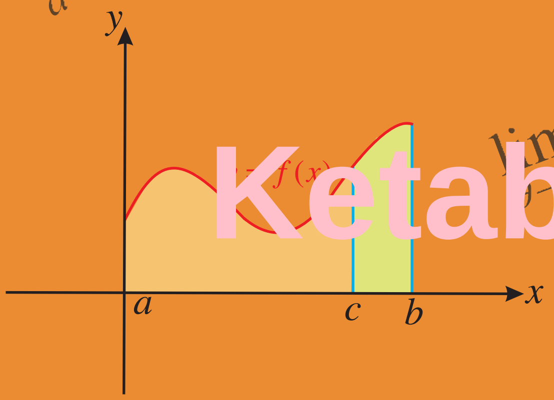
رياضي ۱۲

ټولګی

$$\lim_{x \to a} f(x) = ?$$



$$\int_a^b f(x)\,dx = ?$$

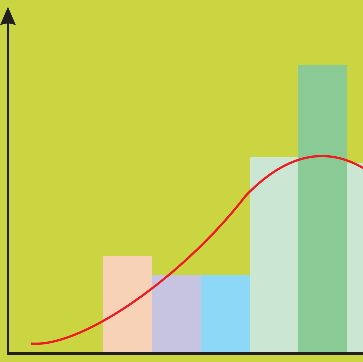


$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = ?$$

Ketabton.com

د چاپ کال: ۱۳۹۸

رياضي ۱۲ ټولګی



(c) ketabton.com: The Digital Library

ملي سرود

دا وطن افغانستان دی
کور د سولې کور د تورې
دا وطن د ټولو کور دی
د پښتون او هزاره وو
ورسره عرب، گوجر دي
براهوي دي، قزلباش دي
دا هیواد به تل ځلیږي
په سینه کې د آسیا به
نوم د حق مو دی رهبر

دا عزت د هر افغان دی
هر بچی یې قهرمان دی
د بلوڅو د ازبکو
د ترکمنو د تاجکو
پامیریان، نورستانیان
هم ایماق، هم پشه یان
لکه لمر پر شنه آسمان
لکه زړه وي جاویدان
وایو الله اکبر وایو الله اکبر

(c) ketabton.com: The Digital Library

بسم الله الرحمن الرحیم

د پوهنې وزارت

رياضي ۱۲

ټولګی

د چاپ کال: ۱۳۹۸ هـــ . ش.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کتاب ځانګړتیاوې

مضمون: رياضي

مؤلفین: د تعلیمي نصاب د رياضياتو د څانګې علمي او مسلکي غړي

اډیټ کوونکي: د پښتو ژبې د اډیټ علمي او مسلکي غړي

ټولګی: دولسم

د متن ژبه: پښتو

انکشاف ورکوونکی: د تعلیمي نصاب د پراختیا او درسي کتابونو د تألیف لوی ریاست

خپروونکی: د پوهنې وزارت د اړیکو او عامه پوهاوي رياست

د چاپ کال: ۱۳۹۸ هجري شمسي

د چاپ ځای: کابل

چاپخونه:

برېښنالیک پته: curriculum@moe.gov.af

د درسي کتابونو د چاپ، وېش او پلورلو حق د افغانستان اسلامي جمهوریت د پوهنې وزارت سره محفوظ دی. په بازار کې یې پلورل او پېرودل منع دي. له سرغړوونکو سره قانوني چلند کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پوهنې د وزیر پیغام

اقرأ باسم ربک

د لوی او ښښونکي خدای ﷻ شکر په ځای کوو، چې موږ ته يې ژوند رابښلی، او د لوست او لیک له نعمت څخه يې برخمن کړي یو، او د الله تعالی پر وروستي پیغمبر محمد مصطفی ﷺ چې الهي لومړنی پیغام ورته (لوستل) و، درود وایو.

څرنګه چې ټولو ته ښکاره ده ۱۳۹۷ هجري لمریز کال د پوهنې د کال په نامه ونومول شو، له دې امله به د ګران هېواد ښوونیز نظام، د ژورو بدلونونو شاهد وي. ښوونکی، زده‌کوونکی، کتاب، ښوونځی، اداره او د والدینو شوراګانې د هېواد د پوهنیز نظام شپږګوني بنسټیز عناصر بلل کيږي، چې د هېواد د ښوونې او روزنې په پراختیا او پرمختیا کې مهم رول لري. په داسې مهم وخت کې د افغانستان د پوهنې وزارت د مشرتابه مقام، د هېواد په ښوونیز نظام کې د ودې او پراختیا په لور بنسټیزو بدلونونو ته ژمن دی.

له همدې امله د ښوونیز نصاب اصلاح او پراختیا، د پوهنې وزارت له مهمو لومړیتوبونو څخه دي. همدارنګه په ښوونځیو، مدرسو او ټولو دولتي او خصوصي ښوونیزو تأسیساتو کې، د درسي کتابونو محتوا، کیفیت او توزیع ته پاملرنه د پوهنې وزارت د چارو په سر کې ځای لري. موږ په دې باور یو، چې د باکیفیته درسي کتابونو له شتون پرته، د ښوونې او روزنې اساسي اهدافو ته رسېدلی نشو.

پورتنیو موخو ته د رسېدو او د اغېزناک ښوونیز نظام د رامنځته کولو لپاره، د راتلونکي نسل د روزونکو په توګه، د هېواد له ټولو زړه سواندو ښوونکو، استادانو او مسلکي مدیرانو څخه په درناوي هیله کوم، چې د هېواد بچیانو ته دې د درسي کتابونو په تدریس، او د محتوا په لېږدولو کې، هیڅ ډول هڅه او هاند ونه سپموي، او د یوه فعال او په دیني، ملي او انتقادي تفکر سمبال نسل په روزنه کې، زیار او کوښښ وکړي. هره ورځ د ژمنې په نوي کولو او د مسؤولیت په درک سره، په دې نیت لوست پیل کړي، چې د نن ورځې ګران زده‌کوونکي به سبا د یوه پرمختللي افغانستان معماران، او د ټولنې متمدن او ګټور اوسېدونکي وي.

همدا راز له خوږو زده کوونکو څخه، چې د هېواد ارزښتناکه پانګه ده، غوښتنه لرم، څو له هر فرصت څخه ګټه پورته کړي، او د زده کړې په پروسه کې د ځیرکو او فعالو ګډونوالو په توګه، او ښوونکو ته په درناوي سره، له تدریس څخه ښه او اغېزناکه استفاده وکړي.

په پای کې د ښوونې او روزنې له ټولو پوهانو او د ښوونیز نصاب له مسلکي همکارانو څخه، چې د دې کتاب په لیکلو او چمتو کولو کې يې نه ستړې کېدونکي هلې ځلې کړې دي، مننه کوم، او د لوی خدای ﷻ له دربار څخه دوی ته په دې سپیڅلې او انسان جوړوونکې هڅې کې بریا غواړم.

د معیاري او پرمختللي ښوونیز نظام او د داسې ودان افغانستان په هیله چې وګړي يې خپلواک، پوه او سوکاله وي.

د پوهنې وزیر

دکتور محمد میرویس بلخي

(c) ketabton.com: The Digital Library

فهرست

سرلیکونه — **مخونه**

لومړی څپرکی لیمیټ ۱-۴۰

- د لیمیټ مفهوم
- د ښي او کیڼي خوا لیمیټونه
- د لیمیټ خاصیتونه
- د نسبتي تابع ګانو لیمیټونه
- د $\frac{\infty}{\infty}$ مبهم شکل
- د $\infty - \infty$ او $0\cdot\infty$ مبهم شکلونه
- د $0^0, \infty^0, 1^\infty$ مبهم شکلونه
- د مثلثاتي تابع ګانو لیمیټ
- د تابع ګانو متمادیت
- د متمادي تابع ګانو خاصیتونه
- د څپرکي لنډیز او پوښتنې

دویم څپرکی مشتقات ۴۱-۸۲

- د یوې تابع مشتق
- د مشتق هندسي تعبیر
- د مشتق قوانین
- د مرکبو تابع ګانو مشتق
- د مثلثاتي تابع ګانو مشتق
- ضمني مشتقات
- لوړ مرتبه یي مشتقات
- د څپرکي لنډیز او پوښتنې

دریم څپرکی د مشتق د استعمال ځایونه ۸۳-۱۳۲

- د یوې تابع بحراني ټکی(اعظمي او اصغري)
- د انعطاف د ټکي ټاکل له دویم مشتق څخه په ګټې اخیستنې سره
- د منحنيګانو رسمول
- د توابعو دګرافونو مجانبونه
- د هوموګرافیک تابع ګانو ګراف
- د دریمې درجې یو مجهوله تابع ګراف
- د رول قضیه
- د متوسط قیمت قضیه
- د لوپیتال قاعده
- د بحراني ټکو تطبیق
- د څپرکي لنډیز او پوښتنې

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرلیکونه	مخونه
څلورم څپرکی انتیګرال	۱۳۳-۱۷۲
• د ریمان مجموعه	
• د انتیګرال مفهوم	
• د غیرمعین انتیګرال خواص	
• معین انتیګرال	
• د معین انتیګرال خواص	
• د مشتق او انتیګرال اساسي قضیې	
• په تعویضي طریقې سره انتیګرال نیول	
• په قسمي طریقې سره انتي ګرال نیول	
• د څپرکي لنډیز او پوښتنې	
پنځم څپرکی د لوګاریتمي او اکسپوننشیل تابعګانو مشتق او انتیګرال	۱۷۳-۱۹۸
• د لوګاریتمي او اکسپوننشیل تابع ګانو مشتق	
• د معکوسو تابع ګانو مشتق	
• قسمي کسرونه	
• د اکسپوننشیل تابع ګانو انتیګرالونه	
• د لوګاریتمي تابع ګانو انتیګرال	
• د قسمي کسرونو په مرسته د انتیګرال محاسبه	
• د څپرکي لنډیز او پوښتنې	
شپږم څپرکی د انتیګرال تطبیقات	۱۹۹-۲۲۲
• د یوه منحني په واسطه د محصور شوي سطحې د مساحت محاسبه	
• د دوو منحنی ګانو ترمنځ د محصور شوي سطحې د مساحت محاسبه	
• د ګراف له دوران څخه د په لاس راغلي جسم حجم	
• د قوس د اوږدوالی محاسبه	
• د څپرکي لنډیز او پوښتنې	
اووم څپرکی احصائیه	۲۲۳-۲۶۰
• د احتمال د تابع توزیع	
• د دوه جملهيي توزیع او د برنولي آزمایښت	
• د پواسن د احتمال توزیع	
• نورمال توزیع	
• د نورمال توزیع منحني لاندې مساحت او د هغې سټنډرډ کول	
• نمونه اخیستل	
• د نمونې د اوسط توزیع	
• د مرکزي لیمیټ قضیه	
• د نمونهيي توزیع نسبت	
• د څپرکي لنډیز او پوښتنې	
اتم څپرکی احتمالات	۲۶۱-۲۸۲
• پرېکړې او نښتي فضاګانې	
• هم چانسه پېښې	
• د نښتو یا پیوسته فضاګانو احتمال	
• مشروط احتمال	
• د حاصل ضرب اصل	
• د ناخاپي پېښو استقلالیت	
• د څپرکي لنډیز او پوښتنې	

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی څپرکی

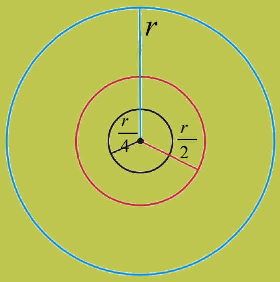
لیمیټ

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لیمیټ مفهوم

په یوه مستوي کې درې دایرې داسې رسم کړئ چې د O ټکي د دایرو متحد مرکز او شعاع ګانې یې په ترتیب سره $r, \frac{r}{2}$ او $\frac{r}{4}$ وي، دې عملیې ته څو ځلې دوام ورکولای شئ؟



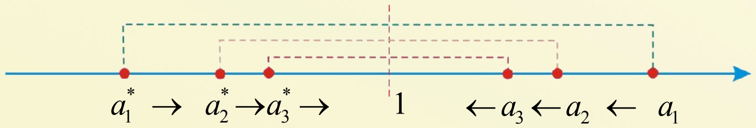
د $a_n = (1+\frac{1}{n})$ او $a_n^* = (1-\frac{1}{n})$ ترادفونه د $n \in IN$ لپاره په پام کې ونیسئ او لاندې فعالیت ترسره کړئ:

- د عددونو په محور باندې د a_1 او a_1^* موقعیت(ځای) وښیئ.
- ویلای شئ چې د a_2 او a_2^* قیمتونه د $[a_1^*, a_1]$ د فاصلې دننه یا د باندې پراته دي.
- د a_1، a_1^* او a_2، a_2^* منحنی ټکي یو له بل سره پرتله کړئ.
- پورته پړاوونو ته په پاملرنې سره ویلای شئ چې د a_3 او a_3^* د ټکو موقعیت د عددونو پر محور په کوم ځای کې واقع دي.
- آیا ویلای شئ چې د n د تر ټولو لویو قیمتونو په اخیستلو سره د a_n او a_n^* ردیفونه کومو قیمتونو ته نژدې کېږي؟

له پورتني فعالیت څخه لاندې پایله لیکلای شو:

پایله:لیدل کېږي چې د a_n ترادف له ښي لوري څخه د 1 او د a_n^* ترادف له کیڼ لوري څخه د 1 عدد ته د n په زیاتېدو سره نژدې کېږي، یعنې:

ـ د a_n ترادف کله چې n بې نهایت ته تقرب وکړي، مساوي په(1) سره کېږي او همداشان د a_n^* د ترادف $n-$ام حد که n بې نهایت ته نژدې شي هم مساوي له (1) سره کېږي.



ددې لپاره چې د لیمیټ مفهوم مو ښه څرګند کړی وي، په لومړي پړاو کې هغه په څو ترادفونو کې د ګراف په پام کې نیولو سره تر څېړنې لاندې نیسو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

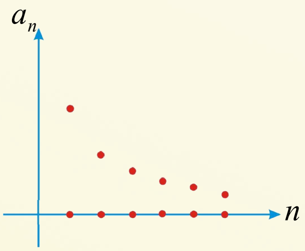
مثال: لاندې ورکړل شوي ردیفونه د n د تر ټولو لویو قیمتونو لپاره کوم قیمت ته تقرب کوي یا نژدې کېږي، موضوع په ګرافیکي ډول تشریح کړئ، په داسې حال کې چې:

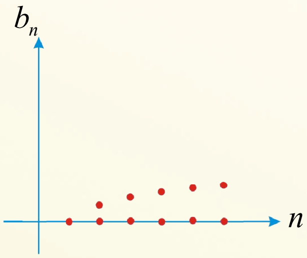
$$a_n = (\frac{2n+3}{n}) \ ... (i) \qquad b_n = (\frac{n-1}{n}) \ ... (ii) \qquad c_n = (-1)^n \frac{1}{n} \ ... (iii)$$

حل: پوهېږو چې د n د بېلابېلو قیمتونو لپاره ګرافیکي ښودنه په لاندې ډول ده.

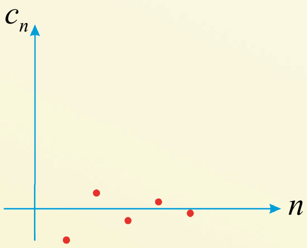
n	1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , $\to \infty$
a_n	$5 , \frac{7}{2} , 3 , \frac{11}{4} , \frac{13}{5} , \frac{15}{6} , \frac{17}{7} , \to 2$

n	1 , 2 , 3 , 4 , 5 , $\to \infty$
b_n	$0 , \frac{1}{2} , \frac{2}{3} , \frac{3}{4} , \frac{4}{5} , \to 1$





n	1 , 2 , 3 , 4 , 5 , $\to \infty$
c_n	$-1 , \frac{1}{2} , -\frac{1}{3} , \frac{1}{4} , -\frac{1}{5} , \to 0$



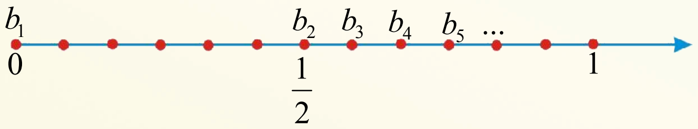
له پورتینو ګرافونو څخه لیدل کېږي چې راکړل شوي ترادفونه د n د قیمتونو په زیاتېدو سره د ترادفونو قیمت یوه ټاکلي عدد ته نژدې کېږي، لکه: د a_n ترادف د 2 عدد ته د b_n ترادف د 1 عدد ته او د c_n ترادف صفر ته تقرب کوي چې n ته د ډېرو لویو قیمتونو په ورکولو سره موضوع په آسانی سره روښانه کېږي.

د ترادف د قیمتونو له جدول څخه د لیمیټ قیمت څرګندېږي، د لیمیټ په شته والی کې ردیف یوه ټاکلي عدد ته نژدې کېږي. دغه ټاکلي عدد ته لیمیټ (limit) وایي. چې په lim سره ښودل کېږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ددې لپاره د $b_n=\dfrac{n-1}{n}$ ترادف په پام کې نیسو، لرو چې:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	...
b_n	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{6}{7}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{9}{10}$	$\frac{10}{11}$	...



او یا که چېرې $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\dots,\frac{1}{n}$ .... I ، $2,\frac{3}{2},\frac{4}{3},\frac{5}{4},\dots,\frac{n+1}{n}$ .... II او $2,4,6,\dots,2n$ .... (III) د عددونو ترادفونه په پام کې ونیسو، لیدل کېږي چې که n د بې نهایت لوري ته نږدې شي، نو د I ترادف صفر ته نږدې کېږي د II ترادف د (1) عدد ته نږدې کېږي د III ترادف بې‌نهایت (∞) ته نږدې کېږي.

د متحول تقرب: ویل کېږي چې د x متحول د a عدد ته تقرب کوي، په داسې حال کې چې x په اختیاري ډول د a عدد ته نږدې کېږي، یعنې د x او a ترمنځ تفاوت له هر کوچني عدد($\delta>0$) څخه کوچنی وي یا په لاندې ډول:

$$\forall\delta>0: |x-a|<\delta \quad \text{یا} \quad x\to a \quad \text{یا} \quad |x-a|\to 0$$

له ښي لوري د متحول تقرب: ($x\to a^+$) که چېرې د x د قیمتونو یو متناقص ترادف موجود وي په داسې حال کې چې په تدریجي ډول د a اختیاري عدد ته نږدې شي.

$$x:\ a+0.1,\ a+0.01\ ,\ a+0.001\ ,\ a+0.0001\ ,\ \dots\ \to\ a^+$$

له کیڼ لوري د متحول تقرب: ($x\to a^-$) که چېرې د x د قیمتونو یو متزاید ترادف موجود وي په داسې حال کې چې x په تدریجي ډول د a اختیاري عدد ته نږدې شي.

$$x:\ a-0.1,\ a-0.01\ ,\ a-0.001\ ,\ a-0.0001\ ,\ \dots\ \to\ a^-$$

نو د x د متحول تقرب د a عدد ته معادل دی د x د متحول تقرب له ښي لوري او د x د متحول تقرب له چپ لوري، یعنې:

$$x\to a \iff (x\to a^+\ ,\ x\to a^-)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی بېلګه: د x متحول د 9 عدد ته نژدې کړئ یا په بل عبارت د $x \to 9$ مفهوم توضیح کړئ.

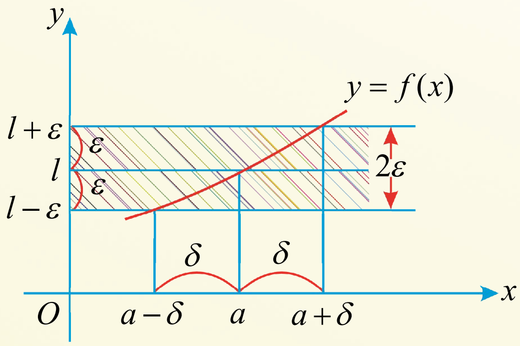
حل:

$$x: 9.1 \ , \ 9.01 \ , \ 9.001 \ , \ 9.0001 \ , \ \ldots \ \to 9^{+}$$

$$x: 8.9 \ , \ 8.99 \ , \ 8.999 \ , \ 8.9999 \ , \ \ldots \to 9^{-}$$

تعریف: که چېرې د $f(x)$ تابع په یوه غیر تړلي انټروال کې چې د a عدد په هغه کې ګډون لري کېدای شي چې تابع په a کې نه وي تعریف شوی. که چېرې د x متحول د a عدد ته نژدې، شي نـو د $f(x)$ تـابع د l عـدد تـه نژدې کېږي، نو ویل کېږي چې د $f(x)$ تابع لېمیټ عبارت له l څخه دی، کله چې د x متحول د a عـدد تـه تقرب وکړیږ، نو داسې یې لیکو:

$$\lim_{x \to a} f(x) = l \quad \text{یا} \quad \begin{matrix} x \to a \\ f(x) \to l \end{matrix}$$



$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \ : |x - a| < \delta \quad \Rightarrow \ |f(x) - l| < \varepsilon$$

$$\lim_{x \to a} f(x) = l \ \Leftrightarrow \quad (|x - a| \to 0 \Rightarrow \ |f(x) - l| \to 0)$$

پوښتنه

د $f(x) = 2x$ تابع په ګرافیکي ډول وښیئ چې که x د (3) عدد ته نژدې شي $f(x)$ د (6) عددته نژدې کېږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ښي او کیڼ خوا لیمیټونه

مخامخ تصویر ته پاملرنه وکړئ ووایئ چې مخامخ ونې ته له کومو خواوو څخه نژدې کېدای شو.

فعالیت

په لاندې جدول کې د $x \neq 1$, $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ ته ځینې قیمتونه ورکړل شوي.

x	0.98	0.99	0.999	?	1.001	1.01	1.02
$f(x)$	1.98	1.99	1.999	?	2.001	2.01	2.02

$\longrightarrow \qquad \longleftarrow$

- د تابع گراف رسم کړئ.
- که x د (1) عدد ته نژدې شي، نو $f(x)$ کوم عدد ته نژدې کېږي.

له پورتني فعالیت څخه لاندې پایله لیکلای شو:

د ښي خوا لیمیټ: د $f(x)$ تابع د a په عدد کې د ښي لوري l_1 لیمیټ لري که چېرې د هر $\varepsilon>0$ لپاره یو کوچنی عدد د $\delta>0$ موجود وي داسې چې که: $x\in(a,a+\delta) \Rightarrow f(x)\in(l_1-\varepsilon,l_1+\varepsilon)$ یا

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)=\lim_{x\to a^+} f(x)=l_1$$

د کیڼ خوا لیمیټ: د $f(x)$ تابع د a په عدد کې د کیڼ لوري l_2 لیمیټ لري. که چېرې د هر $\varepsilon>0$ لپاره د $\delta>0$ یو عدد پیدا شي داسې چې $x\in(a-\delta,a) \Rightarrow f(x)\in(l_2-\varepsilon,l_2+\varepsilon)$ یا

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x)=\lim_{x\to a^-} f(x)=l_2$$

د $f(x)$ تابع هغه وخت چې $x\to a$ ته نژدې شي د l لیمیټ لري، یعني: $\lim_{x\to a} f(x)=l$ په دې شرط چې:

$$\lim_{x\to a^-} f(x)=l=\lim_{x\to a^+} f(x)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دويمه بېلګه: و ښيئ چې $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=6$ سره دی.

حل: د ښي او کيڼي خوا لېميتونه تر څېړنې لاندې نيسو:

x	3.5	3.1	3.01	3.001	...	3^+
$f(x)$	6.5	6.1	6.01	6.001	...	6

$$\Rightarrow \lim_{x\to 3^+}\frac{x^2-9}{x-3}=6$$

x	2.5	2.9	2.99	2.999	...	3^-
$f(x)$	5.5	5.9	5.99	5.999	...	6

$$\Rightarrow \lim_{x\to 3^-}\frac{x^2-9}{x-3}=6$$

ليدل کېږي چې د ښي خوا او کيڼې خوا لېميتونه سره مساوي دي، نو $6=\frac{x^2-9}{x-3}=\lim_{x\to 3}$ دی.

دويمه طريقه: د لېميټ د تعريف په پام کې نيولو سره فرضوو چې د هر اختياري کوچني عدد ε لپاره يو δ شتون لري داسې چې:

$$\forall\varepsilon>0\quad \exists\delta>0\ :\ |x-a|<\delta\quad\Rightarrow\ |f(x)-l|<\varepsilon$$

$$|x-3|<\delta\quad\Rightarrow\left|\frac{x^2-9}{x-3}-6\right|=\left|\frac{(x-3)(x+3)}{x-3}-6\right|=|x+3-6|=|x-3|<\varepsilon$$

$$\Rightarrow\varepsilon=\delta$$

له پورتنۍ اړيکې څخه دا معلومېږي چې ε له δ سره اړيکه لري، که δ ته قيمت ورکړو ε قيمت اخلي او که ε ته قيمت ورکړو δ قيمت اخلي، بنا پر دې هغه تعريف چې د لېميټ لپاره موجود دی سم دی او تابع لېميټ لري، يعنې: $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=6$

پوښتنه

وښيئ چې د $f(x)=\frac{|x-2|}{x-2}$ تابع کله چې $x\to 2$ لېميټ نه لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لېمیټ خاصیتونه (Properties of Limit)

د مخامخ مساوات دلېمیټونو دواړه خواوې کله چې $x \to -1$ وکړي، سره مساوي دي او که نه؟

$$\lim_{x\to -1}(x^2 \pm x) = \lim_{x\to -1} x^2 \pm \lim_{x\to -1} x$$

ددې فعالیت د سرته رسولو لپاره لاندې پوښتنو ته ځوابونه پیدا کړئ:

- که x د 2 عدد ته نژدې شي، نو د $f(x) = x + 2$ تابع لېمیټ به څو وي؟
- که $x \to 3$ ته تقرب وکړي، نو د $g(x) = 2x$ تابع لېمیټ پیدا کړئ.
- $\lim_{x\to 2} f(x) \pm \lim_{x\to 2} g(x)$ پیدا کړئ.
- $\lim_{x\to 2} f(x) \cdot \lim_{x\to 2} g(x)$ پیدا کړئ.
- $\lim_{x\to 2} f(x) \div \lim_{x\to 2} g(x)$ پیدا کړئ.

له پورتني فعالیت څخه لاندې پایلې لیکلای شو:

که $\lim_{x\to a} f(x) = A$ او $\lim_{x\to a} g(x) = B$ وي، نو:

1) $\lim_{x\to a} Kf(x) = K \lim_{x\to a} f(x) = KA$

2) $\lim_{x\to a}[f(x) \pm g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x) = A \pm B$

3) $\lim_{x\to a}[f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x) = A \cdot B$

4) $\lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} = \frac{A}{B}$, $\lim_{x\to a} g(x) = B \neq 0$

5) $\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)} = \sqrt[n]{A}$, $\lim_{x\to a} f(x) = A \geq 0$

له پورتنیو خواصو څخه درې خاصیتونه ثبوتوو او پاتې یې د زده‌کوونکو کورنی دنده ده.

بې نهایت کوچنی تابع ګاڼې: د $\varepsilon(x)$ تابع کله چې $x \to a$ ته نژدې شي، بې نهایت کوچنی بللې کېږي، که چېرې $\lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$ وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

1- ددي لپاره چې $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$ سره شي، لازم او کافي ده چې د $f(x)$ تابع د يوه ثابت عدد b او يوې بې نهايت کوچني تابع $\varepsilon(x)$ کله چې $x\to a$ د مجموعې په شکل وښودل شي، يعنې:

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=b+\varepsilon(x) \\ \lim\limits_{x\to a}\varepsilon(x)=0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \lim_{x\to a} f(x)=b$$

2- که چېرې $\varepsilon(x)$ ، $x\to a$ ته نژدې شي، بې نهايت کوچنۍ تابع وي، خو صفر نه وي، نو $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{\varepsilon(x)}=\infty$

د بې نهايت کوچنۍ تابع گانو مجموعه بيا هم يوه بې نهايت کوچنۍ تابع ده.

3- د بې نهايت کوچنيو تابع گانو د ضرب حاصل بيا هم يوه بې نهايت کوچنۍ تابع ده.

4- که چېرې $\varepsilon(x)$ يوه بې نهايت کوچنۍ تابع او $u(x)$ داسې يوه تابع وي چې لېميټ يې صفر نه وي، نو د $v(x)=\dfrac{\varepsilon(x)}{u(x)}$ تابع يوه بې نهايت کوچنۍ تابع ده.

مثال:

I) د $\varepsilon(x)=x^2-9$ تابع کله چې $x\to 3$ ، يوه بې نهايت کوچنۍ تابع ده ځکه چې:

$$\lim_{x\to 3}(x^2-9)=0$$

II) $\varepsilon(x)=\dfrac{1}{2x}$ تابع کله چې $x\to\infty$ ته نژدې شي بې نهايت کوچنۍ تابع ده:

$$\lim_{x\to\infty}\varepsilon(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2x}=0$$

پوښتنې: د تېرو خاصيتونو په مرسته لاندې سوالونه حل کړئ.

$$1)\ \lim_{x\to 2}(2x^2-1)=\lim_{x\to 2}2x^2-\lim_{x\to 2}1=2\lim_{x\to 2}x^2-\lim_{x\to 2}1=2\cdot 2^2-1=7$$

$$2)\ \lim_{x\to -3}(x-1)^2=\lim_{x\to -3}(x-1)\cdot\lim_{x\to -3}(x-1)=(-4)(-4)=16$$

$$3)\ \lim_{x\to 0}\frac{4x-3}{x+1}=\frac{\lim\limits_{x\to 0}4x-\lim\limits_{x\to 0}3}{\lim\limits_{x\to 0}x+\lim\limits_{x\to 0}1}=\frac{0-3}{0+1}=-3$$

د پورتنيو پوښتنو له حل څخه د لېميټ يو خاصيت داسې بيان او ثبوتوو:

1. د څو تابع گانو د مجموعې لېميټ د نومورو هرې تابع د لېميټونو له مجموعې سره مساوي دي، يعنې: که چېرې د $f(x_1), f(x_2)$ تابع گانې وي، نو لرو چې:

$$\lim_{x\to a}\left[f(x_1)+f(x_2)\right]=\lim_{x\to a}f(x_1)+\lim_{x\to a}f(x_2)$$

ثبوت:که $\lim\limits_{x\to a}f(x_2)=b_2$, $\lim\limits_{x\to a}f(x_1)=b_1$ او ε_1 او ε_2 بې نهايت کوچنۍ تابع گانې وي، نو:

$$\lim_{x\to a}\left[f(x_1)\pm f(x_2)\right]=b_1\pm b_2$$

$$\left.\begin{array}{l} f(x_1)=b_1+\varepsilon_1 \quad .....\ I \\ f(x_2)=b_2+\varepsilon_2 \quad .....\ II \end{array}\right\}\Rightarrow f(x_1)\pm f(x_2)=(b_1+\varepsilon_1)\pm(b_2+\varepsilon_2)=b_1\pm b_2+(\varepsilon_1\pm\varepsilon_2)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

څرنګه چې $(\varepsilon_1 \pm \varepsilon_2)$ د بې نهایت کوچنیو تابع ګانو مجموعه او تفاضل ده او د بې نهایت کوچنیو تابع ګانو مجموعه او تفاضل بیاهم یوه بې نهایت کوچنی تابع ده، نو:

$$\lim_{x\to a}\left[f(x_1)\pm f(x_2)\right]=b_1\pm b_2=\lim_{x\to a}f(x_1)\pm\lim_{x\to a}f(x_2)$$

2. د دوو یا څو تابع ګانو د ضرب د حاصل لیمیټ د نوموړو تابع ګانو د لیمیټونو د ضرب له حاصل سره مساوي دی:

ثبوت:

$$\lim_{x\to a}\left[f(x_1)\cdot f(x_2)\right]=\lim_{x\to a}f(x_1)\cdot\lim_{x\to a}f(x_2)=b_1\cdot b_2$$

$$\left.\begin{aligned}f(x_1)&=b_1+\varepsilon_1\\ f(x_2)&=b_2+\varepsilon_2\end{aligned}\right\}\Rightarrow f(x_1)\cdot f(x_2)=(b_1+\varepsilon_1)(b_2+\varepsilon_2)$$

$$f(x_1)\cdot f(x_2)=b_1\cdot b_2+b_1\cdot\varepsilon_2+b_2\cdot\varepsilon_1+\varepsilon_1\cdot\varepsilon_2$$

څرنګه چې ε_1 او ε_2 ډېر کوچني عددونه دي، نو د ضرب حاصل یې د b_1 او b_2 سره او همداشان په خپلو کې بې‌نهایت کوچنی کېږي، نو:

$$\lim_{x\to a}\left[f(x_1)\cdot f(x_2)\right]=b_1\cdot b_2=\lim_{x\to a}f(x_1)\cdot\lim_{x\to a}f(x_2)$$

3. د دوو تابع ګانو د نسبت لیمیټ د هغو تابع ګانو د لیمیټونو له نسبت څخه عبارت دی، لکه په لاندې ډول:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}g(x)}=\frac{b_1}{b_2}\qquad ,\qquad g(x)=b_2\neq 0$$

ثبوت:

$$\left.\begin{aligned}f(x)&=b_1+\varepsilon_1\\ g(x)&=b_2+\varepsilon_2\end{aligned}\right\}\Rightarrow\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{b_1+\varepsilon_1}{b_2+\varepsilon_2}$$

د مساوات له دواړو خواوو څخه $\frac{b_1}{b_2}$ تفریق کوو:

$$\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{b_1}{b_2}=\frac{b_1+\varepsilon_1}{b_2+\varepsilon_2}-\frac{b_1}{b_2}=\frac{b_2(b_1+\varepsilon_1)-b_1(b_2+\varepsilon_2)}{b_2(b_2+\varepsilon_2)}$$

$$=\frac{b_2b_1+b_2\varepsilon_1-b_1b_2-b_1\varepsilon_2}{b_2(b_2+\varepsilon_2)}=\frac{b_2\varepsilon_1-b_1\varepsilon_2}{b_2(b_2+\varepsilon_1)}$$

$$\Rightarrow\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{b_2\varepsilon_1-b\varepsilon_2}{b_2(b_2+\varepsilon_2)}+\frac{b_1}{b_2}=\frac{b_2\varepsilon_1-b_1\varepsilon_2+b_1b_2+b_1\varepsilon_2}{b_2(b_2+\varepsilon_2)}$$

$$=\frac{b_2(b_1+\varepsilon_1)}{b_2(b_2+\varepsilon_2)}=\frac{b_1+\varepsilon_1}{b_2+\varepsilon_2}\quad\Rightarrow\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{b_1+\varepsilon_1}{b_2+\varepsilon_2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

خرنګه چې ε_1 او ε_2 ډېر کوچني مثبت عددونه($0<\varepsilon<1$)دي، نو کله چې $x\to a$ وکړي صفر کېږي او په پایله کې په لاس راځي چې:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}g(x)}=\frac{b_1}{b_2}$$

د ساندویچ قضیه: که چېرې د $f(x), g(x)$ او $h(x)$ تابع ګانې د هر x لپاره په یوه غیر تړلي انټروال کې چې د a عدد په کې شامل دی(ولو که $x\neq a$) او $f(x)\le g(x)\le h(x)$ شرط صدق وکړي په هغه صورت کې چې $\lim\limits_{x\to a}f(x)=b=\lim\limits_{x\to a}h(x)$ وي، نو $\lim\limits_{x\to a}g(x)=b$ دی.

مثال: که د $u(x)$ تابع دغه خاصیت($1-\frac{x^2}{4}\le u(x)\le 1+\frac{x^2}{2}$) ولري، نو $\lim\limits_{x\to a}u(x)$ په لاس راوړئ.

حل: لیدل کېږي چې $\lim\limits_{x\to 0}(1+\frac{x^2}{2})=1=\lim\limits_{x\to 0}(1-\frac{x^2}{4})$ دی، نو د ساندویچ د قضیې په پام کې نیولو سره لرو چې:

$$\lim_{x\to 0}u(x)=1$$

قضیه: که چېرې $f(x)$ او $g(x)$ داسې تابع ګانې وي چې $f(x)\le g(x)$ نو د لیمیټ د شتون په صورت کې یې لمیټ $\lim\limits_{x\to a}f(x)\le\lim\limits_{x\to a}g(x)$ سره دی.

مثال: د $f(x)=\frac{15x-4}{5x+6}$ او $g(x)=\frac{15x+4}{5x-6}$ تابع ګانې په پام کې نیسو په واضح ډول معلومېږي چې د $x>1$ لپاره لرو $f(x)<g(x)$ دی.

حل:

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{15x-4}{5x+6}=\frac{15}{5}=3$$

$$\lim_{x\to\infty}g(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{15x+4}{5x-6}=\frac{15}{5}=3$$

پوښتنې

لاندې لیمیټونه د امکان په صورت کې پیدا کړئ.

1) $\lim\limits_{x\to 0}6x^3-2x^2+5x+3$

2) $\lim\limits_{x\to -1}x^7-2x-5$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(9x+2)^2-4}{x}$

4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{5x^2+7x}{(2x-5)^2-9}$

5) $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{x-2}$

6) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x}{x^2-4x+1}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د نسبتي تابع ګانو لیمیټونه

آیا پوهیږئ چې مخامخ اړیکې په څه نامه یادیږي؟

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$$

$$\infty - \infty$$

$$0 \cdot \infty$$

- د $y = x^2 - 1$ تابع لیمیټ هغه وخت پیدا کړئ چې $x \to -2$ ته تقرب وکړي.
- د $y = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ تابع لیمیټ هغه وخت پیدا کړئ چې $x \to 1$ ته تقرب وکړي.
- د $y = \dfrac{x^2 - 1}{x + 1}$ تابع لیمیټ هغه وخت پیدا کړئ چې $x \to \infty$ ته تقرب وکړي.

له پورتني فعالیت څخه لاندې پایله لیکلای شو:

پایله

- د ځینو تابع ګانو لیمیټ مستقیماً د قیمت په وضع کولو سره لاسته راځي.
- ځنې تابع ګانې د $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$ ... مبهم شکلونه لري چې د ابهام د له منځه وړلو څخه وروسته د تابع لیمیټ لاسته راځي چې په لاندې ډول یې تر څیړنې لاندې نیسو:

I- د $\frac{0}{0}$ مبهم شکل:

- د $f(x) = \dfrac{x - 1}{x^2 - 1}$ تابع قیمت د $x = -1$ په نقطه کې وڅیړئ.
- د $f(x)$ تابع لیمیټ کله چې $x \to 1$ وي د ابهام کومه بڼه لري.
- آیا د $f(x)$ تابع په داسې ډول ساده کولای شو چې د $x = 1$ لپاره یو معین قیمت ولري؟

د پورتني فعالیت پایله داسې بیانوو:

که چېرې یوه تابع د $\frac{0}{0}$ په شکل مبهمه بڼه ولري، د لیمیټ د پیداکولو لپاره یې لومړی تابع د تجزیې په مرسته ساده کوو د ابهام عامل(خبیثه فکتور) له منځه وړو او بیا یې د لیمیټ قیمت په لاس راوړو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: لاندې لېمیټونه پیدا کړئ.

$$1)\ \lim_{x\to -2}\frac{x^2-4}{x+2}\quad ,\quad 2)\ \lim_{x\to 2}\frac{x^2-6x+8}{x-2}\quad ,\quad 3)\ \lim_{x\to 16}\frac{\sqrt{x}-4}{x-16}$$

حل: لومړی د لېمیټ بڼه ټاکو:

$$1)\ \lim_{x\to -2}\frac{x^2-4}{x+2}=\frac{(-2)^2-4}{-2+2}=\frac{0}{0}$$

څرنګه چې پاسنې لېمیټونه د $\frac{0}{0}$ بڼه لري، نو د تجزیې په مرسته یې وروسته له ساده کولو څخه د لېمیټ قیمت په لاندې ډول په لاس راوړو:

$$\Rightarrow \lim_{x\to -2}\frac{(x-2)(x+2)}{(x+2)}=\lim_{x\to -2}(x-2)=-2-2=-4$$

$$2)\ \lim_{x\to 2}\frac{x^2-6x+8}{x-2}=\frac{2^2-12+8}{2-2}=\frac{0}{0}$$

حل: بیا هم لېمیټ د $\frac{0}{0}$ مبهم شکل لري:

$$\Rightarrow \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-4)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x-4)=2-4=-2$$

$$3)\ \lim_{x\to 16}\frac{\sqrt{x}-4}{x-16}=\frac{0}{0}$$

حل: لیدل کېږي چې نوموړی لېمیټ بیا هم د $\frac{0}{0}$ بڼه لري، نو د لېمیټ د لاسته راوړلو لپاره د کسر صورت او مخرج د صورت په مزدوج کې ضربوو:

$$\Rightarrow \lim_{x\to 16}\frac{\sqrt{x}-4}{x-16}\cdot\frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}+4}=\lim_{x\to 16}\frac{(x-16)}{(x-16)(\sqrt{x}+4)}$$

$$=\lim_{x\to 16}\frac{1}{\sqrt{x}+4}=\frac{1}{8}$$

پوښتنې

$$1)\ \lim_{x\to 3}\frac{3-x}{\sqrt{x+1}-2}=?\qquad 2)\ \lim_{x\to 1}\frac{\frac{5}{2x-3}+5}{x^2-1}=?\qquad 3)\ \lim_{x\to 4}\frac{x-4}{\sqrt{x}-2}=?$$

$$4)\ \lim_{x\to 2}\frac{\frac{2x}{x^2+1}-\frac{4}{5}}{x-2}=?\qquad 5)\ \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x+3}-\frac{1}{3}}{x}=?$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

II- د $\frac{\infty}{\infty}$ مبهم شکل

آیا د مخامخ تابع لیمیټ ټاکلی شئ؟

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-3x+8}{2x^2-2}$$

- د $f(x)=2x^4+x^3-4x-1$ تابع لیمیټ چې $x\to\infty$ وڅېړئ.
- د $g(x)=x^3-2x-4$ تابع لیمیټ چې $x\to\infty$ وڅېړئ.
- د $y=\frac{5}{x-2}$ تابع لیمیټ چې $x\to\infty$ وڅېړئ.
- د $\frac{f(x)}{g(x)}$ تابع لیمیټ هغه وخت په لاس راوړئ چې $x\to 0$ وکړي.
- د $\frac{f(x)}{g(x)}$ تابع لیمیټ هغه وخت په لاس راوړئ چې $x\to\infty$ وکړي.

له پاسني فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راځي:

پایله: هغه توابع چې د $\frac{\infty}{\infty}$ بڼه ولري د لیمیټ د پیداکولو لپاره یې داسې کړنه کوو:

د تابع صورت او مخرج په هغه متحول چې تر ټولو لوی توان ولري وېشو، وروسته له ساده کولو څخه یې لیمیټ په لاس راځي.

لومړی مثال: $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{3x^2-2}$ پیداکړئ.

حل: لومړی د لیمیټ بڼه ټاکو:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{3x^2-2}=\frac{\infty-1}{\infty-2}=\frac{\infty}{\infty}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځرنګه چې پوښتنه د $\frac{\infty}{\infty}$ شکل لري، نو صورت او مخرج په x^2 باندې وېشو:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{3x^2-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}-\frac{1}{x^2}}{\frac{3x^2}{x^2}-\frac{2}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{2}{x^2}}{3-\frac{2}{x^2}}=\frac{1-\frac{1}{\infty}}{3-\frac{2}{\infty}}=\frac{1-0}{3-0}=\frac{1}{3}$$

دویم مثال: د $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2}{x-2}$ پیدا کړئ.

حل:
$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2}{x-2}=\frac{\infty}{\infty}$$

ځرنګه چې پوښتنه د $\frac{\infty}{\infty}$ شکل لري، نو صورت او مخرج د x له ټولو په لوړ توان وېشو:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2}{x-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}-\frac{2}{x^2}}{\frac{x}{x^2}-\frac{2}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{2}{x^2}}{\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}=\frac{1-\frac{2}{\infty}}{\frac{1}{\infty}-\frac{2}{\infty}}=\frac{1-0}{0}=\frac{1}{0}=\infty$$

دریم مثال: $\lim_{x\to\infty}\frac{x-1}{x^2-2}$ پیدا کړئ.

حل:
$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-1}{x^2-2}=\frac{\infty}{\infty}$$

ځرنګه چې پوښتنه $\frac{\infty}{\infty}$ شکل لري، نو صورت او مخرج د x له ټولو په لوړ توان وېشو:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-1}{x^2-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{x^2}-\frac{1}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{2}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}{1-\frac{2}{x^2}}=\frac{\frac{1}{\infty}-\frac{1}{\infty}}{1-\frac{2}{\infty}}=\frac{0}{1-0}=\frac{0}{1}=0$$

یادونه: هغه تابع ګانې چې د $\frac{\infty}{\infty}$ بڼه ولري، پرته له دې چې عملیه پرې سرته ورسوو کولای شو، په لاندې ډول د هغوی لیمیټ په لاس راوړو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $f(x)=\dfrac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+...+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+...+b_n}$ تابع په پام کې ونیسئ که چېرې ($x\to\infty$) کړی وي، نو دلته درې حالتونه ممکن دي:

1- د $m=n$ لپاره د نوموړی کسر لیمیټ عبارت دی له $\dfrac{a_0}{b_0}$.

2- د $m<n$ لپاره د نوموړی کسر لیمیټ عبارت له صفر څخه دی.

3- د $m>n$ لپاره د نوموړی کسر لیمیټ عبارت له $\pm\infty$ څخه دی.

خلورم مثال: لاندې لیمیټونه پیدا کړئ.

$$1)\ \lim_{x\to\infty}\frac{5x^2+6x^4-x^3+x-1}{-x^4+2x^2-3}\qquad 2)\ \lim_{x\to 3}\frac{-8+6x^3-x^2+x}{5x^3-x^4+6x-1}\qquad 3)\ \lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-2}{x+1}$$

حل:

1- څرنګه چې $m=n$ دی، نو:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2+6x^4-x^3+x-1}{-x^4+2x^2-3}=\lim_{x\to\infty}\frac{6x^4}{-x^4}=-6$$

2- څرنګه چې $m<n$ دی، نو د نوموړي تابع لیمیټ صفر دی.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{-8+6x^3-x^2+x}{5x^3-x^4+6x-1}=0$$

3- څرنګه چې $m>n$ دی، نو د نوموړي تابع لیمیټ مساوي له ∞ سره دی:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-2}{x+1}=\infty$$

یادونه: زده‌کوونکي دې ورکړل شوي ځوابونه په کور کې د عملیې د سرته رسولو څخه وروسته په لاس راوړي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتني

لاندې لیمیټونه پیدا کړئ؟

1) $\lim_{x\to\infty} \frac{6}{x^2 - x}$

2) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^4 + x^2 + x + 6}{x^3 - 3x + 4}$

3) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^5 + x^2 - x + 9}{x^4 + x^2 - x + 5}$

4) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^3 + x^2 - x + 7}{x^3 - x + 5}$

5) $\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2 - 2}{x + 1}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

III- د $(\infty-\infty)$ او $(0\cdot\infty)$ مبهم شکلونه

د مخامخ لیمیټونو قیمتونه پیدا کړئ.

$$\lim_{x\to 2}\frac{1}{x^2-4}-\frac{x-1}{x^2-4}$$

$$\lim_{x\to 3}(x^2-9)\cdot\frac{2x^3-4}{x-3}$$

فعالیت

- د $a+1$ مزدوج ولیکئ.
- د $\sqrt{x}-1$ مزدوج ولیکئ.
- د $f(x)=\sqrt{x}-\sqrt{x+1}$ لیمیټ پیدا کړئ، کله چې $x\to\infty$ تقرب وکړي.
- د $f(x)=(2x-1)(x+1)$ تابع لیمیټ وټاکئ، کله چې $x\to\infty$ تقرب وکړي.

له پورتني فعالیت څخه پایله داسې بیانوو:

د هغو تابع ګانو چې د $(\infty-\infty)$ او $(0\cdot\infty)$ مبهم شکلونه ولري، د لیمیټ د پیدا کولو لپاره یې د کسرونو له جمع کولو، ضرب او مزدوج څخه ګټه اخلو او هغه داسې ساده کوو، تر څو چې د $\frac{0}{0}$ او یا $\frac{\infty}{\infty}$ بڼه غوره کړي، وروسته یې لیمیټ په لاس راوړو.

مثال: لاندې لیمیټونه پیدا کړئ.

1) $\lim_{x\to 1}\left(\frac{9}{x-1}-\frac{8x+10}{x^2-1}\right)=?$ 2) $\lim_{x\to 1}(x-1)\left(\frac{1}{x^2+2x-3}\right)=?$

حل 1:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{9}{x-1}-\frac{8x+10}{x^2-1}\right)=\frac{9}{1-1}-\frac{8\cdot 1+10}{1^2-1}=\frac{9}{0}-\frac{18}{0}=\infty-\infty$$

څرنګه چې نوموړی لیمیټ د $(\infty-\infty)$ بڼه لري، نو لیکلای شو چې:

$$=\lim_{x\to 1}\frac{9x+9-8x-10}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2-1}=\frac{0}{0}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

2) $\lim_{x\to1}(x-1)(\frac{1}{x^2+2x-3})=?$

حل 2:

$$\lim_{x\to1}(x-1)(\frac{1}{x^2+2x-3})=(1-1)(\frac{1}{1^2+2-3})=0\cdot\frac{1}{3-3}=0\cdot\frac{1}{0}=0\cdot\infty$$

ليدل کېږي چې نوموړې لېميټ د $(0\cdot\infty)$ مبهم شکل لري، نو:

$$\lim_{x\to1}\frac{x-1}{x^2+2x-3}=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{(x-1)(x+3)}=\lim_{x\to1}\frac{1}{x+3}=\frac{1}{4}$$

پوښتنې

لاندې لېميټونه پيدا کړئ.

1) $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})$

2) $\lim_{x\to1}(\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1-x^2})$

3) $\lim_{x\to\infty}(x^5-8x^3)$

4) $\lim_{x\to5}\left[(x^2-25)\frac{1}{x-5}\right]$

5) $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x+a}-\sqrt{x})$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $1^{\infty}, \infty^{0}, 0^{0}$ مبهم شکلونه

د مخامخ لیمیټ مبهم شکل وټاکئ؟

$$\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{x}} = ?$$

- د $y = x^{x}$ تابع لیمیټ په هغه صورت کې پیدا کړئ چې $x \to 0$ وکړي.
- د $y = (1+x)^{\frac{1}{x}}$ لیمیټ بڼه په هغه صورت کې وټاکئ چې $x \to \infty$ وکړي.
- د کومې عملیې په مرسته کولای شو چې د $0^{0}, \infty^{0}, 1^{\infty}$ مبهم شکلونو ابهام له منځه ویسو؟

د پورتني فعالیت پایله داسې بیانوو:

که چېرې یوه تابع پورتني مبهم شکلونه ځانته غوره کړي، هغه د طبیعي لوګاریتم په مرسته د $0 \cdot \infty$ شکل ته د اړولو وړ دي، یعني:

$$\lim_{x\to a}(f(x))^{g(x)} \Rightarrow \ln(\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)}) = \lim_{x\to a}(\ln f(x)^{g(x)}) = \lim_{x\to a}[g(x)\ln f(x)]$$

یادونه:

I- که چېرې $n \to \infty$ وکړي د $a_n = (1+\frac{1}{n})^{n}$ ترادف $e = 2.71828182$ عدد ته تقرب کوي.

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{n} = e$$

چې په لاندې جدول کې ښکاربږي:

n	$\frac{1}{n}$	$1+\frac{1}{n}$	$(1+\frac{1}{n})^{n}$
1	1	2	2
2	0.5	1.5	2.25
5	0.2	1.2	2.48832
10	0.1	1.1	2.59374246
100	0.01	1.01	2.704813829
1000	0.001	1.001	2.716923932
10000	0.0001	1.0001	2.718145926
100000	0.00001	1.00001	2.718268237
1000000	0.000001	1.000001	2.718280469
1000000000	10^{-9}	$1+10^{-9}$	2.718281828

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e = 2.718281828$ دی چې ... $e = 2.71$ عدد ته د Euler عدد وايي.

II- لاندې لیمیتونه پیدا کړئ:

1) $\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e$ 2) $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{\alpha}{x})^{\beta x} = e^{\alpha\beta}$

3) $\lim_{x\to 0}\frac{Ln(1+x)}{x} = 1$ 4) $\lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{x} = 1$

ثبوت: پوهېږو چې څلور واړه پوښتنې د 1^∞ مبهم شکلونه لري.

1) $x = \frac{1}{\alpha} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{x}$, $\alpha \to 0 \Rightarrow x \to \infty \Rightarrow \lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = \lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$

2) $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{\alpha}{x})^{\beta x} = e^{\alpha\beta}$

$$u = \frac{\alpha}{x} \Rightarrow x = \frac{\alpha}{u} \;,\quad x \to \infty \Rightarrow u \to 0$$

$$\lim_{u\to 0}(1+u)^{\beta\frac{\alpha}{u}} = \lim_{u\to 0}\left[(1+u)^{\frac{1}{u}}\right]^{\alpha\beta}$$

$$x = \frac{1}{u} \to u = \frac{1}{x} \;,\quad u \to 0 \Rightarrow x \to \infty$$

$$\lim_{u\to 0}\left[(1+u)^{\frac{1}{u}}\right]^{\alpha\beta} = \lim_{x\to\infty}\left[(1+\frac{1}{x})^x\right]^{\alpha\beta} = e^{\alpha\beta}$$

3) $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} \Rightarrow \lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}\ln(1+x)\right] = \lim_{x\to 0}\left[\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]$

$$\ln\left[\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right] \;,\quad x = \frac{1}{u} \Rightarrow u = \frac{1}{x} \;,\quad x \to 0 \Rightarrow u \to \infty$$

$$\ln\left[\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right] = \ln\left[\lim_{u\to\infty}(1+\frac{1}{u})^u\right] = \ln e = 1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

4) $y=e^x-1 \quad \Rightarrow e^x=1+y \quad \Rightarrow x=\ln(1+y)$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\ln(1+y)}=\lim_{y\to 0}\frac{1}{\frac{\ln(1+y)}{y}}=\frac{1}{\lim\limits_{y\to 0}\frac{\ln(1+y)}{y}}$$

$$=\frac{1}{\lim\limits_{y\to 0}\frac{1}{y}\ln(1+y)}=\frac{1}{\lim\limits_{y\to 0}\ln(1+y)^{\frac{1}{y}}}\ ,\ y=\frac{1}{x}\Rightarrow x=\frac{1}{y}\ ,\ y\to 0\Rightarrow x\to\infty$$

$$=\frac{1}{\ln\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x}=\frac{1}{\ln e}=\frac{1}{1}=1$$

د 1^∞ مبهم شکل عمومي حالت: که چېرې د اکسپوننشیل تابع لیمیټ یعني $\lim\limits_{x\to a}[u(x)]^{v(x)}$ د 1^∞ مبهم شکل څانته غوره کړي په دې حالت کې $\alpha=u-1$ سره تعویضوو، په نتیجه کې:

$$\lim_{x\to a}u^v=\lim_{x\to a}[(1+u-1)]^{\frac{v}{u-1}u-1}=\lim_{x\to a}\left[(1+\alpha)^{\frac{v}{\alpha}\alpha}\right]=\lim_{x\to a}\left[(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right]^{\lim\limits_{x\to a}(v\alpha)}$$

ځرنګه چې $\alpha=u-1$ دی که چېرې $u\to 1$ **نو** $\alpha\to 0$ **ته نژدې کېږي په پایله کې :**

$$\lim_{x\to a}[u(x)]^{v(x)}=\left[\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right]^{\lim\limits_{x\to a}[v(u-1)]}=e^{\lim\limits_{x\to a}[v(u-1)]}=e^P$$

$$\lim_{x\to a}[u(x)]^{v(x)}=e^P\quad ,\quad P=\lim_{x\to a}[v(u-1)]$$

لومړی مثال: د $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{2}{x})^x$ لیمیټ قیمت په لاس راوړئ.

حل: لومړی د لیمیټ بڼه ټاکو معلومېږي چې لیمیټ د 1^∞مبهم شکل لري، نو له فورمول څخه کار اخلو:

$$u=1+\frac{2}{x}\quad ,\quad v=x$$

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{2}{x})^x=e^P\quad ,\quad P=\lim_{x\to\infty}\left[x(1+\frac{2}{x}-1)\right]=2$$

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{2}{x})^x=e^P=e^2$$

دویم مثال: د $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{\frac{x-5}{2}}$ **قیمت محاسبه کړئ.**

حل:**لومړی د لیمیټ بڼه ټاکو** $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{\frac{x-5}{2}}=1^\infty$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځرنګه چې معلومېږي نوموړی لیمیټ د 1^∞ مبهم شکل لري، نو له فورمول څخه کار اخلو:

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{\frac{x-5}{2}}=e^P$$

$$u=1+\frac{1}{x}\quad,\quad v=\frac{x-5}{2}$$

$$P=\lim_{x\to a}[v(u-1)]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x-5}{2}(1+\frac{1}{x}-1)\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x-5}{2}(\frac{1}{x})\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{x-5}{2x}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{\frac{x-5}{2}}=e^P=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$$

دریم مثال: $\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}=?$

حل: **د تېر په شان بیاهم لومړی د لیمیټ بڼه ټاکو،** $\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}=1^\infty$

ځرنګه چې معلومېږي لیمیټ د 1^∞ مبهم شکل لري د فورمول په مرسته یې محاسبه کوو:

$$u=\cos x\quad,\quad v=\frac{1}{x}$$

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}=e^P$$

$$P=\lim_{x\to a}[v(u-1)]=\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}(\cos x-1)\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\cos x-1)(\cos x+1)}{x(\cos x+1)}$$

$$\frac{\cos^2 x+\cos x-\cos x-1}{x(\cos x+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x-\sin^2 x-\cos^2 x}{x(\cos x+1)}$$

$$=-\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\cos x+1}=-1\cdot\frac{0}{2}=0$$

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}=e^P=e^0=1$$

پوښتنې

لاندې لیمیټونه محاسبه کړئ.

1) $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{x+2}$

2) $\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\ln x}$

3) $\lim_{x\to\infty}(\frac{x+3}{x-1})^{x+2}$

4) $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{n^2})^{n^2}$

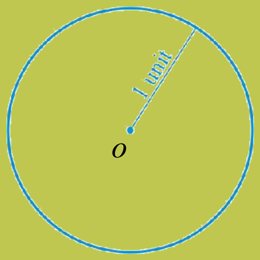
5) $\lim_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{x}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مثلثاتي تابع ګانو لیمیټ

Trigonometric functions limits

که د یوې دایرې شعاع یو واحد (1unit) وي، نوموړې دایرې ته څه ډول دایره وایي.



فعالیت

- دوضعیه کمیاتو په سیستم کې د $C(o,r)$ په مثلثاتي دایره کې د θ مرکزي زاویه رسم کړئ.
- د C له بهرني ټکي څخه په دایره باندې د ox پر محور د $\overline{CA}$ مماس او $\overline{MB}$ عمود رسم کړئ.
- د C ټکی د دایرې له مرکز سره وصل کړئ.
- د مرکزي زاویې د مقابل قوس د اندازه کولو واحد په ګوته کړئ.

له پورتني فعالیت څخه قضیه داسې بیان او ثبوتوو:

قضیه: د یوې زاویې د ساین او د هغې زاویې د نسبت لیمیټ مساوي په (1) دی، کله چې زاویه صفر ته تقرب وکړي.

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$$

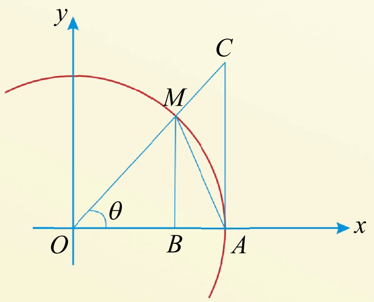
ثبوت: په لاندې شکل کې د MOA او COA د مثلثونو او OMA د قطاع مساحتونه په لاس راوړو:

مثلث مساحت MOA د $=\frac{1}{2}\cdot\overline{OA}\cdot\overline{BM}=\frac{1}{2}\cdot r\cdot\overline{BM}=\frac{\overline{BM}}{2}\cdot r$

قطاع مساحت $O\overset{\frown}{A}M$ د $=\frac{1}{2}\theta r^2$

د θ د زاویې پراخوالی باید په رادیان لاسته راوړو.

مساحت $C\overset{\Delta}{O}A$ د $=\frac{1}{2}\cdot\overline{OA}\cdot\overline{AC}=\frac{1}{2}\cdot r\cdot\overline{AC}=\frac{\overline{AC}}{2}\cdot r$



د MOA او COA مثلثونو مساحتونه د OMA د قطاع له مساحت سره پرتله کوو:

$$\frac{1}{2}r\,\overline{BM}<\frac{1}{2}\theta r^2<\frac{\overline{AC}}{2}\cdot r$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د نامساواتو دواړه خواوې په $\frac{2}{r^2}$ کې ضربوو:

$$\frac{\overline{BM}}{r} < \theta < \frac{\overline{AC}}{r} \Rightarrow \sin\theta < \theta < \tan\theta \Rightarrow 1 < \frac{\theta}{\sin\theta} < \frac{1}{\cos\theta}$$

$$\Rightarrow \cos\theta < \frac{\sin\theta}{\theta} < 1 \Rightarrow \lim_{\theta\to 0}\cos\theta \le \lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta} \le \lim_{\theta\to 0} 1$$

د سانډویچ د قضیې پر بنسټ معلومیږي چې $\lim_{\theta\to 0}\cos\theta = 1$ او همدارنګه $\lim_{\theta\to 0} 1 = 1$ دی، نو $\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta} = 1$ دی.

پوهیږو چې د هرې زاویې ساین د (1) او (-1) د عددونو تر منځ تحول کوي:

$$-1 \le \sin\theta \le 1$$

$$-\frac{1}{\theta} \le \frac{\sin\theta}{\theta} \le \frac{1}{\theta}$$

$$-\lim_{\theta\to\infty}\frac{1}{\theta} \le \lim_{\theta\to\infty}\frac{\sin\theta}{\theta} \le \lim_{\theta\to\infty}\frac{1}{\theta}$$

د سانډویچ د قضیې پر اساس لیکلای شو چې:

$$\left.\begin{aligned} -\lim_{\theta\to\infty}\frac{1}{\theta} = 0 \\ \lim_{\theta\to\infty}\frac{1}{\theta} = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \lim_{\theta\to\infty}\frac{\sin\theta}{\theta} = 0$$

په پایله کې ویلای شو چې د یوې زاویې ساین او د هغې زاویې د نسبت لیمیټ مساوي په صفر دی هغه وخت چې زاویه بې‌نهایت ته نژدې شي.

لومړی مثال: $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}$ پیدا کړئ.

حل: که $2x = \alpha$ نو $x = \frac{\alpha}{2}$ کیږي، څرنګه چې $x \to 0$ کړی دی، نو $\alpha \to 0$ کوي، نو لیکلای شو:

$$\frac{\sin\alpha}{\frac{\alpha}{2}} = 2\frac{\sin\alpha}{\alpha}$$

له پورته مساواتو څخه لاس ته راځي:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x} = \lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow 2\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha} = 2\cdot 1 = 2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم مثال: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5\tan 2x}{7x}$ حل کړئ.

حل:

$$\frac{5\tan 2x}{7x}=\frac{5\dfrac{\sin 2x}{\cos 2x}}{7x}=\frac{5\sin 2x}{7x\cos 2x}=\frac{5\cdot 2x\dfrac{\sin 2x}{2x}}{7x\cos 2x}=\frac{10\dfrac{\sin 2x}{2x}}{7\cos 2x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{5\tan 2x}{7x}=\frac{10}{7}\,\frac{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{2x}}{\lim\limits_{x\to 0}\cos 2x}=\frac{10}{7}$$

دریم مثال: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x}$ حل کړئ.

حل: پوهېږو چې $1-\cos 2x=2\sin^2 x$ سره دی، نو:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x}{x}$$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\sin x=2\cdot 1\cdot 0=0$$

څلورم مثال: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 3x}{\sin 5x}$ پیدا کړئ:

حل:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{\sin 5x}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\sin 3x}{\cos 3x}}{\sin 5x}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{3x\dfrac{\sin 3x}{3x}}{\cos 3x}}{5x\dfrac{\sin 5x}{5x}}=\frac{3x}{5x}\,\frac{\dfrac{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{3x}}{\lim\limits_{x\to 0}\cos 3x}}{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{5x}}=\frac{3}{5}\,\frac{\dfrac{1}{1}}{1}=\frac{3}{5}$$

پنځم مثال: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 4x-\cos 6x}{x^2}$ په لاس راوړئ.

حل: پوهېږو چې $\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$ نو:

$$\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin\dfrac{4x+6x}{2}\sin\dfrac{4x-6x}{2}}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin 5x\sin(-x)}{x^2}=-2\lim_{x\to 0}\frac{5\sin 5x}{5x}\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{x}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که $y = 5x$ سره وي، او $x \to 0$ نو $y \to 0$ کوي، نو:

$$=10\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=10\cdot 1\cdot 1=10$$

پوښتني

لاندې لیمیټونه محاسبه کړئ.

1) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin(x+\frac{\pi}{6})}{x+\frac{\pi}{6}}$ 2) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{x}$ 3) $\lim_{x\to 0}\dfrac{1}{1+\tan^2 x}$

4) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x - x}{x}$ 5) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\tan 2x}{\sin 3x}$ 6) $\lim_{x\to 0}\sin 5x\cos 3x$

7) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\tan(2x-1)}{4x^2-1}$ 8) $\lim_{x\to 0}\sqrt{\cos 2x-\cos x+1}$ 9) $\lim_{x\to 1}(\cos^2 x+\sin^2 x)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د تابع ګانو متمادیت

Continuity of functions

شکلونو ته پام وکړئ.

لومړي او دويم پلونه يو له بل څخه څه توپير لري، خپل نظر بيان کړئ.

د تابع ګانو ګرافونه مختلف شکلونه لري چې ځيني يې په يوه قلم پرته له دې چې د قلم څوکه له کاغذ څخه پورته شي رسمېږي، متصلې يا متمادي تابع ګانې بلل کېږي او ځيني يې په يوه قلم نه شي رسمېدلای يعنې د رسم په وخت کې بايد د قلم څوکه يو ځل يا څو ځلې د کاغذ څخه پورته شي، ځکه په يوه برخه کې يې ګراف غوڅ وي، دغه ډول تابع ګانې په نوموړې ټکې کې غير متصلې يا غير متمادي تابع ګانې بلل کېږي.

- د $f(x)=x^2+4x$ تابع ګراف رسم کړئ.
- د $f(x)$ د تابع لېميټ د $x=1$ په نقطه کې پيدا کړئ.
- د $f(x)$ د تابع قيمت د $x=1$ په نقطه کې پيدا او وروسته دواړه اريکې سره پرتله کړئ.

له پاسني فعاليت څخه لاندې پايله په لاس راځي:

پايله: د $y=f(x)$ تابع د $x=a$ په ټکي کې متمادي بلله کېږي چې لاندې شرطونه په کې صدق وکړي.

1- د $f(x)$ تابع د a په ټکي کې تعريف شوې وي.

2- راکړل شوې تابع د a په ټکي کې لېميټ ولري.

3- د $f(a)$ قيمت بايد د $f(x)$ له لېميټ سره مساوي وي: $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی مثال: وښيئ چې د $f(x)=x^2+2x-1$ تابع د $x_0=2$ په ټکي کې متمادي ده.

حل: ځرنګه چې د تابع د تعریف ساحه ټول حقیقي عددونه دي، نو د متمادیت له شرطونو څخه لیکلای شو:

$$1)\ \ 2\in Dom\ f(x)=IR$$

$$\left.\begin{array}{l} 2)\ \ \lim\limits_{x\to 2}(x^2+2x-1)=4+4-1=7 \\ 3)\ \ f(2)=2^2+4-1=7 \end{array}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to 2} f(x)=f(2)=7$$

ځرنګه چې د متمادیت درې واړه شرطونه په کې حقیقت لري، بناءً تابع متمادي ده.

دویم مثال: د $f(x)=\dfrac{2x-1}{x+1}$ د تابع متمادیت د $x_0=-1$ په ټکي کې وڅېړئ.

حل: د $f(x)$ د تابع د تعریف ساحه عبارت ده، له: $IR\setminus\{-1\}$

او $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x-1}{x+1}=\dfrac{-3}{0}=\infty$ سره دی.

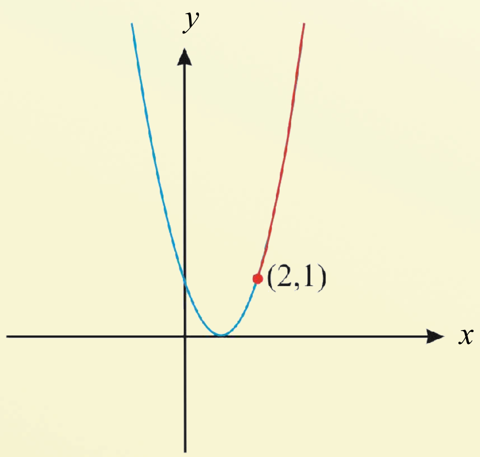
ځرنګه چې لیدل کېږي -1 د تابع د تعریف په ساحه کې شامل نه دی، بناءً نوموړی تابع د -1 په ټکي کې متمادي نه ده.

دریم مثال: د $f(x)=\begin{cases} x^2-2x+1 & ;\ x<2 \\ x^2-3 & ;\ x\geq 2 \end{cases}$ د تابع متمادیت د $x=2$ په ټکي کې وڅېړئ.

حل: لومړی د تابع د ښي او کیڼي خوا لیمیتونه څېړو:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}(x^2-3)=1 \\ \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(x^2-2x+1)=1 \end{array}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^-} f(x)\ \ \Rightarrow \lim_{x\to 2} f(x)=f(2)$$

په پایله کې ویلای شو چې تابع په نوموړي ټکي کې متمادي ده، لکه چې په شکل کې لیدل کېږي.



(c) ketabton.com: The Digital Library

څلورم مثال: که $f(x)=\begin{cases}2x+1 & ; x\ge 1\\ 1-x & ; x<1\end{cases}$ وي، نو د $x=1$ په ټکي کې د تابع متمادیت وڅېړئ.

حل:

$$\left.\begin{matrix}\lim\limits_{x\to 1} f(x)=1-x=0\\ f(1)=0\end{matrix}\right\}\left.\begin{matrix}\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} 2x+1=3\\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} 1-x=0\end{matrix}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)\neq \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$$

نو تابع په $x=1$ کې غیر متمادي ده.

پایله: که چېرې د $g(x)$ تابع د $x=a$ په ټکي کې $f(x)$ په $x=g(a)$ کې متمادي وي، نو $f(g(x))$ په $x=a$ کې هم متمادي ده، یعنې:

$$\lim_{x\to a} f(g(x))=f(\lim_{x\to a} g(x))=f(g(a))$$

1) $\lim\limits_{x\to a}(f(x))^{\alpha}=(\lim\limits_{x\to a} f(x))^{\alpha}\quad , \quad \alpha\in IR$

2) $\lim\limits_{x\to a} a^{f(x)}=a^{\lim\limits_{x\to a} f(x)}$

3) $\lim\limits_{x\to a}\log_a f(x)=\log_a(\lim\limits_{x\to a} f(x))$

4) $\lim\limits_{x\to a}\sin f(x)=\sin(\lim\limits_{x\to a} f(x))$

پنځم مثال: که $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x+3}$ وي او $x\neq -3$ وي.

آیا د $f(x)$ تابع د $x=-3$ په ټکي کې متمادي ده؟

حل: ځرنګه چې تابع د $x=-3$ په نقطه کې نه ده تعریف شوې یا په بل عبارت د -3 عدد د تابع د تعریف په ساحه کې نه دی شامل، نوله دې امله تابع د $x=-3$ په ټکي کې متمادي نه ده.

غیر متمادیت: که چېرې د $f(x)$ تابع په $x=a$ کې یو له لاندې درې شرطونو څخه و نه لري وایو چې f په a کې غیر متمادي ده او a یې د انفصال ټکی دی. انفصال په درې ډوله دی.

لومړی ډول: د f تابع د a په ټکي کې د ښي او کیڼ لوري لیمیتونه ولري، خو مساوي نه وي.

دویم ډول: کم تر کمه یو له دوو لیمیټونو(د ښي او کیڼ لوري لیمیتونه) څخه موجود نه وي.

دریم ډول: که چېرې تابع د a په ټکي کې لیمیټ ولري، خو a د f د تعریف په ساحه کې شامل نه وي.(یوازې یو خالي ټکی وي.)

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

په ورکړ شویو ټکو کې د تابع متمادیت وڅیړئ.

a) $f(x)=x^2+5(x-2)^7 \quad ; \quad x=3$

b) $f(x)=\dfrac{x+3}{(x^2+2x-5)} \quad ; \quad x=-1$

c) $h(x)=\dfrac{\sqrt{8-x^2}}{2x^2-5} \quad ; \quad x=-2$

d) $f(x)=\dfrac{1}{(x-3)^3} \quad ; \quad x=3$

e) $f(x)=|x-3| \quad ; \quad x=3$

f) $g(x)=\dfrac{|x|}{x} \quad ; \quad x=0$

g) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^3+x}{x} & ; \quad x\neq 0 \\ 3 & ; \quad x=2 \end{cases}$

h) $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x+3} \quad ; \quad x=2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د متمادي تابع ګانو خاصیتونه

د مخامخ مساواتو په اړه سوچ وکړئ چې حقیقت لري او که نه؟

$$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$$
$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$
$$(f \div g)(x) = f(x) \div g(x) \quad , \; g(x) \neq 0$$

فعالیت

- که $f(x) = x^2 - 1$ وي د تابع متمادیت وڅیړئ.
- که $g(x) = x + 3$ وي د تابع متمادیت وڅیړئ.
- د $f(x) + g(x)$ د تابع ګانو متمادیت وڅیړئ.

د پورتني فعالیت پایله داسې بیانوو:

پایله: که د $f(x)$ او $g(x)$ تابع ګانې د $x = c$ په ټکي کې متمادي وي، نو له لاندې تابع ګانو څخه یې هره یوه په $x = c$ یا یوه انټروال کې متمادي ده.

1- د تابع ګانو جمع $f(x) + g(x)$

2- د تابع ګانو تفریق $f(x) - g(x)$

3- د تابع ګانو ضرب $f(x) \cdot g(x)$

4- د تابع ګانو تقسیم $\dfrac{f(x)}{g(x)} \; ; \; g(x) \neq 0$

لومړی بېلګه: **که** $f(x) = x^2 + 3$ **او** $g(x) = x^2 + 3x - 2$ **وي، نو**:

1- f او g د $x = 1$ په ټکي کې متمادي دي او که نه؟

2- وڅیړئ چې:

الف) $f(x) + g(x) = (f + g)(x)$ وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب) $(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)$ د $x=1$ په نقطه کې متمادي ده او که غیر متمادي.

حل:لومړی هره یوه تابع بېلابېله څېړو چې متمادي ده که نه؟

1) $Df(x)=IR$

2) $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\lim\limits_{x\to 1}(x^2+3)=4$

3) $f(1)=(1^2+3)=4$

نو د f **تابع** د $x=1$ په نقطه کې متمادي ده.

1) $D\,g(x)=IR$

2) $\lim\limits_{x\to 1}g(x)=\lim\limits_{x\to 1}(x^2+3x-2)=1^2+3\cdot 1-2=2$

3) $g(1)=(1^2+3\cdot 1-2)=2$

په همدې شان د g تابع د $x=1$ په ټکي کې هم متمادي ده.

2- اوس د تابع ګانو د جمعې او ضرب د حاصل متمادیت څېړو:

الف)

$f(x)+g(x)=x^2+3+x^2+3x-2=2x^2+3x+1$

1) $D(f(x)+g(x))=IR$

2) $\lim\limits_{x\to 1}[f(x)+g(x)]=\lim\limits_{x\to 1}(2x^2+3x+1)=6$

3) $f(1)+g(1)=(1+3+1+3-2)=6$

$\lim\limits_{x\to 1}[f(x)+g(x)]=f(1)+g(1)=6$

$(f+g)(x)=x^2+3+x^2+3x-2=2x^2+3x+1$

1) $D[(f+g)(x)]=IR$

2) $\lim\limits_{x\to 1}[(f+g)(x)]=\lim\limits_{x\to 1}[2x^2+3x+1]=6$

3) $(f+g)(1)=(2x^2+3x+1)(1)=6$

$\lim\limits_{x\to 1}[(f+g)(x)]=(f+g)(1)=6$

په پایله کې د متمادي تابع ګانو د جمعې حاصل د $x=1$ په نقطه کې متمادي دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب)

$$f(x)\cdot g(x)=(x^2+3)(x^2+3x-2)=x^4+3x^3+x^2+9x-6$$

1) $D(f\cdot g)(x)=IR$

2) $(f\cdot g)_{(1)}=1^4+3\cdot 1^3+1^2+9\cdot 1-6=8$

3) $\lim\limits_{x\to 1}(f\cdot g)(x)=8$

$\lim\limits_{x\to 1}(f\cdot g)(x)=(f\cdot g)(1)=8$

په پايله کې د متمادي تابع ګانو د ضرب حاصل د $x=1$ په نقطه کې متمادي ده.

دويمه بېلګه: که $g(x)=3x-2$ او $f(x)=x+1$ وي، وڅېړئ چې آيا $f(x)\cdot g(x)$ د $x=2$ په نقطه کې متمادي ده؟

حل:

1) $Df(x)=IR$

2) $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=\lim\limits_{x\to 2}(x+1)=3$

3) $f(2)=x+1=3$

$\lim\limits_{x\to 2}f(x)=f(2)=3$

1) $Dg(x)=IR$

2) $\lim\limits_{x\to 2}g(x)=3x-2=3\cdot 2-2=4$

3) $g(2)=3x-2=3\cdot 2-2=4$

$\lim\limits_{x\to 2}g(x)=g(2)=4$

$$f(x)\cdot g(x)=(x+1)(3x-2)=3x^2-2x+3x-2=3x^2+x-2$$

$D(f\cdot g)(x)=IR$

$\lim\limits_{x\to 2}[f(x)\cdot g(x)]=3(4)+2-2=12$

$(f\cdot g)(2)=3(4)+2-2=12$

$\lim\limits_{x\to 2}[f(x)\cdot g(x)]=(f\cdot g)(2)=12$

په پايله کې لاس ته راځي چې $f(x)\cdot g(x)$ د $x=2$ په ټکي کې متمادي ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

1- وښیئ چې لاندې تابع ګانې په ورکړ شویو نقطو کې متمادي دي او که نه؟

1) $f(x) = x^3 - 2(x+1)^5 \quad ; \quad x = 2$

2) $g(x) = \dfrac{x^2+3}{(x^2-x+5)(x^2+2x)} \quad ; \quad x = -1$

3) $h(x) = \dfrac{x\sqrt{x}+1}{(x+2)^3} \quad ; \quad x = 4$

2- تشریح کړئ چې ولې د $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt{2}}{x}$ تابع په $x = 0$ کې غیرمتمادي ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ښېرکي مهم ټکي

د متحول تقرب: ويل کېږي چې د x متحول د a عدد ته تقرب کوي، په داسې حال کې چې x په اختياري ډول د a عدد ته نژدې کېږي، يعنې د x او a ترمنځ تفاوت له هر کوچني عدد($\delta > 0$) څخه کوچني دی يا په لاندې ډول:

$$\forall \delta > 0 : |x-a| < \delta \quad \text{يا} \quad x \to a \quad \text{يا} \quad |x-a| \to 0$$

له ښي لوري د متحول تقرب: ($x \to a^+$) که چېرې د x د قيمتونو يو متناقص ترادف موجود وي، په داسې حال کې چې په تدريجي ډول د a اختياري عدد ته نژدې شي.

$$x:\ a+0.1,\ a+0.01\ ,\ a+0.001\ ,\ a+0.0001\ ,\ \ldots \to a^+$$

له کيڼ لوري د متحول تقرب: ($x \to a^-$) که چېرې د x د قيمتونو يو متزايد ترادف موجود وي، په داسې حال کې چې x په تدريجي ډول د a اختياري عدد ته نژدې شي.

$$x:\ a-0.1,\ a-0.01\ ,\ a-0.001\ ,\ a-0.0001\ ,\ \ldots \to a^-$$

نو د x د متحول تقرب د a عدد ته معادل دی د x د متحول تقرب له ښي لوري او د x د متحول تقرب له چپ لوري؛ يعنې:

$$x \to a \quad \Leftrightarrow \quad (x \to a^+\ ,\ x \to a^-)$$

تعريف: که چېرې د $f(x)$ تابع په يوه غير تړلي انټروال کې چې د a عدد په هغې کې شامل وي کېدای شي چې تابع په a کې نه وي تعريف شوی. که چېرې د x متحول د a عدد ته نژدې شي، نو د $f(x)$ تابع د l عدد ته نژدې کېږي، نو ويل کېږي چې د $f(x)$ د تابع لېميټ عبارت له l څخه دی، کله چې د x متحول د a عدد ته تقرب وکړي، نو داسې يې ليکو:

$$\lim_{x \to a} f(x) = l \quad \text{يا} \quad \begin{matrix} x \to a \\ f(x) \to l \end{matrix}$$

د لېميټ خانګړتياوې: که f او g دوې تابع ګانې وي، C, L او M حقيقي عددونه وي، داسې چې $\lim_{x \to c} f(x) = L$ او $\lim_{x \to c} g(x) = M$ ، نو لاندې رابطې ليکلای شو:

1) $\lim_{x \to c}(f(x)+g(x)) = \lim_{x \to c} f(x) + \lim_{x \to c} g(x) = L+M$

2) $\lim_{x \to c}(f(x)-g(x)) = \lim_{x \to c} f(x) - \lim_{x \to c} g(x) = L-M$

3) $\lim_{x \to c}(f(x)\cdot g(x)) = \lim_{x \to c} f(x) \cdot \lim_{x \to c} g(x) = L\cdot M$

4) $\lim_{x \to c}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x \to c} f(x)}{\lim_{x \to c} g(x)} = \dfrac{L}{M}\ ,\quad M \neq 0\ ,\quad g(x) \neq 0$

5) $\lim_{x \to c}\sqrt{f(x)} = \sqrt{\lim_{x \to c} f(x)} = \sqrt{L}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بې نهايت کوچنى تابع ګانې: د $\varepsilon(x)$ تابع کله چې $x \to a$ ته نژدې شي، بې نهايت کوچنى بللې کېږي، کـه چېرې $\lim\limits_{x\to a}\varepsilon(x)=0$ وي.

د ساندوېچ قضيه: که چېرې د $f(x), g(x)$ او $h(x)$ تابع ګانې د هر x لپاره په يوه غير ترلي انټروال کې چې د a عدد په کې شامل دی(ولو که $x \neq a$) او $f(x) \le g(x) \le h(x)$ شرط صدق وکړي پـه هغه صـورت کـې چې $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b=\lim\limits_{x\to a} h(x)$ وي، نو $\lim\limits_{x\to a} g(x)=b$ دی.

- که چېرې يوه تابع د $\frac{0}{0}$ مبهمه بڼه ولري، د لېميټ د پيداکولو لپاره يې لومړى تابع د تجزيې په مرسته ساده کـوو او بيا يې لېميټ په لاس راوړو.
- $f(x)=\dfrac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\ ...\ +a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\ ...\ +b_n}$ د تابع د لېميټ د پيداکولو لپاره چې $x\to\infty$ وکـړي، عبـارت دی له:

1. د $m=n$ لپاره د نومورې کسر ليميټ عبارت دی له $\dfrac{a_0}{b_0}$
2. د $m<n$ لپاره د نومورې کسر ليميټ عبارت له صفر څخه دی.
3. د $m>n$ لپاره د نومورې کسر ليميټ عبارت دی له $\pm\infty$

- د هغو تابع ګانو چې $(\infty-\infty)$ او $(0\cdot\infty)$ بڼه ولري د لېميـټ د پيـداکولـو لپـاره يې د کسرونو د جمعې، ضرب او مزدوج څخه ګټه اخلو، تر څو د $\frac{0}{0}$ يا $\frac{\infty}{\infty}$ بڼه غوره کړي چې وروسته يې لېميټ په لاس راوړو.
- هغـــه تـــابع ګـــانې چـــې د 1^∞ مـــبهم شـــکلونه لـــري لـــه دې فورمـــول څخـــه $\lim\limits_{x\to a}[u(x)]^{v(x)} \overset{1^\infty}{=} e^P \quad , \quad P=\lim\limits_{x\to a}[v(u-1)]$ يې د لېميټ د پيداکولو لپاره کار اخلو.
- لاندې رابطه کله چې $\theta\to 0$ وکړي همېشه سمه ده.

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$$

- د $y=f(x)$ تابع د $x=a$ په ټکی کې متمادي بلل کېږي، کله چې:

1. a د $f(x)$ د تابع په دومين کې شامل وي.
2. راکړل شوی تابع د a په نقطه کې لېميټ ولري.
3. $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لومړي څپرکي پوښتنې

لاندې پوښتنو ته څلور ځوابونه ورکړل شوي دي، سم ځواب يې په نښه کړې.

-1 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x-\sin x}{x}$

a) 2 b) -2 c) 1 d) 3

-2 $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^2-x-6}{x^2+x-2}$

a) $-\frac{5}{3}$ b) $\frac{5}{3}$ c) 0 d) 1

-3 $\lim\limits_{x\to 1.4}(2x+0.3)$

a) 1 b) 3 c) 0 d) هيڅ يو

-4 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\tan 2x}$

a) 1 b) 0 c) $\frac{3}{2}$ d) $\frac{2}{3}$

-5 $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x-4}{\sqrt{x}-2}$

a) $2+\sqrt{2}$ b) 2 c) $\sqrt{2}$ d) 4

-6 $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{1+\cos 2x}$

a) 1 b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{4}$ d) 4

-7 لاندې لېميټونه پيداکړئ.

1) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-2x+5}{2x^2+1}$

2) $\lim\limits_{x\to -1}\sqrt{3+x}$

3) $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{6}{x^2-7}$

4) $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{x^4+x^2+x+6}{x^3-3x+4}$

5) $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{3x^2-2}{x+1}$

6) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3+5x-18}{x^2+3x-10}$

7) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-2x-4}{x-\sqrt{3x-2}}$

8) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{x^2+3x-10}$

9) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\tan x}$

10) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x\cos x}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

11) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2+3x-10}{x^2-x-2}$

12) $\lim_{x\to -2}\left(\frac{x+3}{x+2}+\frac{2}{x^2+2x}\right)$

13) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(a+x)+\sin(a-x)}{\tan(a+x)+\tan(a-x)}$

14) $\lim_{x\to +\infty}\frac{x^2}{2x^2-1}-\frac{x^2}{2x+2}$

15) $\lim_{x\to 0}\frac{\cos x\sin x-\tan x}{x^2\sin x}$

16) $\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 3x+\sin^2 x}{a x^2}$

17) $\lim_{x\to 0}\frac{2\sin 2x\sin x+\sin^2 x}{x^2}$

18) $\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin 2x}{x+\sin 3x}$

19) $\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin 3x\sin 2x}{x\tan 3x}$

20) $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{\sqrt{x-2}\cdot\sqrt{x+2}}+\frac{1}{\sqrt{x+2}}$

21) $\lim_{u\to 0}\frac{\sin 3(\pi+u)}{\sin 8(\pi+u)}$

22) $\lim_{x\to 1}\frac{1-x^2}{\sin \pi x}$

23) $\lim_{x\to \infty}\frac{2x^2-x+3}{x^2-8x+5}$

24) $\lim_{x\to \infty}\frac{8x+4}{4x+\sqrt{x}}$

25) $\lim_{x\to 2}\frac{9x^2-x+5}{\sqrt{9x^4+1}}$

26) $\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1-x^2}\right)$

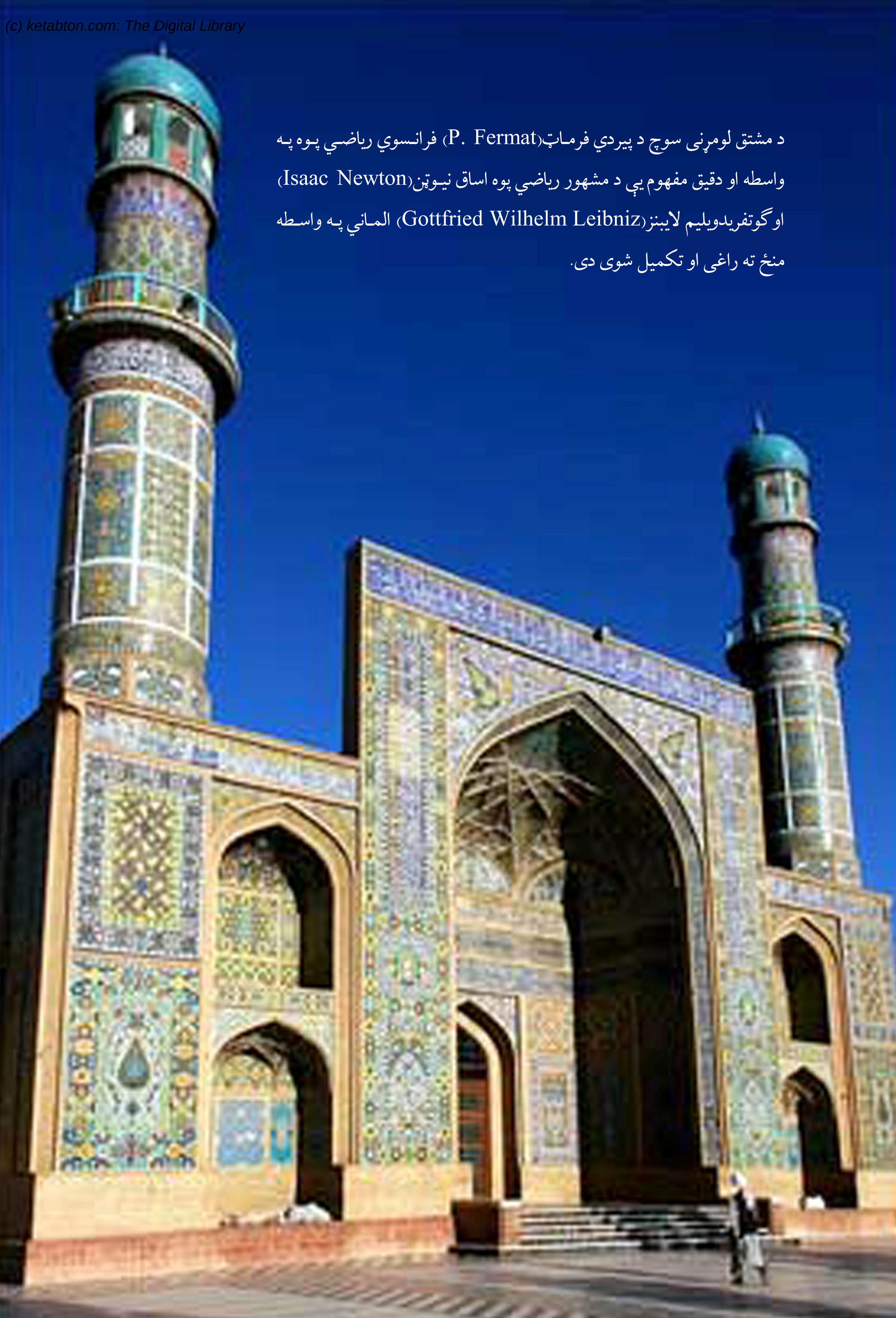
(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم څپرکی

مشتق

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مشتق لومړنی سوچ د پیردي فرماټ(P. Fermat) فرانسوي رياضي پوه په واسطه او دقيق مفهوم يې د مشهور رياضي پوه اساق نيوټن(Isaac Newton) او ګوتفريدويليم لايبنز(Gottfried Wilhelm Leibniz) الماني په واسطه منځ ته راغی او تکميل شوی دی.



(c) ketabton.com: The Digital Library

مشتقات

Derivatives

د $f(x)=x^2-1$ تابع په پام کې ونیسئ د مخامخ کسر لیمیټ پیدا کړئ.

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=?$$

د یوې منحني میل

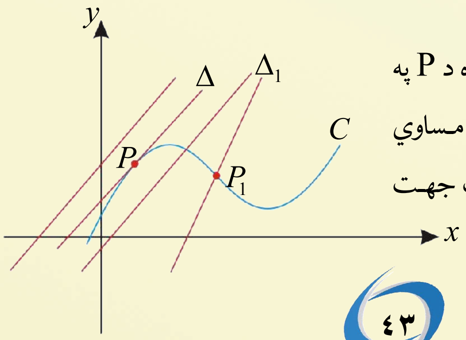
- که د یوه مستقیم خط دوه ټکي $A(x_1,y_1)$ او $B(x_2,y_2)$ معلوم وي، نو د دې مستقیم خط میل له کومې رابطې څخه په لاس راځي.
- آیا د یوه مستقیم خط میل ثابت او مساوي دي؟ که په یوه ځانګړې ټکي پورې اړه لري؟
- آیا د مستقیم خط میل د هغې زاویې سره اړه لري چې مستقیم خط یې د x د محور له مثبت لوري سره جوړوي؟
- آیا د مستقیم خط او منحني میلونه یو شان پیدا کېږي؟

له پورتنیو پوښتنو څخه څرګندېږي چې د منحني میل په اسانۍ سره نشو پیدا کولای، ځکه چې منحني خط په هر ټکي کې خپل مسیر ته بدلون ورکوي او په مختلفو ټکو کې بېلابېل میلونه لري، نو له دې کبله لومړی د یوه منحني خط میل د هغه په یوه ټکي کې تعریفوو او بیا یې د محاسبې لپاره یو فورمول په لاس راوړو.

- د وضعیه کمیاتو په مستوي کې د c منحني خط رسم او د P او P_1 دوه ټکي پرې وټاکئ.
- د P_1 په ټکي کې د Δ_1 قاطع او د p په ټکي کې د Δ مماس رسم کړئ.
- که د P_1 ټکی د C په منحني باندې داسې حرکت وکړي چې د p ټکي ته نږدې شي، په پایله کې د Δ_1 مستقیم خط له Δ مستقیم خط سره څه اړیکه پیدا کوي؟

د پورتني فعالیت پایله داسې بیانوو:

د Δ د مستقیم خط میل چې د C له منحني سره د P په نقطه کې مماس دی د هغې زاویې له (tan) سره مساوي دی چې مستقیم خط یې د x د محور له مثبت جهت سره جوړوي.

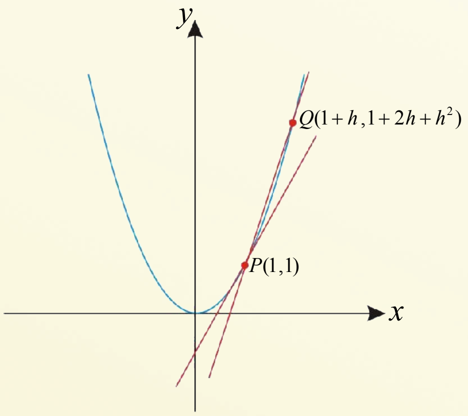


(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی مثال:د $y = f(x) = x^2$ له منحني سره د مماس میل د $P(1,1)$ په ټکي کې پیدا کړئ.

حل: څرنګه چې د منحني میل د مماس له میل سره د P په ټکي کې برابر دي، نو ددې مماس میل له هغه فورمول څخه چې دوې نقطې یې معلومې وي، نشو پیدا کولای، ځکه دلته یوازې د یوې نقطې مختصات ورکړل شوي دي. ولې کولای شو د دې مماس د میل تخمیني قیمت د هغه قاطع خط له میل څخه چې د P او Q له ټکو څخه تیرېږي، پیدا کړو، په هغه صورت کې چې د Q ټکی د P ټکي ته نژدې شي د PQ د مماس میل 2 ته تقرب کوي چې په لاندې جدول کې لیدل کېږي.

x	2	1.5	1.1	1.01	1.001
y	4	2.25	1.21	1.0201	1.002001
$m_{PQ}=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$	3	2.5	2.1	2.01	2.001



په عمومي ډول هغه لومړی مختصه چې د $P(1,1)$ ټکي ته نژدې ده په $1+h$ ښودلای شو چې h یو کوچنی مثبت یا منفي عدد دی، خو $h \neq 0$ دی نو لیکلای شو:

$$f(1+h) = (1+h)^2 = 1+2h+h^2$$

نو دا $(1+h \;,\; 1+2h+h^2)$ ټکی د منحني پر مخ راکړل شوی پروت دی، نو په پایله کې هغه مستقیم خط چې له $P(1,1)$ او $Q(1+h,1+2h+h^2)$ له ټکو څخه تیریږي، میل یې عبارت دی له:

$$m_{PQ}\frac{(1+2h+h^2)-1}{(1+h)-1} = \frac{2h+h^2}{h} = 2+h$$

که چېرې په شکل کې $h \to 0$ نو $Q \to P$ کوي، قاطع خط د $P(1,1)$ په نقطه کې مماس کېږي چې د همدې مماس میل ته د تابع مشتق وايي؛ یعنې: $\overline{PQ} = \lim_{h\to 0}(2+h) = 2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لېميټ دا عمليه موږ ته دا امکان په لاس راکوي چې د $y=x^2$ د تابع د منحني ميل په يوه اختياري ټکي $P(x,y)$ کې په لاس راوړو. که د Q د ټکي اختياري مختصات $\left[x+h,(x+h)^2\right]$ وي او د PQ ميل ته m او د P په ټکي کې د مماس ميل په m_T سره وښيو لرو چې:

$$m=\frac{(x+h)^2-x^2}{x+h-x}=\frac{x^2+2hx+h^2-x^2}{h}=\frac{2xh+h^2}{h}=2x+h$$

$$m_T=\lim_{h\to 0}(2x+h)=2x$$

نو په عمومي بڼه ليکلای شو، که چېرې $Q[x+h\ ,f(x+h)],\ P[x,f(x)]$ د نوموړي منحني دوې اختياري نقطې وي، نو لاندې خارج قسمت چې د Newton د رابطې په نامه مشهور دی، ليکلای شو:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{x+h-x}=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

په حقيقت کې دا د هغه مستقيم خط ميل دی چې د P او Q له ټکو څخه تېرېږي.

او د منحني ميل د هغې په هر اختياري ټکي کې عبارت دی له:

$$m_T=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

دويم مثال: د $f(x)=x-x^2$ د منحني سره د مماس ميل د $P(2,0)$ په ټکي کې پيدا کړئ.

حل: د Newton خارج قسمت تشکيل او د $x=2$ په ټکي کې د منحني ميل حسابوو:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=m_T=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(2+h)-(2+h)^2-2+2^2}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2+h-4-4h-h^2-2+4}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h-4h-h^2}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h(1-4-h)}{h}=\lim_{h\to 0}(-3-h)=-3$$

منځنی يا وسطي تغير

که يو جسم د يوه مستقيم خط پر مخ د حرکت په حال کې وي، طبيعي ده چې وهل شوی فاصله د زمان تابع ده يعني $S=f(t)$ د t_1 او t_2 دوو وختونو خارج قسمت $\dfrac{f(t_2)-f(t_1)}{t_2-t_1}$ د جسم د وسطي سرعت په نامه يادېږي او سرعت د t_0 په وخت کې عبارت له هغه حد يا لېميټ څخه دی چې لحظوي سرعت بلل کېږي. $\lim_{t\to t_0}\dfrac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پورتنی رابطي لېمیټ د t او t_0 په وخت کې داسې لیکو:

$$\lim_{t\to t_0}\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}=\lim_{t\to t_0}\frac{S-S_0}{t-t_0}=\frac{\Delta S}{\Delta t}$$

په پایله کې ویلای شو چې د تابع او متحول د زیاتوالي خارج قسمت ته متوسط تغییر وایي، یعنې:

$$\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{f(t_2)-f(t_1)}{t_2-t_1}$$

مثال: د $y=f(x)=x^2$ په تابع کې د f متوسط تغیرات د $[2,5]$ په انتروال کې پیدا کړئ.

حل: څرنګه چې $x_1=2$ او $x_2=5$ دی، نو د تعریف په مرسته لیکلای شو:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{f(5)-f(2)}{5-2}=\frac{5^2-2^2}{5-2}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{25-4}{5-2}=\frac{21}{3}=7$$

پوښتنې

1) د لاندې تابع ګانو د x د متحول لپاره د Δx او Δy تزاید په پام کې نیولو سره $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ او میل یې په غوښتل شوو ټکو کې پیدا کړئ.

1) $\frac{\Delta y}{\Delta x}=?$, $f(x)=2x^2-4$, (0)

2) $\frac{\Delta y}{\Delta x}=?$, $f(x)=2x-x^2$, (3)

3) $\frac{\Delta y}{\Delta x}=?$, $f(x)=3x^2-5x+4$, $(2,-1)$

2) د $f(t)=5t^3-3t+1$ د تابع متوسط تغییرات د $[2,4]$ په انتروال کې پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

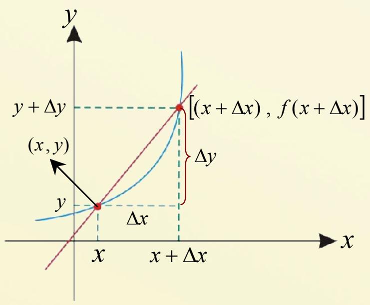
د یوې تابع مشتق

مخامخ لېمیټ څه را ښـيي آیا په بل ډول يې لیکلای شو؟

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

- که چېرې د $y = f(x)$ تابع د$[a,b]$ په انټروال کې متمادي وي، که د x متحول د Δx په اندازه زیاتوالی پیدا کړئ آیا تابع تزاید کوي په دې حالت کې، د متحول او تابع د زیاتوالي رابطه ولیکئ.
- د تابع تزاید د متحول پر تزاید $(\frac{\Delta y}{\Delta x})$ داسې ولیکئ چې په مساوات کې بدلون رانشي.
- که له دواړو خواوو څخه لېمیټ ونیول شي، په هغه صورت کې چې Δx صفر ته تقرب وکړي، د دې حد یا لېمیټ د څه په نامه یادیږي؟

د پورتني فعالیت پایله داسې بیانوو:



$$y = f(x)$$
$$y + \Delta y = f(x+\Delta x)$$
$$\Delta y = f(x+\Delta x) - y$$
$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) \quad / \quad \div \Delta x$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

تعریف: د تابع او مستقل متحول د تزاید د نسبت لېمیټ کله چې د مستقل متحول تزاید صفر ته تقرب وکړي د تابع مشتق بلل کیږي، لکه: $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ او هغه په $f'(x)$ یا y' ، $\frac{df}{dx}$ ، $\frac{dy}{dx}$ سره ښودل کیږي.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx} = y' = f'(x)$$

لومړی مثال: که $f(x) = 2x$ وي، د دې تابع مشتق پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل: د مشتق د تعریف څخه په ګټه اخیستنې سره لیکلای شو چې:

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2(x+\Delta x)-2x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2x+2\Delta x-2x}{\Delta x}$$

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\Delta x}{\Delta x}\Rightarrow f'(x)=2$$

دویم مثال: د $f(x)=x^3$ د تابع مشتق پیداکړئ.

حل:

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^3-x^3}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x^3+3x^2\Delta x+3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3-x^3}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x(3x^2+3x(\Delta x)+(\Delta x)^2)}{\Delta x}=3x^2+3x(0)+0^2\quad\Rightarrow\quad f'(x)=3x^2$$

دریم مثال: د $x\geq 0$, $f(x)=\sqrt{x}$ مشتق پیداکړئ.

حل: مخکې له حل څخه $x\geq 0$ حالت په پام کې نیسو:

الف: که $x>0$ وي، نو د مشتق د تعریف په مرسته لیکو:

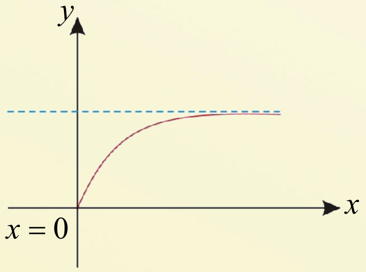
$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}$$

صورت او مخرج د صورت په مزدوج کې ضربوو:

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x})(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x+\Delta x-x}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}\quad\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

ب: که $x=0$ شي نو $\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}$ موجود نه دی، نو د $y=\sqrt{x}$ تابع د $x=0$ په ټکي کې د اشتقاق وړ نه ده لکه چې په شکل کې لیدل کېږي، یعنې که x ډېر لوی شي، نو د مماس میل صفر ته نژدې کېږي او د $x=0$ په ټکي کې $(\frac{1}{2\sqrt{x}})$ د مماس میل ډېر لوییږي چې مماس په یوه عمود خط بدلیږي.



پوښتنې

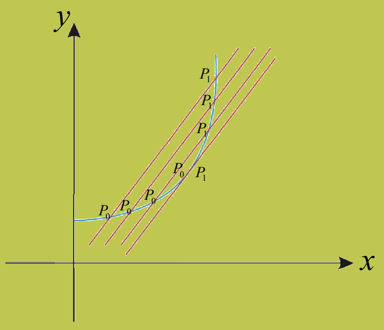
دلاندې توابعو مشتق د تعریف په مرسته پیدا کړئ.

1) $f(x)=x-x^2$ 2) $f(x)=-2x^2$ 3) $f(x)=2x^2+x$

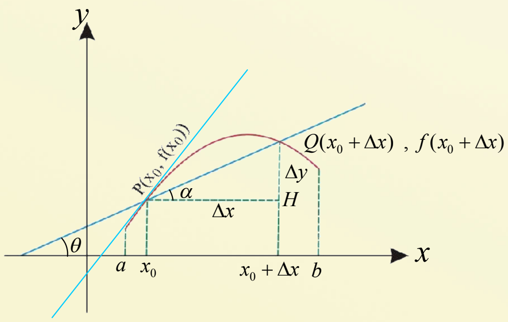
(c) ketabton.com: The Digital Library

د مشتق هندسي تعبير

په مخامخ شکل کې څه وينئ د هغه په اړه مناقشه وکړئ.



- د وضعيه کمياتو په مستوي کې د C منحني يا د $f(x)$ تابع داسې چې د $[a,b]$ په انټروال کې متمادي وي ګراف يې رسم او د $P(x_0, f(x_0))$ او $Q(x_0+\Delta x\ ,\ f(x_0+\Delta x))$ ټکي د منحني پرمخ وټاکئ.
- د Δ مستقيم خط داسې رسم کړئ چې د منحني د P او Q له ټکو څخه تېر شي.
- آيا ويلای شئ چې د Δ مستقيم خط د x د محور له مثبت جهت سره څه ډول زاويه جوړوي؟
- ووايئ چې د $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ يا $\frac{HQ}{HP}$ نسبت د څه په نامه يادېږي؟
- که د Q ټکی د P ټکي ته ډېر نژدې شي $(\Delta x \to 0)$، نو د Δ مستقيم خط په څه ډول کرښه بدلېږي په شکل کې يې وښيئ.
- د $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ لېميټ کله چې $\Delta x \to 0$ وکړي، په $P(x_0, f(x_0))$ ټکي کې وڅېړئ.



د پورتني فعاليت پايله داسې بيانوو:

د $f(x)$ منحني د تابع مشتق، د $P(x_0, f(x_0))$ په ټکي کې د مماس له ميل سره برابر دی، يعني:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y' = \tan\alpha = \tan\theta = m_{\Delta}$$

تعريف: د مماس ميل د منحني د تماس په ټکي کې د تابع له مشتق څخه په هغه ټکي کې عبارت دی، يا په بل عبارت د هغې زاويې له ټانجنټ څخه عبارت دی چې د Δ مستقيم خط يې د x د محور له مثبت جهت سره جوړوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی مثال: د هغه مماس میل او معادله چې د $f(x)=2x^3-1$ په منحني د $A(1,1)$ په ټکي کې رسمېږي پیدا کړئ.

حل: پوهېږو چې $m=\tan\alpha=f'(x)$ دی، نو لیکلای شو چې:

$$f(x)=2x^3-1$$

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2(x+\Delta x)^3-1-(2x^3-1)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2[x^3+3x^2\Delta x+3x\Delta x^2+(\Delta x)^3]}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2x^3+6x^2\Delta x+6x(\Delta x)^2+2(\Delta x)^3-1-2x^3+1}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x[6x^2+6x\Delta x+2(\Delta x)^2]}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}[6x^2+6x(\Delta x)+(\Delta x)^2]=6x^2$$

بناءً د مماس د میل قیمت د $A(1,1)$ په ټکي کې مساوي دی په: $m=f'(x)=f'(1)=6x^2=6\cdot 1^2=6$

نو د مماس معادله په لاندي ډول ده:

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

$$y-1=6(x-1)\Rightarrow\quad y=6x-5$$

دویم مثال: د $y=x^2+1$ تابع د مماس د میل قیمت په $x_0=2$ ټکي کې په لاس راوړئ.

حل:

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x_0+\Delta x)^2+1-(x_0^2+1)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x_0^2+2(\Delta x)x_0+(\Delta x)^2+1-x_0^2-1}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}(2x_0+(\Delta x))=2x_0$$

$$m=y'=2x_0=2\cdot 2$$

$$y'=m=4$$

دریم مثال: د $y=f(x)=x^2$ تابع ورکړل شوې ده، غواړو د $x=x_0$ په ټکي او په ځانګړي توګه د $x_0=2$ په ټکي کې د تابع مشتق پیدا کړئ:

$$x=x_0$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{(x_0+\Delta x)^2-x_0^2}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{x_0^2+2x_0\Delta x+(\Delta x)^2-x_0^2}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{2x_0\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta x(2x_0+\Delta x)}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=2x_0+\Delta x$$

اوس د لیمیټ د لاس ته راوړلو له لارې لیکلای شو: $f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(2x_0+\Delta x)=2x_0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

خرنګه چې $x_0 = 2$ دی، نو $f'(2) = 2\cdot 2 = 4$ یعني د $x_0 = 2$ په ټکي کې د $y = f(x) = x^2$ د تابع لومړی مشتق له 4 سره برابر دی. دا په دې معنا چې د مستقیم خط میل د $x_0 = 2$ په ټکي کې 4 دی.

څلورم مثال: د $f(x) = x^3$ تابع مشتق پیدا کړئ.

حل:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x_0+\Delta x)^3 - {x_0}^3}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{{x_0}^3 + 3x_0^2\Delta x + 3x_0(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - {x_0}^3}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3x_0^2\Delta x + 3x_0(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta x(3x_0^2 + 3x_0\Delta x + (\Delta x^2))}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x_0^2 + 3x_0\Delta x + (\Delta x^2)$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}(3x_0^2 + 3x_0\Delta x + (\Delta x)^2) = 3x_0^2$$

نو $f(x)$ د تابع مشتق د x_0 په ټکي کې برابر دی له: $f'(x_0) = 3x_0^2$

پنځم مثال: د x_0 په ټکي کې د $f(x) = \frac{1}{x}$ تابع مشتق پیداکړئ.

حل:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$f(x_0) = \frac{1}{x_0}$$

$$f(x_0) + \Delta y = \frac{1}{x_0 + \Delta x}$$

$$\Delta y = \frac{1}{x_0+\Delta x} - f(x_0)$$

$$\Delta y = \frac{1}{x_0+\Delta x} - \frac{1}{x_0}$$

$$\Delta y = \frac{x_0 - (x_0+\Delta x)}{x_0(x_0+\Delta x)}$$

د مساوات دواړه خواوې په Δx ویشو:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{x_0 - x_0 - \Delta x}{x_0(x_0+\Delta x)}}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{-\Delta x}{x_0(x_0+\Delta x)}}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-\Delta x}{\Delta x\cdot x_0(x_0+\Delta x)} \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-1}{x_0(x_0+\Delta x)}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{-1}{x_0(x_0+\Delta x)}$$

$$f'(x_0) = \frac{-1}{x_0(x_0+0)} = \frac{-1}{x_0^2}$$

نو $f'(x_0) = -\frac{1}{x_0^2}$ د x_0 په ټکي کې د $f(x)$ تابع مشتق دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

1. په لاندې پوښتنو کې د تابع گانو مشتق پیدا کړئ.

1) $f(x) = 5x^2 - 2$ 2) $f(x) = \dfrac{2}{x}$

2. په ورکړل شویو ټکو کې د لاندې تابع گانو مشتق پیدا کړئ.

1) $f(x) = 4x^2 \quad , \quad x_0 = \dfrac{1}{2}$ 2) $f(x) = 3x - 1 \quad , \quad x_0 = -1$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مشتق قوانين

آيا کولای شئ چې د مخامخ تابع مشتق پرته د تزايد له لارې په بله طريقه پيدا کړئ؟

$$f(x) = 2x^2$$

1- د يوه ثابت عدد مشتق:

د $y = C$ تابع (C ثابت عدد) په پام کې ونيسئ.

- تابع ته د Δx په اندازه تزايد ورکړئ، د تابع د تزايد په اړه څه فکر کوئ؟
- د تابع او متحول د تزايد نسبت تشکيل کړئ.
- د پورته مساواتو له دواړو خواوو لېميټ ونيسئ په هغه صورت کې چې $\Delta x \to 0$ وکړي.

د پورتني فعاليت پايله داسې بيانوو:

د هرې ثابتې $f(x) = C$ تابع مشتق له صفر سره مساوي دی، ځکه چې د هرې ثابتې تابع ګراف يوه افقي کرښه ده چې ميل يې صفر دی.

ثبوت:

$$y = C \qquad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{C - C}{\Delta x}$$

$$y + \Delta y = C \qquad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta x}$$

$$\Delta y = C - y \qquad y' = 0$$

$$\Delta y = C - C$$

مثال: د $f(x) = \pi^4$ او $y = 100$ تابع ګانو مشتق پيدا کړئ.

حل: څرنګه چې π^4 او 100 ثابت عددونه دي، نو:

$$f(x) = C \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 0$$

$$f(x) = \pi^4 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 0$$

$$f(x) = 100 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

2- د يوې طاقت لرونکي تابع مشتق:

فعاليت

د $y = x^n$ تابع چې $n \in IR$ او $n \geq 1$ وي، په پام کې ونيسئ.

- متحول ته د Δx په اندازه تزايد ورکړئ، آيا تابع هم تزايد کوي که تزايد کوي په کومه اندازه، اړيکه يې وليکئ؟
- له پورته اړيکې څخه د Δy قيمت پيدا کړئ، د متحول او تابع د تزايد نسبت تشکيل کړئ.
- د پورته مساوات له اطرافو څخه په هغه صورت کې ليميټ ونيسئ چې $\Delta x \to 0$ وکړي.

د پورته فعاليت پايله داسې ثبوتوو:

که چېرې $f(x) = x^n$ راکړل شوی وي، نو $f'(x) = nx^{n-1}$ سره کېږي.

ثبوت:

$$y = x^n$$
$$y + \Delta y = (x+\Delta x)^n \quad \Rightarrow \quad \Delta y = (x+\Delta x)^n - y$$
$$\Delta y = (x+\Delta x)^n - x^n$$
$$\Delta y = (x+\Delta x - x)[(x+\Delta x)^{n-1} + (x+\Delta x)^{n-2}x + (x+\Delta x)^{n-3}x^2 + \ldots + x^{n-1}]$$
$$\Delta y = \Delta x[(x+\Delta x)^{n-1} + (x+\Delta x)^{n-2}x + (x+\Delta x)^{n-3}x^2 + \ldots + x^{n-1}]$$
$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta x[(x+\Delta x)^{n-1} + (x+\Delta x)^{n-2}x + (x+\Delta x)^{n-3}x^2 + \ldots + x^{n-1}]}{\Delta x}$$
$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\left[(x+\Delta x)^{n-1} + (x+\Delta x)^{n-2}x + (x+\Delta x)^{n-3}x^2 + \ldots + x^{n-1}\right]$$
$$y' = \underbrace{x^{n-1} + x^{n-1} + x^{n-1} + \ldots + x^{n-1}}_{x^{n-1} \text{ ځلې } n}$$
$$y' = nx^{n-1}$$

لومړی مثال: د $f(x) = x^5$ تابع مشتق د $x = \dfrac{1}{2}$ په ټکي کې وټاکئ.

حل:

$$f(x) = x^5 \Rightarrow f'(x) = 5x^{5-1} \Rightarrow f'(x) = 5x^4$$
$$f(\frac{1}{2}) = 5\cdot(\frac{1}{2})^4 = 5\cdot\frac{1}{16} = \frac{5}{16}$$

پوښتنې

د لاندې تابع گانو مشتق پيدا کړئ.

1) $f(x) = x^{-2}$ 2) $x(t) = gt^2$ 3) $t(x) = x^8$

4) $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ 5) $f(x) = 10^{10}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

3- د حاصل جمع مشتق:

د u او v مشتق منوونكي تابع ګاني په پام كې ونيسئ.

- آيا د $y = u + v$ تابع د مشتق وړ ده؟
- د $y = u + v$ په تابع كې $u(x)$ ته د Δu په اندازه او $v(x)$ ته د Δv په اندازه تزايد وركړئ، د y د تزايد په اړه څه فكر كوئ؟ د هغې اندازه وليكئ.
- لومړى د تابع تزايد پيدا او بيا د رابطې دواړه خواوې په Δx وويشئ او وروسته يې ليميټ په هغه صورت كې پيدا كړئ چې $\Delta x \to 0$ وكړي.

د پورته فعاليت پايله داسې ثبوتوو:

ثبوت:

د يو حاصل جمع مشتق د حدونو د مشتقاتو د جمعې له حاصل سره مساوي ده:

$$y = u + v$$
$$y + \Delta y = u + \Delta u + v + \Delta v$$
$$\Delta y = u + \Delta u + v + \Delta v - y$$
$$\Delta y = u + \Delta u + v + \Delta v - u - v$$
$$\Delta y = \Delta u + \Delta v$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u + \Delta v}{\Delta x}$$
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

څرنګه چې $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = u'$ او $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = v'$ دى، نو : $y' = u' + v'$

4- د حاصل تفريق مشتق

كه $y = u - v$ وي، نو $y' = u' - v'$ دى.

ثبوت يې د زده‌كوونكو كورنى دنده ده.

لومړى مثال: د $y = 2x + 1$ تابع مشتق پيدا كړئ.

حل: ليدل كېږي چې $u = 2x$ او $v = 1$ دى، نو:

$$u' = 1 \cdot 2x^{1-1} = 2x^0$$
$$u' = 2$$
$$v' = 0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بناءً: $y'=u'+v' \Rightarrow y'=(2x)'+(1)' \Rightarrow y'=2+0 \Rightarrow y'=2$

دویم مثال: د $f(x)=4x^2-3x+5$ د تابع مشتق پیدا کړئ.

حل: په دې تابع کې $u=4x^2$, $v=3x$ او $w=5$ دی چې $u'=8x$, $v'=3$ او $w'=0$ کېږي، نو:

$$y'=u'+v'+w'$$
$$y'=(4x^2)'-(3x)'+(5)'$$
$$y'=8x-3$$

دریم مثال: د لاندې تابع ګانو مشتقونه پیدا کړئ:

حل:

1) $y=12x-7$
$y'=(12x)'-(7)'$
$y'=12$

2) $f(x)=9x^2-12x+4$
$f'(x)=(9x^2)'-(12x)'+(4)'$
$f'(x)=18x-12$

3) $f(x)=6x^3-2x^2+6x-1$
$f'(x)=(6x^3)'-(2x^2)'+(6x)'-(1)'$
$f'(x)=18x^2-4x+6$

5- د حاصل ضرب مشتق:

که د u او v توابع مشتق منونکي وي، نو $u \cdot v$ هم مشتق منونکي ده، د $y=u \cdot v$ تابع په پام کې ونیسئ.

- **په پورتنی تابع کې u ته د Δu په اندازه، v ته د Δv په اندازه تزاید ورکړئ او د تابع تزاید پیدا کړئ.**
- د Δy د تزاید له پیدا کولو وروسته د مساوات اطراف په Δx وویشئ.
- د پورتنی رابطې له دواړو خواوو څخه په هغه صورت کې لیمیټ ونیسئ چې $\Delta x \to 0$ وکړي.

له پورتني فعالیت پایله داسې ثبوتوو:

ثبوت:

$$y=u\cdot v$$
$$y+\Delta y=(u+\Delta u)(v+\Delta v) \quad \Rightarrow \quad \Delta y=(u+\Delta u)(v+\Delta v)-y$$
$$\Delta y=u\cdot v+u\cdot\Delta v+v\cdot\Delta u+\Delta u\cdot\Delta v-u\cdot v$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{u\cdot\Delta v+v\cdot\Delta u+\Delta u\cdot\Delta v}{\Delta x}=v\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}+u\frac{\Delta v}{\Delta x}+\Delta u\cdot\frac{\Delta v}{\Delta x}$$
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=v\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}+u\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\Delta u\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}$$
$$y'=v\cdot u'+u\cdot v'+0\cdot v'$$
$$y'=u'v+v'u$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی مثال: د $y = x^3(x^2 - 3)$ د تابع مشتق پیدا کړئ؟

حل: پوهېږو چې $y = u \cdot v$ شکل لري چې په دې صورت کې $y' = uv' + vu'$ دی.

$$\left.\begin{array}{l} u = x^3 \;\Rightarrow\; u' = 3x^2 \\ v = x^2 - 3 \;\Rightarrow\; v' = 2x \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} y' = u'v + v'u \\ y = x^3(x^2-3) \\ y' = 3x^2(x^2-3) + 2x(x^3) \\ y' = 3x^4 - 9x^2 + 2x^4 = 5x^4 - 9x^2 \end{array}$$

دویم مثال: د $y = (5x - 1)^2$ د تابع مشتق پیدا کړئ.

حل: د y تابع کولای شو د فکتورونو د ضرب په شکل داسې ولیکو:

$$y = (5x-1)^2 = (5x-1)(5x-1)$$

$$\left.\begin{array}{l} u = 5x - 1 \;\Rightarrow\; u' = 5 \\ v = 5x - 1 \;\Rightarrow\; v' = 5 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} y' = u'v + v'u \\ y' = 5(5x-1) + 5(5x-1) \\ y' = 25x - 5 + 25x - 5 = 50x - 10 \end{array}$$

6- د حاصل تقسیم مشتق:

که د u او v تابع ګانې مشتق منونکې وي، نو $\frac{u}{v}$ کله چې $v \neq 0$ وي، هم مشتق منوونکې ده، اوس د $y = \frac{u}{v}$ تابع په پام کې ونیسئ.

- u او v ته په ترتیب سره د Δu او Δv په اندازه تزاید ورکړئ او د y تابع تزاید پیدا کړئ.
- د مساوات دواړه خواوې په Δx وویشئ.
- د پورتنې رابطې له اطراف څخه په هغه صورت کې چې $\Delta x \to 0$ وکړي، لیمیټ ونیسې.

د پورتنې فعالیت پایله داسې ثبوتوو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

ثبوت:

$$y=\frac{u}{v}\quad\Rightarrow\quad y+\Delta y=\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v}\quad\Rightarrow\quad \Delta y=\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v}-y$$

$$\Delta y=\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v}-\frac{u}{v}=\frac{uv+v\cdot\Delta u-uv-u\cdot\Delta v}{v(v+\Delta v)}$$

$$\Delta y=\frac{v\cdot\Delta u-u\cdot\Delta v}{v(v+\Delta v)}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\frac{v\cdot\Delta u-u\cdot\Delta v}{v(v+\Delta v)}}{\Delta x}=\frac{v\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}-u\cdot\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v+\Delta v)}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{v\frac{\Delta u}{\Delta x}-u\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v+\Delta v)}\right)=\frac{v\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}-u\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v\cdot\lim\limits_{\Delta v\to 0}(v+\Delta v)}$$

$$y'=\frac{u'v-v'u}{v^2}$$

لومړی مثال: د $y=\dfrac{2+3x}{1-2x}$ تابع مشتق پیدا کړئ.

حل: لیدل کیږي چې تابع د $\dfrac{u}{v}$ بڼه لري چې مشتق یې عبارت دی له:

$$\left.\begin{array}{l} u=2+3x\ \Rightarrow u'=3\\ v=1-2x\ \Rightarrow v'=-2\end{array}\right\}\Rightarrow\ \begin{array}{l} y=\frac{u}{v}\qquad\Rightarrow y'=\frac{u'v-v'u}{v^2}\\ y'=\frac{3(1-2x)-[-2(2+3x)]}{(1-2x)^2}\\ \quad=\frac{3-6x+4+6x}{(1-2x)^2}=\frac{7}{(1-2x)^2}\end{array}$$

یادونه: که چیرې وغواړو چې د یوې تابع مشتق په یوه ټاکلې نقطه لکه x_0 کې پیدا کړو د تابع په مشتق کې ټاکلی قیمت وضع کوو چې په پایله کې د تابع مشتق په هغه نقطه کې لاس راځی، لکه:

دویم مثال: د $f(y)=\dfrac{2y^2-3}{1-3y}$ د تابع مشتق د $y=0$ په ټکي کې پیدا کړئ:

حل: د تابع د حاصل تقسیم له مشتق څخه لرو:

$$\left.\begin{array}{l} u=2y^2-3\ \Rightarrow u'=4y\\ v=1-3y\ \Rightarrow v'=-3\end{array}\right\}\quad \begin{array}{l} f'(y)=\frac{4y(1-3y)-[-3(2y^2-3)]}{(1-3y)^2}=\frac{4y-12y^2+6y^2-9}{(1-3y)^2}\\ f'(y)=\frac{-6y^2+4y-9}{(1-3y)^2}\\ f'(0)=\frac{-6(0)^2+4(0)-9}{(1-0)^2}\\ f'(0)=-9\end{array}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دريم مثال: د $f(t)=\dfrac{-3}{2t-1}$ د تابع مشتق پيدا کړئ.

حل: پوهېږو چې تابع د $\dfrac{u}{v}$ بڼه لري، نو د $y=\dfrac{u}{v}$ له فورمول څخه په ګټه اخيستنې سره داسې عمل کوو:

$$\left.\begin{array}{ll} y=\dfrac{u}{v} & \Rightarrow\ y'=\dfrac{u'v-v'u}{v^2} \\ u=-3 & \Rightarrow\ u'=0 \\ v=2t-1 & \Rightarrow\ v'=2 \end{array}\right\} \Rightarrow\ f'(t)=\frac{0\cdot(2t-1)-2(-3)}{(2t-1)^2}=\frac{6}{(2t-1)^2}$$

پوښتنې

د لاندې توابعو مشتق پيدا کړئ:

1) $f(x)=\dfrac{3}{5}x(x-2)$

2) $g(x)=(2x-3)(x-3)$

3) $f(x)=(2x-1)^2$

4) $f(t)=\dfrac{t^2}{1-2t}$

5) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-2}$

6) $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$

7) $f(x)=3x^5-5x^2$

8) $f(x)=7x+3$

(c) ketabton.com: The Digital Library

7- د يوې جذرالمربع تابع مشتق:

د $y=\sqrt{x}$ تابع په پام کې ونيسي.

- د $y=\sqrt{x}$ تابع متحول ته د Δx په اندازه تزايد ورکړئ د تابع تزايد پيدا کړئ.
- د لاس ته راغلي رابطې له دواړو خواوو څخه لېميټ په هغه صورت کې ونيسي چې $\Delta x \to 0$ وکړي.

د پورتني فعاليت پايله داسې ثبوتوو:

ثبوت:

$$y=\sqrt{x} \Rightarrow y+\Delta y=\sqrt{x+\Delta x}$$

$$\Delta y=\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}$$

د مساوات د ښي اړخ صورت او مخرج د صورت په مزدوج کې ضربوو:

$$\Delta y=\frac{(\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x})(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}=\frac{x+\Delta x-x}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}=\frac{\Delta x}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}} \Rightarrow \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\boxed{y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}}$$

لومړی مثال: د $f(x)=\sqrt{x}(x^2-1)$ د تابع مشتق پيدا کړئ.

حل: ليدل کېږي چې تابع د $u\cdot v$ بڼه لري، نو:

$$\left.\begin{aligned} u=\sqrt{x} &\Rightarrow u'=\frac{1}{2\sqrt{x}} \\ v=x^2-1 &\Rightarrow v'=2x \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \begin{aligned} f'(x)&=\frac{1}{2\sqrt{x}}(x^2-1)+2x\cdot\sqrt{x} \\ f'(x)&=\frac{x^2-1}{2\sqrt{x}}+2x\sqrt{x}=\frac{x^2-1+4x(\sqrt{x})^2}{2\sqrt{x}} \\ &=\frac{x^2-1+4x^2}{2\sqrt{x}}=\frac{5x^2-1}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

8- د $\sqrt{u}$ تابع مشتق

- که چېرې y د u او u د x تابع او مشتق منوونکي وي د y اړیکه u ته او u، x ته څه فکر کوئ.
- د u متحول ته د Δu په اندازه تزاید ورکړئ د Δy د تزاید په اړه څه فکر کوئ.
- د مساواتو له دواړه خواوو څخه لیمیټ ونیسئ چې $\Delta x \to 0$ وکړي.

$$y + \Delta y = \sqrt{u + \Delta u}$$

$$\Delta y = \sqrt{u + \Delta u} - \sqrt{u}$$

د مساوات د ښي اړخ صورت او مخرج د صورت په مزدوج کې ضربوو:

$$\Delta y = \frac{(\sqrt{u+\Delta u} - \sqrt{u})(\sqrt{u+\Delta u} + \sqrt{u})}{\sqrt{u+\Delta u} + \sqrt{u}}$$

$$\Delta y = \frac{u + \Delta u - u}{\sqrt{u+\Delta u} + \sqrt{u}}$$

د مساوات دواړه خواوې په Δx وېشو او بیا د مساوات له دواړو خواوو څخه لیمیټ نیسو چې $\Delta x \to 0$ وکړي.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\sqrt{u+\Delta u} + \sqrt{u}}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\sqrt{u+\Delta u} + \sqrt{u}} \cdot \frac{1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0 \Rightarrow \Delta u \to 0} \frac{\frac{\Delta u}{\Delta x}}{\sqrt{u+\Delta u} + \sqrt{u}}$$

$$y' = \frac{u'}{\sqrt{u} + \sqrt{u}} = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

دویم مثال: د $h(x) = (x^2 + x)\sqrt{x}$ د تابع مشتق پیدا کړئ.

حل: د $y = u \cdot v$ او $y = \sqrt{x}$ د فورمولونو له مشتق څخه په ګټه اخیستنې سره لرو:

$$\left.\begin{aligned} u = x^2 + x \quad &\Rightarrow u' = 2x + 1 \\ v = \sqrt{x} \quad &\Rightarrow v' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} h'(x) &= (2x+1)\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}(x^2 + x) \\ h'(x) &= 2x\sqrt{x} + \sqrt{x} + \frac{x^2 + x}{2\sqrt{x}} \\ h'(x) &= \frac{4x^2 + 2x + x^2 + x}{2\sqrt{x}} = \frac{5x^2 + 3x}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دريم مثال: د $f(x)=(\sqrt[3]{x}-1)(x+3)$ تابع د مشتق قيمت په $x=8$ ټکي کې په لاس راوړئ.

حل: د $y=u\cdot v$ او $y=\sqrt[n]{u}$ تابع له مشتق څخه په ګټه اخيستنې سره ليکلای شو:

$$\left.\begin{array}{l} u=\sqrt[3]{x}-1\Rightarrow u'=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \\ v=x+3\Rightarrow v'=1 \end{array}\right\}\Rightarrow \begin{array}{l} f'(x)=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}(x+3)+1(\sqrt[3]{x}-1) \\ f'(x)=\dfrac{x+3}{3\sqrt[3]{x^2}}+(\sqrt[3]{x}-1) \end{array}$$

اوس د تابع مشتق د $x=8$ په نقطه کې پيدا کوو:

$$f'(8)=\frac{8+3}{3\sqrt[3]{8^2}}+\sqrt[3]{8}-1=\frac{11}{12}+1=\frac{23}{12}$$

پوښتنې

1- د لاندې توابعو مشتقونه پيدا کړئ.

$$f(x)=\frac{1}{x+1}\quad,\quad y=3x^{-3}\quad,\quad f(x)=x^2+3$$

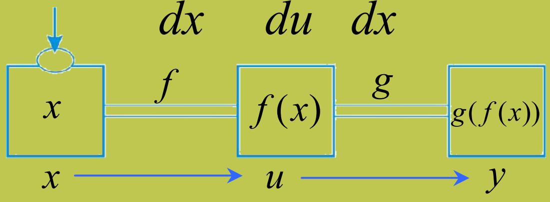
2- که $f(x)=x^2-3x$ او $g(x)=\sqrt{x}-1$ وي، د دې تابع ګانو د جمعې، ضرب او تقسيم مشتقونه پيدا کړئ. $[(f+g)',(f\cdot g)',(f\div g)'\quad g\neq 0]$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مرکبو تابع ګانو مشتق(زنځيري قاعده) Chain Rule

د مخامخ اړيکې او شکل په اړه خپل نظر بيان کړئ.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$



که چېرې y د u او u د x تابع وي او د اشتقاق وړ وي.

- وواياست چې y د u او u له x سره څه اړيکه لري؟
- آيا د $\Delta y=\Delta y\cdot\frac{\Delta u}{\Delta u}$ مساوات حقيقت لري؟
- د پورتني مساوات دواړې خواوې په Δx وويشئ.
- که د ښي اړخ د کسرونو د مخرجونو ځايونه بدل شي، په پورتني رابطه کې بدلون راځي؟
- د پورتني مساوات له اطراف څخه په هغه صورت کې ليميټ ونيسي چې $\Delta x\to 0$ وکړي.

د پورتني فعاليت پايله داسې ثبوتوو:

د تابع، تابع مشتق ثبوت او پايله يې په لاندې ډول ده.

ثبوت:

$$\Delta y=\Delta y\cdot\frac{\Delta u}{\Delta u}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta u}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

خرنګه چې $\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}=y'_{(u)}$ او $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=u'_{(x)}$ دی، نو: $y'_{(x)}=y'_{(u)}\cdot u'_{(x)}$

د دې زنځيري قاعدې پر بنسټ لاندې پايلې ليکلای شو:

1- که $y=u^n$ وي؛ نو $y'=nu^{n-1}\cdot u'$ کېږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

2- که $y=\sqrt[n]{u}$ وي، نو $y'=\frac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$ کېږي.

مثال: د لاندې تابع گانو مشتق پيدا کړئ.

1) $y=(2x^2-1)^3$ 2) $y=\sqrt{1-x^2}$ 3) $y=(x^2-3)^2\cdot 2x^3$

4) $y=\sqrt[3]{x^2-2x^3}$ 5) $y=(x^2-2)^{-3}$

حل: د زنځيري قاعدې په مرسته ليکلای شو چې:

1) $y=\underbrace{(2x^2-1)}_{u}{}^3$

$u=2x^2-1 \Rightarrow u'_x=4x$

$y=u^3 \Rightarrow y'_u=3u^2$

$$\Rightarrow y'_{(x)}=y'_{(u)}\cdot u'_{(x)}$$

$$y'=3(2x^2-1)^2\cdot 4x=3(4x^4-4x^2+1)\cdot 4x$$

$$=(12x^4-12x^2+3)\cdot 4x=48x^5-48x^3+12x$$

$$=12x(4x^4-4x^2+1) \quad =12x(2x^2-1)^2$$

2) $y=\sqrt{1-x^2}$

$u=1-x^2 \Rightarrow u'_{(x)}=-2x$

$y=\sqrt{u} \Rightarrow y'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$

$$\Rightarrow y'=\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

ليدل کېږي چې تابع د ضرب د حاصل بڼه لري، نو: $y=u\cdot v \Rightarrow y'=u'v+v'u$

3) $y=(x^2-3)^2\cdot 2x^3$

$u=(x^2-3)^2$

$u'_{(x)}=2(x^2-3)(2x)$

$v=2x^3 \Rightarrow v'_{(x)}=6x^2$

$$y'=\left[(x^2-3)^2\right]'\cdot 2x^3+\left[2x^3\right]'(x^2-3)^2$$

$$y'=\left[2(x^2-3)\cdot 2x\right]2x^3+6x^2(x^2-3)^2$$

$$=8x^4(x^2-3)+6x^2(x^2-3)^2$$

$$=8x^6-24x^4+6x^2(x^4-6x^2+9)$$

$$=8x^6-24x^4+6x^6-36x^4+54x^2$$

$$=14x^6-60x^4+54x^2$$

4) $y=\sqrt[3]{x^2-2x^3}$

$u=x^2-2x^3$

$u'_{(x)}=2x-6x^2$

$$y=\sqrt[n]{u} \Rightarrow y'=\frac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$$

$$y'=\frac{2x-6x^2}{3\sqrt[3]{(x^2-2x^3)^2}}$$

5) $y=(x^2-2)^{-3}$

$u=x^2-2$

$u'_{(x)}=2x$

$$y=u^n \Rightarrow y'=nu^{n-1}\cdot u'$$

$$y'=-3(x^2-2)^{-4}\cdot 2x=\frac{-6x}{(x^2-2)^4}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

يادونه:

I. که چېرې د f تابع د (x_0) په ټکي کې مشتق ولري، نو $f'(x_0)$ د هغه مماس ميل دی چې د $((x_0)\ ,\ f(x_0))$ په نقطه کې له منحني يا د تابع له ګراف سره رسمېږي.

مثال: د $f(x)=x^3$ د تابع ميل د $x_0=1$ په ټکي کې پيدا کړئ.

حل: څرنګه چې $x_0=1$ دی، نو: $f(x_0)=1$ سره کېږي او $P(1,1)$ چې د تماس ټکی دی، ميل يې عبارت دی، له:

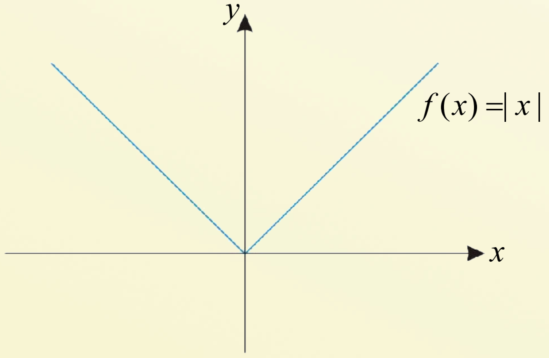
$$f'(x)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x^2+x+1)=3\quad\Rightarrow\quad f'(1)=3$$

II. که د f تابع د $x=x_0$ په ټکي کې د مشتق وړ وي، نو دا تابع د x_0 په ټکي کې متمادي ده، خو برعکس يې سم نه ده، يعنې کېدای شي، يوه تابع په يوه ټکي کې متمادي وي، ولې په هغه ټکي کې د مشتق وړ نه وي.

مثال: د $f(x)=|x|$ د تابع مشتق د په $x=0$ ټکي کې پيدا کړئ.

حل: پوهېږو چې مشتق په حقيقت کې د نيوټن د نسبت د لېميټ محاسبه ده چې د ښي او کيڼ اړخ لېميټونه يې په صفر کې سره وڅېړل شي.

$$f'(0^+)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x}=1$$
$$f'(0^-)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x}{x}=-1$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

ليدل کېږي چې $f'(0^-) \neq f'(0^+)$ دی، نو تابع په $x = 0$ کې د مشتق وړ نه ده، ولې تابع د صفر په ټکي کې متمادي ده.

پوښتنې

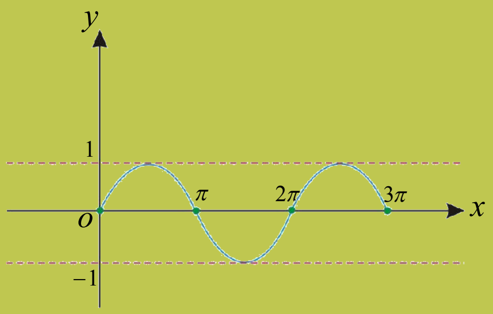
د لاندې توابعو مشتق پیدا کړئ.

1) $y = (x^2 + 2)^2$
2) $f(x) = (x^3 - 4x^2 + 1)^{-4}$
3) $y = (1 - 2x^3)^4$
4) $h(z) = \sqrt{\dfrac{1-z}{1+z}}$
5) $f(t) = \sqrt[3]{3t + 1}$
6) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2 + x^2 + x^3}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مثلثاتي تابع ګانو مشتق

مخامخ ګراف څه ډول تابع را ښيي؟



- مثلثاتي دايره او راديان تعريف کړئ.
- آيا د $-1 \leq \sin x \leq 1$ اړيکه حقيقت لري او که نه؟
- د $y = \sin x$ تابع په پام کې ونيسئ متحول ته د Δx په اندازه بدلون ورکړئ او د تابع بدلون په پام کې ونيسئ.
- د $\sin(x + \Delta x) - \sin x$ مثلثاتي رابطې ته انکشاف ورکړئ؟
- د پورتنۍ رابطې له انکشاف څخه وروسته د $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ نسبت جوړ او د مساوات له دواړو خواوو څخه په هغه صورت کې لېميټ ونيسئ چې $\Delta x \to 0$ وکړي.

له پورته فعاليت څخه پايله داسې ثبوتوو:

1- د $y = \sin x$ تابع مشتق:

ثبوت:

$$y = \sin x$$
$$y + \Delta y = \sin(x + \Delta x)$$
$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x$$
$$\Delta y = 2\cos\frac{x + \Delta x + x}{2} \cdot \sin\frac{x + \Delta x - x}{2} = 2\cos\frac{2x + \Delta x}{2} \cdot \sin\frac{\Delta x}{2}$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \cdot 2\cos(x + \frac{\Delta x}{2}) \cdot \sin\frac{\Delta x}{2} = 2\cos(x + \frac{\Delta x}{2}) \cdot \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}$$
$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\cos(x + \frac{\Delta x}{2}) \cdot \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \Rightarrow y'(x) = \cos x \cdot 1$$
$$y' = \cos x$$
$$\boxed{y = \sin x \Rightarrow y' = \cos x}$$

که چېرې $f(x) = \sin u$ وي په داسې حال کې چې u د x تابع وي، نو ليکلای شو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(u)=\sin u \Rightarrow y'=u'\cos u$$

لومړی مثال: د $f(x)=\sin 4x$ تابع مشتق پیدا کړئ.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=\sin 4x \\ u=4x \Rightarrow u'=4 \\ f(x)=\sin u \Rightarrow y'_u=\cos u \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} f(x)=\sin u \quad \Rightarrow f'(x)=u'\cos u \\ f(x)=\sin 4x \Rightarrow f'(x)=4\cos 4x \end{array}$$

دویم مثال: د $f(x)=x^3\cdot\csc x$ تابع مشتق پیدا کړئ.

حل:

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=x^3\cdot\csc x=x^3\cdot\dfrac{1}{\sin x} \\ u=x^3 \Rightarrow u'=3x^2 \\ v=\dfrac{1}{\sin x} \Rightarrow v'=\dfrac{-uv'}{v^2}=\dfrac{-\cos x}{\sin^2 x} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} f(x)=x^3\cdot\csc x \\ f'(x)=3x^2\cdot\csc x+\dfrac{-\cos x}{\sin^2 x}\cdot x^3 \\ \qquad =3x^2\csc x-x^3\cot x\cdot\csc x\cdot x \\ \qquad =3x^2\csc x-x^3\cot x\cdot\csc x \end{array}$$

پوښتني

د لاندې توابعو مشتق په لاس راوړئ:

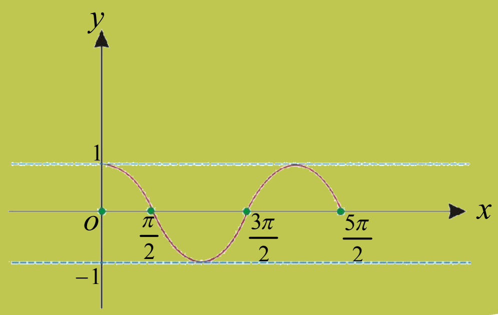
$a)\ y=\sin 5x$ $\qquad b)\ y=\dfrac{\sin x}{1+x}$

$c)\ y=\sqrt{1+\sin x}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $y=\cos x$ تابع مشتق

مخامخ گراف څه ډول تابع را ښیي؟



- د $y=f(x)=\cos x$ په تابع کې متحول ته د Δx او تابع ته د Δy په اندازه تزاید ورکړئ.
- د $\cos(x+\Delta x)-\cos x$ مثلثاتي رابطې ته انکشاف ورکړئ.
- د پورتنی انکشافي رابطې په مرسته د $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ نسبت تشکیل او له اطرافو څخه لیمیټ ونیسئ چې $\Delta x\to 0$ وکړي.

د پورتني فعالیت پایله داسې ثبوتو:

2- د $y=\cos x$ تابع مشتق

ثبوت:

$$y=\cos x$$
$$y+\Delta y=\cos(x+\Delta x)$$
$$\Delta y=\cos(x+\Delta x)-\cos x$$
$$\Delta y=-2\sin\frac{x+\Delta x+x}{2}\cdot\sin\frac{x+\Delta x-x}{2}$$
$$\Delta y=-2\sin\frac{2x+\Delta x}{2}\cdot\sin\frac{\Delta x}{2}$$
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\lim_{\Delta x\to 0}\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\sin\frac{\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}=-\sin x\cdot 1$$

$$\boxed{y=\cos x \quad\Rightarrow\quad y'=-\sin x}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

يا په لنډ ډول هغه داسې ثبوتوو:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\cos x = \sqrt{1-\sin^2 x}$$

$$(\cos x)' = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}}\cdot(-2\sin x\cos x)$$

پوهېږو $\sqrt{1-\sin^2 x} = \cos x$ چې سره دي، نو:

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\cos x}(-2\sin x\cdot\cos x)$$

$$\boxed{(\cos x)' = -\sin x}$$

که چېرې $y = \cos u$ وي، په داسې حال کې چې u د x تابع وي، نو ليکلای شو:

$$\boxed{y = \cos u \Rightarrow y' = -u'\cdot\sin u}$$

لومړی مثال: د لاندې توابعو مشتق پيدا کړئ.

1) $f(x) = \sin 2x = 2\sin x\cos x$ 2) $f(x) = x - \sin x\cos x$

حل: پوهېږو چې $y = u\cdot v \Rightarrow y' = u'v + v'u$ دی، نو:

1) $f(x) = \sin 2x = 2\sin x\cos x$

$$f'(x) = (2\sin x)'\cos x + (\cos x)'\cdot 2\sin x = 2\cos^2 x - 2\sin^2 x$$

$$f'(x) = 2(\cos^2 x - \sin^2 x) \Rightarrow y' = 2\cos 2x$$

2) $f(x) = x - \sin x\cos x$

$$f'(x) = (x)' - (\sin x\cdot\cos x)' = (x)' - [(\sin x)'\cdot\cos x + (\cos x)'\cdot\sin x]$$

$$f'(x) = (x)' - [\cos x\cos x + (-\sin x\sin x)] = 1 - \cos 2x$$

پوښتنې

د لاندې تابع ګانو لومړی مشتق پيدا کړئ.

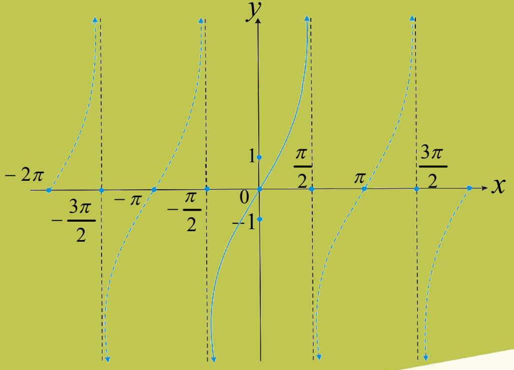
1) $f(x) = (\sec 2x + \tan 2x)^2$ 2) $f(x) = \sin^2 x$ 3) $f(x) = \sec x$

4) $f(x) = \csc x$ 5) $f(x) = \dfrac{5\sin^2 2x}{3\cos 5x}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $y=\tan x$ تابع مشتق

مخامخ گراف څه ډول تابع راښيي.



فعالیت

- د $y=\tan x$ تابع د نسبت په شکل ولیکئ.
- له پورتني نسبت څخه مشتق ونیسئ، هغه له څه سره مساوي کېږي.

له پورته فعالیت څخه پایله داسې ثبوتوو:

3- د $y=\tan x$ تابع مشتق:

ثبوت:

$$f(x)=\frac{\sin x}{\cos x}$$

$$f'(x)=\frac{(\sin x)'\cos x-(\cos x)'\sin x}{\cos^2 x}=\frac{\cos x\cos x-(-\sin x)(\sin x)}{\cos^2 x}$$

$$=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}$$

$$y=\tan x$$

$$y'_{(x)}=\frac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x$$

پاتې فورمولونه زده‌کوونکو ته پرېږدو.

لومړی مثال: د لاندې مثلثاتي تابع مشتق پیدا کړئ.

$$y=\tan^3 x$$

حل: پوهېږو چې که $y=u^n$ وي نو مشتق یې $y'=n\cdot u^{n-1}\cdot u'$ سره دی، نو:

$$\left.\begin{aligned}u&=\tan x\\u'&=\sec^2 x\end{aligned}\right\}\Rightarrow\quad \begin{aligned}y&=\tan^3 x\\y'&=3\tan^2 x\sec^2 x\end{aligned}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دويم مثال: د $y=\sec x\cdot\cot x$ تابع مشتق پيدا کړئ.

حل: څرنګه چې تابع د $y=u\cdot v$ شکل لري، نو:

$$y=\sec x\cdot\cot x$$
$$u=\sec x \quad\Rightarrow\quad u'=\sec x\tan x$$
$$v=\cot x \quad\Rightarrow\quad v'=-\csc^2 x$$

د u,v,u' او v' قيمتونه د $y'=u'\cdot v+u\cdot v'$ په فورمول کې وضع کوو:

$$y'=\sec x\tan x\cdot\cot x+\sec x(-\csc^2 x)$$
$$=\sec x\tan x\frac{1}{\tan x}-\csc^2 x\sec x$$
$$=\sec x-\csc^2 x\sec x$$

پوښتنې

د لاندې تابع ګانو مشتق پيدا کړئ.

$a)\ \ y=\tan x\cot x$

$b)\ \ y=(x^2+x-1)\tan^2 x$

$c)\ \ y=\dfrac{1}{\tan x}$

$d)\ \ y=\tan x\sec x-\cot x$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ضمني مشتقات

مخامخ مساوات په عبارت سره ولیکئ.

$$y'_{(x)} = -\frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}}$$

فعالیت

- د $y = 2x^2 - 4$ تابع مشتق پیدا کړئ.
- د $y^2 + xy = 1$ تابع څو متحوله تابع ده؟ ګراف یې څه ډول شکل لري؟
- د پورتني تابع مشتق پیدا کولای شئ.

د یوې منحنۍ خط معادله د وضعیه کمیاتو په سیستم کې عبارت له $y = f(x)$ څخه ده، له دې ځایه $y - f(x) = 0$ کېږي او $y - f(x)$ یوه دوه متحوله تابع د x او y له جنسه ده، که تابع په پام کې ونیسو، نو د دې منحنۍ معادله د $F(x,y)$ شکل غوره کوي، د مثال په $F(x,y) = y - f(x)$ ډول: $F(x,y) = x^2 + y^2 - 25$ وي، نو د $F(x,y) = 0$ له معادلې څخه لیکلای شو چې $x^2 + y^2 - 25 = 0$ یا $x^2 + y^2 = 25$ چې د دې دوو بېلا بېلو توابعو معادلې $y = \pm\sqrt{25 - x^2}$ دي.
په عمومي ډول د $F(x,y) = 0$ معادله کېدای شي چې د څو تابع ګانو معادله د $y = f(x)$ په بڼه وي، پاملرنه وکړئ.

د $y = f(x)$ په تابع کې چې x او y یو له بل څخه جلا وي، نو مشتق یې په آسانۍ پیدا کولای شو، ولې په ځینو رابطو کې y له x سره یو ځای بیان شوي دي لکه په $xy^2 - y + 1 = 0$ چې د مشتق په نیولو کې که د x له جنسه مشتق نیسو، نو y یو ثابت عدد فرضوو او که د y له جنسه مشتق نیسو x ثابت فرضوو، لکه:

$$xy^2 - y + 1 = 0$$

$$(xy^2)' - (y)' + (1)' = 0 \Rightarrow 1y^2 + x(2y'y) - y' = 0 \Rightarrow y^2 = -2xyy' + y' = y'(-2xy + 1)$$

$$y' = \frac{y^2}{-2xy + 1}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په عمومي حالاتو کې که تابع غیر صریح وي په دې معنا چې مستقل متحول او د تابع متحول پکې څرګند نه وي، نو ددې ډول تابع مشتق د ضمني مشتق په نامه یادیږي او د هغه مشتق په لاندې ډول محاسبه کوو.

$$y'_{(x)} = -\frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}} = -\frac{\text{د تابع مشتق نظر } x \text{ ته (} y \text{ ثابت دی)}}{\text{د تابع مشتق نظر } y \text{ ته (} x \text{ ثابت دی)}}$$

لومړی مثال: د $y=\sin\frac{x}{y}+1$ ضمني تابع مشتق د $(\pi,1)$ په ټکي کې پیدا کړئ.

حل: د $y-\sin\frac{x}{y}-1=0$ رابطې څخه $y'_{(x)}=\frac{-f'_{(x)}}{f'_{(y)}}$ پیدا کوو.

$$y-\sin\frac{x}{y}-1=0$$

$$f'_{(x)} = y'_x-(\sin\frac{x}{y})'_x-(1)'_x = 0-\frac{1}{y}\cos\frac{x}{y}-0=\frac{-1}{y}\cos\frac{x}{y}$$

$$f'_{(y)} = y'_y-(\sin\frac{x}{y})'_y-(1)'_y = 1-\cos\frac{x}{y}(\frac{x}{y})'_y-0=1-\frac{-x}{y^2}\cdot\cos\frac{x}{y}=1+\frac{x}{y^2}\cos\frac{x}{y}$$

$$\Rightarrow y'_{(x)}=-\frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}}=-\frac{\frac{-1}{y}\cos\frac{x}{y}}{1+\frac{x}{y^2}\cdot\cos\frac{x}{y}}$$

اوس په $y'_{(x)}$ رابطه کې د x او y قیمتونه وضع کوو چې د $y'(\pi,1)$ په لاس راځي.

$$y'_{(\pi,1)}=\frac{\frac{1}{y}\cos\frac{x}{y}}{1+\frac{x}{y^2}\cdot\cos\frac{x}{y}}=\frac{\frac{1}{1}\cos\pi}{1+\frac{\pi}{1}\cos\pi}=\frac{-1}{1+\pi(-1)}=\frac{1}{\pi-1}$$

دویم مثال: د $x^2y+2y^3=3x+2$ رابطې ضمني مشتق پیدا کړئ.

حل:

$$x^2y+2y^3=3x+2$$

$$x^2y+2y^3-3x-2=0$$

$$f'_{(x)}=2xy+0-3-0=2xy-3$$

$$f'_{(y)}=x^2+6y^2-0-0=x^2+6y^2$$

$$f'_{(x)}=-\frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}}=-\frac{2xy-3}{x^2+6y^2}=\frac{-2xy+3}{x^2+6y^2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دریم مثال: د $y^6 - y - x^2 = 0$ تابع ضمني مشتق پیداکړئ.

حل:

$$f'_{(x)} = -2x$$

$$f'_{(y)} = 6y^5 - 1$$

$$y'_{(x)} = -\frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}} = -\frac{-2x}{6y^5 - 1} = \frac{2x}{6y^5 - 1}$$

او یا په بله طریقه:

$$y^6 - y - x^2 = 0$$

$$6y^5 y' - y' - 2x = 0$$

$$(6y^5 - 1)y' = 2x$$

$$y' = \frac{2x}{6y^5 - 1}$$

د تابع دویم ضمني مشتق

د ضمني رابطې د دویمې مرتبې د ضمني مشتق د پیداکولو لپاره د فورمول په مرسته لومړی د ضمني اریکې لومړی مشتق پیداکوو او بیا له دې رابطې څخه مشتق نیسو.

لومړی مثال: د $x^2 - y^2 = 1$ رابطې دویمه ضمني مشتق $y''_{(x)}$ پیداکړئ.

حل:

$$x^2 - y^2 = 1$$

$$x^2 - y^2 - 1 = 0$$

$$f'_{(x)} = (x^2)'_x - (y^2)'_x - (1)'_x = 2x - 0 - 0 = 2x$$

$$f'_{(y)} = (x^2)'_y - (y^2)'_y - (1)'_y = 0 - 2y - 0 = -2y$$

$$y'_{(x)} = -\frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}} = -\frac{2x}{-2y} = \frac{x}{y}$$

او یا په بله طریقه:

$$y'_{(x)} = -\frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}} = -\frac{(x^2)'_x - (y^2)'_x - (1)'_x}{(x^2)'_y - (y^2)'_y - (1)'_y} = -\frac{2x - 0 - 0}{0 - 2y - 0} = \frac{x}{y} \Rightarrow y'_{(x)} = \frac{x}{y}$$

اوس د $y' = \frac{x}{y}$ له رابطې څخه دویم ضمني مشتق نیسو:

$$y''_{(x)} = \frac{(x)'y - y'x}{y^2} = \frac{y - y'x}{y^2} = \frac{y - \frac{x}{y} \cdot x}{y^2} = \frac{y^2 - x^2}{y^3} = \frac{-1}{y^3} \Rightarrow y''_{(x)} = \frac{-1}{y^3}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دويم مثال: د $x^2+xy+y^2-3=0$ په معادله کې د y مشتق نسبت x ته د $(1,1)$ په ټکي کې پيدا او پر منحني د مماس معادله وليکي.

حل: څرنګه چې د $(1,1)$ ټکی په معادله کې صدق کوي، نو نوموړی ټکی د منحني پرمخ واقع دی، د $y'_{(x)}$ د پيداکولو لپاره په ورکړ شوي معادلې کې ليکلای شو:

$$f'_{(x)}=2x+y$$

$$f'_{(y)}=x+2y$$

$$y'_{(x)}=-\frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}}=-\frac{2x+y}{x+2y}\quad , \qquad x+2y\neq 0$$

$$y'=-\frac{2x+y}{x+2y}=-\frac{2+1}{1+2}=-1$$

$$y-y_1=m(x-x_1)\ \Rightarrow\ y-1=-(x-1)\ \Rightarrow\ y=-x+2$$

او يا په بله طريقه هم کولای شو د تابع ضمني مشتق په لاس راوړو:

$$x^2+xy+y^2-3=0$$

$$2x+y+x\cdot y'+2yy'=0$$

$$2x+y+(x+2y)y'=0$$

$$(x+2y)y'+2x+y=0$$

$$(x+2y)y'=-2x-y$$

$$y'=\frac{-2x-y}{x+2y}$$

دريم مثال: د $x^2y^3=5y^3+x$ غير صريح تابع ضمني مشتق پيدا کړئ.

حل:

$$x^2y^3-5y^3-x=0$$

$$f'_{(x)}=2xy^3-0-1=2xy^3-1$$

$$f'_{(y)}=3x^2y^2-15y^2-0$$

$$y'_{(x)}=-\frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}}=-\frac{2xy^3-1}{3x^2y^2-15y^2}=\frac{1-2xy^3}{3x^2y^2-15y^2}$$

پوښتني

1- د $x\sin y+y\cos x=5$ د غير صريح تابع ضمني مشتق پيدا کړئ.

2- د $x^3+xy^2+y=3$ رابطې څخه ضمني مشتق ونيسئ.

3- د $x^2+y^2=4x+4y$ رابطې څخه ضمني مشتق ونيسئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لوړ مرتبه يي مشتقات

د مخامخ تابع درېم ځلې مشتق ونيسئ؟

د مخامخ تابع پنځه ځلې مشتق ونيسئ؟

$$f(x) = \sin x$$
$$f(x) = \cos x$$

فعاليت

- د $y = 2x^4 - 3x^3 - 2x - 1$ تابع مشتق پيدا کړئ.
- د پورته تابع دويم مشتق پيدا کړئ.
- د پورتني مشتق د تابع درېم ځل مشتق ونيسئ.
- د پورتني تابع نور څو ځلې مشتق نيولى شو؟
- د پورتني تابع څووم مشتق له صفر سره مساوي دى؟

د پورتني فعاليت پايله داسې بيانوو:

که د $y = f(x)$ مشتق منونکى وي، لومړى مرتبه مشتق يې په $y' = f'(x)$ ، دويمه مرتبه مشتق يې په $y'' = f''(x)$ درېمه مرتبه مشتق يې په $y''' = f'''(x)$ ... په کلي ډول $n-$ام مرتبه مشتق د $y = f(x)$ تابع په $y^{(n)} = f^{(n)}(x)$ علامې سره ښيو.

لومړى مثال: د $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 1$ تابع درېم مشتق په لاس راوړئ.

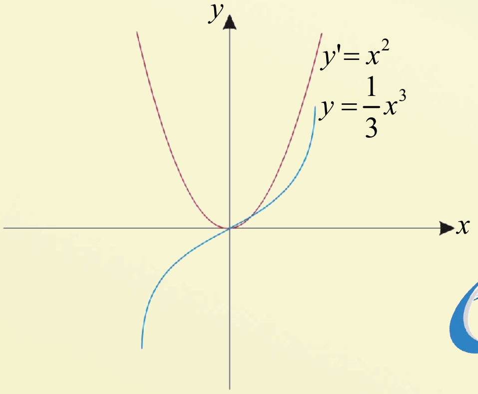
حل:

$$y = x^3 - 3x^2 + 4x - 1$$
$$y' = 3x^2 - 6x + 4$$
$$y'' = 6x - 6$$
$$y''' = 6$$

دويم مثال: د $y = \frac{1}{3}x^3$ تابع ګراف او د هغې د لومړى مرتبې مشتق تابع ګراف رسم کړئ.

حل:

$$y = \frac{1}{3}x^3$$
$$y' = \frac{3}{3}x^2 = x^2$$
$$y' = x^2$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

دريم مثال: که $y=\sin x+\cos x$ وي، د $(y^{(9)})^2+y^2$ قيمت پيدا کړئ.

حل: لومړی د تابع نهمه مرتبه مشتق يا $(y^{(9)})$ په لاس راوړو:

$$y=\sin x+\cos x$$
$$y'_{(x)}=\cos x+(-\sin x)=\cos x-\sin x$$
$$y''_{(x)}=-\sin x-(\cos x)=-\sin x-\cos x$$
$$y'''_{(x)}=-\cos x-(-\sin x)=\sin x-\cos x$$
$$\vdots$$
$$f'^{(9)}_{(x)}=\cos x-\sin x$$
$$(y^{(9)})^2+y^2=(\cos x-\sin x)^2+(\sin x+\cos x)^2$$
$$=\cos^2 x-2\sin x\cos x+\sin^2 x+\sin^2 x+2\sin x\cos x+\cos^2 x$$
$$=2\sin^2 x+2\cos^2 x=2(\sin^2 x+\cos^2 x)=2$$

څلورم مثال: د $y=2x^6-3x^5-2x^3-3x^2-1$ د تابع پنځه ځلې مشتق پيدا کړئ.

$$y=2x^6-3x^5-2x^3-3x^2-1$$
$$y'=12x^5-15x^4-6x^2-6x$$
$$y''=60x^4-60x^3-12x-6$$
$$y'''=240x^3-180x^2-12$$
$$y^{(4)}=720x^2-360x$$
$$y^{(5)}=1440x-360$$

يادونه: که چيرې $n-$ام درجه‌يي څو جمله‌يي تابع $c_n\neq 0$ $f_{(n)}(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3+\ ...+c_nx^n$ راکړې شوی وي $n-$ام مشتق يې په لاندې ډول په لاس راځي:

$$f_{n(x)}=c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3+\ ...\ +c_nx^n \qquad c_n\neq 0$$
$$f'_{(x)}=c_1+2c_2x+3c_3x^2+\ ...\ +nc_nx^{n-1}$$
$$f''_{(x)}=2c_2+6c_3x+\ ...\ +n(n-1)c_nx^{n-2}$$
$$f'''_{(x)}=6c_3+12c_4x+\ ...\ +n(n-1)(n-2)c_nx^{n-3}$$
$$f^{n}(x)=n(n-1)(n-2)\ ...\ c_n=n!c_n$$

په عمومي ډول که $k>n$ وی، نو: $f^k(x)=0$

پوښتني

د لاندې تابعګانو تر هغې مشتق ونيسئ چې د مشتق تابع له صفر سره مساوي شي.

1) $y=4x^4-3x^3-2x$ 2) $y=(5x-2)^3$

3) $y=a+b+c^2-x-ax-bx-cx^3-c^3x$ 4) $y=\sin x$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د خپرکي مهم ټکي

– که چېرې د $P(x, f(x))$ او $Q(x+h, f(x+h))$ ټکی د $f(x)$ تابع دوه اختیاري ټکي وي، نو لاندې اړیکه د Newton خارج قسمت په نامه یادېږي:

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{x+\Delta x-x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

د منحني د مماس میل په یوه اختیاري ټکي کې عبارت دی، له:

$$m_T=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

د یوې تابع مشتق: د تابع او متحول د تزاید، د نسبت لیمیټ کله چې $\Delta x\to 0$ وکړي، د مشتق په نامه یادېږي او په $f'(x)$, $\frac{dy}{dx}$ سره ښودل کېږي.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f'(x)=y'$$

که چېرې د $f(x)$ تابع د (x_0) په یوه ټکي کې د مشتق وړ وي، نو $f'(x)$ د مماس میل د منحني سره د $(x_0, f(x_0))$ په ټکي کې دی.

که د f تابع د $x=x_0$ په ټکي کې د مشتق وړ وي، نو دا تابع په x_0 کې متمادي ده، خو ددې برعکس سمه نه ده، یعنې کېدای شي یوه تابع په یوه ټکي کې متمادي وي، ولې په هغه ټکي کې د مشتق وړ نه وي.

د $f(x)$ د تابع مشتق د C پر منحني $P(x_0, f(x_0))$ په ټکي کې د مماس له میل سره برابر دی.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=y'=\tan\alpha=\tan\theta=m_\Delta$$

د تماس په ټکي کې له یوې منحني سره د مماس میل د هغې تابع د مشتق په نوم یادېږي.

که د یوې تابع مشتق ونیول شي، نو یوه تابع په لاس راځي چې دا د مشتق تابع بلل کېږي.

که د f تابع د (x_0-r, x_0+r) په فاصله کې(په شاوخوا $x_0=x$) کې تعریف شوې وي او د هغې لیمیټ موجود وي، په دې حالت کې کولای شو چې یو مماس خط د $f(x)$ د تابع په منحني د $x=x_0$ په ټکي کې رسم کړو، د دې مماس میل عبارت دی له: $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مشتق قوانین:

$$1)\ \ f(x)=C \quad \Rightarrow \quad f'(x)=0$$
$$2)\ \ f(x)=x^n \quad \Rightarrow \quad f'(x)=n\cdot x^{n-1}$$
$$3)\ \ f(x)=u\pm v \quad \Rightarrow f'(x)=u'\pm v'$$
$$4)\ \ f(x)=u\cdot v \quad \Rightarrow \quad f'(x)=u'v+v'u$$
$$5)\ \ f(x)=\frac{u}{v} \quad , \quad v\neq 0 \ \Rightarrow \ f'(x)=\frac{u'v-v'u}{v^2}$$
$$6)\ \ f(x)=\sqrt{x} \quad \Rightarrow \quad f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$
$$7)\ \ f(x)=\sqrt{u} \quad \Rightarrow \quad f'(x)=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$$
$$8)\ \ f(x)=\sqrt[n]{u} \quad \Rightarrow \quad f'(x)=\frac{u'}{n\cdot\sqrt[n]{u^{n-1}}}$$

د مرکبو توابعو مشتق: $y'_{(x)} = y'_{(u)} \cdot u'_{(x)}$

د مثلثاتي تابعگانو مشتق:

$$1)\ \ y=\sin x \quad \Rightarrow \quad y'=\cos x \qquad , \qquad y=\sin u \quad \Rightarrow \quad y'=u'\cos u$$
$$2)\ \ y=\cos x \quad \Rightarrow \quad y'=-\sin x \qquad , \qquad y=\cos u \quad \Rightarrow \quad y'=-u'\sin u$$

که د $y=f(x)$ تابع مشتق منونکی وي، په بشپړ ډول n -ام ځلي مشتق يې $y^{(n)}=f^{(n)}(x)$ دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دويم څپرکي پوښتنې

لاندې پوښتنو ته څلور ځوابونه درکړل شوي دي، سم ځواب په نښه کړئ:

1- $f(x) = x^2 - x$ منحني ميل د $P(3,0)$ په ټکي کې عبارت دی له:

$a)\ 3$ $b)\ -3$ $c)\ 5$ $d)\ -5$

2- د $f(x) = 2x^2$ په تابع کې د f متوسط بدلون د $[3\,,4]$ په انټروال کې عبارت دی له:

$a)\ 18$ $b)\ 14$ $c)\ -14$ $d)\ 32$

3- د $y = 2x^2 - 3x^{-1}$ تابع مشتق عبارت دی له:

$a)\ y' = 4x^2 + 3$ $b)\ y' = 4x + \frac{1}{2}x$ $c)\ y' = 4x + \frac{3}{x^2}$ $d)\ y' = 4x$

4 – د $f(x) = \sqrt{x-1}$ تابع مشتق عبارت دی له:

$a)\ 0$ $b)\ \frac{1}{2\sqrt{x-1}}$ $c)\ \frac{x-1}{2\sqrt{x}}$ $d)\ \frac{-1}{2\sqrt{x-1}}$

5 – د $f(x) = 2x^2 + x$ تابع د $x = 1$ په ټکي کې د مماس خط معادله عبارت ده له:

$a)\ y = 5x - 2$ $b)\ y = x - 3$ $c)\ y = 5$ $d)\ y = 5x$

6- د $y = \frac{2x}{-x+4}$ تابع مشتق عبارت دی له:

$a)\ y' = -4x + 8$ $b)\ y' = -2$ $c)\ y' = \frac{4x+8}{(-x+4)}$ $d)\ y' = \frac{8}{(-x+4)^2}$

7 – د $y = (2 - x^2)^3$ تابع مشتق عبارت دی له:

$a)\ y' = -6x^5 + 2x^3 - 24x$ $b)\ y' = 3(2 - x^2)^2$ $c)\ y' = 3(-2x)^2$ $d)$ هيڅ يو

8 – د $y = \sin x$ تابع مشتق عبارت دی له:

$a)\ y' = \sin x$ $b)\ y' = \cos x$ $c)\ y' = -\sin x$ $d)\ y' = -\cos x$

9 – د $y = (1 + x^4)^{\frac{-1}{5}}$ تابع مشتق عبارت دی له:

$a)\ y' = -\frac{4}{5}x^3(1 + x^2)^{\frac{-6}{5}}$ $b)\ y' = -\frac{1}{5}(1 + x^2)^{\frac{-6}{5}}$

$c)\ y' = -4x^3$ $d)$ هيڅ يو

10– د $y = \frac{\cos}{1 - \cos x}$ تابع مشتق عبارت دی له:

$a)\ y' = \frac{\sin x}{(1 - \cos x)^2}$ $b)\ y' = \frac{-\sin x}{(1 - \cos x)}$ $c)\ y' = \frac{-\sin x}{(1 - \cos x)^2}$ $d)$ هيڅ يو

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاندي پوښتنې حل کړئ.

1. د $f(x)=\dfrac{2\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$ تابع مشتق پيدا کړئ؟

2. د $f(x)=\dfrac{x+\sqrt{x-x^2}}{\sqrt{x}+\sqrt{1-x}}$ تابع مشتق پيدا کړئ؟

3. د $f(x)=(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)$ تابع مشتق پيدا کړئ.

4. د $f(x)=(\sqrt[3]{x}-1)(\sqrt[3]{x}+4)$ تابع مشتق پيدا کړئ.

5. د $f(x)=\sin x\cdot\cos x$ د تابع مشتق د $\dfrac{\pi}{4}$ په ټکي کې پيدا کړئ.

6. د $f(x)=\dfrac{(\sin x+\cos x)^2}{1+\sin 2x}$ تابع مشتق پيدا کړئ.

7. د $y=\cos x$ تابع اتمه مرتبه مشتق پيدا کړئ.

8. د $y=\sin^2 x+\cos^2 x$ تابع نهمه مرتبه مشتق پيدا کړئ.

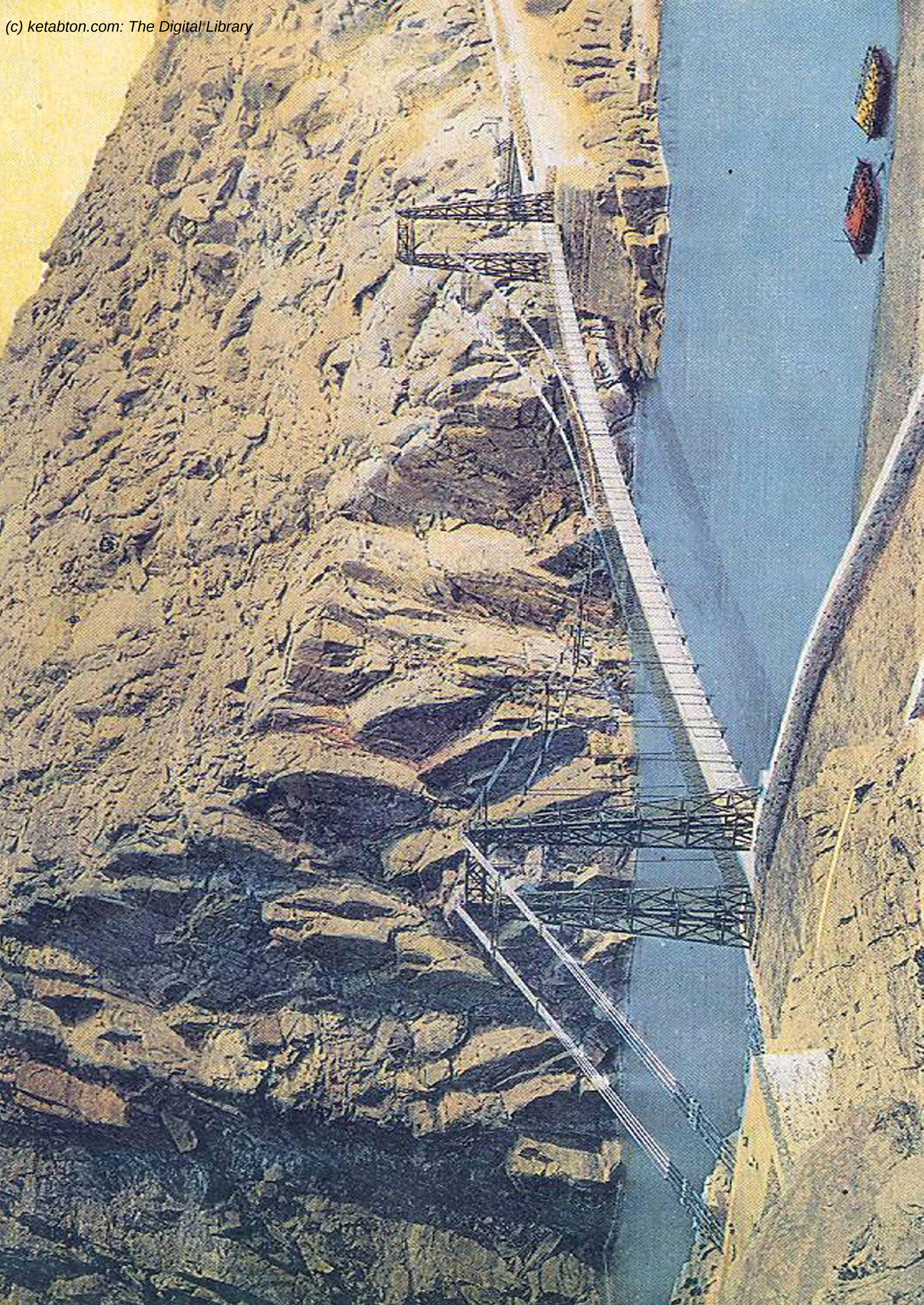
9. د $x^2+xy+y^2=3$ تابع ضمني مشتق پيدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دریم څپرکی

د مشتق د استعمال ځایونه

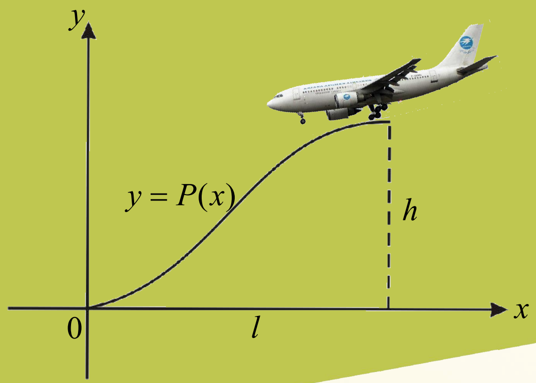
(c) ketabton.com: The Digital Library



(c) ketabton.com: The Digital Library

د مشتق د استعمال ځایونه

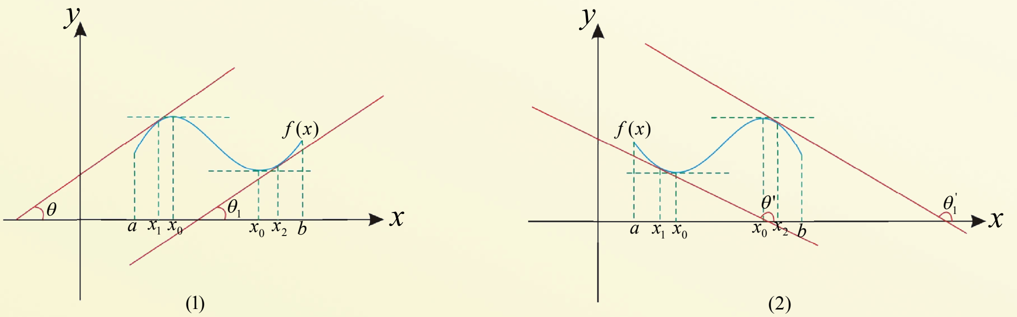
د مخامخ شکل د ارتفاع په اړه خپل نظر بیان کړئ.



له مشتق څخه په ډېرو ځایونو کې، لکه: (په فزیک کې د حرکت، سرعت او تعجیل اړوند معادلې د مشتق څخه په ګټه اخیستنې سره حلېږي همدارنګه په کیمیا کې هم، د تابع د تحولات، د ځینو لیمیټونو په پیدا کولو کې) کار اخیستل کېږي چې ځینې ځایونه یې دلته تر څېړنې لاندې نیسو.

I-د یوې تابع تحولات:

لاندې شکلونو ته پاملرنه وکړئ:



- متزایدې او متناقصې توابع څه ډول توابع دي؟
- د (1) شکل په (a,b) انټروال کې د x_0، x_1 او x_2 په ټکو کې د رسم شویو مماسونو میلونه د (2) شکل له مماسونو سره پرتله کړئ.
- په (1) او (2) شکلونو کې تر ټولو لوړ ټکی او تر ټولو ټیټ ټکی په ګوته کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

- په پورته شکلونو کې وښيې چې کومه تابع په کومه ساحه کې متزايده او په کومه ساحه کې تابع متناقصه ده؟
- په متزايده، متناقصه او ثابته تابع کې مشتق و څېړئ.

د پورته فعاليت پايله داسې بيانوو:

1- که د $f(x)$ تابع په $[a,b]$ انتروال کې متمادي او په (a,b) انتروال کې د مشتق وړ وي، نو که چېرې په ورکړل شوي انټروال کې $f'(x)>0$ وي، تابع په هغه انتروال کې متزايده بلل کېږي.

2- که چېرې د $f(x)$ تابع په $[a,b]$ انتروال کې متمادي او د (a,b) په انتروال کې د مشتق وړ وي که به ورکړ شوي انټروال کې $f'(x)<0$ وي، نو تابع په هغه فاصله کې متناقصه بلل کېږي.

يادونه: د تابع له تزايد څخه مطلب دا دی چې د x د متحول قيمت په زياتېدو سره د تابع قيمت زيات او د تابع له تناقص څخه مطلب دا دی چې د x د متحول د قيمت په زياتېدو سره د y يا تابع قيمت کم پاتې شي.

لومړی مثال: وښيئ چې د $f(x)=x^3+3x+1$ تابع ګراف متزايد ده.

حل: څرنګه چې تابع کسري بڼه نه لري، نو ټول حقيقي عددونه د تعريف ساحه کېدای شي او هم پوهېږو چې د تابع د تزايد شرط $f'(x)>0$ دی، نو لازمه ده چې د تابع مشتق تر مطالعې لاندې ونيسو:

$$f(x)=x^3+3x+1$$

$$f'(x)=3x^2+3$$

ليدل کېږي چې د مشتق لومړی حد تام مربع دی، نو د x د ټولو قيمتونو لپاره همېشه مثبت دی. کله چې (+3) ورسره جمع شي بيا هم قيمت يې مثبت دی، نو د $f'(x)>0$ دی، نو تابع متزايده ده.

دويم مثال: د $f(x)=x^3-3x+5$ تابع په کوم انتروال کې متناقصه ده؟

حل: څرنګه چې د $f(x)$ تابع په هر انتروال کې متمادي او د مشتق وړ ده، نو د متناقص تابع لپاره لرو $f'(x)<0$ دی، يعنې:

$$f'(x)=3x^2-3<0$$

$$f'(x)=0$$

$$3x^2-3=0$$

$$3x^2=3$$

$$x=\pm1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ليدل کېږي چې د تابع مشتق د $-1<x<1$ په انتروال کې منفي دی، نو تابع په همدې انتروال کې $(-1,1)$ متناقصه ده.

دريم مثال: د $f(x)=5x-4$ تابع تحولات وڅېړئ.

حل: لومړی د تابع د تعريف ساحه پيدا او وروسته د تابع د تزايد شرط په کې څېړو:

$$D_f \to IR$$
$$f(x)=5x-4$$
$$f'(x)=5>0$$

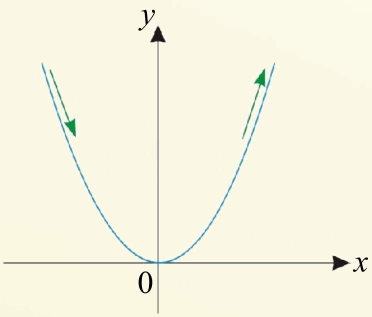
څرنګه چې $f'(x)>0$ نو د ټولو قيمتونو لپاره همېشه مثبت دی. نو تابع متزايده ده.

څلورم مثال: د $y=x^2$ د تابع ګراف ته ځير شئ او وښيئ چې ورکړل شوي تابع په کوم انټروال کې متزايده او په کوم انټروال کې متناقصه ده.

حل: پوهېږو چې که تابع متناقصه وي $y'<0$ او که تابع متزايده وي $y'>0$ څخه دی، نو ليکلای شو چې:

$$y=x^2 \quad \Rightarrow \quad y'=2x$$
د تناقص شرط $y'<0 \quad \Rightarrow \quad 2x<0 \quad \Rightarrow \quad x<0$

د تزايد شرط $y'>0 \quad \Rightarrow \quad 2x>0 \quad \Rightarrow \quad x>0$



x	$-\infty$	-2	-1	0	1	2	$+\infty$
y'	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
y	$+\infty$ ↘	4 ↘	1 ↘	0 ↗	1 ↗	4 ↗	$+\infty$

د تابع له ګراف څخه ليدل کېږي چې تابع د $(-\infty,0)$ په انټروال کې متناقصه او په $(0,+\infty)$ انټروال کې متزايده ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

1- د $f(x) = ax + b$ د تابع تحولات وښيئ؟

2- د $y = \frac{-3}{4}x - 1$ د تابع تحولات وښيئ؟

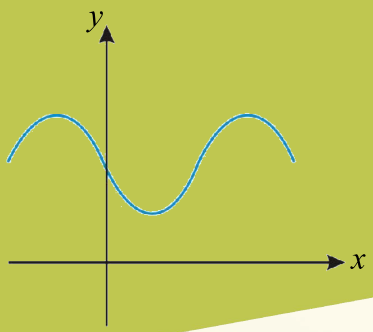
3- وښياست چې د $f(x) = 2x^2 + 3x + 1$ تابع په کوم انټروال کې متزايده ده؟

4- د $y = x^2 + 3x + 2$ د تابع د تزايد انټروال و ټاکئ؟

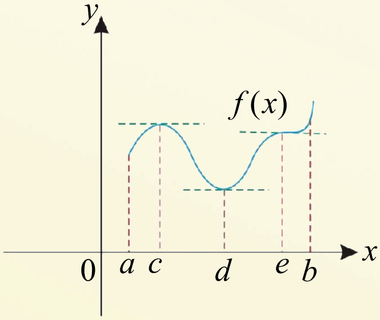
(c) ketabton.com: The Digital Library

د يوې تابع بحراني(*Critical Point*) ټکي (اعظمي*Maximum* او اصغري*Minimum*)

په مخامخ شکل کې تر ټولو لوړ ټکی او تر ټولو ټيټ ټکی وښيئ او ووايئ چې دا ټکي د څه په نامه يادېږي؟



که په لاندېنې شکل کې د $f(x)$ تابع د (a,b) په انټروال کې د مشتق وړ وي.



- د متحول د قيمت په زياتوالي په کوم انټروال کې د تابع قيمت لوېږي.
- د متحول د قيمت په کموالي په کوم انټروال کې د تابع قيمت کمېږي.
- د تابع تحولات په (c,d) او (d,e) انټروال کې وڅېړئ.
- د $f(x)$ تابع مشتق په کومو ټکو کې له صفر سره مساوي دی.

د پورته فعاليت پايله داسې بيانوو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

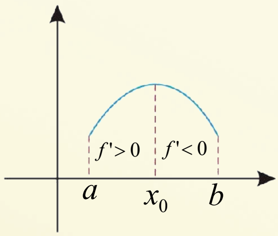
د یوې تابع په ګراف کې د y پر محور تر ټولو لوړې نقطې ته اعظمي(maximum) او تر ټولو ټیټې نقطې ته د تابع اصغري(minimum) نقطه وايي، د x د هغو قیمتونو لپاره چې تابع اعظمي او یا اصغري قیمتونه اخلي د بحراني(*Critical Point*) نقطو په نامه یادیږي.

تعریف:

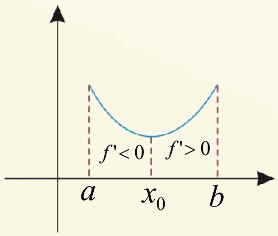
1- **ثابته تابع**: که چېرې د یوې تابع لومړی مشتق همیشه له صفر سره مساوي وي تابع ته ثابته تابع وايي.

2- **متزایده تابع**: که چېرې د یوې تابع لومړی مشتق د (a,b) په فاصله کې مثبت وي تابع په هغه فاصله کې متزایده بلل کیږي، یعنې $y'>0$ چې په لاندې شکلونو کې لیدل کیږي.

3- **متناقصه تابع**: که چېرې د یوې تابع لومړی مشتق د (a,b) په فاصله کې منفي وي یعنې $y'<0$ وي، تابع په هغه فاصله کې متناقصه بلل کیږي چې په لاندې شکلونو کې لیدل کیږي.



(1)



(2)

1- **اعظمي ټکی**: که چېرې د $y=f(x)$ تابع د x_0 په معین ټکي کې د تزاید له حالت څخه د تناقص حالت ته بدل شي یا په بل عبارت د x_0 په دې معین ټکي کې د مشتق اشاره له مثبت څخه منفي ته بدله شي د x_0 په نقطه کې د تابع قیمت د اعظمي(maximum) په نامه یادیږي.

2- **اصغري ټکی**: که چېرې د $y=f(x)$ تابع د x_0 په معین ټکي کې د تناقص له حالت څخه تزاید حالت ته بدل شي یا په بل عبارت د x_0 په دې معین ټکي کې د مشتق اشاره له منفي څخه مثبت ته بدله شي د x_0 په نقطه کې د تابع قیمت د اصغري (minimum) په نامه یادیږي.

3- **د انعطاف ټکی**: که چېرې مشتق خپله اشاره د x_0 په یوه معین ټکي کې له مثبت څخه صفر ته او بیا مثبت ته یا له منفي څخه صفر او بیا منفي ته بدله کړي x_0 د انعطاف د نقطې *Inflection Point* په نامه یادیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی مثال: د $f(x)=x^3-\frac{7}{2}x^2+2x$ تابع راکړل شوی ده دا تابع څو د (Extreme) ټکي لري.

حل: د تابع لومړی مشتق پیداکوو بیا هغه مساوي په صفر وضع کوو او د x قیمتونه په لاس راوړو.

$$f'_{(x)}=3x^2-7x+2$$

$$f'(x)=0$$

$$3x-1=0\Rightarrow x_1=\frac{1}{3}$$

$$x-2=0\Rightarrow x_2=2$$

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		1		2	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	↗	$\frac{17}{54}$	↘	-2	↘	-2	↗ $+\infty$
			Max				Min	

په پایله کې ویلای شو چې اصلي تابع دریمه درجه ده، نو د $f(x)$ د تابع مشتق د $(\frac{1}{3})$ او (2) په دوو نقطو

کې خپله علامه بدلوي، نو دوه بحراني(Extreme) ټکي لري.

دویم مثال: د $f(x)=\frac{x+1}{x^2-2x}$ تابع موضعي Extreme ټکي یا نسبتي ټکي مشخص کړئ.

حل: لومړی د تابع مشتق په لاس راوړو، وروسته یې علامې ټاکو:

لیدل کیږي چې تابع د $y=\frac{u}{v}$ شکل لري، نو $y'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$

$$f(x)=\frac{x+1}{x^2-2x}$$

$$f'(x)=\frac{x^2-2x-(2x-2)(x+1)}{(x^2-2x)^2}$$

$$f'(x)=\frac{-x^2-2x+2}{(x^2-2x)^2}$$

دیوه کسر قیمت هغه وخت له صفر سره مساوي دی چې د تابع صورت مساوي له صفر سره وي.

$$f'(x)=0 \quad\Rightarrow -x^2-2x+2=0$$

$$\Delta=b^2-4ac=12$$

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{2+\sqrt{12}}{-2}=-2.73$$

$$x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{2-\sqrt{12}}{-2}=0.73$$

x		-3		-2.73		-1		0.73		1	
$f'(x)$	$-$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$
$f(x)$	↘		↘		↗		↗		↘		↘
		$-\frac{2}{15}$		Min		0		Max		-2	

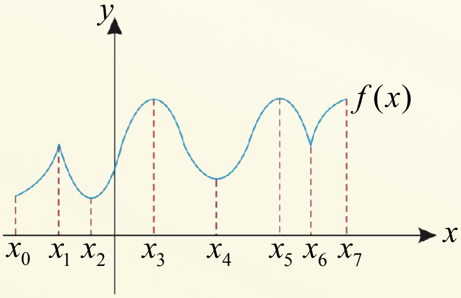
(c) ketabton.com: The Digital Library

په جدول کې ښکاري چې f' د x_1 او x_2 دواړو خواوو ته خپله علامه بدلوي، نو تابع دوه بحراني Extreme ټکي لري، يعني تابع اعظمي او اصغري ټکي لري.

مطلق اعظمي او مطلق اصغري ټکي Absolute Maximum & Absolute Minimum

کېدای شي يوه تابع په يوه انټروال کې څو موضعي بحراني ټکي ولري، خو په يوه ټاکلي انټروال کې تابع يوازې يوه مطلقه اعظمي او يوه مطلقه اصغري نقطه لري. په شکل کې يې وښيئ؟

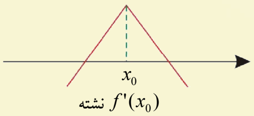
لاندينی شکل ته ځير شي:

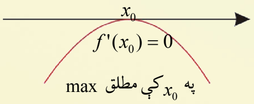


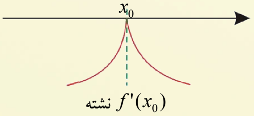
- د $f(x)$ په تابع کې اعظمي او اصغري ټکي وښيئ.
- د $f(x)$ تابع بحراني ټکي په ګوته کړئ.
- پورتنی تابع په ورکړل شوي انټروال کې څو موضعي بحراني ټکي لري.
- پورتنی تابع په ورکړل شوي انټروال کې څو اصغري او اعظمي لري.

د پورته فعاليت پايله داسې بيانوو:

مطلق اعظمي Absolute Maximum: په عمومي ډول د $(x_0, f(x_0))$ ټکی مطلق اعظمي بلل کيږي، که چېرې د $f(x)$ د تعريف په ساحه کې د هر x لپاره $f(x) \le f(x_0)$ وي، نو $f(x_0)$ ته مطلق اعظمي وايي لاندې شکلونه وګورئ.

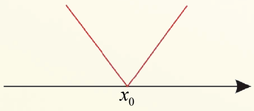




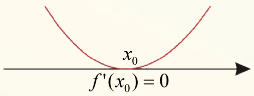


(c) ketabton.com: The Digital Library

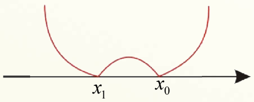
مطلق اصغري Absolute Minimum: په عمومي ډول د $(x_0, f(x_0))$ نقطه مطلقه اصغري بلل کېږي، که چېرې د f د تعریف په ساحه کې د هر x لپاره $f(x) \geq f(x_0)$ وي، نو په دې حالت کې $f(x_0)$ ته مطلقه اصغري وايي، د x هغه قيمتونه چې د هغوی لپاره تابع يا اعظمي او يا اصغري قيمتونه اخلي د x دغه قيمتونه د Extreme په نامه يادېږي.



نشته $f'(x_0)$



په x_0 کې مطلق min



$f'(x_1)$ او $f'(x_0)$ نشته

لومړی مثال: د $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{1}{2}$ د تابع مطلق اصغري پيداکړئ.

حل: د $f(x)$ د تابع مشتق نيسو او د مشتق د تابع حلونه په لاس راوړو:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{1}{2}$$

$$f'(x) = x + 3$$

$$f'(x) = 0$$

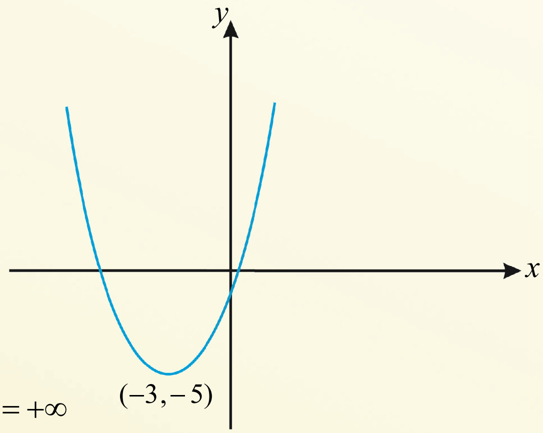
$$x + 3 = 0$$

$$x = -3$$

$$f(-3) = -5$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}(\frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{1}{2}) = +\infty$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{x\to\infty} x^2 + 3\lim_{x\to\infty} x - 1\lim_{x\to\infty} - \frac{1}{2} = +\infty$$



x	$-\infty$		-4		-3		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$-\frac{9}{2}$	↘	-5 (Min)	↗	3	↗	$\frac{15}{2}$	↗	$+\infty$

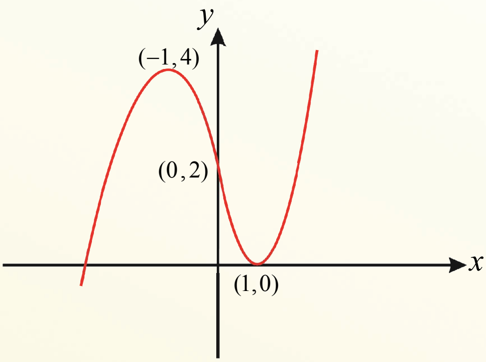
په پايله کې د $x = -3$ په ټکي کې چې د تابع قيمت (-5) دی او تابع په $(-3, -5)$ ټکي کې مطلق اصغري لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دويم مثال: د $f(x)=x^3-3x+2$ د تابع اعظمي او اصغري ټکي پیدا او رسم یې کړئ.

حل: د اعظمي او اصغري ټکو د پيدا کولو لپاره لومړی د تابع لومړی مشتق پیدا او بیا د مشتق د تابع صفري ټکي په لاس راوړو.

$f(x)=x^3-3x+2$
$f'(x)=3x^2-3$
$f'(x)=0$
$3x^2-3=0$
$3x^2=3$
$x^2=1$
$x_1=1 \quad , \quad x_2=-1$
$f(-1)=(-1)^3-3(-1)+2$
$\quad =-1+3+2$
$\quad =4$
$f(1)=1^3-3\cdot1+2=1-3+2=0$
$f(0)=0-3\cdot0+2=2$
$f(2)=2^3-3\cdot2+2=4$
$f(1)=0 \quad , \quad f(0)=2 \quad , \quad f(-1)=4$
$Max\ f(-1)=4 \qquad Min\ f(1)=0$



x	$-\infty$		-2		-1		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$-\frac{5}{6}$	↗	4	↘	2	↘	0	↗	4	↗	$+\infty$
					Max				Min				

له جدول څخه لیدل کیږي چې تابع د $(-\infty,-1)$ او $(1,+\infty)$ په انټروالونو کې متزایده او $(-1,1)$ په انټروال کې متناقصه ده، نو د $(1,0)$ نقطخ اصغري او د $(-1,4)$ نقطه اعظمي ده.

د یوې تابع د ګراف رسموولو لپاره لاندې ټکي باید په پام کې ونیسو:

1. د تابع متمادیت او نامتمادیت مطالعه کړو.
2. د قایمو محوراتو سره د ګراف تقاطع.
3. د لومړي مشتق د اشارې مطالعه د تابع د تزاید او تناقص لپاره.
4. د تابع د اعظمي او اصغري ټکو لپاره د مشتق صفري ټکي پیدا کول.
5. د مجانبونو ټاکل.
6. د جدول ترتیبول او د هغوی په مرسته د ګراف رسمول.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دریم مثال: د $y = 2 + x - x^2$ تابع گراف رسم کړئ؟

حل: لیدل کېږي چې تابع د متحول د ټولو قیمتونو لپاره تعریف شوي ده.

1- ددې تابع د تقاطع ټکی د x او y له محورونو سره پیداکوو:

د y له محور سره د گراف تقاطع د ټکو د پیداکولو لپاره په ورکړشوي تابع کې $x = 0$ وضع کوو:

$$x = 0 \qquad y = 2 + 0 - 0 = 2$$

نو پورتنی گراف د y محور په $(0,2)$ نقطه کې قطع کوي.

د x د محور سره دگراف د تقاطع د ټکو دپیدا کولو لپاره y مساوي په صفر وضع کوو او د x قیمت پیداکوو:

$$y = 0 \;\; , \;\; 2 + x - x^2 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 2}}{-2} = -\frac{-1 \pm 3}{2}$$

$$x_1 = -1 \;\; , \;\; x_2 = 2$$

نو پورتنی گراف د x محور په $(-1,0)$ او $(2,0)$ نقطو کې قطع کوي.

2- د تابع اعظمي او اصغري ټکي پیداکوو، ددې کار لپاره دتابع اول او دویم مشتق څېړو.

$$y = 2 + x - x^2$$

څرنگه چې د تابع په اعظمي او اصغري نقطو کې د تابع لومړی مشتق صفر دی نو $y' = 0$ سره وضع کوو:

$$y' = 1 - 2x$$

$$y' = 0 \text{ ،} \quad 1 - 2x = 0$$

$$-2x = -1 \;\; \Rightarrow \;\; 2x = 1$$

$$x = \frac{1}{2}$$

تابع په $x = \frac{1}{2}$ نقطه کې یو اعظمي یو یا اصغري قیمت لري، دهغې دپیژندنې له پاره دتابع دویم مشتق په $x = \frac{1}{2}$ ټکو کې څېړو:

$$y'' = -2 < 0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځرنګه چې y'' تل منفي دی، نو په $x=\frac{1}{2}$ کې هم منفي دی، ځکه نو تابع په $x=\frac{1}{2}$ ټکی کې یو اعظمي قیمت لري ځرنګه چې د $x=\frac{1}{2}$ لپاره $y=2+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=2\frac{1}{4}$ کېږي، نو د تابع اعظمي نقطه داده:

$(\frac{1}{2}، 2\frac{1}{4})$

دامنحني دانعطاف نقطه نه لري، ځکه چې دهر x لپاره $y''<0$ دی.

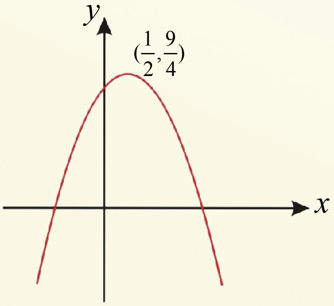
3- په $\pm\infty$ کې دګراف څېړل:

$$\lim_{x\to\infty} y=\lim_{x\to\infty}(2+x-x^2)=\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} y=\lim_{x\to-\infty}(2+x-x^2)=-\infty$$

د زیاتې روښانتیا لپاره لاندې جدول ترتیب شوی، او د تابع ټول بدلونو نه په هغو کې په ګوته کوو او وروسته نوموړی ګراف رسموو.

x		-1		$\frac{1}{2}$		2	
y'	$+$		$+$	0	$-$		$-$
y	↗	0	↗	$2\frac{1}{4}$	↘	0	↘



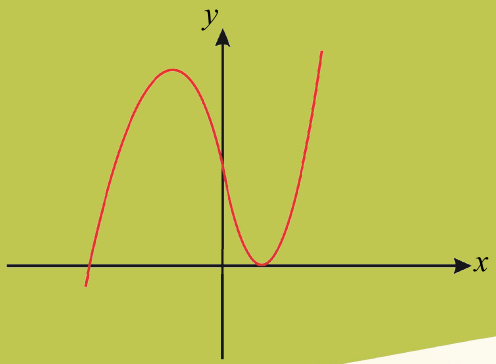
پوښتنې

1- د لاندې توابعو موضعي Extreme ټکی و ټاکئ.

$a)\ f(x)=x^2-3x+2$ $\qquad b)\ f(x)=\frac{x+1}{x^2}$ $\qquad c)\ y=3x^2-4x+1$

2- د $f(x)=3x^3-4x^2$ د تابع مطلقه min پیداکړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

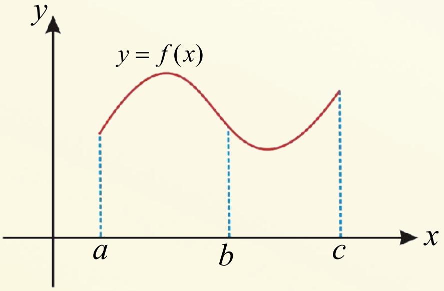


د انعطاف د نقطې ټاکل

هغه ټکي چې د یوې تابع ګراف په هغې کې خپل محدبیت، مقعریت ته او یا ددې پر عکس بدلوي د څه په نامه یادیږي؟ آیا په دې ټکي کې د دویم مشتق علامه او قیمت څېړلای شئ؟

فعالیت

لاندینی شکل په پام کې ونیسئ.

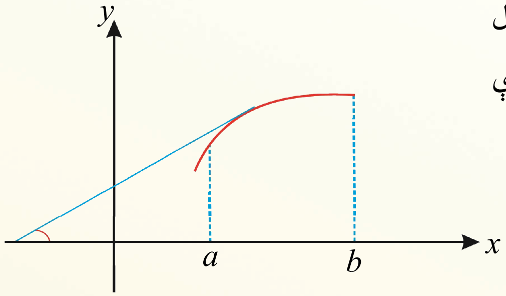


- د $y = f(x)$ د تابع منحني د (a,b) په انټروال کې څه ډول منحني بلل کېږي؟
- د $y = f(x)$ د تابع منحني د (b,c) په انټروال کې څه ډول منحني بلل کېږي؟
- د (a,b) په انټروال کې په منحني یو مماس رسم کړئ او له هغه مماس سره یې پرتله کړئ چې د (b,c) په انټروال کې په منحني رسمېږي.

د پورتني فعالیت پایله داسې بیانوو:

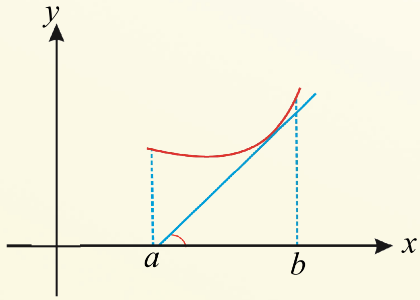
1. د $y = f(x)$ تابع منحني په یوه انټروال کې پړسیدلی یا محدب بلل کېږي، که چېرې په دې انټروال کې په منحني مماس رسم شي، نو مماس د منحني له پاسه یا پورته خواته پروت وي، په دې صورت کې د تابع دویم مشتق منفي $y'' < 0$ په لاس راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



په دې ډول که د $y=f(x)$ د تابع دويم مشتق د انټروال په ټولو ټکو کې منفي وي، نو د تابع ګراف يا منحني په دې انټروال کې محدب پاتې کېږي.

2. د $y=f(x)$ د تابع منحني په يوه انټروال کې ننوتې يا مقعره بلل کېږي، که چېرې په نوموړي انټروال کې په منحني مماس رسم شي، نو مماس له منحني څخه لاندې يا بشکته خوا پروت وي، که د $y=f(x)$ د تابع دويم مشتق د انټروال په ټولو ټکو کې مثبت وي $y''>0$ وي، منحني په دې انټروال کې مقعره بلل کېږي.



تعريف: هغه نقطه چې تابع له مقعريت څخه محدبيت ته او يا ددې پر عکس جهت بدلوي، او لومړی مشتق يې موجود او دويم مشتق يې صفر شي د انعطاف (Inflection) نقطه بلل کېږي.

که د $y=f(x)$ تابع د $x=x_0$ په ټکي کې چې د تابع دويم مشتق صفر شي ($f''(x_0)=0$) وي تابع د $x=x_0$ په ټکي کې د انعطاف نقطه لري او ددې برعکس تابع د انعطاف نقطه نه لري.

لومړی مثال: د $f(x)=x^2-5x+4$ د تابع ګراف رسم محدبيت او مقعريت يې وڅېړئ.

حل: تابع د متحول د ټولو قيمتونو لپاره تعريف شوې ده.

1- د y له محورسره تقاطع

$$\left.\begin{matrix} x=0 \\ y=4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow (0,4)$$

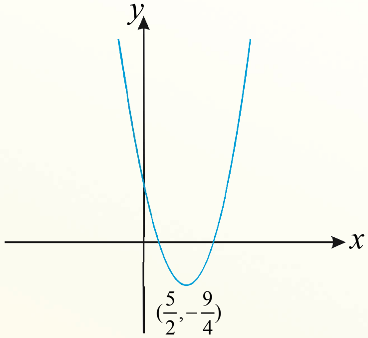
2- د x له محورسره تقاطع

$$\left.\begin{matrix} y=0 \\ x^2-5x+4=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x^2-5x+4=(x-4)(x-1) \Rightarrow x_1=4 \quad , \quad x_2=1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د x له محور سره د تقاطع ټکي $(4,0)$ او $(1,0)$ دي.

x	$-\infty$	0	1	$\frac{5}{2}$	4	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$	
$f(x)$	$+\infty \searrow$	$4 \searrow$	$0 \searrow$	$-\frac{9}{4}$ min $\nearrow$	$0 \nearrow$	$+\infty$



د ګراف، مقعریت او محدبیت د څېړلو لپاره د تابع دویم مشتق په لاس راوړو:

$$f(x)=x^2-5x+4 \quad \Rightarrow \quad y'=2x-5$$
$$f''(x)=2>0$$

څرنګه چې $y''>0$ دی، نو په پایله کې ویلای شو چې منحني ننوتې یا مقعره ده.

دویم مثال: هغه انټروالونه وټاکئ چې په هغې کې د $y=x^3+9x^2-6x+1$ تابع ګراف محدب یا مقعر وي.

حل:

$$y=x^3+9x^2-6x+1$$
$$y'=3x^2+18x-6 \quad \Rightarrow \quad y''=6x+18$$
$$y''<0 \quad \Rightarrow \quad 6x+18<0$$
$$6x<-18 \quad \Rightarrow \quad x<-3$$
$$y''>0 \quad \Rightarrow \quad 6x+18>0$$
$$6x>-18$$
$$x>-3$$

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
y''	$-$	0	$+$
y	$\cap$		$\cup$

مقعر انعطاف محدب

څرنګه چې لیدل کېږي د تابع دویم مشتق په $(-\infty,-3)$ انټروال کې منفي او د $(-3,+\infty)$ انټروال کې مثبت دي، نو دا ډول ګراف په لومړي انټروال کې محدب او په دویم کې مقعر دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دريم مثال: د $f(x)=x^5-5x^3$ د تابع د انعطاف ټکی و ټاکئ؟

حل:

$$f(x)=x^5-5x^3 \quad \Rightarrow \quad f'(x)=5x^4-15x^2$$
$$f''(x)=20x^3-30x$$
$$f''(x)=0$$
$$20x^3-30x=0$$
$$x(20x^2-30)=0$$
$$x_1=0$$
$$20x^2-30=0$$
$$x^2=\frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad x_2=\sqrt{\frac{3}{2}} \quad , \quad x_3=-\sqrt{\frac{3}{2}}$$

x	$-\infty$		$-\sqrt{\frac{3}{2}}$		0		$\sqrt{\frac{3}{2}}$		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\cap$	-13.65	$\cup$		$\cap$	$-6\sqrt{\frac{3}{2}}$	$\cup$	

ليدل کېږي چې په $x=\sqrt{\frac{3}{2}}$ او $x=0$, $x=-\sqrt{\frac{3}{2}}$ کې د تابع دويم مشتق صفر دی يا $f''(x)=0$ علامه بدلوي او په دې ټکو کې مماس رسميدلی شي چې هغه ټکی د انعطاف ټکی دی.

پوښتنې

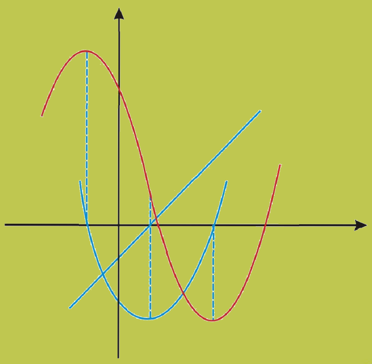
1. د $f(x)=x^2-4$ د تابع محدبيت او مقعريت وټاکئ.
2. د $f(x)=-2x^2-1$ د تابع د انعطاف نقطه وټاکئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د منحني ګانو رسمول

د دويمې درجې تابع ګانو ګراف

د مخامخ شکل په اړه خپل نظر بيان کړئ.



- د $f(x) = x+1$ د تابع ګراف د $f(x) = -x+1$ د تابع له ګراف سره پرتله کړئ.
- د $y = ax^2 + bx + c$ د تابع د تعريف ساحه و ټاکئ آيا دا تابع متمادي ده؟
- د نوموړې تابع لومړی مشتق پيدا او د Maximum او Minimum ټکي او د تناظر محور يې وټاکئ.
- د تابع ليميټ په هغه صورت کې پيدا کړئ چې $x \to \pm\infty$ وکړي.
- له محورونو سره د تقاطع ټکي و ټاکئ.
- د تحولاتو جدول ترتيب او نوموړی منحني رسم کړئ.

د پورته فعاليت پايله داسې بيانوو:

1- د تابع د تعريف ساحه: ليدل کيږي چې تابع د متحول د ټولو قيمتونو لپاره تعريف شوی ده، يعنې:

$$D_f \to (-\infty, +\infty)$$

نو تابع د خپل تعريف په ساحه کې متمادي ده.

2- د تابع د بحراني ټکو او د تناظر محور ټاکل:

$$f'(x) = 2ax + b = 0$$
$$f'(x) = 0$$
$$2ax + b = 0$$
$$2ax = -b$$
$$x = \frac{-b}{2a}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $x = \dfrac{-b}{2a}$ قیمت په اصل تابع کې وضع کوو:

$$y = a(-\frac{b}{2a})^2 + b(-\frac{b}{2a}) + c \Rightarrow a \cdot \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{2a} + c = 0$$

$$y = \frac{b^2 - 2b^2 + 4ac}{4a} = \frac{-b^2 + 4ac}{4a} \Rightarrow \frac{4ac - b^2}{4a}$$

د $(-\dfrac{b}{2a} , \dfrac{4ac - b^2}{4a})$ ټکی بحراني یعنې اعظمي یا اصغري دی.

الف: که $a > 0$ وي، نو: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \Rightarrow a > 0$

تابع په $(\dfrac{-b}{2a}, \dfrac{4ac - b^2}{4a})$ ټکي کې Min لري.

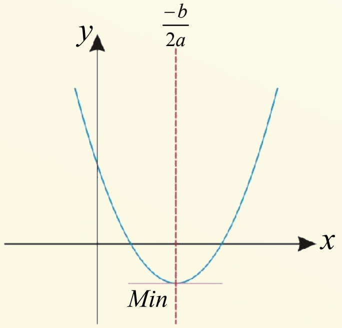
ب: که $a < 0$ وي، نو: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \Rightarrow a < 0$

تابع په $(\dfrac{-b}{2a}, \dfrac{4ac - b^2}{4a})$ ټکي کې Max لري.

3- د ګراف د رسمولو لپاره جدول ترتیب او ګراف یې رسموو:

$a > 0$

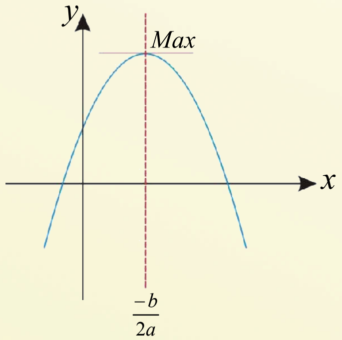
x	$-\infty$		$\frac{-b}{2a}$		$+\infty$
y'		$-$		$+$	
y	$+\infty$	↘	$\frac{4ac-b^2}{4a}$	↗	$+\infty$



ځرنګه چې $a > 0$ د منحني خوله(جهت) پورته خواته او د $(-\dfrac{b}{2a}, \dfrac{4ac - b^2}{4})$ اصغري نقطه ده.

$a < 0$

x	$-\infty$		$\frac{-b}{2a}$		$+\infty$
y'		$+$		$-$	
y	$-\infty$	↗	$\frac{4ac-b^2}{4a}$	↘	$-\infty$



ځرنګه چې $a < 0$ د منحني خوله(جهت) ښکته خواته او د $(-\dfrac{b}{2a}, \dfrac{4ac - b^2}{4})$ اعظمي نقطه ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی مثال: د $f(x)=x^2-4x+3$ د تابع تحولات مطالعه او ګراف يې رسم کړئ.

حل:

1- د تابع د تعریف ساحه $(-\infty,+\infty)$ تابع د ټولو حقیقي قیمتونو لپاره تعریف شوي ده، نو تابع په دې انټروال کې متمادي ده.

2- د تابع د منحني تقاطع د x له محور سره:

$$\left.\begin{aligned} &y=0\\ &x^2-4x+3=0\\ &(x-1)(x-3)=0\\ &x-1=0 \Rightarrow x=1\\ &x-3=0 \Rightarrow x=3\end{aligned}\right\} \quad (1,0) \quad , \quad (3,0)$$

3- د تابع د منحني تقاطع د y له محور سره:

$$\left.\begin{aligned} &x=0\\ &y=0-4\cdot 0+3\\ &y=3\end{aligned}\right\} \quad (0,3)$$

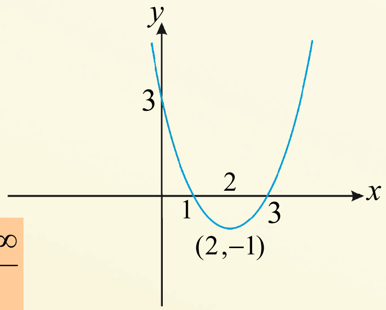
4- د تابع د extreme ټکو د پیداکولولپاره د لومړي مشتق صفري ټکي پیدا او جدول يې ترتیبوو:

$$f'(x)=2x-4=0 \Rightarrow 2x=4 \Rightarrow x=2$$

$$f(2)=2^2-4\cdot 2+3=-1 \} \Rightarrow V(2,-1)\min$$

$$x\to\pm\infty \Rightarrow f(x)\to\pm\infty$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\left[x^2-4x+3\right]=+\infty$$



x	$-\infty$	0	1	2	3	$+\infty$
y'	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$	
y	$-\infty \searrow$	$3 \searrow$	$0 \searrow$	$-1 \nearrow$ (Min)	$0 \nearrow$	$+\infty$

دویم مثال: د $f(x)=-x^2+2x$ د تابع تحولات مطالعه او ګراف يې رسم کړئ.

حل: لیدل کېږي چې تابع د ټولو قیمتونو لپاره تعریف شوي ده، نو:

1- د تابع د تعریف ساحه عبارت ده له: $(-\infty,+\infty)$ چې په دې ساحه کې تابع متمادي ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

2- د تابع د منحني د تقاطع ټکی د x له محور سره:

$$f(x)=0$$
$$-x^2+2x=0$$
$$x(-x+2)=0$$
$$x_1=0 \qquad (0,0)$$
$$-x+2=0$$
$$x_2=2 \qquad (2,0)$$

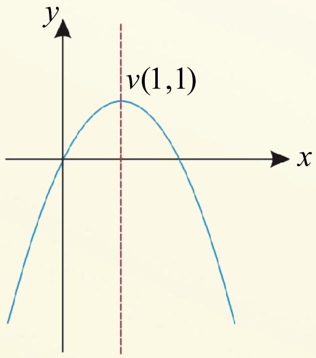
د تقاطع ټکی

3- د تابع د منحني تقاطع د y له محور سره:

$$x=0$$
$$f(x)=-x^2+2x$$
$$f(x)=0+2\cdot 0$$
$$f(x)=0 \qquad (0,0)$$

4- د تابع د extreme نقطو د پیداکولو لپاره د تابع لومړی مشتق پیداکوو او جدول یې ترتیب او ګراف یې رسموو:

$$D_f \to (-\infty,+\infty)$$
$$f(x)=-x^2+2x$$
$$f'(x)=-2x+2=0$$
$$-2x+2=0$$
$$-2x=-2$$
$$\left.\begin{array}{l} x=1 \\ f(1)=1 \end{array}\right\} \Rightarrow V(1,1)Max$$



x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		+		+		−		−	
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↗	1 (Max)	↘	0	↘	$-\infty$

په جدول کې لیدل کېږي چې د مشتق علامه د مثبت څخه منفي ته او یا د تزاید حالت څخه تناقص ته شکل بدلوي، نو تابع د $(1,1)$ په ټکي کې اعظمي ده.

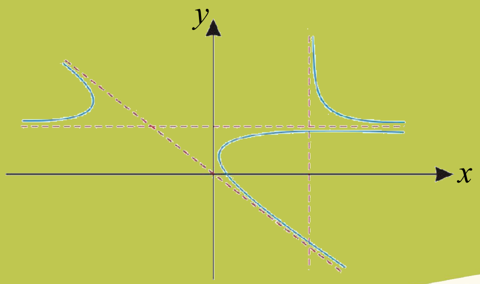
پوښتنې

1. د $f(x)=2x^2-x-1$ د تابع ګراف رسم کړئ.
2. د $f(x)=x^2-x-2$ د تابع د ګراف بدلونونه وڅېړئ او ګراف یې رسم کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د توابعو د ګرافونو مجانبونه

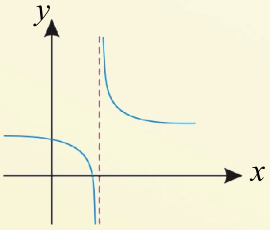
شکل ته پام وکړئ ټکی ټکی کرښې د څه په نامه یادېږي، نومونه یې واخلئ.



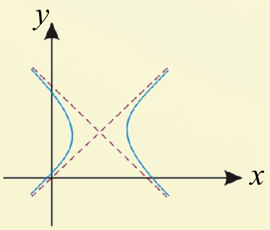
- مجانبونه څه ډول کرښې دي؟
- مجانبونه، منحنيګانې په کومو ټکو کې قطع کوي؟

د پورتني فعالیت پایله داسې بیانوو:

مجانبونه: هغه مستقیمې کرښې دي چې د منحني د ګراف لپاره د لاربشود حیثیت لري او د منحني کرښه قطع کړي، هغه تابع ګانې چې د متحول د ځینو قیمتونو لپاره غیر متمادي وي، مجانبونه لري او په دريې ډوله دي.



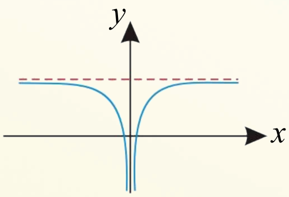
1- **عمودي مجانب**: د $y = f(x)$ تابع عمودي مجانب لري چې $x \to a$ او $y \to \infty$ وکړي، یعنې $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ شي یا په بل عبارت په کسري تابع ګانو کې که چېرې د کسر مخرج مساوي په صفر شي، نوموړې تابع بې‌نهایت خوا ته تقرب کوي، نو ددې ډول مجانب د پیداکولو لپاره د کسر مخرج له صفر سره مساوي وضع کوو.



2- **مایل مجانب**: د $y = f(x)$ کسري تابع کله چې د صورت او مخرج د تقسیم حاصل د یوه مستقیم خط په شکل ($y = ax + b$) لاسته راشي داسې چې $a \neq 0$ وي په لاس راځي او دا هغه وخت امکان لري چې تابع د مایل مجانب لرونکی وي، یعنې د متحول د صورت درجه د متحول د مخرج له درجې څخه د یو واحد په اندازه لوړه وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په یاد ولرئ چې که یوه تابع د افقي مجانب لرونکي وي، مایل مجانب نه لري او بر عکس که چیرې مایل مجانب ولري افقي مجانب نه لري.



3- **افقي مجانب**: یوه تابع هغه وخت د افقي مجانب لرونکې ده چې که $x \to \pm\infty$ وکړي د تابع قیمت یو ثابت مقدار شي او یا په بل عبارت یوه تابع هغه وخت د افقي مجانب لرونکې ده چې که $x \to \pm\infty$ وکړي، نو $y \to c$ ته تقرب کوي، یعني $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = c$ شي.

لومړی مثال: د $f(x) = \dfrac{x+1}{2x-4}$ تابع عمودي او افقي مجانب پیدا کړئ.

حل: د عمودي مجانب د پیدا کولو لپاره د کسر مخرج مساوي په صفر وضع کوو، لرو چې:

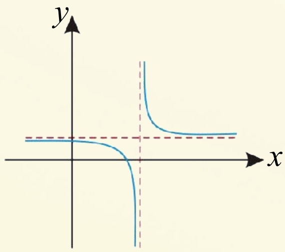
نو $x = 2$ د تابع عمودي مجانب دی.

$$2x-4=0 \Rightarrow 2x=4 \Rightarrow x=2$$

افقي مجانب عبارت دی له: $y = \dfrac{1}{2}$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x+1}{2x-4}\right) = \frac{1}{2}$$

x	-1	0	$+1$
y	0	$-\frac{1}{4}$	-1



دویم مثال: د $y = \dfrac{x^2+2x-1}{x}$ تابع د منحني مجانبونه وټاکئ.

حل:

1- مایل مجانب: ددې مجانب د پیدا کولو لپاره د تابع صورت د تابع پر مخرج وېشو:

$$y = \frac{x^2+2x-1}{x} = x+2-\frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad y = x+2$$

2- عمودي مجانب: د دې مجانب د پیدا کولو لپاره د تابع مخرج مساوي په صفر وضع کوو:

$$y = \frac{x^2+2x-1}{x} \quad \Rightarrow \quad x = 0$$

3- افقي مجانب: څرنګه چې تابع مایل مجانب لري، نو افقي مجانب نه لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دریم مثال: د $f(x)=\dfrac{(x-3)(x+2)}{(x+1)(x-2)}$ تابع مجانبونه وټاکئ.

حل:

1- عمودي مجانب: د تابع مخرج مساوي په صفر وضع کوو:

$$(x+1)(x-2)=0$$

$$\left.\begin{array}{l} x+1=0 \\ x_1=-1 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} x-2=0 \\ x_2=2 \end{array}$$

نو $x=2$ او $x=-1$ د تابع عمودي مجانبونه دي.

2- افقي مجانب: د افقي مجانب د پیداکولو لپاره د تابع لېمیټ په لاس راوړو:

$$y=\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{(x-3)(x+2)}{(x+1)(x-2)}=1$$

نو $y=1$ د تابع افقي مجانب دی.

3- څرنګه چې تابع افقي مجانب لري، نو مایل مجانب نه لري.

د مجانبونو د ټاکلو عمومي طریقه:

که چېرې د $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ په ناطقه تابع کې m او n په ترتیب سره د صورت او مخرج درجې وي، نو:

الف: که $m<n$ وي، نو د x محور افقي مجانب دی.

ب: که $m=n$ وي، نو $y=b$ افقي مجانب دی، داسې چې b د m او n د درجو د حدودو د ضریبونو نسبت دی.

ج: که چېرې $m>n$ وي، نو افقي مجانب نه لري، ولې د مایل مجانب احتمال یې شته.

د: که چېرې $m=n+1$ وي(که د صورت درجه د یوه واحد په اندازه له مخرج څخه لویه وي) تابع هرو مرو مایل مجانب لري، په دې حالت کې افقي مجانب نه لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

د لاندې توابعو مجانبونه وټاکئ.

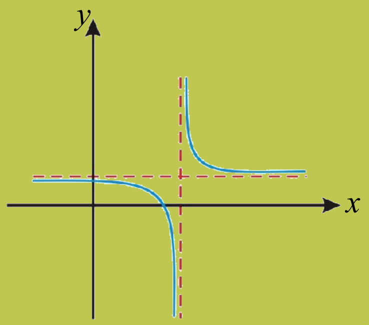
1) $f(x)=\dfrac{3x-6}{x^2-x-2}$ 2) $f(x)=\dfrac{-2x^2}{x^2+1}$

3) $f(x)=\dfrac{8}{x^2-4}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د هوموگرافیک تابع گانو گراف

شکل ته پاملرنه وکړئ دا شکل د څه ډول تابع گراف دی؟ افقي او عمودي مجانبونه یې وښیئ.



- هوموگرافیک تابع څه ډول تابع ده، په یوه مثال کې یې واضح کړئ.
- د $y=\dfrac{1}{x}$ د تابع گراف رسم کړئ.
- د نوموړي تابع مجانبونه لومړی پیدا او بیا یې رسم کړئ.
- د تابع د گراف تقاطع د x او y له محورونو سره پیدا کړئ.

د پورتني فعالیت پایله داسې بیانوو:

هغه تابعگانې چې د $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ شکل ولري، هوموگرافیک تابع گانې بلل کیږي، داسې چې $c\neq 0$ وي. دا ډول توابع دوه مجانبونه لري چې:

1- افقي مجانب یې:

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{ax}{x}+\frac{b}{x}}{\frac{cx}{x}+\frac{d}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{a+\frac{b}{x}}{c+\frac{d}{x}}\ \Rightarrow\ y=\frac{a}{c}$$

2- عمودي(قایم) مجانب یې:

$$cx+d=0\ \Rightarrow\ cx=-d\ \Rightarrow\ x=-\frac{d}{c}$$

لومړی مثال: د $f(x)=\dfrac{2x-1}{x-3}$ د تابع بدلونونه وڅیړئ او گراف یې رسم کړئ.

حل:

$$x-3=0$$
$$x=3$$

1. څرنگه چې د تابع مخرج د $x=3$ په قیمت کې صفر کیږي، نو تابع پرته له $x=3$ څخه د متحول په ټولو قیمتونو کې معینه ده، یعنې د تابع د تعریف ساحه داکو: $Domain=IR\setminus\{3\}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

2. د تابع د منحني تقاطع د x له محور سره:

$$\left.\begin{aligned} &f(x)=0\\ &2x-1=0\\ &2x=1 \Rightarrow x=\frac{1}{2}\end{aligned}\right\}\ (\frac{1}{2},0)$$

3. د تابع د منحني تقاطع د y له محور سره:

$$x=0 \Rightarrow f(0)=\frac{2\cdot 0-1}{0-3}=\frac{1}{3} \quad \Big\}\ (0,\frac{1}{3})$$

4. د مجانبونو ټاکل:

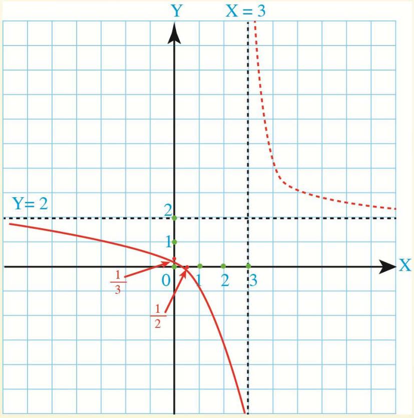
الف- افقي مجانب: $y=2$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{2x-1}{x-3}=2$ یا $f(x)=\frac{a}{c}=\frac{2}{1}=2$

ب- عمودي مجانب: $x=3 \Leftarrow x-3=0$ یا $x=-\frac{d}{c}=-\frac{-3}{1}=3$

5. د تابع د extreme ټکي پیدا کوو او جدول یې ترتیب او ګراف یې رسموو:

$$f'(x)=\frac{2(x-3)-(2x-1)}{(x-3)^2}=\frac{-5}{(x-3)^2}<0$$

$$f''(x)=\frac{0\cdot(x-3)^2-(-5)\cdot 2(x-3)}{(x-3)^4}=\frac{10(x-3)}{(x-3)^4}=\frac{10}{(x-3)^3}$$



x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f'(x)$	$-$		$-$
$f''(x)$	$-$		$+$
$f(x)$	$2 \searrow -\infty$	نه دی تعریف شوی	$+\infty \searrow 2$

دویم مثال: د $f(x)=\frac{x-1}{x+1}$ د تابع د ګراف بدلونونه و څېړئ او ګراف یې رسم کړئ.

حل: $x=-1 \Leftarrow x+1=0$

1- د تابع د تعریف ساحه $D_f \to IR\setminus\{-1\}$ یعني تابع په $x=-1$ ټکي کې تعریف شوې نه ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

2- د تابع د منحني تقاطع د x له محور سره: $y=0 \Rightarrow x-1=0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow (1,0)$

3- د تابع د منحني تقاطع د y له محور سره: $x=0 \Rightarrow y=\dfrac{0-1}{0+1}=-1 \Rightarrow y=-1 \Rightarrow (0,-1)$

4- د مجانبونو ټاکل:

الف- عمودي مجانب: $x+1=0 \Rightarrow x=-1$

ب- افقي مجانب: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x-1}{x+1} \Rightarrow f(x)=y=1$

5- د تابع extreme نقطې پیدا کوو، جدول یې ترتیب او ګراف یې رسموو:

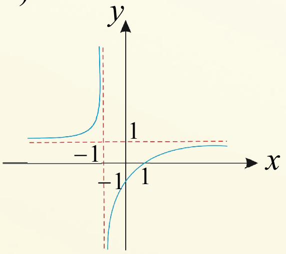
$$f(x)=\frac{x-1}{x+1}$$

$$f'(x)=\frac{1\cdot(x+1)-1\cdot(x-1)}{(x+1)^2}=\frac{x+1-x+1}{(x+1)^2}=\frac{2}{(x+1)^2}>0$$

$$f''(x)=\frac{0\cdot(x+1)^2-2\cdot 2(x+1)}{(x+1)^4}=\frac{-4(x+1)}{(x+1)^4}=\frac{-4}{(x+1)^3}$$

x	$-\infty$	
$f'(x)$	+	+
$f''(x)$	+	−
$f(x)$	$1 \nearrow +\infty$	$-\infty \nearrow 1$

نه دی تعریف شوی



دریم مثال: غواړو د $f(x)=\dfrac{2x-5}{x}$ تابع ګراف رسم کړو.

حل:

1- د تابع د تعریف ساحه تر څېړنې لاندې نیسو لیدل کېږي چې تابع پرته له $x=0$ څخه نور د متحول د ټولو قیمتونو لپاره معینه ده، یعني: $D_f \to IR\setminus\{0\}$

2- د محورونو سره د تقاطع ټکي

الف- د x له محور سره تقاطع:

$$f(x)=0 \Rightarrow \frac{2x-5}{x}=0$$

$$\left.\begin{array}{l} 2x-5=0 \\ 2x=5 \Rightarrow x=\dfrac{5}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow (2.5,0)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب- د y له محور سره تقاطع: د $x=0$ لپاره د $f(x)$ تابع تعریف شوې نه ده، نو له y محور سره تقاطع نه لري.

3- **مجانبونه**:

الف- عمودي مجانب: څرنګه چې په مخرج کې یوازې x موجود دی، نو $x=0$ یې عمودي مجانب دی چې د y محور کېږي.

ب- افقي مجانب: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[\frac{2x-5}{x}\right]=2$ نو $y=2$ د تابع افقي مجانب دی.

4- د بحراني ټکو پیدا کول: د بحراني ټکو د پیدا کولو لپاره د تابع لومړی مشتق پیدا کوو

$$f(x)=\frac{2x-5}{x}$$

$$f'(x)=\frac{2\cdot x-(2x-5)}{x^2}=\frac{2x-2x+5}{x^2}$$

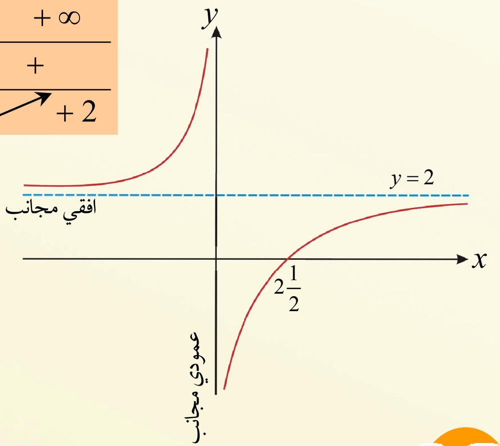
$$f'(x)=\frac{5}{x^2}>0$$

څرنګه چې $f'(x)>0$ دی، نو تابع متزایده ده.

دګراف د رسمولو لپاره د تابع تحولات په جدول کې ترتیبوو:

x	$-\infty$		0		2.5		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$		$+$	
$f(x)$	2	↗ $+\infty$	‖	$-\infty$ ↗	0	↗	$+2$

نه دی تعریف شوی



پوښتنې

1. د $f(x)=\frac{x-1}{x+3}$ تابع بدلونونه وڅېړئ او رسم یې کړئ.

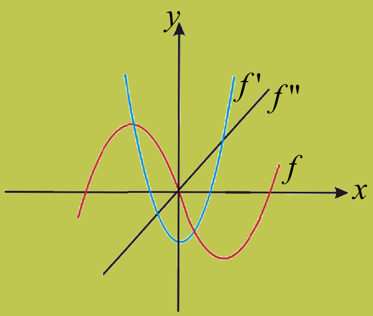
2. د $f(x)=\frac{x}{x-4}$ تابع بدلونونه وڅېړئ او رسم یې کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دریمې درجې یو مجهوله تابع ګراف $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ، $a \neq 0$

مخامخ شکل د ځینو توابعو ګرافونه راښیي تاسې د هرې

تابع د ګراف په هکله خپل نظر بیان کړئ.



- د $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ تابع په اړه فکر وکړئ او ووایئ چې تابع څومه درجه تابع ده؟
- د نوموړي تابع ضریبونه او ثابت حد ولیکئ.
- د نوموړي تابع دویم مشتق پیدا کړئ.

د پورته فعالیت پایله داسې بیانوو:

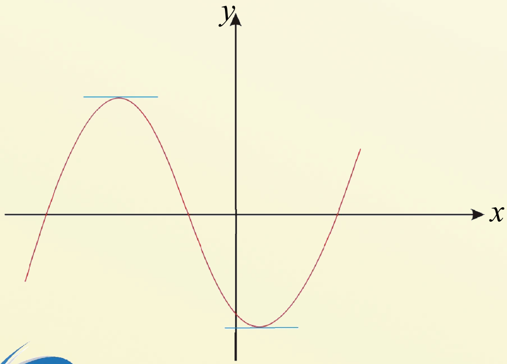
1. د $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ، په دریمه درجه تابع کې چې $a > 0$ وي داسې په پام کې نیسو. که چېرې د تابع لومړی مشتق پیدا کړو دویمه درجه تابع په لاس راځي، نو د $f'(x) = 0$ لپاره د دویمې درجې د معادلې حل په پام کې نیسو او Δ یې مطالعه کوو که چېرې د معادلې Δ له صفر څخه لوی $(\Delta f' > 0)$ وي، نو معادله(د تابع مشتق) دوه حله لري، که چېرې $a > 0$ وي منحنی له کین لوري څخه ښي لوري ته یوه نسبي اعظمي نقطه (Local Maximum) او یوه نسبي اصغـــــــري (Local Minimum) لري.

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$a > 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta f' > 0$

x	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow$		$\searrow$		$\nearrow +\infty$

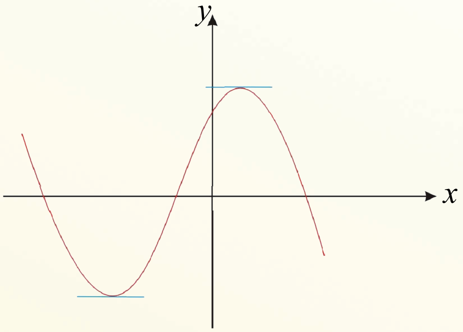


(c) ketabton.com: The Digital Library

2. د $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ ، په تابع کې که $a<0$ ، $f'(x)=0$ او $\Delta f'(x)>0$ معادله دوه جذرونه لري، که چېرې $\Delta f'>0$ نو منحني له کيڼ لوري څخه ښی لوري ته يوه نسبي اصغری(Local Minimum) او يوه نسبي اعظمي(Local Minimum) نقطه لري.

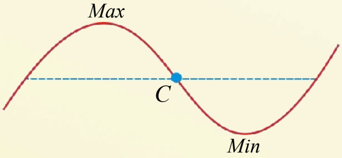
$$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$$
$$f'(x)=3ax^2+2bx+c$$
$$a<0 \quad \Rightarrow \quad \Delta f'>0$$

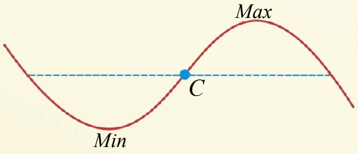
x		x_1		x_2	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$+\infty$ ↘		↗		↘ $-\infty$



3. که د دريمې درجې تابع منحني نسبي بحراني Extreme ولري، د Extreme دټکو د منځني ټکي يا د انعطاف د نقطې مختصات يې:

$$I(x_c,y_c)=\left(\frac{x_{max}+x_{min}}{2},\frac{y_{max}+y_{min}}{2}\right)$$





4. د دريمې درجې تابع د تناظر ټکی د تابع د انعطاف ټکی:

$$f'(x)=0$$
$$3ax^2+2bx+c=0$$

چې د تناظر ټکي يې وروسته د نوموړې معادلې له حل څخه د تناظر مرکز $x=-\dfrac{b}{3a}$ په لاس راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

5. د $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ په تابع کې که $a<0$ وي او له $f'(x)=0$ سره وضع شي او $f'(x)=0$ Δ نو معادله یو یا دوه مساوي جذرونه لري په هغه صورت کې چې $f'(x)\le 0$ وي، نو په دې صورت تابع، متناقصه ده او که چېرې $f'(x)\ge 0$ وي، نو په دې صورت کې تابع متزایده ده.

(2) (1)

لومړی مثال: د $f(x)=(x-1)(x+2)^2$ تابع تحولات وڅېړئ او ګراف یې رسم کړئ.

حل: لومړی د تابع Extreme ټکو مختصات په لاس راوړو، وروسته د لومړي مشتق په مرسته ګورو چې تابع په کومه برخه کې متزایده او په کومه برخه کې متناقصه ده. له محورونو سره د تقاطع ټکي پیدا کوو او د اعظمي او اصغري نقطو د تشخیص او د انعطاف نقطو د پیداکولو لپاره د تابع دویم مشتق په کار وړو د تحولاتو جدول یې ترتیبوو او بیا یې ګراف رسموو: $f(x)=x^3+3x^2-4$

$f'(x)=3x^2+6x$

$3x^2+6x=0$

$x(3x+6)=0$

$x_1=0 \quad , \quad 3x+6=0 \quad \Rightarrow \quad x_2=-2$

$f'(x)=0 \quad \Rightarrow x_1=0 \quad , \quad x_2=-2$

$f(0)=0^3+3\cdot 0^2-4=-4$

$f(-2)=(-2)^3+3(-2)^2-4$

$\quad\quad =-8+12-4=0$

$f''(x)=0 \quad \Rightarrow \quad 6x+6=0$

$6x=-6$

$x=-1$

د انعطاف د نقطې د لاسته راوړلو لپاره $x=-1$ په اصلي تابع کې وضع کوو چې د $f(x)$ قیمت لاسته راځي:

$f(-1)=(-1-1)(-1+2)^2=-2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د انعطاف ټکی: $I(-1,-2)$

له محورونو سره تقاطع:

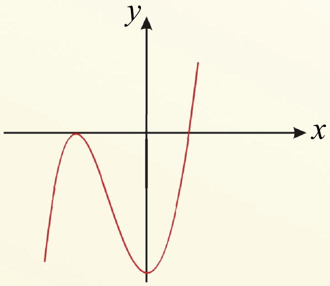
الف- د x له محور سره تقاطع:

$$y=0$$
$$(x-1)(x+2)^2=0$$
$$\left.\begin{array}{l}x-1=0\\x=1\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}(x+2)^2=0\\x+2=0\\x_2=-2\end{array}\right\}\Rightarrow(1,0)\ ,\ \ (-2,0)$$

ب- د y له محور سره تقاطع:

$$x=0$$
$$y=0^3+3\cdot0^2-4=-4\ \ \Rightarrow(0,-4)$$

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$-$		$-$		$+$	
$f''(x)$		$-$		$-$		$+$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↘	-2	↘	-4	↗	$+\infty$
			max				min		



دويم مثال: د $f(x)=-x^3+3x^2$ د تابع تحولات وڅېړئ او ګراف يې رسم کړئ.

حل: د تابع لومړی مشتق پيداکوو او وروسته يې صفري نقطې ټاکو او د تابع اعظمي او اصغري نقطې په لاس راوړو.

-1

$$f(x)=-x^3+3x^2$$
$$f'(x)=-3x^2+6x$$
$$f'(x)=0\ \ \Rightarrow\ -3x^2+6x=0\ \ \Rightarrow\ x(-3x+6)=0$$
$$x_1=0\ \ ,\ \ \ -3x+6=0\ \ \Rightarrow\ -3x=-6\ \ \Rightarrow\ x_2=2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

اعظمي او اصغري ټکي عبارت دي له:

$$\left.\begin{aligned} f(0) &= -0^3 + 3\cdot 0^2 = 0 \\ f(2) &= -2^3 + 3\cdot 2^2 = 4 \end{aligned}\right\} \Rightarrow (0,0)\ ,\quad (2,4)$$

2- محورونو سره تقاطع:

الف- د x له محور سره تقاطع:

$$\left.\begin{aligned} & y = 0 \\ & -x^3 + 3x^2 = 0 \\ & x^2(-x+3) = 0 \\ & x_1 = 0\ ,\quad -x+3 = 0 \\ & \qquad\qquad x_2 = 3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow (0,0)\ ,\qquad (3,0)$$

ب- د y له محور سره تقاطع:

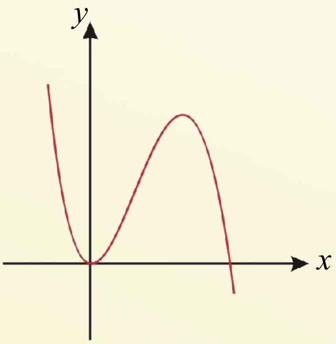
$$\left.\begin{aligned} & x = 0 \\ & f(x) = -0^3 + 3\cdot 0^2 = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow (0,0)$$

3- د انعطاف د نقطې د پيداکولو لپاره $f''(x)$ مطالعه کوو:

$$f''(x) = -6x + 6 = 0$$
$$x = 1$$
$$f(x) = -x^3 + 3x^2$$
$$f(1) = 2 \quad \Rightarrow \quad I(1,\ 2)$$

4- اوس يې جدول ترتيبوو او ګراف يې رسموو:

x	$-\infty$	0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$		$+$		$-$	
$f''(x)$	$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$f(x)$	$+\infty$ ↘	0	↗		↗	4	↘	$-\infty$
$f(x)$	∪		∪		∩		∩	
		Min نسبي				Max نسبي		



(c) ketabton.com: The Digital Library

دریم مثال: د $f(x)=x^3-3x^2+x+1$ د تابع د تناظر د مرکز مختصات پیدا کړئ.

حل: پوهیږو چې د تناظر مرکز د $x=\frac{-b}{3a}$ له رابطې څخه لاسته راځي، نو:

$$x=\frac{-b}{3a}=\frac{-(-3)}{3\cdot 1}=1 \quad \Rightarrow \quad f(1)=1^3-3(1)^2+1+1=0$$

$C(1,0)$ د تناظر د مرکز مختصات

پوښتنې

1. د لاندې تابع ګانو د تحولاتو جدول ترتیب او ګرافونه یې رسم کړئ.

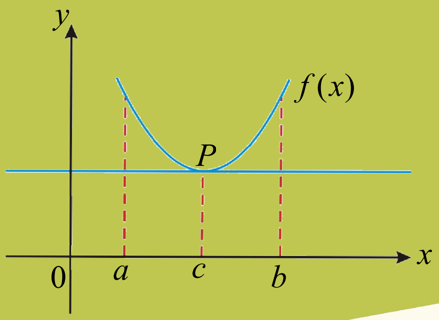
$a)\ f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+x+1 \qquad , \qquad b)\ f(x)=-(x-1)^3$

2- د $f(x)=-2x^2+6x-3$ د تناظر د مرکز مختصات پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

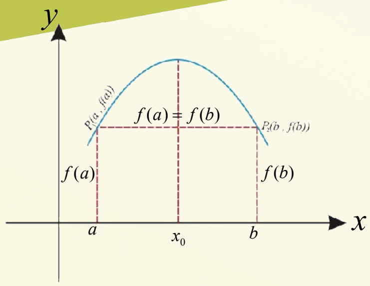
د رول قضیه

Rolle Theorem



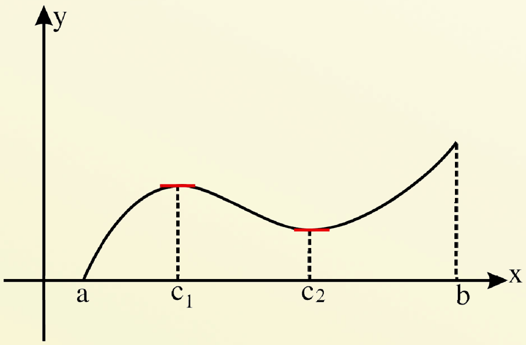
په مخامخ شکل کې د $f(x)$ تابع او د Δ مستقیم خط یو له بل سره څه اړیکې لري او $f'(c)$ له څه سره مساوي دی.

فعالیت



- په مخامخ شکل کې د (a,b) په انټروال کې د $f(x)$ په منحني باندې داسې ټکئ یا ټکي شته چې له هغو څخه په منحني داسې مماس رسم شي چې د x له محور سره موازي وي.
- د $f(x)$ تابع په کوم انټروال کې متمادي او په کومه فاصله کې د مشتق وړده.
- که چېرې $f(a)=f(b)$ وي، نو د x_0 ټکي په (a,b) انټروال کې وخېږئ.

له پورتني فعالیت څخه لاندې قضیه بیانولای شو:



قضیه: که چېرې د $f(x)$ تابع د $a \le x \le b$ په انټروال کې متمادي او د $a < x < b$ په انټروال کې د مشتق وړ وي او $f(a)=f(b)$ وي، نو لږ تر لږه د x_0 یو ټکی په $a < x_0 < b$ انټروال کې شته چې د $f'(x_0)=0$ شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ثبوت: څرنګه چې د $f(x)$ تابع په ورکړل شوی انټروال کې متمادي او د مشتق وړ ده، نو بحراني Extreme ټکی لري.

1- که $f(x)=c$ ثابته تابع وي، نو واضح ده چې $f'(x)=0$ ده.

2- که د $f(x)$ تابع ثابته نه وي، او $x_2, x_1 \in (a,b)$ او $f(x_1)>0$ وي، نو تابع په $x_0 \in [a,b]$ کې یو Maximum قیمت لري چې $f(x_0) \geq f(x_1) > 0$ شي او همدا راز که $f(x_2)<0$ وي، نو تابع یو اصغري Minimum قیمت لري.

څرنګه چې په Extreme نقطوکې د تابع مشتق صفر دی، نو $f'(x_0)=0$ کیږي.

لومړی مثال: د رول قضیه د $f(x)=\cos x$ د تابع لپاره په $[a,b]=[\pi,5\pi]$ فاصله کې تطبیق کړئ.

حل: څرنګه چې $f(\pi)=f(5\pi)=-1$ سره دی، نو د $f(x)$ تابع د هره x لپاره د مشتق وړ ده، نو د $(\pi,5\pi)$ په انټروال کې متمادي او په $(\pi,5\pi)$ په انټروال کې مشتق منونکی ده چې د Rolle د قضیې مطابق په $(\pi,5\pi)$ کې لږ تر لږه یو x_0 موجود دی چې د هغه قیمت لپاره $(\cos x)'=0$ شي. څرنګه چې $(\cos x)'=-\sin x$ دی، نو باید $-\sin x=0$ معادلې لږ تر لږه یو حل په $(\pi,5\pi)$ کې موجود وي.

$-\sin x=0 \Rightarrow \sin x=0$ دا معادله په $(\pi,5\pi)$ کې درې حله $4\pi, 3\pi, 2\pi$ قیمتونه اخیستلای شي.

دویم مثال: د رول قضیه د $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ تابع په $[a,b]=[-1,1]$ فاصله کې تطبیق کړئ.

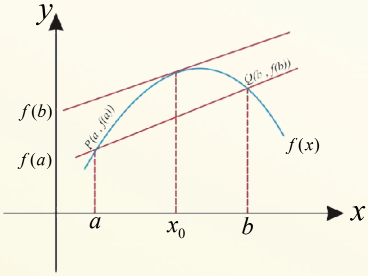
حل: لیدل کیږي چې تابع د پیل او پای په ټکو کې د مشتق وړ نه ده، ولې د رول د قضیې د تطبیق وړ ده ځکه $f(-1)=f(1)=0$ دی $f(0)$ تابع په $[-1,1]$ کې متمادي ده او په $[-1,1]$ کې د x_0 یو عدد شته چې $f'(x_0)=0$ شي او هغه $x_0=0$ دی.

د $y'(x)=\dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u}}$ فورمول څخه په ګټه اخیستنې سره مشتق په لاس راوړو:

$$f'(x)=\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}=\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} \quad \Rightarrow \quad f'(0)=\frac{0}{\sqrt{1-0^2}}=0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د متوسط قیمت قضیه(لاگرانژقضیه):



مخامخ شکل په پام کې و نیسئ:

- د یوې مستقیمې کرښې میل له کومې رابطې څخه په لاس راځي؟
- د $\overline{PQ}$ د مستقیمې کرښې میل پیدا کړئ.
- د $\overline{PQ}$ د کرښې میل د $f(x)$ د تابع له مشتق سره څه اړیکه لري؟

له پورتني فعالیت څخه قضیه داسې بیانوو:

قضیه: که چېرې $f(x)$ د $[a,b]$ په فاصله کې متمادي او د (a,b) په فاصله کې د مشتق وړ وي د (a,b) له انتروال څخه د c یو عدد شته دی داسې چې: $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$

یعنې: $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$ دی.

ثبوت: یوه مرستندویه تابع په پام کې نیسو، لیدل کېږي چې:

$$g(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot x$$

$$g(a)=f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot a=\frac{f(a)b-f(b)a}{b-a} \quad \text{......... I}$$

$$g(b)=f(b)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot b=\frac{f(a)b-f(b)a}{b-a} \quad \text{......... II}$$

نو $g(a)=g(b)$ سره دی د رول د قضیې پر بنسټ سره د c عدد د (a,b) انتروال کې شته دی چې $g'(c)=0$ دی، نو:

$$g'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \Rightarrow g'(x)=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0 \Rightarrow f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$\Rightarrow f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: د $f(x)=2x^3-8x+1$ په تابع کې د متوسط قیمت قضیه په $[a,b]=[1,3]$ کې وڅیړئ.

حل: لیدل کېږي چې د $f(x)$ تابع په $[1,3]$ کې متمادي او په $(1,3)$ کې د مشتق وړ ده، نو د متوسط قیمت له قضیې سره سم په $(1,3)$ کې یو x_0 شته داسې چې:

$$f'(x_0)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{f(3)-f(1)}{3-1}=\frac{36}{2}=18$$

د c د پیداکولو لپاره لرو:

$$f'(x_0)=6x^2-8=18 \Rightarrow x_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{26}{6}}$$

څرنګه چې $x=\sqrt{\frac{26}{6}}$ په $(1,3)$ کې ګډون لري، نو $x_0=\sqrt{\frac{13}{3}}$ دی.

او $x=-\sqrt{\frac{26}{6}}$ په $(1,3)$ فاصله کې واقع نه ده، نو د قبول وړ نه ده.

پوښتنې

1- که چېرې د $f(x)=\sqrt{x(4-1)}$ تابع د $[0,4]$ په انټروال کې راکړل شوې وي د x_0 قیمت داسې پیدا کړئ چې د رول قضیه په پورتنۍ تابع کې صدق وکړي.

2- که د $f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x$ تابع راکړل شوې وي د x_0 قیمت د $[0,3]$ په فاصله کې داسې وټاکئ چې د رول قضیه په هغې کې صدق وکړي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

3- د هوپیتال قاعده (L' Hopitall)

مخامخ مساوات څه بیانوي؟

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

فعالیت

- د $f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{x-1}$ د تابع لیمیټ په هغه صورت کی پیداکړئ چې $x\to 1$ ته تقرب وکړي.
- د پورتني تابع د صورت او مخرج مشتق پیدا او د تابع له لیمیټ سره یې پرتله کړئ.
- د $f(x)=\dfrac{3x^4-3x^2-4x-1}{2x^2-4x^3+2x^4}$ د تابع لیمیټ په هغه صورت کې پیداکړئ چې $x\to\infty$ تقرب وکړي.
- د پورتني تابع د صورت او مخرج مشتق پیدا او د تابع له لیمیټ سره یې پرتله کړئ.

له پورتني فعالیت څخه دا قاعده بیانوو:

د هوپیتال قاعده:

که د $f(x)$ او $g(x)$ تابع ګانې د (a,b) په انټروال کې تعریف او د مشتق وړ وي.

که چېرې $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ د لیمیټ نسبت $x\to a$ قیمت کې د $\dfrac{0}{0}$ مبهم شکل او په $x\to\infty$ کې د $\dfrac{\infty}{\infty}$ شکل ونیسي. په دې حالت کې د تابع د لیمیټ د پیداکولو لپاره د $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ مشتق پیداکوو او په هغه کې قیمتونه وضع کوو که بیاهم د تابع شکل مبهم وي، مشتق نیولو ته ادامه ورکوو تر څو د ابهام شکل ختم شي د مثال په ډول:

$$\lim_{x\to 2}\frac{2x^2+x-10}{x^2-4}=\frac{2\cdot 2^2+2-10}{2^2-4}=\frac{0}{0}$$

$$\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{4x+1}{2x}=\frac{4\cdot 2+1}{2\cdot 2}=\frac{9}{4}$$

یا

$$\lim_{x\to 2}\frac{(2x+5)(x-2)}{(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{2x+5}{x+2}=\frac{2\cdot 2+5}{2+2}=\frac{9}{4}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: د لوپیټال له قاعدې څخه په ګټه اخیستنې سره د لاندې توابعو لیمیټونه پیدا کړئ.

$$1)\ \lim_{x\to 0}\frac{x+\sin 2x}{x-\sin 2x} \qquad 2)\ \lim_{x\to 3}\frac{x^4-81}{x-3} \qquad 3)\ \lim_{x\to \infty}\frac{3x^2-4x+6}{7x^2-2x+1}$$

لومړی ځواب:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x+\sin 2x}{x-\sin 2x}=\frac{0+\sin 2\cdot 0}{0-\sin 2\cdot 0}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x+\sin 2x)'}{(x-\sin 2x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{1+2\cos 2x}{1-2\cos 2x}=\frac{1+2}{1-2}=-3$$

دویم ځواب:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^4-81}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{3^4-81}{3-3}=\frac{81-81}{3-3}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{(x^4-81)'}{(x-3)'}=\lim_{x\to 3}\frac{4x^3}{1}=\frac{4\cdot 3^3}{1}=108$$

دریم ځواب:

$$\lim_{x\to \infty}\frac{3x^2-4x+6}{7x^2-2x+1}=\frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x\to \infty}\frac{(3x^2-4x+6)'}{(7x^2-2x+1)'}$$

$$\lim_{x\to \infty}\frac{6x-4}{14x-2}=\frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x\to \infty}\frac{(6x-4)'}{(14x-2)'}=\frac{6}{14}=\frac{3}{7}$$

پوښتنې

د لوپیټال له قاعدې څخه په ګټه اخیستنې سره لاندې لیمیټونه پیدا کړئ.

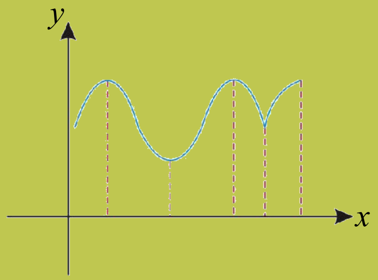
$$a)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} \quad , \quad b)\ \lim_{x\to 1}\frac{x^5-1}{x^3-1}$$

$$c)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x^3} \quad , \quad d)\ \lim_{x\to \infty}\frac{x^5}{3x^3}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د بحراني ټکو تطبیق

په مخامخ شکل کې تر ټولو لوړ ټکی او تر ټولو ټیټ ټکی وښیئ او دا ټکی د څه په نامه یادېږي.



مثالونه:

1مثال- دوه عددونه پیدا کړئ چې مجموعه یې 20 او د ضرب حاصل یې لوی ممکن قیمت ولري.

حل: که لومړی عدد ته x وویل شي، نو دویم عدد $20-x$ دی او د ضرب حاصل یې د تابع په شکل داسې: $f(x)=x(20-x)$ لیکو، څرنګه چې د x عدد په $[0,20]$ انټروال کې تحول کوي، نو د تابع مطلق اعظمي قیمت په $[0,20]$ کې لټوو:

$$f(x)=20x-x^2$$
$$f'(x)=0$$
$$20-2x=0$$
$$-2x=-20$$
$$x=10$$
$$f(10)=20\cdot10-10^2=200-100=100$$
$$f(0)=20\cdot0-0^2=0$$
$$f(20)=20\cdot20-20^2=400-400=0$$

لیدل کېږي چې (10 ، 100) د تابع اعظمي نقطه ده، نو مطلوب عددونه $x_1=10$ او $x_2=10$ چې د ضرب حاصل یې 100 دی.

2 مثال- د یوه خوځنده جسم د حرکت معادله د $x=(t-2)(t-3)$ په بڼه راکړل شوې ده، د جسم متوسط سرعت د $t_1=3$ او $t_2=4$ د وخت په واټنو کې پیدا کړئ.

حل: د منحني سرعت د تعریف په مرسته لیکلای شو چې:

$$\text{منحنی سرعت}=\frac{x_{(t_2)}-x_{(t_1)}}{t_2-t_1}=\frac{x_{(4)}-x_{(3)}}{4-3}=\frac{2-0}{4-3}=2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

3مثال- د کرې د حجم او سطحې د مشتقونو تر منځ منځنی نسبت پیدا کړئ.

حل:

$$د\ کرې\ حجم = v_{(x)} = \frac{4}{3}\pi x^3 \Rightarrow \frac{dv}{dx} = \frac{4}{3}\pi \cdot 3x^2 = 4\pi x^2$$

$$د\ کرې\ مساحت = S_{(x)} = 4\pi x^2 \Rightarrow \frac{ds}{dx} = 4\pi \cdot 2x = 8\pi x$$

$$\frac{dv}{ds} = \frac{4\pi x^2}{8\pi x} \Rightarrow \frac{dv}{ds} = \frac{1}{2}x$$

4مثال- د سانتي ګراد(C) او فارنهایت (F) د حرارت تر منځ $C = \frac{5}{9}(F-32)$ اړیکه شته، تاسې د (C) او (F) تر منځ منځنی نسبت وټاکئ.

حل: د منځنی سرعت د تعریف $(V_m = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x})$ په مرسته لیکلای شو:

$$\frac{\Delta C}{\Delta F} = \frac{C(F+\Delta F)-C(F)}{\Delta F} = \frac{\frac{5}{9}(F+\Delta F-32)-\frac{5}{9}(F-32)}{\Delta F} = \frac{5}{9}$$

5مثال- یوه ځمکه چې مستطیلي شکل لري، محیط یې $200m$ دی، کېدای شي اعظمي Maximum مساحت یې پیدا کړئ.

حل: په ورکړل شوي محیط سره کولای شو، ډېر مستطیلونه رسم کړو، ولې شرط دا دی چې هغه مستطیل زموږ مطلوب دی چې مساحت یې تر ټولو زیات وي، نو که د مستطیل اوږدوالی په x او سور یې په y وښیو، نو لیکلای شو:

$$میحط = 2x + 2y = 200$$

$$میحط = x + y = 100 \Rightarrow y = 100 - x$$

$$مساحت = x \cdot y$$

$$S = x(100-x) = 100x - x^2 \quad , \quad D_s = IR$$

$$x > 0 \quad , \quad y > 0 \Rightarrow 100 - x > 0 \Rightarrow x < 100$$

اوس د $S = 100x - x^2$ په تابع کې $0 < x < 100$ انتروال کې د تابع اعظمي مساحت داسې پیدا کوو:

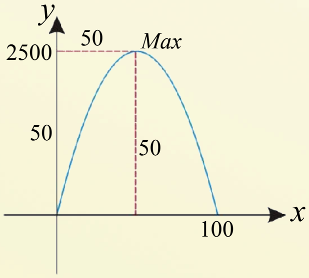
$$S' = 100 - 2x$$

$$S' = 0 \Rightarrow 100 - 2x = 0 \Rightarrow x = 50 \Rightarrow S_{(50)} = 2500$$

$$\lim_{x\to 0^+} S(x) = 0$$

$$\lim_{x\to 0^-} S(x) = 0$$

x	0	50	100
S'	+	0	−
S	0 ↗	2500	↘ 0



(c) ketabton.com: The Digital Library

په پایله کې له شکل څخه هم لیدل کېږي چې تر ټولو لوی مساحت هغه وخت لاسته راځي چې د مستطیل طول 50 واحده وي، نو مساحت 2500 واحد مربع کېږي.

6مثال- که د دوو عددونو مجموعه 200 وي، هغه عددونه داسې وټاکئ چې د مربعاتو مجموعه یې اصغري شي.

حل: که چېرې دا عددونه x او y وي، نو $x+y=200$ او که x ، $x^2+y^2=T_{(x)}$ فرض کړو، نو:

$$T_{(x)}=x^2+y^2$$
$$=x^2+(200-x)^2$$
$$=x^2+x^2-400x+(200)^2$$
$$=2x^2-400x+40000$$
$$T'_{(x)}=4x-400$$
$$T'_{(x)}=0$$
$$4x-400=0$$
$$x=100$$

په پایله کې ویلای شو چې د مربعاتو تر ټولو کوچنۍ مجموعه عبارت ده له: $T_{(100)}=20000$

7مثال- د A ټکی د $y=\dfrac{2}{x}$ د منحنی له پاسه حرکت کوي، تر ټولو کوچنۍ انټروال د A د نقطې او د مختصاتو د مبدې ترمنځ لاسته راوړو.

حل: د $y=\dfrac{2}{x}$ د تابع منحني پر مخ د A د نقطې مختصات $A(x,\dfrac{2}{x})$ دي، نو:

$$\overline{OA}=\sqrt{x^2{}_{(A)}+y^2{}_{(A)}}=\sqrt{x^2+\frac{4}{x^2}}$$

$$\overline{OA}^2=x^2+\frac{4}{x^2}=d^2 \Rightarrow d'_{(x)}=(x^2)'+(\frac{4}{x^2})'=2x-\frac{8x}{x^4}=2x-\frac{8}{x^3}$$

$$d'_{(x)}=\frac{2x^4-8}{x^3}$$
$$d'_{(x)}=0$$
$$2x^4=8$$
$$x_1=\sqrt{2} \quad , \quad x_2=-\sqrt{2}$$
$$d_{\sqrt{2}}=(\sqrt{2})^2+\frac{4}{(\sqrt{2})^2}=2+\frac{4}{2}=\frac{8}{2}=4$$
$$d_{-\sqrt{2}}=4$$

په پایله کې تر ټولو کوچنۍ فاصله له مبدا څخه 2 واحده ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

8مثال- یو مکعب مستطیل چې قاعده یې مربع ده، په پام کې نیسو، که د دریو واړو بعدونو مجموعه 24 وي، د مکعب تر ټولو لوی حجم پیدا کړئ.

حل: که د مکعب مستطیل د قاعدې ضلعې ته x او جګوالي ته یې y وویل شي، نو:

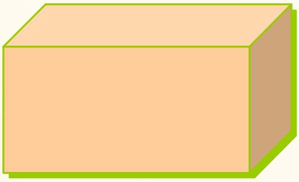
$$x + x + y = 24 \Rightarrow y = 24 - 2x$$

څرنګه چې $y \geq 0$ دی، نو $0 \leq x \leq 12$ کېږي او د مکعب مستطیل حجم عبارت دي له:

$$V = x^2 \cdot y \Rightarrow V = x^2(24 - 2x) = 24x^2 - 2x^3$$

$$V = 24x^2 - 2x^3$$
$$V'(x) = 48x - 6x^2$$
$$V'(x) = 0$$
$$48x - 6x^2 = 0$$
$$x(48 - 6x) = 0$$
$$x_1 = 0$$
$$48 - 6x = 0$$
$$-6x = -48$$
$$x = 8$$

$$V(0) = 24 \cdot 0^2 - 2 \cdot 0^3$$
$$= 0 - 0 = 0$$
$$V'(0) = 0$$
$$V(8) = 24 \cdot (8)^2 - 2 \cdot (8)^3$$
$$= 1536 - 1024 = 512$$
$$V(8) = 512$$
$$V(12) = 24 \cdot (12)^2 - 2 \cdot (12)^3 = 3456 - 3456 = 0$$
$$V(12) = 0$$



نو د مکعب مستطیل تر ټولو لوی حجم $512cm^3$ دی.

پوښتنې

1- د $y = x^3 + x^2 + x + 1$ د تابع تحولات پیدا او منحني یې رسم کړئ.

2- که د اوسپنې له یوې تختې څخه چې هره ضلع یې $1m$ طول لري یو سر خلاص بکس جوړېږي. د هغه له څلورو کنجونو څخه څلور مساوي مربع ګانې پرې کړئ او بیا هغه قات کړئ کوچنی مربع ګانې په کومه اندازه پرې شي چې نوموړی بکس ممکن اعظمي حجم ولري.

3- د $y = x^2$ ګراف ته ډېره نژدې نقطه له $A(3,0)$ نقطې سره پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د خبرکي مهم ټکي

- د $f(x)$ يوه تابع هغه وخت متزايده بلل کېږي چې د $[a,b]$ په انټروال کې متمادی او په (a,b) خلاص انټروال کې د مشتق وړ او $f'(x)>0$.
- د $f(x)$ يوه تابع هغه وخت متناقصه بلل کېږي چې د $[a,b]$ په انټروال کې متمادي او په (a,b) خلاص انټروال کې د مشتق وړ او $f'(x)<0$.
- د تابع له تزايد څخه مطلب دا دی چې د x د متحول په زياتېدو سره د تابع قيمت زيات او د تابع له تناقص څخه مطلب دا دی چې د x متحول په زياتېدو سره د تابع قيمت کم شي.
- په يوه تابع کې تر ټولو لوړې نقطې ته مطلق اعظمي(Absolute Maximum) او تر ټولو ټيټې نقطې ته مطلق اصغري(Absolute Minimum) وايي، د x هغه قيمتونه چې د هغوی لپاره تابع يا اعظمي او يا اصغري قيمتونه اخلي د Extreme په نامه يادېږي.
- مطلق Maximum: د $(x_0, f(x_0))$ نقطه مطلقه اعظمي بلل کېږي، که چېرې د $f(x)$ د تعريف په ساحه کې د هر x لپاره $f(x)\le f(x_0)$ وي، نو $f(x_0)$ ته مطلقه اعظمي وايي.
- مطلق Minimum: د $(x_0, f(x_0))$ نقطه مطلقه اصغري بلل کېږي، که چېرې $f(x)$ د تعريف په ساحه کې د هر x لپاره $f(x)\ge f(x_0)$ وي، نو $f(x_0)$ ته مطلقه اصغري وايي.
- د $y=f(x)$ د تابع منحني په يوه انټروال کې محدب بلل کېږي، که چېرې په دې انټروال کې په منحني مماس رسم شي، نو مماس د منحني پورته خواته پروت وي او د تابع دويم مشتق منفي په لاس راځي.
- د $y=f(x)$ د تابع منحني په يوه انټروال کې مقعر بلل کېږي، که چېرې په نوموړي انټروال کې په منحني مماس رسم شي، نو مماس د منحني ښکته خوا پروت وي، او د تابع دويم مشتق مثبت په لاس راځي.
- هغه ټکی چې د تابع له مقعريت څخه محدبيت ته او يا برعکس خپل لوری بدلوي، د انعطاف(Inflection) ټکی بلل کېږي.
- هغه تابع گانې چې د $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ بڼه ولري، د هوموگرافيک تابع گانو په نامه يادېږي، په دې شرط چې $c\neq 0$ وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

- که چېرې د $f(x)$ تابع د $a \le x \le b$ په انټروال کې متمادي او د $a < x < b$ په انټروال کې د مشتق وړ او $f(a)=f(b)$ وي، نو لږ ترلږه د x_0 يو ټکی په $a < x0 < b$ په انټروال کې شته چې $f'(x_0)=0$ دی، دا قضيه د رول د قضيې په نامه يادېږي.
- که چېرې $f(x)$ په $[a,b]$ فاصله کې متمادي او د (a,b) په خلاصه فاصله کې د مشتق وړ وي د x_0 يو عدد د a او b ترمنځ شته چې $f'(x_0)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ دی دا د متوسط قيمت قضيه بلل کېږي.

د هوپيتال قاعده:

که د $f(x)$ او $g(x)$ تابع ګانې د (a,b) په انټروال کې تعريف او د مشتق وړ وي.

که چېرې $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ د لميټ نسبت کله چې $x \to a$ د $\dfrac{0}{0}$ مبهم شکل او په هغه صورت کې چې $x \to \infty$ کې د $\dfrac{\infty}{\infty}$ شکل ونيسي په دې حالت کې د تابع د لميټ د پيدا کولو لپاره د $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ لميت پيدا کوو او په هغه کې قيمتونه وضع کوو که بياهم د تابع شکل مبهم وي، مشتق نيولو ته دوام ورکوو ... تر څو د ابهام شکل ختم شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دريم څپرکي پوښتنې

لاندې پوښتنو ته څلور ځوابونه ورکړل شوي دي، سم ځواب په نښه کړئ:

1 – که یوه تابع په $[a,b]$ انتروال کې متمادی او د مشتق وړ وي، نو هغه وخت متزاید ده چې :

$a)\ f'(x)=0 \quad b)\ f'(x)<0 \quad c)\ f'(x)>0 \quad d)\ f'(x)\geq 0$

2- په یوه تابع کې تر ټولو لوړې نقطې ته:

a) Absolute Minimum وايي   b) Infliction وايي   c) Absolute Maximum وايي   d) هیڅ یو

3- د $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+2x}$ په تابع کې د Extreme ټکی عبارت دی له:

a) دوه ټکي   b) یو ټکی   c) درې ټکي   d) نه لري

4 – هغه ټکی چې تابع له مقعریت څخه محدبیت ته بدلوي:

a) د اعظمی ټکی دی   b) دانعطاف ټکی دی   c) اصغري ټکی دی   d) هیڅ یو

5- د $f(x)=ax^2+bx+c$ د تابع د تعریف ساحه عبارت له :

$a)\ (-\infty\ ,+\infty) \quad b)\ (-\infty\ ,0) \quad c)\ (0,-\infty)$ $\quad d)$ هیڅ یو

6- د $f(x)=\dfrac{2x-1}{x+2}$ تابع عمودي مجانب عبارت دی له:

$a)\ x=1 \quad b)\ x=2 \quad c)\ x=-1 \quad d)\ x=-2$

7- د هوموګرافیك تابع عمودي مجانب عبارت دی له:

$a)\ y=\dfrac{a}{c} \quad b)\ x=-\dfrac{d}{c} \quad c)\ y=\dfrac{c}{a} \quad d)\ y=-\dfrac{c}{d}$

8- د $g(x)=\dfrac{4x^2-6x}{x^2-4}$ تابع افقي مجانب عبارت دی له:

$a)\ 4 \quad b)\ 6 \quad c)\ -6 \quad d)\ -4$

9- لاندې کومه الجبري اریکه حقیقت لري:

$a)\ \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)} \quad b)\ \lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f'(x) \quad c)\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ $\quad d)$ هیڅ یو

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاندې پوښتنې ځواب کړئ:

1. د $f(x)=x^2-x$ د تابع د منحني میل د $P(3,0)$ په ټکي کې پیدا کړئ.

2. د $f(x)=-x^2$ په تابع کې د $[3,4]$ په انټروال کې د منحني د بدلون ټکي پیدا کړئ.

3. د نیوټن د خارج قسمت په مرسته د لاندنیو تابع ګانو مشتق پیدا کړئ.

1) $f(x)=2x$ 2) $f(x)=3x^2-1$ 3) $f(x)=\sqrt{2}x$

4. د لاندنیو تابع ګانو په ورکړل شوو نقطو کې مشتق پیدا کړئ.

1) $f(x)=2x-1$, $x_0=-1$ 2) $f(x)=x^2$, $x_0=2$

5. د لاندې تابع ګانو مشتق پیدا کړئ.

1) $f(x)=2x-4x^2$ 2) $f(x)=3x^3-1$

6. په ورکړل شوو ټکو کې د تابع ګانو مشتق محاسبه کړئ.

1) $f(x)=7x^2-3x$, $x_0=-1$

2) $f(x)=6x^2-2x-1$, $x_0=\dfrac{1}{2}$

7. د $f(x)=3x^5-4x^2-3x$ د تابع څلور ځلې مشتق ونیسئ او د هغې ګراف رسم کړئ.

8. د لاندې تابع ګانو مشتق پیدا کړئ.

1) $f(x)=x^3\sec x$ 2) $f(x)=\sin(3x-1)$ 3) $f(x)=\cos^2 2x$

9. کوم مثبت عدد دی چې د خپل معکوس سره جمع شي د جمعې حاصل یې تر ټولو کوچنی شي؟

10. د $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x}$ تابع ګراف رسم کړئ.

11. د $f(x)=\dfrac{4x^2}{x^2+1}$ تابع ګراف رسم کړئ.

12. د $f(x)=\sin x$ مثلثاتي تابع ګراف رسم کړئ.

13. د $f(x)=\tan x$ مثلثاتي تابع ګراف رسم کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

څلورم څپرکی

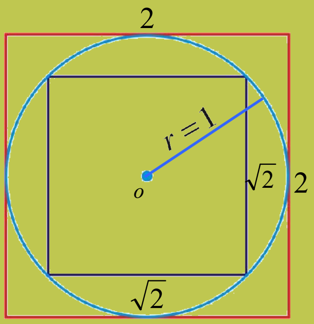
انتیګرال

(c) ketabton.com: The Digital Library

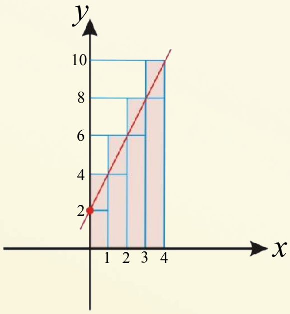
(c) ketabton.com: The Digital Library

د ريمان مجموعه

Riemann's Sum



په مخامخ شکل کې چې که د دايرې شعاع يو واحد ده، د دايرې د محيطي او محاطي څلور ضلعي ګانو مساحت حساب کړئ او ووياست چې ددې دايرې مساحت له مخامخ څلور ضلعي ګانو له مساحت سره څه اړيکه لري؟



- هغه مساحت چې د x د محور او $f(x)=2x+2$ د تابع د ګراف په منځ کې د$[0,4]$ په انټروال کې محصور شوی دی، خط خط کړئ.
- د $y=2x+2$ تابع په ګراف کې د څلورو لاندېنيو او پورتنيو مستطيلونو مساحتونه چې په شکل کې ښودل شوی دی، پيدا کړئ.

- د پورتنيو مستطيلونو د مساحت مجموعه او د لاندېنيو مستطيلونو د مساحت مجموعه د تابع د ګراف د لاندېنې مساحت سره په ورکړ شوي واټن کې څه اړيکه لري؟
- د پورته په څېر فعاليت د اتو مساوي لاندېنيو مستطيلونو او د اتو مساوي پورتنيو مستطيلونو لپاره تکرار کړئ او پايله يې د ګراف د لاندې مساحت سره په نوموړي واټن کې پرتله کړئ.
- که چېرې د پورتنيو مستطيلونو د مساحتونو مجموعه او لاندېنيو مستطيلونو[1] د جوړولو لپاره د تابع په ګراف کې د فاصلې وېش زيات کړو د پورتنيو او لاندېنيو مستطيلونو د مساحتونو مجموعه کوم قيمت ته نژدې کېږي.

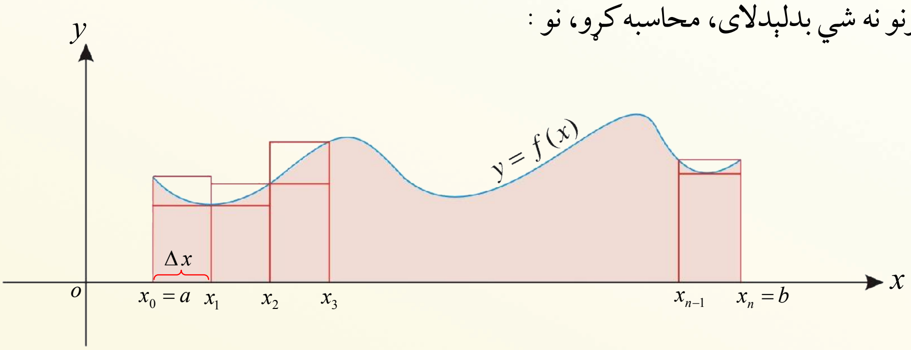
---

[1]- که چېرې د x په محور د فاصلو تقسيمات زيات کړو او يا که چېرې په يوه فاصله کې د مستطيلونو شمېر زيات شي، په هم هغه اندازه د ګراف لاندې مساحت د قيق په لاس راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

له پورتني فعاليت څخه لاندې تعريف لاسته راځي:

تعريف: فرضوو چې د $y=f(x)$ تابع د $[a,b]$ په ترلي انټروال کې متمادي او تعريف شوي وي که چېرې د ناحيې مساحت چې د x د محور او $y=f(x)$ د تابع د ګراف ترمنځ واقع دی چې په هندسي شکلونو نه شي بدلېدلای، محاسبه کړو، نو :



د $[a,b]$ ترلي انټروال په n مستطيلو نو ویشو، څرنګه چې د هر مستطيل عرض د $(\Delta x=\dfrac{b-a}{n})$ رابطې څخه په لاس راځي او د مستطيلونو طول عبارت دی تابع قيمت په هماغه نقطه کې دی.

او د مستطيلونو د هر انټروال اوږدوالی د $i=1,2,3,\ \dots\ ,n$ لپاره په لاندې ډول دی:

$$x_0=a,x_1=a+\Delta x,x_2=a+2\Delta x...,x_i=a+i\Delta x,\ \dots\ ,x_n=b$$

$$[x_0,x_1]\ ,\ [x_1,x_2]\ ,\ [x_2,x_3],\ \dots\ ,[x_{i-1},x_i],\ \dots\ ,[x_{n-1},x_n]$$

که په شکل کې د لاندينيو مستطيلونو مساحت په $f(x_{i-1})\Delta x$ او د پورتنيو مستطيلونو مساحت په $f(x_i)\Delta x$ وښودل شي، نو لرو چې:

$$\text{د لاندينيو مستطيلونو د مساحتونو مجموعه} = f(x_0)\Delta x+f(x_1)\Delta x+\ \dots\ +f(x_{n-1})\Delta x=\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x$$

$$\text{د پورتنيو مستطيلونو د مساحتونو مجموعه} = f(x_1)\Delta x+f(x_2)\Delta x+\ \dots\ +f(x_n)\Delta x=\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

که چېرې محصور شوی مساحت په A وښيو، نو : $\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x < A < \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$

که چېرې د رابطې له اطراف څخه ليميټ ونيسو، نو لرو چې:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x \le \lim_{n\to\infty} A \le \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ساندویچ د قضیې پر بنسټ لیکلای شو چې: $\lim_{n\to\infty} 2 \sum_{121}^{n} f(xi-1)\Delta x = A = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$

نو $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$ ته د ریمان مجموع او ددې مجموعې لیمیټ یعنې $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$ ته د ریمان د مجموعې لیمیټ وايي.

لومړی مثال: د $[0,2]$ انټروال په څلور مساوي برخو وویشئ، د $y = x^2 + 1$ منحني او x محور تر منځ مساحت پیداکړئ.

حل: که چېرې $[0,2]$ انټروال په څلورو مساوي برخو وویشو، نو د مستطیلونو عرض داسې په لاس راځي: $\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{2-0}{4} = \frac{1}{2}$

ددې مستطیلونو دهر انټروال اوږدوالی عبارت دي له:

$$x_0 = a = 0 \quad , \quad x_1 = a + \Delta x = \frac{1}{2}$$

$$x_2 = a + 2\Delta x = 1 \quad , \quad x_3 = a + 3\Delta x = \frac{3}{2}$$

$$x_4 = 2$$

$$[x_0, x_1] \ , \ [x_1, x_2] \ , \ [x_2, x_3] \ , [x_3, x_4]$$

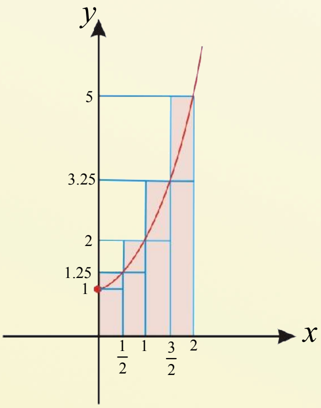
$$[0,\frac{1}{2}] \quad , [\frac{1}{2},1] \quad , [1,\frac{3}{2}] \quad , [\frac{3}{2},2]$$

په لاس راغلي قیمتونه د x په ځای په تابع کې وضع کوو.

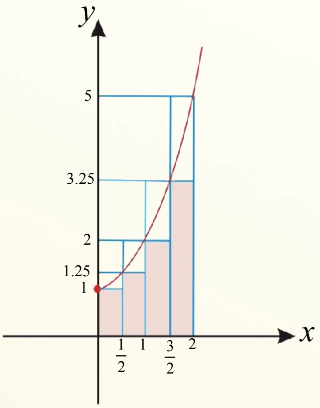
$$f(x) = x^2 + 1 \ , f(0) = 1$$

$$f(\frac{1}{2}) = 1.25 \ , \ f(1) = 2$$

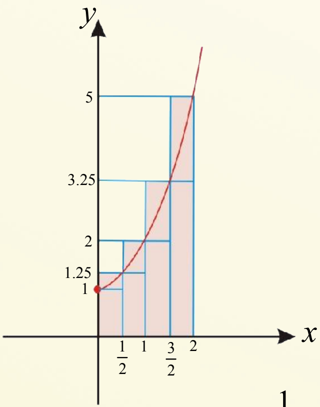
$$f(\frac{3}{2}) = 3.25 \ , \ f(2) = 5$$



(c) ketabton.com: The Digital Library



د لاندینیو مستطیلونو د مساحتونو مجموعه $=1\times\frac{1}{2}+1.25\times\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{2}+3.25\times\frac{1}{2}=3.75$



د پورتنیو مستطیلونو د مساحتونو مجموعه $=1.25\times\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{2}+3.25\times\frac{1}{2}+5\times\frac{1}{2}=5.75$

$$3.75 < A < 5.75$$

دویم مثال: د $f(x)=1+x$ تابع د ریمان د مجموعې لیمیټ په $[1, 10]$ انټروال کې پیدا کړئ.

حل:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\Delta x=\frac{b-a}{n}=\frac{10-1}{n}=\frac{9}{n}$$

$$x_i=a+\Delta xi\;=1+[\frac{9}{n}]\,i \quad , \quad i=0,1,2,\ \ldots$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x=\lim_{n\to\infty}[\sum_{i=1}^{n}(1+x_i)\Delta x]$$

$$=\lim_{n\to\infty}[\Delta x\sum_{i=1}^{n}(1+x_i)]$$

$$=\lim_{n\to\infty}[\Delta x\sum_{i=1}^{n}1+\Delta x\sum_{i=1}^{n}x_i]$$

$$=\lim_{n\to\infty}[\frac{9}{n}\sum_{i=1}^{n}1+\Delta x\sum_{i=1}^{n}(a+\Delta xi)]$$

$$=\lim_{n\to\infty}[\frac{9}{n}\sum_{i=1}^{n}1+\frac{9}{n}\sum_{i=1}^{n}(1+\frac{9}{n}i)]$$

$$=\lim_{n\to\infty}[\frac{9}{n}\sum_{i=1}^{n}1+\frac{9}{n}(\sum_{i=1}^{n}1+\frac{9}{n}\sum_{i=1}^{n}i)]$$

$$=\lim_{n\to\infty}[\frac{9}{n}\cdot n+\frac{9}{n}(n+\frac{9}{n}\cdot\frac{n(n+1)}{2})]$$

$$=\lim_{n\to\infty}[9+\frac{9}{n}(n+\frac{9n^2+9n}{2n})]$$

$$=\lim_{n\to\infty}[9+\frac{9}{n}(\frac{2n^2+9n^2+9n}{2n})]$$

$$=\lim_{n\to\infty}[9+\frac{9}{n}(\frac{11n^2+9n}{2n})]$$

$$=\lim_{n\to\infty}[9+\frac{99n^2+81n}{2n^2}]$$

$$=\lim_{n\to\infty}[9+\frac{99n^2}{2n^2}+\frac{81n}{2n^2}]$$

$$=\lim_{n\to\infty}[9+\frac{99}{2}+\frac{81}{2n}]$$

$$=9+\frac{99}{2}=58.5$$

باید په یاد ولرو:

$$\sum_{i=1}^{n}c=cn$$

$$\sum_{i=1}^{n}i=\frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n}i^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

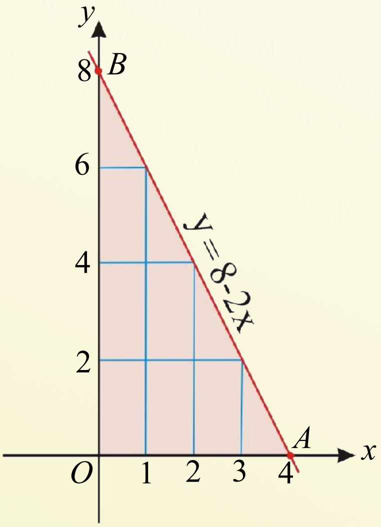
پوښتنې

1. د $[0,3]$ انټروال په بشپړو مساوي برخو له وېشلو څخه وروسته د $y = 3x$ مستقیم خط او د x د محور تر منځ مساحت محاسبه کړئ.

2. د $\Delta x = 0.5$ قیمت لپاره او د لاندې جدول د قیمتونو په پام کې نیولو سره ګراف رسم، د لاندېنیو مستطیلونو د مساحتونو مجموعه اود پورتنیو مستطیلونو د مساحتونو مجموعه پیدا کړئ.

x	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3
y	14	20	26	32	38	44	50

3. د $y = 8 - 2x$ تابع ګراف د لاندې OAB مثلث مساحت د $[0,4]$ په انټروال کې د ریمان د مجموعې د لیمیټ څخه په ګټه اخیستنې سره پیدا کړئ.



(c) ketabton.com: The Digital Library

د انتيگرال مفهوم

Concept of Integral

ځرنګه چې پوهېږئ د شکلونو لاندېني او پورتني مساحتونه د انتيګرال په واسطه محاسبه کېږي.

آيا کولای شو چې د مخامخ شکل پورتنی مساحت په لاس راوړو.

د هغې تابع انتيګرال چې مشتق يې معين وي او يا په بل عبارت د ريمان مجموعي لېميټ ته انتيګرال وايي دا($\int$) د انتيګرال علامه ده، د sum د کليمې يا د ريمان د مجموعې د S توري غزيدلی حالت دی، لکه: $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \int f(x)dx$ چې دلته $f(x)$ تابع او dx د $f(x)$ تابع د انتيګرال متحول نظر x ته دی.

انتيګرالونه عموماً په دوه ډوله دي. معين او غير معين انتيګرالونه، هغه انتيګرالونه چې په ترتيب سره يې تر ځېړنې لاندې نيسو:

I- غيرمعين انتيګرال *Indefinite Integral*

- که د $F(x) = 2x^2 - 1$ تابع وي له دې تابع څخه مشتق ونيسئ.
- ددې تابع له مشتق څخه انتيګرال ونيسئ.
- په لاس راغلی انتيګرال له لومړنی تابع سره پرتله کړئ او ووايئ چې(-1) په نوموړي تابع کې د څه په نامه يادېږي.
- که په پورتني تابع کې (-1) په C ونوموو د $f(x)$ تابع له څه سره مساوي ده؟
- پورتنی فعاليت د $F(x) = x^6 + 1$ تابع لپاره تکرار کړئ او ووايئ چې $f(x)$ له څه سره مساوي ده.

له پورتني فعاليت څخه لاندې تعريف په لاس راځي:

تعريف: که چېرې د $f(x)$ تابع د $[a,b]$ په تړلي انټروال کې تعريف او $F(x)$ د $f(x)$ يوه لومړنی تابع وي. د $F(x)+C$ تابع ګانو سټ په داسې حال کې چې C يو ثابت عدد وي د $f(x)$ تابع غيرمعين انتيګرال په نامه يادېږي او داسې ليکل کېږي:

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی مثال: $\int x\,dx$ پیدا کړئ.

حل: $$\int x\;dx=\frac{x^{1+1}}{1+1}+C=\frac{x^2}{2}+C$$

دویم مثال: $\int\frac{1}{\sqrt[7]{x^3}}\;dx$ حساب کړئ.

حل: $$\int\frac{1}{\sqrt[7]{x^3}}\;dx=\int x^{-\frac{3}{7}}\;dx=\frac{x^{-\frac{3}{7}+1}}{-\frac{3}{7}+1}+C=\frac{x^{\frac{4}{7}}}{\frac{4}{7}}+C=\frac{7}{4}\sqrt[7]{x^4}+C$$

دریم مثال : $\int x^{\frac{3}{2}}\;dx$ پیدا کړئ.

حل: $$\int x^{\frac{3}{2}}\;dx=\frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1}+C=\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}+C=\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+C=\frac{2}{5}\sqrt{x^5}+C$$

پوښتني

لاندې انتیگرالونه محاسبه کړئ:

a) $\int\sqrt[5]{x^3}\;dx$

b) $\int\frac{1}{x^4}\;dx$

c) $\int\frac{1}{\sqrt{x}}\;dx$

d) $\int\frac{x^2\;dx}{\sqrt[4]{x^2}}$

e) $\int\sqrt[8]{x^4}\cdot x\;dx$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د غیرمعین انتیگرال خواص

Properties of indefinite integral

$$\left.\begin{array}{l}\int k\ dx \\ \int [f(x) \pm g(x)]\ dx \\ \int [f(x)\cdot g(x)]\ dx \\ \int \frac{f(x)}{g(x)} dx \quad , g(x) \neq 0\end{array}\right\} = ?$$

تاسې د لېمیټ او مشتق خواص مخکې مطالعه کړي؟ آیا کیدای شي چې ورته خواص په غیـر معین انتیګـرال کـې هم وي؟

د مشتقاتو له خواصو څخه په کار اخیتسنې د لاندې تابع ګانو مشتق پیدا کړئ.

$$f(x) = 3x^4$$

$$f(x) = 2x^3 - \frac{1}{x^2}$$

$$f(x) = \sin x + \cos x$$

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

له پورتني فعالیت څخه لاندې پایلې په لاس راوړو:

څرنګه چې د تابع ګانو د مشتق د پیداکولو لپاره له ځانګړو قوانینو څخه ګټه اخـېستل کېـږي، غیـرمعین انتیګرالونـه هم د داسې خواصو لرونکي دي چې هغه پرته له ثبوت څخه قبلوو:

1- که k یو ثابت عدد وي، نو لرو چې: $\int kdx = k\int dx = kx + C$

مثال: د $\int 5dx$ انتګرال پیداکړئ.

حل: $\int 5dx = 5\int dx = 5x + C$

2- که چېرې $n \neq -1$ وي، نو: $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: د $\int x^4 dx$ **انتیګرال** پیدا کړئ.

حل: $$\int x^4 dx = \frac{x^{4+1}}{4+1} + C = \frac{1}{5}x^5 + C$$

3- که چېرې a یو ثابت عدد او $f(x)$ تابع وي، **نو**:

$$\int a\,f(x)\,dx = a\int f(x)\,dx$$

مثال: د $\int 2x^2\,dx$ **انتیګرال** محاسبه کړئ.

حل: $$\int 2x^2 dx = 2\int x^2 dx = 2\frac{x^3}{3} + C = \frac{2}{3}x^3 + C$$

4- که چېرې $f(x)$ او $g(x)$ دوې تابع ګانې وي په دې صورت کې د تابع ګانو د جمع او تفریق د حاصل انتیګرال مساوي دی په:

$$\int[f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

مثالونه:

$$a)\quad \int(2x^2+3)dx = \int 2x^2 dx + \int 3dx = \frac{2x^3}{3} + 3x + C$$

$$b)\quad \int(8-2x)dx = 8\int dx - 2\int xdx = 8x - x^2 + C$$

5- که چېرې د تابع ګانو ترادف تر انتیګرال لاندې وي، په دی صورت کې د دوی انتیګرال مساوي دی په:

$$\int[f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x)]dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx + \ldots + \int f_n(x)dx$$

مثال:

$$\int[x^3 - 6x^2 + 9x + 1]dx = \int x^3 dx - \int 6x^2 dx + \int 9xdx + \int dx$$
$$= \frac{x^4}{4} - \frac{6x^3}{3} + \frac{9x^2}{2} + x + C$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

6- که $f(x)$ او $g(x)$ دوې تابع ګانې وي، په دې حالت کې د تابع ګانو د ضرب د حاصل انتیګرال، مساوي نه دی د انتیګرالونو د ضرب له حاصل سره په جلا توګه، یعنې:

$$\int[f(x)\cdot g(x)]dx \neq \int f(x)dx \cdot \int g(x)dx$$

مثال: که چیرې $f(x)=x+1$ او $g(x)=x-2$ وي، نو:

حل الف: لومړی په تابع ګانو د ضرب عملیه تطبیق کوو او وروسته یې انتیګرال په لاس راوړو:

$$\int[f(x)\cdot g(x)]\,dx = \int[(x+1)(x-2)]dx = \int(x^2-2x+x-2)\,dx$$

$$=\int(x^2-x-2)\,dx$$

$$=\int x^2dx-\int x\,dx-\int 2\,dx$$

$$=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-2x+C$$

حل ب:اوس د هرې تابع انتیګرال بېلا بېل محاسبه کوو او وروسته یې سره ضربوو په لاس راغلي قیمتونه سره پرتله کوو.

$$\int f(x)\,dx\cdot\int g(x)\,dx=\int(x+1)\,dx\cdot\int(x-2)\,dx=(\int x\,dx+\int dx)(=\int x\,dx-\int 2\,dx)$$

$$=(\frac{x^2}{2}+x+C)(\frac{x^2}{2}-2x+C)=(\frac{x^2}{2}+x)(\frac{x^2}{2}-2x)+C$$

$$\Rightarrow\ \frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-2x+C\neq(\frac{x^2}{2}+x)(\frac{x^2}{2}-2x)+C$$

په پایله کې څرګنده شوه چې نوموړی مساوات حقیقت نه لري.

7- که چیرې $f(x)$ او $g(x)$ دوه تابع ګانې وي په دې صورت کې د توابعو د تقسیم د حاصل انتیګرال مساوي نه دی. د هرې تابع د انتیګرال له حاصل تقسیم سره، یعنې: $\int\frac{f(x)}{g(x)}dx\neq\frac{\int f(x)dx}{\int g(x)dx}$

مثال: که چیرې $f(x)=x^2+2x$ او $g(x)=x$ وي، نو لرو:

د الف جزء حل: لومړی د تابع ګانو د تقسیم د حاصل انتیګرال په لاس راوړو.

$$\int\frac{f(x)}{g(x)}dx=\int\frac{x^2+2x}{x}dx=\int(\frac{x^2}{x}+\frac{2x}{x})dx=\int(x+2)dx=\int xdx+\int 2dx=\frac{1}{2}x^2+2x+C$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ب جزء حل: اوس د صورت او مخرج د تابع ګانو انتیګرالونه بېلا بېل په لاس راوړو او وروسته یې سره پرتله کوو.

$$\frac{\int f(x)dx}{\int g(x)dx}=\frac{\int (x^2+2x)dx}{\int xdx}=\frac{\int x^2dx+\int 2xdx}{\int xdx}$$

$$=\frac{\frac{1}{3}x^3+x^2}{\frac{1}{2}x^2}+C=\frac{\frac{1}{3}x^3}{\frac{1}{2}x^2}+\frac{x^2}{\frac{1}{2}x^2}+C$$

په پایله کې څرګنده شوه چې

$$\int \frac{f(x)}{g(x)}dx \neq \frac{\int f(x)dx}{\int g(x)dx}$$

پوښتنې

د انتیګرال له خاصیتونو څخه په ګټه اخیستنې سره لاندې انتیګرالونه محاسبه کړئ:

$a)\quad \int -17dx=?$

$b)\quad \int \frac{(1+x)^2}{1+x}dx=?$

$c)\quad \int 2x^4dx=?$

$d)\quad \int \frac{1}{x^5}dx=?$

$e)\quad \int (2x^2+4x^3-5x+9)dx=?$

$f)\quad \int (2x+3)^6dx=?$

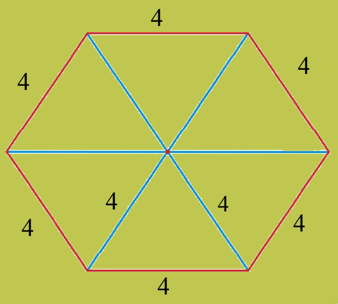
$g)\quad \int \frac{x^3+2x^2}{x^2}dx=?$

$h)\quad \int (2+x)dx=?$

(c) ketabton.com: The Digital Library

معین انتیگرال

Definite Integral



د شپږ ضلعي دننه مثلثونو د مساحتونو مجموعه پیدا او د شپږ ضلعي له مساحت سره یې پرتله کړئ.

فعالیت

- د $f(x) = 2x$ د تابع ګراف د $[2,5]$ په انټروال کې د $n = 5$ لپاره رسم کړئ او د ګراف لاندېنی مساحت پیدا کړئ
- په شکل کې د ګراف لاندېنی مساحت د کومو دوو عددونو ترمنځ پروت دی.

د پورتنی فعالیت پایله داسې بیانوو:

تعریف: که چېرې د $f(x)$ تابع په $[a,b]$ انټروال کې متمادي وي، نو د $f(x)$ تابع د ریمان مجموعې لېمیټ ته کله چې n بې‌نهایت ته نژدې شی او د فرعي انټروالونو (Δx) لوی اوږدوالی صفر ته نژدې شي، د $f(x)$ تابع له $x = a$ څخه تر $x = b$ پورې د معین انتیګرال په نوم یادېږي، یعنې:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x = \int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

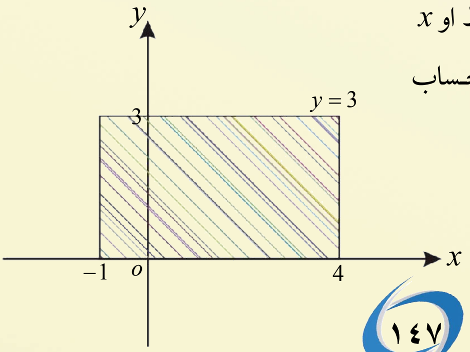
چې a ته د انتیګرال لاندېنی سرحد او b ته د انتیګرال پورتنی سرحد وایي.

لومړی مثال: د $\int_1^3 x^2\,dx$ انتیګرال قیمت پیدا کړئ.

حل: لومړي د $F(x)$ لومړنی تابع پیدا کوو او بیا د مطلوب انتیګرال قیمت ټاکو:

$$\int_1^3 x^2dx = [\frac{x^3}{3}]_1^3 = \frac{3^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{27-1}{3} = \frac{26}{3}$$

دویم مثال: هغه مساحت چې د $y = 3$ خط او x محور ترمنځ په $[-1,4]$ انټروال کې محصور دی حساب کړئ.



(c) ketabton.com: The Digital Library

حل: د $\int_{-1}^{4} 3\ dx$ معین انتیګرال د یوه مستطیل مساحت راښیي چې په تېر شکل کې لیدل کېږي.

ددې مستطیل مساحت د مستطیل د عرض او طول د ضرب له حاصل سره مساوي دی.

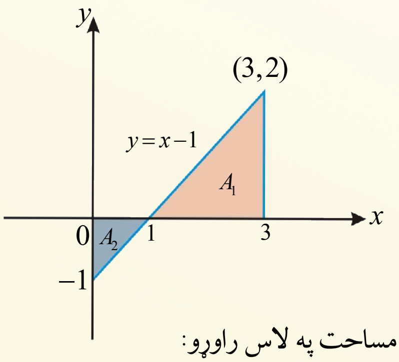
$$د\ مستطیل\ مساحت = 3[4-(-1)] = 3\cdot 5 = 15$$

له انتیګرال څخه په ګټه اخیستنې سره د مستطیل مساحت په لاندې ډول محاسبه کوو.

$$\int_{-1}^{4} 3\ dx = [3x]_{-1}^{4} = 3[4-(-1)] = 15$$

درېم مثال: هغه مساحت چې د $y = x - 1$ مستقیم خط او x محور ترمنځ په $[0,3]$ انتروال کې محصور دی په لاس راوړئ.

حل:



له شکل څخه په ګټه اخیستنې سره لومړی د ښي خوا د لوی مثلث مساحت په لاس راوړو:

$$A_1 = \frac{1}{2}(2\cdot 2) = \frac{1}{2}\cdot 4 = 2$$

د کوچني مثلث مساحت عبارت دی له:

$$A_2 = \frac{1}{2}[1(-1)] = \frac{1}{2}(-1) = -\frac{1}{2}$$

د A_1 او A_2 د مساحتونو مجموعه عبارت ده له:

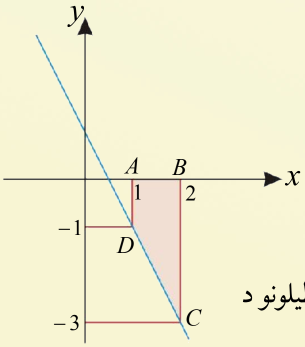
$$A_1 + A_2 = 2 - \frac{1}{2} = 1.5$$

په پایله کې د نوموړي انتیګرال قیمت عبارت دی له:

$$\int_{0}^{3} (x-1)\ dx = [\frac{x^2}{2} - x]_0^3 = [\frac{3^2}{2} - 3] - 0 = \frac{9}{2} - 3 = 1.5$$

پوښتنې

1. د مخامخ شکل څخه په کار اخیستنې سره هغه مساحت چې د $y = -2x + 1$ د مستقیم خط او د x د محور ترمنځ په $[1,2]$ انتروال کې محصور دی په لاس راوړئ.



2. د $f(x) = x^2$ تابع د لاندېنیو مستطیلونو د مساحت مجموعه او پورتنیو مستطیلونو د مساحت مجموعه په $[0,1]$ انتروال کې د $n = 4$ لپاره په لاس راوړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د معین انتیګرال خواص

Properties of definite integral

آیا کولای شو چې د غیرمعین انتیګرال د ځانګړونو څخه په ګټه اخیستنې سره مخامخ اړیکې پوره کړو.

$$\left.\begin{array}{l}\int_a^b c\,dx \\ \int_a^b [f(x)\pm g(x)]\,dx \\ \int_a^a f(x)\,dx\end{array}\right\} = ?$$

- د $\sum_{k=1}^{4} 3k^2$ مجموعه حساب کړئ.
- د $\int_a^b x\,dx$ د انتیګرال قیمت د $[-1,1]$ په انټروال کې پیدا کړئ.
- د $\int_0^2 (1+3x)\,dx$ انتیګرال محاسبه کړئ.

د پورتني فعالیت پایله داسې بیانوو:

د ځینو انتیګرالونو محاسبه د قیمت په وضع کولو سره امکان لري او ځینې یې امکان نه لري، دې ته اړتیا پیدا کیږي، ترڅو معین انتیګرال ثبوت کړو.

1. د ثابتې تابع انتیګرال د $[a,b]$ په انټروال کې یعنې $\int_a^b Cdx$ عبارت دی، له:

$$\int_a^b C\,dx = C\int_a^b dx = C[x]_a^b = C(b-a)$$

ثبوت: د $[a,b]$ انټروال په n مساوي برخو، یعنې $\Delta x_i = \dfrac{b-a}{n}$ وېشو او د هر x_i لپاره د i - ام انټروال څخه لرو: $i = 0,1,2,\dots,n$ $\qquad f(x_i) = C$

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} C\,\Delta x_i = C(\Delta x_1 + \Delta x_2 + \dots + \Delta x_n) = C(\frac{b-a}{n} + \frac{b-a}{n} + \dots + \frac{b-a}{n})$$

$$= C(b-a)(\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n}) = C(b-a)\frac{n}{n} = C(b-a) \Rightarrow \int_a^b Cdx = C(b-a)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: $\int_{3}^{4} dx$ معین انتیګرال حساب کړئ.

حل: $\int_{3}^{4} dx = [x]_3^4 = 4-3 = 1$

2. که د $f(x)$ تابع د $[a,b]$ په انټروال کې انتیګرال منونکی وي او k یو ثابت حقیقي عدد وي، نو لرو چې:

$$\int_a^b k\, f(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$

ثبوت: که چېرې د $[a,b]$ انټروال د x_i ، $i = 1,2,...,n$ په n مساوي برخو ووېشو، نو د ریمان د مجموعې او انتیګرال د تعریف له مخې لیکلای شو:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} k\, f(x_i)\Delta x = \lim_{n\to\infty} k\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

$$= k\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = k\int_a^b f(x)\, dx$$

$$\Rightarrow \int_a^b k\, f(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$

مثال: د $\int_{-2}^{2} 4\, dx$ ټاکلی انتیګرال محاسبه کړئ.

حل: $\int_{-2}^{2} 4dx = 4\int_{-2}^{2} dx = 4[x]_{-2}^{2} = 4(2-(-2)) = 4\cdot 4 = 16$

3. که د $F(x)$ تابع یوه لومړنی تابع د $f(x)$ او په $[a,b]$ انټروال کې متمادي وي، نو:

$$\int_a^b f(x)\, dx = -\int_b^a f(x)\, dx$$

ثبوت:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a) = -(-F(b)+F(a))$$

$$= -(F(a)-F(b)) = -\int_b^a f(x)\, dx \quad\Rightarrow\quad \int_a^b f(x)\, dx = -\int_b^a f(x)\, dx$$

مثال: د $\int_{2}^{3} 2x\, dx = -\int_{3}^{2} 2x\, dx$ انتیګرال مساوات پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل: لومړی د کېږ لوری انتيګرال او وروسته د ښيي خوا انتيګرال محاسبه کوو:

$$\int_2^3 2x\,dx = [\frac{2x^2}{2}]_2^3 = \frac{2(3)^2}{2} - \frac{2(2)^2}{2} = \frac{2(9)}{2} - \frac{2(4)}{2} = \frac{18}{2} - \frac{8}{2} = \frac{18-8}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

$$\int_3^2 2x\,dx = [\frac{2x^2}{2}]_3^2 = \frac{2(2)^2}{2} - \frac{2(3)^2}{2} = \frac{2(4)}{2} - \frac{2(9)}{2} = \frac{8}{2} - \frac{18}{2} = \frac{8-18}{2} = -\frac{10}{2} = -5$$

د لاسته راغلو قيمتونو په پام کې نيولو سره پايله په لاس راځي:

$$\int_2^3 2x\,dx = -\int_3^2 2x\,dx$$

4- که د $f(x)$ تابع په $[a,b]$ انټروال کې متمادي وي په هغه صورت کې لرو چې: $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

ثبوت: څرنګه چې $\Delta x = 0$ دی، نو:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \int_a^a f(x)\,dx = F(a) - F(a) = 0$$

$$\Rightarrow \int_a^a f(x)\,dx = 0$$

مثال: د $\int_3^3 3x^2 dx$ انتيګرال محاسبه کړئ.

حل: $\int_3^3 3x^2 dx = [\frac{3x^3}{3}]_3^3 = [x^3]_3^3 = [3^3 - 3^3] = 27 - 27 = 0$

5- که $f(x)$ او $g(x)$ تابع ګانې په $[a\ ,b]$ انټروال کې انتيګرال منونکي وي، نو:

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\ dx$$

ثبوت:

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}[f(x_i) \pm g(x_i)]\ \Delta x$$

$$= \lim_{n\to\infty}[\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x \pm \sum_{i=1}^{n} g(x_i)\Delta x]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x \pm \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} g(x_i)\Delta x = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

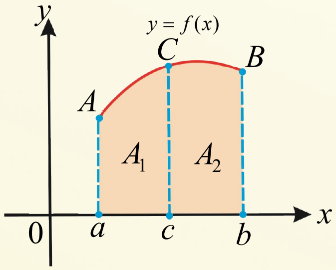
مثالونه:

حل:

$$a)\quad \int_0^1 (4+3x^2)\,dx = \int_0^1 4\,dx + \int_0^1 3x^2\,dx = 4\int_0^1 dx + 3\int_0^1 x^2\,dx = 4[x]_0^1 + 3\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = 4+1 = 5$$

$$b)\quad \int_0^3 (x^2-1)\,dx = \int_0^3 x^2dx - \int_0^3 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^3 - [x]_0^3 = \frac{27}{3} - 3 = \frac{27-9}{3} = \frac{18}{3} = 6$$

6. که چېرې د $f(x)$ تابع د (a,b) په یوه ترلې انټروال کې خرنګه چې $a<c<b$ دی د a, b او c ټکي یکي شامل دي انتیګرال منونکي وي، نو: $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$



ثبـــوت: دلتـه د $[a,b]$ انټـروال پـه دوو انټروالونـو د $[a,c]$ او $[c,b]$ تقـسیموو، وروسـته د $f(x)$ تـابع انتیګـرال پـه نومـوړو انټروالونو کې په پام کې نیسو.

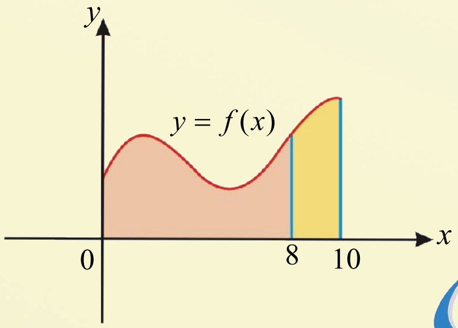
د انتیګرال اصلي مفهوم ته په پام $A = \int_a^b f(x)dx$ پـه حقیقـت کې د هغې سـطحې مـساحت دی چې د $f(x)$ د تابع د ګراف او x د محور ترمنځ د $[a,b]$ په انټروال کې محصوره ده. په داسې حال کې چې د هغې سطحې مساحتونه چې د $f(x)$ ګراف او د x د محور ترمنځ د $[a,c]$ او $[c,b]$ په انټروالونو کې محصوره ده

او په شکل کې واضح لیدل کېږي عبارت ده له: $\quad A_2 = \int_c^b f(x)\,dx$ ، $A_1 = \int_a^c f(x)\,dx$

په پایله کې ویلای شو چې: $\quad A = A_1 + A_2 \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

مثال: که چېرې $\int_0^{10} f(x)dx = 17$ او $\int_0^8 f(x)dx = 12$ وي، نو د $\int_8^{10} f(x)dx$ انتیګرال قیمت محاسبه کړئ.

حل:



$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

$$\int_0^{10} f(x)\,dx = \int_0^8 f(x)\,dx + \int_8^{10} f(x)\,dx$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

اوس د $\int_{8}^{10} f(x)\,dx$ انتيگرال قيمت په لاس راوړو:

$$\int_{8}^{10} f(x)\,dx = \int_{0}^{10} f(x)\,dx - \int_{0}^{8} f(x)\,dx = 17 - 12 = 5$$

7. که چېرې د $f(x) \le g(x)$ تابع ګانې په $[a,b]$ انټروال کې انتيگرال منومنکي وي، نو لرو:

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx \le \int_{a}^{b} g(x)\,dx$$

ثبوت:

$$\int_{a}^{b} g(x)\,dx - \int_{a}^{b} f(x)\,dx = \int_{a}^{b} [g(x) - f(x)]\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} [g(x) - f(x)]\,\Delta x$$

نو څرنګه $g(x) - f(x) \ge 0$ او $\Delta x \ge 0$ دی، نو د سلسلې هر حد مثبت دی، نو د هغې لېميټ هم منفي نه دی يعنې:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} [g(x_i) - f(x_i)]\,\Delta x \ge 0 \Rightarrow \int_{a}^{b} [g(x) - f(x)]\,dx \ge 0$$

$$\int_{a}^{b} g(x)\,dx - \int_{a}^{b} f(x)\,dx \ge 0 \Rightarrow \int_{a}^{b} g(x)\,dx \ge \int_{a}^{b} f(x)\,dx$$

مثال: که چېرې $f(x) = 1 - \frac{x^2}{4}$ او $g(x) = 1 + \frac{x^2}{2}$ وي، نو د $x > 1$ لپاره وښياست چې $\int_{a}^{b} f(x)dx \le \int_{a}^{b} g(x)dx$ دی.

حل:

$$\int_{a}^{b} (1 - \frac{x^2}{4})\,dx \le \int_{a}^{b} (1 + \frac{x^2}{2})dx$$

$$\int_{a}^{b} 1\,dx - \int_{a}^{b} \frac{x^2}{4}\,dx \le \int_{a}^{b} 1\,dx + \int_{a}^{b} \frac{x^2}{2}\,dx$$

$$[x]_a^b - \frac{1}{12}[x^3]_a^b \le [x]_a^b + \frac{1}{6}[x^3]_a^b$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوهېږو چې $(b-a)>0$ دی، نو:

$$(b-a)-\frac{1}{12}(b^3-a^3)\le(b-a)+\frac{1}{6}(b^3-a^3) \qquad /\div(b-a)$$

$$1-\frac{1}{12}(a^2+ab+b^2)\le 1+\frac{1}{6}(a^2+ab+b^2)$$

$$-\frac{1}{12}\le+\frac{1}{6}^{3} \qquad /\div(a^2+ab+b^2)$$

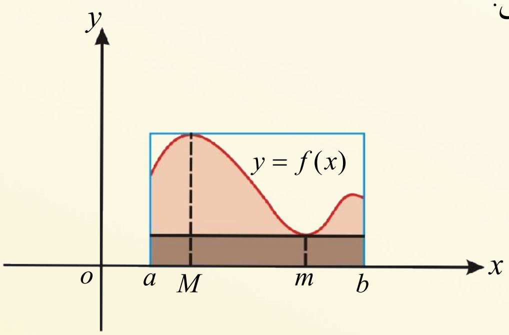
$$-\frac{1}{12}<\frac{1}{6}$$

8. که د $f(x)$ تابع په $[a,b]$ انټروال کې متمادي او m,M قیمتونه په ترتیب سره د تابع مطلق اعظمي او مطلق اصغري قیمتونه په نوموړی انټروال کې وی، نو $m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M(b-a)$

ثبوت: څرنګه چې $m\le f(x)\le M$ دی، نو لرو چې:

$$\int_a^b m\,dx\le\int_a^b f(x)\,dx\le\int_a^b M\,dx$$

$$m(b-a)\le\int_a^b f(x)\,dx\le M(b-a)$$



چې دا وروستنی اړیکه د انتیګرال د تخمیني قضیې په نامه یادیږي.

مثال: $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$ انتیګرال په تخمیني توګه حساب کړئ.

حل: څرنګه چې د $f(x)=e^{-x^2}$ تابع په $[0,1]$ انټروال کې متمادي ده او $M=f(0)=e^0=1$ مطلق اعظمي او $m=f(1)=e^{-1}$ مطلق اصغري دی، نو لرو چې:

$$m(b-a)\le\int_a^b f(x)\,dx\le M(b-a)$$

$$e^{-1}(1-0)\le\int_0^1 e^{-x^2}\,dx\le 1(1-0)$$

$$e^{-1}\le\int_0^1 e^{-x^2}\,dx\le 1$$

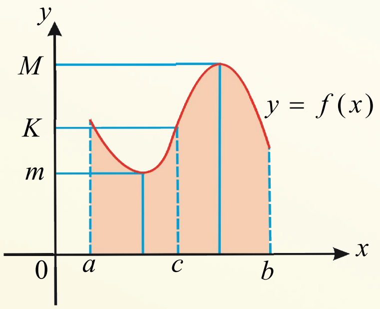
$$e^{-1}=\frac{1}{e}\approx 0,3679\Rightarrow 0.3679\le\int_0^1 e^{-x^2}\,dx\le 1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په پایله کې د انټيګرال تخمیني قیمت د 1 او 0.3679 قیمتونو ترمنځ قرار لري.

9. که د $f(x)$ تابع په $[a,b]$ انټروال کې متمادي وي، نو د c یو حقیقي عدد شته چې: $a \le c \le b$ دی، نو:

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$$



ثبوت: د $a<b$ لپاره m او M قیمتونه په ترتیب د تابع مطلق اصغري او اعظمي قیمتونه د $[a,b]$ په انټروال کې وي، لکه: مخامخ شکل د انټیګرال د تخمیني قضیې څخه په کار اخیستنې د $c\in[a,b]$ لپاره لرو چې:

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a) \quad \Rightarrow m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le M$$

فرضوو $K = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ وي، نو $m \le K \le M$ دی او د هر c حقیقي عدد لپاره، $a \le c \le b$

لرو چې: $K = f(c)$ نو: $f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \Rightarrow \int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$

چې دا وروستی اړیکه د متوسط قیمت د قضیې په نامه یادیږي څرنګه چې $f(c)$ د تابع متوسط قیمت په $[a,b]$ انټروال کې دی.

مثال: د $f(x)=x^2$ تابع په $[1,4]$ انټروال کې په پام کې ونیسئ آیا کولای شئ

$$\int_1^4 x^2\,dx = [\frac{x^3}{3}]_1^4 = [\frac{64}{3}-\frac{1}{3}] = [\frac{64-1}{3}] = \frac{63}{3} = 21$$ دی.

حل: څرنګه چې $f(x)=x^2$ تابع ده، اوس که د x په ځای د c قیمت په تابع کې وضع کړو نو: $f(c)=c^2$ سره کیږي چې دلته د متوسط قیمت د قضیې د فورمول څخه د c قیمت داسې په لاس راځي:

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

اوس په پورتنی رابطه کې يې قيمت ايږدو، لرو چې:

$$\int_1^4 x^2\,dx = c^2(4-1)$$

$$21 = 3c^2 \Rightarrow c^2 = \frac{21}{3} \Rightarrow c^2 = 7 \Rightarrow c = \sqrt{7}$$

$$k = f(c) \quad , \quad f(c) = c^2 = (\sqrt{7})^2 = 7 \Rightarrow f(c) = 7 \quad , \quad k = 7$$

ښکاره شوه چې د تابع يو قيمت مساوي په k او $1 < \sqrt{7} < 4$ دی.

له مخکې څخه پوهېږو چې د مستطيل مساحت د سور او اوږدوالي له ضرب سره برابر دی، نو د متوسط قيمت په فورمول کې $f(c)$ اوږدوالي او $b-a$ سور دی، نو د منحني لاندې مساحت په $[1,4]$ انټروال کې مساوي له هغه مستطيل سره دی چې اضلاع يې 7 او 3 دی.

پوښتنې

1. لاندې معين انټيګرالونه محاسبه کړئ.

$a)\int_{-1}^{1}(x^3+2)\,dx = ?$

$b)\int_{2}^{5}7x\,dx = ?$

$c)\int_{-2}^{4}(-x)\,dx = ?$

$d)\int_{-1}^{3}(2|x|-3x)\,dx = ?$

$e)\int_{-2}^{3}3x\,dx$

$f)\int_{-1}^{2}(x^3-\frac{1}{2}x^4)\,dx = ?$

$g)\int_{-4}^{4}(2x^2-\frac{1}{8}x^4)\,dx = ?$

$h)\int_{1}^{3}\sqrt{x}\,dx$

2. د $\int_{-1}^{4}f(x)\,dx$ انټيګرال قيمت د $[-1,4]$ په انټروال کې داسې پيدا کړئ چې $\int_{-1}^{1}f(x)\,dx = 5$ او $\int_{1}^{4}f(x)dx = -2$ وي.

3. د $f(x) = x$ تابع په $[0,2]$ انټروال کې په نظر کې ونيسئ او د c قيمت په لاس راوړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

10- د انتيگرال او مشتق اساسي قضيې

يو موټر په $72\frac{m}{\sec}$ چټکتيا سره په حرکت کې دی،
دريور برك ته فشار ورکوي او موټر له 6 ثانيو وروسته
ودرېږي په دې وخت کې وهل شوي فاصله پيدا کړئ.

$$S(t) = v_0 \cdot t$$

- له مشتق د تعريف څخه په ګټې اخيستنې سره د $f(x) = x^2$ د تابع مشتق د $h = 0$ په ټکي کې پيدا کړئ.
- د په لاس راغلی تابع انتيگرال په $[0,1]$ انټروال کې محاسبه کړئ.
- د په لاس راغلو دواړو حالتونو قيمتونه سره پرتله کړئ.

له پورتني فعاليت څخه په لاس راځي چې:

د انتيگرال او مشتق تر منځ يوه منطقي اړيکه شته چې له دې اړيکې څخه په کار اخيستنې سره کولای شو، د انتيگرال اصلي او اساسي قضيې په لاندې ډول ثبوت کړو:

1- د انتيگرال او مشتق لومړی اساسي قضيه:

که چېرې د $f(x)$ تابع د $[a,b]$ په انټروال کې متمادي وي او x په دې انټروال کې شامل وي، لرو چې:

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

څرنګه چې د $f(x)$ تابع په $[a,b]$ انټروال کې مشتق منونکې ده، نو د هر $x \in [a,b]$ لپاره $F'(x) = f(x)$ دی.

ثبوت: څرنګه چې د $f(x)$ تابع په $[a,b]$ انټروال کې متمادي ده، نو د هر $x \in [a,b]$ لپاره د $f(x)$ تابع په $[a,x]$ انټروال کې متمادي ده په پايله کې د $f(x)$ تابع په دې انټروال کې انتيگرال منوونکې هم ده.

اوس د $F(x)$ تابع مشتق د تعريف مطابق ليکو او بيا د x متحول ته د h په اندازه تزايد ورکوو، لکه په لاندې ډول:

$$F'(x) = f(x)$$

$$F'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(a)+F(a)-F(x)}{h}$$

$$F'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(a)-(F(x)-F(a))}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{F(x)\Big|_a^{x+h} - F(x)\Big|_a^{x}}{h}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

اوس د $f(x)$ تابع په $f(t)$ عوض کوو:

$$F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{F(t)\Big|_a^{x+h}-F(t)\Big|_a^{x}}{h}$$

$$F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\int_a^{x+h} f(t)\,dt-\int_a^{x} f(t)\,dt}{h}$$

نظر دریم خاصیت ته لرو چې: $\int_a^b f(t)\,dt=-\int_b^a f(t)\,dt$

$$F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\int_a^{x+h} f(t)\,dt-\int_a^{x} f(t)\,dt}{h}$$

$$F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\int_x^{a} f(t)\,dt+\int_a^{x+h} f(t)\,dt}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\int_x^{x+h} f(t)\,dt}{h}$$

د متوسط قیمت د قضیې څخه $\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt$ $f(c)=$ چې c د x او $x+h$ تر منځ واقع دی، نو کله چې h صفر ته تقرب وکړي c، x ته تقرب کوي، همدارنګه د f تابع له متمادیت څخه لرو:

$$F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt=\lim_{c\to x} f(c)=f(x)$$

په پایله کې: $F'(x)=f(x)$

مثال: د $f(x)=\int_2^{x^2+1}\frac{1}{t^2+1}$ مشتق پیدا کړئ.

حل:

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt \text{ یا } F(x)=\int_a^{g(x)} f(t)\,dt$$

$$u=g(x)=x^2+1$$

$$f(t)=\frac{1}{t^2+1}$$

د زنځیري قاعدې له مخې لرو:

$$F'(x)=f(g(x))\cdot g'(x)$$

$$F'(x)=\frac{1}{(x^2+1)^2+1}\cdot(x^2+1)'=\frac{1}{(x^2+1)^2+1}\cdot 2x$$

$$F'(x)=\frac{2x}{(x^2+1)^2+1}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

2- د انتيګرال او مشتق دويمه اساسي قضيه:

که چېرې $F(x)$ د $f(x)$ تابع لومړنی تابع په $[a,b]$ انټروال کې متمادي وي، په دې صورت کې لرو چې:

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$$

ثبـــوت: لـه مخکـې قـضيې څخـه پـوهېږو چـې کـه $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ دی لـه دې ځايـه د هر $x \in [a,b]$ لپاره $F'(x) = f(x)$ نو د دې دوو مقدارونو خلاف يو ثابت مقدار شته چې:

$$f(x) - F(x) = k \Rightarrow f(x) = F(x) + k$$

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

$$F'(x) = f(x)$$

$$\int_a^x f(t)dt = f(x) = F(x) + k$$

$$\int_a^x f(t)\,dt - F(x) = k$$

که د x په ځای په پورتنۍ رابطه کې a وضع کړو، نو:

$$\int_a^a f(t)\,dt - F(a) = k \quad , \quad 0 - F(a) = k \quad \Rightarrow k = -F(a)$$

که د k قيمت په لومړۍ رابطه کې وضع کړو، نو: $\int_a^x f(t)dt - F(x) = -F(a)$

که د x په ځای په دې رابطه کې b وضع شي، نو: $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$

چې اخيـري رابطـه پـه $\int_a^b f(t)\,dt = [F(x)]_a^b$ پـه شـکل شـودل کېـږي دغـه وروسـتی اړيکـه د لـومړنی تـابع او $\int_a^b f(t)\,dt$ انتيګــرال تــرمنځ اړيکــه ښــيي چــې د نيوټن"لايبنز" رابطې په نوم هم ياديږي.

يادونه:

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + c$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + c$$

$$\int \sec^2 x\,dx = \tan x + c$$

$$\int \cos ec^2 x\,dx = -\cot x + c$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: د $\int_0^1 x^2 dx$ انتیگرال حاصل پیدا کړئ.

حل: $\int_0^1 x^2 dx = F(1) - F(0) = [\frac{x^3}{3}]_0^1 = \frac{1}{3}\cdot 1^3 - \frac{1}{3}\cdot 0^3 = \frac{1}{3}$

پوښتنې

1. **لاندې مشتقات پیدا کړئ.**

$a)\ F(t) = \int_{\sin t}^{\cos t} \frac{1}{4-x^2} dx$

$b)\ F(t) = \int_0^{\cos t} \frac{1}{4-x^2} dx$

$c)\ F(t) = \int_{-\pi}^{t} \frac{\cos y}{1+y^2} dy$

$d)\ F(x) = \int_1^x \frac{\sin t}{t} dt$

2. که په $f(t) = t$ تابع کې $F(0) = 2$ وي، د $F(b)$ مقدار په $0, 0.2, 0.4, \ldots, 1$ ټکو کې پیدا کړئ.

3. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, dx$ پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

11- په تعویضي طریقې سره انتیګرال نیونه

$$\int 2x\sqrt{1+x^2}\,dx$$

ــ آیا کولای شئ چې مخامخ انتیګرال د نامعین انتیګرال له خواصو څخه په کار اخیستنې سره حل کړئ.

ــ که نه شی کولای، نو د جذر لاندې افاده په یوه متحول سره عوض کړئ او بیا هغه حساب کړئ او وو‌ایئ چې په انتیګرال کې د وضع کولو دا طریقه په څه نوم یادېږي.

- د $\int_0^4 \sqrt{2x+1}\,dx$ انتیګرال کې د جذر لاندې افاده په u سره عوض کړئ.
- د u مشتق ونیسي او د dx قیمت پیدا کړئ.
- څرنګه چې نوموړی انتیګرال یو معین انتیګرال دی، نو د $u = 2x+1$ په معادله کې د $x=0$ او $x=4$ قیمتونه وضع او د انتیګرال حدودنه د u له جنسه په لاس راوړئ، وروسته د انتیګرال قیمت محاسبه کړئ.

له پورتني فعالیت څخه لاندې پایلې ته رسېږو:

که د $f(x)$ تابع په $[a,b]$ انټروال کې مشتق منونکی وي، $u=g(x)$ او $F'(x)=f(x)$ سره تعویض شي، څرنګه چې $du = g'(x)dx$ دی، له زنځیري قاعدې څخه لیکلای شو:

$$\int_a^b f(g(x))\,g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du$$

لومړی مثال: د $\int_1^2 \frac{dx}{(3-5x)^2}$ انتیګرال قیمت پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل: د قوس دننه افاده په u عوض کوو:

$$u=3-5x \ , \quad du=-5\,dx \qquad dx=-\frac{du}{5}$$

$$\begin{cases} x=1 \\ u=3-5x \end{cases} \Rightarrow \ u=3-5\cdot 1=-2 \quad \Rightarrow \ u=-2$$

$$\begin{cases} x=2 \\ u=3-5x \end{cases} \Rightarrow \ u=3-5\cdot 2=3-10 \quad \Rightarrow \ u=-7$$

$$\int_1^2 \frac{dx}{(3-5x)^2}=\int_{-2}^{-7}\frac{1}{u^2}(-\frac{1}{5})\,du=-\frac{1}{5}\int_{-2}^{-7}\frac{du}{u^2}=-\frac{1}{5}\left[-\frac{1}{u}\right]_{-2}^{-7}=\left[\frac{1}{5u}\right]_{-2}^{-7}=\frac{1}{5}\left[-\frac{1}{7}+\frac{1}{2}\right]=\frac{1}{14}$$

دویم مثال: د $\int_0^1 x^2(1+2x^3)^5\,dx$ انتیګرال حساب کړئ.

حل: د قوس دننه افاده په u عوض کوو.

$$u=1+2x^3 \quad , \quad du=6x^2\,dx \Rightarrow x^2dx=\frac{1}{6}du$$

$$\begin{cases} x=0 \\ u=1+2x^3 \end{cases} \Rightarrow u=1+2\cdot 0=1 \Rightarrow u=1$$

$$\begin{cases} x=1 \\ u=1+2x^3 \end{cases} \Rightarrow u=1+2\cdot 1=3 \Rightarrow u=3$$

$$\int_0^1 x^2(1+2x^3)^5\,dx=\int_1^3 u^5\,\frac{1}{6}\cdot du=\frac{1}{6}\int_1^3 u^5du=\frac{1}{6}[\frac{u^6}{6}]_1^3=\frac{1}{6}[\frac{3^6}{6}-\frac{1}{6}]$$

$$=\frac{1}{6}[\frac{729}{6}-\frac{1}{6}]=\frac{1}{6}[\frac{728}{6}]$$

$$=\frac{728}{36}=\frac{182}{9}=20.\bar{2}$$

فعالیت

- د $\int x^2\sqrt{x^3+1}\,dx$ انتیګرال کې د جذر لاندې افاده د u په متحول سره تعویض کړئ.
- له u څخه مشتق ونیسئ او په لاس راغلی قیمت په لومړني انتیګرال کې وضع او هغه حساب کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

- له پورته څخه د $F(x)+C$ په لاس راغلي تابع څخه مشتق ونیسئ او له هغې څخه لومړنی تابع په لاس راوړئ.

له پورتني فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راځي:

که د $F(u)$ تابع د $f(u)$ لومړنی تابع وي، د $u=g(x)$ د متحول په تعویض سره یوه بله تابع چې مستقل متحول يې x او متمادي مشتق ولري له زنځيري قاعدې څخه په کاراخیستنې سره لرو:

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx=\int f(u)\,du$$

لومړی مثال: $\int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}dx$ انتیگرال حساب کړئ.

حل: د جذر لاندې افاده په u سره عوض کوو.

$$u=1-4x^2\ ,\ du=-8x\,dx$$

$$xdx=-\frac{1}{8}du$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx=\int \frac{1}{\sqrt{u}}(-\frac{1}{8})\,du=-\frac{1}{8}\int \frac{1}{\sqrt{u}}\,du=-\frac{1}{8}\int u^{-\frac{1}{2}}\,du=-\frac{1}{8}\,(\frac{u^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1})+C$$

$$=-\frac{1}{8}(\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}})+C=-\frac{1}{8}(\frac{\sqrt{u}}{\frac{1}{2}})+C=-\frac{1}{8}(2\sqrt{u})+C=-\frac{1}{4}\sqrt{1-4x^2}+C$$

دویم مثال: $\int x^3\cos(x^4+2)dx$ حساب کړئ.

حل: که چیرې $u=x^4+2$ وضع کړو په لاس راځي:

$$u=x^4+2\ ,\ du=4x^3dx\ ,\ x^3dx=\frac{1}{4}du$$

$$\int x^3\cos(x^4+2)\,dx=\int \cos u\cdot\frac{1}{4}du$$

$$=\frac{1}{4}\int \cos u\,du$$

$$=\frac{1}{4}\sin u+C$$

$$=\frac{1}{4}\sin(x^4+2)+C$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتني

لاندي انتيګرالونه د تعويض له لارې محاسبه کړئ.

$a)\ \int \cos 3x\, dx = ?$

$b)\ \int_1^2 x\sqrt{x-1}\ dx = ?$

$c)\ \int_0^7 \sqrt{4+3x}\ dx = ?$

$d)\ \int 2\sqrt[5]{(1-4x)^2}\, dx = ?$

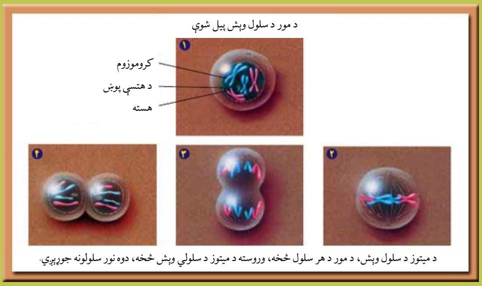
$e)\ \int 2x(x^2+3)^4\, dx = ?$

$f)\ \int_0^5 \frac{x\, dx}{x^2+10} = ?$

$g)\ \int \sqrt{\cos x}\ \sin x\ dx = ?$

(c) ketabton.com: The Digital Library

12- په قسمي طریقې سره انتیګرال نیونه Integration by Parts



د میتوز د سلول وېش، د مور د هر سلول څخه، وروسته د میتوز د سلولي وېش څخه، دوه نور سلولونه جوړېږي.

د حجروي وېش په وخت کې یوه حجره په دوو یا څو حجرو وېشل کېږي. آیا کولای شئ دا لاره(روش) په نورو شیانو کې، لکه: تېږه، شګه او نورو کې ووینو که څواب هو وي، نو دا لاره د څه په نامه یادېږي.

- د $\int \frac{xdx}{x^2+1}$ انتیګرال په تعویضي طریقه حل کړئ.
- د $\int_{-1}^{1} 3x^2\sqrt{x^3+1}dx$ انتیګرال قیمت په تعویضي طریقه پیدا کړئ.
- آیا کولای شئ چې د $\int x^2 \sin x dx$ انتیګرال په تعویضي طریقه حل کړئ.

له پورتنې فعالیت څخه دې پایلې ته رسېږو:

د $\int f(x)g(x)\,dx$ په انتیګرال کې $f(x)$ او $g(x)$ دوې مشتق منونکې تابع ګانې دي چې یوه له بلې سره د ضرب ور وي یا نه وي، خو د انتیګرال محاسبه یې اسانه کار نه دی، که چېرې $f(x)=u$ او $g(x)=v$ وضع کړو، د ضرب حاصل مشتق یې مساوي په: $(u\cdot v)'=u'\cdot v+v'\cdot u$ دی.

له پورتنې رابطې څخه $v'\cdot u$ په لاس راوړو اوله اطراف څخه انتیګرال نیسو:

$$v'\cdot u=(u\cdot v)'-u'\cdot v$$

$$\int v'\cdot u\;dx=u\cdot v-\int u'\cdot v\;dx \quad \text{یا} \quad \int udv=u\cdot v-\int vdu$$

چې پورتنې رابطې ته د غیرمعین انتیګرال فورمول په قسمي طریقه وایي.

که د u او v تابع ګانې په $[a,b]$ انټروال کې تعریف شوی وي، لاندې فورمول د معین انتیګرال فورمول په قسمي لاره(طریقه) بلل کېږي.

$$\int_a^b v'u\,dx=u\cdot v\,\Big|_a^b-\int_a^b vu'\,dx \quad \text{یا} \quad \int_a^b udv=u\cdot v\,\Big|_a^b-\int_a^b vdu$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی مثال: د $\int x\sin x\,dx$ انتيګرال پيدا کړئ.

حل:

$$u = x \quad , \quad du = dx$$
$$dv = \sin x\,dx \quad , \quad v = -\cos x$$
$$\int u\,dv = u\cdot v - \int v\,du$$
$$\int x\sin x\,dx = x(-\cos x) - \int -\cos x\;dx$$
$$= -x\cos x + \sin x + C$$

دويم مثال: د $\int_0^1 -x e^x\,dx$ انتيګرال حساب کړئ.

حل:

$$u = -x \quad , \quad du = -dx \quad , \quad -du = dx$$
$$dv = e^x dx \quad , \quad v = e^x$$
$$\int_a^b v'\cdot u\,dx = u\cdot v\,\Big|_a^b - \int_a^b v\cdot u'\,dx$$
$$\int_0^1 -xe^x\,dx = [-xe^x]_0^1 + \int_0^1 e^x dx$$
$$= -e^1 + 0\cdot e^0 + [e^x]_0^1$$
$$= -e^1 + e^1 - e^0 \;= -e^0$$
$$= -1$$

يادونه:

$$\int e^x\,dx = e^x + c$$

پوښتنې

لاندې انتيګرالونه حساب کړئ.

a) $\int \theta\cos\theta\;d\theta = ?$

b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos 2x\,dx = ?$

c) $\int x^5\cos(x^3)\,dx = ?$

d) $\int_0^1 x e^x\,dx = ?$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د خېرکي مهم ټکي

د ريمان مجموعه: فرضوو د $y=f(x)$ تابع په $[a,b]$ انټروال کې متمادي او تعريف شوی وي او د هغې ناحيې مساحت چې د x محور او د $y=f(x)$ منحني ترمنځ واقع دی چې په هندسي شکلونو نه شي بدلېدلای، محاسبه کړو.

د $[a,b]$ انټروال په n مستطيلو نو تقسيموو څرنګه چې د هر مستطيل عرض د $(\Delta x=\dfrac{b-a}{n})$ رابطې څخه په لاس راځي او د مستطيلونو طول عبارت دی د تابع قيمت په هم هغه ټکي کې، دا فاصلې په لاندې ډول دي:

او د مستطيلونو انټروالونه د $i=1,2,3,\ ....\ ,n$ لپاره په لاندې ډول دي:

$$x_0=a\quad,\quad x_1=a+\Delta x\quad,\quad x_2=a+2\Delta x,\ \dots\ ,x_i=a+i\Delta x,\ \dots\ ,x_n=b$$

$$[x_0,x_1]\ ,\ [x_1,x_2]\ ,\ [x_2,x_3],\ \dots\ ,[x_{i-1},x_i],\ \dots\ ,[x_{n-1},x_n]$$

که د لاندېنيو مستطيلونو مساحت په $f(x_{i-1})\Delta x$ او د پورتنيو مستطيلونو مساحت په $f(x_i)\Delta x$ وښودل شي او د محصور شوي سطحې مساحت په A وښيو، نو لرو چې:

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x < A < \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

نامعين انټيګرالونه: که چېرې د $f(x)$ تابع په $[a,b]$ انټروال کې تعريف او $F(x)$ د $f(x)$ يوه لومړنۍ تابع وي. د $F(x)+C$ توابعو سټ چې c يو ثابت عدد وي د غيرمعين انتګرال په نامه يادېږي او داسې ليکل کېږي: $\int f(x)dx=F(x)+C$

د نامعين انټيګرالونو خواص(ځانګړتياوې):

$$\int k dx=k\int dx=kx+C$$

$$\int a\,f(x)\,dx=a\int f(x)\,dx$$

$$\int[f(x)\pm g(x)]dx=\int f(x)\ dx\pm\int g(x)\ dx$$

$$\int[f_1(x)+f_2(x)+\dots+f_n(x)]dx=\int f_1(x)dx+\int f_2(x)dx+\dots+\int f_n(x)dx$$

$$\int[f(x)\cdot g(x)]\ dx\neq\int f(x)\,dx\cdot\int g(x)\,dx$$

$$\int\frac{f(x)}{g(x)}dx\neq\frac{\int f(x)dx}{\int g(x)dx}\quad,\ g(x)\neq 0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

معین انتیګرال: د $f(x)$ تابع د ریمان مجموعي لیمیټ ته په $[a,b]$ انټروال کې کله چې n بې‌نهایت تـه نژدې شي د Δx فرعي انټروالونو اوږدوالی صفر ته نژدې کیږي چې د $f(x)$ تابع معین انتیګـرال د $x=a$ څخه تر $x=b$ پورې په نوم یادیږي.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x=\int_a^b f(x)dx=[F(x)]_a^b=F(b)-F(a)$$

a ته د انتیګرال لاندینی سرحد او b ته د انتیګرال پورتنی سرحد وایي.

د معین انتیګرال خواص(ځانګړتیاوې):

$$\int_a^b C\,dx=C(b-a)$$

$$\int_a^b k\,f(x)dx=k\int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)\,dx=-\int_b^a f(x)\,dx$$

$$\int_a^a f(x)\,dx=0$$

$$\int_a^b [f(x)\pm g(x)]dx=\int_a^b f(x)\,dx\pm\int_a^b g(x)\,dx$$

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx$$

$$f(x)\le g(x)\quad\Rightarrow\quad\int_a^b f(x)\,dx\le\int_a^b g(x)\,dx$$

$$m(b-a)\le\int_a^b f(x)\,dx\le M(b-a)$$

$$\int_a^b f(x)\,dx=f(c)(b-a)\quad\Rightarrow\quad f(c)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د انتیګرال او مشتق لومړی اساسي قضیه:

که چیرې د $f(x)$ تابع په $[a,b]$ انټروال کې متمادي وي او x په دې انټروال کې شامل وي، لرو چې:

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt$$

څرنګه چې د $f(x)$ تابع په $[a,b]$ انټروال کې د مشتق وړ ده، نو د هر $x\in[a,b]$ لپاره $F'(x)=f(x)$ دی.

د انتیګرال او مشتق دویمه اساسي قضیه:

- که چیرې $F(x)$ تابع د $f(x)$ لومړنی تابع په $[a,b]$ انټروال کې متمادي وي، په دې صورت کې لرو چې:

$$\int_a^b f(t)\,dt=F(b)-F(a)$$

- که $F(u)$ د $f(u)$ لومړنی تابع وي او له $u=g(x)$ متحول سره تعویض شي چې مستقل متحول یې x او متمادي مشتق ولري. له زنځیري قاعدې څخه په کار اخیستنې سره لرو:

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx=\int f(u)\,du$$

- که $F(x)$ تابع په $[a,b]$ انټروال کې مشتق منونکي وي او $u=g(x)$ همدارنګه له $F'(x)=f(x)$ سره تعویض شي، څرنګه چې $du=g'(x)dx$ دی، له زنځیري قاعدې څخه لیکلای شو:

$$\int_a^b f(g(x))\;g'(x)\;dx=\int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du$$

- د $\int f(x)g(x)dx$ انتیګرال کې $f(x)$ او $g(x)$ دوې مشتق منونکي تابع ګانې وي چې په خپل منځ کې قابل د ضرب وي او یا نه وي، خو د انتیګرال محاسبه یې آسانه کار نه دی، که چیرې $f(x)=u$ او $g(x)=v$ سره عوض شي، د هغوی د حاصل ضرب مشتق عبارت دی له:

$$(u\cdot v)'=u'\cdot v+v'\cdot u$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له پورتني اړيکې څخه $v'\cdot u$ په لاس راوړو او له دواړو خواوو څخه انتيګرال نيسو:

$$\int v'\cdot u\ dx = u\cdot v - \int u'\cdot v\ dx \quad \text{يا} \quad \int u dv = u\cdot v - \int v du$$

چې اخيرى اړيکې ته د غير معين انتيګرال فورمول په قسمي طريقه وايي.

- که د u او v تابع ګانې په $[a,b]$ انټروال کې تعريف شوى وي لاندې فورمول، د معين انتيګرال فورمول په قسمي لاره(طريقه) بلل کېږي:

$$\int_a^b v'u\, dx = u\cdot v\,\Big|_a^b - \int_a^b vu'\, dx \quad \text{يا} \quad \int_a^b u dv = u\cdot v\,\Big|_a^b - \int_a^b v du$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د څپرکي پوښتني

1- د لاندې معینو انتیګرالونو قیمت پیدا کړئ.

$a)\ \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+x^2}dx$ $\quad b)\ \int_{-4}^{4}[2x^2-\frac{1}{8}x^4]dx$ $\quad c)\ \int_2^4 \frac{1}{x^2}dx$

$d)\ \int_0^3 4dx$ $\quad e)\ \int_1^3 \sqrt{x}\ dx$ $\quad f)\ \int_1^2 (x^2-x^5)dx$

$g)\ \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos^2 x}dx$ $\quad h)\ \int_{-2}^{0}[\frac{x^3}{4}+\frac{x^2}{3}]dx$ $\quad i)\ \int_2^3 (x^3+x^2)dx$

$j)\ \int_{-2}^{2}[x^3-\frac{1}{2}x^2+3x-4]dx$ $\quad k)\ \int_0^{\pi} \sin x dx$ $\quad l)\ \int_1^2 x^2\ dx$

2- لاندې غیر معین انتګرالونه په لاس راوړئ.

$a)\ \int[\sin x+8x^3]dx$ $\quad b)\ \int[x^5+\frac{4}{x^4}+x^3+\frac{2}{x^2}+x]dx$

$c)\ \int x(1-2x^2)\,dx$ $\quad d)\ \int \sin x\,dx$

$e)\ \int \frac{\sin 2x}{2\sin x}dx$ $\quad f)\ \int \frac{(1-x)^2}{1-x}dx$

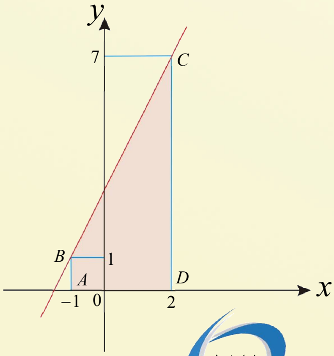
$g)\ \int \sqrt[5]{x^3}\ dx$ $\quad h)\ \int \frac{3x^2+8x}{x}dx$

$i)\ \int(2x^2+3)\ dx$ $\quad j)\ \int \frac{x^2}{\sqrt{x^3+2}}dx$

$k)\ \int \frac{(1+x)(1-x)}{x-x^3}dx$ $\quad l)\ \int(3x^2+4x-1)\ dx$

3- د لاندې محصور رنګ شوې سطحې مساحت د شکل له مخې پیدا کړئ.

$$\int_{-1}^{2}(2x+3)\,dx$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

4- لاندې انټیګرالونه د تعویضي طریقې په مرسته پیدا کړئ.

$a)\ \int 3\cos(2x+1)\,dx$

$b)\ \int \sqrt{3x+5}\,dx$

$c)\ \int \frac{2\,dx}{x+2}$

$d)\int (3x+6)^3\,dx$

$e)\int x^3\sqrt{x^4+2}\,dx$

$f)\int (x^3+2)^2 3x^2 dx$

$g)\int_0^2 \frac{dt}{(3-2t)^2}$

$h)\int_0^2 x^2\cdot\sqrt{9-x^3}\,dx$

$i)\int \frac{1}{(x-10)^7}dx$

$j)\int_0^1 (1-x^2)^3 x dx$

$k)\int (4-3x)^7 dx$

$l)\int \frac{x^2 dx}{\sqrt[4]{x^3+2}}$

5- لاندې انټیګرالونه د قسمي طریقې په مرسته پیدا کړئ.

$a)\ \int x\cos x\,dx$

$b)\int_0^{\pi} \sin x\cos x\,dx$

$c)\ \int e^x\cdot\cos x\,dx$

$d)\int_0^{2\pi} x\cos 3x\,dx$

$e)\ \int xe^{-x}dx$

$f)\int x\sqrt{1+x}\,dx$

$g)\ \int x^2\cdot e^{2x}dx$

$h)\ \int e^{2x}\sin 3x\,dx$

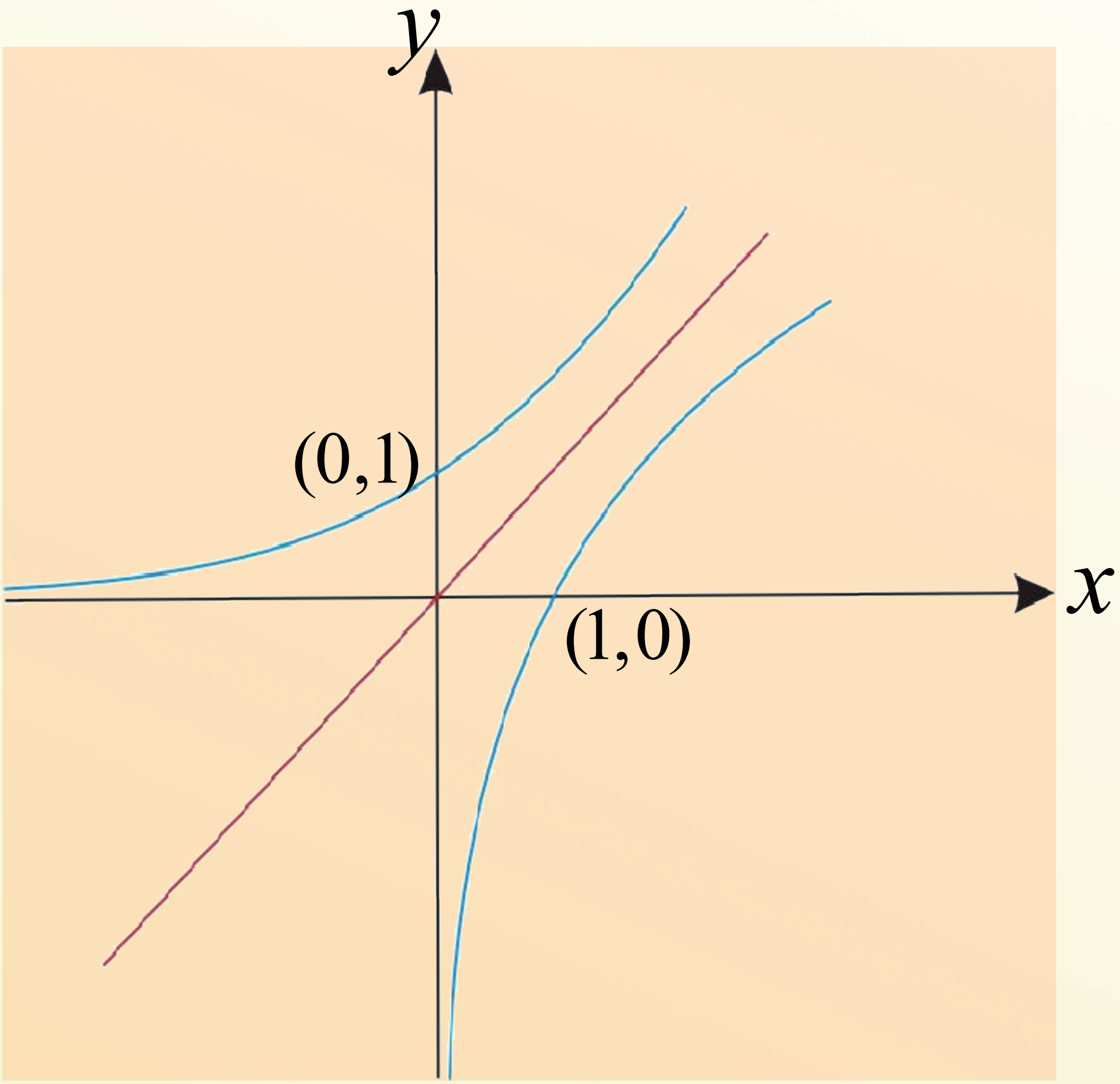
$i)\ \int x^2\cdot e^{-x}\,dx$

(c) ketabton.com: The Digital Library

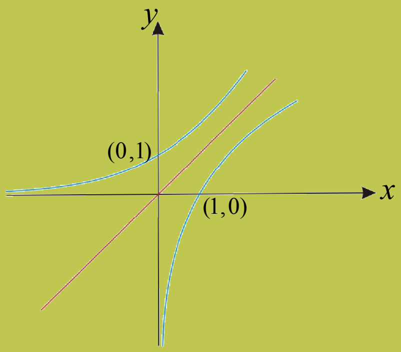
پنځم څپرکی

د لوګاریتمي او اکسپوننشیل تابع ګانو مشتق او انتیګرال

(c) ketabton.com: The Digital Library



(c) ketabton.com: The Digital Library



د لوګاریتمي او اکسپوننشیل تابع ګانو مشتق

مخامخ شکل د څه ډول تابع ګانو ګراف راښيي، نومونه يې واخلئ.

- لوګاریتم تعریف او خواص يې ولیکئ.
- لوګاریتمي او اکسپوننشیل تابع ګانې يوه له بلې سره څه اړيکې لري.
- که $\log_b x$ يوه متصله تابع وي، نو $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$ له کوم عدد سره مساوي ده.
- د $y = f(x)$ د تابع له دواړو خواوو څخه طبیعي لوګاریتم ونیسئ، اړیکه يې ولیکئ.

د پورتني فعالیت پایله داسې بیانوو:

په عمومي ډول که $f(x) = \ln x$ او $g(x) = a^x$ وي؛ نو $g'(x) = a^x \ln a$ او $f'(x) = \frac{1}{x}$ دی.

ثبوت:

-1

$$y = g(x) = a^x$$

$$\ln y = \ln a^x = x \ln a$$

د مساوات له دواړو خواوو څخه نظر x ته مشتق نیسو:

$$\frac{y'}{y} = x' \ln a + x(\ln a)'$$

$$\frac{y'}{y} = \ln a + 0$$

$$\frac{1}{y} y' = \ln a$$

$$y' = y \ln a \quad \Rightarrow \quad g'(x) = a^x \ln a$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

-2

$$f(x)=\ln x$$

$$(\ln x)'=\lim_{h\to 0}\frac{\ln(x+h)-\ln x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\ln\frac{x+h}{x}}{h}$$

$$(\ln x)'=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\ln(\frac{x+h}{x})=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\ln(1+\frac{h}{x})\ =\frac{1}{x}\lim_{h\to 0}\frac{x}{h}\ln(1+\frac{h}{x})$$

$$=\frac{1}{x}\lim_{h\to 0}\ln(1+\frac{h}{x})^{\frac{x}{h}}$$

که $u=\frac{x}{h}$ وضع شي نو $\frac{h}{x}=\frac{1}{u}$ دی خرنگه چې $h\to 0$ تقرب وکړي، نو $u\to\infty$ ته نژدې کېږي، لیکلای شو چې:

$$(\ln x)'=\frac{1}{x}\lim_{u\to\infty}\ln(1+\frac{1}{u})^{u}\ =\frac{1}{x}\ln\lim_{u\to\infty}(1+\frac{1}{u})^{u}$$

پوهېږو چې $\lim_{u\to\infty}(1+\frac{1}{u})^{u}=e$ دی، نو: $(\ln x)'=\frac{1}{x}\ln e=\frac{1}{x}$

قضیه

1. که د $f(x)=\log_a x$ تابع مشتق منوونکی وي، نو مشتق يې $f'(x)=\frac{1}{x}\log_a e$
2. که $f(x)=\log_a g(x)$ او $g(x)$ مشتق منوونکی وي، نو $(\log_a g(x))'=\frac{g'(x)}{g(x)}\log_a e$

ثبوت:

-1

$$f(x)=\log_a x\quad\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{x}\log_a e$$

$$f'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(x+h)-\log_a x}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\log_a\frac{x+h}{x}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\log_a(1+\frac{h}{x})=\lim_{h\to 0}\frac{1}{x}\cdot\frac{x}{h}\log_a(1+\frac{h}{x})=\frac{1}{x}\lim_{h\to 0}\log_a(1+\frac{h}{x})^{\frac{x}{h}}$$

$$(\log_a x)'=\frac{1}{x}\log_a\lim_{h\to 0}(1+\frac{h}{x})^{\frac{x}{h}}$$

اوس که $\frac{x}{h}=u$ وضع شي، نو $\frac{h}{x}=\frac{1}{u}$ کېږي، که $h\to 0$ صفر ته تقرب وکړي، نو $u\to\infty$ کوي، يعنې:

$$(\log_a x)'=\frac{1}{x}\log_a\lim_{u\to\infty}(1+\frac{1}{u})^{u}\ =\frac{1}{x}\log_a e$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

2- غواړو ثبوت کړو چې: $(\log_a g(x))' = \frac{g'(x)}{g(x)} \log_a e$

د زنځیري قاعدې له مخې:

$$f'(x) = (\log_a g(x))' = (\log_a g(x))' \cdot g'(x) = \frac{1}{g(x)} \log_a e \cdot g'(x)$$

$$= \frac{g'(x)}{g(x)} \log_a e$$

که $a = e$ وضع شي، نو لرو: $(\log_a g(x))' = (\ln g(x))' = \frac{g'(x)}{g(x)}$

پایله:

1- د Exponential تابع گانو مشتق د لوګاریتم په مرسته کولای شو په اسانۍ سره په لاس راوړو.

که $y = e^x$ وي ددې تابع مشتق $y' = e^x$ دی، ځکه که د $y = e^x$ رابطې ځخه طبیعي لوګاریتم ونیسو، په لاس راځي:

$$y = e^x \quad \Rightarrow \ln y = x \ln e = x$$

$$(\ln y)' = (x)' \quad \Rightarrow \frac{y'}{y} = 1 \quad \Rightarrow y' = y \cdot 1 = e^x$$

2- که $y = e^u$ او u تابع د x وي، نو: $y' = u' e^u$

3- که $y = a^u$ کله چې $a > 0$ او $a \neq 1$ وي، نو: $y' = u' a^u \ln a$

4- د لوګاریتمي تابع گانو د مشتق پیداکولو لپاره په بیلابیلو قاعدو سره له دې اړیکې ځخه ګټه اخلو:

$$y = \log_a u \Rightarrow y' = (\log_a u)' = \frac{u'}{u} \log_a e$$

$$y' = \frac{u'}{u} \log_a e = \frac{u'}{u} \cdot \frac{1}{\log_e a} \quad \Rightarrow y' = \frac{u'}{u \ln a}$$

لومړی مثال: د $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ تابع مشتق پیداکړئ.

حل: که $g(x) = x^2 + 1$ وضع کړو، نو لرو:

$$g(x) = x^2 + 1$$

$$g'(x) = 2x$$

$$(\ln g(x))' = \frac{g'(x)}{g(x)}$$

$$(\ln(x^2 + 1))' = \frac{(x^2 + 1)'}{x^2 + 1} = \frac{1}{x^2 + 1} \cdot 2x \quad \Rightarrow f'(x) = (\ln(x^2 + 1))' = \frac{2x}{x^2 + 1}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم مثال: د $f(x)=\ln(x^2-5x+4)$ تابع مشتق پیدا کړئ.

حل:

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=\ln(x^2-5x+4) \\ g(x)=x^2-5x+4 \Rightarrow g'(x)=2x-5 \end{array}\right\} \begin{array}{l} (\ln g(x))'=\dfrac{g'(x)}{g(x)} \\ (\ln(x^2-5x+4))'=\dfrac{g'(x)}{g(x)}=\dfrac{2x-5}{x^2-5x+4} \end{array}$$

دریم مثال: د $f(x)=\log_a\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x^2-1}}$ او $f(x)=\ln\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x^2-1}}$ تابع ګانو مشتق پیدا کړئ.

حل: پوهیږو چې $\log_a\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x^2-1}}=\log_a(\dfrac{x^2+1}{x^2-1})^{\frac{1}{2}}$ دی، نو لیکلای شو چې:

$$\log_a\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}}=\log_a(\frac{x^2+1}{x^2-1})^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\log_a\frac{x^2+1}{x^2-1}=\frac{1}{2}(\log_a(x^2+1)-\log_a(x^2-1))$$

$$(\log_a\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}})'=\frac{1}{2}(\log_a(x^2+1)-\log_a(x^2-1))'$$

$$=\frac{1}{2}[\frac{(x^2+1)'}{(x^2+1)}\log_a e-\frac{(x^2-1)'}{(x^2-1)}\log_a e]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{2x}{x^2+1}\log_a e-\frac{2x}{x^2-1}\log_a e\right]=\frac{1}{2}\cdot 2x\log_a e\left[\frac{1}{x^2+1}-\frac{1}{x^2-1}\right]$$

$$=\frac{-2x}{x^4-1}\log_a e$$

حل: پوهیږو چې $\ln\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x^2-1}}=\ln(\dfrac{x^2+1}{x^2-1})^{\frac{1}{2}}$ دی، نو لیکلای شو چې:

$$\ln\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}}=\ln(\frac{x^2+1}{x^2-1})^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}(\ln(x^2+1)-\ln(x^2-1))$$

$$(\ln\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}})'=\frac{1}{2}[\ln(x^2+1)-\ln(x^2-1)]'=\frac{1}{2}[(\ln(x^2+1))'-(\ln(x^2-1))']$$

$$=\frac{1}{2}(\frac{2x}{x^2+1}-\frac{2x}{x^2-1})=\frac{-2x}{x^4-1}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

څلورم مثال: د $y=e^{(x^2+1)}$ تابع مشتق پیدا کړئ.

حل: پوهېږو چې که $y=e^u$ وي نو $y'=u'e^u$

$$y=e^{(x^2+1)} \quad \Rightarrow \quad y'=(x^2+1)'\cdot e^{x^2+1}=2x\cdot e^{x^2+1}$$

پنځم مثال: د $y=\sqrt[x]{2}$ تابع مشتق په لاس راوړئ.

حل: پوهېږو چې که چېرې $y=a^u$ وي، نو $y'=u'a^u\ln a$ سره دی، نو:

$$y=\sqrt[x]{2}=(2)^{\frac{1}{x}} \quad \Rightarrow \quad y'=(\frac{1}{x})'\cdot 2^{\frac{1}{x}}\ln 2=\frac{-1}{x^2}\cdot 2^{\frac{1}{x}}\cdot \ln 2$$

شپږم مثال: د $y=x^{2x}$ تابع مشتق پیدا کړئ.

حل: که د معادلې له دواړو خواوو څخه طبیعي لوګاریتم ونیسو، په لاس راځي چې:

$$y=x^{2x}$$
$$\ln y=\ln x^{2x}$$
$$\ln y=2x\ln x$$
$$(\ln y)'=(2x\ln x)' \quad \Rightarrow \quad \frac{y'}{y}=2\ln x+2x\cdot\frac{1}{x}$$
$$y'=2(\ln x+1)\cdot y \quad \Rightarrow \quad y'=2(\ln x+1)\cdot x^{2x}$$

اووم مثال: د $y=10^x$ تابع مشتق حساب کړئ.

حل: پوهېږو چې $y=a^x \quad \Rightarrow \quad y'=a^x\ln a$ دی، نو:

$$y=10^x$$
$$y'=10^x\cdot\ln 10$$

اتم مثال: د $y=e^{3x}$ تابع مشتق پیدا کړئ.

حل: که $u=3x$ وضع شي، نو: $u'(x)=3$

$$y=e^u$$
$$y'=e^u\cdot u'=e^{3x}\cdot 3$$
$$y'=3e^{3x}$$

نهم مثال: د لاندې تابع ګانو مشتق پیدا کړئ.

1) $y=\log(x^4+1)$ 2) $y=\log_3(\log_2 x)$ 3) $y=\log_{x^2-1} x^2+1$

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل: پوهېږو چې د لوګارتمي توابعو مشتق په مختلفو قاعدو سره د لاندې قضيې څخه په ګټه اخېستنې سره په لاس راوړو:

$$y=\log_a u$$

$$y'=(\log_a u)'=\frac{u'}{u}\log_a e=\frac{u'}{u\log_e a}=\frac{u'}{u\ln a}$$

$$1)\quad y=\log(x^4+1)\quad\Rightarrow\quad y'=\frac{4x^3}{(x^4+1)\ln 10}$$

$$2)\quad y=\log_3(\log_2 x)\quad\Rightarrow\quad y'=\frac{(\log_2 x)'}{\ln 3\log_2 x}=\frac{\frac{1}{x\ln 2}}{\ln 3\log_2 x}=\frac{1}{(\ln 2)(\ln 3)x\log_2 x}$$

$$=\frac{1}{\ln 2\cdot\ln 3\cdot x\cdot\frac{\log_e x}{\log_e 2}}=\frac{1}{\ln 2\cdot\ln 3\cdot x\cdot\frac{\ln x}{\ln 2}}=\frac{1}{\ln 3\, x\ln x}$$

$$3)\quad y=\log_{x^2-1}x^2+1=\frac{\log_e(x^2+1)}{\log_e(x^2-1)}=\frac{\ln(x^2+1)}{\ln(x^2-1)}$$

پوهېږو چې $y'=\frac{u'v-v'u}{v^2}$ $\Rightarrow$ $y=\frac{u}{v}$ **دی؛ نو لرو:**

$$y'=\frac{\frac{2x}{x^2+1}\cdot\ln(x^2-1)-\frac{2x}{x^2-1}\ln(x^2+1)}{\left[\ln(x^2-1)\right]^2}$$

پوښتنې

د لاندې توابعو مشتق پیدا کړئ:

$a)\quad f(x)=\ln\sin 3x$

$b)\quad f(x)=\ln\sqrt{3x^2+7}$

$c)\quad f(x)=\ln(5x^2-6x+5)$

$d)\quad f(x)=\log_{10}3x^2$

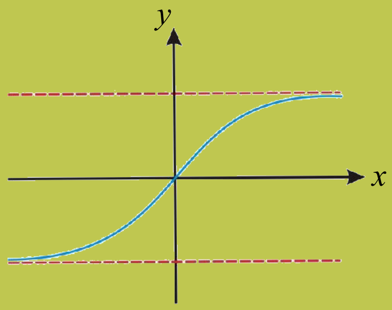
$e)\quad f(x)=y=x^x$

$f)\quad y=\frac{(x+1)^2(\sqrt{x}-1)}{(x+4)^3e^x}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د معکوسو تابع ګانو مشتق

مخامخ شکل د څه ډول تابع ګراف راښيي؟



کـه چېـرې f او g يـوه د بلـې دوې معکوسـې تـابع ګـاني وي، يعنـې $y = f(x) \Leftrightarrow x = g(y)$ وي، نـو:

$\frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{dy}{dx}$ يا $y'_x = \frac{1}{x'_y}$ دی، ځکه چې د تابع او ضمني تابع ګانو له مشتق څخه ليکلای شو:

$$\left.\begin{array}{l} y = f(x) \\ x = g(y) \end{array}\right\} \Rightarrow y'_x \cdot x'_y = y'_y \quad \Rightarrow y'_x \cdot x'_y = 1 \quad \Rightarrow y'_x = \frac{1}{x'_y}$$

مثال: د $y = a^x$ تابع مشتق د هغې د معکوسې تابع په مرسته پيدا کړئ.

حل:

$$y = a^x \quad \Rightarrow x = \log_a y$$

$$\Rightarrow y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\log_a y)'} = \frac{1}{\frac{1}{y}\log_a e} = \frac{1}{\frac{1}{y}}\log_e a = y\log_e a$$

$$y' = a^x \ln a$$

د مثلثاتي معکوسو تابع ګانو مشتق

د مثلثاتي معکوسو تابع ګانو مشتق د لاندې اړيکو په مرسته لاسته راوړو:

$$1)\ (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad 2)\ (\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$3)\ (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} \qquad 4)\ (arc\cot x)' = \frac{-1}{1+x^2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ثبوت:

1) $y = arc\sin x \quad \Leftrightarrow \quad x = \sin y$

$(arc\sin x)' = ?$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}$$

$$\Rightarrow (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

2) $y = arc\cos x \quad \Leftrightarrow \quad x = \cos y$

$(arc\cos x)' = ?$

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\cos y)'} = \frac{1}{-\sin y} = \frac{-1}{\sqrt{1-\cos^2 y}}$$

$$\Rightarrow (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

3) $y = arc\tan x \Leftrightarrow x = \tan y$

$$\Rightarrow (arc\tan x)' = y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\tan y)'} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \cos^2 y$$

$$= \frac{\cos^2 y}{1} = \frac{\cos^2 y}{\sin^2 y + \cos^2 y}$$

د کسر صورت او مخرج په $\cos^2 y$ ویشو:

$$(arc\tan x)' = \frac{\cos^2 y}{\sin^2 y + \cos^2 y} = \frac{1}{\tan^2 y + 1} = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\Rightarrow (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

4) $y = arc\cot x \Leftrightarrow x = \cot y$

$$(arc\cot x)' = ?$$

$$(arc\cot x)' = y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\cot y)'} = \frac{1}{\frac{-1}{\sin^2 y}}$$

$$= -\sin^2 y = \frac{-\sin^2 y}{1} = \frac{-\sin^2 y}{\sin^2 y + \cos^2 y}$$

د کسر صورت او مخرج په $\sin^2 y$ ویشو:

$$= -\frac{\sin^2 y}{\sin^2 y + \cos^2 y} = \frac{-1}{1+\cot^2 y} = -\frac{1}{1+x^2}$$

لومړی مثال: د $y = (\arctan x)^5$ تابع مشتق پیدا کړئ.

$$y' = 5(\arctan x)^4 (\arctan x)' = 5(\arctan x)^4 \frac{1}{1+x^2}$$

دویم مثال: د $y = \log_5(\arctan x)$ تابع مشتق پیدا کړئ.

$$y' = [\log_5(\arctan x)]' = (\log_5 u)' = \frac{u'}{u\log_5 e}$$

$$= \frac{\frac{1}{1+x^2}}{\arctan x \log_5 e} = \frac{1}{(1+x^2)(\arctan x \ln 5)}$$

دریم مثال: د $y = arc\tan e^x$ تابع د مشتق مقدار د $x = 0$ ټکي کې پیدا کړئ.

$$y' = \left[arc\ \tan e^x\right]' = (arc\tan u)' = \frac{u'}{1+u^2} = \frac{e^x}{1+e^{2x}}$$

$$y'(0) = \frac{e^0}{1+e^0} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

1. د لاندې تابع گانو مشتق پيدا کړئ.

1) $y = (arc\sin x)^3$

2) $y = \log_2(arc\cos x)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

قسمي کسرونه

د يو کسر تجزيه کول په قسمي کسرونو:

پوهېږو چې د $\frac{2}{x+1}$ او $\frac{1}{x^2-1}$ د جمعې حاصل $\frac{2x-1}{x^2-1}$ دی، آیا کولای شئ چې له دې کسر څخه د $\frac{2}{x+1}$ او $\frac{1}{x^2-1}$ کسرونه لاسته راوړئ.

$$\frac{2}{x+1}+\frac{1}{x^2-1}=\frac{2x-1}{x^2-1}$$

- د $\frac{7}{x+1}$, $\frac{5}{x-2}$ او $\frac{2}{x-5}$ کسرونه سره جمع کړئ.
- د پورته کسرونود جمعې حاصل، بېرته په لومړنیو کسرونو واړوئ.
- واقعي کسرونه څه ډول کسرونه دي، تعریف يې کړئ.

د پورتني فعالیت پایله داسې بیانوو:

تعریف: د یوه واقعي کسر هغه کوچنی کسرونه چې د جمعې د عواملو په شکل لیکل شوي وي، که چېرې هغوی سره جمع کړو، راکړل شوی واقعي کسر به په لاس راشي، نو دا جمع شوي لومړني کسرونه د قسمي کسرونو په نامه یادېږي.

د یوه واقعي کسر د تجزیه کولو لپاره لاندې حالتونه په پام کې نیسو:

لومړی حالت:

که چېرې د $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$ ناطق کسر مخرج ($P_n(x)$) له خطي بېلابېلو ضربي عواملو څخه جوړ شوي وي او تکرار نه وي په لاندې بڼه بدلېدلای شي:

$$\frac{P_m(x)}{P_n(x)}=\frac{A}{x-x_1}+\frac{B}{x-x_2}+\frac{C}{x-x_3}+\cdots+\frac{N}{x-x_n}$$

(A, B, C .... حقیقي عددونه دي)

لومړی مثال: د $\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}$ کسر په قسمي کسرونو تجزیه کړئ.

حل: د مخرج پولینوم په لومړنیو ضربي عواملو تجزیه کوو، نو په لاس راځي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x^3-4x^2-7x+10=(x-5)(x-1)(x+2)$$

لیدل کېږي چې نوموړی کسر له درو قسمي کسرونو څخه جوړ شوی دی، صورتونه یې C, B, A ټاکو:

$$\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}=\frac{A}{x-5}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+2}$$

$$\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}=\frac{A(x-1)(x+2)+B(x-5)(x+2)+C(x-1)(x-5)}{(x-5)(x-1)(x+2)}$$

$$\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}=\frac{Ax^2+Ax-2A+Bx^2-3Bx-10B+Cx^2-6Cx+5C}{(x-5)(x-1)(x+2)}$$

$$\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}=\frac{(A+B+C)x^2+(A-3B-6C)x+(-2A-10B+5C)}{(x-5)(x-1)(x+2)}$$

لیدل کېږي چې د دواړو خواوو د کسرونو مخرجونه سره برابر دي، نو باید صورتونه هم سره برابر وي، نو د مطابقت د خواصو(د ورته حدونو ضریبونه سره مساوي وي) څخه په ګټه اخستنې سره لیکو:

$$\begin{cases} A+B+C=4 \\ A-3B-6C=-1 \\ -2A-10B+5C=-39 \end{cases}$$

د پورته سیستم له حل څخه وروسته $B=3, A=2$ او $C=-1$ په لاس راځي، نو:

$$\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}=\frac{2}{x-5}+\frac{3}{x-1}-\frac{1}{x+2}$$

دویم مثال: د $\frac{3x^3-6x^2-20x-1}{x^2-2x-8}$ کسر په قسمي کسرونو تجزیه کړئ.

حل: لومړی نوموړی کسر په واقعي کسر بدلوو او بیا پورتنی طریقه پرې تطبیقوو:

$$\frac{3x^3-6x^2-20x-1}{x^2-2x-8}=3x+\frac{4x-1}{x^2-2x-8} \Rightarrow \frac{4x-1}{x^2-2x-8}=\frac{A}{x-4}+\frac{B}{x+2}$$

$$=\frac{A(x+2)+B(x-4)}{(x-4)(x+2)}=\frac{(A+B)x+(2A-4B)}{x^2-2x-8}$$

$$\left.\begin{matrix} A+B=4 \\ 2A-4B=-1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow A=\frac{5}{2} \quad , \quad B=\frac{3}{2}$$

$$\frac{3x^2-6x^2-20x-1}{x^2-2x-8}=3x+\frac{5}{2(x-4)}+\frac{3}{2(x+2)}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم حالت:

که د کسر د مخرج ضربي عوامل لومړی درجه پولینوم وي چې ځینې یې تکرار راغلی وي، یعنې که د $x-x_0$ عامل n ځلې په مخرج کې تکرار شوی وي، نو لیکلای شو چې:

$$\frac{P_m(x)}{P_n(x)}=\frac{A}{x-x_0}+\frac{B}{(x-x_0)^2}+\cdots+\frac{N}{(x-x_0)^n}$$

لومړی مثال: د $\dfrac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2}$ واقعي کسر په قسمي کسرونو تجزیه کړئ:

حل: د مخرج د پولینوم ضربي عوامل په لاس راوړو:

$$x^3-4x^2+5x-2=(x-1)(x-2)(x-1)$$

$$\frac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2}=\frac{3x^2-6x+2}{(x-2)(x-1)^2}=\frac{A}{(x-2)}+\frac{B}{(x-1)}+\frac{C}{(x-1)^2}$$

$$=\frac{A(x-1)^2+B(x-2)(x-1)+C(x-2)}{(x-2)(x-1)^2}$$

$$=\frac{(A+B)x^2+(-2A-3B+C)x+(A+2B-2C)}{(x-2)(x-1)^2}$$

$$\left.\begin{aligned}A+B&=3\\-2A-3B+C&=-6\\A+2B-2C&=2\end{aligned}\right\}\Rightarrow\begin{aligned}A&=2\\B&=1\\C&=1\end{aligned}$$

$$\Rightarrow\frac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2}=\frac{2}{x-2}+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}$$

دریم حالت:

که د مخرج ضربي عوامل دویمه درجه پولینوم چې د تجزیې وړ نه وي او تکرار هم نه وي راغلی، نو د $\dfrac{P_m(x)}{P_n(x)}$ واقعي پولینوم د یو قسمي کسر $\dfrac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$ بڼه لري.

لومړی مثال: د $\dfrac{5x^2+8x+9}{x^3+3x^2+6x+4}$ کسر په قسمي کسرونو تجزیه کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل: د مخرج پولینوم ضربي عوامل عبارت دی له:

$$x^3+3x^2+6x+4=(x+1)(x^2+2x+4)$$

څرنګه چې د x^2+2x+4 درېږ جملهيي د حقيقي عددونو په سټ کې حل نه لري، نو په دې ساحه کې د تجزيي وړ نه ده. له دې امله ليکو:

$$\frac{5x^2+8x+9}{x^3+3x^2+6x+4}=\frac{Ax+B}{x^2+2x+4}+\frac{C}{x+1}=\frac{(Ax+B)(x+1)+C(x^2+2x+4)}{(x^2+2x+4)(x+1)}$$

$$=\frac{(A+C)x^2+(A+B+2C)x+(B+4C)}{(x^2+2x+4)(x+1)}$$

$$\left.\begin{aligned}A+C&=5\\A+B+2C&=8\\B+4C&=9\end{aligned}\right\}\Rightarrow\quad \begin{aligned}A&=3\\B&=1\\C&=2\end{aligned}\Rightarrow\frac{5x^2+8x+9}{x^3+3x^2+6x+4}=\frac{3x+1}{x^2+2x+4}+\frac{2}{x+1}$$

پوښتنې

لاندې کسرونه په قسمي کسرونو تجزيه کړئ.

-1

a) $\dfrac{-x^2+2x-12}{x^3+2x^2+6x+5}$ b) $\dfrac{4x^2-3x+8}{x^3-2x+4}$ c) $\dfrac{2x^4-8x^3+7x^2-3x+4}{x^2-9x+3}$

-2

a) $\dfrac{1}{x^4(x+1)}$ b) $\dfrac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2}$ c) $\dfrac{x^4+1}{x^2(x-1)}$

d) $\dfrac{3x^2+5x+10}{x^3+2x^2-4x-8}$ e) $\dfrac{3x^2-18x+36}{x^3-6x^2+9x}$

-3

a) $\dfrac{3x+7}{(x^2+x+1)(x^2-4)}$ b) $\dfrac{x^2+3x+4}{x^4-2x^2+1}$

c) $\dfrac{x^2+13x+10}{x^3-5x^2}$ d) $\dfrac{x^5}{x^4-1}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د اکسپوننشل تابع ګانو انتیګرالونه

مخامخ اړیکې سره پرتله کړئ.

$$\log_a b = x$$

$$a^x = b$$

- د $f(x) = a^x$ تابع څه ډول تابع ده، نوم یې واخلئ.
- د لوګاریتمي تابع یوه بېلګه ولیکئ.
- د $\log_a x = C$ اړیکه په اکسپوننشیل ډول ولیکئ.

له پورتني فعالیت څخه لیکلای شو چې:

د $f(x) = e^x$ طبیعي اکسپوننشیل تابع لپاره لرو $\int e^x dx = e^x + C$ نو په عمومي ډول

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} \quad , \; a \neq 1 \quad , \; a \in IR^+$$

ثبوت: له تعویضي طریقې څخه په کار اخیستنې سره لرو:

$$u = a^x$$

$$du = \ln a \cdot a^x dx$$

$$dx = \frac{du}{\ln a \cdot a^x} = \frac{du}{u \ln a}$$

$$\int a^x dx = \int u \frac{du}{u \ln a} = \frac{1}{\ln a} \int dx$$

$$\frac{1}{\ln a} u = \frac{1}{\ln a} a^x = \frac{a^x}{\ln a} \Rightarrow \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی مثال: د $f(x)=2^{x-3}$ اکسپوننشیل تابع انتیګرال غواړو پیدا کړو:

د توان له قانون څخه لرو:

$$2^{x-3}=\frac{2^x}{2^3}=\frac{1}{8}2^x$$

$$\int 2^{x-3}dx=\int\frac{1}{8}2^x dx=\frac{1}{8}\int 2^x dx$$

$$\frac{1}{8}\int 2^x dx=\frac{1}{8}\cdot\frac{2^x}{\ln 2}+C$$

دويم مثال: دلاندې اکسپوننشیل تابع ګانو انتیګرالونه پیدا کړئ.

1) $\int 3^{x+1}\,dx=?$ 2) $\int 6^{x-1}\,dx=?$

حل:

1) $\int 3^{x+1}\,dx=?$

$$3^{x+1}=3^x\cdot 3$$

$$\int 3^x\cdot 3\,dx=3\int 3^x\,dx=3\cdot\frac{3^x}{\ln 3}+C$$

2) $\int 6^{x-1}\,dx=?$

$$6^{x-1}=\frac{6^x}{6}=\frac{1}{6}\cdot 6^x$$

$$\int\frac{1}{6}6^x\,dx=\frac{1}{6}\int 6^x\,dx=\frac{1}{6}\cdot\frac{6^x}{\ln 6}+C$$

پوښتنې

د لاندې اکسپوننشیل تابع ګانو انتیګرالونه محاسبه کړئ.

$a)\ \int 3^{x-1}dx$ $b)\ \int 2^{-x}dx$ $c)\ \int a^{x+b}dx$

$d)\ \int\frac{1}{a^x}dx$ $e)\ \int 2^x\cdot 3^x dx$ $f)\ \int\frac{2^x}{3^x}dx$

$g)\ \int\frac{4^{x+3}}{2^x}dx$ $h)\ \int\frac{5^x+3^x}{2^x}dx$ $i)\ \int(1+2^x)dx$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لوګاریتمي تابع ګانو انتیګرال

وښیئ چې د تابع په کوم حالت کې نزولي او په کوم حالت کې صعودي ده.

$$y = a^x$$

$$\int a^x dx = ?$$

- لوګاریتم په څو ډوله دی، د هر ډول عمومي رابطه ولیکئ.
- د $x = a^y$ او $y = \log_a x$ معادلې یو له بل سره څه اړیکه لري.
- د $x = b^y$ او $y = \log_b x$ تابع ګانو ګراف رسم کړئ.
- آیا کولای شو چې د لوګاریتمي تابع ګانو انتیګرال ونیسو؟

له پورتني فعالیت څخه پایله داسې بیانوو:

که $(x \in IR^+)$ $\quad f(x) = \ln x$ وي د طبیعي لوګاریتم د تابع لپاره لیکلای شو: $\quad \int \ln dx = x \cdot \ln x - x + C$

که $(x, a \in IR^+, a \neq 1)$ $\quad f(x) = \log_a x$ وي د معمولي لوګاریتم تابع لپاره لیکلای شو:

$$\int \log_a x\, dx = x \log_a \frac{x}{e}$$

ثبوت:

1- که $a = e$ وضع شي، نو:

$$\int \log_a x\, dx = x \log_a \frac{x}{e} + C$$

$$\int \log_e x\, dx = \int \ln x dx = x \log_e \frac{x}{e} = x(\log_e x - \log_e e)$$

$$\int \ln x\, dx = x \ln x - x + C = x(\ln x - 1) + C$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

-2

$$\int \log_a x\,dx = x\log_a \frac{x}{e} + C$$

$$u = \log_a x \quad , \quad du = \frac{1}{x}\log_a e\,dx$$

$$dv = dx \quad , \quad v = x$$

$$\int \log_a x\,dx = x\log_a x - \int x\frac{1}{x}\log_a e\,dx$$

$$= x\log_a x - \log_a e\int dx$$

$$= x\log_a x - x\log_a e = x(\log_a x - \log_a e) = x\log_a \frac{x}{e} + C$$

$$\int \log_a x\,dx = x\ \log_a \frac{x}{e} + C$$

مثال: د $\int \ln 3x dx$ غیرمعین انتیگرال غواړو پیدا کړو:

حل:

$$\int \ln 3xdx = \int (\ln 3 + \ln x)dx = \int \ln 3\,dx + \int \ln x\,dx$$

$$= x\ln 3 + x\ln x - x$$

$$= x(\ln 3 + \ln x) - x = x(\ln 3x - 1)$$

یادونه:

(I) د تعویض Substitution له لارې کولای شو د غیرمعین انتیګرال حل پیدا کړو.

لومړی مثال:لاندې انتیګرالونه پیدا کړئ.

حل:

$$a)\quad I = \int \frac{1}{2}e^{-2x-3}dx$$

$$-2x - 3 = u, \qquad -2 = \frac{du}{dx} \quad , \quad dx = -\frac{1}{2}du$$

$$I = \int \frac{1}{2}e^{u}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)du = -\frac{1}{4}\int e^{u}du = -\frac{1}{4}e^{u} + C = -\frac{1}{4}e^{-2x-3} + C$$

$$b)\quad I = \int \frac{2dx}{x+2}$$

$$x + 2 = u, \qquad 1 = \frac{du}{dx} \qquad dx = du$$

$$I = \int \frac{2du}{u} = 2\int \frac{du}{u} = 2\ln|u| + C = 2\ln|x+2| + C$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم مثال: د $f(x)=e^{2x}$ تابع انتیګرال ونیسئ:

حل:

$$f(x)=e^{2x} \Rightarrow \int f(x)dx=\int e^{2x}dx=?$$

$$u=2x \Rightarrow du=2dx$$

$$dx=\frac{du}{2}$$

$$f(x)=e^{2x} \Rightarrow \int f(x)dx=\int e^{u}\cdot\frac{du}{2}=\frac{1}{2}\int e^{u}\,du$$

$$\int e^{2x}dx=\frac{e^{u}}{2}+C=\frac{e^{2x}}{2}+C=\frac{1}{2}e^{2x}+C$$

آزمایښت: $F(x)=\frac{1}{2}e^{2x}+C \Rightarrow F'(x)=\frac{1}{2}e^{2x}\cdot 2=e^{2x}=f(x)$

دریم مثال: د $f(x)=x\cdot\ln x^{2}$ انتیګرال حساب کړئ.

حل:

$$f(x)=x\cdot\ln x^{2} \Rightarrow \int f(x)dx=\int(x\cdot\ln x^{2})dx=?$$

$$u=x^{2}$$

$$du=2x\,dx \Rightarrow dx=\frac{1}{2}du$$

$$\int f(x)\,dx=\int x\cdot\ln u\cdot\frac{1}{2x}du=\frac{1}{2}\int\ln u\,du=\frac{1}{2}[u\cdot\ln u-u+C]=\frac{1}{2}u\cdot\ln u-\frac{1}{2}u+C$$

$$=\frac{1}{2}x^{2}\cdot\ln x^{2}-\frac{1}{2}x^{2}+C$$

(II) معین انتیګرالونه هم د بدلون(تعویض) له لارې حل کېږي.

لومړی مثال: د $\int_{-1}^{1}e^{2x}\,dx$ انتیګرال پیدا کړئ.

$$f(x)=e^{2x} \Rightarrow \int_{-1}^{1}e^{2x}\,dx$$

$$u=2x \Rightarrow du=2\,dx \Rightarrow dx=\frac{1}{2}du$$

$$\left.\begin{array}{l} x=-1,\ u=2x \Rightarrow u=2(-1)=-2 \\ x=1,\ u=2x \Rightarrow u=2(1)=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \int_{-1}^{1}e^{2x}\,dx=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}e^{u}\,du=\frac{1}{2}\left[e^{u}\right]_{-2}^{2}=3.627$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم مثال: د $f(x)=\int_1^2 2x\cdot\ln x^2 dx$ انتیګرال قیمت پیدا کړئ.

$$u=x^2$$

$$du=2x\,dx\Rightarrow dx=\frac{1}{2x}du$$

$$\left.\begin{array}{l} x=1\ ,\quad u=x^2=1\\ x=2\ ,\quad u=x^2=4\end{array}\right\}\Rightarrow\int_1^2 2x\cdot\ln x^2dx=\int_1^4 2x\cdot\ln u\cdot\frac{1}{2x}du=\int_1^4\ln u\,du$$

$$=[u\cdot\ln u-u]_1^4=[4\cdot\ln 4-4]-[1\cdot\ln 1-1]\approx 2.545$$

پوښتنې

لاندې انتیګرالونه حل کړئ.

a) $\int \ln 2x^3 dx$

b) $\int \ln\sqrt{x}\,dx$

c) $\int \log\frac{x}{2}dx$

d) $\int 3\log\frac{1}{x}dx$

e) $\int_1^2 \frac{4}{e^{2x-4}}dx$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د قسمي کسرونو په مرسته د انتيګرال محاسبه

د مخامخ کسر قسمي کسرونه پيدا کړئ.

$$\frac{5}{x^2-3x+2}=\frac{?}{(x-2)}+\frac{?}{(x-1)}$$

مخکې مو د قسمي کسرونو تجزيه مطالعه کړه اوس غواړو چې د هغو تابع ګانو انتيګرالونه د قسمي کسرونو په واسطه تر څېړنې لاندې ونيسو.

لومړی مثال: $\int \frac{7x-12}{x^2-6x+8}dx$ محاسبه کړئ.

حل: د قسمي کسرونو د تجزيې په مرسته ليکلای شو:

$$\frac{7x-12}{x^2-6x+8}dx=\frac{A}{(x-2)}+\frac{B}{(x-4)}$$

$$\frac{A(x-4)+B(x-2)}{(x-2)(x-4)}=\frac{Ax-4A+Bx-2B}{(x-2)(x-4)}=\frac{(A+B)x-4A-2B}{(x-2)(x-4)}$$

$$A+B=7$$
$$-4A-2B=-12$$
$$A=7-B$$
$$-4(7-B)-2B=-12$$
$$-28+4B-2B=-12$$
$$-28+2B=-12$$
$$2B=16 \Rightarrow B=8$$
$$A=7-8=-1$$

$$\frac{7x-12}{x^2-6x+8}=-\frac{1}{x-2}+\frac{8}{x-4}$$

نو ليکلای شو چې:

$$\int\frac{7x-12}{x^2-6x+8}dx=\int\frac{-1}{x-2}dx+\int\frac{8}{x-4}dx$$

$$\int\frac{7x-12}{x^2-6x+8}dx=-\int\frac{1}{x-2}dx+8\int\frac{1}{x-4}dx$$

$$=-\ln|x-2|+8\ln|x-4|+C=\ln(x-2)^{-1}+\ln(x-4)^8+C$$

$$=\ln\left[(x-2)^{-1}\cdot(x-4)^8\right]=\ln\left[\frac{(x-4)^8}{x-2}\right]+C$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دويم مثال: د $\int \frac{-5x+9}{x^2+x-6}dx$ انتيګرال محاسبه کړئ.

حل: مخرج په فکتورونو تجزيه کوو: $x^2+x-6=(x-2)(x+3)$

نو:

$$\frac{-5x+9}{x^2+x-6}=\frac{-5x+9}{(x-2)(x+3)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+3}$$

$$\frac{A(x+3)+B(x-2)}{(x-2)(x+3)}=\frac{Ax+3A+Bx-2B}{(x-2)(x+3)}=\frac{(A+B)x+3A-2B}{(x-2)(x+3)}$$

$$(A+B)x+3A-2B=-5x+9$$

$$A+B=-5\Rightarrow A=-5-B$$

$$3A-2B=-5x+9$$

د A او B عددي قيمتونه عبارت دي له:

$$3(-5-B)-2B=9$$

$$-15-5B=9$$

$$-5B=24$$

$$B=-\frac{24}{5}$$

$$A=-5+\frac{24}{5}=\frac{-25+24}{5}=-\frac{1}{5}$$

$$\frac{-5x+9}{x^2+x-6}=\frac{-\frac{1}{5}}{x-2}-\frac{\frac{24}{5}}{x+3}$$

$$\int\frac{-5x+9}{x^2+x-6}=\int\frac{-\frac{1}{5}}{x-2}dx-\int\frac{\frac{24}{5}}{x+3}dx=-\frac{1}{5}\int\frac{1}{x-2}dx-\frac{24}{5}\int\frac{1}{x+3}dx$$

$$=-\frac{1}{5}\ln(x-2)-\frac{24}{5}\ln(x+3)$$

$$=\ln(x-2)^{-\frac{1}{5}}+\ln(x+3)^{-\frac{24}{5}}=\ln\left[(x-2)^{-\frac{1}{5}}\cdot(x+3)^{-\frac{24}{5}}\right]+C$$

پوښتني

لاندې انتيګرالونه د قسمی کسرونو په طريقه حل کړئ.

$a)\ \int\frac{x+2}{x^3-3x^2-x+3}dx$ $\quad b)\ \int\frac{x-2}{x^2-6x+5}dx$ $\quad c)\ \int\frac{x^6}{x^4+3x^2+2}dx$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د خېرکي مهم ټکي

- که $f(x)=e^{x}$ وي، نو ددې تابع مشتق عبارت له $f'(x)=e^{x}$ دی.
- که $f(x)=a^{x}$ وي، د دې تابع مشتق $f'(x)=a^{x}\cdot\ln a$ دی.
- که $f(x)=\log_a x$ وي، نو د تابع مشتق $f'(x)=\frac{1}{x}\log_a e=\frac{1}{x\ln a}$ دی.
- $f(x)=\log_a g(x)$ وي، نو د تابع مشتق $(\log_a g(x))'=\frac{g'(x)}{g(x)}\log_a e$ دی.
- **قسمي کسرونه**: د یوه واقعي کسر هغه کوچنی کسرونه چې د جمعې د عواملو په شکل لیکل شوي دي که هغوی جمع کړو، راکړل شوي واقعي کسر په لاس راځي، قسمي کسرونه بلل کېږي.
- که چېرې د $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$ د کسري پولینوم مخرج ($P_n(x)$) د خطي بېلابېلو ضربي عواملو څخه جوړوي چې تکرار نه وي راغلی په لاندې بڼه بدلیدلای شي:

$$\frac{P_m(x)}{P_n(x)}=\frac{A}{x-x_1}+\frac{B}{x-x_2}+\frac{C}{x-x_3}+\cdots+\frac{N}{x-x_n}$$

- که د لومړی درجه پولینوم مخرج ضربي عوامل چې ځینې یې تکرار راغلي وي، یعنې که د $x-x_0$ عامل n ځلې تکرار شوی وي، نو لیکلای شو چې:

$$\frac{P_m(x)}{P_n(x)}=\frac{A}{x-x_0}+\frac{B}{(x-x_0)^2}+\cdots+\frac{N}{(x-x_0)^n}$$

- که د مخرج ضربي عوامل دویمه درجه پولینوم د تجزیې وړ نه وي او تکرار هم نه وي راغلی، نو د $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$ واقعي پولینوم یو ټوټه کسر $\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$ بڼه لري.
- د اکسپوننشیل تابع ګانو انتیګرال لپاره لیکلای شو:

$$\int e^{x}dx=e^{x}+C \quad , \quad \int a^{x}dx=\frac{a^{x}}{\ln a}+C \quad , \quad (a\in IR^{+}\ ,\ a\neq 1)$$

- د لوګارتمي توابعو د انتیګرال لپاره لیکلای شو:

$$\int \ln x\,dx=x\ln x-x+C \quad , \quad \int \log_a x\,dx=x\log_a\frac{x}{e}+C$$

- ځینې تابع ګانې چې پرته د بدلون له لارې حل کېږي، لیکو:

$$f(x)=e^{x} \Rightarrow \int f(x)\,dx=\int e^{x}\,dx=e^{x}+C$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پنځم څپرکي پوښتنې

لاندې پوښتنې حل کړئ.

1. د $f(x)=\ln(\frac{x-2}{x+2})$ د تابع مشتق پیدا کړئ.
2. د $f(x)=\ln\sqrt{x-1}$ تابع مشتق پیدا کړئ.
3. د $y=2x^{2x}$ تابع مشتق پیدا کړئ.
4. د $f(x)=\log\sqrt{x^3}$ تابع مشتق پیدا کړئ.
5. لاندې کسرونه په قسمي کسرونو تجزیه کړئ.

1) $\frac{x+1}{x^2-x-6}$ 2) $\frac{x^2-x+1}{x^3+2x^2+x}$ 3) $\frac{2x^2+3}{(x^2+1)^2}$

6. لاندې انتیګرالونه پیدا کړئ.

1) $\int 5t^7dt$ 2) $\int \frac{x^3-3}{x^2}dx$

3) $\int (2\cos x-5\sin x+e^x)dx$ 4) $\int \sqrt{\cos x}\sin xdx$

5) $\int xe^{-x}dx$ 6) $\int (\frac{5}{(2x+1)(x-2)})dx$

7) $\int_{-1}^{1}3x^2\sqrt{x^3+1}dx$

7 – د لاندې تابع ګانو مشتق پیدا کړئ.

$a)\ \ y=\ln(x^2+x+1)$ $b)\ \ y=\ln(\sin x)$

$c)\ \ y=e^{x^2+1}$ $d)\ \ y=\sqrt[x]{2}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

شپږم څپرکی

د انتیګرال تطبیقات

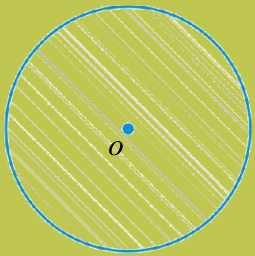
(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

د منحني ګانو پواسطه د محصور شوي سطحې د مساحت محاسبه

Accounting of area bounded by one curve

د مخامخ شکل مساحت چې يوه سطحه د يوې منحني په واسطه تړل شوې دايره ده. د مساحت فورمول يې وواياست.



د $y=1-x^2$ تابع په پام کې ونيسئ.

- د تابع بحراني (*Critical Point*) ټکي او د x محور سره د تقاطع ټکي پيدا اوګراف يې رسم کړئ.
- د $y=1-x^2$ تابع او x محور تر منځ د سطحې د مساحت قيمت د انتيګرال په مرسته پيدا کړئ.
- پورتنی فعاليت د $y=-x^2+2x$ تابع لپاره تکرار کړئ او د منحني او د x د محور تر منځ محصور شوی مساحت محاسبه کړئ.

له پورتني فعاليت څخه لاندې پايلې لاسته راځي:

ـ $\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)$ انتيګرال د يوې سطحې د مساحت قيمت راښيي چې د $y=f(x)$ منحني او د x محور او د $x=a$, $x=b$ د کرښو له خوا رابند (محصور) دی.

ـ که د $f(x)$ تابع په $[a,b]$ ترلې انټروال کې مثبت او متمادي وي، يعني $y=f(x)\geq 0$ په دې صورت کې $f(x)$ تابع ګراف تل د x محور پورته خواته او که $y=f(x)\leq 0$ وي، په دې حالت کې $f(x)$ تابع ګراف د x محور لاندې خواته واقع ده او منفي دی.

لومړی مثال: د $x=4-y^2$ تابع د منحني او د y د محور تر منځ محصور شوی مساحت پيدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل: لومړی د تابع بحراني ټکي او د y محور سره د تقاطع ټکي پيدا کوو، وروسته يې شکل رسموو، د بحراني ټکي د پيدا کولو لپاره لومړی د تابع مشتق نيسو او له صفر سره يې مساوي کوو او له محورونو سره د تقاطع ټکو د په لاس راوړلو لپاره تابع له صفر سره برابروو.

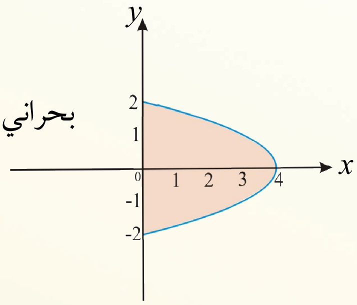
$x = 4 - y^2 \Rightarrow x' = -2y = 0$

$x' = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 0$

$y = 0 \,, \quad x = 4 - y^2 \Rightarrow x = 4 - 0 \Rightarrow x = 4 \quad \Rightarrow \quad (4,0)$ بحراني ټکی

$x = 0 \quad , \quad 4 - y^2 = 0 \Rightarrow y^2 = 4$

$y = \pm 2 \quad \Rightarrow \quad (0,2) \quad , \quad (0,-2)$ د محورونو سره د تقاطع ټکي



څرنګه چې د $x = 4 - y^2$ معادله په $[-2,2]$ انټروال کې نظر x محور ته دواړه ټکي متناظر دي، نو د نمايي مساحت په پام کې نيولو سره، د انټيګرال د مساحت سرحدات په لاندې ډول په لاس راوړو:

$$A = \int_{-2}^{2} (4 - y^2)\, dy = 2 \int_{0}^{2} (4 - y^2) dy = 2[4y - \frac{y^3}{3}]_0^2$$

$$A = 2\,[(4 \cdot 2 - \frac{2^3}{3}) - 0] = 2\,(8 - \frac{8}{3}) = 2\,(\frac{24 - 8}{3}) = 2\,(\frac{16}{3}) = \frac{32}{3}$$

دويم مثال: د x محور او د $y = 1 - \frac{1}{2}x^2$ تابع منحني د محصور شوي سطحې مساحت محاسبه کړئ.

حل: د محصور شوي سطحې د مساحت ټاکلو لپاره لومړی بحراني ټکي او د x له محور سره د تقاطع ټکي په لاس راوړو.

$y = 1 - \frac{1}{2}x^2 \;,\; y' = -x$

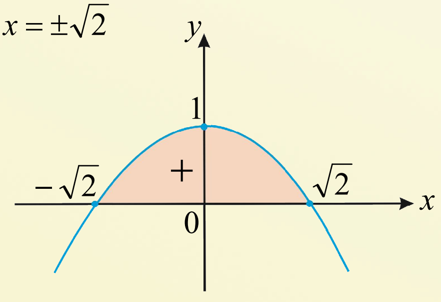
$y' = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$

$x = 0,\; y = 1 - \frac{1}{2}x^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad y = 1 - \frac{1}{2}0^2 \quad \Rightarrow \quad y = 1 \quad \Rightarrow \quad (0,1)$ بحراني ټکي

$y = 0, 1 - \frac{1}{2}x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{2}x^2 = -1 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 2,\; x = \pm\sqrt{2}$

$x_1 = \sqrt{2} \quad , \quad x_2 = -\sqrt{2}$

$(\sqrt{2},0)\,,\; (-\sqrt{2},0)$ له محورونو سره د تقاطع ټکي



(c) ketabton.com: The Digital Library

$$A=\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}(1-\frac{1}{2}x^2)\,dx=2\int_{0}^{\sqrt{2}}(1-\frac{1}{2}x^2)\,dx=2([x-\frac{1}{6}x^3]_0^{\sqrt{2}})$$

$$A=2(\sqrt{2}-\frac{(\sqrt{2})^3}{6}-0)=2(\frac{6\sqrt{2}-(\sqrt{2})^3}{6})=2(\frac{6\sqrt{2}-\sqrt{8}}{6})$$

$$=(\frac{6\sqrt{2}-2\sqrt{2}}{3})=\frac{4\sqrt{2}}{3}$$

$$A=1.8853$$

دریم مثال: د $y=x^2-3$ تابع گراف د x له محور سره یوه سطحه رابند وي، د دې سطحې مساحت پیدا کړئ.

حل: لومړی د سطحې د ټاکلو لپاره د تابع گراف رسموو او د تابع بحراني ټکي او د تقاطع ټکي په لاس راوړو:

$$y=x^2-3 \Rightarrow y'=2x$$

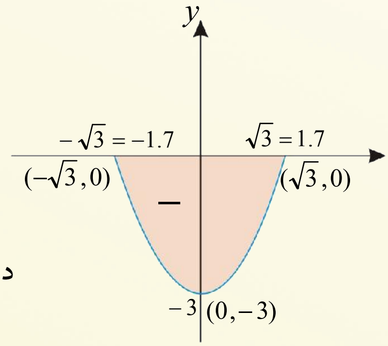
$$y'=0 \Rightarrow x=0$$

$$x=0\ ,\ y=x^2-3 \Rightarrow y=0^2-3$$

$\Rightarrow y=-3 \Rightarrow (0,-3)$ بحراني ټکي

$$y=0\ ,\ \ x^2-3=0 \Rightarrow x^2=3$$

$x=\pm\sqrt{3} \Rightarrow (\sqrt{3},0)\ \ ,\ \ (-\sqrt{3},0)$ د محورونو سره د تقاطع ټکي



څرنګه چې د $y=x^2-3$ تابع په $[\sqrt{3},-\sqrt{3}]$ انټروال کې د محور سره د تقاطع ټکي متناظر قیمتونه لري، نو ګراف یې د x له محور څخه لاندې دی او انتیګرال یې منفي دی، نو له ټول مساحت څخه د انتیګرال د سرحدونو نیمايي مساحت پیدا کوو او په 2 کې یې ضربوو:

$$A_1=\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}(x^2-3)\,dx=-2\int_{0}^{\sqrt{3}}(x^2-3)\,dx=-2(\int_{0}^{\sqrt{3}}x^2\,dx-3\int_{0}^{\sqrt{3}}dx)=-2([\frac{1}{3}x^3]_0^{\sqrt{3}}-[3x]_0^{\sqrt{3}})$$

$$=-2(\frac{1}{3}[(\sqrt{3})^3-0]-3[\sqrt{3}-0])=-2(\frac{1}{3}(\sqrt{3})^3-3\sqrt{3})$$

$$=-\frac{2}{3}(\sqrt{3})^3+6\sqrt{3}=-\frac{2}{3}(1.7)^3+6(1.7)=-\frac{2}{3}(4.913)+10.2=-\frac{9.826}{3}+10.2$$

$$=-3.2753+10.2=6.9247$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

خلورم مثال: د $y = x^2 - 3x$ تابع گراف رسم د منحني او x محور تر منځ د سطحې مساحت په $[-1,4]$ انټروال کې وټاکئ.

حل: لومړی د منحني بحراني ټکی او له له محورونو سره د تقاطع ټکي پیدا کوو:

$$y = x^2 - 3x$$

$$y' = 2x - 3 = 0 \Rightarrow 2x = 3 \ , \ x = \frac{3}{2}$$

$$x = \frac{3}{2}, \quad y = x^2 - 3x \Rightarrow y = (\frac{3}{2})^2 - 3(\frac{3}{2})$$

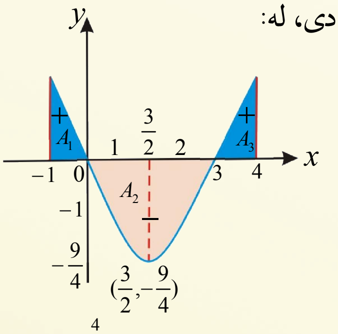
$$y = \frac{9}{4} - \frac{9}{2} = -\frac{9}{4} \quad , \quad (x, y) = (\frac{3}{2}, -\frac{9}{4})$$ بحراني ټکی

څرنگه چې $y'' = 2 > 0$ دی، نو د $(\frac{3}{2}, -\frac{9}{4})$ ټکي د تابع مطلق اصغري ټکي دي او د تقاطع ټکي يې د x له محور سره عبارت دی، له:

$$y = 0 \Rightarrow x^2 - 3x = 0$$

$$\Rightarrow x(x-3) = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = 0 \quad , \quad x_2 = 3$$



$$A = A_1 - A_2 + A_3 = \int_{-1}^{0} (x^2 - 3x)\,dx - \int_{0}^{3} (x^2 - 3x)\,dx + \int_{3}^{4} (x^2 - 3x)\,dx$$

$$A = [\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2]_{-1}^{0} - [\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2]_{0}^{3} + [\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2]_{3}^{4}$$

$$A = [(\frac{1}{3}\cdot 0 - \frac{3}{2}\cdot 0) - (\frac{1}{3}\cdot(-1)^3 - \frac{3}{2}\cdot(-1)^2)] - [(\frac{1}{3}\cdot 3^3 - \frac{3}{2}\cdot 3^2) - (\frac{1}{3}\cdot 0 - \frac{3}{2}\cdot 0)] +$$

$$[(\frac{1}{3}\cdot(4)^3 - \frac{3}{2}\cdot(4)^2) - (\frac{1}{3}\cdot(3)^3 - \frac{3}{2}\cdot(3)^2)]$$

$$= -(-\frac{1}{3} - \frac{3}{2}) - (\frac{1}{3}\cdot 27 - \frac{3}{2}\cdot 9) + (\frac{1}{3}\cdot 64 - \frac{3}{2}\cdot 16) - (\frac{1}{3}\cdot 27 - \frac{3}{2}\cdot 9)$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{3}{2} - \frac{27}{3} + \frac{27}{2} + \frac{64}{3} - \frac{48}{2} - \frac{27}{3} + \frac{27}{2}$$

$$= \frac{1 - 27 + 64 - 27}{3} + \frac{3 + 27 - 48 + 27}{2} = \frac{65 - 54}{3} + \frac{57 - 48}{2} = \frac{11}{3} + \frac{9}{2} = \frac{22 + 27}{6} = \frac{49}{6}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پنځم مثال: د $y = x^2 - 2x$ منحني او x محور ترمنځ مساحت د $[-1,2]$ په انټروال کې پیدا کړئ.

حل: لومړی بحراني ټکي وروسته د x له محور سره د تقاطع ټکي په لاس راوړو:

$$y = x^2 - 2x \Rightarrow y' = 2x - 2 = 0$$

$$2x = 2 \Rightarrow x = 1$$

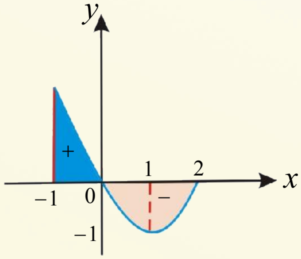
$$x = 1 \;,\quad y = x^2 - 2x = 1^2 - 2(1) = -1 \Rightarrow (1,-1)$$ بحراني ټکي

څرنګه چې $y'' = 2 > 0$ دی، نو تابع د $(1,-1)$ په ټکي کې مطلق اصغري لري او د x لـه محـور سـره یـې تقاطع په لاندې ډول ده.

$$y = 0 \quad , \quad x^2 - 2x = 0$$

$$x(x-2) = 0$$

$$x_1 = 0 \quad , \quad x_2 = 2$$



څرنګه چې منحني د $[-1,2]$ په انټـروال کـې لـه مبـدأ څخـه تیرېـږي او د منحنـي یـوه برخـه د $[-1,0]$ پـه انټروال کې د x محور پورته خواته او بله برخه یې د $[0,2]$ په فاصلې کې د x محور ښکته خواته پرتـه ده انټیګرال یې منفي دی:

$$A = \int_{-1}^{0}(x^2 - 2x)dx - \int_{0}^{2}(x^2 - 2x)\,dx = [\frac{1}{3}x^3 - x^2]_{-1}^{0} - [\frac{1}{3}x^3 - x^2]_{0}^{2}$$

$$= (0 - (-\frac{1}{3} - 1)) - ((\frac{8}{3} - 4) - 0) = -(-\frac{1}{3} - 1) - (\frac{8}{3} - 4) = -(\frac{-1-3}{3}) - (\frac{8-12}{3})$$

$$= -(\frac{-4}{3}) - (\frac{-4}{3}) = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$$

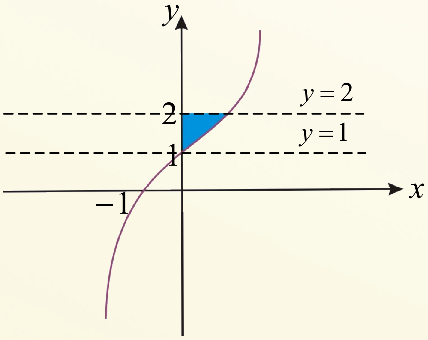
(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

1- د $f(x)=\sin x$ منحني او د x محور تر منځ مساحت په $[-2\pi, 2\pi]$ انټروال کې حساب کړئ.

2- د $y=x^3+1$ تـــابع منحنـــي او $y=1$ ، $y=2$

کرښو تر منځ مساحت وټاکئ.



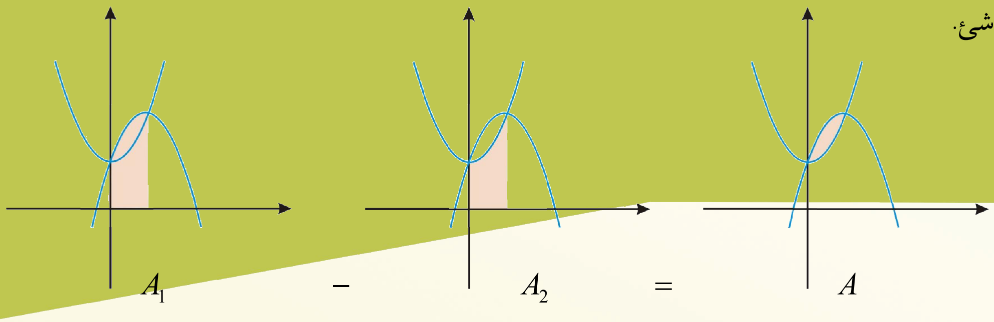
3- د $y=\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+1}+x}$ منحني او د $x=0$ او $x=1$ کرښو تر منځ مساحت حساب کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دوو محصور شويو منحني ګانو تر منځ د مساحت محاسبه

Accounting of area bounded by tow curves

لانـــدې شـــکلونه پـــه پـــام کـــې ونيـــسئ د $A = A_1 - A_2$ اړيکـــې د ســـموالي پـــه اړه څـــه و يلای شئ.



فعاليت

که د $y_1 = 1 - x^2$ او $y_2 = x^2 - 1$ تابع ګانې راکړل شوې وي.

- د $y_1 = y_2$ رابطې څخه د x قيمت په لاس راوړئ.
- د لاس ته راغلو قيمتونو په پام کې نيولو سره د هغوی ګراف رسم کړئ.
- څرنګه چې د y_1 تـابع ګـراف د y_2 تـابع د ګـراف څخه لـوړ دی، نـو د تـابع ګـانو د انتيګـرال د تفريـق حاصل $(y_1 - y_2)$ د x په ټاکل شوی انټروال کې حساب کړئ.
- نوموړی فعاليت د $y = x^2$ تـابع د منحنـي او $y = x + 2$ د کرښـې لپـاره تکـرار کـړئ او د محـصورې شوې سطحې مساحت حساب کړئ.

د پورتنی فعاليت څخه لاندې پايلې لاسته راځي:

ـ که چېرې د $y_1 = f(x)$ او $y_2 = g(x)$ دوو منحني‌ګانو د محصور شوي سـطحې د محاسبې لپـاره پـه هغه صورت کې چې $f(x) > g(x)$ وي، يعنـې د $f(x)$ تـابع ګـراف د $g(x)$ تـابع دپاسـه واقع وي، نـو لومړی د دواړو منحني ګانو د تقاطع ټکي پيداکوو وروسته د پاسـني او لانـدېني منحنـي د x د محـور سره مساحت په $[a,b]$ انټروال کې محاسبه کوو:

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ـ که چېرې د $g(x)$ تابع ګراف د $f(x)$ تابع د ګراف دپاسه واقع وي، نو لرو چې:

$$A=\int_a^b [g(x)-f(x)]\,dx=\int_a^b g(x)\,dx-\int_a^b f(x)\,dx$$

لومړی مثال: د $f(x)=2x-x^2$ او $g(x)=x^2$ منحني ګانو د ګرافونو ترمنځ د پرتې سطحې مساحت حساب کړئ.

حل: لومړی د دواړو منحني ګانو د تقاطع ټکي پیدا کوو:

$f(x)=2x-x^2 \quad , \quad g(x)=x^2$

$f(x)=g(x) \Rightarrow 2x-x^2=x^2$

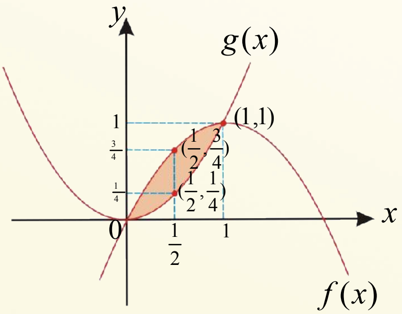
$2x-x^2-x^2=0$

$2x-2x^2=0$

$2x(1-x)=0$

$2x=0 \quad \Rightarrow \quad x_1=0$

$1-x=0 \quad \Rightarrow \quad x_2=1$



لیدل کېږي چې ددواړو منحني ګانو تقاطع (۱،۱) او (۰،۰) ده اوس د محصور شوي سطحې مساحت پیدا کوو.

$$A=\int_a^b [f(x)-g(x)]=\int_0^1 [2x-x^2-x^2]\,dx=\int_0^1 [2x-2x^2]=[\frac{2x^2}{2}-\frac{2x^3}{3}]_0^1$$

$$=[x^2-\frac{2}{3}x^3]_0^1=(1-\frac{2}{3})-0=\frac{3-2}{3}=\frac{1}{3}$$

دویم مثال: د $f(x)=x^2-6x+2$ تابع او $g(x)=2-x$ کرښې د ګرافونو تر منځ د پرتې سطحې مساحت حساب کړئ.

حل:

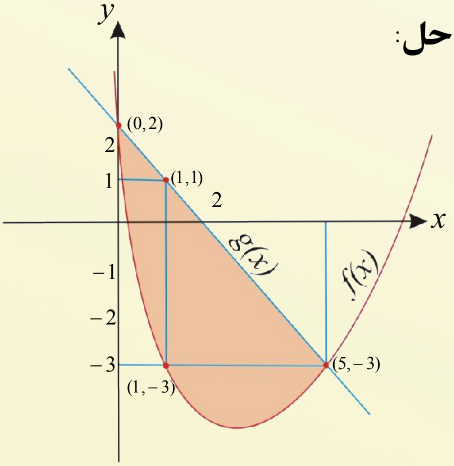
$$\left.\begin{array}{l} f(x)=x^2-6x+2 \\ g(x)=2-x \end{array}\right\} \Rightarrow f(x)=g(x)$$

$x^2-6x+2=2-x \Rightarrow x^2-6x+2-2+x=0$

$x^2-5x=0 \Rightarrow x(x-5)=0$

$x_1=0 \quad , \quad x_2=5$

$\Rightarrow (0,2) \quad , \quad (5,-3)$ د کرښې او منحني د تقاطع ټکي



(c) ketabton.com: The Digital Library

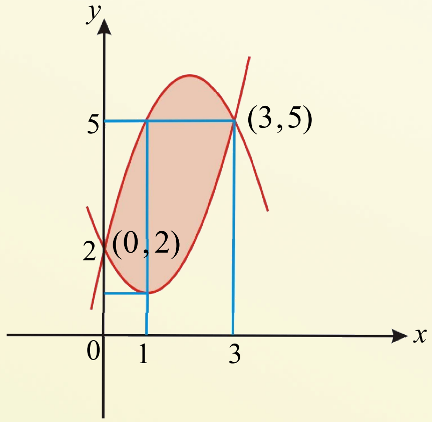
له شکل څخه ښکاري چې د $g(x)$ کربښې گراف د $f(x)$ گراف پورته خوا ته واقع دی، په دې معنا چې

$$g(x) > f(x)$$

$$A = \int_a^b [g(x) - f(x)]\,dx = \int_0^5 (2 - x - x^2 + 6x - 2)dx$$
$$= \int_0^5 (-x - x^2 + 6x)\,dx = \int_0^5 (-x^2 + 5x)\,dx$$
$$= [-\frac{x^3}{3} + 5\frac{x^2}{2}]_0^5 = (-\frac{125}{3} + 5\cdot\frac{25}{2}) - 0 = -\frac{125}{3} + \frac{125}{2}$$
$$= \frac{-250 + 375}{6} = \frac{125}{6}$$

دريم مثال: د $f(x) = -x^2 + 4x + 2$ او $g(x) = x^2 - 2x + 2$ تابع گانو د گرافونو تر منځ د پرتې سطحې مساحت پيدا کړئ.

حل: څرنگه چې د دواړو گرافونو د تقاطع ټکي د انتيگرال حدونه جوړوي، نو د دې ټکو د پيدا کولو لپاره $f(x) = g(x)$ وضع کوو:



$$\left.\begin{array}{l} f(x) = -x^2 + 4x + 2 \\ g(x) = x^2 - 2x + 2 \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) = g(x)$$
$$-x^2 + 4x + 2 = x^2 - 2x + 2$$
$$\Rightarrow -x^2 + 4x + 2 - x^2 + 2x - 2 = 0$$
$$-2x^2 + 6x = 0 \Rightarrow x(-2x + 6) = 0$$
$$\Rightarrow x_1 = 0 \quad , \quad -2x = -6 \Rightarrow x_2 = 3$$

د دواړو منحني گانو د تقاطع ټکي $(0,2)$, $(3,5)$

د x له محور سره د تقاطع ټکی عبارت له (3،5)، (0،2) دی اوله شکل څخه ليدل کېږي چې د $f(x)$ گراف د $g(x)$ له گراف څخه پورته واقع دی، نو لرو:

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_0^3 (-x^2 + 4x + 2)dx - \int_0^3 (x^2 - 2x + 2)dx$$
$$= [-\frac{x^3}{3} + \frac{4x^2}{2} + 2x]_0^3 - [\frac{x^3}{3} - \frac{2x^2}{2} + 2x]_0^3$$
$$= -\frac{1}{3}\cdot 27 + 2\cdot 9 + 6 - 0 - \frac{1}{3}\cdot 27 + 9 - 6 + 0$$
$$= -9 + 18 - 9 + 9 = 9$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

1- د $y = x^2$ او $y = -x^2 + 4x$ منحني ګانو د ګرافونو تر منځ د پرتې سطحې مساحت پیدا کړئ.

2- د $y^2 = 2x - 2$ پارابول او $y = x - 5$ کرښې د ګرافونو تر منځ د سطحې مساحت حساب کړئ.

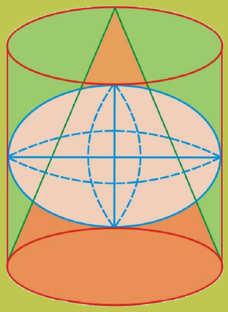
3- د $y^2 = 2x + 6$ منحني او $y = x - 1$ کرښې د ګرافونو تر منځ د سطحې مساحت محاسبه کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دګراف له دوران څخه د پيدا شوي جسم حجم

Accounting of rounding things Volume

د مخامخ شکل د جسمونو د حجمونو تر منځ نسبت پيدا کړئ.

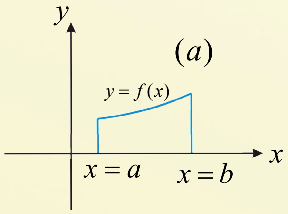


په مخکنيو ټولګيو کې مو د جسمونو حجم پيدا کړی وو. پرته له دې چې د هغوی فورمولونه ثبوت شي منلي مو وو، خو اوس د جسمونو د حجم فورمولونه د معين انتيګرال څخه په ګټه اخيستنې سره ثبوتوو.

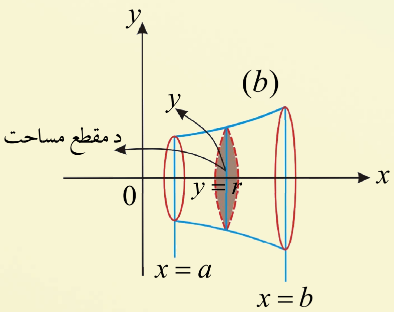
- يو ټکی او يوه کرښه په فضا کې داسې په پام کې ونيسئ چې ټکی د کرښې په منځ کې واقع وي.
- هغه جسم چې د يوې مستقيمې کرښې له دوران څخه د يوه ټکي په شاوخوا لـه څرخېدو وروسته جوړېږي، نوم يې واخلئ.
- د نوموړي جسم د حجم فورمول وليکئ او ووايئ چې هغه څنګه ثبوتوو.

د پورتني فعاليت پايله داسې بيانوو:

- که چېرې د $y = f(x)$ متمادي تابع د منحني مساحت نظر (a) شکل ته



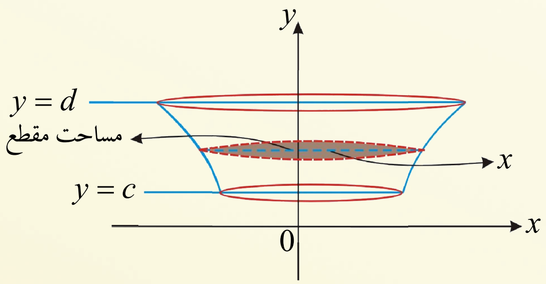
د $x=a$ او $x=b$ کرښو او منحني پـه واسطه محصور شوی وي، نو د هغه جسم حجم چې د پورتني تابع د منحني له دوران څخه د x محور په شاوخوا لاسته راځي تقريباً استوانه يي شکل لري، لکه د (b) شکل.



(c) ketabton.com: The Digital Library

چې ارتفاع یې $\Delta x = b - a$ ده او د دې استوانې سطح د دایروي شکل په واسطه محصوره شوې ده چې دې سطحو ته مقطع وایي او پوهېږو چې د دایرې مساحت نظر x محور ته $A(x) = \pi r^2$ دی او ددې مقطع شعاع شکل ته په کتو سره د y محور سره موازي ده، نو $y = r$ کېږي او د حجم فورمول یې نظر ریمان مجموع ته په لاندې ډول دی:

$$v = \lim_{n\to\infty} V_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} A(x)\Delta x = \int_a^b \pi r^2\, dx = \int_a^b \pi y^2\, dx = \int_a^b \pi [f(x)]^2\, dx$$



- که د $x = f(y)$ تابع د منحني مساحت $y = c$ او $y = d$ کرښو ترمنځ محصور شوی وي دداسې استوانې د مقطع مساحت نظر y محور ته $A(y) = \pi r^2$ دی چې ارتفاع یې $\Delta y = d - c$ او شعاع یې $x = r$ سره ده هغه حجم چې له دې دوران څخه په لاس راځي په لاندې ډول دی:

$$v = \lim_{n\to\infty} V_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} A(y)\Delta y = \int_a^b \pi r^2\, dy = \int_a^b \pi x^2\, dy = \int_a^b \pi [f(y)]^2\, dy$$

د دوراني جسمونو حجم د انتیګرال په مرسته په لاس راځي، لکه:

1- د انتیګرال په مرسته د کرې حجم پیدا کړئ.

ثبوت: پوهېږو چې که چېرې نیمه دایره د خپل قطر په شاوخوا وخرخي کره لاس ته راځي او د دایرې معادله $x^2 + y^2 = r^2$ ده، اوس د نیمې دایرې حجم له څرخېدو وروسته په لاس راوړو او هغه دوه برابره کوو چې د دایرې بشپړ حجم په لاس راشي

$$x^2 + y^2 = r^2$$
$$y^2 = r^2 - x^2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$V=\int_{-r}^{r}\pi y^2dx=\pi\int_{-r}^{r}(r^2-x^2)\,dx$$

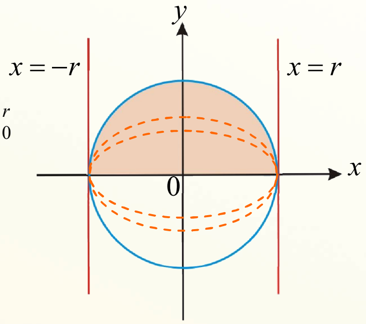
$$=2\pi\int_{0}^{r}(r^2-x^2)\,dx=2\pi[r^2x-\frac{x^3}{3}]_0^r$$

$$=2\pi[(r^3-\frac{r^3}{3})-0]$$

$$=2\pi(\frac{3r^3-r^3}{3})$$

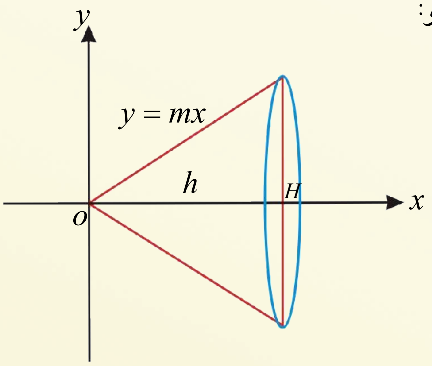
$$=2\pi(\frac{2r^3}{3})$$

V (دکرې حجم) $=\frac{4}{3}\pi r^3$



2- د انتیګرال په مرسته د مخروط حجم پیدا کړئ.

ثبوت: څرنګه چې مخروطي سطح د $y = mx$ کرښې له دوران څخه د x د محور په چاپېريال په لاس راځي نو:



$$V=\int_0^h\pi\, y^2dx$$

$$=\int_0^h\pi\, m^2x^2dx=\pi\, m^2\int_0^h x^2dx$$

$$=\pi\, m^2[\frac{x^3}{3}]_0^h=\pi\, m^2(\frac{h^3}{3})$$

$$=\frac{\pi\, h}{3}(mh)^2$$

له پورته شکل څخه لیدل کېږي چې د مخروط قاعده دايروي بڼه لري اوشعاع يې د h محور سره موازي ده، يعنې $y \,//\, r$ او همدا رنګه د مخروط ارتفاع (h) د x په محور باندې منطبق ده، $(x = h)$ نو د $y = mx$ په اړيکه کې يې قيمت وضع کوو:

$$y=mx \quad\Rightarrow\quad r=mh$$

$$=\frac{\pi h}{3}\quad r^2$$

$$V=\pi\, r^2\times\frac{h}{3}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

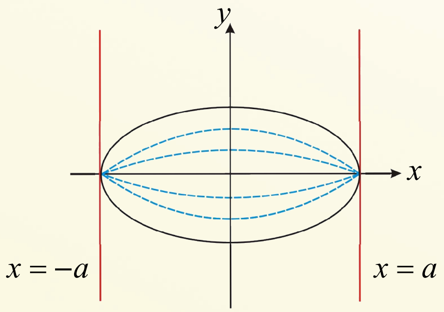
څرنګه چې د مخروط قاعده دايروي ده، د دايرې مساحت πr^2 دی، لرو چې:

$$V = \pi r^2 \cdot \frac{h}{3}$$

$$V(\text{د مخروط حجم}) = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

3- د الپس حجم چې د $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ د منحني او x محور په چاپېر د لوی قطر په شاوخوا له دوران وروسته جوړېږي، په لاس راوړئ.

ثبوت: د الپس د نيمايي حجم د لوی قطر په شاوخوا په لاس راوړو او هغه دوه چنده کوو چې د بشپړ الپس حجم په لاس راشي.



$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{x^2}{a^2} \Rightarrow y^2 = b^2-\frac{b^2}{a^2}x^2$$

$$V=\int_{-a}^{a}\pi y^2\,dx = \pi\int_{-a}^{a}[b^2-\frac{b^2}{a^2}x^2]dx$$

$$=2\pi\int_{0}^{a}[b^2-\frac{b^2}{a^2}x^2]dx = 2\pi[b^2x-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x^3}{3}]_0^a$$

$$=2\pi[(b^2a-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{a^3}{3})-0]=2\pi[b^2a-\frac{b^2a}{3}]$$

$$=2\pi[\frac{3b^2a-b^2a}{3}]=2\pi[\frac{2b^2a}{3}]$$

$$\text{V}=\frac{4}{3}\pi b^2a \Rightarrow \text{د الپس دوران د لوی قطر په شاوخوا حجم} = \frac{4}{3}\pi b^2a$$

که چېرې د الپس محراقونه د y په محور پراته وي او د هغه انتګرال حساب کړو د الپس د کوچني قطر په شاوخوا حجم په لاندې ډول په لاس راځي:

$$\text{د الپس دوران د کوچني قطر په شاوخوا حجم} = \frac{4}{3}\pi a^2 b$$

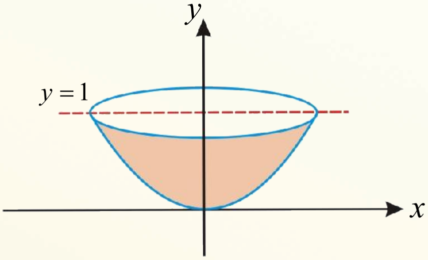
(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی مثال: د هغه جسم حجم چې د $y = x^2$ او $y = 1$ کرښې تر منځ پرتې مستوي مساحت د دوران څخه د y په محور په لاس راځي، پیدا کړئ.

حل: لومړی شکل رسموو وروسته يې مساحت حسابوو:

$$V = \int_a^b \pi x^2 dy = \pi \int_0^1 y\, dy = \frac{1}{2}\pi y^2 |_0^1 = \frac{1}{2}\pi$$

$$\Rightarrow V = \frac{\pi}{2}$$



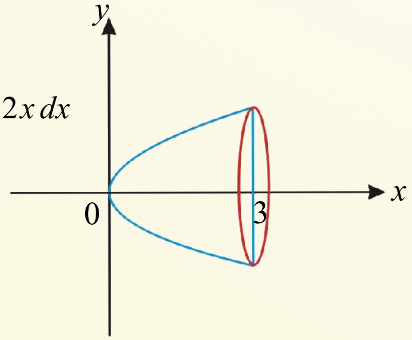
دویم مثال: د $y = \sqrt{2x}$ تابع او $y = 3$ کرښې ترمنځ د څرخیدلی جسم مساحت پیدا کړئ.

حل:

$$V = \int_a^b \pi y^2 dx = \int_0^3 \pi[\sqrt{2x}\,]^2 dx = \pi \int_0^3 [\sqrt{2x}\,]^2 dx = \pi \int_0^3 2x\, dx$$

$$V = 2\pi \int_0^3 x\, dx = 2\pi [\frac{x^2}{2}]_0^3$$

$$V = 9\pi$$

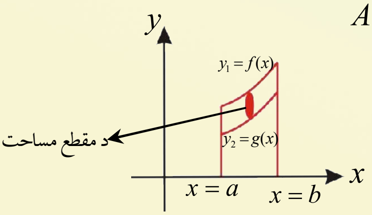


یادونه: که د $y_1 = f(x)$ او $y_2 = g(x)$ تابع ګانې په $[a, b]$ انټروال کې متمادي وی د هغه دوراني جسم حجم د $f(x)$ او $g(x)$ منحني ګانو او د $x = a$ ، $x = b$ کرښو تر منځ جوړېږي له لاندې رابطې څخه لاسته راځي:

$$\Delta x = \text{د استواني ارتفاع}$$

$$A(x) = (\text{د استواني د مقطع مساحت}) = \pi y_1 - \pi y_2 = \pi(y_1 - y_2)$$

د هغې استواني د حجم فورمول چې د $f(x)$ تابع ګراف د $g(x)$ تابع ګراف څخه پورته قرار لري.



$$V = \int_a^b \pi(y_1^2 - y_2^2)\, dx = \pi \int_a^b (y_1^2 - y_2^2)\, dx$$

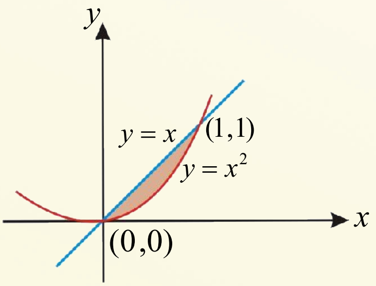
(c) ketabton.com: The Digital Library

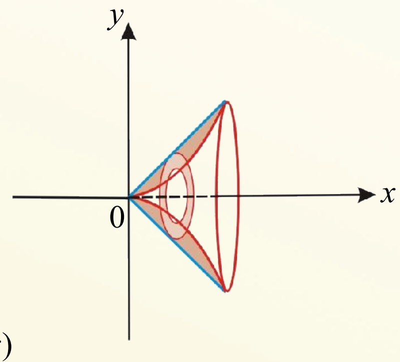
د هغې استواني د حجم فورمول چې د $g(x)$ تابع گراف ، د $f(x)$ گراف څخه پورته واقع وي.

$$V=\int_a^b \pi(y_2^2-y_1^2)\,dx=\pi\int_a^b (y_2^2-y_1^2)\,dx$$

مثال: د هغه جسم حجم پيدا کړئ چې د $y=x^2$ منحني او $y=x$ کرښې تر منځ د پرتې سطحې مساحت له دوران څخه د x محور په شاوخوا په لاس راځي، محاسبه کړئ.

حل:





$$\left.\begin{array}{l} y_1=x^2=f(x) \\ y_2=x=g(x) \end{array}\right\}\Rightarrow y_2>y_1\ ,\ g(x)>f(x)$$

$$=\int_a^b \pi(y_2^2-y_1^2)\,dx=\int_0^1 \pi(x^2-(x^2)^2)dx$$

$$=\pi\int_0^1 (x^2-x^4)\,dx=\pi[\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5}]_0^1$$

$$=\pi[(\frac{1}{3}-0)-(\frac{1}{5}-0)]=\pi[\frac{1}{3}-\frac{1}{5}]$$

$$V=\pi[\frac{5-3}{15}]=\pi[\frac{2}{15}]=\frac{2\pi}{15}$$

پوښتنې

1. د هغه جسم حجم چې د $y=\sin x$ تابع او د $x=0$ او $x=\pi$ دوو کرښو تر منځ محصور شوی مساحت له دوران څخه د x د محور په چاپېر جوړېږي پيدا کړئ.

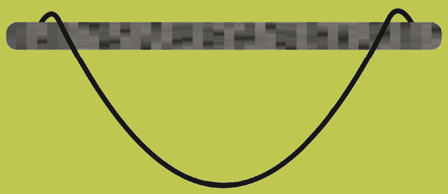
2. د هغه جسم حجم پيدا کړئ چې د $y=x^3$ منحني او $y=8$ ، $x=0$ کرښو ترمنځ محصور شوي مساحت له دوران څخه د y د محور په چاپېر جوړېږي، حساب کړئ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

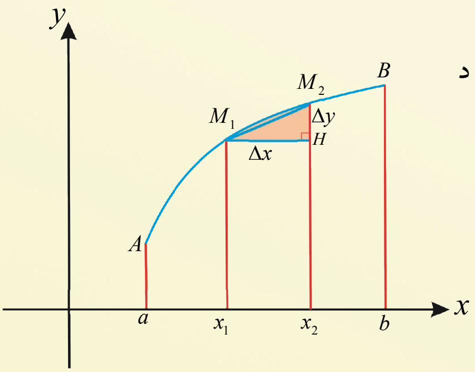
د قوس د اوږوالی محاسبه

Accounting the Length of Arc

ځرنګه کولای شو چې د مخامخ پړي اوږدوالی پیدا کړو؟



- د قایمو مختصاتو په سیستم کې د $y=f(x)$ تابع په $[a,b]$ انټروال کې په پام کې ونیسئ او هغې ته $\overset{\frown}{AB}$ ووایې، داسې چې تابع په نوموړی فاصله کې متمادي او د مشتق وړ وي.
- د $[a,b]$ انټروال په دریو مساوي برخو ویشو او د x_1 او x_2 د قوس اوږدوالی په M_1 او M_2 بنیو.
- د M_1 له ټکي څخه یوه ټوټه کرښه د M_2 په ټکي او یوه بله کرښه، د هغې په مخامخ کرښه رسموو او د دواړو ټوټه کرښو، د تقاطع ټکی H ونوموئ.
- د M_1H د کرښې فاصلې ته Δx او M_2H ته Δy وایي او د M_1HM_2 د قایم الزاویه مثلث د مخامخ قوس اوږوالی د فیثاغورث د قضیې په مرسته حساب کړئ.



له پورتني فعالیت څخه کولای شو چې د M_1HM_2 مثلث د مخامخ قوس اوږدوالی داسې ثبوت کړو.

ثبوت:

له قایم‌الزاویه M_1HM_2 مثلث څخه په ګټې اخیستنې سره لرو چې:

$$(M_1M_2)^2=(\Delta x)^2+(\Delta y)^2$$

$$M_1M_2=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مشتق له تعریف څخه پوهېږو:

$$f'(t)=\frac{\Delta x}{\Delta t} \quad , \quad g'(t)=\frac{\Delta y}{\Delta t}$$

$$\Delta x=f'(t)\cdot\Delta t \quad , \quad \Delta y=g'(t)\cdot\Delta t$$

$$M_1M_2=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}=\sqrt{[f'(t)\cdot\Delta t]^2+[g'(t)\cdot\Delta t]^2}$$

$$M_1M_2=\sqrt{[f'(t)]^2+[g'(t)]^2}\cdot\Delta t$$

نو د ریمان له مجموعې څخه لرو:

$$L=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{[f'(t)]^2+[g'(t)]^2}\cdot\Delta t$$

$$L=\int_a^b\sqrt{[f'(t)]^2+[g'(t)]^2}\,dt$$

لومړی مثال: د $x^2+y^2=r^2$ د دایرې محیط محاسبه کړئ:

حل: خرنګه چې د دایرې پارامتري معادله په دې ډول $\begin{cases}x=r\cos t\\ y=r\sin t\end{cases}$ ده.

که چېرې $0\le t\le\pi$ وي، نو د دایرې نمایي محیط پیدا کړئ.

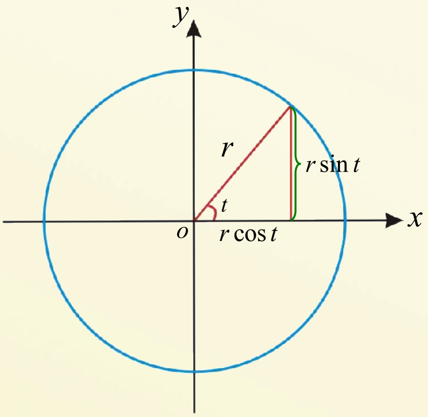
$$P=\int_0^{\pi}\sqrt{x'^2+y'^2}\,dt$$

$$x'=-r\sin t \quad , \quad y'=r\cos t$$

$$P=\int_0^{\pi}\sqrt{(-r\sin t)^2+(r\cos t)^2}\,dt$$

$$P=\int_0^{\pi}\sqrt{r^2\sin^2 t+r^2\cos^2 t}\,dt$$

$$P=\int_0^{\pi}\sqrt{r^2(\sin^2 t+\cos^2 t)}\,dt=\int_0^{\pi}\sqrt{r^2}\,dt$$



د دایرې نیمایي محیط $P=[r\,t]_0^{\pi}=(r\cdot\pi-r\cdot 0)=\pi r$

د دایرې مکمل محیط $=2\pi r$

(c) ketabton.com: The Digital Library

یادونه:

1- د $y=f(x)$ منحني معادله په $a\le x\le b$ انټروال کې راکړل شوې ده، د x د پارامتر په پام کې نیولو سره د منحنی د قوس اوږدوالی داسې محاسبه کوو: $L=\int_a^b \sqrt{1+f'^{\,2}(x)}\ dx$

مثال: د $y=f(x)=x^{\frac{3}{2}}$ منحني د قوس اوږدوالي په $0\le x\le 4$ فاصله کې حساب کړئ.

حل: $f(x)=x^{\frac{3}{2}} \Rightarrow f'(x)=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$

$$L=\int_a^b \sqrt{1+f'^2(x)}\ dx=\int_0^4 \sqrt{1+(\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}})^2}\cdot dx$$

$$=\int_0^4 \sqrt{1+\frac{9}{4}x}\ dx=\int_0^4 \sqrt{u}\cdot\frac{4}{9}du=\frac{4}{9}\int_0^4 u^{\frac{1}{2}}\ du$$

$$u=1+\frac{9}{4}x$$

$$=\frac{4}{9}[\frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}]_0^4=\frac{4}{9}\cdot\frac{2}{3}[u^{\frac{3}{2}}]_0^4=\frac{8}{27}[\sqrt{u^3}]_0^4$$

$$du=\frac{9}{4}dx$$

$$=\frac{8}{27}[\sqrt{(1+\frac{9}{4}x)^3}]_0^4=\frac{8}{27}[\sqrt{(1+\frac{9}{4}\cdot 4)^3}-1]=\frac{8}{27}(\sqrt{10^3}-1)$$

$$dx=\frac{4}{9}du$$

$$L=\frac{8}{27}(10\sqrt{10}-1)$$

2- د $x=f(y)$ منحني په $a\le y\le b$ انټروال کې راکړل شوې ده، د y د پارامتر د په پام کې نیولو سره لرو چې: $L=\int_a^b \sqrt{f'^2(y)+1}\ dy$

مثال: د $x=f(y)=y^{\frac{3}{2}}$ منحني د قوس اوږدوالی په $1\le y\le 4$ انټروال کې حساب کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل:

$$f(y)=y^{\frac{3}{2}} \quad , \quad f'(y)=\frac{3}{2}\cdot y^{\frac{1}{2}}$$

$$L=\int_a^b \sqrt{f'^2(y)+1}\,dy=\int_1^4 \sqrt{(\frac{3}{2}\cdot y^{\frac{1}{2}})^2+1}\,dy$$

$$=\int_1^4 \sqrt{\frac{9}{4}y+1}\,dy=\int_1^4 \sqrt{u}\cdot\frac{4}{9}du \qquad u=\frac{9}{4}y+1$$

$$=\frac{4}{9}\cdot\frac{2}{3}[u^{\frac{3}{2}}]_1^4=\frac{8}{27}[\sqrt{(\frac{9}{4}y+1)^3}]_1^4 \qquad du=\frac{9}{4}dy$$

$$=\frac{8}{27}[\sqrt{(10)^3}-\sqrt{(\frac{9}{4}+1)^3}] \qquad dy=\frac{4}{9}du$$

$$=\frac{8}{27}[\sqrt{1000}-\sqrt{(\frac{13}{4})^3}]=\frac{8}{27}[10\sqrt{10}-\sqrt{\frac{2197}{64}}]$$

پوښتنې

1. د $x=t^2$ او $y=t^3$ د منحنيګانو د قوس اوږدوالی د $1\le x\le 2$ د فاصلې تر منځ پیدا کړئ.

2. د $f(x)=\frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}}$ د منحني د قوس اوږدوالی په $0\le x\le 1$ انټروال کې پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د څېرکي مهم ټکي

- د $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$ انتیګرال د یوې سطحې د مساحت اندازه یا پراخوالی راښیي چې د $y = f(x)$ منحني او د x د محور او د $x = a$ او $x = b$ کرښو له خوا رابند دی.
- که د $f(x)$ تابع په $[a,b]$ انټروال کې مثبت او متمادي وي، یعنې $y = f(x) \geq 0$ په دې صورت کې د $f(x)$ تابع ټل د x د محور پورته خواته او که $y = f(x) \leq 0$ وي، په دې حالت کې د $f(x)$ د x د محور لاندې خواته واقع او انتیګرال یې منفي دی.

د دوو منحنيګانو په واسطه د محصور شوی سطې د مساحت محاسبه:

- که چېرې د $f(x)$ تابع د $g(x)$ تابع د ګراف په پورتنی برخه کې واقع وي، نو لرو:

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$$

- که چېرې د $g(x)$ تابع ګراف د $f(x)$ تابع په پاسنی برخه کې واقع وی؛ لرو چې:

$$A = \int_a^b [g(x) - f(x)]dx = \int_a^b g(x)dx - \int_a^b f(x)dx$$

د ګراف له دوران څخه د په لاس راغلي جسم حجم

- که چېرې د $y = f(x)$ متمادي تابع مساحت د $x = a$ او $x = b$ کرښو په واسطه محصور شوی وي، نو د هغه جسم حجم چې د پورتني تابع د منحني له دوارن څخه د x محور په شاوخوا لاسته راځي تقریباً استوانه‌یي شکل لري .

چې ارتفاع یې $\Delta x = b - a$ ده او د دې استوانې سطح د دایروي سطحو په واسطه محصوره شوې ده چې دې سطحو ته مقطع وایي او پوهېږو چې د دایرې مساحت نظر د x محور ته $A(x) = \pi\, r^2$ دی او ددې مقطع شعاع نظر شکل ته د y له محور سره موازي دی؛ نو $y = r$ کېږي او د حجم فورمول یې نظر د ریمان مجموعې ته په لاندې ډول دی:

$$v = \lim_{n\to\infty} V_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} A(x)\Delta x = \int_a^b \pi\, r^2\,dx = \int_a^b \pi\, y^2\,dx = \pi\int_a^b [f(x)]^2\,dx$$

- که د $x = f(y)$ تابع مساحت د $y = c$ ، $y = d$ کرښو ترمنځ محصور شوی وي دداسې استوانې مقطع نظر y محور ته $A(y) = \pi\, r^2$ چې ارتفاع یې $\Delta x = d - c$ او شعاع یې $x = r$ سره ده هغه حجم چې ددې دوران له مساحت څخه په لاس راځي په لاندې ډول دی:

$$v = \lim_{n\to\infty} V_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} A(y)\Delta y = \int_a^b \pi\, r^2\,dy = \int_a^b \pi\, x^2\,dy = \pi\int_a^b [f(y)]^2\,dy$$

د قوس د اوږدوالي محاسبه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

د قوس د اوږدوالي د محاسبې فورمول:
$$L=\int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2+[g'(t)]^2}\;dt$$

(1
$$L=\int_a^b \sqrt{1+f'^2(x)}\;dx$$

(2
$$L=\int_a^b \sqrt{1+f'^2(y)}\;dy$$

د شپږم څپرکي پوښتنې

1. د $y^2-x-5=0$ منحني او د y د محور تر منځ د پرتې سطحې مساحت محاسبه کړئ.
2. د هغې سطحې مساحت چې د $y=\sin x$ منحني په $[0,2\pi]$ انټروال کې او د x د محور تر منځ پرته ده، پیدا کړئ.
3. د $y=x^2-2x$ او $y=6x-x^2$ منحنیګانو تر منځ د پرتې سطحې مساحت حساب کړئ.
4. د $y=-x^2+4x-3$ منحني او x محور تر منځ د پرتې سطحې مساحت پیدا کړئ.
5. د $y=x^3-6x^2+8x$ او $y=x^2-4x$ منحنیګانو تر منځ د پرتې سطحې مساحت پیدا کړئ.
6. د هغه جسم حجم وټاکئ چې د $y=\sin x-\cos x$ منحني او $x=0$, $x=\frac{\pi}{2}$ کرښو د x محور په شاوخوا له دوران څخه په لاس راځي، حساب کړئ.
7. د هغې سطحې حجم چې د $y=\frac{1}{4}x^2+2$ منحني له دوران څخه د x د محور پرشاوخوا په $[0,4]$ انټروال کې جوړ شوي وي.
8. د هغې رابندې شوې سطحې د جسم حجم چې د $y=x^2$ منحني او د $x^2+y^2=2$ دایرې له دوران څخه د x محور په شاوخوا جوړ شوې وي، پیدا کړئ.
9. د هغه جسم حجم چې د $y=\frac{1}{2}x+1$ کرښې دوران او د x محور په$[2,6]$ انټروال کې جوړېږي، په لاس راوړئ.
10. د $y=-x+4$ منحني د قوس اوږدوالی په $-2\le x\le 2$ انټروال کې حساب کړئ.
11. د $y=\frac{4}{3}x+\frac{4}{3}$ تابع د منحني د قوس اوږوالی په $2\le x\le 5$ انټروال کې پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

اووم څپرکی

احصائیه

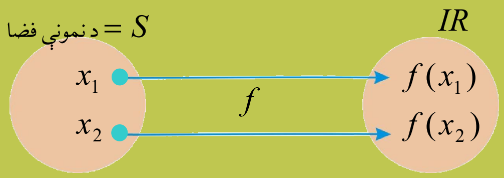
(c) ketabton.com: The Digital Library

موږ ټول افغانان یو.

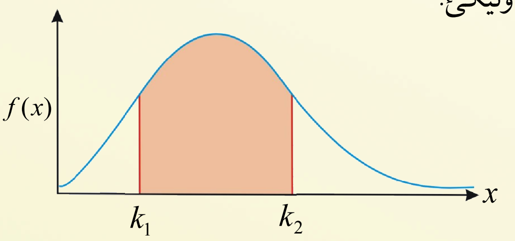
(c) ketabton.com: The Digital Library

د احتمال د تابع توزيع

د تـصادفي ازمايـښت، نمونـه‌يي فـضا او د ناخاپـه متحـول کلمې ستاسو په ذهن کې څه څه را ژوندي کوي.



- هغه تصادفي متحول چې په احصائيه او احتمالاتو کې تر ېگټه اخلي، له هغه متحول سره چې په الجبر کې مو لوستي دی، څه توپير لري؟
- که $x_1, x_2, \dots x_n$ د يوه سټ عناصر او $P(x = x_i) = f(x_i)$ تابع ولرو، هغه مرتبې جوړې چې د نوموړې تابع څخه په لاس راځي، جوړې او بيا يې وليکئ.
- مخامخ شکل ته په کتنې سره د k_1 او k_2 مقدارونو ترمنځ او $f(x)$ د منحنې لاندينې محدود شوی مساحت د انتيګرال په شکل وښيئ.



- د لاندې جدول په پام کې نيولو سره د $[E(x = x_i)] = \sum_{i=1}^{2} x_i f(x_i)$ ، $[x_i - E(x_i)]^2$ او $[x_i - E(x_i)]^2 \, f(x_i)$ مجموعه په لاس راوړئ.

x_i	0	1
$f(x_i)$	0.5	0.5

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پورتني فعاليت پايله داسې بيانوو:

ـ هغه تصادفي متحول چې په احصائيه او احتمالاتو کې تر ځېړنې لاندې نيول کېږي عبارت له هغې تابع څخه دی چې د تعريف ناحيه يې نمونه‌يي فضا او د قيمتونو ناحيه يې حقيقي اعداد دي.

ـ که $P(x = x_i) = f(x_i)$ ولرو، نو د $[x_1, f(x_1)], [x_2, f(x_2)], \ldots, [x_n, f(x_n)]$ مرتبو جوړو ته د مجزا(غير متمادي) احتمال تابع وايي.

- د تجمعي او متمادی احتمال تابع کولای شو، په دې بڼه $F(x) = P(X \leq x)$ وښيو.
- که چېرې $f(x)$ د احتمال تابع او x تصادفي متحول وي، په دې صورت کې د دې احتمال چې x د k_1 او k_2 په منځ کې وي برابر دی له:

$$P(k_1 \leq x \leq k_2) = \int_{k_1}^{k_2} f(x)\,dx$$

- که چېرې x پيوسته ناځاپه (تصادفي) متحول او $k_1 < k_2$ څخه وي، په دې صورت کې:

$$P(k_1 \leq x \leq k_2) = F(k_2) - F(k_1)$$

- که چېرې x ناځاپه مجزا متحول وي، په دې حالت کې اوسط $(Expected\ Value)$ د x تصادفي مجزا متحول چې د $E(x)$ په بڼه ښودل کېږي، برابر دی له:

$$E(x) = x_1 f(x_1) + x_2 f(x_2) + \ldots\ldots\ldots + x_n f(x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i)$$

د $E(x)$ د x اوسط هم بلل کېږي چې هغه په $\bar{x}$ ښيي همدارنګه که چېرې x غير متمادي تصادفي متحول وي، په دې صورت کې د x وريانس چې په S^2 ښودل کېږي برابر دی له:

$$S^2 = \sum_{i=1}^{n} [x_i - E(x_i)]^2 f(x_i)$$

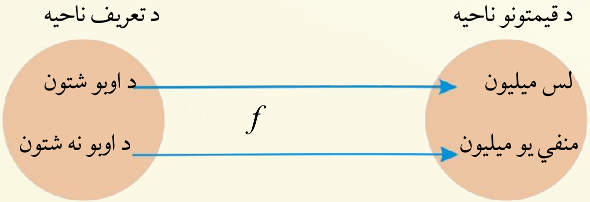
(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: يو شخصي شرکت غواړي د يوې غونډۍ پر سر د اوبو يوه څاه وکني، د اوبو څاه په يو ميليون افغانۍ تماميږي که نوموړې څاه اوبه ورکړي د شرکت مالک لس ميليونه افغانۍ اجوره اخلي، پرته له هغې به د څاه د کېندلو يو ميليون افغانۍ مصرف په زيان ورکړي.

الف_ دا موضوع د يوې تابع په بڼه وښيئ.

ب_ که د دې احتمال چې کيندل شوې څاه اوبه ورکړي 0.2 او د نه ورکولو احتمال يې 0.8 وي، په دې صورت کې د احتمال تابع، اوسط $(Expected\ Value)$، وريانس او د x تصادفي متحول معياري انحراف پيدا کړئ.

د الف حل:



د ب حل: د تصادفي متحول د احتمال تابع اوسط، وريانس او معياري انحراف په لاندې جدول کې ښودل شوي دي:

تصادفي متحول	د احتمال تابع	اوسط	د تصادفي متحول د مربعاتو انحراف د تصادفي متحول له اوسط څخه	واريانس	انحراف معياري
x_i	$f(x_i)$	$E(x)=\sum x_i f(x_i)$	$[x_i-E(x)]^2$	$S^2=[x_i-E(x)]^2 f(x_i)$	S
-1	0.8	$-1\cdot 0.8=-0.8$	$(-1-1.2)^2=4.84$	$4.84\cdot 0.8=3.872$	4.4
10	0.2	$10\cdot 0.2=2$	$(10-1.2)^2=77.44$	$77.44\cdot 0.2=15.488$	
	0.1	1.2		$\sum S^2=19.360$	

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتني

فرض کوو چې د یوه موټر پلورنځي د 100 ورځو خرڅلاو په لاندې ډول دی:

د ورځو شمېر	60	30	8	2
د پېرودل شوو موټرو شمېر	0	1	2	3

د x تصادفي متحول د احتمال تابع او د تجمعي احتمال تابع پیدا کړئ.

د تجمعي احتمال له تابع څخه په ګټه اخېستنې سره ووایئ چې په یوه ورځ کې د (2) موټرونو د حداکثر احتمال او حداقل احتمال د دوو موټرونو په کومه کچه ده؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دوه جمله‌يي توزيع او د برنولي ازمويښت

يو ګڼون کوونکي د پوهنتون د کانکور په آزموينه کې له 160 سؤالونو څخه 100 سوالونه حل کړل. تاسې څه سوچ کوئ چې دا ګډون‌کوونکی په آزموينه کې بريالی کېږي او يا بې نتيجه پاتې کېږي؟

د احتمال دوه جمله‌يي توزيع يوه غيرمتمادي توزيع ده چې د مختلفو پېښو د توصيف لپاره په‌کار وړل کېږي اکثراً پيښې چې په نړۍ کې منځ ته راځي دوه حالتونه لري.

د لاندې آزمويښتي پيښو له شرطونو څخه څه ډول پايلې په لاس راوړلای شئ.

- څو ځلې دوه سکې واچول شي چې سمدلاسه دواړه شېر راشي.
- څو ځلې دوه تاسه واچول شي چې د شمېرو مجموعه يې له 7 څخه کوچنۍ شي.
- له يوې جعبې څخه څو ځلې د يوې مرۍ(مهره) اخېستل چې د تورو او سپينو مرۍ لرونکي ده.
- له يوې جعبې څخه چې د تورو او سپينو مريو لرونکې ده څو ځلې يوه مرۍ واخېستل شي چې اخېستل شوی مرۍ سپينه وي(چې اخېستل شوي مرۍ بيا په جعبه کې واچول شي)
- که چېرې m بريالیتوب له n آزمايښت څخه($m<n$) چې ترتيب په‌کې مهم نه دی دا ټاکنه د څه په نامه يادېږي او فورمول يې وليکئ.
- که د m شکلونو د بريالیتوب احتمال د n ازمايښت څخه په P او $n-m$ شکلونو د ناکامي احتمال د n له آزمايښت څخه په q وښودل شي، نو د m له کاميابي احتمال د آزمايښت د n له شکلونو څخه به څو وي؟
- زده‌کوونکي له پنځو څلور ځوابه آزموينې له پوښتنو سره مخامخ کېږي. هغوی په ناڅاپه ډول پوښتنو ته ځوابونه ورکوي، فرض کړئ که د (سم ځواب) بريالیتوب په T او (ناسم ځواب) نه بريالیتوب د F په توری وښودل شي په دې صورت کې د هر يوه سم او ناسم ځواب احتمال به څومره وي؟

له پورتني فعاليت څخه څرګندېږي چې د برنولي آزمايښت يو ناڅاپه ازمايښت دی چې کولای شو پايله يې په دوو حالتونو بريالیتوب او نابريالیتوب دسته بندي کړو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د برنولي توزيع کولای شو چې په $P(x=m)=P^m(1-P)^{1-m}=P^m\cdot q^{1-m}$ په بڼه وښيو په داسې حال کې چې P د برياليتوب احتمال او $q=1-p$ د نابرياليتوب احتمال دی.

که چېرې يو ازمايښت n ځلې تکرار کړو، يو ترادف په لاس راځي، داسې چې که د هر آزمايښت د برياليتوب احتمال P او نابرياليتوب احتمال q وي، په دې صورت کې د n ځلې آزمايښت څخه د m ځلې برياليتوب احتمال عبارت دی له: $0\le m\le n$ $\qquad P(X\le m)=\binom{n}{m}P^m q^{n-m}$

پورتني اړيکه کولای شو چې په دې ډول $B(m,n,p)$ هم وښيو.

د پورتني فورمول په پام کې نيولو سره کولای شو، د دوه جملهيي د توزيع اوسط په $\bar{x}=np$ او د دوی د توزيع معياري انحراف د $S=\sqrt{n\,p\,q}$ په بڼه وښيو.

مثال: د يوه ناروغ د ښه کېدو احتمال د شکرې له ناروغی څخه 0.4 دی، که چېرې 15 تنه په دې ناروغی اخته وي، ددې څومره احتمال شته چې پنځه تنه ښه شي او همدا شان پيدا کړئ چې له 3 څخه تر 4 تنو پورې جوړ شي.

حل: ځرنګه چې $n=15$, $m=5$, $q=0.6$, $P=0.4$ دی نو:

$$P(m=5)=\binom{n}{m}P^m\cdot q^{n-m}=\binom{15}{5}(0.4)^5(0.6)^{10}$$

$$=\frac{15!}{5!(15-5)!}\cdot 0.01024\cdot 0.00604661760=\frac{360360}{120}\cdot 0.00006191$$

$$=\frac{22.3098876}{120}=0.1859$$

$$P(3\le m\le 4)=\sum_{i=3}^{4}\binom{15}{i}(0.4)^i(0.6)^{15-i}=(3^{15})(0.4)^3(0.6)^{15-3}+(4^{15})(0.4)^4(0.6)^{15-4}$$

$$=\frac{15!}{3!(15-3)!}(0.064)(0.6)^{12}+\frac{15!}{4!(15-4)!}(0.0256)(0.6)^{11}$$

$$=\frac{2730}{6}(0.000139264)+\frac{3270}{24}(0.0000928512)$$

$$=\frac{0.38019072}{6}+\frac{0.3036}{24}=0.063365+0.012650$$

$$P(3\le m\le 4)=0.076015$$

پوښتني

په يوه کلي کې 200 کورنی اوسېږي که هره کورنی 4 ماشومان ولري ددې احتمال پيدا کړئ چې هره کورنی

- حد اقل يو زوی لري.
- يوازې دوه زامن لري.
- يوه يا دوې لوڼې ولري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پواسن د احتمال توزیع

که چېرې د برنولي دوه جملهيي توزيع فورمول په پام کې ونيسو، ایا ویلای شئ که چېرې د برنولي په دوه جملهيي توزيع کې د P قيمت صفر ته تقرب وکړي او د n قيمت لايتناهي ته تقرب وکړي، نو د برنولي دوه جملهيي توزيع څه سره مساوي کېږي.

$$1)\ b(x,n,p)=\binom{x}{n}p^{x}q^{n-x}$$

$$2)\ \lim_{n\to\infty} b(x,n,p)=\frac{\lambda^{x}\cdot e^{-\lambda}}{x!}$$

$$3)\ P(x,\lambda)=\frac{\lambda^{x}\cdot e^{-\lambda}}{x!}$$

کـه $n=5$، $p=0.1$ او $m=2$ وي د $P(x=m)=\dfrac{e^{-\lambda}\,\lambda^{m}}{m!}$ قيمتونـه پـه داسـې حـال کـې چـې $P(X=m)=\binom{n}{m}P^{m}q^{n-m}$ او $\lambda=np$ وي محاسبه کړئ او د پاسنيو توابعو لـه قيمتونو سره يې پرتله کړئ، ويلای شئ چې د کوم فورمول په کار وړل، ساده دی؟

د پواسن فورمول کولای شي چې د m شکلونو د کاميابۍ احتمال د n آزمايښتونو څخه کله چې n لـوی او د کاميابي احتمال P کوچنی وي، د تقريبي محاسبې لپاره کارول کېږي.

دا فورمول عبارت دی له:

$$P(X=m)=\frac{e^{-x}\lambda^{m}}{m!}$$

چې $\lambda=np$ او $e=2.71828$ دی.

په ياد ولرئ چې د پواسن په توزيع کې اوسط او هم وريانس له λ سره برابر دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: 200 تنو مسافرینو د یوې الوتکې ټکټ اخیستلی دی د مخکنیو تجاربو په اساس که د هغه مسافرینو چې ټکټ یې رانیولی دی د نه راتګ احتمال 0.01 وي. ددې احتمال چې 3 تنه مسافرین بېرته را نه شي څومره دی.

حل: په دې مسئله کې د(نه راتلل) کامیابي ده او همدارنګه لیدل کیږي چې $n = 200$ ډېر لوی او $P = 0.01$ یعني د کامیابی احتمال کوچنی دی، نو لرو:

$$P(X = m) = \frac{e^{-\lambda}\,\lambda^m}{m!} \qquad \lambda = n\,p = 200 \cdot 0.01 = 2$$

$$P(3) = \frac{(2.71828)^{-2} \cdot 2^3}{3!} = \frac{\frac{1}{(2.71828)^2} \cdot 8}{6} = \frac{\frac{1}{7.3890461584} \cdot 8}{6}$$

$$= \frac{0.13533 \cdot 8}{6} = \frac{1.08268}{6} = 0.1804$$

اوس که چیرې دا احتمال د دو جملهيي په فورمول محاسبه کړو،لرو چې:

$$P(X = m) = \binom{n}{m} P^m \; q^{n-m}$$

$$\left.\begin{matrix} n = 200 \\ p = 0.01 \end{matrix}\right\} \Rightarrow q = 0.99$$

$$P(3) = P(X = 3) = \binom{200}{3} (0.01)^3 (0.099)^{200-3}$$

$$= \frac{200!}{3! \cdot 197!} (0.01)^3 (0.099)^{197} = 0.1814$$

څرنګه چې لیدل کیږي دواړه ځوابونه سره معادل دي، نو واضح ده چې د پواسن د فورمول له لارې احتمال محاسبه ساده ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

يادونه:

د پواسن د فورمول په واسطه کولای شو چې په يوه ټاکلي وخت کې د ورتللو د شمېر احتمال په لاندې ډول وښيو:

$$P(X=m)=\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^m}{m!}$$

په پورتني فورمول کې t د شودل شوی وخت نسبت پر ټول وخت چې اوسط هغې ته ورکړل شـوی وي m د ورتللو شمېر د t په واحد وخت کې د λ د ورتګ شمېر اوسط په واحد د وخت کې دی.

مثال: که په يوه ساعت کې د يوه بانک د مراجعينو شمېر په متوسـط ډول 60 تنـه وي، ددې احتمـال چې څلور تنه په لومړيو دريو دقيقو کې راغلی وي، څومره دی.

حل:

$$\lambda = 60 \qquad , \qquad t=\frac{3}{60}=\frac{1}{20}$$

$$m=4 \qquad , \qquad \lambda t = 60\cdot\frac{1}{20}=3$$

$$P(m=4)=\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^m}{m!}=\frac{e^{-3}(3)^4}{4!}=\frac{(2.71828)^{-3}(3)^4}{4!}=\frac{\frac{1}{(2.71828)^3}\cdot 81}{4\cdot3\cdot2\cdot1}$$

$$=\frac{\frac{1}{20.0854}\cdot 81}{24}=\frac{4.03278}{24}=0.168032$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

د چاپ د یوه ماشین د جوړولو لپاره په یوه کال کې په متوسط ډول ورتګ دوه ځلې ده، فرض کوو چې د پواسن توزیع په دې اړه صدق کوي.

الف: د ماشین د جوړولو لپاره د ورتګ د احتمال توزیع په یوه کال کې حساب کړئ.

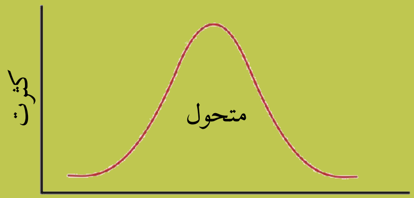
ب: د توزیع اوسط او معیاري انحراف څومره دی؟

ج: فرض کړئ که د هر ورتګ مصرف 100 افغانۍ وي، د هر ماشین د جوړولو مصرف پیدا کړئ؟

د: ددې احتمال چې په هر کال کې دیوه ماشین د جوړولو مصرف له 300 افغانیو څخه زیات وي، څومره دی؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

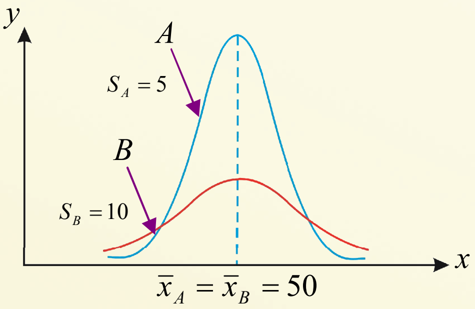
د نورمال توزیع



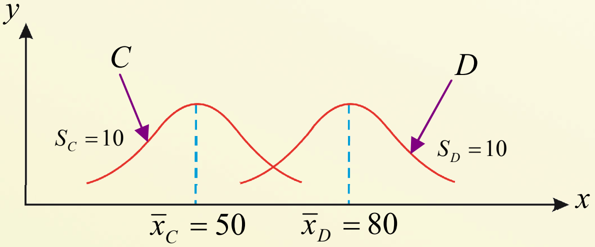
پوهېږو چې د نورمالي منحني شکل مشابه او متناظر له زانګولی سره ده، په نورماله منحني کې د پراګندګی مرکزي شاخصونه(معیاري انحراف او اوسط) څه ډول ځایونه(موقعیتونه) نیولی شي.

فعالیت

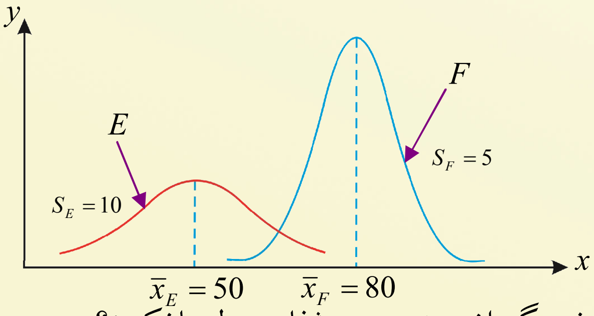
څو نورمالي توزیع ګانې له بېلابېلو سطحو او معیاري انحرافونو سره په لاندې شکلونو کې ورکړل شوي دي.



الف شکل



ب شکل



ج شکل

لاندینی فعالیت له پورتنیو شکلونو څخه په ګټه اخیستنې سره په شفاهي ډول بیان کړئ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

- د الف په شکل کې د A او B د تصادفي متحول توزیع د څه ډول معیاري انحراف او اوسط لرونکې ده؟
- د ب په شکل کې C او D توزیع د څه ډول معیاري انحراف او اوسط لرونکی دی؟
- د ج په شکل کې د E او F توزیع د څه ډول معیاري انحراف اوسط لرونکی دی؟
- د نورمال منحني شکل دواړو خواوو ته ترکوم ځایه غزیدلی دی؟

د پورتني فعالیت له سرته رسولو څخه داسې پایله په لاس راځي چې:

د نورمال منحني توزیع کېدای شي چې په څلورو طریقو یو له بل سره توپیر ولري. د نورمال توزیع ریاضیکي معادله چې د $f(x)$ احتمال توزیع تابع ښودونکی ده، په لاندې ډول ښوول کېږي.

$$f(x)=\frac{1}{s\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\bar{x}}{s})^2}$$

او یا $$f(x)=N(x,\bar{x},s)$$

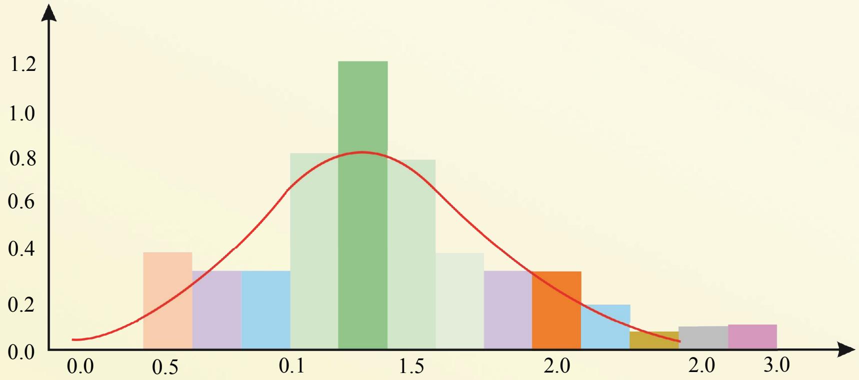
په داسې حال کې چې $e=2.71828$ او π هم ثابت عدد 3.14189 دی $\bar{x}$ اوسط، s معیاري انحراف، x متمادی تصادفي مقدار او $f(x)$ د منحني جګوالی راښیي.

د نورمالې توزیع له متمادی توزیعګانو څخه ده. د نورمالې توزیع په واسطه کولای شو، د اندازه کولو توپیر په ښه توګه سره نژدې کړو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: د موټرونو ماشين د تيلو سوزولو په وخت کې يوه اندازه مضر لوګی توليدوي، د هغه مضر لوګي مقدار چې له 46 موټرونو توليديږي، د يوه تن په واسطه چې لورنزن نوميده په 1980 کال کې وڅيړل شو.يوه اندازه لوګی د نايتروجن اوکسايدونه لري. لاندې مستطيلي ګراف د نايتروجن اوکسايد ميزان د $(\frac{gr}{mil})$ د 46 موټرونو د نورمال احتمال توزيع اوسط او وريانس چې د نوموړی کس له خوا تر څيړنې لاندې نيول شوی. ددې مستطيلي ګراف د ستونونو مساحت متناسب دی له هغو 46 نمونه‌يې شمير له اندازه‌ګيري سره چې ددې ستون د افقي ټکو تر منځ قرار لري.

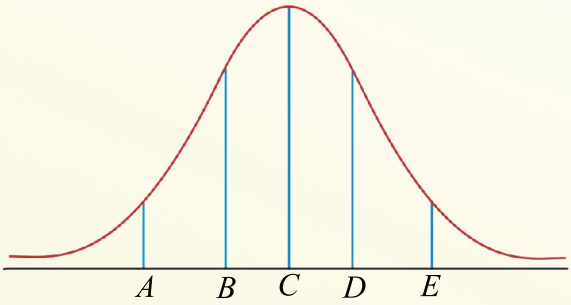
د مثال په ډول په څلورم ستون کې(چې له 1 څخه تر 1.2 پورې په افقي محور قرار لري) د $0.870 \cdot 0.2 = 0.174$ مساحت لرونکی دی چې د $\frac{4}{46}$ سره برابر دی، ځکه 8 ډيټا له 1 څخه تر 1.2 پورې پراته دي.



(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنه

لاندېنی شکل په پام کې ونیسئ د A, B, C, D او E ټکو موقعیت د معیاري انحراف د اوسط له جنسه پیدا کړئ.



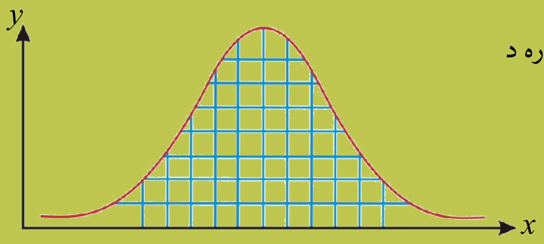
(c) ketabton.com: The Digital Library

د نورمال توزیع منحني لاندې مساحت او د هغې سټنډرډ کول

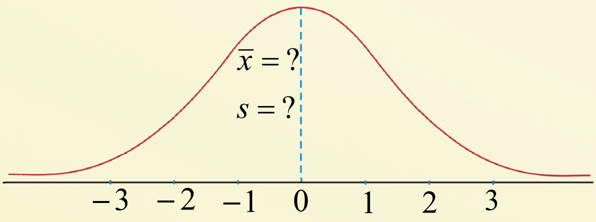
مخامخ شکل په پام کې ونیسئ:

د $y = f(x)$ د منحني لاندې مساحت د محاسبې لپاره د

څه ډول لارو وړاندیز کوئ.

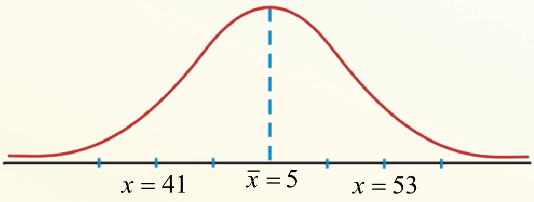


- که چېرې د x تصادفي متمادي متحول د احتمال نورمال توزیع چې اوسط یې $\overline{x}$ او معیـاري انحـراف یې s وي، ددې احتمال چې دا تصادفي متحول د x_1 او x_2 تر منځ کمیت غوره کړي د انتیګـرال پـه بڼه یې ولیکئ.
- سوچ کولای شئ چې د احتمال نورمال توزیع د ریاضي شکل انتیګرال محاسبه به ساده کار وي.
- که چېرې د نورمال تصادفي متحول په $z = \dfrac{x - \overline{x}}{s}$ ډول ولیکو، د $f(x)$ د احتمال توزیع تابع لـه څـه سره برابره ده؟
- ویلای شئ چې اوسط او معیاري انحراف په لاندې شکل کې له کومو عددونو سره برابر دی؟



(c) ketabton.com: The Digital Library

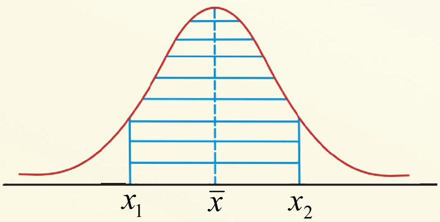
- که په لاندې شکل کې چې د $x=41$ او $x=53$ قيمتونه په نورمال ډول د $\overline{x}=50$ اوسط او $S=5$ معيار انحراف ښودل شوی دی، نو د $z=\frac{x-\overline{x}}{s}$ مقدار په لاس راوړئ.



له پورتني فعاليت څخه دا پايله په لاس راځي چې د احتمال د محاسبې لپاره داسې چې د x پيوسته تصادفي متحول د x_1 او x_2 تر منځ يو کميت ونيسئ، نو بايد د x د احتمال د توزيع له تابع څخه انتګرال ونيسو او د منحنۍ لاندې سطحه د x_1 او x_2 فاصلو ترمنځ په لاندې ډول محاسبه کړو:

$$f(x_1<x<x_2)=\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx=\int_{x_1}^{x_2}\frac{1}{s\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\overline{x}}{s})^2}$$

$$=\int_{x_1}^{x_2} N(x,\overline{x},s)dx$$



د نورمال توزيع احتمال محاسبه ساده کار نه دی، د نورمال توزيعګانو د منحنۍ لاندې مساحت محاسبه اوږدو جدولونو ته اړتيا لري چې عملاً دا کار ګران دی، کولای شو چې د جدول د جوړولو شکل د احصائيوي data د سټنډرډ کولو په واسطه حل کړو.

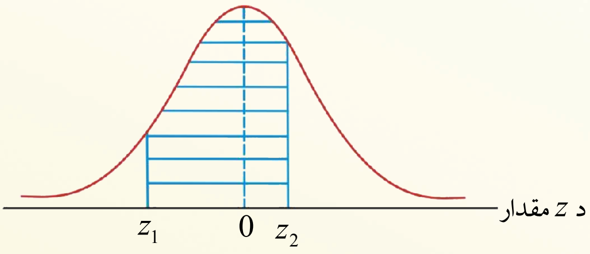
په دې معنا چې کولای شو په x پورې اړوند تصادفي متحول چې د نورمال توزيع لرونکی دی، د لاندې اړيکې په واسطه سټنډرډ کړو. $z=\frac{x-\overline{x}}{s}$

دلته z د سټنډرډ نورمال متحول په نامه او منحنۍ ته د سټنډرډ نورمال منحنۍ په نامه يا د نورمال احتمال منحنۍ نومول کيږي، په ياد ولرئ چې د z سټنډرډ وي، متحول تل د صفر اوسط لرونکی او يو معيار انحراف يې دی، همدارنګه د نورمال منحنۍ او افقي محور ترمنځ مساحت له ټاکل شوي واحد سره برابر وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

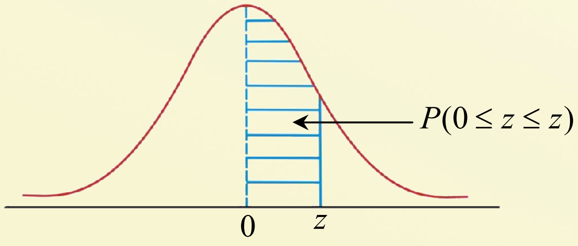
لاندې مساحت د یوه منحني یوه برخه د نورمال احتمال چې له احتمال سره مستقیم تناسب لـري او کـولای شو چې د $z=\dfrac{x-\bar{x}}{s}$ بدلولو سره یې په لاندې ډول وښیو.

$$f(z_1<z<z_2)=\int_{z_1}^{z_2}\frac{1}{s\sqrt{2\pi}}\,e^{\frac{-z^2}{2}}dz=\int_{z_1}^{z_2}N(z,0,1)\,dz$$

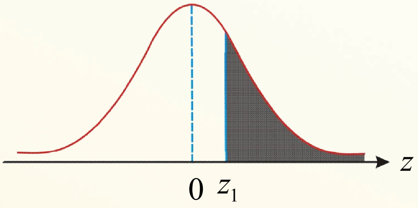


د x متحول منحني لاندې مساحت چې د $x=x_1$ او $x=x_2$ ترمنځ واقع دی، د z متحول لـه منحنـي مساحت سره چې د $z=z_1$ او $z=z_2$ ترمنځ پراته مساوي دي. پـه پایلـه کـې کـولای شـو چـې د نورمـال د توزیع سټنډرډ د جدول په لرلو سره د نورمال توزیع احتمال د ناځایه متحول د هر ممکنه قیمت لپاره په لاس راوړای شو.

د سټنډرډ نورمال د توزیع احتمال د جدول د استعمال له لارې کولای شـو، پـه لنـډ ډول توضـیح کـړو. هغـه جدول چې ددې لوست په پای کې راغلی دی، د سټنډرډ نورمال توزیع اړوند په احتمالاتو کـې ګـډون لـري. لاندې جدول ددې لوست یوه برخه د جدول پای راښیې، هغه ارقام چې د جـدول دپاسـه لیکـل شـوی دی، راښیي چې z د مثبتو مقدارونو لپاره تنظیم شوی دی چې د منحني لاندې مساحت له صفر څخه تر z پورې راښیي.



(c) ketabton.com: The Digital Library

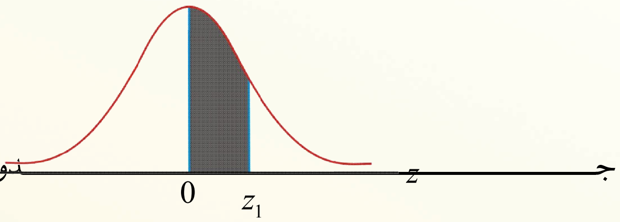


جدول (1)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9278	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9268	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997

(c) ketabton.com: The Digital Library

جدول (2)



Z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	00239	0.0279	00311	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0754
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0978	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2226
0.6	0.2258	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2454	0.2486	0.2549
0.7	0.2580	0.2612	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2996	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4409	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4727	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0/4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4966
3.0	0.4987	04987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990
3.1	0.4990	0.4991	0.4991	0.4991	0.4992	0.4992	0.4992	0.4992	0.4993	0.4993
3.2	0.4993	0.4993	0.4994	0.4994	0.4994	0.4994	0.4994	0.4995	0.4995	0.4995
3.3	0.4995	0.4995	0.4995	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4997
3.4	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4998
3.5	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998
3.6	0.4998	0.4998	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999
3.7	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999
3.8	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999
3.9	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مثال په ډول که چېرې $z=1.56$ وي لومړی هغه سطر پیدا کړئ چې په هغه کې z د 1.5 معادل دی، که چېرې ددې کرښې په اوږدوالي پرمخ لاړ شو، تر څو هغه ستون ته ورسېږو چې له پاسه 0.06 لیکل شوی دی له 0.9406 عدد سره مخامخ کېږو چې د منحني د لاندې اړوندې سطحې له $z=0$ څخه تر $z=1.56$ پورې دی، نو لیکلای شو چې: $P(0\le Z\le 1.56)=0.9406$

لومړی مثال: د څښلو(نوشابې) د بوتلونو د ډکولو دستګاه داسې تنظیم شوې ده، که 952 ملي‌لیتر نوشابه په بوتل کې واچوي ددې نوشابې میزان چې د نورمال توزیع اوسط یې 952 ملي‌لیتره او معیاري انحراف یې 4 ملي‌لیتره دی. ددې احتمال چې بوتل د 952 او 956 ملي‌لیترو ترمنځ نوشابه ولري، څومره دی.

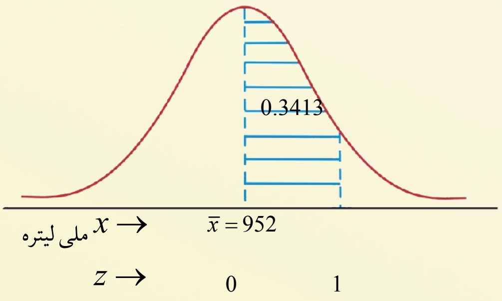
حل: لومړی z د x له جنسه پیدا کوو:

$$z_1=\frac{x-\bar{x}}{s}=\frac{952-952}{4}=\frac{0}{4}=0$$

$$z_2=\frac{956-952}{4}=\frac{4}{4}=1$$

نو پر دې اساس د x د تعریف ناحیه له 952 څخه تر 956 د z تعریف د ناحیې له صفر څخه تر 1 بدلېږي.

د لوست د پیل له جدول(2) څخه په ګټه اخیستنې سره لرو $P(0\le z\le 1)=0.3413$ احتمال داسې دی چې هغه بوتل چې له 952 څخه تر 956 ملي‌لیترو نوشابه ولري، یا په بل عبارت 34.13 فیصده ډک شوي بوتلونه له 952 څخه تر 956 ملي‌لیتره نوشابه لري؛ یعنې:



$$\begin{aligned}P(0\le z\le 1)&=P(z_2)-P(z_1)\\&=P(1)-P(0)\\&=0.3413-0\\&=0.3413\end{aligned}$$

دویم مثال: په یوه خاص مضمون کې د زده‌کوونکو د نمبرو د نورمال توزیع اوسط 70 او معیاري انحراف یې 8 دی له نورمال سټنډرډ جدول څخه په ګټه اخیستنې سره له 54 څخه تر 84 نمبرو ترمنځ فیصدي پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل: د مسألې حل په لاندې ډول په ترسیمي بڼه ښودل شوی دی.

د $x = 54$ لپاره لرو: $z_1 = \dfrac{54-70}{8} = -2$

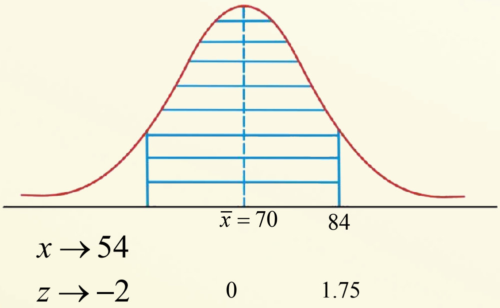
د $x = 84$ لپاره لرو: $z_2 = \dfrac{84-70}{8} = 1.75$

څرنګه چې د سټنډرډ نورمال منحني لاندې مساحت په یو محدود انټروال کې په پام کې نیول شوی دی، نو له نورمال سټنډرډ جدول(2) څخه لرو:

$$P(-2 \le z \le 0) = P(0 \le z \le 2) = 0.9772$$
$$P(0 \le z \le 1.75) = 0.9599$$

د ټاکل شوي مساحت د پام وړ احتمال دی.

$$P(-2 \le z \le 0) + P(0 \le z \le 1.75) = 0.4772 + 0.4599$$
$$= 0.9371$$



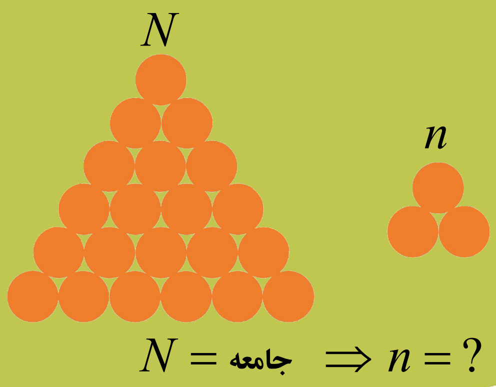
پوښتنې

د لومړی مثال په پام کې نیولو سره محاسبه کړئ چې د بوتلونو څو فیصده له 948 څخه تر 956 ملي‌لیټرو پورې نوشابه لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

نمونه اخیستل

پـه دې متـل کـې((مـوټـې د خـروارو نمونـه ده)) څرنګـه تحلیلوئ.



- که چېرې وغواړئ چې د افغانستان د 12 ټولګي د زده‌کوونکو ونې(قد) اندازه کړئ ددې کار لپاره څه ډول لارې وړاندیز کوئ.
- نمونه پـه دوو ډولونـو وېـشل کېـږي، سـاده نمونـه او ناڅاپـه نمونـه، تاسـې ددې نمونـو کـومې یـوې تـه غوره‌والی ورکوئ؟ ولې؟
- د نمونه ګیرئ لپاره ښکاره خپل دلایل شته آیا کولای شئ یو یا دوه دلیلونه یې ووایئ.
- سوچ کولای شي چې د اوسط او معیاري انحراف عددي ځانګړنې چې د ټولنې د توزیع او د نمونې د توزیع لپاره ورځخه ګټه اخیستل کېږي، یو شان وي.
- آیا د نمونه‌ګیرۍ او لیدل شویو ناڅاپه متحولینو د مقدارونو ترمنځ توپیر شته؟

له پورتني فعالیت څخه پوهېږو چې د نمونه اخېستنې بېلې بېلې لارې شته دی.

ـ ناڅاپه نمونه اخېستنه: د ټولنې ټول عناصر په ټاکل کېدو کې هم چانس دی.

ـ سیستماتیک نمونه اخېستنه: د ټولنې عناصر په منظم ډول کود وهل شوی دی.

ـ طبقه‌یي نمونه اخېستنه: ټولنه په بېلابېلو متجانسو ډلو وېشل شوی وي.

ـ خوشه‌یي نمونه اخېستنه: که ټولنه ډېره لویه وي، هغه په بېلابېلو ځانګو وېشو او له هرې ځانګې څخه یوه نمونه ټاکو.

ـ د هرې ټولنې عددي ځانګړنې(اوسط، معیاري انحراف) ته د ټولنې پارامتر وایي.

ـ د هرې ټولنې د عددي نمونه‌ګیرۍ ځانګړنې(اوسط، معیار انحراف) ته آماره وایي.

ـ د نمونې پایلې د مشاهدې د مقدارونو په عنوان د ناڅاپه متحولینو په بڼه په پام کې نیسو.

ـ د $x_1 , x_2 ,\dots, x_n$ ناڅاپه متحولونو یوه ناڅاپه نمونه د x تصادفي متحول ویل کېږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

که چېرې تابع یې په دې ډول تعریف شوی وي.

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_1)\cdot f(x_2)\ldots f(x_n)$$

مثال: فرض کوو چې په یوه قطی کې 5 سپینې او 7 تورې ګلولې وي، د قطی له منځ څخه 5 ګلولې یوه یوه ځای په ځای کول(د یوه عنصر دویم ځل ټاکل مجاز) ټاکو.

د ټاکل شوی ناڅاپه نمونې تصادفي متحولین په ژبه بیان کړئ او اړونده توزیع یې پیدا کړئ.

حل: د x_1, x_2 او x_3 ناڅاپه متحولونه په پام کې ونیسئ په لومړی پړاو کې د x_1 ناڅاپه متحول لپاره د صفر عدد د تورې ګلولې لپاره او د (1) عدد د سپینې ګلولې د ټاکلو په لومړی پړاو کې ځانته غوره کړئ او د x_2 متحول هم د صفر عدد د تورې ګلولې لپاره او د (1) عدد د سپینې ګلولې د ټاکلو لپاره په دویم پړاو کې ځانته غوره کړي په همدې بڼه د x_3 ناڅاپه متحول په دویم پړاو کې هم د صفر عدد د تورې ګلولې لپاره ټاکو چې په دې پړاو کې (1) عدد سپینه ګلوله ځانته غوره کوي، په دې حالت کې د x_1, x_2 او x_3 ناڅاپي متحولونه د برنولي ناڅاپه متحولین دي. د $p = \frac{5}{12}$ له پارامتر او د $i = 1,2,3$ مقدارونو څخه لرو:

$$f(x_i) = (\frac{5}{12})^{x_i}(1-\frac{5}{12})^{1-x_i}$$

څرنګه چې نمونه اخیستن ناڅاپه ده، نو د x_1, x_2 او x_3 ناڅاپه متحولین یو له بل څخه بېل دي، نو تابع یې عبارت دی له:

$$f(x_1, x_2, x_3) = P(x_1 = x_1 \ , \ x_2 = x_2 \ , \ x_3 = x_3)$$

په یاد ولرئ چې د عناصرو هره ناڅاپه نمونې له مجهول پارامترونو سره تړلې نه دي، هغې ته آماره وایي.

پوښتنې

1. که $N = 25$ د یوې ټولنې حجم وي که وغواړو چې پنځه ګونه ناڅاپه نمونه یې پیدا کړو، د هغو نمونو شمېر چې په لاس راځي څومره ده؟
2. ساده او ناڅاپه نمونې سره له مثاله بیان کړئ؟
3. فرض کوو چې له یوې ټولنې څخه مو ناڅاپه نمونه رانیولې ده څه فکر کوئ چې له ددې نمونې سره به څه وکړو؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

د نمونې د اوسط توزیع

دولـت غـواړي وپـوهېږي چـې د یـوه ښـار د وګـړو متوسـطه ګټه(سیما) څومره ده؟

دې کار لپاره ناخاپه نمونه ټاکي او د نمونې اوسط محاسبه کوي.

اوس باید ددې محاسبه شوې مقدار څخه کوم کمیت تخمین کړئ؟

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = ?$$

فعالیت

- د لاندې data د دریو زده‌کوونکو د ورزشي لوبو د نمبرو پایله راښیي:

نوم	داود	سلیمان	پژواک
نمبرې	2	3	4

- د نمبرو د احتمال توزیع یې ولیکئ.
- د زده‌کوونکو د نمبرو اوسط او معیاري انحراف حساب کړئ.
- راکړل شوی نمبرې د مرتبو جوړو په مرسته(ممکنې دوه ګونې نمونې د ځای په نیولو) ارایه او د هرې نمونې اوسط د جدول په بڼه وښیئ.
- د نمونو د اوسط د احتمال توزیع جدول(د $\bar{x}$ د کثرت د تو زیع جدول) ولیکئ.
- د $\bar{x}$ د کثرت توزیع جدول مستطیلي ګراف رسم کړئ.
- د اوسط د $\bar{x}$ متحول د زده‌کوونکو د نمبرو له اوسط سره پرتله کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

له پورتني فعالیت څخه دا پایله په لاس راځي:

که $x_1, x_2, ..., x_n$ د یوې ټولنې د $f(x)$ احتمال تابع ناخاپه نمونه وي، په دې صورت کې د ناخاپه نمونې احتمال توزیع عبارت دی له:

x	x_1	x_2	...	x_n
$f(x)$	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	...	

د $\bar{x}_n$ متحول اوسط، $E(\bar{x}_n) = \mu$

د $\bar{x}_n$ متحول وریانس، $U(\bar{x}_n) = \frac{1}{n}\delta$

د نمونې وریانس $S_n{}^2 = S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$

د نمونه‌یي وریانس اوسط، $E(S^2) = \delta^2$

په داسې حال کې چې $\bar{x}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ نمونه‌یي اوسط، μ د ټولنې اوسط δ^2 د ټولنې وریانس S^2 د نمونې وریانس دی.

مثال: د لاندې ټولنې، ټولې دوه ګونې ممکنه ناخاپه نمونې د ځای په ځای کولو سره ټاکو:

$$f(x) = \frac{1}{3} \quad , \quad x = 1,2,3$$

الف: د x د احتمال توزیع ولیکئ.

ب: د ټولنې اوسط او وریانس حساب کړئ.

ج: د $\bar{x}$ د توزیع جدول تشکیل او مستطیلي ګراف یې رسم کړې.

د: $E(\bar{x})$ او $V(\bar{x})$ حساب کړئ.

حل:

الف:

x	1	2	3
$f(x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب:

$$\mu = E(x) = \sum_{x=1}^{3} x\,f(x) = \frac{1}{3}(1+2+3) = 2$$

$$E(x^2) = \sum_{x=1}^{3} x^2 f(x) = \frac{1}{3}(1^2 + 2^2 + 3^3) = \frac{14}{3}$$

$$\delta_x^2 = E(x^2) - (E(x))^2 = \frac{14}{3} - 2^2 = \frac{2}{3}$$

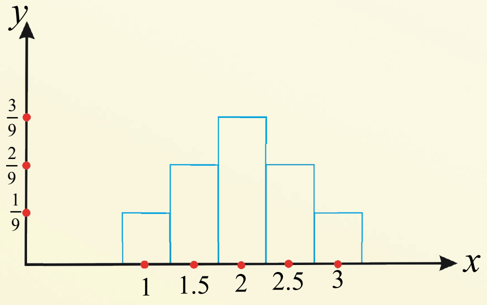
ج: د لاندې جدول ټولې دوه‌ګوني ممکنو نمونو د ځای نیول، د هر یوه اوسط راښیي:

نمونه	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(3,1)	(3,2)	(3,3)
$\bar{x}$	1	1.5	2	1.5	2	2.5	2	2.5	3

د $\bar{x}$ د توزیع د کثرت جدول په لاندې ډول ښودل کیږي:

$\bar{x}$	1	1.5	2	2.5	3
$f(\bar{x})$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

د $\bar{x}$ مستطیلي ګراف په لاندې ډول رسمیږي:



د:

$$\mu_{\bar{x}} = E(\bar{x}) = \sum \bar{x} f(\bar{x}) = 1\cdot\frac{1}{9} + 1.5\cdot\frac{2}{9} + 2\cdot\frac{3}{9} + 2.5\cdot\frac{2}{9} + 3\cdot\frac{1}{9} = \frac{18}{9} = 2$$

$$E(\bar{x}^2) = \sum \bar{x}^2 f(\bar{x}) = 1^2\cdot\frac{1}{9} + (1.5)^2\cdot\frac{2}{9} + 2^2\cdot\frac{3}{9} + (2.5)^2\cdot\frac{2}{9} + 3^2\cdot\frac{1}{9} = \frac{13}{3}$$

$$\delta_{\bar{x}}^2 = V(\bar{x}) = E(\bar{x}^2) - (E(\bar{x}))^2 = \frac{13}{3} - 4 = \frac{1}{3}$$

$$E(x) = E(\bar{x}) = 2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو لیدل کېږي چې:

$$V(\bar{x}) = \frac{\delta_x^{\ 2}}{n} = \frac{\frac{2}{3}}{2} = \frac{1}{3}$$

پوښتنه

1. فرض کوو چې یوه ټولنه د $6,4,2$ او 8 څلورو عددونو څخه جوړه شوې وي، په دې صورت کې توزیع، اوسط او وریانس ددې ټولنې محاسبه او وروسته له دې ټولنې څخه دوه ګونې ناځایه نمونه د ځای په نیولو سره وټاکئ او د نمونې توزیع اوسط یعنې $\bar{x}$ په لاس راوړئ. د کثرت څو ضلعي ګراف یې رسم کړئ، د $\bar{x}$ اوسط او وریانس حساب کړې.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مرکزي لیمیټ قضیه

پوهیږو چې د ټولنې کمیت ته د ټولنې پارامتر او د نمونې کمیت ته نمونه یي اوسط ویل کیږي د $S_{\bar{x}}$ او $\bar{x}$ د نمونو احصائیه د کوم پارامتر په اړه اطلاعات زموږ په اختیار کې ږدي.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}} = ?$$

- که د لویې ټولنې حجم $\frac{S}{\sqrt{n}}$ وي، د کوچنې ټولنې حجم په $\frac{S}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$) چې N د ټولنې د عناصرو شمېر، n د نمونه عناصرو شمېر او S معیاري انحراف دی) وښیو څه وخت کېدای شي چې د لویې ټولنې حجم له کوچنې ټولنې سره برابر شي؟
- که د $x_1, x_2, \ldots, x_n$ نورمال توزیع یو له بل څخه بیل وي آیا د هغوی د جمع حاصل د نورمال توزیع لرونکی ده؟
- که $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ناخاپه ځانګړي متحولونه په یو شان توزیع شوي وي او د μ اوسط لرونکی وي او ς^2 وریانس وي ویلای شو چې د $S_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ د توزیع وریانس او اوسط څو دی؟

له پورتني فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راځي:

که چېرې N د یوې لویې ټولنې اوسط μ متناهي اوسط او δ^2 متناهي وریانس لرونکی یوه ناخاپه n ګونه نمونه وټاکو، په دې صورت کې د نمونې اوسط یعنې $\bar{x}$ د تقریبي نورمال توزیع د $\mu_{\bar{x}} = \mu$ اوسط $\delta_{\bar{x}}^{\,2} = \frac{\delta^2}{n}$ وریانس دی او $Z = \frac{\bar{x} - M}{\frac{\delta}{\sqrt{n}}}$ ناخاپه متحول د نورمال سټنډرډ توزیع دی. په داسې حال کې چې $\frac{N-n}{N-1}$ ضریب د N د لویو قیمتونو لپاره (1) ته نژدې کیږي. په حقیقت کې یې لیمیټ هغه وخت چې $n \to \infty$ وکړی، برابر له (1) سره دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: له یوه لوی ټولګي څخه چې د زده‌کوونکو د ریاضي مضمون نمبرو نورماله توزیع د 71 اوسط او معیاري انحراف یې 9 دی. یوه 9 تایي نمونه ټاکو، ددې احتمال چې ددې نمونې د نمبرو اوسط له 80 څخه زیات وي حساب کړئ. همدارنګه که چېرې په تصادفي ډول یو زده‌کوونکی وټاکو، په دې صورت کې احتمال ددې چې نمبرې یې له 80 څخه زیاتې وي، محاسبه کړئ.

حل: څرنګه چې $\overline{x}$ د نورمال توزیع د μ په اوسط او معیاري انحراف لرونکی دی، نولرو:

$$P(z>80)=P(z=\frac{\overline{x}-\mu}{\frac{\delta}{\sqrt{n}}}>\frac{80-71}{\frac{9}{\sqrt{n}}}=P(z>3)$$
$$=1-P(z)\leq 3=1-0.9987=0.0013$$

همدارنګه د $n=1$ لپاره لرو:

$$P(z>80)=P(z=\frac{\overline{x}-\mu}{\delta}>\frac{80-71}{9}=P(z>1)$$
$$=1-P(z)\leq 1=1-0.8413=0.1587$$

پاملرنه:

د $P(z)$ قیمت له (2) جدول څخه په لاس راورو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنه

1- د هغو جعبو وزن چې د يوه ماشين په واسطه ترل کېږي، د نورمال توزيع اوسط يې $\mu = 250gr$ او معياري انحراف يې $\delta = 20gr$ وي مطلوب دی، د هغه احتمال محاسبه چې د ناڅاپه نمونې د اوسط وزن $n = 16$ تايي د جعبو کوچنی له $240gr$ وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د نمونه‌يي توزيع نسبت

د A په يوه ښار کې n کسان غواړي د B يو کس د ښاروال په صفت وټاکي، که دا کسان تر پوښتنې لاندې راشي او x د موافقو کسانو شمېر وښيئ ، ددې کسانو نسبي کثرت مساوي په څه دي.

فعاليت

- که چېرې x د دوو جملو توزيع لرونکی وي، کولای شو وليکو چې:

$$f(x)=\binom{n}{x}P^{x}(1-p)^{n-x} \qquad x=0,1,2,\ ....$$

که چېرې $x=n\overset{\frown}{P} \Rightarrow \overset{\frown}{P}=\frac{x}{n}$ وي د x قيمت په تعويض سره په پورتنی فورمول کې $f(\overset{\frown}{P})$ وليکئ.

- د $\overset{\frown}{P}=\frac{x}{n}$ په فورمول کې که د x تصادفي متحول د n ناخاپه متحولينو د $x_1,x_2,...,x_n$ له مجموع څخه تشکيل شوی وي، $\overset{\frown}{P}$ د نمونې اوسط سره څه اړيکه لري؟

که چېرې x ناخاپه متحول، n د برنولي د آزمايښتونو مجموعه، P د هر آزمايښت برياليتوب احتمال وي، په دې صورت کې $\overset{\frown}{P}$ د نمونې د نسبت آماره $E(x)=n\,p$ اوسط $V(x)=n\,p\,q$ د x ناخاپه متحول ورېانس وي. د دوه جمله‌يي د توزيع په پاملرنې سره د $\overset{\frown}{P}$ توزيع په دې فورمول سره کولای شو.

$$f(n\overset{\frown}{P})=\binom{n}{n\overset{\frown}{P}}p^{n\overset{\frown}{P}}(1-p)^{n(1-\overset{\frown}{p})} \qquad \overset{\frown}{P}=0,\frac{1}{n},\frac{2}{n},.....,1$$

د $\overset{\frown}{P}$ ناخاپه متحولينو اوسط $(Expected\ Value)$ او ورېانس په لاندې صورت ليکلای شو:

$$\mu_p=E(\overset{\frown}{P})=P$$

$$\delta^2\,\overset{\frown}{P}=V(\overset{\frown}{P})=\frac{p\,q}{n}=\frac{p(1-p)}{n}$$

د نورمال سټنډرډ توزيع يې عبارت دی له:

$$z=\frac{x-n\,p}{\sqrt{n\,p\,q}}=\frac{\overset{\frown}{p}-p}{\sqrt{\frac{p\,q}{n}}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: د کالیو د ښه والي احتمال $P=0.3$ دی، یوه ساده ناڅاپه نمونه $n=6$ گونه ټاکو. که چیرې x د ناقصو کالیو ښودونکی وي، د x او $\hat{P}$ احتمال توزیع ولیکئ.

حل: د x ناڅاپه متحول د دوه جملهیي توزیع د $P=0.3$ او $n=6$ پارامترونه وي.

$$f(x)=P(X=x)=B(x,6,0.3) \qquad x=0,1,...,6$$

د دوه جملهیي توزیع جدول څخه په گټه اخیستنې سره لاندې احتمالونه محاسبه او د توزیع د جدول احتمال یې لیکو:

x	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	0.1176	0.3025	0.3241	0.1852	0.0595	0.0102	0.0007

د $\hat{P}$ ناڅاپه متحول د $0,\frac{1}{6},\frac{2}{6},\frac{3}{6},\frac{4}{6},\frac{5}{6}$ او 1 قیمتونه نیسي:

$$P(\hat{P}=0)=P(X=0)=0.1176$$

$$P(\hat{P}=\frac{1}{6})=P(X=1)=0.3025$$

او پاتې نور په مشابه ډول محاسبه کیږي، پام وکړئ چې:

$$P(\hat{P}=\frac{x}{n})=P(X=x)$$

او د $\hat{P}$ د احتمال توزیع عبارت دی:

$\hat{P}$	0	1.6	2.6	3.6	5.6	1
$f(\hat{P})$	0.1176	0.3025	0.3241	0.0595	0.0102	0.0007

په پورتني مثال کې:

$$P(\hat{P}\le 0.6)=P(x\le 3.6)=P(x\le 3)=\sum_{x=0}^{3}B(x,6,0,3)=0.9294$$

اویا:

$$P(\hat{P}\le 0.27)=P(x\le 1.62)=P(x\le 3)=0.1176+0.3025=0.4201$$

پوښتنې

1. ددې احتمال چې د یوه تن د غوښتنلیک فرم په پوره ډول پرته له غلطی(تېروتنې) څخه ډک کړي $P=0.7$ وي، یوه نمونه د $n=200$ گونه د استخدام ډک شوي فارمونه مو ټاکلې وي.

_ ددې احتمال محاسبه کړئ چې د $\hat{P}$ د ± 00.05 داخلي فاصله کې د ټولنې له بنسټ څخه ولوېږي.

_ ددې احتمال محاسبه کړې چې د $\hat{P}$ د 0.6 څخه زیات وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د خپرکي مهم ټکي

- ناخاپه متحول هغه اصطلاح ده چې د يوې تابع په عنوان په احصائيه او احتمالاتو کې ترې ګټه اخيستل کېږي.
- د يوه غير متمادی ناخاپه متحول د احتمال تابع هغه تابع ده چې د تعريف ناحيه يې هغه عددونه دي چې ناخاپه متحول کولای شي هغه غوره کړي او د قيمتونو له ناحيې سره د تعريف د ناحيې د عناصرو اړونده احتمالونه ګډون لري.
- د تجمعي احتمال تابع هغه تابع ده چې د تعريف ناحيه کې يې هغه عددونه ګډون ولري چې د x ناخاپه متحول يې ځانته غوره کوي او د قيمتونو ناحيه يې د $f(x)$ ټول تصويرونه موجود دي.
- د يوه متمادي متحول د احتمال تابع هغه تابع ده چې د تعريف ناحيه يې د x ټول متمادي مقدارونه غوره کړي او دقيمتونو ناحيه يې $F(x)$ ټول تصويرونه وي.
- د x غير متمادي ناخاپه متحول اوسط Expected value او وريانس په وار سره عبارت دي له:

$$E(x)=\sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i)=\bar{x}$$

$$V(x)=S^2=\sum_{i=1}^{n}(x_i-E(x_i))^2 f(x_i)$$

- د برنولي توزيع، $P(X=m)=P^m(1-P)^{1-m}$
- د دوه جمله‌يي توزيع، $P(X=m)=\binom{n}{m}P^m\, q^{n-m}$
- د دوه جمله‌يي توزيع اوسط او معياري انحراف عبارت له: $\bar{x}=n\,p \quad , \quad S=\sqrt{n\,p\,q}$
- د پواسن د احتمال توزيع يوه غيرمتمادي احتمال توزيع ده چې فورمول يې عبارت دی له:

$$P(x=m)=\frac{e^{-\lambda}\ \lambda^m}{m!}$$

- که N له يوې نورمالې جامعې څخه د n ځلې(تايي) ناخاپه نمونه وټاکو د $\bar{x}$ د نمونه‌يي اوسط آماره د نورمال توزيع لرونکی له $\mu_{(\bar{x})}=\mu$ اوسط سره او $\delta_{\bar{x}}^2=\dfrac{\delta^2}{n}$ او $z=\dfrac{\bar{x}-\mu}{\frac{\delta}{\sqrt{n}}}$ د سټنډرډ نورمال توزيع سره ده.
- نورماله توزيع: د نورمال توزيع شکل له زنګولې سره مشابه او متناظر دی، په نورمال توزيع کې مرکزي شاخصونه يو له بل سره برابر دي او د پيوسته ناخاپه متحولونو د ناحيې تعريف محدود دی چې د احتمال توزيع يې عبارت ده له: $f(x)=\dfrac{1}{\delta\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\bar{x}}{\delta})^2}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

چې μ د ټولنې اوسط او δ د ټولنې معياري انحراف دی.

- د $f(x)$ تابع د منحني لاندې مساحت د محاسبې لپاره د a او b په فاصلو کې کولای شو لـه دې انتيګـرال څخه ګټه واخلو:

$$P(a \le x \le b) = \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \frac{1}{\delta\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\delta})^2}$$

- کـه چېرې x د دوه جملـه يي توزيع د n شـمېرد برنـولي پـر لـه پـسې ازمايښتونه، P دکاميابۍ احتمـال او $q = 1 - p$ د هر ازمايښت د نابرياليتوب احتمال وي، په دې صورت کې د احـصائيې د اوسـط نمونـه او د x ناخاپـه متحـول وريـانس پـه ترتيـب سـره عبـارت دی لـه: $\overset{\frown}{P} = \frac{x}{n}$ ، $E(x) = n\,p$ او $V(x) = n\,p\,q$

همدارنګه د دوه جمله يي توزيع، اوسط، وريانس او د سټنډرډ توزيع او $\overset{\frown}{P}$ ناخاپه متحول په ترتيب سره عبارت دی له:

$$E(\overset{\frown}{P}) = P \quad , \quad f(\overset{\frown}{P}) = \binom{n}{n\overset{\frown}{P}} P^{n\overset{\frown}{P}}\, q^{(1-P)}$$

$$z = \frac{\overset{\frown}{P} - P}{\sqrt{\frac{p\,q}{n}}} \quad , \quad V(\overset{\frown}{P}) = \frac{p\,q}{n}$$

- ددې $z = \frac{x-\mu}{\delta}$ اړيکې په واسطه کولای شو چې هره احصائيوي مجموعه د نورمال توزيع لرونکې وي هغه په سټنډرډ نورمال بدل کړو.
- نمونه په دوو برخو وېشل کېږي، ساده نمونه او ناخاپه نمونه.
- د نمونه ګيرۍ طريقې په عمومي ډول عبارت دي له: ناخاپه نمونـه‌ګيـري، منظمـه نمونـه‌ګيـري، ګروپـي نمونه‌ګيري، خوشه‌يي نمونه ګيري.
- د x نمونې ناخاپه متحولينو اړوند تابع په دې صورت تعريفېږي.

$$f(x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots\ldots, x_n) = f(x_1), f(x_2), \ldots\ldots\ldots, f(x_n)$$

- کـه چېـرې x د ټـولنې يـوه ناخاپـه نمونـه د $f(x)$ د احتمـال تـابع پـه لرلـو سـره وي $E(\overline{x}_n) = \mu$ اوسـط، $V(\overline{x}_n) = \frac{1}{n}\delta$ د اوسط وريانس، δ^2 د ټولنې وريانس او S^2 ته د نمونو وريانس وايي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د څپرکي پوښتنې

1. دوه سکې څلور ځلې پورته واچوئ او د خط راتللو شمېر په پام کې ونیسئ:
   - ناڅاپه متحولونه د تابع په بڼه وښیئ.
   - د هر ځل د پورته اچونې احتمال نمونه‌یي فضا سره نسبت ورکړئ.
   - د تابع د تجمعي او مجزا احتمال ولیکئ.

2. که چېرې د یوې جوړې بوټونو د نقیصې احتمال $P = 0.1$ وي، د ناقصو بوټونو اوسط او معیاري انحراف په یوه نمونه کې $n = 400$ جوړو بوټونو پیدا کړئ.

3. د یوه شرکت په ګدام کې 500 پایې کمپیوټرونه شته چې د هغې له جملې څخه یې 50 پایې نقص لري، یو اخېستونکی له هغې څخه 10 پایې کمپیوټرونه اخلي، ددې احتمال څومره دی چې هغه 8 پایې جوړ اخېستی وي؟

4. لاندې اطلاعات چې اوسط او معیاري انحراف د دوو پارامترونو په اړوند دی د نورمال توزیع د رسمولو لپاره ترې ګټه واخلئ. لومړی یو افقي محور رسم کړئ او د $\overline{x}$ ، $\overline{x}+s$ ، $\overline{x}-s$, $\overline{x}+2s$ او $\overline{x}-2s$ ټکي پرې وټاکئ وروسته یو ټکی د h اختیاري جګوالي په اندازه د $\overline{x}$ له پاسه په پام کې ونیسئ او $\overline{x}+s$ له پاسه یو ټکی د $0.6h$ په جګوالي وټاکئ، یعنې یو ټکی چې مختصات یې $(\overline{x}+s, 0.6h)$ وي، څرنګه چې د نورمال منحنی متناظر دی، همدا عمل په ځانګړې توګه په $\overline{x}-s$ هم سرته ورسوئ. اوس د $\overline{x}+2s$, $\overline{x}-2s$ د پاسه دوه ټکي د h او $0.15h$ په جګوالي په پام کې ونیسئ، پام وکړئ چې د نورمال منحني د دقیق رسمولو لپاره د $0.6067h$ او $0.1354h$ په ځای له $0.6h$ او $0.15h$ څخه ګټه واخلئ. په پایله کې دا ټکي د یوه منحني په واسطه وصل او ووایئ چې دا منحني په کومو فاصلو کې محدب او په کومو فاصلو کې مقعره ده.

5. په یوه روغتون یوه څېړنه راښیي چې د مراجعینو شمېر د شنبې په ورځ وروسته له وخت څخه د 6 او 8 ترمنځ 25 تنه دی. فرض کړئ چې د پواسن د احتمال توزیع په دې حالت کې صدق وکړي.
   - د روغتون د مراجعینو د احتمال توزیع د دوشنبې له ورځې، وروسته له وخت څخه د 6 او 8 ساعتونو تر منځ پیدا او ګراف یې رسم کړئ؟ آیا دا توزیع خمېده ده؟
   - ددې توزیع د اوسط او معیاري انحراف مقدار په لاس راوړئ.
   - آیا دا ممکنه ده چې د دوشنبې په ورځ وروسته له وخت څخه د 6 او 8 ساعتونو ترمنځ به له 7 تنو څخه زیات روغتون ته مراجعه کړې وي؟ ولې؟

6. فرض کوو چې د یوه کتاب د یوه مخ د تېروتنو شمېر د پواسن د توزیع یا $\lambda = \frac{1}{2}$ پارامتر لرونکی دی د محاسبې احتمال یې مطلوب دی داسې چې:

(c) ketabton.com: The Digital Library

- حد اقل يوه ټاپيي تېروتنه په هغه مخ کې وي.
- دقيقاً 5 ټاپيي تېروتنې په هغه مخ کې دي.
- د 3 او 6 ترمنځ ټاپيي تيروتنې په هغه کې وي.

7. فرض کوو چې د هغه پستون قطر چې د يوه اتوماتيکي ماشين په واسطه جوړيږي په نورمال يا اوسط ډول 25 ملي متر او معياري انحراف يې 0.5 ملي متره توزيع شوی وي.
- کله چې د پستون قطر د 25.2 او 25.9 ترمنځ وي احتمال يې څومره دی.
- د پستونونو کوم نسبت د 25 ملي قطر لرونکی او له هغې څخه کم دی.
- که چېرې 1000 پستونه جوړ شي، له هغوی څخه څو دانې ددې وړ دی چې 24.07 ملي مترو څخه کم قطر ولري.
- د توليد شويو پستونونو څو فيصده د 24.56 ملي متره معادل قطر يا له هغه څخه زيات لري.

8. که چېرې $x_1, x_2, \dots, x_n$ د x ناڅاپه متحول يوه تصادفي نمونه وي ايا د $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$ ، $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$ ، $\frac{x_1+x_2}{x_4}$ او $x_1+3x_2-x_3$ تابع آماره دی.

9. که چېرې x يو ناڅاپه متحول او د μ او δ^2 پارامترونه وي آيا د $\frac{3x_1-2x_3-\delta}{8\mu+x_2}$ ، $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)$ او $x_1+x_3-\mu$ توابع μ او δ^2 مجهول وي آيا پورتنيو تابعګانو ته احصائيه ويلی شو؟

10. ټولنه د برق په څلورو ډلو کې ګډون لري، که د عمرونو اوږدوالی يې د ساعتونو په حساب سره عبارت له 108 104 112 103 دي يوه ډله ناڅاپه ټاکو، فرض کوو چې د x ناڅاپه متحول ټاکل شوی د ډلو د عمر اوږدوالی راوښيئ:
- د x د احتمال توزيع وليکئ.
- $E(x)$ او $V(x)$ محاسبه کړئ.

11. د يوه ښار د وګړو د ګټې اندازه چې د غيرنورمال توزيع $\mu=90$ افغانۍ اوسط او د 25 افغانۍ معياري انحراف سره دی که چېرې د 225 کسيز د وګړو د يوې نمونې د ګټې مجموعه له 2100 افغانيو څخه زياته وي، احتمال يې څومره دی؟

12. پوهېږو چې 56% وګړي د A نوماند طرف دار دی، څومره ددې احتمال شته چې $n=50$ دوه‌ګونې يوه نمونه کې حداقل 60% وګړي د A نوماند طرفدار وي.

13. په 12 مثال کې که چېرې $P=0.4$ وي، يعنې ددې احتمال چې يو وګړی د A کانديد طرفدار وي 0.4 دی، يوه $n=200$ ګونه نمونه وټاکو، نو څومره ددې احتمال شته چې لااقل 100 وګړي د A کانديد طرفدار وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

اتم څپرکی

احتمالات

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

بېلې شوې(غیرمتمادي) او نښتې(متمادي) فضاګانې

په مخامخ شکلونوکې د لومړي او دویم نل څخه په وار سره اوبه په څمکه توییږي وبلای شئ چې له دې نلونو څخه په څمکه د اوبو د څاڅکو د تویېدو توییر په څه کې دی؟

فعالیت

- د یو رمل په اچولو سره ویلای شي چې د نمونه یي فضا ټولې ممکنې پایلې کومې دي؟
- آیا له ونې څخه د یوې پڼې منې د لوېدلو د وخت وړاندوینه کولای شئ چې وروسته له څو ثانیو، دقیقو او یا ساعتونو څخه پر څمکه ولوېږي؟
- نظر وخت ته د منې د لوېدلو نمونه یې فضا ولیکې.
- د رمل دانې د اچولو تجربې نمونه یې فضا د عناصرو شمېر او له ونې څخه د منې د لوېدلو وخت څنګه پرتله کولای شې.

د پورتني فعالیت له سرته رسولو څخه لاندې پایله په لاس راځي:

د یوې ناڅاپه تجربې نمونه یې فضا عبارت له هغه ټاکلې او یا نا ټاکلې سټ یا مجموعې څخه ده چې څینې عناصرېې د شمېر وړ او څینې یې د شمېر وړ نه وي.

هغه نمونه یې فضاګانې چې عناصر یې د شمېر(countable) او تشخیص وړ وي د غیرمتمادي نمونه یې فضا په نامه یادېږي او هغه نمونه یې فضاګانې چې عناصر یې د شمېر وړ نه وي د نښتې(متصلې) یا متمادي نمونه یې فضا په نامه یادېږي.

لومړی مثال: له لاندې نمونه یې فضاګانو څخه کومه یوه نښتې(متمادی) او کومه یوه غیرمتمادی ده.

الف: د دوو رمل دانو اچول

ب: د 8 او 12 ترمنځ د یوه حقیقي عدد ټاکل.

ج: له 30 زده کوونکو څخه د 3 تنو ټاکل

(c) ketabton.com: The Digital Library

د: د يوې کُرې د حرارت د يوې درجې لوړېدل د 100 درجو د سانتي ګرېډ څخه تـر 1000 درجـود سـانتي ګرېډ پورې.

هـ : د 30° او 45° زاويو ترمنځ يوه زاويه ټاکل.

حل: څرنګه چې (الف او ج) نمونه‌يي فضاګانې د محدودو غړو له شمېر څخه جوړې شوې، نو غيرمتمـادي فـضا ولې (ب، د او هـ) له نامحدود حقيقي عددونو څخه تـشکيل(جـوړ) چـې د شمـېر وړ نـه دي، نـو نـښتی يـا متمـادی فضاګانې دي.

دويم مثال: خيبر د کور د ګلانو د اوبولو لپاره يو واټرپمپ اخيستی دی.

که چېرې د واټرپمپ عمرد ساعت له مخې په پام کې ونيسو، په دې حالت کې د واټرپمپ د عمر د اوږدوالی نمونه-يي فضا چې کېدای شي هر مثبت حقيقي عدد د واټرپمپ د ورانېدو په صورت کې د کار د مودې قيمـت شـي، پـه دې ډول د داسې ناڅاپه حادثې پېښېدل هر حقيقي عدد کېدای شي چې دا نمونه‌يي فضا يوه غير متمـادي، يـا نـښتې نمونه يې فضا د، يعنې { t د واټرپمپ د ورانېدو وخت، $S = \{t \in IR : t \geq 0$ چې په پورتنۍ نمونه يې فـضا کـې t د واټرپمپ د عمر اوږدوالی راښيي.

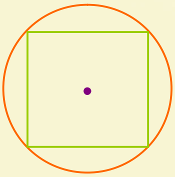
يادونه:

1- د لومړي مثال الف او ج جزونو کې محدودې نمونه‌يي فضاګانو څخه بحث شوی چې عناصـر يـې د شـمېر وړ دي، د ب او د جزونو کې نامحدودې نمونه‌يي فضاګانې ذکر شوې چې عناصر يې د شمېر وړ نه دي، نـو ځکـه ټول مثبت حقيقي عددونه اخېستلای شي.

2- په دويم مثال کې نمونه‌يي فضا متصله يا غير محدوده ده چې د حقيقي عددونو د انټروال په توګه ښودل کېږي.

پوښتنې

1- يو غشي وېشتونکی د يوه دايروي د سک په دننه چې وړانګه يې r ده، په پام کې ونيسي. د غشي د لګېدو ځای د دايرې په دننه کې چې مرکز ته نژدې ولګېږي، د هغې نمونه يې فضا ارايه کړې. وواياسـت چـې دا څنګـه يـوه نمونه يې فضا ده.



2- په مخامخ شکل کې په ناڅـاپي يـا تـصادفي ډول د دايرې پـه دننه کې يو ټکـي و ټـاکئ، احتمــال ددې شـته چـې مطلـوب ټکې د مربع په دننه کې وي.

3- يو طبيعي دوه رقمی عدد و ټاکئ، هغه احتمـال پيدا کړئ چې عدد د 4 مضرب وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

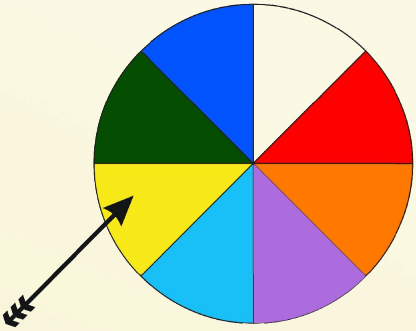
هم چانسه پېښې

د یوې نورمال رمل دانې په اچولو کې د (1) او یا (5) شمېرې مخ ته راتللو لپاره شرط څه دی؟

د 2 او 5 شمېرې د راتللو چانس یو له بل سره څه اړیکه لري؟

فعالیت

د مخامخ شکل په څېر یوه دایره په پام کې ونیسئ، که چېرې په راکړې شوې دایره کې یو ښکاري غشي وولي لاندې پوښتنو ته ځواب ورکړئ.



- په سور رنګه ناحیه او شین رنګه ناحیه کې د غشي لګېدل یو له بل سره څه اړیکه لري؟
- د غشي د لګېدو چانس د کچې په اړه د نارنجي او سپینو رنګونو سره په پرتله باندې څه ویلای شي؟
- په تور رنګ د غشي د لګېدو چانس څومره ده؟
- د تجربې، نمونه‌یي فضا ولیکئ.
- لومړني ناڅاپه پېښې لست کړي او د هر یوه احتمال پیدا کړئ ؟
- د لومړنیو پېښو د احتمالونو د مجموع په برخه کې څه ویلای شي؟

د پورتني فعالیت له اجراکولو څخه لاندې پایله په لاس راوړو:

هغه لومړنی ساده پېښې چې د هغوی د پېښېدلو چانس د یوې تجربې په اجراکولو کې سره برابر وي، د هم چانسه پېښو په نامه یادېږي، لکه:

که چېرې $S=\{e_1 , e_2 \ ,\dots e_n\}$ یوه نمونه یي فضا وي، نو $\{e_i\}$ د هر $i=1,2\dots n$ لپاره یوه ناڅاپه لومړني پېښه ده که $0\leq P(\{e_i\})\leq 1 \quad , \quad i=1\ ,\ 2\ ,\dots n$ دي.

سربېره پر دې د لومړنیو پېښو د احتمالونو مجموع مساوي له یوه سره ده.

$$P(\{e_1\})+P(\{e_2\})+\dots+P(\{e_n\})=\sum_{i=1}^{n}P(e_i)=1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: څلور تنه په یوه لوبه کې ګډون کوي. تاسې د هر یوه د ګټلو احتمال پیداکړئ په داسې حال کې چې نمونه‌یي فضا هم چانسه وي.

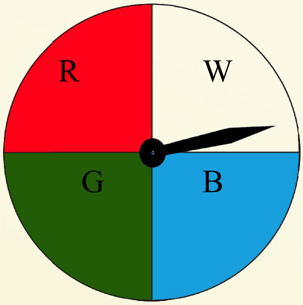
حل: که چېرې $S=\{a,b,c,d\}$ نمونه یي فضا وي، نو د هرې ناخاپه لومړنۍ پېښې احتمال $\frac{1}{4}$ دی.

لرو چې:

$$P(a)=P(b)=P(c)=P(d)=\frac{1}{4}$$

پاسنی لومړنۍ پېښې سره هم چانسه دي.

پوښتنې



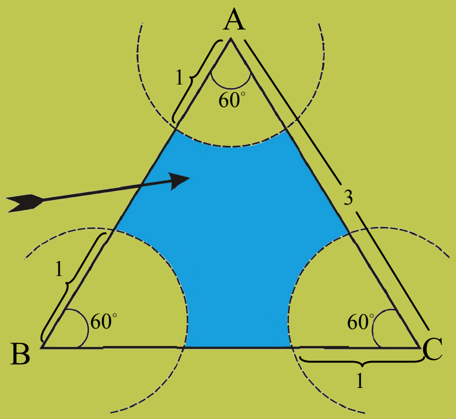
1- مخامخ شکل په پام کې ونیسي ، که چېرې د عقربې(ستنې) د درېدلو احتمال په آسماني او سپين رنګ 0.30 او د سره رنګ پرمخ 0.26 وي، د شنه رنګ پرمخ د درېدلو احتمال به څومره وي؟

2- لاندې د کثرت جدول د رمل یوې دانې د اچولو لپاره په پام کې ونیسي. هغه احتمال پیداکړئ چې د رمل دانه (5) شمېره راشي.

د رمل شمېره	1	2	3	4	5	6
کثرت	7	9	8	7	3	10

3- د رمل یوه دانه داسې ډکه شوې چې د جفت شمېرو د راتللو احتمال د طاق شمېرو دوه برابره وي، که یو چا په شرط وهلو کې(5) شمېره ټاکلې وي، د هغې احتمال پیداکړئ.

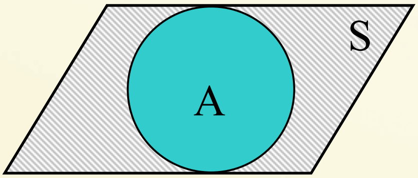
(c) ketabton.com: The Digital Library



د نښتي يا پيوسته(متمادي) فضاګانو احتمال

د يوه متساوي الاضلاع مثلث دننه چې هره ضلعه يې 3 واحده ده، يو غشي ولو، ددې احتمال چې د غشي د لګېدلو ټکي د مثلث د هر رأس نه د يو واحد په اندازه لوی وي، څو دی؟

- آيا ويلای شي چې د يوې ټوټه کرښې، د يوې مستوي د يوې برخې او يا د فضا د حجم څو ټکي يو پر بل پسې موجود دی؟
- د هغو ټکو د پېښدلو احتمال چې د A په برخه کې چې د S د لويې برخې فرعي مساحت دی، لکه څرنګه چې په شکل کې ليدل کېږي د A او S د ساحو د مساحتونو له نسبت سره څه اړيکه لري؟



- آيا کولای شئ دا مسئله په فضا کې د يوه جسم حجم د يوې برخې د احتمال د محاسبې لپاره عموميت ورکړئ؟

د پورتني فعاليت له سرته رسولو څخه لاندې پايله لاسته راځي.

پيوسته(متمادي) نمونيي فضا د نامعينو ټکو مجموعه ده چې شکل يې د عددونو په محور ، په مستوي کې لکه سطح او يا په فضا کې لکه حجمونه دی، څرنګه چې ددې ټکو شوونه ممکن نه ده، نو د احتمال د نسبت پيدا کولو لپاره د ټوټه کرښو د اوږدوالي، د اشکالو سطحو او يا د جسمونو له حجم څخه استفاده کوو.

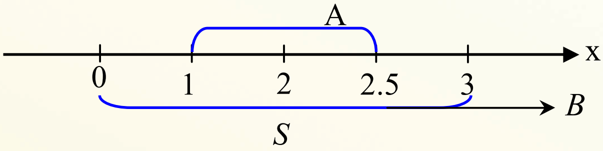
معمولاً د عددونو له محور څخه په ګڼه اخيستني سره د x يو متحول، د يوه مساحت د يوې برخې لپاره د دوو متحولينو لکه x او y او په همدې ترتيب د حجمونو لپاره له دريو متحولونو ، لکه: x, y او z څخه ګټه اخلو.

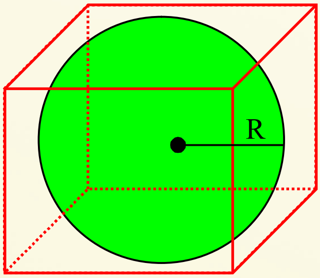
لومړی مثال: د عددونو په محور د $(0,3)$ په انټروال کې د x يو ټکی په ناخاپي يا اتفاقي ډول ټاکو ددې احتمال پيدا کړئ چې $1 < x < 2.5$ وي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل: د حقیقي عددونو محور رسم کړئ د S او A فاصلې د هغه پر مخ ټاکو، د شکل په پام کې نیولو سره د A پېښې د پېښېدو احتمال څخه لرو:

$$P(A)=\frac{\text{د } A \text{ ټوټه کرښې اوږدوالي}}{\text{د } B \text{ ټوټه کرښې اوږدوالي}}=\frac{2.5-1}{3-0}=\frac{1.5}{3}=\frac{1}{2}$$





دویم مثال: په ناڅاپه ډول یو ټکی د یوه مکعب په دننه کې چې ضلعه یې 2 واحده وي ټاکو ددې احتمال پیدا کړئ چې نوموړي ټکې د مکعب د محاطي کُرې په دننه کې وي.

حل: که چېرې کره د هغه مکعب په دننه کې چې ضلعه یې a واحده ده، محاطه وي، نو د کرې شعاع $r=\frac{a}{2}$ کېدای شي:

A ناڅاپه پېښه د کرې د حجم او S نمونه یې فضا سره مساوي چې د مکعب حجم دی، نو لرو:

$$r=\frac{a}{2}=\frac{2}{2}=1$$

$$P(A)=\frac{\text{د کرې حجم}}{\text{د مکعب حجم}}=\frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{a^3}=\frac{\frac{4}{3}\pi(1)^3}{2^3}=\frac{\pi}{6}$$

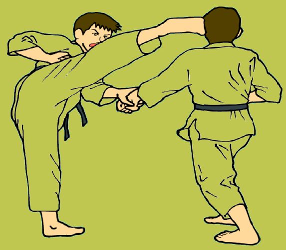
پوښتنې

1- د حقیقي عددونو په محور د A او B دوه ټکي په ناڅاپي یا تصادفي ډول داسې ټاکو چې $0\le A\le 3$ او $-2\le B\le 0$ وي، ددې احتمال پیدا کړئ چې د d واټن د A او B ترمنځ وي او له 3 واحدو څخه لوی وي.

2- که چېرې یو ټکی په ناڅاپي یا تصادفي ډول د دایرې د سطحې پرمخ وټاکو، ددې احتمال پیدا کړې چې نوموړي ټکي نظر د دایرې محیط ته د دایرې مرکز ته نژدې وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

مشروط احتمـال



له یوه ولایت څخه (20) تنـه نارینـه او ښـځینه زده کـوونکی د کانکور په آزموینـه کـې د طب پوهنځي تـه بریـالي شـوي دي، د هغوی له جملې څخه یې 5 تنه ښه کاراته بازان دي: که په 15 تنو بریالیو نارینه وو کې 4 تنه یې ښه کارته بـازان وی. د نوموړو محصلینو له مینځ څخه پـه اتفـاقي ډول یـو تن ټاکو احتمـال د دې پیدا کړئ چې:

- ټاکل شوی محصل یوه کارټه بازه نجلی وي؟
- په پورتني سوال کې هغه نجلی په کوم شرط سره د طب پوهنځي ته بریالی شوي ده؟

له 2500 زده‌کوونکو څخه 1600 تنه یې په مطالعه کولو عادت لري.

چې لـه 80% زده‌کوونکـو څخـه یـې 70% نارینـه زده‌کـوونکي وي او پـه مطالعـه کولـو عـادت ولـري، کـه د ټولـو زده‌کوونکو لپاره احتمـال یو شان وي، د لاندې پېښو په پام کې نیولو سره د یوه تن زده‌کـوونکی ټاکـل د ښـوونځی لـه زده‌کوونکو څخه:

R: له مطالعې سره عادت لري.

M : نارینه زده‌کوونکي دی.

F: یوه ښځینه زده‌کوونکې ده.

د لاندې پوښتنو په حل فکر وکړئ:

- ددې احتمال پیدا کړئ چې د مطالعه کوونکو له منځ څخه ټاکل شوي زده‌کوونکی نارینه وي؟
- ددې احتمال پیدا کړئ چې د مطالعه کوونکو له منځ څخه ټاکل شوی تن یوه ښځینه وي؟
- ددې احتمـال پیدا کړئ چې ټاکل شوي زده‌کوونکي یو نارینه وي په دې شرط چې په مطالعه عادت وي.

د پورته فعالیت د سرته رسولو څخه لاندې پایله په لاس راوړو:

په حقیقت کې د هغه نارینه زده‌کوونکي د ټاکلو احتمـال په دې شرط چې په مطالعه عادت ولري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

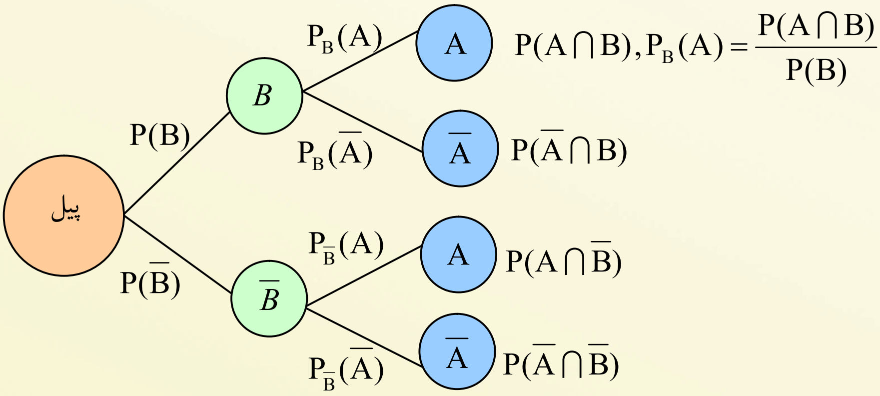
د لاندې احتمالات وېش له حاصل څخه عبارت دی که چېرې Ω ټوله نمونه‌يي فضا او $|\Omega|$ نمونه‌يي فضا د عناصرو شمير وي، نو لرو:

$$P_R(M)=\frac{P(M\cap R)}{P(R)}=\frac{\frac{|M\cap R|}{|\Omega|}}{\frac{|R|}{|\Omega|}}=\frac{|M\cap R|}{|R|}=$$ د هغه نارينه زده‌کوونکو د ټاکلو احتمال چې په مطالعه عادت وي.

$P_R(M)$ د هغې پيښې له احتمال څخه عبارت دی چې ټاکلي زده‌کوونکي نارينه وي، په دې شرط چې هغه په مطالعه عادت وي.

تعريف: که چېرې S نمونه‌يي فضا A او B د نمونه‌يي فضا دوې ناخاپي پيښې وي، په داسې حال کې چې $P(B)\neq 0$ وي. په دې حالت کې نوموړی احتمال يعنې $P_B(A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$ چې د A ناخاپي پيښې احتمال نظر د B ناخاپي پيښې ته مشروط احتمال بلل کېږي.

د پورته تعريف په پام کې نيولو سره نظر د مسير لومړي قاعدې ته د ونه‌ييز دياګرام په مرسته هم په لاس راوړای شو.



د مشروط احتمال له فورمول څخه لاندې مهمې پايلې په لاس راځي:

1- د مسير له لومړۍ قاعدې څخه لرو:

$$P(A\cap B)=P(B)\cdot P_B(A)$$

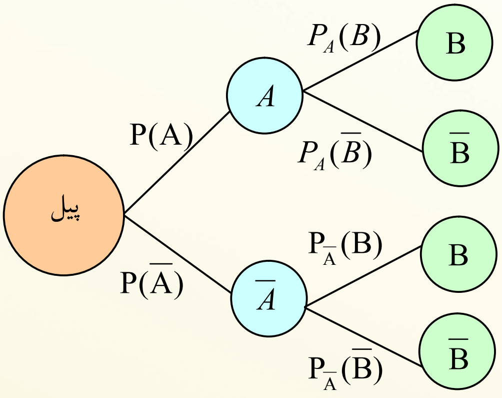
د مسير له دويمې قاعدې څخه په ګټه اخيستنې سره لرو:

$$P(A\cap \overline{B})=P(\overline{B})\cdot P_{\overline{B}}(A)$$

$$P(A)=P(B)\cdot P_B(A)+P(\overline{B})\cdot P_{\overline{B}}(A)$$

2- ونه‌ييزه(درختي) دياګرام له مخې $P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$

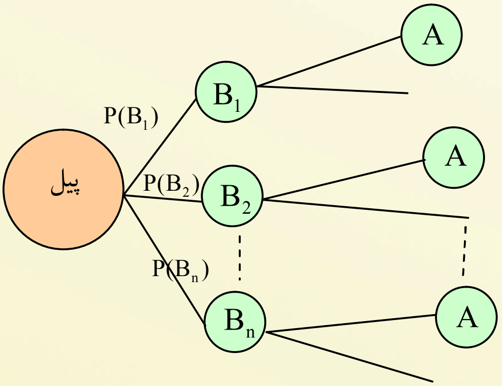
(c) ketabton.com: The Digital Library



له لومړي پايلې څخه په لاس راځي چې: $P_A(B)=\dfrac{P_B(A)\cdot P(B)}{P(B)\cdot P_B(A)+P(\overline{B})\cdot P_{\overline{B}}(A)}$

3- که چېرې نوموړی حالت د Ω نمونه يي فضا ناځاپي پېښو د $B_1 , B_2 , ..., B_n$ اختياري وېش لپاره عموميت ورکړو. د ونې په ډول د دياګرام په پام کې نيولو سره کولای شو، لاندې فورمول په لاس راورو.

$$P_A(B_i)=\frac{P_{B_i}(A)\cdot P(B_i)}{P(B_1)\cdot P_{B_1}(A)+...+P(B_n)\cdot P_{B_n}(A)}=\frac{P(A\cap B_i)}{\sum_{k=1}^{n}P(B_k)\cdot P_{B_k}(A)} \qquad i=1,2,..., \ n$$



لومړی مثال: يو زده کوونکی ښوونځي ته د تللو لپاره 50% هره ورځ د موټر څخه ګټه اخلي چې 70% په ټاکلي وخت ښوونځي ته رسېږي. په منځني ډول نوموړي 60% په ټاکلي وخت ښوونځي ته حاضرېږي که چېرې پېښې:

A: د موټر په واسطه راتلل　　　　B: په ټاکلي وخت رسېدل

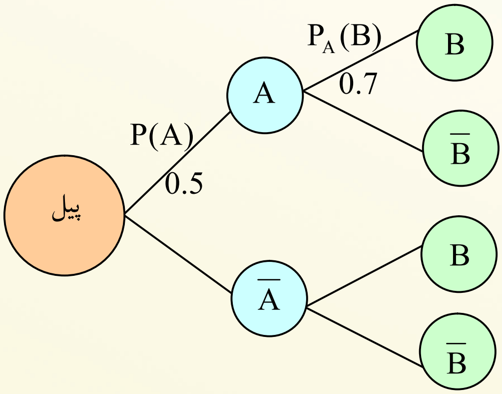
وي په دې صورت کې د A مشروط احتمال نظر B ته يعنې $P_B(A)$ مطلوب دی؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل: د نوموړي احتمال د پیداکولو لپاره د ونه‌ییز یا درختي دیاګرام په پام کې نیولو سره نظر فورمول ته په لاندې ډول په لاس راځي:

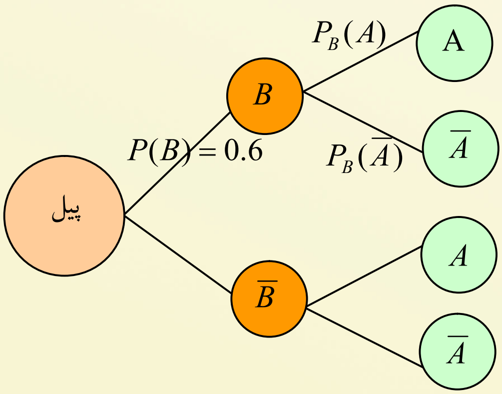
$$P_B(A)=\frac{P(A)\cdot P_A(B)}{P(B)}=\frac{0.5\cdot 0.7}{0.6}=0.5833=58.33\%$$

نو په دې اساس د موټر په واسطه د رسېدلو احتمال په دې شرط چې په ټاکلي وخت په شوونځي کې وي 58.33% سلنې سره برابر دی.



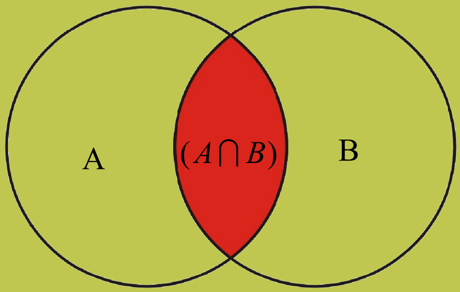
پوښتنې

له لاندې دیاګرام څخه په ګټه اخیستنې سره د مشروط احتمال په ټاکلي وخت رسېدل شوونځي ته په دې شرط چې د موټر په واسطه سرته رسیدلي وي، یعنې $P_A(B)$ د ناڅاپه پېښې احتمال شوونځي ته په ټاکلي وخت رسیدل، په دې شرط چې د موټر په واسطه نه وي راغلي یعنې $P_{\bar{A}}(B)$ مطلوب دی.



(c) ketabton.com: The Digital Library

د حاصل ضرب اصل



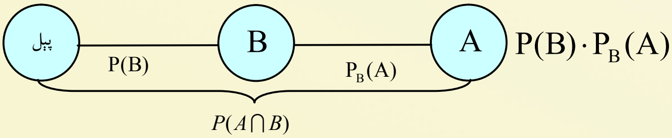
د A ناخاپه پیښې مشروط احتمال په B ، د A او B ناخاپه پیښې احتمال یو له بل سره څه اړیکه لري؟

- که چېرې A او B دوې ناخاپه پیښې د S په نمونه یي فضا کې وي.
- د A ناخاپه پیښې مشروط احتمال B ته ولیکئ.
- د ونه‌ییز دیاګرام څخه په ګټه اخېستنې سره د $P(B)\cdot P_B(A)$ قیمت په لاس راوړئ.
- د $(A\bigcap B)$ ناخاپه پیښو احتمال د A او B ناخاپه پیښو څخه او یا د A مشروط له B څخه په ګټه اخیستنې سره ولیکئ.
- د فعالیت د دوو پوړتنیو بندونو د محاسبې پایلې یو له بل سره پرتله کړئ.
- آیا کولای شو چې موضوع د ډېرو ناخاپه پیښو لپاره عمومیت ورکړو.

د پوړتني فعالیت له سرته رسولو څخه لاندې پایله په لاس راوړو.

د S په یوه نمونه یي فضاکې د A او B د دوو ناخاپه پیښو لپاره د مشروط احتمال د تعریف په پام کې نیولو سره لرو: $P(A\bigcap B)=P(B)\cdot P_B(A)$

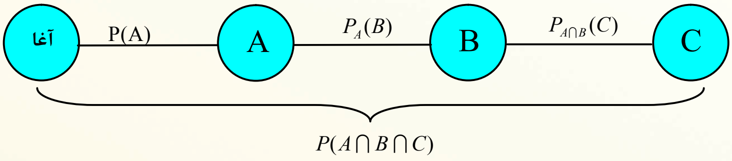
دا مسئله کولای شو چې د ونه‌ییز دیاګرام په مرسته هم په لاس راوړو:



$$\Rightarrow P(A\bigcap B)=P(B)\cdot P_B(A)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا مطلب د دريو A، B او C پيښنو لپاره په لاندې ډول پراخوو.



$$\Rightarrow P(A\cap B\cap C)=P(A)\cdot P_A(B)\cdot P_{A\cap B}(C)$$

پورتنۍ قاعده د حاصل ضرب په نامه يادېږي او کولای شو، هغه د يو شمېر اختياري ناخاپي پيښنو لپاره هم په لاس راوړو.

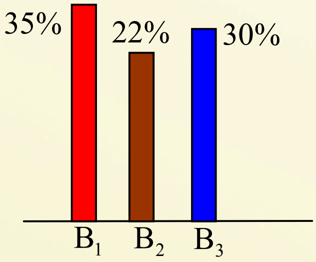
مثال: د B_1, B_2 او B_3 دريو ولايتونو په پارلماني ټاکنو کې چې د هر يوه لپاره د ټاکنو د ګډون کوونکو فيصدي او د جمهوري ګوند برخه فيصدي ورکړل شوې ده؟

په کوم احتمال د ټاکنو ګډون کوونکي او يا رايې اچوونکي جمهوري ګوند ټاکلي وي.

حل: په لاندې ډول ناخاپي پيښې تعريف او نوموو:

V : هغه رايې ورکوونکي چې جمهوري ګوند يې ټاکلی دی.

B_i : د ولايت رايې ورکوونکي B_i – (i-ام) ... i=1,2,3 لاندې ارقام ورکړل شوي وي.



ولايت	د راي ورکوونکو فيصدي	جمهوري ګوند ته رايې ورکوونکي
B_1	33.2%	35
B_2	46.5%	22
B_3	20.3%	30

د $B_i\ (i=1,2,3)$ ناخاپه پيښې په حقيقت کې يې د S نمونه يي فضا يو ويش جوړ کړی چې د هغوی لپاره صورت نيسي.

1- B_i يو له بل سره دوه په دوه مستقل او ګډ عناصر نه لري.

2- د S نمونه يي فضا لپاره $\bigcup_{i=1}^{3}B_i = S=B_1\cup B_2\cup B_3$ دی، نو $(i=1,2,3)$ $B_i\cap V$ پيښه يو له بل سره يو په يو مستقل د هغوی لپاره صورت نيسي. $V=\bigcup_{i=1}^{3}(B_i\cap V)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له دي اړيکې څخه کولای شو، د دواړو خواوو د احتمال لپاره ولیکو:

$$P(V)=P\left(\bigcup_{i=1}^{3}(B_i\cap V)\right)=\sum_{i=1}^{3}P(B_i\cap V)=\sum_{i=1}^{3}P(B_i)\cdot P_{B_i}(V)$$
$$=P(B_1)\cdot P_{B_1}(V)+P(B_2)\cdot P_{B_2}(V)+P(B_3)\cdot P_{B_3}(V)$$
$$=0.332\cdot 0.35+0.465\cdot 0.22+0.203\cdot 0.3=0.1162+0.1023+0.0609$$
$$=0.2794=27.94\%$$

تعریف: که چېرې د $B_1, B_2, ..., B_n$ خرنګه چې $P(B_i)\neq 0$ وي $i=1,...n$ پېښو عمومي حالت د S په نمونه‌يي فضا کې یوه پېښه وي، نو $P(A)$ د کامل احتمال په نامه یاد او د A اختیاري ناځاپې پېښې لپاره لرو:

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)\cdot P_{B_i}(A)$$

د مشروط احتمال د تعریف، د اصل حاصل ضرب له قضیې څخه د کامل احتمال د مسئلې په پام کې نیولو څخه لاندې فورمول چې د بائیز(Baye's) د فورمول په نامه یادېږي، په آسانی سره په لاس راځي، داسې چې B_i چې $i=1,...n$ د S نمونه يي فضا یوی پېښې لپاره چې $P(B_i)\neq 0$، $i=1,...n$ د A د ناځاپه پېښې احتمال چې $P(A)\neq 0$ سره وي، لرو:

د بائیز (Bayes)فورمول:

$$P_A(B_i)=\frac{P(A\cap B_i)}{P(A)}=\frac{P(B_i)\cdot P_{B_i}(A)}{\sum_{k=1}^{n}P(B_k)\cdot P_{B_k}(A)}$$

د بائیز فورمول ډېر استعمال لري لکه د $n=2$ لپاره $B_1=\overline{B}, B_2=\overline{B}$ په پام کې ونیسو، په حقیقت کې B_1 او B_2 د S نمونه يي فضا پېښې وي لرو:

$$P_A(B)=\frac{P(B)\cdot P_B(A)}{P(B)\cdot P_B(A)+P(\overline{B})\cdot P_{\overline{B}}(A)}$$

پورتنی فورمول د $n=2$ د بائیز له فورمول څخه عبارت دي.

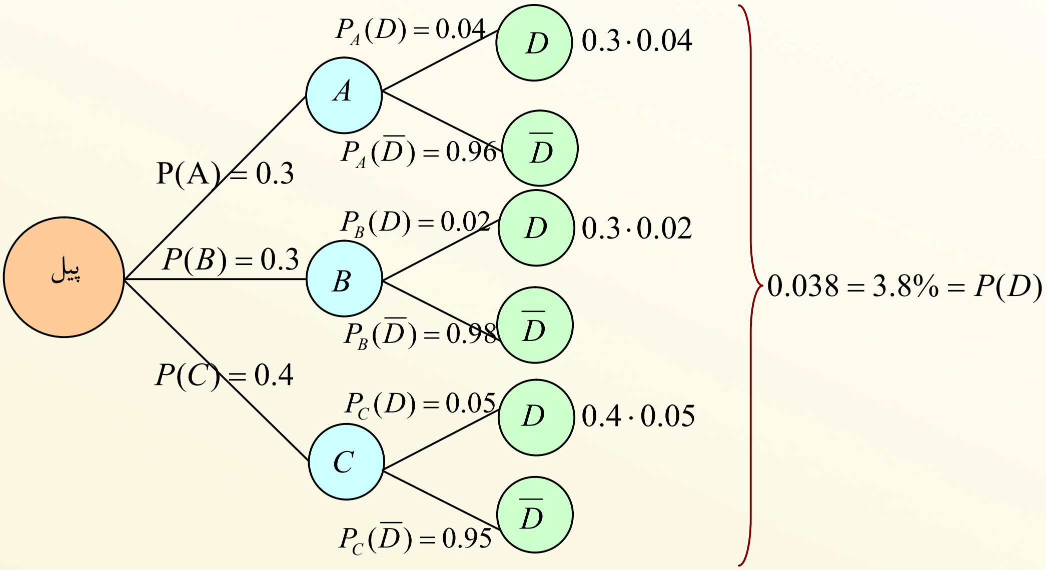
مثال: په یوه فابریکه کې د A، B او C درې ماشینونه په ترتیب سره 30% ، 30% او 40% برخه د برق ګروپونه تولیدوي. که چېرې په ماشینونو کې د ګروپونو د خرابېدو کچه په ترتیب سره 4%، 2% او 5% وي او نوموړي ګروپونه په ګډه سره خرڅ شي، مطلوب دي:

a) ددې احتمال چې یو اخېستل شوی ګروپ وران یا خراب وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

b) په کوم احتمال خراب خرڅ شوی ګروپ د C ماشين پورې اړه لري.

c) يو نوی توليد شوی ګروپ لرو، په کوم احتمال سره به د B په ماشين پورې مربوط وي.



د b جز:

$$P_D(C) = \frac{P(D \cap C)}{P(D)} = \frac{P(C) \cdot P_C(D)}{P(D)} = \frac{0.4 \cdot 0.05}{0.038} = \frac{0.02}{0.038} = 0.526 = 52.6\%$$

د c جز:

$$P_{\overline{D}}(B) = \frac{P(\overline{D} \cap B)}{P(\overline{D})} = \frac{P(B) \cdot P_B(\overline{D})}{P(\overline{D})} = \frac{0.3 \cdot 0.98}{0.3 \cdot 0.96 + 0.3 \cdot 0.98 + 0.4 \cdot 0.95}$$

$$= \frac{0.294}{0.288 + 0.294 + 0.38} = \frac{0.294}{0.962} = 0.3056 = 30.56\%$$

پوښتني

1- د 1000 دانو رملونو په منځ کې د يوې دانې په شپږ واړه مخونه يوازې د 6 شمېره وهل شوې ده. د هغوی له منځ څخه يوه ناڅاپه د رمل دانه ټاکل شوې او درې ځلې اچول شوې ده. درې ځلې 6 راغلي. پيدا کړئ، هغه احتمال چې په ټاکل شوې دانه په سم ډول شمېرې وهل شوې وي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ناخاپه پېښو استقلالیت

له مشروط احتمال څخه پوهېږو چې د A او B دوو ناخاپو پېښو یا حادثو د B د پېښې پېښدل د A په پېښه تاثیر اچوي په دې سبب لازمه ده چې د احتمال د محاسبې په وخت کې د A او B پېښه په پام کې ونیسو.

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

د هغه حالت لپاره چې د A ناخاپه پېښې پېښدل پر B ناخاپه پېښې اغېزه ونه لري او بر عکس.

د A او B د ضرب د حاصل احتمال د $A \cap B$ پېښې له احتمال سره څه اړیکه لري.

تعریف: د A او B دوې ناخاپه پېښې چې یوه پر بله اغېزه لرونکې نه وي د ناخاپه مستقلو پېښو په نامه یادېږي.

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

- د S نمونه یي فضا او د A او B دوې یوه له بلې څخه مستقلې پېښې چې د S نمونه یي فضاکې شامل وي، په پام کې ونیسئ.
- د مشروط احتمال فورمول څخه په هغه صورت کې چې A او B یوه له بلې څخه مستقلې دوې پېښې وي د $P_B(A)$ او P(A) احتمالونه یو له بل څخه څه توپیر لري؟
- د $P(A \cap B)$ ناخاپه پېښې احتمال له څه سره مساوي دي؟
- د $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ د پېښو د احتمال له فورمول څخه په هغه صورت کې چې A او B ګډ ټکی ونه لري، څه پایله اخلي؟

د پورتني فعالیت له سرته رسولو څخه لاندې پایله په لاس راځي:

1: د A او B دوې پېښې مستقلې بلل کېږي، که چېرې:

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ (د ضرب د حاصل اصل)

2: که چېرې A او B پېښې د ګډو ټکو لرونکې نه وي، نو

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cap B) = 0$$
$$\Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$ (د جمع د حاصل اصل)

لومړی مثال: که چېرې د یوه ښوونځي د زده کوونکو د سترګو رنګ او ذکاوت یو پر بل پرته له اغېزې فرض شوي وي. د لاندې پېښو په پام کې نیولو سره په ناخاپه ډول د یوه زده کوونکي ټاکلو لپاره:

H: ټاکل شوی تن یو هوښیار ذکي زده کوونکی وي.

B: ټاکل شوی زده کوونکی تورې سترګې ولري.

هغه احتمال پیدا کړئ چې ټاکل شوی زده کوونکی په ناخاپه توګه هوښیار ذکي او تورې سترګې ولري.

حل: ددې لپاره چې ټاکل شوی زده کوونکی هوښیار او تورې سترګې ولري لیکلای شو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

څرنګه چې $P_B(H)=P(H)$ سربېره پردې $P_B(H)=\dfrac{P(B\cap H)}{P(B)}$ نو:

$P(B\cap H)=P(H)\cdot P(B)$

عمومي حالت: د A_1 , A_2 , A_n..... , $(n\geq 2)$ ناخاپه پېښې احتمالاً یو له بلې څخه مستقلې بلل کېږي که چېرې د هرو دوو یا ځو پېښو په ترکیب کې د ضرب د حاصل قاعده صدق وکړي پرته له هغې پېښې احتمالاً یوه له بلې سره تړلې نومول کېږي.

پایله:

1: پاملرنه باید وشي چې د ضرب د حاصل له قاعدې څخه په ګټه اخیستنې سره په لاندې متقاطع جدول کې هم کولای شو چې $A\cap B$, $A\cap \overline{B}$, $\overline{A}\cap\overline{B}$ او $\overline{B}\cap A$ ناخاپه پېښو احتمالي پایلې د A او B پېښو لپاره چې احتمالونه یې a او b وي، په آسانۍ په لاس راوړو. د A او B د مستقل والي څخه پوهېږو چې د A او $\overline{B}$ ، $\overline{A}$ او B په پای کې $\overline{A}$ او $\overline{B}$ هم یوه له بلې څخه مستقلې دي، نو لرو:

	B	$\overline{B}$	
A	$P(A\cap B)=a\cdot b$	$P(A\cap\overline{B})=a(1-b)$	a
$\overline{A}$	$P(\overline{A}\cap B)=b(1-a)$	$P(\overline{A}\cap\overline{B})=(1-a)(1-b)$	$1-a$
	b	$1-b$	1

2: د A ، B او C درې ناخاپه پېښې چې یوه له بلې څخه مستقلې دي، لرو:

$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$

$P(A\cap C)=P(A)\cdot P(C)$

$P(B\cap C)=P(B)\cdot P(C)$

$P(A\cap B\cap C)=P(A)\cdot P(B)\cdot P(C)$

دویم مثال: په یوه کڅوړه کې دوې سپینې او دوې تورې مرۍ پرتې دي. دوې مرۍ یوه په بلې پسې له کڅوړې څخه پورته کوو، په داسې حال کې چې:

a- د لومړۍ مرۍ د پورته کولو نه وروسته هغه بېرته په کڅوړه کې ږدو.

b- پرته له دې چې مرۍ واپس کېښودل شي.

د A پېښه: په لومړي ځل سپینه مرۍ راووزي. B: دویم ځل مرۍ سپینه وي.

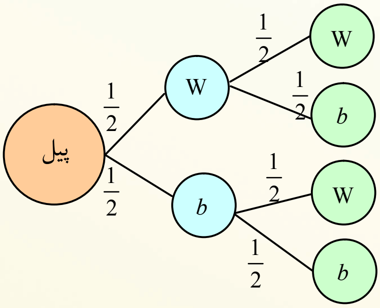
له یوې بلې څخه مستقلې یا تړلې (وابسته) دي.

حل:

a) څرنګه چې $P(A)=\dfrac{1}{2}$ او $P(B)=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$ وي او

$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)=\dfrac{1}{4}$ دي، نو A او B یوه له بلې څخه مستقلې دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

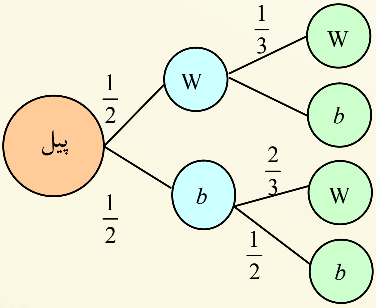


b) خرنگه چې:

$$P(B)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{2}\ ,\ P(A)=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow P(A\cap B)\neq P(A)\cdot P(B)$$

نو A او B يوه له بلې څخه تړلی يا وابسته دي.



دريم مثال: د لاندې متقاطع جدول خالي ځايونه چې په نښه شوي دي، ډک يې کړئ:

	B	$\overline{B}$	
A	0.12	$P(A\cap\overline{B})=?$	?
$\overline{A}$	$P(\overline{A}\cap B)=?$	$P(\overline{A}\cap\overline{B})=?$	?
	?	0.6	

حل: خرنگه چې $P(\overline{B})=0.6$ دي، نو لرو:

$$P(B)=1-P(\overline{B})=1-0.6=0.4$$

$$P(A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{0.12}{0.4}=0.30$$

$$\Rightarrow P(\overline{A})=1-P(A)=1-0.3=0.70$$

او د پېښو د تقاطع څخه لرو چې:

$$P(A\cap\overline{B})=P(A)\cdot P(\overline{B})=0.3\cdot 0.6=0.18$$

$$P(\overline{A}\cap B)=P(\overline{A})\cdot P(B)=0.7\cdot 0.4=0.28$$

$$P(\overline{A}\cap\overline{B})=P(\overline{A})\cdot P(\overline{B})=0.7\cdot 0.6=0.42$$

په همدې ترتيب په جدول کې د قيمتونو په وضع کولو سره مسئله تکميلېږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

یو سټ چې عناصر یې $5,3,2$ او 30 دی د یوه رقم د انتخاب احتمال یې 0.25 دی په ناخاپي ډول لـه نومـوړي سټ څخه یو رقم انتخابوو، که چېرې A_k ناخاپه پېښه د هغه رقم چې انتخاب شوی او د تقسیم قابلیت پـه k ولري، آیا A_2 , A_3 او A_5 ناخاپي پېښې دوه په دوه مستقل دي او که نه؟

د څپرکي مهم ټکي

بېلې شوې(غیرمتمادي) نمونه یي فضا:

هغه نمونه یي فضا چې عناصر یې د شمېر او تشخیص وړ وي، د غیرمتمادی نمونه‌یي فـضا پـه نامـه یـادېږي، لکـه د رمل یا د سکې اچولو تجربې نمونه‌يي فضا.

نښتې(متمادي) نمونه یي فضا:

هغه نمونه یي فضا چې عناصر یې د شمېر وړ نه وي د پیوسته یا متمادي نمونه‌یي فضا په نامه یـادېږي چـې د حقیقـي عددونو پر محور د فاصلې په بڼه او یا په فضاکې د هندسي شکلونو یا حجمونو په ډول څرګندېږي.

هم چانس پېښې:

د یوې نمونه یي فضا لومړني پېښې چې د هغوی پېښې د تجربې په پای کې پـه برابـر احتمـال پـېښېږي، هـم چانسه پېښې بلل کېږي. د هم چانس پېښو د احتمـال مجموع له یوه سره مساوي ده.

د نښتې(پیوسته) فضا احتمـال:

د ټوټه کرښو، سطحو او حجمونو مساعد حالتونه د یوې پام وړ ناخاپي پېښې لپاره په یـوه تجربـې نمونـه‌یـي فـضاکې شامل ټوټه کرښو، سطحو او حجمونه عبارت دي د متصلې فضا له احتمال څخه.

مشروط احتمـال:

کـه چېـرې A او B د S، د نمونـه‌یـي فـضا دوې ناخاپـه پېـښې چـې $P(B)\neq 0$ وي پـه دې حالـت کـې $P_B(A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$ ته د A ناخاپه پېښې د مشروط احتمـال په نامه یـادېږي پـه دې شـرط چې د B پېښه له مخکې پېښه شوې وي.

یوه له بلې څخه مستقلې پېښې:

د A او B دوه ناخاپه پېښې یوه له بلې څخه مستقلې بلل کېږي که چېرې:

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$$ (د ضرب د حاصل اصل)

(c) ketabton.com: The Digital Library

د څپرکي پوښتنې

1. د لاندې نمونه يي فضا ګانو څخه کومه يوه سره نښتې يا پيوسته او کومه يوه غيرمتمادي ده؟

الف: د يوې رمل دانې اچولو تجربه

ب: د يوې سکې د اچولو تجربه

ج: د يو غشي لګېدل په يوه دايره

د: د يوې فلزي ميلې د اوږدوالي زياتېدلو تجربه نظر حرارت ته

2. د يو چارتراش چې اوږدوالی يې L دی په ناڅاپه ډول په سور اره کوو، تر څو دوه برخې شي څومره احتمال شته چې د کيڼ اړخ اره شوې برخه د ښي اړخ له درې برابره څخه کوچنی وي.

3. د يوه خصوصي شرکت يو کارګر هره ورځ د 8 او 8:50 ساعتونو په منځ کې کورته نژدې تم ځای کې چې د مامورينو په موټر کې کارته د تګ لپاره ګډون وکړي او په 8:15 ، 8:30 او 8:45 وختونو تم ځای ته رسېږي څومره احتمال ددې شته چې نوموړی تن له 5 دقيقو څخه لږ منتظر پاتې شي.

4. د $[0.3]$ تړلي فاصلې څخه په ناڅاپه ډول دوه عددونه ټاکو، ددې احتمال پيدا کړئ چې د عددونو مجموعه د 5 څخه کوچنی او له 2 څخه لويه وي.

5. په ناڅاپه ډول يو ټکی د مخروط دننه چې د قاعدې شعاع يې R او جګوالی $R\sqrt{3}$ دی ټاکو، پيدا کړئ ددې احتمال چې ټکی د محاطي کرې دننه په دې مخروط کې قرار لري.

6. د يو خودکار قلم خرابېدل دوه دليلونه لري:

1- د ميخانيکيت خرابېدل

2- د خودکار د نيچې خرابېدل

که چېرې د يو خودکار قلم د خرابېدو احتمال 0.088 او ددې احتمال چې د خرابېدو دليل (1) ، شمېره وي مساوي په 0.05 او د دويم نقص احتمال مساوي په 0.002 وي وښيئ: چې دوه پورتني دلايل مستقلې او يا غير مستقلې پېښې دي؟

7. خيبر غواړي هغه څلور کلي ګانې چې په جيب کې يې لري او سره يو شان دي د کورد دروازې قلف خلاص کړي په کوم احتمال سره وروسته د دريمې کلي له آزمويلو سره چې له جيب څخه يې را باسي د قلف اړوند کلي وي، په هغه صورت کې چې:

a) هره آزمويل شوې کلي په هغه صورت کې چې اصلي کلي نه وي دوباره په همغه جيب کې اچوي.

b) هره آزمويل شوې کلي په هغه صورت کې چې اصلي کلي نه وي په بل جيب کې اچوي.

Get more e-books from www.ketabton.com
Ketabton.com: The Digital Library