انجنيري پوهنځی

د موادو میخانیک

دوهم ټوک

حفیظ الله وردک او زرجان بها

پلورل منع دی

۱۴۰۲

د موادو میخانیک لومړی ټوک

حفیظ الله وردک او زرجان بها

Afghanic

Shaikh Zayed Unversity, Khost, Engineering Faculty

Hafizullah Wardak & Zarjon Baha

Mechanics *of* Materials II

د موادو میخانیک دویم ټوک کتاب د لومړي ټوک یوه برخه ده، له اتم څپرکـي څخه پیل کېـږي، چـې له دې موضوعگانو څخه بحث کوي؛ په اتم څپرکي کې د یو ځای شوي بارونو په اړه، نهم څپرکي کې د سټریس بدلون، لسم څپرکي کې د سترین بدلون، یوولسم څپرکي کې د بیمونو او شافتونو ډیزاین، دولسم څپرکي کې د بیمونو او شافتونو بېځایه کېدل، دیارلســم څپرکي کې د پایو کږوېږدل او همدارنگه په څوارلســم څپرکي کې د انرژي طریقې په اړه بحث شوی دی.

حفیظه الله وردک د حاجي بسم الله خان زوی، د وردکو جغتو ولسوالۍ کې زېږیدلی دی .

نوموړي خپل لېسانس سند د امریکا له هاوایي پوهنتون، ماستري سند یې له کیس وسترن ریزور پوهنتون او دوکتورا درسونه یې په الباما پوهنتون کې بشپړه کړي.

ښاغلی حفیظ الله شپږ کاله د کابل پوهنتون په انجینري پوهنځي کې استاد و. له هغه وروسته په امریکا کې شپږ کاله د سارجنت لندی د اټومي انرژي کمپني، بیا د بوینگ له کمپني سره دېرش کاله د عالي رتبې انجنیر په حیث، د فضـــــایي هډې (International Space Station) د ناسا (NASA) مربوطه او هم د بوینگ کمپنې د ډول ډول موډلونو د نویو الوتکو په انجنیري کارونو کې د مشــر سټرکچر انجنیر په حیث، د عالي رتبې انجنیر (تکنیکل فیلو) په صـفت کار کړی. د بوینگ ســره یوه اختراع هم لري او دا اختراع د امریکا د پتنټ په اداره کې رسمي ثبت شوې ده.

په کال ۲۰۲۲ کې د انجنیري په مسـلک کې درهبري اولاسته راوړلو پر بنســټ د نړۍ د انجنیرانو د سترت مور په لســت (Who's Who Worldwide) کې د انجنیر په توگه پېژندل شوی دی.

زرجان بها د بهاول زوی دی، د وردک سید آباد ولســـوالۍ کې زېږیدلی دی. نوموړي خپل لوړې زده کړې د کابل پوهنتون په انجینري پوهنځي کې بشــپړه کړې دي، همدارنگه د ماسترۍ سند له واشنگټن پوهنتون او دوکتورا سند له نارت کرلینا پوهنتون څخه ترلاسه کړي دي .

ښاغلی بها د کابل پوهنتون د انجینري استاد، د زراعت او سیول دیپارتمنت مشــر، د یاد پوهنځي رییس، د کرنې په وزارت کې د احصـــــایي اووترنري کورسونو استاد، د یاد پوهنځي په CECSAR کې مشــاور، په پورډو پوهنتون کې د مېلمه پروفیســـور په توگه، د پورډو انټرنشــنل پروگرام کې د Resident Program Coordinator په توگه دندې ترسره کړي دي.

Funded by
Kinderhilfe-Afghanistan

Not for Sale

ISBN 978-9936-622-69-2

بسم الله الرحمن الرحيم

اقرأ باسم ربك الذي خلق

د موادو میخانیک

دوهم ټوک

لومړی چاپ

حفیظ الله وردک او زرجان بها

د کتاب نوم	د موادو میخانیک (دوهم ټوک)
ژباړونکي	حفیظ الله وردک او زرجان بها
خپرندوی	شیخ زاید پوهنتون،خوست، انجنیري پوهنځی
وېب پاڼه	www.szu.edu.af
د چاپ کال	۱۴۰۲، لومړی چاپ
چاپ شمېر	۱۰۰۰
مسلسل نمبر	۳۸۸
ډاونلوډ	www.ecampus-afghanistan.org

دا کتاب د افغان ماشومانو لپاره د جرمني کمېټې، په جرمني کې د Eroes کورنۍ یوې خیریه ټولنې لخوا تمویل شوی دی.
اداري او تخنیکي چارې یې د افغانیک لخوا ترسره شوي دي.

د کتاب د محتوا او لیکنې مسوولیت د کتاب په ژباړن او اړوند پوهنځي پورې اړه لري. مرسته کوونکي او تطبیق کوونکي ټولنې په دې اړه مسوولیت نه لري.

د تدریسي کتابونو د چاپولو لپاره له موږ سره اړیکه ونیسئ:
ډاکتر یحیی وردک، د لوړو زده کړو وزارت، کارته ۴، کابل
موبایل ۰۷۰۶۳۲۰۸۴۴، ۰۷۸۰۲۳۲۳۱۰
ایمېل info@ecampus-afghanistan.org

د چاپ ټول حقوق له مؤلف سره خوندي دي.

ای اس بي ان ۹۷۸-۹۹۳۶-۶۲۲-۶۹-۲

د درسي کتابونو چاپول

قدرمنو استادانو او گرانو محصلینو!

د افغانستان په پوهنتونونو کې د درسي کتابونو کموالی او نشتوالی له لویو ستونزو څخه گڼل کېږي. یو زیات شمېر استادان او محصلین نویو معلوماتو ته لاسرسی نه لري، په زاړه مېتود تدریس کوي او له هغو کتابونو او چپترونو څخه گټه اخلي چې پخواني دي او په بازار کې په ټیټ کیفیت فوتوکاپي کېږي.

موږ د ۲۰۱۰ څخه تر ۲۰۲۳ کال پورې د ننگرهار، خوست، کندهار، هرات، بلخ، البیروني، کابل پوهنتون، د کابل طبي پوهنتون او د کابل پولي تخنیک پوهنتون لپاره ۳۸۹ عنوانه مختلف درسي کتابونه د طب، ساینس، انجنیري، اقتصاد، ژورنالېزم او کرهنې پوهنځیو لپاره چاپ کړي دي.

د یادونې وړ ده، چې نوموړي چاپ شوي کتابونه د هېواد ټولو اړوندو پوهنتونونو او یو زیات شمېر ادارو او موسساتو ته په وړیا توگه وېشل شوي دي. ټول چاپ شوي کتابونه له www.ecampus-afghanistan.org ویب پاڼې څخه ډانلوډ کولی شئ.

دا کړنې په داسې حال کې ترسره کېږي چې د افغانستان د لوړو زده کړو وزارت د (۲۰۱۰-۲۰۱۴) کلونو په ملي ستراتیژیک پلان کې راغلي دي چې:

"د لوړو زده کړو او د ښوونې د ښه کیفیت او زده کوونکو ته د نویو، کره او علمي معلوماتو د برابرولو لپاره اړینه ده، چې په دري او پښتو ژبو د درسي کتابونو د لیکلو فرصت برابر شي، د تعلیمي نصاب د ریفورم لپاره له انگریزي ژبې نه دري او پښتو ژبو ته د کتابونو او درسي موادو ژباړل اړین دي، له دغو امکاناتو پرته د پوهنتونونو محصلین او استادان عصري، نویو، تازه او کره معلوماتو ته لاسرسی نه شي پیدا کولای."

موږ غواړو چې د درسي کتابونو په برابرولو سره د هېواد له پوهنتونونو سره مرسته وکړو او د چپټر او لکچرنوټ دوران ته د پای ټکی کېږدو. د دې لپاره اړینه ده چې د افغانستان د پوهنتونونو لپاره هر کال لږ تر لږه ۱۰۰ عنوانه درسي کتابونه چاپ شي.

له ټولو درنو استادانو څخه هیله کوو، چې په خپلو مسلکي برخو کې نوي کتابونه ولیکي، ویې ژباړي او یا هم خپل پخواني لیکل شوي کتابونه، لکچرنوټونه او چپټرونه ایډېټ او د چاپ لپاره تیار کړي، زموږ په واک کې یې راکړي چې په ښه کیفیت چاپ او وروسته یې د اړوند پوهنځیو، استادانو او محصلینو ته په واک کې ورکړو. همدارنگه د یادو ټکو په اړه خپل وړاندیزونه او نظریات له موږ سره شریک کړي، چې په گډه په دې برخه کې اغېزمن گامونه پورته کړو.

د لیکوالانو او خپروونکو له خوا پوره زیار ایستل شوی، چې د کتابونو محتویات د نړیوالو علمي معیارونو پر اساس برابر شي، خو بیا هم کېدای شي د کتاب په محتوا کې ځینې تېروتنې او ستونزې ولیدل شي، نو له درنو لوستونکو څخه هیله لرو چې خپل نظریات او نیوکې لیکوال او یا موږ ته په لیکلې بڼه راولېږي، چې په راتلونکي چاپ کې اصلاح شي.

د افغان ماشومانو لپاره د جرمني کمېټې او د هغې له مشر ډاکتر ایروس څخه ډېره مننه کوو چې د دغه کتاب د چاپ لگښت یې ورکړی دی. دوی تر دې مهاله د ننگرهار پوهنتون د ۲۵۰ عنوانه طبي او غیر طبي کتابونو د چاپ لگښت پر غاړه اخیستی دی.

د پوهنتونونو رئیسانو، د پوهنځیو رئیسانو او استادانو څخه مننه کوم چې د کتابونو د چاپ لړۍ یې هڅولې او مرسته یې ورسره کړې ده. د دغه کتاب له لیکوال نه ډېر منندوی یم او ستاینه یې کوم، چې د کلونو - کلونو زیار محصول یې په وړیا توگه گرانو محصلینو ته وړاندې کړ.

همدارنگه د خپل دفتر له همکارانو هر یو ښاغلي حکمت الله عزیز، ښاغلي فهیم حبیبي، ښاغلي گل آغا احمدي او ښاغلي هېواد صافي څخه هم مننه کوم، چې د کتابونو د چاپ په برخه کې یې نه ستړې کېدونکې هلې ځلې کړې دي.

ډاکتر یحیی وردک

د لوړو زده‌کړو وزارت، کابل، جون، ۲۰۲۳

د دفتر ټیلیفون: ۰۷۸۰۲۳۲۳۱۰، ۰۷۰۶۳۲۰۸۴۴

ایمیل: info@ecampus-afghanistan.org

د موادو د میخانیک بنیادي معادلې

Fundamental Equations of Mechanics of Materials

Axial Load

Normal Stress

$$\sigma = \frac{N}{A}$$

Displacement

$$\delta = \int_0^L \frac{N(x)dx}{A(x)E}$$

$$\delta = \Sigma \frac{NL}{AE}$$

$$\delta_T = \alpha \, \Delta T L$$

Torsion

Shear stress in circular shaft

$$\tau = \frac{T\rho}{J}$$

where

$$J = \frac{\pi}{2} c^4 \quad \text{solid cross section}$$

$$J = \frac{\pi}{2}(c_o^4 - c_i^4) \quad \text{tubular cross section}$$

Power

$$P = T\omega = 2\pi f T$$

Angle of twist

$$\phi = \int_0^L \frac{T(x)dx}{J(x)G}$$

$$\phi = \Sigma \frac{TL}{JG}$$

Average shear stress in a thin-walled tube

$$\tau_{avg} = \frac{T}{2tA_m}$$

Shear Flow

$$q = \tau_{avg} t = \frac{T}{2A_m}$$

Bending

Normal stress

$$\sigma = \frac{My}{I}$$

Unsymmetric bending

$$\sigma = -\frac{M_z y}{I_z} + \frac{M_y z}{I_y}, \qquad \tan \alpha = \frac{I_z}{I_y} \tan \theta$$

Shear

Average direct shear stress

$$\tau_{avg} = \frac{V}{A}$$

Transverse shear stress

$$\tau = \frac{VQ}{It}$$

Shear flow

$$q = \tau t = \frac{VQ}{I}$$

Stress in Thin-Walled Pressure Vessel

Cylinder

$$\sigma_1 = \frac{pr}{t} \qquad \sigma_2 = \frac{pr}{2t}$$

Sphere

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{pr}{2t}$$

Stress Transformation Equations

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta$$

$$\tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta$$

Principal Stress

$$\tan 2\theta_p = \frac{\tau_{xy}}{(\sigma_x - \sigma_y)/2}$$

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

Maximum in-plane shear stress

$$\tan 2\theta_s = -\frac{(\sigma_x - \sigma_y)/2}{\tau_{xy}}$$

$$\tau_{max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_{avg} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$$

Absolute maximum shear stress

$$\tau_{\substack{abs \\ max}} = \frac{\sigma_{max}}{2} \quad \text{for } \sigma_{max}, \sigma_{min} \text{ same sign}$$

$$\tau_{\substack{abs \\ max}} = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2} \quad \text{for } \sigma_{max}, \sigma_{min} \text{ opposite signs}$$

د هندسي شکلونو د مساحت خاصيتونه

Geometric Properties of Area Elements

Material Property Relations

Poisson's ratio

$$\nu = -\frac{\epsilon_{\text{lat}}}{\epsilon_{\text{long}}}$$

Generalized Hooke's Law

$$\epsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)\right]$$

$$\epsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)\right]$$

$$\epsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)\right]$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy},\ \gamma_{yz} = \frac{1}{G}\tau_{yz},\ \gamma_{zx} = \frac{1}{G}\tau_{zx}$$

where

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Relations Between w, V, M

$$\frac{dV}{dx} = w(x), \quad \frac{dM}{dx} = V$$

Elastic Curve

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}$$

$$EI\frac{d^4v}{dx^4} = w(x)$$

$$EI\frac{d^3v}{dx^3} = V(x)$$

$$EI\frac{d^2v}{dx^2} = M(x)$$

Buckling

Critical axial load

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(KL)^2}$$

Critical stress

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{(KL/r)^2},\ r = \sqrt{I/A}$$

Secant formula

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{A}\left[1 + \frac{ec}{r^2}\sec\left(\frac{L}{2r}\sqrt{\frac{P}{EA}}\right)\right]$$

Energy Methods

Conservation of energy

$$U_e = U_i$$

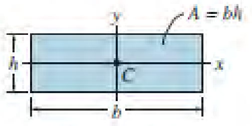
Strain energy

$$U_i = \frac{N^2L}{2AE} \quad \text{constant axial load}$$

$$U_i = \int_0^L \frac{M^2dx}{2EI} \quad \text{bending moment}$$

$$U_i = \int_0^L \frac{f_s V^2dx}{2GA} \quad \text{transverse shear}$$

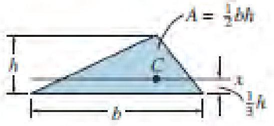
$$U_i = \int_0^L \frac{T^2dx}{2GJ} \quad \text{torsional moment}$$



$I_x = \frac{1}{12}bh^3$

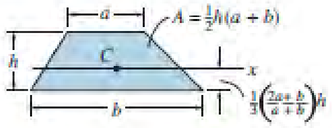
$I_y = \frac{1}{12}hb^3$

Rectangular area

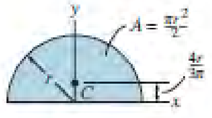


$I_x = \frac{1}{36}bh^3$

Triangular area



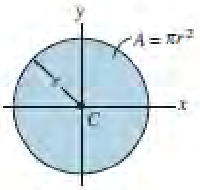
Trapezoidal area



$I_x = \frac{1}{8}\pi r^4$

$I_y = \frac{1}{8}\pi r^4$

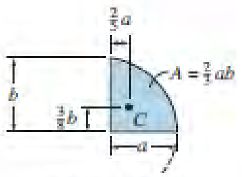
Semicircular area



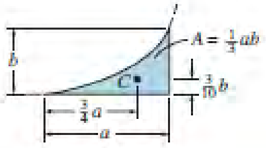
$I_x = \frac{1}{4}\pi r^4$

$I_y = \frac{1}{4}\pi r^4$

Circular area



Semiparabolic area



Exparabolic area

د موادو میخانیک

پښتو ژبې ژباړنه

د دی کتاب (د موادو میخانیک) ژباړنه پښتو ژبې ته، د پیرسن کمپنی په اجازه سره شوي ده. پښتو ژباړنه له انګلیسی نسخې د کال 2017 ، د موادو میخانیک لسمه نسخه رسل هیبلر ، کوم چی د پیرسن (Pearson Education, Inc. Hoboken, NJ 07030) لخوا چاپ شوی بشپړه شوي ده. خپرول يي د نسخې © 2017 حق دی . [د انګلیسی ژبی د چاپ حق د پیرسن کمپنی سره خوندی دي.]

ټول حقونه خوندي دي. د دې کتاب د انګلیسي ژبې چاپ شوی نسخې هیڅ برخه یي په هره بڼه یا په هره وسیله، بیا تولید یا لیږدول شوی، الکترونیکي یا میخانیکي، د فوټوکاپي په ګډون، ثبت کول یا د هر ډول معلوماتو ذخیره کولو سیستم له لارې، بدون له اجازی د Pearson Education, Inc، له خوا مجاز ندي او د چاپ حق © خوندی دي. د پښتو ژبی چاپ کال 2023.

Library of Congress Cataloging-in-Publication Data
Hibbeler, R. C. ,
Mechanics of materials / R.C. Hibbeler.
Tenth edition. | Hoboken, NJ: Pearson, 2015. | Includes index.
LCCN 2015044964 | ISBN 9780134319650
Materials. | Mechanics, Applied. | Strength of materials. | Structural analysis (Engineering) | Materials—Problems, exercises, etc. | Mechanics, Applied—Problems, exercises, etc. | Strength of materials—Problems, exercises, etc. | Structural analysis (Engineering)—Problems, exercises, etc.
LCC TA405.H47 2015 | DDC 620.1/123—dc23
LC record available at http://lccn.loc.gov/2015044964
10 9 8 7 6 5 4 3 2 1
ISBN 10: 0-13-431965-6
ISBN 13: 978-0-13-431965-0

زده کوونکیو ته:

د دې امید سره چې دا کار به د موادو میخانیک کې علاقه رامینځته کړي او د پوهیدو لپاره به د منلو وړ لاربنود چمتو کړي.

سریزه (PREFACE)

دلته هدف دادی چی زده کوونکي په ډیره واضح او مکمله توګه د موادود میخانکیت په تیوری او دهغو په استعمال وپوهیږی. ددی موخی د رسیدولپاره، د ډیروکلونو په اوږدوکی د سلهاووپوهنتون استادانود وړاندیزونواود کتاب لیکونکي زده کوونکیوله تبصروڅخه ګټه اخستل شوی. لسم چاپ د پخوانیو چاپونونه خورا ښه شوی دی او هیله ده چی زدکونکي او استادان به لدی ښه توب نه ګټه واخلی.

ددی چاپ نوی شیان (NEW TO THIS EDITION)

. **د موادو نوی کول.** ډیر عنوانونه پدی کتاب کی له سره لیکل شوی تر څوپوهیدل یی اسانه شی. ځنی انځورونه لوی او ښه شوی دی تر څوداډول بدلیدونه ګټورتمام شی.

. **د نوی ډیزاین طرحه.** د ډیزاین نوری ځانګړتیاوی اضافه شوی تر څو مواد ښه وښودلشی. **ډیری**عنوانونه په یوه او یا دوومخوکی راغلی تر څو د د ډیرو مخونو اړولوته ضرورت نه وی.

. **د لمړنیزو او بنسټیزو سوالونو ښه کول.** دا ډول پوښتنی دمثالونودحل نه وروسته راغلی. زدکونکیو ته د هری برخی د مفهوموعملیکول وربښیی تر څو وکړلیشی د سوالونه دحلولو توان پیدا کړی پخوا لدی چی معیاری سوالونو ته ورسیږی. دا شمیرسوالونه هم کیدی شی د مثالو په ډله کی راشی ځکه چی مکمل حل یی د کتاب په پای کی راغلی. همدارنګه ددی سوالونو حل د زدکونکیو د پاره دا موقع برابره وی چی د ازموینی د پاره یی وګوری او حتی د انجیری مسلکی لایسنس اخستو د پاره د بنسټیزی برخی د ازموینی د پاره کار تری واخستل شی.

. **نوی عکسونه.** د ښی پوهی د پاره ۱۴ نوی او یا ښه شوی د واقعی ژوندعکسونه ددی چاپ د پاره اضافه شوی دی. دا عکسونه ښیی چی په څه ډول ددی مضمون اساساسات د واقعی ژوند په حالاتو کی کارکوی او مواد تر بار لاندی په څه ډول عکسالعمل ښیی.

. **نوی سوالونه.** د دی چاپ د پاره، ۳۰٪ یا ۴۳۰ نوی سوالونه اضافه شوی چی د مختلفو انجینری ساحو د پاره تری ګټه اخستل کیدی شی.

. **د بیا کتنی نوی سوالونه.** نوی دبیاکتنی سوالونه دهر څبرګی په پای کی په ځای شوی، تر څو ښونکی وکړلی شی د زدکونکیو د ازموینی د تیاری لپاره د کورنی کار په توګه ورکا.

محتویات (CONTENTS)

محتویات په ۱۴ فصلونوو کی ترتیب شویی. اول فصل د سټتیک مهم موضوعات بحثکوی چی ورپسی په اساسی توګه نارمل او شیر ستریس تعریفوی، چی نارمل سټریس په هغو اعضاوو کی

چې د محور په اوږدوالی بار ورباندی پلی شوی او اوسط شیر ستریس چې د مستقیم شیر له امله پیښیږی، بحث کوی.

په دوهم فصل کې نارمل او شیر ستریس تعریف شوی، په ۳ فصل کې د موادو ځنی مهم خواص بحث شوی دی. په ځانګړی توګه د محوری بار، تاویدونکی، او کږیدونکی په ۴، ۵ او ۶ فصلونوکی په ترتیب سره معامله شویدی. په ټولو فصلونو کې دواړه، خطی الاستیکی اوپلاستیکی حالت د موادو په نظر کې نیول شوی کله چې ستریس د یوځای شوی بار نه پیداشوی. په ۹ فصل کې د څو اړخیزه ستریسو اړول وړاندی شوی. په همدی ډول ۱۰ فصل د ستړین اړول او د ماتیدو مختلفی تیوری ګانی وړاندی شویی. ۱۱ فصل یو ځل بیا د بیمونواو شافټونو د ډیزاین له لاری د موادو بیا کتنه کوی. په ۱۲ فصل کې مختلفی لاری څیړل شوی چې د بیمونو او شافټونو بیځایه کیدنه (Deflection) معلومه کړی. همدارنګه د دی ډول غړیو ریکشنونه پیداکوی که سټیټیکلی نا معلوم وی. ۱۳ فصل د ستنیی (Column) په بیځایه کیدنه یا بکلینګ (Buckling) باندی بحث کوی، او به ۱۴ فصل کې د امپکټ (Impact) موضوع او د انرژی مختلفی طریقی د بیځایه کیدنی د پاره بحث کوی.

هغه حصی ددی کتاب چې پرمختللی موضوعات څیری، د ستوری علامه وربادی لګیدلی، چې کې وختوی په مضمون کې داخلیدی شی. همدارنګه دا مواد کیدی شی د ریفرینس مناسب مواد د لمړنیو اساساتو د پاره حساب شی کله چې د نورو مضمونو او یا پروژو د پاره تری ګار واخستل شی.

ددی مضمون دویلو دپاره بله لاره: ځنی استادان ممکن اول دستریس او ستړین اړول لمړی بحثکا پخوا لدی چې د محوری بار، تاویدل، کږیدل او شیر استعمال وڅیری. یوه لاره ممکن دا وی چې ستریس او د هغو اړول په ۱ او ۹ فصلو کې اوبیا د ستړین اړول چې په ۲ فصل او په اوله برخه د ۱۰ فصل کی راغلی. ددی فصلونو بحث او مثالونه داسی ترتیب شوی چې دا کار کیدونکی دی. د سوالونو سټ داسی ویشل شوی چې بیله دی چې مخکنی بوهه ولری دا کار کیدی شی. د ۳ نه تر ۸ څپر کیو بیا داسی ویل کیږی چې نارمل دوام ته کومه ستونزه نه پیښیږی.

مهم عناصر (HALLMARK ELEMENTS)

ترتیب اوتګلاره. په هر فصل کې موضوعګانی په روښانه برخو ویشل شوی چې مواد بحث شوی، تشر یحی سوالونه، او په پای کې د کورنی کار سوالونه راغلی. عنوانونه په هره برخه کې په ځانته ګروپو ویشل شوی. ددی کار موخه داده چې نوی تعریفونه او موضوعګانی وښودل شی، اوکتاب د ماخذ او بیا کتنی د پاره آسانتیا راولی.

د فصلونو مواد. هر فصل په پوره مخکی چې عمومی تطبیقونه د فصل تشریحکوی شروع کیږی. دفصل موخی وړاندی شویی تر څوپه عمومی توګه د فصل مواد وښودل شی.

د تحلیل کړنلارې. پس د ډیروبرخو د کتاب نه دا روښانه شويي، چې دا تګلاره د زدکونکيو دپاره ښه لاره ده چې نظريي به عملي توګه استعمال کړي. تشريح شوي سوالونه همدا تګلاره تعقيبوي تر څو نظريي په شميرنې سوالونو پلې شي. داښايي چې وپوهيدل شي کله چې زدکونکي وپوهيږي او په ځان ډاډه شي، کړې شي دخپله ځانه د سوالونو د حل لارې د ځان د پاره انتخاب کړي.

انځورونه. ډير انځورونه په کتاب کې راغلي تر څو زدکونکي وپوهيږي چې د موادو دميخانکيت اساسات په څه ډول د واقعي ژوند اړوند ستونزې حلکوي.

مهم ټکي. دا برخه دبياکتنې اولنډيزد مهمو موضوعګانو په هره برخه کې په ګوته کوي تر څو زدکونکي وکړې شي له نظريو څخه دسوالونو د حل د پاره ګټه واخلي.

مثالي سوالونه. ټول مثالي سوالونه په ډېره واضحه توګه ښودل شوي چې په اساني وپوهيدلشي.

د کورنی کار سوالونه. پدې کتاب کې برسيره پر لومړنې، اساسي، او مفهومي سوالونو، يو شمير عددي معياري سوالونه شته جې دانجينري واقعي حالتوته ورته دي. هيله ده چې زدکونکي ددې واقعيت نه ګټه پورته کړي او دا توان پيداکا چې د موضوع د شرحې او فزيکی ما ډل د پاره د اساساتو د استعمال نه ګټه واخلي. په کتاب کې کوشش شوی چې د بين المللي واحدو(SI) او فټ، پونډ، او ثانيي (FPS) واحدو سيستمو څخه د انډول په توګه کار واخستل شي. همدارنګه په هره برخه سوالو کې کوشش شوي چې د سختوالي اندازه يې په تدريجي ډول اضافه شي. د سوالو ځوابونه بيله هر څلورم سوال نه د کتاب په اخر کې راغلي. ددی د پاره چې زدکونکي وپوهيږي د هغو سوالو د پاره چې ځواب يې په کتاب کې نشته د سوال سره د ستورې (*) علامه ايښودل شويي. ځوابونه تر دريو مهمو شمير راغلي که څه هم د موادو د خواصو مهمه شميره به تر دريو کمه وي. که څه هم دا به ښه کار نه وي خو لدې کبله چې ټول وکړلی شي چې زدکونکي په دوامداره توګه وکړيشي خپل ځوابونه مقايسه کړي .

ضميمې (Appendices). ضميمې د دې کتاب د بيا کتنې دپاره او يو لړ د کار وړ جدولونه لري. د A ضميمه د ساحې د مرکز او د انرشيا د مومنټ په هکله معلومات لري. د B او C ضميمې د ساختماني څيرو جدولونه د يو شمير بيمو او شافټو انحنا او ميلان په ګوته کوي.

د دروستی کتل. لسم چاپ د کتاب د جدی دريځله درستی کتلوڅخه تېر شوی. برسيره د کتاب د ليکونکی چې ټول مخونه او ارت يې کتلي، دا لاندې کسانو هم کتلي دي:

Scott Hendrick, Virginia Polytechnic University

Karim Nohra, University of Florida

Kurt Norlin, Bittner Development Group

Kai Beng Yap, Engineering Consultant

یادونه او مننه (ACKNOWLEDGEMENTS)

د کلونو په اوږدوکی دا کتاب د ډیرو دوستانو چی درسونه ورکوی د پاملرنی وړ او پر ښه توب کی یی برخه اخستیی. د دوی تشویق او د ښه توب دپاره انتقادونو زه مننډوی کړی یم او هیله ده چی دا بینامه مننډویی قبوله کړی. چا چی دا کتاب کتلی زمامننه ورته وړاندی ده.

S. Apple, Arkansas Tech University

A. Bazar, University of California, Fullerton

M. Hughes, Auburn University

R. Jackson, Auburn University

E. Tazel, Alfred State College

H. Zhao, Clemson University

یو شمیر کسان دی چی دلته د ځانګړتیا مننه تری کوم. زما ډیر پخوانی ملګری او همکار، Kai Beng Yap، چی زما سره یی د سوالونو په حلولو کی خورا مرسته کړی. خاصه مننه په همدی هکله Kurt Norlin ته وړاندی کیږی. د Rose Kernan څخه مننه کوم چی دډیرو کلو راهیسی زما دچاپیدو ایډیټر دی، او زما له میرمنی چی دا کتاب یی تایپ کړی چی د چاپ دپاره تیار شی.

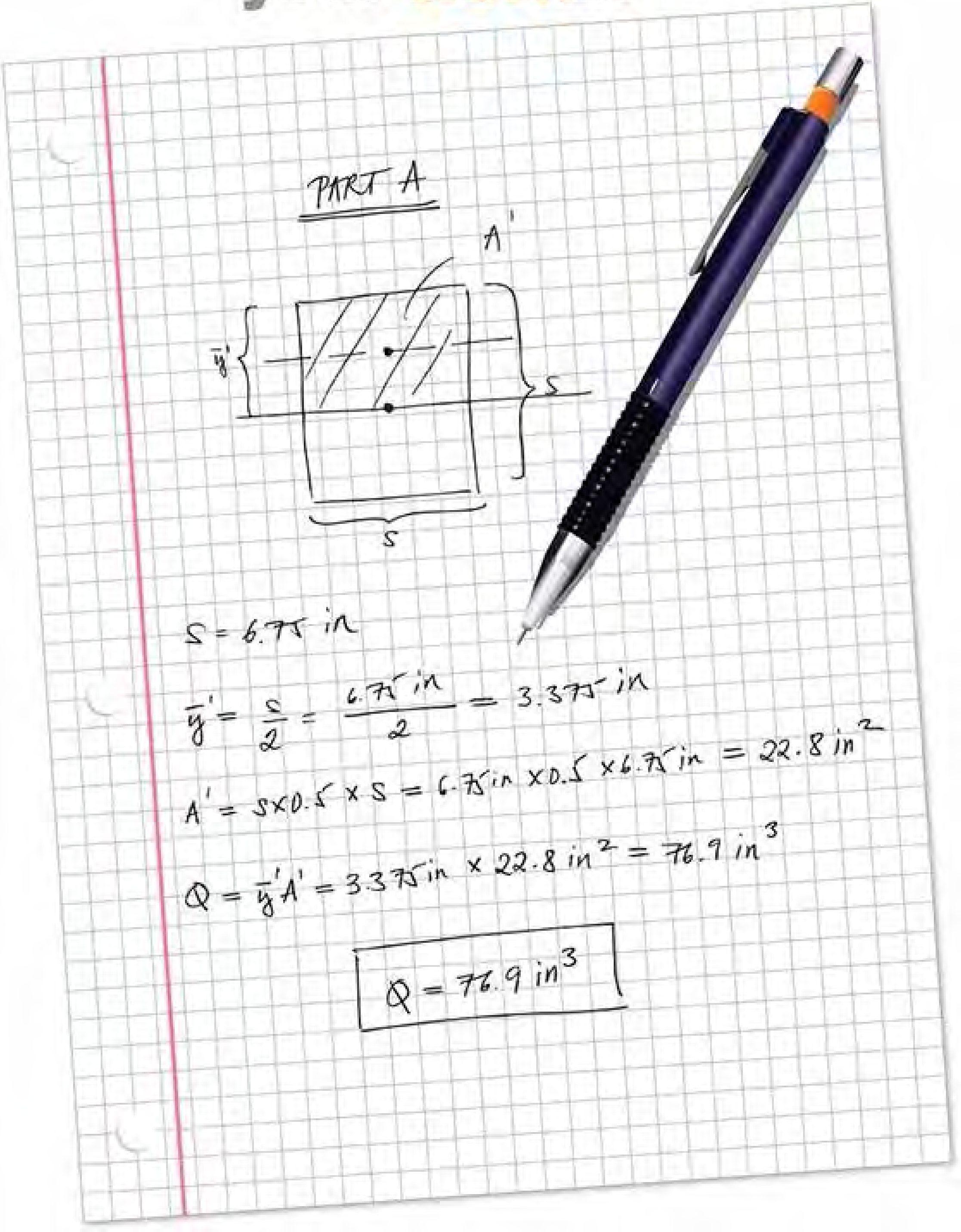
زه غواړم چی د هغوټولو زدکونکیو څخه مننه وکړم چی پخوانی چاپ یی لوستلی او د ښه توب وړاندیزونه یی کړی او په خاصه توګه هغه پخوانی زدکونکي چی اوس درس ورکوی او له هغوچی ماته یی بریښنا لیکونه راستولی او په خاصه توګه لهG. H. Nazari څخه.

زه به ډیر خوشحاله شم که تاسو ددی چاب د بهبود لپاره خپلی نیوکی او تبصری را سره شریکی کړی.

Russell Charles Hibbeler

hibbeler@bellsouth.net

your work...


PART A
A'
ȳ'
S
S
S = 6.75 in
ȳ' = S/2 = 6.75 in / 2 = 3.375 in
A' = S×0.5×S = 6.75in ×0.5 ×6.75in = 22.8 in^2
Q = ȳ'A' = 3.375in × 22.8 in^2 = 76.9 in^3
Q = 76.9 in^3

ددی کتاب پښتو ترجمه

ددی کتاب د ژباړی لپاره موږ (حفیظ ا لله وردک او زرجان بها) دوه فکتورنه په نظر کی نیولي:
(۱) داچې په دی رشته کی تحول په کراری سره دی، او ډیر وخت نیسی چې کوم بنیادی تحول پکی راشي. (۲) داچې دا کتاب په امریکاکی ښه شهرت لری او په ډیرو معتبرو پوهنتونونو کی اوس تدریس کیږی. د موادو میخانکیت داسی یوه موضوع ده چې زموږ اول شرط یی پوره کړی. ممکن هغه ښه کتابونه چې پنځوس کاله مخ کی پدی ساحه کی لیکل شوی وی اوس هم د ګټی وړ وی. همدا رنګه دا کتاب چې موږ خو ښکړی په ډیرد پوهنتونو کی تدریس کیږی چې زموږ دوهم شرط پوره کوی. ددی کتاب پوره معلومات په انګلیسی ژبه په لاندی ډول دی:

Mechanics of Materials

By Hibbeler , 10th edition 2017

Publisher is Pearson

دا کتاب ر.س. هیبلر لیکلی چې د پیرسن کمپنی چاپ کړی او لسم چاپ یی په ۲۰۱۷ کال کی راوتلي.

لمړی موږباید د نشرونکی کمپنی نه د ترجمی اجازه واخیستله چې ډیره اوږده مرحله وه او نیږدی دری کاله وخت یی ونیو. که څه هم موږ یو اندازه پیسی هم ورکړی چې د ترجمی اجازه واخلو خو دا زموږ د پاره کوم دیادولو وړ خبره نه وه. موږ دواړه ژباړونکی د پیرسن کمپنی د صلایت لرونکیو څخه، په خاصه توګه دښاغلی رندینا پابلو (Rendina, Pablo) نه ، د زړه له کومی مننه کوو چې موږ ته یي اجازه راکړه (9780134319650_Mechanics of Materials) چې ددوی یو مشهور کتاب د افغانستان په ملی ژبه پښتو تر جمه کړو. هیله ده چې په افغانستان کی اوسنی او راتلونکی انجینران تری پوره ګټه پورته کړی.

په امریکا کی داکتاب د سیول انجینری او میخانیک انجینری زده کونکیو دپاره دی، هیله ده چې په افغانستان کی هم پدی دوو انجینری رشتو کی تدریس شی. پدی کتاب کی په کافی اندازه مواد شته چې د دوو سمترو د پاره کار ورکا. دا ممکن په استاد او رشته پوری اړه ولری چې کوم څپرکی په یوه سمستر کی وړاندی شی.

موږ کوشش کړی چې به ډیرو ځایو کی په قوسو کی د انګلیسی لغتونه هم استعمال کړو چې زموږ د ترجمی پوره معنا لوستونکی وپوهیږی. موږ کوشش ندی کړی چې پدی برخه کی نور اثار چې په ښتو لیکل شوی دی ولولو او یا دهغو اصطلاحات استعمال کړو. کوشش مو کړی چې په ډیره رواجی ژبه داکتاب ولیکو. هیله ده چې د ټولو افغانانو د پاره اسانه وی چې د موضوع مطلب تری تر لاسه کړی.

منن لیک (حفیظ الله وردک)

ډېر خوشحاله یم ، الحمد الله ، چې الله (ج) دا توانايي راکړه چې د موادو میخانیک کتاب (Mechanics of Materials by R.C. Hibbeler) ژباړنه په ساده او روانه پشتو ژبه، د خپل فامیل په مرسته، د یو شمیر محترمو او معززو استادانو او ملګرو په لاربنودنه او هڅونو، د ګران افغانستان د انجیرنی محصلینو او د افغانستان انجیرانو د زدکړي او ریفرینس لپاره تکمیل کړم . ددی کتاب په ژباړنه کی زما ګران او محترم استاد د کابل پوهنتون د انجیرنی پوهنځی پخوانی ریئس او د پوړدو یونیورستی پخواني پروفیسور ډاکتر زرجان بها چی په انډیانا کی ژوند کوي زما سره ملګری وه او اود هغه په مرسته موددی کتاب ژباړنه تکمیل کړه.

دلته غواړم چی له له ډیر قدرمن د کابل پوهنتون دانجینري پوهنځی پخوانی زما استاد او د ژوند ملګری محترم پروفیسورډاکتر سورګل وردک، چې اوس په کلیفورنیا یونیورستی کی پروفیسور دی او هلته ژوند کړي د هغه له ارزښت ډکو لاربنونو، د یو څو فصلونو بیا کتنه، هڅونو او نظریاتواو ملا تړ په ډیر قدر یاده ونه او مننه کړم.

له خپلی میرمنی ثریاجاني چی په ډیره حوصله مندی په کور کی يي هر ډول آسنتیاووی ماته برابري کړي او ملاتړيي کړي په ډیر قدریادونه او مننه کوم. زما دوه زامنو د طبی پوهنتون پروفیسور ډاکتر ذبیح الله وردک او میرمن يي ډاکتر انجیلا فاروقي ، او بل زوی ډاکتر نجیب الله وردک او میرمن يي لانه میره کي ، او دوه لورګانو ډاکتر لمیا وردک او خاوند يي پروفیسور ډاکتر ښالان ، او بله لور می انجینره وژمه وردک او اولادونه يي ، ددوی له بیحده مرستو ، هڅونو، او دعاګانو په قدر یادونه او مننه کوم. زما دکور د دفتر وسایل په پشتو او انګلیسی ژبوسمبالول او زما د کمپیوتری ستونزو له مینځه وړل د څو کلونورا پدی خوا کله چی ما خپل رسمی کار له بوینګ کمپنی سره وروسته له دیرش کلونو بس کړي، ماته د قدر او منني وړ دی او له دوی ټولو د محبت ډکه مننه کوم.

په آخر کی غواړم چی د محترم ډاکتر صاحب یحیی وردک او د هغوی له ټیم څخه چی ددی کتاب په چاپ کی يي مرسته کړي ډیره مننه کوم. اوهم د ګران افغانستان د خوست ولایت د شیخ زاید پوهنتون محترم ریس حسین ګل آریوبي، د انجینري پوهنځي له محترم رئیس ریدی ګل همدرد، او د سیول انجیری دیپارتمنت مشر نصرت الله نصرت څخه ډیره مننه کوم، چی دا کتاب یي په کوریکیلم د انجیری پوهنځي کی شامل کړي. او هم له پیرسن (Pearson) کمپني ډیر مننه کوم چی د دی با ارزښته کتاب د ژباړني پښتو ژبی ته يي اجازه راکړه.

له ټولو لوستونکیو زما هیله دا ده چی خپل نظریات او انتقادات زموږ سره شریک کړی تر څو به بل چاپ کی هغه په نظر کی ونیسو. او که چیری کوم اشتباحات شوی له ټولو بښنه غواړو.

په درناوي حفیظالله وردک

منن لیک (زرجان بها)

تر هر څه د مخه زه د کایناتو د جوړوونکی **الله سبحان الله وتعالله** دی بی ساریه لورینونه چی په
ماباندی یی کړی منند وی یم.

زما په ژوند کی زما پلار ډیر مثبت رول لوبولی چی په کوچنوالی کی یی ماته واک راکا چی کړی
شم ددینی زده کړو د پاره د طا لبی لار ونیسم او یا د عمومی زده کړو د باره ښونخی ته ولاړ شم
چی ما ښونځی خوښکا او د تکیی په ښونځی کی داخل شوم. او پدی کار کی زما تره چی ملک وا
هم رول در لود چی ارزو یی وه چی زه په ښونځی کی لیک او لوست زده کړم تر څو وکړی شم
د خپل پلار په څیر د وولس د پاره ګتور تمام شم. زما پلار زموږ د تولی که لی (قلعی) ښونکی وا
چی نجونی او هلکان به هر سهار زمو کورته د درس ویلو د پاره راتلل. لږ تر لږه به تولو د قران
مجید لوستل زده کړل. د سبق ویلو د پاره یو شمیرنوری نجونی او ښځی د نورو نیږدی که لونه
هم را غلی دی. دقران مجید له لوستلو نه پس که چا غوښتل نور درس ووایی په هلکانو به یی
پنجکتاب چی په دری ژبه وا او په نجونو به یی رشید بیان چی په پښتو ژبه وا شروع کړل او دا
دده دپاره اخری مرحله د تدریس وه.

په دوهمه مرحله کی زما میرمنی فاطمی (ګول) زما به ژوند کی مثبت رول درلود چی په
دوامداره توګه یی په ډیره حوصله ربړونه پر ځان قبول کړی وو تر څو زه وکړی شم د ارزو سره
سم خپلو زده کړوته دوام ورکړم. همدارنګه نوموړیی د دریسو اولادو په روزنه کی د کورنی د
نورو غړیو په مرسته پوره ونده اخستی وه چی ډیر وخت ځان ملامت بولم چی زه د افغانستان په
جوړولو کی دومره مصروف وم چی دوی ته می ډیر کم وخت درلود او ببننه تری غواړم.

زه ډیر طالع من یم چی اولادونو می عبدالغفورچی د ژوند شریکه یی ملالیٔ ، عبد الرءوف چی د
ژوند شریکه یی هیلیٔ . او وسیمه چی د ژوند شر یک یی عبدالحکیم دی، نه یوائی په کوچنوالی
کی ماته هیڅ تکلیف ندی راکړی ، او اوس چی لوی شوی او دژوند د شریکانو او اولادوسره په
خپلو کورونو کی ژوند کوی زما او د ګول بی نهایته احترام او هر اړخیزه پام لرنه لری.

یو ډیر نیږدی ملګری می ډاکتر محمد رسول وردګ چی موږ دواړه په یوه وخت کی د کابل په
پوهنتون کی وو او پس له پوهنتونه دواړه په پوهنتون کی د استادانو په توګه پاتی شوو. نوموړی
څو کاله پخوا په سویس کی چی ډاکتر وا وفات شو. نوموړی دما دپاره د صداقت او دیانت نمونه
وا او زما په ژوند کی چی وکړی شم پر خپلو کړنلارو کی بریالی شم مثبته اغیزه درلوده.

ددی کتاب به لیکلو کی زما خواخوږی ملګری چی د کابل د انجینری پوهنځی په استادانو کی یی
خا ص او ډ یر پیاوړی ځای در لود، حفیظ الله وردګ، ددی کتاب په لیکلو کی بی ساریه
زیاریستلی او زه تری مننه کوم چی ماته یی ددی کتاب په لیکلو کی برخه راکړه. هیله لرو چی په
راتلونکیی وخت کی موږ په ګډه سره وکړی شو د افغانستان د پاره د نوروعلمی پروژو په
تکمیلولو کی بریالی شو.

لیک لړ

1 (Stress) ستریس **1**

د فصل موخې (Chapter Objective) 2

1.1 پیژندنه (Introduction) 2

1.2 د ارتجاعی جسمونو تعادل (Equilibrium of a Deformable Body) 3

1.3 ستریس (Stress) 32

1.4 نارمل اوسط ستریس په یوه محوری بارشویی میله کی (Average Normal Stress in an Axially Loaded Bar) 35

1.5 اوسط مماسي (غوڅوونکی) ستریس (Average Shear Stress) 47

1.6 د منلو وړ د ستریس ډیزاین (Allowable Stress Design) 73

1.7 د محدوده حالت ډیزاین (Limit State Design) 76

2 (Strain) سترین **106**

د فصل موخې (Chapter Objective) 107

2.1 د شکل بدلون (Deformation) 107

2.2 سترین (Strain) 108

3 د موادو میخانیکي خاصیتونه (Mechanical Properties of Material) 133
د فصل موخي (Chapter Objective) 134
3.1 کشش (کشکولو) او د کمپرشن (ټیلوهلو) آزمویني (Tension and Compression Test) 134
3.2 د سترس- سترین ډایگرام (The Stress-Strain Diagram) 136
3.3 د سترس- سترین چلند دغوڅیدونکیو او ماتیدونکیو مواد و (Stress -Strain Behavior of Ductile and Brittle Material) 143
3.4 سترین انرژي (Strain Energy) 150
3.5 د پویسان (پویزان) تناسب (Poisson's Ratio) 169
3.6 د شییر سترس-سترین ډایگرام (The Shear Stress Strain Diagram) 173
3.7 د موادو خرابیدل د کریپ او ستړ یا له امله (Failure of Materials Due to Creep and Fatigue) 178

4 محورې بار (Axial Load) 196

د فصل موخې (Chapter Objective) 196

4.1 د سنت وينانټ اصول(Saint-Venant's Principle) 197

4.2 د یوه محوری بار شوی غړی د شکل ارتجاعی بدلون: Elastic (Deformation of) An Axially Loaded Member 199

4.3 د سوپر پوزيشن اصول (Principle of Superposition) 224

4.4 ستاتیکی مجهول محوري بار شوی غړي (Statically Indeterminate Axially Loaded Members) 225

4.5 د محوری بار شويوغړيو لپاره د قوو د تحليل طريقه (The Force Method of Analysis for Axially Loaded Members) 237

4.6 حرارتي سترس (Thermal Stress) 254

4.7 د ستريس غلظت (Stress Concentrations) 267

4.8* محوری غير ايلستيکی بی ځايه کيدل (Inelastic Axial Deformation) 271

4.9* پاتي شوي سترس (Residual Stress) 274

5 تاویدنه (Torsion) 299

د فصل موخې (Chapter Objective) 300

5.1 د تاویدو له امله د دایروی غوڅی شافت د شکل تغیر (Torsional Deformation of a Circular Shaft) 301

5.2 د تاویدنې فورمول (The Torsion Formula) 303

5.3 د توانايي لیږدول (Power Transmission) 315

5.4 د تاویدنې زاویه (Angle of Twist) 337

5.5 په ستاتیکلی نا معلوم غړیو د تورک بار (Statically Indeterminate Torque-Loaded Members) 363

5.6* جامد (ډک) شافتونه چې غوڅه برخه یی گرده نده (Solid Non-Circular Shafts) 375

5.7* د نازک ضخامت شافتونه کوم چې تړلشوی غوڅی برخی لری (Thin-Walled Tubes Having Closed Cross Sections) 379

5.8 د ستریس غلظت (Stress Concentration) 396

5.9* غیر ارتجاعی تورژن (Inelastic Torsion) 401

5.10* پاتیکیدونکی ستریس (Residual Stress) 405

6 کږونکی (انحنايي) مؤمنت (Bending) 432

د فصل موخې (Chapter Objective) 432

6.1 شيير او مؤمنت ډايګرامونه(Shear and Moment Diagrams) 433

6.2 د شيير او مؤمنت ډايګرامونو جوړه ول په ګرافيکی طريقه (Graphical Method for Constructing Shear and Moment Diagrams) 443

6.3 ديوه مستقيم غړی د کږيدو بيځايه کيدنه (Bending Deformation of a Straight Member) 477

6.4 د کږيدو فورمول (The Flexure Formula) 482

6.5 نامتناظر کوږوالي(Unsymmetric Bending) 514

6.6* مرکب بيمونه (Composite Beams) 532

6.7* د وسپنيز کانکريت بيمونه (Reinforced Concrete Beams) 536

6.8* کاږه (منحنی) بيمونه (Curved Beams) 544

6.9 د ستريس غلظت (Stress Concentration) 555

6.10 غير ايلاستيکی کوږيدنه (Inelastic Bending) 574

7 عرضي شییر (Transverse Shear) 613

د فصل موخې (Chapter Objective) 614

7.1 په مستقیموغړیو کی شییر (Shear in Straight Members) 615

7.2 د شییر فورمل(Shear Formula) 617

7.3 د شییر بهیر په جوړ شویو (مرکب) غړیو کی (Shear Flow in Built-Up Members) 646

7.4 شییر بهیر د نازک دیوال په غړیو کی (Shear Flow in Thin-Walled Members) 665

*7.5 شییر مرکز د نري دیوال خلاصو غړیو کی (Shear Center for open Thin-Walled Members) 674

8 یوځاي شوی بارونه (Combined Loadings) 695

د فصل موخې (Chapter Objectives) 695

8.1 د نری دیوال د فشار مخزنونه (Thin-Walled Pressure Vessels) 696

8.2 ستریس حالت د یوځای شویو بارونو له امله (State of Stress Caused by Combined Loading) 707

856	(Stress Transformation) د ستریس بدلون	**9**
857	(Chapter Objective) د فصل موخې	
858	(Plane Stress Transformation) د سطحی ستریس بدلون	9.1
865	(General Equation of Plane Stress Transformation) د سطحی ستریس د بدلون عمومی معادله	9.2
872	(Principal Stresses and Maximum In-Plane Shear Stress) مهم (اصلی) ستریسونه او په - داخلی سطحه کی اعظمی شییر ستریس	9.3
906	(Mohr's Circle- Plane Stress)د موهردایره – سطحی ستریس	9.4
930	(Absolute Maximum Shear Stress) مطلق اعظمی شییر ستریس	9.5

947	(Strain Transformation) د سترین بدلون	**10**
948	(Chapter Objective) د فصل موخې	
949	(Plane Strain) سطحی سترین	**10.1**
949	(General Equations of Plane-Strain Transformation) د سطحی سترین بدلون عمومی معادلات	**10.2**
964	(Mohr's Circle- Plane Strain) موهر دایره- سطحی-سترین	**10.3***
979	(Absolute Maximum Shear Strain)مطلق اعظمی شییر سترین	**10.4***
982	(Strain Rosettes) د روزیتونو سترین	**10.5**
991	(Material Property Relationships)د موادو د خاصیتونو اړیکي	**10.6***
1011	(Theories of Failure) د ړنګیدو تیورۍ	**10.7***

11 د بیمونو او شافتونو ډیزاین (Design of Beams and Shafts) 1038

د فصل موخې (Chapter Objectives) 1039

11.1 د بیم ډیزاین اساسات (Basis for Beam Design) 1040

11.2 د پریزماتیک بیم ډیزاین (Prismatic Beam Design) 1042

11.3* په بشپړ ډول ستریس شوي بیمونه (Fully Stressed Beams) 1067

11.4* د شافت ډیزاین (Shaft Design) 1073

12 دبیمونو او شافتونو بیځایه کیدل (Deflection of Beams and Shafts) 1091

د فصل موخې (Chapter Objective) 1092

12.1 ایلستیک منحنی (The Elastic Curve) 1093

12.2 میلان او بیځایه کیدنه په انتیګریشن سره(Slope and Displacement by Integration) 1097

12.3* غوځ توابع (Discontinuity Functions) 1126

12.4* میلان او بیځایه کیدنه د مؤمنت-مساحت په طریقه (Slope and Displacement by Moment- Area Method 1144

12.5 د سوپر پوزیشن طریقه (Method of Superposition) 1170

12.6 ستاتیکلی نامعلوم بیمونه او شافتونه(Statically Indeterminate Beams and Shafts) 1182

12.7 ستاتیکلی نامعلوم بیمونه او شافتونه-د انتیګریشن په طریقه (Statically Indeterminate Beams and Shafts--Method of Integration) 1183

12.8* ستاتیکلی نامعلوم بیمونه او شافتونه-د مؤمنت-مساحت په طریقه (Statically Indeterminate Beams and Shafts-Moment– Area Method) 1191

12.9 ستاتیکلی نامعلوم بیمونه او شافتونه-د سوپرپوزیشن په طریقه (Statically Indeterminate Beams and Shafts-Superposition Method) 1200

13 دپایو (ستنیو) کړوپیدل (Buckling of Columns)
1223

د فصل موخې (Chapter Objective) 1224

13.1 بحرانی بار (Critical Load) 1125

13.2 خیالی کالم د پین اتکاوو سره (Ideal Column with Pin Supports) 1127

13.3 کالمونه چې مختلفی اتکاوی لری (Columns Having Various Types of Supports) 1237

13.4* د سیکنټ فورمول (The Secant Formula) 1264

13.5* غیر ایلستیکی کړوپیدل (Inelastic Buckling) 1273

13.6* د کالم ډیزاین د متمرکز بارلپاره (Design of Columns for Concentric Loading) 1288

13.7* کالم ډیزاین د نا متمرکز بارونو لپاره (Design of Columns for Eccentric Loading) 1307

د فصل موخې (Chapter Objective) 1330

14.1 بهرنی کار او سترین انرژي (External Work and Strain Energy) 1331

14.2 د مختلف ډول بارونو ايلستيکی سټرين انرژي (Elastic Strain Energy for Various Types of Loading) 1337

14.3 د انرژي زيرمه يا ساتنه (Conservation of Energy) 1360

14.4 د ټکر بار (Impact Loading) 1374

14.5* د مجازی کار اصول (Principal of Virtual Work) 1394

14.6* د مجازی قواوو پلی کيدل په ټرس (Method of Virtual Forces Applied to Trusses) 1399

14.7* د مجازی قوا وود طريقی تطبيق په بيمونو (Method of Virtual Forces Applied to Beams) 1414

14.8* د کاستګليانو قضيه (Castigliano's Theorem) 1430

14.9* د کاستګليانو قضي پلي کول په ټرس (Castigliano's Theorem's Applied to Trusses) 1432

14.10* د کاستګليانو قضي پلی کول په بيم (Castigliano's Theorem's Applied to Beams) 1438

ضميمي (Appendix)

A د یوی ساحی هندسي خاصیتونه (Geometric Properties of an Area) 1552

B د ساختماني شکلونو هندسی خاصیتونه (Geometric Properties of Structural Shapes) 1477

C د بیمونو میلان او بیځایه کیدنه (Slopes and Deflections of Beams) 1485

د ابتدايي سوالونو حل او ځوابونه د لومړنی پوښتني (Solutions and Answers for Preliminary Problems) 1487

بنسټیز سوالونوجزوی حلونه او ځوابونه (Fundamental Problems Partial Solutions and Answers) 1498

د انتخاب شویو سوالونو ځوابونه (Selected Answers) 1521

نهم فصل

(CHAPTER 9)

(© R.G. Henry/Fotolia)

ددی توربین پری د ستریس له پیچلی ډول سره مخا مخ دي. د ډیزاین لپاره دا اړینه ده چې معلومه کړي چې چیرته او په کوم لور اعظمی ستریس واقع کیږي.

د سټریس بدلون

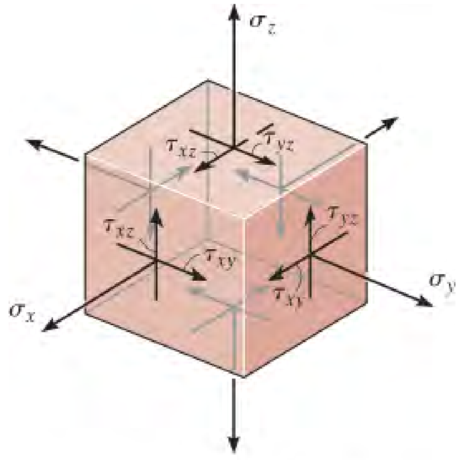
(STRESS TRANSFORMATION)

د فصل موخې CHAPTER OBJECTIVES

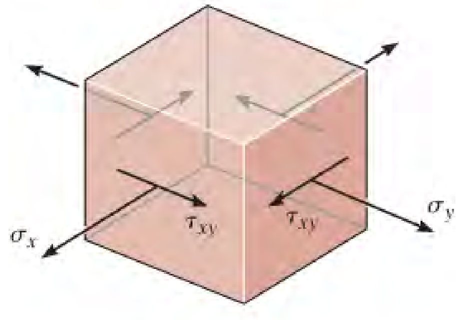
پدې فصل کې به موږ وښيو چې څنګه د سټريس اجزاوی چی په یوه نقطه د یو عنصر کی عمل کړی ، هغوی په یو اړونده عنصر باندې چې یو مختلف سمت ولري بدل کړو. یوځل چې د دې عمل اجرا کولو لپاره طريقه رامينځته شي ، موږ به بيا توان ولرو چی څنګه اعظمي نارمل او اعظمي شيير سټريس په یوه نقطه کی پيدا او هم د هغه عناصرو لورئ وموموو په کوم کې چی دوی عمل کوي

9.1 د سطحی سټریس بدلون (PLANE STRESS TRANSFORMATION)

په 1.3 برخه کی وښودل شول چی د سټریس عمومي حالت د نارمل او شییر سټریس په شپږو اجزاوو، څنګه چی په انځور 9-1a کی ښودل شوي مشخص کیږي. په هرصورت، د سټریس د دی حالت سره ډیری وختونه په انجینری پرکتس کی نه مخا مخ کیږي. پرځای یې، ډیری بارونه په عین سطحه (coplanar) کی واقع کیږي ، او له همدی امله سټریس چی جوړیږي هغه په‌یوه سطحه کی تحلیل کیدی شي. کله چی دا حالت وی، نو ویل کیږي چې مواد د ***پلین سټریس*** (plane stress) سره مخامخ شوي.



General state of stress
(a)

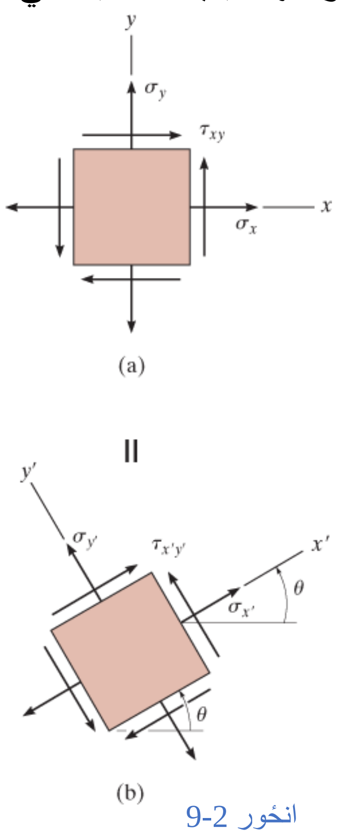


Plane stress
(b)

انځور 9-1

د سطحی سټريس (plane stress) عمومي حالت په يوه نقطه کې، څرنګه چې په شکل 9-1b کې ښودل شوی دی، د سټريس حالت په ترکيب د دوو نارمل سټريس اجزاوو s_x, s_y اويو د شيير سټريس t_{xy} جز لخوا ښودل کيږي ، او دا يوازې په څلورو مخونو د عنصر عمل کوي. د آسانتيا لپاره، پدې متن کې به موږ دا حالت به د x-y په سطحه وګورو، لکه څنګه چې په انځور 9-2a کې ښودل شوي. په هرصورت، يوه شئ چې که دا د سټريس حالت په يو عنصر کې رامينځته شي چې *مختلف جهت* په زاويه q ولري، لکه څنګه چې په انځور 9-2b کې ښودل شوي ، نو دا به د درېو مختلف سټريسو اجزاو تابع وي، $s_{x`}, s_{y`}, t_{xy`}$ چې نسبت $x`, y`$ محوررونو ته اندازه شوی. په بل عبارت، ***د سطحی سټريس حالت په نقطه کې په ځانګړي ډول استازيتوب يي شوی په دوو نارمل سټريس اجزاوو او يوه د شيير سټريس جز چې په يوه عنصر عمل کړي. او ددی لپاره چې معادل وی ، دا درې اجزاوی به د هر ځانګړي سمت q د عنصر لپاره په دی تکی کی توپير ولري.***

که چيرې دا درې د سټريس اجزا چی په انځور 9-2a کې په عنصر باندې عمل وکړي، موږ به اوس وښيو چې د دوی ارزښتونه به څه وي، کله چې دوی عمل وکړي په يوعنصر چی په انځور 9-2b کی ښودل شوی. دا يو ډولدی چی د دوو قوو اجزاوی $\mathbf{F}_x$ او $\mathbf{F}_y$ چی د x، y محوررونو په لور عمل کوی ، او بيا د $\mathbf{F}_{x`}$ او $\mathbf{F}_{y`}$ قواو اجزاوو موندلو لپاره چی د $x`$ او $y`$ محوررونو په لور عمل کوی، داسی چی د دوي محصله ورته پايله لرونکی قوه جوړه کړي. د قواو بدلون يوازې د قوی د اجزاوو اندازه او جهت محاسبه کوي. اما د سټريس د اجزاو بدلون ، له دې څخه ډېر ستونزمن دی ځکه چی بايد د هر سټريس شدت او جهت بايد محاسبه شي او هم د هغه ساحې لوری چي په هغه عمل کوي.په فکر کی ونيول شي.

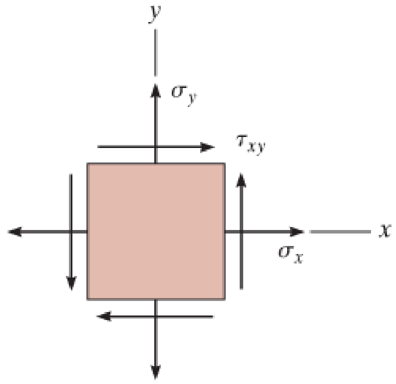


انځور 9-2

د تحلیل کړنلاره

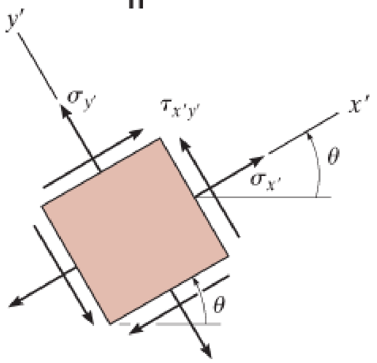
PROCEDURE FOR ANALYSIS

که چیرې په یوه نقطه کې د ستریس حالت د یو ټاکل شوی لوري د یوعنصر لپاره پیژندل شوی وی ، انځور 9-3a ، نو بیا د ستریس حالت په یو عنصر چې کوم بل جهت یا میلان θ ولری ، انځور 9-3b ، په دی لاندی طریقه ټاکل کیدی شي.



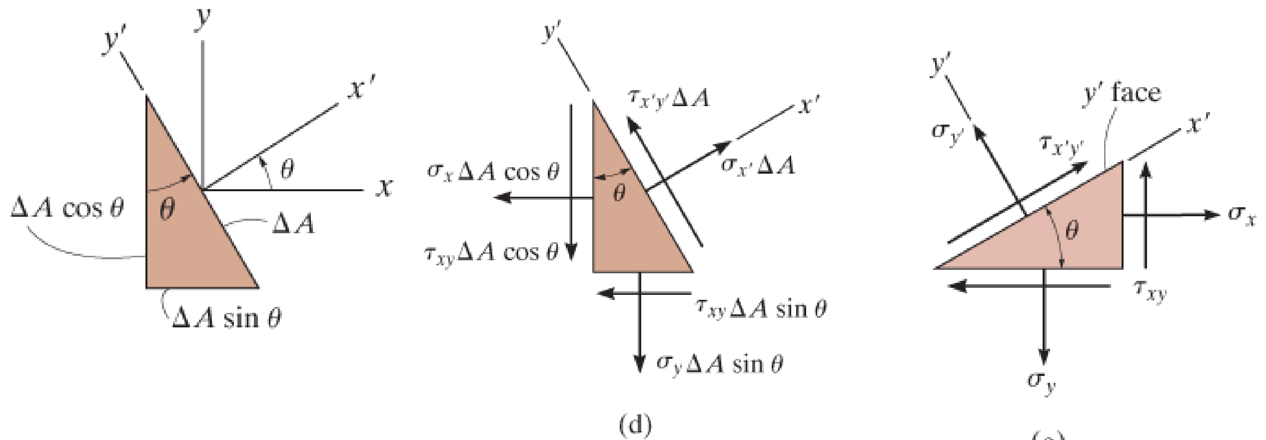
(a)

=



(b)

- نارمل او شییر ستریس اجزاوی $\sigma_{x'}$, $\tau_{x'y'}$ چې په $+x'$ مخ د عنصر ، انځور 9-3b ، عمل کړي ، کیدی شي له یو د خپل خوښی برخی د عنصر انځور 9-3a ، څرنګه چې په انځور 9-3c کی ښودل شوي ، و ټاکل شي. که د قطع شوی برخی ساحه ΔA وی نو د برخی نږدی سیمی ساحی به $\Delta A \sin\theta$ او $\Delta A \cos\theta$ وی.
- د برخی *آزاد ډایګرام* رسم کړي او *قواوي* چې په دی برخه باندی عمل کړي و ښیي ، انځور 9-3d وګوري . کله چې د ستریس جز په هر مخ چې ضرب د هغه ساحی چې وربandی پلی شوي، کړي، دا ټاکل کیدی شي.
- کله چې معادله $\Sigma F_{x'} = 0$ په آزاد ډایګرام تطبیق کړي، ساحه ΔA به له هر لور د معادلی له منځه ووزي،او د $\sigma_{x'}$ لپاره به مستقیم حل لاس ته راشي. په ورته ډول $\Sigma F_{y'} = 0$ به $\tau_{x'y'}$ حاصل کړي.
- که چیرې غواړو $\sigma_{y'}$ چې په مخ $+y'$ د عنصر ، انځور 9-3b، وټاکو بیا یو په خپل خوښه برخه د عنصر په پام کی نیسو، او دا په انځور 9-3e کی ښودل شوي. دلته معادله د $\Sigma F_{y'} = 0$ په آزاد ډایګرام تطبیق کوو او دا به $\sigma_{y'}$ حاصل کړي .



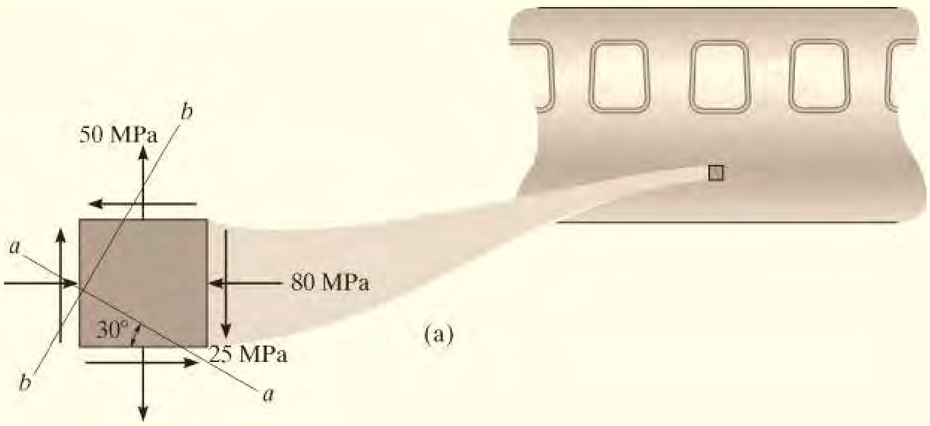
(c) (d) (e)

انځور 3-9

مثالونه

مثال 9.1

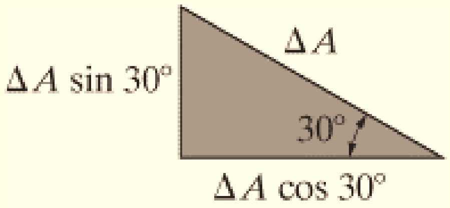
د الوتکی د فیزلاج (دالوتکی کبین) په سطحه، په یو نقطه کی د سطحی ستړیس (plane stress) حالت ، څنګه چی په یو ه ټوټه لکه چی په انځور 9-4a کی ښودل شوی، تشریح شوي. د ستړیس حالت په دی ټکی کی چی 30^0 د ساعت حرکت په لور زاویه جوړوی وښیی.



(a)

(SOLUTION) حل

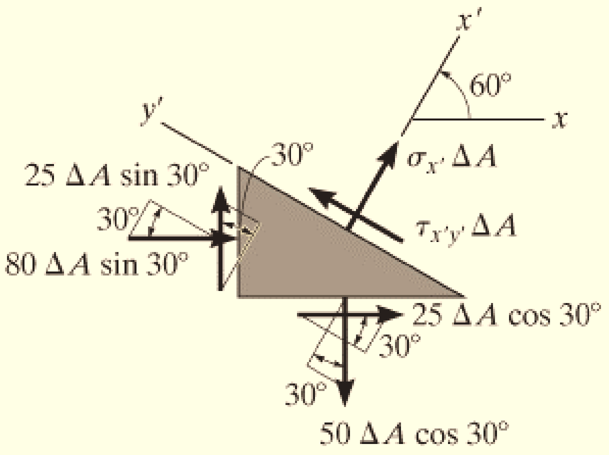
ځرخیدلي ټوټه په انځور 9-4d کې ښودل شوې. ددې لپاره چې د ستریس اجزاوې په دې ټوټه وټاکوموږ به اول د انځور 9-4a عنصر په کرښه a-a قطع کړو. لاندې برخه لرې کوو، او فرض کوو چې قطعه شوې (مایل) مخ DA ساحه لري، افقي او عمودي مخو ساحې په انځور 9-b کې ښودل شوي. ددې برخې آزاد ډایګرام په انځور 9-4c کې ښودل شوي. په یاد ولرئ چې قطعه شوې x` مخ د وتلې نارمل $x$` محور له خوا تعریف شوي ، او y` محور د مخ په اوږدوالی موقعیت لرې.



(b)

(Equilibrium) توازن

د قواو توازن معادلې په سمت x` او $y$` تطبیق کوو، د x او y سمتونه په پام کې نه نیسو. کولای شو چې په مستقیم ډول د $s_{x`}$ او $t_{x`y`}$ حل لاس ته راوړو.



(c)

انځور 9-4 (تکرار)

دلته

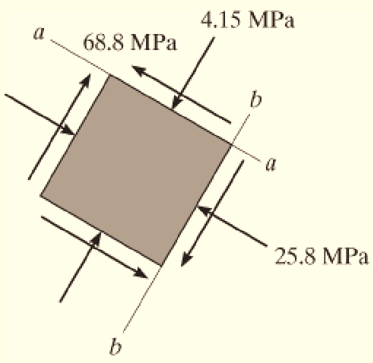
$$+\nearrow\Sigma F_{x'} = 0; \qquad \sigma_{x'}\Delta A - (50\ \Delta A \cos 30^\circ)\cos 30^\circ + (25\ \Delta A \cos 30^\circ)\sin 30^\circ + (80\ \Delta A \sin 30^\circ)\sin 30^\circ + (25\ \Delta A \sin 30^\circ)\cos 30^\circ = 0$$

$$\sigma_{x}' = -4.15\ \text{MPa} \qquad \textit{Ans.}$$

$$+\nwarrow\Sigma F_{y'} = 0; \qquad \tau_{x'y'}\Delta A - (50\ \Delta A \cos 30^\circ)\sin 30^\circ - (25\ \Delta A \cos 30^\circ)\cos 30^\circ - (80\ \Delta A \sin 30^\circ)\cos 30^\circ + (25\ \Delta A \sin 30^\circ)\sin 30^\circ = 0$$

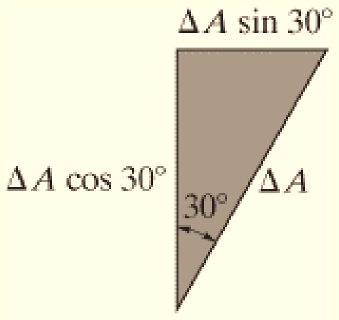
$$\tau_{x'y'} = 68.8\ \text{MPa} \qquad \textit{Ans.}$$

وینو چی $s_{x`}$ منفي دی ، په دی معني دا خلاف د هغه سمت چی په انځور 9-4c کی ښودل شوي دی. پایلی په پورتنی برخه د عنصر په انځور 9-4d کی ښودل شوي دا ځکه چی دا هغه سطحه ده چی په انځور 9-4c کی په پام کی نیول شوی ده.



(d)

موږ اوس د ستریس ټاکلو لپاره، په عمودی سطحه *b-b* ورته پروسیجر باید تکرار کړو. د انځور 9-4a عنصر په سطحه *b-b* قطعه کوواو پایلی په هغه برخه، چی مخونه او ساحی یي په انځور 9-4e کی ښودل شوي، لیدل کیږي. د محور $x`$ سمت پورته لور ته ، عمود په قطع شوی مخ ښایو، او آزاد ډایګرام یي په انځور 9-4f کی ښودل شوي.



(e)

$$+\searrow\Sigma F_{x'} = 0; \quad \sigma_{x'}\Delta A - (25\ \Delta A \cos 30^\circ)\sin 30^\circ + (80\ \Delta A \cos 30^\circ)\cos 30^\circ - (25\ \Delta A \sin 30^\circ)\cos 30^\circ - (50\ \Delta A \sin 30^\circ)\sin 30^\circ = 0$$

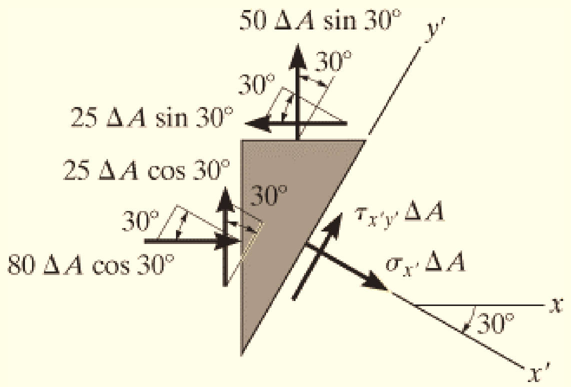
$$\sigma_{x'} = -25.8 \text{ MPa} \qquad \textit{Ans.}$$

$$+\nearrow\Sigma F_{y'} = 0; \quad \tau_{x'y'}\ \Delta A + (25\ \Delta A \cos 30^\circ)\cos 30^\circ + (80\ \Delta A \cos 30^\circ)\sin 30^\circ - (25\ \Delta A \sin 30^\circ)\sin 30^\circ + (50\ \Delta A \sin 30^\circ)\cos 30^\circ = 0$$

$$\tau_{x'y'} = -68.8 \text{ MPa} \qquad \textit{Ans.}$$

څرنګه چې دواړه $s_{x`}$ او $t_{x`y`}$ منفي ارزښتونه دی ، دوی خلاف د هغه سمت چې په انځور 9-4f کی ښودل شوي عمل کړي. د ستریس اجزاوی په ښي اړخ د عنصر په انځور 9-4d کی ښودل شوي.

له دی تحلیل موږ ممکن دی پایلي ته ورسیږو چې د ستریس حالت په یوه نقطه کی کیدی شي په اجزاو د ستریس په یو عنصر چې له فیوسلاج (د الوتکی کبین) راجلا شوی او جهت شوي څنګه چې په انځور 9-4a ښودل شوي، او یا په یو عنصر چې جلا شوی او جهت شوی لکه هغه چې په انځور 9-4d کی ښودل شوي. په بل عبارت د ستریس دا حالتونه د یو بل سره معادل دی.

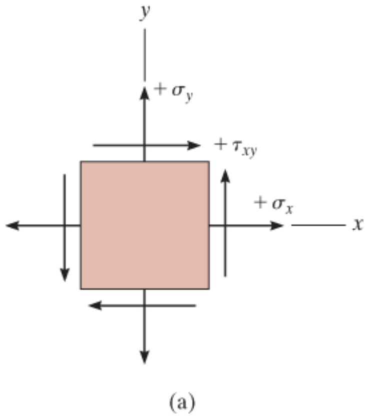


(f)

انځور 4-9 تکرار)

9.2 د سطحی ستړیس د بدلون عمومی معادله
(GENERAL EQUATION OF PLANE-STRESS TRANSFORMATION)

د نارمل او شییر ستریس اجزاو بدلولو میتود له x، او y څخه په $x`$، $y`$ محوروونو، لکه څنګه چې په تیرو برخو کې بحث شوی، په عمومي ډول وده کولی شي او د یوې عمومی د *ستړیس-بدلون* معادلې په توګه څرګند کیدی شي.



انځور 9-5

د نشاني یا علامی کنوانسیون (Sign Convention).

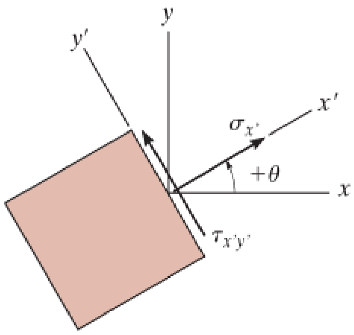
د دې معادلو پلي کولو لپاره موږ باید لومړی د ستریس اجزاو دعلامی ښودلو کنوانسیون تاسیس کړو. لکه څنګه چې په انځور 9-5 کې ښودل شوي، $+x$ او $+x`$ محوروونه د عنصر په ښي مخ کې د بهرلور ته د نارمل تعریف کولو لپاره کارول کیږي، نو څکه $s_x$ او $s_{x`}$ مثبت دي کله چې دوی عمل کوي په مثبت x او $x`$ سمت، او $t_{xy}$ او $t_{x`y`}$ مثبت دي کله چې دوی عمل کوي په مثبت $y$ او $y`$ سمتونو.

د مخ لورۍ چې په هغې باندې د نارمل او شییر ستریس اجزا باید وټاکل شي د q زاویې لخوا تعریف کیږي، کوم چې دی د $+x$ محور څخه $+x`$ محور ته اندازه شوی، انځور 9-5b وګورئ. په یاد ولرئ چې د پرایم (prime) او انپرایم (unprime) محوروونه په دې انځور کې دواړه د ښی لاس محوری سیستم جوړه وي. په دی معني چې مثبت z (او یا `z) محوروونه تل له صفحی بهر سمت ته په ګوته کیږي. زاویه q به *مثبت* وي کله چې دا د ښی لاس د ګوتو تاو تعقیب کړي، د بیلګې په توګه، د ساعت په مقابل کرزیدا کی لکه څنګه چې په انځور 9-5b کې ښودل شوي.

نارمل او د شییر ستړیس اجزا (Normal and Shear Stress Components).

د دې تاسیس شوی کنوانسیون په کارولو سره د انځوز 9-6a عنصر په مایل (inclined) سطحه قطع کوو، او دا جلا شوې برخه په انځور 9-6b کی ښودل شوي. فرض کوو چې ددی جلا شوی

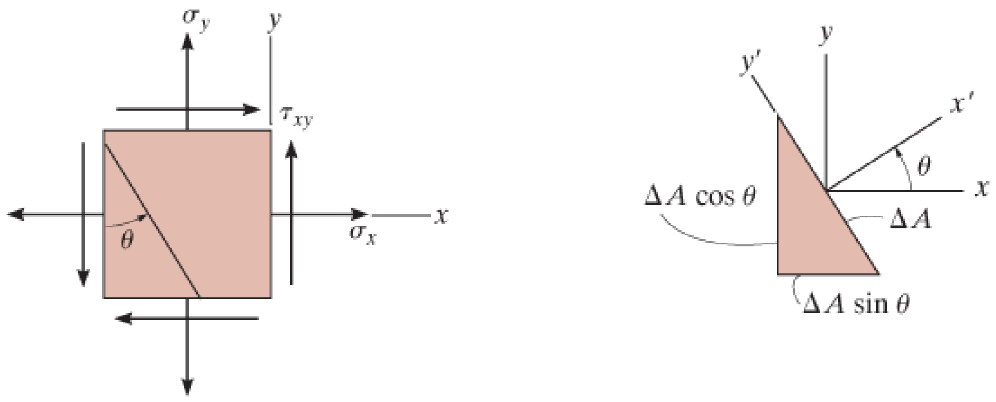
برخی ساحه DA ده، بیا په افقي او عمودي مخونو ددی جلا شوی برخي ساحه په ترتیب سره DA cosq او DAsin q وی.



(b)

Positive sign convention

انځور 9-5 (تکرار)



(a) (b)

انځور 9-6

د برخی په پایله کی *آزاد-بدن-ډایګرام* د برخی په انځور 9-6c کی ښودل شوي. که چیری په محوررونو x` او $y$` د توازن معادلی تطبیق کړو مورږ په مستقیم ډول حل د $s_{x`}$ او $s_{y`}$ په لاس راځي. او مورږ لرو

$$+\nearrow \Sigma F_{x'} = 0; \quad \sigma_{x'}\Delta A - (\tau_{xy}\Delta A \sin\theta)\cos\theta - (\sigma_y \Delta A \sin\theta)\sin\theta$$
$$- (\tau_{xy}\Delta A \cos\theta)\sin\theta - (\sigma_x \Delta A \cos\theta)\cos\theta = 0$$
$$\sigma_{x'} = \sigma_x \cos^2\theta + \sigma_y \sin^2\theta + \tau_{xy}(2\sin\theta\cos\theta)$$

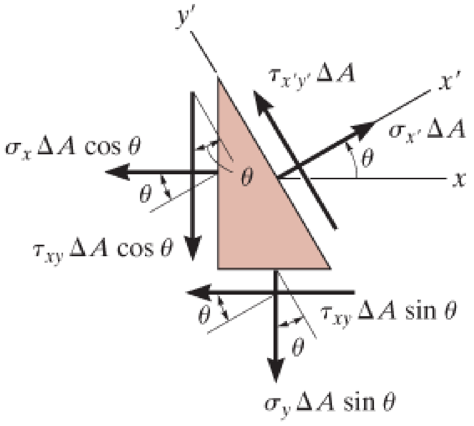
$$+\nwarrow \Sigma F_{y'} = 0; \quad \tau_{x'y'}\Delta A + (\tau_{xy}\Delta A \sin\theta)\sin\theta - (\sigma_y \Delta A \sin\theta)\cos\theta$$
$$- (\tau_{xy}\Delta A \cos\theta)\cos\theta + (\sigma_x \Delta A \cos\theta)\sin\theta = 0$$
$$\tau_{x'y'} = (\sigma_y - \sigma_x)\sin\theta\cos\theta + \tau_{xy}(\cos^2\theta - \sin^2\theta)$$

ددی لپاره چی دا معادلی ساده کړو له مثلثاتی عینی قضیو کار اخلو، یعني

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta, \sin^2\theta = (1 - \cos 2\theta)/2,$$

او

$$\cos^2\theta = (1 + \cos 2\theta)/2$$



(c)

انځور 6-9 (تکرار)

له همدی امله

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\theta + \tau_{xy}\sin 2\theta \qquad (9\text{–}1)$$

$$\tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\sin 2\theta + \tau_{xy}\cos 2\theta \qquad (9\text{–}2)$$

د ستریس اجزاوی چی په امتداد د محورنو x` او`y عمل کړي.

که چیری اړتیا وی چی ستریس په y` محور و ټاکل شي، بیا په آساني سره $q + 90^0$ په معادله 9-6d کی د q لپاره ځای په ځاي کوو. او دا په لاس راکوي

$$\sigma_{y'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\theta - \tau_{xy}\sin 2\theta \qquad (9\text{–}3)$$

د تحليل کړنلاره

PROCEDURE FOR ANALYSIS

ددی لپاره چی ستريس د بدلون معادلي 9-1 او 9-2 څخه کار واخلو، اړين ده چی پيژندل شوی ډيټا s_x, s_y, t_{xy} او q د تاسيس شوی کنوانسيون سره، انځور 9-5، ځای په ځای شي.

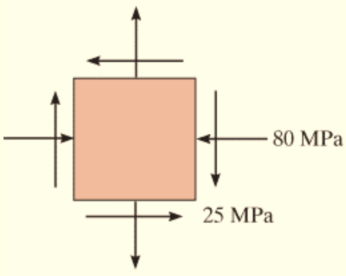
په ياد ولري چی مثبت محور `$x$ تل بيرون لور، له هغه سطحی کوم چی نارمل ستريس وربانډی وتاکل شي، موقعيت مومي . زاويه$q$ مثبت د ساعت گرزيدا په لور له محور $x$ د محور `x په جهت واقع کيږي. که چيري $s_{x`}$ او $t_{x`y`}$ مثبت محاسبه شی، بيا ادا ستريسونه په مثبت لور د `$x$ او`y عمل کړي.

د آسانتيا لپاره ادا معادلي په آسانی سره په جيبی کلکيولیټر کی پروگرام کيدی شي.

مثال

مثال 9.2

د ستريس حالت په يوه نقطه د يوی ټوټی په انځور 9-7a کی ښودل شوي. د ستريس حالت په دی نقطه په يو بل عنصر کی چی موقيت يي په 30^0 د ساعت په لور له دی موقعيته وی مشخص کړي.



انځور 9-7

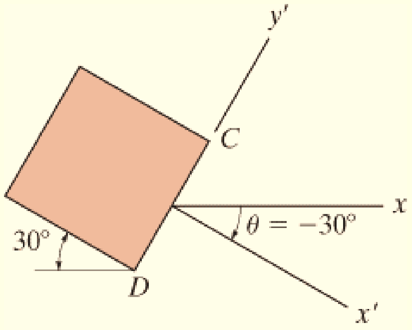
حل (SOLUTION)

دا سوال په مثال 9.1 کی د اصلی اصولو په کارولو سره حل شوی دی. دلته به موږ د معادلو 9-1 او 9-2 په کارولو دا حل کړو. د تاسیس شوی علامو کنوانسیون سره، انځور 9-5 دا وینو چې

$$\sigma_x = -80 \text{ MPa} \qquad \sigma_y = 50 \text{ MPa} \qquad \tau_{xy} = -25 \text{ MPa}$$

سطحه *CD* . په سطحه *CD* د ستریس اجزاو پیژندلو لپاره ، انځور 9-7b ، مثبت `$x$ محور باید بهر لور ته، عمود په په سطحه *CD* وی، او مربوطه `y محور به د *CD* سره په اوږدو وی.

زاویه له x د `x محور په لور عبارت دی په $q = -30^0$ (ساعت په لور). معادلی 9-1 او 9-2 تطبیق کوواو دا لاندی پایلی په لاس راځي



(b)

انځور 9-7 (تکرار)

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\theta + \tau_{xy}\sin 2\theta$$

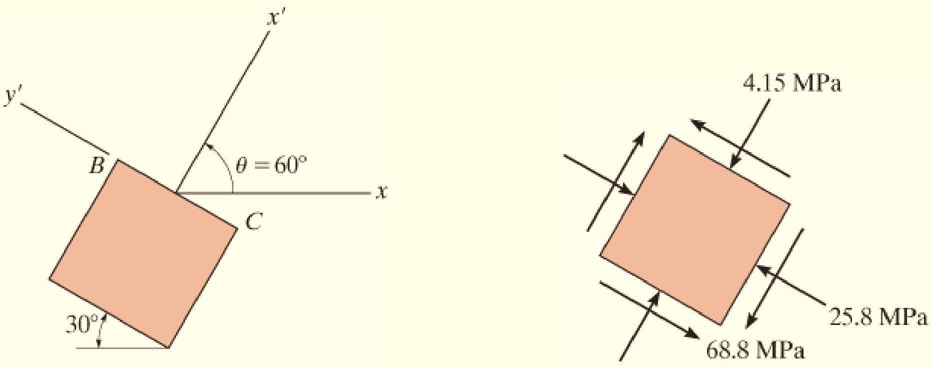
$$= \frac{-80 + 50}{2} + \frac{-80 - 50}{2}\cos 2(-30^\circ) + (-25)\sin 2(-30^\circ)$$

$$= -25.8 \text{ MPa} \qquad \textit{Ans.}$$

$$\tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\sin 2\theta + \tau_{xy}\cos 2\theta$$

$$= -\frac{-80 - 50}{2}\sin 2(-30^\circ) + (-25)\cos 2(-30^\circ)$$

$$= -68.8 \text{ MPa} \qquad \textit{Ans.}$$



(c) (d)

انځور 9-7 (تکرار)

سطحه *BC* .

انځور 9-7c ، د محور $x`$ سمت له سطحی $BC$ بهر لور ته تاکو، بیا د x او x` محورونوپه منځ کی $q = 60^0$ (د ساعت خلاف جهت). له 9-1 او 9-2 معادلو څخه موږ لرو:

$$\sigma_{x'} = \frac{-80 + 50}{2} + \frac{-80 - 50}{2}\cos 2(60°) + (-25)\sin 2(60°)$$

$$= -4.15\text{ MPa} \qquad \textit{Ans.}$$

$$\tau_{x'y'} = -\frac{-80 - 50}{2}\sin 2(60°) + (-25)\cos 2(60°)$$

$$= 68.8\text{ MPa} \qquad \textit{Ans.}$$

دلته $t_{x`y`}$ د چک کولو لپاره دوه ځل محاسبه شوي. منفی علامه د $s_{x`}$ په دی معنی چی ستریس د منفی جهت د $x`$ جهته دی ، انځور $9\text{-}7c$ ووینی. پایلی په انځور $9\text{-}7d$ په عنصر سره ښودل شوي.

* په بدیل سره موږ کولای شو چی معادله 9-3 تطبیق کړو $q = -30^0$ په ځای د معادله 9-1 .

9.3 مهم (اصلی) ستریسونه او په - داخلی سطحه کی اعظمی شییر ستریس
(PRINCIPAL STRESSES AND MAXIMUM IN-PLANE SHEAR (STRESS

څرنګه چی s_x, s_y, t_{xy} ټول ثابت دی ، له معادلو 9-1 او 9-2 داسی لیدل کیږي چی اندازه د $s_{x`}$ او $t_{x`y`}$ یوازی د هغی سطحی په زاویه q پوری اړه لري ، کوم چی ستریس وربانذی عمل کړی. د انجینری په پرکتس کی مهمه ده چی هغه سمت و موندل شي چی نارمل ستریس وربانذی اعظمی وی، او هغه سمت چی شییر ستریس وربانذی اعظمی وی. موږ به دا قضيي اوس و څیړو.

په داخل - سطحه کی اصلي ستریسونه (In-Plane Principal Stresses).

د اعظمی او کوچنی نارمل ستریس ټاکلو لپاره موږد 9-1 معادلی مشتق (differentiate) نظر زاویه q ته نیسو او پایلی مساوی په صفر کوو. دا راکوي

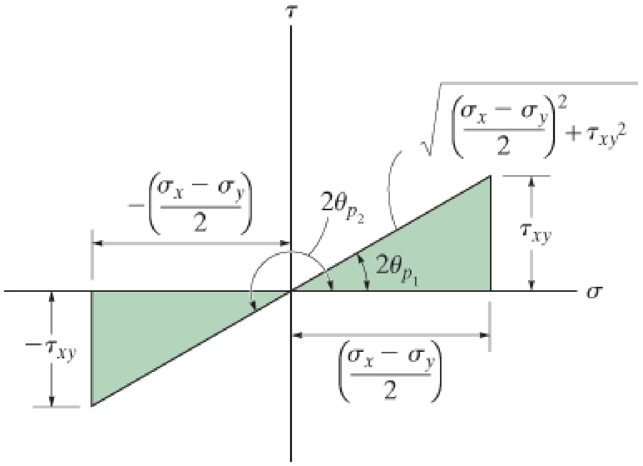
$$\frac{d\sigma_{x'}}{d\theta} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}(2\sin 2\theta) + 2\tau_{xy}\cos 2\theta = 0$$

دا حل کوو، او د اعظمی او کوچنی نارمل ستریس سطحی سمت د $q = q_p$ په لاس راکوی

$$\tan 2\theta_p = \frac{\tau_{xy}}{(\sigma_x - \sigma_y)/2} \qquad (9\text{–}4)$$

د اصلی سطحو سمت

حل دوه ځوابه (roots) لری ، q_{p1} او q_{p2} . په ځانګړی توګه د $2q_{p1}$ او $2q_{p2}$ ارښتونه له یوبل 180^0 فاصله لري، په دی معنی چی $qp1$ او $qp2$ له یو بل 90^0 واټن لري.



انځور 8-9

ددی کانکریټي بیم درزونو لامل کششي ستړیس دی، که څه هم په بیم کی داخلی مؤمنت او شییر دواړه منځ ته راغلي. کیدی شی چی د ستړیس بدلون له معادلو، د درزونو د سمت او هغه اصلی نارمل ستړیسونه چی د دی درزونو لامل شوی وړاندوینی له پاره وکار ول شي.

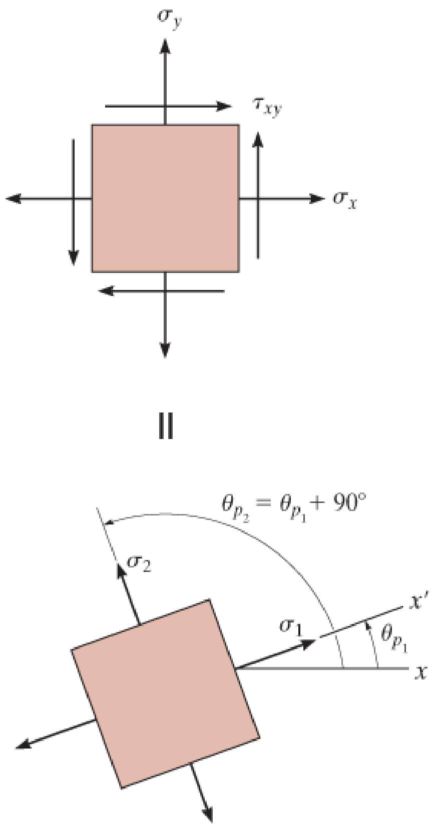
د اعظمی او لږ تر لږ نارمل ستر س تر لاسه کولو لپاره د ا زاویي په معادله 1-9 کی اچول کیږی. دلته هغه اړین ساین او کوساین د $2q_{p1}$ او $2q_{p2}$ له هغه سیوری شوی مثلثونو چی د معادلی 4-9 په بنسټ جوړ او په انځور 8-9 کی ښودل شوي پیدا کړو، دلته فرض شوی وه چی t_{xy} او (s_x-s_y) دواړه مثبت یا منفی مقدارونه دی.

کله چی دا تطبیق شوی، او وروسته له ساده کولو موږ دوه حله s_1 او s_2 لاس ته راوړو، هغه عبارت دی په

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^{\,2}} \qquad (9\text{–}5)$$

اصلی سټریسونه

دا دوه ارزښتونه کوم چې $s_1 = > s_2$ ، په نامه د سطحی داخل ***اصلی – سټریسونو*** (principal stresses) په نامه یادول کیږي، او هغه سطحی چې دوی وربانډی عمل کړي په نامه د سټریسو ***اصلی- سطحي*** (principal planes) یادیږي، انځور 9-9 و ګوري. که چیری مثلثاتي اړیکی د q_{p1} او q_{p2} په معادله 2-9 کی ځای په ځای کړو دا به ولیدل شي چې $t_{x'y'}=0$ دی ، په بل عبارت ***په اصلی سطحه شییر سټریس عمل نکړي***، انځور 9-9 ووینی.



In-plane principal stresses

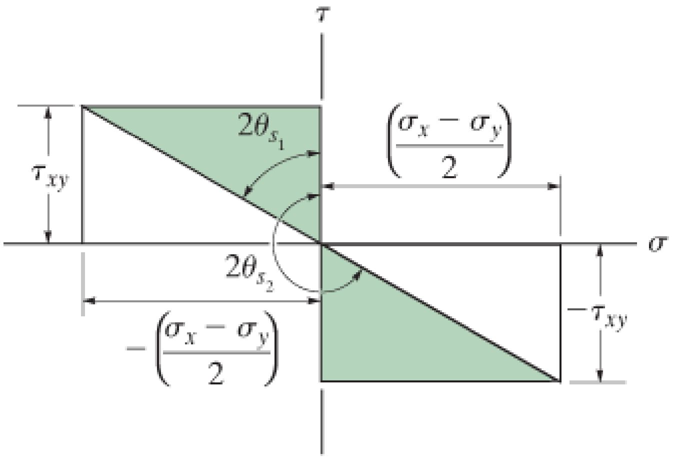
انځور 9-9

اعظمی شییر ستریس په داخلی سطحه کی (Maximum In-Plane Shear Stress).

د ټوټی هغه سمت چی اعظمی شییر ستریس وربانډی عمل کړي په مشتق (derivative) نیولو د معادلی 2-9 نظر زاویه q ته او پایلی مساوی په صفر کړل شي. دا راکوی

$$\tan 2\theta_s = \frac{-(\sigma_x - \sigma_y)/2}{\tau_{xy}} \qquad (9\text{–}6)$$

د اعظمی شیر ستریس جهت په سطحه



(a)

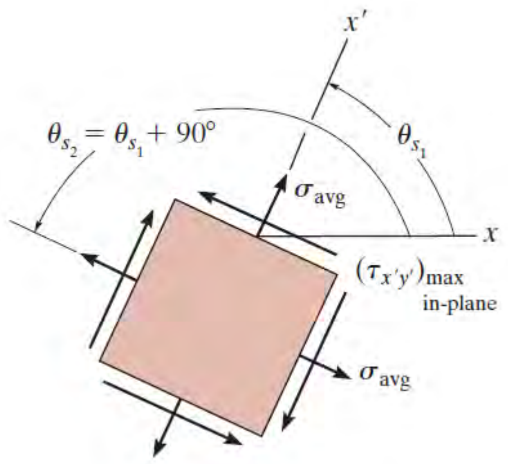
ددی معادلی دوه حله q_{s1} او q_{s2} کیدي شي چی له سیوري شوی مثلثونو چی په انځور 9-10a کی ښودل شوي. څرنګه چی تانجانت ($\tan 2q_s$) معادله 6-9 منفي معکوس (reciprocal) د $\tan 2q_p$ ، معادله 4-9 ، نو بیا هر حل $2q_s$ عبارت دی په 90^0 ، او حل q_s او q_p عبارت دی په 45^0 . له همدي امله

هغه عنصر چی ***اعظمی شییر ستریس وربانډی عمل کړي سمت يي باید 45^0 له هغه حالت د عنصر چی اصلي ستریس (principal stress) وربانډی عمل کړي ، موقعیت لري.***

که چیری مثلثاتي ارزښتونه د $\sin 2q_s$ او $\cos 2q_s$ له معادلي 10-9 معلوم، او بیا هغوي په معادله 2-9 کی ځای په ځای شي، اعظمی شییر ستریس ټاکل کیدی شی. پایلی عبارت دی:

$$\tau_{\substack{\max \\ \text{in-plane}}} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^{\,2}} \qquad (9\text{–}7)$$

اعظمی شییر ستریس په سطحه



په سطحه اعظمی شییر ستریس

انځور 9-10

دلته $t_{\text{max in-plane}}$ تر ټولو لوړ شییر ستریس په سطحه کی معرفی شوي، او دا له دی امله چی د عنصر په x-y سطحه عمل کړي.

په نهایت کی ، کله چی ارزښتونه د $\sin 2q_s$ او $\cos 2q_s$ په معادله 9-1 کی ځاي په ځاتی شي، موږ وینو چی هلته یو اوسط نارمل ستریس د اعظمی شیر ستریس په سطحه (in-plane shear) شتون لري. هغه دی

$$\sigma_{avg} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \qquad (9\text{–}8)$$

د عددي حالتونو لپاره وړاندیز کیږي چی معادلي 9-1 تر 9-8 په یوه پاکتی کلکو لیټرکی پرګرام کړي.

مهم ټکي

(IMPORTANT POINTS)

- اصلی ستریسونه استازیتوب د اعظمی او لږ تر لږ نارمل ستریس په یوه نقطه کی کوی.
- که چیری په یوه عنصر کی حالت د ستریس، اصلی ستریس (principal stress) وي، بیا هلته شییر ستریس شتون نلري.
- د ستریس حالت په یوه نقطه کی کیدی شی چې *اعظمی شییر ستریس په سطحه و ښودل* شي. په دی حالت کی اوسط نارمل ستریس هم په دی عنصر عمل کړي.
- هغه عنصر چې استازیتوب د اعظمی *شییر ستریس* او اړوند اوسط نارمل ستریس په سطحه استازیتوب کوی سمت يي 45^0 له هغه عنصر چې اصلی ستریسونه وربانذی عمل کړي موقعیت لري.

مثالونه

مثال 9.3

مخ کی لدی چې یو شافت مات شی د ستریس حالت په یوه نقطه کی په انځور 9-11a کی ښودل شوي. د ستریس حالت په اصلی ستریس و ښایي.

انځور 9-11

حل (SOLUTION)

د منل شوی علامی کنوانسیون له مخی موږ لرو

$$\sigma_x = -20 \text{ MPa} \qquad \sigma_y = 90 \text{ MPa} \qquad \tau_{xy} = 60 \text{ MPa}$$

د عنصر سمت (Orientation of Element).

معادله 4-9 تطبیق کوو

$$\tan 2\theta_p = \frac{\tau_{xy}}{(\sigma_x - \sigma_y)/2} = \frac{60}{(-20 - 90)/2}$$

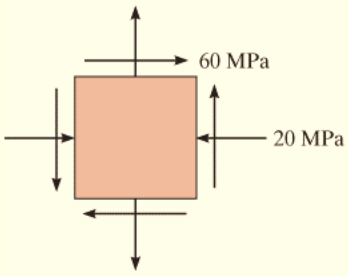
دا معادله حل کوو، او لمړی زاویه θ_{p2} په توګه موږ لرو

$$2\theta_{p_2} = -47.49° \qquad \theta_{p_2} = -23.7°$$

څرنګه چی توپیر تر منځ د $2\theta_{p2}$ او $2\theta_{p1}$ عبارت دی په 180^0 ، دومه زاویه عبارت دی په

$$2\theta_{p_1} = 180° + 2\theta_{p_2} = 132.51° \qquad \theta_{p_1} = 66.3°$$

په دواړو حالتونو کی θ باید خلاف د ساعت (*counterclockwise*) له محور x چی بهر ته وتلي نارمل (x` محور) د عنصر په مخ، او عنصر چی اصلي ستریسونه بنايي سمت به يي داسي وی لکه چی په انځور 9-11b کی ښودل شوي.



(a)

انځور 9-11 (تکرار)

اصلی ستریس (Principal Stress). موږ لرو

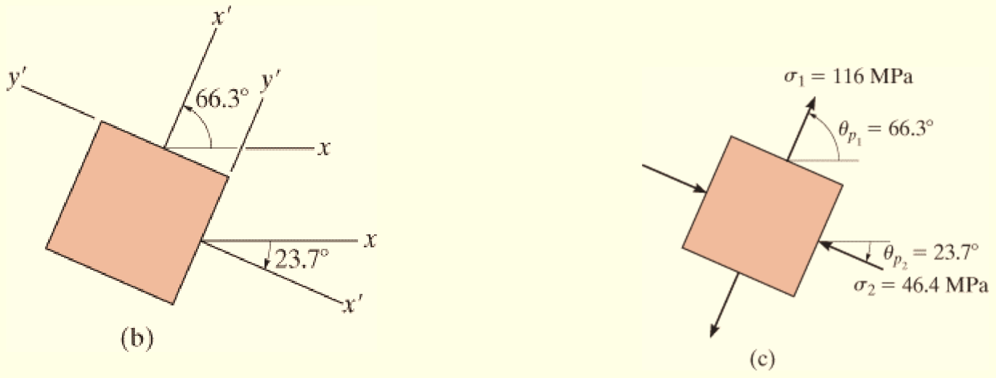
$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}{}^2}$$

$$= \frac{-20 + 90}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-20 - 90}{2}\right)^2 + (60)^2}$$

$$= 35.0 \pm 81.4$$

$$\sigma_1 = 116 \text{ MPa} \qquad \textit{Ans.}$$

$$\sigma_2 = -46.4 \text{ MPa} \qquad \textit{Ans.}$$



انځور 11-9 (تکرار)

اصلي سطح چې نارمل ستریس ورباندی عمل کړي په تطبیق د معادلي 1-9 تاکل کیدی شي، وایو $q = q_{p2} = -23.70$. موږ لرو

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\theta + \tau_{xy}\sin 2\theta$$

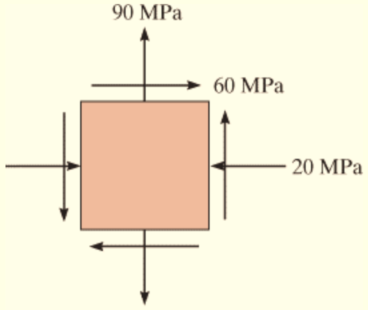
$$= \frac{-20 + 90}{2} + \frac{-20 - 90}{2}\cos 2(-23.7^\circ) + 60\sin 2(-23.7^\circ)$$

$$= -46.4 \text{ MPa}$$

په دی توګه ، $s_2 = -46.4$ MPa ، عمل کړی په سطحه چی تعریف کیږي په $q_{p2} = -23.7^0$ ، کوم چی ، او $s_1 = 116$ MPa عمل کړي په تعریف شوی سطحه $q_{p1} = 66.3^0$ ، انځور 9-11c. په یاد ولري چی شییر ستریس په دی عنصر عمل نکړي.

مثال 9.4

د ستریس حالت په یوه نقطه د یو جسم په عنصر، په انځور 9-12a کی ښودل شوي. دا حالت د ستریس د سطحی په اعظمی شییر او اړوند اوسط نارمل ستریس وښیي.



(a)

انځور 9-12

حل (SOLUTION)

د عنصر سمت (Orientation of Element).

څنګه چی $s_x = -20$ MPa, $s_y = 90$ MPa او $t_{xy} = 60$ MPa ، معادله 9-6 تطبیق کړي. دو زاويي عبارت دی په:

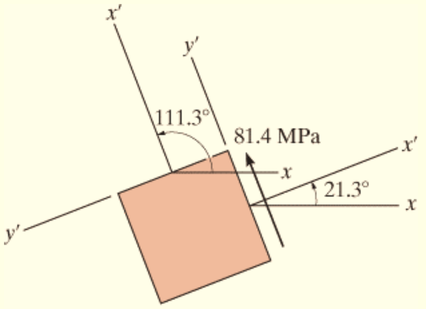
$$\tan 2\theta_s = \frac{-(\sigma_x - \sigma_y)/2}{\tau_{xy}} = \frac{-(-20 - 90)/2}{60}$$

$$2\theta_{s_2} = 42.5^\circ \qquad \theta_{s_2} = 21.3^\circ$$

$$2\theta_{s_1} = 180^\circ + 2\theta_{s_2} \qquad \theta_{s_1} = 111.3^\circ$$

په یاد ولري چې ځنګه دا زاویي تر منځ د x او $x`$ را مینځته کیږي، انځور 9-12b . دا په 45^0، د ستریس له اصلي سطحو ځنګه چې په مثال 9.3 کې پیدا شوي، موقعیت لري.

اعظمی شییر ستریس په سطحه کی(Maximum In-Plane Shear Stress).



(b)

انځور 9-12 (تکرار)

$$\tau_{\substack{max \\ in\text{-}plane}} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}{}^2} = \sqrt{\left(\frac{-20 - 90}{2}\right)^2 + (60)^2}$$

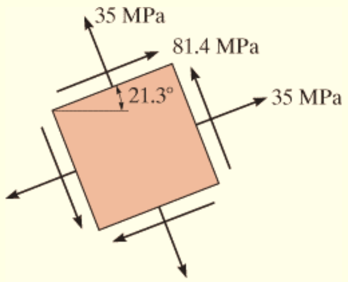
$$= \pm 81.4 \text{ MPa} \qquad \textit{Ans.}$$

د t max in-plane پیدا کولو، چې په عنصر وتاکل شي، سمه لار دا ده چې $q = q_{s2} = 21.3^0$ په معادله 9-2 کی تطبیق شي. موږ لرو

$$\tau_{x'y'} = -\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)\sin 2\theta + \tau_{xy}\cos 2\theta$$

$$= -\left(\frac{-20 - 90}{2}\right)\sin 2(21.3^\circ) + 60\cos 2(21.3^\circ)$$

$$= 81.4 \text{ MPa}$$



(c)

انځور 9-12 (ادامه)

دا مثبت پایلي په ګوته کوي چې $\tau_{\text{max in-plane}}$ عمل کړي په مثبت y' مخ ($\theta = 21.3^0$) ، انځور 9-12b وګوري. دا شییر ستریس په نورو دریو مخونو په انځور 9-12c کې ښودل شوي.

اوسط نارمل ستریس (Average Normal Stress).

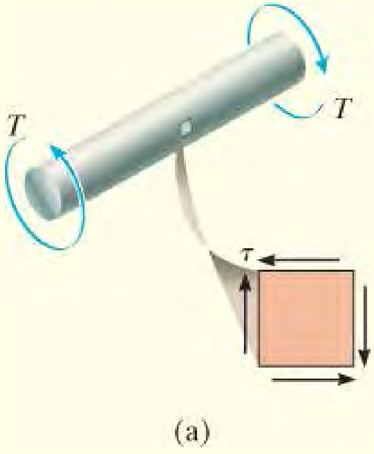
سربیره په اعظمی شییر ستریس په عنصر اوسط نارمل ستریس هم عمل کړی او هغه د معادلی 9-8 په تطبیق سره ټاکلی شو، هغه دی

$$\sigma_{\text{avg}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{-20 + 90}{2} = 35 \text{ MPa} \qquad \textit{Ans.}$$

دا کششی ستریس دی. پایلی په انځور 9-12c کې ښودل شوي.

مثال 9.5

کله چی تورژن (torsion load) T په یوه میله پلي شي، انځور 9-13a ، دا په موادو کی خالص شییر (pure shear) را منځ ته کوي. معلوم کړي (a) اعظمی شییر ستریس په سطحه او اړونده اوسط نارمل ستریس، (b) اصلی ستریس.



انځور 9-13

حل (SOLUTION)

له تاسیس شوی علامی کنوانسیون له مخی داسي لیکلی شو

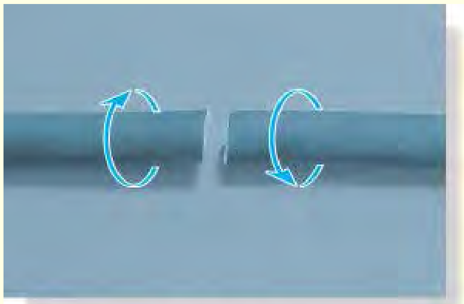
$$\sigma_x = 0 \qquad \sigma_y = 0 \qquad \tau_{xy} = -\tau$$

په- سطحه اعظمی شییر ستریس (Maximum In-Plane Shear Stress).

معادلي 9-7 او 9-8 تطبیق کوو، موږ لرو

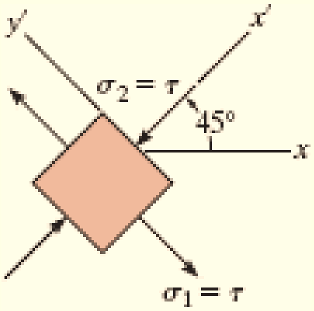
$$\tau_{\substack{\max \\ \text{in-plane}}} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^{\ 2}} = \sqrt{(0)^2 + (-\tau)^2} = \pm\tau \qquad Ans.$$

$$\sigma_{avg} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{0+0}{2} = 0 \qquad Ans.$$


Torsion failure of mild steel.

په دی توګه، لکه څنګه چې تمه کیده په سطحه اعظمی شییر ستړیس په عنصر ، په انځور 9-13a کی ښودل شوی

نوټ . له تجربو دا ښودل شوي هغه مواد چې نرم (ductile) دی د شییر ستړیس له امله ماتیږي. که چیری د انځور 9-13a میله له نرم فولادو (mild steel) جوړه شوی وی ، اعظمی په سطحه شییرستړیس به لامل ددی کیږی چې میله لکه څنګه چې ښودل شوی مات شي.



(b)

انځور 9-13 (ادامه)

اصلی ستړیس (Principal Stress).

د معادلي 9-4 او 9-5 تطبیق نه دا لاندی راکوي

$$\tan 2\theta_p = \frac{\tau_{xy}}{(\sigma_x - \sigma_y)/2} = \frac{-\tau}{(0-0)/2}, \theta_{p_2} = 45°, \theta_{p_1} = -45°$$

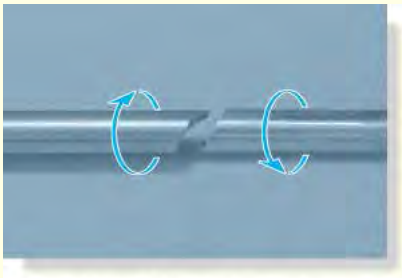
$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = 0 \pm \sqrt{(0)^2 + \tau^2} = \pm\tau \quad Ans.$$

که موږ اوس معادله 9-1 د $\theta_{p2} = 45^0$ تطبیق کړو ، نو بیا

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\theta + \tau_{xy}\sin 2\theta$$
$$= 0 + 0 + (-\tau)\sin 90^\circ = -\tau$$

په دی توګه ، $\sigma_2 = -\tau$ عمل کړی په $\theta_{p2} = 45^0$ لکه ښنګه چی په انځور 9-13b ښودل شوي، او $\sigma_1 = \tau$ عمل کړی په بل مخ $\theta_{p1} = -45^0$.

نوټ. هغه مواد چی *ماتیدونکي* (brittle) دی د *نارمل ستریس* له امله خرابیږي. له همدی امله که چیری د انځور 9-13a میله له کاست وسپنی (cast iron) جوړه شوی وی دا به په کشش کی په 45^0 میلان لکه ښنګه چی په لاندی عکس کی ښودل شوی ماته شي.



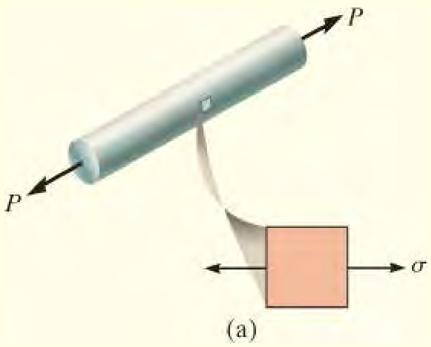
Torsion failure of cast iron.

مثال 9.6

کله چی محوری بار په د لاندی انځور 9-14a کی ښودل شوی میله باندی پلی شي، یو کششی ستریس په موادو کی منځ ته راځي. معلوم کړی (a) اصلی ستریس او (b) اعظمی شییر ستریس په سطحه او اړوند اوسط نارمل ستریس.

حل (SOLUTION)

له تاسیس شوی کنوانسیون دعلامی لپاره داسی لیکلی شو



انځور 9-14

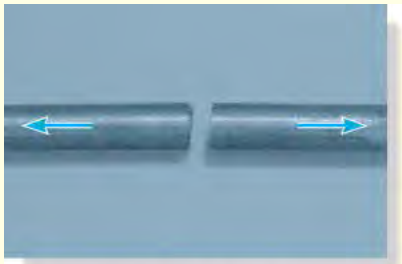
$$\sigma_x = \sigma \qquad \sigma_y = 0 \qquad \tau_{xy} = 0$$

اصلی ستریس (Principal Stress).

په لیدو د ښودل شوی جهت دعنصر ، انځور 9-14a ، څرنګه چی اصلی ستړیس حالت څرګندوي کوم چی شییر ستریس په دی عنصر عمل نه دي کړي. دا د مستقیم بدیل لخوا ، کله چی پورتني ارزښتونه په معادلو 9-4 او 9-5 کی تطبیق شي، ښودل کیدی شي. په دی توګه،

$$\sigma_1 = \sigma \qquad \sigma_2 = 0 \qquad \textit{Ans.}$$

نوټ. ماتیدونکی مواد (brittle materials) د نارمل ستریس له امله ماتیږي، له همدی امله کی د انځور 9-14a میله له کست اوسپنی څخه جوړه شوی وی هغه به لکه څنګه چي په لاندی عکس کی ښودل شوی مات شي.


Axial failure of cast iron.

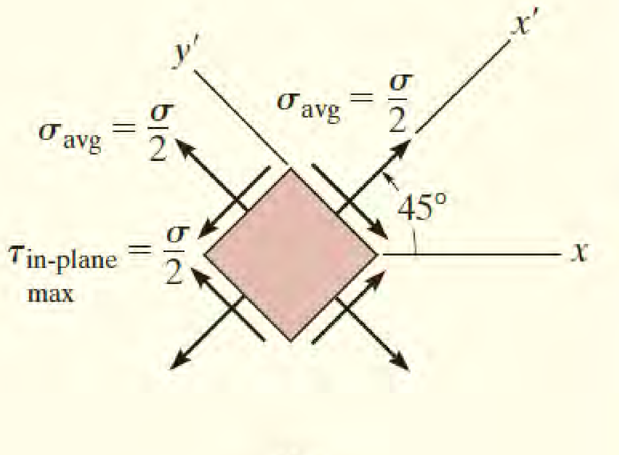
اعظمی شییر ستریس په- سطحه کی (Maximum In-Plane Shear Stress).

معادلي 7-9 ,6-9 او 8-9 تطبیق کوو او مونږ لرو

$$\tan 2\theta_s = \frac{-(\sigma_x - \sigma_y)/2}{\tau_{xy}} = \frac{-(\sigma - 0)/2}{0};\ \theta_{s_1} = 45^\circ,\ \theta_{s_2} = -45^\circ$$

$$\tau_{\substack{\max \\ \text{in-plane}}} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^{\,2}} = \sqrt{\left(\frac{\sigma - 0}{2}\right)^2 + (0)^2} = \pm\frac{\sigma}{2} \qquad \textit{Ans.}$$

$$\sigma_{avg} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{\sigma + 0}{2} = \frac{\sigma}{2} \qquad \textit{Ans.}$$



(b)

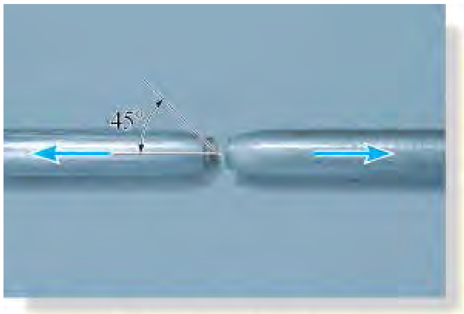
انځور 14-9 (تکرار)

د عنصر مناسب لوري ټاکلو لپاره معادلو 2-9 تطبیق کوو.

$$\tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\sin 2\theta + \tau_{xy}\cos 2\theta = -\frac{\sigma - 0}{2}\sin 90^\circ + 0 = -\frac{\sigma}{2}$$

دا منفی شییر ستریس په x` مخ عمل کړي د منفي $y$` په سمت، لکه څنګه چې په انځور 9-14b کی ښودل شوي.

نوټ. که چیرې د انځور 9-14a میله له *نرم موادو* (ductile material) لکه نرم فولاد جوړ شوي ، بیا شییر ستریس لامل د ماتیدو کیږي. دا په دې لاندې عکس کې لیدل کیږي، چیرې چې په ساحه د غاړه کیدو (necking) کې ، شییر ستریس لامل د ښویدو(slipping) د فولادو په کرستلاین سرحدو (crystalline boundaries) چې په یو سطحه یې ماتیدل رامنځ ته کړي ، لیدل کیږي. او یو مخروط (cone) یې جوړکړي چې نږدې 45^0 جهت لري، لکه څنګه چې پورته محاسبه شوي.

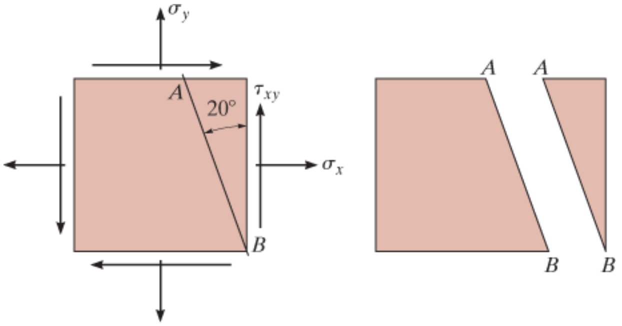


Axial failure of mild steel.

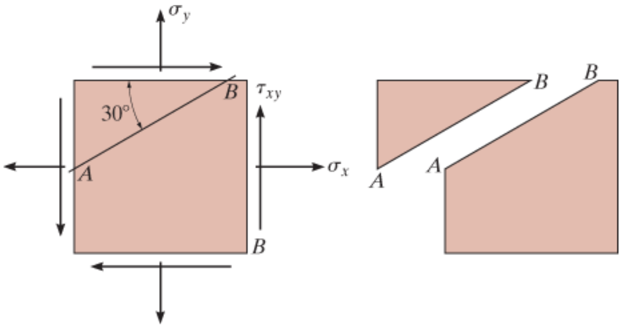
لمړنی سوالونه

PROCEDURE FOR ANALYSIS

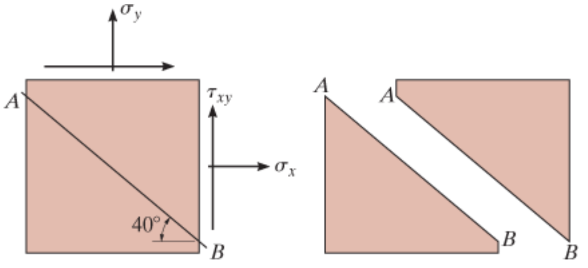
ل 9-1. په هره قضیه کی د ستړیس حالت s_x, s_y, t_{xy} نارمل او شییر ستړیس په سطحه AB جوړه وی. کله چی د ستړیس بدلون له معادلو کار واخیستل شی د ستړیس ارزښتونه عبارت کیږی په $s_{x`} = -5$ kPa او $t_{x`y`} = -8$ kPa. د $x`$ او $y`$ محورونه د هری قضيي لپاره تاسيس کړي او زاویه د q و ټاکي ، بیا پایلی چی په هر برخه عمل کړي و ښيي.



(a)



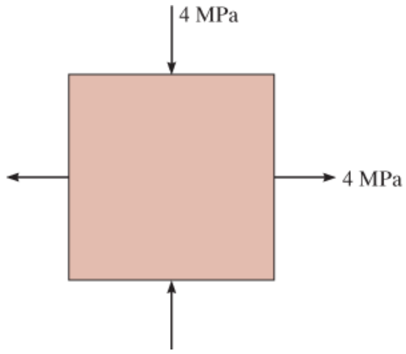
(b)



(c)

ل 9-1

ل 9-2. د ستریس حالت د عنصر په دی لاندي ډول ښودل شوي. د s_{avg} او $t_{max\ in\text{-}plane}$ و تاکي او پایلي د عنصر په سمت په سمه توګه وښایي.

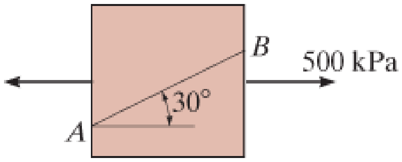


ل 9-2

بنسټيز سوالونه

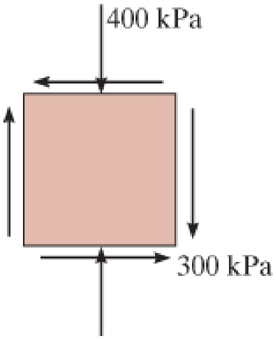
FUNDAMENTAL PROBLEMS

ب 9-1. په سطحه AB نارمل ستريس او شيير ستريس وټاکي. پايلې په غوځ شوی برخه د عنصر سکيچ کړي.



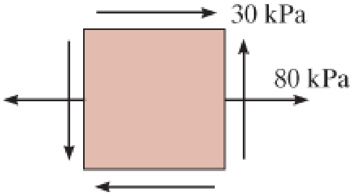
ب 9-1

ب 9-2. په يو عنصر معادل حالت د ستريس په ورته نقطه کې چې لاندی بنودل شوی کله چې عنصر په 45^0 د ساعت لور سمت لرې مشخص کړي.



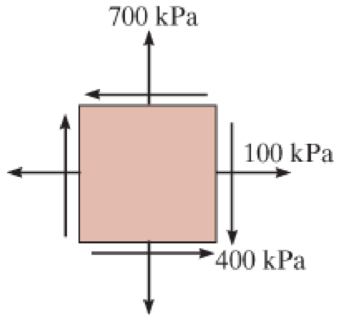
ب 9-2

ب 9-3. په يو عنصر معادل حالت د ستريس په ورته نقطه کې چې استازيتويب د اصلی ستريسونو په دی نقطه کې کوي. او هم سمت د هغه عنصر نظر دی لاندی ښودل شوي عنصر ته معلوم کړي.



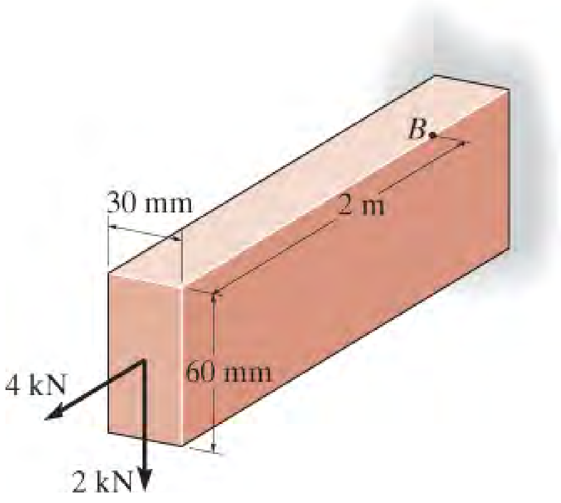
ب 9-3

ب 9-4. په يو عنصر معادل حالت د سټريس په ورته نقطه کی چی استازيتويب د اعظمی شيير سټريس په سطحه په دی نقطه کی کوي.



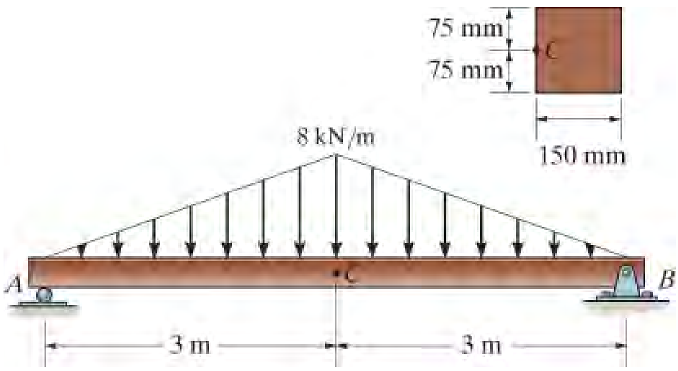
ب 9-4

ب 9-5. په دی لاندی بيم بنودل شوی بار په پاى کی يي پلی شوي. اعظمی اصلی سټريس په ټکي B کی وټاکي.



ب 9-5

ب 9-6. په دی لاندی بيم بنودل شوی بار وربراندی پلی شوي. اصلی سټريس په ټکي C کی وټاکي.



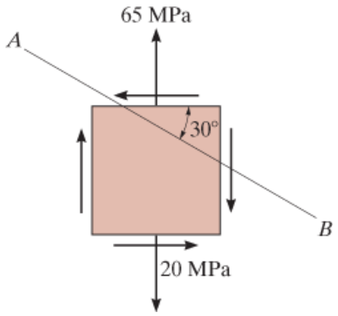
ب 9-6

سوالونه

PROBLEMS

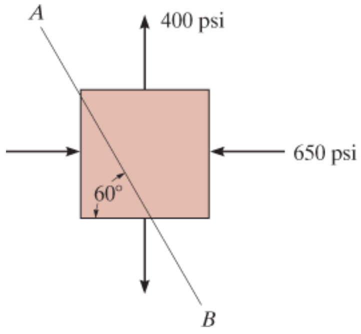
س 9-1. ثابت کړی چی مجموعه د نارمل سټریسونو $s_x + s_y = s_{x'} + s_{y'}$. انځورونه 9-2a او 9-2b وګوري.

س 9-2. د سټریس اجزاوی چی په سطحه AB عمل کړي پیدا کړي. له هغه میتود د توازن چی په برخه 9.1 کی بیان شوه کار واخلي.



س 9-1/2

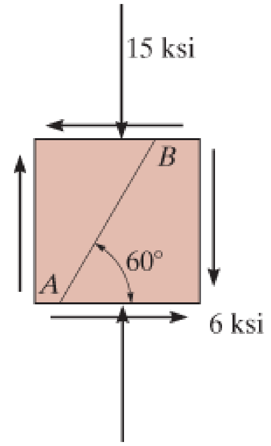
س 9-3. د سټریس اجزاوی چی په سطحه AB عمل کړي پیدا کړي. له هغه میتود د توازن چی په برخه 9.1 کی بیان شوه کار واخلي.



س 3 - 9

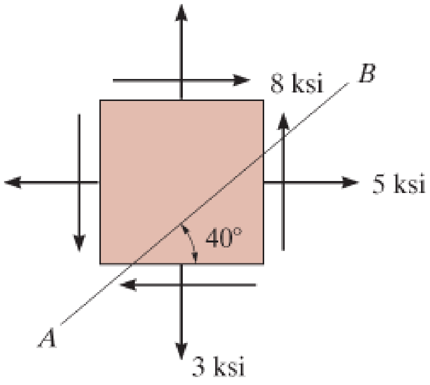
س *9-4. نارمل ستریس او شییر ستریس چی په سطحه AB عمل کړي پیدا کړي. له هغه میتود د توازن چی په برخه 9.1 کی بیان شوه کار واخلي.

س 9-5. نارمل ستریس او شییر ستریس چی په سطحه AB عمل کړي پیدا کړي. د ستریس بدلون له معادلو کار واخلي. پایلي په غوځ شوی برخه د عنصر و ښيي.



س 9-4/5

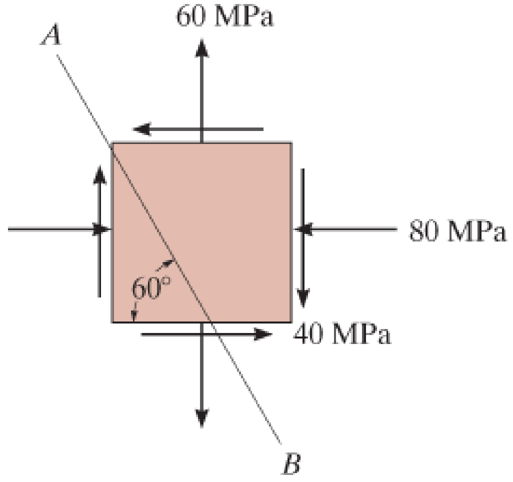
س 9-6. د ستریس اجزاوی چی په سطحه AB عمل کړي پیدا کړي. له هغه طریقو د توازن چی په 9.1 برخه کی بیان شوه کار واخلي.



س 6 - 9

س 9-7. د ستړیس اجزاوی چې په سطحه AB عمل کړي پیدا کړي. له هغه طریقو د توازن چې په 9.1 برخه کې بیان شوه کار واخلي.

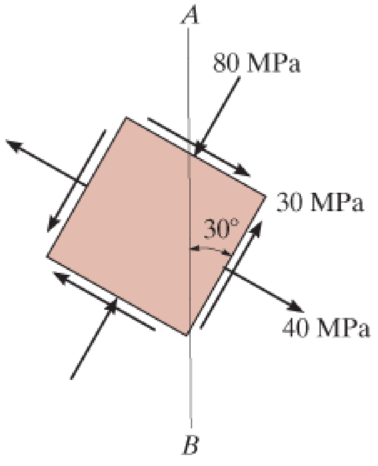
س 9-8*. سوال 9-7 حل کړي، د حل لپاره ، هغه د ستړیس بدلون معادلي چې په 9.2 برخه کې رامنځ ته شوی کار واخلي.



س 9-7/8

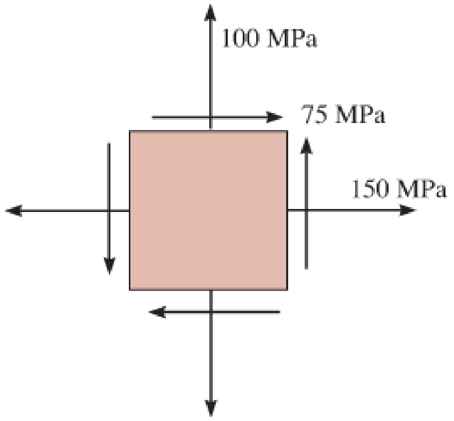
س 9-9. د ستړیس اجزاوی چې په سطحه AB عمل کړي پیدا کړي. له هغه طریقو د توازن چې په 9.1 برخه کې بیان شوه کار واخلي.

س 9-10. سوال 9-9 حل کړي، د حل لپاره هغه د ستړیس بدلون معادلي چې په 9.2 برخه کې رامنځ ته شوی کار واخلي.



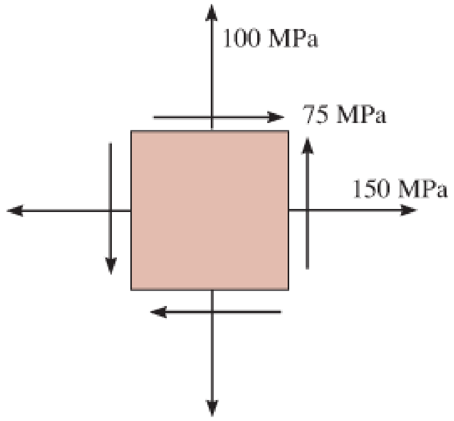
س - 9-9/10

س 9-11. په یو عنصر، د ستړیس معادل حالت په ورته نقطه کی ، چی له لاندی ښودل شوی عنصر په 60^0 د ساعت په لور سمت لري مشخص کړي. او پایلي په دی عنصر سکیچ کړي.



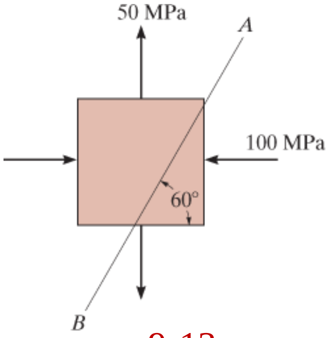
س - 9-11

س *9-12. په یو عنصر، د ستړیس معادل حالت په ورته نقطه کی ، چی له لاندی ښودل شوی عنصر په 60^0 خلاف د ساعت لور سمت لري مشخص کړي. او او پایلي په دی عنصر سکیچ کړي.



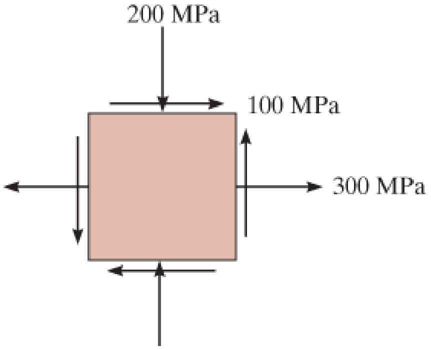
س - 9-12

س 9-13. د ستړیس اجزاوی چی په سطحه AB عمل کړي پیدا کړي. له هغو طریقو د توازن چی په 9.1 برخه کی بیان شوه کار واخلي.



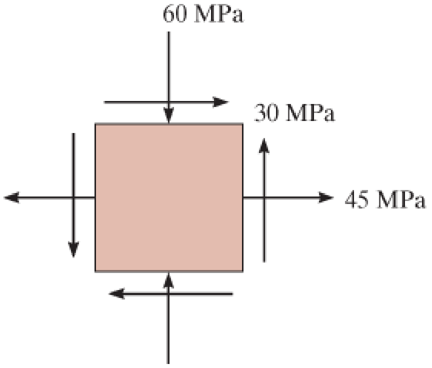
س - 9-13

س 9-14. معلوم کړي (a) اصلي (عمده)سټریسونه او (b) اعظمی شییر سټریس په سطحه کی او اوسط نارمل سټریس په ټکی کی. د عنصر سمت په هره قضیه کی و ټاکي.



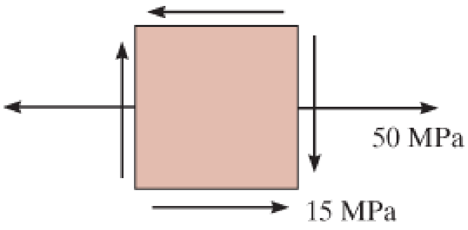
س - 9-14

س 9-15. د سټریس حالت په یوه نقطه کی په لاندی عنصر کی ښودل شوي. معلوم کړي: (a) اصلی سټریسونه او (b) اعظمی شییر سټریس په سطحه او اوسط نارمل سټریس په ټکي کی. د عنصر سمت په هره قضیه کی وښيي.



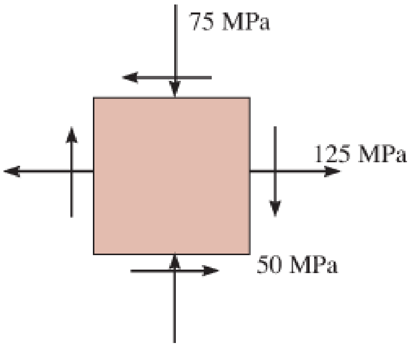
س - 9-15

س 9-16*. د سټریس معادل حالت په لاندی عنصر په یوه نقطه کی چی استازیتوب کوي د (a) اصلی سټریسونو (b) د اعظمی شییر سټریس په سطحه او اړوند اوسط نارمل سټریس معلوم کړي. په هرحالت کی د عنصر اړوند سمت نظر ښودل شوي حالت ته ، او پایلی په عنصر و ښيي.



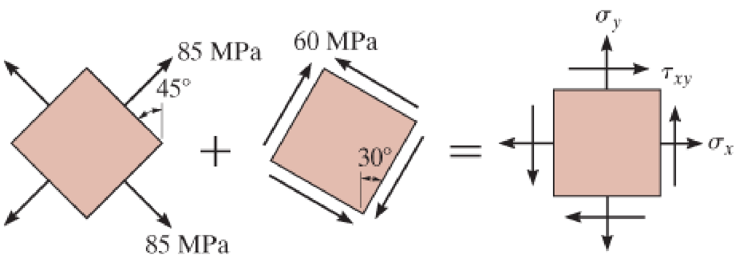
س - 9-16

س 9-17. د ستړيس معادل حالت په لاندی عنصر په یوه نقطه کی چی استازیتوب کوي (a) د اصلی ستړیسونو (b) اعظمی شییر ستړيس په سطحه او اړوند اوسط نارمل ستړيس، معلوم کړي. او په هرحالت کی اړوند سمت د عنصر نظر ښودل شوي عنصر ته ، او پایلی په عنصر و ښيي.



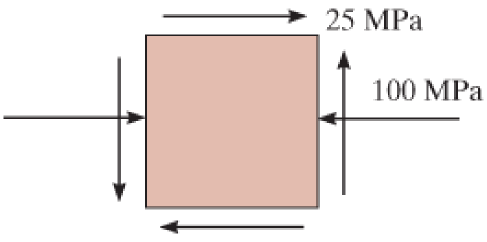
س - 9-17

س 9-18. د نازکی تختي په یوه نقطه کی د ستړيس دوی اجزاوی پلي شوي. د ستړيس محصله په عنصر کی لکه څنګه چی سمت يي په ښي خوا کی ښودل شوي، معلوم کړي.



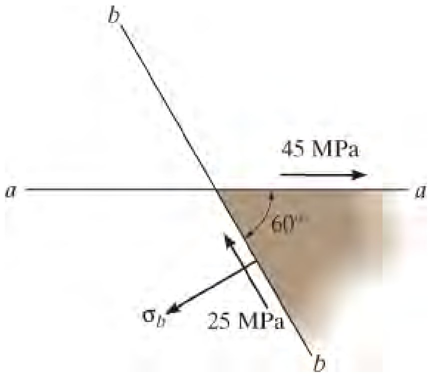
س - 9-18

س 9-19. د ستړيس معادل حالت په لاندی عنصر په یوه نقطه کی چی استازیتوب کوي (a) د اصلی ستړیسونو (b) اعظمی شییر ستړيس په سطحه کی او اړوند اوسط نارمل ستړيس، معلوم کړي. او په هرحالت کی اړوند سمت د عنصر نظر ښودل شوي عنصر ته ، او پایلی په عنصر و ښيي.



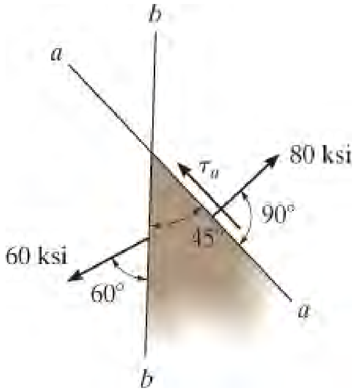
س - 9-19

س *9-20. ستريس په دوو سطحو په لاندی انځور کی ښودل شوي. نارمل ستريس ستريس په سطحه b-b او اصلی ستريسونه په دی نقطه کی و ټاکي.



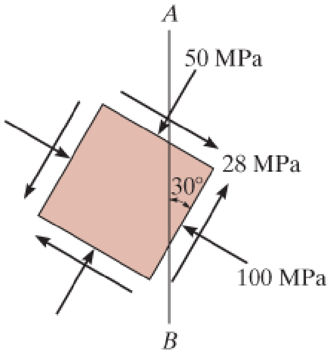
س - 9-20

س 9-21. ستريس په دوو سطحو په يوه نقط په لاندی انځور کی ښودل شوي. شيير ستريس په سطحه a-a او اصلی ستريسوته په دی نقط کی و ټاکي.



س - 9-21

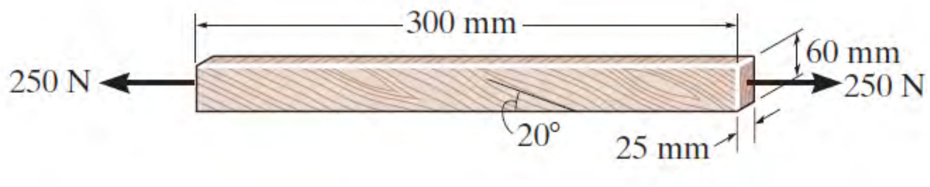
س 9-22. د ستريس حالت په يوه نقطه کی په لاندی انځور کی ښودل شوي. د ستريس اجزاوي چی په سطحه AB عمل کوی و ټاکي.



س - 9-22

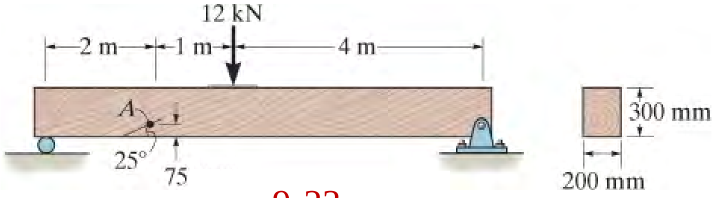
په دی لاندی سوالونو کی له هغه موادو کار اخیستل کیږي چی په 8 فصل کی تفیصل شوي.

س 9-23. د لرګیو داخلی رګونه ، د یوی تختی، په زاویه 20^0 له افقی کربنی سره موقعیت لري. نارمل او شییر ستریس (عمود او موازي) په رګونو که چیری په دی تخته یو محوري بار پلی شوي، وټاکي.



س - 9-23

س 9-24. د لرګیو په بیم یو بهرني بار 12 kN پلي شوي. که چیری د لرګیو رګونه ددی بیم په نقط *A* کی زاویه 25^0 له افقي کربني سره جوړه کړي، نارمل او شییر ستریس (عموداو موازی) په دی رګونو له بهرنی بار له امله معلوم کړي.

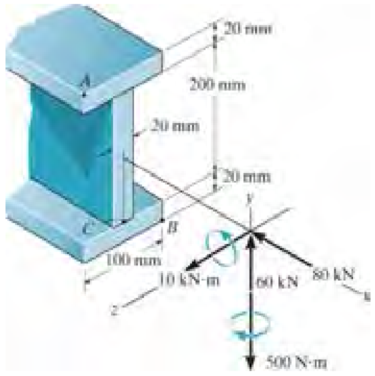


س - 9-23

س 9-25. داخلی بارونه په یوه برخه د بیم په لاندی انځور کی ښودل شوي. په سطحه - اصلی ستریسونه په ټکي *A* کی وټاکي. او هم اعظمی شییر ستریس په سطحه په دی ټکی وټاکي.

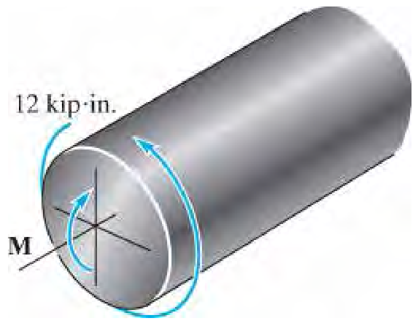
س 9-26. سوال 9-25 په ټکی *B* حل کړي.

س 9-27. سوال 9-25 په ټکی *C* حل کړي.



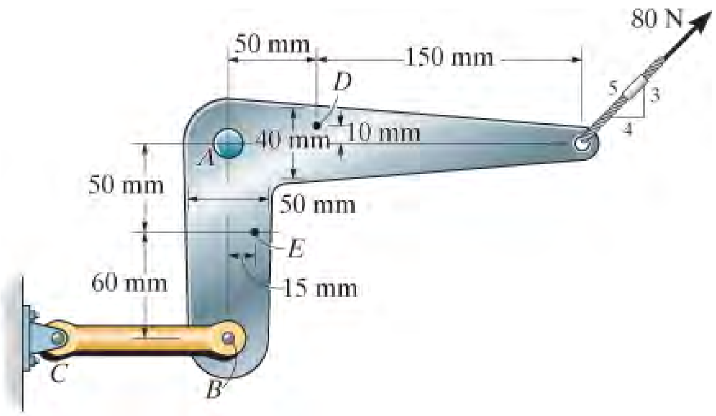
س 9-25/26/27

س 9-28*. یو د ګردی غوښی برخی میله 2 in قطر لري. تورک 12 kip.in او مؤمنت M په دی میله پلی شوي. لوي اصلي ستریس په هغه ټکی، چی اعظمی کوږوالي ستریس 15 ksi جوړ شوي، شتون لري. د کوږوالي مؤمنت مقدار معلوم کړي.



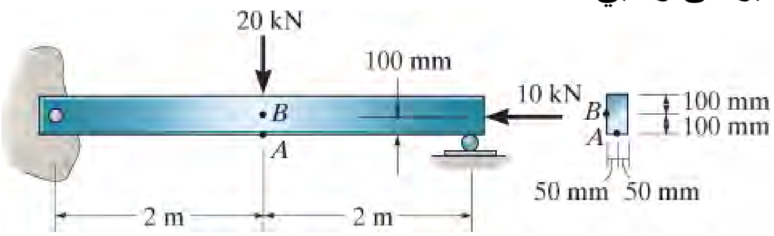
س - 9-28

س 9-29. د زنګ لاس ډنډه په اتکاء A کی پن شوي اود یو لنډ ی میلی BC په ذریعه تړلشوی. یو قوه 80 N پری پلی شوي، اصلی ستریس معلوم کړي (a) په ټکی D او (b) ټکی E. د زنګ لنډه میله له المونیم تختي چی 20 mm ضخامت لري جوړه شوي.



س - 9-29

س 9-30. لاندی بیم مستطیلی غوڅه برخه لري او بنودل شوی بار وربانډی پلي شوي. په ټکیو A او B کی اصلی ستریسونه و ټاکي . دا ټکي په چپ لور د بهرني بار موقعیت لري. پایلی په عناصرو په دی ټکیو کی وښيي.

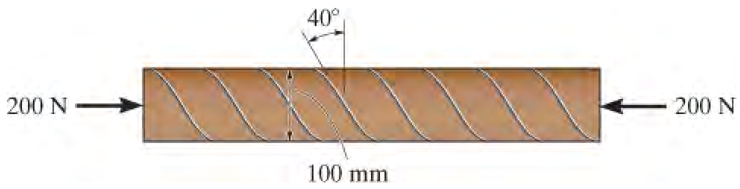


س - 9-30

س 9-31. د کاغذ یو تیوب، په تاویدو د کاغذي تختی په یوه برخه، د مار پیچ په شکل جوړ شوي دی، او بیا یي خواوی لکه څنګه چی په انځور کی ښودل شوي سریش شوي. د درز په اوږدو شییر

سټریس وټاکي، درز له افقی کربنی سره 50^0 موقعیت لري، کله چی یوه محوري ټیلوهونکی قوه 200N وربانذی عمل کړی. کاغذی تخته 2mm پنډوالی لري اود تیوب بیرونی قطر100 mm دي.

س *9-32. سوال 9-31 حل کولو لپاره لپاره نارمل سټریس چی عمود په درز عمل کړي و ټاکي.

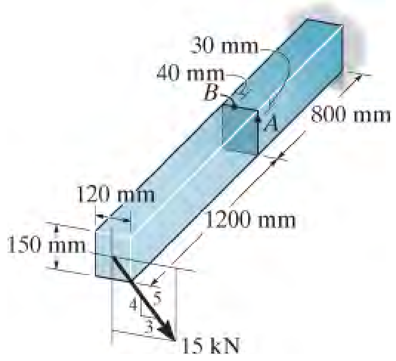


س - 9-31/32

س 9-33. شافت AB د یو هلیکوفتر 2-in قطر لري، او یو محوری کششی بار 10,000 lb او یو تورک د 300 lb.ft وربانذی پلی شوي. اصلی سټریسونه او اعظمی شییر سټریس په سطحه چی په یوه ټکی د شافت په سطحه عمل کړی وټاکي.

س - 9-33

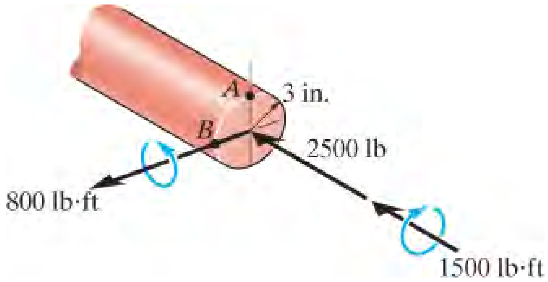
س 9-34. په دی لاندی کنټیلیور بیم اصلي سټریسونه په ټکیو A او B کی و ټاکي.



س - 9-34

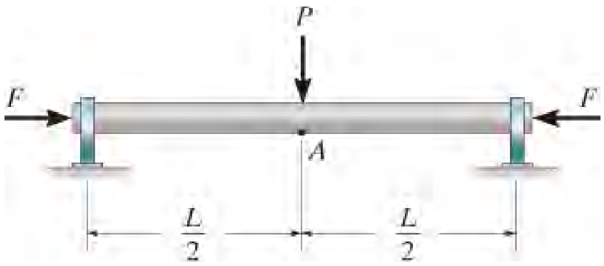
س 9-35. د یو توربین شافت 6-in قطر لري، او داخلی بارونه په غوځه برخه د شافت په ذریعه یو محوری قوه 2500 lb او یو کړیدونکی مؤمنت 800 lb.ft او یو تاویدونکی مؤمنت 1500 ft.lb وربانډی پلی شوی. اصلي ستریسونه په ټکی *A* کی وټاکي. او هم اعظمی شییر ستریس په سطحه، په دی ټکي کی مشخص کړي.

س *9-36. د یو توربین شافت 6-in قطر لري، او داخلی بارونه په غوځه برخه د شافت په ذریعه یو محوری قوه 2500 lb او یو کړیدونکی مؤمنت 800 lb.ft او یو تاویدونکی مؤمنت 1500 ft.lb وربانډی پلی شوی. اصلي ستریسونه په ټکی *B* کی وټاکي. او هم اعظمی شییر ستریس په سطحه، په دی ټکي کی مشخص کړي.



س - 9-35/36

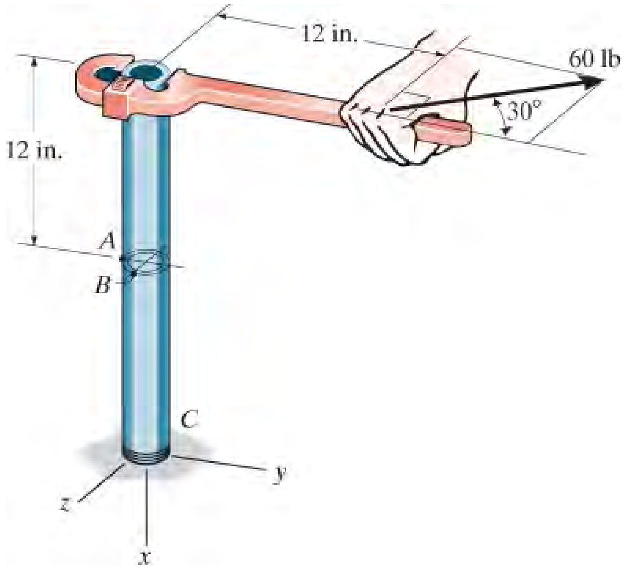
س 9-37. د شافت قطر *d* دی او ښودل شوي بهرني بارونه وربانډي پلی شوي. اصلي ستریسونه او اعظمی شییر ستریس په سطحه، په ټکی *A* کی و ټاکي. بیرینګونه تنها عمودی ریکشن په اتکاو کی جوړه وي.



س - 9-37

س 9-38. د یو فولادی پایپ داخلی قطر 2.75 in او بیرونی قطر یي 3 in دی. که چیری دا په اتکا *C* کی ټیګ ترل شوي وی او یوه افقي قوه 60-lb په لاس نیوکي د رینچ پلي شي، اصلی ستریسونه په ټکی *A* د پایپ چی په بیرونی سطحه یي موقعیت لری پیدا کړي.

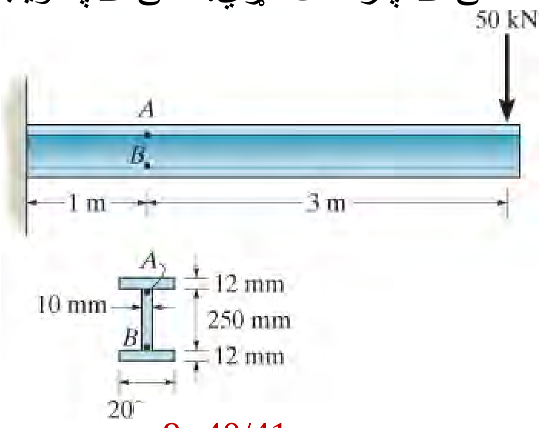
س 9-39. سوال 9-38 د ټکی *B* لپاره ،چی په بیرونی سطحه موقعیت لري ، حل کړي.



س 9- 38/39

س 9-40*. په لاندی پراخه فلنج بیم، 50-kN قوه پلی شوي. په ټکی *A* چی په ویب، د پورتني فلنج بنکته خوا کی موقعیت لری، اصلی ستریس هلته و ټاکي. که څه هم دا دقیق نه دی ، شییر ستریس د شییر فورمول په تطبیق سره وټاکي.

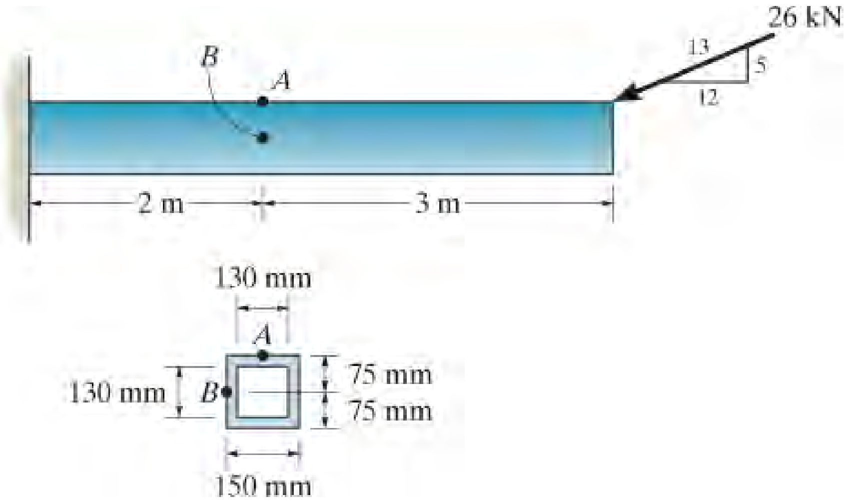
س 9-41. سوال 9-40 د ټکی *B* لپاره حل کړي. ټکی *B* په ویب د بنکته فلنج په پورته برخه کی موقعیت لري.



س 9- 40/41

س 9-42. په دی لاندی باکس بیم د عرض په مرکز کی، چی له هر اړخ 75 mm فاصله لري، یو 26-kN قوه پلی شوي. اصلی ستریسونه په ټکی A کی وټاکي او پایلي په یو عنصر په هغه ټکی کی وښيي. د شییر ستریس پیداکولو لپاره له شییر فورل څخه کار واخلي.

س 9-43. سوال 9-42 د ټکی B لپاره حل کړي.

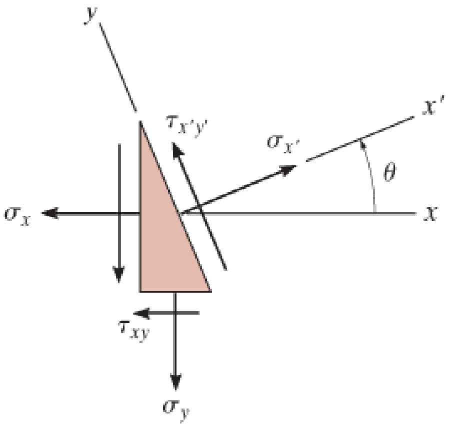


س 9- 42/43

9.4 د مهردایره – سطحی ستریس (MOHR'S CIRCLE- PLANE STRESS)

موږ به په دی برخه کی و ښیو ، چی څنګه د ستریس بدلون معادلی په ګرافیکی طرزالعمل سره چی کارول او یادول یي ډیری وختونه آسان دی تطبیق شي. سربیره پر دی، دا طریقه به موږ ته روښانه کړي چې څنګه د نارمل ستریس او شییر ستریس اجزاوی $s_{x`}$ او $t_{x`y`}$ ، که چیري هغه سطحه چې دوي ورباندی عمل کړی، د سمت بدلون وموومي، د دی اجزاو بدلون ورسره په اساني" ولیدل شي"، انځور 9-15a و ګوري.

که چیری معادلي 9-1 او 9-2 داسی ولیکو



(a)

انځور 15 -9

$$\sigma_{x'} - \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right) = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)\cos 2\theta + \tau_{xy}\sin 2\theta \qquad (9\text{–}9)$$

$$\tau_{x'y'} = -\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)\sin 2\theta + \tau_{xy}\cos 2\theta \qquad (9\text{–}10)$$

که چیری هره معادله مربع (squared) کړو اوبیا یي یو ځاي یا جمع کړو، دا فکتور q له منځ ځي.

پایلی په دی ډول دی

$$\left[\sigma_{x'} - \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)\right]^2 + \tau_{x'y'}^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2$$

په پای کی، ځکه چی s_x, s_y, t_{xy} پیژندل شوی ثابت اجزاوی دی، بیا دا معادلی په دا پورتني معادله داسی لیکلی شو

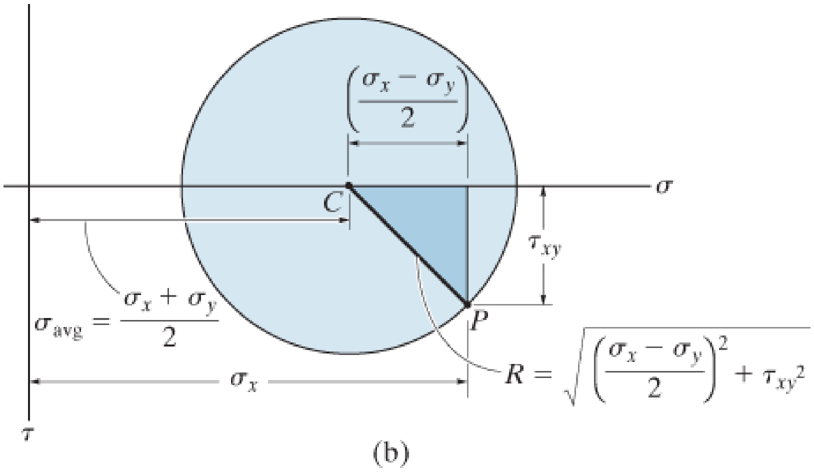
$$(\sigma_{x'} - \sigma_{avg})^2 + \tau_{x'y'}^2 = R^2 \qquad (9\text{–}11)$$

کوم چي

$$\sigma_{avg} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \qquad (9\text{–}12)$$

که موږ داسی محوری سیستم جوړ کوړو چیری چی مثبت سمت د s په ښي لور وی، او مثبت لور د t په ښکته لور شي، بیا معادله 11-9 رسم کړو، دا به ولیدل شي چی دا معادله د دایری استازیتوب کوي ،کوم چی شعاع يي R او مرکز يي د s محور په ټکي C $(s_{avg}, 0)$ کی دی، انځور 9-15b وګوري. دا دایره په نامه د **مهردایره** ***(Moh'r Circle)*** بلل کیږي، ځکه چی دا د یوه جرمني انجینر **اوتومهر** لخوا رامینځته شوی .

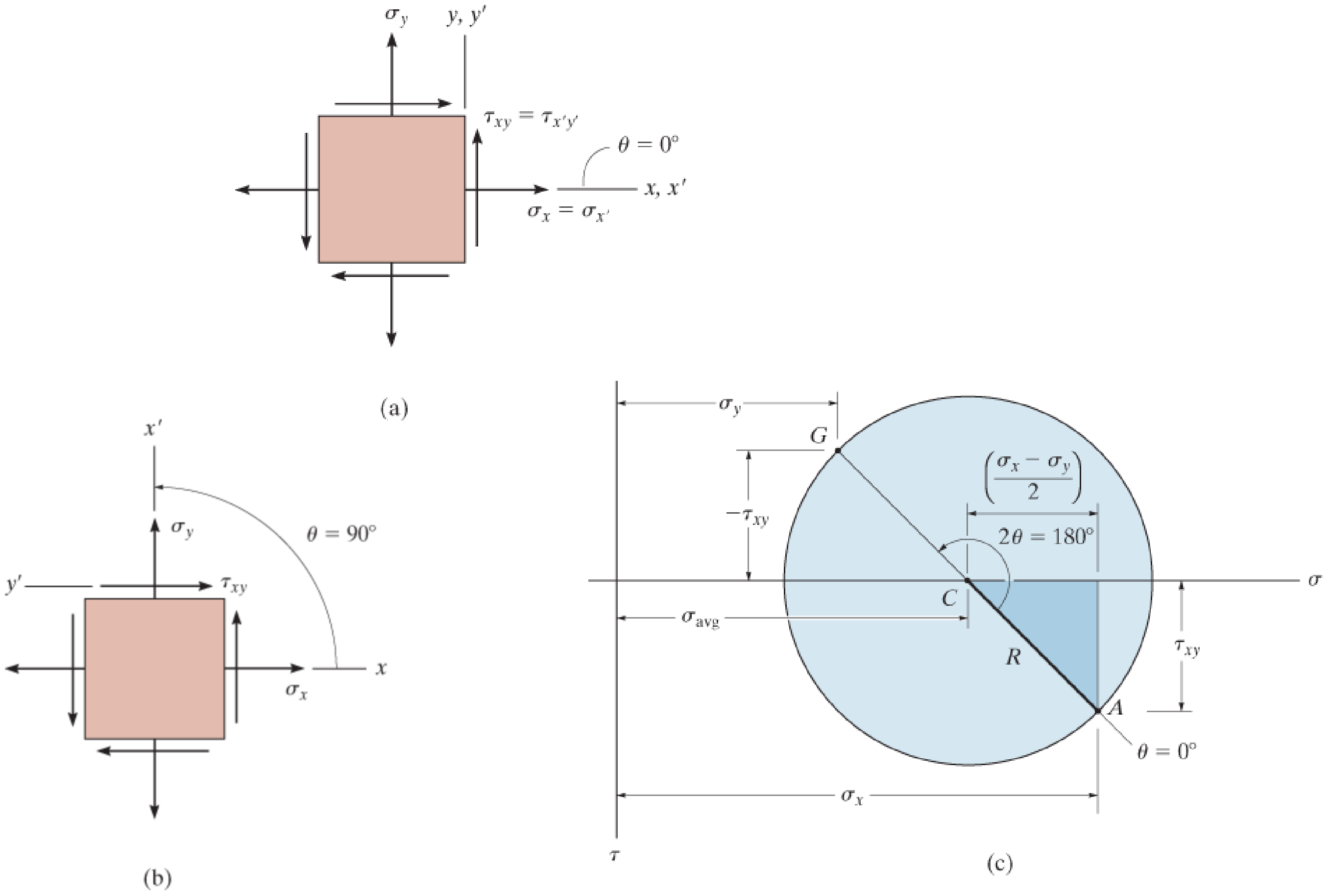


انځور 15 -9 (تکرار)

د مهر په دایره کې هر ټکی د ستریس له دوه برخو استازیتوب کوي $s_{x`}$ او $t_{x`y`}$ چې د وتلي محور $x`$ لخوا تعریف شوي او دعنصر په اړخ باندې عمل کړي ، کله چې دا محور په یو ځانګړي لوري q کې وي. د مثال په توګه، کله چې $x`$ د $x$ محور سره تطابق کړی وي لکه څنګه چې په انځور 9-16a کې ښودل شوي، بیا $q = 0^0$ او $s_{x`} = s_x$ ، $t_{x`y`} = t_{xy}$. موږ به دې ته د "ریفرینس نقطه " A په توګه اشاره وکړو او محوری موقعیت $A\ (s_x, t_{xy})$ به یې پلاټ کړو ، انځور 9-16c وګوري.

اوس د $x`$ محور په $90^0$ د ساعت په مقابل لوری څرخوو، انځور 9-16b وګوري. بیا $s_{x`} = s_y$، $t_{x`y`} = -t_{xy}$ دا ارزښتونه د ټکي G محوری موقعیت په $G(s_y, -t_{xy})$ په دایره کې دی، انځور 9-16c . په دې توګه، د شعاع کرښه 180 ° د ساعت د ستنې په مخالف لوري له "ریفرنس کرښی " CA څخه موقعیت لري. په بل عبارت، د q څرخ د محور $x`$ په عنصر کې به مطابقت ولري د $2q$ ګرزیدا په دایره کی په *ورته لوري* .

لکه څنګه چې په لاندې کرښلاره کې به بحث وشی، د مهر دایره د اصلي ستریسونو ، اعظمی شییر ستریس په سطحه او یا په خپلسري سطحه کی د ستریس ټاکلو لپاره کارول کیدی شي.



انځور 16 -9

د تحلیل کړنلاره

PROCEDURE FOR ANALYSIS

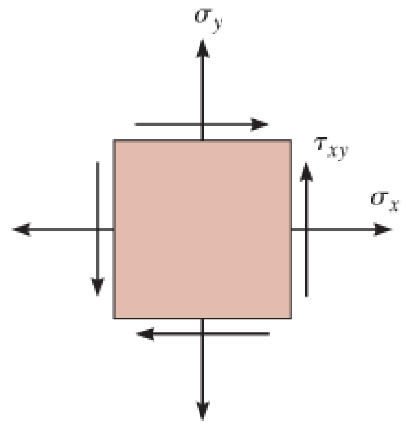
د **مهردایره** رسمولو او کارولو لپاره لاندې مرحلو ته اړتیا ده.

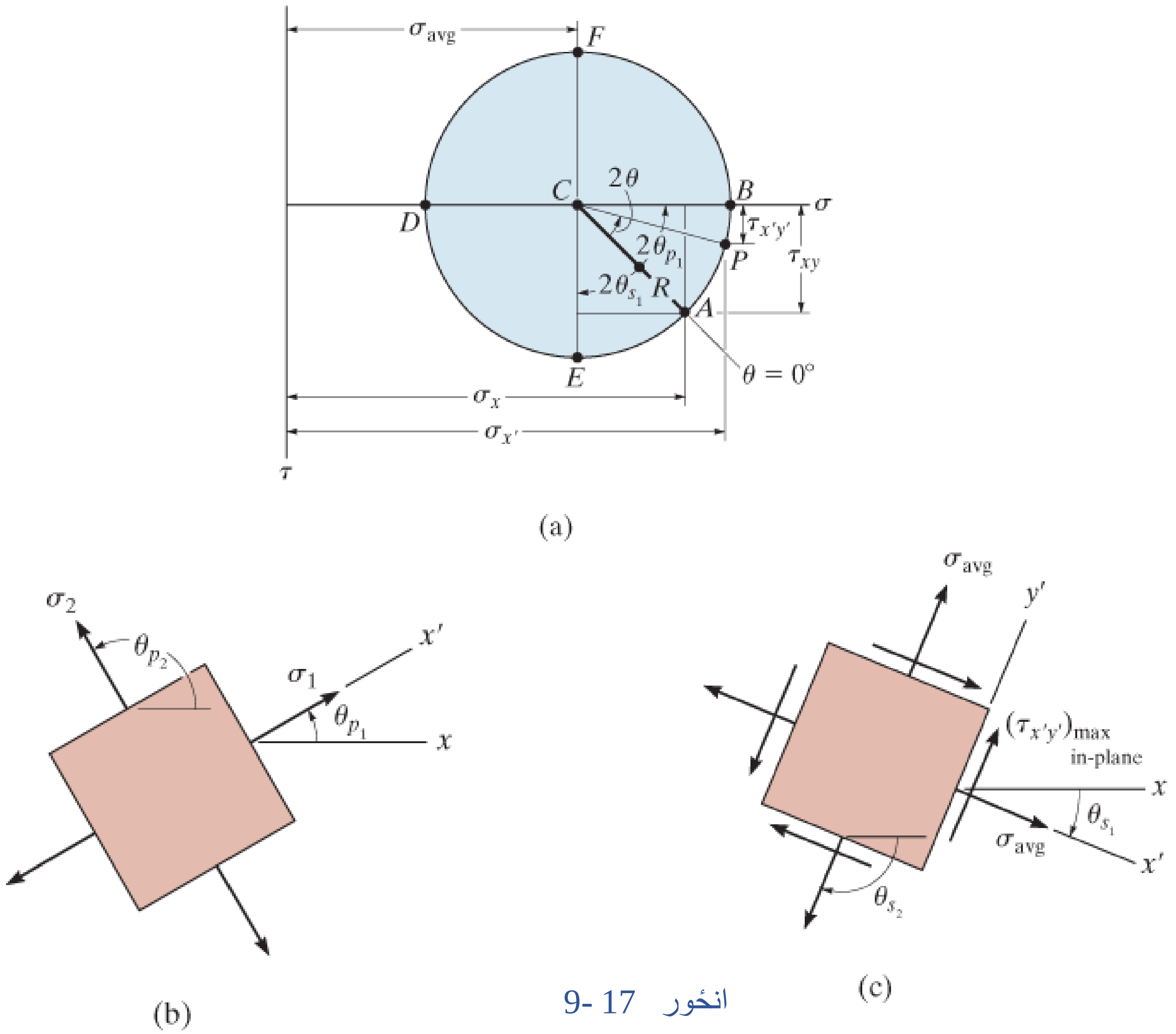
د دایرې جوړول (Construction of the Circle).

- محوري سیستم داسي رامینځته کړئ ، کوم چې افقي محور د نارمل ستریس، s ، استازیتوب وکړي او په ښي خوا به مثبت وي. عمودی محور، t ، د شییر ستریس استازیتوب کوي چې مثبت به یی په لاندی لوري وي، انځور *9-17a و ګوري.
- دs_x، s_y، t_{xy} ، انځور 9-17a، پلاټ لپاره د مثبت نښان کنوانسیون کارول کیږي او د دایرې مرکز C ، کوم چې د s په محور کې په فاصله د $s_{avg} = (s_x + s_y)/2$ له مرکز څخه موقعیت لري، انځور 9-17a .
- د "ریفرینس نقطه " A چې کواردینات یې $A\ (s_x, t_{xy})$ دي پلاټ کوو . دا ټکی د عنصر په ښي لاس عمودي مخ کې د نارمل او شییر ستریس اجزا وی څرګندوي، او څکه چې د $x`$ محور په x محور سره مطابقت لري، دا څرګند وي چې $q = 0^0$ ، انځور 9-17 ووینې.
- نقطه A د دایرې د مرکز C سره وصل کړئ او د مثلثاتو په واسطه CA مشخص کړئ. دا د دایرې R د شعاع استازیتوب کوي، انځور 9-17a و ګوري.
- کله چې R وټاکل شی، دایره سکیچ کړئ.

اصلي ستریس (Principal Stress)

- اصلي ستریسونه s_1 او s_2 $(s_1 >= s_2)$ کوردینات د B او D دی، چیرته چې دایره د s محور سره یو ځای نیښلوي ، د بیلګې په توګه، کله چې$t = 0$ ، انځور 9-17a .
- دا ستریسونه په هغه سطحه باندې عمل کوي چې د q_{p1} او q_{p2} زاویو لخوا تعریف شوي، انځور9-17b وګوري .له دې زاویو څخه یوه په دایره کې په q_{p2} ښودل کیږي. دا اندازه کیږي له شعاعی رفرینس کرښې CA څخه تر کرښې CB .
- د مثلثاتو په کارولو سره، د دایرې څخه q_{p1} مشخص کړئ. په یاد ولرئ دا چې د ګرزیدا لوري $2q_p$ په دایره کې (دلته دا د ساعت د ستنې په مخالف لوري پیښیږي) استازیتوب د ورته سمت د ګرزیدا q_p له ریفرینس محور ($+x$) څخه تر اصلی سطحی ($+x`$) انځور *9-17b و ګوری


σ_y
τ_{xy}
σ_x


σ_{avg}
F
C
2θ
B
σ
D
$\tau_{x'y'}$
$2\theta_{p_1}$
P
τ_{xy}
$2\theta_{s_1}$
R
A
E
$\theta = 0°$
σ_x
$\sigma_{x'}$
τ
(a)
σ_2
θ_{p_2}
x'
σ_1
θ_{p_1}
x
(b)
σ_{avg}
y'
$(\tau_{x'y'})_{max}$
in-plane
x
θ_{s_1}
σ_{avg}
x'
θ_{s_2}
(c)

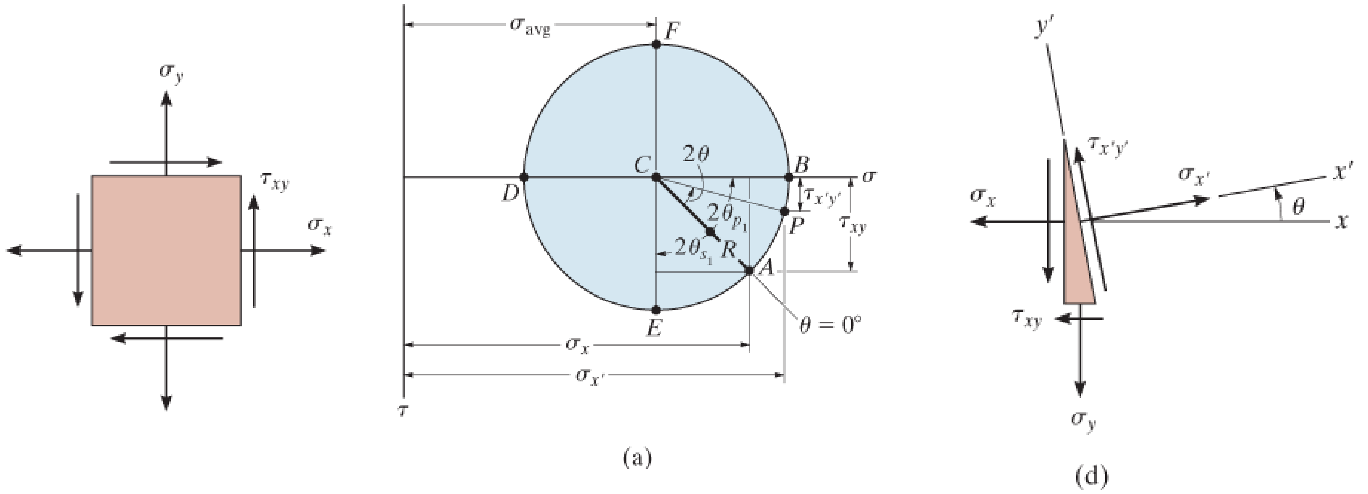
انځور 17 -9

اعظمی شییر سټریس په سطحه کې (Maximum In-Plane Shear Stress).

- منځنۍ نارمل سټریس او په سطحه کې ترټولو اعظمي سټریس اجزاوې له دایرې څخه د کوردینات په توګه د هرې یوې نقطې E یا F څخه ټاکل کیږي ، انځور 9-17a وګورئ.
- په دې حالت کې زاویې q_{s1} او q_{s2} جهت د هغوسطحې وړاندې کوي چې دا اجزاوې وربانديٰ عمل کوی، انځور 9-17c وګورئ. زاویه $2q_{s1}$ په انځور 9-17a کې ښودل شوی او د مثلثاتو په کارولو سره ټاکل کیدی شي. دلته ګرزیدا د ساعت د ستنې لوري په څیر واقع شوي، له CA څخه تر CE پورې، او q_{s1} باید په عنصر کې د ساعت د ستنیې په لور وي، انځور 9-17c* و ګوري.

- ## سټریس په خپل سرۍ(انتخابی) سطحو (Stresses on Arbitrary Plane)

- د نارمل او شییر سټریس اجزا $s_{x`}$ او $t_{x`y`}$ په ټاکل شوې سطحه یا $x`$ محور باندې، کوم چې په زاویه q تعریف شوی، عمل کړې انځور 9-17d . دا اجزاوی په موندلو د نقطې P کواردینات په دایره باندې د هندسی په کارولو سره ترلاسه کیدی شي، انځور 9-17a .
- د نقطی P د موندلو لپاره، پیژندل شوې زاویه q (په دې حالت کې د ساعت د ستنې په مخالف لوري)، انځور 9-17d، باید په دایره باندی په ورته لور (د ساعت د ستنې په مخالف لوري) په اندازه د $2q$، له ریفرنس کرښې CA تر شعاعی کرښی CP پورې، انځور 9-17a* ، اندازه شي.
- *که t محور پورته مثبت جوړ شوی وي، نو بیا په دایره کې دا زاویه د $2q$، اندازه کیږي په مخالف لوري د زاویه د q سمت د $x`$ محور کې .



انځور 9- 17 (تکرار)

مثالونه

مثال 9.7

د پلې شوی بهرني بار له امله په ټکی A د شافت کې د ستریس حالت په انځور 9-18a کې ښودل شوي. اصلی ستریسونه په دی ټکی کې و مومي.

حل (SOLUTION)

د دایرې جوړه ول (Construction of the Circle)

له انځور 9-18a موږ لرو

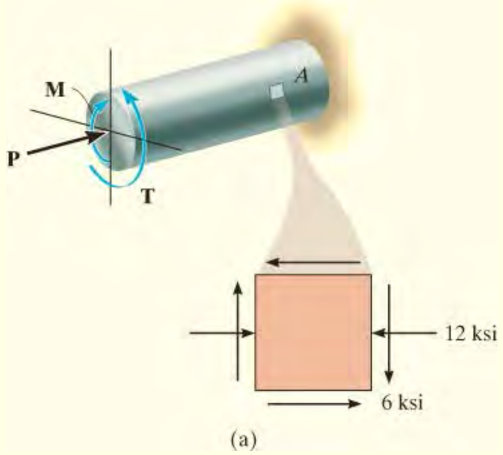
$$\sigma_x = -12 \text{ ksi} \qquad \sigma_y = 0 \qquad \tau_{xy} = -6 \text{ ksi}$$

د دایرې مرکز په محور s موقعیت لرې په دی لاندی نقط کی

$$\sigma_{avg} = \frac{-12 + 0}{2} = -6 \text{ ksi}$$

د ریفرینس نقطه $A(-12, -6)$ او د دایرې مرکز $C(-6, 0)$ پلاټ کوو، چی په انځور 9-18b کی ښودل شوي. له سیورې شوی مثلث د دایرې شعاع داسی موندل کیږی

$$R = \sqrt{(12 - 6)^2 + (6)^2} = 8.49 \text{ ksi}$$



انځور 18 -9

اصلي ستريس (Principal Stress)

اصلی ستریسونه په کواردینا تو د ټکيو B او D سره په ګوته کيږي. موږ لرو د $s_1 > s_2$

$$\sigma_1 = 8.49 - 6 = 2.49 \text{ ksi} \qquad \textit{Ans.}$$

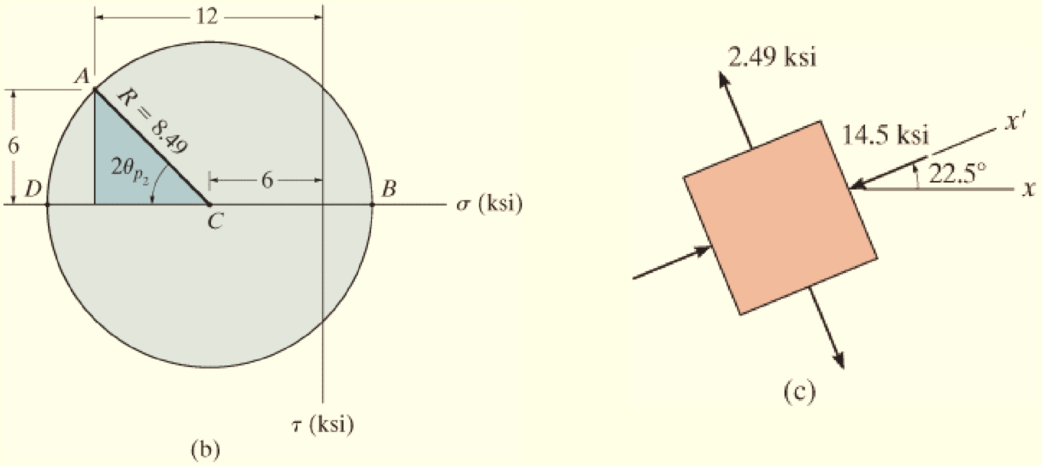
$$\sigma_2 = -6 - 8.49 = -14.5 \text{ ksi} \qquad \textit{Ans.}$$

د عنصر جهت په محاسبه کولو د زاویې $2q_{p2}$ چې په انځور 9-18b کې ښودل شوي موندل کيدی شي. دا زاويه د ساعت د ستنې مخالف جهت له CA تر CD ده. دا جهت د q_{p2} د s_2 او د هغې اړوند اصلی سطحه تعريفوي. موږ لرو

$$2\theta_{p_2} = \tan^{-1}\frac{6}{12-6} = 45.0^\circ$$

$$\theta_{p_2} = 22.5^\circ$$

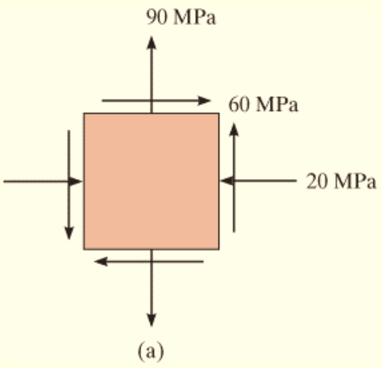
دا عنصر داسی جهت شوی چې د `x محور يا s_2 لاربنود شوي په 22.5^0 د ساعت د ستنې په مخالف جهت له افقی محور (x محور)، لکه څنګه چې په انځور 9-18c کې ښودل شوي.



انځور 18 -9 (تکرار)

مثال 9.8

د ستريس حالت په يو ټکي کې په انځور 9-19a کې ښودل شوي. اعظمي شيير ستريس په سطحه په دې ټکي وټاکئ.



انځور 19 -9

حل (SOLUTION)

د دايرې جوړه ول (Construction of the Circle)

له انځور 9-19a دا لاندې ډيټا په لاس راځي:

$$\sigma_x = -20 \text{ MPa} \qquad \sigma_y = 90 \text{ MPa} \qquad \tau_{xy} = 60 \text{ MPa}$$

د s او t محورونه جوړ شوی او هغه په انځور 9-19b کې ښودل شوي. د دايرې مرکز په C په محور s موقعيت لرې، او په دې ټکي کې

$$\sigma_{avg} = \frac{-20 + 90}{2} = 35 \text{ MPa}$$

ټکي C او ريفرينس نقطه (60 , 20-) A پلاټ کوو. په سيورى شوی مثلث د پيتاګورم (Pythagorean theorem) قضيه تطبيق کوو تر څو د دايرې شعاع CA په لاس راوړو، مور لرو

$$R = \sqrt{(60)^2 + (55)^2} = 81.4 \text{ MPa}$$

اعظمی شییر ستریس په سطحه کی (Maximum In-Plane Shear Stress)

اعظمی شییر ستریس په سطحه کی او اوسط نارمل ستریس په ټکی E (او یا F) په دایره باندی ښودل شوي. کواردینات د ټکی E عبارت دی په (35, 81.4) او هغه راکوي

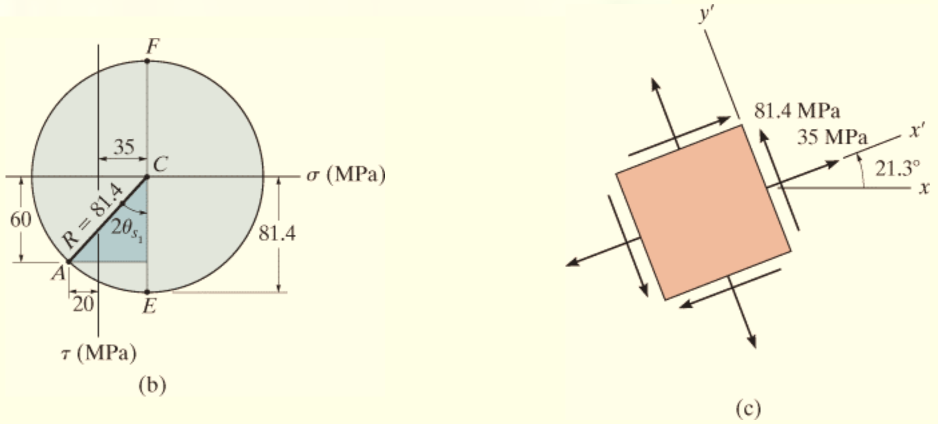
$$\sigma_{avg} = 35 \text{ MPa} \qquad \textit{Ans.}$$

$$\tau_{\substack{max \\ in\text{-}plane}} = 81.4 \text{ MPa} \qquad \textit{Ans.}$$

زاویه q_{s1} چی له CA تر CE د ساعت د ستني مخالف اندازه شوي لدی دایری پیدا کیدی شي، هغه په $2q_{s1}$ ښودل شوي. موږ لرو

$$2\theta_{s_1} = \tan^{-1}\left(\frac{20 + 35}{60}\right) = 42.5^\circ$$

$$\theta_{s_1} = 21.3^\circ \qquad \textit{Ans.}$$

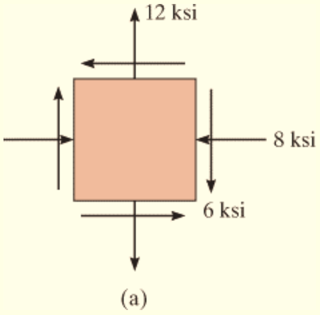


انځور 19 -9 (تکرار)

د ا زاویه چی د ساعت د ستني مخالف جهت لري د `x محور سمت ټاکي ، انځور 9-19c. ځکه چی د ټکي $E$ کوردینات مثبت دی، نو بیا اوسط نارمل ستریس او اعظمی شییر ستریس په سطحه، دواړه په مثبت جهت د `x او `y لکه څنګه چی ښودل شوی، عمل کړي.

مثال 9.9

د ستریس حالت په یو ټکی کی په انځور 9-20 a کی ښودل شوي. د ستریس حالت په یو عنصر چی 30^0 د ساعت د ستنې مخالف جهت له ښودل شوی حالت څخه و لري و ښيي.



انځور 20 -9

حل (SOLUTION)

د دایری جوړه ول (Construction of the Circle)

له انځور 9-20a څخه دا لاندی ډیټا په لاس راځي:

$$\sigma_x = -8 \text{ ksi} \qquad \sigma_y = 12 \text{ ksi} \qquad \tau_{xy} = -6 \text{ ksi}$$

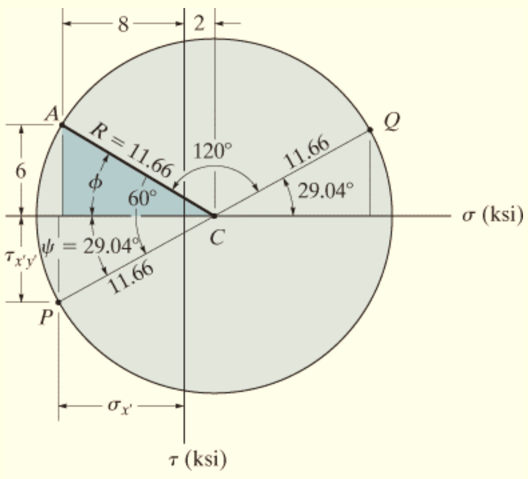
د s او t محورونه جوړ شوی او هغه په انځور 9-20b کی ښودل شوي. د دایری مرکز په C کی په محور s موقعیت لری، او په دی ټکی کی

$$\sigma_{avg} = \frac{-8 + 12}{2} = 2 \text{ ksi}$$

د ریفرینس نقطه د $q=0^0$ کوارډينات A (-8 , -6) دي. له سیوری شوی مثلث د دایری شعاع CA په لاس راوړو ، موږ لرو

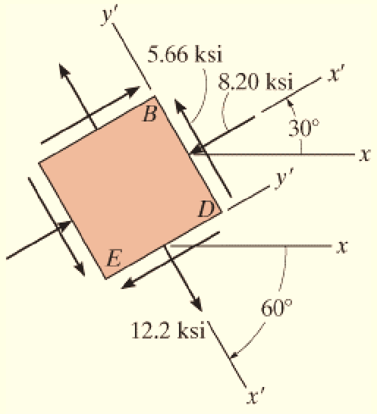
$$R = \sqrt{(10)^2 + (6)^2} = 11.66$$

ستریس په 30^0 عنصر (Stress on 30^0 Element)



(b)

انځور 20 -9 (تکرار)



(c)

ځکه چی عنصر 30^0 د ساعت د ستني مخالف جهت ګرزیدا کړي ، موږ باید شعاعي کرښه CP په اندازه د $2(30^0) = 60^0$ د ساعت د ستني مخالف جهت له CA $(q=0^0)$ اندازه کړو، انځور 9-20b . کوارډينات د ټکی P ($s_{x`}$ , $t_{x`y`}$) باید وټاکو. د دایرې له هندسې داسې لیکلی شو

$$\phi = \tan^{-1}\frac{6}{10} = 30.96^\circ \qquad \psi = 60^\circ - 30.96^\circ = 29.04^\circ$$

$$\sigma_{x'} = 2 - 11.66\cos 29.04^\circ = -8.20 \text{ ksi} \qquad \textit{Ans.}$$

$$\tau_{x'y'} = 11.66\sin 29.04^\circ = 5.66 \text{ ksi} \qquad \textit{Ans.}$$

دا دوه د ستریس اجزاوی د هغه عنصر په مخ BD باندې عمل کوي چې په انځور 9-20c کې ښودل شوي ، ځکه چې د دې مخ لپاره د `x محور د ساعت د ستني په مخالف جهت 30^0 درجې کی د x محور څخه ښودل شوي دی.

د ستریس اجزا کوم چې د عنصر څنګ ته مخ DE باندې عمل کوي ،دا د مثبت x محور څخه د ساعت ستني په لور 60 درجې موقعیت لري انځور 9-20c و ګوري، په دایره کې د Q نقطې کوارډينات په واسطه ښودل شوي . دا ټکی په شعاعي کرښه CQ پروت دی، او دا 180^0 درجې له CP څخه یا د CA څخه په 120^0 درجې د ساعت د ستني په لور موقعیت لري. د Q نقطې کوردینات عبارت دی په

$$\sigma_{x'} = 2 + 11.66 \cos 29.04° = 12.2 \text{ ksi} \qquad \textit{Ans.}$$

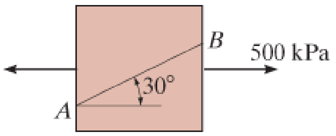
$$\tau_{x'y'} = -(11.66 \sin 29.04) = -5.66 \text{ ksi} \quad \text{(check)} \qquad \textit{Ans.}$$

نوټ: دلته $t_{x`y`}$ په سمت د `y- عمل کړی ، انځور 9-20c ووینې.

بنسټیز سوالونه

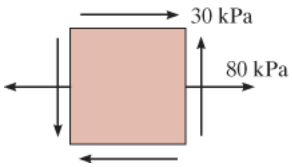
FUNDAMENTAL PROBLEMS

ب 9-7 . نارمل او شییرسټریس چې په سطحه AB عمل کړی وټاکی. د موهر له دایرې کار واخلي.



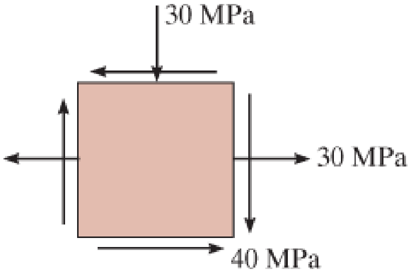
ب 9-7

ب 9-8 . د موهر له دایرې کار واخلي تر څو اصلی سټرسونه په ټکی کی وټاکي. او هم د عنصر اړوند سمت نظر لاندې بنودل شوی عنصر ته معلوم کړي.



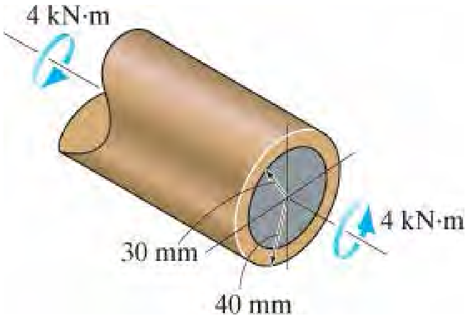
ب 9-8

ب 9-9 . د موهر دایره رسم کړي او اصلي سټریسونه وټاکي.



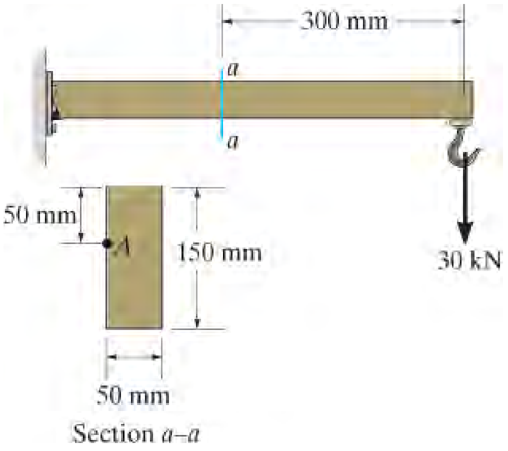
ب 9-9

ب 9-10 . په دی لاندی خالی ګردی شافت يو تورک 4 kN.m پلي شوي. د شافت په سطحه په یوه ټکی کی اصلی سټریسونه وټاکی.



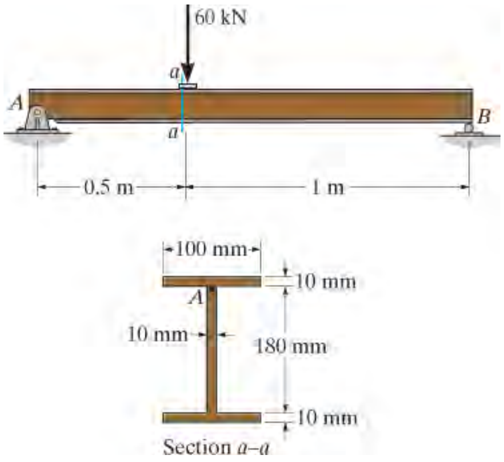
ب -9

ب 9-11 . د A په ټکی کی د بیم په a-a غوڅه برخه کی اصلی سټریسونه وټاکي.



ب 9-11

ب 9-12 . د A په ټکی کی د بیم د a-a په غوځه برخي کی اعظمی شییر سټریس په سطحه کی وټاکي. دا برخه په کیڼ اړخ د 60-kN بهرنی بار موقعیت لري. ټکی A له فلنج لاندی موقعیت لري.



ب 9-12

سوالونه

PROBLEMS

س 9-44*. سوال د موهر دایری په کار ولو سره حل کړي. 9-2

س 9-45. سوال د موهر دایری په کار ولو سره حل کړي. 9-3

س 9-46. سوال د موهر دایری په کار ولو سره حل کړي. 9-6

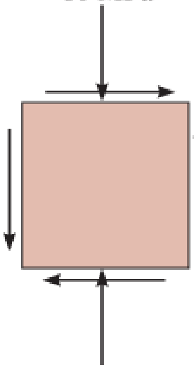
س 9-47. سوال د موهر دایری په کار ولو سره حل کړي. 9-11

س 9-48. سوال د موهر دایری په کار ولو سره حل کړي. 9-15

س 9-49. سوال د موهر دایری په کار ولو سره حل کړي. 9-16

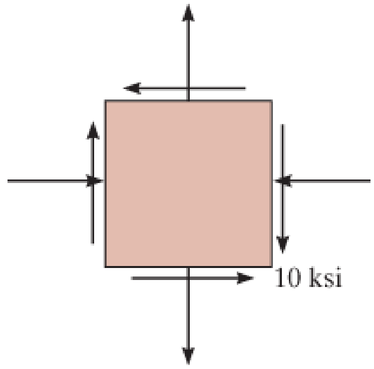
س 9-50. د انځور 9-17a د ستړيس حالت د موهر دايرى په کار ولو سره وټا کي. وښيې چې د ټکی $P\ (s_{x`},\ t_{x`y`})$ کواردينات په دايره ورته ارزښتونه لري لکه د ستړيس بدلون معادلي 9-1 او 9-2.

س 9-51. معلوم کړي (a) اصلی ستړيسونه او (b) اعظمی شيير ستړيس په سطحه او اوسط نارمل ستړيس. د عنصر سمت په هرحالت کی وټاکی.



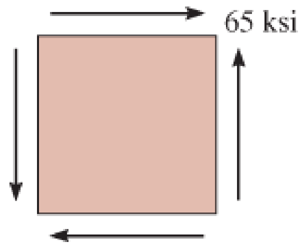
ب 9-51

س *9-52. معلوم کړي (a) اصلی ستړيسونه او (b) اعظمی شيير ستړيس په سطحه او اوسط نارمل ستړيس. د عنصر سمت په هرحالت کی وټاکی.



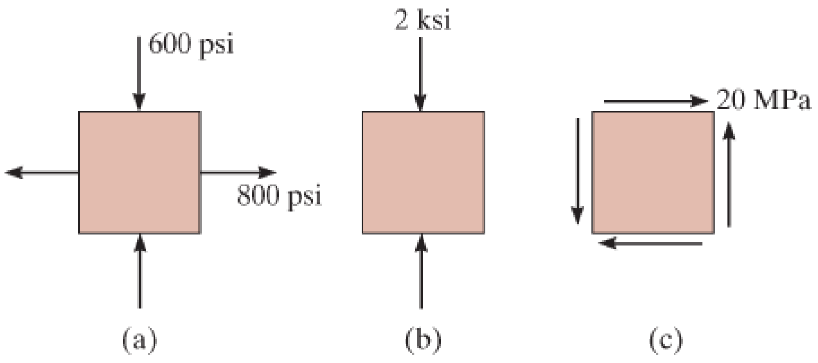
ب 9-52

س 9-53. د ستړيس معادل حالت په يوه عنصر ، چې جهت يي 60^0 د ساعت د ستني په سمت له لاندی عنصر څخه وی، معلوم کړي.



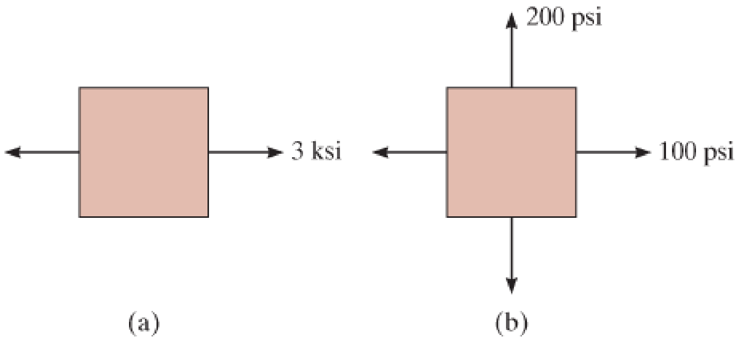
ب 9-53

س 9-54. د موهر دایره رسم کړي تر څو دا لاندې د ستریس حالتونه تشریح کړي.



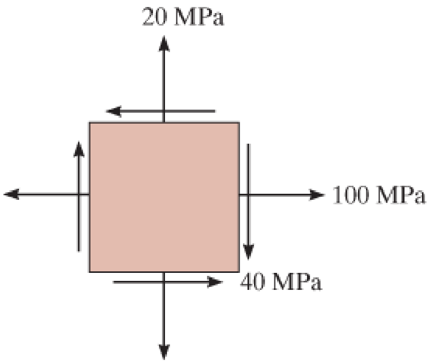
ب 9-54

س 9-55. د موهر دایره رسم کړي تر څو دا لاندې د ستریس حالتونه تشریح کړي.



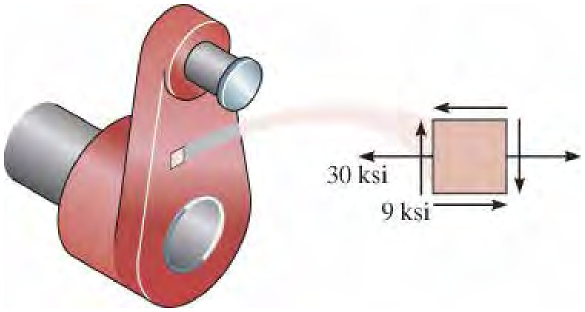
ب 9-55

س *9-56. معلوم کړي (a) اصلی ستریسونه او (b) اعظمی شییر ستریس په سطحه او اوسط نارمل ستریس. د عنصر سمت په هرحالت کی وښاکی.



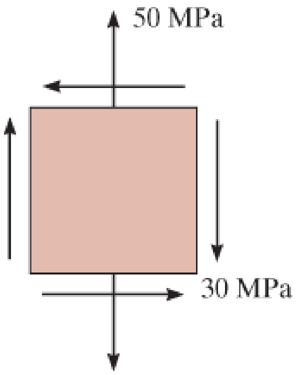
ب 9-56

س 9-57. معلوم کړي (a) اصلی سټریسونه او (b) اعظمی شییر سټریس په سطحه او اوسط نارمل سټریس. د عنصر سمت په هرحالت کی وټاکی.



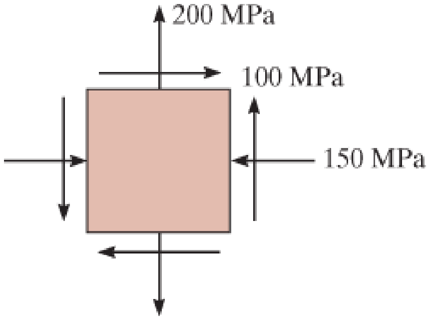
ب 9-57

س 9-58. معلوم کړي (a) اصلی سټریسونه او (b) اعظمی شییر سټریس په سطحه او اوسط نارمل سټریس. د عنصر سمت په هرحالت کی وټاکی.



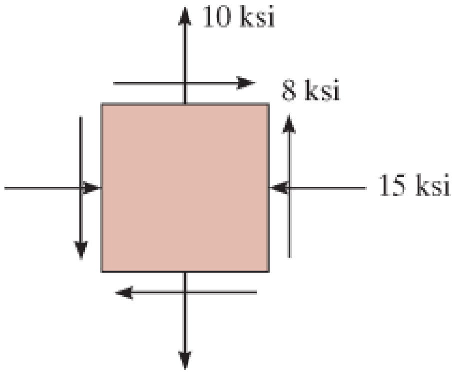
ب 9-58

س 9-59. معلوم کړي (a) اصلی ستړیسونه او (b) اعظمی شییر ستړیس په سطحه او اوسط نارمل ستړیس. د عنصر سمت په هرحالت کی وټاکی.



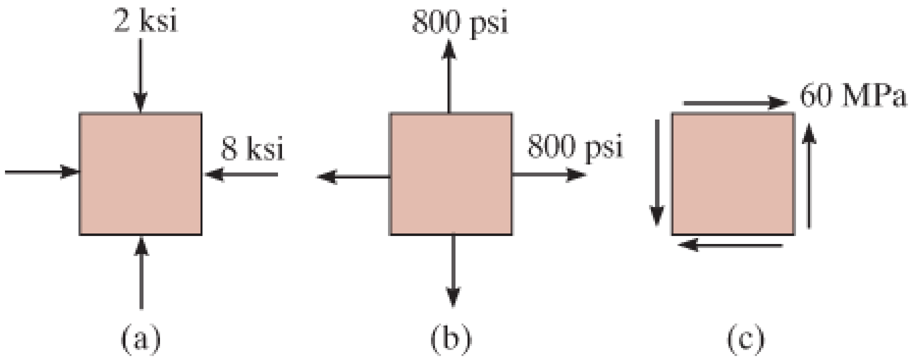
ب 9-59

س 9-60*. معلوم کړي (a) اصلی ستړیسونه او (b) اعظمی شییر ستړیس په سطحه او اوسط نارمل ستړیس. د عنصر سمت په هرحالت کی وټاکی.



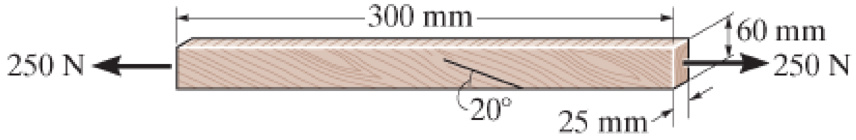
ب 9-60

س 9-61. د موهر دایره رسم کړي تر څو دا لاندی د ستړیس حالتونه تشریح کړي.



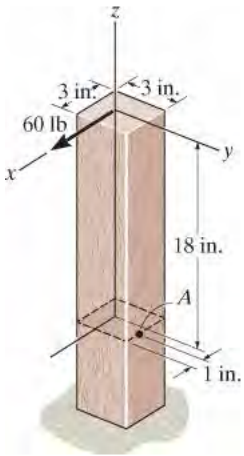
ب 9-61

س 9-62. د لرګي رګونه له افقي کربښی سره 20^0 زاويه جوړه وي. نارمل او شيير ستريس چی عمود او موازي په رګونو د تختی عمل کړي وټاکی. په تخته باندی 250 N محوری بار پلی شوي.



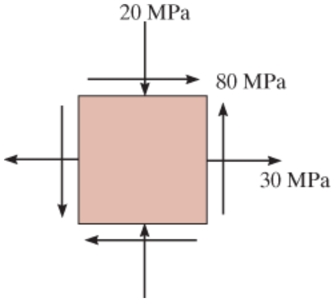
ب 9-62

س 9-63. دا لاندی ستني په بنکته پاي کی کلکه تړل شوي او یو افقي قوه وربانډی پلی شوي. معلوم کړي (a) اعظمی شيير ستريس په سطحه په ټکی A کی او (b) اصلی ستريسونه په A کی.



ب 9-63

س 9-64*. اصلی ستريسونه او اعظمی شيير ستريس په سطحه او اوسط نارمل ستريس معلوم کړي. د عنصر سمت په هرحالت کی وټاکی.



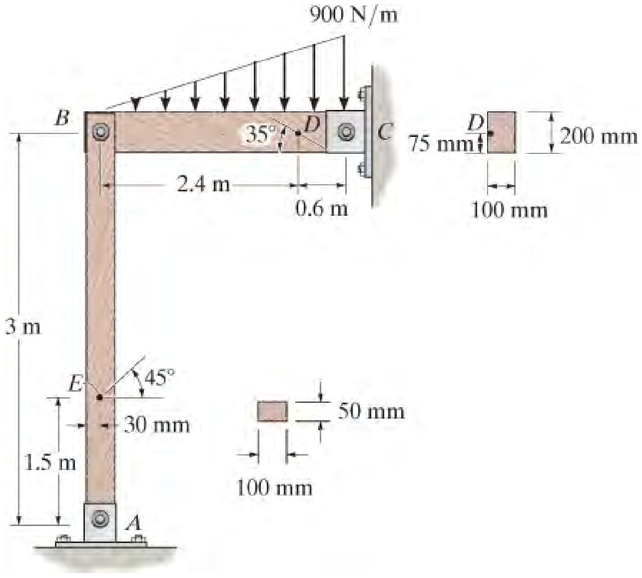
ب 9-64

س 9-65. د نازک دیوال پایپ داخلي قطر 0.5 in او ضخامت يي 0.025 in دي. که چیری داخلی فشار 500 psi او محوری کششی او تاویدونکي (torsional) بار، لکه څنګه چی په لاندی انځور کی ښودل شوي، وربا‌ندی پلی شي. اصلی ستریس په یوه ټکی په سطحه د پایپ و ټاکي.

ب 9-65

س 9-66. په دی لاندی چوکات باندي یو مثلثي ویش بهرنی بار پلی شوي. نارمل او شییر ستریس په ټکی D کی چی په عمودي او موازي لورونو په ترتیب سره له رګونو د لرګي سره عمل کړي وټاکی. د لرګي رګونه د افقی محور سره 35^0 درجی زاویه جوړه وی.

س 9-67. په دی لاندی چوکات باندي یومثلثي ویش بهرنی بار پلی شوي. نارمل او شییر ستریس په ټکی E کی چی په عمودي او موازي لورونو په ترتیب سره له رګونو د لرګي سره عمل کړي وټاکی. د لرګي رګونه د افقی محور سره 45^0 درجی زاویه جوړه وی.

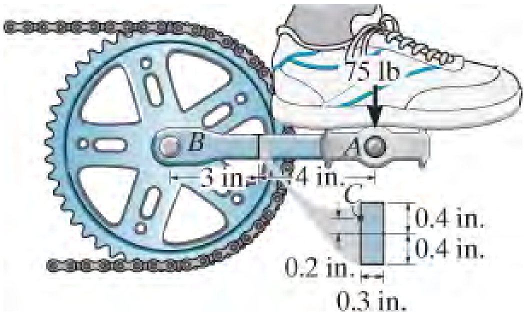


ب 9-66/67

س *9-68. د هلیکوپټر تاویدونکي شافت باندی کششی قوه او تاویدونکی مؤمنت عمل کوی لکه چی ښودل شوی تر څو د شافت گرزیدونکی پری د پورته کیدو داسی قوه جوړه کړی چی هلیکوپټر په هوا کی ودریدلی شی. که د شافټ قطر 6 in وي اصلی سټریسونه او اعظمی شییر سټریس په سطحه په یوه ټکی کی د شافټ په سطحه و ټاکي.

ب 9-68

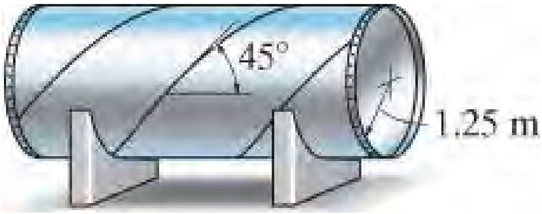
س 9-69. د بایسکل د پینی میلی غوڅه برخه په لاندی انځور کی ښودل شوي. که چیری دا میله د گیر سره په B کی کلکه ټړل شوی او حرکت و نکړي کله چی یوه 75 lb قوه ورباندی عمل وکړي. اصلي سټریسونه په غوڅه برخه، په ټکی C کی وټاکي.



ب 9-69

س 9-70. د یو کروي فشار ټانک داخلی شعاع 5 ft فټه او د دیوال ضخامت یي 0.5 in انچه دی. د سټریس حالت معلومولو لپاره د موهر (Mohr's) دایره جوړه کړي او د سټریس حالت په یوه ټکی په سطحه د کوری تشریح کړي. داخلی فشار په کوره کی 80 psi دي.

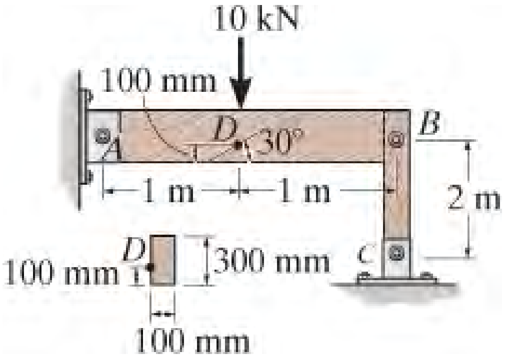
س 9-71. د یو سلندري فشار ټانک داخلی شعاع 1.25 m او د دیوال ضخامت یي 15 mm ملي متره دی. دا له فولادی تختو چی په 45^0 درز ویلډ شوي، جوړشوي . د نارمل او شییر ستریس اجزاوی د د درز په اوږدوالی وټاکي. داخلی فشار د ټانک 8 MPa دی.



ب 9-71

س *9-72. په ټکي *D* کی نارمل او شییر ستریس چی عمود او موازي د لرګی په رګونو دی و ټاکي. د لرګي رګونه د افقي کربښي سره 30^0 درجی زاویه جوړه وی. ټکی *D* د 10-kN بهرنی قوی په کیڼ اړخ کی موقعیت لري.

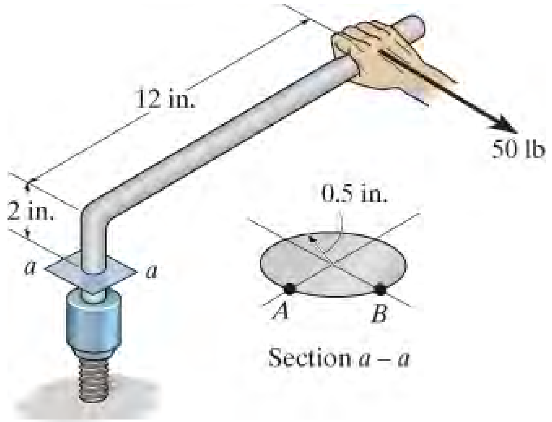
س 9-73. په ټکي *D* کی اصلی ستریس و ټاکي. ټکی *D* د 10-kN بهرنی قوی په کیڼ اړخ کی موقعیت لري.



ب 9-72/73

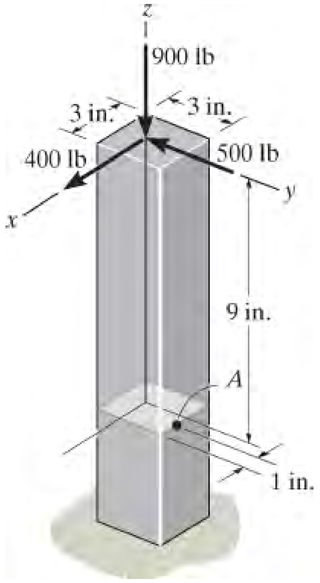
س 9-74. د باکس رینچ په لاستی یوه 50 lb پونډ قوه پلی شوي ده، اصلی ستریسونه او اعظمی شییر ستریس په سطحه په ټکی *A* د رینچ دغوښی برخی چی په سطحه *a-a* موقعیت لری و ټاکي. سمتونه ددی ستریسونو او پایلي يي په دی ټکی په یوه عنصر و ښيي.

س 9-75. د باکس رينچ په لاستی يوه 50 lb پونډ قوه پلی شوي ده، اصلی ستريسونه او اعظمی شيير ستريس په سطحه په ټکی B د رينچ دغوښی برخی په سطحه a-a موقعيت لری و ټاکي. ستونه ددی ستريسونو او پايلي يي په دی ټکی کی په يوه عنصر و ښيي.



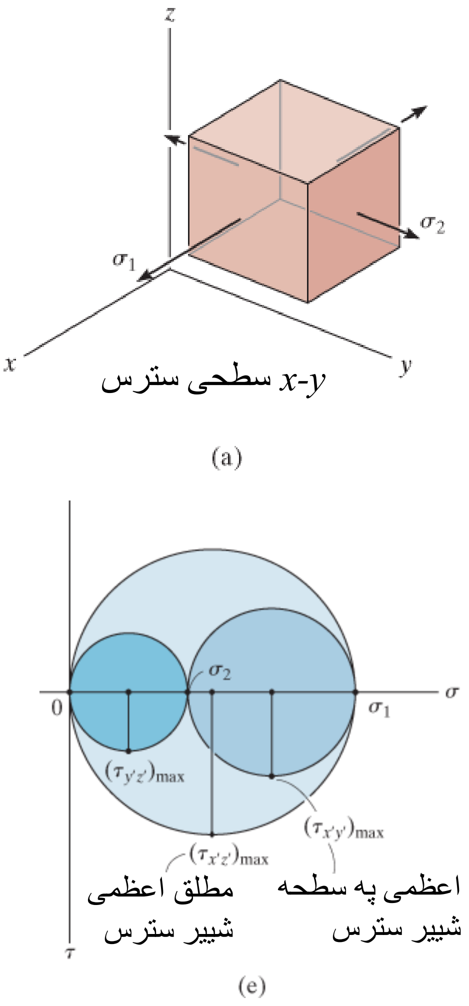
ب 9-74/75

س *9-76. دا لاندی پايه په ښکته پای کی په کلکه اتکا ټينګه ټړل شوي ، او بهرني بار چی وربانډی پلی شوي په لاندی انځور کی ليدل کيږي . تاسو و ټاکي (a) اعظمی شيير ستريس په سطحه په A کی او (b) اصلی ستريسونه په A کی.



ب 9-76

9.5 مطلق اعظمی شییر ستریس (ABSOLUTE MAXIMUM SHEAR STRESS)



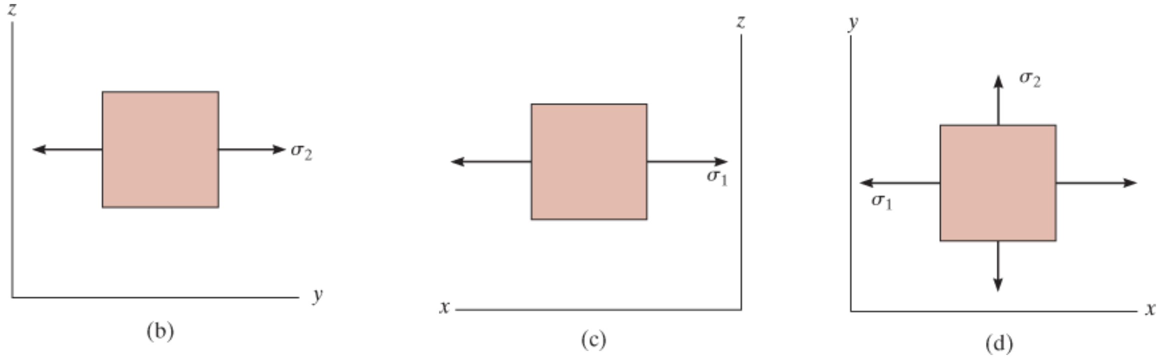
انځور 9-21

ځکه چې د نرمو (ductile) موادو مقاومت د شییر ستریس په مقابل کی په توانایي پورې اړه لري ، کله چې یو بهرنی بار وربادی پلي شي، دا مهمه ده چې ***مطلق اعظمي شییر ستریس*** په موادو کې وموميځ. د بڼودلو لپاره چې دا څنګه موندل کیدی شي، موږ به خپل پام یوازې تر ټولو عمومی حالت د سطحی ستریس * (plane stress*) ته محدود کړو لکه څنګه چې په انځور 9-21a کې ښودل شوي. دلته دواړه s_1 او s_2 کششي ستریسونه دی. که موږ عنصر په یو وخت کې په دوو ابعادو کې وګورو، په سطحی y–z ، x–z، او x–y ، انځورونه 9-21b, 9-21c او 9-21d ، بیا موږ د موهر دایره د هر یوه حالت لپاره وکاروو تر څو اعظمی شییر ستریس په سطحه د هرحالت لپاره و ټاکو. د مثال په توګه، د موهر دایره د 0 او s_2 ترمنځ دواړو لری د هغه حالت لپاره چې په انځور 9-21b کې ښودل شوي. له دې دایرې څخه،انځور 9-21e و ګوري، اعظمی شییر ستریس په سطحه کی عبارت دی په $t_{\text{max in plan}} = s_2/2$. د دوو نورو حالتو لپاره د موهر دایره په انځور 9-21e کې ښودل شوي. د ټولو دریو دایرو په پرتله کولو، مطلق تر ټولو لوړ شییر ستریس عبارت دی په

$$\tau_{\substack{\text{abs}\\\text{max}}} = \frac{\sigma_1}{2} \qquad (9\text{–}13)$$

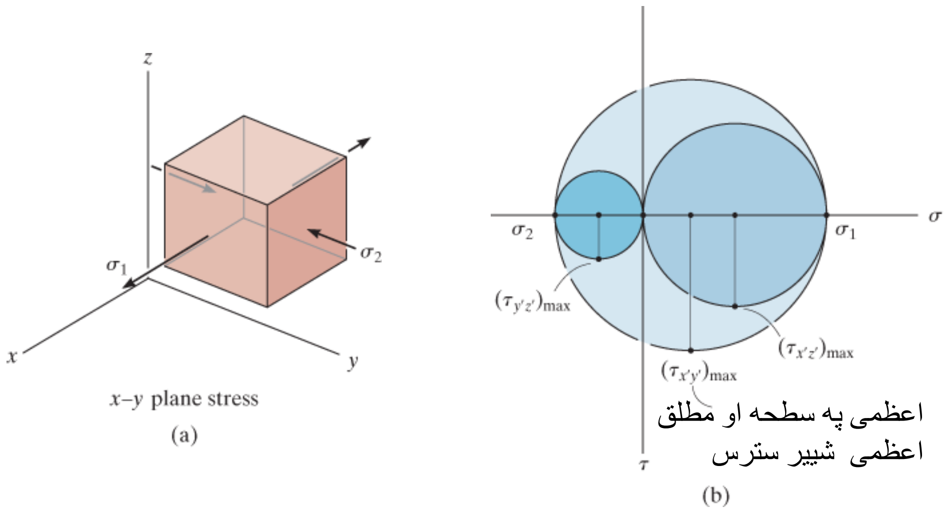
σ_1 and σ_2 have the same sign

دا په یوه عنصر چې پر y محور يي 45^0 درجې له بنودل شوي عنصر ګرزيدل کړي ، نځور 9-21a يا 9-21c . دا همغه له سطحې وتلی شییر ستریس دی چی د مواد و د ماتیدو لامل کیږي ، نه همغه t max in-plane .



انځور 9-21 (تکرار)

* د دری اړخیز ستریس قضیه په پرمختللي میخانیکونو پوري اړوند کتابونو کی لکه د موادو او ایلستیستی قضیی کتاب بحث شوې، او کیدی شی همغه وګوري.



انځور 9-22

په ورته ډول، که په سطحه کې یو له اصلي ستړونو څخه د بل برعکس علامه ولري، انځور 9-22a ، بیا د مور درې دایری د ستړیس حالت د عنصر لپاره تشریح کوې کله چې له هرې سطحی څخه ولیدل شی، انځور 9-22b کې ښودل شوي. په ښکاره ډول، په دې حالت کې

$$\tau_{\substack{abs\\max}} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \qquad (9\text{–}14)$$

σ_1 and σ_2 have opposite signs

دلته مطلق اعظمی شییر ستړیس مساوی دی په اعظمی شییر ستړیس په سطحه چی د عنصر په 45^0 درجو ګرزیدا ورکولو د z په محور لاس ته را ځی، انځور 9-22a وګوري.

مهم ټکي

(IMPORTANT POINTS)

- که چیرې په سطحه کې اصلي ستړیس دواړه ورته نښه ولري، مطلق اعظمي شییر ستړیس به د سطحی څخه بهر واقع شي اعظمي ارزښت به یی $t_{abs\ max} = s_{max}/2$ وی. دا ارزښت به له هغه شیر ستړیس چی په په سطحه کی ډیر دی.

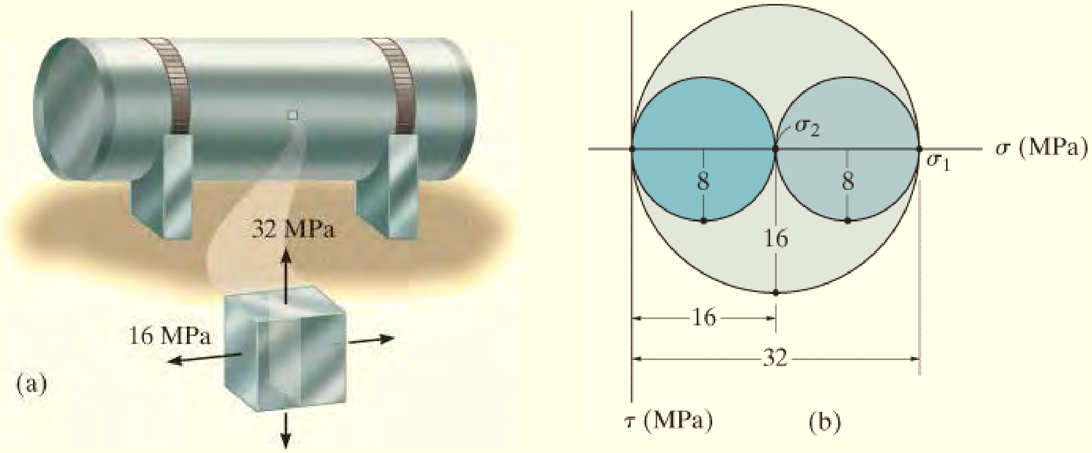
- که په سطحه کې اصلي ستړیسونه د مخالفو نښو څخه وي، نو بیا مطلق اعظمي شییر ستړیس به د اعظمي شییر ستړیس په سطحه سره مساوي وي،؛ یعني،

$$\tau_{\substack{abs\\max}} = (\sigma_{max} - \sigma_{min})/2.$$

مثالونه

مثال 9.10

يوه نقطه د فشار ټانک په سطحه کی څرنګه چی په انځور 9-23a کی ښودل شوي ، د سطحی ستریس (plane stress) حالت لری. مطلق اعظمی شییر ستریس په دی نقطه کی و ټاکي.



انځور 9-23

حل (SOLUTION)

اصلی ستریسونه مساوی دی په s_1 =32 MPa او s_2 = 16MPa . که دا ستریسونه په امتداد د s محور پلاټ کړو ، دري د موهر دایری به جوړی شي او دا به د ستریس حالت په هره یوه عمودی سطحه و ښیي، انځور 9-23b وګوري. د لویی دایری شعاع 16 MPa او دا دستریس حالت په سطحه چی شامل د s_1 =32 MPa دی تشریح کوي، او دا په سیوره شوی ساحه په انځور 9-23a کی ښودل شوي. د یوه عنصر سمت 45^0 درجی په دی سطحه د مطلق اعظمی شییر ستریس حالت او اړوند اوسط نارمل ستریس ښیي، هغه دی

$$\tau_{\substack{abs \\ max}} = 16\text{ MPa} \qquad \textit{Ans.}$$

$$\sigma_{avg} = 16\text{ MPa}$$

ورته پایله د $\tau_{abs\ max}$ په مستقیم ډول د معادلی 13-9 له تطبیقه حاصل کیدی شي.

$$\tau_{\substack{abs\\max}} = \frac{\sigma_1}{2} = \frac{32}{2} = 16 \text{ MPa} \qquad \textit{Ans.}$$

$$\sigma_{avg} = \frac{32 + 0}{2} = 16 \text{ MPa}$$

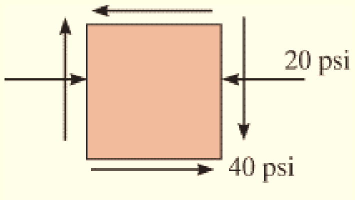
په پرتله کولو سره اعظمی شییر ستریس په سطحه له موهر دایری چی د $\sigma_1 = 32\text{MPa}$ او $\sigma_2 =$ 16Mpa په منځ کی دی، انځور 9-23b څخه مشخص کیدی شي.

$$\tau_{\substack{max\\in\text{-}plane}} = \frac{32 - 16}{2} = 8 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{avg} = \frac{32 + 16}{2} = 24 \text{ MPa}$$

مثال 9.11

د بهرنی بار له امله په یوه عنصر د یو ماشین شافت باندی د ستریس حالت په انځور 9-24a کی ښودل شوي. اصلی ستریسونه او مطلق اعظمی شییر ستریس په هغه ټکی کی مشخص کړي.

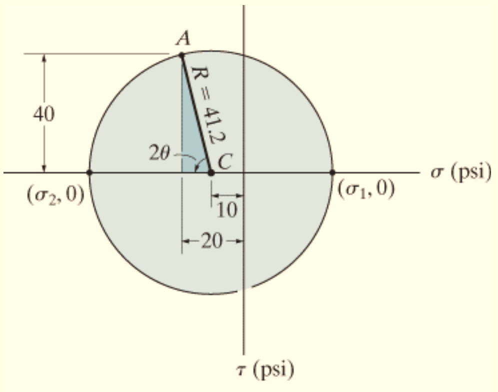


(a)

انځور 9-24

حل (SOLUTION)

اصلی ستریس (Principal Stress).



(b)

انځور 24-9 تکرار

په سطحه اصلی ستریس د موهر دایری په واسطه پیدا کیدی شي. د دایری مرکز په s محور s_{avg} = (-20 +0)/2 = -10 psi

د ریفرنس ټکی (-20, -40) A پلاٹ کوو، د دایری شعاع CA تشکیل شو او دایره لکه څنګه چی په انځور -9 24b کی ښودل شوي رسم کوو. شعاع یی عبارت دی په

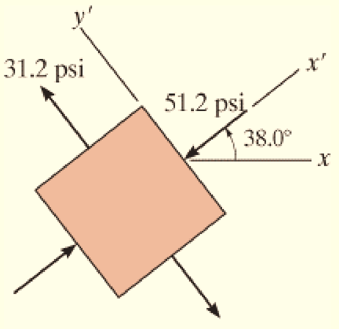
$$R = \sqrt{(20-10)^2 + (40)^2} = 41.2 \text{ psi}$$

په هغه ټکیو چی دایره د s محور قطع کوی هغه ټکی اصلی ستریسونه دی، چی عبارت دی په

$$\sigma_1 = -10 + 41.2 = 31.2 \text{ psi}$$

$$\sigma_2 = -10 - 41.2 = -51.2 \text{ psi}$$

په دی دایره کی ، خلاف د ساعت د ستني زاویه $2q$ له CA څخه تر د s محورعبارت ده په



(c)

انځور 24-9 تکرار

$$2\theta = \tan^{-1}\left(\frac{40}{20-10}\right) = 76.0°$$

په دی توګه

$$\theta = 38.0°$$

دا ګردش چی مخالف د ساعت د ستني دی سمت د x` محور او s_2 ، تعریف کوی ،انځور 9-24c وګوري. موږ لرو

$$\sigma_1 = 31.2 \text{ psi} \quad \sigma_2 = -51.2 \text{ psi} \qquad \textit{Ans.}$$

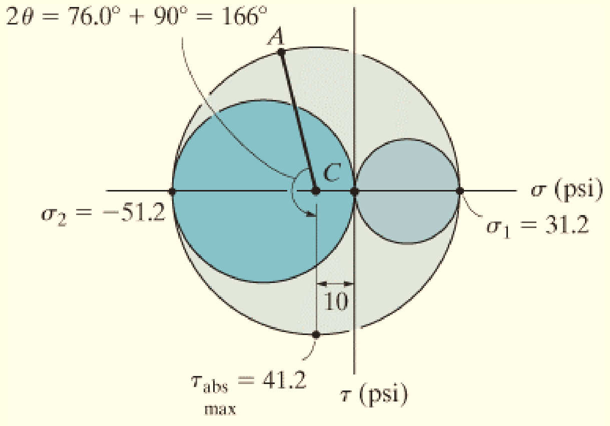
مطلق اعظمی شییر سټریس (Absolute Maximum Shear Stress).

څکه چی دا سټریسونه مخالفی نښي لری، معادلی 9-14 تطبیق کوو، موږ لرو

$$\tau_{\substack{\text{abs}\\\text{max}}} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \frac{31.2 - (-51.2)}{2} = 41.2 \text{ psi} \qquad \textit{Ans.}$$

$$\sigma_{avg} = \frac{31.2 - 51.2}{2} = -10 \text{ psi}$$

ورته پایلي د موهر دایری په رسمولو د عنصر د هر سمت x, y, z محوررونو ،انځور 9-24d ، هم لاس ته راوړل کیدی شي. څکه چی s_1 او s_2 مخالفی علامی لري، بیا مطلق اعظمی شییر سټریس مساوی دی په اعظمی شییر سټریس په سطحه.



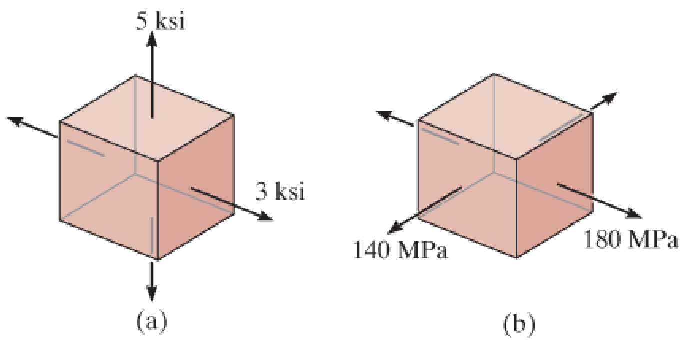
(d)

انځور 9-24 تکرار

سوالونه

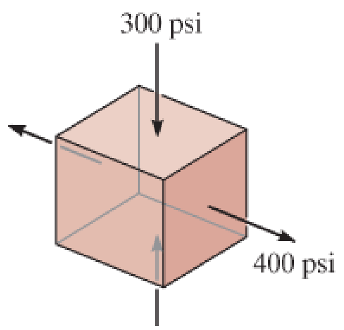
PROBLEMS

س 9-77. ددی لاندی ستريس حالتونو لپاره دري د موهردايري رسم کړي.



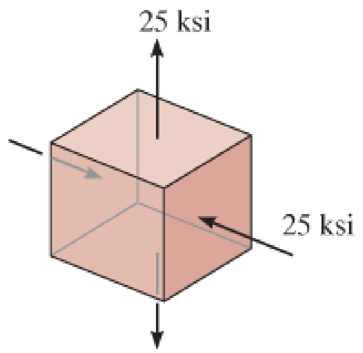
س 9-77

س 9-78. د موهر دري دايري رسم کړئ تر څو دا لاندی د ستريس حالت تشريح کړي.



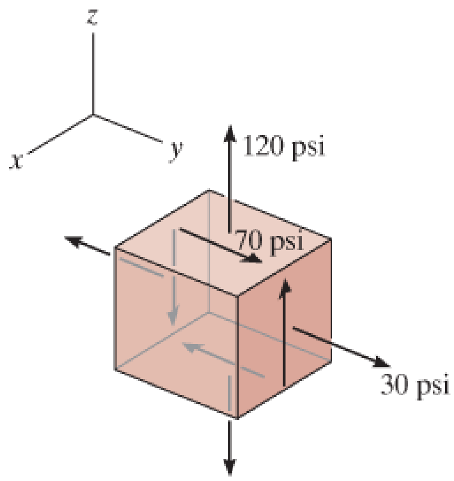
س 9-78

س 9-79. د موهر دري دايري رسم کړئ تر څو دا لاندی د ستريس حالت تشريح کړي.



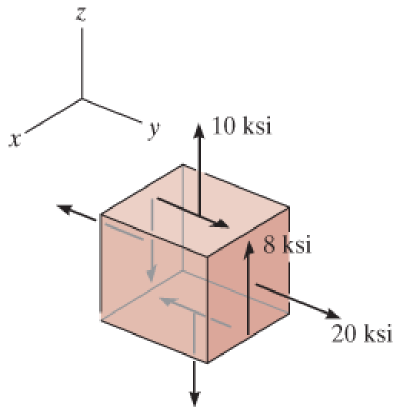
س 9-79

س *9-80. اصلی ستریسونه او مطلق اعظمی شییر ستریس وټاکي.



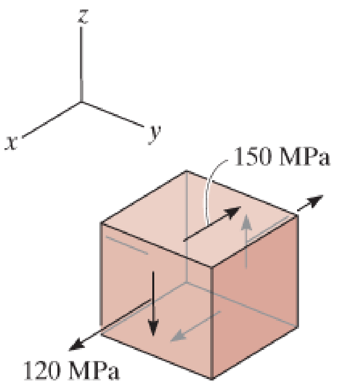
س 9-80

س 9-81. اصلی ستریسونه او مطلق اعظمی شییر ستریس وټاکي.



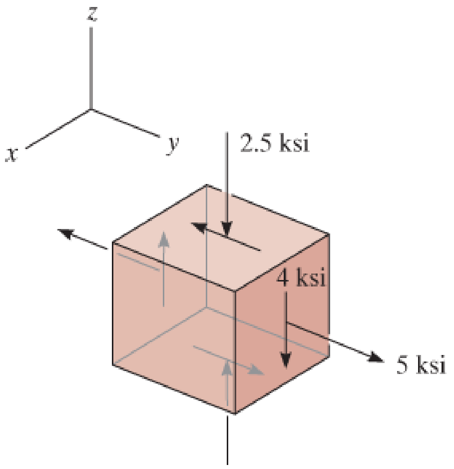
س 9-81

س 9-82. اصلی ستریسونه او مطلق اعظمی شییر ستریس وټاکي.



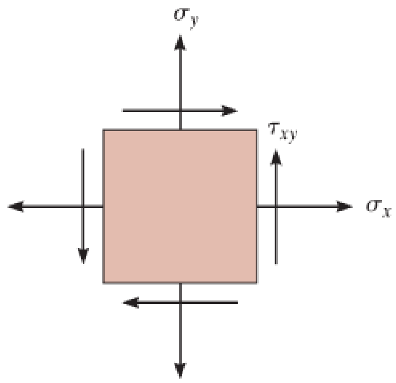
س 9-82

س 9-83. اصلی سټریسونه او مطلق اعظمی شییر سټریس وټاکي.



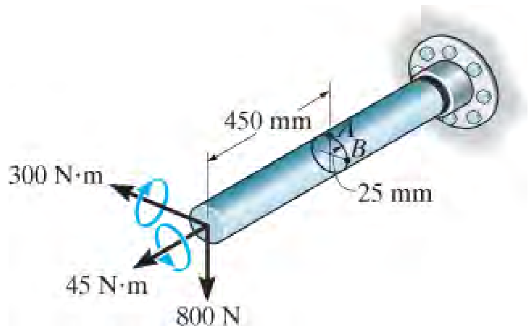
س 9-83

س 9-84*. دا لاندی د سطحی سټریس حالت چی ښودل شوي، په پام کی ونیسي. یو کمپیوټری پروګرام داسی ولیکي تر څو د دریو موهر دایری رسمول د یو عنصر لپاره وښیي، او هم د اعظمی شییر سټریس په سطحه او مطلق اعظمی شییر سټریس ټاکل کړئ.



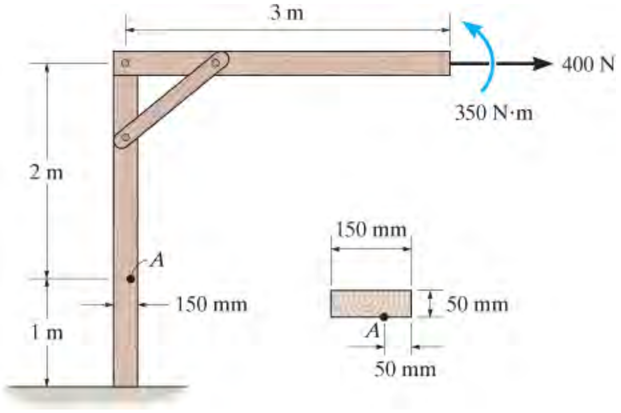
س 9-84

س 9-85. په دی لاندی شافت یو تورک، کږیدونکی مؤمنت او شییر قوه پلی شوي. په ټکیو A او B کی اصلي سټریسونه او مطلق اعظمی شییر سټریس معلوم کړي.



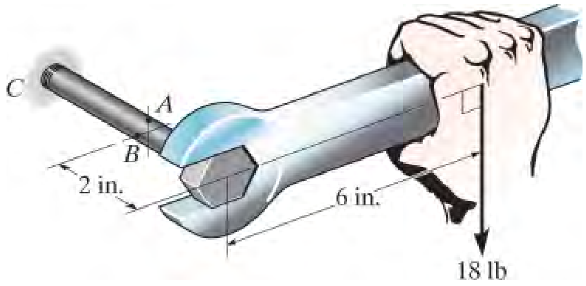
س 9-85

س 9-86. په دی لاندی چوکاټ یوه افقي قوه او کپل (couple) مؤمنت پلی شوي. په ټکی A کی اصلی ستریسونه او مطلق اعظمی شییر ستریس وټاکي. د غړی غوڅه برخه په دی ځای کی په لاندی انځور کی ښودل شوي.



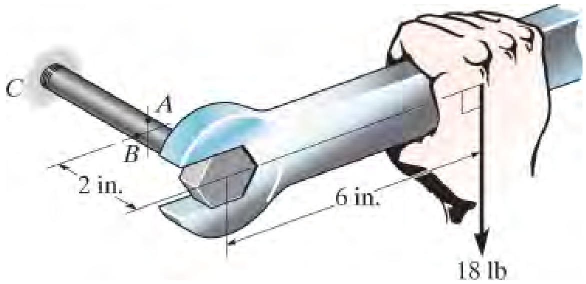
س 9-86

س 9-87. دا ښودل شوی بولت په اتکا C کی کلک تړل شوي دي. یوه قوه د 18 lb پونډه په رنچ پلی شوی ترڅو دا بولت ټینګ کړي ، اصلی ستریسونه او مطلق اعظمی شییر ستریس په ټکی A د بولت کی مشخص کړي. پایلی په یوه عنصر په دی ځاي کی وښیي. د بولت د لنګي قطر 0.25 in دي.



س 9-87

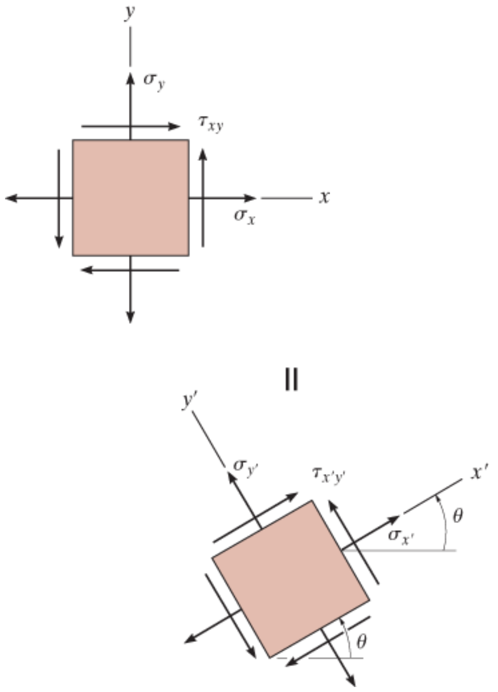
س 9-88*. دا ښودل شوی بولت په اتکا C کی کلک تړل شوي دي. یوه قوه د 18 lb پونډه په رنچ پلی شوی ترڅو دا بولت ټینګ کړي ، اصلی ستریسونه او مطلق اعظمی شییر ستریس په ټکی B د بولت کی مشخص کړي. پایلی په یوه عنصر په دی ځاي کی وښیي. د بولت د لنګي قطر 0.25 in دي.



س 9-88

د فصل بيا کتنه

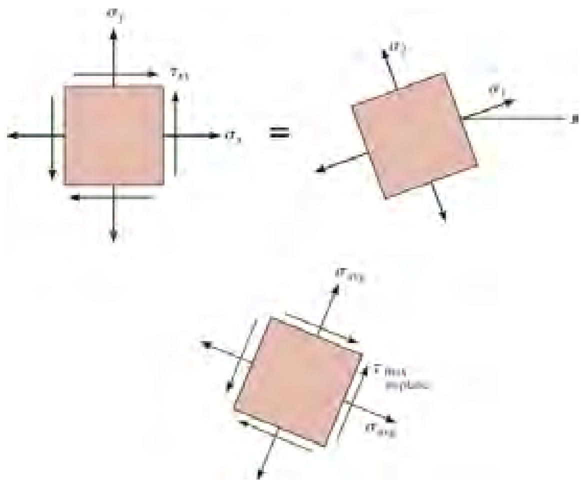
CHAPTER REVIEW



سطحی ستریس (plane stress) هغه وخت په يوه ټکی کی واقع کيږي کله چی دوه نارمل ستريسونه s_x او s_y او يو شيير ستريس t_{xy} پری پلی شوي وي. دا اجزاوی بايد معلومي وي، بيا دستريس اجزاوی په يو بل عنصر چی د زاويه q سمت ولري د ستريس د بدلون د تعادل معادلو په واسطه پيدا کيدی شي

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\theta + \tau_{xy}\sin 2\theta$$

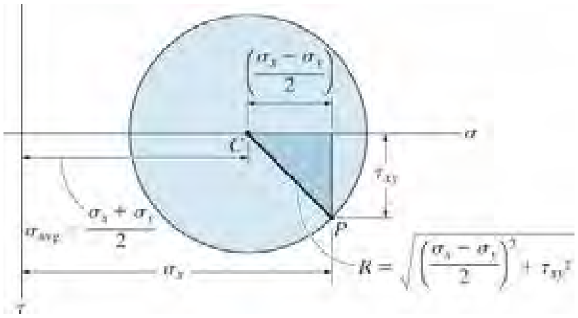
$$\tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\sin 2\theta + \tau_{xy}\cos 2\theta$$

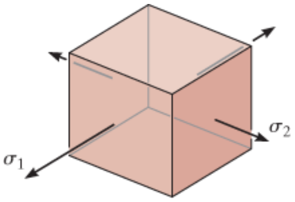
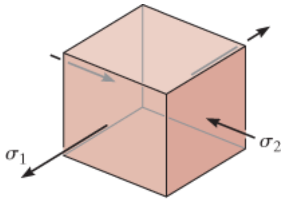


د ډيزاين لپاره دا مهمه ده چی په يو ټکی کی اعظمی اصلي ستريس او يا اعظمی شيير ستريس په سطحه و ټاکل شي. د اصلي ستريس په سطحو شيير ستريس شتون نلري، چيرته چی

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

د اعظمی شيير ستريس په سطحو، هلته اړوند اوسط نارمل ستريس شتون لري، چيرته چی

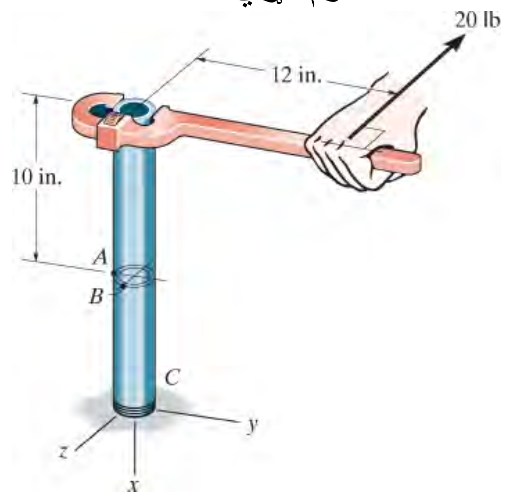
	$$\tau_{\substack{\text{max}\\ \text{in-plane}}} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$ $$\sigma_{avg} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$$
	د موهر دایری نیم ګرافیکي طریقه د ستر س پیداکولو په هره یوه سطحه باندی ، یا اصلی نارمل ستریسونه او یا اعظمی شییر ستریس په سطحه لپاره ده. ددی لپاره چی د موهر دایره رسم کړو اول باید د s او د t محورونه وتاکل شي. بیا د دایری مرکز $C[(s_x + s_y)/2 , 0]$ او د ریبفرینس ټکی $A(s_x, t_{xy})$ په دایره و پیژندل شي. شعاع R د دایری د مرکز او دریفرینس ټکی په اوږدوالی د مثلثاتو اصلو په تطبیق کولو موندل کیږي.

 x–y plane stress	که چیری s_1 او s_2 یو شان علامه ولري بیا مطلق اعظمی شییر ستریس به په یوه ټکی کی له سطحی وتلئ موقعیت ولري. $$\tau_{\substack{abs\\max}} = \frac{\sigma_1}{2}$$
 x–y plane stress	که چیری s_1 او s_2 برخلاف د یو بل علامه ولري بیا مطلق اعظمی شییر ستریس به مساوی وی په اعظمی شییر ستریس په سطحه کی. $$\tau_{\substack{abs\\max}} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$$

د بيا کتني سوالونه

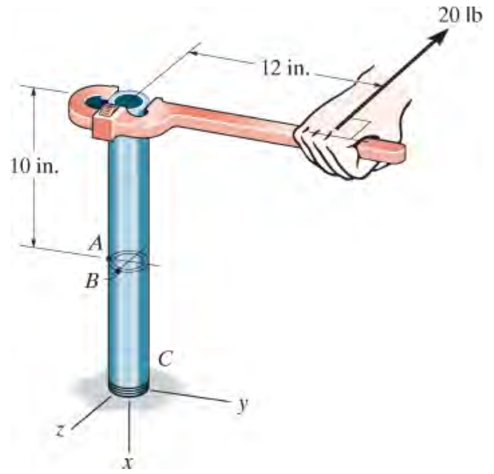
REVIEW PROBLEMS

ب 9-1. دا لاندی فولادی پایپ داخلی قطر 2.75 in او بهرنی قطر يي 3 in لري. دا پایپ په C اتکا کی کلک تړلي شوي،او یوه افقي قوه 20 lb د رنچ په لاستي پلی شوي. اصلی سټريسونه په ټکی A کی چی د پایپ په سطحه ده معلوم کړي.



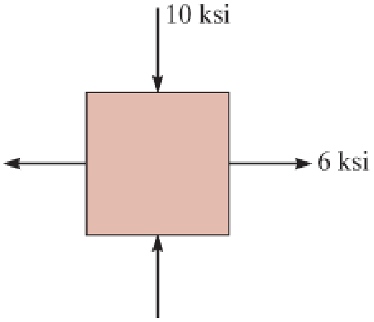
ب 9-1

ب 9-2. دا لاندی فولادی پایپ داخلی قطر 2.75 in او بهرنی قطر يي 3 in لري. دا پایپ په C اتکا کی کلک تړلي شوي،او یوه افقي قوه 20 lb د رنچ په لاستي پلی شوي. اصلی سټريسونه په ټکی B کی چی د پایپ په سطحه ده معلوم کړي.



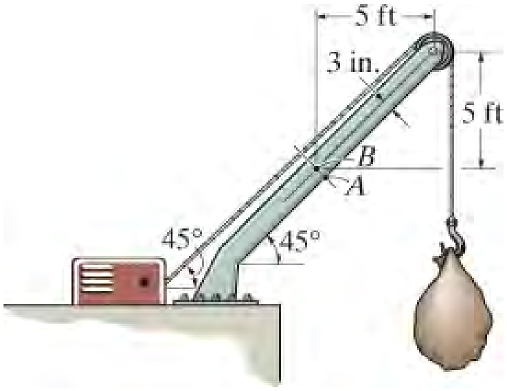
ب 9-2

ب 9-3. ددی لاندی ښودل شوی سټريس حالت معادل، په یوه عنصر چی 40^0 د ساعت د ستني په لور له ښودل شوی عنصر سره جهت لري، پیدا کړي. د موهر له دایري کار واخلي.



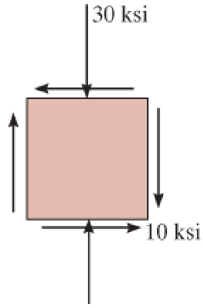
ب 9-3

ب *9-4. دا لاندی جری ثقیل یا کرین د 350-lb بار ملاتړ کوي. اصلی ستریسونه د بوم (boom) د A او B په ټکیو کی معلوم کړي. غوڅه برخه يي مستطیلی ده کوم چی عرض يي 6 in او پنډوالي يي 3in دی. له موهر دایری کار واخلي.



ب 9-4

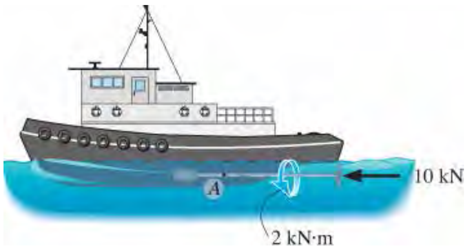
ب 9-5. د ښودل شوی عنصر ستریس حالت معادل داسی وټاکي کوم چی استازیتوب کوي (a) اصلی ستریسونو او (b) اعظمی شییر ستریس په سطحه، او اړوند اوسط نارمل ستریس. همدارنګه د هری حالت لپاره اړونده د عنصر جهت، د ښودل شوي عنصرجهت ته معلوم کړی، او پایلي په یوه عنصر وښایي.



ب 9-5

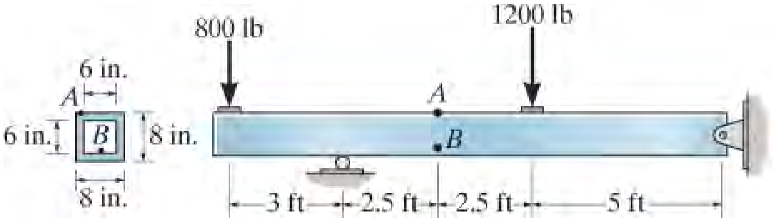
ب 9-6. **په** مخ کښونکي (propeller) شافت د یوی کښولو کښنتي ، لکه ښنګه چی په لاندی انځور کی ښودل شوي، یو تیلوهونکی قوه او تورک پلی شوي. د شافت داخلی قطر 100 mm او

بهروني قطر يې 150 mm دي. اصلي ستریسونه په يو ټکي A چې په وتلي سطحه موقعيت لري وټاکي.



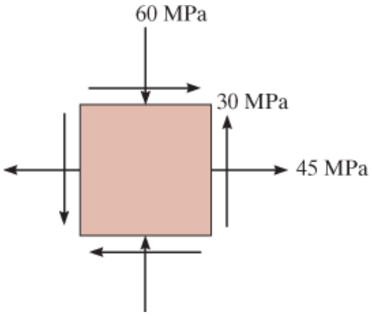
ب 9-6

ب 9-7. په ټکيو A او B د باکس بيم، اصلي ستریسونه مشخص کړي.



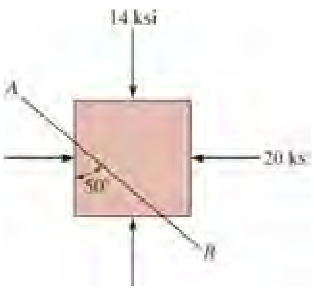
ب 9-7

ب *9-8. معلوم کړي (a) اصلي ستریسونه او (b) اعظمي شيير ستریس په سطحه، او اوسط نارمل ستریس په ټکي کی. په هر حالت کی جهت د عنصر وټاکي.



ب 9-8

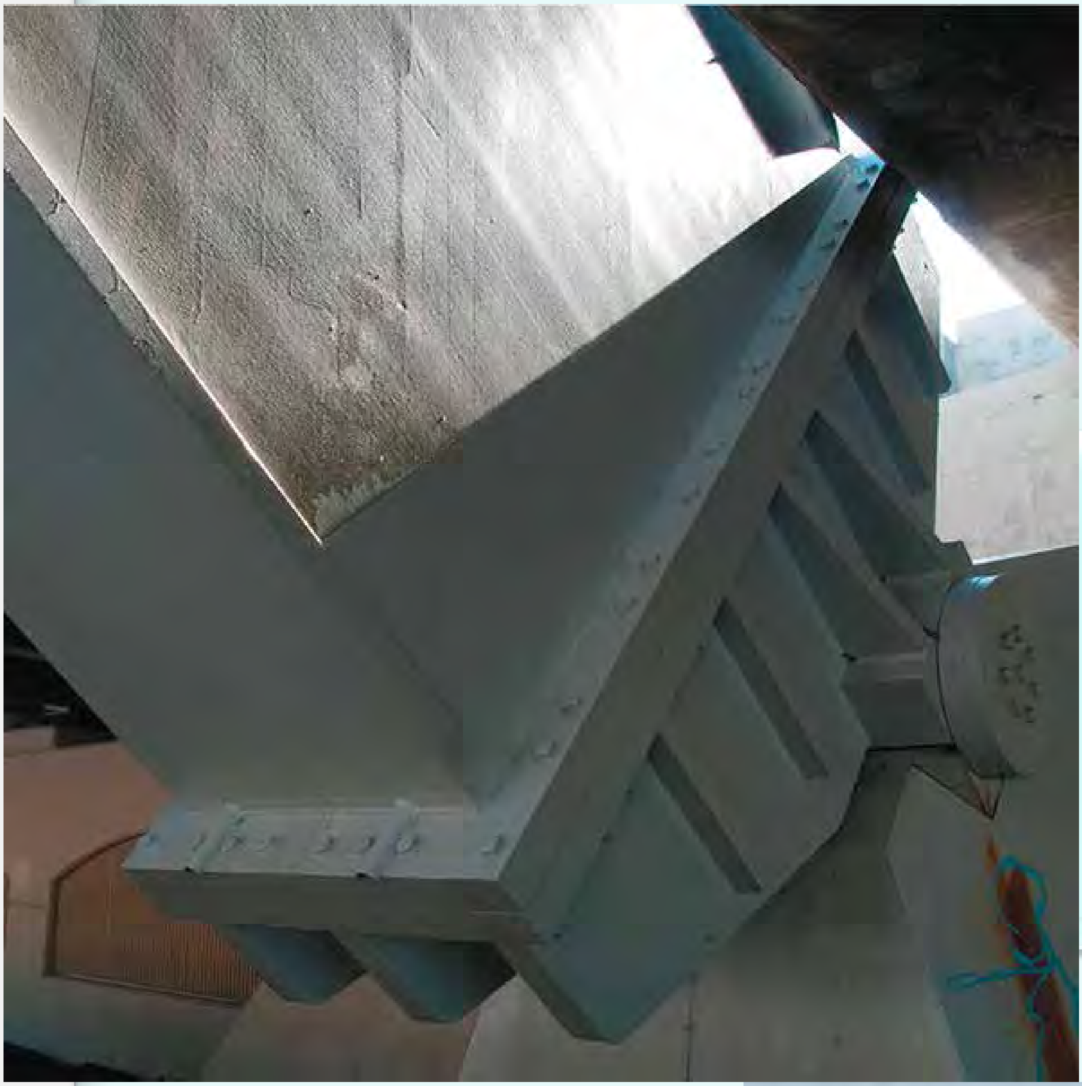
ب 9-9. د ستریس اجزاوی په مایل سطحه AB مشخص کړي. د سوال د حل لپاره د توازن له طريقی چې په 9.1 برخه کی تعريف شوی کار واخلي.



ب 9-9

لسم فصل

(CHAPTER 10)



(© Peter Steiner/Alamy)

د پله لپاره دا پن اتکا د ستریس ګیجونو سره ازمول شوی، ترڅو داډ ترلاسه شي چي اصلی سترین په موادو کي د موادو د ماتیدو له معیار څخه زیات نه شي.

د سترین بدلون

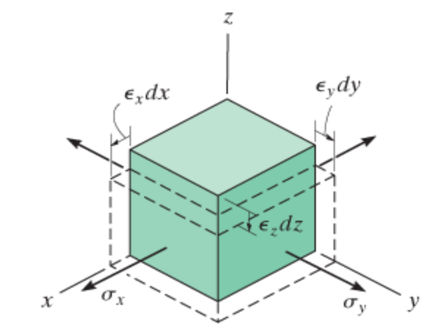
(STRAIN TRANSFORMATION)

CHAPTER OBJECTIVES د فصل موخې

پدې فصل کې به موږ وښیو چې څنګه د سترین بدلون په یوه نقطه کی د سټریس بدلون په شان اجرا کیږي، او په پایله کې د مخکینی فصل طریقی به په دې فصل کې تطبیق شي. دلته به هم د سترین اندازه کولو لپاره د بیلابیلو لارو په اړه بحث وشي اود ځینې موادو دخاصیتونو مهم اړیکي، په شمول دعمومي بڼه د هوک د قانون به رامینځته کړل شي . د فصل په پای کې، یو څو هغه تیوري ګانو بحث وکړو چې د موادو د ماتیدو او یا له منځه وړلو وړاندوینې لپاره کارول کیږي.

10.1 سطحی سترین (PLANE STRAIN)

لکه څنګه چي په 2.2 برخه کي تشریح شوي، د سترین عمومي حالت د جسم په یوه نقطه کي د نارمل سترین د دریو برخو ترکیب لخوا e_x, e_y, e_z او د شییر سترین دریو برخو، g_{xy}، g_{xz}، g_{yz} ، له خوا ښودل کیږي، انځور 2-4c وګورئ. نارمل سترینونه د عنصر په حجم کي د بدلون لامل کیږي او د شییر سترین برخی په شکل د جسم کي د بدلون لامل کیږي. د ستریس په څیر، دا شیږ برخي د عنصر په لور یا جهت پوري اړه لري، او په ډیری حالتونو کي، انجینران باید سترینونه بدل کړي ترڅو ارزښتونه په نورو جهتونو ترلاسه کړي .



سطحی ستریس s_x, s_y لامل د سطحی سترین په x-y سطحه کی نه کیږي ځکه چي $\epsilon_z \neq 0$.

انځور 10-1

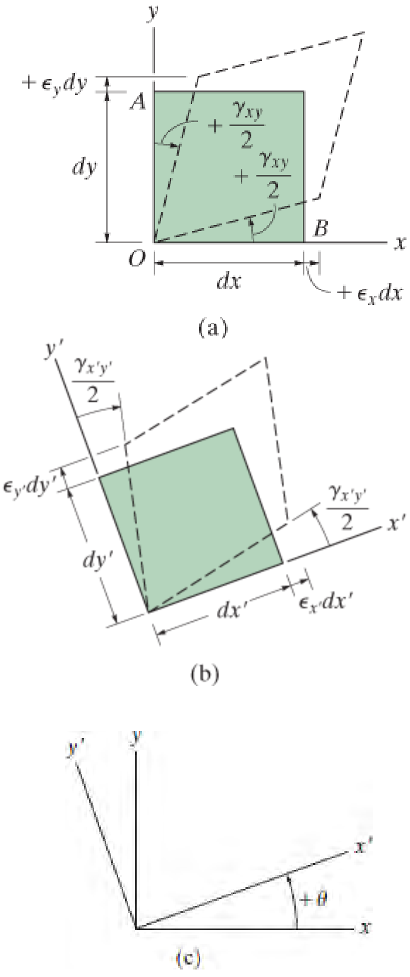
د دي لپاره چي پوه شو چي دا څنګه ترسره کیږي، موږ به خپل پام یو د ***سطحی سترین*** مطالعي ته واړوو، کوم چي له مخی یې عنصر باندی دوی برخی نارمل سترین e_x, e_y او یوه برخه د شییر سترین g_{xy} پلی شوي*. که څه هم سطحی ستریس او سطحی سترین، په ورته سطحه کي، هر یو دري برخي لري. پوه شئ چي سطحی ستریس *اړین نه دی* چي لامل د سطحی سترین یا برعکس شي. د دي دلیل د پویزان Poisson اغیزی سره تړاو لري چي په 3.6 برخه کي بحث شوی. د مثال په توګه، په انځور 10-1 کي عنصر د سطحی ستریس s_x او s_y تابع دی . نه یوازي نارمل سترینونه e_x او e_y جوړشوی، مګر یو ترلی نارمل سترین e_z هم شتون لري، او دا بنایي چي د سطحی سترین قضیه نه ده.

په حقیقت کي ، د سطحی سترین قضیه په ندرت سره په عمل کي پیښیږي ، ځکه چي ډیری مواد هیڅکله د سختو سطحو تر مینځ محدود نه وي ترڅو د z په لور کي تحریف ته اجازه ورنه کړئ شي(عکس وګورئ). له دي سره سره، د سطحی سترین تحلیل، لکه څنګه چي په لاندي برخه کي بیان شوی، لاهم ډیر اهمیت لري، ځکه چي دا به موږ ته اجازه را کړی چي د سترین ګیج ډیټا کوم چي په سطحه د یو جسم په یوه نقطه کي اندازه شوي وي، په سطحی ستریس په هغه نقطه کی بدل کړو.

10.2 د سطحی سترین بدلون عمومی معادلات (GENERAL EQUATIONS OF PLANE-STRAIN TRANSFORMATION)

د سطحی سترین تحلیل لپاره مهمه ده چي د سترین بدلون معادلی رامینځته کړو، تر څو دا معادلی په یوه ټکی کی، د نارمل او شییر سترین اجزاوو $e_{x`}, e_{y`}, g_{x`y`}$ ، انځور 10-2b ، ټاکلو لپاره وکارول

شي. په دی تګی کی باید اجزاوی $\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}$ پیژندل شوي وي، انځور 10-2a. نو په بل عبارت که موږ پوهیږو چې د یو عنصر مواد ، انځور 10-2a، څنګه بیځایه (deform) کیږي، موږ غواړو پوه شو چې څنګه به مواد د عنصر چی په انځور 10-2b کی ښودل شوي بیځایه شي. د دې اجرا کولو لپاره اړتیا ده ترون او ارتبات د بیځایه کیدلو او د خطي برخو ګردش، کوم چې استازیتوب کوي د توپیري عناصرو اړخونو چی موازي دی په x ، y او $x`$ ، $y`$ محورونو سره، معلوم شي .



انځور 10-2

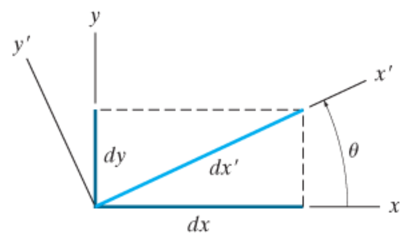
د علامی کنوانسیون (Sign Convention).

د پیل کولو لپاره، موږ باید لومړی د سترین لپاره د علامی کنوانسیون جوړ کړو. په انځور 10-2a کې نارمل سترینونه ترتیب سره ϵ_x او ϵ_y مثبت دي که دوی د x او y محورونو په اوږدو کې د اوږدوالي لامل شي ، او د شیرسترین γ_{xy} مثبت دی که چیرې داخلي زاویه AOB له 90^0 درجو څخه کوچنی شي. دا کنوانسیون هم د ورته کارول شوي کنوانسیون پیروي کوي چی د سطحی ستریس له پاره کارول شوي وو انځور 9-5a، کوم چې مثبت s_x ، s_y ، t_{xy} به عنصر لامل د بیځایه کیدوپه ترتیب سره په مثبت ϵ_x ، ϵ_y ، γ_{xy} جهت شي. په پای کې، که د xاو $x`$ محورونو تر مینځ زاویه θ وی، بیا د سطحی ستریس په څیر، زاویه به مثبت وی په دې شرط چې دا د ښي لاس د ګوتو تاو تعقیب کړي، د بیلګې په توګه مخالف د ساعت د ستني کې، لکه څنګه چې په انځور 10-2c کې ښودل شوي.

* د دري اړخیز سترین تحلیل پر مختللي میخانیک د موادو او یا د ایلستیستی تیوری کتابونو کی بحث شوی.

نارمل او شییر سترینونه (Normal and Shear Strains).

د $\epsilon_{x`}$ ټاکلو لپاره موږ باید اوږدوالئ د برخی $dx`$ د کرښي $x`$ په اوږدو چی د سترین اجزاوی $\epsilon_x$، $\epsilon_y, \gamma_{xy}$ ورباندی عمل کړی و پیژنو. څرنګه چی په انځور 10-3a کی ښودل شوي اجزاوی د کرښي $dx`$ په اوږدو د x او y محور عبارت دی په

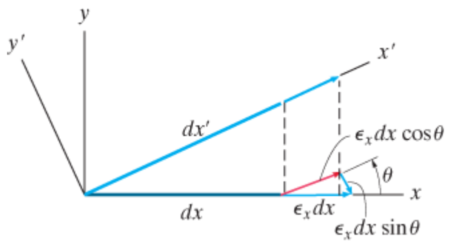


Before deformation

(a)

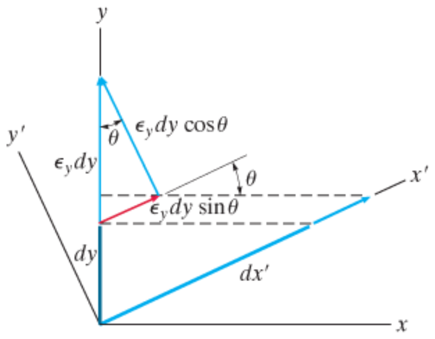
$$dx = dx' \cos\theta$$
$$dy = dx' \sin\theta \qquad (10\text{–}1)$$

کله چې مثبت نارمل سترین ϵ_x واقع شي،په dx کی $\epsilon_x dx$ په اندازه اوږدوالي راځي ، انځور 10-3b . اودا لامل د $\epsilon_x dx \cos\theta$ اوږدوالي په $dx`$ کی کیږي. په ورته ډول، کله چې $\epsilon_y$ واقع کیږي په $dy$ کی اوږدوالي $\epsilon_y dy$ ، انځور 10-3c راځي، کوم چې د $dx`$ لامل د اوږدیدو $\epsilon_y dy \sin\theta$ کیږي. په نهایت کې ، فرض کړئ چې dx په موقعیت کې ثابت پاتې کیږي ، شییر سترین γ_{xy} انځور 10-3d کې، کوم چې د dx او dy تر منځ د زاویې بدلون دی، د دې لامل کیږي چې د کرښې dy پورتنۍ برخه ښي خوا ته $\gamma_{xy}\, dy$ بې ځایه شي. او دا لامل ګرځي چې $dx`$ په اندازه د $\gamma_{xy}\, dy \cos\theta$ اوږدوالي و مومي. که دا درې واړه (سره رنګ) اوږدوالي سره یوځای کې اضافه شي، د $dx`$ پایله اوږدوالی به راکړي او هغه عبارت دی



Normal strain ϵ_x

(b)



Normal strain ϵ_y

(c)

$$\delta x' = \epsilon_x\, dx \cos\theta + \epsilon_y\, dy \sin\theta + \gamma_{xy}\, dy \cos\theta$$

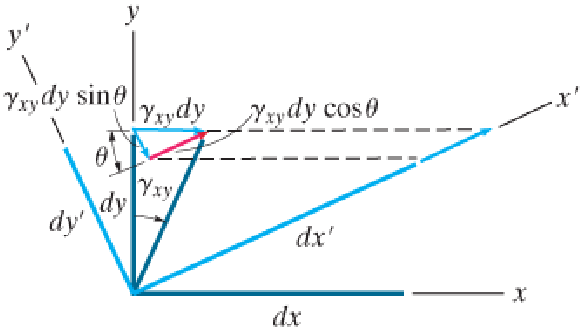
څرنګه چې نارمل سترین په اوږدو د کرښې $dx`$ عبارت دی په $\epsilon_{x`} = \delta x`/dx`$ نو بیا د معادلی 10-1په تطبیق سره موږ لرو

$$\epsilon_{x'} = \epsilon_x \cos^2\theta + \epsilon_y \sin^2\theta + \gamma_{xy} \sin\theta\cos\theta \qquad (10\text{–}2)$$

دا نارمل سترین په انځور 10-2b کی ښودل شوي

$$\delta y' = -\epsilon_x\, dx \sin\theta + \epsilon_y\, dy \cos\theta - \gamma_{xy}\, dy \sin\theta$$

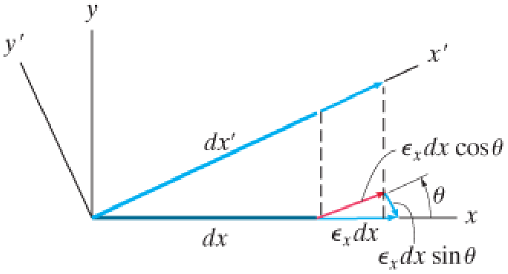
د ربړ نمونه د دوه ثابت اتکاوو تر مینځ محدوده ده، او له همدې امله سطحی سترین رامینځ ته کیږي ، کله چې بارونه په افقی سطحه کی پلي شي .



Shear strain γ_{xy}

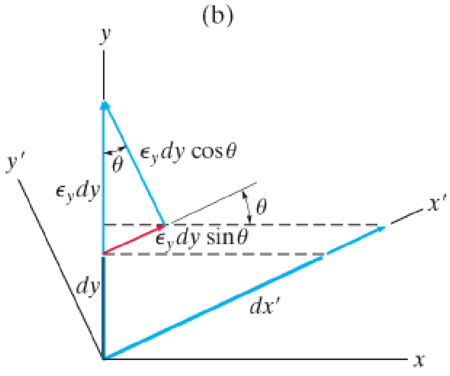
(d)

انځور 10-3



Normal strain ϵ_x

(b)



Normal strain ϵ_y

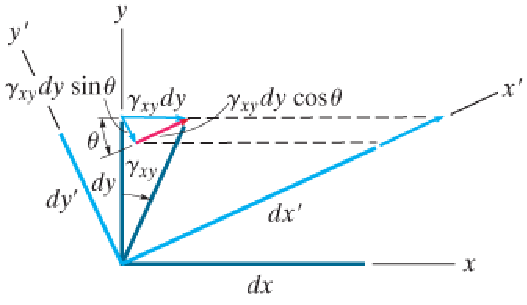
(c)

د دې لپاره چې $\gamma_{x'y'}$ معلوم کړو، موږ باید ځرخیدل د هرې توټې د کرښې dx' او dy' د ځرخیدو په اړه پوه شو، کله چې دوی د سترین د اجزاو $\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}$ تابع وي . لومړی به موږ د ساعت د ستني مخالف گردش α د dx' په پام کې ونیسو، انځور 10-3e وګوري. دلته $\alpha = dy'/dx'$. بې ځایه کیدنه dy' له دریو بې ځایه کیدو اجزاو څخه جوړه ده :

یو له ϵ_x څخه، چې هغه راکوي $-\epsilon_x\, dx \sin\theta$ ، انځور10-3b، او بل د ϵ_y څخه چې هغه راکوي ، د $\epsilon_y\, dy \cos\theta$ ، انځور 10-3c وګوري؛ او وروستی د γ_{xy} څخه، په لاس راځي $-\gamma_{xy}\, dy \sin\theta$, انځور 10-3d، په دې توګه dy' دا دی

د معادلی 10-1 په تطبیق سره موږ لرو

$$\alpha = \frac{\delta y'}{dx'} = (-\epsilon_x + \epsilon_y)\sin\theta\cos\theta - \gamma_{xy}\sin^2\theta \qquad (10\text{–}3)$$



Shear strain γ_{xy}

(d)

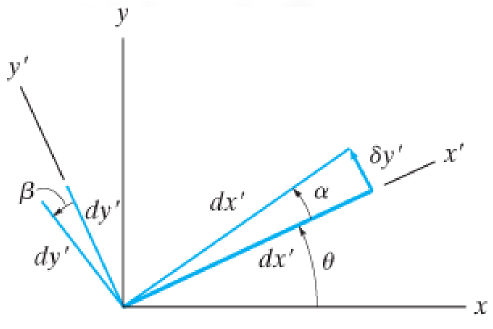
په نهایت کی کربنه dy\` څرخ مومی په اندزه د b ، انځور 10-3e .

مورږ ګولای شو چی دا زاویه په ورته ډول تحلیل کړو، او یا په آسانی سره په معادله 10-3 کی $(q + 90^0)$ د زاویه q لپاره تطبیق کړو. دلته مثلثاتی مساواتو $\sin(q+90^0) = \cos q$ او $\cos(q+90^0) = -\sin q$ څخه کار اخلو او لرو

$$\beta = (-\epsilon_x + \epsilon_y)\sin(\theta + 90^\circ)\cos(\theta + 90^\circ) - \gamma_{xy}\sin^2(\theta + 90^\circ)$$
$$= -(-\epsilon_x + \epsilon_y)\cos\theta\sin\theta - \gamma_{xy}\cos^2\theta$$

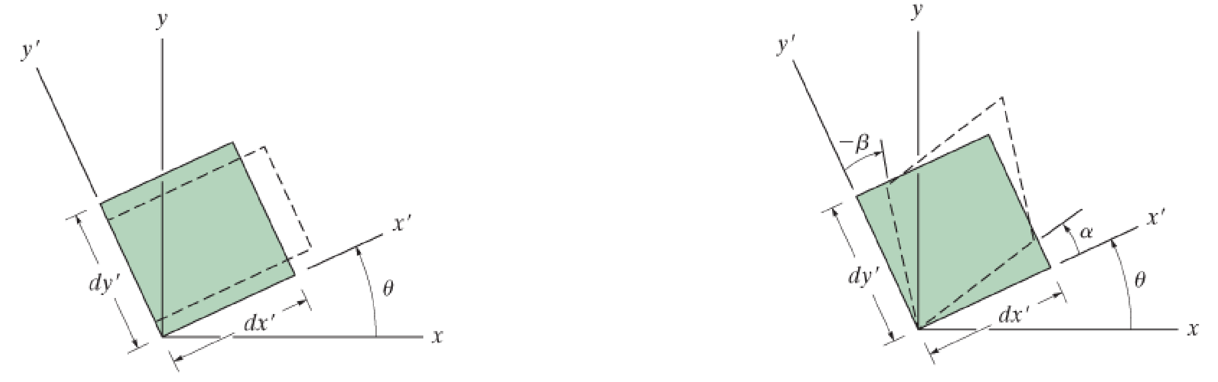
له هغه ځایه چی a او b باید د dx\` او $dy$\` اړخونو د ګردش استازیتوب وکړي، لکه څنګه چی په انځور ، 10-3c کی ښودل شوي، بیا عنصر باندی دا لاندی شییر سترین عمل کړي دی

$$\gamma_{x'y'} = \alpha - \beta = -2(\epsilon_x - \epsilon_y)\sin\theta\cos\theta + \gamma_{xy}(\cos^2\theta - \sin^2\theta) \qquad (10\text{–}4)$$



(e)

انځور 10-3 (تکرار)



Positive normal strain, $\epsilon_{x'}$

Positive shear strain, $\gamma_{x'y'}$

(a) انځور 10-4 (b)

له مثلثاتی قضیو په کار اخیستلو $\sin 2q = 2\sin q \cos q$, $\cos^2 q = (1+\cos 2q)/2$ او له $\sin^2 q + \cos^2 q = 1$ ، کیدی شي چی معادلي 10-2 او 10-4 په دی لاندی وروستی بنه ولیکو

$$\epsilon_{x'} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} + \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\cos 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2}\sin 2\theta \qquad (10\text{–}5)$$

$$\frac{\gamma_{x'y'}}{2} = -\left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\right)\sin 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2}\cos 2\theta \qquad (10\text{–}6)$$

Normal and Shear Strain Components

زموږ د علامی کنوانسیون له مخی که چیری $e_{x'}$ مثبت وی عنصر به د مثبت x' په لور اوږدوالي ولري، انځور 10-4a ،او که چیری $g_{x'y'}$ مثبت وی عنصر به بیځایه شی لکه څنګه چی په انځور 10-4b کی ښودل شوي.

که چیری نارمل سترین په سمت د y' اړتیا وی دا کیدی شی چی له معادلی 10-5 په لاس رواړل شی کله چی د زاوی q پر بدلولو سره $(q+90^0)$ ځای په ځای شي. پایلی به داسي وی

$$\epsilon_{y'} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} - \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\cos 2\theta - \frac{\gamma_{xy}}{2}\sin 2\theta \qquad (10\text{–}7)$$

د پورتنیو دری معادلو ورته والي له سطحی ستریس بدلون معادلی 9-1, 9-2 او 9-3 باید په پام کی ونیول شي. پرتله کول د $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{x'}, \sigma_{y'}$ د $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_{x'}, \epsilon_{y'}$ سره مطابقت لري او $\tau_{xy}, \tau_{x'y'}$ پرتله کیږی له $\gamma_{xy}/2, \gamma_{x'y'}/2$ سره.

اصلی سترین (Principal Strains).

د ستریس په څیر، یو عنصر په یوه نقطه کې داسی اینودل کیدی شی چې د عنصر بیځایه کیدل یوازې د نارمل سترینونو له امله رامینځته شي ، پرته له شییر سترین. کله چې دا داسې واقع شي نارمل سترینونه د اصلي سترینو په توګه معرفي کیږي. که چیرې مواد آیسوترافیک (isotropic) وي، هغه محورونه چې دا سترینونه ور باندی واقع کیږي د اصلي ستریسو له محورونو سره سمون (coincide) لري.

د ستریس او سترین تر مینځ د دی دول ارتباط څخه، بیا دمعادلي 9-4 او 9-5 په څیر سمت د x' محور او د اصلي سترینونو دوه ارزښتونه ϵ_1 او ϵ_2 له لاندی څخه ټاکل کیږي

$$\tan 2\theta_p = \frac{\gamma_{xy}}{\epsilon_x - \epsilon_y} \qquad (10\text{–}8)$$

Orientation of principal planes

$$\epsilon_{1,2} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2} \qquad (10\text{–}9)$$

Principal strains

د ترون په جا ینتوکی چی سلندري او نیمه کروی برخی د ټانکونو سره وصل کیږي پیچلی ستریسونه هلته مینځ ته راځي. دا ستریسونه د سترین په اندازه کولو سره ټاکل کیږي.

اعظمی شییر سترین په سطحه (Maximum In-Plane Shear Strains).

د 7-9 ,6-9 او 8-9 معادلو ته ورته د $x`$ محور جهت او د اعظمی شییر سترین په سطحه او اړوند منځنی نارمل سترینونه له دی لاندی معادلو ټاکل کیدی شی:

$$\tan 2\theta_s = -\left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{\gamma_{xy}}\right) \qquad (10\text{–}10)$$

Orientation of maximum in-plane shear strain

$$\frac{\gamma_{\substack{\max \\ \text{in-plane}}}}{2} = \sqrt{\left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2} \qquad (10\text{–}11)$$

Maximum in-plane shear strain

$$\epsilon_{avg} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} \qquad (10\text{–}12)$$

Average normal strain

مهم ټکي

(IMPORTANT POINTS)

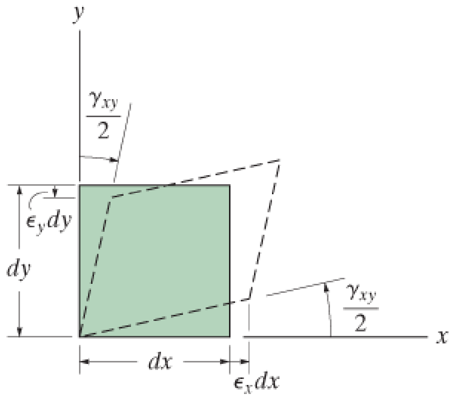
- د سطحی سټریس او سطحی سټرین تحلیل په سطحه کی امکان لري چی وکارول شی تر څو د سټرین ګیجو د ډیټا تحلیل شي. تاسو دا په یاد ولرئ، چی یو نارمل سټرین په ګیج باندی په عمودي ډول د پویسان (Poisson) اغیزې له امله امکان لري.

- کله چې د سټرین حالت د اصلي سټرینونو لخوا ښودل شوی وي ، په داسی حالت کی هیڅ شییر سټرین به په عنصر باندې عمل ونه کړي.

- کله چې د سټرین حالت د اعظمی شییر سټرین په سطحه کی ښودل شوی وي، په دی حالت کی یو اوسط نارمل سټرین به هم په عنصر عمل وکړي .

مثالونه

مثال 10.1



(a)

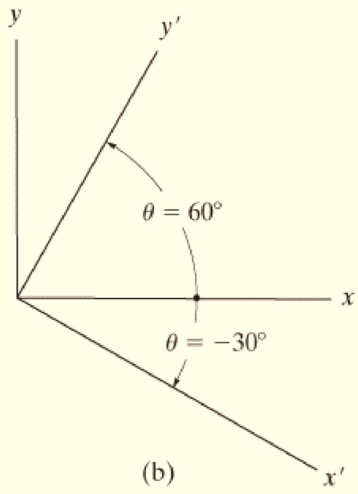
د سټرین حالت په یوه ټکی ادا ډول اجزاوی لري:

$\epsilon_x = 500(10^{-6})$, $\epsilon_y = -300(10^{-6})$, او

$\gamma_{xy} = 200(10^{-6})$ او د عنصر شکل ته یي داسی تحریف ورکړی کوم چې په انځور 10-5a کی ښودل شوي. د سټرین معادل حالت د عنصر چې 30 ^{o} د ساعت د ستنیی په مخالف لورجهت لری معلوم کړی.

حل (SOLUTION)

د حل لپاره به د سترین د بدلون معادلو 10-5 او 10-6 څخه کار واخلو. څرنګه چی زاویه q مثبت خلاف د ساعت د ستني ده، نو بیا ددی سوال لپاره $q = -30^{o}$ په دی توګه



$$\epsilon_{x'} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} + \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\cos 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2}\sin 2\theta$$

$$= \left[\frac{500 + (-300)}{2}\right](10^{-6}) + \left[\frac{500 - (-300)}{2}\right](10^{-6})\cos(2(-30°)) + \left[\frac{200(10^{-6})}{2}\right]\sin(2(-30°))$$

$$\epsilon_{x'} = 213(10^{-6}) \qquad \textit{Ans.}$$

$$\frac{\gamma_{x'y'}}{2} = -\left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\right)\sin 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2}\cos 2\theta$$

$$= -\left[\frac{500 - (-300)}{2}\right](10^{-6})\sin(2(-30°)) + \frac{200(10^{-6})}{2}\cos(2(-30°))$$

$$\gamma_{x'y'} = 793(10^{-6}) \qquad \textit{Ans.}$$

انځور 10-5

سترین د y` په سمت کیدی شی چی له معادلی 10-7 له $q = -30^0$ سره و ټاکو. موږ کولای شوچی $e_{y'}$ له معادلی 10-5 د $q = 60^0$ ($q = -30^0 + 90^0$) سره انځور 10-5b هم پیدا کړو. موږ لرو له $e_{y'}$ په عوض د $e_{x'}$

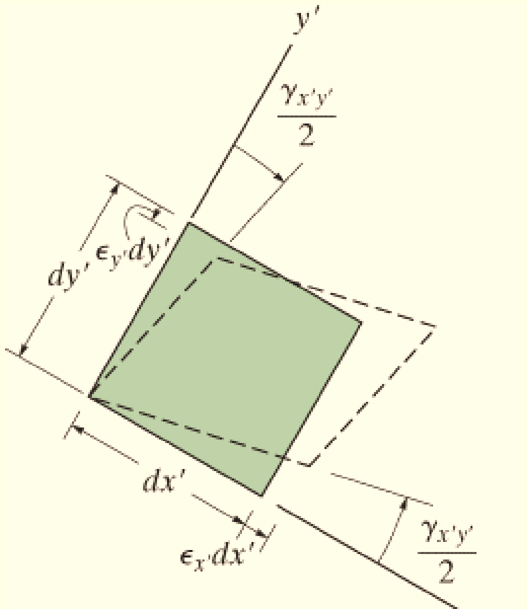
$$\epsilon_{y'} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} + \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\cos 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2}\sin 2\theta$$

$$= \left[\frac{500 + (-300)}{2}\right](10^{-6}) + \left[\frac{500 - (-300)}{2}\right](10^{-6})\cos(2(60^\circ))$$

$$+ \frac{200(10^{-6})}{2}\sin(2(60^\circ))$$

$$\epsilon_{y'} = -13.4(10^{-6}) \qquad \textit{Ans.}$$

دا پایلی عنصر ته تغیر د شکل، لکه څنګه چې په انځور 10-5c کې ښودل شوی، ورکوي.

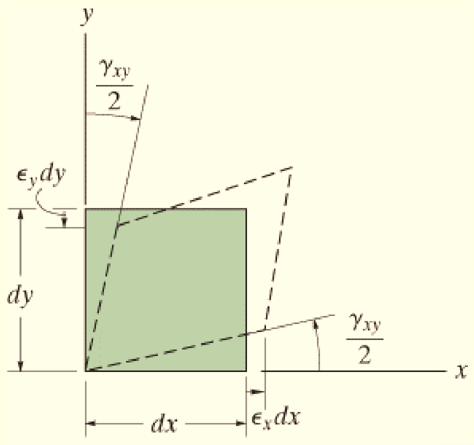


انځور 10-5

مثال 10.2

د سطحی سترین حالت په یوه ټکی کی $\epsilon_x = -350\,(10^{-6})$, $\epsilon_y = 200(10^{-6})$ او $\gamma_{xy} = 80\,(10^{-6})$, اجزاوی لري انځور 10-6a . اصلی سترینونه په دی ټکی او سمت د عنصر چی دوي ورباندی عمل کړي و ټاکي.

حل (SOLUTION)



(a)

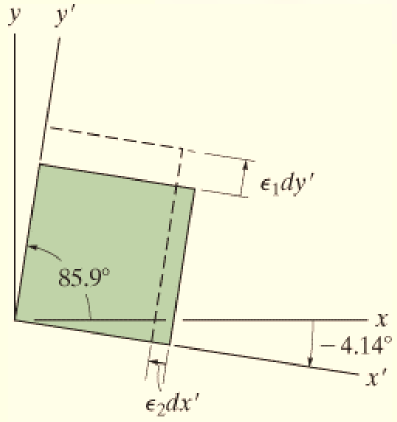
د عنصر جهت (Orientation of the Element)

له معادلي 10-8 موږ لرو

$$\tan 2\theta_p = \frac{\gamma_{xy}}{\epsilon_x - \epsilon_y} = \frac{80(10^{-6})}{(-350 - 200)(10^{-6})}$$

Thus, $2\theta_p = -8.28°$ and $-8.28° + 180° = 171.72°$, so that

$$\theta_p = -4.14° \text{ and } 85.9° \qquad \textit{Ans.}$$



(b)

انځور 10-6

هر یو د دی زاویو اندازه شو ي، مثبت خلاف د ساعت د ستنی ، له x محوربهرنی خوا ته نارمل په هر اړخ د عنصر. زاویه -4.14^0 په انځور 10-6b کی ښودل شوي.

اصلي سترين (Principal Strains)

له معادلی 10-9 اصلی سترینونه پیدا کوو. موږ لرو

$$\epsilon_{1,2} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{(-350 + 200)(10^{-6})}{2} \pm \left[\sqrt{\left(\frac{-350 - 200}{2}\right)^2 + \left(\frac{80}{2}\right)^2}\right](10^{-6})$$

$$= -75.0(10^{-6}) \pm 277.9(10^{-6})$$

$$\epsilon_1 = 203(10^{-6}) \qquad \epsilon_2 = -353(10^{-6}) \qquad \textit{Ans.}$$

د سترینو د جهت معلومولو لپاره له معادلي 5-10 کار اخلو او زاویه $\theta = -4.14^0$ انځور 10-6b . په دی توګه

$$\epsilon_{x'} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} + \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\cos 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2}\sin 2\theta$$

$$= \left(\frac{-350 + 200}{2}\right)(10^{-6}) + \left(\frac{-350 - 200}{2}\right)(10^{-6})\cos 2(-4.14^\circ) + \frac{80(10^{-6})}{2}\sin 2(-4.14^\circ)$$

$$\epsilon_{x'} = -353(10^{-6})$$

له همدی امله $\epsilon_{x'} = \epsilon_2$. کله چی اصلی سترینونه عمل وکړی عنصر تغیر د شکل مومی او دا په انځور 10-6b کی ښودل شوي.

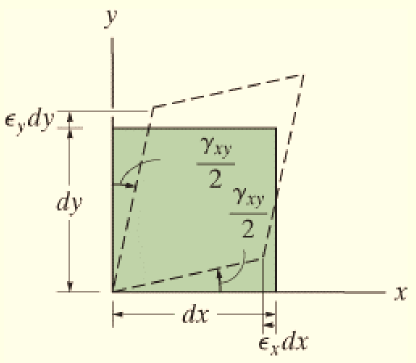
مثال 10.3

اجزاوی د اصلی سترین حالت په یو ټکی کی عبارت دی په $\epsilon_x = -350\ (10^{-6})$, ،

$\epsilon_y = 200(10^{-6})$ او $\gamma_{xy} = 80\ (10^{-6})$ ، انځور 10-7a وګوري. اعظمی شییر سترین په سطحه په دی ټکی کی او د عنصر جهت چی وربانډی عمل کړی وټاکي.

حل (SOLUTION)

د عنصر جهت (Orientation of the Element)



(a)

انځور 10-7

له معادلي 10-10 موږ لرو

$$\tan 2\theta_s = -\left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{\gamma_{xy}}\right) = -\frac{(-350 - 200)(10^{-6})}{80(10^{-6})}$$

په دی توګه، $2\theta_s = 81.72^0$ او $81.72^0 + 180^0 = 261.72^0$ نو داسي

$$\theta_s = 40.9° \text{ and } 131°$$

په پام کی ونیسي دا سمت 45^0 درجی له هغه چی په انځور 10-6b کی ښودل شوی، دي.

اعظمی شییر سترین په سطحه (Maximum In-Plane Shear Strain)

تطبیقول د معادلي 10-11 راکوی

$$\frac{\gamma_{\substack{\max \\ \text{in-plane}}}}{2} = \sqrt{\left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}$$

$$= \left[\sqrt{\left(\frac{-350 - 200}{2}\right)^2 + \left(\frac{80}{2}\right)^2}\right](10^{-6})$$

$$\gamma_{\substack{\max \\ \text{in-plane}}} = 556(10^{-6}) \qquad \textit{Ans.}$$

جذر ددی مساوات موږ ته دوی علامی د اعظمی شییر سترین په سطحه $\gamma_{\max \text{ in-plane}}$ لپاره راکوي. د هر یوه لپاره مناسبه زاویه په پلی کیدو د معادلی 10-6 په لاس راتلي شي. کله چی θ = 40.9^0 موږ لرو

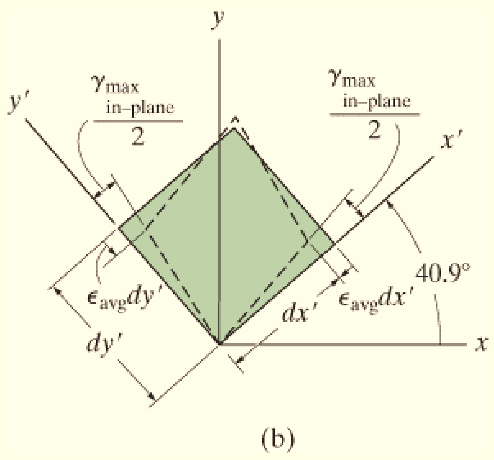
$$\frac{\gamma_{x'y'}}{2} = -\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\sin 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2}\cos 2\theta$$

$$= -\left(\frac{-350 - 200}{2}\right)(10^{-6})\sin 2(40.9^\circ) + \frac{80(10^{-6})}{2}\cos 2(40.9^\circ)$$

$$\gamma_{x'y'} = 556(10^{-6})$$

دا پایلی مثبت دی او له همدی امله $\gamma_{\text{max in-plane}}$ لیولتیا لری چې عنصر داسي تحریف (distort) کړي تر څو په بین د dx' او dy' بني زاویه کمه شي (مثبت علامه د کنوانسیون په اساس)، انځور 10-7b و ګوري.

همدارنګه دوی تړلي دی له اوسط نارمل سترین سره چې په عنصر باندی تحمیل کیږی او له معادلی 10-12 پیدا کیدی شي.



انځور 10-7

$$\epsilon_{\text{avg}} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} = \frac{-350 + 200}{2}(10^{-6}) = -75(10^{-6})$$

دا سترینونه د عنصر د انقباض لامل کیږي، انځور 10-7b .

(MOH'S CIRCLE- PLANE سطحی-سترین- موهر دایره 10.3* STRAIN)

ځکه چې د سطحی سترین بدلون معادلې په رياضياتي توګه د سطحی-سټريس بدلون معادلوته ورته دی، موږ کولای شوچې د سترين بدلون سوالونه د مو هر دايرې په کارولو سره حل کړو.

د سټریس قضيې په څير پرامتر q د معادلې 10-5 او 10-6 کيدی شی چې حذف شی او پايل يې په دی لاندی ډول و ليکو

$$(\epsilon_{x'} - \epsilon_{avg})^2 + \left(\frac{\gamma_{x'y'}}{2}\right)^2 = R^2 \qquad (10\text{–}13)$$

کوم چې

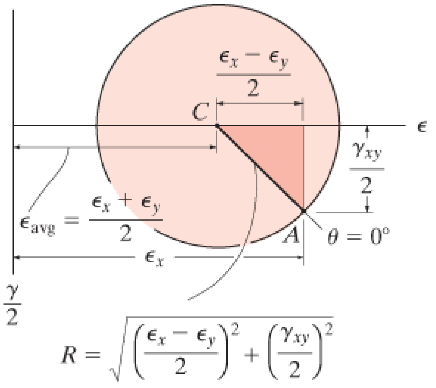
$$\epsilon_{avg} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2}$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}$$

معادله 10-13 د سترين د موهر دايرې استازيتوب کوي .د دايرې مرکز په محور e په ټکی C $(e_{avg},0)$ او شعاع يې R دي. لکه څنګه چې په دی لاندی کړنلارې کی تشريح شوي د موهر دايره د اصلی سترين، اعظمی سترين په سطحه کی، يا سترين په يوه اختياری سطحه کی معلوميدی شي.

د تحلیل کړنلاره

PROCEDURE FOR ANALYSIS

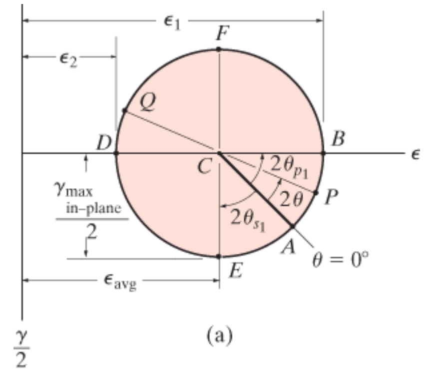


انځور 10-8

د سترین لپاره د **موهردایري** رسمول او کارول د سټریس ورته تګلاره تعقیبوی .

د دايري جوړول (Construction of the Circle).

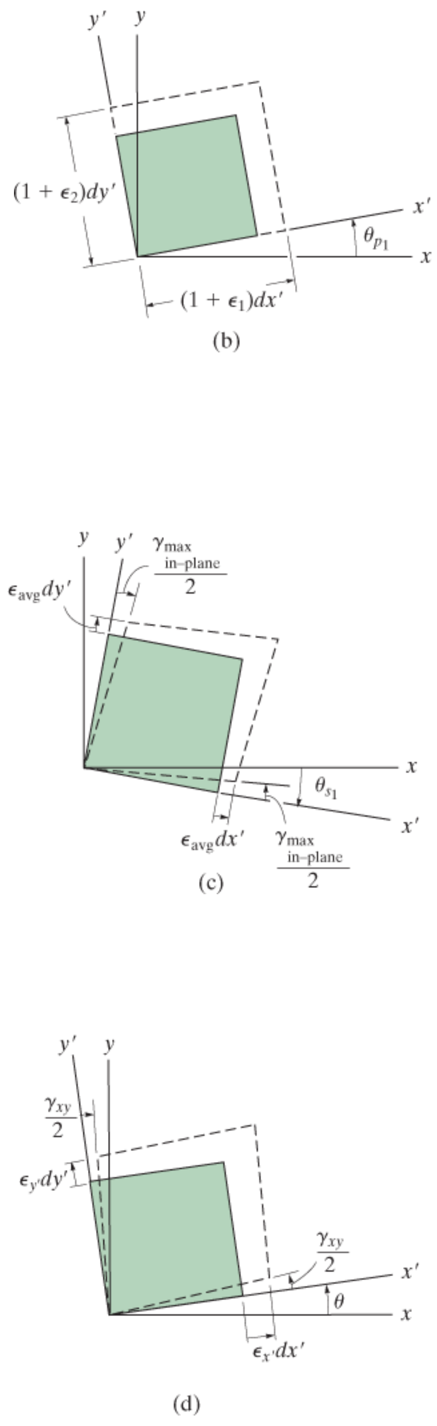
- محوري سیستم داسي رامینځته کړئ ، کوم چې افقی محور د نارمل سترین ϵ استازیتوب وکړي او په ښي خوا به مثبت وي. عمودی محور نیم ارزښت د شییر سترین ، $\gamma/2$ ، استازیتوب کوي ، مثبت به په لاندی لوري وي، انځور 10-8 و ګوري.
- د ϵ_x، ϵ_y، γ_{xy} ، انځور 2-10، پلاټ لپاره د مثبت علامی کنوانسیون کارول کیږي. د دايری مرکز C ، د ϵ په محور کې په فاصله د $\epsilon_{avg} = (\epsilon_x + \epsilon_y)/2$ له مرکز څخه موقعیت لري، انځور 10-8 .
- د "ریفرینس نقطه " A چې کوردينات يي $A\,(\epsilon_x, \gamma_{xy}/2)$ دي پلاټ کوو . دا ټکی استازیتوب د هغه حالت کوی کله چې د $x`$ محور په x محور سره مطابقت لري، دا څرګنده وي چې $\theta = 0^0$ ، انځور 10-8 ووینې.
- نقطه A د دایري د مرکز C سره وصل کړئ اوله سیوری شوی مثلث شعاع د دايری مشخص کړئ. انځور 10-8 و ګوري.
- کله چې R وټاکل شی، دایره سکیچ کړئ.



انځور 10-9

اصلي سترين (Principal Strains)

- اصلي سترينونه ϵ_1 او ϵ_2 له دايرى څخه معلوم کیدی شي او هغه د B او D کوردينات دی، چیرته چې $\gamma/2 = 0$ ، انځور 10-9a .
- جهت د هغه سطحه چې ϵ_1 وربانديې عمل کوي له دايری پیدا کیږي ، او زاویه $2\theta_{p1}$ د مثلثاتو په کارولو محاسبه او په لاس راځی. دلته دا زاویه خلاف د ساعت د ستني ، له کرښي CA تر CB پوري ده، انځور 10-9a و ګوری.



انځور 10-9 (تکرار)

په یاد ولري ګرڅش د زاويې θ_{p1} باید په همماغه جهت وی، د عنصر ریفرینس محور x تر $x`$ محور، انځور 10-9b و ګوري.

- کله چې ϵ_1 او ϵ_2 مثبت وی لکه چې په انځور 10-9a کې ښودل شوي، عنصر په انځور 10-9b کې اوږدیږي په جهت د $x`$ او $y`$ لکه څنګه چې په غوځ ـ غوځ سرحدی کرښه ښودل شوي.

اعظمی شییر سترین په سطحه کې (Maximum In-Plane Shear Strain).

- اوسط نارمل سترین او په سطحه کې اعظمي شییر سترین له دایرې څخه د کوردینات په توګه د هرې یوی نقطې E یا F څخه ټاکل کیږي ، انځور 10-9a وګوري.
- د سطحی جهت چې $\gamma_{max\ in\text{-}plane}$ او γ_{avg} وربانډی عمل کړي ، کیدی شی له دایرې چې په انځور 10-9a کې ښودل شوي په محاسبه کولو د زاويې $2\theta_{s1}$ اود مثلثاتو په کارولو و ټاکي. دلته دا زاویه د ساعت د ستنې په لور له CA تر CE ده . په یاد ولري ګرڅش د زاويې θ_{s1} باید په همدې جهت وي، له ریفرینس عنصر محور x تر $x`$ محور، انځور 10-9c* و ګوري.

سترین په خپل سری سطحو (Strains on Arbitrary Plane)

- د نارمل او شییر سترین اجزا $\epsilon_{x`}$ او $\gamma_{x`y`}$ د یوه عنصر لپاره چې جهت يې ټاکل شوي په یوه زاویه θ وی، انځور 10-9d ، کیدی شی د مثلثاتو په کارولو له دایرې، د ټکي P د کوردیناتو په موندلو ، انځور 10-9a ، و ټاکل شي.
- د نقطې P د موندلو لپاره، پیژندل شوي د ساعت د ستنې په مخالف لوري زاویه د θ د $x`$ محور، انځور 10-9d، اندازه کیږی خلاف د ساعت د ستنې په دایره په اندازه 2θ دی . دا *اندازې له* CA تر CP نیول کیږي .

- که د $e_{y'}$ ارزښت ته اړتیا وی ، دا کیدی شي چې کوردینات د e ټکی Q،انځور 10-9a ، په محاسبه کولو سره و ټاکل شي. کربنه CQ موقعیت پروت دی 180^0 له CP څخه او په دی توګه 90^0 ګردش د محور x' دي.
- *که $g/2$ محور پورته خوا مثبت جوړ شوی وي، نو بیا دا زاویه $2q$ په دایره اندازه کیږي په مخالف لوري د سطحی په زاویه q .

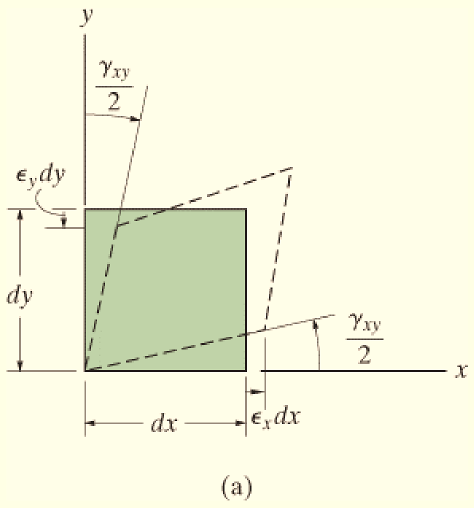
مثالونه

مثال 10.4

اجزاوی سطحی سترین په یوه ټکی عبارت دی په $e_x = 250(10^{-6})$, ، $e_y = -150(10^{-6})$ او $g_{xy} = 120(10^{-6})$ ، انځور 10-10a . اصلی سترینونه او جهت د سطحی چی هغوي وربآندی عمل کړي و ټاکي.

حل (SOLUTION)

د دایري جوړه ول (Construction of the Circle)



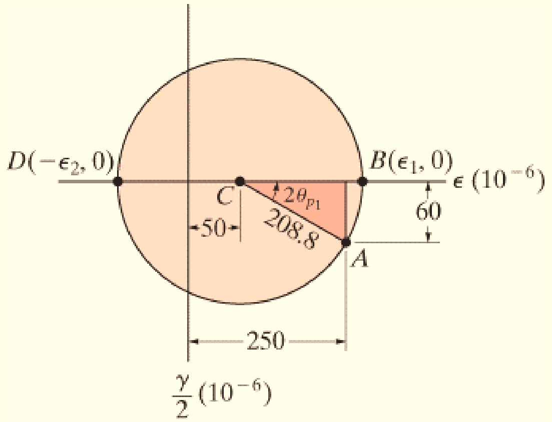
انځور 10-10

دe او $g/2$ محورونه جوړه وو. په یاد ولري چې مثبت جهت د محور $g/2$ باید ښکته خوا ته وی. ددی لپاره چې خلاف د ساعت د ستني د عنصر ګردش مطابقت لری د خلاف د ساعت د ستنی ګردش په دور د دایری او برعکس. مرکز د دایری C موقعیت لری په

$$\epsilon_{avg} = \frac{250 + (-150)}{2}(10^{-6}) = 50(10^{-6})$$

څرنګه چې $\gamma_{xy}/2 = 60(10^{-6})$ ، ريفرينس ټکی A ($\theta = 0^0$) کوردينات يې عبارت دی په $A(250(10^{-6}), 60(10^{-6}))$. له سيوری شوی مثلث په انځور 10-10b کی چې شعاع د دايری کيږي

$$R = \left[\sqrt{(250 - 50)^2 + (60)^2}\right](10^{-6}) = 208.8(10^{-6})$$



(b)

اصلي سترينونه (Principal Strains)

e کوردينات د B او D ټکيو عبارت دی په

$$\epsilon_1 = (50 + 208.8)(10^{-6}) = 259(10^{-6}) \quad \textit{Ans.}$$

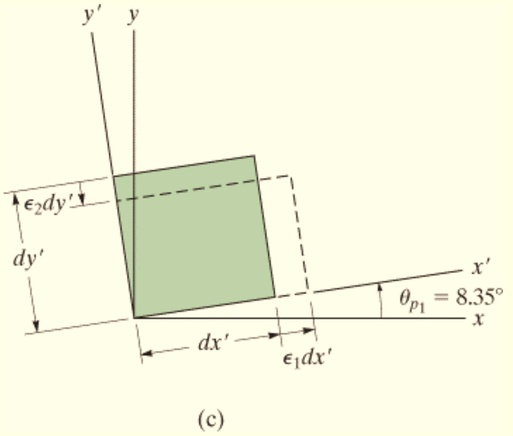
$$\epsilon_2 = (50 - 208.8)(10^{-6}) = -159(10^{-6}) \quad \textit{Ans.}$$

د اصلی مثبت سترين e_1 جهت انځور 10-10b تعريف شوی په خلاف د ساعت د ستني زاويه $2\theta_{p1}$ چې اندازه کيږي له CA ($\theta = 0^0$) تر CB پوري. مور لرو

$$\tan 2\theta_{p_1} = \frac{60}{(250 - 50)}$$

$$\theta_{p_1} = 8.35° \quad \textit{Ans.}$$

له همدی امله د عنصر dx' اړخ د ساعت د ستینی خلاف په اندازه د 8.35^0 ده، لکه څنګه چی په انځور 10-10c کی ښودل شوي. دا د ϵ_1 جهت تعریف کوي. دا بیځایه کیدنه د عنصر په دی انځور کی ښودل شوي.

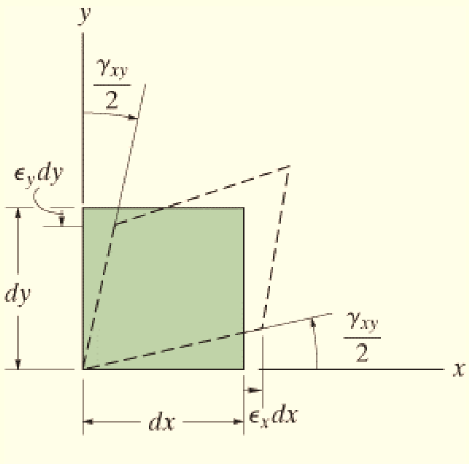


(c)

انځور 10-10 (تکرار)

مثال 10.5

د سطحی سترین حالت اجزاوی په یوه ټکی د یوه غړی کی عبارت دی په $\epsilon_x = 250(10^{-6})$, $\epsilon_y = -150(10^{-6})$ او $\gamma_{xy} = 120(10^{-6})$ انځور 10-11a وګوري . اعظمی شییر سترین په سطحه او جهت د عنصر جی دا وربادنی عمل کړی وټاکي.



(a)

حل (SOLUTION)

د موهردایره په مخکني سوال کی جوړه شوه، او په انځور 10-11b کی ښودل شوي.

اعظمی شییر سترین په سطحه (Maximum In-Plane Shear Strain)

ټکي E او F ، اعظمی شییر سترین په سطحه نیم حد او اوسط نارمل سترین ښيي. له کوردینات د ټکی E لیکلي شو

$$\frac{(\gamma_{x'y'})_{\substack{\max \\ \text{in-plane}}}}{2} = 208.8(10^{-6})$$

$$(\gamma_{x'y'})_{\substack{\max \\ \text{in-plane}}} = 418(10^{-6}) \qquad \textit{Ans.}$$

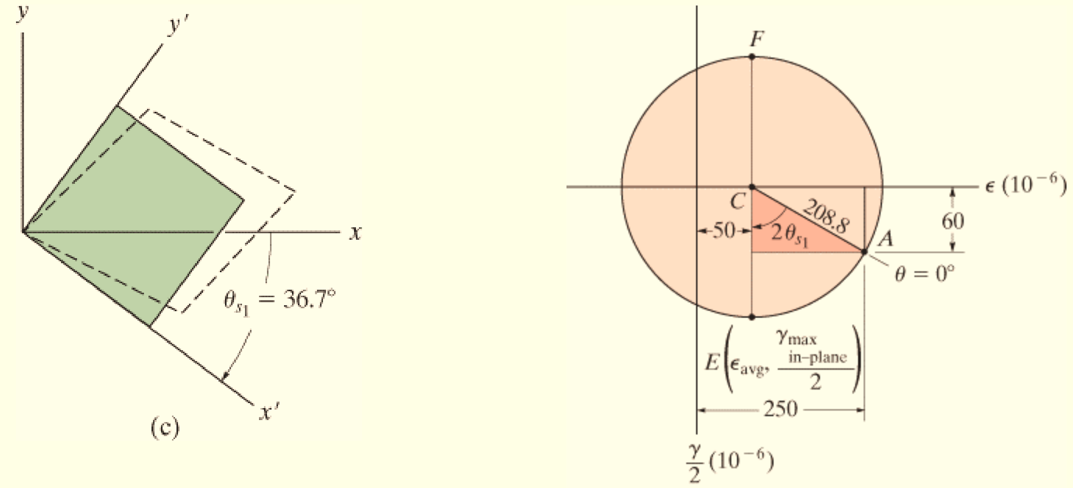
$$\epsilon_{\text{avg}} = 50(10^{-6})$$

ددی لپاره چی د عنصر جهت تعین کړومو، به د ساعت د ستني زاویه $2q_{s1}$ له CA (q=0^0) تر CE پوری اندازه کړو

$$2\theta_{s_1} = 90° - 2(8.35°)$$

$$\theta_{s_1} = 36.7° \qquad \textit{Ans.}$$

دا زاویه په انځور 10-11c کی ښودل شوي. ځکه چی شییر سترین په ټکی E په دایره کی مثبت حد لري، او اوسط نارمل سترین هم مثبت دی، دا سترینونه عنصر بیځایه کړی او هغه په ټوټه شوی کرښه په انځور کی ښودل شوي.

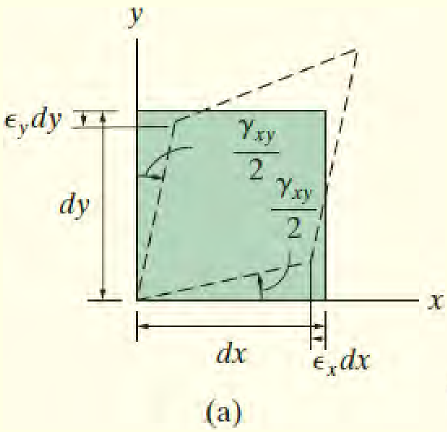


انځور 10-11

(b)

مثال 10.6

د سطحی سترین حالت اجزاوی ، په یوه ټکی د یوه غړی کی عبارت دی په
$\epsilon_x = -300(10^{-6})$, $\epsilon_y = -100(10^{-6})$ او $\gamma_{xy} = 100(10^{-6})$ ، انځور 10-12a وګوري .
د یو عنصرچی جهت يي 20^0 د ساعت د ستني په لورله دی موقعیت دی، د سترين ي حالت و ټاکي.



انځور 10-12

حل (SOLUTION)

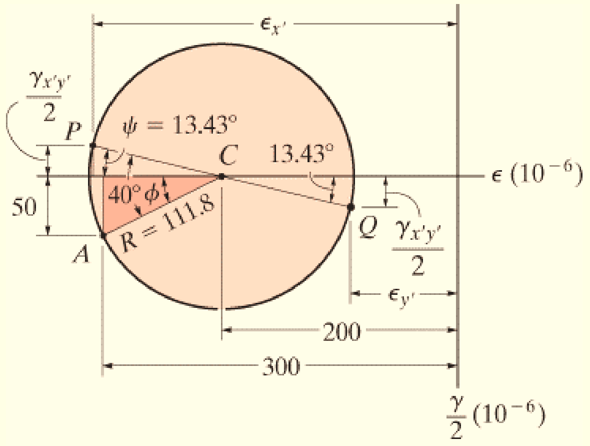
د دايري جوړه ول (Construction of the Circle)

د ϵ او $\gamma/2$ محورونه تشکیله وو. مرکز د دایری دی په

$$\epsilon_{avg} = \left(\frac{-300 - 100}{2}\right)(10^{-6}) = -200(10^{-6})$$

د ریفرینس ټکی A کوردینات $(-300(10^{-6}), 50\ (10^{-6}))$ A او شعاع CA چی د سیوری شوی برخی د مثلث څخه ټاکل کیږي او هغه عبارت ده په

$$R = \left[\sqrt{(300 - 200)^2 + (50)^2}\right](10^{-6}) = 111.8(10^{-6})$$



(b)

سترین په مایل سطحه (Strain on Inclined Element)

ځکه چې عنصر په یوه 20^0 د ساعت د ستنې په جهت مو قعیت لري موږ باید شعاعي کرښه $CP,$ $2(20^0) = 40^0$ د ساعت د ستنې په لور اندازه کړو له CA $(q = 0^0)$ انځور 10-12b . کوردینات د ټکی P له هندسي د دايرى څخه لاس ته راځي. وګورى

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{50}{(300-200)}\right) = 26.57^\circ, \qquad \psi = 40^\circ - 26.57^\circ = 13.43^\circ$$

په دی توګه

$$\epsilon_{x'} = -(200 + 111.8\cos 13.43^\circ)(10^{-6})$$
$$= -309(10^{-6}) \qquad \textit{Ans.}$$

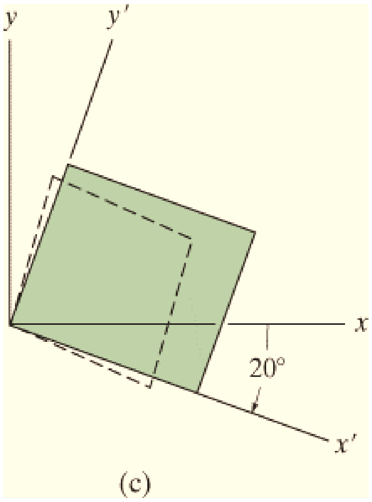
$$\frac{\gamma_{x'y'}}{2} = -(111.8\sin 13.43^\circ)(10^{-6})$$

$$\gamma_{x'y'} = -52.0(10^{-6}) \qquad \textit{Ans.}$$

نارمل سترین $e_{y`}$ کیدی شي چې لهe کوردینات د ټکی Q په دايره باندی، انځور 10-12b، و ټاکل شی،

$$\epsilon_{y'} = -(200 - 111.8\cos 13.43^\circ)(10^{-6}) = -91.3(10^{-6}) \qquad \textit{Ans.}$$

په پایله کی دا سترینونه د عنصر بیځایه کیدنه نسبت x', y' محورونو ته په انځور 10-12c کی ښودل شوي.



انځور 10-12 (تکرار)

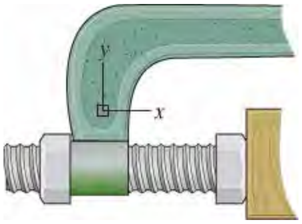
سوالونه

PROBLEMS

س 10-1. ثابت کړی چی مجموعه د نارمل سترینونو په عمودی جهت کی ثابت ده، د بیلګی په توګه $\epsilon_x + \epsilon_y = \epsilon_{x'} + \epsilon_{y'}$.

س 10-2. د یو غړی په یوه ټکی دلاستی يي حالت د سترین عبارت دی په $\epsilon_x = 200(10^{-6})$

$\epsilon_y = -300(10^{-6})$ او $\gamma_{xy} = 400(10^{-6})$. د سترین د بدلون له معادلو کار واخلي او مساوی په سطحه سترین، په یو ه عنصر چی په زاویه 30^0 د ساعت د ستني مخالف جهت له اصلی حالت موقعیت لری، وټاکي. بیځایه شوی عنصر د سترین له امله په سطحه x-y کی رسم کړي.

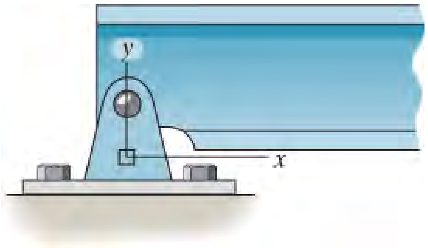


س 10-2

س 10-3. د یو پن اتکا په پانه په یوه ټکی د سترین اجزاوی عبارت دی په $\epsilon_x = 200(10^{-6})$

$\epsilon_y = 180(10^{-6})$ او $\gamma_{xy} = -300(10^{-6})$. د سترین د بدلون له معادلو کار واخلي او مساوی په سطحه سترین، په یو ه عنصر چی په زاویه 60^0 د ساعت د ستني مخالف جهت له اصلی حالت موقعیت لری، وټاکي. بیځایه شوی عنصر د سترین له امله په سطحه x-y کی رسم کړي.

س *10-4. سوال 10-3د یو عنصر چی جهت یي په زاویه $\theta = 30^0$ د ساعت د ستنی په لور وی ، حل کړي.



س 10-3/4

س 10-5. د کستر اسمبلی په یوه ټکی د پانې د سترین اجزاوی عبارت دی په $\epsilon_x = -400(10^{-6})$

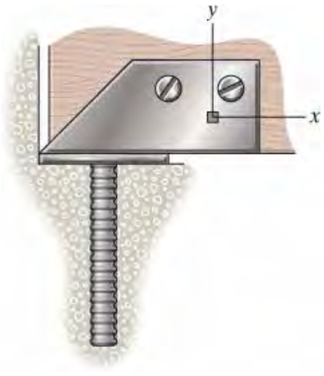
$\epsilon_y = 860(10^{-6})$ او $\gamma_{xy} = 375(10^{-6})$. د سترین د بدلون له معادلو کار واخلي او معادل په سطحه سترین، په یو ه عنصر چی په زاویه 30^0 د ساعت د ستني مخالف جهت له اصلی حالت موقعیت لری، وټاکي. بیځایه شوی عنصر د سترین له امله په سطحه x-y کی رسم کړي.

س 10-5

س 10-6. د براکټ په یوه ټکی د سترین اجزاوی عبارت دی په $\epsilon_x = 150(10^{-6})$

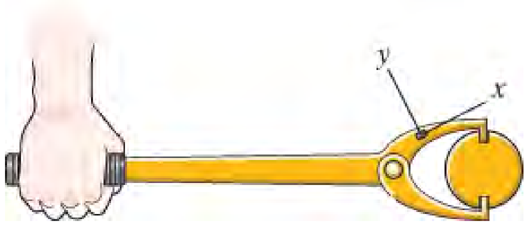
$\epsilon_y = 200(10^{-6})$ او $\gamma_{xy} = -700(10^{-6})$. د سترین د بدلون له معادلو کار واخلي او معادل په سطحه سترین، په یو ه عنصر چی په زاویه 60^0 د ساعت د ستني مخالف جهت له اصلی حالت موقعیت لری، وټاکي. بیځایه شوی عنصر د سترین له امله په سطحه x-y کی رسم کړي.

س 10-7. سوال 10-6د یوعنصرچی جهت يي په $\theta = 30^0$ زاویه د ساعت د ستنی په لور وی ، حل کړي.



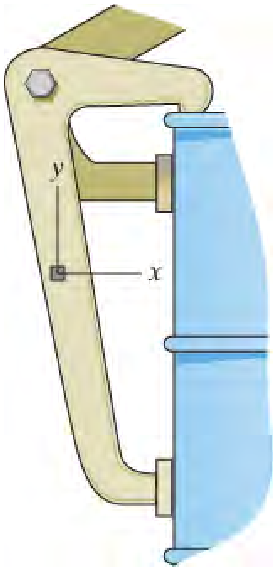
س 10-6/7

س *10-8. د سپینر رینچ په یوه ټکی د سترین اجزاوی عبارت دی په $\epsilon_x = 260(10^{-6})$ $\epsilon_y = 320(10^{-6})$ او $\gamma_{xy} = 180(10^{-6})$. د سترین د بدلون له معادلو کار واخلي او وټاکی (a) اصلی سترینونه په سطحه او (b) اعظمی شییر سترین په سطحه او اوسط نارمل سترین. په هر حالت کی جهت د عنصر وټاکي ، او هم وښيي چی عنصر د سترین له امله څرنګه په سطحه x-y کی بیځایه کیږي.



س 10-8

س 10-9. د یو غړي په یوه ټکی د سترین اجزاوی عبارت دی په $\epsilon_x = 180(10^{-6})$ $\epsilon_y = -120(10^{-6})$ او $\gamma_{xy} = -100(10^{-6})$. د سترین د بدلون له معادلو کار واخلي او وټاکی (a) اصلی سترینونه په سطحه او (b) اعظمی شییر سترین په سطحه او اوسط نارمل سترین. په هر حالت کی جهت د عنصر وټاکي ، او هم وښيي چی عنصر د سترین له امله څرنګه په سطحه x-y کی بیځایه کیږي.

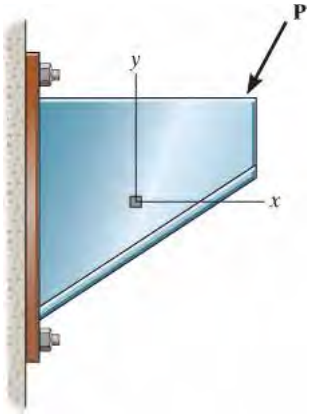


س 10-9

س 10-10. د یو اتکا په یوه ټکی د سترین اجزاوی عبارت دی په $e_x = 350(10^{-6})$ $e_y = 400(10^{-6})$ او $g_{xy} = 350(10^{-6})$. د سترین د بدلون له معادلو کار واخلي او وټاکی (a اصلی سترینونه په سطحه او (b) اعظمی شییر سترین په سطحه او اوسط نارمل سترین. په هر حالت کی جهت د عنصر وټاکي ، او هم وښيي چی عنصر د سترین له امله څرنګه په سطحه x-y کی بیځایه کیږي.

س -10

س 10-11. په برکت کی د بار **P** له امله د سترین حالت اجزاوی عبارت دی په ($\epsilon_x = 500(10^{-6})$ $\epsilon_y = 350(10^{-6})$ او $\gamma_{xy} = -430(10^{-6})$. د سترین د بدلون له معادلو کار واخلي تر څومعادل سترینونه په سطحه په یو عنصر چی په زاویه $\theta=30^0$ د ساعت د ستني په لور له اصلی جهت موقعیت لری و تاکی. بیځایه شوی عنصر ددی سترینو له امله په سطخه x-y کی سکیچ کړي.

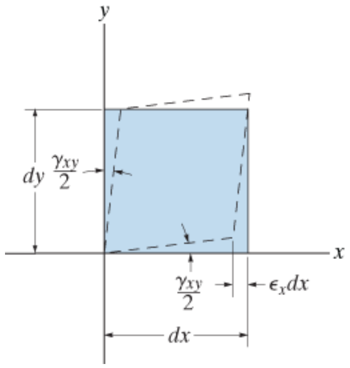


س 10-11

س *10-12.

د سترین حالت اجزاوی په یوه عنصرعبارت دی په ($\epsilon_x = -400(10^{-6})$, $\epsilon_y = 0$ او $\gamma_{xy} = 150(10^{-6})$. معادل حالت د سترین په یو عنصر په عین نقطه کی چی په زاویه $\theta=30^0$ د ساعت د ستني په لور له اصلی جهته موقعیت لری و تاکی. پایلي په دی عنصر سکیچ کړي.

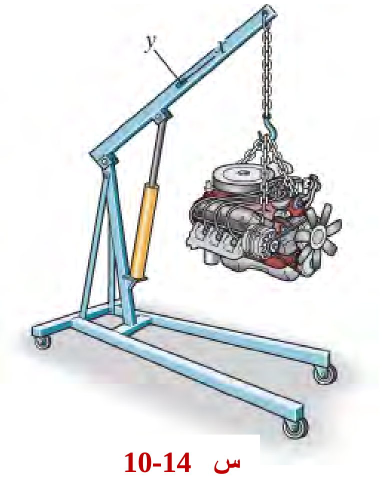
س 10-13. د سطحی سترین حالت په یوه عنصرعبارت دی په ($\epsilon_x = -300(10^{-6})$, $\epsilon_y = 0$ او ($\gamma_{xy} = 150(10^{-6})$. معادل حالت د سترین وټاکي چی استازیتوب کړي (a) د اصلي سترینو او (b) اعظمی شییر سترین په سطحه او اړوند اوسط نارمل سترین . مشخص کړي جهت د اړوند عناصرو ددی حالتونو د سترین نظر اصلی عنصر ته.



س 10-12/13

س 10-14. د يو بوم په يوه ټکي کې د سترين اجزاوی عبارت دی په $e_x = 250(10^{-6})$

$e_y = 300(10^{-6})$ او $g_{xy} = -180(10^{-6})$. د سترين د بدلون له معادلو کار واخلي او وټاکی (a) اصلی سترينونه په سطحه او (b) اعظمی شيير سترين په سطحه او اوسط نارمل سترين. په هر حالت کی جهت د عنصر وټاکي ، او هم وښيي چې عنصر د سترين له امله څرنګه د x-y په سطحه کی بيځايه کيږي.

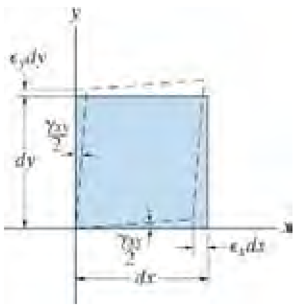


س 10-14

س 10-15. د سطحی سترين عمومی حالت په پام کی ونيسي کوم چی e_x, e_y او g_{xy} معلوم دي.

يو کمپيوتری پروګرام وليکی تر څو نارمل سترين او شيير سترين $e_{x'}$ او $g_{x'y'}$ په سطحه د يو عنصر چې د افقی کرښی سره زاويه q جوړه وي. او دا هم شامل کړی چې اصلی سترينونه، د عنصر جهت او اعظمی شيير سترين په سطحه او اوسط نارمل سترين او د عنصر جهت و ټاکي.

س 10-16*. د سطحی سترين حالت په يوه عنصرعبارت دی په $e_x = -300(10^{-6})$,
$e_y = 100(10^{-6})$ او $g_{xy} = 150(10^{-6})$. معادل حالت د سترين وټاکي چی استازيتوب کړي (a) د اصلي سترينو او (b) اعظمی شيير سترين په سطحه او اړوند اوسط نارمل سترين . مشخص کړي جهت د اړوند عناصرو ددی حالتونو د سترين نظر اصلی عنصرته.



س 10-16

س 10-17. سوال 3-10 په کارولو د موهر دايرى حل کړي.

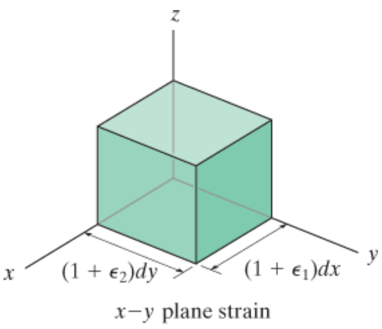
س 10-18. سوال 4-10 په کارولو د موهر دايرى حل کړي.

س 10-19. سوال 5-10 په کارولو د موهر دايرى حل کړي.

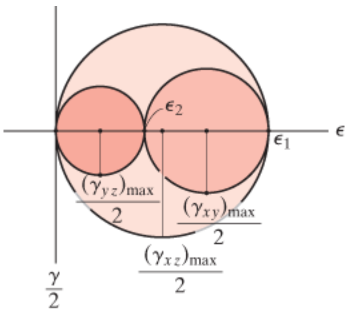
س 10-20. سوال 8-10 په کارولو د موهر دايرى حل کړي.

س 10-21. سوال 7-10 په کارولو د موهر دايرى حل کړي.

10.4* مطلق اعظمی شییر سترین (ABSOLUTE MAXIMUM SHEAR STRAIN)



(a)



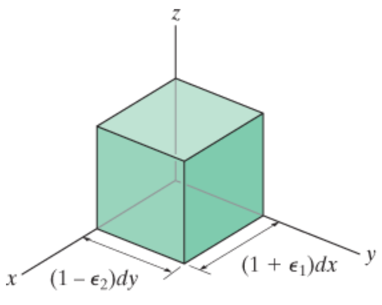
(b)

په 9.5 برخه کی دا په ګوته شوي چې د سطحی ستریس حالت په صورت کې، کله چې اصلي ستریسونه ورته علامه ولري مطلق اعظمی ستریس د موادو په یو عنصر کې له سطحی څخه وتلي واقع کيږي ، د بيلګې په توګه، دواړه کششي يا دواړه تيلوهونکي ستريسونه وي. ورته پايله د سطحی سترين لپاره پيښيږي. د مثال په توګه، که په سطحه کې اصلي سترينونه د اوږدوالي لامل کيږي، انځور 10-13a ، بيا د موهر درې دايرې د نارمل او شيير سترين اجزاوی د عنصر ګردش په x ، y، او z محورونو بيانوي کوم چې په انځور 10-13b کې ښودل شوي. د کتلو له مخی د لويی دايرې شعاع عبارت ده په $R = (\gamma_{xz})_{max}/2$ ، او داسې نور

$$\gamma_{\substack{abs\\max}} = (\gamma_{xz})_{max} = \epsilon_1 \qquad (10\text{–}14)$$

ϵ_1 and ϵ_2 have the same sign

انځور 10-13



$x-y$ plane strain

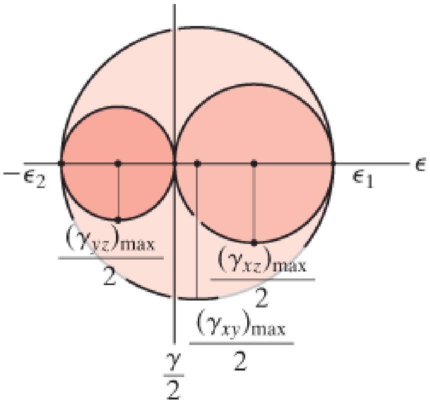
(a)

دا ارزښت
مطلق اعظمی شییر سترين د موادو لپاره ورکوي.

تاسو په ياد ولرئ چې دا له اعظمی شییر سترين په سطحه کی زيات دی، او هغه عبارت دی په $(g_{xy})_{max} = e_1 - e_2$.

اوس هغه حالت په پام کی نيسو چیرې چې يو له اصلی سترينونو په سطحه-کی مخالفه علامه د هغه بل اصلی سترين په سطحه کی وی،

نو بيا e_1 لامل د اوږدوالي او e_2 لامل د انقباض کيږي، انځور 10-14a وګوري. دا د موهر دري دايري د سترين د اجزاوو تشريح د عنصر د ګردش په x, y, z محورونو کوي ، لکه څرنګه چې په انځور 10-14b کی ښودل شوي. دلته



(b)

$$\gamma_{\substack{abs\\max}} = (\gamma_{xy})_{\substack{in\text{-}plane\\max}} = \epsilon_1 - \epsilon_2 \qquad (10\text{–}15)$$

ϵ_1 and ϵ_2 have opposite signs

انځور 10-14

مهم ټکي

(IMPORTANT POINTS)

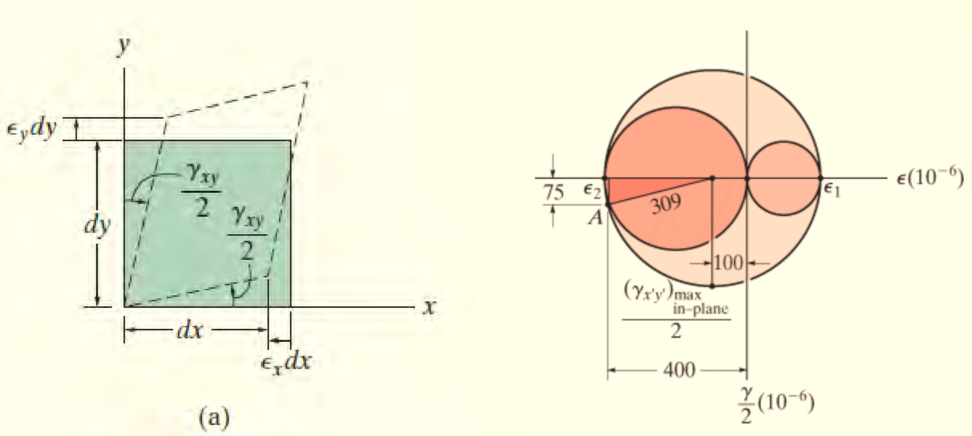
- که په سطحه اصلی سترينونه دواړه يو شان علامی ولري، بيا مطلق اعظمی شییر سترين په وتلي سطحه واقع کيږي او ارزښت يي عبارت دی په $g_{abs\ max} = e_{max}$. دا ارزښت له اعظمی شییر سترين په سطحه څخه زيات دي.

- که په سطحه اصلی سترينونه دواړه مخالفی علامی ولري ، نو بيا مطلق اعظمی شییر سترين مساوی دی په اعظمی شییر سترين په سطحه $g_{abs\ max} = e_1 - e_2$.

مثال

مثال 10.7

يوه ټکي چې د سطحی- سترین حالت کی دی، د سترین اجزاوی چې ورباندی شتوم لرى عبارت دی په $\epsilon_y = 200(10^{-6})$, $\epsilon_x = -400(10^{-6})$ او $\gamma_{xy} = 150(10^{-6})$ انځور 10-15a وګوري.
اعظمی شییر سترین په سطحه کی او مطلق اعظمی شییر سترین مشخص کړي.



انځور 10-15 (b)

حل (SOLUTION)

اعظمی شییر سترین په سطحه (Maximum In-Plane Shear Strain)

موږ به دا سوال د موهر دايرى په کارولو حل کړو. مرکز د دايري موقعيت لرى په

$$\epsilon_{avg} = \frac{-400 + 200}{2}(10^{-6}) = -100(10^{-6})$$

څرنګه چې $\gamma_{xy}/2 = 75\ (10^{-6})$ ، د ريفرينس نقطه A کوردينات عبارت دی په
$(-400(10^{-6}), 75(10^{-6}))$ ، انځور 10-15b . شعاع د دايري عبارت دی په

$$R = \left[\sqrt{(400-100)^2 + (75)^2}\right](10^{-6}) = 309(10^{-6})$$

له دایرې په سطحه اصلي سترینونه دا لاندې دي

$$\epsilon_1 = (-100 + 309)(10^{-6}) = 209(10^{-6})$$
$$\epsilon_2 = (-100 - 309)(10^{-6}) = -409(10^{-6})$$

او هم اعظمی په سطحه شییر سترین عبارت دی په

$$\gamma^{max}_{in\text{-}plane} = \epsilon_1 - \epsilon_2 = [209 - (-409)](10^{-6}) = 618(10^{-6}) \qquad \textit{Ans.}$$

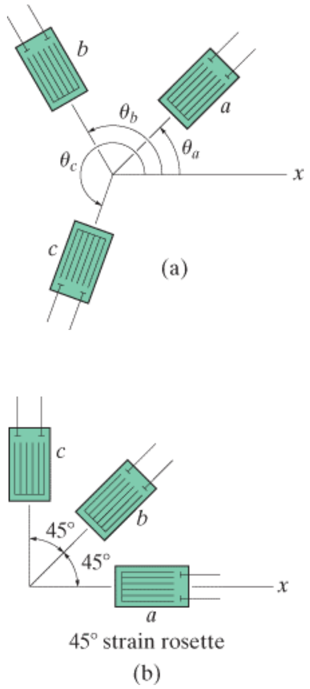
مطلق اعظمی شییر سترین (Absolute Maximum Shear Strain)

ځکه په سطحه اصلي سترینونه مخا لفی علامی لري، اعظمی شییر سترین په سطحه، اعظمی شییر سترین هم دی

$$\gamma_{\substack{abs\\max}} = 618(10^{-6}) \qquad \textit{Ans.}$$

د موهر دري دایري د عنصر د جهت په هر x, y, z محوروونو هم په انځور 10-15b کې ښودل او رسم شوي.

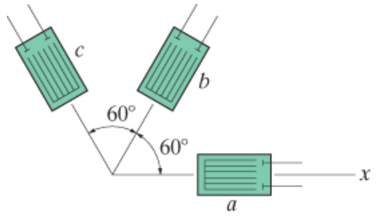
10.5 د روزیټونو سترین (STRAIN ROSETTES)



45° strain rosette
(b)

د بدن په آزاده سطحه نارمل سترین په یو ځانګړي سمت، د بریښنایی مقاومت سترین ګیج په کارولو سره اندازه کیدی شي . د مثال په ډول، په 3.1 برخه کې موږ وښودل چې دا ډول ګیج څنګه د محوری سترین موندلو لپاره په یوه نمونه کې کله چې دکششی ستریس ازموینه ترسره کوو کارول کیږي . کله چې څو بارونه په بدن پلی شي، بیا هم سترینونه ϵ_x، ϵ_y، γ_{xy} په یوه نقطه په سطحه کې کیدای شي وتاکل شي. له بده مرغه، د شییر سترین په مستقیم ډول نشي کیدی د سترین ګیج سره اندازه شي، او په دې توګه د ϵ_x، ϵ_y، γ_{xy} ترلاسه کولو لپاره، موږ باید د درې سترین ګیجونو ګیډي (cluster) وکاروو، کوم چې په یو مشخص نمونه کې تنظیم شوي او دا د **سترین روزیټ** (rosette) په نوم

یادیږي. یوځل چې دا نارمل سترینونه اندازه شي ، بیا دا ډیټا کیدی شي بدله شی ترڅو په نقطه کې د سترین حالت مشخص کړي.



انځور 10-16

د ښودلو لپاره چې دا څنګه ترسره کیږي، د تنظیم کولو عمومي حالت په پام کې ونیسئ ، ګیجونه په زاویه $\theta_a, \theta_b, \theta_c$ کې تنظیم شوي، څنګه چې په انځور 10-16a کې ښودل شوي. که لوستل د $\epsilon_a, \epsilon_b, \epsilon_c$ په لاس راشي، موږ کولی شو د سترین اجزاوي ϵ_x، ϵ_y ، γ_{xy} د سترین د بدلون معادلې 10-2 په پلي کولو سره د هر ګیج لپاره وټاکو. پایلې یې دا دی

$$\begin{aligned} \epsilon_a &= \epsilon_x \cos^2\theta_a + \epsilon_y \sin^2\theta_a + \gamma_{xy}\sin\theta_a\cos\theta_a \\ \epsilon_b &= \epsilon_x \cos^2\theta_b + \epsilon_y \sin^2\theta_b + \gamma_{xy}\sin\theta_b\cos\theta_b \\ \epsilon_c &= \epsilon_x \cos^2\theta_c + \epsilon_y \sin^2\theta_c + \gamma_{xy}\sin\theta_c\cos\theta_c \end{aligned} \qquad (10\text{–}16)$$

کله چې دا پورتنی معادلې یوپه بل پسی حل شي ارزښترنه د ϵ_x،ϵ_y ، γ_{xy} معلومیږي.

په عادی حالت کی سترین روزیت په زاویه 45^0 یا 60^0 کی تنظیم کیږي. د زاویي 45^0 یا مستطیلي سترین روزیت ، انځور 10-16b ، $\theta_a = 0^0$, $\theta_b = 45^0$ او $\theta_c = 90^0$ ، بیا معادلی 10-16 دا لاندی په لاس راکوي

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \epsilon_a \\ \epsilon_y &= \epsilon_c \\ \gamma_{xy} &= 2\epsilon_b - (\epsilon_a + \epsilon_c) \end{aligned}$$

او د زاویي 60^0 روزیت ، انځور 10-16c ، $\theta_a = 0^0$, $\theta_b = 60^0$ او $\theta_c = 120^0$ دا لاندی راکوي.

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \epsilon_a \\ \epsilon_y &= \frac{1}{3}(2\epsilon_b + 2\epsilon_c - \epsilon_a) \\ \gamma_{xy} &= \frac{2}{\sqrt{3}}(\epsilon_b - \epsilon_c) \end{aligned} \qquad (10\text{–}17)$$

یو ځلي چې ϵ_x، ϵ_y، γ_{xy} معلوم شي ، بيا د سترين د بدلون معادلي يا د موهر دايره کيدی شي چې و کارول شي تر څو په سطحه اصلی سترينونه ϵ_1 او ϵ_2 يا اعظمی په سطحه شيير سترين $\gamma_{max\ in\text{-}plane}$ و ټاکل شي. هغه ستريس چې د دی سترينون جوړه ولو لامل شوي د هوک قانون په کارولو پيدا کړو. دا به په راتلونکی برخه کی تفصيل کړو.

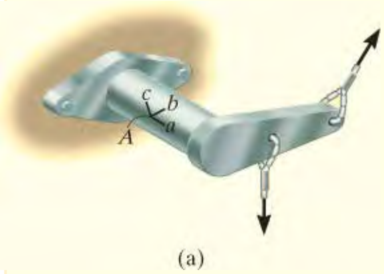
یو معمولي بريښنايي مقاومت 45^0 سترين روزيت

مثال

مثال 10.8

ټکی A چې پر لاندی ښودل شوي بريکټ باندی موقعيت لري، انځور 10-17a ، د سترين حالت معلومولو لپاره د يوه سترين روزيت کوم چې په انځور 10-17b کی ښودل شوي کار اخيستل کيږي.

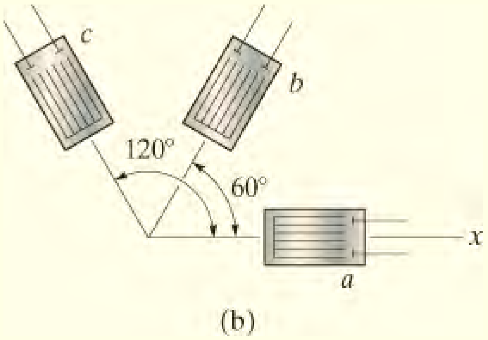
لوستل شوی معلومات له دی سترين ګيچ عبارت دی په $\epsilon_a = 60(10^{-6})$, $\epsilon_b = 135\ (10^{-6})$ او $\epsilon_c = 264\ (10^{-6})$. شيير سترين په سطحه، په دی ټکی او په کوم جهت چې عمل کړي مشخص يي کړي.



(a)

حل (SOLUTION)

د حل لپاره به له معادلو 10-16 کار واخلو.



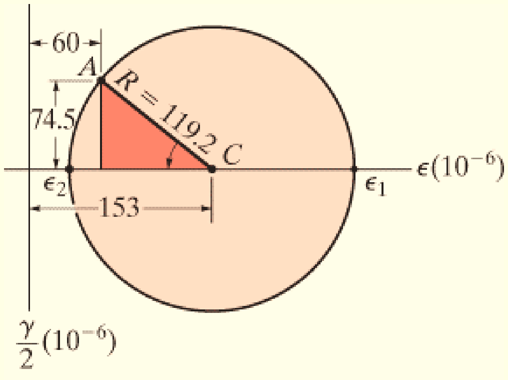
(b)

د x محور تاسیس کوو انځور، 10-17b ، او له دی محور په مخالف جهت د ساعت د ستني زاویي تر مرکز د هر ګیج اندازه کوو، موږ لرو

$q_a = 0^0$, $q_b = 60^0$ او $q_c = 120^0$. دا زاویي او د سوال نور ډیتا په معادلو کی ځاي په ځاي کوو او دا لاندی په لاس راځي

$$60(10^{-6}) = \epsilon_x \cos^2 0^\circ + \epsilon_y \sin^2 0^\circ + \gamma_{xy} \sin 0^\circ \cos 0^\circ$$
$$= \epsilon_x \qquad (1)$$
$$135(10^{-6}) = \epsilon_x \cos^2 60^\circ + \epsilon_y \sin^2 60^\circ + \gamma_{xy} \sin 60^\circ \cos 60^\circ$$
$$= 0.25\epsilon_x + 0.75\epsilon_y + 0.433\gamma_{xy} \qquad (2)$$
$$264(10^{-6}) = \epsilon_x \cos^2 120^\circ + \epsilon_y \sin^2 120^\circ + \gamma_{xy} \sin 120^\circ \cos 120^\circ$$
$$= 0.25\epsilon_x + 0.75\epsilon_y - 0.433\gamma_{xy} \qquad (3)$$

له اولی معادلی کار اخلو ، او معادلي 2 او 3 یو ځاي حل کوو، موږ لرو



(c)

انځور 10-17

$$\epsilon_x = 60(10^{-6}) \quad \epsilon_y = 246(10^{-6}) \quad \gamma_{xy} = -149(10^{-6})$$

که چیری له معادلي 10-17 کار واخیستل شی ورته پایلي په لاس راځي.

اصلی سترینونه په سطحه د موهر دایرې په کارولو ټاکل کیدی شي. مرکز د دایري C، موقعیت لری په $e_{avg} = 153(10\text{-}6)$ او ریفرینس ټکي په دایره په $A[60(10^{-6}), -74.5(10^{-6})]$ ، انځور 10-17c . له سیوری شوی مثلث شعاع د دایری عبارت دی په

$$R = \left[\sqrt{(153-60)^2 + (74.5)^2}\right](10^{-6}) = 119.1(10^{-6})$$

اصلی سترینونه په سطحه عبارت دی په

$$\epsilon_1 = 153(10^{-6}) + 119.1(10^{-6}) = 272(10^{-6}) \qquad \textit{Ans.}$$

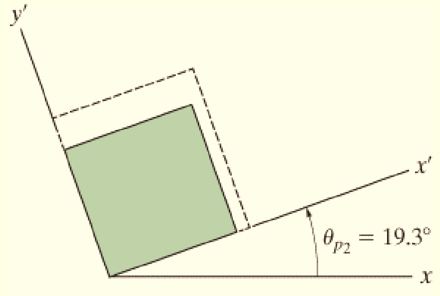
$$\epsilon_2 = 153(10^{-6}) - 119.1(10^{-6}) = 33.9(10^{-6}) \qquad \textit{Ans.}$$

$$2\theta_{p_2} = \tan^{-1}\frac{74.5}{(153-60)} = 38.7^\circ$$

$$\theta_{p_2} = 19.3^\circ \qquad \textit{Ans.}$$

یادونه: بیځایه شوی عنصر په تپته شوی کربنه ښودل شوي، انځور 10-17d . پوه شئ د پویسان تاثیر له امله په عنصر

په وتلي جهت سترین عمل کړي، د بیلګی په توګه د z لور ، که څه هم دا په محاسبه شوی پایلي کوم اغیزه ونکړي.



(d)

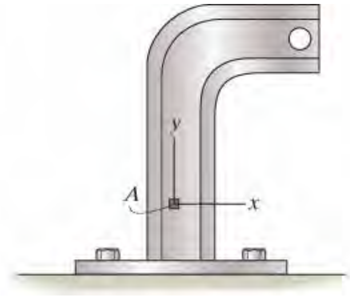
انځور 10-17 (ادامه)

سوالونه

PROBLEMS

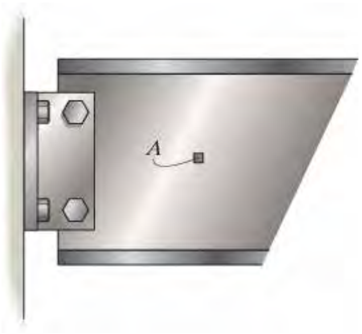
س 10-22.

سترین په ټکی A چې په برکیټ موقعیت لری اجزاویي عبارت دی په $\epsilon_x = 300(10^{-6})$ $\epsilon_y = 550\ (10^{-6})$ او $\epsilon_z = 0$, $\gamma_{xy} = -650\ (10^{-6})$. معلوم کړي (a) اصلي سترینونه په ټکی A کی د x-y په سطحه کی، (b) اعظمی شییر سترین په x-y سطحه کی، او (c) مطلق اعظمی شییر سترین.



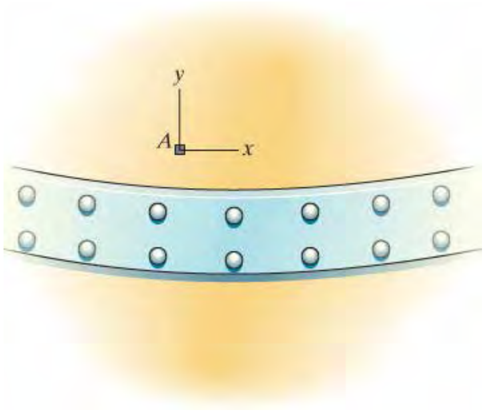
س 10-22

س 10-23. د سترین اجزاوی په ټکی A د یو بیم عبارت دی په $\epsilon_x = 450(10^{-6})$ $\epsilon_y = 825\ (10^{-6})$ او $\epsilon_z = 0$, $\gamma_{xy} = 275\ (10^{-6})$. معلوم کړي (a) اصلي سترینونه په ټکی A کی (b) اعظمی شییر سترین په x-y سطحه کی، او (c) مطلق اعظمی شییر سترین.



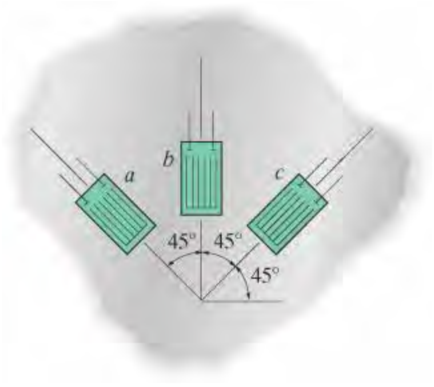
س 10-23

س 10-24*. د سترين اجزاوی په ټکی A د يو فشاری ټانک عبارت دی په $\epsilon_x = 480(10^{-6})$ $\epsilon_y = 720\ (10^{-6})$ او $\gamma_{xy} = 650\ (10^{-6})$. معلوم کړي (a) اصلي سترينونه په ټکی A په $x\text{-}y$ سطحه کی (b) اعظمی شيير سترين په $x\text{-}y$ سطحه ، او (c) مطلق اعظمی شيير سترين.



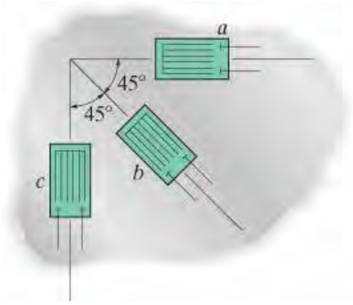
س 10-24

س 10-25. يو د 45^0 سترين روزيت د يوه پوستکی (shell) غړی په سطحه نصب شوي. دا لاندی لوست شوی ډيټا له هر ګيج په لاس راغلي. $\epsilon_a = -200\ (10^{-6})$ ، $\epsilon_b = 300\ (10^{-6})$ او $\epsilon_c = 250\ (10^{-6})$. اصلي سترينونه په سطحه معلوم کړي.



س 10-25

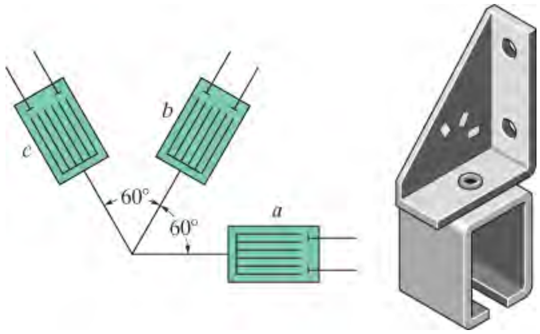
س 10-26. یو د 45^0 سترین روزیت د یوه فشاری ټانک په سطحه نصب شوي. دا لاندی لوست شوی ډېټا له هر ګيج په لاس راغلي. $\epsilon_a = 475(10^{-6})$ ، $\epsilon_b = 250\ (10^{-6})$ او $\epsilon_c = -360\ (10^{-6})$. اصلي سترينونه په سطحه معلوم کړي.



س 10-26

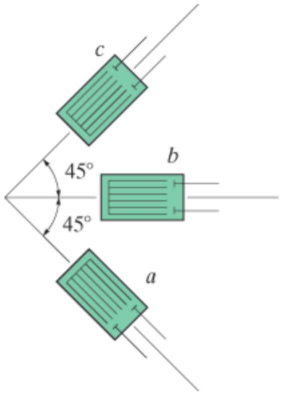
س 10-27. یو د 60^0 سترین روزیت د یو براکيټ په سطحه نصب شوي. دا لاندی لوست شوی ډېټا له هر ګيج نه په لاس راغلي. $\epsilon_a = -780(10^{-6})$ ، $\epsilon_b = 400\ (10^{-6})$ او $\epsilon_c = 500\ (10^{-6})$.

معلوم کړي (a) اصلي سترينونه (b) اعظمی شيير سترين په سطحه، او اړوند اوسط نارمل سترين. په هر حالت کی ددی سترينو لا امله، بيځايه شوی عنصرو ښيي.



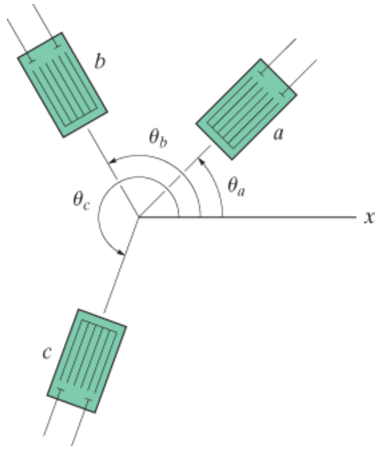
س 10-27

س *10-28. یو د 45^0 سترین روزیت د یو فولادی شافټ په سطحه نصب شوي. دا لاندی لوست شوی ډیټا له هرګیج نه په لاس راغلي. $\epsilon_a = 800(10^{-6})$، $\epsilon_b = 520\ (10^{-6})$ او $\epsilon_c = -450\ (10^{-6})$. اصلي سترینونه په سطحه معلوم کړي.



س 10-28

س 10-29. په یوه ټکي عمومي سمت د دریو ګیجونو لاندی بنودل شوي. یو د کمپیوټری پروګرام داسی ولیکئ ترڅو معلوم کړی اصلی په سطحه سترینونه او اعظمی په سطحه شییر سترین په دی ټکی. دا پروګرام کله چی ولیکل شو د دی پروګرام په کارولو سره ددی لاندی ډیټا لپاره جواب و ټاکی. $\theta_a = 40^0$ ، $\epsilon_a = 160(10^{-6})$ ، $\theta_b = 125^0$ ، $\epsilon_b = 100\ (10^{-6})$ ، $\theta_c = 220^0$ او $\epsilon_c = 80\ (10^{-6})$.



س 10-29

10.6 د موادو د خاصيتونو اړيکي (MATERIAL PROPERTY RELATIONSHIPS)

په دی برخه کی به موږ د موادو د خاصيت ځو مهم اړيکی کله چې په موادو باندی ځو اړخيز سټريس او سټرين عمل کړي، بحث وکړو. په ټولو حالتو کی به داسی اټکل وشي چې مواد متجانس او آيسوټرافيک دی او په خطی ايلستيک ډول چلند لري.

د هوک عمومي قانون (Generalized Hooke's Law)

کله چې د مواد په یوه ټکی کی په دری اړخیز (triaxial state) حالت د سټریس s_x, s_y, s_z واقع شي، انځور 10-18a ، بيا د دی سټريسونو اړيکی د نارمل سټرينونو e_x, e_y, e_z سره د سوپرپوزيشن اصولوپه کاراخيستلو کيدی شي چې تراو جوړکړي. د پويسان نسبت (Poisson's ratio) $e_{lat} =- u\, e_{long}$ او د هوک قانون په یوه محوری لور $e= s/E$. د مثال په توګه د یو عنصر نارمل سټرين په x جهت چې هر نارمل سټريس جوړ کړی دی. کله چې s_x عمل وکړي ، د سټرين e_x' سره ،انځور 10-18b ، عنصر اوږديږي کوم چې لرو

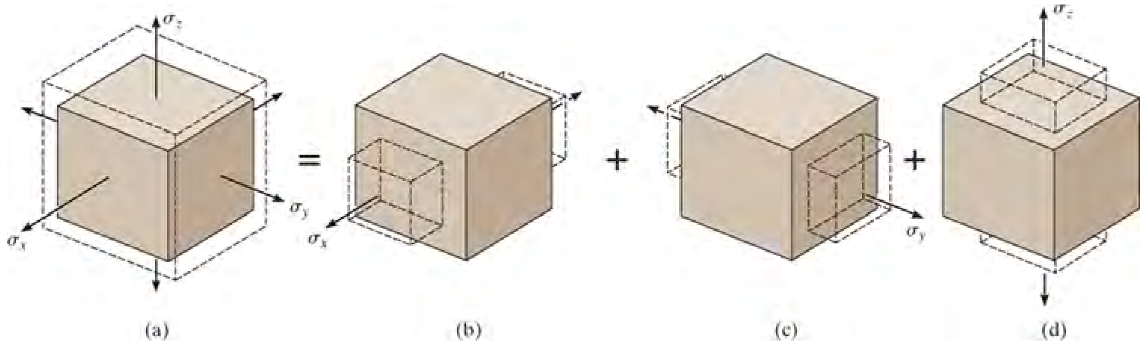
$$\epsilon'_x = \frac{\sigma_x}{E}$$

د s_y پلی کیدلو سټرین e''_x سره عنصر انقباض کړي ، انځور 10-18c . دلته

$$\epsilon''_x = -\nu\frac{\sigma_y}{E}$$

په نهايت کی پلی کيدل د s_z، انځور 10-18d ، لامل د انقباض سټرين e'''_x کيږی او لرو

$$\epsilon'''_x = -\nu\frac{\sigma_z}{E}$$



انځور 10-18

موږ کولای شو چې محصله د سترين ϵ_x کله چې دری سترينونه په الجبری توګه يو ځاي کړو په لاس راوړو. په ورته ډول د نارمل سترينونو په y او z جهتونو په لاس راوړي شو، په دی ډول پایلی کیدی شی چې په لاندی ډول ولیکو

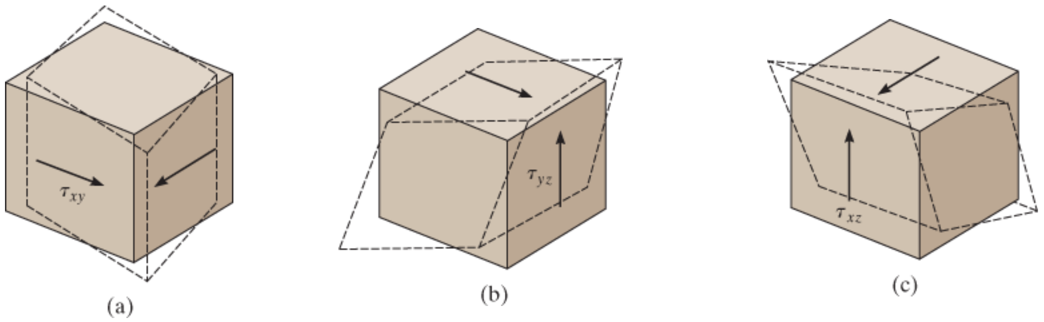
$$\epsilon_x = \frac{1}{E}[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)]$$
$$\epsilon_y = \frac{1}{E}[\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] \qquad (10\text{–}18)$$
$$\epsilon_z = \frac{1}{E}[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)]$$

دا دري معادلي د دري اړخيز ستريس حالت لپاره د هوک قانون بڼه څرګند وي. په عملی کارونو کی کششي ستريس مثبت مقدار په پام کی نيول کيږي او تيلوهونکي ستريس منفي په پام کی نيول کيږي. که چيری د نارمل سترين محصله **مثبت** وی، دا په ګوته کوی چې مواد ***اوږدیږي***، په داسی حال کی که د نارمل سترين محصله **منفي** وی دا د موادو ***انقباض*** په ګوته کوي.

که چيری یوازي شيير ستريس t_{xy} په يو عنصر پلی شي، انځور 10-19a، آزمويني داسی مشاهدی په ګوته کوي چې مواد به تغير د شکل وموميي اما په حجم کی کوم بدلون نه راځي. په بل عبارت t_{xy} تنها د شيير سترين (g_{xy}) لامل په موادو کی کيږي. په ورته ډول t_{yz} او t_{xz} تنها د g_{yz} لامل او

g_{xz} کیږی ، انځور 10-19b او 10-19c . د هوک قانون د شییر ستریس اوشییر سترین لپاره په دی لاندی ډول کیږي

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy} \qquad \gamma_{yz} = \frac{1}{G}\tau_{yz} \qquad \gamma_{xz} = \frac{1}{G}\tau_{xz} \qquad (10–19)$$



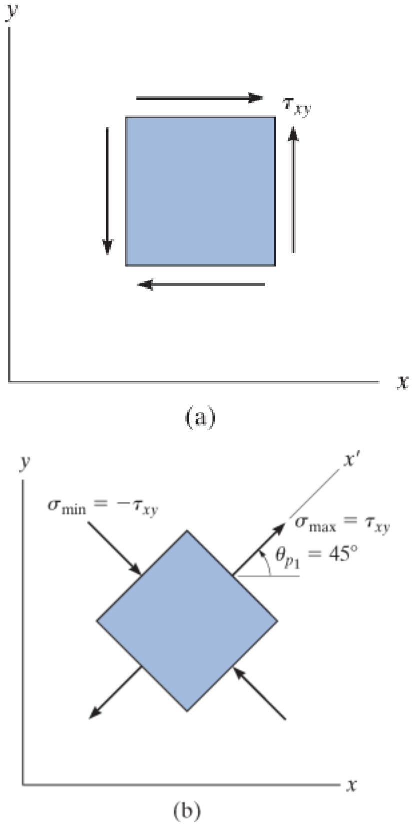
انځور 10-19

(Relationship Involving *E*, *u*, and *G*) د *E, u* او *G* اړیکی

په 3.7 برخه کی وویل شول چی د ماجولس ایلستیستي *E* او شییر ماجولس *G* یو بل سره ، معادله 3-11 دا لاندی تړاو لري

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \qquad (10–20)$$

د دې اړیکو د ترلاسه کولو یوه لاره دا ده چې یو عنصر په پام کې ونیسئ او په موادو یوازې شییر پلی شوي وي، انځور 10-20a . معادله 9-5 (مثال 9-5 وګوري) پلی کوو، اصلی سټریسونه په دی ټکي کی عبارت دی په $s_{max} = t_{xy}$ او $s_{min} = -t_{xy}$ ، دلته عنصر په زاویه $q_{p1} = 45^0$ مخالف د ساعت د ستني له x محور جهت شوی، انځور 10-20b کې ښودل شوي. که درې واړه اصلي سټریسونه $s_{max} = t_{xy}$ ، $s_{int} = 0$، او $s_{min} = -t_{xy}$ بیا دا لوموړي په معادله 10-18 کی ځای په ځای شی، اصلي سترین e_{max}کیدی شي د شییر سټریس t_{xy} پورې تړاو ولري. پایله دا ده



انځور 10-

$$\epsilon_{max} = \frac{\tau_{xy}}{E}(1 + \nu) \qquad (10\text{–}21)$$

دا سترین کوم چې عنصر د x` محور سره بیځایه کوی ، کیدی شی چې د شییر سترین g_{xy} سره اړیکی ولري. له انځوز 10-20a لیکلی شو $s_x = s_y = s_z = 0$. دا پایلي په لمړي او دوهمه معادله د 10-18 کی ځای په ځاي کوواو حاصل یي $e_x = e_y = 0$ دي.

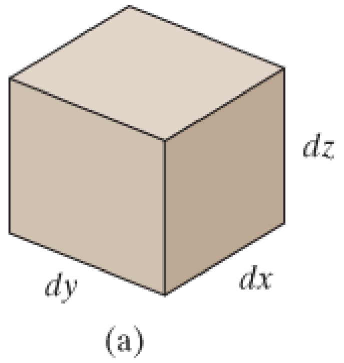
اوس د سترین د بدلون معادله 10-9 پلیی کوو او حاصل یي عبارت دی په

$$\epsilon_1 = \epsilon_{max} = \frac{\gamma_{xy}}{2}$$

د هوک قانون له مخي $g_{xy} = t_{xy}/G$ نو دا راکوی $e_{max} = t_{xy}/2G$.

په پایلی کی دا په معادله 10-21 کی ځای په ځای کوواواعداد تنظیم کوو دا زموږ پایلی راکوی یعنی معادله 10-20 .

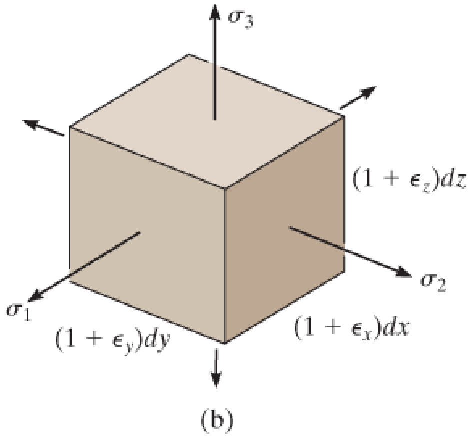
(Dilation) پراخوالي



کله چې یو د ایلستیک چلند مواد له نارمل ستریس سره مخ شي، سترین چې منځ ته راځی هغه په حجم د موادو کی بدلون راولي. د مثال په توګه که چیری د حجم عنصر د انځور 10-21a مخ شی له اصلی ستریسونو s1, s2, s3 ، انځور 10-21b ، بیا د عنصر د مخونو اوږدوالي کیږي

$(1+\epsilon_x)dx, (1+\epsilon_y)dy, (1+\epsilon_z)dz$. بدلون د عنصر په حجم کی عبارت دی په

$$\delta V = (1+\epsilon_x)(1+\epsilon_y)(1+\epsilon_z)\,dx\,dy\,dz - dx\,dy\,dz$$



انځور 10-21

دا پراخوو او د سترین ضربول، ځکه چې ډیر کوچني دی، له پام غورځوو، موږ لرو

$$\delta V = (\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z)\,dx\,dy\,dz$$

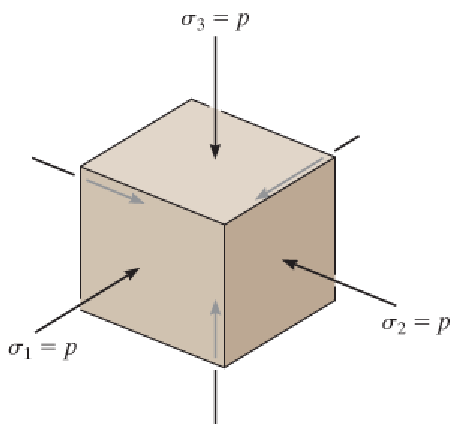
د حجم په هر واحد کی بدلون په نامه دی (حجمی سترین) یا پراخوالي (dilation)، ***e*** یادیږي.

$$e = \frac{\delta V}{dV} = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z \qquad (10\text{–}22)$$

که چیری د هوک قانون معادله 10-18 څخه کار واخلو ، موږ کولاي شو پراخوالي د پلی شوی ستریس سره څرګند کړو

$$e = \frac{1-2\nu}{E}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \qquad (10\text{–}23)$$

حجمي ماجولس (Bulk Modulus)



Hydrostatic stress

انځور 10-22

د پاسکال د قانون (Pascal's Law) له مخې، کله چې مواد د یو حجمی عنصر د ستاتیک مایع د پوښان فشار سره مخ شي هغه فشار چې له امله رامینځته کیږي په ټولو جهتونو کې به یو شان وي. د شییر ستریسونه به شتون ونلري، ځکه چې مایع د عنصر شاوخوا نه، نه تیریږي. دا د "هایدروستاتیک" حالت دي نو د بارولو لپاره اړتیا لري $s_1 = s_2 = s_3 = -p$ ، انځور 10-22 . معادله 10-22 کی ځای په ځای کوو او د اصطلاحاتو له تنظیم کولو وروسته دا لاندی حاصل کیږي

$$\frac{p}{e} = -\frac{E}{3(1-2\nu)} \qquad (10\text{–}24)$$

په بني خوا کی اصطلاح په نامه ***د ایلستیسټي*** حجمی ***ماجولس*** (***volume modulus of elasticity***) یا ***حجمی ماجولس*** (***bulk modulus***) یادیږي، دا ځکه چې نسبت د p/e ، له یو اړخیز خطي ایلستیک ستریس یا سترین سره ورته دی، او دا تعریف کوي د E ، د بیلګی په توګه $s/e=E$. حجمی ماجولس د ستریس په څیر ورته واحدونه لري ، او د حرف k په واسطه سمبول شوي ، نو داسي

$$k = \frac{E}{3(1-2\nu)} \qquad (10\text{–}25)$$

د ډیرئ فلزاتو مواد $u = \sim 1/3$ او همداسي $k = \sim E$. په هر صورت کی موږ فرض کړو چې د موادو حجم ، کله چې بار وربانڈی پلی شی، تغیر نه مومي بیا $dV = e = 0$ او k به لامحدود وي.

په پایلی کی معادله 10-25 به بیا وښي نظری/عظمي ارزښت د پویسان نسبت او هغه به $u = 0.5$ شي .

مهم ټکي

(IMPORTANT POINTS)

- کله چې په متجانس او ایزوټراوپیک موادو درې اړخیز ستړیس پلی شي، سترین په هر لوري، د هغه سترینو له امله چې د ټولو ستړیسونو لخوا تولید شوي، اغیزه من کيږي. دا د پویسان (Poisson) پایله اغیز ده ، او ستړیس بیا د سترین سره د هوک عمومي قانون په واسطه تړاو لري .

- کله چې په متجانس ایسوټروپیک موادو باندې شییر ستړیس تطبیق شي، دا به یوازې په ورته سطحه کې د شییرسترین تولید کړي.

- د موادو ثابت ارقام E، G ، او u ټول د معادلې 10-20 سره تړاو لري.

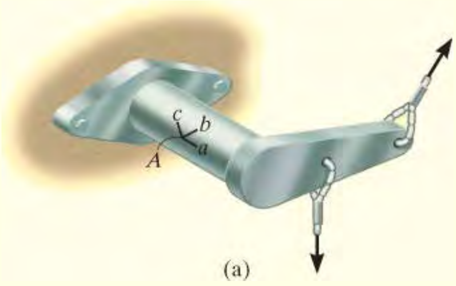
- پراخوالی، یا حجمیتریک سترین، یوازې د نارمل سترین له امله رامنځته کيږي، نه د شییر سترین له امله.

- حجمي ماجولس د موادو د حجم د سختوالي اندازه ده . دا خاصیت د موادو د پویسان نسبت لپاره یو لوړ حد $u = 0.5$ چمتو کوي

مثالونه

مثال 10.9

د 10.8 مثال براکیټ ، انځور 10-23a، ، له فولادو جوړه شوي ، کوم چی E_{st} = 200 GPa, u_{st} =0.3 دي. اصلی سټریسونه په ټکی A کی مشخص کړي.



انځور 10-23

حل (SOLUTION)

حل I

له مثال 10.8 دا لاندی اصلی سترینونه ټاکل شوی

$$\epsilon_1 = 272(10^{-6})$$
$$\epsilon_2 = 33.9(10^{-6})$$

څکه چی A په سطحه د براکیټ موقعیت لری ، کوم بار وربانډی شتون نلري، سټریسونه په سطحه صفر دی، له همدی امله ټکی A د سطحی سټریس سره مخ دي (نه له سطحی سترین). د هوک قانون تطبیق کوو کوم چی s_3 =0 دی او موږ لرو

$$\epsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} - \frac{\nu}{E}\sigma_2; \quad 272(10^{-6}) = \frac{\sigma_1}{200(10^9)} - \frac{0.3}{200(10^9)}\sigma_2$$

$$54.4(10^6) = \sigma_1 - 0.3\sigma_2 \qquad (1)$$

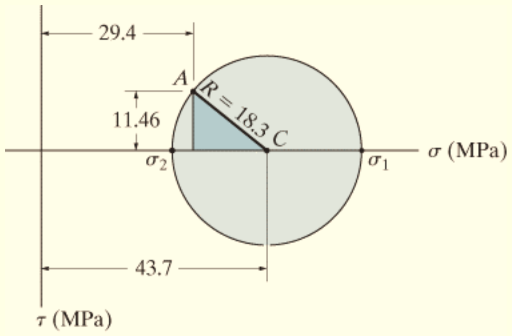
$$\epsilon_2 = \frac{\sigma_2}{E} - \frac{\nu}{E}\sigma_1; \quad 33.9(10^{-6}) = \frac{\sigma_2}{200(10^9)} - \frac{0.3}{200(10^9)}\sigma_1$$

$$6.78(10^6) = \sigma_2 - 0.3\sigma_1 \qquad (2)$$

معادلي 1 او 2 یو ځای حل کوو او دا لاندی حاصل راځي

$\sigma_1 = 62.0$ MPa *Ans.*

$\sigma_2 = 25.4$ MPa *Ans.*



(b)

انځور 23-10 (تکرار)

حل II

دا هم ممکنه ده چې دا سوال په ورکړل شوی حالت د سترین ځرنګه چې په مثال 10.8 کی تشریح شو حل کړو

$$\epsilon_x = 60(10^{-6}) \qquad \epsilon_y = 246(10^{-6}) \qquad \gamma_{xy} = -149(10^{-6})$$

د هوک قانون د x-y په سطحه کی تطبیق کوو

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu}{E}\sigma_y; \quad 60(10^{-6}) = \frac{\sigma_x}{200(10^9)\text{ Pa}} - \frac{0.3\sigma_y}{200(10^9)\text{ Pa}}$$

$$\epsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu}{E}\sigma_x; \quad 246(10^{-6}) = \frac{\sigma_y}{200(10^9)\text{ Pa}} - \frac{0.3\sigma_x}{200(10^9)\text{ Pa}}$$

$$\sigma_x = 29.4\text{ MPa} \qquad \sigma_y = 58.0\text{ MPa}$$

د شییر سټریس د هوک قانون د شییر لپاره تطبیق کوو. لمړي باید موږ G محاسبه کړو

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{200\text{ GPa}}{2(1+0.3)} = 76.9\text{ GPa}$$

په دی توګه

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy}; \qquad \tau_{xy} = 76.9(10^9)[-149(10^{-6})] = -11.46\text{ MPa}$$

د موهر له دایری د سطحی سټریس لپاره کار اخلو، او مرکز يې په $s_{avg} = 43.7$ MPa کی دی او د ریفرینس ټکی A (29.4 MPa, -11.46 MPa)، انځوز 10-23b دي. له سیوری شوی مثلث شعاع پیدا کوو

$$R = \sqrt{(43.7 - 29.4)^2 + (11.46)^2} = 18.3\text{ MPa}$$

له همدی امله

$$\sigma_1 = 43.7\text{ MPa} + 18.3\text{ MPa} = 62.0\text{ MPa} \qquad \textit{Ans.}$$

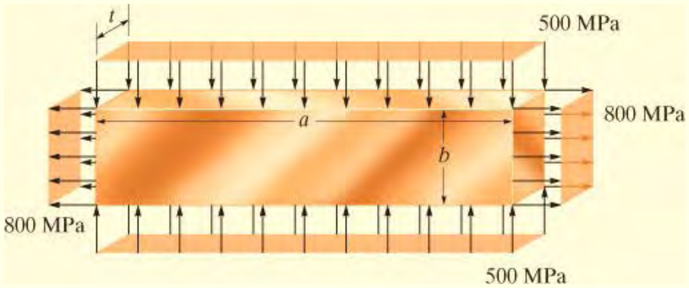
$$\sigma_2 = 43.7\text{ MPa} - 18.3\text{ MPa} = 25.4\text{ MPa} \qquad \textit{Ans.}$$

یادونه: ددی حلونو څخه هر یو هغه وخت د اعتبار وړ دی چی باید مواد دواړه ایلستیک خطي او ایسوترافیک وی، ځکه بیا تنها په دی حالت کی د اصلی سټریسونو او سترین د جهتونه یو ډول دی.

مثال 10.10

د مسو (copper) میله باندی یو شان بار پلي شوی، انځور 10-24 . که اوږدوالي د میلی a =300 mm ، سور يي b =50mm ، او پنډوالی یی t=20 mm مخ کی له دی چی بهرنی بارورباندی شي وی، نوئ اوږدوالي، سور، او پنډوالی يي وروسته له دی چی بهرنی بار ورباندی پلی شي وټاکي. کار واخلی له E_{cu} = 120GPa,

$u_{cu}=0.34$



انځور -10

حل (SOLUTION)

په لیدو سره ، دا میله د سطحی ستریس په حالت کی ده. له پلی شویو بارونو موږ لرو

$$\sigma_x = 800\text{ MPa} \qquad \sigma_y = -500\text{ MPa} \qquad \tau_{xy} = 0 \qquad \sigma_z = 0$$

اړوند نارمل سترینونه د هوک قانون معادله 10-18 په تطبیق سره پیدا کوو، او موږ لرو

$$\begin{aligned}
\epsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_y + \sigma_z)\\
&= \frac{800\text{ MPa}}{120(10^3)\text{ MPa}} - \frac{0.34}{120(10^3)\text{ MPa}}(-500\text{ MPa} + 0) = 0.00808\\
\epsilon_y &= \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_z)\\
&= \frac{-500\text{ MPa}}{120(10^3)\text{ MPa}} - \frac{0.34}{120(10^3)\text{ MPa}}(800\text{ MPa} + 0) = -0.00643\\
\epsilon_z &= \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y)\\
&= 0 - \frac{0.34}{120(10^3)\text{ MPa}}(800\text{ MPa} - 500\text{ MPa}) = -0.000850
\end{aligned}$$

د میلی نوي اوږدوالي، سور او پنډوالی یي له همدی امله عبارت دی په

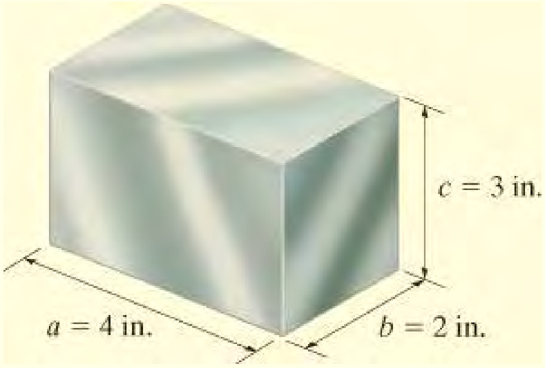
$$a' = 300\text{ mm} + 0.00808(300\text{ mm}) = 302.4\text{ mm} \qquad \textit{Ans.}$$

$$b' = 50\text{ mm} + (-0.00643)(50\text{ mm}) = 49.68\text{ mm} \qquad \textit{Ans.}$$

$$t' = 20\text{ mm} + (-0.000850)(20\text{ mm}) = 19.98\text{ mm} \qquad \textit{Ans.}$$

مثال 10.11

په لاندی مستطیلي بلاک ، انځور 10-25 ، یو شان فشار p= 20 psi پلی شوي، د بلاک پراخوالي (dilatation) اود هراړخ بد لون مشخص کړي. د موادو لدی خاصیتونو کار واخلی $E = 600$ psi, ν=0.45.



انځور 10-25

حل (SOLUTION)

پراخوالي (Dilatation) . د پراخوالي معلومولو لپاره له معادلي 10-23 کار اخلو، کوم چې $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -20$ psi . موږ لرو

$$e = \frac{1-2\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$$

$$= \frac{1-2(0.45)}{600\text{ psi}}[3(-20\text{ psi})]$$

$$= -0.01\text{ in}^3/\text{in}^3 \qquad \textit{Ans.}$$

بدلون په اوږدوالي د هر اړخ کی (Change in Length) .

د هوک قانون ، معادله 10-18 په تطبیق سره نارمل سترین په هر اړخ کی پیدا کوو، او هغه عبارت دی په

$$\epsilon = \frac{1}{E}[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)]$$
$$= \frac{1}{600 \text{ psi}}[-20 \text{ psi} - (0.45)(-20 \text{ psi} - 20 \text{ psi})] = -0.00333 \text{ in./in.}$$

په دی توگه د هر اړخ بدلون په دی لاندی ډول دی

$$\delta a = -0.00333(4 \text{ in.}) = -0.0133 \text{ in.} \qquad \textit{Ans.}$$
$$\delta b = -0.00333(2 \text{ in.}) = -0.00667 \text{ in.} \qquad \textit{Ans.}$$
$$\delta c = -0.00333(3 \text{ in.}) = -0.0100 \text{ in.} \qquad \textit{Ans.}$$

منفي علامه په دی معنی ، چي د هر اړخ اندا ز لږ شوي ده.

سوالونه

PROBLEMS

س 10-30. د سطحی ستریس حالت لپاره وښیی چی د هوک قانون په دی لاندی توگه لیکل کیدی شي.

$$\sigma_x = \frac{E}{(1-\nu^2)}(\epsilon_x + \nu\epsilon_y), \quad \sigma_y = \frac{E}{(1-\nu^2)}(\epsilon_y + \nu\epsilon_x)$$

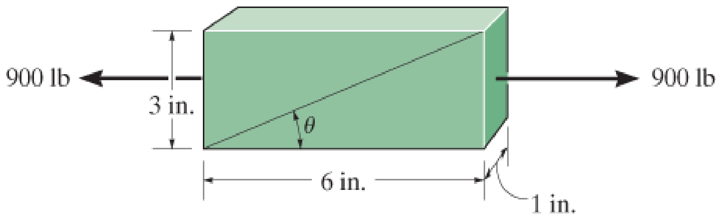
س 10-31. د هوک له قانون ، معادله 10-18 ، کار واخلی تر څو د سترین د بدلون معادلی 10-5 او10-6 له ستریس بدلون معادلو 9-1 او 9-2، څخه حاصل کړي.

س *10-32. اصلي سټريسونه په سطحه او اړوند سترينونه په يوه سطحه په يو ټکی کی عبارت دی په $\sigma_1 = 36$ ksi, $\sigma_2 = 16$ ksi, $\epsilon_1 = 1.02(10^{-6})$, $\epsilon_2 = 0.180(10^{-6})$. د ايلستيسيتی ماجولس او پويسان نسبت معلوم کړي.

س 10-33. د يو ميلی شعاع 10 mm ده. که چيری يو محوری بار د 15 N وربانډی پلي شي محوری سترين په ميله کی به $\epsilon_x = 2.75(10^{-6})$ وي، د ايلستيسيتي ماجولس او بدلون د ميلی په قطر کی معلوم کړي. $\nu = 0.23$

س 10-34. د پالی واينل کلوراید (polyvinyl chloride) په ميله باندی يوه قوه د 900 lb پلی شوي. اصلی ابعاد يي په لاندی انځور کی ښودل شوی، بدلون په زاويه θ وروسته لدی چی بهرنی بار وربانډی پلی شي و ټاکي. $E_{pvc} = 800(10^3)$ psi, $\nu_{pvc} = 0.20$

س 10-35. د پالی واينل کلوراید (polyvinyl chloride) په ميله باندی يوه قوه د 900 lb پلی شوي. اصلی ابعاد يي په لاندی انځور کی ښودل شوی، د پويسان نسبت رزښت داسی وټاکی کله چی زاويه θ کی $d\theta = 0.01^0$ لږوالي وروسته له دی چی بهرنی بار پلی شی راشي.
$E_{pvc} = 800(10^3)$ psi



س 10-34/35

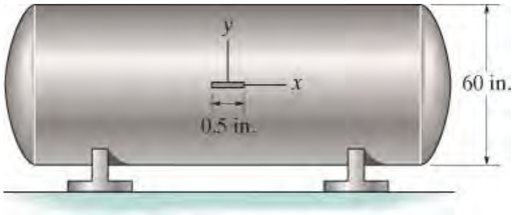
س *10-36. د فشار يو کروی ذخيريي ټانک داخلی قطر 2 m او پنډ والی يي 10 mm دي. يو سترين ګيج چی اوږدوالي يي 20 mm دی وربانډی اينبودل شوي، کله چی په کوره کی فشار جوړ شي ليدل کيږي چی ګيج 0.012 mm اوږديږي. هغه فشار چی ددی بيځايه کيدنی لامل کيږي و ټاکي، او هم اعظمی شييرسټريس په سطحه ، او مطلق اعظمی شيير سټريس په يوه ټکی چی د

کوری په وتلی سطحه موقعیت لري معلوم کړي. د کوری مواد فولاد دی، کوم چی $E_{st} = 200$ GPa او $\nu_{st} = 0.3$.

س 10-36

س 10-37. د پراخوالي ماجولس ددی لاندی موادو لپاره وټاکي: (a) رابر، $E_r = 0.4$ ksi, $\nu_r = 0.48$, او (b) شیشه $E_g = 8(103)$, $\nu_g = 0.24$

س 10-38. یو سترین ګیج د فولادی بایلر په سطحه اېښودل شوي. اوږدوالي د ګیج 0.5 انچ دی کله چی په ګیج کی اوږدوالي په اندازه د $0.2(10^{-6})$in انچ ولیدل شي په داسي حالت کی د بایلر فشار معلوم کړي. د بایلر ضخامت 0.5 in او داخلی قطر يي 60 in دي. او هم د x, y په سطحه اعظمی شییر سترین په موادو کی معلوم کړي. $E_{st} = 29(103)$ ksi, $\nu_{st} = 0.3$.

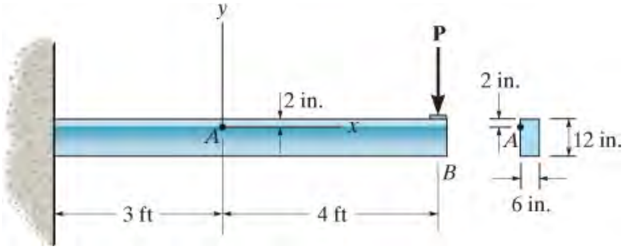


س 10-38

10–39. د یو جت الوتکی د فیوسلاج په سطحه اصلی سترینونه عبارت دی په $\epsilon_1 = 780(10^{-6})$ او $\epsilon_2 = 400(10^{-6})$. په همدی ټکی او سطحه اړونده اصلی ستریسونه پیدا کړي. $E_{al} = 10(10^{-6})$ ksi او $\nu_{al} = 0.33$. کمک: سوال 10-30 وګوري.

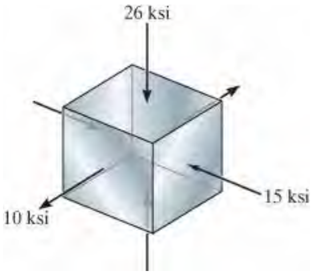
*10–40. په یو فولادی A-36 بیم په ټکی A په جهت د x سترین اندازه شوي، او معلومه شوه چی $\epsilon_x = 200(10^{-6})$ دی. پلي شوی بار P پیدا کړي. او هم شییر سترین γ_{xy} په ټکي A کی معلوم کړي.

10–41. که چیری بار $P = 3$ kip په فولادی بیم A-36 پلي شي، سترین ϵ_x او γ_{xy} په ټکی A کی معلوم کړي.



س 10-40/41

10–42 . په دی لاندی د المونیم مکعب لاندی بنودل شوي دری سټریسونه پلی شوي.اصلی سټرینونه و ټاکي. له $E_{al} = 10(10^3)$ ksi, $\nu_{al} = 0.33$ کار واخلی.



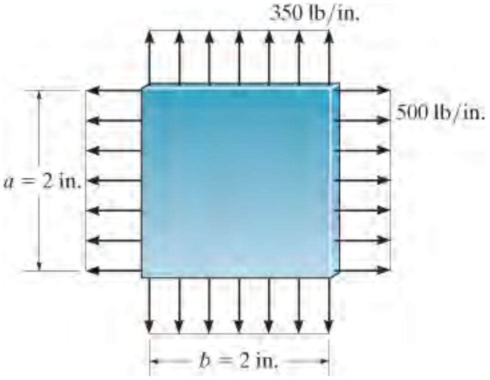
س 10-42

10–43. د المونیم ټانک په سطحه اصلي سټرینونه $\epsilon_1 = 630(10^{-6})$ او $\epsilon_2 = 350(10^{-6})$ دي.

که دا سطحی سټریس حالت وی، اړوند اصلي سټریسونه په همدی سطحه او ټکی کی وټاکي.

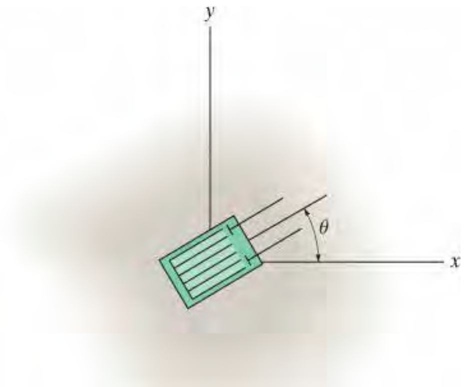
E_{al}=10(10^3) ksi, ν_{al} =0.33 . کمک: سوال 10-30 ووینې.

*10–44. د پالی ستایرین (polystyrene) په نمونه مساوی د اړخ بار 500 lb/in او 350 lb/in پلی شوي دی. که چیری دا نمونه په اصل کی مربع او ابعاد یي a=2 in., b =2 in. وي او پنډوالی یي t =0.25 in. دی، کله چی بار وربانډی پلی شي نوی ابعاد a`, b`, t` معلوم کړي. $E_p = 597(10^3)$ psi او $\nu_p = 0.25$.



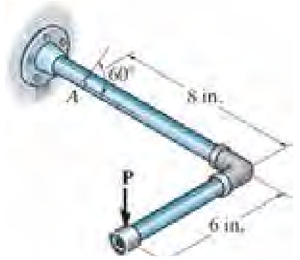
س 10-44

10–45. یو ډول موادو باندی اصلی سټریسونه σ_x او σ_y پلي شوي. د سترین ګیج جهت θ داسی معلوم کړی کوم چی د سترین ګیج لوستل تنها σ_y وښیی نه σ_x. د موادو ثابت ارقام عبارت دی په E او ν .



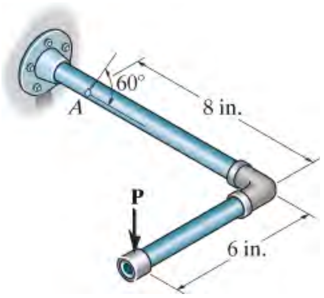
س 10-45

10–46. دیوه پایپ په بیرونی سطحه په عمودی ډول یو سترین ګیج په زاویه 60^0 د پایپ له محور سره اینبودل شوي، او دا ګیج په ټکی A کی د سترین $\epsilon_A = -250(10^{-6})$ اندازه ورکوي. اصلی سترینونه د پایپ په دی ټکي کی و ټاکي. پایپ له برانز C86100 جوړ شوي، بیرونی قطر یي 1 in. او داخلي قطر یي 0.60 in. دی.



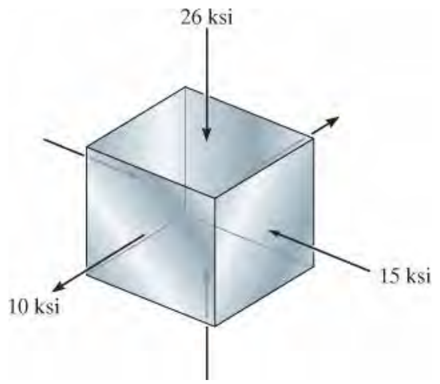
س 10-46

10–47. دیوه پایپ په بیرونی سطحه یو سترین ګیج په زاویه 60^0 په عمودی توګه د پایپ له محور سره ابینودل شوي، او دا ګیج په ټکی A کی د سترین $\epsilon_A = -250(10^{-6})$ اندازه ورکوي. عمودی قوه P و ټاکي. پایپ له برانز C86100 جوړ شوي، بیرونی قطر يي 1 in. او داخلي قطر يي 0.60 in. دی.



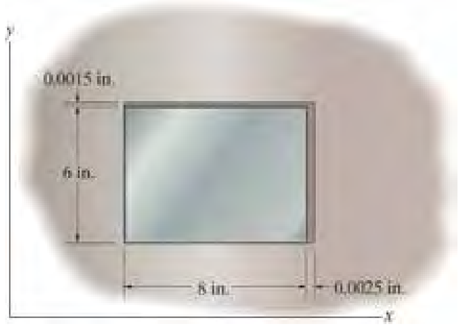
س 10-47

*10–48. که چیری مواد ګرافایت (graphite) وی، کوم چی E_g =800 ksi او $u_g = 0.23$ دي، اصلی سترینونه و ټاکي.



س 10-48

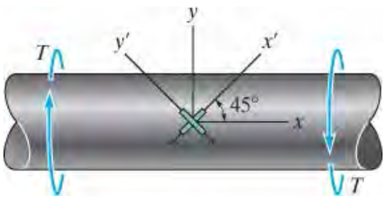
10–49. په پیل کی فاصله (gap) د فولادو A-36 تختی او سخت محدودیت (constraint) په لاندی انځور کی ښودل شوي. نارمل سټریسونه s_x او s_y په تخته کی کله چی د تودوخي درجه د $DT = 100^0$F په اندازه زیاتوالي و مومي پیداکړی. مرسته: د حل لپاره د تودوخی له امله سترین aDT د هوک په معادله کی اضافه کړي.



س 10-49

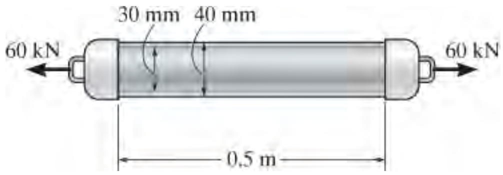
.10–50 د فولادی شافت شعاع 15 mm ده. که چیری هغه دوه سټرین ګیجونه چی په سطحه د شافټ سرېښ شوي سټرینونه په انداز د $\epsilon_{x'} = -80(10^{-6})$ او $\epsilon_{y'} = 80(10^{-6})$ لوستني ورکړي ټورک T په دی حالت کی وټاکی. او هم سټرین په x او y جهتونو معلوم کړي.
$\nu_{st} = 0.3$ او $E_{st} = 200GPa$ دی.

.10–51 د اوزارو (tool) L2 فولادو یو شافټ چی 15 mm شعاع لري جوړ شوی. سټرین په x` او $y$` جهتونوکی معلوم کړي کله چی $T = 2$ kN.m په شافټ عمل وکړي.



س 10-50/51

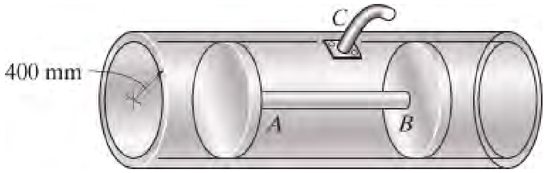
*10–52. په یوه A-36 فولادی پایپ یو محوری بار 60 kN پلی شوي. تغیر په حجم د موادو کی وروسته له دی چی بهرنۍ بار وربانـدی پلی شي معلوم کړي.



س 10-52

10–53 . د فولادو په یو نازک دیوال فشاری ټانک کی هوا په ټکی C کی پمپ کیږي. که د ټانک پایلی د پستون په واسطه چی د میلی AB سره وصل دی بندیږي ، په هغه وخت کی چی د داخلی ګیج فشار 5 MPa شي. کششی سټریس په میله AB کی چی قطر 100 mm وی څومره دی؟ داخلی شعاع د ټانک 400 mm او پنډوالی یي 10 mm دي. $E_{st} = 200GPa$ او $\nu_{st} = 0.3$.

.10–54 د سوال 10-53 فشاری ټانک په قطر کی زیاتوالي داسی معلوم کړی که د پستونونو په ځای د ټانک پایلی په دیوال سره بند شي.

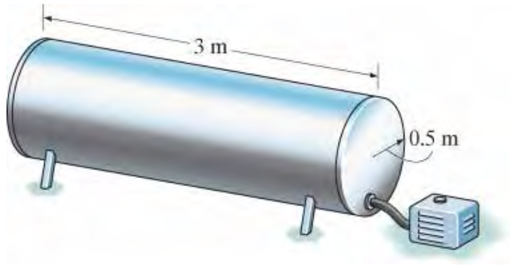


س 10-53/54

10–55. يود نازک ديوال کروی فشاري ټانک داخلی شعاع يي r او ضخامت يي t دي، او په دی کی داخلی فشار p شوي. تاسو وښيي چې په دی حالت کی حجم د ټانک په اندازه د $\Delta V = (2p\pi r^4/Et)(1-\nu)$ زياتوالي مومي . د واړه- سترين تحليل نه کار واخلي .

***10–56.** يود نازک ديوال استوانه يی (cilindrical) فشاري ټانک داخلی شعاع يي r او پنډوالی يي t دي، او په دی کی داخلی فشار p شوي. که چيری د موادو ثابت اعداد E او ν وی، سترين په محيطي او اوږدوالی جهتونو کی و ټاکي. له دی پايلو کار واخلي، زياتوالي په قطر او اوږوالي د فشاری ټانک ، کوم چی له هوا ډک شوي او داخلی د ګيج فشار 15 MPa دی، معلوم کړي. فولادی فشاری ټانک 3 m اوږدوالي لري او داخلي شعاع يي 0.5 m او پنډوالی يي 10 mm دي. $E_{st} = 200\text{GPa}$ او $\nu_{st} = 0.3$

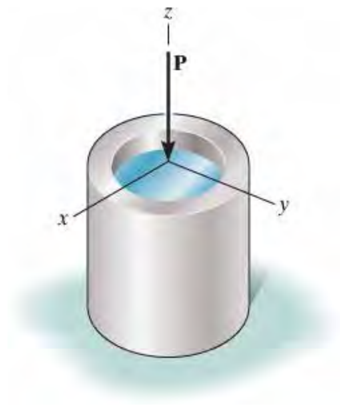
10–57. د سوال 10-56 د فشاری ټانک د حجم زياتوالي تخمين کړي.



س 10-56/57

10–58. په داخل د يو سخت سلندر، کوم چې کلکه اتکا لرى، نرم مواد په کښني ځاي په ځاى شوي. فرض کړي چې $\epsilon_x = 0$ او $\epsilon_y = 0$ دي ، تاسو اټکل د هغه ضريب وکړي کوم چې د

موادو سختوالي یا د ایلستیستی ماجولس به وربانډی زیاتوالي و مومي او دا هغه وخت کله چې بهرني بار وربانډی پلی شي. د موادو $u = 0.3$ دي.



س 10-58

د ړنګیدو تیورۍ (THEORIES OF FAILURE) 10.7*

کله چې یو انجنیر د ځانګړي موادو څخه د یو جسم د ډیزاین سره مخ وي، دا مهمه ده چې لوړحد د سټریس چې دموادود ړنګیدو حد تعریف شوی، وساتي. که مواد نرم وي، د موادو ړنګیدل معمولا د یلدینګ (yield) په پیل سره مشخص کیږي، پداسې حال کې چې که موادماتیدونکي وي دا حد د فریکچر یا ړنګیدو لخوا مشخص کیږی. دا ډول ناکامی په اسانی بنودل شویی که غړی د یوه محوري سټریس سره مخ وي، لکه یوبار چې ترکششی قوی لاندی وی، په دی حالت کی د ماتیدو طریقې په اسانۍ سره تعریف کیدی شي.اما که غړی د دوه محووري یا دري محوري سټریس سره مخوي د ناکامۍ معیار رامینځته کول خورا ستونزمن کیږي.

په دې برخه کې به په خلورو نظریو بحث وکړو، کوم چې اکثره په انجینری کاروکی، کله چې جسم په څو اړخیزه سټریسو حالت کی وي، د موادو د ناکامۍ وړاندوینه کولو لپاره کارول کیږي. په هرصورت، هیڅ یوه تیوري نشي کولی په هر وخت کی په ځانګړی موادو تطبیق شي. دا ځکه چې مواد ممکن د نرمي حالت یا ماتیدونکی حالت چلند ولری او دا تړول اړه لري د تودوخې په درجه، د بارکولو په سرعت یا طریقه ، کیمیاوي چاپیریال او دا چې مواد څنګه شکل او په کومه طریقه جوړ شوي دی. کله چې د ناکامۍ یوه ځانګړې تیوري کارول کیږی، دا لومړی اړینه ده چې نارمل او شییر سټریس په هغه نقطو دغړي کې محاسبه کړئ چیرې چې دوی ترټولو لوی دي. ظظیوځل چې د سټریس حالت رامینځته شي ، اصلي سټریسونه بیا په دې مهمو ټکو کې باید وټاکل شي، ځکه چې هر یوه د لاندې تیورۍ د اصلي سټریسو په پوهیدو پورې اړه لري .

نرم مواد (Ductile Materials)

د اعظمي شيير ستريس تيوري(Maximum Shear Stress Theory) .

Lüder's lines on mild steel strip

انځور 10-26

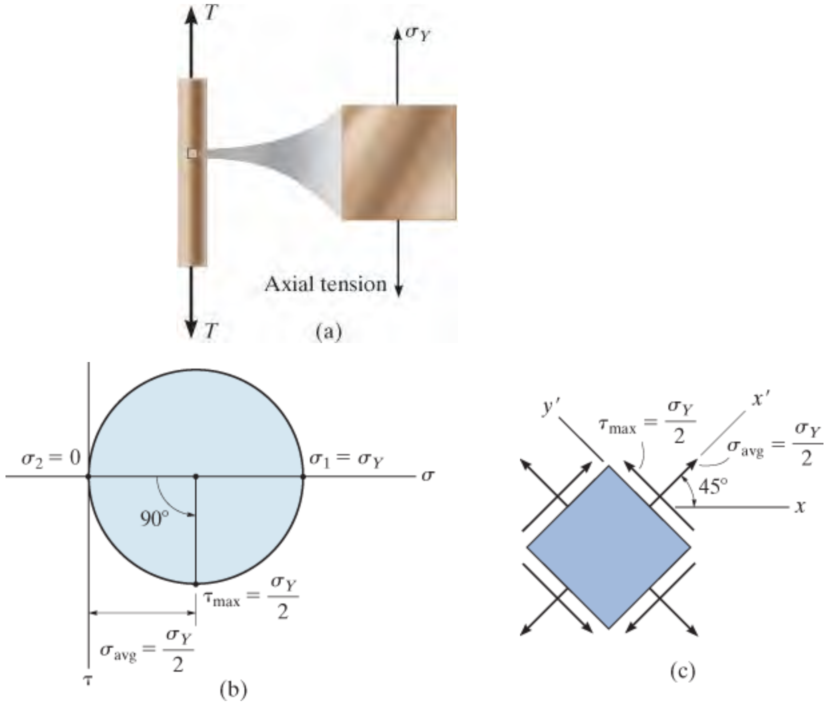
ترټولوعام ډول يلډينګ د نرمو موادو، لکه فولاد، د ښويدلو(slipping) له امله رامنځته کيږي، کوم چې د تصادفي ترتيب شوي کرسټالونو د تماس د سطحو ترمينځ ، کوم چې مواد يې جوړکړي، واقع کيږي. که چيرى د مواد يوه نمونه چې خورا پالش شوي يوه پټه ورځيني جوړه شوي او د ساده کششي ستريس ازموينې سره مخ کيږي، بيا دا ممکنه ده چې وولیدل شي چې څنګه دا پټي د موادو د ښويدلو له امله د ييلد سبب ګرځي، انځور10-26. د ښويدليو سطحو کونجونه چې د پټي په مخ څرګنديږي په نامه د*لوډر کرښې* **Lüder's (lines)** يادول کيږي. دا کرښې په واضح ډول په پټه کې د ښويدليوسطحې په ګوته کوي، څرنګه چې ښودل شوي نږدې په 45 درجو کې واقع شوي.

ښويدل چې پيښيږي، د شيير ستريس له امله رامينځته کيږي. د ښودلو لپاره، په پام کې ونيسئ د موادو يو عنصر چې د کششي نمونې څخه اخيستل شوی، انځور 10-27a و ګوري، کله چې نمونه د ييلډ ستريس s_Y سره مخامخ وي . اعظمي د شيير ستريس د موهر د دايري څخه ټاکل کيدی شي، انځور 10-27b و ګوري. پايلي دا په ګوته کوي.

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_Y}{2} \qquad (10\text{–}26)$$

برسيره پردې، دا شيير ستريس په هغه سطحه باندې عمل کوي چې د اصلی ستريس سطحی څخه ، انځور 10-27c ، په 45^0 درجو موقعيت لري ، او دا سطحی د لودر (Lüder) کرښو سمت سره مصادف (coincide) دي، کوم چې په نمونه کې ښودل شوي. دا واقعا په ګوته کوي چې دا ماتيدل د شيير په واسطه واقع کيږي.

لدينه چې نرم موادوکی ماتيدل د شيير په واسطه منيځ ته راځي، په 1868 کې هينري ټريسکا (Henri Tresca) د **اعظمی شيير ستريس تيوری**(*maximum shear stress theory*) يا د **ټريسکا ييلډ معيار** (*Tresca yield criterion*) وړانديز يې وکړ. دا تيوري وايي چې پرته له دې چې مواد څرنګه بار شوي، ييلډينګ هغه وخت پيل کيږي کله چې په موادو کې مطلق اعظمي شيير ستريس هغه اندازی ته ورسيږي کوم چی په تنها يوه محوری باريدلو کی په ورته موادو کی د ييلډ لامل کيږي. له همدې امله، د ماتيدو د مخنيوي لپاره، دا اړينه ده



انځور 10-27

چي مطلق اعظمی شییر ستریس (t abs max) په موادو کې باید د $s_Y/2$ څخه کم یا مساوي وي، چیرته چې s_Y د ساده کششی ستریس ازمویني څخه ټاکل کیږي.

د سطحی ستریس لپاره مورږ به هغه نظرونه وکاروو چې په برخه 9.5 کې بحث شوي، او هلته مطلق اعظمی شییر ستریس د اصلي ستریسو s_1 او s_2 له مخې تشریح شوی وا. که دا دوه اصلي ستریس ورته علامه ولري، د بیلګې په توګه، دوی دواړه کششی یا دواړه تیلوهونکی وی ، نو بیا د موادو ړنګیدل به په *وتلئ سطحه* (out of the plane) واقع کیږي او له معادلی 9-13 څخه

$$\tau_{\substack{abs\\max}} = \frac{\sigma_1}{2}$$

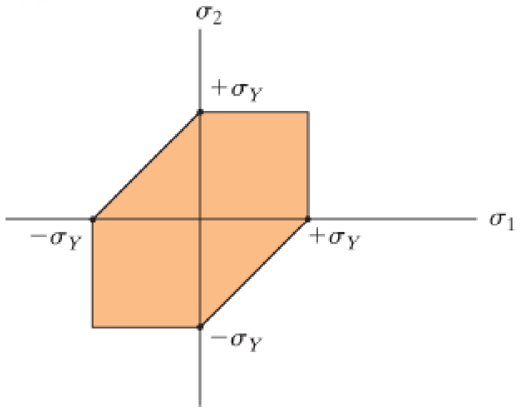
که چیری د اصلی ستریسو عالامه خلاف د یو بل وی بیا ماتیدل د موادو په سطحه کی واقع کیږي او له معادلی 9-14 څخه

$$\tau_{\substack{abs\\max}} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$$

د دی دواړو معادلو، او معادله 10-26 سره د اعظمی شییر سټریس نظریه ، د سطحی سټریس لپاره په دی لاندی معیار سره تشریح کولای شو

$$\left.\begin{aligned} |\sigma_1| &= \sigma_Y \\ |\sigma_2| &= \sigma_Y \end{aligned}\right\} \quad \sigma_1, \sigma_2 \text{ have same signs}$$

$$|\sigma_1 - \sigma_2| = \sigma_Y\} \quad \sigma_1, \sigma_2 \text{ have opposite signs} \qquad (10\text{–}27)$$



Maximum shear stress theory

انځور 10-28

د دی معادلو ګراف په انځور 10-28 کی ښودل شوي.

له همدی امله که یو نقطه د موادو له سطحی سټریس سره مخ وی او هغه استازیتوب کوی په کواردینات (s_1, s_2) کوم چې په سرحد یا له سیوری د مسدس (hexagonal) څخه بهر ساحی وی ، د موادو ییلد به په دی نقطه کی جوړیږي او ماتیدل به مینځ ته راځي.

د اعظمي تحریف انرژي تیوري (Maximum Distortion Energy Theory). په 3.5 برخه کې وویل شول چې یو بهرنی بار مواد بیځایه کوي، او دا لامل ددی کیږي چې مواد د داخلی حجم په اوږدو کی انرژي ذخیره کړي. د موادو د هر واحد حجم انرژی، د ***سترین-انرژي کثافت*** (strain-energy density) بلل کیږي، او که چیرې مواد د یو محوری سټریس سره مخ وی د سترین- انرژی کثافت، چی په معادله 3-6 تعریف شوي ، هغه کیږي

$$u = \frac{1}{2}\sigma\epsilon \qquad (10\text{–}28)$$

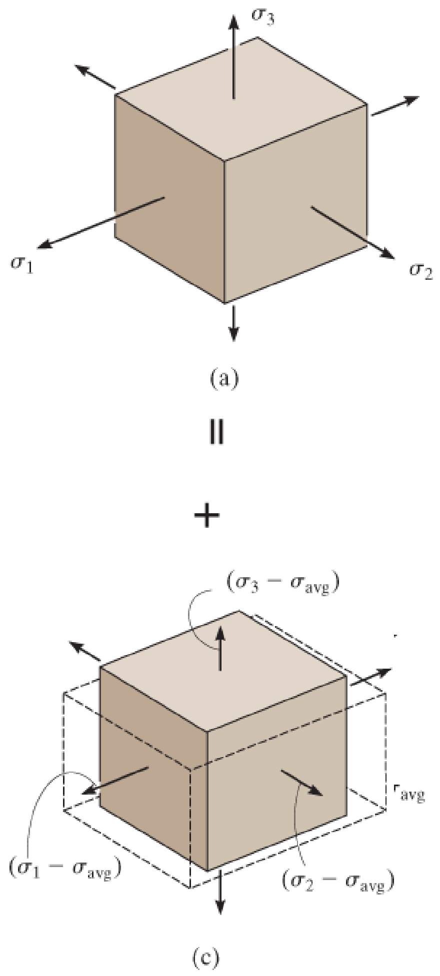
که چیری مواد د دري اړخیز سټریس سره مخ وي ، انځور 10-29a ، بیا هر یو اصلی سټریس یو اندازه د سترین انرژي کثافت جوړه وي، چی هیغه کیږي

$$u = \frac{1}{2}\sigma_1\,\epsilon_1 + \frac{1}{2}\sigma_2\,\epsilon_2 + \frac{1}{2}\sigma_3\,\epsilon_3$$

سربیره پر دی که مواد خطي ایلستیک چلند ولري ، بیا د هوک قانون تطبیق کیږي. له همدی امله که معادله 10-18 په پورتني معادله کی ځاي په ځای کړو او ساده یی کړو موږ لرو

$$u = \frac{1}{2E}\left[\sigma_1{}^2 + \sigma_2{}^2 + \sigma_3{}^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_3\sigma_2)\right] \quad (10\text{–}29)$$

د سترین انرژي کثافت د دوو برخو له مجموعي څخه پلاس راځی. یوه برخه هغه انرژي ده چې د عنصر د حجم بدلون لامل کیږي ، پرته له دی چی په شکل کې کوم بدلون راشي. او بله برخه دعنصر دتحریف (distort) کولو لپاره اړینه انرژي ده. په ځانګړې توګه، هغه انرژي چې د حجم د بدلون له امله په عنصر کې زیرمه شوي ، هغه د اوسط اصلی ستریس $\sigma_{avg} = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/3$ له امله رامینځته کیږي، ځکه چې په موادو کې دا ستریس د مساوي اصلي سترین لامل کیږي، انځور 10-29b . د ستریس پاتې برخه، $(\sigma_1 - \sigma_{avg})$، $(\sigma_2 - \sigma_{avg})$ ، $(\sigma_3 - \sigma_{avg})$ د انرژی د تحریف سبب ګرځي، انځور 10-29c .



انځور 10-29

تجربوي شواهدو ښودلي چې مواد ییلد نه کوی ، کله چې دوی د یونیفورم (هایډروستاټیک) ستریس لکه σ_{avg} سره مخ وي. په دی توګه په پایله کې، په کال 1904 کې،ام هوبر(M. Huber) وړاندیز وکړ چې په نرمو موادو کې ییلډینګ هغه وخت رامنځ ته کیږي کله چې د موادو د هر واحد حجم د*تحریف انرژي* مساوي وي او یا د ورته موادو د هر واحد حجم د تحریف انرژي څخه ډیر وي، کوم چې دا ییلډینګ د ساده کششي ستریس ازمویني تابع وي. دا نظریه د***اعظمي تحریف انرژی تیوري*** (maximum distortion energy theory) بلل کیږي، او دا وروسته له هغې په خپلواکه توګه د آر وان میسز (R von Mises) او اچ هینکی (H. Hencky) لخوا بیا تعریف شوی. دا نظریی ځیني وختونه د هغو نمونه هم لري.

د هر واحد حجم د تحریف انرژی ترلاسه کولو لپاره، موږ باید

ستریسونه $(\sigma_1 - \sigma_{avg})$،$(\sigma_2 - \sigma_{avg})$ ، او $(\sigma_3 - \sigma_{avg})$ د σ_1 ، σ_2، او σ_3، په ترتیب سره، په 10-29 معادله کې ځای په ځای کړو . ، درک کړی چې $\sigma_{avg} = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/3$ پراخول او ساده کول، موږ ترلاسه کوو.

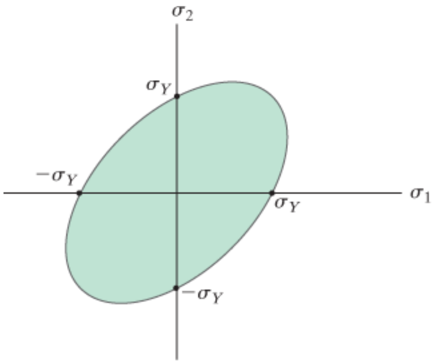
$$u_d = \frac{1+\nu}{6E}\left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2\right]$$

د سطحی ستریس په حالت کی $\sigma_3 = 0$ ، دا معادله په لاندی ډول کیږي

$$u_d = \frac{1+\nu}{3E}\left(\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2\right)$$

د یوه محوری کششی آزمویني لپاره $\sigma_1 = \sigma_y, \sigma_2 = \sigma_3 = 0$ ، نو بیا

$$(u_d)_Y = \frac{1+\nu}{3E}\sigma_Y^2$$



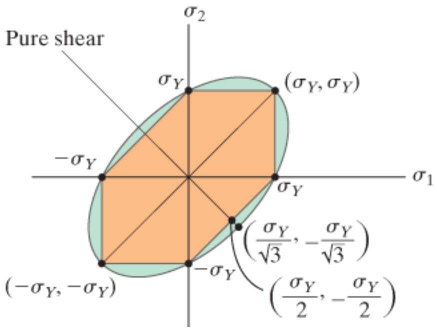
Maximum distortion energy theory

څرنګه چی د اعظمی تحریف انرژي تیوري غواړي چې $u_d = (u_d)_Y$ نو بیا د سطحی یا دوه اړخیزه ستریس لپاره موږ لرو

انځور 10-30

$$\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2 = \sigma_Y^2 \qquad (10\text{–}30)$$

دا د بیضوی (ellipse) معادله ده، انځور 10-30. په دی توګه که یوټکی په موادوکی له (σ_1, σ_2) ستریس سره مخ شی، کله چی پلاټ شی که چیری په سرحد یا بهر له سیوری شوي ساحي په بیضوی کی واقع شي ، بیا ویل کیږي چی مواد مات یا ړنګیدلي دی.

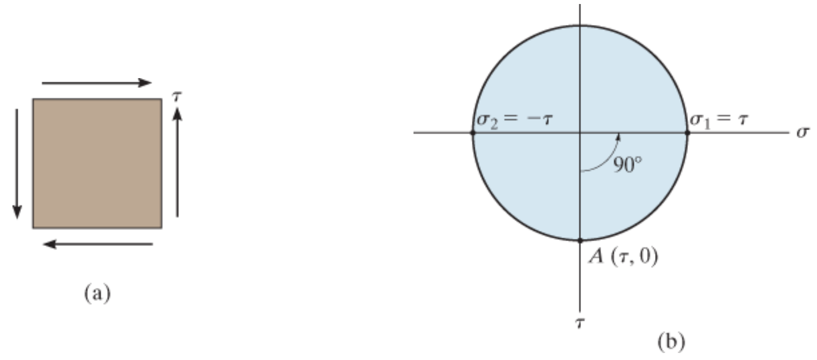


انځور 10-31

د پورته دوو ماتیدو معیارو پرتله کول په انځور 10-31 کې ښودل شوي. په یاد ولرئ کله چې اصلی سټریسونه په شدت کی مساوي وي بیا دواړه تیوری ورته پایلې ورکوي. د بیلګې په توګه $s_1 = s_2 = s_Y$، او یا کله چې یو له اصلي سټریسو څخه صفر وی او بل یې د s_Y شدت ولري. که مواد د خالص شییر، t تابع وی بیا د ماتیدو یا ړنګیدو وړاندوینه کې نظرونه تر ټولو لوی توپیر لري.

د دې ټکو د سټریس کواردینت په منحني باندی د هغه عنصر په پام کې نیولو سره ټاکل کیدی شي چې په انځور 10-32a کې ښودل شوي. د مو هر دایره چې ددی سټریس حالت استازیتوب وکړی ، انځور 10-32b ، موږ کولای شو چې اصلی سټریسونه $s_1 = t$ او $s_2 = -t$ تر لاسه کړو. په دې توګه، $s_1 = -s_2$ سره، بیا له معادلی 10-27 څخه اعظمي شییر سټریس تیوري ورکوي $(s_Y/2, -s_Y/2)$ او له معادلی 10-30 څخه د اعظمي تحریف انرژي تیوري ورکوي $(s_Y/\sqrt{3}, -s_Y/\sqrt{3})$ انځور10-31 .

د تورژن (torsion) ازموینو په ترسره کولو سره، کوم چې د نرمو موادوپه نمونه کې خالص شییر وده کوي، دا ښودل شوي چې اعظمي تحریف انرژي تیوري د خالص شییر ماتیدو په پرتله خورا دقیقي پایلې ورکوي نسبت د اعظمي شییر سټریس تیوري ته. په حقیقت کې، ځکه چې $(s_Y/\sqrt{3})/(s_Y/2) = 1.15$، شییر سټریس د موادو د ییلډینګ حاصل کولو لپاره، لکه څنګه چې د اعظمي د تحریف انرژی تیوری لخوا ورکړل شوی ، د هغه په پرتله 15% ډیر صحیح دی له اعظمي شییر سټریس تیوري څخه.

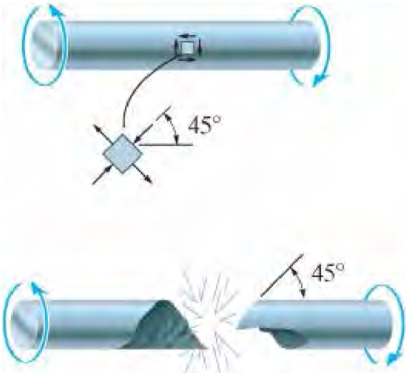


انځور 10-32

ماتيدونکي مواد (Brittle Materials)

Failure of a brittle material in tension

(a)



Failure of a brittle material in torsion

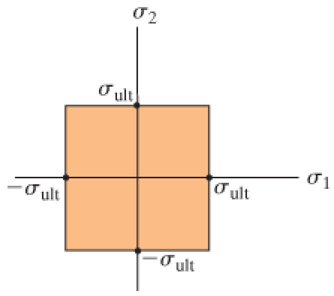
(b)

انځور 10-33

د اعظمي نارمل سټريس تيوري (Maximum Normal Stress Theory). مخکي ويل شوي وو چې ماتيدونکي مواد، لکه *خړه وسپنه (Cast iron)*، په ناڅاپي ډول ماتيږی او ښکاره ييلډينګ (yielding) نلري. *د کشش په ازموينه* کي، ماتيدل هغه وخت پيښيږي کله چې نارمل سټريس د نهايي سټريس (ultimate stress) حد s_{ult} ته ورسيږي، انځور 10-33a . همدارنګه، ماتيدونکي موادو ټوټه کيدل (brittle fracture) د کشش له امله د تورژن (torsion) په ازموينه کي واقع کيږي، ځرنګه چې د يوه عنصر لپاره د ماتيدو سطحه په 45° کې د شيير لوري ته ده، انځور 10-33b. له همدې امله د ماتيدو سطحه مار پيچی شکل (helical) لری څنګه چې ښودل شوي.* تجربو نور هم ښودلي چې د تورژن په جريان کې د موادو مقاومت لږ څه اغيزه من کيږی په شتون د اړونده اصلي کمپرشن سټريس کوم چې عمود په کششی اصلی سټريس وي. په پايله کې، اړين کششی سټريس د ماتولو لپاره د تورژن ازموينې په جريان کې نږدې ورته دی هغه کششی سټريس ته چې په ساده کششی سټريس ازموينه کی د ماتيدو سبب کيږی. موږ دی نتيجی ته راځو چی کششی سټريس چی د تورژن په تجربه کی د ماتيدو سبب کيږی، معادل د هغه سټريس دی چی يو عنصر په ساده کششی سټريس کی ماتوی. له دې امله، دی ته د اعظمي نارمل سټريس تيوري وايي، کله چې ماتديدونکی مواد د څو اړخيز حالت د سټريس کی وي، مواد به هغه وخت ماتيږی کله چې يو اصلی سټريس په موادو کې هغه نهايي سټريس ارزښت ته چی سبب د ماتيدو په يو ساده کششی ازموينه کی مخ وي ورسيږی. له همدې امله ، که چيرې مواد د *سطحی سټريس* (*plane stress*) سره مخ وي ، موږ ورته اړتيا لرو

$$|\sigma_1| = \sigma_{ult} \qquad (10\text{–}31)$$
$$|\sigma_2| = \sigma_{ult}$$

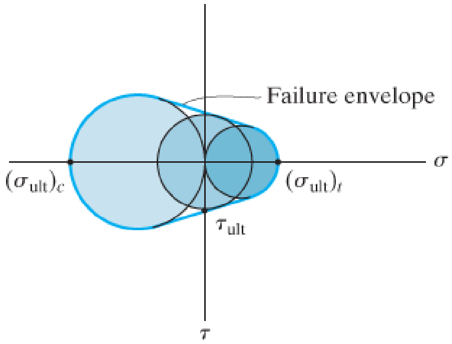
دا معادلې په ګرافيک ډول په انځور 10-34 کې ښودل شوي. دلته د سټريس کوردينات (s_1, s_2) د موادو په يوه نقطه کې بايد په سرحد يا د سيوري شوي ساحې څخه بهرموقعيت ونلري ، که نه نو مواد ماتيږي. دا تيوري په د کال 1800 په منځ کی د ډبليو رانکين (W. Rankine) له خوا وړاند يز شوی وه. په تجربوي توګه دا موندل شوی چی د ماتونکيو موادو د چلند سره کوم چې د سټريس-سټرين ډايګرامونه يی د کششی او کمپرشن په حالت کی د يو بل سره ورته وي، له دی تيوری سره نيږدی والي لري.



Maximum normal stress theory

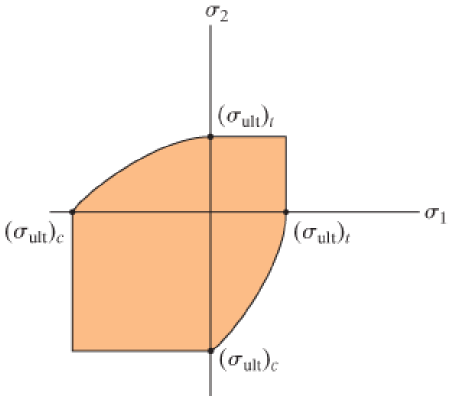
انځور 10-34

د موهر د ناکامۍ معیار (Mohr's Failure Criterion). په ځینو ماتیدونکیو موادو کې کشش او د کمپریشن خاصیتونه (properties) توپیر لري. کله چې دا واقع کیږي هغه معیار چې د موهرله دایرې سره تړاو لری ممکن د ۀاتیدو وړاندوینې لپاره وکارول شي. دا طریقه د اوټو موهر (Otto Mohr) لخوا رامینځته شوی او ځینې وختونه د **موهر د ماتیدو معیار** په نوم یادیږي . د د دې قضیې پلې کولو لپاره ، لومړی په موادو کې درې ازموینې باید ترسره شي. یوه محوری کششی ازموینه او یو محوری کمپرشني ازموینه کارول کیږی چې $(\sigma_{ult})_t$ او $(\sigma_{ult})_c$ په ترتیب سره معلوم کړی. همدارنګه د موادو د د تورژن ازموینه باید ترسره شي تر څود شیر نهایي حد د τ_{ult} و موندل شي. د هر یو سټریس شرایطو لپاره د موهر دایره بیا لکه څنګه چې په انځور 10-35 کې ښودل شوي پلاټ کړي. دا درې دایرې " د ماتیدو پاکټ" (failure envelop) جوړوی چې مماس په بهرنی برخه د دریو دایرو رسم شوی او په شنه غلیظ رنګ ښکاری. که د سطحی سټریس حالت کی یو نقطه په مماس کربنه او یا له هغه بهر موقعیت ولری بیا نو ماتیدل پیښیږي.



انځور 10-35

مورږ ممکن دامعیار د اصلي سټریسونو σ_1 او σ_2 په ګراف کې هم وښیو، چې په انځور 10-36 کې ښودل شوي. دلته ماتیدل هغه وخت واقع کیږي کله چې د هر یوه اصلي سټریس مطلق ارزښت مساوي یا لوي له $(\sigma_{ult})_t$ یا $(\sigma_{ult})_c$ ارزښت نه شي، یا په عمومي توګه، که په یوه نقطه د عنصر کې د سټریس حالت په کواردینات (σ_1,σ_2) په سرحد کې او یا د سیوري شوي ساحې څخه بهر وي بیا ماتیدل منځ ته راځي.



Mohr's failure criterion

انځور 10-36

د اعظمي نارمل سټریس تیوري یا د موهر د ناکامۍ معیارپه عمل کې د ماتیدونکیو موادو د ماتیدو وړاندوینه لپاره کارول کیدی شي. په هرصورت، دا باید پوه شو چې د دوی ګټورتوب خورا محدود دی. کششي ماتیدل ډیر ناڅاپه پیښیږي، او د هغې پیل عموما د سټریس غلظت په شتون په مایکروسکوپیک نیمګړتیاو په موادوکې، لکه د موادو خلاوي (voids)، د سطحې لوړې ژورې، او کوچني درزونه شاملدی، پورې اړه لري. له بده مرغه دا ډول بې نظمي په هر نمونه کی توپیر لري، او له دې امله دا ستونزمنه کیږي چې د یوې آزموینې په اساس فریکچر مشخص شی.

*د تورې تختې تباشیر (chalk) کله چې د هغې پایلی د ګوتو سره تاو شي په دې ډول ماتیږي

مهم ټکي

(IMPORTANT POINTS)

- که چیرې مواد نرم وي، ماتیدل د ییلډ د پیل په واسطه مشخص کیږي، پداسې حال کې چې د ماتیدونکیو موادو په فرکچر یا ماتیدو په واسطه مشخص کیږي.

- د نرمو موادو ماتیدل هغه وخت تعریف کیدی شي کله چې د کرسټالونو ، کوم چې مواد يي جوړکړي ، په مینځ کې ښویدل (slipping) رامنځته شي. دا ښویدل د شییر سټریس له امله دي او د *اعظمي شییر سټریس تیوري* د دی مفکورې پراساس ده.

- سټرین انرژي په موادو کې زیرمه کیږي ، کله چې د نارمل سټریس سره مخ وي. د *اعظمي تحریف انرژي تیوري* د سټرین انرژي پورې اړه لري کوم چې مواد تحریف کوي ، نه په هغه سټرین انرژي چې حجم ته وده ورکوي.

- د ماتیدونکیو موادو ماتیدل یوازي په موادو کې د اعظمي کششی سټریس له امله رامینځته کیږي، نه له کمپرشنی سټریس څخه. دا د اعظمي نارمل سټریس تیوري اساس دی ، او دا هغه وخت د تطبیق وړ ده چې د پلي کیدو په صورت کې سټریس - سټرین ډایګرامونه د کشش او کمپرشن سټریس سره ورته وی.

- که د ماتیدونکي موادو ، د سټریس - سټرین ډیاګرام په کشش او کمپرشن کې توپیر ولري، نو د موهر د ماتیدو معیار د ماتیدو د وړاندوینې لپاره کارول کیدی شي.

- د موادو د نیمګړتیاوو له امله، د ماتیدونکیو موادو د کششی ماتیدلواټکل ستونزمن دی، او له همدې امله د ماتیدلو تیوری د ماتیدونکیو موادو لپاره باید په احتیاط سره وکارول شي .

مثالونه

مثال 10.12

يو جامد فولادی شافت چی 0.5 in شعاع لری ییلد مقاومت يي $\sigma_Y = 36$ ksi دي، او په انځور 10-37a کی ښودل شوي. که چیری د کود په اساس اعظمي شییر ستریس تیوری د ماتیدولپاره و کارول شي، بهرنی بار چی وربانډ پلي کیدی شي معلوم کړي.

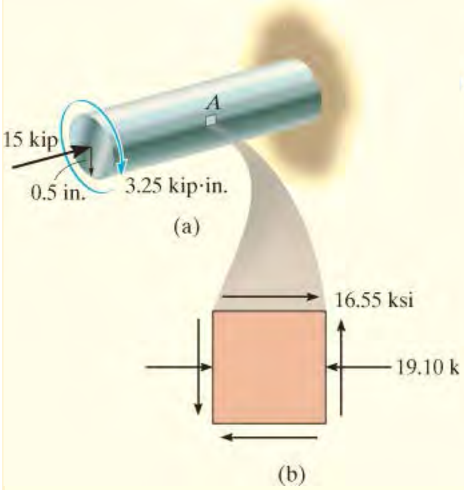
حل (SOLUTION)

محوری بار او تورک دواړه په شافت کی د ستریس حالت جوړه وي. ځرنګه چی اعظمی شییر ستریس د تورک له امله په بیروني سطحه جوړیږي، موږ لرو

$$\sigma_x = \frac{N}{A} = \frac{-15 \text{ kip}}{\pi(0.5 \text{ in.})^2} = -19.10 \text{ ksi}$$

$$\tau_{xy} = \frac{Tc}{J} = \frac{3.25 \text{ kip}\cdot\text{in.}\,(0.5 \text{ in.})}{\frac{\pi}{2}(0.5 \text{ in.})^4} = 16.55 \text{ ksi}$$

د ستریس اجزاوی په یوه عنصر په ټکي A باندی په انځور 10-37b کی ښودل شوي دي. د موهر دایری د کارولو پر ځای به د ستریس بدلون له معادلی 9-5 کار واخلو



$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$= \frac{-19.10 + 0}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-19.10 - 0}{2}\right)^2 + (16.55)^2}$$

$$= -9.55 \pm 19.11$$

$$\sigma_1 = 9.56 \text{ ksi}$$

$$\sigma_2 = -28.66 \text{ ksi}$$

انځور 10-37

د اعظمی شییر ستریس قضیه (Maximum Shear Stress Theory)

ځکه چی اصلی ستریسونه مخالف د یو بل علامه لري، نو بیا د معادلي 10-27 دوهمه کاروو، او مونږ لرو

$$|\sigma_1 - \sigma_2| \le \sigma_Y$$

$$|9.56 - (-28.66)| \overset{?}{\le} 36$$

$$38.2 > 36$$

ددی قضیي په اساس د موادو ماتیدل د شییر له امله دي.

د اعظمی انرژي انحراف قضیه (Maximum Distortion Energy Theory)

له معادلی 10-30 کار اخلو، او مونږ لرو

$$(\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2) \le \sigma_Y^2$$

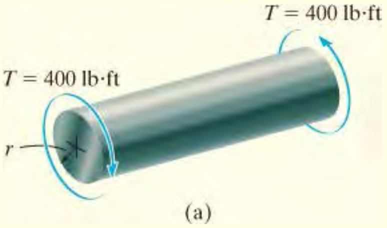
$$[(9.56)^2 - (9.56)(-28.66) + (-28.66)^2] \overset{?}{\le} (36)^2$$

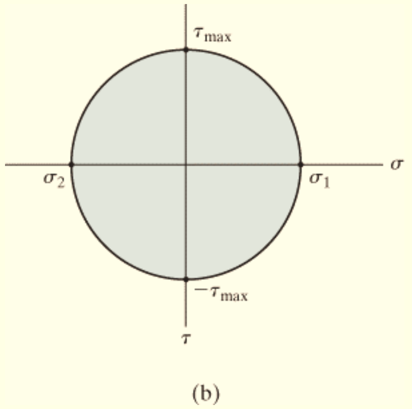
$$1187 \le 1296$$

ددی قضیي په کارولو په موادو کی ماتیدل نه راځي.

مثال 10.13

یو جامد د چودن وسپنی (cast iron) شافت په انځور 10-38a کی ښودل شوي، او یوه تورک $T = 400$ lb .ft ور باندی پلي شوي دي. د اعظمی نارمل ستریس قضیي په کارولو سره ، تر ټولو کوچنی شعاع مشخص کړي . یوه چودنی نمونه چی کششی آزموینه ورباندی شوي وه د نهایي حد ستریس $(\sigma_{ult})_t = 20$ ksi مشخص شوی.





انځور 38-10

حل (SOLUTION)

اعظمی یا بحراني شيير ستریس په یوه ټکی کی په بیروني سطحه د شافت جوړیږي. فرض کوو چی د شافت شعاع r دي، بیا شيير ستریس کيږي

$$\tau_{max} = \frac{Tc}{J} = \frac{(400 \text{ lb} \cdot \text{ft})(12 \text{ in./ft})r}{(\pi/2)r^4} = \frac{3055.8 \text{ lb} \cdot \text{in.}}{r^3}$$

د موهر دایره د دی ستریس حالت لپاره (خالص شيير) په انځور 10-38b کی ښودل شوي.

څکه چی $R = t_{max}$ ، بیا

$$\sigma_1 = -\sigma_2 = \tau_{max} = \frac{3055.8 \text{ lb} \cdot \text{in.}}{r^3}$$

اعظمی نارمل ستریس قضیه ، 10-31 معادلی ته اړتیا لري

$$|\sigma_1| \le \sigma_{ult}$$

$$\frac{3055.8 \text{ lb} \cdot \text{in.}}{r^3} \le 20\,000 \text{ lb/in}^2$$

په دی توګه د شافت تر ټولو کوچنی شعاع عبارت ده په

$$\frac{3055.8 \text{ lb} \cdot \text{in.}}{r^3} = 20\,000 \text{ lb/in}^2$$

$$r = 0.535 \text{ in.}$$ *Ans.*

سوالونه

PROBLEMS

س 10-59. د یو جسم مواد د سطحی ستړیس حالت کی دي. د موادو ماتیدل د اعظمي تحریف انرژی قضي (maximum distortion energy theory) په شتون د s_x, s_y او t_{xy} سره تشریح کړي.

س *10-60. د یوه جسم مواد د سطحی ستړیس په حالت کی دي. د موادو ماتیدل د اعظمي شییر ستړیس قضي (maximum shear stress theory) له خوا چی s_x, s_y او t_{xy} ولرو تشریح کړي. فرض کړي اصلي ستړیسونه د یوبل مخالفی الجبری علامی لري.

س 10-61. د زرکونیم-مګنیزیم (zirconium-magnesium) الیاژ ییلډ ستړیس $s_Y = 15.3$ ksi دی. که چیری د یوه ماشین برخه له دی موادو جوړه شوی وي، او په بحراني نقطه کی یي اصلي ستړیسونه s_1 او $s_2 = -0.5s_1$ وي، د s_1 شدت داسی معلوم کړي چی ییلډینګ د اعظمی شییر ستړیس قضي په اساس منځ ته راشي.

س 10-62. په سوال 10-61 کی له اعظمي تحریف انرژي کار واخلي.

س 10-63. که د ماشین یوه برخه د اوزارو فولادو L2 څخه جوړه شوی وي، او په بحراني نقطه کی یي په سطحه اصلي ستړیسونه s_1 او $s_2 = -0.5s_1$ وي، د s_1 شدت په ksi واحد سره داسی معلوم کړي چی ییلډینګ د اعظمی شییر ستړیس قضي په اساس منځ ته راشي.

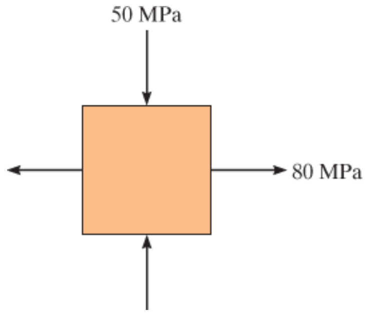
س *10-64. سوال 10-63 د اعظمي تحریف انرژی قضي کارولو په اساس حل کړي.

س 10-65. یو معادل عبارت د تورک T_e د پاره داسی مشخص کړي، که چیری په تنهایي په یو جامده میله چی ګردی غوڅه برخه لري او د ورته انرژي د تحریف (distortion)لامل شي لکه چی یو کرېدونکي مؤمنت M او تورک T یو ځای ور باندی پلي شوي وی.

س 10-66. که یو شافت له داسي مواد جوړ شوي وي چې $s_Y = 75$ ksi دي، اعظمی د تورژن شيير ستريس وټاکي ، کوم چې اړين وی د ييلدينګ لپاره. د اعظمی تحريف انرژی قضيي ځخه کار واخلی.

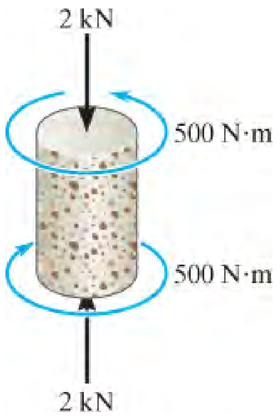
س 10-67. په سوال 66-10 کی له اعظمي شيير ستريس قضيي ځخه کار واخلي.

س *10-68. لاندی ماشين له فولادی مواد جوړ شوي ، ييلد مقاومت يي $s_Y = 700$MPa دي، د خونديتوب فکتور (safety factor) نسبت ييلدينګ ته وټاکي، کله چې له اعظمی شيير ستريس قضيي ځخه کار واخيستل شي.



س 10-68

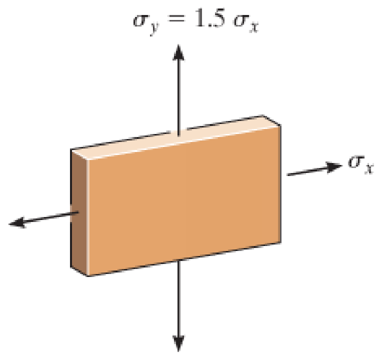
س 10-69. د يوه لنډ کانکريتي سلندر قطر 50 cm دی او يو تورک د 500 N.m او يو تيلوهونکي قوه د 2 kN ور باندی پلي شوي. معلوم کړي چې دا د اعظمی نارمل ستريس قضيي په اساس ماتيدی شي که نه. د کانکريټ نهايي حد د ستريس $s_{ult} = 28$ MPa دي.



س 10-69

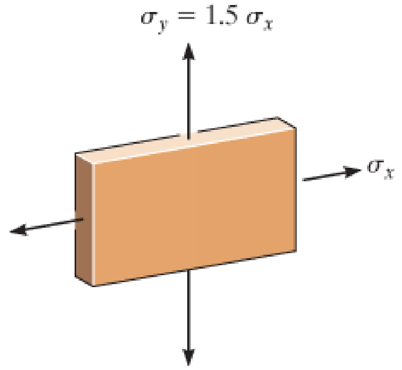
س 10-70. یو معادل عبارت د کږیدونکی مومنټ M_e لپاره داسی مشخص کړي، که چیری په تنهايي په یو جامده میله چی ګردی غوڅه برخه لري پلی شی، د ورته انرژي د تحریف (distortion)لامل شي لکه یو کږیدونکي مؤمنت M او تورک T ، چی یو ځای پری پلی شوی وی.

س 10-71. یوه تخته له توبن برنجو (Tobin bronze) جوړه شوي ده، او ییلد یي s_Y = 25 ksi دي. که چیری اعظمی کششی ستریس s_x او بل کششی ستریس s_y =1.5 s_x وربانډی پلی ښي، د اعظمی شییر ستریس قضيي په کارولو د پلی شوی ستریسونو ارزښت معلوم کړي.



س 10-71

س *10-72. یوه تخته له توبن برنجو (Tobin bronze) جوړه شوي ده، او ییلد یي s_Y = 25 ksi دي. که چیری اعظمی کششی ستریس s_x او بل کششی ستریس s_y =1.5 s_x وربانډی پلی ښي، د اعظمي تحریف انرژی قضيي په کارولو د پلی شوی ستریسونو ارزښت معلوم کړي.



س 10-72

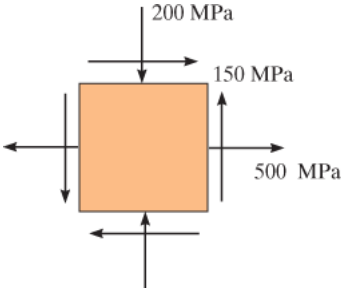
س 10-73. د یو جامد درایو شافت جوړه ولو لپاره له المونیم الیاژ کار اخیستل شوي، تر څو

30 hp په 1200 rev/min ولیږدوي. که چیری د خوندیتوب فکتور2.5 ییلد ته وکاروي هغه کوچني قطرد شافت، د اعظمی شییرستریس قضيي په کارولوسره ، مشخص کړي . $s_Y = 10$ ksi دي.

س 10-74. د ماشین یوه برخه له المونیم (Ti-6A1-4V) څخه جوړه شوی ، او په بحراني نقطه د موادو کی په سطحه ستریس داسی پلی شوی چی اصلی ستریسونه یي s_1 او $s_2 = 0.5\ s_1$ دي، د s_1 شدت په MPa واحد سره داسی معلوم کړي (a) چې ییلدینګ د اعظمی شییر ستریس قضيي په اساس منځ ته راشي، (b) د اعظمي تحریف انرژی قضيي په کارولوسره .

س 10-75. د سطحی ستریس اجزاوي په یوه بحرانی ټکي د فولادو نازک پوستکي په لاندی انځور کی ښودل شوي. د ماتیدلوحالت (ییلدینګ) په اساس د اعظمي تحریف انرژی قضيي معلوم کړي. د فولادي موادو $s_Y = 700$ MPa دي.

س *10-76. سوال 10-75 د اعظمی شییر ستریس قضيي په کارولو حل کړي.



س 10-75/76

س 10-77. د 304 بی زنګه فولادو (stainless-steel) سلندر داخلی قطر يي 4 in. ، او د دیوال پندوالي يي 0.1 in. دي. که چیری یو داخلی فشار $p = 80$ psi او محوري بار د 500 lb او یو تورک د 70 lb. ft ورباندی پلي شي په موادو کی د ییلد جوړیدل د اعظمي تحریف انرژی قضيي په اساس معلوم کړي.

س 10-78. د 304 بیزنګه فولادو (stainless-steel) سلندر داخلی قطر 4 in. ، او د دیوال پندوالي يي 0.1 in. دي. که چیری یو داخلی فشار $p = 80$ psi او محوري بار د 500 lb او یو تورک د 70 lb. ft ورباندی پلي شي په موادو کی د ییلد جوړیدل د اعظمي شییرستریس قضيي په اساس معلوم کړي.

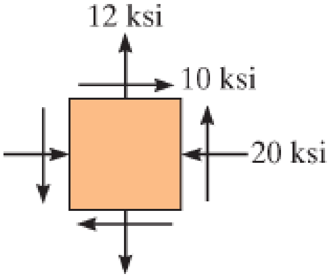
س 10-77/78

س 10-79. یو د .2 in قطر لرونکی شافت له ماتیدونکي موادو جوړشوي، په دواړو کششی اوو ټیلوهونکي حالتونو کي $\sigma_{ult} = 50$ ksi دي. د شافت ماتیدل د اعظمی نارمل سټریس قضي په اساس معلوم کړي. د شړیدلو (rapture) په وړاندي د خوندیتوب فکتور د 1.5 وکاروئ.

س *10-80. یو د .2 in قطر لرونکی شافت له چودن وسپنی (cast iron) جوړشوي، او د کششی او ټیلوهنکي نهاي حد سټریس یي $(\sigma_{ult})_t = 50$ ksi او $(\sigma_{ult})_c = 75$ ksi ، په ترتیب سره دي . د شافت ماتیدل د موهر د ماتیدلو قضي په اساس معلوم کړي.

س 10-79/80

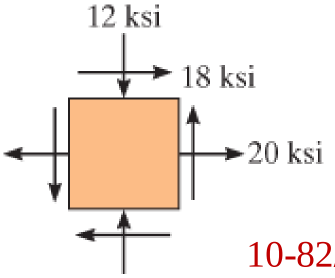
س 10-81. که $\sigma_Y = 50$ ksi د خوندیتوب فکتور نسبت ییلدینګ ته د بنودل شوی بار له پلوه معلوم کړی په اساس د (a) اعظمی شییر سټریس قضی (b) د اعظمي د تحریف انرژی قضي.



س 10-81

س 10-82. د سطحی سټریس حالت په یوبحراني ټکی د براکیټ د یوه فولادی ماشین په لاندی انځور کی بنودل شوي. که د فولادو ییلد سټریس $\sigma_Y = 36$ ksi وی، و ټاکي چی د اعظمي د تحریف انرژی قضي په اساس ییلدینګ جوړیدی شي که نه.

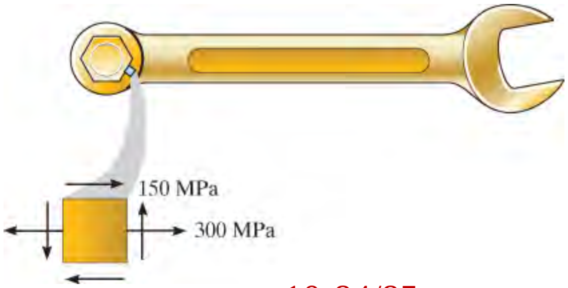
س 10-83. سوال 10-82 د اعظمی شییر سټریس قضي په کارولو حل کړي.



س 10-82/83

س *10-84. د سطحی ستړیس حالت په یو بحرانی نقطه د رینچ کی په لاندی انځور کی ښودل شوي. هغه کوچني د ییلد ستړیس د فولادو لپاره چی د اعظمي د تحریف انرژی قضي په اساس انتخاب کیدی شي معلوم کړي.

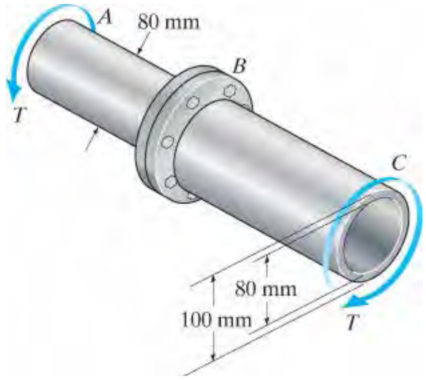
س 10-85. د سطحی ستړیس حالت په یو بحرانی نقطه د رینچ کی په لاندی انځور کی ښودل شوي. هغه کوچني د ییلد ستړیس د فولادو لپاره چی د اعظمي شییر ستړیس قضي په اساس انتخاب کیدی شي معلوم کړي.



س 10-84/85

س **10-86.** دا لاندی شافت له یوی جامد برخی AB او له یوی منځ خالی برخی BC جوړ شوي، او په کلک کپلینګ (coupling) په B کی وصل دي. که چیری دا شافت له فولادو A-36 جوړ شوی وي اعظمی تورک T چی وربانډی پلی کیدی شي په اساس د اعظمی شییر ستړیس قضیی وټاکي. د خوندیتوب فکتور 1.5 نسبت ییلدینګ ته وکاروي.

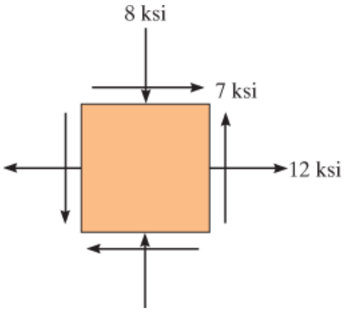
س 10-87. دا لاندی شافت له یوی جامد برخی AB او له یوی منځ خالی برخی BC جوړ شوي، او په کلک کپلینګ (coupling) په B کی وصل دي. که چیری دا شافت له فولادو A-36 جوړ شوی وي اعظمی تورک T چی وربانډی پلی کیدی شي په اساس د اعظمي د تحریف انرژی قضي وټاکي. د خوندیتوب فکتور 1.5 نسبت ییلدینګ ته وکاروي.



س 10-86/87

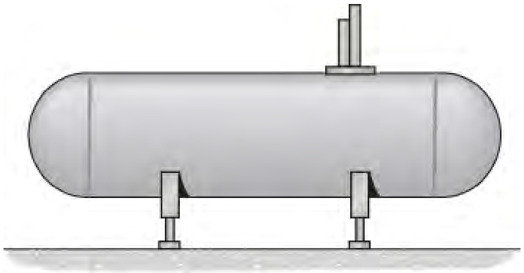
س *10-88. په یو ټکی د نازک دیوال د فشار سلندری ټانک اصلی ستړیسونه عبارت دی په $s_1=Pr/t$ او $s_2 = pr/2t$ او $s_3 = 0$. که ییلد ستړیس د موادو s_Y وی اعظمی فشار اندازه p وټاکی په اساس د (a) اعظمی شییر ستړیس قضی (b) د اعظمي د تحریف انرژی قضي.

س 10-89. که $s_Y = 50$ ksi وي د خونديتوب فکتور د دی لاندی بار لپاره معلومم کړي په اساس (a) د اعظمی شيير ستريس قضي (b) د اعظمي د تحريف انرژی قضي.



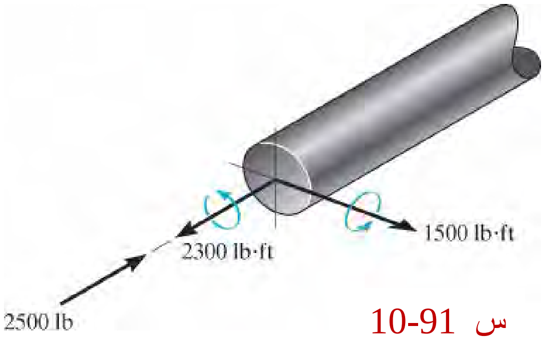
س 10-89

س 10-90. دا لاندی د غازو ټانک 1.50 m قطر لري، او له فولادو جوړ شوي. که چيری دا ټانک د 5 MPa فشار مقاومت ولري ، د ضرورت وړ کوچني پنډوالي د ديوال ميلي مترته نيږدي حد سره و ټاکي (a) په کارولو د اعظمی شيير ستريس قضي (b) په کارولو د اعظمي د تحريف انرژی قضي. د خونديتوب فکتور 1.5 نسبت ييلډينګ ته وکاروي.



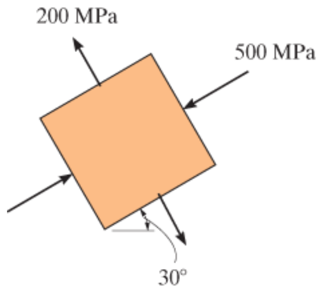
س 10-90

س 10-91. د يوی کښتي د فولادی ډرايو شافت په بحراني نقطه کی داخلي بارونه کوم چي محاسبه شوی عبارت دی په تورک د 2300 lb.ft ، کيږيدونکي مؤمنت 1500 lb.ft او محوری ټرسټ په اندازه د 2500lb . که چيری د ييلډ ټکي په کشش او شيير کی عبارت وي په $s_Y =$ 100 ksi او $t_Y = 50$ ksi په ترتيب سره ، اړوند قطر د شافت د اعظمی شيير ستريس قضي په کارولوسره و ټاکي.



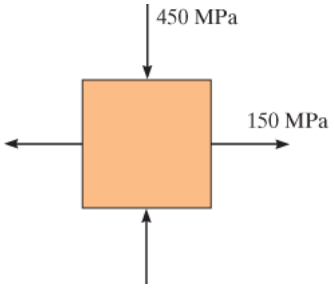
س 10-91

س 10-92*. د یوه ماشین مواد فولاد دي او ییلد ستریس یي $s_Y = 750$ MPa دي. د خوندیتوب فکتوريي نسبت ییلدینګ ته پهٔ اساس د اعظمي د تحریف انرژی قضيي په کارولوسره معلوم کړی.



س 10-92

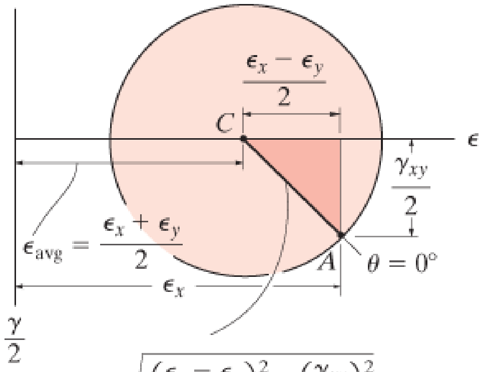
س 10-93. د یوه ماشین مواد فولاد دي او ییلد ستریس یي $s_Y = 750$ MPa دي. د خوندیتوب فکتوريي نسبت ییلدینګ ته پهٔ اساس د اعظمي شییر ستریس قضيي په کارولو سره معلوم کړی



س 10-93

د فصل بیا کتنه

CHAPTER REVIEW

$$\epsilon_{x'} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} + \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\cos 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2}\sin 2\theta$$ $$\epsilon_{y'} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} - \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\cos 2\theta - \frac{\gamma_{xy}}{2}\sin 2\theta$$ $$\frac{\gamma_{x'y'}}{2} = -\left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\right)\sin 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2}\cos 2\theta$$ $$\epsilon_{1,2} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}$$ Principal strains $$\frac{\gamma_{\substack{max \\ in\text{-}plane}}}{2} = \sqrt{\left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}$$ Maximum in-plane shear stress $$\epsilon_{avg} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2}$$	کله یو عنصر د موادو، تنها په یوه سطحه کی تر بیځایه کیدني لاندي راشي، نو بیا دا د سطحی سترین څخه تیریږي. که چیری عنصر په یو مشخص لوری موقعیت ولري اود سترین اجزاوی ϵ_x, ϵ_y او t_{xy} چی وربانډی عمل کړی معلوم وي ، نو بیا سترین په یو بل جهت کیدی شي چی د سترین بدلون معادلو په کارولو سره و ټاکل شي. په همدی ډول اصلي نارمل سترینونه او اعظمي په شییر سترین په سطحه د بدلون معادلو په کارولو سره ټاکل کیدی شي .
 $$R = \sqrt{\left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}$$	د سترین د بدلون سوالونه هم د نیمه ګرافیکی طریقی په کارولو د موهر دایري سره ټاکل کیدی شي. د دایری د رسمولو لپاره ϵ او $g/2$ محورونه باید جوړ شي. مرکز د دایری $C[(\epsilon_x + \epsilon_y)/2, 0)]$ او د ریفریسنس ټکي $A(\epsilon_x, g_{xy}/2)$ رسم کړي. شعاع د دایری د دی دوټکیو په امتداد ده چی له مثلثاتو ټاکل کیدی شي.

که چیری e_1 او e_2 یو شان علامه ولري نو بیا مطلق اعظمی شییر سترین به له سطحی وتلی وی. که چیری e_1 او e_2 یو د بل مخالف علامه ولري نو بیا مطلق اعظمی شییر سترین به مساوی په اعظمی شییر سترین په سطحه وي.	$\gamma_{\substack{\text{abs}\\ \text{max}}} = \epsilon_1$ $\gamma_{\substack{\text{abs}\\ \text{max}}} = \gamma_{\substack{\text{in-plane}\\ \text{max}}} = \epsilon_1 - \epsilon_2$
که چیری مواد له دری اړخیزه ستړیس سره مخ وی، بیا سترین په هر جهت له ټولو دریو اړخونو ستړیسونو له امله اغیزه من کیږي. نو بیا د هوک قانون به د موادو خاصیتونو E او u څخه ګټه واخلی.	$\epsilon_x = \frac{1}{E}[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)]$ $\epsilon_y = \frac{1}{E}[\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)]$ $\epsilon_z = \frac{1}{E}[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)]$
که چیری E او u معلوم وی بیا G ټاکل کیدی شي.	$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$
پراخیدل د حجمي سترین اندازه کیدل دي.	$e = \frac{1 - 2\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$
د بلک (bulk) ماجولس د موادو د حجم د سختي (stiffness) اندازه کولو لپاره کاره ول کیږي.	$k = \frac{E}{3(1 - 2\nu)}$
که اصلی ستړیسونه په بحراني ټکی د موادو کی معلوم وی بیا د ماتیدو قضي د ډیزاین لپاره کارول کیدی شي. نرم مواد په شییر کی ماتیږي، او دلته د اعظمی شییر ستړیس قضی یا د اعظمي تحریف انرژی قضي له مخی دماتیدو وړاندوینی لپاره کارول کیدی شي. دا دواړه قضي ورته کیدل د نموني د ییلد ستړیس سره، کوم چې یو محوري ستړیس وربانډی پلی شوی وی، کوي. ماتیدونکی مواد په کشش کی ماتیږی، نو بیا د اعظمی نارمل ستړیس قضیه یا د موهر دةاتیدو قضیه د موادو د ةاتیدو وړاندوینی لپاره کارول	

کیدی شي. دلته نهایي کششي حد د ستریس چې په موادو کی کیدی شی جوړ شي پرتله کیږي.	

د بیا کتني سوالونه

REVIEW PROBLEMS

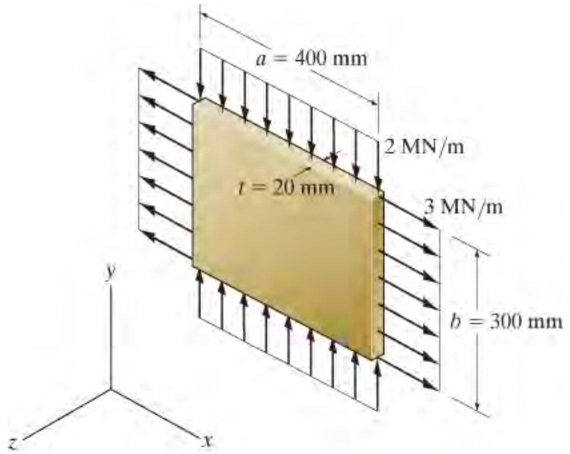
ب 10-1. اصلی سترینونه په سطحه کی e_1 او e_2 راکړل شوی، تاسو وښیي چې دریم اصلی سترین کیدی شی چی له دی لاندی معادلی په لاس را شي

$$\epsilon_3 = \frac{-\nu(\epsilon_1 + \epsilon_2)}{(1 - \nu)}$$

د موادو د پویسان نسبت u دی.

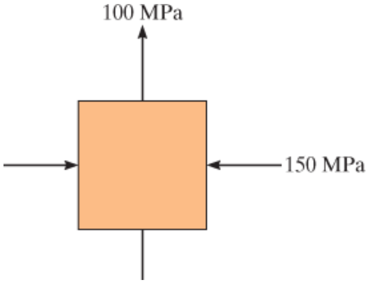
ب 10-2. دا لاندی تخته له هغه موادو جوړه شوی چې د ایلستیسیتی ماجولس یي $E = 200\text{GPa}$ او د پویسان نسبت یي $u = 1/3$ دی . که چیری دا لاندی ویشلشوی بار ورباندی پلی شي، په سور a، لوړوالي b او پنډوالي t کی بدلون د دی بنودل شوی بار له امله و ټاکي.

ب 10-2. دا لاندی تخته له هغه موادو جوړه شوی چې د ایلستیسیتی ماجولس یي $E = 200\text{GPa}$ او د پویسان نسبت یي $u = 1/3$ دی . که چیری دا لاندی ویشلشوی بار ورباندی پلی شي، په سور a، لوړوالي b او پنډوالي t کی بدلون د دی بنودل شوی بار له امله و ټاکي.



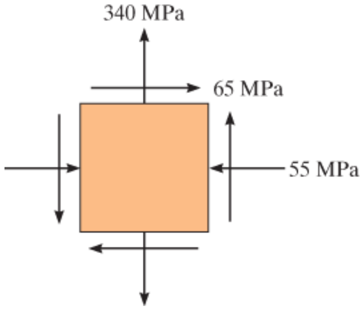
ب 10-2

ب 10-3. د ماشینی فولادو ییلد ستریس $\sigma_Y = 500$ MPa دی، د خوندیتوب فکتور نسبت ییلدینګ ته کله چی د اعظمی د شییر ستریس قضیه و کارول شي، و ټاکی.



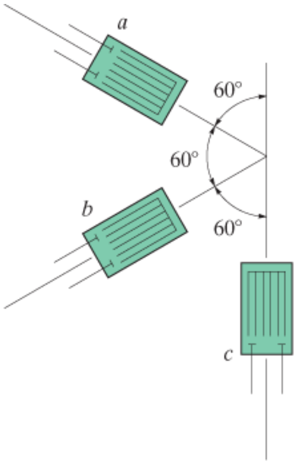
ب 10-3

ب *10-4. د سطحی ستریس اجزاوي په یوه بحرانی ټکي د فولادو په نازک پوستکي په لاندی انځور کی ښودل شوي. د اعظمي تحریف انرژی قضي له مخی معلوم کړي چی د ییلدینګ جوړیدل په موادو کی امکان لري که نه. د فولادي موادو $\sigma_Y = 650$ MPa دي.



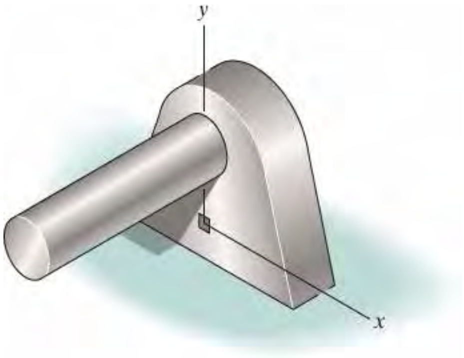
ب -10

ب 10-5. د 60^0 درجو ستړین روزیت په یوه بیم اینودل شوي. دا لاندی لیدنه د ستړین له هر ګیج په لاس راغلي: $\epsilon_a = 600(10^{-6})$, $\epsilon_b = -700\ (10^{-6})$ او $\epsilon_c = 350\ (10^{-6})$. (a) معلوم کړي په سطحه اصلی ستړین (b) اعظمی شییر ستړین په سطحه او اوسط نارمل ستړین. په هر حالت کی بیځایه شوي عنصر د ستړین له امله و ښیي.



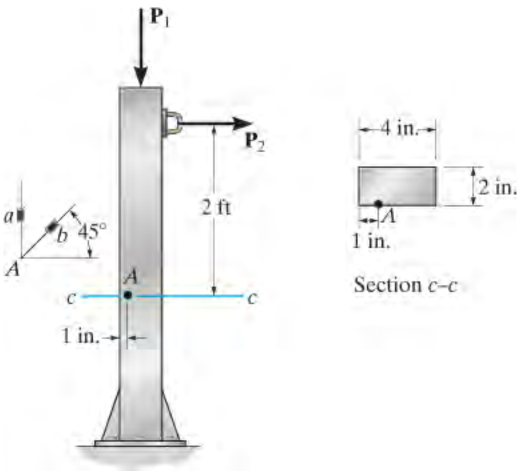
ب 10-5

ب 10-6. د سترين حالت په يو ټکي د براکيټ کې دا لاندې اجزاوي لري $\epsilon_x = 350\ (10^{-6})$ $\epsilon_y = -860\ (10^{-6})$ او $\gamma_{xy} = 250\ (10^{-6})$. د سترين د بدلون له معادلو کار واخلي او معادل د په سطحه سترين ، په يو عنصر کوم چې په زاويه $\theta = 45^0$ د ساعت ګردش په لور له اصلی حالت نه موقعيت لرى ، وټاکي . بيځايه شوي عنصر د x-y په سطحه د دى سترينو له امله و ټاکي.



ب 10-6

ب 10-7. په لاندى فولادى A-36 پايه ښودل شوى قواوى پلى شوي دي. که چيرى په ټکى A کى سترين ګيج a او b په دى ډول د سترين لوستني راکړي $\epsilon_a = 300(10^{-6})$ او $\epsilon_b = 175(10^{-6})$ د بارونو P_1 او P_2 ارزښتونه و ټاکي.



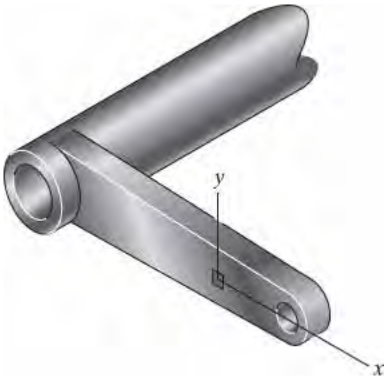
ب 10-7

ب *10-8. يو عنصر له سطحى سترين سره مخ دى او دا لاندى سترينونه لري:

$$\epsilon_x = 950(10^{-6}),\ \epsilon_y = 420(10^{-6}),\ \gamma_{xy} = -325(10^{-6})$$

د سترين بدلون له معادلو کار واخلي او معلوم کړي (a) اصلي سترينونه (b) اعظمی شيير سترين په سطحه او اړوند اوسط سترين. په هر حالت کی جهت د عنصر مشخص کړي او وښی چی سترينونه عنصر څنګه بيځايه کوي.

ب 10-9. د سترين حالت په يو ټکي د براکيټ کی $e_x = -130\ (10^{-6})$ $e_y = 280\ (10^{-6})$ او $g_{xy} = 75\ (10^{-6})$ اجزاوي لري. د سترين د بدلون له معادلو کار واخلي، او معلوم کړي (a) اصلی سترينونه په سطحه او (b) اعظمی شيير سترين په سطحه او اوسط نارمل سترين. په هر حالت کی بيځايه شوي عنصر حالت د سترين له امله د x-y په سطحه کی و ښيي.

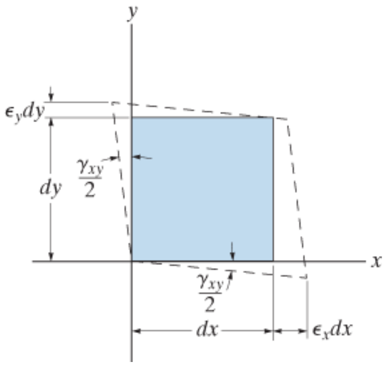


ب 10-9

ب 10-10. د سطحی سترين حالت په يو عنصر عبارت دی په

$$e_x = 400(10^{-6}),\ e_y = 200(10^{-6}),\ g_{xy} = -300(10^{-6})$$

معادل د دی سترين حالت و ټاکی کوم چی استازيتوب کوي د (a) اصلي سترينو او (b) د اعظمی شيير سترين په سطحه او اړوند اوسط نارمل سترين. د اړوند عنصر سمت په ټکی کی نسبت اصلی عنصر ته و ټاکی . پايلی په عنصر سکيچ کړي.



ب 10-10

یولسم فصل

(CHAPTER 11)

(© Olaf Speier/Alamy)

بیمونه مهم ساختمانی غړي دي چې د بام او پوړو بارونه وړی.

د بیمونو او شافتونو ډیزاین

(DESIGN OF BEAMS AND SHAFTS)

د فصل موخې CHAPTER OBJECTIVES

§ پدې فصل کې به موږ پدې اړه بحث وکړو چې څنګه به یوه پریزماتیک بیم (prismatic beam) ډیزاین کړو، تر څو د دې وړتیا ولري چې د داخلي کیږیدلو (bending) مومنټ او شییر دواړو مقاومت ولری. همدارنګه، موږ به د بیم د شکل ټاکلو لپاره، کوم چی د خپل اوږدوالي په اوږدو کی تر ستریس لاندی وی، یوه طریقه وړاندې کړو. د فصل په پای کې به موږ د شافتونو ډیزاین چې د دوی د مقاومت پر بنسټ، کله چی داخلي کیږدل او تورژن (torsion) شتون ولری، په پام کې ونیسو .

11.1 د بیم ډیزاین اساسات (BASIS FOR BEAM DESIGN)

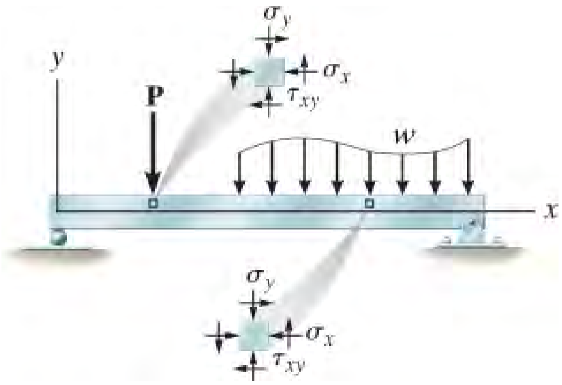
ویل کیږي چې بیمونه د قوت پر بنسټ ډیزاین کیږي، تر څو د داخلي مؤمنت او شییر مقاومت ولری کوم چی د دوی په اوږدوالی کی شتون لري. د دی ډول ډیزاین کولو لپاره اړین دی چی دبیم د شییر اوکیږیدو فورمولونو پلي شی، په دې شرط چې مواد متجانس او خطي ایلستیکي چلند ولري. ځیني بیمونه د محوری قوی تابع کیدی هم شي، اما اغیزې د دې ډول قوی ډیری وختونه په ډیزاین کې له پامه غورځول کیږي، ځکه چې محوري ستریس عموما د هغه ستریس په پرتله، چې د شییر او کیږیدو په واسطه رامینځته کیږي، خورا کوچنی وي.

لکه څنګه چې په انځور 11-1 کې ښودل شوي، بهرني بارونه په بیم کې په مستقیم ډول تر *بار* لاندې ځای کی اضافي *ستریسونه* رامینځته کوي. د پام وړ د کمپریشن ستریس s_y ، سربیره پرکږیدونکی ستریس s_x او شییر ستریس t_{xy} لکه څنګه چې مخکې په 6 او 7 فصلونو کې بحث شوی ، جوړه وي. د تحلیل پرمختللي میتودونو په کارولو لکه د ایلستیستي تیوري، دا ښودل کیدی شي چې s_y د بیم په ژوروالي کې په چټکۍ سره کمیږي. د ډیری بیمو لپارد اوږدوالي نسبت ژوروالي ته ه کوم چې په انجیری پرکتسونو کی کارول کیږي، د بیم اعظمي ارزښت د s_y په پرتله د کوږوالي مؤمنت ستریس s_x کوچنی پاتې کیږي، یعنی $s_x >> s_y$. سربیره پردې، د بیم ډیزاین کې په عمومی ډول د متمرکزو بارونو مستقیم پلی کیدل مخنیوی کیږي. د دې ډول بارونو لپاره د بیم په سطحه د بیرینګ تختی (bearing plates) کارول کیږی ترڅو بارپه مساوی ډول د بیم په سطحه خپور کړي، او په دی توګه د s_y ستریس نور هم کموي.

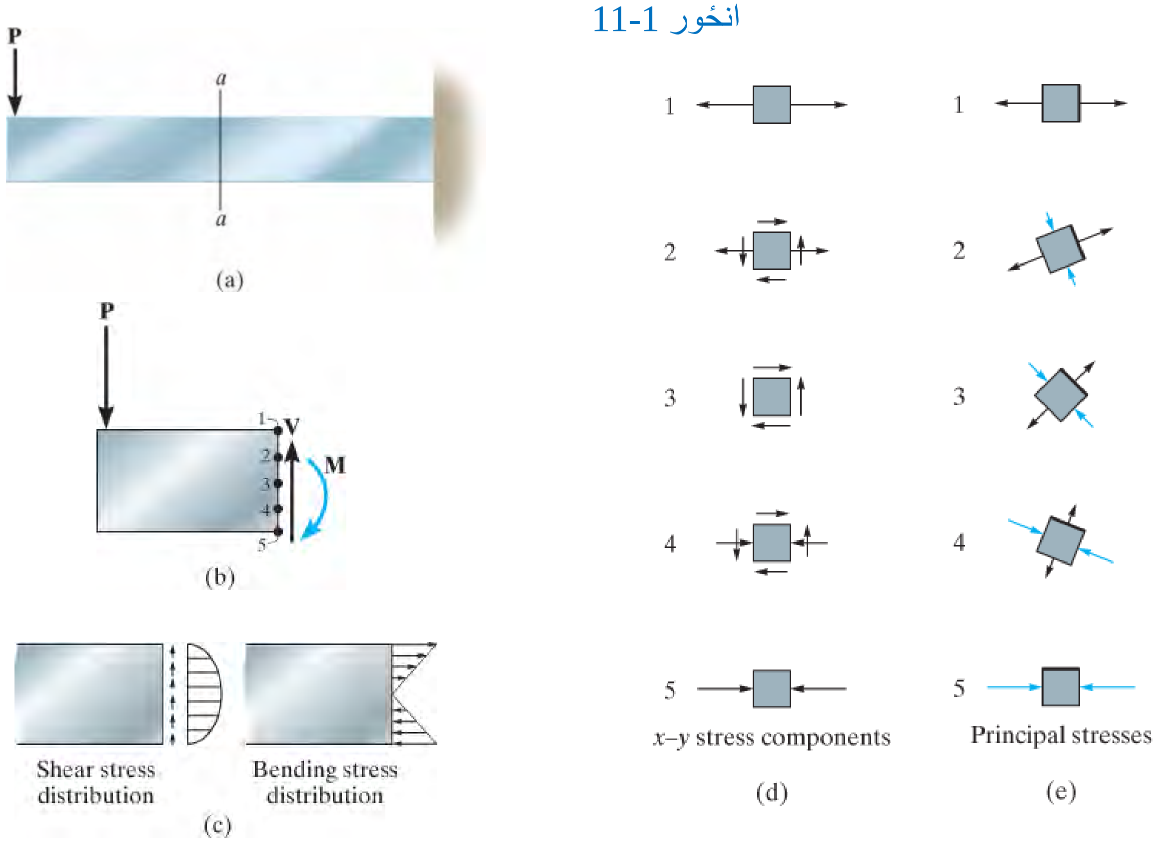
بیمونه هم باید په سمه توګه د خپلو اړخونو په اوږدو مهار بندي (brace) شي ترڅو دوی اړخونو خواته حرکت ونکړي یا ناڅاپه بې ثباته نه شي. په ځینو حالتوکې دوی باید هم د خوا بیځایه کیدنی مقاومت لپاره ډیزاین شي ، لکه هغه بیمونه چې د سختو موادو لکه د چت پلستر ملاتړ کوي. د بیم د بیځایه کیدني موندلو میتودونه په 12 څپرکي کښی به بحث وشي، او یو لړ محدودیتونه د بیم په اړخی خوځیدلو (sidesway) لپاره ډیری وختونه د ساختماني یا میخانیکي ډیزاین پورې اړوند کوډونو کې بحث کیږي.

د اصلي ستریس په شدت او سمت په بدلیدوپوهیدل، د بیم دننه له یوه نقطې څخه بلی نقطی ته خورا مهم دی، د بیلګی په توګه که چیرې بیم له ماتیدونکیو موادو لکه کانکریت څخه جوړ شوی وی، ځکه چې دا مواد په کشش کی ماتیږی. د دې توپیر د ټاکلو څرنګوالي په اړه نظر ورکولو لپاره، یوه کانټیلیور بیم چې په انځور 11-2 کی ښودل شوي په پام کې ونیسئ، کوم چې یوه مستطیلی غوڅه برخه لري او په پای کې یوبار P وربانډی پلي شوي.

په عموم کې، په یو خپل سري برخه $a–a$ د بیم کې، انځور 11-2b، داخلي شیر **V** او مؤمنت **M** پارابولیک شییر ستریس ویش او خطي نارمل ستریس ویش رامینځته کوي، انځور 11-2c. د پایلې په توګه، ستریسونه د برخې په اوږدو کې د 1 څخه تر 5 نقطو پورې په موقعیت لرونکي عناصرو باندې عمل کوي په انځور 11-2d کې ښودل شوي. په یاد ولرئ چې عناصر 1 او 5 یوازې د اعظمي نارمل ستریس، پداسې حال کې چې عنصر 3، کوم چې په صفري محور کې دی یوازې د اعظمي شییرستریس په سطحه سره مخ کیږي. منځمهاله عناصر 2 او 4 باید دواړه د نارمل او شییرستریس سره مقاومت وکړي .

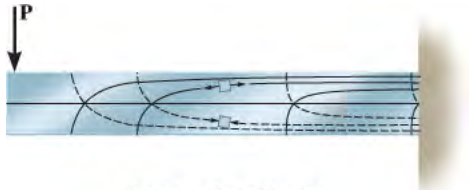


انځور 11-1



انځور 11-2

کله چې د سټریس دا حالتونه، د سټریس د بدلون مساواتو معادلو یا د موهر دایرې په کارولو سره په اصلي سټریسونو بدل شي، پایلې به یې په څیر د هغه وي کوم چې په انځور 11-2e کې ښودل شوي. که دا تحلیل د بیم په اوږدو کې ډیرې عمودي برخو ته، پرته له a–a ، وغځول شي د پایلې پروفایل د منحنې لخوا ښودل کیدی شي، او هغه د سټریس ټراجیکټریز (trajectories) په نوم یادیږي. د دې منحنې هره کرښه د اصلي سټریس سمت چې ثابت شدت لري په ګوته کوي. د دغو سټریس ټراجیکټرۍ څخه ځینې په انځور 11-3 کې ښودل شوي. دلته جامد (solid) کرښې د کششي اصلي سټریسونو د سمت استازیتوب کوي ، او تورې شوې کرښې د کمپرشن اصلي سټریسونو سمت استازیتوب کوي. لکه څنګه چې تمه کیده، کرښې په 45^0 درجې زاویه کې صفرې کرښه محور قطع کوي (لکه عنصر 3)، او جامد او تورې شوې کرښې په 90^0 درجوکې سره قطع کیږي ځکه چې اصلي سټریسونه تل له یو بل څخه په 90^0 درجوکې وي. یوځل چې ددې د لارښوونو کرښې تاسیس شي، دا کولئ شي د انجینرانو سره مرسته او پریکړه وکړي چې چیرته او څنګه د فولادو سیخونه په بیم کې چې له ماتیدونکیو موادو لکه کانکریټ جوړ شوی وي ځای په ځای کړي تر څو بیم ماته نشي .



Stress trajectories for cantilevered beam

انځور 11-3

11.2 د پریزماتیک بیم ډیزاین (PRISMATIC BEAM DESIGN)

ډیرې بیمونه د نرمو موادو څخه جوړ شوي، او کله چې دا قضیه وي دا عموما اړین ندي چې د بیم لپاره د سټریس ټراجیکټرۍ پلاټ کړو. پرځای یې، دا اړین دي چې ډاډ ترلاسه کړئ په بیم کې د کږیدو او شییر سټریس حد د منلو وړ حدونو څخه، چې په جوړښتونو او میخانیکې کودونوکې تعریف شوی، زیات نه وی. په ډیرو حالتو کې د بیم اوږدوالئ نسبتا اوږد وي، نو د ننه داخلي مؤمنت به لوی وي. کله چې دا حالت وي، ډیزاین به بیا دی مؤمنت پر بنسټ وی، او وروسته به د شییر قواوی چک کیږي.

د مؤمنت ډیزاین د بیم برخې ماجولس (Section modulus = S) ټاکلو ته اړتیا لري، دا یو هندسی خاصیت دی چی د I او c تناسب دی، $S = I/c$. د د کړیدو فورمول په کارولوسره، $S = Mc/I$، موږ لرو:

$$S_{req'd} = \frac{M_{max}}{\sigma_{allow}} \qquad (11\text{–}1)$$

دلته M_{max} د بیم له مؤمنت ډیاګرام څخه ټاکل کیږي، او د منلو وړ کړیدونکي ستریس، σ_{allow} په ډیزاین کوډ کې مشخص شوی. په ډیرو حالتو کې د بیم لا تر اوسه نامعلوم وزن کوچنی وي، او کیدای شي چی په پرتله د بهرنې بارونو کوم چی پر بیم پلی شوي په پام کې ونه نیول شي. که چیری هغه اضافي مؤمنت چی د وزن له امله رامینځته کیږي باید په ډیزاین کې شامل شي، د S انتخاب داسې وشي چې د برخې اړین ماجولس یوڅه له $S_{req'd}$ څخه ډیرو ټاکل شي.

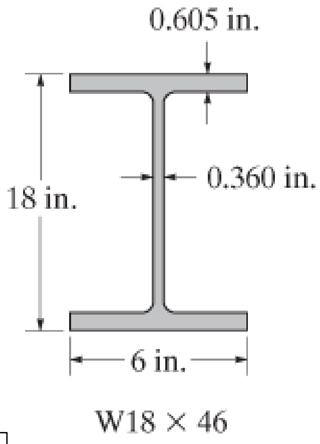
یوځل چې $S_{req'd}$ وپیژندل شي، که بیم ساده غوڅه برخه ولري، لکه یو مربع، یوه دایره، یا یو مستطیل بیا د پیژندل شوي عرض - لوړوالی تناسب څخه، د هغې ***ابعاد*** په مستقیم ډول د $S_{req'd}$ څخه ټاکل کیدی شي، ځکه چی $S_{req'd} = I/c$. په هرصورت، که غوڅه برخه له څو ټوټو څخه جوړه شوې وي، لکه سورور فلنج برخه، بیا د ویب او فلانج لپاره لامحدود شمیر ابعاد ټاکل کیدی شي چې د $S_{req'd}$ ارزښت پوره کړي. په عمل کې، انجنیران د اړتیا سره سم یو ځانګړی بیم داسي غوره کوي چې $S > S_{req'd}$ له جدول څخه، چې د معیاري منلشوی اندازې له جوړونکي څخه شتون لري، اخستل کیږی. ډیری وختونه ډیری بیمونه چې ورته برخې ماجولس لري انتخاب کیدی شي، او که چیرې د دیفلکشن محدودیت نه وي، معمولا د بیم تر ټولو کوچنی غوڅه برخه ساحه غوره کیږی، ځکه چې دا له لږ موادو څخه جوړ شوی ده، او له همدې امله له نورو سپکه او ډیره اقتصادي ده .

د دوو پوړ بیمونه د AB بیم سره وصل دي ، کوم چې د دی ودانی بارونه د چوکات پایو (کالمو) ته لیږدوی. د ډیزاین لپاره، ټول بندیدونکي د پنونو په توګه په پام کې نیول کیدی شي .

یوځل چې بیم غوره شي ، نو بیا د شییر فورمول کارول کیدی شي، د دې لپاره چې ډاډ ترلاسه شي چې د منلو وړ شییر سټریس له حد څخه زیات شویدي که نه، $t_{allow} >= VQ/It$. ډیری وختونه دا اړتیا ستونزه نه وړاندې کوي، که چیرې بیم "لنډ" وی او لوی متمرکز بارونه ورباندی پلي شوي وي، د شییرسټریس محدودیت ممکن د بیم اندازه وټاکی.

فولادو برخې (Steel Sections). ډیری تولید شوي فولاد بیمونه د فولادو یوه ګرمه ټوټې تر هغه وخته پورې رغړوی (rolling) تر څو د فولادو برخی مطلوب شکل تری جوړ شي. دا په نامه **رغړیدل شوي شکلونه** (rolling shape) ځانګړتیاوې لري چې د امریکا د فولادو جوړونې انسټیټیوټ ((American Institute of Steel Construction (AISC)) له خوا په جدولوکې ښودل شوي . د دې جدولو څخه اخیستل شوي د مختلفو غوڅو برخونمونی په یوه لیست کی په ضمیمه B ددی کتاب کې ښودل شوی. دلته د سورورې فلینج شکلونه ټاکل شوي، د دوی ژوروالی او وزن د هر واحد اوږدوالی سره؛ د مثال په توګه، W18 X 46 ښیې چې یوه سورورې فلینج (W)غوڅه برخه چې 18 انچه ژوروالی او 46 lb/ft وزن لري ، انځور 4-11 . د هر ټاکل شوي انتخاب لپاره، د هر اوږدوالی وزن، ابعاد، غوڅه برخه ساحه، د انرشیايي مؤمنت ، او د برخې ماجولس راپور شوي دي. همدارنګه د جایریشن شعاع r (radius of gyration) هم شامله ده، کوم چې جیومیټریک خاصیت دی چې د برخې د بکلینک (buckling) مقاومت درلودلو پورې اړه لري. دا به په 13 څپرکي کې بحث وشي.

د فولادو نمونوي پروفایل لید د فولادو د سورورې فلنج بیم

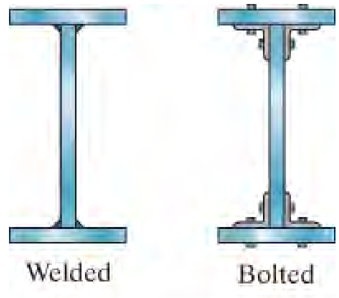


هغه لوی شییر قوه چې په اتکا کې واقع کیږي د بیم د فلنج او یا ویب د کمان کیدلو (buckling) لامل کیدی شي. د دې کار د مخنیوي لپاره، یو "سختونکی A " (stiffener) د ویب په امتداد کینبودل شوي تر څو د ویب ثبات وساتل شي.

انځور 4-11

لرګیو برخې (Wood Sections).

ډیری بیمونه چې له لرګیو څخه جوړ شوي مستطیلي غوځه برخه لري ځکه چې دا ډول بیمونه تولید او اداره کول یې اسانه دي. لاربښودونه (manuals)، لکه د ځنګل د محصولاتو ملي اتحادیه (National Forest Products Association)، د لرګیو ابعاد اکثراً چې د لرګیو بیمونو په ډیزاین کې کارول کیږي لیست کوي . لرګی دلته د ابعادو په واسطه پیژندل شوی، لکه 2 X 4 (2in. په 4 in.). په هرصورت، د هغې اصلي یا "پوښل شوي" ابعاد یې کوچني دي، 1.5 انچ په 3.5 انچه. د ابعادو کمښت د دې لپاره واقع کیږي چې د لرګیو اره شوي سطحې څخه یوه ښویه او صافه سطحه ترلاسه کړي . په ښکاره ډول، *اصلي ابعاد* باید وکارول شي کله چې د ستریس محاسبه د لرګیو بیمونولپاره ترسره کیږي.



Steel plate girders

انځور 5 -11

جوړی شوي برخې (Built-up Sections).

یوه جوړه شوې برخه کله چې دوه یا زیاتره ټوټې سره یوځای شي ترڅو یوه واحده برخه جوړ کړي. د جوړه شوي برخې وړتیا دمؤمنت مقاومت لپاره مستقیم د دې برخې د ماجولس سره توپیر لري ، ځکه چې $S_{req'd} = M/s_{allow}$ که $S_{req'd}$ زیات شي، نو I (انرشیایي مؤمنت)هم د تعریف له مخې $S_{req'd} = I/c$. د دې لپاره، د جوړ شوي برخې لپاره ډیری مواد باید د صفری محور څخه د عملی په توګه لیری کینبودل شي. دا، البته، هغه څه دي چې یو ژور سوروړفلینج بیم مقاومت د مؤمنت لپاره دا ډول برخه خورا اغیزمنه کوي. د خورا لوی بار لپاره ، د رغړول شوي فولادو برخه ممکن د بار وړولو لپاره د برخې ماجولس دومره لوي نه وي. تر څو هغه لوی بار تحمل کړي. کله چې دا حالت راشي، انجنیران به معمولا له تختو او زاویوڅخه جوړ شوي بیم "جوړ کړي". یوه ژوره I شکل جوړه شوی برخه چې دا شکل لري د پلیټ ګاډر (plate girder) په نوم یادیږي. د مثال په توګه، په انځور 5-11 کې د فولادو پلیټ ګرډر (plate girder)

Wooden box beam

(a)

دوه فلینج تختې لري چې یا ویلډیډ شوي وي یا د زاویو په کارولو چې د ویب پلیټ سره بولټ شوي وی.

د لرګیو بیمونه هم "جوړ شوي" دي، معمولا د باکس بیم په بڼه، انځور 11-6a . دوی ممکن له څو پټه تختو (plywood) ویب او لویو تختو څخه فلنج جوړ کړي . د ډیری لوی واټن (span) لپاره، ګلولم بیم (glulam beam) کارول کیږي. دا غړي د څو تختو څخه جوړ شوي دي چې د سریښ - لامینټ شوي (glue-laminated) دي او یو واحد بیم جوړه وي، انځور 11-6b .

لکه څنګه چې د رغړول شوي برخو یا بیمونو په صورت کې چې له یوې ټوټې څخه جوړ شوي وي، د جوړو شویو برخو ډیزاین ته اړتیا ده چې کږیدونکی او شییر ستریسونه باید وڅیړل شي . برسېره پردې، په بندونو کې، لکه ویلډ، سریښ، میخونه، او داسي نورو د شییر ستریس باید وڅیړل شي، ترڅو ډاډ ترلاسه شي چې بیم د یو واحد په توګه عمل کړي.

انځور 6 -11

مهم ټکي

(IMPORTANT POINTS)

- بیم هغه غړي دی چې د هغو بارونو کوم چې په محوريي عمود پلی شوی ملاتړکوي. که بیمونه د توانایي پر بنسټ ډیزاین شوي وي، دوی باید د منلو وړ شییر او کوږوالي ستریسونو سره مقاومت وکړي.

- په بیم کې تر ټولو زیات د کوږوالي ستریس دی او داسي انګیرل کیږي چې هغه د محلي ستریسونوپه پرتله، کوم چې د بهرنی بارونو له امله د بیم په سطحه رامینځ ته کیږي ، خورا لوی دی.

د تحلیل کړنلاره

PROCEDURE FOR ANALYSIS

د پخوانیو بحثونو پر بنسټ، لاندې کړنلاره د بیم ډیزاین لپاره، د قوت پر بنسټ، منطقي طریقه وړاندې کوي.

د شییر او مؤمنت ډیاګرامونه (Shear and Moment Diagrams).

- په بیم کې اعظمي شییر اومؤمنت په دقیقه توګه مشخص کړئ. ډیرې وختونه دا کارد بیم د شییر او مؤمنت ډیاګرامونو جوړولو په مرسته ترسره کیږي.

د کوږوالي سټریس (Bending Stress).

- که بیم نسبتا اوږده وي، دا د کوږوالي (flexure) فورمول په کارولو سره د هغې د غوڅې برخې ماجولس موندلو سره ډیزاین کیږي، $S_{req/d} = M_{max}/s_{allow}$
- یوځل چې $S_{req/d}$ وټاکل شي، د ساده شکلونو لپاره د غوڅې برخې ابعاد محاسبه کیدی شي، ځکه چې $S_{req/d} = I/c$
- که چیرې رغړول شوي فولادې برخې وکارول شي، ممکنه بیمونه له جدول B څخه، ضمیمه ددې کتاب، غوره کیدی شي، ترڅو هغه اړتیا پوره کړي چې $S >= S_{req'd}$. له دې څخه، هغه غوره کړئ چې ترټولو کوچنۍ غوڅې برخې ساحه ولري، ځکه چې دا بیم لږ تر نورو لږه وزن لري او له همدې امله خورا اقتصادي تمامیږي.
- داډ ترلاسه کړئ چې د ټاکل شوې برخې ماجولس، S، له $S_{req'd}$ څخه لږ څه لوی وی، ځکه اضافي مؤمنت چې د بیم د وزن لخوا رامینځته کیږي په پام کې ونیول شي.

شییر سټریس (Shear Stress).

- عموما هغه بیمونه چې لنډې وي او لوی بارونه لیږدوي، په ځانګړې توګه د لرګیو جوړ شوي بیم، لومړی د شییر مقاومت کولو لپاره ډیزاین شي، او بیا وروسته د منلو وړ د کوږوالي اړتیا په مقابل کې چک شوي.

- د شیر فورمول په کارولو سره، وګورئ چې د منلو وړ شییر ستریس زیات شوی نه وي؛ یعني د $V_{max}Q/It$ =< t_{allow} څخه کاروانحلی .
- که چیری بیم یوه جامده مستطیلی غوځه برخه ولري، د شییر فورمول 1.5 =< t_{allow} (V_{max}/A)کیږي (2 معادله په 7.2 مثال کی وګورئ) ، او که غوځه برخه سورروره فلنج وي، نو دا په عمومی توګه مناسبه ده چې فرض کړئ د شییر ستریس د بیم د ویب د غوځې برخې په اوږدو کې ثابت دی ترڅو د V_{max}/A_{web} => t_{allow} شي، چیرې چې A_{web} د ویب د ژوروالي او پنډوالی له ضربیدو څخه تاکل کیږي. (د 7.3 مثال په پای کې اشاره وګورئ)

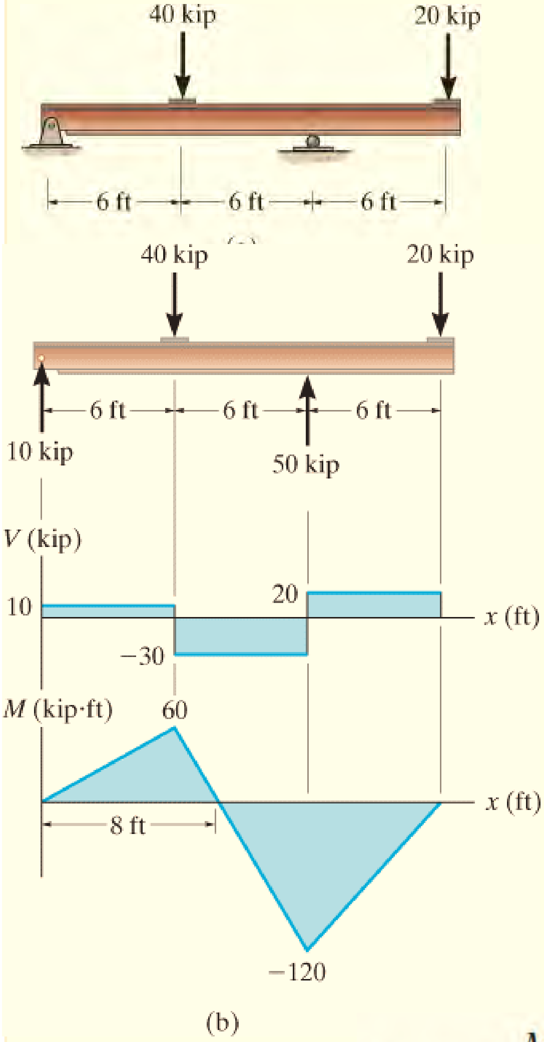
- **د بندونکیو داندازی بستوب (Adequacy of Fasteners).**

- په جوړو شویو بیمونو کې د بندیدونکیود استعمال شوي کافي اندازه د شییر ستریس پورې اړه لري، چې بندونکي مقاومت کولی شي که نه. په ځانګړې توګه، د یو ځانګړې اندازې د میخونو یا بولټونو اړین فاصله د منل شوی شییر جریان $q_{allow} = VQ/I$ څخه ټاکل کیږي، او دا محاسبه په هغه ځای د غوځې برخې کیږی کوم چې هلته بندیدونکي اینودل کیږی. (7.3 برخه وګورئ.)

مثالونه

مثال 11.1

له فولادو جوړ شوی بیم د کوږوالي د منلو وړسټریس یی $s_{allow} = 24$ ksi او د منلو وړ د شییر سټریس یي $t_{allow} = 14.5$ ksi دی . یو مناسب W شکل داسی انتخاب کړي تر څو په انځور 11-7a کی د ښودل شوي بارونو ملا تړ وکړي.



انځور 7 -11

حل (SOLUTION)

د شییر او مؤمنت ډایګرامونه (Shear and Moment Diagrams)

د اتکاوو ریکشنونه او د شییر او مؤمنت ډایګرامونه په انځور 11-7b کی ښودل شوي. له دی ډایګرامونو موږ لرو

$M_{max} = 120$ kip. ft او $V_{max} = 30$ kips

د کږیدو سټریس (Bending Stress)

د اړین برخی ماجولس د بیم لپاره د کوږوالي له فورمول په لاس راځي

$$S_{req'd} = \frac{M_{max}}{\sigma_{allow}} = \frac{120 \text{ kip} \cdot \text{ft } (12 \text{ in./ft})}{24 \text{ kip/in}^2} = 60 \text{ in}^3$$

د B ضمیمي له جدولونو کار اخلو او وینو چی دا لاندی شکلونه کافي دي:

W18 × 40	$S = 68.4\ \text{in}^3$
W16 × 45	$S = 72.7\ \text{in}^3$
W14 × 43	$S = 62.7\ \text{in}^3$
W12 × 50	$S = 64.7\ \text{in}^3$
W10 × 54	$S = 60.0\ \text{in}^3$
W8 × 67	$S = 60.4\ \text{in}^3$

هغه بیم چی په هر فوټ کی لږ تر لږه وزن لری غوره کیږي، د بیلګي په توګه*

W18 x 40

شییر ستریس (Shear stress)

څرنګه چی بیم سورروره فلنج ده، نو له همدی امله شییر ستریس په ویب کی به په پام کی ونیول کیږی، (7.3 مثال وګوري). دلته انګیرل داسي کیږي چي ویب له خورا پورتنی برخی څخه تر ښکتنی لاندی حصی پوری غزیدلي ده. له ضمیمی B څخه د W18 X 40 لپاره :

d $t_w = 0.315$ in =17.90 in. , پدی توګه :

$$\tau_{avg} = \frac{V_{max}}{A_w} = \frac{30\ \text{kip}}{(17.90\ \text{in.})(0.315\ \text{in.})} = 5.32\ \text{ksi} < 14.5\ \text{ksi} \quad \text{OK}$$

کار واخلي له

Use a W18 × 40. *Ans.*

* اضافي مؤمنت د بیم د وزن له امله عبارت دی په (0.040 kip/ft) (18 ft) = 0.720-kip دا به د $S_{req'd.}$ غوښتنه خورا لږ زیاتوالي وومومي.

مثال 11.2

د لرګیو د څو پیتو (laminated) بیم په انځور 11-8a کی ښودل شوي، او مساوی ویشل شوی بار د 12 kN/m ورباندی پلی شوي. که چیری د دی بیم د لوړوالی او د سورسره نسبت 1.5 وي، کوچني سور یي و ټاکي. د بیم وزن په پام کی مه نیسي.

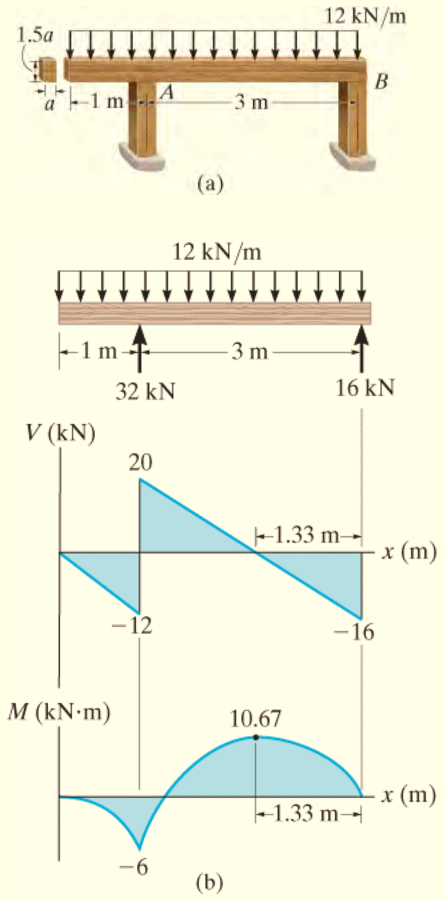
له $\tau_{allow} = 0.6$ MPa او $\sigma_{allow} = 9$ MPa کار واخلي

(SOLUTION) حل

(Shear and Moment Diagrams) د شییر او مؤمنت ډایګرامونه

د اتکاوو ریکشنونه په A او B کی محاسبه شوی، او د شییر او مؤمنت ډایګرامونه په انځور 11-8b کی ښودل شوي. له دی ډایګرامونو موږ لرو

$M_{max} = 10.67$ kN.m او $V_{max} = 20$ kN



انځور 8 -11

(Bending Stress) د کږیدو سټریس

د کوږوالي له فورمول څخه کار اخلو

$$S_{req'd} = \frac{M_{max}}{\sigma_{allow}} = \frac{10.67(10^3)\ \text{N}\cdot\text{m}}{9(10^6)\ \text{N/m}^2} = 0.00119\ \text{m}^3$$

فرض کوو چی سور دبیم a دی، نو بیا لوړوالي 1.5a کیږي، انځور 11-8a . په دی توګه،

$$S_{req'd} = \frac{I}{c} = 0.00119\ \text{m}^3 = \frac{\frac{1}{12}(a)(1.5a)^3}{(0.75a)}$$

$$a^3 = 0.003160\ \text{m}^3$$

$$a = 0.147\ \text{m}$$

(Shear stress) شییر سټریس

د مستطیلی برخی لپاره د شییر فورمول څخه کاراخلو (دا ځانګړی قضیه د $t_{max} = VQ/It$ ، لکه څنګه چی په مثال 7.2 کی ښودل شوي). موږ لرو

$$\tau_{max} = 1.5\frac{V_{max}}{A} = (1.5)\frac{20(10^3)\ \text{N}}{(0.147\ \text{m})(1.5)(0.147\ \text{m})}$$

$$= 0.929\ \text{MPa} > 0.6\ \text{MPa}$$

څرنګه چې د کوږوالی پر بنسټ ډیزاین د شییر قضي د ناکامي لامل شو ، نو بیم باید د شییر قضیي پر بنسټ ډیزاین شي.

$$\tau_{allow} = 1.5\frac{V_{max}}{A}$$

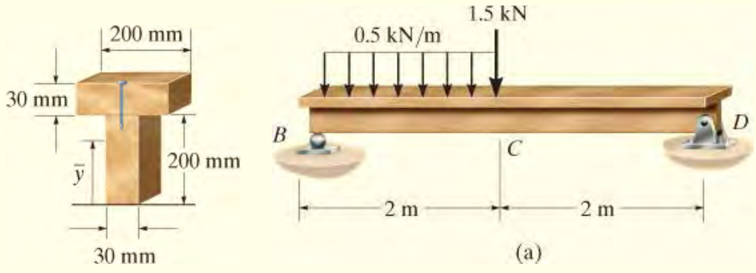
$$600 \text{ kN/m}^2 = 1.5\frac{20(10^3)\text{ N}}{(a)(1.5a)}$$

$$a = 0.183 \text{ m} = 183 \text{ mm} \qquad \textit{Ans.}$$

دا لوي برخه به هم په مناسبه توګه د کږېدونکی ستریس مقاومت ولري.

مثال 11.3

د لرګیو بیم چې په انځور 11-9a کی ښودل شوي له دو تختو 200 mm x 30 mm جوړ شوي. که چیرې s_{allow} = 12 MPa او t_{allow} = 0.8 MPa وی، معلوم کړي چې بیم په خوندی ډول د ښودل شوي بار ملاتړ کولای شي؟ همدا رنګه د میخونو تر مینځ اړین فاصله مشخص کړي، د دو تختو یو ځاي ساتلو لپاره، که چیرې هر یو میخ د 1.50 kN په خوندي ډول د شییر لپاره مقاومت ولري.



انځور 9 -11

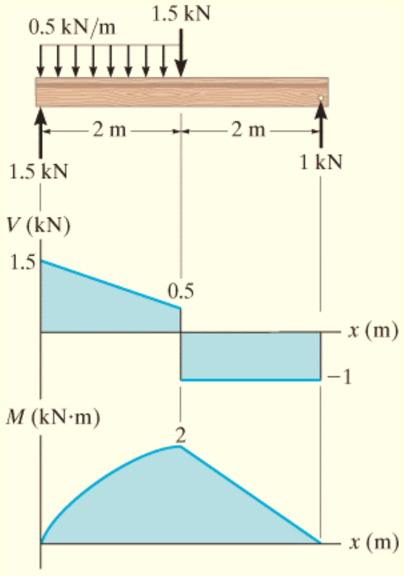
د شییر او مؤمنت ډایګرامونه (Shear and Moment Diagrams)

د اتکاو ریکشنونه ښودل شوي، او د شییر او مؤمنت ډایګرامونه په انځور 11-9b کی ښودل شوي. له دی ډایګرامونو موږ لرو

V_{max} = 2 kN.m او M_{max} = 1.5 kN.m.

د کږیدو ستریس (Bending Stress)

صفری محور (مرکز ثقل) د بیم له ښکته خوا اندازه کیږي. د متر له واحده به کار واخلو، موږ لرو



(b)

$$\bar{y} = \frac{\Sigma \tilde{y} A}{\Sigma A}$$

$$= \frac{(0.1\text{ m})(0.03\text{ m})(0.2\text{ m}) + 0.215\text{ m}(0.03\text{ m})(0.2\text{ m})}{0.03\text{ m}(0.2\text{ m}) + 0.03\text{ m}(0.2\text{ m})} = 0.1575\text{ m}$$

په دی توګه

انځور (تکرار) -11

$$I = \left[\frac{1}{12}(0.03\text{ m})(0.2\text{ m})^3 + (0.03\text{ m})(0.2\text{ m})(0.1575\text{ m} - 0.1\text{ m})^2\right]$$

$$+ \left[\frac{1}{12}(0.2\text{ m})(0.03\text{ m})^3 + (0.03\text{ m})(0.2\text{ m})(0.215\text{ m} - 0.1575\text{ m})^2\right]$$

$$= 60.125(10^{-6})\text{ m}^4$$

خرنګه چی

$$c = 0.1575\text{ m (not } 0.230\text{ m} - 0.1575\text{ m} = 0.0725\text{ m)}$$

موږ اړتیا لرو

$$\sigma_{allow} \geq \frac{M_{max} c}{I}$$

$$12(10^6)\text{ Pa} \geq \frac{2(10^3)\text{ N}\cdot\text{m}(0.1575\text{ m})}{60.125(10^{-6})\text{ m}^4} = 5.24(10^6)\text{ Pa} \qquad \text{OK}$$

شيير ستریس (Shear stress)

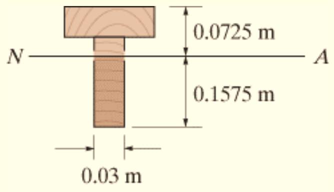
په بيم کی اعظمی شيير ستريس د Q او t په اندازه پوری اړه لري. او دا په صفري محور واقع کيږي، ځکه چی د Q ارزښت هلته اعظمی او ضخامت t = 0.03m تر ټولو کوچني دي. د آساني لپاره موږ به د مستطيل ساحه د صفری محور لاندی د Q محاسبه کولو لپاره و کاره وو، پر ځای د دوو برخو، کمپازيت ساحی، پورته د محورنه ، انځور 11-9c . موږ لرو

$$Q = \bar{y}'A' = \left(\frac{0.1575\text{ m}}{2}\right)[(0.1575\text{ m})(0.03\text{ m})] = 0.372(10^{-3})\text{ m}^3$$

نو داسي

$$\tau_{\text{allow}} \geq \frac{V_{\max}Q}{It}$$

$$800(10^3)\text{ Pa} \geq \frac{1.5(10^3)\text{ N}[0.372(10^{-3})]\text{ m}^3}{60.125(10^{-6})\text{ m}^4(0.03\text{ m})} = 309(10^3)\text{ Pa} \qquad \text{OK}$$



(c)

انځور (ادامه)9 -11

د ميخونو فاصله (Nail Spacing).

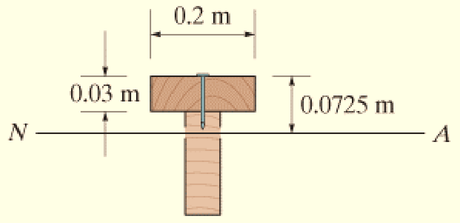
د شيير ډايګرام څخه داسي معلوميږي چی شيير په ټول اوږدوالي دبيم کی توپير لري. څنګه چی ميخونو فاصله په مقدار د شيير پوری اړه لري، د آسانی او (او محافظه کاری لپاره) موږ به ډيزاين د فاصلی په $V = 1.5$ kN د سيمی BC او $V = 1$ kN د سيمی CD لپاره و ټاکو. ځکه چی ميخونه فلنج د ويب سره نښلوي، انځور 11-9d ، موږ لرو

$$Q = \bar{y}'A' = (0.0725\text{ m} - 0.015\text{ m})[(0.2\text{ m})(0.03\text{ m})] = 0.345(10^{-3})\text{ m}^3$$

د شيير جريان په هره سيمه کی عبارت دی په

$$q_{BC} = \frac{V_{BC}Q}{I} = \frac{1.5(10^3)\text{ N}[0.345(10^{-3})\text{ m}^3]}{60.125(10^{-6})\text{ m}^4} = 8.61\text{ kN/m}$$

$$q_{CD} = \frac{V_{CD}Q}{I} = \frac{1(10^3)\text{ N}[0.345(10^{-3})\text{ m}^3]}{60.125(10^{-6})\text{ m}^4} = 5.74\text{ kN/m}$$



(d)

یو میخ کولای شي مقاومت د 1.5 kN شییر وکړي، بیا اعظمی فاصله کیږي

$$s_{BC} = \frac{1.50\text{ kN}}{8.61\text{ kN/m}} = 0.174\text{ m}$$

$$s_{CD} = \frac{1.50\text{ kN}}{5.74\text{ kN/m}} = 0.261\text{ m}$$

د اندازه کولو آسانی لپاره کار واخلی له

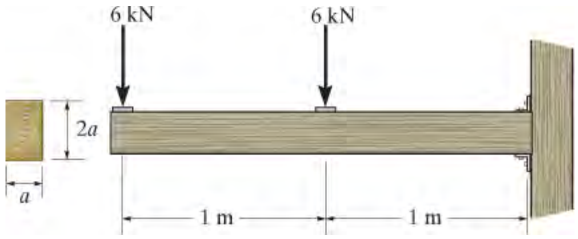
$s_{BC} = 150$ mm *Ans.*

$s_{CD} = 250$ mm *Ans.*

بنسټيز پوښتني

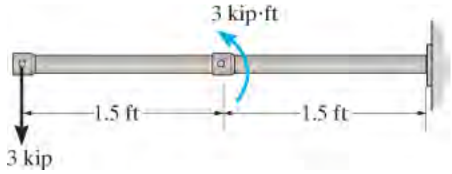
FUNDAMENTAL PROBLEMS

ب 11-1. لږ تر لږه د a اندازه نږدې ملي متر (mm) ته ، د بیم د غوڅې برخې لپاره مشخص کړې تر څو ښودل شوی بهرنی بار په خوندی توګه و لیږدوي. د لرګیو د منلو وړ نارمل ستریس σ_{allow}=10MPa او د منلو وړ د شییر ستریس τ_{allow} = 1 MPa دي.



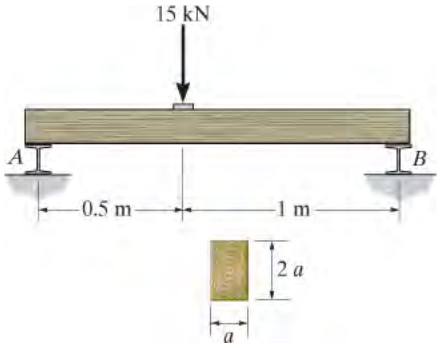
ب 11-1

ب 11-2. لږ تر لږه قطر d نږدې (1/8 in. (inch ته ، د میلې لپاره مشخص کړې تر څو ښودل شوی بهرنی بار په خوندی توګه و لیږدوي. میله له داسې موادوو جوړه شوې چې د منلو وړ نارمل ستریس σ_{allow}=20 ksi او د منلو وړ د شییر ستریس τ_{allow} = 10 ksi دي.



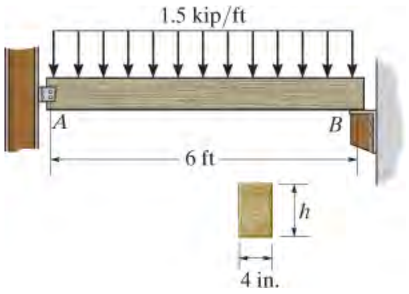
ب 11-2

ب 11-3. لږ تر لږه د a اندازه نږدې ملي متر (mm) ته ، د بیم د غوڅې برخې لپاره مشخص کړې تر څو ښودل شوی بهرنی بار په خوندی توګه یو ورلیشي. د لرګیو د منلو وړنارمل ستریس σ_{allow}=12 MPa او د منلو وړ د شییر ستریس τ_{allow} = 1.5 MPa دي.



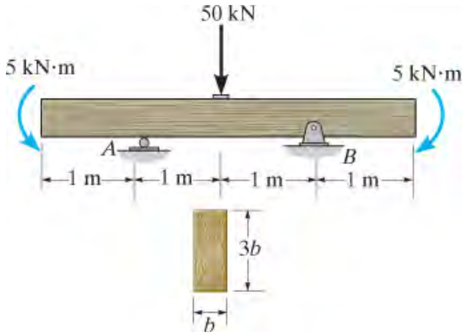
ب 11-3

ب 11-4. لږ تر لږ د h اندازه نيږدی (1/8 in. (inch ته د بيم د غوښی برخی لپاره مشخص کړي تر څو ښودل شوی بهرنی بار په خوندی توګه يو وړليشی. د لرګيو د منلو وړ نارمل ستريس $s_{allow} = 2$ ksi او د منلو وړ د شيير ستريس $t_{allow} = 200$ psi دي.



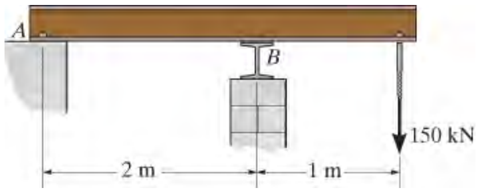
ب 11-4

ب 11-5. لږ تر لږه د b اندازه نيږدی ملي متر (mm) ته ، د بيم د غوښی برخی لپاره مشخص کړي تر څو ښودل شوی بهرنی بارپه خوندی توګه يو وړليشی. د لرګيو د منلو وړنارمل ستريس s_{allow}=12 MPa اود منلو وړد شييرستريس $t_{allow} = 1.5$ MPa دي.



ب 11-5

ب 11-6. د فولادو W انځورانتخاب کړي ، تر څو ښودل شوی بهرنی بار په خوندی توګه يو وړليشي. بيم له فولادو جوړه شوي، د منلو وړ نارمل ستريس يي s_{allow}=150 MPa او د منلو وړ د شيير ستريس $t_{allow} = 75$ MPa دي. فرض کړی چی بيم په اتکا A کی پن شوي، او په اتکا B کی رولردی.

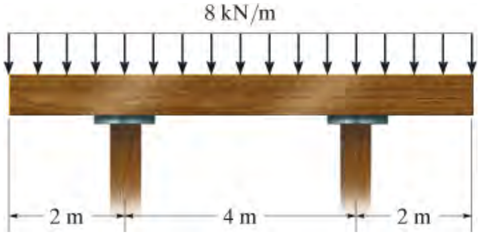


ب 11-6

سوالونه

PROBLEMS

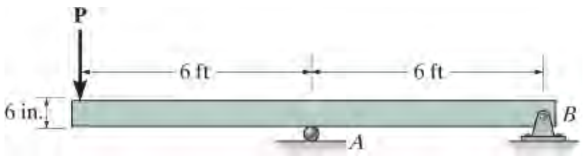
س 11-1. بیم له لرګیو څخه جوړه شوي، د منلو وړ د کوږوالي ستریس يي σ_{allow}=6.5 MPa او د منلو وړ د شییر ستریس τ_{allow} = 500 kPa دي. ابعاد يي داسی معلوم کړي تر څو مستطیلی شکل ولري او دلوړ والي نسبت سورته يي 1.25 وي. فرض کړی چې بیم په ښويه (صافه) سطحه اتکاوي لري.



س 11-1

س .11-2 لږ تر لږ سور د بیم نږدی .1/4 in (inch) ته د بیم لپاره مشخص کړي تر څو ښودل شوی بهرنی بار P =8 kips په خوندی توګه يو وړليشی. د منلو وړ کوږيدونکی ستریس σ_{allow}= 24 ksi او د منلو وړ د شییر ستریس τ_{allow} = 15 ksi دي.

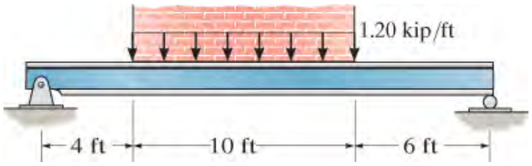
س .11-3 سوال 11-2 د P =10 kip لپاره حل کړي.



س 11-2/3

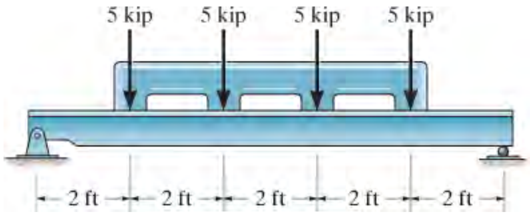
س *11-4. د خښتو يو ديوال مساوی ويشل شوی بار 1.20 kip/ft په بیم باندی جوړه وي.

که د منلو وړ کوږيدونکی ستریس σ_{allow}= 22 ksi او د منلو وړ شییر ستریس τ_{allow} = 12 ksi وي، هغه سپکه د سوروری فلنج برخه چې کوچني ژوروالي ولری له ضمیمي B څخه غوره کړي تر څو پلی شوی بار په خوندی توګه يووړلیشی. که هلته د مساوی وزن انتخاب ډير وی ، هغه يو چې لنډ لوړوالي ولری غوره يي کړي.



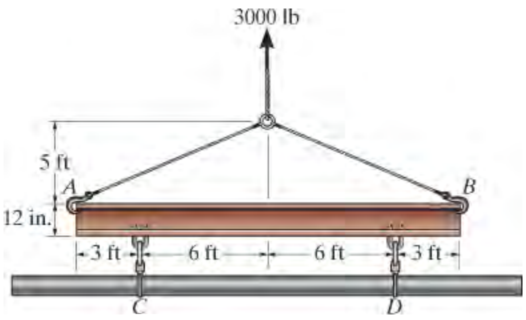
س 11-4

س 11-5. هغه سپکه سورروره فلنج بیم له ضمیمي B څخه غوره کړي تر څو پلی شوی د ماشین بار په خوندی توګه یووړلیشی. د منلو وړ کرېدونکی ستریس s_{allow}= 24 ksi او د منلو وړ شییر ستریس t_{allow} = 14 ksi دي



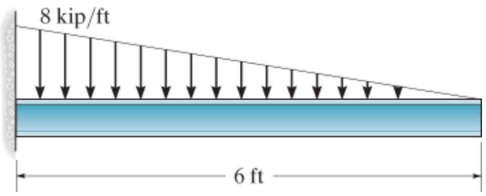
س 11-5

س 11-6. خپورونکي بیم *AB* د 3000-lb پایپ، ورورو پورته کولو لپاره کارول کیږي ، پایپ په مرکزي توګه د په تي په *C* او *D* کی موقعیت لري. که چیری بیم یو W12 X 45 وی، څرګند کړي چی هغه په خوندی توګه دا بار وړلیشی؟ د منلو وړ کرېدونکی ستریس s_{allow}= 22 ksi او د منلو وړ شییر ستریس t_{allow} = 12 ksi دي.



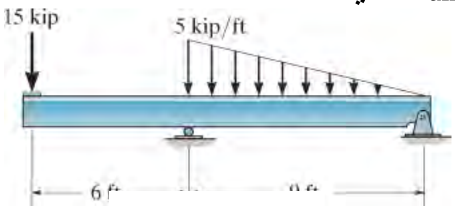
س 11-6

س 11-7. هغه سپکه سورروره فلنج برخه چی کوچني ژوروالي ولری له ضمیمي B یي غوره کړي ترڅو پلی شوی بارپه خوندی توګه یووړلیشی. د منلو وړ کرېدونکی ستریس s_{allow}= 24 ksi او د منلو وړ شییر ستریس t_{allow} = 14 ksi دي



س 11-7

س *11-8. هغه سپکه سورروره فلنج برخه له ضميمي B څخه غوره کړي تر څو پلی شوی بار په خوندی توګه یو وړلیشی. د منلو وړ کوږیدونکی ستریس s_{allow}= 24 ksi اود منلووړشییرستریس t_{allow} = 14 ksi دي

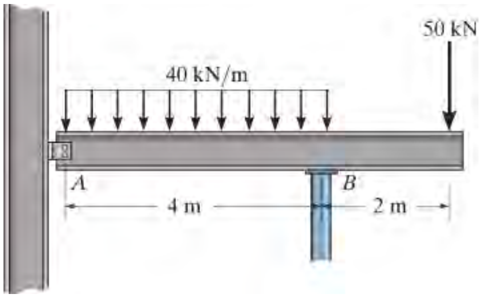


س 11-8

س **11-9.** هغه سپکه سورروره فلنج W360 بیم له ضمیمي B څخه غوره کړي تر څو پلی شوی بار په خوندی توګه یووړلیشی. د منلو وړ کږیدونکی ستریس د بیم s_{allow}= 150 MPa او د منلو وړ شییر ستریس t_{allow} = 80 Mpa دي. فرض کړی چی بیم په اتکا *A* کی پن شوي، او په اتکا *B* کی رولر دی.

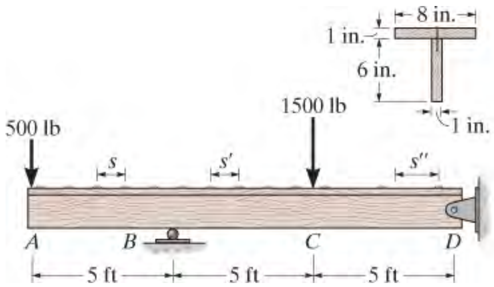
س 11-10. څیرنه وکړي چی W250 X 58 بیم پلی شوی بار په خوندی توګه لیږدولي شي؟

د منلو وړکږیدونکی ستریس د بیم s_{allow}= 150 MPa اود منلووړشییرستریس t_{allow} = 80 Mpa دي. فرض کړی چی بیم په اتکا *A* کی پن شوي، او په اتکا *B* کی رولر دی.



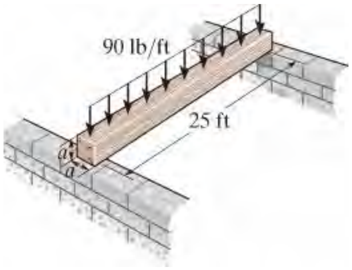
س 11-9/10

س 11-11. دا لاندی بیم له دو تختو جوړ شوي. که هر میخ د 200 lb شیر قوی ملا تړ وکړي، اعظمی فاصله د میخونو *s, s`* او *s``* نږدی 1/8 in. (inch) د سیمی *AB, BC* او *CD* لپاره په ترتیب سره مشخص کړي.



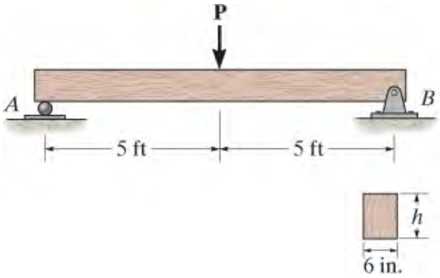
س 11-11

س *11-12. د یو ګدام د فرش جایستونه له مربع بیمونو چې له بلوط لرګی جوړ شوی، کاروی. هر بیم د 90 lb/ft بار لپاره ډیزان شوی او د بیم اوږدوالي 25 ft د ساده اتکا سره په پام کې نیول شوی. د a اندازه د مربع غوڅې برخې، نږدی .¼ in ته و ټاکي. د منلو وړ کږېدونکی سټریس σ_{allow}= 4.5 ksi او د منلو وړ شییر سټریس τ_{allow} = 125 psi دي.



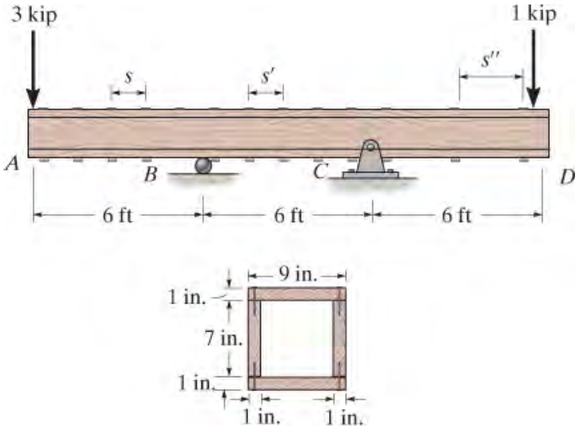
س 11-12

س 11-13. د لرګیو بیم سور .6 in دي. لوړوالي h داسې وټاکی کوم چې په ورته وخت کې د منلو وړ کږېدونکی سټریس σ_{allow}= 1.5 ksi او د منلو وړ شییر سټریس τ_{allow} = 50 psi ته ورسیږي. او همدا رنګه بار P چې بیم کولای شي یووړلی شی معلوم کړي.



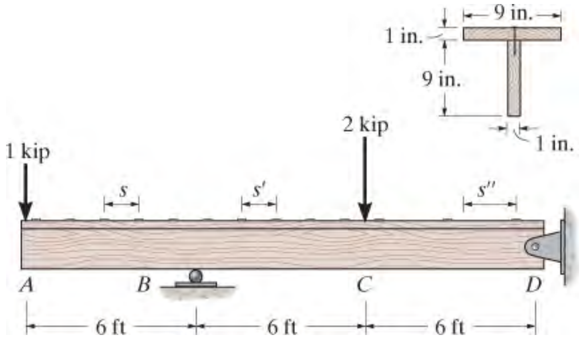
س 11-13

س 11-14. دا لاندې بیم له څلورو تختو جوړه شوي. که هر میخ د 300 lb شیر قوی ملا تړ وکړي، د میخونو اعظمی فاصله s, $s`$ او $s``$ د سیمی د AB, BC او CD لپاره په ترتیب سره مشخص کړي.



س 11-14

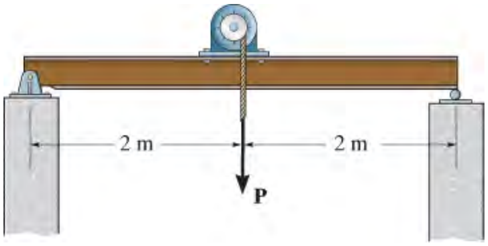
س 11-15. دا لاندی بیم له دو تختو جوړه شوي. که هر میخ د 200 lb شیر قوی ملا تړ وکړي، د میخونو اعظمی فاصله $s, s`$ او $s``$ نږدی .1/8 in (inch) د سیمی AB, BC او CD لپاره په ترتیب سره مشخص کړي.



س 11-15

س *11-16. که چیری په کیبل اعظمی قوه P =50kN پلی شوی وي، د سپک وزن W310 سورروره فلنج بیم چې پلی شوی بار په خوندی توګه ولیږدوي پیدا کړی. د بیم د منلو وړ نارمل ستریس s_{allow}= 150 MPa او د منلو وړ شییرستریس t_{allow} = 85 Mpa دي.

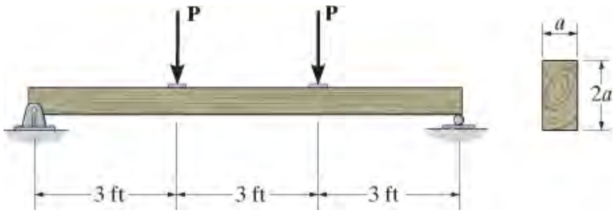
س 11-17. که چیری د W360 X 45 سورروره فلنج بیم د منلو وړ نارمل ستریس s_{allow}= 150 MPa او د منلو وړ شییر ستریس t_{allow} = 85 Mpa وي، په کیبل کی اعظمی قوه P چی په خوندي ډول یی بیم یو وړلیشی وتاکی.



س 11-16/17

س 11-18 . لږ تر لږه a اندازه د بیم د غوڅی برخي نږدی .1/8 in (inch) ته مشخص کړي تر څو بنودل شوی بهرنی بار P =800 lb په خوندی توګه یو وړلی شی. د لرګیو د منلو وړ نارمل ستریس s_{allow}= 1.5 ksi او د منلو وړ د شییر ستریس t_{allow} = 150 psi دي.

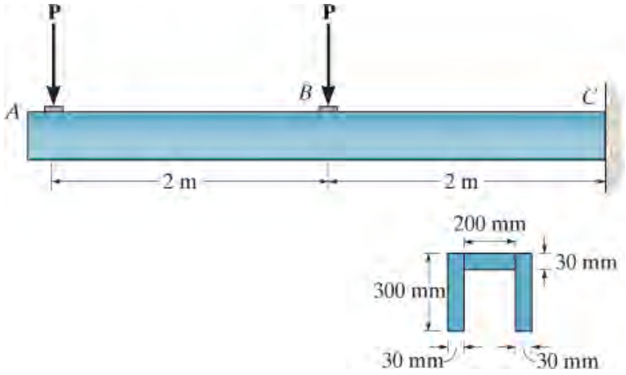
س 11-19 . که a =3 in. د لرګیو د منلو وړ نارمل ستریس s_{allow}= 1.5 ksi او د منلو وړ د شییر ستریس t_{allow} = 150 psi وي، د منلو وړ اعظمی ارزښت د P چې په بیم پلی کدی شي و ټاکئ.



س 11-18/19

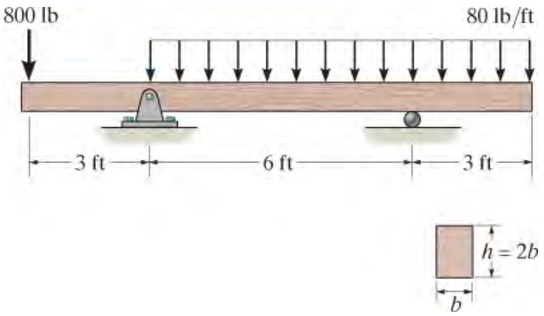
س *11-20 . بیم له دریو پلاستیکی ټوټو جوړ شوي. که چیری د منلو وړه شییر ستریس د سیریښ t_{allow} = 8 kPa وی ، تر ټولو لوي ارزښت د **P** چې بیم یی ورلیشی وټاکي.

س 11-21 . که چیری د منلو وړ کړیدونکي ستریس s_{allow} = 6MPa وی، او سریښ کولای شی چې د t_{allow} = 8 kPa شییر ستریس ملا تړ وکړي، تر ټولو لوي ارزښت د **P** چې بیم یی وړلی شی وټاکي.



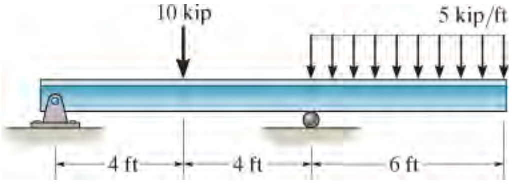
س 11-20/21

س 11-22 . بیم له ډګلاس صنوبر جوړ شوي د منلو وړ کړیدونکي ستریس s_{allow} = 1.1 ksi او د منلو وړ شییر ستریس t_{allow} = 0.70 ksi دی. سور b داسی و ټاکئ کله چې $h = 2b$.



س 11-22

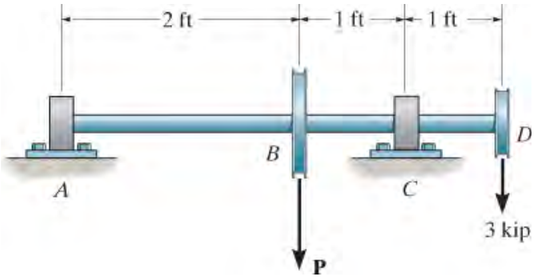
س 11-23 . تر ټولو لږ وزن سورور- فلنج بیم له ضمیمي B غوره کړئ کوم چې په خوندي ډول بنودل شوی بار يو وړلیشی. د منلو وړ کږیدونکي ستریس s_{allow} = 24 ksi او د منلو وړ شییر ستریس t_{allow} = 14 ksi دی.



س 11-23

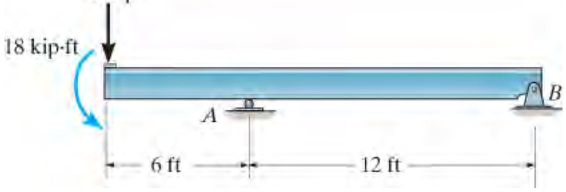
س *11-24 . د شافت شییر او مؤمنت ډایګرامونه جوړ کړي، او اړوند قطرتر نیږدی.1/8 in پوري، کله چې s_{allow} = 30 ksi او t_{allow} = 15 ksi وي، وټاکي. جورنال بیرینګ په A او C کې یوازی عمودی ریکشن په شافت جوړه وي. د P = 6 kips ارزښت راکړل شوی.

س 11-25 . د شافت شییر او مؤمنت ډایګرامونه جوړ کړي، او اړوند قطرتر نیږدی.1/4 in پوري، کله چې s_{allow} = 30 ksi او t_{allow} = 15 ksi وي، وټاکي. جورنال بیرینګ په A او C کې یوازی عمودی ریکشن په شافت جوړه وي. د P = 12 kips ارزښت راکړلشوی.



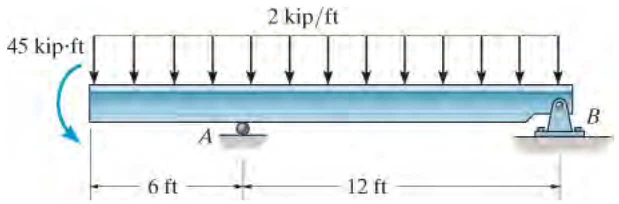
س 11-24/25

س 11-26 . تر ټولو د لږ وزن سورور- فلنج بیم له ضمیمي B غوره کوی کوم چې په خوندي ډول بنودل شوی بار يو وړیشی. د منلو وړ کږیدونکي ستریس s_{allow} = 22 ksi او د منلو وړ شییر ستریس t_{allow} = 12 ksi دی.



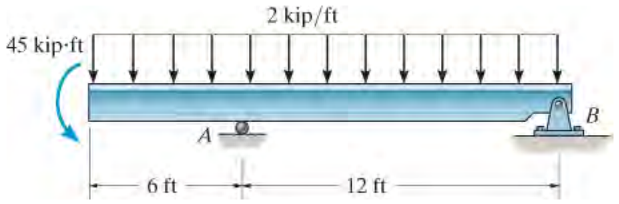
س 11-26

س 11-27 . شییر او مؤمنت ډایګرامونه د W14 X 22 سورورری - فلنج بیم لپاره جوړ کړي، او هم وښیې چی بیم کولاي شي په خوندی توګه ښودل شوي بار یوسی. د منلو وړ کږدوړنکی ستریس s_{allow} = 30 ksi اود منلو وړ شییر ستریس t_{allow} = 15 ksi دي.



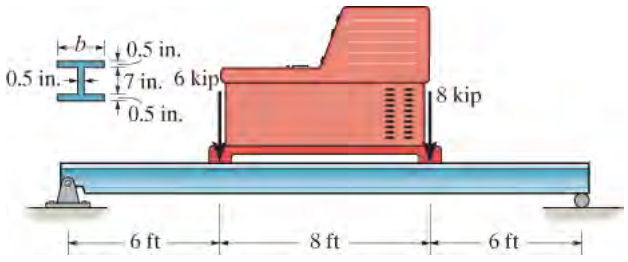
س 11-27

س *11-28 . هغه سپکه سورروره -فلنج W16 بیم له ضمیمي B غوره کړي تر څو پلی شوی بار په خوندی توګه یووړی شی. د منلو وړ کوږیدونکی ستریس د بیم s_{allow}= 30 ksi او د منلو وړ شییر ستریس یی t_{allow} = 15 ksi دي.



س 11-28

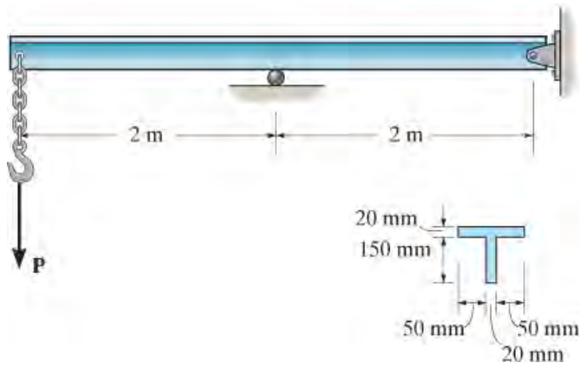
س 11-29 . دا لاندی بیم د یو ماشین لپاره اتکا جوړه وي، چی ماشین ورباندی 6 kips او 8 kips قواوی پلی کړي. که د منلو وړ کږیدونکی ستریس د بیم له s_{allow} = 22 ksi زیات نشی، د فلنجونوضروری سور b وټاکي .



س 11-29

س 11-30 . د فولادی بیم د منلو وړ نارمل ستریس s_{allow}= 140 MPa او د منلو وړ شییر

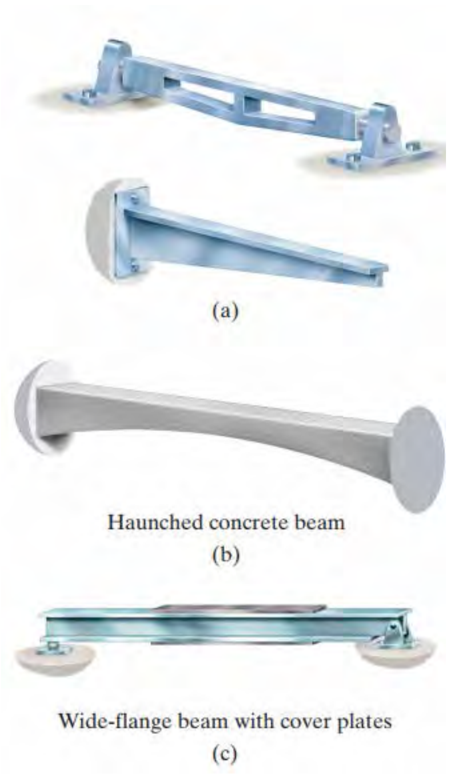
ستریس t_{allow} = 90 Mpa دي. اعظمی بار چې بیم په خوندي ډول وړلی شي وټاکی.



س 11-30

*11.3 په بشپړ ډول ستریس شوي بیمونه (FULLY STRESSED BEAMS)

ځرنګه چې په بیم کې مؤمنت عموما د هغې په اوږدوالی کی توپیر لري، د پریزماتیک بیم انتخاب معمولا ډیرموثرنه وي، ځکه چې بیم هیڅکله په بشپړ ډول ستریس شویی نه وی، په هغو برخو کی چې داخلي مؤمنت د اعظمي مؤمنت څخه کم وي. د دې لپاره چې په بشپړ ډول د موادو له توانايي څخه کار واخيستل شي او په دې توګه د بیم وزن کم شي، انجنیران ځینې وختونه دبیم دپاره د بدلیدونکی غوڅی برخي ساحه درلودل غوره کوي. پدی توګه بیم په هره غوڅه برخه کی د منلو وړ خپل اعظمي توان ته رسیږي. هغه بیمونه چې بدلیدونکی غوڅی برخی ساحه ولری د ***غیر پریزماتیک بیم*** په نوم یادیږي. دا ډول بیمونه ډیری وختونه په ماشینونو کې کارول کیږي ځکه چې دوی کولی شي په آسانۍ سره د کست (casting) په طریقه جوړ شي . مثالونه یې په انځور 11-10a کې ښودل شوي. په جوړښتونو کې دا ډول بیمونه کیدی شي لکه څنګه چې په انځور 11-10bکې ښودل شوي د دوی په پایلونو کې پیرووړشوي وي.
همدارنګه، بیمونه کیدی شي له نوروټوټو جوړوی او یا په ورکشاپ کی د پلیټونو په کارولو سره جوړ شي.



انځور 11-10

یوه بیلګه د ګرډر جوړه ول دی چې د رول شوي سورروری فلینج بیم څخه، کوم چې د پوښ پلیټونه پری ویلډ شوي په هغه سیمه کې چې مؤمنت اعظمي وي، انځور .11-10c.

د غیر پریزماتیک بیم د ستریس تحلیل عموما خورا ستونزمن دی، ترسره کول یې د دې متن له دایری څخه بهر دي. که تیپر(taper) یا د بیم د پورتنۍ یا ښکته خواوی یې ډیری غیر تدریجی نه وی د بیم ډیزاین کیدای شي د کوږوالي (Flexure) فورمول پر بنسټ وشي . کله چې د کوږوالي فارمول پلي کول د نان پریزماتیک (non-prismatic) بیم ډیزاین لپاره وکارول شي بیا د احتیاط سپارښتنه کیږي ، موږ به دلته وښیو چې دا فورمول څنګه کیدی شي د بیم عمومي شکل ترلاسه کولو لپاره د نږدې (تقریبی)وسیلو په توګه وکارول شي. د دې کولو لپاره، د بیم د غوڅی برخې ژوروالي ټاکل کیږي له دې څخه

$$S = \frac{M}{\sigma_{allow}}$$

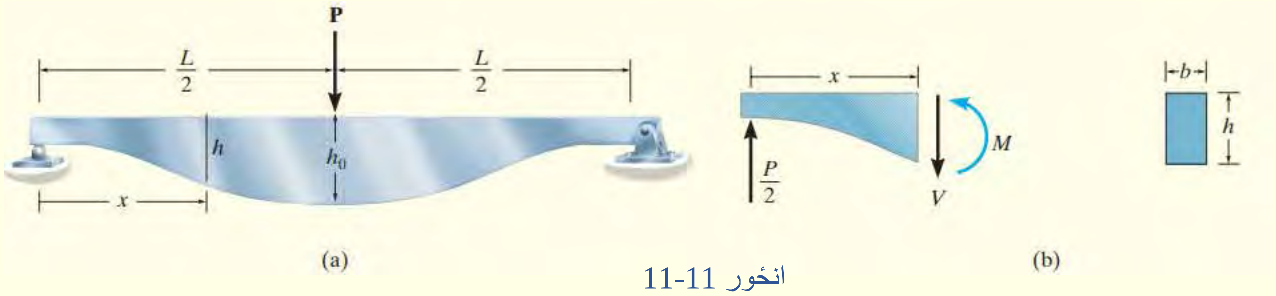
که موږ د بیم په اوږدو کې د x د موقعیت له مخې **M** وښیو، بیا وروسته s_{allow} ستریس یو پېژندل شوی ثابت ارزښت دی، د برخې ما جولس S د بیم د x بعد په تابع بدلیږي. یو بیم چی په دې ډول ډیزاین شوی وي ***د بشپړ ستریس لرونکي بیم*** په نوم یادیږي. که څه هم دلته یوازې د مؤمنت ستریسونه په پام کی نیول شوي دي ، د خپل وروستي شکل په اړه په پام کې نیولو سره، باید د شییر توانايي ته پاملرنه وشي، د دې لپاره چې ډاډ ترلاسه شي چې بیم به د شییر سره مقاومت وکړي، په ځانګړې توګه په هغه ځایونو کې چیرې چې متمرکز بارونه پلي کیږي .

د دې پله د پايي لپاره بیم یو بدلیدونکی غوڅه برخه اومتغیرد ا نر شیایي مؤمنت لري. دا ډیزاین به دموادو وزن او لګښت کم.

مثالونه

مثال 11.4

د بشپړ ستریس ، ساده اتکاء لرونکي بیم ، شکل مشخص کړئ کوم چې په خپل مرکز کې د یوه متمرکزبهرنی بار ملاتړ کوي، انځور11-11a . دا بیم یو مستطیلی غوڅه برخه او ثابت عرض b لری، او د منلو وړ ستریي σ_{allow} دی .



انځور 11-11

حل (SOLUTION)

داخلی مؤمنت په بیم کی انځور 11-11b ، تابع د موقعیت $0 <= x < L/2$ عبارت دی په

$$M = \frac{P}{2}x$$

له همدی امله د برخی ماجولس عبارت دی په

$$S = \frac{M}{\sigma_{allow}} = \frac{P}{2\sigma_{allow}}x$$

څرنګه چی $S = I/c$ بیا د غوڅی برخی ساحه $(h)(b)$ موړ لرو

$$\frac{I}{c} = \frac{\frac{1}{12}bh^3}{h/2} = \frac{P}{2\sigma_{allow}}x$$

$$h^2 = \frac{3P}{\sigma_{allow}b}x$$

که چیری $h = h_0$ او $x = L/2$ نو بیا لیکلی شو

$$h_0^2 = \frac{3PL}{2\sigma_{\text{allow}} b}$$

نو بیا

$$h^2 = \left(\frac{2h_0^2}{L}\right)x \qquad \textit{Ans.}$$

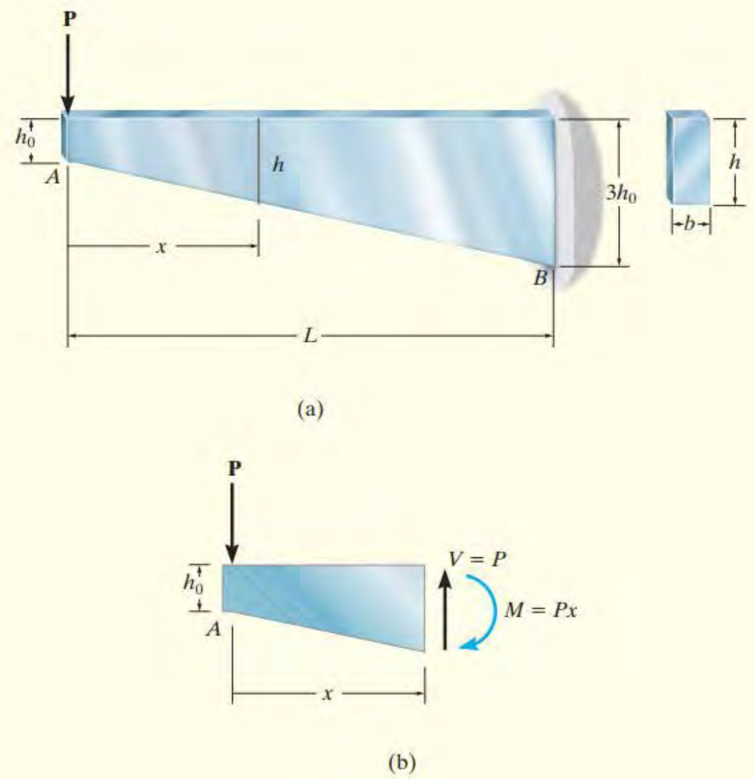
د کتنی په واسطه، ژوروالی h په پارابولیک ډول د فاصلې x سره تړاو لري.

یادونه: په عمل کې، دا شکل د پاڼی فنر (leaf springs) د ډیزاین اساس دی، کوم چې د پای-آخر د اکسل د ډیری درنو لاریو یا ریل ګاډیو، څنګه چې په انځور کی ښودل شوي، ملاتړ لپاره کارول کیږي. په یاد ولرئ چې که څه هم دا پایله دا په ګوته کوي $h = 0$ په $x = 0$ کې، دا اړینه ده چې بیم د شییر ستریس سره په اتکا کی مقاومت وکړي ملاتړ کوي، او په عملي توګه خبرې کول، دا باید اړین دی چې $h > 0$ تر څو دشیر ملاتړوکړی شی، انځور 11-11a کی ښودل شوي.

مثال 11.5

کنتلیور بیم چی په انځور 11-12a کې ښودل شوی ،په ذوذنقه يي (trapezoidal) شکل جوړ شوی ، په ټکی A کی h_0 ژوروالی لري او په B کې يي ژوروالی یی $3\ h_0$ دي. که چیرې دا د بار

Pملاتړ وکړي دبیم په پای کې مطلق اعظمي نارمل سټریس وټاکئ. بیم د ثابت پلنوالی b مستطیلی غوڅه برخه لري.



انځور 12-11

حل (SOLUTION)

په هره غوڅه برخه کې ، اعظمي نارمل سټریس په پورتنۍ برخه او د بیم لاندینی سطحه کې پیښیږي. ځکه چې $s_{max} = M/S$ اود برخې ماجولس S د x په زیاتوالي سره زیاتیږي، بیا مطلق اعظمي نارمل سټریس به اړین نه وي چې په دیوال B کې واقع شي، چیرې چې مؤمنت هلته اعظمي دي. د کوږوالي فورمول په کارولو سره ، موږ کولی شو اعظمي نارمل سټریس په خپل سري برخه کې، د x د موقعیت له مخې څرګند کړو ، انځور11-12b . دلته داخلي مؤمنت $M = Px$ دی، او ځکه چې د بیم لاندینی برخی میلان $2\,h_0\,/\,L$، انځور 11-2a، د بیم ژوروالی په موقعیت x دی

$$h = \frac{2h_0}{L}x + h_0 = \frac{h_0}{L}(2x + L)$$

د کوږوالی فورمول تطبیق کوو او لرو

$$\sigma = \frac{Mc}{I} = \frac{Px(h/2)}{\left(\frac{1}{12}bh^3\right)} = \frac{6PL^2x}{bh_0{}^2(2x+L)^2} \qquad (1)$$

د x موقعیت ټاکلو لپاره چیرې چې د کوږوالي مطلق اعظمي حد ستریس واقع کیږي، موږ باید د s مشتق د x په اړه واخلو او د صفر سره مساوي یې تنظیم کړو. دا ورکوي

$$\frac{d\sigma}{dx} = \left(\frac{6PL^2}{bh_0{}^2}\right)\frac{1(2x+L)^2 - x(2)(2x+L)(2)}{(2x+L)^4} = 0$$

په دی توګه

$$4x^2 + 4xL + L^2 - 8x^2 - 4xL = 0$$
$$L^2 - 4x^2 = 0$$
$$x = \frac{1}{2}L$$

په معادله 1 کی دا ځاي پر ځاپ کوو او دا لاندي په لاس راځي

$$\sigma_{\substack{\text{abs}\\\text{max}}} = \frac{3}{4}\frac{PL}{bh_0{}^2} \qquad \textit{Ans.}$$

په پرتله کولو سره په دیوال B کی اعظمی نارمل ستریس عبارت دی په

$$(\sigma_{\text{max}})_B = \frac{Mc}{I} = \frac{PL(1.5h_0)}{\left[\frac{1}{12}b(3h_0)^3\right]} = \frac{2}{3}\frac{PL}{bh_0^2}$$

دا 11.1% له $s_{\text{abs max}}$ لږدي.

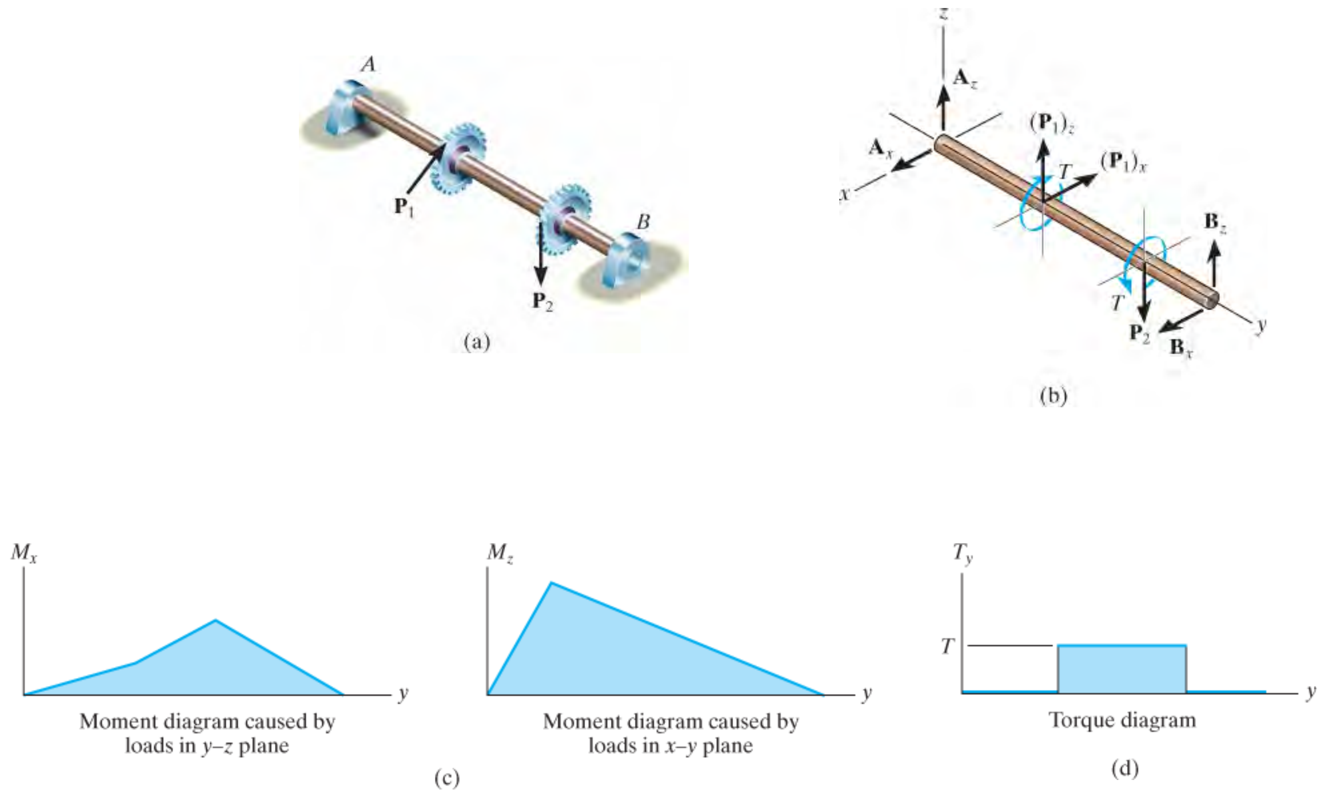
يادونه: په ياد ولرئ چې د کوږوالي فورمول اخيستل شوی، په اساس د فرض کولو چې بيم *پريزماتيک* وي. ځکه چې دا دلته همدغه قضيه نه ده، په دې تحليل کې او په مثال 11.4 کې ځينې د تېروتنې تمه کيږي. يو دقيق رياضياتي تحليل، د ايلستيستي تيوري په کارولو سره، دا ښرګندوي چې د کوږوالي فورمول په پلي کولو لکه په پورته مثال کې کوچنی تېروتنه د کوږوالي ستريس لري که چيرې مخروتي زاويه يې کوچني وی. د مثال په توګه، که چيرې دا زاويه 15 درجې وي، محاسبه شوي ستريس د فورمول په کارولوسره به د هغه څخه 5٪ ډير وي چې د ډير دقيق محاسبه لخوا کيږي . دا هم د يادولو وړ ده چې تحليل د $(s_{max})_B$ محاسبه يوازې د مثالي موخو لپاره وه ، ځکه چې د سينټ ويننټ (Saint-Venant's) اصولو له مخې، اصلي ستريس په اتکاء (ديوال) کې ويش يې خورا غير منظم دی .

11.4* د شافت ډيزاين (SHAFT DESIGN)

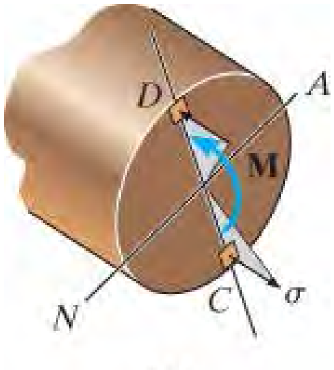
هغه شافټونه چې ګردی غوڅې برخې لري ډيری وختونه په ميخانيکي سامانو او ماشينونو کی کارول کيږي. د پايلې په توګه، دوی به د سايکل يا پرله پسې د سټريا ستريسونو تابع شي، کوم چې په ګډه د کوږوالي مؤمنت او تاويدونکي مؤمنت (torsion) له امله رامينځته کيږي، او شافټونه بايد دا ډول بارونو وليږدوی اوتوان يې ولری. د دې بارونو سربيره ، ممکن په شافټ کې د ستريس غلظت (stress concentration) چې د غوڅې برخې د ناڅاپه بدلون له امله (برخه 5.8) مينځ ته راځی مخا مخ شي. نو دا اړينه ده چې د شافټ په سمه توګه ډيزاين کولو لپاره، دا تولې اغيزې په پام کې ونيول شي.

پدې برخه کې به موږ به د هغه د شافټونو ډيزاين په پام کې ونيسو کوم چې د قوی په ليږدولو کی کارول کيږي. دا شافټونه ډيری وختونه د نښلول شويو ګيرونو او غرغريو (pulleys) په واسطه د پلي شويو بارونو تابع دي، لکه څنګه چې په انځور 11-13a کې ښودل شوي. څرنګه چې بارونه په مختلف زاويو کې په شافټ پلي کيدی شي ، په هره غوڅه برخه کې داخلي کوږوالي (bending) او تاويدل (Torsion) په آساني سره ټاکل کيدی شي کله چې ددی بارونو په عوض ستاتيکلی ثابت بارونه په شافټ ځای په ځای شي ، او بيا دا بارونه په دوو عمودی سطحو پلې شي لکه کوم چې په انځور 11-13b کی ښودل شوي. د کوږوالي مؤمنت دياګرام بيا په هره سطحه کې رسم کيدی شي، او پايله محصله د داخلي مؤمنت د شافټ په هره برخه کې بيا د ويکتور (vector) يو ځاي کيدو لخوا ټاکل کيديشي، $M = \sqrt{Mx^2 + Mz^2}$ ، انځور 11-13c و ويني. د دې مؤمنت سربيره، د شافت برخې هم ممکن د مختلف داخلي تاويدونکی مؤمنت (torque) تابع وي، انځور 11-13b . د

شافټ په اوږدو کې د دې تورک عمومي توپیر حساب کولو لپاره د ***تاویدونکی مؤمنت (تورک) ډیاګرام*** هم کیدی شي چی جوړ شي، انځور 11-13d .

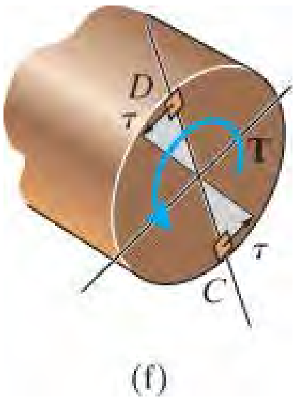


انځور 11-13



(e)

یوځل چې د مؤمنت او تورک ډیاګرامونه جوړ شي ، نو دا بیا ممکنه ده چې د شافټ په اوږدو کې ځینې مهمې برخې وپلټئ ، چیرې چې د پایله لرونکي مؤمنت **M** او د تورک **T** *ترکیب* د ستریس مهم حالت رامینځته کوي. ځکه چې د ګرد شافټ انرشیایي مؤمنت په اړه دهر قطری محور *یو شان* ده موږ کولی شو د کوږوالي فورمول په پلي کولو سره پایله اعظمي ستریس د *محصله مؤمنت* له امله ترلاسه کړو. د مثال په توګه، لکه هغه چې په انځور 11-13e کې ښودل شوي، دا ستریس به په دوو عناصرو، C او D کې واقع شي، کوم چې د شافټ په بهرنی سرحد کې موقعیت لري. که یو تورک **T** هم په   دې برخه کې پلی شوي وي، بیا به په دې باندې اعظمي شییر ستریس هم رامینځته شي انځور 11-13f . برسیره پر دې او ددې ترڅنګ بهرنی قواوی به هم



(f)

انځور 11-13 (تکرار)

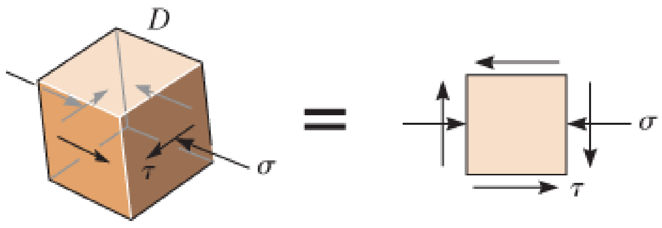
شییر سټریس په دی عناصرو د شافت جوړه وي، او هغه په شافټ کی په دی فورمول ټاکل کیدي شي $t = VQ/It$. په هرصورت، دا سټریس به په عمومي توګه په غوځه برخه کې د سټریس ویش کې خورا کوچني مرسته وکړي ، د هغه په پرتله چې د مؤمنت او تورشن لخوا رامینځته شی. په ځینو مواردو کې، دا باید وځیړل شي، مګر د سادګي لپاره، موږ به دلته د هغې اغیزې له پامه غورځوو. په عمومي توګه، بیا په شافټ کې مهم عنصر C یا (D) تابع د *سطحی سټریس* لکه څنګه چې په انځور 11-13g کې ښودل شوي، چیرته

$$\sigma = \frac{Mc}{I} \qquad \text{and} \qquad \tau = \frac{Tc}{J}$$

که د موادو لپاره د منلو وړ نارمل یا شییر سټریس معلوم وي، د د شافټ اندازه بیا د دې معادلو په کارولو اوپراساس د ناکامی مناسبه تیوري په انتخاب ده. د مثال په توګه، که مواد نرم وي، بیا د اعظمي شییر سټریس تیوري ممکن مناسبه وي. لکه څنګه چې په برخه 10.7 کې ویل شوي دا تیوري د منلو وړ شییر سټریس ته اړتیا لري، کوم چې دی د ساده کششي ازمویني پایلو څخه ټاکل کیږي ، او هغه د اعظمي شییر سټریس د مساوي کیدو په عنصر کې ده. د سټریس بدلون معادلی په کارول معادله 7-9 د سټریس حالت لپاره په انځور 11-13g کې موږ ترلاسه کوو

$$\tau_{\text{allow}} = \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{Mc}{2I}\right)^2 + \left(\frac{Tc}{J}\right)^2}$$



(g)

انځور 11-13 (تکرار)

ځکه چی $I = \text{p}c^4/4$ او $J = \text{p}c^4/2$ دا معادله بیا کیږي

$$\tau_{\text{allow}} = \frac{2}{\pi c^3}\sqrt{M^2 + T^2}$$

کله چی د شافټ د شعاع لپاره دا حل کړو ، شعاع په دی لاندی ډول پیدا کیږي

$$c = \left(\frac{2}{\pi \tau_{\text{allow}}}\sqrt{M^2 + T^2}\right)^{1/3} \qquad (11\text{–}2)$$

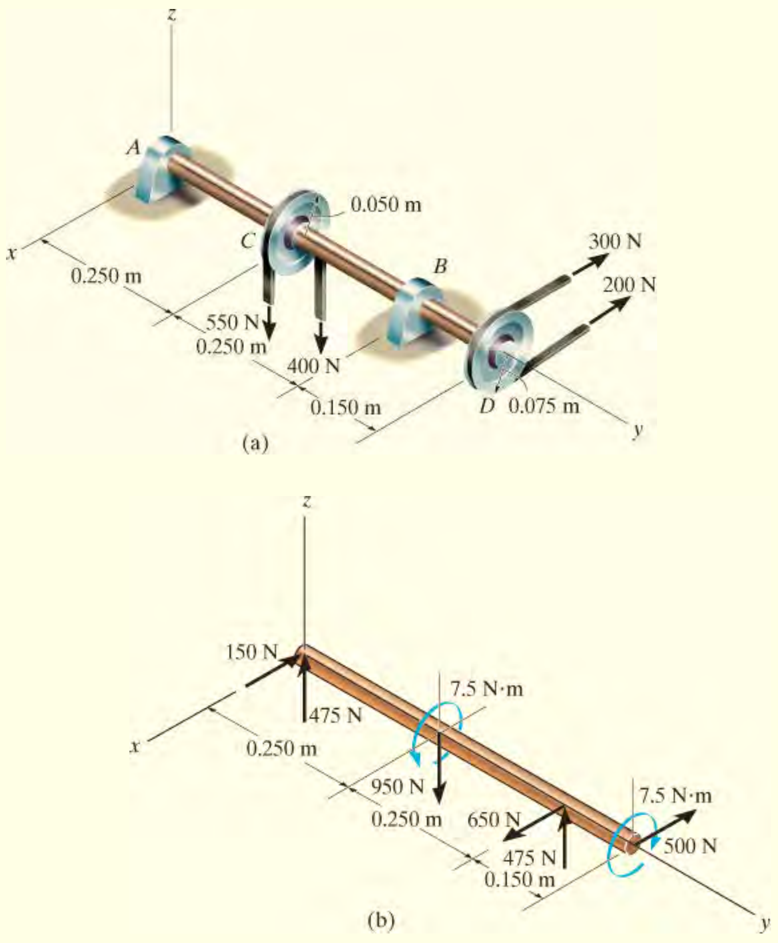
د ناکامۍ د کومې بلې تیورۍ پلي کول به یقینا د دې لامل شي چې د c ارزښت ټاکلو لپاره مختلف فورمول وکارول شي. په هرصورت، په ټولو قضیو کې دا ممکن اړین وي چې دا پایله د شافټ په اوږدو کې په مختلفو "مهمو برخو" کې پلي کړئ، تر څو د M او T ځانګړی ترکیب وټاکئ کوم چې لوی ارزښت د c ورکړي .

دالاندې مثال په عددي شکل کړنلاره روښانه کوي

مثال

مثال 11.6

دا لاندی شافټ، انځور 1-14a ، دوی د جورنل بیرینګ اتکاوی په A او B کی لری. شافټ ته د قوی د لیږدولو له امله د غرغری تسمی په لاندی ښودل شوی کششی حالت کی دي. د شافټ تر ټولو کوچني قطر د اعظمی شییر سټریس تیوري په کارولو سره و ټاکی. د منلو وړ شییر سټریس عبارت دی په $t_{allow} = 50$ MPa .



انځور 11-14

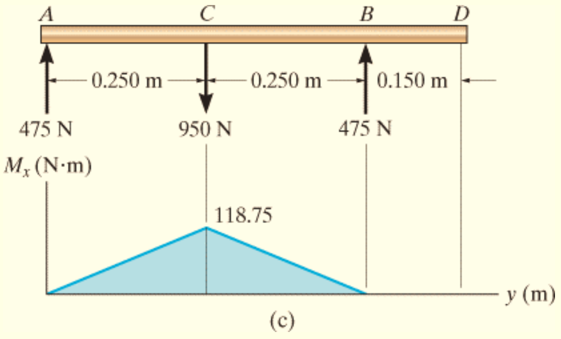
(SOLUTION) حل

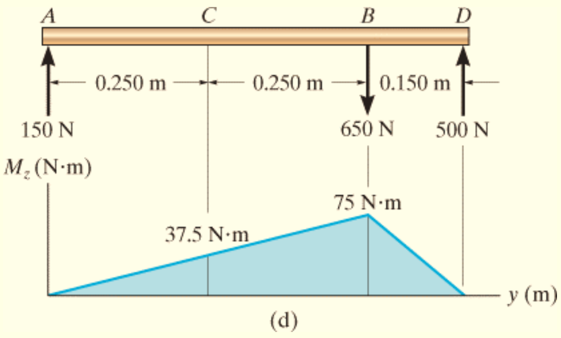
د اتکاوو ریکشنونه محاسبه شوی او هغوی په انځور 11-14b کی ښودل شوي. د کړیدو مؤمنتونه Mx او Mz په انځور 11-14c او 11-14d کی ښودل شوي دي. د تورک ډایگرام په انځور 11-14e کی ښودل شوي دی. په کتوسره، مهمي نقطي د کړیدو مؤمنت په C او B کی دي. او هم ، فقط په ښي اړخ د C او په B کی د تورک ارزښت 7.5 N.m دي. په C کی پایله د مؤمنت عبارت دی په

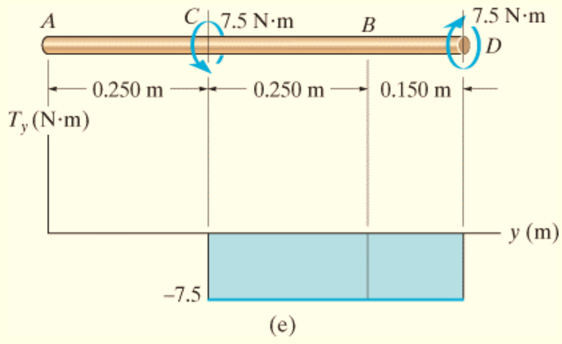
$$M_C = \sqrt{(118.75 \text{ N}\cdot\text{m})^2 + (37.5 \text{ N}\cdot\text{m})^2} = 124.5 \text{ N}\cdot\text{m}$$

په داسي حال کی چی په B کی دا کوچني دی، یعني

$$M_B = 75 \text{ N}\cdot\text{m}$$







انځور 11-14 (تکرار)

ځرنګه چې ډیزاین په اساس د اعظمی شییر سټریس تیوری دی، معاد له 11-2 پلی کیږي.

د رادیکل $\sqrt{M^2 + T^2}$ ارزښت به په ښي لور د C کی تر ټولو لوي وی. موږ لرو

$$c = \left(\frac{2}{\pi\tau_{\text{allow}}}\sqrt{M^2 + T^2}\right)^{1/3}$$

$$= \left(\frac{2}{\pi(50)(10^6)\ \text{N/m}^2}\sqrt{(124.5\ \text{N}\cdot\text{m})^2 + (7.5\ \text{N}\cdot\text{m})^2}\right)^{1/3}$$

$$= 0.0117\ \text{m}$$

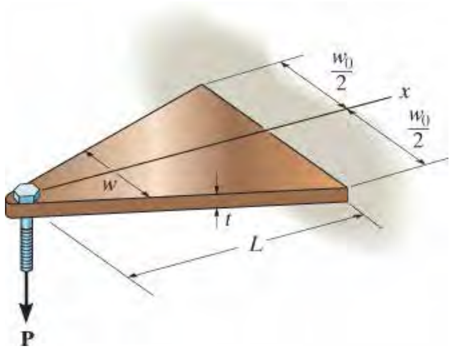
په دی توګه تر ټولو کوچني د منلو وړ قطر عبارت دی په

$$d = 2(0.0117\ \text{m}) = 23.3\ \text{mm} \qquad \textit{Ans.}$$

سوالونه

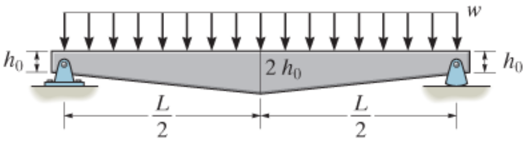
PROBLEMS

س 11-31. د دی لاندی کنتیلیور بیم کی ، د بیم د سور توپیر w تابع د x دی، کله چې یو متمرکز بار **P** د بیم په پاي کې پلي شوي. بار داسی مشخص کړئ کوم چی بیم اعظمی کیږیدونکی سټریس s allow په خپل اوږدوکی ولري. بیم ثابت ضخامت t لري .



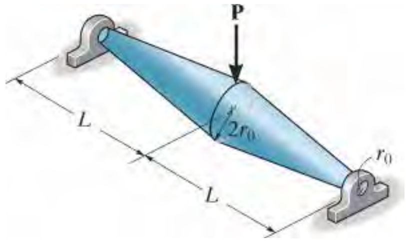
س 11-31

س *11-32. په د لاندی بدلیدونکی لوړوالی بیم مساوی ویشل شوی بار پلي شوي. که چیری دا بیم له یوه تختی جوړ شوي وي چی ثابت پنډ والی b ولري، مطلق اعظمی کیږیدونکی سټریس په بیم کی وټاکي.



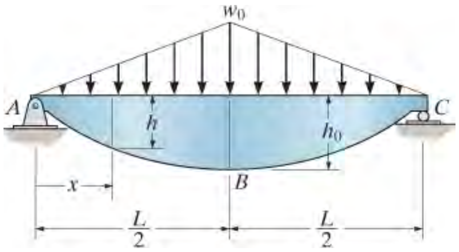
س 11-32

س 11-33. په مخروطي بیم متمرکز قوه **P** پلي شوي. مطلق اعظمی کیږیدونکی سټریس په بیم کی وټاکي. ریکشنونه په اتکا کی عمودي دي.



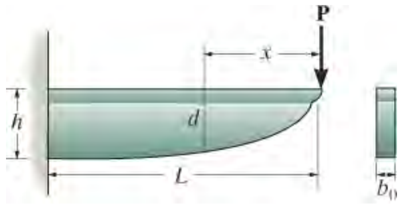
س 11-33

س 11-34. بیم له یوی تختی چی ثابت پنډوالی b لري جوړه شوي. که چیری دا بیم ساده اتکاوی ولری او ویشل شوی بار ورباندی پلی شوي وي، توپیر په ژوروالی h تابع د x داسی مشخص کړي کوم چی اعظمی کیږیدونکی سټریس حد σ_{allow} په خپل اوږدوکی ولري.



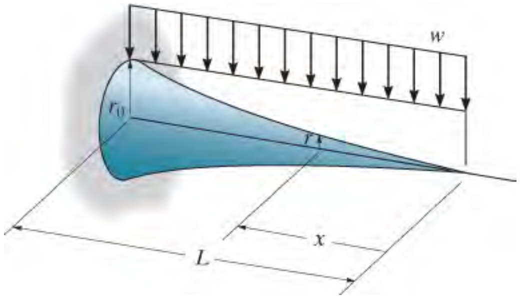
س 11-34

س 11-35. په دی لاندی کنتیلیور بیم کی، توپیر په ژوروالي d کی کله چی یو متمرکز بار **P** په پاي د بیم کې پلي شوي، داسی مشخص کړئ کوم چی اعظمی کیږیدونکی ستریس حد s_{allow} په خپل اوږدوکی ولري. بیم ثابت پنډوالی b_0 لري .



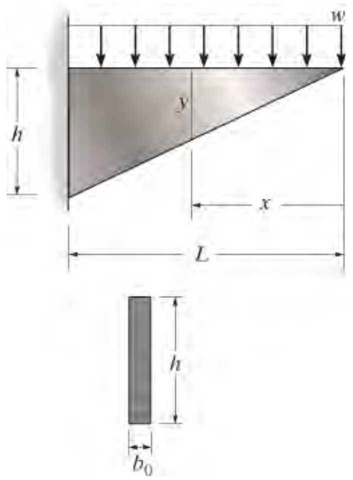
س 11-35

س *11-36. په دی لاندی کنتیلیور بیم کی، توپیر د شعاع r کی کله چی یو ویشل شوی بار په بیم پلي شوي، داسی مشخص کړئ کوم چی اعظمی کیږیدونکی ستریس حد s_{max} په خپل اوږدوکی ولري.



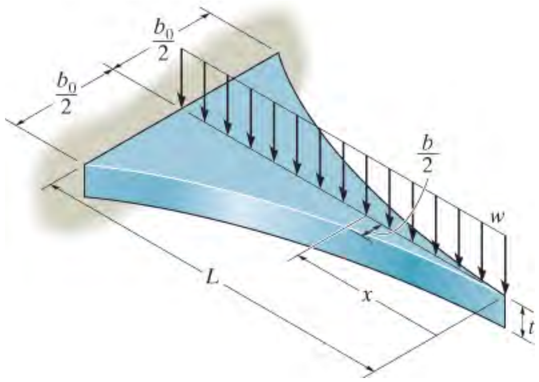
س 11-36

س 11-37. په بدلیدونکی لوړوالی بیم ویشل شوی بار w پلي شوي. که چیری بیم له یوی تختی چی ثابت پنډوالی b_0 لري جوړ شوي، اعظمی کیږیدونکی ستریس په بیم کی وټاکي.



س 11-37

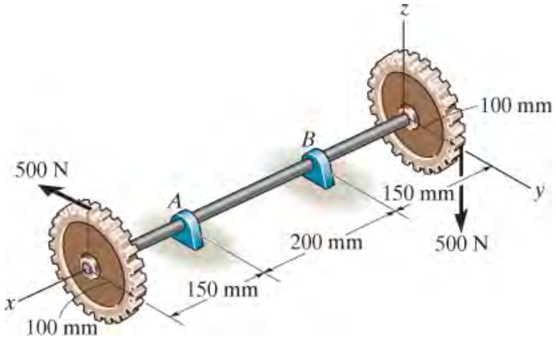
س 11-38. د دی لاندی کنتیلیور بیم لپاره ، توپیر په سور b کی تابع د x دی کله چی یو مساوی ویشل شوی بار وربادی پلي شوي دی، د بیم سور داسی مشخص کړئ کوم چی اعظمی کیږیدونکی ستریس حد s_{allow} په خپل اوږدوکی ولري. بیم ثابت ژوروالي t لري .



س 11-38

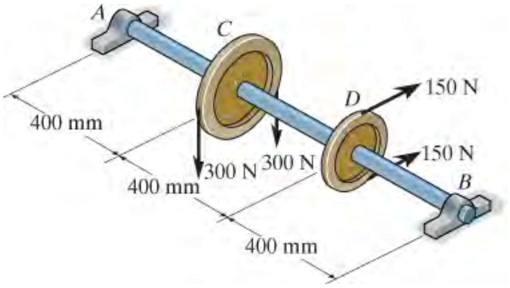
س 11-39. د یوه تیوبي شافټ داخلي قطر 15 mm دي. نږدی ملی متر ته لږ تر لږ بهرنی قطر وټاکي کله چی ښودل شوي د ګیر بارونه وربادی عمل کړي وي. بیرینګ په A او B کی د قواو اجزاوی په y او z جهتونو په شافت جوړه وی . د منلو وړ شییر ستریس $t_{allow} = 70$ MPa او ډیزاین د اعظمی شییر ستریس ناکامي تیوري په اساس دي.

س *11-40. نږدی ملی متر ته لږ تر لږ قطر د یو جامد شافټ وټاکي کله چې د ګیر بارونه ورباندی عمل کړي وي. بیرینګ په A اوB کی د قواو اجزاوی په y او z جهتونو په شافټ جوړه وی . ډیزاین د اعظمی تحریف (distortion) انرژي ناکامي تیوري په اساس دي. s_{allow} =150 MPa



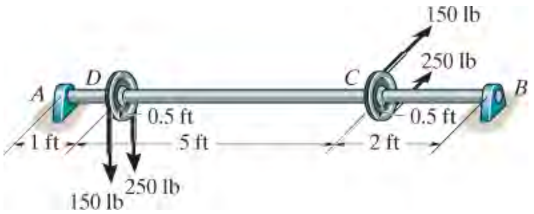
س 11-39/40

س 11-41. دا لاندی د 50 mm قطر شافټ اتکا لری په جورنل بیرینګ A او B کی. که چیری غرغری په C او D کی ښودل شوي بارونه ولري، مطلق اعظمی کیږیدونکي ستریس په شافټ کی مشخص کړي.



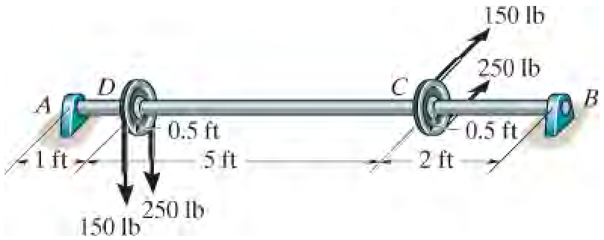
س 11-41

س 11-42. په دی لاندی شافټ ښودل شوی غرغری کلک تړل شوي دي. که چیری جورنل بیرینګونه په A او B کی تنها افقي او عمودي قواوي جوړه وی، اړوند قطر د شافټ تر 1/8 in. انچ پوری مشخص کړي، له اعظمی شییر ستری ناکامي تیوری څخه کار واخلي، t_{allow} = 12 ksi.



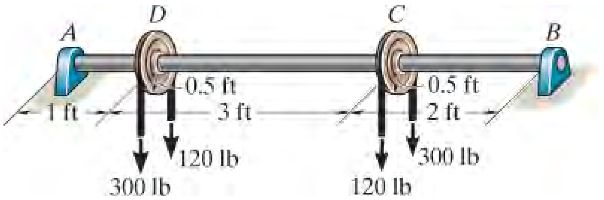
س 11-42

س 11-43. په دی لاندی شافټ ښودل شوی غرغری کلک ترل شوي دي. که چیری جورنل بیرینګونه په A او B کی تنها افقي او عمودي قواوي جوړی کړی، اړوند قطر د شافټ تر 1/8 in. انچ پوری مشخص کړي، له اعظمی تحریف (distortion) انرژي د ناکامي تیوری ښخه کار واخلي، σ_{allow} = 20 ksi .



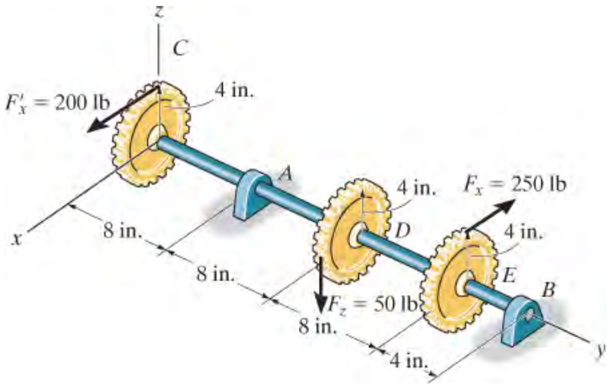
س 11-43

س *11-44. دوه غرغری په شافټ کلک ترل شوی دي او ښودل شوي بارونه لری. که چیری جورنل بیرینګونه په A او B کی تنها افقي او عمودي قواوي په شافت جوړیکړی، اړوند قطر د شافټ تر 1/8 in. انچ پوری مشخص کړي، له اعظمی تحریف (distortion) انرژي د ناکامي تیوری ښخه کار واخلي، σ_{allow} = 67 ksi .



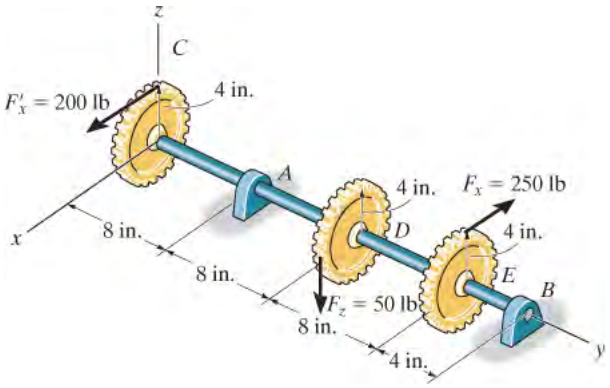
س 11-44

س 11-45. دا لاندی شافټ اتکا لری په جورنال بیرینګ A او B، او د قواو اجزاوی په y او z جهتونو په شافټ عمل کوی. که چیری د منلو وړ ستریس $s_{allow} = 15$ ksi وی، لږ تر لږ قطر د شافټ ترنیږدی 1/8 in. انچ پوری مشخص کړي. له اعظمی تحریف (distortion) انرژي د ناکامي تیوری څخه کار واخلي.



س 11-45

س 11-46. دا لاندی شافټ اتکا لری په جورنال بیرینګ A او B، او د قواو اجزاوی په y او z جهتونو په شافټ عملکوی. لږ تر لږ قطر د شافټ نیږدی 1/8 in. انچ پوری مشخص کړي. له اعظمی شییر ستریس ۷ ناکامي تیوری څخه کار واخلي. $t_{allow} = 6$ksi

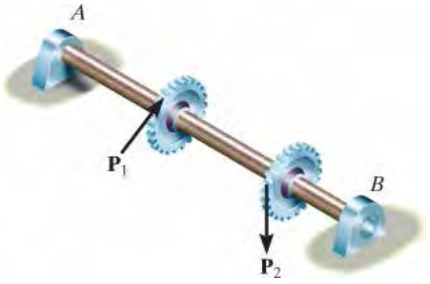


س 11-46

د فصل بیا کتنه

CHAPTER REVIEW

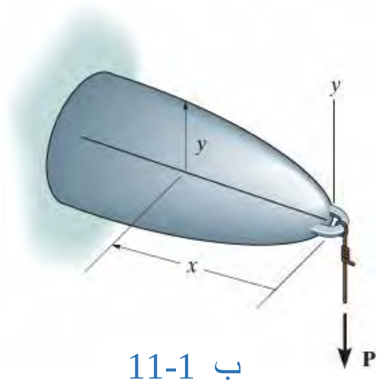
	د بیم ناکامي هغه وخت واقع کیږي کله چې داخلي شییر یا مؤمنت په بیم کې اعظمي شي. د بارونو مقاومت کولو لپاره دا مهمه ده چې د اعظمي شییر او مؤمنت سټریس د منلو وړ ارزښتونو کوم چې په کوډونو کې ویل شوي ډیر نه شي . په نارمل ډول، لومړی د بیم غوښه برخه د منلو وړ دکږیدونکی سټریس د مقاومت لپاره ډیزاین کیږي. $$\sigma_{allow} = \frac{M_{max}\, c}{I}$$
	بیا د منلو وړ شییر سټریس چک کړي. د مستطیلی برخی لپاره $1.5(V_{max}/A)$ => t_{allow} ، او د سورورې فلنج برخی لپاره مناسب ده چې $t_{allow} => V_{max}/A_{web}$. په عمومی توګه، له دی معادلی کار واخلي $$\tau_{allow} = \frac{V_{max}Q}{It}$$
	د جوړ شویو (built-up) بیمونو لپاره د بندونکیو فاصلې یا د سریښ مقاومت او یا ولډینګ د منلو وړ شییر جریان ښخه کار واخلي $q_{allow} = VQ/I$
	بشپړ سټریس شوی بیمونه پراسماتیک ندي (nonpragmatic) ، او داسی ډیزاین کیږی چې کیږدونکي سټریس په هره غوښه برخه کی د بیم په اوږدوالي کی مساوی په د منلو وړ کږیدونکي سټریس وي. دا حالت به د بیم شکل تعریف کړي.

هغه شافټ چې قوه لیږدوی د کیږدونکی اوتاویدونکی دواړو لپاره ډیزاین کیږي. کله چې اعظمی کوږوالي او تورشن ستریسونه وټاکل شي، بیا د موادوپه نوعیت پورې تړلي، یو مناسب د ناکامي تیوري په کاره ولو د منلو وړ او اړتیا وړ ستریسونه پرتله کیدی شي.	

د بیا کتني سوالونه

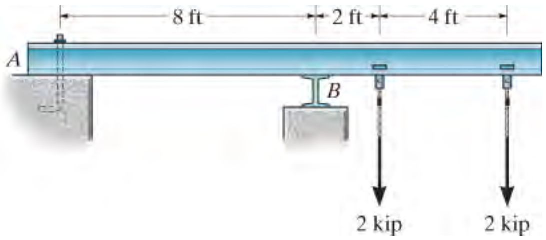
REVIEW PROBLEMS

ب 11-1. کنتیلوربیم ګردی غوښه برخه لري. که چیری د بیم په پای کی یو قوه **P** پلی شي، شعاع y تابع د x داسی وټاکي تر څو ثابت اعظمی کړیدونکی ستریس s_{allow} په اوږدو د بیم کی جوړ شي.



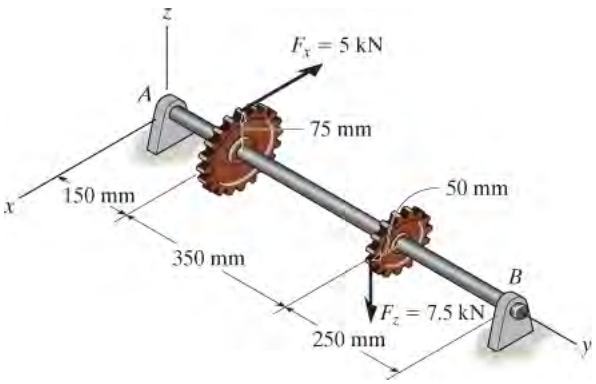
ب 11-1

ب 11-2. تر ټولو د لږ وزن یوه دسورور فلنج وتلی برخي (overhanging) بیم له ضمیمي B چې وکولای شی د بنودل شوی بار مقاومت وکړي انتخاب کړي. فرض کړي چې اتکاء په A کی پن او په B کی رولر دي. د منلو وړ کړیدونکي ستریس $s_{allow} = 24\text{ksi}$ او د منلو وړ د شییر ستریس $t_{allow} = 14\text{ ksi}$ دي.



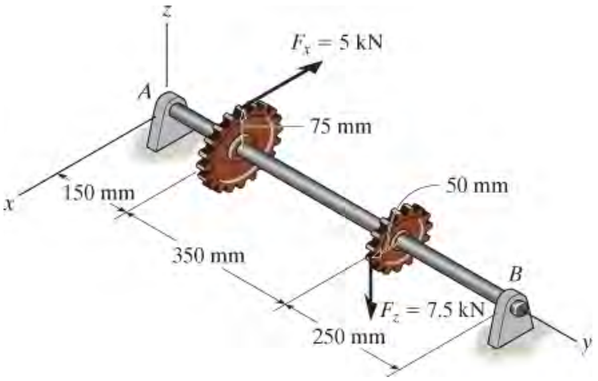
ب 11-2

ب 11-3. جورنال بیرینګ A او B کې د قواو اجزاوی په y او z جهتونو په شافټ کې جوړه وی. د شافټ قطر، نږدی ملی متر ته ، داسي وټاکي کوم چې پلی شوي بارونه د منلو وړ شییر ستریس $t_{allow} = 80$ MPa څخه زیات شییر ستریس جوړ نکړي . د اعظمی شییر ستریس د ناکامي تیوري و کاروي.



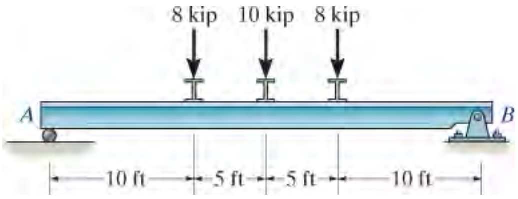
ب 11-3

ب 11-4*. جورنال بیرینګ په A او B کې د قواو اجزاوی په y او z جهتونو په شافټ کې جوړه وی. د شافټ قطر، نږدی ملی متر ته ، داسي وټاکي کوم چې د پلی شوي بارونو مقاومت وکړي. له اعظمی د تحریف (distortion) انرژي د ناکامي تیوری څخه کار واخلي، $s_{allow} = 200$MPa .



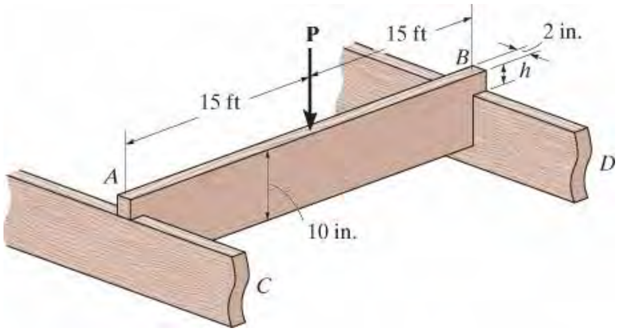
ب 11-4

ب 11-5. تر ټولو د لږ وزن یوه سورروره -فلنج بیم له ضمیمي B چې وکولای شی د ښودل شوی بار مقاومت وکړي انتخاب کړي. د منلو وړ کږیدونکي ستریس $s_{allow} = 22$ksi او د منلو وړ د شییر ستریس $t_{allow} = 22$ ksi دي.



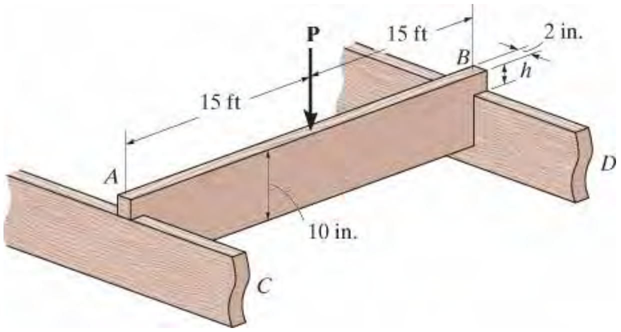
ب 11-5

ب **11-6.** په وداني کې له ساده اتکاء جایست (joist) د پوړ د جوړه ولو له پاره اخیستل شوي. ددی لپاره چې پوړ نسبت سرطاق (sill beam) C او D ته ټیټ وساتل شي، د جویستونو پای غوڅ (notch) شوي، په لاندی انځور کې یي وګوری. که چیرې د منلو وړ شییر ستریس t allow = 350 psi او د منلو وړ کړیدونکي ستریس s allow = 1500 psi وي، لوړ والي h داسی و ټاکی کله چې دواړه د منلو وړ ستسرسونه په یو وخت کې جوړ شي. همدارنګه معلوم کړی چې کوم بار P به دا جوړ کړي. د ستریس غلظت په غوڅه حصه کې په پام کې مه نیسي.



11-6 ب

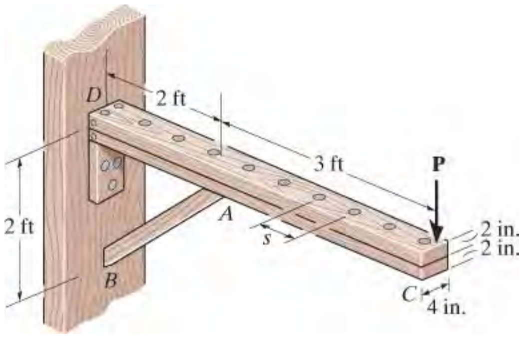
ب **11-7.** په وداني کې له ساده اتکاء جایست (joist) د پوړ د جوړه ولو له پاره اخیستل شوي. ددی لپاره چې پوړ نسبت سرطاق (sill beam) C او D ته ټیټ وساتل شي، د جایسټونو پای لږ غوڅ (notch) شوي، په لاندی انځور کې یي وګوری. که چیرې د منلو وړ شییر ستریس t allow = 350 psi او د منلو وړ کړیدونکي ستریس s allow = 1700 psi وي، تر ټولو وړوکي لوړ والي h داسی و ټاکی تر څو پلی شوی بار P =600 lb تحمل کړي. همدارنګه معلوم کړی چې ټول جایسټونه دا بار په خوندي بڼه وړلیشی. د ستریس غلظت په غوڅه حصه کې په پام کې مه نیسي.



11-6 ب

ب ***11-8.** دا وتلی بیم له دوو تختو 2 in. په 4-in جوړ شوي. که چیرې د منلو وړ کړیدونکي ستریس s allow = 600 psi وي، تر ټولو لوی بار P چې کیدی شی پلی شي و ټاکي. همدا رنګه د

بنددونکیو اعظمی فاصله s ، په اوږدو د بیم په برخه AC کی کله چی دهر میخ د منلو وړ توان د شییر قوی په ارزښت د 800 lb وي، وټاکي. فرض کړی چی بیم په A, B او D کی پن شوي. محوری قوه په بیم کی په اوږدو د DA په پام کی مه نیسي.



ب 11-6

دولسم فصل

(CHAPTER 12)

(© Michael Blann/Getty Images)

که چیری انحنا ددی خادی اندازه شی، د ا ممکنه ده هغه کرېدونکی
سټرسونه چی په خاده کی جوړ شوي و موندل شي.

د بیمونو او شافټونو بیځایه کیدل

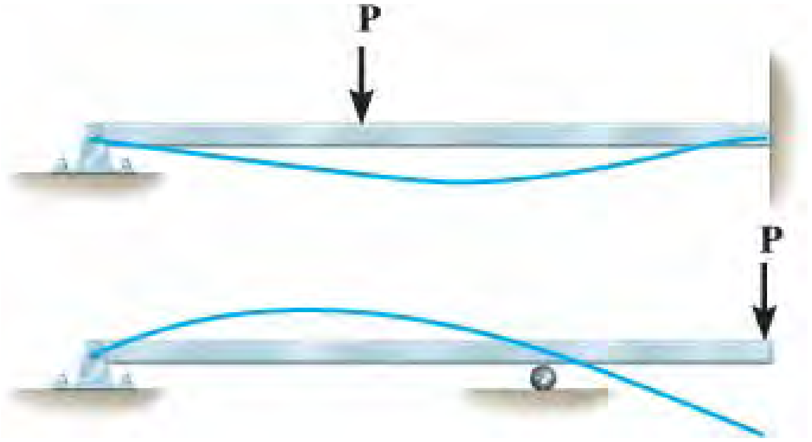
DEFLECTION OF BEAMS AND SHAFTS

CHAPTER OBJECTIVES د فصل موخې

په دې فصل کې به موږ دبیځایه کیدنی (deflection) او میلان (slope) ټاکلو، د بیمونو او شافټونو په اړه په مختلفو طریقو بحث وکړو. په تحلیلي طریقو د انتیګریشن طریقه، د نادوامه توابع (discontinuity functions)، او د سوپرپوزیشن طریقو کارول شامل دی. همدارنګه، یوه نیمه ګرافیک تخنیک چې د مؤمنت د ساحې طریقی په نوم یادیږي، وړاندې به شي. د فصل په پای کې، به موږ دا طریقی د بیم او شافټ چی ستاتیکلی نامعلوم ریکشنونه ولری د هغوي د حل لپاره وکارووتر څو ریکشنونه په دا ډول بیمونو یا شافټونو کې وموندل شي.

12.1 ایلستیک منحني (THE ELASTIC CURVE)

د بیم یا شافټ بیځایه کیدل باید ډیری وختونه د جوړښت د ثبات لپاره محدود وي، په بیمونو کی په هغو ماتیدونکیو موادو کی چې پر بیم تړلی وی لکه پلاستر یا کانکریت، د درځ مخه ونیول شي . تر ټولو مهمه، که چیرې بیم سټاټیکلی نا معلومه وی، د میلان او بې ځایه کیدنی په مرسته ریکشنونه موندل کیږی. په دې څپرکي کې به دا بې ځایه کیدنه او میلان چې د کړیدو له امله رامینځته کیږي وموندل شی . د هغه اضافي کوچنۍ بیځایه کیدني په اړه چې د شییر له امله منځته راځی په 14 څپرکي به پری بحث وکړو .

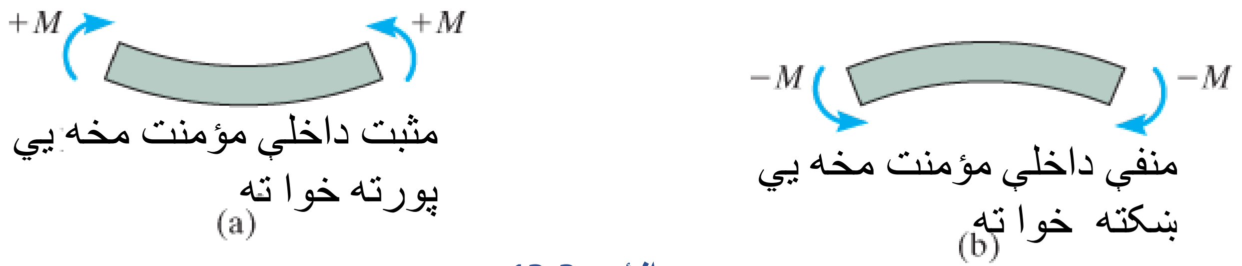


انځور 12-1

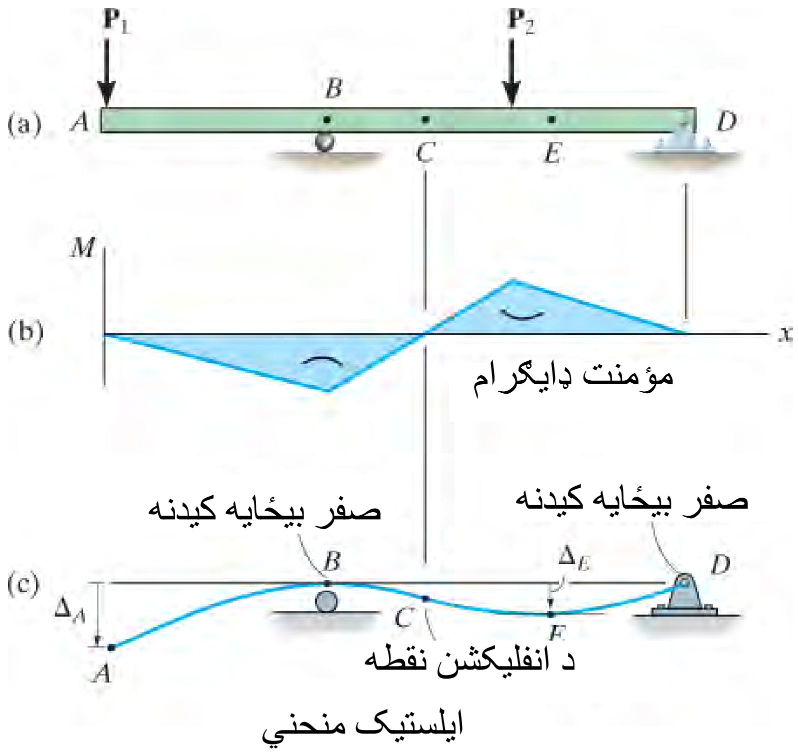
مخکې له دې چې د میلان یا بې ځایه کیدو موندل پیل شي ، دا په ډیری وختونو کی ګټور وي، چې د بیم کړیدونکی شکل سکیچ شي ، کوم چې ***ایلستیک منحنی (elastic curve)*** یي استازیتوب کوي. دا منحني د بیم د هرې غوڅې برخې د مرکز ثقل څخه تیریږي، او د ډیری قضیو لپاره دا ډول سکیچ، پرته له کوم مشکل څخه کیدی شي. کله چې داسې سکیچ جوړه وي ، په یاد ولرئ چې هغه اتکاوې چې د *قواو* مقاومت کوي، لکه پن، کوم چې د بې ځایه کیدو محدودیت کوي، او هغه چې د *مؤمنت* مقاومت کوي، لکه یو ثابت دیوال چې د کړیدو یا *میلان* جوړیدو او همدارنګه د *بې ځایه کیدو* محدودیت کوي، دا ټول په پام کی ونیسي. دوه مثالونه د ایلستیک منحني د بار شوي بیمونو لپاره په انځور 12-1 کې ښودل شوي.

که چیرې د بیم لپاره رسم کول د ایلستک منحني ستونزمن ښکاري ، نو وړاندیز کیږي چې د بیم لپاره د مؤمنت ډیاګرام لومړی رسم شي. د بیم د علامی یا نشاني کنوانسیون په کارولو سره چې په برخه 6.1 تاسیس شو، یو مثبت داخلي مؤمنت تمایل لري چې بیم پورته خوا ته وښوروي، انځور 12-2a . په ورته ډول، یو منفي مؤمنت بیم ښکته خوا ته اړه وي، انځور 12-2b . له همدې امله، که

مؤمنت ډیاګرام *وپیژندل* شي، نو دا به اسانه وي چې ایلستیک منحني جوړ شي. د مثال په توګه، په انځور 12-3a کې بیم په پام کې ونیسئ کوم چې اړونده مؤمنت ډیاګرام یي په انځور 12-3b کې ښودل شوی. د رولر او د پن اتکاء له امله، په B او D کې بې ځایه کیدل باید صفر وي. د منفي مؤمنت په سیمه AC ، انځور 12-3b، ایلستیک منحني باید ښکته خوا ته حرکت وکړي، او د مثبت مؤمنت په سیمه کې دننه CD ، د ایلستیک منحنی باید پورته مخته وي. په C کې *د انفلکشن* (inflection) نقطه شتون لري، چیرته چې منحني مخ له پورته په ښکته خوا بدلوي ، ځکه چې دا د صفر مؤمنت نقطه ده. دا هم باید په پام کې ونیول شي چې بېځایه کیدنه D_A او D_E په ځانګړې توګه مهم دي. په E نقطه کې میلان د ایلستیک منحني صفر دي، او هلته د بیم بیځایه کیدنه ممکن اعظمي وي. آیا D_E په حقیقت کې د D_A څخه لوی دي ، دا به د $\mathbf{P}_1$ او $\mathbf{P}_2$ په نسبي اندازه پورې اړه لري او په موقعیت د رولر په B کې .

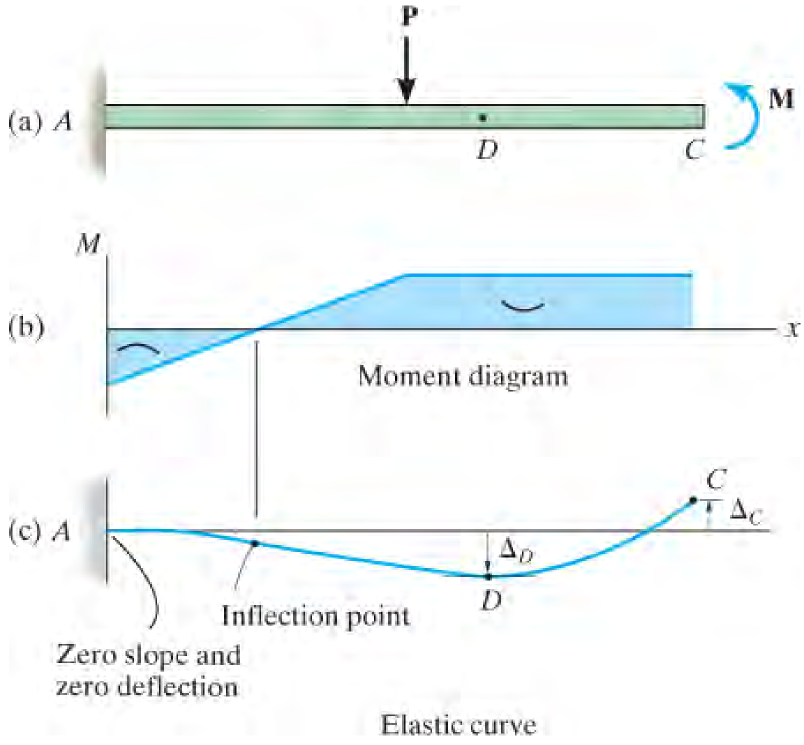


انځور 12-2



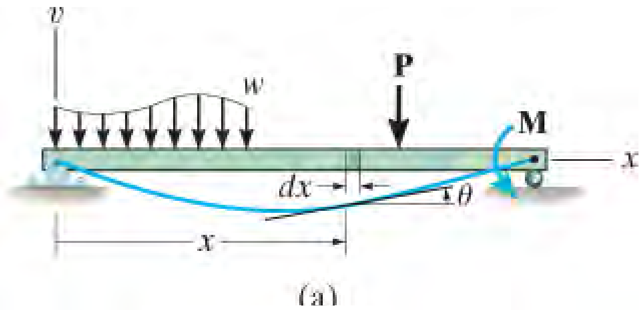
انځور 12-3

د همدې اصولو په تعقیب، په انځور 12-4 کې د ایلستیک منحنی جوړیدلو ځرنګوالی په پام کې ونیسئ . دلته بیم په A کې د ثابتی اتکا (ټینګی اتکا) څخه کانټیلیور شوی دی، او له همدې امله ایلستیک منحني باید په دې ځای کی صفر بې ځایه کیدنه او صفر میلان ولري. همدارنګه، ترټولو لوی بې ځایه کیدنه به په D کې چیرې چې میلان صفر دي ، یا په C کې واقع شي .



انځور 12-4

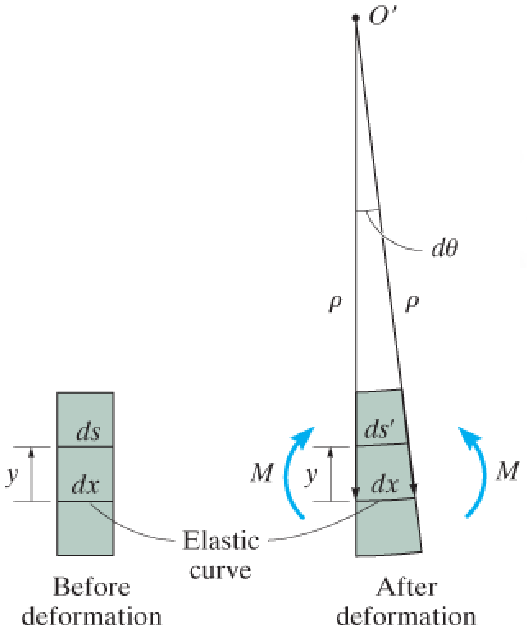
د مؤمنت او انحنا اړیکی (Moment–Curvature Relationship)



انځور 12-5

مخکې لدې چې مورږ میلان او بیځایه کیدنه په هره نقطه د ایلستیک منحني کې ترلاسه کړو، لومړی دا اړینه ده چی د داخلي مؤمنت او دمنحني د انحنا د شعاع (rho) r تراو د یو بل سره معلوم کړو. د دې کار لپاره، موږ به هغه بیم ته پام وکړو چې په انځور 12-5a کې ښودل شوي، او هغه

کوچنی عنصر چې د کيڼ پای څخه x فاصله کې موقعیت لري او د اصلي شکل اوږدوالی dx لري، راجدا کړو ، انځور 12-5b . " سیمه ایز" y کوردینات يي له ایلستیک منحني (صفری کربښي) د بیم تر فایبر چې اصلی اوږدوالي يي $ds = dx$ او بيځایه شوی اوږدوالي يي $ds`$ دي ، اندازه کيږي. په برخه 6.3 کی موږ د نارمل سترین په دی فایبر او داخلی مؤمنت او د انحنا شعاع د بیم عنصر ترمینځ اړیکي رامینځته کړي ، انځور 12-5b . دا دی



(b)

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{\epsilon}{y} \qquad (12\text{–}1)$$

انځور 12-5

څکه چې د هوک قانون پلي کیدی شي، $e = s/E$ او $s = -My/I$ ، ورروسته له دی چې دا په پورتني معادله ځای په ځاي شي، موږ لرو

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} \qquad (12\text{–}2)$$

دلته

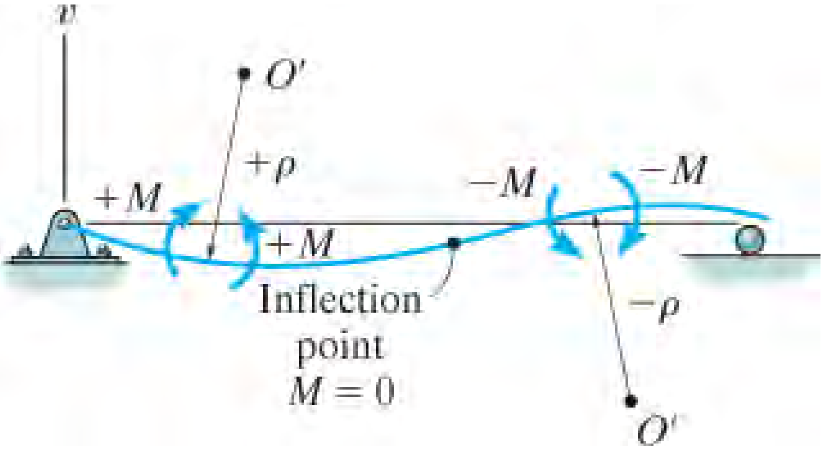
r = د انحنا شعاع د ایلستیک منحني په یوه ټکی کی ($1/r$ ته انحنا ویلکیږی)

M = داخلی مؤمنت په یو ټکی د بیم کی

E = د موادو د ایلستیستی ماجولس دی

I = انرشیای مؤمنت د بیم په صفری کرښه کی

علامه د r د مؤمنت د جهت سره تړون لری. څنګه چې په انځور 12-6 کی ښودل شوي، کله چې M مثبت وی، r د بیم په *برسیره* خوا غځیږی، او کله چې مؤمنت *منفي* وی، r د بیم په *لاندی* خوا غځیږی.



انځور 12-6

12.2 میلان او بیځایه کیدنه په انتیګریشن سره (SLOPE AND DISPLACEMENT BY INTEGRATION)

د ایلستیک منحني معادله په انځور 12-5A په کوردینات د u او x سره تعریف شوي. نو چې بیځایه کیدنه $u = f(x)$ پیرا کوومو کولای شو چې انحنا $(1/r)$ د u او x له مخی وټاکو. په اکثر کلکولس کتا بونو کی دا لاندی معادله ښودل شوی

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2v/dx^2}{[1 + (dv/dx)^2]^{3/2}} \qquad (12\text{–}3)$$

دا په معادله 12-2 ځاي په ځای کوو، مونږ لرو

$$\frac{d^2v/dx^2}{[1 + (dv/dx)^2]^{3/2}} = \frac{M}{EI} \qquad (12\text{–}4)$$

سربیره پر یوځو ساده هندسی بیمو او بارونو، ددی معادلی حل کول ستونزمن دي، ځکه چې دا د غیر خطي دویمی درجی د مشتق مساوات استازیتوب کوي . خوشبختانه دا کیدي شي چی تعدیل شي، ځکه چې ډیری د انجینری ډیزاین کوډونه د بیم یا شافټ اعظمي بیځایه کیدنه محدوده کړي . په پایله کې، د ایلستیک منحني *میلان*، کوم چې له dv/dx څخه ټاکل کیږي، به *خورا* کوچنی وي، او د هغې مربع به لا پسی کوچنی او د یوه واحد په پرتله د توجه وړ نه وی* . له دې امله منحنی لکه څنګه چی په معادله 3-12 کې تعریف شوی، کیدی شي د $1/r = d^2v/dx^2$ لخوا اټکل شي. د دې ساده کولو سره، معادله 4-12 کیدي شی اوس په دی لاندی توګه ولیکل شي:

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M}{EI} \qquad (12\text{–}5)$$

دا هم ممکن ده چی دا معادله په دوه بدیل شکلونو ولیکل شي. که چیری مور هر اړخ نسبت x ته مشتق ونیسو

$V = dM/dx$ (معادله 2-6) ځای په ځای کړو، مور لرو

$$\frac{d}{dx}\left(EI\frac{d^2v}{dx^2}\right) = V(x) \qquad (12\text{–}6)$$

یو ځل بیا مشتق اخلو او له $w= dV/dx$ (معادله 1-6) ګټه اخلو چی راکوي

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(EI\frac{d^2v}{dx^2}\right) = w(x) \qquad (12\text{–}7)$$

* *مثال 12.1 وګوري*

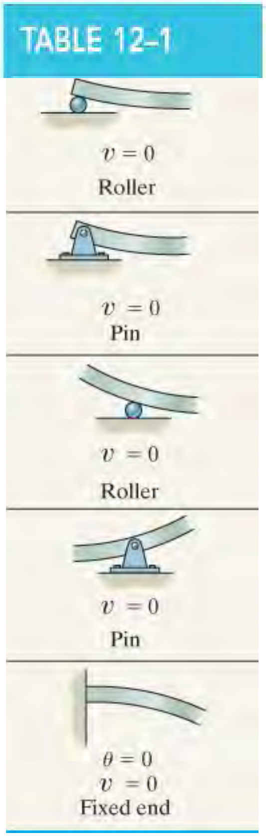
د زیاترو سوالو لپاره د **کوږوالي شخي** (EI) (***flexural rigidity***) په اوږدو د بیم کی به ثابت وی. که دا فرض کړو پورتنی پایلی کله چی سره تنظیم یي کړو دا لاندی دری معادلی به حاصل شي:

$$EI\frac{d^4v}{dx^4} = w(x) \qquad (12\text{–}8)$$

$$EI\frac{d^3v}{dx^3} = V(x) \qquad (12\text{–}9)$$

$$EI\frac{d^2v}{dx^2} = M(x) \qquad (12\text{–}10)$$

جدول 12-1



سرحدی شرایط (Boundary Conditions)

د دې معادلو حل اړتیا لري چی پرله پسې انتیګرال ونیول شو تر څو v ترلاسه شي. د هر انتیګرال لپاره، دا اړینه ده چی یو "د انتیګرال ثابت عدد" معرفي شي او بیا د ټولو ثابتواعدادو لپاره یي حل کړئ ، تر څو د یوې ځانګړې پوښتنې لپاره ځانګړی حل ترلاسه کړئ. د مثال په توګه، که د ویشل شوی بار w تابع د x اوله معادلې 8-12 کار واخیستل شي د انتیګریشن څلور ثابت اعداد باید وارزول شي؛ په هرصورت، دا عموما اسانه دي که داخلی مؤمنت M تابع د x و ټاکل شي او بیا معادله 10-12 و کارول شي ، به دی حالت کی به یوازې دوه ثابت اعداد د انتیګرشن باید ومونډل شي.

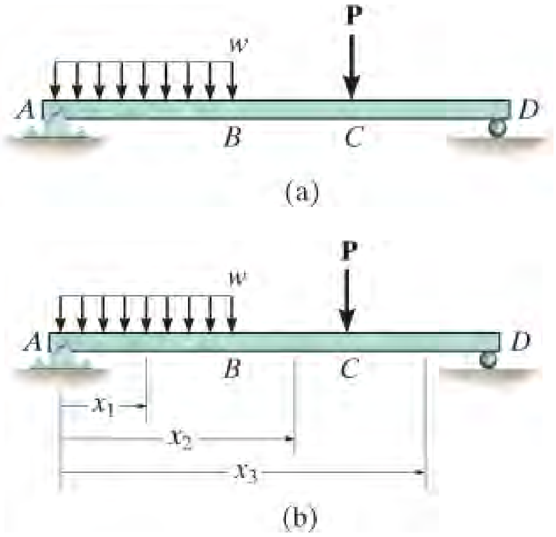
ډیری وختونه، د انتیګرشن ثابت اعداد له **سرحدی شرایطو** څخه ټاکل کیږي لکه د بیم لپاره سرحدی شرایط په جدول1-12 کی ښودل شوي. لکه څنګه چې یادونه وشوه، که بیم د یو رولر یا پین اتکاء ولري، نو بیا دا اړینه ده چې بې ځایه کیدل په دې اتکاء کې *صفر* وي . په کلک تړل شوی اتکاء کی میلان او بې ځایه کیدل دواړه صفر دي.

د دوام شرایط (Continuity Conditions).

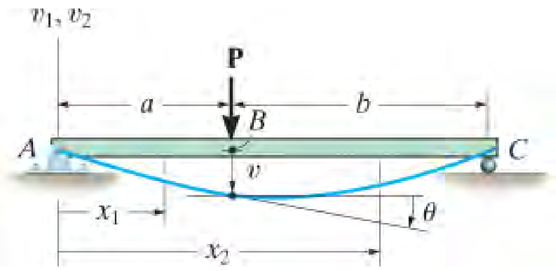
په 6.1 برخه کی وویل شول که چیرې بار په بیم دوام ولري ، یعنی څو ویشل شوی لړی او متمرکز بارونه ولري ، انځور 12-7a ، بیا د داخلی مؤمنت لپاره باید څو تابع ولیکل شي، هر یو تابع د دوو وقفو سیمو تر منځ کې د اعتبار وړ دي. د مثال په توګه، داخلي مؤمنت په سیمو AB، BC ، او CD کې د x_1 ، x_2، او x_3 کوردیناتو په توګه لیکل کیدی شي چې په انځور 12-7b کې ښودل شوي.

کله چې دا هر یو تابع دوه ځله انتیګرال ونیول شي، دا به دوه د انتیګرشن ثابت اعداد تولید کړي، او ځکه چې دا ټول ثابت اعداد نشي کیدی له سرحدی شرایطو څخه و ټاکل شي، ځیني باید د بار د دوام شرایطو په کارولوټاکل شي . د مثال په توګه پام وکړئ هغه بیم ته چې په انځور 8-12 کې ښودل شوي. دلته دوه x کوردینات په مبدا A کې غوره شوي. یوځل چې توابع (functions) د میلان او بیځایه کیدني لپاره ترلاسه شي، دوی باید *ورته ارزښتونه* د میلان او بیځایه کیدنی په B نقطه کې ورکړي ، په دې توګه د ایلستیک منحني به په فزیکي ډول به

دوامداره وي. په رياضي ډول دا د دوام شرايط عبارت دی په $u_1(a) = u_2(a)$ او $q_1(a) = q_2(a)$. دوی دواړو د انتيګريشن ثابتو اعدادو ارزولو لپاره کارول کيږي. يوځل چې دا توابع او د انتيګرشن ثابت اعداد وټاکل شي ، دوی به بيا ميلان او بيځايه کيدنه د (ايلستيک منحني) د بيم د هرې سيمې لپاره چې دوی د اعتبار وړ دي ورکړي .



انځور 12-7



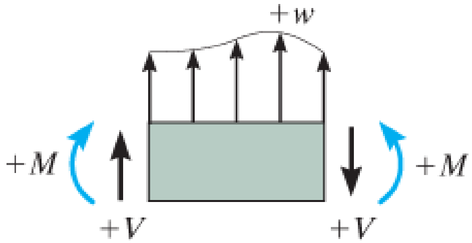
انځور 12-8

د علامی کنوانسیون او کوردينات (Sign Convention and Coordinates)

کله چې معادلي 12-8 تر 12-10 پورې پلي کوو، دا مهمه ده چې دw، V ، يا M لپاره هغه مناسبي نښي وکارول شی چې د دې معادلو د استخراج لپاره تاسيس شوی وې، انځور 12-9a .
همدارنګه، له هغه راهيسي*مثبت بيځايه کيدنه* u، *پورته* دی نو *مثبت ميلان* q به اندازه شي د x محور څخه د ساعت ستنې*په مقابل کې* کله چې x ښې خوا ته*مثبت وي*، انځور 9-12b . دا ځکه چې مثبت زياتوالی dx او dv د q زياتوالی رامينځته کوي چې د ساعت د ستنې مخالف جهت دی .
د ورته دليل له مخې، که د مثبت x کيڼ اړخ ته لاربښوونه وشي، نو q به د ساعت د ستنی په لور مثبت وي، انځور 9-12c .

له هغه وخته چې موږ dv/dx ~~ = 0 په پام کې نیولی، اصلي افقي اوږدوالی د بیم د محوراو د هغې د ایلستیک منحني قوس اوږدوالی به نږدې ورته وي. په بل عبارت، ds په انځور9-12 او 12-9c کې تقریبا سره مساوي دی په dx، ځکه چې . = $ds = \sqrt{(dx)2 + (dv)2}$ dx ~~ $\sqrt{1 + (dv/dx)2}$ په دی توګه نقطې په ایلستیک منحني به یوازې په عمودي بې ځایه شوي حالت کې وی، او نه په افقي ډول. همچنان ، له دې امله چې میلان q به خورا کوچنی وي ، نو ارزښت یې په ریډینونو کې په مستقیم ډول ټاکل کیدی شي له q چی هغه تخمین کیدی شی له

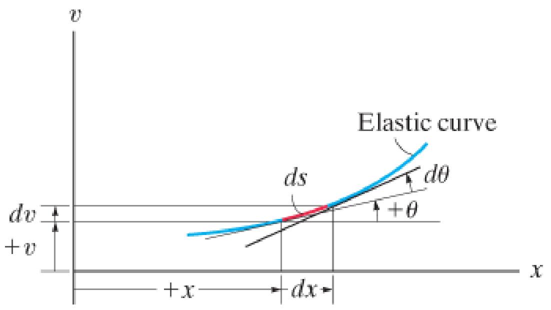
$$q = \tan q = dv/dx$$



Positive sign convention

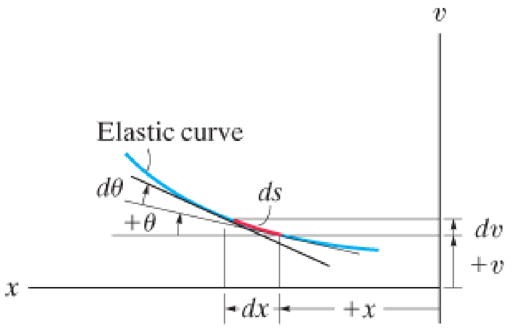
(a)

انځور 12-



Positive sign convention

(b)



Positive sign convention

(c)

د تحلیل کړنلاره

PROCEDURE FOR ANALYSIS

دا لاندې کړنلاره د بیم او شافټ د میلان او بیځایه کیدنې پیداکولو لپاره د انتیګریشن یوه طریقه وړاندې کوي.

ایلستیک منحني (Elastic Curve).

- د بیم د ایلستیک منحنی یو مبالغه لید رسم کړئ. یادونه دا ده چې صفر میلان او صفر بې ځایه کیدل په ټولو ثابت او کلکو اتکاو کې واقع کیږي، او صفر بې ځایه کیدل په ټولو پن او رولر اتکاو کې پیښیږي.
- د x او v کوردینات محورونه تاسیس کړئ. د ایکس (x) محور باید موازي وي په نه بیځایه شوي بیم ته او کولی شي په هر ځای کې د بیم په اوږدوکی مبداء ولري، د مثبت لوري ښي یا چپ خوا. مثبت v محور باید پورته لوري ته وښودل شي.
- که څو نادوامداره (discontinuous) بارونه شتون ولري، x کواردینات داسي تاسیس کړئ چې د بیم د هرې سیمې لپاره د اعتبار وړ وي. دا وقفي او کوردینات داسي غوره کړئ ترڅو دوی د الجبري کار تاسوته ساده کړي .

د بار او یا مؤمنت تابع (Load or Moment Function).

- په هره سیمه کې چې د x کواردینات شتون ولری، د بار w او داخلی مؤمنت M ارزښتونه د x تابع له پلوه ښکاره کړی. په ځانګړی توګه دا فرض کړی چې مومنټ مثبت دی کله چې د مومنټ د تعادل معادله د لاندی تابع د پیداکولو دپاره لیکی. $M=f(x)$

میلان او ایلستیک منحني (Slope and Elastic Curve).

- کله چې EI ثابت وي، کړی شی د بار معادله پلي کړئ $EI\, d^4v/dx^4 = w(x)$ ، د دی تر لاسه کولو لپاره څلورو انتیګریشنوته اړتیا لري تر څو دا حالت پلاس راوړی $v=v(x)$. یا د مؤمنت معادله $EI\, d^2u/dx^2 = M(x)$ ، پلی کړی کوم چې یوازې دووانتیګرشنو ته اړتیا لري. د هر انتیګریشن لپاره د انتیګریشن د ثابت ارقامو شاملول مهم دي.

میلان او ایلستیک منحني - (ادامه)

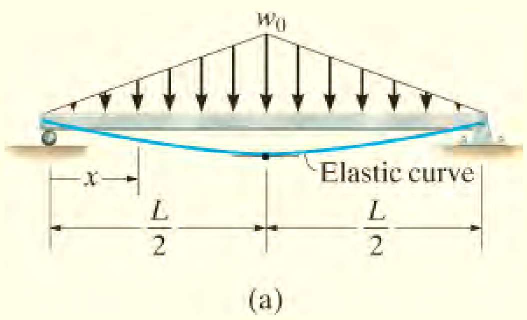
- ثابت ارقام د حدودو شرایطو په کارولو سره ارزول کیږي (جدول 1-12) او د دوام شرایط چې میلان او بې ځایه کیدلو لپاره ، په هغه ځایونو کې چیرې چې دوه تابع سره نیښلول کیږي، د تطبیق وړ دي . یوځل چی د ثابتو ارقامو ارزول وشي ، هغوی بیرته د میلان او بیځایه کیدنی په معادلو کی ځای پر ځای کړي. اوس کیدی شی په ځانګړو نقطو کې میلان او بې ځایه کیدل بیا په ایلستیک منحني و ټاکل شي.

ترلاسه شوي ارزښتونه په ګرافیک ډول د ایلستیک منحنی سکیچ په پرتله کیدو سره چیک کیدی شي. مثبت ارزښتونه د میلان لپاره د ساعت د ستنی په مقابل جهت کې به وي، کله چې د x محور مثبت په ښي خوا وي، او د ساعت د ستنی په لور کله چی x په کینه خوا مثبت غځول شوي وی. په دواړو حالتو کی، مثبت بې ځایه کیدنه پورته خواته ده .

مثالونه

مثال 12.1

په دی لاندی بیم چی په انځور 12-10a کی ښودل شوی یو مثلثي ویشلشوی بار وربانډی پلی شوي. اعظمی بیځایه کیدنه د بیم وټاکی. EI ثابت دی.



انځور 12-10

حل (SOLUTION)

ایلستیک منحني (Elastic Curve)

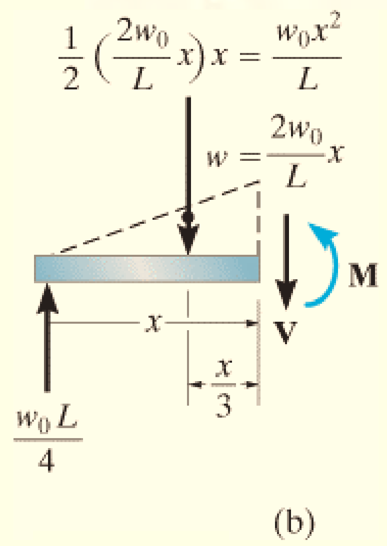
د متناظر والي له امله یوازي یو x کوردینات د حل لپاره اړین دی، په دی حالت کی $0 <= x < L/2$. د بیم بیځایه کیدل په انځور 12-10a کی ښودل شوي. اعظمی بیځایه کیدنه په نیمایی د بیم کی منځ ته راځی ، ځکه په هغه ټکی کی میلان صفر دي.

د مؤمنټ تابع (Moment Function)

د کینی برخی آزاد ډایګرام په انځور 12-10b کی ښودل شوي. د ویشلشوی بار لپاره معادله عبارت ده په

$$w = \frac{2w_0}{L}x \quad (1)$$

له همدی امله



انځور 12-10

$$\circlearrowleft +\Sigma M_{NA} = 0; \qquad M + \frac{w_0 x^2}{L}\left(\frac{x}{3}\right) - \frac{w_0 L}{4}(x) = 0$$

$$M = -\frac{w_0 x^3}{3L} + \frac{w_0 L}{4}x$$

میلان او ایلستیک منحني (Slope and Elastic Curve)

له معادلی 12-10 کار اخلو او دوه ځلي يي انتيګرال نيسو، موږ لرو:

$$EI\frac{d^2v}{dx^2} = M = -\frac{w_0}{3L}x^3 + \frac{w_0 L}{4}x \qquad (2)$$

$$EI\frac{dv}{dx} = -\frac{w_0}{12L}x^4 + \frac{w_0 L}{8}x^2 + C_1$$

$$EIv = -\frac{w_0}{60L}x^5 + \frac{w_0 L}{24}x^3 + C_1 x + C_2$$

د انتيګرشن ثابت اعداد له پلی کولو د سرحدی حالت ، کوم چې $u = 0$ په $x = 0$ کی، او له متناظر حالت $du/dx = 0$ په $x = L/2$. دا موږ ته حاصلوي

له همدی امله $C_1 = -\frac{5w_0 L^3}{192} \qquad C_2 = 0$

$$EI\frac{dv}{dx} = -\frac{w_0}{12L}x^4 + \frac{w_0 L}{8}x^2 - \frac{5w_0 L^3}{192}$$

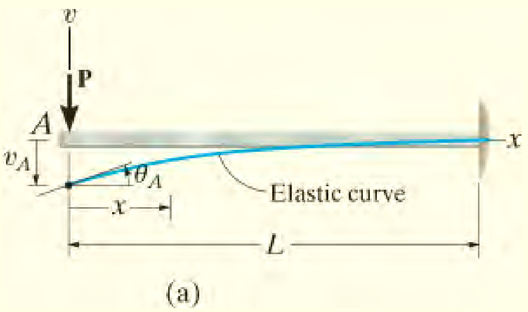
$$EIv = -\frac{w_0}{60L}x^5 + \frac{w_0 L}{24}x^3 - \frac{5w_0 L^3}{192}x$$

اعظمی بيځايه کيدنه په $x = L/2$ ، موږ لرو:

$$v_{max} = -\frac{w_0 L^4}{120EI} \qquad \textit{Ans.}$$

مثال 12.2

د انځور 12-11a کنټلیور بیم په پای کې یو بهرنی بار **P** پلی شوي. د ایلستیک منحني معادله وټاکي. د EI ارزښت ثابت دی.



انځور 12-11

حل (SOLUTION)

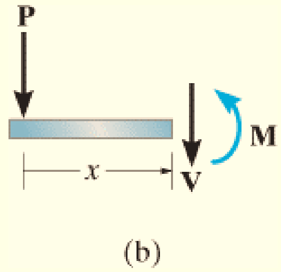
I:

ایلستیک منحني (Elastic Curve)

هغه بار چې بیم بیځایه کوي په انځور 12-11a کې ښودل شوي. په کتو سره ، داخلی مؤمنت د بیم په اوږدو کې په یوه x کوردینات کې ښودل کیدی شي.

د مؤمنت تابع (Moment Function)

له آزاد ډایګرام وینو چې مؤمنت په مثبت جهت عمل کړي، انځور 12-11b ، مورږ لرو



$$M = -Px$$

انځور 12-11 (تکرار)

میلان او ایلستیک منحني (Slope and Elastic Curve)

معادله 12-10 پلی کوو اوله دوو ځلو انتیګریشنه دا لاندې په لاس راځي:

$$EI\frac{d^2v}{dx^2} = -Px \qquad (1)$$

$$EI\frac{dv}{dx} = -\frac{Px^2}{2} + C_1 \qquad (2)$$

$$EIv = -\frac{Px^3}{6} + C_1x + C_2 \qquad (3)$$

د سرحدی شرایطو په پلی کولو سره $du/dx = 0$ په $x = L$ او $u = 0$ په $x = L$ کی چی معادلی 2 او 3 په لاندی ډول راځی:

$$0 = -\frac{PL^2}{2} + C_1$$

$$0 = -\frac{PL^3}{6} + C_1L + C_2$$

په دی توګه $C_1 = PL^2/2$ او $C_2 = -PL^3/2$. دا پایلی په معادله 2 او3 کی د $q = du/dx$ سره ځاي په ځای کوو او دا لاندی په لاس راځي

$$\theta = \frac{P}{2EI}(L^2 - x^2)$$

$$v = \frac{P}{6EI}(-x^3 + 3L^2x - 2L^3) \qquad Ans.$$

اعظمی میلان او بیځایه کیدنه په A $(x = 0)$ کی واقع کیږي، کوم چی :

$$\theta_A = \frac{PL^2}{2EI} \qquad (4)$$

$$v_A = -\frac{PL^3}{3EI} \qquad (5)$$

مثبت پایلي د q_A د ساعت د ستني په مقابل کې څرخیدل ښیي ، او منفي پایلې د u_A لپاره ښيي چې u_A ښکته خواته دی. دا پایلې د هغه سکچ سره چی په انځور 12-11a کی ښودل شوی ورته دی.

د دې لپاره چې د میلان او بیځایه کیدنې ریښتیني شدت په اړه یو څه نظر د A په پای کی ترلاسه شي، انځور 12-11a بیم په پام کې ونیسئ . دا بیم د 15 فوټ اوږدوالی لري، او د $P = 6$-kip بار ورباندی پلی شوي دی. او له A-36 فولادو څخه جوړ شوی، $E_{st} = 29\ (10^3)$ ksi لري. د برخی 11.2 د طریقو په کارولو، که دا بیم پرته د خوندیتوب فکتور کارولو سره ډیزاین شوی وي،

او د منلو وړ نارمل سترس داسې په پام کې نیول شوي چې هغه مساوي دی په $\sigma_{allow} = 36$ ksi ، بیا W12 X 26 به کافي د ضرورت وړ اندازه وی ($I = 204\ in^4$) له معادلو 4 او 5 موږ ترلاسه کوو:

$$\theta_A = \frac{6\ \text{kip}(15\ \text{ft})^2(12\ \text{in./ft})^2}{2[29(10^3)\ \text{kip/in}^2](204\ \text{in}^4)} = 0.0164\ \text{rad}$$

$$v_A = -\frac{6\ \text{kip}(15\ \text{ft})^3(12\ \text{in./ft})^3}{3[29(10^3)\ \text{kip/in}^2](204\ \text{in}^4)} = -1.97\ \text{in.}$$

له دی چې $\theta^2_A = (du/dx)^2 = 0.000270\ \text{rad}^2 << 1$ دا د معادلې 10-2 کارول توجیه کوی پر ځاي د دی چې د ډیری د قیقی معادلی 4-12 څخه کار واخلو. او همدا رنګه، څرنګه چې عددی پوښتنه د یوه کنتیلیور بیم لپاره په پام کی نیول شوي ده، موږ لوړ پایلی ارزښتونه دهغه بیمو په پر تله چې پین او یا رولر اتکاوی او یا کلک تړل شوی اتکاء ولري ، وینو.

حل II

دا پوښتنه کیدی شي چې د معادلې 8-12 په کارولو چې عبارت ده په $EI\, d^4u/dx^4 = w(x)$ هم حل شي.

دلته $w(x) = 0$ د $0 <= x =< L$ انځور 12-11a وګوري، نو بیا د یو ځل انتیګرشن کولو موږ ته معادلې 9-12 پلاس راځی، د مثال په توګه

$$EI\frac{d^4v}{dx^4} = 0$$

$$EI\frac{d^3v}{dx^3} = C'_1 = V$$

د شیبرا رزول د ثابت عدد $C`_1$ لپاره کیدی شي چې له $x = 0$ څخه په لاس راشي، څکه چې $V_A = -P$ ( منفي ده ، د بیم د علامو له مخې، انځور 12-9a ) . په دی توګه $C`_1 = -P$. د بیا انتیګریشن نه د معادلی 10-12 بڼه حاصلوی، چې:

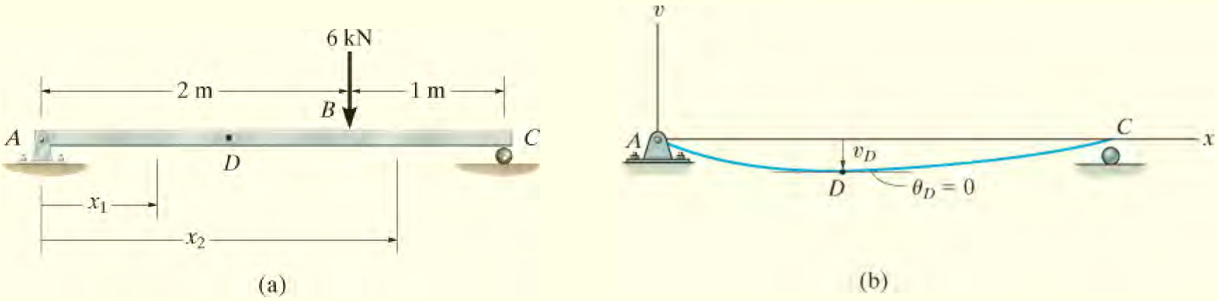
$$EI\frac{d^3v}{dx^3} = -P$$

$$EI\frac{d^2v}{dx^2} = -Px + C'_2 = M$$

دلته $M = 0$ په $x = 0$ نو بیا $C`_2 = 0$ او په پایله کی معادله 1 په لاس راځي ، او د حل د پخوا په شان په مخ ځي.

مثال 12.3

په ساده اتکاء بیم چی یو متمرکز بار وربانډی پلي شوی په انځور 12-12a کی ښودل شوي . اعظمی بیځایه کیدنه د بیم وټاکی. د بیم EI ثابت دی.



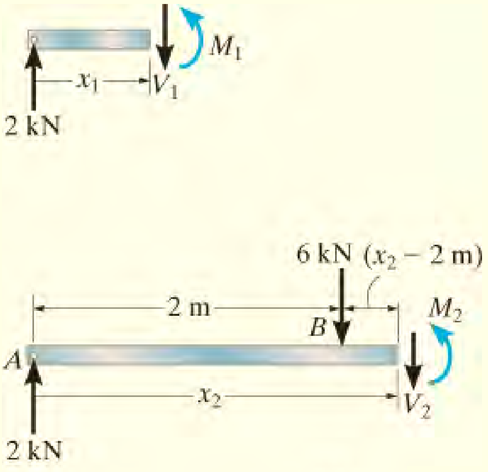
انځور 12-12

حل (SOLUTION)

ایلستیک منحني (Elastic Curve)

د بیم بیځایه کیدل په انځور 12-12b کی ښودل شوي. له دوو کوردیناتو باید کار واخیستل شي، ځکه چی مؤمنت په B کی تغیر مومي. موږ به له x_1 او x_2 کار واخلو، کوم چی دواړه یو مبداء په A کی لري.

د مؤمنت تابع (Moment Function) له آزاد ډایګرامه چی په انځور 12-12c کی ښودل شوي لیکلي شو:



$$M_1 = 2x_1$$

$$M_2 = 2x_2 - 6(x_2 - 2) = 4(3 - x_2)$$

(c) انځور 12-12 (تکرار)

میلان او ایلستیک منحني (Slope and Elastic Curve)

معادله 12-10 د M1 لپاره په $0 <= x_1 < 2\ m$ ځای په ځای کوو اوله دوو ځلو انتیګریشن ادا لاندی په لاس راځي:

$$EI\frac{d^2v_1}{dx_1^{\,2}} = 2x_1$$

$$EI\frac{dv_1}{dx_1} = x_1^2 + C_1 \qquad (1)$$

$$EIv_1 = \frac{1}{3}x_1^3 + C_1x_1 + C_2 \qquad (2)$$

په ورته ډول د M_2 لپاره په $2\ m < x_2 <= 3\ m$ لیکلی شو:

$$EI\frac{d^2v_2}{dx_2^{\,2}} = 4(3 - x_2)$$

$$EI\frac{dv_2}{dx_2} = 4\left(3x_2 - \frac{x_2^2}{2}\right) + C_3 \qquad (3)$$

$$EIv_2 = 4\left(\frac{3}{2}x_2^2 - \frac{x_2^3}{6}\right) + C_3\,x_2 + C_4 \qquad (4)$$

هغه څلور ثابت اعداد له سرحدي شرایطو په لاس راځی، یعني $x_1 = 0,\ \upsilon_1 = 0$ او

$x_2 = 3\ m,\ \upsilon_2 = 0$. همدا رنګه دوه د دوام شرایط په B کی عبارت دی په $d\upsilon_1/dx_1 = d\upsilon_2/dx_2$

په $x_1 = x_2 = 2m$ او $\upsilon_1 = \upsilon_2$ په $x_1 = x_2 = 2\ m$. له همدی امله :

$$v_1 = 0 \text{ at } x_1 = 0; \qquad 0 = 0 + 0 + C_2$$

$$v_2 = 0 \text{ at } x_2 = 3\text{ m}; \qquad 0 = 4\left(\frac{3}{2}(3)^2 - \frac{(3)^3}{6}\right) + C_3(3) + C_4$$

$$\left.\frac{dv_1}{dx_1}\right|_{x=2\text{m}} = \left.\frac{dv_2}{dx_2}\right|_{x=2\text{m}}; \quad (2)^2 + C_1 = 4\left(3(2) - \frac{(2)^2}{2}\right) + C_3$$

$$v_1(2\text{ m}) = v_2(2\text{ m});$$

$$\frac{1}{3}(2)^3 + C_1(2) + C_2 = 4\left(\frac{3}{2}(2)^2 - \frac{(2)^3}{6}\right) + C_3(2) + C_4$$

ددي حل موږته په لاس راکوي:

$$C_1 = -\frac{8}{3} \qquad C_2 = 0$$

$$C_3 = -\frac{44}{3} \qquad C_4 = 8$$

په دی توګه 1-4 معادلی کیږي:

$$EI\frac{dv_1}{dx_1} = x_1^2 - \frac{8}{3} \tag{5}$$

$$EIv_1 = \frac{1}{3}x_1^3 - \frac{8}{3}x_1 \tag{6}$$

$$EI\frac{dv_2}{dx_2} = 12x_2 - 2x_2^2 - \frac{44}{3} \tag{7}$$

$$EIv_2 = 6x_2^2 - \frac{2}{3}x_2^3 - \frac{44}{3}x_2 + 8 \tag{8}$$

د ایلستیک منحني په لیدو سره ، انځور 12-12b ، اعظمی بیځایه کیدنه په D ، په برخه AB کی ده. دلته میلان له معادلی 5 باید صفر وي.

$$x_1^2 - \frac{8}{3} = 0$$

$$x_1 = 1.633$$

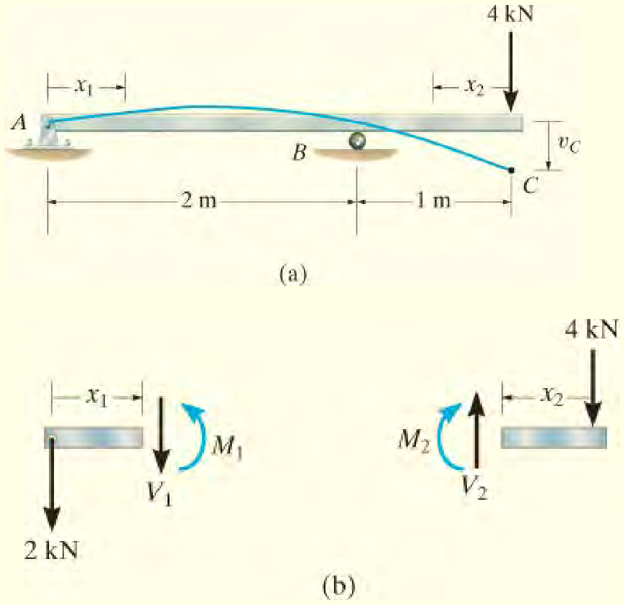
دا په معادله 6 کی ځای په ځای کوو او دا لاندی حاصل کیږي:

$$v_{max} = -\frac{2.90\ \text{kN}\cdot\text{m}^3}{EI} \qquad Ans.$$

منفي علامه ښيي چې بيځايه کيدنه په ښکته لور ده.

مثال 12.4

په آخر ددی لاندی ښودل شويي بيم، انځور 12-13a ، يو بار پلی شوي. بيځايه کيدنه په C کی و ټاکی. د بيم EI ثابت دی.



انځور 12-13

حل (SOLUTION)

ايلستيک منحني (Elastic Curve)

د بيم د شکل بدلون په انځور 12-13a کی ښودل شوي دي. د پلی شوي بار له امله دوه د x کوردينات به په پام کی ونيسو، يعني $0 <= x_1 < 2$ m او $0 <= x_2 < 1$ m کوم چې x2 له C په کيڼ لور لارښود شوي، دا ځکه چې د داخلی مؤمنت فورمول په آسانی سره جوړيدی شي.

د مؤمنت توابع (Moment Functions)

له آزاد ډايګرامه چې په انځور 12-13b کی ښودل شوي کار اخلو، او لرو:

$$M_1 = -2x_1 \qquad M_2 = -4x_2$$

میلان او ایلستیک منحني (Slope and Elastic Curve). معادله 12-10 پلی کوو

له $0 <= x_1 <= 2$:

$$EI\frac{d^2v_1}{dx_1^2} = -2x_1$$

$$EI\frac{dv_1}{dx_1} = -x_1^2 + C_1 \qquad (1)$$

$$EIv_1 = -\frac{1}{3}x_1^3 + C_1x_1 + C_2 \qquad (2)$$

له $0 <= x_2 <= 1\text{m}$:

$$EI\frac{d^2v_2}{dx_2^2} = -4x_2$$

$$EI\frac{dv_2}{dx_2} = -2x_2^2 + C_3 \qquad (3)$$

$$EIv_2 = -\frac{2}{3}x_2^3 + C_3x_2 + C_4 \qquad (4)$$

د انتیګریشن څلور ثابت اعداد له دریو سرحدی شرایطو مونډل کیږي، یعنی $\upsilon_1 = 0$ په $x_1 = 0$ ، $\upsilon_1 = 0$ په $x_1 = 2$ m او $\upsilon_2 = 0$ په $x_2 = 1$ m ، او یو شرط د تسلسل یا دوام معادله. دلته تسلسل د میلان په رولر کی اړتیا لری $d\upsilon_1/dx_1 = -d\upsilon_2/dx_2$ په $x_1 = 2$ m او $x_2 = 1$ m.

دلته په معادله کی منفي علامه له دی امله ده چې میلان مثبت اندازه کیږی خلاف د ساعت د ستني حرکت له بني جهت څخه ، او مثبت دی د ساعت د ستنی حرکت له کيڼ لور څخه، انځور 12-9 .

(تسلسل د بیځایه کیدني په B کی په مستقیم ډول په سر حدي شرطونو کی په پام کی نیول شوي، ځکه $u_1 = u_2 = 0$ په $x_1 = 2$ m او $x_2 = 1$ m). کله چی دا څلور شرطونه پلی شي دا لاندی پایلی په لاس راځي:

$$v_1 = 0 \text{ at } x_1 = 0; \qquad 0 = 0 + 0 + C_2$$

$$v_1 = 0 \text{ at } x_1 = 2\text{ m}; \qquad 0 = -\frac{1}{3}(2)^3 + C_1(2) + C_2$$

$$v_2 = 0 \text{ at } x_2 = 1\text{ m}; \qquad 0 = -\frac{2}{3}(1)^3 + C_3(1) + C_4$$

$$\left.\frac{dv_1}{dx_1}\right|_{x=2\text{ m}} = \left.\frac{dv_2}{dx_2}\right|_{x=1\text{ m}}; \qquad -(2)^2 + C_1 = -(-2(1)^2 + C_3)$$

له حل کولو وروسته موږ لرو:

$$C_1 = \frac{4}{3} \qquad C_2 = 0 \qquad C_3 = \frac{14}{3} \qquad C_4 = -4$$

ثابت اعداد C_3 او C_4 په معادله 4 کی ځاي په ځاي کوو، دا لاندی لیکلی شو:

$$EIv_2 = -\frac{2}{3}x_2^3 + \frac{14}{3}x_2 - 4$$

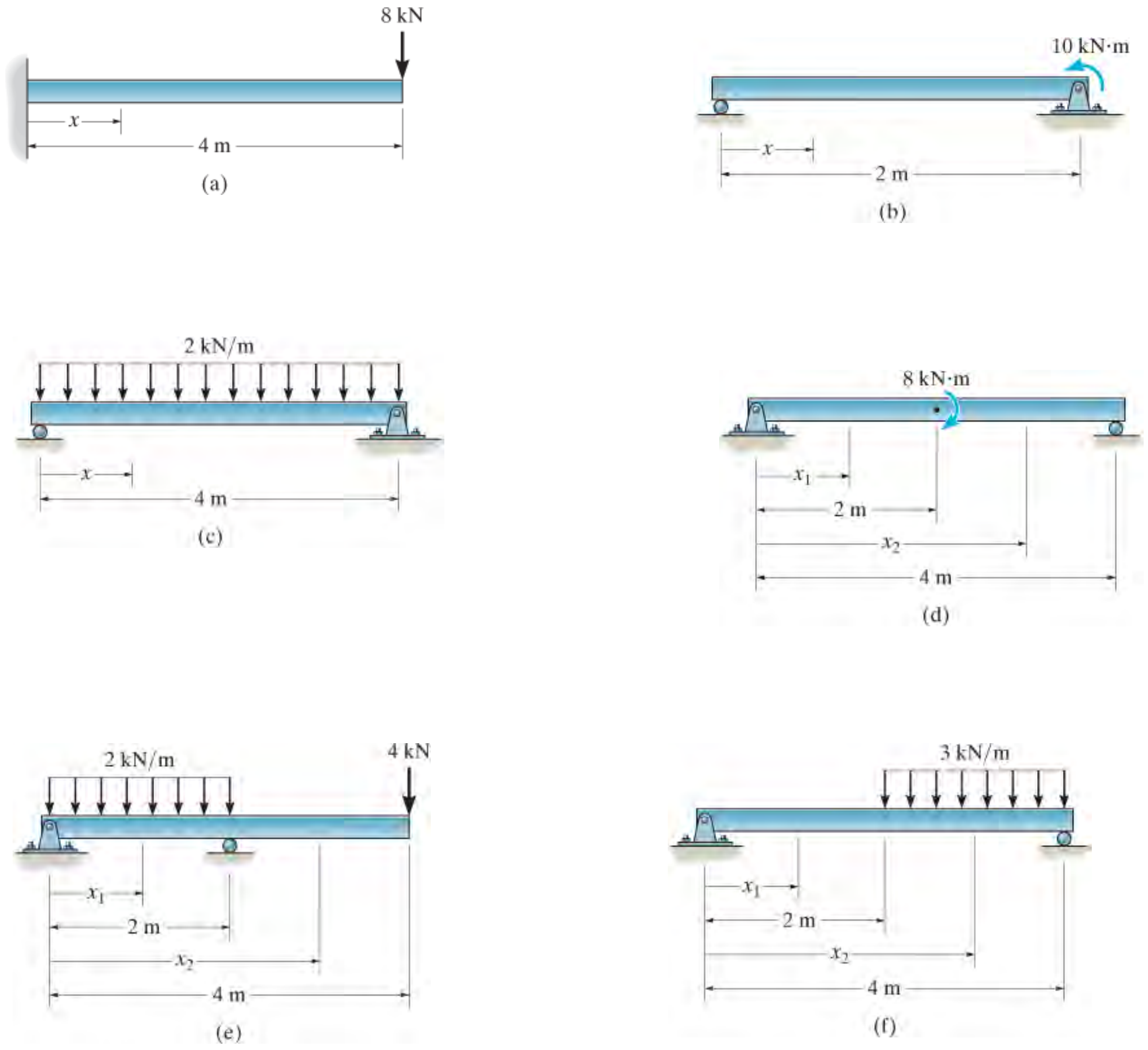
بیځایه کیدنه په C کی ټاکل کیږي له $x_2 = 0$. دا لاندی حاصل کیږي:

$$v_C = -\frac{4\text{ kN}\cdot\text{m}^3}{EI} \qquad \textit{Ans.}$$

لمړنی پوښتني

PRELIMINARY PROBLEMS

ل 12-1. د لاندی پوښتنو ته داخلی مؤمنت تابع د x او هم هغه اړوند سرحدی او د تسلسل شرطونه په ګوته کړي تر څو ایلستیک منحني د بیم لپاره معلوم کړي.

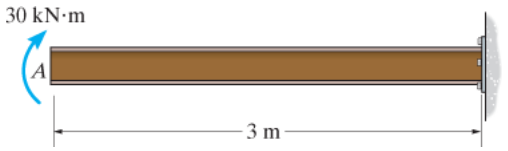


ل 12-1

بنسټيز پوښتني

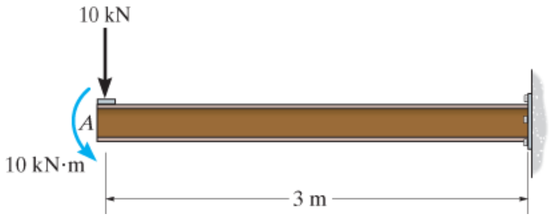
FUNDAMENTAL PROBLEMS

ب **12-1.** میلان او بیځایه کیدنه د کنتلیور بیم د پای A مشخص کړي. $E = 200$ GPa او $I = 65.0\ (10^6)\ \text{mm}^4$.



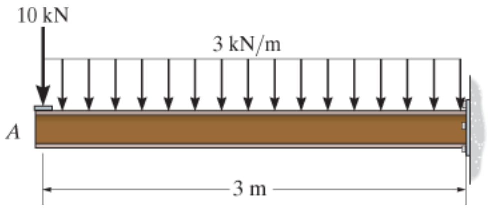
ل 12-1

ب **12-2.** میلان او بیځایه کیدنه د کنتلیور بیم د پای A مشخص کړي. $E = 200$ GPa او $I = 65.0\ (10^6)\ \text{mm}^4$.



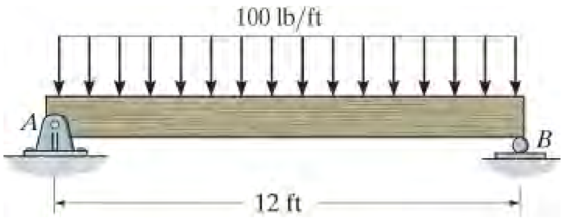
ل 12-2

ب **12-3.** میلان او بیځایه کیدنه د کنتلیور بیم د پای A مشخص کړي. $E = 200$ GPa او $I = 65.0\ (10^6)\ \text{mm}^4$.



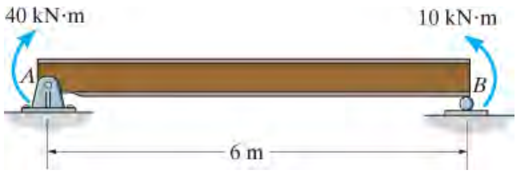
ل 12-3

ب **12-4.** اعظمی بیځایه کیدنه ددی لاندی بیم وټاکي. بیم له لرګیو جوړ شوي ، د ایلستیسیتي ماجولس يي $E_w = 1.5\ (10^3)$ ksi او مستطیلي غوځه برخه لري، کوم چې $b = 3$ in. او h=6 in. لوړوالي دي .



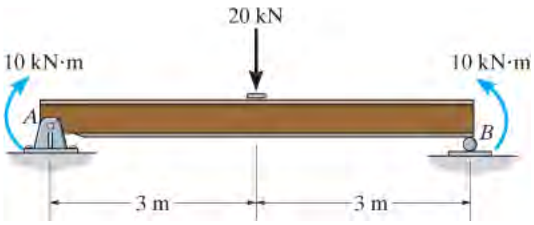
ل 12-4

ب **12-5.** اعظمی بیځایه کیدنه د دی لاندی ساده اتکاء بیم و ټاکي. $E = 200$ GPa او $I = 39.9(10^{-6})\text{m}^4$



ل 12-5

ب **12-6.** میلان د دی لاندی ساده اتکاء بیم په A کی وټاکي. $E = 200$ GPa او $I = 39.9\ (10^{-6})\ \text{m}^4$.



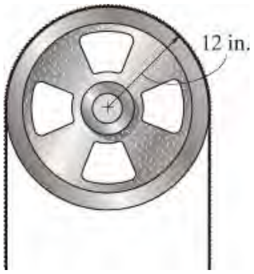
ل -12

سوالونه

PROBLEMS

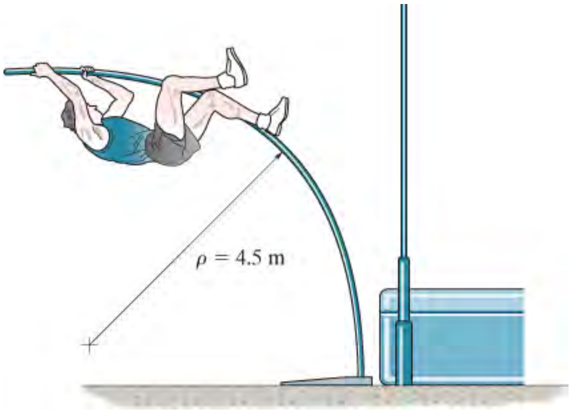
س **12-1.** یو د L2 فولادو پټه چی .0.125 in پنډوالی او .2 in سور لري، داسی تاو شوي چی د یوه دایروی قوس .600 in شعاع یي جوړه کړي. اعظمی کږیدونکي سترس په پټه کی پیدا کړي.

س 12-2. د L2 فولادو تاو شوی اره تر یوه پولي (pulley) چې .12 in شعاع لري تاوی شوي. اعظمی نارمل سترس په اره کی مشخص کړي. سور د اری .0.75 in او پنډوالی يي 0.0625 .in دی.



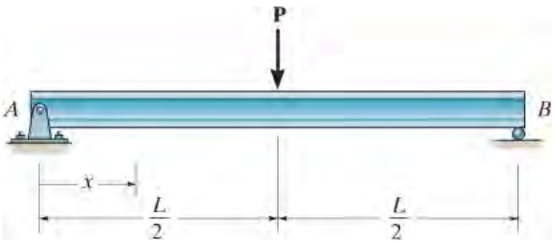
س 12-2

س 12-3. د يو سړي عکس په داسی حالت کی اخيستل شوی چې هغه په خاده يو نمايشي حرکت اجرا کوی. په دی حالت کی د خادی انحنا 4.5 m (متر) اټکل شوي ده. که چيری د خادی قطر 40 mm وی او له تقويه شوي پلاستيک شيشي جوړه وی کوم چې E_g = 131 GPa دي، اعظمی د کږيدو سترس په خاده کی وټاکي.



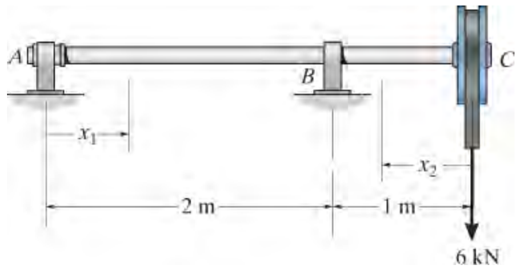
س 12-3

س 12-4*. د لاندی بيم لپاره د ايلاستيک منحنی معادله د x کوردينات سره داسی وليکی ، کوم چې $0 <= x < L/2$. په ټکی A کی ميلان او اعظمی بيځايه کيدنه وټاکي. EI ثابت دی.



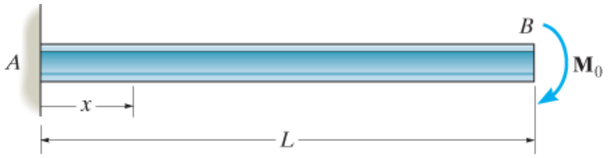
س 12-4

س 12-5. د یوه ډک دایروي شافټ بیځایه کیدنه په ټکی C کی وټاکي. د شافټ قطر 100 -mm دي. له $E = 200$ GPa کار واخلي.



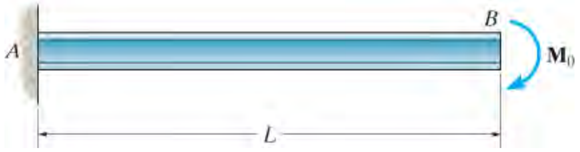
س 12-5

س 12-6. د دی لاندی کنتلیور بیم لپاره ایلستیک منحني مشخص کړي، په بیم یو کپل مؤمنت $\mathbf{M}_0$ پلی شوي. او همدا رنګه د بیم اعظمی میلان او اعظمی بیځایه کیدنه و ټاکي. EI ثابت دی.



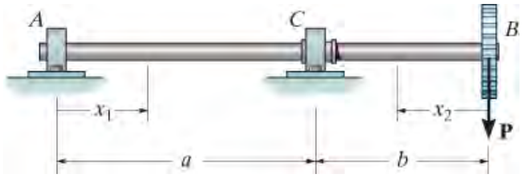
س 12-6

س 12-7. د یو A-36 فولادی بیم لوړوالي .10 in دی او یو ثابت مؤمنت $\mathbf{M}_0$ داسی وربانډی پلی شوي چی په بهرني فایبرو د بیم کی سترس $s_Y = 36$ ksi ته رسیږی.   د بیم د انحنا شعاع او اعظمی میلان او بیځایه کیدنه یې وټاکي.



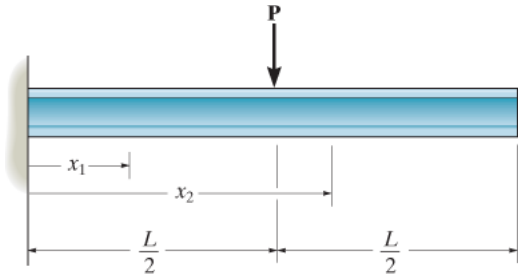
س 12-7

س *12-8. د دی لاندی بیم ایلستیک منحنی معادلی د x_1 او x_2 کوارډیناتو به کارولو سره و ټاکي. EI د بیم ثابت دی.



س 12-8

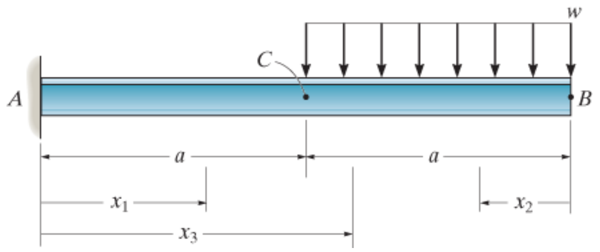
س 12-9. د دی لاندی بیم ایلستیک منحنی معادلی د x_1 او x_2 کوارډیناتو به کارولو سره و ټاکي . EI د بیم ثابت دی.



س 12-9

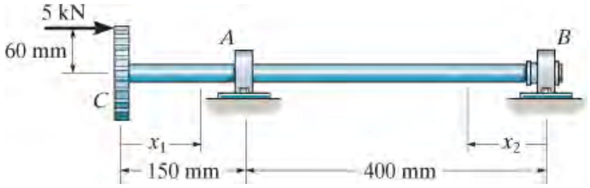
س 12-10. د دی لاندی بیم ایلستیک منحنی معادلی د x_1 او x_2 کوارډیناتو به کارولو سره و ټاکي. میلان په ټکی C او بیځایه کیدنه په B کی مشخص کړي. EI د بیم ثابت دی.

س 12-11. د دی لاندی بیم ایلستیک منحنی معادلی د x_1 او x_2 کوارډیناتو به کارولو سره و ټاکي. میلان په ټکی B او بیځایه کیدنه په C کی مشخص کړي. EI د بیم ثابت دی.



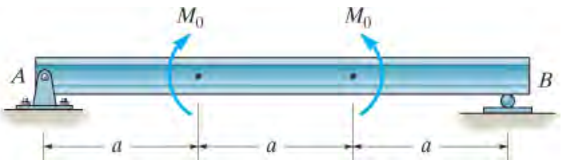
س 12-10/11

س 12-12*. ددی لاندی شافټ لپاره مؤمنت دایګرام رسم کړي، او بیا له دی دایګرامه بیځایه کیدنه یا د مرکزي کرښی ایلاستیک منحني د شافټ سکیچ کړي. د ایلستیک منحنی معادله په کارولو د کوردینات x_1 او x_2 سره و ټاکي. EI د بیم ثابت دی.



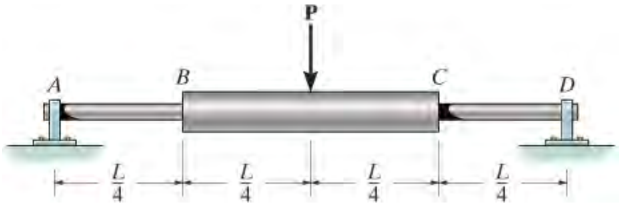
س 12-12

س 12-13. د لاندی بیم اعظمی بیځایه کیدنه او د بیم میلان په A کی وټاکي. EI د بیم ثابت دی.



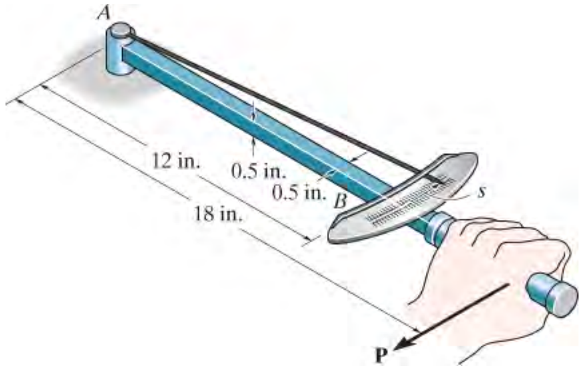
س 12-13

س 12-14. دا لاندی ساده اتکاء شافټ په برخه BC کی $2I$ انرشیايي مؤمنت او I انرشیايي مؤمنت په برخه AB او CD کی لري. اعظمی بیځایه کیدنه د شافټ د بار **P** د پلی کیدو له امله وټاکي.



س 12-14

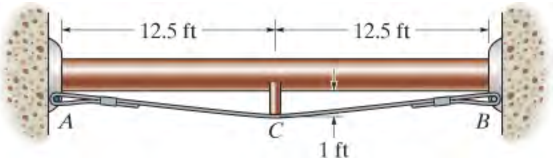
س 12-15. د نټ ټیګیدلو په بولت باندی، له تورک رینچ کار اخیستل شوي. که چیری د ګیج دایل یو تورک په اندازه د 60 lb. ft د بولت ټینګوالي لپاره و ښیي، قوه P د رینچ په لاستی او هغه فاصله s چی ستنيي په سکیل (scale) حرکت کوی معلوم کړي. فرض کړی چی د بیم AB برخه تغیر مومي. د مربع غوڅی برخی ابعاد . 0.5 in   په .0.5 in دی . $E = 29\ (10^3)$ ksi



س 12-15

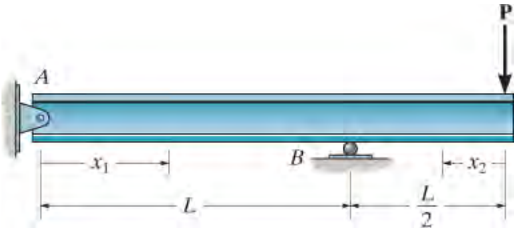
س *12-16. دا لاندی پایپ داسی اټکل کیدی شي چی په دواړو پای کی ساده اتکاء او په وسط کی یو سخت او کلک زین (saddle) اتکاء لري. دا زین په یو کیبل سره اینودل شوی او په دواړو اړخو په اتکاء سره تړلي دی. که چیری دا زین پایپ له بیځایه کیدنی په وسط کی و ساتي، هغه قوه

چې په کیبل کی منځ ته راځي و ټاکی. پایپ او هغه مایعات چې په کښي شتون لري مجموعی وزن يي 12.5 lb/ft دی. EI ثابت دی.



س 12-16

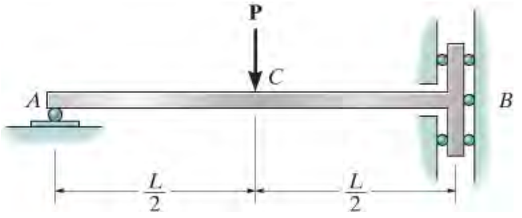
س 12-17. د دی لاندی بیم معادله د ایلستیک منحنی په کارولو د کوردینات x_1 او x_2 سره و ټاکي. د بیم اعظمی بیځایه کیدنه مشخص کړي. EI د بیم ثابت دی.



س 12-17

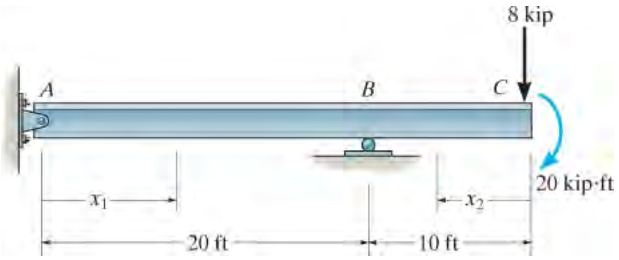
س 12-18. ددی لاندی میلی په B کی د رولر ممانعت (constraint) په واسطه ملاتړ شوي، چې عمودی بیځایه کیدل اجازه ورکوی ، اما محوري بار او مؤمنت لپاره ریکشن جوړیدی شي . که چیری په میله هغه ښودل شوي بار عمل وکړي، میلان په A او بیځایه کیدنه په C کی مشخص کړي.

س 12-19. په پوښتنه 12-18 کی بیځایه کیدنه په B د میلی وټکي.



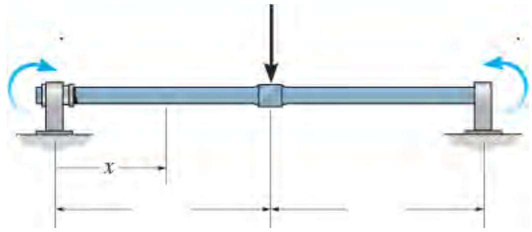
س 12-18/19

س 12-20*. د دی لاندی بیم د ایلستیک منحنی معادله په کارولو د کوردینات x_1 او x_2 سره و ټاکي. د بیم بیځایه کیدنه په C کی او میلان په A کی مشخص کړي. EI د بیم ثابت دی.



س 12-20

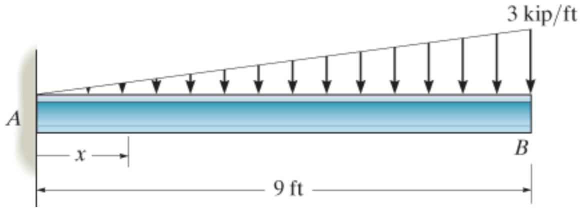
س 12-21. د ډک دایروی شافټ اعظمی بیځایه کیدنه وټاکي. شافټ له فولادو جوړ شوي دی، او E =200 GPa . قطر يي 100 mm دي.



س 12-21

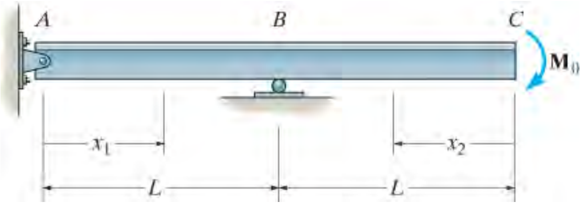
س 12-22. د دی لاندی کنتیلیور بیم W14 X 30 د ایلستیک منحنی معادله په کارولو د کوردینات x سره و ټاکي. د بیم اعظمي میلان او اعظمي بیځایه کیدنه وټاکی.

E =29 (10^3) ksi



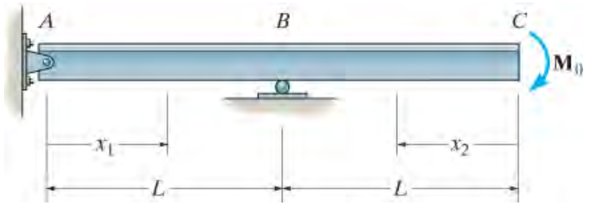
س 12-22

س 12-23. د دی لاندی بیم د ایلستیک منحنی معادله په کارولو د کوردینات x_1 او x_2 سره و ټاکي. د بیم بیځایه کیدنه او میلان په C کی وټاکی. EI د بیم ثابت دی.



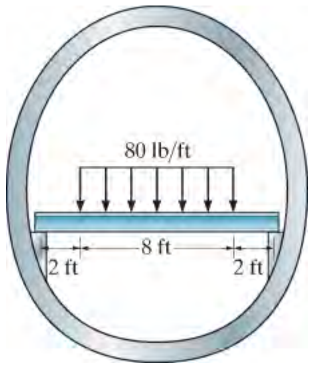
س 12-23

س **12-24***. د دی لاندی بیم د ایلستیک منحنی معادله په کارولو د کوردینات x_1 او x_2 سره و ټاکي. د بیم میلان په A کی مشخص کړي. EI د بیم ثابت دی.



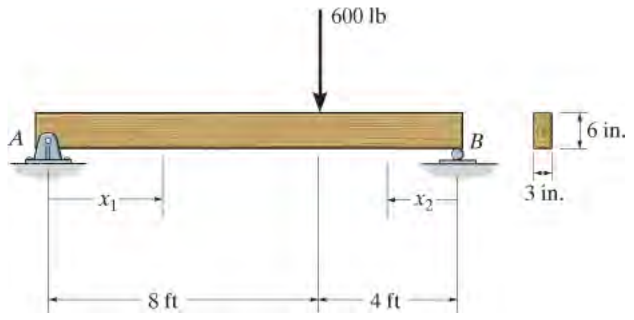
س 12-24

س **12-25**. دالوتکی د فرش بیم له پلی بار سره لاندی انځور کی ښودل شوي. داسی اټکل کړي چی فیوسولاج د الوتکي تنها عمودی ریکشنونه د بیم په پای کی جوړه وي. اعظمی بیځایه کیدنه د بیم وټاکی. EI د بیم ثابت دی.



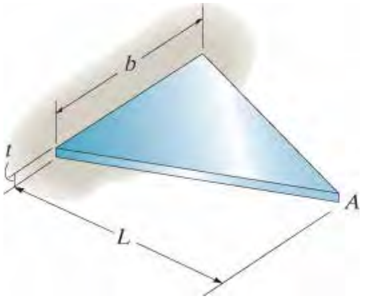
س 12-25

س **12-26**. د ساده اتکاء بیم اعظمی بیځایه کیدنه و ټاکي. بیم له لرګیو جوړ شوی چی د ایلستیسټی ماجولس يي E = 1.5(103) ksi دی.



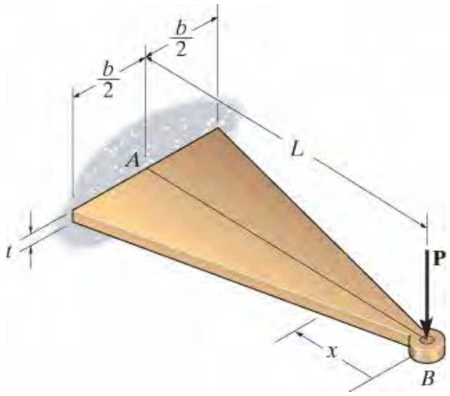
س 12-26

س 12-27. دا لاندی بیم له یو ډول موادو جوړ شوي چې خاص وزن يي g دي. بيځايه کيدنه او ميلان په پای A د بیم کی د وزن له کبله وټاکي. د موادو د ایلستیستی ماجولس E دی .



س 12-27

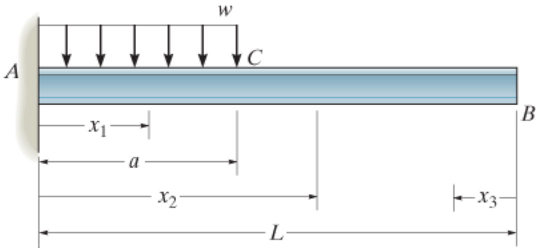
س 12-28* . په پای B د لاندی بیم کی میلان او اعظمی بيځايه کيدنه و ټاکی. دا کنتیلیور بیم مثلثي تختی په شکل جوړ شوي او ثابت ضخامت t لري. بیم له موادو جوړ شوی چی د موادو د ایلستیستی ماجولس يي E دی .



س 12-28

س 12-29 . د ایلستیک منحنی معادله په کارولو د کوردينات x_1 او x_2 سره و ټاکي. ميلان او بيځايه کيدنه په B کی وټاکی. EI د بیم ثابت دی.

س 12-30 . د ایلستیک منحنی معادله په کارولو د کوردينات x_1 او x_3 سره و ټاکي. ميلان او بيځايه کيدنه په C کی وټاکی. EI د بیم ثابت دی.



س 12-29/30

*12.3 غوڅ توابع (DISCONTINUITY FUNCTIONS)

د انتيګريشن طريقه، د بيم يا شافټ د ايلستيک منحني موندلو لپاره مناسب ده که چيرى بار يا داخلي مؤمنت د بيم په ټول اوږدوالي کې د دوامداره تابع په توګه څرګند شي. که چيرې په بيم باندى څو مختلف بارونه عمل وکړي، دا طريقه کيدى شي د پلې کولو لپاره ستونزې جوړې کړي، ځکه چې په جلا توګه دهربار او مؤمنت توابع د بيم د هرې سيمې لپاره چې تغير راځى وليکل شي. برسېره پردې، لکه څنګه چې په 12.3 او 12.4 مثالونو کې يادونه وشوه، د انتيګرشن ددى توابع د حلولو او موندلو دپاره د ثابت اعدادوپيداکولو ته اړتيا لرې چې له سرحدى او د تسلسل له شرايطو، دواړو څخه کاروا‌خستل شى تر څو د انتيګرشن ثابتو اعدادو ارزونه وشي.

په دې برخه کې، به موږ په داسى طريقه بحث وکړو تر څو چې د ايلستيک منحنى معادله د يوى واحدى اصطلاح څخه کاروا‌خستل شى، يا په مستقيم ډول د بيم له بار $w = w(x)$ ، او يا د بيم له داخلى مؤمنت $M = M(x)$ څخه، و موندل شي. بيا کله چې دا د w اصطلاح په $EI\, d^4u/dx^4$ کې ځای په ځای شي او څلور ځله انتيګريت شي، او يا که د M اصطلاح په $EI\, d^2u/dx^2$ $=w(x)$ کې ځای پر ځای شي او دوه ځله انتيګريت شي، د انتيګريشن ثابت اعداد به يوازې له $M(x)=$ سرحدي شرايطو څخه وټاکل شي.

غوڅ توابع (Discontinuity Functions). ددى لپاره چې بار په بيم او يا د داخلى مؤمنت يي په يوه واحده اصطلاح سره وښودل شي، موږ به دوه ډوله رياضى عمليات (operators) چې د ***غوڅ توابع (discontinuity functions)*** په نوم پيژندل شوي و کاروو.

دا بيمونه چې د سمنتو کڅوړي ورباندى ايښودل شوي ، د خونديتوب له پاره بايد د داسى مقاومت لپاره ډيزاين شي چې يو محدود اندازه بيځايه کيده ولري.

مکولي توابع (Macaulay Functions). د بيم يا شافټ د بيځايه کيدني لپاره ، د مکولي توابع چې وروسته د رياضي پوه دبيلو اچ مکولی (W. H. Macaulay) په نامه نومول شوي کولي شي د ويشيل شوی بار (distributed loading) د تشريح کولو لپاره و کارول شي. دا توابع په عمومی بڼه داسی ليکل کيدی شي

$$\langle x-a\rangle^n = \begin{cases} 0 & \text{for } x < a \\ (x-a)^n & \text{for } x \ge a \end{cases} \qquad (12\text{–}11)$$
$$n \ge 0$$

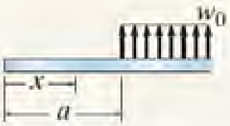
دلته x په بيم کی د يو نقطی موقعيت څرګند کوي ، او a هغه نقطه ده چې ويشلشوی بار پيل کيږي.
د مکولی تابع $(x\text{-}a)^n$ په زاويه سره ليکل کيږی او يا د موکولی براکيت چی له عادی تابع $(x\text{-}a)^n$ چې په بين د قوس کی ليکل کيږی تو پير يي وشي. لکه څنګه په معادله کی ښودل شوي، دا حالت يوازه هغه وخت يو شی دی چې $x >= a$ وی $\langle x-a\rangle^n = (x-a)^n$ که نه نو دا صفر وی. برسيره پر دی دا تابع د اعتبار وړ دی يوازي د طاقطي ارزښت لپاره کوم چې $n >= 0$ وی.

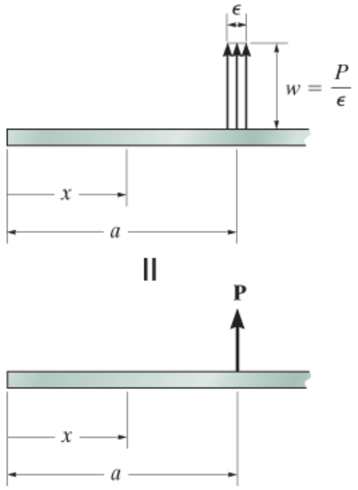
انتيګريشن د مکولي تابع د عادی تابع ورته قواعدو پيروی کوي ، د بيلګي په توګه :

$$\int \langle x-a\rangle^n dx = \; = \frac{\langle x-a\rangle^{n+1}}{n+1} + C \qquad (12\text{–}12)$$

د مکولي توابع د ويشلشوی او مثلثي بارونو لپاره په جدول 12-2 کی ښودل شوي. د مکولي توابع کارول د شيير لپاره $V = \int w(x)dx$ او مؤمنت $M = \int V\,dx$ هم په جدول کی ښودل شوي.

TABLE 12–2

Loading	Loading Function $w = w(x)$	Shear $V = \int w(x)dx$	Moment $M = \int V dx$
	$w = M_0\langle x-a\rangle^{-2}$	$V = M_0\langle x-a\rangle^{-1}$	$M = M_0\langle x-a\rangle^{0}$
	$w = P\langle x-a\rangle^{-1}$	$V = P\langle x-a\rangle^{0}$	$M = P\langle x-a\rangle^{1}$
	$w = w_0\langle x-a\rangle^{0}$	$V = w_0\langle x-a\rangle^{1}$	$M = \frac{w_0}{2}\langle x-a\rangle^{2}$
	$w = m\langle x-a\rangle^{1}$	$V = \frac{m}{2}\langle x-a\rangle^{2}$	$M = \frac{m}{6}\langle x-a\rangle^{3}$



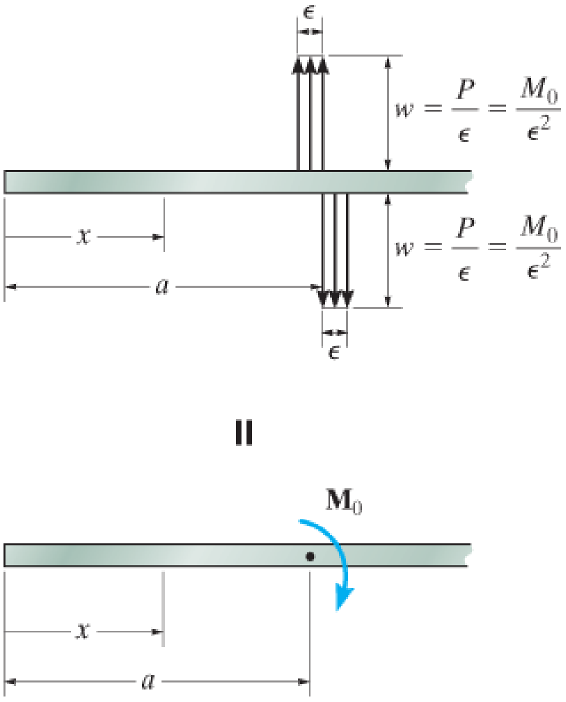
انځور 12-14

د یو ټکی توابع (Singularity Functions). دا توابع تمرکزی قواوی او مؤمنت کپل (couple moment) په بیم یا شافټ تشریح کوي. په ځانګړی توګه یوه تمرکزی قوه P یو خاص نمونه د ویشلسوی بار بار ده، کوم چې شدت يې $w = P/e$ او اوږدوالي e 0 à انځور 12-14 . ددی بار لاندی ډایګرام ساحه معادل ده په **P** ، مثبت پورته لور ته، او دا یوازي ارزښت لری کله چې $x = a$ وي. ددی پایلو ځرګندولو لپاره به موږ له سمبولیک لاری کار واخلو

$$w = P\langle x - a\rangle^{-1} = \begin{cases} 0 & \text{for } x \neq a \\ P & \text{for } x = a \end{cases} \qquad (12\text{–}13)$$

دا عبارت یا اصطلاح په **د یو ټکی تابع** ***(singularity function)*** پیژندل شوي، ځکه یوازی په ټکی $x = a$ کی د P ارزښت اخلی چیرته چی بار عمل کړي ، په غیر د هغه نور صفر دی.*

* *دی ته د واحد امپلس تابع یا ډایرک (Dirac delta) ډیلټا هم یادول شوي.*



انځور 12-15

په ورته ډول، يو کپل مؤمنت $\mathbf{M_0}$ ، مثبت د ساعت د ستنی په لور، کله چی 0 à e لمت لری، له دوو ويشلشوی بارونوپه لاس راځی ځنګه چی په انځور 12-15 کی ښودل شوي. دلته دا لاندی توابع خپل ارزښتونه تعريف کوي.

$$w = M_0\langle x - a\rangle^{-2} = \begin{cases} 0 & \text{for } x \neq a \\ M_0 & \text{for } x = a \end{cases} \qquad (12\text{–}14)$$

ددی لپاره چی ډاډ تر لاسه شي چی واحد د w ، قوه په اوږدوالي، ساتل کيږي طاقت n = -2 ، دي.

انتيګرشن د پورتنيو دوو توابعو د مشتقاتو قواعد تعقيبوي او هغه پايلی تر لاسه کوي چی له مکولي تابع څخه توپير لري. په ځانګړی توګه:

$$\int \langle x - a\rangle^n dx = \langle x - a\rangle^{n+1}, n = -1, -2 \qquad (12\text{–}15)$$

ددی فورمول په کارولو سره وګورئ چی څنګه M_0 او P کوم چی په جدول 12-2 کی ښودل شوی، يو واری انتيګريت شوی، بيا دوه ځلی تر څو چی داخلی شيير او مؤمنت دبيم په لاس راشي.

پلي کول د معادلی 12-11 تر 12-15 پورې، په مستقيم توګه د ځرګندولو وسيله د بار او يا د داخلی مؤمنت په بيم کی تابع د x کيږي. په هرصورت، د بهرنۍ بار کولو نښويا علامو ته بايد نږدې پاملرنه وشي. لکه څنګه چې پورته يادونه وشوه، او لکه څنګه چې په جدول 12-2 کې ښودل شوي، *متمرکز قواوی او ويشل شوي بارونه پورته لور ته مثبت دي، او کپل مؤمنت مثبت دي د ساعت د ګرځيدو په لور*. که چيرې دا د علامی کنوانسيون تعقيب شي، نو داخلي شيير او مؤمنت به د بيم د علامی کنوانسيون سره سم وي کوم چې په برخه 6.1 کې تاسيس شويوه .

عملی بڼه (Application).

د بېلګې په توګه څنګه غوڅ توابع پلي شي، تر څو بار او يا داخلی مؤمنت تشريح کړي، موږ به انځور 12-16a د بيم په پام کې ونيسو . دلته د ريکشن قوه 2.75-kN چی رولر جوړه کړي، انځور 12-16b مثبت ده په پورته لور ، او د 1.5-kN.m کپل مؤمنت هم مثبت دی ځکه چی د ساعت د ځرخيدو په لور عمل کوي. په پای کې، ذوذنقي بار کول منفي دي او د سوپرپوزيشن په بنسټ په مثلثي او يوشان ويشل شوی بار جلا شوي. له جدول 12-2 څخه، په هر نقطه x د بيم

کې بار کول له همدې امله عبارت دی په:

$$w = 2.75\,\text{kN}\langle x - 0\rangle^{-1} + 1.5\,\text{kN}\cdot\text{m}\langle x - 3\,\text{m}\rangle^{-2} - 3\,\text{kN/m}\langle x - 3\,\text{m}\rangle^{0} - 1\,\text{kN/m}^2\langle x - 3\,\text{m}\rangle^{1}$$

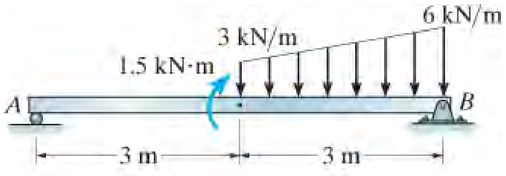
د ریکشن قوه په B کی نه ده شامله شوی ځکه چی د x ارزښت هیڅکله له 6 m لوی نه دی. په ورته ډول

له جدول 2-12 موږ لیکلي شو

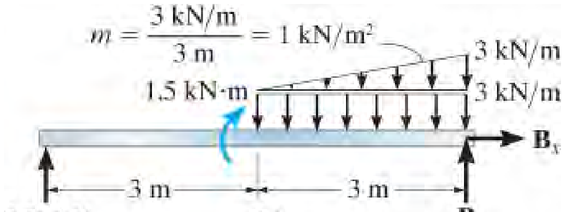
$$M = 2.75\,\text{kN}\langle x - 0\rangle^{1} + 1.5\,\text{kN}\cdot\text{m}\langle x - 3\,\text{m}\rangle^{0} - \frac{3\,\text{kN/m}}{2}\langle x - 3\,\text{m}\rangle^{2} - \frac{1\,\text{kN/m}^2}{6}\langle x - 3\,\text{m}\rangle^{3}$$

$$= 2.75x + 1.5\langle x - 3\rangle^{0} - 1.5\langle x - 3\rangle^{2} - \frac{1}{6}\langle x - 3\rangle^{3}$$

د بیم بیځایه کیدنه اوس وروسته له دی کله چی دا معادله پر له پسی دوه ځلی انتیګریت شي او د انتیګریشن ثابت ارقام له سرحدی شرایطو کوم چی بیځایه کیدنه په A او B کی صفر دی و ټاکل شي.



(a)



(b)

انځور 16-12

د تحليل کړنلاره

PROCEDURE FOR ANALYSIS

دا لاندې کړنلاره د غوڅو توابع کارولو لپاره ميتود چمتو کوي تر څو د بيم ايلستيک منحني ور سره و ټاکل شي. دا طريقه په ځانګړې توګه د بيمونو يا د شافټونو پوښتنو د حل لپاره ګټوره ده. هغه بيمونه او شافټونه چې څو *ډوله بارونه* وربانډې پلې شوي وی، ځکه چې د انټيګريشن ثابت ارقام *يوازې* د سرحدی شرايطو په کارولو سره ارزول کيدی شي، پداسې حال کې چې د مطابقت (compatibility) شرايط په اوتومات ډول مطمين کيږي.

ايلستيک منحني (Elastic Curve).

- د بيم ايلستيک منحني سکيچ جوړه کړئ او سرحدی شرايط په اتکاء کی وپيژنئ.
- صفر بې ځايه کيدنه په ټولو پنونو او رولرونو کې واقع کيږي، او صفر ميلان او صفر بې ځايه کيدنه په کلک تړل شوی اتکاء کې پيښيږي.
- محور د x تاسيس کړئ ترڅو دا ښي خوا ته وغزيږي، او مبداء لري د بيم په چپ پای کې.

د بار او يا مؤمنت تابع (Load or Moment Function).

- د اتکاء ريکشنونه محاسبه کړئ او بيا د غوڅ توابع ، جدول 2-12 ، څخه کار واخلئ تر څو بار w او يا داخلی مؤمنت M تابع د x تشريح کړي.
- ډاډ ترلاسه کړئ چې د هر بار کولو لپاره د علامه کنوانسيون تعقيب کړئ.
- په ياد ولرئ چې ويشل شوي بارونه بايد د بيم ښی پای ته وغځول شي تر څو د اعتبار وړ وي. که دا واقع نه شي، نو له سپرپوزيشن طريقه وکاروئ، کوم چې په مثال 12.6 کې ښودل شوي.

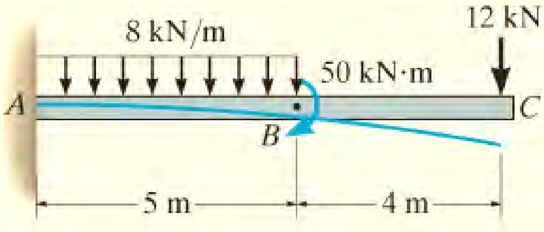
ميلان او ايلستيک منحني (Slope and Elastic Curve).

- w په معادله $EI\,d^4u/dx^4 = w(x)$ ، يا M د مؤمنت منحني معادله $EI\,d^2v/dx^2 = M$ کی ځای په ځای کړئ ، اوبيا انټيګريټ يې کړي تر څو دبيم ميلان او بی ځايه کيدنه ترلاسه کړي.
- دانټيګرشن ثابت ارقام د سرحدی شرايطو په کارولو سره مشخص کړي، او دا ثابت ارقام بيا په ميلان او بيځايه کيدنه معادلو کی ځاي په ځای کړي تر څو وروستي پايلی تر لاسه شي.
- کله چې په هره نقط د بيم کی ميلان او بی ځايه کيدنه مشخص شي، مثبت ميلان په مخالف جهت د ساعت د حرکت ، او مثبت بيځايه کيدنه پورته لور ته دی.

مثالونه

مثال 12.5

دی لاندی کنتیلیور بیم ، انځور 12-17a ، لپاره د ایلستیک منحني معادله وټاکي. د EIارزښت ثابت دی.



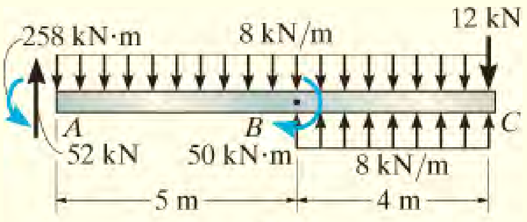
(a)

حل (SOLUTION)

ایلستیک منحنی (Elastic Curve).

بار په بیم عامل د بیځایه کیدني ، لکه څنګه چې په انځور 12-17a کی ښودل، شوي. سرحدی شرایط اړین لری چې میلان او بېځایه کیدنه په A کی باید صفر وي.

د بار تابع (Loading Function). د اتکاء ریکشنونه په A کی محاسبه شوی او په آزاد ډایګرام 12-17b کی ښودل شوي. څکه چې ویشلشوی بار په انځور 12-17a کی تر C پوری غځول شوي نه دي، مورږ به له سوپرپوزیشن د بار څنګه چې په انځور 12-17b کی ښودل شوی کار واخلو تر څو هغه استازیتوب د ورته اغیزه وکړي. د علامی کنوانسیون په اساس د بیم بار عبارت دی په:



(b)

انځور 12-17

$$w = 52\text{ kN}\langle x-0\rangle^{-1} - 258\text{ kN}\cdot\text{m}\langle x-0\rangle^{-2} - 8\text{ kN/m}\langle x-0\rangle^{0} + 50\text{ kN}\cdot\text{m}\langle x-5\text{ m}\rangle^{-2} + 8\text{ kN/m}\langle x-5\text{ m}\rangle^{0}$$

په پورتنی معادله کی 12-kN بار شامل نه دي، دا ځکه چی x نه شي کولاي چی له ۹ متر ډیر شي. ځکه چی $dV/dx = w(x)$ دی، بیا په انتیګریشن او د انتیګریشن ثابت ارقامو په پام کی نه نیولو سره، ځکه چی ریکشنونه په A کی د بار په تابع کی شامل دی، موږ لرو:

$$V = 52\langle x-0\rangle^0 - 258\langle x-0\rangle^{-1} - 8\langle x-0\rangle^1 + 50\langle x-5\rangle^{-1} + 8\langle x-5\rangle^1$$

سربیره پر دی، $dM/dx = V$ ، نو بیا انتیګریشن حاصل ورکوي:

$$M = -258\langle x-0\rangle^0 + 52\langle x-0\rangle^1 - \frac{1}{2}(8)\langle x-0\rangle^2 + 50\langle x-5\rangle^0 + \frac{1}{2}(8)\langle x-5\rangle^2$$
$$= (-258 + 52x - 4x^2 + 50\langle x-5\rangle^0 + 4\langle x-5\rangle^2)\ \text{kN}\cdot\text{m}$$

دا ورته پایلی په مستقیم ډول له جدول 12-2 په لاس راتلی شي.

میلان او ایلستیک منحني (Slope and Elastic Curve). په کارولو د معادلی 12-10 او دوه ځلی انتیګریشن سره موږ لرو:

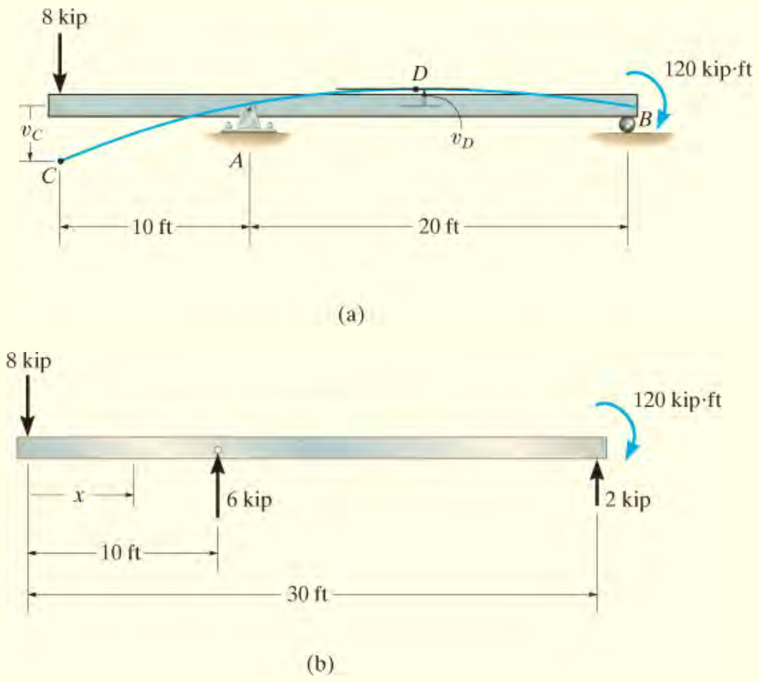
$$EI\frac{d^2v}{dx^2} = -258 + 52x - 4x^2 + 50\langle x-5\rangle^0 + 4\langle x-5\rangle^2$$
$$EI\frac{dv}{dx} = -258x + 26x^2 - \frac{4}{3}x^3 + 50\langle x-5\rangle^1 + \frac{4}{3}\langle x-5\rangle^3 + C_1$$
$$EIv = -129x^2 + \frac{26}{3}x^3 - \frac{1}{3}x^4 + 25\langle x-5\rangle^2 + \frac{1}{3}\langle x-5\rangle^4 + C_1x + C_2$$

څرنګه چی $dv/dx = 0$ په $C_1 = 0$ ، $x = 0$ او $v = 0,$ بیا $C_2 = 0$. په دی توګه:

$$v = \frac{1}{EI}\left(-129x^2 + \frac{26}{3}x^3 - \frac{1}{3}x^4 + 25\langle x-5\rangle^2 + \frac{1}{3}\langle x-5\rangle^4\right)\ \text{m} \qquad \textit{Ans.}$$

مثال 12.6

دی لاندی بیم ، کوم چې په انځور 12-18a کې ښودل شوي اعظمی بیځایه کیدنه يي و ټاکی. د EI بیم ثابت دی.



انځور 12-18

حل (SOLUTION)

ایلستیک منحني (Elastic Curve).

د بیم بیځایه کیدني ، په انځور 12-17a کې ښودل شوي. سرحدی شرایط اړین لری چې بیبځایه کیدنه په A او B کی باید صفر وي.

د بار تابع (Loading Function). د اتکاء ریکشنونه محاسبه شوی او په آزاد ډایګرام 12-18b کی ښودل شوي. د بار تابع (loading function) د بیم لپاره عبارت دی په

$$w = -8 \text{ kip} \langle x - 0 \rangle^{-1} + 6 \text{ kip} \langle x - 10 \text{ ft} \rangle^{-1}$$

په دی کی کپل مؤمنت او قوه په B کی شامل نه دی، ځکه چې دوی په ښي پای د بیم کی موقعیت لري، او x له 30ft فوټ زیاتوالی نشي کړي. کله چې انتیګرال د $dV/dx = w(x)$ مورړ لرو

$$V = -8\langle x - 0\rangle^0 + 6\langle x - 10\rangle^0$$

په ورته ډول $dM/dx = V$ په لاس راکوي

$$M = -8\langle x - 0\rangle^1 + 6\langle x - 10\rangle^1$$
$$= (-8x + 6\langle x - 10\rangle^1)\ \text{kip}\cdot\text{ft}$$

په یاد ولري چې دا مساوات په مستقیم ډول په کارولو د جدول 2-12 د مؤمنت لپاره په لاس راځي.

میلان او ایلستیک منحني (Slope and Elastic Curve). دوه ځلي انتیګریشن حاصل کوي

$$EI\frac{d^2v}{dx^2} = -8x + 6\langle x - 10\rangle^1$$
$$EI\frac{dv}{dx} = -4x^2 + 3\langle x - 10\rangle^2 + C_1$$
$$EIv = -\frac{4}{3}x^3 + \langle x - 10\rangle^3 + C_1x + C_2 \qquad (1)$$

له معادلی 1 ، سرحدی شرایط $u = 0$ په $x = 10$ ft او $u = 0$ په $x = 30$ ft حاصل کوي

$$0 = -1333 + (10 - 10)^3 + C_1(10) + C_2$$
$$0 = -36\,000 + (30 - 10)^3 + C_1(30) + C_2$$

ددی معادلو له حل کولو سره ارقام C_1 او C_2 په لاس راځی، او موږ لرو: $C_1 = 1333$ او $C_2 = -$ 12000 . په دی توګه

$$EI\frac{dv}{dx} = -4x^2 + 3\langle x - 10\rangle^2 + 1333 \qquad (2)$$

$$EIv = -\frac{4}{3}x^3 + \langle x - 10\rangle^3 + 1333x - 12\,000 \qquad (3)$$

له انځور 12-18a اعظمی بيځايه کيدنه کيدی شي چی په C يا په D کوم چی ميلان $du/dx = 0$.
په C کی د بيځايه کيدني لپاره په معادله 3 کی د $x = 0$ ځای په ځای کړي. موږ لرو

$$v_C = -\frac{12\,000 \text{ kip}\cdot\text{ft}^3}{EI} \qquad \textit{Ans.}$$

منفي علامه ښيي چی بيځايه کيدنه ښکته لور ته ده، انځور 12-17a. د نقطی D مونلو لپاره له معادلي 2 کار واخلي د $x > 10$ ft او $du/dx = 0$. دا به ورکوي

$$0 = -4x_D^2 + 3(x_D - 10)^2 + 1333$$

$$x_D^2 + 60x_D - 1633 = 0$$

د مثبت جذر حل کولو لپاره،

$$x_D = 20.3 \text{ ft}$$

له همدی امله له معادلی 3 لرو

$$EIv_D = -\frac{4}{3}(20.3)^3 + (20.3 - 10)^3 + 1333(20.3) - 12\,000$$

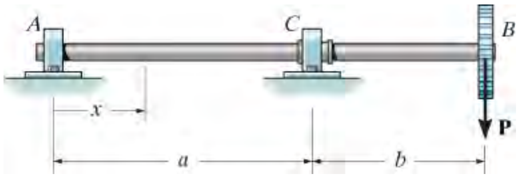
$$v_D = \frac{5006 \text{ kip}\cdot\text{ft}^3}{EI}$$

دا ارزښت له u_c پرتله کولو سر ه موږ وینو چی $u_{max} = v_c$.

سوالونه

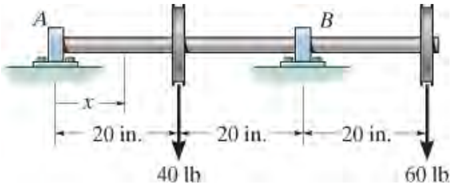
PROBLEMS

س 12-31. دا لاندې شافت په A کې جورنال بيرينګ او په B کې د ټرسټ بيرينګ اتکاوې لري. د ايلسټيک منحني معادله يې مشخص کړې. EI ثابت دی.



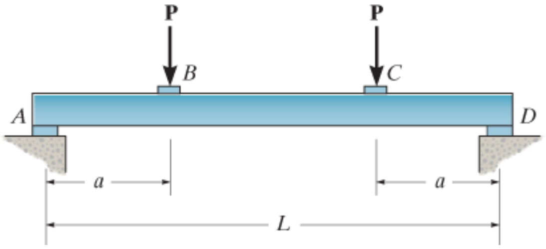
س 12-31

س *12-32. دا لاندې شافټ د دوو څرخکې (Pulley) بارونو ملاتړ کوي. د ايلسټيک منحني معادله يې مشخص کړې. EI ثابت دی.



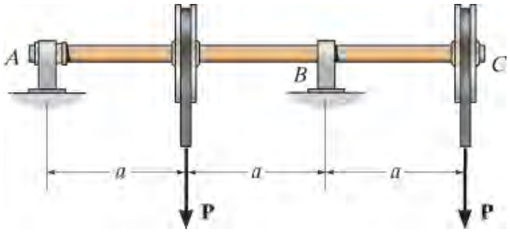
س 12-32

س 12-33. بيم له سيراميکي (ceramic) موادو جوړه شوې. که چيرې ښودل شوې ايلسټيک بار ورباندې پلی شوې وی،ا و انرشيايي مؤمنت يې I او دبيم اعظمی بيځايه کيدنه په مرکز د بيم کی D اندازه شوي وی، د ايلسټيستی ماجولس E يې و ټاکې. اتکاوی په A او D کی يوازې عمودی ريکشنونه جوړه وي.



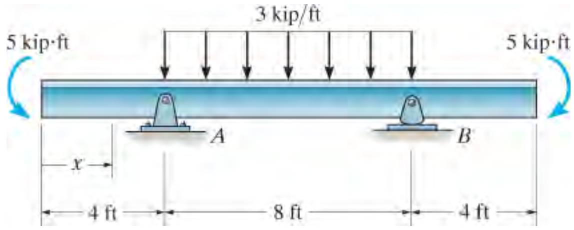
س 12-33

س 12-34. د ایلستیک منحني معادله ، اعظمی بیځایه کیدنه په برخه AB ، او بیځایه کیدنه په C کی مشخص کړي. EI ثابت دی.



س 12-34

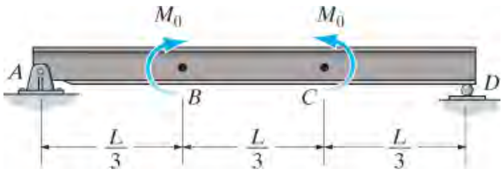
س 12-35. په بیم بنودل شوی بار پلی شوي. د ایلستیک منحني معادله یي مشخص کړي. EI ثابت دی.



س 12-35

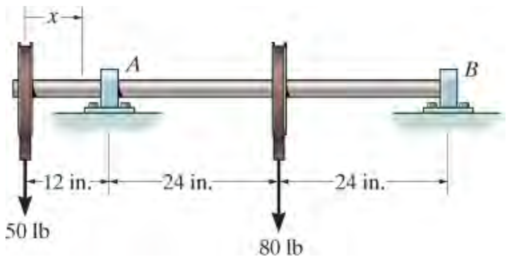
س *12-36. د ایلستیک منحني معادله ، میلان په A کی، او بیځایه کیدنه په B ، کی مشخص کړي. EI ثابت دی.

س 12-37. د ایلستیک منحني معادله ،او اعظمی بیځایه کیدنه د ساده اتکاء بیم مشخص کړي. EI ثابت دی.



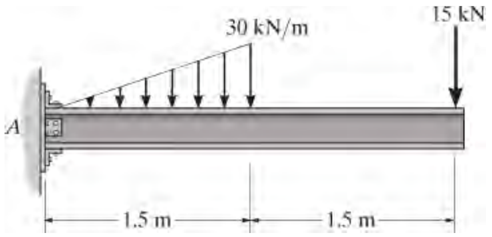
س 12-36/37

س 12-38. دا لاندی شافټ د دوو څرخکی (Pulley) بارونو ملاتړ کوي. د ایلستیک منحني معادله یي مشخص کړي. EI ثابت دی.



س 12-38

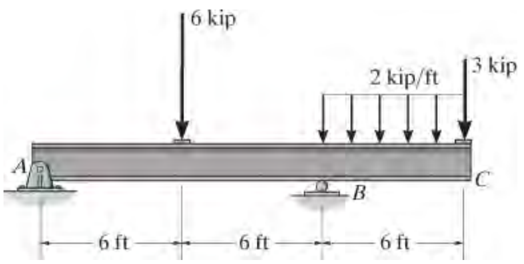
س 12-39. اعظمی بیځایه کیدنه د کنتیلیور بیم مشخص کړي. له $E = 200$ GPa او $I = 65.0$ (10^6) mm^4 کار واخلي.



س 12-39

س 12-40*. میلان په A او بیځایه کیدنه په پای C د وتلي بیم و ټاکي. له $E = 29$ (10^3) ksi او $I = 204.0$ in^4 کار واخلي.

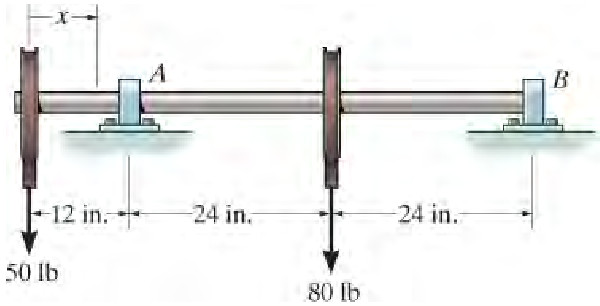
س 12-41. اعظمی بیځایه کیدنه په برخه AB د وتلي بیم و ټاکي. له $E = 29$ (10^3) ksi او $I = 204.0$ in^4 کار واخلي.



س 12-40/41

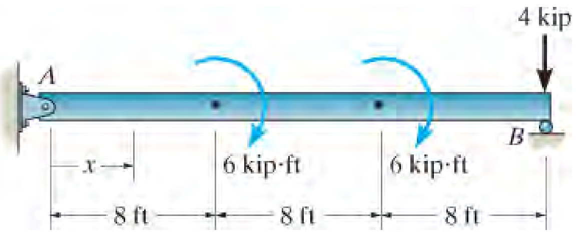
س 12-42. دا لاندی شافټ د دوو څرخکي (Pulley) بارونو ملاتړ کوي. میلان د شافټ په A او B کی مشخص کړي. دواړه بیرینګ یوازي عمودی ریکشنونه په شافټ جوړه وي.

EI ثابت دی.



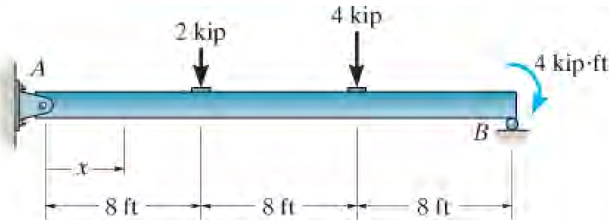
س 12-42

س 12-43. د ایلستیک منحني معادله مشخص کړي. EI ثابت دی.



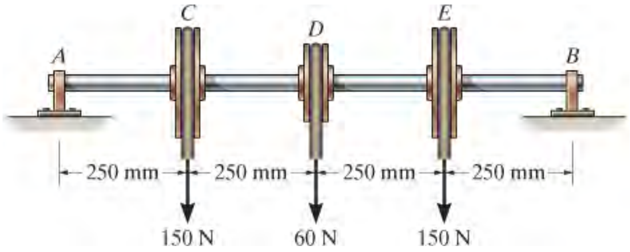
س 12-43

س 12-44*. د ایلستیک منحني معادله مشخص کړي. EI ثابت دی.



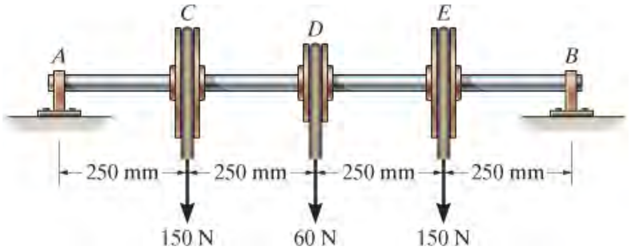
س 12-44

س 12-45. بیځایه کیدنه په ځرخکیو (pulleys) C، D او E کی معلوم کړي. شافټ له فولادو جوړ شوی او قطر یې 30 mm دي. $E_{st} = 200\text{GPa}$



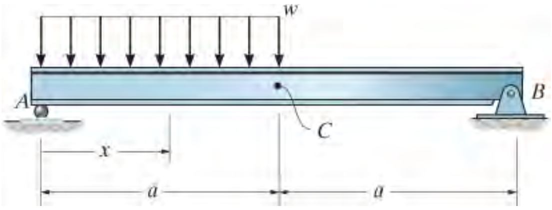
س 12-45

س **12-46.** میلان د شافټ په A او B کی مشخص کړي. شافټ له فولادو جوړ شوی او قطر یې 30 mm دي بیرینګ یوازي عمودی ریکشنونه په شافټ جوړه وي. $E_{st} = 200\text{GPa}$



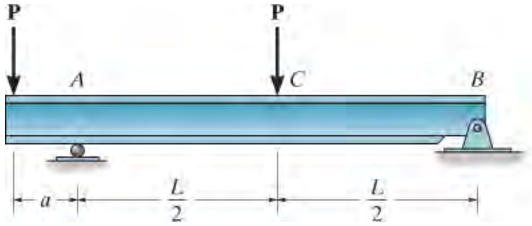
س 12-46

س 12-47. د ایلستیک منحني معادله مشخص کړي. میلان په A او B کی وټاکي. EI ثابت دی.



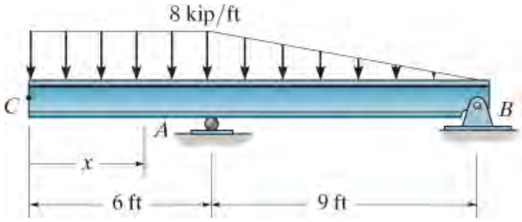
س 12-47

س *12-48. ارزښت د a داسی معلوم کړي چی بیځایه کیدنه په C کی صفر وی. EI ثابت دی.



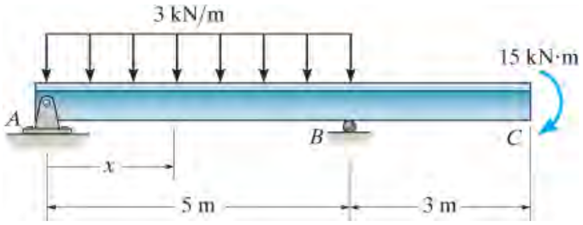
س 12-48

س 12-49. بیځایه کیدنه په C کی او میلان په A کی معلوم کړي. . EI ثابت دی.



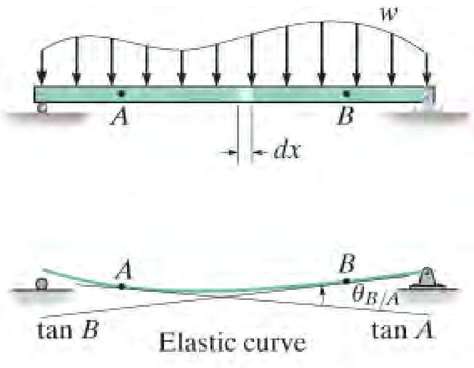
س 12-49

س 12-50. معادله د میلان او ایلستیک منحني مشخص کړي. EI ثابت دی.

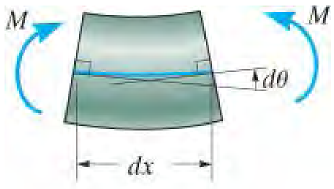


س 12-50

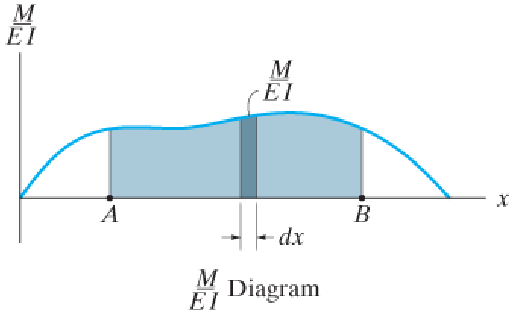
12.4* میلان او بیځایه کیدنه د مؤمنت-مساحت په طریقه
(SLOPE AND DISPLACEMENT BY MOMENT- AREA (METHOD



(a)



(b)



(c)

انځور 12-19

د مؤمنت-مساحت (Moment-Area) طریقه یو نیمه ګرافیک تخنیک د میلان او بیځایه کیدنی موندلو لپاره، په ځانګړو نقطو د ایلستیک منحني د بیم یا شافت، چمتو کوي. د دی طریقی پلي کول د بیم د مؤمنت ډیاګرام د برخې ساحې محاسبې ته اړتیا لري؛ او که چیرې دا ډیاګرام شامل د ساده شکلونووي، نو ددی طریقی کارول خورا اسانه دي.

د مؤمنت-ایریا میتود رامینځته کولو لپاره موږ به ورته انګیرنې وکړو کوم چې موږ د انتیګریشن میتود لپاره وکارولې: بیم به پیل کې مستقیمه ده، دا د بارونو پواسطه په ایلستیک ډول بیځایه شوی ، په دی ډول چې میلان او بیځایه کیدنه د ایلستیک منحنی ډیر کوچنی دی، او یوازې کوږیدنه د شکل د بدلون سبب

کیږي. د مؤمنت-ساحی طریقه په دوو تیورمونو ولاړه ده، یو یې د میلان د ټاکلو لپاره کارول کیږي ، او بل یې د بې ځایه کیدو معلومولو لپاره.

اول تیورم (Theorem 1) . یو ساده ډول ملاتړ شوی بیم، کوم چې په انځور 12-19a کې ښودل شوي، او د هغې اړوند ایلستیک منحنی په پام کې ونیسئ. د بیم یو توپیري برخه په dx انځور 12-19b کې ښودل شوي . دلته د بیم داخلي مؤمنت M عنصر ته داسی تغیر د شکل ورکوي چې مماس په هر اړخ کې دایلستیک منحني په یوه زاویه dq نښلوي . دا زاویه د معادلی 12-10 سره ټاکل کیدی شي او لیکلی شو

$$EI\frac{d^2v}{dx^2} = EI\frac{d}{dx}\left(\frac{dv}{dx}\right) = M$$

څرنګه چې میلان کوچني دی ، بیا $q = du/dx$ او په دی توګه

$$d\theta = \frac{M}{EI}dx \qquad (12\text{–}16)$$

که چیری مؤمنت ډایګرام د بیم جوړ شي ، او بیا د کوږوالی په شخي EI (flexural rigidity) تقسم شي ، انځور 12-19c ، نو بیا دا معادله ښایي چې dq مساوی ده په ساحه د M/EI ډایګرام لاندی د بیم برخی dx لپاره. د ایلستیک منحنی

له یوه ټکی A څخه تر بل ټکی B پوری دا انتیګګریت کوو، موږ لرو:

$$\theta_{B/A} = \int_A^B \frac{M}{EI}dx \qquad (12\text{–}17)$$

دا پایلی د مؤمنت-مساحت د اولی تیورم اساس جوړه وي.

زاویه په منځ د مماسونو چې له هر دوه نقطو د ایلستیک منحني رسم شوی وی مساوی کیږي په ساحه تر M/EI ډایګرام ترمنځ د ددی دو نقطو کې. زاویه په ریډیانونو کې اندازه کیږي.

دا $q_{B/A}$ هغه زاویی ته اشاره کوي چې له مماس B اندازه کیږي نسبت مماس په A کې. د ثبوت څخه دا باید څرګنده شي چې دا زاویه د ساعت د حرکت په مقابل کې اندازه کیږي، له مماس A څخه د مماس B پورې، که چیرې ساحه د M/EI دیاګرام لاندې مثبته وی. برعکس، که ساحه منفي وي، یا د x محور لاندې پرته وی، زاویه $q_{B/A}$ د ساعت په لور اندازه کیږي له مماس A څخه مماس B ته .

تیورم 2. (Theorem 2) دوهم مؤمنت مساحت تیورم پر بنسټ د نسبی انحراف د مماسونو له ایلستیک منحني څخه دی. انځور 12-20a خورا مبالغه شوی لید د عمودی انحراف dt د مماسونو په هر اړخ د کوچني عنصر dx ښیي . دا انحراف د عنصر د انحنا له امله رامنځته شوي، او د عمودی کرښې سره چې د A نقطې څخه په ایلستیک منحني تیریږي، اندازه شوی. له دې چې میلان او د هغې انعطاف خورا کوچنی ګڼل کیږي، دا د قناعت وړ دی چې اوږدوالي د هر مماس کرښی د x په واسطه او د قوس ds` د dt په واسطه. د دایروی قوس فورمول $s = qr$ په کارولو، چیرې چې r اوږدوالی x او s د dt دی، موږ کولی شو $dt = x\,dq$ ولیکو. معادله 12-16 په دی مساوات کی ځای په ځاي کړو او بیا یی له A تر B انتیګریت کړو، عمودی انحراف د میلان په A کی نسبت میلان په B کی کیږي

$$t_{A/B} = \int_A^B x\frac{M}{EI}dx \qquad (12\text{–}18)$$

ځکه چې د یوې سیمې مرکز ثقل موندل کېږي له $\bar{x}\int dA = \int x\, dA,$
او $\int (M/EI)\, dx$ استازيتوب کوي لاندې ساحه د M/EI د ډیاګرام، موږ کولی شو چې ولیکو:

$$t_{A/B} = \bar{x}\int_A^B \frac{M}{EI}dx \qquad (12\text{–}19)$$

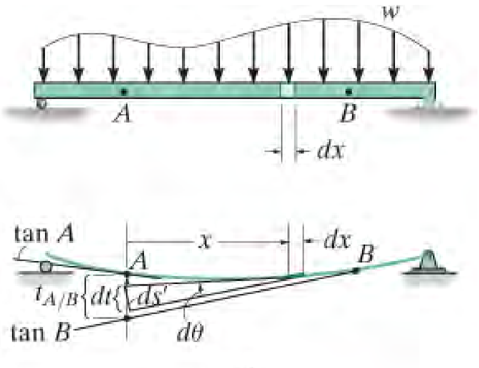
دلته x فاصله د A څخه ترمرکز ثقل د M/EI ډایګرام ساحی لاندی د A او B په منځ کی ده، انځور 12-20b وويني.

د مؤمنت مساحت دویم تیورم اوس په لاندې ډول ویل کیدی شي:

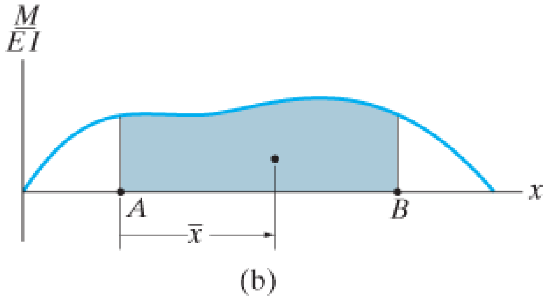
عمودی فاصله تر مینځ د مماس په په یوه نقطه (A) کې په ایلستیک منحني باندې او د بل ټکي (B) څخه غزول شوي مماس مساوي دي په مؤمنت د M/EI ډایګرام لاندې ساحی تر منځ د دغو دوو نقطو A او B . دا مؤثنت د نقطې (A) په اړه محاسبه کیږي چیرې چې عمودی فاصله ($t_{A/B}$)باید وټاکل شي.

په یاد ولرئ چې $t_{A/B}$ د $t_{B/A}$ سره مساوي ندي، کوم چې په انځور 12-20c کې ښودل شوي. ځکه چې د A او B تر منځ د M/EI ډیاګرام لاندې د ساحې مؤمنت د $T_{A/B}$ د ټاکلو لپاره د A نقطې په اړه محاسبه کیږي، انځور12-20b ، او دا محاسبه کیږي د B نقطې په اړه د $t_{B/A}$ معلومولو لپاره، انځور 12-20c .

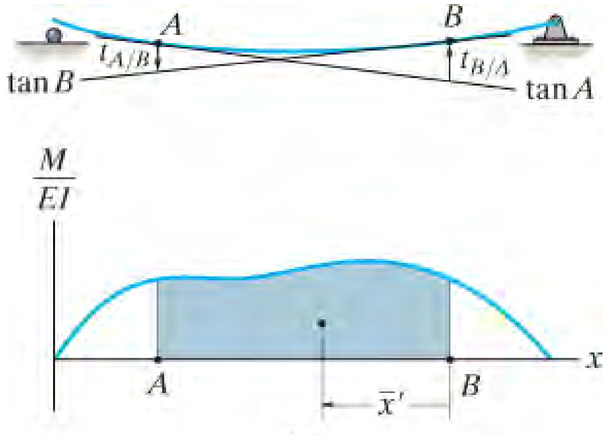
که $t_{A/B}$ د مثبت M/EI ساحې په منځ د A او B له مؤمنت څخه محاسبه شي، دا په ګوته کوي چې A له غزول شوي مماس د B څخه پورته دی، انځور 12-20a . په ورته ډول، منفي M/EI ساحې ښيي چې A به لاندې وي له غزول شوی.tangent مماس له B . دا ورته قاعده د $t_{B/A}$ لپاره پلي کیږي.



(a)



(b)



(c)

انځور 12-20

د تحلیل کړنلاره

PROCEDURE FOR ANALYSIS

دا لاندې کړنلاره د دواړو مؤمنت مساحت تیورموکارولو لپاره طریقه چمتو کوي .

M/EI ډایګرام (M/EI Diagram).

- د اتکاء ریکشنونه مشخص کړئ او د بیم M/EI ډایګرام رسم کړئ. که په بیم متمرکزی قواوې او یا کپل مؤمنت بار شوی وي ، د M/EI ډیاګرام به یو لړ مستقیم کرښې برخې ولري، اود ساحې او مؤمنت محاسبه کول به یې د مؤمنت-مساحت تیورم لپاره نسبتا اسانه وي. که ویشلشوی بارونه پلې شوی وي د M/EI ډیاګرام به پارابولیک یا شاید د لوړ ترتیب منحني څخه جوړ وي، او په دی حالت کی دا وړاندیز کیږي چې له هغه جدول چې ددی کتاب په داخلي مخ پوښ کی موجود دی تری کار واخستل شی تر څود هر منحني لاندې ساحه او د ثقل مرکز یې و موندل شي.

ایلستیک منحنی (Elastic Curve).

- د بیم د ایلستیک منحني مبالغه لرونکی بڼه رسم کړئ. دا په یاد ولرئ چې د صفر میلان نقطې او د صفر بې ځایه کیدنه تل په اتکاؤو کی واقع کیږي .
- نامعلوم بې ځایه کیدنه او میلان چې باید وټاکل شي په منحنی باندې نښانی کړی.
- څرنګه چې د مؤمنت-مساحت یا ساحې تیوریګانی *یوازې د دوو مماسونو تر منځ* پلې کیږي، پاملرنه باید ورکړل شي چې کوم مماس باید داسې جوړ شي چې تر منځ زاویې یا عمودي فاصله به یې د پوښتنې د حل لامل شي. په ځانګړې توګه، مماس په اتکاء کی باید په پام کې ونیول شي، ځکه چې بیم په اتکاء کې صفرمیلان او یا صفر بې ځایه کیدنه لري.

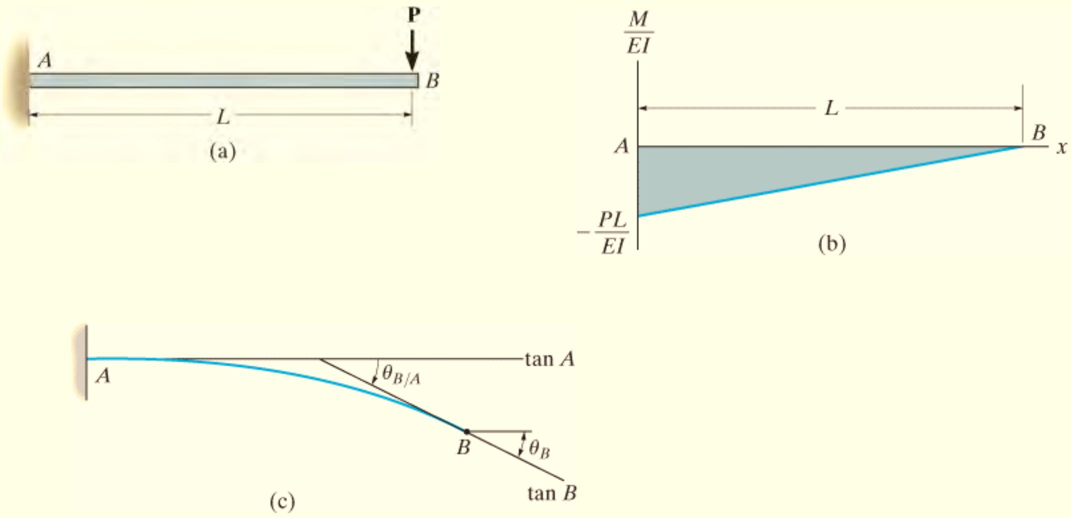
د مؤمنت – مساحت تیورمونه (Moment-Area Theorems).

- د منحني د دو مماسو تر منځ دزاویې ټاکلو لپاره اول تیورم (1) تطبیق کړئ ، او د مماسونو تر منځ د عمودی فاصلی ټاکلولپاره له دوهم تیورم کار واخلې.
- مثبت $q_{B/A}$ استازیتوب د ساعت په مقابل حرکت د مماس په B نسبت مماس په A کی کوي، او مثبت $t_{B/A}$ په ګوته کوي چې B په ایلستیک منحني په پورته خوا د غځول شوی میلان له A څخه موقعیت لري.

مثالونه

مثال 12.7

میلان د دی لاندی بیم چی په انځور 12-21a کی ښودل شوي په ټکی B کی و ټاکی. EI د بیم ثابت دی.



انځور 12-21

حل (SOLUTION)

M/EI ډایګرام (*M/EI* Diagram). انځور 12-21b و ګوري.

ایلستیک منحني (Elastic Curve). قوه **P** لامل د بیم د بیځایه کیدو لکه څنګه چی په انځور 12-21c کی ښودل شوي کیږي. مماس په B کی ښودل شوي ځکه چی موږ غواړو q_B و ټاکو. همدارنګه مماس په اتکاء A کی هم ښودل

شوی. دا مماس صفر میلان لري. زاویه په منځ د مماس A او مماس B کی مساوی ده په q_B . نو بیا لرو

د مؤمنټ -مساحت تیورم (Moment-Area Theorem). اول تیورم پلی کوو، $q_{B/A}$ مساوی کیږی په ساحه د M/EI ډایګرام د A او B تر منځ ، او هغه دی:

$$\theta_B = \theta_{B/A}$$

$$\theta_B = \theta_{B/A} = \frac{1}{2}\left(-\frac{PL}{EI}\right)L$$

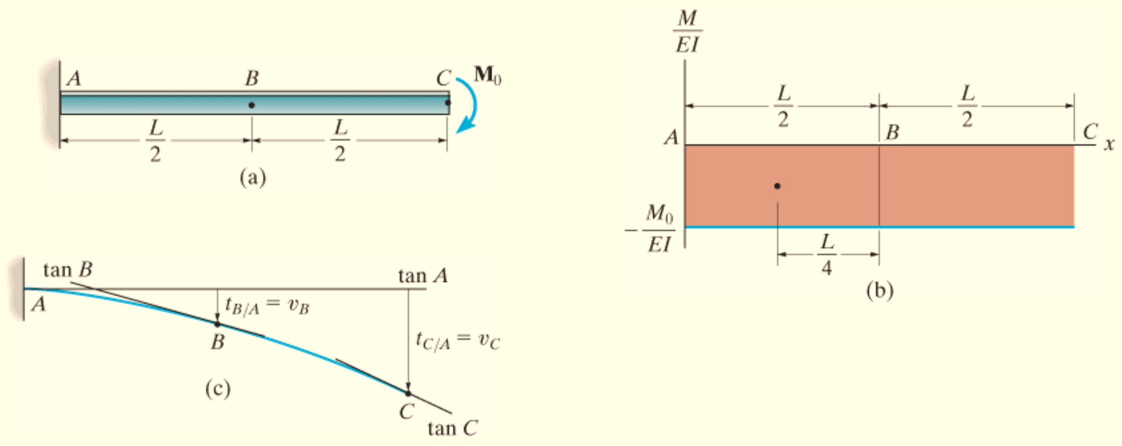
$$= -\frac{PL^2}{2EI} \qquad \textit{Ans.}$$

دا منفي علامه ښيي چې زاويه اندازه کيږی له مماس په A تر مماس B د ساعت د حرکت په لور.

دا يو بل واقعيت دی ځکه چې د بيم ميلان په B کی په ښکته لور دی.

مثال 12.8

ددی لاندی بيم ، انځور 12-22a ، بيځايه کيدنه په ټکی B او C کی و ټاکی. EI د بيم ثابت دی.



انځور 12-22

حل (SOLUTION)

M/EI دايګرام (*M/EI* Diagram). انځور 12-22b و ګوري.

ايلستيک منحني (Elastic Curve). ښودل شوی کپل مؤمنت په C کی لامل د بيم د بيځايه کيدنی شوي، انځور 12-22c و ګوري. مماسونه په B او C کی ځکه ښودل شوي چې مور غواړو بيځايه کيدنه υ_B او υ_C معلومی کړو. همدا رنګه مماس په اتکاء A کی ځکه ښودل شوي چې افقی دی. غوښتل شوی بيځايه کيدنه اوس په تړاو د عمودی فاصله په منځ دی مماس په B او A او C او A سره وټاکو. په ځانګړی توګه

$$v_B = t_{B/A}$$
$$v_C = t_{C/A}$$

د مؤمنت -مساحت تیورم (Moment-Area Theorem). دوهمه تیورم پلی کوو، $t_{B/A}$ مساوی دی په مؤمنت د سیوری شوی ساحی M/EI ډایګرام لاندی په منځ د A او B کوم چی محاسبه کیږی په B (نقطه په ایلستیک منحني) ځکه چی دا هغه نقطه ده چې دلته عمودی فاصله غواړو معلومه کړو. نو بیا له انځور 12-22b لیکلی شو

$$v_B = t_{B/A} = \left(\frac{L}{4}\right)\left[\left(-\frac{M_0}{EI}\right)\left(\frac{L}{2}\right)\right] = -\frac{M_0L^2}{8EI} \qquad Ans.$$

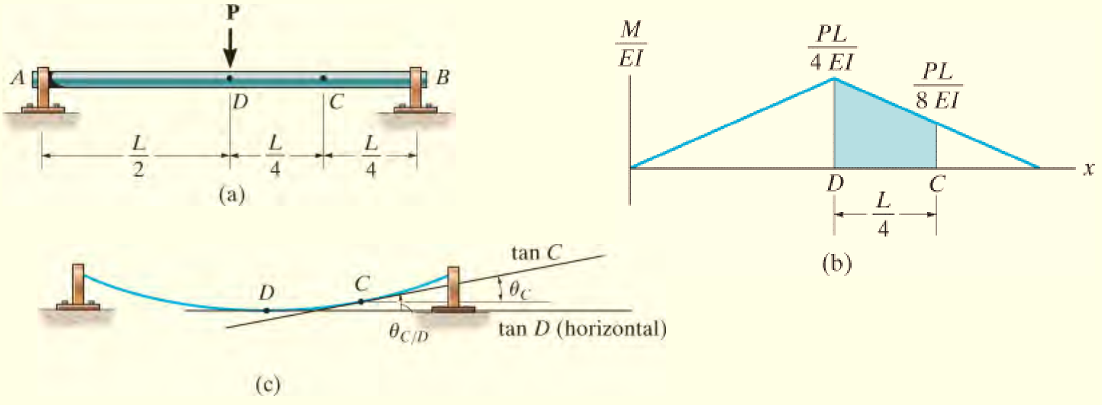
په ورته ډول مؤمنت د ساحی M/EI ډایګرام له A تر C پوری په ټکی C (نقطه په ایلستیک منحني) . موږ لرو

$$v_C = t_{C/A} = \left(\frac{L}{2}\right)\left[\left(-\frac{M_0}{EI}\right)(L)\right] = -\frac{M_0L^2}{2EI} \qquad Ans.$$

ځکه چی دواړه ځوابونه منفی دی، دا ښيي چی B او C تر مماس لاندی چی په A کی دی موقعیت لری. دا له انځور 12-22c سره چک کیږي.

مثال 12.9

ددی لاندی شافټ، انځور 12-23a ، لپاره میلان په ټکی C کی مشخص کړي. EI د شافټ ثابت دی.



انځور 12-23

حل (SOLUTION)

M/EI ډایګرام (*M/EI* Diagram). انځور 12-23b کی و ګوري.

ایلستیک منحني (Elastic Curve). څرنګه چی بار په شافت باندی په متناظر شکل پلی شوي، له دی امله ایلستیک منحنی یي هم متناظر دی او مماس په *D* کی افقي موقعیت لری، انځور 12-23c وګوري. مماس په C کی رسم شوی څکه چی موږ باید میلان q_C په *C* کی وټاکو. په رسم کولو سره موږ وینو چی زاویه په منځ د tan D او tan C مساوی ده په q_C، او هغه ده

$$\theta_C = \theta_{C/D}$$

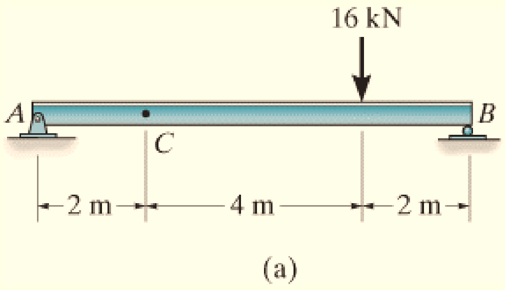
د مؤمنت -مساحت تیورم (Moment-Area Theorem). له اولی تیورم کار اخلو، $q_{C/D}$ مساوی ده په سیوری شوی ساحه *M/EI* دایګرام د *D* او *C* په منځ کی. موږ لرو

$$\theta_C = \theta_{C/D} = \left(\frac{PL}{8EI}\right)\left(\frac{L}{4}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{PL}{4EI} - \frac{PL}{8EI}\right)\left(\frac{L}{4}\right) = \frac{3PL^2}{64EI} \qquad \textit{Ans.}$$

پوښتنه: حاصل شوي مثبت نتیجه څه تشریح کوي؟

مثال 12.10

د دی لاندی فولادی بیم ، انځور 12-24a ، میلان په ټکی *C* کی معلوم کړي.
له $E_{st} = 200\text{GPa}$ او $I = 17(10^6)\ \text{mm}^4$ کار واخلي.



انځور 12-24

حل (SOLUTION)

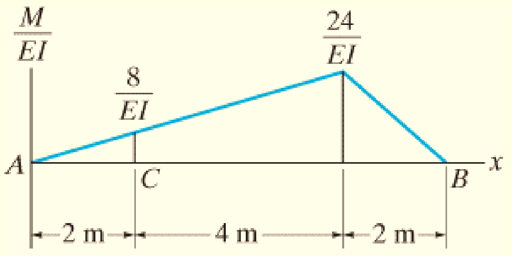
M/EI ډایګرام (*M/EI* Diagram). انځور 12-24b و ګوري.

ایلستیک منحني (Elastic Curve).

ایلستیک منحني په انځور 12-24c کی ښودل شوي. دلته موږ غواړو چی q_C و ټاکو.

مماسونه په اتکاوو A او B هم په انځور کی ښودل شوي. میلان په A کی، q_A ، چی په انځور 12-24c کی ښودل شوی، کیدی شی په کارولو د $|\theta_A| = |t_{B/A}|/L_{AB}$.
ومونډل شی. دا تعادل د منلو وړ دی ځکه چی $t_{B/A}$ خورا کوچني ده، داسي چی $t_{B/A}$ په اوږدوالي د یو دایروی قوس سره، چی شعاع یي $L_{AB} = 8$ m او یو حرکت د q_A په رادیان سره ، فرض کړل شي. (په یاد ولري چی $s = qr$). د انځور 12-24c له هندسی موږ لیکلي شو

$$|\theta_C| = |\theta_A| - |\theta_{C/A}| = \left|\frac{t_{B/A}}{8}\right| - |\theta_{C/A}| \qquad (1)$$



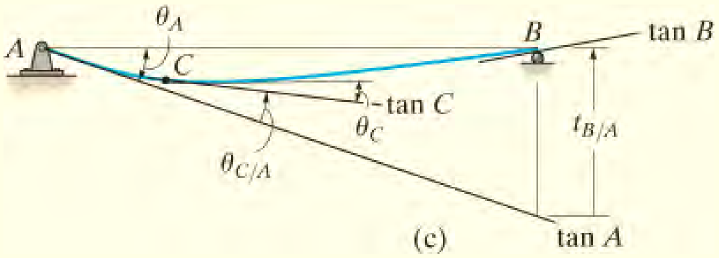
(b)

د مؤمنت- مساحت تیورم (Moment-Area Theorem). د مؤمنت- مساحت له اولی (1) تیورم کار اخلو، $q_{C/A}$ مساوی دی په ساحه د M/EI ډایګرام د A او C په منځ کی، او هغه دی:

$$\theta_{C/A} = \frac{1}{2}(2\text{ m})\left(\frac{8\text{ kN}\cdot\text{m}}{EI}\right) = \frac{8\text{ kN}\cdot\text{m}^2}{EI}$$

د دوهمی تیورم (2) په کارولو سره $t_{B/A}$ مساوی دی په مؤمنت د ساحي M/EI ډایګرام په منځ د B او A په تکی B کی (تکي په ایلستیک منحني دي) . لدینه چی دا هغه نقطه ده چی عمودی فاصله باید ومونډل شي. موږ لرو:

$$t_{B/A} = \left(2\text{ m} + \frac{1}{3}(6\text{ m})\right)\left[\frac{1}{2}(6\text{ m})\left(\frac{24\text{ kN}\cdot\text{m}}{EI}\right)\right] + \left(\frac{2}{3}(2\text{ m})\right)\left[\frac{1}{2}(2\text{ m})\left(\frac{24\text{ kN}\cdot\text{m}}{EI}\right)\right] = \frac{320\text{ kN}\cdot\text{m}^3}{EI}$$



انځور 24-12(تکرار)

دا حاصل شوی په معادله 1 کی ځای په ځاي کوو، او موږ لرو

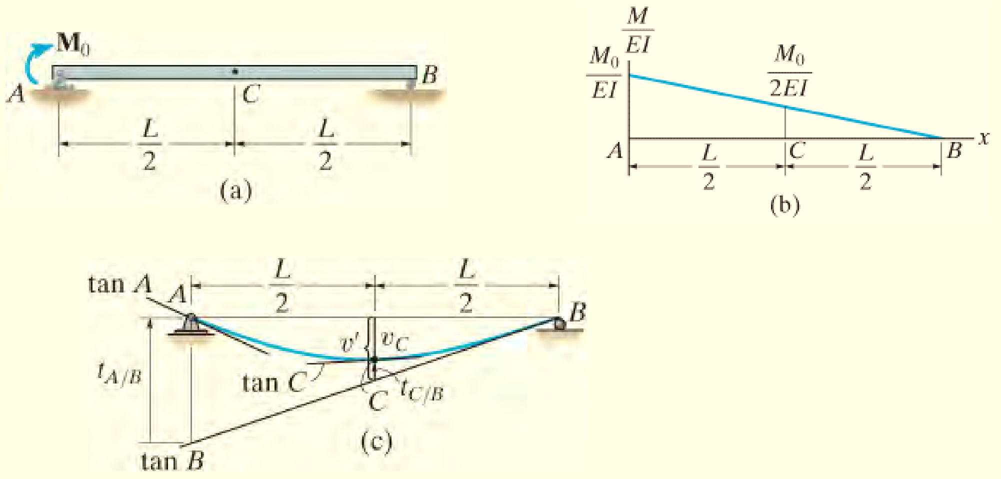
$$\theta_C = \frac{320\text{ kN}\cdot\text{m}^2}{(8\text{ m})EI} - \frac{8\text{ kN}\cdot\text{m}^2}{EI} = \frac{32\text{ kN}\cdot\text{m}^2}{EI}$$

کله چی یو ډول واحدونو کارواخیستل شی بیا موږ لرو:

$$\theta_C = \frac{32\text{ kN}\cdot\text{m}^2}{[200(10^6)\text{ kN/m}^2][17(10^{-6})\text{ m}^4]} = 0.00941\text{ rad} \qquad \textit{Ans.}$$

مثال 12.11

ددی لاندی بیم ، انځور 12-25a ، بيځاه يکيدنه په C کی و ټاکي. EI د بیم ثابت دی.



انځور 12-25

حل (SOLUTION)

M/EI ډايګرام (*M/EI* Diagram). انځور 12-25b و ګوري.

ايلستيک منحني (Elastic Curve). مماس په C کي په ايلستيک منحنی رسم شوی ځکه چی د u_C موندلو لپاره اړين دي، انځور12-25c . (په ياد ولرئ چې C اعظمی بيځايه کيدنه په بيم کی نه ده، ځکه چی بار او له همدی امله ايلستيک منحنی متناظر نه دي.) همدا رنګه ځرنګه چی په انځور 12-25c کی مماس په اتکاء A او B کی ليدل کيږي. داسی ښکاری چې $u_C = u` - t_{C/B}$ . که $t_{A/B}$ وټاکل شي، بيا $u`$ کيدی شی چی د مثلثونو له تناسب څخه وموندل شي ، دا دی، $u`/(L/2) = t_{A/B}/L$ يا $u` = t_{A/B}/2$ له همدې امله:

$$v_C = \frac{t_{A/B}}{2} - t_{C/B} \qquad (1)$$

د مؤمنت -مساحت تيورم (Moment-Area Theorem). دوهم (2) تيورم پلی کووتر څو $t_{A/B}$ او $t_{C/B}$ و ټاکو، موږ لرو

$$t_{A/B} = \left(\frac{1}{3}(L)\right)\left[\frac{1}{2}(L)\left(\frac{M_0}{EI}\right)\right] = \frac{M_0L^2}{6EI}$$

$$t_{C/B} = \left(\frac{1}{3}\left(\frac{L}{2}\right)\right)\left[\frac{1}{2}\left(\frac{L}{2}\right)\left(\frac{M_0}{2EI}\right)\right] = \frac{M_0L^2}{48EI}$$

کله چی دا په معادله (1) کی ځای پر ځای کړو، دا لاندی په لاس راځي

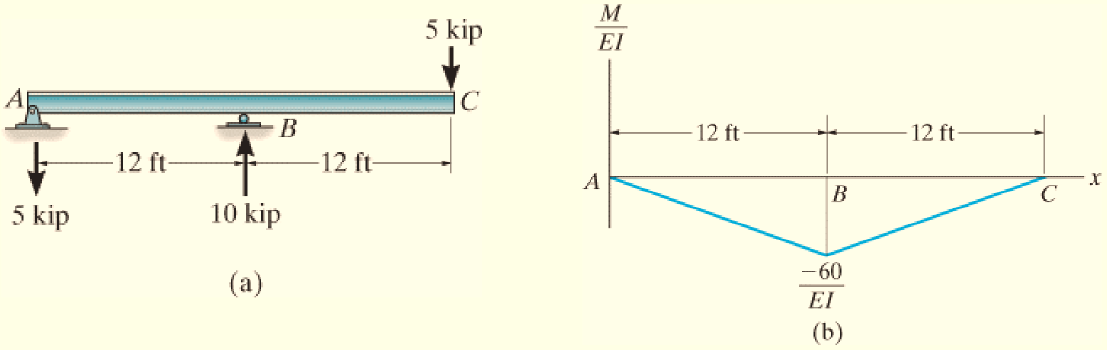
$$v_C = \frac{1}{2}\left(\frac{M_0L^2}{6EI}\right) - \left(\frac{M_0L^2}{48EI}\right)$$

$$= \frac{M_0L^2}{16EI}\downarrow \qquad \textit{Ans.}$$

مثال 12.12

ددی لاندی وتلي برخی فولادی بیم، انځور 12-26a ، بیځایه کیدنه په ټکی C کی مشخص کړي.

ارزښتونه $I = 125\ \text{in}^4$ او $E_{st} = 29(10^3)$ ksi و کاروي.



انځور 12-26

حل (SOLUTION)

M/EI ډایګرام . انځور 12-26b و ګوري.

ایلستیک منحني (Elastic Curve). پلی شوی بار بیم ، څرنګه چې په انځور 12-26c کی ښودل شوی، بیځایه کوی. موږ غواړو چې u_C و ټاکو. کله چې مماس په C او اتکاؤو A او B کی رسم کړو دا ډول لیدل کیږي: $v_C = |t_{C/A}| - v'$

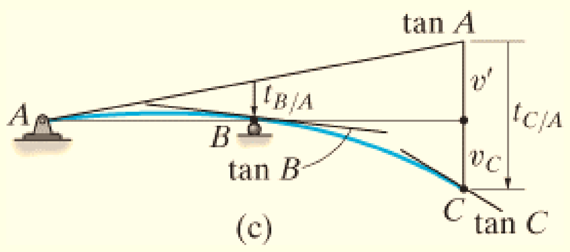
په هر صورت u` کیدی شی چې د $t_{B/A}$ سره د مثلثونو په تناسب تړاو ولري، یعنی

$$v'/24 = |t_{B/A}|/12 \quad \text{او یا} \quad v' = 2|t_{B/A}|$$

له همدی امله موږ لرو:

$$v_C = |t_{C/A}| - 2|t_{B/A}| \qquad (1)$$

د مؤمنټ -مساحت تیورم (Moment-Area Theorem). د مؤمنټ-مساحت دوهم (2) تیورم پلی کوو تر څو $t_{C/A}$ او $t_{B/A}$ و ټاکو، موږ لرو



انځور 12-26 (ادامه)

$$t_{C/A} = (12\text{ ft})\left(\frac{1}{2}(24\text{ ft})\left(-\frac{60\text{ kip}\cdot\text{ft}}{EI}\right)\right)$$

$$= -\frac{8640\text{ kip}\cdot\text{ft}^3}{EI}$$

$$t_{B/A} = \left(\frac{1}{3}(12\text{ ft})\right)\left[\frac{1}{2}(12\text{ ft})\left(-\frac{60\text{ kip}\cdot\text{ft}}{EI}\right)\right] = -\frac{1440\text{ kip}\cdot\text{ft}^3}{EI}$$

پوښتنه: ولی دا ځوابونه منفي دی؟ کله چې دا ځوابونه په معادله (1) کی ځای پر ځای شي دا لاندی په لاس راځي:

$$v_C = \frac{8640 \text{ kip} \cdot \text{ft}^3}{EI} - 2\left(\frac{1440 \text{ kip} \cdot \text{ft}^3}{EI}\right) = \frac{5760 \text{ kip} \cdot \text{ft}^3}{EI}\downarrow$$

کله چې له یو شان واحدونو کار واخیستل شي، دا لاندی په لاس راځي:

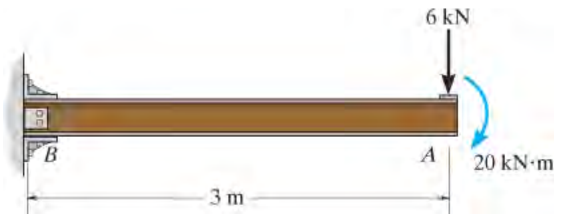
$$v_C = \frac{5760 \text{ kip} \cdot \text{ft}^3(1728 \text{ in}^3/\text{ft}^3)}{[29(10^3) \text{ kip/in}^2](125 \text{ in}^4)} = 2.75 \text{ in.}\downarrow \qquad \textit{Ans.}$$

بنسټيز پوښتني

FUNDAMENTAL PROBLEMS

ب- 12-7 . ددی لاندی کنتیلیور بیم میلان او بیځایه کیدنه په پای A کی و ټاکي.

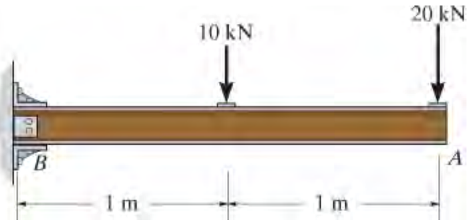
. $I = 65.0\ (10^{-6})\ \text{m}^4$ او $E = 200$ GPa



ب 12-7

ب- 12-8 . ددی لاندی کنتیلیور بیم میلان او بیځایه کیدنه په پای A کی و ټاکي.

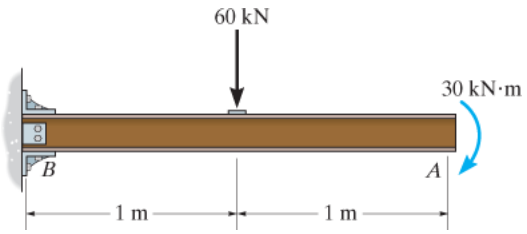
. $I = 126.0\ (10^{-6})\ \text{m}^4$ او $E = 200$ GPa



ب 12-8

ب- 12-9 . ددی لاندی کنتیلیور بیم میلان او بیځایه کیدنه په پای A کی و ټاکي.

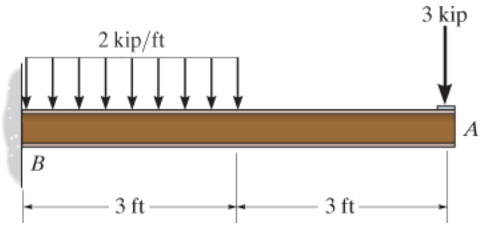
. $I = 121.0\ (10^{-6})\ \text{m}^4$ او $E = 200$ GPa



ب 12-9

ب- 12-10 . ددی لاندی کنتیلیور بیم میلان او بیځایه کیدنه په پای A کی و ټاکي.

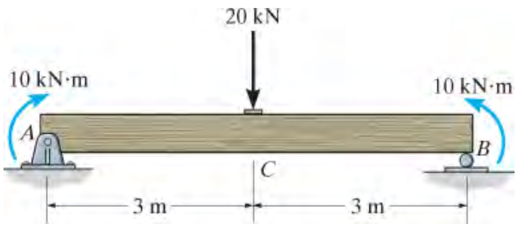
$I = 121.0\ (10^{-6})\ \text{m}^4$ او $E = 200$ GPa



ب 12-10

ب- 12-11 . ددی لاندی ساده اتکاء بیم اعظمی بیځایه کیدنه و ټاکي.

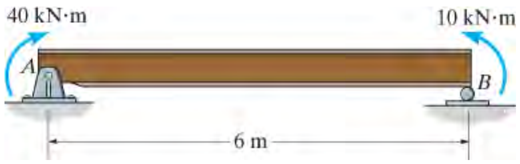
$I = 42.8\ (10^{-6})\ \text{m}^4$ او $E = 200$ GPa



ب 12-11

ب- 12-12 . ددی لاندی ساده اتکاء بیم اعظمی بیځایه کیدنه و ټاکي.

$I = 39.9\ (10^{-6})\ m^4$ او $E = 200$ GPa

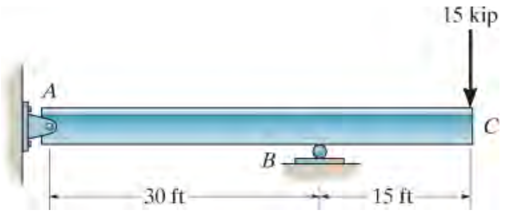


ب 12-12

سوالونه

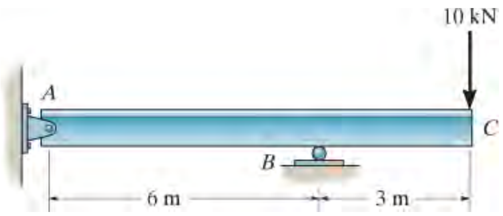
PROBLEMS

س .12-51 میلان او بیځایه کیدنه په C کی و تاکی. EI د بیم ثابت دی.



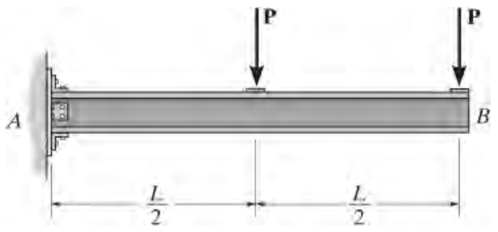
س 12-51

س *12-52. میلان او بیځایه کیدنه په C کی و تاکی. EI د بیم ثابت دی.



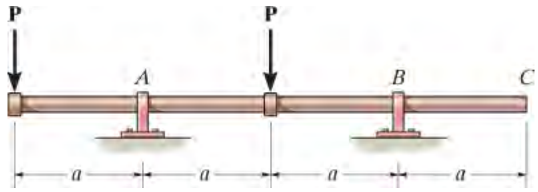
س 12-52

س 12-53. د کنتیلیور بیم پای B بیځایه کیدنه و ټاکی. EI د بیم ثابت دی.



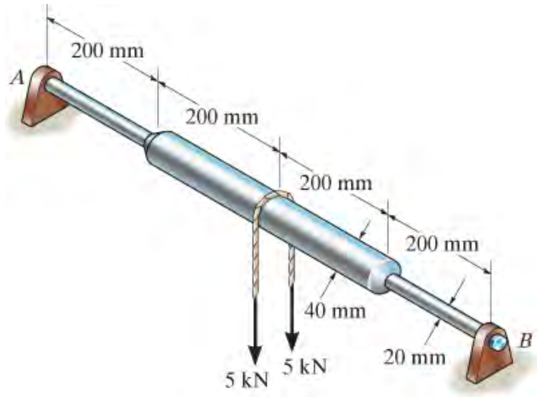
س 12-53

س 12-54. میلان په B او بیځایه کیدنه په C کی و ټاکی. EI د بیم ثابت دی.



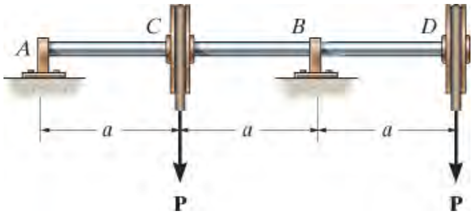
س 12-54

س 12-55. په دی لاندی کمپازیت فولادی شافټ یوه قوه د 10 kN په مرکز کی وربانډی پلی شوي . اعظمی بیځایه کیدنه معلومه کړي. E_{st} = 200 GPa



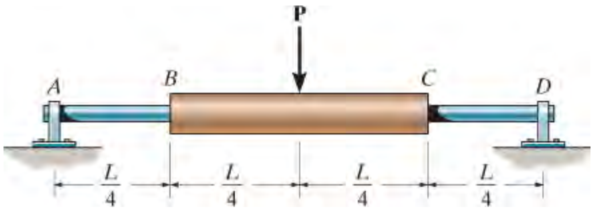
س 12-55

س *12-56. میلان د شافټ په A او بیځایه کیدنه په D کی و ټاکی. EI د شافټ ثابت دی.



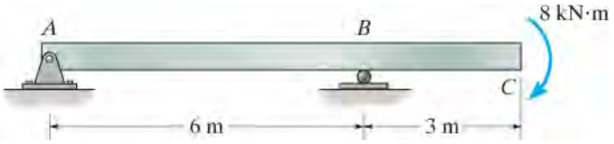
س 12-56

س 12-57. دا لاندی ساده اتکاء شافټ په برخه BC کی انرشیايي مؤمنت يي $2I$ دی او په برخو AB او CD کی انرشیايي مؤمنت د I لري. اعظمی بیځایه کیدنه د ښافټ د بار **P** له امله و ټاکي. ایلستیک ماجولس د شافټ E دی.



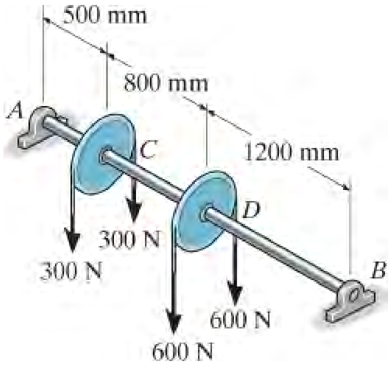
س 12-57

س 12-58. د لانید بیم بیځایه کیدنه په C او میلان په A ، B او C کی و ټاکی. EI د بیم ثابت دی.



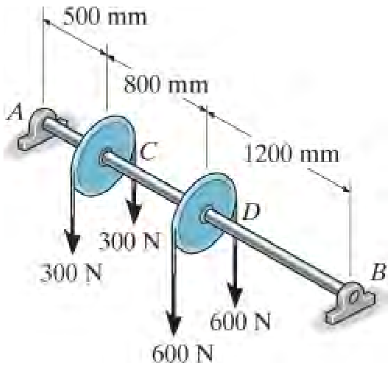
س 12-58

س 12-59. د لاندی 50-mm قطر فولادی A-36 شافت ، اعظمی بیځایه کیدنه وټاکی.



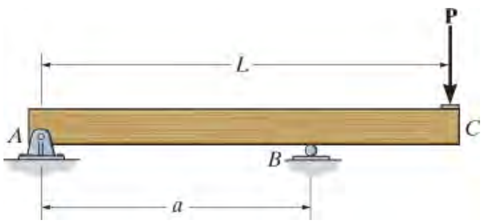
س 12-59

س **12-60*.** د لاندی 50-mm قطر فولادی A-36 شافت ، میلان په جورنال بیرینګ A او B کی مشخص کړي. بیرینګونه تنها عمودی ریکشن په شافټ جوړه وی.



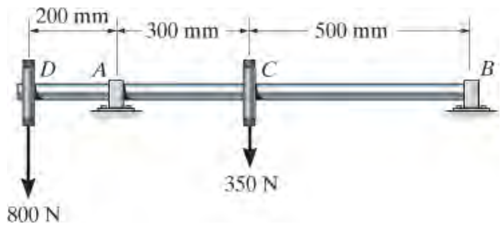
س 12-60

س 12-61. د رولر B موقعیت a نسبت اوږدوالي L ته داسی معلوم کړي ، کله چی بیځایه کیدنه په پای C کی مساوی په اعظمی بیځایه کیدنه د AB برخی د بیم شي. EI د بیم ثابت دی.



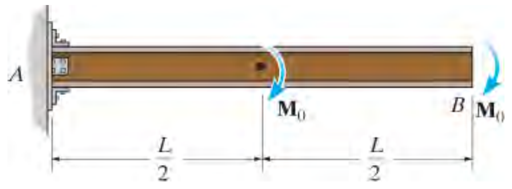
س 12-61

س 12-62. د لاندې 20-mm قطر فولادي A-36 شافت ، میلان په جورنال بیرینګ A او B کې وټاکې.



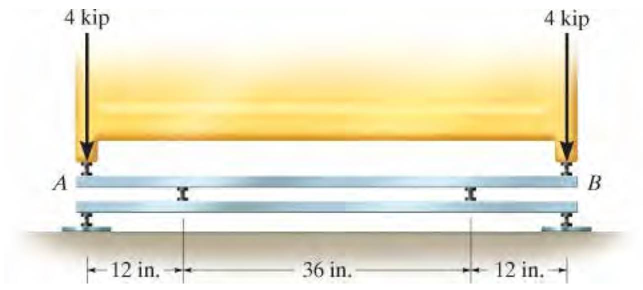
س 12-62

س 12-63. میلان او بیځایه کیدنه د پای B د کنتیلیور بیم و ټاکي. EI د بیم ثابت دی.



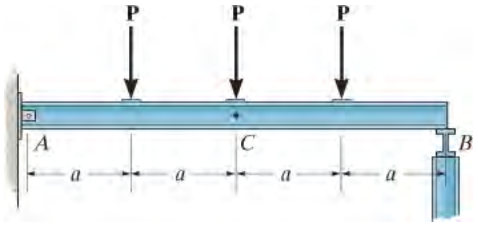
س 12-63

س **12-64*.** دوه فولادي A-36 میلې، ضخامت يي 1 in (یو انچ) ، او سور (width) يي 4 in. (څلور انچ) دی. دوی داسې ډیزاین شوی چې د یو فنر (spring) په شکل د ماشین لپاره چې یوه قوه 4 kip په A او B کې جوړه وی، کار وکړي. که اتکاءوی یوازې عمودي قواوي په میله باندې جوړی کړي ، اعظمی بیځایه کیدنه د ښکته میلې و ټاکي.



س 12-64

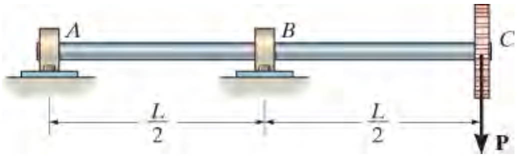
س 12-65. میلان په A او بیځایه کیدنه په C کی وټاکي. اتکاء په A کی پن او په B کی رولر فرض کړي. EI د بیم ثابت دی.



س 12-65

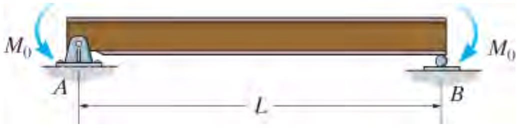
س 12-66. بیځایه کیدنه په C او میلان په بیرینګونو A او B کی و ټاکي. EI د بیم ثابت دی.

س 12-67. اعظمی بیځایه کیدنه په برخه AB کی و ټاکی. EI د بیم ثابت دی.



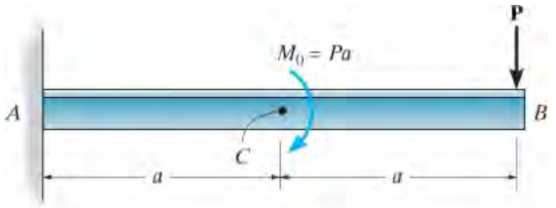
س 12-66/67

س *12-68 . میلان په A او اعظمی بیځایه کیدنه ددی ساده اتکاء بیم و ټاکي. EI د بیم ثابت دی.



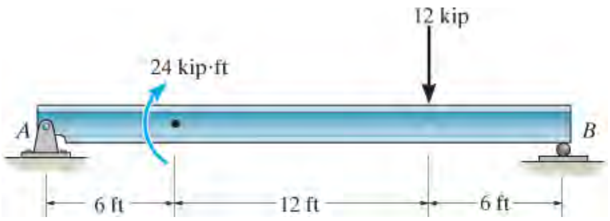
س 12-68

س 12-69 . میلان په C او بیځایه کیدنه په B کی معلومه کړي. EI د بیم ثابت دی.



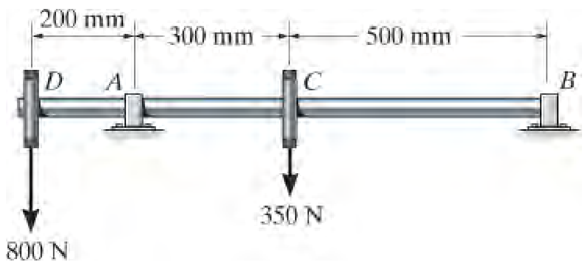
س 12-69

س 12-70 . میلان په A او اعظمی بیځایه کیدنه ددی ساده اتکاء بیم و ټاکي.EI د بیم ثابت دی.



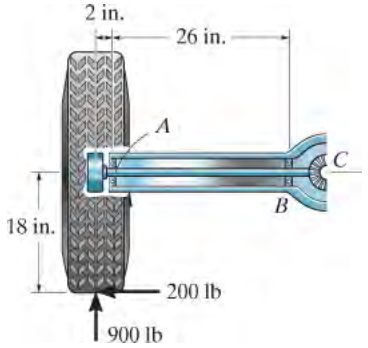
س 12-70

س 12-71 . فولادی A-36 شافټ چی 20-mm قطر لری ، بیځایه کیدنه یی په D کی وټاکی.



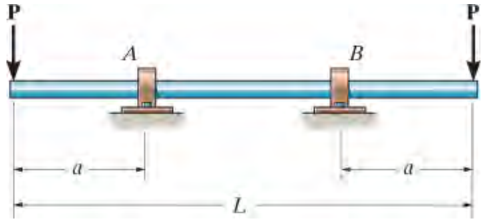
س 12-71

س *12-72 . د قوا دوی برخی په ټایر د موټر، لکه چی په انځور کی ښودل شوی، پلی شوي. ټایر له اکسل سره په بیرینګ A او B کی کلک ترل شوي. اعظمی بیځایه کیدنه د اکسل و ټاکي. فرض کړی چی بیریینګونه یوازی عمودی بار جوړه وي. پوري وهنه (thrust) په اکسل باندی په C کی مقاومت کیږي. اکسل له فولادو A-36 جوړ او 1.25 in قطر لري. د محوری بار اثر په بیځایه کیدنی د پام نیولو وړ نه دي.



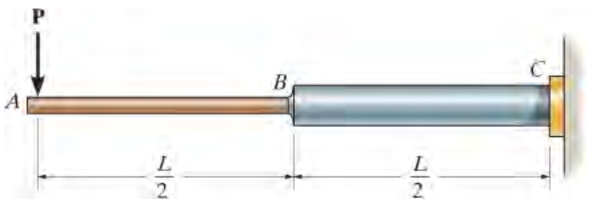
س 12-72

س 12-73 . په کوم فاصله a جورنال بیرینګونه A او B کیښودل شي تر څو بیځایه کیدنه په مرکز د شافټ کی مساوی په بیځایه کیدنه د دواړو پایلونو شي. EI د بیم ثابت دی.



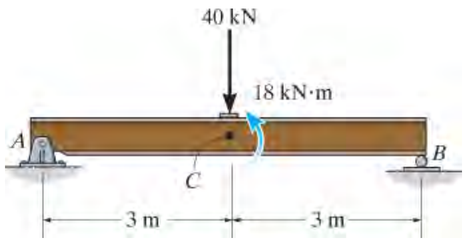
س 12-73

س 12-74 . دا لاندی میله له دو شافټونو جوړه شوي، انرشیايي مؤمنت د برخی AB عبارت دی په I او د برخی BC مساوی دی په $2I$. اعظمی میلان او بیځایه کیدنه د میلی د پلی شوی بار له امله و ټاکي. د ایلستیسیتي ماجولس E دی.



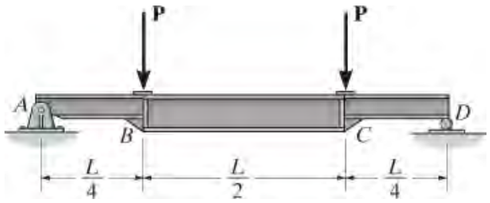
س 12-74

س 12-75 . میلان په B او بیځایه کیدنه په C کی معلومه کړي. E = 200GPa او I =65.0 (10^6) mm^4



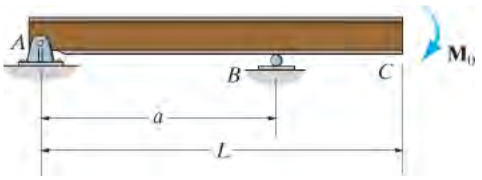
س 12-75

س *12-76 . میلان په A او اعظمی بیځایه کیدنه د لاندی ساده اتکاء بیم و ټاکي. د بیم د موادو ایلستیستی ماجولس E دی. انرشیایي مؤمنت د برخي AB او CD د بیم I دی، او د برخی BC انرشیایي مؤمنت $2I$ دی.



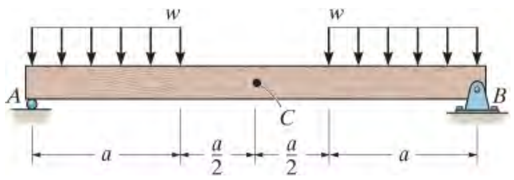
س 12-76

س 12-77 . د رولر B موقعیت a نسبت اوږدوالي L ته داسی معلوم کړي کله چی بیځایه کیدنه په پای C کی مساوی په اعظمی بیځایه کیدنه د AB برخی د بیم شي. EI د بیم ثابت دی.



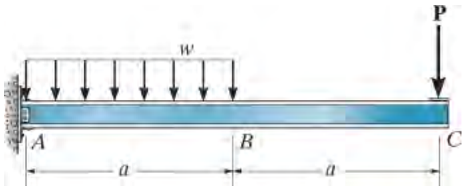
س 12-77

س 12-78 . میلان په B او بیځایه کیدنه په C کی و ټاکی. EI د بیم ثابت دی.



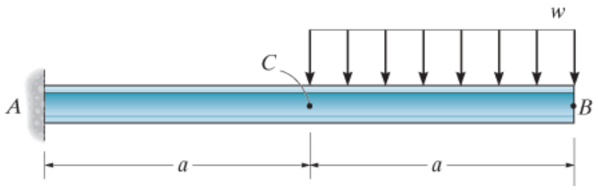
س 12-78

س 12-79 . میلان او بیځایه کیدنه په C کی و ټاکي. EI د بیم ثابت دی.



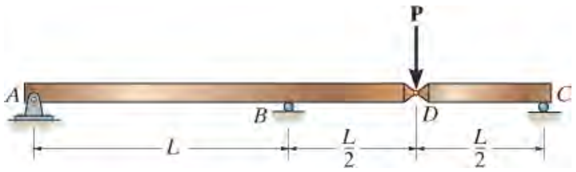
س 12-79

س *12-80 . میلان په C او بیځایه کیدنه په B کی و ټاکي. EI د بیم ثابت دی.



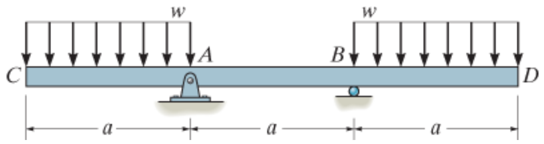
س 12-80

س 12-81 . دا لاندی دوه میلي یو بل سره په پین D کی نښلولشوی. میلان په A او بیځایه کیدنه په D کی وټاکی. EI د بیم ثابت دی.



س 12-81

س 12-82 . اعظمی بيځايه کيدنه د بيم و ټاکي. EI د بيم ثابت دی.



س 12-82

12.5 د سوپر پوزيشن طريقه (METHOD OF SUPERPOSITION)

ډيفرينشل مساوات $EI\, d^4u/dx^4 = w(x)$ دوه اړين اړتياوې د سوپرپوزيشن اصولو پلي کولو لپاره پوره کوي ؛ يعنی بار $w(x)$ په خطي توګه د بيځايه کيدني $u(x)$ سره تړاو لري، او داسي انګيرل کيږي چې بار د بيم يا شافټ په اصلي جيوميټري کی د پام وړ بدلون نه راولي. په پايله کې، بيځايه کيدنه د جلا جلا بارونو لړی چې په بيم باندې عمل کوي کيدای شي يو بل سره سوپرامپوز شي(تاثيرونه يی يوځای شی). د مثال په توګه، که د يو بار لپاره بيځايه کيدنه وي u_1 او u_2 د بل بار لپاره بيځايه کيدنه وی، د دواړو بارونو لپاره ټوله بيځايه کيدنه کله چې يوځای عمل کوی عبارت ده په الجبريک مجموعه $u_1 + u_2$ ده. د جدول شوي پايلي کارول، د بيم مختلف بار کول، لکه په ضميمه C کې چی ليست شوي، يا هغه چی په مختلفو انجينری کتابونو کې موندل کيږي، نو دا ممکنه ده چې د بيم په يوه نقطه کې ميلان او بې ځايه کيدل د ځو بارونو پلی کيدو له امله د هغوی اغيزي په اضافه کولو سره وموندل شي.

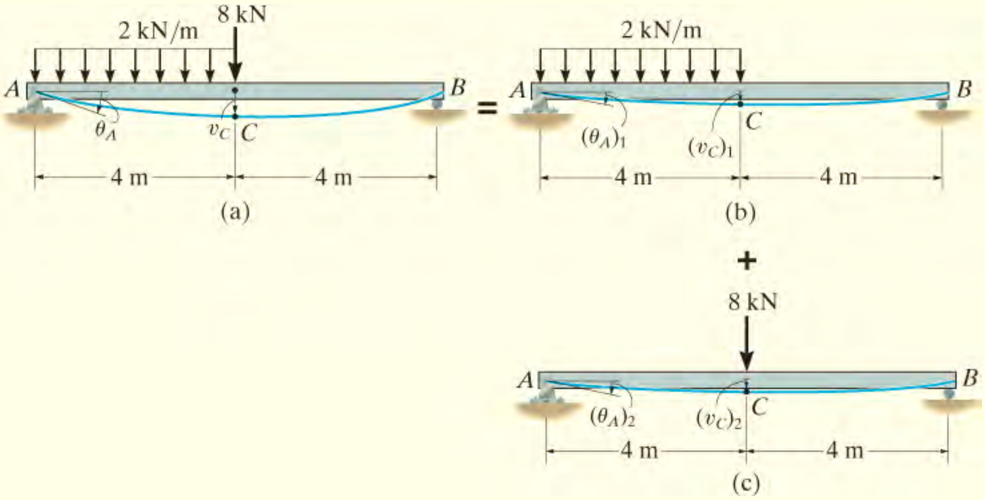
لاندې مثالونه په عددي ډول روښانه کوي چې دا څنګه ترسره کيږي .

د دې بیم په هره نقطه کې پایله لرونکي بیځایه کیدنه په سوپر پوزیشن د هر جلا بار بیځایه کیدنی په کارولو ټاکل کیدی شي.

مثالونه

مثال 12.13

ددی لاندی ښودل شوي بیم، انځور 12-27a، بیځایه کیدنه په ټکی C او میلان په اتکاء A د بیم کی و ټاکي. EI د بیم ثابت دی.



انځور 12-27

حل (SOLUTION)

دا بهرنی بار کیدی شي چی په دوو برخو ، لکه څنګه چی په انځورونو 12-27b او 12-27c کی ښودل شوي، و ویشل شي. بیځایه کیدنه په C او میلان په A کی په کارولو د جدول چی په ضمیمه C ددی کتاب کی شتون لری، د هر برخی لپاره وموندل شي.

د ویشلشوی بار لپاره

$$(\theta_A)_1 = \frac{3wL^3}{128EI} = \frac{3(2\ \text{kN/m})(8\ \text{m})^3}{128EI} = \frac{24\ \text{kN}\cdot\text{m}^2}{EI}\circlearrowright$$

$$(v_C)_1 = \frac{5wL^4}{768EI} = \frac{5(2\ \text{kN/m})(8\ \text{m})^4}{768EI} = \frac{53.33\ \text{kN}\cdot\text{m}^3}{EI}\downarrow$$

د 8-kN تمرکزی بار لپاره موږ لرو

$$(\theta_A)_2 = \frac{PL^2}{16EI} = \frac{8\ \text{kN}(8\ \text{m})^2}{16EI} = \frac{32\ \text{kN}\cdot\text{m}^2}{EI}\circlearrowright$$

$$(v_C)_2 = \frac{PL^3}{48EI} = \frac{8\ \text{kN}(8\ \text{m})^3}{48EI} = \frac{85.33\ \text{kN}\cdot\text{m}^3}{EI}\downarrow$$

بیځایه کیدنه په C او میلان په A کی مساوی دی په الجبری مجموعه ددی دواړو برخو.

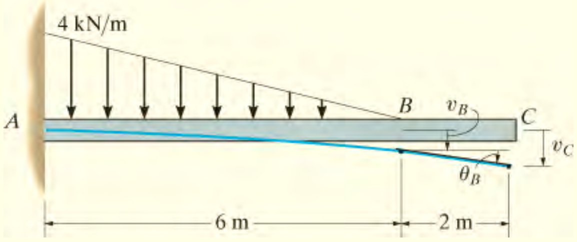
له همدی امله

$$(+\circlearrowright)\qquad \theta_A = (\theta_A)_1 + (\theta_A)_2 = \frac{56\ \text{kN}\cdot\text{m}^2}{EI}\circlearrowright \qquad \textit{Ans.}$$

$$(+\downarrow)\qquad v_C = (v_C)_1 + (v_C)_2 = \frac{139\ \text{kN}\cdot\text{m}^3}{EI}\downarrow \qquad \textit{Ans.}$$

مثال 12.14

بیځایه کیدنه په پای C د کنتیلیور بیم ، چی په انځور 12-28 کی ښودل شوی، و ټاکي. EI د بیم ثابت دی.



انځور 12-28

حل (SOLUTION)

د مثلثي بار جدول چې په ضمیمه C کې شتون لرى کار اخلو، میلان او بیځایه کیدنه په B کې عبارت دی په

$$\theta_B = \frac{w_0 L^3}{24EI} = \frac{4\ \text{kN/m}(6\ \text{m})^3}{24EI} = \frac{36\ \text{kN}\cdot\text{m}^2}{EI}$$

$$v_B = \frac{w_0 L^4}{30EI} = \frac{4\ \text{kN/m}(6\ \text{m})^4}{30EI} = \frac{172.8\ \text{kN}\cdot\text{m}^3}{EI}$$

برخه BC د بیم کې چې بار شتون نلري بیم مستقیمه پاتى شوي ، انځور 28-12 وګوري. ځکه چې q_B کوچني ده، بیځایه کیدنه په C کې کیږي :

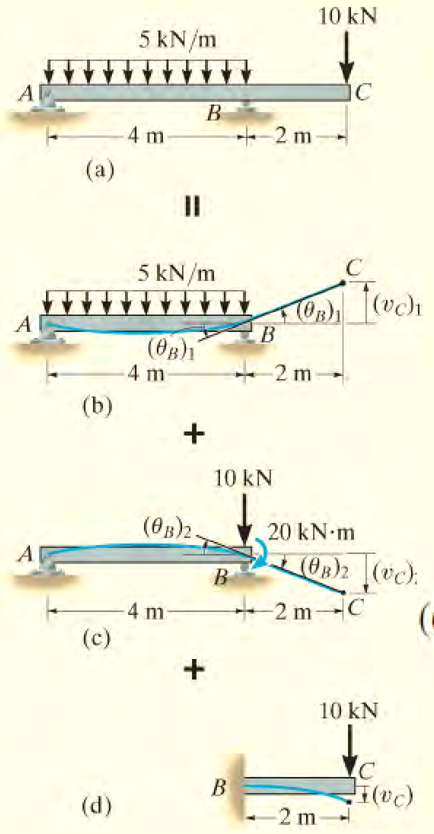
$$(+\downarrow) \qquad v_C = v_B + \theta_B(L_{BC})$$

$$= \frac{172.8\ \text{kN}\cdot\text{m}^3}{EI} + \frac{36\ \text{kN}\cdot\text{m}^2}{EI}(2\ \text{m})$$

$$= \frac{244.8\ \text{kN}\cdot\text{m}^3}{EI}\downarrow \qquad \textit{Ans.}$$

مثال 12.15

د وتلی بیم بیځایه کیدنه په پای C کی، لکه څنګه چې په انځور 12-29a کی ښودل شوي، معلومه کړي. EI د بیم ثابت دی.



انځور 12-29

حل (SOLUTION)

څرنګه چې د ضمیمی C جدول کی بیم له وتلی برخی سره شتون نلري، دا بیم به دلته په دو برخو ، یو د ساده اتکاء بیم او بل کنتیلیور بیم په پام کی ونیسو. اول به میلان په B کی د ویشلشوی بار له امله په ساده اتکاء بیم ، انځور 12-29b ، و ټاکو.

$$(\theta_B)_1 = \frac{wL^3}{24EI} = \frac{5\ \text{kN/m}(4\ \text{m})^3}{24EI} = \frac{13.33\ \text{kN}\cdot\text{m}^2}{EI} \circlearrowright$$

څرنګه چې زاویه کوچنۍ ده ، عمودی بیځایه کیدنه په ټکی C کی عبارت ده په

$$(v_C)_1 = (2\ \text{m})\left(\frac{13.33\ \text{kN}\cdot\text{m}^2}{EI}\right) = \frac{26.67\ \text{kN}\cdot\text{m}^3}{EI}\uparrow$$

بیا، په ساده اتکاء بیم ، 10-kN بار په وتلی برخه باندی ستاتیکلی مساوی قوه د 10 kN او کپل مؤمنت په ارزښت د 20 kN-m په اتکاء B کی جوړه وی. هغه 10- kN قوه لامل د میلان په B کی نه کیږي، اما هغه 20-kN-m کپل مؤمنت د سلوپ د تغیر لامل کیږي. چې هغه میلان دی

$$(\theta_B)_2 = \frac{M_0 L}{3EI} = \frac{20\ \text{kN}\cdot\text{m}(4\ \text{m})}{3EI} = \frac{26.67\ \text{kN}\cdot\text{m}^2}{EI}\circlearrowright$$

نو بیا بیځایه کیدنه په ټکی C کی عبارت ده په

$$(v_C)_2 = (2\ \text{m})\left(\frac{26.7\ \text{kN}\cdot\text{m}^2}{EI}\right) = \frac{53.33\ \text{kN}\cdot\text{m}^3}{EI}\downarrow$$

په نهایت کی کنتیلیور برخه BC د 10-kN قوه له امله بیځایه کیږی ، انځور 12-29d و ګوري. موږ لرو

$$(v_C)_3 = \frac{PL^3}{3EI} = \frac{10\ \text{kN}(2\ \text{m})^3}{3EI} = \frac{26.67\ \text{kN}\cdot\text{m}^3}{EI}\downarrow$$

کله چی الجبری مجموعه د پایلو را ټوله کړو ، دا لاندی پایله په لاس راځي

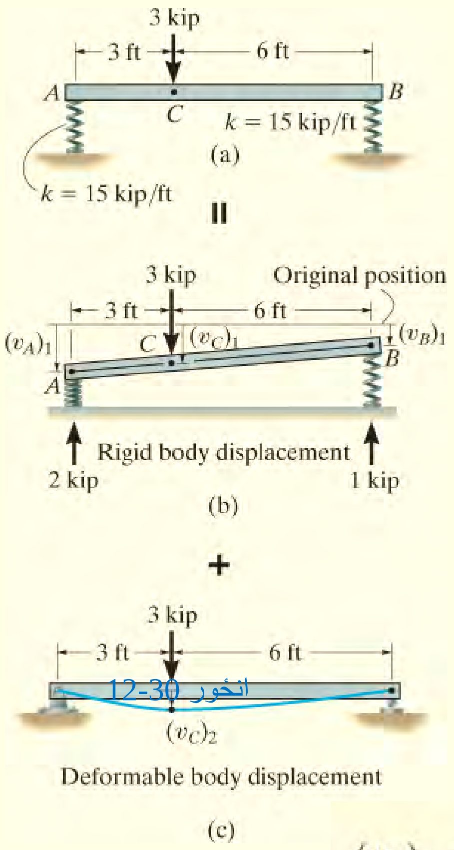
$$(+\downarrow) \qquad v_C = -\frac{26.7}{EI} + \frac{53.3}{EI} + \frac{26.7}{EI} = \frac{53.3\ \text{kN}\cdot\text{m}^3}{EI}\downarrow \qquad \textit{Ans.}$$

مثال 12.16

د یو فولادی میلی، انځور 12-30a ، لپاره دوه فنرونه (springs) په پای A او B کی اتکاءوی جوړه وی. د هر فنر شخي (stiffness) $k = 15$ kip/ft او په پیل کی فنر زغیدلی نه دی. که چیری په ټکی C کی یوه قوه د 3 kip پلي شي، عمودی بیځایه کیدنه ددی قوی له امله و ټاکي. د میلی وزن په پام کی مه نیسي. له $E_{st} = 29\ (10^3)$ ksi او $I = 12\ \text{in}^4$ کار واخلي.

حل (SOLUTION)

د پای A او B ریکشنونه وروسته له دی چی محاسبه شوی په انځور 12-30b کی ښودل شوي. هر فنر په دی لاندی اندازه بیځایه کیږي



$$(v_A)_1 = \frac{2\text{ kip}}{15\text{ kip/ft}} = 0.1333\text{ ft}$$

$$(v_B)_1 = \frac{1\text{ kip}}{15\text{ kip/ft}} = 0.0667\text{ ft}$$

که میله کلکه په پام کې و نیسو ، بیا عمودی بیځایه کیدنه په C کې عبارت ده په

$$(v_C)_1 = (v_B)_1 + \frac{6\text{ ft}}{9\text{ ft}}[(v_A)_1 - (v_B)_1]$$

$$= 0.0667\text{ ft} + \frac{2}{3}[0.1333\text{ ft} - 0.0667\text{ ft}] = 0.1111\text{ ft}\downarrow$$

موږ کولای شو چې بیځایه کیدنه په C کې د میلې د شکل له بدلون، انځور 12-30c، په کارولو د ضمیمې C له جدول څخه پیدا کړو. موږ لرو

$$(v_C)_2 = \frac{Pab}{6EIL}(L^2 - b^2 - a^2)$$

$$= \frac{3\text{ kip}(3\text{ ft})(6\text{ ft})[(9\text{ ft})^2 - (6\text{ ft})^2 - (3\text{ ft})^2]}{6[29(10^3)\text{kip/in}^2](144\text{ in}^2/1\text{ ft}^2)(12\text{ in}^4)(1\text{ ft}^4/20\,736\text{ in}^4)(9\text{ ft})}$$

$$= 0.0149\text{ ft}\downarrow$$

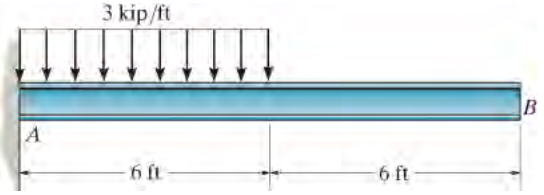
دا دوه بيځايه کيدنى په الجبرى توګه يو ځاى کوو، او دا لاندى په لاس راځي:

$$(+\downarrow) \qquad v_C = 0.1111 \text{ ft} + 0.0149 \text{ ft} = 0.126 \text{ ft} = 1.51 \text{ in.} \downarrow \qquad \textit{Ans.}$$

سوالونه

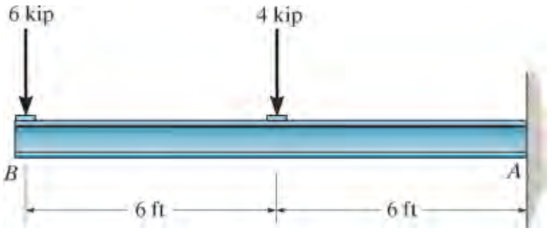
PROBLEMS

س 12-83. په دى لاندى W10 X 15 کنتيليور فولادى A-36 بيم باندى بنودل شوى بار پلي شوي دى، ميلان او بيځايه کيدنه په پاي B کى و ټاکي.



س 12-83

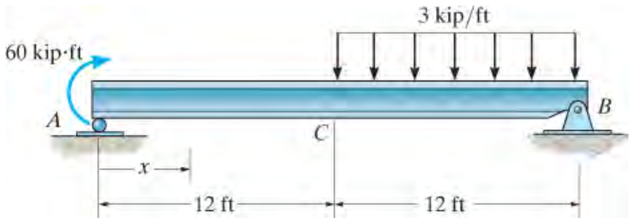
س *12-84. په دى لاندى W10 X 15 کنتيليور فولادى A-36 بيم باندى، بنودل شوى بار پلي شوي دى، ميلان او بيځايه کيدنه په پاي B کى و ټاکي.



س 12-84

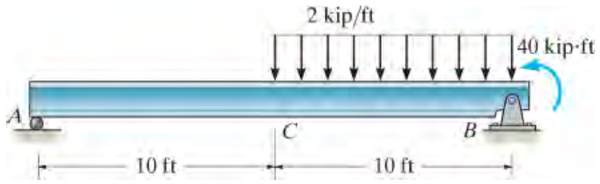
س 12-85. د W 14 X 43 ساده اتکاء A992 فولادى يم باندى بنودل شوي بار پلي شوي دي. بيځايه کيدنه په منځنى برخه C کى و ټاکي.

س 12-86. د W 14 X 43 ساده اتکاء A992 فولادی بیم باندی بنودل شوي بار پلي شوي دي. میلان په A او B کی و ټاکی.



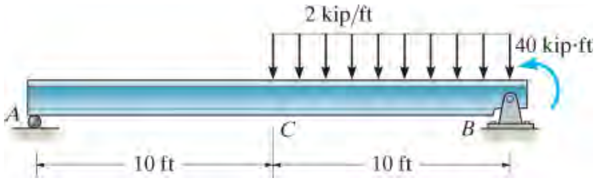
س 12-85/86

س 12-87. د W 14 X 43 ساده اتکاء A-36 فولادی بیم باندی بنودل شوي بار پلي شوي دي. بیځایه کیدنه په منځنی برخه C کی و ټاکي.



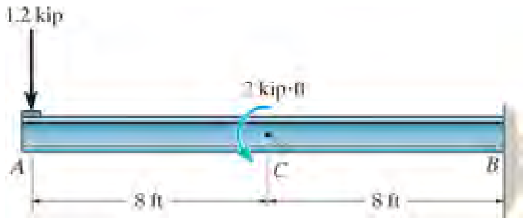
س 12-87

س *12-88. د W 14 X 43 ساده اتکاء A-36 فولادی یم باندی بنودل شوي بار پلي شوي دي. میلان په A او B کی و ټاکی.



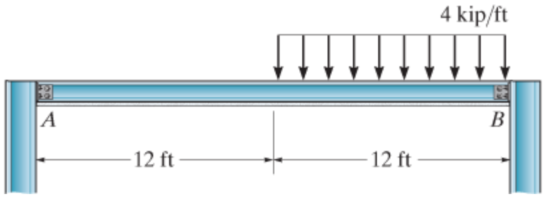
س 12-88

س 12-89. د W 8 X 48 کنتیلیور A-36 فولادی بیم باندی بنودل شوي بار پلي شوي دي. بیځایه کیدنه په C او میلان په A کی و ټاکی.



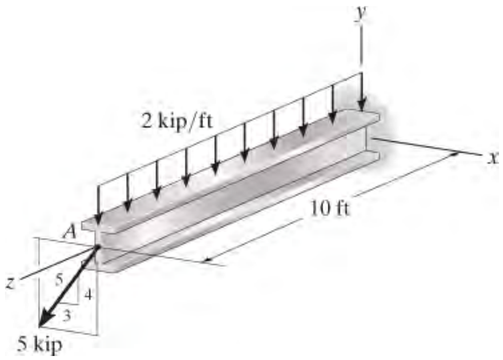
س 12-89

س 12-90. په بیم ښودل شوی بار پلي شوي. د کود دمحدود یتونو له امله اعظمی بیځایه کیدنه له 1/360 د بیم له اوږدوالي زیاته نشي. له ضمیمی *B* یو سپک فولادی A-36 سورروه فلنج انتخاب کړي تر څو د کود محدودیت پوره او په خوندی ډول د ښودل شوی بار یو وړلی شی. د منلو وړ د کږیدو ستریس s_{allow} =24 ksi او د منلو وړ شییر سترس t_{allow} = 14 ksi دي. فرض کړی چی اتکاء په *A* کی رولر او په *B* کی پین دي.



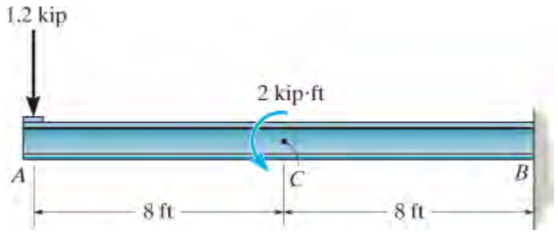
س 12-90

س 12-91. په W x 104 فولادی A-36 بیم یو ویشلشوی بار او یوه متمرکزه قوه په پای د بیم کی پلی شوي. که چیری دا قوه په یوه زاویه پلی شي، افقي او عمودي برخی د بیځایه کیدني په *A* کی و ټاکي.



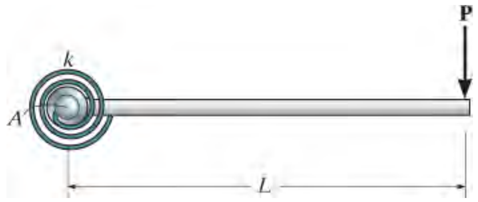
س 12-91

س 12-92*. د W 8 X 48 کنتیلیور A-36 فولادی بیم باندی ښودل شوي بار پلي شوي دي. بیځایه کیدنه په *A* کی و ټاکي.



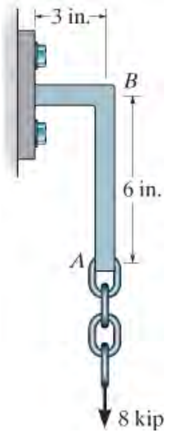
س 12-92

س 12-93. میله په پای A کی پن اتکاء لری او تړلي په تاویدونکي فنر چی کلکتیا یي k ده، کوم چی اندازه کیږي په تورک په هر رادیان تاویدنه د فنر سره. که چیری یوه قوه **P** عمودی په پای د میلی کی پلی شي، بیځایه کیدنه د قوی له امله و ټاکي. EI د بیم ثابت دی.



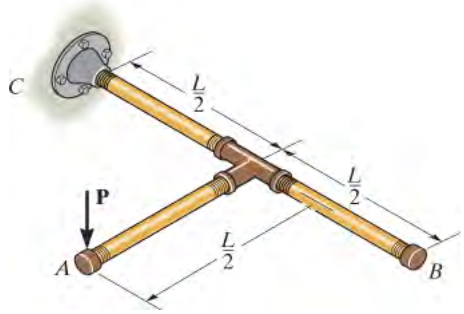
س 12-93

س 12-94. عمودی بیځایه کیدنه او توپیر د زاویی په پای A د براکت کی معلوم کړي. فرض کړي چی براکت کلک په اتکا کی تړلی شوي. محوري بیځایه کیدنه د برخی AB په پام کی مه نیسي. EI د بیم ثابت دی.



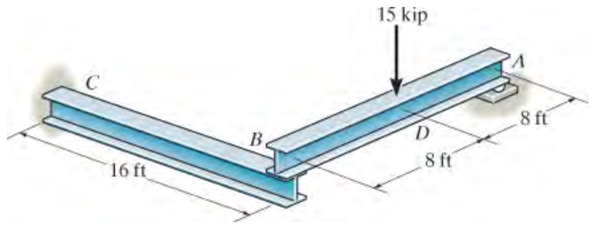
س 12-94

س 12-95. د پایپ اسامبلي له دریو یو اندازه پایپونو چی ارتجایي سختي (flexibility stiffness) یي EI او تاویدونکي سختي (torsional stiffness) یي GJ ده. عمودي بیځایه کیدنه په A کی وټاکي.



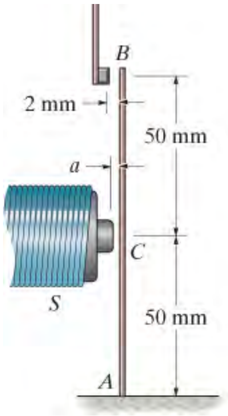
س 12-95

س *12-96 . دا لاندی اسامبلی له کنیتلیور بیم CB او ساده اتکاء بیم AB څخه جوړه شوي. که هر بیم له A-36 فولادو چی انرشیايي مؤمنت يي په اصلي محور $Ix = 118\ in^4$ دي، بيځايه كيدنه په مرکز D د بیم BA و ټاکي.



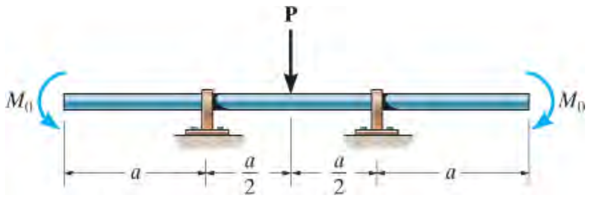
س 12-96

س 12-97. دريلی سويچ له نازک پټي يا ارمچر (armature) AB چی له سرو برنجو C83400جوړ شوی او د سيلونويد (solenoid) S سره په مقناطيسو ساحی جذب کيږي. هغه کوچني قوه F چی د ارمچر جذبولو لپاره په C کی اړينه ده تر څو تماس د ازاد پای B سره جوړ شي. همدا رنګه ددی کار لپاره فاصله a و ټاکي. ارمچر په A کی کلک تړل شوي او انرشيايي مؤمنت يي $I = 0.18\ (10^{-12})\ m^4$ دي.



س 12-97

س 12-98 . مؤمنت M_0 د بار P له مخی او فاصله a داسی وټاکي ترڅو بيځايه كيدنه په مرکزد شافت کی صفر وي. EI د بیم ثابت دی.



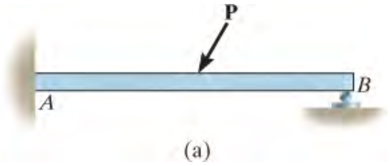
س 12-98

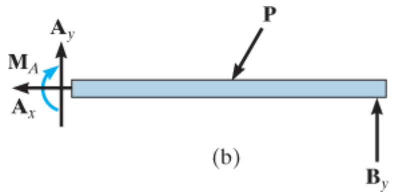
12.6 ستاتیکلی نامعلوم بیمونه او شافتونه (STATICALLY INDETERMINATE BEAMS AND SHAFTS)

پدې برخه کې به موږ عمومي طریقه د ستاتیکلی نا معلوم ریکشنونو د بیم او شافټ ټاکلو لپاره روښانه کړو. په ځانګړې توګه، یو غړي ستاتیکلي نامعلوم دی کله چې شمیر د نامعلومو ریکشنو د توازن له معادلو څخه ډیر وی.

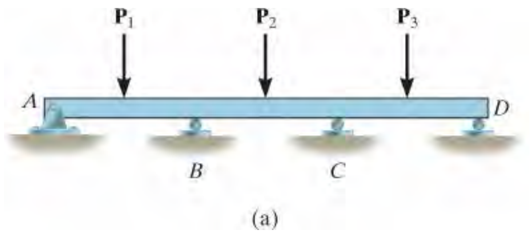
په بیم (یا شافټ) کې اضافي ریکشنونه چې د باثباته توازن ساتلو لپاره اړتیا ورته وی هغوی ته اضافی او یا ریډنډنټ (*redundant*) ویل کیږي، او د دې اضافی ریکشنونو شمیرته د نا څرنګتیا درجه (degree of indeterminacy) ښیی. د بیلګې په توګه، هغه بیم ته پام وکړئ چې په انځور 12-31a کی ښودل شوي. که آزاد ډیاګرام یې رسم شی، انځور 12-31b ، څلور نامعلوم ریکشنونه به وي، او له هغه ځایه چې د حل لپاره درې د توازن مساوات شتون لري، بیم د "لومړۍ درجی نامعلومه" په توګه طبقه بندي کیږي. یا هم $\mathbf{A}_y$، $\mathbf{B}_y$ ، یا $\mathbf{M}_A$ کیدای شي د ذاید یا اضافی ریکشن په توګه طبقه بندي شي. که چیری هر یو د دې ریکشنو نه له دوې څخه لیرې شي، بیم به لاهم مستحکم او په توازن کې پاتې شي (Ax د ذاید په توګه طبقه بندي نشي، ځکه چې که لیرې شوي وي، توازن د $F_x = 0$ به مطمئن نه وي.) په ورته ډول، دا دوامداره بیم د انځور 12-32a "دویمي درجې ته ناڅرګند دی" ځکه چې پنځه نامعلوم ریکشنونه شتون لري او یوازې درې د توازن معادلی شتون لري، انځور 12-32b . دلته هر دوه ذاید ریکشنونه د $\mathbf{A}_y$، $\mathbf{B}_y$، $\mathbf{C}_y$ ، او $\mathbf{D}_y$ ترمنځ غوره کیدی شي .

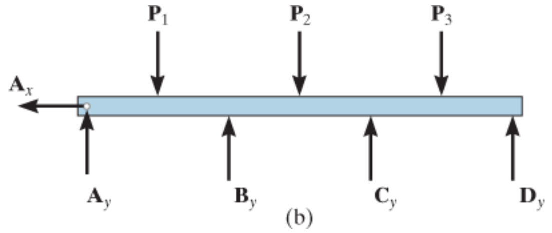
په بیم کی کوم ریکشنونه چې ستاتیکلی نامعلوم وي باید دواړه د توازن او د مطابقت اړتیاوې په اتکاء کې پوره کړي. په لاندې برخو کې به موږ دا روښانه کړو چې دا څنګه د انتیګریشن طریقی په کارولو ترسره کیږي، برخه 12.7 ،یا د مؤمنت-امساحت طریقه، برخه 12.8، اویا د سپرپوزیشن طریقه،برخه 12.9 .





انځور 12-31





انځور 12-32

12.7 ستاتيکلی نامعلوم بيمونه او شافټونه-د انټيګريشن په طريقه
(STATICALLY INDETERMINATE BEAMS AND SHAFTS--METHOD OF INTEGRATION)

د انټيګريشن طريقی په باره کی په برخه 12.2 کی بحث وشو، چی د پلی کولو لپاره د بار- بيځيايه کيدو اړيکی اړين دی ، $d^2u/dx^2 = M/EI$ ، تر څو ايلستيک منحنی د بيم په لاس راشي. که چيری بيم ستاتيکلی نامعلوم وی، بيا M به د خپلی فاصلی x او ځيني نامعلوم ريکشنونو سره څرګند شوی وی. که څه هم دا به پيښ شی ، د حل لپاره به نور سرحدی حالتونه شتون ولري.

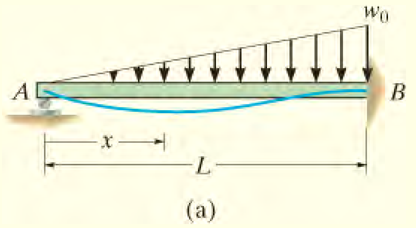
دا لاندی مثال د انټيګريشن ميتود پلی کول د تحليل لپاره ، څنګه چی په برخه 12.2 بحث شو، تشريح کوي.

مثال د ستاتيکلی نامعلوم بيم چی د پله فرش لپاره يي اتکاء جوړه کړي.

مثالونه

مثال 12.17

په دی لاندی بیم یو ویشل شوی بار، کوم چې په انځور 12-33a کی ښودل شوی، پلی شوي. ریکشن په A کی و ټاکي. EI ثابت دی.



(a)

انځور 12-33

حل (SOLUTION)

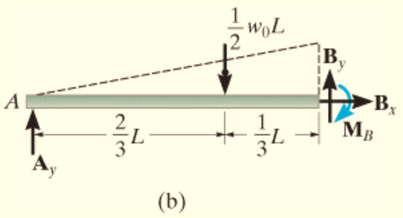
ایلستیک منحني (Elastic Curve).

بیم لکه څنګه چې په انځور 12-33a کی ښودل شوي بیځایه کیږي. یو کوارډناټ x ته ضرورت دی.

د آسانتیا لپاره به موږ په پام کی ونیسو چې x په ښي لور ښودل شوي، ځکه چې د مؤمنت جوړه ولو محاسبه یی آسانه ده.

د مؤمنت تابع (Moment Function).

لکه څنګه چې په آزاد ډیګرام ، انځور 12-33b ، کی ښودل شوي بیم یوه درجه نامعلومه ده. که موږ هغه برخه چې په انځور 12-33c کی ښودل شوي ، انتخاب کړو نو بیا داخلی مؤمنت M به تابع د x ، او ذاید A_y سره داسی لیکل کیدی شي.



(b)

$$M = A_y x - \frac{1}{6} w_0 \frac{x^3}{L}$$

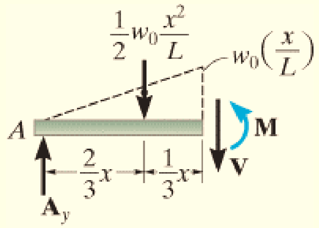
میلان او ایلیستیک منحني (Slope and Elastic Curve).

معادله 12-10 پلی کوو، موږ لرو

$$EI\frac{d^2v}{dx^2} = A_y x - \frac{1}{6}w_0\frac{x^3}{L}$$

$$EI\frac{dv}{dx} = \frac{1}{2}A_y x^2 - \frac{1}{24}w_0\frac{x^4}{L} + C_1$$

$$EIv = \frac{1}{6}A_y x^3 - \frac{1}{120}w_0\frac{x^5}{L} + C_1 x + C_2$$



(c)

هغه درې نامعلوم A_y, C_1 او C_2 له دریو سرحدی شرایطو $x=0, \upsilon=0$ ؛ $x=L$ ؛ $x=L$ ، $d\upsilon/dx=0$ ، $\upsilon=0$, څخه موندل کیدی شي.

کله چې دا شرایط پلی کړو موږ لرو

$$x = 0, v = 0; \qquad 0 = 0 - 0 + 0 + C_2$$

$$x = L, \frac{dv}{dx} = 0; \qquad 0 = \frac{1}{2}A_y L^2 - \frac{1}{24}w_0 L^3 + C_1$$

$$x = L, v = 0; \qquad 0 = \frac{1}{6}A_y L^3 - \frac{1}{120}w_0 L^4 + C_1 L + C_2$$

دا حل کوو

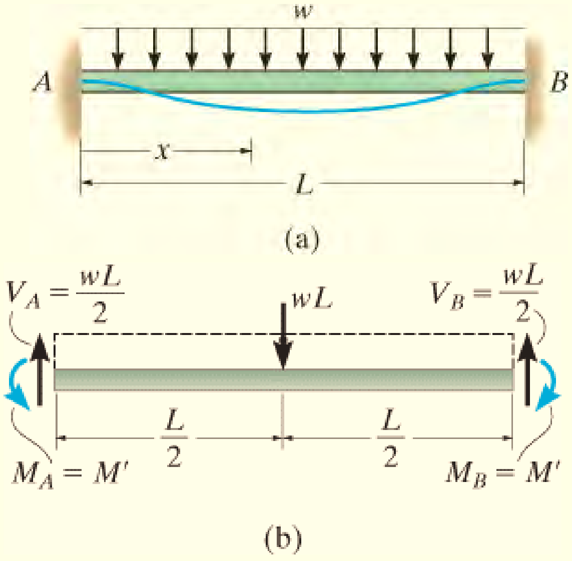
$$A_y = \frac{1}{10}w_0 L \qquad \textit{Ans.}$$

$$C_1 = -\frac{1}{120}w_0 L^3 \qquad C_2 = 0$$

یادونه: د A_y پایلو سره ریکشن په B کې د توازن معادلو په کارولو سره موندل کیدی شي، انځور 12-33b. وښيي چې کله $B_x=0, B_y=2w_0L/5$ او $M_B=w_0L^2/15$ دی.

مثال 12.18

په انځور 12-34a کی ښودل شوي بیم په دواړو پایلونو کی کلکه تړل شوي ده. ریکشنونه په اتکاءو کی و ټاکی. د محوری بارتاثیرونه په پام کی مه نیسي.



انځور 12-34

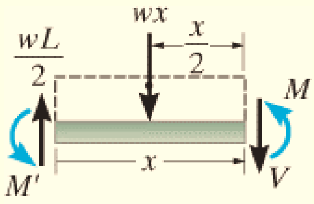
حل (SOLUTION)

ایلستیک منحني (Elastic Curve). بیم بیځایه شوی ، لکه څنګه چی په انځور 12-34a کی ښودل شوي. د تیر شوی مثال په توګه تنها یو x محور د حل لپاره اړین دی ځکه چی بار د بیم په ټوله وایه (اوږدوالی) باندی دوامداره دی.

د مؤمنت تابع (Moment Function). له آزاد دایګرامه ، انځور 12-34b ، مؤمنت او شییر ریکشنونه په A او B کی باید مساوی وی، ځکه چی د بار او هندسی انځور، دواړو خواوو نه، متناظر دی. ددی لپاره چی توازن معادله $\Sigma F_y = 0$ اړینه ده چی:

$$V_A = V_B = \frac{wL}{2} \qquad \textit{Ans.}$$

بیم په اوله درجه د M' سره په دواړو پایلونو کی ذایده ده. د بیم برخه چی په انځور 12-34c کی ښودل شویی داخلی مؤمنت



(c)

عبارت دی په

$$M = \frac{wL}{2}x - \frac{w}{2}x^2 - M'$$

میلان او ایلیستیک منحني (Slope and Elastic Curve). معادله 12-10 پلی کوو، او مونږ لرو

$$EI\frac{d^2v}{dx} = \frac{wL}{2}x - \frac{w}{2}x^2 - M'$$
$$EI\frac{dv}{dx} = \frac{wL}{4}x^2 - \frac{w}{6}x^3 - M'x + C_1$$
$$EIv = \frac{wL}{12}x^3 - \frac{w}{24}x^4 - \frac{M'}{2}x^2 + C_1x + C_2$$

اد دری نامعلوم M', C_1 او C_2 له دریو سرحدی شرایطو $u = 0$ په $x = 0$ او دا حاصلوي $du/dx = 0$; $C_2 = 0$ په $x = 0$ له دی حاصل کیږي $C_1 = 0$. او $u = 0$ په $x = L$ کوم چی په لاندی ډول حاصل ورکوي

$$M' = \frac{wL^2}{12} \qquad \textit{Ans.}$$

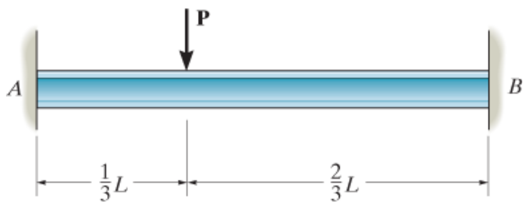
پام وکړی چی د متناظر والي له امله پاتي سرحدی شرطونه $du/dx = 0$ په $x = L$ په اتومات ډول پوره شوي.

سوالونه

PROBLEMS

س 12-99 ریکشنونه په اتکاءوو A او B کی وټاکي، بیا د شییر او مؤمنت ډایګرامونه یي رسم کړي.

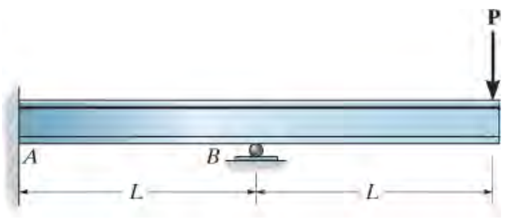
د محوری بار تاثیر په پام کی مه نیسي. EI ثابت دی.



انځور 12-99

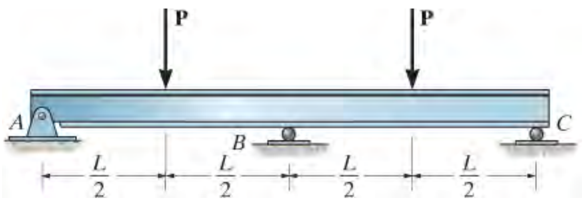
س *12-100 . ریکشنونه په اتکاءوو کی وټاکي، بیا د شییر او مؤمنت ډایګرامونه یي رسم کړي.

EI ثابت دی.



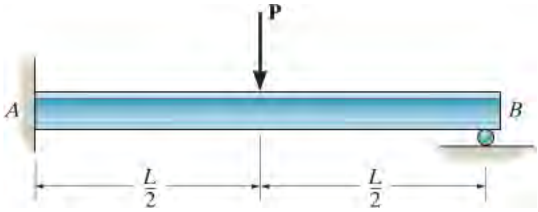
انځور 12-100

س 12-101 . ریکشنونه په اتکاءو B , A او C کی وټاکي، بیا شییر او مؤمنت ډایګرامونه یي رسم کړي. EI ثابت دی.



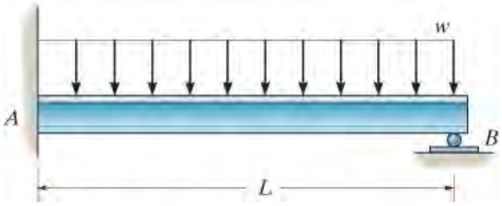
انځور 12-101

س 12-102 . ریکشنونه په اتکاءوو A او B کی وټاکي، بیا شییر او مؤمنت ډایګرامونه یي رسم کړي. EI ثابت دی.



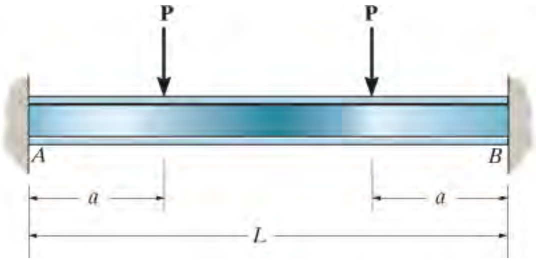
انځور 12-102

س 12-103 . ریکشنونه په اتکاءوو A او B کی وټاکي، بیا شییر او مؤمنت ډایګرامونه یي رسم کړي. EI ثابت دی.



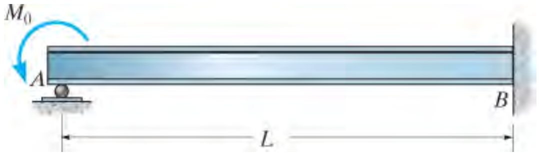
انځور 12-103

س *12-104 . ریکشنونه په اتکاءوو A او B کی وټاکي، بیا شییر او مؤمنت ډایګرامونه یي رسم کړي. EI ثابت دی.



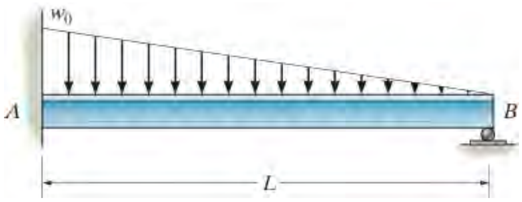
انځور 12-104

س 12-105 . ریکشنونه په اتکاءوو A او B کی وټاکي، بیا شییر او مؤمنت ډایګرامونه یي رسم کړي. EI ثابت دی.



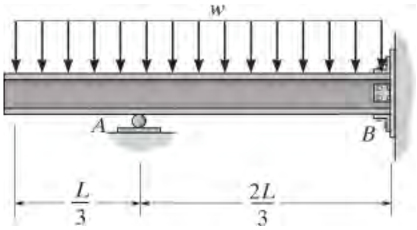
انځور 12-105

س 12-106 . ریکشنونه په اتکاءوو A او B کی وټاکي. EI ثابت دی.



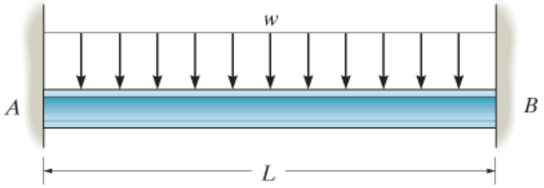
انځور 12-106

س 12-107 . ریکشنونه په رولر اتکاء A او کلک اتکا ء B کی وټاکي.



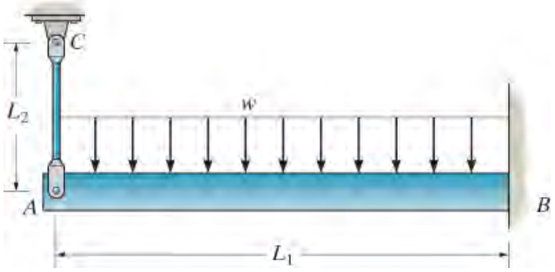
انځور 12-107

س *12-108 . مؤمنت ریکشنونه په اتکاءو A او B کی وټاکي، بیا شییر او مؤمنت ډایګرامونه یي رسم کړي. داخلی مؤمنت په بیم کی د A_y او M_A له مخی حل کړي. EI ثابت دی



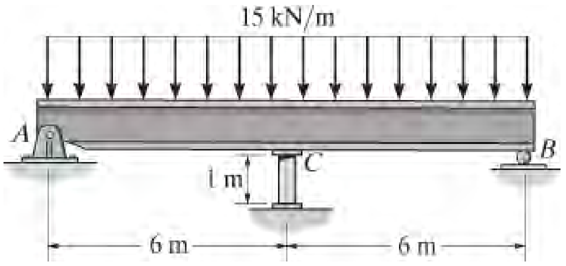
انځور 12-108

س 12-109 . دا لاندی بیم ثابت E_1I_1 لری او په کلک دیوال B او میله AC سره تړل شوی ده. که چیری د میلی غوځی برخی ساحه A_2 او مواد یي د ایلستیسټي ماجولس E_2 ولري، قوه په میله کی و ټاکي.



انځور 12-109

س 12-110 . دا لاندی بيم پين اتکاء په A کی او رولر اتکاء په B کی او يو پايه اتکا چې قطر يي 50 mm دی په C کی لري. د اتکاءوو ريکشنونه په A, B او C کی وټاکي. بيم او پايه له يو شان موادو چې د ايلستيستي ماجولس يي $E = 200$ GPa دی جوړه ړشوي، د بيم انرشيايي ماجولس يي $I = 255(10^6)$ mm^4 دي.



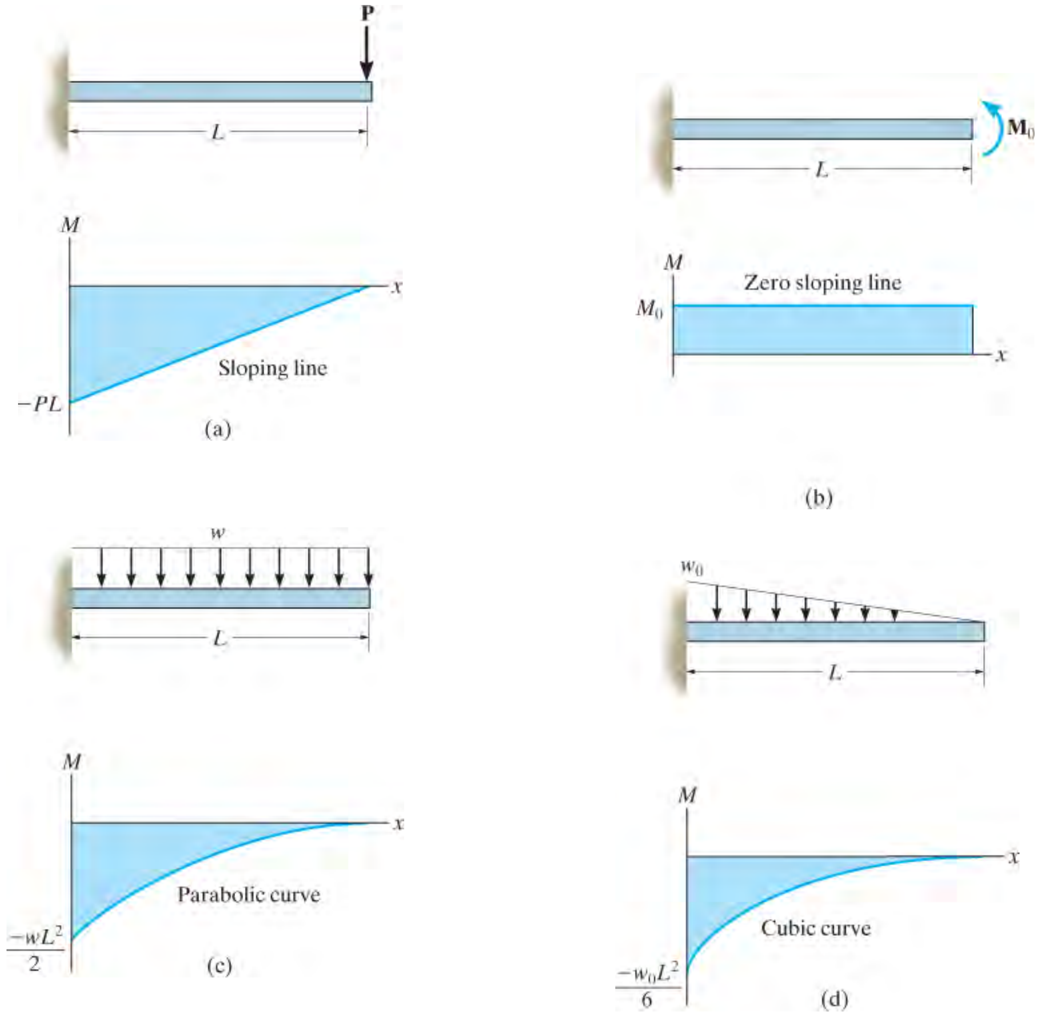
انځور 12-110

*12.8 ستاتيکلی نامعلوم بيمونه او شافتونه-د مؤمنت-مساحت په طريقه (STATICALLY INDETERMINATE BEAMS AND SHAFTS-MOMENT- AREA METHOD)

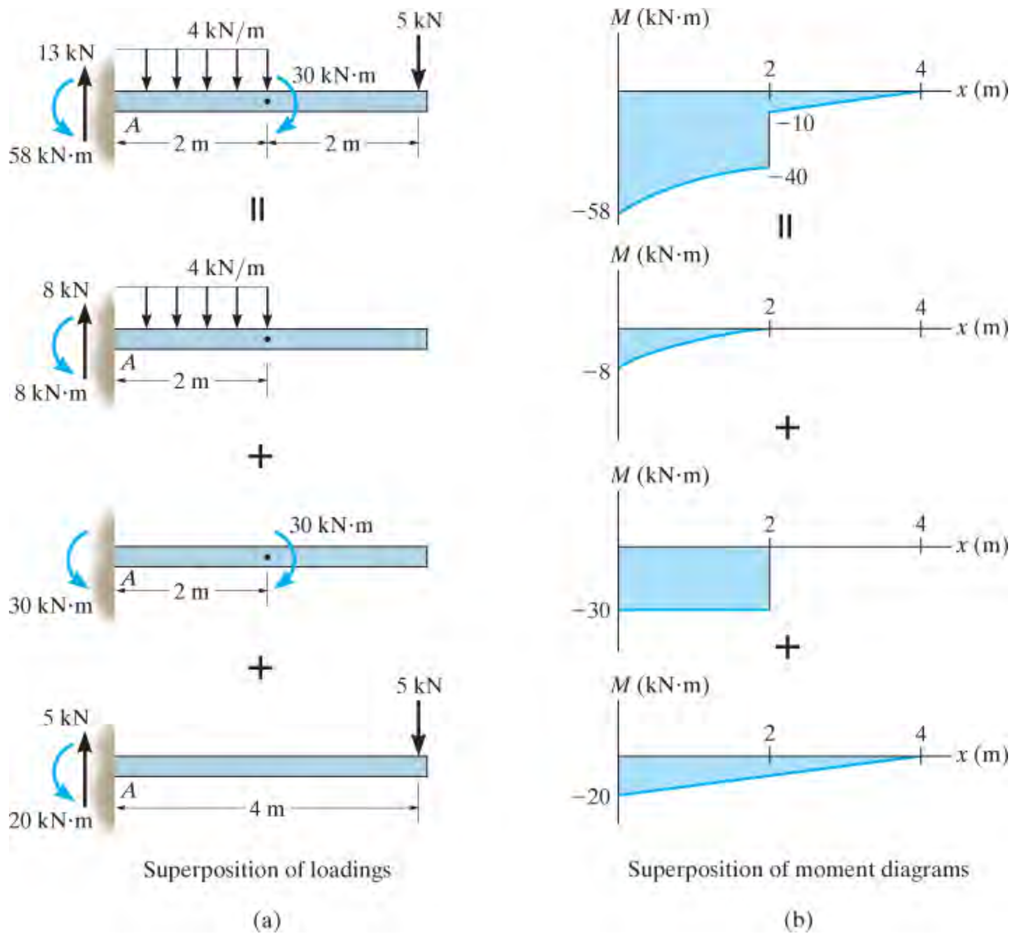
که چيرې د مؤمنت د ساحی طريقه د ستاتيکلی نامعلوم ډول بيم يا شافت دنامعلوميا ذايدو (redundant) ريکشنونو معلومولو لپاره وکارول شي، بيا کله چې M/EI ډياگرام يي رسم شی، ذايد به د نامعلومو په توګه په دی ډايگرام کی ونبودل شي. په هرصورت، د مؤمنت- ساحې تيوری ګانو په پلي کولو سره به دا ممکنه شي چې په ايلستيک منحني د مماسونو ترمنځ اړين اړيکي ترلاسه کړئ تر څود مطابقت شرايط په اتکاؤ کی پوره شي، او په دې توګه د ذايدو ريکشنونو لپاره حل ترلاسه شي.

د مؤمنت ډايگرام جوړه ول د سوپرپوزيشن په طريقه. څرنګه چې د مؤمنت- ساحې تيوری ګانو پلي کولو لپاره د M/EI ډياگرام لاندې د ساحې محاسبې او مرکز ثقل موقعيت معلومولودواړو ته اړتيا وي، دا ډيری وختونه د دی ميتود کارولو لپاره مناسب دی چې له سوپرپوزيشن کار واخيستل شی . او د هر بار په بيم لپاره جلا M/EI ډياګرامونه وکاروئ، دا مناسب لاره ده پر ځای د دی چې د ټولو مومنتو پايله محصله شوي ډايگرام چې په عمومی صورت پيچلی هندسی مشخصاتو لری محسابه کړو.

ډیری بارونه په کنټیلیور بیمونو ترکیب د څلورو بارونو ، لکه څنګه چې په انځور 35-12 کې ښودل شوي، دي. د دوی د اړوندو مؤمنت ډایګرامونو جوړول د شپږم څپرکي په مثالونو کې بحث شوي .

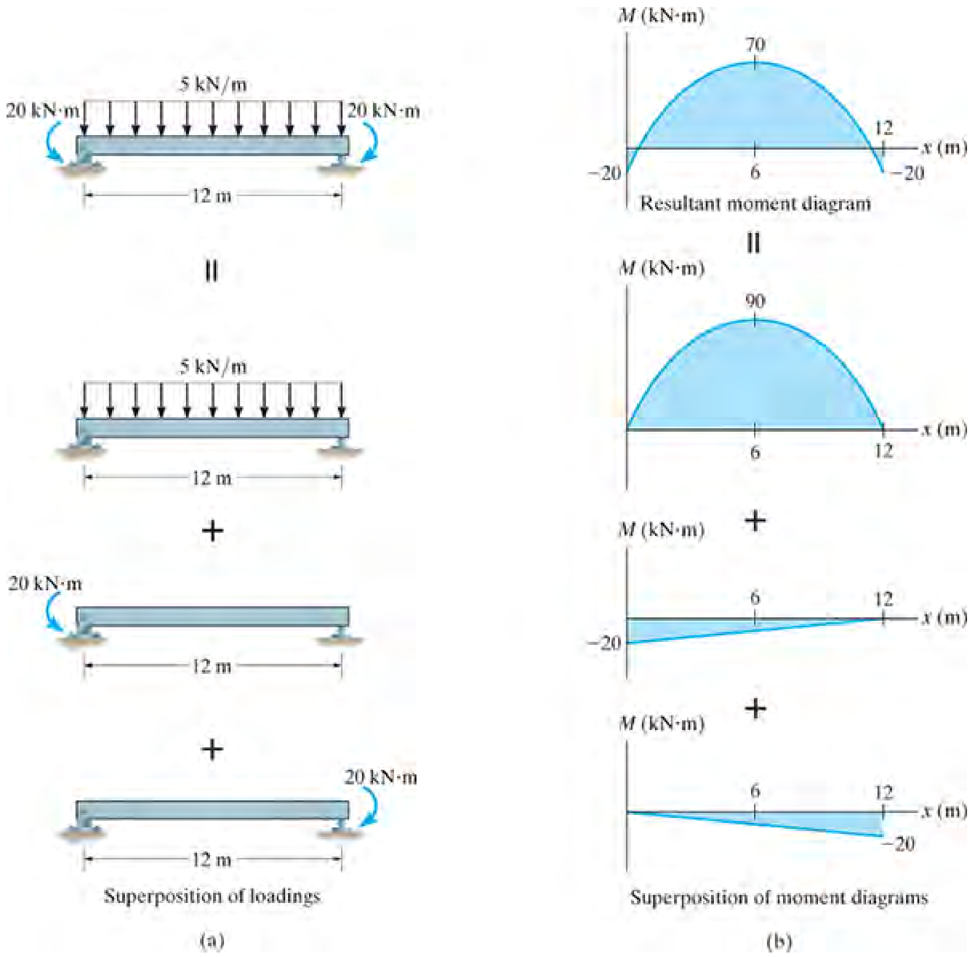


انځور 35-12



انځور 12-36

له دی پایلو سره، بیا د سوپرپوزیشن طریقه کارول کیدی شي تر څو مؤمنت ډایګرام د یو بیم په یو لړ جلا مؤمنت ډایګرامونو و ښودل شي. د مثال په توګه درې بارونه په یو کنتیلیور بیم چې په انځور 12-36a کی ښودل شوي ، ستاتیکلی مساوی دی په دریو جلا بارونو په تر کنتیلیور بیم نه ښکته د هر بار دپاره په جلا توګه رسم شوی دی. انځور 12-36b . سوپر پوزيشن ددی ډایګرامونو به هغه پورتني مؤمنت ډایګرام حاصل کړي. په ښکاره ډول دا آسانه ده چی ساحه او موقعیت د مرکز ثقل د هر ډایګرام له دی جلا ډایګرامونو نسبت محصله ډایګرام ته ومونډل شي.



انځور 12-37

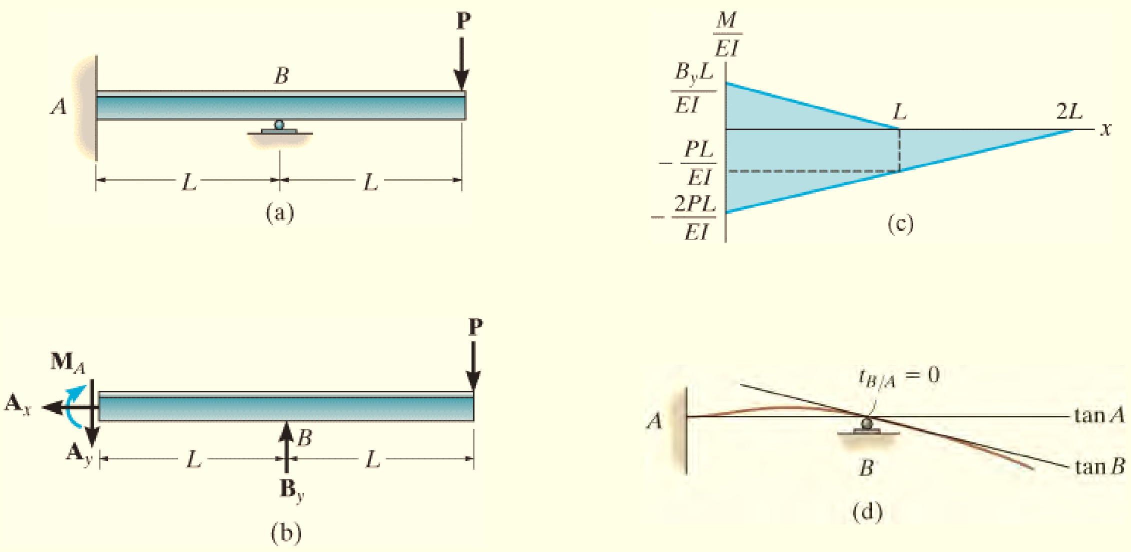
په ورته ډول، موږ کولی شو استازیتوب د محصله مؤمنت ډایګرام د یو ساده اتکاء بیم د سپرپوزیشن په کارولو سره په مجموعه د مؤمنت ډایګریام د هر بار سره وکړو. د مثال په توګه، د بیم بار کول چې په پورتنی برخه د انځور 12-37a کی ښودل شوي، مساوي دی په مجموعې د لاندې ښودل شویو بارونو په بیم باندې. یوځل بیا، د ساحو محاسبه کول او د مرکز ثقل موقعیتونو معلومول د دریو جلا مؤمنت ډایګرامونو لپاره پر ځای د یو محصله ډایګرام ، انځور 12-37b ، چې په پورتنی برخه کې ښودل شوی، اسانه دي .

هغه مثالونه چې وړاندی کیږی د ا ټکی به نور هم روښانه کړئ، چې په مستقیم ډول دمؤمنت-مساحت تیورم د ستاتیکلی نامعلوم یا ذاید ریکشنونو معلومول لپاره څنګه کارول کیږي. د حلولو د تحلیل لپاره هغه طریقه چی په 12.4 برخه کی تشریح شوي تعقیبوي.

مثالونه

مثال 12.19

په دی لاندی انځور 12-38a کی په ښودل شوي بیم یوه تمرکزی قوه پلی شوي. ریکشنونه په اتکاءوو کی معلوم کړی. EI ثابت دی.



انځور 12-38

حل (SOLUTION)

M/EI ډاګرام (M/EI Diagram).

آزاد ډایګریم په انځور 12-38b کی ښودل شوي.

فرض کوو چی بیم له A څخه کنتیلیور شوي ، او د سوپر پوزیشن له طریقی کار اخلو. جلا M/EI دایګرامونه د ذاید ریکشن B_y او دی پلی شوی بار **P** لپاره په انځور 12-38c کی ښودل شوي.

ایلستیک منحني (Elastic Curve). ایلستیک منحنی د بیم په انځور 12-38 d کی ښودل شوي دی. مماسونه په اتکاءو A او B کی رسم شوي. ځکه چی $u_B = 0$ ، نو بیا

$$t_{B/A} = 0$$

مؤمنت-مساحت تیورم (Moment – Area Theorem). د مؤمنت-مساحت دوهم (2) تیورم پلی کوو، مونږ لرو:

$$t_{B/A} = \left(\frac{2}{3}L\right)\left[\frac{1}{2}\left(\frac{B_yL}{EI}\right)L\right] + \left(\frac{L}{2}\right)\left[\frac{-PL}{EI}(L)\right] + \left(\frac{2}{3}L\right)\left[\frac{1}{2}\left(\frac{-PL}{EI}\right)(L)\right] = 0$$

$$B_y = 2.5P \qquad \textit{Ans.}$$

د توازن معادلي (Equations of Equilibrium).

له دی پایلو کار اخلو ، د آزاد ډیګرام ریکشنونه په A کی، انځور 12-38b ،کی عبارت دی په

$$\overset{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = 0; \qquad A_x = 0 \qquad \textit{Ans.}$$

$$+\uparrow\Sigma F_y = 0; \qquad -A_y + 2.5P - P = 0$$

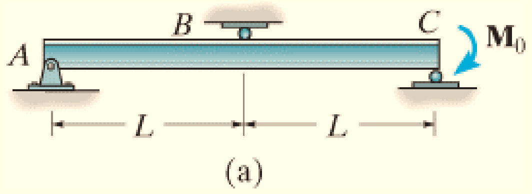
$$A_y = 1.5P \qquad \textit{Ans.}$$

$$\circlearrowleft+\Sigma M_A = 0; \qquad -M_A + 2.5P(L) - P(2L) = 0$$

$$M_A = 0.5PL \qquad \textit{Ans.}$$

مثال 12.20

ددی لاندی بیم ، انځور 12-39a ، په پای C کی یو کپل مؤمنت پلی شوي دی. ریکشنونه په B کی و ټاکي. EI ثابت دی.

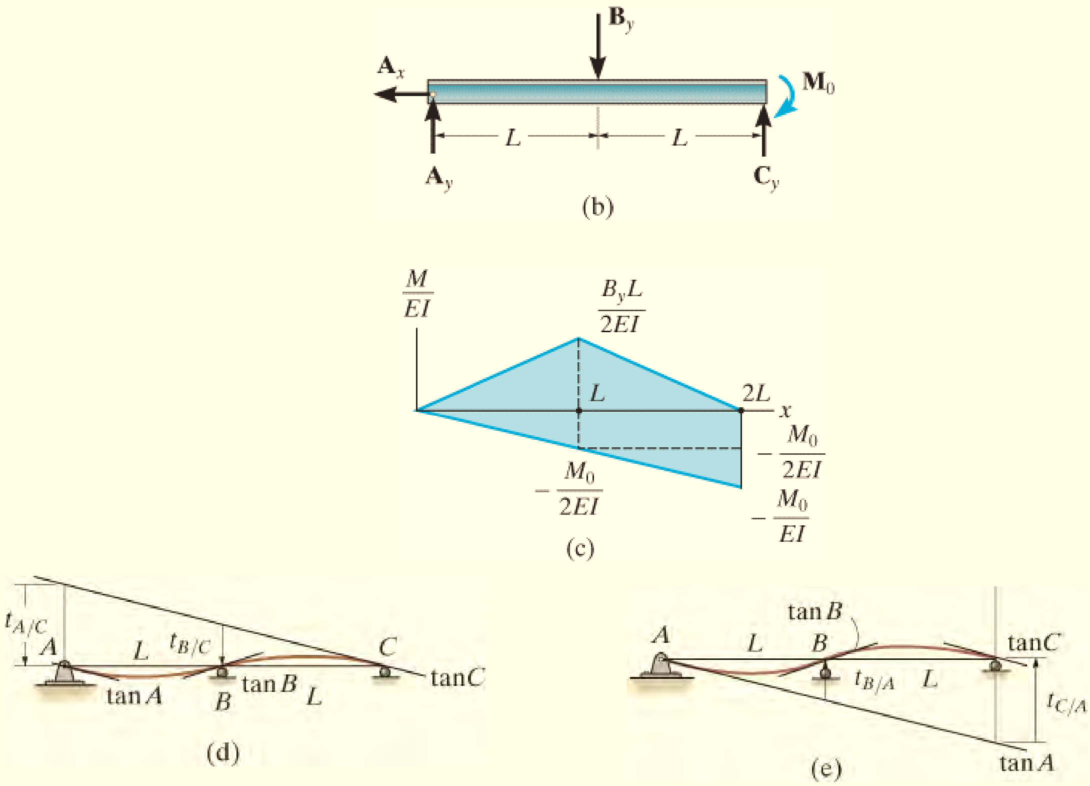


(a)

انځور 12-39

حل (SOLUTION)

M/EI ډاګرام (M/EI Diagram). آزاد ډایګرام په 12-39b کی ښودل شوي. په لیدو سره پوهیږو چی بیم په اوله درجه نامعلو مه ده. ددی لپاره چی حل په مستقیم ډول تر لاسه کړو ، B_y به د ذاید په توګه وټاکو. نو بیا به دا بیم د یو ساده اتکا بیم په توګه په پام کی و نیسو، او سوپر پوزیشن له طریقي به د M/EI ډایګرامونو به د $\mathbf{B}_y$ او $\mathbf{M}_0$ د پاره جوړ کړو، انځور .



انځور 12-39 (تکرار)

ایلستیک منحني (Elastic Curve). ایلستیک منحني دبیم په انځور 12-39d کی ښودل شوي، او مماسونه په A, B او C باندی رسم شوي دی. څکه چی $u_A = u_B = u_C = 0$ ، نو بیا عمودی فاصلی باید نسبتی وی، یعني

$$t_{B/C} = \frac{1}{2} t_{A/C} \qquad (1)$$

له انځور 12-39c مونږ لرو

$$t_{B/C} = \left(\frac{1}{3}L\right)\left[\frac{1}{2}\left(\frac{B_y L}{2EI}\right)(L)\right] + \left(\frac{2}{3}L\right)\left[\frac{1}{2}\left(\frac{-M_0}{2EI}\right)(L)\right] + \left(\frac{L}{2}\right)\left[\left(\frac{-M_0}{2EI}\right)(L)\right]$$

$$t_{A/C} = (L)\left[\frac{1}{2}\left(\frac{B_y L}{2EI}\right)(2L)\right] + \left(\frac{2}{3}(2L)\right)\left[\frac{1}{2}\left(\frac{-M_0}{EI}\right)(2L)\right]$$

دا په معادله 1 کی ځای په ځای او وروسته له ساده کولو دا لاندی په لاس راځي

$$B_y = \frac{3M_0}{2L} \qquad \textit{Ans.}$$

د توازن معادلي (Equations of Equilibrium). د توازن معادلو په مرسته ریکشنونه په A او C کی اوس معلومولي شو، انځور 12-39b . وښيي چې

$A_x = 0,\ C_y = 5M_0/4L$ او $A_y = M_0/4L$ دی.

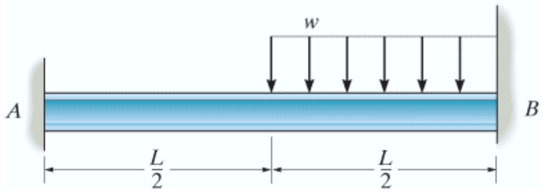
له انځور 12-29e معلومیږی چی دا پوښتنه له عمودی فاصلو هم په لاس راتلله،

$$t_{B/A} = \frac{1}{2} t_{C/A}$$

سوالونه

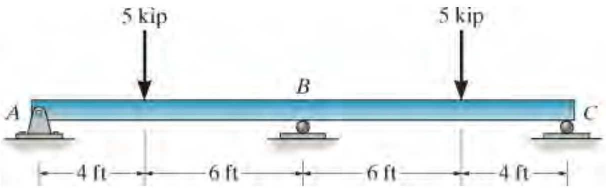
PROBLEMS

س 12-111 . د مؤمنت ریکشنونه په اتکاءوو A او B کی معلوم کړي. EI ثابت دی.



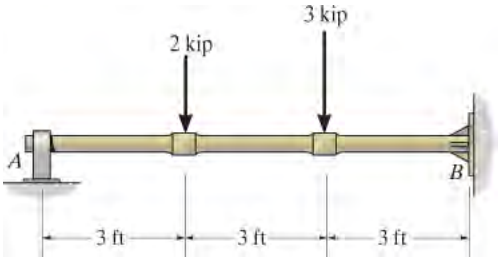
انځور 12-111

س *12-112 . ریکشنونه په اتکاءوو کی و ټاکی، بیا د شییر او مؤمنت ډایګرامونه رسم کړي. EI ثابت دی.



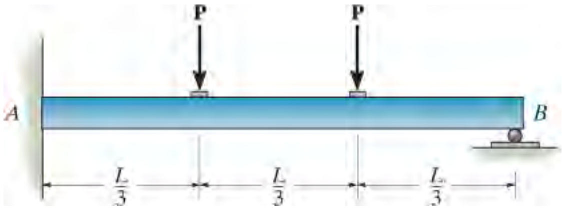
انځور 12-112

س 12-113 . عمودی ریکشن په جورنال اتکاء A او په کلکه اتکاء B کی و ټاکی، او بیا د شییر او مؤمنت ډایګرامونه د شافټ رسم کړي. EI ثابت دی.



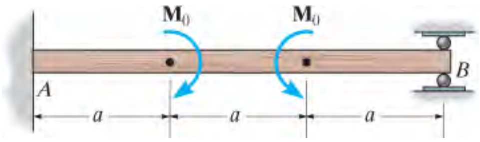
انځور 12-113

س 12-114 . ریکشنونه په اتکاءوو A او B کی معلوم کړي. بیا د شییر او مؤمنت ډایګرامونه رسم کړي. EI ثابت دی.



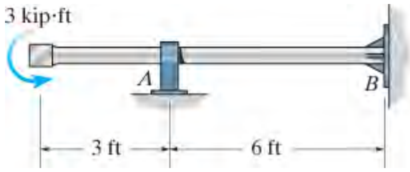
انځور 12-114

س 12-115 . ریکشنونه په اتکاءوو کی معلوم کړي. EI ثابت دی.



انځور 12-115

س *12-116 . عمودی ریکشن په جورنال اتکاء A او په کلکه اتکاء B کی و ټاکی، او بیا د شییر او مؤمنت ډایګرامونه د شافټ د پاره رسم کړي. EI ثابت دی.



انځور 12-116

12.9 ستاتیکلی نامعلوم بیمونه او شافټونه-د سوپرپوزیشن په طریقه (STATICALLY INDETERMINATE BEAMS AND SHAFTS-SUPERPOSITION METHOD)

د دې لپاره چې د ستاتیکلی نامعلوم بیم د ریکشنونو حل کولو لپاره له سوپر پوزیشن طریقې څخه کاروالخیستل شی، لمړی اړین دی چې ذاید (redundant) له بیم لیری کړل شي . دا به لومړني بیم (primary beam) داسې جوړه کړی چې ستاتیکلی به معلوم ، ثابت او مستحکمه وي. د سوپرپوزیشن په کارولو سره، موږ په ورته ډول ملاتړ شوي پرله پسې بیمونه چې هر یو یوازې *له جلا ذاید* سره بار شوي وي اضافه کوو. هغه ذاید د *مطابقت شرایطو* (condition of compatibility) څخه چې په هر اتکاء کې شتون لري، او چیرې چې ذایدعمل کوي، ټاکل کیږي . ځکه چې ذاید قواوی په مستقیم ډول په دې ډول ټاکل کیږي ، د تحلیل دا طریقه ځینې وختونه د قوی -طریقه (force method) په نامه سره بلل کیږي.

د دې مفکورو د روښانه کولو لپاره، هغه بیم ته چې په انځور 12-40a کې ښودل شوی پام وکړئ. که مونږ ریکشن **B**$_y$ په رولر اتکاء کې ذاید غوره کړو، بیا ***لومړنی بیم*** په انځور 12-40b او بیم د پلی شوي ذاید **B**$_y$ سره په انځور 12-40c کې ښودل شوي. په رولر کې بې ځایه کیدل باید صفر وي، او ځکه چې په لومړني بیم کې د *B* بې ځایه کیدل u_B دی، او**B**$_y$ لامل د بیځایه کیدنی پورته خوا $u`_B$ کیږي، موږ کولی شو د مطابقت مساوات په *B* کې داسې ولیکو

$$(+\uparrow) \qquad 0 = -v_B + v'_B$$

دا بې ځایه کیدل د بارونو په کارولو سره ، کله چې د ضمیمی C جدول وکارول شی څرګند کیدی شي. دا د ***بار- او بې ځایه کیدو*** اړیکې عبارت دی په

$$v_B = \frac{5PL^3}{48EI} \quad \text{and} \quad v'_B = \frac{B_yL^3}{3EI}$$

کله چې دا د مطابقت مساواتو کی ځای پر ځای شي موږ لرو

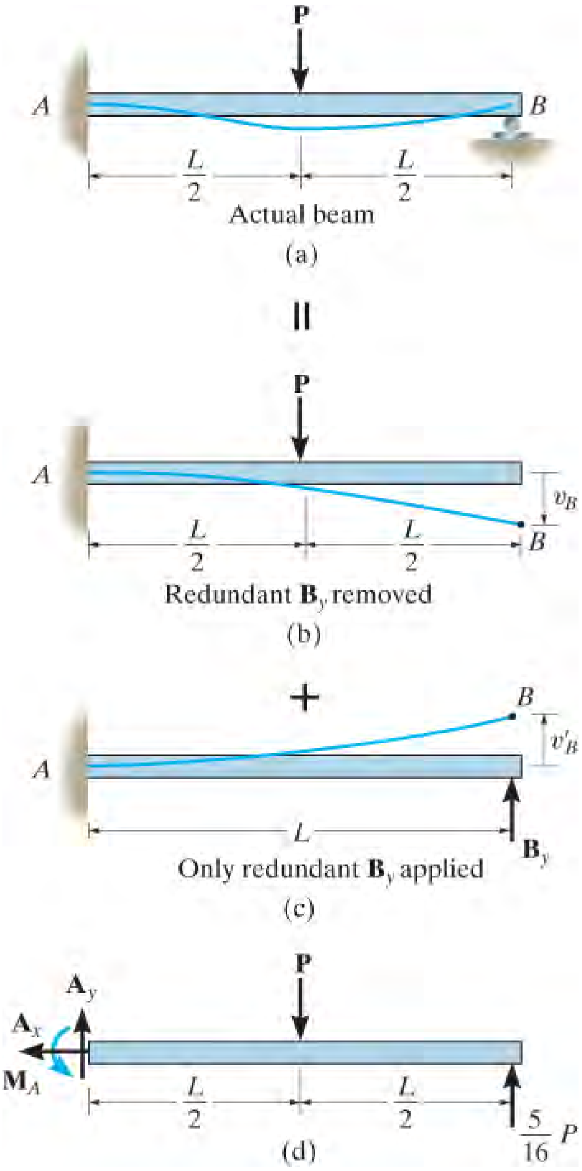
$$0 = -\frac{5PL^3}{48EI} + \frac{B_y L^3}{3EI}$$

$$B_y = \frac{5}{16}P$$

اوس چې **B**$_y$ پیژندل شوي موږ کولای شو ریکشنونه په دیوال کی، په پلی کولو د توازن دریو معادلو سره د بیم په آزاد-ډایګرام ، انځور 12-40d ، ترلاسه کړو . پایلې دي

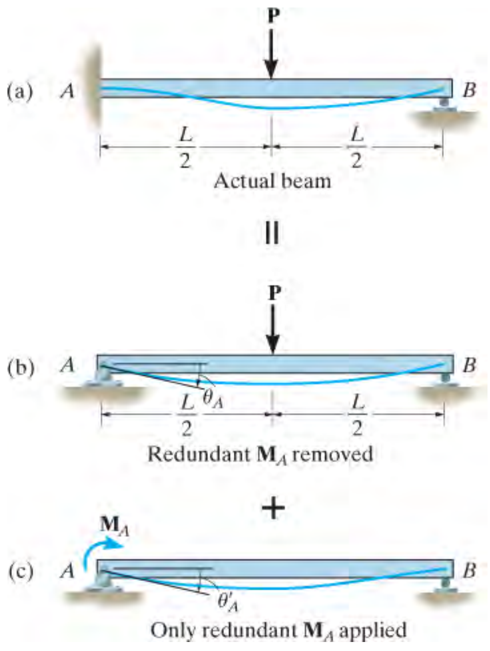
$$A_x = 0 \quad A_y = \frac{11}{16} P$$

$$M_A = \frac{3}{16} PL$$



انځور 40-12

لکه څنګه چې په برخه 12.6 کې ویل شوي، د ذاید انتخاب په *خپله خوښه* دی، په دې شرط چې *لومړني بیم* ثابت (stable) پاتې شي. د مثال په توګه، هغه بیم چې په انځور 12-41a کې ښودل شوي ، مؤمنت په اتکاء A کې د بیم لپاره د ذاید په توګه غوره کیدی شي. په دې صورت کې د د بیم د مقاومت وړتیا $\mathbf{M}_A$ لیرې کیږي، او له همدې امله لومړنی بیم بیا په A کې پین اتکاء لری ، انځور 12-41b . دې ته موږ بیم چې یوازې ذاید لری ، انځور 12-41c، اضافه کوو. په A کې هغه میلان چې د بار $\mathbf{P}$ له امله مینځ ته راځي په θ_A سره ورته اشاره کیږي. او میلان په A کې چې د ذاید $\mathbf{M}_A$ له امله رامینځته شوی θ'_A دی، په Aکې د میلان لپاره د مطابقت مساوات ته اړتیا لري



انځور 12-41

یوځل بیا په ضمیمه C کې د جدول څخه کار واخلئ تر څو دګرد شونو او بار تړاو سره ښکاره شی، موږ لرو

$$\theta_A = \frac{PL^2}{16EI} \quad \text{and} \quad \theta'_A = \frac{M_A L}{3EI}$$

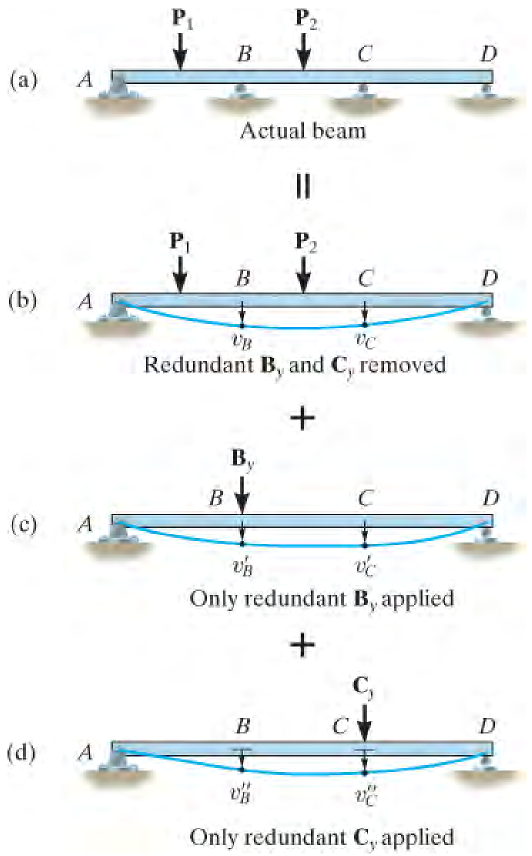
په دی توګه

$$0 = \frac{PL^2}{16EI} + \frac{M_A L}{3EI}$$

$$M_A = -\frac{3}{16} PL$$

دا پایلی د هغه پایلو چی د مخه موندل شوي وي، د هغو په شان دي. دلته، منفي علامه دا په ګوته کی چی $\mathbf{M}_A$ په خلاف د هغه جهت چی په انځور 12-41c کی ښودل شوی ، عمل کړي.

آخرني مثال چې دا طريقه تشريح کوی په انځور 12-42a کی ښودل شوي. دلته بيم په دوهمه درجه نامعلومه ده ،



انځور 12-42

با يد دوه ذايد ريکشنونه له بيم څخه جلا شي. موږ به قواوي په رولر اتکاءوو B او C ذايد انتخاب کړو.

اصلی بيم (primary) (چې ستاتيکلی معلوم دی) بيځايه کيدنه يي په انځور 12-42b ، او د بيم د هر ذايد بيځايه کيدنه په انځور 12-42c او 12-42d کی ښودل شوي.

د سوپر پوزيشن ، د مطابقت معادلي د بيځايه کيدني په B او C کی عبارت دی په

$$(+\downarrow) \qquad 0 = v_B + v'_B + v''_B$$
$$(+\downarrow) \qquad 0 = v_C + v'_C + v''_C \qquad (12\text{–}20)$$

د ضميمی C له جدول کار اخلو ، د بيځايه کيدني دا تولی برخی د بارونو تړاو سره ښودل کيدی شي. کله چې دا وښودل ، بيا دا معادلي يو ځای سره حل کيدی شي او نامعلوم $\mathbf{B}_y$ او $\mathbf{C}_y$ به په لاس راشي.

د تحلیل کړنلاره

PROCEDURE FOR ANALYSIS

دا لاندې کړنلاره د سوپر پوزيشن طريقه (يا د قوی ميتود) پلي کولو لپاره وسيله چمتو کوي ، تر څو نامعلوم ريکشنونه په ستاتيکلی نا معلوم بيمونو او يا شافټونو کی و موندل شي.

ايلستيک منحنی (Elastic Curve).

- نامعلوم يا ذايد قواوی يا مؤمنتونه مشخص کړئ ، تر څو هغوي د بيم څخه ليرې شي او يو ستاتيکلی معلوم او يا ثباته جوړښت جوړ شي.
- د سپرپوزيشن د اصولو په کارولو سره، ستاتيکلي نامعلوم بيم رسم کړئ او په ترتيب سره مساوي اړونده ستاتيکلی معلوم بيمونه يي و ښيي.
- د دې بيمونو څخه لومړی به، اصلی بيم، کوم چې بهرنی بارونه په ستاتيکلی نامعلوم بيم عمل کړي وه وښيي، او هر يو د نورو بيمونوچې په جلا توګه ذايد قوه يا مؤمنت ښيي په اصلی بيم ور اضافه کړی.
- د هر بيم لپاره د بيځايه کيدو منحني سکچ جوړکړئ او په ګوته کړئ، بې ځايه کيدنه (ميلان) په هر ټکی د ذايد قوی (مؤمنت).

د مطابقت معادلي (Compatibility Equations).

- د بې ځايه کيدو (ميلان) لپاره، په هره نقطه چيرې چې ذايد قوه (مؤمنت) شتون لري ، د مطابقت معادلی ولیکئ .

د بار- بيځايه کيدو معادلي (Load-Displacement Equations).

- ټول بې ځايه کيدنه يا ميلانونه اړيکي د ضميمی C فورمولونو په کارولوسره و ښيي.
- پايلې د مطابقت مساواتو کې ځای په ځای کړئ او مساوات حل کړئ تر څو نامعلوم ذايدونه پيدا شي.
- که د پيدا شوي ذايد عددي ارزښت مثبت وي، دا يو شان سمت لري لکه څنګه چې په اصل کې فرض شوی وو. منفي ارزښت د خپل فرض شوي سمت سره مخالف جهت په ګوته کوي

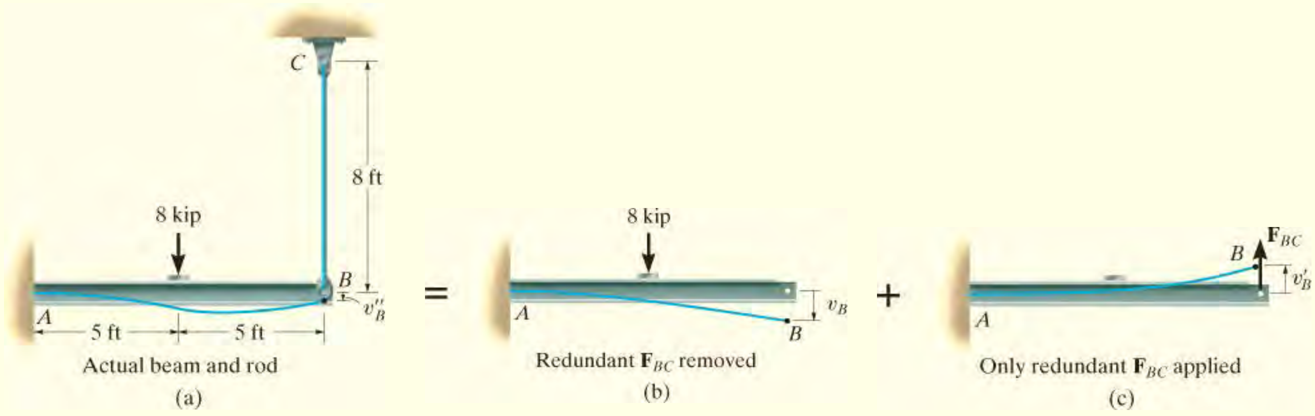
د توازن معادلي (Equilibrium Equations)

- کله چې ذايد قواوي او/يا مؤمنت وټاکل شي، پاتي نامعلوم ريکشنونه د توازن معادلو په پلی کولو سره چی په هغه بار شوی آزاد ډايګريم کې ښودل شوي، وبه موندل شي.

مثالونه

مثال 12.21

په انځور 12-43a کې ښودل شوي بیم ، په A کې له دیوال سره کلک ترل شوي ، او هم د پین اتکاء سره په یو ½ in قطر میله BC ترل شوي. که چیرې $E = 29\ (10^3)$ ksi د دواړو غړیو لپاره وي، هغه قوه چې په میله کې د ښودل شوی بار له امله مینځ ته راځي وټاکي. انرشیايي مؤمنت د بیم په صفری کرښه عبارت دی په $I = 475\ in^4$.



انځور 12-43

حل (SOLUTION) I

د سوپر پوزیشن اصول (Principal of Superposition).

په کتنی سره دا پوښتنه د اوله درجی نامعلومه ده. دلته B له یوه نامعلوم بیځایه کیدنی ``u تیریږي، ځکه چې میله به اوږده شي. میله به ذاید وګڼو او قوه به له بیم څخه په B کی لري کړو، انځور 12-43b ، او بیا به يې وروسته بیا پلی کړو، انځور 12-43c .

د مطابقت معادلی (Compatibility Equation). له مخی په تکی B کی اړین دی

$$(+\downarrow) \qquad v''_B = v_B - v'_B \qquad (1)$$

د بار- بیځایه کیدنی معادلي (Load-Displacement Equations). د بیځایه کیدنی u_B او $u`_B$ ترون د بار سره د ضمیمی C په کارولو بنودل شوي. بیځایه کیدنه $u``_B$ د 4-2 معادلی په کارولو محاسبه کیدی شی. په کارولو د کیلو پونډ او انچ ، موږ لرو:

$$v''_B = \frac{PL}{AE} = \frac{F_{BC}(8\text{ ft})(12\text{ in./ft})}{(\pi/4)(\frac{1}{2}\text{ in.})^2[29(10^3)\text{ kip/in}^2]} = 0.01686F_{BC}\downarrow$$

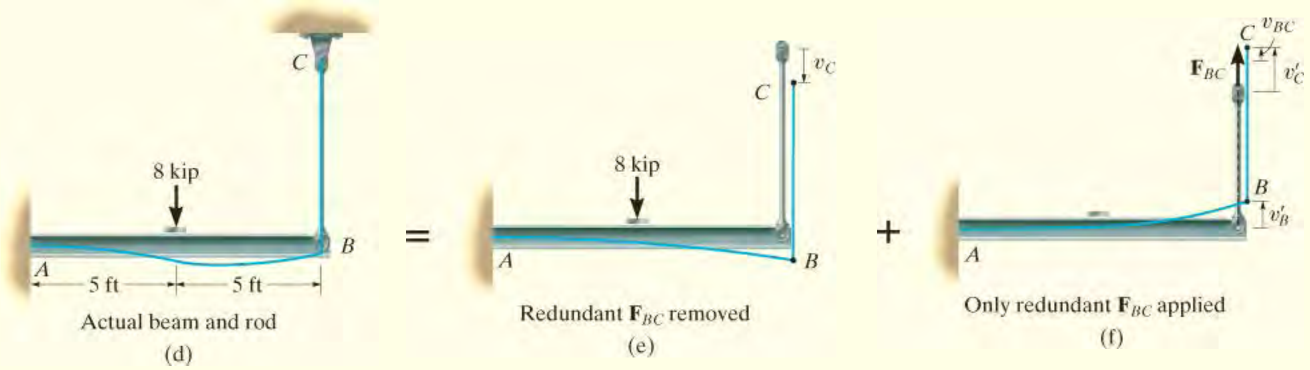
$$v_B = \frac{5PL^3}{48EI} = \frac{5(8\text{ kip})(10\text{ ft})^3(12\text{ in./ft})^3}{48[29(10^3)\text{ kip/in}^2](475\text{ in}^4)} = 0.1045\text{ in.}\downarrow$$

$$v'_B = \frac{PL^3}{3EI} = \frac{F_{BC}(10\text{ ft})^3(12\text{ in./ft})^3}{3[29(10)^3\text{ kip/in}^2](475\text{ in}^4)} = 0.04181F_{BC}\uparrow$$

په دی توګه معادل 1 کیږي:

$$(+\downarrow)\qquad 0.01686F_{BC} = 0.1045 - 0.04181F_{BC}$$

$$F_{BC} = 1.78\text{ kip}\qquad \textit{Ans.}$$



انځور 12-43 تکرار)

حل II (SOLUTION)

د سوپر پوزیشن اصول (Principal of Superposition). دا پوښتنه داسی هم حل کیدی شي، کله چی پین په اتکاء C کی لري شي او میله د بیم سره ترلي پاتي کیږي. په دی حالت کی به ټکي B او C په ښکته لور په یو اندازه u_C بیځایه شي، انځور 12-43e ، ځکه په میله BC کی

قوه شتون نه لري. کله چې ذاید قوه $\mathbf{F}_{BC}$ په ټکی C پلی شي، دا لامل د بيځايه کيدو د پای C د ميله پورته خوا ته په اندازه دی $υ`_C$ او پای $B$ د بيم پورته خوا په اندازه د $υ`_B$ ، انځور 12-43f، بيځايه کوي . ددی دواړو بيځايه کيدو تفاوت $υ_{BC}$ ، غځيدل د ميلی د $\mathbf{F}_{BC}$ له املة دی، نو بيا $υ`_C = υ_{BC} + υ`_B$. په دی توګه ، له انځور 12-43d, 12-43e او 12-43f مطابقت او بيځايه کيدنه په ټکی C کی عبارت ده په

$$(+\downarrow) \qquad 0 = v_C - (v_{BC} + v'_B) \qquad (2)$$

له اول (I) حل موږ لرو

$$v_C = v_B = 0.1045 \text{ in.} \downarrow$$
$$v_{BC} = v''_B = 0.01686F_{BC} \uparrow$$
$$v'_B = 0.04181F_{BC} \uparrow$$

نو بيا معادله 2 کيږي

$$(+\downarrow)\ 0 = 0.1045 - (0.01686F_{BC} + 0.04181F_{BC})$$
$$F_{BC} = 1.78 \text{ kip} \qquad \textit{Ans.}$$

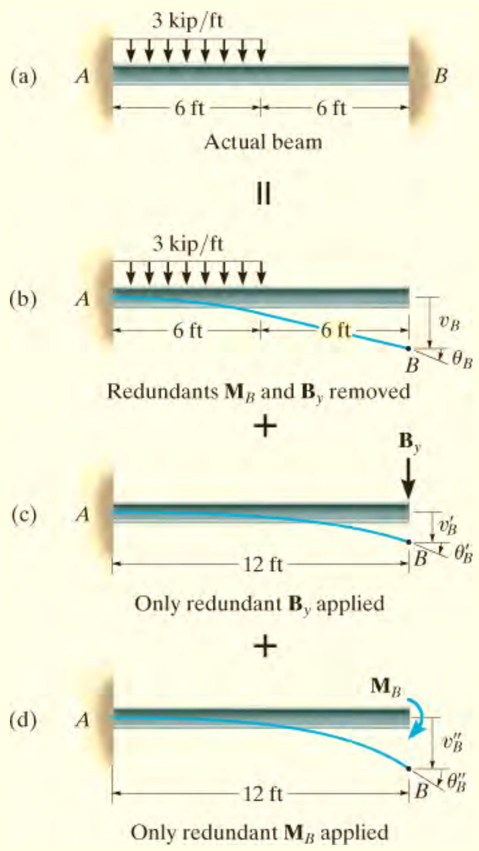
مثال 12.22

دا لاندی بيم چې په انځور 12-44a کی ښودل شوی مؤمنت په B کی وتاکي. د محوری بار اغيزه په پام کی مه نيسی. EI ثابت دی.

حل (SOLUTION)

د سوپر پوزيشن اصول (Principal of Superposition). ځکه چې محوری بار په بيم کی په پام کی نه نيول کيږي، له دی املة عمودی قوه او مؤمنت په A او B کی جوړيږي. دلته دوه د توازن معادلی شتون لری($\Sigma M = 0, \Sigma F_y = 0$) او دا بيم دوهمه درجه نا معلوم ده. موږ به فرض کړو چې $\mathbf{B}_y$ او $\mathbf{M}_B$ ذايد دی، نو د سوپرپوزيشن په اصول سره، دبيم استازيتوب په کنتيليور سره

شوي، کوم چې په جلا توګه په ویشلشوی بار د ریکشنونو **B**$_y$ او **M**$_B$ سره بنودل شوي.
انځورونه 12-44b, 12-44c او 12-44d و ګوري.



انځور 12-44

د مطابقت معادلې (Compatibility Equations). بېځایه کیدنه او میلان په B کی په پام کی نیسو، اړین دی:

$$(\circlearrowleft +) \qquad 0 = \theta_B + \theta'_B + \theta''_B \qquad (1)$$

$$(+\downarrow) \qquad 0 = v_B + v'_B + v''_B \qquad (2)$$

دبار- بېځایه کیدنی معادلې (Load-Displacement Equations). د ضمیمی C جدول کارو، او بېځایه کیدنه او میلان د بارد تړاو سره په دی لاندی ډول لیکلی شو:

$$\theta_B = \frac{wL^3}{48EI} = \frac{3\ \text{kip/ft}\ (12\ \text{ft})^3}{48EI} = \frac{108\ \text{kip}\cdot\text{ft}^2}{EI} \circlearrowright$$

$$v_B = \frac{7wL^4}{384EI} = \frac{7(3\ \text{kip/ft})(12\ \text{ft})^4}{384EI} = \frac{1134\ \text{kip}\cdot\text{ft}^3}{EI} \downarrow$$

$$\theta'_B = \frac{PL^2}{2EI} = \frac{B_y(12\ \text{ft})^2}{2EI} = \frac{72B_y}{EI} \circlearrowright$$

$$v'_B = \frac{PL^3}{3EI} = \frac{B_y(12\ \text{ft})^3}{3EI} = \frac{576B_y}{EI} \downarrow$$

$$\theta''_B = \frac{ML}{EI} = \frac{M_B(12\ \text{ft})}{EI} = \frac{12M_B}{EI} \circlearrowright$$

$$v''_B = \frac{ML^2}{2EI} = \frac{M_B(12\ \text{ft})^2}{2EI} = \frac{72M_B}{EI} \downarrow$$

دا ارزښتونه په معادلو 1 او 2 کی ځای په ځای کوو، د EI فکتور کنسل کيږي، موږ لرو:

$$(\circlearrowleft +) \qquad 0 = 108 + 72B_y + 12M_B$$

$$(+\downarrow) \qquad 0 = 1134 + 576B_y + 72M_B$$

دا مساوات يو ځای سره حل کوو او حاصل يي دی:

$$B_y = -3.375\ \text{kip}$$

$$M_B = 11.25\ \text{kip}\cdot\text{ft} \qquad \textit{Ans.}$$

یادونه: ریکشن په A کی اوس د توازن له معادلو موندل کیدی شي.

مثال 12.23

دا لاندی بیم چی په انځور 12-45a کی ښودل شوي ،ریکشن په رولر اتکاء B کی و ټاکی، بیا شییر او مؤمنت ډایګرامونه د بیم لپاره رسم کړي. EI ثابت دی.

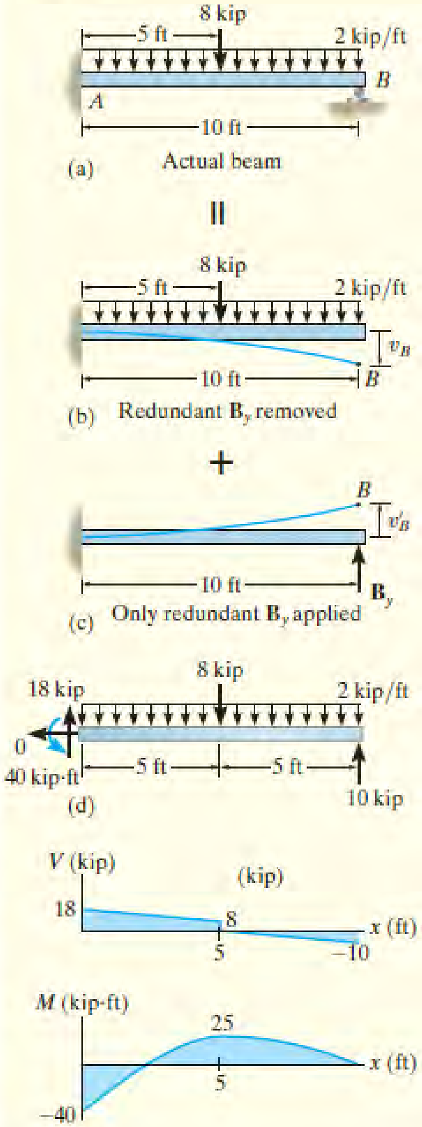
حل (SOLUTION)

د سوپر پوزيشن اصول (Principal of Superposition). په ليدو سره دا بيم په اوله درجه سره ستاتيکلی نامعلوم ده. رولر اتکاء په B کی به ذايد انتخاب کړوتر څو $\mathbf{B}_y$ به مستقيم ډول و موندل شي. انځورونه 12-45b او12-45c پلی کول د سوپرپوزيشن اصول ښيي.

دلته موږ فرض کړي چې $\mathbf{B}_y$ په بيم پورته خوا ته عمل کړي.

د مطابقت معادلی (Compatibility Equations). بيځايه کيدنه کښته لور ته مثبت نيسو، د مطابقت معادله په B کی عبارت ده په

$$(+\downarrow) \qquad 0 = v_B - v'_B \qquad (1)$$



انځور 12-45

د بار- بيځايه کيدنی معادلي (Load-Displacement Equations).

بيځايه کيدنی باروپه تړاو، ئ په کارولو د ضميمی C جدول داسی کيږي

$$v_B = \frac{wL^4}{8EI} + \frac{5PL^3}{48EI}$$

$$= \frac{2\text{ kip/ft}(10\text{ ft})^4}{8EI} + \frac{5(8\text{ kip})(10\text{ ft})^3}{48EI} = \frac{3333\text{ kip}\cdot\text{ft}^3}{EI}\downarrow$$

$$v'_B = \frac{PL^3}{3EI} = \frac{B_y\,(10\text{ ft})^3}{3EI} = \frac{333.3\text{ ft}^3\,B_y}{EI}\uparrow$$

دا په معادله 1 کی ځای پر ځای کوو او حل يي دا لاندی راکوي

$$0 = \frac{3333}{EI} - \frac{333.3B_y}{EI}$$

$$B_y = 10\text{ kip} \qquad \textit{Ans.}$$

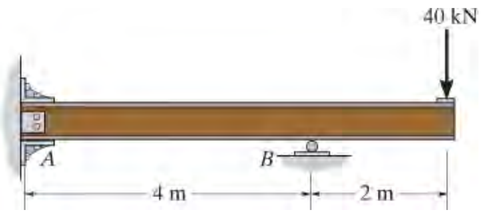
د توازن معادلي (Equilibrium Equations). له دی پایلو او له دری معادلود توازن کار اخلو، موږ هغه پایلی چی د بیم په آزاد ډایګرام انځور 12-45d کی ښودل شوي حاصلیږي.

شییر او مؤمنت ډایګرامونه په انځور 12-45e کی ښودل شوي.

بنسټیز پوښتني

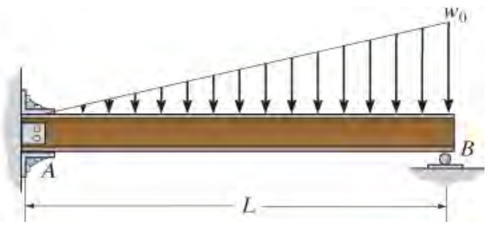
FUNDAMENTAL PROBLEMS

ب 12-13. ریکشنونه ددی لاندی بیم په کلکه اتکاء A او رولر اتکاء B کی مشخص کړي. EI ثابت دی.



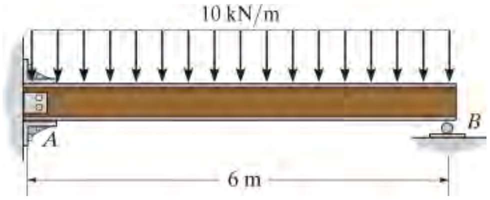
ب 12-13

ب 12-14. ریکشنونه ددی لاندی بیم په کلکه اتکاء A او رولر اتکاء B کی مشخص کړي. EI ثابت دی.



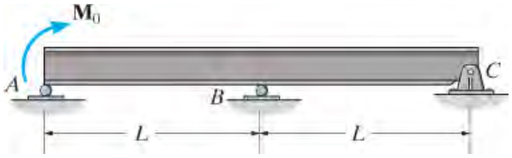
ب 12-14

ب 12-15. ريکشنونه ددی لاندی بیم په کلکه اتکاء A او رولر اتکاء B کی مشخص کړي. اتکاء B په اندازه د 2 mm په کښته لور بيځايه کيدنه لري. EI ثابت دی.



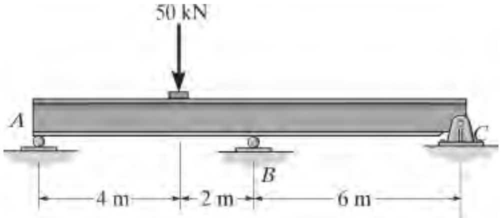
ب 12-15

ب 12-16. ريکشن ددی لاندی بیم په رولر اتکاء B کی مشخص کړي. EI ثابت دی.



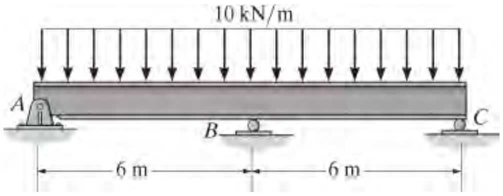
ب 12-16

ب 12-17. ريکشن ددی لاندی بیم په رولر اتکاء B کی مشخص کړي. EI ثابت دی



ب 12-17

ب 12-18. ريکشن ددی لاندی بیم په رولر اتکاء B کی مشخص کړي. اتکاء B په اندازه د 5 mm په کښته لور بيځايه کيدنه لري. E =200GPa او $I = 65.0(10^{-6})\ m^4$

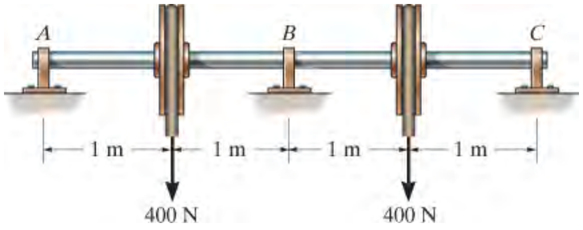


ب 12-18

سوالونه

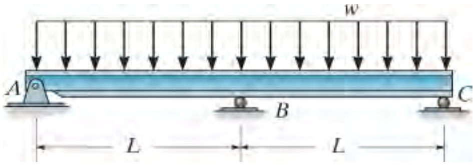
PROBLEMS

س 12-117 . ددی لاندی شافټ ریکشنونه په جورنال بیرینګ اتکاؤ A, B او C کی و ټاکي، بیا د شییر او مؤمنت ډایګرامونه رسم کړي. EI ثابت دی.



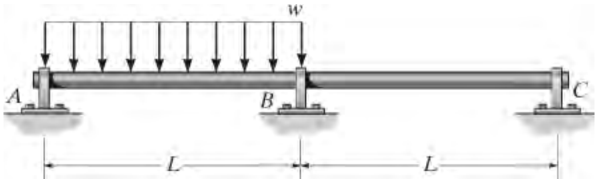
س 12-117

س 12-118 . ددی لاندی بیم ریکشنونه په اتکاؤ کی و ټاکي، او بیا د شییر او مؤمنت ډایګرامونه رسم کړي. EI ثابت دی.



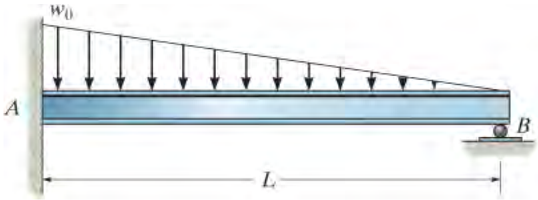
س 12-118

س 12-119 . ددی لاندی بیم ریکشنونه په اتکاؤ کی و ټاکي، او بیا د شییر او مؤمنت ډایګرامونه رسم کړي. EI ثابت دی.



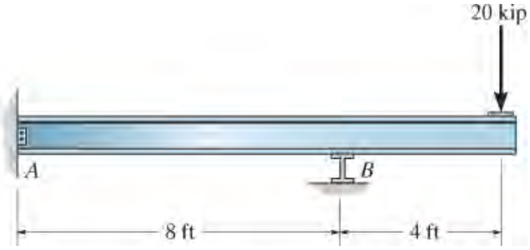
س 12-119

س *12-120 . ریکشنونه ددی لاندی بیم په اتکاء A او B کی مشخص کړي. EI ثابت دی.



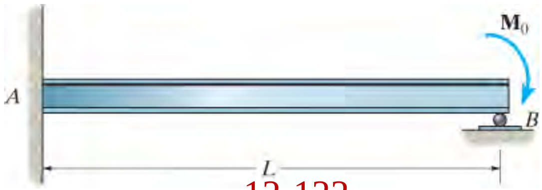
س 12-120

س 12-121 . په دی لاندی بیم 20-kip بار پلی شوي دي، ریکشنونه په اتکاوو کی مشخص کړي. فرض کړی چی A کلکه اتکاء او B رولر دی.



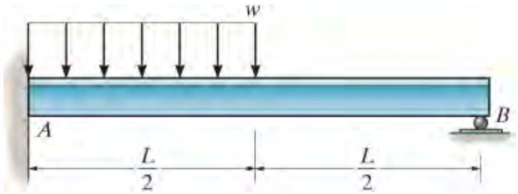
س 12-121

س 12-122 . ریکشنونه ددی لاندی بیم په اتکاء A او B کی مشخص کړي. EI ثابت دی.



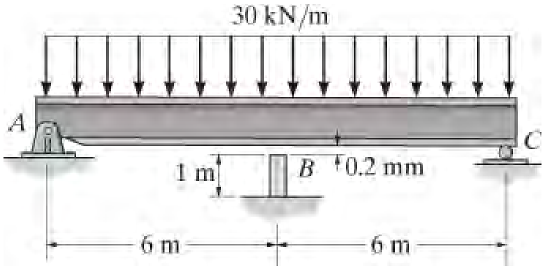
س 12-122

س 12-123 . ریکشنونه ددی لاندی بیم په اتکاء A او B کی مشخص کړي. EI ثابت دی.



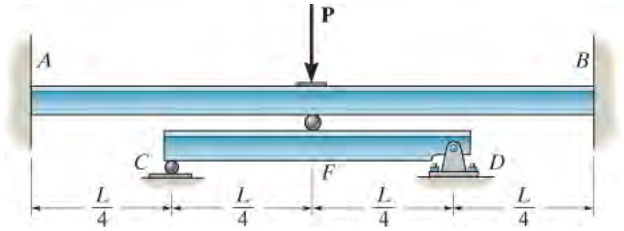
س 12-123

س *12-124 . مخ کی له دی چی ویشلشوی بار په بیم پلی شي، یوه وړه خلاء (gap) د بیم او پایه B تر مینځ په اندازه د 0.2 mm شتون لري. د اتکاوو ریکشنونه په A, B او C کی و ټاکي. پایه په B کی 40 mm قطر لري، او انرشیایي مؤمنت د بیم $I = 875\ (10^6)\ mm^4$ دي. پایه او بیم له موادو چی د ایلستیستي ماجولس یي $E = 200GPa$ دی، جوړ شوي.



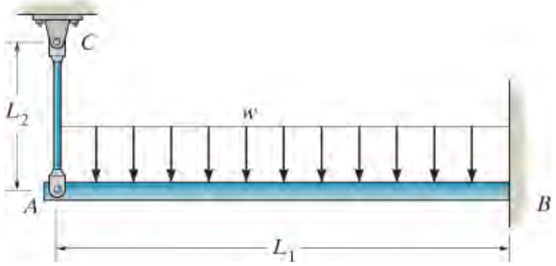
س 12-124

س 12-125 . دا لاندی کلکه تړل شوی بیم AB ، د یو ساده اتکا بیم CD او رولر په F کی، مخ کی له دی چی بار **P** پلی شي، تقویه شوي ده. ریکشنونه په اتکاؤ کی وټاکی، EI ثابت دی.



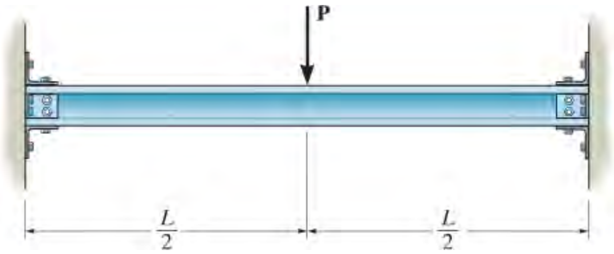
س 12-125

س 12-126 . دا بیم ثابت E_1I_1 لري او په کلک دیوال سره په B کی ټینګ شوي او هم په میله AC سره تړل شوي. که چیری غوڅه برخه د میلی A_2 او د موادو ایلستیستي ماجولس يي E_2 وی قوه په میله کی مشخص کړي.



س 12-126

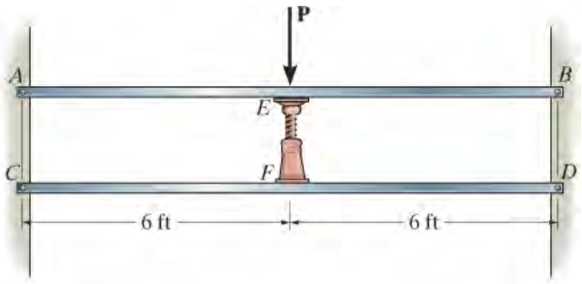
س 12-127 . بیم د بولتونو په واسطه په دواړو پایلوکی تکیه شوي ده. کله چی بار پلی شي دا اتکاءوي په پیل کی کلک تړون (fixed) نه جوړه وی، مګرپر ځای يي لږ څه تاویدل a مخ کی له دی چی کلک شي اجازه ورکوي، ترڅوچی بشپړ بار ورباندی پلی شي. مؤمنت په اتکاوو او اعظمی بیځایه کیدنه د بیم و ټاکي.



س 12-127

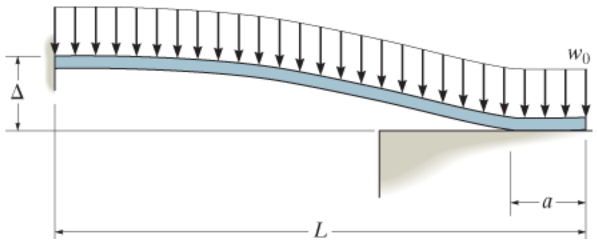
س *12-128 . هر یو ددی دو غړیو له المونیم 6061-T6 چی 1 in X 1 in غوڅه برخه لري جوړ شوي. دواړه غړي په پایلوکی پین اتصال لري، او یو جک (jack) په مینځ کی خلاص اینبودل شوي تر څو په هر غړی 50 lb قوه جوړه کړي. تر ټولو لوی قوه P چی کیدی شي د پورته غړي

په مرکز کی، پرته له دی چی هر یو غړی ییلد وکړي، پلی شي، پیدا کړی. په تحلیل کی محوری قوه په هر غړی په پام کی مه نیسي. فرض کړی چی جک سخت یا کلک دی.



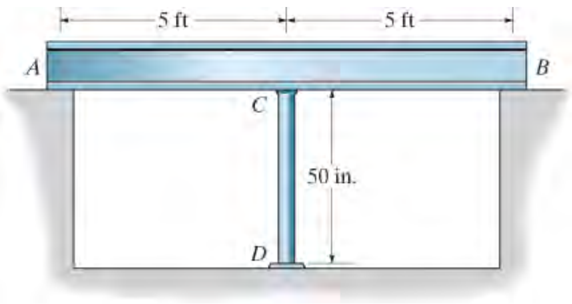
س 12-128

س 12-129 . بیم له نرمو خطي ایلستیک موادو چی ثابت EI لري جوړه شوي. که په اصل کی په فاصله د D له سطحی د پای اتکاء ځخه موقعیت ولري ، فاصله a چی بیم په اتکاء تکیه کړي ، کله چی ویشلشوی بار w_0 ، کوم چی پوره اندازه لری تر څو لامل ددی شي و ټاکي.



س 12-129

س 12-130 . د بیم AB انرشیایي مؤمنت $I = 475\ in^4$ دی او په پایلو کی په هواره او صافو سطحو د اتکاؤو یي تکیه کړي ده. یو میله CD چی 0.75 in قطر لري په مرکز د بیم کی ویلډینګ شوی او د میلي بل پاي یي په D کی کلکه اتکاء لري. که چیری د تودوخی درجه 150^0 F کموالي و مومي هغه قوه چی په میله کی جوړیري و ټاکي. بیم او میله دواړه له فولادو A-36 جوړ شوي.

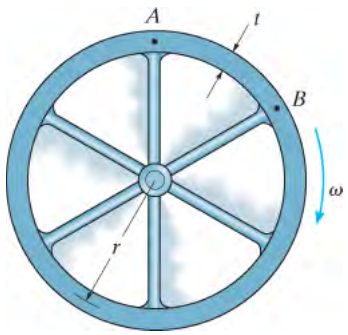


س 12-130

س 12-131 . د فلایویل د غاړی (rim) پنډوالی t او سور یی b ، او خاص وزن γ دي.

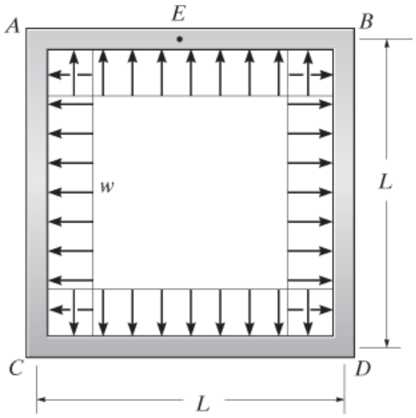
که چیری دا فلایویل په دومداره توګه په یو ثابته ګرزیدا w کی وی، اعظمی مؤمنت چی د فلایویل په غاړه کی جوړیږي په ګوته کړئ. فرض کړی چی پری (spokes) تغیر د شکل نه کوي.

اشاره: د بار د متناظر والي له امله د غاړی میلان په هره په ره کی صفر دی. داسی پام وکړی چی شعاع په کافی اندازه لوی دی ،او برخه AB د مستقیم بیم په توګه کوم چی په دواړو سرونو کی کلک تړل شوی ، او ویشلشوی سنتریفیوګل قوه (centrifugal) په هر واحد اوږدوالي وربانډی پلی شوي ده . و ښيي چی دا قوه عبارت ده په $w = bt\gamma w^2 r/g$.



س 12-131

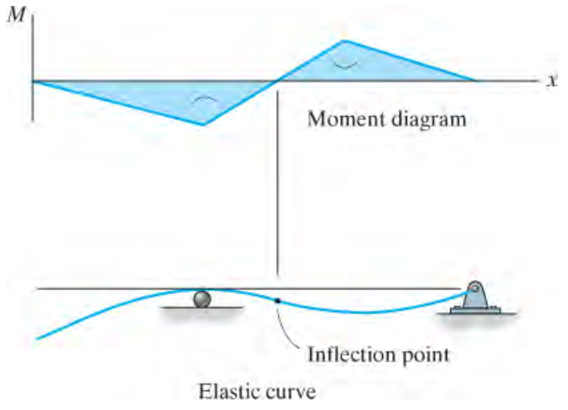
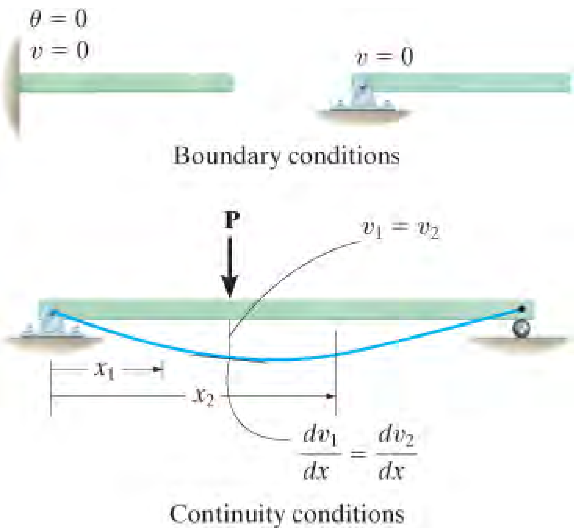
س *12-132 . په هر اړخ د لاندی باکس چوکاټ یو ویشلشوی بار w پلی شوي دی. هغه مؤمنت چی په هر کونج کی جوړیږي و ټاکي. بيځايه کيدنه د محوری بار له امله په پام کی مه نیسی. EI ثابت دی.

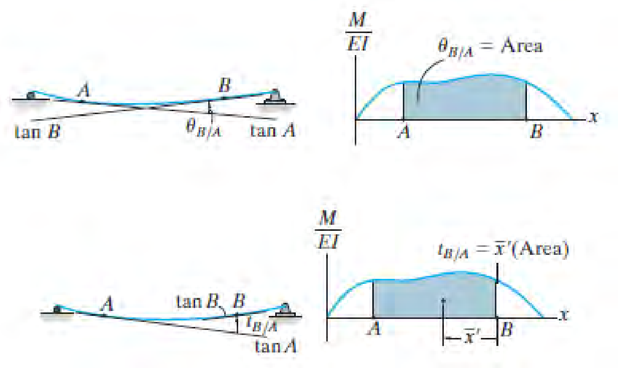


س 12-132

د فصل بیا کتنه

CHAPTER REVIEW

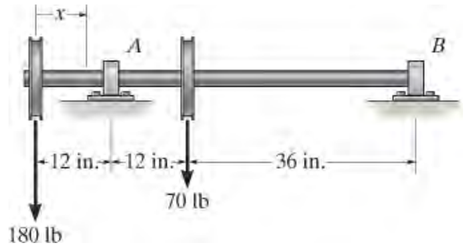
	ایلستیک منحني، استازیتوب د مرکزی کرښی د یو بیم یا شافټ کړي. شکل او اندازه یي د مؤمنت ډایګرام په کارولو سره ټاکل کیدی شي. مثبت مؤمنت دایلستیک منحني محراب (concave) په پورته خوا، او منفی مؤمنت لامل ددی کیږی چی منحنی لاندی خواته محراب شي. د انحنا شعاع په هره نقطه کی په دی لاندی ډول موندل کیږي $$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}$$
	د ایلستیک منحنی معادله او د هغي میلان، لومړی په غړی کی د داخلي مؤمنت تابع د x موندلو له لارې ترلاسه کیدی شي. که څو بارونه په غړي عمل کړي وی ، بیا د جلا مؤمنت توابع د هربار تر مینځ باید وټاکل شي. دا توابع انتیګریت کړي یو ځل د $EI(d^2 u/dx^2) = M(x)$ په کارولو سره چی معادله د میلا ن د ایلستیک منحنی ورکړي ، او بل ځل یي بیا اینتیګریت کړی تر څو د بیځایه کیدني معادله ورکړي. د انتیګریشن ثابت اعداد به له سرحدی شرایطو په اتکاؤ کی ، او یا په هغه قضیو کې چې څو د مؤمنت توابع شامل وي، د میلان او بیځایه کیدنی تسلسل په هغو نقطو کی چی توابع سره وصل کیږی، باید په پام کی ونیول شي.

	د وقفې توابع اجازه ورکوي تر څو د ایلستیک منحنی معادله د یوه دوامداره تابع په توګه څرګند کړل شي، پرته له دې چې د بار شمیرې د غړي په پام کې ونیول شي. دا طریقه د تسلسل شرایطو اړتیا له منځه وړي ، ځکه چې د انتیګریشن دواړه ثابت اعداد له دوو سرحدی شرایطو څخه ټاکل کیدی شي .
 	د مؤمنت – مساحت طریقه یوه نیمه ګرافیک طریقه ده چې د مماسونو د میلان ، یا د مماسونو تر مینځ عمودی فاصلې ، په ځانګړیو ټکیو د ایلستیک منحنی، موندلو لپاره کارول کیږي . دا طریقه د M/EI ډیاګرام لاندې ساحه یا مؤمنت ددی ساحو د ایلستیک منحني په ټکیو کی، موندلو ته اړتیا لري. دا طریقه د ساده M/EI ډایګرامونو لپاره چې د ساده شکلونو ، لکه تمرکزی قواوی او یا کپل مؤمنت څخه جوړ شوي وی، ښه کارول کیږي .
	بیځایه کیدل یا میلان د غړي په یوه ټکی کی چی څو بارونو ورباندی عمل کړي، د سوپر پوزیشن طریقي په کارولو سره موندل کیدی شي. د ضمیمي C جدول شتون ، د دی هدف لاس ته راوړلو لپاره دي.
	د ستاتیکلی نامعلوم بیمونو او شافتونو، نا معلوم ریکشنونه د توازن معادلو په پرتله ډیر وي. د حل لپاره لمړي باید ذاید ریکشنونه و پیژندل شي. د اینتیګریشن او مؤمنت-مساحت طریقي د ذاید ریکشنونو موندلو لپاره کارول کیداي شي. دا هم ممکنه ده چی ذاید ریکشنونه د سوپرپوزیشن طریقي په کارولو سره وټاکلشی، چیرته چی باید د تسلسل شرایط په ذاید اتکاء کی په پام کی و نیول شي.

د بیا کتني پوښتني

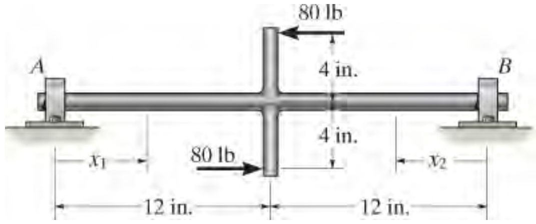
REVIEW PROBLEMS

ب 12-1. د ایلستیک منحنی معادله مشخص کړي. د وقفی توابع وکاروی، EI ثابت دی.



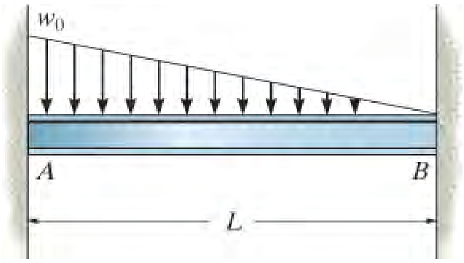
ب 12-1

ب 12-2. ددی لاندی شافت مؤمنت ډایګرام رسم کړی، بیا له دی ډایګرام بیځایه کیدنه، یا ایلستیک منحنی د شافت د مرکزی کرښی د پاره سکیچ کړي. معادله د ایلستیک منحني په کارولو د کوردینات x_1 او x_2 مشخص کړي. د اینتیګریشن له طریقي کار واخلي. EI ثابت دی.



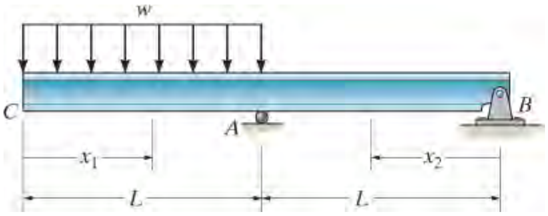
ب 12-2

ب 12-3. د مؤمنت ریکشنونه په اتکاؤو A او B کی و ټاکي. د اینتیګریشن له طریقي کار واخلي. EI ثابت دی.



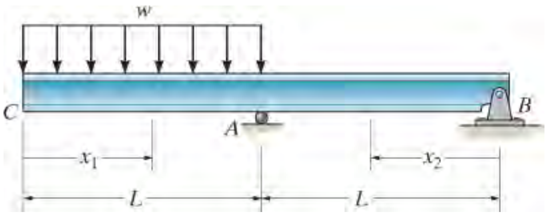
ب 12-3

ب *12-4. د ایلستیک منحني معادله په کارولو د کوردینات x_1 او x_2 مشخص کړي. میلان په A او اعظمی بیځایه کیدنه په بیم کی وټاکی. د اینتیګریشن له طریقي کار واخلي. EI ثابت دی.



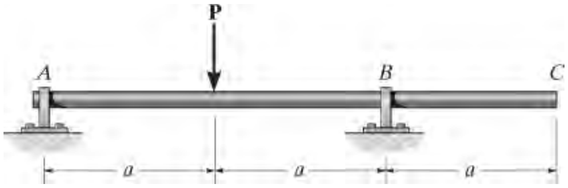
ب 12-4

ب 12-5. اعظمی بیځایه کیدنه په مینځ د A او B کی وټاکی. د اینتیګریشن له طریقي کار واخلي. EI ثابت دی.



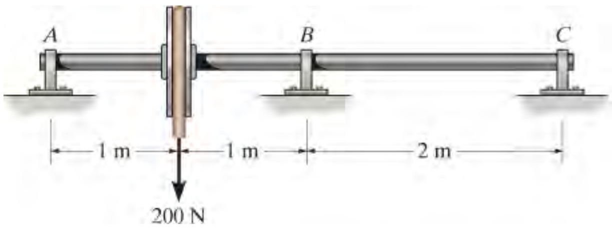
ب 12-5

ب 12-6. میلان په B او بیځایه کیدنه په C کی و ټاکي. د مؤمنت-مساحت له طریقي کار واخلي. EI ثابت دی.



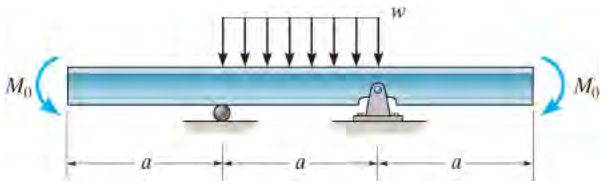
ب 12-6

ب 12-7. ریکشنونه معلوم کړي، بیا شییر او مؤمنت ډایګرامونه رسم کړي. د مؤمنت-مساحت له طریقي کار واخلي. EI ثابت دی.



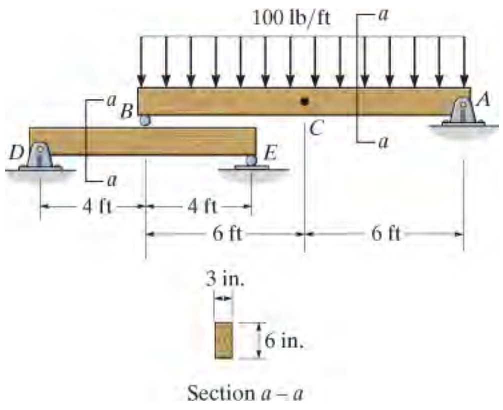
ب 12-7

ب 12-8*. د سوپرپوزیشن له طریقې کار واخلئ، او مقدار د $\mathbf{M}_0$ د ویشلشوې بار w له مخې او فاصلې a معلومه کړئ تر څو بېځایه کېدنه په مرکز د بیم کې صفر وي. EI ثابت دی.



ب 12-8

ب 12-9. د سوپرپوزیشن له طریقې کار واخلئ، بېځایه کېدنه په C د بیم AB کې معلومه کړئ. بیمونه له لرگیو جوړ شوي او د ایلستیسټي ماجولس یې $E = 1.5(10^3)$ ksi دی.



ب 12-9

فصل دیارلسم

(CHAPTER 1 3)

(© James Roman/Getty Images)

د پورته اوبو ټانک کالمونه د دوی په اوږدوالي کې په څونقطو کې تړل شوی تر څو د کوږپیدو فرصت یي کم کړی.

د پایو کړوپیدل

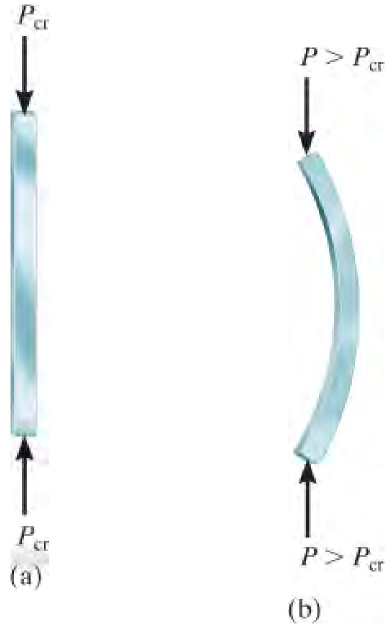
(BUCKLING OF COLUMNS)

CHAPTER OBJECTIVES د فصل موخې

په دې فصل کې به موږ د کالم یا پایی د کړوپیدو په اړه بحث وکړو. دا په هغه حالت کی کله چې بهرنی بارونه د غوڅی برخی په محوری یا له مرکزه وتلی برخه کی عمل کړي. وروسته به یو لړ طریقي چی د کالم ډیزاین لپاره کارول کیږي او هم د موادو په اړه بحث وشي.

13.1 بحرانی بار (CRITICAL LOAD)

یو غړی نه یوازې باید د ځانګړي مقاومت او بیځایه کیدني اړتیاوې پوره کړي، بلکی باید باثباته او پایدار وي. په ځانګړي توګه ثبات د اوږده او نازک غړی لپاره خورا مهم دی. که چیری پر یوه اوږده او نازک غړي د فشار (compressive) بار پلی شي ، د بار په لویدو به غړی ناڅاپه، په یوه او یا بل لوری بیځایه شي. دا ډول غړی د کالم یا پایي په نوم یادیږي، او د اړخ بیځایه کیدنه چې واقع کیږي په نوم د ***کړوپيل*** (buckling) یادیږي . ډیری وختونه د کړوپیدو په پایله کې کیدی شي کالم په ناڅاپي ډول د جوړښت یا میکانیزم د ډراماتیک ماتیدلو لامل شي. له دی امله ځانګړي پاملرنه د کالمونو ډیزاین ته باید ورکړل شي، ترڅو دوی په خوندي ډول د بارونو ملاتړ وکړي پرته له دی چې د کړوپیدو لامل وګرځي.



انځور 13-1

اعظمي محوري بار ، چې یو کالم يې ملاتړ کولی شي او کله چې د کړوپیدو په څنډه کې وي د ***بحراني بار*** (critical load) په نوم یادیږي، P_{cr} ، انځور 13-2a . له بحرانی بار څخه اضافي بار پلی کول د کالم د کړوپیدو لامل کیږي ، او له همدې امله وروسته له هغې به په یو اړخ (lateral) کوږوالی کوي، لکه څنګه چې په انځور 13-1b کی ښودل شوي.

موږ کولی شو د دې بې ثباتۍ او استواری ماهیت د دوو – میلومیکانیزم په پام کې نیولو سره مطالعه کړو. دا میکانیزم وزن نه لري، سختی میلی دی او هغه د پین په توګه وصل شوي دي، لکه څنګه چې په انځور 13-2a کې ښودل شوي. کله چې میله په عمودي حالت کې وي، فنرشخي (k) لري، فنر غزیدلی نه دی. په داسی حالت کی یو کوچنی عمودی قوه **P** د میلو په پای کې پلی شوي ده. د توازن حالت خرابولو لپاره ، پین په A کې یوه لږ اندازه D بې ځایه یا ډکه ورکړل شوي،

انځور 13-2b وګوري. لکه څنګه چې د پين آزاد ډايګرام کې ښودل شوي، انځور13-2c، فنرد بيرته راتګ قوه $F = k\Delta$ جوړه وي تر څود دوو افقی قواوو مقاومت وکړي، $P_x = P \tan q$، کوم چې پين (او ميله) له توازن څخه وباسي. څرنګه چې q کوچنی ده، $\Delta \approx \theta(L/2)$ او $\tan\theta \approx \theta$، په دې توګه د فنر د بيرته ورتګ قوه $F = k\theta(L/2)$ کيږي او د ګډوډی (disturbing) قوه $2P_x = 2P\theta$ ده.

که د توازن د بيا رغولو قوه له هغه قوې چې ګډوډی جوړه وي ډيره وي، يعنی $k\theta L/2 > 2P\theta$ شي، بيا په پام کی نيسو چې q له معادلی حذف کيږی، موږ کولی شو د P لپاره يې حل کړو، او دا ورکوي:

باثباته توازن

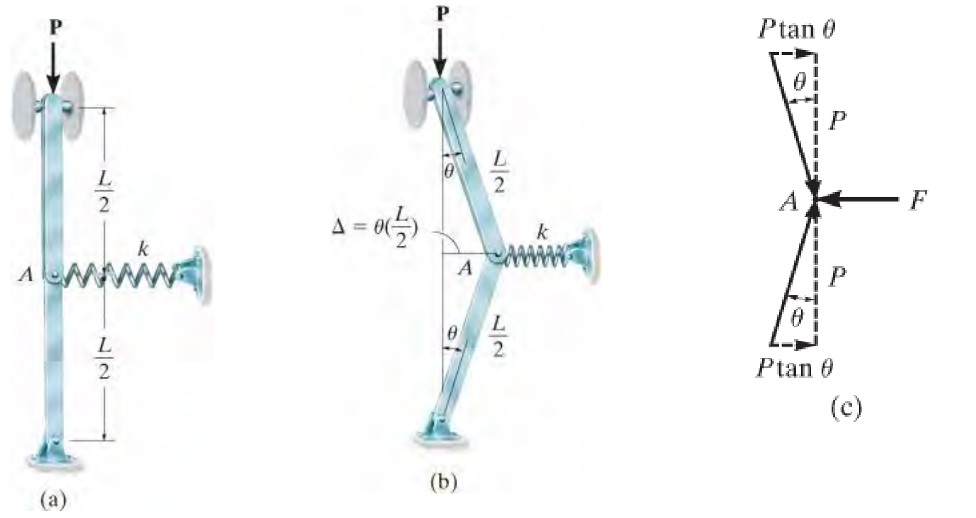
$$P < \frac{kL}{4}$$

دا د باثباته **او پايداره توازن** لپاره شرط دی، څکه چې په فنر کی رامينځته شوی قوه کافي ده چې ميلي بيرته خپل عمودي حالت ته راستنی کړي. که چيری، $k\theta(L/2) < 2P\theta$ او يا

بی ثباته او نا پايداره توازن

$$P > \frac{kL}{4}$$

نو بيا ميلی به په **بې ثباته توازن** حالت کې وي. په بل عبارت، که دا بار تطبيق شي، او په A کې يو څه بې ځايه کيدنه مينځ ته را شي، ميلې به له توازن ووزي او کوږوالي به و مومي، او خپل اصلي حالت ته بيا نه راګرځي .

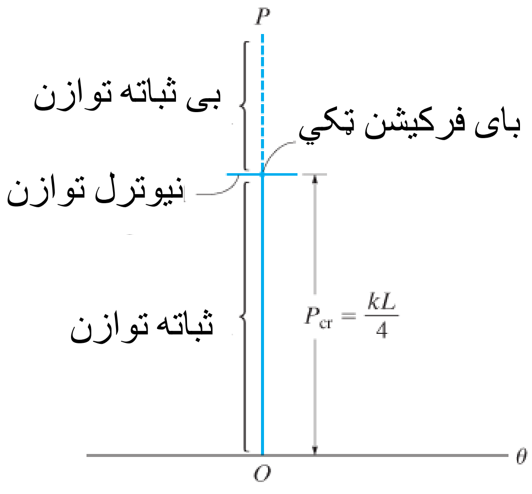


انځور 13-2

منحني ارزښت د P ، کوم چې اړتیا لري $kL\theta/2=2P\theta$ ، ***بحرانی بار*** دی.

طبعی یا نیوټرل توازن $P_{cr}=kL/4$

دا ډول بار کول هغه حالت څرګندوي چې میلې په ***نیوټرل توازن*** (neutral equilibrium) کې وي. څرنګه چې P_{cr} د میلو د (کوچنی) بې ځایه کیدو q سره تړون نلري ، لږ اغیزې پر میکانیزم هغه نشي کولاي چې له توازن څخه يي بهر کړي ، او نه به يي بیرته خپل اصلي حالت ته راستون کړي. پرځای يې، میلې به په کاږه شوي موقعیت کې پاتې شي.



انځور 3-13

د توازن دا دري مختلف حالتونه په ګرافیک ډول په انځور 3-13کې ښودل شوي . د لیږد نقطه چیرې چې بار د هغې بحرانی ارزښت سره مساوي وي $P = P_{cr}$ هغه د **بایفیرکیشن ټکي** (bifurcation point) په نوم یادیږي. دلته میلی به د هر *کوچنی ارزښت* q لپاره په نیوټرل توازن کی وی. که چیرې یو لوی بار P په میلوکینودل شي، بیا به دوی د لویې بیځایه کیدنی څخه تیریږي، ترڅو فنر په کافي اندازه تر فشار لاندی غونج شوي وی او یا اوږد شوي وی ترڅو دوی په توازن کې وساتي.

په ورته ډول ، که چیرې په ریښتیني کالم کې بار د دې بحرانی بار څخه ډیر شي، نو دا بار کول به کالم هم اړتیا ولري چې لوی انعطاف وکړي په هرصورت، دا عموما په انجینرۍ کې د جوړښتونو او ماشینونو لپاره نه زغمل کیږي .

13.2 خیالی کالم د پین اتکاء سره (IDEAL COLUMN WITH PIN SUPPORTS)

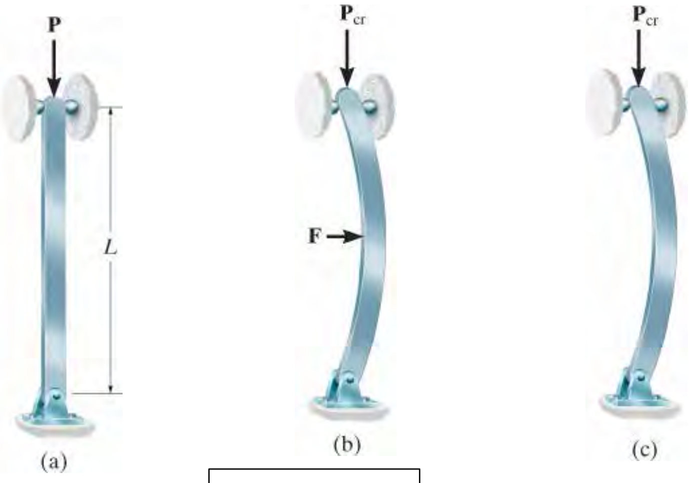
پدې برخه کې به موږ د هغه کالم کوم چې پن اتکاء لری، انځوره 4-13, او څرنګه بحرانی بار ورته و تاکل شي، بحث وکړو. هغه کالم به په پام کې ونیول شي کوم چې یو خیالی یا (Ideal) ***کالم*** دی، پدې معنی چې دا د متجانس خطي ایلستیک موادو څخه جوړ شوی ، اودا دمخه له باروِلو په بشپړ ډول مستقیم دی. دلته بار د غوڅی برخی د مرکز ثقل له لاری پلي کیږي.

څرنګه چې کالم مستقیم دی یو څوک به داسی فکر کوي چی د تیؤری په توګه محوری بار P تر هغه وخته پورې زیاتیدای شي تر څو د پایي ړنګیدل د ماتیدو (فریکچر) یا د موادود ییلد کیدو په واسطه رامنځ ته شي. په هرصورت، لکه څنګه چې مورږ بحث وکړ، کله چې بار بحرانی بار P_{cr} ته ورسیږی، کالم به د ***بی ثباتی*** په درشل کې وي، له دې امله یوه کوچنی اړخی قوه F ، انځور 13-4b، به د دی لامل شی چی کالم په بیځایه شوی حالت کی پاتی شي ، کله چې F لیرې شي، کالم به په انحراف شوي حالت کې وي، انځور 13-4c . هر لږ کمښت په محوری بار P کی له P_{cr} څخه کالم ته به اجازه ورکړي چی ځان مستقیم کړئ ، او لږ زیاتوالي په P کی له P_{cr} څخه به د پایی انحراف کې د نور زیاتوالی سبب شي.

د تیلو ایستلو د فرش ړنګیدل افقي قواوی د بحری طوفان بادونه دی، کوم چی داتکاء پایو د کړوپیدو لامل شوي.

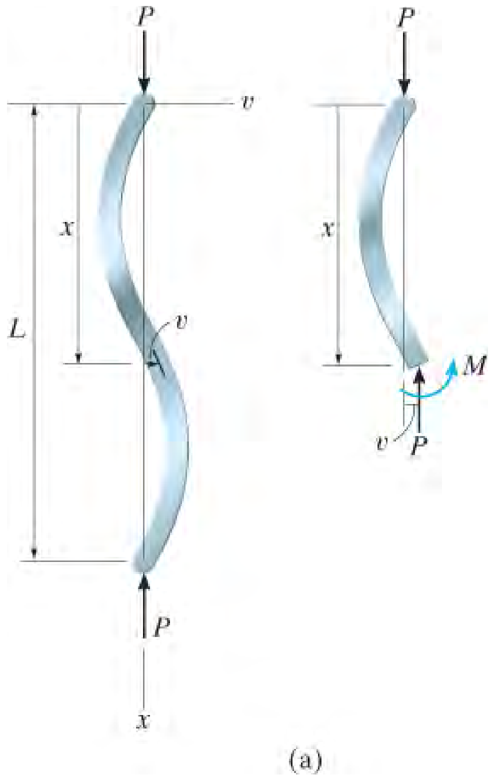
د کالم تمایل، کله چی محوری بار ورباندی عمل کړي، تر څو ثابت پاتې شي یا بې ثباته شي، په حقیقت کې د هغه د کږیدو مقاومت ورتیا پورې اړه لري. له همدې امله، د دې لپاره چې د پایي بحرانی بار او کړوپ شوی شکل یې وټاکئ، معادله 12-10 پلي کړي، کوم چې داخلي مؤمنت له انحراف شوي شکل سره تړاو لري، د بیلګې په توګه،

$$EI\frac{d^2v}{dx^2} = M \qquad (13\text{–}1)$$



انځور 13-4

آزاد ډیاګرام د کالم د یوې برخې ، په انحراف شوي موقعیت کې، په انځور 13-5a کی ښودل شوي.. دلته دواړه بې ځایه کیدنه او داخلي مؤمنت M په *مثبت لوري* کې ښودل شوي. د مؤمنت دقیق توازن اړتیا لرى چې $M = -Pv$ وي، بیا معادله 13-1 کیږي



$$EI\frac{d^2v}{dx^2} = -Pv$$

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \left(\frac{P}{EI}\right)v = 0 \qquad (13\text{–}2)$$

انځور 13-5

دا متجانسه، دوهمه درجه ډیفرینشل معادله د ثابت ضریب سره ده. د ډیفرانشل معادلو په طریقه او یا په مستقیمه توګه په معادله 12-2 کی ځای په ځای کیدنه ، عمومی حل پلاس راکوی:

$$v = C_1 \sin\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}\,x\right) + C_2 \cos\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}\,x\right) \qquad (13\text{–}3)$$

دا دوه د انتیګریشن ثابت ارقام د کالم په پاي کی له سرحدی حالته لاس ته راځي. څکه چې $v = 0$ په $x = 0$ نو بیا $C_2 = 0$. او څکه چې $v=0$ په $x = L$ ، بیا

$$C_1 \sin\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}\,L\right) = 0$$

دا معادله د منلو وړ کیږی کله چی $C_1 = 0$ ، په هر صورت بیا $v = 0$ ، کوم چی بی اهمیته (*trivial solution*) حل دی، اودی ته اړین دی چی کالم همیشه مستقیم وی، حتی که څه هم کالم بی ثباته شي. هغه بل امکان اړین لری چی:

$$\sin\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}L\right) = 0$$

دا د منلو وړ کیږی که چیری:

$$\sqrt{\frac{P}{EI}}L = n\pi$$

او یا

$$P = \frac{n^2\pi^2EI}{L^2} \quad n = 1, 2, 3, \ldots \qquad (13\text{–}4)$$

د P *کوچنۍ ارزښت* هغه وخت تر لاسه کیږي کله چی $n = 1$ ، نو ددی لپاره

بحرانی بار د کالم لپاره عبارت دی په *

$$P_{cr} = \frac{\pi^2EI}{L^2}$$

دا بار ځینی وختونه د ***ایلور بار*** (***Euler Load***) په نامه یادیږي. هغه سویسی ریاضي پوه لیونهارد اویلر (Swiss mathematician Leonhard Euler) کوم چی دا پوښتنه يي د اول وارله پاره په 1757 کی حل کړه، چی د هغه په نامه یادول کیږي. د 13-3 معادلی نه کړوپ شوی شکل په انځور 13-5b کی ښودل شوي، له همدی امله

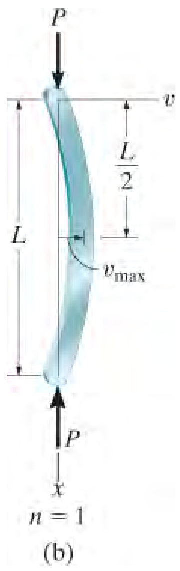
$$v = C_1 \sin \frac{\pi x}{L}$$

ثابت عدد C_1 استازیتویب د اعظمی بیځایه کیدنی، v_{max} ، کوی کوم چی په منځنۍ برخه د کالم کی واقع کیږي، انځور 13-5b . له بده مرغه یو ځانګړي ارزښت د C_1 لپاره کله چی کږوپیدل واقع شی، شتون نه لري. په هر صورت دا انګیرنه کیږی چی دا بیځایه کیدنه کوچني ده.

لکه څنګه چې پورته یادونه وشوه، بحرانی بار د موادو په سختۍ پورې اړه لري او یا د ایلستیستي ماجولس E او نه د هغې د ییلد ستریس سره. له همدې امله، یو کالم چی له لوړ مقاومت فولادو څخه جوړ شوی له هغه هیڅ ګټه نه وړاندې کوي کوم چی له ټیټ مقاومت فولادو څخه جوړ شوي وی، ځکه چې د دواړو موادو لپاره د ایلستیستی ماجولس ورته دی.

دا د لرګیو کالمونه داسی په پام کې نیول کیدی شي چی دوی په ښکته کې پین شوي او په سر کې کلک وصل شوي د بیمونو سره.

دا هم په یاد ولرئ چې P_{cr} د غوڅی برخی د انرشیایي مؤمنت په زیاتوالي سره لوړیږي. په دې توګه، اغیزمن کالمونه داسی ډیزاین شوي ترڅو ډیری د کالم د غوڅی برخې ساحه د امکان تر حده له مرکزد برخی لرې موقعیت ولري. له همدې امله خالی برخې لکه ټیوب د جامد برخو په پرتله خورا اقتصادي دي. برسېره پر دې، سوروره - فلنج برخې، او کالمونه چې د چینلو، زاویو، تختو، وغیره له یو ځای کیدو څخه "جوړ شوي" دي، له هغو برخو څخه چې ډکی او مستطیل وي غوره دي.



انځور 13-5 (تکرار)

* دلته n تعداد د بیځایه شویو شکلونو د کالم ښیي. د مثال په توګه که چیری $n=1$ ، نو یو بیځایه شوی منحني لیدل کیږي لکه څنګه چې په انځور 13-5b کې ښودل شوي. که چیری $n=2$ نو بیا دوه منحنی لیدل کیږی کوم چې په انځور 13-5a کې ښودل شوي.

انځور 13-6

څرنګه چې P_{cr} په مستقیم ډول له انرشیا مومنټ، I ، سره تړاو لري، یو کالم به په هغه خوا کړوپیدل وکړي کله چې غوځه برخه په اصلی محور لږ تر لږ انرشیايي مؤمنت (په کمزوری محور) ولري، په دی شرط چی په هر محور ورته ډول تکیه شوی وي . د مثال په ډول، یو کالم چې مستطیل غوځه برخه لري، لکه د **متر لرګي**، انځور 13-6 ، به د a–a په محور به کړوپ شي، نه په b–bمحور. د دې له امله، انجنیران معمولا به هڅه وکړئ چې یو توازن د انرشیايي مؤمنت په هر لور ورته وساتئ. د هندسی په ډول بیا، ګردی ټیوبونه غوره کالمونه دي. مربع ټیوب یا هغه شکلونه چې Ix≈Iy لري هم ډیری وختونه د کالمونو لپاره غوره شوی.

د لنډیز لپاره، د پین ملاتړ شوي اوږد، نازک یا نري کالم لپاره عبارت دی په

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \qquad (13\text{–}5)$$

$= P_{cr}$ بحرانی یا اعظمی محوری بار په کالم ، کله چی په درشل د کړوپیدو کی وی. دا بار باید له پروپورشنل (proportional limit) هغه ستریس حدڅخه زیاتوالی ونکړي.

$= E$ د موادو د ایلاستیستی ماجولس

$= I$ د کالم د غوڅی برخی لږ تر لږ انرشیایي مؤمنت

$= L$ د کالم نه تکیه شوی اوږدوالي، کوم چی په پایلو کی پین اتکاوی لري.

د ډیزاین موخو لپاره پورتنی معادله د ستریس په کارولو سره هم لیکل کیدی شي، کوم چی له I $=Ar^2$ کار واخیستل شي. دلته A د غوڅی

برخی مساحت دی او r د **جایریشن شعاع (radius *of gyration*)** د د غوڅی برخی دی، موږ لرو:

ددی کرین دړنګیدولامل د یو ځاګړی ټیوبی سترت کړوپیدل دي.

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 E(A r^2)}{L^2}$$

$$\left(\frac{P}{A}\right)_{cr} = \frac{\pi^2 E}{(L/r)^2}$$

یا

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{(L/r)^2} \qquad (13\text{–}6)$$

دلته

$_{cr}$ = بحرانی سټریس کوم چی وسط سټریس په کالم کی مخ کی له دی چی کړوپ شي. اړین ده چی $\sigma_{cr} \leq \sigma_Y$ وی.

E = د موادو د ایلاستیستی ماجولس

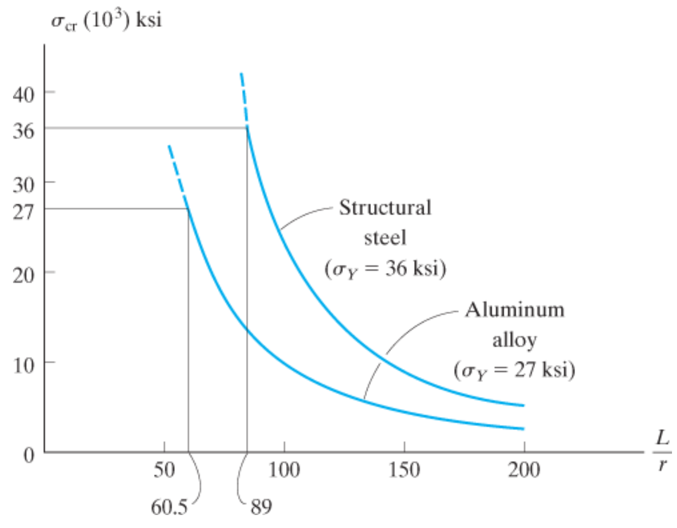
L = د کالم نه تکیه شوی اوږدوالي، کوم چی په پایلوکی پین اتکاوی لري.

r = تر ټولو کوچنی د جای ریشن (radius of gyration) شعاع ده چی له $r=\sqrt{(I/A)}$ څخه پیدا کیږي. دلته I لږ تر لږ انرشیایي مؤمنت او A دغوڅی برخی مساحت دی.

هندسی نسبت L/r په معادله 13-6 کی د ***نازکی نسبت*** (***slenderness ratio***) نومول کیږي. او هغه د کالم د ارتجاعیت (flexibility) معیار څرګندوي او په دی به وروسته بحث وشي. په کارولو د ددی نسبت کولای شو چی کالمونه په اوږده، متوسط ، او لنډ طبقه بندی کړو.

د ددی معادلی ګراف د هغه کالمونو لپاره چی له فولادو او یا د المونیم الیاژوڅخه جوړ شوي په انځور 13-7 کی ښودل شوي. دا هایپربالیک (hyperbolic) منحني دی، او د بحرانی سټریسونو لپاره په هغه حالتونو کی دمنلو وړ دی کوم چی د موادو له ییلد حد (پرووپورشنل حد) ټیټ وي. د فولادولپاره $(\sigma_Y)_{st} = 36$ ksi $[E_{st} = 29(10^3)$ ksi$]$ او د المونیم لپاره $(\sigma_Y)_{al}=27$ksi $[E_{al}=10(10^3)$ksi$]$ راکړل شوی. که چیری موږ $\sigma_{cr}=\sigma_Y$ په معادله 13-6 کی ځای پر ځای کړو ، نو بیا دا کوچنی دنازکی نسبت (slenderness ratio) د فولادو او المونیم لپاره کیږي

$(L/r)_{st} = 89$ او $(L/r)_{al} = 60.5$ ، کیږی، انځور 13-7. په دی توګه د فولادوکالم لپاره که چیری $(L/r)_{st} < 89$ د کالم سټریس به له ییلد ټکی، مخکی له دی چی کړوپ شي، زیادت وکړي او له همدی امله د اویلر فارمول کارول د منلو نه دي .



انځور 13-7

مهم ټکي

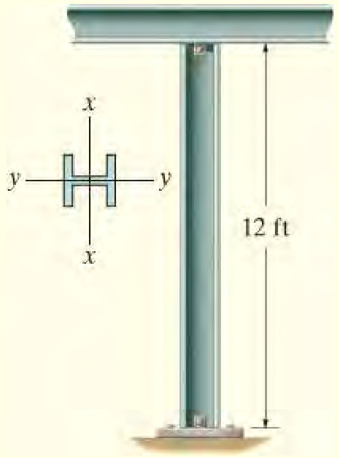
IMPORTANT POINTS

- کالمونه نازک اوږده غړی دی چی محوری فشاری بارونه وربا‌ندی پلی کیږي.
- بحرانی بار هغه اعظمی محوری بار دی چی کالم يي د کږوپیدو په درشل کی ملاتړ کولاي شي. دا بار استازیتوب د نیوترل (*neutral equilibrium*) توازن حالت کړي.
- یو خیالی کالم په پیل کی په بشپړ ډول مستقیم دی، له متجانس موادو جوړ شوي، او بار د غوڅی برخی په مرکز ثقل کی پلي کیږي.
- یو کالم چی پین اتکاوی لری په هغه خوا کی کږوپیدنه کوي، کوم چی په اصلی محور د غوڅی برخی تر ټولو کوچنۍ انرشيايي مؤمنت ولری.
- د نازکی نسبت (*slenderness ratio*) عبارت دی په L/r ، دلته r د غوڅی برخی کوچنی د جایریشن شعاع ده.

مثال

مثال 13.1

په لاندی انځور 13-8 کی د A992 فولادو W8 X 31 غړی چی پین اتکاوی لری بنودل شوي. اعظمی محوری بار، مخ کی له دی چی غړی کږوپ یا مواد يي ییلد حد ته و رسیږي، یو وړلیشی مشخص يي کړي. له $s_Y = 50$ ksi کار واخلي.



انځور 13-8

حل (SOLUTION)

له ضمیمی B جدول څخه د کالم د غوڅی برخی مساحت او انرشیایي مؤمنت عبارت دی په $A = 9.13 \text{ in}^2$, $I_x = 110 \text{ in}^4$, او $I_y = 37.1 \text{ in}^4$. په کتلو سره، کړوپیدل په y-y محور واقع کیږي. ولې؟ معادله 13-5 پلي کوو، او موږ لرو

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} = \frac{\pi^2[29(10^3)\text{ kip/in}^2](37.1\text{ in}^4)}{[12\text{ ft}(12\text{ in./ft})]^2} = 512\text{ kip}$$

کله چی دا بار پلی شي ، اوسط فشاری ستریس په کالم کی عبارت دی په

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \frac{512\text{ kip}}{9.13\text{ in}^2} = 56.1\text{ ksi}$$

څکه چی دا ستریس له ییلد ستریس (50 ksi) زیات دی ، د بار P ارزښت له ساده فشار څخه په لاس راوړو

$$50\text{ ksi} = \frac{P}{9.13\text{ in}^2}$$

$$P = 456\text{ kip} \qquad \textit{Ans.}$$

په رښتینی عملی کارونو کی ددی بار سره یو د خوندیتوب (safety factor) فکتور هم ځای په ځای کیږي.

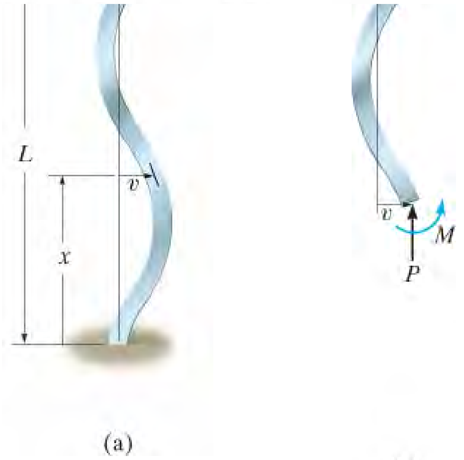
13.3 کالمونه چی مختلفی اتکاوی لری

(COLUMNS HAVING VARIOUS TYPES OF SUPPORTS)

داویلربار د 13.2 برخی د هغه کالم لپاره اخیستل شوی ، چې پین اتکاء سره وصل یا په پای کې د څرخیدلو امکان ولري. په هرصورت، ډیری وختونه، کالمونه ممکن بل ډول اتکاوی ولری. د مثال په توګه، د هغه کالم قضیه په پام کې ونیسئ چې په بنسټ کی کلک تړل شوی او په پورتنۍ برخه کې خوشی یا آزاد دي، انځور 13-9a . لکه څنګه چې کالم کږوپ کیږي یا په درشل د کږوپیدو کی وی، بار به څنګ ته ځي او بې ځایه کیدنه d به وکړي، په داسې حال کې چې په x کې بې ځایه کیدنه یې u ده . د آزاد بدن ډیاګرام څخه په انځور 13-9b کې، په خپل سرې برخه کې داخلي مؤمنت$M=P(\delta-v)$ دي. او په دې توګه د انعطاف منحنی لپاره دیفرینسیالی معادل عبارت ده په

$$EI\frac{d^2v}{dx^2} = P(\delta - v)$$

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{P}{EI}v = \frac{P}{EI}\delta \qquad (13\text{–}7)$$



انځور 13-9

برعکس د معادلی 13-2 دا معادله غیر متجانس ده ځکه چې په ښي خوا کی غیر صفری رقم شتون لري. حل ددی معادلی دوه برخی لری یو یې بشپړونکی (complementary) او بل یې ځانګړی یا خاص (particular) حل دی، یعنی:

$$v = C_1 \sin\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}x\right) + C_2 \cos\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}x\right) + \delta$$

تیوبی کالمونه چی د دې اوبو ټانک ملاتړ لپاره کارول شوي په دریو ځایونو د اوږدوالي په اوږدو کې تړل شوی تر څو د کړوپیدو مخنیوي وکړي.

ثابت ارقام له سرحدی شرایطو ټاکل کیږي . په $x = 0$ ارزښت د $v = 0$ او په همدی توګه $C_2 = -\delta$. همدا رنګه

$$\frac{dv}{dx} = C_1\sqrt{\frac{P}{EI}}\cos\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}x\right) - C_2\sqrt{\frac{P}{EI}}\sin\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}x\right)$$

په $x = 0$ ارزښت $v=0$, بیا $C_1 = 0$. د بیځایه کیدنی منحني عبارت دی په

$$v = \delta\left[1 - \cos\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}x\right)\right] \qquad (13\text{–}8)$$

په پای کی ، د کالم په سر کی $x = L$ $v = \delta,$ نو بیا

$$\delta\cos\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}L\right) = 0$$

د ساده حل (trivial) لاره $\delta=0$ ښایي چی پرته له دی چی بار څومره زیاتولي وکړی کړوپیدل د کالم نه واقع کیږي. پر ځای یي

$$\cos\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}L\right) = 0 \quad \text{or} \quad \sqrt{\frac{P}{EI}}L = \frac{n\pi}{2}, \; n = 1, 3, 5 \ldots$$

تر ټولو کوچنی بحرانی بار هغه وخت مینځ ته راځي کله چی $n = 1$ نو بیا

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{4L^2} \qquad (13\text{–}9)$$

د معادلی 13-5 په پرتله دا معلومیږی چی یو کالم کوم چی په بنسټ خوا کی کلک تړل شوی او په سرخوا کی آزاد وی، هغه د بار وړلو توان څلورمه حصه (1/4) د بحرانی بار په پرتله د هغه کالم دی چی په دواړه پایلوکی پین شوي وی.

نور ډول کالمونه په همدی شان تحلیل کیږي او موږ دلته ډیر تفصیل د هغوي نه ورکوو. *

پر ځای یي موږ به پایلی په یو جدول کی، د ډیر عام ډولونو کالمونه، ځای پر ځای کړو، چیرته چی د کالم اتکاوی او دا چی څنګه د اویلر فورمول په پراخه ډول پلی کیږی ، و ښیو.

اغیزه من اوږدوالي (Effective Length). د اویلر فارمول کارول، معادله 13-5، د هغو کالمونو لپاره چی مختلف ډول اتکاوی لری، موږ به د کالم اوږدوالی، L ، داسی تعدیل کړو تر څودصفری مؤمنت فاصلی تر مینځ په کالم کی استازیتوب وکړي. دا فاصله په نامه دکالم ***اغیزه من اوږدوالي*** (***effective length***) L_e نومول کیږي. په ښکاره ډول، هغه کالم چی دواړه پایلی یی پین وی د هغه لپاره $L_e = L$ دي، انځور 13-10a . د کلک تړل شوی پای او آزادپای کالم لپاره، بیځایه شوي منحنی یي په معادله 13-8 تعریف کیږي. کله چی دا معادله رسم شی، شکل یي مساوی په هغه کالم کیږی چی پایلی یي پین او اوږدوالي یي $2L$ دی، انځور 13-10b. په دی ډول د کالم اغیزه من اوږدوالي په مینځ د هغه ټکیو چی هلته مؤمنت صفردي عبارت دی په $L_e = 2L$. د دوو نوروکالمونو چی په پای کی مختلف اتکاوی لری په انځور 13-10 کی ښودل شوي. کالم چی په پایلوکی کلکی اتکاوی لری، انځور 13-10c ، د انفلکشن ټکي (inflection points) یا د صفر مؤمنت ټکی له هر اتکا څخه $L/4$ موقعیت لری. اغیزمن اوږدوالی یی په منځني نیمایي د اوږدوالي کی تعریف کیږي، چی هغه عبارت دی په $L_e = 0.5L$. په نهایت کی ، د پین اود کلکی اتکا پایلوکالم، انځور 13-10d، د انفلکشن ټکی یي یا د صفر مؤمنت ټکی یي په نژدی 0.7L له پین شوی پاي څخه موقعیت لري یعنی $L_e = 0.7L$ دي.

د کالم اغیزمن اوږدوالي مشخص کولو پر ځای، ډیری د ډیزاین کودونه د کالم فورمولونو سره یو فکتور چی ابعاد نلري په نامه د K ضریب چی د ***اوږدوالی-اغیزمن فکتور*** (***effective-length factor***) په نامه یادیږی، اضافه کوي. دا فکتور په لاندی ډول تعریف شوی:

$$L_e = KL \qquad (13\text{–}10)$$

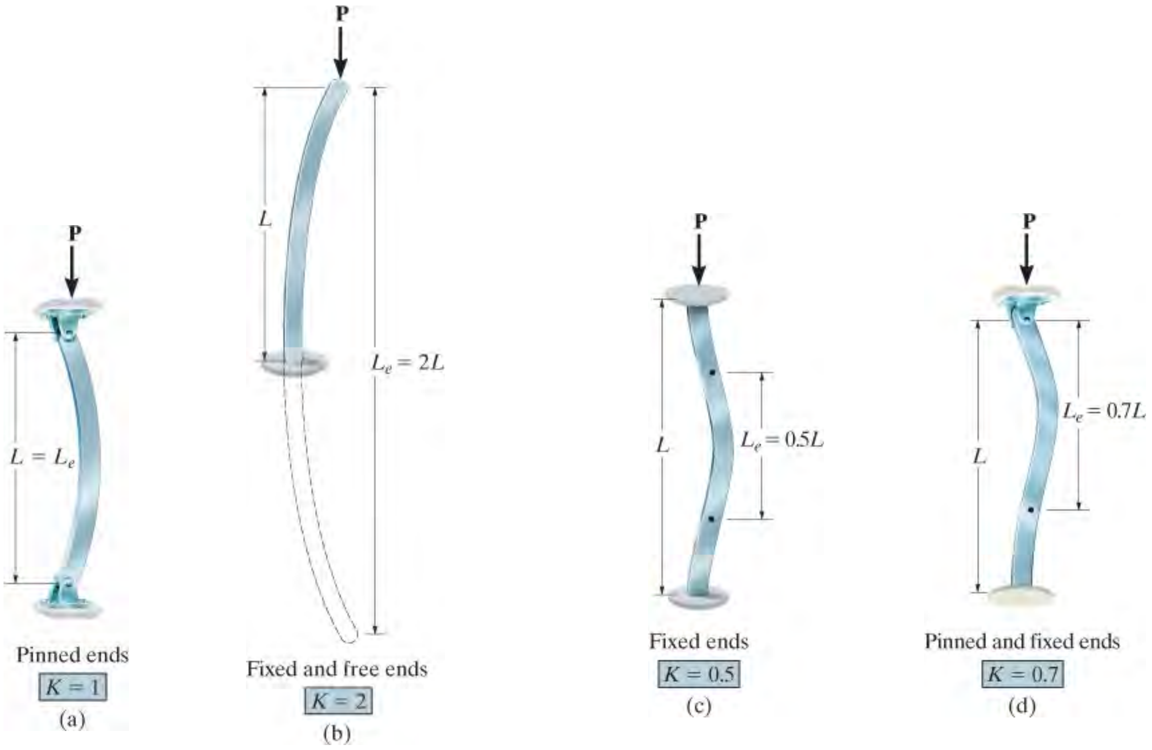
ځانګړی ارزښتونه د ضریب K په انځور 13-10 کی ښودل شوي. ددی عمومیت په بنسټ موږ کولای شو چی د اویلر فورمول په لاندی ډول ولیکو:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(KL)^2} \qquad (13\text{–}11)$$

یا

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{(KL/r)^2} \qquad (13\text{–}12)$$

دلته KL/r د کالم **اغیزمن-نازکتوب نسبت** (***effective-slenderness ratio***) دي.



انځور 13-10

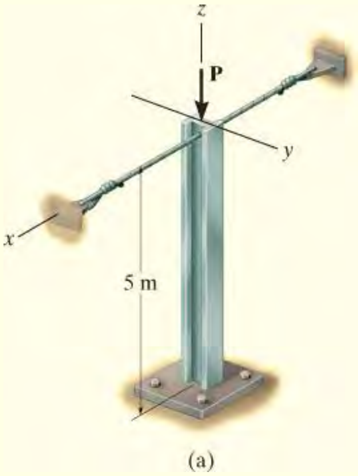
* 13-44, 13-43 او 13-45 پوښتنې و ګورئ.

مثالونه

مثال 13.2

په لاندی انځور 13-11a کی، له المونيم جوړ شوی کالم ښودل شوی. دا کالم په پورتنی برخه کی د کيبلونو په واسطه وصل شوی دي تر څو د x محورپه لور دحرکت مخه و نيول شي. که فرض شي چی په بنسټ کی کلکه اتکا لری، اعظمی د منلو وړ بار، **P** ، چی کيدی شي پلی شي و ټاکی.

د کړوپيدو لپاره د خونديتوب فکتور $F.S. = 3.0$ او $E_{al} = 70\text{GPa}$, $s_Y = 215$ MPa او $A = 7.5(10^{-3})\text{m}^2$, $I_x = 61.3(10^{-6})$ m^4, $I_y = 23.2\ (10^{-6})$ m^4 و کاروي.



انځور 13-11

حل (SOLUTION)

کړوپيدل په x او y محورونو په انځور 13-11b او 13-11c کی ښودل شوي.

د انځور 13-10a په کارولو د x-x محور کړوپيدلو له پاره $K = 2$ ، نو بيا $(KL)_x = 10$ m . د y-y محور کړوپيدلو لپاره $K = 0.7$ نو بيا $(KL)_y = 0.7(5\text{m}) = 3.5$ m . د معادلی 13-11 په کارولو سره بحرانی بار د هر حالت لپاره کيږي:

$$(P_{cr})_x = \frac{\pi^2 E I_x}{(KL)_x^2} = \frac{\pi^2[70(10^9)\ \text{N/m}^2](61.3(10^{-6})\ \text{m}^4)}{(10\ \text{m})^2}$$

$$= 424\ \text{kN}$$

$$(P_{cr})_y = \frac{\pi^2 E I_y}{(KL)_y^2} = \frac{\pi^2[70(10^9)\ \text{N/m}^2](23.2(10^{-6})\ \text{m}^4)}{(3.5\ \text{m})^2}$$

$$= 1.31\ \text{MN}$$

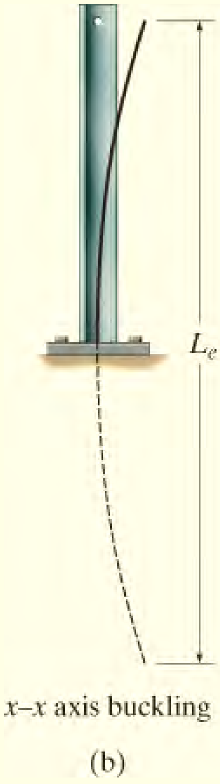
په پرتله کولو سره، کله چی P زیاته شي کالم به په محور x-x کږوپیدل و مومي. نو بیا د منلو وړ بار عبارت دی په

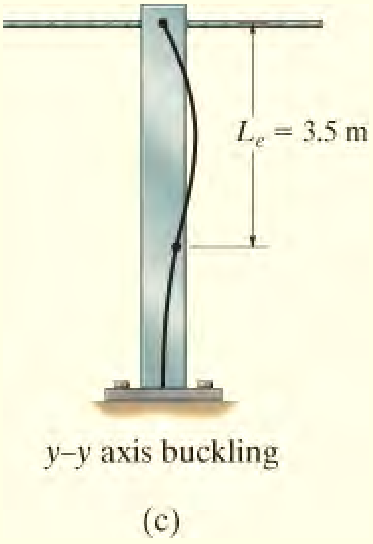
$$P_{allow} = \frac{P_{cr}}{\text{F.S.}} = \frac{424\ \text{kN}}{3.0} = 141\ \text{kN} \qquad \textit{Ans.}$$

ځرنګه چی

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \frac{424\ \text{kN}}{7.5(10^{-3})\ \text{m}^2} = 56.5\ \text{MPa} < 215\ \text{MPa}$$

د اویلر معادلی پلي کول د منلو وړدي.

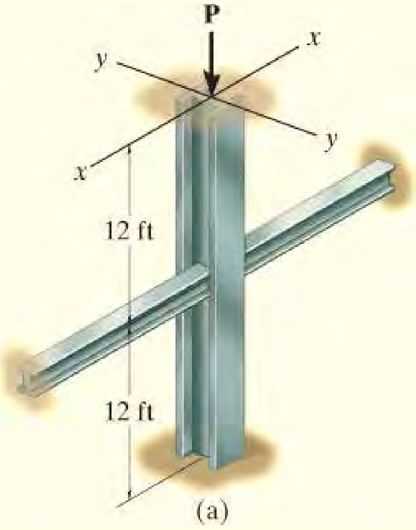




انځور 13-11 (تکرار)

مثال 13.3

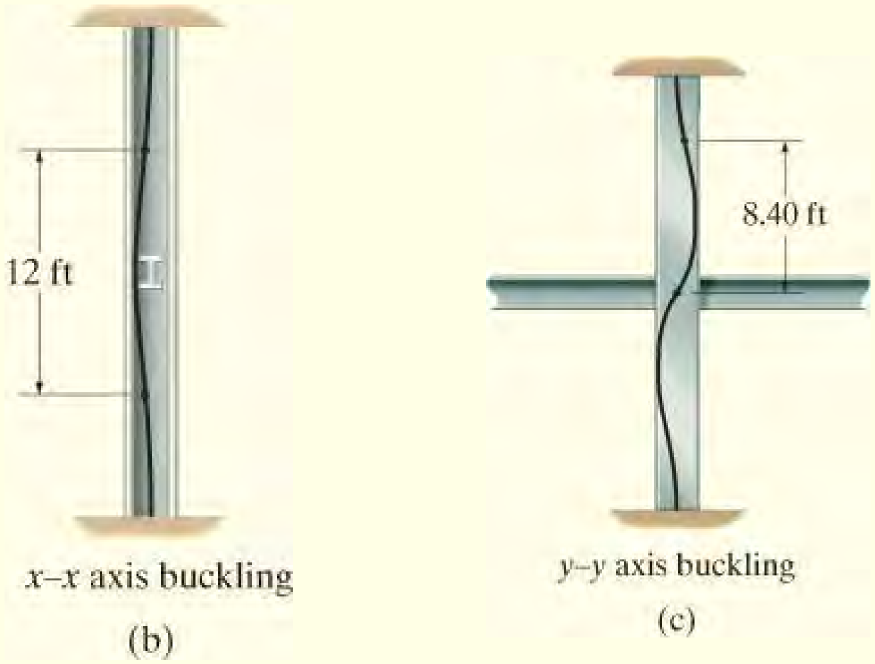
یو فولادی W6 X 15 کالم، 24 ft اوږدوالي لري او په دواړو پایلوکی کلک وصل شوي، انځور 13-12a. د بار وړلو ظرفیت يي زياتيږي کله چې په ضعیف محور (y-y) د سټرټ تکیو په واسطه ، د لوړ والي په منځنی برخه کی و تړل شي. د سټرټ تکیی د کالم سره پین اتصال لري. هغه بار چی کالم يي وړلی شي و ټاکی. کالم باید کړوپ نه شي او هم د کالم د مواد و سټریس له ییلد سټریس زیاتوالي ونکړي. کار واخلی له $E_{st} = 29\ (10^3)$ ksi او $s_Y = 60$ ksi .



انځور 13-12

(SOLUTION) حل

د تړل شویو تکیو له امله د کالم د کړوپیدو چلند په *x-x* او *y-y* محورونوکی توپیرلري. کړوپ شوی شکلونه په هر محور په انځورونو 3-12b او 13-12c کی ښودل شوي. له انځور 13-12b اغیزمن اوږدوالي د کړوپیدو لپاره په محور *x-x* کیږي په $(KL)_x = 0.5(24\text{ft}) = 12\text{ ft} = 144\text{ in.}$ ، او کړوپیدل په *y-y* محور $(KL)_y = 0.7(24\text{ft}/2) = 8.40\text{ ft} = 100.8\text{ in.}$. انرشیايي مؤمنت د W6 X 15 له جدول څخه په ضمیمه B کی موندلی شي. او موږ لرو $I_x = 29.1\text{ in}^4$, $I_y = 9.32$ .in^4



انځور 13-12 (تکرار)

معادله 13-11 پلی کوو:

$$(P_{cr})_x = \frac{\pi^2 E I_x}{(KL)_x^2} = \frac{\pi^2[29(10^3)\text{ ksi}]29.1\text{ in}^4}{(144\text{ in.})^2} = 401.7\text{ kip} \quad (1)$$

$$(P_{cr})_y = \frac{\pi^2 E I_y}{(KL)_y^2} = \frac{\pi^2[29(10^3)\text{ ksi}]9.32\text{ in}^4}{(100.8\text{ in.})^2} = 262.5\text{ kip} \quad (2)$$

په پرتله کولو سره وینو چې کړوپیدل په y-y محور واقع کیږي.
د غوځۍ برخې مساحت عبارت ده په 4.43 in^2 ، نو بیا اوسط فشاري ستریس په کالم کې عبارت دی په:

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \frac{262.5 \text{ kip}}{4.43 \text{ in}^2} = 59.3 \text{ ksi}$$

ځکه چي دا ستریس له ییلډ ستریس لږ دی ، کړوپیدل به مخکې له دی چې موادو ییلډ وکړی مینځ ته را شي. په دی توګه

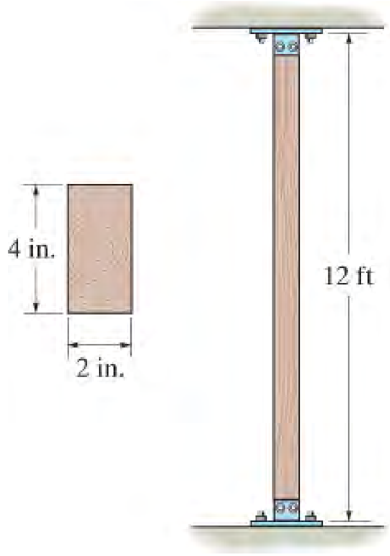
$$P_{cr} = 263 \text{ kip} \qquad \textit{Ans.}$$

بنستيز پوښتني

FUNDAMENTAL PROBLEMS

ب- 13-1 . يوه .50-in اوږده ميله .1 in قطر لري. د کړوپيدو بحرانی بار يی معلوم کړي. ميله په دواړو پايلوکی کلکه تړل شوي. $E_{st} = 29\ (10^3)$ ksi او $s_Y = 36$ ksi

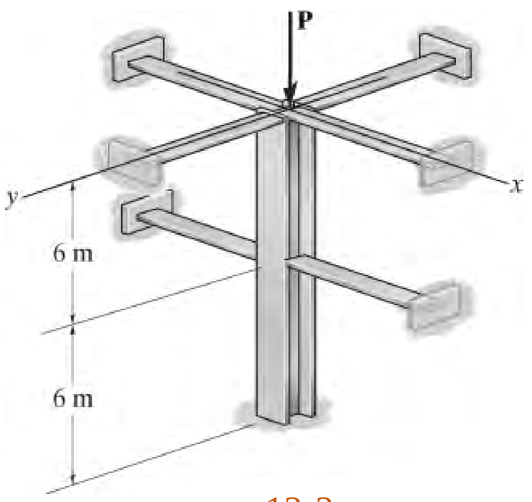
ب- 13-2 . د يوه 12-ft د لرګيو مستطيلي کالم ابعاد په لاندی انځور کی ښودل شوي. بحرانی بار يي وټاکی، دواړه پايلونه يي پين اتکاوی لري. $E_{st} = 1.6\ (10^3)$ ksi ، ييلد نه واقع کيږي.



ب 13-2

ب- 13-3 . يو 992 فولادی کالم په پورته او ښکته پايلوکی په ضعيف محور سره د لوړوالي په منځني برخه کی تکيه (brace) شوي دي. هغه اعظمی د منلو وړ بار **P** چی کيدی شی په کالم پلی شي، مخ کی له دی چی کړوپ شي، و ټاکي. د خونديتوب فکتور د کړوپيدو لپاره F.S. = 2 و کاروي.

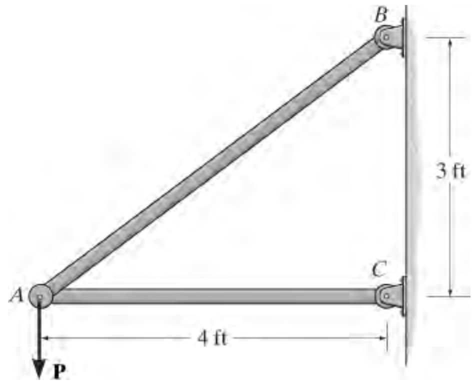
له $A = 7.4(10^{-3})$ m^2, $I_x = 87.3$ (10-6) m^4 او $I_y = 18.8(10^{-6})$m^4 کار واخلی.



ب 13-3

ب- 13-4 . یو د فولادو پایپ په دواړو پایلوکی کلکی اتکاوی لري. که چیری دا 5 m اوږد، بهرنی قطر یي 50 mm او ضخامت یي 10 mm وي، اعظمی محوری بار P ، کوم چی کړوپیدل مینځ ته را نه وړي وټاکی. E_{st} = 200 GPa او s_Y = 250 MPa

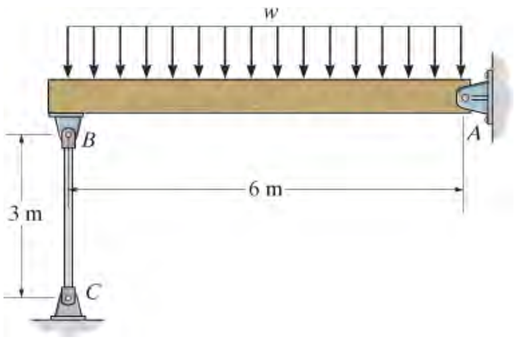
ب- 13-5 . اعظمی قوه **P** ، چی کیدی شي په اسامبلی پلي شي او پرته له دی چی غړی AC کړوپ شي ، مشخص کړي. غړی له A992 فولادو جوړ او قطر یي 2 in. دی. د خوندیتوب فکتور د کړوپیدو لپاره F.S. =2 وګڼی.



ب 13-5

ب- 13-6 . میله BC چی له A992 فولادوی جوړه شوي، 50 mm قطرلري او د بیم لپاره اتکاء جوړه وی. د ویشلشوی بار شدت w داسی و ټاکی، چی تر پلی شوی بار لاندی BCمیله کړوپیدنه ونکړي.

د خوندیتوب فکتور د کړوپیدو لپاره F.S. =2 وګڼی.

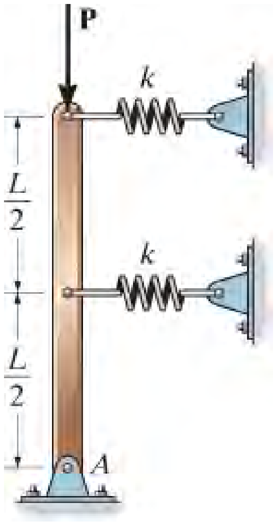


ب 13-6

سوالونه

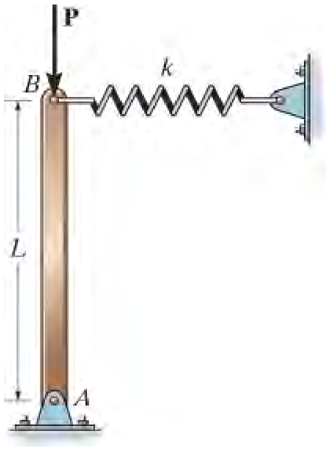
PROBLEMS

س 13-1. د ښودل شوی کالم لپاره بحرانی کړوپیدونکي بار مشخص کړي. مواد سخت فرض کیدی شي.



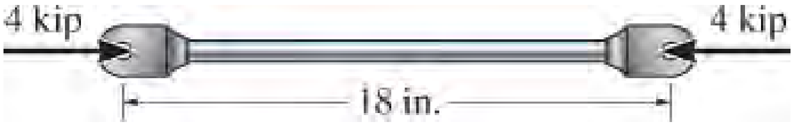
س 13-1

س 13-2. دا لاندی کالم له یوه سخت غړي جوړشوي، په ښکته پای کی پین اتکاء لري او په پورتنی برخه کی د یو فنر سره وصل دي. کله چی کالم په مستقیم حالت کی وی فنر غزیدلی نه دي، اعظمي بحراني بار چی په کالم پلی کیدی شي وټاکی.



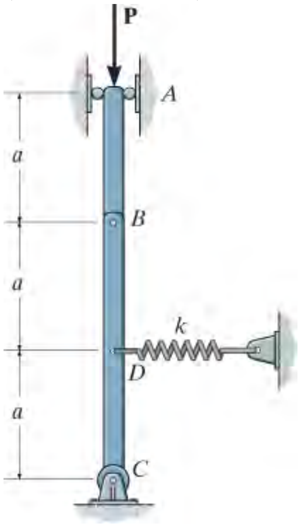
س 13-2

س 13-3. د الوتکې يو ارتباطی (link) غړی له A992 فولادی میلې جوړ شوی دی. مخکی له دی چی غړي د 4 kip بار له امله کړوپ شی تر ټولو کوچنۍ قطرد میلی، تر 1/16 in. اندازی نږدی پوری ، و ټاکی.



س 13-3

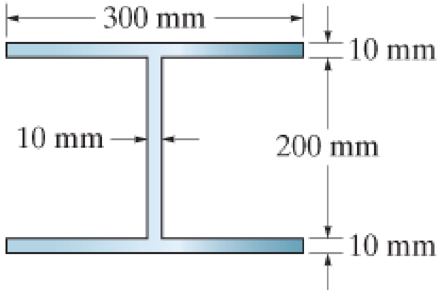
س *13-4. سختی میلی AB او BC په B کی په پین سره وصل شوی دی. که دفنرشخی په D کی، k وی، بحرانی بار P_{cr} چی کیدی شی په میلو باندی پلی شي وټاکی.



س 13-4

س 13-5. د 2014-T6 ا المونیم لیاژ کالم 6 m اوږدوالی لری، په پورته پای کی کلکه اتکا اوښکته پای کی پین اتکا لری. د غوڅی برخی ابعاد په لاندی انځور کی ښودل شوي. اعظمی بحراني بار مشخص کړی. $s_Y = 250$ PMa

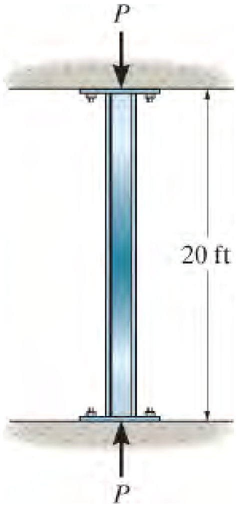
س 13-6. که چیری کالم په پورتني اوښکته پایلوکی پین اتکا ولري پوښتنه 13-5 حل کړي.



س 13-5/6

س 13-7. د W12 X 50 یو A992 فولادی کالم 20 ft اوږدوالي لري. که چیری دواړه پایله د کالم پین اتکاؤی ولری، او یو 150 kip محوری بار ورباندی پلی شوي وی، د خوندیتوب فکتور کړوپیدو په تړاووټاکی.

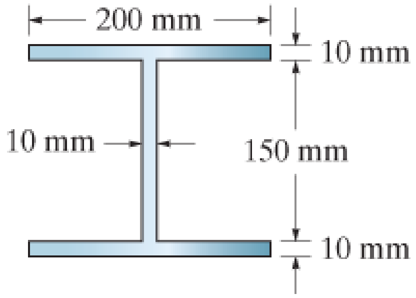
س 13-8*. د W12 X 50 یو A992 فولادی کالم 20 ft اوږدوالي لري. که چیری دواړه پایله د کالم کلکی اتکاؤی ولری، کالم کولای شی چی بحراني بار، پرته له ییلد کیدو، یو وړلی شی؟



س 13-7/8

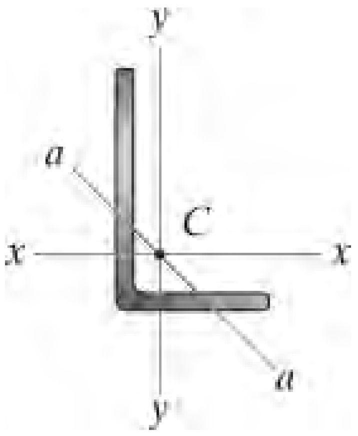
س 13-9. یو فولادوکالم 9 m اوږدوالی لری، په پورته او ښکته پایلوکی کلکی اتکا وی لری. د غوڅی برخی ابعاد یی په لاندی انځور کی ښودل شوي. اعظمی بحراني بار وټاکی. E_{st} = s_Y = 250 PMa 200GPa

س 13-10 . یو فولادو کالم 9 m اوږدوالی لری، په پورته او ښکته پایلوکی پین اتکاؤي لری. که د غوڅی برخی ابعاد په لاندی انځور کی ښودل شوي. اعظمی بحراني بار وټاکی. E_{st} = , s_Y = 250 PMa او 200Gpa



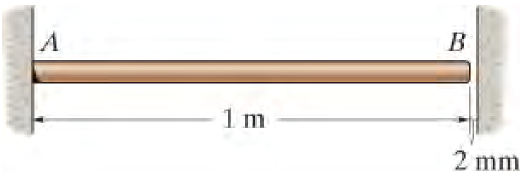
س 13-9/10

س 13-11 . د غوڅه برخی مساحت د A992 فولادی زاویي عبارت دی په A =2.48 in^2 او د جایریشن شعاع (gyration radius) په x محور r_x =1.26 in. او په y محور r_y = 0.879 in دي. کوچني جایریشن شعاع په محور a-a عبارت دی په r_a =0.644 in . که چیری دا زاویه د کالم په توګه، چی 10-ft اوږد والی او په پایلوکی پین اتکاء لری ، و کارول شي، اعظمی محوری بار چی کیدی شي په مرکز ثقل C کی پرته له دی چی کړوپیدل مینځ ته راشي، و ټاکی.



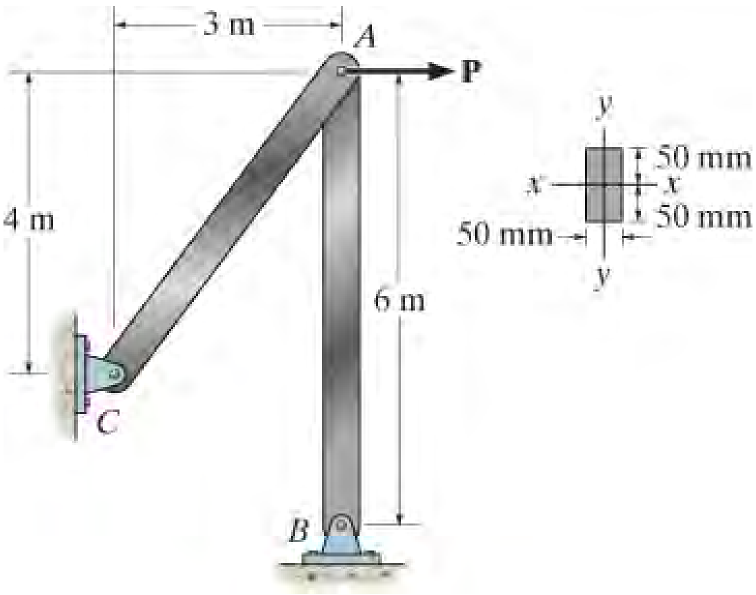
س 13-11

س *13-12 . د برنجو (bronze) میله چې 50-mm قطر لري، کلکه اتکاء په A کې او 2 mm چاک (gap) په B کې د دیوال سره لري. هغه زیاتوالي د تودوخي درجی ΔT چې لامل د کړوپیدو د میلی کیږي و ټاکی. فرض کړي چې تماس په B کې د پین په شان عمل کړي.



س 13-12

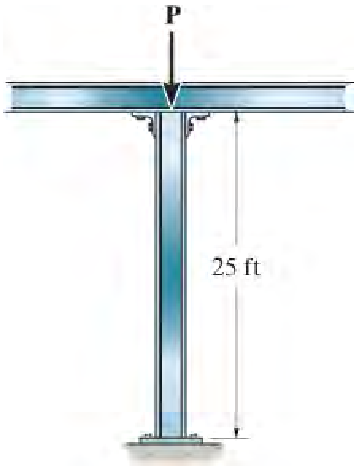
س 13-13 . اعظمی بار P په فریم ، پرته له دی چې غړی AB کړوپ شي، مشخص کړي. فرض کړی چې غړی AB له فولادو جوړ شوی او په پایلوکی پین شوی دی د محور y-y په جهت د کړوپیدو په اړ، او کلک تړل شوی په پایلوکی د x-x محور په جهت دکړوپیدو لپاره. $E_{st} = 200$ GPa ، $s_Y = 360$ PMa



س 13-13

س 13-14 . W8 X 67 سوروری فلنج کالم له A-36 فولادوجوړشوي، فرض کوو چې کلکه اتکاء لری په ښکته پای کی او پین شوی دی په پورتني پای کی . اعظمی قوه P چې کیدی شی پلی شی پرته له دی چې کړوپیدل واقع شي وټاکی.

س 13-15 . پوښتنه 13-14 حل کړی که فرض کړو چی کالم کلکه اتکاء لری په ښکته خوا کی او آزاد دي په پورته خوا کی.

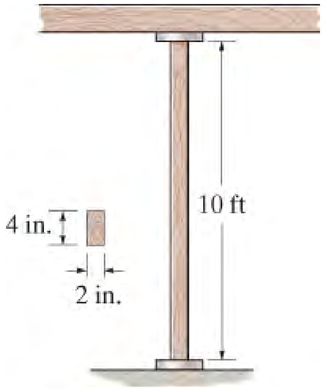


س 13-14/15

س 13-16* . د W200 X 46 یو A992 فولادی کالم 9 m اوږدوالي لري. کلک تړل شوی په یوه پای کی اوپه بل پای کي آزاد دي. د منلوړ محوری بار په کالم، که چیری د خوندیتوب فکتور F.S. =2 دکړوپیدو په اړه وکارول شی، وټاکی.

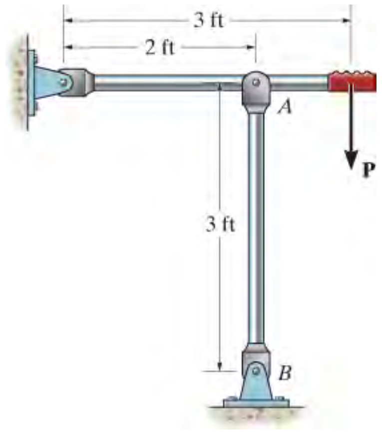
س 13-17 . د لرګیو مستطیلی کالم 10-ft لوړوالي لري، ابعاد يي په لاندی انځور کی ښودل شوي. که چیری دواړه پایله د کالم په پین سره وصل وی، بحرانی بار وټاکی. E_w= 1.6(103) ksi ، s_Y = 5 ksi

س 13-18 . د لرګیو کالم چی 10-ft لوړوالي لري ابعاد يي په لاندی انځور کی ښودل شوي. بحرانی بار وټاکی ، که چیری کالم کلکه اتکاء لری په ټیټه خوا کی او پین شوی وی په پورته خوا کی . E_w= 1.6(10^3) ksi ، s_Y = 5 ksi



س 13-17/18

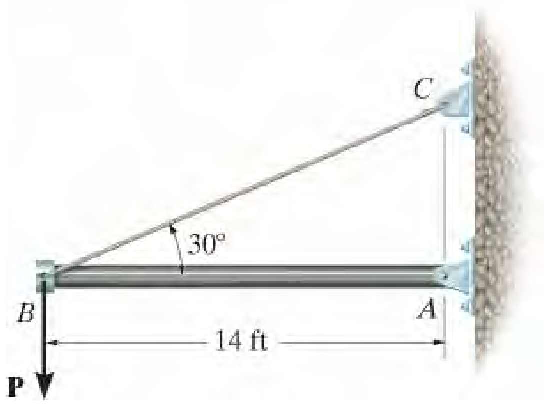
س 13-19 . اعظمی قوه P چې کیدی شي په لاستی پلی شي تر څو A992 فولادی کنترول میله ABکږوپه نه شي. د میلی قطر .in 1.25 دي. په دواړو پآیلوکی په پین تړل شوي.



س 13-19

س *13-20 . د A-36 فولادی پایپ وتلی قطر یي .in 2 او پنډوالی یي .in 0.5 دی. که چیری د یوه سیم په واسطه نیول شوی وی، تر ټولو لویه عمودی قوه *P* چې کیدی شي پلی شی وټاکي او دا قوه د پایپ د کږوپیدو لامل نشي. فرض کړی چې د پایپ پایلی په پین وصل شوي.

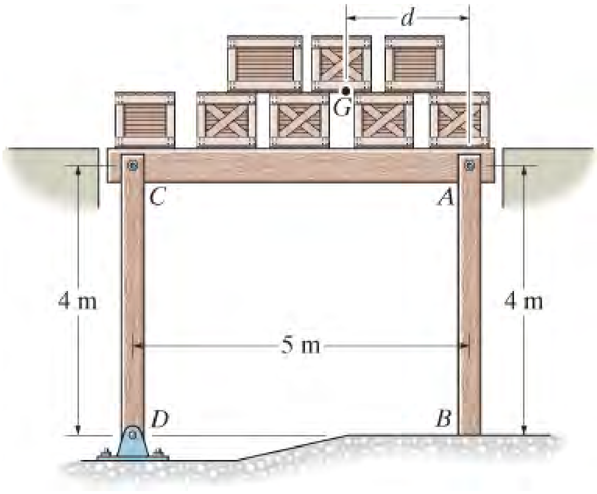
س 13-21 . د A-36 فولادی پایپ وتلی قطر یي .in 2 او پنډوالی یي .in 0.5 دی. که چیری د یوه سیم په واسطه نیول شوی وی، اړونده داخلی قطر نیږدی .in 1/8 ته وټاکی، تر څو اعظمی عمودی بار P =4 kip پرته له دی چې د پایپ د کږوپیدو لامل شی و ټاکي. فرض کړی چې د پایپ پایلی په پین وصل شوي.



س 13-20/21

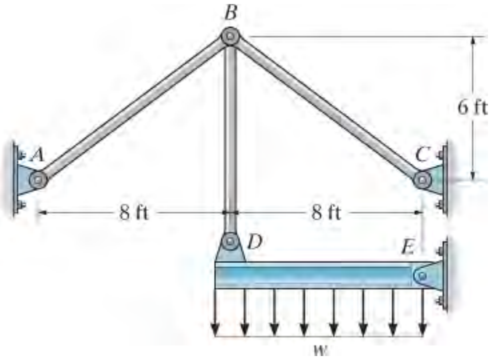
س 13-22 . یوه تخته فرش په دوو 40-mm مربعو پایو درول شوی. پایه AB پین شوی په A ، او کلکه تړل شوی په B کی، او CD په پین تړل شوی په C او D کی.که چیری د تختی فرش بیځایه کیدنه په څنګ لور ممانعت شوی وي ، تر ټولو لوی وزن د بار و ټاکی کوم چی پلی کیدی شي او تخته ړنګه نشي. مرکز ثقل د بار په d =2 m. کی موقعیت لري. دواړه پایي له ډګلس فر ډول لرګی څخه جوړي شوي دي.

س 13-23 . یوه تخته فرش په دوو 40-mm مربعو پایو درول شوي. پایه AB پین شوی په A ، او کلکه تړل شوی په B کی، او CD په پین تړل شوی په C او D کی. که چیری د تختی فرش بیځایه کیدنه په څنګ لور ممانعت شوی وي ، موقعیت d د ثقل د مرکز او تر ټولو لوی وزن د بار و ټاکی کوم چی پلی کیدی شي او تخته ړنګه نشي. دواړه پایي له ډګلس فر ډول لرګی څخه جوړي شوي دي.



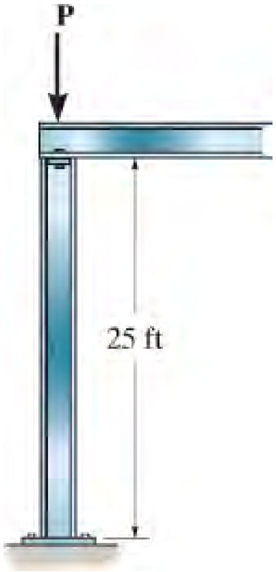
س 13-22/23

س *13-24 . دا لاندی بیم ، په دریو ځوړند شویو(suspender)، A-36 فولادی میلو چی په پین سره تړل شوي او 0.5 in. قطر لري، ځړول شوی. اعظمی ویشل شوی بار w ، کوم چی پلی کیدی شی، پرته له دی چی غړی AB او CB کړوپ شي، وټاکي.



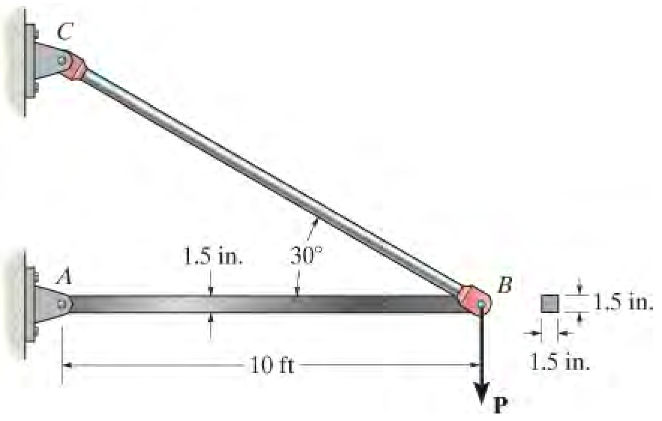
س 13-24

س 13-25 . یو W14 X 30 ، A992 فولادی کالم په لاندی انځور کی ښودل شوي. فرض شوی چی په دواړو پایلوکی کالم په پین سره تړل شوي. اعظمی محوری بار P و ټاکي ، پرته له دی چی پلی کیدل ددی بار د کالم د کړوپیدو لامل و ګرځی .



س 13-25

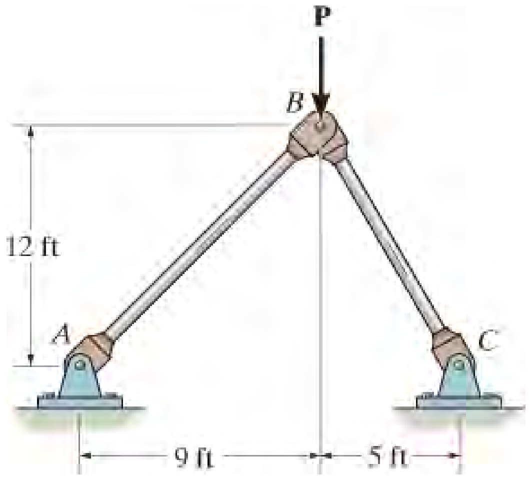
س 13-26 . یوه A992 فولادی میله AB مربع غوڅه برخه لري. که چیری په پایلوکی پین اتصال ولر ي، اعظمی بار P چی کیدی شی په فریم پلی شي و ټاکی. د کړوپیدو لپاره د خوندیتوب فکتور 2 وګنی.



س 13-26

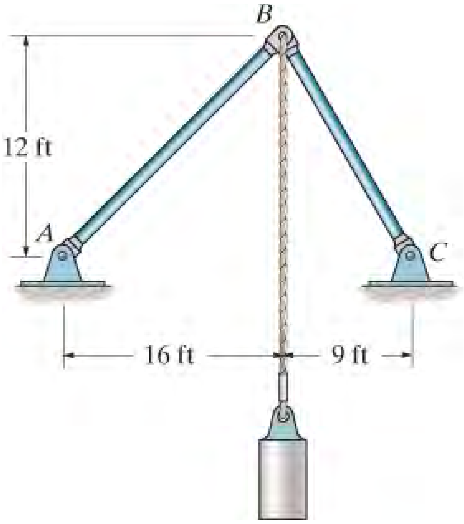
س 13-27 . دا لاندی تړونکی له دو A992 فولادی میلو، چی هر یو یی ګردی غوڅه برخه لری، جوړشوي . د هری میلی قطر تر نیږدي .1/8 in وټاکی تر څود یوی قوی $P = 10$ kip وړلو توان ولری. فرض کړی چی میلی په دواړو پایلوکی پین اتصال لری. د خوندیتوب فکتور F.S. = 1.8 د کړوپیدو په اړه وګنی.

س 13-28* . دا لاندی تړونکی له دو A992 فولادی میلو، چی هر یو یی ګردی غوڅه برخه لری، جوړشوي . که د هری میلی قطر .2 in وی، اعظمی بار چی پلی کیدی شي پرته له دی چی د میلو د کړوپیدو لامل وګرځی او د خوندیتوب فکتور F.S. = 1.8 د کړوپیدو په اړه وګنی، و ټاکی . فرض کړی چی میلی په دواړو پایلوکی پین اتصال لری.



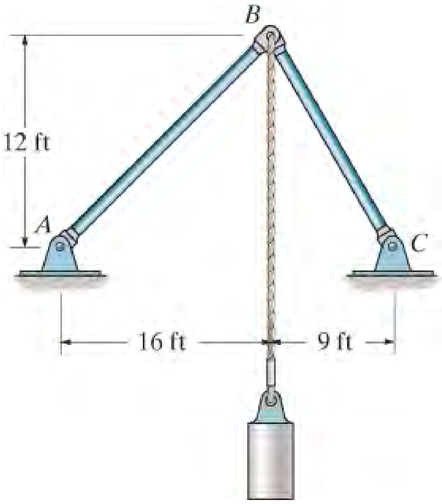
س 13-27/28

س 13-29 . دا لاندی ترونکی له دوو A-36 فولادی میلو، چې هر یو یې ګردی غوښه برخه لری، جوړشوي . د هری میلی قطر تر نیږدي .1/8 in وټاکی تر څود یوی قوی P = 900-lb وړلو توان ولری. فرض کړی چې میلی په دواړو پایلوکی پین اتصال لری. د خوندیتوب فکتور .F.S = 1.8 د کړوپیدو په اړه وګڼی.



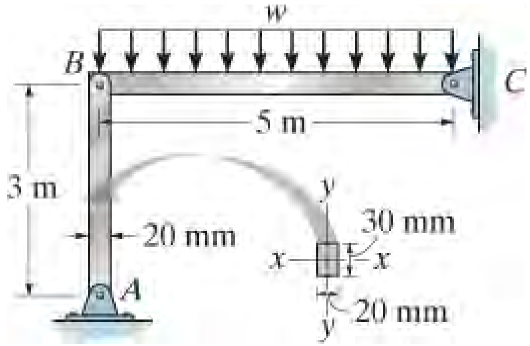
س 13-29

س 13-30 . دا لاندی ترونکی له دوو A-36 فولادی میلو، چې هره یو یې ګردی غوښه برخه لری، جوړه شوي . که د هری میلی قطر.3/4 in وي ، اعظمی بار چې پلی کیدی شي، پرته له دی چې میلی کړوپی شی، و ټاکي . فرض کړی چې میلی په دواړو پایلوکی پین اتصال لری.



س 13-30

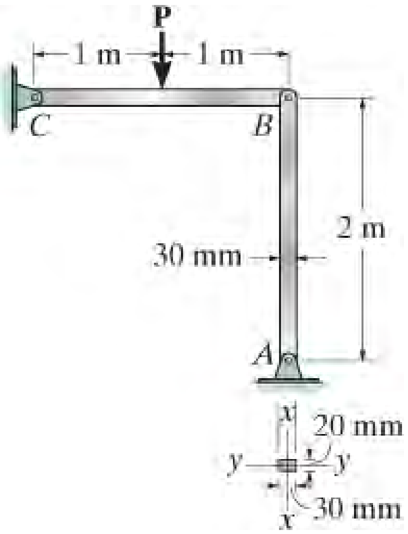
س 13-31 . فولادی میله AB مستطیلي غوڅه برخه لري. که چیرې په پایلوکی یې پین اتصال ولري، اعظمی د منلو وړ ویشلشوی بار w ، کوم چې کیدی شي په BC پلی او پرته له دی چې AB کږوپه شي، هغه و ټاکی. د کږوپیدو په اړ د خوندیتوی فکتور 1.5 وګڼی. $E_{st} = 200$ GPa $s_Y =$ 360 PMa,



س 13-31

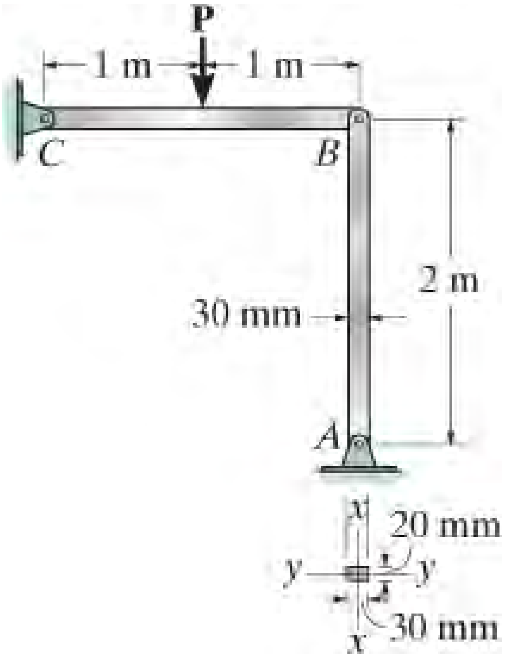
س *13-32 . که چیرې د غړی AB لپاره د خوندیتوب فکتور F.S. = 3 د کږوپیدو په اړه وی، معلوم کړی چې آیا دا لاندی چوکاټ یو بار د P =20 kN وړلی شي که نه؟

فرض کړی چې غړی AB له فولادو جوړ شوی او په پایلوکی په x-x محور د کږوپیدو په اړه پین شوی او په y-y محور د کږوپیدو په اړه کلک تړل شوی. $E_{st} = 200$ GPa, $s_Y = 360$ PMa,



س 13-32

س 13-33 . اعظمی د منلو وړ بار P کوم چې کیدی شي په غړی BC پلی شي، پرته له دی چې غړی AB کړوپ شي، وټاکی. فرض کړی چې غړی AB له فولادو جوړ شوی او په پایلوکی په x-x محور د کړوپیدو په اړ پین شوی او په y-y محور د کړوپیدو په اړ کلک تړل شوی. $E_{st} =$ 200 GPa, $s_Y = 360$ PMa



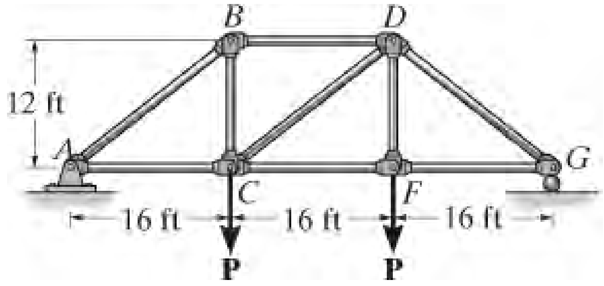
س 13-33

س 13-34 . یوه ډکه ګردی میله 4m اوږدوالی لری له 6061-T6 المونیم ایلیاژه جوړه ،او په دواړو پایلوکی پین شوی ده. که چیری یو محوری بار د 15 kN پری پلی شی او د خوندیتوب فکتور، F.S. = 2 ، د کړوپیدو په اړ وګڼل شي ، تر ټولو کوچنی قطرد میلی تر میلی متره نیږدي و ټاکی.

س 13-35 . یوه ډکه ګردی میله 4m اوږدوالی لری له 6061-T6 المونیم ایلیاژه جوړه ،او په یوه سرکی پین شوی او په بل سرکی کلکه تړل شوی ده. که چیری یو محوری بار د 15 kN پری پلی شی او د خوندیتوب فکتور F.S. = 2 د کړوپیدو په اړ وګڼل شی، تر ټولو کوچنی قطرد میلی ترنیږدي میلی متره و ټاکی.

س *13-36 . د لاندی ترس (truss) غړي فرض شوي چې په پین یو له بل سره تړل شوی. که چیری غړي BD له A992 فولادی میلی چې .2 in شعاع لری جوړ شوی وي، اعظمی بار P چې کیدی شي په ترس پلي شي پرته له دی چې غړی کړوپ شي ، و ټاکي.

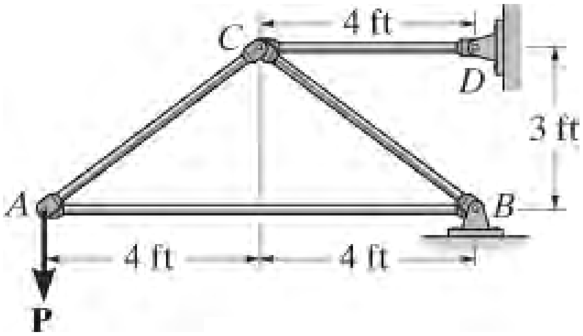
س 13-37 . پوښتنه 13-36 د غړي AB لپاره کوم چې 2 in. شعاع لرى حل کړي.



س 13-36/37

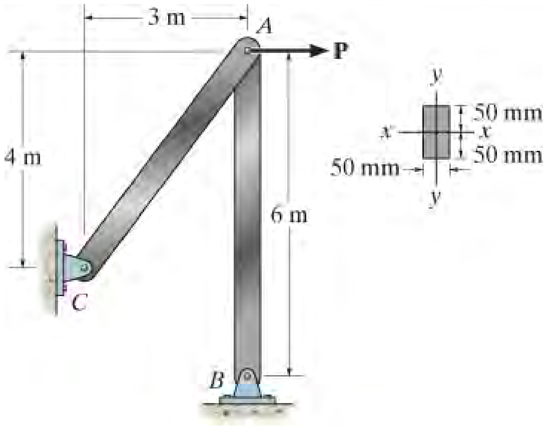
س 13-38 . دا لاندى ټرس له A992 فولادی میلوخخه چې هره یوه يي ګردى غوښه برخه او 1.5 in. قطر لري جوړه شوي ده. اعظمی بار P چې کیدی شي پلي شي پرته له دی چې کوم غړی کړوپ شي، وټاکي. ټول غړي په پايلوکی په پين تړل شوی.

س 13-39 . دا لاندى ټرس له A992 فولادی میلو چې هرغړی ګردی غوښه برخه لري جوړه شوي ده. که بار $P = 10$ kip پلي شي، قطر AB غړی نيړدی 1/8 in. ته داسی وټاکی چې دا غړی له کړوپيدو وژغورل شي. غړي په پايلوکی په پين تړل شوی.



س 13-38/39

س *13-40 . غړی AB د لاندی فريم له فولادو جوړ شوي دی، او په دواړو پايلوکی ، په y-y محور د کړوپيدو لپاره پين شوی دی . که چيری قوه P =18 kN وی د خونديتوب فکتور د کړوپيدو په اړ په y-y محور وټاکی. $E_{st} = 200$ GPa ، $s_Y = 360$ PMa

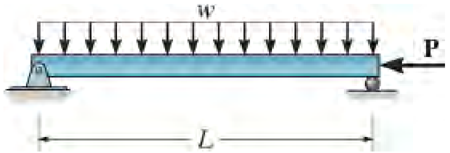


س 13-40

س 13-41 . د لاندی خیالی کالم وزن w (قوه/اوږدوالي) دي، او یوه محوری بار P ورباندی پلی شوي دي. اعظمی مؤمنت د کالم په منځنی برخه کی و ټاکي. EI ثابت دی.

د مرستی لاربښود: د بیځایه کیدنی لپاره ډیفرینشل معادله جوړه کړي، معادله 1-13 . د کالم په منځني برخه کی مبدا (Origin) انتخاب کړي. عمومي حل عبارت دی په:

$$v = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx + (w/(2P))x^2 - (wL/(2P))x - (wEI/P^2) \text{ where } k^2 = P/EI.$$



س 13-41

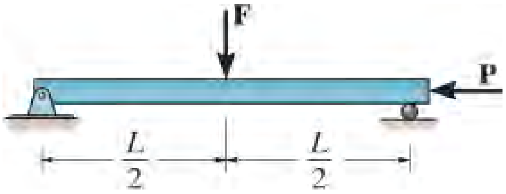
س 13-42 . په لاندی خیالی کالم یوی قوه F په مینځ کی عمل کړي ، او یوه محوری بار P ورباندی پلی شوي دي. اعظمی مؤمنت د کالم په منځنی برخه کی و ټاکي. EI ثابت دی.

د مرستی لاربښود: د بیځایه کیدنی لپاره ډیفرینشل معادله جوړه کړي، معادله .13-1 . مرکز د کالم په منځني برخه کی انتخاب کړي. عمومي حل عبارت دی په

$$v = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx - c^2 x/k^2,$$

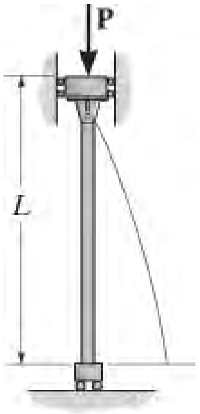
کوم چي

$$c^2 = F/2EI, k^2 = P/EI$$



س 13-42

س 13-43 . د کالم د پایلواتکاؤی لاندی انځور کی ښودل شوي. بحراني بار د کالم لپاره مشخص کړي.



س 13-43

س *13-44 . یو خیالی کالم چی په انځور 13-10c کی ښودل شوي په پام کی ونیسي، دواړه پایلی يي کلکی تړل شوی. وښيي چی د کالم بحرانی بار $P_{cr} = 4\pi^2 EI/L^2$ دي.

د مرستی لارښود: د کالم د سر برخي دعمودی بيځایه کیدنی له امله به یو ثا بت مؤمنت `M په اتکاؤ کی منځ ته راشی. وښيي چی

حل يي دا لاندی شکل لري $$d^2v/dx^2 + (P/EI)v = M'/EI$$

$$v = C_1 \sin\left(\sqrt{P/EI}\,x\right) + C_2 \cos\left(\sqrt{P/EI}\,x\right) + M'/P$$

س 13-45 . يو خيالی کالم کوم چی په انځور، 13-10d ، کی ښودل شوي په پام کی ونيسي، يو سر يي کلک تړل شوی او بل سر يې په پين تړل شوی. وښيي چی د کالم بحرانی بار

$P_{cr} = 20.19\ \ EI/L^2$ دي.

د مرستی لارښود: د کالم د سر برخي دعمودی بيځايه کيدنی له امله يو ثا بت مؤمنت **M`** به په کلکه اتکاء کی او افقي ريکشن قوه **R`** به په دواړو پايلو کی منځ ته راشي. و ښيي چی

$$d^2v/dx^2 + (P/EI)v = (R'/EI)(L - x)$$

حل يي دا لاندی شکل لري

$$v = C_1 \sin\left(\sqrt{P/EI}\,x\right) + C_2 \cos\left(\sqrt{P/EI}\,x\right) + (R'/P)(L - x)$$

وروسته له دی چی سرحدی شرايط ځای په ځای شي و ښيي چی:

$$\tan\left(\sqrt{P/EI}\,L\right) = \sqrt{P/EI}\,L$$

.

په عددی توګه د هغه کوچني حل لپاره چی صفر نه وی دا حل کړي.

*13.4 د سيکنټ فورمول (THE SECANT FORMULA)

د Euler فورمول په هغه صورت پلاس راوړل شوی وا چی قوه P ، د کالم د غوڅی برخی د ثقل د مرکز له لارې پلي کيږي او کالم بالکل مستقيم دی. په حقيقت کې دا خورا غير واقعی حالت دی، ځکه چې جوړشوی کالم هيڅکله په بشپړ ډول مستقيم نه دی، او نه هم د قوی پلی کيدلو ځای په ډيره دقيقه توګه معلوم دی . په واقعيت کې، بيا، کالمونه هيڅکله ناڅاپه نه کړوپ کيږي. پرځای يي د بار په پلی کيدو کالم سمدلاسه پيل په کږيدو کوی، که څه هم لږه اندازه وی. په پايلي کی حقيقي معيار د بار د پلی کيدو بايد محدود شي، يا بيځايه کيدنه د کالم کوم اړخ ته، يا په کالم کی اعظمي سټرس د منلو وړ سټريس څخه زياتوالی و نکړي.

د دی لپاره چی اغيزی د هغه بارونو، کوم چی له مرکز ثقل بهريی عمل کړي، مطالعه کړو، موږ به يوه قوه P د کالم له ثقل مرکز څخه د e په واټن کې پلي کړو ، انځور 13-13a . دا قوه د

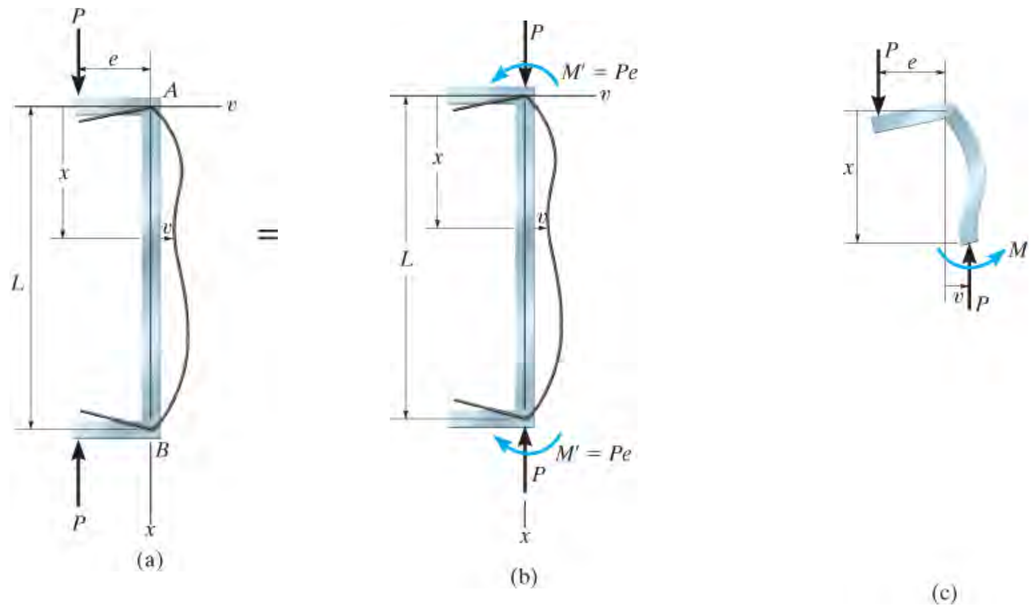
ستاتیک له نظره معادل په محوری قوه P او کږیدونکی مؤمنت $M`=Pe$ کوم چی په انځور-13-13b کې ښودل شوي، دي . په دواړو حالتونو کې، پایلی A او B په دې ډول اتکاوی لري چې دوی څرخیدی شي (پن اتکاء) ، او لکه څنګه چې د مخه مو ویلی وو، مورږ به یې یوازې خطی ایلستیک چلند د موادو په پام کې ونیسو. برسېره پردې، د $x–v$ سطحه د غوڅی برخی متناظره سطحه ده .

د اختیاری برخې آزاد ډیګرام ، انځور 13-13c ، داخلی مؤمنت په کالم کی عبارت دی په:

$$M = -P(e + v) \qquad (13–13)$$

نو بیا د دیفرینشل معادله د بیځایه شوی منحني لپاره کیږي :

$$EI\,\frac{d^2v}{dx^2} = -P\left(e + v\right)$$



انځور 13-13

یا

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{P}{EI}v = -\frac{P}{EI}e$$

دا معادله، معادلی 7-13 ته، ورته ده چی دواړه بشپړونکي او ځانګړي حلونه یکی شامل دی لکه:

$$v = C_1 \sin\sqrt{\frac{P}{EI}}x + C_2 \cos\sqrt{\frac{P}{EI}}x - e \qquad (13\text{–}14)$$

د ثابت اعدادو معلوملو لپاره له سرحدی شرایطو کار اخلو. په $x=0, \upsilon=0$ په دی ډول $C_2 = e$.

او په $x = L, \upsilon=0$ چې ورکوي:

$$C_1 = \frac{e[1 - \cos(\sqrt{P/EI}L)]}{\sin(\sqrt{P/EI}L)}$$

څرنګه چې: $1 - \cos(\sqrt{P/EI}\,L) = 2\sin^2(\sqrt{P/EI}\,L/2)$

او:

$$\sin(\sqrt{P/EI}\,L) = 2\sin(\sqrt{P/EI}\,L/2)\cos(\sqrt{P/EI}\,L/2)$$

نو موږ لرو:

$$C_1 = e\tan\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}\frac{L}{2}\right)$$

په دی توګه د بیځایه کیدنی منحني، معادله 14-13 ، کیږي:

$$v = e\left[\tan\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}\frac{L}{2}\right)\sin\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}x\right) + \cos\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}x\right) - 1\right] \qquad (13\text{–}15)$$

اعظمی بیځایه کیدنه. (Maximum Deflection). د بار د متناظر والي له امله دواړه اعظمی بیځایه کیدنه او اعظمی سټریس په منځني نقطه د کالم کی جوړیږي. له همدی امله په $x = L/2$ کی:

$$v_{max} = e\left[\sec\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}\frac{L}{2}\right) - 1\right] \qquad (13\text{–}16)$$

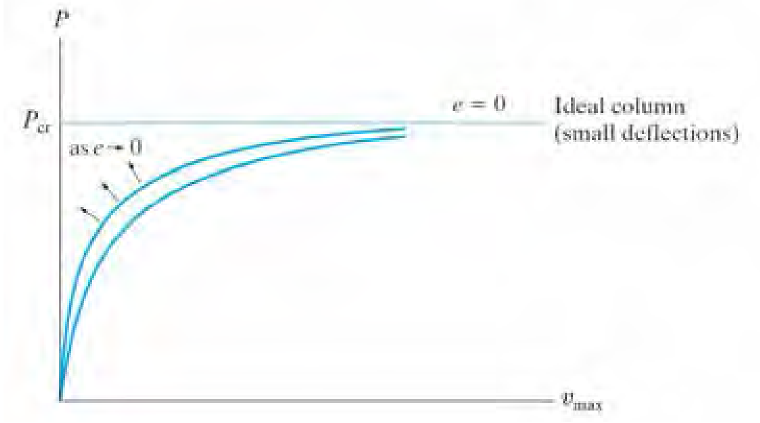
په یاد ولرئ که چیري e صفر ته نږدې شي، نو بیا v_{max} صفر ته نږدې کیږي. په هرصورت، که چیری په قوسونو کې حاصل لایتنهایي ته نږدې کیږی څنګه چې e صفر ته نږدې کیږي، بیا v_{max} به غیر صفری ارزښت ولري. په ریاضیاتي توګه، دا د یو محوری بار شوی کالم چلند، په ناکامی کې استازیتوب کوي کله چې د بحرانی بار، P_{cr} ، سره مخ کیږي. له همدی امله د P_{cr} موندلو لپاره اړین دی:

$$\sec\left(\sqrt{\frac{P_{cr}}{EI}}\frac{L}{2}\right) = \infty$$

$$\sqrt{\frac{P_{cr}}{EI}}\frac{L}{2} = \frac{\pi}{2}$$

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \qquad (13\text{–}17)$$

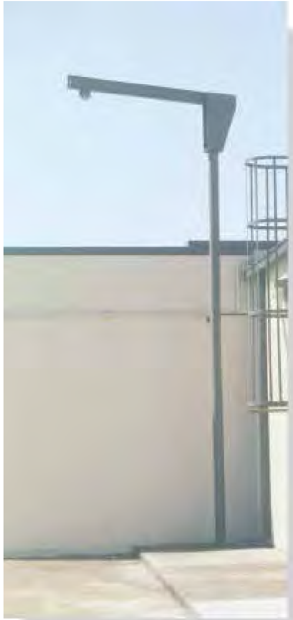
دا ورته پایله ده کوم چی د اویلرفورمول څخه پیدا شوی وه، معادله 13-5 .



انځور 13-14

که معادله 13-16 ، د مختلفو ارزښتونو د مرکز وتلي فاصله e لپاره رسم شی، دا به یو لړي ورته منحني ګاني ولري ، کوم چی په انځور 13-14 کې ښودل شوي. دلته بحرانی بار یو اسمپټود (asymptote) په منحني کيږي چی استازيتوب د غیر واقعیتي قضیي د خیالی کالم کوي ($e = 0$) . دلته رامینځته شوي پایلې یوازې د کوچنی بيځایه کیدنی په اړخ لور لپاره پلي کيږي، او له همدې امله دوی یقینا د اوږده او نازک کالم لپاره پلي کیدی شی.

په یاد ولرئ چې په انځور 13-14 کې منحني یو غیر خطي اړیکه د قوی P او بيځایه کیدنه v سره ښيي. دلته د سوپر پوزیشن (superposition) اصول د کالم ټول انحراف معلومولو لپاره د کار وړ ندی. په بل عبارت، ټول بار په کالم باید پلی شي تر څو انحراف وټاکل شي، نه د بارونو داجزاوود لړۍ له لارې. سربیره پردې، د دې غیر خطي اړیکو له امله، د ډیزاین لپاره د خوندیتوب فکتور باید په بار باندې تطبیق شي نه په سټرس باندی.



هغه کالم چې ددی کرین ملاتړ کوی په غیر معمولي ډول اوږد دی. دا به دمحوری بار او هم کوږیدونکی مؤمنت تابع وی. د دې لپاره چې داډ ترلاسه شي چې دا به کړوپ نشي، باید په بام کې د پین په توګه یوه تکیه ورلری.

د سیکنټ فورمول. (The Secant Formula). اعظمي ستریس دثقل مرکزه وتلی (eccentrically) بار شوي کالم کی، د محوری بار او مؤمنت دواړو له امله رامینځته کیږي، انځور 13-15a وګوري. اعظمي مؤمنت د کالم په منځني برخه کې واقع کیږي ، چی د 13-13 او 13-16معادلوڅخه، دا لاندی اندازه لري:

$$M = |P(e + v_{max})| \qquad M = Pe\sec\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}\frac{L}{2}\right) \qquad (13\text{–}18)$$

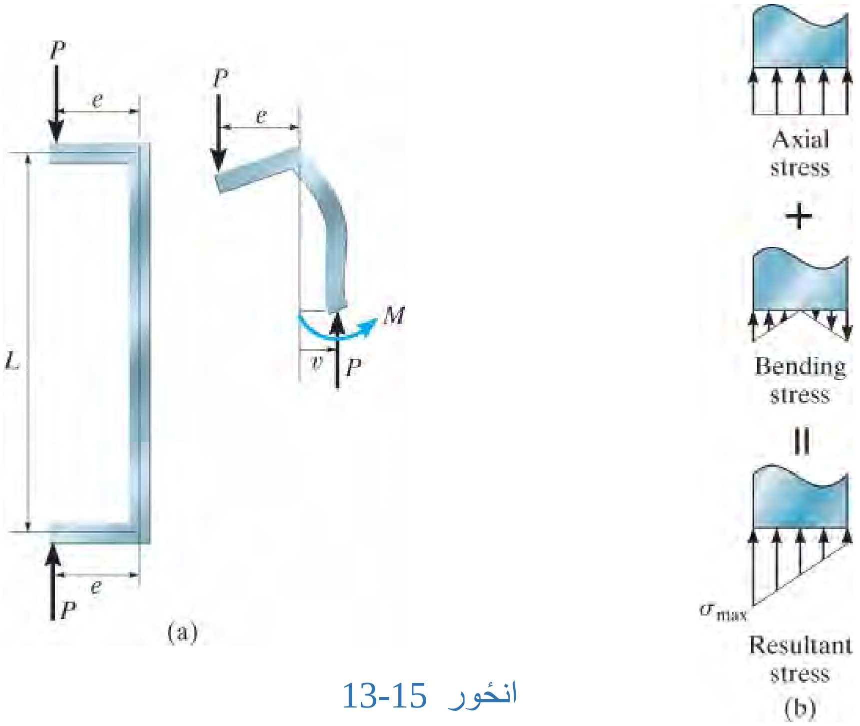
لکه څنګه چې په انځور 13-15b کی ښودل شوي ، اعظمی ستریس په کالم کی عبارت دی په:

$$\sigma_{max} = \frac{P}{A} + \frac{Mc}{I}; \qquad \sigma_{max} = \frac{P}{A} + \frac{Pec}{I}\sec\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}\frac{L}{2}\right)$$

څرنګه چې د جایریشن شعاع (radius of gyration) عبارت ده په:

$r = \sqrt{I/A}$, پورتني معادله کیدی شی چې داسی یي ولیکو کوم چې د ***سیکنټ فورمول***(secant formula) په نامه یادیږي

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{A}\left[1 + \frac{ec}{r^2}\sec\left(\frac{L_e}{2r}\sqrt{\frac{P}{EA}}\right)\right] \qquad (13\text{–}19)$$



انځور 13-15

دلته

$s_{\max}$ = اعظمی ایلیستیکی ستریس په کالم کی ، کوم چی په داخلی کوږ شوی (concave) اړخ د کالم په منځنی برخه کی، واقع کیږي.

P = عمودی بار چی په کالم پلی شوي. $P < P_{cr}$ پرته له دی چی e =0 ، که نه P = P_{cr}(معادله 13-5).

e = له مرکز وتلی فاصله د بار P ، چی د کالم د غوڅی برخی د مرکزی محور څخه تر د پلی بارشوی بار P کرښي پوري اندازه کیږی.

c = فاصله د مرکزی محور تر بهرني فایبر د کالم ، چیری چی اعظمی تیلوهونکي ستریس $s_{\max}$ مینځ ته راځي.

A = د کالم د غوڅي برخي مساحت

L_e = د کالم اوږدوالی د کږیدو په سطحه کی، کوم چی په اوږدو کی تکیه شوي نه دي. پلی کیدل یي محدود دی د هغه غړیو لپاره چی پین اتصال لري، $L_e = L$ ، او یا یو سر یي ازاد او بل سر یی کلک تړل شوي وی، L_e =2L .

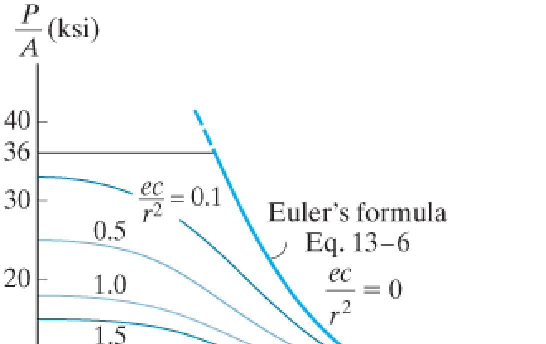
$E =$ د موادو د ایلستیسیتی ماجولس

$r =$ د جایریشن شعاع، $r = \sqrt{I/A}$

دلته I په مرکزي (centroidal) او یا د کږیدو په محور محاسبه شوي دی.

د معادلی 13-19 ګرافونه د مختلف ارزښتونو د *مرکز وتلي فاصلي تناسب لپاره* (*eccentricity ratio*) ec/r^2 ، په انځور 13-16 کی د A-36 ساختماني فولادو لپاره پلات شوي دی. په یاد ولرئ کله چې $e \rightarrow 0$، او یا کله چې $ec/r^2 \rightarrow 0$ ، معادله 13-16 ورکوي s_{max} = P/A ، چیرته چې P د کالم بحراني بار کوم چی د اویلر فارمول لخوا تعریف شوی ، دي. ځکه چی د پایلو نتیجې یوازې د ایلستیکی بار کولو لپاره د اعتبار وړ دي. په انځور کې ښودل شوي ستریسونه نشي کولی له s_Y = 36 ksi څخه زیات شي،او دلته هغه په افقی کرښه ښودل شوی.

د لیدو په واسطه، منحني کرښي ښیي چې د *مرکز وتلی فاصلي په* تناسب کې بدلون د هغه کالمونو چې کوچني د نازکی (slenderness) تناسب لري د بار وړلو ظرفیت باندې د پام وړ اغیزه لري. په هرصورت، هغه کالمونه چې لوی د نازکی تناسب لري، د اویولر بحراني بار کې یا نږدې هغه ته ناکامیږی پرته له دې چې د مرکزنه وتلی فاصلی تناسب ته پام وکړي، ځکه چې دلته دمنحنی د کرښو ټوټې سره یوځای کیږي. له همدې امله، کله چې معادله 13-19 په ډیزاین کی وکارول شي، دا مهمه ده چې د لنډو اوږدو کالمونو لپاره یو څه دقیق ارزښت د *مرکز وتلي فاصلي* ولرئ.



انځور 13-16

ډیزاین (Design). یوځل چې د *مرکز وتلي فاصلي تناسب* مشخص شي، د کالم ډاټا کیدی شي په معادله 13-19 کې ځای په ځای شي. که د $s_{max} = s_Y$ ارزښت په پام کې ونیول شي نو بیا اړونده بار P_Y په عددي توګه ټاکل کیدی شي، ځکه چې معادله غیر معمولي ده او د P_Y لپاره په واضح ډول

نشي حل کیدی. د ډیزاین مرستې په توګه ، د کمپیوټر سافټویر ، یا ګرافونه لکه څنګه چې په انځور 13-16 کې ښودل شوي، کولی شي د P_Y ټاکلو لپاره هم وکارول شي. پوه شئ چې د *وتلي فاصلي* پلی کیدو د P_Y له امله، دا بار به تل د بحرانی بار P_{cr} څخه کوچنی وي، کوم چې فرض کوي (په غیر واقعیت سره) چې کالم په محوري ډول بار شوی دي.

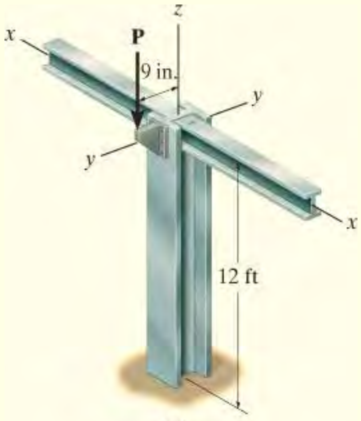
مهم ټکي

IMPORTANT POINTS

- په تولیدکی د نیمګړتیاو له امله، یا په پلي کیدو د ځانګړي بارله کبله، یو کالم هیڅکله په ناڅاپي ډول نه کړوپ کیږي. پرځای یې، کالم څنګه چې بار وربانډی عمل کوي، په کږیدو پیل کوي.
- کوم بار چې په کالم پلي کیږي د هغې له کږیدو سره په غیر خطي طریقه تړاو لري، او په دې توګه د سوپرپوزیشن اصول نشی پلي کیدي.
- لکه څنګه چې د نازکتوب تناسب (slenderness ratio) زیاتیږي، د مرکز *وتلي فاصلی لرونکي* کالمونه د اویولر کړوپیدونکي بارسره او یا هغه ته نږدې ماتیږي.

مثالونه

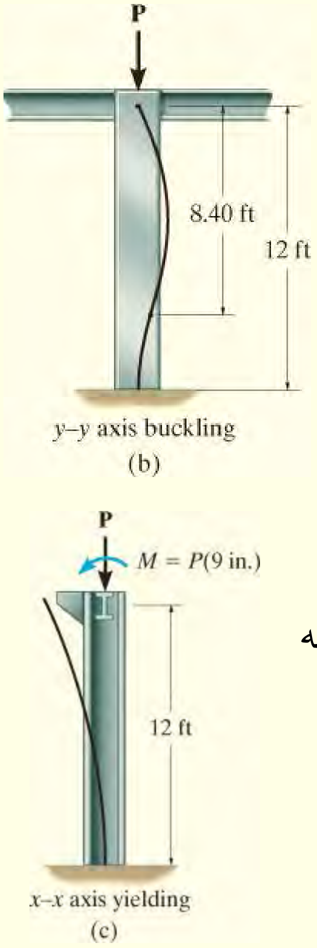
مثال 13.4



(a)

په انځور 13-17a کی ، د A992 فولادو W8 X 40 کالم ښودل شوي، کوم چی کلکه اتکاء په بنسټ کی لری، اوپه سر کی داسی تکیه شوی چی د بیځایه کیدنی لپاره کلک تړل شوي، مګر په y-y محور تاویدی شي. همدا رنګه د سطحی y-z سره په څنګ لور کږیدلی شي. د مرکزنه وتلي اعظمی محوری بار کوم چی کالم یي وړلی شی وټاکی، پخوا لدی چی کالم کړوپ شي او یا د کالم مواد ییلد سټرس ته ورسیږی. له $s_Y = 50$ ksi کار واخلي.

حل (SOLUTION)



انځور 13-17

د اتکاء له شرایطو داسي معلومیږي چې د کالم چلند په دی شان دی کوم چې په سر کی پین شوی او په بنسټ برخه کی کلک تړل شوی ، او یو محوری بار P وربانذی پلی شوي، انځور 13-17b . په محور x-x کالم په سر برخه کی آزاد دی او په بنسټ کی کلک تړل شوی، او محوری بار P او مؤمنت $M = P$ (9 in,) دواړه وربانذی پلی شوي دی، انځور 13-17c .

کږوپیدل په محور y-y . له انځور 13-10d د اوږدوالي مؤثر فکتور Ky = 0.7 ، نو

$(KL)_y = 0.7(12)\text{ft} = 8.40\text{ ft} = 100.8\text{ in.}$. د ضمیمي B څخه د I ارزښت د W8 X 40 برخی لپاره پیدا کوو او بیا له معادله 13-11 ، څخه مونږ لرو:

$$(P_{cr})_y = \frac{\pi^2 EI_y}{(KL)_y^2} = \frac{\pi^2[29(10^3)\text{ ksi}](49.1\text{ in}^4)}{(100.8\text{ in.})^2} = 1383\text{ kip}$$

ییلدینګ په محور x-x (x-x Axis Yielding). له انځور 13-10b ارزښت د $K_x = 2$ نو $(KL)_x = 2(12)\text{ ft} = 24\text{ ft.}$. بیا د ضمیمی B جدول څخه مونږ لرو $A = 11.7\text{ in}^2$ او $r_x = 3.53\text{ in.}$ او $c = 8.25\text{ in.}/2 = 4.125\text{ in}$. د سیکنټ فورمول پلی کوو:

$$\sigma_Y = \frac{P_x}{A}\left[1 + \frac{ec}{r_x^2}\sec\left(\frac{(KL)_x}{2r_x}\sqrt{\frac{P_x}{EA}}\right)\right]$$

$$50\text{ ksi} = \frac{P_x}{11.7\text{ in}^2}\left[1 + \frac{9\text{ in.}(4.125\text{ in.})}{(3.53\text{ in.})^2}\sec\left(\frac{(288\text{ in.})}{2(3.53\text{ in.})}\sqrt{\frac{P_x}{29(10^3)\text{ ksi}(11.7\text{ in}^2)}}\right)\right]$$

$$585 = P_x[1 + 2.979\sec(0.0700\sqrt{P_x})]$$

د P_x حل په تکراری متنوعو هڅو، له خوا تاکل کیدی شي، په یاد ولری چی هغه څه چی په قوس د سیکنټ کی دی، په ریدیان سره دی، او موږ لرو:

$$P_x = 115 \text{ kip} \qquad \textit{Ans.}$$

څرنګه چی دا ارزښت له $(P_{cr})_y = 1383$ kip لږ دی، نو کالم به په x-x محور ونړیږي.

*13.5 غیر ایلستیکی کړوپیدل (INELASTIC BUCKLING)

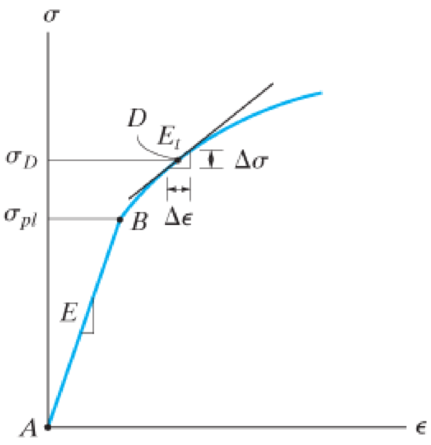
د انجینرۍ په پرکټس کې، کالمونه د ړنګیدو په وخت کې ، په عمومي ډول د رامینځته شویو سټریسونوله مخې طبقه بندي کیږي. ***اوږده نری*** کالمونه کله چې ټیلوهونکی سټریسونه یې ایلستیکی پاتې وی، بې ثباته کیږي. هغه ړنګیدل چې پیښیږي د ***ایلستیک کړوپیدو*** په نوم یادیږي. ***منځمهاله کالمونه*** د غیر ایلستیک کړوپیدو له امله ړنګیږي، پدې معنی چې په ړنګیدو کې ټیلوهونکی سټریسونه د موادو له پروپورشنل یا متناسب حد (proportional limit) څخه ډیر دی . او ***لنډ کالمونه*** چې ځیني وخت ***ستنيي*** یا ***پایي*** (***posts***) هم بلل کیږي، نه بې ثباته کیږي، بلکه مواد په ساده ډول ییلد کوي یا ماتیږي.

د اویلر(Euler) معادلې پلي کول په کالم کې اړتیا لري چې سټرس د موادو د ییلد نقطې څخه لاندې پاتې شئ (په حقیقت کې له متناسب حد څخه) کله چې کالم کړوپ کیږي، نو دا معادله یوازې په اوږده کالم پلي کیدی شی. په عمل کې، په عمومی صورت، ډیری کالمونه منځني اوږدوالی لري. د دې ډول کالمونو چلند مطالعه کولو یوه لاره داده چې د اویلر فورمول تعدیل شي تر څو هغه د غیر ایلستیکی کړوپیدو لپاره و کارول شي.

د دې لپاره چې دا وښیې چې دا څنګه ترسره کیدی شي، مواد چې د سټریس-سټرین ډایګرام یې په انځور 13-18a کې ښودل شوي په پام کې ونیسئ . دلته متناسب حد s_{pl} دی او د ایلستیسټي ماجولس ، یا میلان د کربښې AB ، عبارت دی په E . که چیری د کالم د نازکتوب تناسب له متناسب حد $(KL/r)_{pl}$ څخه کم وي ، نو بیا د ایلر پورمول له مخې بحرانی سټریس په کالم کی به له تناسب حد s_{pl} څخه لوی وي تر څو کالم کړوپ شي.

دا بوم د بار د زياتوالي له امله کړوپه او ړنګه شويی. محلي ماتيدل په انځور کی ووينې.

د مثال په ډول، فرض کړئ که چېرى د نازکتوب حد د يو کالم د $(KL/r)_1 < (KL>r)_{pl}$ وي، اړونده بحرانى سټريس يې $s_D > s_{pl}$، وی، انځور13-18 . کله چې کالم د کړوپيدو په حالت کې وي، د سټريس او سټرين بدلون چې په کالم کې واقع کيږي به په يوه کوچنۍ حد د Ds او De کې وي، نو د ايلستيستی ماجولس يا د موادو سختی په دې حد کې د دوی د ***مماس ماجولس*** $E_t = Ds/De$ (**tangent modulus**) په توګه اخيستل کيدی شي . په بل عبارت، کالم د ړنګيدو په وخت کې، داسي چلند کوي لکه چې د داسي موادو څخه جوړ شوی وی چې ټيټه سختی لري د هغه په پرتله چې په ايلستيکی ډول چلند کوي، $E_t < E$.



(a)

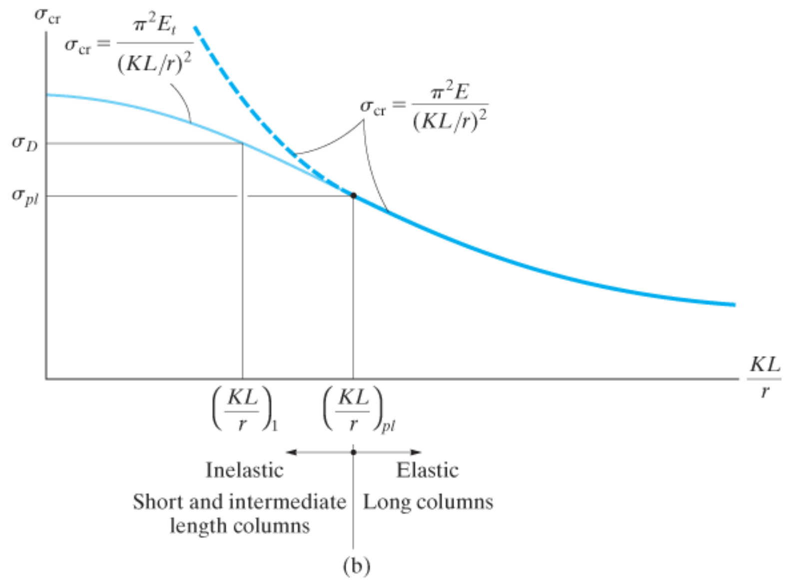
انځور 13-

په عموم ډول، څنګه چې د نريوالی تناسب (KL/r) د کميدوپه لوردوام ولري، د کالم لپاره به بحرانى سټريس د لوړوالی په لوردوام وموميږ؛ او له s - e ډياګرام څخه، د موادو لپاره به د ټنجنټ ماجولس (*tangent modulus*) اندازه کمه شي. د دی مفکورى کارولو لپاره موږ کولی شو د اويولر معادله تعديل کړو ترڅو د غير ايلستيک کړوپيدل دلته شامل کړو، نو د E په ځای به د موادولپاره E_t (*tangent modulus*) وکاروو، نو دا به په لاندی ډول وی

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E_t}{(KL/r)^2} \qquad (13\text{–}20)$$

دا د ټنجنټ ماجولس په نامه یا د ***انگسر معادله*** (***Engesser equation***) یاده شوي . هغه په کال 889 کی د اف انگسر (F. Engesser) له خوا وړاندیز شوی. ددی معادلی پلاټ د منځني او لنډ اوږدوالي کالمونو لپاره کوم چی له داسي موادو جوړ شوي چی سټریس- سترین ډیاګرام $s-e$ یي په انځور 13-18a کی دی په انځور 13-18b ، کی ښودل شوی.

ځنګه چې مخکې وویل شول، هیڅ حقیقي کالم په بشپړ ډول مستقیم نه شي ګڼل کیدی، یا د ا چی په خپل مرکزي محور کی بار شوی وی، لکه ځنګه چې دلته فرض شوی، او له همدې امله دا واقعیا خورا ستونزمنه ده چې یو داسی بیان رامینځته کړو چې هغه به بشپړه توګه د غیر ایلستیک کړوپیدو تحلیل چمتو کړئ. له دې سره سره، د ډیری کالمونو تجربوي ازموینی، چې هر یو یې د خیالی کالم سره نږدې دی، ښودلې چې معادله 13-20 د کالم بحرانی سترس په نسبی دقیقه توګه وړاندوینه کوې. سربیره پردې، د ټنجنټ ماجولس چی د کالم غیر ایلستیک چلند تشریح کوی، نسبتا اسانه تطبیق کیږی. *.



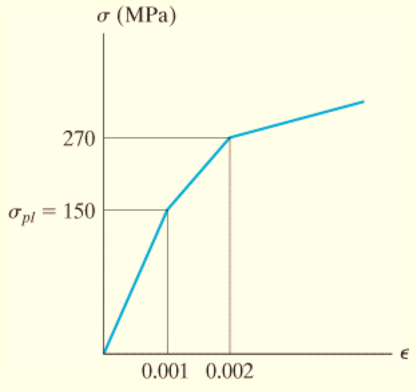
انځور 13-18 (تکرار)

* نوری تیوري ګانی، لکه د شنلي تیوری (Shanley's theory) د کالمونو غیر ایلستیک کړوپیدلو چلند بیانولو لپاره شتون لري. نورتفصیلات په دی اړه د کالم د ثبات اړوند کتابونو کی موندلی شی .

مثال

مثال 13.5

یو ډکه میله 30 mm قطر او 600 mm اوږدوالي لری. دا له داسی موادو جوړه شوی چې د ستړس -سټرین ډایګرام یي په انځور 13-19 کی ښودل شوي. که چیری دا د یوداسي کالم لپاره وکارول شي چی هغه پین ټړندونکي ولری، اعظمی بحرانی باريي وټاکي.



انځور 13-19

حل (SOLUTION)

د جایریشن شعاع یي مساوی دي په

$$r = \sqrt{\frac{I}{A}} = \sqrt{\frac{(\pi/4)(15\text{ mm})^4}{\pi(15\text{ mm})^2}} = 7.5\text{ mm}$$

او له همدی امله د نازکی تناسب یي عبارت دی په

$$\frac{KL}{r} = \frac{1(600\text{ mm})}{7.5\text{ mm}} = 80$$

معادله 13-20 پلی کوو، موږ لرو

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E_t}{(KL/r)^2} = \frac{\pi^2 E_t}{(80)^2} = 1.542(10^{-3})E_t \qquad (1)$$

لمړي به موږ فرض کړو چې بحرانی ستړس ایلستیکی دی . له انځور 13-19 لرو

تطبیق د معادلی 1 کیږي:

$$E = \frac{150\text{ MPa}}{0.001} = 150\text{ GPa}$$

$$\sigma_{cr} = 1.542(10^{-3})[150(10^3)]\text{ MPa} = 231.3\text{ MPa}$$

له دی امله چې $\sigma_{cr} > \sigma_{pl} = 150$ MPa دی ، نا ایلستیکی کړوپیدل واقع کیږي.

له دوهمی برخی د σ - ϵ ډایکرام انځور 13-19 ، موږ کولای شوی چې ټنجانټ ماجولس وټاکو

د معادلی 1 تطبیق راکوي

$$E_t = \frac{\Delta\sigma}{\Delta\epsilon} = \frac{270 \text{ MPa} - 150 \text{ MPa}}{0.002 - 0.001} = 120 \text{ GPa}$$

$$\sigma_{cr} = 1.542(10^{-3})[120(10^3)] \text{ MPa} = 185.1 \text{ MPa}$$

څرنګه چی دا عدد د 150 MPa او 270 MPa په منځ کی دی، نو دا بیا حتمي بحرانی سټرس دی.

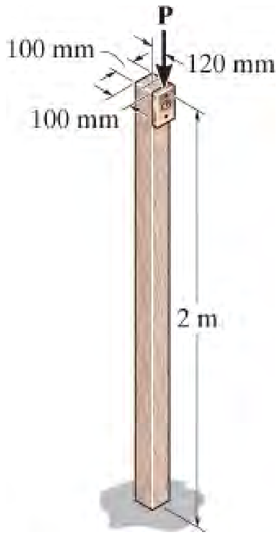
بحرانی بار په میله عبارت دی په:

$$P_{cr} = \sigma_{cr}A = 185.1(10^6) \text{ Pa}[\pi(0.015 \text{ m})^2] = 131 \text{ kN} \qquad \textit{Ans.}$$

سوالونه

PROBLEMS

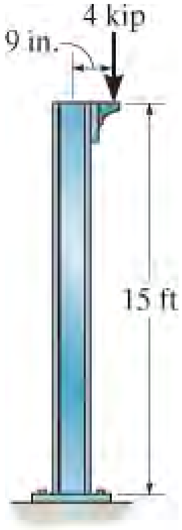
س 13-46. یو د لرګیوکالم په بنسټ کی کلک ټړل شوي او په سر کی آزاد دي. بار P د کالم په څنډه کی پلی شوي، پرته له دی چی کالم د کړوپیدو یا ییلدینګ په واسطه له مینځه لاړ شي، P وټاکي. $E_w = 13\text{GPa}, \sigma_Y = 55 \text{ MPa}$.



س 13-46

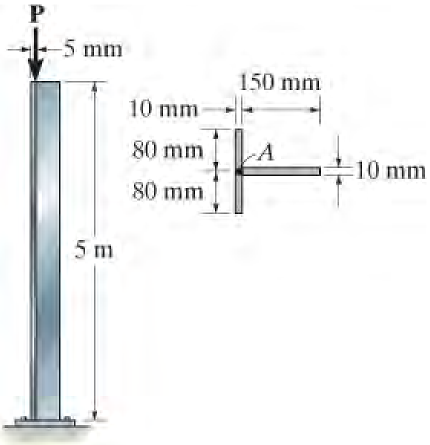
س 13-47. یو W 10 X 12 د ساختمانی فولادو A-36 کالم د 4 kip باره لپاره جوړ شوی دی. که چیری کالم په بنسټ کی کلک ټړل شوی وی، او په سر برخه کی آزاد وی، د خوځیدلو بیځایه کیدنه په سر د کالم کی په اړخ لوری وټاکي.

س **13-48*.** یو W 10 X 12 د ساختمانی فولادو A-36 د 4 kip باره لپاره جوړ شوی دی. که چیری کالم په بنسټ کی کلک تړل شوی وی، او آزاد په سر کی وی، اعظمی سټرس په کالم کی له دی باره معلوم کړي.



س 13-47/48

س **13-49.** یو د المونیم کالم په بنسټ کی کلک تړل شوي او په سر کی آزاد دي. بار P کوم چی کیدی شی په A کی پلی شي، پرته له دی چی کالم د کړوپیدو یا ییلدینګ په واسطه له مینځه لاړ شي، وټاکي. د خوندیتوب فکتور 3 د کړوپیدو او ییلد لپاره وګنی. E_{al} =70GPa, σ_Y = 95 MPa.



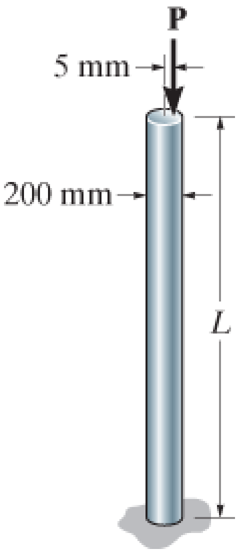
س 13-49

س **13-50.** یو کالم د منځمهاله اوږدوالی کالم کړوپ کیږی کله چی ټیلو هونکی سټریس 40 ksi شي. که چیری د نازکوالی تناسب 60 وي، د ټنجنټ ماجولس وټاکي.

س 13-51. د المونیم میله په بنسټ کی کلکه تړل شوي او په سر کی آزاده ده. له مرکز وتلي بار $P = 200$ kN وربادندی پلی شوي، تر ټولو لوي د منلو وړ اوږدوالي L د میلی داسی وټاکي، پرته له دی چی کالم د کړوپیدو یا ییلدینګ په واسطه له مینځه ولاړ شي.

$$E_{al} = 72\text{GPa},\ s_Y = 410\text{ MPa}$$

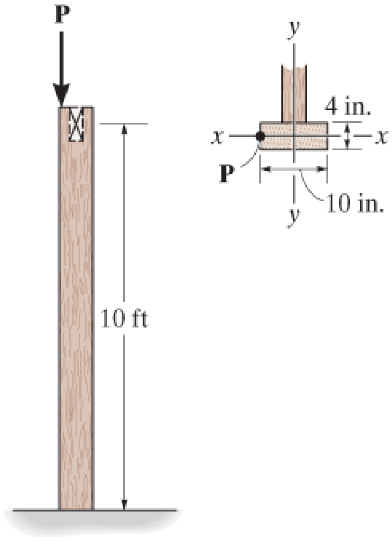
س *13-52. د المونیم میله په بنسټ کی کلکه تړل شوي او په سر کی آزاده ده. که چیری د میلی اوږدوالي $L = 2$m وی، بار P کوم چی کیدی شی په میله پلی شي وټاکي ، پرته له دی چی میله د کړوپیدو یا ییلدینګ په واسطه له مینځه ولاړه شي. همدارنګه د خوځیدلو لوي بیځایه کیدنه د میلی په اړخ لور کی د بار له امله وټاکی. $E_{al} = 72\text{GPa},\ s_Y = 410\text{ MPa}$



س 13-50/51/52

س 13-53. فرض کړی چی د لرګیو کالم په بنسټ او سر برخه کی په پین وصل شوي دی. اعظمی له مرکز وتلی بار P کوم چی کیدی شی په کالم پلی شي وټاکي ، پرته له دی چی کالم د کړوپیدو یا ییلدینګ په واسطه له مینځه ولاړه شي. $E_w = 1.8(10^3)\text{ ksi},\ s_Y = 8\text{ ksi}$

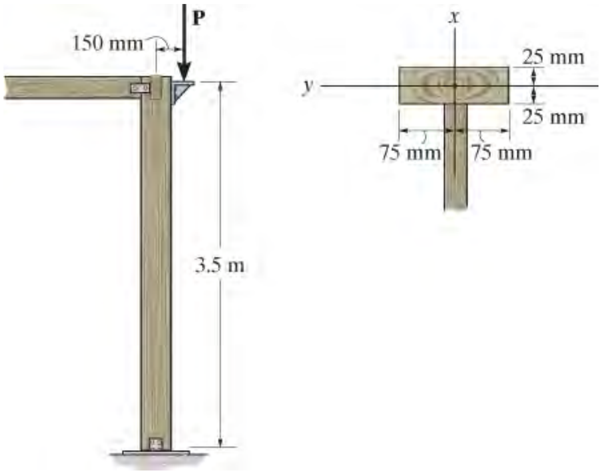
س 13-54. فرض کړی چی د لرګیو کالم په بنسټ او سر برخه کی په پین تړل شوي د x-y محورد خوځیدلو لپاره، او کلک تړل شوی په بنسټ کی او ازاد دی په سر کی د y-y خوځیدو لپاره. اعظمی له مرکز وتلی بار P کوم چی کیدی شی په کالم پلی شي وټاکي ، پرته له دی چی کالم د کړوپیدو یا ییلدینګ په واسطه له مینځه ولاړه شي. $E_w = 1.8(10^3)\text{ ksi},\ s_Y = 8\text{ ksi}$



س 13-53/51

س 13-55. د لرګیو کالم په بنسټ او سر برخه کی په پین تړل شوی. له مرکز وتلي بار P =10 kN وربالندی پلی شوي، څیړنه وکړي چی کالم د دی بار ملا تړ کړی شي که نه، پرته له دی چی کالم د کړوپیدو یا ییلدینګ په واسطه له مینځه ولاړ شي. $E = 10$ GPa, $\sigma_Y = 15$ MPa

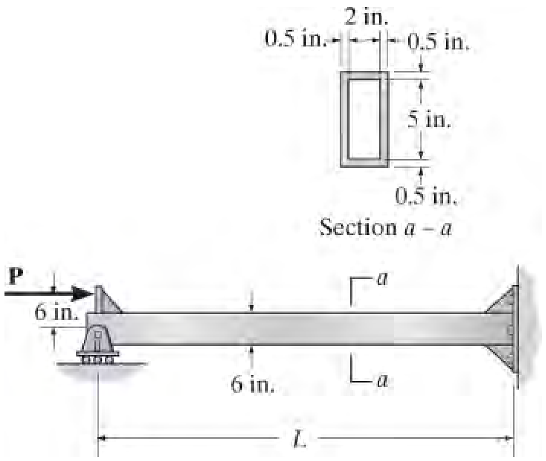
س 13-56*. د لرګیو کالم په بنسټ او سر برخه کی په پین تړل شوی. اعظمی له مرکز وتلی بار P کوم چی کیدی شی په کالم پلی شي وټاکي ، پرته له دی چی کالم د کړوپیدو یا ییلدینګ په واسطه له مینځه ولاړه شي. $E = 10$ GPa, $\sigma_Y = 15$ MPa



س 13-55/56

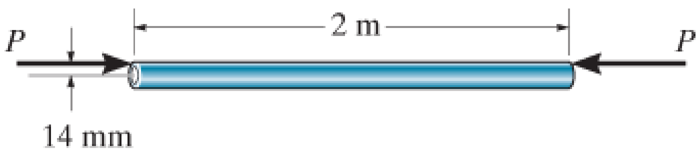
س 13-57. د A992 فولادو خالي کالم چې مستطیلی غوڅه برخه لری په دواړو پایلوکی پین شویدی. که چیری اوږدوالي يي $L = 14$ ft وی، اعظمی له مرکز وتلی بار **P** کوم چې کیدی شی په کالم پلی شي وټاکي ، پرته له دی چی کالم د کړوپیدو یا ییلدینګ په واسطه له مینځه ولاړشي.

س 13-58. د فولادو A992 خالي کالم چې مستطیلی غوڅه برخه لری په دواړو پایلوکی پین شویدی. که چیری له مرکزه وتلي قوه $P = 45$ kip وربانډی پلی شوي وی، تر ټولو لوي د منلو وړ اوږدوالي L د کالم وټاکي، پرته له دی چی کالم د کړوپیدو یا ییلدینګ په واسطه له مینځه لاړ شي.



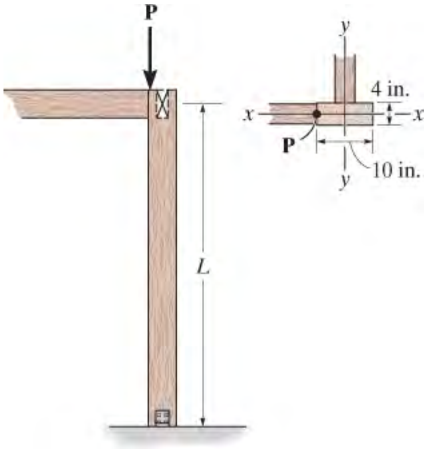
س 13-57/58

س 13-59. دا لاندی ټیوب چی بهرنۍ قطر يي 35 mm او د دیوال پنډوالی يي 7 mm دي له میسو جوړ شوي. اعظمی له مرکز وتلی بار P کوم چی کیدی شی په کالم پلی شي وټاکي ، پرته له دی چی کالم و نړیږي. تیوب په دواړو پایلوکی پین اتصال لري. $E_{cu} = 120$ GPa, $\sigma_Y = 750$ MPa



س 13-59

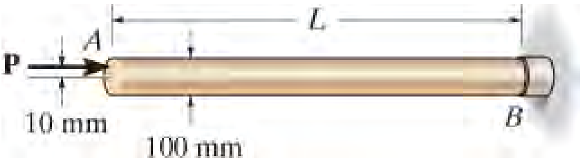
س *13-60. د لرګیو کالم په بنسټ او سر برخه کی په پین وصل شوي دی. که چیری اوږدوالي يي $L = 5$ ft وی، اعظمی له مرکزه وتلی بار P کوم چی کیدی شی په کالم پلی شي وټاکي ، پرته له دی چی کالم د کړوپ شی او یا ییلدینګ وکړي. $E_w = 1.8(10^3)$ ksi, $\sigma_Y = 8$ ksi



س 13-60

س 13-61. د برنجو میله په بنسټ کې کلکه تړل شوي او په سر کې آزاده ده. له مرکزه وتلي بار P =200 kN وربانډې پلی شوي. تر ټولو لوي د منلو وړ اوږدوالي L د میلې داسې وټاکي، تر څو میله کړوپه او یا ییلډ ونه کړي. E_{br} =101GPa, σ_Y = 69 MPa

س 13-62. د برنجو میله په بنسټ کې کلکه تړل شوي او په سر کې آزاده ده. که چیری اوږدوالي یي L = 2 m وی، اعظمی له مرکزه وتلی بار P کوم چې کیدی شی په میله پلی شي وټاکي ، پرته له دی چې میله کړوپه او یا ییلډ وکړي. همدارنګه د خوځیدلو لوي بیځایه کیدنه د میلی په اړخ لور کی د بار له امله وښیی. E_{br} =101GPa, σ_Y = 69 MPa



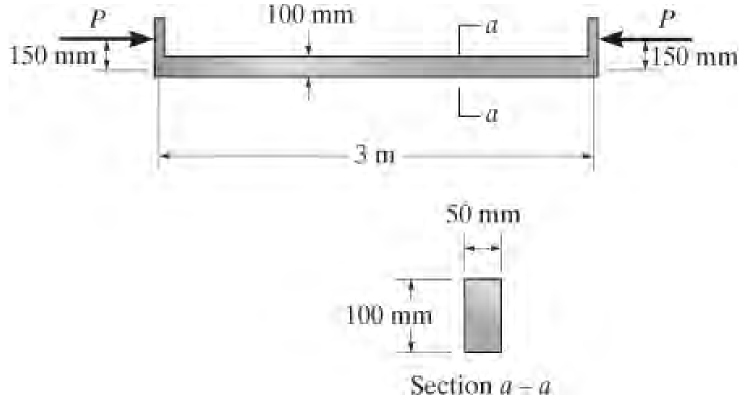
س 13-61/62

س 13-63. یو W 12 X 26 د ساختمانیA992 فولادو کالم په دواړو پایلوکی پین اتصال لري. اوږدوالي يي L = 11.5 ft دي. اعظمی له مرکزه وتلی بار P کوم چې کیدی شی په میله پلی شي وټاکي، پرته له دی چې میله کړوپه او یا ییلډ وکړي. دا ارزښت له محوری بحرانی بار P` کوم چې په مرکز ثقل د کالم کی پلی کیدی شی په پرتله کړي.

س **13-64*.** یو W 14 X 30 د ساختمانی A-36 فولادو کالم په دواړو پایلوکی پین اتصال لري. اوږدوالي يي $L = 10$ ft دي. اعظمی له مرکزه وتلی بار P کوم چي کیدی شي په میله پلی شي وټاکي، پرته له دی چی میله کړوپه او یا ییلد وکړي. دا ارزښت له محوری بحرانی بار P` کوم چی په مرکزد ثقل د کالم کی پلی کیدی شی پرتله کړي.

س 13-63/64

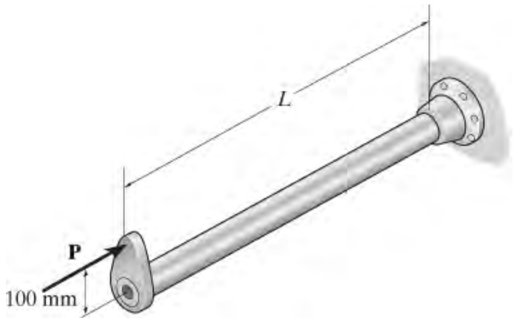
س **13-65.** اعظمی له مرکز وتلی بار P د 2014-T6 المونیم الیاژه جوړه شوی میلی لپاره معلوم کړي. پرته له دی چی میله کړوپه او یا ییلد وکړي. دواړه پایلی د میلی پین اتصال لري.



س 13-65

س **13-66.** د 6061-T6 المونیم الیاژه ډک شفټ په یوه پای کی کلک تړل شوي او په بل پای کی آزاد دي. که د شفټ قطر 100 mm وی ، تر ټولو لوي د منلو وړ اوږدوالي L د شفټ داسی وټاکي، کله چی له مرکز وتلي قوه $P = 80$ kN وربانډی پلی شي.

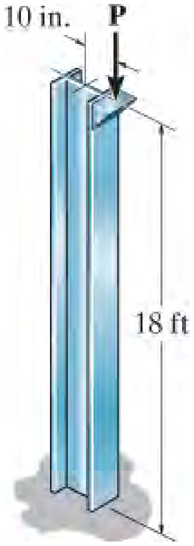
س **13-67.** د 6061-T6 المونيم الياژ جامد شفت په یوه پای کی کلک تړل شوي او په بل پای کی آزاد دي. که چیری د شفټ اوږدوالي $L = 3$ m وي او له مرکزه وتلي قوه $P = 60$ kN وربانډی پلی شي، د هغه لږ تر لږ اړین قطرو ټاکی.



س 13-66/67

س **13-68*.** یو W 14 X 53 د ساختمانی A992 فولادو کالم په بنسټ کی کلک تړل شوی او په سر کی آزاد دی. که چیری $P = 75$ kip وی، د کالم په سر کی داړخ بیځایه کیدنه او اعظمی ستریس په کالم کی و ټاکي.

س **13-69.** یو W 14 X 53 د ساختمانی A992 فولادو کالم په بنسټ کی کلک تړل شوی او په سر کی آزاد دی. اعظمی له مرکزه وتلی بار P کوم چی کیدی شی په کالم پلی شي وټاکي، پرته له دی چی کالم کړوپ او یا ییلد وکړي. $E_{st} = 29(10^3)$ ksi, $\sigma_Y = 50$ ksi

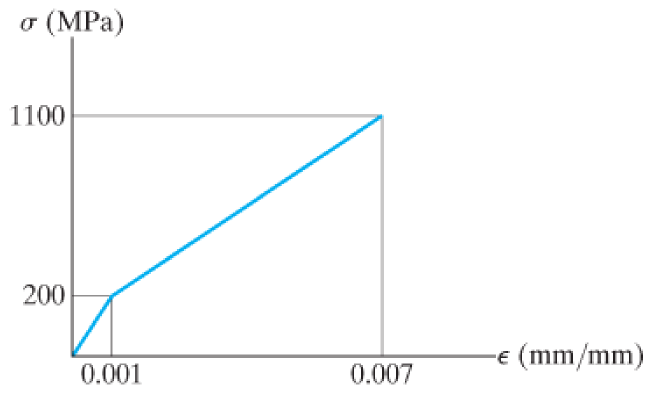


س 13-68/69

س **13-70.** د يو ډول موادو سټريس-سترين ډايګرام په دو کرښنو اټکل شوي دي. که چيرى يو ميله چې 80 mm قطر لري او اوږد والي يي 1.5m دي، له دى موادو جوړ شوي وي. اعظمى بحراني بار معلوم کړي، په داسى حال کى چې ميله په دواړه پايلوکى پين اتصال ولري. فرض کړي چى بار په محورى کرښه د ميلى عمل کړي. د اينګسرمعادله وکاروي.

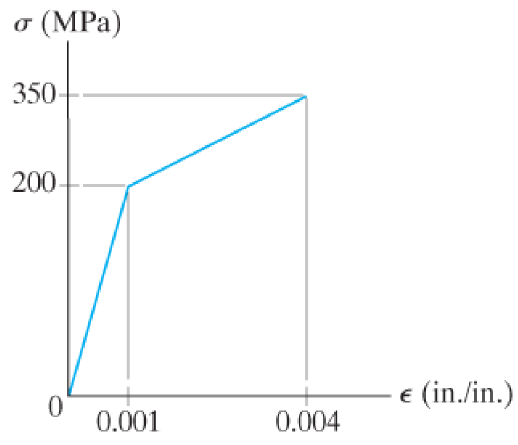
س **13-71.** د يو ډول موادو سټريس-سترين ډايګرام په دو کرښنو اټکل شوي دي. که چيرى يو ميله چې 80 mm قطر لري او اوږد والي يي 1.5 m دي له دى موادو جوړ شوي وي. اعظمى بحراني بار معلوم کړي، په داسى حال کى چې ميله په دواړه پايونو کى کلک اتصال لري. فرض کړي چى بار په محورى کرښه د ميلى عمل کړي. د اينګسر معادله وکاروي.

س **13-72*.** د يو ډول موادو سټريس-سترين ډايګرام په دو کرښنو اټکل شوي دي. که چيرى يو ميله چې 80 mm قطرلري او اوږد والي يي 1.5mدى له دى موادو جوړ شوي وي. اعظمى بحراني بار معلوم کړي، په داسى حال کى چې ميله په يوه پاى کى پين او په بل پاى کى کلک اتصال ولري. فرض کړي چى بار په محورى کرښه د ميلى عمل کړي. د اينګسر معادله وکاروي.



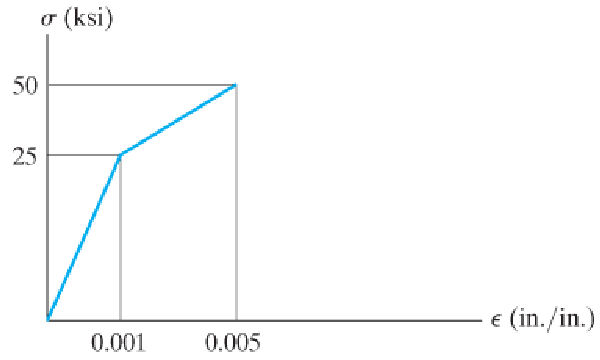
س 13-70/71/72

س **13-73.** د يو کالم د موادو سټريس-سترين ډايګرام په لاندى انځور کى اټکل شوي دي. ددى کالم لپاره P/A په مقابل د *KL/r* کى پلاټ کړي.



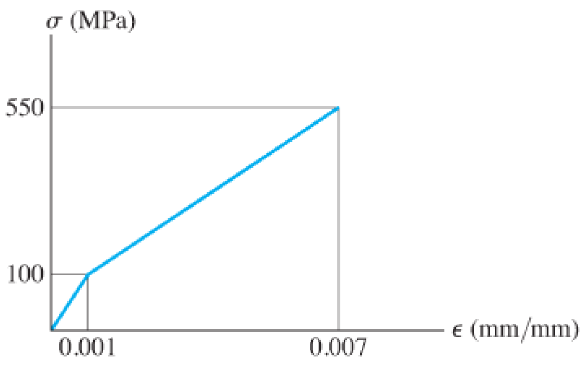
13-73 س

س 13-74. د کږوپيدو منحنی P/A په مقابل د L/r د يو کالم لپاره پلات کړي . کالم په ټيلوهونکي حالت کی دوه اړخيز خطي (bilinear) سټريس -سټرين ډايګرام لکه څنګه چی ښودل شوي لری.



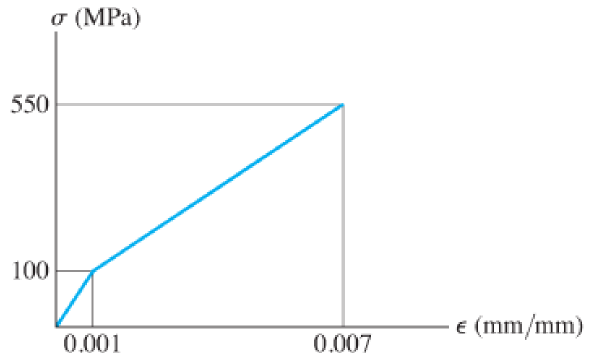
13-74 س

س 13-75. د يو ډول موادو سټريس-سټرين ډايګرام په دو کرښنو اټکل شوي دي. که چيری يو ميله چی 80 mm قطر لري او اوږد والي ي 1.5mدی، لدی موادو جوړ شوي وي. اعظمی بحراني بار معلوم کړي، په داسی حال کی چی ميله په دواړو پايلوکی پين اتصال لري. فرض کړي چی بار په محوری کرښه د ميلی عمل کړي. د اينګسر معادله وکاروي.



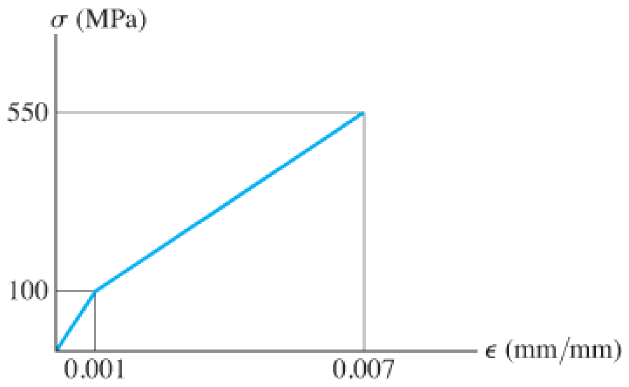
13-75 س

س *13-76. د یو ډول موادو ستریس-سترین ډایګرام په دو کرښنو اتکل شوي دي. که چیری یو میله چی 80 mm قطر لري او اوږد والي یې 1.5m دي، له دی موادو جوړ شوي وي. اعظمی بحراني بار معلوم کړي، په داسی حال کی چی میله په دواړو پایلوکی کلک اتصال لري. فرض کړي چی بار په محوری کرښه د میلی عمل کړي. د اینګسر معادله وکاروي.



س 13-76

س 13-77. د یو ډول موادو ستریس-سترین ډایګرام په دو کرښنو اتکل شوي دي. که چیری یو میله چی 80 mm قطرلري او اوږد والي یې 1.5m دي، له دی موادو جوړ شوي وي. اعظمی بحراني بار معلوم کړي، په داسی حال کی چی میله په یوه پای کی پین او په بل پای کی کلک اتصال ولري. فرض کړي چی بار په محوری کرښه د میلی عمل کړي. د اینګسر معادله وکاروي.



س 13-77

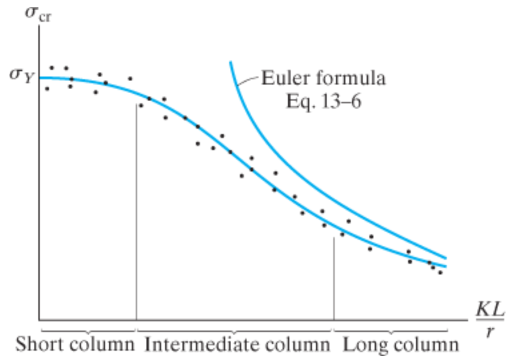
13.6* د کالم ډیزاین د متمرکز بارلپاره (DESIGN OF (COLUMNS FOR CONCENTRIC LOADING)

د لرګیواوږده کالمونه چې په اوږدوالي کې تکیه شوی نه دی، د وداني د بام ملاتړ کوي.

په عملي توګه ویلی شو چې کالمونه په بشپړه توګه مستقیم ندي، او لرې چې په عمده توګه د ډیری یې په دوی کې پاتې شوی سټرسونه غیر یونیفورم سرېدو له امله مینځ ته راځي. همدا رنګه ، د کالمونو اتکاؤی له پوره دقت سره سمون نه لری، او د بارونو پلی کیدلو ټکی او د دوی د جهتونه د مطلق ډاډ ورندي. د دې ټولو اغیزو د جبران کولو لپاره، ډیری ډیزاین کوډونه داسې فورمولونه کاره وی چې له تجروبو په لاس راغلی دی. له تجربو څخه په لاس راغلي ډیټا، کوم چې له لوی شمیر محوری بار شوی کالمونو د ازموینې څخه په لاس راغلی او بیا هغه ډیټا د مناسبو منحنی ګانو په مرسته پلاټ شوي، ددی ارقامو او پلاټونو په مرسته د ډیزاین فارمولونه رامینځته شوي، تر څوله هغوپه ډیزاین کی تری کار واخستل شی.

د سوروری فلنج فولادو کالمونو لپاره د ورته ازموینو مثال په انځور 13-20 کی ښودل شوی. د دې پایلو او یو شمیرمنحنی ګانوپایلو چې له سیکینټ فورمول څخه ټاکل شوي، د دی دواړو ترمنځ ورته والی په پام کې ونیسئ، انځور 16-13. د دې دلیل د مرکزه وتلی تصادفی تناسب ec/r^2 تر اوا له توانايي یا قوت د کالم سره چې لري، دي . ازموینو ښودلي ده چې دا تناسب به د ډیری محوری بار شوي کالمونو لپاره له 0.1 څخه تر 0.6 پورې وي.

د دی لپاره چې په ډیزاین کی د مختلفو اوږدوالی کالمونو چلند په پام کی ونیول شي، ډیزاین کوډونه معمولا داسي فورمولونه وړاندې کوي چې د لنډ ، منځنی، او اوږده کالم ډیټا او معلوماتو سره سمون ولری. پدی لاندې مثالونو کی به ددی فورمولواستعمال په فولادی، المونیم، او لرګیو کالمونو لپاره بحث شي .



انځور 13-20

فولادی ستنیی (Steel Columns). کالمونو چی د ساختماني فولادو جوړ شوي د هغو فارمولوپراساس کوم چی د ساختماني ثبات ځیرني کونسل(SSRC) (Structural Stability Research Council) لخوا وړاندیز شوي ، کیدی شي چی ډیزاین یي تکمیل شي. په دې فورمولونو کې د خوندیتوب فکتورونه پلي شوي، او د امریکا د د فولادو د جوړولو انستیتوت (AISC) (American Institute of Steel Construction) لخوا د ودانیو جوړولو لپاره د مشخصاتو په توګه منل شوي. اساسا دا مشخصات د کالم ډیزاین لپاره دوه فارمولونه چمتو کړئ، چې هر یو یې د منلووړاعظمي سټریس په کالم کې د یو ځانګړي نریتوب تناسب لپاره ورکوي*.

د اوږو کالمونو لپاره د اویلر فورمول وړاندیز شوی، د بیلګې په توګه: $s_{max} = p^2 E/(KL/r)^2$

د دې فورمول پلي کول د خوندیتوب فکتور ته اړتیا لری چی F.S.=23/12≈1.92F.S.=2312≈1.92 دی. په دې توګه، د ډیزاین لپاره،

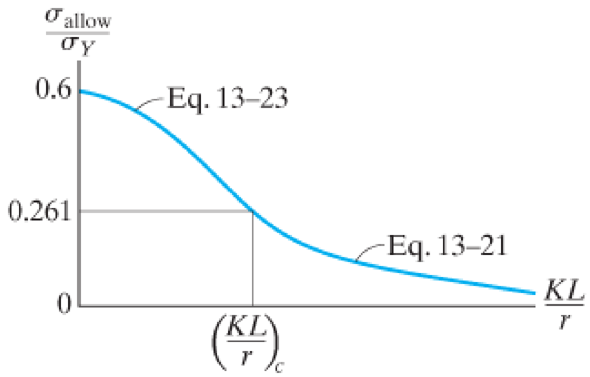
$$\sigma_{allow} = \frac{12\pi^2 E}{23(KL/r)^2} \qquad \left(\frac{KL}{r}\right)_c \le \frac{KL}{r} \le 200 \qquad (13\text{–}21)$$

لکه څنګه چې ویل شوي، دا معادله د نریتوب تناسب لپاره د تطبیق وړ ده، کوم چی د $(KL/r)_c$ ارزښت لوړسرحد یي 200 محسابه شوی. د تجربو له لارې ټاکل شوې چې پاتی شوی ټیلوهونکی سټریسونه په رول شوي فولادي برخو کې ممکن په اندازه د نیمایي د ییلد سټریس شتون ولري. څرنګه چې د اویلر فورمول یوازې د ایلستیک لرونکي موادو چلند لپاره کارول کیدی شي، نو که چیرې په کالم کې اینودل شوي اضافي سټریس له $1/2\sigma_Y$ څخه ډیر وي بیا هغه معادله نشی پری پلیکیدی. له همدې امله د $(KL>r)_c$ ټیټ حد ارزښت په لاندې ډول ټاکل کیږي :

$$\frac{1}{2}\sigma_Y = \frac{\pi^2 E}{(KL/r)_c^2} \qquad \text{or} \qquad \left(\frac{KL}{r}\right)_c = \sqrt{\frac{2\pi^2 E}{\sigma_Y}} \qquad (13\text{–}22)$$

کالمونه چی د نریتوب (slenderness ratio) تناسب یي له $(KL>r)_c$ څخه کوچنی وي له تجربوي حاصل شوی فورمول چی پارابولیک دی کار اخلي چی دا لاندی شکل لري

$$\sigma_{max} = \left[1 - \frac{(KL/r)^2}{2(KL/r)_c^2}\right]\sigma_Y$$



انځور 21-13

ځکه چی کارول ددی فورمول د اوږدو کالمونو لپاره ډيری نيمګړتياوی لري ، نودا په يو خونديتوب فکتور تقسيم شوي او په دی ډول دا فکټورتعريف شوي

$$\text{F.S.} = \frac{5}{3} + \frac{3}{8}\frac{(KL/r)}{(KL/r)_c} - \frac{(KL/r)^3}{8(KL/r)_c^3}$$

دلته ليدل کيږي چی F.S.=5/3≈1.67 د $KL/r=0$ او دا زياتوالي مومي په F.S.=23/12≈1.92 $(KL/r)_c$ کی. له همدی امله د ډيزاين موخو لپاره

$$\sigma_{allow} = \frac{\left[1 - \dfrac{(KL/r)^2}{2(KL/r)_c^2}\right]\sigma_Y}{(5/3) + [(3/8)(KL/r)/(KL/r)_c] - [(KL/r)^3/8(KL/r)_c^3]} \qquad (13\text{–}23)$$

د پرتله کولو لپاره 21-13 او 23-13 معادلي په انځور 21-13 کی پلاټ شوي

* د AISC اوسنی کوډ انجنيرانو ته دا توان ورکوي چې د ډيزاين لپاره له دوو طريقو:

د بار او مقاومت فکتور ډيزاين يعنی (Load and Resistance Factor Design)

د منلو وړ ستريس ډيزاين . څخه يو و کارولي

يا Allowable Stress Designشو.

المونيم ستنيی (Aluminum Columns).

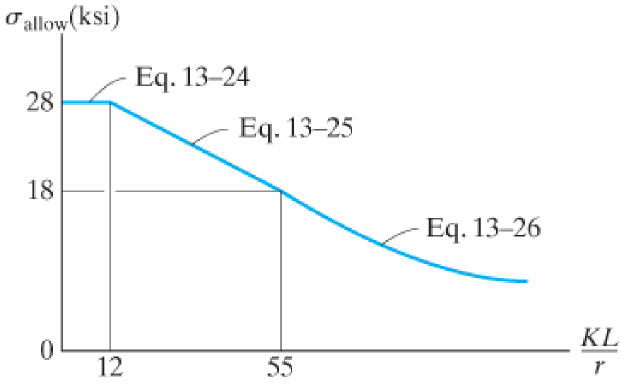
د ساختماني المونيم لپاره د کالم ډيزاين د دريو معادلو په کارولو سره، چی د المونيم اتحاديي لخوا مشخص شوی،هر يود يو سلسله ځانګړي نريتوب تناسب لپاره د تطبيق وړدي. څرنګه چي څو ډوله د المونيم الياژ شتون لري، د هر ډول لپاره ځانګړی فورمولونه شته. د يوه عام المونيم الياژ (2014-T6) لپاره د ودانيو په جوړولو کې، لاندی فورمولونه کارول کيږي:

$$\sigma_{allow} = 28 \text{ ksi} \quad 0 \leq \frac{KL}{r} \leq 12 \tag{13–24}$$

$$\sigma_{allow} = \left[30.7 - 0.23\left(\frac{KL}{r}\right)\right] \text{ ksi} \quad 12 < \frac{KL}{r} < 55 \tag{13–25}$$

$$\sigma_{allow} = \frac{54\,000 \text{ ksi}}{(KL/r)^2} \quad 55 \leq \frac{KL}{r} \tag{13–26}$$

دا معادلی په انځور 22-13 کی ترتيب شوي دي. لکه څنګه چی ښودل شوي ، لمړي دوی د مستقيمو کرښو استازيتوب کوي چی د لنډ او منځنی حد کالمونو داغيزو ماډل کولو لپاره کارول کيږي. دريم فورمول د ايلر فورمول ورته بڼه لري او د اوږدو کالمونو لپاره کارول کيږي .



انځور 22-13

لرګيو ستنيی (Timber Columns).

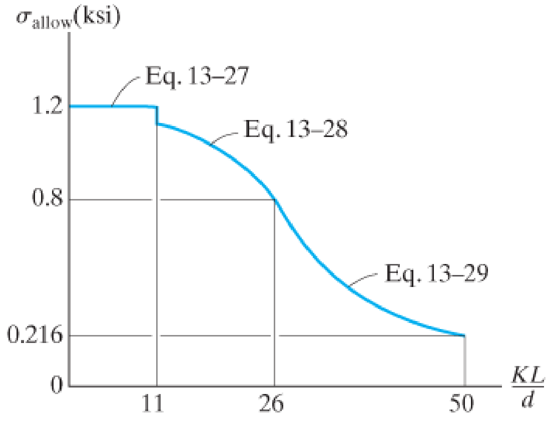
ستنيی چی د لرګيو ودانيو په جوړولو کې کارول کيږي، اکثرا هغه فورمولونه چی د ملي ځنګل محصولاتو (National Forest Products Association) (NFPA) له خوا او يا د لرګيو جوړوني امريکايی انستيتيوت (American Institute of Timber Construction) (AITC) لخوا خپاره شوي په ډيزاين کی کارول کيږي. د مثال په توګه، د منلو وړ ستريس لپاره د NFPA فورمول د لنډ، منځنی او اوږدوستنيو چې مستطيلی غوڅه برخه لري او ابعاد يی b او d دی، چيرته چې $b < d$ ، ده په لاندی ډول دی:

$$\sigma_{allow} = 1.20 \text{ ksi} \qquad 0 \le \frac{KL}{d} \le 11 \qquad (13\text{–}27)$$

$$\sigma_{allow} = 1.20\left[1 - \frac{1}{3}\left(\frac{KL/d}{26.0}\right)^2\right] \text{ksi} \qquad 11 < \frac{KL}{d} \le 26 \qquad (13\text{–}28)$$

$$\sigma_{allow} = \frac{540 \text{ ksi}}{(KL/d)^2} \qquad 26 < \frac{KL}{d} \le 50 \qquad (13\text{–}29)$$

دلته داسې انګیرل کیږي چې د لرګي د ایلستیستي ماجولس $E_w = 1.8\ (10^3)$ ksi او د منلو وړ تیلوهونکی ستریس یي 1.2 ksi د دانې (grain) سره موازی دي. په ځانګړې توګه، معادله 13-29 د اویلر فورمول ورته بڼه لري، د خوندیتوب فکتور 3 لري. دا درې معادلې په انځور 13-23 کې رسم شوي .

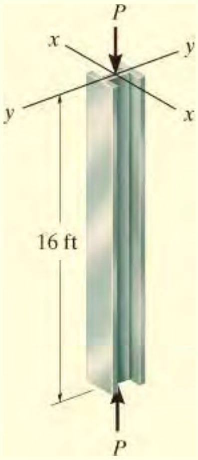


انځور 13-23

مثالونه

مثال 13.6

د A992 فولادو یو W10 x 100 غړی د پین اتکأ شوي کالم په توګه کارول کيږي، انځور-13 .24 د AISC کالم ډیزاین فارمولونو په کارولو سره، ترټولو لوی بار، کوم چی کالم يي په خوندي بڼه ملاتړ کړئ شي، وټاکئ.



انځور 13-24

حل (SOLUTION)

له هغه جدول چی په ضمیمه B کی شته دا لاندی ډیټا د برخی W10 X 100 په لاس راغلی:

$$A = 29.4\ \text{in}^2 \quad r_x = 4.60\ \text{in.} \quad r_y = 2.65\ \text{in.}$$

څرنګه چی $K = 1$ د دواړو x او y محورونو کړوپیدو لپاره دی، د نریتړب تناسب زیات دی که چیری r_y و کارول شي. په دی توګه لیکلي شو:

$$\frac{KL}{r} = \frac{1(16\ \text{ft})(12\ \text{in./ft})}{2.65\ \text{in.}} = 72.45$$

له معادلی 13-22 موږ لرو:

$$\left(\frac{KL}{r}\right)_c = \sqrt{\frac{2\pi^2 E}{\sigma_Y}} = \sqrt{\frac{2\pi^2[29(10^3)\ \text{ksi}]}{50\ \text{ksi}}} = 107$$

دلته $0<KL/r<(KL/r)c$ دی ، نو بیا معادله 13-23 تطبیق کیږي.

$$\sigma_{allow} = \frac{\left[1 - \frac{(KL/r)^2}{2(KL/r)_c^2}\right]\sigma_Y}{(5/3) + [(3/8)(KL/r)/(KL/r)_c] - [(KL/r)^3/8(KL/r_c)^3]}$$

$$= \frac{[1 - (72.45)^2/2(107)^2]\ 50\ \text{ksi}}{(5/3) + [(3/8)(72.45/107)] - [(72.45)^3/8(107)^3]}$$

$$= 23.93\ \text{ksi}$$

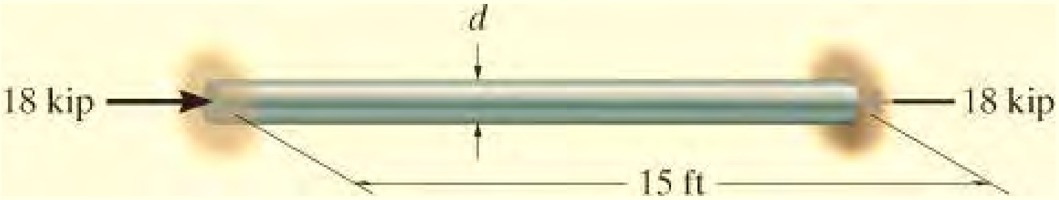
له همدی امله د منلو وړ بار په ستنیی عبارت دی په:

$$\sigma_{allow} = \frac{P}{A}; \qquad 23.93\ \text{kip/in}^2 = \frac{P}{29.4\ \text{in}^2}$$

$$P = 704\ \text{kip}$$ *Ans.*

مثال 13.7

په دی لاندی انځور 13-25 کی ښودل شوي فولادی میله د یو محوری بار 18 kip لپاره کارول شوي ده. که چیری $E_{st} = 29(10^3)$ ksi او s_y =50 ksi وی تر ټولو کوچنۍ قطر د میلی کوم چی د AISC له مشخصاتو سره برابر وی وټاکي. میله په دواړو پایلوکی کلکه تړل شوي ده.



انځور 13-25

حل (SOLUTION)

د ګردی غوڅی برخی لپاره د جایریشن شعاع (radius of gyration) عبارت دی په :

$$r = \sqrt{\frac{I}{A}} = \sqrt{\frac{(1/4)\pi(d/2)^4}{(1/4)\pi d^2}} = \frac{d}{4}$$

معادله 13-22 پلی کوو او موږ لرو

$$\left(\frac{KL}{r}\right)_c = \sqrt{\frac{2\pi^2 E}{\sigma_Y}} = \sqrt{\frac{2\pi^2[29(10^3)\text{ ksi}]}{50\text{ ksi}}} = 107.0$$

څرنګه چې د جایریشن شعاع نامعلوم دی ، نو KL/r نامعلوم دی ، نو له همدی امله یو انتخاب وشي چې آیا معادله 13-21 او یا دا چې معادله 13-23 تطبیق شي. موږ به معادله 13-21 په پام کی ونیسو. د کلک تړل شوی کالم لپاره K =0.5 نو بیا

$$\sigma_{\text{allow}} = \frac{12\pi^2 E}{23(KL/r)^2}$$

$$\frac{18\text{ kip}}{(1/4)\pi d^2} = \frac{12\pi^2[29(10^3)\text{ kip/in}^2]}{23[0.5(15\text{ ft})(12\text{ in./ft})/(d/4)]^2}$$

$$\frac{22.92}{d^2} = 1.152d^2$$

$$d = 2.11\text{ in.}$$

کار واخلی له

$$d = 2.25\text{ in.} = 2\tfrac{1}{4}\text{ in.} \qquad \textit{Ans.}$$

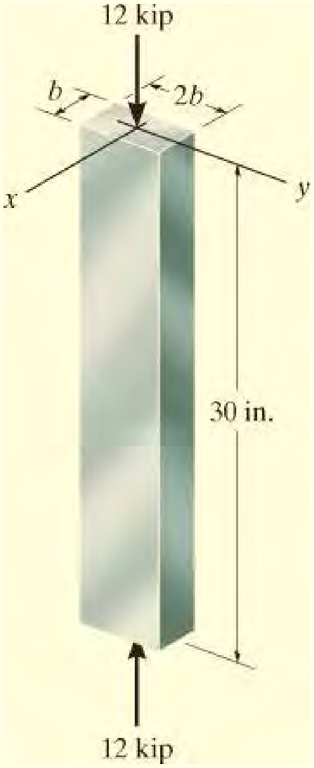
ددی ډیزاین لپاره موږ باید د نریتوب نسبت (slenderness-ratio) حدود معلوم کړو،

$$\frac{KL}{r} = \frac{0.5(15\text{ ft})(12\text{ in./ft})}{(2.25\text{ in.}/4)} = 160$$

څرنګه چې 200 < 160 < 107.0 دی، نومعادله 13-21 مناسب ده.

مثال 13.8

یوه میله 30 in. اوږدوالۍ لري او د یوه محوری تیلوهونکی بار 12 kip لپاره کارول شوي . دا میله له المونیم 2014-T6 څخه جوړه ، او په دواړو پایلو کی په پین تړل شوی ده. د غوښتی برخی ابعاد يي وټاکي، کله چې سور یی دوه برابره د پندوالی وي.



انځور 26-13

حل (SOLUTION)

څرنګه چې $KL = 30$ in. د دواړو x او y محورونو کړوپیدلو لپاره یو شان دی، دنریتوب لوی تناسب په واسطه چې د کوچنی د جایریشن شعاع په کارولو یعنی د $I_{min} = I_y$ منځ ته راځی.

$$\frac{KL}{r_y} = \frac{KL}{\sqrt{I_y/A}} = \frac{1(30)}{\sqrt{(1/12)2b(b^3)/[2b(b)]}} = \frac{103.9}{b} \qquad (1)$$

دلته موږ باید معادلي 13-24, 13-25 او یا 13-26 و کاروو. څرنګه چې موږ تر اوسه د جایریشن قیمت نه پیژنو، موږ به معادله 13-24 و کاروو.

$$\frac{P}{A} = 28 \text{ ksi}$$

$$\frac{12 \text{ kip}}{2b(b)} = 28 \text{ kip/in}^2$$

$$b = 0.463 \text{ in.}$$

د نری ضخامت تناسب چک کوو ، او موږ لرو

$$\frac{KL}{r} = \frac{103.9}{0.463} = 224.5 > 12$$

له معادلی 13-26 کار اخلو، دا د اعتبار وړ ده د $KL/r \geq 55$ لپاره

$$\frac{P}{A} = \frac{54\,000 \text{ ksi}}{(KL/r)^2}$$

$$\frac{12}{2b(b)} = \frac{54\,000}{(103.9/b)^2}$$

$$b = 1.05 \text{ in.} \qquad \textit{Ans.}$$

له معادلی 1 لیکلی شو

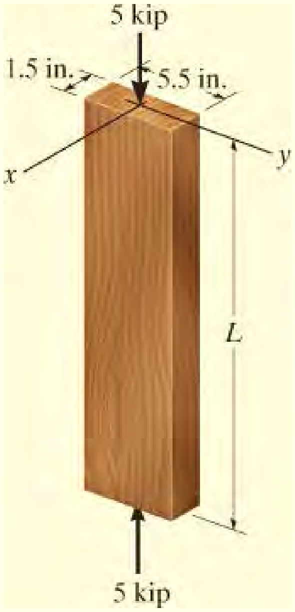
$$\frac{KL}{r} = \frac{103.9}{1.05} = 99.3 > 55 \quad \text{OK}$$

یادونه:

له $b \approx 1$ in څخه دا به د قناعت وړ وي چې دغوڅې برخې ابعاد 1 in. په 2 in. انتخاب کړو.

مثال 13.9

په انځور27-13 کې یوه تخته چې د غوڅې برخې ابعاد يي 5.5 in. په 1.5 in. دی د یو محوری بار 5 kip لپاره کارول شوي ده. که فرض شی چې دا تخته په دواړو پایونو کې پین اتکاوی لري، تر ټولو لوی د منلو وړ اوږدوالي L چې د NFPA مشخصاتو سره مطابقت وکړي، وټاکی.



انځور 27-13

حل (SOLUTION)

په لیدو ، دا تخته په y محور کړوپیدل لري. په NFPA معادلو کی d =1.5 in. فرض کوو چې معادله 29-13 دلته مطابقت کوی، موږ لرو

$$\frac{P}{A} = \frac{540\text{ ksi}}{(KL/d)^2}$$

$$\frac{5\text{ kip}}{(5.5\text{ in.})(1.5\text{ in.})} = \frac{540\text{ ksi}}{(1\,L/1.5\text{ in.})^2}$$

$$L = 44.8\text{ in.} \qquad \textit{Ans.}$$

دلته

$$\frac{KL}{d} = \frac{1(44.8\text{ in.})}{1.5\text{ in.}} = 29.8$$

څرنګه چې $26 < KL/d \leq 50$ دی، دا حل د قبول وړ دي.

سوالونه

PROBLEMS

س 13-78. ترټولو لوي اوږدوالی د ساختماني W10 X 12 برخی، A992 فولادو مشخص کړئ، که چیری د پین په واسط اتکاء شوی وي، او یو محوری ټیلوهونکی بار 28 kip وربانده پلی شوي وی. د AISC معادلو نه کارواخلی.

س 13-79. له ضمیمی B تر ټولو سپکه سورروره فلنج A992 فولادی کالم ، کوم چې 14 ft اوږد او یو محوری بار د 40 kip وربانده پلی شوي، مشخض کړی. د AISC له معادلو کار واخلی. د کالم پایلونه کلک تړل شوي دي.

س *13-80. له ضمیمی B څخه تر ټولو سپکه سورروره فلنج A992 فولادی کالم ، کوم چې 14 ft اوږد او یو محوری بار د 40 kip وربانده پلی شوي، مشخص کړی. د AISC له معادلو کار واخلی. د کالم پایلی په پین تړل شوي دي.

س 13-81. ترټولو لوي اوږدوالی د ساختماني W8 X 31 فولادو A992 برخی ، که چیری د پین اتکاوی ولري، او یو محوری بار 130 kip وربانده پلی شوي وی، مشخص کړئ. د AISC معادلو څخه کار واخلی.

س 13-82. له ضمیمی B څخه تر ټولو سپکه سورروره فلنج A992 فولادی کالم ، کوم چې 12 ft اوږد او یو محوری بار د 20 kip وربانده پلی شوي، مشخص کړی. د AISC له معادلو کار واخلی. د کالم پایلی په پین سره تړل شوي دي.

س 13-83. ترټولو اوږد اوږدوالي د ساختماني W10 X 12 فولادو A992 برخه ، که چیری په اتکاوو کی کلک تړل شوی وي، او یو محوری بار 28 kip وربانده پلی شوي وی، معلوم کړي. د AISC له معادلوکارواخلي.

س *13-84. له ضمیمی B څخه تر ټولو سپکه سورروره فلنج A992 فولادی کالم ، کوم چی 30 ft اوږد او یو محوری بار د 200 kip ورباندی پلی شوي، مشخص کړی. د AISC له معادلو کار واخلی. د کالم پایلی کلکی تړل شوي دي.

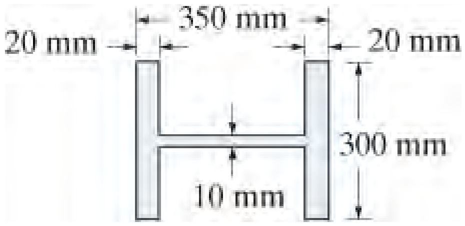
س 13-85. ترټولو لوي اوږدوالی د ساختماني W8 X 31 فولادو A992 برخی ، که چیری د پین په واسط اتکاوی ولري، او یو محوری بار 18 kip وربادی پلی شوي وی، مشخص کړئ. د AISC له معادلو کار واخلی.

س 13-86. له ضمیمی B څخه تر ټولو سپکه سورروره فلنج A992 فولادی کالم ، کوم چی 12 ft اوږد او یو محوری بار د 40 kip وربادی پلی شوي، مشخص کړی. د AISC له معادلو کار واخلی. د کالم پایلی کلک تړل شوي دي.

س 13-87. یو 5-ft اوږد میله د یو ماشین لپاره کارول شوي ده، تر څو یو محوری ټیلوهونکی بار د 3 kip ولیږدوي. که چیری له المونیم 2014-T6 څخه جوړه او په پایلوکی په پین سره وصل شوی وی، تر ټولو کوچني قطر یې و ټاکئ.

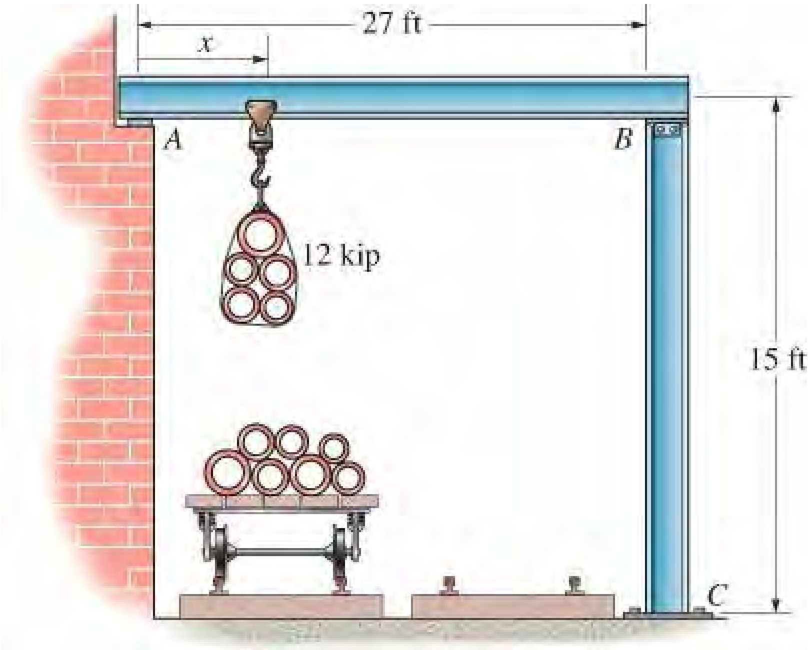
س *13-88. ترټولو لوي اوږدوالی ، د ساختماني W8 X 31 فولادو A992 برخی ، که چیری د پین په واسط اتکاوی ولري، او یو محوری بار 10 kip وربادی پلی شوي وی، مشخص کړئ. د AISC له معادلو کارواخلي.

س 13-89. د AISC معادلو په کارولو سره وګورئ که یو کالم چی غوڅه برخه یي په لاندی انځور کی ښودل شوي ، کولای شي د یو محوری قوی 1500 kN ملا تړ وکړي. کالم 4 m اوږدوالي لري او له A992 فولادو څخه جوړ دي. د کالم پایلی په پین تړل شوي دي.



س 13-89

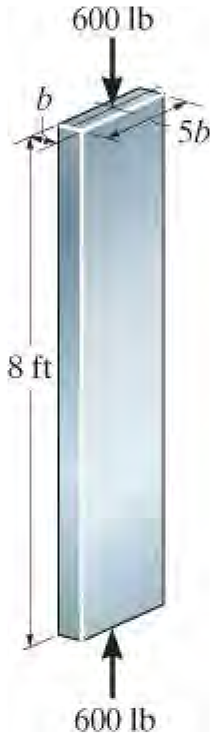
س 13-90. د اورګاډی پټلۍ په انګړ کې د موټرد بارولو او تخلیه کولو لپاره د بیم او کالم یو ترتیب لاندی ښودل شوي. که چیری اعظمی د پورته کولوبار 12 kip اټکل شوي وي، وښیی چې د فولادو A-36 کالم لپاره یوه سوروره فلنج W8 X 31 دا کار کولی شی؟ بار کشیدونکئ (Hoist) د فلنج بیم په ټیټه برخه په اوږدو کی ، 1 ft ≤ *x* ≤ 25 ft ، حرکت کوي، چې د ټکی بار غوندی دی او د تماس اندازه یي د حساب وړ نده. فرض کړی چې بیم د کالم سره په B کی او په دیوال په A کی په پین تړل شوي شوی ده. همدا رنګه کالم په C کی پین اتکاء لري. کالم د داسی تړل شوی چې د بار د سطحی د وتلو دکړوپیدو مخنوی یی وشی.



س 13-90

س 13-91. یوه میله له المونیم 2014-T6 الیاژ څخه جوړه شوي ده. که چیری سور(width) یی 5b وی تر ټولو کوچنی پندوالی b یی و ټاکی. فرض کړی چې میله په پایلوکی پین شوي ده.

س *13-92. یوه میله له المونیم 2014-T6 الیاژ څخه جوړه شوي ده. که چیری سور(width) یی 5b وی تر ټولو کوچنی پندوالی b یی و ټاکی. فرض کړی چې میله په پایلوکی کلکه تړل شوي ده.



س 13-91/92

س 13-93. یو میله چی .1-in قطر لري د محوری بار 5 kip لپاره کارول کیږي. که چیری دا له المونیم 2014-T6 څخه جوړه شوی وي، د منلو وړ اعظمي اوږدوالی L يي و ټاکی. فرض کړی چی پایلی يي پین شوی دي.

س 13-94. یو میله چی .1-in قطر لري د محوری بار 5 kip لپاره کارول کیږي. که چیری دا له المونیم 2014-T6 څخه جوړه شوی وي، د منلو وړ اعظمي اوږدوالی L يي و ټاکی. فرض کړی چی د میلی پایلی کلکی تړل شوی دي

س 13-93/94

س 13-95. دا لاندی ټیوب له المونیم الیاژ 2014-T6 څخه جوړ ، پندوالی يي .0.5 in او په دواړو پایلوکی کلک تړل شوي دی. د منلو وړ اعظمی محوری بار چی ملا تړ یی کولای شي و ټاکي.

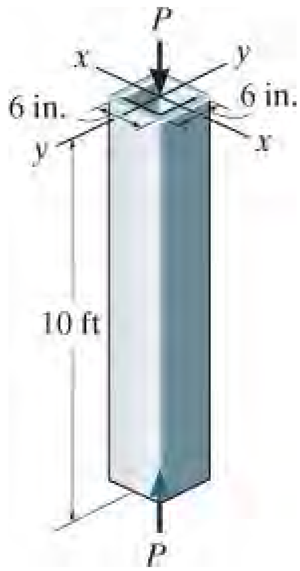
س *13-96. دا لاندی ټیوب له المونیم الیاژ 2014-T6 څخه جوړ ، پندوالی يي .0.5 in او په ښکته پای کی کلک تړل شوي او په پورته پای کی پین شوی دی. د منلو وړ اعظمی محوري بار چی ملا تړ یی کولای شي و ټاکي.

س 13-95/96

س 13-97. دا لاندی ټیوب له المونیم الیاژ 2014-T6 څخه جوړ ، پندوالی يي 0.25 in. ، په ښکته پای کی کلک تړل شوي او په پورته پای کی پین شوی دی. د منلو وړ اعظمی محوري بار چی ملا تړ یی کولای شي و ټاکي.

س 13-98. دا لاندی ټیوب له المونیم الیاژ 2014-T6 څخه جوړ ، پندوالی يي 0.25 in. ، په پایلوکی کلک تړل شوي دی. د منلو وړ اعظمی محوري بار چی ملا تړ یی کولای شي و ټاکي.

س 13-99. دا لاندی ټیوب له المونیم الیاژ 2014-T6 څخه جوړ ، پندوالی يي 0.25 in. ، په پایلوکی پین شوی دی. د منلو وړ اعظمی محوري بار چی ملا تړ یی کولای شي و ټاکي.

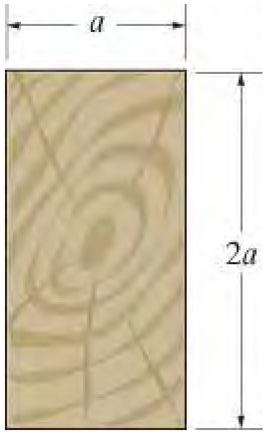


س 13-97/98/99

س *13-100. د لرګیو کالم چی مستطیلي غوڅه برخه لري لاندی ښودل شوي دي. که چیری کالم 6-ft. اوږدوالي ولري او یو محوری بار P =15 kip ورباندی پلی شوي وي، تر ټولو کوچنی د منلو وړ د غوڅی برخی اندازه a تر 1/16 in. نیږدی والی و ټاکي، تر څو کالم په خوندي توګه د بار ملاتړ وکړي. کالم په دواړو پایلوکی پین شوی دی.

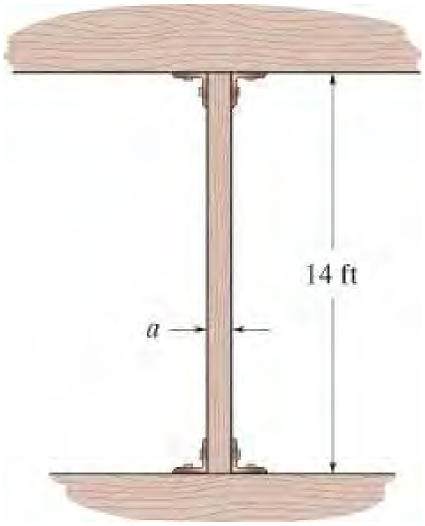
س 13-101. د لرګیو کالم چې مستطیلي غوڅه برخه لري لاندې ښودل شوي دي. که چیرې اندازه د a =3 in. او د کالم اوږدوالي 12-ft وي د منلو وړمحورې بار P چې کالم يي په خوندي توګه ملاتړ وکړي و ټاکي . کالم په ښکته پای کې کلک تړل شوي او په پورته پای کې پن شوی دی.

س 13-102. د لرګیو کالم چې مستطیلي غوڅه برخه لري لاندې ښودل شوي دي. که چیرې اندازه د a =3 in. او يو محورې بار P =15 kip وربانډې پلی شوي وي، د منلو وړ اعظمی اوږدوالی يي و ټاکي، تر څو کالم په خوندي توګه د بار ملاتړ وکړي. کالم په ښکته پای کې کلک تړل شوي او په پورته پای کې پن شوی دی.



س 13-100/101/102

س 13-103. د لرګیو کالم مربع غوڅه برخه لري، او داسی انګیرل کيږي چې کالم په ښکته او پورته پایلوکی پین شوي دي. که چیرې يو بار د 50 kip وربانډې پلی شوي وي ، تر ټولو کوچنی د منلو وړ د غوڅې برخې د اړخ اندازه a تر 1/2 in. نیږدې والی و ټاکي. د NFPA له فورمولونو کار واخلي.

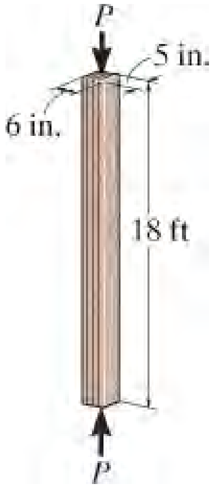


س 13-103

س *13-104. یوه میله له المونیم 2014-T6 الیاژ څخه جوړه شوي ده. که چیری سوريي 1.5b وی، کوچنی پنډوالی b یی و ټاکی. فرض کړی چی میله په پایلوکی کلکه تړل شوي شوي ده.

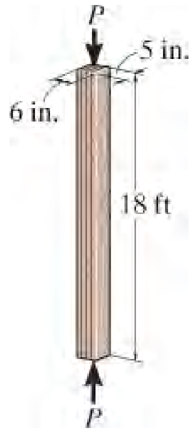
س 13-104

س 13-105. د لرګیو کالم .18-ft اوږدوالي لري او په پایلوکی په پین تړل شوي دی. اعظمی محوری بار P چی کالم يي ملا تړ کولا شی، د NFPA فورمولونو په کارول سره، وټاکي.



س 13-105

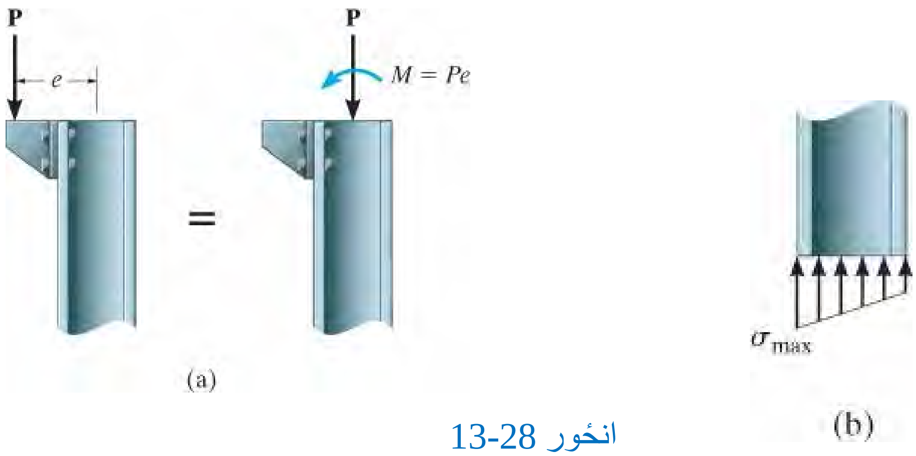
س 13-106. د لرګیو کالم .18-ft اوږدوالي لري او په پایلوکی کلک تړل شوي دی. اعظمی محوری بار P چی کالم يي ملا تړ کولا شی، د NFPA فورمولونو په کارول سره، وټاکي.



س 13-106

13.7* کالم ډیزاین د نا متمرکز بارونو لپاره (DESIGN OF COLUMNS FOR ECCENTRIC LOADING)

کله چې یو کالم د بار ملاتړ کولو لپاره اړین وي، او دا بار کيدی شی چی په څنډه د کالم او یا د زاويي براکټ یا کوربل (corbel) کوم چی د کالم په ژی و صل دی ، انځور 13-28A ، عمل وکړي. پداسی حالت کی کږیدونکي مؤمنت $M = Pe$،کوم چی د مرکزه وتلي بار له امله رامینځته کيږي ، باید د کالم په ډیزاین کی په پام کی و نیول شي اوحساب شي. ددی لپاره څو د منلو وړ لارې شتون لری، کوم چي دا د انجینری په عملي کارونو کی تطبیق يي ترسره کیږي. دلته به موږ د دوو خورا عامو طریقوپه اړه بحث وکړو.



انځور 13-28

کارول د هغه کالم فورمولونو چې شتون لري (Use of Available Column Formulas).

د کالم په غوڅې برخې باندې د ستریس ویش په انځور 13-28b کې ښودل شوي. دا د دواړو محوري قوې P او کږیدونکې مؤمنت $M = Pe$ د سپرپوزیشن پایله ده. له همدې امله اعظمي تیلوهونکي ستریس عبارت دی په

$$\sigma_{max} = \frac{P}{A} + \frac{Mc}{I} \qquad (13\text{–}30)$$

که موږ په محافظوی توګه فرض کړو چې ټوله غوڅه برخه باندې یو شان ستری s_{max} پلې شوی، بیا موږ کولی شو s_{max} د منلو وړ ستریس s_{allow} سره پرتله کړو، کوم چې د ورکړل شوي فورمولونو په کارولو سره په برخه 13.6 کې ټاکل شوی. سربیره پردې محافظه کاري،

د s_{allow} محاسبه *ترټولو لوی د نریتوب تناسب* په کارولو سره د کالم لپاره ترسره کیږي ، پرته له چې د هغه محورچې کوږوالي په پام کې ونیول شي . نو بیا که چیری

$$\sigma_{max} \leq \sigma_{allow}$$

وي، کالم به د دې بار پلې کیدو ملاتړ وکړي. که دا پورته نابرابري (inequality) موجوده نه وی، بیا د کالم ساحه A باید زیاته شي، او یو نوی s_{max} او s_{allow} باید محاسبه شي. د ډیزاین دا طریقه د پلي کولو لپاره خورا ساده ده او د هغو کالمونو لپاره ښه کار کوي کوم چې لنډ یا منځني اوږدوالی لري.

د تعامل فورمول (Interaction Formula) . موږ کولی شو یو چې له مرکز وتلی بار شوی کالم داسې ډیزاین کړو چې به څه ډول محوری بار او کږیدونکی بار یو د بل سره تعامل کوی ترڅو د دوی د اغیزو ترمنځ توازن ترلاسه شي. د دې کولو لپاره، موږ باید د کالم په ټوله ساحه کې په جلا جلا توګه د محوری قوی او مؤمنت اغیزی په پام کې ونیسو. که د محوري بار لپاره د منلو وړ ستریس $(s_a)_{allow}$ وي ، نو بیا د کالم لپاره ساحه د P پلی کیدو لپاره اړینه ده

$$A_a = \frac{P}{(\sigma_a)_{allow}}$$

په ورته ډول که د منلو وړ کږیدونکی ستریس $(s_b)_{allow}$ وي، نو بیا $I = Ar^2$ ، د کالم اړین ساحه د مرکز وتلي بار لپاره له کږیدونکی فورمول څخه موندل کیږي، او هغه دی

$$A_b = \frac{Mc}{(\sigma_b)_{\text{allow}}\, r^2}$$

د کالم ټوله اړین ساحه ، د محوری بار او مؤمنت دواړو لپاره عبارت ده په

$$A_a + A_b = \frac{P}{(\sigma_a)_{\text{allow}}} + \frac{Mc}{(\sigma_b)_{\text{allow}}\, r^2} \le A$$

یا

$$\frac{P/A}{(\sigma_a)_{\text{allow}}} + \frac{Mc/Ar^2}{(\sigma_b)_{\text{allow}}} \le 1$$

$$\frac{\sigma_a}{(\sigma_a)_{\text{allow}}} + \frac{\sigma_b}{(\sigma_b)_{\text{allow}}} \le 1 \qquad (13\text{–}31)$$

دلته:

s_a = محوری ستریس کوم چې قوه P جوړ کړي دی، کیدی شی چې له $s_a = P/A$ و موندل شي. A د کالم مساحت ده.

s_b = کږیدونکی ستریس د مرکز وتلی بار له امله ، او یا پلی شوی مؤمنت. دا ستریس له $s_b = Mc/I$ څخه پیدا کیږي، دلته I د عوڅی برخی انرشیایي مؤمنت په کږیدونکي محور یا مرکزی محور (centroidal axis) دی.

$(s_a)_{allow}$ = د منلو وړ ستریس کوم چې د برخی 13.6 فورمول په واسطه موندل شوي ، او یا د ډیزاین کود مشخصاتو ورکړي. له دی امله تل د کالم لپاره تر ټولو لوی د نریتوب نسبت و کاروئ، پرته له دی چې په کوم محور د کالم کږیدل مینځ ته راغلي.

$(s_b)_{allow}$ = د منلو وړ کږیدونکي ستریس چې د کود مشخاصاتو تعین کړي.

معادله 13-31 د هر سټريس تناسب ، د محوري بار او يا کږيدونکی مؤمنت ونډه په ګوته کوي. ځکه چې دا معادله ښيې چې دا بارونه څنګه تعامل کړي ، کله کله دا معادله د تعامل فورمول (***interaction formula***) په نوم يادېږي. دا ډيزاين طريقه د انتخاب – او - خطا (trial-and-error) طرزالعمل ته اړتيا لري، چيرته چې دا اړينه ده چې ډيزاينر يو موجود کالم غوره کړي او بيا وګورئ چې ايا نابرابري (inequality) (معادله 13-31) مطابقت کړي که نه . که دا نه وي، يوه لويه برخه د کالم بيا غوره شی او پروسه تکرار کيږی. يو اقتصادي انتخاب هغه وخت ترسره کيږي کله چې کيڼ اړخ نږدې 1 ته وی خو تر يوه کم وي.

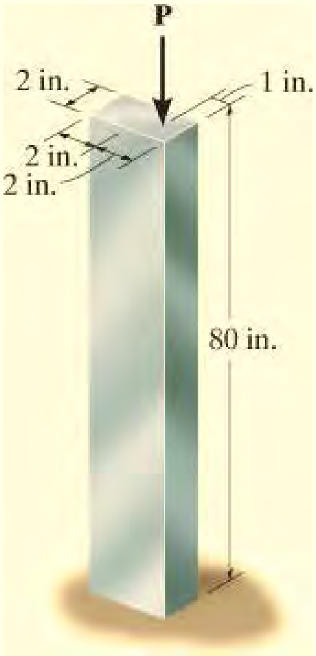
د يوه کالم عادی مثال چی له مرکز وتلی بار، د بام لپاره کارول شوي.

د تعامل طريقه اکثرا د ډيزاين لپاره په کوډونو کې د فولادو، المونيم يا لرګي څخه جوړ کالمونو لپاره مشخص شوی . په ځانګړې توګه، د منلو وړ د سټريس ډيزاين، د امريکا د فولادو جوړوني انسټيټيوټ (American Institute of Steel Construction) د دې معادلې کارول يوازې هغه وخت مشخص کوي چې د محوری سټريس تناسب $\sigma_a/(\sigma_a)_{allow} \leq 0.15$ وي. د دې تناسب د نورو ارزښتونو لپاره، بدل شوی بڼه د معادلې 13-31 کارول کيږي .

مثالونه

مثال 13.10

په انځور 13-29 کی ښودل شوي کالم له المونيم الياژ څخه جوړ شوی ، او يو له مرکزه وتلي بار وربانْدی پلی شوي دی. اعظمی د منلو وړ بار P چې په دی کالم پلی کيدی شي وټاکی. کالم په تهداب کی کلک تړل شوی او پورته برخه کی پين شوی دی. له معادلی 13-30 څخه کاروا‌خلی.



انځور 13-29

حل (SOLUTION)

له انځور 13-10b پیدا کوو. $K=2$ ، د نازکوالي لوی تناسب د کالم لپاره عبارت دی په

$$\frac{KL}{r} = \frac{2(80 \text{ in.})}{\sqrt{[(1/12)(4 \text{ in.})(2 \text{ in.})^3][(2 \text{ in.})\ 4 \text{ in.}]}} = 277.1$$

په لیدوسره، معادله 13-26 کارول کیږی ($55 < 277.1$) . په دی توګه:

$$\sigma_{allow} = \frac{54\,000 \text{ ksi}}{(KL/r)^2} = \frac{54\,000 \text{ ksi}}{(277.1)^2} = 0.7031 \text{ ksi}$$

اعظمی تیلوهونکي ستریس په کالم کی د محوری بار او کړیدونکی مؤمنت له یوځایکیدو پیدا کیږي. موږ لرو:

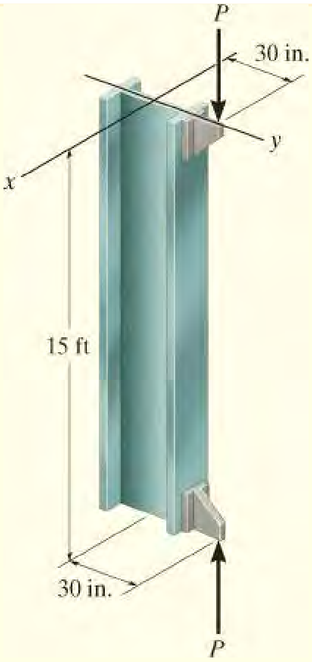
$$\begin{aligned}\sigma_{max} &= \frac{P}{A} + \frac{(Pe)c}{I} \\ &= \frac{P}{2 \text{ in.}(4 \text{ in.})} + \frac{P(1 \text{ in.})(2 \text{ in.})}{(1/12)(2 \text{ in.})(4 \text{ in.})^3} \\ &= 0.3125P\end{aligned}$$

فرض کوو چی دا ستریس په غوڅه برخه د کالم یو شان ویشل شوی دی، او اړینه ده چی:

$$\sigma_{allow} = \sigma_{max}; \qquad 0.7031 = 0.3125P$$

$$P = 2.25 \text{ kip} \qquad \textit{Ans.}$$

مثال 13.11



انځور 13-30

یو د A-36 فولادی W6 X 20 برخی کالم په انځور 13-30 کی ښودل شوي. کالم په دواړو پایلوکی په پین وصل شوی او یو له مرکز وتلی بار P وربااندی پلي شوي. اعظمی د منلو وړ ارزښت د P ، په کارولو د تعامل طریقي، که چیری د منلو وړ کږیدونکی ستریس $(\sigma_b)_{allow} = 22$ kis وی، و ټاکئ.

(SOLUTION) حل

دلته K =1 . د هندسی اړین خاصیتونه د W6 X 20 لپاره د ضمیمی B له جدول څخه لرو:

$$A = 5.87 \text{ in}^2 \quad I_x = 41.4 \text{ in}^4 \quad r_y = 1.50 \text{ in.} \quad d = 6.20 \text{ in.}$$

موږ به دلته r_y وکاروو، ځکه دا به د نریتوب لوی تناسب راکړي. همدا رنګه I_x اړین دی ځکه کږیدل په x محور (c = 6.20 in/2 = 3.10 in.) . د ټیلوهونکی منلو وړ ستریس پیدا کولو لپاره موږ لرو:

$$\frac{KL}{r} = \frac{1[15 \text{ ft}(12 \text{ in./ft})]}{1.50 \text{ in.}} = 120$$

ځکه چی

$$\left(\frac{KL}{r}\right)_c = \sqrt{\frac{2\pi^2 E}{\sigma_Y}} = \sqrt{\frac{2\pi^2 [29(10^3) \text{ ksi}]}{36 \text{ ksi}}} = 126.1$$

نو بیا $KL/r < (KL/r)c$ او له معادله 13-23 باید کارواخستل شی.

$$\sigma_{allow} = \frac{[1 - (KL/r)^2/2(KL/r)_c^2]\sigma_Y}{(5/3) + [(3/8)(KL/r)/(KL/r)_c] - [(KL/r)^3/8(KL/r)_c^3]}$$

$$= \frac{[1 - (120)^2/2(126.1)^2]\ 36\text{ ksi}}{(5/3) + [(3/8)(120)/(126.1)] - [(120)^3/8(126.1)^3]}$$

$$= 10.28\text{ ksi}$$

د معادلی 13-31 تطبیق دا لاندی حاصل راکوي

$$\frac{\sigma_a}{(\sigma_a)_{allow}} + \frac{\sigma_b}{(\sigma_b)_{allow}} \leq 1$$

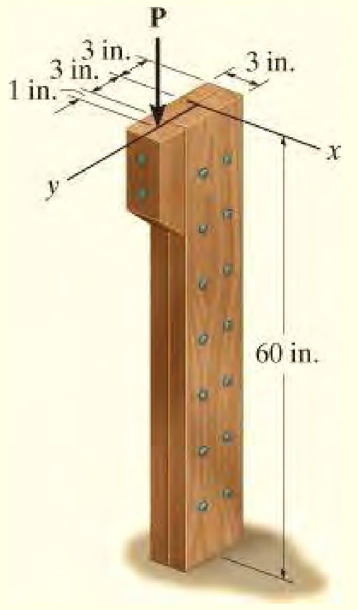
$$\frac{P/5.87\text{ in}^2}{10.28\text{ ksi}} + \frac{P(30\text{ in.})(3.10\text{ in.})/(41.4\text{ in}^4)}{22\text{ ksi}} = 1$$

$$P = 8.43\text{ kip}$$ *Ans.*

د تعامل طریقي پلی کول د فولادی برخی لپاره ګورو، دا اړین دی:

$$\frac{\sigma_a}{(\sigma_a)_{allow}} = \frac{8.43\text{ kip}/(5.87\text{ in.})}{10.28\text{ kip/in}^2} = 0.140 < 0.15$$ OK

مثال 13.12



انځور 13-31

د لرګیو کالم له دوو تختو چې له یو بل سره میخ شوی دی جوړ شوی دی، او ابعاد یې په انځور 13-31 کې ښودل شوي دي.

کالم په تهداب کې کلک ټړل شوی او پورته برخه کې پین شوی دی

له معادلې 13-30 کار واخلئ او له مرکز وتلی بار P چې کیدی شي کالم یې ملاتړ وکولای شي وټاکئ.

حل (SOLUTION)

له انځور 13-10b ، موږ لرو $K = 2$. دلته موږ باید KL/d محاسبه کړو تر څو معلوم کړو چې کومه معادله د 13-27 تر 13-29 پورې و کارول شي. څکه چې sallow د نریوالی تناسب له لوی قیمت څخه موندل کیږی، موږ .d = 3 in انتخاب کوو.

موږ لرو

$$\frac{KL}{d} = \frac{2(60 \text{ in.})}{3 \text{ in.}} = 40$$

څکه چې $26 < KL/d < 50$، د منلو وړ محوری ستریس له معادلې 13-29 په لاس راځي. نو بیا

$$\sigma_{allow} = \frac{540 \text{ ksi}}{(KL/d)^2} = \frac{540 \text{ ksi}}{(40)^2} = 0.3375 \text{ ksi}$$

معادله د 13-30 د $s_{max} = s_{allow}$ سره کاره وو، موږ لرو

$$\sigma_{allow} = \frac{P}{A} + \frac{Mc}{I}$$

$$0.3375 \text{ ksi} = \frac{P}{(3 \text{ in.})(6 \text{ in.})} + \frac{P(4 \text{ in.})(3 \text{ in.})}{(1/12)(3 \text{ in.})(6 \text{ in.})^3}$$

$$P = 1.22 \text{ kip} \qquad \textit{Ans.}$$

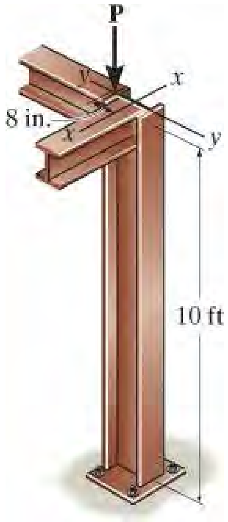
سوالونه

PROBLEMS

س 13-107. د فولادو A-36 يو د سورورفلنج W8 X 15 کالم فرض کړو چې په دواړو پايلوکی پين شوي دي. اعظمی له مرکز وتلی بار P ، کوم چې په کارولو د معادلی 13-30 او د AISC د برخی 13.6 معادلی ، وربادی پليی شی و ټاکي.

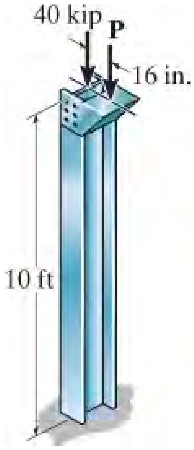
س *13-108. پوښتنه 13-107 حل کړی کله کالم په پورتني او ښکته پايلو کی کلک تړل شوی.

س 13-109. پوښتنه 13-107 حل کړی که کالم په پورتني پای کی پين او په ښکته پای کی کلک تړل شوی وي.



س 13-107/108/109

س 13-110. د فولادو A-36 يو دسوروری فلنج W12 X 50 کالم کلک تړل شوی په ښکته برخه کی او آزاد دی په پورتني پای کی. اعظمی له مرکز وتلی بار P ، کوم چې په کارولو د معادلی 13-30 او د AISC معادلو د برخی 13.6 ، وربادی پلی شی و ټاکي.



س 13-110

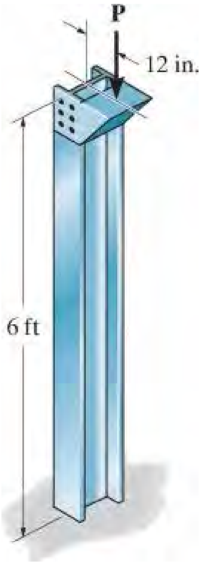
س 13-111. د فولادو A992 یو د سوروری فلنج W8 X 15 کالم په دواړو پایلوکی کلک تړل شوي دي. که چیری په پایلوکی یو مؤمنت M =5 kip.ft وربانْدی پلی شوي وی ، اعظمی محوری قوه P ، چی وربانْدی پلی کیدی شي وټاکي. کږیدل د کالم په x-x محور مینځ ته راځي. معادله 13-30 او د AISC معادلی د برخی 13.6 وکاروي.

س 13-111

س *13-112. د فولادو A992 یو د سوروری فلنج W8 X 15 کالم په دواړو پایلوکی کلک تړل شوي دي. که چیری په پایلوکی یو مؤمنت M =23 kip.ft پلی شوي وی ، اعظمی محوری قوه P ، چی وربانْدی پلی کیدی شي وټاکي. کږیدل د کالم په x-x محور مینځ ته راځي . د تعامل فورمول له $(\sigma_b)_{allow}$ = 24 ksi سره و کاروي.

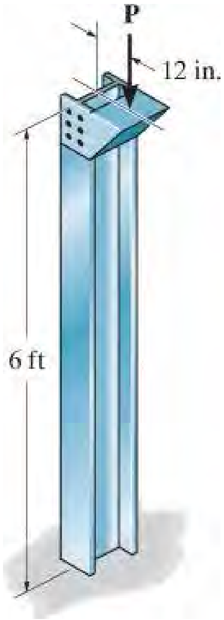
س 13-112

س 13-113. د فولادو A-36 یو د سورورى فلنج W12 X 22 کالم ، په ښکته برخه کی کلک تړل شوی او آزاد دی په پورتني پای کی. اعظمی له مرکز وتلی بار P ، کوم چی په کارولو د معادلی 13-30 او د AISC معادلو د برخی 13.6 ، وربانډی پلی شی و ټاکي.



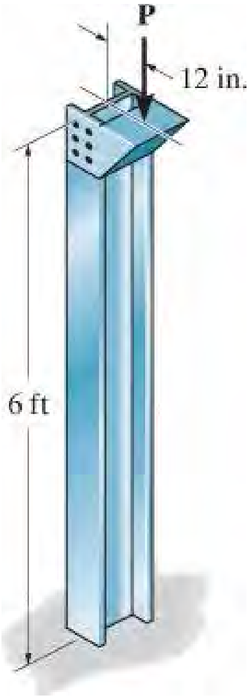
س 13-113

س 13-114. د فولادو A-36 یو د سورورى فلنج W10 X 15 کالم په ښکته برخه کی کلک تړل شوی او آزاد دی په پورتني پای کی. اعظمی له مرکز وتلی بار P ، کوم چی په کارولو د معادلی 13-30 او د AISC معادلو د برخی 13.6 ، وربانډی پلی شی و ټاکي.



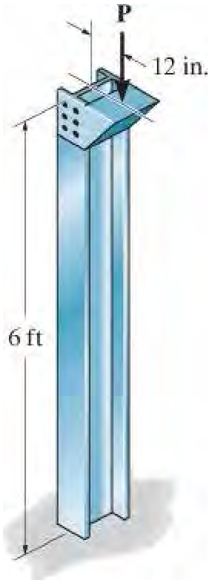
س 13-114

س 13-115. د فولادو A-36 يو د سورورى فلنج W10 X 15 کالم په تيته برخه کې کلک
ترل شوی او آزاد دی په پورتني پای کې. که چیری بار P = 2 kip وی ، مشخص کړی چې کالم
په کارولو د معادلی 13-30 او د AISC معادلو د برخی 13.6 خوندی دی که نه.



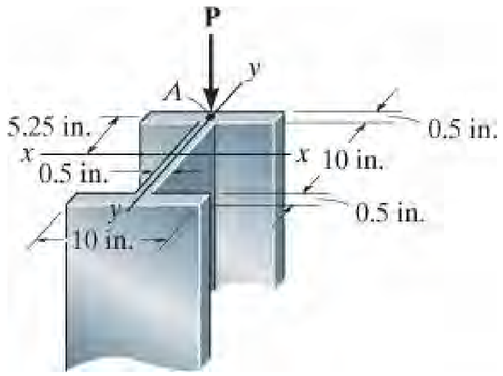
س 13-115

س *13-116. د فولادو A-36 يو د سورورى فلنج W12 X 22 کالم په بښکته برخه کې کلک
ترل شوی او آزاد دی په پورتني پای کې. که چیری بار P = 4 kip وی ، مشخص کړی چې کالم
په کارولو د معادلی 13-30 او د AISC معادلو د برخی 13.6 خوندی دی که نه.



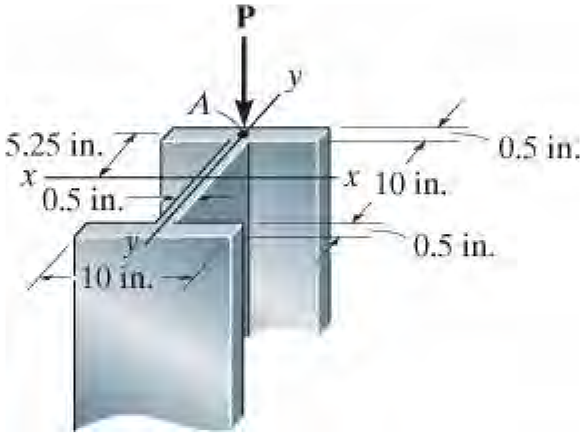
س 13-116

س 13-117. یو 20-ft اوږد کالم له المونیم 2014-T6 الیاژڅخه جوړ شوی دی. که چیری په پورته پای او ښکته پای کی پین شوي وي، او یو ټیلوهونکي بار **P** په ټکی A کی پلی شوي وی، په کارولو د معادلی 30-13 او برخی 13.6 اعظمی د منلو وړ ارزښت د **P** وټاکي.



س 13-117

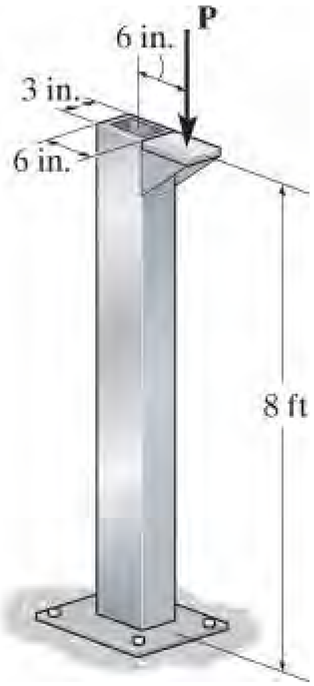
س 13-118. یو 20-ft اوږد کالم له المونیم 2014-T6 الیاژ څخه جوړ شوی دی. که چیری په پورته پای او ښکته پای کی پین وي، او یو ټیلوهونکي بار **P** په ټکی A کی پلی شي، اعظمی د منلو وړ ارزښت د **P** په کارولو د برخی 13.6 او د تعامل فورمول له $(\sigma_b)_{allow} = 20$ ksi سره وټاکي.



س 13-118

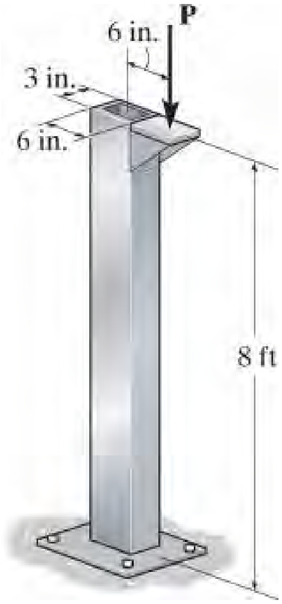
س 13-119. د المونیم 2014-T6 خالي کالم په پورته پای او ښکته پای کی کلک تړل شوي دي.

اعظمی له مرکز وتلی بار P ، کوم چې په خوندي توګه په کالم پلی شي و ټاکي. د ستریس د منلو وړ طریقه و کاروي. پنډوالی د برخی د دیوال $t = 0.5$ in دي.



س 13-119

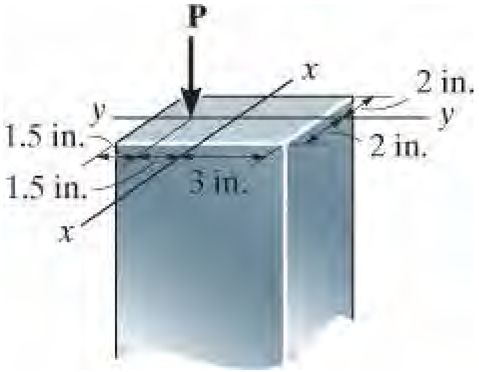
س *13-120. یو د المونیم 2014-T6 خالي کالم په پورته پای کی آزاد او ښکته پای کی کلک تړل شوي دي. اعظمی د منلو وړ له مرکز وتلی قوه P چې په خوندي توګه په کالم پلی شي و ټاکي. د تعامل له فورمول کاروا‌خلي. د منلو وړ کږیدونکي ستریس $(\sigma_b)_{allow} = 30$ ksi دي. برخی د دیوال پنډوالی $t = 0.5$ in دي.



س 13-120

س 13-121. یو 10-ft اوږده میله له المونیم 2014-T6 الیاژ څخه جوړه شوی ده. که چیری کلکه تړل شوی وی په پورته پای اوپین په ښکته پای کی ، اعظمی د منلو وړله مرکز وتلي بار **P** و ټاکي ، د برخی 13.6 فورمولونه او 13-30 معادله وکاروي .

س 13-122. یو 10-ft اوږده میله له المونیم 2014-T6 الیاژ څخه جوړه شوی ده. که چیری کلکه تړل شوی وی په پورته پای اوپین په ښکته پای کی، اعظمی د منلو وړله مرکز وتلي بار **P** کوم چی کیدی شي، په کارولو د برخی 13.6 فورمولونه او د تعامل فورمول له $(\sigma_b)_{allow} = 18$ ksi سره، پلی شي.



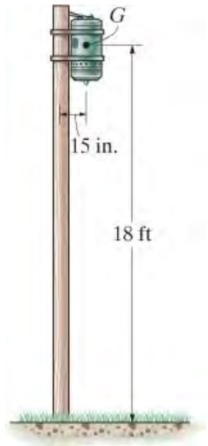
س 13-121/122

س 13-123. وګورئ چی کالم د یو له مرکز وتلی بار P =800lb چی په پورتنئ برخه د کالم کی پلی شوي دي د منلو وړ دی که نه. د NFPA معادلی د برخی 13.6 او معادله 13-30 و کاروي.

س *13-124. له مرکز وتلئ د منلو وړ اعظمی بار P ، کوم چی کیدی شي د لرګیو په کالم پلی شي مشخص کړي. کالم په ښکته برخه کی کلک تړل شوی او آزاد دی په پورتني پای کی. د NFPA معادلی د برخی 13.6 او 13-30 معادله و کاروي.

س 13-123/124

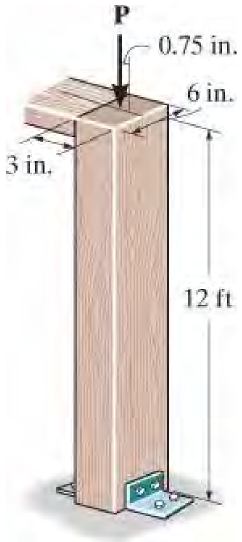
س 13-125. د بریښنا پایه 10-in قطر لري، او یو ترانسفارمر چې 600 lb وزن لرې ورباندې تړل شوي دي. مرکز ثقل د تراسفارمر په G کې موقعیت لرې. پایه په ځمکه کې کلکه تړل شوې او په پورتني برخه کې آزاده ده. مشخص کړی چې دا د NFPA معادلې د برخې 13.6 او 13-30 معادلې په کارولو سره د منلو وړ دي.



س 13-125

س 13-126. د NFPA معادلې د برخې 13.6 فورمولونه او 13-30 معادلې په کاره ولو سره اعظمې د منلو وړ له مرکز وتلي بار P چې کیدی شي د لرګیو په کالم پلې شي و ټاکي. فرض کړي چې کالم په ښکته او پورتنۍ پایلوکې پین شوی دي.

س 13-127. د NFPA معادلې د برخې 13.6 فورمولونه او 13-30 معادلې په کاره ولو سره اعظمې د منلو وړ له مرکز وتلي بار P چې کیدی شي د لرګیو په کالم پلې شي و ټاکي. فرض کړي چې کالم کلکه تړل شوی دی په ښکته برخه اوپین دی په پورته برخه کې.



س 13-126/127

د فصل بیا کتنه

CHAPTER REVIEW

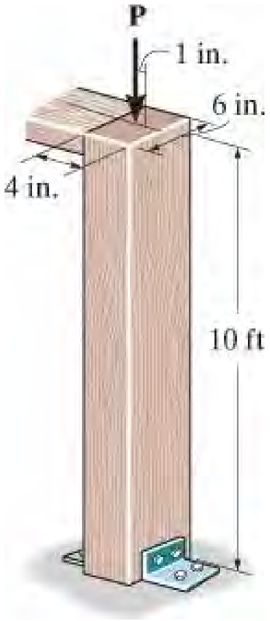
		کږوپیدل هغه ناڅاپه بې ثباتي ده چې په کالمونو یا هغه غړو کې پېښیږي کوم چې محوری تیلوهونکي بارونه وربانډی پلی شي. اعظمي محوري بار چې یو غړی مخکې له کږوپیدو یې ملاتړ وکړي د بحرانی بار P_{cr} په نوم یادیږي.
	$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(KL^2)}$$	د یو آیدیال کالم لپاره بحراني بار له اویلرفورمول (Euler's formula) څخه کله چې K =1 د پن اتکاء لپاره، K =0.5 د کلک اتکاء لپاره، K =0.7 د پن او کلک اتکاء، او K =2 د کلک اتکاء او آزاد پایلو لپاره، وي.
	$$\sigma_{max} = \frac{P}{A}\left[1 + \frac{ec}{r^2}\sec\left(\frac{L}{2r}\sqrt{\frac{P}{EA}}\right)\right]$$ $$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E_t}{(KL/r)^2}$$	که یو له مرکز وتلی محوری بار په کالم پلی شي، نو بیا د کالم اعظمی ستریس موندلو لپاره د سیکنټ (secant formula) فورمول کارول کیدی شي.

		کله چی محوری بار په موادو کی لامل د بیلډینګ وګرځي ، نو بیا د اویلر فورمول سره د تانجانت ماجولس (tangent modulus) کارول کیدی شی تر څو بحرانی بار د کالم وموندل شي. دا د اینګسر فورمول (Engesser's equation) په نوم یادیږي.
		د تجربو ډیتا په بنسټ فورمولونه چمتو شوی دی ، چی د فولادو، المونیم او د لرګیو کالمونو لپاره کارول کیږي.

د بیا کتني پوښتنی

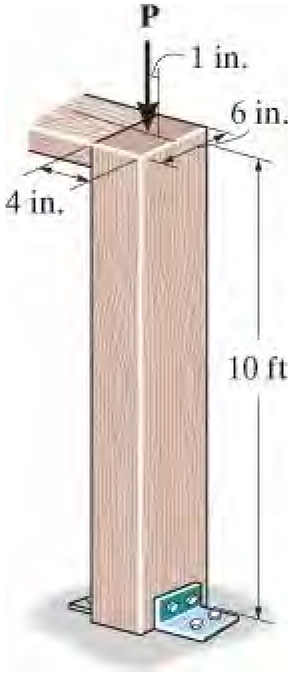
REVIEW PROBLEMS

ب 13-1. د لرګیو کالم پنډوالی 4 in. دی او 6 in. سور لري. په کارولو د NFPA معادلی د برخی 13.6 او معادله 13-30 د منلو وړ له مرکز وتلی اعظمی بار P چی کیدی شی په کالم پلی شي و ټاکي. فرض کړی چی کالم په دواړو برخو، پورتنی او ښکته خوا کی، پین شوی دی.



ب 13-1

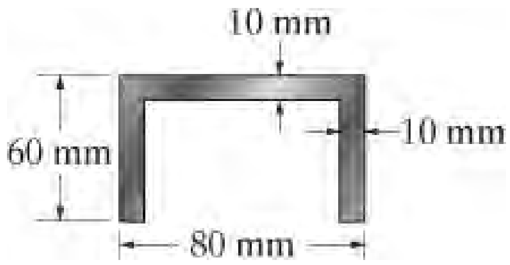
ب 13-2. د لرګیو کالم پنډوالی .4 in دی او .6 in سور لري. په کارولو د NFPA معادلی د برخی 13.6 او معادله 30-13 ، د منلو وړ له مرکز وتلی اعظمی بار P چی کیدی شی په کالم پلی شي و ټاکي. فرض کړی چی کالم په پورتنۍ برخه کی پین او ښکته خوا کی کلکه اتکالري.



ب 13-2

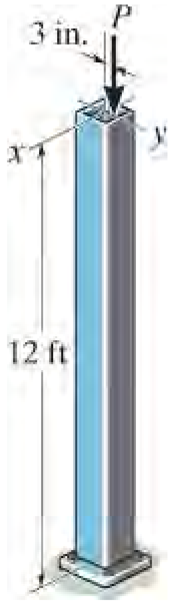
ب 13-3. یو فولادی کالم 5 m اوږدوالي لري ، په پورتنۍ برخه کی آزادی دی او ښکته خوا کی کلکه اتکاء لري. د غوڅی ابعادی یي په لاندی انځورکی ښودل شوي، بحراني بار یي و ټاکي.

E_{st} = 200GPa, σ_Y = 360 GPa



ب 13-3

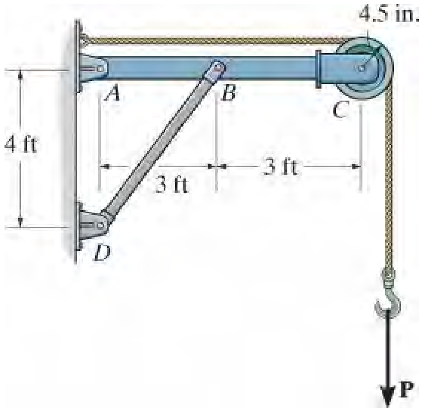
ب *13-4. د فولادو A992 ټیوب د مربع شکل لری او ابعاد يي .8 in په .8 in د ي. د غوڅې برخې ساحه يي $14.4\ in^2$ او انرشيايي مؤمنت یې $I_x = I_y = 131\ in^4$ دي. اعظمی بار چې دا ټیوب يي ملاتړ کولای شي و ټاکي. فرض کړی چې کالم په پورتنۍ برخه کی آزاد او ښکته برخه کی کلکه اتکاءلري.



ب 13-4

ب 13-5. د ا لاندی ګردی ډکه میله BD له فولادو A-36 څخه جوړه او دوه اینچه (2 in.) قطر لري . د منلو وړ اعظمی قوه **P** ، کوم چې په دی فریم پلی کیدی شی، پرته له دی چې میله کړوپه شي ، وټاکي. د خونديتوب فکتور F.S. = 2 د کړوپيدو لپاره و کاروي.

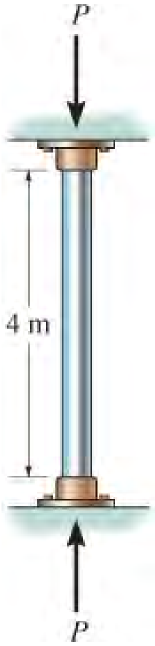
ب 13-6. که $P = 15$ kip اړين تر ټولو کوچني قطر د A992 ډکی میلی BD نږدی .1/16 in ته و ټاکي. د خونديتوب فکتور F.S. = 2 د کړوپيدو لپاره و کاروي.



ب 13-5/6

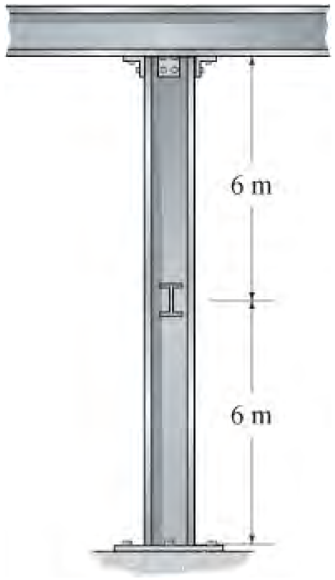
ب 13-7. د فولادو پایپ په دواړو پایلوکی کلک تړل شوي دی. که چیری دا 4 m اوږد او وتلي قطر يي 50 mm وی، پندوالی يي معلوم کړي تر څو یو محوری بار P = 100 kN پرته له دی چی کړوپ شي وربانډی پلی شي.

$E_{st} = 200GPa, \sigma_Y = 250\ GPa$



ب 13-7

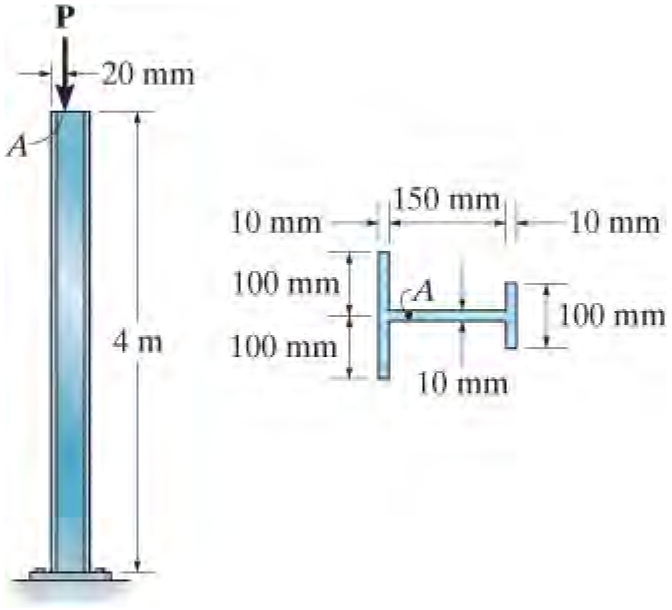
ب *13-8. فولادو A992 سورروره فلنج W200 X 46 کالم ټاکل کیږی چی په پورتنی برخه کی پین شوی دی ، او په ښکته خوا کی کلک تړل شوي. همدا رنګه دا کالم د لوړوالي په مینځنی برخه کی د ضعیف محور کړوپیدو لپاره تکیه شوی دي. اعظمی محوري بار چی په دی کالم پلی کیدی شي و ټاکی، پرته له دی چی کړوپ شي.



ب 13-8

ب 13-9. د فولادو A992 غوڅه برخه يي په لاندې انځور کې ښودل شوي. په پورتنی برخه کی آزاده ده ، او په ښکته برخه کی کلکه تړل شوي. اعظمی قوه P چې په A کی پلی کیدی شي ، پرته له دی چی کړوپیدل یا ییلد مینځ ته راولي، و ټاکي. د خوندیتوب فکتور 3 د کړوپیدو او ییلد واقع کیدو لپاره و کاروي.

ب 13-10. د فولادو A992 کالم غوڅه برخه په لاندی انځور کی ښودل شوي. په پورتنی برخه کی آزاد ، او په ښکته برخه کی کلک تړل شوي. معلوم کړی چی په پلی کیدود قوه $P = 10$ kN په A کی کالم به کړوپ یا ییلد وکړي. د خوندیتوب فکتور 3 د کړوپیدو او ییلد واقع کیدو لپاره و کاروي.



ب 13-9/10

څوارلسم فصل

(CHAPTER 14)

(© 68/Ocean/Corbis)

د ډوبولو تخته باید له داسې موادو جوړه شي چې وکولای شي د لوړارزښت ایلستیک سترین انرژي د کړیدو له امله ذخیره کړي. دا کار تختی ته اجازه ورکوی چی د لوی کړیدو توان ولري ، په دی توګه، کله چی تخته ځان سیخه وی دا انرژي غوټه وهونکي ته انتقال کړي.

د انرژي طريقي

(ENERGY METHODS)

CHAPTER OBJECTIVES د فصل موخې

په دې فصل کې به موږ وښيو چې څنګه د انرژي ميتودونو په پلي کولوسره هغه سوالونه چې بيخايه کيدنه کوی حل شي . موږ به لمړي د کار او سترين انرژي بحث پيل کړو؛ بيا به د انرژي ساتنی اصولو په کارولو سره، موږ وښيو چې څنګه ستريس او بيځايه کيدنه په غړي کې معلومه کړو کله چې د ټکر (Impact) سره مخ وي. په پای کې، د مجازی کار ميتود او د کاستيګليانو تيورم به وکارول شي ترڅو د ساختماني او ميخانيکي غړيو په يوه ټکی کی کې بې ځايه کيدنه او ميلان مشخص کړئ.

14.1 بهرنی کار او سترین انرژي (EXTERNAL WORK AND (STRAIN ENERGY)

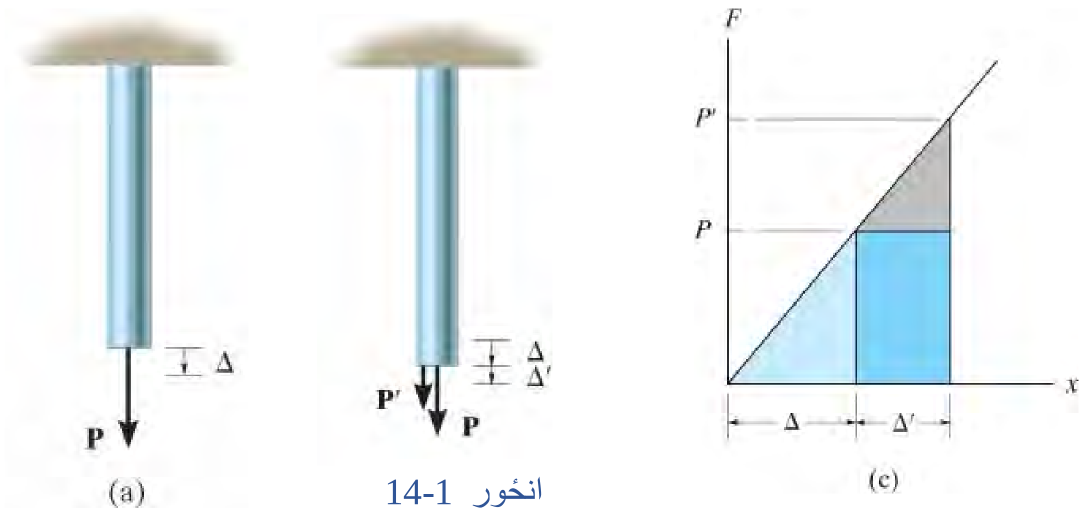
د دې لپاره چې پدې فصل کې رامینځته شوي د انرژي میتودونو څخه کار واخلو، موږ باید لومړی د بهرني قوو او کپل مؤمنت له امله رامینځته شوی کار تعریف کړو، او وښیو چې دا کار څنګه د جسم د سترین انرژي په ډول څرګند یږي.

د یوی قووی کار (Work of a Force). یوه قوه هغه وخت‌کار کړي کله چې قوه بیځایه کیدنه dx د قووی په جهت مینځ ته راوړی. کار یو سکلر (scalar) مقداردی او تعریف کیږی په $dU_e = Fdx$. که ټوله بیځایه کیدنه D وی کارعبارت دي په:

$$U_e = \int_0^{\Delta} F\,dx \qquad (14\text{–}1)$$

راځئ چې دا معادله د محوري قوی لخوا د ترسره شوي کار محاسبه کولو لپاره وکاروو، کوم چې د یو میلی په پای کې پلي کیږي، او هغه په انځور 14-1a کی ښودل شوي. کله چې شدت د قووی په تدریجي ډول له صفر څخه ځینې محدود ارزښت $F = P$ ته لوړیږي، د میلی د پای وروستی بې ځایه کیدنه D کیږي. که د موادوچلند په ایلستیک خطي ډول وي، نو قوه به په مستقیم ډول د هغې د بې ځایه کیدو سره متناسبه وي ؛ او همداسې، $F/x = P/D$ یا $F = (P/D)x$. دا رابطه په معادله 14-1 کې ځای په ځای کوو او له 0 څخه تر D انتیګریت کوو، موږ ترلاسه کوو:

$$U_e = \frac{1}{2}P\Delta \qquad (14\text{–}2)$$



انځور 14-1

په بل عبارت، څومره چې قوه په بار باندې تطبیق کیږي، د هغې شدت زیاتیږي له صفر څخه یو څه ارزښت P ته، او په پایله کې، ترسره شوی کار مساوي دی په اوسط اندازه د قووی، P/2، ضرب د ټول بې ځایه کیدو D . دا کار په ګرافیک ډول د روښانه نیلي سیوري ساحې مثلث شکل لخوا ښودل شوی، انځور 14-1c.

اوس فرض کړئ چې **P** لا دمخه په بار باندې پلي شوی *اویو بل قوه* **P`** پلي شویې، ترڅو د میلې پای نور په یو مقدار D` بې ځایه شوي ، انځور 14-1b . هغه کار چې د **P`** له خوا ترسره شوی مساوی دی په ساحه د خړ سیوري شوي مثلث سره او دا اضافی کار چی د **P** لخوا ترسره شوي په ساده ډول عبارت دی په مقدار د $P$ ضرب د بیځایه کیدنی D`، یعنی

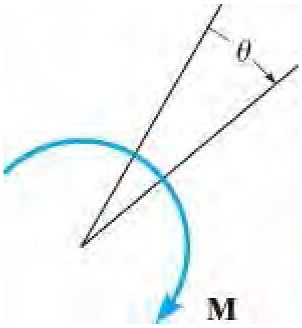
$$U'_e = P\Delta' \qquad (14\text{–}3)$$

دا په تیاره - نیلي سیوری مستطیلي ساحه کی ښودل شوي ، انځور 14-1c .

د کپل مؤمنت کار (Work of a Couple Moment).

يو کپل مؤمنت **M** هغه وخت کار کړي کله چي دا د عمل د کرښي په اوږدو کي د زاويه dq بې ځايه کيدو ځخه تيرشي، دا کار د $dU_e = M\,dq$ ، په توګه تعريف شوی ، انځور2-14 وګوري .
که ټول زاويه بې ځايه کيدل q راډ يان وی، کار کيدل عبارت دی په

$$U_e = \int_0^{\theta} M\,d\theta \qquad (14\text{–}4)$$



انځور 2-14

که چيرې يو جسم خطي ايلستيک چلند ولري، او د کپل مؤمنت اندازه په تدريجي ډول له صفر ځخه په $q = 0$ کي او M ته په q کي لوړيږي ، بيا ، لکه ځنګه د يوی قوی په قضيه کی، کارعبارت دی په :

$$U_e = \frac{1}{2}M\theta \qquad (14\text{–}5)$$

په هرصورت، که کپل مؤمنت دمخه په جسم باندې تطبيق شوي وي او نور بارونه جسم د يو نور مقدار q` په اندازه وڅرخوي، بيا کار دی

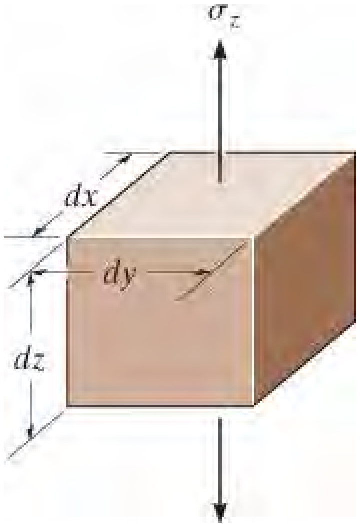
$$U_e' = M\theta'$$

سترين انرژی (Strain Energy) . کله چي بارونه په جسم باندې پلي شي، د موادو شکل بدليږی، او په دي شرط چي د تودوخي په بڼه انرژي له لاسه ورنکړي، د بارونو لخوا ترسره شوي بهرني کار به په داخلي کارونو بدل شي، کوم چی ***سترين انرژي*** بلل کيږي. دا انرژي د جسم په بدن کي زيرمه کيږي اود نارمل يا شيير ستريس پلی کيدو له امله رامينځته کيږي.

نارمل ستر س (Normal Stress). د نارمل ستريس σ_z له امله د رامينځته شوي سترين انرژي ترلاسه کولو لپاره، د حجم هغه عنصر په پام کي ونيسئ کوم چي په انځور 14-3 کي ښودل شوي. د عنصر په پورتنۍ او ښکته سطح کي رامينځته شوي قوه عبارت ده په $dF_z = \sigma_z\, dA = \sigma_z\, dx\, dy$. که دا قوه (يا ستريس) په تدريجي ډول په عنصر پلي شي، نو د قوه شدت به له صفر څخه dF_z ته لوړ شي، پداسي حال کي چي عنصربه اوږدوالی په اندازه د $d\Delta_z = \epsilon_z\, dz$ ووينې. د dF_z لخوا شوي کار عبارت کيږی په

$$dU_i = ½\, dF_z\, d\Delta_z = ½\, [\sigma_z\, dx\, dy]\epsilon_z\, dz$$

. ځرنګه چی د عنصر حجم عبارت دی په $dV = dx\, dy\, dz$، بيا



انځور 14-3

$$dU_i = \frac{1}{2}\sigma_z \epsilon_z\, dV \qquad (14\text{–}6)$$

دا سترين انرژي *تل مثبته* وي، حتی که σ_z ټيلوهونکی وي، ځکه چې σ_z او ϵ_z به تل په ورته لوري وي.

د يوي محدودې اندازې جسم لپاره، په جسم کې سترين انرژي له همدې امله ده

$$U_i = \int_V \frac{\sigma \epsilon}{2}\, dV \qquad (14\text{–}7)$$

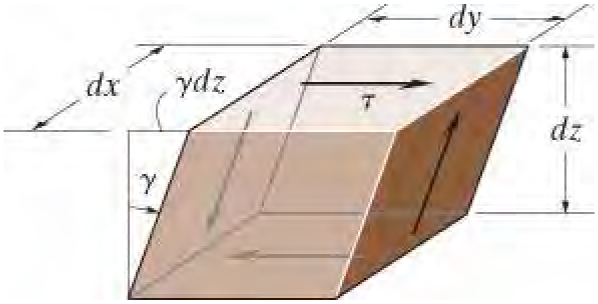
کله چی مواد خطی ايليتيک چلند ولري، بيا $\sigma = E\, \epsilon$ او موږ کولای شو چی سترين انرژي د نارمل ستريس له مخی تشريح کړو

$$U_i = \int_V \frac{\sigma^2}{2E}\, dV \qquad (14\text{–}8)$$

شییر سټریس (Shear Stress).

د سټرین انرژي ښودنه د هغو موادو لپاره کله چې شییر سټریس ورباندی عمل کوی، ورته نارمل سټریس ته، هم رامینځته کیدی شي. دلته په انځور 14-4 ښودل شوی عنصردد شییر قووه $dF = t\ (dx\ dy)$ تابع دی ، کوم چې د هغې په پورتنی سطح کې عمل کوي، او دا د دې سطحې بې ځایه کیدنی gdz نسبت د هغې لاندې سطحې ته شوی . یوازې عمودی سطحې څرخي، او له همدې امله په دې مخونو کې د شییر قوه هیڅ کار نه کوي. له همدې امله، په عنصر کې زیرمه شوی سټرین انرژي کیږي

$$dU_i = \frac{1}{2}\tau\gamma\, dV \qquad (14\text{–}9)$$



انځور 14-4

یا څرنګه چې $dV = dx\ dy\ dz$

$$dU_i = \frac{1}{2}[\tau(dx\ dy)]\gamma\ dz$$

په جسم کی زیرمه شوی سټرین انرژي د شییر سټریس پلی کیدو له امله عبارت ده په

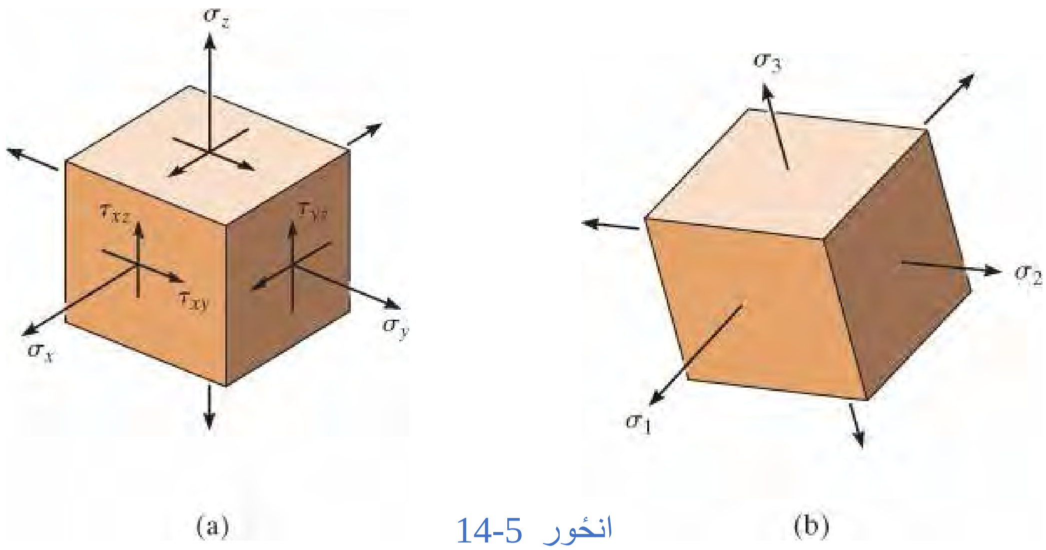
$$U_i = \int_V \frac{\tau\gamma}{2} dV \qquad (14\text{–}10)$$

د نارمل سټرین انرژي په شان ، شییر سټرین انرژي هم تل مثبت وی ، ځکه چې t او g تل په یو شان جهت وی. که چیری مواد ایلستیک خطی چلند ولري نو بیا $g = t/G$ ، او موږ د سټرین انرژي د شییر سټریس له مخی داسی ښودلی شو.

$$U_i = \int_V \frac{\tau^2}{2G} dV \qquad (14\text{–}11)$$

څو اړخیز سټریس (Multiaxial Stress).

تیر شویو بحثونو ته پراختیا ورکول کیدی شي، تر څو په جسم کې سټرین انرژي کله چې دا د عمومي سټریس حالت تابع وي، مشخص کړئ ، انځور 14-5a و ګوري. د دې اجرا کولو لپاره، هغه سټرین انرژی چې تړاو لري دهر یو شپږو نارمل او



انځور 14-5

شییر سټریس اجزاو په کارولو د معادلو 14-6 او 14-9 څخه ترلاسه کیدی شي، او څرنګه چې انرژی یو سکیلر اندازه ده، ټول سټرین انرژي چې په جسم کې جوړیږي عبارت ده په

$$U_i = \int_V \left[\frac{1}{2}\sigma_x\epsilon_x + \frac{1}{2}\sigma_y\epsilon_y + \frac{1}{2}\sigma_z\epsilon_z + \frac{1}{2}\tau_{xy}\gamma_{xy} + \frac{1}{2}\tau_{yz}\gamma_{yz} + \frac{1}{2}\tau_{xz}\gamma_{xz} \right] dV \qquad (14\text{–}12)$$

د هوک عمومی قانون په کارولو د معادلو 10-18 او 10-19 سره سټرین کیدی شی چی حذف شي. وروسته له ځای په ځای کیدو او یو ځای کیدو موږ لرو:

$$U_i = \int_V \left[\frac{1}{2E}\left(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2\right) - \frac{\nu}{E}(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_x\sigma_z) + \frac{1}{2G}\left(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2\right) \right] dV \qquad (14\text{–}13)$$

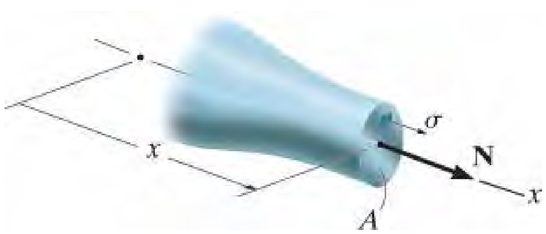
که چیری اصلی سټریسونه s_1, s_2 , s_3 په عنصر باندی پلی شوي وي، انځور 14-5b دا معادله داسی ساده شکل غوره کوي

$$U_i = \int_V \left[\frac{1}{2E}\left(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2\right) - \frac{\nu}{E}(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3) \right] dV \quad (14\text{–}14)$$

14.2 د مختلف ډول بارونو ایلسټیکی سټرین انرژي (ELASTIC STRAIN ENERGY FOR VARIOUS TYPES OF LOADING)

د ایلسټیک سټرین انرژي معادلې، کوم چې په تیره برخه کې رامینځته شوې، دلته به کار ترې واخستل شی. موږ به اوس هغه ذخیره شوې سټرین انرژي په یوه غړي کې چې د محوری بار، کږیدونکي مؤمنت، عرضي شییر او تاویدونکی مؤمنت د پلی کیدو له امله مینځ ته راغلی و ګورو.

محوری بار (Axial Load) . یو متغیر او یو څه مخروطې بنی غوڅی برخی میله کوم چې په انځور 14-6 کې ښودل شوې په پام کې ونیسئ . داخلي محوری قوه په یوه برخه کې چې x فاصله له یوه پایله موقعیت لري په N ښودل شوې. که چیرې په دې برخه کې د غوڅی برخې ساحه A وي، بیا په دی برخه کې نارمل سټریس $s = N/A$ دی. معادله 14-8 پلي کوو. مونږیې لرو:

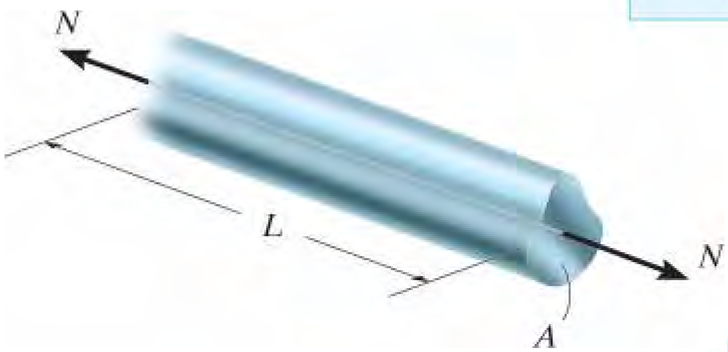


$$U_i = \int_V \frac{\sigma_x{}^2}{2E} dV = \int_V \frac{N^2}{2EA^2} dV$$

انځور 14-6

که موږ یو کوچني توته د میلی چی حجم یي $dv = A\, dx$ دی واخلو، نوعمومی فورمول د سټرین انرژي د میلی لپاره عبارت دی په :

$$U_i = \int_0^L \frac{N^2}{2AE} dx \qquad (14\text{–}15)$$



انځور 14-7

د میلی تر ټولو عام استعمال د میلی ، چی ثابته غوڅه برخه A لري او ثابت داخلی محوري بار N انځور 14-7 ، انتیګریشن راکوي

$$U_i = \frac{N^2 L}{2AE} \qquad (14\text{–}16)$$

په یاد ولرئ د میلی سترین انرژی به زیاتوالی و مومي که د میلی اوږدوالي ډیر شي، او یا د ایلستیستی ماجولس او یا د غوڅی برخی ساحه لږ شي. د مثال په توګه د المونیم میله

[$(E_{al} = 10(10^3)$ ksi] کولای شي چی دري چند زیاته انرژی په پرتله د فولادو میلی [$E_{st}=29(10^3)$ ksi] ذخیره کړي ، کوم چی یو شان ساحه او یو شان بار وربانډی پلی شوی وي.

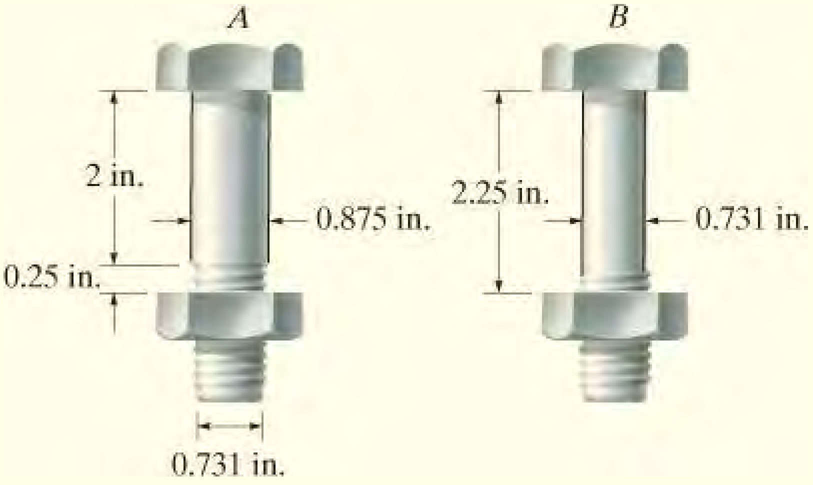
اما که د میلی غوڅه برخه ساحه دوه چند شي ، ددی وړتیا د سترین انرژی ذخیره کولو د پاره نیمايي ته راټیټه کیږی.

مثال

مثال 14.1

په انځور 8-14 کې ښودل شوي د دوه لوړ قوت فولادی بولټونو A او B څخه یو غوره کیږی تر څو د ناڅاپه کششي بار ملاتړ لپاره وکارول شي. د انتخاب لپاره دا اړینه ده چی د ایلستیک سترین انرژي خورا لوی مقدار چې هر بولټ يي جذب کولی شي مشخص شي . بولټ A د خپل اوږدوالی 2 انچو لپاره 0.875 انچ قطر لري، او په بیخ (یا تر ټولو کوچني) قطر د 0.731 انچه په 0.25 انچ رخه داره یا تار شوی سیمه کی دي. بولټ B "پورته " (upset) تارونه لري، داسي چې قطر یی په 2.25 انچ اوږدو کې کیدی شی چی د 0.731 انچه اټکل شي. په دواړو حالتونو کې، اضافي موادو ته پام مه کړئ چی تارونه جوړوي.

واخلی $E_{st} = 29(10^3)$ ksi, $\sigma_Y = 44$ ksi



انځور 8-14

حل (SOLUTION)

بولټ *A* : که چیری بولت باندی اعظمی کشش عمل وکړي، اعظمی سټریس σ_Y به په 0.25 in. برخه کی مینځ ته راشي. دا قوه مساوی ده په:

$$P_{max} = \sigma_Y A = 44 \text{ ksi}\left[\pi\left(\frac{0.731 \text{ in.}}{2}\right)^2\right] = 18.47 \text{ kip}$$

معادله 16-14 په هره برخه د بولټ کی پلی کوو، موږ لرو

$$U_i = \sum \frac{N^2L}{2AE}$$

$$= \frac{(18.47 \text{ kip})^2(2 \text{ in.})}{2[\pi(0.875 \text{ in.}/2)^2][29(10^3) \text{ ksi}]} + \frac{(18.47 \text{ kip})^2(0.25 \text{ in.})}{2[\pi(0.731 \text{ in.}/2)^2][29(10^3) \text{ ksi}]}$$

$$= 0.0231 \text{ in.} \cdot \text{kip} \qquad \textit{Ans.}$$

بولټ *B* (Bolt B). دلته فرض کیږی چی بولت مساوی قطر د 0.731 in په ټول 2.25 in اوږدوالي کی لري. همدارنګه له پورتنیو محاسباتو ، دا کولای شی چی د P max = 18.47 kip قوی ملاتړ وکړي. نو بیا

$$U_i = \frac{N^2L}{2AE} = \frac{(18.47 \text{ kip})^2(2.25 \text{ in.})}{2[\pi(0.731 \text{ in.}/2)^2][29(10^3) \text{ ksi}]} = 0.0315 \text{ in.} \cdot \text{kip} \qquad \textit{Ans.}$$

یادونه: په پرتله کولو سره : بولټ *B* کولاي شي چی 37% ډیر ایلستیک انرژي نسبت بولت *A* ته جذب کړي، ځکه چی کوچني غوڅه برخه په اوږدوالي کی لري.

کړېدونکي مؤمنت (Bending Moment).

محور متناسب (axisymmetric) بیم کوم چی په انځور 9-14 کی ښودل شوي په پام کې ونیسئ . دلته داخلي مؤمنت *M* ، په یوه خپل سري کوچنی ټوټه چی په *y* فاصله له صفری کرښی موقعیت لري یو نارمل سټریس $\sigma = My/I$ وربانډی پلی شوی. که د دې ټوټی حجم $dV = dA\,dx$ وي، نو بیا ایلستیک انرژي په بیم کې عبارت ده په:

$$U_i = \int_V \frac{\sigma^2}{2E} dV = \int_V \frac{1}{2E}\left(\frac{My}{I}\right)^2 dA\ dx$$

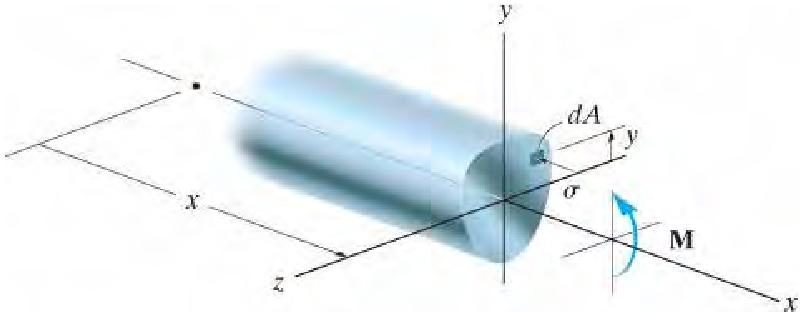
يا

$$U_i = \int_0^L \frac{M^2}{2EI^2}\left(\int_A y^2\, dA\right) dx$$

څکه چې په قوس کی انتيګرال د انرشيايي مؤمنت په صفري کربنه استازيتوب کوی، اخری نتيجه داسي ليکلی شو

$$U_i = \int_0^L \frac{M^2\, dx}{2EI} \qquad (14\text{–}17)$$

د سترين انرژی معلومولو لپاره ، موږ بايد داخلی مؤمنت تابع د x فاصلي د بيم په اوږدو کی و ښيو. او بيا په ټول اوږدوالي انتيګريشن تطبيق کړو

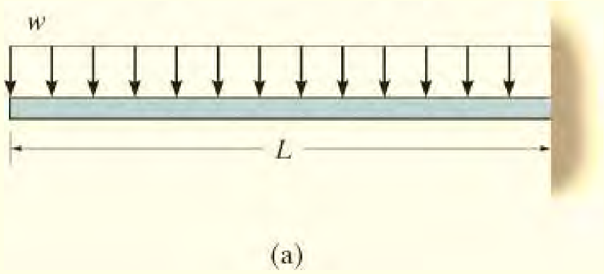


انځور 14-9

مثال

مثال 14.2

په لاندی ښودل شوی ځوړند بیم، انځور 14-10a ، کی د کږیدو له امله سترین انرژی و ټاکي. EI ثابت دی.

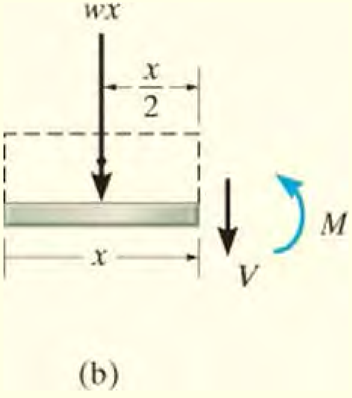


انځور 14-10

حل (SOLUTION)

داخلی مؤمنت په بیم کی، د x محور تاسیس کولو له لاری چی مبداء يي په چپ لور کی ده، ټاکل کیدی شي.

$$\circlearrowleft + \Sigma M_{NA} = 0; \qquad M + wx\left(\frac{x}{2}\right) = 0 \qquad M = -w\left(\frac{x^2}{2}\right)$$



له پلی کولو د معادله 17-14 دا لاندی په لاس راځي

$$U_i = \int_0^L \frac{M^2\,dx}{2EI} = \int_0^L \frac{[-w(x^2/2)]^2\,dx}{2EI} = \frac{w^2}{8EI}\int_0^L x^4\,dx$$

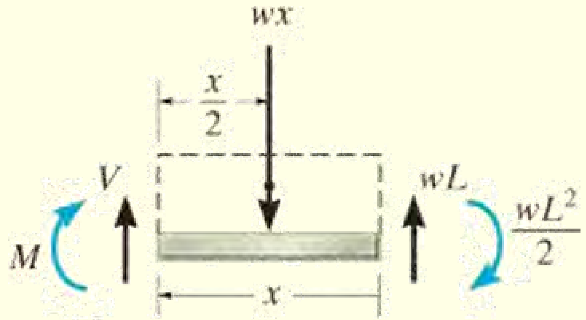
یا

$$U_i = \frac{w^2L^5}{40EI} \qquad \textit{Ans.}$$

همدا رنګه موږ کولای شو چی سترین انرژي ، په کارولو د x محور کوم چی مبداء یی په ښي لور کی او مثبت په چپ لور حساب شي، و ټاکو. انځور 14-10c و ګوري. په دی حالت کی:

$$\circlearrowleft + \Sigma M_{NA} = 0; \qquad -M - wx\left(\frac{x}{2}\right) + wL(x) - \frac{wL^2}{2} = 0$$

$$M = -\frac{wL^2}{2} + wLx - w\left(\frac{x^2}{2}\right)$$

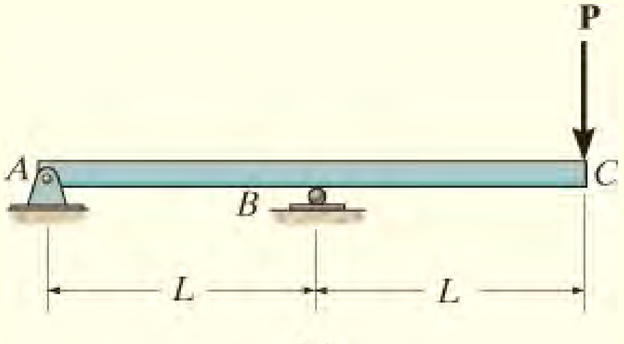


(c)

په پلی کولو د معادلی 14-17 د پخوا په شان نتیجه لاس ته راځي. اما ډیر محاسبات په دی حالت کی اړین دی.

مثال 14.3

کړېدونکي سترین انرژی په برخه AB دی لاندی بیم ، انځور 14-11a کي، و ټاکي. EI د بیم ثابت دی.



(a)

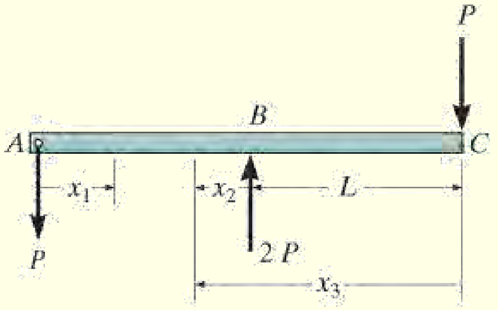
انځور 14-11

حل (SOLUTION)

د بیم آزاد ډایګرام په انځور 14-11b کی ښودل شوي. د ځواب حاصلولو لپاره مورږ کولای شو ، چې داخلی مؤمنت تابع د دریومحورونو (x) کوارډېناټو سره وښیو او بیا معادله 14-17 پلی کړو.

هر یو ددی ځوابونو به اوس وځیړو.

$0\le x_1\le L$. له آزاد ډایګرام د برخی انځور 14-11c موږ لرو



(b)

$$\zeta+\Sigma M_{NA}=0: \qquad M_1+Px_1=0$$

$$M_1=-Px_1$$

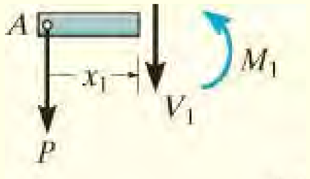
$$U_i=\int\frac{M^2\,dx}{2EI}=\int_0^L\frac{(-Px_1)^2\,dx_1}{2EI}=\frac{P^2L^3}{6EI} \qquad \textit{Ans.}$$

له آزاد ډایګرام انځور 14-11d لیکلی شو . $0 \le x_2 \le L$

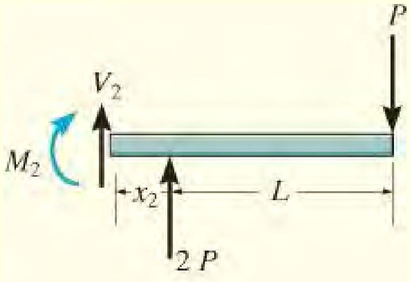
$$\zeta + \Sigma M_{NA} = 0; \qquad -M_2 + 2P(x_2) - P(x_2 + L) = 0$$

$$M_2 = P(x_2 - L)$$

$$U_i = \int \frac{M^2\,dx}{2EI} = \int_0^L \frac{[P(x_2 - L)]^2\,dx_2}{2EI} = \frac{P^2L^3}{6EI} \qquad \textit{Ans.}$$



(c)



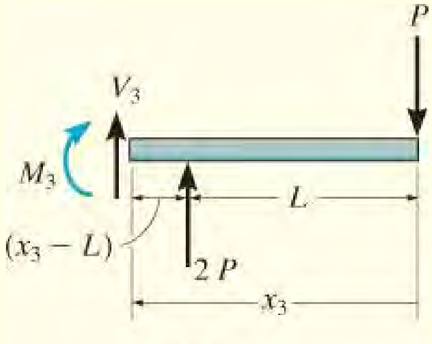
(d)

له آزاد ډایګرام 14-11e لیکلی شو $L \le x_3 \le 2L.$

$$\zeta + \Sigma M_{NA} = 0; \qquad -M_3 + 2P(x_3 - L) - P(x_3) = 0$$

$$M_3 = P(x_3 - 2L)$$

$$U_i = \int \frac{M^2\,dx}{2EI} = \int_L^{2L} \frac{[P(x_3 - 2L)]^2\,dx_3}{2EI} = \frac{P^2L^3}{6EI} \qquad \textit{Ans.}$$



(e)

انځور 11-14 (تکرار)

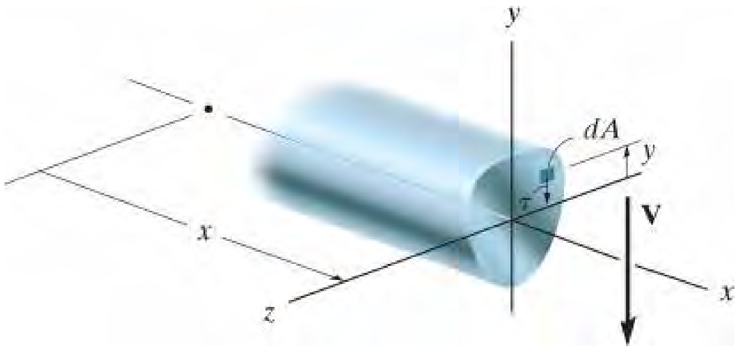
یادونه: دا مثال او پخوانی مثال وښودله چی د بیم سترین انرژی په کارولو د هر مناسب x کوردینات سره په ګوته او په کارولو سره یي موندل کیدی شي . دا یوازې اړین دی چیرې چې داخلي انرژي باید وټاکل شي ، اینتیګریشن په حد دکوردینات کې اجرا شي. دلته د x_1 انتخاب خورا ساده حل وړاندې کوي.

عرضي شییر (Transvers Shear).

یو ځل بیا به د محور متناسب بیم کوم چی په انځور 12-14 کی ښودل شوي په پام کې ونیسو. که د x په برخه کې داخلي شییر V وي، نو بیا شییر ستریس چی د موادو په حجمی توټه باندې عمل کوي چی مساحت یی dA او اوږدوالی dx لري عبارت دی په $t = VQ/It$. دا په معادله 11-14 کې ځای په ځای کوو او سترین انرژی د شییر لپاره عبارت ده په:

$$U_i = \int_V \frac{\tau^2}{2G} dV = \int_V \frac{1}{2G}\left(\frac{VQ}{It}\right)^2 dA\, dx$$

$$U_i = \int_0^L \frac{V^2}{2GI^2}\left(\int_A \frac{Q^2}{t^2} dA\right) dx$$



انځور 12-14

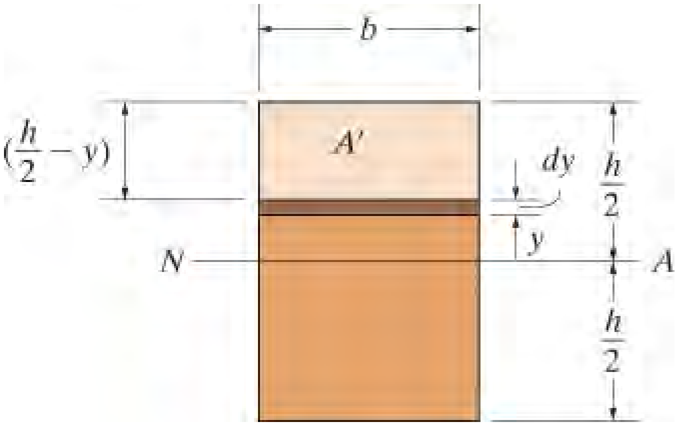
څرنګه چی په قوس کی انتیګرال د د فارم فکتور **(form factor)** د شییر لپاره استازیتوب کوی، داسي لیکلی شو:

$$f_s = \frac{A}{I^2}\int_A \frac{Q^2}{t^2} dA \qquad (14\text{–}18)$$

دا په پورتنی معادله کی ځای په ځای کوو، موږ لرو

$$U_i = \int_0^L \frac{f_s V^2\, dx}{2GA} \qquad (14\text{–}19)$$

له هغه لارې چې دا په معادله 14-18 کې تعریف شوی، انځورفکتور یا فارم فکتوربې ابعاده نمبر دی چې د هر ځانګړي غوڅې برخې ساحې لپاره ځانګړې ارزښت لري. د مثال په توګه، که د یو مستطیلی غوڅې برخې بیم ، عرض يې b او لوړوالی h وی ، انځور 14-13 ، بیا



انځور 14-13

$$t = b$$
$$dA = b\,dy$$
$$I = \frac{1}{12}bh^3$$
$$Q = \bar{y}'A' = \left(y + \frac{(h/2) - y}{2}\right)b\left(\frac{h}{2} - y\right) = \frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)$$

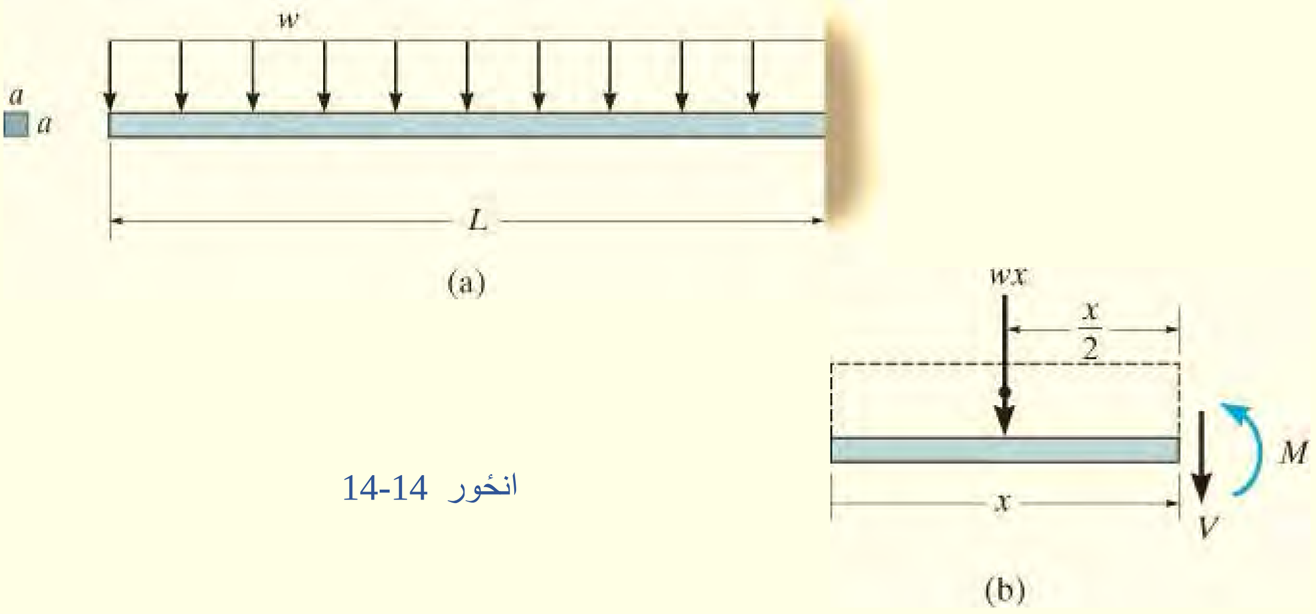
دا په معادله 14-18 کی ځای پر ځای کوو، موږ حاصل کوو

$$f_s = \frac{bh}{\left(\frac{1}{12}bh^3\right)^2}\int_{-h/2}^{h/2} \frac{b^2}{4b^2}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)^2 b\,dy = \frac{6}{5} \qquad (14\text{–}20)$$

مثال

مثال 14.4

په لاندی څوړند یا کنتیلیور بیم کی د شییر له امله سترین انرژي و ټاکی.
بیم مربع غوځه برخه لری او ویشل شوی بار w ورباندی پلی شوي دی، انځور 14-14a . EI
او G ثابت دی.



انځور 14-14

حل (SOLUTION)

له آزاد ډایګرام په یو خپل سری برخه x کی ، انځور 14-4b، موږ لرو:

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \qquad -V - wx = 0$$

$$V = -wx$$

څرنګه چی غوځه برخه مربع ده، د شکل فکتور (فارم فکتور) $f_s = \frac{6}{5}$ (معادله 14-20)، نو بیا
معادله 14-19 کیږي:

$$(U_i)_s = \int_0^L \frac{\frac{6}{5}(-wx)^2\,dx}{2GA} = \frac{3w^2}{5GA}\int_0^L x^2\,dx$$

یا

$$(U_i)_s = \frac{w^2L^3}{5GA} \qquad Ans.$$

یادونه: د مثال 14.2 نتیجی په کارولو کله چی $\boldsymbol{A} = a^2, \boldsymbol{I} = 1/12\ (a^4)$ نسبت د شییر کرېدونکي سترین انرژي ته کیږي

$$\frac{(U_i)_s}{(U_i)_b} = \frac{w^2L^3/5Ga^2}{w^2L^5/40E\left(\frac{1}{12}a^4\right)} = \frac{2}{3}\left(\frac{a}{L}\right)^2\frac{E}{G}$$

ځکه چی

$G=E/2(1+v)$ او (برخه 10.6) $v \le 1/2$ څرنګه چی پورتنی لیمت، $E = 3G$ نو داسی لیکلي شو

$$\frac{(U_i)_s}{(U_i)_b} = 2\left(\frac{a}{L}\right)^2$$

په یاد ولرئ دا نسبت به د L له کمیدو سره زیات شي. په هر صورت د ډیری لنډ بیم لپاره ، چیرته که وو ایو $L = 5a$ د شییر سترین انرژي ونډه یوازې 8% نظر کرېدونکی سترین انرژی ته، ده. او له همدی امله ذخیره شوی شییر سترین انرژي معمولاً په انجینری تحلیل کی له پامه غورځول کیږي.

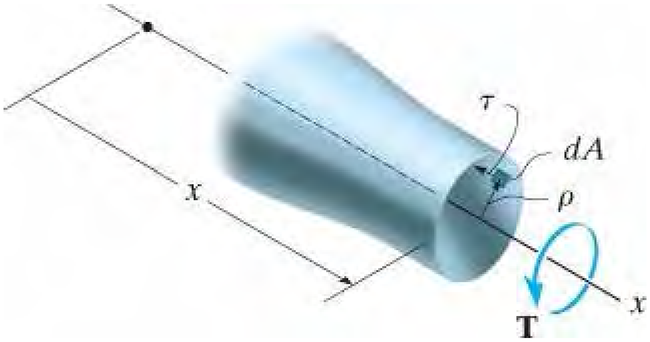
دتاویدومؤمنت (Torsional Moment).

د تاویدولپاره ، موږ به یو نیرډی مخروطی شافت په پام کی و نیسو، انځور 15-14 ، کوم چی داخلی تورک T وربانډی پلی شوي دي. په یو خپل سری حجمی توټه چی ساحه یی dA او اوږدوالي یي dx دی، شییر سټریس مساوی دی په $t = T\rho/J$ ، او له همدی امله په شافت کی زیرمه شوي سترین انرژي عبارت ده په:

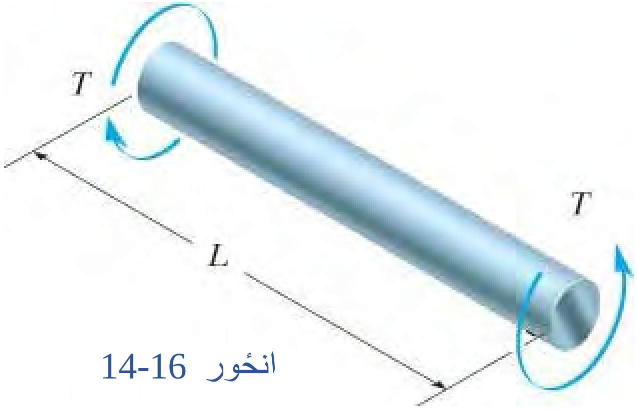
$$U_i = \int_V \frac{\tau^2}{2G}dV = \int_V \frac{1}{2G}\left(\frac{T\rho}{J}\right)^2 dA\,dx = \int_0^L \frac{T^2}{2GJ^2}\left(\int_A \rho^2\,dA\right)dx$$

څرنګه چې په قوس کې انتيګرال د پولر انرشيايي مؤمنت J د شافت د برخې دی، پايله نتيجه داسې ليکلي شو:

$$U_i = \int_0^L \frac{T^2}{2GJ}dx \qquad (14\text{–}21)$$



انځور 14-15



انځور 14-16

تر ټولو معمولي حالت هغه دی کله چې شافت (يا تيوب) ثابت غوڅه برخه ولري او ثابت تورک ورباندی پلی شوي وي ، انځور 14-16 . انتيګريشن د معادلی 14-21 بيا راکوي

$$U_i = \frac{T^2L}{2GJ} \qquad (14\text{–}22)$$

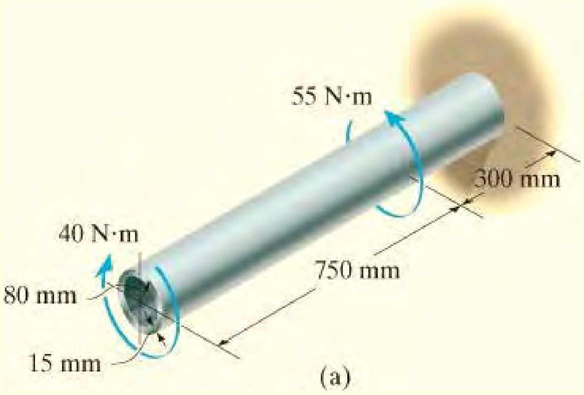
په ياد ولري چې د انرژی د جذ بولو ظرفيت د شافت کله چې تورژن ورباندی پلی شوي وي د قطر د زياتوالي سره کميږي، دا ځکه چې اندازه د J زياتيږي.

مهم ټکي

IMPORTANT POINTS

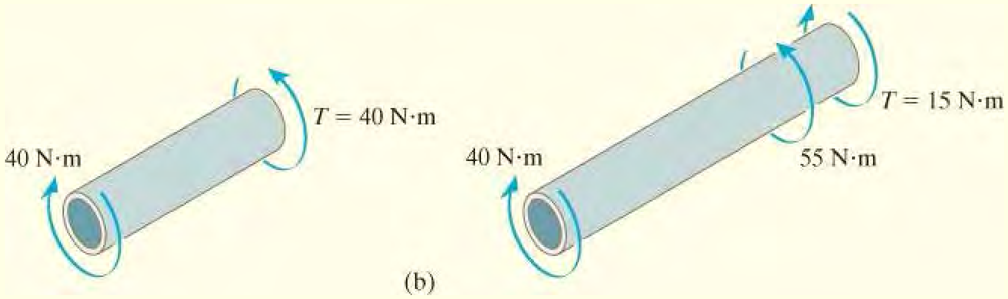
- یوه قوه هغه وخت کار کوي کله چې د بې ځایه کیدو سره په حرکت کی وي. کله چې یو قوه په جسم باندې پلې کيږي د هغې شدت په تدريجي ډول له صفر څخه F ته ډیریږي، او په دې توګه کار $U = (F/2)D$ دی. په هرصورت، که یو ثابته قوه په جسم باندې عمل وکړي، او جسم په اندازه د D بې ځایه شي په دی صورت کې، کار $U = FD$ کیږي.
- یو کپل مؤمنت هلته کار کوی چې د ګردش له لارې بې ځایه توب منځ ته راشی.
- سترین انرژي لامل داخلی کار دی، کوم چی د نارمل او شییر سټریسونو له امله رامینځته کیږي. دا تل یو مثبت مقدار دی.
- سترین انرژي د داخلي بارونو سره تړاو لري $N, V, M,$ او T.
- لکه څنګه چې بیم اوږدیږي، سترین انرژي د کړیدو له امله، په پرتله، د سترین انرژی د شییر له امله، خورا لوییږي . د دی دلیل له امله، په بیمونو کې د شییر سترین انرژي عموما له پامه غورځول کیدی شي .

مثال 14.5



تیوبی شافت په انځور 14-17a کی ښودل شوي چې په دیوال کی ټینګ تړل شوی او دوه تورکونه وربانډی پلی شوي دی. ذخیره شوی سترین انرژي، په شافټ کی ددی بار له لامله و ټاکي.

$G = 75$ GPa



انځور 17-14

حل (SOLUTION)

د برخی له طریقي کار اخلو، داخلی ټورک یی په دو سیمو د شافت کی چی هلته تورک ثابت دی ، انځور 14-17b ، پیدا کوو. که څه هم دا ټورکونه (40 N.m او 15 N. m)مخالف لوري د یو بل دی ، دا به د سترین انرژی په ټاکلو کی کومه پایله و نلري، ځکه چی تورک په معادلعه 22-14 کی مربع شوی دی. په بل عبارت سترین انرژي تل مثبت ده.

قطبی انرشیایي مؤمنت (polar moment of inertia) د شافت عبارت دی په

$$J = \frac{\pi}{2}[(0.08\text{ m})^4 - (0.065\text{ m})^4] = 36.30(10^{-6})\text{ m}^4$$

معادله 22-14 پلی کوو ، موږ لرو

$$U_i = \sum \frac{T^2 L}{2GJ}$$

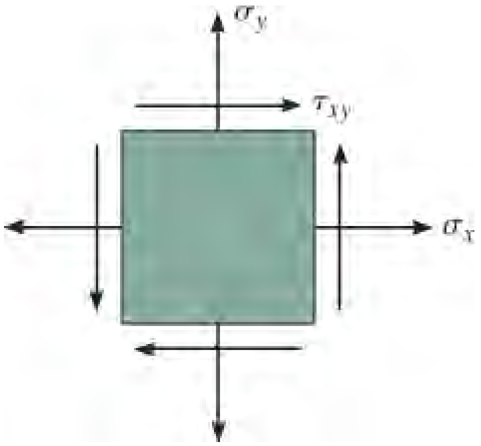
$$= \frac{(40\text{ N}\cdot\text{m})^2(0.750\text{ m})}{2[75(10^9)\text{ N/m}^2]36.30(10^{-6})\text{ m}^4} + \frac{(15\text{ N}\cdot\text{m})^2(0.300\text{ m})}{2[75(10^9)\text{ N/m}^2]36.30(10^{-6})\text{ m}^4}$$

$$= 233\ \mu\text{J} \qquad \textit{Ans.}$$

سوالونه

PROBLEMS

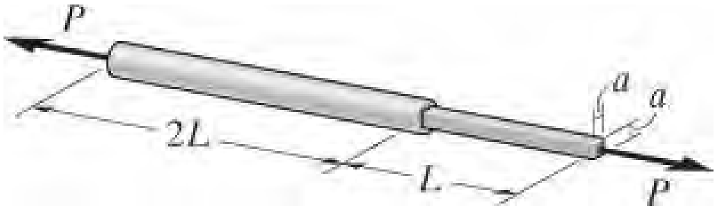
س 14-1   مواد دیوعمومي حالت د سطحي ستریس سره مخامخ دی. د سترین انرژی کثافت د ایلستیک ثابت ارقامو E, G او u اود ستریس اجزاوو s_x, s_y او t_{xy} له مخی وښيي.



س 14-1

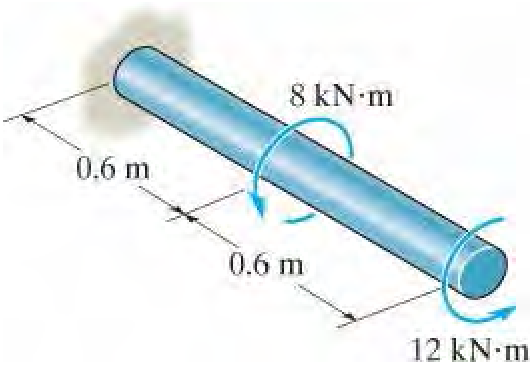
س 14-2 . د سترین انرژی کثافت د سطحی ستریس په حالت باید یو شان وی، که چیری په s_x s_y او t_{xy} یا په اصلی ستریسونو s_1 او s_2 و ښودل شي. په دی حالت کی د سترین انرژي څرګندونی د هرو دوو حالتونو لپاره مساوی جوړی کړي او وه ښيي چی $G = E/[2(1+u)]$.

س 14-3 . د A-36 فولادو میله له دوو برخو جوړه شوي ده، یوه غوښه برخه د r شعاع لري، او بله مربع غوښه برخه لري. که چیری په میله یو محوری بار P عمل وکړي ابعاد a د مربع برخی داسی معلوم کړي تر څو سترین انرژي په داخل د مربع برخی یو شان د هغه برخی وی چی ګردی ده.



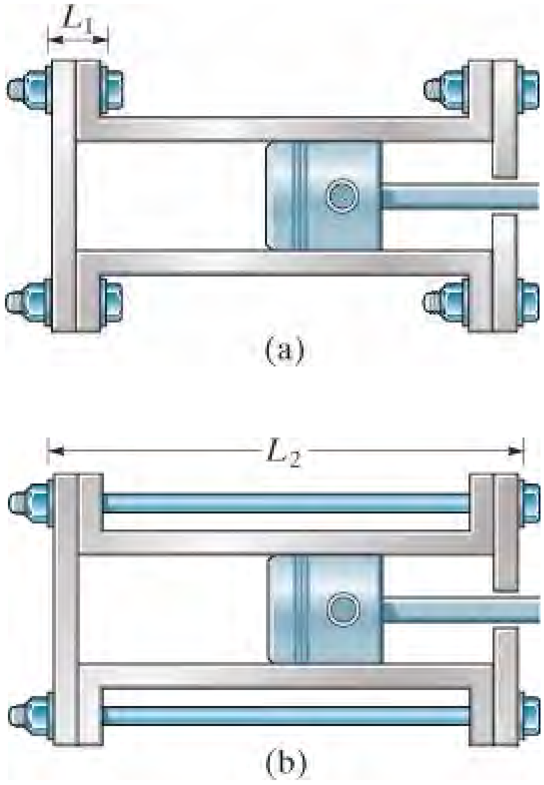
س 14-3

س *14-4 . تورژن سترین انرژي د A992 فولادی شافت و ټاکي. د شافت شعاع 50 mm ده.



س 14-4

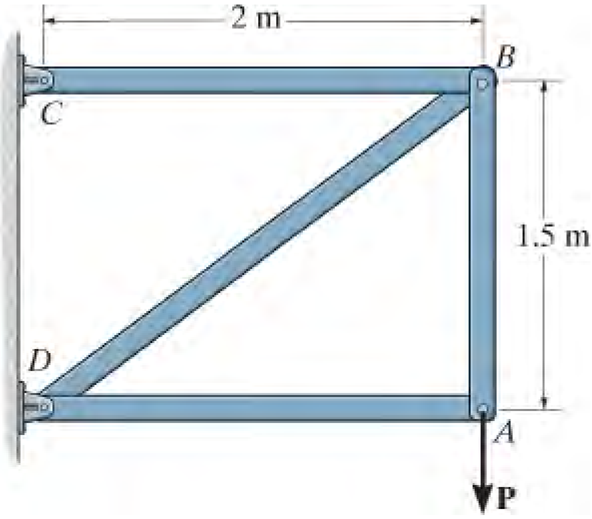
س 14-5 . د ورته موادو بولتونه کوم چې یو شان غوښې لرې ، د دوه ممکنه ترونکي ضمیمي د سلندر سر د کارولو لپاره په لاندی انځور کی ښودل شوي. په هر قضیه کی رامینځ ته شوي سترین انرژي پرتله کړئ، او بیا تشریح کړي چې کوم ډیزاین د محوری شاک یا ټکر بارونو لپاره غوره دي.



س 14-5

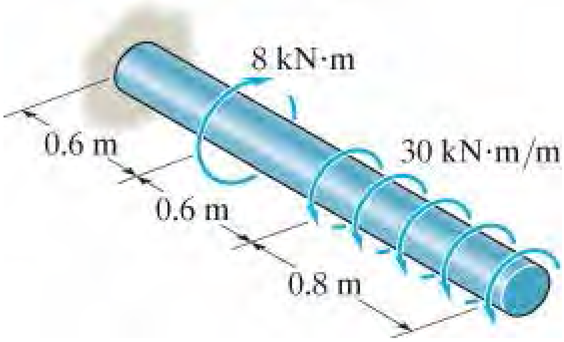
س 14-6 . که چیری $P = 60$ kN وي، ټوله ذخیره شوی سترین انرژي په ترس کی و ټاکي. د هرغړی غوڅه برخه $2.5\ (10^3)\ mm^2$ ده، او له A-36 فولادو جوړ شوي.

س 14-7 . د اعظمی قوی P اندازه مشخص کړئ ، او هم اړونده ټول زیرمه شوي اعظمی سترین انرژي په ترس کی، پرته له دی چی کوم غړی دایمی بیځایه کیدنه و مومي، و ټاکي. د هر غړي د غوڅی برخی ساحه $2.5\ (10^3)\ mm^2$ او له A-36 فولادو جوړ شوي.



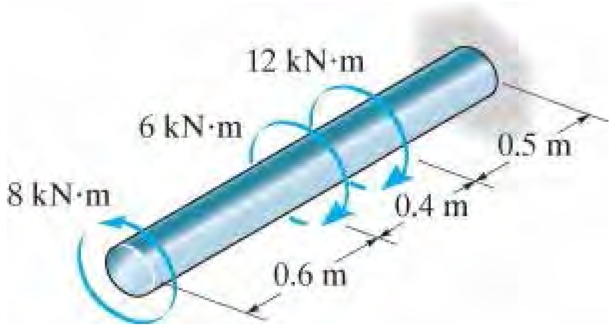
س 14-6/7

س *14-8 . تورژن سترین انرژي د A992 فولادی شافت و ټاکي. د شافت شعاع 40 mm ده.



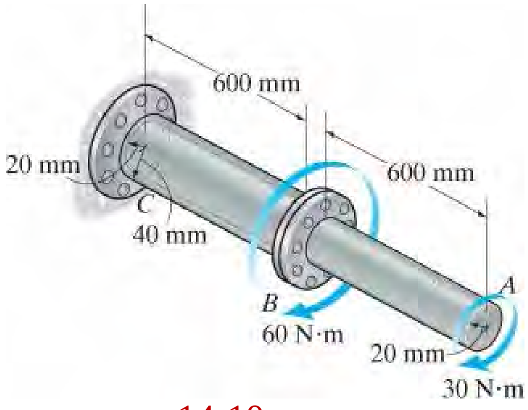
س 14-8

س 14-9 . تورژن سترين انرژي د A-36 فولادی شافت و تاکي. د شافت شعاع 40 mm ده.



س 14-9

س 14-10 . لاندی شافت اسامبلی په C کی تینګ تړل شوي ده. د خالی برخی BC داخلی شعاع د 20 mm لري او وتلئ شعاع يي 40 mm ده، او د ډکی برخی AB 20 mm شعاع لري.
زيرمه شوی سترين انرژي په شافت کی مشخص کړی. شافت له المونيم الياژ 2014-T6 څخه جوړ شوي دی. کپلینک په B کی سخت (rigid) دی.

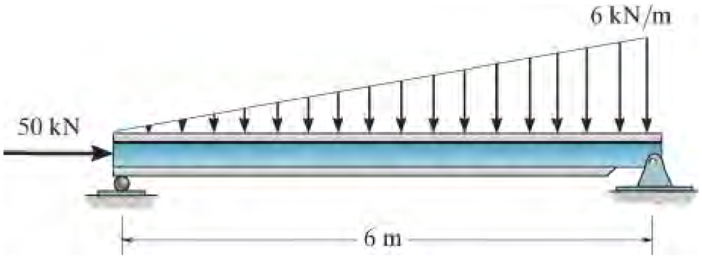


س 14-10

س 14-11 . د محوری باراو کړيدو او سترين انرژي په فولادی A992 بيم کی وتاکی.

$I = 28.9\ (10^6)\ \text{mm}^4$ او $A = 2850\ \text{mm}^2$

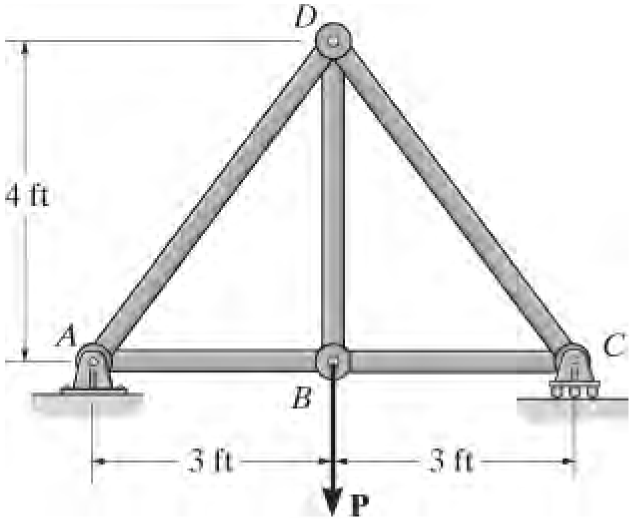
.



س 14-11

س *14-12 . که P = 10 kip وي، ټوله سترین انرژي په ټرس کی و ټاکی. هر غړی د ټرس 2 in. قطر لري او له A992 فولادو جوړ شوي دي.

س 14-13 . د اعظمی قووه **P** اندازه مشخص کړئ ، او هم اړونده ټول زیرمه شوي اعظمی سترین انرژي په ټرس کی، پرته له دی چی هر غړی دایمی بیځایه کیدنه و مومي، و ټاکي. د ټرس هر غړي .2 in قطر لري او له A-36 فولادو جوړ شوي.

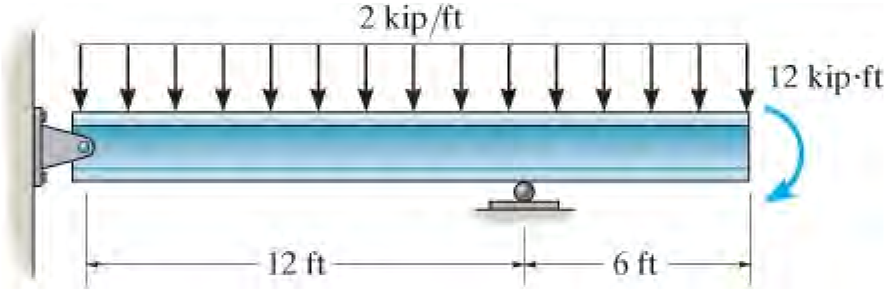


س 14-12/13

س 14-14 . د انځور 5-26 نازک دیوال تیوب په پام کی ونیسي. د شییر فورمول $\tau_{avg} = T/2tA_m$، معادله 5-18 ، او د شییر سترین انرژي عمومی حالت معادله 14-11 وکاروي، ترځو وښیي چی تاو (twist) د تیوب په معادله 5-20 ورکړل شوي.

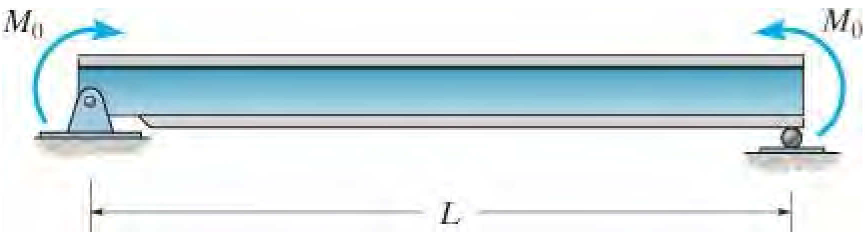
مرسته: هغه کار چی تورک T په تیوب کړي مساوی دی په سترین انرژي په تیوب کی، کوم چی حاصل شوی له انتیګرال د کوچنی عنصرڅخه، انځور ، 14-4 ، په ټول حجم د موادو.

س 14-15 . کړیدونکي سترین انرژي د لاندی A992 فولادی بیم وټاکی. $I = 156 \ \text{in}^4$.



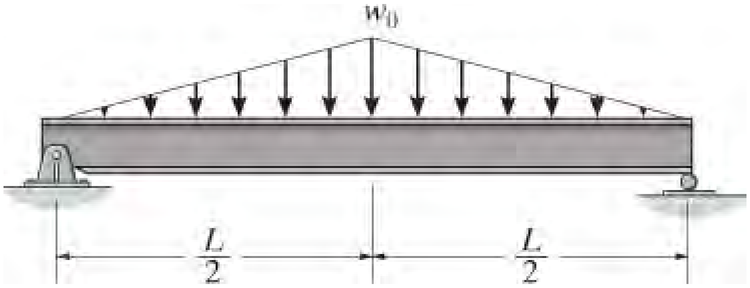
س 14-15

س *14-16 . کړېدونکي سترين انرژي د بيم وټاکی. $E\,I$ د بيم ثابت دي.



س 14-16

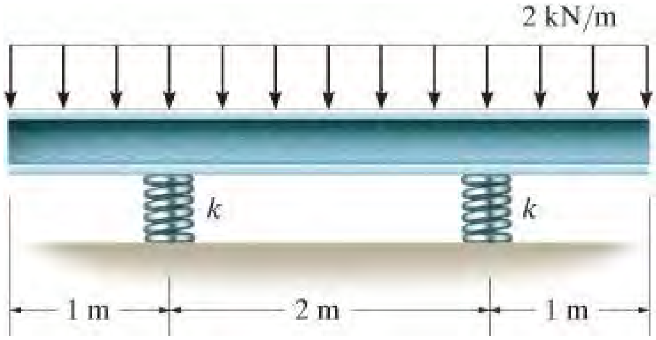
س 14-17 . کړېدونکي سترين انرژي د ساده اتکاء بيم وټاکی. $E\,I$ د بيم ثابت دي.



س 14-17

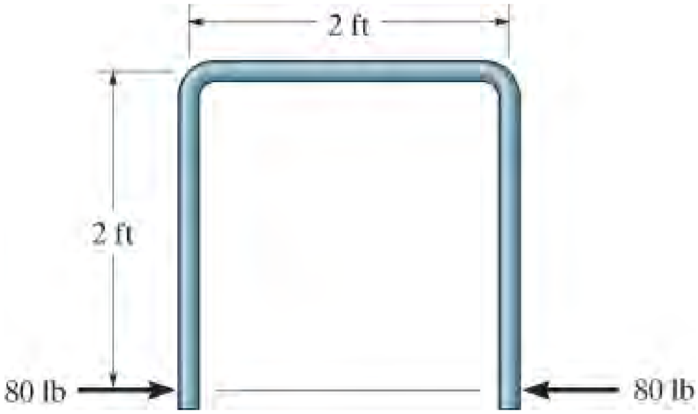
س 14-18 . فولادی بيم په دو فنرنو باندی تکيه کړي ده چی د هرفنرنو شخوالي $k = 8$ MN/m دی. سترين انرژي په هر فنرکی مشخص کړي، او هم کړېدونکي سترين انرژي په بيم کی وټاکي.

$E_{st} = 200$ GPa, $I = 5(10^6)$ mm^4 دی.



س 14-18

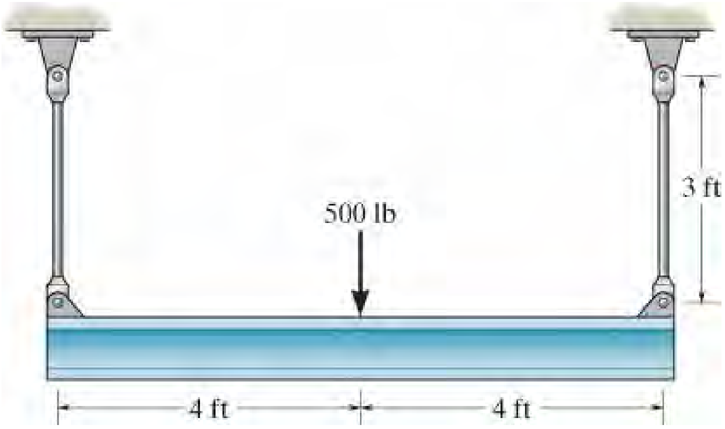
س 14-19 . کړیدونکي سترین انرژي ، په فولادی A-36 میله کی چی قطر یی 2 انچ دی، وټاکی.



س 14-19

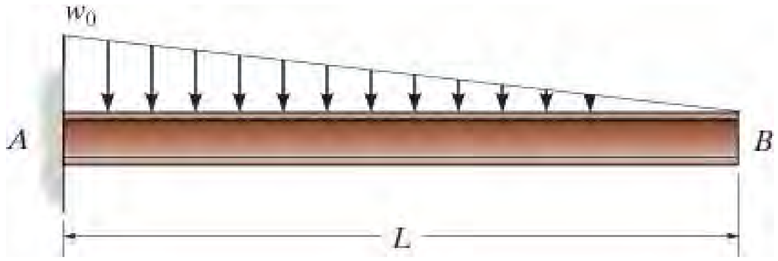
س *14-20 . په فولادی اسامبلی کی ټوله سترین انرژي وټاکي. محوری سترین انرژي په دوو میلو کی چی 0.5-in قطر لري او کړیدونکی سترین انرژي په بیم کی وټاکی.

$I = 43.4\ in^4,\ E_{st} = 29(10^3)\ ksi$



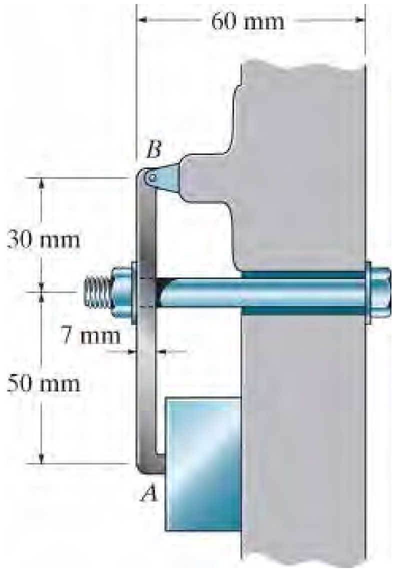
س 14-20

س 14-21 . کړیدونکي سترین انرژي د بیم وټاکی. EI د بیم ثابت دي.



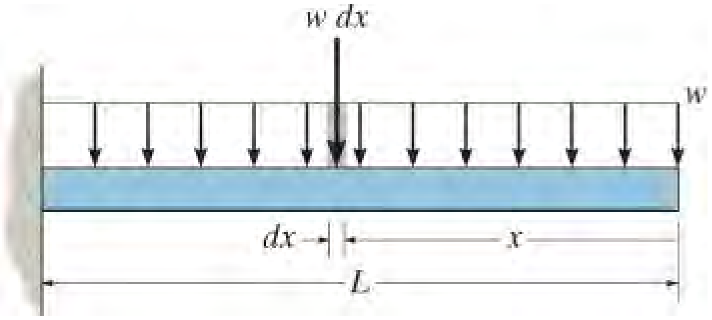
س 14-21

س 14-22 . د بولت قطر 10 mm دي، او لاستي AB مستطیلی غوڅه برخه لري چی سوریي 12mm او پنډوالي يي 7 mm دي. د کړیدو له امله سترین انرژي په لاستي کی او هم سترین انرژي د محوری بار له امله په بولټ کی وټاکي. بولټ د ټیګیدو له امله کششي قوه د 500 N لري. دواړه غړی له فولادو A-36 جوړ شوي. په لاستي کی سوروی په پام کی مه نیسئ.



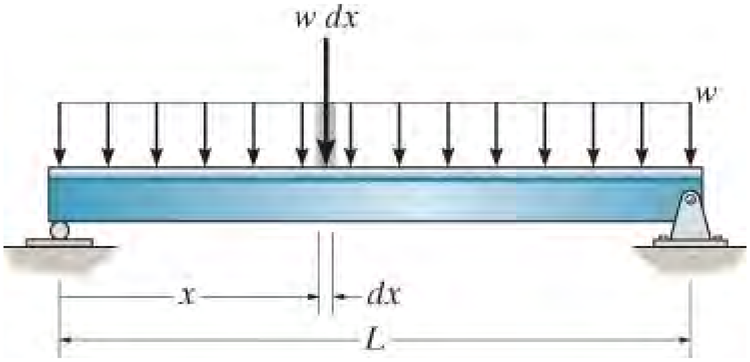
س 14-22

س 14-23 . په کنتیلیور بیم کی سترین انرژي د کړیدو له امله وټاکي. دا پوښتنه په دوه لارو حل کړي. (a) معادله 14-17 پلی کړي. (b) بار $w\,dx$ کوم چی په برخه dx عمل کړي او بیم یی په اندازه د y بیځایه کړي، دلته $y = w(-x^4 + 4L^3x - 3L^4)/(24EI)$ د ایلستیک منحني معادله ده. له همدی امله داخلی سترین انرژي د کوچنی ټوټی dx مساوی ده په بهرنی کار، د بیلګی په توګه $dU_i = ½\,(w\,dx)(-y)$. دا معادله انتیګریټ کوو تر څو ټوله سترین انرژيي په بیم کی معلومه شی. EI ثابت دی.



س 14-23

س 14-24* . په ساده اتکا بیم کی سترین انرژي د کرېدو له امله وټاکي. دا پوښتنه په دوه لارو حل کړي. (a) معادله 14-17 پلی کړي. (b) بار $w\ dx$ کوم چې په برخه dx عمل کړي او بیم یې په اندازه د y بیځایه کړي، دلته $y = w(-x^4 + 2Lx^3 - L^3x)/(24EI)$ د ایلستیک منحني معادله ده. له همدی امله داخلی سترین انرژي د کوچنی ټوټی dx مساوی ده په بهرنی کار، د بیلګی په توګه $dU_i = ½ (w\ dx)(-y)$. دا معادله انتیګریت کوو تر څو ټوله سترین انرژيي په بیم کی معلومه شی. EI ثابت دی.



.

س 14-24

14. 3 د انرژي زيرمه يا ساتنه (CONSERVATION OF ENERGY)

د انرژی ټولی طریقی د انرژی د توازن پر بنسټ ولاړ دی. ډیری وختونه دی ته د انرژی ساتنه ویل کیږی. په دې فصل کې به یوازې میخانیکي انرژي د انرژي توازن لپاره په پام کې ونیول شي. دا هغه انرژي ده چې دتودوخی او کیمیاوي تعاملاتولخوا رامینځته کیږي. برقی مقناطیسي اغیزې په پام کی نه دی نیول شوي. که چیرې بار په جسم باندی ورو ورو پلي شي، ځنګه چې دوی بې ځایه شي نو دا بارونه به په پایله کې بهرنی کار U_e ترسره کړي. دا بهرنی کار بیا په داخلي کار یا سترین

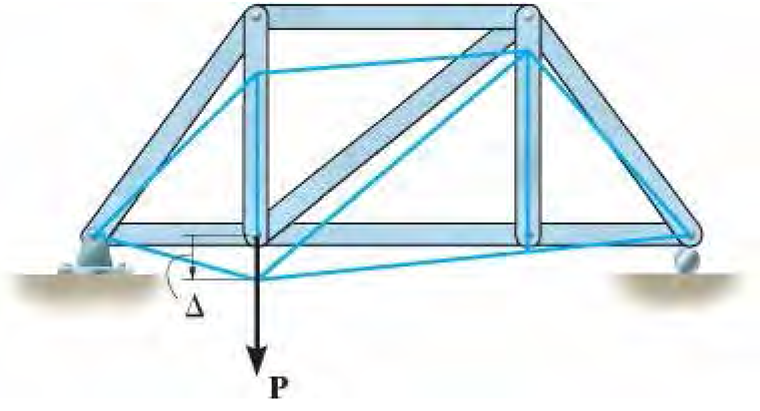
انرژي U_i کې بدليږي ، کوم چې په جسم کې زيرمه کيږي. کله چې بارونه له جسمه لرې شي، سترين انرژي په جسم کې، هغه بيرته اصلي، نه بدل شوی، موقعيت ته راولي، په دې شرط چې موادو له ايلستيکی حد نه، نه وي زيات شوی. دا د جسم د انرژي زيرمه کيدل، د رياضی له مخی داسی ليکلي شو:

$$U_e = U_i \qquad (14\text{–}23)$$

ټرس (Truss). د دې لپاره چې وښيو د انرژي ساتنه څنګه پلي کيږي، موږ به يو ټرس کوم چې په انځور 18-14 کی ښودل شوي په پام کې ونيسو، چې يو بار **P** وربāندی پلی شوی او د بيځايه کيدنی D په ټرس کی لامل کيږي. که چيری دا بار **P** په تدريجي ډول پلي شي، بهرنی کار د **P** لخوا ترسره کيږي او هغه د معادلی 2-14 په کارولو سره ټاکل کيږي کوم چې عبارت دی په $U_e = \frac{1}{2}P\Delta$. فرض کوو دا چې **P** په يو ځانګړي غړي کې محوري قوه **N** رامينځته کوي، ذخيره شوي د سترين انرژي په دې غړي کې په کارولو د معادلی 16-14 ټاکل کيږي. او هغه عبارت ده په $U_i = N^2L/2AE$. د ټرس د ټولو غړو راټوله شوی سترين انرژي له 23-14 معادلی څخه، نوارتيا لري:

$$\frac{1}{2}P\Delta = \sum \frac{N^2L}{2AE} \qquad (14\text{–}24)$$

يو ځلی چې قواوی (N) د ټولو غړيو د ټرس و ټاکل شي او د معادلی بني لور معلوم شي، بيا بيځايه کيدنه D د هغه ګنډی چې **P** هلته پلی شوی مونډل کيدی شي.

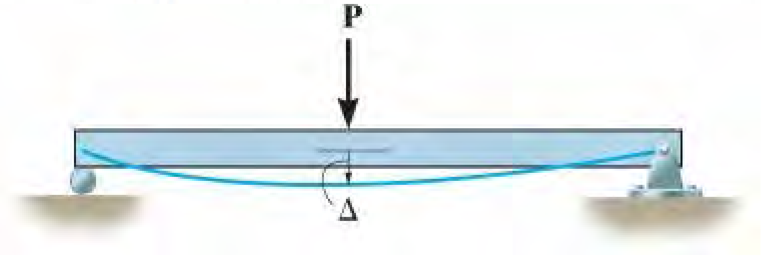


انځور 18-14

بيم (Beam). په دی لاندې بيم، انځور 14-19 ، بار **P** پيل شوي دې، اوس به موږ د عمودی بې ځايه کيدو D موندلو په اړه فکر وکړو. يو ځل بيا، بهرنی کار عبارت دی په D $U_e = \frac{1}{2} P$.

پدې حالت کې سترين انرژي پايله د داخلي شيير او مؤمنت چی د بار **P** له خوا رامينځته کيږي ده. په ځانګړي توګه د شيير انرژۍ ونډه د شيير له امله عموما په ډېرو بيمو بيځايه کيدو کې له پامه غورځول کيږي، پرته له هغه بيمه چې لنډ وي او خورا لوی بار وربانددی پلی شوي وي. (مثال 14.4 وګورئ). په پايله کې، د بيم سترين انرژي يوازې د داخلي کړيدونکی مؤمنت M په واسطه ټاکل کيږي ، او له همدې امله، د معادلې 14-17 په کارولو سره، د انرژی ساتنه اړتيا لري:

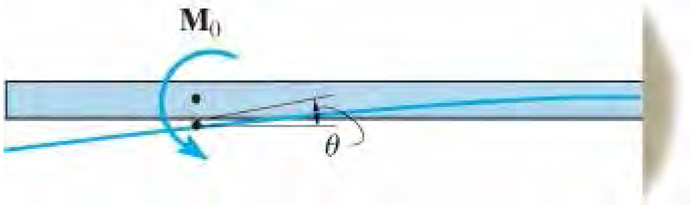
$$\frac{1}{2} P \Delta = \int_0^L \frac{M^2}{2EI} dx \qquad (14\text{–}25)$$



انځور 14-19

کله چې مؤمنت M تابع د موقعيت x و ټاکل شي او انتيګرال حل شي نو بيا D موندل کيدی شي.

که چيرې په بيم يو کپل مؤمنت $\mathbf{M}_0$ کوم چې په انځور 14-20 کی ښودل شوي، پلې شي بيا دا مؤمنت څرخيدونکي بيځايه کيدنه q په پلې شوي ټکې کې رامينځ ته کوي. ځکه چې يو کپل مؤمنت تنها هغه وخت کار کړی کله چې څرخيدل و مؤمی، د معادلی 14-5 په کارولو سره بهرنی کار عبارت دی په $U_e = \frac{1}{2} M_0 q$ او بيا



انځور 14-20

$$\frac{1}{2} M_0 \theta = \int_0^L \frac{M^2}{2EI} dx \qquad (14\text{–}26)$$

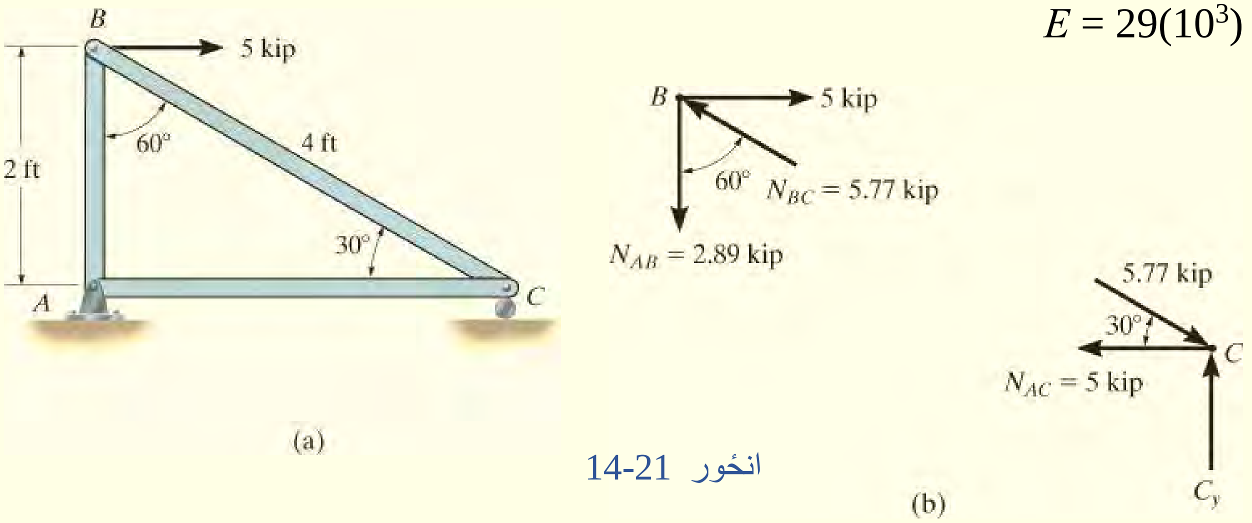
دلته q د ايلستيک منحنی ميلان په هغه ټکي کې چې $\mathbf{M}_0$ پلي شوي اندازه کوي.

د د معادلی 14-23 پلی کيدل ،د بيځايه کيدنی يا ميلان موندلو لپاره ، خورامحدود دي، ځکه چې يوازې يو بهرنی قوه يا کپل مؤمنت په غړي يا جوړښت عمل کړي، او يوازې بې ځايه کيدل په نقطه کی د بهرني قوی په لوري، يا ميلان د کپل مؤمنت په لور کې، محاسبه کيدی شي. که چيری له يوه ځخه ډير بهرني قواوی يا څو کپل مؤمنت پلي شوي وې ، بيا د هر بار بهرني کار بايد د هغې اړوند نامعلومه بې ځايه کيدنه پکې شامله کړي. په پايله کښې، له دې نامعلومو بې ځايه کيدو څخه هيڅ يو بيا نشي ټاکل کيدی، ځکه چې د حل لپاره يوازې يوه معادله $(U_e = U_i)$ شتون لري .

مثال 14.6

له دريو ميلو جوړه شوی ټرس ، انځور 14-21a ، باندی يوه افقی قوه 5 kips پلی شوي ده. که چيری غوڅه برخه د هر غړی $0.20\ \text{in}^2$ وی ، افقي بيځايه کيدنه په ټکی B کی و ټاکئ.

$E = 29(10^3)$ ksi



انځور 14-21

حل (SOLUTION)

موږ کولای شو چې ددی پوښتنې د حل لپاره د انرژي ساتنی طريقه پليي کړو، ځکه چې يوازې يوه بهرنی قوه په ټرس پلی شوي او د اړتيا وړ بيځايه کيدنه د قوی د پليکيدو په جهت واقع کيږي.
برسېره پردې، د ټرس د ريکشنونو قواوي په ټرس باندې کار نه کړي ځکه چې دوی بيځايه شوي نه دي.

د بندونو(ګنډو) د طريقې په کارولو سره، په هر غړي کې د قوی پيدا کول، آزاد ډايګرام د پن شويو بند ونو B او C په انځور 14-21b کی ښودل شوي معادله 4-24 پلي کوو او موږ لرو:

$$\frac{1}{2}P\Delta = \sum \frac{N^2L}{2AE}$$

$$\frac{1}{2}(5\text{ kip})(\Delta_B)_h = \frac{(2.89\text{ kip})^2(2\text{ ft})}{2AE} + \frac{(-5.77\text{ kip})^2(4\text{ ft})}{2AE} + \frac{(5\text{ kip})^2(3.46\text{ ft})}{2AE}$$

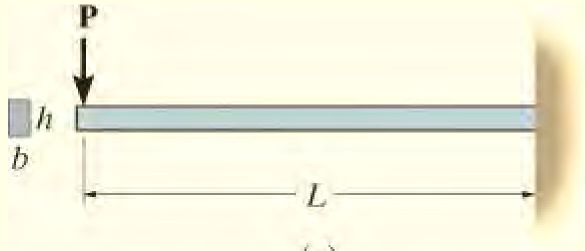
$$(\Delta_B)_h = \frac{47.32\text{ kip}\cdot\text{ft}}{AE}$$

عددی ډيټا د A او E لپاره ځای په ځای کوو او موږ دا لاندی په لاس راوړو:

$$(\Delta_B)_h = \frac{47.32\text{ kip}\cdot\text{ft}(12\text{ in./ft})}{(0.2\text{ in}^2)[29(10^3)\text{ kip/in}^2]} = 0.0979\text{ in.} \rightarrow \qquad \textit{Ans.}$$

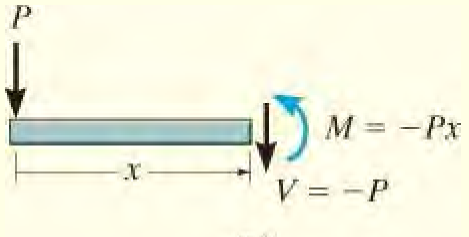
مثال 14.7

په انځور 14-22a کی ښودل شوي کنتيليور بيم يوه مستطيلي غوځه برخه لري، او يو بار P د هغه په پای کی وربانډی پلی شوي.



(a)

حل (SOLUTION)



(b)

داخلی شییر او مؤمنت تابع دی x د غوڅی برخی په طریقه موندل شوي، او په انځور 14-22b کی ښودل شوي.

د معادلی 14-23 په پلی کیدو سره سترین انرژي د دواړو، شییر او مؤمنت، له امله په پام کی نیولی شوي ده.

د معادلو 14-19 او 14-17 له مخی موږ لرو:

$$\frac{1}{2}P\Delta = \int_0^L \frac{f_s V^2\,dx}{2GA} + \int_0^L \frac{M^2\,dx}{2EI}$$

$$= \int_0^L \frac{\left(\frac{6}{5}\right)(-P)^2 dx}{2GA} + \int_0^L \frac{(-Px)^2 dx}{2EI} = \frac{3P^2L}{5GA} + \frac{P^2L^3}{6EI} \qquad (1)$$

د دې معادلې په ښي اړخ کې لومړی اصطلاح استازيتوب د سترين انرژی د شيير له امله کوي، په داسې حال کې چې دويمه برخه د کږيدو له امله سترين انرژي ده. لکه څنګه چې په مثال 14.4 کې ښودل شوي، د ډيرو بيمونو لپاره د شيير سترين انرژي د کږيدو سترين انرژي په نسبت خورا کوچنی ده. د دی قضی ښودلو لپاره د بيم انځور 14-22a کې، موږ اړتيا لرو

$$\frac{3}{5}\frac{P^2L}{GA} \ll \frac{P^2L^3}{6EI}$$

$$\frac{3}{5}\frac{P^2L}{G(bh)} \ll \frac{P^2L^3}{6E\left[\frac{1}{12}(bh^3)\right]}$$

$$\frac{3}{5G} \ll \frac{2L^2}{Eh^2}$$

څرنګه چې $E \leq 3G$ (مثال 14.4 و ګوري)، نو بيا

$$0.9 \ll \left(\frac{L}{h}\right)^2$$

نو که چیرې L نسبتا اوږد وي د h په پرتله، نو د شییر سترین انرژي له پام غورځول کیدی شي. په بل عبارت، د شییر سترین انرژي هغه وخت مهم کیږي کله چی بیم لنډه او ژورولي يي ډیر وی . د مثال په توګه، که $L = 5h$ ، نو تقریبا 28 ځله د کږوالي سترین انرژي به د شییر په پرتله په

بیم کې جذب شي ، نو له پامه غورځیدل د شییر سترین انرژی د یوې تېروتنې شاوخوا 3.6٪ په محاسبه کی کیږي. د دې سره په ذهن کې نیولو معادله 1 کیدی شي چی داسی یي ولیکو.

$$\frac{1}{2}P\Delta = \frac{P^2L^3}{6EI}$$

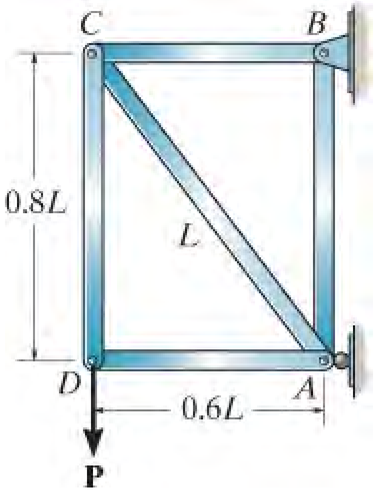
نو بیا

$$\Delta = \frac{PL^3}{3EI} \qquad \textit{Ans.}$$

سوالونه

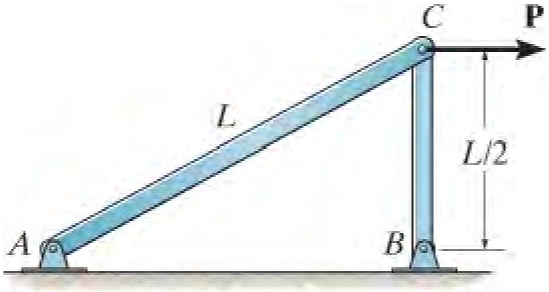
PROBLEMS

س 14-25 . عمودی بیځایه کیدنه د بند (joint) D و ټاکی. AE ثابت دی.



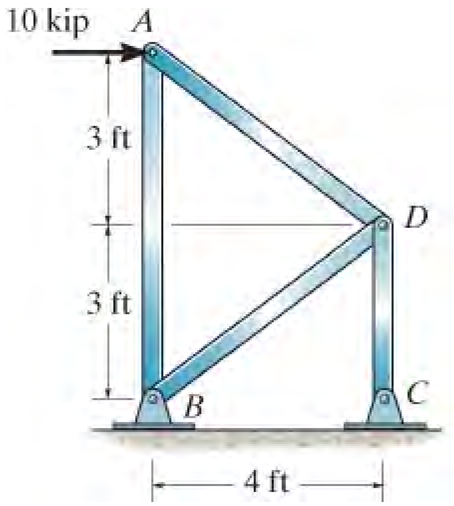
س 25 -14

س 14-26 . افقي بیځایه کیدنه د بند (joint) C و ټاکی. AE ثابت دی.



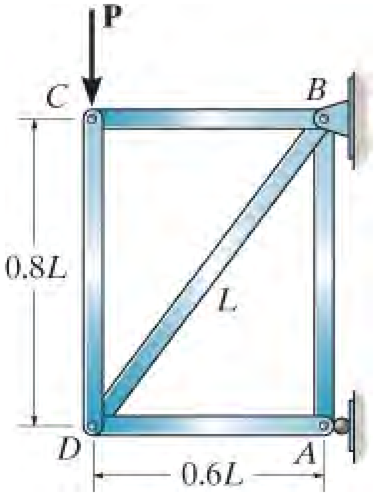
س 26 -14

س 14-27 . افقي بيځايه کيدنه د بند (joint) A و ټاکی. هر غړی له فولادوی A992 څخه جوړ او $1.5\ in^2$ غوڅې برخې ساحه لري.



س 27 -14

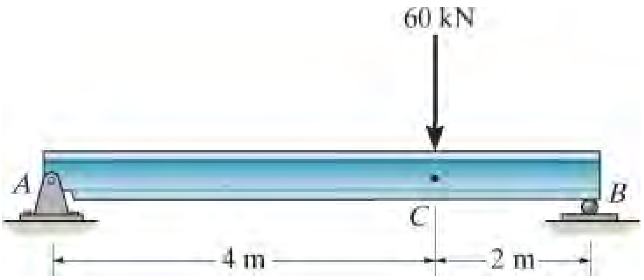
س 14-28 . عمودی بيځايه کيدنه د بند (joint) C و ټاکی. AE ثابت دی.



س 28 -14

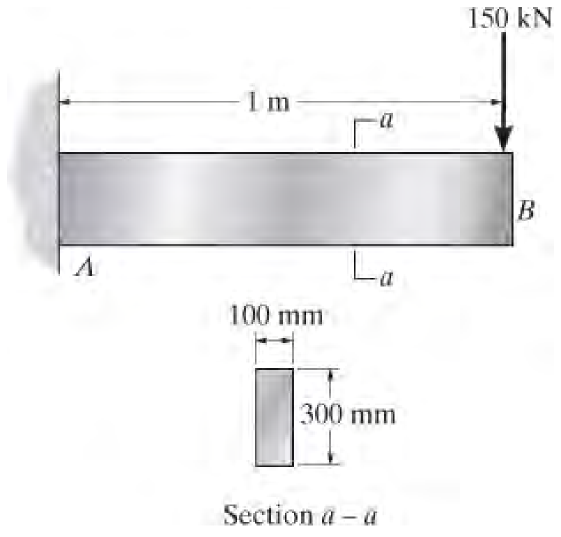
س 14-29 . عمودی بيځايه کيدنه د ټکی C د فولادو A992 بيم و ټاکی.

$$I = 80(10^6)mm^4$$



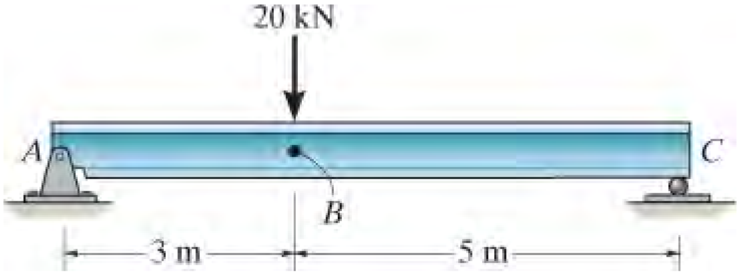
س 29 -14

س 14-30 . عمودی بیځایه کیدنه د پای B د کنتیلیور بیم وټاکي. بیم له المونیم الیاژ 6061-T6 څخه جوړ شوي ده او مستطیلی غوڅه برخه لري. دواړه، شییر او کږیدونکی سترین انرژی په پام کی و نیسي.



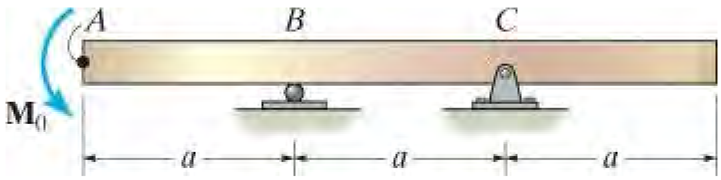
س 14- 30

س 14-31 . عمودی بیځایه کیدنه د ټکی B د فولادو A992 بیم و ټاکی. $I = 80(10^6)\text{mm}^4$



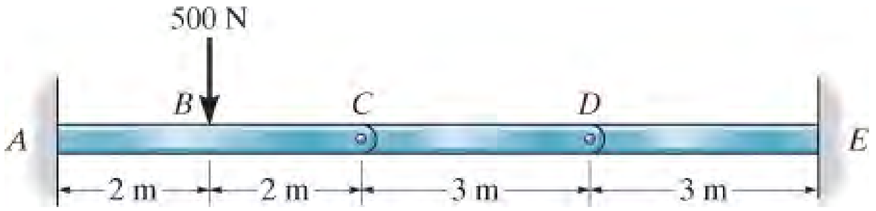
س 14- 31

س *14-32 . میلان په ټکی A د بیم کی وټکي. EI ثابت دی.



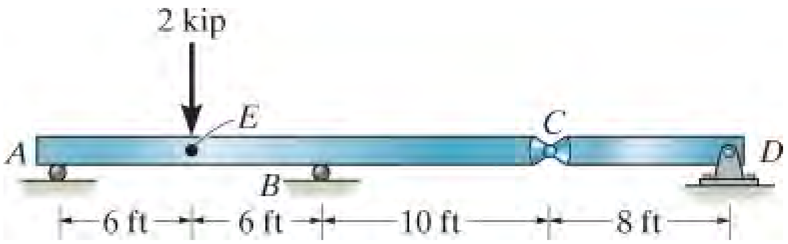
س 14- 32

س 14-33 . د فولادو A992 میلی په C او D کی په پن سره وصل شوی دي.که چیری هره میله یو شان مستطیلي غوڅه برخه ولري، کوم چې 200 mm لوړوالي او سوريي 100 mm وی ، عمودی بیځایه کیدنه د ټکی B و ټاکي. محوری بار په میلو کی په پام کی مه نیسئ.



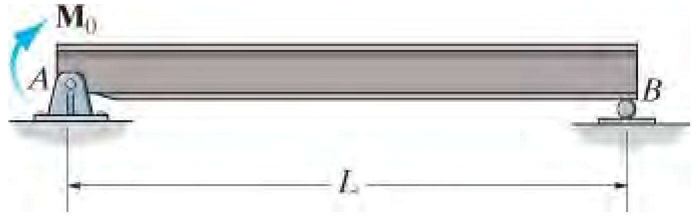
س 14- 33

س 14-34 . د فولادو A992 میلی په C کی په پن سره وصل شوی دي. که چیری هر میله 2 in. قطر ولري عمودی بیځایه کیدنه په E کی وټاکیدی شي.



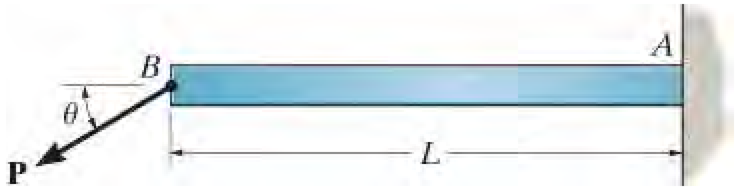
س 14- 34

س 14-35 . میلان د بیم په پن اتکاء A کی و ټاکي. تنها کږیدونکی سترین انرژی په پام کی و نیسئ. EI ثابت دی.



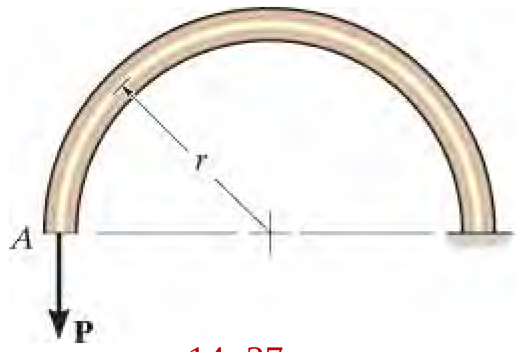
س 14- 35

س *14-36 . کنتیلورمستطیلي بیم د غوځی برخی ساحه A ، انرشیايي مؤمنت I ، او د ایلستیستی ماجولس E لری. که چیری بار $\mathbf{P}$ په ټکی B کی پلی شي بیځایه کیدنه په B کی په سمت د $\mathbf{P}$ و ټاکي. تاسو د کږیدو، محوری قووه ، او شییر په پام کی ونیسي.



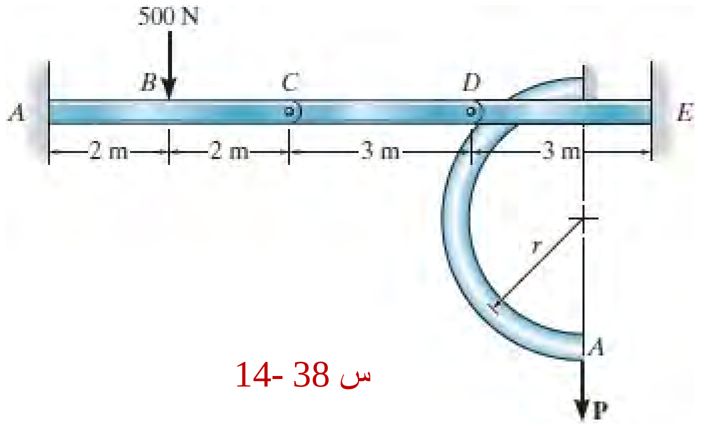
س 14- 36

س 14-37 . دا لاندې میله ګرده غوښه برخه لرې ، او انرشیايي مؤمنت يې I دي. که په A کې يوه عمودي قوه $\mathbf{P}$ عمل وکړي، عمودي بیځایه کیدنه ددې ټکې و ټاکي. يوازي سترين انرژی د کړیدو له امله په پام کی و نیسئ. د ایلستیستي ماجولس E دي.



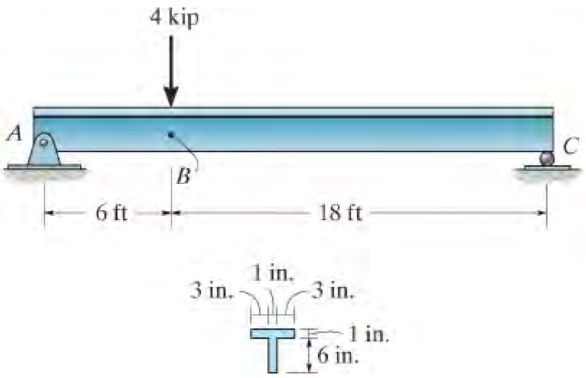
س 37 -14

س 14-38 . دا لاندې میله ګرده غوښه برخه لرې ، او انرشیايي مؤمنت يې I دي. که په A کې يوه عمودي قوه $\mathbf{P}$ عمل وکړي، عمودي بیځایه کیدنه ددې ټکې و ټاکي. يوازي سترين انرژی د کړیدو له امله په پام کی و نیسئ. د ایلستیستي ماجولس E دي.



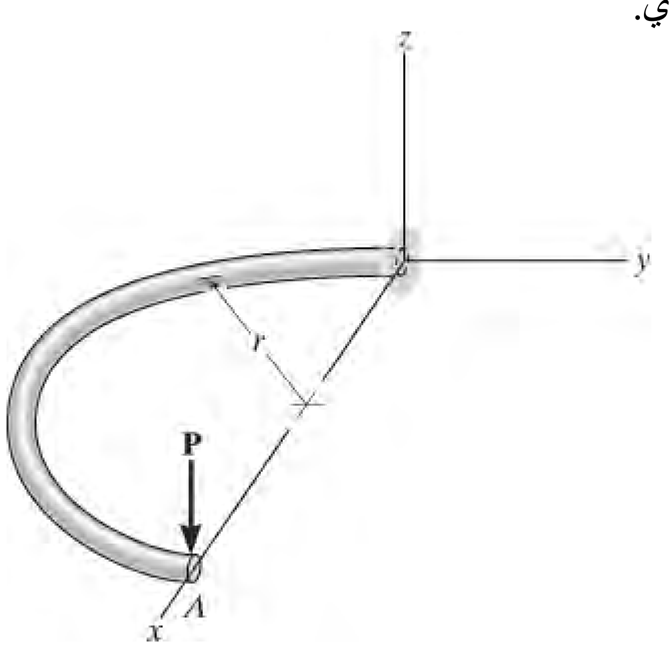
س 38 -14

س 14-39 . عمودي بیځایه کیدنه د ټکی B د المونیم 2014-T6 بیم و ټاکی.



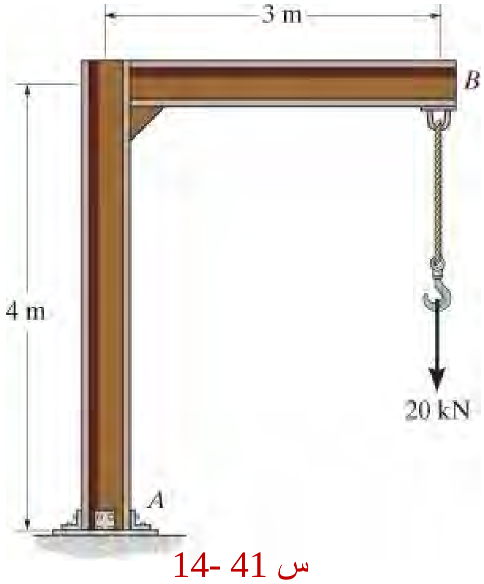
س 39 -14

س *14-40 . دا لاندی میله گرده غوټه برخه لری ، قطبي انرشياي مؤمنت (polar moment of inertia) يي J ، او انرشيايي مؤمنت يي I دي. که په A کی یوه عمودي قوه **P** عمل وکړي، عمودی بیځایه کیدنه ددی ټکی و ټاکي. یوازي سترین انرژی د کږیدو له امله په پام کی و نیسئ. د موادو ثابت ارقام E او G دي.



س 40 -14

س 14-41 . عمودی بیځایه کیدنه د پای B د لاندی چوکات و ټاکي. یوازي سترین انرژی د کږیدو له امله په پام کی و نیسئ. چوکاټ له فولادو A-36 اوسرورری فلنج W460 X 68 څخه جوړ شوي دي.

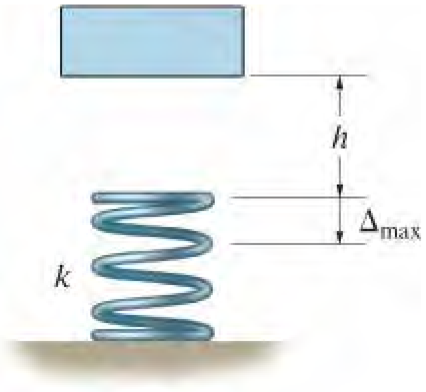


س 41 -14

14.4 د ټکر بار (IMPACT LOADING) :

تر دې دمه موږ ټول هغه بارونه په پام کې نيولي وو چې په تدريجي ډول په جسم باندی پلي کيږي، او په تدريجی ډول په جسم باندی اعظمي ارزښت ته رسيږي او جسم په ستاتيکی حالت کی پاتی کيږی. ځيني بارونه متحرک دي، لکه کله چې يو جسم د بل جسم سره ټکرکوي، اودا پيښه د لنډی مودي لپاره د دوی تر مينځ لويه قوه جوړه وي. که فرض کړو چې د ټکر په وخت کې د تودوخې، غږ، يا محلي پلاستيکي تخريبونو له امله، انرژي نده ورکه شويی، بيا موږ کولی شو د انرژي د ساتنې په کارولو سره د دې اغيزو ميخانيکيتونه مطالعه کړو.

د بلاک لويدل (Falling Block) . په لاندی انځور 23-14 کی ښودل شوي ساده بلاک او فنر سيستم په پام کی نيسو . کله چې بلاک د دريدلی حالت څخه ووزی، دا په يوه فاصله h کې رالويږي د فنر سره ټکر کوی او فنر په اعظمی فاصله د Δ_{max} ټيل وهي تر څو هغه دلږوخت دپاره توقف وکړي . که موږ د فنر کتله په پام کی ونه نيسو او دا فرض کړو چی فنر په ايلستيک ډول ځواب ورکوي، نو بيا د انرژی ساتنه داپه ګوته کوی، هغه کار چی د بلاک د وزن په واسطه په ښکته کيدو د فاصله $h + \Delta_{max}$ ترسره شوي مساوی دی په هغه اړين کار چی فنر په فاصله د Δ_{max} بې ځايه کړی. ځکه چی قوه په فنر کی د Δ_{max} سره په اندازه د $F = k\Delta_{max}$ اړه لري، چيرته چې k د فنر سختی ده، بيا:



انځور 23-14

$$U_e = U_i$$

$$W(h + \Delta_{max}) = \frac{1}{2}(k\Delta_{max})\,\Delta_{max}$$

$$W(h + \Delta_{max}) = \frac{1}{2}k\Delta_{max}^2 \qquad (14\text{–}27)$$

$$\Delta_{max}^2 - \frac{2W}{k}\Delta_{max} - 2\left(\frac{W}{k}\right)h = 0$$

ددی دوهم درجی معادلی حل د D_{max} لپاره دا لاندی حل د لوی ارزش راکوي:

$$\Delta_{max} = \frac{W}{k} + \sqrt{\left(\frac{W}{k}\right)^2 + 2\left(\frac{W}{k}\right)h}$$

پورته د حادثي خنډ د متحرکو وسایطو د ټکر انرژي جذب لپاره ډیزاین شوی

که وزن W په ستاتیکی حالت کی په فنر کینودل شي ، نو بیا بیځایه کیدنه د فنر عبارت ده په: $D_{st} = W/k$ د دی ساده کیدوښخه کار اخلو پورته معادل کیږي:

یا

$$\Delta_{max} = \Delta_{st} + \sqrt{(\Delta_{st})^2 + 2\Delta_{st}h}$$

$$\Delta_{max} = \Delta_{st}\left[1 + \sqrt{1 + 2\left(\frac{h}{\Delta_{st}}\right)}\right] \qquad (14\text{–}28)$$

یوځل چې D_{max} محاسبه شي، اعظمي قوه چی په فنر راځی له لاندی معادلی ټاکل کیدی شی.

$$F_{max} = k\Delta_{max} \qquad (14\text{–}29)$$

دا قوه او ورسره ترلي بې ځایه کیدنه یوازې په یوه لحظه کې واقع کیږي. په دی شرط چی بلاک د فنر څخه بیرته راتګ ونکړي. دا به تر هغه وخته پورې به اهتزاز ته دوام ورکړي چی دا حرکت ورو کیږی تر څو چی حرکت له مینځه ځي او بلاک ستاتیکی موقعیت نیسي، D_{st} .

د یوې ځانګړې قضیې په توګه، که بلاک ډیر نیږدی د فنر برسیره پورته و نیول شي او بیا خوشې شي، بیا له معادله 14-28 څخه، چی $h = 0$ ده، اعظمی بې ځایه کیدل دبلاک به وي :

$$D_{max} = 2D_{st}$$

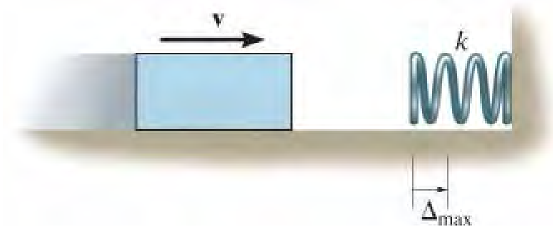
په بل عبارت، د ډینامیک بارلګېدلو بې ځایه کېدنه دوه چنده د هغه څه ده که چیرې بلاک د فنر لخوا ملاتړ شوی وي (یو ستاتیکی بار).

د بلاک ښویدل (Sliding Block). د ورته تحلیل په کارولو سره، دا هم ممکنه ده چې اعظمی بیځایه کیدنه د فنر د پاي که چیری بلاک په یوه افقي ښویه سطحه باندی په یوه معلوسرعت v سره حرکت وکړي، مخ کی له دی چی د فنر سره یي ټکر وشي، معلومیدی شي، انځور 14-24 . دلته د بلاک کنټیک یا متحرکه انرژی عبارت ده په $\frac{1}{2}(W/g)v^2$*، به په فنر کې په زیرمه شوي انرژي بدله شي. له همدې امله،

$$U_e = U_i$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{W}{g}\right)v^2 = \frac{1}{2}k\Delta_{max}^2$$

$$\Delta_{max} = \sqrt{\frac{Wv^2}{gk}} \qquad (14\text{–}30)$$



انځور 14-24

ځکه چی ستاتیکی بیځایه کیدنه د یو بلاک چی په فنر یي تکیه کړی وی عبارت دی په

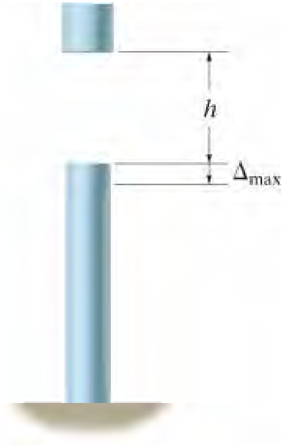
$D_{st} = W/k$ ، نو بیا

$$\Delta_{max} = \sqrt{\frac{\Delta_{st}v^2}{g}} \qquad (14\text{–}31)$$

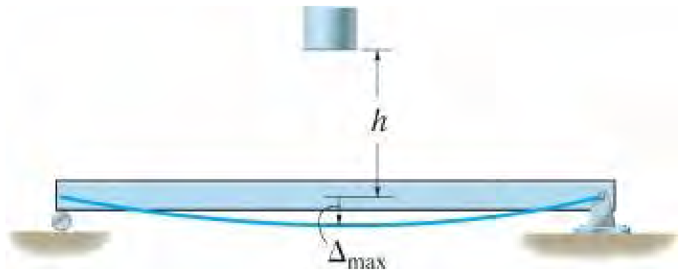
*کنټیک انرژي د (حرکت انرژي) ده. د یو جسم د حرکت لپاره هغه عبارت ده په $\frac{1}{2}m\,v^2$ ، دلته m د جسم کتله اوهغه $m = W/g$ ده.

عمومي ستونزه (General Problem).

د دې ساده تحلیل په نتیجه کې کیدی شي چې په ایلستیکی غړی کې د ټکر له امله رامینځ ته شوی تقریبی بیځایه کیدنه او ستریس مشخص شي. د دې لپاره موږ باید د ټکر په اړه ځینې اړین انګیرنې جوړی کړو ،تر څو وکولای شودا چلند د ټکر کونکي جسمونو د بلاک او فنر ریکشن سره ورته شي ، او وکړی شو هغه ماډلونه چې پورته يې بحث وشو وکاره وو. دلته به موږ حرکت کوونکی جسم د بلاک په څیرسخت وګڼو ، او ساکن جسم د فنر په څیر د بیځایه کیدو وړ وي. همدارنګه، د فنر په څیر، موږ به فرض کړو چې مواد په ایلستیکی خطي ډول چلند لري او د ایلستیکی جسم کتله له پامه غورځول کیدی شي. داسی پوهه اواحساس وکړئ چې دا ټول انګیرنې به د دواړو، اعظمي ستریس او بیځایه کیدنه، به د ایلستیکی جسم محافظه کار اټکل لامل وي . په بل عبارت، محاسبه شوي ارزښتونه به د هغو څخه لوی وي چې واقعا واقع کیږي.



یو څو مثالونه چې دا تیوري پری پلي کیدی شي په انځور 25-14 کې ښودل شوي. دلته د پیژندل شوي وزن د یوه بلاک په پایه او بیم باندی غورځول کیږي، چې په دوی کې د اعظمي بیځایه کیدنی D_{max} لامل کیږي. د رالوید شوي بلاک انرژي په لنډه توګه بدلیږی په محوری سترین انرژی په پایه



انځور 25-14

کی ، او کږیدونکی سترین انرژي په بیم کې.* د دې لپاره چې اعظمی بیځایه کیدنه D_{max} معلوم کړو، موږ کولی شي د بلاک ـ فنر سیسټم په ډول ورته طریقه وکاروو، او هغه دا دی چې د انرژی د ساتنی معادلی دبلاک او پایي یا بلاک او بیم لپاره ولیکو او بیا یې د D_{max} موندلو لپاره حل کړو. په هرصورت، موږ کولی شو دا سوالونه په مستقیم ډول په ښودلو د پایي او بیم ماډل، د یوه **فنر په**

توګه ، هم حل کړو. د مثال په توګه، که یو قوه **P** د پایي پورتنی برخه بې ځایه کړي $D = PL/AE$، نو یو فنر چې سختی یې $k = AE/L$ وي د **P** لخوا ورته مقدار بېځایه کیدنه به وویني، دا دی $D = P/k$. په ورته ډول، د ضمیمې C څخه، یو قوه **P** د ساده ملاتړ شوي بیم په مرکز کې پلي کیږي د بیم د مرکز بیځایه کیدنه $D = PL^3/48EI$، او له همدې امله یو مساوي فنربه د k $=48EI/L^3$ سختی ولري. په هرصورت، د معادلی 28-14 یا 30-14 پلي کولو لپاره دا اړینه نده چې واقعا د دې مساوي فنر سختی ومومئ. ټول د D_{max} د ټاکلو لپاره د *ستاتیک بې ځایه کیدنی* D_{st} محاسبه کول اړین دی، د وزن له امله د $P_{st} = W$ د بلاک چې تکیه یې کړي په پایه یا بیم.

یوځل چې D_{max} وټاکل شي ، نو بیا اعظمي متحرک قوه کیدی شي له $P_{max} = kD_{max}$ څخه محسابه شي. بیا که موږ P_{max} په پام کې ونیسو چې *مساوي ستاتیک بار دي*، په غړي کې اعظمي سټریس کیدی شي د ستاتیک او د موادو میخانیک تیوري په کارولو سره و ټاکل شي. البته دا سټریس یوازې د یوې لحظی لپاره عمل کوي، څکه چې پوست یا بیم به لړزیدلو پیل کوي، په دې توګه په موادو کی سټریس په بدلیدلو پیل وکړي.

د متحرکی قوی P_{max} نسبت ستاتیک قووی $P_{st} = W$ ته د اغیزو فکتور n، ویل کیږي .دا فکتور د پلی شوي ستاتیک بار لوړوالی استازیتوب کوي، ترڅو دا په متحرک ډول ومنل شي. څرنګه چې $P_{max} = kD_{max}$ او $P_{st} = kD_{st}$ ، بیا له معادلی 28-14 څخه د ټکر فکتور کیږي:

$$n = 1 + \sqrt{1 + 2\left(\frac{h}{\Delta_{st}}\right)} \qquad (14\text{–}32)$$

د دې حادثي ساتونکي غړي باید داسی ډیزاین شوی وي چی د ریل ګاډي ټکر بار اود حرکت نیولو لپاره ټاکل شوي اغیزي مقاومت وکړي.

د یو پیچلي سیستم لپاره چې غړی یې تړل شوی وی، د ټکر فکتور له تجربی او آزمویني څخه ټاکل کیږي. یو ځل چی n معلوم شي ، بیا متحرک سټریس او بیځایه کیدنه D_{max} د ټکر په ټکی کی موندل کیدي شي له ستاتیک سټریس s_{st} او ستاتیک بیځایه کیدنی D_{st} کوم چی د بار له امله رامینځ ته شوي . او هغوی د $s_{max} = n\, s_{st}$ او $D_{max} = n\, D_{st}$ څخه معلومیږی.

*سترین انرژی د شییر له امله په پام کی نه ده نیول شوی د هغه دلیلونو له امله کوم چی په مثال 14.4 کی ورباندی بحث وشو.

مهم ټکي

IMPORTANT POINTS

- هغه ټوکي چې په لنډ وخت کې يو بل سره ټکر وکړي، امپکټ (impact) رامینځته کيږي اود دی دوه ټوکيو ترمينځ لوی قوه رامینځته کيږي.
- موږ کولئ شو حرکتکونکی جسم کلک فرض کړو ، تر څو وکړای شو د امپکټ اغيزې تحليل کړو. د ساکن جسم مواد خطي ايلستيک چلند لرونکي دي، د ټکر په وخت کې هيڅ انرژي له لاسه نهورکوي، جسمونه د ټکر په وخت کې په تماس کې پاتې کيږي، او د ايلستيک لرونکي جسم کتله له پامه غورځول کيدي شي.
- په جسم باندې متحرک بارتاثيرله ستېټيک باره تاکل کيدی شی کله چې دا بار په يوه امپکټ فکتور ضرب شی چې د متحرک بار اغيزه ښيی.

مثالونه

مثال 14.8

په انځور 26-14 کې يو د المونيم پايپ ښودل شوي او هغه د 150 kip بار ملاتړ کړي. د پايپ په پورتنی برخه کې اعظمي بې ځايه کيدل معلوم کړئ که (a) بار په تدريجي ډول پلي شوی وی (b) بار په ناڅاپه توګه له پورتنی برخی د پايپ خوشي کيږي کله چې $h = 0$. فرض کړئ چې المونيم په ايلستيکی ډول چلند کوي . کار واخلی له $E_{al} = 10(10^3)$ ksi .

حل (SOLUTION)

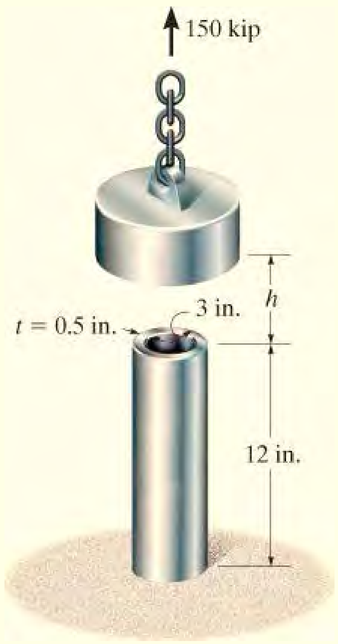
برخه a : کله چې بار په تدريجي ډول پلي شی، د وزن له امله تر سره شوی کار به په ايلستيکی انرژي بدل کې د پايپ ښ بدل شی. د انرژی د ساتنی قضی په ا ساس ليکی شو:

$$U_e = U_i$$

$$\frac{1}{2}W\Delta_{st} = \frac{W^2L}{2AE}$$

$$\Delta_{st} = \frac{WL}{AE} = \frac{150\text{ kip}(12\text{ in.})}{\pi[(3\text{ in.})^2 - (2.5\text{ in.})^2]\,10(10^3)\text{kip/in}^2}$$

$$= 0.02083\text{ in.} = 0.0208\text{ in.} \qquad \textit{Ans.}$$



انځور 14-26

البته دا پایلی په مستقیم ډول په پلي کولو د $D_{st} = NL/AE$ هم په لاس راځي.

برخه b:

معادله 14-28 پلي کیدی شي، په h=0 . له همدی امله

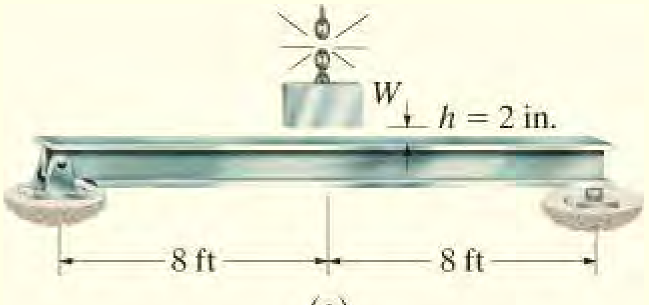
$$\Delta_{max} = \Delta_{st}\left[1 + \sqrt{1 + 2\left(\frac{h}{\Delta_{st}}\right)}\right]$$
$$= 2\Delta_{st} = 2(0.02083 \text{ in.})$$
$$= 0.0417 \text{ in.} \qquad \textit{Ans.}$$

له همدی امله بیځایه کیدنه د بار، کله چی په متحرک ډول پلی شي دوه چنده زیات ده په پرتله د هغه چی ستاتیکلی پلی شوی وي. په بل عبارت د امپکټ فکتور n= 2 ، معادله 14-32 .

مثال 14.9

د فولادو A992 بیم کوم چی په انځور 14-27a کی ښودل شوی له W10 X 39 جوړ شوي.

که چیری یو بار W =1.50 kip له لوړوالي h =2 in. په بیم راولویږي، د بیم اعظمی ستریس او اعظمی بیځایه کیدنه و ټاکي. E_{st} =29 (10^3) ksi وکاروي.



حل (SOLUTION) I

معادله 14-28 به موږ دلته پلی کړو. لمړي باید D_{st} محاسبه کړو. د ضمیمی C جدول او د ضمیمي B ډیتا د W10 X 39 خاصیتونو ټاکلو لپاره کاروو، موږ لرو

$$\Delta_{st} = \frac{WL^3}{48EI} = \frac{(1.50\text{ kip})(16\text{ ft})^3(12\text{ in./ft})^3}{48[29(10^3)\text{ ksi}](209\text{ in}^4)} = 0.03649\text{ in.}$$

$$\Delta_{max} = \Delta_{st}\left[1 + \sqrt{1 + 2\left(\frac{h}{\Delta_{st}}\right)}\right]$$

$$= 0.03649\text{ in.}\left[1 + \sqrt{1 + 2\left(\frac{2\text{ in.}}{0.03649\text{ in.}}\right)}\right] = 0.420\text{ in.} \qquad \textit{Ans.}$$

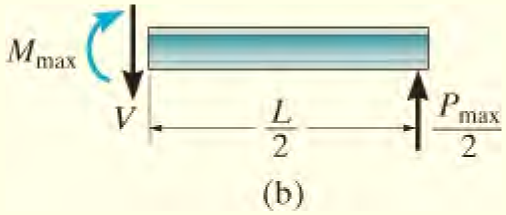
د $k = 48EI/L3$ سره، معادل ستاتیک بار کوم چی لامل د دی بیځایه کیدنی کیږي عبارت دی په

$$P_{max} = \frac{48EI}{L^3}\Delta_{max} = \frac{48(29(10^3)\text{ ksi})(209\text{ in}^4)}{(16\text{ ft})^3(12\text{ in./ft})^3}(0.420\text{ in.}) = 17.3\text{ kip}$$

ددی بار داخلی مؤمنت اعظمی دی په مرکز د بیم کی، د برخی طرقی سره، انځور 14-27b ، او لیکلی شو $M_{mx} = P\max L/4$. د کږیدو فورمول په پلی کولو سره کږیدونکی ستړیس داسی پیدا کوو

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}\,c}{I} = \frac{P_{max}\,Lc}{4I} = \frac{12E\,\Delta_{max}\,c}{L^2}$$

$$= \frac{12[29(10^3)\text{ kip/in}^2](0.420\text{ in.})\,(9.92\text{ in./2})}{(16\text{ ft})^2(12\text{ in./ft})^2} = 19.7\text{ ksi} \qquad \textit{Ans.}$$



انځور 14-27

حل II (SOLUTION)

دا ممکنه ده چی ډینامیک یا اعظمی بیځایه کیدنه D_{max} له لمړي اصولو څخه واټاکو. بهرنی کار د وزن W لویدلو عبارت دی په $U_e = W(h + D_{max})$. څکه چی بیم په اندازه د Dmax بیځایه کیږي او $P_{max} = 48EI\, D_{max}/ L^3$ ، نو بیا

$$U_e = U_i$$

$$W(h + \Delta_{max}) = \frac{1}{2}\left(\frac{48EI\Delta_{max}}{L^3}\right)\Delta_{max}$$

$$(1.50\text{ kip})(2\text{ in.} + \Delta_{max}) = \frac{1}{2}\left[\frac{48[29(10^3)\text{kip/in}^2]209\text{ in}^4}{(16\text{ ft})^3(12\text{ in./ft})^3}\right]\Delta_{max}^2$$

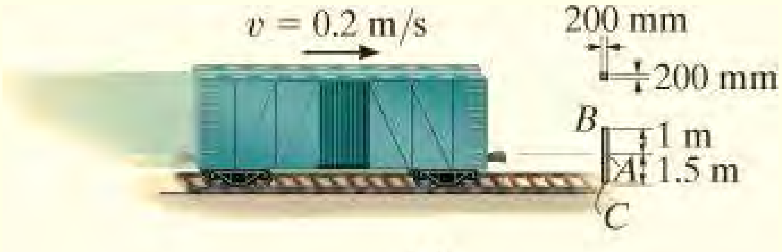
$$20.55\Delta_{max}^2 - 1.50\Delta_{max} - 3.00 = 0$$

کله چی دا حل شي او مثبت جذر يي و نیسو دا لاندی په لاس راځي

$$\Delta_{max} = 0.420\text{ in.} \qquad \textit{Ans.}$$

مثال 14.10

یو د اورګاډي موټر چې ګمان کیږي سخت دي او د 80 Mg کتله لري، او په $v = 0.2$ m/s سرعت سره مخ په وړاندې ځي تر څو هغه په یو 200 mm په 200 mm فولادی پایي په موقعیت A سره ټکر کوي، انځور 14-28a . که چیرې پایه په څمکه په C کې کلک تړل شوی وي، د دې ټکر له امله د پورتنی برخی B اعظمي افقی بې ځایه کیدل وټاکئ . $E_{st} = 200$ GPa واخلئ.



(a)

حل (SOLUTION)

دلته د اورګاډي موټر ، متحرک انرژي د پايي په داخلی سترين انرژي، يوازې د برخې AC د پايي کې، بدليږي . (برخه BA باندی داخلی بار نه پلی کيږي) .

موږ به د $(\Delta_A)_{max}$ حلولو لپاره د معادلی 31-14 کارولو پرځای ، له لومړي اصولو کارولو کار واخلو . فرض کړئ چې دا ټکی A بې ځايه شوی په اندازه د $(\Delta_A)_{max}$ ، بيا قوه P_{max} چې د دې بې ځايه کيدو لامل کيږي د ضميمه C جدول څخه ټاکل کيدی شي موږ لرو

$$P_{max} = \frac{3EI(\Delta_A)_{max}}{L_{AC}^3} \quad (1)$$

نو بيا

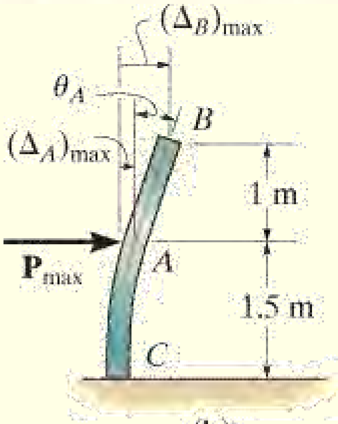
$$U_e = U_i;$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}P_{max}(\Delta_A)_{max}$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\frac{3EI}{L_{AC}^3}(\Delta_A)_{max}^2; \quad (\Delta_A)_{max} = \sqrt{\frac{mv^2L_{AC}^3}{3EI}}$$

په رياضی ډيټا کی دا ځای پر ځای کوو او دا لاندی حاصل کيږي

$$(\Delta_A)_{\max} = \sqrt{\frac{80(10^3)\ \text{kg}(0.2\ \text{m/s})^2(1.5\ \text{m})^3}{3[200(10^9)\ \text{N/m}^2[\frac{1}{12}(0.2\ \text{m})^4]}} = 0.01162\ \text{m} = 11.62\ \text{mm}$$



(b)

له معادلی 1 کار اخلو، قوه $P_{\max}$ بيا کيږي

$$P_{\max} = \frac{3[200(10^9)\ \text{N/m}^2][\frac{1}{12}(0.2\ \text{m})^4](0.01162\ \text{m})}{(1.5\ \text{m})^3} = 275.4\ \text{kN}$$

په انځور 14-28b ، برخه AB د پايي مستقيم پاتی کيږي. د اعظمی بيځايه کيدني په B کی ، موږ بايد لمړي q_A وټاکو.

د ضميمي C جدول له مناسب فورمول څخه موږ لرو

$$\theta_A = \frac{P_{\max}L_{AC}^2}{2EI} = \frac{275.4(10^3)\ \text{N}\ (1.5\ \text{m})^2}{2[200(10^9)\ \text{N/m}^2][\frac{1}{2}(0.2\ \text{m})]^4} = 0.01162\ \text{rad}$$

اعظمی بیځایه کیدنه په B کې عبارت ده په

$$(\Delta_B)_{max} = (\Delta_A)_{max} + \theta_A L_{AB}$$

$$= 11.62\text{ mm} + (0.01162\text{ rad})1(10^3)\text{ mm} = 23.2\text{ mm} \qquad Ans.$$

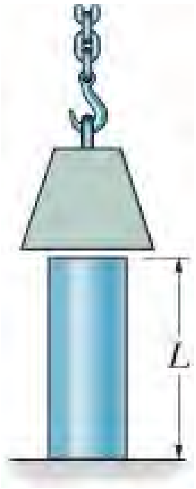
سوالونه

PROBLEMS

س 14-42 یوه 4 m اوږده میله 30 mm قطر لری. ټوله ایلستیک انرژي چی دا جذب کولای شي و ټاکی که چیری (a) دا له فولادو جوړعهه شوی ویکله چی $E_{st} = 200GPa, s_Y = 800$ MPa او (b) میله له المونیم الیاژ څخه جوړه چیری چی $E_{al} = 70$ GPa, $s_Y = 405$ MPa

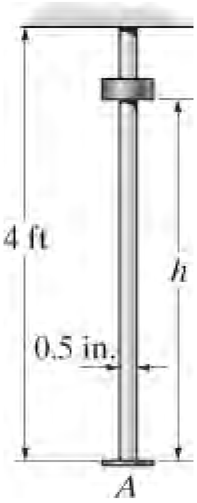
س 14-43. د سره برنجو C83400 میلی قطر معلوم کړي، 8 ft اوږده او د 800 ft.lb انرژی جذبولو په کشش کی له تکر بار څخه . ییلدینګ مینځ ته نه راځي.

س *14-44. د یوی 50-Mg کتله کله چی د فولادی پایي په پورتنی برخه کی وي سرعت v , يي و ټاکی، که چیری وروسته له ټکر اعظمی ستریس په پایه کی 550 MPa وی. د دی پایی اوږدوالی $L = 1$m او غوڅه برخه يي 0.01 m^2 دي. $E_{st} = 200GPa, s_Y = 600MPa$.



س 44 -14

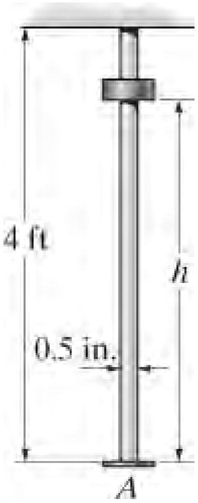
س 14-45. د یوه کالر (collar) وزن 50- lb دي، او دا په تایتینیم میله کی رالویږي . که چیری د تایتینبم میلی قطر 0.5 in. وی، اعظمی ستریس په میله کی وټاکي (a) که چیری له لوړوالي $h = 1$ ft راولویږي (b) که له لوړوالي $h \approx 0$ او (c) په کراري سره په فلنج A کینودل شي.
$E_{ti} = 16(103)$ ksi
. $s_Y = 60$ ksi



س 45 -14

س 14-46. د یوه کالر (collar) وزن 50- lb دي، او دا په تایتینیم میله کی رالویږي . که چیری د تایتینبم میلی قطر 0.5 in. وی اعظمی لوړوالی h داسی معلوم کړي کله چی دا کالر رالویږي او د میلی فلنج سره په ټکی A کی ټکر مومي ، هغه په دایمي توګه خرابه نکړي.

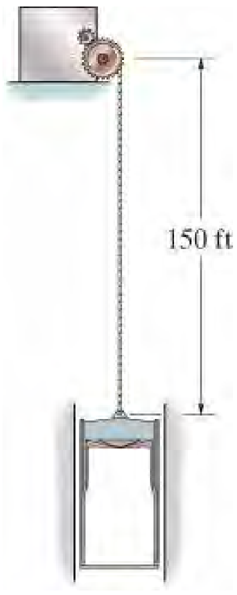
. $s_Y = 60$ ksi ، $E_{ti} = 16(10^3)$ ksi .



س 46 -14

س 14-47. یو فولادی کیبل .0.40 in قطر لري او له ډرم (drum) تاو شوی دی. دا د یو 800 lb لفت ټیټولو لپاره کارول کیږي. لفت 150 ft له ډرم ښکته دی او په ثابت سرعت 2 ft/s ښکته کیږي چي ډرم دفعتاً توقف کړي. اعظمی ستریس په کیبل کی کله چی دا واقع کیږي و ټاکي.

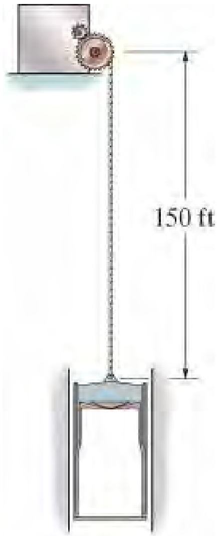
$\sigma_Y = 50$ ksi ، $E_{st} = 29(10^3)$ ksi .



س 47 -14

س *14-48. یو فولادی کیبل .0.40 in قطر لري او له ډرم (drum) تاو شوی دی. دا د یو 800 lb لفت ټیټولو لپاره کارول کیږي. لفت 150 ft له ډرم ښکته دی او په ثابت سرعت 3 ft/s ښکته کیږي چی ډرم دفعتاً توقف کړي. اعظمی ستریس په کیبل کی کله چی دا واقع کیږي و ټاکي.

$\sigma_Y = 50$ ksi ، $E_{st} = 29(10^3)$ ksi .



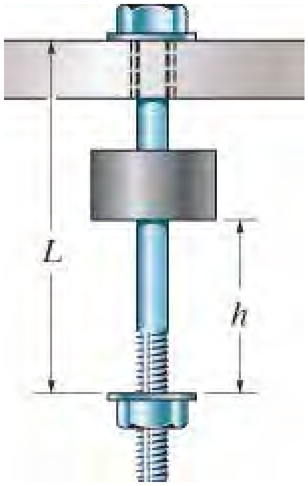
س 48 -14

س 14-49. یو A-36 فولادی بولټ اړین دی چې انرژي د 2-kg کتله ،کله چې له لوړوالي h =30 mm را لویږي، جذب کړي. که قطر د بولټ 4 mm وي اړین اوږدوالي L يي داسی وټاکی تر څو ستریس په بولټ کی له 150 MPa زیادت ونکړي.

س 14-50. یو A-36 فولادی بولټ اړین دی چې انرژي د 2-kg کتله ، کله چې له لوړوالي h =30 mm را لویږي، جذب کړي. که قطر د بولټ 4 mm او اوږدوالي L = 200 mm وي معلوم کړي چی ستریس په بولټ کی به له 175 MPa زیادت وکړي.

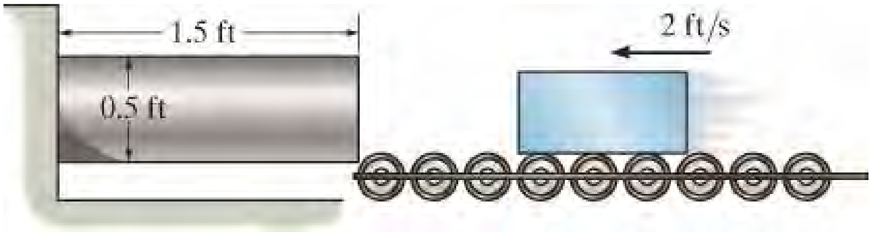
س 14-51. یو A-36 فولادی بولټ اړین دی چې انرژي ، د 2-kg کتله کله چی د 4 mm قطر بولټ شنک په 150 mm اوږدوالي لویږي، جذب کړي.

معلوم کړي اعظمی لوړوالي h د لویدو تر څو ستریس په بولټ کی له 150 MPa زیادت ونکړي.



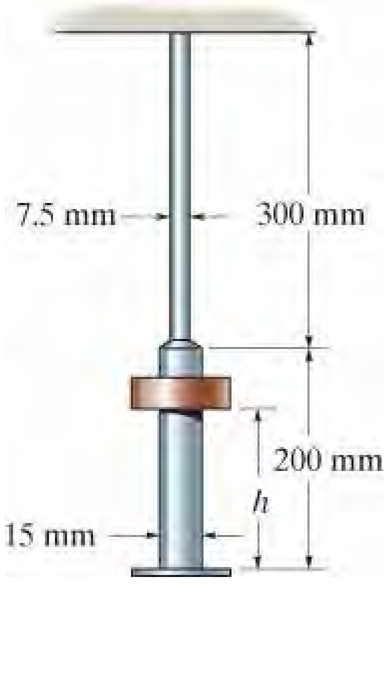
س 14- 49/50/51

س *14-52. يو سلنډر چې ابعاد يې په لاندې انځور کې ښودل شوي له مګنيزيم Am 1004-T61 څخه جوړ شوي . که چيرې يو سخت بلاک کوم چې 800 lb وزن لرى او په 2 ft/s په حرکت کيدي ورسره ټکر کړي، اعظمى ستريس په بلاک کې و ټاکي. د سلندر کتله د پام وړ نه ده.



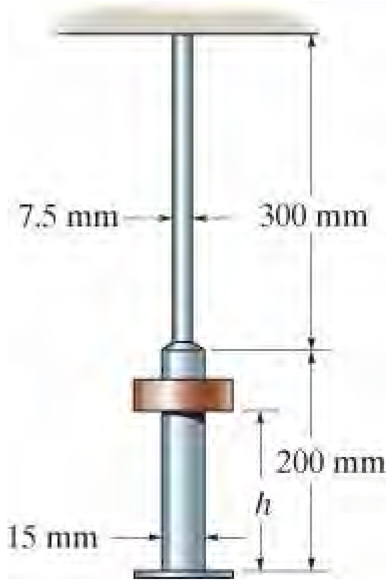
س 52 -14

س 14-53. د کمپازيت المونيم 2014-T6 يوه ميله له دوو برخو جوړه شوي ده، يوه برخه يې 7.5mm قطر او بله برخه يې 15 mm قطر لري. يو کالر د 10-kg له لوړوالي د h = 100 mm راويږي ، اعظمى محورى ستريس په ميله کې و ټاکي.



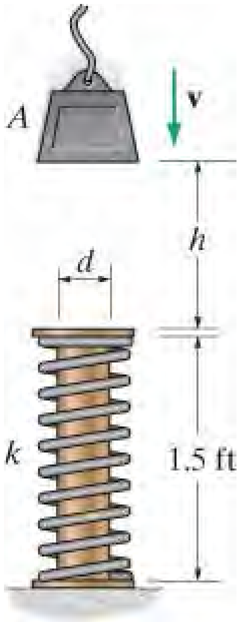
س 53 -14

س 14-54. د کمپازیت المونیم 2014-T6 یوه میله له دوو برخو جوړه شوي ده، یوه برخه یي 7.5mm قطر او بله برخه یي 15 mm قطر لري. اعظمی لوړ والی h داسی معلوم کړي ترڅو د 10- kg کالر راولویدو له امله اعظمی محوری سټریس s_{max} = 300 MPa په میله کی جوړ کړي.



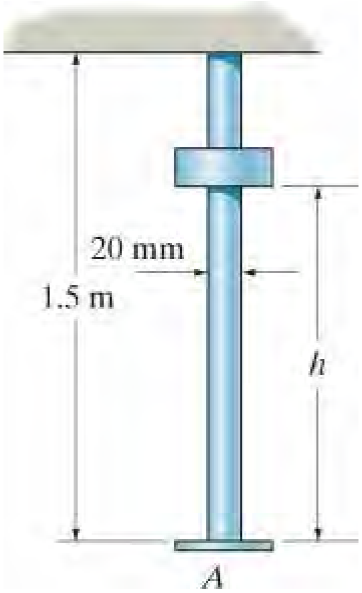
س 54 -14

س 14-55. کله چی 100-lb بلاک په لوړوالي h =3 ft د سلندری پایي او فنر اسامبلی په سر وی، سرعت یي v = 20 ft/s دی. که پایه له تایتینیم 2014-T6 اود فنر سختوالي k = 250 kip/in وی، اړین کوچنی قطر d د پایي تر نیږدی $\frac{1}{8}$ انچ داسی و ټاکی، کله چی په بلاک و لګیږي مواد یي ییلد و نکړي.



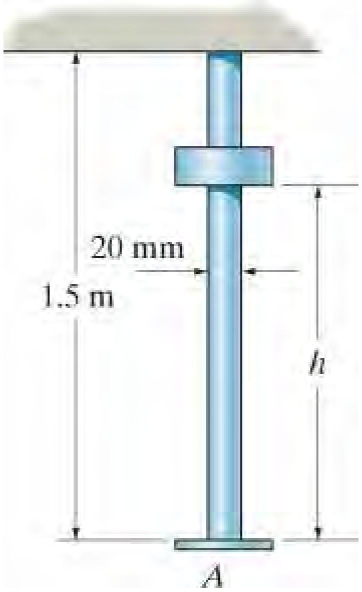
س 55 -14

س *14-56. یوه کالر (collar) 5 kg کتله لري ، او دا په تایتینیم Ti-6AL-4Vمیله کی رالویږي . که چیری د تایتینبم میلی قطر 20 mm وی، اعظمی ستریس په میله کی وټاکي (a) که چیری کالر له لوړوالي h =1 m راولویږي (b) که له لوړوالي $h \approx 0$ او (c) په کراري سره په فلنج A کیښودل شي .



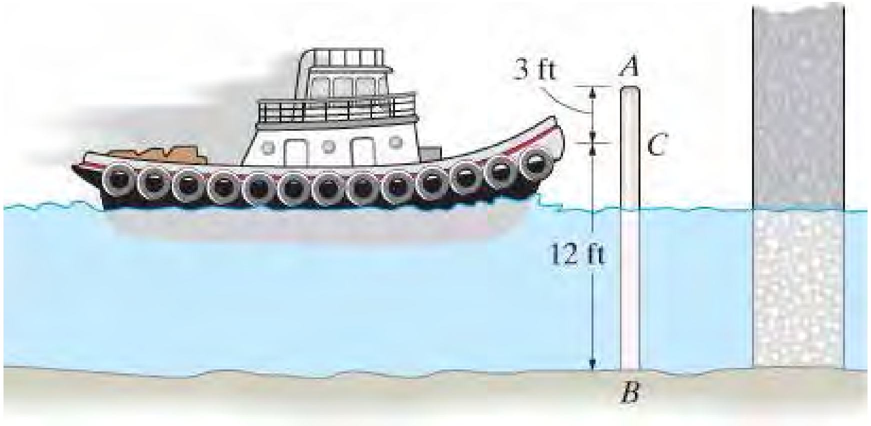
س 56 -14

س 14-57. یوه کالر (collar) 5 kg کتله لري ، او دا په تایتینیم Ti-6AL-4V میله کی رالویږي . که چیری د تایتینیم میلی قطر 20 mm وی، معلوم کړی چی کالر له دریدلی حالت څخه له هر ټکی د میلی رالویدی شي او او کله چی په فلنج A و لګیږي میله په دایمي توګه خساره مند نه کیږي.



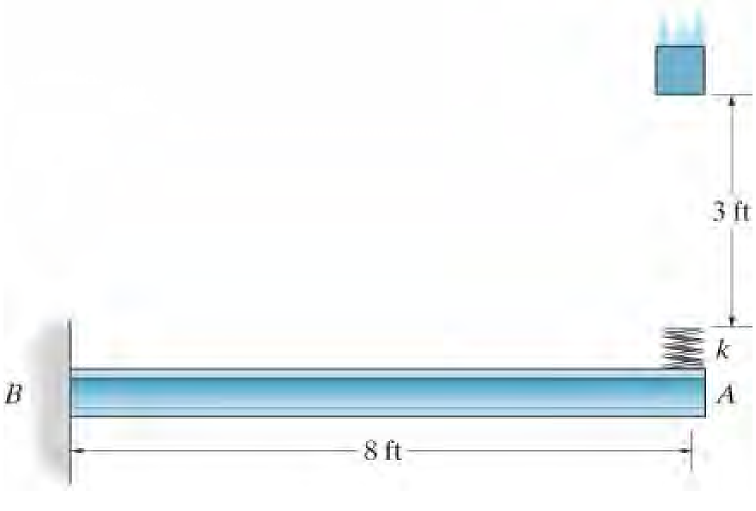
س 57 -14

س 14-58. دا لاندی کشونکی کښتي 120000 lb وزن لري، او په 2 ft/s سره مخ په وړاندی په حرکت کی ده وهکله چی له 12 in قطر لرونکی محافضوپ پای سره ټکر کړي. که چیری پایه له سپین صنوبر لرګي څخه جوړه شوی وی او فرض کړو چی د سیند په په بستر کی کلک تړل شوي ده ، د پايي پورتننی برخه چی د ټکر له امله افقي فاصله بیځایه کیږي و ټاکی. فرض کړی چی کشونکی کښتي سخته ده او د اوبو تآثیر د حساب وړ نه دي.



س 58 -14

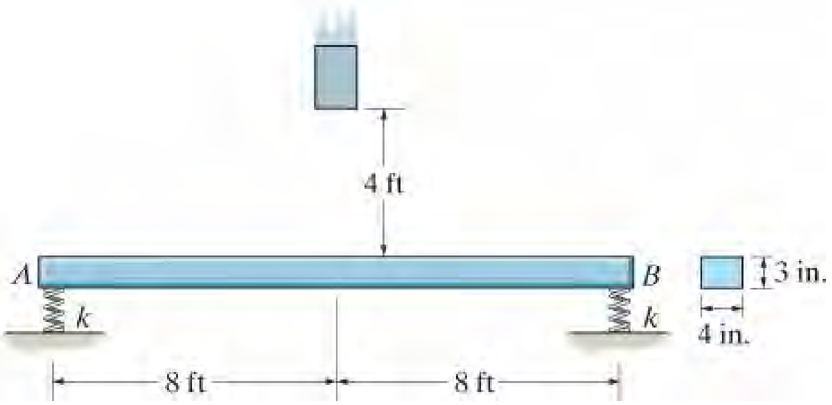
س 14-59. یو W X 12 بیم له A-36 فولادو جوړ شوي او په B کی له دیوال کنتیلیور شوي دي. یو فنر چی په بیم تړل شوي شخی یي k = 1000 lb/in ده. که چیر ی 8 پونډ وزن له 3 ft لوړوالي په فنر راولویږي ، اعظمی کږیدونکي ستریس په بیم کی معلوم کړي.



س 59 -14

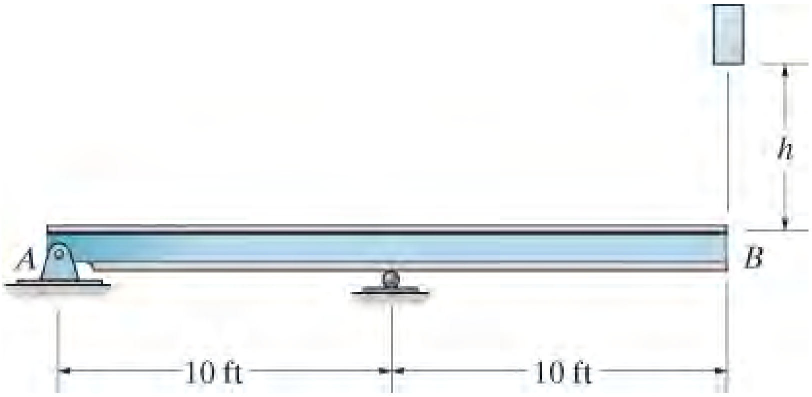
س *14-60. یو 175 lb وزن له لوړوالي د 4 ft ، د فولادو A992 بیم په سر رالويدلي دی. اعظمی بيځايه کيدنه او اعظمی ستریس په بیم کی که چیری فنرونه په A او B کی هر یو شخی د $k = 500$ lb/in ولري. بیم 3 انچ پنډوالي او 4 انچ سور لري.

س 14-61. یو 175 lb وزن له لوړوالي د 4 ft ، د فولادو A992 بیم په سر رالويدلي دی. د بار فکتور n که چیري ملاتړ کونکي فنرونه په A او B کی هر یو یی شخی د $k = 500$ lb/in ولري، وټاکي. بیم 3 انچ پنډوالي او 4 انچ سور لري.



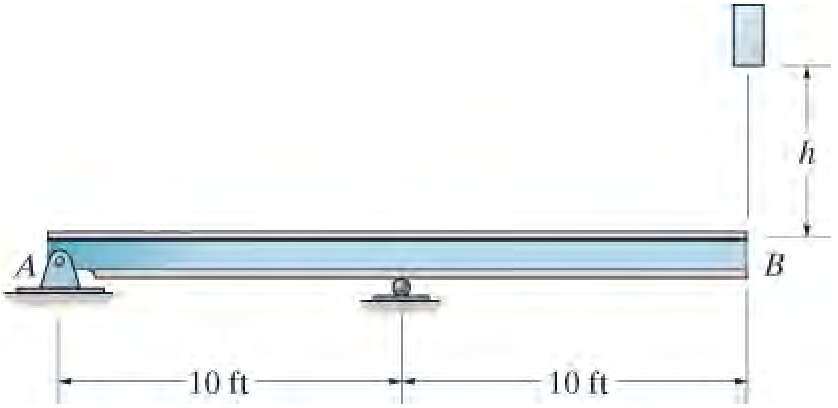
س 14- 60/61

س 14-62. اعظمی لوړوالی h د 80-lb وزن لپاره داسی و ټاکی، که چیری دا په پاي د W6 X 12 فولادی A-36 بیم راولیږي ستریس په بیم کی به له اعظمی ایلستیک ستریس زیاتوالی و نکړي.



س 14- 62

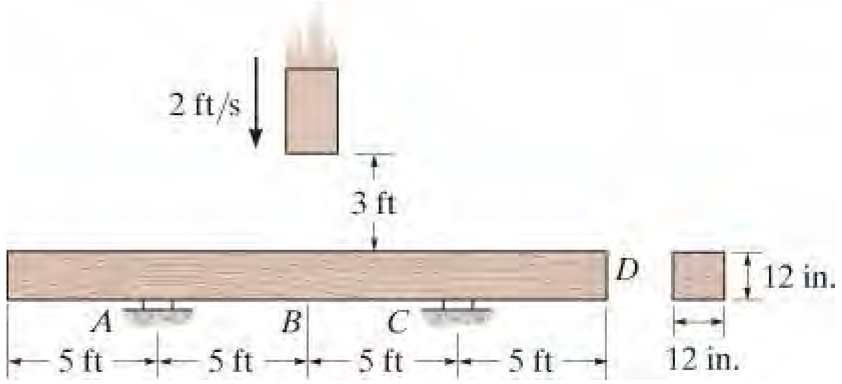
س 14-63. یو 80-lb وزن له لوړوالي h = 4 ft په پای د یو W6 X 12 فولادی A-36 بیم راوېدلي دي. اعظمی کړېدونکي ستړيس په بیم کی و ټاکي.



س 14- 63

س *14-64. یو 75-lb بلاک کله چې 3 ft د بیم په سر کی دی په ښکته لور 2 ft/s سرعت لري. کله چې دا بلاک له بیم سره ټکر کړي اعظمی کړېدونکي ستړيس په بیم کی او اعظمی بيځايه کيدنه د پای D د بیم د بلا ک د امپکت له امله مشخص کړي. $E_w = 11.9(10^3)$ ksi فرض کړی چې مواد ییلډ نکړي.

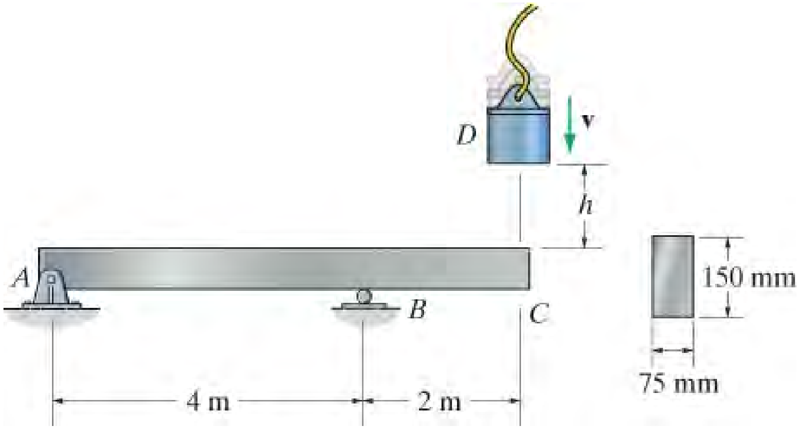
س 14-65. یو 75-lb بلاک کله چې 3 ft د بیم په سر کی دی په ښکته لور 2 ft/s سرعت لري. کله چې دا بلاک له بیم سره ټکر کړي اعظمی کړېدونکي ستړيس په بیم کی او اعظمی بيځايه کيدنه په ټکي B د بیم د بلا ک د امپکت له امله مشخص کړي. $E_w = 11.9(10^3)$



س 14- 64/65

س 14-66. د بیم وتلي برخه له المونيم 2014-T6 څخه جوړه شوي ده. که چیرى 75-kg بلاک په لوړوالي $h = 0.75$ m کی $v = 3$ m/s سرعت ولري، اعظمی کږیدونکي ستریس د بیم معلوم کړي.

س 14-67. د بیم وتلي برخه له المونيم 2014-T6 څخه جوړه شوي ده. د 100-kg بلاک اعظمی لوړوالي h داسی و ټاکی، کله چی دا بلاک له دریدلي حالت (v =0) ولویږی او د بیم په موادو کی ییلد مینځ ته رانشي.



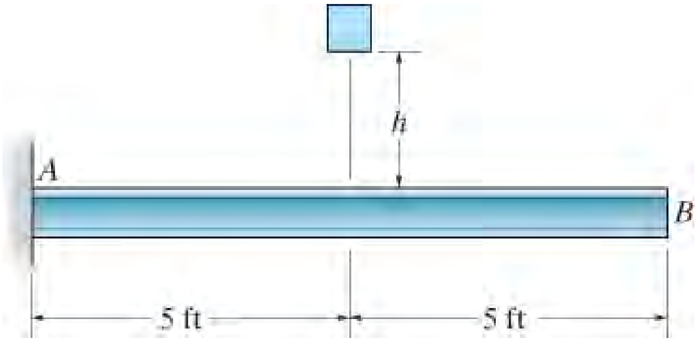
س 14- 66/67

س *14-68. یو 40-lb وزن له لوړوالي $h = 2$ ft د یو فولادی A992 بیم په مرکز رالوږي. که چیرى بیم له برخی W10 X 15 جوړ شوی وي، اعظمی کږیدونکی ستریس په بیم کی مشخص کړي.

س 14-69. که چیرى د منلو وړ اعظمی کږیدونکی ستریس د W10 X 15 فولادو A992 بیم

$s_{allow} = 20$ ksi وی، اعظمی لوړ والي h د یو 50-lb وزن کله چی له دریدلی حالت رالویږی او د بیم سره امپکت کړي، وټاکي.

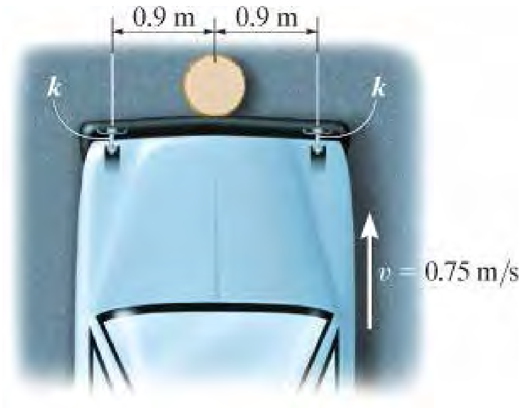
س 14-70. یو 40-lb وزن له لوړوالي $h = 2$ ft د یو فولادی A992 بیم په مرکز رالوږي. که چیرى بیم له برخی W10 X 15 جوړ شوی وي، اعظمی عمودی بیځایه کیدنه د پای B د بیم د امپکت له امله مشخص کړي.



س 14- 68/69/70

س 14-71. د یوه موټر بمپر له پا لیکاربونیټ- پالی بیټیلین-تیریفاتلیټ څخه جوړ شوي. که چیری E= 2.0 GPa وی ، او په سرعت v =0.75 m/s بمپر په یوه سخت پایه ټکر وکړي ، اعظمی بیځایه کیدنه او اعظمی سټریس په بمپر کی وټاکي. د موټر کتله 1.80 Mg ده، او داسی گمان کیدی شی چی بمپر په دوه فنرونو د موټر د سخت فریم سره په ساده ډول اتکا کړي. د بمپر لپاره

$I = 300(10^6)\ mm^4$, $c = 0.75$ mm, $s_Y = 30$ MPa او $k = 1.5$ MN/m و کاروي.



س 71 -14

(PRINCIPAL OF VIRTUAL د مجازی کار اصول 14. 5* WORK)

د مجازی کار اصول په 1717 م، کې د جان برنولی (John Bernoulli) لخوا رامینځته شوی، او د نورو انرژی تحلیلي طریقو په څیر، دا د انرژي ساتني پر بنسټ ولاړ دی. که څه هم دا اصول په میخانیک کې ډیری کارول کیږی، دلته به موږ دا په یوه ټکی کې د بې ځایه کیدو او میلان ترلاسه کولو لپاره د کږیدونکیو (Deformable) جسمونولپاره کار واخلو.

د عمومي نظر ورکولو لپاره چې دا څنګه کارول کیږي، موږ به یو جسم ته، کوم چې په خپل سری شکل وي پام وکړو، لکه څنګه چې په انځور 14-29b کې ښودل شوي، او "حقیقي" بارونه $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$ او $\mathbf{P}_3$ وربانذی پلی شوي دي. فرض کړئ چې موږ غواړو بې ځایه کیدنه D په ټکی A په جسم باندې پیدا کړو. ځکه چې په A کې هیڅ قوه د D په سمت عمل نه دی کړي، نو کله چې د انرژي ساتنې اصول په جسم پلي کیږي په دې ځای کې به هیڅ د بهرنی کاري اصطلاح شامله نه وي. د دې محدودیت لریکولو دپاره به موږ به یو خیالي یا "مجازی" قوه `$\mathbf{P}$ پر جسم په A کې پلي کړو،

داسې چې $\mathbf{P}`$ د D په ورته لوري عمل کوي. سربیره پردې، دا بار به د ریښتیني بارونوتر پلې کیدو دمخه پلې شي ، انځور .14-29a. د اسانتیا لپاره، موږ به اندازه د $\mathbf{P}`$ یو"یونټ" وټاکو په دی معنی هغه دی $\mathbf{P}` = \mathbf{1}$. دا باید ټینګار وشي چې دلته د "مجازی" اصطلاح کارول کیږي ځکه چې دا یو خیالي بار دی او په حقیقت کې د یوې برخې په توګه ریښتیني بار شتون نلري. دا بهرنی مجازی بار یو داخلي مجازی بار u رامینځته کوي د بدن په یوه عنصر یا فایبرکې چې استازیتوب د جسم کوی، لکه څنګه چې په انځور 14-29a کې ښودل شوي.

کله چې موږ اوس اصلي بارونه $\mathbf{P}_1$ ، $\mathbf{P}_2$، او $\mathbf{P}_3$ پلې کړو، ټکی A به D بې ځایه شي او عنصر به dL اوږد شي، انځور 14-29b . د دې په پایله کې په جسم کې بهرني مجازی کار * 1 . D رامینځته کیږي، او دعنصر په داخل کی داخلی مجازی کار $u\ .\ dL$ په عنصر کې جوړیږي. که موږ یوازې د مجازی انرژي ساتنې په اړه فکر وکړو، نو بیا بهرنۍ مجازی کار باید د داخلي مجازی کار کوم چې د بدن په ټولو عناصرو کې ترسره کیږي سره مساوي وي. له همدې امله، مجازی کار مساوات جوړیږي

$$\overbrace{1 \cdot \Delta = \int u}^{\text{virtual loadings}} \cdot dL \qquad (14\text{–}33)$$

real displacements: Δ, dL

دلته

$P` = 1 =$ بهرنی مجازی یا خیالی واحد بار چې په جهت د D عمل کړي

$u =$ داخلی مجازی یا خیالي بار چې په عنصر عمل کړي

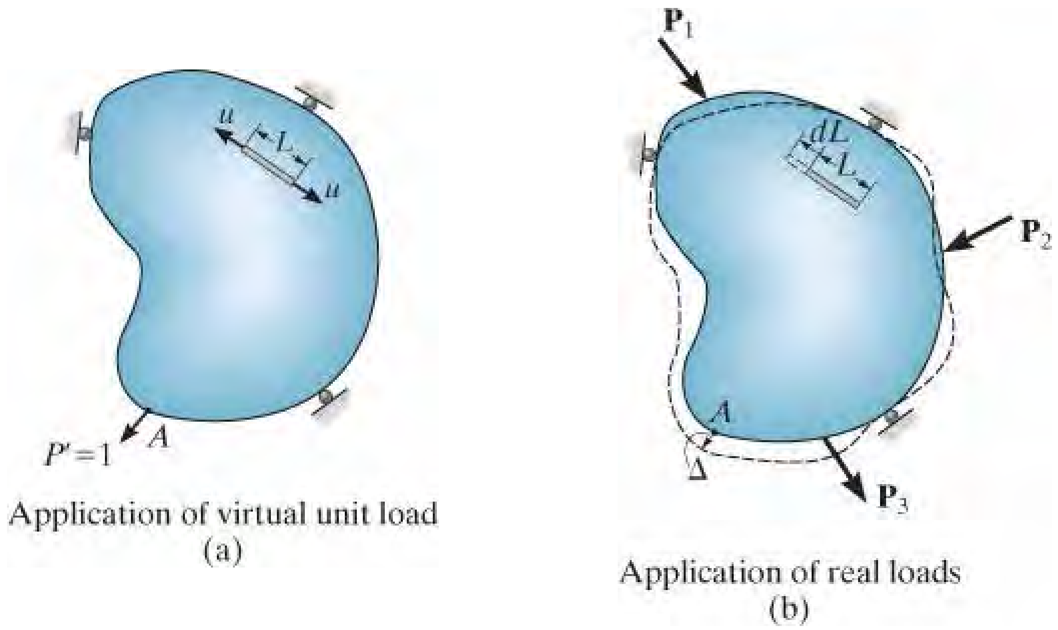
D = بیځایه کیدنه د حقیقي بارونو له امله

$dL =$ بیځایه کیدنه د عنسر په جهت د u ، د حقیقي بارونو له امله

څرنګه چې موږ $P` = 1$ انتخاب کړي، لیدل کیږی چې د D حل په مستقیم ډول حاصل کیږی ، ځکه

. D = $\int u\ dL$

* د حقیقي بارونو پلی کیدو مخکی جسم او عنصر به مجازی (خیالي) بیځایه کیدنه وکړي ، اګرچه موږ د مقدار سره علاقه ونه لرو.



انځور 14-29

په ورته ډول، که زاویوي بې ځایه کیدنه یا د مماس میلان د جسم په یوه ټکی A انځور 14-30b ، کی وټاکل شي، بیا یو مجازی کپل مؤمنت $M`$ کوم چې یو واحد ، "یونټ" ، اندازه لري، په نقطه کې پلي کیږي، انځور 14-30a . د پایلي په توګه، دا کپل مؤمنت یو مجازی بار u_q په یوه عنصر د جسم کی سبب د جوړیدو کیږي. اوس د اصلي بارونو پلي کول P_1، P_2، P_3 ، عنصر به د dL په اندازه بدل شي، او په دې توګه زاویه وي بی ځایه کیدل q د مجازی کار مساوات څخه مونډل کیدی شي . اوس به موږ اصلي بارونه $\mathbf{P}_1$ ، $\mathbf{P}_2$، او $\mathbf{P}_3$ پلي کړو، او عنصر به په اندازه د dL بې ځایه شي ، په دی طریقه د زاویه وی بیځایه کیدنه q د مجازي کار له معادلی په لاس راځي.

$$\underbrace{1 \cdot \theta}_{} = \int u_\theta \, dL \qquad (14\text{–}34)$$

virtual loadings (1 and u_θ); real displacements (θ and dL)

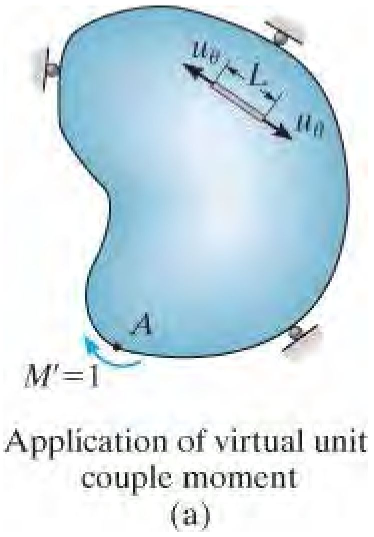
دلته

$M` = 1 =$ بهرنی مجازی یا خیالی واحد کپل مؤمنت چی په جهت د q عمل کړي

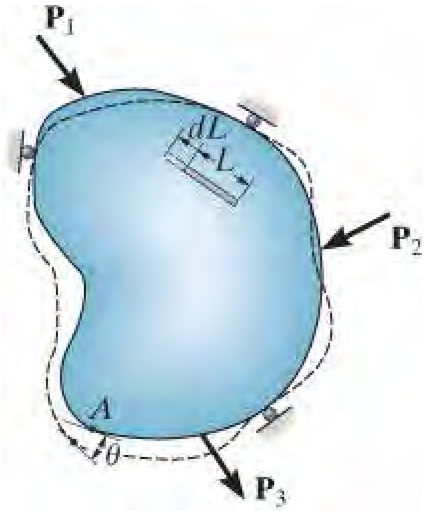
u q = داخلی مجازی یا خیالي بار چی په عنصر عمل کړي

q = زاویه وی بیځایه کیدنه په رادیان د حقیقي بارونو له امله

$dL =$ بیځایه کیدنه د عنصر په جهت د u_q ، د حقیقي بارونو له امله



Application of virtual unit couple moment
(a)



Application of real loads
(b)

انځور 30-14

د مجازی کار اصولو پلی کول په نامه ***د مجازی یا خیالي قواو*** (***method of virtual forces***) طریقه هم یادیږي. ځکه چی د حقیقي بیځایه کیدنی موندلو لپاره له مجازی قوه کار اخیستل کیږي.

د مجازی کار معادله استازیتوب د مطابقت اړتیاوی د جسم کوي*.

*موږ کولی شو د مجازی کار اصول د مجازی بې ځایه کیدو طریقی په توګه هم پلي کړو، دا دی، مجازی بې ځایه کیدنه په جسم باندې تطبیق کیږي کله چې په جسم حقیقي بارونه پلی شوي وي . کله چې په دی ډول وکارول شي، د مجازی کار معادله ښونکی د توازن اړتیاوو د جسم لپاره ده . د انجینری میخانیک وګوری: ستاتیک، آر. سي. هیبلر، Pearson Education, Inc. .

جدول 14-1

TABLE 14–1

Deformation caused by	Strain energy	Internal virtual work
Axial load N	$\int_0^L \frac{N^2}{2EA}dx$	$\int_0^L \frac{nN}{EA}dx$
Shear V	$\int_0^L \frac{f_s V^2}{2GA}dx$	$\int_0^L \frac{f_s vV}{GA}dx$
Bending moment M	$\int_0^L \frac{M^2}{2EI}dx$	$\int_0^L \frac{mM}{EI}dx$
Torsional moment T	$\int_0^L \frac{T^2}{2GJ}dx$	$\int_0^L \frac{tT}{GJ}dx$

داخلي مجازی کار (Internal Virtual Work). که موږ فرض کړو چې مواد یو خطي ایلستیک ډول چلند لري، او سټریس د تناسب له حد (proportional limit) څخه زیات نه دي، موږ بیا کولی شو د داخلي مجازی کار لپاره د ایلستیک سټرین انرژي معادلې چې په برخه 14.2 کې رامینځته شوي، کار ترې واخلو. دوی د جدول 14-1 په منځنی کالم کې لیست شوي دي. په یاد ولرئ چې دا هر یو ځرګندوني داسې انټیرل کیږي چې داخلي بارونه N ، V، M، یا T په تدریجي ډول له صفر څخه شروع او خپل بشپړ ارزښت ته وده ورکړه، او په پایله کې، کار د دې پایلو لخوا ترسره شوي په دې ځرګندونو کې د داخلي باراو د هغې بې ځایه کیدلو نه، په نیمه توګه، ښودل شوي . د مجازی قوی طریقې په صورت کې ، مجازی بارمخکې له دې چې ریښتیني بارونه د بې ځایه کیدو لامل شي پلې کیږي او له همدې امله د مجازی بار کار دی بیا د مجازی بار محصول او د هغې اصلي بې ځایه کیدنه (پرته د ½ فکتور). دې داخلي مجازی بارونو ته (u) اشاره کول لخوا د کوچنی حرفونو n ، v، m او t ، مجازی کار له امله د هر بار د جدول 14-1 په ښي لاس کالم کې لیست شوی. د دې پایلې کارول ، د مجازی کار معادله د جسم لپاره چې په هغه عمومي ډول بار پلی شوي په دی توګه لیکل کیدی شي

$$1 \cdot \Delta = \int \frac{nN}{AE}dx + \int \frac{mM}{EI}dx + \int \frac{f_s vV}{GA}dx + \int \frac{tT}{GJ}dx \qquad (14\text{–}35)$$

په دی لاندی برخو کی به موږ پورتنی معادله د هغه پوښتنو لپاره چی د ترس د جاینټونو او د بیم یا شفټ په تکیو بیځایه کیدنی کی شامل دی، پلی کړو. همدارنګه دا چی څرنګه به موږ د جوړونې تېروتنې او د تودوخې توپیر اغیزی اداره کړو، د هغوی د څرنګوالي په اړه بحث هم شامل کړو. دا مهمه ده چې ثابت واحدونه د ټولو شرایطو لپاره وکارول شي. د مثال په توګه، که چیرې ریښتینې بارونه په کیلو نیوټن او د جسم ابعاد په مترونو، یو 1-kN مجازی قوه یا 1-kN.m مجازی کپل باید په جسم تطبیق شي، په دې اجراکولو سره محاسبه شوې بې ځایه کیدنه D به په مترو کې وی ، او محاسبه شوې میلان به په ریډینونو کې وي

*14.6 د مجازی قواوو پلی کیدل په ترس (METHOD OF (VIRTUAL FORCES APPLIED TO TRUSSES)

پدې برخه کې به موږ وښیو چې څنګه د مجازی قواوو میتود پلې کړو تر څو دټرس د ګنډو بې ځایه کیدل مشخص کړو. د روښانه کولو لپاره، د عمودی بې ځایه کیدنی موندل د ټرس د جوینټ A په پام کی نیسو، په انځور 14-31b کې ښودل شوې. موږ باید لومړی مجازی واحد قوه په دې ګنډه کې ځای په ځای کړو، انځور 14-31a، نو کله چې ریښتینې بار $\mathbf{P}_1$ او $\mathbf{P}_2$ په ټراس باندې پلې کیږي ، او دا لامل د بهرنی مجازی کار 1. D څکه کیږي چې هر غړی یو دوامداره غوښه برخه ساحه A لري، مجازی او حقیقی بارونه n او N د غړي په اوږدو کې ثابت دي، بیا له جدول 14-1 څخه، داخلي مجازی کار د هر غړي لپاره دی

$$\int_0^L \frac{nN}{AE}dx = \frac{nNL}{AE} \qquad (14\text{–}36)$$

له همدی امله مجازی کار معادله د ټول ترس لپاره عبارت ده په

$$1 \cdot \Delta = \sum \frac{nNL}{AE} \qquad (14\text{–}37)$$

دلته

1 = بهرنی مجازی یا خیالی واحد بار چی د ترس ګنډی په جهت د D عمل کړي

D = د تراس د ګنډی بیځایه کیدنه د حقیقي بارونو له امله په ترس باندی

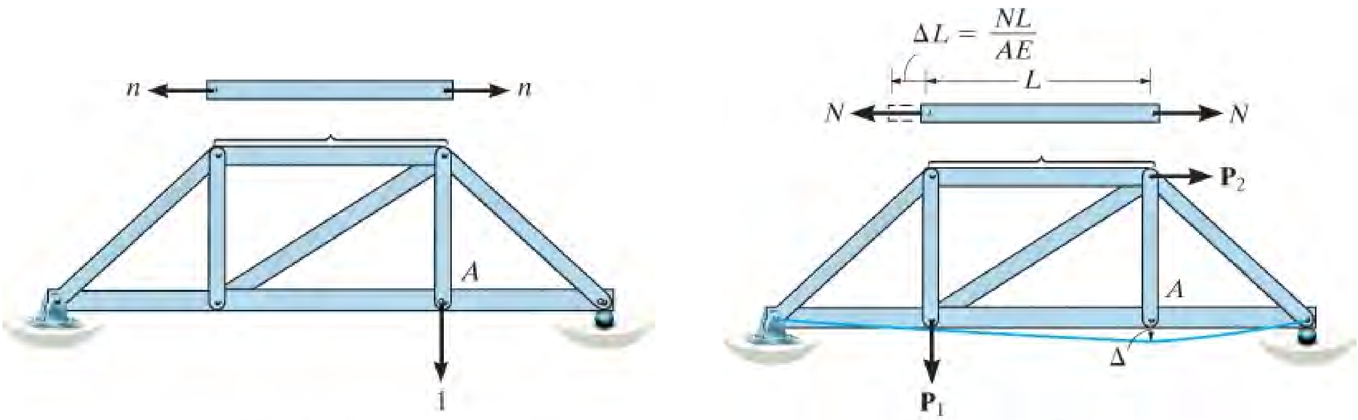
n = داخلی مجازی یا خیالي قوه د ترس په غړي کی د بهرنی مجازی بار له امله

N = داخلی قوه د ترس په غړی کی د حقیقي بارونو له امله

L = د غړی اوږدوالي

A = د غړي دغوڅی برخی ساحه

E = د غړی د ایلستیستي ماجولس



Application of virtual unit load

(a)

Application of real loads

(b)

انځور 14-31

د تودوخی درجی بدلون (Temperature Change) .

د تراس غړي کولی شي خپل اوږدوالی د تودوخې د بدلون له امله بدل کړي. که a د حرارتي توسعې ضریب د غړي لپاره وي، او DT د تودوخې درجی بدلون دی، بیا د غړي د اوږدوالی بدلون DL = a DTL (معادله 4-4) دی. له دې امله، موږ کولی شو د تودوخې د بدلون له امله د ټرس ګندی بې ځایه کیدل په کارولو د معادلی 14-33 مشخص کړو، لیکل شوی :

$$1 \cdot \Delta = \Sigma n \alpha \, \Delta T L \qquad (14–38)$$

دلته

1 = بهرنی مجازی یا خیالی یو واحد بار چی د ترس د ګندی په جهت د D عمل کړي

D = د تراس د ګنډی بیځایه کیدنه د تودوخی درجی بدلون له امله په ترس باندی

n = داخلی مجازی یا خیالي قوه د تراس په غړي کی د بهرنی مجازی یوه واحد بار له امله

a = د موادو د تودوخی د بدلون ضریب

DT = د تودوخی درجی بدلون په غړی کی

L = د غړي اوږدوالي

د جوړولو تېروتنې (Fabrication Errors).

کله ناکله د ترس د غړیو په جوړولو کې په اوږدوالي تېروتنې واقع کیدی شي. که دا پیښ شي، بې ځایه کیدنه D د ترس ګنډی په یو ځانګړې لوري ، د متوقع موقعیت څخه، کیدی شي په پلی کولو د معادلې 14-33 داسی ولیکو

$$1 \cdot \Delta = \Sigma n \, \Delta L \qquad (14–39)$$

دلته

$1 =$ بهرنی مجازی یا خیالی واحد بار چې د تراس ګنډیجوینت په جهت د D عمل کړي

$D =$ د ترس د ګنډی بیځایه کیدنه د جوړه ولو تیروتني له امله

$n =$ داخلی مجازی یا خیالي قوه د ترس په غړي کی د بهرنی مجازی واحد بار له امله

$\Delta L =$ د غړی په اوږدوالي کی د ټاکل شوي اوږدوالي څخه توپیر د جوړوني د جوړونې رامینځته شوی غلطۍ له امله

د معادلی 37-14 تر 39-14 د ښي اړخونو دیوځایوالی نه اړین دی، که چیری بهرنی بارونه په ترس پلی شوی وي او ځینی غړی د تودوخی له امله بدلون وموموي یا په جوړه ولو کی په ابعادو يي غلطۍ شوی وي.

د تحلیل کړنلاره

PROCEDURE FOR ANALYSIS

دا لاندی کړنلاره یوه طریقه وړاندی کوي ، تر څو و کولای شو د ټرس دګنډی بېځایه کیدنه د مجازی قواوو طریقی په کارولو و ټاکو .

مجازی قواوی n (Virtual Forces n).

- مجازی یو واحد بار په هغه ګنډه پلي کړی کوم چی بیځایه کیدنه غوښتل شوي ده. بار باید په جهت د بیځایه کیدنی عمل وکړي.
- کله چي یو واحد بار په هغه ګنډه چی بیځایه کیدنه غوښتل شوی پلی شو، او ټول بهرنی بارونه له ټرس حذف شول، داخلی قوه n په هر غړی د ټرس کی وټاکي. فرض کړی چی کششی قواوی مثبت او ټیلوهونکی قواوی منفی دی.

حقیقي قواوي N (Real Forces N).

- قواوی N په هر غړي کی مشخص کړي.دا قواوی له امله د حقیقي بارونو چی په ټرس عمل کړی دي. بیا، فرض کړی چی کششی قواوی مثبت او ټیلوهونکی قواوی منفی دی.

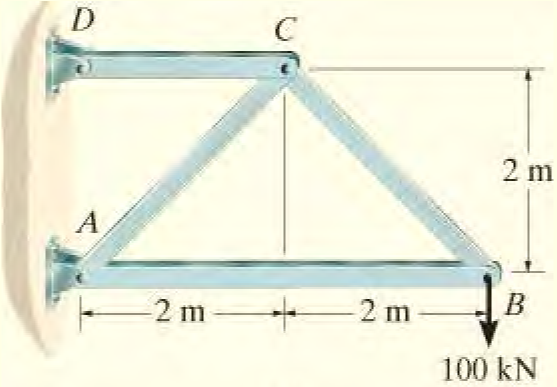
د مجازی-کار معادله (Virtual-Work Equation).

- د مجازی کار معادله د بیځایه کیدنی معلومولو لپاره پلی کړی. دا ډیره مهمه ده چی الجبری علامه د هر اړوند n او N ، کله چی دوی په معادله کی ځای پر ځای کوي ،وساتئ.
- که چیری محصله د مجموعه $\Sigma nNL/AE$ مثبت وي، بیځایه کیدنه D جهت به یو شان د واحد بار په جهت وي. که چیری منفي ارزښت وی، نود D جهت به مخالف د واحد بار د جهت وي.
- که چیری $1 \cdot \Delta = \Sigma n\alpha\Delta TL$ پلی کړي، *زیاتوالي* د تودوخی، ΔT ، به مثبت وی، اما کمښت په تودوخی درجه کی به *منفي* وي.
- که چیری $1 \cdot \Delta = \Sigma n\Delta L$ پلی کړي، زیاتوالي د غړی په اوږدوالي کی، ΔL ، به مثبت وی، اما په اوږدوالي کی کمښت به *منفي* وي.

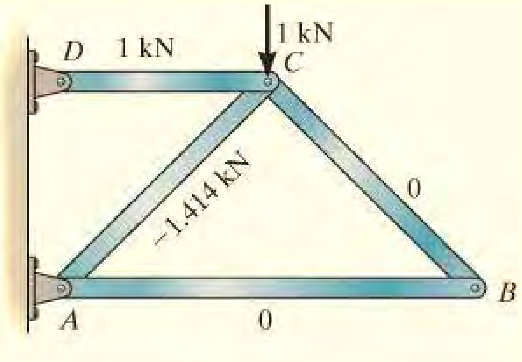
مثالونه

مثال 14.11

ددی لاندی فولادی ټرس، انځور 14-32a ، ګنډې C عمودی بیځایه کیدنه و ټاکي. د هر غړی د غوڅې برخه ساحه $A = 400\ mm^2$ او $E_{st} = 200\ GPa$ دي.



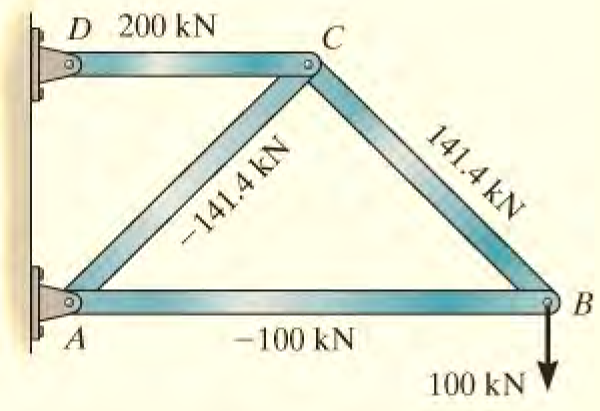
(a)



Virtual forces

(b)

حل (SOLUTION)



Real forces

(c)

انځور 14-32

مجازي قواوی n (Virtual Forces n).

ځکه چې عمودی بیځایه کیدنه په ګنډه C کی غوښتل شوي، تنها یو عمودي 1-kN مجازي بار په ګنډه C کی پلی کیږي، او د ګنډې طریقی په کارولو سره قواوي په هر غړی کی محاسبه کیږي. پایلی ددی محاسبی په انځور 14-32b کی ښودل شوي. زموږ د علامی کنوانسیون په کارولو، مثبت اعداد کښښښي قواوی ښيي او منفي ارقام ټيلو هونکي قواوي ښيي.

حقيقي قواوی N (Real Forces N). د ګڼدی طريقی په کارولو سره قواوي په هر غړی کی د 100-kN بار له امله محاسبه کيږي. پايلی ددی محاسبی په انځور 14-32c کی ښودل شوي.

مجازی- کار معادله (Virtual-Work Equation). ډیټا په لاندی جدول کی ځای په ځای شويی او موږ لرو:

Member	n	N	L	nNL
AB	0	−100	4	0
BC	0	141.4	2.828	0
AC	−1.414	−141.4	2.828	565.7
CD	1	200	2	400
				Σ 965.7 kN² · m

په دی توګه:

$$1\text{ kN}\cdot\Delta_{C_v}=\sum\frac{nNL}{AE}=\frac{965.7\text{ kN}^2\cdot\text{m}}{AE}$$

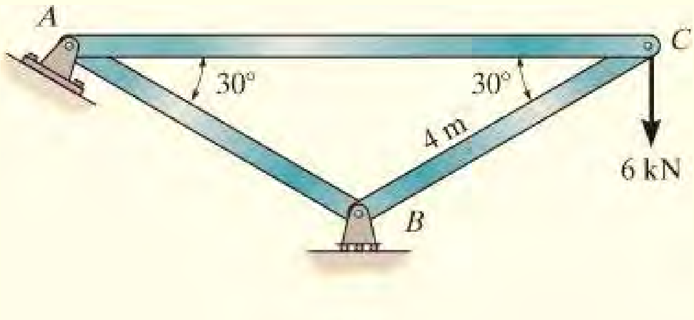
د A او E عددي ارزښتونه ځای په ځای کوو، موږ لرو:

$$1\text{ kN}\cdot\Delta_{Cv}=\frac{965.7\text{ kN}^2\cdot\text{m}}{[400(10^{-6})\text{ m}^2][200(10^6)\text{ kN/m}^2]}$$

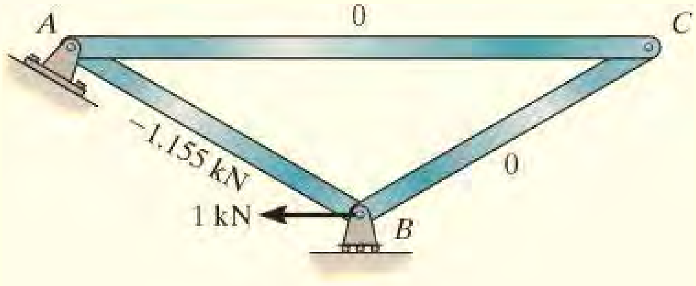
$$\Delta_{Cv}=0.01207\text{ m}=12.1\text{ mm}\qquad \textit{Ans.}$$

مثال 14.12

په دی لاندی ښودل شوي ټرس کی، انځور 14-33a ، افقي بیځایه کیدنه د رولر B وټاکی. د ریدینت (radiant) تودوخی له امله غړی AB د تودوخی درجی د زیاتوالي $\Delta T = +60^{o}\,C$ سره مخ کیږي ، او دا غړی 3mm لنډ جوړ شوي دي. غړی له فولادو جوړ شوي کوم چی د دوي $\alpha_{st} = 12(10^{-6})/^{o}C$ او $E_{st} = 200$ GPa . او د هر غړی غوځه برخه $250\ mm^2$ ده.



(a)



Virtual forces

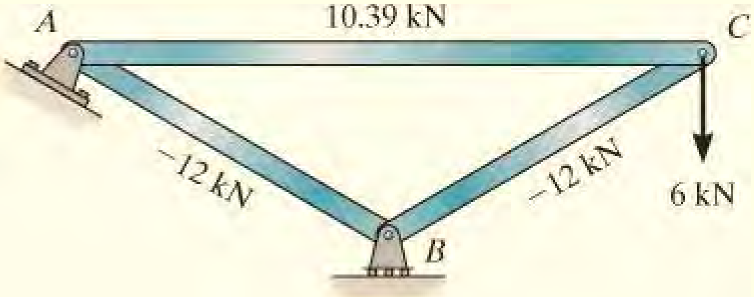
(b)

حل (SOLUTION)

مجازي قواوی n (Virtual Forces n). یو افقي مجازی بار د ټرس په ګنډه B کی پلي شوي، او په هر غړي د ټرس کی محاسبه شوی قواوي په انځور 14-33b کی ښودل شوي.

حقيقي قواوی N (Real Forces N). ځکه چې قواوی n په غړيو AC او BC کی صفر دی، اړين نه دی چی د N قواوی محاسبه شی. ولې؟ د بشپړتيا لپاره ټول حقيقي قواوی په انځور 14-33c کی ښودل شوي.

مجازی- کار معادله (Virtual-Work Equation). باړونه، تودوخه او دجوړولو تيروتنی ټول د B نقطی په بی ځايه کيدو اغيزه کوي. نو معادلی 14-37 ,14-38 او 14-39 بايد يو ځای شي کوم چې ورکوي



Real forces

(c)

انځور 14-33

$$1\text{ kN}\cdot\Delta_{B_h} = \sum\frac{nNL}{AE} + \Sigma n\alpha\,\Delta TL + \Sigma n\Delta L$$

$$= 0 + 0 + \frac{(-1.155\text{ kN})(-12\text{ kN})(4\text{ m})}{[250(10^{-6})\text{ m}^2][200(10^6)\text{ kN/m}^2]}$$

$$+ (-1.155\text{ kN})[12(10^{-6})/^\circ\text{C}](60^\circ\text{C})(4\text{ m})$$

$$+ (-1.155\text{ kN})(-0.003\text{ m})$$

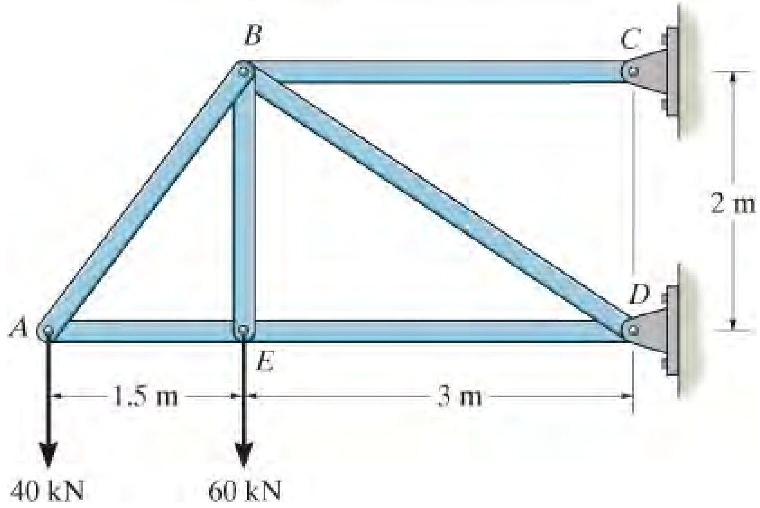
$$\Delta_{B_h} = 0.00125\text{ m}$$

$$= 1.25\text{ mm} \leftarrow \qquad \textit{Ans.}$$

سوالونه

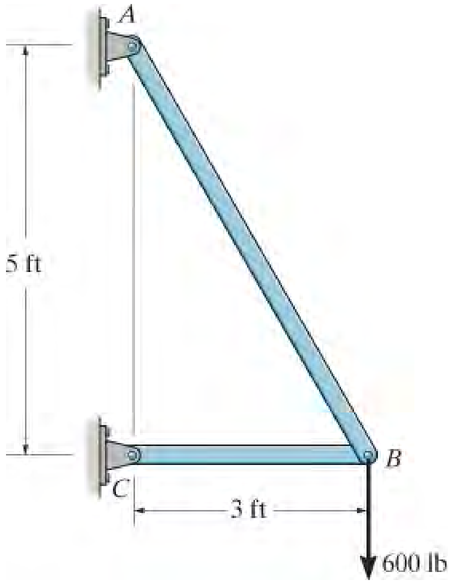
PROBLEMS

س *14-72. عمودی بیځایه کیدنه د ګنډی A و ټاکی. هر یو A992 فولادی غړی $400\ mm^2$ غوښه برخه لري.



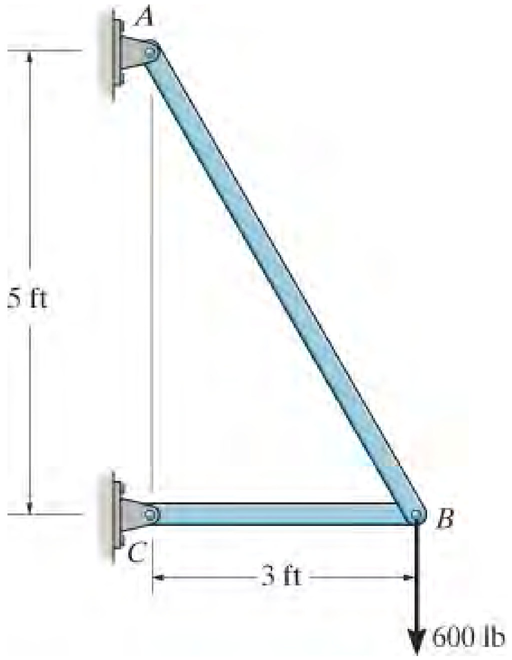
س 72 -14

س 14-73. افقي بیځایه کیدنه د ګنډی B و ټاکی. هر یو A992 فولادی غړی $2\ in^2$ غوښه برخه لري.



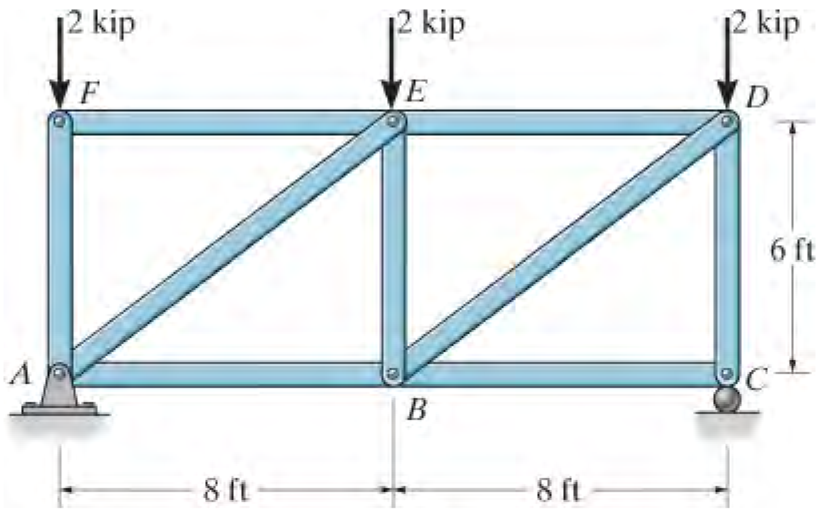
س 73 -14

س 14-74. عمودي بېځايه کېدنه د ګنډې B و ټاکئ. هر یو A992 فولادي غړی $2\ in^2$ غوڅه برخه لري.



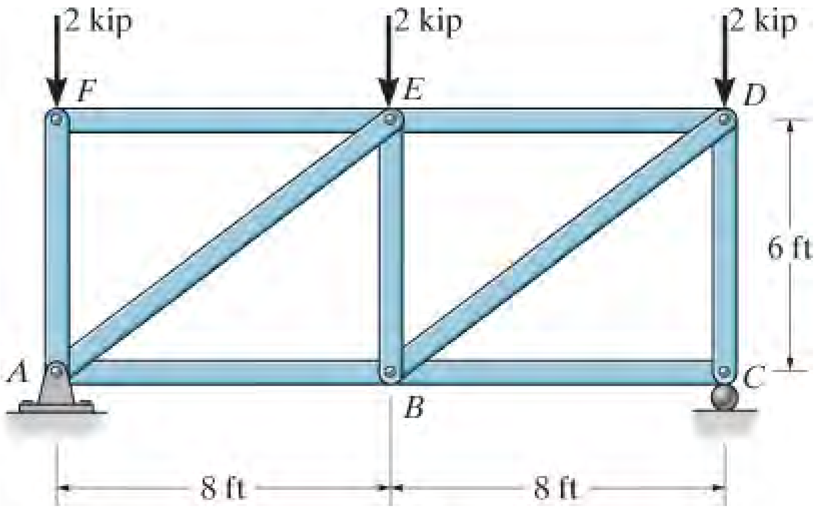
س 14 -74

س 14-75. عمودي بېځايه کېدنه د ګنډې B و ټاکئ. هر یو A992 فولادي غړی $1.5\ in^2$ غوڅه برخه لري.



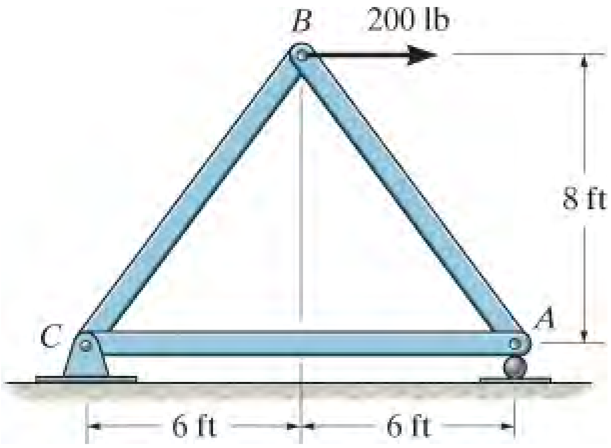
س 14 -75

س *14-76. عمودی بیځایه کیدنه د ګنډی E و ټاکی. هر یو A992 فولادی غړی $1.5\ in^2$ غوڅه برخه لري.



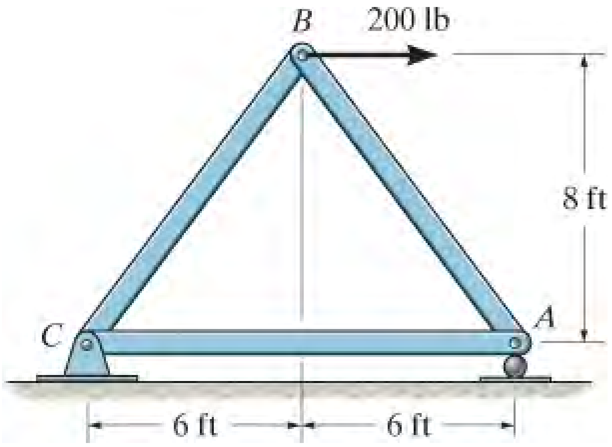
س 76 -14

س 14-77. افقي بیځایه کیدنه د ګنډی B و ټاکی. هر یو A36 فولادی غړی $2\ in^2$ غوڅه برخه لري.



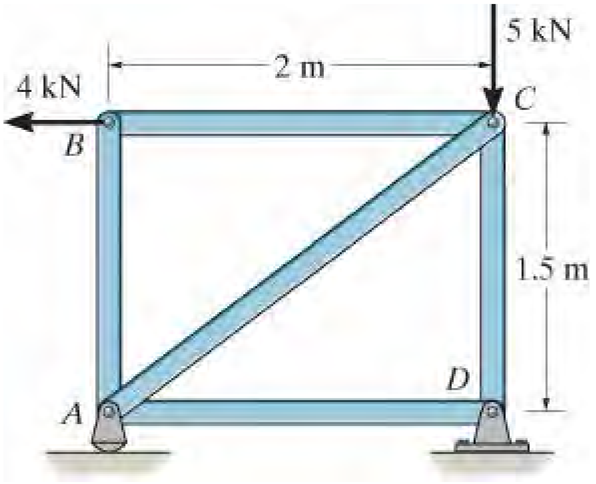
س 77 -14

س 14-78**.** عمودي بیځایه کیدنه د ګنډی B و ټاکی. هر یو A36 فولادی غړی $2\ in^2$ غوڅه برخه لري.



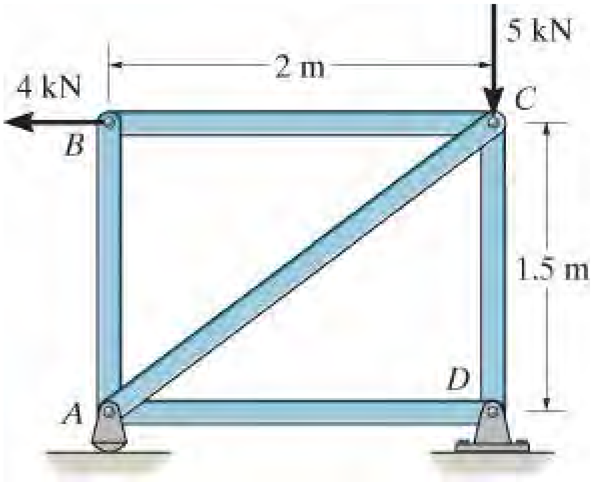
س 78 -14

س 14-79. افقي بیځایه کیدنه د ګنډی B و ټاکی. هر یو A992 فولادی غړی $400\ mm^2$ غوڅه برخه لري.



س 79 -14

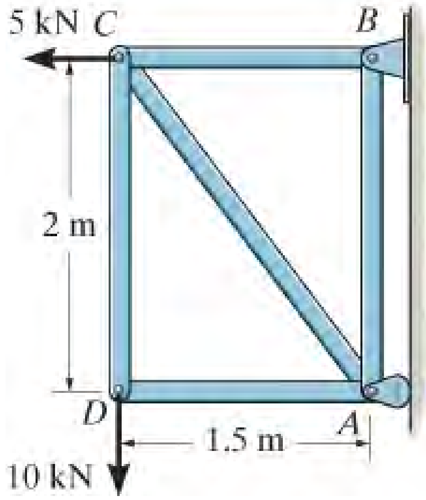
س *14-80. عمودی بیځایه کیدنه د ګنډی C و ټاکی. هر یو A992 فولادی غړی $400\ mm^2$ غوڅه برخه لري.



س 80 -14

س 14-81. افقي بیځایه کیدنه د ګنډی C و ټاکی. هر یو A36 فولادی غړی $400\ mm^2$ غوڅه برخه لري.

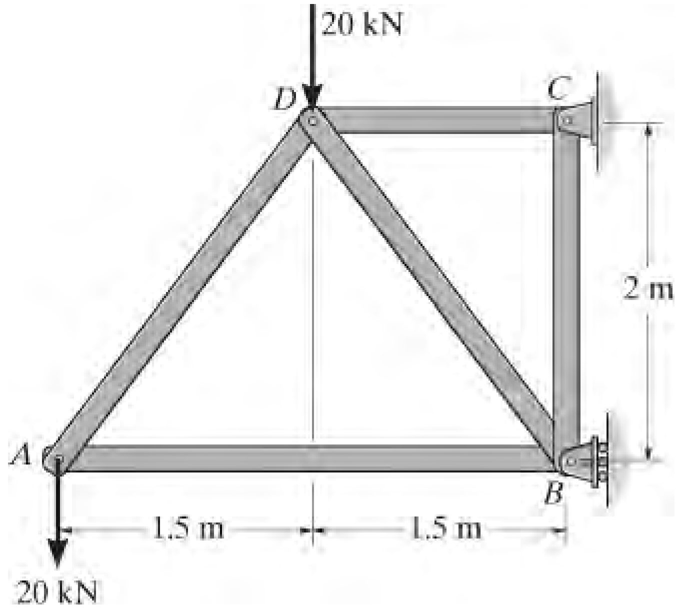
س 14-82. عمودي بیځایه کیدنه د ګنډی D و ټاکی. هر یو A36 فولادی غړی $400\ mm^2$ غوڅه برخه لري.



س 81/82

س 14-83. عمودي بیځایه کیدنه د ګنډی A و ټاکی. ترس له A992 فولادو جوړ شوي او هر میله یی 30 mm قطر لري.

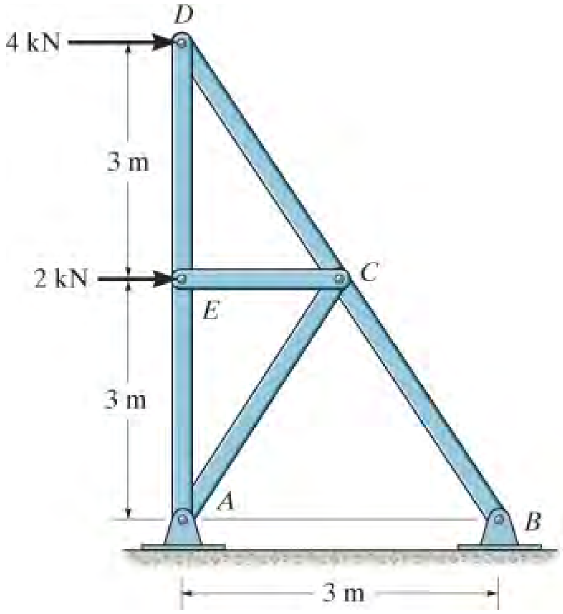
س *14-84. عمودي بيځايه کيدنه د ګنډې D و ټاکئ. ټرس له A992 فولادو جوړه شوي او هر ميله يې 30 mm قطر لري.



س 83/84

س 14-85. افقي بيځايه کيدنه د ګنډې D و ټاکئ. ټرس له A36 فولادو جوړه شوي او هر ميله يې 300 mm^2 ساحه لري.

س 14-86. افقي بيځايه کيدنه د ګنډې E و ټاکئ. ټرس له A36 فولادو جوړه شوي او هر ميله يې 300 mm^2 ساحه لري.



س 85/86

* 14.7 د مجازی قوا وود طریقی تطبیق په بیمونو

(METHOD OF VIRTUAL FORCES APPLIED TO BEAMS)

موږ کولی شو د د مجازی قواوو طریقه، د بیم په یوه نقطه کې بې ځایه کیدنه، او میلان ټاکلو لپاره هم تطبیق کړو. د مثال په توګه، که وغواړو په بیم کې د A په نقطه کی عمودی بې ځایه کیدنه په ګوته کړو، انځور 14-34b، موږ باید لومړی په دې ځای کې عمودی واحد بار ځای په ځای کړو، انځور 14-34a، او بیا کله چې "ریښتیني" ویشل شوي بار w په بیم باندې پلي شي دا به لامل د بهرني مجازی کار D . 1 شي. ځکه چې ویشل شوی بار په بیم کی دننه د دواړو شییر، او مؤمنت لامل کیږي، موږ باید د دې دواړو بارونو له امله داخلي مجازی کارپه پام کې په پام کی ونیسو . په 14.7 مثال کې، دا ښودل شوه چې د شییر له امله د بیم بیځایه کیدنه دهغه په پرتله چې د کږیدو له امله رامینځته کیږي د پام وړ نده، په ځانګړې توګه که بیم اوږده او نازکه وي. څرنګه چې دا حالت ډیری وختونه وي، موږ به یوازې مجازی سترین انرژي د کږیدو له امله په پام کې ونیسو، جدول 14-1. له هغه چې M په انځور 14-34b کې د عنصر dx د شکل د بدلون لامل کیږي ، د هغې اړخونه د یوی زاویه $dq = (M/EI)dx$ ، له لاری څرخیږي، معادله 12-16. له همدې امله، داخلي مجازی کار dq . m دی. معادله 14-33 پلي کوو، د ټول بیم لپاره د مجازی کار معادله عبارت ده په

$$1 \cdot \Delta = \int_0^L \frac{mM}{EI} dx \qquad (14\text{–}40)$$

دلته

1 = بهرنی مجازی یا خیالی واحد بار چی په بیم په جهت د D عمل کړي

D = د حقیقي بارونو له امله بیځایه کیدنه په بیم کی

m = داخلی مجازی یا خیالي مؤمنت په بیم کی، کوم چی تابع د x ښودل شوي، د بهرنی مجازي یو واحد بار له امله.

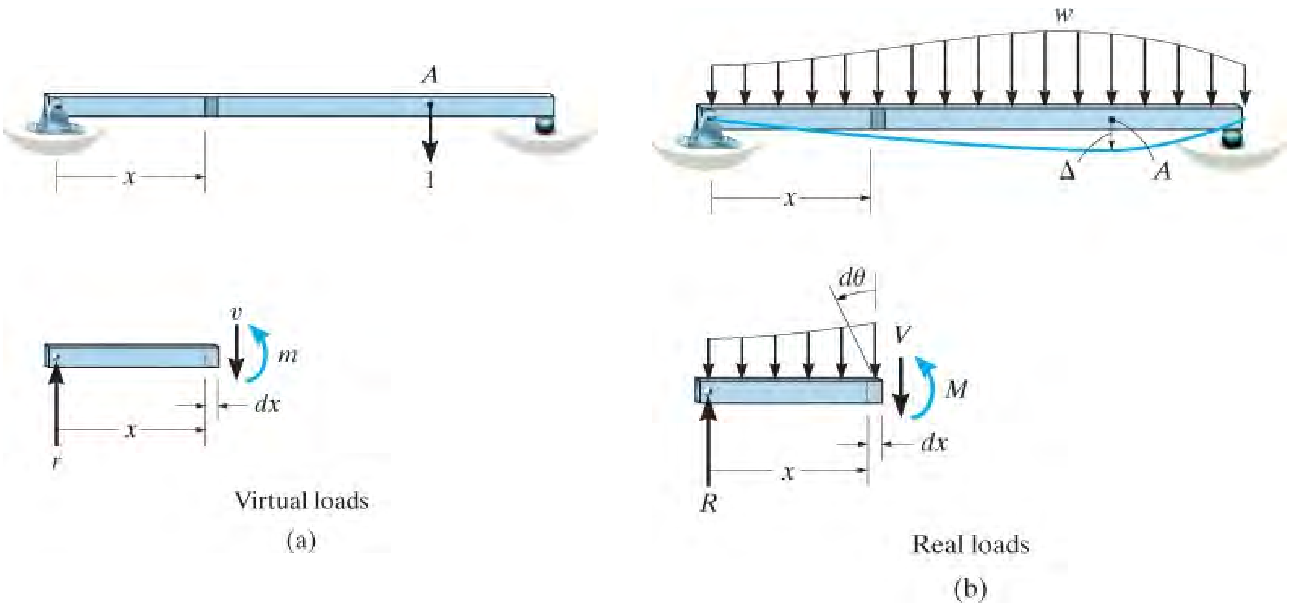
M = داخلی مؤمنت په بیم کی ، کوم چی تابع د x ښودل شوي، د حقیقي بارونو له امله

E = د موادو د ایلستیسیتي ماجولس

I = دغوڅی برخه ساحی انرشیايي مؤمنت په صفری محور

په ورته ډول، که چیرې په یوه نقطه کې میلان q د بیم په ایلستیک منحني و ټاکل شي، مجازی یو واحد کپل مؤمنت باید په دی نقطه کې تطبیق شي، او اړونده داخلي مجازی مؤمنت m باید وټاکل شي. که موږ د دې حالت لپاره معادله 14-34 پلي کړو او د شیير له امله د شکل بدلون اغیزې په پام کی ونه نیسو، موږ لرو

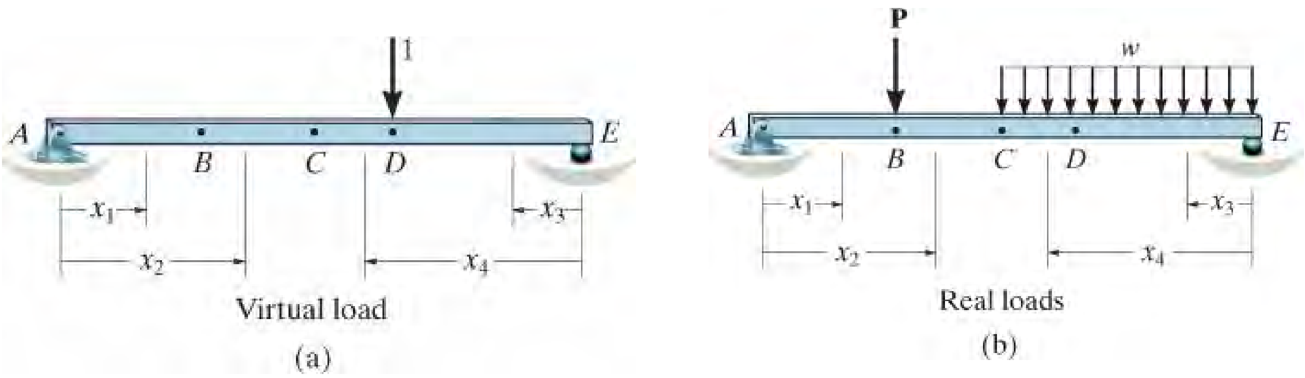
$$1 \cdot \theta = \int_0^L \frac{m_\theta M}{EI} dx \qquad (14\text{–}41)$$



انځور 14-34

د دې معادلو پلي کولو کی په پام کې ونیسئ ، چې د ښي اړخ انتیګرال استازیتوب د مجازی کړېدونکی سترين انرژي، کوم چې په بیم کې ساتل کیږي، کړي. که متمرکزه قواوی یا دځو کپل مؤمنتو لړی په بیم باندې عمل وکړي ، یا ویشل شوی بار دوام ودریږي، یو واحد انتیګرال د بیم په ټول اوږدوالي کې نشي ترسره کیدی. پرځای یې، جلا x محوروونه په هغو سیمو کې غوره شي چیری چی هیڅ د بارونو ځنډول شتون نلري. همدارنګه، دا اړینه نده چې هر ایکس (x) یوه ورته مبداء ولري، اما غوره شوی x د اصلي مؤمنت M د ټاکلو لپاره په یوه ځانګړې سیمه کې باید د مجازی مؤمنت m یا m_q ټاکلو لپاره ورته x په ورته سیمه کې ولري . د مثال په توګه، په پام کې ونیسئ بیم چی په انځور 14-35 کې ښودل شوي. په D کې د بې ځایه کیدو د ټاکلو لپاره، موږ په سیمه AB کې د سترین انرژي ټاکلو لپاره x_1 کارول کیدی شي ، همدا رنګه x_2 د سیمې BC لپاره ،

x3 د سیمې DE لپاره، او د سیمې DC لپاره x4 . د هرې پوښتنې لپاره، هر ایکس (x) محور باید داسی غوره شي ترڅو M او m یا (m_q) دواړو په اسانۍ سره فورمول یي جوړ شي.



انځور 14-35

د تحلیل کړنلاره

PROCEDURE FOR ANALYSIS

دا لاندی کړنلاره یوه طریقه وړاندی کوي ، تر څو و کولای شو بیځایه کیدنه او میلان په یو ټکي د ایلستیک منحني د بیم، د مجازی قواووطریقی په کارولو و ټاکو .

مجازی مؤمنت m یا m_q (Virtual Moments m or m_q).

- مجازی یو واحد بار په هغه ټکی د بیم کی پلي کړی کوم چی بیځایه کیدنه غوښتل شوي ده. بار باید په جهت د بیځایه کیدنی عمل وکړي.
- که چیری میلان غوښتل شوی وي یو واحد کپل مؤمنت په هغه ټکی کی پلی کړي.
- مناسب محورونه x کوم چی د بیم په سیمه کی اعتبار لري کوم چی مجازی او اصلی بارونه هلته غوخ شوی ندی، غوره کړي.
- کله چی واحد مجازی بار عمل کوی، او ټول بهرنی بارونه له بیم حذف شی، داخلی مؤمنت m یا m_q تابع د x محورسره محاسبه کړي. فرض کړی چی مومنتونو په مثبت جهت د بیم دعلامی کنوانسیون سره کوم چی په انځور 6-3 کی تشریح شوی عملکوی، Fig. 6-3.

حقیقي مؤمنتونه (Real Moments).

- هغه x محورونه چی m او m_q لپاره کارول شوي وو، د داخلی مؤمنت M محاسبه کولو لپاره چی د اصلی بارونو له امله رامینځ ته کیږي ، هم و کاروي. باید ډاډه وه اوسي چی M هم په یو شان مثبت جهت لکه د m او m_q لری.

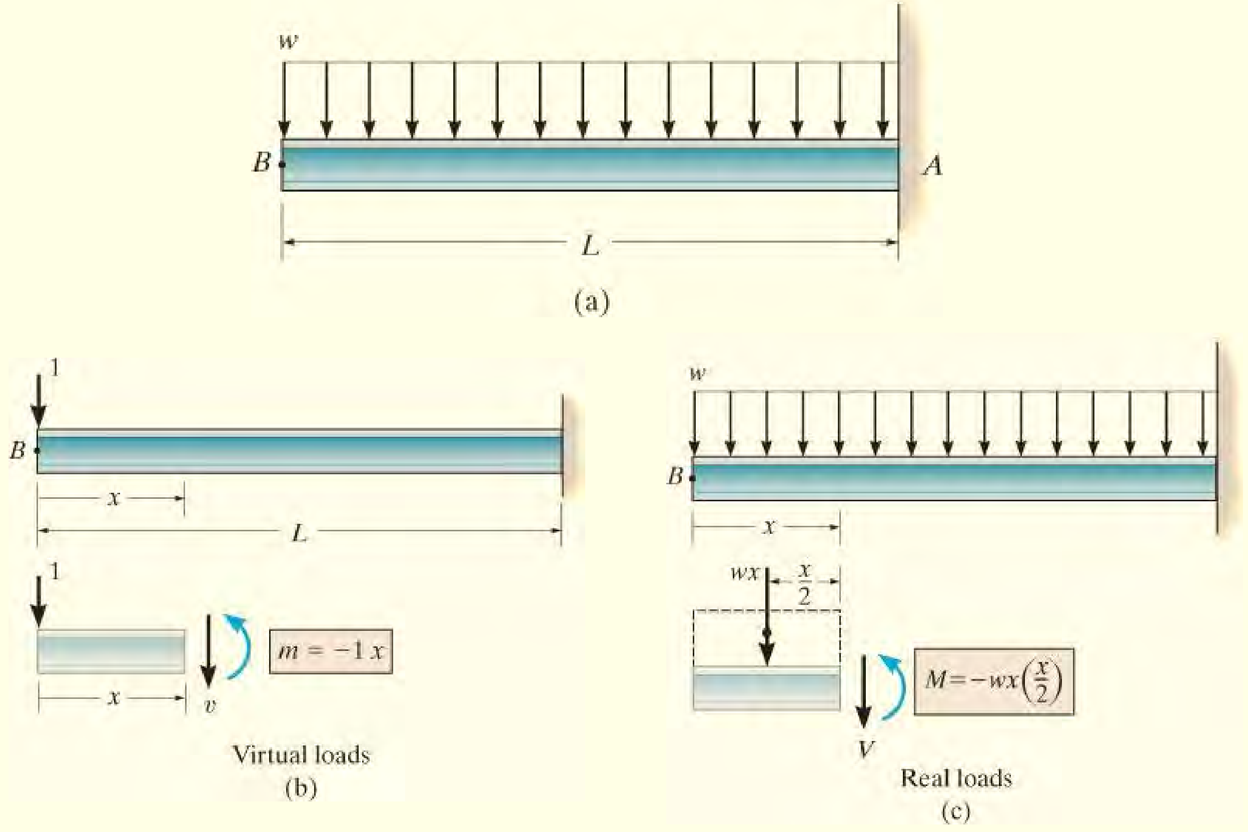
د مجازی-کار معادله (Virtual-Work Equation).

- د مجازی کار معادله د بیځایه کیدنی D او میلان q معلومولو لپاره پلی کړی.
- که چیری الجبري مجموعه د ټولو انتیګرالونو د بیم لپاره مثبت وي، بیځایه کیدنه D او میلان q جهت به یو شان د واحد بار یا یو واحد کپل مؤمنت په جهت وي. که چیری منفي ارزښت حاصل شو،د D او میلان q جهت به مخالف د واحد بار او واحد کپل مؤمنت د جهت وي.

مثالونه

مثال 14.13

یو بیم چی په انځور 14-36a کی ښودل شوي عمودی بیځایه کیدنه د ټکی B و ټاکی. EI ثابت دی.



انځور 14-36

حل (SOLUTION)

مجازي مؤمنت m (Virtual Moment m).

په پلی کولو د یو واحد مجازی بار په ټکی B کی، انځور 14-36b ، عمودی بیځایه کیدنه د ټکی B په لاس راځي. په کتنه، په بیم د بارونو، د دواړو اصلی او مجازي، ځنډول (discontinuity) نه لیدل کیږي. نو تنها یو ځانګړی x محور به د مجازی سترین انرژي محاسبه کولو لپاره وټاکل شي. ددی محور مبداء به په B کی و ټاکو ، چی په دی توګه ریکشنونه په A کی به اړین نه وی چی

وموندل شي تر څو داخلي مؤمنتونه m او M محاسبه شي. د برخی طریقی په کارولو سره داخلي مؤمنت m په انځور 14-36b کی ښودل شوي.

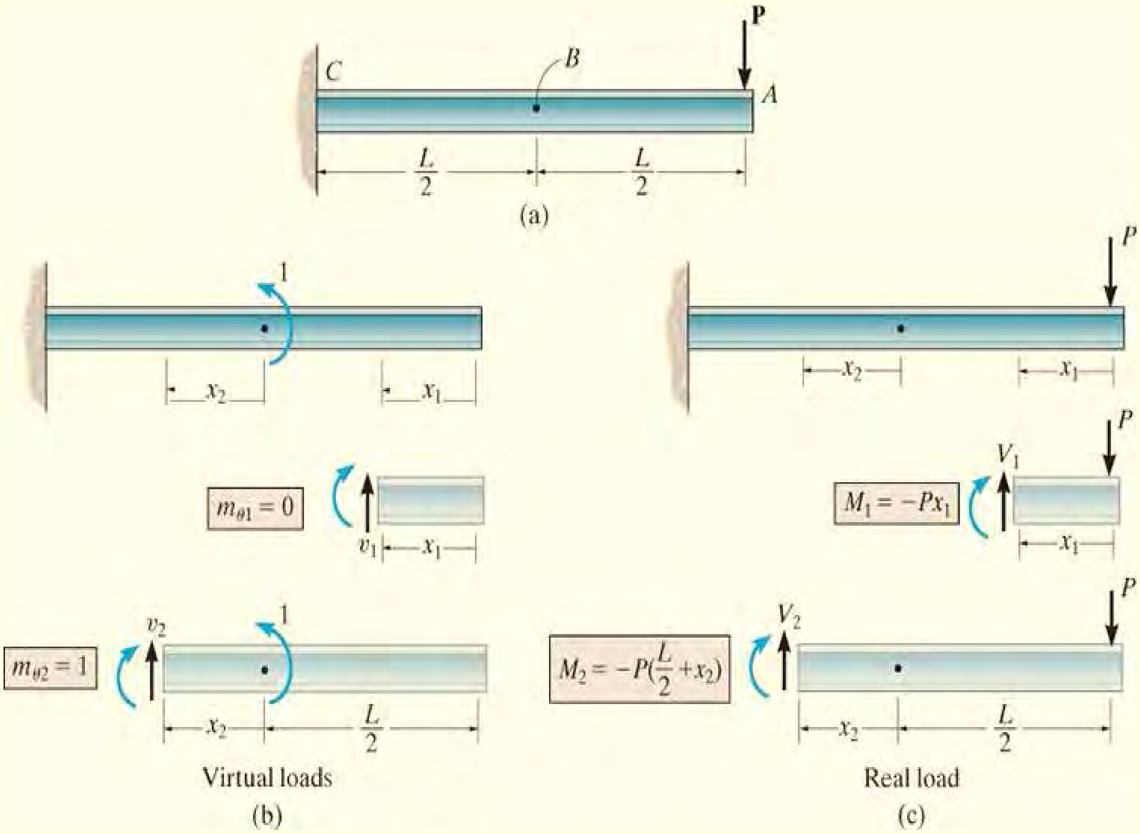
حقیقي مؤمنت M (Real Moment M). د ورته محور x په کارولو داخلی مؤمنت M څنګه چی په انځور 14-36c کی ښودل شوي، ټاکو.

دمجازي- کار معادله (Virtual-Work Equation). په ټکی B کی عمودي بیځایه کیدل عبارت دی په:

$$1 \cdot \Delta_B = \int \frac{mM}{EI}dx = \int_0^L \frac{(-1x)(-wx^2/2)\,dx}{EI}$$

$$\Delta_B = \frac{wL^4}{8EI} \qquad \textit{Ans.}$$

مثال 14.14 د بیم میلان په ټکی B کی و ټاکی ، انځور 14-37a ، EI ثابت دی.



انځور 14-37

حل (SOLUTION)

مجازي مؤمنت m_q (Virtual Moment m_q).

یو مجازی واحد کپل مؤمنت په B کی ځای په ځای کوو ترځو میلان په دی تکی کی و ټاکل شي، انځور 14-37b . دوه x محورمنه باید وټاکل شي تر څو په بیم کې ټول مجازی سترین انرژي محاسبه شي. محور x_1 د AB برخی سترین انرژي حساب کولو لپاره، او محور x_2 د BC برخی د سترین انرژي محاسبی لپاره انتخاب شوي دي. د برخو د طریقو په کارولو سره، د دې هرې برخې داخلي مؤمنت m_q په انځور 14-37b کې ښودل شوي.

حقيقي مؤمنتونه M (Real Moments M). د محوروونو x_1 او x_2 په کارولو سره داخلی مؤمنتونه M په انځور 14-37c کی ښودل شوي.

مجازي- کار معادله (Virtual-Work Equation). په تکی B کی میلان عبارت دی په

$$1 \cdot \theta_B = \int \frac{m_\theta M}{EI} dx$$

$$= \int_0^{L/2} \frac{0(-Px_1)\, dx_1}{EI} + \int_0^{L/2} \frac{1\{-P[(L/2) + x_2]\}\, dx_2}{EI}$$

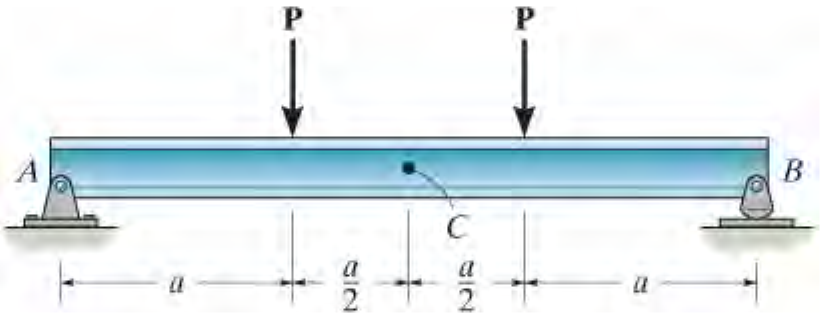
$$\theta_B = -\frac{3PL^2}{8EI} \qquad \textit{Ans.}$$

منفي علامه ښيي چې q_B د ساعت د گردش په لور ده. یعنی هغه مخالف جهت د مجازی کپل مؤمنت ده، انځور 14-37b و گوري.

سوالونه

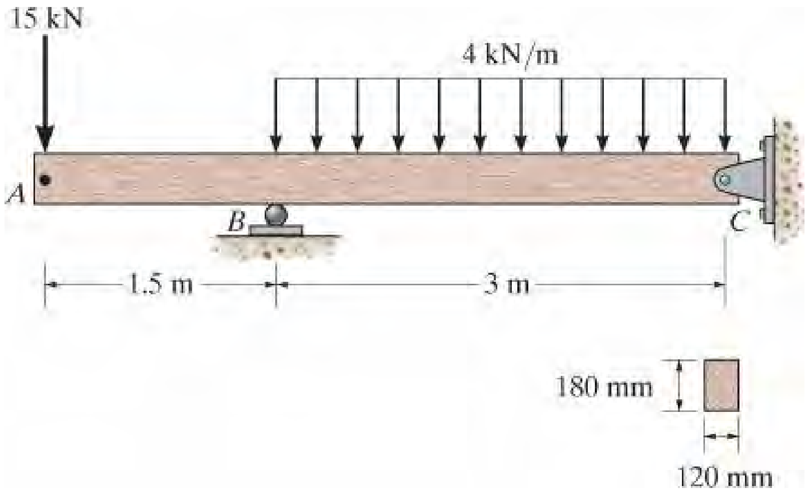
PROBLEMS

س 14-87. د ټکی C بیځایه کیدنه و ټاکي. EI ثابت دی.



انځور 14-87

س *14-88. دا لاندی بیم له جنوبی پاین (southern pine) څخه جوړه شوي، او $E_P = 13$ GPa . د A بیځایه کیدنه و ټاکي.

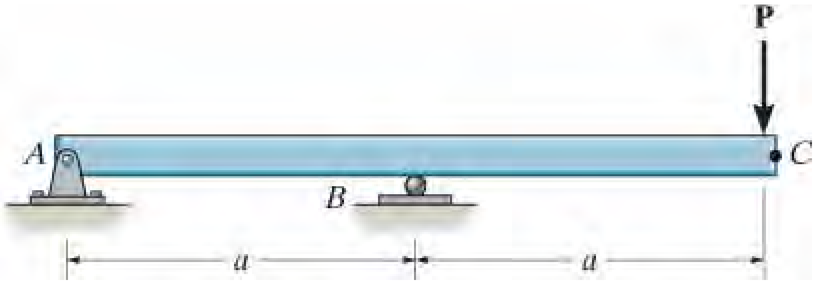


انځور 14-88

س 14-89. د ټکی C بیځایه کیدنه و ټاکي. EI ثابت دی.

س 14-90. میلان د ټکی C و ټاکي. EI ثابت دی

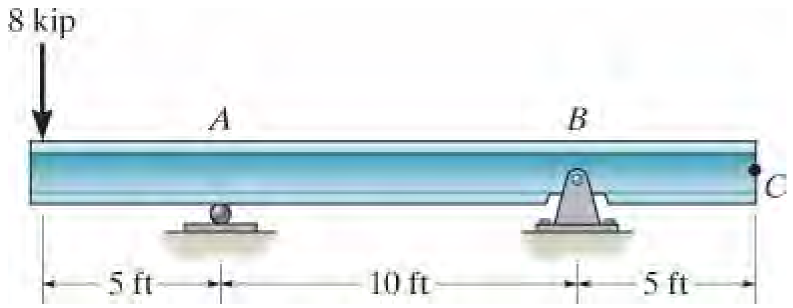
س 14-91. میلان د ټکی A و ټاکي. EI ثابت دی



انځور 14-89/90/91

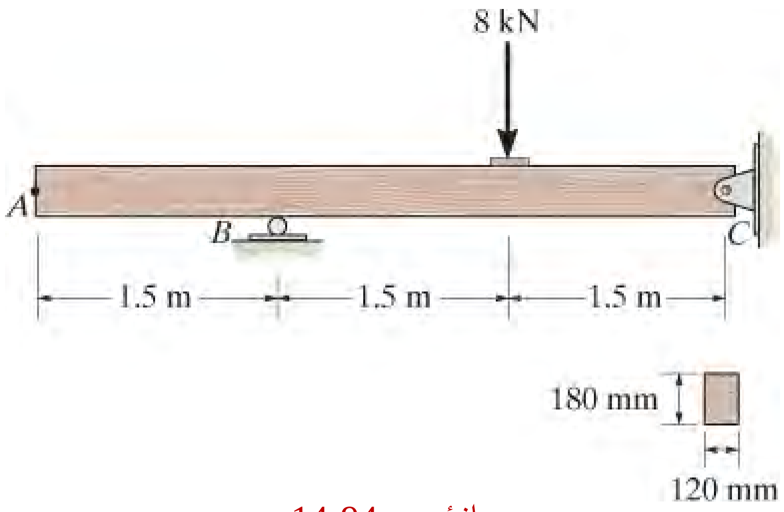
س *14-92. بیځایه کیدنه د ټکی C د A992 فولادی بیم و ټاکی، د بیم انرشایایي مؤمنت $I = 53.8\ \text{in}^4$.

س 14-93. د بیم میلان په B کی وټاکي. بیم له A992 فولادو جوړ شوي، $I = 53.8\ \text{in}^4$.



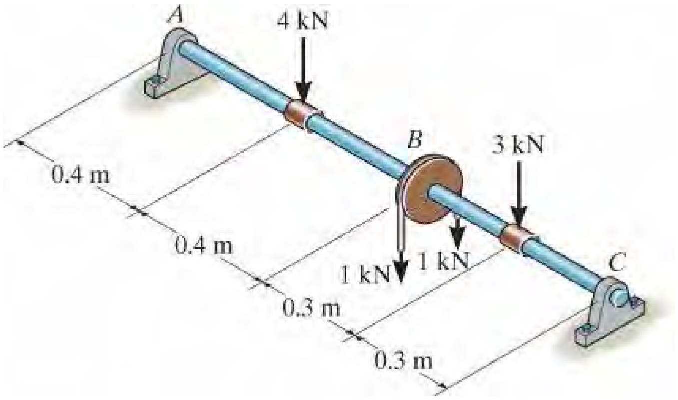
انځور 14-92/93

س 14-94. دا لاندی بیم له ډاګلس فرخخه حوړ شوي دي. میلان په C کی وټاکي.



انځور 14-94

س 14-95. په پولي B کې بیځایه کیدنه وټاکي. دA992 فولادو شافت 30 mm قطر لري.

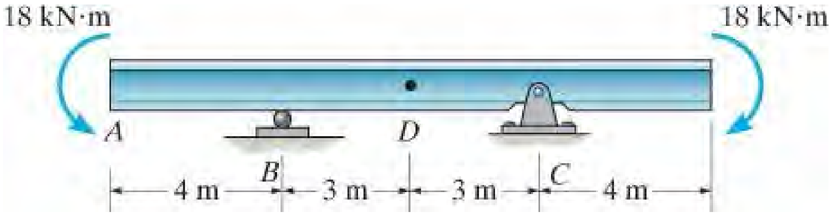


انځور 14-95

س *14-96. د A992 فولادو بیم انرشیايي مؤمنت $I = 125\ (10^6)\ \text{mm}^4$ لري. بیځایه کیدنه په Dکې و ټاکي.

س 14-97. دA992 فولادو بیم انرشیايي مؤمنت $I = 125\ (10^6)\ \text{mm}^4$ لري. میلان په A کې و ټاکي.

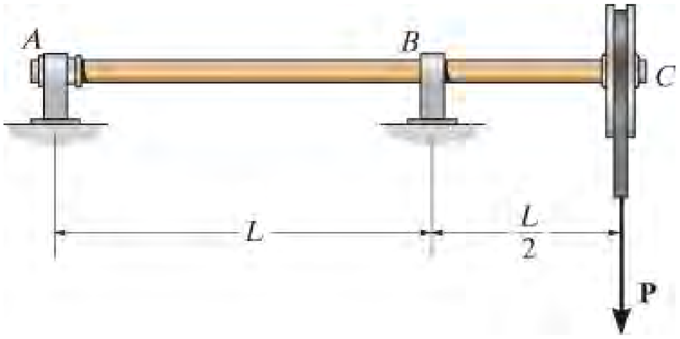
س 14-98. د ساختمانی A992 فولادو بیم انرشیايي مؤمنت $I = 125\ (10^6)\ \text{mm}^4$ لري. میلان په B کې و ټاکي.



انځور 14-96/97/98

س 14-99. د لاندی شافټ په ټکی C کې بیځایه کیدنه و ټاکي. EI ثابت دی.

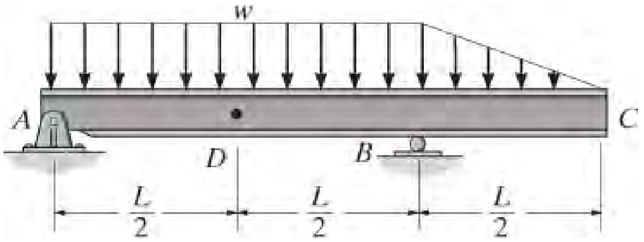
س *14-100. د لاندې شافټ په ټکی A کې میلان و ټاکي. EI ثابت دی



انځور 14-99/100

س 14-101. د وتلی بیم په پای C کې میلان و ټاکي. EI ثابت دی

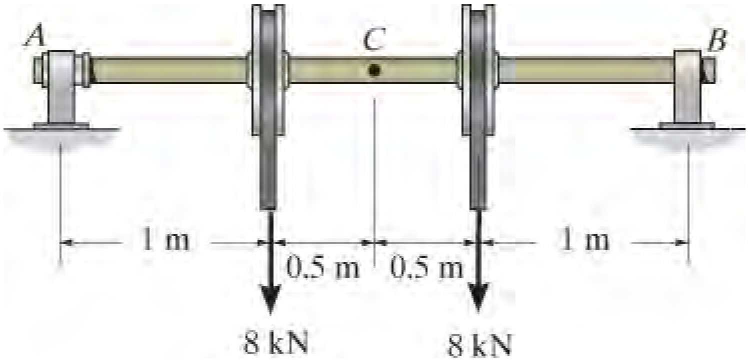
س 14-102. د وتلی بیم په ټکی D کې بیځایه کیدنه و ټاکي. EI ثابت دی



انځور 14-101/102

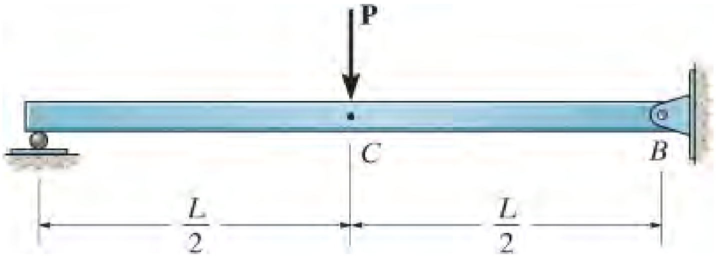
س 14-103. دا لاندی د 2014-T6 المونیم شافت 100 mm قطر لري، میلان په A کې و ټاکي.

س *14-104. دا لاندی د 2014-T6 المونیم شافت 100 mm قطر لري، بیځایه کیدنه په C کې و ټاکي.



انځور 14-103/104

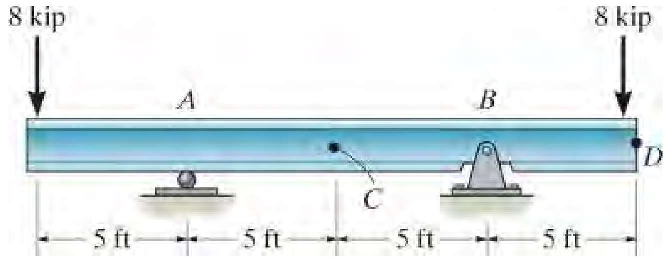
س 14-105. بیځایه کیدنه په C او میلان په B کی و ټاکي. EI ثابت دی



انځور 14-105

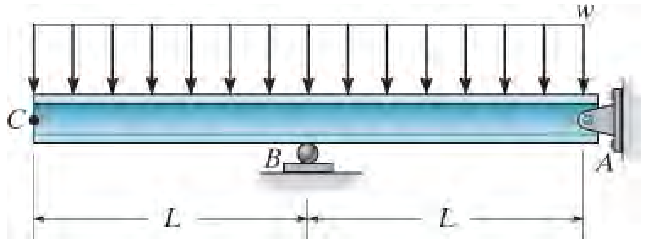
س 14-106. دا لاندی A992 فولادی بیم له W14 X 26 برخی څخه جوړ شوي، بیځایه کیدنه په C ټکی کی وټاکي.

س 14-107. دا لاندی A992 فولادی بیم له برخی W14 X 26 څخه جوړ شوي، میلان په ټکی A کی وټاکي.



انځور 14-106/107

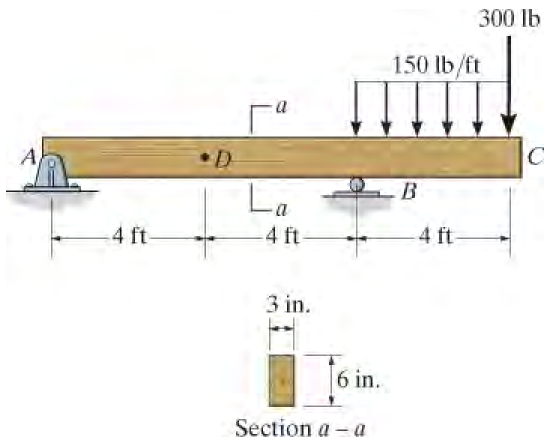
س *14-108. میلان په A کی و ټاکي. EI ثابت دی



انځور 14-108

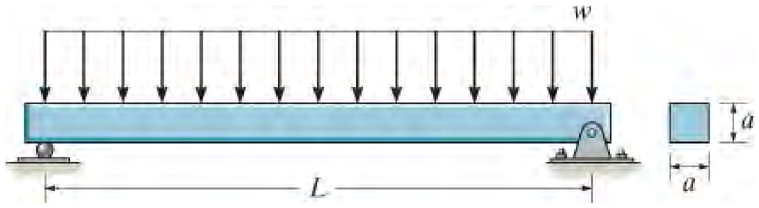
س 14-109. د سپین صنوبر وتلی بیم په ټکی C کی بیځایه کیدنه و ټاکي.

س 14-110. د سپین صنوبر وتلی بیم په ټکی D کی بیځایه کیدنه و ټاکي.



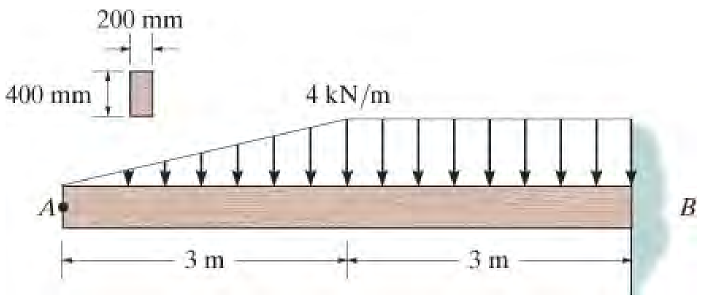
انځور 14-109/110

س 14-111. اعظمی بیځایه کیدنه د بیم د کړیدو له امله و ټاکي، او همدا رنګه هغه چی د شییر او کړیدو له امله. $E = 3G$ واخلي.



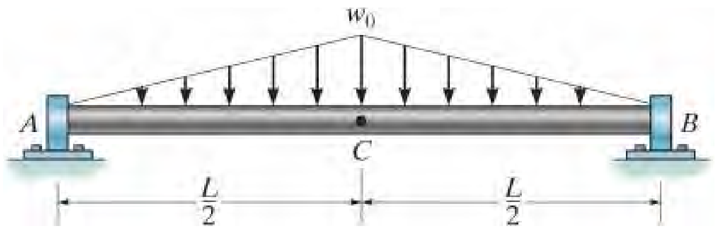
انځور 14-111

س *14-112. بیم له بلوط جوړ شوي ده او $E_0 = 11$ GPa ، میلان او بیځایه کیدنه په ټکی A کی و ټاکي.



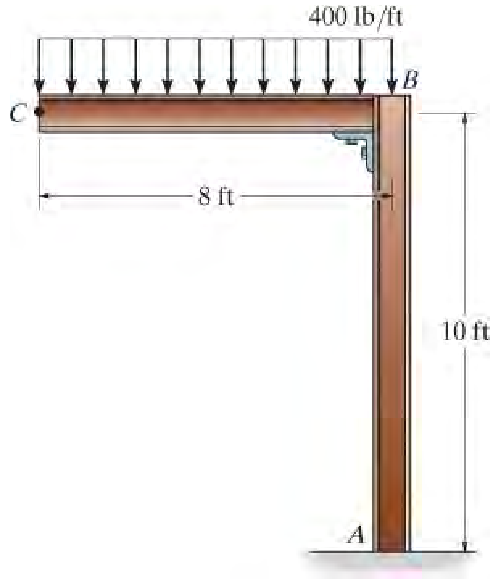
انځور 14-112

س 14-113. میلان د شافټ په بیرینګ اتکاء A کې و ټاکي. EI ثابت دی



انځور 14-113

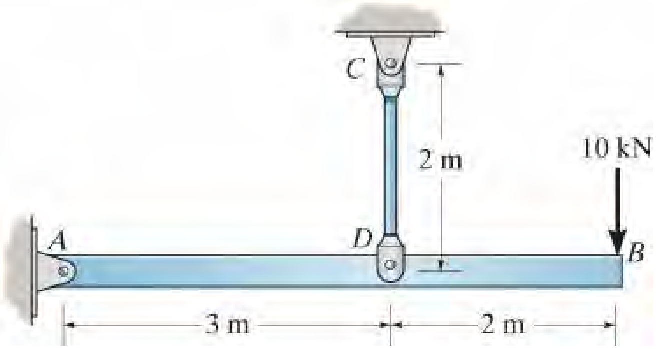
س 14-114. افقي او عمودی بیځایه کیدنه د ټکی C و ټاکي. په A کی کلکه اتکا ده. EI ثابت دی.



انځور 14-114

س 14-115. بیم AB مربع غوڅه برخه 100 mm په 100 mm لري. د میلی CD قطر 10 mm دي. که چیری دواړه له A992 فولادو جوړ شوی وی، عمودی بیځایه کیدنه د ټکی B د 10 kN بار له امله و ټاکي.

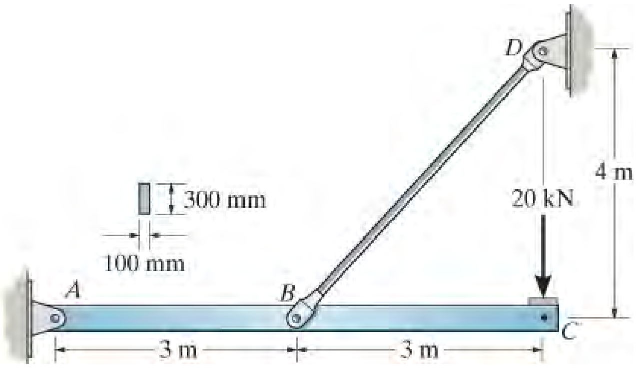
س *14-116. بیم AB مربع غوځه برخه 100 mm په 100 mm لري. د میلې CD قطر 10 mm دي. که چیرې دواړه له A992 فولادو جوړ شوی وی، میلان په ټکی A کی د 10 kN بار له امله و ټاکي.



انځور 14-115/116

س 14-117. خاده ABC مستطیلي غوځه برخه 300 mm په 100 mm لري. تړل شوی میله DB قطر 20 mm دي. که چیرې دواړه له A-36 فولادو جوړ شوی وی، عمودی بیځایه کیدنه د ټکی C د پلی شوي بار له امله و ټاکي. یوازي د ABC کږیدل او محوری قوه په DB کی په پام کی و نیسی.

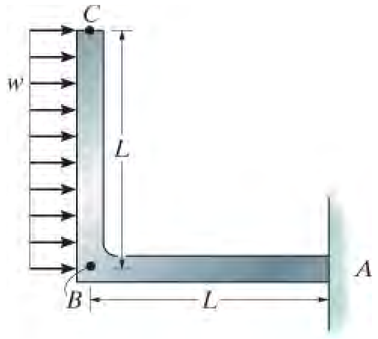
س 14-118. خاده ABC مستطیلي غوځه برخه 300 mm په 100 mm لري. تړل شوی میله DB قطر 20 mm دي. که چیرې دواړه له A-36 فولادو جوړ شوی وی، میلان په ټکی A د پلی شوي بار له امله و ټاکي. یوازي د ABC کږیدل او محوری قوه په DB کی په پام کی و نیسی



انځور 14-117/118

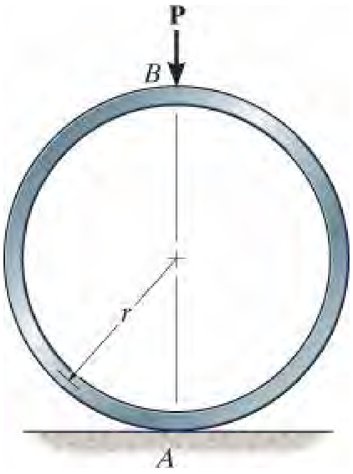
س 14-119. دا لاندی L شکل چوکاټ له یو ډول دوو برخو جوړ شوي، او کږیدونکی سختي یي EI ده. که چیرې یو ویشلشوی بار وربادنی پلی شوي وي، افقي بیځایه کیدنه د ټکی C و ټاکی.

س 14-120. دا لاندی L شکل چوکاټ له یو ډول دوو برخو جوړ شوي، او کږیدونکی سختي يي EI ده. که چیری یو ویشلشوی بار ورباندی پلی شوي وي، عمودي بيځايه کيدنه د ټکی B و ټاکی.



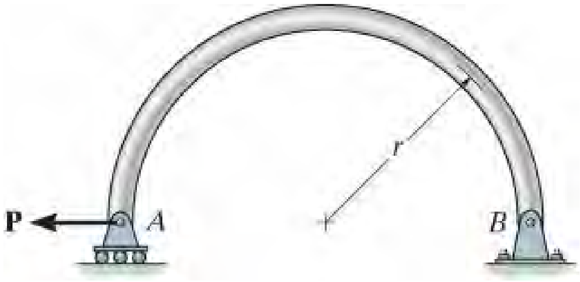
انځور 14-119/120

س 14-121. عمودی بيځايه کيدنه د حلقي په B کی ، ټاکي. EI ثابت دی.



انځور 14-121

س 14-122. افقي بيځايه کيدنه د رولر اتكاء په A کی د پلی شوی بار له امله و ټاکي. EI ثابت دی.



انځور 14-122

* 14.8 د کاسټګليانو قضيه (CASTIGLIANO'S THEORM)

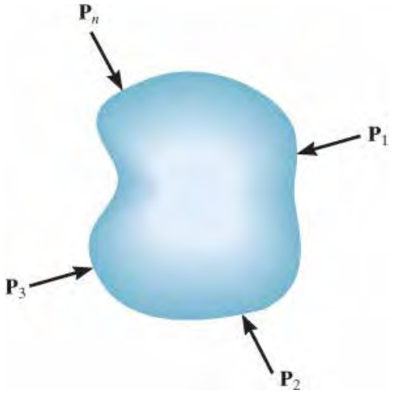
په 1879 کال کې، ايټالوی ريل پټلی يوه انجينر، البرټو کاسټيګليانو يو کتاب خپور کړ، چی په هغه کتاب کې يې د جسم په يوه ټکی کی د بې ځايه کيدو او ميلان د ټاکلو لپاره يوه طريقه بيان کړه . دا طريقه چې د کاسټيګليانو دوهه قضيه (Castigliano's second theorem) ورته ويل کيږي، يوازې په هغه جسمونو کی چی ثابت د تودوخی درجه لری، او له خطي ايلستيک چلند لرونکي موادو څخه جوړ شوي وی ور باندې تطبيق کيږي . که بې ځايه کيدنه په يوه نقطه کې بايد وټاکل شي، تيورم وايي چې بې ځايه کيدنه په جسم کې مساوی ده په لومړي حصوی مشتق د سټرين انرجی په جسم کی نسبت هغه قوی ته چې پدی ټکی کی عمل کوی د بيځايه کيدو په جهت. په ورته ډول، ميلان د مماس په يوه ټکی د جسم مساوی ده په لومړي حصوی مشتق د سټرين انرجی په جسم کی نسبت هغه کپل مؤمنت کوم چی په غوښتل شوی ټکی کی په جهت د ميلان زاويی عمل کړی .

دا تيورم د خپل سري شکل جسم په پام کې نيسي، کوم چې تابع دی د n قواوو P_1 ، P_2، . . . ،P_n وی ، انځور14-38 . د انرژی ساتنې له مخې، د دې قواو لخوا ترسره شوي بهرني کار بايد مساوي وي په جسم کې ذخيره شوي داخلي سټرين انرژي. څرنګه چې بهرنی کار تابع د خارجي بارونودی $U_e = \Sigma \int P\,dx$ معادله 14-1 ، نو داخلي کار هم د خارجي بارونو تابع دی. په دې توګه،

$$U_i = U_e = f(P_1 , P_2 , \ldots , P_n) \qquad (14\text{–}42)$$

اوس که هره قوه P_j د خارجی قواوو ، په يوه کوچنی اندازه dP_j زياتوالی و مومي ، داخلی کار به هم زيات شی، تر څو سټرين انرژي شي:

$$U_i + dU_i = U_i + \frac{\partial U_i}{\partial P_j} dP_j \qquad (14\text{–}43)$$



انځور 14-38

په هرصورت، دا ارزښت به په ترتیب د n قواوو، کوم چې په جسم باندی پلی کیږي ، اړه ونلري.
د مثال په توګه، موږ کولی شو چې لومړی $d\mathbf{P}_j$ په جسم پلي کړو، بیا د $\mathbf{P}_1$، $\mathbf{P}_2$ ، ... $\mathbf{P}_n$ بار پلي کړئ. که موږلمړی کوچنی $d\mathbf{P}_j$ زیاتوالی پلي کړو ، دا به په جسم په اندازه دکوچنی $d\Delta_j$ توپیر په سمت د dP_j راوړی. د معادلی 14-2 له مخی $(U_e = \frac{1}{2} P_j\Delta_j)$ ، د سترین انرژي زیاتوالی به بیا $\frac{1}{2}\, dP_j\, d\Delta_j$ به وي . دا دوهمه درجه ډیفرینشل دی او کیدای شي چې حذ ف شي. د بارونو $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \ldots$ ،$\mathbf{P}_n$ پلي کول لامل کیږی چې $d\mathbf{P}_j$ نور حرکت وکړئ د بې ځایه کیدو له لارې Δ_j شی، ترڅود سترین انرژي کیږي:

$$U_i + dU_i = U_i + dP_j\, \Delta_j \qquad (14\text{–}44)$$

دلته U_i داخلی سترین انرژي د بارونو $\mathbf{P}_1$،$\mathbf{P}_2$ ، ... $\mathbf{P}_n$ له امله، او $dP_j\, d\Delta_j$ اضافي سترین انرژي د $d\mathbf{P}_j$ له امله ده.

د لنډيز لپاره، معادله 14-43 په جسم کې استازیتوب د سترین انرژي د لومړي ځل پلي کولو بارونو $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2$ ، .... $\mathbf{P}_n$ ، سره تاکل کیږي اوبیا د $d\mathbf{P}_j$ د پلی کیدو له امله ؛ معادله 14-44 استازیتوب د سترین انرژي کله چې لومړی د $d\mathbf{P}_j$ عمل وکړی ، او بیا بارونه $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2$ ..... $\mathbf{P}$n عمل وکړی. څرنګه چې دا دوه حالته معادل او مساوي وي، موږ اړتیا لرو

$$\Delta_j = \frac{\partial U_i}{\partial P_j} \qquad (14\text{–}45)$$

کوم چې قضیه ثابتوي. د بیلګی په توګه بیځایه کیدنه $d\Delta_j$ په جهت د $\mathbf{P}_j$ مساوی ده په لمړی حصوی مشتق د سترین انرژي نسبت $\mathbf{P}_j$ ته.

د Castigliano دویمه قضیه د جسم په اړه یوواقعیت دجسم د *مطابقت* اړتیا(compatibility requirement) ده، ځکه چې دا په بې ځایه کیدو پورې تړاو لري.* پورتني لاس ته راوړنه دی ته اړتیا لري چې د تحلیل لپاره یوازې محافظه کاره قواوي په پام کې ونیول شي. دا قواوی په هر ترتیب کې پلي کیدی شي، او دوی کار کړی، او هغه کار د ترتیب له لاری څخه خپلواک دي، او له همدې امله هیڅ انرژي ضایع نه کیږي. تر هغه وخته چې مواد خطي ایلستیک لرونکي چلند ولري، پلي شوي قواوی به محافظه کار وي او قضیه د اعتبار وړ ده *.

*کاستیګلیانو لومړی قضیه هم بیان کړي، کوم چې ورته ده. په هرصورت، دا P_j بارته تړاو ورکوی حصوی مشتق د سترین انرژي نسبت د اړونده بې ځایه کیدو کوم چې $P_j = \partial U_i/\partial \Delta_j$ دی. دا تیورم د جسم د توازن څرګندولولپاره بله لاره ده.

* 14.9 د کاستګلیانو قضی پلی کول په تراس (CASTIGIANO'S THEORM'S APPLIED TO TRUSSES)

ځرنګه چې په ټرس کی غړی د محوري بار سره مخ دی، سترین انرژي د هر غړي له 14-16 معادلی پیداکیږی، $U_i = N^2L/2AE$. دا معادله په 14-45 معادله کی ځای په ځای کوو اوتیته لیکنه i حذف کوو، موږ لرو

$$\Delta = \frac{\partial}{\partial P}\sum \frac{N^2L}{2AE}$$

په عمومی ډول آسانه ده چې مخ کی له جمع کولو مشتق و نیول شي. او همدارنګه L, A او E د غړي لپاره ثابت وی، نو بیا لیکلی شو:

$$\Delta = \sum N\left(\frac{\partial N}{\partial P}\right)\frac{L}{AE} \qquad (14\text{–}46)$$

دلته

D = د ترس د ګنډی بیځایه کیدنه

P = بهرنی د متغیر ارزښت قوه د تراس په ګنډه کی، چې د D په جهت عمل کړي

N = داخلی قوه په غړی کی د دواړو **P** او اصلی بارونو له امله په تراس کی

L = د غړی اوږدوالي

A = د غړي دغوڅی برخه ساحه

E = د غړی د موادو د ایلستیستي ماجولس

په یاد ولري چې پورتني معادله ورته د مجازي قواوو معادله 14-37 ($1\cdot\Delta=\Sigma nNL/AE$)، یوازي n په $\partial N/\partial P$ عوض شوي دي.

د تحلیل کړنلاره

PROCEDURE FOR ANALYSIS

دا لاندې کړنلاره یوه طریقه وړاندې کوي ، تر څو و کولای شو بیځایه کېدنه د ټرس د ګنډې ، د کاستیګلیانو دوهمې قضیه په کارولو سره ټاکو .

بهرنی قوه *P* (External Force *P*).

- قوه P په هغه ګنډه د ترس پلی کړی کوم کی چې بیځایه کیدنه غوښتل شوي ده. دا قوه متغیر ارزش لری او باید د بیځایه کیدنی جهت په امتدادعمل وکړي.

داخلی قواوي *N* (Internal Forces *N*).

- په هر غړي کی قوه N د اصلی ارزښتونو د بارونو (عددي) او (متغیر) قواوو P له امله پیداکړی. فرض کړي چې کششي قواوی مثبت دی او ټیلوهونکی قواوي منفي دي.
- د هر غړی لپاره اړوند حصوی مشتق $\partial N/\partial P$ و مومئ.
- وروسته له دی چې N او $\partial N/\partial P$ وموندل شول، د P لپاره د هغه ګمارل شوی شمیری ارزښت که چیری دا په ریښتني قوه وی ځای په ځای کړي، که نه نو دا به د صفر سره مساوی کړئ.

د کاستیګلیانو دوهمه قضیه (Castigliano's Second Theorem).

- د کاستیګلیانو دوهمه قضیه د غوښتل شوی بیځایه کیدني D معلومولو لپاره و کاروي.
- دا مهم ده چې الجبری نښه د اړوند ارزښتونو د N او $\partial N/\partial P$ کله چې په معادله کی ځای په ځای کیږي په پام کی ونیسئ.
- که چیری مجموعی محصله د $\Sigma N(\partial N/\partial P)L/AE$ مثبت وي، نو D به یو شان په جهت د **P** سره وي. که چیری منفي ارزښت حاصل شو،د D به مخالف د **P** جهت وي.

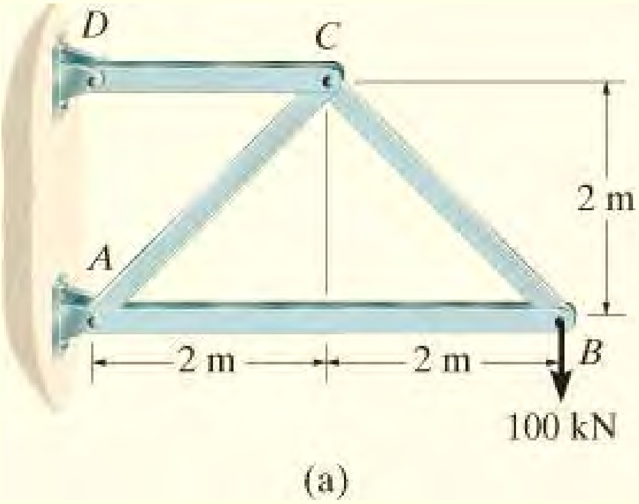
مثالونه

مثال 14.15

عمودي بيځايه کيدنه د ګنډی C د فولادی ټرس ، انځور 4-39a ، و ټاکئ. د هر غړی دغوځی برخی ساحه $A = 400\ mm^2$ او $E_{st} = 200$ GPa.

حل (SOLUTION)

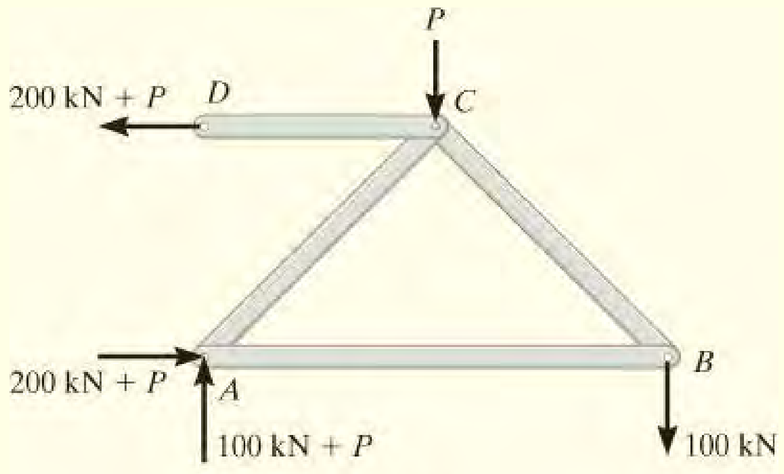
خارجي قوه P (External Force P). یوه عمودی قوه P د تزاس په ګنډه C کی پلی شوي ده، ځکه چی عمودی بیځایه کیدنه ددی ګنډی غوښتل شوی ده، انځوز 14-39b .



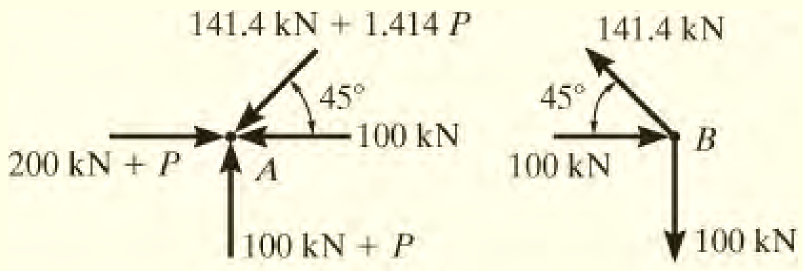
انځور 14-39

داخلی قواوی N (Internal Forces N). په A او D اتکاؤ کی ریکشونونه محاسبه شوی ، او پایلی یي په انځور 14-39b کی ښودل شوي دي. د ګنډی طریقي په کارولو سره قواوی N د هر غړی معلومی شوي دی، انځور 14-39c* . د آسانتیا لپاره دا پایلي او اړوند حصوی مشتق $\partial N/\partial P$ یي په جدول کی ښودل شوي. په یاد ولرئ ځرنګه چی **P** واقعیاً د ریښتني بار په توګه په ترس کی شتون نلري، موږبه P =0 حساب کړو.

Member	N	$\frac{\partial N}{\partial P}$	$N(P=0)$	L	$N\left(\frac{\partial N}{\partial P}\right)L$
AB	-100	0	-100	4	0
BC	141.4	0	141.4	2.828	0
AC	$-(141.4 + 1.414P)$	-1.414	-141.4	2.828	565.7
CD	$200 + P$	1	200	2	400
					Σ 965.7 kN · m



(b)



(c)

انځور 14-39 تکرار)

کاستیګلیانو دوهمه قضیه (Castigliano’s Second Theorem).

معادله 14-46 پلی کوو ، مونږ لرو

$$\Delta_{C_v} = \Sigma N\left(\frac{\partial N}{\partial P}\right)\frac{L}{AE} = \frac{965.7\ \text{kN}\cdot\text{m}}{AE}$$

دA او E عددی ارزښتونه ځای په ځای کوو، مونږ لرو:

$$\Delta_{C_v} = \frac{965.7\ \text{kN}\cdot\text{m}}{[400(10^{-6})\ \text{m}^2]\ 200(10^6)\ \text{kN/m}^2}$$

$$= 0.01207\ \text{m} = 12.1\ \text{mm} \qquad \textit{Ans.}$$

دا حل د مثال 14.11 سره باید پرتله شي ، کوم چی د مجازی - کارطریقه کارول شوی وه.

* دا ممکن ډیر آسانه وي چي یوازې د kN 100 - بار سره ټراس تحلیل کړئ ، او بیا ټراس د **P** بار سره تحلیل کړئ. وروسته پایلي کولی شي په الجبریک ډول لنډیز شي او *N* قواوی حاصل شي.

سوالونه

PROBLEMS

س 14-123. س 14-73 پوښتنه، په کارولو د کاستیګلیانو قضیی حل کړي.

س *14-124. س 14-74 پوښتنه، په کارولو د کاستیګلیانو قضیی حل کړي.

س 14-125. س 14-75 پوښتنه، په کارولو د کاستیګلیانو قضیی حل کړي.

س 14-126. س 14-76 پوښتنه، په کارولو د کاستیګلیانو قضیی حل کړي.

س 14-127. س 14-77 پوښتنه، په کارولو د کاستیګلیانو قضیی حل کړي.

س 14-128. س 14-78 پوښتنه، په کارولو د کاستیګلیانو قضیی حل کړي.

س 14-129. س 14-81 پوښتنه، په کارولو د کاستیګلیانو قضیی حل کړي.

س 14-130. س 14-82 پوښتنه، په کارولو د کاستیګلیانو قضیی حل کړي.

س 14-131. س 14-85 پوښتنه، په کارولو د کاستیګلیانو قضیی حل کړي.

س *14-132. س 14-86 پوښتنه، په کارولو د کاستیګلیانو قضیی حل کړي.

* 14.10 د کاستګلیانو قضيي پلی کول په بیم (CASTIGIANO'S (THEORM'S APPLIED TO BEAMS

په بیم کی داخلي سترين انرژي د کړيدو او شييرله امله رامينځته کيږي. لکه څنګه چې په مثال 14.7 کې اشاره شوې، که چیری بیم اوږده او نازکه وي، د شییر له امله سترين انرژی د کړيدو په پرتله له پامه غورځول کیدی شي. که دا فرض کړو، نود سترين انرژي $U_i=\int M^2dx/2EI$ ده، معادله 17-14 . د شکته عدد i پريښودل، د کاستیګلیانو دوهمه قضیه، $\Delta i=\partial Ui/\partial Pi$، کيږي :

$$\Delta = \frac{\partial}{\partial P}\int_0^L \frac{M^2\,dx}{2EI}$$

د داخلی مؤمنت لپاره د اصطلاح مربع کولو، انتیګرال نیولو ، او بیا د حصوی مشتق په اخيستلو پر ځای، دا په عمومی ډول آسانه ده چې مخ کی له انتیګرال نیولو،د مشتق نیول اجرا شي. بیا موږ لرو:

$$\Delta = \int_0^L M\left(\frac{\partial M}{\partial P}\right)\frac{dx}{EI} \qquad (14\text{–}47)$$

دلته

D = د ټکي بیځایه کیدنه د حقیقي بار له امله کوم چې په بیم پلی شوی دي

P = بهرنی متغیر ارزښت قوه چې د بیم په ټکی کی، په جهت د D عمل کړي

M = داخلی مؤمنت په بیم کی، چې تابع د x محاسبه شوي، او هغه د دواړو قوو، P او اصلی بارونو له امله دی

E = د غړی د موادو د ایلستیستي ماجولس

I = د غړي دغوڅی برخی ساحی انرشیايي مؤمنت ، چې په صفری محور محاسبه شوی

که میلان د تانجانت q په یو ټکي د مماس په ایلستیک منحني وټاکل شي، باید حصوی مشتق د داخلی مؤمنت نسبت یو خارجی کپل مؤمنت M` ته، چی په ټکی کی عمل کړي، و موندل شي.

$$\theta = \int_0^L M\left(\frac{\partial M}{\partial M'}\right)\frac{dx}{EI} \qquad (14\text{–}48)$$

پورتنئ معادلی مجازي قواوو، معادلي 14-40 او 14-41 ته ورته دی، پرته له دی چی m او m_q په ترتیب سره $\partial M/\partial P$ او $\partial M/\partial M'$ ، تعویضوی یا بیځایه کوی.

برسېره پردې، که محوری بار، شییر، او تورژن د پام وړ سترین انرژي لامل په غړو کی شي، نو د دې ټولو بارونو اغیزې باید د کاستیګلیانو قضيي په پلي کولو کې شامل شي. د دې کولو لپاره موږ باید هغه د سترین انرژي توابع د دوی د حصوی مشتقونو چی په برخه 14.2 کی بیان شول وکاروو. مونږیې لرو

$$\Delta = \Sigma N\left(\frac{\partial N}{\partial P}\right)\frac{L}{AE} + \int_0^L f_s V\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)\frac{dx}{GA} + \int_0^L M\left(\frac{\partial M}{\partial P}\right)\frac{dx}{EI} + \int_0^L T\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)\frac{dx}{GJ} \qquad (14\text{–}49)$$

ددی عمومی فورمول پلی کول ورته د معادلو 14-47 او 14-48 پلی کول دي.

د تحلیل کړنلاره

PROCEDURE FOR ANALYSIS

دا لاندی کړنلاره یوه طریقه وړاندی کوي ، تر څو و کولای شو د کاستیګلیانو دوهمه قضیه وکارو.

بهرنی قوه P یا کپل مؤمنت (External Force P or Couple Moment $M`$).

- قوه P په هغه ټکی د بیم پلی کړی کوم کی چی بیځایه کیدنه غوښتل شوي ده. دا قوه باید په امتداد د بیځایه کیدنی جهت عمل وکړي.
- که چیری میلان د مماس په یوه ټکی غوښتل شوي وی کپل مؤمنت **M`** په هغه ټکی پلی کړي.
- فرض کړی چی دواړه **P** او **M`** تغیرلرونکی ارزښتونه لري.

داخلی مؤمنتونه M (Internal Moments M).

- مناسب x محوررونه داسی رامینځته کړئ، کوم چې د بیم په برخو کی د قبول وړ وي، چیرې چې د قوو، ویشل شوی بار، او یا کپل مؤمنت هیڅ وقفه یا غوځیدل شتون ونلري.
- داخلی مؤمنتونه M تابع د P او یا $M`$ معلوم کړي او بیا حصوی مشتقونه $\partial M/\partial P$ او $\partial M/\partial M'$ د هر x محور لپاره ومومئ.
- وروسته له دي چې M او $\partial M/\partial P$ یا $\partial M/\partial M'$ وټاکل شي، د P یا $M`$ خپل شمیري ارزښتونه ورکړی، که چیرې دوی ربښتینی قوه او یا مومنټ تعویض کړی وی. که نه، نو $P$ یا $M`$ د صفر سره مساوي کړئ .

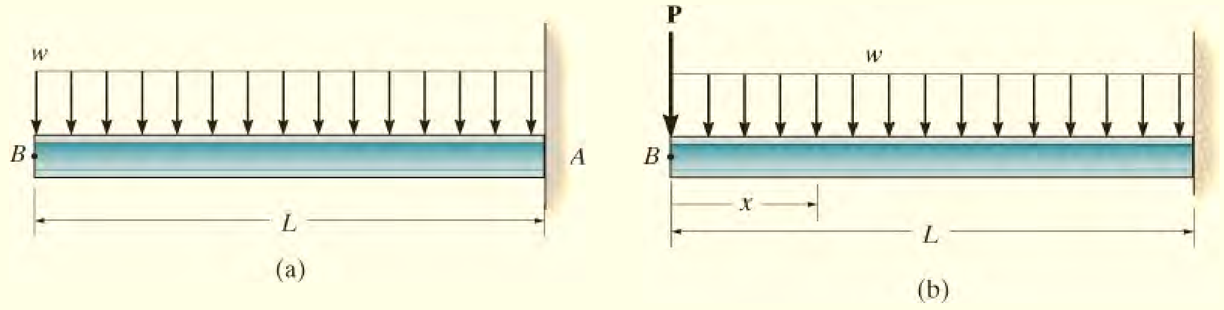
د کاستیګلیانو دوهمه قضیه (Castigliano’s Second Theorem).

- معادلی 14-47 او 14-48 د غوښتل شوی بیځایه کیدني D او یا میلان q معلومولو لپاره و کاروي. دا مهم ده چې الجبری نښه یا علامه د اړوند ارزښتونو د M او $\partial M/\partial P$ یا $\partial M/\partial M'$ کله چې په معادله کی ځای په ځای کیږي په پام کی ونیسئ.
- که چیری مجموعی محصله د ټولو ټاکلیو انتیګرالونو مثبت وي، نو D او یا q به یو شان په جهت د **P** او **M`** سره وي. که چیری منفي ارزښت حاصل شو،د D او یا $q$ به مخالف د **P** او **M`** جهت وي.

مثالونه

مثال 14.16

په دی لاندی انځور 14-40a کی، د ښودل شوی بیم بیځایه کیدنه د B تکی ، وټاکئ.

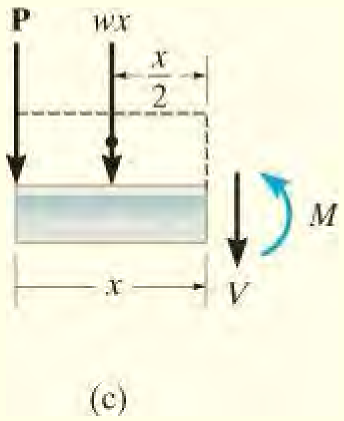


انځور 14-40

حل (SOLUTION)

خارجی قوه P (External Force P). یوه عمودی قوه **P** په ټکي B ، په بیم کی اینودل شوي ، انځور 14-40b .

داخلی مؤمنت M (External Force M). د حل لپاره یوازی یو x محور ته ارتیا ده، ځکه چی د A او B تر منځ د بارونو هیڅ وقفه نشته. د برخی طریقي په کارولو، انځوز 14-40c ، داخلی مؤمنت او حصوی مشتق عبارت دی په



انځور 14-40 (تکرار)

$$\circlearrowleft + \Sigma M_{NA} = 0; \quad M + wx\left(\frac{x}{2}\right) + P(x) = 0$$

$$M = -\frac{wx^2}{2} - Px$$

$$\frac{\partial M}{\partial P} = -x$$

ځرنګه چې P = 0 ، هغه راکوي

$$M = \frac{-wx^2}{2} \qquad \text{and} \qquad \frac{\partial M}{\partial P} = -x$$

کاستیګلیانو دوهمه قضیه (Castigliano's Second Theorem).

معادله 14-47 پلی کوو، موږ لرو:

$$\Delta_B = \int_0^L M\left(\frac{\partial M}{\partial P}\right)\frac{dx}{EI} = \int_0^L \frac{(-wx^2/2)(-x)\,dx}{EI}$$

$$= \frac{wL^4}{8EI} \qquad \textit{Ans.}$$

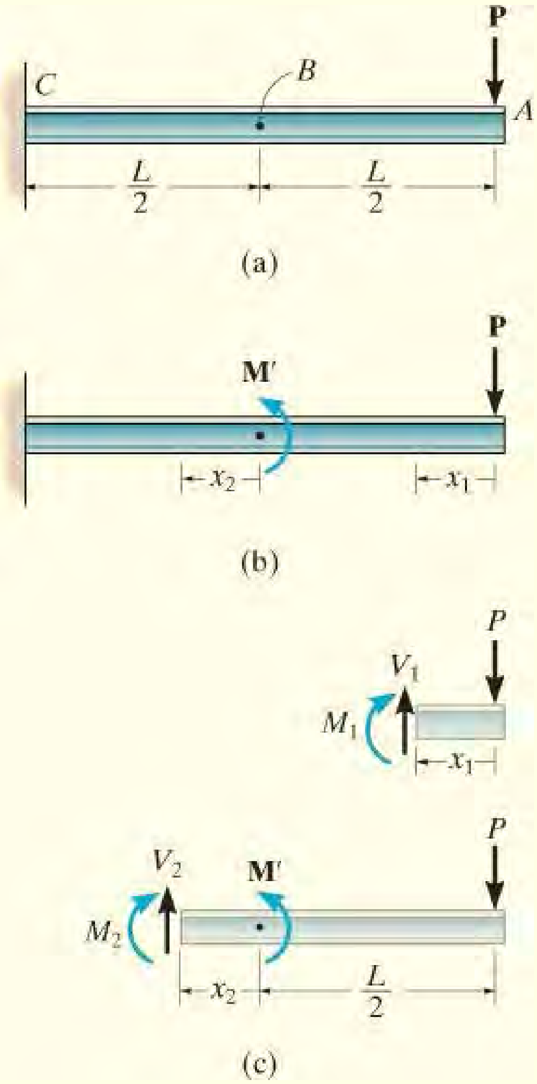
ددی حل او د مجازی-کارطریقی ترمینځ ورته والی ، مثال 14.13 ، یادونه باید وشي.

مثال 14.17

د دی لاندی بیم چي په انځور 14-41a کی ښودل شوی ، میلان په ټکی B کی وټاکئ. EI ثابت دی.

حل (SOLUTION)

خارجی کپل مؤمنت M` (External Couple Moment $M$`). څرنګه چي میلان په B کی وموندل شي، یو کیل مؤمنت **M`** ، په دی ټکی کی پلی کیږي ،انځور 14-41b .



داخلی مؤمنت M (External Force M).

دوه محوررونه، x_1 او x_2 باید وکارول شي تر څو داخلی مؤمنت په بیم کی تشریح کړئ، ځکه چي **M`**

په B کی وقفه لري. څنګه چي په انځور 14-41b کی ښودل شوي x_1 له A تر B پورې، او x_2 له B تر C پورې دي. د برخی له طریقي کار اخیستل کیږی ، انځور 14-41c داخلی مؤمنتونه او حصوی مشتق د x_1 اوx_2 لپاره عبارت دی په :

انځور 14-41

$$\circlearrowleft + \Sigma M_{NA} = 0; \qquad M_1 = -Px_1, \qquad \frac{\partial M_1}{\partial M'} = 0$$

$$\circlearrowleft + \Sigma M_{NA} = 0; \qquad M_2 = M' - P\left(\frac{L}{2} + x_2\right), \qquad \frac{\partial M_2}{\partial M'} = 1$$

کاستيګليانو دوهمه قضيه (Castigliano’s Second Theorem).

ارزښت $M`=0$ ځای په ځای کوو او معادله 14-48 کاروو، موږ لرو:

$$\theta_B = \int_0^L M\left(\frac{\partial M}{\partial M'}\right)\frac{dx}{EI} = \int_0^{L/2}\frac{(-Px_1)(0)\,dx_1}{EI} + \int_0^{L/2}\frac{-P[(L/2) + x_2](1)\,dx_2}{EI} = -\frac{3PL^2}{8EI} \qquad \textit{Ans.}$$

ددی حل، ورته والی د مثال 14.14 سره، و ګورئ.

سوالونه

PROBLEMS

س 14-133. س 14-90 د کاستيګليانو قضيې په کارولو سره حل کړي.

س 14-134. س 14-91 د کاستيګليانو قضيې په کارولو سره حل کړي.

س 14-135. س 14-92 د کاستيګليانو قضيې په کارولو سره حل کړي.

س* 14-136. س 14-93 د کاستيګليانو قضيې په کارولو سره حل کړي.

س 14-137. س 14-95 د کاستيګليانو قضيې په کارولو سره حل کړي.

س 14-138. س 14-96 د کاستيګليانو قضيې په کارولو سره حل کړي.

س 14-139. س 14-97 د کاستيګليانو قضيې په کارولو سره حل کړي.

س* 14-140. س 14-98 د کاستيګليانو قضيې په کارولو سره حل کړي.

س 14-141. س 14-108 د کاستيګليانو قضيې په کارولو سره حل کړي.

س 14-142. س 14-119 د کاستيګليانو قضيې په کارولو سره حل کړي.

س 14-143. س 14-120 د کاستيګليانو قضيې په کارولو سره حل کړي.

س *14-144. س 14-105 د کاستيګليانو قضيې په کارولو سره حل کړي.

د فصل بیا کتنه

CHAPTER REVIEW

کله چې یو قوه (کپل مؤمنت) په کړیدونکی یا بدلیدونکی جسم باندې عمل کوي جسم بې ځایه کیږي (تاو خوري) او لدی کبله بهرنۍ کار کیږي. همدا رنګه داخلی سټریسونه په جسم کی جوړیږي چی له دی بې ځایه کیدنی تیریږي، په دې توګه ایلستیک سترین انرژي رامینځته کوي او هغه په موادو کې ساتل کیږي. د انرژي ساتنی په اساس دا چې د بهرنی بار لخوا کار ترسره شوي، هغه بهرني کارمساوي دي په داخلي ایلستیک سترین انرژي چی د سټریسونو لخوا په جسم کی تولید شوي .	$U_e = U_i$
د انرژۍ ساتنه، د ایلستیک ټکر د سوالونو او اغیزو د حل لپاره کارول کیدی شي، کوم چې فرض کوي حرکت کونکونکۍ جسم سخت او ټول سترین انرژي په دریدلي (stationary) جسم کې زیرمه کیږي. دا مفهوم موږ ته اجازه راکوي چې د ټکرد اغیزې فکتور n ، کوم چې د ډینامیک یا متحرک بار نسبت ستاتیک بارته دی، و موندل شي. دا د جسم د ټکر په نقطه کې د اعظمي سټریس او بې ځایه کیدو ټاکلو لپاره کارول کیږي .	$n = 1 + \sqrt{1 + 2\left(\frac{h}{\Delta_{st}}\right)}$ $\sigma_{max} = n\sigma_{st}$ $\Delta_{max} = n\Delta_{st}$

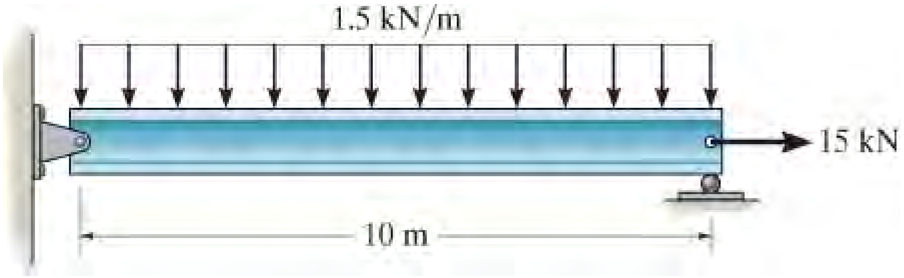
$$1\cdot\Delta = \sum\frac{nNL}{AE}$$ $$1\cdot\Delta = \int_0^L \frac{mM}{EI}dx$$ $$1\cdot\theta = \int_0^L \frac{m_\theta M}{EI}dx$$	د مجازی کار اصول د ټراس د جوینت بیځای کیدلو، یا د بیم په نقاطوکی د میلان ټاکلو لپاره کارول کیدی شي. دا اړتیا لري، چې بهرني مجازی واحد قوه (واحد کپل مؤمنت) په ټکی کی چی بیځایه کیدل (تاویدل) غوښتل شوي ، ځای پرځای شي. بهرنی مجازی کار چې تولید شوی وي د بهرني بار پلی کولو له لارې، مساوی کیږی، په جوړښت کې د مجازی داخلي سترین انرژي سره.
$$\Delta = \sum N\left(\frac{\partial N}{\partial P}\right)\frac{L}{AE}$$ $$\Delta = \int_0^L M\left(\frac{\partial M}{\partial P}\right)\frac{dx}{EI}$$ $$\theta = \int_0^L M\left(\frac{\partial M}{\partial M'}\right)\frac{dx}{EI}$$	د کاستیګلیانو دوهمه قضیه، همدارنګه د ټراس د ګنډی بیځای کیدل، یا د یوه بیم په نقاطوکی میلان او بیځایه کیدلو، ټاکلو لپاره کارول کیدی شي. دلته متغیر قوه P (کپل مؤمنت M') په هغه ټکی، کوم ځای کی چی بیځایه کیدنه (میلان) غوښتل شوي ، پلی شي. داخلی بارونه بیا تابع د P (M') او د دوی د حصوی مشتق نظر P (M') باید مشخص شي. د کاستیګلیانو دوهم قضیه بیا پلی کیږی تر څو غوښتل شوی بیځایه کیدنه (میلان) و ټاکل شي.

د بیا کتني پوښتنی

REVIEW PROBLEMS

ب 14-1. د فولادو A992 بیم کی تول محوري او کږیدونکی(bending) سترین انرژي و ټاکئ.

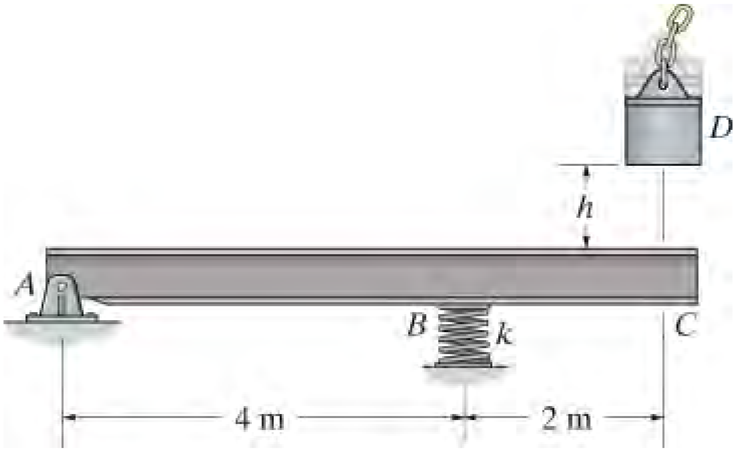
. $A = 2300\ mm^2$, $I = 9.5\ (10^6)\ mm^4$



ب 14-1

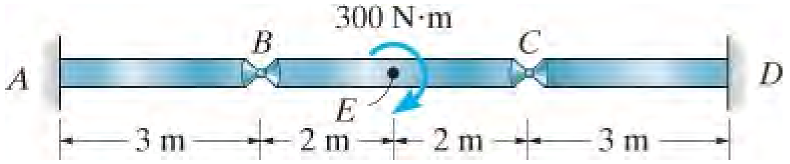
ب 14-2. یو 200-kg بلاک D له لوړوالي $h = 1$ m په وتلئ ښنده C د فولادو A992 بیم چی له برخی W200 X 36 جوړ شوی را الویدلئ دي. که چیری د فنر شخي په B کی $k = 200$ kN/m وی، اعظمی د کوږوالي ستریس په بیم کی و ټاکئ.

ب 14-3. اعظمی لوړوالی h د 200-kg بلاک D لپاره داسی و ټاکی، که چیری دا په وتلئ ښنده د W200 X 36 فولادی A992 بیم له دی لوړوالي راولیږي ستریس په بیم کی به له اعظمی ایلستیک ستریس زیاتوالی و نکړي. په B کی د فنر شخی $k = 200$ kN/m ده .



ب 14-2/3

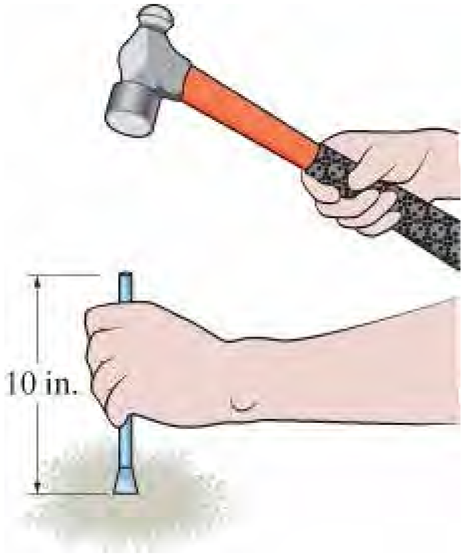
ب *14-4. د فولادو A992 میله په B او C کې پن ترړندوي لري. که چیرې دوي د 30 mm قطر ولري میلان په E کې وټاکئ.



ب 14-4

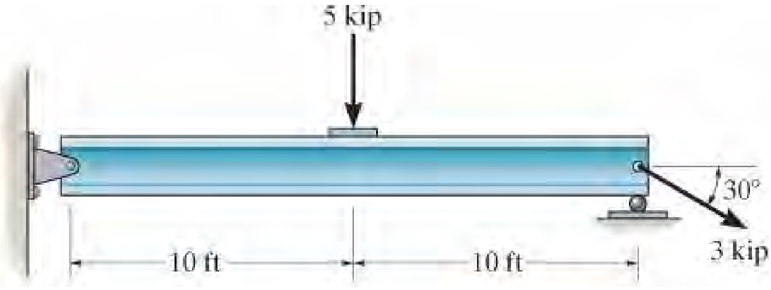
ب 14-5. د فولادو سکنه (chisel) 0.5 in. قطر او 10 in اوږدوالی لري. یو سوټک چې 3 lb وزن لرې وربانډې وهل کیږي، دا سوټک په لحظه د ټکر (امپکت) کې 12ft/s حرکت لري.
اعظمي ټیلوهونکی ستریس په سکنه کې و ټاکئ. فرض کړي چې 80 % د امپکت انرژي سکنې ته ځي.

. E_{st} = 29(103) ksi, s_Y = 100 ksi



ب 14-5

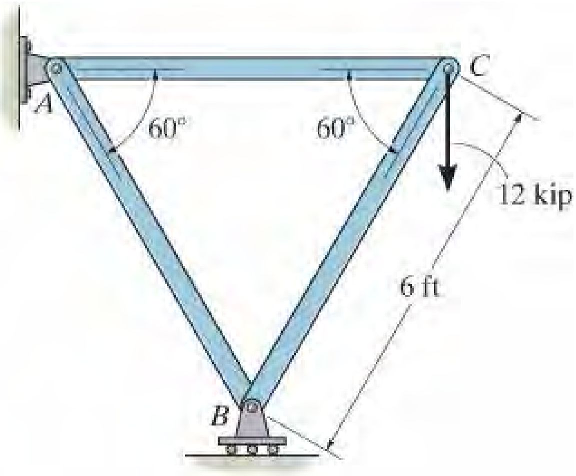
ب 14-6. د فولادو A992 بيم کی ټول محوري او کږیدونکی(bending) سترين انرژي و ټاکئ. بيم له برخی W8 X 58 جوړ شوي دي.



ب 14-6

ب 14-7. عمودی بيځايه کيدنه د گنډی C و ټاکی. ټرس له فولادو A992 ميلو، چی هرغړی يی 1 in قطر لري، جوړ شوي دي.

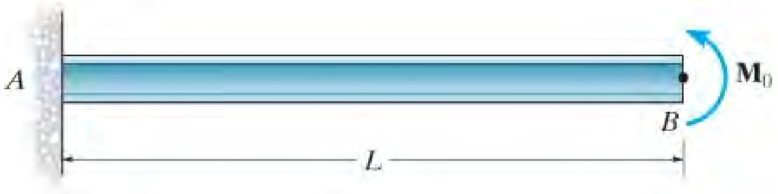
ب *14-8. افقي بيځايه کيدنه د گنډی B و ټاکی. ټرس له فولادو A992 ميلو، چی هرغړی يی 1 in قطر لري، جوړ شوي دي.



ب 14-7/8

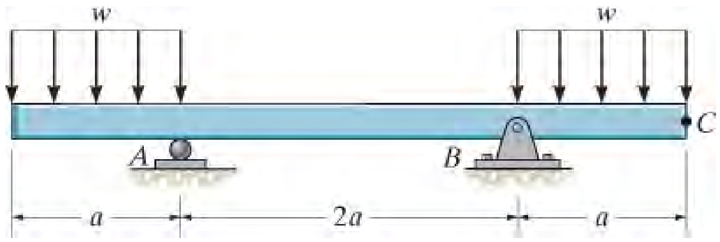
ب 14-9. د لاندی کنتيليور بيم په پای کی يو کپل مؤمنت $\mathbf{M}_0$ پلي شوي دي. ميلان د بيم په B کی وټاکئ. د مجازي کار له ميتود کار واخلئ. EI ثابت دی.

ب 14-10. پوښتنه 14-9 د کاستیګلیانو د قضیې په کارولو حل کړي.



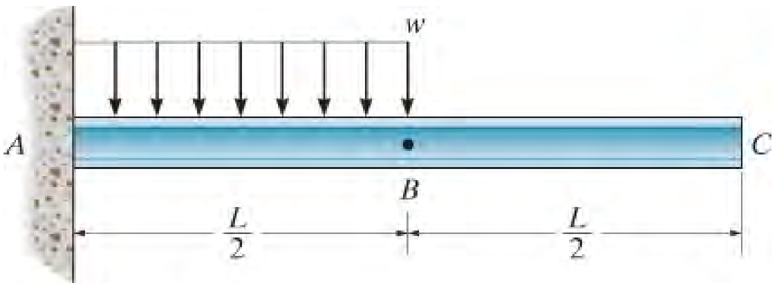
ب 14-9/10

ب 14-11. میلان او بیځایه کیدل د ټکی C و ټاکئ. EI ثابت دي.



ب14-11

ب *14-12. بیځایه کیدل په B کې و ټاکي. EI ثابت دي.



ب14-12

ضمیمه A

د يو ساحی هندسي خاصيتونه

GEOMETRIC PROPERTIES)
(OF AN AREA

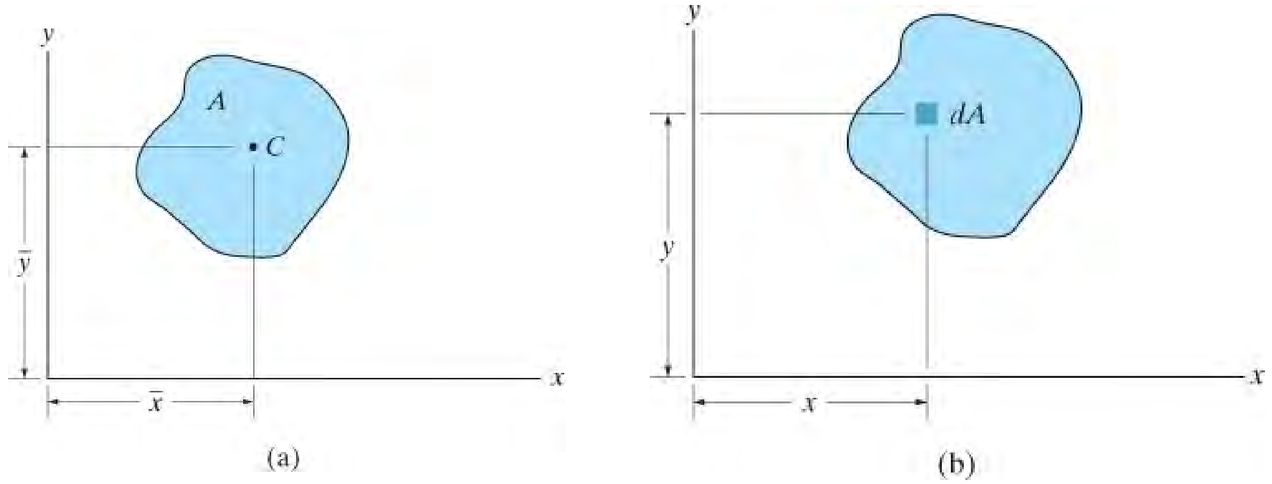
هندسي خاصيتونه د يو ساحی (GEOMETRIC PROPERTIES OF AN AREA)

A.1 ثقل مرکز د یوی ساحی (CENTROID OF AN AREA)

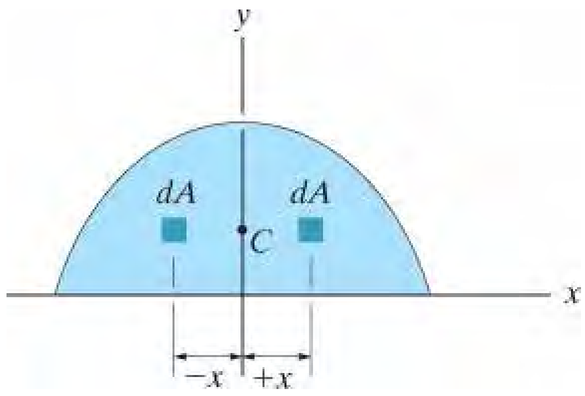
د یوی سیمې مرکز ثقل هغه یوه نقطه ده، کوم چې د ساحی هندسي مرکز تعریفوي. که چیری یوه ساحه یو خپل سري شکل ولري ، لکه هغه چې په انځور A-1a کی ښودل شوي، د x او y کوردینات د مرکز ثقل C یي په دی لاندی ډول موندل کیږي

$$\bar{x} = \frac{\int_A x\, dA}{\int_A dA} \qquad \bar{y} = \frac{\int_A y\, dA}{\int_A dA} \qquad \text{(A–1)}$$

د کسر پورتني عدد (numerators) په دی معادلاتو کی استازيتوب د ساحی دعنصر dA مؤمنت په محورونو y او x په ترتیب سره کوي ، انځور A-1b ، او د کسر لاندی عدد (denominators) استازیتوب د شکل د تولی ساحی A کوي.



انځور A-1



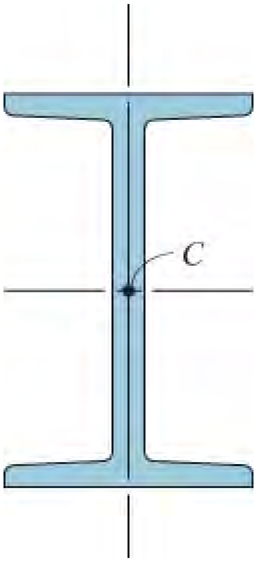
انځور A-2

که چيری ساحه متناظر په يوه محور وي ، د داسي شکلونو ثقل مرکز په جزوي يا بشپړ ډول به مشخص وی. دلته د ثقل مرکز به د ساحی په دی محور موقعيت ولری، انځور A-2 . همدارنګه به په تقاطع د دی محورونو کی وي، انځور A-3 . پردی بنسټ ، يا په کارولو د معادلی A-1 ، د ثقل مرکز موقعيت د معمولو شکلونو ساحی لپاره په داخل د مخکنيی پوښ ددی کتاب کی ښودل شوي.

مرکب ساحی (Composite Areas) . ډيری وختونه کيدی شي چی يوه ساحه په څو برخو چی ساده شکلونه لری وويشل شي. ددی ساده مرکب شکلونو د ثقل مرکز معلوم دی، او په

دی ډول ددی شکلونو د انتیګرشن نیولو ته اړتیا نه لیدل کیږي، په دی حالتونو کی معادلی ورته په معادله A-1 باید وکارول شي، چی دلت د مجموعی علامه د انتیګرال ځای نیسي، د بیلګی په توګه

$$\bar{x} = \frac{\Sigma \tilde{x} A}{\Sigma A} \qquad \bar{y} = \frac{\Sigma \tilde{y} A}{\Sigma A} \qquad \text{(A–2)}$$



انځور A-3

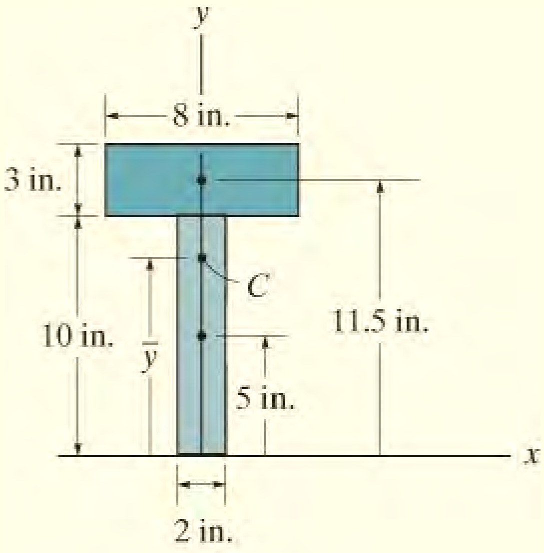
دلته $\tilde{x}$ او $\tilde{y}$ استازیتوب د *الجبری فاصلو* (*algebraic distances*) یا x او y کوردینات د ثقل مرکز د هر ی مرکبی برخی کوي، او SA استازیتوب د مرکبو ساحو د مجموعی، یا ټولی ساحی وکړی. که چیری سورې یا خالي برخه په مرکبه سیمه کی شتون ولري، هغه به یو بله مرکبه برخه وی کوم چی *منفي* ساحه لري.

دا لاندی مثال ، پلی کول د معادلی A-2 دي.

مثالونه

مثال A.1

لاندی انځور A-4a کی د T-beam د غوښی برخی ساحه بنودل شوي، د ثقل مزکز C یي وټاکی.



(a)

حل I

y محور د شکل په متناظر محور اینبودل شوي ، تر څو $\bar{x} = 0$ ، انځور A-4a شي.

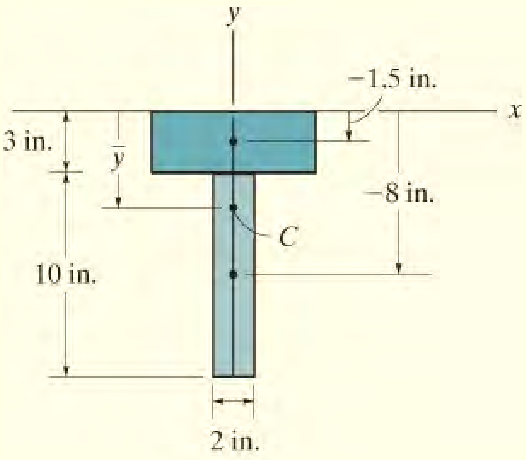
د $\bar{y}$ موندلو لپاره موږ به x محور (ریفرینس محور) د ساحی له تیټي برخی سره برابر کړو. د غوځی برخی ساحه په دوو مستطیلو، لکه څنګه چی ښودل شوي، وویشو او د هری برخی د ثقل مرکز موقعیت $\bar{y}$ ټاکل شوي. معادله A-2 پلی کوو موږ لرو .

$$\bar{y} = \frac{\Sigma \tilde{y} A}{\Sigma A} = \frac{[5 \text{ in.}](10 \text{ in.})(2 \text{ in.}) + [11.5 \text{ in.}](3 \text{ in.})(8 \text{ in.})}{(10 \text{ in.})(2 \text{ in.}) + (3 \text{ in.})(8 \text{ in.})}$$

$$= 8.55 \text{ in.} \qquad \textit{Ans.}$$

حل II

د ورته دوه برخو په کارولو سره، د x محورپه په پورتنۍ ساحه کی ښیو. انځور A-4b، دلته



(b)

انځور A-4

$$\bar{y} = \frac{\Sigma \tilde{y} A}{\Sigma A} = \frac{[-1.5 \text{ in.}](3 \text{ in.})(8 \text{ in.}) + [-8 \text{ in.}](10 \text{ in.})(2 \text{ in.})}{(3 \text{ in.})(8 \text{ in.}) + (10 \text{ in.})(2 \text{ in.})}$$

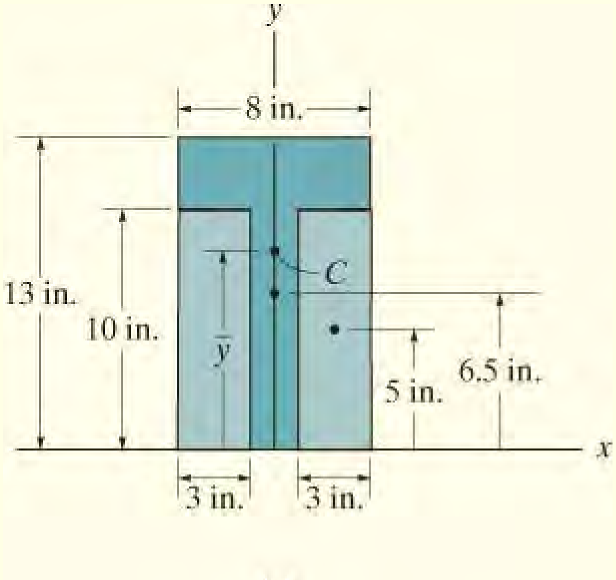
$$= -4.45 \text{ in.} \qquad \textit{Ans.}$$

منفی علامه ښيي ، چی C د x محور لاندی موقعیت لری. همدا رنګه دواړو ځوابونو

. کوم چی د بیم لوړوالی دی ، $8.55 \text{ in.} + 4.45 \text{ in} = 13.0 \text{ in.}$

حل III

دا هم امکان لري چی غوځه برخه یو لوي مستطیل ، منفي دوه واړه مستطیلونه ، کوم چی په سیوره ښودل شوي په انځور A – 4c کی. دلته موږ لرو:



(c)

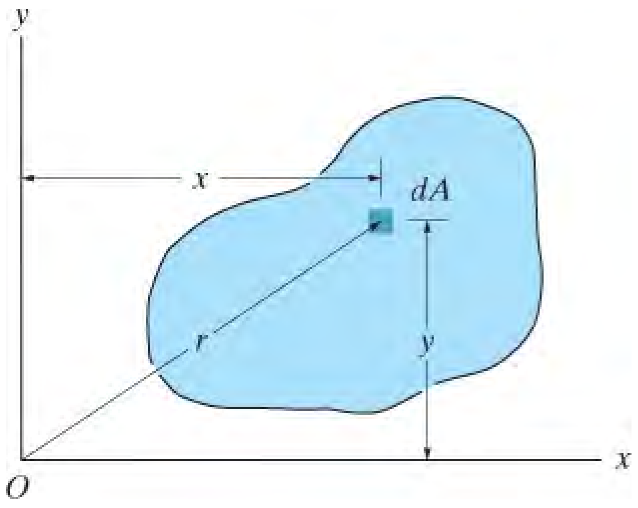
انځور A-4 (تکرار)

$$\bar{y} = \frac{\Sigma \tilde{y} A}{\Sigma A} = \frac{[6.5 \text{ in.}](13 \text{ in.})(8 \text{ in.}) - 2[5 \text{ in.}](10 \text{ in.})(3 \text{ in.})}{(13 \text{ in.})(8 \text{ in.}) - 2(10 \text{ in.})(3 \text{ in.})}$$

$$= 8.55 \text{ in.}$$ *Ans.*

A.2 د یوی ساحی انرشیایي مؤمنت (MOMENT OF INERIA FOR AN AREA)

انرشیایي مؤمنت د یو ساحی ، هندسي خاصیت دی . او هغه په محور x او محور y ، لکه څنګه چې په انځور A-5 کی ښودل شوي، محاسبه کیږي. د هغه تعریف دی



انځور A-5

$$I_x = \int_A y^2\, dA$$
$$I_y = \int_A x^2\, dA \quad \text{(A–3)}$$

دا انتیګرالونه هیڅ فزیکي معنی نلري، مګر دوی ځکه نومول شوي چې دوی د یوې کتلې د انرشیا خاصیت سره ، کوم چې ډینامیک خاصیت دی، ورته دي.

موږ همدا ډول کولی شوچې انرشیایي مؤمنت د یوی ساحی په قطب O یا په z محور، انځور A-5 محاسبه کړو. دې ته ***قطبی انرشیایي مؤمنت*** (polar ***moment of inertia***) ویل کیږي، کوم چې په دی توګه تعریف شوی

$$J_O = \int_A r^2\, dA = I_x + I_y \quad \text{(A–4)}$$

دلته r عمودی فاصله له قطب (z محور) تر عنصر dA پوری. ځکه چی $r^2 = x^2 + y^2$ نو بیا $J_o = I_x + I_y$ ، انځور A-5 .

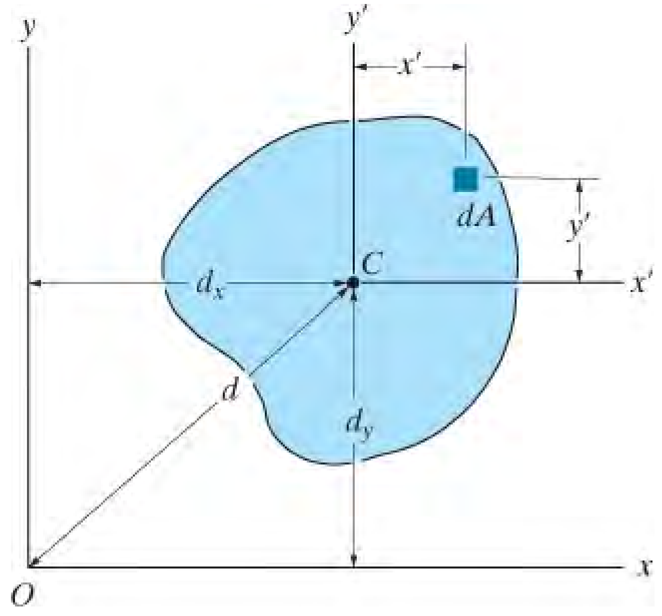
له پورتني فورمولونو داسی ښکاري چی I_x, I_y او J_o به تل مثبت وی، ځکه دوی د فاصلی مربع او مساحت محصول دی. برسیره پر دی د انرشیایي مؤمنت واحدونه د اوږدوالی څلورم طاقت ته لوړیږي، د بیلګی په توګه m^4, mm^4 یا ft^4, in^4 .

د پورتنیو معادلو په کارولو، انرشیایي مؤمنت د ځینو عامو شکلونو ددوی په ثقلی مرکز محورونو محاسبه شوی او د دی کتاب د مخ په داخل پوښ کی ښودل شوي.

د یوه مساحت لپاره د موازيې-محور قضیه (Parallel-Axis Theorem for an Area) .

کله چی انرشیایي مؤمنت د یوه مساحت ثقلی محور ته معلوم وی ، موږ کولای شو انرشیایي مؤمنت د مساحت یوه بل محورته چی موازی ثقلی محورته وی، د ***موازی-محور قضیي*** (***Parallel-Axis Theorem***) په کارولو سره محاسبه کړو. ددی نظريي تر لاسه کولو لپاره غواړو چی انرشیایي مؤمنت د یوه عنصر dA ، انځور A-6 ، کوم چی په فاصله $y` + dy$ له x محور موقعیت لری. هغه دی

$dI_x = (y` + d_y)^2 \, dA$. بیا د ټول مساحت لپاره موږ لرو



انځور A-6

$$I_x = \int_A (y' + d_y)^2\, dA = \int_A y'^2\, dA + 2d_y \int_A y'\, dA + d_y^2 \int_A dA$$

لمړی اصطلاح په بني اړخ کی څرګندوی د انرشیايي مؤمنت $\bar{I}_{x'}$ د مساحت په `x محور دي.
دوهم اصطلاح صفر دی ځکه `x محور د مساحت له ثقل مرکز C څخه تیریږي، هغه دی
ځکه چی $\int y'dA = \bar{y}'A = 0$. $\bar{y}' = 0$ له همدی امله وروستی پایله ده

$$I_x = \bar{I}_{x'} + A d_y^2 \qquad \text{(A–5)}$$

ورته اصطلاح د I_y لپاره لیکلي شو، هغه ده

$$I_y = \bar{I}_{y'} + A d_x^2 \qquad \text{(A–6)}$$

او په نهایت کی ، قطبی انرشیايي مؤمنت په یوه محور چی عمود په x-y سطحه دی او کوم چی له قطب O (z محور) څخه تیریږي، انځور A-6 ، موږ لرو

$$J_O = \bar{J}_C + A d^2 \qquad \text{(A–7)}$$

پورتنی معادلې داسی توضیح کوي ، *انرشیايي مؤمنت په یوه محور مساوی دی په د مساحت انرشاییي مؤمنت په یو موازی محور کوم چی له ثقل مرکز د مساحت تیریږي جمع حاصل د مساحت ضرب مربع د عمودی فاصلی د دواړو محورونو تر مینځ.*

مرکب مساحتونه (Composite Areas) .

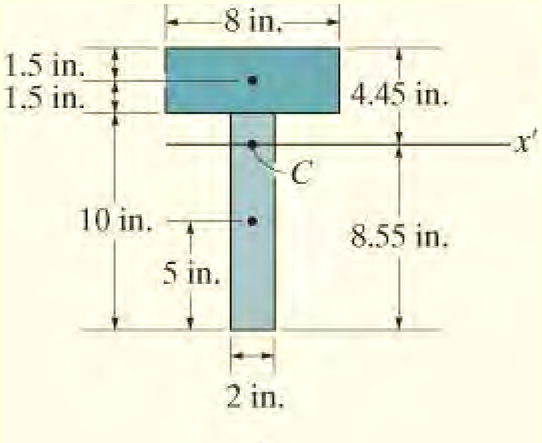
ډیری سیمي له نښلولود یو لړساده شکلونو، لکه مستطیل، مثلث، او نیمه دایری څخه جوړه دي . ددی لپاره چی په سمه توګه د دې مرکبی ساحي انرشیايي مؤمنت په یو محور سره وټاکو، لومړی اړین دی چې ساحه په خپلو برخو وویشو، او عمودی فاصله د محور څخه تر موازي ثقل مرکز محور ته د هرې برخې لپاره په ګوته کړو . د کتاب د مخ په داخلي پوښ کې د جدول په کارولو سره، د هرې برخې انرشیايي مؤمنت د ثقل مرکز محور سره ټاکل کیږي. که دا محور د ټاکل شوي محور سره سمون نه لري، بیا انرشیايي مؤمنت د برخی په ټاکل شوي محور د موازي -محور قضيې

$I = \bar{I} + Ad^2$ په کارولو سره ټاکل کیږي. د ټولی ساحی انرشیايي مؤمنت د دې محور په اړه بیا د هغې مرکبو برخود ټولو پایلو په جمع کولو سره موندل کیږي. په ځانګړې توګه، که یوه مرکبه برخه خالي (سوری) سیمه ولري ، انرشیايي مؤمنت د مرکبی برخی لپاره په واسطه د "تفریق" د انرشیايي مؤمنت د برخی له انرشیایی مؤمنت د ټولی ساحی د سیمی په ګډون موندل کیږي.

مثالونه

مثال A.2

انرشیايي مؤمنت په مرکزی محور `x ، د ټي بیم (T-beam) چې غوڅه برخه یې په انځور A-7a کی ښودل شوی، و ټاکئ.



(a)

انځور A-7

حل I

ښودل شوي ساحه په دوو مستطیلونو ویشل شوی ده، لکه څنګه چې په انځور A-7a کی ښودل شوي . فاصله له $x`$ محور څخه تر مرکزی محور د هری برخی معلوموو. په کارولو دهغه جدول چې د کتاب په پوښ کی ښودل شوي ، انرشیایي مؤمنت په مرکزی محور د یوی مستطیلی ساحی د پاره عبارت دی په

$I = \frac{1}{12} b h^3$. د موازی-محور قضیه ، معادله A-5 ، په هر مستطیل پلی کوو، او بیا ټولی پایلی سره جمع کړو، موږ لرو

$$I = \Sigma(\bar{I}_{x'} + A d_y^2)$$

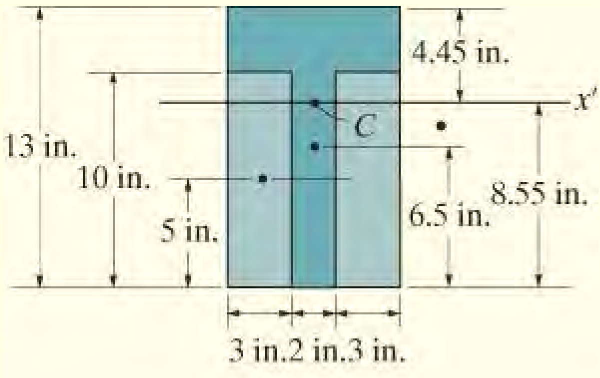
$$= \left[\frac{1}{12}(2 \text{ in.})(10 \text{ in.})^3 + (2 \text{ in.})(10 \text{ in.})(8.55 \text{ in.} - 5 \text{ in.})^2\right]$$

$$+ \left[\frac{1}{12}(8 \text{ in.})(3 \text{ in.})^3 + (8 \text{ in.})(3 \text{ in.})(4.45 \text{ in.} - 1.5 \text{ in.})^2\right]$$

$$I = 646 \text{ in}^4$$ *Ans.*

حل II (SOLUTION II)

دا هم امکان لري چې غوڅه برخه یو لوي مستطیل ، منفي دوه واړه مستطیلونه ، کوم چې په سیوری ښودل شوي په انځور A - 7b کی . دلته موږ لرو



(b)

انځور A-7 (ادامه)

$$I = \Sigma(\bar{I}_{x'} + A d_y^2)$$

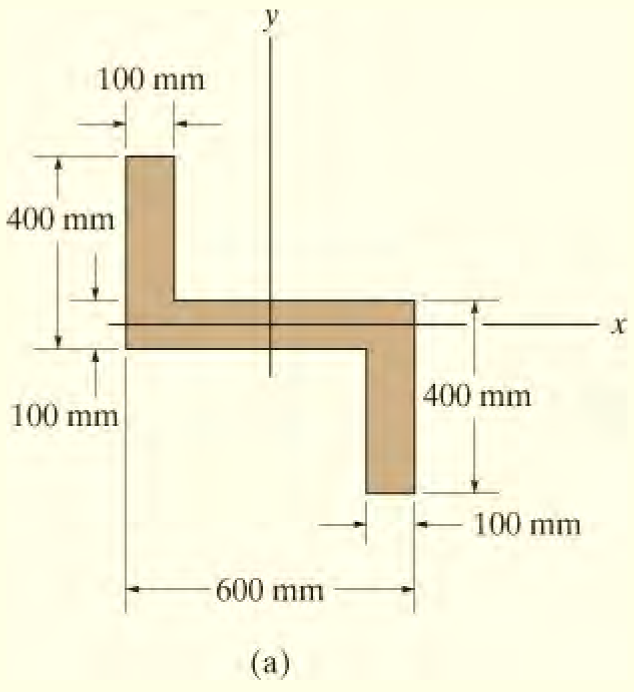
$$= \left[\frac{1}{12}(8\text{ in.})(13\text{ in.})^3 + (8\text{ in.})(13\text{ in.})(8.55\text{ in.} - 6.5\text{ in.})^2\right]$$

$$- 2\left[\frac{1}{12}(3\text{ in.})(10\text{ in.})^3 + (3\text{ in.})(10\text{ in.})(8.55\text{ in.} - 5\text{ in.})^2\right]$$

$$I = 646\text{ in}^4$$ *Ans.*

مثال A.3

انرشیايي مؤمنت په مرکزی محور x او y محوررونو ، د غوڅی برخی چی په انځور A-8a کی ښودل شوی، و ټاکئ.



انځور A-8

حل

یوه غوڅه برخه مرکب له دریو مستطیلی برخو A, B او D په انځور A-8b کی ښودل شوي. د محاسبی لپاره د ثقل مرکز ددی مستطیلونو په انځور کی ښودل شوي. له هغه جدول چی ددی کتاب په پوښ کی ښودل شوي، انرشيايي مؤمنت د مستطیلي برخی په ثقلی محور عبارت دی په

$\frac{1}{12}\text{bh}^3$. له همدی امله د مستطیونو A

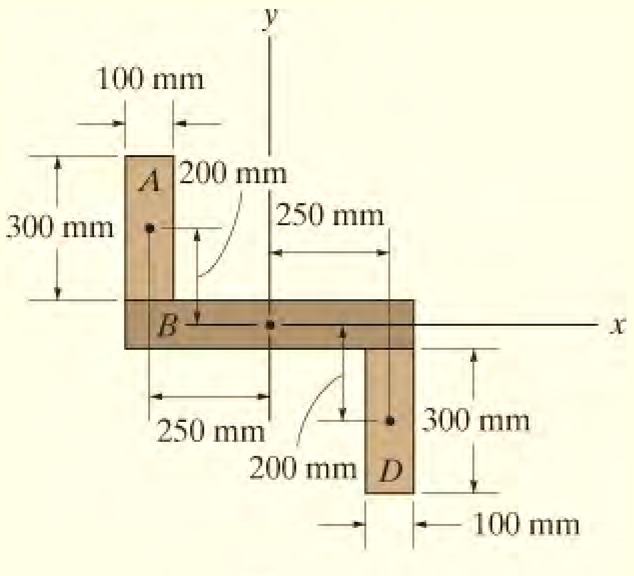
او D په کارولو د موازي-محورقضيي سره محاسبی په لاندی ډول دی

(Rectangle A) A مستطیل

$$I_x = \bar{I}_{x'} + A d_y^2 = \frac{1}{12}(100\text{ mm})(300\text{ mm})^3 + (100\text{ mm})(300\text{ mm})(200\text{ mm})^2$$
$$= 1.425(10^9)\text{ mm}^4$$
$$I_y = \bar{I}_{y'} + A d_x^2 = \frac{1}{12}(300\text{ mm})(100\text{ mm})^3 + (100\text{ mm})(300\text{ mm})(250\text{ mm})^2$$
$$= 1.90(10^9)\text{ mm}^4$$

(Rectangle B) B مستطیل

$$I_x = \frac{1}{12}(600\text{ mm})(100\text{ mm})^3 = 0.05(10^9)\text{ mm}^4$$
$$I_y = \frac{1}{12}(100\text{ mm})(600\text{ mm})^3 = 1.80(10^9)\text{ mm}^4$$



(b)

(Rectangle D) D مستطیل

انځور A-8 (ادامه)

$$I_x = \bar{I}_{x'} + A d_y^2 = \frac{1}{12}(100\text{ mm})(300\text{ mm})^3 + (100\text{ mm})(300\text{ mm})(200\text{ mm})^2$$
$$= 1.425(10^9)\text{ mm}^4$$
$$I_y = \bar{I}_{y'} + A d_x^2 = \frac{1}{12}(300\text{ mm})(100\text{ mm})^3 + (100\text{ mm})(300\text{ mm})(250\text{ mm})^2$$
$$= 1.90(10^9)\text{ mm}^4$$

د ټول غوڅی برخی لپاره انرشیايي مؤمنت په دی ډول دی

$$I_x = 1.425(10^9) + 0.05(10^9) + 1.425(10^9)$$
$$= 2.90(10^9)\text{ mm}^4 \qquad \textit{Ans.}$$
$$I_y = 1.90(10^9) + 1.80(10^9) + 1.90(10^9)$$
$$= 5.60(10^9)\text{ mm}^4 \qquad \textit{Ans.}$$

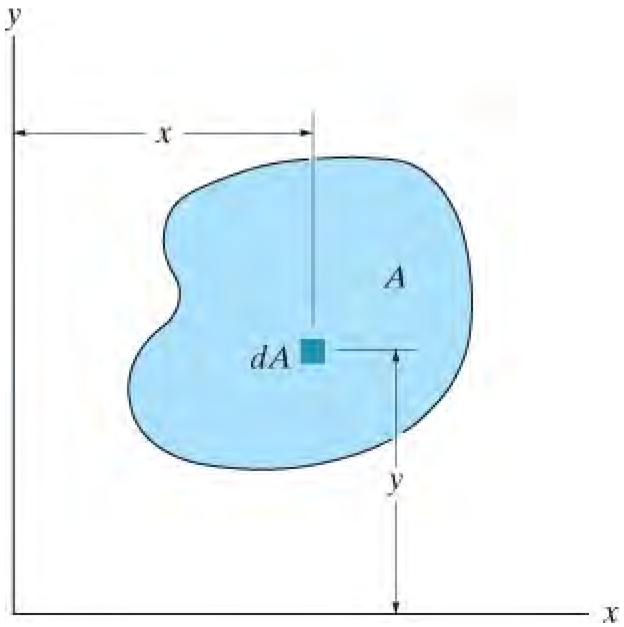
A.3 د یوی ساحی د انرشیا د ضرب محصول (PRODUCT OF INERTIA FOR AN AREA)

په عموم کې، د یوې سیمې لپاره انرشیايي مؤمنت د هر محور لپاره چې محاسبه کیږي توپیر لري. په ځینو حالتونوکي دا اړینه ده چې پوه شو د هغو محوررونو جهت چې په ترتیب سره، اعظمي او لږ تر لږه انرشیايي مؤمنت د ساحې لپاره لری . د ټاکلو طریقه یی په A.4 برخه کې بحث کیږي. په هرصورت، د دې طریقې کارولو لپاره، دا اړینه ده چې لومړی د ساحې د انرشیا ضرب محصول د انرشیا او همدارنګه د هغې انرشیای مؤمنت د x ، y محورو څخه مشخص شي.

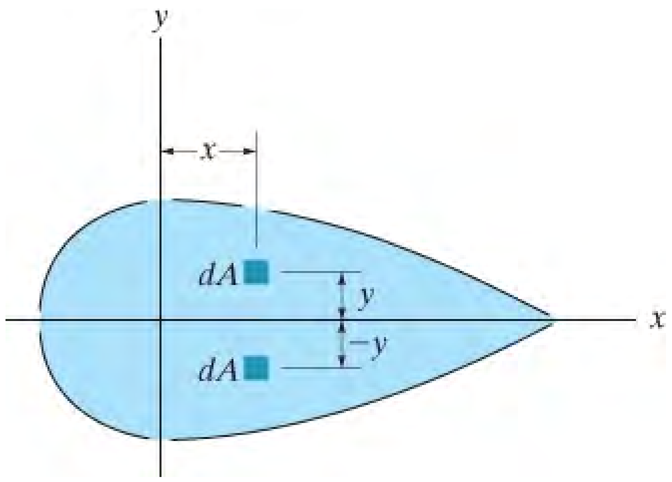
د ***انرشیا د ضرب محصول*** (***product of inertia***) د ساحی A لپاره په انځور A-9 کې ښودل شوي په دی توګه تعریف شوی

$$I_{xy} = \int_A xy\, dA \qquad \text{(A–8)}$$

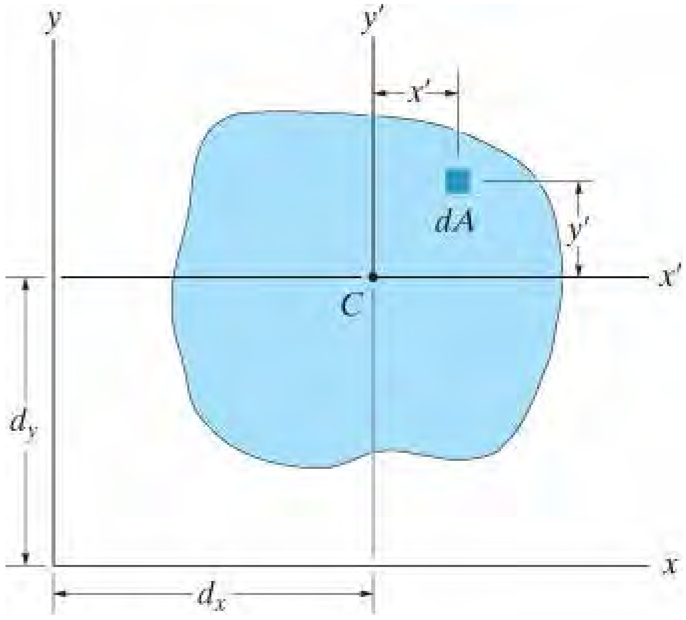
د انرشيايي مؤمنت په څير، د انرشيا د ضرب محصول هم د اوږدوالي واحدونوڅلورم طاقت ته پورته شوی، د بيلګي په توګه، m^4، mm^4 يا ft^4 ، in^4 . په هرصورت، x يا y کيدای شي منفي مقدار وي، پداسې حال کې چې dA تل مثبت وي. د انرشيا د ضرب محصول ممکن مثبت، منفي يا صفر وي، چې په موقعيت او جهت د محورونو پورې اړه لري . د مثال په توګه، انرشيا د ضرب محصول Ixy د يوې ساحې لپاره صفر وي که چيرې x يا y محور متناظر محور د ساحی وي. د دې ښودلو لپاره، د سيوري ساحه په انځور A-10 کې پام کې ونيسئ، چيرته چې د هر عنصر dA لپاره کوم چې په ټکی (x,y) کی موقعيت لري، ددی اړونده عنصر dA په $(x, -y)$ کې موقعيت لري. ځکه چې د انرشيا د ضرب محصول، په ترتيب سره، $xy\ dA$ او $-xy\ dA$ ،دی چی د دوی الجبريک مجموعه يا د ټولو ورته عناصرو ساحی انتيګريشن چی غوره شوې په دې ډول به دوی يو بل به کنسل کړي. په پايله کې، د ضرب انرشيا د ټولې ساحې لپاره صفر کيږي.



A-9 انځور



A-10 انځور



A-11 انځور

د موازي-محور قضیه (Parallel-Axis Theorem) . سیوری شوي مساحت چې په انځور A-11 کې ښودل شوي په پام کې ونیسئ .څکه چې د انرشیا د ضرب محصول د یوی ساحی dA په اړه د x او y محورونولپاره کیږي په $dI_{xy} = (x` + d_x)(y` + d_y)dA$ نو بیا د ټولی ساحی لپاره،

$$I_{xy} = \int_A (x' + d_x)(y' + d_y)\, dA$$

$$= \int_A x'y'\, dA + d_x \int_A y'\, dA + d_y \int_A x'\, dA + d_x d_y \int_A dA$$

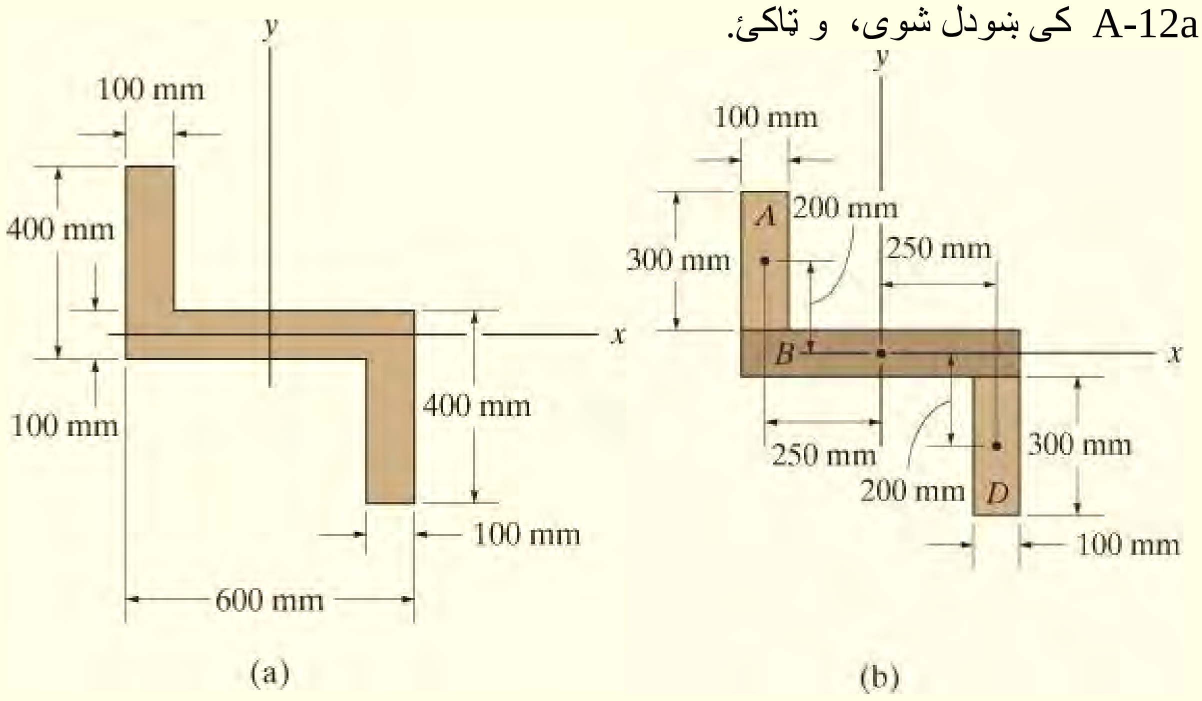
لمړي اصطلاح په ښي اړخ د معادلی کی ، استازیتوب د انرشیا د ضرب محصول د ساحی ، نظر ثقلی محور $\bar{I}_{x'y'}$ ته دی. دوهم او دریم اصطلاحی صفر دی څکه چې مؤمنت د ساحی په مرکزي `x او `y محورونو نیول شوي. په دی پوهیدلو څلورم انتیګرال استازیتوب د ټولی ساحی A کوی ، نو بیا موږ لرو

$$I_{xy} = \bar{I}_{x'y'} + A d_x d_y \qquad \text{(A–9)}$$

ورته والی ددی معادلی او د موازي-محور قضیي د انرشیایي مؤمنت لپاره باید ولیدل شي. دلته ، مهمه ده چې الجبری علامه د dx او dy کله چې معادله A-9 پلی کیږی په پام کی ونیول شي.

مثال A.4

انرشیا د ضرب محصول په مرکزی محور x او y محوررونو ، د بیم د غوڅې برخی کوم چی په انځور A-12a کی ښودل شوی، و ټاکئ.



انځور A-12

حل

لکه مثال A.3 ، غوڅه برخه مرکبه له دریو مستطیلی برخو A, B او D په انځور A-12b کی ښودل شوي. کوردينات د هر ثقل مرکز د مستطیل په انځور کی ښودل شوي دی. د متناظر والي له امله ، د هر مستطیل انرشیا ضربی محصول په $x`$ او $y`$ محوررونو، کوم چی د مستطیل له ثقل مرکزنه تیریږي ، صفر دي . له همدی امله د د موازي-محورقضیي پلی کول په هر مستطیل به لاندی پایلی راکوي

مستطیل A (Rectangle A)

$$I_{xy} = \bar{I}_{x'y'} + A d_x d_y$$
$$= 0 + (300 \text{ mm})(100 \text{ mm})(-250 \text{ mm})(200 \text{ mm})$$
$$= -1.50(10^9) \text{ mm}^4$$

(Rectangle *B*) *B* مستطیل

$$I_{xy} = \bar{I}_{x'y'} + A d_x d_y = 0 + 0 = 0$$

(Rectangle *D*) *D* مستطیل

$$I_{xy} = \bar{I}_{x'y'} + A d_x d_y = 0 + (300\text{ mm})(100\text{ mm})(250\text{ mm})(-200\text{ mm}) = -1.50(10^9)\text{ mm}^4$$

د ټولې غوڅې برخې لپاره انرشیا ضربی محصول په دی دی ډول دی

$$I_{xy} = [-1.50(10^9)\text{ mm}^4] + 0 + [-1.50(10^9)\text{ mm}^4] = -3.00(10^9)\text{ mm}^4 \qquad \textit{Ans.}$$

A.3 د یوی ساحی پـه مایل محور د انرشیايي مؤمنت (MOMENT OF INERTIA FOR AN AREA ABOUT INCLINED AXIS)

مؤمنت او حاصل ضرب د انرشیا $I_{y`}$ ,$I_{x`}$ او $I_{x`y`}$ د یوی ساحی نسبت په یو جوړه مایل محورونو $x`$ او $y`$ کیدی شی چې وموندل شي ، کله چې I_x, I_y او I_{xy} معلوم وي. لکه څنګه چې په انځور A-13 کی کوردينات د یوه عنصر dA له هر دوه کوردينات سیستم کوم چې مایل په یوه زاویه دی په دی لاندی د بدلون معادلوسره تړاو لري:

$$x' = x \cos\theta + y \sin\theta$$

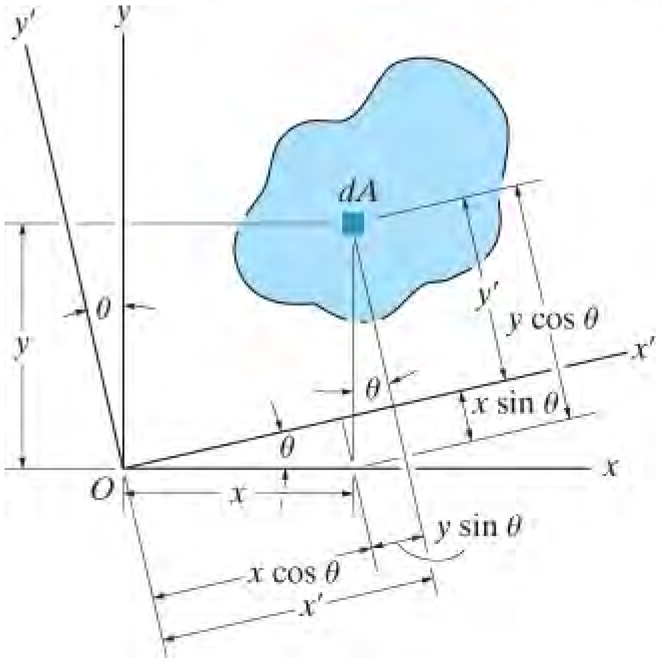
$$y' = y \cos\theta - x \sin\theta$$

ددی معادلو په کارولو سره مؤمنت او حاصل ضرب د انرشیا د عنصر dA په $x`$ او $y`$ محورونو عبارت دی په:

$$dI_{x'} = y'^2 dA = (y \cos\theta - x \sin\theta)^2 dA$$

$$dI_{y'} = x'^2 dA = (x \cos\theta + y \sin\theta)^2 dA$$

$$dI_{x'y'} = x'y'\,dA = (x \cos\theta + y \sin\theta)(y \cos\theta - x \sin\theta)\,dA$$



انځور A-13

دا اصطلاحګانی پراخه کوو او انتیګرال یی نیسو، او درک کووچی $I_x=\int y^2 dA,\ I_y=\int x^2 dA$ او $I_{xy}=\int xy dA$ موږ لرو:

$$I_{x'} = I_x \cos^2\theta + I_y \sin^2\theta - 2I_{xy}\sin\theta\cos\theta$$
$$I_{y'} = I_x \sin^2\theta + I_y \cos^2\theta + 2I_{xy}\sin\theta\cos\theta$$
$$I_{x'y'} = I_x \sin\theta\cos\theta - I_y \sin\theta\cos\theta + I_{xy}(\cos^2\theta - \sin^2\theta)$$

دا معادلی کله چی د مثلثاتی ورته والی وکاروو نوری هم ساده کیدی شي ، sin2q = 2 sinq cosq او $\cos 2q = \cos^2 q - \sin^2 q$ ، چی پدی حالت کی:

$$I_{x'} = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2}\cos 2\theta - I_{xy}\sin 2\theta$$
$$I_{y'} = \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{I_x - I_y}{2}\cos 2\theta + I_{xy}\sin 2\theta \qquad \text{(A–10)}$$
$$I_{x'y'} = \frac{I_x - I_y}{2}\sin 2\theta + I_{xy}\cos 2\theta$$

اصلی انرشیايي مؤمنتونه (Principal Moments of Inertia) .

څرنګه چی $I_{x'}$، $I_{y'}$ ، او $I_{x'y'}$ اړه لري، د محوررونو x’, y’ د زاويې q په میلان سره، موږ کولی شو معلومه کړو د دي محوررونو لور، تر څو انرشیايي مؤمنت د ساحې، $I_{x'}$ او $I_{y'}$ ، اعظمي او لږ تر لږه شي. د محوررونو دې ځانګړې جوړې ته ***اصلی محوررونه*** د ساحی ویل کیږي ، او اړونده انرشیايي مؤمنتونه د دې محوررونو په اړه په نامه د ***اصلی انرشیايي مؤمنتونو*** یادول کیږي. په عموم کې، د هر تاکل شوي اصلي مبدا O لپاره یو جوړه اصلي محوررونه شتون لري؛ په هرصورت، د موادو په میخانیکونو کې د ساحې ثقل مرکز تر ټولو ډیر مهم موقعیت د O لپاره دی.

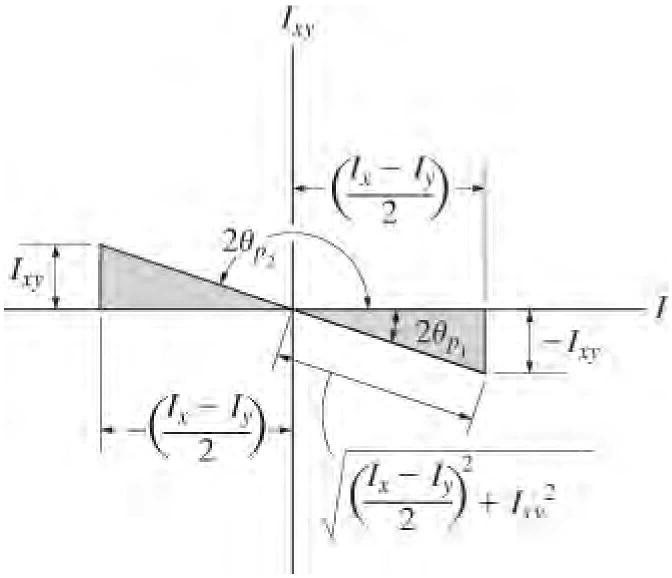
زاويه $\theta = \theta_p$ ، کوم چې د اصلي محوررونو سمت تعريف کوي، په مشتق نيولو د لومړي حصى د معادلی A-10 نسبت θ ته، او بيا پايلی مساوی په صفر شی. مورږ ترلاسه کوو

$$\frac{dI_{x'}}{d\theta} = -2\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)\sin 2\theta - 2I_{xy}\cos 2\theta = 0$$

نو دلته $\theta = \theta_p$

$$\tan 2\theta_p = \frac{-I_{xy}}{(I_x - I_y)/2} \qquad \text{(A–11)}$$

دا معادله دوه جذرونه لري θ_{p1} او θ_{p2} کوم چې 90^0 له يو بل جلا دی او په دی توګه د هر اصلی محور ميلان مشخص کوي.



انځور A-14

ساين او کوساين د $2\theta_{p1}$ او $2\theta_p$ له دو مثلثونو، انځور A-14 ، کوم چې پر بنسټ د معادلی A-11 ولاړ دي، په لاس راځي که چيری دا مثلثاتي اړيکی په اوله يا دوهمه اصطلاح د معادلی A-10 کی ځاي په ځای او بيا ساده شي ، دا لاندی به حاصل شي:

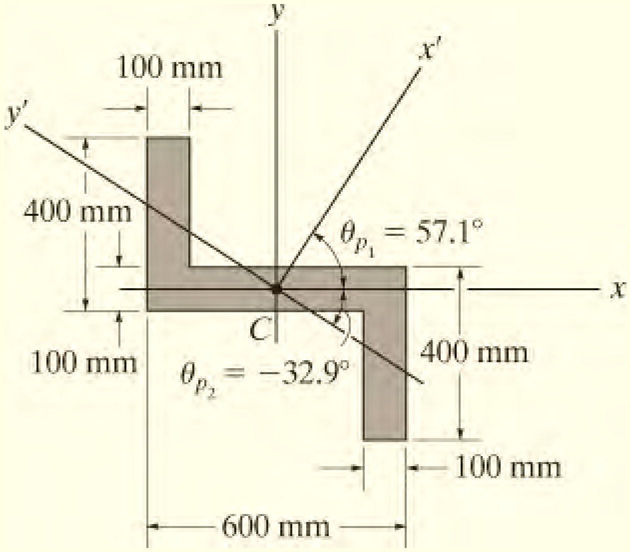
$$I_{\substack{max\\min}} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^{\;2}} \qquad (A\text{–}12)$$

دا پایله، اعظمي یا لږ تر لږانرشیایي مؤمنت د ساحی ورکوي او هغه اړه لري په انتخاب شوي علامه پورې. برسېره پردې، که پورته مثلثاتی اړیکې د ساین او کوساین د $2\theta_{p1}$ او $2\theta_{p2}$ د دریم اصطلاح د معادلی A-10 کی ځای په ځای شي، دا به ولیدل شي چې $I_{x'y'} = 0$ ؛ یعنې دانرشیا محصول د اصلي محوررونو صفر دی. څرنګه چې دا په برخه A.3 کې اشاره شوې چې د انرشیا ضرب محصول په هر متناظر محور صفر دی ، پدی ډول دا تعقیبوي چې هر متناظر محور او یوبل محور وربانډی عمودی، استازیتوب د اصلي محور د انرشیا د ساحی کوي . په دې برخه کې ترلاسه شوي معادلې دي د سترس او سترین بدلون معادلو ورته دی کوم چې په فصلونه 9 او 10 کې په ترتیب سره رامینځته شوی، او د سترس او سترین په څیر، موږ هم کولی شو دا معادلې د نیمه ګرافیکي تخنیک په کارولو سره، چې د موهر دانرشیا دایری (Mohr's Circle of inertia*) په نوم یادیږي ، حل کړئ *.

* انجینری میکانیزم (*Engineering Mechanism*): ستاتیک 14th ed, R.C. Hibbeler, Pearson education, Inc. و ګورئ.

مثال A.5

اصلی انرشيايي مؤمنت د بیم د غوڅی برخی کوم چی په انځور A-15 کی ښودل شوی، نسبت یوه محورته چی له ثقل مرکز C تیریږی، و ټاکئ.



انځور A-15

حل

مؤمنتونه او د انرشیا ضرب د غوڅی برخی په اړه د x او y محوررونو لپاره، په مثال A.3 او A.4 کی موندل شوی. پایلی يي عبارت دی په

$$I_x = 2.90(10^9)\text{ mm}^4 \qquad I_y = 5.60(10^9)\text{ mm}^4 \qquad I_{xy} = -3.00(10^9)\text{ mm}^4$$

د معادلی A-11 په کارولو، د تمایل زاویه د اصلی محوررونو `$x$ او `y عبارت ده په

$$\tan 2\theta_p = \frac{-I_{xy}}{(I_x - I_y)/2} = \frac{3.00(10^9)}{[2.90(10^9) - 5.60(10^9)]/2} = -2.22$$

$$2\theta_{p_1} = 114.2° \qquad \text{and} \qquad 2\theta_{p_2} = -65.8°$$

په دی توګه، څرنګه چې په انځور A-15 کی ښودل شوي

$$\theta_{p1} = 57.1^\circ \qquad \text{and} \qquad \theta_{p2} = -32.9^\circ$$

اصلی انرشیايي مؤمنتونه د `x او `y محوررونولپاره، په کارولو د معادلی A-12 عبارت دی په

$$I_{\substack{max \\ min}} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}{}^2}$$

$$= \frac{2.90(10^9) + 5.60(10^9)}{2} \pm \sqrt{\left[\frac{2.90(10^9) - 5.60(10^9)}{2}\right]^2 + [-3.00(10^9)]^2}$$

$$= 4.25(10^9) \pm 3.29(10^9)$$

یا

$$I_{max} = 7.54(10^9)\ mm^4 \qquad I_{min} = 0.960(10^9)\ mm^4 \qquad \textit{Ans.}$$

په ځانګړي توګه اعظمی انرشیايي مؤمنت $I_{max} = 7.54\ (10^9)\ mm^4$ ، جوړیږی په اړه د `x محور (لوی محور)، د لته لیدل کیږی چی د غوڅی برخی اکثریت ساحه له دی محوره لري موقعیت لری. چی دا وښودل شي، دیتا د $q = 57.1^0$ په اوله برخه د معادله A-10 کی ځای پر ځای کړي.

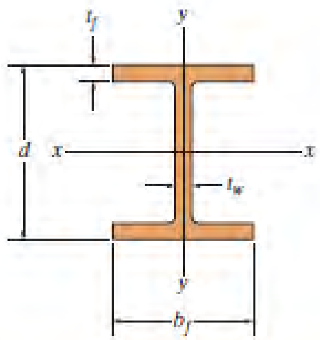
ضمیمه
(APPENDIX)
B

د ساختماني شکلونو هندسي خاصیتونه
(GEOMETRIC PROPERTIES OF STRUCTURAL SHAPES)

Wide-Flange Sections or W Shapes FPS Units

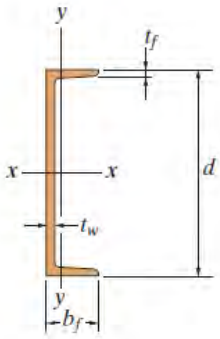
Designation	Area A	Depth d	Web thickness t_w	Flange width b_f	Flange thickness t_f	x–x axis I	x–x axis S	x–x axis r	y–y axis I	y–y axis S	y–y axis r
in. × lb/ft	in^2	in.	in.	in.	in.	in^4	in^3	in.	in^4	in^3	in.
W24 × 104	30.6	24.06	0.500	12.750	0.750	3100	258	10.1	259	40.7	2.91
W24 × 94	27.7	24.31	0.515	9.065	0.875	2700	222	9.87	109	24.0	1.98
W24 × 84	24.7	24.10	0.470	9.020	0.770	2370	196	9.79	94.4	20.9	1.95
W24 × 76	22.4	23.92	0.440	8.990	0.680	2100	176	9.69	82.5	18.4	1.92
W24 × 68	20.1	23.73	0.415	8.965	0.585	1830	154	9.55	70.4	15.7	1.87
W24 × 62	18.2	23.74	0.430	7.040	0.590	1550	131	9.23	34.5	9.80	1.38
W24 × 55	16.2	23.57	0.395	7.005	0.505	1350	114	9.11	29.1	8.30	1.34
W18 × 65	19.1	18.35	0.450	7.590	0.750	1070	117	7.49	54.8	14.4	1.69
W18 × 60	17.6	18.24	0.415	7.555	0.695	984	108	7.47	50.1	13.3	1.69
W18 × 55	16.2	18.11	0.390	7.530	0.630	890	98.3	7.41	44.9	11.9	1.67
W18 × 50	14.7	17.99	0.355	7.495	0.570	800	88.9	7.38	40.1	10.7	1.65
W18 × 46	13.5	18.06	0.360	6.060	0.605	712	78.8	7.25	22.5	7.43	1.29
W18 × 40	11.8	17.90	0.315	6.015	0.525	612	68.4	7.21	19.1	6.35	1.27
W18 × 35	10.3	17.70	0.300	6.000	0.425	510	57.6	7.04	15.3	5.12	1.22
W16 × 57	16.8	16.43	0.430	7.120	0.715	758	92.2	6.72	43.1	12.1	1.60
W16 × 50	14.7	16.26	0.380	7.070	0.630	659	81.0	6.68	37.2	10.5	1.59
W16 × 45	13.3	16.13	0.345	7.035	0.565	586	72.7	6.65	32.8	9.34	1.57
W16 × 36	10.6	15.86	0.295	6.985	0.430	448	56.5	6.51	24.5	7.00	1.52
W16 × 31	9.12	15.88	0.275	5.525	0.440	375	47.2	6.41	12.4	4.49	1.17
W16 × 26	7.68	15.69	0.250	5.500	0.345	301	38.4	6.26	9.59	3.49	1.12
W14 × 53	15.6	13.92	0.370	8.060	0.660	541	77.8	5.89	57.7	14.3	1.92
W14 × 43	12.6	13.66	0.305	7.995	0.530	428	62.7	5.82	45.2	11.3	1.89
W14 × 38	11.2	14.10	0.310	6.770	0.515	385	54.6	5.87	26.7	7.88	1.55
W14 × 34	10.0	13.98	0.285	6.745	0.455	340	48.6	5.83	23.3	6.91	1.53
W14 × 30	8.85	13.84	0.270	6.730	0.385	291	42.0	5.73	19.6	5.82	1.49
W14 × 26	7.69	13.91	0.255	5.025	0.420	245	35.3	5.65	8.91	3.54	1.08
W14 × 22	6.49	13.74	0.230	5.000	0.335	199	29.0	5.54	7.00	2.80	1.04

806



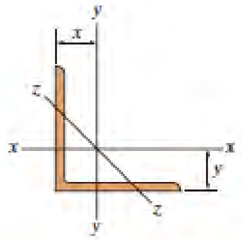
Wide-Flange Sections or W Shapes FPS Units

Designation	Area A	Depth d	Web thickness t_w	Flange width b_f	Flange thickness t_f	x–x axis I	x–x axis S	x–x axis r	y–y axis I	y–y axis S	y–y axis r
in. × lb/ft	in^2	in.	in.	in.	in.	in^4	in^3	in.	in^4	in^3	in.
W12 × 87	25.6	12.53	0.515	12.125	0.810	740	118	5.38	241	39.7	3.07
W12 × 50	14.7	12.19	0.370	8.080	0.640	394	64.7	5.18	56.3	13.9	1.96
W12 × 45	13.2	12.06	0.335	8.045	0.575	350	58.1	5.15	50.0	12.4	1.94
W12 × 26	7.65	12.22	0.230	6.490	0.380	204	33.4	5.17	17.3	5.34	1.51
W12 × 22	6.48	12.31	0.260	4.030	0.425	156	25.4	4.91	4.66	2.31	0.847
W12 × 16	4.71	11.99	0.220	3.990	0.265	103	17.1	4.67	2.82	1.41	0.773
W12 × 14	4.16	11.91	0.200	3.970	0.225	88.6	14.9	4.62	2.36	1.19	0.753
W10 × 100	29.4	11.10	0.680	10.340	1.120	623	112	4.60	207	40.0	2.65
W10 × 54	15.8	10.09	0.370	10.030	0.615	303	60.0	4.37	103	20.6	2.56
W10 × 45	13.3	10.10	0.350	8.020	0.620	248	49.1	4.32	53.4	13.3	2.01
W10 × 39	11.5	9.92	0.315	7.985	0.530	209	42.1	4.27	45.0	11.3	1.98
W10 × 30	8.84	10.47	0.300	5.810	0.510	170	32.4	4.38	16.7	5.75	1.37
W10 × 19	5.62	10.24	0.250	4.020	0.395	96.3	18.8	4.14	4.29	2.14	0.874
W10 × 15	4.41	9.99	0.230	4.000	0.270	68.9	13.8	3.95	2.89	1.45	0.810
W10 × 12	3.54	9.87	0.190	3.960	0.210	53.8	10.9	3.90	2.18	1.10	0.785
W8 × 67	19.7	9.00	0.570	8.280	0.935	272	60.4	3.72	88.6	21.4	2.12
W8 × 58	17.1	8.75	0.510	8.220	0.810	228	52.0	3.65	75.1	18.3	2.10
W8 × 48	14.1	8.50	0.400	8.110	0.685	184	43.3	3.61	60.9	15.0	2.08
W8 × 40	11.7	8.25	0.360	8.070	0.560	146	35.5	3.53	49.1	12.2	2.04
W8 × 31	9.13	8.00	0.285	7.995	0.435	110	27.5	3.47	37.1	9.27	2.02
W8 × 24	7.08	7.93	0.245	6.495	0.400	82.8	20.9	3.42	18.3	5.63	1.61
W8 × 15	4.44	8.11	0.245	4.015	0.315	48.0	11.8	3.29	3.41	1.70	0.876
W6 × 25	7.34	6.38	0.320	6.080	0.455	53.4	16.7	2.70	17.1	5.61	1.52
W6 × 20	5.87	6.20	0.260	6.020	0.365	41.4	13.4	2.66	13.3	4.41	1.50
W6 × 16	4.74	6.28	0.260	4.030	0.405	32.1	10.2	2.60	4.43	2.20	0.966
W6 × 15	4.43	5.99	0.230	5.990	0.260	29.1	9.72	2.56	9.32	3.11	1.46
W6 × 12	3.55	6.03	0.230	4.000	0.280	22.1	7.31	2.49	2.99	1.50	0.918
W6 × 9	2.68	5.90	0.170	3.940	0.215	16.4	5.56	2.47	2.19	1.11	0.905



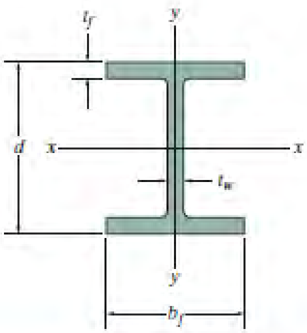
American Standard Channels or C Shapes FPS Units

Designation	Area A	Depth d	Web thickness t_w		Flange width b_f		Flange thickness t_f		x–x axis I	x–x axis S	x–x axis r	y–y axis I	y–y axis S	y–y axis r
in. × lb/ft	in^2	in.	in.		in.		in.		in^4	in^3	in.	in^4	in^3	in.
C15 × 50	14.7	15.00	0.716	11/16	3.716	$3\frac{3}{4}$	0.650	5/8	404	53.8	5.24	11.0	3.78	0.867
C15 × 40	11.8	15.00	0.520	1/2	3.520	$3\frac{1}{2}$	0.650	5/8	349	46.5	5.44	9.23	3.37	0.886
C15 × 33.9	9.96	15.00	0.400	3/8	3.400	$3\frac{3}{8}$	0.650	5/8	315	42.0	5.62	8.13	3.11	0.904
C12 × 30	8.82	12.00	0.510	1/2	3.170	$3\frac{1}{8}$	0.501	1/2	162	27.0	4.29	5.14	2.06	0.763
C12 × 25	7.35	12.00	0.387	3/8	3.047	3	0.501	1/2	144	24.1	4.43	4.47	1.88	0.780
C12 × 20.7	6.09	12.00	0.282	5/16	2.942	3	0.501	1/2	129	21.5	4.61	3.88	1.73	0.799
C10 × 30	8.82	10.00	0.673	11/16	3.033	3	0.436	7/16	103	20.7	3.42	3.94	1.65	0.669
C10 × 25	7.35	10.00	0.526	1/2	2.886	$2\frac{7}{8}$	0.436	7/16	91.2	18.2	3.52	3.36	1.48	0.676
C10 × 20	5.88	10.00	0.379	3/8	2.739	$2\frac{3}{4}$	0.436	7/16	78.9	15.8	3.66	2.81	1.32	0.692
C10 × 15.3	4.49	10.00	0.240	1/4	2.600	$2\frac{5}{8}$	0.436	7/16	67.4	13.5	3.87	2.28	1.16	0.713
C9 × 20	5.88	9.00	0.448	7/16	2.648	$2\frac{5}{8}$	0.413	7/16	60.9	13.5	3.22	2.42	1.17	0.642
C9 × 15	4.41	9.00	0.285	5/16	2.485	$2\frac{1}{2}$	0.413	7/16	51.0	11.3	3.40	1.93	1.01	0.661
C9 × 13.4	3.94	9.00	0.233	1/4	2.433	$2\frac{3}{8}$	0.413	7/16	47.9	10.6	3.48	1.76	0.962	0.669
C8 × 18.75	5.51	8.00	0.487	1/2	2.527	$2\frac{1}{2}$	0.390	3/8	44.0	11.0	2.82	1.98	1.01	0.599
C8 × 13.75	4.04	8.00	0.303	5/16	2.343	$2\frac{3}{8}$	0.390	3/8	36.1	9.03	2.99	1.53	0.854	0.615
C8 × 11.5	3.38	8.00	0.220	1/4	2.260	$2\frac{1}{4}$	0.390	3/8	32.6	8.14	3.11	1.32	0.781	0.625
C7 × 14.75	4.33	7.00	0.419	7/16	2.299	$2\frac{1}{4}$	0.366	3/8	27.2	7.78	2.51	1.38	0.779	0.564
C7 × 12.25	3.60	7.00	0.314	5/16	2.194	$2\frac{1}{4}$	0.366	3/8	24.2	6.93	2.60	1.17	0.703	0.571
C7 × 9.8	2.87	7.00	0.210	3/16	2.090	$2\frac{1}{8}$	0.366	3/8	21.3	6.08	2.72	0.968	0.625	0.581
C6 × 13	3.83	6.00	0.437	7/16	2.157	$2\frac{1}{8}$	0.343	5/16	17.4	5.80	2.13	1.05	0.642	0.525
C6 × 10.5	3.09	6.00	0.314	5/16	2.034	2	0.343	5/16	15.2	5.06	2.22	0.866	0.564	0.529
C6 × 8.2	2.40	6.00	0.200	3/16	1.920	$1\frac{7}{8}$	0.343	5/16	13.1	4.38	2.34	0.693	0.492	0.537
C5 × 9	2.64	5.00	0.325	5/16	1.885	$1\frac{7}{8}$	0.320	5/16	8.90	3.56	1.83	0.632	0.450	0.489
C5 × 6.7	1.97	5.00	0.190	3/16	1.750	$1\frac{3}{4}$	0.320	5/16	7.49	3.00	1.95	0.479	0.378	0.493
C4 × 7.25	2.13	4.00	0.321	5/16	1.721	$1\frac{3}{4}$	0.296	5/16	4.59	2.29	1.47	0.433	0.343	0.450
C4 × 5.4	1.59	4.00	0.184	3/16	1.584	$1\frac{5}{8}$	0.296	5/16	3.85	1.93	1.56	0.319	0.283	0.449
C3 × 6	1.76	3.00	0.356	3/8	1.596	$1\frac{5}{8}$	0.273	1/4	2.07	1.38	1.08	0.305	0.268	0.416
C3 × 5	1.47	3.00	0.258	1/4	1.498	$1\frac{1}{2}$	0.273	1/4	1.85	1.24	1.12	0.247	0.233	0.410
C3 × 4.1	1.21	3.00	0.170	3/16	1.410	$1\frac{3}{8}$	0.273	1/4	1.66	1.10	1.17	0.197	0.202	0.404



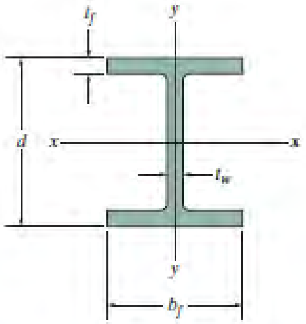
Angles Having Equal Legs FPS Units

Size and thickness	Weight per foot	Area A	x–x axis I	x–x axis S	x–x axis r	x–x axis y	y–y axis I	y–y axis S	y–y axis r	y–y axis x	z–z axis r
in.	lb	in^2	in^4	in^3	in.	in.	in^4	in^3	in.	in.	in.
L8 × 8 × 1	51.0	15.0	89.0	15.8	2.44	2.37	89.0	15.8	2.44	2.37	1.56
L8 × 8 × $\frac{3}{4}$	38.9	11.4	69.7	12.2	2.47	2.28	69.7	12.2	2.47	2.28	1.58
L8 × 8 × $\frac{1}{2}$	26.4	7.75	48.6	8.36	2.50	2.19	48.6	8.36	2.50	2.19	1.59
L6 × 6 × 1	37.4	11.0	35.5	8.57	1.80	1.86	35.5	8.57	1.80	1.86	1.17
L6 × 6 × $\frac{3}{4}$	28.7	8.44	28.2	6.66	1.83	1.78	28.2	6.66	1.83	1.78	1.17
L6 × 6 × $\frac{1}{2}$	19.6	5.75	19.9	4.61	1.86	1.68	19.9	4.61	1.86	1.68	1.18
L6 × 6 × $\frac{3}{8}$	14.9	4.36	15.4	3.53	1.88	1.64	15.4	3.53	1.88	1.64	1.19
L5 × 5 × $\frac{3}{4}$	23.6	6.94	15.7	4.53	1.51	1.52	15.7	4.53	1.51	1.52	0.975
L5 × 5 × $\frac{1}{2}$	16.2	4.75	11.3	3.16	1.54	1.43	11.3	3.16	1.54	1.43	0.983
L5 × 5 × $\frac{3}{8}$	12.3	3.61	8.74	2.42	1.56	1.39	8.74	2.42	1.56	1.39	0.990
L4 × 4 × $\frac{3}{4}$	18.5	5.44	7.67	2.81	1.19	1.27	7.67	2.81	1.19	1.27	0.778
L4 × 4 × $\frac{1}{2}$	12.8	3.75	5.56	1.97	1.22	1.18	5.56	1.97	1.22	1.18	0.782
L4 × 4 × $\frac{3}{8}$	9.8	2.86	4.36	1.52	1.23	1.14	4.36	1.52	1.23	1.14	0.788
L4 × 4 × $\frac{1}{4}$	6.6	1.94	3.04	1.05	1.25	1.09	3.04	1.05	1.25	1.09	0.795
L3$\frac{1}{2}$ × 3$\frac{1}{2}$ × $\frac{1}{2}$	11.1	3.25	3.64	1.49	1.06	1.06	3.64	1.49	1.06	1.06	0.683
L3$\frac{1}{2}$ × 3$\frac{1}{2}$ × $\frac{3}{8}$	8.5	2.48	2.87	1.15	1.07	1.01	2.87	1.15	1.07	1.01	0.687
L3$\frac{1}{2}$ × 3$\frac{1}{2}$ × $\frac{1}{4}$	5.8	1.69	2.01	0.794	1.09	0.968	2.01	0.794	1.09	0.968	0.694
L3 × 3 × $\frac{1}{2}$	9.4	2.75	2.22	1.07	0.898	0.932	2.22	1.07	0.898	0.932	0.584
L3 × 3 × $\frac{3}{8}$	7.2	2.11	1.76	0.833	0.913	0.888	1.76	0.833	0.913	0.888	0.587
L3 × 3 × $\frac{1}{4}$	4.9	1.44	1.24	0.577	0.930	0.842	1.24	0.577	0.930	0.842	0.592
L2$\frac{1}{2}$ × 2$\frac{1}{2}$ × $\frac{1}{2}$	7.7	2.25	1.23	0.724	0.739	0.806	1.23	0.724	0.739	0.806	0.487
L2$\frac{1}{2}$ × 2$\frac{1}{2}$ × $\frac{3}{8}$	5.9	1.73	0.984	0.566	0.753	0.762	0.984	0.566	0.753	0.762	0.487
L2$\frac{1}{2}$ × 2$\frac{1}{2}$ × $\frac{1}{4}$	4.1	1.19	0.703	0.394	0.769	0.717	0.703	0.394	0.769	0.717	0.491
L2 × 2 × $\frac{3}{8}$	4.7	1.36	0.479	0.351	0.594	0.636	0.479	0.351	0.594	0.636	0.389
L2 × 2 × $\frac{1}{4}$	3.19	0.938	0.348	0.247	0.609	0.592	0.348	0.247	0.609	0.592	0.391
L2 × 2 × $\frac{1}{8}$	1.65	0.484	0.190	0.131	0.626	0.546	0.190	0.131	0.626	0.546	0.398



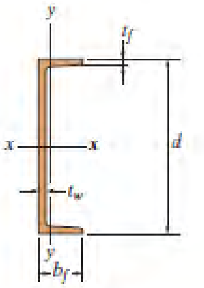
Wide-Flange Sections or W Shapes SI Units

Designation	Area A	Depth d	Web thickness t_w	Flange width b_f	Flange thickness t_f	x–x axis I	x–x axis S	x–x axis r	y–y axis I	y–y axis S	y–y axis r
mm × kg/m	mm^2	mm	mm	mm	mm	10^6 mm^4	10^3 mm^3	mm	10^6 mm^4	10^3 mm^3	mm
W610 × 155	19 800	611	12.70	324.0	19.0	1 290	4 220	255	108	667	73.9
W610 × 140	17 900	617	13.10	230.0	22.2	1 120	3 630	250	45.1	392	50.2
W610 × 125	15 900	612	11.90	229.0	19.6	985	3 220	249	39.3	343	49.7
W610 × 113	14 400	608	11.20	228.0	17.3	875	2 880	247	34.3	301	48.8
W610 × 101	12 900	603	10.50	228.0	14.9	764	2 530	243	29.5	259	47.8
W610 × 92	11 800	603	10.90	179.0	15.0	646	2 140	234	14.4	161	34.9
W610 × 82	10 500	599	10.00	178.0	12.8	560	1 870	231	12.1	136	33.9
W460 × 97	12 300	466	11.40	193.0	19.0	445	1 910	190	22.8	236	43.1
W460 × 89	11 400	463	10.50	192.0	17.7	410	1 770	190	20.9	218	42.8
W460 × 82	10 400	460	9.91	191.0	16.0	370	1 610	189	18.6	195	42.3
W460 × 74	9 460	457	9.02	190.0	14.5	333	1 460	188	16.6	175	41.9
W460 × 68	8 730	459	9.14	154.0	15.4	297	1 290	184	9.41	122	32.8
W460 × 60	7 590	455	8.00	153.0	13.3	255	1 120	183	7.96	104	32.4
W460 × 52	6 640	450	7.62	152.0	10.8	212	942	179	6.34	83.4	30.9
W410 × 85	10 800	417	10.90	181.0	18.2	315	1 510	171	18.0	199	40.8
W410 × 74	9 510	413	9.65	180.0	16.0	275	1 330	170	15.6	173	40.5
W410 × 67	8 560	410	8.76	179.0	14.4	245	1 200	169	13.8	154	40.2
W410 × 53	6 820	403	7.49	177.0	10.9	186	923	165	10.1	114	38.5
W410 × 46	5 890	403	6.99	140.0	11.2	156	774	163	5.14	73.4	29.5
W410 × 39	4 960	399	6.35	140.0	8.8	126	632	159	4.02	57.4	28.5
W360 × 79	10 100	354	9.40	205.0	16.8	227	1 280	150	24.2	236	48.9
W360 × 64	8 150	347	7.75	203.0	13.5	179	1 030	148	18.8	185	48.0
W360 × 57	7 200	358	7.87	172.0	13.1	160	894	149	11.1	129	39.3
W360 × 51	6 450	355	7.24	171.0	11.6	141	794	148	9.68	113	38.7
W360 × 45	5 710	352	6.86	171.0	9.8	121	688	146	8.16	95.4	37.8
W360 × 39	4 960	353	6.48	128.0	10.7	102	578	143	3.75	58.6	27.5
W360 × 33	4 190	349	5.84	127.0	8.5	82.9	475	141	2.91	45.8	26.4



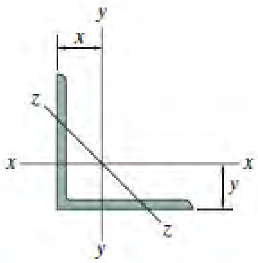
Wide-Flange Sections or W Shapes SI Units

Designation	Area A	Depth d	Web thickness t_w	Flange width b_f	Flange thickness t_f	x–x axis I	x–x axis S	x–x axis r	y–y axis I	y–y axis S	y–y axis r
mm × kg/m	mm^2	mm	mm	mm	mm	10^6 mm^4	10^3 mm^3	mm	10^6 mm^4	10^3 mm^3	mm
W310 × 129	16 500	318	13.10	308.0	20.6	308	1940	137	100	649	77.8
W310 × 74	9 480	310	9.40	205.0	16.3	165	1060	132	23.4	228	49.7
W310 × 67	8 530	306	8.51	204.0	14.6	145	948	130	20.7	203	49.3
W310 × 39	4 930	310	5.84	165.0	9.7	84.8	547	131	7.23	87.6	38.3
W310 × 33	4 180	313	6.60	102.0	10.8	65.0	415	125	1.92	37.6	21.4
W310 × 24	3 040	305	5.59	101.0	6.7	42.8	281	119	1.16	23.0	19.5
W310 × 21	2 680	303	5.08	101.0	5.7	37.0	244	117	0.986	19.5	19.2
W250 × 149	19 000	282	17.30	263.0	28.4	259	1840	117	86.2	656	67.4
W250 × 80	10 200	256	9.40	255.0	15.6	126	984	111	43.1	338	65.0
W250 × 67	8 560	257	8.89	204.0	15.7	104	809	110	22.2	218	50.9
W250 × 58	7 400	252	8.00	203.0	13.5	87.3	693	109	18.8	185	50.4
W250 × 45	5 700	266	7.62	148.0	13.0	71.1	535	112	7.03	95	35.1
W250 × 28	3 620	260	6.35	102.0	10.0	39.9	307	105	1.78	34.9	22.2
W250 × 22	2 850	254	5.84	102.0	6.9	28.8	227	101	1.22	23.9	20.7
W250 × 18	2 280	251	4.83	101.0	5.3	22.5	179	99.3	0.919	18.2	20.1
W200 × 100	12 700	229	14.50	210.0	23.7	113	987	94.3	36.6	349	53.7
W200 × 86	11 000	222	13.00	209.0	20.6	94.7	853	92.8	31.4	300	53.4
W200 × 71	9 100	216	10.20	206.0	17.4	76.6	709	91.7	25.4	247	52.8
W200 × 59	7 580	210	9.14	205.0	14.2	61.2	583	89.9	20.4	199	51.9
W200 × 46	5 890	203	7.24	203.0	11.0	45.5	448	87.9	15.3	151	51.0
W200 × 36	4 570	201	6.22	165.0	10.2	34.4	342	86.8	7.64	92.6	40.9
W200 × 22	2 860	206	6.22	102.0	8.0	20.0	194	83.6	1.42	27.8	22.3
W150 × 37	4 730	162	8.13	154.0	11.6	22.2	274	68.5	7.07	91.8	38.7
W150 × 30	3 790	157	6.60	153.0	9.3	17.1	218	67.2	5.54	72.4	38.2
W150 × 22	2 860	152	5.84	152.0	6.6	12.1	159	65.0	3.87	50.9	36.8
W150 × 24	3 060	160	6.60	102.0	10.3	13.4	168	66.2	1.83	35.9	24.5
W150 × 18	2 290	153	5.84	102.0	7.1	9.19	120	63.3	1.26	24.7	23.5
W150 × 14	1 730	150	4.32	100.0	5.5	6.84	91.2	62.9	0.912	18.2	23.0



American Standard Channels or C Shapes SI Units

Designation	Area A	Depth d	Web thickness t_w	Flange width b_f	Flange thickness t_f	x–x axis I	x–x axis S	x–x axis r	y–y axis I	y–y axis S	y–y axis r
mm × kg/m	mm^2	mm	mm	mm	mm	10^6 mm^4	10^3 mm^3	mm	10^6 mm^4	10^3 mm^3	mm
C380 × 74	9 480	381.0	18.20	94.4	16.50	168	882	133	4.58	61.8	22.0
C380 × 60	7 610	381.0	13.20	89.4	16.50	145	761	138	3.84	55.1	22.5
C380 × 50	6 430	381.0	10.20	86.4	16.50	131	688	143	3.38	50.9	22.9
C310 × 45	5 690	305.0	13.00	80.5	12.70	67.4	442	109	2.14	33.8	19.4
C310 × 37	4 740	305.0	9.83	77.4	12.70	59.9	393	112	1.86	30.9	19.8
C310 × 31	3 930	305.0	7.16	74.7	12.70	53.7	352	117	1.61	28.3	20.2
C250 × 45	5 690	254.0	17.10	77.0	11.10	42.9	338	86.8	1.61	27.1	17.0
C250 × 37	4 740	254.0	13.40	73.3	11.10	38.0	299	89.5	1.40	24.3	17.2
C250 × 30	3 790	254.0	9.63	69.6	11.10	32.8	258	93.0	1.17	21.6	17.6
C250 × 23	2 900	254.0	6.10	66.0	11.10	28.1	221	98.4	0.949	19.0	18.1
C230 × 30	3 790	229.0	11.40	67.3	10.50	25.3	221	81.7	1.01	19.2	16.3
C230 × 22	2 850	229.0	7.24	63.1	10.50	21.2	185	86.2	0.803	16.7	16.8
C230 × 20	2 540	229.0	5.92	61.8	10.50	19.9	174	88.5	0.733	15.8	17.0
C200 × 28	3 550	203.0	12.40	64.2	9.90	18.3	180	71.8	0.824	16.5	15.2
C200 × 20	2 610	203.0	7.70	59.5	9.90	15.0	148	75.8	0.637	14.0	15.6
C200 × 17	2 180	203.0	5.59	57.4	9.90	13.6	134	79.0	0.549	12.8	15.9
C180 × 22	2 790	178.0	10.60	58.4	9.30	11.3	127	63.6	0.574	12.8	14.3
C180 × 18	2 320	178.0	7.98	55.7	9.30	10.1	113	66.0	0.487	11.5	14.5
C180 × 15	1 850	178.0	5.33	53.1	9.30	8.87	99.7	69.2	0.403	10.2	14.8
C150 × 19	2 470	152.0	11.10	54.8	8.70	7.24	95.3	54.1	0.437	10.5	13.3
C150 × 16	1 990	152.0	7.98	51.7	8.70	6.33	83.3	56.4	0.360	9.22	13.5
C150 × 12	1 550	152.0	5.08	48.8	8.70	5.45	71.7	59.3	0.288	8.04	13.6
C130 × 13	1 700	127.0	8.25	47.9	8.10	3.70	58.3	46.7	0.263	7.35	12.4
C130 × 10	1 270	127.0	4.83	44.5	8.10	3.12	49.1	49.6	0.199	6.18	12.5
C100 × 11	1 370	102.0	8.15	43.7	7.50	1.91	37.5	37.3	0.180	5.62	11.5
C100 × 8	1 030	102.0	4.67	40.2	7.50	1.60	31.4	39.4	0.133	4.65	11.4
C75 × 9	1 140	76.2	9.04	40.5	6.90	0.862	22.6	27.5	0.127	4.39	10.6
C75 × 7	948	76.2	6.55	38.0	6.90	0.770	20.2	28.5	0.103	3.83	10.4
C75 × 6	781	76.2	4.32	35.8	6.90	0.691	18.1	29.8	0.082	3.32	10.2



Angles Having Equal Legs SI Units

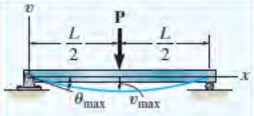
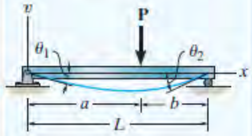
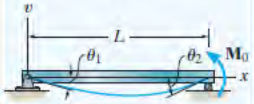
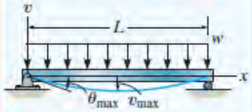
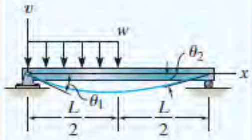
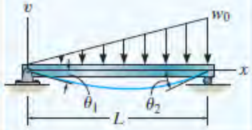
Size and thickness	Mass per Meter	Area	x–x axis				y–y axis				z–z axis
			I	S	r	y	I	S	r	x	r
mm	kg	mm²	10⁶ mm⁴	10³ mm³	mm	mm	10⁶ mm⁴	10³ mm³	mm	mm	mm
L203 × 203 × 25.4	75.9	9 680	36.9	258	61.7	60.1	36.9	258	61.7	60.1	39.6
L203 × 203 × 19.0	57.9	7 380	28.9	199	62.6	57.8	28.9	199	62.6	57.8	40.1
L203 × 203 × 12.7	39.3	5 000	20.2	137	63.6	55.5	20.2	137	63.6	55.5	40.4
L152 × 152 × 25.4	55.7	7 100	14.6	139	45.3	47.2	14.6	139	45.3	47.2	29.7
L152 × 152 × 19.0	42.7	5 440	11.6	108	46.2	45.0	11.6	108	46.2	45.0	29.7
L152 × 152 × 12.7	29.2	3 710	8.22	75.1	47.1	42.7	8.22	75.1	47.1	42.7	30.0
L152 × 152 × 9.5	22.2	2 810	6.35	57.4	47.5	41.5	6.35	57.4	47.5	41.5	30.2
L127 × 127 × 19.0	35.1	4 480	6.54	73.9	38.2	38.7	6.54	73.9	38.2	38.7	24.8
L127 × 127 × 12.7	24.1	3 060	4.68	51.7	39.1	36.4	4.68	51.7	39.1	36.4	25.0
L127 × 127 × 9.5	18.3	2 330	3.64	39.7	39.5	35.3	3.64	39.7	39.5	35.3	25.1
L102 × 102 × 19.0	27.5	3 510	3.23	46.4	30.3	32.4	3.23	46.4	30.3	32.4	19.8
L102 × 102 × 12.7	19.0	2 420	2.34	32.6	31.1	30.2	2.34	32.6	31.1	30.2	19.9
L102 × 102 × 9.5	14.6	1 840	1.84	25.3	31.6	29.0	1.84	25.3	31.6	29.0	20.0
L102 × 102 × 6.4	9.8	1 250	1.28	17.3	32.0	27.9	1.28	17.3	32.0	27.9	20.2
L89 × 89 × 12.7	16.5	2 100	1.52	24.5	26.9	26.9	1.52	24.5	26.9	26.9	17.3
L89 × 89 × 9.5	12.6	1 600	1.20	19.0	27.4	25.8	1.20	19.0	27.4	25.8	17.4
L89 × 89 × 6.4	8.6	1 090	0.840	13.0	27.8	24.6	0.840	13.0	27.8	24.6	17.6
L76 × 76 × 12.7	14.0	1 770	0.915	17.5	22.7	23.6	0.915	17.5	22.7	23.6	14.8
L76 × 76 × 9.5	10.7	1 360	0.726	13.6	23.1	22.5	0.726	13.6	23.1	22.5	14.9
L76 × 76 × 6.4	7.3	927	0.514	9.39	23.5	21.3	0.514	9.39	23.5	21.3	15.0
L64 × 64 × 12.7	11.5	1 450	0.524	12.1	19.0	20.6	0.524	12.1	19.0	20.6	12.4
L64 × 64 × 9.5	8.8	1 120	0.420	9.46	19.4	19.5	0.420	9.46	19.4	19.5	12.4
L64 × 64 × 6.4	6.1	766	0.300	6.59	19.8	18.2	0.300	6.59	19.8	18.2	12.5
L51 × 51 × 9.5	7.0	877	0.202	5.82	15.2	16.2	0.202	5.82	15.2	16.2	9.88
L51 × 51 × 6.4	4.7	605	0.146	4.09	15.6	15.1	0.146	4.09	15.6	15.1	9.93
L51 × 51 × 3.2	2.5	312	0.080	2.16	16.0	13.9	0.080	2.16	16.0	13.9	10.1

د بیمونو میلان او بیځایه کیدنه

APPENDIX C

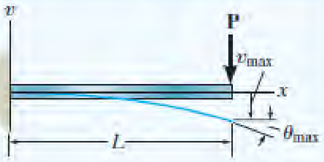
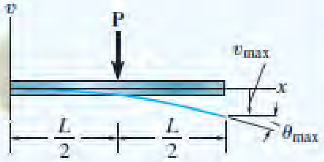
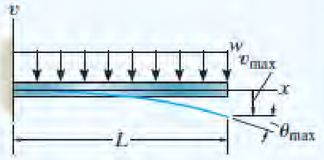
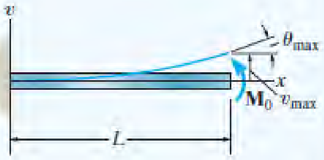
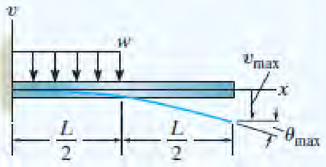
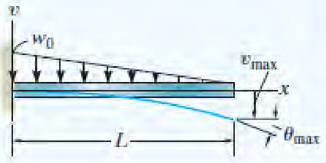
SLOPES AND DEFLECTIONS OF BEAMS

Simply Supported Beam Slopes and Deflections

Beam	Slope	Deflection	Elastic Curve
	$\theta_{max} = \dfrac{-PL^2}{16EI}$	$v_{max} = \dfrac{-PL^3}{48EI}$	$v = \dfrac{-Px}{48EI}(3L^2 - 4x^2)$ $0 \le x \le L/2$
	$\theta_1 = \dfrac{-Pab(L+b)}{6EIL}$ $\theta_2 = \dfrac{Pab(L+a)}{6EIL}$	$v\Big\rvert_{x=a} = \dfrac{-Pba}{6EIL}(L^2 - b^2 - a^2)$	$v = \dfrac{-Pbx}{6EIL}(L^2 - b^2 - x^2)$ $0 \le x \le a$
	$\theta_1 = \dfrac{-M_0 L}{6EI}$ $\theta_2 = \dfrac{M_0 L}{3EI}$	$v_{max} = \dfrac{-M_0 L^2}{9\sqrt{3}\,EI}$ at $x = 0.5774L$	$v = \dfrac{-M_0 x}{6EIL}(L^2 - x^2)$
	$\theta_{max} = \dfrac{-wL^3}{24EI}$	$v_{max} = \dfrac{-5wL^4}{384EI}$	$v = \dfrac{-wx}{24EI}(x^3 - 2Lx^2 + L^3)$
	$\theta_1 = \dfrac{-3wL^3}{128EI}$ $\theta_2 = \dfrac{7wL^3}{384EI}$	$v\Big\rvert_{x=L/2} = \dfrac{-5wL^4}{768EI}$ $v_{max} = -0.006563\dfrac{wL^4}{EI}$ at $x = 0.4598L$	$v = \dfrac{-wx}{384EI}(16x^3 - 24Lx^2 + 9L^3)$ $0 \le x \le L/2$ $v = \dfrac{-wL}{384EI}(8x^3 - 24Lx^2 + 17L^2x - L^3)$ $L/2 \le x < L$
	$\theta_1 = \dfrac{-7w_0L^3}{360EI}$ $\theta_2 = \dfrac{w_0L^3}{45EI}$	$v_{max} = -0.00652\dfrac{w_0L^4}{EI}$ at $x = 0.5193L$	$v = \dfrac{-w_0 x}{360EIL}(3x^4 - 10L^2x^2 + 7L^4)$

814

Cantilevered Beam Slopes and Deflections

Beam	Slope	Deflection	Elastic Curve
	$\theta_{max} = \dfrac{-PL^2}{2EI}$	$v_{max} = \dfrac{-PL^3}{3EI}$	$v = \dfrac{-Px^2}{6EI}(3L - x)$
	$\theta_{max} = \dfrac{-PL^2}{8EI}$	$v_{max} = \dfrac{-5PL^3}{48EI}$	$v = \dfrac{-Px^2}{12EI}(3L - 2x) \quad 0 \le x \le L/2$ $v = \dfrac{-PL^2}{48EI}(6x - L) \quad L/2 \le x \le L$
	$\theta_{max} = \dfrac{-wL^3}{6EI}$	$v_{max} = \dfrac{-wL^4}{8EI}$	$v = \dfrac{-wx^2}{24EI}(x^2 - 4Lx + 6L^2)$
	$\theta_{max} = \dfrac{M_0L}{EI}$	$v_{max} = \dfrac{M_0L^2}{2EI}$	$v = \dfrac{M_0x^2}{2EI}$
	$\theta_{max} = \dfrac{-wL^3}{48EI}$	$v_{max} = \dfrac{-7wL^4}{384EI}$	$v = \dfrac{-wx^2}{24EI}\left(x^2 - 2Lx + \frac{3}{2}L^2\right)$ $0 \le x \le L/2$ $v = \dfrac{-wL^3}{384EI}(8x - L)$ $L/2 \le x \le L$
	$\theta_{max} = \dfrac{-w_0L^3}{24EI}$	$v_{max} = \dfrac{-w_0L^4}{30EI}$	$v = \dfrac{-w_0x^2}{120EIL}(10L^3 - 10L^2x + 5Lx^2 - x^3)$

C

د ابتدايي سوالونو ځوابونه

ضميمه

Solutions and Answers)
for Preliminary
(Problems

د ابتدايي سوالونو ځوابونه

(Solution and Answers for
Preliminary Problems)

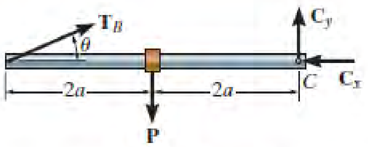
په دی برخه کی د پوښتنو اول تکی د پښتو او انګلیسی
په دی لاندی ډول بدل شوي دي . حرف د P بدل کړي
په ل

د بیلګی په توګه

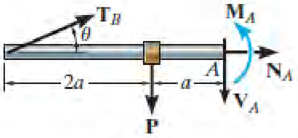
P1-1 = 1-1 ل

Solutions and Answers for Preliminary Problems

P1–1a.



$\circlearrowleft + \Sigma M_C = 0;$ get T_B

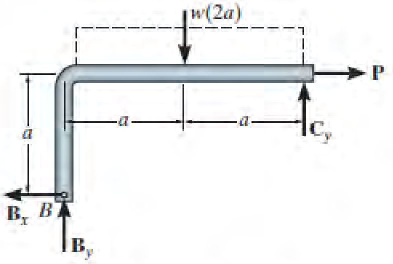


$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0;$ get N_A

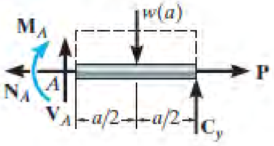
$+\uparrow \Sigma F_y = 0;$ get V_A

$\circlearrowleft + \Sigma M_A = 0;$ get M_A

P1–1b.



$\circlearrowleft + \Sigma M_B = 0;$ get C_y

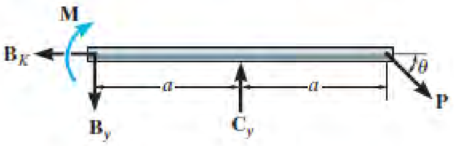


$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0;$ get N_A

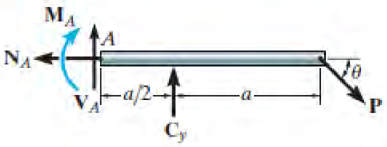
$+\uparrow \Sigma F_y = 0;$ get V_A

$\circlearrowleft + \Sigma M_A = 0;$ get M_A

P1–1c.



$\circlearrowleft + \Sigma M_B = 0;$ get C_y

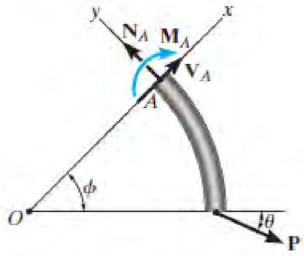


$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0;$ get N_A

$+\uparrow \Sigma F_y = 0;$ get V_A

$\circlearrowleft + \Sigma M_A = 0;$ get M_A

P1–1d.

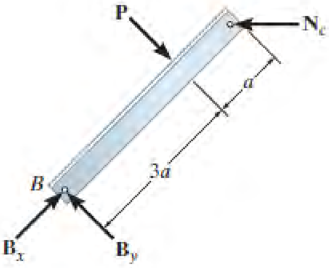


$+\nwarrow \Sigma F_y = 0;$ get N_A

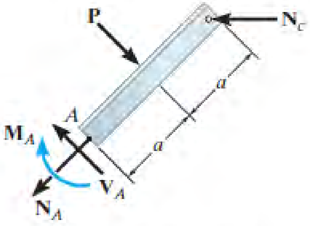
$+\nearrow \Sigma F_x = 0;$ get V_A

$\circlearrowleft + \Sigma M_O = 0$ or $\Sigma M_A = 0;$ get M_A

P1–1e.



$\circlearrowleft + \Sigma M_B = 0;$ get N_C

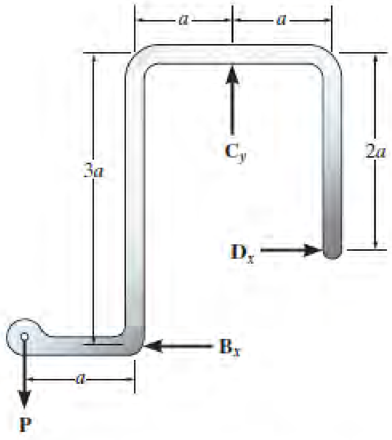


$+\nearrow \Sigma F_x = 0;$ get N_A

$+\nwarrow \Sigma F_y = 0;$ get V_A

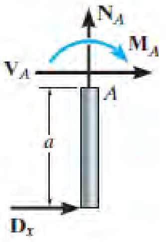
$\circlearrowleft + \Sigma M_A = 0;$ get M_A

P1–1f.



$+\uparrow \Sigma F_y = 0$; get $C_y (= P)$

$\zeta + \Sigma M_B = 0$; get D_x

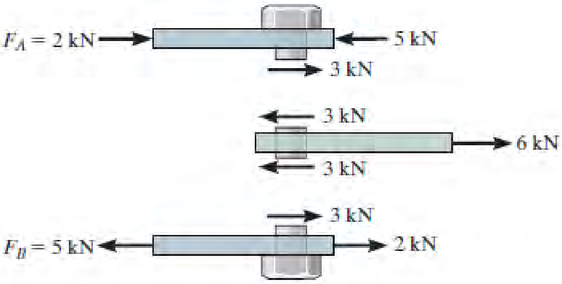


$+\uparrow \Sigma F_y = 0$; get $N_A (= 0)$

$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0$; get V_A

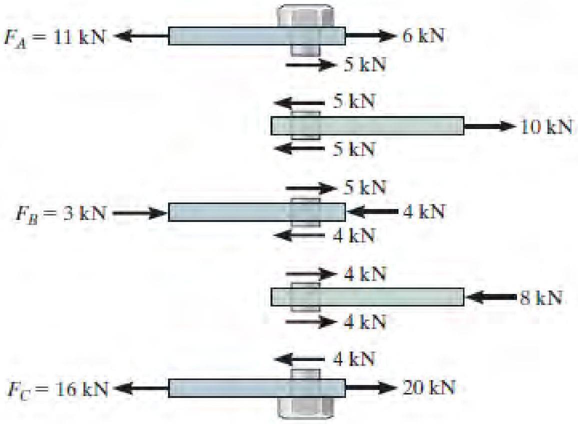
$\zeta + \Sigma M_A = 0$; get M_A

P1–2a.



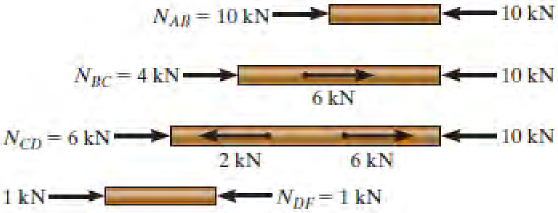
$V_{max} = 3$ kN

P1–2b.



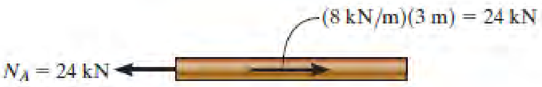
$V_{max} = 5$ kN

P1–3.

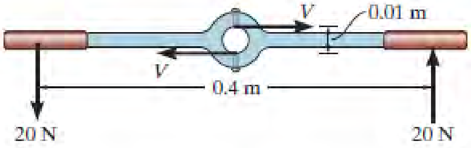


$N_{max} = 10$ kN

P1–4.



P1–5.



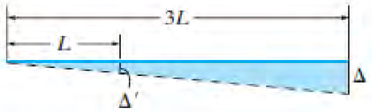
$\Sigma M = 0;\ 20\ \text{N}\ (0.4\ \text{m}) - V(0.01\ \text{m}) = 0$

$V = 800$ N

P1–6.

$N = (5\text{ kN})\cos 30^\circ = 4.33\text{ kN}$
$V = (5\text{ kN})\sin 30^\circ = 2.5\text{ kN}$

P2–1.



$$\frac{\Delta'}{L} = \frac{\Delta}{3L}, \quad \Delta' = \frac{\Delta}{3}$$

$$\epsilon_{AB} = \frac{\Delta/3}{L/2} = \frac{2\Delta}{3L}$$

$$\epsilon_{CD} = \frac{\Delta}{L}$$

P2–2.

$$\frac{\Delta'}{2L} = \frac{\Delta}{L} \qquad \Delta' = 2\Delta$$

$$\epsilon_{CD} = \frac{\Delta}{L}$$

$$\epsilon_{AB} = \frac{2\Delta}{L/2} = \frac{4\Delta}{L}$$

P2–3.

$$\epsilon_{AB} = \frac{L_{A'B} - L_{AB}}{L_{AB}}$$

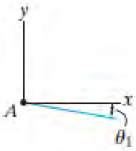
P2–4.

$$\epsilon_{AB} = \frac{L_{AB'} - L_{AB}}{L_{AB}}, \ \epsilon_{AC} = \frac{L_{AC'} - L_{AC}}{L_{AC}}$$

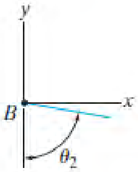
$$\epsilon_{BC} = \frac{L_{B'C'} - L_{BC}}{L_{BC}}, \ (\gamma_A)_{xy} = \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\text{ rad}$$

P2–5.

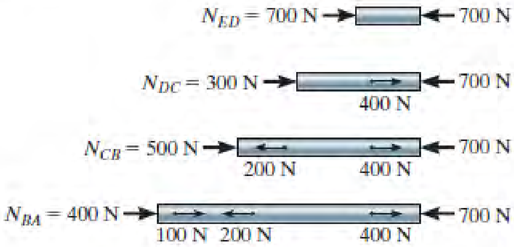
$$(\gamma_A)_{xy} = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} + \theta_1\right)$$
$$= (-\theta_1)\text{ rad}$$



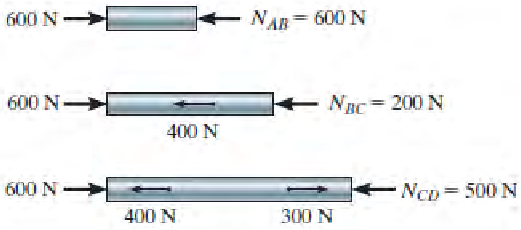
$$(\gamma_B)_{xy} = \frac{\pi}{2} - (\pi - \theta_2)$$
$$= \left(-\frac{\pi}{2} + \theta_2\right)\text{ rad}$$



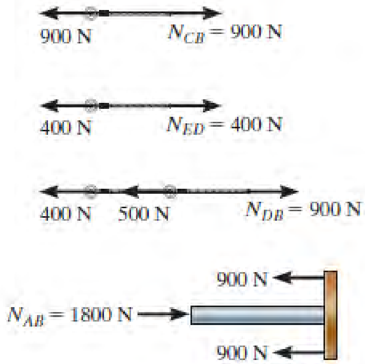
P4–1a.



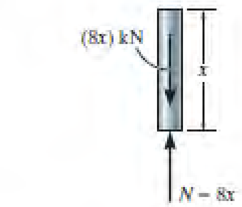
P4–1b.



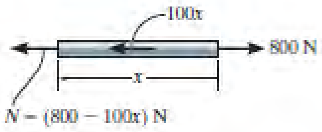
P4–2.



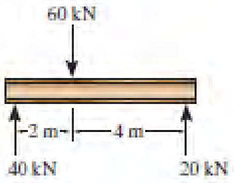
P4–3.



P4–4.



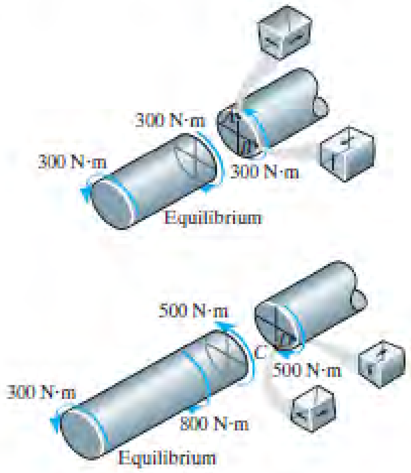
P4–5.



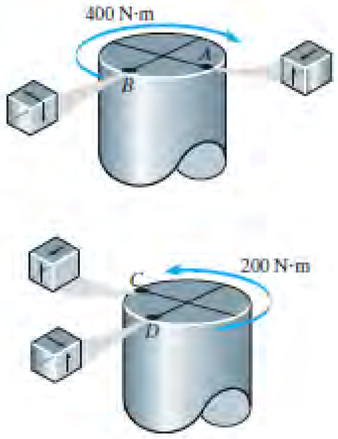
$$\Delta_B = \frac{PL}{AE} = \frac{20(10^3)\text{ N }(3\text{ m})}{2(10^{-3})\text{ m}^2\,(60(10^9)\text{ N/m}^2)}$$

$$= 0.5(10^{-3})\text{ m} = 0.5\text{ mm}$$

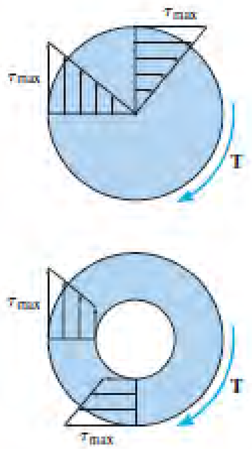
P5–1.



P5–2.



P5–3.



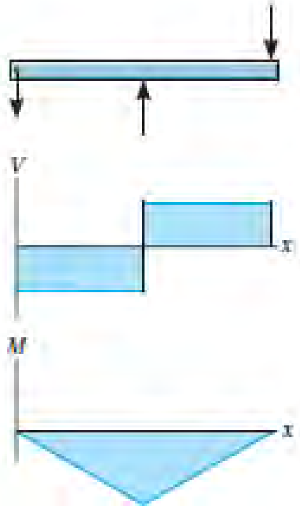
P5–4.

$$P = T\omega$$

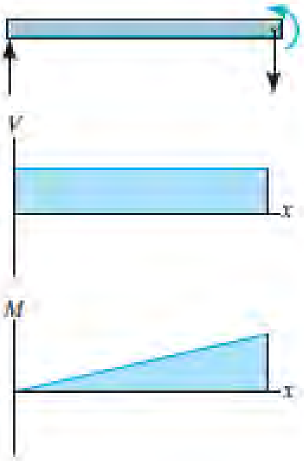
$$(10\text{ hp})\left(\frac{550\text{ ft}\cdot\text{lb/s}}{1\text{ hp}}\right) = T\left(1200\,\frac{\text{rev}}{\text{min}}\right)\left(\frac{1\text{ min}}{60\text{ s}}\right)\frac{2\pi\text{ rad}}{1\text{ rev}}$$

$$T = 43.8\text{ lb}\cdot\text{ft}$$

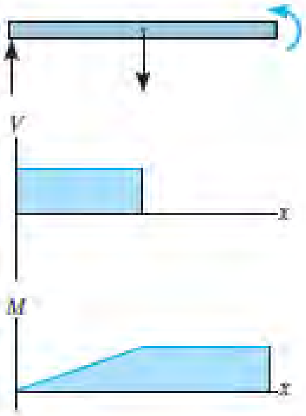
P6–1a.



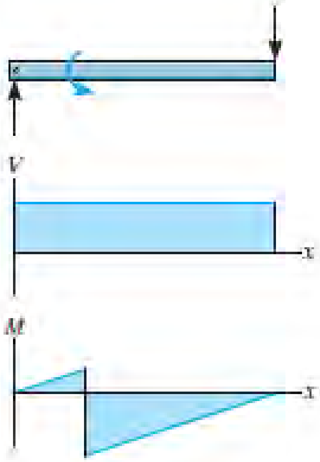
P6–1b.



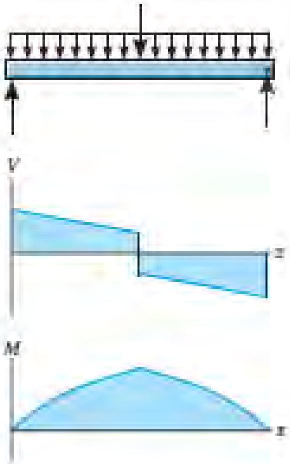
P6–1c.



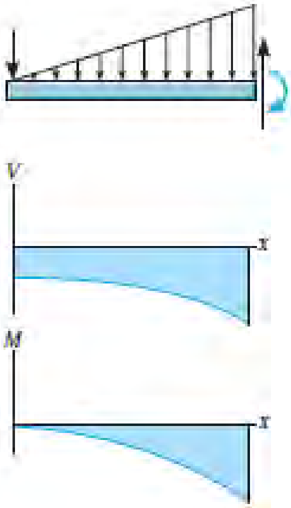
P6–1d.



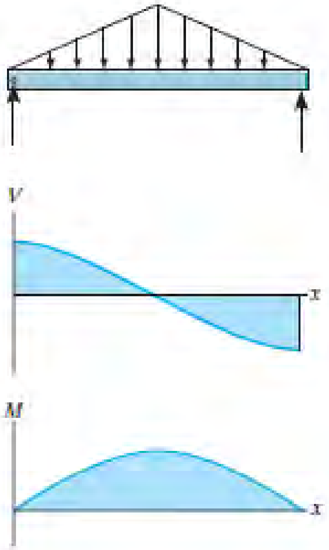
P6–1e.



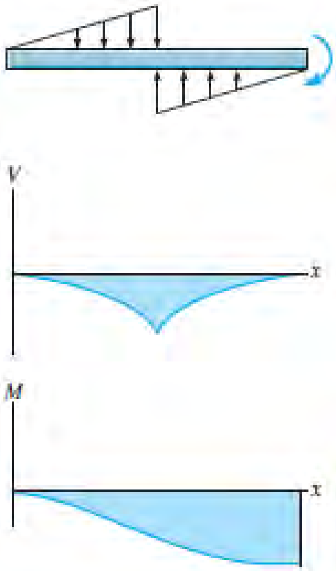
P6–1f.



P6–1g.



P6–1h.



P6–2. $I = \left[\frac{1}{12}(0.2\text{ m})(0.4\text{ m})^3\right] - \left[\frac{1}{12}(0.1\text{ m})(0.2\text{ m})^3\right]$

$= 1.0\,(10^{-3})\text{ m}^4$

P6–3.

$$\bar{y} = \frac{\Sigma \tilde{y} A}{\Sigma A} = \frac{(0.05\text{ m})(0.2\text{ m})(0.1\text{ m}) + (0.25\text{ m})(0.1\text{ m})(0.3\text{ m})}{(0.2\text{ m})(0.1\text{ m}) + (0.1\text{ m})(0.3\text{ m})}$$

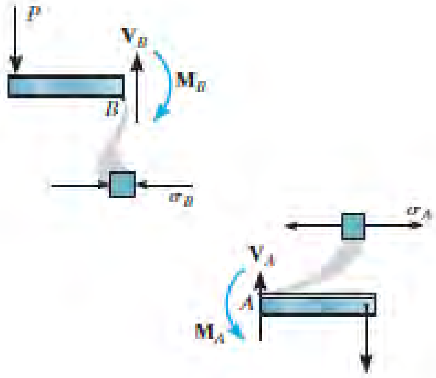
$$= 0.17\text{ m}$$

$$I = \left[\frac{1}{12}(0.2\text{ m})(0.1\text{ m})^3 + (0.2\text{ m})(0.1\text{ m})(0.17\text{ m} - 0.05\text{ m})^2\right]$$

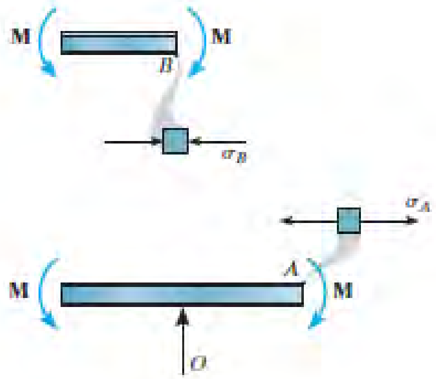
$$+ \left[\frac{1}{12}(0.1\text{ m})(0.3\text{ m})^3 + (0.1\text{ m})(0.3\text{ m})(0.25\text{ m} - 0.17\text{ m})^2\right]$$

$$= 0.722\,(10^{-3})\text{ m}^4$$

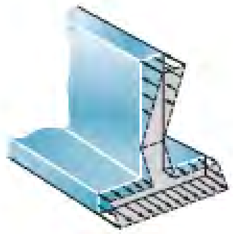
P6–4a.



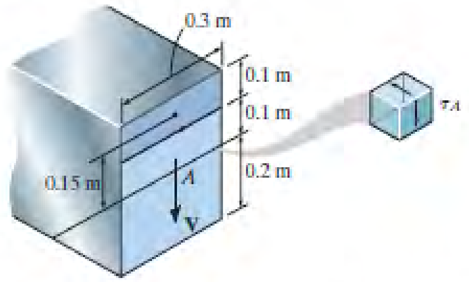
P6–4b.



P6–5a.



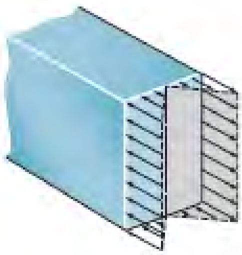
P7–1b.



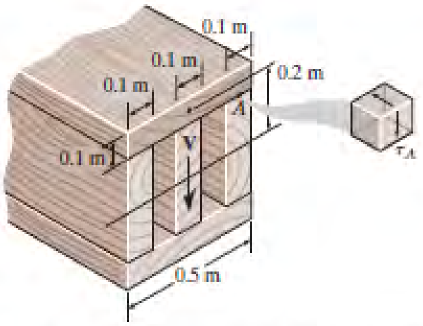
$Q = \bar{y}'A' = (0.15 \text{ m})(0.3 \text{ m})(0.1 \text{ m}) = 4.5(10^{-3}) \text{ m}^3$

$t = 0.3 \text{ m}$

P6–5b.



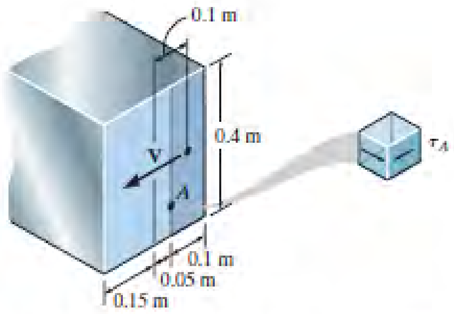
P7–1c.



$Q = \bar{y}'A' = (0.2 \text{ m})(0.1 \text{ m})(0.5 \text{ m}) = 0.01 \text{ m}^3$

$t = 3\,(0.1 \text{ m}) = 0.3 \text{ m}$

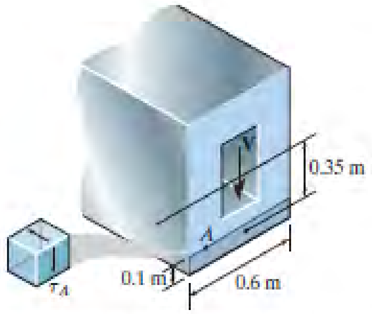
P7–1a.



$Q = \bar{y}'A' = (0.1 \text{ m})(0.1 \text{ m})(0.4 \text{ m}) = 4(10^{-3}) \text{ m}^3$

$t = 0.4 \text{ m}$

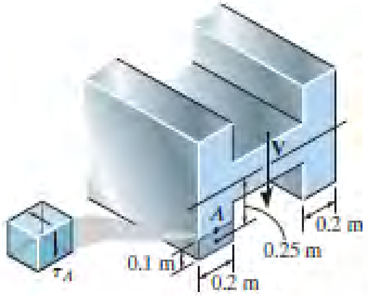
P7–1d.



$Q = \bar{y}'A' = (0.35 \text{ m})(0.6 \text{ m})(0.1 \text{ m}) = 0.021 \text{ m}^3$

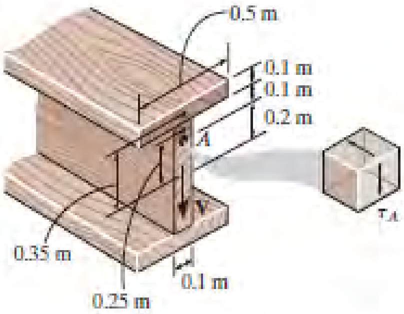
$t = 0.6 \text{ m}$

P7–1e.



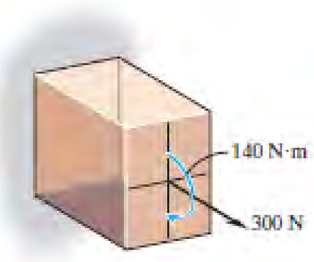
$$Q = \bar{y}'A' = (0.25 \text{ m})(0.2 \text{ m})(0.1 \text{ m}) = 5(10^{-3}) \text{ m}^3$$
$$t = 0.2 \text{ m}$$

P7–1f.

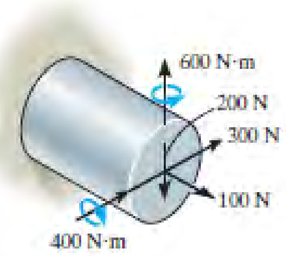


$$Q = \Sigma\bar{y}'A' = (0.25 \text{ m})(0.1 \text{ m})(0.1 \text{ m}) + (0.35 \text{ m})(0.1 \text{ m})(0.5 \text{ m}) = 0.02 \text{ m}^3$$
$$t = 0.1 \text{ m}$$

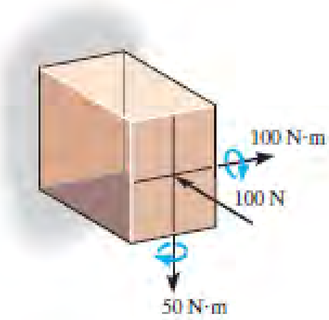
P8–1a.



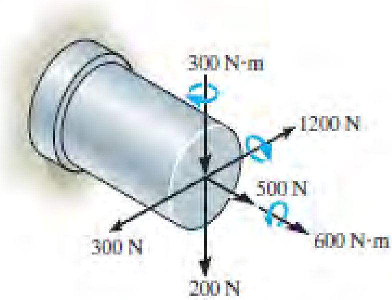
P8–1b.



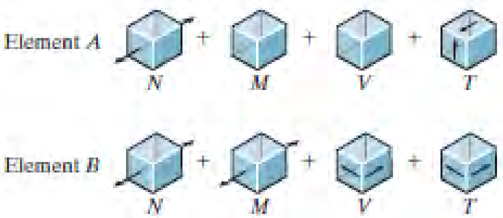
P8–1c.



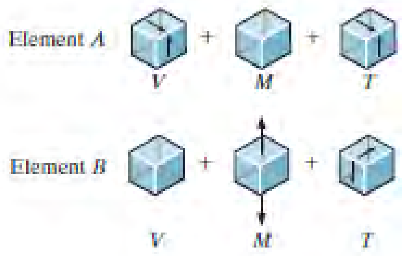
P8–1d.



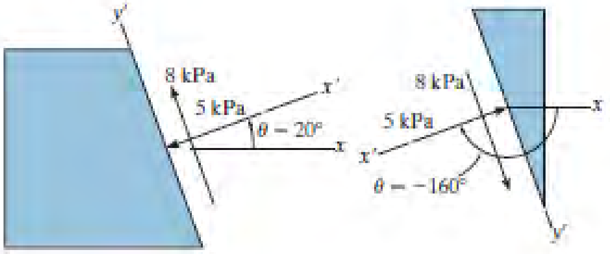
P8–2a.



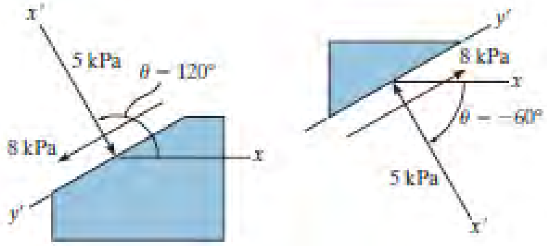
P8–2b.



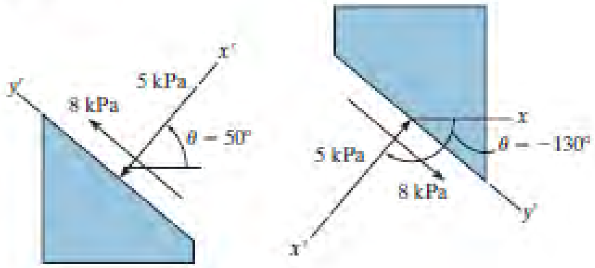
P9–1.



P9–1b.



P9–1c.



P9–2.

$$\tau_{\max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^{\,2}} = \sqrt{\left(\frac{4-(-4)}{2}\right)^2 + (0)^2}$$

$$= 4\text{ MPa}$$

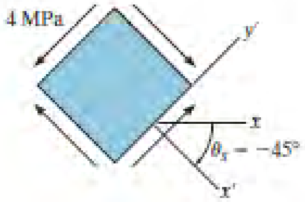
$$\sigma_{\text{avg}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{4-4}{2} = 0$$

$$\tan 2\theta_s = -\frac{(\sigma_x - \sigma_y)/2}{\tau_{xy}} = \frac{[4-(-4)]/2}{0} = -\infty$$

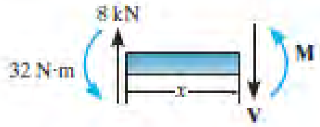
$$\theta_s = -45^\circ$$

$$\tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\sin 2\theta + \tau_{xy}\cos 2\theta$$

$$= -\frac{4-(-4)}{2}\sin 2(-45^\circ) + 0 = 4\text{ MPa}$$



P12–1a.

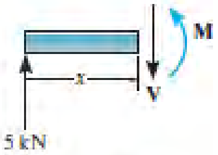


$$M = (8x - 32)\text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$x = 0,\quad \frac{dy}{dx} = 0$$

$$x = 0,\quad y = 0$$

P12–1b.

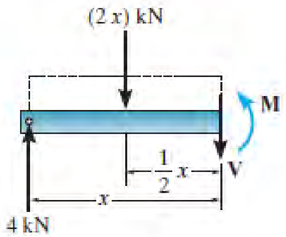


$$M = (5x)\text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$x = 0,\quad y = 0$$

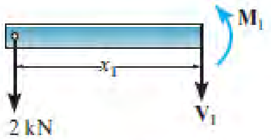
$$x = 2\text{ m},\quad y = 0$$

P12–1c.

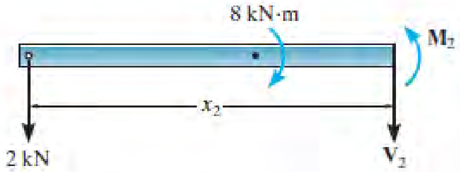


$$M = 4x - (2x)\left(\tfrac{1}{2}x\right)$$
$$M = (4x - x^2)\ \text{kN}\cdot\text{m}$$
$$x = 0, \quad y = 0$$
$$x = 4\ \text{m}, y = 0$$

P12–1d.

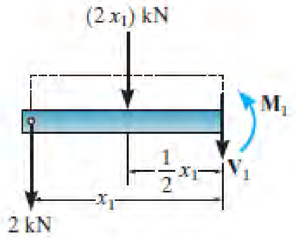


$$M_1 = (-2x_1)\ \text{kN}\cdot\text{m}$$

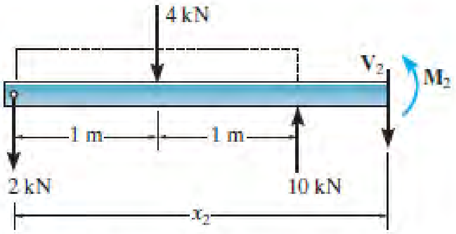


$$M_2 = (-2x + 8)\ \text{kN}\cdot\text{m}$$
$$x_1 = 0, \quad y_1 = 0$$
$$x_2 = 4\ \text{m}, \ y_2 = 0$$
$$x_1 = x_2 = 2\ \text{m}, \quad \frac{dy_1}{dx_1} = \frac{dy_2}{dx_2}$$
$$x_1 = x_2 = 2\ \text{m}, \quad y_1 = y_2$$

P12–1e.



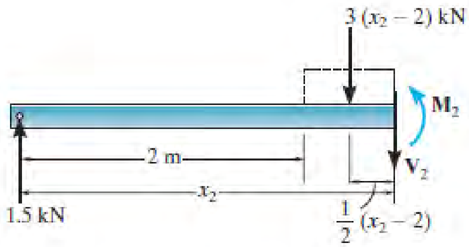
$$M_1 = -2x_1 - (2x_1)\left(\tfrac{1}{2}x_1\right)$$
$$M_1 = (-2x_1 - x_1^2)\ \text{kN}\cdot\text{m}$$



$$M_2 = 10(x_2 - 2) - 4(x_2 - 1) - 2x_2$$
$$M_2 = (4x_2 - 16)\ \text{kN}\cdot\text{m}$$
$$x_1 = 0, \quad y_1 = 0$$
$$x_1 = 2\ \text{m}, \ y_1 = 0$$
$$x_2 = 2\ \text{m}, \ y_2 = 0$$
$$x_1 = x_2 = 2\ \text{m}, \quad \frac{dy_1}{dx_1} = \frac{dy_2}{dx_2}$$

P12–1f.

$$M_1 = (1.5x_1)\ \text{kN}\cdot\text{m}$$



$$M_2 = 1.5x_2 - 3(x_2 - 2)\left(\frac{1}{2}\right)(x_2 - 2)$$
$$M_2 = -1.5x_2^2 + 7.5x_2 - 6$$
$$x_1 = 0, \ y_1 = 0$$
$$x_2 = 4\ \text{m}, \ y_2 = 0$$
$$x_1 = x_2 = 2\ \text{m}, \quad \frac{dy_1}{dx_1} = \frac{dy_2}{dx_2}$$
$$x_1 = x_2 = 2\ \text{m}, \quad y_1 = y_2$$

بنسټيز پوښتنو ځوابونه

ضميمه (APPENDIX)	د بنسټيزي پوښتنو ځوابونه (Fundamental Problems Partial Solutions and Answers)

په دی برخه کی د پوښتنو اول ټکی د پښتو او انګلیسی په دی لاندی ډول بدل شوي دي . حرف د F بدل کړي په ب

د بیلګی په توګه

ب 1-1 = F 1-1

Fundamental Problems Partial Solutions and Answers

Chapter 1

F1–1 Entire beam:

$\circlearrowleft +\Sigma M_B = 0;$ $60 - 10(2) - A_y(2) = 0$ $A_y = 20 \text{ kN}$

Left segment:

$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0;$ $N_C = 0$ *Ans.*

$+\uparrow \Sigma F_y = 0;$ $20 - V_C = 0$ $V_C = 20 \text{ kN}$ *Ans.*

$\circlearrowleft +\Sigma M_C = 0;$ $M_C + 60 - 20(1) = 0$ $M_C = -40 \text{ kN} \cdot \text{m}$ *Ans.*

F1–2 Entire beam:

$\circlearrowleft +\Sigma M_A = 0;$ $B_y(3) - 100(1.5)(0.75) - 200(1.5)(2.25) = 0$

$B_y = 262.5 \text{ N}$

Right segment:

$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0;$ $N_C = 0$ *Ans.*

$+\uparrow \Sigma F_y = 0;$ $V_C + 262.5 - 200(1.5) = 0$ $V_C = 37.5 \text{ N}$ *Ans.*

$\circlearrowleft +\Sigma M_C = 0;$ $262.5(1.5) - 200(1.5)(0.75) - M_C = 0$ $M_C = 169 \text{ N} \cdot \text{m}$ *Ans.*

F1–3 Entire beam:

$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0;$ $B_x = 0$

$\circlearrowleft +\Sigma M_A = 0;$ $20(2)(1) - B_y(4) = 0$ $B_y = 10 \text{ kN}$

Right segment:

$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0;$ $N_C = 0$ *Ans.*

$+\uparrow \Sigma F_y = 0;$ $V_C - 10 = 0$ $V_C = 10 \text{ kN}$ *Ans.*

$\circlearrowleft +\Sigma M_C = 0;$ $-M_C - 10(2) = 0$ $M_C = -20 \text{ kN} \cdot \text{m}$ *Ans.*

F1–4 Entire beam:

$\circlearrowleft +\Sigma M_B = 0;$ $\frac{1}{2}(10)(3)(2) + 10(3)(4.5) - A_y(6) = 0$ $A_y = 27.5 \text{ kN}$

Left segment:

$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0;$ $N_C = 0$ *Ans.*

$+\uparrow \Sigma F_y = 0;$ $27.5 - 10(3) - V_C = 0$ $V_C = -2.5 \text{ kN}$ *Ans.*

$\circlearrowleft +\Sigma M_C = 0;$ $M_C + 10(3)(1.5) - 27.5(3) = 0$ $M_C = 37.5 \text{ kN} \cdot \text{m}$ *Ans.*

F1–5 Entire beam:

$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0;$ $A_x = 0$

$\circlearrowleft +\Sigma M_B = 0;$ $300(6)(3) - \frac{1}{2}(300)(3)(1) - A_y(6) = 0$ $A_y = 825 \text{ lb}$

Left segment:

$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0;$ $N_C = 0$ *Ans.*

$+\uparrow \Sigma F_y = 0;$ $825 - 300(3) - V_C = 0$ $V_C = -75 \text{ lb}$ *Ans.*

$\circlearrowleft +\Sigma M_C = 0;$ $M_C + 300(3)(1.5) - 825(3) = 0$ $M_C = 1125 \text{ lb} \cdot \text{ft}$ *Ans.*

F1–6 Entire beam:

$\zeta + \Sigma M_A = 0;\quad F_{BD}\left(\frac{3}{5}\right)(4) - 5(6)(3) = 0 \quad F_{BD} = 37.5\text{ kN}$

$\stackrel{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0;\quad 37.5\left(\frac{4}{5}\right) - A_x = 0 \quad A_x = 30\text{ kN}$

$+\uparrow \Sigma F_y = 0;\quad A_y + 37.5\left(\frac{3}{5}\right) - 5(6) = 0 \quad A_y = 7.5\text{ kN}$

Left segment:

$\stackrel{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0;\quad N_C - 30 = 0 \quad N_C = 30\text{ kN}$ *Ans.*

$+\uparrow \Sigma F_y = 0;\quad 7.5 - 5(2) - V_C = 0 \quad V_C = -2.5\text{ kN}$ *Ans.*

$\zeta + \Sigma M_C = 0;\quad M_C + 5(2)(1) - 7.5(2) = 0 \quad M_C = 5\text{ kN}\cdot\text{m}$ *Ans.*

F1–7 Beam:

$\Sigma M_A = 0;\ T_{CD} = 2w$

$\Sigma F_y = 0;\ T_{AB} = w$

Rod AB:

$\sigma = \frac{N}{A};\ 300(10^3) = \frac{w}{10};$

$w = 3\text{ N/m}$

Rod CD:

$\sigma = \frac{N}{A};\ 300(10^3) = \frac{2w}{15};$

$w = 2.25\text{ N/m}$ *Ans.*

F1–8 $A = \pi(0.1^2 - 0.08^2) = 3.6(10^{-3})\pi\text{ m}^2$

$\sigma_{avg} = \frac{N}{A} = \frac{300(10^3)}{3.6(10^{-3})\pi} = 26.5\text{ MPa}$ *Ans.*

F1–9 $A = 3[4(1)] = 12\text{ in}^2$

$\sigma_{avg} = \frac{N}{A} = \frac{15}{12} = 1.25\text{ ksi}$ *Ans.*

F1–10 Consider the cross section to be a rectangle and two triangles.

$$\bar{y} = \frac{\Sigma\,\tilde{y}A}{\Sigma A} = \frac{0.15[(0.3)(0.12)] + (0.1)\left[\frac{1}{2}(0.16)(0.3)\right]}{0.3(0.12) + \frac{1}{2}(0.16)(0.3)}$$

$= 0.13\text{ m} = 130\text{ mm}$ *Ans.*

$\sigma_{avg} = \frac{N}{A} = \frac{600(10^3)}{0.06} = 10\text{ MPa}$ *Ans.*

F1–11

$A_A = A_C = \frac{\pi}{4}(0.5^2) = 0.0625\pi\text{ in}^2,\ A_B = \frac{\pi}{4}(1^2) = 0.25\pi\text{ in}^2$

$\sigma_A = \frac{N_A}{A_A} = \frac{3}{0.0625\pi} = 15.3\text{ ksi (T)}$ *Ans.*

$\sigma_B = \frac{N_B}{A_B} = \frac{-6}{0.25\pi} = -7.64\text{ ksi} = 7.64\text{ ksi (C)}$ *Ans.*

$\sigma_C = \frac{N_C}{A_C} = \frac{2}{0.0625\pi} = 10.2\text{ ksi (T)}$ *Ans.*

F1–12 Pin at A:

$F_{AD} = 50(9.81)\text{ N} = 490.5\text{ N}$

$+\uparrow \Sigma F_y = 0;\quad F_{AC}\left(\frac{3}{5}\right) - 490.5 = 0 \quad F_{AC} = 817.5\text{ N}$

$\stackrel{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0;\quad 817.5\left(\frac{4}{5}\right) - F_{AB} = 0 \quad F_{AB} = 654\text{ N}$

$A_{AB} = \frac{\pi}{4}(0.008^2) = 16(10^{-6})\pi\text{ m}^2$

$(\sigma_{AB})_{avg} = \frac{F_{AB}}{A_{AB}} = \frac{654}{16(10^{-6})\pi} = 13.0\text{ MPa}$ *Ans.*

F1–13 Ring C:

$+\uparrow \Sigma F_y = 0;\quad 2F\cos 60^\circ - 200(9.81) = 0 \quad F = 1962\text{ N}$

$(\sigma_{allow})_{avg} = \frac{F}{A};\quad 150(10^6) = \frac{1962}{\frac{\pi}{4}d^2}$

$d = 0.00408\text{ m} = 4.08\text{ mm}$

Use $d = 5$ mm. *Ans.*

F1–14 Entire frame:

$\Sigma F_y = 0; A_y = 600$ lb

$\Sigma M_B = 0; A_x = 800$ lb

$F_A = \sqrt{(600)^2 + (800)^2} = 1000$ lb

$(\tau_A)_{avg} = \dfrac{F_A/2}{A} = \dfrac{1000/2}{\frac{\pi}{4}(0.25)^2} = 10.2$ ksi *Ans.*

F1–15 Center plate, bolts have double shear:

$\Sigma F_x = 0; \quad 4V - 10 = 0 \quad V = 2.5$ kip

$A = \dfrac{\pi}{4}\left(\dfrac{3}{4}\right)^2 = 0.140625\pi$ in^2

$\tau_{avg} = \dfrac{V}{A} = \dfrac{2.5}{0.140625\pi} = 5.66$ ksi *Ans.*

F1–16 Nails have single shear:

$\Sigma F_x = 0; \quad P - 3V = 0 \quad V = \dfrac{P}{3}$

$A = \dfrac{\pi}{4}(0.004^2) = 4(10^{-6})\pi$ m^2

$(\tau_{avg})_{allow} = \dfrac{V}{A}; \quad 60(10^6) = \dfrac{\frac{P}{3}}{4(10^{-6})\pi}$

$P = 2.262(10^3)$ N $= 2.26$ kN *Ans.*

F1–17 Strut:

$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0; \quad V - P\cos 60° = 0 \quad V = 0.5P$

$A = \left(\dfrac{0.05}{\sin 60°}\right)(0.025) = 1.4434(10^{-3})$ m^2

$(\tau_{avg})_{allow} = \dfrac{V}{A}; \quad 600(10^3) = \dfrac{0.5P}{1.4434(10^{-3})}$

$P = 1.732(10^3)$ N $= 1.73$ kN *Ans.*

F1–18 The resultant force on the pin is

$F = \sqrt{30^2 + 40^2} = 50$ kN.

We have double shear:

$V = \dfrac{F}{2} = \dfrac{50}{2} = 25$ kN

$A = \dfrac{\pi}{4}(0.03^2) = 0.225(10^{-3})\pi$ m^2

$\tau_{avg} = \dfrac{V}{A} = \dfrac{25(10^3)}{0.225(10^{-3})\pi} = 35.4$ MPa *Ans.*

F1–19 Eyebolt:

$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0; \quad 30 - N = 0 \quad N = 30$ kN

$\sigma_{allow} = \dfrac{\sigma_Y}{F.S.} = \dfrac{250}{1.5} = 166.67$ MPa

$\sigma_{allow} = \dfrac{N}{A}; \quad 166.67(10^6) = \dfrac{30(10^3)}{\frac{\pi}{4}d^2}$

$d = 15.14$ mm

Use $d = 16$ mm. *Ans.*

F1–20 Right segment through AB:

$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0; \quad N_{AB} - 30 = 0 \quad N_{AB} = 30$ kip

Right segment through CB:

$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0; \quad N_{BC} - 15 - 15 - 30 = 0 \quad N_{BC} = 60$ kip

$\sigma_{allow} = \dfrac{\sigma_Y}{F.S.} = \dfrac{50}{1.5} = 33.33$ ksi

Segment AB:

$\sigma_{allow} = \dfrac{N_{AB}}{A_{AB}}; \quad 33.33 = \dfrac{30}{h_1(0.5)}$

$h_1 = 1.8$ in.

Segment BC:

$\sigma_{allow} = \dfrac{N_{BC}}{A_{BC}}; \quad 33.33 = \dfrac{60}{h_2(0.5)}$

$h_2 = 3.6$ in.

Use $h_1 = 1\frac{7}{8}$ in. and $h_2 = 3\frac{5}{8}$ in. *Ans.*

F1–21 $N = P$

$\sigma_{allow} = \dfrac{\sigma_Y}{F.S.} = \dfrac{250}{2} = 125$ MPa

$A_r = \dfrac{\pi}{4}(0.04^2) = 1.2566(10^{-3})$ m^2

$A_{a-a} = 2(0.06 - 0.03)(0.05) = 3(10^{-3})$ m^2

The rod will fail first.

$\sigma_{allow} = \dfrac{N}{A_r}; \quad 125(10^6) = \dfrac{P}{1.2566(10^{-3})}$

$P = 157.08(10^3)$ N $= 157$ kN *Ans.*

F1–22 Pin has double shear:

$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0; \quad 80 - 2V = 0 \quad V = 40$ kN

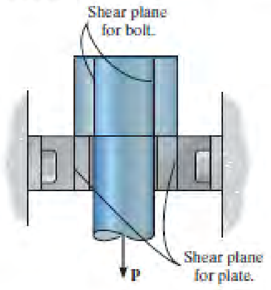
$\tau_{allow} = \dfrac{\tau_{fail}}{F.S.} = \dfrac{100}{2.5} = 40$ MPa

$\tau_{allow} = \dfrac{V}{A}; \quad 40(10^6) = \dfrac{40(10^3)}{\frac{\pi}{4}d^2}$

$d = 0.03568$ m $= 35.68$ mm

Use $d = 36$ mm. *Ans.*

F1–23



$V = P$

$$\tau_{allow} = \frac{\tau_{fail}}{F.S.} = \frac{120}{2.5} = 48 \text{ MPa}$$

Area of shear plane for bolt head and plate:

$A_b = \pi dt = \pi(0.04)(0.075) = 0.003\pi \text{ m}^2$

$A_p = \pi dt = \pi(0.08)(0.03) = 0.0024\pi \text{ m}^2$

Since the area of shear plane for the plate is smaller,

$$\tau_{allow} = \frac{V}{A_p}; \qquad 48(10^6) = \frac{P}{0.0024\pi}$$

$P = 361.91(10^3) \text{ N} = 362 \text{ kN}$ *Ans.*

F1–24 Support reaction at A:

$$\circlearrowleft + \Sigma M_B = 0; \quad \frac{1}{2}(300)(9)(6) - A_y(9) = 0 \quad A_y = 900 \text{ lb}$$

Each nail has single shear:

$V = 900 \text{ lb}/6 = 150 \text{ lb}$

$$\tau_{allow} = \frac{\tau_{fail}}{F.S.} = \frac{16}{2} = 8 \text{ ksi}$$

$$\tau_{allow} = \frac{V}{A}; \qquad 8(10^3) = \frac{150}{\frac{\pi}{4}d^2}$$

$d = 0.1545$ in.

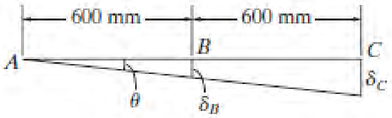
829Use $d = \frac{3}{16}$ in. *Ans.*

Chapter 2

F2–1 $\frac{\delta_C}{600} = \frac{0.2}{400}; \qquad \delta_C = 0.3 \text{ mm}$

$$\epsilon_{CD} = \frac{\delta_C}{L_{CD}} = \frac{0.3}{300} = 0.001 \text{ mm/mm}$$ *Ans.*

F2–2



$$\theta = \left(\frac{0.02°}{180°}\right)\pi \text{ rad} = 0.3491(10^{-3}) \text{ rad}$$

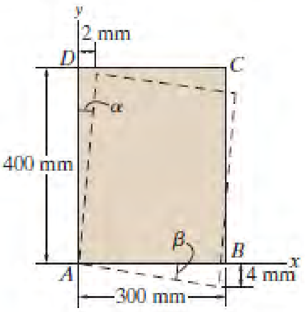
$\delta_B = \theta L_{AB} = 0.3491(10^{-3})(600) = 0.2094 \text{ mm}$

$\delta_C = \theta L_{AC} = 0.3491(10^{-3})(1200) = 0.4189 \text{ mm}$

$$\epsilon_{BD} = \frac{\delta_B}{L_{BD}} = \frac{0.2094}{400} = 0.524(10^{-3}) \text{ mm/mm}$$ *Ans.*

$$\epsilon_{CE} = \frac{\delta_C}{L_{CE}} = \frac{0.4189}{600} = 0.698(10^{-3}) \text{ mm/mm}$$ *Ans.*

F2–3



$$\alpha = \frac{2}{400} = 0.005 \text{ rad} \qquad \beta = \frac{4}{300} = 0.01333 \text{ rad}$$

$$(\gamma_A)_{xy} = \frac{\pi}{2} - \theta$$

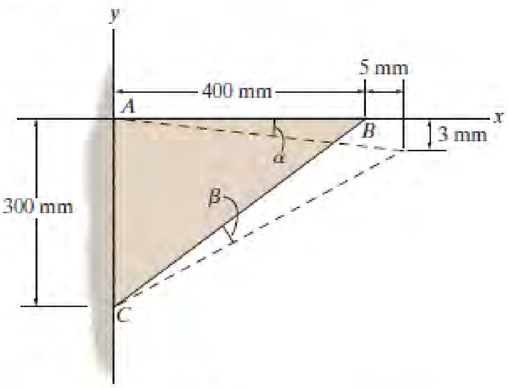
$$= \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha + \beta\right)$$

$= \alpha - \beta$

$= 0.005 - 0.01333$

$= -0.00833$ rad *Ans.*

F2–4



$L_{BC} = \sqrt{300^2 + 400^2} = 500 \text{ mm}$

$L_{B'C} = \sqrt{(300 - 3)^2 + (400 + 5)^2} = 502.2290 \text{ mm}$

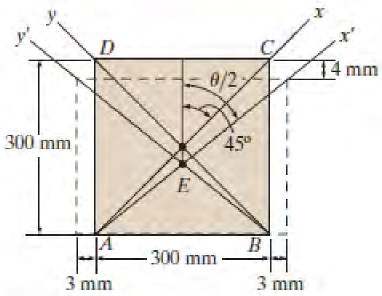
$$\alpha = \frac{3}{405} = 0.007407 \text{ rad}$$

$$(\epsilon_{BC})_{avg} = \frac{L_{B'C} - L_{BC}}{L_{BC}} = \frac{502.2290 - 500}{500}$$

$= 0.00446 \text{ mm/mm}$ *Ans.*

$$(\gamma_A)_{xy} = \frac{\pi}{2} - \theta = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\alpha = -0.00741 \text{ rad}$$ *Ans.*

F2–5



$$L_{AC} = \sqrt{L_{CD}^2 + L_{AD}^2} = \sqrt{300^2 + 300^2} = 424.2641 \text{ mm}$$

$$L_{A'C'} = \sqrt{L_{C'D'}^2 + L_{A'D'}^2} = \sqrt{306^2 + 296^2} = 425.7370 \text{ mm}$$

$$\frac{\theta}{2} = \tan^{-1}\left(\frac{L_{C'D'}}{L_{A'D'}}\right); \theta = 2\tan^{-1}\left(\frac{306}{296}\right) = 1.6040 \text{ rad}$$

$$(\epsilon_{AC})_{avg} = \frac{L_{A'C'} - L_{AC}}{L_{AC}} = \frac{425.7370 - 424.2641}{424.2641}$$

$$= 0.00347 \text{ mm/mm} \qquad \textit{Ans.}$$

$$(\gamma_E)_{xy} = \frac{\pi}{2} - \theta = \frac{\pi}{2} - 1.6040 = -0.0332 \text{ rad} \qquad \textit{Ans.}$$

Chapter 3

F3–1 Material has uniform properties throughout. *Ans.*

F3–2 Proportional limit is A. *Ans.*

Ultimate stress is D. *Ans.*

F3–3 The initial slope of the $\sigma - \epsilon$ diagram. *Ans.*

F3–4 True. *Ans.*

F3–5 False. Use the *original* cross-sectional area and length. *Ans.*

F3–6 False. It will normally decrease. *Ans.*

F3–7

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{N}{AE}$$

$$\delta = \epsilon L = \frac{NL}{AE} = \frac{100(10^3)(0.100)}{\frac{\pi}{4}(0.015)^2\, 200(10^9)}$$

$$= 0.283 \text{ mm} \qquad \textit{Ans.}$$

F3–8

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{N}{AE}$$

$$\delta = \epsilon L = \frac{NL}{AE}$$

$$0.003 = \frac{(10\,000)(8)}{12E}$$

$$E = 2.22(10^6) \text{ psi} \qquad \textit{Ans.}$$

F3–9

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{N}{AE}$$

$$\delta = \epsilon L = \frac{NL}{AE} = \frac{6(10^3)4}{\frac{\pi}{4}(0.01)^2 100(10^9)}$$

$$= 3.06 \text{ mm} \qquad \textit{Ans.}$$

F3–10

$$\sigma = \frac{N}{A} = \frac{100(10^3)}{\frac{\pi}{4}(0.02)^2} = 318.31 \text{ MPa}$$

Since $\sigma < \sigma_Y = 450$ MPa, Hooke's Law is applicable.

$$E = \frac{\sigma_Y}{\epsilon_Y} = \frac{450(10^6)}{0.00225} = 200 \text{ GPa}$$

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{318.31(10^6)}{200(10^9)} = 0.001592 \text{ mm/mm}$$

$$\delta = \epsilon L = 0.001592(50) = 0.0796 \text{ mm} \qquad \textit{Ans.}$$

F3–11

$$\sigma = \frac{N}{A} = \frac{150(10^3)}{\frac{\pi}{4}(0.02^2)} = 477.46 \text{ MPa}$$

Since $\sigma > \sigma_Y = 450$ MPa, Hooke's Law is not applicable. From the geometry of the shaded triangle,

$$\frac{\epsilon - 0.00225}{0.03 - 0.00225} = \frac{477.46 - 450}{500 - 450}$$

$$\epsilon = 0.017493$$

When the load is removed, the strain recovers along a line AB which is parallel to the original elastic line.

Here $E = \dfrac{\sigma_Y}{\epsilon_Y} = \dfrac{450(10^6)}{0.00225} = 200$ GPa.

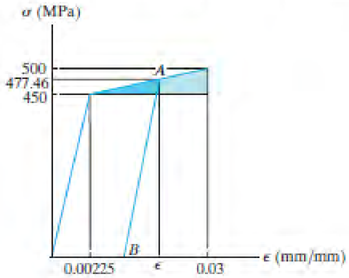
The elastic recovery is

$$\epsilon_r = \frac{\sigma}{E} = \frac{477.46(10^6)}{200(10^9)} = 0.002387 \text{ mm/mm}$$

$$\epsilon_p = \epsilon - \epsilon_r = 0.017493 - 0.002387$$

$$= 0.01511 \text{ mm/mm}$$

$$\delta_p = \epsilon_p L = 0.01511(50) = 0.755 \text{ mm} \qquad \textit{Ans.}$$



F3–12 $\epsilon_{BC} = \dfrac{\delta_{BC}}{L_{BC}} = \dfrac{0.2}{300} = 0.6667(10^{-3})\text{ mm/mm}$

$$\sigma_{BC} = E\epsilon_{BC} = 200(10^9)[0.6667(10^{-3})] = 133.33\text{ MPa}$$

Since $\sigma_{BC} < \sigma_Y = 250$ MPa, Hooke's Law is valid.

$$\sigma_{BC} = \frac{F_{BC}}{A_{BC}};\qquad 133.33(10^6) = \frac{F_{BC}}{\frac{\pi}{4}(0.003^2)}$$

$$F_{BC} = 942.48\text{ N}$$

$$\zeta + \Sigma M_A = 0;\qquad 942.48(0.4) - P(0.6) = 0$$

$$P = 628.31\text{ N} = 628\text{ N}\qquad \textit{Ans.}$$

F3–13 $\sigma = \dfrac{N}{A} = \dfrac{10(10^3)}{\frac{\pi}{4}(0.015)^2} = 56.59\text{ MPa}$

$$\epsilon_{\text{long}} = \frac{\sigma}{E} = \frac{56.59(10^6)}{70(10^9)} = 0.808(10^{-3})$$

$$\epsilon_{\text{lat}} = -\nu\epsilon_{\text{long}} = -0.35(0.808(10^{-3})) = -0.283(10^{-3})$$

$$\delta d = (-0.283(10^{-3}))(15\text{ mm}) = -4.24(10^{-3})\text{ mm}\qquad \textit{Ans.}$$

F3–14 $\sigma = \dfrac{N}{A} = \dfrac{50(10^3)}{\frac{\pi}{4}(0.02^2)} = 159.15\text{ MPa}$

$$\epsilon_{\text{long}} = \frac{\delta}{L} = \frac{1.40}{600} = 0.002333\text{ mm/mm}$$

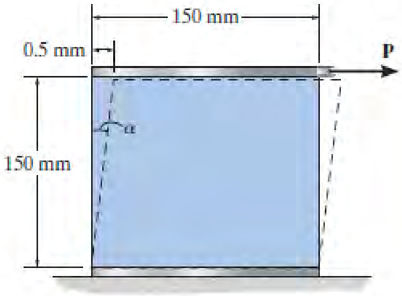
$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_{\text{long}}} = \frac{159.15(10^6)}{0.002333} = 68.2\text{ GPa}\qquad \textit{Ans.}$$

$$\epsilon_{\text{lat}} = \frac{d' - d}{d} = \frac{19.9837 - 20}{20} = -0.815(10^{-3})\text{ mm/mm}$$

$$\nu = -\frac{\epsilon_{\text{lat}}}{\epsilon_{\text{long}}} = -\frac{-0.815(10^{-3})}{0.002333} = 0.3493$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{68.21}{2(1+0.3493)} = 25.3\text{ GPa}\qquad \textit{Ans.}$$

F3–15



$$\alpha = \frac{0.5}{150} = 0.003333\text{ rad}$$

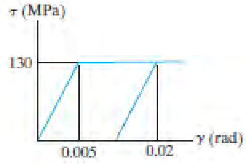
$$\gamma = \frac{\pi}{2} - \theta = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \alpha = 0.003333\text{ rad}$$

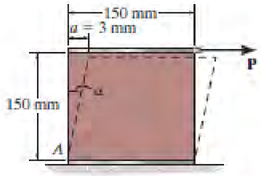
$$\tau = G\gamma = [26(10^9)](0.003333) = 86.67\text{ MPa}$$

$$\tau = \frac{V}{A};\ 86.67(10^6) = \frac{P}{0.15(0.02)}$$

$$P = 260\text{ kN}\qquad \textit{Ans.}$$

F3–16





$$\alpha = \frac{3}{150} = 0.02\text{ rad}$$

$$\gamma = \frac{\pi}{2} - \theta = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \alpha = 0.02\text{ rad}$$

When P is removed, the shear strain recovers along a line parallel to the original elastic line.

$$\gamma_r = \gamma_Y = 0.005\text{ rad}$$

$$\gamma_p = \gamma - \gamma_r = 0.02 - 0.005 = 0.015\text{ rad}\qquad \textit{Ans.}$$

Chapter 4

F4–1 $A = \dfrac{\pi}{4}(0.02^2) = 0.1(10^{-3})\pi\text{ m}^2$

$N_{BC} = 40$ kN, $N_{AB} = -60$ kN

$$\delta_C = \frac{1}{AE}\{40(10^3)(400) + [-60(10^3)(600)]\}$$

$$= \frac{-20(10^6)\text{ N}\cdot\text{mm}}{AE}$$

$$= -0.318\text{ mm}\qquad \textit{Ans.}$$

F4–2 $A_{AB} = A_{CD} = \frac{\pi}{4}(0.02^2) = 0.1(10^{-3})\pi \text{ m}^2$

$A_{BC} = \frac{\pi}{4}(0.04^2 - 0.03^2) = 0.175(10^{-3})\pi \text{ m}^2$

$N_{AB} = -10 \text{ kN}, N_{BC} = 10 \text{ kN}, N_{CD} = -20 \text{ kN}$

$$\delta_{D/A} = \frac{[-10(10^3)](400)}{[0.1(10^{-3})\pi][68.9(10^9)]} + \frac{[10(10^3)](400)}{[0.175(10^{-3})\pi][68.9(10^9)]} + \frac{[-20(10^3)](400)}{[0.1(10^{-3})\pi][68.9(10^9)]}$$

$= -0.449 \text{ mm}$ *Ans.*

F4–3 $A = \frac{\pi}{4}(0.03^2) = 0.225(10^{-3})\pi \text{ m}^2$

$N_{BC} = -90 \text{ kN}, N_{AB} = -90 + 2\left(\frac{4}{5}\right)(30) = -42 \text{ kN}$

$$\delta_C = \frac{1}{0.225(10^{-3})\pi[200(10^9)]}\{[-42(10^3)(0.4)] + [-90(10^3)(0.6)]\}$$

$= -0.501(10^{-3}) \text{ m} = -0.501 \text{ mm}$ *Ans.*

F4–4 $\delta_{A/B} = \frac{NL}{AE} = \frac{[60(10^3)](0.8)}{[0.1(10^{-3})\pi][200(10^9)]}$

$= 0.7639(10^{-3}) \text{m} \downarrow$

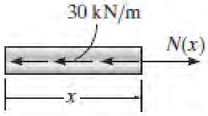
$\delta_B = \frac{F_{sp}}{k} = \frac{60(10^3)}{50(10^6)} = 1.2(10^{-3}) \text{m} \downarrow$

$+\downarrow \quad \delta_A = \delta_B + \delta_{A/B}$

$\delta_A = 1.2(10^{-3}) + 0.7639(10^{-3})$

$= 1.9639(10^{-3}) \text{ m} = 1.96 \text{ mm} \downarrow$ *Ans.*

F4–5



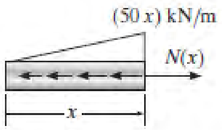
$A = \frac{\pi}{4}(0.02^2) = 0.1(10^{-3})\pi \text{ m}^2$

Internal load $N(x) = 30(10^3)x$

$$\delta_A = \int \frac{N(x)dx}{AE} = \frac{1}{[0.1(10^{-3})\pi][73.1(10^9)]}\int_0^{0.9 \text{ m}} 30(10^3)x \, dx$$

$= 0.529(10^{-3}) \text{ m} = 0.529 \text{ mm}$ *Ans.*

F4–6



Distributed load $N(x) = \frac{45(10^3)}{0.9}x = 50(10^3)x \text{ N/m}$

Internal load $N(x) = \frac{1}{2}(50(10^3))x(x) = 25(10^3)x^2$

$$\delta_A = \int_0^L \frac{N(x)dx}{AE} = \frac{1}{[0.1(10^{-3})\pi][73.1(10^9)]}\int_0^{0.9 \text{ m}} [25(10^3)x^2]dx$$

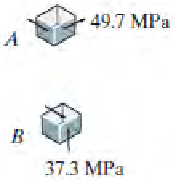
$= 0.265 \text{ mm}$ *Ans.*

Chapter 5

F5–1 $J = \frac{\pi}{2}(0.04^4) = 1.28(10^{-6})\pi \text{ m}^4$

$\tau_A = \tau_{max} = \frac{Tc}{J} = \frac{5(10^3)(0.04)}{1.28(10^{-6})\pi} = 49.7 \text{ MPa}$ *Ans.*

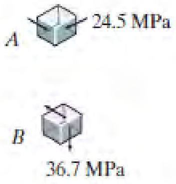
$\tau_B = \frac{T\rho_B}{J} = \frac{5(10^3)(0.03)}{1.28(10^{-6})\pi} = 37.3 \text{ MPa}$ *Ans.*



F5–2 $J = \frac{\pi}{2}(0.06^4 - 0.04^4) = 5.2(10^{-6})\pi \text{ m}^4$

$\tau_B = \tau_{max} = \frac{Tc}{J} = \frac{10(10^3)(0.06)}{5.2(10^{-6})\pi} = 36.7 \text{ MPa}$ *Ans.*

$\tau_A = \frac{T\rho_A}{J} = \frac{10(10^3)(0.04)}{5.2(10^{-6})\pi} = 24.5 \text{ MPa}$ *Ans.*



F5–3 $J_{AB} = \frac{\pi}{2}(0.04^4 - 0.03^4) = 0.875(10^{-6})\pi \text{ m}^4$

$J_{BC} = \frac{\pi}{2}(0.04^4) = 1.28(10^{-6})\pi \text{ m}^4$

$(\tau_{AB})_{max} = \frac{T_{AB}\,c_{AB}}{J_{AB}} = \frac{[2(10^3)](0.04)}{0.875(10^{-6})\pi} = 29.1 \text{ MPa}$

$(\tau_{BC})_{max} = \frac{T_{BC}\,c_{BC}}{J_{BC}} = \frac{[6(10^3)](0.04)}{1.28(10^{-6})\pi}$

$= 59.7 \text{ MPa}$ *Ans.*

F5–4 $T_{AB} = 0,\ T_{BC} = 600 \text{ N}\cdot\text{m},\ T_{CD} = 0$

$J = \frac{\pi}{2}(0.02^4) = 80(10^{-9})\pi \text{ m}^4$

$\tau_{max} = \frac{Tc}{J} = \frac{600(0.02)}{80(10^{-9})\pi} = 47.7 \text{ MPa}$ *Ans.*

F5–5 $J_{BC} = \frac{\pi}{2}(0.04^4 - 0.03^4) = 0.875(10^{-6})\pi \text{ m}^4$

$(\tau_{BC})_{max} = \frac{T_{BC}\,c_{BC}}{J_{BC}} = \frac{2100(0.04)}{0.875(10^{-6})\pi}$

$= 30.6 \text{ MPa}$ *Ans.*

F5–6 $t = 5(10^3) \text{ N}\cdot\text{m/m}$

Internal torque is $T = 5(10^3)(0.8) = 4000 \text{ N}\cdot\text{m}$

$J = \frac{\pi}{2}(0.04^4) = 1.28(10^{-6})\pi \text{ m}^4$

$\tau_{AB} = \frac{T_A c}{J} = \frac{4000(0.04)}{1.28(10^{-6})\pi} = 39.8 \text{ MPa}$ *Ans.*

F5–7 $T_{AB} = 250 \text{ N}\cdot\text{m},\ T_{BC} = 175 \text{ N}\cdot\text{m},$
$T_{CD} = -150 \text{ N}\cdot\text{m}$
Maximum internal torque is in region AB.
$T_{AB} = 250 \text{ N}\cdot\text{m}$

$\tau_{\substack{abs\\max}} = \frac{T_{AB}\,c}{J} = \frac{250(0.025)}{\frac{\pi}{2}(0.025)^4} = 10.2 \text{ MPa}$ *Ans.*

F5–8 $P = T\omega;\quad 3(550) \text{ ft}\cdot\text{lb/s} = T\left[150\left(\frac{2\pi}{60}\right)\text{rad/s}\right]$

$T = 105.04 \text{ ft}\cdot\text{lb}$

$\tau_{allow} = \frac{Tc}{J};\quad 12(10^3) = \frac{105.04(12)(d/2)}{\frac{\pi}{2}(d/2)^4}$

$d = 0.812 \text{ in.}$

Use $d = \frac{7}{8}$ in. *Ans.*

F5–9 $T_{AB} = -2 \text{ kN}\cdot\text{m},\ T_{BC} = 1 \text{ kN}\cdot\text{m}$

$J = \frac{\pi}{2}(0.03^4) = 0.405(10^{-6})\pi \text{ m}^4$

$\phi_{A/C} = \frac{-2(10^3)(0.6) + (10^3)(0.4)}{[0.405(10^{-6})\pi][75(10^9)]}$

$= -0.00838 \text{ rad} = -0.480°$ *Ans.*

F5–10 $T_{AB} = 600 \text{ N}\cdot\text{m}$

$J = \frac{\pi}{2}(0.02^4) = 80(10^{-9})\pi \text{ m}^4$

$\phi_{B/A} = \frac{600(0.45)}{[80(10^{-9})\pi][75(10^9)]}$

$= 0.01432 \text{ rad} = 0.821°$ *Ans.*

F5–11 $J = \frac{\pi}{2}(0.04^4 - 0.03^4) = 0.875(10^{-6})\pi \text{ m}^4$

$\phi_{A/B} = \frac{T_{AB}\,L_{AB}}{JG} = \frac{3(10^3)(0.9)}{[0.875(10^{-6})\pi][26(10^9)]}$

$= 0.03778 \text{ rad}$

$\phi_B = \frac{T_B}{k_B} = \frac{3(10^3)}{90(10^3)} = 0.03333 \text{ rad}$

$\phi_A = \phi_B + \phi_{A/B}$

$= 0.03333 + 0.03778$

$= 0.07111 \text{ rad} = 4.07°$ *Ans.*

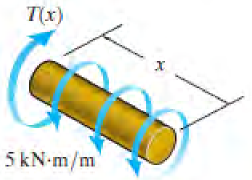
F5–12 $T_{AB} = 600 \text{ N}\cdot\text{m},\ T_{BC} = -300 \text{ N}\cdot\text{m},$
$T_{CD} = 200 \text{ N}\cdot\text{m},\ T_{DE} = 500 \text{ N}\cdot\text{m}$

$J = \frac{\pi}{2}(0.02^4) = 80(10^{-9})\pi \text{ m}^4$

$\phi_{E/A} = \frac{[600 + (-300) + 200 + 500]0.2}{[80(10^{-9})\pi][75(10^9)]}$

$= 0.01061 \text{ rad} = 0.608°$ *Ans.*

F5–13



$J = \frac{\pi}{2}(0.04^4) = 1.28(10^{-6})\pi \text{ m}^4$

$t = 5(10^3) \text{ N}\cdot\text{m/m}$

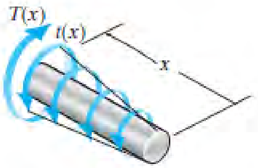
Internal torque is $5(10^3)x$ N · m

$$\phi_{A/B} = \int_0^L \frac{T(x)dx}{JG}$$

$$= \frac{1}{[1.28(10^{-6})\pi][75(10^9)]}\int_0^{0.8\text{ m}} 5(10^3)x dx$$

$$= 0.00531 \text{ rad} = 0.304° \qquad \textit{Ans.}$$

F5–14



$$J = \frac{\pi}{2}(0.04^4) = 1.28(10^{-6})\pi \text{ m}^4$$

Distributed torque is $t = \dfrac{15(10^3)}{0.6}(x)$

$= 25(10^3)x$ N · m/m

Internal torque in segment AB, $T(x) = \dfrac{1}{2}(25x)(10^3)(x)$

$= 12.5(10^3)x^2$ N · m

In segment BC,

$$T_{BC} = \frac{1}{2}[25(10^3)(0.6)](0.6) = 4500 \text{ N} \cdot \text{m}$$

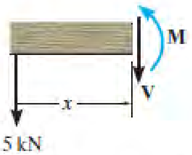
$$\phi_{A/C} = \int_0^L \frac{T(x)dx}{JG} + \frac{T_{BC}L_{BC}}{JG}$$

$$= \frac{1}{[1.28(10^{-6})\pi][75(10^9)]}\left[\int_0^{0.6\text{ m}} 12.5(10^3)x^2\,dx + 4500(0.4)\right]$$

$$= 0.008952 \text{ rad} = 0.513° \qquad \textit{Ans.}$$

Chapter 6

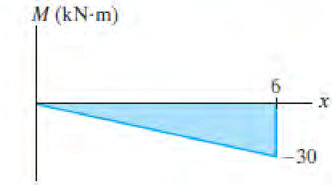
F6–1



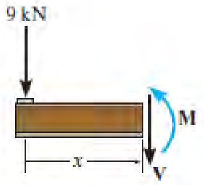
$\circlearrowleft +\Sigma M_B = 0;\quad A_y(6) - 30 = 0 \quad A_y = 5$ kN

$+\uparrow \Sigma F_y = 0;\quad -V - 5 = 0 \quad V = -5$ kN *Ans.*

$\circlearrowleft +\Sigma M_0 = 0;\quad M + 5x = 0 \quad M = \{-5x\}$ kN · m *Ans.*

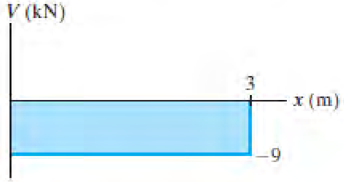


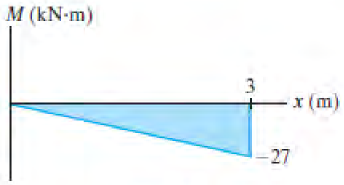
F6–2



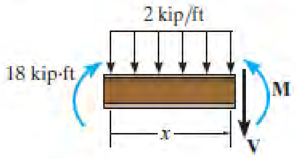
$+\uparrow \Sigma F_y = 0;\quad -V - 9 = 0 \quad V = -9$ kN *Ans.*

$\circlearrowleft +\Sigma M_O = 0;\quad M + 9x = 0 \quad M = \{-9x\}$ kN · m *Ans.*





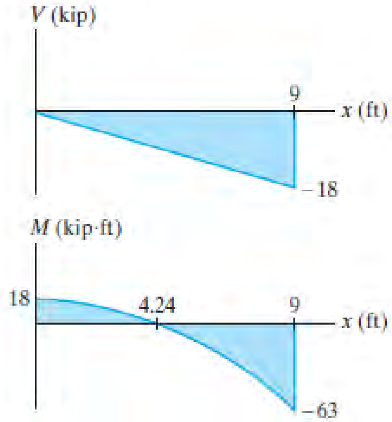
F6–3



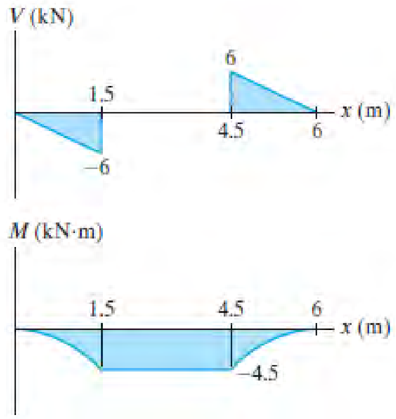
$+\uparrow \Sigma F_y = 0;\quad -V - 2x = 0 \quad V = \{-2x\}$ kip *Ans.*

$\circlearrowleft +\Sigma M_O = 0;\quad M + 2x\left(\dfrac{x}{2}\right) - 18 = 0$

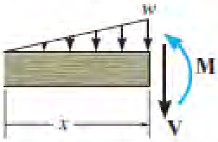
$M = \{18 - x^2\}$ kip · ft *Ans.*



F6–5



F6–4



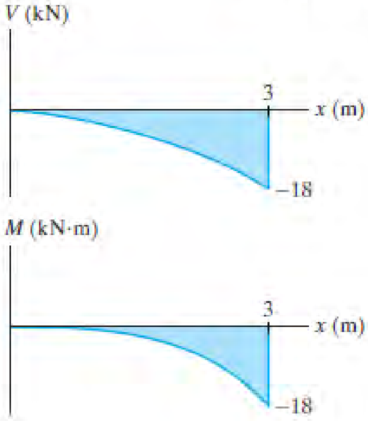
$$\frac{w}{x} = \frac{12}{3} \qquad w = 4x$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad -V - \frac{1}{2}(4x)(x) = 0$$

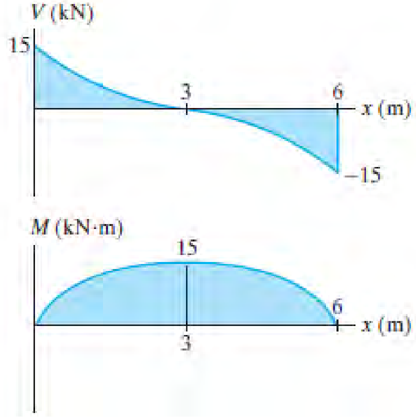
$$V = \{-2x^2\}\ \text{kN} \qquad \textit{Ans.}$$

$$\zeta + \Sigma M_O = 0; M + \left[\frac{1}{2}(4x)(x)\right]\left(\frac{x}{3}\right) = 0$$

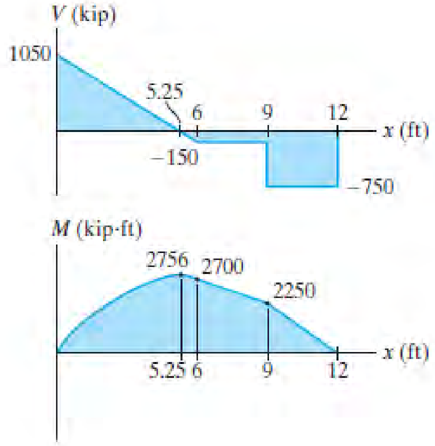
$$M = \left\{-\frac{2}{3}x^3\right\}\ \text{kN}\cdot\text{m} \qquad \textit{Ans.}$$



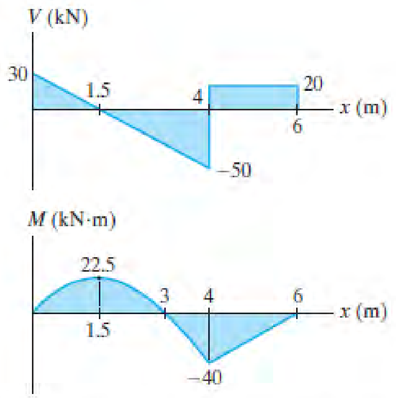
F6–6



F6–7



F6–8



F6–9 Consider two vertical rectangles and a horizontal rectangle.

$$I = 2\left[\frac{1}{12}(0.02)(0.2^3)\right] + \frac{1}{12}(0.26)(0.02^3)$$
$$= 26.84(10^{-6})\ \text{m}^4$$

$$\sigma_{\max} = \frac{Mc}{I} = \frac{20(10^3)(0.1)}{26.84(10^{-6})} = 74.5\ \text{MPa} \qquad \textit{Ans.}$$

F6–10 See inside front cover.

$$\bar{y} = \frac{0.3}{3} = 0.1\ \text{m}$$

$$I = \frac{1}{36}(0.3)(0.3^3) = 0.225(10^{-3})\ \text{m}^4$$

$$(\sigma_{\max})_c = \frac{Mc}{I} = \frac{50(10^3)(0.3 - 0.1)}{0.225(10^{-3})}$$
$$= 44.4\ \text{MPa (C)} \qquad \textit{Ans.}$$

$$(\sigma_{\max})_t = \frac{My}{I} = \frac{50(10^3)(0.1)}{0.225(10^{-3})} = 22.2\ \text{MPa (T)} \qquad \textit{Ans.}$$

F6–11 Consider large rectangle minus the two side rectangles.

$$I = \frac{1}{12}(0.2)(0.3^3) - (2)\frac{1}{12}(0.09)(0.26^3)$$
$$= 0.18636(10^{-3})\ \text{m}^4$$

$$\sigma_{\max} = \frac{Mc}{I} = \frac{50(10^3)(0.15)}{0.18636(10^{-3})} = 40.2\ \text{MPa} \qquad \textit{Ans.}$$

F6–12 Consider two vertical rectangles and two horizontal rectangles.

$$I = 2\left[\frac{1}{12}(0.03)(0.4^3)\right] + 2\left[\frac{1}{12}(0.14)(0.03^3) + 0.14(0.03)(0.15^2)\right]$$
$$= 0.50963(10^{-3})\ \text{m}^4$$

$$\sigma_{\max} = \frac{Mc}{I} = \frac{10(10^3)(0.2)}{0.50963(10^{-3})} = 3.92\ \text{MPa} \qquad \textit{Ans.}$$

$$\sigma_A = 3.92\ \text{MPa (C)}$$

$$\sigma_B = 3.92\ \text{MPa (T)}$$

F6–13 Consider center rectangle and two side rectangles.

$$I = \frac{1}{12}(0.05)(0.4)^3 + 2\left[\frac{1}{12}(0.025)(0.3)^3\right]$$
$$= 0.37917(10^{-3})\ \text{m}^4$$

$$\sigma_A = \frac{My_A}{I} = \frac{5(10^3)(-0.15)}{0.37917(10^{-3})} = 1.98\ \text{MPa (T)} \qquad \textit{Ans.}$$

F6–14 $M_y = 50\left(\frac{4}{5}\right) = 40\ \text{kN}\cdot\text{m}$

$$M_z = 50\left(\frac{3}{5}\right) = 30\ \text{kN}\cdot\text{m}$$

$$I_y = \frac{1}{12}(0.3)(0.2^3) = 0.2(10^{-3})\ \text{m}^4$$

$$I_z = \frac{1}{12}(0.2)(0.3^3) = 0.45(10^{-3})\ \text{m}^4$$

$$\sigma = -\frac{M_z y}{I_z} + \frac{M_y z}{I_y}$$

$$\sigma_A = -\frac{[30(10^3)](-0.15)}{0.45(10^{-3})} + \frac{[40(10^3)](0.1)}{0.2(10^{-3})}$$
$$= 30\ \text{MPa (T)} \qquad \textit{Ans.}$$

$$\sigma_B = -\frac{[30(10^3)](0.15)}{0.45(10^{-3})} + \frac{[40(10^3)](0.1)}{0.2(10^{-3})}$$
$$= 10\ \text{MPa (T)} \qquad \textit{Ans.}$$

$$\tan\alpha = \frac{I_z}{I_y}\tan\theta$$

$$\tan\alpha = \left[\frac{0.45(10^{-3})}{0.2(10^{-3})}\right]\left(\frac{4}{3}\right)$$

$$\alpha = 71.6^\circ \qquad \textit{Ans.}$$

F6–15 Maximum stress occurs at D or A.

$$(\sigma_{\max})_D = \frac{(50\cos 30^\circ)12(3)}{\frac{1}{12}(4)(6)^3} + \frac{(50\sin 30^\circ)12(2)}{\frac{1}{12}(6)(4)^3}$$
$$= 40.4\ \text{psi} \qquad \textit{Ans.}$$

Chapter 7

F7–1 Consider two vertical rectangles and a horizontal rectangle.

$$I = 2\left[\frac{1}{12}(0.02)(0.2^3)\right] + \frac{1}{12}(0.26)(0.02^3)$$
$$= 26.84(10^{-6})\ \text{m}^4$$

Take two rectangles above A.

$$Q_A = 2[0.055(0.09)(0.02)] = 198(10^{-6})\ \text{m}^3$$
$$\tau_A = \frac{VQ_A}{It} = \frac{100(10^3)[198(10^{-6})]}{[26.84(10^{-6})]2(0.02)}$$
$$= 18.4\ \text{MPa}$$ *Ans.*

F7–2 Consider a vertical rectangle and two squares.

$$I = \frac{1}{12}(0.1)(0.3^3) + (2)\frac{1}{12}(0.1)(0.1^3)$$
$$= 0.24167(10^{-3})\ \text{m}^4$$

Take top half of area (above A).

$$Q_A = y'_1A'_1 + y'_2A'_2$$
$$= \left[\frac{1}{2}(0.05)\right](0.05)(0.3) + 0.1(0.1)(0.1)$$
$$= 1.375(10^{-3})\ \text{m}^3$$
$$\tau_A = \frac{VQ}{It} = \frac{600(10^3)[1.375(10^{-3})]}{[0.24167(10^{-3})](0.3)} = 11.4\ \text{MPa}$$ *Ans.*

Take top square (above B).

$$Q_B = y'_2A'_2 = 0.1(0.1)(0.1) = 1(10^{-3})\ \text{m}^3$$
$$\tau_B = \frac{VQ}{It} = \frac{600(10^3)[1(10^{-3})]}{[0.24167(10^{-3})](0.1)} = 24.8\ \text{MPa}$$ *Ans.*

F7–3 $V_{max} = 4.5$ kip

$$I = \frac{1}{12}(3)(6^3) = 54\ \text{in}^4$$

Take top half of area.

$$Q_{max} = y'A' = 1.5(3)(3) = 13.5\ \text{in}^3$$
$$(\tau_{max})_{abs} = \frac{V_{max}\,Q_{max}}{It} = \frac{4.5(10^3)(13.5)}{54(3)} = 375\ \text{psi}$$ *Ans.*

F7–4 Consider two vertical rectangles and two horizontal rectangles.

$$I = 2\left[\frac{1}{12}(0.03)(0.4^3)\right] + 2\left[\frac{1}{12}(0.14)(0.03^3)\right.$$
$$\left. + 0.14(0.03)(0.15^2)\right] = 0.50963(10^{-3})\ \text{m}^4$$

Take the top half of area.

$$Q_{max} = 2y'_1A'_1 + y'_2A'_2 = 2(0.1)(0.2)(0.03)$$
$$+ (0.15)(0.14)(0.03) = 1.83(10^{-3})\ \text{m}^3$$
$$\tau_{max} = \frac{VQ_{max}}{It} = \frac{20(10^3)[1.83(10^{-3})]}{0.50963(10^{-3})[2(0.03)]} = 1.20\ \text{MPa}$$ *Ans.*

F7–5 Consider one large vertical rectangle and two side rectangles.

$$I = \frac{1}{12}(0.05)(0.4)^3 + 2\left[\frac{1}{12}(0.025)(0.3)^3\right]$$
$$= 0.37917(10^{-3})\ \text{m}^4$$

Take the top half of area.

$$Q_{max} = 2y'_1A'_1 + y'_2A'_2 = 2(0.075)(0.025)(0.15)$$
$$+ (0.1)(0.05)(0.2) = 1.5625(10^{-3})\ \text{m}^3$$
$$\tau_{max} = \frac{VQ_{max}}{It} = \frac{20(10^3)[1.5625(10^{-3})]}{[0.37917(10^{-3})][2(0.025)]}$$
$$= 1.65\ \text{MPa}$$ *Ans.*

F7–6 $I = \frac{1}{12}(0.3)(0.2^3) = 0.2(10^{-3})\ \text{m}^4$

Top (or bottom) board

$$Q = y'A' = 0.05(0.1)(0.3) = 1.5(10^{-3})\ \text{m}^3$$

Two rows of nails

$$q_{allow} = 2\left(\frac{F}{s}\right) = \frac{2[15(10^3)]}{s} = \frac{30(10^3)}{s}$$
$$q_{allow} = \frac{VQ}{I};\quad \frac{30(10^3)}{s} = \frac{50(10^3)[1.5(10^{-3})]}{0.2(10^{-3})}$$
$$s = 0.08\ \text{m} = 80\ \text{mm}$$ *Ans.*

F7–7 Consider large rectangle minus two side rectangles.

$$I = \frac{1}{12}(0.2)(0.34^3) - (2)\frac{1}{12}(0.095)(0.28^3)$$
$$= 0.3075(10^{-3})\ \text{m}^4$$

Top plate

$$Q = y'A' = 0.16(0.02)(0.2) = 0.64(10^{-3})\ \text{m}^3$$

Two rows of bolts

$$q_{allow} = 2\left(\frac{F}{s}\right) = \frac{2[30(10^3)]}{s} = \frac{60(10^3)}{s}$$
$$q_{allow} = \frac{VQ}{I};\quad \frac{60(10^3)}{s} = \frac{300(10^3)[0.64(10^{-3})]}{0.3075(10^{-3})}$$
$$s = 0.09609\ \text{m} = 96.1\ \text{mm}$$

Use $s = 96$ mm *Ans.*

F7–8 Consider two large rectangles and two side rectangles.

$$I = 2\left[\frac{1}{12}(0.025)(0.3^3)\right] + 2\left[\frac{1}{12}(0.05)(0.2^3) + 0.05(0.2)(0.15^2)\right]$$

$$= 0.62917(10^{-3})\ \text{m}^4$$

Top center board is held onto beam by the top row of bolts.

$$Q = y'A' = 0.15(0.2)(0.05) = 1.5(10^{-3})\ \text{m}^3$$

Each bolt has two shearing surfaces.

$$q_{\text{allow}} = 2\left(\frac{F}{s}\right) = \frac{2[8(10^3)]}{s} = \frac{16(10^3)}{s}$$

$$q_{\text{allow}} = \frac{VQ}{I}; \qquad \frac{16(10^3)}{s} = \frac{20(10^3)[1.5(10^{-3})]}{0.62917(10^{-3})}$$

$$s = 0.3356\ \text{m} = 335.56\ \text{mm}$$

Use $s = 335$ mm *Ans.*

F7–9 Consider center board and four side boards.

$$I = \frac{1}{12}(1)(6^3) + 4\left[\frac{1}{12}(0.5)(4^3) + 0.5(4)(3^2)\right]$$

$$= 100.67\ \text{in}^4$$

Top-right board is held onto beam by a row of bolts.

$$Q = y'A' = 3(4)(0.5) = 6\ \text{in}^3$$

Bolts have one shear surface.

$$q_{\text{allow}} = \frac{F}{s} = \frac{6}{s}$$

$$q_{\text{allow}} = \frac{VQ}{I}; \qquad \frac{6}{s} = \frac{15(6)}{100.67}$$

$$s = 6.711\ \text{in.}$$

Use $s = 6\frac{5}{8}$ in. *Ans.*

Also, can consider the top *two* boards held onto beam by a row of bolts with two shearing surfaces.

Chapter 8

F8–1

$+\uparrow \Sigma F_z = (F_R)_z; \quad -500 - 300 = P$

$P = -800$ kN

$\Sigma M_x = 0; \quad 300(0.05) - 500(0.1) = M_x$

$M_x = -35$ kN · m

$\Sigma M_y = 0; \quad 300(0.1) - 500(0.1) = M_y$

$M_y = -20$ kN · m

$A = 0.3(0.3) = 0.09\ \text{m}^2$

$$I_x = I_y = \frac{1}{12}(0.3)(0.3^3) = 0.675(10^{-3})\ \text{m}^4$$

$$\sigma_A = \frac{-800(10^3)}{0.09} + \frac{[20(10^3)](0.15)}{0.675(10^{-3})} + \frac{[35(10^3)](0.15)}{0.675(10^{-3})}$$

$= 3.3333$ MPa $= 3.33$ MPa (T) *Ans.*

$$\sigma_B = \frac{-800(10^3)}{0.09} + \frac{[20(10^3)](0.15)}{0.675(10^{-3})} - \frac{[35(10^3)](0.15)}{0.675(10^{-3})}$$

$= -12.22$ MPa $= 12.2$ MPa (C) *Ans.*

F8–2

$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad V - 400 = 0 \quad V = 400$ kN

$\circlearrowleft + \Sigma M_A = 0; -M - 400(0.5) = 0 \quad M = -200$ kN · m

$$I = \frac{1}{12}(0.1)(0.3^3) = 0.225(10^{-3})\ \text{m}^4$$

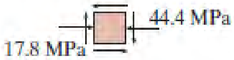
Bottom segment

$$\sigma_A = \frac{My}{I} = \frac{[200(10^3)](-0.05)}{0.225(10^{-3})}$$

$= -44.44$ MPa $= 44.4$ MPa (C) *Ans.*

$$Q_A = y'A' = 0.1(0.1)(0.1) = 1(10^{-3})\ \text{m}^3$$

$$\tau_A = \frac{VQ}{It} = \frac{400(10^3)[1(10^{-3})]}{0.225(10^{-3})(0.1)} = 17.8\ \text{MPa}$$ *Ans.*



F8–3 Left reaction is 20 kN.

Left segment:

$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad 20 - V = 0 \quad V = 20$ kN

$\circlearrowleft + \Sigma M_s = 0; \quad M - 20(0.5) = 0 \quad M = 10$ kN · m

Consider large rectangle minus two side rectangles.

$$I = \frac{1}{12}(0.1)(0.2^3) - (2)\frac{1}{12}(0.045)(0.18^3)$$

$$= 22.9267(10^{-6})\ \text{m}^4$$

Top segment above A

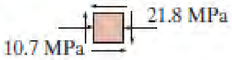
$$Q_A = y'_1A'_1 + y'_2A'_2 = 0.07(0.04)(0.01) + 0.095(0.1)(0.01) = 0.123(10^{-3})\ \text{m}^3$$

$$\sigma_A = -\frac{My_A}{I} = -\frac{[10(10^3)](0.05)}{22.9267(10^{-6})}$$

$= -21.81$ MPa $= 21.8$ MPa (C) *Ans.*

$$\tau_A = \frac{VQ_A}{It} = \frac{20(10^3)[0.123(10^{-3})]}{[22.9267(10^{-6})](0.01)}$$

$= 10.7$ MPa *Ans.*



F8–4 At the section through centroidal axis:

$N = P$

$V = 0$

$M = (2 + 1)P = 3P$

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{Mc}{I}$$

$$30 = \frac{P}{2(0.5)} + \frac{(3P)(1)}{\frac{1}{12}(0.5)(2)^3}$$

$P = 3$ kip *Ans.*

F8–5 At section through B:

$N = 500$ lb, $V = 400$ lb

$M = 400(10) = 4000$ lb · in.

Axial load:

$$\sigma_x = \frac{N}{A} = \frac{500}{4(3)} = 41.667 \text{ psi (T)}$$

Shear load:

$$\tau_{xy} = \frac{VQ}{It} = \frac{400[(1.5)(3)(1)]}{[\frac{1}{12}(3)(4)^3]3} = 37.5 \text{ psi}$$

Bending moment:

$$\sigma_x = \frac{My}{I} = \frac{4000(1)}{\frac{1}{12}(3)(4)^3} = 250 \text{ psi (C)}$$

Thus

$\sigma_x = 41.667 - 250 = 208$ psi (C) *Ans.*

$\sigma_y = 0$ *Ans.*

$\tau_{xy} = 37.5$ psi *Ans.*

F8–6 Top segment:

$\Sigma F_y = 0;\quad V_y + 1000 = 0 \qquad V_y = -1000$ N

$\Sigma F_x = 0;\quad V_x - 1500 = 0 \qquad V_x = 1500$ N

$\Sigma M_z = 0;\quad T_z - 1500(0.4) = 0 \qquad T_z = 600$ N · m

$\Sigma M_y = 0;\quad M_y - 1500(0.2) = 0 \qquad M_y = 300$ N · m

$\Sigma M_x = 0;\quad M_x - 1000(0.2) = 0 \qquad M_x = 200$ N · m

$$I_y = I_x = \frac{\pi}{4}(0.02^4) = 40(10^{-9})\pi \text{ m}^4$$

$$J = \frac{\pi}{2}(0.02^4) = 80(10^{-9})\pi \text{ m}^4$$

$$(Q_y)_A = \frac{4(0.02)}{3\pi}\left[\frac{\pi}{2}(0.02^2)\right] = 5.3333(10^{-6}) \text{ m}^3$$

$$\sigma_A = \frac{M_x y}{I_x} - \frac{M_y x}{I_y} = \frac{-200(0)}{40(10^{-9})\pi} - \frac{-300(0.02)}{40(10^{-9})\pi}$$

$= 47.7$ MPa (T) *Ans.*

$$[(\tau_{zy})_T]_A = \frac{T_z c}{J} = \frac{600(0.02)}{80(10^{-9})\pi} = 47.746 \text{ MPa}$$

$$[(\tau_{zy})_V]_A = \frac{V_y(Q_y)_A}{I_x t} = \frac{1000[5.3333(10^{-6})]}{[40(10^{-9})\pi](0.04)}$$

$= 1.061$ MPa

Combining these two shear stress components,

$(\tau_{zy})_A = 47.746 + 1.061 = 48.8$ MPa *Ans.*

F8–7 Right Segment:

$\Sigma F_z = 0;\quad V_z - 6 = 0 \qquad V_z = 6$ kN

$\Sigma M_y = 0;\quad T_y - 6(0.3) = 0 \qquad T_y = 1.8$ kN · m

$\Sigma M_x = 0;\quad M_x - 6(0.3) = 0 \qquad M_x = 1.8$ kN · m

$$I_x = \frac{\pi}{4}(0.05^4 - 0.04^4) = 0.9225(10^{-6})\pi \text{ m}^4$$

$$J = \frac{\pi}{2}(0.05^4 - 0.04^4) = 1.845(10^{-6})\pi \text{ m}^4$$

$$(Q_z)_A = y_2' A_2' - y_1' A_1'$$

$$= \frac{4(0.05)}{3\pi}\left[\frac{\pi}{2}(0.05^2)\right] - \frac{4(0.04)}{3\pi}\left[\frac{\pi}{2}(0.04^2)\right]$$

$= 40.6667(10^{-6})$ m^3

$$\sigma_A = \frac{M_x z}{I_x} = \frac{1.8(10^3)(0)}{0.9225(10^{-6})\pi} = 0 \quad \textit{Ans.}$$

$$[(\tau_{yz})_T]_A = \frac{T_y c}{J} = \frac{[1.8(10^3)](0.05)}{1.845(10^{-6})\pi} = 15.53 \text{ MPa}$$

$$[(\tau_{yz})_V]_A = \frac{V_z(Q_z)_A}{I_x t} = \frac{6(10^3)[40.6667(10^{-6})]}{[0.9225(10^{-6})\pi](0.02)}$$

$= 4.210$ MPa

Combining these two shear stress components,

$(\tau_{yz})_A = 15.53 - 4.210 = 11.3$ MPa *Ans.*

F8–8 Left Segment:

$\Sigma F_z = 0;\quad V_z - 900 - 300 = 0 \qquad V_z = 1200\text{ N}$

$\Sigma M_y = 0;\quad T_y + 300(0.1) - 900(0.1) = 0 \qquad T_y = 60\text{ N}\cdot\text{m}$

$\Sigma M_x = 0;\quad M_x + (900 + 300)0.3 = 0 \qquad M_x = -360\text{ N}\cdot\text{m}$

$$I_x = \frac{\pi}{4}(0.025^4 - 0.02^4) = 57.65625(10^{-9})\pi\text{ m}^4$$

$$J = \frac{\pi}{2}(0.025^4 - 0.02^4) = 0.1153125(10^{-6})\pi\text{ m}^4$$

$(Q_y)_A = 0$

$$\sigma_A = \frac{M_x y}{I_x} = \frac{(360)(0.025)}{57.65625(10^{-9})\pi} = 49.7\text{ MPa} \qquad \textit{Ans.}$$

$$[(\tau_{xy})_T]_A = \frac{T_y \rho_A}{J} = \frac{60(0.025)}{0.1153125(10^{-6})\pi} = 4.14\text{ MPa} \qquad \textit{Ans.}$$

$$[(\tau_{yz})_V]_A = \frac{V_z(Q_z)_A}{I_x t} = 0 \qquad \textit{Ans.}$$

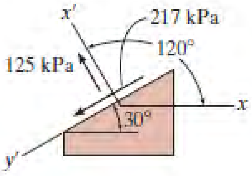
Chapter 9

F9–1 $\theta = 120^\circ \quad \sigma_x = 500\text{ kPa} \quad \sigma_y = 0 \quad \tau_{xy} = 0$

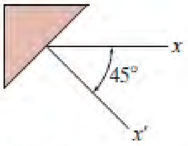
Apply Eqs. 9–1, 9–2.

$\sigma_{x'} = 125\text{ kPa}$ *Ans.*

$\tau_{x'y'} = 217\text{ kPa}$ *Ans.*



F9–2



$\theta = -45^\circ \quad \sigma_x = 0 \quad \sigma_y = -400\text{ kPa}$

$\tau_{xy} = -300\text{ kPa}$

Apply Eqs. 9–1, 9–3, 9–2.

$\sigma_{x'} = 100\text{ kPa}$ *Ans.*

$\sigma_{y'} = -500\text{ kPa}$ *Ans.*

$\tau_{x'y'} = 200\text{ kPa}$ *Ans.*

F9–3 $\theta_x = 80\text{ kPa} \quad \sigma_y = 0 \quad \tau_{xy} = 30\text{ kPa}$

Apply Eqs. 9–5, 9–4.

$\sigma_1 = 90\text{ kPa} \qquad \sigma_2 = -10\text{ kPa}$ *Ans.*

$\theta_p = 18.43^\circ$ and 108.43°

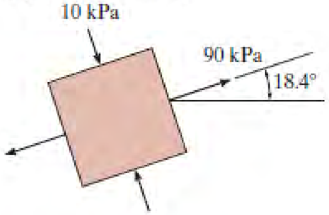
From Eq. 9–1,

$$\sigma_{x'} = \frac{80 + 0}{2} + \frac{80 - 0}{2}\cos 2(18.43^\circ) + 30\sin 2(18.43^\circ)$$

$$= 90\text{ kPa} = \sigma_1$$

Thus,

$(\theta_p)_1 = 18.4^\circ$ for σ_1 *Ans.*



F9–4 $\sigma_x = 100\text{ kPa} \quad \sigma_y = 700\text{ kPa}$

$\tau_{xy} = -400\text{ kPa}$

Apply Eqs. 9–7, 9–8.

$\tau_{\substack{\text{max}\\\text{in-plane}}} = 500\text{ kPa}$ *Ans.*

$\sigma_{\text{avg}} = 400\text{ kPa}$ *Ans.*

F9–5 At the cross section through B:

$N = 4\text{ kN} \quad V = 2\text{ kN}$

$M = 2(2) = 4\text{ kN}\cdot\text{m}$

$$\sigma_B = \frac{P}{A} + \frac{Mc}{I} = \frac{4(10^3)}{0.03(0.06)} + \frac{4(10^3)(0.03)}{\frac{1}{12}(0.03)(0.06)^3}$$

$$= 224\text{ MPa (T)}$$

Note $\tau_B = 0$ since $Q = 0$.

Thus

$\sigma_1 = 224\text{ MPa}$ *Ans.*

$\sigma_2 = 0$

F9–6 $A_y = B_y = 12\text{ kN}$

Segment AC:

$V_C = 0 \quad M_C = 24\text{ kN}\cdot\text{m}$

$\tau_C = 0$ (since $V_C = 0$)

$\sigma_C = 0$ (since C is on neutral axis)

$\sigma_1 = \sigma_2 = 0$ *Ans.*

F9–7 $\sigma_{avg} = \dfrac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \dfrac{500 + 0}{2} = 250 \text{ kPa}$

The coordinates of the center C of the circle and the reference point A are

$$A(500, 0) \qquad C(250, 0)$$

$R = CA = 500 - 250 = 250$ kPa

$\theta = 120°$ (counterclockwise). Rotate the radial line CA counterclockwise $2\theta = 240°$ to the coordinates of point $P(\sigma_{x'}, \tau_{x'y'})$.

$\alpha = 240° - 180° = 60°$

$\sigma_{x'} = 250 - 250 \cos 60° = 125$ kPa *Ans.*

$\tau_{x'y'} = 250 \sin 60° = 217$ kPa *Ans.*

F9–8 $\sigma_{avg} = \dfrac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \dfrac{80 + 0}{2} = 40 \text{ kPa}$

The coordinates of the center C of the circle and the reference point A are

$$A(80, 30) \qquad C(40, 0)$$

$R = CA = \sqrt{(80 - 40)^2 + 30^2} = 50$ kPa

$\sigma_1 = 40 + 50 = 90$ kPa *Ans.*

$\sigma_2 = 40 - 50 = -10$ kPa *Ans.*

$\tan 2(\theta_p)_1 = \dfrac{30}{80 - 40} = 0.75$

$(\theta_p)_1 = 18.4°$ (counterclockwise) *Ans.*

F9–9 The coordinates of the reference point A and the center C of the circle are

$$A(30, 40) \qquad C(0, 0)$$

$R = CA = 50$ MPa

$\sigma_1 = 50$ MPa

$\sigma_2 = -50$ MPa

F9–10 $J = \dfrac{\pi}{2}(0.04^4 - 0.03^4) = 0.875(10^{-6})\pi \text{ m}^4$

$\tau = \dfrac{Tc}{J} = \dfrac{4(10^3)(0.04)}{0.875(10^{-6})\pi} = 58.21 \text{ MPa}$

$\sigma_x = \sigma_y = 0$ and $\tau_{xy} = -58.21$ MPa

$\sigma_{avg} = \dfrac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = 0$

The coordinates of the reference point A and the center C of the circle are

$$A(0, -58.21) \qquad C(0, 0)$$

$R = CA = 58.21$ MPa

$\sigma_1 = 0 + 58.21 = 58.2$ MPa *Ans.*

$\sigma_2 = 0 - 58.21 = -58.2$ MPa *Ans.*

F9–11

$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad V - 30 = 0 \quad V = 30 \text{ kN}$

$\zeta + \Sigma M_O = 0; \quad -M - 30(0.3) = 0 \quad M = -9 \text{ kN} \cdot \text{m}$

$I = \dfrac{1}{12}(0.05)(0.15^3) = 14.0625(10^{-6}) \text{ m}^4$

Segment above A,

$Q_A = y'A' = 0.05(0.05)(0.05) = 0.125(10^{-3}) \text{ m}^3$

$\sigma_A = -\dfrac{My_A}{I} = \dfrac{[-9(10^3)](0.025)}{14.0625(10^{-6})} = 16 \text{ MPa (T)}$

$\tau_A = \dfrac{VQ_A}{It} = \dfrac{30(10^3)[0.125(10^{-3})]}{14.0625(10^{-6})(0.05)} = 5.333 \text{ MPa}$

$\sigma_x = 16$ MPa, $\sigma_y = 0$, and $\tau_{xy} = -5.333$ MPa

$\sigma_{avg} = \dfrac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \dfrac{16 + 0}{2} = 8 \text{ MPa}$

The coordinates of the reference point A and the center C of the circle are

$$A(16, -5.333) \qquad C(8, 0)$$

$R = CA = \sqrt{(16 - 8)^2 + (-5.333)^2} = 9.615$ MPa

$\sigma_1 = 8 + 9.615 = 17.6$ MPa *Ans.*

$\sigma_2 = 8 - 9.615 = -1.61$ MPa *Ans.*

F9–12

$\zeta + \Sigma M_B = 0; \quad 60(1) - A_y(1.5) = 0 \quad A_y = 40 \text{ kN}$

$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad 40 - V = 0 \quad V = 40 \text{ kN}$

$\zeta + \Sigma M_O = 0; \quad M - 40(0.5) = 0 \quad M = 20 \text{ kN} \cdot \text{m}$

Consider large rectangle minus two side rectangles.

$I = \dfrac{1}{12}(0.1)(0.2^3) - (2)\dfrac{1}{12}(0.045)(0.18^3) = 22.9267(10^{-6}) \text{ m}^4$

Top rectangle,

$Q_A = y'A' = 0.095(0.01)(0.1) = 95(10^{-6}) \text{ m}^3$

$\sigma_A = -\dfrac{My_A}{I} = -\dfrac{[20(10^3)](0.09)}{22.9267(10^{-6})} = -78.51 \text{ MPa}$

$= 78.51$ MPa (C)

$\tau_A = \dfrac{VQ_A}{It} = \dfrac{40(10^3)[95(10^{-6})]}{[22.9267(10^{-6})](0.01)} = 16.57 \text{ MPa}$

$\sigma_x = -78.51$ MPa, $\sigma_y = 0$, and $\tau_{xy} = -16.57$ MPa

$\sigma_{avg} = \dfrac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \dfrac{-78.51 + 0}{2} = -39.26 \text{ MPa}$

The coordinates of the reference point A and the center C of the circle are

$$A(-78.51, -16.57) \qquad C(-39.26, 0)$$

$$R = CA = \sqrt{[-78.51 - (-39.26)]^2 + (-16.57)^2}$$
$$= 42.61 \text{ MPa}$$

$$\tau_{\substack{\max \\ \text{in-plane}}} = |R| = 42.6 \text{ MPa}$$ *Ans.*

Chapter 11

F11–1

At support,

$V_{max} = 12 \text{ kN} \qquad M_{max} = 18 \text{ kN} \cdot \text{m}$

$$I = \frac{1}{12}(a)(2a)^3 = \frac{2}{3}a^4$$

$$\sigma_{allow} = \frac{M_{max}c}{I}; \qquad 10(10^6) = \frac{18(10^3)(a)}{\frac{2}{3}a^4}$$

$$a = 0.1392 \text{ m} = 139.2 \text{ mm}$$

Use $a = 140$ mm *Ans.*

$$I = \frac{2}{3}(0.14^4) = 0.2561(10^{-3}) \text{ m}^4$$

$$Q_{max} = \frac{0.14}{2}(0.14)(0.14) = 1.372(10^{-3}) \text{ m}^3$$

$$\tau_{max} = \frac{V_{max}Q_{max}}{It} = \frac{12(10^3)[1.372(10^{-3})]}{[0.2561(10^{-3})](0.14)}$$

$$= 0.459 \text{ MPa} < \tau_{allow} = 1 \text{ MPa (OK)}$$

F11–2

At support,

$V_{max} = 3 \text{ kip} \qquad M_{max} = 12 \text{ kip} \cdot \text{ft}$

$$I = \frac{\pi}{4}\left(\frac{d}{2}\right)^4 = \frac{\pi d^4}{64}$$

$$\sigma_{allow} = \frac{M_{max}c}{I}; \qquad 20 = \frac{12(12)\left(\frac{d}{2}\right)}{\frac{\pi d^4}{64}}$$

$$d = 4.19 \text{ in.}$$

Use $d = 4\frac{1}{4}$ in. *Ans.*

$$I = \frac{\pi}{64}(4.25^4) = 16.015 \text{ in}^4$$

Semicircle,

$$Q_{max} = \frac{4(4.25/2)}{3\pi}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}\right)(4.25^2)\right] = 6.397 \text{ in}^3$$

$$\tau_{max} = \frac{V_{max}Q_{max}}{It} = \frac{3(6.397)}{16.015(4.25)}$$

$$= 0.282 \text{ ksi} < \tau_{allow} = 10 \text{ ksi (OK)}$$

F11–3

At the supports,

$V_{max} = 10 \text{ kN}$

Under 15-kN load,

$M_{max} = 5 \text{ kN} \cdot \text{m}$

$$I = \frac{1}{12}(a)(2a)^3 = \frac{2}{3}a^4$$

$$\sigma_{allow} = \frac{M_{max}c}{I}; \qquad 12(10^6) = \frac{5(10^3)(a)}{\frac{2}{3}a^4}$$

$$a = 0.0855 \text{ m} = 85.5 \text{ mm}$$

Use $a = 86$ mm *Ans.*

$$I = \frac{2}{3}(0.086^4) = 36.4672(10^{-6}) \text{ m}^4$$

Top half of rectangle,

$$Q_{max} = \frac{0.086}{2}(0.086)(0.086)$$

$$= 0.318028(10^{-3}) \text{ m}^3$$

$$\tau_{max} = \frac{V_{max}Q_{max}}{It} = \frac{10(10^3)[0.318028(10^{-3})]}{[36.4672(10^{-6})](0.086)}$$

$$= 1.01 \text{ MPa} < \tau_{allow} = 1.5 \text{ MPa (OK)}$$

F11–4

At the supports,

$V_{max} = 4.5 \text{ kip}$

At the center,

$M_{max} = 6.75 \text{ kip} \cdot \text{ft}$

$$I = \frac{1}{12}(4)(h^3) = \frac{h^3}{3}$$

$$\sigma_{allow} = \frac{M_{max}c}{I}; \quad 2 = \frac{6.75(12)\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h^3}{3}}$$

$$h = 7.794 \text{ in.}$$

Top half of rectangle,

$$Q_{max} = y'A' = \frac{h}{4}\left(\frac{h}{2}\right)(4) = \frac{h^2}{2}$$

$$\tau_{max} = \frac{V_{max}Q_{max}}{It}; \; 0.2 = \frac{4.5\left(\frac{h^2}{2}\right)}{\frac{h^3}{3}(4)}$$

$$h = 8.4375 \text{ in. (controls)}$$

Use $h = 8\frac{1}{2}$ in. *Ans.*

F11–5

At the supports,

$V_{max} = 25$ kN

At the center,

$M_{max} = 20$ kN · m

$$I = \frac{1}{12}(b)(3b)^3 = 2.25b^4$$

$$\sigma_{allow} = \frac{M_{max}c}{I}; \quad 12(10^6) = \frac{20(10^3)(1.5b)}{2.25b^4}$$

$$b = 0.1036 \text{ m} = 103.6 \text{ mm}$$

Use $b = 104$ mm *Ans.*

$I = 2.25(0.104^4) = 0.2632(10^{-3})$ m^4

Top half of rectangle,

$Q_{max} = 0.75(0.104)[1.5(0.104)(0.104)] = 1.2655(10^{-3})$ m^3

$$\tau_{max} = \frac{V_{max}Q_{max}}{It} = \frac{25(10^3)[1.2655(10^{-3})]}{[0.2632(10^{-3})](0.104)}$$

$$= 1.156 \text{ MPa} < \tau_{allow} = 1.5 \text{ MPa (OK)}.$$

F11–6

Within the overhang,

$V_{max} = 150$ kN

At B,

$M_{max} = 150$ kN · m

$$S_{reqd} = \frac{M_{max}}{\sigma_{allow}} = \frac{150(10^3)}{150(10^6)} = 0.001 \text{ m}^3 = 1000(10^3) \text{ mm}^3$$

Select W410 × 67 [$S_x = 1200(10^3)$ mm^3, $d = 410$ mm, and $t_w = 8.76$ mm]. *Ans.*

$$\tau_{max} = \frac{V}{t_w d} = \frac{150(10^3)}{0.00876(0.41)}$$

$$= 41.76 \text{ MPa} < \tau_{allow} = 75 \text{ MPa (OK)}$$

Chapter 12

F12–1

Use left segment,

$M(x) = 30$ kN · m

$$EI\frac{d^2v}{dx^2} = 30$$

$$EI\frac{dv}{dx} = 30x + C_1$$

$$EIv = 15x^2 + C_1 x + C_2$$

At $x = 3$ m, $\frac{dv}{dx} = 0$.

$C_1 = -90$ kN · m^2

At $x = 3$ m, $v = 0$.

$C_2 = 135$ kN · m^3

$$\frac{dv}{dx} = \frac{1}{EI}(30x - 90)$$

$$v = \frac{1}{EI}(15x^2 - 90x + 135)$$

For end A, $x = 0$

$$\theta_A = \left.\frac{dv}{dx}\right|_{x=0} = -\frac{90(10^3)}{200(10^9)[65.0(10^{-6})]} = -0.00692 \text{ rad}$$ *Ans.*

$$v_A = v|_{x=0} = \frac{135(10^3)}{200(10^9)[65.0(10^{-6})]} = 0.01038 \text{ m} = 10.4 \text{ mm}$$ *Ans.*

F12–2

Use left segment,

$M(x) = (-10x - 10)$ kN · m

$$EI\frac{d^2v}{dx^2} = -10x - 10$$

$$EI\frac{dv}{dx} = -5x^2 - 10x + C_1$$

$$EIv = -\frac{5}{3}x^3 - 5x^2 + C_1 x + C_2$$

At $x = 3$ m, $\frac{dv}{dx} = 0$.

$EI(0) = -5(3^2) - 10(3) + C_1 \qquad C_1 = 75$ kN · m^2

At $x = 3$ m, $v = 0$.

$EI(0) = -\frac{5}{3}(3^3) - 5(3^2) + 75(3) + C_2 \quad C_2 = -135$ kN · m^3

$$\frac{dv}{dx} = \frac{1}{EI}(-5x^2 - 10x + 75)$$

$$v = \frac{1}{EI}\left(-\frac{5}{3}x^3 - 5x^2 + 75x - 135\right)$$

For end A, $x = 0$

$$\theta_A = \left.\frac{dv}{dx}\right|_{x=0} = \frac{1}{EI}[-5(0) - 10(0) + 75]$$

$$= \frac{75(10^3)}{200(10^9)[65.0(10^{-6})]} = 0.00577 \text{ rad}$$ *Ans.*

$$v_A = v|_{x=0} = \frac{1}{EI}\left[-\frac{5}{3}(0^3) - 5(0^2) + 75(0) - 135\right]$$

$$= -\frac{135(10^3)}{200(10^9)[65.0(10^{-6})]} = -0.01038 \text{ m} = -10.4 \text{ mm}$$ *Ans.*

F12–3

Use left segment,

$$M(x) = \left(-\frac{3}{2}x^2 - 10x\right) \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$EI\frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{3}{2}x^2 - 10x$$

$$EI\frac{dv}{dx} = -\frac{1}{2}x^3 - 5x^2 + C_1$$

At $x = 3$ m, $\frac{dv}{dx} = 0$.

$$EI(0) = -\frac{1}{2}(3^3) - 5(3^2) + C_1 \qquad C_1 = 58.5 \text{ kN} \cdot \text{m}^2$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{1}{EI}\left(-\frac{1}{2}x^3 - 5x^2 + 58.5\right)$$

For end A, $x = 0$

$$\theta_A = \frac{dv}{dx}\Big|_{x=0} = \frac{58.5(10^3)}{200(10^9)[65.0(10^{-6})]} = 0.0045 \text{ rad} \qquad \textit{Ans.}$$

F12–4

$A_y = 600$ lb

Use left segment,

$$M(x) = (600x - 50x^2) \text{ lb} \cdot \text{ft}$$

$$EI\frac{d^2v}{dx^2} = 600x - 50x^2$$

$$EI\frac{dv}{dx} = 300x^2 - 16.667x^3 + C_1$$

$$EIv = 100x^3 - 4.1667x^4 + C_1x + C_2$$

At $x = 0$, $v = 0$.

$$EI(0) = 100(0^3) - 4.1667(0^4) + C_1(0) + C_2 \qquad C_2 = 0$$

At $x = 12$ ft, $v = 0$.

$$EI(0) = 100(12^3) - 4.1667(12^4) + C_1(12)$$

$$C_1 = -7200 \text{ lb} \cdot \text{ft}^2$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{1}{EI}(300x^2 - 16.667x^3 - 7200)$$

$$v = \frac{1}{EI}(100x^3 - 4.1667x^4 - 7200x)$$

v_{max} occurs where $\frac{dv}{dx} = 0$.

$$300x^2 - 16.667x^3 - 7200 = 0$$

$$x = 6 \text{ ft} \qquad \textit{Ans.}$$

$$v = \frac{1}{EI}[100(6^3) - 4.1667(6^4) - 7200(6)]$$

$$= \frac{-27\,000(12 \text{ in./ft})^3}{1.5(10^6)\left[\frac{1}{12}(3)(6^3)\right]}$$

$$= -0.576 \text{ in.} \qquad \textit{Ans.}$$

F12–5

$A_y = -5$ kN

Use left segment,

$$M(x) = (40 - 5x) \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$EI\frac{d^2v}{dx^2} = 40 - 5x$$

$$EI\frac{dv}{dx} = 40x - 2.5x^2 + C_1$$

$$EIv = 20x^2 - 0.8333x^3 + C_1x + C_2$$

At $x = 0$, $v = 0$.

$$EI(0) = 20(0^2) - 0.8333(0^3) + C_1(0) + C_2 \qquad C_2 = 0$$

At $x = 6$ m, $v = 0$.

$$EI(0) = 20(6^2) - 0.8333(6^3) + C_1(6) + 0$$

$$C_1 = -90 \text{ kN} \cdot \text{m}^2$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{1}{EI}(40x - 2.5x^2 - 90)$$

$$v = \frac{1}{EI}(20x^2 - 0.8333x^3 - 90x)$$

v_{max} occurs where $\frac{dv}{dx} = 0$.

$$40x - 2.5x^2 - 90 = 0$$

$$x = 2.7085 \text{ m}$$

$$v = \frac{1}{EI}[20(2.7085^2) - 0.83333(2.7085^3) - 90(2.7085)]$$

$$= -\frac{113.60(10^3)}{200(10^9)[39.9(10^{-6})]} = -0.01424 \text{ m} = -14.2 \text{ mm} \qquad \textit{Ans.}$$

F12–6

$A_y = 10$ kN

Use left segment,

$$M(x) = (10x + 10) \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$EI\frac{d^2v}{dx^2} = 10x + 10$$

$$EI\frac{dv}{dx} = 5x^2 + 10x + C_1$$

Due to symmetry, $\frac{dv}{dx} = 0$ at $x = 3$ m.

$$EI(0) = 5(3^2) + 10(3) + C_1 \quad C_1 = -75 \text{ kN} \cdot \text{m}^2$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{1}{EI}[5x^2 + 10x - 75]$$

At $x = 0$,

$$\frac{dv}{dx} = \frac{-75(10^3)}{200(10^9)(39.9(10^{-6}))} = -9.40(10^{-3}) \text{ rad} \qquad \textit{Ans.}$$

F12–7

Since B is a fixed support, $\theta_B = 0$.

$$\theta_A = |\theta_{A/B}| = \frac{1}{2}\left(\frac{38}{EI} + \frac{20}{EI}\right)(3) = \frac{87 \text{ kN}\cdot\text{m}^2}{EI}$$

$$= \frac{87(10^3)}{200(10^9)[65(10^{-6})]} = 0.00669 \text{ rad} \quad \textit{Ans.}$$

$$v_A = |t_{A/B}| = (1.5)\left[\frac{20}{EI}(3)\right] + 2\left[\frac{1}{2}\left(\frac{18}{EI}\right)(3)\right]$$

$$= \frac{144(10^3)}{200(10^9)[65(10^{-6})]} = 0.01108 \text{ m} = 11.1 \text{ mm} \downarrow \quad \textit{Ans.}$$

F12–8

Since B is a fixed support, $\theta_B = 0$.

$$\theta_A = |\theta_{A/B}| = \frac{1}{2}\left(\frac{50}{EI} + \frac{20}{EI}\right)(1) + \frac{1}{2}\left(\frac{20}{EI}\right)(1) = \frac{45 \text{ kN}\cdot\text{m}^2}{EI}$$

$$= \frac{45(10^3)}{200(10^9)[126(10^{-6})]} = 0.00179 \text{ rad} \quad \textit{Ans.}$$

$$v_A = |t_{A/B}| =$$

$$(1.6667)\left[\frac{1}{2}\left(\frac{30}{EI}\right)(1)\right] + 1.5\left[\frac{20}{EI}(1)\right] + 0.6667\left[\frac{1}{2}\left(\frac{20}{EI}\right)(1)\right]$$

$$= \frac{61.667 \text{ kN}\cdot\text{m}^3}{EI} = \frac{61.667(10^3)}{200(10^9)[126(10^{-6})]}$$

$$= 0.002447 \text{ m} = 2.48 \text{ mm} \downarrow \quad \textit{Ans.}$$

F12–9

Since B is a fixed support, $\theta_B = 0$.

$$\theta_A = |\theta_{A/B}| = \frac{1}{2}\left[\frac{60}{EI}(1)\right] + \frac{30}{EI}(2) = \frac{90 \text{ kN}\cdot\text{m}^2}{EI}$$

$$= \frac{90(10^3)}{200(10^9)[121(10^{-6})]} = 0.00372 \text{ rad} \quad \textit{Ans.}$$

$$v_A = |t_{A/B}| = 1.6667\left[\frac{1}{2}\left(\frac{60}{EI}\right)(1)\right] + (1)\left[\frac{30}{EI}(2)\right]$$

$$= \frac{110 \text{ kN}\cdot\text{m}^3}{EI}$$

$$= \frac{110(10^3)}{200(10^9)[121(10^{-6})]} = 0.004545 \text{ m} = 4.55 \text{ mm} \downarrow \quad \textit{Ans.}$$

F12–10

Since B is a fixed support, $\theta_B = 0$.

$$\theta_A = |\theta_{A/B}| = \frac{1}{2}\left(\frac{18}{EI}\right)(6) + \frac{1}{3}\left(\frac{9}{EI}\right)(3) = \frac{63 \text{ kip}\cdot\text{ft}^2}{EI}$$

$$= \frac{63(12^2)}{29(10^3)(245)} = 0.00128 \text{ rad} \quad \textit{Ans.}$$

$$v_A = |t_{A/B}| = 4\left[\frac{1}{2}\left(\frac{18}{EI}\right)(6)\right] + (3 + 2.25)\left[\frac{1}{3}\left(\frac{9}{EI}\right)(3)\right]$$

$$= \frac{263.25 \text{ kip}\cdot\text{ft}^3}{EI} = \frac{263.25(12^3)}{29(10^3)(245)} = 0.0640 \text{ in.} \downarrow \quad \textit{Ans.}$$

F12–11

Due to symmetry, the slope at the midspan of the beam (point C) is zero, i.e., $\theta_C = 0$.

$$v_{max} = v_C = |t_{A/C}| = (2)\left[\frac{1}{2}\left(\frac{30}{EI}\right)(3)\right] + 1.5\left[\frac{10}{EI}(3)\right]$$

$$= \frac{135 \text{ kN}\cdot\text{m}^3}{EI}$$

$$= \frac{135(10^3)}{200(10^9)[42.8(10^{-6})]} = 0.0158 \text{ m} = 15.8 \text{ mm} \downarrow \quad \textit{Ans.}$$

F12–12

$$t_{A/B} = 2\left[\frac{1}{2}\left(\frac{30}{EI}\right)(6)\right] + 3\left[\frac{10}{EI}(6)\right] = \frac{360}{EI}$$

$$\theta_B = \frac{|t_{A/B}|}{L} = \frac{\frac{360}{EI}}{6} = \frac{60}{EI}$$

The maximum deflection occurs at point C where the slope of the elastic curve is zero.

$$\theta_B = \theta_{B/C}$$

$$\frac{60}{EI} = \left(\frac{10}{EI}\right)x + \frac{1}{2}\left(\frac{5x}{EI}\right)x$$

$$2.5x^2 + 10x - 60 = 0$$

$$x = 3.2915 \text{ m}$$

$$v_{max} = |t_{B/C}| =$$

$$\frac{2}{3}(3.2915)\left\{\frac{1}{2}\left[\frac{5(3.2915)}{EI}\right](3.2915)\right\} + \frac{1}{2}(3.2915)\left[\frac{10}{EI}(3.2915)\right]$$

$$= \frac{113.60 \text{ kN}\cdot\text{m}^3}{EI}$$

$$= \frac{113.60(10^3)}{200(10^9)[39.9(10^{-6})]} = 0.01424 \text{ m} = 14.2 \text{ mm} \downarrow \quad \textit{Ans.}$$

F12–13

Remove B_y,

$$(v_B)_1 = \frac{Px^2}{6EI}(3L - x) = \frac{40(4^2)}{6EI}[3(6) - 4] = \frac{1493.33}{EI} \downarrow$$

Apply B_y,

$$(v_B)_2 = \frac{PL^3}{3EI} = \frac{B_y(4^3)}{3EI} = \frac{21.33B_y}{EI} \uparrow$$

$$(+\uparrow)\ v_B = 0 = (v_B)_1 + (v_B)_2$$

$$0 = -\frac{1493.33}{EI} + \frac{21.33B_y}{EI}$$

$B_y = 70$ kN *Ans.*

For the beam,

$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0;\quad A_x = 0$ *Ans.*

$+\uparrow \Sigma F_y = 0;\quad 70 - 40 - A_y = 0 \quad A_y = 30$ kN *Ans.*

$\zeta + \Sigma M_A = 0;\quad 70(4) - 40(6) - M_A = 0$

$M_A = 40$ kN · m *Ans.*

F12–14

Remove B_y,

To use the deflection tables, consider loading as a superposition of uniform distributed load minus a triangular load.

$$(v_B)_1 = \frac{w_0 L^4}{8EI}\downarrow \qquad (v_B)_2 = \frac{w_0 L^4}{30EI}\uparrow$$

Apply B_y,

$$(+\uparrow) \quad (v_B)_3 = \frac{B_y L^3}{3EI}\uparrow \; v_B = 0 = (v_B)_1 + (v_B)_2 + (v_B)_3$$

$$0 = -\frac{w_0 L^4}{8EI} + \frac{w_0 L^4}{30EI} + \frac{B_y L^3}{3EI}$$

$$B_y = \frac{11 w_0 L}{40}$$ *Ans.*

For the beam,

$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0;\quad A_x = 0$ *Ans.*

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0;\quad A_y + \frac{11 w_0 L}{40} - \frac{1}{2} w_0 L = 0$$

$$A_y = \frac{9 w_0 L}{40}$$ *Ans.*

$$\zeta + \Sigma M_A = 0;\quad M_A + \frac{11 w_0 L}{40}(L) - \frac{1}{2} w_0 L\left(\frac{2}{3}L\right) = 0$$

$$M_A = \frac{7 w_0 L^2}{120}$$ *Ans.*

F12–15

Remove B_y,

$$(v_B)_1 = \frac{wL^4}{8EI} = \frac{[10(10^3)](6^4)}{8[200(10^9)][65.0(10^{-6})]} = 0.12461 \text{ m} \downarrow$$

Apply B_y,

$$(v_B)_2 = \frac{B_y L^3}{3EI} = \frac{B_y (6^3)}{3[200(10^9)][65.0(10^{-6})]} = 5.5385(10^{-6})B_y \uparrow$$

$(+\downarrow) \quad v_B = (v_B)_1 + (v_B)_2$

$0.002 = 0.12461 - 5.5385(10^{-6})B_y$

$B_y = 22.314(10^3)$ N $= 22.1$ kN *Ans.*

For the beam,

$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0;\quad A_x = 0$ *Ans.*

$+\uparrow \Sigma F_y = 0;\quad A_y + 22.14 - 10(6) = 0 \quad A_y = 37.9$ kN *Ans.*

$\zeta + \Sigma M_A = 0;\quad M_A + 22.14(6) - 10(6)(3) = 0$

$M_A = 47.2$ kN · m *Ans.*

F12–16

Remove B_y,

$$(v_B)_1 = \frac{M_O L}{6EI(2L)}[(2L)^2 - L^2] = \frac{M_O L^2}{4EI}\downarrow$$

Apply B_y,

$$(v_B)_2 = \frac{B_y (2L)^3}{48EI} = \frac{B_y L^3}{6EI}\uparrow$$

$(+\uparrow) \quad v_B = 0 = (v_B)_1 + (v_B)_2$

$$0 = -\frac{M_O L^2}{4EI} + \frac{B_y L^3}{6EI}$$

$$B_y = \frac{3M_O}{2L}$$ *Ans.*

F12–17

Remove B_y,

$$(v_B)_1 = \frac{Pbx}{6EIL}(L^2 - b^2 - x^2) = \frac{50(4)(6)}{6EI(12)}(12^2 - 4^2 - 6^2)$$

$$= \frac{1533.3 \text{ kN}\cdot\text{m}^3}{EI}\downarrow$$

Apply B_y,

$$(v_B)_2 = \frac{B_y L^3}{48EI} = \frac{B_y (12^3)}{48EI} = \frac{36B_y}{EI}\uparrow$$

$(+\uparrow) \quad v_B = 0 = (v_B)_1 + (v_B)_2$

$$0 = -\frac{1533.3 \text{ kN}\cdot\text{m}^3}{EI} + \frac{36B_y}{EI}$$

$B_y = 42.6$ kN *Ans.*

F12–18

Remove B_y,

$$(v_B)_1 = \frac{5wL^4}{384EI} = \frac{5[10(10^3)](12^4)}{384[200(10^9)][65.0(10^{-6})]} = 0.20769 \downarrow$$

Apply B_y,

$$(v_B)_2 = \frac{B_y L^3}{48EI} = \frac{B_y (12^3)}{48[200(10^9)][65.0(10^{-6})]}$$

$$= 2.7692(10^{-6})B_y \uparrow$$

$(+\uparrow) \quad v_B = (v_B)_1 + (v_B)_2$

$-0.005 = -0.20769 + 2.7692(10^{-6})B_y$

$B_y = 73.19(10^3)$ N $= 73.2$ kN *Ans.*

Chapter 13

F13–1

$$P = \frac{\pi^2 EI}{(KL)^2} = \frac{\pi^2\left[29(10^3)\right]\left[\frac{\pi}{4}(0.5)^4\right]}{[0.5(50)]^2} = 22.5 \text{ kip} \qquad \textit{Ans.}$$

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{22.5}{\pi(0.5)^2} = 28.6 \text{ ksi} < \sigma_Y \quad \text{OK}$$

F13–2

$$P = \frac{\pi^2 EI}{(KL)^2} = \frac{\pi^2\left[1.6(10^3)\right]\left[\frac{1}{12}(4)(2)^3\right]}{[1(12)(12)]^2}$$

$$= 2.03 \text{ kip} \qquad \textit{Ans.}$$

F13–3

For buckling about the x axis, $K_x = 1$ and $L_x = 12$ m.

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI_x}{(K_x L_x)^2} = \frac{\pi^2[200(10^9)][87.3(10^{-6})]}{[1(12)]^2} = 1.197(10^6) \text{ N}$$

For buckling about the y axis, $K_y = 1$ and $L_y = 6$ m.

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI_y}{(K_y L_y)^2} = \frac{\pi^2[200(10^9)][18.8(10^{-6})]}{[1(6)]^2}$$

$$= 1.031(10^6) \text{ N (controls)}$$

$$P_{allow} = \frac{P_{cr}}{\text{F.S.}} = \frac{1.031(10^6)}{2} = 515 \text{ kN} \qquad \textit{Ans.}$$

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \frac{1.031(10^6)}{7.4(10^{-3})} = 139.30 \text{ MPa} < \sigma_Y = 345 \text{ MPa (OK)}$$

F13–4

$$A = \pi[(0.025)^2 - (0.015)^2] = 1.257(10^{-3}) \text{ m}^2$$

$$I = \frac{1}{4}\pi\left[(0.025)^4 - (0.015)^4\right] = 267.04(10^{-9}) \text{ m}^4$$

$$P = \frac{\pi^2 EI}{(KL)^2} = \frac{\pi^2\left[200(10^9)\right]\left[267.04(10^{-9})\right]}{[0.5(5)]^2} = 84.3 \text{ kN} \qquad \textit{Ans.}$$

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{84.3(10^3)}{1.257(10^{-3})} = 67.1 \text{ MPa} < 250 \text{ MPa} \quad \text{(OK)}$$

F13–5

Joint A,

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad F_{AB}\left(\frac{3}{5}\right) - P = 0 \quad F_{AB} = 1.6667P \text{ (T)}$$

$$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0; \quad 1.6667P\left(\frac{4}{5}\right) - F_{AC} = 0$$

$$F_{AC} = 1.3333P \text{ (C)}$$

$$A = \frac{\pi}{4}(2^2) = \pi \text{ in}^2 \qquad I = \frac{\pi}{4}(1^4) = \frac{\pi}{4} \text{ in}^4$$

$$P_{cr} = F(\text{F.S.}) = 1.3333P(2) = 2.6667P$$

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(KL)^2}$$

$$2.6667P = \frac{\pi^2[29(10^3)]\left(\frac{\pi}{4}\right)}{[1(4)(12)]^2}$$

$$P = 36.59 \text{ kip} = 36.6 \text{ kip} \qquad \textit{Ans.}$$

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \frac{2.6667(36.59)}{\pi} = 31.06 \text{ ksi} < \sigma_Y = 50 \text{ ksi}$$

(OK)

F13–6

Beam AB,

$$\zeta + \Sigma M_A = 0; \quad w(6)(3) - F_{BC}(6) = 0 \quad F_{BC} = 3w$$

Strut BC,

$$A_{BC} = \frac{\pi}{4}(0.05^2) = 0.625(10^{-3})\pi \text{ m}^2 \qquad I = \frac{\pi}{4}(0.025^4)$$

$$= 97.65625(10^{-9})\pi \text{ m}^4$$

$$P_{cr} = F_{BC}(\text{F.S.}) = 3w(2) = 6w$$

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(KL)^2}$$

$$6w = \frac{\pi^2[200(10^9)][97.65625(10^{-9})\pi]}{[1(3)]^2}$$

$$w = 11.215(10^3) \text{ N/m} = 11.2 \text{ kN/m} \qquad \textit{Ans.}$$

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \frac{6[11.215(10^3)]}{0.625(10^{-3})\pi} = 34.27 \text{ MPa} < \sigma_Y = 345 \text{ MPa}$$

(OK)

د انتخاب شویو سوالونو ځوابونه

Selected Answers

Chapter 1

1–1. $N_E = 0, V_E = -200 \text{ lb}, M_E = -2.40 \text{ kip}\cdot\text{ft}$
1–2. (a) $N_a = 500 \text{ lb}, V_a = 0,$
(b) $N_b = 433 \text{ lb}, V_b = 250 \text{ lb}$
1–3. $V_{b-b} = 2.475 \text{ kip}, N_{b-b} = 0.390 \text{ kip},$
$M_{b-b} = 3.60 \text{ kip}\cdot\text{ft}$
1–5. $N_B = 0, V_B = 288 \text{ lb},$
$M_B = -1.15 \text{ kip}\cdot\text{ft}$
1–6. $N_D = 0.703 \text{ kN}, V_D = 0.3125 \text{ kN},$
$M_D = 0.3125 \text{ kN}\cdot\text{m}$
1–7. $N_F = 1.17 \text{ kN}, V_F = 0, M_F = 0, N_E = 0.703 \text{ kN},$
$V_E = -0.3125 \text{ kN}, M_E = 0.3125 \text{ kN}\cdot\text{m}$
1–9. $N_D = 0, V_D = -3.25 \text{ kN}, M_D = 5.625 \text{ kN}\cdot\text{m}$
1–10. $N_A = 0, V_A = 450 \text{ lb}, M_A = -1.125 \text{ kip}\cdot\text{ft},$
$N_B = 0, V_B = 850 \text{ lb}, M_B = -6.325 \text{ kip}\cdot\text{ft},$
$V_C = 0, N_C = -1.20 \text{ kip}, M_C = -8.125 \text{ kip}\cdot\text{ft}$
1–11. $N_D = -527 \text{ lb}, V_D = -373 \text{ lb}, M_D = -373 \text{ lb}\cdot\text{ft},$
$N_E = 75.0 \text{ lb}, V_E = 355 \text{ lb}, M_E = -727 \text{ lb}\cdot\text{ft}$
1–13. $N_{a-a} = -100 \text{ N}, V_{a-a} = 0, M_{a-a} = -15 \text{ N}\cdot\text{m}$
1–14. $N_{b-b} = -86.6 \text{ N}, V_{b-b} = 50 \text{ N}, M_{b-b} = -15 \text{ N}\cdot\text{m}$
1–15. $N_C = 0, V_C = -1.40 \text{ kip}, M_C = 8.80 \text{ kip}\cdot\text{ft}$
1–17. $(N_D)_x = 0, (V_D)_y = 154 \text{ N}, (V_D)_z = -171 \text{ N},$
$(T_D)_x = 0, (M_D)_y = -94.3 \text{ N}\cdot\text{m},$
$(M_D)_z = -149 \text{ N}\cdot\text{m}$
1–18. $(N_C)_x = 0, (V_C)_y = -246 \text{ N}, (V_C)_z = -171 \text{ N},$
$(T_C)_x = 0, (M_C)_y = -154 \text{ N}\cdot\text{m},$
$(M_C)_z = -123 \text{ N}\cdot\text{m}$
1–19. $(V_A)_x = 0, (N_A)_y = -25 \text{ lb}, (V_A)_z = 43.3 \text{ lb},$
$(M_A)_x = 303 \text{ lb}\cdot\text{in.}, (T_A)_y = -130 \text{ lb}\cdot\text{in.},$
$(M_A)_z = -75 \text{ lb}\cdot\text{in.}$
1–21. $N_E = -2.94 \text{ kN}, V_E = -2.94 \text{ kN},$
$M_E = -2.94 \text{ kN}\cdot\text{m}$
1–22. $F_{BC} = 1.39 \text{ kN}, F_A = 1.49 \text{ kN}, N_D = 120 \text{ N},$
$V_D = 0, M_D = 36.0 \text{ N}\cdot\text{m}$
1–23. $N_E = 0, V_E = 120 \text{ N}, M_E = 48.0 \text{ N}\cdot\text{m},$
Short link: $V = 0, N = 1.39 \text{ kN}, M = 0$
1–25. $V_B = 496 \text{ lb}, N_B = 59.8 \text{ lb}, M_B = 480 \text{ lb}\cdot\text{ft},$
$N_C = 495 \text{ lb}, V_C = 70.7 \text{ lb}, M_C = 1.59 \text{ kip}\cdot\text{ft}$
1–26. $N_F = 0, V_F = 80 \text{ lb}, M_F = 160 \text{ lb}\cdot\text{ft},$
$N_G = 16.7 \text{ lb}, V_G = 72.0 \text{ lb}, M_G = 108 \text{ lb}\cdot\text{ft}$
1–27. $(V_B)_x = -300 \text{ N}, (N_B)_y = -800 \text{ N}, (V_B)_z = 771 \text{ N},$
$(M_B)_x = 2.11 \text{ kN}\cdot\text{m}, (T_B)_y = -600 \text{ N}\cdot\text{m},$
$(M_B)_z = 600 \text{ N}\cdot\text{m}$
1–29. $V_B = 0.785\, wr, N_B = 0, T_B = 0.0783\, wr^2,$
$M_B = -0.293\, wr^2$
1–31. $\tau_{avg} = 119 \text{ MPa}$
1–33. $\sigma_{avg} = \dfrac{P}{A}\sin^2\theta,\ \tau_{avg} = \dfrac{P}{2A}\sin 2\theta$
1–34. $F = 22.5 \text{ kip}, d = 0.833 \text{ in.}$
1–35. $P_{allow} = 9.12 \text{ kip}$
1–37. $P = 40 \text{ MN}, d = 2.40 \text{ m}$
1–38. $\sigma = 2.92 \text{ psi}, \tau = 8.03 \text{ psi}$
1–39. $\sigma_{BC} = \left\{\dfrac{1.528\cos\theta}{\sin(45^\circ + \theta/2)}\right\} \text{ ksi}$
1–41. $P = 37.7 \text{ kN}$
1–42. $(\tau_{avg})_A = 50.9 \text{ MPa}$
1–43. $\tau_B = \tau_C = 81.9 \text{ MPa}, \tau_A = 88.1 \text{ MPa}$
1–45. $\sigma = (238 - 22.6z) \text{ kPa}$
1–46. $\sigma_{AB} = 333 \text{ MPa}, \sigma_{CD} = 250 \text{ MPa}$
1–47. $d = 1.20 \text{ m}$
1–49. $\tau_{avg} = 11.1 \text{ ksi}$
1–50. $\sigma_{a-a} = 90.0 \text{ kPa}, \tau_{a-a} = 52.0 \text{ kPa}$
1–51. $\sigma = 4.69 \text{ MPa}, \tau = 8.12 \text{ MPa}$
1–53. $\sigma = [43.75 - 22.5x] \text{ MPa}$
1–54. $\sigma = 66.7 \text{ psi}, \tau = 115 \text{ psi}$
1–55. $\sigma_{AB} = 127 \text{ MPa}, \sigma_{AC} = 129 \text{ MPa}$
1–57. $w = w_1 e^{(w_1^2\gamma)z/(2P)}$
1–58. $\theta = 30.7^\circ, \sigma = 152 \text{ MPa}$
1–59. $\sigma = \dfrac{m\omega^2}{8A}(L^2 - 4x^2)$
1–61. $\sigma = (32.5 - 20.0x) \text{ MPa}$
1–62. $\sigma = \dfrac{w_0}{2aA}(2a^2 - x^2)$
1–63. $\sigma = \dfrac{w_0}{2aA}(2a - x)^2$
1–65. $P = 9.375 \text{ kip}$
1–66. $P = 62.5 \text{ kN}$
1–67. $\omega = 6.85 \text{ rad/s}$
1–69. Use $h = 2\dfrac{3}{4}$ in.
1–70. $d = 5.71 \text{ mm}$
1–71. $P = 0.491 \text{ kip}$
1–73. $F = 3.09 \text{ kip}$
1–74. $F_H = 20.0 \text{ kN}, F_{BF} = F_{AG} = 15.0 \text{ kN},$
$d_{EF} = d_{CG} = 11.3 \text{ mm}$
1–75. For A': Use a 3 in. × 3 in. plate,
For B': Use a $4\frac{1}{2}$ in. × $4\frac{1}{2}$ in. plate
1–77. Use $d_A = \dfrac{5}{8}$ in., $d_B = 1\dfrac{1}{16}$ in.
1–78. $d_{AB} = 4.81 \text{ mm}, d_{AC} = 5.22 \text{ mm}$
1–79. $P = 5.83 \text{ kN}$
1–81. $d_A = d_B = 5.20 \text{ mm}$
1–82. $(\text{F.S.})_{st} = 2.14, (\text{F.S.})_{con} = 3.53$
1–83. $W = 680 \text{ lb}$
1–85. $d_2 = 35.7 \text{ mm}, d_3 = 27.6 \text{ mm}, d_1 = 22.6 \text{ mm}$
1–86. $d_{AB} = 15.5 \text{ mm}, d_{AC} = 13.0 \text{ mm}$
1–87. $P = 7.54 \text{ kN}$
1–89. $P = 9.09 \text{ kip}$
1–90. $d_B = 6.11 \text{ mm}, d_w = 15.4 \text{ mm}$

1–91. $P = 55.0$ kN
1–93. $d_{AB} = 6.90$ mm, $d_{CD} = 6.20$ mm
1–94. $h = 1.74$ in.
1–95. $d = 0.620$ in., $P_{max} = 7.25$ kip
1–96. $t = 0.800$ in., $P_{max} = 24.0$ kip, $w = 2.50$ in.
R1–1. $N_D = -2.16$ kip, $V_D = 0$, $M_D = 2.16$ kip·ft, $V_E = 0.540$ kip, $N_E = 4.32$ kip, $M_E = 2.16$ kip·ft
R1–2. $\sigma_s = 208$ MPa, $(\tau_{avg})_a = 4.72$ MPa, $(\tau_{avg})_b = 45.5$ MPa
R1–3. Use $t = \frac{1}{4}$ in., $d_A = 1\frac{1}{8}$ in., $d_B = \frac{13}{16}$ in.
R1–5. $\tau_{avg} = 25.5$ MPa, $\sigma_b = 4.72$ MPa
R1–6. $\sigma_{a-a} = 200$ kPa, $\tau_{a-a} = 115$ kPa
R1–7. $\sigma_{40} = 3.98$ MPa, $\sigma_{30} = 7.07$ MPa, $\tau_{avg} = 5.09$ MPa

Chapter 2

2–1. $\epsilon = 0.167$ in./in.
2–2. $\epsilon = 0.0472$ in./in.
2–3. $\epsilon_{CE} = 0.00250$ mm/mm, $\epsilon_{BD} = 0.00107$ mm/mm
2–5. $\gamma_{xy} = -0.0200$ rad
2–6. $(\gamma_A)_{xy} = -0.0262$ rad, $(\gamma_B)_{xy} = -0.205$ rad, $(\gamma_C)_{xy} = -0.205$ rad, $(\gamma_D)_{xy} = -0.0262$ rad
2–7. $(\epsilon_{avg})_{AC} = 6.04(10^{-3})$ mm/mm
2–9. $\epsilon_{AB} = \dfrac{0.5\Delta L}{L}$
2–10. $(\gamma_A)_{xy} = 27.8(10^{-3})$ rad, $(\gamma_B)_{xy} = 35.1(10^{-3})$ rad
2–11. $(\gamma_{xy})_C = 25.5(10^{-3})$ rad, $(\gamma_{xy})_D = 18.1(10^{-3})$ rad
2–13. $\epsilon_{AD} = 0.0566$ mm/mm, $\epsilon_{CF} = -0.0255$ mm/mm
2–14. $\epsilon_{AB} = 0.00418$ mm/mm
2–15. $\Delta_B = 6.68$ mm
2–17. $\epsilon = 2kx$
2–18. $(\gamma_B)_{xy} = 11.6(10^{-3})$ rad, $(\gamma_A)_{xy} = 11.6(10^{-3})$ rad
2–19. $(\gamma_C)_{xy} = 11.6(10^{-3})$ rad, $(\gamma_D)_{xy} = 11.6(10^{-3})$ rad
2–21. $\epsilon_x = -0.03$ in./in., $\epsilon_y = 0.02$ in./in.
2–22. $\gamma_{xy} = 0.00880$ rad
2–23. $\epsilon_x = 0.00443$ mm/mm
2–25. $\gamma_A = 0$, $\gamma_B = 0.199$ rad
2–26. $(\gamma_{x'y'})_A = -0.0672$ rad, $(\gamma_{x'y'})_B = 0.0672$ rad
2–27. $\epsilon_{AB} = -7.77(10^{-3})$ in./in., $\epsilon_{BD} = 0.025$ in./in. $\epsilon_{AC} = -0.0417$ in./in.
2–29. $(\epsilon_{avg})_{AC} = 0.0168$ mm/mm, $(\gamma_A)_{xy} = 0.0116$ rad
2–30. $(\epsilon_{avg})_{BD} = 1.60(10^{-3})$ mm/mm, $(\gamma_B)_{xy} = 0.0148$ rad
2–31. $(\Delta x)_C = \dfrac{kL}{\pi}$, $\epsilon_{avg} = \dfrac{2k}{\pi}$
2–33. $\epsilon_{AB} = \dfrac{v_B \sin\theta}{L} - \dfrac{u_A \cos\theta}{L}$

Chapter 3

3–1. $(\sigma_u)_{approx} = 110$ ksi, $(\sigma_f)_{approx} = 93.1$ ksi, $(\sigma_Y)_{approx} = 55$ ksi, $E_{approx} = 32.0(10^3)$ ksi
3–2. $E = 55.3(10^3)$ ksi, $u_r = 9.96 \dfrac{\text{in}\cdot\text{lb}}{\text{in}^3}$
3–3. $(u_t)_{approx} = 85.0 \dfrac{\text{in}\cdot\text{lb}}{\text{in}^3}$
3–5. Elastic recovery = 0.00350 in., Permanent elongation = 0.1565 in.
3–6. $(u_r)_{approx} = 20.0 \dfrac{\text{in}\cdot\text{lb}}{\text{in}^3}$, $(u_t)_{approx} = 18.0 \dfrac{\text{in}\cdot\text{kip}}{\text{in}^3}$
3–7. $\delta_{AB} = 0.152$ in.
3–9. $\delta = 0.979$ in.
3–10. $E_{approx} = 10.0(10^3)$ ksi, $P_Y = 9.82$ kip, $P_u = 13.4$ kip
3–11. Elastic recovery = 0.012 in., Permanent elongation = 0.0680 in.
3–13. $E = 28.6(10^3)$ ksi
3–14. $\delta_{BD} = 0.0632$ in.
3–15. $P = 570$ lb
3–17. $\delta_{AB} = 0.0913$ in.
3–18. $w = 228$ lb/ft
3–19. $\sigma_{YS} = 2.03$ MPa
3–21. $P = 15.0$ kip
3–22. $A_{BC} = 0.8$ in^2, $A_{BA} = 0.2$ in^2
3–23. $\delta_{AB} = 0.304$ in.
3–25. $\delta = 0.126$ mm, $\Delta d = -0.00377$ mm
3–26. $p = 741$ kPa, $\delta = 7.41$ mm
3–27. $\nu = 0.350$
3–29. $\gamma = 0.250$ rad
3–30. $\gamma = 3.06(10^{-3})$ rad
3–31. $\gamma_P = 0.0189$ rad
3–33. $E = 32.5(10^3)$ ksi, $P = 2.45$ kip
3–34. $\delta = \dfrac{Pa}{2bhG}$
R3–1. $G_{al} = 4.31(10^3)$ ksi
R3–2. $d' = 0.4989$ in.
R3–3. $x = 1.53$ m, $d'_A = 30.008$ mm
R3–5. $P = 6.48$ kip
R3–6. $\epsilon = 0.000999$ in./in., $\epsilon_{unstr} = 0$
R3–7. $L = 10.17$ in.
R3–9. $\epsilon_b = 0.00227$ mm/mm, $\epsilon_s = 0.000884$ mm/mm
R3–10. $G = 5$ MPa

Chapter 4

4–1. $\delta_B = 2.93$ mm ↓, $\delta_A = 3.55$ mm ↓
4–2. $\delta_{A/D} = 0.111$ in. away from end D
4–3. $\sigma_{AB} = 22.2$ ksi (T), $\sigma_{BC} = 41.7$ ksi (C), $\sigma_{CD} = 25.0$ ksi (C), $\delta_{A/D} = 0.00157$ in. towards end D

4–5. $\delta_{A/E} = 0.697$ mm
4–6. $\sigma_A = 13.6$ ksi, $\sigma_B = 10.3$ ksi, $\sigma_C = 3.2$ ksi, $\delta_D = 2.99$ ft
4–7. $\delta_C = 0.0975$ mm →
4–9. $\delta_F = 0.453$ mm
4–10. $P = 4.97$ kN
4–11. $\delta_t = 0.0260$ in.
4–13. $\delta_D = 17.3$ mm
4–14. $F = 8.00$ kN, $\delta_{A/B} = -0.311$ mm
4–15. $F = 4.00$ kN, $\delta_{A/B} = -0.259$ mm
4–17. $P = \dfrac{F_{max} L}{2}$, $\delta = \dfrac{F_{max} L^2}{3AE}$
4–18. $\delta_B = 0.262$ in.
4–19. $P = 57.3$ kip
4–21. $d_{AB} = 0.841$ in., $d_{CD} = 0.486$ in.
4–22. $x = 4.24$ ft, $w = 1.02$ kip/ft
4–23. $\delta_{A/D} = 0.129$ mm, $h' = 49.9988$ mm, $w' = 59.9986$ mm
4–25. $\delta_C = 0.00843$ in., $\delta_E = 0.00169$ in., $\delta_B = 0.0333$ in.
4–26. $P = 6.80$ kip
4–27. $P = 11.8$ kip
4–29. $\delta = 2.37$ mm
4–30. $\delta = \dfrac{2.63\,P}{\pi r E}$
4–31. $\sigma_{con} = 2.29$ ksi, $\sigma_{st} = 15.8$ ksi
4–33. $\sigma_{al} = 27.5$ MPa, $\sigma_{st} = 79.9$ MPa
4–34. $\sigma_{con} = 1.64$ ksi, $\sigma_{st} = 11.3$ ksi
4–35. $P = 114$ kip
4–37. $F_C = \left[\dfrac{9(8ka + \pi d^2 E)}{136ka + 18\pi d^2 E}\right]P$, $F_A = \left(\dfrac{64ka + 9\pi d^2 E}{136ka + 18\pi d^2 E}\right)P$
4–38. $T_{AC} = 0.806$ kip, $T_{AB} = 1.19$ kip
4–39. $A_{AB} = 0.0144$ in^2
4–41. $P = 126$ kN
4–42. $\sigma_{st} = 102$ MPa, $\sigma_{br} = 50.9$ MPa
4–43. $\sigma_{AB} = \sigma_{CD} = 26.5$ MPa, $\sigma_{EF} = 33.8$ MPa
4–45. $P_b = 14.4$ kN
4–46. $F_D = 20.4$ kN, $F_A = 180$ kN
4–47. $P = 198$ kN
4–49. $\delta_B = 0.0733$ in.
4–50. $\theta = 0.0875°$
4–51. $\delta_B = 0.00257$ in.
4–53. $F_D = 71.4$ kN, $F_C = 329$ kN
4–54. $F_D = 219$ kN, $F_C = 181$ kN
4–55. $\sigma_{BE} = 96.3$ MPa, $\sigma_{AD} = 79.6$ MPa, $\sigma_{CF} = 113$ MPa
4–57. $d_{AC} = 1.79$ mm
4–58. $F_B = 16.9$ kN, $F_A = 16.9$ kN
4–59. $\delta_{sp} = 0.0390$ mm
4–61. $s = 0.133(10^{-3})$ in.
4–62. $F_A = F_B = 25.6$ kN
4–63. $\delta_A = \delta_B = 4.42$ mm
4–65. $A'_1 = \left(\dfrac{E_1}{E_2}\right)A_1$
4–66. $A'_2 = \left(\dfrac{E_2}{E_1}\right)A_2$
4–67. $F_{AB} = 12.0$ kN (T), $F_{AC} = F_{AD} = 6.00$ kN (C)
4–69. $\sigma_{al} = 2.46$ ksi, $\sigma_{br} = 5.52$ ksi, $\sigma_{st} = 22.1$ ksi
4–70. $F = 0.510$ kip
4–71. $T_2 = 112°$F, $\sigma_{al} = \sigma_{cu} = 25.6$ ksi
4–73. $\sigma = 19.1$ ksi
4–74. $F = 7.60$ kip
4–75. $\delta = 0.348$ in., $F = 19.5$ kip
4–77. $F = \dfrac{\alpha AE}{2}(T_B - T_A)$
4–78. $\sigma = 180$ MPa
4–79. $\sigma = 105$ MPa
4–81. $F = 904$ N
4–82. $T_2 = 244°$C
4–83. $F_{AC} = F_{AB} = 10.0$ lb, $F_{AD} = 136$ lb
4–85. $F_{AB} = F_{EF} = 1.85$ kN
4–86. $d = \left(\dfrac{2E_2 + E_1}{3(E_2 + E_1)}\right)w$
4–87. $\sigma_{max} = 168$ MPa
4–89. $P = 49.1$ kN
4–90. $P = 77.1$ kN, $\delta = 0.429$ mm
4–91. $P = 1.34$ kip
4–93. $w = 2.32$ in.
4–94. $P = 16.8$ kip, $K = 1.29$
4–95. $P = 19$ kN, $K = 1.26$
4–97. $F_{st} = 444$ N, $F_{al} = 156$ N; $F_{st} = 480$ N, $F_{al} = 240$ N
4–98. $\delta_{tot} = 0.432$ in.
4–99. $\sigma_A = \sigma_B = \sigma_C = 53.3$ ksi, $\delta = 8.69$ in.
4–101. $F_{AB} = 3.14$ kN, $F_{CD} = 2.72$ kN, $\delta_{CD} = 0.324$ mm, $\delta_{AB} = 0.649$ mm
4–102. (a) $P = 2.62$ kN, (b) $P = 3.14$ kN
4–103. $\sigma_{st} = 36.0$ ksi, $\sigma_{al} = 19.8$ ksi
4–105. $(\sigma_{CF})_r = 17.7$ MPa (C), $(\sigma_{BE})_r = 53.2$ MPa (T), $(\sigma_{AD})_r = 35.5$ MPa (C)
4–106. $P = 92.8$ kN, $P = 181$ kN
4–107. $d_B = 17.8$ mm
4–109. $\delta = 0.0120$ in.
4–110. $w = 0.130$ kip/ft, $\delta = 0.0596$ in.
R4–1. $\sigma_b = 33.5$ MPa, $\sigma_r = 16.8$ MPa
R4–2. $T = 507°$C
R4–3. $F_{AB} = F_{AC} = F_{AD} = 58.9$ kN (C)

R4–5. At yielding of section AB: $(F_{AB})_Y = 30$ kip, $(F_{BC})_Y = 120$ kip, $P = 150$ kip
R4–6. $F_B = 2.13$ kip, $F_A = 2.14$ kip
R4–7. $P = 4.85$ kip
R4–9. $\delta_{A/B} = 0.491$ mm

Chapter 5

5–1. $r' = 0.841r$
5–2. $r' = 0.707\,r$
5–3. $T = 19.6$ kN · m, $T' = 13.4$ kN · m
5–5. $\tau_A = 3.45$ ksi, $\tau_B = 2.76$ ksi
5–6. $(T_1)_{max} = 2.37$ kN · m, $(\tau_{max})_{CD} = 35.6$ MPa, $(\tau_{max})_{DE} = 23.3$ MPa
5–7. $\tau^{abs}_{max} = 44.8$ MPa
5–9. $\tau_B = 6.79$ MPa, $\tau_A = 7.42$ MPa
5–10. $\tau_{max} = 14.5$ MPa
5–11. $\tau_{AB} = 7.82$ ksi, $\tau_{BC} = 2.36$ ksi
5–13. $\tau_i = 34.5$ MPa, $\tau_o = 43.1$ MPa
5–14. Use $d = 1\frac{3}{4}$ in.
5–15. $(\tau_{AB})_{max} = 23.9$ MPa, $(\tau_{BC})_{max} = 15.9$ MPa
5–17. $\tau_{max} = 4.89$ ksi
5–18. $\tau_{max} = 7.33$ ksi
5–19. $\tau_A = 1.31$ ksi, $\tau_B = 2.62$ ksi
5–21. $\tau_A = 9.43$ MPa, $\tau_B = 14.1$ MPa
5–22. $\tau^{abs}_{max} = 0$ occurs at $x = 0.700$ m, $\tau^{abs}_{max} = 33.0$ MPa occurs at $x = 0$.
5–23. $d = 34.4$ mm
5–25. $d = 46.7$ mm
5–26. $T_B = \dfrac{2T_A + t_A L}{2}$, $\tau_{max} = \dfrac{(2T_A + t_A L)r_o}{\pi(r_o^4 - r_i^4)}$
5–27. $t = 0.174$ in.
5–29. $c = (2.98\,x)$ mm
5–30. Use $d = 1\frac{3}{8}$ in.
5–31. $(\tau_{AB})_{max} = 1.04$ MPa, $(\tau_{BC})_{max} = 3.11$ MPa
5–33. $\tau_{max} = 856$ psi
5–34. Use $d = \frac{1}{2}$ in.
5–35. $\tau_{max} = 1.07$ ksi
5–37. Use $d = \frac{11}{16}$ in.
5–38. $\tau_{max} = 6.57$ ksi
5–39. $(\tau_{max})_{CF} = 12.5$ MPa, $(\tau_{max})_{BC} = 7.26$ MPa
5–41. $t = 2.28$ mm
5–42. $\omega = 17.7$ rad/s
5–43. $\tau_{max} = \dfrac{2TL^3}{\pi[r_A(L - x) + r_B x]^3}$
5–45. $(\tau_{max})_B = 12.2$ ksi
5–46. Use $d_i = 1\frac{5}{8}$ in.
5–47. $\tau_{max} = 44.3$ MPa, $\phi = 11.9°$
5–49. $\phi_{B/A} = 0.730°$ ↺
5–50. $\tau^{abs}_{max} = 10.2$ MPa
5–51. $T = 5.09$ kN · m, $\phi_{A/C} = 3.53°$
5–53. $\phi_A = 1.57°$ ↻
5–54. Use $d = 22$ mm, $\phi_{A/D} = 2.54°$ ↻
5–55. Use $d = 25$ mm
5–57. $\tau_{max} = 9.12$ MPa, $\phi_{E/B} = 0.585°$
5–58. $\tau_{max} = 14.6$ MPa, $\phi_{B/E} = 1.11°$
5–59. $\phi_{B/D} = 1.15°$
5–61. $\tau^{abs}_{max} = 20.4$ MPa,
For $0 \le x < 0.5$ m,
$\phi(x) = \{0.005432\,(x^2 + x)\}$ rad
For $0.5\text{ m} < x \le 1$ m,
$\phi(x) = \{-0.01086x^2 + 0.02173\,x - 0.004074\}$ rad
5–62. $\tau^{abs}_{max} = 24.3$ MPa, $\phi_{D/A} = 0.929°$
5–63. $\phi_{A/C} = 5.45°$
5–65. $\phi_{D/C} = 0.0823$ rad, $\tau^{abs}_{max} = 34.0$ ksi
5–66. $t = 7.53$ mm
5–67. $\omega = 131$ rad/s
5–69. $k = 1.20(10^6)$ N/m^2, $\phi = 3.56°$
5–70. $k = 12.3(10^3)$ N/m$^{2/3}$, $\phi = 2.97°$
5–71. $d_t = 201$ mm, $\phi = 3.30°$
5–73. $\phi_{F/E} = 0.999\,(10)^{-3}$ rad, $\phi_{F/D} = 0.999\,(10)^{-3}$ rad, $\tau_{max} = 3.12$ MPa
5–74. $\phi = \dfrac{t_0 L^2}{\pi c^4 G}$
5–75. $\phi_A = 0.432°$ ↻
5–77. $(\tau_{AC})_{max} = 14.3$ MPa, $(\tau_{CB})_{max} = 9.55$ MPa
5–78. $\tau^{abs}_{max} = 9.77$ MPa
5–79. $\tau_{max} = 29.3$ ksi
5–81. $\tau_{max} = 389$ psi
5–82. $(\tau_{max})_{AC} = 68.2$ MPa, $(\tau_{max})_{BC} = 90.9$ MPa
5–83. $(\tau_{AC})_{max} = 9.55$ MPa, $(\tau_{CB})_{max} = 6.37$ MPa
5–85. $(\tau_{st})_{max} = 86.5$ MPa, $(\tau_{mg})_{max} = 41.5$ MPa, $(\tau_{mg})|_{\rho=0.02\text{ m}} = 20.8$ MPa
5–86. $T_B = 22.2$ N · m, $T_A = 55.6$ N · m
5–87. $\phi_E = 1.66°$
5–89. $\tau^{abs}_{max} = 64.1$ MPa
5–90. $(\tau_{BD})_{max} = 4.35$ ksi, $(\tau_{AC})_{max} = 2.17$ ksi
5–91. $\phi_{C/D} = 6.22°$
5–93. $T_B = \dfrac{37}{189}T$, $T_A = \dfrac{152}{189}T$
5–94. $T_B = \dfrac{7t_0 L}{12}$, $T_A = \dfrac{3t_0 L}{4}$
5–95. $T = 0.0820$ N · m, $\phi = 25.5$ rad
5–97. Factor of increase $= \dfrac{1}{k^2}$

5–98. $(\tau_{BC})_{max} = 0.955$ MPa, $(\tau_{AC})_{max} = 1.59$ MPa, $\phi_{B/A} = 0.207°$
5–99. $(\tau_{BC})_{max} = 0.955$ MPa, $(\tau_{AC})_{max} = 1.59$ MPa, $\phi_{B/C} = 0.0643°$
5–101. $T = 1.35$ kip·ft, $\phi = 3.42°$
5–102. $T_B = 26.7$ lb·ft, $T_A = 33.3$ lb·ft, $\phi_C = 0.0626°$
5–103. $\tau_{avg} = 3.35$ ksi
5–105. $\tau_{max} = 61.1$ MPa, $\phi_B = 0.700°$
5–106. Use $a = 47$ mm, $\phi_B = 0.897°$
5–107. $T = 6.65$ kip·ft
5–109. Factor of increase = 1.66
5–110. $a = 28.9$ mm
5–111. $\tau_{avg} = 1.25$ MPa
5–113. $t = 0.231$ in.
5–114. $T = 9.00$ kip·ft
5–115. $b = 0.773$ in.
5–117. $T = 3.36$ kN·m, $\phi = 11.6°$
5–118. $\tau_{avg} = 1.19$ MPa
5–119. $(\tau_{avg})_A = (\tau_{avg})_B = 357$ kPa
5–121. It is possible.
5–122. $P = 250$ kW
5–123. $\tau_{max} = 2.76$ ksi
5–125. $T_Y = 1.26$ kN·m, $\phi = 3.58°$, $\phi' = 4.86°$
5–126. $\rho_Y = 13.0$ mm
5–127. $T_P = 0.105$ N·m
5–129. $T = 20.8$ kN·m, $\phi = 34.4°$, $(\tau_r)_{max} = 56.7$ MPa, $\phi_r = 12.2°$
5–130. $T = 14.4$ kip·ft
5–131. $\rho_Y = 1.29$ in.
5–133. $T_P = 34.3$ kN·m, $\phi_r = 5.24°$, $(\tau_r)_o = 15.3$ MPa, $(\tau_r)_i = -17.3$ MPa
5–134. $T_P = 80.6$ kN·m, $\phi_r = 1.47°$
5–135. $\rho_Y = 1.00$ in., $\phi = 12.4°$
5–137. $T = 148$ kN·m
5–138. $T_P = 11.6$ kN·m, $\phi = 3.82°$
5–139. $\rho_Y = 26.7$ mm
5–141. $T = 193$ lb·ft, $\phi = 17.2°$
5–142. $T_P = 218$ lb·ft
5–143. $T_t = 7.39$ kN·m, $T_c = 7.61$ kN·m
R5–1. Use $d = 26$ mm, $\phi_{A/C} = 2.11°$
R5–2. Use $d = 28$ mm.
R5–3. $\tau = 88.3$ MPa, $\phi = 4.50°$
R5–5. The circular shaft will resist the largest torque. For the square shaft: 73.7%, For the triangular shaft: 62.2%
R5–6. $(\tau_{max})_{AB} = 3.60$ ksi, $(\tau_{max})_{BC} = 10.7$ ksi
R5–7. $P = 2.80$ kip
R5–9. $P = 1.10$ kW, $\tau_{max} = 825$ kPa

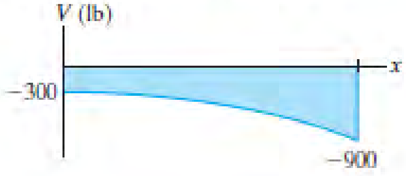
Chapter 6

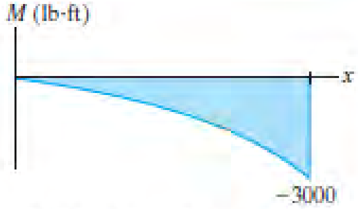
6–1. For $0 \le x < 3$ ft:
$V = 170$ lb,
$M = \{170x\}$ lb·ft,
For 3 ft $< x < 5$ ft:
$V = -630$ lb,
$M = \{-630x + 2400\}$ lb·ft,
For 5 ft $< x \le 6$ ft:
$V = 500$ lb,
$M = \{500x - 3250\}$ lb·ft

6–2. For $0 < x \le 4$ ft:
$V = -250$ lb,
$M = \{-250x\}$ lb·ft,
For 4 ft $\le x \le 10$ ft: $V = \{1050 - 150x\}$ lb,
$M = \{-75x^2 + 1050x - 4000\}$ lb·ft,
For 10 ft $< x \le 14$ ft: $V = 250$ lb,
$M = \{250x - 3500\}$ lb·ft

6–3. For $0 \le x < 6$ ft:
$V = \{30.0 - 2x\}$ kip,
$M = \{-x^2 + 30.0x - 216\}$ kip·ft,
For 6 ft $< x \le 10$ ft:
$V = 8.00$ kip,
$M = \{8.00x - 120\}$ kip·ft

6–5. $V = \{-300 - 16.67x^2\}$ lb,
$M = \{-300x - 5.556x^3\}$ lb·ft



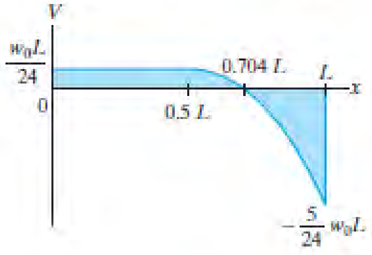


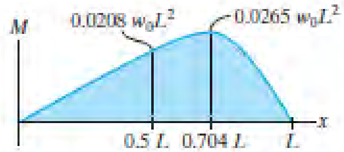
6–6. $V = 15.6$ N, $M = \{15.6x + 100\}$ N·m

6–7. For $0 \le x < \frac{L}{2}$: $V = \frac{w_0 L}{24}$, $M = \frac{w_0 L}{24}x$.

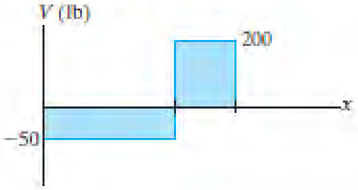
For $\frac{L}{2} < x \le L$: $V = \frac{w_0}{24L}\left[L^2 - 6(2x - L)^2\right]$,

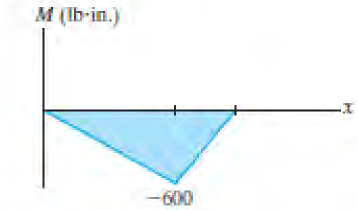
$M = \frac{w_0}{24L}\left[L^2 x - (2x - L)^3\right]$



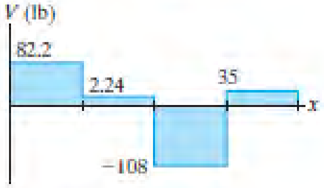


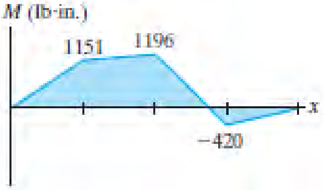
6–9. $T_1 = 250$ lb, $T_2 = 200$ lb



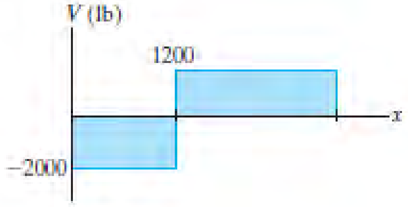


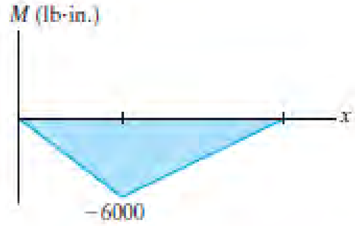
6–10.





6–11.





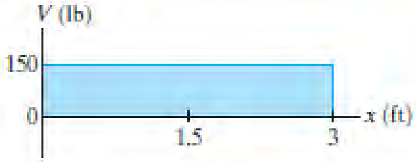
6–13. $V = -\frac{M_0}{L}$,

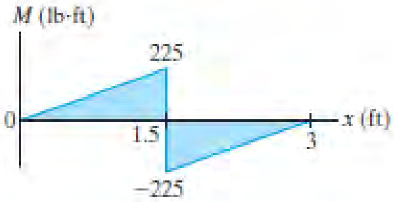
For $0 \le x < \frac{L}{2}$, $M = M_0 - \left(\frac{M_0}{L}\right)x$,

For $\frac{L}{2} < x \le L$, $M = -\left(\frac{M_0}{L}\right)x$

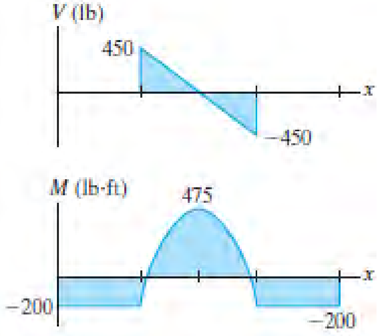
6–14. For $0 \le x < 5$ ft:
$V = \{-2x\}$ kip,
$M = \{-x^2\}$ kip · ft,
For 5 ft $< x < 10$ ft:
$V = -0.5$ kip,
$M = \{-22.5 - 0.5x\}$ kip · ft,
For 10 ft $< x \le 15$ ft:
$V = -0.5$ kip,
$M = \{7.5 - 0.5x\}$ kip · ft

6–15.

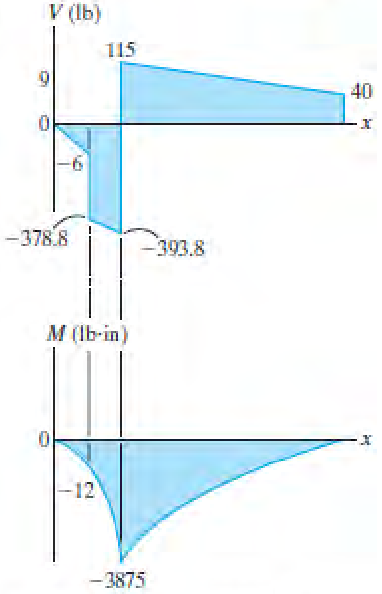




6–17. $V = 1050 - 150x$
$M = -75x^2 + 1050x - 3200$



6–18.

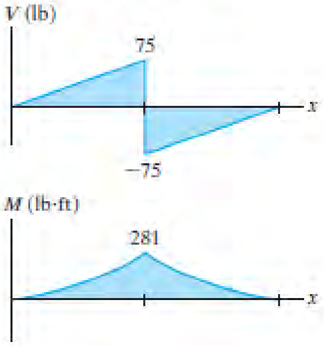


6–19. $a = 0.866\,L,\ M_{max} = 0.134\,PL$

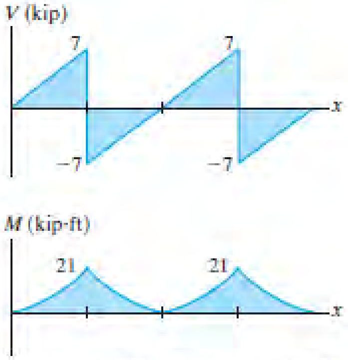
6–21. For $0 \le x < 5$ ft:
$V = \{-2x\}$ kip,
$M = \left\{-20.0 - x^2\right\}$ kip · ft,
For 5 ft $< x < 10$ ft:
$V = 3.00$ kip,
$M = \{-20.0 + 3x\}$ kip · ft,
For 10 ft $< x \le 15$ ft:
$V = \{23 - 2x\}$ kip,
$M = \left\{-120 + 23x - x^2\right\}$ kip · ft

6–22. For $0 \le x < 12$ ft:
$V = \left\{10 - \frac{1}{8}x^2\right\}$ kip,
$M = \left\{10x - \frac{1}{24}x^3\right\}$ kip · ft,
For 12 ft $< x \le 18$ ft:
$V = -8$ kip,
$M = [8(18 - x)]$ kip · ft

6–23. $M_{max} = 281$ lb · ft

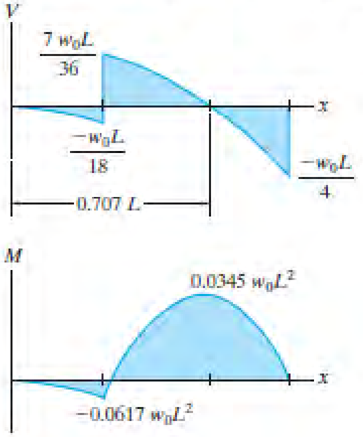


6–25.



6–26. $V_{AB} = -1.625$ kip, $M_B = -18$ kip · ft

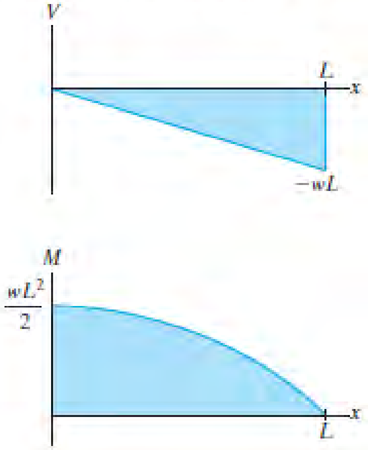
6–27.



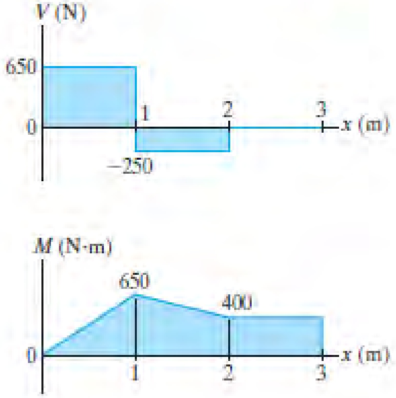
6–29. $V_B = -45\text{ kN}, M_B = -63\text{ kN}\cdot\text{m}$

6–30. $V|_{x=15\text{ ft}} = 1.12\text{ kip}, M|_{x=15} = -1.95\text{ kip}\cdot\text{ft}$

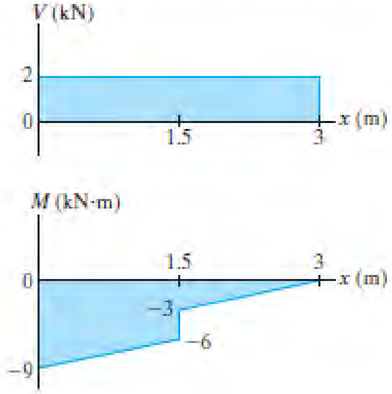
6–31.



6–33.



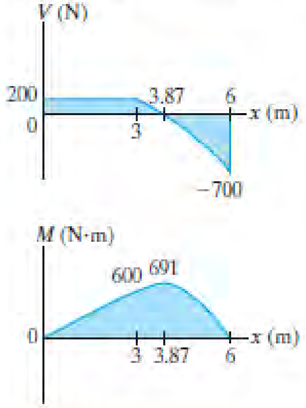
6–34.



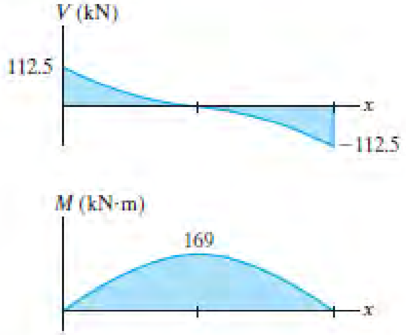
6–35. For $0 \le x < 3$ m: $V = 200$ N, $M = \{200x\}$ N·m.

For $3\text{ m} < x \le 6$ m: $V = \left\{-\frac{100}{3}x^2 + 500\right\}$ N,

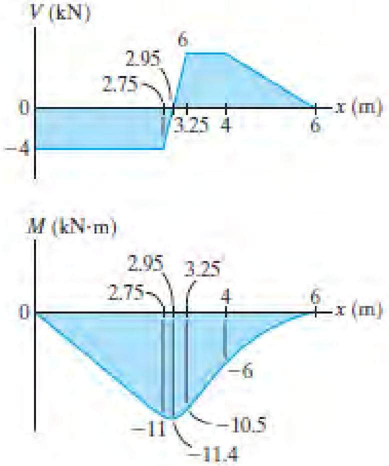
$M = \left\{-\frac{100}{9}x^3 + 500x - 600\right\}$ N·m



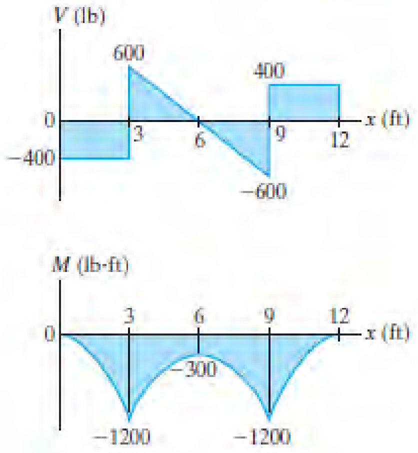
6–37.



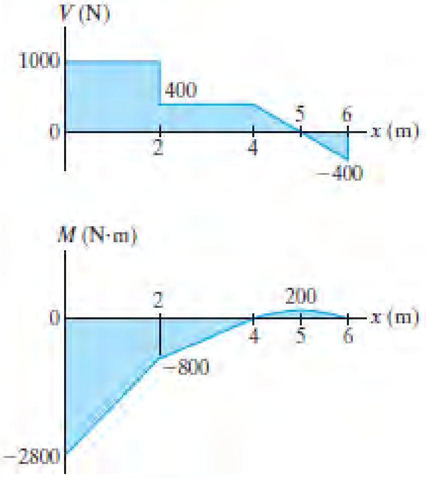
6–38.



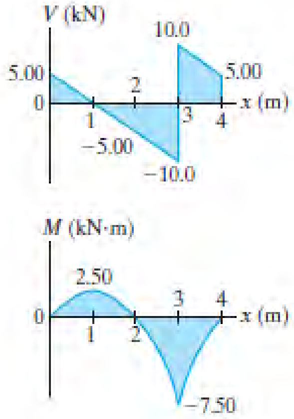
6–39.



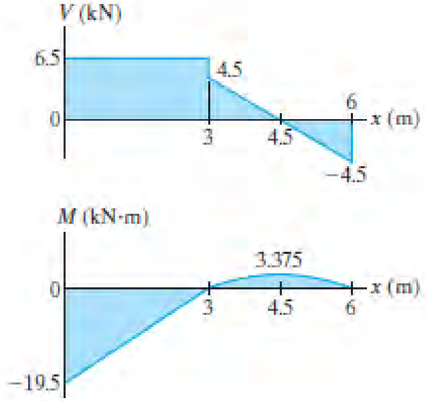
6–41.



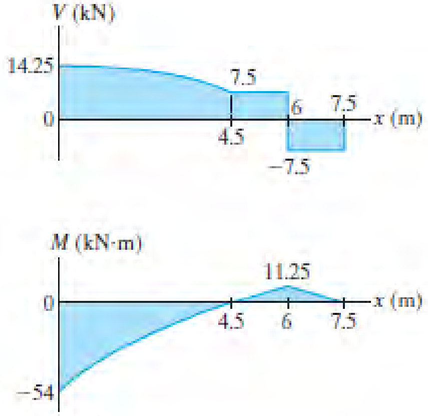
6–42.



6–43.



6–45.



6–46. $a = 0.207L$
6–47. $r = 909$ mm, $M = 61.9$ N · m
6–49. $(\sigma_t)_{max} = 3.72$ ksi, $(\sigma_c)_{max} = 1.78$ ksi
6–50. $\sigma_{max} = 1.46$ ksi
6–51. $F = 10.5$ kip
6–53. $F = 4.56$ kN
6–54. $(\sigma_{max})_c = 78.1$ MPa, $(\sigma_{max})_t = 165$ MPa
6–55. $M = 50.3$ kN · m
6–57. $M = 15.6$ kN · m, $\sigma_{max} = 12.0$ MPa
6–58. $\sigma_{max} = 93.0$ psi
6–59. $F = 753$ lb
6–61. % of moment carried by web = 22.6%
6–62. $\sigma_A = 199$ MPa, $\sigma_B = 66.2$ MPa
6–63. $\sigma_{max} = 20.4$ ksi
6–65. (a) $\sigma_{max} = 497$ kPa, (b) $\sigma_{max} = 497$ kPa
6–66. (a) $\sigma_{max} = 249$ kPa, (b) $\sigma_{max} = 249$ kPa
6–67. $\sigma_{max} = 158$ MPa
6–69. $\sigma_{max} = 12.2$ ksi
6–70. $\sigma_{max} = 2.70$ ksi
6–71. $\sigma_{max} = 21.1$ ksi
6–73. $d = 1.28$ in.

6–74. $\sigma_{max} = 45.1$ ksi
6–75. $\sigma_{max} = 52.8$ MPa
6–77. $(\sigma_{max})_c = 1.87$ ksi, $(\sigma_{max})_t = 1.37$ ksi
6–78. $M = 2.92$ kip · ft
6–79. $F_R = 4.23$ kip
6–81. $M = 123$ kN · m
6–82. $\sigma_{max} = 24.4$ ksi
6–83. Use $d = 3\frac{1}{16}$ in.
6–85. $w = 18.75$ kN/m
6–86. Use $b = 3\frac{5}{8}$ in.
6–87. $w_0 = 415$ lb/ft
6–89. $a = 66.9$ mm
6–90. $\sigma_{max} = \dfrac{23w_0 L^2}{36\, bh^2}$
6–91. $\sigma_{max} = 119$ MPa
6–93. $\sigma_{\substack{abs\\max}} = 24.0$ ksi
6–94. $\sigma_{\substack{abs\\max}} = 6.88$ ksi
6–95. Use $d = 1\frac{3}{8}$ in.
6–97. $P = 114$ kip
6–98. $\sigma_{max} = 7.59$ ksi
6–99. $\sigma_{max} = 22.1$ ksi
6–101. $d = 410$ mm
6–102. $w = 937.5$ N/m
6–103. $\sigma_{\substack{abs\\max}} = 10.7$ MPa
6–105. $\sigma_A = -119$ kPa, $\sigma_B = 446$ kPa, $\sigma_D = -446$ kPa, $\sigma_E = 119$ kPa
6–106. $a = 0,\ b = -\left(\dfrac{M_z I_y + M_y I_{yz}}{I_y I_z - I_{yz}^2}\right), c = \dfrac{M_y I_z + M_z I_{yz}}{I_y I_z - I_{yz}^2}$
6–107. $\sigma_A = 21.0$ ksi (C)
6–109. $d = 62.9$ mm
6–110. $\sigma_{max} = 163$ MPa
6–111. $\sigma_A = 20.6$ MPa (C)
6–113. $\sigma_D = 8.72$ ksi (T), $\sigma_B = 8.72$ ksi (C), $\alpha = -36.9°$
6–114. $M = 25.8$ kip · ft
6–115. $d = 28.9$ mm
6–117. $\sigma_A = 2.59$ MPa (T)
6–118. $\sigma_{max} = 151$ MPa, $\alpha = 72.5°$
6–119. $w = 4.37$ kN/m
6–121. $M = 128$ kN · m
6–122. $(\sigma_{max})_{st} = 22.6$ ksi, $(\sigma_{max})_{al} = 13.3$ ksi
6–123. $w = 0.875$ kip/ft
6–125. $M = 35.0$ kN · m
6–126. $(\sigma_{max})_{st} = 123$ MPa, $(\sigma_{max})_w = 5.14$ MPa
6–127. $(\sigma_{st})_{max} = 56.5$ MPa, $(\sigma_w)_{max} = 3.70$ MPa
6–129. $(\sigma_{st})_{max} = 43.4$ MPa, $(\sigma_w)_{max} = 1.81$ MPa
6–130. $M = 154$ lb · ft
6–131. $w_0 = 1.03$ kip/ft
6–133. $M = 58.8$ kN · m
6–134. $(\sigma_{max})_{st} = 154$ MPa, $(\sigma_{max})_{al} = 171$ MPa
6–135. $(\sigma_{max})_{st} = 4.55$ MPa, $(\sigma_{max})_w = 0.298$ MPa
6–137. % of error = 22.3%
6–138. $M = 51.8$ kN · m
6–139. $\sigma_{max} = 842$ psi (T)
6–141. $\sigma_A = 43.7$ MPa (T), $\sigma_B = 7.77$ MPa (T), $\sigma_C = -65.1$ MPa (C)
6–142. $P = 6.91$ kN
6–143. $(\sigma_{max})_t = 204$ psi, $(\sigma_{max})_c = 120$ psi
6–145. $(\sigma_{max})_t = 0.978$ MPa (T), $(\sigma_{max})_c = 0.673$ MPa (C)
6–146. $\sigma_A = 144$ psi (T), $\sigma_B = 106$ psi (C), $\sigma_C = 6.11$ psi (C)
6–147. $\sigma_A = 8.48$ MPa (C), $\sigma_B = 5.04$ MPa (T). No, it is not the same.
6–149. $(\sigma_T)_{max} = 11.1$ MPa (T), $(\sigma_C)_{max} = 8.45$ MPa (C)
6–150. $\sigma_{max} = 187.5$ MPa
6–151. $M = 107$ N · m
6–153. $\sigma_{max} = 22.3$ ksi
6–154. $M = 347$ lb · ft
6–155. $M = 4.46$ kN · m
6–157. $\sigma_{max} = 34.6$ ksi
6–158. $k = 1.17$
6–159. $K = \dfrac{3h}{2}\left[\dfrac{4bt(h-t) + t(h-2t)^2}{bh^3 - (b-t)(h-2t)^3}\right]$
6–161. $M_Y = 271$ kN · m, $M_P = 460$ kN · m
6–162. $M_p = 392$ kip · ft
6–163. $M_P = 172$ kip · ft
6–165. $M_Y = 143$ kip · ft, $M_P = 243$ kip · ft
6–166. $k = 1.16$
6–167. Elastic: $P = 66.7$ kN, Plastic: $P = 100$ kN
6–169. $k = 1.71$
6–170. $k = 1.70$
6–171. $M_Y = 63.6$ kip · ft, $M_P = 180$ kip · ft
6–173. $M_Y = 50.7$ kN · m, $M_P = 86.25$ kN · m
6–174. $k = 1.58$
6–175. $k = 1.71$
6–177. $\sigma_{top} = \sigma_{bottom} = 43.5$ MPa
6–178. $M = 94.7$ N · m
6–179. Maximum elastic moment: $M = 35.0$ kip · ft, Ultimate moment: $M = 59.8$ kip · ft
6–181. $M = 81.7$ kip · ft
6–182. $w = 53.4$ kN/m
R6–1. $k = 1.22$
R6–2. $V = \dfrac{2wL}{27} - \dfrac{w}{2L}x^2, M = \dfrac{2wL}{27}x - \dfrac{w}{6L}x^3$
R6–3. $M = 14.9$ kN · m
R6–5. $\sigma_{max} = 8.41$ ksi
R6–6. $\sigma_A = 225$ kPa (C), $\sigma_B = 265$ kPa (T)

R6–7. $V = 20 - 2x, M = -x^2 + 20x - 166$
R6–9. $V|_{x=600\text{ mm}^-} = -233\text{ N}, M|_{x=600\text{ mm}} = -50\text{ N}\cdot\text{m}$
R6–10. $\sigma_{max} = \frac{6M}{a^3}(\cos\theta + \sin\theta), \theta = 45°, \alpha = 45°$

Chapter 7

7–1. $\tau_A = 2.56\text{ MPa}$
7–2. $\tau_{max} = 3.46\text{ MPa}$
7–3. $V_w = 19.0\text{ kN}$
7–5. $\tau_{max} = 3.91\text{ MPa}$
7–6. $V_{max} = 100\text{ kN}$
7–7. $\tau_{max} = 17.9\text{ MPa}$
7–9. $V_{max} = 32.1\text{ kip}$
7–10. $\tau_{max} = 4.48\text{ ksi}$
7–11. $\tau_{max} = 45.0\text{ MPa}$
7–13. $\tau_{max} = 4.22\text{ MPa}$
7–14. $V_{max} = 190\text{ kN}$
7–15. $V = 9.96\text{ kip}$
7–17. $\tau_A = 1.99\text{ MPa}, \tau_B = 1.65\text{ MPa}$
7–18. $\tau_{max} = 4.62\text{ MPa}$
7–19. $V_w = 27.1\text{ kN}$
7–21. $P_{max} = 1.28\text{ kip}$
7–22. $w_{max} = 2.15\text{ kip/ft}$
7–23. $\tau_{max} = 298\text{ psi}$
7–25. $\tau_{max} = 4.85\text{ MPa}$
7–26. $w = 11.3\text{ kip/ft}, \tau_{max} = 531\text{ psi}$
7–27. $\tau_{max} = 22.0\text{ MPa}, (\tau_{max})_s = 66.0\text{ MPa}$
7–29. $\tau_{max} = 1.05\text{ MPa}$
7–33. $F = 300\text{ lb}$
7–34. $s_t = 1.42\text{ in.}, s_b = 1.69\text{ in.}$
7–35. $V = 4.97\text{ kip}, s_t = 1.14\text{ in.}, s_b = 1.36\text{ in.}$
7–37. $V = 499\text{ kN}$
7–38. $P = 4.97$ kip. For regions AC and BD, $s_{top} = 1.14$ in., $s_{bottom} = 1.36$ in. For region CD, theoretically no nails are required.
7–39. $F = 12.5\text{ kN}$
7–41. $s = 71.3\text{ mm}$
7–42. $V_{max} = 8.82$ kip, use $s = 1\frac{1}{8}$ in.
7–43. $P_{max} = 317\text{ lb}$
7–45. $\tau_{max} = 1.83\text{ ksi}$
7–46. $w_0 = 983\text{ lb/ft}$
7–47. $s = 8.66\text{ in.}, s' = 1.21\text{ in.}$
7–50. $q_A = 228\text{ kN/m}, q_B = 462\text{ kN/m}$
7–51. $q_C = 0, q_D = 601\text{ kN/m}$
7–53. $q_C = 38.6\text{ kN/m}$
7–54. $q_A = 1.39\text{ kN/m}, q_B = 1.25\text{ kN/m}$
7–55. $q_{max} = 1.63\text{ kN/m}$
7–57. $q_{max} = 2.79\text{ kip/in.}$
7–58. $q_A = 200\text{ kN/m}$
7–59. $\tau_{max} = 9.36\text{ MPa}$
7–61. $q_A = 196\text{ lb/in.}, q_B = 452\text{ lb/in.}, q_{max} = 641\text{ lb/in.}$
7–62. $q_B = 12.6\text{ kN/m}, q_{max} = 22.5\text{ kN/m}$
7–63. $e = 70\text{ mm}$
7–65. $V_{AB} = 1.47\text{ kip}$
7–66. $q_{AB} = 207 - 51.6x, q_{CD} = 44.3 - 22.1x, F_{AB} = 413\text{ lb}, F_{CD} = 44.3\text{ lb}$
7–67. $q_A = 0, q_B = 417\text{ lb/in.}$
7–69. $e = \left[\frac{3(\pi + 4)}{4 + 3\pi}\right]r$
7–70. $e = 2r$
R7–1. $F_C = 197\text{ lb}, F_D = 1.38\text{ kip}$
R7–2. $V = 131\text{ kN}$
R7–3. $q_A = 0, q_B = 1.21\text{ kN/m}, q_C = 3.78\text{ kN/m}$
R7–5. $\tau_B = 795\text{ psi}, \tau_C = 596\text{ psi}$

Chapter 8

8–1. $t = 18.8\text{ mm}$
8–2. $r_o = 75.5\text{ in.}$
8–3. (a) $\sigma_1 = 1.04\text{ ksi}, \sigma_2 = 0$, (b) $\sigma_1 = 1.04\text{ ksi}, \sigma_2 = 520\text{ psi}$
8–5. $\sigma_1 = 7.07\text{ MPa}, \sigma_2 = 0$
8–6. $P = 848\text{ N}$
8–7. (a) $\sigma_1 = 127$ MPa, (b) $\sigma_1' = 79.1$ MPa, (c) $(\tau_{avg})_b = 322$ MPa
8–9. $\sigma_{hoop} = 7.20\text{ ksi}, \sigma_{long} = 3.60\text{ ksi}$
8–10. $\sigma_1 = 1.60\text{ ksi}, p = 25\text{ psi}, \delta = 0.00140\text{ in.}$
8–11. $\sigma_2 = 11.5\text{ ksi}, \sigma_1 = 24\text{ ksi}$
8–13. $T_1 = 128°\text{F}, \sigma_1 = 12.1\text{ ksi}, p = 252\text{ psi}$
8–14. $\delta r_i = \frac{pr_i^2}{E(r_o - r_i)}$
8–15. $p = \frac{E(r_2 - r_3)}{\frac{r_2^2}{r_2 - r_1} + \frac{r_3^2}{r_4 - r_3}}$
8–17. $\sigma_{fil} = \frac{pr}{t + t'w/L} + \frac{T}{wt'}, \sigma_w = \frac{pr}{t + t'w/L} - \frac{T}{Lt}$
8–18. $d = 66.7\text{ mm}$
8–19. $d = 133\text{ mm}$
8–21. $\sigma_{max} = \sigma_B = 13.9\text{ ksi (T)}, \sigma_A = 13.6\text{ ksi (C)}$
8–22. $P_{max} = 2.01\text{ kip}$
8–23. $\sigma_{max} = 22.4\text{ ksi (T)}$
8–25. $P_{max} = 128\text{ kN}$
8–26. $\sigma_{max} = 44.0\text{ ksi (T)}$
8–27. $\sigma_{max} = 44.0\text{ ksi (T)}, \sigma_{min} = 41.3\text{ ksi (C)}$
8–29. $\sigma_A = 0.800\text{ ksi (T)}, \sigma_B = 5.20\text{ ksi (C)}, \tau_A = 1.65\text{ ksi}, \tau_B = 0$

8–30. $\sigma_A = 25$ MPa (C), $\sigma_B = 0$, $\tau_A = 0$, $\tau_B = 5$ MPa
8–31. $\sigma_A = 28.8$ ksi, $\tau_A = 0$
8–33. $\sigma_A = 70.0$ MPa (C), $\sigma_B = 10.0$ MPa (C)
8–34. $\sigma_A = 70.0$ MPa (C), $\sigma_B = 10.0$ MPa (C), $\sigma_C = 50.0$ MPa (T), $\sigma_D = 10.0$ MPa (C)
8–35. $\sigma_A = 27.3$ ksi (T), $\sigma_B = 0.289$ ksi (T), $\tau_A = 0$, $\tau_B = 0.750$ ksi
8–37. $\sigma_B = 1.53$ MPa (C), $(\tau_{xz})_B = 0$, $(\tau_{xy})_B = 100$ MPa
8–38. $\sigma_D = -88.0$ MPa, $\tau_D = 0$
8–39. $\sigma_E = 57.8$ MPa, $\tau_E = 864$ kPa
8–41. $\sigma_B = 27.5$ MPa (C), $(\tau_{xz})_B = -8.81$ MPa, $(\tau_{xy})_B = 0$
8–42. $(\sigma_A)_y = 16.2$ ksi (T), $(\tau_A)_{yx} = -2.84$ ksi, $(\tau_A)_{yz} = 0$
8–43. $(\sigma_B)_y = 7.80$ ksi (T), $(\tau_B)_{yz} = 3.40$ ksi, $(\tau_B)_{yx} = 0$
8–45. $\sigma_A = 1.00$ ksi (C), $\sigma_B = 3.00$ ksi (C), $\sigma_C = 1.00$ ksi (C), $\sigma_D = 1.00$ ksi (T)
8–46. $(\sigma_t)_{max} = 103$ MPa (T), $(\sigma_c)_{max} = 117$ MPa (C)
8–47. $\sigma_A = 224$ MPa (T), $(\tau_{xz})_A = -30.7$ MPa, $(\tau_{xy})_A = 0$
8–49. $\sigma_C = 295$ MPa (C), $(\tau_{xy})_C = 25.9$ MPa, $(\tau_{xz})_C = 0$
8–50. $e = \dfrac{c}{4}$
8–51. $6e_y + 18e_z < 5a$
8–54. $\sigma_A = 15.9$ ksi (C), $\sigma_B = 44.6$ ksi (T), $\tau_A = \tau_B = 0$
8–55. $\sigma_A = 16.8$ ksi (C), $(\tau_{xz})_A = 4.07$ ksi, $(\tau_{xy})_A = 0$
8–57. $\sigma_A = 107$ MPa (T), $\tau_A = 15.3$ MPa, $\sigma_B = 0$, $\tau_B = 14.8$ MPa
8–58. $\sigma_C = 107$ MPa (C), $\tau_C = 15.3$ MPa, $\sigma_D = 0$, $\tau_D = 15.8$ MPa
8–59. $\sigma_A = 24.7$ ksi (T), $\tau_A = 0$
8–61. $(\sigma_{max})_t = 106$ MPa, $(\sigma_{max})_c = -159$ MPa
8–62. $P_{max} = 9.08$ kN
8–63. $\sigma_C = 15.6$ ksi (T), $\sigma_D = 124$ ksi (T), $(\tau_{xz})_D = 62.4$ ksi, $(\tau_{xy})_D = 0$, $(\tau_{xy})_C = -52.4$ ksi, $(\tau_{xz})_C = 0$
8–65. $\sigma_A = 15.3$ MPa, $\tau_A = 0$, $\sigma_B = 0$, $\tau_B = 0.637$ MPa
8–66. $\sigma_C = 15.3$ MPa, $\tau_C = 0$, $\sigma_D = 0$, $\tau_D = 0.637$ MPa
8–67. $\sigma_A = 94.4$ psi (T), $\sigma_B = 59.0$ psi (C)
8–69. $\sigma_B = 19.4$ MPa (C), $(\tau_{xy})_B = 0.509$ MPa, $(\tau_{xz})_B = 0$
8–70. $\tau_A = 0$, $\sigma_A = 30.2$ ksi (C)
8–71. $\sigma_B = 0$, $\tau_B = 0.377$ ksi
8–73. $\sigma = 1.48$ psi (T), $\tau = 384$ psi
R8–1. $(\sigma_t)_{max} = 15.8$ ksi, $(\sigma_c)_{max} = -10.5$ ksi
R8–2. $\sigma_E = 802$ kPa, $\tau_E = 69.8$ kPa
R8–3. $\sigma_F = 695$ kPa (C), $\tau_F = 31.0$ kPa
R8–5. $\sigma_{max} = 236$ psi (C)
R8–6. $\theta = 0.286°$
R8–7. $\sigma_C = 11.6$ ksi, $\tau_C = 0$, $\sigma_D = -23.2$ ksi, $\tau_D = 0$

Chapter 9

9–2. $\sigma_{x'} = 31.4$ MPa, $\tau_{x'y'} = 38.1$ MPa
9–3. $\sigma_{x'} = -388$ psi, $\tau_{x'y'} = 455$ psi
9–5. $\sigma_{x'} = 1.45$ ksi, $\tau_{x'y'} = 3.50$ ksi
9–6. $\sigma_{x'} = -4.05$ ksi, $\tau_{x'y'} = -0.404$ ksi
9–7. $\sigma_{x'} = -61.5$ MPa, $\tau_{x'y'} = 62.0$ MPa
9–9. $\sigma_{x'} = 36.0$ MPa, $\tau_{x'y'} = -37.0$ MPa
9–10. $\sigma_{x'} = 36.0$ MPa, $\tau_{x'y'} = -37.0$ MPa
9–11. $\sigma_{x'} = 47.5$ MPa, $\sigma_{y'} = 202$ MPa, $\tau_{x'y'} = -15.8$ MPa
9–13. $\sigma_{x'} = -62.5$ MPa, $\tau_{x'y'} = -65.0$ MPa
9–14. $\sigma_1 = 319$ MPa, $\sigma_2 = -219$ MPa, $\theta_{p1} = 10.9°$, $\theta_{p2} = -79.1°$, $\tau_{\substack{max\\ \text{in-plane}}} = 269$ MPa, $\theta_s = -34.1°$ and $55.9°$, $\sigma_{avg} = 50.0$ MPa
9–15. $\sigma_1 = 53.0$ MPa, $\sigma_2 = -68.0$ MPa, $\theta_{p1} = 14.9°$, $\theta_{p2} = -75.1°$, $\tau_{\substack{max\\ \text{in-plane}}} = 60.5$ MPa, $\sigma_{avg} = -7.50$ MPa, $\theta_s = -30.1°$ and $59.9°$
9–17. $\sigma_1 = 137$ MPa, $\sigma_2 = -86.8$ MPa, $\theta_{p1} = -13.3°$, $\theta_{p2} = 76.7°$, $\tau_{\substack{max\\ \text{in-plane}}} = 112$ MPa, $\theta_s = 31.7°$ and $122°$, $\sigma_{avg} = 25$ MPa
9–18. $\sigma_x = 33.0$ MPa, $\sigma_y = 137$ MPa, $\tau_{xy} = -30$ MPa
9–19. $\sigma_1 = 5.90$ MPa, $\sigma_2 = -106$ MPa, $\theta_{p1} = 76.7°$ and $\theta_{p2} = -13.3°$, $\tau_{\substack{max\\ \text{in-plane}}} = 55.9$ MPa, $\sigma_{avg} = -50$ MPa, $\theta_s = 31.7°$ and $122°$
9–21. $\tau_a = -1.96$ ksi, $\sigma_1 = 80.1$ ksi, $\sigma_2 = 19.9$ ksi
9–22. $\sigma_{x'} = -63.3$ MPa, $\tau_{x'y'} = 35.7$ MPa
9–23. $\sigma_{x'} = 19.5$ kPa, $\tau_{x'y'} = -53.6$ kPa
9–25. $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = -36.6$ MPa, $\tau_{\substack{max\\ \text{in-plane}}} = 18.3$ MPa
9–26. $\sigma_1 = 16.6$ MPa, $\sigma_2 = 0$, $\tau_{\substack{max\\ \text{in-plane}}} = 8.30$ MPa
9–27. $\sigma_1 = 14.2$ MPa, $\sigma_2 = -8.02$ MPa, $\tau_{\substack{max\\ \text{in-plane}}} = 11.1$ MPa
9–29. Point D: $\sigma_1 = 7.56$ kPa, $\sigma_2 = -603$ kPa, Point E: $\sigma_1 = 395$ kPa, $\sigma_2 = -17.8$ kPa
9–30. Point A: $\sigma_1 = \sigma_y = 0$, $\sigma_2 = \sigma_x = -30.5$ MPa, Point B: $\sigma_1 = 0.541$ MPa, $\sigma_2 = -1.04$ MPa, $\theta_{p1} = -54.2°$, $\theta_{p2} = 35.8°$
9–31. $\tau_{x'y'} = 160$ kPa
9–33. $\sigma_1 = 4.38$ ksi, $\sigma_2 = -1.20$ ksi, $\tau_{\substack{max\\ \text{in-plane}}} = 2.79$ ksi

9–34. Point A: $\sigma_1 = 37.8$ kPa, $\sigma_2 = -10.8$ MPa
Point B: $\sigma_1 = 42.0$ MPa, $\sigma_2 = -10.6$ kPa

9–35. $\sigma_1 = 233$ psi, $\sigma_2 = -774$ psi, $\tau_{\substack{max \\ in\text{-}plane}} = 503$ psi

9–37. $\sigma_1 = \dfrac{4}{\pi d^2}\left(\dfrac{2PL}{d} - F\right)$, $\sigma_2 = 0$,
$\tau_{\substack{max \\ in\text{-}plane}} = \dfrac{2}{\pi d^2}\left(\dfrac{2PL}{d} - F\right)$

9–38. $\sigma_1 = 838$ psi, $\sigma_2 = -37.8$ psi

9–39. $\sigma_1 = 628$ psi, $\sigma_2 = -166$ psi

9–41. $\sigma_1 = 1.37$ MPa, $\sigma_2 = -198$ MPa

9–42. $\sigma_1 = 111$ MPa, $\sigma_2 = 0$

9–43. $\sigma_1 = 2.40$ MPa, $\sigma_2 = -6.68$ MPa

9–45. $\sigma_{x'} = -388$ psi, $\tau_{x'y'} = 455$ psi

9–46. $\sigma_{x'} = -4.05$ ksi, $\tau_{x'y'} = -0.404$ ksi

9–47. $\sigma_{x'} = 47.5$ MPa, $\tau_{x'y'} = -15.8$ MPa,
$\sigma_{y'} = 202$ MPa

9–49. $\sigma_{avg} = 25$ MPa, $\sigma_1 = 54.2$ MPa, $\sigma_2 = -4.15$ MPa,
$\theta_p = -15.5°$, $\tau_{\substack{max \\ in\text{-}plane}} = 29.2$ MPa

9–51. $\sigma_{avg} = -40.0$ MPa, $\sigma_1 = 32.1$ MPa,
$\sigma_2 = -112$ MPa, $\theta_{p1} = 28.2°$, $\tau_{\substack{max \\ in\text{-}plane}} = 72.1$ MPa,
$\theta_s = -16.8°$

9–53. $\sigma_{x'} = -56.3$ ksi, $\sigma_{y'} = 56.3$ ksi, $\tau_{x'y'} = -32.5$ ksi

9–57. $\sigma_{avg} = 15.0$ ksi, $\sigma_1 = 32.5$ ksi, $\sigma_2 = -2.49$ ksi,
$\theta_{p1} = -15.5°$, $\tau_{\substack{max \\ in\text{-}plane}} = -17.5$ ksi, $\theta_s = 29.5°$

9–58. $\sigma_1 = 64.1$ MPa, $\sigma_2 = -14.1$ MPa, $\theta_p = 25.1°$,
$\sigma_{avg} = 25.0$ MPa, $\tau_{\substack{max \\ in\text{-}plane}} = 39.1$ MPa, $\theta_s = -19.9°$

9–59. $\theta_p = -14.9°$, $\sigma_1 = 227$ MPa, $\sigma_2 = -177$ MPa,
$\tau_{\substack{max \\ in\text{-}plane}} = 202$ MPa, $\sigma_{avg} = 25$ MPa, $\theta_s = 30.1°$

9–62. $\sigma_{x'} = 19.5$ kPa, $\tau_{x'y'} = -53.6$ kPa

9–63. $\tau_{\substack{max \\ in\text{-}plane}} = 41.0$ psi, $\sigma_1 = 0.976$ psi, $\sigma_2 = -81.0$ psi

9–65. $\sigma_1 = 29.4$ ksi, $\sigma_2 = -17.0$ ksi

9–66. $\sigma_{x'} = 75.3$ kPa, $\tau_{x'y'} = -78.5$ kPa

9–67. $\sigma_{x'} = -45.0$ kPa, $\tau_{x'y'} = 45.0$ kPa

9–69. $\sigma_1 = 4.71$ ksi, $\sigma_2 = -0.0262$ ksi

9–70. Mohr's circle is a point located at (4.80, 0).

9–71. $\sigma_{x'} = 500$ MPa, $\tau_{x'y'} = -167$ MPa

9–73. $\sigma_1 = 1.15$ MPa, $\sigma_2 = -0.0428$ MPa

9–74. $\sigma_1 = 2.97$ ksi, $\sigma_2 = -2.97$ ksi, $\theta_{p1} = 45.0°$,
$\theta_{p2} = -45.0°$, $\tau_{\substack{max \\ in\text{-}plane}} = 2.97$ ksi, $\theta_s = 0$

9–75. $\sigma_1 = 2.59$ ksi, $\sigma_2 = -3.61$ ksi, $\theta_{p1} = -40.3°$,
$\theta_{p2} = -49.7°$, $\tau_{\substack{max \\ in\text{-}plane}} = 3.10$ ksi, $\theta_s = 4.73°$

9–81. $\sigma_1 = 24.4$ ksi, $\sigma_2 = 5.57$ ksi, $\tau_{\substack{abs \\ max}} = 12.2$ ksi

9–82. $\sigma_1 = 222$ MPa, $\sigma_2 = -102$ MPa, $\tau_{\substack{abs \\ max}} = 162$ MPa

9–83. $\sigma_1 = 6.73$ ksi, $\sigma_2 = -4.23$ ksi, $\tau_{\substack{abs \\ max}} = 5.48$ ksi

9–85. $\sigma_1 = 5.50$ MPa, $\sigma_2 = -0.611$ MPa,
$\sigma_1 = 1.29$ MPa, $\sigma_2 = -1.29$ MPa,
$\tau_{\substack{abs \\ max}} = 3.06$ MPa, $\tau_{\substack{abs \\ max}} = 1.29$ MPa

9–86. $\sigma_1 = 6.27$ kPa, $\sigma_2 = -806$ kPa,
$\tau_{\substack{abs \\ max}} = 406$ kPa

9–87. $\sigma_1 = 48.8$ ksi, $\sigma_2 = -25.4$ ksi,
$\tau_{\substack{abs \\ max}} = 31.1$ ksi

R9–1. $\sigma_1 = 119$ psi, $\sigma_2 = -119$ psi

R9–2. $\sigma_1 = 329$ psi, $\sigma_2 = -72.1$ psi

R9–3. $\sigma_{x'} = -0.611$ ksi, $\tau_{x'y'} = 7.88$ ksi, $\sigma_{y'} = -3.39$ ksi

R9–5. $\sigma_1 = 3.03$ ksi, $\sigma_2 = -33.0$ ksi,
$\theta_{p1} = -16.8°$ and $\theta_{p2} = 73.2°$,
$\tau_{\substack{max \\ in\text{-}plane}} = 18.0$ ksi, $\sigma_{avg} = -15$ ksi,
$\theta_s = 28.2°$ and $118°$

R9–6. $\sigma_1 = 3.29$ MPa, $\sigma_2 = -4.30$ MPa

R9–7. Point A: $\sigma_1 = 61.7$ psi, $\sigma_2 = 0$,
Point B: $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = -46.3$ psi

R9–9. $\sigma_{x'} = -16.5$ ksi, $\tau_{x'y'} = 2.95$ ksi

Chapter 10

10–2. $\epsilon_{x'} = 248(10^{-6})$, $\gamma_{x'y'} = -233(10^{-6})$,
$\epsilon_{y'} = -348(10^{-6})$

10–3. $\epsilon_{x'} = 55.1(10^{-6})$, $\gamma_{x'y'} = 133(10^{-6})$,
$\epsilon_{y'} = 325(10^{-6})$

10–5. $\epsilon_{x'} = 77.4(10^{-6})$, $\gamma_{x'y'} = 1279(10^{-6})$,
$\epsilon_{y'} = 383(10^{-6})$

10–6. $\epsilon_{x'} = -116(10^{-6})$, $\epsilon_{y'} = 466(10^{-6})$,
$\gamma_{x'y'} = 393(10^{-6})$

10–7. $\epsilon_{x'} = 466(10^{-6})$, $\epsilon_{y'} = -116(10^{-6})$,
$\gamma_{x'y'} = -393(10^{-6})$

10–9. $\epsilon_1 = 188(10^{-6})$, $\epsilon_2 = -128(10^{-6})$,
$(\theta_p)_1 = -9.22°$, $(\theta_p)_2 = 80.8°$,
$\gamma_{\substack{max \\ in\text{-}plane}} = 316\,(10^{-6})$,
$\epsilon_{avg} = 30(10^{-6})$,
$\theta_s = 35.8°$ and $-54.2°$

10–10. (a) $\epsilon_1 = 713(10^{-6})$, $\epsilon_2 = 36.6(10^{-6})$, $\theta_{p1} = 133°$,
(b) $\gamma_{\substack{max \\ in\text{-}plane}} = 677(10^{-6})$, $\epsilon_{avg} = 375(10^{-6})$,
$\theta_s = -2.12°$

10–11. $\epsilon_{x'} = 649(10^{-6})$, $\gamma_{x'y'} = -85.1(10^{-6})$,
$\epsilon_{y'} = 201(10^{-6})$

10–13. $\epsilon_1 = 17.7(10^{-6})$, $\epsilon_2 = -318(10^{-6})$,
$\theta_{p1} = 76.7°$ and $\theta_{p2} = -13.3°$,
$\gamma_{\substack{max \\ in\text{-}plane}} = 335(10^{-6})$, $\theta_s = 31.7°$ and $122°$,
$\epsilon_{avg} = -150(10^{-6})$

10–14. $\epsilon_1 = 368(10^{-6})$, $\epsilon_2 = 182(10^{-6})$, $\theta_{p1} = -52.8°$ and $\theta_{p2} = 37.2°$, $\gamma_{\substack{max\\in\text{-}plane}} = 187(10^{-6})$, $\theta_s = -7.76°$ and $82.2°$, $\epsilon_{avg} = 275(10^{-6})$
10–17. $\epsilon_{x'} = 55.1(10^{-6})$, $\gamma_{x'y'} = 133(10^{-6})$, $\epsilon_{y'} = 325(10^{-6})$
10–18. $\epsilon_{x'} = 325(10^{-6})$, $\gamma_{x'y'} = -133(10^{-6})$, $\epsilon_{y'} = 55.1(10^{-6})$
10–19. $\epsilon_{x'} = 77.4(10^{-6})$, $\gamma_{x'y'} = 1279(10^{-6})$, $\epsilon_{y'} = 383(10^{-6})$
10–21. $\epsilon_{x'} = 466(10^{-6})$, $\gamma_{x'y'} = -393(10^{-6})$, $\epsilon_{y'} = -116(10^{-6})$
10–22. (a) $\epsilon_1 = 773(10^{-6})$, $\epsilon_2 = 76.8(10^{-6})$, (b) $\gamma_{\substack{max\\in\text{-}plane}} = 696(10^{-6})$, (c) $\gamma_{\substack{abs\\max}} = 773(10^{-6})$
10–23. $\epsilon_1 = 870(10^{-6})$, $\epsilon_2 = 405(10^{-6})$, $\gamma_{\substack{max\\in\text{-}plane}} = 465(10^{-6})$, $\gamma_{\substack{abs\\max}} = 870(10^{-6})$
10–25. $\epsilon_1 = 380(10^{-6})$, $\epsilon_2 = -330(10^{-6})$
10–26. $\epsilon_1 = 517(10^{-6})$, $\epsilon_2 = -402(10^{-6})$
10–27. $\epsilon_1 = 862(10^{-6})$, $\epsilon_2 = -782(10^{-6})$, $\theta_{p1} = 88.0°$ (clockwise), $\epsilon_{avg} = 40.0(10^{-6})$, $\gamma_{\substack{max\\in\text{-}plane}} = -1644(10^{-6})$, $\theta_s = 43.0°$ (clockwise)
10–33. $E = 17.4$ GPa, $\Delta d = -12.6(10^{-6})$ mm
10–34. $\Delta\theta = -0.0103°$
10–35. $\nu_{pvc} = 0.164$
10–37. (a) $k_r = 3.33$ ksi, (b) $k_g = 5.13(10^3)$ ksi
10–38. $p = 0.967$ ksi, $\gamma_{\substack{max\\in\text{-}plane}} = 1.30(10^{-3})$
10–39. $\sigma_1 = 10.2$ ksi, $\sigma_2 = 7.38$ ksi
10–41. $\epsilon_x = 23.0(10^{-6})$, $\gamma_{xy} = -3.16(10^{-6})$
10–42. $\epsilon_x = 2.35(10^{-3})$, $\epsilon_y = -0.972(10^{-3})$, $\epsilon_z = -2.44(10^{-3})$
10–43. $\sigma_1 = 8.37$ ksi, $\sigma_2 = 6.26$ ksi
10–45. $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{\nu}}\right)$
10–46. $\epsilon_1 = 289(10^{-6})$, $\epsilon_2 = -289(10^{-6})$
10–47. $P = 83.0$ lb
10–49. $\sigma_x = -15.5$ ksi, $\sigma_y = -16.8$ ksi
10–50. $\epsilon_x = \epsilon_y = 0$, $\gamma_{xy} = -160(10^{-6})$, $T = 65.2$ N · m
10–51. $\epsilon_{x'} = -2.52(10^{-3})$, $\epsilon_{y'} = 2.52(10^{-3})$
10–53. $\Delta d = 0.800$ mm, $\sigma_{AB} = 315$ MPa
10–54. $\Delta d = 0.680$ mm
10–57. $\Delta V = 0.0168$ m^3
10–58. $k = 1.35$
10–59. $\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x\sigma_y + 3\tau_{xy}^2 = \sigma_Y^2$
10–61. $\sigma_1 = 10.2$ ksi
10–62. $\sigma_1 = 11.6$ ksi
10–63. $\sigma_1 = 68.0$ ksi
10–65. $T_e = \sqrt{\frac{4}{3}M^2 + T^2}$
10–66. $\tau = 43.3$ MPa
10–67. $\tau = 37.5$ ksi
10–69. No
10–70. $M_e = \sqrt{M^2 + \frac{3}{4}T^2}$
10–71. $\sigma_x = 16.7$ ksi
10–73. $d = 1.59$ in.
10–74. $\sigma_1 = 924$ MPa, $\sigma_1 = 1.07$ GPa
10–75. No
10–77. No
10–78. No
10–79. Yes
10–81. (a) F.S. = 1.32, (b) F.S. = 1.52
10–82. Yes
10–83. Yes
10–85. $\sigma_Y = 424$ MPa
10–86. $T_{max} = 8.38$ kN · m
10–87. $T_{max} = 9.67$ kN · m
10–89. (a) F.S. = 2.05, (b) F.S. = 2.35
10–90. (a) $t = 22.5$ mm, (b) $t = 19.5$ mm
10–91. $d = 1.50$ in.
10–93. F.S. = 1.25
R10–2. $\delta_a = 0.367$ mm, $\delta_b = -0.255$ mm, $\delta_t = -0.00167$ mm
R10–3. F.S. = 2
R10–5. $\epsilon_{avg} = 83.3(10^{-6})$, $\epsilon_1 = 880(10^{-6})$, $\epsilon_2 = -713(10^{-6})$, $\theta_p = 54.8°$ (clockwise), $\gamma_{\substack{max\\in\text{-}plane}} = -1593(10^{-6})$, $\theta_s = 9.78°$ (clockwise)
R10–6. $\epsilon_{x'} = -380(10^{-6})$, $\epsilon_{y'} = -130(10^{-6})$, $\gamma_{x'y'} = 1.21(10^{-3})$
R10–7. $P_2 = 11.4$ kip, $P_1 = 136$ kip
R10–9. $\epsilon_1 = 283(10^{-6})$, $\epsilon_2 = -133(10^{-6})$, $\theta_{p1} = 84.8°$, $\theta_{p2} = -5.18°$, $\gamma_{\substack{max\\in\text{-}plane}} = 417(10^{-6})$, $\epsilon_{avg} = 75.0(10^{-6})$, $\theta_s = 39.8°$ and $130°$
R10–10. $\epsilon_1 = 480(10^{-6})$, $\epsilon_2 = 120(10^{-6})$, $\theta_{p1} = 28.2°$ (clockwise), $\gamma_{\substack{max\\in\text{-}plane}} = -361(10^{-6})$, $\theta_s = 16.8°$ (counterclockwise), $\epsilon_{avg} = 300(10^{-6})$

Chapter 11

11–1. $b = 211$ mm, $h = 264$ mm
11–2. Use $b = 4$ in.
11–3. Use $b = 5$ in.
11–5. Use W12 × 16.
11–6. Yes
11–7. Use W12 × 22.
11–9. Use W360 × 45.
11–10. Yes, it can.
11–11. Use $s = s'' = 2$ in., Use $s' = 1$ in.
11–13. $h = 8.0$ in., $P = 3.20$ kip
11–14. $s = 1.93$ in., $s' = 2.89$ in., $s'' = 5.78$ in.
11–15. Use $s = 1\frac{5}{8}$ in., $s' = 1\frac{1}{8}$ in., $s'' = 3\frac{1}{8}$ in.
11–17. $P = 103$ kN
11–18. Use $a = 3\frac{1}{8}$ in.
11–19. $P = 750$ lb
11–21. $P = 85.9$ N
11–22. $b = 3.40$ in.
11–23. Use W16 × 31.
11–25. Use $d = 3$ in.
11–26. Use W14 × 22.
11–27. The beam fails.
11–29. $b = 5.86$ in.
11–30. $P = 9.52$ kN
11–31. $w = \frac{w_0}{L}x$
11–33. $\sigma_{max} = \frac{8PL}{27\pi r_0^3}$
11–34. $h = \frac{h_0}{L^{3/2}}(3L^2x - 4x^3)^{1/2}$
11–35. $d = h\sqrt{\frac{x}{L}}$
11–37. $\sigma_{max} = \frac{3wL^2}{b_0 h^2}$
11–38. $b = \frac{b_0}{L^2}x^2$
11–39. Use $d = 21$ mm.
11–41. $\sigma_{max} = 13.4$ MPa
11–42. Use $d = 1\frac{1}{2}$ in.
11–43. Use $d = 1\frac{5}{8}$ in.
11–45. Use $d = 1\frac{1}{8}$ in.
11–46. Use $d = 1\frac{1}{4}$ in.
R11–1. $y = \left[\frac{4P}{\pi\,\sigma_{allow}}x\right]^{1/3}$
R11–2. Use W10 × 12
R11–3. Use $d = 44$ mm.
R11–5. Use W18 × 50.
R11–6. $P = 556$ lb, $h = 0.595$ in.
R11–7. $h = 0.643$ in. Yes.

Chapter 12

12–1. $\sigma = 3.02$ ksi
12–2. $\sigma = 75.5$ ksi
12–3. $\sigma = 582$ MPa
12–5. $v_C = -6.11$ mm
12–6. $\theta_{max} = -\frac{M_0L}{EI}$, $v = -\frac{M_0x^2}{2EI}$, $v_{max} = -\frac{M_0L^2}{2EI}$
12–7. $\rho = 336$ ft, $\theta_{max} = \frac{M_0L}{EI}$ ↻, $v_{max} = -\frac{M_0L^2}{2EI}$
12–9. $v_1 = \frac{P}{12EI}(2x_1^3 - 3Lx_1^2)$, $v_2 = \frac{PL^2}{48EI}(-6x_2 + L)$
12–10. $v_1 = \frac{wax_1}{12EI}(2x^2 - 9ax_1)$, $v_2 = \frac{w}{24EI}(-x_2^4 + 28a^3x_2 - 41a^4)$, $\theta_C = -\frac{wa^3}{EI}$, $v_B = -\frac{41wa^4}{24EI}$
12–11. $v_1 = \frac{wax_1}{12EI}(2x^2 - 9ax_1)$, $v_3 = \frac{w}{24EI}(-x_3^4 + 8ax_3^3 - 24a^2x_3^2 + 4a^3x_3 - a^4)$, $\theta_B = -\frac{7wa^3}{6EI}$, $v_C = -\frac{7wa^4}{12EI}$
12–13. $\theta_A = -\frac{M_0a}{2EI}$, $v_{max} = -\frac{5M_0a^2}{8EI}$
12–14. $v_{max} = -\frac{3PL^3}{256EI}$
12–15. $P = 40.0$ lb, $s = 0.267$ in.

12–17. $v_1 = \frac{Px_1}{12EI}\left(-x_1^2 + L^2\right)$,
$v_2 = \frac{P}{24EI}\left(-4x_2^3 + 7L^2x_2 - 3L^3\right)$,
$v_{max} = \frac{PL^3}{8EI}$

12–18. $\theta_A = -\frac{3PL^2}{8EI}, v_C = -\frac{PL^3}{6EI}$

12–19. $v_B = -\frac{11PL^3}{48EI}$

12–21. $v_{max} = -11.5$ mm

12–22. $v = \frac{1}{EI}(2.25x^3 - 0.002778x^5 - 40.5x^2)$ kip · ft³,
$\theta_{max} = -0.00466$ rad, $v_{max} = -0.369$ in.

12–23. $\theta_C = \frac{4M_0L}{3EI}$ ↺, $v_1 = \frac{M_0}{6EIL}(-x_1^3 + L^2x_1)$,
$v_2 = \frac{M_0}{6EIL}(-3Lx_2^2 + 8L^2x_2 - 5L^3)$,
$v_C = -\frac{5M_0L^2}{6EI}$

12–25. $v_{max} = -\frac{18.8 \text{ kip} \cdot \text{ft}^3}{EI}$

12–26. $v_{max} = -0.396$ in.

12–27. $\theta_A = \frac{2\gamma L^3}{3t^2E}$,
$v_A = -\frac{\gamma L^4}{2t^2E}$

12–29. $\theta_B = -\frac{wa^3}{6EI}$,
$v_1 = \frac{w}{24EI}(-x_1^4 + 4ax_1^3 - 6a^2x_1^2)$,
$v_2 = \frac{wa^3}{24EI}(-4x_2 + a)$,
$v_B = \frac{wa^3}{24EI}(-4L + a)$

12–30. $\theta_B = -\frac{wa^3}{6EI}, v_1 = \frac{wx_1^2}{24EI}(-x_1^2 + 4ax_1 - 6a^2)$,
$v_2 = \frac{wa^3}{24EI}(4x_3 + a - 4L), v_B = \frac{wa^3}{24EI}(a - 4L)$

12–31. $v = \frac{1}{EI}\left[-\frac{Pb}{6a}x^3 + \frac{P(a+b)}{6a}\langle x - a\rangle^3 + \frac{Pab}{6}x\right]$

12–33. $E = \frac{Pa}{24\Delta I}(3L^2 - 4a^2)$

12–34. $v = \frac{P}{12EI}\left[-2\langle x - a\rangle^3 + 4\langle x - 2a\rangle^3 + a^2x\right]$,
$(v_{max})_{AB} = \frac{0.106Pa^3}{EI}, v_C = -\frac{3Pa^3}{4EI}$

12–35. $v = \frac{1}{EI}\left[-2.5x^2 + 2\langle x - 4\rangle^3 - \frac{1}{8}\langle x - 4\rangle^4 + 2\langle x - 12\rangle^3 + \frac{1}{8}\langle x - 12\rangle^4 - 24x + 136\right]$ kip · ft³

12–37. $v = \frac{M_0}{6EI}\left[3\left\langle x - \frac{L}{3}\right\rangle^2 - 3\left\langle x - \frac{2}{3}L\right\rangle^2 - Lx\right]$,
$v_{max} = -\frac{5M_0L^2}{72EI}$

12–38. $v = \frac{1}{EI}[-8.33x^3 + 17.1\langle x - 12\rangle^3 - 13.3\langle x - 36\rangle^3 + 1680x - 5760]$ lb · in³

12–39. $v_{max} = -12.9$ mm

12–41. $(v_{max})_{AB} = 0.0867$ in.

12–42. $\theta_A = -\frac{1920}{EI}, \theta_B = \frac{6720 \text{ lb} \cdot \text{in}^2}{EI}$

12–43. $v = \frac{1}{EI}\left[-0.0833x^3 + 3\langle x - 8\rangle^2 + 3\langle x - 16\rangle^2 + 8.00x\right]$ kip · ft³

12–45. $v_C = -0.501$ mm, $v_D = -0.698$ mm,
$v_E = -0.501$ mm

12–46. $\theta_A = -0.128°, \theta_B = 0.128°$

12–47. $\theta_A = -\frac{3wa^3}{16EI}$,
$\theta_B = \frac{7wa^3}{48EI}$,
$v = \frac{w}{48EI}\left[6ax^3 - 2x^4 + 2\langle x - a\rangle^4 - 9a^3x\right]$

12–49. $\theta_A = \frac{302}{EI}$ kip · ft², $v_C = -\frac{3110}{EI}$ kip · ft³

12–50. $\frac{dv}{dx} = \frac{1}{EI}\left[2.25x^2 - 0.5x^3 + 5.25\langle x - 5\rangle^2 + 0.5\langle x - 5\rangle^3 - 3.125\right]$ kN · m²,
$v = \frac{1}{EI}\left[0.75x^3 - 0.125x^4 + 1.75\langle x - 5\rangle^3 + 0.125\langle x - 5\rangle^4 - 3.125x\right]$ kN · m³

12–51. $\theta_C = -\frac{3937.5}{EI}, v_C = \frac{50\,625}{EI}$ ↓

12–53. $v_B = \frac{7PL^3}{16EI}$ ↓

12–54. $\theta_B = -\frac{Pa^2}{12EI}, v_C = \frac{Pa^3}{12EI}$

12–55. $v_{max} = 12.2$ mm

12–57. $v_{max} = \frac{3PL^3}{256EI}$ ↓

12–58. $v_C = -\frac{84}{EI}, \theta_A = \frac{8}{EI}, \theta_B = -\frac{16}{EI}, \theta_C = -\frac{40}{EI}$

12–59. $v_{max} = 8.16 \text{ mm}\downarrow$
12–61. $a = 0.858L$
12–62. $\theta_A = 0.0181 \text{ rad}, \theta_B = 0.00592 \text{ rad}$
12–63. $\theta_B = -\dfrac{3M_0L}{2EI}, v_B = \dfrac{7M_0L^2}{8EI}\downarrow$
12–65. $\theta_A = -\dfrac{5Pa^2}{2EI}, v_C = \dfrac{19Pa^3}{6EI}\downarrow$
12–66. $v_C = \dfrac{PL^3}{12EI}, \theta_A = \dfrac{PL^2}{24EI}, \theta_B = -\dfrac{PL^2}{12EI}$
12–67. $v_{max} = \dfrac{0.00802PL^3}{EI}$
12–69. $\theta_C = -\dfrac{5Pa^2}{2EI}, v_B = \dfrac{25Pa^3}{6EI}\downarrow$
12–70. $\theta_A = -\dfrac{336 \text{ kip}\cdot\text{ft}^2}{EI}, v_{max} = \dfrac{3048 \text{ kip}\cdot\text{ft}^3}{EI}\downarrow$
12–71. $v_D = 4.98 \text{ mm}\downarrow$
12–73. $a = 0.152L$
12–74. $\theta_{max} = \dfrac{5PL^2}{16EI}, v_{max} = \dfrac{3PL^3}{16EI}\downarrow$
12–75. $\theta_B = 0.00658 \text{ rad}, v_C = 13.8 \text{ mm}\downarrow$
12–77. $a = 0.865\ L$
12–78. $\theta_B = \dfrac{7wa^3}{12EI}, v_C = \dfrac{25wa^4}{48EI}\downarrow$
12–79. $\theta_C = -\dfrac{a^2}{6EI}(12P + wa),$
$v_C = \dfrac{a^3}{24EI}(64P + 7wa)\downarrow$
12–81. $\theta_A = \dfrac{PL^2}{12EI}, v_D = \dfrac{PL^3}{8EI}\downarrow$
12–82. $v_{max} = \dfrac{3wa^4}{8EI}$
12–83. $\theta_B = -0.00778 \text{ rad}, v_B = 0.981 \text{ in.}\downarrow$
12–85. $v_C = 1.20 \text{ in.}\downarrow$
12–86. $\theta_A = -0.822°, \theta_B = 0.806°$
12–87. $v_C = 0.429 \text{ in.}\downarrow$
12–89. $\theta_A = 0.00458 \text{ rad}, v_C = 0.187 \text{ in.}\downarrow$
12–90. Use W16 × 50.
12–91. $(v_A)_v = 0.0737 \text{ in.}, (v_A)_k = 0.230 \text{ in.}$
12–93. $v = PL^2\left(\dfrac{1}{k} + \dfrac{L}{3EI}\right)$
12–94. $v_A = \dfrac{72}{EI}\downarrow, \theta_A = \dfrac{36}{EI}$ ↻
12–95. $v_A = PL^3\left(\dfrac{1}{12EI} + \dfrac{1}{8GJ}\right)\downarrow$
12–97. $F = 0.349 \text{ N}, a = 0.800 \text{ mm}$
12–98. $M_0 = \dfrac{Pa}{6}$

12–99. $A_x = B_x = 0, A_y = \dfrac{20}{27}P,$
$M_A = \dfrac{4}{27}PL, B_y = \dfrac{7}{27}P, M_B = \dfrac{2}{27}PL$
12–101. $A_x = 0, C_y = \dfrac{5}{16}P, B_y = \dfrac{11}{8}P, A_y = \dfrac{5}{16}P$
12–102. $A_x = 0, B_y = \dfrac{5}{16}P, A_y = \dfrac{11}{16}P, M_A = \dfrac{3PL}{16}$
12–103. $A_x = 0, B_y = \dfrac{3wL}{8}, A_y = \dfrac{5wL}{8}, M_A = \dfrac{wL^2}{8}$
12–105. $A_x = 0, A_y = \dfrac{3M_0}{2L}, B_y = \dfrac{3M_0}{2L}, M_B = \dfrac{M_0}{2}$
12–106. $A_x = 0, B_y = \dfrac{w_0L}{10}, A_y = \dfrac{2w_0L}{5}, M_A = \dfrac{w_0L^2}{15}$
12–107. $B_x = 0, A_y = \dfrac{17wL}{24}, B_y = \dfrac{7wL}{24}, M_B = \dfrac{wL^2}{36}$
12–109. $T_{AC} = \dfrac{3A_2E_2wL_1^4}{8(A_2E_2L_1^3 + 3E_1I_1L_2)}$
12–110. $A_x = 0, F_C = 112 \text{ kN}, A_y = 34.0 \text{ kN},$
$B_y = 34.0 \text{ kN}$
12–111. $M_A = \dfrac{5wL^2}{192}, M_B = \dfrac{11wL^2}{192}$
12–113. $A_y = 1.48 \text{ kip}, B_x = 0, B_y = 3.52 \text{ kip},$
$M_B = 7.67 \text{ kip}\cdot\text{ft}$
12–114. $B_y = \dfrac{2}{3}P, M_A = \dfrac{PL}{3}, A_y = \dfrac{4}{3}P, A_x = 0$
12–115. $A_x = 0, B_y = \dfrac{M_0}{6a}, A_y = \dfrac{M_0}{6a}, M_A = \dfrac{M_0}{2}$
12–117. $B_y = 550 \text{ N}, A_y = 125 \text{ N}, C_y = 125 \text{ N}$
12–118. $A_x = 0, B_y = \dfrac{5wL}{4}, C_y = \dfrac{3wL}{8}$
12–119. $B_y = \dfrac{5}{8}wL\uparrow, C_y = \dfrac{wL}{16}\downarrow, A_y = \dfrac{7}{16}wL\uparrow$
12–121. $A_x = 0, B_y = 35.0 \text{ kip}, A_y = 15.0 \text{ kip},$
$M_A = 40.0 \text{ kip}\cdot\text{ft}$
12–122. $A_x = 0, B_y = \dfrac{7P}{4}, A_y = \dfrac{3P}{4}, M_A = \dfrac{PL}{4}$
12–123. $A_x = 0, B_y = \dfrac{7wL}{128}, A_y = \dfrac{57wL}{128}, M_A = \dfrac{9wL^2}{128}$
12–125. $M_A = M_B = \dfrac{1}{24}PL, A_y = B_y = \dfrac{1}{6}P,$
$C_y = D_y = \dfrac{1}{3}P, D_x = 0$
12–126. $T_{AC} = \dfrac{3wA_2E_2L_1^4}{8(3E_1I_1L_2 + A_2E_2L_1^3)}$
12–127. $M = \dfrac{PL}{8} - \dfrac{2EI}{L}\alpha, \Delta_{max} = \dfrac{PL^3}{192EI} + \dfrac{\alpha L}{4}$

12–129. $a = L - \left(\frac{72\Delta EI}{w_0}\right)^{1/4}$

12–130. $F_{CD} = 7.48$ kip

12–131. $M_{max} = \frac{\pi^2 bt\gamma\omega^2 r^3}{108g}$

R12–1. $v = \frac{1}{EI}\left[-30x^3 + 46.25\langle x - 12\rangle^3 - 11.7\langle x - 24\rangle^3 + 38{,}700x - 412{,}560\right]$ lb·in³

R12–2. $v_1 = \frac{1}{EI}(4.44x_1^3 - 640x_1)$ lb·in³,

$v_2 = \frac{1}{EI}(-4.44x_2^3 + 640x_2)$ lb·in³

R12–3. $M_B = \frac{w_0L^2}{30}, M_A = \frac{w_0L^2}{20}$

R12–5. $(v_2)_{max} = \frac{wL^4}{18\sqrt{3}EI}$

R12–6. $\theta_B = \frac{Pa^2}{4EI}, \Delta_C = \frac{Pa^3}{4EI}\uparrow$

R12–7. $B_y = 138$ N ↑, $A_y = 81.3$ N ↑, $C_y = 18.8$ N ↓

R12–9. $\Delta_C = 0.644$ in.↓

Chapter 13

13–1. $P_{cr} = \frac{5kL}{4}$

13–2. $P_{cr} = kL$

13–3. Use $d = \frac{9}{16}$ in.

13–5. $P_{cr} = 1.84$ MN

13–6. $P_{cr} = 902$ kN

13–7. F.S. = 1.87

13–9. $P_{cr} = 1.30$ MN

13–10. $P_{cr} = 325$ kN

13–11. $P_{cr} = 20.4$ kip

13–13. $P = 42.8$ kN

13–14. $P_{cr} = 575$ kip

13–15. $P_{cr} = 70.4$ kip

13–17. $P_{cr} = 2.92$ kip

13–18. $P_{cr} = 5.97$ kip

13–19. $P = 17.6$ kip

13–21. Use $d_i = 1\frac{1}{8}$ in.

13–22. $W = 4.31$ kN

13–23. $W = 5.24$ kN, $d = 1.64$ m

13–25. $P = 62.3$ kip

13–26. $P = 2.42$ kip

13–27. Use $d_{AB} = 2\frac{1}{8}$ in., $d_{BC} = 2\frac{1}{4}$ in.

13–29. Use $d_{AB} = 1\frac{1}{2}$ in., $d_{BC} = 1\frac{3}{8}$ in.

13–30. $P = 129$ lb

13–31. $w = 1.17$ kN/m

13–33. $P = 14.8$ kN

13–34. Use $d = 62$ mm.

13–35. Use $d = 52$ mm.

13–37. $P = 37.5$ kip

13–38. $P = 5.79$ kip

13–39. Use $d = 1\frac{3}{4}$ in.

13–41. $M_{max} = -\frac{wEI}{P}\left[\sec\left(\frac{L}{2}\sqrt{\frac{P}{EI}}\right) - 1\right]$

13–42. $M_{max} = -\frac{F}{2}\sqrt{\frac{EI}{P}}\tan\left(\frac{L}{2}\sqrt{\frac{P}{EI}}\right)$

13–43. $P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{4L^2}$

13–46. $P = 31.4$ kN

13–47. $v_{max} = 0.387$ in.

13–49. $P_{allow} = 7.89$ kN

13–50. $E_t = 14.6(10^3)$ ksi

13–51. $L = 8.34$ m

13–53. $P = 65.8$ kip

13–54. $P = 45.7$ kip

13–55. Yes

13–57. $P_{max} = 61.2$ kip

13–58. $L = 21.2$ ft

13–59. $P_{max} = 16.9$ kN

13–61. $L = 1.71$ m

13–62. $P = 174$ kN, $v_{max} = 16.5$ mm

13–63. $P = 129$ kip

13–65. $P_{cr} = 83.5$ kN

13–66. $L = 2.53$ m

13–67. $d = 98.3$ mm

13–69. $P = 88.5$ kip

13–70. $P_{cr} = 1.32\,(10^3)$ kN

13–71. $P_{cr} = 5.29\,(10^3)$ kN

13–73. For $49.7 < KL/r < 99.3$, $P/A = 200$ MPa

13–74. For $49.7 < L/r < 99.3$, $P/A = 25$ ksi

13–75. $P_{cr} = 661$ kN

13–77. $P_{cr} = 1.35(10^3)$

13–78. $L = 8.99$ ft

13–79. Use W6 × 9.

13–81. $L = 20.3$ ft

13–82. Use W6 × 12.

13–83. $L = 18.0$ ft

13–85. $L = 33.7$ ft

13–86. Use W6 × 9.

13–87. $d = 1.42$ in.

13–89. Yes

13–90. Yes
13–91. $b = 0.704$ in.
13–93. $L = 1.92$ ft
13–94. $L = 3.84$ ft
13–95. $P_{allow} = 380$ kip
13–97. $P_{allow} = 129$ kip
13–98. $P_{allow} = 143$ kip
13–99. $P_{allow} = 109$ kip
13–101. $P_{allow} = 8.61$ kip
13–102. $L = 8.89$ ft
13–103. Use $a = 7\frac{1}{2}$ in.
13–105. $P_{allow} = 8.68$ kip
13–106. $P_{allow} = 27.7$ kip
13–107. $P = 8.83$ kip
13–109. $P = 18.4$ kip
13–110. $P = 5.93$ kip
13–111. $P = 32.7$ kip
13–113. $P = 0.967$ kip
13–114. $P = 0.554$ kip
13–115. The column is not adequate.
13–117. $P = 33.1$ kip
13–118. $P = 57.7$ kip
13–119. $P = 2.79$ kip
13–121. $P = 98.0$ kip
13–122. $P = 132$ kip
13–123. No
13–125. Yes
13–126. $P = 1.69$ kip
13–127. $P = 3.44$ kip
R13–1. $P = 5.76$ kip
R13–2. $P = 9.01$ kip
R13–3. $P_{cr} = 12.1$ kN
R13–5. $P = 12.5$ kip
R13–6. Use $d = 2\frac{1}{8}$ in.
R13–7. $t = 5.92$ mm
R13–9. $P_{allow} = 77.2$ kN
R13–10. It does not buckle or yield.

Chapter 14

14–1. $\frac{U_i}{V} = \frac{1}{2E}(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - 2\nu\sigma_x\sigma_y) + \frac{\tau_{xy}^2}{2G}$
14–3. $a = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, r$
14–5. (a) $U_a = \frac{N^2 L_1}{2AE}$, (b) $U_b = \frac{N^2 L_2}{2AE}$
Since $U_b > U_a$, i.e., $L_2 > L_1$, the design for case (b) is better able to absorb energy.
14–6. $U_i = 43.2$ J
14–7. $P = 375$ kN, $U_i = 1.69$ kJ
14–9. $U_i = 149$ J
14–10. $U_i = 0.0638$ J
14–11. $U_i = 64.4$ J
14–13. $P = 113$ kip, $U_i = 7.37$ in. · kip
14–15. $U_i = 0.125$ ft · kip
14–17. $U_i = \frac{17 w_0^2 L^5}{10080\, EI}$
14–18. $(U_i)_{sp} = 1.00$ J, $(U_i)_b = 0.400$ J
14–19. $U_i = 3.24$ in. · lb
14–21. $U_i = \frac{w_0^2 L^5}{504\, EI}$
14–22. $(U_i)_b = 0.477\,(10^{-3})$ J, $(U_i)_t = 0.0171$ J
14–23. $U_i = \frac{w^2 L^5}{40\, EI}$
14–25. $(\Delta_D)_v = \frac{3.50PL}{AE}$
14–26. $(\Delta_C)_h = \frac{3PL}{2AE}$
14–27. $(\Delta_A)_h = 0.0710$ in.
14–29. $(\Delta_C)_v = 13.3$ mm
14–30. $\Delta_B = 3.46$ mm
14–31. $\Delta_B = 11.7$ mm
14–33. $\Delta_B = 0.100$ mm
14–34. $\Delta_E = 5.46$ in.
14–35. $\theta_A = -\frac{M_0 L}{3EI}$
14–37. $\Delta_A = \frac{3\pi P r^3}{2EI}$
14–38. $\Delta_A = \frac{\pi P r^3}{2EI}$
14–39. $\Delta_B = 1.82$ in.
14–41. $\Delta_B = 15.2$ mm
14–42. (a) $U_i = 4.52$ kJ, (b) $U_i = 3.31$ kJ
14–43. $d = 5.35$ in.
14–45. (a) $\sigma_{max} = 45.4$ ksi, (b) $\sigma_{max} = 509$ psi, (c) $\sigma_{max} = 254$ psi
14–46. $h = 1.75$ ft
14–47. $\sigma_{max} = 20.3$ ksi
14–49. $L = 850$ mm
14–50. Yes
14–51. $h = 5.29$ mm
14–53. $\sigma_{max} = 307$ MPa
14–54. $h = 95.6$ mm
14–55. Use $d = 2\frac{1}{8}$ in.
14–57. Yes, from any position
14–58. $(\Delta_A)_{max} = 15.4$ in.
14–59. $\sigma_{max} = 6.20$ ksi
14–61. $n = 19.7$
14–62. $h = 4.20$ ft
14–63. $\sigma_{max} = 35.2$ ksi

14–65. $\Delta_B = 0.247$ in., $\sigma_{max} = 2.34$ ksi
14–66. $\sigma_{max} = 137$ MPa
14–67. $h = 8.66$ m
14–69. $h = 7.45$ in.
14–70. $(\Delta_B)_{max} = 0.661$ in.
14–71. $\Delta_{max} = 23.3$ mm, $\sigma_{max} = 4.89$ MPa
14–73. $(\Delta_B)_h = 0.223(10^{-3})$ in. ←
14–74. $(\Delta_B)_v = 0.00112$ in. ↓
14–75. $(\Delta_B)_v = 0.0132$ in. ↓
14–77. $(\Delta_B)_h = 0.699(10^{-3})$ in. →
14–78. $(\Delta_B)_v = 0.0931(10^{-3})$ in. ↓
14–79. $(\Delta_B)_h = 0.367$ mm ←
14–81. $(\Delta_C)_h = 0.234$ mm ←
14–82. $(\Delta_D)_v = 1.16$ mm ↓
14–83. $(\Delta_A)_v = 3.18$ mm ↓
14–85. $(\Delta_D)_h = 4.12$ mm →
14–86. $(\Delta_E)_h = 0.889$ mm →
14–87. $\Delta_C = \dfrac{23Pa^3}{24EI}$
14–89. $\Delta_C = \dfrac{2Pa^3}{3EI}$
14–90. $\theta_C = -\dfrac{5Pa^2}{6EI}$
14–91. $\theta_A = \dfrac{Pa^2}{6EI}$
14–93. $\theta_B = -0.353^\circ$
14–94. $\theta_C = 0.337^\circ$
14–95. $\Delta_B = 47.8$ mm ↓
14–97. $\theta_A = 0.289^\circ$
14–98. $\theta_B = 0.124^\circ$
14–99. $\Delta_C = \dfrac{PL^3}{8EI}$ ↓
14–101. $\theta_C = -\dfrac{13wL^3}{576EI}$
14–102. $\Delta_D = \dfrac{wL^4}{96EI}$ ↓
14–103. $\theta_A = -1.28^\circ$
14–105. $\Delta_C = \dfrac{PL^3}{48EI}$ ↓, $\theta_B = \dfrac{PL^2}{16EI}$
14–106. $\Delta_C = 0.122$ in. ↓
14–107. $\theta_A = 0.232^\circ$
14–109. $\theta_C = -1.14^\circ$
14–110. $\Delta_D = 0.219$ in. ↑
14–111. $\Delta_{tot} = \left(\dfrac{w}{G}\right)\left(\dfrac{L}{a}\right)^2\left[\left(\dfrac{5}{96}\right)\left(\dfrac{L}{a}\right)^2 + \dfrac{3}{20}\right]$,
$\Delta_b = \dfrac{5w}{96G}\left(\dfrac{L}{a}\right)^4$
14–113. $\theta_A = -\dfrac{5w_0L^3}{192EI}$
14–114. $(\Delta_C)_h = \dfrac{640\,000 \text{ lb}\cdot\text{ft}^3}{EI}$ ←,
$(\Delta_C)_v = \dfrac{1\,228\,800 \text{ lb}\cdot\text{ft}^3}{EI}$ ↓
14–115. $\Delta_B = 43.5$ mm ↓
14–117. $\Delta_C = 17.9$ mm ↓
14–118. $\theta_A = -0.0568^\circ$
14–119. $(\Delta_C)_h = \dfrac{5wL^4}{8EI}$ →
14–121. $(\Delta_B)_v = \dfrac{Pr^3}{4\pi EI}(\pi^2 - 8)$ ↓
14–122. $(\Delta_A)_h = \dfrac{\pi Pr^3}{2EI}$ ←
14–123. $(\Delta_B)_h = 0.223(10^{-3})$ in. ←
14–125. $(\Delta_B)_v = 0.0132$ in. ↓
14–126. $(\Delta_E)_v = 0.0149$ in. ↓
14–127. $(\Delta_B)_h = 0.699(10^{-3})$ in. →
14–129. $(\Delta_C)_h = 0.234$ mm ←
14–130. $(\Delta_C)_v = 0.0375$ mm ↓
14–131. $(\Delta_D)_h = 4.12$ mm →
14–133. $\theta_C = -\dfrac{5Pa^2}{6EI}$
14–134. $\theta_A = \dfrac{Pa^2}{6EI}$
14–135. $\Delta_C = 0.369$ in.
14–137. $\Delta_B = 47.8$ mm
14–138. $\Delta_D = 3.24$ mm
14–139. $\theta_A = 0.289^\circ$
14–141. $\theta_A = \dfrac{wL^3}{24EI}$
14–142. $\Delta_C = \dfrac{5wL^4}{8EI}$
14–143. $\Delta_B = \dfrac{wL^4}{4EI}$
14–145. $\theta_B = \dfrac{wL^3}{8EI}$
R14–1. $U_i = 496$ J
R14–2. $\sigma_{max} = 116$ MPa
R14–3. $h = 10.3$ m
R14–5. $\sigma_{max} = 43.6$ ksi
R14–6. $U_i = 45.5$ ft · lb
R14–7. $(\Delta_C)_v = 0.114$ in. ↓
R14–9. $\theta_B = \dfrac{M_0L}{EI}$
R14–10. $\theta_B = \dfrac{M_0L}{EI}$
R14–11. $\theta_C = -\dfrac{2}{3}\dfrac{wa^3}{EI}$, $\Delta_C = \dfrac{5}{8}\dfrac{wa^4}{EI}$ ↓

د انجینری موادو اوسط میخانیکی مشخصات

Average Mechanical Properties of Typical Engineering Materials[a]

(SI Units)

Materials		Density ρ (Mg/m^3)	Moduli of Elasticity E (GPa)	Modulus of Rigidity G (GPa)	Yield Strength (MPa) σ_Y Tens.	Yield Strength (MPa) σ_Y Comp.[b]	Yield Strength (MPa) Shear	Ultimate Strength (MPa) σ_u Tens.	Ultimate Strength (MPa) σ_u Comp.[b]	Ultimate Strength (MPa) Shear	%Elongation in 50 mm specimen	Poisson's Ratio ν	Coef. of Therm. Expansion α $(10^{-6})/°C$
Metallic													
Aluminum Wrought Alloys	2014-T6	2.79	73.1	27	414	414	172	469	469	290	10	0.35	23
	6061-T6	2.71	68.9	26	255	255	131	290	290	186	12	0.35	24
Cast Iron Alloys	Gray ASTM 20	7.19	67.0	27	–	–	–	179	669	–	0.6	0.28	12
	Malleable ASTM A-197	7.28	172	68	–	–	–	276	572	–	5	0.28	12
Copper Alloys	Red Brass C83400	8.74	101	37	70.0	70.0	–	241	241	–	35	0.35	18
	Bronze C86100	8.83	103	38	345	345	–	655	655	–	20	0.34	17
Magnesium Alloy	[Am 1004-T61]	1.83	44.7	18	152	152	–	276	276	152	1	0.30	26
Steel Alloys	Structural A-36	7.85	200	75	250	250	–	400	400	–	30	0.32	12
	Structural A992	7.85	200	75	345	345	–	450	450	–	30	0.32	12
	Stainless 304	7.86	193	75	207	207	–	517	517	–	40	0.27	17
	Tool L2	8.16	200	75	703	703	–	800	800	–	22	0.32	12
Titanium Alloy	[Ti-6Al-4V]	4.43	120	44	924	924	–	1,000	1,000	–	16	0.36	9.4
Nonmetallic													
Concrete	Low Strength	2.38	22.1	–	–	–	12	–	–	–	–	0.15	11
	High Strength	2.37	29.0	–	–	–	38	–	–	–	–	0.15	11
Plastic Reinforced	Kevlar 49	1.45	131	–	–	–	–	717	483	20.3	2.8	0.34	–
	30% Glass	1.45	72.4	–	–	–	–	90	131	–	–	0.34	–
Wood Select Structural Grade	Douglas Fir	0.47	13.1	–	–	–	–	2.1[c]	26[d]	6.2[d]	–	0.29[e]	–
	White Spruce	0.36	9.65	–	–	–	–	2.5[c]	36[d]	6.7[d]	–	0.31[e]	–

[a] Specific values may vary for a particular material due to alloy or mineral composition,mechanical working of the specimen,or heat treatment. For a more exact value reference books for the material should be consulted.

[b] The yield and ultimate strengths for ductile materials can be assumed equal for both tension and compression.

[c] Measured perpendicular to the grain.

[d] Measured parallel to the grain.

[e] Deformation measured perpendicular to the grain when the load is applied along the grain.

د انجینری موادو اوسط میخانیکی مشخصات

Average Mechanical Properties of Typical Engineering Materials[a]

(U.S. Customary Units)

Materials		Specific Weight (lb/in³)	Modulus of Elasticity E (10^3) ksi	Modulus of Rigidity G (10^3) ksi	Yield Strength (ksi) σ_Y Tens.	Yield Strength (ksi) σ_Y Comp.[b]	Yield Strength (ksi) Shear	Ultimate Strength (ksi) σ_u Tens.	Ultimate Strength (ksi) σ_u Comp.[b]	Ultimate Strength (ksi) Shear	% Elongation in 2 in. specimen	Poisson's Ratio ν	Coef. of Therm. Expansion α (10^{-6})/°F
Metallic													
Aluminum Wrought Alloys	2014-T6	0.101	10.6	3.9	60	60	25	68	68	42	10	0.35	12.8
	6061-T6	0.098	10.0	3.7	37	37	19	42	42	27	12	0.35	13.1
Cast Iron Alloys	Gray ASTM 20	0.260	10.0	3.9	–	–	–	26	96	–	0.6	0.28	6.70
	Malleable ASTM A-19	0.263	25.0	9.8	–	–	–	40	83	–	5	0.28	6.60
Copper Alloys	Red Brass C83400	0.316	14.6	5.4	11.4	11.4	–	35	35	–	35	0.35	9.80
	Bronze C86100	0.319	15.0	5.6	50	50	–	35	35	–	20	0.34	9.60
Magnesium Alloy	[Am 1004-T61]	0.066	6.48	2.5	22	22	–	40	40	22	1	0.30	14.3
Steel Alloys	Structural A-36	0.284	29.0	11.0	36	36	–	58	58	–	30	0.32	6.60
	Structural A992	0.284	29.0	11.0	50	50	–	65	65	–	30	0.32	6.60
	Stainless 304	0.284	28.0	11.0	30	30	–	75	75	–	40	0.27	9.60
	Tool L2	0.295	29.0	11.0	102	102	–	116	116	–	22	0.32	6.50
Titanium Alloy	[Ti-6Al-4V]	0.160	17.4	6.4	134	134	–	145	145	–	16	0.36	5.20
Nonmetallic													
Concrete	Low Strength	0.086	3.20	–	–	–	1.8	–	–	–	–	0.15	6.0
	High Strength	0.086	4.20	–	–	–	5.5	–	–	–	–	0.15	6.0
Plastic Reinforced	Kevlar 49	0.0524	19.0	–	–	–	–	104	70	10.2	2.8	0.34	–
	30% Glass	0.0524	10.5	–	–	–	–	13	19	–	–	0.34	–
Wood Select Structural Grade	Douglas Fir	0.017	1.90	–	–	–	–	0.30[c]	3.78[d]	0.90[d]	–	0.29[e]	–
	White Spruce	0.013	1.40	–	–	–	–	0.36[c]	5.18[d]	0.97[d]	–	0.31[e]	–

[a] Specific values may vary for a particular material due to alloy or mineral composition, mechanical working of the specimen, or heat treatment. For a more exact value reference books for the material should be consulted.

[b] The yield and ultimate strengths for ductile materials can be assumed equal for both tension and compression

[c] Measured perpendicular to the grain.

[d] Measured parallel to the grain.

[e] Deformation measured perpendicular to the grain when the load is applied along the grain.

د ژبالوړنکی (حفیظ الله وردک) لنډه پیژندنه

نوم اوکورنی:

نوم مي حفیظ الله وردک د حاجي بسم الله خان زوی او د وکیل محمد زرین خان (د امیر امان الله خان د سلطنت په وخت کي د وردګو وکیل) لمسي ، د جغتو د محمد قولي په کلی کی زیږدلي یم. الحمدالله دوی لوراني او دوه زامن او لس لمسیان خداي راکړي.

علمی زدکړي:

لمړني زد کړي: لمړني زد کړي مي د غازی محمد جانخان د وردګو په جغتوکی اود قاری عبدالله خان نوآباد ده افغانان کابل کي تر سره کړي.

لیسه : د لیسی دوره مي د حبیبیی په عالي لیسه په کابل کی تر سره کړي. د حبیبي لیسي له لسم ټولګی نه امریکا ته د (American Field Service) سکالرشیپ په اخیستلوسره د یوه کال زدکړو لپاره ولاړم، او هلته می یو کال لپاره په من هایم ټونشیپ لیسه (Manheim Township High School) کی چی په لنکستر پنسلوانیا (Lancaster Pennsylvania) کی ده زده کړه درلوده. یو کال وروسته بیرته کابل ته ستون شوم او یولسم او دولسم ټولګی می دی حبیبیی په عالي لیسه کی پای ته ورساوه. د لیسی دوری په وخت کی ما د کابل ټایمز (Kabul times) ، د انیس ورځپاڼي او کابل راديو سره د راپیورتر په توګه همکاری کوله. له کابل ټایمز نه می د لیکلو یوه جایزه هم تر لاس کړه.

لوړي زدکړي: د پوهنتون کانکور له لاري د کابل پوهنتون (Kabul University) د انجینری پوهنځی ته شامل شوم. په دوهم صنف کي د ایست ویست سنتر (East West Center) سکالرشیپ په اخیستلو د امریکا هاوایی پوهنتون (University of Hawaii) ته ولاړم او لیسانس مي په سیول انجینری کی هلته واخیست او بیا د کیس وسترن ریزرو یونیورستی (Case Western Reserve University) چی په کلیولند اوها یو (Cleveland Ohio) د امریکا ولایت کی ده د ما ستری شهادت نامه په سټرکچر انجینری کي تر لاسه کړه .

د روسانو له یرغل وروسته امریکا ته مهاجر شوم د الاباما یونورستی (University of Alabama, Huntsville) چی په هنتسویل د امریکا کی ده د ډاکتری (PhD) ټول مضامین تکمیل کړل او دیسرتیشن می د کورنی مصروفیت او د اولادونودی زدکړي لازمی پاملرنی د ضرورت له کبله تکمیل نشوای کړی. د دیسرتیشن تکمیلولو لپاره باید یوتر دوکلونو ما باید کار پریښیوی اما تصمیم پر دی شو چی د یوه وخت لپاره پوهنتون پریږدم او کار ته ادامه ورکړم.

کاری مصروفیتونه او علمي تجربې:

کله چې وروسته له ماستری اخیستلو له امریکا بیرته کابل ته ستون شو م کاري تجربه مې پدې لاندې ډول شروع شوه:

افغاني ساختماني دستګاه : د فواید عامې وزارت په چوکاټ کې دا لویه او مهمه ساختماني دستګاه وه. کله چې کابل ته ستون شوم هلته مې د انجینر په توګه کار شروع کا او پدې کارکی د څو میاشتو د پاره پاتې شوم.

د کابل پوهنتون د انجینري پو هنځي: وروسته له څو میاشتو په افغاني ساختمانی دستګاه کی د کابل پوهنتون د انجینري پوهنځي د سیول انجینري دیپارتمنت کی د استاد په حیث ومنل شوم. شپږ کاله هلته په تدریس او ریسرچ مصروف وم تر څو اتحاد جاهیر شوروي په افغانستان یرغل وکړ. پدی وخت کی زما علمی رتبه پوهنمل وه.

د شوروي له یرغل وروسته هندوستان ته لاړم ، دری میاشتې په نوی ډیلی کی پاتی شوم، او له هغه ځایه په جنوري د ۱۹۸۱ کی امریکا ته راغلم. د کالورادو پوهنتون په بولدر او د واشنګتن یونیورستی په سنتلویس میزوري کی د دکتورا اخیستلو لپاره کله چې په هندوستان کی وم شمولیت او اسیستنشیپ رالېږلي وه. کله چې له هندوستان نه امریکا ته را ورسیدم د پوهنتونو د شروع کیدو وخت تیر شوی وا او مجبور شوم چې کار وکړم.

پایل ډینامیک او ډیلونو انجنری کمپني: څو میاشتو لپاره مې له یوی کمپني سره چې په اوهایو کي د پلونو او پایل ډینامیکس (Pile Dynamics) په نامه یادیده د انجینر په توګه کار وکا.

سا رجنت لنډی د اتومی انرژی انجینری کمپني: په شیکاګو ایلینویز ایالت کی له سارجنټ لنډي چې د اتومی انرژی د انجینري یوه مشهوره کمپنی ده دسترکچر متخصص (structural Specialist) په حیث شپږ کاله د دی کمپنی سره د سترکچرل انحینر په حیث کار وکا.

یونایتید تیکنالوجي کمپني: وروسته له 6 کلونو په شیکاګو کي د دو کلونو لپاره د یونایتید تیکنالوجي سره په هنتسول الاباما کی چې د هوایي راکتونو ، د جیت الوتکو اینجین جوړه ولو او فضاي راکیتونو یو لویه کمپنی ده په حیث د سترکچر انجینر کار وکړ.

بوینګ کمپنی : د یونایتید تکنالوجی د کمپنی دکار ورسته د بوینګ له کمپنی سره کار پیل کړ. بوینګ د الوتکو جوړه ولو او هوایي بیړیو د دنیا لویه او مشهوره کمپني ده . زه تر دیرش (30 years) کاله د سترکچرانجینری په برخه کی د یوه عالی مقام (تیکنیکل فیلو) انجینر په توګه کار وکړ او تصمیم مې ونیو چې په ۲۰۱۹ کال کی رسمی کار بس کړم. په بوینګ کی اول لس کاله د فضاي هډې (International Space Station) د ناسا (NASA) مربوطه (په فضا کی د ژوندکولو ا و علمي تحقیقاتو بیړي چې بین الملي فضا يي ستیشن نومیږي) د مشرسترکچر انجینرپه حیث مصروف د کار وم . پدی وخت کی وروسته له رسمي کاره د دکتورا لپاره په یونیورستی الباما

هنتسویل کی درس شروع کړ. شل کاله نورمی په بوینګ کی د ډول ډول موډلونو د نویو الوتکو په انجینری کارونو د عالی رتبی انجینر (تیکنیکل فیلو) په صفت په بوینګ کی کار وکړ. د بوینګ سره یوه اختراع هم لرم او دا اختراع د امریکا د پټنټ په اداره کی رسمي ثبت شوي. د انجینری مسؤلیت او کار برسیره ما پنځه ویشت (25) کاله په بوینګ کمپني کی نورو انجینرانو ته د سټرکچر په رشته کی وروسته له رسمی کاره تدریس هم وکړ.

په دی 40 کاله کاري مصروفیتونو په امریکا کی ، زیات شمیر تخنیکی لیکني درلودلي او هم زیات شمیر کاري جایزي، ستاینې، او پیږندني له یونایتید تیکنالوجي، ناسا (NASA)، او له بوینګ ماته راکړل شوي. په کال 2022 کی د انجینری په مسلک کی د رهبری او لاسته راوړنو پر بنسټ د نړی د انجینرانو په لست کی (Who's Who Worldwide) د انجینر په توګه پیژندل شوي دي.

له کومه وخته چی رسمی کار می بس کړی، یو کتاب د جوړښتونو تحلیل په نامه په پښتو ژبه په دری ټوکونوکی ولیکه او هغه اوس په افغانستان کی په پوهنتونو کی تدریسی کتاب دی. په دی کتاب کی محترم ډاکتر بها د انجینری پوهنځی پخوانی ریس هم شریک دی. او هیله د ه چی د ا دوهم کتاب (د انجینری میخانیک) په نامه هم د زده کونکیو او راتلونکیو افغانی انجینرانو د پاره ګټور تمام شی.

د ژباړونکی (زرجان بها) لنډه پیژندنه

(دا معلومات د اکتوبر په ۲۹ کال ۲۰۲۳تیارشوی)

نوم اوکورنی :

زما نوم **زرجان** دی او کله می چی پوهنتون شروع کا وا (۱۹۵۸) د تعلیم او تربیی مودیر راته وویل چی ښایي چی د کورنی نوم هم ولرم نو د پلارد نامه لمړنی برخه می په همغه ساعت کی د کورنی د نامه د پاره وټاکله او د هغو راهیسی مي نوم **زرجان بها** دی. د پلار نوم می **بهاول** خان او د مور نوم می **کجله** دی. د یوسفخیلو په کلی کی چی دوردګو د سید اباد په ولسوالی کی دی زیږیدلی یم. زموږ په کلی کی چی کابو سل کوره وا یوازی زما پلار وا چی لوستل او لیکل یی کولی شوی. زما تره اغاجان خان د ولس ملک وا او د لیکل شویو اړین سندونو برابرول یی زما د پلار په غاړه وو. دواړه ورونه د یوی کورنی په توګه یو ځای اوسیدل.

زما د اوو یشپیتو کالو د ژوند شریکه **فاطمه** اودری اولاده لرم چی دوه یی د طب ډاکتران او یو یی انجینر دی. دری سره د ژوند د شریکانو او اولادو سره په خپلو کورو کښنی د امریکا په مختلیفو ښارو کی ژوند کوی. همدارنګه لس لمسیان لرم چی اوو یی پوهنتونونه خلاص کړی، کار کوی او یا لوړی تخصوصی زده کړی کوی، دوه يي په بوهنتون کی او یو یی په متوسطه ښونځی کی دی.

زه به د خپل ځان په هکله به لاندی کرښوکی په لنډیزه توګه شننه وکړم.

رسمی زده کړی:

لمړني ښونځی دوره (د ۱ نه تر ۶ ټولګي): لمړني زد کړي مي د وردګو د تکیی به ښونځی کی بشپړی کړی او لدی کبله چی د شپږم ټولګینه د اول نمره په توګه فارغ شوم د پوهنی د وزارت د تعامول له مخی ددی مستحق شوم چی کابل ته د نورو زده کړو د پاره په کوم لیله ښونځی کی شامل شم.

د لیسی دوره (۷ نه تر ۱۲ ټولګی) : د لیسی دوره مي د کابل په دارالمعلمین کی تر سره کړه. د کابل دارالمعلمین دوی برخی درلودی چی یویی مسلکی برخه وه چی د نهم ټولګی فارغان دښونکیو په توګه دافغانستان په شپږکلنه ښونځیو کی د ښونکیو په توګه وظیفه قبلوله چی زموږ په وخت کی مسلکی برخه یولسم ټولګی ته لوړه شوه، بله برخه یی متوسطه وه چی شپږ کاله وه او فارغانو یی کړی شوی د کابل په لیسو کی دښونکی په توګه کار وکا او یا به د پوهنتون د ادبیاتو او ساینس پوهنځیوته تلل چی د کابل په لیسو کی د ساینس او یا اجتماعیاتو ښونکی شی. زه اول مسلکی برخی ته معرفی شوی وم او بیا می دمکتب د مود یر نه وغوښتل چی متوسطی ته بدل شم چی زما غوښتنه یی قبوله کړه. د یادولو وړده چی په هغه وخت کی تر کابل پرته په ټول افغانستان کی یوازی تر

شپږم ټولګی پوری زده کړی وی. زموږ ټولګی ته د افغانستان د ټولو ولایتو نه اول نمره ګان راغلی وو.

کله چی زه په یولسم ټولګی کی وم د زراعت معین د یو شمیر نورو غړیو سره زموږ مکتب ته راغی او غوښتل یی چی ځنی زدکونکی د زراعت د تحصیل د پارترکیی ته انتخاب کړی. عبدالصمد خان چی زموږ د کمیا معلم او هم د لیسی معاون وا زه یی اول ورته معرفی کړم چی زه د ټولګی اول نمره او کپتان هم وم. دری نور زموږ د ټولګی نه پدی ډ له کی ګډ شول. زه دی سکالرشیپ ته ډیر نه وم خوشحاله او د دی اند یښنه را سره وه چی که پدی سکالرشیب کی کومه ستونځه پیداشی زما تحصیل به نیمګړی پاتی شی. ښه داشوه چی زموږد ډ لی نه د یوه ملګیری پچه ختلی وه. پدی توګه نوموړی به اول دعسکری دوره تیره وله او بیا به یی د دی سکالر شیپ نه ګټه اخلسنله او پدی توکه د دی سکالر شیپ نه پښیمانه شو . ماته هم لاره جوړه شوه چی زه هم تر دی سکا لر شیپ نه تیر شم. زموږ دټولګی نه ځنی نورکاند یدان دنوموړی سکالرشیپ دپاره پیداشول چی رښتیا یی تحصیل نیمګړی شو.

د لوړو زدکړو دوره:

په افغانستان کی:

زموږ په وخت کی د پوهنتون د پاره کانکور نه وا او زموږ نه یی یو امتحان واخیست چی دا امتحان د کانکور د جوړولو د پاره آ زما یښتی امتحان وا. ماته وویل شول چی د کابل په ټولو لیسو کی زما نمری دریمه درجه وی. اول او دوهم نمره ګان د استقلال او نجات له ښونځیو نه وو. دی ازموینی زموږ د پوهنځیو په خوښید و کی هیڅ اغیزه نه درلودله. لکه چی پخوامی وویل چی زموږ د مکتب نه یوازی د ادبیاتو او ساینس پو هنځیو ته فارغان تلی شوی او زمادپاره یو طلایی چانس پیدا شو چی دانجینری پوهنځی ته شامل شم. د پوهنځی نه دوهم نمره فارغ شوم او پوهنځی موږ دواړه، اول نمره او دوهم نمره، د استادانوپه توکه ومنلوچی په هغه وخت کی د یوه فارغ دپاره تر نورو ټولو ځایونه ښه انتخاب وا. په پوهنځی کی می د ۱۹۶۲ کال د جنوری نه د ۱۹۶۳ کال تر سپتمبره پوری د استاد په توګه دنده درلوده او په سپتمبر کی د نورو لوړو زدکړو له پاره امریکاته ولاړم.

د پو هنځی په دوره کی ما د ملګریو میلتو د (Food and Agriculture Organization, FAO) په د دفتر کی د ډرافتمین په توګه کار کا. دا کار ماته د عبدالمحبوب خان په مرسته پیدا شوی وا. نوموړی د امریکا د وایومینګ پوهنتون نه لیسانس او د ډیوس پوهنتون نه یی ما ستری اخستی وه. ډیر وخت یی د هلمند په پورژه کی کار وکا او په آخرو وختو کی د پروان د ابیاری د پروژی د أمر او بیا د کود او برق د فابریکی چی په شبرغان ن کی وه درییس په توګه دنده درلوده. د FAO د دفتر مشر د کرهنی د وزارت په موافقه د ما دپاره یو بورس جوړ کا چی په امریکا کی د ابیا ری په انجینری کی ما ستری واخلم.

کله چی زه د پوهنځی نه فارغ شوم له یوا خوا د FAO سکالرشیپ وا او له بلی خوا د پوهنځی له خوا د استاد په توګه کار راته پیدا شو. رښتیا هم چی دا یوه سخته فیصله وه چی زه کوم انتخاب کړم. په پای کی می د خپل ژوند د پرنسیپ په آساس بی د چا د مشوری نه د پوهنتون کار انتخاب کا او پدی فیصله تر اوسه پوری خوشحاله یم.

په امریکا کی:

د ماستری د پاره: زه چی امریکاته راغلم اول د واشنګټن پوهنتون چی په سنټلویس کی دی ولاړم تر څو زما د یوه همکار، Walter Pilkey ، چی زموږ په پوهنځی کی یی درس ورکاوا ، په سپارښتنه د ده دیوه ملګری پرو فیسر تر لاس لاندی خپله ماستری هلته واخلم. پدی پوهنتون کی یو لږ داخلی ستونځی پیدا شوی وی چی ډیر پروفیسران، د ما د انتخاب شوی پروفیسر په ګډون ، نورو پوهنتونو ته ولاړل او ما هم پس له دوو سمسترو چی زیاتره می د لیسانس دوری مضمونونه نیولی وو د پورډو پوهنتون ته چی زموږ د پوهنځی سره یی د نورو لسو امریکا پوهنتونو تر څنګ مرسته کوله انتخاب او د (۱۹۶۴) کال په پسرلی کی ځان بدل کا. د ۱۹۶۶ په جنوری کی می دسیول انجینریه ساحه کی ماستری واخستله. د فراغت نه ورسته افغانستان ته ولاړم او په پوهنځی کی می خپل کار ته دوام ورکا.

کله چی د پورډو په پوهنتون کی وم د (۱۹۶۵)کال په اوړی کی شیکاګو ته دعملی کار زده کولو د پاره ولاړم او هلته می دشپی له خوا د پریسټرس کانکریټ یوکورس په ایلونیای انستیټوټ اف تکنالوجی (IIT) کی واخیست چی ډیر په زړه پوری یوه پروفیسر درس راکاوا.

د ډاکتری د پاره: د ۱۹۶۹کال په جنوری کی د نارت کرلینا سټیټ پوهنتون ته چی په رالی کی دی د ډاکتری د تحصیل د پاره ولاړم او د ۱۹۷۳ کال په اوړی کی می په سیول انجینری کښی ډاکتری شهادت نامه وا خسته او بیرته افغانستان ته ولاړم اود کابل د پوهنتون د انجینری په پوهنځی کی می کار ته دوام ورکا. زما د تیسس موضوع پریسټرس پریکسټ کانکریټ وا او ما دا هیله درلوده چی ددی موادو کمپنی به په افغانستان کی جوړه وو تر څو دا مواد د فولادو ځای د ودانیو په جوړولو کی ونیسی.

ګله چی هلته په پوهنتون کی وم یو څه وخت می د Nuclear Engineering به ډیپارتمنت کی د Coastal Erosion د اندازکولو په بروژه کی کار وکا.

زما د کارشننه:

د ۱۹۶۲کال د جنوری نه د ۱۹۸۲کال تر حنوری پوری (شل کاله) می د کابل پوهنتون د انجینری په پوهنځی کی کار درلود. په ۱۹۷۴ کال کی په پوهنځی کی د زراعت او سیول انجینری ډیپارتمنټ

د مشر په توګه د استادانو له خوا انتخاب شوم. په ۱۹۷۵ کال کی د پوهنتون په پیشنهاد، د کابینی په مجلس کی د پوهنځی د رییس په توګه وټاکل شوم او تر څو چی په افغانستان کی کمونستانو قدرت ونیو (۱۹۷۸) د رییس په توګه پاتی شوم او بیا د۱۹۸۲کال تر جنوری پوری په بوهنځی کی استاد وم او زما علمی رتبه پو هنوالی وه . زموږ په پوهنځی کی تر دی لوړه علمی رتبه یوازی دفزیک یو پوهاند درلوده.

د پوهنځی د کار په اولو کلو کی می د کرهنی په وزارت کی د احصاییی او وترنری کورسو کی درس ورکړی. همدارنګه د پوهنځی په

Center for Engineering Consulting Services and Applied Research (CECSAR)

کی می د مشاور په توګه د کار به ټوله دوره کی (بی دریاست د وخت نه) په آتلسو پروژو کی کار کړی.

کله چی د ۱۹۸۲کال په جنوری کی د سیستم انجینری ورکشاپ د پاره د یونسکو له خوا

IIT Bombay, India ته ولاړم تصمیم می ونیو چی امریکا ته راشم. د ځینی امریکایی ملګریو سره می تماس ونیوچی امریکا ته به را ځم او د کار په پیداکولو کی به ددوی مرسته غواړم. په پورډو پوهنتون کی د تکنالوجی د کالج رییس Dr. George McNelly له خوا می لیک تر لاسه کا چی د

Building Construction and Contracting

په ډیپارټمنټ کی دی میلمه پروفیسر په توګه د یوه کال د پاره وظیفه درلودی شم. کله چی زه په جون د ۱۹۸۲ کال کی ا مریکا ته راغلم نو زما د پخوانی ملګری Walter Pilkey په کور کی چی په شارلټزویل ورجینیا کی اوسیدا د میلمه په توګه ووسید م او د لنډ وخت د پاره می په University of Virginia کی کار وکا. په همدی دوبی کی د انټرویو د پاره پورډو ته راغلم او دا کار می قبول کا. په ۱۹۸۴ کال کی د ټینیرټرک اسوسیشت پوروفیسرپه توګه ومنل شوم او په ۱۹۹۰ کال کی می د پوروفیسری (پوهاندی)علمی رتبه تر لاسه کړه او د ۲۰۲۲ کال د می تر میاشتی چی ځلوښت کاله کیری په پرډو کی کار وکا. د ۲۰۱۹ کال په منی کی می تصمیم ونیو چی د کار مسولیت می نیمایی کړم او په دریو کالو کی خپله ډنډه په پوهنتون کی پاي ته ورسوم. زما د ورستیو کلو کی د کالج د مشاور(College Mentor) په توګه کار کاوا او کوم معین مضمون درس می نه ورکاوا.

په ۱۹۹۵ کال کی د پورډو انټرنشنل پروګرام د جهانی بانک یوه شل ملیونه دالره پروژه واخسته او زمانه یی وغوښتل که ددی پروژی د پر مخ وړلو دپاره د Resident Program Coordinator په توګه چی په مالیزیا کی وه ولاړ شم چی ما دا کار قبول کا او د پنځوکالو پروژه می د ۱۹۹۹ کال په پای ګی تکمیل کړه. پدی پروژه کی کابو یو سل استادانو چی د امریکا، انګلستان، کاناډا او استرلیا

وو د لنډې او یا څه ووړدی مودی د پاره کار وکا. پدی پروژه کی موږکابو ۹۰۰ استادان د مالیزیا د پولیتخنیکو د پاره وروزل. زما په دفتر کی څلورو مالیزیایانوچی ما خوښ کړی وو، کار کاوا، چی د موټړچلولو، سکرتریت، اداری او ما لی چارو مسولیت ورپه غاړه وا.

د ۲۰۰۲ کال راهیسی پنځه واری (د ۲۰۰۲ نه تر ۲۰۱۶) افغانستان ته د نورو پوړدو استادانو سره تللي یم تر څو د افغانستان د لوړو زده کړو، په ځا نګړی توګه د نویي تکنالوجی، په برخه کی مرسته وکړو. یو شمیر د پوهنتونو استادان مو امریکا ته د لنډ و خت د پاره راوستل او هلته مو څو ورکشاپونه جوړ کړل تر څو د پوهنتون یو شمیر استادان او نورانجینران د نویو تکنالوجیو سره بلد شی. همدارنګه مو یو سپین سرخلاصی را پور ولیکا چی په افغانستان کی د تکنالوجی زده کړو پنځه مر کزونه جوړشی چی یو په کابل، بل په کندار، بل په هرات ، بل په مزار، او بل په ننګرار کی وی. په هر مر کز کی کوشش وشی چی د خیلی منطیقی د ضرورت وړ تکنالوجستان وروزی. دا مرکزونه بنایی چی مالی استقلال ولری تر څو د ضرورت وړشیان په بیړه د خپلو مرکزو د پاره تیار کړی شی.

BRIEF INTRODUCTION TO THIS BOOK

This book provides the student with a clear and thorough presentation of the theory and application of the principles of mechanics of materials. It is hoped that both the instructor and student will benefit greatly from it.
The translation to Pushto language has kept all the contents of the original book, tenth edition by R.C. Hibbeler.
The book is organized in 14 chapters, problems sets are located after each group of examples. In this way the students can have a better understanding of the covered materials. Solutions to the problem sets are provided at the end of the book.
Due to printing requirements the book is divided into two volumes. The first volume covers Chapters 1-8, and the second volume covers chapters 9-14. Appendices and problem solutions are provided at the end of each chapter.

CONTENTS

The subject matter is organized into 14 chapters. Chapter 1 begins with a review of the important concepts of statics, followed by a formal definition of both normal and shear stress, and a discussion of normal stress in axially loaded members and average shear stress caused by direct shear.
In Chapter 2 normal and shear strain are defined, and in Chapter 3 a discussion of some of the important mechanical properties of materials is given. Separate treatments of axial load, torsion, and bending are presented in Chapters 4, 5, and 6, respectively. In each of these chapters, both linear-elastic and plastic behavior of the material covered in the previous chapters, where the state of stress results from combined loadings. In Chapter 9 the concepts for transforming multiaxial states of stress are presented. In a similar manner, Chapter 10 discusses the methods for strain transformation, including the application of various theories of failure. Chapter 11 provides a means for a further summary and review of previous material by covering design applications of beams and shafts. In Chapter 12 various methods for computing deflections of beams and shafts are covered. Also included is a discussion about finding the reactions of these members if they are statically indeterminate. Chapter 13 provides a discussion of column buckling, and lastly, in Chapter 14 the problem of impact and the application of various energy methods for computing deflections are considered.
Sections of the book that contain more advanced material are indicated by a star (*). Time permitting, some of these topics may be included in the course. Furthermore, this material provides a suitable reference for basic principles when it is covered in other courses, and it can be used as a basis for assigning special projects.

د افغانستان د ۹ پوهنتونونو د ۳۸۹چاپ شویو درسي کتابونو لېست

(کابل، کابل طبي پوهنتون، کابل پولي تخنیک، ننګرهار، خوست، کندهار، هرات، بلخ او کاپیسا) ۲۰۱۰ ـ ۲۰۲۳

شمېره	د کتاب نوم	لیکوال	پوهنتون	شمېره	د کتاب نوم	لیکوال	پوهنتون
۱. اخلاق، طبي لارښود او ترمینولوژي							
۱	اخلاق طبابت	پوهاند داکترعبدالغفورهمدل صدیقی	بلخ	۲	رهنمای تدریس طب	پوهاند دوکتورنادراحمد اکسیر	کابل طبي پوهنتون
۳	د طبابت لنډ تاریخ	پوهاند عبدالحی مومنی	ننګرهار	۴	طبي ترمینولوژي	دوکتورګل سیما ابراهیم خیل قادری	ننګرهار
۵	د ننګرهار طب پوهنځی نصاب او درسي مفردات (انګلیسی)	ننګرهارطب پوهنځی	ننګرهار	۶	رهنمود PBL درافغانستان	پوهنوال دوکتورمحمد فرید برنایار	کاپیسا
۷	انګلیسي- پښتو طبي قاموس I	رنځورمل دوکتور عجب ګل مومند	ننګرهار	۸	انګلیسي- پښتو طبي قاموس I	رنځورمل دوکتور عجب ګل مومند	ننګرهار
۹	د طب محصلینو درسي کتابونه	ډاکتر یحیی وردک	ټول پوهنتونونه	۱۰	۱۴۰ طبي کتابونه په ډي وي ډي کې (پښتو، دري او انګلیسي)	بېلا بېل مؤلفین	ټول پوهنتونونه
۱۱	۲۱۴ طبي کتابونه په ډي وي ډي کې (پښتو، دري او انګلیسي)	بېلا بېل مؤلفین	ټول پوهنتونونه	۱۲	د طبیعي علومو انګلیسي- پښتو قاموس	پوهنوال ډاکتر نظر محمد سلطانزی خدران	ننګرهار
۲. فزیک							
۱۳	په معاصر طب کې د فزیک پېژندنه	ګل احمد سهیل	ننګرهار	۱۴	بیوفزیک	پشتانه بنایي	ننګرهار
۱۵	بیوفزیک	پوهنیار ګل احمد سهیل	ننګرهار	۱۶	بیوفزیک	پوهاند میر محمد ظاهرحیدری	بلخ
۱۷	طبي فزیک	پوهنیار هدایت الله مهمند	ننګرهار	۱۸	فزیک طبی بخش میخانیک	پوهاند میر محمد ظاهرحیدری	بلخ
۱۹	فزیک طبی بخش حرارت	پوهاند میر محمد ظاهرحیدری	بلخ	۲۰	توضیح اساسات فزیکی، وسایل تشخیصیه طبی	پوهاند میر محمد ظاهرحیدری	بلخ
۲۱	فزیک نور	پوهاند میر محمد ظاهر حیدری	بلخ	۲۲	فزیک اوپتیک	پوهنوال غلام قادر دهګان	هرات
۲۳	نور و فزیک جدید	پوهنوال غلام قادر دهګان	هرات	۲۴	د نور فزیک	پوهنیار هدایت الله مهمند	ننګرهار
۲۵	د برق فزیک	پوهنیار هدایت الله	ننګرهار	۲۶	میخانیک او د نور فزیک	پوهنیار هدایت الله	ننګرهار
۲۷	کوانتم میخانیک	پوهنیار اکرام الله وقار	ننګرهار	۲۸	حرارت و ترمودینامیک	پوهنوال غلام قادر دهګان	هرات
۲۹	برښنا، مقناطیسیت او الکترو مقناطیسي تیوري	پوهندوی توریالی همدرد	ننګرهار	۳۰	میخانیک، اهتزازات او نسبیت	پوهندوی علي جان عادل	ننګرهار
۳. کیمیا							
۳۱	طبي کېمیا	پوهنوال امرالله آصفي	خوست	۳۲	طبي بیوشمي	پوهاند خان محمد احمدزی	کابل طبي پوهنتون
۳۳	کېمیایي عنصرونه، لومړی ټوک	محمد طاهر کاټي	ننګرهار	۳۴	کېمیایي عنصرونه، دوهم ټوک	محمد طاهر کاټي	ننګرهار
۳۵	فزیکي کېمیا ګازونه او کېمیاوي ترمودینامیک	پوهاند خیر محمد ماموند	ننګرهار	۳۶	فزیکي کیمیا دوهم جلد، ترمودینامیک	حبیب الله نوابزاده	ننګرهار
۳۷	عضوي کېمیا، کړیوال ترکیبونه	پوهاند دوکتور محمد غوث حکیمي	ننګرهار	۳۸	فزیکي کېمیا II،	پوهاند دوکتور خیر محمد ماموند	ننګرهار
۳۹	فزیکي کېمیا III، کېمیاوي کنتک او کتلسس، کروماتوګرافي او اسپکتروسکوپي	پوهاند دوکتور خیر محمد ماموند	ننګرهار	۴۰	عمومي کیمیا	پوهاند دوکتورخیرمحمد ماموند	ننګرهار
۴۱	عضوی کیمیا، د الیفاتیک برخه	پوهنوال ډاکترګل حسن ولیزی	خوست	۴۲	عضوي کیمیا، د اروماتیک او هیترو سیکلیک برخه	پوهنوال ډاکترګل حسن ولیزی	کابل
۴۳	د قندونو هضم، جذب او استقلاب	پوهیالی دوکتوریحیی فهیم	ننګرهار	۴۴	د شحمیاتو استقلاب	دوکتور محمد عظیم عظیمي	ننګرهار
۴. بیولوژي او جنیټیک							
۴۵	عمومي بیولوژي	پوهندوی جماعت خان همت	ننګرهار	۴۶	عمومي بیولوژي	پوهندوی الفت شیرزی	ننګرهار
۴۷	بیولوژي مالیکولي حجره، بخش اول	پوهنوال علی یوسف پور	کابل طبي پوهنتون	۴۸	بیولوژي مالیکولي حجره، بخش دوم	پوهنوال علی یوسف پور	کابل طبي پوهنتون
۴۹	د حجرې بیولوژي	پوهندوی جماعت خان همت	ننګرهار	۵۰	مالیکولي بیولوژي	پوهندوی جماعت خان همت	ننګرهار
۵۱	وراثت	پوهنوال دوکتور ګل سالم شرافت	ننګرهار	۵۲	کلاسیک اومالکیولی جنتیک	دوکتورمحمد صابر	ننګرهار
۵۳	وراثت او د سمورفولوژي	پوهنمل ډاکتر مسیح الله مسیح	ننګرهار	۵۴	طبي جنیټیک	پوهندوی الفت شیرزی	ننګرهار
۵۵	زولوجي فقاریه	ذاکره بابکرخیل	ننګرهار	۵۶	زولوجي غیرفقاریه	ذاکره بابکرخیل	ننګرهار
۵۷	حیوانات مفصلیه	پروفیسور داکتر دیپلوم علی آقا نحیف	هرات				

۵. اناټومي او هستالوژي							
۵۸	اناټومي لومړی جلد (هډوکي، مفاصل او عضلات)	پوهنمل ډاکتر محمد ناصر نصرتي	ننگرهار	۵۹	د هډوکو او مفاصلو اناټومي	پوهنوال دوکتور حمیدالله حامد	خوست
۶۰	د سر او غاړې اناټومي درسي کتاب I	پوهندوی دوکتور یما صدیقي	ننگرهار	۶۱	د سر او غاړې اناټومي درسي کتاب II	پوهندوی دوکتور یما صدیقي	ننگرهار
۶۲	د ټټر اناټومي	پوهنیار دوکتور یما صدیقي	ننگرهار	۶۳	اناتومی	پوهنمل ډاکټرحفیظ الله سهار	کابل طبي پوهنتون
۶۴	د سینې بطن او حوصلې اناټومي	پوهنوال دوکتور حمیدالله حامد	خوست	۶۵	د جهازاتو اناتومي	پوهنوال ډاکتر محمد حسین یار	ننگرهار
۶۶	د عصبي سیستم اناټومي	پوهنیار دوکتور یما صدیقي	ننگرهار	۶۷	اناټومي دریم جلد، عصبي سیستم، حواس او اندوکراین غدوات	پوهنمل ډاکتر محمد ناصر نصرتي	ننگرهار
۶۸	د زړه او وینې د رگونو اناټومي	پوهنمل ډاکتر محمد ناصر نصرتي	ننگرهار	۶۹	د هضمي سیستم اناټومي	پوهنمل ډاکتر محمد ناصر نصرتي	ننگرهار
۷۰	د بولې تناسلي سیستمو اناټومي	پوهنمل ډاکتر محمد ناصر نصرتي	ننگرهار	۷۱	د انسان فزیولوژي او اناټومي	عبدالملک پرهیز	ننگرهار
۷۲	د انسان اناټومي (پورتنی طرف او صدر) ناحیوي او عملي له تسلیخ او کلینیک سره	پوهندوی ډاکتر توریالی سهاک	ننگرهار	۷۳	اناتومی و فزیولوژی انسان، جلد دوم	پوهندوی محمد طاهرنسیمی	بلخ
۷۴	اناتومی و فزیولوژی انسان، جلد اول	پوهندوی محمد طاهرنسیمی	بلخ	۷۵	عمومي هستالوژي	پوهندوی ډاکټرفضل الهي	کندهار
۷۶	عمومي هستالوژي	پوهاند ډاکټر خلیل احمد بهسودوال	ننگرهار	۷۷	طبی هستولوژي	پوهاند ډاکټر خلیل احمد بهسودوال	ننگرهار
۷۸	طبي هستالوژي	پوهاند داکتربری صدیقي	خوست	۷۹	هستالوژي	پوهاند ډاکټربری صدیقي	کابل طبي پوهنتون
۸۰	د سیستمونو هستالوژي	پوهاند ډاکټر خلیل احمد بهسودوال	ننگرهار				
۶. امبریولوژي							
۸۱	عمومي امبریولوژي	پوهاند دوکتوربری صدیقي	خوست	۸۲	امبریولوژي	پوهنوال ډاکتر محمد حسین یار	ننگرهار
۸۳	امبریولوژی طبی	پوهندوی داکتربشیر نورمل	کابل طبي پوهنتون	۸۴	طبي امبریولوژي	پوهنمل داکتر ناصر نصرتي	ننگرهار
۸۵	امبریولوژی عمومی انسان	پوهندوی داکتربشیر نورمل	کابل طبي پوهنتون	۸۶	د انسان عمومي کلینیکي امبریولوژي	پوهنیار ډاکتر عبدالله جان شینواری	ننگرهار
۷. فزیولوژي او پتولوژي							
۸۷	طبي فزیولوژي	داکتر شریف الله	ننگرهار	۸۸	د ځانگړو حسیتونو، پوستکي، اوتونومیک او مرکزي سستم فزیولوژي	پوهنوال دوکتور محب الله شینواری	ننگرهار
۸۹	د اندوکراین، زړه، رگونو او پښتورگو فزیولوژي	پوهنوال دوکتور احسان الله احسان	ننگرهار	۹۰	د تنفسي سیستم فزیولوژي	پوهنوال دوکتور احسان الله احسان	ننگرهار
۹۱	د وینې فزیولوژي	پوهنمل ډاکتر ولي محمد ویاړ	کندهار	۹۲	عمومي پتالوژي	پوهاند دوکتور خلیل احمد بهسودوال	ننگرهار
۹۳	پتالوژی عمومی	پوهندوی ډاکټرزهرا فروغ	هرات	۹۴	عمومي پتالوژي	پوهندوی دوکتور محمد آصف	ننگرهار
۹۵	د سیستمونو پتالوژي	پوهندوی ډاکټرخلیل احمد بهسودوال	ننگرهار	۹۶	د سیستمونو پتالوژی دوهمه برخه	پوهاند دوکتور خلیل احمد بهسودوال	ننگرهار
۹۷	د قلبي وعایي، وینې، تنفسي او هضمي جهاز پتالوژي	پوهاند دوکتور خلیل احمد بهسودوال	ننگرهار	۹۸	د وینې، ججرو، تنفسي جهاز، هضمي جهاز او نویو زیږېدلو فزیولوژي	پوهنوال دوکتور جنت میر مومند	ننگرهار
۹۹	مالیکولي ایمینولوژي	پوهاند ډاکټر خلیل احمد بهسودوال	ننگرهار				
۸. مایکروبیولوژي او پرازیتولوژي							
۱۰۰	مایکرو بیولوژی طبی، جلد اول	پوهاند دوکتورعبیدالله عبید	کابل طبي پوهنتون	۱۰۱	مایکرو بیولوژی طبی، جلد دوم	پوهاند دوکتورعبیدالله عبید	کابل طبي پوهنتون
۱۰۲	مایکروبیولوژي	پوهاند محمد جمعه حنیف	هرات	۱۰۳	مایکروبیولوژی عمومی	دوکتور شعیب احمد شاخص	هرات
۱۰۴	پرازیتولوژی طبی	پوهاند دوکتورعبیدالله عبید	کابل طبي پوهنتون	۱۰۵	اساسات پرازیتولوژی طبی	پوهنمل دوکتورمحمد یوسف مبارک	کابل طبي پوهنتون
۱۰۶	د پرازیتولوژي اساسات	ډاکتر محمد صابر	ننگرهار	۱۰۷	طبي پرازیتولوژي	پوهنوال دوکتور غلام جیلاني ولي	ننگرهار
۱۰۸	هلمنتولوژي	پوهنوال ډاکترسید رفیع الله حلیم	ننگرهار				

۹. فارمکولوژي							
۱۰۹	فارمکولوژي	پوهنوال داکتر قمبرعلي حيدري	ننگرهار	۱۱۰	فارمکولوژي، دريم ټوک	پوهنوال سيد قمبر علي حيدري	ننگرهار
۱۱۱	فارمکولوژي، دوهم ټوک	پوهنوال داکتر قمبرعلي حيدري	ننگرهار	۱۱۲	د اتونوم او مرکزي عصبي سيستمونو فارمکولوژي	ډاکترغلام ربی بهسودوال	ننگرهار
۱۱۳	گیاهان طبی مستعمله در تداوی امراض قلبی و وعایی	پوهنوال محمد عثمان بابری	کابل طبي پوهنتون	۱۱۴	امينيو فارمکولوژي	پوهنوال سيد قمبر علي حيدري	ننگرهار
۱۱۵	د درملو د استعمال عملي لارښود (انگلیسی/ پښتو)	ډاکتر مالتي ايل وان بلومرودر	خوست	۱۱۶	فارمکولوژي (دريم کال، دوهم سمستر لپاره)	پوهنوال دوکتور غلام ربي بهسودوال	ننگرهار
۱۱۷	د درملو بدې اغيزې	پوهنوال سيد قمبر علي حيدري	ننگرهار				
۱۰. عامه روغتيا							
۱۱۸	د عامې روغتيا اساسات او اداره	پوهنوال ډاکتر محمدعارف رحماني	ننگرهار	۱۱۹	ډيموگرافي او کورنی تنظيم	پوهيالی ډاکتر محمد ابراهيم شيرزی	ننگرهار
۱۲۰	د چاپيريال او أنديزه روغتيا	پوهنوال ډاکتر محمدعارف رحماني	ننگرهار	۱۲۱	تغذيه او روغتيا	پوهيالی ډاکتر محمد هارون	ننگرهار
۱۲۲	تغذيه او سوّتغذيه	پوهنوال داکترعبدالواحد وثيق	قندهار				
۱۱. داخله							
۱۲۳	فزيکل دياگنوزس	پوهنوال ډاکترحفيظ الله اپريدی	ننگرهار	۱۲۴	فزيکی تشخيص او د تاريخچې اخيستنه	پوهاند داکتر شريف الله	ننگرهار
۱۲۵	فزيکي تشخيص	داکتر ناصر جبارخيل	ننگرهار	۱۲۶	فزيکي تشخيص (هادي کلينيکل مبتود)	پوهاند ډاکتر سيف الله هادي	ټول پوهنتونونه
۱۲۷	د داخله ناروغيو تفريقي تشخيص I	پوهاند دوکتور سيف الله هادي	ننگرهار	۱۲۸	د داخله ناروغيو تفريقي تشخيص I	پوهاند دوکتور سيف الله هادي	ننگرهار
۱۲۹	د زړه برقي گراف (ECG)	رنځورپال ډاکتر سيد عبدالله سادات	ننگرهار	۱۳۰	رهنمای عملی مشکلات عام طبی (دری)	داکتر مالتي ال-وان بلومرودر	بلخ
۱۳۱	هيماتولوژي، ايمينولوژي او د ويټامينونو کموالي ناروغی	پوهندوی دوکتورايمل شيرزی	ننگرهار	۱۳۲	د طبي عامو ستونځو عملي لارښود (انگليسی)	داکتر مالتي ال-وان بلومرودر	ننگرهار
۱۳۳	د وينې ناروغی	پوهاند ډاکتر محمد ظاهرظفرزی	ننگرهار	۱۳۴	د وينې ناروغی	پوهنوال دوکتور حيات الله احمدزی	ننگرهار
۱۳۵	اندوکراينولوژي او روماتولوژي	پوهاند داکتر محمد طيب نشاط	ننگرهار	۱۳۶	د پښتورگو ناروغی	پوهاند ډاکترمحمد ظاهرظفرزی	ننگرهار
۱۳۷	د هضمي سيستم او پښتوروگو ناروغی	پوهندوی ډاکترسيف الله هادي	ننگرهار	۱۳۸	اندوکراينولوژی او روماتولوژي	پوهاند دوکتور سيف الله هادي	ننگرهار
۱۳۹	د خولې او د هضمي سيستم ناروغی	پوهاند ډاکترمحمد ظاهرظفرزی	ننگرهار	۱۴۰	د هضمي جهاز ناروغی	پوهاند ډاکتر محمد ظاهرظفرزی	ننگرهار
۱۴۱	امراض جهاز هضمی و کبد	دوکتورمحمد يونس فخری	بلخ	۱۴۲	د هضمي جهازاو پښتورگو ناروغی	پوهنوال ډاکترعبدالواحد وثيق	کندهار
۱۴۳	د زړه او رگونو ناروغی	پوهندوی ډاکتر دل آقا دل	ننگرهار	۱۴۴	د ځيگر ناروغی	پوهاند ډاکترمحمد ظاهرظفرزی	ننگرهار
۱۴۵	د تنفسي سيستم او د زړه روماتيزمل ناروغی	پوهاند دوکتور سيف الله هادي	ننگرهار	۱۴۶	تنفسي او د زړه د دساموںو روماتيزمل ناروغی	پوهاند ډاکترمحمد طيب نشاط	ننگرهار
۱۴۷	د شکرې ناروغي	ډاکتر محمد نعيم همدرد	ننگرهار	۱۴۸	د تنفسي او د زړه روماتيزمل ناروغی	پوهندوی داکتر سلام جان شمس	ننگرهار
۱۲. بېړنی درملنه							
۱۴۹	بېړنی طبي پيښې	پوهنوال داکترعبدالواحد وثيق	قندهار	۱۵۰	د داخلې بيړنې پيښې او د بحران ځارنه	پوهنوال ډاکترحفيظ الله اپريدی	ننگرهار
۱۵۱	بېړنی درملنې	ډاکتر عبدالولی رنځورمل وردک	خوست	۱۵۲	د بيړنيو پيښو د درملنې لارښود (انگليسی)	پوهنوال ډاکترايمل شيرزی	ننگرها
۱۵۳	بېړنی طبي درملنې	داکتر سيد مليار سادات	ننگرهار	۱۵۴	کمک های اوليه	پوهاند دوکتورنجيب الله امرخيل	کابل طبي پوهنتون
۱۳. انکالوژي							
۱۵۵	د سينې سرطان، پېژندنه، درملنه او مخنيوی	پوهنوال ډاکتر نظر محمد سلطانزی ځدراڼ	ننگرهار	۱۵۶	د سرطاني ناروغيو اساسات	پوهاند داکتر محمد ظاهر ظفرزی	ننگرهار
۱۵۷	د وينې سرطان	پوهنوال ډاکتر نظر محمد سلطانزی	ننگرهار	۱۵۸	سرطان او د چاپيريال راديو اکتيويتي	پوهنوال ډاکتر نظر محمد سلطانزی ځدران	ننگرهار
۱۵۹	د سرطاني ناروغيو راډيوتراپي	پوهنوال ډاکتر نظر محمد سلطانزی ځدران	خوست				

۱۴. جراحي							
۱۶۰	نرسنگ عملیات خانه	پوهاند دوکتورنجیب الله امرخیل	کابل طبي پوهنتون	۱۶۱	جراحي، د کلینیکي معایناتو سیستم	پوهندوی ډاکټر بادشاه زارعبدالي	خوست
۱۶۲	د عمومي جراحي اساسات	پوهندوی ډاکټر بادشاه زارعبدالي	خوست	۱۶۳	اساسات جراحی	پوهاند ډاکټرنجیب الله امرخیل	کابل طبي پوهنتون
۱۶۴	عمومي جراحي I	پوهندوی ډاکټر بادشاه زارعبدالي	خوست	۱۶۵	عمومي جراحي II	پوهندوی داکتر بادشاه زارعبدالی	خوست
۱۶۶	عمومي جراحي	داکترگل سیما ابراهیم خیل قادري	خوست	۱۶۷	امراض جراحی سیستم هضمی وملحقات آن	پوهاند دوکتورعبدالوهاب نورا	کابل طبي پوهنتون
۱۶۸	امراض جراحي بطن و ملحقات ان	پوهاند دوکتورمحمد معصوم عزیزي	کابل طبي پوهنتون	۱۶۹	امراض جراحی بطن و ملحقات ان	پوهندوی ډاکټرعبدالخالق دوست	کندهار
۱۷۰	جراحی بطن ، چاپ دوم	پوهاند دوکتورمحمد معصوم عزیزي	کابل طبي پوهنتون	۱۷۱	د ګېډې د ملحقاتو د جراحي ناروغی	پوهنوال دوکتور بادشاه زار عبدالي	خوست
۱۷۲	بطن حاد و مزمن	پوهنوال ډاکټرعبدالغفور ارصاد	هرات	۱۷۳	د پلاستیک جراحي اساسات او تخنیکونه	داکتر الفت هاشمي	ننګرهار
۱۷۴	د کولمو بندش او د پریطوان جراحي ناروغی	پوهاند ډاکټرعبدالرؤف حسان	ننګرهار	۱۷۵	امراض یورولوژی	پوهندوی دوکتورغلام سخی حسنی	کابل طبي پوهنتون
۱۷۶	یورولوژي	پوهندوی دوکتور غازي جمال عبدالناصر	ننګرهار	۱۷۷	یورولوژي	پوهنوال ډاکټرعبدالحد حمید	ننګرهار
۱۷۸	جراحي عصبی	پوهنوال دوکتور عبدالغفور ارصاد	هرات	۱۷۹	عصبي جراحي	پوهندوی دوکتور فضل الرحیم شګیوال	ننګرهار
۱۸۰	عصبي جراحي	پوهندوی داکتر عبدالبصیر منګل	ننګرهار	۱۸۱	عصبي جراحي	پوهاند دکتور بادشاه زار عبدالی	خوست
۱۸۲	د جراحي انکال	رنځوریار داکټر عجب ګل مومند	ننګرهار	۱۸۳	جراحی عمومی اطفال	پوهنیار داکتر توریالی حکیمی	کابل طبي پوهنتون
۱۸۴	د کوچنیانو جراحي	پوهاند ډاکتر فضل الرحیم شګیوال	ننګرهار	۱۸۵	حاد اپندیسایتیس، تشخیص، اختلاطات او تداوي	پرفیسور دوکتور محمد شریف سروري	ننګرهار
۱۸۶	تروماتولوژی	پوهنوال عبدالغفور ارصاد	هرات	۱۸۷	د صدر ترضیضات	پروفیسور دوکتور محمد شریف سروري	ټول پوهنتونونه
۱۵. ارتوپيدي او انستيزيولوژي							
۱۸۸	کسرونه او خلعې	پوهندوی سید بها کریمي	ننګرهار	۱۸۹	اورتوپیدي	پوهندوی ډاکټرسید شال سیدي	ننګرهار
۱۹۰	اورتوپیدي اوکسرونه	پوهنمل ډاکټر محمد همایون مصطفی	کندهار	۱۹۱	د عامو کسرونو ترلې درملنه	پوهندوی دوکتور ظاهر ګل منګل	خوست
۱۹۲	رهنمای انستیزی برای کشورهای رو به انکشاف، جلد اول	دانیل دی موس	کابل طبي پوهنتون	۱۹۳	رهنمای انستیزی برای کشورهای رو به انکشاف، جلد دوم	دانیل دی موس	کابل طبي پوهنتون
۱۹۴	د اورتوپیدي د انتاناتو اساسات، وبلی او د ستون فقرات انتانات	رنځوروال دوکتور سیدالرحمن حکیمي	شیخ زاید				
۱۶. انتاني							
۱۹۵	انتاني ناروغی	پوهنوال ډاکټرعبدالناصر جبارخیل	ننګرهار	۱۹۶	امراض انتانی (انګلیسی)	پوهنمل ډاکټر محمد ذکریا امیرزاده	کندهار
۱۹۷	انتاني ناروغی	پوهنوال داکتر حفیظ الله اپریدی	ننګرهار	۱۹۸	د ساري ناروغیو کنټرول	پوهندوی ډاکټر محمد عظیم منګل	ننګرهار
۱۹۹	د کوچنیانو ساري ناروغی	پوهاند دوکتورسلطان محمد صافي	خوست	۲۰۰	د کوچنیانو ساري ناروغی	پوهندوی دوکتور نجیب الله امین	ننګرهار
۲۰۱	امراض ساری اطفال	پوهاند ډاکټرسلطان محمد صافی	کابل طبي پوهنتون	۲۰۲	د ماشومانو انتاني ناروغی	پوهاند دوکتور عبدالستار نیازی	ننګرهار
۲۰۳	توبرکلوز	پوهندوی ډاکټرسید انعام سیدی	ننګرهار	۲۰۴	په ماشومانو کې نری رنځ	پوهنمل ډاکټر حقیق الله چاردیوال	ننګرهار
۲۰۵	د توبرکلوز ناورغی	ډاکټرمحمد ناصرناصري	کندهار	۲۰۶	د سینې ناروغی او توبرکلوز	ډاکټر ناصر محمد شینواری	کندهار
۲۰۷	ملاریا	دوکتور محمد اسحاق شریفي	ننګرهار	۲۰۸	سارس – ۲ او کووید- 19	پروفیسور دوکتور محمد شریف سروري	ټول پوهنتونونه
۲۰۹	د ځیګر ویروسي التهاب (طبي تشخیص او درملنه)	دوکتور محمد اسحاق شریفي	ننګرهار	۲۱۰	شل خپرې ساري ناروغی	ډاکټر غلام سرور ظهیر	شیخ زاید

۱۷. اطفال							
۲۱۱	اطفال	پوهنوال ډاکټرمحمد رسول فضلي	ننگرهار	۲۱۲	د کوچنیانو ناروغی I	پوهنوال دوکتور عبدالستار نیازی	ننگرهار
۲۱۳	د کوچنیانو ناروغی II	پوهنوال دوکتور عبدالستار نیازی	ننگرهار	۲۱۴	د ماشومانو کلینکی معاینات	پوهنوال ډاکټرناصرکاموال	ننگرهار
۲۱۵	روش های ارزیابی کلنیکی اطفال	پوهندوی ډاکټرفاروق حمیدي	کابل طبي پوهنتون	۲۱۶	د کوچنیانو ناروغی تکست بوک	پوهاند ډاکټر سلطان محمد صافی	کابل طبي پوهنتون
۲۱۷	د کوچنیانو د درملنX لارښود (انگلیسی)	پوهندوی داکترمنصوراسلمزی	ننگرهار	۲۱۸	د کوچنیانو تغذیه	پوهنمل ډاکټر نجیب الله امین	ننگرهار
۲۱۹	د کوچنیانو خوارځواکی	پوهندوی ډاکترسمیع الله حیات	ننگرهار	۲۲۰	د کوچنیانو د وینې ناروغی	پوهندوی داکتر منصور اسلمزی	ننگرهار
۲۲۱	د نوي زیږېدلي ماشوم څارنه	پوهندوی ډاکتر ناصر خان کامه وال	ننگرهار	۲۲۲	د نیونتالوژۍ او کوچنیانود ناروغیو کلینیکی هندبوک	پوهندوی داکتر منصور اسلمزی	ننگرهار
۲۲۳	د ماشومانو د ناروغیو عملي لارښود	داکتر مالتي ال-وان بلومرودر	ننگرهار	۲۲۴	نیونتولوژي	پوهنوال داکتر عبدالستار نیازی	ننگرهار
۲۲۵	د کوچنیانو د جهازاتو معمولې ناروغی I	پوهنوال داکتر عبدالستار نیازی	ننگرهار	۲۲۶	د کوچنیانو نارغی د پنځم صف لپاره لومړی سمیستر	پوهنوال داکتر عبدالستار نیازی	ننگرهار
۲۲۷	د ماشومانو د معدې معایې سیستم او ینې ناروغی	پوهنمل ډاکتر ولي گل مخلص	خوست	۲۲۸	د کوچنیانو د جهازاتو معمولې ناروغی II	پوهنوال داکتر عبدالستار نیازی	ننگرهار
۲۲۹	د کوچنیانو ناروغی I	پوهاند دوکتور احمد سیر احمدي	ننگرهار	۲۳۰	د کوچنیانو ناروغی II	پوهاند دوکتور احمد سیر احمدي	ننگرهار
۲۳۱	د ماشومانو تنفسي، زړه، وینې او پښتورگي ناروغي	پوهاند داکتر نجیب الله امین	ننگرهار	۲۳۲	د کوچنیانو ناروغی	پوهاند ډاکټر سلطان محمد صافی	کابل طبي پوهنتون
۲۳۳	د ماشومانو اساسات، هضمي، اندوکراین او عصبي ناروغي	پوهاند ډاکتر سمیع الله حیات	ننگرهار	۲۳۴	معاینات کلینیکی اطفال بطور ساده	پوهندوی دوکتور سید نجم الدین جلال	کابل طبي پوهنتون
۱۸. ولادي/ نسایي							
۲۳۵	زیږون	پوهنمل ډاکټرمریم اکرم معصوم	ننگرهار	۲۳۶	ولادی جراحی، لمړی ټوک	داکترعجب گل مومند	قندهار
۲۳۷	کتاب ولادی	پوهندوی داکترحسن فرید	هرات	۲۳۸	ولادی جراحی، دوهم ټوک	داکترعجب گل مومند	قندهار
۲۳۹	امراض نسایی	پوهندوی ډاکتر حسن فرید	هرات	۲۴۰	د ثدیې ناروغی	پروفیسور دوکتور محمد شریف سروري	ټول پوهنتونونه
۲۴۱	نسایي ناروغی	پوهندوی دوکتورس تورپیکۍ اپریدی	ننگرهار	۲۴۲	امېندواري او زېږون	پوهنوال دوکتورس حفیظه سهاک	ننگرهار
۱۹. روانشناسي، رواني/عقلي اوعصبي							
۲۴۳	امراض روانی I	پوهندوی دوکتورعبدالعزیز نادری	کابل طبي پوهنتون	۲۴۴	امراض روانی II	پوهندوی دوکتورعبدالعزیز نادری	کابل طبي پوهنتون
۲۴۵	رواني رنځپوهنه	پوهندوی ډاکترجهان شاه تنې	خوست	۲۴۶	نشه يي توکي او اړونده ناروغی	ډاکټر محمد سمین ستانکزی	ننگرهار
۲۴۷	د رواني روغتیایي ستونځو عملي لارښود (انگلیسي)	سیان نیکولاس	ننگرهار	۲۴۸	عصبي ناروغی	پوهنمل داکتر بلال پاینده	ننگرهار
۲۴۹	عقلي ناروغی	پوهنمل داکتر بلال پاینده	ننگرهار	۲۵۰	روانشناسی و ضرورت آن در جامعهٔ افغانستان	داکتر اعظم دادفر	کابل
۲۵۱	روانشناسی عمومی	پوهاند ماریا صاعد سلطانی	بلخ	۲۵۲	عصبي معاینات او سلوکپوهنه	پوهنوال دوکتور جهان شاه تنې	خوست
۲۰. رادیولوژي/ تصویربرداری طبی							
۲۵۳	کلینکي رادیولوژي	پوهنوال ډاکتر غلام سخي رحمانزی	ننگرهار	۲۵۴	د زړه او سږو د ناروغیو تشخیصیه رادیولوژي	پوهنیار ډاکتر شاه محمد رنځورمل	خوست
۲۵۵	تشخیصي رادیولوژي	پوهنوال ډاکتر غلام سخي رحمانزی	ننگرهار	۲۵۶	تصویري یا ترسیمې رادیولوژی	پوهنوال ډاکتر غلام سخي رحمانزی	ننگرهار
۲۵۷	رادیولوژي ازمويني او ناروغتیاوې	پوهنوال ډاکتر غلام سخي رحمانزی	ننگرهار	۲۵۸	التراساونډ تشخیصیه	پوهندوی ډاکټر محمد نواب کمال	کابل طبي پوهنتون
۲۵۹	رادیولوژي	پوهنوال ډاکتر سید عارف وياړ	ننگرهار	۲۶۰	التراسونډ	ډاکټر محمد یونس سلطاني	ننگرهار
۲۶۱	تشخیصیه رادیولوژي، سینه یا صدر، دوهمه برخه	پوهنوال دوکتور نور محمد شینواری	ننگرهار	۲۶۲	تلویزیوني آزموینې	پوهندوی ډاکتر نجیب الله خلیلي	ننگرهار
۲۶۳	د التراسوند طبي کارول	پوهنوال ډاکتر نظر محمد سلطانزی ځدران					
۲۱. چشم، گوش و گلو، جلدی							
۲۶۴	د پوستکي ناروغی	پوهندوی دوکتوراسدالله شینواری	ننگرهار	۲۶۵	دغوږ، پزې او ستوني ناروغی	داکتر عزیز الله فقیر	کندهار
۲۶۶	د سترگو ناروغی	پوهنمل داکترخالد یار	ننگرهار	۲۶۷	دغوږ، پزې او ستوني ناروغی	پوهنمل دوکتور میر محمد اسحاق خاورین	ننگرهار

۲۶۸	د پوستکي ناروغی	پوهنمل ډاکټر سید انور اکبري	ننګرهار	۲۶۹	د سترګې کلینیکي ناروغی	پوهنوال ډاکتر عبدالبصیر صافی	ننګرهار

۲۲. غاښونه

۲۷۰	رهنمای کلینیکی برای داکتران دندان	داکتر سید معروف سیرت	ټول پوهنتونونه				

۲۳. انجنیري

۲۷۱	د اوبو رسولو انجنیري	پروفیسور انجنیر محمد عیسی تنها	ننګرهار	۲۷۲	د فاضله اوبو انجنیري	پوهاند انجنیر زلمی خالقي	ننګرهار
۲۷۳	چګونګی مصرف انرژی در ساختمان های رهایشی	دوکتور انجنیر محمد عمر تیموری	ننګرهار	۲۷۴	تأسیسات و تجهیزات تخنیکی ساختمان	دوکتور انجنیر محمد عمر تیموری	پولی تخنیک کابل
۲۷۵	د ساختمانونو تحلیل، لومړی برخه	پوهاند محمد اسحق رازقي	ننګرهار	۲۷۶	د ساختمانونو تحلیل، دوهمه برخه	پوهاند محمد اسحق رازقي	ننګرهار
۲۷۷	د مهندسانو د پاره ساختماني ستاتیک زده کړه	دیپلوم انجنیر اسدالله ملکزی	ننګرهار	۲۷۸	د جوړښتونو تحلیل، لومړی برخه	پروفیسور حفیظ الله وردک او پروفیسور دکتور زرجان بها	خوست
۲۷۹	د جوړښتونو تحلیل، دوهمه برخه	پروفیسور حفیظ الله وردک او پروفیسور دکتور زرجان بها	خوست	۲۸۰	۴۵ انجنیري درسي کتابونه (DVD)	ټول پوهنتونونه	ټول پوهنتونونه
۲۸۱	د موادو مقاومت	پوهنمل بهرام امیري	خوست	۲۸۲	اوسپنیز کانکرېټي عناصر I	پوهنوال دیپلوم انجنیر عبادالرحمن مومند	ننګرهار
۲۸۳	اوسپنیز کانکرېټي عناصر ډیزاین دوهمه برخه، لومړی ټوک	پوهاند دیپلوم انجنیر عبادالرحمن مومند	ننګرهار	۲۸۴	اوسپنیز کانکرېټي عناصر ډیزاین دوهمه برخه، دوهم ټوک	پوهاند دیپلوم انجنیر عبادالرحمن مومند	ننګرهار
۲۸۵	د اوسپیز کانکرېټي عناصرو د لومړی صنفي کار مېتودیکي لارښود	پوهندوی انجنیر عبادالرحمن مومند	ننګرهار	۲۸۶	د جامداتو میخانیک	پوهنوال محمد اسحق رازقي	ننګرهار
۲۸۷	په سیول انجنیري کې د اټوکډ استعمال	پوهنوال میا پاچا میاخېل	ننګرهار	۲۸۸	د سرخلاصو کانالونو هایدرولیک	پوهنوال میا پاچا میاخېل	ننګرهار
۲۸۹	د لویو لارو د هندسي عناصرو ډیزاین	پوهنیار انجنیر م. شاکر فاروقي	ننګرهار	۲۹۰	د ودانیو د تودولو تخنیک، لومړی برخه، د سون تخنیک	ډاکتر غلام فاروق میر احمدي	ننګرهار
۲۹۱	د تهداب انجنیري	پوهاند انجنیر زلمی خالقي	ننګرهار	۲۹۲	معیارهای جدید اعمار ساختمان	دوکتور انجنیر محمد عمر تیموری	ننګرهار
۲۹۳	د انجنیري میخانیک	پوهنوال محمد اسحق رازقي	ننګرهار	۲۹۴	عمومي تخنیکي رسم	پوهیالی فضل اکبر	ننګرهار
۲۹۵	انرژي سپما کوونکې ودانی	انجنیر اسد الله ملکزی	ننګرهار	۲۹۶	انجنیري جیودوزي (سروې)	پوهندی ګل حکیم شاه سیدي	ننګرهار
۲۹۷	د ساختمان د جوړولو طریقې I	پوهاند انجنیر محمد عیسی تنها	ننګرهار	۲۹۸	رهنمود موثریت حفظ انرژی در تعمیرات	داکتر انجنیر محمد عمر تیموری	کابل
۲۹۹	اعمار ساختمانها (اساسات، مواد و سیستم ها)	پوهندوی انجنیر امان الله فقیری	کابل پولیتخنیک	۳۰۰	د ساختمان د جوړولو طریقې II	پوهاند انجنیر محمد عیسی تنها	ننګرهار
۳۰۱	د ودانیو د جوړولو مهندسي اساسات II	دیپلوم انجنیر اسدالله ملکزی	ننګرهار	۳۰۲	کید او ګرافیک	پوهنوال دیپلوم انجنیر بهاوالدین جلالي	ننګرهار
۳۰۳	د اوبو لګولو انجنیري	پوهندوی دیپلوم انجنیر اصغر غفورزی	ننګرهار	۳۰۴	د ودانیو د جوړولو مهندسي اساسات، لومړی ټوک	دیپلوم انجنیر اسدالله ملکزی	ننګرهار
۳۰۵	د جوړښتونو تحلیل، دریېمه برخه	پروفیسور حفیظ الله وردک او پروفیسور دکتور زرجان بها	خوست	۳۰۶	اساسات هندسه ترسیمی مسطح	پوهنوال سید یوسف مانووال	بلخ
۳۰۷	د پولادي عناصرو ډیزاین لومړی ټوک	محمد ذکریا محمدي	ننګرهار	۳۰۸	د پولادي عناصرو ډیزاین دوهم ټوک	محمد ذکریا محمدي	ننګرهار
۳۰۹	د موادو میخانیک لومړی برخه	حفیظ الله وردک او زرجان بها	خوست	۳۱۰	د موادو میخانیک لومړی برخه	حفیظ الله وردک او زرجان بها	خوست

۲۴. زراعت

۳۱۱	د خاورې تخریب او د چاپېریال ککړتیا	پوهنیار محمد حنیف هاشمي	خوست	۳۱۲	د کرنیزو محصولاتو بازار موندنه	پوهاند محمد طیب	ننګرهار
۳۱۳	د کرنې تشریحي قاموس، انګلیسی -پښتو	پوهاند محمد بشیر دودیال	ننګرهار	۳۱۴	د کورنیو الوتنکو د روزنې بنسټونه	پوهاند میر حاتم نیازی	ننګرهار
۳۱۵	نیماتولوژي	پوهنوال حسین آرمان	ننګرهار	۳۱۶	نباتي فزیولوژي لومړی جلد	پوهنمل محمد طاهر میاخېل	خوست
۳۱۷	نباتي فزیولوژي، دوهم جلد	پوهنمل محمد طاهر میاخېل	خوست	۳۱۸	عمومي نباتات	پوهنوال عبدالخلیل افغاني	شیخ زاید

۲۵. وترنري

۳۱۹	وترنري عمومي پتالوژي	پوهندوی محمد طاهر کاکړ	ننګرهار	۳۲۰	حیواني تغذیه، لومړی برخه	پوهندوی روزي خان صادق	ننګرهار
۳۲۱	حیواني تغذیه، دوهمه برخه	پوهندوی روزي خان صادق	ننګرهار	۳۲۲	وترنري داخله	پوهنوال پیر محمد ستانکزی	ننګرهار
۳۲۳	وترنري فارمکولوژي دوهمه برخه	پوهنوال محمد بایر درمل	ننګرهار	۳۲۴	د ژویو فزیولوژي	پوهاند غنچه ګل حبیب صافی	ننګرهار

۲۶. ژورنالېزم

۳۲۵	د راډیویي خپرونو تولید	پوهنوال دوکتور ماستر واحدي	خوست	۳۲۶	د ټلویزیوني خپرونو تولید	پوهنوال ډاکټر ماستر واحدي	خوست
۳۲۷	اطلاعاتو ته د لاسرسي لارې چارې	دانش کروخېل	ننګرهار				

۲۷. اقتصاد او مدېریت

۳۲۸	د اقتصادي پرمختیا تیوري	پوهاند محمد بشیر دویال	ننګرهار	۳۲۹	د اقتصاد او تجارت اصطلاحات (انګلیسي - پښتو تشریحي قاموس)	پوهنیار عبدالله عادل او امان الله ورین	ننګرهار
۳۳۰	تیوری و سیاست بودجه عامه	پوهنوال داکتر سید محمد تینګار	کابل	۳۳۱	د پروژې مدیریت په عمل کې	محمد داود علم او یو اف. ګهل	ننګرهار
۳۳۲	د پروژې تحلیل او مدیریت	پوهاند محمد بشیر دویال	ننګرهار	۳۳۳	مبادی اقتصاد زراعتی	پوهاند ولي محمد فائز	بلخ
۳۳۴	صنعتي اقتصاد	پوهاند محمد بشیر دودیال	ننګرهار	۳۳۵	د اقتصاد د علم اساسات	شېر خان حساس	ننګرهار

۳۳۶	مرکزي بانک او پرمختللي پولي سیاستونه	پوهاند دوکتور عبدالقیوم عارف	خوست	۳۳۷	اقتصادي جیولوجي (کانپوهنه-فلزي کانونه)	پوهاند دوکتور شریف الله سهاک	ننګرهار
۳۳۸	عامه اقتصاد	پوهندوی ریحان الله رحیمي	ننګرهار	۳۳۹	احصاییه	پوهاند محمد بشیر دودیال	ننګرهار
۳۴۰	د احصایې اساسات	پوهنیارمحمد اغا ضیاء	کندهار	۳۴۱	د اقتصاد تشریحي قاموس انګلیسي - پښتو	پوهاند محمد بشیر دودیال	ننګرهار
۳۴۲	د اداري اومدیریت تشریحي قاموس انګلیسي - پښتو	پوهاند محمد بشیر دودیال	ننګرهار				
			۲۸. عامه اداره او پالیسي				
۳۴۳	د څېړنې مېتودولوژي	پوهنیار نثار احمد مصلح	ننګرهار	۳۴۴	رهبري له تیوري تر عمله	پوهنمل محمد عرفان قریشي	ننګرهار
۳۴۵	د سازماني اړیکو مدیریت	پوهاند محمد بشیر دودیال	ننګرهار	۳۴۶	نړیوالې ټولنې	احسان الله آرینزی	ننګرهار
۳۴۷	د بشري سرچینو مدیریت	پوهنمل منصور فقیرزی	ننګرهار	۳۴۸	پیداګوژي	پوهنیار راز محمد فیضي	ننګرهار
۳۴۹	ګروه‌های اجتماعی بسته (مطالعه جامعه شناختی سکتها)	داکتر احمد سیر مهجور	کابل پوهنتون	۳۵۰	د رهبرۍ اصول	پوهنمل محمد عرغان قریشي	ننګرهار
۳۵۱	د بشري سرچینو د مدیریت اړین ټوکي	پوهندوی نعیم جان سروري	ننګرهار				
			۲۹. چاپېریال او جغرافیه				
۳۵۲	د نفوسو جغرافیه	پوهنوال لطف الله صافی	ننګرهار	۳۵۳	حیاتي جغرافیه	پوهاند لطف الله صافی	ننګرهار
۳۵۴	جیومورفولوژي	پوهنوال عزت الله	ننګرهار	۳۵۵	اقلیم پوهنه	پوهاند عزت الله سایل	ننګرهار
۳۵۶	کارتو ګرافی با اساسات توپوګرافی	پوهنوال دوکتور محمد طاهر عنایت	ننګرهار	۳۵۷	د متیورولوژي مبادي	پوهنوال عبدالغیاث صافی	ننګرهار
۳۵۸	د ژوند چاپېریال	پوهاند عارف الله مندوزی	ننګرهار	۳۵۹	ګرم شدن کره زمین	محمد نعیم نسین	بلخ
			۳۰. ریاضیات				
۳۶۰	عمومي ریاضیات	پوهنوال ګل محمد جنت زی	خوست	۳۶۱	د عالي ریاضیاتو عمومي کورس	پوهندوی محب الرحمن جنتي	ننګرهار
۳۶۲	عالي کلکولس I، 434 A ریاضي	پوهندوی حمیدالله یار	ننګرهار	۳۶۳	عالي کلکولس II	پوهندوی نظر محمد	ننګرهار
۳۶۴	الجبر او د عددونو تیوري، لومړی برخه	سلطان احمد نیازمن	ننګرهار	۳۶۵	خطي الجبر	داکتر عبدالله مهمند	ننګرهار
۳۶۶	کلکولس او تحلیلي هندسه I	پوهندوی سید شیر آقا سیدي	ننګرهار	۳۶۷	کلکولس او تحلیلي هندسه II	پوهندوی سید شیر آقا سیدي	ننګرهار
۳۶۸	الجبر او د عددونو تیوري، دوهمه برخه	سلطان احمد نیازمن	ننګرهار	۳۶۹	د ریاضي په هکله خبرې اترې	سلطان احمد نیازمن	ننګرهار
۳۷۰	الجبر معاصر	داکتر عبدالله مهمند	بلخ	۳۷۱	معاصر الجبر	ډاکتر عبدالله مهمند	خوست
۳۷۲	سېټونه او هر څه د هغوی په هکله	لیف بوکوفسکي/ سلطان احمد نیازمن	ننګرهار	۳۷۳	د ریاضي منطق	سلطان احمد نیازمن	ننګرهار
۳۷۴	د انجنیري اساسي ریاضي I	پوهندوی عبدالغفور نیازی	ننګرهار	۳۷۵	د انجنیري اساسي ریاضي II	پوهندوی عبدالغفور نیازی	ننګرهار
۳۷۶	د تحلیلي هندسې I	سید شیر اقا سیدي	ننګرهار	۳۷۷	انالیزریاضی I	سید یوسف مانووال	بلخ
۳۷۸	عالي ریاضي د تسریحي مثالونو سره	ډاکتر عبدالله وردک	شیخ زاید				
			۳۱. ژبه او ادبیات				
۳۷۹	آلماني د افغانانو لپاره	ډاکتر یحیی وردک	بېلابېل	۳۸۰	آلمانی برای افغانها به دری	داکتر یحیی وردک	بېلابېل
۳۸۱	د جرمني ژبې آسانه زده‌کړه، له اساساتو نه تر ادبیاتو پورې	ډاکتر اکرم ملکزی	ننګرهار	۳۸۲	د افغانستان د پوهنتونونو د درسي کتابونو چاپول (پښتو)	ډاکتر یحیی وردک	ټولو ته
۳۸۳	د افغانستان د پوهنتونونو د درسي کتابونو چاپول (انګلیسي)	ډاکتر یحیی وردک	ټولو ته	۳۸۴	د کتاب خپرولو لنډ لارښود	ډاکتر یحیی وردک	ټولو ته
۳۸۵	د کتاب خپرولو لنډ لارښود (انګلیسي)	ډاکتر یحیی وردک	ټولو ته	۳۸۶	جرمني - پښتو ستر قاموس (لومړی ټوک)	ډاکتر اکرم ملکزی	شیخ زاید پوهنتون
۳۸۷	جرمني - پښتو ستر قاموس (دوهم ټوک)	ډاکتر اکرم ملکزی	شیخ زاید پوهنتون				
			۳۲. کمپیوټرساینس				
۳۸۸	د ډېټابېس اساسات	زرګی حبیبي	ننګرهار	۳۸۹	د کمپیوټر جوړښت او اسمبلي ژبه	پوهندوی بادام نیازی	ننګرهار

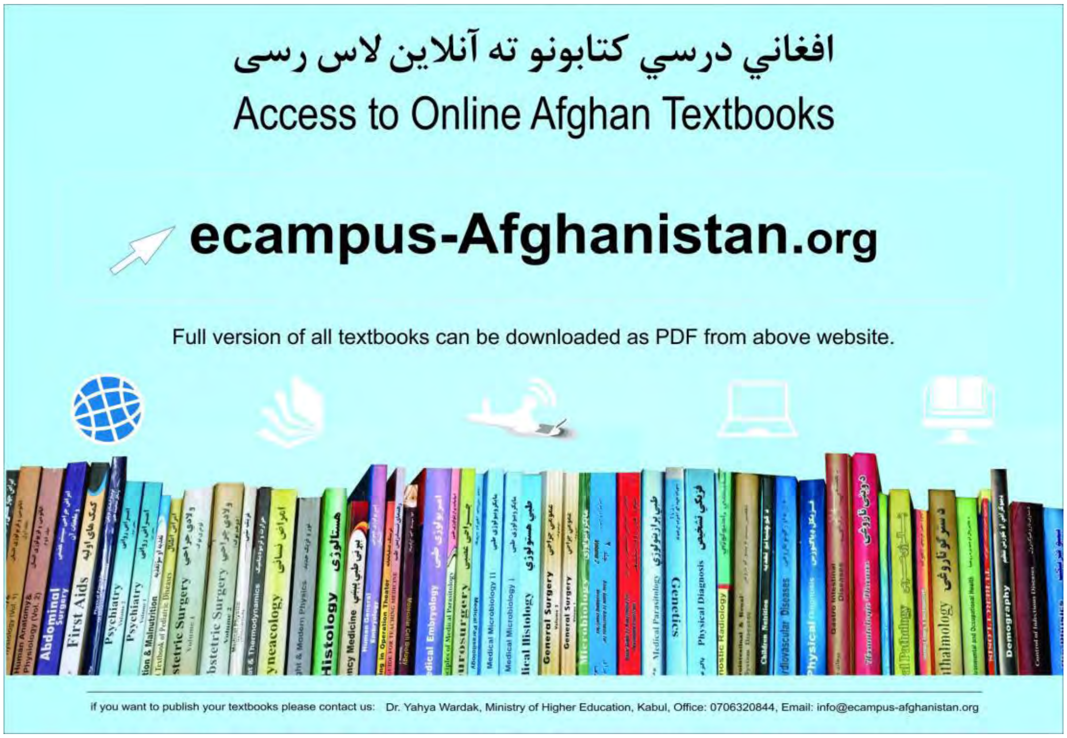
مرسته کوونکي: Kinderhilfe-Afghanistan (x۲۵۰)، DAAD (x۹٦)، Konrad Adenauer Stiftung (x ۸) ، DAUG (x7)، Michael Klett(x٦)، Afghanistan-Schulen (x4)،

سرکنسولګری جمهوری فدرال آلمان مزارشریف (x۱)، inasys (x۱)، humedica(x۲)، ، SlovakAid (x۲)، (x۲)، صافی بنسټ (x۱) او افغانیک

تطبیق کوونکی: ډاکتر یحیی وردک، د لوړو زده کړو وزارت، څلورمه کارته، کابل افغانستان، مې ۲۰۲۳

موبایل:0780232310، ۰۷۰۷۳۲۰۸۴۴، ایمیل: www.mohe.gov.af, info@ecampus-afghanistan.org

ټول کتابونه له دې ویب پاڼو څخه ډونلوډولای شئ: www.ecampus-afghanistan.org


افغاني درسي کتابونو ته آنلاین لاس رسی
Access to Online Afghan Textbooks
ecampus-Afghanistan.org
Full version of all textbooks can be downloaded as PDF from above website.
If you want to publish your textbooks please contact us: Dr. Yahya Wardak, Ministry of Higher Education, Kabul, Office: 0706320844, Email: info@ecampus-afghanistan.org

افغانیک
افغانستان پوهنتونونو
ته
درسي کتابونه چاپول
داکتر یحیی وردک
دریم چاپ

افغانیک
د کتاب خپرولو
لنډ لارښود
داکتر یحیی وردک

Publishing Textbooks

Honorable lecturers and dear students!

The lack of quality textbooks in the universities of Afghanistan is a serious issue, which is repeatedly challenging students and teachers alike. To tackle this issue, we have initiated the process of providing textbooks to the students of Afghan universities.

For this reason, we have published 389 different textbooks of Medicine, Engineering, Science, Economics, Journalism, and Agriculture from Nangarhar, Khost, Kandahar, Herat, Balkh, Al-Beroni, Kabul, Kabul Polytechnic, and Kabul Medical universities since 2010. The book you are holding in your hands is a sample of a printed textbook. It should be mentioned that all these books have been distributed among all Afghan universities and many other institutions and organizations for free. All the published textbooks can be downloaded from www.ecampus-afghanistan.org.

The Afghan National Higher Education Strategy (2010-2014) states:

"Funds will be made available to encourage the writing and publication of textbooks in Dari and Pashto. Especially in priority areas, to improve the quality of teaching and learning and give students access to state–of–the–art information. In the meantime, translation of English language textbooks and journals into Dari and Pashto is a major challenge for curriculum reform. Without this facility it would not be possible for university students and faculty to access modern developments as knowledge in all disciplines accumulates at a rapid and exponential pace, in particular this is a huge obstacle for establishing a research culture. The Ministry of Higher Education together with the universities will examine strategies to overcome this deficit."

We would like to continue this project and to end the method of manual notes and papers. Based on the request of higher education institutions, there is the need to publish about 100 different textbooks each year.

I would like to ask all the lecturers to write new textbooks, translate or revise their lecture notes or written books and share them with us to be published. We will ensure quality composition, printing and distribution to Afghan universities free of charge. I would like the students to encourage and assist their lecturers in this regard. We welcome any recommendations and suggestions for improvement.

It is worth mentioning that the authors and publishers tried to prepare the books according to the international standards, but if there is any problem in the book, we kindly request the readers to send their comments to us or the authors in order to be corrected for future revised editions.

We are very thankful to Kinderhilfe-Afghanistan (German Aid for Afghan Children) and its director Dr. Eroes, who has provided fund for this book. We would also like to mention that he has provided funds for 250 medical and non-medical textbooks so far.

I would like to cordially thank Chancellor of Universities, Deans of faculties, and lecturers for their continuous cooperation and support for this project.

I am also thankful to all those lecturers who encouraged us and gave us all these books to be published and distributed all over Afghanistan. Finally, I would like to express my appreciation for the efforts of my colleagues Hekmatullah Aziz, Fahim Habibi, Gul Agha Ahmadi and Hewad Safi in the office for publishing and distributing the textbooks.

Dr. Yahya Wardak

Ministry of Higher Education, Kabul, Afghanistan, June, 2023

Mobile: 0706320844, 0780232310

Email: info@ecampus-afghanistan.org

Book Name Mechanics of Materials II
Translators Hafizullah Wardak & Zarjon Baha
Publisher Nangarhar University, Faculty of Engineering
Website www.szu.edu.af
Published 2023, First Edition
Copies 1000
Serial No 388
Download www.ecampus-afghanistan.org

This publication was financed by **Kinderhilfe-Afghanistan** (German Aid for Afghan Children) a private initiative of the Eroes family in Germany.

Administrative and technical support by Afghanic.

The contents and textual structure of this book have been developed by concerning translator and relevant faculty and being responsible for it.

Funding and supporting agencies are not holding any responsibilities.

If you want to publish your textbooks, please contact us:
Dr. Yahya Wardak, Ministry of Higher Education, Karte – 4, Kabul
Office 0780232310, 0706320844
Email info@ecampus-afghanistan.org

All rights reserved with the author.

Printed in Afghanistan 2023

ISBN 978-9936-622-69-2