

کتاب پیژندنه

د کتاب نوم:	اقتصادي رياضي
څانګه:	بانکداري او د تجارت اقتصاد
مولف:	محمد دهقامل
ژباړن:	محب الرحمن محب
د څار کمېټه:	
	<ul style="list-style-type: none">محمد آصف ننګ د تخنیکي او مسلکي زده کړو معیندیپلوم انجنیر عبدالله کوزایي د تعلیمي نصاب رییسمحمد اشرف وحدت په تعلیمي نصاب کې د معینیت د مقام سلاکار
د تصحیح کمېټه:	
	<ul style="list-style-type: none">عبدالجمل ممتازمحب الله محباحمد فهیم سپین غر
د ګرافیک او ډیزاین څانګې مسئول:	محمد جان علیرضایی
ګرافیک او ډیزاین:	محمد سلیم خان
چاپ کال:	۱۳۹۲ لمريز کال
تیراژ:	۱۵۰۰
چاپ ځل:	لومړی
وېب پاڼه:	www.dmtvet.gov.af
برېښنالیک:	info@dmtvet.gov.af
کډ ISBN:	۹۷۸۹۹۳۶۳۰۰۶۱۳

Ketabton.com

د چاپ حق د تخنیکي او مسلکي زده کړو له معینیت سره خوندي دی



ملي سرود

دا وطن افغانستان دی	دا عزت د هر افغان دی
کور د سولې کور د تورې	هر بچی یې قهرمان دی
دا وطن د ټولو کور دی	د بلوڅو د ازبکو
د پښتون او هزاره وو	د ترکمنو د تاجکو
ور سره عرب، گوجر دي	پامیریان، نورستانیان
براهوي دي، قزلباش دي	هم ایماق، هم پشه یان
دا هیواد به تل څلیږي	لکه لمر پر شنه آسمان
په سینه کې د آسیا به	لکه زړه وي جاوېدان
نوم د حق مو دی رهبر	وايو الله اکبر وایو الله اکبر



د پوهنې وزیر پیغام

گرانو زده کوونکو، محصلانو او درنو ښوونکو!

د یوې ټولنې وده او پرمختګ کاملاً د همغږې ټولنې د پیاوړو کاري کادرونو، بشري قوې او ماھرو فکرونو په کار او زیار پورې تړلي دي. همدا بشري قوه او کاري مټې دي چې د هیواد انکشافی اهدافو ته د رسیدو لارې چارې طی کوي او د یوه نیکمرغه، مرفه او ودان افغانستان راتلونکی تضمینوي. انسان په خپل وار سره د الله تعالی له جانبه او هم د خپل انساني فطرت له اړخه مؤظف او مکلف دی چې د ځمکې په عمران او د یوه سوکاله ژوند د اسبابو او ایجاباتو د تکمیل لپاره خپل اغیزمن نقش، همدارنګه ملي او اسلامي رسالت ادا کړي.

له همدې ځایه ده چې د یوه ژوندي او فعال انسان نقش، د خپل ژوند د چاپیریال او خپلې اړوندې ټولنې په اړه، تل مطلوب او په هیڅ حالت کې نه نفی کېږي او نه هم منقطع کېږي. په ټول کې د پوهنې نظام او په خاصه توګه د تخنیکي او مسلکي زده کړو معینیت مسوولیت او مکلفیت لري چې د اسلامي ارزښتونو، احکامو او همداراز معقولو او مشروعو قوانینو ته په ژمنتیا سره، د افغانستان په انکشاف کې فعاله، چاپکې او موثره ونډه واخلي، ځکه دغه ستر او سپیڅلي هدف ته د رسیدو په خاطر د انساني ظرفیت وده، د حرفوي، مسلکي او تخنیکي کادرونو روزنه او پراختیا یو اړین مقصد دی. همدا په تخنیکي او مسلکي زده کړو مزین تنګي ځوانان کولی شي چې په خپلې حرفې او هنر سره په سیستماتیک ډول د هیواد انکشاف محقق او میسر کړي.

جوته ده چې په افغانستان کې د ژوند ټک لاره، دولتداري او ټولنیز نظام د اسلام له سپیڅلو احکامو څخه الهام اخیستی، نو لازمه ده چې زموږ د ټولنې لپاره هر ډول پرمختګ او ترقي باید په علمي معیارونو داسې اساس او بنا شي؛ چې زموږ د کارګر نسل مادي او معنوي ودې ته پکې لومړیتوب ورکړ شي. د حرفوي ظرفیت جوړونې تر څنګ د ځوانانو سالم تربیت او په سوچه اسلامي روحيې د هغوی پالنه نه یوازې پخپل ذات کې یوه اساسي وجیبه ده، بلکې دا پالنه کولی شي چې زموږ وطن پخپلو پښو ودروي، له ضعف څخه یې وژغوري او د نورو له سیاسي او اقتصادي احتیاج څخه یې آزاد کړي.

زموږ گران زده کوونکي، محصلان، درانه استادان او مربیون باید په بشپړه توګه پوه شي، چې د ودان او نیکمرغه افغانستان ارمان، یوازې او یوازې د دوی په پیاوړو مټو، وینښ احساس او نه ستړي کیدونکي جد او جهد کې نغښتی او د همدغو مسلکي او تخنیکي زده کړو له امله کیدای شي په ډیرو برخو کې د افغانستان انکشافی اهداف تر لاسه شي.

د دې نصاب له ټولو لیکوالانو، مولفینو، ژباړونکو، سمونکو او تدقیق کوونکو څخه د امتنان تر څنګ، په دې بهیر کې د ټولو کورنیو او بهرنیو همکارانو له مؤثرې ونډې او مرستو څخه د زړه له کومي مننه کوم. له درنو او پیاوړو استادانو څخه رجمندانه هیله کوم چې د دې نصاب په کټور تدریس او فعاله تدریب سره دې د زړه په ټول خلوص، صمیمي هڅو او وجداني پیکار خپل ملي او اسلامي نقش ادا کړي. د نیکمرغه، مرفه، پرمختللي او ویاړمن افغانستان په هیله

فاروق وردګ

د افغانستان د اسلامي جمهوریت د پوهنې وزیر

لړلیک

پاڼې	سرلیکونه	څپرکي
۱۴-۱	په اقتصادي رياضي کې مفاهيم او اصطلاحات د حقيقي عددونو سيستم	لومړی
۴۲-۱۵	معادلې او توابع	دویم
۵۶-۴۳	د دویمې درجې یو مجهوله معادلو حل او د هغو د گراف رسمول	درېیم
۶۲-۵۷	درېیمه درجه یو مجهوله معادلې او توابع	څلورم
۸۲-۶۳	لوگارتم	پنځم
۹۸-۸۳	د عددونو « عددي » سلسلې	شپږم
۹۹	سرچینې او اخیستنې	
۱۰۰	د ښوونیز نصاب د پراختیا د ریاست پیغام	

مقدمه

د اقتصادي رياضي دا درسي کتاب چې د ټاکلي پروگرام سره سم يې د يوه منطقي تشکيل له مخې مفردات په پام کې نيول شوي، د ادارې او حسابدارۍ د انستيتيوت د محصيلينو د تعليمي سويې په لورولو کې خورا مهم گڼل کېدای شي.

د اقتصادي رياضي دغه کتاب د اقتصادي رياضي د مضمون د تدريس له مخې د اقتصاد، سوداگرۍ، بانکدارۍ او منجمنټ لپاره تيار شوی دی.

دغه کتاب په لنډ او شنلي ډول تيار او ترتيب شوی؛ خو لوستونکي وکولای شي په کم وخت کې ترې اغېزمنه گټه پورته کړي. زياتره موضوعات چې په دې کتاب کې ځای پر ځای شوي دي، کولای شي په ډېرو اقتصادي مسايلو، صنعت، توليد، د نفوس ډېر والي او نورو مواردو کې د گټې اخستنې وړ واوسي.

دا کتاب د ادارې او حسابدارۍ پر انستيتيوت سربېره د ټولو هغو انستيتيوتونو لپاره، چې په محاسبې، اقتصاد او سوداگرۍ، بانکدارۍ، منجمنټ او نورو څانگو کې فعاليت کوي، گټور دی او کيدای شي د محصيلينو او نورو ټولو مينه والو د گټې وړ وگرځي.

په پای کې د دې کتاب له ټولو مينه والو هيله کوم چې خپل نظريات د کتاب د ښه والي او د نيمگړتياوو د له منځه وړلو لپاره راسره شريک کړي.

په درنښت

استاد محمد «دهقانمل»

د کتاب ټوليزه موخه:

د محاسبې په چاروکې د لازمو او د اړتيا وړ مهارتونو لاسته راوړل، د اقتصادي رياضي د اصولو، اصطلاحاتو او قواعدو سره سم د رياضي د مسایلو حل، په تولید، صنعت، احصایې او نورو برخو کې د دې کارول او ورسره د انسانانو ورځنی تکامل، پرمختگ او د ژوند په چارو کې له اقتصادي رياضي نه گټه اخیستل.

په اقتصادي رياضي کې مفاهيم او اصطلاحات
د حقيقي عددونو سيستم

ټوليزه موخه:

لوستونکي بايد په کلي توگه په هغو اصولو، قواعدو او اصطلاحاتو باندې پوه شي چې په اقتصادي رياضي کې کارول کېږي او د رياضي د قواعدو او اصولو په واسطه اړوندې پوښتنې محاسبه او حل کړي.

د زدکړې موخې: لوستونکي بايد وکولای شي په اقتصادي رياضي کې په سمه او اساسي توگه د اصطلاحاتو مفهوم درک کړي او د هغې په قواعدو پوه شي.

۱- د طاقت په تعريف او د هغې په قواعدو په سمه توگه پوه او پوښتنې، د طاقت له قواعدو سره سمې حل کړي.

۲- فکتوريل تعريف او د فکتوريل په طريقه پوښتنې په اسانۍ حل کړي.

۳- جذرونه او د جذر قواعد په سمه توگه زده کړي او اړوندې پوښتنې حل کړي.

۴- کسر، د کسرونو ډولونه او د هغو قواعد زده کړي او د کسر اړوندې پوښتنې سمې محاسبه او حل کړي.

طبعي عددونه: د ورځنيو ستونزو د حل لپاره ساده ترين عددونه، لکه ۱،۲،۳،۴.....

طبعي عددونه بلل کېږي $N=\{1,2,3,4,5\}$ طبعي عددونه د مثبتو تامو عددونو په نام يادېږي، چې په لاندې ډول طبقه بندي کېږي:

د يوويزو طبقه، 10^3 د زرگونو طبقه، 10^6 د ميليونونو طبقه، 10^9 د تيلونونو طبقه،

10^{12} د تریلونونو طبقه، 10^{15} د گوادریلونونو طبقه، 10^{18} د کوويسيټیونونو طبقه، 10^{21} د

سیلکسیټیونونو طبقه، 10^{24} د سیسیلیونونو طبقه، 10^{27} د اوکیتلونونو طبقه، 10^{30} د نونیلونونو

طبقه او 10^{100} د گوگولونو طبقه.

کامل عددونه: د (۰) په گډون ټولو طبعي اعدادو ته کامل عددونه ويل کېږي

$$N=\{0,1,2,3,4,5\}$$

تام عددونه: کامل عددونه او تام منفي عددونه له تامو عددونو څخه عبارت دي.

$$Z=\{0 \pm 1 \pm 2 \pm 3 \pm 4 \pm 5 \pm \dots\} \quad \text{يا} \quad Z=\{+0+1+2+3+4+5+\dots\}$$

$$Z=\{-0-1-2-3-4-5+\dots\}$$

ناطق نسبي عددونه: هغه عددونه چې د دوو تامو اعدادو د نسبت په بڼه وړاندې شي، نسبي عددونه بلل کېږي. د جمع، ضرب، تقسيم او منفي څلورگونې عمليې په نسبي اعدادو پورې اړوندې دي.

که X, Y دوه نسبي عددونه وي $X+Y$, X/Y , $X \times Y$, $X-Y$ نو د تقسيم پرمهال بايد مخرج صفر نه وي او مور کولای شو X او Y ته هر (مثبت او منفي) قېمت ورکړو او د جمع، ضرب، تقسيم او منفي څلورگونې علميې ورباندې ترسره کړو.

۱- د جمعي عمليه: د څو عددونو يا هم جنسو شيانو يو ځای کولو ته جمع وايي، لکه:

$$5+4+2+1/48+6=23+9/4=25.25$$

۲- د تفریق عمليه: د دوو کمیتونو ترمنځ توپیر ته د تفریق عمليه ويل کېږي، لکه:

$$100=596-496$$

۳- د ضرب عمليه: د جمعي لنډې طريقي ته ضرب ويل کېږي، لکه:

$$625=25 \times 25$$

۴- د تقسيم عمليه: د تفریق لنډې عمليې ته تقسيم ويل کېږي، لکه:

$$2=100/50=1/50 \times 100=50 \div 100$$

$$X \div X=1$$

$$25x \div 5x=25x \times 1/5x=25x/5x=5(5x)/5x=5$$

توان يا طاقت

طاقت: د يو متحول له طاقت نه عبارت دی او يا يو عدد د هغه حالت بيانونکی دی چې تحول يا عدد د خپل توان په اندازه په خپل ځان کې ضرب شوی وي، لکه:

$$x^4 = x \cdot x \cdot x \cdot x$$

$$6^4 = 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 =$$

$$y^6 = Y \cdot Y \cdot Y \cdot Y \cdot Y \cdot Y$$

د طاقت قوانین: د یادونې وړ ده چې د توان له قواعدو څخه ځینې په لاندې ډول دي.

۱- هر کله چې يو توان لرونکی عدد له مخرج څخه صورت ته او يا له صورت څخه مخرج ته يووړل شي، د طاقت اشاره يې تغير کوي؛ يعنې مثبت منفي کېږي او منفي مثبت کېږي؛ لکه:

$$1) y^{-6} = \frac{1}{y^6} \quad 2) y^{-6} = \frac{1}{6}$$

۲- د ضرب په عمليه کې که قاعدې يو شان وي طاقتونه سره جمع کېږي؛ لکه:

$$x^4 \cdot x^5 \cdot x^6 = x^{4+5+6} = x^{15}$$

۳- د تقسيم په عمليه کې که چېرې قاعدې سره مساوي وي، له قاعدو څخه يوه نيول کېږي، توانونه له يو بل نه منفي کېږي؛ لکه:

$$\frac{x^9}{x^5} = x^{9-5} = x^4 \quad \frac{4^8}{4^5} = 4^{8-5} = 4^3$$

۴- د طاقتونو په عمليه کې که چېرې کلي شکل ولري، توانونه سره ضربېږي؛ لکه:

$$(x^2)^4 = x^{2 \cdot 4} = x^8$$

۵- هر عدد په توان د صفر مساوي له يوه سره دی، لکه:

$$x^0 = 1 \quad (2x+1)^0 = 1 \quad 2^0 = 1$$

۶- کله چې طاقت لرونکې افاده لاندې شکل ولري، کولای شو هغه په لاندې ډول وليکو:

$$(a \cdot d)^p = a^p \cdot d^p$$

$$(2x6)^6 = 2^6 \cdot 6^6$$

او همدارنگه که $\left(\frac{x}{y}\right)^q$ شکل ولري، په لاندې شکل يې لیکو.

$$\left(\frac{x}{y}\right)^q = \frac{x^q}{y^q} \quad \left(\frac{4}{5}\right)^4 = \frac{4^4}{5^4}$$

۷- هر عدد د يوه په توان مساوي له هماغه عدد سره دی؛ لکه:

$$2 \quad d^1 = d \quad b^1 = b \quad (1000)^1 = 1000 = 2^1$$

مشهور مطابقونه

۱- که مطابق $(a+b)^2$ شکل ولري، دارنگه يې ثبوتوو، چې:

$$1- (a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + 2ab + b^2$$

$$2- (a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - 2ab + b^2$$

$$3- (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

ثبوت: لرو چې:

$$(a+b)^3 = (a+b)(a+b)^2 = a(a+b)^2 + b(a+b)^2$$

$$= a(a^2 + 2ab + b^2) + b(a^2 + 2ab + b^2)$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3$$

$$\Rightarrow (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

که $(a-b)^3$ ولرو دا رنگه يې ثبوتوو:

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

ثبوت: مطابق ته په کتو سره لرو چې.

$$(a-b)^3 = (a-b)(a-b)^2 = a(a^2 - 2ab + b^2) - b(a^2 - 2ab + b^2)$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 2a^2b + ab^2 - a^2b + 2ab^2 - b^3$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

مطابقت چې دا $(a+b)^4$ و $(a+b)^5$ شکل ولري، د فکتوريل په شکل انکشاف ورکوو او

مطابقت په اسانه ډول حلوو.

$$(a+b)^4 = a^4 + \frac{4}{1} a^3b + \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} a^2b^2 + \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} ab^3 + \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} b^4$$

$$= (a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$(a+b)^5 = a^5 + \frac{5}{1} a^4b + \frac{5 \cdot 4}{2} a^3b^2 + \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 1} a^2b^3 + \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{4 \cdot 1} ab^4 + \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{5 \cdot 1} b^5$$

$$= (a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

او همدارنگه که $(a+b)^n$ مطابق ولرو، کولای شو هغه په لاندې شکل مخکې یوسو.

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1} a^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!} a^{n-2}b^2 + \dots + b^n$$

۲- هغه مطابقونه چې $(a-b)^n$ شکل ولري، په انکشاف کې د لومړي گروپ د مطابقونو

په شان وي او یواځې په علامه کې توپیر لري. څرنگه چې لومړني مطابقونه ټول مثبت دي

او په دوهم کې د اول حد علامه مثبت او د دوهم منفي د درېيم مثبت په همدې ترتيب تر اخره علامې ترتيب او پيدا کولای شو؛ لکه:

$$(a-b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$$

$$(a-b)^5 = a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5$$

۳- هغه مطابقتونه چې $(a^n - b^n)$ شکل ولري، ټول مطابقتونه د حاصل ضرب په شکل په دوو قوسونو تجزیه کېږي، لومړی د دوو حدونو د قاعدو تفاضل دی، دوهم قوس n حد لري، د هغې د ټولو حدونو علامې مثبتې دي. په لومړي حد کې د a توانونه له $(n-1)$ څخه عبارت دي او د b توان صفر او له حدونو څخه د a له توان یو کم شوی او b ته ورکړل شوی، تر هغې چې د a توان صفر او د b توان $(n-1)$ ته ورسېږي؛ لکه:

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) \quad \text{یا} \quad a^2 - b^2 = a^2 + ab - ab - b^2$$

۴- مطابقت چې په $a^3 - b^3$ ډول وي دارنگه یې ثبوتوو:

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

ثبوت: د هغې د ثبوت لپاره له دې $(a-b)^3$ مطابقت نه گټه اخلو، څرنگه چې:

$$3a^2b - 3ab^2 \quad \text{دی، ځکه نو} \quad (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \quad \text{پرې ورزیاتوو:}$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)^3 + 3a^2b - 3ab^2$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)^3 + 3ab(a-b)$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)[(a-b)^2 + 3ab]$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)[a^2 - 2ab + b^2 + 3ab]$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a^5 - b^5 = (a-b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$$

$$a^4 - b^4 = (a-b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$$

$$a^4 - b^4 = (a^2)^2 - (b^2)^2 = (a^2 + b^2)(a^2 - b^2)$$

$$a^4 - b^4 = (a-b)(a+b)(a^2 + b^2)$$

$$a^4 - b^4 = (a-b)(a^3 + ab^2 + a^2b + b^3)$$

$$\Rightarrow a^4 - b^4 = (a-b)(a^3 + ab^2 + a^2b + b^3)$$

او بالاخره که n یو طبیعی عدد وي؛ نو لیکلی شو چې:

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + b^{n-1})$$

۵- که مطابقت $a^n + b^n$ شکل ولري او که n طاق وي، ټول مطابقتونه د دې گروپ د دوه قوسونو د ضرب په حاصل تجزیه کېږي لومړی قوس د دوو حدونو د قاعدو مجموعه ده او دوهم قوس n حد لري. د اول حد علامه مثبت، د دویم منفي او د درېیم مثبت، په همدې

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2) \quad \text{لکه:}$$

$$a^5 + b^5 = (a+b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)$$

$$a^7 + b^7 = (a+b)(a^6 - a^5b + a^4b^2 - a^3b^3 + a^2b^4 - ab^5 + b^6)$$

$$a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \dots + b^{n-1})$$

که $a^n + b^n$ وي او n جفت وي، د دې گروپ د ټولو مطابقتونو په تجزیه کې د دوو قوسونو د ضرب په حاصل بدلېږي، لومړی حد د هر قوس د مطابقتونو د قاعدو د حدونو مجموعه وي او د قوسونو دوهم حد د دوهم جذر د مطابقت د قاعدو د ضرب د حاصل دوه برابره وي:

$$a^2 + b^2 = (a+b - \sqrt{2ab})(a+b + \sqrt{2ab})$$

$$a^4 + b^4 = (a^2 + b^2 - \sqrt{2a^2b^2})(a^2 + b^2 + \sqrt{2a^2b^2})$$

$$a^6 + b^6 = (a^3)^2 + (b^3)^2 = (a^3 + b^3 - \sqrt{2a^3b^3})(a^3 + b^3 + \sqrt{2a^3b^3})$$

د نمونې په توګه یواځې یو یا دوه مطابقتونه $a^2 + b^2$ او $a^4 + b^4$ ثبوتوو.

$$a^2 + b^2 = (a+b - \sqrt{2ab})(a+b + \sqrt{2ab})$$

د $(a+b)^2$ مطابقت ثبوت ته انکشاف ورکوو.

$$a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2 \quad \text{یا}$$

یاڅرګه چې $-2ab$ تر جذر لاندې نیسو او هم یې مربع کوو، په معادله کې کوم بدلون نه راځي:

$$a^2 + b^2 = (a+b)^2 - (\sqrt{2ab})^2$$

$$a^2 + b^2 = (a+b - \sqrt{2ab})(a+b + \sqrt{2ab})$$

$$a^4 + b^4 = (a^2 + b^2 - \sqrt{2a^2b^2})(a^2 + b^2 + \sqrt{2a^2b^2})$$

ثبوت:

$$a^4 + b^4 = (a^2 + b^2)^2 - 2a^2b^2$$

$$a^4 + b^4 = (a^2 + b^2)^2 - (\sqrt{2a^2b^2})^2$$

$$a^4 + b^4 = (a^2 + b^2 - \sqrt{2a^2b^2})(a^2 + b^2 + \sqrt{2a^2b^2})$$

$$a^4 + b^4 = (a^2 + b^2 - \sqrt{2ab})(a^2 + b^2 + \sqrt{2ab})$$

جذر

جذر په لغت کې ریښې او په اصطلاح کې د یو عدد جذر له هغه عدد څخه عبارت دی، چې د درجې په توان رفع شي د جذر لاندې عدد په لاس راشي، یعنې د یوه عدد دوهم جذر عبارت له هغه عدد څخه دی چې د ۲- په توان رفع شي او د یوه عدد درېیم جذر د ۳- په توان رفع شي او همدارنګه د یادونې وړ ده چې n ام جذر د یو عدد د n ام په درجه رفع کېږي. جذرونه عموماً په دوو طریقو پیدا کولی شو.

۱- د تجزیې په طریقه

۲- په عمومي طریقه

۱- د تجزیې په طریقه د جذرونو پیدا کول: عدد تجزیه کوو او ضریبي عوامل یې دوه په دوه او دوه جوړې له هرې جوړې نه یو عدد نیسو، یو له بل سره یې ضربوو، دویم جذر په لاس راځي؛ لکه: د ۱۴۴ دویم جذر دا رنگه پیدا کوو:

2 {	2	144
	2	72
2 {	2	36
	2	18
3 {	3	9
	3	3
		1

$$\sqrt{144} = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$$

۲- په عمومي طریقه: د عدد ښي لوري ته د تقسیم علامه او چپ لوري ته یو عمود خط رسموو او د عدد له ښي لوري څخه دوه دوه ځانې جدا کوو، په اخر کې به عدد دوه ځلي (جوړه) یو ځلي یواځې پاتې شي او په هغې حالت کې عدد پیدا کوو، دا عدد که په خپل ځان کې ضرب شي، له وروستي عدد سره به مساوي یا به لږ له هغې نه کم شي، هغه

عدد د تقسیم په علامه لیکل کېږي، په خپل ځان کې ضربېږي، د ضرب حاصل یې د آخري عدد لاندې لیکل کېږي او له هغه عدد څخه منفي کېږي، دوه وروستي رقمونه ښکته راوړو او په همدې ډول خپلې عملیې ته ادامه ورکوو. مثلاً: د ۶۴۵۱۶ عدد دویم جذر دارنگه پیدا کوو.

2	64516 4	254
45	245 225	
504	2016 2016	$= \sqrt{64516} = 254$
X		

او د یوه عدد درېیم جذر یوازې د تجزیې په طریقه پیدا کوو. کولای شو له مساوي ضربي عواملو څخه 3 او 3 جوړې جدا او د هرې یوې جوړې څخه یو عدد نیسو او یو له بل سره یې ضربوو، د هماغه عدد درېیم جذر پیدا کېږي، لکه د ۱۷۲۸ عدد درېیم جذر دارنگه پیدا کوو.

2	{	2	1728	$2.2.3=12$ یا $\sqrt{1728} = 2.2.3=12$
		2	864	
		2	432	
2	{	2	216	
		2	108	
		2	54	
3	{	3	27	
		3	9	
		3	3	
		1		

د ۴-۵-۶ او نورو جذرونو په پیدا کولو.

(۴،۴)، (۵،۵)، (۶،۶) او نور مساوي ضربي عوامل جوړې کېږي، په دې ترتيب هر جذر چې وغواړو پيدا کولی شو.

د جذر قواعد يا (د جذر قوانين)

لومړۍ قاعده: که څو جذري عددونه د ضرب په حالت کې وي او د جذر لاندې عددونه سره مساوي او درجې يې سره يوشان نه وي، که وغواړو چې دوی تر يوه جذر لاندې راولو، لومړی دوی توان ته اړوو او وروسته د طاقت قانون پرې عملي کوو، وروستی عدد د دويم ځل لپاره تر جذر لاندې راولو.

لکه:

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[5]{2} \cdot \sqrt[7]{2} \cdot \sqrt[6]{2} = 2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{5}} \cdot 2^{\frac{1}{7}} \cdot 2^{\frac{1}{6}} = 2^{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{6}} = \frac{630 + 420 + 252 + 180 + 210}{2 \cdot 1260} = \frac{1692}{2 \cdot 1260} = 1260 \sqrt[2]{1692}$$

۲- که څو جذري عددونه د ضرب په حالت کې وي، تر جذر لاندې عددونه سره مختلف وي او درجې يې مساوي وي، کولای شو د طاقتونو د قوانينو مطابق هغوی تر يوه جذر لاندې راولو.

$$\sqrt[5]{3} \cdot \sqrt[4]{4} \cdot \sqrt[6]{6} \cdot \sqrt[5]{2} = 3^{\frac{1}{5}} \cdot 4^{\frac{1}{5}} \cdot 6^{\frac{1}{5}} \cdot 2^{\frac{1}{5}} = (3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 2)^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{144}$$

۳- که جذري عدد د تقسيم په حالت کې وي، تر جذر لاندې عددونه سره مساوي وي، د جذرونو درجې يې سره مساوي نه وي او وغواړو دوی تر يوه جذر لاندې راولو؛ نو د طاقت له قوانينو څخه گټه اخلو، لکه:

$$\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[5]{3}} = \frac{3^{\frac{1}{3}}}{3^{\frac{1}{5}}} = 3^{\frac{1}{3} - \frac{1}{5}} = 3^{\frac{5-3}{15}} = 3^{\frac{2}{15}} = \sqrt[15]{3^2}$$

د جذرونو د آسانه حل لپاره د جذرونو د درجې د ضرب حاصل، د جذرونو درجه او د هغوی د تفريق حاصل د تر جذر لاندې عدد توان دی، لکه:

$$\frac{\sqrt[6]{4}}{\sqrt[7]{4}} = 4^{\frac{2}{7}} \quad -1$$

$$\frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[8]{5}} = 24 \sqrt[5]{5} \quad -2$$

$$\sqrt[3]{3} = \sqrt[6]{5} \quad -3$$

۴- که تر جذر لاندې عدد د تقسیم په حالت کې وي، تر جذر لاندې عددونه سره مختلف او درجې یې مساوي وي، د طاقت د قوانینو په اساس یې تر یوه جذر لاندې راوستی شو، لکه:

$$\sqrt[5]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[5]{a}}{\sqrt[5]{b}} \quad \text{یا} \quad \sqrt[5]{\frac{4}{3}} = \sqrt[5]{\frac{4}{3}} \quad \text{یا} \quad \sqrt[5]{\frac{4}{3}} = \frac{4^{\frac{1}{5}}}{3^{\frac{1}{5}}} = \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{\frac{4}{3}}$$

۵- کله چې یو جذري عدد د جذر په درجه رفع شي، تر جذر لاندې عدد په لاس راځي، لکه:

$$1- (\sqrt[n]{b})^n = (b^{\frac{1}{n}})^n = b$$

$$2- (\sqrt[4]{6})^4 = (6^{\frac{1}{4}})^4 = 6^{\frac{4}{4}} = 6^1 = 6$$

$$3- x(\sqrt[6]{7})^6 = (7^{\frac{1}{6}})^6 = 7^{\frac{6}{6}} = 7$$

۶- که تر جذر لاندې عدد تر څو نورو جذرونو لاندې وي، کولای شو ولیکو:

$$p \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = p.m.n \sqrt{a} \quad \text{یا} \quad \left[(a^{\frac{1}{n}})^{\frac{1}{m}} \right]^p = p.m.n \sqrt{a}$$

$$\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt{2}}} = \left[(2^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}} \right]^{\frac{1}{5}} = 2^{\frac{1 \cdot 1 \cdot 1}{2 \cdot 3 \cdot 5}} = 2^{\frac{1}{30}} = \sqrt[30]{21} = \sqrt[3]{\sqrt{\sqrt{2}}} = \sqrt[30]{2}$$

یادونه په کار ده چې که څو داسې جذرونه ولرو، چې درجې او د جذر عددونه یې مختلف وي؛ د جذرونو درجې یې سره ضربوو؛ څو د جذر عمومي درجه په لاس راشي او عمومي درجه د هر جذر په درجه تقسیموو، چې د جذري عدد توان په لاس راشي، وروسته د طاقت قوانین پرې تطبیقوو، لکه:

$$1- \sqrt[3]{2 \cdot 4 \sqrt{5}} = \sqrt[12]{2^4 \cdot 12 \sqrt{5^3}} = \sqrt[12]{2^4 \cdot 5^3} = \sqrt[12]{16 \cdot 125}$$

$$\frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[4]{4}} = \frac{12 \sqrt[4]{5^4}}{12 \sqrt[4]{4^3}} = \sqrt[4]{\frac{5^4}{4^3}}$$

د جذري اعدادو جمع او تفریق: جذري عددونه چې تر جذر لاندې عددونه او درجې

یې سره مساوي وي، جمع او تفریق کولی شو، لکه:

$$1: 9.\sqrt{2} + 3.\sqrt{2} + 5.\sqrt{2} - 4.\sqrt{2} = (9+3+5).\sqrt{2} - 4.\sqrt{2}$$

$$= (17-4).\sqrt{2} = 13.\sqrt{2}$$

$$2: 5.\sqrt{8} + 2.\sqrt{32} - \sqrt{128} = 10\sqrt{2} + 8\sqrt{2} - 8\sqrt{2} = (10+8-8)\sqrt{2} = 10\sqrt{2}$$

د کسرونو گویا کول

کولای شو د یوه کسر صورت او مخرج گویا کړو؛ خو په ریاضي کې مخرجونه گویا کولای شو،

د جذرونو د گویا کولو لپاره د کسر صورت او مخرج د جذري عدد په مخرج کې ضربوو، لکه:

$$1: \frac{3}{\sqrt{8}} = \frac{3.\sqrt{8}}{\sqrt{8}.\sqrt{8}} = \frac{3.\sqrt{8}}{(\sqrt{8})^2} = \frac{3.\sqrt{8}}{8}$$

$$2: \frac{10}{\sqrt{5}} = \frac{10.\sqrt{5}}{\sqrt{5}.\sqrt{5}} = \frac{10.\sqrt{5}}{\sqrt{5^2}} = \frac{10.\sqrt{5}}{5}$$

$$3: \frac{9}{\sqrt{9}} = \frac{9.\sqrt{9}}{\sqrt{9}.\sqrt{9}} = \frac{9.\sqrt{9}}{\sqrt{9^2}} = \frac{9.\sqrt{9}}{9} = \sqrt{9}$$

۲- که د کسر په مخرج کې یو جذر وي او درجه یې له دوو زیاته وي، داسې یې حل کولای

شو:

$$1: \frac{2}{\sqrt[3]{3}} = \frac{2.\sqrt[3]{3^2}}{\sqrt[3]{3}.\sqrt[3]{3^2}} = \frac{2.\sqrt[3]{3^2}}{\sqrt[3]{3.3^2}} = \frac{2.\sqrt[3]{3^2}}{\sqrt[3]{3^3}} = \frac{2.\sqrt[3]{3^2}}{3}$$

$$2: \frac{2}{\sqrt[5]{3}} = \frac{2.\sqrt[5]{3^4}}{\sqrt[5]{3}.\sqrt[5]{3^4}} = \frac{2.\sqrt[5]{3^4}}{\sqrt[5]{3.3^4}} = \frac{2.\sqrt[5]{3^4}}{\sqrt[5]{3^5}} = \frac{2.\sqrt[5]{3^4}}{3}$$

$$3: \frac{5}{\sqrt[7]{3^2}} = \frac{5.\sqrt[7]{3^5}}{\sqrt[7]{3^2}.\sqrt[7]{3^5}} = \frac{5.\sqrt[7]{3^5}}{\sqrt[7]{3^2.3^5}} = \frac{5.\sqrt[7]{3^5}}{\sqrt[7]{3^7}} = \frac{5.\sqrt[7]{3^5}}{3}$$

د غیر ناطقو کسرونو گویا کول

د مخرج گویا کول په 5 حالتونو کې مطالعه کوو.

۱- د مخرج گویا کول چې د مخرج درجه یې یو جذري حد وي او د هغې درجه 2 وي،

د صورت د گویا کولو لپاره یې د مخرج په جذري عدد کې ضربوو، لکه:

$$1: \frac{X}{\sqrt{X}} = \frac{X.\sqrt{X}}{\sqrt{X}.\sqrt{X}} = \frac{X.\sqrt{X}}{\sqrt{X^2}} = \frac{X.\sqrt{X}}{X} = \sqrt{X}$$

۲- که د مخرج درجه له دوو زیاته وي، د داسې کسرونو د مخرجونو د گویا کولو لپاره صورت او مخرج د جذري عدد په مخرج کې ضربوو، د درجې او توان د تفاضل په اندازه جذري عدد ته توان ورکوو، لکه:

$$\frac{3}{\sqrt[3]{6}} = \frac{3\sqrt[3]{6^2}}{\sqrt[3]{6}\sqrt[3]{6^2}} = \frac{3\sqrt[3]{6^2}}{\sqrt[3]{6.6^2}} = \frac{3\sqrt[3]{6^2}}{6} = \frac{3\sqrt[3]{6^2}}{2}$$

$$\frac{x}{\sqrt[5]{x}} = \frac{x\sqrt[5]{x^4}}{\sqrt[5]{x}\sqrt[5]{x^4}} = \frac{x\sqrt[5]{x^4}}{x\sqrt[5]{x.x^4}} = \frac{x\sqrt[5]{x^4}}{x^2} = \frac{\sqrt[5]{x^4}}{x}$$

۳- که د کسر په مخرج کې دوه جذري عددونه، لکه $\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ او یا د کسر په مخرج کې یو جذري عدد او یو غیر جذري عدد وي، لکه $\frac{5}{\sqrt{7}-2}$ د کسر د مخرج د گویا کولو لپاره صورت او مخرج د مخرج په مزدوج کې ضربوو، لکه:

$$1) \frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} = \frac{1(\sqrt{2}+\sqrt{3})}{(\sqrt{2}-\sqrt{3})(\sqrt{2}+\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2-3} = -(\sqrt{2}+\sqrt{3})$$

$$2) \frac{4}{\sqrt{6}-2} = \frac{4(\sqrt{6}+2)}{(\sqrt{6}-2)(\sqrt{6}+2)} = \frac{4(\sqrt{6}+2)}{(\sqrt{6^2}-2^2)} = \frac{4(\sqrt{6}+2)}{6-4} = \frac{4(\sqrt{6}+2)}{2} = 2(\sqrt{6}+2)$$

$$3) \frac{d-c}{\sqrt{d}-\sqrt{c}} = \frac{(d-c)(\sqrt{d}+\sqrt{c})}{(\sqrt{d}-\sqrt{c})(\sqrt{d}+\sqrt{c})} = \frac{(d-c)(\sqrt{d}+\sqrt{c})}{\sqrt{d^2}-\sqrt{c^2}} = \frac{(d-c)(\sqrt{d}+\sqrt{c})}{(d-c)} = \sqrt{d}+\sqrt{c}$$

۴- که د یوه کسر په مخرج کې درې جذري عددونه، دوه جذري عددونه او یو غیر جذري عدد وي، د داسې کسرونو د ساده کولو لپاره دوه حده یو حد فرضوو، وروسته د مخرج په مزدوج کې صورت او مخرج ضربوو، لکه:

$$\frac{5}{\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{5}} = \frac{5\{(\sqrt{3}+\sqrt{2})-\sqrt{5}\}}{\{(\sqrt{3}+\sqrt{2})+\sqrt{5}\}\{(\sqrt{3}+\sqrt{2})-\sqrt{5}\}} = \frac{5(\sqrt{3}+\sqrt{2}-\sqrt{5})}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2 - (\sqrt{5})^2} =$$

$$\frac{5(\sqrt{3}+\sqrt{2}-\sqrt{5})}{3+2\sqrt{6}+2-5} = \frac{5(\sqrt{3}+\sqrt{2}-\sqrt{5})}{2\sqrt{6}} = \frac{5(\sqrt{3}+\sqrt{2}-\sqrt{5})\sqrt{6}}{2\sqrt{6}\sqrt{6}} = \frac{5\sqrt{6}(\sqrt{3}+\sqrt{2}-\sqrt{5})}{12}$$

۵- که د کسر په مخرج کې دوه جذري عددونه وي او د جذرونو درجې له دوو څخه زیاتې وي، د داسې کسرونو د مخرج د گویا کولو لپاره صورت او مخرج د $a^3 + b^3$ مطابقت په دویم قوس کې ضربوو.

$$\begin{aligned} 1) \frac{4}{\sqrt[3]{6} - \sqrt[3]{2}} &= \frac{4(\sqrt[3]{6^2} - \sqrt[3]{12} + \sqrt[3]{2^2})}{(\sqrt[3]{6} - \sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{6^2} + \sqrt[3]{12} + \sqrt[3]{2^2})} = \frac{4(\sqrt[3]{6^2} - \sqrt[3]{12} + \sqrt[3]{2^2})}{6 - 2} = \\ &= \frac{4(\sqrt[3]{6^2} - \sqrt[3]{12} + \sqrt[3]{2^2})}{4} = (\sqrt[3]{36} - \sqrt[3]{12} + \sqrt[3]{4}) \\ 2) \frac{4}{\sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{2}} &= \frac{4(\sqrt[3]{6^2} - \sqrt[3]{12} + \sqrt[3]{2^2})}{(\sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{6^2} - \sqrt[3]{12} + \sqrt[3]{2^2})} = \frac{4(\sqrt[3]{6^2} - \sqrt[3]{12} + \sqrt[3]{2^2})}{6 + 2} = \\ &= \frac{4(\sqrt[3]{6^2} - \sqrt[3]{12} + \sqrt[3]{2^2})}{8} = \frac{\sqrt[3]{36} - \sqrt[3]{12} + \sqrt[3]{4}}{2} \end{aligned}$$

د لومړي څپرکي پوښتنې:

۱- لاندې مطابقتونو ته انکشاف ورکړئ؟

1) $(3x+2y)^2=?$

2) $(2x+2y)^3=?$

3) $(2x-3y)^5=?$

4) $(A+B+C)^3=?$

5) $(2x)^4-(3y)^4=?$

6) $(a-)^6=?$

7) $(x- b y)^8=?$

8) $(m+1)^2-(m-1)^2=?$

9) $(m+n+p+1)^2=?$

10) $a^6+b^6=?$

11) $a^6-b^6=?$

۲- تر یوه جذر لاندې یې راولئ؟

1) $\sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[5]{2} \cdot \sqrt[7]{2} \cdot \sqrt[8]{2} = ?$

2) $\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[5]{3} = ?$

3) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}} = ?$

4) $\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{5}} = ?$

5) $\sqrt[6]{\sqrt[5]{\sqrt[3]{\sqrt{5}}}} = ?$

6) $\sqrt[6]{\sqrt[5]{\sqrt[3]{\sqrt{15}}}} = ?$

۳- لاندې جذري اعداد جمع او تفریق کړئ؟

1) $\sqrt{2} + \sqrt{128} + \sqrt[3]{8} - \sqrt[3]{2^8} = ?$

2) $\sqrt[3]{3} + \sqrt[4]{27} + \sqrt{243} - \sqrt[3]{27} = ?$

3) $(\sqrt[4]{x^2 + y^2})^4 + (\sqrt{2x^2 + 3y^2})^2 = \left[(x^2 + y^2)^{\frac{1}{4}} \right]^4 (x^2 + y^2)^{\frac{1}{4}} + (2x^2 + 3y^2)^{\frac{2}{2}} =$

$x^2 + y^2 + 2x^2 + 3y^2$
 $= 3x^2 + 4y^2$

۴- لاندې کسرونه گویا کړئ.

1) $\frac{2}{\sqrt{8}}$

5) $\frac{2}{8\sqrt{x^2}}$

2) $\frac{4}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$

6) $\frac{2}{\sqrt{4} - \sqrt{6}}$

3) $\frac{4}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$

7) $\frac{x}{\sqrt[5]{x}}$

4) $\frac{x}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$

8) $\frac{12}{\sqrt[3]{8}}$

معادلې او توابع

ټولیزه موخه:

د انسانانو په ټولنیز ژوند کې د معادلو، توابعو او د هغو د رابطو سم او اساسي درک، د توابعو او معادلو په اصولو او قواعدو پوهېدنه، د مسایلو حل او د گرافونو رسمول په ټولو تولیدي، صنعتي او هغو مسایلو کې، چې انسانان په ورځني ژوند کې ورسره سروکار لري.

- ۱- په سمه توګه د معادلو او توابعو مفهوم درک کړي.
- ۲- رابطه، معادله رابطه، تحول او تغیر، د تعریف ناحیه او د قیمتونو ناحیه وپېژني، د تابع او پوښتنو اساسي مفهوم او د دې اړوندې مسألې په صحیح ډول محاسبه کړي.
- ۳- تابع، مرکبې او معکوسې توابع تعریف او مسایل د هغوی له قواعدو سره سم حل او محاسبه کړي.
- ۴- معادله تعریف او گرافونه په سم شکل رسم کړي.
- ۵- لومړۍ درجه دوه مجهوله او درې مجهوله معادلې تعریف او د پوښتنو د حل لپاره له هغو لارو کار واخلي چې په دې څپرکي کې په کار وړل شوي او مسألې په اسانۍ سره حل کړي.

معادلات او توابع

توابع: د تابع مفهوم په 18 پېړۍ کې ریاضیاتو ته راغی چې اوس د ریاضي په مسایلو کې له عمده بحثونو څخه دی، په ډېرو اقتصادي مسایلو او محاسبوي مېتودونو کې ترې کار اخیستل کېږي، چې د توابعو د تحولاتو او خواصو د مطالعې شاوخوا راڅرخي.

صنعتي، توليدي او نور مسايل ډېر ځله د توابعو په مرسته تشریح او توضیح کېږي، په دې څپرکي کې تابع او د هغې خواص معرفي کېږي.

رابطه: د شیانو د مرتبو او متشکلو جوړو او مفاهیمو سیټ له یوې رابطې څخه عبارت دی چې د مرتبو جوړو د لومړنیو عناصرو سیټ ته د رابطې د تعریف ناحیه (د رابطې دامنه) او د دوهمو مرکبو سیټ ته یې د رابطې د قیمتونه ناحیه (د رابطې برد) ویل کېږي، د A او B سیټونه په پام کې نیسو، که R د A او B دوو سیټونو ترمنځ رابطه وي؛ نو R د AXB یو فرعي سیټ دی.

یعنې $RCA.B$ او $(X, Y) \in R$ لپاره لیکو چې XRY ویل کېږي، چې $Y, X \in R$ په واسطه په ارتباط کې دی، یعنې $(X, Y) \in R = XRY$ مثال: $R = \{(1,2), (3,6), (4,8)\}$ رابطه ده.

لکه څنګه چې په $N \times N$ کې $D = [1,3,4]$ د تعریف ناحیه ده، او د قیمتونو ناحیه یې $E = \{2,6,8\}$ وي.

۲ مثال - د $R = \{(X, Y); (X, Y) \in R, X < Y\}$ رابطه په پام کې نیسو، ښکاره ده چې: $(x, y) \in R = x < y$ وي، یعنې $2 < 5 \Rightarrow (2,5) \in R$. همدارنګه باید ووايو چې $(6,4) \notin R$ دی او $4 \notin 6$ نه شي کېدای.

۳ مثال - د $R = \{(x, y) \in \mathbb{R} : x^2 + y^2 = 4\}$ رابطه د دایرې پر مخ له نقطو څخه عبارت ده چې شعاع یې 2 او مرکز یې $(0,0)$ وي.

$$(0, -2) \in R \quad (0)^2 + (-2)^2 = 4 \Rightarrow 4 = 4$$

$$(1, \sqrt{3}) \in R : (1)^2 + (\sqrt{3})^2 = 4 \Rightarrow 4 = 4$$

$$(1, 3) \notin R : (1)^2 + (3)^2 \neq 4$$

معادله رابطه: R رابطې ته د A په سیټ کې معادله رابطه وايي، که د دريو لاندې خاصیتونو لرونکې وي.

۱- انعکاسي: یعنې د هر عنصر لپاره $x \in R$ د (x, y) جوړه په R کې په لاس راشي.

$$\forall x \in A \Rightarrow (x, x) \in R$$

۲- تناظري: په R کې د (x, y) له ګډون څخه په R کې (y, x) په لاس راشي.

$$(x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R$$

۳- که $(x, y) \in R$ و $(y, x) \in R$ وي، $(x, z) \in R$ شرط په لاس راشي، یعنې:

$$(x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R$$

تابع

د F تابع د A له سیټ څخه په B سیټ کې عبارت له هغه رابطې څخه ده چې هر عنصر د A څخه یوازې او یوازې یو عنصر $y = F(x)$ د B سیټ له هر عنصر سره اړیکه ولري، ځکه نو د (x, y) مرتبو زوجونو د سیټ څخه عبارت دی، چې په هغه کې د x مرکبې تکرار نه شي. تابع هغه رابطه ده چې لومړنۍ مرکبې یې تکراري نه وي، له A څخه په B کې د F تابع $y = f(x)$ معادلې په واسطه په لاندې شکل ښودلی شو.

$$F : A \rightarrow B$$

$$x \rightarrow y = F(x)$$

X ته مستقل تحول او y د x مربوط متحول دی.

او تحول د ریاضي له افادې څخه عبارت دی، چې کولای شي د ارزښتونو له مجموعې څخه هر یو ارزښت ځان ته غوره کړي. د تابع د تعریف او قېمتونو ناحیه هرکله چې F تابع د A له سیټ څخه په B سیټ کې وي، دارنگه یې لیکلی شو چې $x \in A$ او $y \in B$.

په نتیجه کې $y = f(x)$ ټول سیټ د x ؛ نو له A څخه په $y = f(x)$ رابطه کې د کارونې وړ دی. د f د تعریف د ناحیې په نامه یا د f د دامني په نامه او د y سیټ، چې د یادې رابطې نه په لاس راځي، د قیمتونو د ناحیې په نامه او یا د f تابع د گټې په نوم یادېږي. عبارت لرونکې ناحیې:

$$Df = \{x \in A : y = f(x)\}$$

$$Rf = \{y \in B : y = f(x), x \in A\}$$

متحول یا متغیر

معمولاً متحول په دوه ډولو تقسیم شوی دی چې د تابع د متحول په نوم او یا د مستقلې تابع د متحول په نامه یادېږي او په ریاضي کې متحول د x, y, z او نورو پواسطه ښودل کېږي، چې هر یو له ممکنه ارزښتونو سره د مجموعي ارزښتونو له مخې اختیارېږي، د مثال په توګه که په بازار کې د یوه توکي قیمت زیاتېږي، د هغې قیمت هم پورته، که تقاضا کمه شي په څنګ کې قیمت هم کمېږي. په نتیجه کې د دوه متحولونو ترمنځ رابطې ته باید تابع وویل شي. متحولونه کېدای شي متمادي یا غیر متمادي وي.

۱- متمادي متحول: هغه دی چې د هغې ارزښت وکولی شي د ډېرو کوچنیو مقادیرو لرونکی وي، معمولاً متمادي متحولونه د متمادي اعدادو پواسطه افاده کېږي، لکه په یوه منطقه کې د حرارت درجې اړونده اعداد او نور.

۲- غیر متمادي متحول: هغه دی چې د غیر متمادي اعدادو پواسطه بنودل شوی وي، وکولی شي چې له ارزښتونو څخه د هر یوه ترمنځ واټن وجود ولري، لکه د تولید د واحدونو شمېر، د ټولنې د وگړو شمېر او نور. ځکه نو باید وویل شي، چې تابع کېدای شي ضمني یا صریحه وي، په صریحو توابعو کې د دوو متحولونو ترمنځ رابطه کاملاً روښانه ده، لکه:

$$y=2x^2 \text{ . } y=2x \text{ ویا } X,y=6$$

په ضمني توابعو کې د دوو متحولونو ترمنځ فاصله که څه هم چې موجود او د تثبیت وړ دي، ولې په اوله مرحله کې ښکاره نه ده، وروسته معلومېږي، لکه:

$$4x+3y-3=0$$

باید یادونه وشي چې که د تابع متحول د تابع د متحول د ارزښت په تغیر ځان ته ارزښت اختیار کړای شي، د یو ارزښته تابع په نوم په یو قیمتته او یو نرخه مسمی وي او که د تابع متحول د تابع د متحول د تغیر د ارزښت په اثر له یوه نه زیات ارزښتونه ځان ته اختیار کړای شي؛ د څو قیمتته تابع په نامه یادېږي لکه:

$$y=4x$$

$$x^2+y^2-16=0$$

$$y^2=-x^2+16$$

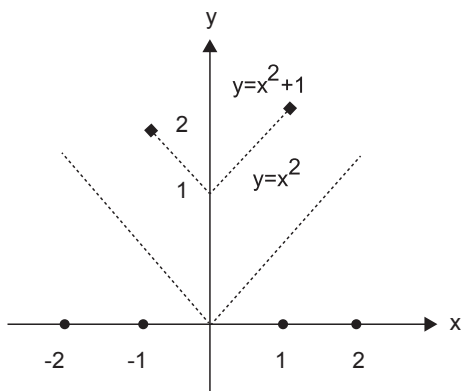
د تابع گراف

د (x,y) د نقطو سیټ له ستون څخه نظر د قایم مختصاتو ته عبارت دی $y=f(x)$ له گراف څخه. که ذکر شوی مساوات صدق وکړي؛ نو په حقیقت کې گراف منحنی دی، چې د $y=f(x)$ معادلې په ذریعه ټاکل کېږي.

د تابع د گراف انتقال

هر کله چې $f(x)$ تابع او c یو حقیقي عدد وي، په دې صورت کې د تابع $y=f(x)+c$ گراف د $y=f(x)$ د گراف عمودي انتقال دی، که چېرې $c>0$ پورته خوا ته او که $c<0$ ښکته خواته وي او همدارنګه $y=f(x+c)$ گراف د $y=f(x)$ گراف له افقي انتقال څخه عبارت دی، که چېرې $c>0$ کیښې خواته او $c<0$ ښې خواته وي.

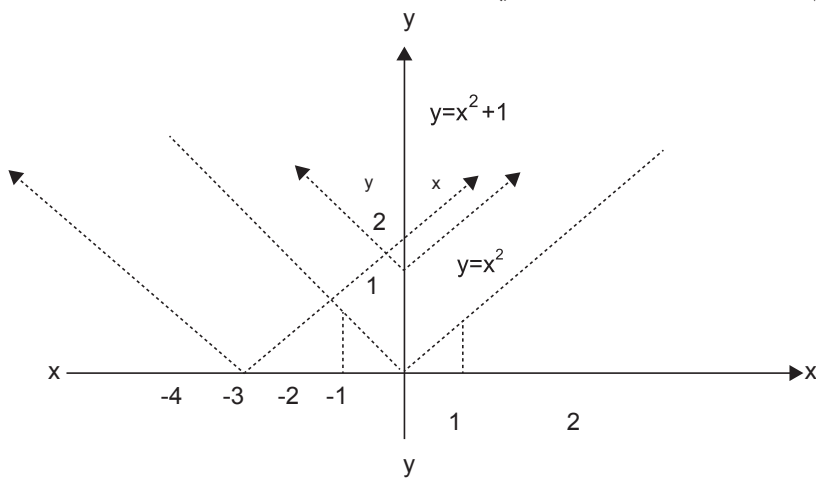
مثال: د $y=x^2+1$ عمودي انتقال له $y=x^2$ گراف څخه دی.



$y=x^2$	
X	Y
2	4
1	1
0	0
-1	1
-2	4

$y=x^2+1$	
X	Y
2	5
1	2
0	1
-1	2
-2	5

دویم مثال: د $y=(x+2)^2$ گراف افقی انتقال له $y = x^2$ څخه دی.



$y=x^2$	
X	Y
2	4
1	1
0	0
-1	1
-2	4

$y=x^2+1$	
X	Y
2	16
1	9
0	4
-1	1
-2	0
-3	1
-4	4

د توابعو الجبري عمليې

- ۱- په f, g تابع کې د جمعې او تفریق عمليه عبارت ده له $(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$
- ۲- په fg تابع کې د ضرب د حاصل عمليه په لاندې ډول ليکل کېږي. $(f.g)(x) = f(x).g(x)$
- ۳- د f, g د توابعو د تقسيم عمليه عبارت ده له $(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$: که چېرې $g(x) \neq 0$ وي.
- د توابعو الجبري قواعد: د h, g, f توابعو لپاره لاندې قواعد صدق کوي:

$$f+g=g+h \quad -۱$$

$$f.g=g.f \quad -۲$$

$$f+(g+h)=f+(g+h) \quad -۳$$

$$f(g.h)=(f.g).h \quad -۴$$

د $Q(x)=0$ صفري تابع او د $I(x)=1$ عينيت تابع ته په کتو لرو چې:

$$f+a=f \quad -۵$$

$$f1=f \quad -۶$$

$$f(g+h)=(fg+fh) \quad -۷$$

همدارنگه د d, c, b, a حقيقي عددونو او h, g, f توابعو لپاره په اسانۍ ښودلی شو چې:

$$a(f+g)=af+ag \quad -۸$$

$$(a+b)f=af+bf \quad -۹$$

$$a(f.g)=(af)g \quad -۱۰$$

$$(a.d)f=d(af) \quad -۱۱$$

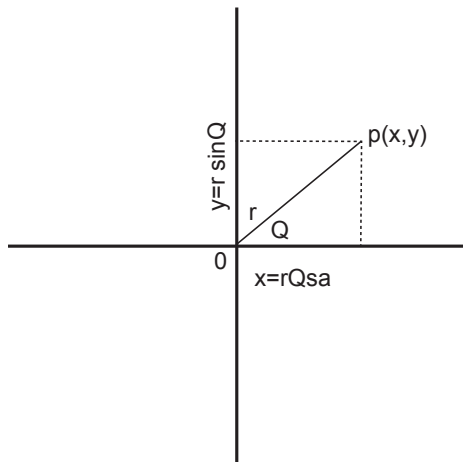
$$(c.d)h=c(d.h) \quad -۱۲$$

مثال: که $f(x)=2x+1$, $g(x)=x^2+1$ وي، لرو چې :

$$\begin{aligned} \text{a) } 4(f+g)x &= 4(f(x)) + 4.g(x) = \\ &= 4(2x+1) + 4(x^2+1) = 8x+4+4x^2+4 = 4x^2+8x+8 \\ \text{b) } 5(f.g)(x) &= [5(f(x)).g(x)] = [5(2x+1)].(x^2+1) \\ &= (10x+5)(x^2+5) = 10x^3+50x+5x^2+25 \\ &= 10x^3+5x^2+50x+25 \end{aligned}$$

او همدارنگه موږ غواړو چې توابع به ښه توګه وپيژنو، نو ځيني له توابعو څخه په لاندې ډول معرفي کوو:

۱- د عینیت تابع: دا تابع عبارت ده له $I(x)=x$ یا هغه په دې شکل $y=x$ لیکو، پوهېږو چې د عینیت د تابع گراف د x له محور سره 45 درجې زاویه جوړوي او د مختصاتو له مبدا نه تېرېږي.



په پورته شکل کې لیدل کېږي چې افقي محور حقیقي محور او عمودي محور موهومي محور نومېږي، یعنې:

$$r^2 = x^2 + y^2$$

$$\Rightarrow r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

او $y=r \cdot \sin \theta$ ، $x = r \cdot \cos \theta$ ، $z=r(\cos \theta + I \sin \theta)$ او $\lg \theta = \frac{y}{x}$ دی. مثال: $z = 2+2i$ په قطبي شکل ولیکئ.

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow r = \sqrt{(2)^2 + (2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$1 = \frac{2}{2} \lg \theta$$

$$\pi = 180$$

$$\frac{\pi}{4} = x$$

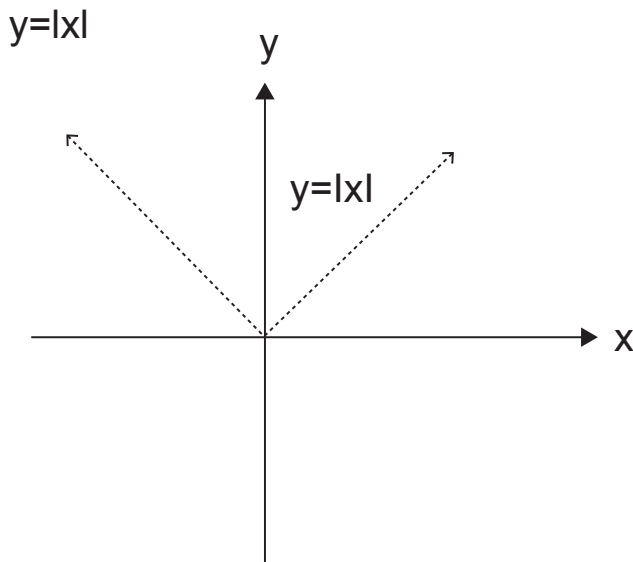
$$x \cdot \pi = 180 \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$x = \frac{180 \cdot \frac{\pi}{5}}{\pi} = 45^\circ$$

۲- د مطلقه قیمت تابع: دا تابع عبارت ده له

$$f(x) = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x \leq 0 \end{cases}$$

او همدارنگه په لاندې شکل یې هم لیکلای شو:



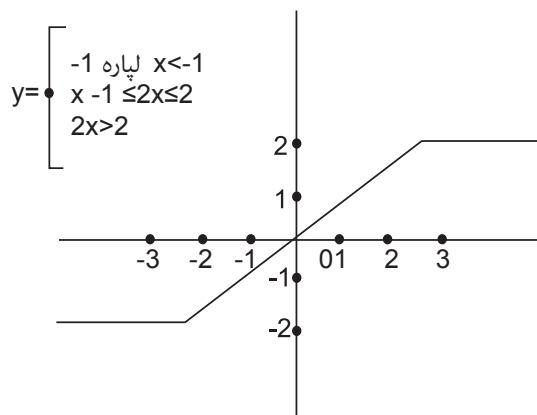
۳- زینه یې تابع (د تام د لوی عدد تابع): له هغه تابع څخه عبارت ده چې د x په هر عدد تر ټولو لوی تام عدد x کوچنی یا مساوي رابطه جوړوي او څرنگه چې د x د هر حقيقي عدد لپاره n تام عدد شتون لري داسې چې $n \leq n \leq n+1$ وي په لاندې شکل یې لیکلای شو:

$$f(x) = \lfloor x \rfloor \quad n \leq x \leq n+1$$

۴- ثابت تابع: هغه تابع ده چې د x په هر عدد یواځې له یو ثابت سره ربط ورکول کېږي، یعنې $Y=c$ او یا $g(x)=c$ نو د ثابتې تابع گراف د x په محور مستقیم خط وي.

۵- توحید شوي تابع: دا تابع عبارت له هغې تابع څخه ده چې په مختلفو انټروالونو کې د څو توابعو له پیوند څخه په لاس راځي او په لاندې ډول ده.

$$f(x) = \begin{cases} -1 \Rightarrow & -1 \geq x \leq 2 \\ x \Rightarrow & x \geq 0 \\ 2 \Rightarrow & x \geq -1 \end{cases}$$



مثال:

د $y^2 = x$ گراف نظر x ته متناظر دی، رسم یې کړئ.

$$y^2 = x$$

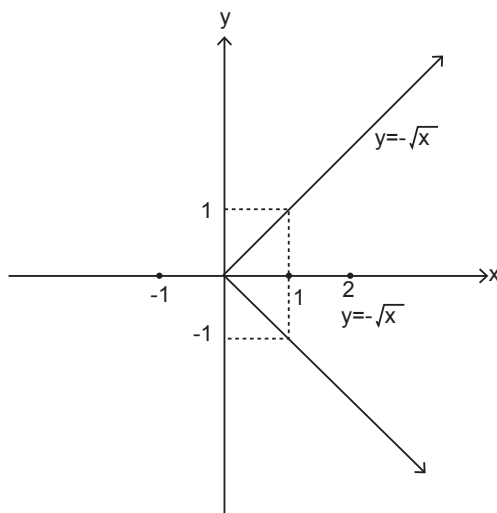
$$\sqrt{y^2} = \sqrt{x} \Rightarrow y = \pm\sqrt{x}$$

$$y = \sqrt{x}$$

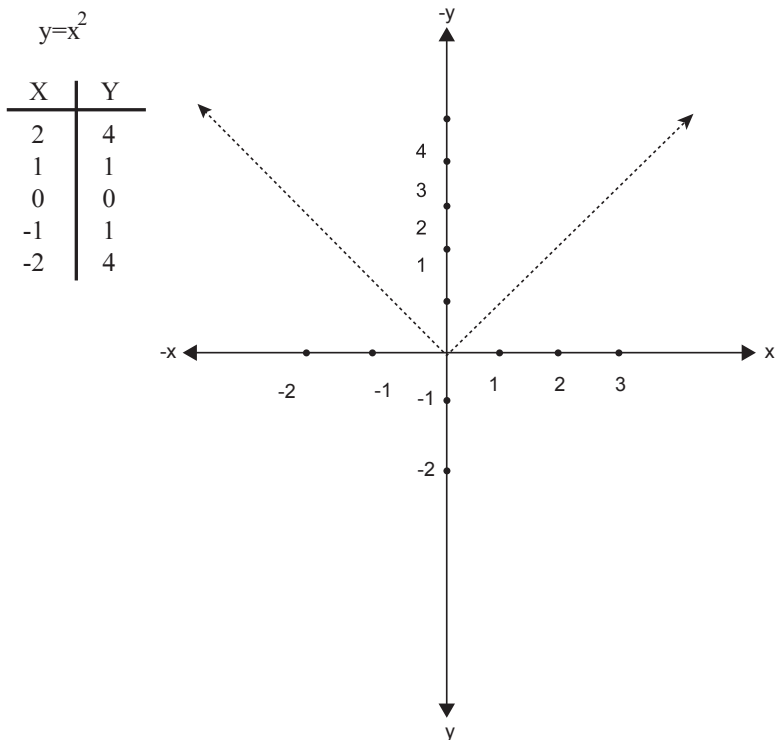
$$x = 0 \Rightarrow y = \sqrt{0} = 0$$

$$x = 1 \Rightarrow y = \sqrt{1} = 1$$

دواړه خواوې تر جذر لاندې نیسو چې



دویم مثال- که د $y=x^2$ منحنی گراف نظر y محور ته متناظر وي، رسم یې کړئ.



د توابعو تزايد او تناقص

۱- د تابع تزايد: په يوه انټروال کې د f تابع ته هغه وخت تزايد وايي چې $f(x) < f(y)$ خاصیت $x < y$ شرط او د y, x لپاره له دې انټروال څخه په لاس راتلای شي، لکه $f(x) = 2x + 3$ تزايد دی، ځکه چې:

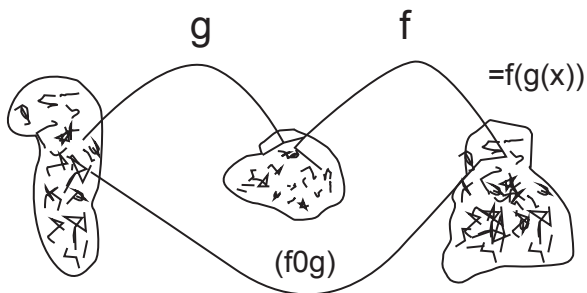
$$f(x) < f(y) \Rightarrow 2x + 3 < 2y + 3 \Rightarrow 2x < 2y \Rightarrow x < y$$

متناقصه تابع: په يوه انټروال کې د f تابع هغه وخت دقیقاً متناقصه ده چې لاندې خاصیت صدق وکړي: $f(x) > f(y)$ شرط $x > y$ د هر انټروال لپاره پيدا شي.

مثال: $g(x) = -2x +$ متناقصه ده، ځکه چې:

$$g(x) > g(y) \Rightarrow -2x < -2y \Rightarrow x > y$$

مرکبې توابع (د تابع تابع): مرکبې توابع عبارت له هغو توابعو څخه دي چې د f او g دوو توابعو له ترکیب څخه لاس ته راشي، لکه: $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ په دې شرط چې د $g(x)$ د f د تابع د تعریف په ناحیه کې شامل وي، $f \circ g$ ته مرکبه تابع وايي. پورتنی فورمول کولای شو داسې ولیکو:



$$\begin{aligned} (g \circ f)(x) &= g(f(x)) \\ (g \circ g)(x) &= g(g(x)) \\ (f \circ f)(x) &= f(f(x)) \end{aligned}$$

پورتنی فورمول کولای شو داسې ولیکو

مثال: کله چې $g(x) = 2$ او $f(x) = x^2 + 1$ درکړل شوي وي، لرو چې:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (g(x))^2 + 1 = (2x)^2 + 1 = 4x^2 + 1$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 2f(x) = 2(x^2 + 1) = 2x^2 + 2$$

$$(g \circ g)(x) = g(g(x)) = 2g(x) = 2(2x) = 4x$$

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = (f(x))^2 + 1 = (x^2 + 1)^2 + 1$$

$$= x^4 + 2x^2 + 2$$

$$(f \circ g)(x) = 4x^2 + 1$$

$$(g \circ f)(x) = 2x^2 + 2$$

$$(g \circ g)(x) = 4x$$

$$(f \circ f)(x) = x^4 + 2x^2 + 2$$

$$(f \circ g)(3) = 4 \cdot 3^2 + 1 = 37$$

$$(g \circ f)(2) = 2 \cdot 2^2 + 2 = 10$$

$$(g \circ g)(8) = 4 \cdot 8 = 32$$

$$(f \circ f)(0) = (0)^4 + 2(0)^2 + 2 = 2$$

دویم مثال- $g(x)=2$ او $f(x)=x^2+1$ توابع درکړل شوي

$$f \circ g(x) = f[g(x)] = [g(x)]^2 + 1 = \sqrt{(1+x)^2} + 1 = 1+x+1 \Rightarrow f(g(x)) = x+2$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt{1+f(x)} = \sqrt{1+x^2+1}$$

$$\Rightarrow g \circ f(x) = \sqrt{x^2+2}$$

اتحادي قوانین، تبادلوي عملیه او د توابعو ترکیب

د توابعو د ترکیب په عملیه کې تبادلوي قانون تل صدق نه کوي، ولې اتحادي قانون صادق دی، یعنې د f, g, h د درېیو توابعو لپاره کولای شو ولیکو چې:

$$(f \circ g) \neq g \circ f$$

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$$

مثال - د $f(x)=3x-1$ او $g(x)=\frac{x+1}{3}$ دوو توابعو لپاره لرو چې:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 3g(x) - 1 = 3 \cdot \frac{x+1}{3} - 1 = x+1-1 = x \Rightarrow (f \circ g)(x) = x$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \frac{f(x)+1}{3} = \frac{3x+1-1}{3} = \frac{3x}{3} = x \Rightarrow (g \circ f)(x) = x$$

$$f \circ g = g \circ f = 1$$

فلهدا

معکوس توابع: د f, g توابع یو د بل معکوسې دي. چې که لاندې دوه شرطونه صدق وکړي نو

$$a) x \in D_g : (f \circ g)(x) = f(g(x)) = x$$

$$b) x \in D_f : (g \circ f)(x) = g(f(x)) = x$$

معمولاً معکوسې توابع په لاندې شکل لیکل کېږي چې:

$$f^{-1} = g$$

$$g^{-1} = f$$

واضح او ښکاره ده چې

$$y = f(x) \Rightarrow x = f^{-1}(y)$$

$$\text{یا } y = f(x) \Rightarrow x = \frac{y}{f} \Rightarrow x = f^{-1}(y)$$

خلورم مثال - $f(x) = 2x + 3$, $g(x) = \frac{x-3}{3}$ توابع یو د بل معکوسې دي.

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = 2(g(x)) + 3 = 2 \frac{x-3}{2} + 3$$

$$\Rightarrow x - 3 + 3 = x$$

$$\Rightarrow (f \circ g)(x) = x$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \frac{f(x) - 3}{2} = \frac{2x + 3 - 3}{2}$$

$$= \frac{2x}{2} \Rightarrow (g \circ f)(x) = x$$

پنځم مثال- د $y = 3x + 5$ تابع معکوس معلوم کړئ!

$$Y = 3x + 5$$

$$3x + 5 = y$$

$$3x = y - 5$$

$$x = \frac{y - 5}{3}$$

د معکوسې تابع پیدا کول

هر ډول تابع د معکوس لرونکې نه وي او کله چې یو تابع د معکوس درلودونکی وي نو لازمه ده چې یو تابع به د یو پر یو له نوعې څخه وي، د یوه معکوس تابع د یو پر یو تابع دی. چې یو پر یو f د لاندې رابطو په مرسته لاس ته راځي. یا په بل عبارت کېدای شي یوه تابع یو په یو نه وي او کولای شو د تعریف د ناحیې په محدودولو یې یو په یو تابع ته واړوو.

$$f(f^{-1}(x)) = x \Leftrightarrow \frac{f}{f} \cdot x = x$$

$$f^{-1}(f(x)) = x \Leftrightarrow \frac{f}{f} \cdot x = x$$

$$y = f^{-1}(x) \Rightarrow x = f(y)$$

$$x = f(y) \Leftrightarrow y = \frac{x}{f} \Rightarrow f^{-1}(x)$$

$$\Rightarrow y = f^{-1}(x)$$

مثال: د $f(x)=x^3-1$ معکوسه تابع په لاس راوړئ.

که f^{-1} د f معکوسه تابع وي نو دارنگه حل کېږي.

$$(f \circ g^{-1})(x) = x \Leftrightarrow [(f^{-1}(x))^3 - 1] = x$$

$$(f^{-1}(x))^3 = x+1 \Leftrightarrow \sqrt[3]{(f^{-1}(x))^3} = \sqrt[3]{x+1} \Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x+1}$$

شپږم مثال- د $g(x)=x^2$ د $x>0$ لپاره د معکوس لرونکې ده. g^{-1} په لاس راوړئ.

$$g(g^{-1}(x)) = x \Rightarrow (g^{-1}(x))^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{(g^{-1}(x))^2} = \sqrt{x} \Rightarrow g^{-1}(x) = \sqrt{x}$$

اووم مثال - د $h(x) = \frac{1}{x}$ تابع معکوس پیدا کړئ.

حل:

$$(h \circ h^{-1})(x) = x \Rightarrow h[h^{-1}(x)] = x$$

$$\Rightarrow \frac{1}{h^{-1}(x)} = x \Rightarrow h^{-1}(x) = \frac{1}{x}$$

لیدل کېږي، چې h او h^{-1} یو پر بل منطبق دي.

د یادونې وړ ده، چې د $f(x)$ تابع معکوس یعنې $y=f^{-1}(x)$ په څرگنده له $f(y)=x$ رابطې څخه په لاس راوړو.

اتم مثال- د $f(x)=2x^3+4$ تابع معکوس پیدا کړئ.

حل: په لاندې ډول یې پیدا کوو چې:

$$f(y) = x \Rightarrow f(y) = x = 2y^3 + 4 = x \Rightarrow 2y^3 = x - 4$$

$$y^3 = \frac{x-4}{2} \Rightarrow \sqrt[3]{y^3} = \sqrt[3]{\frac{x-4}{2}} \Rightarrow y = \sqrt[3]{\frac{x-4}{2}}$$

$$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{\frac{x-4}{2}}$$

او د هغې معکوس عبارت دی له

نهم مثال: د $g(x) = \frac{9}{5}x + 32$ تابع معکوس پیدا کړئ.
اطراف په 5 کې ضربوو

$$g(y) = x \Rightarrow \frac{9}{5}y + 32 = x$$

$$\frac{9}{5}y = x - 32$$

$$9y = 5(x - 32) \Rightarrow y = \frac{5x - 160}{9}$$

$$\Rightarrow g^{-1}(x) = \frac{5}{9}(x - 32)$$

لسم مثال: د $f(x) = x^2 + 6x + 8$ تابع معکوس پیدا کړئ:

$$f(y) = y^2 + 6y + 8 = x$$

$$y^2 + 6y + 8 - x = 0$$

$$\Rightarrow y = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - a(c-x)}}{a} = -3 \pm \sqrt{9 - (6-x)} = -3 \pm \sqrt{3+x}$$

$$f^{-1}(x) = -3 + \sqrt{3+x}$$

$$f^{-1}(x) = -3 - \sqrt{3+x}$$

$$x \geq -3$$

$$x \geq -3$$

یوولسم مثال: د $f(x) = x^2 - 8x + 12$ تابع معکوس په مناسب محدودیت د هغې د تعریف ناحیه په لاندې ډول په لاس راځي.

$$f(y) = x \Rightarrow y^2 - 8y + 12 = x$$

$$\Rightarrow y^2 - 8y + 12 - x = 0$$

$$\Rightarrow y = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - a(c-x)}}{a} = -4 \pm \sqrt{16 - (12-x)} =$$

$$y = 4 \pm \sqrt{4+x}$$

$$\text{یا } f^{-1}(x) = 4 + \sqrt{4+x}, x \geq -4 \text{ نو}$$

$$\text{او یا } f^{-1}(x) = 4 - \sqrt{4+x}, x \geq -4$$

د معکوسې تابع گراف

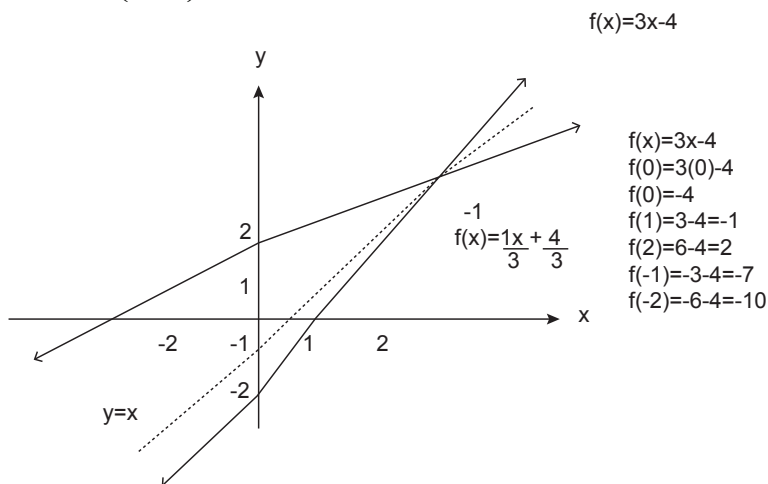
هغه توابع چې یو د بل معکوسې وي نظر $y=x$ مستقیم ته د متناظر گراف لرونکې وي
مثال: د $f(x)=3x-4$ تابع گراف او د هغې معکوس رسم کړئ.

$$(fof^{-1})(x) = x \Rightarrow f(f^{-1}(x)) = x$$

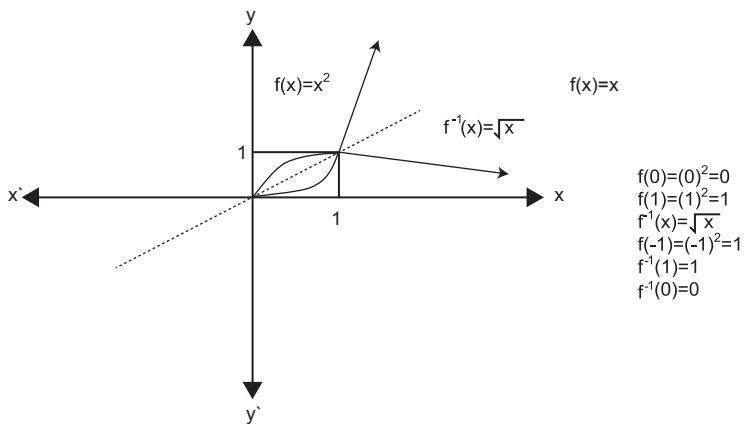
$$f(y) = x \Rightarrow f(y) = 3y - 4 = x \Rightarrow 3y = x + 4$$

$$f(y) = 3y = x + 4 \Rightarrow y = \frac{x+4}{3} \Rightarrow y = \frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$$

$$3f^{-1}(x) - 4 = 3\left(\frac{x+4}{3}\right) - 4 \Rightarrow fof^{-1}(x) = x$$



دویم مثال: د $f(x)=x^2$ د معکوسې تابع گراف رسم کړئ.



پوښتنې

لومړۍ پوښتنه: $f(x) = 2x - \frac{1}{x}$ تابع راکړل شوې، د $f(1), f(\frac{1}{2}), f(0), f(-1)$ قیمتونو په نظر کې نیولو سره یې ولیکئ او د هغې ګراف رسم کړئ؟

دویمه پوښتنه: د $h(x) = \left| \frac{x-2}{x+3} \right|$ تابع درکړل شوې، د $h(2), h(\frac{1}{2}), h(0), h(0)$ قیمتونو په نظر کې نیولو سره هغه حل کړئ او د هغې ګراف رسم کړئ؟

درېیمه پوښتنه: د $g(x) = x^3$ معکوسه تابع رسم کړئ؟

څلورمه پوښتنه: د $f(x) = 2x + 1$ تابع رسم کړئ او $f(1), f(-1), f(2), f(-2), f(0)$ قیمتونه په هغې باندې تطبیق کړئ؟

پنځمه پوښتنه: $f(x) = 2x - 3$ او $g(x) = 3x^2 - 1$ توابع په نظر کې نیولو سره د $f + g, f - g, f \cdot g, \frac{f}{g}$ توابع ولیکئ؟

شپږمه پوښتنه: د y, x محورونو ته د لاندې رابطو متناظر والي او مبدا تشخیص کړئ؟

$$1) y^2 = x \quad 2) g(x) = x^2 \quad 3) y = 2x + 1 \quad 4) y^2 - 2$$

اوومه پوښتنه: کله چې $g(x) = \sqrt{x-1}, f(x) = x^2 - 4$ وي، لاندې اعداد د موجودیت په صورت کې لاس ته راوړئ؟

$$(f \circ g)(0), (g \circ f)(0), (f \circ g)(1), (g \circ f)(1), (f \circ g)(2), (g \circ f)(2)$$

اتمه پوښتنه: د لاندې توابعو معکوس په صورت کې په لاس راوړئ؟

$$f(x) = 4x + 3 \quad G(x) = 2x^3 \quad c - \frac{5}{9}(x - 32) = f(x)$$

نهمه پوښتنه: د $y = 2x - 3$ تابع ګراف رسم کړئ؟

لسمه پوښتنه: د $f(x) = 3x^2, g(x) = \frac{4x+1}{3}$ توابعو په نظر کې نیولو سره دا $(f \circ g), (g \circ f), (f \circ f), (g \circ g)$ پیدا کړئ؟

معادله

معادله د ریاضي افاده ده چې د یوه یا څو حدونو لرونکې وي او د $<$, $>$, $=$ علائمو په واسطه ښودل کېږي، چې د هر یوه د متحولونو د ارزښتونو په ښکاره کېدو په یادو علامو صدق کوي.

لومړۍ درجه یو مجهوله معادلې او توابع

د هغو حل او د گراف رسمول: د دا رنگه معادلو عمومي شکل عبارت دی له $y=ax+b$ او په دې ځای کې x مستقل متحول او y د x مربوط متحول دی او a, b ثابت عددونه او b د معادلې د ضریب په نوم او a د عمود د قاطع په نوم یادېږي. باید یادونه وشي چې پورته معادله اوله درجه خطي معادله ده، چې y د x خطي تابع ده او د هغې گراف کولی شو د یو مستقیم خط پواسطه رسم کړو، لکه $y=2x+4$ د مستقیم خط. د یوې معادلې د رسمولو لپاره دوه نقطو ته ضرورت لرو چې دا دوه نقطې عبارت دي له (x, y) یعنې $Q_1(x=0, y=?)$ او $Q_2(y=0, x=?)$ د مستقیم خط د دوه نقطو په تثبیتېدو عمودي او افقي محورونو مربوط په کومو نقطو کې قطع کوي او مطلوبې دوه نقطې په $y=2x+4$ خطي معادله کې عبارت دي له :

فرض کوو

فرض $y=0$ کوو

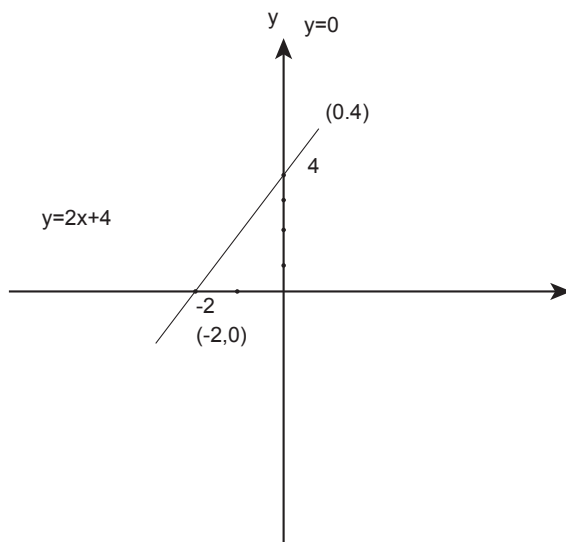
$$X=0 \quad y=2(0)+4=4 \Rightarrow y=4$$

$$2x+4=0 \Rightarrow 2x=-4 \Rightarrow x=-\frac{4}{2}$$

$$\Rightarrow x=-2$$

$$Q_1(x=0, y=4)$$

$$Q_2(y=0, x=-2)$$



دویم مثال: د $y=6x+8$ تابع گراف رسم کړئ؟

حل: اول فرض کوو

$$y = 6x + 8$$

$$x = 0 \Rightarrow y = 6 \cdot 0 + 8 = 8$$

$$y = 0 \Rightarrow 6x + 8 = 0 \Rightarrow 6x = -8$$

$$x = \frac{-8}{6} \Rightarrow x = -1.333\bar{3}$$

درېیم مثال: د $y=-2x-4$ تابع گراف رسم کړئ؟

که $x=0$ وي

$$y = -2(0) - 4 = -4 \Rightarrow y = -4$$

$$Q_1(x=0, y=-4)$$

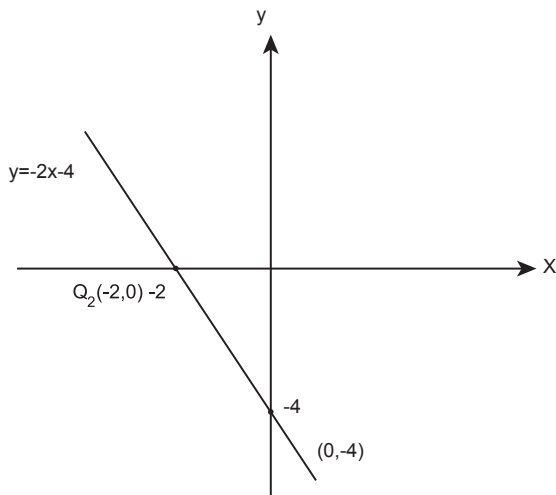
$$Q_2(x=-2, y=0)$$

که $y=0$ شي

$$-2x - 4 = 0$$

$$-2x = 4$$

$$x = -\frac{4}{2} = -2$$



لومړۍ درجه دوه مجهوله معادله يا (د خطي دوه مجهوله معادلو سیستم)

هغه معادلې چې مجهولونه یې دوه وي او د هر مجهول درجه یوه وي. د اوله درجه دوه مجهوله معادلو په نوم یادېږي او د خطي دوه مجهوله معادلو سیستم لاندې شکل لري.

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

څکه چې $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ ثابت عددونه او x, y مجهول دي. او پورته سیستم د مستقیم خط معادله ده او همدارنګه باید یادونه وشي چې دوه مستقیم خطونه کولای شي موازي یا متقاطع وي. په موازي حالت کې کېدای شي یو پر بل منطبق شي څکه نو هرې دوه معادلې یو کېږي، بنا پر دې ممکنه رابطه د ضرایبو ترمنځ عبارت ده له:

$$a_1b_2 - a_2b_1 = 0 \text{ موازي} \quad a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0 \text{ متقاطع.}$$

د دوه مجهوله معادلو د سیستم د حل څخه هدف د (x, y) د حقیقي عددونو د جوړو ټاکل دي چې په یو وخت کې دواړه معادلې صدق کوي. څکه نو امکان لري دوه مستقیم خطونه یو له بل سره موازي یا متقاطع وي؛ نو د معادلو سیستم یو حل لري، په دې شرط چې د هغې خطونه یو بل قطع کړي. هغه وخت لایتناهي حل لري، که چېرې له یو بل سره موازي وي.

د دوه مجهوله خطي معادلو د سیستم حل بېلابېلې طریقي لري چې په لاندې ډول دي.

۱- د جمع طریقه یا افنا

۲- د تساوي طریقه

۳- تعویضي طریقه

۴- د دیترینات طریقه

۵- د متریکس طریقه

۶- د ګراف طریقه

موږ په دې ځای کې له هغو طریقو څخه چې د دیترینات د طریقي په نامه یا د ګرام د طریقي په نامه یادېږي معرفي کوو. د معادلو د سیستم حل د لومړني ګرامر په روش د تعریف مطابق دیترینات معرفي او محاسبه کوو.

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

۱- دیتریمینانت په لغت کې مأخذ او عامل ته وایي او په اصطلاح کې د اعدادو ربعي ترتیب ته دیتریمینانت ویل کېږي، لکه:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

عمودي خطونه د دیتریمینانت علامه ده. هغه اعداد چې په افقي خط کې لیکل شوي د سطر او هغه اعداد، چې په عمودي خط کې لیکل شوي د دیتریمینانت د ستون په نامه یادېږي.

$$\begin{vmatrix} b_1 \\ b_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \end{vmatrix}$$

سطرونه او ستونونه دي.

هغه دیتریمینانتونه چې دوه سطرونه او دوه ستونونه لري، د دویم ترتیب دیتریمینانت ورته وایي او که درې سطرونه او درې ستونه ولري، د درېیم ترتیب دیتریمینانت نومېږي او د $a_1 b_2$ د ضرب حاصل اصلي قطر او د $a_2 b_1$ ضرب حاصل فرعي قطر نومېږي. د دیتریمینانت د قیمت د پیدا کولو لپاره فرعي قطر له اصلي قطر څخه منفي کوو.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

د گرامر په طریقه د لومړۍ درجې دوه مجهوله معادلو د سیستم حل په پیل کې درې دیتریمینانته ترتیب او محاسبه کوو.

۱- د y, x ضریبونه جوړه کوو او په Δ سره یې ښیو.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1 \Rightarrow \Delta = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

۲- د Δ په دیتریمینانت کې د x د ضرایبو په عوض ثابت عددونه لیکو او په Δx یې ښیو.

$$\Delta x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1 b_2 - c_2 b_1 \Rightarrow \Delta x = c_1 b_1 - c_2 b_2$$

۳- د Δ په دیتریمینانت کې د y ضرایبو په ځای ثابت عددونه لیکو او په Δy یې ښیو

$$\Delta y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1 c_2 - a_2 c_1 \Rightarrow \Delta y = a_1 c_1 - a_2 c_2$$

باید وویل شي، چې y, x د Δ او Δy له جنسه په لاس راځي، داسې چې $x = \frac{\Delta x}{\Delta}$ و $y = \frac{\Delta y}{\Delta}$ د دې لپاره چې معادلې د حل لرونکې وي $\Delta \neq 0$ وي او دا شرط د مستقیمو خطونو د متقاطع کېدو دی.

لومړی مثال- د $\begin{cases} 2x + 3y = 2 \\ x - 2y = -6 \end{cases}$ معادلو سیستم حل کړئ؟
حل: اړونده دیتریمینانټونه دا رنگه محاسبه کوو.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 2(-2) - 1 \cdot 3 = -4 - 3 = -7 \Rightarrow \Delta = -7$$

$$\Delta X = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -6 & -2 \end{vmatrix} = 2(-2) - (-6 \cdot 3) = -4 + 18 = 14 \Rightarrow \Delta X = 14$$

$$\Delta Y = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -6 \end{vmatrix} = 2(-6) - 2 = -12 - 2 = -14 \Rightarrow \Delta Y = -14$$

$$\Rightarrow X = \frac{\Delta X}{\Delta} = \frac{14}{-7} = -2 \Rightarrow X = -2$$

$$Y = \frac{\Delta Y}{\Delta} = \frac{-14}{-7} = 2 \Rightarrow Y = 2$$

دویم مثال- د $\begin{cases} 2x + 5y = 25 \\ 3x - 2y = 9 \end{cases}$ معادلو سیستم حل کړئ.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 2(-2) - 3 \cdot 5 = -4 - 15 = -19 \Rightarrow \Delta = -19$$

$$\Delta X = \begin{vmatrix} 25 & 5 \\ 9 & -2 \end{vmatrix} = 25(-2) - 9 \cdot 5 = -50 - 45 = -95 \Rightarrow \Delta X = -95$$

$$\Delta Y = \begin{vmatrix} 2 & 25 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 2 \cdot 9 - 3 \cdot 25 = 18 - 75 = -57 \Rightarrow \Delta Y = -57$$

په نتیجه کې:

$$X = \frac{\Delta X}{\Delta} = \frac{-95}{-19} = 5 \Rightarrow X = 5$$

$$Y = \frac{\Delta Y}{\Delta} = \frac{-57}{-19} = 3 \Rightarrow Y = 3$$

درېیم مثال- شل ۲۰ چرگان او سویان ۵۰ پنبې لري، خو چرگان او خو سویان په دې شمېر کې شامل دي؟

حل: که فرضاً د سویو شمېر X او چرگان Y وي، د سویو د پنبو شمېر 4X او د چرگانو

2Y دی؛ نو معادلې یې عبارت دي:

$$\begin{cases} x + y = 20 \\ 4x + 2y = 50 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 - 1 \cdot 4 = 2 - 4 = -2 \Rightarrow \Delta = -2$$

$$\Delta X = \begin{vmatrix} 20 & 1 \\ 50 & 2 \end{vmatrix} = 20 \cdot 2 - 50 = 40 - 50 = -10 \Rightarrow \Delta X = -10$$

$$\Delta Y = \begin{vmatrix} 1 & 20 \\ 4 & 50 \end{vmatrix} = 50 - 80 = -30 \Rightarrow \Delta Y = -30$$

$$(د سویو شمېر) \quad X = \frac{\Delta X}{\Delta} = \frac{-95}{-19} = 5 \Rightarrow X = 5$$

$$(د چرگانو شمېر) \quad Y = \frac{\Delta Y}{\Delta} = \frac{-57}{-19} = 3 \Rightarrow Y = 3$$

د درې مجهوله خطي معادلو د سیستم د حل له روش څخه یو هم دگرامر طریقه ده لکه د دوه مجهوله معادلو د حل طریقه.

د درې مجهوله خطي معادلو سیستم

د دې معادلو د سیستم عمومي حالت عبارت دی له:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + cz = d_1 \\ a_2x + b_2y + cz = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

په دې سیستم کې لاندې ۴ دېترمینانته محاسبه کوو

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = a_1 b_2 c_3 + b_1 c_2 a_3 + c_1 a_2 b_3 - a_3 b_2 c_1 - b_3 c_2 a_1 - c_3 a_2 b_1$$

۲- د x د ضرایبو پر ځای ثابت عددونه لیکو، په Δx یې ښیو او د هغه قیمتونه پیدا کوو.

$$\Delta x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} d_1 & b_1 \\ d_2 & b_2 \\ d_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$\Delta x = d_1 b_2 c_3 + b_1 c_2 d_3 + c_1 d_2 b_3 - d_3 b_2 c_1 - b_3 c_2 d_1 - c_3 d_2 b_1$$

۳- د y د ضرایبو پر ځای ثابت عددونه لیکو، په Δy سره یې ښیو او قیمتونه یې پیدا کوو.

$$\Delta y = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$\Delta y = a_1 d_2 c_3 + d_1 c_2 a_3 + c_1 a_2 d_2 - d_3 a_2 c_1 - d_3 c_2 a_1 - c_3 a_2 d_1$$

۴- په پورته دېترمینانته کې د ۲ د ضرایبو پر ځای ثابت عددونه لیکو، په $Z \Delta$ یې ښیو او قیمتونه یې پیدا کوو.

$$\Delta z = a_1 b_2 d_3 + b_1 d_2 a_3 + d_1 a_2 b_3 - a_3 b_2 d_1 - b_3 d_2 a_1 - c_3 a_2 b_1$$

په نتیجه کې د سیستم حل یا د z, y, x قیمتونه په لاندې ډول په لاس راوړو:

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta}, y = \frac{\Delta y}{\Delta}, z = \frac{\Delta z}{\Delta}$$

خلورم مثال- د اوله درجه درې مجهوله معادلو سیستم په لاندې شکل ورکړل شوی دارنگه حل کپړي

$$\begin{cases} 4x + y + 2z = 10 \\ 3x + 2y + z = 5 \\ 2x + 3y + 2z = 10 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 10 & 1 \\ 5 & 3 \\ 10 & 3 \end{vmatrix} \quad \Delta = 4 \cdot 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 \cdot 3 - 2 \cdot 2 \cdot 2 - 3 \cdot 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 \cdot 1$$

$$= 16 + 2 + 18 - 8 - 12 - 6 = 10$$

$$\Rightarrow \Delta = 10$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 10 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & 1 \\ 10 & 3 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 10 & 1 \\ 5 & 3 \\ 10 & 3 \end{vmatrix} \quad \Delta x = 40 + 10 + 30 - 40 - 30 - 10 = 0$$

$$\Rightarrow \Delta x = 0$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 4 & 10 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \\ 2 & 10 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 10 & 1 \\ 5 & 3 \\ 10 & 3 \end{vmatrix} \quad \Delta y = 40 + 20 + 20 - 40 - 60 = 0$$

$$\Rightarrow \Delta y = 0$$

$$\Delta z = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 10 \\ 3 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 10 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 10 & 1 \\ 5 & 3 \\ 10 & 3 \end{vmatrix} \quad \Delta z = 80 + 10 + 90 - 40 - 60 - 30 = 50$$

$$\Rightarrow \Delta z = 50$$

$$z = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{0}{10} = 0, y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{0}{10} = 0$$

$$x = \frac{\Delta z}{\Delta} = \frac{50}{10} = 5$$

په پای کې باید وویل شي، چې د سیستم حل عبارت دی له (0, 0.5)

پنجم مثال- د اوله درجه درې مجهوله معادلو سیستم په لاندې ډول درکړل شوی هغه د دیتر مینانت په طریقه حل کړئ.

$$\begin{cases} x + y + z = 10 \\ 2x + 3y - 2z = 3 \\ 3x - 2y + z = 5 \end{cases}$$

حل: په پیل کې څلور دیترمینانتونو ته ترتیب ورکوو.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 3 + (-6) + (-4) - 9 - 4 - 2 = -22$$

$$\Rightarrow \Delta = -22$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 10 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & -2 \\ 5 & -2 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 10 & 1 \\ 3 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = 30 - 10 - 6 - 15 - 40 - 3 = -44$$

$$\Delta x = -44$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 1 & 10 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 10 \\ 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 3 - 60 + 10 - 9 + 10 - 20 = -66$$

$$\Rightarrow \Delta y = -66$$

$$\Delta z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 10 \\ 2 & 3 & 3 \\ 3 & -2 & 5 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 10 & 1 \\ 5 & 2 \\ 10 & 3 \end{vmatrix} = 135 + 9 - 40 - 90 + 6 - 10 = -110$$

$$\Rightarrow \Delta z = -110$$

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{-44}{-22} = 2 \Rightarrow x = 2y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{-66}{-22} = 3$$

$$\Rightarrow y = 3$$

$$z = \frac{\Delta z}{\Delta} = \frac{-110}{-22} = 5$$

$$\Rightarrow z = 5$$

د دویم څپرکي پوښتنې

۱- لاندې مستقیم خطونه رسم کړئ؟

$$a) \begin{cases} 3x - 2y = 2 \\ 2x + y = 8 \end{cases} \quad b) \begin{cases} 4x - 2y = 7 \\ -2x + y = 3 \end{cases}$$

۲- له دیترینانت نه په ګټه اخیستو د لاندې معادلو سیستم حل کړئ؟

$$a) \begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 1 \end{cases} \quad b) \begin{cases} -2x + 3y = 9 \\ x - y = 6 \end{cases} \quad c) \begin{cases} 2x + 5y = 25 \\ 3x - 2y = 9 \end{cases}$$

۳- د لاندې معادلو سیستم د ګرامر په طریقه حل کړئ؟

$$a) \begin{cases} x + y + z = 2 \\ 4x + y + 4z = 1 \\ x - 3y - 2z = 1 \end{cases} \quad d) \begin{cases} 2x - 3y + 2z = 5 \\ 4x + 3y - 2z = 10 \\ -8x + y + z = 5 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x + y + z = 2 \\ 10x + 3y - 4z = -3 \\ 2x - 2y - 3z = 10 \end{cases} \quad f) \begin{cases} x + 2y = 5 \\ x + 3y = 7 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x + 2y + 20z = 1 \\ 3x + y - 4z = 2 \\ 2x - 3y + 8z = 3 \end{cases}$$

د دویمې درجې یو مجهوله معادلو حل او د هغو د گراف رسمول

ټولیزې موخې:

لوستونکي به د اړتیا وړ مهارتونه لاسته راوړي، په قواعدو کې به په هغو اصولو باندې پوه شي چې په دوهمه درجه معادلو کې په کارېږي او بالاخره ټول مسایل به د قواعدو او د هغو فورمولونو له مخې حل کړای شي چې په دې معادلو کې تشریح شوي دي.

د زده کړې موخې: د دې څپرکي په پای کې به محصلین وکولای شي چې:

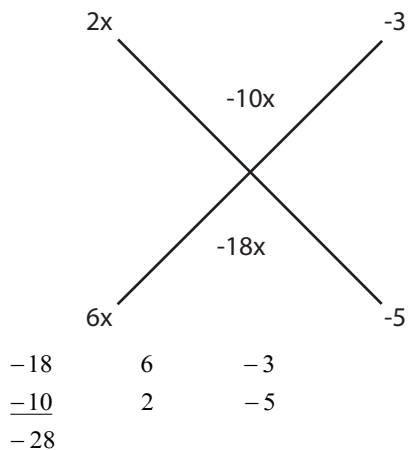
- ۱- په ښه شکل د معادلې مفهوم درک کړي او هغه په سمه توګه تحلیل او تجزیه کړای شي.
- ۲- مسایل د تجزیې په طریقه حل کړي.
- ۳- د هغې فورمول درک کړي، په ثبوت یې په سمه توګه پوه شي او مسایل له فورمول سره سم حل کړي.
- ۴- دویمه درجه توابع تعریف او د هغو گرافونه د دویمې درجې یو مجهوله معادلې د قوانینو مطابق رسم کړي.
- ۵- اعظمي او اصغري نقطې تعریف او هغه په گراف کې وښودلی شي.

د دویمې درجې یو مجهوله معادلو حل او د هغو د گراف رسمول

د تجزیې په طریقه د دوهمې درجې یو مجهوله معادلو حل: د اسانه حل لپاره په پیل کې a او c تجزیه کوو او د ضربي عواملو څخه یې یوه یوه جوړه ضربي عوامل جمع کوو چې د جمعې حاصل یې له b سره مساوي شي، لکه:

$$ax^2+bx+c=0$$

مثال: $12x^2 - 28x + 15 = 0$ تجزیہ کریں۔



ضرب عوامل عبارت دی له

په پای کې

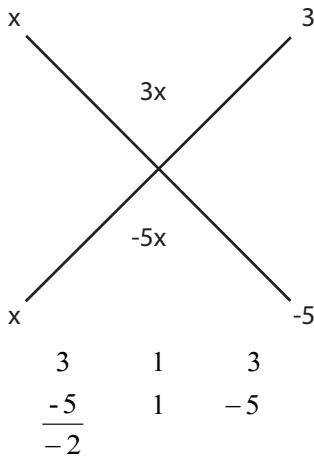
$$12x^2 - 28x + 15 = 0$$

$$(2x - 3)(6x - 5) = 0$$

$$2x - 3 = 0 \Rightarrow 2x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$

$$6x - 5 = 0 \Rightarrow 6x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{6}$$

۲- مثال: د لاندې معادلې جذرونه په لاس راوړئ.



ضرب عوامل عبارت دی له

$$x^2 - 2x - 15 = 0$$

$$(x+3)(x-5) = 0$$

$$x+3 = 0 \Rightarrow x_1 = -3$$

$$x-5 = 0 \Rightarrow x_2 = 5$$

۳- مثال: د لاندې معادلې جذرونه په لاس راوړئ.

$$\sqrt{x^2 - 5x} = 6$$

$$(\sqrt{x^2 - 5x}) = (6)^2$$

$$x^2 - 5x = 36 \Rightarrow x^2 - 5x - 36 = 0$$

$$(x-9)(x+4) = 0$$

$$x-9 = 0 \Rightarrow x+4 = 0$$

$$x = 9$$

$$x = -4$$



$$a=9=3 \cdot 3=1 \cdot 9$$

۴ مثال: $9x^2+3x-42=0$

$$c = -42 = -6(+7) = 3(-14) = -3(14) = 2(-21) = -2(21)$$

$$(3x-6)(3x+7) = 0$$

$$3x-6 = 0 \Rightarrow 3x = 6 \Rightarrow x_1 = \frac{6}{3} = 2$$

$$3x+7 = 0 \Rightarrow 3x = -7 \Rightarrow x_2 = -\frac{7}{3}$$

له فورمول نه په استفاده د دویمې درجې معادلو حل

د دویمه درجه معادلو عمومي شکل عبارت دی له $ax^2+bx+c=0$ چې په دې ځای کې a, b, c ثابت عددونه دي. د هغې فورمول دا رنگه یا ډول ثبوتوو او د دې فورمول له مخې د پارابول اعظمي او اصغري نقطې مشخصوو.

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

د معادلې اطراف په a تقسیموو

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}$$

د معادلې له دواړو خواوو سره $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ جمع کوو.
د معادلې کینه خوا د کاملې مربع شکل ته راوړو.

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

$$\sqrt{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2} = \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

د معادلې د اسانه حل لپاره $b^2 - 4ac$ په Δ (دلټا) سره بڼیو، دا رابطه ممیزه، قاسمه، یا مشخصه ده او د معادلې د حل لپاره اول د Δ قیمت پیدا کوو.

مثال: $3x^2 - 7x + 2 = 0$

حل کړئ.

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (-7)^2 - 4.3.2 = 49 - 24 = 25 \Rightarrow \Delta = 25$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-7) \pm \sqrt{25}}{2.3} = \frac{7 \pm 5}{6} \Rightarrow$$

$$x_1 = 2$$

$$x_2 = \frac{1}{3}$$

دا چې $\Delta > 0$ معادله دوه جذرونه لري. $x^2 - 7x + 12 = 0$

مثال: لاندې معادله حل کړئ. $x^2 - 7x + 12 = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 12 = 49 - 48 = 1$$

$$\Delta = 1$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-7) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{+7 \pm 1}{2}$$

$$x_1 = \frac{7+1}{2} = \frac{8}{2} = 4 \Rightarrow x_1 = 4$$

$$x_2 = \frac{7-1}{2} = \frac{6}{2} = 3 \Rightarrow x_2 = 3$$

د دویمې درجې یو مجهوله توابع د گراف رسمول

باید یادونه وشي. چې په عمومي صورت کې دویمه درجه تابع په لاندې شکل لیکل کېږي.

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

که چېرې $a \neq 0$ وي په پورته معادله کې x مستقل متحول او y د x متحول وي، x ته مختلف قیمتونه ورکوو؛ نو د y قیمتونه پیدا کوو.

مثال: د $f(x) = -6x^2 + 3x + 12$ تابع گراف رسم کړئ.

حل:

$$f(0) = -6(0)^2 + 3 \cdot 0 + 12 = 12$$

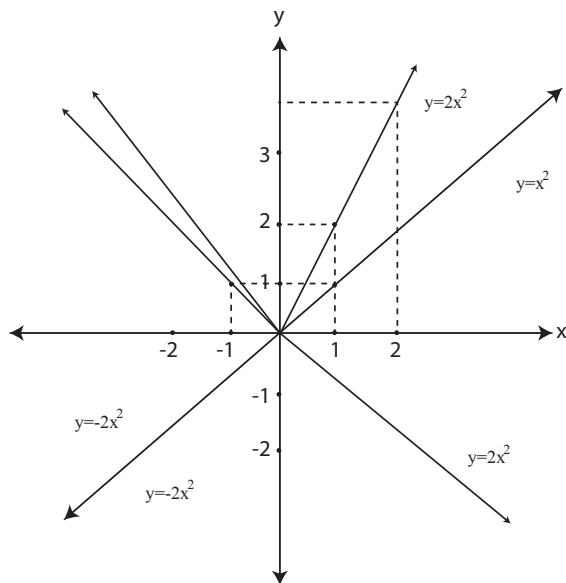
$$f(1) = -6(1)^2 + 3 \cdot 1 + 12 = -6 + 3 + 12 = 9$$

$$f(-1) = -6(-1)^2 + 3(-1) + 12 = -6 - 3 + 12 = 3$$

$$f(2) = -6(2)^2 + 3 \cdot 2 + 12 = -24 + 6 + 12 = -6$$

$$f(-2) = -6(-2)^2 + 3 \cdot (-2) + 12 = -24 - 6 + 12 = -18$$

مثال: د $f(x) = x^2$ او $f(x) = 2x^2$ او $f(x) = -2x^2$ تابع گراف رسم کړئ.



$a=1$ یعنی $f(x)=ax^2$
 $f(x)=ax^2$
 څرنگه چې $a=2$ دی

	X	Y		
2	-8	2	8	2
1	-2	1	2	1
0	0	0	0	0
-1	-2	-1	2	-1
-2	-8	-2	8	-2

مربعي توابع

هغه توابع چې دا $f(x) = ax^2 + bx + c$ شکل ولري مربعي توابع ورته ويل کېږي، ځکه چې a, b, c ضرايب حقيقي عددونه دي.

مثال: د $f(x) = ax^2 + c$ تابع گراف رسم کړئ، په داسې حال کې چې $C=3, C=0, C=-3$ وي.
 ۱- حل: د $C=0$ په حالت کې تابع لاندې شکل اختياروي.

X	-3	-2	-1	0	1	2	3
Y	9	4	1	0	1	4	9

$y=x^2$

۲- د $C=3$ په نظر کې نيسو تابع لاندې شکل ځانته اختياروي.

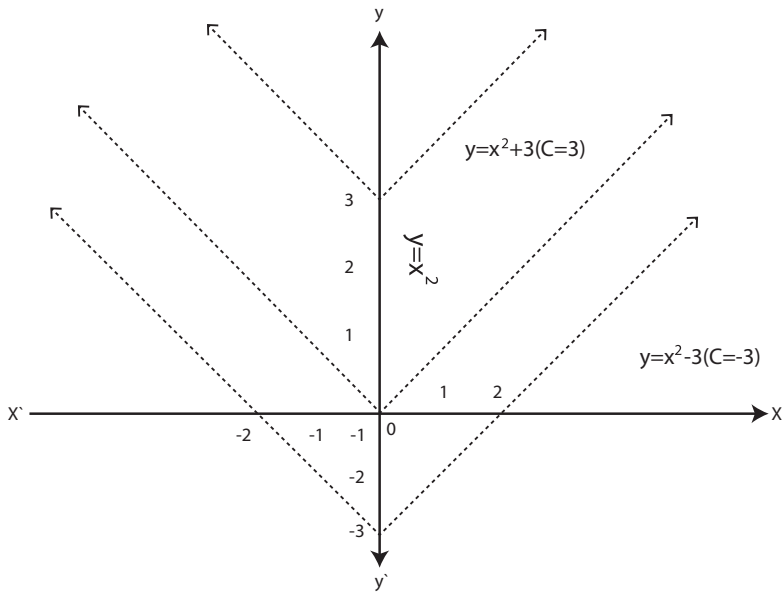
X	-3	-2	-1	0	1	2	3
Y	6	1	-2	-3	-2	1	6

$y=x^2+3$

۳- د $C=-3$ په نظر کې نيسو تابع لاندې شکل ځانته اختياروي.

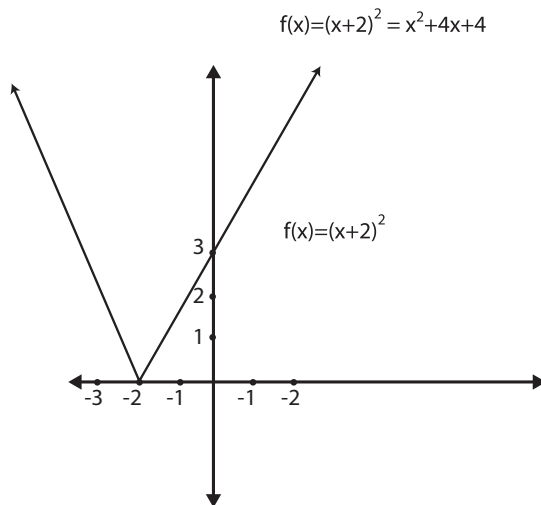
X	-3	-2	-1	0	1	2	3
Y	12	7	4	3	4	7	12

$y=x^2-3$



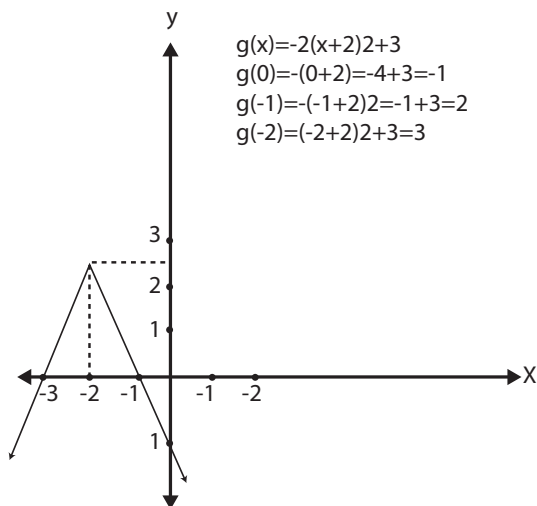
۲- مثال: د $f(x) = (x+2)^2$ تابع گراف رسم کړئ.

X	-4	-3	-2	-1	0	1	2
f(x)	4	1	0	1	4	9	16



۳-مثال: د $g(x)=-2(x+2)^2+3$ تابع گراف رسم کړئ او د هغې د مناسبو قیمتونو جدول ترتیب کړئ.

X	-4	-3	-2	-1	0
f(x)	-1	2	3	2	-1



د مربعي تابع عمومي حالات

اوس $f(x) = -(x+h)^2 + k$ مربعي تابع په نظر کې نيسو او معلومېږي. چې اعظمي او اصغري نقطه يې عبارت ده له (h, k) څخه چې د اعظمي او اصغري نقطې موجوديت د a په اشارې پورې مربوط دی او موږ دا $f(x) = ax^2 + bx + c$ تابع په نظر کې نيسو او هغه په لاندې شکل تبديلوو.

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c$$

اوس په پورته معادله کې $\frac{b^2}{4a^2}$ جمع او تفریق کوو، معادله لاندې شکل ځانته اختياروي.

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$\Rightarrow a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right)$$

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - a\left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}\right)$$

$$\Rightarrow a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - a\left(\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right)$$

$$\Rightarrow a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

$$k = \frac{4ac - b^2}{4a}, h = \frac{-b}{2a}$$

په نتیجه کی لرو چی:

او باید یاده کړو چې $h = \frac{-b}{2a}$ او $k = \frac{4ac - b^2}{4a}$ د $f(x) = ax^2 + bx + c$ تابع لاندې شکل
ځانته اختیاریوي: $f(x) = a(x - h)^2 + k$

چې د دې مربوطه گراف له $y = x^2$ گراف سره مشابهت لري د $|a|$ انبساط او انقباض
د ضریب لرونکی وي.

گراف د h واحد په اندازه په افقي توگه او د k واحد په اندازه په عمودي توگه انتقالېږي،
د پارابول راس د (h, k) کېږي.

مثال: د $f(x) = x^2 + 4x + 2$ معادلې د پارابول راس تعیین کړئ.

حل: څرنګه چې د پارابول راس عبارت له (h, k) نقطې څخه دی.

$$h = \frac{-b}{2a} = \frac{-(+4)}{2} = \frac{-4}{2} = -2 \Rightarrow h = -2$$

$$k = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{8 - (-4)^2}{4} = \frac{8 - 16}{4} = \frac{-8}{4}$$

داسې چې:

$$k = -2$$

نو ویلای شو چې د پارابول د راس نقطه عبارت ده له $(-2, -2)$ څخه.

X	-3	-2	-1	0
f(x)	-1	-2	-1	2

۲- مثال: د $f(x) = 2x^2 + 6x + 4$ پارابول د راس نقطې وټاکئ.

حل: د پارابول راس عبارت دی له (h, k) نقطې څخه، داسې چې:

$$h = \frac{-b}{2a} = \frac{-6}{4} = \frac{-3}{2} = -1.52$$

$$k = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{4 \cdot 2 \cdot 4 - 6^2}{8} = \frac{32 - 36}{8} = \frac{-4}{8} = -0.5$$

$$f(x) = 2x^2 + 6x + 4$$

$$f(0) = 2(0)^2 + 6(0) + 4 = 4$$

$$f(-1) = 2(-1)^2 + 6(-1) + 4 = 0$$

$$f(-2) = 2(-2)^2 + 6(-2) + 4 = 0$$

$$f(-3) = 2(-3)^2 + 6(-3) + 4 = 4$$

$$f(-5) = 2(-5)^2 + 6(-5) + 4 = 24$$

$$f(2) = 2(2)^2 + 6 \cdot 2 + 4 = 24$$

X	-5	-3	-2	-1	0
f(x)	24	4	0	0	4

د مربعي تابع جذرونه

که تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ دارنگه راکړل شوې وي او د دې معادلې جذرونه صفري نقطې يا د $f(x)$ تابع جذرونه نومېږي، لاندې معادله کولای شو دارنگه حل کړو.

$$f(x) = ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

د معادلې له دواړو خواوو سره $\frac{b^2}{4a^2}$ جمع کوو.

$$\Rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

$$\Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right) = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \Rightarrow \sqrt{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2} = \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$\Rightarrow x + \frac{b}{2a} = \frac{\pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

او لاندې حالتونه په کې شامل دي. $b^2 - 4ac$ افاده په D سره نښو، $D = b^2 - 4ac$ په اخري فورمول کې چې ممیزه نومېږي

۱- که $D > 0$ وي معادله دوه حقيقي او مختلف جذرونه لري.

۲- که $D = 0$ وي معادله یواځې $D < 0$ وي معادله حقيقي جذر نه لري، په دې ځای کې ویل کېږي، چې معادله د دوه مختلطو جذرونو لرونکې ده.

که وغواړو د معادلې حل ساده شکل ته راوړو، د $b = 2b'$ یعنې $b' = \frac{b}{2}$ په نظر کې نیسو، لرو چې:

$$\begin{aligned} x &= \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ \Rightarrow \frac{-2b' \pm \sqrt{(2b')^2 - 4ac}}{2a} &= \frac{2(-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac})}{2a} \\ \Rightarrow \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac}}{a} \end{aligned}$$

په همدې ترتیب $D' = b'^2 - ac$ قرار لري؛ نو معادله لاندې شکل ځان ته اختیاري:

$$x = \frac{-b' \pm \sqrt{D'}}{a}$$

لومړی مثال: $f(x) = x^2 + 4x + 2$ تابع د هغې د ممیزونو په مرسته حل کړئ.

د $f(x)$ تابع دوه مختلف جذرونه $D' = b'^2 - ac = 2^2 - 1 = 2$ څرنگه چې $0 < 2$ دي؛ نو د $f(x)$ تابع دوه مختلف جذرونه لري.

$$\begin{aligned} x &= \frac{-b' \pm \sqrt{D'}}{a} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 1}}{1} = -2 \pm \sqrt{4 - 1} \\ x &= -2 \pm \sqrt{3} \end{aligned}$$

دویم مثال: $x^2 - 6x + 25 = 0$ معادلہ حل کریں۔

$$x^2 - 6x + 25 = 0 \Rightarrow D = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 25 = 36 - 100 = -64$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{6 \pm \sqrt{-64}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{-64}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{(64)(-1)}}{2} = \frac{6 \pm 8i}{2} = 3 \pm 4i$$

$$x_1 = 3 + 4i$$

$$x_2 = 3 - 4i$$

درہیم مثال: $x^2 - 2\sqrt{3}x - 9 = 0$ دا حل کریں۔

حل: کہ $b' = \frac{b}{2} = -\sqrt{3}$ فرض کرو لرو چہ:

$$x = \frac{-b' \pm \sqrt{D'}}{a} = \frac{\sqrt{3} \pm \sqrt{(-\sqrt{3})^2 - 1}}{1} = \frac{\sqrt{3} \pm \sqrt{2}}{1}$$

$$x = \sqrt{3} \pm \sqrt{2}$$

$$x_1 = \sqrt{3} + \sqrt{2}$$

$$x_2 = \sqrt{3} - \sqrt{2}$$

د درېم څپرکي پوښتنې

۱- $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{2}$ تابع د ساده ممیزونو په مرسته حل کړئ؟

۲- $f(x) = x^2 - 7x - 5$ تابع حل او د هغې گراف رسم کړئ؟

۳- د $f(x) = \frac{2}{3} + 9x^3$ تابع گراف رسم کړئ؟

۴- لاندې مربعي توابع په $p(x) = a(x-h)^2 + k$ شکل ولیکئ او د هغوی گراف رسم کړئ؟

1) $p(x) = x^2 - 6x + 3$

2) $f(x) = x^2 - 5x + 4$

3) $f(x) = x^2 - 6x - 3$

4) $f(x) = -2x^2 - 4x + 1$

5) $f(x) = -x^2 + 5x + 1$

6) $f(x) = x^2 + 2x + 4$

۵- د لاندې معادلو جذرونه پیدا کړئ؟

1) $x^2 + 10x + 8 = 0$

2) $x^2 - 3x - 4 = 0$

3) $-3x^2 - 9x + 4 = 0$

4) $2x^2 + 2x + 1 = 0$

5) $x^2 + 5x - 6 = 0$

٦- د لاندې معادلو جذرونه د $D=b^2-4ac$ ممیزی په نظر کې نیولو حل او د هغوی گراف رسم کړئ؟

1) $x^2+5x-12 = 0$

2) $x^2-6x+25 = 0$

3) $x^2+8x+25 = 0$

4) $2x^2+2x+1= 0$

٧- د مربعي توابع د گرافونو راس معلوم کړئ؟

1) $f(x) = x^2 + 5x - 6 = 0$

2) $f(x) = x^2 - 16x + 25 = 0$

3) $f(x) = -5x^2 - 14x - 8 = 0$

4) $f(x) = 2x^2 - 9$

5) $f(x) = 2x^2 - 6x + 3 = 0$

6) $f(x) = x^2 + 3$

درېیمه درجه یو مجهوله معادلې او توابع

ټولیزه موخه:

لوستونکي به وکړای شي، چې د درېیمې درجې معادلو مفهوم او د هغو قوانین زده کړي او د وړ مهارتونو په کارولو سره مسایل محاسبه او اړوند گرافونه په سمه توگه رسم کړي.

د زده کړې موخې: د دې څپرکي په پای کې به لوستونکي وکولای شي، چې:

- ۱- په اساسي ډول د تجزیې مفهوم درک کړي.
- ۲- تجزیه تعریف او د هغې په قواعدو پوه شي او اړوند مسایل محاسبه کړي.
- ۳- د قایمو مختصاتو محور تعریف او د قایمو مختصاتو محور په رول کې د درېیمې درجې معادلو گرافونه په سمه توگه رسم کړي.
- ۴- درېیمه درجه معادله څنگه په دوهمه درجه معادله تبدیله او د هغې گراف رسم کړي.

درېیمه درجه یو مجهوله معادلې او توابع

د درېیمې درجې معادلو عمومي شکل عبارت دی له $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ څخه، څرنگه چې a, b, c, d ثابت عددونه او d ته عمودي قاطع ویل کېږي او درېیمه درجه تابع دا رنگه ښودل کېږي.

$$y = ax^2 + bx^2 + cx + d$$

د درېیمې درجې تابع د گراف د رسمولو لپاره د تېرو مثالونو په څېر دوه اساسي نقطو ته ضرورت لرو، چې عبارت دي له $p_1(x=0, y=?)$ $p_2(y=0, x=?)$ باید یادونه وشي، چې د جذرونو په موجودیت کې اسانه طریقه پیدا کړئ! د معادلې جذرونه داسې دي، د معادلې یو جذر امتحاني پیدا کوو او درېیمه درجه معادله په هغې تقسیموو، په دوهمه درجه معادله بدلېږي.

په جذرونو د پوهېدو په صورت کې جذرونه کولای شو د قوسونو د تجزیې په طریقه او یا د محمد بن موسی د فورمول په طریقه لاس ته راوړو.

مثال: غواړو لاندې درېیمه درجه تابع په نظر کې ونیسو، د هغې جذرونه پیدا او گراف

$$y = x^3 + x^2 - 14x - 24. \text{ رسم کړو.}$$

حل: که $x=0$ کړو

$$y = (0)^3 + (0)^2 - 14(0) - 24$$

$$y = -24$$

$$\Rightarrow p_1(x=0, y=?)$$

$$p(x=0, y=-24)$$

د y د ارزښت د پیدا کولو لپاره د x لپاره اختیاري قیمتونه ورکوو، چې زموږ تابع له صفر سره مساوي شي.

$$y = (4)^3 + (4)^2 - 14 \cdot 4 - 24$$

$$y = 64 + 16 - 56 - 24 \Rightarrow y = 80 - 80 = 0 \Rightarrow y = 0$$

څرنگه چې په $x=4$ پورته معادله زموږ تابع له صفر سره مساوي کېږي، فلها د معادلې جذر $x=4$ کېږي موږ درېیمه درجه معادله په هغې تقسیموو.

$$\begin{array}{r} x^3 + x^2 - 14x - 24 \quad | \quad x - 4 \\ \underline{\pm x^3 \mp 4x^2} \\ 5x^2 - 14x \\ \underline{5x^2 \mp 20x} \\ 6x - 24 \\ \underline{\pm 6x \mp 24} \end{array}$$

$$x^2 + 5x + 6 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6$$

$$\Delta = 25 - 24 = 1$$

$$\Delta = 1$$

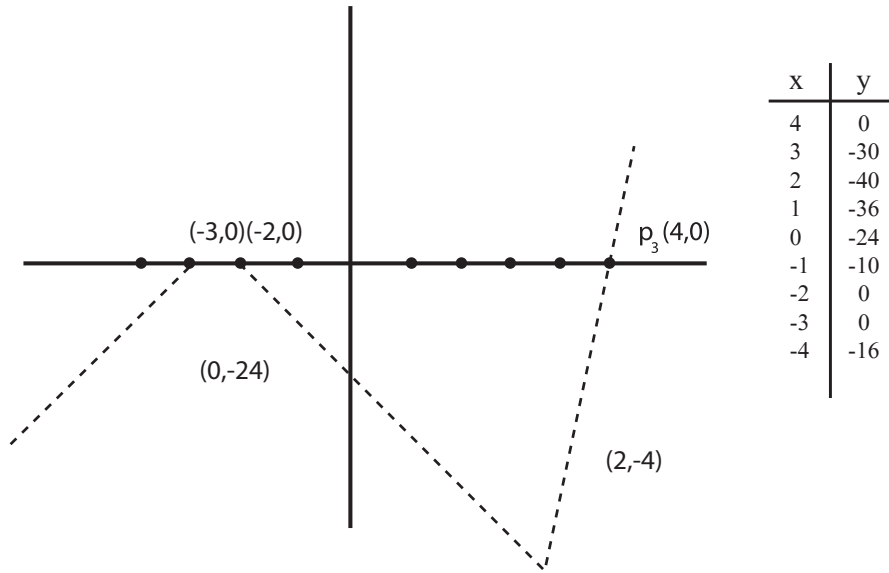
$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{-5 \pm 1}{2}$$

$$x_1 = \frac{-5 + 1}{2} = \frac{-4}{2} = -2 \Rightarrow x_1 = -2$$

$$x_2 = \frac{-5 - 1}{2} = \frac{-6}{2} = -3 \Rightarrow x_2 = -3$$

اوس د گراف د رسمولو په خاطر د جدول نه په گټه اخیستو x ته قیمت ورکوو او د y قیمت په لاس راوړو، وروسته د جدول له مخې گراف رسموو.



دويم مثال: د $y = x^3 - 2x^2 - 11x + 12$ تابع گراف رسم کړئ.

$$f1(x=0, y=?)$$

$$f1(x=0, y=12)$$

د x لپاره اختياري قيمتونه ورکوو، چې تابع له صفر سره مساوي شي.

$$Y = (1)^3 - 2(1)^2 - 11(1) + 12$$

$$Y = 1 - 2 - 11 + 12 = 0 \Rightarrow y = 0$$

څرنگه چې $x=1$ تابع د صفر سره مساوي کېږي، ځکه نو د معادلې يو جذر $x-1$ کېږي او درېيمه درجه معادله په هغې تقسيموو.

$$\frac{x^3 - 2x^2 - 11x + 12}{x - 1} = x^2 - x - 12$$

$$x^2 - x - 12 = 0$$

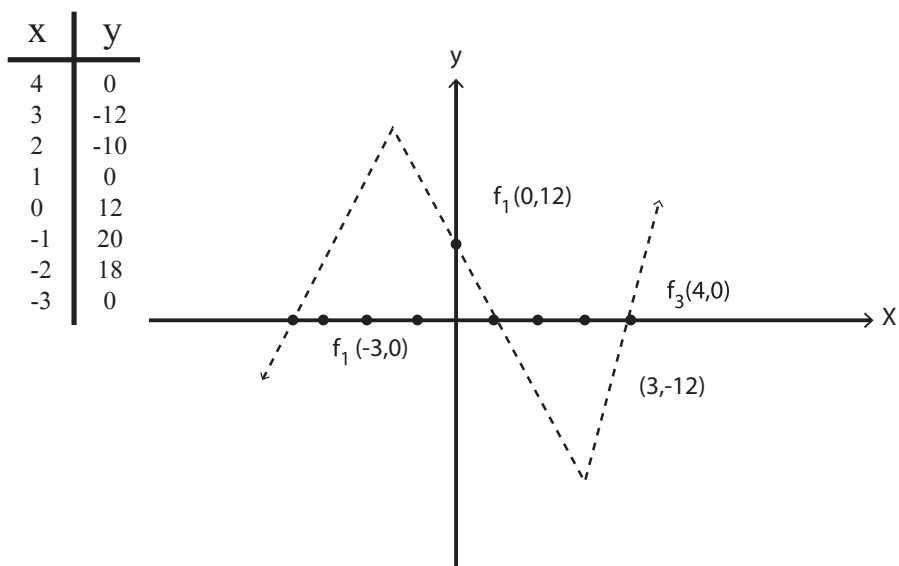
$$(x - 4)(x + 3) = 0$$

$$x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4$$

$$x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3$$

$$f_2(y = 0, x = 4, -3)$$

د گراف جدول ترتیبوو او گراف یې رسموو.



د څلورم څپرکي پوښتنې

د y, x په محور د اړوند منحنی د تقاطع نقطې پیدا کړئ او د هغو گراف رسم کړئ؟

$$1) y = 2x^2 + x^3 - 10x - 20$$

$$2) y = x^3 - 3x^2 - 10x + 24$$

$$3) y = 2x^3 - x^2 - 2x + 1$$

$$4) y = x^3 + 2x^2 - 4x - 8$$

$$5) y = x^3 - 2x^2 - 4x + 8$$

$$6) y = x^2 - 8x^2 + 2x + 5$$

$$7) y = 4x^5 + 6x^4 + 4x + 6$$

$$8) y - x^3 = -3x^2 + -10x + 24$$

$$9) y + 2x^2 = x^3 - 2x + 1$$

لوگارتم

ټوليزه موخه:

په سمه توگه د لوگارتم او توان لرونکې تابع درک او د لوگارتم او توان لرونکې تابع تر منځ په اړیکو پوهېدنه، د محاسبې په کارونو کې د اړتیا وړ مهارتونو لاسته راوړل او د لوگارتم له اصولو او قواعدو سره سم د اقتصادي مسايلو حل او د لوگارتم له جدول نه په گټه اخیستو سره د هغو د لوگارتم پیدا کول.

د زده کړې موخې: د دې څپرکي په پای کې به لوستونکي وکولای شي، چې:

- 1- لوگارتم تعريف او د هغه اړوندې پوښتنې حل کړي.
- 2- د توان لرونکې تابع او لوگارتم ترمنځ رابطه تعريف او مسايل په سمه توگه محاسبه او حل کړي.
- 3- د لوگارتم قواعد ښه درک کړي او اړوندې پوښتنې د قواعدو مطابق حل کړي.
- 4- د لوگارتم ډولونه، انټي لوگارتم او کولو لوگارتم سم وپيژني او د هغو اړوندې پوښتنې حل کړي.
- 5- په بېلابېلو ساحو کې له لوگارتم څخه گټه اخیستل درک کړي او د هغه اړوندې پوښتنې حل کړي.

توان لرونکې او لوگارتمې توابع

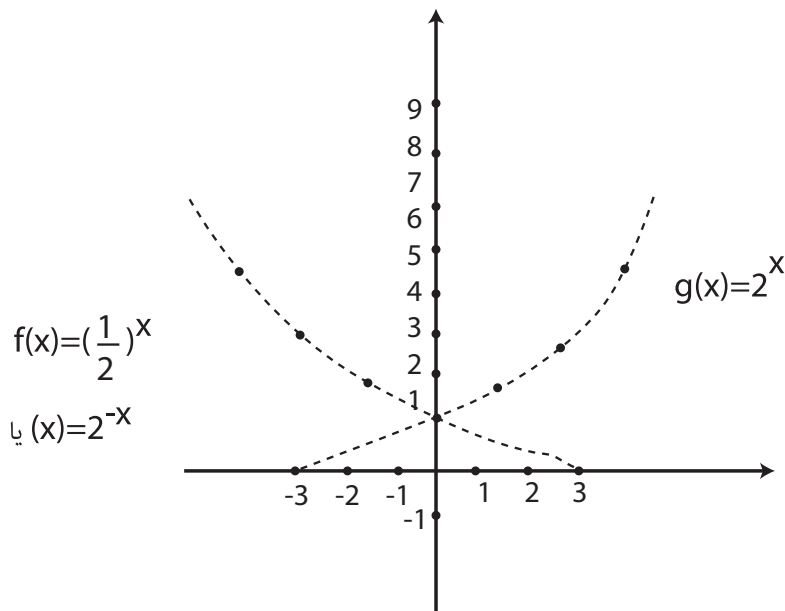
هغه توابع چې د جمعې، ضرب او د تقسیم د عملیو په واسطه یې عددونه او متحولین معلوم شي، الجبري توابع دي.

هغه توابع چې الجبري وي متعالي توابع ورته ويل کېږي. بايد وويل شي چې توان لرونکي توابع او لوگاريتمي توابع يو د بل معکوس دي او د توان لرونکو توابعو له خواصو څخه په محاسبه او د نفوسو د تکثر، د مکرويونو تکثر او د راديو اکتيف عناصرو د وړانگو په وړاندوينه او نورو کې گټه اخېستل کېږي. د لوگاريتمي توابعو څخه په پېچلو محاسبوکې ډېره گټه پورته کېږي.

توان لرونکي توابع (اکسيوتنشيل): کله چې a يو خلاف د 1 مثبت عدد وي، د $f(x) = a^x$ تابع د توان لرونکي توابع په نامه په قاعده a نومېږي.

مثال: د $g(x) = 2^x, f(x) = (\frac{1}{2})^x$ توابع په نظر کې نيول شوي د هغوی گراف رسم کړئ.

X	-3	-2	-1	0	1	2	3
g(x)	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
f(x)	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$



د توان لرونکو توابعو خاصیتونه

کله چې a یو مثبت عدد وي او $f(x) = a^x$ وي لاندې شرایط صدق کوي.

۱- د $f(x)$ تابع متزایده وي، په دې شرط چې $a > 1$ وي.

۲- د $f(x)$ تابع متناقصه وي په هغه وخت کې چې $a < 1$ وي.

۳- د $f(x)$ تابع په هغه صورت کې، چې $a = 1$ ثابت ده.

۴- د $y = a^x$ گراف په حالت کې له $(1, 0)$ نقطې تېرېږي.

۵- د ټولو حقیقي عددونو لپاره x او y لرو چې:

$$f(x+y) = a^{x+y} = a^x \times a^y = f(x) \cdot f(y)$$

$$f(x-y) = a^{x-y} = a^x \times a^{-y} = \frac{a^x}{a^y} = \frac{f(x)}{f(y)}$$

$$f(a \cdot x) = a^{a \cdot x} = (a^x)^a = (f(x))^a$$

مثال: د $f(x) = 3^{-x^2}$ گراف رسم کړئ.

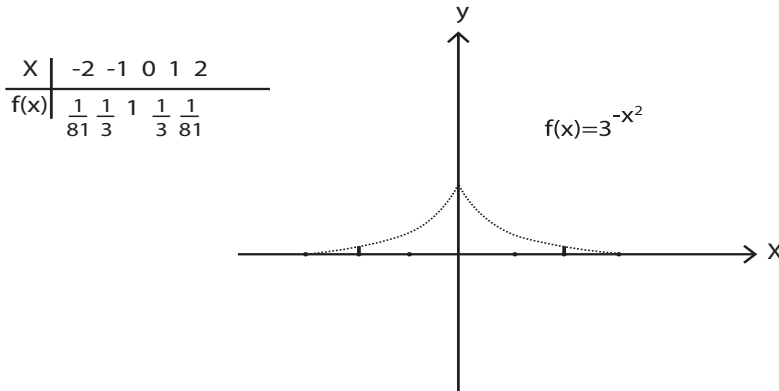
حل:

$$f(0) = 3^{-0} = 1$$

$$f(x) = 3^{-x^2}$$

$$f(1) = 3^{-1} = \frac{1}{3}$$

$$f(2) = 3^{-(2)^2} = 3^{-4} = \frac{1}{3^4} = \frac{1}{81}$$



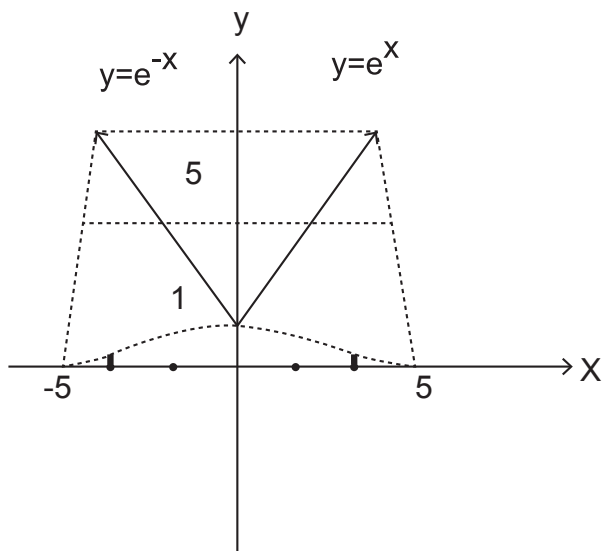
$$1) \exp_a^0 = 1, \exp(1) = a$$

$$2) \exp_a(x+y) = \exp_a(x) \cdot \exp_a(y)$$

$$3) \exp_a(x-y) = \frac{\exp_a(x)}{\exp_a(y)}$$

$$4) (\exp_a^x)^y = \exp_a(x \cdot y)$$

او همدارنگه باید یادونه وشي، چې د $\exp_a(x) = a^x$ خواص په لاندې ډول هم لیکل کېږي. یو له فوق العاده مهمو عددونو څخه په ریاضي کې د اویلر عدد دی، چې $e = 2,7182818284\dots$ دی او د $f(x) = e^x$ تابع دی، یعنې $\exp(x) = e^x$ چې دا تابع د نفوسو په زیاتوالي، او مرکبې ربعې او نورو مسایلو کې کارېږي او د $y = e^x$ گراف له $y = 2^x$ گراف سره ورته رسمېږي.



او د e^x تابع ټول خواص د a^x تابع سره مشابه دي.

$$e^0 = 1$$

$$e^x \cdot e^y = e^{x+y}$$

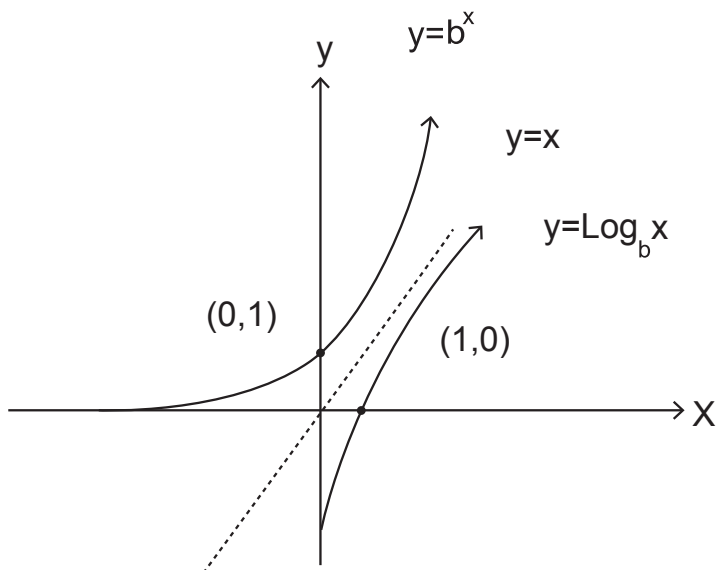
$$\frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}$$

او د هر حقيقي عدد لپاره $y = e^x$ متزايد او $y = e^{-x}$ متناقصه وي.

لوگارتیم او د لوگارتیم توابع: هر کله چې $x=b^y$ او $1 \neq b > 0$ وي د y عدد د x لوگارتیم په قاعده د b ويل کېږي او په لاندې شکل ليکل کېږي $y = \text{Log}_b^x$ يعنې دوه فوق الذکر عبارتونه يو د بل معادل دي.

$$x = b^y \Leftrightarrow y = \log_b^x$$

يا په بل عبارت $f(x) = b^x$ او $f^{-1}(x) = \log_b^x$ توابع د يو بل معکوس دي.



د توان لرونکو او لوگارتیمي توابعو ترمنځ اړيکه

څرنگه چې توان لرونکې توابع $f(x) = a^x$ او $f^{-1}(x) = \text{Log}_a^x$ د يو بل معکوس دي.

نو

$$\Rightarrow_a \log_a^x = x, \log_a^{a^x} = x$$

$$a \log_a^{a^x} = f^{-1}(f(x)) = x$$

$$a \log_a^{a^x} =_x \log_a^{a^x} = x$$

مثال:

$$1) 8 = 2^3 \Leftrightarrow \text{Log} 2^8 = 3$$

$$2) 16 = 2^4 \Leftrightarrow \text{Log} 2^{16} = 4$$

$$3) 8 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} \Leftrightarrow \text{Log} \frac{8}{1/2} = -3$$

$$4) 10000 = 10^4 \Leftrightarrow \text{Log}_{10} 10000 = 4$$

$$5) 1000 = 10^3 \Leftrightarrow \text{Log}_{10} 10000 = 3$$

$$6) 0.0001 = 10^{-4} \Rightarrow \text{Log}_{10} 0.0001 = -3$$

$$7) 0.00001 = 10^{-5} \Rightarrow \text{Log}_{10} 0.00001 = -5$$

د لوگارتم قواعد يا د لوگارتم خاصيتونه: د طاقت د قوانينو نه په گټه اخيستو په اسانۍ سره لوگارتم مطالعه کولی شو.

$$1) \text{Log}_a 1 = 0 \Rightarrow 1 = a^0$$

$$2) \text{Log}_a a = 1 \Rightarrow a = a^1$$

$$3) \text{Log}_a^{(y,x)} = \text{Log}_a^x + \text{Log}_a^y$$

د ضرب د حاصل لوگارتم د جمع د حاصل د مجموعي لوگارتمونو سره مساوي دی.

ثبوت: فرضوو چې:

$$\begin{cases} \log_a^x = u \Rightarrow x = a^u \\ \log_a^y = v \Rightarrow y = a^v \end{cases}$$

د مساوات دواړه خواوې سره ضربوو.

$$x \cdot y = a^u \cdot a^v$$

$$\Rightarrow x \cdot y = a^{u+v} \Rightarrow \text{Log}_a (x \cdot y) = u + v$$

د u, v قيمت په پورته رابطه کې وضع کوو، په نتيجه کې:

$$\text{Log}_a^{(x,y)} = \text{Log}_a^x + \text{Log}_a^y$$

$$4) \text{Log}_a^{\frac{n}{y}} = \text{Log}_a^x - \text{Log}_a^y \Rightarrow \text{Log}_a^{\frac{x}{y}} = \text{Log}_a^x - \text{Log}_a^y$$

د ضرب د حاصل لوگارتتم مساوي وي د مربوطو لوگارتمونو د جمعې له حاصل سره.

ثبوت: داسې يې حل کوو، فرض کوو چې:

$$\begin{cases} \log_a^x = u \Rightarrow a^u \\ \log_a^y = v \Rightarrow a^v \end{cases}$$

څرنګه چې پورته معادله خوا په خوا تقسيموو لرو چې:

ثبوت: فرض کوو چې

$$\Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{a^u}{a^v} \Rightarrow \frac{x}{y} = a^{u-v}$$

$$\text{Log}_a^{\left(\frac{x}{y}\right)} = u - v$$

د پورته معادلې دواړه خواوې د a په توان پورته وړو.

$$5) \text{Log}_a^{x^a} = a \cdot \text{Log}_a^x$$

$$\text{Log}_a^x = u \Rightarrow x = a^u$$

$$x^a = (a^u)^a$$

$$x^a = a^{u \cdot a} \Rightarrow \text{Log}_a^{x^a} = a \cdot u$$

$$\Rightarrow \text{Log}_a^{x^a} = a \cdot \text{Log}_a^x$$

(۶) د يو عدد د جذر لوگارتتم مساوي دی د جذر د معکوس د ضرب د حاصل د مربوطه

عدد په لوگارتتم

$$6) \text{Log}_a^{a\sqrt{x}} = \frac{1}{a} \cdot \text{Log}_a^x$$

$$= \text{Log}_a^{x^{\frac{1}{a}}} = \frac{1}{a} \text{Log}_a^x$$

$$7) \text{Log}_a^x \cdot \text{Log}_b^a = \text{Log}_b^x$$

ثبوت: فرض کوو

$$\begin{cases} \log_a^x = u \Rightarrow a^u \\ \log_b^a = v \Rightarrow a^v \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = b^{v.u} \Rightarrow \text{Log}_b^x = v.u$$

$$\Rightarrow \text{Log}_b^x = \text{Log}_a^x \cdot \text{Log}_b^a \Rightarrow \text{Log}_a^x \cdot \text{Log}_b^a = \text{Log}_b^x$$

مثالونه:

$$1) \text{Log}_2^{18} = \text{Log}_2^{(2 \cdot 9)} = \text{Log}_2^2 + \text{Log}_2^9 = \text{Log}_2^2 + \text{Log}_2^{(3)^2} \\ = 1 + 2 \cdot \text{Log}_2^3$$

$$2) \text{Log}_2^{128} = \text{Log}_2^{(2)^7} = \text{Log}_2^2 = 7 \cdot 1 = 7$$

$$3) \text{Log}_b^4 + \text{Log}_b^x - \text{Log}_b^3 = \text{Log}_b^{(4 \cdot x)} - \text{Log}_b^3 = \text{Log}_b^{\frac{4x}{3}}$$

$$4) \text{Log}_b^{\sqrt{11}} = \text{Log}_b^{(11)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2} \cdot \text{Log}_b^{11}$$

پنځم مثال- د x قیمت په لاندې لوگارتمي معادله کې پیدا کوو

$$[(x-21)x]$$

$$\text{Log}_{10} = 2 \Rightarrow (x-21)x = 10^2$$

$$x^2 - 21x = 100 \Rightarrow x^2 - 21x - 100 = 0$$

$$(x-25)(x+4) = 0$$

$$x-25 = 0 \Rightarrow x = 25$$

$$x+4 = 0 \Rightarrow x = -4$$

شپږم مثال- د x قیمت له لاندې لوگارتمي معادلې څخه په لاس راوړئ.

$$\text{Log}_{10}^x + \text{Log}_{10}^4 = 2 \Rightarrow \text{Log}_b^{(4 \cdot x)} = 2$$

$$4x = 10^2 \Rightarrow 4x = 100 \Rightarrow x = \frac{100}{4} = 25$$

$$\Rightarrow x = 25$$

اووم مثال- $\log_4 (x+2)^2 = 2$ لوگارتم که چېرې $x=2$ وي د هغې ارزښت پیدا کړی.

$$\log_4 (x+2)^2 = 2$$

$$(x+2)^2 = 4^2$$

$$(2+2)^2 = 4^2$$

$$4^2 = 4^2$$

د لوگارتم ډولونه

د لوگارتم ډول د هغه په قاعدې پورې اړه لري. د لوگارتم قاعده کولای شي منفي یا مثبت لایتناهي عددونه په بر کې ونیسي، څرنگه چې د لوگارتم ډولونه ډېر دي او مور یواځې دوه ډوله لوگارتم در پېژنو.

۱- طبعي لوگارتم

۲- معمولي لوگارتم (اعشاري)

په دې لوگارتم کې د ۱۰ عدد د قاعدې په حیث په نظر کې نیول شوی دی او معمولاً په دې شکل ښودل کېږي $\log x = \log_{10} x$ له دې ډول لوگارتم څخه په اقتصادي او سوداګریزو مسایلو کې ګټه اخیستل کېږي.

مانتیس او د لوگارتم مشخصه

N د هر مثبت عدد کولای شو په علمي شکل په لاندې ډول ولیکو.

$N = a \cdot 10^c$ داسې چې $1 \leq a < 10$ وي او C یو تام عدد دی، په دې ځای کې کولای شو ولیکو:

(کرکترستیک)

$$\begin{aligned} \log N &= \log(a \cdot 10^c) = \log a + \log 10^c \\ &= \log a + c \cdot \log 10 = \log a + c \end{aligned}$$

په دې مثال کې د c عدد ته مشخصه (کرکترستیک) وایي، همدارنګه لیکلای شو، چې $M = \log a$ او $\log N$ د مانتیس نومېږي، څرنگه چې $0 \leq a < 1$ دی

نو $0 \leq a < 1$ دی، یعنی $0 \leq m < 1$.

لومړی مثال-

$$\begin{aligned} \text{Log}(527) &= \text{Log}(5,27) \times 10^2 = \text{Log}(5,27) + \text{Log}_{10}^2 \\ &= \text{Log}(5,27) + 2 \end{aligned}$$

له دې مثال څخه څرگندېږي چې $C=2$ دی یعنی مشخصه ۲ ده او $m = \text{Log}^{(5,27)}$ دی.

دویم مثال-

$$\begin{aligned} \text{Log}(950000) &= \text{Log}[(9.5) \times 10^5] = \text{Log}(9.5) + \text{Log}10^2 \\ &= \text{Log}(9.5) + 5 \Rightarrow c = 59m = \text{Log}(9.5) \end{aligned}$$

درېیم مثال-

$$\begin{aligned} \text{Log}(0.000005) &= \text{Log}[5 \times 10^{-6}] = \text{Log}5 - 6 \\ \Rightarrow C &= -6, m = \text{Log}5 \end{aligned}$$

څلورم مثال-

$$\begin{aligned} \text{Log}(1000) &= \text{Log}10^3 = 3 \cdot \text{Log}10 = 3 \\ \Rightarrow C &= 3m = 0 \end{aligned}$$

د مانتیس او مشخصې خاصیتونه

۱. د لوگاریتمونو مانتیس هغه عددونه دي چې د عین رقمونو او ترتیب لرونکي وي پرته د اعشاري علامو د موقعیت په نظر کې نیولو، ښي او کین صفرونه د یو بل سره مساوي وي.

د مثال په توګه $\text{Log}(4,81) = 0.6821$ (-1) وي.

لومړی مثال:

$$\begin{aligned} \text{Log}(48100) &= \text{Log}[(4,81) \times 10^4] \\ &= \text{Log}(4,81) + \text{Log}10^4 = \text{Log}(4,81) + 4 \\ &= 0.6821 + 4 = 4.6821 \Rightarrow \text{Log}^{(48100)} = 4.6821 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Log}(481) &= \text{Log}[(4,81) \times 10^2] \\ &= \text{Log}^{(4,81)} + \text{Log}10^2 = \text{Log}^{(4,81)} + 2 = 0.6821 + 2 = 2.6821 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \text{Log}(0.00481) = \text{Log}[(4,81) \times 10^{-3}] = \\ &= \text{Log}^{(4,81)} + \text{Log}10^{-3} = 0.6821 - 3 = \bar{3}.6821 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Log}(0.0481) &= \text{Log}[(4,81) \times 10^{-2}] = \\ &= \text{Log}^{(0.0481)} + \text{Log}10^{-2} = 0.6821 - 2 \\ &\Rightarrow \text{Log}^{(0.0481)} = \bar{2}.6821 \end{aligned}$$

اوس د پورته پوښتنو نتيجه يوخای کوو.

عدد	مشخصه	مانتيس	لوگارتم
48100	4	0.6821	4.6821
481	2	0.6821	2.6821
81,۶	0	0.6821	0.6821
0.0481	-2	0.6821	-2.6821
0.00481	-3	0.6821	-2.3179

۲. د لوگارتم کرکترستیک له یو نه لوی، یو واحد کوچنی د هغو د صحیح رقمونو له شمېر څخه وي، لکه:

اعداد	128	9682	5942.5	200000
مشخصه	2	3	3	5

۳. د لوگارتم مشخصه له یو څخه کوچنۍ ، یو منفي عدد دی، چې یو واحد کوچنی د چې طرف د عدد د صفرونو له شمېر څخه د هغې نه مخکې عدد اعشاري وي لکه:

واحد	0.128	0.081	0.00481	0.00065
مشخصه	-1	-2	-3	-4

نوټ: د لوگارتم مشخصه د عددونو د شمېر له مخې معلومېږي.

او مانتیس د جدول له مخې په لاس راځي، مثلاً د یو درې رقمي عدد مانتیس په لاندې شکل معلومېږي لکه 943 عدد د 94 په سطر کې او د 3 په ستون کې د هغه مانتیس واقع دی.

انتي لوگارتم

د هر عدد انتي لوگارتم خپل لوگارتم دی.

هر کله چې $y = \text{Log}x$ وي، په دې صورت کې $x = 10^y$ او $x = 10^y = \text{antiLog}y$ دی، دا چې د $\text{Log}92.8 = 1.9675$ لوگارتم دی د ۹۲،۸ عدد انتي لوگارتم ۱،۹۶۷۵ عدد یادېږي.

$$\text{Log}1000 = 3 \Rightarrow \text{antiLog} = 10^3 = 1000 \quad \text{اول مثال:}$$

$$\text{Log}N = 1.7016 \quad \text{دویم مثال:}$$

ځکه نو $m = 0.7016$ او $C = 1$ بنا پر دې د صحیح رقمونو شمېر د N عدد مشخصې ته په کتو باید 2 وي، څرنګه چې د 0 او 7016 مانتیس د 503 عدد مربوط دی؛ نو باید چې $N = 50.3$ وي.

یادونه: که د یوه عدد لوگارتم ټاکلی وي، د صحیح رقمونو شمېر او یا د اعشاري علامې موقعیت ټاکل د عدد د مشخصې په مرسته او د عدد د رقمونو څرنګوالی د مانتیس په مرسته له جدول څخه په لاس راځي.

درېيم مثال-

$$\text{Log}N = -2.3179$$

په دې صورت کې

$$\begin{aligned}\text{Log}N &= -2.3179 = -2 - 0.3179 \\ &= -2 - 1 + 1 - 0.3179 = -3 + 0.6821\end{aligned}$$

دا چې د $m = 0.6821$ او $C = -3$ دی او د 0.6821 عدد د مانتيس په جدول کې د 481 عدد دی، باید یادونه وشي چې د N مشخصه -3 عدد دی، په نتیجه کې $N = 0.00481$ دی. د لو گارتم د قاعدې د بدلولو لپاره فورمول هر کله چې x, b, a مثبت عددونه وي او a او b د یو خلاف وي؛ نو لرو چې:

$$\text{Log}_b^x = \frac{\text{Log}_a^x}{\text{Log}_a^b}$$

ثبوت: فرض کوو چې $y = \text{Log}_b^x$ وي $b^y = x$ دی، دواړه خواوو ته د a په قاعده لوگارتم نیسو.

$$= \text{Log}_b^y = \text{Log}_b^x$$

$$y \times \text{Log}_a^b = \text{Log}_a^x$$

$$y = \frac{\text{Log}_a^x}{\text{Log}_a^b} \Rightarrow \text{Log}_b^x = \frac{\text{Log}_a^x}{\text{Log}_a^b}$$

مثال: د Log_9^{27} محاسبه کړئ.

حل:

$$\text{Log}_9^{27} = \frac{\text{Log}_3^{27}}{\text{Log}_3^9} = \frac{\text{Log}_3^{3^3}}{\text{Log}_3^{3^2}} = \frac{3 \cdot \text{Log}_3^3}{2 \cdot \text{Log}_3^3} = \frac{3 \cdot 1}{2 \cdot 1} = \frac{3}{2} \Rightarrow \text{Log}_9^{27} = \frac{3}{2}$$

دویم مثال: د Log_5^{100} محاسبه کړئ.

که چېرې $\text{Log}_{10}^5 = 0.7$ وي.

حل:

$$\text{Log}_5^{100} = \frac{\text{Log}_{10}^{100}}{\text{Log}_{10}^5} = \frac{\text{Log}_{10}^{(10)^2}}{\text{Log}_{10}^5} = \frac{2 \cdot \text{Log}_{10}^{10}}{\text{Log}_{10}^5} = \frac{2 \times 1}{0,7} = \frac{2}{0,7} = 2.86 \Rightarrow \text{Log}_5^{100} = 2,86$$

خطي انتر پولیشن

باید یادونه وشي چې د درې رقمي او څلور رقمي عدد مانتیس د درې رقمي او څلور رقمي جدول څخه پیدا کولای شو. که چېرته د یو عدد د رقمونو شمېر د درې او څلورو څخه زیات وي، نشو کولای چې مانتیس یې د جدول له مخې پیدا کړو، باید یادونه وشي چې دلته لوگارتمي تابع متزایده وي او د هغې قیمتونه د کوچنیو انتروالونو څخه په خطي توګه زیاتوالی مومي، همدارنګه د عددونو او د هغوی د لوگارتمونو ترمنځ توپیر مستقیماً متناسب فرض کولای شو، دې ته په کتو د عددونو د مانتیس د محاسبې د روش فرضیه شتون لري، چې د خطي انتر پولیشن په نوم یادېږي.

مثال: د $5,235$ عدد مانتیس د یو درې رقمي جدول څخه د پیدا کېدو وړ نه دی، مګر دوه درې رقمي عددونه کولای شي معلوم یې کړي، چې دا عدد د هغو دواړو تر منځ واقع وي $5,23 < 5,235 < 5,24$ په دي صورت کې د لوگارتمونو مانتیس $5,23$ او $5,24$ په جدول کې موجود دی، چې لاندې یې محاسبه کوو.

$$N \left\{ \begin{array}{l} 5,230 \\ 5,235 \\ 5,240 \end{array} \right\} 0,010 \quad 0,005$$

د اعدادو توپیر
0,01

0,005

$$\frac{0,01}{0,005} = \frac{0,0008}{d} \Rightarrow 0,01d = (-,00d)(0,0008)$$

$$\Rightarrow d = \frac{(0,005)(0,0008)}{0,01} = 0,0004$$

$$\Rightarrow x = \text{Log}5.235 = \text{Log}5.235 + d = 0,7185 + 0,0004 = 0,7189$$

$$\text{Log}N \left\{ \begin{array}{l} 0,7185 \\ x \\ 0,7193 \end{array} \right\} 0,0008$$

د لوگارتم توپیر
0,0008

D

که د 52350 عدد د لو گارتم مانتیس پیداکول هدف وي، بیا هم پورته روش په کار وړل کېږي ځکه چې د 3,235 او 52350 عددونو مانتیس مساوي دي او همدارنگه باید وویل شي، چې د انټي لوگارتم د ټاکلو لپاره د پورته په شان مشابه روش په کار وړل کېږي او همدارنگه دانټي لوگارتمونو توپیر لټول کېږي.

مثلاً که $\text{Log}N=1,7206$ وي N وټاکي، باید وویل شي د 0,7206 عدد مانتیس په درې رقمي جدول کې شتون نه لري او مانتیس له جدول څخه کولای شو پیدا کړو، چې پورته ذکر شوی مانتیس د هغوی په منځ کې واقع دی، یعنې 0,7202 د دې سره تعلق 0.7210 5.250 لري او د 5.260 متعلق دی دارنگه یې حسابوو.

$\text{Log}N$	N
$0,010 \left\{ \begin{array}{l} 5,250 \\ y \\ 5,260 \end{array} \right\} d$	$0,0004 \left\{ \begin{array}{l} 0,7202 \\ 0,7206 \\ 0,7210 \end{array} \right\} 0,0008$
د عددونو تفاوت	د لوگارتم تفاوت
0,0004	d
0,0008	0,01

$$\frac{d}{0,010} = \frac{0,0004}{0,0008}$$

$$\Rightarrow d = \frac{(0,010)(0,0004)}{0,0008} = 0,005$$

$$y = 5,250 + d = 5,250 + 0,005 = 5,255$$

مثال: $\text{Log } 0,0007957$ پیدا کړئ.

$$\begin{aligned} \text{Log}0,0007957 &= \text{Log}(7,957) \cdot (10^{-4}) = \text{Log}7,957 + \text{Log}10^{-4} \\ &= \text{Log}7,957 - 4 = m - 4 \end{aligned}$$

او دا چې $m = \text{Log } 7,957$ دی.

نو د مانتیسونو د جدول په کمک یې پیدا کوو.

$$0,010 \left\{ \begin{array}{l} N \\ 5,250 \\ y \\ 5,260 \end{array} \right\} d$$

د عددونو تفاوت

$$0,007$$

$$0,010$$

$$0,0004 \left\{ \begin{array}{l} \text{Log}N \\ 0,7202 \\ 0,7206 \\ 0,7210 \end{array} \right\} 0,0008$$

د لوگارتم تفاوت

$$50,000$$

$$d$$

$$\frac{0,01}{0,007} = \frac{0,0005}{d}$$

$$\Rightarrow d = \frac{(0,007)(0,0005)}{0,010} = 0,00035 \approx 0,0004$$

$$m = 0,9008 \Rightarrow \text{Log}0,0007957 = 0,9008 - 4$$

$$\Rightarrow \text{Log}0,0007957 = \bar{4},9008$$

کو لوگارتم: د یوه عدد معکوس لوگارتم د هغې عدد کو لوگارتم دی.

مثال: a: یو عدد او $\frac{1}{a}$ د a معکوس دی د $\frac{1}{a}$ لوگارتم د a کو لوگارتم دی.

$$\text{coLog} = \text{Log} \frac{1}{a}$$

$$\text{coLog} = \text{Log}1 - \text{Log}a \Rightarrow \text{coLog}a = 0 - \text{Log}a$$

$$\text{coLog}a = -\text{Log}a$$

یا دا چې د یوه عدد منفي لوگارتم د هغه عدد کو لوگارتم دی.

د جدول نه په گټه اخیستو د لوگارتم پیدا کول: څرنګه چې په حسابي معاملاتو لکه مرکبه ربع د 10 په قاعده لوگارتم زیات د گټې اخیستو وړ دی، د عددونو مشخصه د تامو عددونو له مخې معلومېږي او مانتیس د جدول له مخې پیدا کېږي، د لاندې مثال په څېر: $\text{Log} 397 - 1$ پیدا کړئ.

حل: $3,97 \cdot 10^2 = 397$ دی؛ نو لرو چې:

$$\text{Log}397 = \text{Log}(3,97 \cdot 10^2)$$

$$= \text{Log}3,97 + \text{Log}10^2$$

$$= \text{Log}3,97 + 2$$

او $\text{Log } 3,97$ د جدول له مخې پیدا کوو.

N	
1.0	0000 0093 0086 0128 0170 0212 0253 0294 0334 0374
3.5	5441 5453 5456 5478 5490 5502 5514 5527 5539 5561
3.6	
3.8	
3.9	
4.0	
4.1	
4.2	
4.3	
4.4	

کينې خواته دوه رقمونه 3.9 په N ستون کې او 7 عدد په N سطر کې پیدا کوو، د 3.9 سطر په تقاطع کې د 7 مربوط ستون کې قرار لري. د 3.97 له لوگارتم څخه عبارت دی په جدول کې لیدل کېږي، چې $\text{Log } 3.97 = 0.5988$ دی؛ نو:

$$\text{Log } 397 = \text{Log } 3.97 + 2 = 0.588 + 2 = 2.5988$$

دویم مثال- $\text{Log } 0.0429$ محاسبه کړئ.

$$\text{Log } 0.0429 = \text{Log}(4.29 \cdot 10^{-2}) = \text{Log } 4.29 + \text{Log } 10^{-2} = \text{Log } 4.29 - 2$$

د 4.29 د لوگارتم د 4.2 په منځ کې د N په ستون کې د 9 مربوط سطر کې پیدا کوو او مطلوب عدد په لاس راځي، یعنې $\text{Log } 4.29 = 0.6325$ دی ځکه نو داسې لیکلای شو چې $\text{Log } 0.0429 = \text{Log } 4.29 + (-2) = 0.6325 - 2$

درېیم مثال- د $\text{Log } 24$ لوگارتم محاسبه کړئ!

حل:

$$\text{Log } 24 = \text{Log}(2.4 \times 10)$$

$$\text{Log } 24 = \text{Log}(2.4) + \text{Log } 10 \Rightarrow \text{Log } 2.4 + 1$$

$$\Rightarrow \text{Log } 24 = \text{Log } 2.4 + 1$$

دا چې $2.40 = 2.4$ دی؛ نو $\text{Log } 2.40$ وي او $\text{Log } 2.4$ له جدول څخه د 2.4 مربوط سطر کې او مربوطه ستون په (0) پیدا کوو، چې عبارت دی له 0.3802 څخه.

$$\Rightarrow \text{Log } 24 = \text{Log } 2.4 + 1 = 0.3802 + 1$$

$$\Rightarrow \text{Log } 24 = 1.3802$$

طبیعی لوگارتیم

طبیعی لوگارتیم چې په هغه کې قاعده د اویلر عدد ($e=2.718281\dots$) په نظر کې نیول کېږي د قضیو د اثبات لپاره او د ریاضي تیورۍ له دې څخه محاسبات، لیمت او مشتق ډېر استعمال لري

$$\ln x = \text{Log} e^x \quad \text{او عبارت دی له:}$$

$$e^{\ln x} = x, \ln e^x = x \quad \text{او همداراز}$$

لومړی مثال- لاندې لوگارتیم $e=2.718281\dots$ محاسبه کړئ. $\ln(e.e.e)$ څرنگه چې $e.e.e=e^3$ دی

$$\ln(e.e.e) = \ln e^3 = 3$$

دویم مثال- $\ln \frac{1}{e.e}$

$$\text{حل:} \quad = \ln \frac{1}{e^2} = \ln e^{-2} = -2$$

د اعشاري او طبیعي لوگارتیمونو ترمنځ رابطه

که x, b, a مثبت عددونه او b, a د یوه خلاف وي، په نظر کې د دې دوه لوگارتیمونو د قاعدو گراف ځینې وخت د $e, 10$ عددونو څخه لرو، چې

$$\text{Log}_a^x = \text{Log}_b^x \cdot \text{Log}_a^b$$

د یادونې وړ ده له محاسبو څخه په لاس راځي چې $\text{Log} e = 0.434294$

او $\ln 10 = 2.302584\dots$ دی؛ نو $\text{Log} x = 0.4343 \cdot \ln x$ او یا

$$\text{Log}_a^x \cdot \text{Log}_b^a = \text{Log}_b^x$$

$$\text{Log}_{10}^x \cdot \text{Log}_e^{10} = \text{Log}_e^x \Rightarrow \text{Log} x \cdot \ln 10 = \ln x$$

$$\ln x = 2.3026 \cdot \text{Log} x$$

د دې دوه فورمولونو په درلودلو کولای شو د e له قاعدې څخه د 10 قاعدې ته او د 10 له قاعدې څخه د e قاعدې ته لار شو.

لومړی مثال In 4.69 پیدا کړئ.

حل: لرو چې $\text{Log} 4.69 = 0.6712$ دا چې $\text{In} 4.69 = 2.3026 \cdot \text{Log} 4.69$ دی؛ نو لرو چې:
 $\text{In} 4.69 = 2.3026 \cdot 0.6712 = 1.5455$

دویم مثال- In 8910 پیدا کړئ.

$$\begin{aligned} \text{In} 8910 &= 2.3026 \cdot \text{Log} 8910 = 2.3026 \cdot (\text{Log} 8.91 + \text{Log} 10^3) \\ &= 2.3026(0.9499 + 3) = 2.1872 + 6.9087 \\ &\Rightarrow \text{In} 8910 \end{aligned}$$

له اعشاري لوگارتم څخه گټه اخیستل

د اعشاري لوگارتم نه په گټه اخیستو کولای شو هغه محاسبې سرته ورسوو، چې هغه خورا سختې او آن نا ممکنې وي. د لوگارتم عملیه کولای شي چې ضرب جمعې ته، تقسیم تفریق ته، توان ضرب ته او جذر تقسیم ته راجع کړي. دغه راز باید وویل شي چې د محاسبې په جریان کې دې د جدول او انترپولیشن طریقې ته مراجعه کړي. که موږ غواړو چې $(1.08)^{65}$ عدد محاسبه کړو، نو خورا سخت عمل دی او که $\sqrt[52]{945658}$ په لاس راوړو، عملیه غیر ممکنه ده، خو دا دواړه محاسبې د لوگارتم په مرسته اجرا کولای شو: د مشتقاتو محاسبه، لیمتونه، توان لرونکي توابع د طبیعي لوگارتم په مرسته په اسانۍ سرته رسوو.

ل

ومړی مثال- $p = 100(1.08)^{10}$ عدد محاسبه کړئ.

$$\begin{aligned} \text{Log} P &= \text{Log}[100(1.08)^{10}] = \text{Log} 100 + \text{Log}(1.08)^{10} = \\ &= 2 + 10 \text{Log}(1.08) = 2 + 10(0.0334) = 2.334 \\ &\Rightarrow \text{Log} P = 2.334 \Rightarrow p = \text{antiLog}(2.334) = 215.8 \\ &\Rightarrow 100(1.08)^{10} = 215.8 \end{aligned}$$

دویم مثال- $p = (7.284)^5$ محاسبه کړئ.

$$\begin{aligned} \text{Log} p &= \text{Log}(7.284)^5 = 5 \cdot \text{Log}(7.284) = 5(0.8623) \\ &= 4.115 \Rightarrow p = \text{antiLog}(4.115) = 20490 \\ &\Rightarrow (7.284)^5 = 20490 \end{aligned}$$

د پنځم څپرکي پوښتنې

۱- لاندې لوگارتمي معادلې حل کړئ؟

1) $10^3 = 1000$

2) $4^3 = 64$

3) $27^{\frac{-1}{3}} = \frac{1}{3}$

۲- لاندې لوگارتمي رابطې د توان لرونکې تابع په معادلو افادو ولیکئ؟

1) $\text{Log}_9 81 = 1$

4) $\text{Log}_4 256 = 4$

2) $\text{Log}_9 \left(\frac{1}{16}\right) = -2$

5) $\text{Log}_{11} 1 = 0$

3) $\text{Log} 0.001 = -3$

6) $\text{Log}_2 25 = 25$

۳- د لاندې لوگارتمونو مشخصه ولیکئ؟

1) $\text{Log} 738$

5) $\text{Log}(13.10^4)$

2) $\text{Log} 73.8$

6) $\text{Log}(5.10^{-2})$

3) $\text{Log} 0.738$

7) $\text{Log}(4.10^{-4})$

4) $\text{Log}(9.10^0)$

8) $\text{Log} 16000$

۴- لاندې لوگارتمونه د جدول له مخې پیدا کړئ؟

1) $\text{Log} 738$

6) $\text{Log} 23.4$

2) $\text{Log} 73.8$

7) $\text{Log} 300$

3) $\text{Log} 20.738$

8) $\text{Log} 999$

4) $\text{Log}(14.10^7)$

9) $\text{Log} 5890000$

5) $\text{Log}(0.000316)$

10) $\text{Log} 0.0456$

۵- لاندې لوگارتمي معادلې حل کړئ؟

1) $\text{Log}_a(9x+4) - \text{Log}_a(x+2) = \text{Log}_a x$

2) $\text{Log}_x^{2\text{Log} x} = \text{Log}(10x)$

3) $\text{Log} x + \text{Log}(x-3) = 1$

4) $\text{Log}_b(x-9) + \text{Log}_b^x = 2$

5) $\text{Log}_3(x+1) - \text{Log}_3(x-1) = 3$

6) $\text{Log}_4(3x-3) = \text{Log}_2^3$

د عددونو « عددی » سلسلې

ټولیزه موخه:

د حسابي ، هندسي او هارمونیک تصاعد په سمه او اساسي توګه درک کول او د محاسبې په کارونو کې د اړتیا وړ مهارتونو زده کول او د مسایلو حل د حسابي، هندسي او هارمونیک تصاعدونو د اصولو او قواعدو مطابق.

د زده کړې موخې: د دې خپرکي په پای کې به محصلین په دې وتوانیږي چې:

- ۱- حسابي تصاعد، د تصاعدونو تزايد او تناقص تعریف او مربوط سوالونه حل کړي.
- ۲- د حسابي تصاعد وسطي عنصر، د حسابي تصاعد مجموعه تعریف او اړوندې پوښتنې حل کړي.
- ۳- هندسي تصاعد، د هندسي تصاعد وسطي عنصر تعریف او د هغې په فورمول پوه او د هغې اړوند سوالونه حل کړي.
- ۴- لوستونکي هارمونیک تصاعد تعریف او د هغې اړوند سوالونه حل کړي.
- ۵- لوستونکي تصاعد او د هارمونیک وسطي عنصر، تعریف او د هغې اړوند سوالونه حل کړي.
- ۶- د سګما قاعده او اندکس په سمه توګه درک او د هغې اړوندې پوښتنې حل کړي.

عددي سلسلې

د عددونو ترادفونه «تصاعدونه»: عددي ترادفونه عددي یا عددي تصاعدونه د ریاضي له عمده موضوعګانو څخه دي چې د ریاضي د مهمو مسایلو په تحلیل کې د هغې له جملې څخه د عددونو په محاسبه کې د کارونې ډېر ځایونه لري. په دې خپرکي کې د حسابي

او هندسي تصاعدونو مخکينې او ساده مفاهيم تر ارزونې لاندې نيول کېږي.
د تصاعد مفهوم (ترادف): ټاکلي عددونه $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n$ د تصاعد يا د عددونو د ترادف په نوم يادېږي چې د پورته ذکر شوو اعدادو څخه هر يو د ذکر شوي تصاعد عنصر کېږي. څرنگه چې a_1 اول عنصر a_2 دوهم عنصر او a_n د n ام عنصر د دې تصاعد وي، د يو تصاعد يا ترادف عناصر کولای شي له يو بل سره منطقي يا الجبري اړيکې ولري.

مثلاً:

- | | | |
|---|---------------------------|----|
| 2,4,6,8,10.....2n | د جفتو عددونو تصاعد | -۱ |
| 1,3,5,7.....2n | د طاق عددونو تصاعد | -۲ |
| 5,10,15,205n | د مضرب عددونو تصاعد | -۳ |
| $\frac{1}{3n} dn = \langle n=1,2,3,\dots \rangle$ | د مضرب عددونو معکوس تصاعد | -۴ |

د تصاعدونو يا ترادفونو تزايد او تناقص

هغو تصاعدونو ته چې د عناصرو عددي قيمت يې په تدريجي توگه زيات شوی وي متزايد ويل کېږي لکه جفت تصاعدونه، طاق، د 5 مضرب عددونه او نور تصاعدونه، چې د عناصرو اندازه يې په تدريجي توگه کمه شي متناقص تصاعد بلل کېږي، لکه د 3 مضرب عددونو معکوس تصاعد

اول مثال- $an = n^2$, $bn = 5$ تصاعدونه، متزايد او متناقص دي؛ خو ولې؟

حل: په پيل کې د تصاعدونو يا ترادفونو څو مسلسل قيمتونه لیکو.

$$n : 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 6$$

$$an : 1 \ 4 \ 9 \ 16 \ 25 \ 36$$

$$\frac{2}{3}, \frac{2}{4}, \frac{2}{5}, \frac{2}{6} \quad bn : 2 \ 1$$

په پورته مثال کې ليدل کېږي، چې د an تصاعد عناصر زياتېږي، ځکه نو تزايد او bn تصاعد مخ په کمېدو دی بناپر دې متناقص دی.

حسابي تصاعد يا حسابي ترادف: هغه تصاعد چې د مرتبو مجاورو عناصرو د هرې جوړې

تر منخ توپیر یی د d ثابت عدد وي، د حسابي تصاعد په نامه یادېږي، لکه :

$$n = 1, 2, 3, 4, \dots$$

$$a_{n+1} = a_n + d$$

$$d = a_n \pm a_{n+1}$$

$$a_{n+1} = a_n + d$$

$$\Rightarrow d = a_{n+1} - a_n$$

په دې ځای کې د d مشترک تفاضل په نوم یادېږي. a_1 د یاد تصاعد له اول عنصر څخه دی.

دویم مثال 2 , 5 , 8 , 11 , 14 , 17

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, \dots$$

او باید وویل شي چې د پورته مثال مشترک تفاضل په پورته تصاعد کې $d=3$ وي.

داسې چې

$$a_1 = 2$$

$$A_2 = a_1 + d = 2 + 3 = 5$$

$$A_3 = a_2 + d = 5 + 3 = 8$$

$$A_4 = a_3 + d = 8 + 3 = 11$$

$$A_5 = a_4 + d = 11 + 3 = 14$$

$$A_6 = a_5 + d = 14 + 3 = 17$$

که اول عناصر او مشترک تفاضل په یو حسابي تصاعد کې مشخص وي، ټاکل شوی تصاعد ترلاسه کولای شو.

د حسابي تصاعد « حسابي ترادف » اختیاري عنصر ټاکل: کله چې a_1 اول عنصر د تصاعد او d مشترک تفاضل او a_n عنصر د n ام عنصر د حسابي تصاعد وي، د هغوی په منخ کې رابطه په لاندې ډول بربرسي کېږي.

$$a_2 = a_1 + d$$

$$a_3 = a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 2d$$

$$a_4 = a_3 + d = (a_1 + 2d) + d = a_1 + 3d$$

$$a_5 = a_4 + d = (a_1 + 3d) + d = a_1 + 4d$$

$$a_6 = a_5 + d = (a_1 + 4d) + d = a_1 + 5d$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

بالاخره په پای کې

لومړی مثال- که د حسابي تصاعد لومړی عنصر $a_1=5$ او مشترک تفاضل یې $d=2$ وي شلم عنصر یې څو دی؟

څرنگه چې $a_1 = 5$ د ی فورمول ته په کتو لرو چې

$$d = 2$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$a_2 = 5 + 38 = 43$$

$$\Rightarrow a_{20} = 5 + (20-1)2$$

دویم مثال- حسابي تصاعد پیدا کړئ، چې په هغې کې $a_6=27$ او $a_2=57$ وي
حل: څرنگه چې په دې سوال کې a_1 او d مشخص نه دی لومړی باید هغه پیدا کړو.

$$a_6 = a_1 + 5d$$

$$a_{12} = a_1 + 11d$$

$$a_1 + 5d = 27$$

$$a_1 + 11d = 57$$

$$-6d = -30$$

$$d = +\frac{30}{6} = 5$$

$$a_1 + 5d = 27$$

$$a_1 + 5 \times 5 = 27$$

$$a_1 = 27 - 25 = 2$$

په نتیجه کې $d = 5, a_1 = 2$ دي.

$$a_2 = a_1 + d = 2 + 5 = 7 \Rightarrow a_3 = a_2 + d = 7 + 5 = 12$$

$$a_4 = a_3 + d = 12 + 5 = 17 \Rightarrow a_5 = a_4 + d = 17 + 5 = 22$$

$$a_6 = a_5 + d = 22 + 5 = 27$$

د حسابي تصاعد وسطي عنصر:

هر کله چې مسلسل عنصر a_{n+1}, a_n, a_{n-1} په داسې حال کې چې $n=2,3,4,\dots$ دی له حسابي تصاعد ټاکلی شي لرو چې.

$$a_n + 1 + a_n - 1 = [a_1 + (n-1)d] + [a_1 + nd] = 2[a_1 + (n-1)d]$$

په پورته معادله د $a_n + 1 + a_n - 1$ په عوض وضع کوو، لرو چې

$$a_n + 1 + a_n - 1 = 2a_n \Rightarrow a_n = \frac{a_n + 1 + a_n - 1}{2}$$

د حسابي تصاعد مجموعي عناصر

په حسابي تصاعد کې د n مجموعه لومړی عنصر عبارت دی له

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$$

ثبوت: که n مجموعه لومړی عنصر د هغه په S_n فرض شي، چې.

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_n$$

که $n=5$ فرض کړو لرو چې

$$S_5 = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + (a_1 + 3d) + (a_1 + 4d) \dots \dots \dots I$$

$$S_5 = (a_1 + 4d) + (a_1 + 3d) + (a_1 + 2d) + (a_1 + d) + a_1 \dots \dots \dots II$$

I او II رابطه خوا په خوا جمع کوو، لرو چې:

$$2S_5 = (2a_1 + 4d) + (2a_1 + 4d) + (2a_1 + 4d) + (2a_1 + 4d) + (2a_1 + 4d)$$

$$\Rightarrow 2S_5 = 5(2a_1 + 4d) \Rightarrow S_n = \frac{5}{2}(2a_1 + 4d)$$

$$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$$

همدارنگه لیکلای شو چې

نتیجه: هر کله چې a_1 لومړی عنصر او a_n د حسابي تصاعد n ام عنصر

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

ثبوت: دا چې $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$

اوس کولای شو ولیکو چې

$$S_n = \frac{n}{2}[a_1 + a_1 + (n-1)d]$$

دا چې $a_n = a_1 + (n-1)d$ دی نو لیکلای شو چې $Sn = [a_1 + a_n]$

په نتیجه کې لیکو چې $a_1 + a_2 + a_4 + \dots + a_n = \frac{n}{2} \times [a_1 + a_n]$

لومړی مثال- د مسلسلو طبیعي عددونو مجموعه له ۱ تر ۲۰۰ پورې محاسبه کړئ.

حل: طبیعي عددونه حسابي تصاعد جوړوي، داسې چې په هغه کې $a_1 = 1 = d$ دی

ځکه نو قیمتونه په معادله کې رډو، ځینې $a_n = 200, n = 200$ دي.

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \frac{n}{2} [a_1 + a_n]$$

$$1 + 2 + 3 + \dots + 200 = \frac{200}{2} [1 + 200] = 100(201) = 20100$$

دویم مثال- له 1 تر 100 پورې د طبیعي مسلسلو عددونو مجموعه محاسبه کړئ.

حل: داسې چې $a_1 = 1 = d$ شي.

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \frac{n}{2} [a_1 + a_n]$$

کولای شو $a_n = 100, n = 100$ وضع کړو لرو چې

$$1 + 2 + 3 + \dots + 100 = \frac{100}{2} (1 + 100) = 50(101) = 5050$$

د طبیعي عددونو مجموعه: د حسابي تصاعد طبیعي عددونه چې په هغې کې $a_1 = 1$ او $d = 1$

وي، ځکه نو n مجموعه اول طبیعي مسلسل عدد عبارت دی له:

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n = \frac{n}{2} [2a_1 + (n-1)d] = \frac{n}{2} [2 \times 1 + (n-1) \times 1] = \frac{n(n+1)}{2}$$

نو n مجموع د مسلسل طبیعي عدد چې له ۱ څخه شروع کېږي، عبارت دی له

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

په حسابي تصاعد کې د جفتو مسلسلو عددونو مجموعه:

د جفتو عددونو په تصاعد کې $a_1 = 2 = d$ دی، پرهمدې بنسټ لرو چې

$$2 + 4 + 6 + \dots + 2n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d] = \frac{n}{2}[2 \cdot 2 + (n-1)2] =$$

$$= \frac{n}{2}[4 + (2n-2)] = \frac{n}{2}(2+2n) = n(n+1)$$

$$\Rightarrow 2 + 4 + 6 + \dots + 2n = n(n+1)$$

مثال- تاق مسلسل عددونه هم حسابي تصاعد دی، چې په هغې کې $d=2, a_1=1$ وي، لکه

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$$

$$= \frac{n}{2}[2 \cdot 1 + (n-1)2] = \frac{n}{2}(2 + 2n - 2) = n^2$$

$$\Rightarrow 1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$$

هندسي تصاعد «هندسي ترادف»: هغه تصاعد چې د هر عنصر نسبت یې د هغه نه مخکې عنصر د r یو ثابت عدد وي، د هندسي تصاعد په نوم یادېږي، لکه
« $n=1,2,3,4,\dots$ »

$$\frac{a_n + 1}{a_n} = r \Rightarrow a_n + 1 = a_n \times r$$

په دې ځای کې r مشترک نسبت او a_1 د تصاعد اول عنصر نومېږي.
هندسي تصاعد هغه وخت مشخص وي چې اول عنصر او مشترک نسبت یې ټاکلی یا معین وي

مثال: په یوه هندسي تصاعد کې $r=3, a_1=2$ دی $r=3, a_1=2$ عناصر یې وټاکئ.

حل:

$$a_2 = a_1 \times r = 2 \times 3 = 6$$

$$a_3 = a_2 \times r = 6 \times 3 = 18$$

$$a_4 = a_3 \times r = 18 \times 3 = 54$$

د هندسي تصاعد عمومي عنصر: هر کله چې a_1 اول عنصر او r د هندسي تصاعد مشترک نسبت وي، n ام عنصر یې عبارت له $a_n = a_1 r^{n-1}$ څخه دی.
ثبوت: د تصاعد عناصر یو د بل په مرسته متوالي په لاس راوړو.

په نتیجه کې په لاس راځي چې:

$$a_2 = a_1 \times r$$

$$a_3 = a_2 \times r = (a_1 \times r) \times r = a_1 \times r^2$$

$$a_4 = a_3 \times r = (a_1 \times r^2) \times r = a_1 \times r^3$$

$$a_5 = a_4 \times r = (a_1 \times r^3) \times r = a_1 \times r^4$$

$$\Rightarrow a_n = a_1 \times r^{n-1}$$

د هندسي تصاعد وسطي عنصر (هندسي ترادف): هر کله چې درې مسلسل عناصر

a_{n-1} ، a_n او a_{n+1} په داسې حال کې، چې $n=2,3,4,\dots$ دی له هندسي تصاعد څخه

$$(a_n - 1)(a_n + 1) = (a_1 \cdot r^{n-2})(a_1 \cdot r^n) = (a_1 \cdot r^{n-1})^2 \text{ چې}$$

$$\text{دا چې } a_1 \cdot r^{n-1} = a_n \text{ دی.}$$

$$(a_n - 1)(a_n + 1) = a_n^2$$

دواړه خواوې تر جذر لاندې نيسو، چې $\sqrt{a_n^2} = \sqrt{(a_n - 1)(a_n + 1)}$ په نتیجه کې په لاس راځي

چې

$$a_n = \sqrt{(a_n - 1)(a_n + 1)}$$

يا په بل عبارت:

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

د هندسي تصاعد د عناصرو مجموعه: د n مجموعه د هندسي تصاعد مسلسل عنصر عبارت دی له

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = a_1 \cdot \frac{1 - r^n}{1 - r}$$

ثبوت: - لرو چې $s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$ او يا په بل عبارت

$$s_n = a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + \dots + a_1 r^{n-1}$$

د s_n د رابطې دواړه خواوې په r کې ضربوو رابطه لاندې شکل نيسي.

$$rs_n = a_1r + a_1r^2 + a_1r^3 + a_1r^4 \dots\dots\dots + a_1r^n \dots\dots\dots 2$$

اوس ۱ رابطه له ۲ رابطې څخه خوا په خوا منفي کوو.

$$rs_n - s_n = a_1r^n - a_1 \Rightarrow s_n(r-1) = a_1(r^n - 1)$$

$$s_n = a_1 \frac{r^n - 1}{r - 1} = a_1 \frac{1 - r^n}{1 - r}$$

مثال- هر کله چې په یوه هندسي تصاعد کې $a_1 = 2$ او $r = 3$ وي، د 5 مجموع عنصر محاسبه کړئ.
حل: لرو چې:

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$$

$$s_n = a_1 + a_1r + a_1r^2 + a_1r^3 + a_1r^4 \Rightarrow s_n = a_1 \cdot \frac{1 - r^n}{1 - r}$$

$$2 + 6 + 18 + 45 + 162 = 2 \cdot \frac{1 - 3^5}{1 - 3} = 2 \cdot \frac{1 - 3^5}{-2} = \frac{1 - 3^5}{-1}$$

$$= 3^5 - 1 = 242$$

هندسي سلسله

هر کله چې په یوه هندسي تصاعد کې مشترک نسبت r له $(-1, 1)$ انتروال څخه وي، یعنې $-1 < r < 1$ په دې صورت کې د n عدد د لویو قیمتونو لپاره r^n فوق العاده کوچنی کېږي او همدارنگه باید وویل شي، هغه وخت چې n د لایتناهي خواته نږدې کېږي r^n صفر ته تقرب کوي، ځکه نو لاندې رابطه په نظر کې نیسو.

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots\dots\dots a_n = a_1 \frac{1 - r^n}{1 - r}$$

که $r^n = 0$ فرض کړو، معادله لاندې شکل غوره کوي

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots\dots\dots + = \frac{a_1}{1 - r}$$

کينې خوا ته وروستۍ رابطه د هندسي سلسلې په نامه او بڼۍ خواته د هغې د قیمت مجموعه نومېږي. هندسي سلسله په لاندې شکل هم ليکلای شو.

$$a_1 + a_1r + a_1r^2 + a_1r^3 + \dots = \frac{a_1}{1-r}$$

که $a=1$ فرض کرو لیکلای شو چې

$$1 + r + r^2 + r^3 + \dots = \frac{1}{1-r}$$

لومړی مثال: د $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$ سلسله محاسبه کړئ.

حل: په دې سلسله کې $a_1=1$ او $r=\frac{1}{2}$ وي.

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

دویم مثال: که د هندسي تصاعد لومړی عنصر $a_1=27$ او مشترک عنصر یې $r=\frac{1}{3}$ وي، د عناصرو د سلسلې مجموعې محاسبه کړئ. فورمول ته په کتو لرو چې:

$$a_1 + a_1r + a_1r^2 + \dots = \frac{a_1}{1-r}$$

$$a_1 + a_1r + a_1r^2 + \dots = \frac{a_1}{1-r}$$

$$27 + 9 + 3 + 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots = \frac{27}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{27}{\frac{2}{3}}$$

$$= 27 \cdot \frac{3}{2} = 40.5$$

درېیم مثال: که د هندسي تصاعد لومړی عنصر 4 او مشترک نسبت 3 یې وي او 6 ام عنصر پیدا کړئ: حل:

$$a_0 = ? \quad r = 3 \quad a_1 = 4$$

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1} \Rightarrow a_6 = 4 \cdot r^6 - 1 = r^5 = 4 \cdot 3^5 = 972$$

خلورم مثال: په يوه هندسي سلسله کې $a_1=3$ او $r=2$ وي a_n پيدا کړئ.

حل:

$$s_n = a_1 \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1}$$

$$r = 2$$

$$a_1 = 3$$

$$n = 6$$

$$s_6 = 3 \cdot \frac{2^6 - 1}{2 - 1} = 3 \cdot \frac{64 - 1}{1} = 3 \cdot 63 = 189$$

پنځم مثال: که $a_1=5$ او $r=3$ ، $s_n=200$ وي a_n پيدا کړئ.

حل: فورمول ته په کتو لرو، چې:

$$s_n = a_1 \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1}$$

$$s_n = a_1 \cdot 200 \quad r = 3 \quad a_1 = 5$$

په فورمول کې وضع کوو، N پيدا کوو.

$$200 = \frac{5(3^n - 1)}{3 - 1} = \frac{5 \cdot 3^n - 5}{2} \Rightarrow 400 = 5 \cdot 3^n - 5$$

$$\Rightarrow 405 = 5 \cdot 3^n \Rightarrow \frac{405}{5} = 4^n \Rightarrow 81 = 3^n$$

$$3^n = 3^4 \Rightarrow n = 4 \Rightarrow 3^4 = 3^4$$

دا مو پيدا کړ، چې $n=4$ دی

$$a_4 = a_1 r^3 = 5 \cdot 3^3 = 5 \cdot 27 = 135$$

هارمونیک تصاعد

a_n تصاعد ته هغه وخت هارمونیک ویل کېږي چې د هغې تصاعد معکوس $\frac{1}{a_n}$

يو حسابي تصاعد وي.

مثال: د طبيعي عددونو معکوس تصاعدونه، تاق اعداد، د 5 مضرب اعداد او نور

هارمونیک تصاعد دي يعنې:

$$a_n = \frac{1}{n} : 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$$

$$b_n = \frac{1}{2n-1} : 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \dots$$

$$c_n = \frac{1}{5n} : \frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \frac{1}{15}, \dots$$

د هارمونیک تصاعد وسطي عنصر

هر کله چې درې مسلسل عناصر a_n-1 , a_n , او a_n+1 په داسې حال کې، چې
($n=2,3,4,\dots$) دي له هارمونیک تصاعد څخه انتخاب شي.

دې ته په کتو، چې $\frac{1}{a_n}, \frac{1}{a_n-1}$ او $\frac{1}{a_n+1}$ د یوه حسابي تصاعد عناصر دي، لرو چې:

$$\begin{aligned}\frac{1}{a_n} &= \frac{1}{a_n+1} + \frac{1}{a_n-1} \\ \frac{1}{a_n} &= \frac{a_n-1^2+a_n+1}{(a_n+1)(a_n-1)} = \frac{a_n-1+a_n+1}{2(a_n+1)(a_n-1)} \\ \frac{1}{a_n} &= \frac{a_n-1+2+a_n+1}{2(a_n+1)(a_n-1)} = \frac{2(a_n+1)}{2(a_n+1)(a_n-1)} \\ \Rightarrow a_n &= \frac{2(a_n-1)(a_n+1)}{a_n-1+a_n+1}\end{aligned}$$

پورتنی فورمول په لاندې شکل لیکلای شو:

$$\frac{2}{a_n} = \frac{1}{a_n-1} + \frac{1}{a_n+1}$$

مثال: لاندې هارمونیک تصاعد په نظر کې نیسو او حسابوو یې

$$1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \frac{1}{11}, \dots$$

د a_4 نمونې په توګه $\frac{1}{7}$ عنصر انتخابوو.

$$\begin{aligned}a_4 &= \frac{2a_3 \cdot a_5}{a_3 + a_5} \\ a_4 &= \frac{2 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{9}}{\frac{1}{5} + \frac{1}{9}} = \frac{\frac{2}{45}}{\frac{14}{45}} = \frac{2}{14} = \frac{1}{7} = a_4\end{aligned}$$

د عددونو اوسطونه

حسابي اوسطونه، هندسي او هارمونیک د b, c دوه حقيقي عددونه عبارت دي له:

$$A = \frac{a+b}{2} \text{ حسابي اوسط}$$

$$G = \sqrt{a \cdot b} \text{ هندسي اوسط}$$

$$H = \frac{2a \cdot b}{a+b} \text{ هارمونیک اوسط}$$

دویم مثال: د 2 او 8 عددونو حسابي، هندسي او هارمونیک اوسطونه عبارت دي له:

$$A = \frac{a+b}{2} = \frac{2+8}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

$$G = \sqrt{2 \cdot 8} = \sqrt{16} = 4 \Rightarrow G = \sqrt{a \cdot b}$$

$$H = \frac{2a \cdot b}{a+b} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 8}{2+8} = \frac{32}{10} = 3.2$$

په مدارنگه د 2، 5، 8 عددونه حسابي تصاعد دی. د 2، 4، 8 عددونه هندسي تصاعد کې واقع دی. د 2، 3، 8 عددونه هارمونیک تصاعد جوړوي

دا چې حسابي، هندسي او هارمونیک اوسطونه په دوه حقيقي عددونو تعريف کوو، کولای شو په n حقيقي عدد $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ او a_n هم تعريف کولای شو.

$$A = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n}{n}$$

$$G = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_n}$$

$$H = \frac{n \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_n}{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n}$$

د سگما قاعده: ټول مسايل چې مور د عناصرو مجموع په حسابي او هندسي تصاعد کې تشریح کړل چې $s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$ وي.

کولای شو د جمع حاصل په لنډه او شنلې توگه وليکو او هغه په Σ (سگما) وښايو چې يوناني توری دی او د مجموعې معنی ورکوي او لاندې مجموعه په لاندې شکل لیکو

$$\sum_{n=1}^n a_n = s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

په پورته رابطه کې Σ یوه مجموعه راښيي او د Σ څخه پورته او ښکته علامې ښودنه کوي. او n ټول تام عددونه له 1 څخه تر n پورې په بر کې نیسي. n د انډکس (انټروال) په نوم یادېږي او د یوه مجموعي انډکس لپاره هر توری کارولای شو؛ خو د k, j, i او کارول ډېر معمول دي.

$$\sum_{h=1}^n 2hi = 1 = \sum_{i=1}^n 2i = \sum_{j=1}^n 2j = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + 2n$$

$$= 2 + 4 + 6 + \dots + 2n$$

$$\sum_{h=1}^n 5h = \sum_{j=1}^n 5j = \sum_{i=1}^n 5i = 5^1 + 5^2 + 5^3 + \dots + 5^n$$

$$= 5 + 25 + 125 + \dots + 5^n$$

یا

مثال: د لاندې جمع حاصل د Σ په شکل ولیکئ.

حل:

$$1+3+5+7+\dots+(2n-1)$$

$$1+3+7+\dots+(2n-1) = \sum_{h=1}^n (2h-1)$$

مثال: د لاندې جمع حاصل د Σ په شکل ولیکئ.

حل:

$$1+4+9+\dots n^2$$

$$1+4+9+\dots n^2 = \sum_{h=1}^{nq} (2h-1)$$

درېیم مثال: د $\sum_{i=1}^n (4h^2 - 3h)$ د جمع حاصل محاسبه کړئ.

حل:

$$\sum_{h=1}^n (4h - 3h) = (4 \cdot 22 - 3 \cdot 1) + (4 \cdot 22 - 3 \cdot 2) + (4 \cdot 32 - 33)$$

$$= 1 + 10 + 27 = 38$$

خلورم مثال: $\sum_{j=2}^5 \frac{j-1}{j+1}$ د جمعې حاصل یې پیدا کړئ.

حل:

$$\sum_{j=2}^n \frac{j-1}{j+1} = \frac{2-1}{2+1} + \frac{3-1}{3+1} + \frac{4-1}{4+1} + \frac{5-1}{5+1} =$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{2}{4} + \frac{3}{5} + \frac{4}{6} =$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{3}{5} + \frac{2}{3} =$$

$$= \frac{10+15+18+20}{30} = \frac{63}{30} = \frac{21}{10}$$

د شپږم څپرکي پوښتنې:

- ۱- له 1 څخه تر 500 پورې د طبيعي عددونو د جمعې حاصل پيدا کړئ؟
- ۲- د ټولو هغو تامو عددونو مجموعه پيدا کړئ، چې د 10 او 500 تر منځ واقع دي او $a_1=4$ وي.
- ۳- په يوه حسابي تصاعد کې $a_1=12$ او $d=10$ وي؛ فرض کوو، چې $a_n=500$ دی n پيدا کړئ؟
- ۴- په يوه حسابي تصاعد کې $a_1=3$ او $d=5$ دی او $a_n=510$ دی n پيدا کړئ؟
- ۵- د يوه حسابي تصاعد n ام عنصر 180 او $a_1=6$ وي d پيدا کړئ؟
- ۶- که په يوه حسابي تصاعد کې $a_1=7$ او $a_9=77$ وي، تصاعد معين کړئ؟
- ۷- د $a_n = 2n^n$ تصاعد متزايد ولې دی؟
- ۸- د $a_n = \frac{2n+1}{n}$ تصاعد تزايد دی که تناقص؟
- ۹- د حسابي تصاعد لومړی عنصر $a_1=5$ او $d=7$ وي، (50) ام عنصر يې پيدا کړئ؟
- ۱۰- که په يوه حسابي تصاعد کې $a_1 = \frac{1}{3}$ او $r = \frac{1}{2}$ وي، s_{10} پيدا کړئ؟
- ۱۱- هر کله چې په يوه هندسي تصاعد کې $a_1=4$ او $r=4$ وي، د 6 مجموع عنصر پيدا کړئ؟
- ۱۲- کله چې د يوه هندسي تصاعد لومړی عنصر $a_1=24$ وي او مشترک نسبت $r = \frac{1}{2}$ وي، د عناصرو د سلسلې مجموعه پيدا کړئ؟
- ۱۳- د هندسي تصاعد مجموع $1 + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \dots$ محاسبه کړئ؟
- ۱۴- که په يوه هندسي تصاعد کې $a_1=27$ او د عناصرو د سلسلې مجموع 40.5 مشترک نسبت يې پيدا کړئ؟
- ۱۵- هر کله چې په يوه هندسي تصاعد کې $a_1=4$ او $r=6$ وي $a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7$ او a_6 عناصر محاسبه کړئ؟
- ۱۶- د 4 او 8 اعدادو حسابي، هندسي او هارمونیک اوسطونه وليکن؟

۱۷- د 4 او 9 اعدادو حسابي، هندسي او هارمونیک اوسطونه پیدا کړئ؟

۱۸- د $(\frac{1}{3}, 243)$ او $(\frac{1}{3}, -\frac{32}{27})$ اعدادو حسابي، هندسي او هارمونیک اوسطونه محاسبه کړئ؟

۱۹- لاندې هارمونیک تصاعد په نظر کې نیسو $\frac{1}{9}, \frac{2}{7}, \frac{1}{5}, \frac{1}{3}, 1$ د نمونې په توګه
 $a_5 = \frac{1}{9}$ عنصر وټاکئ او هغه محاسبه کړئ؟

۲۰- د 2 او 8 حسابي، هندسي او هارمونیک اوسطونه پیدا کړئ؟

۲۱- د 2 او 4 حسابي، هندسي او هارمونیک اوسطونه محاسبه کړئ؟

سرچینې او اڅېستنې:

- ۱- ریاضی عمومی مؤلف داکتر غوری سال 1386
- ۲- ریاضیات عمومی سردار محمد 2006 میلادی
- ۳- لکچر نوت های پوهاند اقتصاد سال های 1377 و 1376
- ۴- ریاضیات عالی موءلف پوهنوال دکتور محمد (نور غوری) و زا کتاب های صنوف 11 و 12 مکاتب نیز استفاده شده است.

د ښوونیز نصاب د پراختیا د ریاست پیغام

د پوهنې وزارت د تخنیکي او مسلکي زده کړو معینیت دښوونیز نصاب د انکشاف ریاست د ټولنې دعینې او ښکاره ضرورت په درک کولو سره چې د محصلینو او شاگردانو د درسي کتابونو په برخه کې یې تخنیکي او مسلکي رشتې درلودې او لري یې، په لومړي سر کې یې تصمیم ونيو، چې په ښوونیزو پلانونو او درسي مفرداتو باندې بیاکننه وکړي او ورپسې بیا د شاگردانو او محصلینو د درسي کتابونو د تالیف لپاره مبادرت او کوشښ وکړي. د خدای (ج) په فضل او مرحمت سره او د ادارې او حسابدارۍ څانګې د ښوونکو په میرانې او همت سره د ادارې او حسابدارۍ درسي کتابونه تالیف شول تر څو په وړیا ډول د شاگردانو او محصلینو په واک او اختیار کې ورکړل شي.

د علم او معرفت له ټولو لوستونکو، علاقمندانو، د ادارې او حسابدارۍ د مکاتبو له ښوونکو، گرانو شاگردانو او د تخنیکي او مسلکي زده کړو د چارو له متخصصینو او همدا شان له ټولو څېړونکو او شونکو څخه صمیمانه هیله کېږي، چې د دې کتابونو په مطالعې سره چې په لومړي ځل د ښوونکو او د ادارې او حسابدارۍ څانګې د مسلکي غړو له لوري تالیف او تدوین شوي دي. د مسلکي، تخنیکي او علمي مطالبو او مفاهیمو د څرنگوالي په هکله خصوصاً د هغوی املايي او انشایي اشتباهاتو په اړه مونږ ته لارښوونه وکړي، ترڅو په راتلونکي کې وکړای شو، په همدې او نورو برخو کې گرانو شاگردانو ته له دې څخه ښه، غوره، گټور او ارزښتناکه موضوعات وړاندې کړو.

همدا شان له گرانو شاگردانو او محصلینو څخه هیله کوو ترڅو د دې کتابونو د مطالعې او استفادې پر مهال د هیواد اقتصادي ستونزې، فقر او وروسته پاتې والی په نظر کې ونیسي او د کتابونو په ساتنه کې کوشښ او زیار وباسي، ترڅو د ډېرو شاگردانو او محصلینو د گټې وړ وگرځي.

پته: دپوهنې وزارت - د تخنیکي او مسلکي زده کړو معینیت د تعلیمي نصاب د انکشاف ریاست - د کتابونو د تالیف او د درسي ممدو موادو د برابرولو عمومي مدیریت.

**Get more e-books from www.ketabton.com
Ketabton.com: The Digital Library**