



## کتاب پیژندنه

د کتاب نوم:	اقتصادي رياضي
خانکه:	بانکداری او د تجارت اقتصاد
مولف:	محمد دهقامل
ژباړن:	عزت الله خُواب
د څار کمېټه:	
	<ul style="list-style-type: none"><li>محمد آصف ننګ د تخنیکي او مسلکي زده کړو معین</li><li>دیپلوم انجنیر عبدالله کوزایي د تعلیمي نصاب رییس</li><li>محمد اشرف وحدت په تعلیمي نصاب کې د معینیت د مقام سلاکار</li></ul>
د علمي تصحیح کمېټه:	
	<ul style="list-style-type: none"><li>عبدالجمل ممتاز</li><li>محب الرحمن محب</li><li>احمد فهیم سپین غر</li></ul>
د گرافیک او ډیزاین خانګې مسئول :	محمد جان علیرضایي
گرافیک او ډیزاین:	محمد سلیم خان
چاپ کال:	۱۳۹۲ لمریز کال
تیراژ:	۱۵۰۰
چاپ ځل:	لومړی
وېب پاڼه:	www.dmtvet.gov.af
برېښنالیک:	info@dmtvet.gov.af
کډ ISBN:	۹۷۸۹۹۳۶۳۰۰۵۹۰

# Ketabton.com

د چاپ حق د تخنیکي او مسلکي زده کړو له معینیت سره خوندي دی



## ملي سرود

دا وطن افغانستان دی	دا عزت د هر افغان دی
کور د سولې کور د تورې	هر بچی یې قهرمان دی
دا وطن د ټولو کور دی	د بلوڅو د ازبکو
د پښتون او هزاره وو	د ترکمنو د تاجکو
ور سره عرب، گوجر دي	پامیریان، نورستانیان
براهوي دي، قزلباش دي	هم ایماق، هم پشه یان
دا هیواد به تل څلیږي	لکه لمر پر شنه آسمان
په سینه کې د آسیا به	لکه زړه وي جاوېدان
نوم د حق مو دی رهبر	وایو الله اکبر وایو الله اکبر



## د پوهنې وزیر پیغام

### گرانو زده کوونکو، محصلانو او درنو ښوونکو!

د یوې ټولنې وده او پرمختګ کاملاً د همغږۍ ټولنې د پیاوړو کاري کادرونو، بشري قوې او ماهرو فکرونو په کار او زیار پورې تړلې دي. همدا بشري قوه او کاري مټې دي چې د هیواد انکشافی اهدافو ته د رسیدو لارې چارې طی کوي او د یوه نیکمرغه، مرفه او ودان افغانستان راتلونکی تضمینوي. انسان په خپل وار سره د الله تعالی له جانبه او هم د خپل انساني فطرت له اړخه مؤظف او مکلف دی چې د ځمکې په عمران او د یوه سوکاله ژوند د اسبابو او ایجاباتو د تکمیل لپاره خپل اغیزمن نقش، همدارنګه ملي او اسلامي رسالت ادا کړي.

له همدې ځایه ده چې د یوه ژوندي او فعال انسان نقش، د خپل ژوند د چاپیریال او خپلې اړوندې ټولنې په اړه، تل مطلوب او په هیڅ حالت کې نه نفی کېږي او نه هم منقطع کېږي. په ټول کې د پوهنې نظام او په خاصه توګه د تخنیکي او مسلکي زده کړو معینیت مسوولیت او مکلفیت لري چې د اسلامي ارزښتونو، احکامو او همداراز معقولو او مشروعو قوانینو ته په ژمنتیا سره، د افغانستان په انکشاف کې فعاله، چاپکه او موثره ونډه واخلي، ځکه دغه ستر او سپیڅلي هدف ته د رسیدو په خاطر د انساني ظرفیت وده، د حرفوي، مسلکي او تخنیکي کادرونو روزنه او پراختیا یو اړین مقصد دی. همدا په تخنیکي او مسلکي زده کړو مزین تنګي ځوانان کولی شي چې په خپلې حرفې او هنر سره په سیستماتیک ډول د هیواد انکشاف محقق او میسر کړي.

جوته ده چې په افغانستان کې د ژوند تک لاره، دولتداري او ټولنیز نظام د اسلام له سپیڅلو احکامو څخه الهام اخیستی، نو لازمه ده چې زموږ د ټولنې لپاره هر ډول پرمختګ او ترقي باید په علمي معیارونو داسې اساس او بنا شي؛ چې زموږ د کارګر نسل مادي او معنوي ودې ته پکې لومړیتوب ورکړ شي. د حرفوي ظرفیت جوړونې تر څنګ د ځوانانو سالم تربیت او په سوچه اسلامي روحيې د هغوی پالنه نه یوازې پخپل ذات کې یوه اساسي وجیبه ده، بلکې دا پالنه کولی شي چې زموږ وطن پخپلو پښو ودروي، له ضعف څخه یې وژغوري او د نورو له سیاسي او اقتصادي احتیاج څخه یې آزاد کړي.

زموږ گران زده کوونکي، محصلان، درانه استادان او مربیون باید په بشپړه توګه پوه شي، چې د ودان او نیکمرغه افغانستان ارمان، یوازې او یوازې د دوی په پیاوړو مټو، وینښ احساس او نه ستړي کیدونکي جد او جهد کې نغښتی او د همدغو مسلکي او تخنیکي زده کړو له امله کیدای شي په ډیرو برخو کې د افغانستان انکشافی اهداف تر لاسه شي.

د دې نصاب له ټولو لیکوالانو، مولفینو، ژباړونکو، سمونکو او تدقیق کوونکو څخه د امتنان تر څنګ، په دې بهیر کې د ټولو کورنیو او بهرنیو همکارانو له مؤثرې ونډې او مرستو څخه د زړه له کومي مننه کوم. له درنو او پیاوړو استادانو څخه رجماندانه هیله کوم چې د دې نصاب په ګټور تدریس او فعاله تدریب سره دې د زړه په ټول خلوص، صمیمي هڅو او وجداني پیکار خپل ملي او اسلامي نقش ادا کړي. د نیکمرغه، مرفه، پرمختللي او ویاړمن افغانستان په هیله

### فاروق وردګ

### د افغانستان د اسلامي جمهوریت د پوهنې وزیر

## لړليک

پاڼې	سرليکونه	څپرکي
۲۸-۱	د توابعو ملټ او د هغو اهميت	لومړی
۵۴-۲۹	مشتق	دویم
۷۲-۵۵	قسمي، ترکيبي او کلي مشتق نيونه	درېیم
۷۳	سرچينې او اخيستني	
۷۴	د ښوونيز نصاب د پراختيا د رياست پيغام	

## مقدمه

اقتصادي رياضي د بانکدارۍ، اقتصاد او تجارت د څانگې د مهمو او اساسي مضامينو له ډلې څخه ده، چې محصلين يې په زده کولو سره د بانکي محاسبو او د تجارت د اقتصاد لپاره اړين مهارتونه ترلاسه کولای شي.

په لومړي څپرکي کې د توابعو لمټ، لمټ او په مسلکي برخو کې د هغو د کارولو په اړه توضيحات وړاندې شوي دي. په دويم څپرکي کې بيا مشتق، د مشتق ډولونه، د هغو اړوندې قاعدې او اړوند تمرينات له پوره شنې سره ځای پرځای شوي دي.

په درېيم څپرکي کې د قسمي، ترکيبي او کلي مشتق نيونې په اړه توضيحات او تشرېحات وړاندې شوي دي. د څپرکي د موضوعاتو د نچور تمرينونه راوړل شوي، چې د يادو تمرينونو حل د محصلينو لپاره د درس په ښه درک کې مهمه مرسته کولای شي.

هيلمن يم د دې ټولگې په چاپ سره د دې برخې د استادانو د ستونزو يوه برخه حل شي او د درنو استادانو او گرانو محصلينو لپاره اړينې اسانتياوې منځ ته راوړي.

په درناوي

محمد دهقان مل

### د کتاب ټوليزه موخه

په محاسبوي چارو کې اړين مهارتونه ترلاسه کول او د اقتصادي رياضي د اړوندو مسایلو حل؛ خو له قاعدو سره سم د توليد، صنعت او احصايې په برخو کې ترې گټه واخستل شي او د انسان ورځنی ژوند ورباندې هوسا شي.

د توابعو لمټ او د هغو اهمیت

ټولیزه موخه

لوستونکي کولای شي د توابعو د لمټ اساسي مفهوم، د هغې اصول او قواعد درک کړي، لازم مهارتونه په کار یوسي، کولای شي مسایل حل کړي او د ټولنیز ژوند په ټولو ساحوکې یې د گټې اخیستو وړ وگرځي.

د زده کړې موخې: د دې څپرکي له پای ته رسولو سره لوستونکي کولای شي:

- ۱- د لمټ مفهوم په اساسي بڼه درک کړي.
- ۲- لمټ تعریف کړي او د هغو په قوانینو پوه شي.
- ۳-  $0$ ،  $\frac{0}{0}$ ،  $\frac{\infty}{\infty}$ ،  $0-\infty$ ،  $\infty-\infty$  لمټونه محاسبه کړای شي.
- ۴- د مثلثاتي توابعو لمټ تعریف او د هغو سوالونه په سمه توګه حل کړي.

د لمټ اساسي مفهوم

انتروال! په لغت کې فاصلې ته وايي، د ریاضي په اصطلاح کې د دوو مختلفو عددونو ترمنځ فاصلې ته انتروال وايي. انتر وال په درې ډوله دی:

- ۱. تړلی انتروال
- ۲. نیم پرانیستی انتروال
- ۳. پرانیستی انتروال

۱. تړلی انتروال: هغه انتر وال دی، چې د دوه نقطو د انجام درلودونکی وي.

لکه  $[2, 8]$  لوی قوس د تړلي قوس علامه رابښي.

د فورمول په شکل یې دارنگه نوشته کولای شو.  $[x \in IR: 2 \leq x \leq 8x]$

په لاندې شکل بنودل کېږي، لکه ( ۱ ) شکل

شکل(۱)



۲- نیم خلاص انتروال یا نیم تړلی انتروال: هغه انتروال دی، چې یو انجام په کې داخل او بل پکې نه وي لکه.  $(2,8)$  ،  $[2,8)$  کوچنی قوس د خلاص والي علامه راښيي او لوی قوس د تړل کېدو علامه راښيي.

$$A = [ x \in IR / 2 > x < 8 ]$$

یعني

$$B = [ x \in IR / 2 \leq x < 8 ]$$

شکل (۲)



شکل (۳)



۳- خلاص انتروال: هغه انتروال دی، چې د نقطو انجام په کې شامل نه وي.

$$P = [ x \in IR : 3 < x < 11 ]$$

مثال ( 3,1 ) یعني

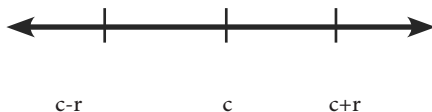
د یوې تابع حد یا د یوې تابع لمټ

مجاورت: هر خلاص انتروال د خپلو شاملو عناصرو مجاورت وي، لکه  $(2,8)$  یو خلاص انتروال دی، چې له ۳ تر ۷ عناصر په هغه کې شامل دي او  $(2,8)$  انتروال د دې ټولو عناصرو مجاورت دی.

متناظر مجاورت: هر خلاص انتروال د خپل ځان وسطي متناظر مجاور وي، لکه  $(2,8)$  انتروال چې د متناظر مجاورت نقطه یې  $(5)$  ده، باید وویل شي، چې د مجاورتونو هره نقطه

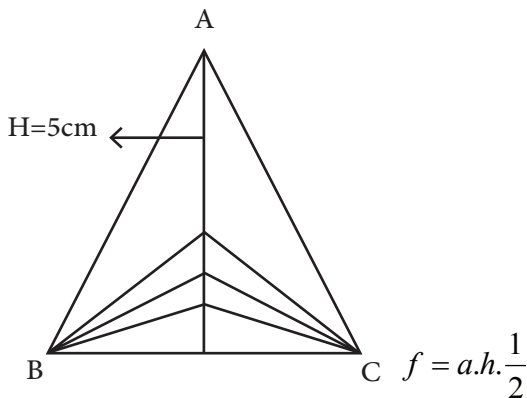


ډېر متناظره لري. که  $(b, a)$  د  $x$  عدد یو مجاورت وي، داسې چې  $x$  د  $(b, a)$  وسطي نقطه رابښي. دا چې  $(b, a)$  د  $x$  د متناظر مجاورت په نوم یادېږي. مثلاً  $(0, 2)$  چې متناظر مجاورت د هغه دی، د  $r$  د هر مثبت عدد لپاره  $(c-r, c+r)$  د  $C$  یو مجاورت وي (شکل ۴)



شکل (۴)

مخکې له دې چې لمټ (حد) تعريف کړو، هغه د مثالونو په واسطه واضح کوو او په (۶) شکل کې د  $ABC$  مثلث په نظر کې نیسو. چې قاعده یې  $a=6\text{cm}$  او ارتفاع یې  $h=5\text{cm}$  او مساحت یې په  $F$  ښایو، لرو چې



شکل (۵)

که قاعده ثابتته وساتو او ارتفاع ته یې تغیر ورکړو؛ نو مساحت یې هم تغیر کوي او د  $h$  تابع دی، یعنې  $F(h) = \frac{1}{2}6.h$  چې په لاندې جدول کې د  $h$  او  $F(h)$  ځینې قیمتونه ښودل شوي.

h	5	3	1	0,5	0,2	0,1	0,02	0,001
F(h)	15	9	3	1,5	0,6	0,3	0,06	0,003

له پورته جدول څخه معلومېږي، چې  $h$  په کمېدو  $F(h)$  هم کمېږي. هغه وخت چې  $h$  او  $F(h)$  مساحت صفر ته نېږدې کېږي  $F(h)$  هم صفر ته تقرب کوي. په دې حالت کې ویلای شو چې د  $F(h)$  صفر دی او په ریاضي کې یې په لاندې شکل لیکو:

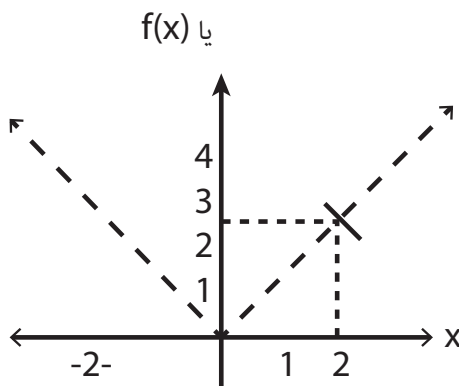
$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

مثال: د  $f(x) = x^2$  تابع په نظر کې نیسو، کله چې  $x \rightarrow 2$  ته نېږدې کېږي  $f(x)$  کوم قیمت ته تقرب کوي.

3	2.5	2.1	2.02	2.01	2.001	-2-	1,999	1,99	1,99	1.9	1.5	1	x
9	6.25	4.41	4.0804	4.04401	4.004001	-4-	3,996001	3,980025	3,9601	3.61	2.25	1	F(x)

په پورته جدول کې لیدل کېږي، کله چې  $x$  د 2 خواته نېږدې کېږي  $F(x)$  د 4 خواته تقرب کوي. یعنې

$$\lim_{n \rightarrow 2} f(x) = \lim_{n \rightarrow 2} x^2 = 4$$



شکل (6)

په پورته مثال کې لیدل کېږي، چې د توابعو د لمټ د پیدا کولو لپاره په یو  $a$  کې د ذکر شوې نقطې په یوه مناسب مجاورت کې د تابع وضعیت مطالعه شو او مطلوب لمټ پیدا شو.

که دې لمټ ته د عمومي لمټ نوم ورکړو، لیکلی شو چې:  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$

$b$  د عدد  $f$  د یوې تابع لمټ د  $a$  په نقطه کې یادېږي. که  $N$  د هر مجاورت لپاره د  $b$  نقطه د  $D$  یومجاورت د  $a$  نقطه د  $f$  د تعریف په ناحیه کې موجود وي او د هر  $x$  لپاره عنصر له  $D$  د  $f(x)$  عنصر له  $N$  وي. یعنې  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$  باید ووايو حتمي نه ده، چې  $a$  په  $a \longleftarrow n$  د تعریف په ناحیه کې شامل وي.

### د توابعو لمټ

لمټ د تحول د اندازې د ټاکلو د نهایي قیمتونو او یا د توابعو له مخې مهم وي. د معاصرې ریاضي عمومي مسایل له پخوا نه مشتق، سلسلې او نور له لمټ نه په ګټه اخیستو تعریف او توضیح کېږي.

د تحول تقرب (په یوه نقطه کې د یوې تابع ښي او کین حد ته) ویل کېږي، چې  $x$  متحول د  $a$  ټاکلي عدد ته تقرب کوي، که چېرې په خپل زړه  $a$  ته نیردې کېدای شي. یعنې د  $x$  او  $a$  تر منځ تفاوت له دواړو عددونو څخه کوچنی  $0 < 8 < 8 > 0$  تر ټولو کوچنی شي. پورته مفهوم په سمبولیک شکل دارنگه لیکل کېږي.  $8 > 0 : |x - a| < 8$

$$\text{Lim } x = a \quad \text{یا} \quad x \longrightarrow a \quad | \quad x - a \quad | \quad \longrightarrow 0$$

له ښي خوا د متحول تقرب ( $x \rightarrow a^+$ ) که په یو متناقض تصاعد کې  $x$  قیمتونه شتون ولري، داسې چې تدریجاً څومره یې چې زړه وغواړي  $a$  ته نیردې شي، لکه:

$$x \rightarrow a^+ X: a+0, 1, a+0,01, a+0,001, a+0, 0001, \dots$$

له کینې خوا د متحول تقرب ( $x \rightarrow a^-$ ) که چېرې متزايد تصاعد کې د  $x$  قیمتونه ټاکل کېدای شي، داسې چې تدریجاً په خپل زړه  $a$  ته نیردې شي. دا رنگه

$$x \rightarrow a^- X: a-0,1, a-0,01, a-0,001, a-0,0001, \dots$$

باید وویل شي، چې د  $x$  متحول تقرب  $a$  عدد ته معادل دی، دواړو خواوو (ښي او کین) ته

$$x \rightarrow a \Leftrightarrow (x \rightarrow a^+, x \rightarrow a^-)$$

مثال:

$$\lim_{x \rightarrow 3} (4x + 8) = 20 \quad \text{ونڀيئڙ چي}$$

حل: د اختياري عدد لپاره  $\epsilon > 0$  (ابتسيون) قبلوو، چي  $\epsilon > 0$  وي  $(4X+8)-20 < \epsilon$  چي  $\delta > 0$  عدد تعينوو.

$$\begin{aligned} \epsilon > 0 &\Rightarrow |4X-12| < \epsilon \Rightarrow |(4X+8)-20| < \epsilon \\ &\Rightarrow 4|X-3| < \epsilon \Rightarrow |X-3| < \frac{\epsilon}{4} \end{aligned}$$

نو د  $\delta = \frac{\epsilon}{4}$  لپاره لرو، چي

$$\Rightarrow 4|1-3| < \epsilon \Rightarrow 4x-12 < \epsilon \Rightarrow |x-3| < \delta \Rightarrow |x-3| < \frac{\epsilon}{4}$$

د 8 عدد جمع او منفي کوو  $4x+8-8-12 < \epsilon$ 

$$\lim_{x \rightarrow 3} (4x+8) = 20 \Rightarrow |(4x+8)-20| < \epsilon$$

دويم مثال: د  $x$  متحول د 4 عدد ته تقرب کړي، دا  $x \rightarrow 4$  مفهوم توضيح کړي!

$$x: 4, 1, 4, 01, 4, 001, 4, 0001, \dots, 4^+$$

حل

$$x: 3, 9, 3, 99, 3, 999, 3, 9999, \dots, 4^-$$

په پای کې بايد ووايو، چي  $x \rightarrow 4$ 

د تابع لمټ

هر کله چي د  $f(x)$  تابع په يوه خلاص انټروال کې، چي د  $a$  عدد په هغې کې شامل دی. تعريف شوی وي د  $x$  متحول  $a$  ته په تقرب  $f(x)$  په خپله خوښه  $L$  عدد ته نيردې شي. ويلاى شو چي د  $f(x)$  تابع لمټ عبارت له  $L$  څخه دی. کله چي  $x$ ،  $a$  تقرب وکړي، په لاندې شکل ليکو چي

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \quad \text{يا} \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1$$

د لمټ تعريف:

د  $f(x)$  تابع د  $L$  عدد سره مساوي دی، کله چي  $x \rightarrow a$  ته تقرب کړي.

$$\epsilon > 0, \delta > 0: |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-L| < \epsilon \quad \text{که}$$



$$x \in (a - \delta - a) \Rightarrow f(x) \quad (L2 - \epsilon, L2 + \epsilon)$$

او يايې په سمبوليک شکل ليکو چې

$$\lim_{\frac{x \rightarrow a}{x^2}} f(x) = l_2 \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = l_2$$

۳- د  $f(x)$  تابع هغه وخت چې  $x \rightarrow a$  د  $L$  لمټ لرونکی وي.

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \quad \text{چې شرط چې} \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

بايد وويل شي هغه وخت، چې د يوې تابع ښي او کيڼ ليمتونه له يو بل سره مساوي نه وي د لمټ لرونکي نه ده.

$$\text{مثال:- وښايه چې} \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2}{x-3} - 9 = 6$$

حل: فرضوو چې  $\epsilon > 0$  يو عدد  $\delta$  موجود وي، داسې چې.

$$\left| \frac{x^2}{x-3} - 6 \right| < \epsilon$$

دا چې  $|x-3| < \delta$  وي، د  $\delta$  اندازه د  $\epsilon$  له جنس څخه پيدا کوو.

$$|x+3-6| < \epsilon \Rightarrow |x-6| < \epsilon \quad \left| \frac{(x-3)(x+3)}{x-3} - 6 \right| < \epsilon$$

که  $\delta = \epsilon$  وي په نتيجه کې  $|x-3| < \delta$ .

مثال: ثابت کړئ، چې  $\lim_{x \rightarrow 5} (4x - 3) = 17$  دی.

حل: د هر متناظر مجاورت  $(\epsilon, 1) \in 2$  لري که چېرې  $\epsilon$  یو مثبت عدد  $\epsilon > 0$  دی: د

$$(17 - \epsilon, 17 + \epsilon) \in 2, \epsilon \in 1$$

باید  $D = (a_1, a_2)$  مجاورت د 5 د عدد  $(5 \in D)$  پیدا کړو، داسې چې د هر  $x$  لپاره له  $D$  یا  $L = f(x) = 4x - 3$  په  $N$  کې شامل وي، یعنې

$$17 - \epsilon < 4x - 3 < 17 + \epsilon$$

$$20 - \epsilon < 4x < 20 + \epsilon$$

دواړه خواوې په 4 تقسیمووو  $\frac{5 \cdot \epsilon}{4} < x < 5 + \frac{5 + \epsilon}{4}$

نو د  $\frac{5 \cdot \epsilon}{4} < x < 5 + \frac{5 + \epsilon}{4}$  لپاره او همدارنگه  $17 - \epsilon < 4x - 3 < 17 + \epsilon$  صدق کوي.

نو  $D = \frac{5 \cdot \epsilon}{4} < x < 5 + \frac{5 + \epsilon}{4}$  په نتیجه کې د هر  $x$  لپاره له  $D$  څخه  $f(x)$  په  $N$  کې شامل

دی او که  $\epsilon = \frac{1}{2}$  فرض شي.

$$N = \left(17 - \frac{1}{8}, 17 + \frac{1}{8}\right) = (16.5, 19.5) \quad D = \left(5 - \frac{1}{8}, 5 + \frac{1}{8}\right) = (4.875, 5.125)$$

د یوې تابع لمټ ته راجع قضیې

لومړۍ قضیه: په عمومي ډول د هرې خطي تابع لرو چې  $f(x) = mx + b$

$$\lim_{x \rightarrow a} (mx + b) = ma + b$$

دویمه قضیه: که  $m = 0$  وي د  $f(x) = mx + b$  خطي تابع لاندې شکل اختیاري دي.

$f(x) = b$  تابع ته ثابت تابع وايي، چې لمټ یې په  $a$  کې له  $b$  سره مساوي دی. ۱

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} b = b$$

درېیمه قضیه: که په خطي تابع کې  $b = 0$  وي او  $m = 1$  وي  $f(x) = x$  تابع کېږي، دې

ته د لمټ تابع ویل کېږي. د تابع لمټ د  $a$  په نقطه کې عبارت له  $a$  څخه دی

$$\lim_{x \rightarrow a} mx = ma \Rightarrow m = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} x = a$$

خلورمه قضیه: که د  $g, f$  توابع د  $a$  په نقطه کې لمټ ولري، لاندې قضیې صدق کوي.

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = c \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$$

د توابعو د جمعې د حاصل لمټ له مجموعي لمټونوسره مساوي دی.

$$\lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x) = b + c$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (f - g)(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} g(x) = b - c$$

پنځمه قضیه: په یوه نقطه کې د ضرب د حاصل لمټ مساوي دی په یوه نقطه کې د لیمیتونو

له ضرب سره

$$\lim_{x \rightarrow a} (f \cdot g)(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x) = b \cdot c$$

شپږمه قضیه: په یوه نقطه د خارج قسمت لمټ مساوي دی، د خارج قسمت لمټ د لمټونو

په هغه نقطه کې په دې شرط چې  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$  وي

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

$$\lim_{a \rightarrow x} \left( \frac{f}{g} \right)(x) = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{b}{a}$$

اوومه قضیه: که لمټ  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$  او  $\mu$  یو ثابت عدد وي، د تابع لمټ په هغه نقطه کې

ضرب ثابت عدد دی.

$$\lim_{x \rightarrow a} (\mu f)(x) = \mu \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \mu \cdot b$$

اټمه قضیه: د یوې جذري تابع لمټ په یوه نقطه کې مساوي د لمټ د جذر د هغه تابع په

هغه نقطه کې که  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$  وي یعنې

$$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)} = \sqrt[n]{b}$$

که چېرې  $\sqrt[n]{b}$  موجود وي.



مثال: د  $\lim_{x \leftarrow 4} \sqrt{x+5}$  لمټ پیدا کړئ!

$$\lim_{x \leftarrow 4} \sqrt{x+5} = \sqrt{\lim_{x \leftarrow 4} (x+5)} = \sqrt{4+5} = \sqrt{9} = 3$$

نهمه قضیه: که  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = n a^{n-1}$  وي نظر د مطابقتونو قانون ته لرو:

$$\lim_{x \rightarrow a} x^n - a^n = \lim_{x \rightarrow a} (x-a)(x^{n-1} + x^{n-2} \cdot a + x^{n-3} \cdot a^2 + \dots + a^{n-1})$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} (a^{n-1} + a^{n-2} \cdot a + a^{n-3} \cdot a^2 + \dots + a^{n-1})$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} (a^{n-1} + a^{n-2} + a^{n-3} \cdot a + a^{n-3} \cdot a^2 + \dots + a^{n-1}) = a^{n-1}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} (a^{n-1} + a^{n-1} + a^{n-1} \cdot a + a^{n-1} + \dots + a^{n-1}) = n a^{n-1}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = n a^{n-1}$$

مثال: د  $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^5 - 2^5}{x - 2}$  پیدا کړئ

حل: فورمول ته په کتو لرو، چې:  $\lim_{n \rightarrow a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = n a^{n-1}$

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^5 - 2^5}{x - 2} = 5 \cdot 2^4 = 80$$

مثال:  $\lim_{x \rightarrow a} (x^3 + 5x^2 - 3x + 7)$  پیدا کړئ، که چېرې  $x \rightarrow a$  ته تقرب وکړي

$$\lim_{x \rightarrow a} (x^3 + 5x^2 - 3x + 7) = 2^3 + 5 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 + 7$$

$$= 8 + 20 - 6 + 7 = 29$$

مثال: لاندې لمټ پيدا کړئ  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{5x^3 - 6x^2 - 6x + 2}{2x^2 + 3x - 12}$

حل:

$$f(x) = 5x^3 + 6x^2 - 6x + 2$$

$$g(x) = 2x^2 - 3x - 12$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = g(2)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow 2} f(x)}{\lim_{x \rightarrow 2} g(x)} = \frac{f(2)}{g(2)} =$$

$$\Rightarrow \frac{5 \cdot (2^3) - 6(2^2) - 6 \cdot 2 + 2}{2 \cdot (2^2) + 3 \cdot 2 - 12} = \frac{40 - 24 - 12 + 2}{8 + 6 - 12} = \frac{6}{2}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{5x^3 - 6x^2 - 6x + 2}{2x^2 + 3x - 12} = 3$$

مثال:  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = 6$  وي، ثبوت کړئ.

حل: فرض کوو چې  $\epsilon > 0$  د  $\delta$  عدد موجود دی داسې چې

$$\left| \frac{x^2 - 9}{x - 3} - 6 \right| < \epsilon$$

کله چې  $|x - 3| < \delta$  وي، د  $\delta$  اندازه د  $\epsilon$  له جنسه لاسته راوړو

$$\left| \frac{(x-3)(x+3)}{x-3} - 6 \right| < \epsilon$$

$$\Rightarrow x + 3 - 6 < \epsilon \Rightarrow |x - 3| < \epsilon$$

داسې چې  $\delta$  مساوي دی له  $\epsilon$  سره، اوس د  $\left| \frac{x^2 - 9}{x - 3} - 6 \right| < \delta = x^2 - 9$  لپاره

$$\begin{aligned} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} &= 6 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+3)}{x-3} = 6 \\ \Rightarrow x + 3 &= 6 \Rightarrow 3 + 3 = 6 \Rightarrow 6 = 6 \end{aligned}$$

مثال:  $\lim_{x \rightarrow 3} (x^3 - 3x + \frac{2}{x})$  پیدا کریں۔  
حل:

$$\begin{aligned} F(x) &= (x^3 - 3x + \frac{2}{x}) \Rightarrow F(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 2}{x} \\ \Rightarrow F(x) &= \frac{g(x)}{h(x)} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} F(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{\lim h(x)} \\ &= \frac{g(3)}{h(3)} = \frac{(3^3) - 3(3^2) + 2}{3} = \frac{27 - 27 + 2}{3} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

مثال:  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x - 4}$  پیدا کریں۔

حل:  $f(x) = \frac{x^2 - 16}{x - 4}$  یو ہ ناطقہ تابع دہ، یعنی

دا چہ  $x \rightarrow 4$  صفر کبری او  $f$  د  $4$  د تعریف پہ ناحیہ کبی شامل نہ دی او  $x \neq 4$  لاستہ  
یہ راوړو.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4} F(x) &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-3)(x+4)}{x-4} \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 4} (x+4) &= 4 + 4 = 8 \end{aligned}$$

بی نهایت د تابع د لمٹ پہ حیث

ویل کبری، چہ  $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = \alpha$  کہ د خیلې خوشې  $M$  خخه لوی د هر عدد لپاره د  $\delta$   
مثبت پیدا شوی وی، داسې چہ له  $|x-a| < \epsilon$  غیر مساوات خخه  $|x-a| < \epsilon$  غیر مساوات پہ  
لاس راځي لکه  $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = \alpha \Rightarrow M > 0, \delta > 0$  چہ  $|x-a| < \delta \Rightarrow |F(x)| > M$   
دلته دې شکل ته اوړي.

۱- هر کله چې  $f(x) > M$  وي  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = a$  دی.

۲- هر کله چې  $f(x) > M$  وي  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -a$  دی.

مثال: پیدا کړئ چې  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{2x+1}{x} = 2$  دی

حل: د  $\epsilon > 0$  عدد لپاره فرض کوو، چې  $\left| \frac{2x+1}{x} - 2 \right| < \epsilon$

$$\Rightarrow \left| \frac{2x}{x} + \frac{1}{x} - 2 \right| < \epsilon \Rightarrow \left| 2 + \frac{1}{x} - 2 \right| < \epsilon$$

$$= \left| \frac{1}{x} \right| < \epsilon \Rightarrow x > \frac{1}{\epsilon}$$

که د  $N = \frac{1}{\epsilon}$  لپاره شرط دی  $\lim_{x \leftarrow a} \frac{2x+1}{x} = 2$  سم دی.

مثال:  $\lim_{x \leftarrow a} \frac{x^2 + 2x}{x^2}$  محاسبه کړئ.

حل:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2(1 + \frac{2}{x})}{x^2} = \lim_{x \rightarrow a} \left(1 + \frac{2}{x}\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} 1 + \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{2}{x}\right) = 1 + 0 = 1$$

مثال: په داسې حال کې چې  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha$ ،  $\lim_{x \rightarrow a} 2(x) = \alpha$  پیدا کړئ.

یعنې:  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{1-x} = \infty$ ،  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{1-x^2} = \infty$  وي.

حل:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{1-x^2}}{\frac{x}{1-x}} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{1+x^2} \cdot \frac{1-x}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(1-x)(1+x)} \cdot \frac{1-x}{x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+x^2} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

که  $F(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{1-x}$  وي او  $2(x) = \lim_{x \rightarrow 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{1-x^2}$  وي داسې حل کېږي.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{2(x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{x}{1-x}}{\frac{1}{1-x^2}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{1-x} \cdot 1-x^2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} x(1+x) = 1+1 = 2$$

**مثال:**  $\lim_{x \rightarrow a} (2-x^2) = -a, \lim_{x \rightarrow 1} (x^2+5) = a$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} [(x^2+5) + (2-x^2)] = \lim_{x \rightarrow a} (5+2) = 7$$

### د لټې محاسبه او ځينې مبهم حالات

د لټونو په محاسبه کې د ضرب د حاصل مجموعه او ځينې وخت د توابعو نسبت د مبهمو شکلونو  $0, \infty, 0-\infty, \infty-\infty$  سره مخامخ کېږو، چې ځينې حالتونه يې په لاندې ډول دي.

۱- په  $\frac{0}{0}$  حالت کې: که  $\frac{0}{0} \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$  ولرو، داسې چې  $F(x)$ ،  $g(x)$  پولینومي توابع وي،

په صورت او مخرج کې يې مشترک فکتور  $(x-a)$  دی. او په بعضو حالاتو کې کېدای شي مضاعف او يا څو ځلي وي.

لومړی مثال-

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-2}{x^2-4x+4} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x(x-2)}{(x-2)(x-2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x}{x-2} = \frac{2}{2-2} = \frac{2}{0} = \infty \end{aligned}$$

$$\text{دویم مثال: } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2hx + h^2 - x^2}{h}$$

$$\Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2hx + h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2x + h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h)$$

$$\Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = 2x$$

$$\text{مثال: } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{x+2}}{\sqrt{4x+1} - 3} \text{ پیدا کریں!}$$

حل: دا چې  $x=2$  د  $\frac{0}{0}$  شکل اختیاروي، د لمب د پیدا کولو لپاره د تابع صورت او مخرغ د صورت او مخرغ په مزدوج کې ضربوو، لرو چې:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{x+2}}{\sqrt{4x+1} - 3} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - \sqrt{x+2})(x + \sqrt{x+2})(\sqrt{4x+1} + 3)}{(\sqrt{4x+1} - 3)(\sqrt{4x+1} + 3)(x + \sqrt{x+2})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 - (x+2))(\sqrt{4x+1} + 3)(\sqrt{4x+1} + 3)}{\sqrt{4x+1} - 3} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+1)(\sqrt{4x+1} + 3)}{4(x-2)(x + \sqrt{x+2})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+1)(\sqrt{4x+1} + 3)}{4(x + \sqrt{x+2})} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2+1)(\sqrt{4 \cdot 2 + 1} + 3)}{4(2 + \sqrt{2+2})} =$$

$$= \frac{(3)(\sqrt{9+3})}{4(2+2)} = \frac{3 \cdot 6}{4 \cdot 4} = \frac{9}{8}$$

$$\frac{F(x)}{g(x)} = \frac{1}{g(x)}, \text{ شکل اختیار کری، } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{F(x)}{g(x)} = \frac{\infty}{\infty} \text{ د حالت: کله چې } \frac{\infty}{\infty} \text{ -۲}$$

په حالت کې د  $\infty$  شکل ته بدلېږي. د دې طریقي په پیروي سره کولی شو ابهام رفع کړو؛ خو کېدای شي ځینې وخت سخت مثال هم آسانه حل شي. په دې حالت کې د کسر صورت او مخرج همزمان د متحول په لوړ طاقت تقسیموو، ابهام له منځه ځي، په دې شرط چې  $\frac{\infty}{\infty}$  حالت د دوو توابعو په نسبت کې، چې له دې جملې څخه په پولینوم کې ښکاره شي. مثال: هغه لمتونه چې  $\frac{\infty}{\infty}$  حالت لري، غواړو څو مثالونه یې د نمونې په شکل حل کړو.

$$a) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - x + 4}{x^2 - 12x + 8} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2(3 - \frac{1}{x} + \frac{4}{x^2})}{x^2(1 - \frac{12}{x} + \frac{8}{x^2})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 - \frac{1}{x} + \frac{4}{x^2}}{1 - \frac{12}{x} + \frac{8}{x^2}} = \frac{3-, +0}{1-0+0} = \frac{3}{1} = 3$$

دویم مثال:

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x+5}{6x+\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(8+\frac{5}{x})}{x(6+\sqrt{\frac{x}{x}})} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8+\frac{5}{x}}{6+\sqrt{\frac{x}{x}}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8+\frac{5}{x}}{6+\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x8+\frac{5}{x}}{x(6+\sqrt{\frac{x}{x}})} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8+\frac{5}{x}}{6+\frac{1}{\sqrt{x}}}$$

$$= \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

درېيم مثال:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9x^2 - x + 5}{\sqrt{9x^4 + 1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2(9 - \frac{1}{x} + \frac{5}{x^2})}{x^2 \sqrt{9 + \frac{1}{x^4}}} =$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9}{\sqrt{9}} = \frac{9}{3} = 3$$

څلورم مثال:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - x + 3}{x^2 - 8x + 5} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2(2 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2})}{x^2(1 - \frac{8}{x} + \frac{5}{x^2})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}}{1 - \frac{8}{x} + \frac{5}{x^2}} = \frac{2}{1} = 2$$

۳- درېيم حالت ( $0 \infty$ ):

$\lim_{x \rightarrow a} \{F(x).g(x)\}$  ممکنه ده په  $0 \cdot \infty$  شکل وي، په دې حالت کې لږت  $F(x)g(x) = \frac{F(x)}{\frac{1}{g(x)}}$  د  $\frac{0}{0}$  شکل اختياروي، مور لاندې مثالونه د نمونې په شکل حل کوو.

مثال:

$$\lim_{x \rightarrow 5} \left[ (x^2 - 25) \cdot \frac{1}{x - 5} \right] = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 25}{x - 5} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(x - 5)(x + 5)}{x - 5} = \lim_{x \rightarrow 5} (x + 5) = 5 + 5 = 10$$



دویم مثال:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4} \left[ (x^2 - 16) \frac{1}{x-4} \right] &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x-4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)(x+4)}{x-4} = \lim_{x \rightarrow 4} (x+4) = 4+4 = 8 \end{aligned}$$

درییم مثال:  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt[5]{x} - \sqrt[5]{a}}{x-a}$  مقدار محاسبه کریں!که  $x = y^5$  او  $a = b^5$  فرض کریو، لرو چپی:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt[5]{x} - \sqrt[5]{a}}{x-a} &= \lim_{x \rightarrow b} \frac{y-b}{y^5 - b^5} = \lim_{x \rightarrow b} \frac{y-b}{(y-b)(y^4 + y^3b + y^2b^2 + yb^3 + b^4)} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{y^4 + y^3b + y^2b^2 + yb^3 + b^4} = \frac{1}{5b^4} = \frac{1}{5\sqrt[5]{a^4}} \end{aligned}$$

-4  $\infty - \infty$ :که  $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - g(x)]$  د  $\infty - \infty$  شکل ولری.

په دې حالت کې  $f(x) - g(x) = f(x) \left(1 - \frac{g(x)}{f(x)}\right)$  یو له دغو  $\frac{\infty}{\infty}$  او یا  $0 - \infty$  حالاتو ته اوړی، باید یاده شي، چې که د دوو کسرونو د تفاضل حالت او یا د جذرونو د تفاضل شکل اختیار کری، د یو بل څخه د کسرونو د تفریق کولو، په مزدوجونو باندې د جذري افادو ضرب او تقسیم په نتیجه کې ابهام د حذف قابل وي.

مثال:  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x})$  لمټ محاسبه کریں!

حل:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})}{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1-x}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = 0$$

دویم مثال:  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1-x^2} \right)$  پیدا کریں!

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1-x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1+x-1}{1-x^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{1-x^2} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x^5 - 8x^3) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ x^5 \left( 1 - \frac{8}{x^2} \right) \right] = \infty \cdot 1 = \infty$$

خلورم مثال:  $\lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt{x^2 + 5x + 1})$  لمٹ پیدا کریں!

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt{x^2 + 5x + 1}) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x - \sqrt{x^2 + 5x + 1})(x + \sqrt{x^2 + 5x + 1})}{x + \sqrt{x^2 + 5x + 1}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x^2 - 5x - 1}{x + \sqrt{x^2 + 5x + 1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-5x - 1}{x + \sqrt{x^2 + 5x + 1}} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(-5 - \frac{1}{x})}{x + \sqrt{x^2 + 5x + 1}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(-5 - \frac{1}{x})}{x(1 + \sqrt{1 + \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2}})} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-5 - \frac{1}{x}}{1 + \sqrt{1 + \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2}}} = \frac{-5}{1+1} = -\frac{5}{2}$$

پنجم مثال:  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{x} - \sqrt[5]{x+1})$  پیدا کریں!

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x} - \sqrt{x+1})$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x} - \sqrt{x+1}) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{x+1})(\sqrt{x} + \sqrt{x+1})}{\sqrt{x} + \sqrt{x+1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - x + 1}{\sqrt{x} + \sqrt{x+1}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-1}{(\sqrt{x} + \sqrt{x+1})} = \frac{-1}{\infty} = 0$$

بی نہایت د لمٹ پہ حیث پہ بی نہایت کی

دا چي  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$  دی، کہ د هر لوی او  $M$  مثبت عدد لپاره د  $N$  یو مثبت عدد وټاکل شي، داسي چي د  $|x| > N$  غير مساوات څخه د  $|f(x)| > M$  غير مساوات لاس ته راشي، په سمبولیک شکل داسي ليکو.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty \Leftrightarrow M > 0, N > 0 / |x| > N \Rightarrow f(x) < M$$

په پورتنیو تشبحاتو کې څلور حالته مطرح کېږي، چې عبارت دي له:

$$1) x > N : f(x) > M \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

$$2) x < -N : f(x) < -M \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$3) x < -N : f(x) > M \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

$$4) x > N : f(x) < -M \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$$

### د توابعو محدودیت

1-  $f(x)$  تابع په یوه نقطه کې محدوده نومېږي، ځکه چې  $|f(x)|$  قیمتونه د  $M$  له یوه ټاکلي عدد څخه لویېدلی شي، یعنې  $|f(x)| \leq M$ .

2-  $f(x)$  تابع کله چې  $x \rightarrow a$  محدوده وي، که په یوه  $(a-f, a+f)$  مجاورت کې د  $a$  څخه محدوده وي.

3-  $f(x)$  تابع د  $x \rightarrow \infty$  لپاره محدوده ده، که د  $N$  مثبت عدد موجود کړی شي، د هر  $x$  لپاره د  $|x| > N$  تابع  $f(x)$  محدوده ده، لکه  $f(x) = \cos x$  په  $IR$  کې محدوده ده او  $g(x) = \frac{x+1}{x}$  تابع د  $x \rightarrow \infty$  لپاره محدوده ده.

بې نهایت کوچنۍ توابع

د  $d(x)$  تابع په  $x \rightarrow a$  کې بې نهایت کوچنۍ نومېږي، که  $\lim_{x \rightarrow a} d(x) = 0$  وي.

۱: د دې لپاره چې  $\lim_{x \rightarrow a} d(x) = b$  وي، لازمه او کافي ده، چې  $f(x)$  د  $b$  ثابت عدد د مجموعې په حیث او د  $d(x)$  بې نهایت کوچنۍ تابع په  $x \rightarrow a$  وړاندې کېدی شي، یعنې:

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = b + d(x) \\ \lim_{x \rightarrow a} d(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$$

۲- کله چې  $d(x)$  په  $x \rightarrow a$  کې بې نهایت کوچنۍ وي، چې صفر نه شي؛ نو

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{d(x)} = \infty$$

۳- د بې نهایت کوچنیو توابعو مجموعه بیا هم یوه بې نهایت کوچنۍ تابع ده.

۴- د بې نهایت کوچنۍ تابع د ضرب حاصل او محدوده تابع یوه بې نهایت کوچنۍ تابع وي.

۵- هرکله  $d(x)$  بې نهایت کوچنۍ او  $u(x)$  داسې تابع، چې لمټ یې صفر کېدای نه شي؛ نو

$$v(x) = \frac{d(x)}{u(x)}$$

تابع بې نهایت کوچنۍ ده.

مثال:  $d(x) = x^2 - 4$  تابع بی نهایت کوچنی ده، ځکه چې که  $x \rightarrow 2$  تقرب وکړي.

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 4) = 4 - 4 = 0$$

دویم مثال:  $d(x) = x^2 - 4$  په  $x \rightarrow 3$  بی نهایت کوچنی ده.

$$\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 9) = (3)^2 - 9 = 9 - 9 = 0$$

درېیم مثال:  $d(x) = \frac{1}{2x}$  په  $x \rightarrow \infty$  بی نهایت کوچنی ده.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} d(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2x} = 0$$

څلورم مثال:  $d(x) = x^3 - 27$  تابع په داسې حال کې  $x \rightarrow 3$   $\lim_{x \rightarrow 3} d(x) = \lim_{x \rightarrow 3} (x^3 - 27)$  بی نهایت کوچنی ده.

$$\lim_{x \rightarrow 3} ((3)^3 - 27) = 0$$

$f(x) = \frac{2}{5x^2 - 6x}$  تابع په  $x \rightarrow \infty$  بی نهایت کوچنی ده، ځکه چې:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{5x^2 - 6x} = \frac{2}{\infty} = 0$$

### د مثلثاتي توابعو لمټ

مخکې له دې چې د مثلثاتي توابعو لمټ تشریح کړو، مثلثاتي توابعو ته په لاندې ډول شرح ورکوو، چې مثلثاتي توابع یې عبارت دي له:

$$y = \sin x$$

$$y = \cos x$$

$$y = \tan x$$

$$y = \cot x$$

$$y = \sec x$$

$$y = \csc x$$

د دغو توابعو لمټ، په داسې حال کې چې  $x \rightarrow 0$  وي، په لاندې ډول یې لاس ته راوړو.

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \tan x = 0$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \cot x = \infty$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} \sec x = 1$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \csc x = \infty$$

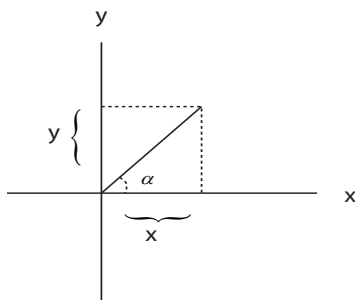
### د مثلثاتي نسبتونو تعريف

کله چې  $\alpha$  زاويه په ستندرد حالت کې د  $(x,y)$  اختياري نقطه د دويمې ضلعي د دغې زاويې غیر د مبداء څخه وي او وروسته  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  مساحت د  $(0,0)$  او  $(x,y)$  نقطو تر مينځ وي، د  $\alpha$  زاويې مثلثاتي نسبتونه عبارت دي له:

$$\sin \alpha = \frac{y}{r}, \quad \cos \alpha = \frac{x}{r}$$

$$\tan \alpha = \frac{y}{x}, \quad \cot \alpha = \frac{x}{y}$$

$$\sec \alpha = \frac{r}{x}, \quad \csc \alpha = \frac{r}{y}$$



شکل (۸)

$$\tan \alpha = \frac{y}{x} = \frac{\frac{y}{r}}{\frac{x}{r}} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\cot \alpha = \frac{x}{y} = \frac{\frac{x}{r}}{\frac{y}{r}} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

بايد وويل شي، چې په پورته څلور گونو حالاتو کې مخرجونه صفر نه وي، اساسي رابطه د مثلثاتي نسبتونو ترمنځ په لاندې ډول ده.

$$\sec \alpha = \frac{r}{x} = \frac{\frac{r}{x}}{\frac{r}{r}} = \frac{1}{\cos \alpha}$$

$$\csc \alpha = \frac{r}{y} = \frac{\frac{r}{y}}{\frac{r}{r}} = \frac{1}{\sin \alpha}$$

$$\sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha = \left(\frac{y}{r}\right)^2 + \left(\frac{x}{r}\right)^2 = \frac{x^2 + y^2}{r^2}$$

دا چې  $x^2 + y^2 = r^2$  دی، په پورته معادله کې یې د هغه په ځای وضع کوو.

$$\sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha = \left(\frac{y}{r}\right)^2 + \left(\frac{x}{r}\right)^2 = \frac{x^2 + y^2}{r^2}$$

همدا ډول  $1 + \cot^2 \alpha = \csc^2 \alpha$  په لاس راځي.

### د مثلثاتي توابعو لمټ

د مثلثاتي توابعو د لمټ په محاسبه کې امکان لري، چې د ابهام حالت منځته راشي، په دا ډول لمټ کې د ابهام له مختلفو شکلونو څخه مهم شکل  $\frac{0}{0}$  دی او دا حالت د یوه عمده فکتور د تشخیص په واسطه، چې د  $\sin x$  نسبت او د  $x$  زاویه ده رفع کړو، مور په مثلثاتو کې د  $y = \sin x$  او  $y = \cos x$  توابع پېژنو، کله چې  $x$  صفر ته نږدې کېږي د  $\sin x$  تابع صفر ته تقرب کوي، یعنې  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$ ، چې دا د  $y = \sin x$  گراف په شکل ښه درک کولای شو. (۱) شکل

په همدې ترتیب کله چې  $x$  د (۱) خواته تقرب وکړي، یعنې  $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$ ، په (۲) شکل کې د  $\cos x$  گراف په ښه ډول سره ښیو، معلومېږي چې د  $y$  قیمت په صفرې نقطه کې له یوه سره مساوي دی. شکل (۲)

### قضیه:

کله چې د  $x$  زاویه د صفر خواته تقرب کوي، د  $\sin$  او  $x$  نسبت د ۱ خواته تقرب کوي.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

**ثبوت:** د  $x$  زاویه لکه څنګه چې  $0 < x < \frac{\pi}{2}$  ده، د  $r$  له شعاع سره مرکزي زاویه په نظر کې نیسو، لکه د (۴) شکل، د دوو  $\triangle OAM, \triangle OAC$  مثلثونو مساحتونه د  $OAM$  قطاع د ذکر شوې دایرې سره مقایسه کوو، لرو چې:

(۴) شکل

د  $OAC <$  مثلث مساحت، د  $OAM <$  قطاع مساحت، د  $OAM$  مثلث مساحت او همدارنګه د مثلثونو او قطاع مساحت په ځانګړي ډول محاسبه کوو، لرو چې:

$$\text{مساحت } OAM = \frac{1}{2} \overline{OA} \cdot \overline{BM} = \frac{1}{2} r \cdot \overline{BM}$$

$$\text{مساحت } OAM = \frac{1}{2} x r^2$$

$$\text{مساحت } OAC = \frac{1}{2} \overline{OA} \cdot \overline{AC} = \frac{1}{2} r \cdot \overline{AC}$$

بنا پر دې د (4) شکل د مضاعفونو تساوي لاندې شکلونه اختیاروي:

$$= \frac{1}{2} r \overline{BM} < \frac{1}{2} x r^2 < \frac{1}{2} r \overline{AC} \dots \dots \dots 2$$

د 2 رابطې اطراف په  $\frac{2}{r^2}$  کې ضربوو، اخري نامساوات لاندې شکل ځانته اختیاريوي.

$$\frac{2}{r^2} \cdot \frac{1}{2} r \cdot \overline{BM} < \frac{2}{r^2} \cdot \frac{1}{2} x r^2 < \frac{2}{r^2} \cdot \frac{1}{2} r \overline{AC} \Rightarrow \frac{\overline{BM}}{r} < x < \frac{\overline{AC}}{r}$$

دا چې  $\frac{\overline{BM}}{r} = \sin x$  او  $\frac{\overline{AC}}{r} = \tan x$  دی، د دې پر ځای په پورتنۍ رابطه کې وضع کوو.

$$\sin x < x < \tan x$$

$$\sin x < x < \frac{\sin x}{\cos x}$$

ټول پورتنی حدونه په  $\sin x$  تقسیموو، لرو چې:

$$\frac{\sin x}{\sin x} < \frac{x}{\sin x} < \frac{\sin x}{\frac{\cos x}{\sin x}} \Rightarrow 1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

$$1 > \frac{\sin x}{\cos x} < \cos x$$

تول حدونه معكوسو

$$\Rightarrow \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos x < \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} < \lim_{x \rightarrow 0} 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

د تولو حدونو لمټ اخلو، گورو چې:

فلهدا په نتيجه کې

لومړی مثال:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$  لمټ محاسبه کړئ، که چېرې  $x \rightarrow 0$  وکړي.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{1}{x} = \left( \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \right) \left( \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} \right) = 1 \cdot 1 = 1$$

دويم مثال:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x}$  لمټ محاسبه کړئ، که چېرې  $x \rightarrow 0$  وکړي.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{1 - \cos x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \cos x) = 1 + 1 = 2$$

درېيم مثال:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{\sin x}$  لمټ محاسبه کړئ، که چېرې  $x \rightarrow 0$  وکړي.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{\sin x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{1}{\sin x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} \end{aligned}$$

څلورم مثال:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax)}{x}$  محاسبه کړئ، که چېرې  $x \rightarrow 0$  ته تقرب وکړي.

حل:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \cdot \sin(ax)}{ax} = a \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax)}{ax} = a \cdot 1 = a \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax)}{ax} &= a \end{aligned}$$



پنجم مثال:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$  لبت محاسبه کری، که چہرې  $x \rightarrow 0$  ته تقرب وکړي.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{x^2(1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^2(1 + \cos x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2(1 + \cos x)} = \left( \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} \right) \left( \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2(1 + \cos x)} \right) = 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

شپږم مثال:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 8x}{x}$  لبت محاسبه کری، که چہرې  $x \rightarrow 0$  ته تقرب وکړي.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 8x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{8 \cdot \sin 8x}{8x} = 8 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 8x}{8x} = 8 \cdot 1 = 8$$

یا په بل عبارت،  $8x = y$  نيسو او په پورتنۍ معادله کې یې وضع کوو.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 8x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{8 \cdot \sin 8x}{8x} = 8 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 8y}{8y} = 8 \cdot 1 = 8$$

اووم مثال:  $\lim_{x \rightarrow 0} x \cot x$  لبت پیدا کری، که چہرې  $x \rightarrow 0$  ته تقرب وکړي.

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \cot x = \lim_{x \rightarrow 0} x \frac{\cos x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{\frac{\sin x}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \cos x \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\sin x}{x}} = 1 \cdot 1 = 1$$

اتم مثال:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 \cdot \sin 6x}{x}$  پیدا کری.

حل: کوسین کوو چې یو ضریب عامل د  $\frac{\sin y}{y}$  په شکل لاسته راوړو، صورت او مخرج په 6 کې ضربوو،  $6x = y$  وضع کوو، لرو چې:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 \cdot \sin 6x}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6 \cdot 5 \cdot \sin 6x}{6x} = 30 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x}{6x} = 30 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6y}{6y} \\ &= 30 \cdot 1 = 30 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 \cdot \sin 6x}{x} = 30 \end{aligned}$$

نهم مثال:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x + \tan x}{2 \tan 3x + \sin x}$  لبت محاسبه کری، که چہرې  $x \rightarrow 0$  ته تقرب کری وي.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x + \tan x}{2 \tan 3x + \sin x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \frac{\sin 2x}{2x} + \frac{x \sin x}{x \cos x}}{3x \frac{2 \tan 3x}{3x} + \frac{\sin x}{x}} = \frac{\left( x \frac{\sin^2 x}{2x} + \frac{\sin x}{x \cos x} \right)}{\left( x \frac{6 \tan 3x}{3x} + \frac{\sin x}{x} \right)} \\ &= \frac{\left( 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} \right)}{\left( 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \right)} = \frac{2 + 1 \cdot \frac{1}{1}}{6 \cdot 1 \cdot \frac{1}{1} + 1} = \frac{3}{7} \end{aligned}$$

## د لومړي څپرکي پوښتنې

د لاندې توابعو لمټ محاسبه کړئ؟

$$1) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = ?$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 5}{x^2 - 3} = ?$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 16}{x - 1} = ?$$

$$7) \lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt{x}) = ?$$

$$9) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 11x + 5}{x^2 + x} = ?$$

$$11) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x + 1} = ?$$

$$13) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x} = ?$$

$$15) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{x^2} - \frac{3}{x} + 4 = ?$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x^2 + 1} - x = ?$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{1 - x} \frac{1}{1 - x^2} = ?$$

$$6) \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - a^2}{x - a} = ?$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 3ax + 2a^2}{x^2 - 2ax - 3a^2} = ?$$

$$10) \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 2x + \frac{4}{x}) = ?$$

$$12) \lim (\sqrt{x + a} - \sqrt{x}) = ?$$

$$14) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + 4}{x^2 + x} = ?$$

$$16) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x + h} - h}{h} = ?$$

د لاندې توابعو لمټ په لاس راوړئ؟

$$1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\tan 8x}{\tan 2x} = ?$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\tan^2 x} = ?$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + \sin a}{x - a} = ?$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2\alpha}{\sin \alpha} = ?$$

$$9) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 8x}{\tan 2x} = ?$$

$$11) \lim_{x \rightarrow 0} (x \sin \frac{1}{x}) = ?$$

$$13) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin \pi x}{\sin 3\pi x} = ?$$

$$15) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos y}{y \cdot \sin y} = ?$$

$$17) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6 - 6 \cos^2 y}{y^2} = ?$$

$$19) \lim_{x \rightarrow 0} (8x \cot g 4x) = ?$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = ?$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{8 \sin 5x}{x} = ?$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos \alpha}{\alpha^2} = ?$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(12x)}{\sin(4x)} = ?$$

$$10) \lim_{b \rightarrow 1} \frac{\sin(b^2 - 1)}{b^2 - 1} = ?$$

$$12) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{x^2} = ?$$

$$14) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \cos x}{1 - \tan x} = ?$$

$$16) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\tan^2 2x} = ?$$

$$18) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin 2x}{x + \sin 3x}$$

$$20) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x - x^2}{4x^2}$$

### مشتق

#### ټولیزه موخه:

د مشتق او دهغه اصول پیژندل، همدارنگه د مثلثاتي او لوگارتمي توابعو له مشتقاتو سره آشنایېږ.

د زده کړې موخې: د دې څپرکي په پای ته رسولو سره به محصلین په لاندې برخو کې پوره پوهه ترلاسه کړي:

- ۱- د مشتق تعریف او د هغې د اړوندو پوښتنو حل.
- ۲- د مشتق قواعد او اصول په صحیح ډول پیژندل او له هغې څخه د گټې اخستنيې طریقه.
- ۳- د مثلثاتي توابعو د مشتقاتو تعریف او د هغې د اصولو او قواعدو پیژندل.
- ۴- د لوگارتمي توابعو مشتقاتو تعریف، قواعد او د مشتق نیولو د اصولو پیژندل.
- ۵- د دویمو او له هغې څخه د لوړو مشتقاتو پیژندل او د هغې د اړوندو پوښتنو حل کول.

د اوولسمې پېړۍ په لومړیو کې د پیر فرما فرانسوي ریاضي پوه اسحق نیوټن (انګلیسي) ولایپ نیتزد (الماني) په واسطه د مشتق بنسټ کېښودل شو، چې نن ورځ د ډېرو مهمو او اساسي اقتصادي مسایلو، تفاضلي حساب او انټیګرال اړوند معاصرې ریاضي او نور د مشتق د مفهوم په اساس رامنځته شوي دي او دا چې مشتق یو ډېر اوږد بحث دی؛ نو کوبښن کوو، چې په واضح ډول یې وڅېړو کړو.

**د مشتق تعریف:** د  $Y$  تابع په متحول کې د نسبي تغیر پیدا کول د یو وارد شوي تغیر په اساس په یو مستقل متحول کې، یعنې  $y = f(x)$ . او که  $x$  متحول قیمت تغیر وکړي؛ نو د وارد شوي تغیر پیدا کول په نسبي شکل د  $Y$  تابع په متحول کې په  $\frac{\Delta x}{\Delta y}$  شکل سره ښودل کېږي.

یا په بل عبارت مشتق عبارت دی د تابع د تزايد لمټ د مستقل متحول پرتزايد باندي، که چېرې د مستقل متحول تزايد د صفرخواته تقرب کوي.

يعنې  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta y}$  وکړي. بايد يادونه وشي چې د مشتق د ښودلو لپاره د تابع د پاسه يو زور نوشته کوو، يعنې د  $f'(x)$  د  $f(x)$  مشتق او  $g(x)$  د  $g(x)$  مشتق او  $d'(x)$  د  $d(x)$  او  $h'(x)$  د  $h(x)$  مشتق وي دا چې په يوه نقطه کې د تابع مشتق په شکل  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  يا  $\frac{dy}{dx}$  په عمومي صورت د تابع مشتق په  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$  شکل ليکو.

مثال:  $f(x) = x^2$  مشتق پيدا کړئ!

$$f'(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - a^2}{x - a}$$

حل:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-a)(x+a)}{x-a} = \lim_{x \rightarrow a} (x+a) = a+a = 2a$$

مثال: د  $y = 3x^2 - 5$  تابع د گراف ميل په  $(2,0)$  نقطه کې پيدا کړئ!

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$$y' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(3(2+h)^2 - 5) - (3(2)^2 - 5)}{h}$$

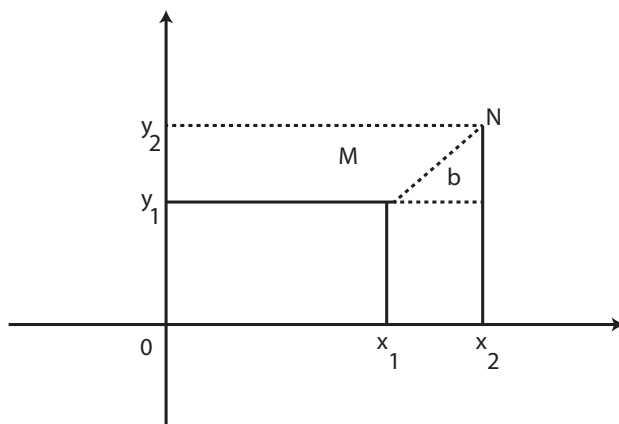
$$y' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(3(4+4h+h^2) - 5) - (3(4) - 5)}{h} =$$

$$y' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(12+12h+3h^2-5) - (12+5)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{12h+3h^2}{h}$$

$$y' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(12+3h)}{1} = \lim_{h \rightarrow 0} (12+3h) = 12$$

د هندسي مشتق تعريف

د تابع د مماس ميل په يوه مشخصه نقطه کې، د تابع له مشتق څخه په هماغه نقطه کې عبارت دی.



فرض کوو چې د  $y = f(x)$  تابع منحني رسم شوی، چې د منحنی لومړۍ نقطه د  $M$  وي، دا نقطه د مستقل متحول ارزښت  $ox_1$  او د تابع د متحول ارزښت  $oy_1$  نومېږي، چې د مستقل متحول د تغیر په اثر  $x_1$  او  $x_2$  له  $M$  نقطې دویمې نقطې  $N$  ته تغیر خوري چې په هغې نقطه کې تابع د  $y_2$  ارزښت اختیاروي، په نتیجه کې د تابع مشتق  $y = f(x)$  دی او په یوه مشخصه نقطه کې د منحنی د مماس میل پیدا کول، چې  $M$  نقطه وي او که  $N$  نقطه  $M$  نقطې ته نږدې کړو او د هغې لمټ په یوه نږدې فاصله کې  $M$  نقطې ته تقرب ورکړو، د هغې د میلان د تغیر درجه په لاندې ډول په لاس راوړو.

$$\cos = \frac{MA}{MN}, \sin b = \frac{AN}{MN}$$

$$\tan b = \frac{\sin b}{\cos b} = \frac{MN}{MA} = \frac{AN}{MN} \cdot \frac{MN}{MA} = \frac{AN}{MA}$$

$$\tan b = \frac{AN}{MA} \Rightarrow \tan b = \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$$

یا

$$\Rightarrow \tan b = \frac{\Delta y}{\Delta x} = m'$$

### د مشتق اقتصادي تعريف

مشتق له نهايي کمیت څخه عبارت دی، که یو مجموعي کمیت ور کړ شوی وي لکه د مجموعي عاید تابع، مجموعي لگښت، مجموعي تولید، مجموعي سپما، مجموعي سرمایه گزاري، مجموعي صادرات او واردات او نور.

په لنډه توګه وایو چې د تابع اول مشتق عبارت له نهایي عاید او نهایي لګښت، نهایي سپما، نهایي پانګې اچونې، صادراتو او وارداتو څخه وي، د لاندې مثالونو مشتق له لمټ نه په ګټه اخیستو پیدا کړئ!

لومړی مثال-  $y = 3x$

$$y' = ?$$

$$\Delta y + y = 3(x + \Delta) \Rightarrow \Delta y = 3(x + \Delta x) - y$$

$$\Rightarrow \Delta y = 3x + 3\Delta x - 3x = 3\Delta x \Rightarrow \Delta y = 3\Delta x$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3\Delta x}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 3 \Rightarrow y' = 3$$

دواړه خواوې په  $\Delta x$  تقسیموو.

دا چې  $\frac{\Delta y}{\Delta x} = y'$  دی نو

دویم مثال-  $f(x) = x^3$  وي  $f'(x)$  پیدا کړئ.

$$f'(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^3 - a^3}{x - a} \Rightarrow f'(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x - a)(x^2 + ax + a^2)}{x - a}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \lim_{x \rightarrow a} (x^2 + ax + a^2) = (a^2 + a \cdot a + a^2)$$

$$f'(x) = (a^2 + a^2 + a^2) = 3a^2$$

$$f'(x) = 3a^2$$

د مشتق الجبري تعریف

هر کله چې په  $y = f(x)$  تابع کې د  $x$  متحول د  $h$  په اندازه او یا  $\Delta x$  تزايد وکړي، ذکر

شوې تابع  $\Delta y = f(x+h) - f(x)$  زیاتوالی متحول کېږي او د تابع او متحول د زیاتوالي

نسبت عبارت دی له:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

که چېرې د  $x$  لمټ د صفر خواته تقرب وکړي.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

که وجود ولري ویلای شو چې ذکر شوې تابع د  $x$  په نقطه کې د مشتق لرونکې ده، چې

لمټ په پورته رابطه کې نیول شوی دی، د مشتق نیونې عملیه ورته وایي یعنی د  $y = f(x)$

تابع مشتق په لاندې ډول څېړو.

$$DY = Df(x) \text{ یا } \frac{dy}{d(x)} = \frac{df(x)}{dx} \text{ یا } y' = f'(x)$$

یا په لاندې شکل ښودل کېږي:

$$f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

او یا په بل عبارت:

$$y' = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x)$$

او په اخره معادله کې د  $f(x)$  تابع مشتق په لاندې ډول هم تعریفوو.

$$f'(x) = \lim_{y \rightarrow x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

او همدارنگه د  $f(x)$  مشتق په  $x = x_0$  کې عبارت دی له:

$$f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

مثال:- د  $f(x) = x^4$  تابع مشتق دارنگه لاسته راوړو:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

حل: فورمول ته په کتو لرو چې:

$$f(x+h) = (x+h)^4 = x^4 + 4x^3h + 6x^2h^2 + 4xh^3 + h^4$$

$$f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 + 4x^3h + 6x^2h^2 + 4xh^3 + h^4}{h}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} (4x^3 + 6x^2h + 4xh^2 + h^3) = 4x^3$$

مثال:- د  $f(x) = 4x - x^2$  تابع د گراف میل په  $p(2, -2)$  نقطه کې پیدا کړئ!

حل: د  $x$  قیمت په  $p$  نقطه کې عبارت له 2 دی او میل په  $m$  ښیو.

$$m \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4(2+h) - (2+h)^2 - 4 \cdot 2 - 2^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{8 + 4h - (4 + 4h + h^2) - 8 + 4}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{4h - (4 + 4h + h^2) - 4}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4h - 4 - 4h - h^2 + 4}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (-h) = 0$$

مثال:- د  $f(x) = 4x - x^2$  تابع د گراف میل په  $p(3, -3)$  نقطه کې پیدا کړئ؟

$$\begin{aligned} m \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(-3)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4(3+h) - (3+h)^2 - 4 \cdot 3 - 3^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{9+4h - (9+6h+h^2) - (4 \cdot 3 + 3^2)}{h} \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{12+4h-9-6h-h^2-12+9}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4-6h-h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(4-6-h)}{h} = \\ \lim_{h \rightarrow 0} (-2-h) &= -2 \end{aligned}$$

### د مشتق د پیدا کولو قاعدې

د مشتق د سوالونو او مثالونو د اسانه حل کولو په خاطر کولای شو له فورمول او د مشتق له قواعدو نه گټه واخلو او د هغې سوالونه په سمه توگه تر بررسۍ لاندې ونیسو. (۱) قاعده: د ثابتې تابع مشتق صفر دی.

لومړۍ قاعده:

فرضاً  $f(x) = C$  یوه ثابت تابع وي؛ نو  $f'(x) = 0$  دی یعنې  $(C \in R)$ .

**ثبوت:**  $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$  او  $C$  یو ثابت عدد دی (تزايد یا تناقص) نه لري او  $h$  مقدار خلاف د صفر  $x \rightarrow 0$  کړی یعنې:

$$f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{C-C}{h} \Rightarrow f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0$$

مثال:- د  $f(x) = 20$  تابع مشتق پیدا کړئ؟

$$f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{20-20}{h} = 0 \Rightarrow f'(x) = 0$$

### دویمه قاعده:

د عینیت تابع مشتق (۱) یو دی.

هر کله چې  $f(x) = x$  تابع وي؛ نو  $f'(x) = 1$  دی

**ثبوت:**

$$f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - x}{h} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = 1 \Rightarrow f'(x) = 1$$

**نوټ:** تابع په  $x=0$  کې د مشتق نیونې وړ نه وي، په داسې حال کې چې دا تابع په صفر کې متمادي ده.



## درېيمه قاعده:

د  $f'(x) = x^n$  تابع مشتق د  $(n \in \mathbb{Z})$  لپاره عبارت له  $f'(x) = nx^{n-1}$  څخه وي. فلېذا د طاقت لرونکې تابع مشتق مساوي دی، توان ضرب د تابع او له توان نه يو کمېږي. ثبوت:

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x) &= (x+h)^n - x^n \\ &= x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2!}nx^{n-2}h^2 + \dots + h^n - x^n \\ f(x+h) - f(x) &= nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2!}nx^{n-2}h^2 + \dots + h^n \end{aligned}$$

د رابطې دواړه خواوې په  $h$  تقسيموو لرو چې:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)nx^{n-2}h^2}{2}}{h} + \dots + h^{n-1}$$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{n(n-1)xn}{2!} + \dots + h^{n-1}$$

$$f'(x) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (nx^{n-1} \frac{n(n-1)}{2!}xh + \dots + h^{n-1})$$

$$\Rightarrow f'(x) = nx^{n-1} \quad \text{يا} \quad (x^n)' = nx^{n-1}$$

مثال:- د  $f(x) = 4x - x^2$  تابع مشتق پيدا کړئ!

$$f(x) = x^{12}$$

$$f'(x) = 12 \cdot x^{11}$$

$$2) f(x) = x^{20} \Rightarrow f'(x) = 20x^{19}$$

مثال:- د  $y = \sqrt{x}$  تابع مشتق درېيمې قاعدې ته په کتو لاسته راوړئ!

$$y = \sqrt{x} \Rightarrow y = x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow y' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}} \Rightarrow (\sqrt{x})' = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}$$

مثال:- د  $y = \frac{1}{\sqrt[4]{x}}$  تابع مشتق په لاس راوړئ!

$$y = \frac{1}{\sqrt[4]{x}} \Rightarrow y = x^{-\frac{1}{4}} \Rightarrow y' = (x^{-\frac{1}{4}})' = -\frac{1}{4}x^{-\frac{5}{4}} \Rightarrow y' = -\frac{1}{4 \cdot x^{\frac{5}{4}}} \Rightarrow y' = -\frac{1}{4 \cdot x \sqrt[4]{x}}$$

### خلورمه قاعده:

د یوې تابع او د یوه ثابت عدد د ضرب د حاصل مشتق مساوي دی د تابع مشتق ضرب له هغه ثابت عدد

$$\begin{aligned}
 [kf(x)] &= kf'(x) \text{ : مشتق وي ثابت عدد او } k \text{ یو ثابت عدد وي} \\
 [kf(x)] \lim_{h \rightarrow 0} \frac{kf(x+h) - kf(x)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} k \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} k \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = k \cdot f'(x)
 \end{aligned}$$

مثال:- د  $f(x) = 8 \cdot x^{12}$  3)  $f(x) = 7 \cdot x^6$  2)  $f(x) = 12x^8$  توابعو مشتق په لاس راوړی.

$$a) f(x) = 8 \cdot x^8$$

$$f'(x) = 8 \cdot x^{12-1} = 96x^{11}$$

$$\Rightarrow f(9x) = 96x^{11}$$

$$b) f(x) = 7x^6 \Rightarrow f'(x) = 7 \cdot (x^6)'$$

$$f(x) = 7(6x^{6-1}) = 7(6x^5)' = 42x^5$$

$$c) f(x) = 12x^8$$

$$f(x) = 12(x^8) = 12(8x^7) = 96x^7$$

$$\Rightarrow f(x) = 96x^7$$

### پنځمه قاعده:

د توابعو مجموعي مشتق مساوي دی د توابعو د مشتقونو له مجموعې سره، هر کله چې د  $u(x)$  او  $v(x)$  توابع ولرو؛ نو  $(u+v)' = u'+v'$  ثبوت لرو چې:

$$\begin{aligned}
 [u(v) + v(x)]' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{u(x+h) + v(x+h)\} - \{u(x) + v(x)\}}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(x+h) - v(x)}{h} = u'(x) + v'(x) \Rightarrow (u+v)' = u'+v'
 \end{aligned}$$

مثال د توابعو د مجموعې مشتق  $v(x) = 10x + 89$ ,  $u(x) = 4x^2 + 5x$  پیدا کړئ!

حل:

$$[u(x) + v(x)]' = u'(x) + v'(x)$$

$$[u(x) + v(x)]' = (4x^2 + 5x)' + (10x + 8)' = 8x + 5 + 10 = 8x + 15$$

**یادښت:** هر کله چې  $y = u + v + w$  تابع وي او هره یوه برخه د تابع د  $x$  تابع وي د دا رنگه توابعو مشتق عبارت دی له:  $y' = u' + v' + w'$

**مثال:** هر کله چې  $y = 15x^6 + 2x^5 + 4x^3 + 4$  تابع د نوموړو توابعو مشتق لاسته راوړئ!

**حل:**

$$y' = u' + v' + w'$$

$$y = 15x^6 + 2x^5 + 4x^3 + 4$$

$$y' = 90x^5 + 10x^4 + 12x^2$$

**شپږمه قاعده:**

د دوه توابعو د ضرب د حاصل مشتق مساوي دی د مضرب مشتق ضرب مضروب فیه جمع د جمعې مشتق د مضروب فیه د مضروب سره.

هر کله چې  $u(x)$  او  $v(x)$  توابع ولرو نو:

$$y' = u' + v' + w'$$

$$(u(x), v(x))' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h)v(x+h) - u(x)v(x)}{h}$$

**ثبوت:**

که چېرې  $v(x+h)(u(x))$  هم جمع او هم تفریق کړو معادله لاندې شکل غوره کوي:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h)v(x+h) - u(x)v(x+h) + u(x)v(x+h) - u(x)v(x)}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{u(x+h) - u(x)v(x)}{h} + u(x) \frac{v(x+h) - v(x)}{h} \right]$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{u(x+h) - v(x)}{h} y(x) + u(x) \lim_{h \rightarrow 0} u(x) \frac{v(x+h) - v(x)}{h} \right]$$

$$\Rightarrow u'(x)v(x) + u(x)y'(x)$$

**مثال:-** که زموږ تابع لاندې شکل ولري:

$$y = (8x^3 + 3x^2 + 5)(2x^2 + 4x)$$

$$y' = u' + v' + w'$$

$$u' = 24x^2 + 6x$$

$$v' = 4x + 4$$

$$f'(x) = (24x^2 + 6x)(2x^2 + 4x)(4x + 4)(8x^3 + 3x^2 + 5)$$

$$f'(x) = 48x^4 + 96x^3 + 12x^3 + 24x^2 + 32x^4 + 12x^3 + 20x + 12x^3 + 32x^3 + 12x^2 + 20$$

$$f'(x) = 80x^4 + 152x^3 + 36x^2 + 20x + 20$$

دویم مثال - هر کله چې د  $y = (3x^2 + 2x)(7x^3 + 8)$  وي  $y'(x)$  مشتق یې پیدا کړئ!

حل:

$$y' = (x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

$$u' = 6x + 2$$

$$v' = 21x^2$$

$$y'(x) = (6x + 2)(7x^3 + 8)(21x^2)(3x^2 + 2x)$$

$$y'(x) = 42x^4 + 48x + 14x^3 + 16 + 63x^4 + 42x^3$$

$$y'(x) = 105x^4 + 56x^3 + 48x + 16$$

اوومه قاعده:

د کسري تابع مشتق عبارت دی د صورت مشتق ضرب مخرج منفي د مخرج مشتق ضرب صورت پر مخرج مربع

هر کله چې د  $u(x)$  او  $v(x)$  توابع ورکړل شوي وي؛ نو:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v + v'u}{v^2}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{u(x+h) - u(x)}{v(x+h) - v(x)}}{h} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{v(x+h)v(x) - u(x)v(x+h)}{v(x+h)v(x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{u(x+h)v(x) - u(x)v(x) + u(x)v(x) - u(x)v(x+h)}{v(x+h)v(x)h} =$$

پورته  $u(x)$  او  $v(x)$  هم جمع او هم منفي شوي، په رابطه کوم تغیر نه دی راغلی او همدارنگه صورت او مخرج په  $h$  تقسیموو لاندې شکل نیسي.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{u(x+h) - u(x)}{h} v(x) - u(x) \frac{v(x) - v(x+h)}{h}}{\frac{v(x+h)v(x)h}{h}} =$$

او په نتیجه کې

$$\begin{aligned} &= \frac{v(x) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} - u(x) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(x) - v(x+h)}{h}}{\lim v(x+h)v(x)} = \\ &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2} \end{aligned}$$

هر کله چې  $u(x)$  او  $v(x)$  توابع ورکړل شوې وي نو:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v + v'u}{v^2}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{u(x+h)}{v(x+h)} - \frac{u(x)}{v(x)}}{h}$$

مثال:- هر کله چې  $y = \frac{10x^4 + 5x^2}{2x^6 - 4x}$  تابع وي مشتق يې پيدا کړئ؟

حل: دا چې  $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v + v'u}{v^2}$  دی.  $u(x) = 10x^4 + 5x^2$ ,  $v(x) = 2x^6 + 4x$  هغه په معادله کې وضع کوو، لرو چې:

$$f'(x)\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v + v'u}{v^2}$$

$$f'(x) = \frac{(40x^3 + 10x)(2x^6 - 4x) - (10x^4 + 5x^2)(12x^5 - 4)}{(2x^6 - 4x)^2} =$$

$$f'(x) = \frac{(80x^9 - 40x^7 - 20x^7 - 40x^2) - 120x^9 + 40x^4 - 40x^4 - 60x^7 + 20x^2}{(2x^6 - 4x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-40x^9 - 40x^7 - 120x^4 - 20x^2}{(2x^6 - 4x)^2} \Rightarrow y' = \frac{-40x^9 - 40x^7 - 120x^4 - 20x^2}{(2x^6 - 4x)^2}$$

دویم مثال- د  $y = \frac{1}{x^4}$  تابع مشتق پيدا کړئ؟

حل: که  $u(x) = 1$  او  $v(x) = x^4$  وضع شي نظر اوومې قاعدې ته لرو چې:

$$y' = \left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{(1)'}{(x^4)} = \frac{0x^2 - 4x^3 \cdot 1}{(x^4)^2} = \frac{-4x^3}{x^8} \Rightarrow y' = -\frac{4}{x^5}$$

### اتمه قاعده

هر کله چې  $u, v$  او  $w$  توابع د مشتق نیونې وړ وي لرو چې:

$$(uvw)' [u(v \cdot w)]' = u'(v \cdot w) + u(vw)'$$

$$= u'vw + u(v'w + vw')$$

$$\Rightarrow (uvw)' = u'v \cdot w + uv'w + uvw'$$

مثال:- د  $y = (2x^2 + 2x)(x^2 - 4)(3x^2 + x)$  توابعو مشتق پيدا کړئ؟

حل: اتمې قاعدې ته په کتو لرو چې:

$$(uvw)' = u'v \cdot w + uv'w + uvw'$$

$$y' = (4x+2)(x^2-4)(3x^2+x) + (2x^2+2x)(2x)(3x^2+x) + (2x^2+2x)(x^2-4)(6x-1)$$

$$y' = (4x^3 - 8x + 2x^2 - 8x)(3x^2 + x) + (4x^3 + 4x^2)(3x^2 + x) + (2x^4 - 8x^2 + 2x^3 - 8x)(6x - 1)$$

$$y' = (12x^5 + 4x^3 - 24x^2 - 8x^2 + 4x^2 + 6x^4 + 2x^3 - 24x^2 + 2x^3 - 8x + 12x^5 + 4x^4$$

$$+ 12x^4 + 4x^3 + 12x^5 + 2x^4 - 48x^3 - 8x^2 + 12x^4 + 2x^3 - 48x^2 - 8x$$

$$\Rightarrow y' = 36x^5 + 40x^4 - 64x^3 - 88x^2 - 16x$$

### نهمه قاعده:

هر کله چې  $u$  تابع د مشتق نیونې وړ وي او  $c$  هم ثابت عدد (ثابته تابع) وي نو:

$$(cu)' = c'u + cu' = 0 \cdot u + cu' = cu' \Rightarrow (cu)' = cu'$$

لومړی مثال:- د  $y = (24)(2x^3 + 5x)$  توابعو مشتق پیدا کړئ؟

حل: دا چې  $u = 2x^3 + 5x$  او  $c = 24$  دی او مشتق یې  $u' = 6x^2 + 5$  او  $c = 0$  دی په معادله

کې وضع کوو.

$$y' = (cu)' = (c)'(u) + c(u)'$$

$$y' = (cu)' = y' = (24)'(2x^3 + 5x) + (24)(2x^3 + 5x) = 0(2x^3 + 5x) + 24(6x^2 + 5)$$

$$y' = 0 + 144x^2 + 120 \Rightarrow y' = (cu)' = 144x^2 + 120$$

### لسمه قاعده:

د مرکبو توابعو مشتق (تابع تابع) د مرکبې تابع مشتق مساوي دی عمومي مشتق ضرب

داخلي مشتق دی.

فرضا  $(f \circ g)(x)$  یوه مرکبه تابع ده ثبوتوو چې:

ثبوت:

$$[f \circ g(x)]' = [f(g(x))]'$$

$$= f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$[f(g(x))]' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(g(x)+h) - f(g(x))}{h}$$

اوس  $x+h$  په  $x'$  ښیو؛ نو  $h = x' - x$  کېږي

$$\lim_{x' \rightarrow x} \frac{f(g(x)+h)' - f(g(x))}{x' - x}$$

حل: صورت او مخرج په  $g(x') - g(x)$  ضربوو لرو چې:

$$\begin{aligned} \lim_{x' \rightarrow x} \frac{f(g(x')) - f(g(x))}{x' - x} \cdot \frac{g(x') - g(x)}{g(x') - g(x)} &= \\ \lim_{x' \rightarrow x} \frac{f(g(x')) - f(g(x))}{g(x') - g(x)} \cdot \frac{g(x') - g(x)}{x' - x} &= \\ \lim_{g(x') \rightarrow g(x)} \frac{f(g(x')) - f(g(x))}{g(x') - g(x)} \cdot \lim_{x' \rightarrow x} \frac{g(x') - g(x)}{x' - x} &= \\ \Rightarrow [f(g(x))] = f'(g(x)) \cdot g'(x) & \end{aligned}$$

مثال:- د  $f(x) = (x^5 + 4)^8$  تابع مشتق محاسبه کری؟

$$\begin{aligned} f'(x) &= f'(g(x)) \cdot g'(x) \\ f'(x) &= 8(x^5 + 4)^{8-1} (5x^{5-1}) \\ f'(x) &= 8(+4)^7 \cdot 5x^4 = 40(x^5 + 4)^7 \cdot x^4 \end{aligned}$$

دویم مثال:- د  $g(x) = \frac{1}{(x^3 - 4x^2 + 2)^4}$  تابع مشتق محاسبه کری؟

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{1}{(x^3 - 4x^2 + 2)^4} = (x^3 - 4x^2 + 2)^{-4} \\ g'(x) &= -4(x^3 - 4x^2 + 2)^{-4-1} \cdot (3x^2 - 8x) \\ g'(x) &= -4(x^3 - 4x^2 + 2)^{-5} \cdot (3x^2 - 8x) \\ g'(x) &= \frac{-4(3x^2 - 8x)}{(x^3 - 4x^2 + 2)^5} = \frac{-12x^2 + 32x}{(x^3 - 4x^2 + 2)^5} \\ \Rightarrow g'(x) &= \frac{-12x^2 + 32x}{(x^3 - 4x^2 + 2)^5} \end{aligned}$$

درییم مثال:- د  $f(x) = \sqrt{x^3 + 2}$  تابع مشتق محاسبه کری؟

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{x^3 + 2} = (x^3 + 2)^{\frac{1}{2}} \\ \Rightarrow [f(g(x))] &= f'(g(x)) \cdot g'(x) \\ f'(g) &= \frac{1}{2}(x^3 + 2)^{\frac{1}{2}-1} \cdot (3x^2) = \frac{1}{2}(x^3 + 2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (3x^2) \\ f'(g) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{3x^2}{(x^3 + 2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{3x^2}{2 \cdot \sqrt{x^3 + 2}} \\ \Rightarrow f'(g) &= \frac{3x^2}{2 \cdot \sqrt{x^3 + 2}} \end{aligned}$$

## د مثلثاتی توابعو مشتق

د مثلثاتی توابعو مشتق عبارت دی له:

$$1) \frac{d}{dx}(\sin x) = (\sin x)' = \cos x$$

$$2) \frac{d}{dx}(\cos x) = (\cos x)' = -\sin x$$

$$3) \frac{d}{dx}(\tan x) = (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

$$4) \frac{d}{dx}(\cot x) = (\cot x)' = \frac{-1}{\sin^2 x} = -\csc^2 x$$

$$5) \frac{d}{dx} \sec(x) = (\sec x)' = \sec x \cdot \tan x$$

$$6) \frac{d}{dx}(\csc x) = (\csc x)' = -\csc x \cdot \cot x$$

$$\begin{aligned} 1) \frac{d}{dx}(\sin x) &= (\sin x)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{x+h}{2} \cos \frac{x+h-x}{2}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \cos(x + \frac{h}{2}) \end{aligned}$$

$$(\sin x)' = 1 \cdot \cos x \Rightarrow (\sin x)' = \cos x$$

$$\begin{aligned} 2) (\cos x)' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2 \sin \frac{x+h}{2} \sin \frac{x+h-x}{2}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \cos(x + \frac{h}{2}) = -1 \cdot \cos x = -\sin x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) \frac{d}{dx}(\tan x) &= (\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} = \\ &= \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x (\sin x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x \\ &\Rightarrow \frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4) \frac{d}{dx}(\cot x) &= (\cot x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{(\cos x)' \sin x - \cos x (\sin x)'}{\sin^2 x} \\ &= \frac{-\sin x \cdot \sin x - \cos x \cdot \cos x}{\sin^2 x} = \frac{-(\sin^2 x + \cos^2 x)}{\sin^2 x} = -\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x} = \\ &= -\frac{1}{\sin^2 x} = -\csc^2 x \Rightarrow (\cot x)' = -\csc^2 x \end{aligned}$$



$$5) \frac{d}{dx} \sec x = (\sec x)' = \left( \frac{1}{\cos x} \right)' = \frac{0 \cdot \cos x - 1(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{-(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\sin x}{\cos x \cdot \cos x} = \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\sin x}{\cos x} = \sec x \cdot \tan x \Rightarrow (\sec x)' = \sec x \cdot \tan x$$

$$6) \frac{d}{dx} \csc x = -\csc x \cdot \cot x$$

$$(\csc x)' = \left[ \frac{1}{\sin x} \right]' = \frac{0 \cdot \sin x - 1(\sin x)'}{\sin^2 x} = \frac{-\cos x}{\sin^2 x} = \frac{-\cos x}{\sin x \cdot \sin x} =$$

$$= -\csc x \cdot \cot x \Rightarrow (\csc x)' = -\csc x \cdot \cot x$$

لومړی مثال:- د  $y = \frac{x^2}{\cos x}$  تابع مشتق پیدا کړئ؟

$$y' = \frac{(x^2)' \cos x - (\cos x)' x^2}{\cos^2 x} = \frac{2x \cos x - 1(\sin x)x^2}{\cos^2 x} = \frac{2x \cos x + x^2 \sin x}{\cos^2 x}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{2x \cos x + x^2 \sin x}{\cos^2 x}$$

دویم مثال:- د  $y = x^4 \sin x$  تابع مشتق محاسبه کړئ؟

$$y = (x^4)' \sin x + (x^4)(\sin x)' = 4x^3 \sin x + x^4 \cos x$$

$$\Rightarrow y' = 4x^3 \sin x + x^4 \cos x$$

درېیم مثال:-  $y = \sin \frac{\pi x}{180}$  مشتق یې محاسبه کړئ؟

حل: هر کله چې  $f(x) \sin x$  او  $g(x) = \sin \frac{\pi x}{180}$  وضع کړو او  $y$  لاندې قیمت اختیاروي.

$$y = f(g(x)) \Rightarrow y' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$y' = (\sin x)'(g(x)) \cdot \left( \frac{\pi}{180} x \right)' = \cos \frac{\pi}{180} x \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{180} \cos \frac{\pi}{180}$$

څلورم مثال:- د  $y = \cos \frac{\pi x}{180}$  تابع مشتق محاسبه کړئ؟

حل: که  $f(x) \cos x$  او  $g(x) = \cos \frac{\pi x}{180}$  وضع کړو.

$$y = f(g(x)) \Leftrightarrow y' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$y' = (\cos)' \left( \frac{\pi}{180} x \right) \cdot \left( \frac{\pi}{180} x \right)' = -\sin \left( \frac{\pi}{180} x \right) \cdot \frac{\pi}{180}$$

$$y' = -\frac{\pi}{180} \sin \frac{\pi x}{180}$$

پنجم مثال:- د  $y = \cos^2 2x$  تابع مشتق پیدا کړئ!

حل: لسمې قاعدې ته په کتو لرو چې:

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$(\cos^2 2x)' = 2 \cos(2x) \cdot \cos(2x)' = 2 \cos(2x) \cdot (-2 \sin(2x))$$

$$(\cos^2 2x)' \Rightarrow -4 \cos 2x \cdot \sin 2x$$

شپږم مثال:- د  $y = \cos(6x-4)$  تابع مشتق پیدا کړئ!

$$y'(\cos(6x-4))' = -\sin(6x-4) \cdot (6x-4)'$$

$$= -\sin(6x-4) \cdot 6$$

$$\Rightarrow y' = -6 \sin(6x-4)$$

اووم مثال:- د  $y = \sin(4x-1)$  تابع مشتق محاسبه کړئ!

حل:

$$(\sin(4x-1))' = \cos(4x-1) \cdot (4x-1)' = \cos(4x-1) \cdot 4 = 4 \cos(4x-1)$$

$$\Rightarrow (\sin(4x-1))' = 4 \cos(4x-1)$$

اتم مثال:- د  $y = \sec x \cdot \cot x$  تابع مشتق محاسبه کړئ!

حل:

$$y' = (\sec x \cdot \cot x)' = (\sec x)' \cot x + (\cot x)' \sec x$$

$$= (\sec x \cdot \tan x)' \cot x + (-\cos^2 x)' \sec x$$

$$= \sec x - \cos^2 x \cdot \sec x$$

$$= \sec x (1 - \cos^2 x)$$

د لوگارتمي توابعو مشتق

د لوگارتمي تابع مشتق  $y = \log_a^x$  عبارت دی له  $y' = \frac{1}{x} \log_a^e$  دا چې په پورته فورمول کې  $a$

کولای شي هر قیمت غوره کړي او  $e$  عبارت ده له  $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$  او یا  $\lim_{x \rightarrow 0} (1+a)^{\frac{1}{x}} = e$  او

یو غیر ناطق ثابت عدد دی او قیمت یې عبارت دی له

$$e = 2,7182818284599045 \dots$$

او اوس د  $y = \log_a^x$  تابع مشتق پیدا کوو چې  $y' = \frac{1}{x} \log_a^e (\log_a^x)'$

## ثبوت:

$$\begin{aligned}
 (\text{Log}_a^x)' &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{Log}(x+h) - \text{log}_a^x}{h} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{h} \text{Log}_a \frac{x+h}{x} \right] \\
 &= \frac{1}{x} \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{x}{h} \text{Log}_a \left( 1 + \frac{h}{x} \right) \right] = \frac{1}{x} \lim_{x \rightarrow 0} \text{Log}_a \left( 1 + \frac{h}{x} \right)^{\frac{x}{h}} \\
 &= \frac{1}{x} \lim_{x \rightarrow 0} \log_a (1+a)^a = \frac{1}{x} \text{Log}_a e \\
 \Rightarrow (\text{Log}_a^x)' &= \frac{1}{x} \text{Log}_a e
 \end{aligned}$$

دا چې  $\frac{h}{x} = a$  فرض کوو.

یا په بل عبارت زنجیري قاعدې ته په کتو  $f'(x) = f'(u)u'(x)$  که چېرې  $f(x) = \text{Log}_a u(x)$  غواړو لرو  $f'(x) = \frac{1}{u(x)} \log_a e \cdot u'(x)$  دی که چېرې  $u = x$  وي  $f(x) \text{Log}_a^x$  مساوي په  $\frac{1}{x}$  سره دی.

نتیجه: د پورته فرمول ثبوت دارنگه تشریح کوو چې:

۱- هر کله چې  $a=e$  وي که چېرې  $\log_a e = \log_e e = 1$  دی یعنی:

$$(\text{Lnx})' = (\text{Log}_a^e)' = \frac{1}{x} \text{Log}_a e = \frac{1}{x} \cdot 1 = \frac{1}{x} \Rightarrow (\text{Lnx})' = \frac{1}{x}$$

۲- هر کله چې  $a=10$  وي که چېرې  $\text{Log}_a^x = \text{Log}_{10}^x$  لیکلای شو او د هغې مشتق اخیستلای شو داسې چې:

$$\begin{aligned}
 (\text{Log}_{10}^x)' &= (\text{Log}_{10}^x)' = \frac{1}{x} \text{Log}_{10} e = \frac{1}{x} \text{Log}_e \\
 \Rightarrow (\text{Log}_x)' &= \frac{1}{x} \text{Log}_e
 \end{aligned}$$

لومړی مثال: - د  $f(x) = \text{Log}(4x+2)$  تابع مشتق محاسبه کړئ!

حل: په دې ځای کې  $u(x) = 4x+2$  او  $u'(x) = 4$

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} \text{Log}_e \frac{4}{4x+2} \Rightarrow \frac{4}{4x+2} \text{Log}_e = f'(x)$$

د توان لرونکو توابعو مشتق:

د  $y=a^x$  توابعو مشتق دارنگه محاسبه کوو:

$y=a^x$  دواړو خواوو ته مشتق نیسو  $Lny = xLna$

دواړو خواوو ته مشتق نیسو  $\frac{y'}{y} = Lna$

$$\Rightarrow y' = y.Lna = a^x.Lna \Rightarrow y' = a^x.Lna$$

دویم مثال- لاندې مشتقات محاسبه کړئ!

a)  $f(x) = \text{Log}5x$

b)  $g(x) = \text{Ln}(x^2 + 1)$

c)  $f(x) = \text{Ln}(x^3 + x^2)$

d)  $f(x) = \text{Ln}(\cos 3x)$

a)  $f(x) = \text{Log}5x$

حل:

په دې ځای کې  $u(x)=5x$  او  $u'(x)$  نظر فورمول ته لرو چې:

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}. \text{Log}e = \frac{5}{5x} \text{Log}e = \frac{\text{Log}e}{x}$$

b)  $g(x) = \text{Ln}(x^2 + 1)$

c)  $f(x) = \text{Ln}(x^3 + x^2)$

حل:  $u(x) = x^2 + 1$  او  $u'(x) = 2x$  فورمول ته په کتو لرو چې:

$$g'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}. \text{Lne} = \frac{2x}{x^2 + 1} \text{Lne} = \frac{2x}{x^2 + 1}$$

دا چې  $\text{Lne} = 1$  دی.

حل:

دا چې:

$$u'(x)3x^2 + 2x, u(x) = x^3 + x^2$$

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}. \text{Lne} = \frac{3x^2 + 2x}{x^3 + x^2} \text{Lne} = \frac{3x^2 + 2x}{x^3 + x^2}$$

$$f'(x) = \frac{x(x+2)}{x(x^2 + 2x)} = \frac{x+2}{x^2 + x}$$

حل:

$$d) f(x) = \ln(\cos 3x)$$

$$u'(x) = -3 \sin 3x, u(x) = \cos 3x$$

$$g'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{-3 \sin 3x}{\cos 3x} = -3 \tan 3x$$

که  $y = \text{Lpg}_e^u$  تابع موجوده وي که چېرې  $u=f(x)$  وي مشتق يې عبارت دی له:

$$y = \text{Log}_e^{u^n} = (\text{Log}_e^{u^n})' = \frac{n u^{n-1} u'}{v^n} = \frac{nu'}{u}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{nu'}{u}$$

مثال: د لاندې معادلې مشتق پیدا کړئ:

$$y = \text{Log}(10x^3 \cdot 5x^2 + 6x)^2$$

$$u = 10x^3 \cdot 5x^2 + 6x$$

$$u'(x) = 30x^2 + 10x + 6$$

$$y'(x) = \frac{n u' u^{n-1}}{v^n} = \frac{nu'}{u} =$$

$$y'(x) = \frac{2(30x^2 + 10x + 6)(10x^3 \cdot 5x^2 + 6x)}{(10x^3 \cdot 5x^2 + 6x)^2} = \frac{60x^2 + 20x + 12}{(10x^3 \cdot 5x^2 + 6x)^2}$$

$$y'(x) = \frac{2(30x^2 + 10x + 6)}{2(5x^3 + 2.5x^2 + 3x)^2} = \frac{30x^2 + 10x + 6}{5x^3 + 2.5x^2 + 3x}$$

### د ضمني توابعو مشتق

هر کله چې د  $x$  او  $y$  متحولین د  $y=f(x)$  را بڼې پواسطه له یو بل سره رابطه ولري، په دې صورت کې  $y$  صریح تابع د  $x$  متحول ده، ولې ممکنه ده چې د  $x$ ،  $y$  تر منځ ارتباط د  $f(x,y)=0$  رابطې پواسطه معین یا ټاکلی وي، په دې حالت کې ویل کېږي، چې  $y$  ضمني تابع د  $x$  وي لکه  $x^2 + y^2 - r^2 = 0$  معادله چې دوه صریح تابع  $y = \sqrt{r^2 - x^2}$  او  $y = -\sqrt{r^2 - x^2}$  افاده کوي او پورته معادله د ذکر شویو توابعو ضمني حالت دی. د ضمني توابعو د مشتق پیدا کولو په خاطر  $y$  نظر  $x$  متحول ته د ټاکلې معادلې دواړو خواو ته نظر  $x$  ته مشتق نیسو، داسې چې  $y$  متحول د  $x$  تړلې تابع فرض کېږي او په نهایت کې د  $y$  تابع مشتق نظر  $x$  متحول ته عبارت دی له:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f'(x)}{f'(y)}$$

که  $y$  ثابت فرض شي  $f'(x)$  د  $f$  مشتق نظر  $x$  متحول ته دی، که  $x$  ثابت فرض شي  $f'(y)$  د  $f$  مشتق نظر  $y$  متحول دی.

مثال: د  $y$  مشتق نظر  $x$  ته له  $x^2 + y^2 - r^2 = 0$  ضمني تابع په لاس راوړئ!

حل:

$$(x^2 + y^2 - r^2)' = 2x + 2yy' = 0$$

$$\Rightarrow 2yy' = -2x \Rightarrow y' = -\frac{2x}{2y} \Rightarrow y' = -\frac{x}{y}$$

دویم مثال-

$$y^6 - y - x^2 = 0$$

$$(y^6 - y - x^2)' = 6y^5y' - y' - 2x = 0$$

$$\Rightarrow 6y^5y' - y' = 2x \Rightarrow y'(6y^5 - 1) = 2x \Rightarrow y' = \frac{2x}{6y^5 - 1}$$

درېیم مثال- د  $y^4 - y - x^2 = 0$  تابع مشتق پیدا کړئ!

$$y^4 - y - x^2 = 0 \Rightarrow (y^4 - y - x^2)' = 0 \Rightarrow 4y^3y' - y' - 2x = 0$$

$$\Rightarrow 4y^3y' - y' = 2x \Rightarrow y'(-1) = 2x \Rightarrow y' = \frac{2x}{4y^3 - 1}$$

$$\Rightarrow (y^4 - y - x^2)' = \frac{2x}{4y^3 - 1}$$

بايد یادونه وشي، چې موږ کولای شو د لوگارتم په وسیله مشتق گپري وکړو، ځکه په ډېرو مواردو کې د توابعو مشتق له لوگارتم نه په گټه اخیستو محاسبه کېږي، داسې چې په پیل کې د  $y=f(x)$  رابطې دواړو خواوو ته طبعي لوگارتم نیسو

$$\text{Lny} = \text{Lnf}(x)$$

د پورته ذکر شوې رابطې دواړو خواوو ته د ضمني تابع په حیث کولای شو مشتق ونیسو،

داسې چې

$$(\text{Lny})' = \frac{1}{y}y' \Rightarrow \frac{y'}{y} = (\text{Lny})' \Rightarrow y' = y(\text{Lny})'$$

$$\Rightarrow y' = f(x) \cdot (\text{Lny})'$$

داچې  $y = f(x)$  دی

دویمه طریقه:

$$(Lnf(x))' \frac{f'(x)}{f(x)} \Rightarrow f'(x) = f(x) \cdot (Lnf(x))'$$

لومړی مثال: د  $y = x^{2x}$  مشتق د لوگارتم په مرسته محاسبه کړئ!

حل:

$$y = x^{2x}$$

$$Lny = Lnx^{2x} \Rightarrow Lny = 2x \cdot Lnx$$

$$(Lny)' = (2Lnx)' \Rightarrow \frac{y'}{y} = 2Lnx + 2x \cdot \frac{1}{x}$$

$$y' = y(2Lnx + 2) \Rightarrow y' = 2(Lnx + 1)y$$

$$y' = 2(Lnx + 1)x^{2x}$$

داچې  $y = x^{2x}$  په پورته معادله کې وضع کوو.دویم مثال- د  $y = v^u$  تابع مشتق لاسته راوړئ.

حل:

$$y = v^u \Rightarrow Lny = Lnv^u \Rightarrow (Lny)' = (uLnv)' \Rightarrow \frac{y'}{y} = u'Lnv + u(Lnv)'$$

$$\Rightarrow (u'Lnv + u \frac{v'}{v})y$$

$$y' = (u'Lnv + u \frac{v'}{v})v^u$$

د نسبتي توابعو مشتق د مشتق متحول

کله چې زموږ تابع یوه نسبتي تابع ورکړل شوې وي او د هغې مشتق پیدا کوو، د مشتق د پیدا کولو لپاره له لاندې قاعدې څخه گټه اخلو.

۱- که  $y = \frac{1}{x}$  تابع ورکړل شوې وي، مشتق یې عبارت دی له:

ثبوت:

$$y'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

$$y = \frac{1}{x} \Rightarrow y = x^{-1}$$

$$y'(x) = -1 \cdot x^{-1-1}$$

$$y'(x) = -x^{-2} \Rightarrow y'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

۲- که تابع  $y = \frac{1}{x^n}$  شکل ولری، مشتق یی عبارت دی له:

$$y = \frac{1}{x^n}$$

$$y' = \frac{-n}{x^{n+1}}$$

لومری مثال: د  $y = \frac{1}{x^{10}}$  تابع مشتق پیدا کری!

$$y = \frac{1}{x^{10}} = x^{-10} \quad y'(x) = \frac{-n}{x^{n+1}}$$

$$y'(x) = -10x^{-10-1} \Rightarrow y'(x) = -10x^{-11}$$

$$\Rightarrow y'(x) = \frac{-10}{x^{11}}$$

۳- که تابع  $y = \frac{1}{(x^3 + 2x^2 + 6)}$  وی د دارنگه توابعو مشتق عبارت دی له:

$$y = \frac{1}{u} \Rightarrow y' = \frac{-u'}{u^2}$$

$$y = \frac{1}{(x^3 + 2x^2 + 6)} \Rightarrow y' = \frac{-(3x^2 + 4x)}{(x^3 + 2x^2 + 6)^2}$$

۴- هر کله چې  $y = \frac{1}{x^n}$  تابع وی، د هغو توابعو مشتق عبارت دی له:

$$y'(x) = \frac{-nu'}{u^{n+1}}$$

مثال: د  $y = \frac{1}{(x^3 + 2x^2 + 6)}$  تابع مشتق محاسبه کری!

$$y = \frac{1}{(4x^5 + 6x^2 + 12)^2}$$

$$u = (4x^5 + 6x^2 + 12)$$

$$u'(x) = 20x^4 + 12x$$

$$y'(x) = \frac{-nu'}{u^{n+1}}$$

$$y'(x) = \frac{-12(20x^4 + 12x)}{(4x^5 + 6x^2 + 12)^3}$$



## دویم مشتقات او له هغې پورته

په پورته مثالونو کې موږ یواځې د ورکړل شوو توابعو اول مشتق د مشتق نیونې له روشونو نه په گټه اخیستو او د هغو د قاعدو په کارونې خپل سوالونه حل کړي او اوس د دویم مشتق د پیدا کولو لپاره او له هغې پورته هم له قاعدو څخه چې په پورته ذکر شوو توابعو کې د مشتق نیونې په خاطر ترې گټه اخیستل شوې وه هم دگټې اخیستو وړ گرځي، داسې چې مخکې ذکر شوي د تابع اول مشتق ورکړل شوی وي، د مربوطه منحنی په میلان کې له تغیر نه گټه اخیستل شوې او د دویم مشتق څخه د مربوطه منحنی په میلان کې گټه اخلو او په ورکړل شوې تابع کې دویم مشتق د تغیر درجه ښيي.

د مثال په توگه: که یوه تولیدي تابع ورکړل شوې وي د دې تابع لومړی مشتق په مجموعي تولید کې نسبي تغیر ښيي، چې د نهایي تولید یا مؤلديت په نوم یادېږي او د ذکر شوې تابع دویم مشتق په مؤلديت کې زیاتوالی ښيي.

$$y = 4x^2 + 12x$$

$$y' = 8x + 12$$

$$y'' = 8$$

د  $y = 4x^2 + 12x$  تابع د مشتق غونډې یې محاسبه کړئ!

او همدارنگه باید وویل شي چې د یوې تابع مشتق د یوې نوې تابع په حیث کېدای شي د مشتق نیونې وړ وي، د تابع د مشتق دویمه مرتبه مشتق نومېږي او په همدې ډول تابع کېدای شي څو ځلې او حتی لایتناهي ځلې د مشتق نیونې وړ وي او دارنگه مشتقات په لاندې ډول ښودل کېږي.

$$y = f(x) \quad \text{تابع}$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = f'(x) \quad \text{لومړی مشتق}$$

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = f''(x) \quad \text{دویم مشتق}$$

$$y''' = \frac{d^3y}{dx^3} = f'''(x) \quad \text{درېیم مشتق}$$

$$y^{(n)} = \frac{d^ny}{dx^n} = f^{(n)}(x) \quad \text{n ام مشتق}$$

مثال: د لاندې توابعو اول، دویم، درېیم او څلورم مشتق لاسته راوړئ!

$$a) y = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$y' = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$y'' = 6ax + 2b$$

$$y''' = 6a$$

$$y^{(4)} = 0$$

$$b) y = 2x^4 + 5x^3 + 6x^2 + 2x + 12$$

$$y' = 8x^3 + 15x^2 + 12 + 2$$

$$y'' = 24x^2 + 30x + 12$$

$$y''' = 8x + 30$$

$$y^{(4)} = 48$$

$$y^{(5)} = 0$$

$$c) \begin{cases} y = \sin x, y' = \cos x \\ y'' = -\sin x, y''' = -\cos x \\ y^{(4)} = \sin, \dots \end{cases}$$

$$c) y = 6x^5 + 4x^3 + 5x^2 + 10x + 6$$

$$y' = 30x^4 + 12x^2 + 10x + 10$$

$$y'' = 120x^3 + 24x + 10$$

$$y''' = 360x^2 + 24x$$

$$y^{(4)} = 720x + 24$$

$$y^{(5)} = 720$$

$$y^{(6)} = 0$$

د دویمو او له هغې نه د پورته مشتق قواعد هر کله چې د  $u$  او  $v$  توابع د  $n$  ام ځلې مشتقاتو لرونکې وي نو:

$$1) (\lambda u(x))^{(n)} = \lambda u^{(n)}(x)$$

$$2) (u + v)^{(n)} = u^{(n)} + v^{(n)}$$

$$3) (u.v)' = uv' + v'u$$

$$4) (u.v)'' = u''v + 2u'v' + uv''$$

$$5) (u.v)''' = u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + uv'''$$

$$6) (u.v)^{(4)} = u^{(4)}v + 4u'''v' + 6u''v'' + 4u'v''' + uv^{(4)}$$

$$(u.v)^{(n)} = u^{(n)}v + \binom{n}{1}u^{(n-1)}v' + \binom{n}{2}u^{(n-2)}v'' + \binom{n}{3}u^{(n-3)}v''' + \dots + uv^{(n)}$$

مثال: دویم مشتق له  $y = e^{ax} \cdot x^2$  تابع خخه په لاس راوړئ!

$$y = e^{ax} \cdot x^2$$

$$y' = (e^{ax})' \cdot x^2 + e^{ax} (x^2)' = ae^{ax} \cdot x^2 + 2e^{ax} \cdot x$$

$$y'' = (e^{ax})'' \cdot x^2 + 2(e^{ax})' \cdot (x^2)' + e^{ax} (x^2)''$$

$$y'' = a^2 e^{ax} \cdot x^2 + 4ae^{ax} \cdot x + 2e^{ax}$$

$$\Rightarrow y = e^{ax} \cdot x^2 \Rightarrow y'' = a^2 e^{ax} \cdot x^2 + 4ae^{ax} \cdot x + 2e^{ax}$$

## د دویم څپرکي پوښتنې

له قاعدو نه په گټه اخیستو سره د لاندې توابعو مشتق پیدا کړئ!

1)  $f(x) = x^4$

4)  $y = \sqrt{x}$

2)  $f(x) = 3x + 4$

5)  $f(x) = \frac{1}{8}x^8 + 3x^4 - 8$

3)  $y = \frac{1}{x^{10}}$

6)  $f(x) = 2x^5 - 8x^3$

له تعریف نه په گټه اخیستو د لاندې توابعو مشتق لاسته راوړئ!

7)  $y = 2x^3 + 4$

11)  $f(x) = \frac{1}{x}$

8)  $f(x) = x^3 - 9$

12)  $f(x) = \sqrt[3]{x}$

9)  $h(x) = x^4$        $h'(x) = ?$

13)  $f(x) = \frac{1+x}{1-x}$

10)  $f(x) = 4x^2 - 6$

د لاندې الجبري توابعو مشتق په لاس راوړئ!

14)  $y = x^3 + 2x^2 + 3x + 4$

18)  $y = \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$

15)  $y = x^4 + 3x^2$

19)  $y = \sqrt{6x+8}$

16)  $f(x) = \sqrt{x^2+1}$

17)  $y = \frac{x}{\sqrt{2x-1}}$

د مثلثاتي توابعو مشتقات لاسته راوړئ!

20)  $y = 2\sin x - 3\cos x$

26)  $y = \text{Log} x$

21)  $y = 4\cos^2 x$

27)  $y = \text{Log}(3x+1)$

22)  $y = 2\sin^3 x$

28)  $y = \text{Ln}(x^3 + x^2)$

23)  $y = \tan x + \cot x$

24)  $y = 2x \tan x$

25)  $y = 2x \cot x$

د لاندې توابعو مشتق د لوگارتم په مرسته پیدا کړئ!

29)  $y = x^{x^3}$

34)  $y = \text{Ln}(x^2 + 2)$

30)  $y = x^{\sin x}$

35)  $4x^3 + 4x^2$

31)  $y = (1+x)^3(2x+1)^2(9x-9)$

36)  $y = 5x^2 + 6x$

32)  $y = \text{Log}(\sin 3x)$

37)  $y = x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 5x$

33)  $y = \text{Log} 4x$

### قسمي، ترکیبي او کلي مشتق نیونه

#### ټولیزه موخه

لوستونکي به په سمه توګه قسمي، ترکیبي او کلي مشتق نیونه درک کړي او له اصولو او قواعدو به سمه ګټه واخلي.

د زده کړې موخې: د دې څپرکي په پای کې به لوستونکي:

- ۱- مشتق تعریف او اړونده سوالونه حل کړای شي.
- ۲- قسمي مشتقات تعریف او قواعد یې درک کړي.
- ۳- دویم قسمي مشتقات تعریف او قواعد یې درک کړي.
- ۴- کلي مشتقات تعریف او د هغې مربوطه سوالونه حل کړي.
- ۵- له قسمي، دویم قسمي مشتقاتو نه ګټه اخیستل او د مشتقاتو حل به لوستونکي درک کړي او د هغې په کارونه به پوه شي.

#### قسمي مشتقات

څو متحوله تابع او قسمي مشتقات د اقتصادي ریاضي له مهمو او اساسي مسایلو څخه دي، تر اوسه مو د توابعو مفاهیم، لمټ او مشتق مطالعه کړل، چې یواځې د یو مستقل متحول لرونکي وو، یعنې توابعو په عمومي توګه  $y=f(x)$  شکل درلود.

د دارنګه توابعو د مشتق له قیمت نه په ګټه اخیستو یا یو د مشتق له قواعدو څخه ګټه اخلو مشتق یې پیداوو او اوس هغه توابع تر مطالعې لاندې نیسو، چې امکان لري په ځینو حالاتو کې یو تابع د یوه تړلي متحول د دوه او یا څو مستقلو متحولونو په عوض وي، یعنې  $u=f(x,y)$  او  $u=f(x,y,z)$  او نور چې دارنګه تابع دوه متحوله، درې متحوله او نور نومېږي.

مثلاً:

$$1) z = 4x + 6y - 10$$

$$2) z = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

$$3) u = 2x^2 - y^2 + xyz + 3z^2$$

$$4) z = f(x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_n)$$

د (۱) او (۲) سوالونو په اړه د  $z$  تابع دوه متحوله او ۳ د  $u$  تابع درې متحوله او ۴ مثال باید وویل شي، چې په دې ځای کې  $z$  د تابع متحول ( $x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_n$ ) مستقل متحولین وي او د څو متحوله تابع مشتق له متحولینو څخه یوه ته په کتو په داسې حال کې ډېر له هغې څخه ثابت عددونه فرض شي نظر هماغه متحول ته په کتو د تابع د قسمي مشتق په نوم یادېږي او څو متحوله توابع کېدای شي د بیلابیلو مرتبو د قسمي مشتقاتو لرونکې نظر هر مربوط متحول ته وي، داچې د دوه متحوله تابع قسمي مشتقات  $z=f(x,y)$  په لاندې ډول لیکو

$$\frac{dz}{dx} = f'_x(x, y)$$

$$\frac{dz}{dy} = f'_y(x, y)$$

همدارنگه د  $z$  قسمي مشتقات نظر  $x_1$  ته نیسو، نظر  $x_2$  او اخر  $x_3$  پیدا کوو، لرو چې:

$$\frac{dz}{dx_1 f(x_1)} = zx_1 \Rightarrow f(x_1)$$

$$\frac{dz}{dx_2 f(x_2)} = zx_2 \frac{dz}{dx_3 f(x_3)} = zx_3$$

لومړی مثال- قسمي مشتقات یې پیدا کړئ!

$$z = 6x^2 + 8xy + 6y^2$$

$$\frac{dz}{dx} = 12x + 8y$$

$$\frac{dz}{dy} = 8x + 12y$$

دویم مثال: قسمي مشتق يې پيدا کړئ!

$$z = 6x^{12}y^8 + 4x^2y + 24xy^2$$

$$\frac{dz}{d(x)} = zx = 72x^{11}y^8 + 4xy + 24y^2$$

$$\frac{dz}{d(y)} = zy = 48x^{12}y^7 + 4x^2 + 48xy$$

درېيم مثال: قسمي مشتقات يې پيدا کړئ چې:

$$z = \frac{4x^2}{3y^2}$$

$$zx = \frac{8x(3y^2) - 0(4x^2)}{(4y^2)^2} = \frac{24xy^2}{16y^4}$$

خلورم مثال:

$$z = 4x^3y^3 + 12x^2y^2 + 4y^4$$

$$\frac{dz}{dx} = zx = 12x^2y^3 + 24xy^4$$

$$\frac{dz}{dy} = zy = 12x^3y^2 + 24x^2y + 16y^3$$

پنځم مثال- د درې متحوله تابع قسمي مشتقات په لاندې ډول دي:

$$u = x^2y^2z + 4x - 2y + z + 6$$

$$\frac{du}{dx} = 2xy^2z + 4$$

$$\frac{du}{dy} = 2x^2yz - 2$$

$$\frac{du}{dz} = x^2y^2 + 1$$

شپږم مثال- د  $f(x,y) = x^2y - 5xy^2 + 4xy$  تابع قسمي مشتق په لاندې ډول دي:

$$f(x) = \frac{du}{dx} = 2xy - 5y^2 + 4y$$

$$\frac{df}{dy} = f(y) = x^2 - 10xy + 4x$$

دویم قسمي مشتقات او ترکیبي مشتقات

۱- دویم قسمي مشتقات: کله چې وغواړو اول قسمي مشتقونه د دویم ځل لپاره نظر هماغه متحول ته مشتق ونیسو د ذکر شوې تابع قسمي دویم مشتقونه نظر هماغه متحول ته په لاس راځي، دویم قسمي مشتقات په تابع کې له تغیر څخه عبارت دي نظر په وارد شوي تغیر په مستقل متحول کې يې تر بحث لاندې نیسو.

۲- ترکیبی مشتقات: که موږ قسمي مشتقات نظر x متحول ته یو ځل بیا نظر y متحول

مشتق و نیسو، ویلای شو چې د تابع ترکیبی مشتق په لاس راغلی.

او هر کله چې د  $f(x,y)$  تابع په  $(x,y)$  نقطه کې له تعریف ناحیې څخه د قسمي مشتقاتو لرونکې وي د  $\frac{\partial f}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial x}$  مشتقات هم توابع د x او y دي او کېدای شي د لاندې قسمي مشتقاتو لرونکې وي.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{xy}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{yx}$$

که  $f_{xy}$ ,  $f_{yx}$  توابع متمادي وي په هغه صورت کې  $f_{xy} = f_{yx}$  دی.

لومړی مثال: د لاندې تابع اول قسمي مشتقات، دویم او ترکیبی مشتق پیدا کړئ!

$$z = 6x^2 + 8xy - 8y^2$$

$$z_x = 12x + 8y$$

$$z_{xx} = 12x$$

$$z_y = 8x - 16y$$

$$z_{yy} = -16$$

$$z_{xy} = 8$$

$$z_{yx} = 8$$

ترکیبی مشتق

دویم مثال- دوه متحوله تابع  $z = x^4 y^3 + 3x^2 y^2 - 2xy + 2$  محاسبه کړئ!

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4x^3 y^3 + 3xy^2 - 2y$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 12x^2 y^3 + 6y^2$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 12x^3 y^2 + 12xy - 2$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 3x^4 y^2 + 6xy - 2x$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6x^2 y + 6x^2$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 12x^3 y^2 + 12xy - 2$$



په پورته مثال کې لیدل کېږي چې  $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$  دی

درېیم مثال- د  $z = x^2 y + y^3$  تابع اول او دویم ځلي مشتقات دا رنگه پیداوو.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 3y^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2x \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 2x$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 2x$$

څلورم مثال- فرض کړئ چې د یوې تصدی د تولید تابع د لاندې شکل لرونکې وي.

$$Q = Ak^{\frac{1}{4}} L^{\frac{3}{4}}$$

د تولید مجموعي مقدار دی.

وسطی تولید د  $k$  په ارتباط

$$\Rightarrow Q = A \left( \frac{L}{K} \right)^{\frac{3}{4}}$$

$$Q = \frac{Q}{L} Ak^{\frac{1}{4}} \frac{L^{\frac{3}{4}}}{L} =$$

$$= Ak^{\frac{1}{4}} L^{-1} L^{\frac{3}{4}} = Ak^{\frac{1}{4}} L^{-\frac{1}{4}} = A \left( \frac{L^{\frac{3}{4}}}{K^{\frac{1}{4}}} \right)$$

$$= A \cdot \frac{k^{\frac{1}{4}}}{L^{\frac{1}{4}}} = A \left( \frac{K}{L} \right)^{\frac{1}{4}}$$

$A$  د تکنالوجۍ ضریب  $k$  د تولید عامل لکه د تولید د وسایلو پانگه د تولید بل عامل، لکه کار او طاقت  $k$  او  $L$  نه یواځې د تولید د عواملو نمایندګي کوي، بلکې د عاید په توزیع کې هم ترې ګټه اخیستل کېږي، لاندې مطالب هدف دی.

۱- تولید یا د تولید د عواملو وسطي مؤلديت.

۲- نهايي توليد يا د توليد د عواملو نهايي توليد.

۳- په توليد کې د تغير درجه يا د عواملو مؤلديت.

۴- په نهايي مؤلديت کې د تغير درجه يو له عواملو ده، که چېرې په يوه وخت تغير وکړي.

نوټ:

$$Q = A.k^{\frac{1}{4}}.L^{\frac{3}{4}}$$

L= کارگر

K= ماشين

Q= توليد

د لومړي جز ځواب:

$$Q = \frac{Q}{K} = A.k^{\frac{1}{4}}.L^{\frac{3}{4}} / K =$$

$$= A.k^{\frac{1}{4}}.K^{-1}.L^{\frac{3}{4}} = A.k^{\frac{-3}{4}}.L^{\frac{3}{4}} = A\left(\frac{L^{\frac{3}{4}}}{K^{\frac{3}{4}}}\right)$$

د هغې حل په صفحه مخامخ ليکل شوی.

د L په ارتباط وسطي توليد

۲- نهايي توليد: مخکې له دې چې دويم جز حل کړو، نهايي توليد دا رنگه تعريفوو:

نهايي توليد د مجموعي توليد په مقدار کې له هغه تغير څخه عبارت دی، چې د يو وا حد تغير په اثر په مربوطه عامل کې منځ ته راځي، خو که چېرې زيات عوامل ثابت پاتې وي.

د رياضي له مخې د توليد د تابع له قسمي مشتق څخه عبارت نظر د K په څېر عامل ته که چېرې بل عامل په تابع کې پاتې شوی وي.

يعنې:

د درېیم جز ځواب.

$$\begin{aligned} \frac{dQ}{dQ} = Q_k &= \frac{1}{4} AK^{\frac{1}{4}-1} \cdot L^{\frac{3}{4}} \\ &= \frac{1}{4} AK \cdot \frac{3}{4} L^{\frac{3}{4}} = \frac{1}{4} A \left( \frac{L^{\frac{3}{4}}}{K^{\frac{3}{4}}} \right) = \frac{A}{4} \left( \frac{L}{K} \right)^{\frac{3}{4}} \\ \frac{dQ}{dL} = Q_L &= \frac{3}{4} AK^{\frac{1}{4}} L^{\frac{3}{4}-1} = \frac{3}{4} AK^{\frac{1}{4}} \cdot L^{-\frac{1}{4}} \\ &= \frac{3}{4} A \cdot K^{\frac{1}{4}} / \frac{L^{\frac{3}{4}-1}}{L^{\frac{3}{4}}} = \frac{3}{4} A \left( \frac{K}{L} \right)^{\frac{1}{4}} \\ Q_K &= \frac{1}{4} AK^{-\frac{3}{4}} \cdot L^{\frac{3}{4}} \\ Q_{KK} &= -\frac{3}{4} \left( \frac{1}{4} \right) AK^{-\frac{3}{4}-1} \cdot L^{\frac{3}{4}} = -\frac{3}{4} \left( \frac{1}{4} \right) AK^{-\frac{7}{4}} \cdot L^{\frac{3}{4}} \\ &= -\frac{3}{16} AK^{-\frac{7}{4}} \cdot L^{\frac{3}{4}} = -\frac{3}{16} A (K^{-\frac{7}{4}} \cdot L^{\frac{3}{4}}) = -3AL^{\frac{3}{4}} / 16K^{\frac{7}{4}} \\ \Rightarrow Q_{KK} &= -\frac{3A}{16} \left( \frac{L^{\frac{3}{4}}}{K^{\frac{7}{4}}} \right) \\ Q_L &= \frac{3}{4} AK^{\frac{1}{4}} \cdot L^{-\frac{1}{4}} \\ Q_{LL} &= -\frac{1}{4} \left( \frac{3}{4} \right) AK^{\frac{1}{4}} \cdot L^{-\frac{1}{4}-1} = -\frac{1}{4} \left( \frac{3}{4} \right) AK^{\frac{1}{4}} \cdot L^{-\frac{5}{4}} \\ &= -\frac{3}{16} AK^{\frac{1}{4}} / \frac{L^{\frac{5}{4}}}{L^{\frac{5}{4}}} \end{aligned}$$

د څلورم جز ځواب

د تابع ترکیبي مشتق دا رنگه پیدا کوو، دا چې ترکیبي مشتق مثبت وي په دې دلالت کوي، چې په نهایي مؤلديت کې تغیر او ټول عوامل د متحول مربوط وي، مثبت دي فلهاذا مخ په زیاتېدو دي.

$$\begin{aligned}
 Q_K &= \frac{1}{4} AK^{\frac{-3}{4}} L^{\frac{3}{4}} \\
 Q_L &= \frac{3}{4} AK^{\frac{1}{4}} L^{\frac{-1}{4}} \\
 Q_{KL} &= \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right) AK^{\frac{-3}{4}} L^{\frac{3}{4}-1} = \frac{3}{16} AK^{\frac{-3}{4}} L^{\frac{-1}{4}} \\
 &= \frac{3A}{16} AK^{\frac{3}{4}} L^{\frac{1}{4}} \\
 Q_{KL} &= \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right) K^{\frac{1}{4}-1} L^{\frac{-1}{4}} = \frac{3}{16} AK^{\frac{-3}{4}} L^{\frac{-1}{4}} \\
 &\Rightarrow = \frac{3A}{16K^{\frac{3}{4}} L^{\frac{1}{4}}}
 \end{aligned}$$

پنجم مثال- هر کله چې د  $Q = 4K^{\frac{1}{3}} L^{\frac{2}{3}}$  تصدی د تولید تابع وي.

۱- د K او L عامل وسطي تولید محاسبه کړئ!

۲- نهايي تولید يې محاسبه کړئ!

۳- په تولید کې د تغیر درجه محاسبه کړئ!

۴- په نهايي مؤلديت کې د تغیر درجه محاسبه کړئ!

وسطي تولید عامل L د  $\frac{Q}{K} = 4K^{\frac{1}{3}} L^{\frac{2}{3}} / K$  د k عامل وسطي تولید

$$= 4K^{\frac{1}{3}-1} L^{\frac{2}{3}} = 4K^{\frac{-2}{3}} L^{\frac{2}{3}} = 4L^{\frac{2}{3}} / K^{\frac{2}{3}}$$

$$\Rightarrow = 4\left(\frac{L}{K}\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$= \frac{Q}{L} = 4K^{\frac{1}{3}} \cdot L^{\frac{2}{3}} / L = 4K^{\frac{1}{3}} L^{-\frac{1}{3}}$$

$$= 4K^{\frac{1}{3}} L^{-\frac{1}{3}} = 4K^{\frac{1}{3}} / L^{\frac{1}{3}} \Rightarrow QL = 4\left(\frac{K}{L}\right)^{\frac{1}{3}}$$

## د دویم جز خواب تر کیبی مشتق

$$Q = 4K^{\frac{1}{3}}L^{\frac{2}{3}}$$

$$\frac{dQ}{dK} = 4\left(\frac{1}{3}\right)K^{\frac{1}{3}-1}L^{\frac{2}{3}} = \frac{4}{3}K^{-\frac{2}{3}}L^{\frac{2}{3}}$$

$$QK = \frac{4}{3}L^{\frac{2}{3}} \bigg/ \frac{K^{\frac{2}{3}}}{K^{\frac{2}{3}}} = \frac{4}{3}\left(\frac{L}{K}\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$QK = \frac{4}{3}\left(\frac{L}{K}\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$Q = 4K^{\frac{1}{3}}L^{\frac{2}{3}}$$

$$\frac{dQ}{dL} = \frac{2}{3}(4)K^{\frac{1}{3}}L^{\frac{2}{3}-1} = \frac{8}{3}K^{\frac{1}{3}}L^{-\frac{1}{3}}$$

$$= \frac{8}{3}\left(K^{\frac{1}{3}} \bigg/ L^{\frac{1}{3}}\right) = \frac{8}{3}\left(\frac{K}{L}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\Rightarrow QL = \frac{8}{3}\left(\frac{K}{L}\right)^{\frac{1}{3}}$$

## د درېیم جز خواب

$$QK = \frac{4}{3}K^{-\frac{2}{3}}L^{\frac{2}{3}}$$

$$QL = \frac{8}{3}K^{\frac{1}{3}}L^{-\frac{2}{3}}$$

$$QKK = \frac{4}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)K^{-\frac{2}{3}-1}L^{\frac{2}{3}} = -\frac{8}{9}K^{-\frac{5}{3}}L^{\frac{2}{3}}$$

$$QKK = -8L^{\frac{2}{3}} / 9K^{\frac{5}{3}}$$

$$QLL = \frac{8}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)K^{\frac{1}{3}}L^{-\frac{2}{3}-1} = -\frac{8}{3}K^{\frac{1}{3}}L^{-\frac{4}{3}} = -8K^{\frac{1}{3}} \bigg/ 9L^{\frac{4}{3}} = QLL = \frac{-8K^{\frac{1}{3}}}{9L^{\frac{4}{3}}}$$

$$QK = \frac{4}{3}K^{-\frac{2}{3}}L^{\frac{2}{3}}$$

$$QKL = \frac{2}{3}\left(\frac{4}{3}\right)K^{-\frac{2}{3}}L^{\frac{2}{3}-1} = \frac{8}{9}K^{-\frac{2}{3}}L^{-\frac{1}{3}}$$

$$QL = \frac{8}{3}K^{\frac{1}{3}}L^{-\frac{2}{3}}$$

$$QLK = \frac{1}{3}\left(\frac{8}{3}\right)K^{\frac{1}{3}-1}L^{-\frac{2}{3}} = \frac{8}{3}K^{-\frac{2}{3}}L^{-\frac{1}{3}}$$

بايد وويل شي چې د ترکيبي مشتقونو ضريونه مثبت دي، فلهاذا تابع مخ په زياتېدو ده.

### کلي مشتقات

په قسمي مشتق نيونه کې مو د تابع مشتق، نظر يوه متحول ته نيوه او نور متحولونه مو ثابت فرض کړل.

ولې په کلي مشتق نيونه کې ټول متحولونه په يو وخت تغير کوي، د مشتق نيونې په مبحث کې مو وليدل چې که  $y=f(x)$  تابع وي.

او د هغې تابع مشتق  $\frac{dy}{dx}=f(x)$  شکل لري او که د معادلې دواړه خواوې په  $dx$  ضرب کړو معادله لاندې شکل غوره کوي  $dy=f(x)dx$  چې دا افاده د کلي مشتق مفهوم لري ، کلي مشتق نيونه هغه وخت د بحث وړ کېږي، چې تابع د څو مستقو متحولينو لرونکې وي او موږ په خپل ځای کې توابع تر مطالعې لاندې نيسو.

چې د دوه ډوله مستقو متحولينو لرونکې وي او د دې توابعو کلي مشتق عبارت دی د تابع له قسمي مشتقاتو د ضرب د حاصل له مجموعې سره او د هغې په مربوطه متحول کې د وارد شوي تغير سره.

فرضاً که تابع لاندې شکل ولري  $y = f(u, v, w)$  چې په هغې کې  $u, v, w$  د بل متغیر تابع لکه د  $x$  ده، چې مرکبه تابع نومېږي او د دارنگه توابعو مشتق عبارت دی له:

$$y' = f'u_{.ux} + f'v_{.vx} + f'w_{.wx}$$

يا په بل عبارت

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial w} \cdot \frac{\partial w}{\partial x}$$

يا په بل عبارت په اقتصادي مسايلو کې هغه وخت بې نهايت ارزښت لري او په  $t$  ښودل کېږي، کولای شو له دې فورمول نه گټه واخلو، يعنې که  $u=f(x,y,z)$  په داسې حال کې چې  $z, y, x$  توابع له  $t$  متحول څخه

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt}$$

او که د مرکبو توابعو مشتق د دوه ميانجي مستقل متحولونو لرونکی وي .  $Z=f(u,v)$  په داسې حال کې چې  $u=f(x,y)$  او  $v=Q(x,y)$  وي  $x, y$  مستقل وي؛ نو د  $z$  تابع مشتقات نظر  $x$  او  $y$  متحول ته عبارت دي له:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}$$

لومړی مثال: د لاندې مرکبې تابع مشتق محاسبه کړئ!

دا چې

$$y = 2u^2 - 4uv - 5v^2$$

$$u = 2x^2 - 2x$$

$$v = x^3 + x$$

$$u'x = 4x - 2$$

$$v'x = 3x^2 + 1$$

$$y' = 4uu' - 4u'v - 4uv' - 10vv'$$

$$y' = 4(2x^2 - 2x)(4x - 2) - 4(4x - 2)(3x^2 + 1)$$

$$- 4(2x^2 - 2x)(3x^2 + 1) - 10(x^3 + x)(3x^2 + 1)$$

دویم مثال: وښایئ چې  $z = \varphi(x^2 + y^2)$  تابع لاندې معادله صدق کوي!

$$y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

حل: د  $\varphi$  تابع (فی) د دوه مستقلو متحولو  $x$  او  $y$  د میانجی متحول په واسطه  $t = x^2 + y^2$  وي نو:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial x} = \varphi'(x^2 + y^2) 2x$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial y} = \varphi'(x^2 + y^2) 2y$$

$$\Rightarrow y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y}$$

$$\Rightarrow \varphi'(x^2 + y^2) 2xy - \varphi'(x^2 + y^2) 2xy = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

باید یادونه وشي چې اقتصادي ریاضي تر ډېره له پخوا راهسې له اقتصادي مسایلو تولید، عرضه، تقاضا، توزیع، متاع، اجناس، وخت، کار او نورو سره سروکار لري، له دې سببه

د توابعو د کلي مشتق د پیدا کولو لپاره له لاندې فورمول نه ډېره گټه اخیستل کېږي او فورمول په لاندې شکل تشریح کوو، فرضاً که تابع د لاندې شکل لرونکې وي.

$$z = f(x, y)$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dx} \cdot dx + \frac{dz}{dy} \cdot dy \dots I$$

$$dz = zx \cdot dx + zy \cdot dy \dots I$$

۱- که تابع د تابع تابع شکل ولري، دا چې  $z$  د تابع په اوله مرحله کې د  $(x, y)$  متحول وي او په دویمه مرحله کې یو له مستقلو متحولو څخه تابع د بل مستقل متحول وي لکه  $z = f(x, y)$  داسې، چې  $y = f(x)$  وي په دې مرحله کې  $z$  کلي مشتق نظر  $x$  ته او  $\frac{dz}{dx}$  محاسبه کېږي او د  $I$  معادلې دواړه خواوې په  $dx$  تقسیموو، معادله لاندې شکل اختیاري وي.

$$\frac{dz}{dx} = zx \cdot \frac{dx}{dx} + zy \cdot \frac{dy}{dx} \dots 1$$

$$\frac{dz}{dx} = zx + zy \frac{dy}{dx} \dots 2$$

۲- که  $z = f(x, y)$  وروسته د  $x$  له له طریقه یواځې د  $y$  تابع وي، د  $z$  کلي مشتق نظر  $Y$  ته دارنگه محاسبه کېږي، یعنې  $\frac{d}{dz}$  او په اول قدم کې  $z = f(x, y)$  وروسته  $x = f(y)$  اوس د  $I$  معادلې دواړه خواوې په  $dy$  تقسیموو، معادله لاندې شکل اختیاري وي.

$$\frac{dz}{dy} = zx \frac{dx}{dy} + zy \frac{dy}{dy}$$

$$\frac{dz}{dy} = zx \frac{dx}{dy} + zy \dots 3$$

۳- په درېیم حالت کې کولای شي د  $z$  تابع اول د  $y, x$  تابع او دویم د  $y, x$  له طریقه هر یو د بل متحول وي، دا چې په اقتصادي مسايلو کې د  $(t)$  وخت عامل اساسي رول لري، په دې حالت کې  $z$  د  $y, x$  تابع او وروسته د  $y, x$  له طریقه د  $t$  تابع وي لکه:

$$z = f(x, y) \text{ و } X = f(t)$$

$$Y = f(t)$$

دا چې د  $z$  کلي مشتق نظر  $t$  ته عبارت له  $\frac{dz}{dt}$  محاسبه کېږي د  $I$  معادلې دواړه خواوې په  $dt$  تقسیموو اول فورمول لاندې شکل غوره کوي.



$$\frac{dz}{dt} = \frac{dz}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{dz}{dt} = zx \cdot x(t) + zy \cdot y(t)$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dt} = zx \cdot \frac{dx}{dt} + zy \cdot \frac{dy}{dt} \dots\dots\dots 4$$

**درېم مثال:** د  $z = 6x^{\frac{2}{3}} \cdot y^6$  تابع کلي مشتق محاسبه کړئ!

**حل:** اول فورمول ته په کتو لرو چې :

$$z = 6x^{\frac{2}{3}} \cdot y^6$$

$$dz = zx dx + zy \cdot dy$$

$$dz = \left(\frac{2}{3}\right)(6)(x^{\frac{2}{3}-1} y^6) dx + (36)(x^{\frac{2}{3}} y^5) dy$$

$$dz = \left(\frac{12}{6}\right)(x^{-\frac{1}{3}} y^6) dx + (36)(x^{\frac{2}{3}} y^5) dy$$

$$dz = (2x^{-\frac{1}{3}} y^6) dx + (36)(x^{\frac{2}{3}} y^5) dy$$

**څلورم مثال:** فرض کوو چې د یوه کارگر د عاید تابع عبارت له  $z = 9x^2 y^2$  څخه وي، په دې تابع کې  $z$  خالص عاید  $x$  د کارگر د ورځې کار  $y$  د فی ساعت کار مزد او لکه څنګه چې فرض کوو، چې د فی ساعت کار مزد د تابع تابع د کارگر د کار د ساعت اندازه وي  $y = x^2 + 3x - 1$  په دې حالت کې د کارگر د تابع کلي مشتق پیدا کړئ (د کار گر په عاید کې تغیر په  $y$  او  $x$  کې د وارد شوي تغیر په اثر یعنې کار په ساعت کې او د فی ساعت کار مزد) خو دی.

**حل:** فورمول ته په کتو لرو چې:

$$\frac{dz}{dx} = zx + zy \frac{dy}{dx}$$

$$z = 9x^2 y^2 \quad \frac{dz}{dx} = 18xy^2 + 18x^2 y(2x + 3)$$

$$y = x^2 + 3x - 1 = 18xy^2 + 36x^3 y + 54x^2 y$$

$$zx = 18xy^2$$

$$zy = 18x^2 y \frac{dy}{dx} = 18xy(y + 2x^2 + 3x)$$

$$\frac{dy}{dx} = y' = 2x + 3$$

۱- د  $y$  قیمت په لاسته راغلي ځواب کې وضع کوو

$$\frac{dz}{dx} = 18xy^2 + 36x^3y + 54x^2y$$

$$\frac{dz}{dx} = 18(x^2 + 3x - 1) + 36x^3(x^2 + 3x - 1) + 54x^2(x^2 + 3x - 1)^2$$

$$= 18(x^2 + 3x - 1)^2(x^2 + 3x - 1) + 36x^3 + 108x^4 - 36x^3 + 54x^4 + 162x^3 - 54x^2$$

$$= 18x(x^4 + 3x^3 - x^2 + 3x^5 + 9x^2 - 3x - x^2 - 3x + 1) + 36x^5 + 162x^4 + 126x^3 - 54x^2$$

$$= 18x(x^4 + 6x^3 + 7x^2 - 6x + 1) + 36x^5 + 162x^4 + 126x^3 - 54x^2$$

$$= 18x^5 + 108x^4 + 126x^3 - 108x^2 + 18x + 36x^5 + 162x^4 + 126x^3 - 54x^2$$

$$= 54x^5 + 270x^4 + 252x^3 - 162x^2 + 18x$$

۳- کولای شو د پورته سوال ځواب دارنگه په لاس راوړو، چې د  $y$  قیمت په اصلي تابع کې وضع کوو او بیا نظر  $x$  ته د تابع مشتق نیسو.

$$z = 9x^2(x^2 + 3x - 1)^2 = 9x^2(x^2 + 3x - 1)(x^2 + 3x - 1)$$

$$z = 9x^2(x^4 + 6x^3 + 6x + 1)$$

$$z = 9x^6 + 54x^5 + 63x^4 - 54x^3 + 9x^2$$

$$\frac{dz}{dx} = 54x^5 + 270x^4 + 252x^3 - 162x^2 + 18x$$

**پنځم مثال:** فرض کوو چې د عرضې تابع د یوې متاع لپاره عبارت ده له  $z = (4x + 6y - 1)^3$  په پورته مثال کې  $z$  د عرضې مقدار او تابع ده،  $x$  د متاع قیمت او  $y$  د تعویض د اشیاء قیمت وي، هر کله چې د اشیاء قیمت تعویض او د تابع قیمت متاع  $y = 2x^2 + 8x$  وي، د اړونده متاع په عرضه کې کلي تغیرات د هماغې متاع د قیمتونو او اشیاءو په نظر کې نیولو سره عوض او محاسبه کړئ او د  $z$  کلي مشتق پیدا کړئ!

**حل:**

$$z = (4x + 6y - 1)^3$$

$$y = 2x^2 + 8x$$

$$\frac{dz}{dx} = zx \frac{dy}{dx} + zy \cdot \frac{dx}{dx}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dz}{dx} &= 3(4x+6y-1)^2(6)(4x+8) + 3(4x+6y-1)^2(4) \\
&= 18(4x+8)(4x+6y-1)^2 + 12(4x+6y-1)^2 \\
&= (72x+144)(4x+6y-1)^2 + 12(4x+6y-1)^2 \\
&= (72x+144)(4x+6y-1)(4x+6y-1) + 12(4x+6y-1)12(4x+6y-1) \\
&= (72x+144)(16x^2 + 24xy - 4x + 24xy + 36y^2 - 4x - 6y - 6y + 1) \\
&\quad + 12(16x^2 + 24xy - 4x + 24xy + 36y^2 - 6y - 4x - 6y + 1) \\
&= (72x+144)(16x^2 + 48xy - 8x + 36y^2 - 12y + 1) + \\
&\quad + 12(16x^2 + 48xy - 8x + 36y^2 - 12y + 1) \\
&= 1152x^3 + 3454x^2y - 576x^2 + 2592xy^2 - 864xy + 72x \\
&\quad + 2304x^2 + 6912xy - 1152x + 5184y - 1728y + 144 \\
&\quad + 192x^2 + 576y - 96x + 432y - 144y + 12 \\
&= 1152x^3 + 3456x^2y + 1920x^2 + 2592xy^2 + 6048xy - 1176x \\
&\quad + 9350y + 432y^2 + 156
\end{aligned}$$

٦ مثال- که فرض کړو د متاع لپاره د عرضې تابع  $z = (x^2 + 2xy + y^2)^2$  وي، څکه د

$$y = 6x^2 + 1$$

$$\text{او } x=2 \quad y=4$$

حل:

$$\frac{dz}{dx} = zx \frac{dy}{dx} + zx \cdot \frac{dx}{dx}$$

$$\frac{dz}{dx} = 2(x^2 + 2xy + y^2)(2x + 2y)(12x) + 2(x^2 + 2xy + y^2)(2x + 2y)$$

$$\frac{dz}{dx} = 2(2^2 + 2 \cdot 2 \cdot 4 + 4^2)(2 \cdot 2 + 2 \cdot 4)(12 \cdot 2) + 2(2^2 + 2 \cdot 2 \cdot 4 + 4^2)(2 \cdot 2 + 2 \cdot 4)$$

$$= 2(4 + 16 + 16)(4 + 8)(24) + 2(4 + 16 + 16)(4 + 8)$$

$$= 2(36)(12)(24) + 2(36)(12)$$

$$= 8640 \cdot 24 + 8640 = 207360 + 8640 = 216000$$

$$\frac{dz}{dx} = 216000$$

اووم مثال: فرض کوو چې د یوه کارگر د عاید تابع عبارت له  $z = 9x^2y^2$  څخه وي؛ نو په دې تابع کې  $z$  خالص عاید  $x$  د کارگر د ورځني کار ساعت  $y$  د کار د فی ساعت مزد، همدارنګه فرض کوو چې د فی ساعت کار مزد تابع د تابع د کارگر د کار د ساعتونو اندازه او لاندې شکل لري.

$$y = x^4 + 3x - 1$$

په دې حالت کې د کارگر د کار د تابع کلي مشتق محاسبه کړئ!  
 (د وارده تغیر په اثر د کارگر په عاید کې تغیر په  $x, y$  کې یعنې د کار په ساعت کې  
 او د فی ساعت کار مزد) خو دی؟

حل:

$$\frac{dz}{dx} = zx + zy \frac{dy}{dx}$$

$$z = 9x^2y^2$$

$$y = x^4 + 3x - 1$$

$$zx = 18xy^2$$

$$zy = 18x^2y$$

$$\frac{dy}{dx} = 4x^3 + 3$$

$$y'(x) = 4x^3 + 3$$

$$\frac{dz}{dx} = 18xy^2 + 18x^2y(4x^3 + 3)$$

$$= 18xy^2 + 72x^5y + 54x^2y$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dx} = 18xy^2 + 72x^5y + 54x^2y$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dx} = 18xy(y + 4x^3 + 3x)$$

پاسنی سوال کولای شو له دوه جهتو بررسی کړو:

1-د  $y$  قیمت په وروستي ځواب کې وضع کوو، لرو چې:

$$\frac{dz}{dx} = 18xy^2 + 72x^5y + 54x^2y$$

$$\frac{dz}{dx} = 18x(x^4 + 3x - 1)^2 + 72x^5(x^4 + 3x - 1)^2 + 54x^2(x^4 + 3x - 1)^2$$

$$= 18x(x^4 + 3x - 1)^2(x^4 + 3x - 1)^2 + 72x^9 + 216x^6 - 72x^5 + 54x^6 + 162x^3 - 54x^2$$

$$= 18x(x^8 + 3x^5 - x^4 + 3x^5 + 9x^2 - 3x - x^4 - 3x + 1) +$$

$$+ 72x^9 + 216x^6 - 72x^5 + 54x^6 + 162x^3 - 54x^2$$

$$= 18x^9 + 108x^6 - 36x^5 + 162x^3 - 108x^2 + 18x$$

$$+ 72x^9 + 216x^6 - 72x^5 + 54x^6 + 162x^3 - 54x^2$$

$$= 90x^9 + 378x^6 + 108x^5 + 324x^3 - 162x^2 + 18x$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dx} = 90x^9 + 378x^6 + 108x^5 + 324x^3 - 162x^2 + 18x$$

۲- کولای شو د ذکر شوې تابع ځواب دارنگه لاسته را وړو، چې  $y$  په اصلي تابع کې وضع کوو، وروسته نظر  $x$  ته د تابع مشتق پیدا کوو.

حل: دا چې  $z = 9x^2y^2$  دی  $y = x^4 + 3x - 1$  وي.

$$z = 9x^2(x^4 + 3x - 1)^2$$

$$z = 9x^2(x^4 + 3x - 1)(x^4 + 3x - 1)$$

$$z = 9x^2(x^8 + 3x^5 - x^4 + 3x^5 + 9x^2 - 3x - x^4 - 3x + 1)$$

$$z = 9x^2(x^8 + 6x^5 - 2x^4 + 9x^2 - 6x + 1)$$

$$z = 9x^{10} + 54x^7 - 18x^6 + 81x^4 - 54x^3 + 9x^2$$

$$\frac{dz}{dx} = 90x^9 + 378x^6 - 108x^5 + 324x^3 - 162x^2 + 18x$$

## د درېم څپرکي پوښتنې:

۱- د لاندې توابعو قسمي مشتقات محاسبه کړئ!

$$1) z = x^2 + y^2 + 5xy$$

$$2) z = 3x^2y^2 + 12xy^3 + 2y^4$$

$$3) z = (x^2 + y^2)^5$$

$$4) z = x^2 + 3x - 9$$

۲- د لاندې توابعو اول او دویم قسمي مشتقونه او ترکیبي مشتق پیدا کړئ!

$$1) z = 8x^2 + 16xy - 24y^2$$

$$2) z = (4x^2 + 2y^2)$$

۳- فرض کړئ چې د یوې تصدی د تولید تابع لاندې شکل لري:

$$p = 8k^{\frac{1}{3}}L^{\frac{2}{3}}$$

۱-  $k$  د عامل په اړه وسطي تولید

۲-  $L$  د عامل په اړه وسطي تولید

۳- نهایي تولید

۴- په تولید کې د تغیر درجه

۵- په مؤلديتونو کې د تغیر درجه

پورتنی پنځه جزء محاسبه کړئ!

۴- فرض کوو چې د یوه نجار د عاید تابع عبارت له  $z = 9x^2y^2$  وي.

۱-  $z$  خالص عاید ۲-  $x$  د نجار ورځني کاري ساعتونه ۳-  $y$  د فی ساعت کار مروج مزد

سربېره پر دې فرض کوو، چې د فی ساعت کار مزد د نجار د کاري ساعت د اندازې تابع

وي، یعنې  $y = x^4 + 3x - 1$  په دې حالت کې د نجار د تابع کلي مشتق پیدا کړئ!

۵-  $z = e^{4x^2+3y^2}$  د تابع کلي مشتق پیدا کړئ که چېرې  $x = 8y^4$  وي.

۶- د  $z = 8x^3 + 12xy - 6y^3$  د تابع کلي مشتق پیدا کړئ، که چېرې  $x = 2t^{\frac{1}{2}}$ ,  $y = 4t^2$  وي.

## سرچینې او اخیستنې:

- ۱- ریاضی عمومی موءلف داکتر غوری سال ۱۳۸۶
- ۲- ریاضیات عمومی سردار محمد ۲۰۰۶ میلادی
- ۳- لکچر نوت های پوهاند اقتصاد سال های ۱۳۷۷ و ۱۳۷۶
- ۴- ریاضیات عالی موءلف پوهنوال دکتور محمد (نور غوری) و زا کتاب های صنوف ۱۱ و ۱۲ مکاتب نیز استفاده شده است.

## د ښوونیز نصاب د پراختیا د ریاست پیغام

د پوهنې وزارت د تخنیکي او مسلکي زده کړو معینیت دښوونیز نصاب د انکشاف ریاست د ټولنې دعینې او ښکاره ضرورت په درک کولو سره چې د محصلینو او شاگردانو د درسي کتابونو په برخه کې یې تخنیکي او مسلکي رشتې درلودې او لري یې، په لومړي سر کې یې تصمیم ونيو، چې په ښوونیزو پلانونو او درسي مفرداتو باندې بیاکننه وکړي او ورپسې بیا د شاگردانو او محصلینو د درسي کتابونو د تالیف لپاره مبادرت او کوشښ وکړي. د خدای (ج) په فضل او مرحمت سره او د ادارې او حسابدارۍ څانگې د ښوونکو په میرانې او همت سره د ادارې او حسابدارۍ درسي کتابونه تالیف شول تر څو په وړیا ډول د شاگردانو او محصلینو په واک او اختیار کې ورکړل شي.

د علم او معرفت له ټولو لوستونکو، علاقمندانو، د ادارې او حسابدارۍ د مکاتبو له ښوونکو، گرانو شاگردانو او د تخنیکي او مسلکي زده کړو د چارو له متخصصینو او همدا شان له ټولو څېړونکو او شنونکو څخه صمیمانه هیله کېږي، چې د دې کتابونو په مطالعې سره چې په لومړي ځل د ښوونکو او د ادارې او حسابدارۍ څانگې د مسلکي غړو له لوري تالیف او تدوین شوي دي. د مسلکي، تخنیکي او علمي مطالبو او مفاهیمو د څرنګوالي په هکله خصوصاً د هغوی املایي او انشایي اشتباهاتو په اړه مونږ ته لارښوونه وکړي، ترڅو په راتلونکي کې وکړای شو، په همدې او نورو برخوکې گرانو شاگردانو ته له دې څخه ښه، غوره، گټور او ارزښتناکه موضوعات وړاندې کړو.

همدا شان له گرانو شاگردانو او محصلینو څخه هیله کوو ترڅو د دې کتابونو د مطالعې او استفادې پر مهال د هیواد اقتصادي ستونزې، فقر او وروسته پاتې والی په نظر کې ونیسي او د کتابونو په ساتنه کې کوشښ او زیار وباسي، ترڅو د ډېرو شاگردانو او محصلینو د گټې وړ وگرځي.

پته: د پوهنې وزارت - د تخنیکي او مسلکي زده کړو معینیت د تعلیمي نصاب د انکشاف ریاست - د کتابونو د تالیف او د درسي ممدو موادو د برابرولو عمومي مدیریت.



**Get more e-books from [www.ketabton.com](http://www.ketabton.com)  
Ketabton.com: The Digital Library**