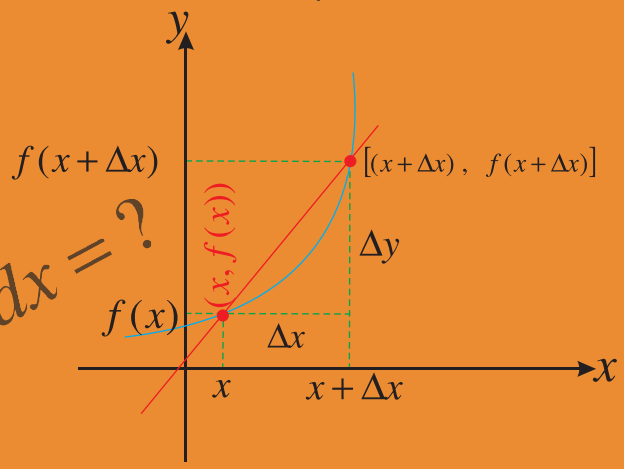
د پوهنې وزارت

# ریاضي ۱۲

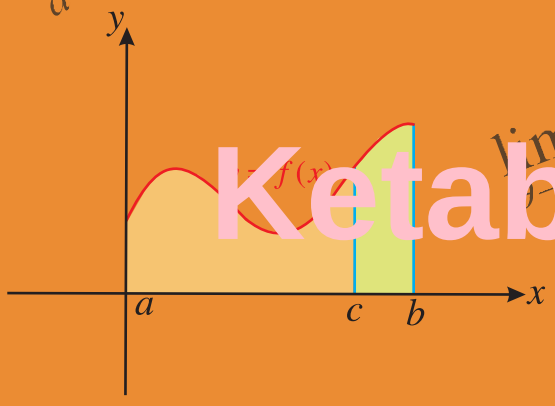
## تولګی

ریاضي ۱۲ تولګی

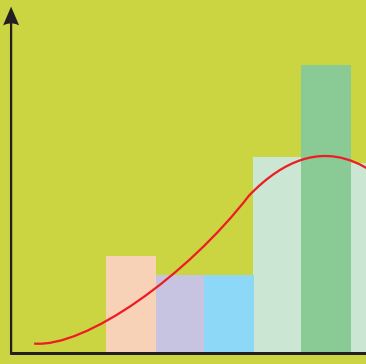
$$\lim_{x \to a} f(x) = ?$$




$$\int_a^b f(x)\,dx = ?$$




$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = ?$$



Ketabton.com

د چاپ کال: ۱۳۹۸

ketabton.com - The Digital Library



# ملي سرود

دا وطن افغانستان دی
دا عزت د هر افغان دی
کور د سولې کور د تورې
هر بچی یې قهرمان دی
دا وطن د ټولو کور دی
د بلوڅو د ازبکو
د پښتون او هزاره وو
د ترکمنو د تاجکو
ورسره عرب، گوجر دي
پامیریان، نورستانیان
براهوي دي، قزلباش دي
هم ایماق، هم پشه یان
دا هیواد به تل ځلیږي
لکه لمر پر شنه آسمان
په سینه کې د آسیا به
لکه زړه وي جاویدان
نوم د حق مو دی رهبر
وایو الله اکبر وایو الله اکبر

ketabton.com - The Digital Library

بسم الله الرحمن الرحیم




د پوهنې وزارت

# ریاضي ۱۲

تولګی

د چاپ کال: ۱۳۹۸ هـ . ش.

ketabton.com - The Digital Library

# د کتاب ځانګړتیاوې

---

**مضمون:** ریاضي

**مؤلفین:** د تعلیمي نصاب د ریاضیاتو د څانګې علمي او مسلکي غړي

**اډیټ کوونکي:** د پښتو ژبې د اډیټ علمي او مسلکي غړي

**ټولګی:** دولسم

**د متن ژبه:** پښتو

**انکشاف ورکوونکی:** د تعلیمي نصاب د پراختیا او درسي کتابونو د تألیف لوی ریاست

**خپروونکی:** د پوهنې وزارت د اړیکو او عامه پوهاوي ریاست

**د چاپ کال:** ۱۳۹۸ هجري شمسي

**د چاپ ځای:** کابل

**چاپخونه:**

**برېښنالیک پته:** curriculum@moe.gov.af

---

د درسي کتابونو د چاپ، وېش او پلورلو حق د افغانستان اسلامي جمهوریت د پوهنې وزارت سره محفوظ دی. په بازار کې یې پلورل او پېرودل منع دي. له سرغړوونکو سره قانوني چلندکیږي.

ketabton.com - The Digital Library

## د پوهنې د وزیر پیغام

اقرأ باسم ربک

د لوی او ښونکي خدای ﷻ شکر په ځای کوو، چې موږ ته یې ژوند رابښلی، او د لوست او لیک له نعمت څخه یې برخمن کړي یو، او د الله تعالی پر وروستي پیغمبر محمد مصطفی ﷺ چې الهي لومړنی پیغام ورته (لوستل) و، درود وایو.

څرنګه چې ټولو ته ښکاره ده ۱۳۹۷ هجري لمریز کال د پوهنې د کال په نامه ونومول شو، له دې امله به د ګران هېواد ښوونیز نظام، د ژورو بدلونونو شاهد وي. ښوونکی، زده‌کوونکی، کتاب، ښوونځی، اداره او د والدینو شوراګانې د هېواد د پوهنیز نظام شېرګوني بنسټیز عناصر بلل کیږي، چې د هېواد د ښوونې او روزنې په پراختیا او پرمختیا کې مهم رول لري. په داسې مهم وخت کې د افغانستان د پوهنې وزارت د مشرتابه مقام، د هېواد په ښوونیز نظام کې د ودې او پراختیا په لور بنسټیزو بدلونونو ته ژمن دی.

له همدې امله د ښوونیز نصاب اصلاح او پراختیا، د پوهنې وزارت له مهمو لومړیتوبونو څخه دي. همدارنګه په ښوونځیو، مدرسو او ټولو دولتي او خصوصي ښوونیزو تأسیساتو کې، د درسي کتابونو محتوا، کیفیت او توزیع ته پاملرنه د پوهنې وزارت د چارو په سر کې ځای لري. موږ په دې باور یو، چې د باکیفیته درسي کتابونو له شتون پرته، د ښوونې او روزنې اساسي اهدافو ته رسېدلی نشو.

پورتنیو موخو ته د رسېدو او د اغېزناک ښوونیز نظام د رامنځته کولو لپاره، د راتلونکي نسل د روزونکو په توګه، د هېواد له ټولو زړه سواندو ښوونکو، استادانو او مسلکي مدیرانو څخه په درناوي هیله کوم، چې د هېواد بچیانو ته دې د درسي کتابونو په تدریس، او د محتوا په لېږدولو کې، هیڅ ډول هڅه او هاند ونه سپموي، او د یوه فعال او په دیني، ملي او انتقادي تفکر سمبال نسل په روزنه کې، زیار او کوښښ وکړي. هره ورځ د ژمنې په نوي کولو او د مسؤولیت په درک سره، په دې نیت لوست پیل کړي، چې د نن ورځې ګران زده‌کوونکي به سبا د یوه پرمختللي افغانستان معماران، او د ټولنې متمدن او ګټور اوسېدونکي وي.

همدا راز له خوږو زده کوونکو څخه، چې د هېواد ارزښتناکه پانګه ده، غوښتنه لرم، څو له هر فرصت څخه ګټه پورته کړي، او د زده کړې په پروسه کې د ځیرکو او فعالو ګډونوالو په توګه، او ښوونکو ته په درناوي سره، له تدریس څخه ښه او اغېزناکه استفاده وکړي.

په پای کې د ښوونې او روزنې له ټولو پوهانو او د ښوونیز نصاب له مسلکي همکارانو څخه، چې د دې کتاب په لیکلو او چمتو کولو کې یې نه ستړې کېدونکې هلې ځلې کړې دي، مننه کوم، او د لوی خدای ﷻ له دربار څخه دوی ته په دې سپېڅلې او انسان جوړوونکې هڅې کې بریا غواړم.

د معیاري او پرمختللي ښوونیز نظام او د داسې ودان افغانستان په هیله چې وګړي ېې خپلواک، پوه او سوکاله وي.

د پوهنې وزیر

دکتور محمد میرویس بلخي

ketabton.com - The Digital Library

# فهرست


| سرليکونه | مخونه |
|---|---|
| **لومړی څپرکی لېمیټ** | ۱-۴۰ |
| • د لېمیټ مفهوم | |
| • د ښي او کيڼې خوا لېمیټونه | |
| • د لېمیټ خاصیتونه | |
| • د نسبتي تابع ګانو لېمیټونه | |
| • د $\frac{\infty}{\infty}$ مبهم شکل | |
| • د $\infty - \infty$ او $0.\infty$ مبهم شکلونه | |
| • د $0^0, \infty^0, 1^\infty$ مبهم شکلونه | |
| • د مثلثاتي تابع ګانو لېمیټ | |
| • د تابع ګانو متمادیت | |
| • د متمادي تابع ګانو خاصیتونه | |
| • د څپرکي لنډیز او پوښتنې | |
| **دویم څپرکی مشتقات** | ۴۱-۸۲ |
| • د یوې تابع مشتق | |
| • د مشتق هندسي تعبیر | |
| • د مشتق قوانین | |
| • د مرکبو تابع ګانو مشتق | |
| • د مثلثاتي تابع ګانو مشتق | |
| • ضمني مشتقات | |
| • لوړ مرتبه یي مشتقات | |
| • د څپرکي لنډیز او پوښتنې | |
| **دریم څپرکی د مشتق د استعمال ځایونه** | ۸۳-۱۳۲ |
| • د یوې تابع بحراني ټکی(اعظمي او اصغري) | |
| • د انعطاف د ټکي ټاکل له دویم مشتق څخه په ګټې اخېستنې سره | |
| • د منحنيګانو رسمول | |
| • د توابعو د ګرافونو مجانبونه | |
| • د هوموګرافیک تابع ګانو ګراف | |
| • د دریمې درجې یو مجهوله تابع ګراف | |
| • د رول قضیه | |
| • د متوسط قیمت قضیه | |
| • د لوپیټال قاعده | |
| • د بحراني ټکو تطبیق | |
| • د څپرکي لنډیز او پوښتنې | |

ketabton.com - The Digital Library


| سرليکونه | مخونه |
|---|---|
| **څلورم څپرکی انتیګرال** | ۱۳۳-۱۷۲ |
| • د ریمان مجموعه | |
| • د انتیګرال مفهوم | |
| • د غیرمعین انتیګرال خواص | |
| • معین انتیګرال | |
| • د معین انتیګرال خواص | |
| • د مشتق او انتیګرال اساسي قضیې | |
| • په تعویضي طریقې سره انتیګرال نیول | |
| • په قسمي طریقې سره انتي ګرال نیول | |
| • د څپرکي لنډیز او پوښتنې | |
| **پنځم څپرکی د لوګاریتمي او اکسپونشیل تابعګانو مشتق او انتیګرال** | ۱۷۳-۱۹۸ |
| • د لوګاریتمي او اکسپونشیل تابع ګانو مشتق | |
| • د معکوسو تابع ګانو مشتق | |
| • قسمي کسرونه | |
| • د اکسپوننشیل تابع ګانو انتیګرالونه | |
| • د لوګاریتمي تابع ګانو انتیګرال | |
| • د قسمي کسرونو په مرسته د انتیګرال محاسبه | |
| • د څپرکي لنډیز او پوښتنې | |
| **شپږم څپرکی د انتیګرال تطبیقات** | ۱۹۹-۲۲۲ |
| • د یوه منحني په واسطه د محصور شوې سطحې د مساحت محاسبه | |
| • د دوو منحنی ګانو ترمنځ د محصور شوې سطحې د مساحت محاسبه | |
| • د ګراف له دوران څخه د په لاس راغلي جسم حجم | |
| • د قوس د اوږدوالی محاسبه | |
| • د څپرکي لنډیز او پوښتنې | |
| **اووم څپرکی احصائیه** | ۲۲۳-۲۶۰ |
| • د احتمال د تابع توزیع | |
| • د دوه جملهیي توزیع او د برنولي آزمایښت | |
| • د پواسن د احتمال توزیع | |
| • نورمال توزیع | |
| • د نورمال توزیع منحني لاندې مساحت او د هغې ستنډرډ کول | |
| • نمونه اخیستل | |
| • د نمونې د اوسط توزیع | |
| • د مرکزي لېمیټ قضیه | |
| • د نمونهیي توزیع نسبت | |
| • د څپرکي لنډیز او پوښتنې | |
| **اتم څپرکی احتمالات** | ۲۶۱-۲۸۲ |
| • پرېکړې او نښتې فضاګانې | |
| • هم چانسه پیښې | |
| • د نښتو یا پیوسته فضاګانو احتمال | |
| • مشروط احتمال | |
| • د حاصل ضرب اصل | |
| • د ناڅاپي پیښو استقلالیت | |
| • د څپرکي لنډیز او پوښتنې | |

ketabton.com - The Digital Library

# لومړی څپرکی

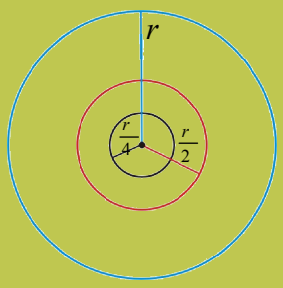
# لېمیټ



ketabton.com - The Digital Library

ketabton.com - The Digital Library

## د لېمیټ مفهوم




په یوه مستوي کې درې دایرې داسې رسم کړئ چې د O ټکي د دایرو متحد مرکز او شعاع ګانې یې په ترتیب سره $r, \frac{r}{2}$ او $\frac{r}{4}$ وي، دې عملیې ته څو ځلې دوام ورکـولای شئ؟

### فعالیت

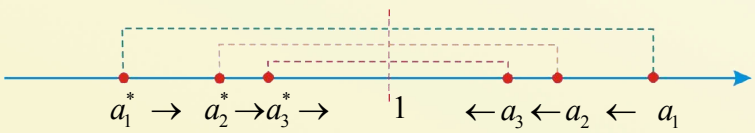
د $a_n = (1+\frac{1}{n})$ او $a_n^* = (1-\frac{1}{n})$ ترادفونه د $n \in IN$ لپاره په پام کې ونیسئ او لاندې فعالیت ترسره کړئ:

- د عددونو په محور باندې د $a_1$ او $a_1^*$ موقعیت(ځای) وښیئ.
- ویلای شئ چې د $a_2$ او $a_2^*$ قیمتونه د $[a_1^*, a_1]$ د فاصلې دننه یا د باندې پراته دي.
- د $a_1$ ، $a_1^*$ او $a_2$ ، $a_2^*$ منځنی ټکي یو له بل سره پرتله کړئ.
- پورته پراوونو ته په پاملرنې سره ویلای شئ چې د $a_3$ او $a_3^*$ د ټکو موقعیت د عددونو پر محور په کوم ځای کې واقع دي.
- آیا ویلای شئ چې د $n$ د تر ټولو لویو قیمتونو په اخیستلو سره د $a_n$ او $a_n^*$ ردیفونه کومو قیمتونو ته نژدې کېږي؟

له پورتني فعالیت څخه لاندې پایله لیکلای شو:

**پایله**:لیدل کېږي چې د $a_n$ ترادف له ښي لوري څخه د 1 او د $a_n^*$ ترادف له کېڼ لوري څخه د 1 عدد ته د $n$ په زیاتېدو سره نژدې کېږي، یعنې:

ـ د $a_n$ ترادف کله چې $n$ بې نهایت ته تقرب وکړي، مساوي په(1) سره کېږي او همداشان د $a_n^*$ د ترادف $n-$ام حد که $n$ بې نهایت ته نژدې شي هم مساوي له (1) سره کېږي.




ددې لپاره چې د لېمیټ مفهوم مو ښه څرګند کړی وي، په لومړی پراو کې هغه په څو ترادفونـو کې د ګراف په پام کې نیولو سره تر څېړنې لاندې نیسو.

ketabton.com - The Digital Library

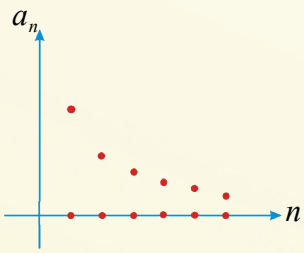
**مثال**: لاندې ورکړل شوي ردیفونه د $n$ د تر ټولو لویو قیمتونو لپاره کوم قیمت ته تقرب کوي یا نژدې کېږي، موضوع په ګرافیکي ډول تشریح کړئ، په داسې حال کې چې:

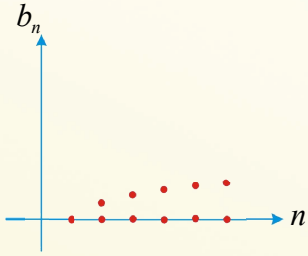
$$a_n = (\frac{2n+3}{n}) \ \dots (i) \qquad b_n = (\frac{n-1}{n}) \ \dots (ii) \qquad c_n = (-1)^n \frac{1}{n} \ \dots (iii)$$

**حل**: پوهېږو چې د $n$ د بېلابېلو قیمتونو لپاره ګرافیکي ښودنه په لاندې ډول ده.

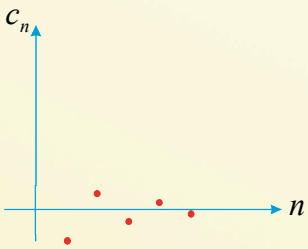
| $n$ | $1$ | $2$ | $3$ | $4$ | $5$ | $6$ | $7$ | $\to \infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_n$ | $5$ | $\frac{7}{2}$ | $3$ | $\frac{11}{4}$ | $\frac{13}{5}$ | $\frac{15}{6}$ | $\frac{17}{7}$ | $\to 2$ |

| $n$ | $1$ | $2$ | $3$ | $4$ | $5$ | $\to \infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $b_n$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{3}{4}$ | $\frac{4}{5}$ | $\to 1$ |




| $n$ | $1$ | $2$ | $3$ | $4$ | $5$ | $\to \infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $c_n$ | $-1$ | $\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{4}$ | $-\frac{1}{5}$ | $\to 0$ |



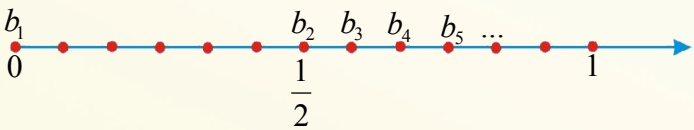

له پورتینو ګرافونو څخه لیدل کېږي چې راکړل شوي ترادفونه د $n$ د قیمتونو په زیاتېدو سره د ترادفونو قیمت یوه ټاکلې عدد ته نژدې کېږي، لکه: د $a_n$ ترادف د 2 عدد ته د $b_n$ ترادف د 1 عدد ته او د $c_n$ ترادف صفر ته تقرب کوي چې n ته د ډېرو لویو قیمتونو په ورکولو سره موضوع په آسانی سره روښانه کېږي.

د ترادف د قیمتونو له جدول څخه د لېمیټ قیمت څرګندېږي، د لېمیټ په شته والی کې ردیف یوه ټاکلې عدد ته نژدې کېږي. دغه ټاکلي عدد ته لېمیټ (limit) وایي. چې په lim سره ښودل کېږي.

ketabton.com - The Digital Library

ددې لپاره د $b_n = \frac{n-1}{n}$ ترادف په پام کې نیسو، لرو چې:

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $b_n$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{3}{4}$ | $\frac{4}{5}$ | $\frac{5}{6}$ | $\frac{6}{7}$ | $\frac{7}{8}$ | $\frac{8}{9}$ | $\frac{9}{10}$ | $\frac{10}{11}$ | ... |




او یا که چېرې $I$ ..... $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}$ ، $II$ ..... $2,\frac{3}{2},\frac{4}{3},\frac{5}{4}, \ldots, \frac{n+1}{n}$ او

$(III)$ ..... $2,4,6, \ldots, 2n$ د عددونو ترادفونه په پام کې ونیسو، لیدل کېږي چې که $n$ د بې نهایت لوړې ته نژدې شي، نو د $I$ ترادف صفر ته نژدې کېږي د $II$ ترادف د (1) عدد ته نژدې کېږي د $III$ ترادف بې‌نهایت ($\infty$) ته نژدې کېږي.

**د متحول تقرب**: ویل کېږي چې د $x$ متحول د $a$ عدد ته تقرب کوي، په داسې حال کې چې $x$ په اختیاري ډول د $a$ عدد ته نژدې کېږي، یعنې د $x$ او $a$ ترمنځ تفاوت له هر کوچني عدد ($\delta > 0$) څخه کوچنی وي یا په لاندې ډول:

$$\forall \delta > 0 : |x-a| < \delta \quad \text{يا} \quad x \to a \quad \text{يا} \quad |x-a| \to 0$$

**له ښې لورې د متحول تقرب**: ($x \to a^+$) که چېرې د $x$ د قیمتونو یو متناقص ترادف موجود وي په داسې حال کې چې په تدریجي ډول د $a$ اختیاري عدد ته نژدې شي.

$$x : a+0.1,\ a+0.01\ ,\ a+0.001\ ,\ a+0.0001\ ,\ \ldots \to a^+$$

**له کېنې لورې د متحول تقرب**: ($x \to a^-$) که چېرې د $x$ د قیمتونو یو متزاید ترادف موجود وي په داسې حال کې چې $x$ په تدریجي ډول د $a$ اختیاري عدد ته نژدې شي.

$$x : a-0.1,\ a-0.01\ ,\ a-0.001\ ,\ a-0.0001\ ,\ \ldots \to a^-$$

نو د $x$ د متحول تقرب د $a$ عدد ته معادل دی د $x$ د متحول تقرب له ښې لورې او د $x$ د متحول تقرب له چپ لورې، یعنې:

$$x \to a \quad \Leftrightarrow \quad (x \to a^+\ ,\ x \to a^-)$$

ketabton.com - The Digital Library

**لومړی بېلګه**: د $x$ متحول د 9 عدد ته نژدې کېږئ یا په بل عبارت د $x \to 9$ مفهوم توضیح کړئ.

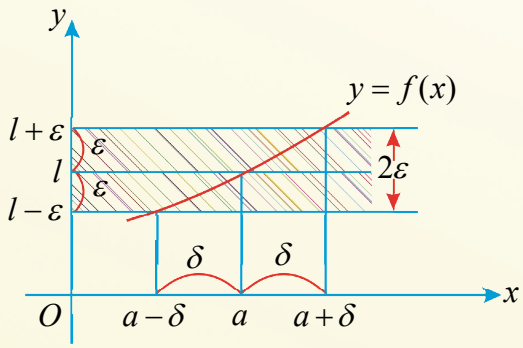
**حل**:

$x: 9.1 \ , \ 9.01 \ , \ 9.001 \ , \ 9.0001 \ , \ \ldots \ \to 9^{+}$

$x: 8.9 \ , \ 8.99 \ , \ 8.999 \ , \ 8.9999 \ , \ \ldots \ \to 9^{-}$

**تعریف**: که چېرې د $f(x)$ تابع په یوه غیر تړلي انټروال کې چې د $a$ عدد په هغه کې ګډون لري کېدای شي چې تابع په $a$ کې نه وي تعریف شوی. که چېرې د $x$ متحول د $a$ عدد ته نژدې، شي نو د $f(x)$ تابع د $l$ عدد ته نژدې کېږي، نو ویل کېږي چې د $f(x)$ تابع لېمیټ عبارت له $l$ څخه دی، کله چې د $x$ متحول د $a$ عدد ته تقرب وکړيؤ، نو داسې یې لیکو:

$$\lim_{x \to a} f(x) = l \quad \text{یا} \quad \begin{matrix} x \to a \\ f(x) \to l \end{matrix}$$




$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \ : \ |x - a| < \delta \ \Rightarrow \ |f(x) - l| < \varepsilon$$

$$\lim_{x \to a} f(x) = l \ \Leftrightarrow \ (|x - a| \to 0 \Rightarrow |f(x) - l| \to 0)$$

**پوښتنه**

د $f(x) = 2x$ تابع په ګرافیکي ډول وښیئ چې که $x$ د $(3)$ عدد ته نژدې شي $f(x)$ د $(6)$ عدد ته نژدې کېږي.

ketabton.com - The Digital Library

## د ښي او کين خوا لېمېټونه

مخـــامخ تـــصوير تـــه پاملرنـــه وکـــړئ ووايـــئ چـــې مخامخ وني ته له کومو خواوو څخه نژدې کېدای شو.



فعالیت

په لاندې جدول کې د $x \neq 1$ ، $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ ته ځينې قيمتونه ورکړل شوی.

| $x$ | 0.98 | 0.99 | 0.999 | ? | 1.001 | 1.01 | 1.02 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 1.98 | 1.99 | 1.999 | ? | 2.001 | 2.01 | 2.02 |

$\longrightarrow$ $\longleftarrow$

- د تابع ګراف رسم کړئ.
- که $x$ د $(1)$ عدد ته نژدې شي، نو $f(x)$ کوم عدد ته نژدې کېږي.

له پورتني فعاليت څخه لاندې پايله ليکلای شو:

**د ښي خوا لېمېټ:** د $f(x)$ تابع د $a$ په عدد کې د ښي لوري $l_1$ لېمېټ لري که چېرې د هر $\varepsilon > 0$ لپاره يو کـوچنی عـدد د $\delta > 0$ موجـود وي داسـې چـې کـه: $x \in (a, a+\delta) \Rightarrow f(x) \in (l_1-\varepsilon, l_1+\varepsilon)$ يـا

$$\lim_{\substack{x\to a \\ x>a}} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = l_1$$

**د کين خوا لېمېټ:** د $f(x)$ تابع د $a$ په عدد کې د کين لوري $l_2$ لېمېټ لري. که چېرې د هر $\varepsilon > 0$ لپاره د $\delta > 0$ يـــو عـــدد پيـــدا شـــي داســـې چـــې $x \in (a-\delta, a) \Rightarrow f(x) \in (l_2-\varepsilon, l_2+\varepsilon)$ يـــا

$$\lim_{\substack{x\to a \\ x<a}} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = l_2$$

د $f(x)$ تابع هغه وخت چې $x \to a$ ته نژدې شي د $l$ لېمېټ لري، يعنې: $\lim_{x\to a} f(x) = l$ په دې شرط چې:

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = l = \lim_{x\to a^+} f(x)$$

ketabton.com - The Digital Library

**دویمه بېلګه**: و ښیئ چې $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3}=6$ سره دی.

**حل**: د ښي اوکینې خوا لېمیټونه تر څېړنې لاندې نیسو:

| $x$ | 3.5 | 3.1 | 3.01 | 3.001 | ... | $3^+$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 6.5 | 6.1 | 6.01 | 6.001 | ... | 6 |

$$\Rightarrow \lim_{x\to 3^+}\frac{x^2-9}{x-3}=6$$

| $x$ | 2.5 | 2.9 | 2.99 | 2.999 | ... | $3^-$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 5.5 | 5.9 | 5.99 | 5.999 | ... | 6 |

$$\Rightarrow \lim_{x\to 3^-}\frac{x^2-9}{x-3}=6$$

لیدل کېږي چې د ښي خوا اوکینې خوا لېمیټونه سره مساوي دي، نو $\lim\limits_{x\to 3}=\dfrac{x^2-9}{x-3}=6$ دی.

**دویمه طریقه**: د لېمیټ د تعریف په پام کې نیولو سره فرضوو چې د هر اختیاري کوچني عدد $\varepsilon$ لپاره یو $\delta$ شتون لري داسې چې:

$$\forall \varepsilon>0 \quad \exists \delta>0 : \ |x-a|<\delta \ \Rightarrow \ |f(x)-l|<\varepsilon$$

$$|x-3|<\delta \ \Rightarrow \left|\frac{x^2-9}{x-3}-6\right|=\left|\frac{(x-3)(x+3)}{x-3}-6\right|=|x+3-6|=|x-3|<\varepsilon$$

$$\Rightarrow \varepsilon=\delta$$

له پورتنۍ اړیکې څخه دا معلومېږي چې $\varepsilon$ له $\delta$ سره اړیکه لري، که $\delta$ ته قیمت ورکړو $\varepsilon$ قیمت اخلي او که $\varepsilon$ ته قیمت ورکړو $\delta$ قیمت اخلي، بنا پر دې هغه تعریف چې د لېمیټ لپاره موجود دی سم دی او تابع لېمیټ لري، یعنې: $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3}=6$

## پوښتنه

وښیئ چې د $f(x)=\dfrac{|x-2|}{x-2}$ تابع کله چې $x\to 2$ لېمیټ نه لري.

ketabton.com - The Digital Library

## د لېمیټ خاصیتونه (Properties of Limit)

د مخـامخ مـساوات دلېمیټونـو دواړه خـواوې کلـه چـې $x \to -1$ وکړي، سره مساوي دي او که نه؟

$$\lim_{x\to -1}(x^2 \pm x) = \lim_{x\to -1} x^2 \pm \lim_{x\to -1} x$$




ددې فعالیت د سرته رسولو لپاره لاندې پوښتنو ته ځوابونه پیدا کړئ:

- که $x$ د 2 عدد ته نژدې شي، نو د $f(x) = x + 2$ تابع لېمیټ به څو وي؟
- که $x \to 3$ ته تقرب وکړي، نو د $g(x) = 2x$ تابع لېمیټ پیدا کړئ.
- $\lim_{x\to 2} f(x) \pm \lim_{x\to 2} g(x)$ پیدا کړئ.
- $\lim_{x\to 2} f(x) \cdot \lim_{x\to 2} g(x)$ پیدا کړئ.
- $\lim_{x\to 2} f(x) \div \lim_{x\to 2} g(x)$ پیدا کړئ.

له پورتني فعالیت څخه لاندې پایلې لیکلای شو:

که $\lim_{x\to a} f(x) = A$ او $\lim_{x\to a} g(x) = B$ وي، نو:

1) $\lim_{x\to a} Kf(x) = K \lim_{x\to a} f(x) = KA$

2) $\lim_{x\to a}[f(x) \pm g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x) = A \pm B$

3) $\lim_{x\to a}[f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x) = A \cdot B$

4) $\lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} = \frac{A}{B}$ , $\lim_{x\to a} g(x) = B \neq 0$

5) $\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)} = \sqrt[n]{A}$ , $\lim_{x\to a} f(x) = A \geq 0$

له پورتنیو خواصو څخه درې خاصیتونه ثبوتوو او پاتې یې د زده‌کوونکو کورنۍ دنده ده.

**بې نهایت کوچنۍ تابع ګانې:** د $\varepsilon(x)$ تابع کله چې $x \to a$ ته نژدې شي، بې نهایت کوچنۍ بللې کېږي، که چېرې $\lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$ وي.

ketabton.com - The Digital Library

1- ددې لپاره چې $\lim_{x\to a} f(x)=b$ سره شي، لازم او کافي ده چې د $f(x)$ تابع د يوه ثابت عدد $b$ او يوې بې نهايت کوچني تابع $\varepsilon(x)$ کله چې $x\to a$ د مجموعې په شکل وښودل شي، يعنې:

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=b+\varepsilon(x) \\ \lim_{x\to a}\varepsilon(x)=0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \lim_{x\to a} f(x)=b$$

2- که چېرې $\varepsilon(x)$ ، $x\to a$ ته نژدې شي، بې نهايت کوچنی تابع وي، خو صفر نه وي، نو $\lim_{x\to a}\frac{1}{\varepsilon(x)}=\infty$

د بې نهايت کوچنی تابع ګانو مجموعه بيا هم يوه بې نهايت کوچنی تابع ده.

3- د بې نهايت کوچنيو تابع ګانو د ضرب حاصل بيا هم يوه بې نهايت کوچنی تابع ده.

4- که چېرې $\varepsilon(x)$ يوه بې نهايت کوچنی تابع او $u(x)$ داسې يوه تابع وي چې لېمېټ يې صفر نه وي، نو د $v(x)=\frac{\varepsilon(x)}{u(x)}$ تابع يوه بې نهايت کوچنی تابع ده.

**مثال**:

I) د $\varepsilon(x)=x^2-9$ تابع کله چې $x\to 3$ ، يوه بې نهايت کوچنی تابع ده ځکه چې:

$$\lim_{x\to 3}(x^2-9)=0$$

II) $\varepsilon(x)=\frac{1}{2x}$ تابع کله چې $x\to\infty$ ته نژدې شي بې نهايت کوچنی تابع ده:

$$\lim_{x\to\infty}\varepsilon(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2x}=0$$

**پوښتنې**: د تېرو خاصيتونو په مرسته لاندې سوالونه حل کړئ.

1) $\lim_{x\to 2}(2x^2-1)=\lim_{x\to 2}2x^2-\lim_{x\to 2}1=2\lim_{x\to 2}x^2-\lim_{x\to 2}1=2\cdot 2^2-1=7$

2) $\lim_{x\to -3}(x-1)^2=\lim_{x\to -3}(x-1)\cdot\lim_{x\to -3}(x-1)=(-4)(-4)=16$

3) $\lim_{x\to 0}\frac{4x-3}{x+1}=\frac{\lim_{x\to 0}4x-\lim_{x\to 0}3}{\lim_{x\to 0}x+\lim_{x\to 0}1}=\frac{0-3}{0+1}=-3$

د پورتنيو پوښتنو له حل څخه د لېمېټ يو خاصيت داسې بيان او ثبووو:

1. د څو تابع ګانو د مجموعې لېمېټ د نومورو هرې تابع د لېمېټونو له مجموعې سره مساوي دي، يعنې: که چېرې د $f(x_1), f(x_2)$ تابع ګانې وي، نو لرو چې:

$$\lim_{x\to a}\left[f(x_1)+f(x_2)\right]=\lim_{x\to a}f(x_1)+\lim_{x\to a}f(x_2)$$

**ثبوت**: که $\lim_{x\to a}f(x_1)=b_1$ ، $\lim_{x\to a}f(x_2)=b_2$ او $\varepsilon_1$ او $\varepsilon_2$ بې نهايت کوچنی تابع ګانې وي، نو:

$$\lim_{x\to a}\left[f(x_1)\pm f(x_2)\right]=b_1\pm b_2$$

$$\left.\begin{array}{l} f(x_1)=b_1+\varepsilon_1 \quad .....\ I \\ f(x_2)=b_2+\varepsilon_2 \quad .....\ II \end{array}\right\} \Rightarrow f(x_1)\pm f(x_2)=(b_1+\varepsilon_1)\pm(b_2+\varepsilon_2)=b_1\pm b_2+(\varepsilon_1\pm\varepsilon_2)$$

ketabton.com - The Digital Library

څرنګه چې $(\varepsilon_1 \pm \varepsilon_2)$ د بې نهایت کوچنیو تابع ګانو مجموعه او تفاضل ده او د بې نهایت کوچنیو تابع ګانو مجموعه او تفاضل بیاهم یوه بې نهایت کوچنی تابع ده، نو:

$$\lim_{x\to a}\left[f(x_1)\pm f(x_2)\right]=b_1\pm b_2=\lim_{x\to a}f(x_1)\pm\lim_{x\to a}f(x_2)$$

**2. د دوو یا څو تابع ګانو د ضرب د حاصل لېمیټ د نوموړو تابع ګانو د لېمیټونو د ضرب له حاصل سره مساوي دی:**

**ثبوت:**

$$\lim_{x\to a}\left[f(x_1)\cdot f(x_2)\right]=\lim_{x\to a}f(x_1)\cdot\lim_{x\to a}f(x_2)=b_1\cdot b_2$$

$$\left.\begin{matrix}f(x_1)=b_1+\varepsilon_1\\ f(x_2)=b_2+\varepsilon_2\end{matrix}\right\}\Rightarrow\ f(x_1)\cdot f(x_2)=(b_1+\varepsilon_1)(b_2+\varepsilon_2)$$

$$f(x_1)\cdot f(x_2)=b_1\cdot b_2+b_1\cdot\varepsilon_2+b_2\cdot\varepsilon_1+\varepsilon_1\cdot\varepsilon_2$$

څرنګه چې $\varepsilon_1$ او $\varepsilon_2$ ډېر کوچني عددونه دي، نو د ضرب حاصل یې د $b_1$ او $b_2$ سره او همداشان په خپلو کې بې‌نهایت کوچنی کېږي، نو:

$$\lim_{x\to a}\left[f(x_1)\cdot f(x_2)\right]=b_1\cdot b_2=\lim_{x\to a}f(x_1)\cdot\lim_{x\to a}f(x_2)$$

3. د دوو تابع ګانو د نسبت لېمیټ د هغو تابع ګانو د لېمیټونو له نسبت څخه عبارت دی، لکه په لاندې ډول:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}g(x)}=\frac{b_1}{b_2}\qquad,\qquad g(x)=b_2\neq 0$$

**ثبوت:**

$$\left.\begin{matrix}f(x)=b_1+\varepsilon_1\\ g(x)=b_2+\varepsilon_2\end{matrix}\right\}\ \Rightarrow\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{b_1+\varepsilon_1}{b_2+\varepsilon_2}$$

د مساوات له دواړو خواوو څخه $\frac{b_1}{b_2}$ تفریق کوو:

$$\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{b_1}{b_2}=\frac{b_1+\varepsilon_1}{b_2+\varepsilon_2}-\frac{b_1}{b_2}=\frac{b_2(b_1+\varepsilon_1)-b_1(b_2+\varepsilon_2)}{b_2(b_2+\varepsilon_2)}$$

$$=\frac{b_2b_1+b_2\varepsilon_1-b_1b_2-b_1\varepsilon_2}{b_2(b_2+\varepsilon_2)}=\frac{b_2\varepsilon_1-b_1\varepsilon_2}{b_2(b_2+\varepsilon_1)}$$

$$\Rightarrow\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{b_2\varepsilon_1-b\varepsilon_2}{b_2(b_2+\varepsilon_2)}+\frac{b_1}{b_2}=\frac{b_2\varepsilon_1-b_1\varepsilon_2+b_1b_2+b_1\varepsilon_2}{b_2(b_2+\varepsilon_2)}$$

$$=\frac{b_2(b_1+\varepsilon_1)}{b_2(b_2+\varepsilon_2)}=\frac{b_1+\varepsilon_1}{b_2+\varepsilon_2}\ \Rightarrow\ \frac{f(x)}{g(x)}=\frac{b_1+\varepsilon_1}{b_2+\varepsilon_2}$$

ketabton.com - The Digital Library

څرنګه چې $\varepsilon_1$ او $\varepsilon_2$ ډېر کوچني مثبت عددونه($0 < \varepsilon < 1$)دي، نو کله چې $x \to a$ وکړي صفر کېږي او په پایله کې په لاس راځي چې:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} = \frac{b_1}{b_2}$$

**د سانډویچ قضیه**: که چېرې د $f(x), g(x)$ او $h(x)$ تابع ګانې د هر $x$ لپاره په یوه غیر تړلي انټروال کې چې د $a$ عدد په کې شامل دی(ولو که $x \neq a$) او $f(x) \le g(x) \le h(x)$ شرط صدق وکړي په هغه صورت کې چې $\lim_{x\to a} f(x) = b = \lim_{x\to a} h(x)$ وي، نو $\lim_{x\to a} g(x) = b$ دی.

**مثال**: که د $u(x)$ تابع دغه خاصیت($1-\frac{x^2}{4} \le u(x) \le 1+\frac{x^2}{2}$) ولري، نو $\lim_{x\to a} u(x)$ په لاس راوړئ.

**حل**: لیدل کېږي چې $\lim_{x\to 0}(1-\frac{x^2}{4}) = 1 = \lim_{x\to 0}(1+\frac{x^2}{2})$ دی، نو د سانډویچ د قضیې په پام کې نیولو سره لرو چې:

$$\lim_{x\to 0} u(x) = 1$$

**قضیه**: که چېرې $f(x)$ او $g(x)$ داسې تابع ګانې وي چې $f(x) \le g(x)$ نو د لېمیټ د شتون په صورت کې یې لمبیټ $\lim_{x\to a} f(x) \le \lim_{x\to a} g(x)$ سره دی.

**مثال**: د $f(x) = \frac{15x-4}{5x+6}$ او $g(x) = \frac{15x+4}{5x-6}$ تابع ګانې په پام کې نیسو په واضح ډول معلومېږي چې د $x > 1$ لپاره لرو $f(x) < g(x)$ دی.

**حل**:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{15x-4}{5x+6} = \frac{15}{5} = 3$$

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{15x+4}{5x-6} = \frac{15}{5} = 3$$

## پوښتنې

لاندې لېمیټونه د امکان په صورت کې پیدا کړئ.

1) $\lim_{x\to 0} 6x^3 - 2x^2 + 5x + 3$

2) $\lim_{x\to -1} x^7 - 2x - 5$

3) $\lim_{x\to 0}\frac{(9x+2)^2 - 4}{x}$

4) $\lim_{x\to 0}\frac{5x^2 + 7x}{(2x-5)^2 - 9}$

5) $\lim_{x\to 2}\sqrt{x-2}$

6) $\lim_{x\to 1}\frac{2x}{x^2 - 4x + 1}$

ketabton.com - The Digital Library

## د نسبتي تابع ګانو لېمیټونه

آیا پوهیږئ چې مخامخ اړیکې په څه نامه یادیږي؟

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$$

$$\infty - \infty$$

$$0 \cdot \infty$$




- د $y = x^2 - 1$ تابع لېمیټ هغه وخت پیدا کړئ چې $x \to -2$ ته تقرب وکړي.
- د $y = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ تابع لېمیټ هغه وخت پیدا کړئ چې $x \to 1$ ته تقرب وکړي.
- د $y = \frac{x^2 - 1}{x + 1}$ تابع لېمیټ هغه وخت پیدا کړئ چې $x \to \infty$ ته تقرب وکړي.

له پورتني فعالیت څخه لاندې پایله لیکلای شو:

### پایله

- د ځینو تابع ګانو لېمیټ مستقیماً د قیمت په وضع کولو سره لاسته راځي.
- ځنې تابع ګانې د $\frac{0}{0}$ , $\frac{\infty}{\infty}$ , $\infty - \infty$ , $0 \cdot \infty$ ... مبهم شکلونه لري چې د ابهام د له منځه وړلو څخه وروسته د تابع لېمیټ لاسته راځي چې په لاندې ډول یې تر څېړنې لاندې نیسو:

### I- د $\frac{0}{0}$ مبهم شکل:




- د $f(x) = \frac{x - 1}{x^2 - 1}$ تابع قیمت د $x = -1$ په نقطه کې وڅېړئ.
- د $f(x)$ تابع لېمیټ کله چې $x \to 1$ وي د ابهام کومه بڼه لري.
- آیا د $f(x)$ تابع په داسې ډول ساده کولای شو چې د $x = 1$ لپاره یو معین قیمت ولري؟

د پورتني فعالیت پایله داسې بیانوو:

که چېرې یوه تابع د $\frac{0}{0}$ په شکل مبهمه بڼه ولري، د لېمیټ د پیدا کولو لپاره یې لومړی تابع د تجزیې په مرسته ساده کوو د ابهام عامل(خبیثه فکتور) له منځه وړو او بیا یې د لېمیټ قیمت په لاس راوړو.

ketabton.com - The Digital Library

**مثال**: لاندې لېمیټونه پیدا کړئ.

1) $\lim_{x\to -2}\frac{x^2-4}{x+2}$ ، 2) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-6x+8}{x-2}$ ، 3) $\lim_{x\to 16}\frac{\sqrt{x}-4}{x-16}$

**حل**: لومړی د لېمیټ بڼه ټاکو:

1) $\lim_{x\to -2}\frac{x^2-4}{x+2}=\frac{(-2)^2-4}{-2+2}=\frac{0}{0}$

څرنګه چې پاسنې لېمیټونه د $\frac{0}{0}$ بڼه لري، نو د تجزیې په مرسته یې وروسته له ساده کولو څخه د لېمیټ قیمت په لاندې ډول په لاس راوړو:

$$\Rightarrow \lim_{x\to -2}\frac{(x-2)(x+2)}{(x+2)}=\lim_{x\to -2}(x-2)=-2-2=-4$$

2) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-6x+8}{x-2}=\frac{2^2-12+8}{2-2}=\frac{0}{0}$

**حل**: بیا هم لېمیټ د $\frac{0}{0}$ مبهم شکل لري:

$$\Rightarrow \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-4)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x-4)=2-4=-2$$

3) $\lim_{x\to 16}\frac{\sqrt{x}-4}{x-16}=\frac{0}{0}$

**حل**: لیدل کېږي چې نومورې لېمیټ بیا هم د $\frac{0}{0}$ بڼه لري، نو د لېمیټ د لاسته راوړلو لپاره د کسر صورت او مخرج د صورت په مزدوج کې ضربوو:

$$\Rightarrow \lim_{x\to 16}\frac{\sqrt{x}-4}{x-16}\cdot\frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}+4}=\lim_{x\to 16}\frac{(x-16)}{(x-16)(\sqrt{x}+4)}$$

$$=\lim_{x\to 16}\frac{1}{\sqrt{x}+4}=\frac{1}{8}$$

## پوښتنې

1) $\lim_{x\to 3}\frac{3-x}{\sqrt{x+1}-2}=?$ 2) $\lim_{x\to 1}\frac{\frac{5}{2x-3}+5}{x^2-1}=?$ 3) $\lim_{x\to 4}\frac{x-4}{\sqrt{x}-2}=?$

4) $\lim_{x\to 2}\frac{\frac{2x}{x^2+1}-\frac{4}{5}}{x-2}=?$ 5) $\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x+3}-\frac{1}{3}}{x}=?$

ketabton.com - The Digital Library

## II- د $\frac{\infty}{\infty}$ مبهم شکل

آیا د مخامخ تابع لېمیټ ټاکلی شئ؟

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-3x+8}{2x^2-2}$$




- د $f(x)=2x^4+x^3-4x-1$ تابع لېمیټ چې $x\to\infty$ وخېړئ.
- د $g(x)=x^3-2x-4$ تابع لېمیټ چې $x\to\infty$ وخېړئ.
- د $y=\frac{5}{x-2}$ تابع لېمیټ چې $x\to\infty$ وخېړئ.
- د $\frac{f(x)}{g(x)}$ تابع لېمیټ هغه وخت په لاس راوړئ چې $x\to 0$ وکړي.
- د $\frac{f(x)}{g(x)}$ تابع لېمیټ هغه وخت په لاس راوړئ چې $x\to\infty$ وکړي.

له پاسني فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راځي:

**پایله**: هغه توابع چې د $\frac{\infty}{\infty}$ بڼه ولري د لېمیټ د پیدا کولو لپاره یې داسې کړنه کوو:

د تابع صورت او مخرج په هغه متحول چې تر ټولو لوی توان ولري وېشو، وروسته له ساده کولو څخه یې لېمیټ په لاس راځي.

**لومړی مثال**: $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{3x^2-2}$ پیدا کړئ.

**حل**: لومړی د لېمیټ بڼه ټاکو:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{3x^2-2}=\frac{\infty-1}{\infty-2}=\frac{\infty}{\infty}$$

ketabton.com - The Digital Library

څرنګه چې پوښتنه د $\frac{\infty}{\infty}$ شکل لري، نو صورت او مخرج په $x^2$ باندې وېشو:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{3x^2-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}-\frac{1}{x^2}}{\frac{3x^2}{x^2}-\frac{2}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{2}{x^2}}{3-\frac{2}{x^2}}=\frac{1-\frac{1}{\infty}}{3-\frac{2}{\infty}}=\frac{1-0}{3-0}=\frac{1}{3}$$

**دویم مثال**: د $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2}{x-2}$ پیدا کړئ.

**حل**:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2}{x-2}=\frac{\infty}{\infty}$$

څرنګه چې پوښتنه د $\frac{\infty}{\infty}$ شکل لري، نو صورت او مخرج د $x$ له ټولو په لوړ توان وېشو:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2}{x-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}-\frac{2}{x^2}}{\frac{x}{x^2}-\frac{2}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{2}{x^2}}{\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}=\frac{1-\frac{2}{\infty}}{\frac{1}{\infty}-\frac{2}{\infty}}=\frac{1-0}{0}=\frac{1}{0}=\infty$$

**دریم مثال**: د $\lim_{x\to\infty}\frac{x-1}{x^2-2}$ پیدا کړئ.

**حل**:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-1}{x^2-2}=\frac{\infty}{\infty}$$

څرنګه چې پوښتنه د $\frac{\infty}{\infty}$ شکل لري، نو صورت او مخرج د $x$ له ټولو په لوړ توان وېشو:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-1}{x^2-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{x^2}-\frac{1}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{2}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}{1-\frac{2}{x^2}}=\frac{\frac{1}{\infty}-\frac{1}{\infty}}{1-\frac{2}{\infty}}=\frac{0}{1-0}=\frac{0}{1}=0$$

**یادونه**: هغه تابع ګانې چې د $\frac{\infty}{\infty}$ بڼه ولري، پرته له دې چې عملیه پرې سرته ورسوو کولای شو، په لاندې ډول د هغوی لېمیټ په لاس راوړو:

ketabton.com - The Digital Library

د $f(x)=\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+...+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+...+b_n}$ تابع په پام کې ونیسئ که چېرې ($x\to\infty$) کړی وي، نو دلته درې حالتونه ممکن دي:

1- د $m=n$ لپاره د نوموړی کسر لېمیټ عبارت دی له $\frac{a_0}{b_0}$.

2- د $m<n$ لپاره د نوموړی کسر لېمیټ عبارت له صفر څخه دی.

3- د $m>n$ لپاره د نوموړی کسر لېمیټ عبارت له $\pm\infty$ څخه دی.

**څلورم مثال**: لاندې لېمیټونه پیدا کړئ.

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^2+6x^4-x^3+x-1}{-x^4+2x^2-3}$ 2) $\lim\limits_{x\to3}\frac{-8+6x^3-x^2+x}{5x^3-x^4+6x-1}$ 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2-2}{x+1}$

**حل**:

1- څرنګه چې $m=n$ دی، نو:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2+6x^4-x^3+x-1}{-x^4+2x^2-3}=\lim_{x\to\infty}\frac{6x^4}{-x^4}=-6$$

2- څرنګه چې $m<n$ دی، نو د نوموړی تابع لیمیټ صفر دی.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{-8+6x^3-x^2+x}{5x^3-x^4+6x-1}=0$$

3- څرنګه چې $m>n$ دی، نو د نوموړي تابع لیمیټ مساوي له $\infty$ سره دی:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-2}{x+1}=\infty$$

**یادونه**: زده‌کوونکي دې ورکړل شوي ځوابونه په کور کې د عملیې د سرته رسولو څخه وروسته په لاس راوړي.

ketabton.com - The Digital Library

## پوښتنې

لاندې لېمیټونه پیدا کړئ؟

1) $\lim_{x\to\infty} \frac{6}{x^2 - x}$

2) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^4 + x^2 + x + 6}{x^3 - 3x + 4}$

3) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^5 + x^2 - x + 9}{x^4 + x^2 - x + 5}$

4) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^3 + x^2 - x + 7}{x^3 - x + 5}$

5) $\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2 - 2}{x + 1}$

ketabton.com - The Digital Library

### III- د $(\infty-\infty)$ او $(0\cdot\infty)$ مبهم شکلونه

د مخامخ لېمیټونو قیمتونه پیدا کړئ.

$$\lim_{x\to 2}\frac{1}{x^2-4}-\frac{x-1}{x^2-4}$$

$$\lim_{x\to 3}(x^2-9)\cdot\frac{2x^3-4}{x-3}$$




- د $a+1$ مزدوج ولیکئ.
- د $\sqrt{x}-1$ مزدوج ولیکئ.
- د $f(x)=\sqrt{x}-\sqrt{x+1}$ لېمیټ پیدا کړئ، کله چې $x\to\infty$ تقرب وکړي.
- د $f(x)=(2x-1)(x+1)$ تابع لېمیټ وټاکئ، کله چې $x\to\infty$ تقرب وکړي.

له پورتني فعالیت څخه پایله داسې بیانوو:

د هغو تابع ګانو چې د $(\infty-\infty)$ او $(0\cdot\infty)$ مبهم شکلونه ولري، د لېمیټ د پیدا کولو لپاره یې د کسرونو له جمع کولو، ضرب او مزدوج څخه ګټه اخلو او هغه داسې ساده کوو، تر څو چې د $\frac{0}{0}$ او یا $\frac{\infty}{\infty}$ بڼه غوره کړي، وروسته یې لېمیټ په لاس راوړو.

**مثال**: لاندې لېمیټونه پیدا کړئ.

1) $\lim_{x\to 1}(\frac{9}{x-1}-\frac{8x+10}{x^2-1})=?$ 2) $\lim_{x\to 1}(x-1)(\frac{1}{x^2+2x-3})=?$

**حل 1**: $\lim_{x\to 1}(\frac{9}{x-1}-\frac{8x+10}{x^2-1})=\frac{9}{1-1}-\frac{8\cdot 1+10}{1^2-1}=\frac{9}{0}-\frac{18}{0}=\infty-\infty$

څرنګه چې نوموړی لېمیټ د $(\infty-\infty)$ بڼه لري، نو لیکلای شو چې:

$$=\lim_{x\to 1}\frac{9x+9-8x-10}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2-1}=\frac{0}{0}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2}$$

ketabton.com - The Digital Library

2) $\lim_{x\to 1}(x-1)(\frac{1}{x^2+2x-3}) = ?$

**حل2:** $\lim_{x\to 1}(x-1)(\frac{1}{x^2+2x-3}) = (1-1)(\frac{1}{1^2+2-3}) = 0\cdot\frac{1}{3-3} = 0\cdot\frac{1}{0} = 0\cdot\infty$

لیدل کېږي چې نوموړی لېمیټ د $(0\cdot\infty)$ مبهم شکل لري، نو:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2+2x-3} = \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)(x+3)} = \lim_{x\to 1}\frac{1}{x+3} = \frac{1}{4}$$

## پوښتنې

لاندې لېمیټونه پیدا کړئ.

1) $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})$

2) $\lim_{x\to 1}(\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1-x^2})$

3) $\lim_{x\to\infty}(x^5-8x^3)$

4) $\lim_{x\to 5}\left[(x^2-25)\frac{1}{x-5}\right]$

5) $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x+a}-\sqrt{x})$

ketabton.com - The Digital Library

## د $1^{\infty}, \infty^0, 0^0$ مبهم شکلونه

**د مخامخ لېمیټ مبهم شکل وټاکئ؟**

$$\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{x}} = ?$$




- د $y = x^x$ تابع لېمیټ په هغه صورت کې پیدا کړئ چې $x \to 0$ وکړي.
- د $y = (1+x)^{\frac{1}{x}}$ لېمیټ بنه په هغه صورت کې وټاکئ چې $x \to \infty$ وکړي.
- د کومې عملیې په مرسته کولای شو چې د $0^0, \infty^0, 1^{\infty}$ مبهم شکلونو ابهام له منځه ویسو؟

د پورتني فعالیت پایله داسې بیانوو:

که چېرې یوه تابع پورتني مبهم شکلونه څانته غوره کړي، هغه د طبیعي لوګاریتم په مرسته د $0\cdot\infty$ شکل ته د اړولو وړ دي، یعنې: $\lim_{x\to a}(f(x))^{g(x)} \Rightarrow \ln(\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)}) = \lim_{x\to a}(\ln f(x)^{g(x)}) = \lim_{x\to a}[g(x)\ln f(x)]$

**یادونه:**

I- که چېرې $n \to \infty$ وکړي د $a_n = (1+\frac{1}{n})^n$ ترادف $e = 2.71828182$ عدد ته تقرب کوي.

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e$$

چې په لاندې جدول کې ښکارېږي:

| $n$ | $\frac{1}{n}$ | $1+\frac{1}{n}$ | $(1+\frac{1}{n})^n$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 2 |
| 2 | 0.5 | 1.5 | 2.25 |
| 5 | 0.2 | 1.2 | 2.48832 |
| 10 | 0.1 | 1.1 | 2.59374246 |
| 100 | 0.01 | 1.01 | 2.704813829 |
| 1000 | 0.001 | 1.001 | 2.716923932 |
| 10000 | 0.0001 | 1.0001 | 2.718145926 |
| 100000 | 0.00001 | 1.00001 | 2.718268237 |
| 1000000 | 0.000001 | 1.000001 | 2.718280469 |
| 1000000000 | $10^{-9}$ | $1+10^{-9}$ | 2.718281828 |

ketabton.com - The Digital Library

نو $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e = 2.718281828$ دی چې ... $e = 2.71$ عدد ته د Euler عدد وايي.

II- لاندې ليمیتونه پیدا کړئ:

1) $\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e$

2) $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{\alpha}{x})^{\beta x} = e^{\alpha\beta}$

3) $\lim_{x\to 0}\frac{Ln(1+x)}{x} = 1$

4) $\lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{x} = 1$

**ثبوت:** پوهېږو چې څلور واړه پوښتنې د $1^{\infty}$ مبهم شکلونه لري.

1) $x = \frac{1}{\alpha} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{x}\ ,\ \alpha\to 0 \Rightarrow x\to\infty \Rightarrow \lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = \lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$

2) $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{\alpha}{x})^{\beta x} = e^{\alpha\beta}$

$u = \frac{\alpha}{x} \Rightarrow x = \frac{\alpha}{u}\ ,\ x\to\infty \Rightarrow u\to 0$

$\lim_{u\to 0}(1+u)^{\beta\frac{\alpha}{u}} = \lim_{u\to 0}\left[(1+u)^{\frac{1}{u}}\right]^{\alpha\beta}$

$x = \frac{1}{u} \to u = \frac{1}{x}\ ,\ u\to 0 \Rightarrow x\to\infty$

$\lim_{u\to 0}\left[(1+u)^{\frac{1}{u}}\right]^{\alpha\beta} = \lim_{x\to\infty}\left[(1+\frac{1}{x})^x\right]^{\alpha\beta} = e^{\alpha\beta}$

3) $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} \Rightarrow \lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}\ln(1+x)\right] = \lim_{x\to 0}\left[\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]$

$\ln\left[\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]\ ,\ x = \frac{1}{u} \Rightarrow u = \frac{1}{x}\ ,\ x\to 0 \Rightarrow u\to\infty$

$\ln\left[\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right] = \ln\left[\lim_{u\to\infty}(1+\frac{1}{u})^u\right] = \ln e = 1$

ketabton.com - The Digital Library

4) $y=e^x-1 \Rightarrow e^x=1+y \Rightarrow x=\ln(1+y)$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\ln(1+y)}=\lim_{y\to 0}\frac{1}{\frac{\ln(1+y)}{y}}=\frac{1}{\lim_{y\to 0}\frac{\ln(1+y)}{y}}$$

$$=\frac{1}{\lim_{y\to 0}\frac{1}{y}\ln(1+y)}=\frac{1}{\lim_{y\to 0}\ln(1+y)^{\frac{1}{y}}} \quad , \quad y=\frac{1}{x} \Rightarrow x=\frac{1}{y} \quad , \quad y\to 0 \Rightarrow x\to\infty$$

$$=\frac{1}{\ln\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x}=\frac{1}{\ln e}=\frac{1}{1}=1$$

**د $1^\infty$ مبهم شکل عمومي حالت: که چېرې د اکسپوننشیل تابع لېمیټ یعني** $\lim_{x\to a}[u(x)]^{v(x)}$ د $1^\infty$ مبهم شکل خانته غوره کړي په دې حالت کې $\alpha=u-1$ سره تعویضوو، په نتیجه کې:

$$\lim_{x\to a}u^v=\lim_{x\to a}[(1+u-1)]^{\frac{v}{u-1}u-1}=\lim_{x\to a}\left[(1+\alpha)^{\frac{v}{\alpha}\alpha}\right]=\lim_{x\to a}\left[(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right]^{\lim_{x\to a}(v\alpha)}$$

خرنګه چې $\alpha=u-1$ دی که چېرې $u\to 1$ **نو** $\alpha\to 0$ **ته نژدې کېږي په پایله کې :**

$$\lim_{x\to a}[u(x)]^{v(x)}=\left[\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right]^{\lim_{x\to a}[v(u-1)]}=e^{\lim_{x\to a}[v(u-1)]}=e^P$$

$$\lim_{x\to a}[u(x)]^{v(x)}=e^P \quad , \quad P=\lim_{x\to a}[v(u-1)]$$

**لومړی مثال:** د $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{2}{x})^x$ لېمیټ قیمت په لاس راوړئ.

**حل:** لومړی د لېمیټ بڼه ټاکو معلومېږي چې لېمیټ د $1^\infty$ مبهم شکل لري، نو له فورمول څخه کار اخلو:

$$u=1+\frac{2}{x} \quad , \quad v=x$$

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{2}{x})^x=e^P \quad , \quad P=\lim_{x\to\infty}\left[x(1+\frac{2}{x}-1)\right]=2$$

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{2}{x})^x=e^P=e^2$$

**دویم مثال: د** $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{\frac{x-5}{2}}$ **قیمت محاسبه کړئ.**

**حل: لومړی د لېمیټ بڼه ټاکو** $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{\frac{x-5}{2}}=1^\infty$

ketabton.com - The Digital Library

**څرنګه چې معلومېږي نوموړی لېمیټ د** $1^{\infty}$ مبهم شکل لري، نو له فورمول څخه کار اخلو:

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{\frac{x-5}{2}}=e^{P}$$

$$u=1+\frac{1}{x}\quad,\quad v=\frac{x-5}{2}$$

$$P=\lim_{x\to a}[v(u-1)]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x-5}{2}(1+\frac{1}{x}-1)\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x-5}{2}(\frac{1}{x})\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{x-5}{2x}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{\frac{x-5}{2}}=e^{P}=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$$

**دریم مثال**: $\lim_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}=?$

**حل**: **د تېر په شان بیاهم لومړی د لېمیټ بنه ټاکو،** $\lim_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}=1^{\infty}$

**څرنګه چې معلومېږي لېمیټ د** $1^{\infty}$ مبهم شکل لري د فورمول په مرسته یې محاسبه کوو:

$$u=\cos x\quad,\quad v=\frac{1}{x}$$

$$\lim_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}=e^{P}$$

$$P=\lim_{x\to a}[v(u-1)]=\lim_{x\to0}\left[\frac{1}{x}(\cos x-1)\right]=\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{(\cos x-1)(\cos x+1)}{x(\cos x+1)}$$

$$\frac{\cos^2 x+\cos x-\cos x-1}{x(\cos x+1)}=\lim_{x\to0}\frac{\cos^2 x-\sin^2 x-\cos^2 x}{x(\cos x+1)}$$

$$=-\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{\cos x+1}=-1\cdot\frac{0}{2}=0$$

$$\lim_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}=e^{P}=e^{0}=1$$

## پوښتنې

لاندې لېمیټونه محاسبه کړئ.

1) $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{x+2}$

2) $\lim_{x\to1}\frac{x-1}{\ln x}$

3) $\lim_{x\to\infty}(\frac{x+3}{x-1})^{x+2}$

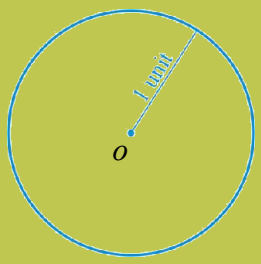
4) $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{n^2})^{n^2}$

5) $\lim_{x\to0}(\cos 2x)^{\frac{1}{x}}$

ketabton.com - The Digital Library

## د مثلثاتي تابع ګانو لېمیټ

## *Trigonometric functions limits*




که د یوې دایرې شعاع یو واحد (1unit) وي، نوموړې دایرې ته څه ډول دایره وایي.




- دوضعیه کمیاتو په سیستم کې د $C(o,r)$ په مثلثاتي دایره کې د $\theta$ مرکزي زاویه رسم کړئ.
- د $C$ له بهرني ټکي څخه په دایره باندې د $ox$ پر محور د $\overline{CA}$ مماس او $\overline{MB}$ عمود رسم کړئ.
- د $C$ ټکی د دایرې له مرکز سره وصل کړئ.
- د مرکزي زاویې د مقابل قوس د اندازه کولو واحد په ګوته کړئ.

له پورتني فعالیت څخه قضیه داسې بیان او ثبوتوو:

**قضیه**: د یوې زاویې د سایز او د هغې زاویې د نسبت لېمیټ مساوي په (1) دي، کله چې زاویه صفر ته تقرب وکړي.

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$$

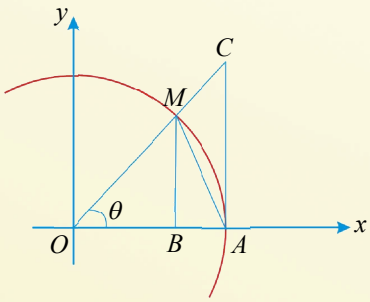
**ثبوت**: په لاندې شکل کې د $MOA$ او $COA$ د مثلثونو او $OMA$ د قطاع مساحتونه په لاس راوړو:

$$\text{د } MOA \text{ مثلث مساحت} = \frac{1}{2}\cdot\overline{OA}\cdot\overline{BM}=\frac{1}{2}\cdot r\cdot\overline{BM}=\frac{\overline{BM}}{2}\cdot r$$

$$\text{د } \overset{\frown}{OAM} \text{ قطاع مساحت} = \frac{1}{2}\theta r^2$$

د $\theta$ د زاویې پراخوالی باید په رادیان لاسته راوړو.

$$\text{د } \overset{\Delta}{COA} \text{ مساحت} = \frac{1}{2}\cdot\overline{OA}\cdot\overline{AC}=\frac{1}{2}\cdot r\cdot\overline{AC}=\frac{\overline{AC}}{2}\cdot r$$




د $MOA$ او $COA$ مثلثونو مساحتونه د $OMA$ د قطاع له مساحت سره پرتله کوو:

$$\frac{1}{2}r\,\overline{BM}<\frac{1}{2}\theta r^2<\frac{\overline{AC}}{2}\cdot r$$

ketabton.com - The Digital Library

د نامساواتو دواړه خواوې په $\frac{2}{r^2}$ کې ضربوو:

$$\frac{\overline{BM}}{r} < \theta < \frac{\overline{AC}}{r} \Rightarrow \sin\theta < \theta < \tan\theta \Rightarrow 1 < \frac{\theta}{\sin\theta} < \frac{1}{\cos\theta}$$

$$\Rightarrow \cos\theta < \frac{\sin\theta}{\theta} < 1 \Rightarrow \lim_{\theta\to 0}\cos\theta \le \lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta} \le \lim_{\theta\to 0}1$$

د ساندوېچ د قضيې پر بنسټ معلومېږي چې $\lim_{\theta\to 0}\cos\theta = 1$ او همدارنګه $\lim_{\theta\to 0}1 = 1$ دی، نو $\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta} = 1$ دی.

پوهېږو چې د هرې زاوېې سايز د $(1)$ او $(-1)$ د عددونو تر منځ تحول کوي:

$$-1 \le \sin\theta \le 1$$

$$-\frac{1}{\theta} \le \frac{\sin\theta}{\theta} \le \frac{1}{\theta}$$

$$-\lim_{\theta\to\infty}\frac{1}{\theta} \le \lim_{\theta\to\infty}\frac{\sin\theta}{\theta} \le \lim_{\theta\to\infty}\frac{1}{\theta}$$

د ساندوېچ د قضيې پر اساس لیکلای شو چې:

$$\left.\begin{array}{l} -\lim_{\theta\to\infty}\frac{1}{\theta} = 0 \\ \lim_{\theta\to\infty}\frac{1}{\theta} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{\theta\to\infty}\frac{\sin\theta}{\theta} = 0$$

په پایله کې ویلای شو چې د یوې زاوېې سايز او د هغې زاوېې د نسبت لېمیټ مساوي په صفر دی هغه وخت چې زاویه بې‌نهایت ته نژدې شي.

**لومړی مثال**: $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}$ پیدا کړئ.

**حل**: که $2x = \alpha$ نو $x = \frac{\alpha}{2}$ کېږي، څرنګه چې $x \to 0$ کړی دی، نو $\alpha \to 0$ کوي، نو لیکلای شو:

$$\frac{\sin\alpha}{\frac{\alpha}{2}} = 2\frac{\sin\alpha}{\alpha}$$

له پورته مساواتو څخه لاس ته راځي:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x} = \lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow 2\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha} = 2\cdot 1 = 2$$

ketabton.com - The Digital Library

**دویم مثال:** $\lim_{x\to 0}\frac{5\tan 2x}{7x}$ حل کړئ.

**حل:**

$$\frac{5\tan 2x}{7x}=\frac{5\frac{\sin 2x}{\cos 2x}}{7x}=\frac{5\sin 2x}{7x\cos 2x}=\frac{5\cdot 2x\frac{\sin 2x}{2x}}{7x\cos 2x}=\frac{10\frac{\sin 2x}{2x}}{7\cos 2x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{5\tan 2x}{7x}=\frac{10}{7}\frac{\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}}{\lim_{x\to 0}\cos 2x}=\frac{10}{7}$$

**دریم مثال:** $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x}$ حل کړئ.

**حل:** پوهېږو چې $1-\cos 2x=2\sin^2 x$ سره دی، نو:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x}{x}$$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\sin x=2\cdot 1\cdot 0=0$$

**څلورم مثال:** $\lim_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{\sin 5x}$ پیدا کړئ:

**حل:**

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{\sin 5x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 3x}{\cos 3x}}{\sin 5x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{3x\frac{\sin 3x}{3x}}{\cos 3x}}{5x\frac{\sin 5x}{5x}}=\frac{3x}{5x}\frac{\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}}{\lim_{x\to 0}\cos 3x}=\frac{3}{5}\frac{1}{1}=\frac{3}{5}$$

**پنځم مثال:** $\lim_{x\to 0}\frac{\cos 4x-\cos 6x}{x^2}$ په لاس راوړئ.

**حل:** پوهېږو چې $\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$ نو:

$$\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin\frac{4x+6x}{2}\sin\frac{4x-6x}{2}}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin 5x\sin(-x)}{x^2}=-2\lim_{x\to 0}\frac{5\sin 5x}{5x}\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{x}$$

ketabton.com - The Digital Library

که $y = 5x$ سره وي، او $x \to 0$ نو $y \to 0$ کوي، نو:

$$= 10 \lim_{y \to 0} \frac{\sin y}{y} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 10 \cdot 1 \cdot 1 = 10$$

## پوښتنې

لاندې لېمیټونه محاسبه کړئ.

1) $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin(x + \frac{\pi}{6})}{x + \frac{\pi}{6}}$

2) $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin^2 x}{x}$

3) $\lim_{x \to 0} \dfrac{1}{1 + \tan^2 x}$

4) $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin x - x}{x}$

5) $\lim_{x \to 0} \dfrac{\tan 2x}{\sin 3x}$

6) $\lim_{x \to 0} \sin 5x \cos 3x$

7) $\lim_{x \to 0} \dfrac{\tan(2x - 1)}{4x^2 - 1}$

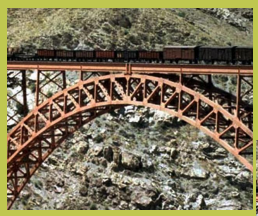
8) $\lim_{x \to 0} \sqrt{\cos 2x - \cos x + 1}$

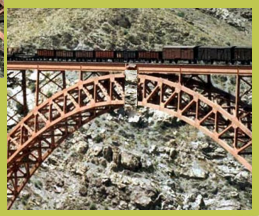
9) $\lim_{x \to 1} (\cos^2 x + \sin^2 x)$

ketabton.com - The Digital Library

## د تابع ګانو متماديت

## *Continuity of functions*





شکلونو ته پام وکړئ.

لومړی او دويم پلونه يو له بل څخه څه توپير لري، خپل نظر بيان کړئ.

د تابع ګانو ګرافونه مختلف شکلونه لري چې ځينې يې په يوه قلم پرته له دې چې د قلم څوکه له کاغذ څخه پورته شي رسمېږي، متصلې يا متمادي تابع ګانې بلل کېږي او ځينې يې په يوه قلم نه شي رسمېدلای يعنې د رسم په وخت کې بايد د قلم څوکه يو ځل يا څو ځلې د کاغذ څخه پورته شي، ځکه په يوه برخه کې يې ګراف غوځ وي، دغه ډول تابع ګانې په نوموړې ټکې کې غير متصلې يا غير متمادي تابع ګانې بلل کېږي.




- د $f(x) = x^2 + 4x$ تابع ګراف رسم کړئ.
- د $f(x)$ د تابع لېميټ د $x = 1$ په نقطه کې پيدا کړئ.
- د $f(x)$ د تابع قيمت د $x = 1$ په نقطه کې پيدا او وروسته دواړه اړيکې سره پرتله کړئ.

له پاسنې فعاليت څخه لاندې پايله په لاس راځي:

**پايله:** د $y = f(x)$ تابع د $x = a$ په ټکي کې متمادي بلله کېږي چې لاندې شرطونه په کې صدق وکړي.

1- د $f(x)$ تابع د $a$ په ټکې کې تعريف شوي وي.

2- راکړل شوي تابع د $a$ په ټکې کې لېميټ ولري.

3- د $f(a)$ قيمت بايد د $f(x)$ له لېميټ سره مساوي وي: $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

ketabton.com - The Digital Library

**لومړی مثال**: وښیئ چې د $f(x)=x^2+2x-1$ تابع د $x_0=2$ په ټکي کې متمادي ده.

**حل**: څرنګه چې د تابع د تعریف ساحه ټول حقیقي عددونه دي، نو د متمادیت له شرطونو څخه لیکلای شو:

1) $2 \in Dom\ f(x)=IR$

2) $\lim\limits_{x\to 2}(x^2+2x-1)=4+4-1=7$

3) $f(2)=2^2+4-1=7$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 2} f(x)=f(2)=7$

څرنګه چې د متمادیت درې واړه شرطونه په کې حقیقت لري، بناءً تابع متمادي ده.

**دویم مثال**: د $f(x)=\dfrac{2x-1}{x+1}$ د تابع متمادیت د $x_0=-1$ په ټکي کې وڅېړئ.

**حل**: د $f(x)$ د تابع د تعریف ساحه عبارت ده، له: $IR\setminus\{-1\}$

او $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x-1}{x+1}=\dfrac{-3}{0}=\infty$ سره دی.

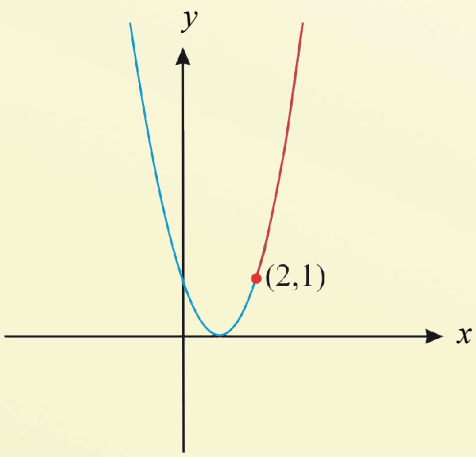
څرنګه چې لیدل کېږي $-1$ د تابع د تعریف په ساحه کې شامل نه دی، بناءً نومورې تابع د $-1$ په ټکي کې متمادي نه ده.

**دریم مثال**: د $f(x)=\begin{cases} x^2-2x+1 & ; \ x<2 \\ x^2-3 & ; \ x\geq 2 \end{cases}$ د تابع متمادیت د $x=2$ په ټکي کې وڅېړئ.

**حل**: لومړی د تابع د نښې او کینې خوا لېمیټونه څېړو:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}(x^2-3)=1 \\ \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(x^2-2x+1)=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^-} f(x) \Rightarrow \lim_{x\to 2} f(x)=f(2)$$

په پایله کې ویلای شو چې تابع په نومورې ټکي کې متمادي ده، لکه چې په شکل کې لیدل کېږي.



ketabton.com - The Digital Library

**خلورم مثال**: که $f(x)=\begin{cases}2x+1 & ; \ x\geq 1\\ 1-x & ; \ x<1\end{cases}$ وي، نو د $x=1$ په ټکي کې د تابع متمادیت وڅېړئ.

**حل**:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1} f(x)=1-x=0\\ f(1)=0\end{array}\right\}\quad\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} 2x+1=3\\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} 1-x=0\end{array}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to 1^+} f(x)\neq \lim_{x\to 1^-} f(x)$$

نو تابع په $x=1$ کې غیر متمادي ده.

**پایله**: که چېرې د $g(x)$ تابع د $x=a$ په ټکي کې $f(x)$ په $x=g(a)$ کې متمادي وي، نو $f(g(x))$ په $x=a$ کې هم متمادي ده، یعنې:

$$\lim_{x\to a} f(g(x))=f(\lim_{x\to a} g(x))=f(g(a))$$

1) $\lim\limits_{x\to a}(f(x))^{\alpha}=(\lim\limits_{x\to a} f(x))^{\alpha} \quad , \quad \alpha\in IR$

2) $\lim\limits_{x\to a} a^{f(x)}=a^{\lim\limits_{x\to a} f(x)}$

3) $\lim\limits_{x\to a}\log_a f(x)=\log_a(\lim\limits_{x\to a} f(x))$

4) $\lim\limits_{x\to a}\sin f(x)=\sin(\lim\limits_{x\to a} f(x))$

**پنځم مثال**: که $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x+3}$ وي او $x\neq -3$ وي.

آیا د $f(x)$ تابع د $x=-3$ په ټکي کې متمادي ده؟

**حل**: څرنګه چې تابع د $x=-3$ په نقطه کې نه ده تعریف شوې یا په بل عبارت د $-3$ عدد د تابع د تعریف په ساحه کې نه دی شامل، نوله دې امله تابع د $x=-3$ په ټکي کې متمادي نه ده.

**غیر متمادیت**: که چېرې د $f(x)$ تابع په $x=a$ کې یو له لاندې درې شرطونو څخه و نه لري وایو چې $f$ په $a$ کې غیر متمادي ده او $a$ یې د انفصال ټکی دی. انفصال په درې ډوله دی.

**لومړی ډول**: د $f$ تابع د $a$ په ټکي کې د ښي او کیڼ لوري لېمیټونه ولري، خو مساوي نه وي.

**دویم ډول**: کم تر کمه یو له دوو لېمیټونو(د ښي او کیڼ لوري لېمیټونه) څخه موجود نه وي.

**دریم ډول**: که چېرې تابع د $a$ په ټکي کې لېمیټ ولري، خو $a$ د $f$ د تعریف په ساحه کې شامل نه وي.(یوازې یو خالي ټکی وي.)

ketabton.com - The Digital Library

## پوښتنې

په ورکړ شویو ټکو کې د تابع متمادیت وڅېړئ.

a) $f(x)=x^2+5(x-2)^7 \quad ; \quad x=3$

b) $f(x)=\dfrac{x+3}{(x^2+2x-5)} \quad ; \quad x=-1$

c) $h(x)=\dfrac{\sqrt{8-x^2}}{2x^2-5} \quad ; \quad x=-2$

d) $f(x)=\dfrac{1}{(x-3)^3} \quad ; \quad x=3$

e) $f(x)=|x-3| \quad ; \quad x=3$

f) $g(x)=\dfrac{|x|}{x} \quad ; \quad x=0$

g) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3+x}{x} & ; \quad x\neq 0\\ 3 & ; \quad x=2\end{cases}$

h) $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x+3} \quad ; \quad x=2$

ketabton.com - The Digital Library

## د متمادي تابع ګانو خاصيتونه

د مخامخ مساواتو په اړه سوچ وکړئ چې حقيقت لري او که نه؟

$$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$$
$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$
$$(f \div g)(x) = f(x) \div g(x) \quad , \; g(x) \neq 0$$




- که $f(x) = x^2 - 1$ وي د تابع متماديت وڅېړئ.
- که $g(x) = x + 3$ وي د تابع متماديت وڅېړئ.
- د $f(x) + g(x)$ د تابع ګانو متماديت وڅېړئ.

د پورتني فعاليت پايله داسې بيانوو:

**پايله**: که د $f(x)$ او $g(x)$ تابع ګانې د $x = c$ په ټکي کې متمادي وي، نو له لاندې تابع ګانو څخه يې هره يوه په $x = c$ يا يوه انټروال کې متمادي ده.

1- د تابع ګانو جمع $f(x) + g(x)$

2- د تابع ګانو تفريق $f(x) - g(x)$

3- د تابع ګانو ضرب $f(x) \cdot g(x)$

4- د تابع ګانو تقسيم $\dfrac{f(x)}{g(x)} \; ; \; g(x) \neq 0$

**لومړۍ بېلګه**: **که** $f(x) = x^2 + 3$ **او** $g(x) = x^2 + 3x - 2$ **وي، نو:**

1- $f$ او $g$ د $x = 1$ په ټکي کې متمادي دي او که نه؟

2- وڅېړئ چې:

الف) $f(x) + g(x) = (f + g)(x)$ وي.

ketabton.com - The Digital Library

ب) $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$ د $x = 1$ په نقطه کې متمادي ده او که غیر متمادي.

**حل**:لومړی هره یوه تابع بېلابېله څېړو چې متمادي ده که نه؟

1) $Df(x) = IR$

2) $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1}(x^2 + 3) = 4$

3) $f(1) = (1^2 + 3) = 4$

**نو د $f$ تابع** د $x = 1$ په نقطه کې متمادي ده.

1) $D\,g(x) = IR$

2) $\lim\limits_{x \to 1} g(x) = \lim\limits_{x \to 1}(x^2 + 3x - 2) = 1^2 + 3 \cdot 1 - 2 = 2$

3) $g(1) = (1^2 + 3 \cdot 1 - 2) = 2$

په همدې شان د $g$ تابع د $x = 1$ په ټکي کې هم متمادي ده.

2- اوس د تابع ګانو د جمعې او ضرب د حاصل متماديت څېړو:

**الف)**

$f(x) + g(x) = x^2 + 3 + x^2 + 3x - 2 = 2x^2 + 3x + 1$

1) $D(f(x) + g(x)) = IR$

2) $\lim\limits_{x \to 1}[f(x) + g(x)] = \lim\limits_{x \to 1}(2x^2 + 3x + 1) = 6$

3) $f(1) + g(1) = (1 + 3 + 1 + 3 - 2) = 6$

$\lim\limits_{x \to 1}[f(x) + g(x)] = f(1) + g(1) = 6$

$(f + g)(x) = x^2 + 3 + x^2 + 3x - 2 = 2x^2 + 3x + 1$

1) $D[(f + g)(x)] = IR$

2) $\lim\limits_{x \to 1}[(f + g)(x)] = \lim\limits_{x \to 1}[2x^2 + 3x + 1] = 6$

3) $(f + g)(1) = (2x^2 + 3x + 1)(1) = 6$

$\lim\limits_{x \to 1}[(f + g)(x)] = (f + g)(1) = 6$

په پایله کې د متمادي تابع ګانو د جمعې حاصل د $x = 1$ په نقطه کې متمادي دی.

ketabton.com - The Digital Library

**ب)**

$$f(x)\cdot g(x)=(x^2+3)(x^2+3x-2)=x^4+3x^3+x^2+9x-6$$

1) $D(f\cdot g)(x)=IR$

2) $(f\cdot g)_{(1)}=1^4+3\cdot 1^3+1^2+9\cdot 1-6=8$

3) $\lim\limits_{x\to 1}(f\cdot g)(x)=8$

$\lim\limits_{x\to 1}(f\cdot g)(x)=(f\cdot g)(1)=8$

په پایله کې د متمادي تابع ګانو د ضرب حاصل د $x=1$ په نقطه کې متمادي ده.

**دویمه بېلګه**: که $g(x)=3x-2$ او $f(x)=x+1$ وي، وخېړئ چې آیا $f(x)\cdot g(x)$ د $x=2$ په نقطه کې متمادي ده؟

**حل**:

1) $Df(x)=IR$

2) $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=\lim\limits_{x\to 2}(x+1)=3$

3) $f(2)=x+1=3$

$\lim\limits_{x\to 2}f(x)=f(2)=3$

1) $Dg(x)=IR$

2) $\lim\limits_{x\to 2}g(x)=3x-2=3\cdot 2-2=4$

3) $g(2)=3x-2=3\cdot 2-2=4$

$\lim\limits_{x\to 2}g(x)=g(2)=4$

$$f(x)\cdot g(x)=(x+1)(3x-2)=3x^2-2x+3x-2=3x^2+x-2$$

$$D(f\cdot g)(x)=IR$$

$$\lim_{x\to 2}[f(x)\cdot g(x)]=3(4)+2-2=12$$

$$(f\cdot g)(2)=3(4)+2-2=12$$

$$\lim_{x\to 2}[f(x)\cdot g(x)]=(f\cdot g)(2)=12$$

په پایله کې لاس ته راځي چې $f(x)\cdot g(x)$ د $x=2$ په ټکي کې متمادي ده.

ketabton.com - The Digital Library

## پوښتنې

1- وښیئ چې لاندې تابع ګانې په ورکړ شویو نقطو کې متمادي دي او که نه؟

1) $f(x)=x^3-2(x+1)^5$ ; $x=2$

2) $g(x)=\dfrac{x^2+3}{(x^2-x+5)(x^2+2x)}$ ; $x=-1$

3) $h(x)=\dfrac{x\sqrt{x}+1}{(x+2)^3}$ ; $x=4$

2- تشریح کړئ چې ولې د $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt{2}}{x}$ تابع په $x=0$ کې غیرمتمادي ده.

ketabton.com - The Digital Library



**د متحول تقرب**: ویل کېږي چې د $x$ متحول د $a$ عدد ته تقرب کوي، په داسې حال کې چې $x$ په اختیاري ډول د $a$ عدد ته نژدې کېږي، یعنې د $x$ او $a$ ترمنځ تفاوت له هر کوچني عدد( $\delta > 0$ ) څخه کوچني دی یا په لاندې ډول:

$$\forall \delta > 0 : |x-a| < \delta \quad \text{يا} \quad x \to a \quad \text{يا} \quad |x-a| \to 0$$

**له ښي لوري د متحول تقرب**: ( $x \to a^+$ ) که چېرې د $x$ د قیمتونو یو متناقص ترادف موجود وي، په داسې حال کې چې په تدریجي ډول د $a$ اختیاري عدد ته نژدې شي.

$$x : a+0.1,\ a+0.01\ ,\ a+0.001\ ,\ a+0.0001\ ,\ \ldots \to a^+$$

**له کېنې لوري د متحول تقرب**: ( $x \to a^-$ ) که چېرې د $x$ د قیمتونو یو متزاید ترادف موجود وي، په داسې حال کې چې $x$ په تدریجي ډول د $a$ اختیاري عدد ته نژدې شي.

$$x : a-0.1,\ a-0.01\ ,\ a-0.001\ ,\ a-0.0001\ ,\ \ldots \to a^-$$

نو د $x$ د متحول تقرب د $a$ عدد ته معادل دی د $x$ د متحول تقرب له ښي لوري او د $x$ د متحول تقرب له چپ لوري؛ یعنې:

$$x \to a \quad \Leftrightarrow \quad (x \to a^+\ ,\ x \to a^-)$$

**تعریف**: که چېرې د $f(x)$ تابع په یوه غیر تړلي انټروال کې چې د $a$ عدد په هغې کې شامل وي کېدای شي چې تابع په $a$ کې نه وي تعریف شوی. که چېرې د $x$ متحول د $a$ عدد ته نژدې شي، نو د $f(x)$ تابع د $l$ عدد ته نژدې کېږي، نو ویل کېږي چې د $f(x)$ د تابع لېمیټ عبارت له $l$ څخه دی، کله چې د $x$ متحول د $a$ عدد ته تقرب وکړي، نو داسې یې لیکو:

$$\lim_{x \to a} f(x) = l \quad \text{يا} \quad \begin{matrix} x \to a \\ f(x) \to l \end{matrix}$$

**د لېمیټ خانګړتیاوې**: کـه $f$ او $g$ دوې تـابع ګـانې وي، C,L او M حقیقـي عددونـه وي، داسـې چې $\lim_{x \to c} f(x) = L$ او $\lim_{x \to c} g(x) = M$ ، نو لاندې رابطې لیکلای شو:

1) $\lim_{x \to c}(f(x)+g(x)) = \lim_{x \to c} f(x) + \lim_{x \to c} g(x) = L+M$

2) $\lim_{x \to c}(f(x)-g(x)) = \lim_{x \to c} f(x) - \lim_{x \to c} g(x) = L-M$

3) $\lim_{x \to c}(f(x)\cdot g(x)) = \lim_{x \to c} f(x) \cdot \lim_{x \to c} g(x) = L \cdot M$

4) $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to c} f(x)}{\lim_{x \to c} g(x)} = \frac{L}{M}\ ,\quad M \neq 0\ ,\quad g(x) \neq 0$

5) $\lim_{x \to c} \sqrt{f(x)} = \sqrt{\lim_{x \to c} f(x)} = \sqrt{L}$

ketabton.com - The Digital Library

**بې نهایت کوچنی تابع ګانې**: د $\varepsilon(x)$ تابع کله چې $x \to a$ ته نژدې شي، بې نهایت کوچنی بللې کېږي، کله چې $\lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$ وي.

**د ساندویچ قضیه**: که چېرې د $g(x), f(x)$ او $h(x)$ تابع ګانې د هر $x$ لپاره په یوه غیر تړلي انټروال کې چې د $a$ عدد په کې شامل دی(ولو که $x \neq a$) او $f(x) \le g(x) \le h(x)$ شرط صدق وکړي په هغه صورت کې چې $\lim_{x\to a} f(x) = b = \lim_{x\to a} h(x)$ وي، نو $\lim_{x\to a} g(x) = b$ دی.

- که چېرې یوه تابع د $\frac{0}{0}$ مبهمه بڼه ولري، د لېمیټ د پیدا کولو لپاره یې لومړی تابع د تجزیې په مرسته ساده کوو او بیا یې لېمیټ په لاس راوړو.
- $f(x) = \frac{a_0x^m + a_1x^{m-1} + \ldots + a_m}{b_0x^n + b_1x^{n-1} + \ldots + b_n}$ د تابع د لېمیټ د پیدا کولو لپاره چې $x \to \infty$ وکړي، عبارت دی له:

1. د $m = n$ لپاره د نوموړي کسر لیمیټ عبارت دی له $\frac{a_0}{b_0}$
2. د $m < n$ لپاره د نوموړي کسر لیمیټ عبارت له صفر څخه دی.
3. د $m > n$ لپاره د نوموړي کسر لیمیټ عبارت دی له $\pm\infty$

- د هغو تابع ګانو چې $(\infty - \infty)$ او $(0 \cdot \infty)$ بڼه ولري د لېمیټ د پیدا کولو لپاره یې د کسرونو د جمعې، ضرب او مزدوج څخه ګټه اخلو، تر څو د $\frac{0}{0}$ یا $\frac{\infty}{\infty}$ بڼه غوره کړي چې وروسته یې لېمیټ په لاس راوړو.
- هغه تابع ګانې چې د $1^\infty$ مبهم شکلونه لري له دې فورمول څخه $P = \lim_{x\to a}[v(u-1)]$ , $\lim_{x\to a}[u(x)]^{v(x)} \overset{1^\infty}{=} e^P$ یې د لېمیټ د پیدا کولو لپاره کار اخلو.
- لاندې رابطه کله چې $\theta \to 0$ وکړي همېشه سمه ده.

$$\lim_{\theta\to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1$$

- د $y = f(x)$ تابع د $x = a$ په ټکی کې متمادي بلل کېږي، کله چې:

1. $a$ د $f(x)$ د تابع په دومین کې شامل وي.
2. راکړل شوی تابع د $a$ په نقطه کې لېمیټ ولري.
3. $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

ketabton.com - The Digital Library

## د لومړي څېرکي پوښتنې

لاندې پوښتنو ته څلور ځوابونه ورکړل شوي دي، سم ځواب يې په نښه کړي.

-1 $\lim_{x\to 0}\frac{3x-\sin x}{x}$

a) 2 b) -2 c) 1 d) 3

-2 $\lim_{x\to -2}\frac{x^2-x-6}{x^2+x-2}$

a) $-\frac{5}{3}$ b) $\frac{5}{3}$ c) 0 d) 1

-3 $\lim_{x\to 1.4}(2x+0.3)$

a) 1 b) 3 c) 0 d) هيڅ يو

-4 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\tan 2x}$

a) 1 b) 0 c) $\frac{3}{2}$ d) $\frac{2}{3}$

-5 $\lim_{x\to 4}\frac{x-4}{\sqrt{x}-2}$

a) $2+\sqrt{2}$ b) 2 c) $\sqrt{2}$ d) 4

-6 $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{1+\cos 2x}$

a) 1 b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{4}$ d) 4

7- لاندې لېمیټونه پیدا کړئ.

1) $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-2x+5}{2x^2+1}$

2) $\lim_{x\to -1}\sqrt{3+x}$

3) $\lim_{x\to +\infty}\frac{6}{x^2-7}$

4) $\lim_{x\to \infty}\frac{x^4+x^2+x+6}{x^3-3x+4}$

5) $\lim_{x\to \infty}\frac{3x^2-2}{x+1}$

6) $\lim_{x\to 2}\frac{x^3+5x-18}{x^2+3x-10}$

7) $\lim_{x\to 2}\frac{x^3-2x-4}{x-\sqrt{3x-2}}$

8) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{x^2+3x-10}$

9) $\lim_{x\to 0}\frac{x}{\tan x}$

10) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x\cos x}$

ketabton.com - The Digital Library

11) $\lim_{x\to 2}\dfrac{x^2+3x-10}{x^2-x-2}$

12) $\lim_{x\to -2}\left(\dfrac{x+3}{x+2}+\dfrac{2}{x^2+2x}\right)$

13) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin(a+x)+\sin(a-x)}{\tan(a+x)+\tan(a-x)}$

14) $\lim_{x\to +\infty}\dfrac{x^2}{2x^2-1}-\dfrac{x^2}{2x+2}$

15) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\cos x\sin x-\tan x}{x^2\sin x}$

16) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos 3x+\sin^2 x}{a\,x^2}$

17) $\lim_{x\to 0}\dfrac{2\sin 2x\sin x+\sin^2 x}{x^2}$

18) $\lim_{x\to 0}\dfrac{x-\sin 2x}{x+\sin 3x}$

19) $\lim_{x\to 0}\dfrac{-2\sin 3x\sin 2x}{x\tan 3x}$

20) $\lim_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{\sqrt{x-2}\cdot\sqrt{x+2}}+\dfrac{1}{\sqrt{x+2}}$

21) $\lim_{u\to 0}\dfrac{\sin 3(\pi+u)}{\sin 8(\pi+u)}$

22) $\lim_{x\to 1}\dfrac{1-x^2}{\sin\pi x}$

23) $\lim_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-x+3}{x^2-8x+5}$

24) $\lim_{x\to\infty}\dfrac{8x+4}{4x+\sqrt{x}}$

25) $\lim_{x\to 2}\dfrac{9x^2-x+5}{\sqrt{9x^4+1}}$

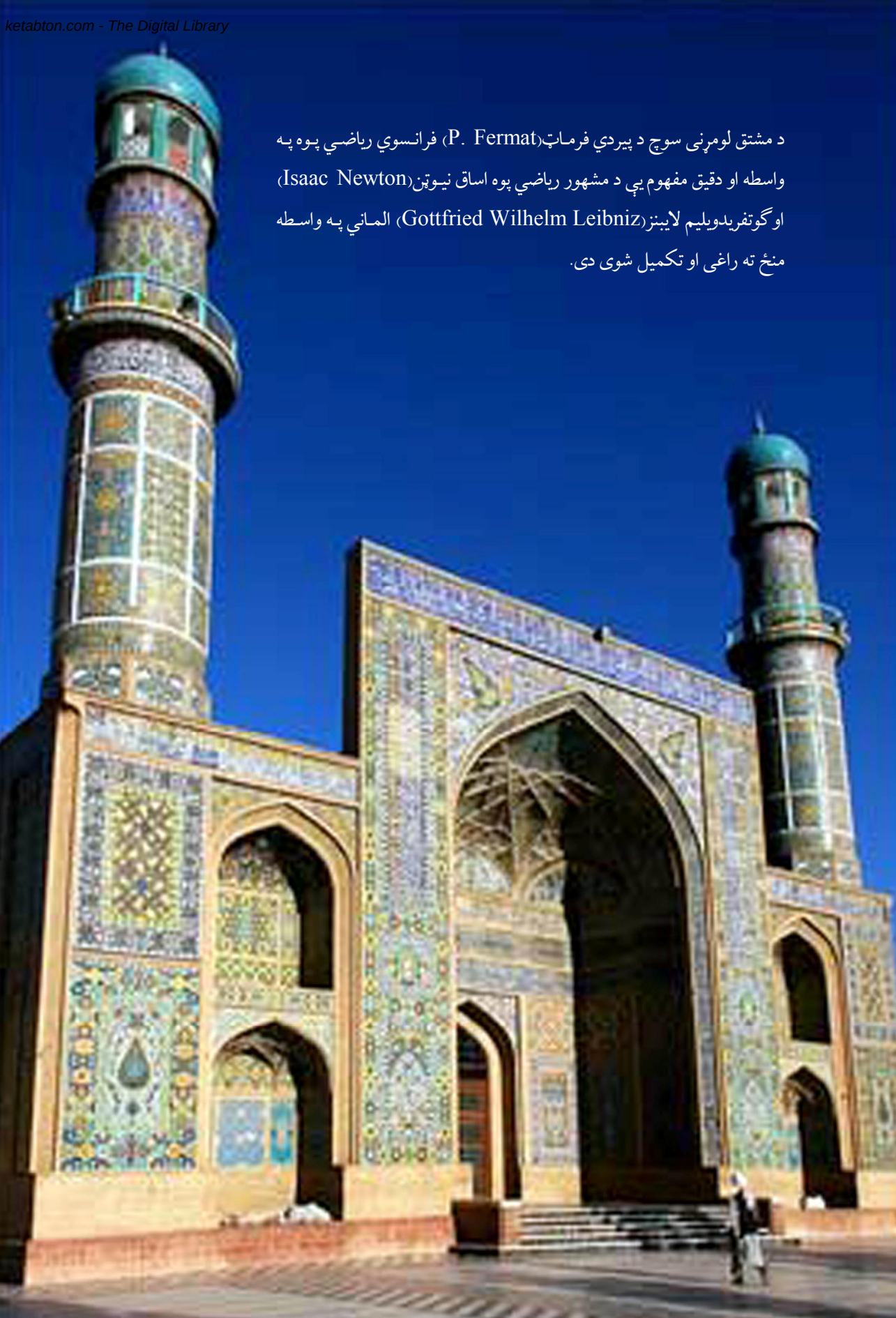
26) $\lim_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{1}{1-x^2}\right)$

ketabton.com - The Digital Library

# دویم څپرکی

# مشتق

ketabton.com - The Digital Library



د مشتق لومړنی سوچ د پیردي فرماټ(P. Fermat) فرانسوي ریاضي پوه په واسطه او دقیق مفهوم یې د مشهور ریاضي پوه اساق نیوټن(Isaac Newton) او گوتفریدویلیم لایبنز(Gottfried Wilhelm Leibniz) المانې په واسطه منځ ته راغی او تکمیل شوی دی.

ketabton.com - The Digital Library

## مشتقات

Derivatives

د $f(x)=x^2-1$ تابع په پام کې ونیسئ د مخامخ کسر لیمیټ پیدا کړئ.

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=?$$

### د یوې منحني میل

- که د یوه مستقیم خط دوه ټکې $A(x_1,y_1)$ او $B(x_2,y_2)$ معلوم وي، نو د دې مستقیم خط میل له کومې رابطې څخه په لاس راځي.
- آیا د یوه مستقیم خط میل ثابت او مساوي دي؟ که په یوه ځانګړې ټکي پورې اړه لري؟
- آیا د مستقیم خط میل د هغې زاویې سره اړه لري چې مستقیم خط یې د $x$ د محور له مثبت لورې سره جوړوي؟
- آیا د مستقیم خط او منحني میلیونه یو شان پیدا کېږي؟

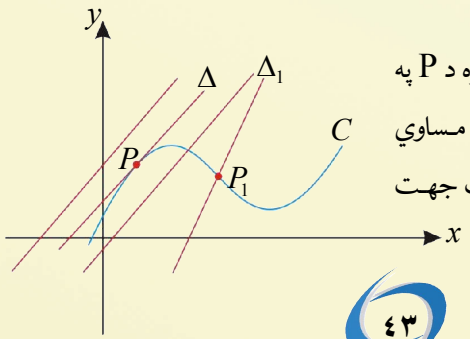
له پورتنیو پوښتنو څخه څرګندېږي چې د منحني میل په اسانۍ سره نشو پیدا کولای، ځکه چې منحني خط په هر ټکي کې خپل مسیر ته بدلون ورکوي او په مختلفو ټکو کې بېلابېل میلونه لري، نو له دې کبله لومړی د یوه منحني خط میل د هغه په یوه ټکي کې تعریفوو او بیا یې د محاسبې لپاره یو فورمول په لاس راوړو.

**فعالیت**

- د وضعیه کمیاتو په مستوي کې د c منحني خط رسم او د P او $P_1$ دوه ټکي پرې وټاکئ.
- د $P_1$ په ټکي کې د $\Delta_1$ قاطع او د p په ټکي کې د $\Delta$ مماس رسم کړئ.
- که د $P_1$ ټکی د C په منحني باندې داسې حرکت وکړي چې د p ټکي ته نږدې شي، په پایله کې د $\Delta_1$ مستقیم خط له $\Delta$ مستقیم خط سره څه اړیکه پیدا کوي؟

د پورتني فعالیت پایله داسې بیانوو:

د $\Delta$ د مسقتیم خط میل چې د $C$ له منحني سره د P په نقطه کې مماس دی د هغې زاویې له (tan) سره مساوي دی چې مستقیم خط یې د $x$ د محور له مثبت جهت سره جوړوي.

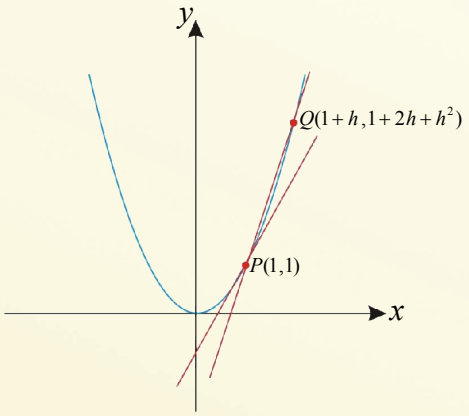


ketabton.com - The Digital Library

**لومړی مثال**: د $y = f(x) = x^2$ له منحني سره د مماس میل د $P(1,1)$ په ټکي کې پیدا کړئ.

**حل**: څرنګه چې د منحني میل د مماس له میل سره د P په ټکي کې برابر دي، نو ددې مماس میل له هغه فورمول څخه چې دوې نقطې یې معلومې وي، نشو پیدا کولای، ځکه دلته یوازې د یوې نقطې مختصات ورکړل شوی دي. ولې کولای شو د دې مماس د میل تخميني قیمت د هغه قاطع خط له میل څخه چې د P او Q له ټکو څخه تېرېږي، پیدا کړو، په هغه صورت کې چې د Q ټکی د P ټکي ته نږدې شي د $PQ$ د مماس میل 2 ته تقرب کوي چې په لاندې جدول کې لیدل کېږي.

| $x$ | 2 | 1.5 | 1.1 | 1.01 | 1.001 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 4 | 2.25 | 1.21 | 1.0201 | 1.002001 |
| $m_{\overline{PQ}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ | 3 | 2.5 | 2.1 | 2.01 | 2.001 |




په عمومي ډول هغه لومړی مختصه چې د $P(1,1)$ ټکي ته نږدې ده په $1+h$ ښودلای شو چې h یو کوچنی مثبت یا منفي عدد دی، خو $h \neq 0$ دی نو لیکلای شو:

$$f(1+h) = (1+h)^2 = 1+2h+h^2$$

نو دا $(1+h \ , \ 1+2h+h^2)$ ټکی د منحني پر مخ راکړل شوی پروت دی، نو په پایله کې هغه مستقیم خط چې له $P(1,1)$ او $Q(1+h,1+2h+h^2)$ له ټکو څخه تیریږي، میل یې عبارت دی له:

$$m_{PQ} \frac{(1+2h+h^2)-1}{(1+h)-1} = \frac{2h+h^2}{h} = 2+h$$

که چېرې په شکل کې $h \to 0$ نو $Q \to P$ کوي، قاطع خط د $P(1,1)$ په نقطه کې مماس کېږي چې د همدې مماس میل ته د تابع مشتق وایي؛ یعنې: $\overline{PQ} = \lim_{h \to 0}(2+h) = 2$

ketabton.com - The Digital Library

د لېميټ دا عمليه مونږ ته دا امکان په لاس راکوي چې د $y = x^2$ د تابع د منحني ميل په يوه اختياري ټکي $P(x, y)$ کې په لاس راوړو. که د $Q$ د ټکي اختياري مختصات $\left[x+h, (x+h)^2\right]$ وي او د $PQ$ ميل ته $m$ او د $P$ په ټکي کې د مماس ميل په $m_T$ سره وښيو لرو چې:

$$m = \frac{(x+h)^2 - x^2}{x+h-x} = \frac{x^2 + 2hx + h^2 - x^2}{h} = \frac{2xh + h^2}{h} = 2x + h$$

$$m_{T=} \lim_{h\to 0}(2x+h) = 2x$$

نو په عمومي بڼه ليکلای شو، که چېرې $P[x, f(x)]$, $Q[x+h\ , f(x+h)]$ د نوموړي منحني دوې اختياري نقطې وي، نو لاندې خارج قسمت چې د Newton د رابطې په نامه مشهور دی، ليکلای شو:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{x+h-x} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

په حقيقت کې دا د هغه مستقيم خط ميل دی چې د $P$ او $Q$ له ټکو څخه تېرېږي.

او د منحني ميل د هغې په هر اختياري ټکي کې عبارت دی له:

$$m_T = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

**دويم مثال**: د $f(x) = x - x^2$ د منحني سره د مماس ميل د $P(2,0)$ په ټکي کې پيدا کړئ.

**حل**: د Newton خارج قسمت تشکيل او د $x = 2$ په ټکي کې د منحني ميل حسابوو:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = m_T = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{(2+h)-(2+h)^2-2+2^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{2+h-4-4h-h^2-2+4}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h-4h-h^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{h(1-4-h)}{h} = \lim_{h\to 0}(-3-h) = -3$$

## منځنی يا وسطي تغير

که يو جسم د يوه مستقيم خط پر مخ د حرکت په حال کې وي، طبيعي ده چې وهل شوی فاصله د زمان تابع ده يعنې $S = f(t)$ د $t_1$ او $t_2$ دوو وختونو خارج قسمت $\frac{f(t_2)-f(t_1)}{t_2-t_1}$ د جسم د وسطي سرعت په نامه يادېږي او سرعت د $t_0$ په وخت کې عبارت له هغه حد يا لېميټ څخه دی چې لحظوي سرعت بلل کېږي. $\lim_{t\to t_0}\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}$

ketabton.com - The Digital Library

د پورتنی رابطې لېمیټ د $t$ او $t_0$ په وخت کې داسې لیکو:

$$\lim_{t\to t_0}\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}=\lim_{t\to t_0}\frac{S-S_0}{t-t_0}=\frac{\Delta S}{\Delta t}$$

په پایله کې ویلای شو چې د تابع او متحول د زیاتوالي خارج قسمت ته متوسط تغییر وایي، یعنې:

$$\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{f(t_2)-f(t_1)}{t_2-t_1}$$

**مثال**: د $y=f(x)=x^2$ په تابع کې د $f$ متوسط تغیرات د $[2,5]$ په انټروال کې پیدا کړئ.

**حل**: څرنګه چې $x_1=2$ او $x_2=5$ دی، نو د تعریف په مرسته لیکلای شو:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{f(5)-f(2)}{5-2}=\frac{5^2-2^2}{5-2}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{25-4}{5-2}=\frac{21}{3}=7$$

## پوښتنې

1) د لاندې تابع ګانو د $x$ د متحول لپاره د $\Delta x$ او $\Delta y$ تزاید په پام کې نیولو سره $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ او میل یې په غوښتل شوو ټکو کې پیدا کړئ.

1) $\frac{\Delta y}{\Delta x}=?$ , $f(x)=2x^2-4$ , $(0)$

2) $\frac{\Delta y}{\Delta x}=?$ , $f(x)=2x-x^2$ , $(3)$

3) $\frac{\Delta y}{\Delta x}=?$ , $f(x)=3x^2-5x+4$ , $(2,-1)$

2) د $f(t)=5t^3-3t+1$ د تابع متوسط تغییرات د $[2,4]$ په انټروال کې پیدا کړئ.

ketabton.com - The Digital Library

## د يوې تابع مشتق

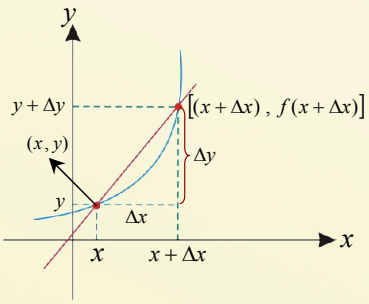
مخامخ لېميټ څه را ښـيي آيا په بل ډول يې ليکلای شو؟

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$




- که چېرې د $y=f(x)$ تابع د $[a,b]$ په انټروال کې متمادي وي، که د $x$ متحول د $\Delta x$ په انـدازه زيـاتوالی پيدا کړئ آيا تابع تزايد کوي په دې حالت کې، د متحول او تابع د زياتوالي رابطه وليکئ.
- د تابع تزايد د متحول پر تزايد $(\frac{\Delta y}{\Delta x})$ داسې وليکئ چې په مساوات کې بدلون رانشي.
- که له دواړو خواوو څخه لېميټ ونيول شي، په هغه صورت کې چې $\Delta x$ صفر ته تقرب وکړي، د دې حد يـا لېميټ د څه په نامه يادېږي؟

د پورتني فعاليت پايله داسې بيانوو:




$$y=f(x)$$
$$y+\Delta y=f(x+\Delta x)$$
$$\Delta y=f(x+\Delta x)-y$$
$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x) \quad / \div \Delta x$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

**تعريف**: د تابع او مستقل متحول د تزايد د نسبت لېميټ کله چې د مستقل متحول تزايد صفر ته تقرب وکړي د تابع مشتق بلل کېږي، لکه: $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ او هغه په $f'(x)$ يا $y'$ ، $\frac{df}{dx}$ ، $\frac{dy}{dx}$ سره ښودل کېږي.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{dy}{dx}=\frac{df(x)}{dx}=y'=f'(x)$$

**لومړی مثال**: که $f(x)=2x$ وي، د دې تابع مشتق پيدا کړئ.

ketabton.com - The Digital Library

**حل**: د مشتق د تعریف څخه په ګټه اخیستنې سره لیکلای شو چې:

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2(x+\Delta x)-2x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2x+2\Delta x-2x}{\Delta x}$$

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\Delta x}{\Delta x}\Rightarrow f'(x)=2$$

**دویم مثال**: د $f(x)=x^3$ د تابع مشتق پیدا کړئ.

**حل**:

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^3-x^3}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x^3+3x^2\Delta x+3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3-x^3}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x(3x^2+3x(\Delta x)+(\Delta x)^2)}{\Delta x}=3x^2+3x(0)+0^2\Rightarrow f'(x)=3x^2$$

**دریم مثال**: د $f(x)=\sqrt{x}\ ,\quad x\geq 0$ مشتق پیدا کړئ.

**حل**: مخکې له حل څخه $x\geq 0$ حالت په پام کې نیسو:

**الف**: که $x>0$ وي، نو د مشتق د تعریف په مرسته لیکو:

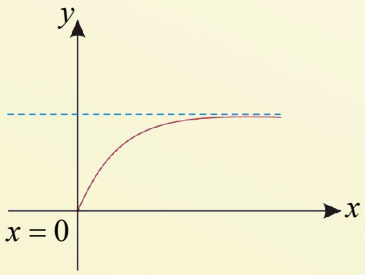
$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}$$

صورت او مخرج د صورت په مزدوج کې ضربوو:

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x})(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x+\Delta x-x}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

**ب**: که $x=0$ شي نو $\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}$ موجود نه دی، نو د $y=\sqrt{x}$ تابع د $x=0$ په ټکي کې د اشتقاق وړ نه ده لکه چې په شکل کې لیدل کېږي، یعنې که $x$ ډېر لوی شي، نو د مماس میل صفر ته نژدې کېږي او د $x=0$ په ټکي کې $(\frac{1}{2\sqrt{x}})$ د مماس میل ډېر لوییږي چې مماس په یوه عمود خط بدلېږي.




**پوښتنې**

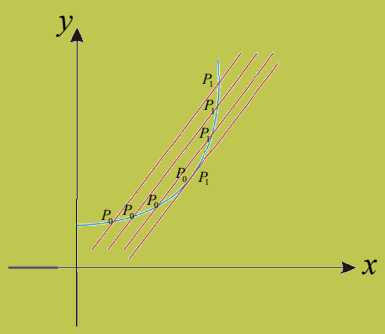
دلاندې توابعو مشتق د تعریف په مرسته پیدا کړئ.

1) $f(x)=x-x^2$ 2) $f(x)=-2x^2$ 3) $f(x)=2x^2+x$

ketabton.com - The Digital Library

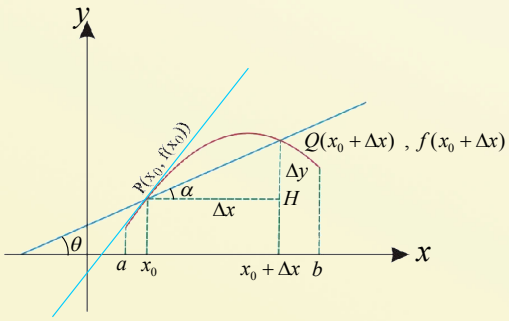
## د مشتق هندسي تعبير

په مخامخ شکل کې خـه وينـئ د هغـه پـه اړه مناقشه وکړئ.




### فعاليت

- د وضعيه کمياتو په مستوي کې د $C$ منحني يا د $f(x)$ تابع داسې چې د $[a,b]$ په انتروال کې متمادي وي گراف يې رسم او د $P(x_0, f(x_0))$ او $Q(x_0+\Delta x, f(x_0+\Delta x))$ ټکي د منحني پرمخ وټاکئ.
- د $\Delta$ مستقيم خط داسې رسم کړئ چې د منحني د $P$ او $Q$ له ټکو څخه تېر شي.
- آيا ويلای شئ چې د $\Delta$ مستقيم خط د $x$ د محور له مثبت جهت سره څه ډول زاويه جوړوي؟
- ووايئ چې د $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ يا $\frac{HQ}{HP}$ نسبت د څه په نامه يادېږي؟
- که د $Q$ ټکی د $P$ ټکي ته ډېر نژدې شي $(\Delta x \to 0)$، نو د $\Delta$ مستقيم خط په څه ډول کرښه بدلېږي په شکل کې يې وښيئ.
- د $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ لېميټ کله چې $\Delta x \to 0$ وکړي، په $P(x_0, f(x_0))$ ټکي کې وڅېړئ.




د پورتني فعاليت پايله داسې بيانوو:

د $f(x)$ منحني د تابع مشتق، د $P(x_0, f(x_0))$ په ټکي کې د مماس له ميل سره برابر دی، يعنې:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y' = \tan\alpha = \tan\theta = m_{\Delta}$$

**تعريف**: د مماس ميل د منحني د تماس په ټکي کې د تابع له مشتق څخه په هغه ټکي کې عبارت دی، يا په بل عبارت د هغې زاويې له ټانجنټ څخه عبارت دی چې د $\Delta$ مستقيم خط يې د $x$ د محور له مثبت جهت سره جوړوي.

ketabton.com - The Digital Library

**لومړی مثال**: د هغه مماس میل او معادله چې د $f(x)=2x^3-1$ په منحني د $A(1,1)$ په ټکي کې رسمېږي پیدا کړئ.

**حل**: پوهېږو چې $m=\tan\alpha=f'(x)$ دی، نو لیکلای شو چې:

$$f(x)=2x^3-1$$

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2(x+\Delta x)^3-1-(2x^3-1)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2[x^3+3x^2\Delta x+3x\Delta x^2+(\Delta x)^3]}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2x^3+6x^2\Delta x+6x(\Delta x)^2+2(\Delta x)^3-1-2x^3+1}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x[6x^2+6x\Delta x+2(\Delta x)^2]}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}[6x^2+6x(\Delta x)+(\Delta x)^2]=6x^2$$

بناءً د مماس د میل قیمت د $A(1,1)$ په ټکي کې مساوي دی په: $m=f'(x)=f'(1)=6x^2=6\cdot 1^2=6$

نو د مماس معادله په لاندې ډول ده:

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

$$y-1=6(x-1)\Rightarrow y=6x-5$$

**دویم مثال**: د $y=x^2+1$ تابع د مماس د میل قیمت په $x_0=2$ ټکي کې په لاس راوړئ.

**حل**:

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x_0+\Delta x)^2+1-(x_0^2+1)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x_0^2+2(\Delta x)x_0+(\Delta x)^2+1-x_0^2-1}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}(2x_0+(\Delta x))=2x_0$$

$$m=y'=2x_0=2\cdot 2$$

$$y'=m=4$$

**دریم مثال**: د $y=f(x)=x^2$ تابع ورکړل شوې ده، غواړو د $x=x_0$ په ټکي او په ځانګړي توګه د $x_0=2$ په ټکي کې د تابع مشتق پیدا کړئ:

$$x=x_0$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{(x_0+\Delta x)^2-x_0^2}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{x_0^2+2x_0\Delta x+(\Delta x)^2-x_0^2}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{2x_0\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta x(2x_0+\Delta x)}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=2x_0+\Delta x$$

اوس د لېمیټ د لاس ته راوړلو له لارې لیکلای شو:

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(2x_0+\Delta x)=2x_0$$

ketabton.com - The Digital Library

څرنګه چې $x_0 = 2$ دی، نو $f'(2) = 2 \cdot 2 = 4$ یعنې د $x_0 = 2$ په ټکي کې د $y = f(x) = x^2$ د تابع لومړی مشتق له 4 سره برابر دی. دا په دې معنا چې د مستقیم خط میل د $x_0 = 2$ په ټکي کې 4 دی.

**څلورم مثال**: د $f(x) = x^3$ تابع مشتق پیدا کړئ.

**حل**:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x_0 + \Delta x)^3 - x_0^3}{\Delta x}$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x_0^3 + 3x_0^2\Delta x + 3x_0(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - x_0^3}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3x_0^2\Delta x + 3x_0(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3}{\Delta x}$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta x(3x_0^2 + 3x_0\Delta x + (\Delta x^2))}{\Delta x}$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x_0^2 + 3x_0\Delta x + (\Delta x^2)$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (3x_0^2 + 3x_0\Delta x + (\Delta x)^2) = 3x_0^2$$

نو $f(x)$ د تابع مشتق د $x_0$ په ټکي کې برابر دی له: $f'(x_0) = 3x_0^2$

**پنځم مثال**: د $x_0$ په ټکي کې د $f(x) = \frac{1}{x}$ تابع مشتق پیدا کړئ.

**حل**:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$
$$f(x_0) = \frac{1}{x_0}$$
$$f(x_0) + \Delta y = \frac{1}{x_0 + \Delta x}$$
$$\Delta y = \frac{1}{x_0 + \Delta x} - f(x_0)$$
$$\Delta y = \frac{1}{x_0 + \Delta x} - \frac{1}{x_0}$$
$$\Delta y = \frac{x_0 - (x_0 + \Delta x)}{x_0(x_0 + \Delta x)}$$

د مساوات دواړه خواوې په $\Delta x$ وېشو:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{x_0 - x_0 - \Delta x}{x_0(x_0 + \Delta x)}}{\Delta x}$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{-\Delta x}{x_0(x_0 + \Delta x)}}{\Delta x}$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-\Delta x}{\Delta x \cdot x_0(x_0 + \Delta x)} \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-1}{x_0(x_0 + \Delta x)}$$
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-1}{x_0(x_0 + \Delta x)}$$
$$f'(x_0) = \frac{-1}{x_0(x_0 + 0)} = \frac{-1}{x_0^2}$$

نو $f'(x_0) = -\frac{1}{x_0^2}$ د $x_0$ په ټکي کې د $f(x)$ تابع مشتق دی.

ketabton.com - The Digital Library

## پوښتنې

1. په لاندې پوښتنو کې د تابع ګانو مشتق پیدا کړئ.

1) $f(x)=5x^2-2$ 2) $f(x)=\frac{2}{x}$

2. **په ورکړل شوبو ټکو کې د لاندې تابع ګانو مشتق پیدا کړئ.**

1) $f(x)=4x^2$ , $x_0=\frac{1}{2}$ 2) $f(x)=3x-1$ , $x_0=-1$

ketabton.com - The Digital Library

## د مشتق قوانین

آیا کولای شئ چې د مخامخ تابع مشتق پرته د تزایـد لـه لارې په بله طریقه پیدا کړئ؟

$$f(x)=2x^2$$

### 1- د یوه ثابت عدد مشتق:




د $y=C$ تابع( $C$ ثابت عدد) په پام کې ونیسئ.

- تابع ته د $\Delta x$ په اندازه تزاید ورکړئ، د تابع د تزاید په اړه څه فکر کوئ؟
- د تابع او متحول د تزاید نسبت تشکیل کړئ.
- د پورته مساواتو له دواړو خواوو لیمیټ ونیسئ په هغه صورت کې چې $\Delta x \to 0$ وکړي.

د پورتنۍ فعالیت پایله داسې بیانوو:

د هرې ثابتې $f(x)=C$ تابع مشتق له صفر سره مساوي دی، ځکه چې د هرې ثابتې تابع ګراف یوه افقي کرښه ده چې میل یې صفر دی.

**ثبوت:**

$$\begin{aligned} y &= C \\ y+\Delta y &= C \\ \Delta y &= C-y \\ \Delta y &= C-C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{C-C}{\Delta x} \\ \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{0}{\Delta x} \\ y' &= 0 \end{aligned}$$

**مثال:** د $f(x)=\pi^4$ او $y=100$ تابع ګانو مشتق پیدا کړئ.

**حل:** خرنګه چې $\pi^4$ او 100 ثابت عددونه دي، نو:

$$\begin{aligned} f(x)=C &\Rightarrow f'(x)=0 \\ f(x)=\pi^4 &\Rightarrow f'(x)=0 \\ f(x)=100 &\Rightarrow f'(x)=0 \end{aligned}$$

ketabton.com - The Digital Library

## 2- د يوې طاقت لرونکي تابع مشتق:




د $y = x^n$ تابع چې $n \in IR$ او $n \geq 1$ وي، په پام کې ونیسئ.

- متحول ته د $\Delta x$ په اندازه تزاید ورکړئ، آیا تابع هم تزاید کوي که تزاید کوي په کومه اندازه، اړیکه یې ولیکئ؟
- له پورته اړیکې څخه د $\Delta y$ قیمت پیدا کړئ، د متحول او تابع د تزاید نسبت تشکیل کړئ.
- د پورته مساوات له اطرافو څخه په هغه صورت کې لیمیټ ونیسئ چې $\Delta x \to 0$ وکړي.

د پورته فعالیت پایله داسې ثبوتوو:

که چېرې $f(x) = x^n$ راکړل شوی وي، نو $f'(x) = nx^{n-1}$ سره کېږي.

**ثبوت:**

$$y = x^n$$

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^n \quad \Rightarrow \quad \Delta y = (x + \Delta x)^n - y$$

$$\Delta y = (x + \Delta x)^n - x^n$$

$$\Delta y = (x + \Delta x - x)[(x + \Delta x)^{n-1} + (x + \Delta x)^{n-2}x + (x + \Delta x)^{n-3}x^2 + \ldots + x^{n-1}]$$

$$\Delta y = \Delta x[(x + \Delta x)^{n-1} + (x + \Delta x)^{n-2}x + (x + \Delta x)^{n-3}x^2 + \ldots + x^{n-1}]$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x[(x + \Delta x)^{n-1} + (x + \Delta x)^{n-2}x + (x + \Delta x)^{n-3}x^2 + \ldots + x^{n-1}]}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left[(x + \Delta x)^{n-1} + (x + \Delta x)^{n-2}x + (x + \Delta x)^{n-3}x^2 + \ldots + x^{n-1}\right]$$

$$y' = \underbrace{x^{n-1} + x^{n-1} + x^{n-1} + \ldots + x^{n-1}}_{\text{خلې } n \quad x^{n-1}}$$

$$y' = nx^{n-1}$$

**لومړی مثال:** د $f(x) = x^5$ تابع مشتق د $x = \frac{1}{2}$ په ټکي کې وټاکئ.

**حل:**

$$f(x) = x^5 \Rightarrow f'(x) = 5x^{5-1} \Rightarrow f'(x) = 5x^4$$

$$f(\frac{1}{2}) = 5 \cdot (\frac{1}{2})^4 = 5 \cdot \frac{1}{16} = \frac{5}{16}$$




د لاندې تابع ګانو مشتق پیدا کړئ.

1) $f(x) = x^{-2}$ 2) $x(t) = gt^2$ 3) $t(x) = x^8$

4) $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ 5) $f(x) = 10^{10}$

ketabton.com - The Digital Library

## 3- د حاصل جمع مشتق:




د $u$ او $v$ مشتق منوونکي تابع ګانې په پام کې ونیسئ.

- آیا د $y=u+v$ تابع د مشتق وړ ده؟
- د $y=u+v$ په تابع کې $u(x)$ ته د $\Delta u$ په اندازه او $v(x)$ ته د $\Delta v$ په اندازه تزاید ورکړئ، د $y$ د تزاید په اړه څه فکر کوئ؟ د هغې اندازه ولیکئ.
- لومړی د تابع تزاید پیدا او بیا د رابطې دواړه خواوې په $\Delta x$ وویشئ او وروسته یې لېمیټ په هغه صورت کې پیدا کړئ چې $\Delta x \to 0$ وکړي.

د پورته فعالیت پایله داسې ثبوتوو:

**ثبوت:**

د یو حاصل جمع مشتق د حدونو د مشتقاتو د جمعې له حاصل سره مساوي ده:

$$y=u+v$$
$$y+\Delta y=u+\Delta u+v+\Delta v$$
$$\Delta y=u+\Delta u+v+\Delta v-y$$
$$\Delta y=u+\Delta u+v+\Delta v-u-v$$
$$\Delta y=\Delta u+\Delta v$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta u+\Delta v}{\Delta x}$$
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}$$

خرنګه چې $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=u'$ او $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}=v'$ دی، نو : $y'=u'+v'$

## 4- د حاصل تفریق مشتق

که $y=u-v$ وي، نو $y'=u'-v'$ دی.

ثبوت یې د زده‌کوونکو کورنۍ دنده ده.

**لومړی مثال:** د $y=2x+1$ تابع مشتق پیدا کړئ.

**حل:** لیدل کېږي چې $u=2x$ او $v=1$ دی، نو:

$$u'=1\cdot 2x^{1-1}=2x^0$$
$$u'=2$$
$$v'=0$$

ketabton.com - The Digital Library

بناءً: $y'=u'+v' \Rightarrow y'=(2x)'+(1)' \Rightarrow y'=2+0 \Rightarrow y'=2$

**دویم مثال**: د $f(x)=4x^2-3x+5$ د تابع مشتق پیدا کړئ.

**حل**: په دې تابع کې $u=4x^2$ , $v=3x$ او $w=5$ دی چې $u'=8x$ , $v'=3$ او $w'=0$ کېږي، نو:

$$y'=u'+v'+w'$$
$$y'=(4x^2)'-(3x)'+(5)'$$
$$y'=8x-3$$

**دریم مثال**: د لاندې تابع ګانو مشتقونه پیدا کړئ:

**حل**:

1) $y=12x-7$
$y'=(12x)'-(7)'$
$y'=12$

2) $f(x)=9x^2-12x+4$
$f'(x)=(9x^2)'-(12x)'+(4)'$
$f'(x)=18x-12$

3) $f(x)=6x^3-2x^2+6x-1$
$f'(x)=(6x^3)'-(2x^2)'+(6x)'-(1)'$
$f'(x)=18x^2-4x+6$

## 5- د حاصل ضرب مشتق:




که د $u$ او $v$ توابع مشتق منونکي وي، نو $u\cdot v$ هم مشتق منونکي ده، د $y=u\cdot v$ تابع په پام کې ونیسئ.

- **په پورتنۍ تابع کې $u$ ته د $\Delta u$ په اندازه، $v$ ته د $\Delta v$ په اندازه تزاید ورکړئ او د تابع تزاید پیدا کړئ.**
- د $\Delta y$ د تزاید له پیدا کولو وروسته د مساوات اطراف په $\Delta x$ ووېشئ.
- د پورتنۍ رابطې له دواړو خواوو څخه په هغه صورت کې لیمیټ ونیسئ چې $\Delta x \to 0$ وکړي.

له پورتني فعالیت پایله داسې ثبوتوو:

**ثبوت**:

$$y=u\cdot v$$
$$y+\Delta y=(u+\Delta u)(v+\Delta v) \Rightarrow \Delta y=(u+\Delta u)(v+\Delta v)-y$$
$$\Delta y=u\cdot v+u\cdot\Delta v+v\cdot\Delta u+\Delta u\cdot\Delta v-u\cdot v$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{u\cdot\Delta v+v\cdot\Delta u+\Delta u\cdot\Delta v}{\Delta x}=v\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}+u\frac{\Delta v}{\Delta x}+\Delta u\cdot\frac{\Delta v}{\Delta x}$$
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=v\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}+u\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\Delta u\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}$$
$$y'=v\cdot u'+u\cdot v'+0\cdot v'$$
$$y'=u'v+v'u$$

ketabton.com - The Digital Library

**لومړی مثال**: د $y = x^3(x^2 - 3)$ تابع مشتق پیدا کړئ؟

**حل**: پوهېږو چې $y = u \cdot v$ شکل لري چې په دې صورت کې $y' = uv' + vu'$ دی.

$$\left.\begin{array}{l} u = x^3 \Rightarrow u' = 3x^2 \\ v = x^2 - 3 \Rightarrow v' = 2x \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} y' = u'v + v'u \\ y = x^3(x^2 - 3) \\ y' = 3x^2(x^2 - 3) + 2x(x^3) \\ y' = 3x^4 - 9x^2 + 2x^4 = 5x^4 - 9x^2 \end{array}$$

**دویم مثال**: د $y = (5x - 1)^2$ تابع مشتق پیدا کړئ.

**حل**: د $y$ تابع کولای شو د فکټورونو د ضرب په شکل داسې ولیکو:

$$y = (5x - 1)^2 = (5x - 1)(5x - 1)$$

$$\left.\begin{array}{l} u = 5x - 1 \Rightarrow u' = 5 \\ v = 5x - 1 \Rightarrow v' = 5 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} y' = u'v + v'u \\ y' = 5(5x - 1) + 5(5x - 1) \\ y' = 25x - 5 + 25x - 5 = 50x - 10 \end{array}$$

## 6- د حاصل تقسیم مشتق:




که د $u$ او $v$ تابع ګانې مشتق منونکی وي، نو $\frac{u}{v}$ کله چې $v \neq 0$ وي، هم مشتق منوونکی ده، اوس د $y = \frac{u}{v}$ تابع په پام کې ونیسئ.

- $u$ او $v$ ته په ترتیب سره د $\Delta u$ او $\Delta v$ په اندازه تزاید ورکړئ او د $y$ تابع تزاید پیدا کړئ.
- د مساوات دواړه خواوې په $\Delta x$ ووېشئ.
- د پورتني رابطې له اطراف څخه په هغه صورت کې چې $\Delta x \to 0$ وکړي، لېمیټ ونیسي.

د پورتني فعالیت پایله داسې ثبوتوو:

ketabton.com - The Digital Library

**ثبوت**:

$$y=\frac{u}{v} \Rightarrow y+\Delta y=\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v} \Rightarrow \Delta y=\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v}-y$$

$$\Delta y=\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v}-\frac{u}{v}=\frac{uv+v\cdot\Delta u-uv-u\cdot\Delta v}{v(v+\Delta v)}$$

$$\Delta y=\frac{v\cdot\Delta u-u\cdot\Delta v}{v(v+\Delta v)}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\frac{v\cdot\Delta u-u\cdot\Delta v}{v(v+\Delta v)}}{\Delta x}=\frac{v\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}-u\cdot\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v+\Delta v)}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{v\frac{\Delta u}{\Delta x}-u\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v+\Delta v)}\right)=\frac{v\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}-u\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v\cdot\lim\limits_{\Delta v\to 0}(v+\Delta v)}$$

$$y'=\frac{u'v-v'u}{v^2}$$

**لومړی مثال**: د $y=\frac{2+3x}{1-2x}$ تابع مشتق پیدا کړئ.

**حل**: لیدل کېږي چې تابع د $\frac{u}{v}$ بڼه لري چې مشتق يې عبارت دی له:

$$\left.\begin{array}{l} u=2+3x \Rightarrow u'=3 \\ v=1-2x \Rightarrow v'=-2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} y=\frac{u}{v} \Rightarrow y'=\frac{u'v-v'u}{v^2} \\ y'=\frac{3(1-2x)-[-2(2+3x)]}{(1-2x)^2} \\ =\frac{3-6x+4+6x}{(1-2x)^2}=\frac{7}{(1-2x)^2} \end{array}$$

**یادونه**: که چېرې وغواړو چې د یوې تابع مشتق په یوه ټاکلې نقطه لکه $x_0$ کې پیدا کړو د تابع په مشتق کې ټاکلی قیمت وضع کوو چې په پایله کې د تابع مشتق په هغه نقطه کې لاس راځی، لکه:

**دویم مثال**: د $f(y)=\frac{2y^2-3}{1-3y}$ د تابع مشتق د $y=0$ په ټکي کې پیدا کړئ:

**حل**: د تابع د حاصل تقسیم له مشتق څخه لرو:

$$f'(y)=\frac{4y(1-3y)-[-3(2y^2-3)]}{(1-3y)^2}=\frac{4y-12y^2+6y^2-9}{(1-3y)^2}$$

$$\left.\begin{array}{l} u=2y^2-3 \Rightarrow u'=4y \\ v=1-3y \Rightarrow v'=-3 \end{array}\right\}$$

$$f'(y)=\frac{-6y^2+4y-9}{(1-3y)^2}$$

$$f'(0)=\frac{-6(0)^2+4(0)-9}{(1-0)^2}$$

$$f'(0)=-9$$

ketabton.com - The Digital Library

**دریم مثال**: د $f(t)=\frac{-3}{2t-1}$ د تابع مشتق پیدا کړئ.

حل: پوهېږو چې تابع د $\frac{u}{v}$ بڼه لري، نو د $y=\frac{u}{v}$ له فورمول څخه په ګټه اخېستنې سره داسې عمل کوو:

$$\left.\begin{array}{ll} y=\frac{u}{v} & \Rightarrow y'=\frac{u'v-v'u}{v^2} \\ u=-3 & \Rightarrow u'=0 \\ v=2t-1 & \Rightarrow v'=2 \end{array}\right\} \Rightarrow f'(t)=\frac{0\cdot(2t-1)-2(-3)}{(2t-1)^2}=\frac{6}{(2t-1)^2}$$

## پوښتنې

د لاندې توابعو مشتق پیدا کړئ:

1) $f(x)=\frac{3}{5}x(x-2)$

2) $g(x)=(2x-3)(x-3)$

3) $f(x)=(2x-1)^2$

4) $f(t)=\frac{t^2}{1-2t}$

5) $f(x)=\frac{1}{x^2-2}$

6) $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$

7) $f(x)=3x^5-5x^2$

8) $f(x)=7x+3$

ketabton.com - The Digital Library

## 7- د يوې جذرالمربع تابع مشتق:




د $y=\sqrt{x}$ تابع په پام کې ونيسي.

- د $y=\sqrt{x}$ تابع متحول ته د $\Delta x$ په اندازه تزايد ورکړئ د تابع تزايد پيدا کړئ.
- د لاس ته راغلي رابطې له دواړو خواوو څخه لېمیټ په هغه صورت کې ونيسي چې $\Delta x \to 0$ وکړي.

د پورتني فعاليت پايله داسې ثبوتوو:

**ثبوت:**

$$y=\sqrt{x} \Rightarrow y+\Delta y=\sqrt{x+\Delta x}$$
$$\Delta y=\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}$$

د مساوات د ښي اړخ صورت او مخرج د صورت په مزدوج کې ضربوو:

$$\Delta y=\frac{(\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x})(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}=\frac{x+\Delta x-x}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}=\frac{\Delta x}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}} \Rightarrow \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\boxed{y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}}$$

**لومړی مثال:** د $f(x)=\sqrt{x}(x^2-1)$ د تابع مشتق پيدا کړئ.

**حل:** ليدل کېږي چې تابع د $u\cdot v$ بڼه لري، نو:

$$\left.\begin{array}{l} u=\sqrt{x} \Rightarrow u'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}} \\ v=x^2-1 \Rightarrow v'=2x \end{array}\right\} \Rightarrow \quad f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}(x^2-1)+2x\cdot\sqrt{x}$$

$$f'(x)=\frac{x^2-1}{2\sqrt{x}}+2x\sqrt{x}=\frac{x^2-1+4x(\sqrt{x})^2}{2\sqrt{x}}$$

$$=\frac{x^2-1+4x^2}{2\sqrt{x}}=\frac{5x^2-1}{2\sqrt{x}}$$

ketabton.com - The Digital Library

## 8- د $\sqrt{u}$ تابع مشتق




- که چېرې $y$ د $u$ او $u$ د $x$ تابع او مشتق منوونکي وي د $y$ اړیکه $u$ ته او $u$، $x$ ته څه فکر کوئ.
- د $u$ متحول ته د $\Delta u$ په اندازه تزاید ورکړئ د $\Delta y$ د تزاید په اړه څه فکر کوئ.
- د مساواتو له دواړه خواوو څخه لېمیټ ونیسئ چې $\Delta x \to 0$ وکړي.

$$y + \Delta y = \sqrt{u + \Delta u}$$
$$\Delta y = \sqrt{u + \Delta u} - \sqrt{u}$$

د مساوات د ښي اړخ صورت او مخرج د صورت په مزدوج کې ضربوو:

$$\Delta y = \frac{(\sqrt{u + \Delta u} - \sqrt{u})(\sqrt{u + \Delta u} + \sqrt{u})}{\sqrt{u + \Delta u} + \sqrt{u}}$$
$$\Delta y = \frac{u + \Delta u - u}{\sqrt{u + \Delta u} + \sqrt{u}}$$

د مساوات دواړه خواوې په $\Delta x$ وېشو او بیا د مساوات له دواړو خواوو څخه لېمیټ نیسو چې $\Delta x \to 0$ وکړي.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\sqrt{u + \Delta u} + \sqrt{u}}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\sqrt{u + \Delta u} + \sqrt{u}} \cdot \frac{1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0 \Rightarrow \Delta u \to 0} \frac{\frac{\Delta u}{\Delta x}}{\sqrt{u + \Delta u} + \sqrt{u}}$$

$$y' = \frac{u'}{\sqrt{u} + \sqrt{u}} = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

**د ویم مثال**: د $h(x) = (x^2 + x)\sqrt{x}$ د تابع مشتق پیدا کړئ.

**حل**: د $y = u \cdot v$ او $y = \sqrt{x}$ د فورمولونو له مشتق څخه په ګټه اخیستنې سره لرو:

$$\left.\begin{array}{l} u = x^2 + x \Rightarrow u' = 2x + 1 \\ v = \sqrt{x} \Rightarrow v' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} h'(x) = (2x+1)\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}(x^2 + x) \\ h'(x) = 2x\sqrt{x} + \sqrt{x} + \frac{x^2 + x}{2\sqrt{x}} \\ h'(x) = \frac{4x^2 + 2x + x^2 + x}{2\sqrt{x}} = \frac{5x^2 + 3x}{2\sqrt{x}} \end{array}$$

ketabton.com - The Digital Library

**دریم مثال**: د $f(x)=(\sqrt[3]{x}-1)(x+3)$ تابع د مشتق قیمت په $x=8$ ټکي کې په لاس راوړئ.

**حل**: د $y=u\cdot v$ او $y=\sqrt[n]{u}$ تابع له مشتق څخه په ګټه اخېستنې سره لیکلای شو:

$$\left.\begin{array}{l} u=\sqrt[3]{x}-1\Rightarrow u'=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \\ v=x+3\Rightarrow v'=1 \end{array}\right\}\Rightarrow \begin{array}{l} f'(x)=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}(x+3)+1(\sqrt[3]{x}-1) \\ f'(x)=\dfrac{x+3}{3\sqrt[3]{x^2}}+(\sqrt[3]{x}-1) \end{array}$$

اوس د تابع مشتق د $x=8$ په نقطه کې پیدا کوو:

$$f'(8)=\frac{8+3}{3\sqrt[3]{8^2}}+\sqrt[3]{8}-1=\frac{11}{12}+1=\frac{23}{12}$$

## پوښتنې

1- د لاندې توابعو مشتقونه پیدا کړئ.

$$f(x)=\frac{1}{x+1} \quad , \quad y=3x^{-3} \quad , \quad f(x)=x^2+3$$

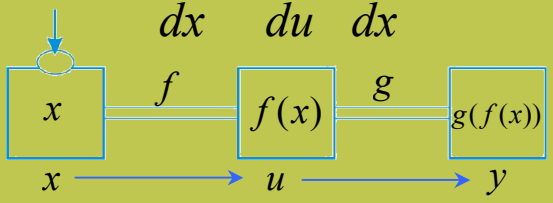
2- که $f(x)=x^2-3x$ او $g(x)=\sqrt{x}-1$ وي، د دې تابع ګانو د جمعې، ضرب او تقسیم مشتقونه پیدا کړئ. $\left[(f+g)',(f\cdot g)',(f\div g)' \quad g\neq 0\right]$

ketabton.com - The Digital Library

## د مرکبو تابع ګانو مشتق(زنځيري قاعده)Chain Rule

د مخامخ اړيکې او شکل په اړه خپل نظر بيان کړئ.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$







که چېرې y د u او u د x تابع وي او د اشتقاق وړ وي.

- ووایاست چې y د u او u له x سره څه اړیکه لري؟
- آیا د $\Delta y=\Delta y\cdot\frac{\Delta u}{\Delta u}$ مساوات حقیقت لري؟
- د پورتني مساوات دواړې خواوې په $\Delta x$ ووېشئ.
- که د ښي اړخ د کسرونو د مخرجونو ځایونه بدل شي، په پورتني رابطه کې بدلون راځي؟
- د پورتني مساوات له اطراف څخه په هغه صورت کې لېمیټ ونیسي چې $\Delta x\to 0$ وکړي.

د پورتني فعالیت پایله داسې ثبوتوو:

د تابع، تابع مشتق ثبوت او پایله یې په لاندې ډول ده.

**ثبوت:**

$$\Delta y=\Delta y\cdot\frac{\Delta u}{\Delta u}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta u}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

خرنګه چې $\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}=y'_{(u)}$ او $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=u'_{(x)}$ دی، نو: $y'_{(x)}=y'_{(u)}\cdot u'_{(x)}$

د دې زنځيري قاعدې پر بنسټ لاندې پایلې لیکلای شو:

1- که $y=u^n$ وي؛ نو $y'=nu^{n-1}\cdot u'$ کېږي.

ketabton.com - The Digital Library

2- که $y=\sqrt[n]{u}$ وي، نو $y'=\dfrac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$ کېږي.

**مثال**: د لاندې تابع ګانو مشتق پیدا کړئ.

1) $y=(2x^2-1)^3$ 2) $y=\sqrt{1-x^2}$ 3) $y=(x^2-3)^2\cdot 2x^3$

4) $y=\sqrt[3]{x^2-2x^3}$ 5) $y=(x^2-2)^{-3}$

**حل**: د زنځیري قاعدې په مرسته لیکلای شو چې:

1) $y=\underbrace{(2x^2-1)^3}_{u}$

$u=2x^2-1\Rightarrow u'_x=4x$

$y=u^3\Rightarrow y'_u=3u^2$

$\Rightarrow y'_{(x)}=y'_{(u)}\cdot u'_{(x)}$

$y'=3(2x^2-1)^2\cdot 4x=3(4x^4-4x^2+1)\cdot 4x$

$=(12x^4-12x^2+3)\cdot 4x=48x^5-48x^3+12x$

$=12x(4x^4-4x^2+1)\quad =12x(2x^2-1)^2$

2) $y=\sqrt{1-x^2}$

$u=1-x^2\ \Rightarrow\ u'_{(x)}=-2x$

$y=\sqrt{u}\Rightarrow y'=\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$

$\Rightarrow\quad y'=\dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}=-\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

لیدل کېږي چې تابع د ضرب د حاصل بڼه لري، نو:

$y=u\cdot v\ \Rightarrow\ y'=u'v+v'u$

3) $y=(x^2-3)^2\cdot 2x^3$

$u=(x^2-3)^2$

$u'_{(x)}=2(x^2-3)(2x)$

$v=2x^3\Rightarrow\ v'_{(x)}=6x^2$

$y'=\left[(x^2-3)^2\right]'\cdot 2x^3+\left[2x^3\right]'(x^2-3)^2$

$y'=\left[2(x^2-3)\cdot 2x\right]2x^3+6x^2(x^2-3)^2$

$=8x^4(x^2-3)+6x^2(x^2-3)^2$

$=8x^6-24x^4+6x^2(x^4-6x^2+9)$

$=8x^6-24x^4+6x^6-36x^4+54x^2$

$=14x^6-60x^4+54x^2$

4) $y=\sqrt[3]{x^2-2x^3}$

$u=x^2-2x^3$

$u'_{(x)}=2x-6x^2$

$y=\sqrt[n]{u}\Rightarrow y'=\dfrac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$

$y'=\dfrac{2x-6x^2}{3\sqrt[3]{(x^2-2x^3)^2}}$

5) $y=(x^2-2)^{-3}$

$u=x^2-2$

$u'_{(x)}=2x$

$y=u^n\Rightarrow y'=nu^{n-1}\cdot u'$

$y'=-3(x^2-2)^{-4}\cdot 2x=\dfrac{-6x}{(x^2-2)^4}$

ketabton.com - The Digital Library

**یادونه**:

I. که چېرې د $f$ تابع د $(x_0)$ په ټکي کې مشتق ولري، نو $f'(x_0)$ د هغه مماس میل دی چې د $((x_0)\ ,\ f(x_0))$ په نقطه کې له منحني یا د تابع له ګراف سره رسمېږي.

**مثال**: د $f(x)=x^3$ د تابع میل د $x_0=1$ په ټکي کې پیدا کړئ.

**حل**: څرنګه چې $x_0=1$ دی، نو: $f(x_0)=1$ سره کېږي او $P(1,1)$ چې د تماس ټکی دی، میل یې عبارت دی، له:

$$f'(x)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x^2+x+1)=3 \quad \Rightarrow \quad f'(1)=3$$

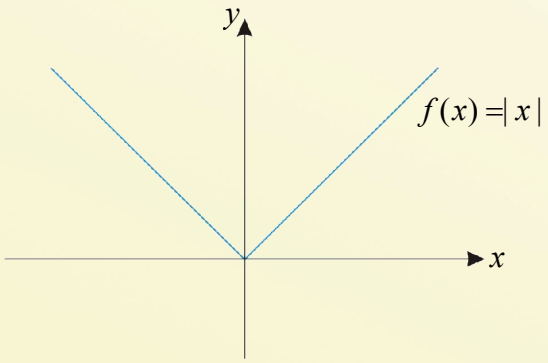
II. که د $f$ تابع د $x=x_0$ په ټکي کې د مشتق وړ وي، نو دا تابع د $x_0$ په ټکي کې متمادي ده، خو برعکس یې سم نه ده، یعنې کېدای شي، یوه تابع په یوه ټکي کې متمادي وي، ولې په هغه ټکي کې د مشتق وړ نه وي.

**مثال**: د $f(x)=|x|$ د تابع مشتق د په $x=0$ ټکي کې پیدا کړئ.

**حل**: پوهېږو چې مشتق په حقیقت کې د نیوټن د نسبت د لېمیټ محاسبه ده چې د ښي او کېڼ اړخ لېمیټونه یې په صفر کې سره وخېرل شي.

$$f'(0^+)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x}=1$$

$$f'(0^-)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x}{x}=-1$$



ketabton.com - The Digital Library

ليدل کېږي چې $f'(0^+) \neq f'(0^-)$ دی، نو تابع په $x = 0$ کې د مشتق وړ نه ده، ولې تابع د صفر په ټکي کې متمادي ده.

## پوښتنې

د لاندې توابعو مشتق پیدا کړئ.

1) $y = (x^2 + 2)^2$

2) $f(x) = (x^3 - 4x^2 + 1)^{-4}$

3) $y = (1 - 2x^3)^4$

4) $h(z) = \sqrt{\dfrac{1-z}{1+z}}$

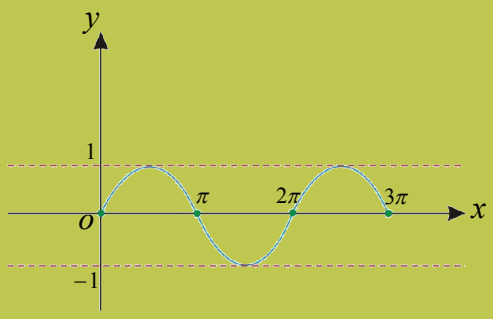
5) $f(t) = \sqrt[3]{3t+1}$

6) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2 + x^2 + x^3}}$

ketabton.com - The Digital Library

## د مثلثاتي تابع ګانو مشتق

مخامخ ګراف څه ډول تابع را ښيي؟







- مثلثاتي دايره او راديان تعريف کړئ.
- آيا دا $-1 \le \sin x \le 1$ اړيکه حقيقت لري او که نه؟
- د $y = \sin x$ تابع په پام کې ونيسئ متحول ته د $\Delta x$ په اندازه بدلون ورکړئ او د تابع بدلون په پام کې ونيسئ.
- د $\sin(x + \Delta x) - \sin x$ مثلثاتي رابطې ته انکشاف ورکړئ؟
- د پورتنۍ رابطې له انکشاف څخه وروسته د $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ نسبت جوړ او د مساوات له دواړو خواوو څخه په هغه صورت کې لېميټ ونيسئ چې $\Delta x \to 0$ وکړي.

له پورته فعاليت څخه پايله داسې ثبوتوو:

**1- د $y = \sin x$ تابع مشتق:**

**ثبوت:**

$$y = \sin x$$
$$y + \Delta y = \sin(x + \Delta x)$$
$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x$$
$$\Delta y = 2\cos\frac{x + \Delta x + x}{2} \cdot \sin\frac{x + \Delta x - x}{2} = 2\cos\frac{2x + \Delta x}{2} \cdot \sin\frac{\Delta x}{2}$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \cdot 2\cos(x + \frac{\Delta x}{2}) \cdot \sin\frac{\Delta x}{2} = 2\cos(x + \frac{\Delta x}{2}) \cdot \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}$$
$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\cos(x + \frac{\Delta x}{2}) \cdot \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \Rightarrow y'(x) = \cos x \cdot 1$$
$$y' = \cos x$$
$$\boxed{y = \sin x \Rightarrow y' = \cos x}$$

که چېرې $f(x) = \sin u$ وي په داسې حال کې چې $u$ د $x$ تابع وي، نو ليکلای شو:

ketabton.com - The Digital Library

$$f(u)=\sin u \Rightarrow y'=u'\cos u$$

**لومړی مثال**: د $f(x)=\sin 4x$ تابع مشتق پیدا کړئ.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=\sin 4x \\ u=4x \Rightarrow u'=4 \\ f(x)=\sin u \Rightarrow y'_u=\cos u \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} f(x)=\sin u \Rightarrow f'(x)=u'\cos u \\ f(x)=\sin 4x \Rightarrow f'(x)=4\cos 4x \end{array}$$

**دویم مثال**: د $f(x)=x^3\cdot\csc x$ تابع مشتق پیدا کړئ.

**حل**:

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=x^3\cdot\csc x=x^3\cdot\dfrac{1}{\sin x} \\ u=x^3 \Rightarrow u'=3x^2 \\ v=\dfrac{1}{\sin x} \Rightarrow v'=\dfrac{-uv'}{v^2}=\dfrac{-\cos x}{\sin^2 x} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} f(x)=x^3\cdot\csc x \\ f'(x)=3x^2\cdot\csc x+\dfrac{-\cos x}{\sin^2 x}\cdot x^3 \\ \qquad =3x^2\csc x-x^3\cot x\cdot\csc x\cdot x \\ \qquad =3x^2\csc x-x^3\cot x\cdot\csc x \end{array}$$

**پوښتنې**

د لاندې توابعو مشتق په لاس راوړئ:

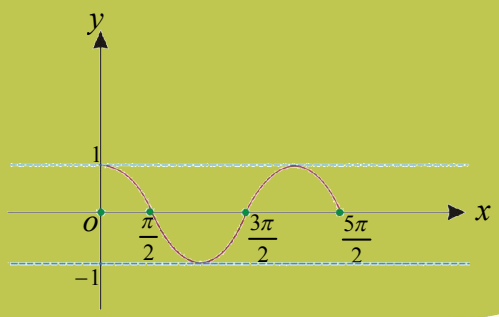
$a)\ y=\sin 5x$ $\qquad$ $b)\ y=\dfrac{\sin x}{1+x}$

$c)\ y=\sqrt{1+\sin x}$

ketabton.com - The Digital Library

## د $y = \cos x$ تابع مشتق

مخامخ ګراف خه ډول تابع را ښيي؟







- د $y = f(x) = \cos x$ په تابع کې متحول ته د $\Delta x$ او تابع ته د $\Delta y$ په اندازه تزاید ورکړئ.
- د $\cos(x + \Delta x) - \cos x$ مثلثاتي رابطې ته انکشاف ورکړئ.
- د پورتنۍ انکشافي رابطې په مرسته د $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ نسبت تشکیل او له اطرافو څخه لېمیټ ونیسئ چې $\Delta x \to 0$ وکړي.

د پورتني فعالیت پایله داسې ثبوتوو:

### 2- د $y = \cos x$ تابع مشتق

**ثبوت**:

$$y = \cos x$$

$$y + \Delta y = \cos(x + \Delta x)$$

$$\Delta y = \cos(x + \Delta x) - \cos x$$

$$\Delta y = -2 \sin \frac{x + \Delta x + x}{2} \cdot \sin \frac{x + \Delta x - x}{2}$$

$$\Delta y = -2 \sin \frac{2x + \Delta x}{2} \cdot \sin \frac{\Delta x}{2}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = - \lim_{\Delta x \to 0} \sin(x + \frac{\Delta x}{2}) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \sin \frac{\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = -\sin x \cdot 1$$

$$\boxed{y = \cos x \quad \Rightarrow \quad y' = -\sin x}$$

ketabton.com - The Digital Library

یا په لنډ ډول هغه داسې ثبوتوو:

$$\sin^2 x+\cos^2 x=1$$

$$\cos x=\sqrt{1-\sin^2 x}$$

$$(\cos x)'=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}}\cdot(-2\sin x\cos x)$$

پوهېږو $\sqrt{1-\sin^2 x}=\cos x$ چې سره دی، نو:

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\cos x}(-2\sin x\cdot\cos x)$$

$$\boxed{(\cos x)'=-\sin x}$$

که چېرې $y=\cos u$ وي، په داسې حال کې چې u د x تابع وي، نو لیکلای شو:

$$\boxed{y=\cos u\Rightarrow y'=-u'\cdot\sin u}$$

**لومړی مثال**: د لاندې توابعو مشتق پیدا کړئ.

1) $f(x)=\sin 2x=2\sin x\cos x$ 2) $f(x)=x-\sin x\cos x$

**حل**: پوهېږو چې $y=u\cdot v\Rightarrow y'=u'\cdot v+v'u$ دی، نو:

1) $f(x)=\sin 2x=2\sin x\cos x$

$$f'(x)=(2\sin x)'\cos x+(\cos x)'\cdot 2\sin x=2\cos^2 x-2\sin^2 x$$

$$f'(x)=2(\cos^2 x-\sin^2 x)\Rightarrow y'=2\cos 2x$$

2) $f(x)=x-\sin x\cos x$

$$f'(x)=(x)'-(\sin x\cdot\cos x)'=(x)'-[(\sin x)'\cdot\cos x+(\cos x)'\cdot\sin x]$$

$$f'(x)=(x)'-[\cos x\cos x+(-\sin x\sin x)]=1-\cos 2x$$

## پوښتنې

د لاندې تابع ګانو لومړی مشتق پیدا کړئ.

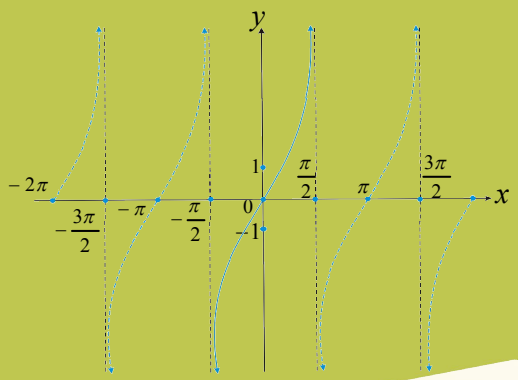
1) $f(x)=(\sec 2x+\tan 2x)^2$ 2) $f(x)=\sin^2 x$ 3) $f(x)=\sec x$

4) $f(x)=\csc x$ 5) $f(x)=\frac{5\sin^2 2x}{3\cos 5x}$

ketabton.com - The Digital Library

**د $y = \tan x$ تابع مشتق**

مخامخ ګراف خه ډول تابع راښيي.







- د $y = \tan x$ تابع د نسبت په شکل وليکئ.
- له پورتني نسبت څخه مشتق ونيسئ، هغه له څه سره مساوي کېږي.

له پورته فعاليت څخه پايله داسې ثبوتوو:

3- **د $y = \tan x$ تابع مشتق**:

**ثبوت**:

$$f(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$f'(x) = \frac{(\sin x)' \cos x - (\cos x)' \sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos x \cos x - (-\sin x)(\sin x)}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$y = \tan x$$

$$y'_{(x)} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

پاتې فورمولونه زده‌کوونکو ته پرېږدو.

**لومړی مثال**: د لاندې مثلثاتي تابع مشتق پيدا کړئ.

$$y = \tan^3 x$$

**حل**: پوهېږو چې که $y = u^n$ وي نو مشتق يې $y' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$ سره دی، نو:

$$\left.\begin{array}{l} u = \tan x \\ u' = \sec^2 x \end{array}\right\} \Rightarrow \quad y = \tan^3 x$$
$$y' = 3 \tan^2 x \sec^2 x$$

ketabton.com - The Digital Library

**دویم مثال**: د $y = \sec x \cdot \cot x$ تابع مشتق پیدا کړئ.

**حل**: خرنګه چې تابع د $y = u \cdot v$ شکل لري، نو:

$$y = \sec x \cdot \cot x$$

$$u = \sec x \quad \Rightarrow \quad u' = \sec x \tan x$$

$$v = \cot x \quad \Rightarrow \quad v' = -\csc^2 x$$

د $u', v, u$ او $v'$ قیمتونه د $y' = u' \cdot v + u \cdot v'$ په فورول کې وضع کوو:

$$y' = \sec x \tan x \cdot \cot x + \sec x(-\csc^2 x)$$

$$= \sec x \tan x \frac{1}{\tan x} - \csc^2 x \sec x$$

$$= \sec x - \csc^2 x \sec x$$

## پوښتنې

د لاندې تابع ګانو مشتق پیدا کړئ.

$a)$ $y = \tan x \cot x$

$b)$ $y = (x^2 + x - 1)\tan^2 x$

$c)$ $y = \dfrac{1}{\tan x}$

$d)$ $y = \tan x \sec x - \cot x$

ketabton.com - The Digital Library

## ضمني مشتقات

مخامخ مساوات په عبارت سره وليکئ.

$$y'_{(x)} = -\frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}}$$




- د $y = 2x^2 - 4$ تابع مشتق پيدا کړئ.
- د $y^2 + xy = 1$ تابع څو متحوله تابع ده؟ ګراف يې څه ډول شکل لري؟
- د پورتني تابع مشتق پيدا کولای شئ.

د يـوې منحنـي خـط معادلـه د وضـعيه کميـاتو پـه سيـستم کـې عبـارت لـه $y = f(x)$ څخـه ده، لـه دی ځايـه $y - f(x) = 0$ کېـږي او $y - f(x)$ يـوه دوه متحولـه تـابع د $x$ او $y$ لـه جنـسه ده، کـه $F(x,y) = y - f(x)$ تابع په پام کې ونيسو، نو د د پ منحني معادله د $F(x,y)$ شکل غوره کوي، د مثال په ډول: $F(x,y) = x^2 + y^2 - 25$ وي، نـو د $F(x,y) = 0$ لـه معـادلې څخـه لـيکلای شـو چې $x^2 + y^2 - 25 = 0$ يا $x^2 + y^2 = 25$ چې د دې دوو بېلا بېلو توابعو معادلې $y = \pm\sqrt{25 - x^2}$ دي.

په عمومي ډول د $F(x,y) = 0$ معادله کېدای شي چې د څو تابع ګانو معادله د $y = f(x)$ په بڼه وي، پاملرنه وکړئ.

د $y = f(x)$ په تابع کې چې x او y يو له بل څخه جلا وي، نو مشتق يې په آسانۍ پيدا کولای شو، ولې په ځينو رابطو کې y له x سره يو ځای بيان شوی دي لکه په $xy^2 - y + 1 = 0$ چې د مشتق په نيولو کې چې د x له جنسه مشتق نيسو، نو y يو ثابت عدد فرضوو او که د y له جنسه مشتق نيسو x ثابت فرضوو، لکه:

$$xy^2 - y + 1 = 0$$

$$(xy^2)' - (y)' + (1)' = 0 \Rightarrow 1y^2 + x(2y'y) - y' = 0 \Rightarrow y^2 = -2xyy' + y' = y'(-2xy + 1)$$

$$y' = \frac{y^2}{-2xy + 1}$$

ketabton.com - The Digital Library

په عمومي حالاتو کې که تابع غیر صریح وي په دې معنا چې مستقل متحول او د تابع متحول پکې څرګند نه وي، نو ددې ډول تابع مشتق د ضمني مشتق په نامه یادیږي او د هغه مشتق په لاندې ډول محاسبه کوو.

$$y'_{(x)} = -\frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}} = -\frac{\text{د تابع مشتق نظر } x \text{ ته( } y \text{ ثابت دی)}}{\text{د تابع مشتق نظر } y \text{ ته( } x \text{ ثابت دی)}}$$

**لومړی مثال**: د $y = \sin\frac{x}{y} + 1$ ضمني تابع مشتق د $(\pi, 1)$ په ټکي کې پیدا کړئ.

**حل**: د $y - \sin\frac{x}{y} - 1 = 0$ رابطې څخه $y'_{(x)} = \frac{-f'_{(x)}}{f'_{(y)}}$ پیدا کوو.

$$y - \sin\frac{x}{y} - 1 = 0$$

$$\left.\begin{aligned} f'_{(x)} &= y'_x - (\sin\frac{x}{y})'_x - (1)'_x \\ &= 0 - \frac{1}{y}\cos\frac{x}{y} - 0 = \frac{-1}{y}\cos\frac{x}{y} \\ f'_{(y)} &= y'_y - (\sin\frac{x}{y})'_y - (1)'_y \\ &= 1 - \cos\frac{x}{y}(\frac{x}{y})'_y - 0 = 1 - \frac{-x}{y^2}\cdot\cos\frac{x}{y} = 1 + \frac{x}{y^2}\cos\frac{x}{y} \end{aligned}\right\} \Rightarrow y'_{(x)} = -\frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}} = -\frac{\frac{-1}{y}\cos\frac{x}{y}}{1 + \frac{x}{y^2}\cdot\cos\frac{x}{y}}$$

اوس په $y'_{(x)}$ رابطه کې د x او y قیمتونه وضع کوو چې د $y'(\pi, 1)$ په لاس راځي.

$$y'_{(\pi,1)} = \frac{\frac{1}{y}\cos\frac{x}{y}}{1 + \frac{x}{y^2}\cdot\cos\frac{x}{y}} = \frac{\frac{1}{1}\cos\pi}{1 + \frac{\pi}{1}\cos\pi} = \frac{-1}{1 + \pi(-1)} = \frac{1}{\pi - 1}$$

**دویم مثال**: د $x^2y + 2y^3 = 3x + 2$ رابطې ضمني مشتق پیدا کړئ.

**حل**:

$$x^2y + 2y^3 = 3x + 2$$
$$x^2y + 2y^3 - 3x - 2 = 0$$
$$f'_{(x)} = 2xy + 0 - 3 - 0 = 2xy - 3$$
$$f'_{(y)} = x^2 + 6y^2 - 0 - 0 = x^2 + 6y^2$$
$$f'_{(x)} = -\frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}} = -\frac{2xy - 3}{x^2 + 6y^2} = \frac{-2xy + 3}{x^2 + 6y^2}$$

ketabton.com - The Digital Library

**دریم مثال**: د $y^6 - y - x^2 = 0$ تابع ضمني مشتق پیدا کړئ.

**حل**:

$$f'_{(x)} = -2x$$
$$f'_{(y)} = 6y^5 - 1$$
$$y'_{(x)} = -\frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}} = -\frac{-2x}{6y^5 - 1} = \frac{2x}{6y^5 - 1}$$

او یا په بله طریقه:

$$y^6 - y - x^2 = 0$$
$$6y^5 y' - y' - 2x = 0$$
$$(6y^5 - 1)y' = 2x$$
$$y' = \frac{2x}{6y^5 - 1}$$

## د تابع دویم ضمني مشتق

د ضمني رابطې د دویمې مرتبې د ضمني مشتق د پیدا کولو لپاره د فورمول په مرسته لومړی د ضمني اړیکې لومړی مشتق پیدا کوو او بیا له دې رابطې څخه مشتق نیسو.

**لومړی مثال**: د $x^2 - y^2 = 1$ رابطې دویمه ضمني مشتق $y''_{(x)}$ پیدا کړئ.

**حل**:

$$x^2 - y^2 = 1$$
$$x^2 - y^2 - 1 = 0$$
$$f'_{(x)} = (x^2)'_x - (y^2)'_x - (1)'_x = 2x - 0 - 0 = 2x$$
$$f'_{(y)} = (x^2)'_y - (y^2)'_y - (1)'_y = 0 - 2y - 0 = -2y$$
$$y'_{(x)} = -\frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}} = -\frac{2x}{-2y} = \frac{x}{y}$$

او یا به بله طریقه:

$$y'_{(x)} = -\frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}} = -\frac{(x^2)'_x - (y^2)'_x - (1)'_x}{(x^2)'_y - (y^2)'_y - (1)'_y} = -\frac{2x - 0 - 0}{0 - 2y - 0} = \frac{x}{y} \Rightarrow y'_{(x)} = \frac{x}{y}$$

اوس د $y' = \frac{x}{y}$ له رابطې څخه دویم ضمني مشتق نیسو:

$$y''_{(x)} = \frac{(x)'y - y'x}{y^2} = \frac{y - y'x}{y^2} = \frac{y - \frac{x}{y} \cdot x}{y^2} = \frac{y^2 - x^2}{y^3} = \frac{-1}{y^3} \Rightarrow y''_{(x)} = \frac{-1}{y^3}$$

ketabton.com - The Digital Library

**دويم مثال**: د $x^2+xy+y^2-3=0$ په معادله کې د y مشتق نسبت x ته د $(1,1)$ په ټکي کې پيدا او پر منحني د مماس معادله وليکي.

**حل**: خرنګه چې د $(1,1)$ ټکی په معادله کې صدق کوي، نو نوموړی ټکی د منحني پرمخ واقع دی، د $y'_{(x)}$ د پيدا کولو لپاره په ورکړ شوي معادلې کې ليکلای شو:

$$f'_{(x)}=2x+y$$
$$f'_{(y)}=x+2y$$
$$y'_{(x)}=-\frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}}=-\frac{2x+y}{x+2y} \quad , \quad x+2y\neq 0$$
$$y'=-\frac{2x+y}{x+2y}=-\frac{2+1}{1+2}=-1$$
$$y-y_1=m(x-x_1) \Rightarrow y-1=-(x-1) \Rightarrow y=-x+2$$

او يا په بله طريقه هم کولای شو د تابع ضمني مشتق په لاس راوړو:

$$x^2+xy+y^2-3=0$$
$$2x+y+x\cdot y'+2yy'=0$$
$$2x+y+(x+2y)y'=0$$
$$(x+2y)y'+2x+y=0$$
$$(x+2y)y'=-2x-y$$
$$y'=\frac{-2x-y}{x+2y}$$

**دريم مثال**: د $x^2y^3=5y^3+x$ غير صريح تابع ضمني مشتق پيدا کړئ.

**حل**:

$$x^2y^3-5y^3-x=0$$
$$f'_{(x)}=2xy^3-0-1=2xy^3-1$$
$$f'_{(y)}=3x^2y^2-15y^2-0$$
$$y'_{(x)}=-\frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}}=-\frac{2xy^3-1}{3x^2y^2-15y^2}=\frac{1-2xy^3}{3x^2y^2-15y^2}$$

## پوښتنې

1- د $x\sin y+y\cos x=5$ د غير صريح تابع ضمني مشتق پيدا کړئ.

2- د $x^3+xy^2+y=3$ رابطې څخه ضمني مشتق ونيسئ.

3- د $x^2+y^2=4x+4y$ رابطې څخه ضمني مشتق ونيسئ.

ketabton.com - The Digital Library

## لوړ مرتبه يي مشتقات

د مخامخ تابع درې ځلې مشتق ونيسئ؟

د مخامخ تابع پنځه ځلې مشتق ونيسئ؟

$$f(x)=\sin x$$

$$f(x)=\cos x$$




- د $y=2x^4-3x^3-2x-1$ تابع مشتق پيدا کړئ.
- د پورته تابع دويم مشتق پيدا کړئ.
- د پورتني مشتق د تابع دريم ځل مشتق ونيسئ.
- د پورتني تابع نور څو ځلې مشتق نيولی شو؟
- د پورتني تابع څووم مشتق له صفر سره مساوي دی؟

د پورتني فعاليت پايله داسې بيانوو:

که د $y=f(x)$ مشتق منونکی وي، لومړی مرتبه مشتق يې په $y'=f'(x)$ ، دويمه مرتبه مشتق يې په $y''=f''(x)$ دريمه مرتبه مشتق يې په $y'''=f'''(x)$ ... په کلي ډول $n$ – ام مرتبه مشتق د $y=f(x)$ تابع په $y^{(n)}=f^{(n)}(x)$ علامی سره ښيو.

**لومړی مثال**: د $f(x)=x^3-3x^2+4x-1$ تابع دريم مشتق په لاس راوړئ.

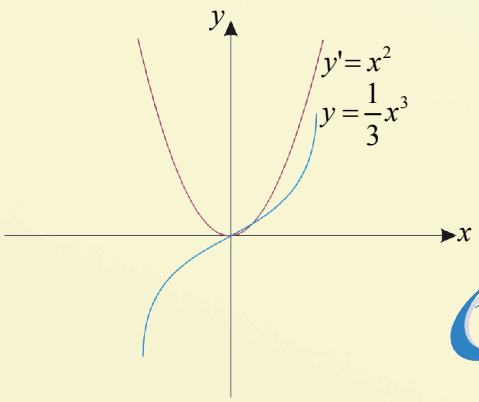
**حل**:

$$y=x^3-3x^2+4x-1$$
$$y'=3x^2-6x+4$$
$$y''=6x-6$$
$$y'''=6$$

**دويم مثال**: د $y=\frac{1}{3}x^3$ تابع گراف او د هغې د لومړی مرتبې مشتق تابع گراف رسم کړئ.

**حل**:

$$y=\frac{1}{3}x^3$$
$$y'=\frac{3}{3}x^2=x^2$$
$$y'=x^2$$



ketabton.com - The Digital Library

**دريم مثال**: كه $y=\sin x+\cos x$ وي، د $(y^{(9)})^2+y^2$ قيمت پيدا كړئ.

**حل**: لومړی د تابع نهمه مرتبه مشتق يا $(y^{(9)})$ په لاس راوړو:

$$y=\sin x+\cos x$$
$$y'_{(x)}=\cos x+(-\sin x)=\cos x-\sin x$$
$$y''_{(x)}=-\sin x-(\cos x)=-\sin x-\cos x$$
$$y'''_{(x)}=-\cos x-(-\sin x)=\sin x-\cos x$$
$$\vdots$$
$$f^{(9)}_{(x)}=\cos x-\sin x$$
$$(y^{(9)})^2+y^2=(\cos x-\sin x)^2+(\sin x+\cos x)^2$$
$$=\cos^2 x-2\sin x\cos x+\sin^2 x+\sin^2 x+2\sin x\cos x+\cos^2 x$$
$$=2\sin^2 x+2\cos^2 x=2(\sin^2 x+\cos^2 x)=2$$

**څلورم مثال**: د $y=2x^6-3x^5-2x^3-3x^2-1$ د تابع پنځه ځلې مشتق پيدا كړئ.

$$y=2x^6-3x^5-2x^3-3x^2-1$$
$$y'=12x^5-15x^4-6x^2-6x$$
$$y''=60x^4-60x^3-12x-6$$
$$y'''=240x^3-180x^2-12$$
$$y^{(4)}=720x^2-360x$$
$$y^{(5)}=1440x-360$$

**يادونه**: كه چېرې $n-$ ام درجه‌يي څو جمله‌يي تابع $f_{(n)}(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3+\ ...+c_nx^n\ \ c_n\neq 0$ راكړی شوی وي $n-$ ام مشتق يې په لاندې ډول په لاس راځي:

$$f_{n(x)}=c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3+\ \ ...\ +c_nx^n \qquad c_n\neq 0$$
$$f'_{(x)}=c_1+2c_2x+3c_3x^2+\ \ ...\ +nc_nx^{n-1}$$
$$f''_{(x)}=2c_2+6c_3x+\ \ ...\ +n(n-1)c_nx^{n-2}$$
$$f'''_{(x)}=6c_3+12c_4x+\ \ ...\ +n(n-1)(n-2)c_nx^{n-3}$$
$$f^n(x)=n(n-1)(n-2)\ ...\ c_n=n!c_n$$

په عمومي ډول كه $k>n$ وی، نو: $f^k(x)=0$

## پوښتنې

د لاندې تابعګانو تر هغې مشتق ونيسئ چې د مشتق تابع له صفر سره مساوي شي.

1) $y=4x^4-3x^3-2x$
2) $y=(5x-2)^3$
3) $y=a+b+c^2-x-ax-bx-cx^3-c^3x$
4) $y=\sin x$

ketabton.com - The Digital Library



– که چېرې د $P(x, f(x))$ او $Q(x+h, f(x+h))$ ټکی د $f(x)$ تابع دوه اختیاري ټکي وي، نو لاندې اړیکه د Newton خارج قسمت په نامه یادېږي:

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{x+\Delta x-x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

د منحني د مماس میل په یوه اختیاري ټکي کې عبارت دی، له:

$$m_T=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

**د یوې تابع مشتق**: د تابع او متحول د تزایـد، د نـسبت لېمیـټ کلـه چې $\Delta x \to 0$ وکـړي، د مـشتق پـه نامـه یادېږي او په $f'(x)$ , $\frac{dy}{dx}$ سره ښودل کېږي.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f'(x)=y'$$

که چېرې د $f(x)$ تـابع د $(x_0)$ پـه یـوه ټکـي کـې د مـشتق وړ وي، نـو $f'(x)$ د ممـاس میـل د منحنـي سـره د $(x_0, f(x_0))$ په ټکي کې دی.

که د $f$ تابع د $x=x_0$ په ټکي کې د مشتق وړ وي، نو دا تابع په $x_0$ کې متمادي ده، خـو ددې بـرعکس سـمه نـه ده، یعنې کېدای شي یوه تابع په یوه ټکي کې متمادي وي، ولې په هغه ټکي کې د مشتق وړ نه وي.

د $f(x)$ د تابع مشتق د $C$ پر منحني $P(x_0, f(x_0))$ په ټکي کې د مماس له میل سره برابر دی.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=y'=\tan\alpha=\tan\theta=m_\Delta$$

د تماس په ټکي کې له یوې منحني سره د مماس میل د هغې تابع د مشتق په نوم یادېږي.

که د یوې تابع مشتق ونیول شي، نو یوه تابع په لاس راځي چې دا د مشتق تابع بلل کېږي.

که د $f$ تابع د $(x_0-r, x_0+r)$ په فاصله کې( $x_0=x$ په شـاوخوا) کـې تعریـف شـوی وي او د هغې لېمیـټ موجود وي، په دې حالت کې کولای شو چې یو مماس خط د $f(x)$ د تـابع پـه منحنـي د $x=x_0$ پـه ټکـي کـې رسم کړو، د دې مماس میل عبارت دی له: $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

ketabton.com - The Digital Library

د مشتق قوانين:

1) $f(x)=C \quad \Rightarrow \quad f'(x)=0$

2) $f(x)=x^n \quad \Rightarrow \quad f'(x)=n\cdot x^{n-1}$

3) $f(x)=u\pm v \quad \Rightarrow f'(x)=u'\pm v'$

4) $f(x)=u\cdot v \quad \Rightarrow \quad f'(x)=u'v+v'u$

5) $f(x)=\dfrac{u}{v} \quad , \quad v\neq 0 \Rightarrow f'(x)=\dfrac{u'v-v'u}{v^2}$

6) $f(x)=\sqrt{x} \quad \Rightarrow \quad f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

7) $f(x)=\sqrt{u} \quad \Rightarrow \quad f'(x)=\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$

8) $f(x)=\sqrt[n]{u} \quad \Rightarrow \quad f'(x)=\dfrac{u'}{n\cdot\sqrt[n]{u^{n-1}}}$

د مرکبو توابعو مشتق: $y'_{(x)}=y'_{(u)}\cdot u'_{(x)}$

د مثلثاتي تابع ګانو مشتق:

1) $y=\sin x \quad \Rightarrow \quad y'=\cos x \quad , \quad y=\sin u \quad \Rightarrow \quad y'=u'\cos u$

2) $y=\cos x \quad \Rightarrow \quad y'=-\sin x \quad , \quad y=\cos u \quad \Rightarrow \quad y'=-u'\sin u$

که د $y=f(x)$ تابع مشتق منونکی وي، په بشپړ ډول $n$-ام ځلې مشتق يې $y^{(n)}=f^{(n)}(x)$ دی.

ketabton.com - The Digital Library

## د دويم څپرکي پوښتنې

لاندې پوښتنو ته څلور ځوابونه درکړل شوي دي، سم ځواب په نښه کړئ:

1- $f(x)=x^2-x$ منحني ميل د $P(3,0)$ په ټکي کې عبارت دی له:

$a)\ 3$ $b)\ -3$ $c)\ 5$ $d)\ -5$

2- د $f(x)=2x^2$ په تابع کې د $f$ متوسط بدلون د $[3\ ,\ 4]$ په انتروال کې عبارت دی له:

$a)\ 18$ $b)\ 14$ $c)\ -14$ $d)\ 32$

3- د $y=2x^2-3x^{-1}$ تابع مشتق عبارت دی له:

$a)\ y'=4x^2+3$ $b)\ y'=4x+\frac{1}{2}x$ $c)\ y'=4x+\frac{3}{x^2}$ $d)\ y'=4x$

4- د $f(x)=\sqrt{x-1}$ تابع مشتق عبارت دی له:

$a)\ 0$ $b)\ \frac{1}{2\sqrt{x-1}}$ $c)\ \frac{x-1}{2\sqrt{x}}$ $d)\ \frac{-1}{2\sqrt{x-1}}$

5- د $f(x)=2x^2+x$ تابع د $x=1$ په ټکي کې د مماس خط معادله عبارت ده له:

$a)\ y=5x-2$ $b)\ y=x-3$ $c)\ y=5$ $d)\ y=5x$

6- د $y=\frac{2x}{-x+4}$ تابع مشتق عبارت دی له:

$a)\ y'=-4x+8$ $b)\ y'=-2$ $c)\ y'=\frac{4x+8}{(-x+4)}$ $d)\ y'=\frac{8}{(-x+4)^2}$

7- د $y=(2-x^2)^3$ تابع مشتق عبارت دی له:

$a)\ y'=-6x^5+2x^3-24x$ $b)\ y'=3(2-x^2)^2$ $c)\ y'=3(-2x)^2$ $d)$ هېڅ یو

8- د $y=\sin x$ تابع مشتق عبارت دی له:

$a)\ y'=\sin x$ $b)\ y'=\cos x$ $c)\ y'=-\sin x$ $d)\ y'=-\cos x$

9- د $y=(1+x^4)^{\frac{-1}{5}}$ تابع مشتق عبارت دی له:

$a)\ y'=-\frac{4}{5}x^3(1+x^2)^{\frac{-6}{5}}$ $b)\ y'=-\frac{1}{5}(1+x^2)^{\frac{-6}{5}}$

$c)\ y'=-4x^3$ $d)$ هېڅ یو

10- د $y=\frac{\cos}{1-\cos x}$ تابع مشتق عبارت دی له:

$a)\ y'=\frac{\sin x}{(1-\cos x)^2}$ $b)\ y'=\frac{-\sin x}{(1-\cos x)}$ $c)\ y'=\frac{-\sin x}{(1-\cos x)^2}$ $d)$ هېڅ یو

ketabton.com - The Digital Library

لاندې پوښتنې حل کړئ.

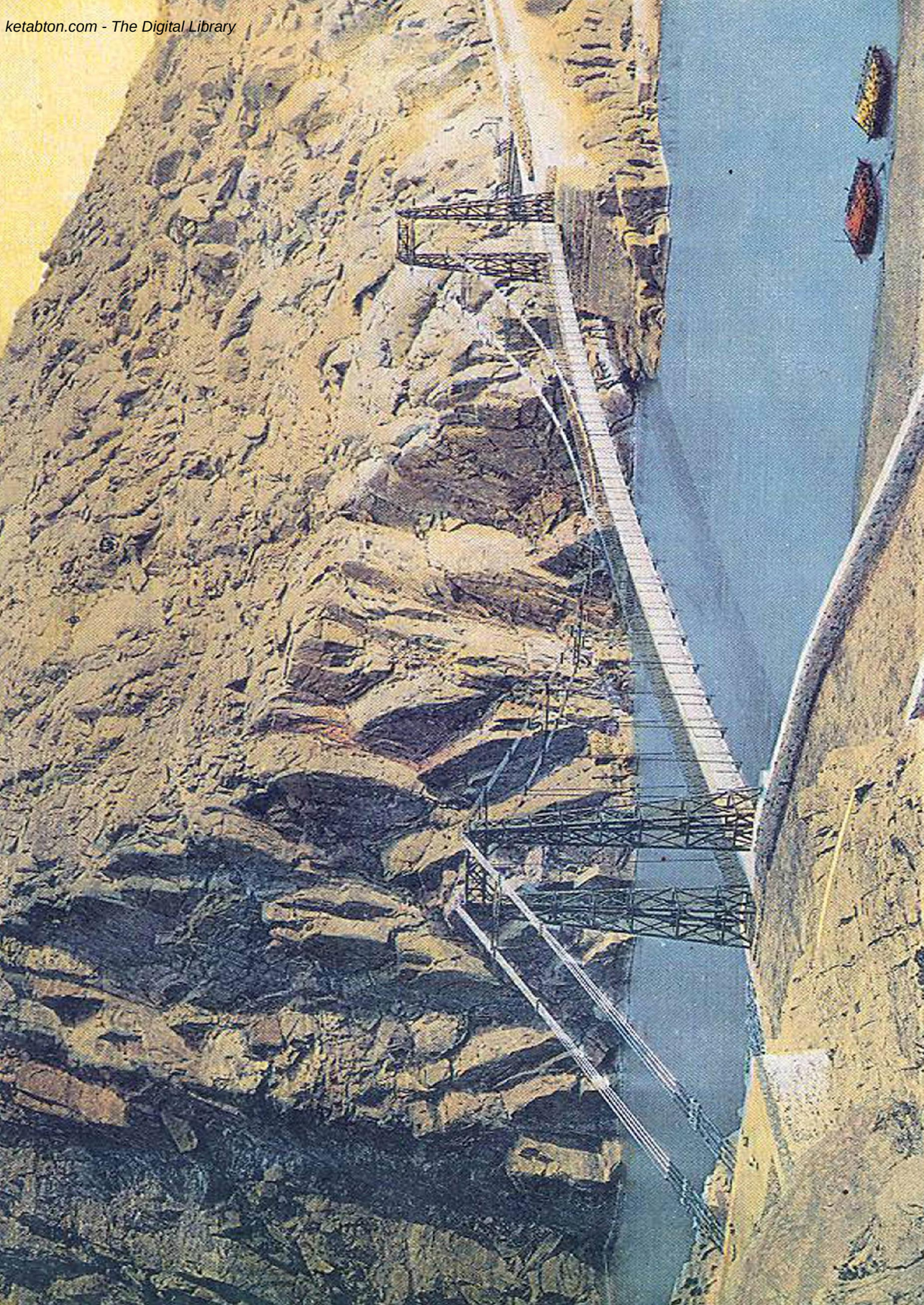
1. د $f(x)=\dfrac{2\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$ تابع مشتق پیدا کړئ؟
2. د $f(x)=\dfrac{x+\sqrt{x-x^2}}{\sqrt{x}+\sqrt{1-x}}$ تابع مشتق پیدا کړئ؟
3. د $f(x)=(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)$ تابع مشتق پیدا کړئ.
4. د $f(x)=(\sqrt[3]{x}-1)(\sqrt[3]{x}+4)$ تابع مشتق پیدا کړئ.
5. د $f(x)=\sin x\cdot\cos x$ د تابع مشتق د $\dfrac{\pi}{4}$ په ټکي کې پیدا کړئ.
6. د $f(x)=\dfrac{(\sin x+\cos x)^2}{1+\sin 2x}$ تابع مشتق پیدا کړئ.
7. د $y=\cos x$ تابع اته مرتبه مشتق پیدا کړئ.
8. د $y=\sin^2 x+\cos^2 x$ تابع نهمه مرتبه مشتق پیدا کړئ.
9. د $x^2+xy+y^2=3$ تابع ضمني مشتق پیدا کړئ.

ketabton.com - The Digital Library

# دریم څپرکی

## د مشتق د استعمال ځایونه

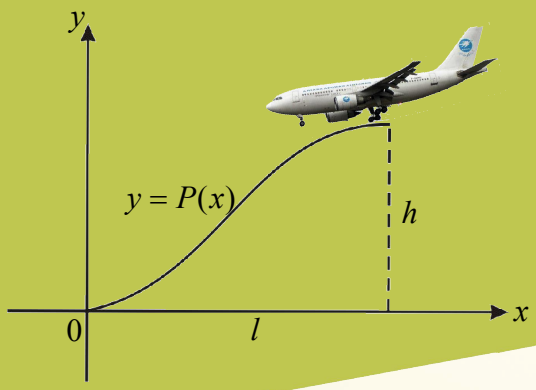
ketabton.com - The Digital Library



ketabton.com - The Digital Library

## د مشتق د استعمال ځایونه

د مخامخ شکل د ارتفاع په اړه خپل نظر بیان کړئ.

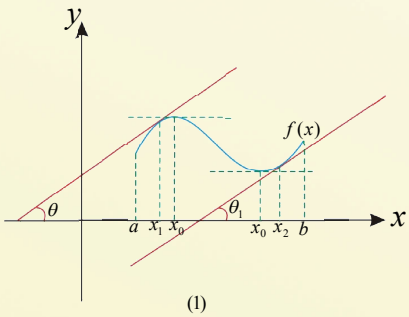



له مشتق څخه په ډېرو ځایونو کې، لکه: (په فزیک کې د حرکت، سرعت او تعجیل اړوند معادلې د مشتق څخه په ګټه اخیستنې سره حلېږي همدارنګه په کیمیا کې هم، د تابع د تحولات، د ځینو لېمیټونو په پیدا کولو کې) کار اخیستل کېږي چې ځینې ځایونه یې دلته تر څېړنې لاندې نیسو.

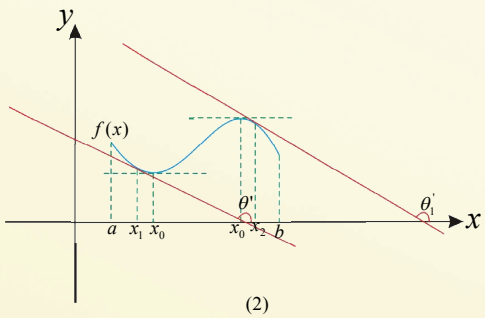
### I- د یوې تابع تحولات:

فعالیت

لاندې شکلونو ته پاملرنه وکړئ:




(1)




(2)

- متزایدې او متناقصې توابع څه ډول توابع دي؟
- د (1) شکل په $(a,b)$ انتروال کې د $x_0$ ، $x_1$ او $x_2$ په ټکو کې د رسم شویو مماسونو میلونه د (2) شکل له مماسونو سره پرتله کړئ.
- په (1) او (2) شکلونو کې تر ټولو لوړ ټکی او تر ټولو ټیټ ټکی په ګوته کړئ.

ketabton.com - The Digital Library

- په پورته شکلونو کې وښيې چې کومه تابع په کومه ساحه کې متزايده او په کومه ساحه کې تابع متناقصه ده؟
- په متزايده، متناقصه او ثابته تابع کې مشتق و څېړئ.

د پورته فعالیت پایله داسې بیانوو:

1- که د $f(x)$ تابع په $[a,b]$ انټروال کې متمادي او په $(a,b)$ انټروال کې د مشتق وړ وي، نو که چېرې په ورکړل شوي انټروال کې $f'(x)>0$ وي، تابع په هغه انټروال کې متزايده بلل کېږي.

2- که چېرې د $f(x)$ تابع په $[a,b]$ انټروال کې متمادي او د $(a,b)$ په انټروال کې د مشتق وړ وي که به ورکړ شوي انټروال کې $f'(x)<0$ وي، نو تابع په هغه فاصله کې متناقصه بلل کېږي.

**یادونه**: د تابع له تزاید څخه مطلب دا دی چې د x د متحول قیمت په زیاتېدو سره د تابع قیمت زیات او د تابع له تناقص څخه مطلب دا دی چې د x د متحول د قیمت په زیاتېدو سره د y یا تابع قیمت کم پاتې شي.

**لومړی مثال**: وښیئ چې د $f(x)=x^3+3x+1$ تابع ګراف متزاید ده.

**حل**: څرنګه چې تابع کسري بڼه نه لري، نو ټول حقیقي عددونه د تعریف ساحه کېدای شي او هم پوهېږو چې د تابع د تزاید شرط $f'(x)>0$ دی، نو لازمه ده چې د تابع مشتق تر مطالعې لاندې ونیسو:

$$f(x)=x^3+3x+1$$
$$f'(x)=3x^2+3$$

لیدل کېږي چې د مشتق لومړی حد تام مربع دی، نو د $x$ د ټولو قیمتونو لپاره همېشه مثبت دی. کله چې (+3) ورسره جمع شي بیا هم قیمت یې مثبت دی، نو د $f'(x)>0$ دی، نو تابع متزایده ده.

**دویم مثال**: د $f(x)=x^3-3x+5$ تابع په کوم انټروال کې متناقصه ده؟

**حل**: څرنګه چې د $f(x)$ تابع په هر انټروال کې متمادي او د مشتق وړ ده، نو د متناقص تابع لپاره لرو $f'(x)<0$ دی، یعنې:

$$f'(x)=3x^2-3<0$$
$$f'(x)=0$$
$$3x^2-3=0$$
$$3x^2=3$$
$$x=\pm 1$$

ketabton.com - The Digital Library

لیدل کېږي چې د تابع مشتق د $-1 < x < 1$ په انټروال کې منفي دی، نو تابع په همدې انټروال کې $(-1,1)$ متناقصه ده.

**دریم مثال**: د $f(x) = 5x - 4$ تابع تحولات وڅېړئ.

**حل**: لومړی د تابع د تعریف ساحه پیدا او وروسته د تابع د تزاید شرط په کې څېړو:

$$D_f \to IR$$
$$f(x) = 5x - 4$$
$$f'(x) = 5 > 0$$

ځرنګه چې $f'(x) > 0$ نو د ټولو قیمتونو لپاره همېشه مثبت دی. نو تابع متزایده ده.

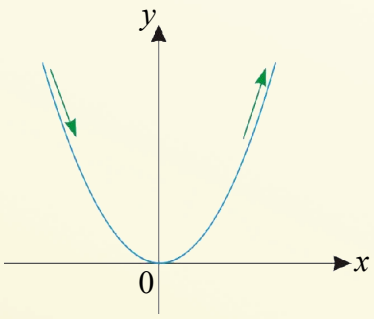
**څلورم مثال**: د $y = x^2$ د تابع ګراف ته ځیر شئ او وښیئ چې ورکړل شوي تابع په کوم انټروال کې متزایده او په کوم انټروال کې متناقصه ده.

**حل**: پوهېږو چې که تابع متناقصه وي $y' < 0$ او که تابع متزایده وي $y' > 0$ څخه دی، نو لیکلای شو چې:

$$y = x^2 \Rightarrow y' = 2x$$

د تناقص شرط $y' < 0 \Rightarrow 2x < 0 \Rightarrow x < 0$

د تزاید شرط $y' > 0 \Rightarrow 2x > 0 \Rightarrow x > 0$




| $x$ | $-\infty$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $y$ | $+\infty \searrow$ | $4 \searrow$ | $1 \searrow$ | $0 \nearrow$ | $1 \nearrow$ | $4 \nearrow$ | $+\infty$ |

د تابع له ګراف څخه لیدل کېږي چې تابع د $(-\infty, 0)$ په انټروال کې متناقصه او په $(0, +\infty)$ انټروال کې متزایده ده.

ketabton.com - The Digital Library

## پوښتنې

1- د $f(x)=ax+b$ د تابع تحولات وښیئ؟

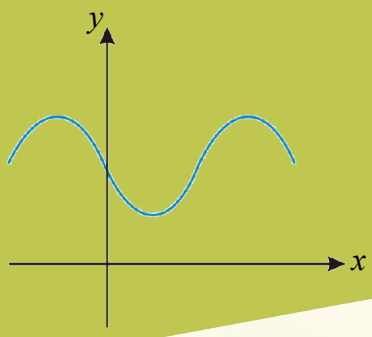
2- د $y=\frac{-3}{4}x-1$ د تابع تحولات وښیئ؟

3- وښیاست چې د $f(x)=2x^2+3x+1$ تابع په کوم انتروال کې متزایده ده؟

4- د $y=x^2+3x+2$ د تابع د تزاید انتروال و ټاکئ؟

ketabton.com - The Digital Library

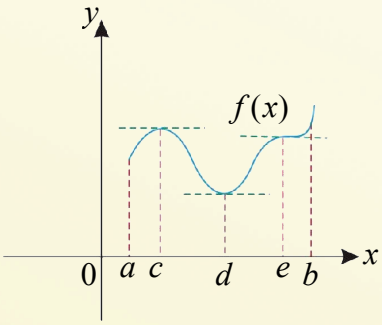
## د يوې تابع بحراني (Critical Point) ټکي (اعظمي Maximum او اصغري Minimum)




په مخامخ شکل کې تر ټولو لوړ ټکی او تر ټولو ټیټ ټکی
وښیئ او ووایئ چې دا ټکي د څه په نامه یادېږي؟




که په لاندینې شکل کې د $f(x)$ تابع د $(a,b)$ په انټروال کې د مشتق وړ وي.




- د متحول د قیمت په زیاتوالي په کوم انټروال کې د تابع قیمت لوېږي.
- د متحول د قیمت په کموالي په کوم انټروال کې د تابع قیمت کمېږي.
- د تابع تحولات په $(c,d)$ او $(d,e)$ انټروال کې وڅېړئ.
- د $f(x)$ تابع مشتق په کومو ټکو کې له صفر سره مساوي دی.

د پورته فعالیت پایله داسې بیانوو:

ketabton.com - The Digital Library

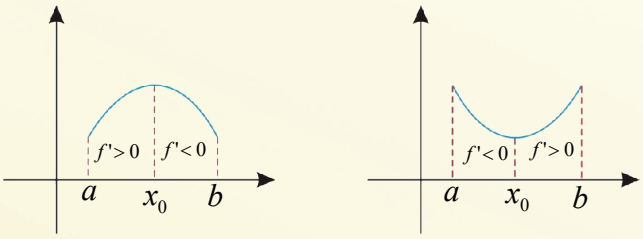
د يوې تابع په ګراف کې د $y$ پر محور تر ټولو لوړې نقطې ته اعظمي(maximum) او تر ټولو ټيټې نقطې ته د تابع اصغري(minimum) نقطه وايي، د $x$ د هغو قيمتونو لپاره چې تابع اعظمي او يا اصغري قيمتونه اخلي د بحراني(*Critical Point*) نقطو په نامه يادېږي.

**تعريف**:

1- **ثابته تابع**: که چېرې د يوې تابع لومړی مشتق هميشه له صفر سره مساوي وي تابع ته ثابته تابع وايي.

2- **متزايده تابع**: که چېرې د يوې تابع لومړی مشتق د $(a,b)$ په فاصله کې مثبت وي تابع په هغه فاصله کې متزايده بلل کېږي، يعنې $y'>0$ چې په لاندې شکلونو کې ليدل کېږي.

3- **متناقصه تابع**: که چېرې د يوې تابع لومړی مشتق د $(a,b)$ په فاصله کې منفي وي يعنې $y'<0$ وي، تابع په هغه فاصله کې متناقصه بلل کېږي چې په لاندې شکلونو کې ليدل کېږي.




(1) (2)

1- **اعظمي ټکی**: که چېرې د $y=f(x)$ تابع د $x_0$ په معين ټکي کې د تزايد له حالت څخه د تناقص حالت ته بدل شي يا په بل عبارت د $x_0$ په دې معين ټکي کې د مشتق اشاره له مثبت څخه منفي ته بدله شي د $x_0$ په نقطه کې د تابع قيمت د اعظمي(maximum) په نامه يادېږي.

2- **اصغري ټکی**: که چېرې د $y=f(x)$ تابع د $x_0$ په معين ټکي کې د تناقص له حالت څخه تزايد حالت ته بدل شي يا په بل عبارت د $x_0$ په دې معين ټکي کې د مشتق اشاره له منفي څخه مثبت ته بدله شي د $x_0$ په نقطه کې د تابع قيمت د اصغري (minimum) په نامه يادېږي.

3- **د انعطاف ټکی**: که چېرې مشتق خپله اشاره د $x_0$ په يوه معين ټکي کې له مثبت څخه صفر ته او بيا مثبت ته يا له منفي څخه صفر او بيا منفي ته بدله کړي $x_0$ د انعطاف د نقطې *Inflection Point* په نامه يادېږي.

ketabton.com - The Digital Library

**لومړی مثال**: د $f(x)=x^3-\frac{7}{2}x^2+2x$ تابع راکړل شوی ده دا تابع څو د (Extreme) ټکي لري.

**حل**: د تابع لومړی مشتق پیدا کوو بیا هغه مساوي په صفر وضع کوو او د $x$ قیمتونه په لاس راوړو.

$$f'_{(x)}=3x^2-7x+2$$

$$f'(x)=0$$
$$3x-1=0\Rightarrow x_1=\frac{1}{3}$$
$$x-2=0\Rightarrow x_2=2$$

| $x$ | $-\infty$ | | $\frac{1}{3}$ | | $1$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $\frac{17}{54}$ (Max) | ↘ | $-2$ | ↘ | $-2$ (Min) | ↗ | $+\infty$ |

په پایله کې ویلای شو چې اصلي تابع دریمه درجه ده، نو د $f(x)$ د تابع مشتق د $(\frac{1}{3})$ او $(2)$ په دوو نقطو کې خپله علامه بدلوي، نو دوه بحراني (Extreme) ټکي لري.

**دویم مثال**: د $f(x)=\frac{x+1}{x^2-2x}$ تابع موضعي Extreme ټکي یا نسبتي ټکي مشخص کړئ.

**حل**: لومړی د تابع مشتق په لاس راوړو، وروسته یې علامې ټاکو:

لیدل کېږي چې تابع د $y=\frac{u}{v}$ شکل لري، نو $y'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$

$$f(x)=\frac{x+1}{x^2-2x}$$
$$f'(x)=\frac{x^2-2x-(2x-2)(x+1)}{(x^2-2x)^2}$$
$$f'(x)=\frac{-x^2-2x+2}{(x^2-2x)^2}$$

دیوه کسر قیمت هغه وخت له صفر سره مساوي دی چې د تابع صورت مساوي له صفر سره وي.

$$f'(x)=0\ \Rightarrow\ -x^2-2x+2=0$$
$$\Delta=b^2-4ac=12$$
$$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{2+\sqrt{12}}{-2}=-2.73$$
$$x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{2-\sqrt{12}}{-2}=0.73$$

| $x$ | | $-3$ | | $-2.73$ | | $-1$ | | $0.73$ | | $1$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | | $-$ |
| $f(x)$ | ↘ | | ↘ | Min | ↗ | | ↗ | Max | ↘ | | ↘ |
| | | | $-\frac{2}{15}$ | | $0$ | | | | $-2$ | | |

ketabton.com - The Digital Library

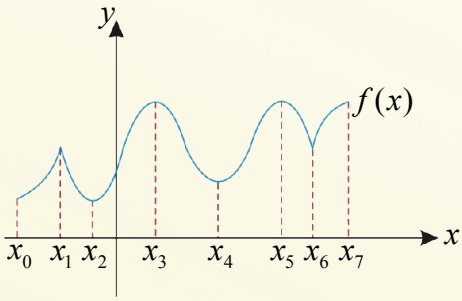
په جدول کې ښکاري چې $f'$ د $x_1$ او $x_2$ دواړو خواوو ته خپله علامه بدلوي، نو تابع دوه بحراني Extreme ټکي لري، يعنې تابع اعظمي او اصغري ټکي لري.

**مطلق اعظمي او مطلق اصغري ټکي** Absolute Maximum & Absolute Minimum

کېدای شي يوه تابع په يوه انټروال کې څو موضعي بحراني ټکي ولري، خو په يوه ټاکلي انټروال کې تابع يوازې يوه مطلقه اعظمي او يوه مطلقه اصغري نقطه لري. په شکل کې يې وښيئ؟




لاندينی شکل ته ځير شي:

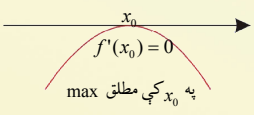


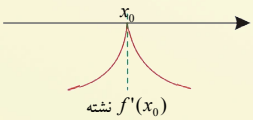

- د $f(x)$ په تابع کې اعظمي او اصغري ټکي وښيئ.
- د $f(x)$ تابع بحراني ټکي په ګوته کړئ.
- پورتنی تابع په ورکړل شوي انټروال کې څو موضعي بحراني ټکي لري.
- پورتنی تابع په ورکړل شوي انټروال کې څو اصغري او اعظمي لري.

د پورته فعاليت پايله داسې بيانوو:

**مطلق اعظمي** Absolute Maximum: په عمومي ډول د $(x_0, f(x_0))$ ټکی مطلق اعظمي بلل کېږي، که چېرې د $f(x)$ د تعريف په ساحه کې د هر $x$ لپاره $f(x) \le f(x_0)$ وي، نو $f(x_0)$ ته مطلق اعظمي وايي لاندې شکلونه وګورئ.

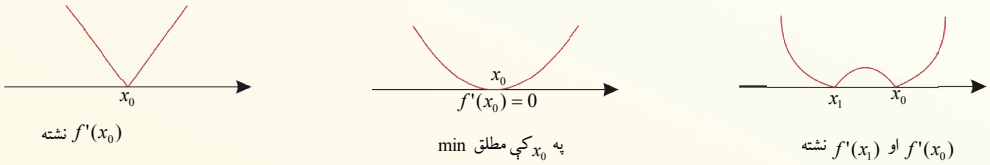


ketabton.com - The Digital Library

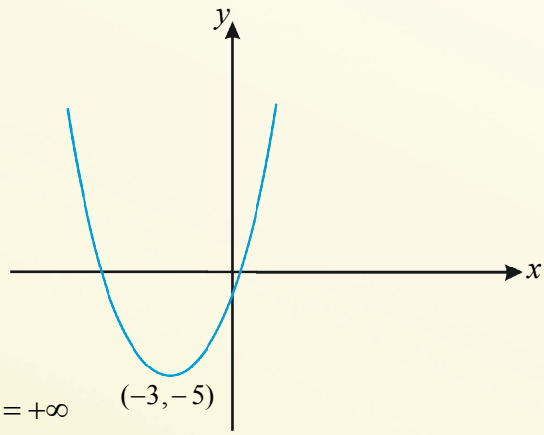
**مطلق اصغري** Absolute Minimum: په عمومي ډول د $(x_0, f(x_0))$ نقطه مطلقه اصغري بلل کېږي، که چېرې د $f$ د تعريف په ساحه کې د هر $x$ لپاره $f(x) \geq f(x_0)$ وي، نو په دې حالت کې $f(x_0)$ ته مطلقه اصغري وايي، د $x$ هغه قيمتونه چې د هغوی لپاره تابع يا اعظمي او يا اصغري قيمتونه اخلي د $x$ دغه قيمتونه د Extreme په نامه يادېږي.




**لومړی مثال**: د $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{1}{2}$ د تابع مطلق اصغري پيداکړئ.

**حل**: د $f(x)$ د تابع مشتق نيسو او د مشتق د تابع حلونه په لاس راوړو:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{1}{2}$$
$$f'(x) = x + 3$$
$$f'(x) = 0$$
$$x + 3 = 0$$
$$x = -3$$
$$f(-3) = -5$$
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}(\frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{1}{2}) = +\infty$$
$$= \frac{1}{2}\lim_{x\to\infty} x^2 + 3\lim_{x\to\infty} x - 1\lim_{x\to\infty} - \frac{1}{2} = +\infty$$




| $x$ | $-\infty$ | $-4$ | $-3$ | $1$ | $2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $f(x)$ | $+\infty$ ↘ | $-\frac{9}{2}$ ↘ | $-5$ ↗ | $3$ ↗ | $\frac{15}{2}$ ↗ | $+\infty$ |
| | | | Min | | | |

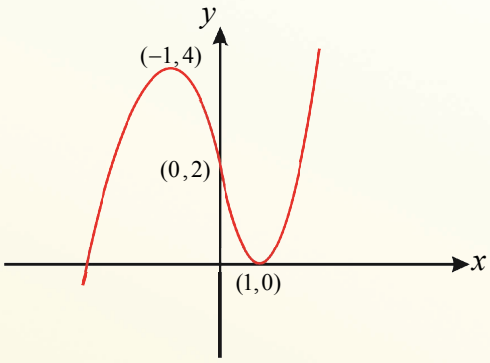
په پايله کې د $x = -3$ په ټکي کې چې د تابع قيمت $(-5)$ دی او تابع په $(-3, -5)$ ټکي کې مطلق اصغري لري.

ketabton.com - The Digital Library

**دویم مثال**: د $f(x)=x^3-3x+2$ د تابع اعظمي او اصغري ټکي پیدا او رسم یې کړئ.

**حل**: د اعظمي او اصغري ټکو د پیدا کولو لپاره لومړی د تابع لومړی مشتق پیدا او بیا د مشتق د تابع صفري ټکي په لاس راوړو.

$$f(x)=x^3-3x+2$$
$$f'(x)=3x^2-3$$
$$f'(x)=0$$
$$3x^2-3=0$$
$$3x^2=3$$
$$x^2=1$$
$$x_1=1 \quad , \quad x_2=-1$$
$$f(-1)=(-1)^3-3(-1)+2$$
$$=-1+3+2$$
$$=4$$
$$f(1)=1^3-3\cdot 1+2=1-3+2=0$$
$$f(0)=0-3\cdot 0+2=2$$
$$f(2)=2^3-3\cdot 2+2=4$$
$$f(1)=0 \quad , \quad f(0)=2 \quad , \quad f(-1)=4$$
$$Max\ f(-1)=4 \qquad Min\ f(1)=0$$




| $x$ | $-\infty$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $+$ $0$ | $-$ | $-$ | $0$ $+$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ ↗ | $-\frac{5}{6}$ ↗ | $4$ ↘ | $2$ ↘ | $0$ ↗ | $4$ | $+\infty$ ↗ |
| | | | *Max* | | *Min* | | |

له جدول څخه لیدل کیږي چې تابع د $(-\infty,-1)$ او $(1,+\infty)$ په انټروالونو کې متزایده او $(-1,1)$ په انټروال کې متناقصه ده، نو د $(1,0)$ نقطې اصغري او د $(-1,4)$ نقطه اعظمي ده.

د یوې تابع د ګراف رسموولو لپاره لاندې ټکي باید په پام کې ونیسو:

1. د تابع متمادیت او نامتمادیت مطالعه کړو.
2. د قایمو محوراتو سره د ګراف تقاطع.
3. د لومړي مشتق د اشارې مطالعه د تابع د تزاید او تناقص لپاره.
4. د تابع د اعظمي او اصغري ټکو لپاره د مشتق صفري ټکي پیدا کول.
5. د مجانبونو ټاکل.
6. د جدول ترتیبول او د هغوی په مرسته د ګراف رسمول.

ketabton.com - The Digital Library

**دريم مثال**: د $y = 2 + x - x^2$ تابع ګراف رسم کړئ؟

**حل**: لېدل کېږي چې تابع د متحول د ټولو قيمتونو لپاره تعريف شوي ده.

1- ددې تابع د تقاطع ټکی د $x$ او $y$ له محورونو سره پيداکوو:

د $y$ له محور سره د ګراف تقاطع د ټکو د پيداکولو لپاره په ورکړشوي تابع کې $x = 0$ وضع کوو:

$$x = 0 \qquad y = 2 + 0 - 0 = 2$$

نو پورتنی ګراف د $y$ محور په $(0,2)$ نقطه کې قطع کوي.

د $x$ د محور سره دګراف د تقاطع د ټکو دپيدا کولو لپاره $y$ مساوي په صفر وضع کوو او د $x$ قيمت پيداکوو:

$$y = 0 \ , \ 2 + x - x^2 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 2}}{-2} = -\frac{-1 \pm 3}{2}$$

$$x_1 = -1 \ , \ x_2 = 2$$

نو پورتنی ګراف د $x$ محور په $(-1,0)$ او $(2,0)$ نقطو کې قطع کوي.

2- د تابع اعظمي او اصغري ټکي پيداکوو، ددې کار لپاره دتابع اول او دويم مشتق څېړو.

$$y = 2 + x - x^2$$

څرنګه چې د تابع په اعظمي او اصغري نقطو کې د تابع لومړی مشتق صفر دی نو $y' = 0$ سره وضع کوو:

$$y' = 1 - 2x$$

$$y' = 0 \ ، \quad 1 - 2x = 0$$

$$-2x = -1 \ \Rightarrow \ 2x = 1$$

$$x = \frac{1}{2}$$

تابع په $x = \frac{1}{2}$ نقطه کې يو اعظمي يو يا اصغري قيمت لري، دهغې دپيژندنې له پاره دتابع دويم مشتق په ټکو کې څېړو:

$$y'' = -2 < 0$$

ketabton.com - The Digital Library

څرنګه چې $y''$ تل منفي دی، نو په $x=\frac{1}{2}$ کې هم منفي دی، ځکه نو تابع په $x=\frac{1}{2}$ ټکی کې یو اعظمي قیمت لري څرنګه چې د $x=\frac{1}{2}$ لپاره $y=2+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=2\frac{1}{4}$ کېږي، نو د تابع اعظمي نقطه داده:

$$(\frac{1}{2}، 2\frac{1}{4})$$

دامنحني دانعطاف نقطه نه لري، ځکه چې دهر $x$ لپاره $y''<0$ دی.

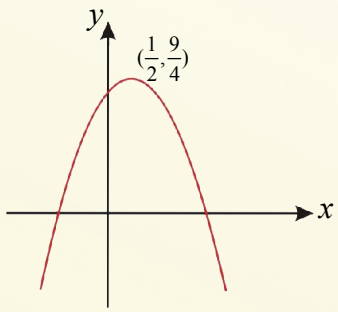
3- په $\pm\infty$ کې دګراف څېړل:

$$\lim_{x\to\infty} y=\lim_{x\to\infty}(2+x-x^2)=\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} y=\lim_{x\to-\infty}(2+x-x^2)=-\infty$$

د زیاتې روښانتیا لپاره لاندې جدول ترتیب شوی، او د تابع ټول بدلونو نه په هغو کې په ګوته کوو او وروسته نومورې ګراف رسموو.

| $x$ | | $-1$ | | $\frac{1}{2}$ | | $2$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | | $-$ |
| $y$ | ↗ | $0$ | ↗ | $\frac{1}{4}$ | ↘ | $0$ | ↘ |




## پوښتنې

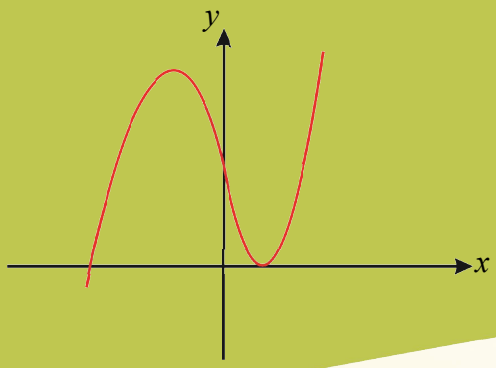
1- د لاندې توابعو موضعي Extreme ټکی و ټاکئ.

a) $f(x)=x^2-3x+2$ b) $f(x)=\frac{x+1}{x^2}$ c) $y=3x^2-4x+1$

2- د $f(x)=3x^3-4x^2$ د تابع مطلقه min پیدا کړئ.

ketabton.com - The Digital Library

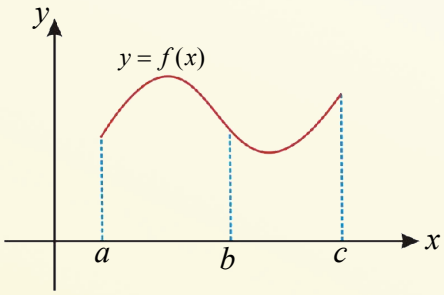
## د انعطاف د نقطې ټاکل




هغه ټکي چې د یوې تابع ګراف په هغې کې خپل محدبیت، مقعریت ته او یا ددې پر عکس بدلوي د څه په نامه یادېږي؟ آیا په دې ټکي کې د دویم مشتق علامه او قیمت څېړلای شئ؟




لاندینی شکل په پام کې ونیسئ.

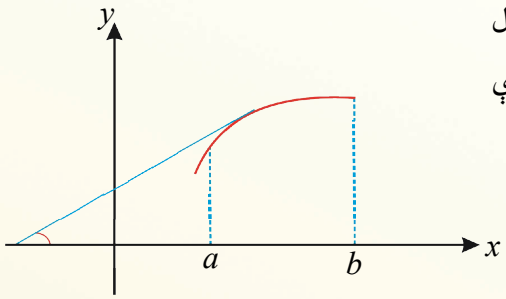



- د $y = f(x)$ د تابع منحني د $(a,b)$ په انټروال کې څه ډول منحني بلل کېږي؟
- د $y = f(x)$ د تابع منحني د $(b,c)$ په انټروال کې څه ډول منحني بلل کېږي؟
- د $(a,b)$ په انټروال کې په منحني یو مماس رسم کړئ او له هغه مماس سره یې پرتله کړئ چې د $(b,c)$ په انټروال کې په منحني رسمېږي.

د پورتني فعالیت پایله داسې بیانوو:

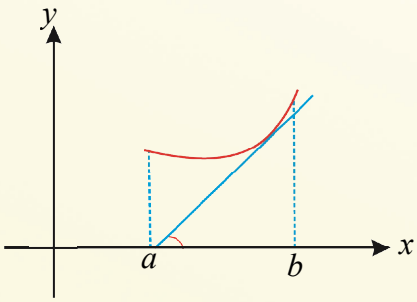
1. د $y = f(x)$ تابع منحني په یوه انټروال کې پرسیدلی یا محدب بلل کېږي، که چېرې په دې انټروال کې په منحني مماس رسم شي، نو مماس د منحني له پاسه یا پورته خواته پروت وي، په دې صورت کې د تابع دویم مشتق منفي $y'' < 0$ په لاس راځي.

ketabton.com - The Digital Library




په دې ډول که د $y = f(x)$ د تابع دویـم مـشتق د انټروال په ټولو ټکو کې منفي وي، نو د تابع ګراف یا منحني په دې انتروال کې محدب پاتې کېږي.

2. د $y = f(x)$ د تابع منحني په یوه انتروال کې ننوتې یا مقعره بلل کېږي، که چېرې په نوموړي انتروال کې په منحني مماس رسم شي، نو مماس له منحني څخه لاندې یا ښکته خوا پروت وي، کـه د $y = f(x)$ د تـابع دویـم مـشتق د انتـروال پـه ټولـو ټکـو کـې مثبـت $y'' > 0$ وي، منحني په دې انتـروال کـې مقعـره بلـل کېږي.




**تعریف**: هغه نقطه چې تابع له مقعریت څخه محـدبیت تـه او یـا ددې پـر عکـس جهـت بـدلوي، او لـومړی مشتق یې موجود او دویم مشتق یې صفر شي د انعطاف (Inflection) نقطه بلل کېږي.

که د $y = f(x)$ تابع د $x = x_0$ په ټکي کې چې د تابع دویـم مـشتق صـفر شـي ($f''(x_0) = 0$) وي تـابع د $x = x_0$ په ټکي کې د انعطاف نقطه لري او ددې برعکس تابع د انعطاف نقطه نه لري.

**لومړی مثال**: د $f(x) = x^2 - 5x + 4$ د تابع ګراف رسم محدبیت او مقعریت یې وڅېړئ.

**حل**: تابع د متحول د ټولو قیمتونو لپاره تعریف شوي ده.

1- د $y$ له محورسره تقاطع

$$\left.\begin{matrix} x = 0 \\ y = 4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow (0,4)$$

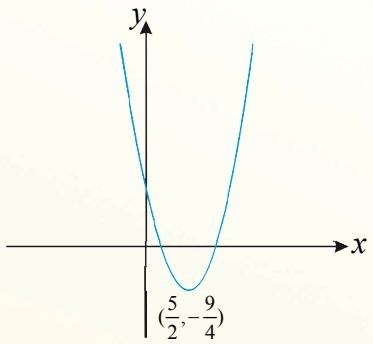
2- د $x$ له محورسره تقاطع

$$\left.\begin{matrix} y = 0 \\ x^2 - 5x + 4 = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x^2 - 5x + 4 = (x-4)(x-1) \Rightarrow x_1 = 4 \quad , \quad x_2 = 1$$

ketabton.com - The Digital Library

د $x$ له محور سره د تقاطع ټکي $(4,0)$ او $(1,0)$ دي.

| $x$ | $-\infty$ | | 0 | | 1 | | $\frac{5}{2}$ | | 4 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | | $-$ | | $-$ | | $+$ | | $+$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | ↘ | 4 | ↘ | 0 | ↘ | $-\frac{9}{4}$ min | ↗ | 0 | ↗ | $+\infty$ |




د ګراف، مقعریت او محدبیت د څېړلو لپاره د تابع دویم مشتق په لاس راوړو:

$$f(x)=x^2-5x+4 \Rightarrow y'=2x-5$$
$$f''(x)=2>0$$

څرنګه چې $y''>0$ دی، نو په پایله کې ویلای شو چې منحني ننوتې یا مقعره ده.

**دویم مثال**: هغه انټروالونه وټاکئ چې په هغې کې د $y=x^3+9x^2-6x+1$ تابع ګراف محدب یا مقعر وي.

**حل**:

$$y=x^3+9x^2-6x+1$$
$$y'=3x^2+18x-6 \Rightarrow y''=6x+18$$
$$y''<0 \Rightarrow 6x+18<0$$
$$6x<-18 \Rightarrow x<-3$$
$$y''>0 \Rightarrow 6x+18>0$$
$$6x>-18$$
$$x>-3$$

| $x$ | $-\infty$ | $-3$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $y''$ | $-$ | 0 | $+$ |
| $y$ | ∩ | | ∪ |

مقعر انعطاف محدب

څرنګه چې لیدل کېږي د تابع دویم مشتق په $(-\infty,-3)$ انټروال کې منفي او د $(-3,+\infty)$ انټروال کې مثبت دي، نو دا ډول ګراف په لومړی انټروال کې محدب او په دویم کې مقعر دی.

ketabton.com - The Digital Library

**دریم مثال**: د $f(x)=x^5-5x^3$ د تابع د انعطاف ټکی و ټاکئ؟

**حل**:

$$f(x)=x^5-5x^3 \Rightarrow f'(x)=5x^4-15x^2$$

$$f''(x)=20x^3-30x$$

$$f''(x)=0$$

$$20x^3-30x=0$$

$$x(20x^2-30)=0$$

$$x_1=0$$

$$20x^2-30=0$$

$$x^2=\frac{3}{2} \Rightarrow x_2=\sqrt{\frac{3}{2}} \quad , \quad x_3=-\sqrt{\frac{3}{2}}$$

| $x$ | $-\infty$ | $-\sqrt{\frac{3}{2}}$ | | $0$ | | $\sqrt{\frac{3}{2}}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | $-\infty$ | $\cap -13.65$ | $\cup$ | | $\cap -6\sqrt{\frac{3}{2}}$ | | $\cup$ |

لیدل کېږي چې په $x=\sqrt{\frac{3}{2}}$ او $x=0$ , $x=-\sqrt{\frac{3}{2}}$ کې د تابع دویم مشتق صفر دی یا $f''(x)=0$ علامه بدلوي او په دې ټکو کې مماس رسمیدلی شي چې هغه ټکی د انعطاف ټکی دی.

## پوښتنې

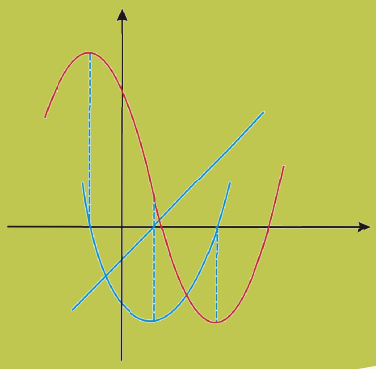
1. د $f(x)=x^2-4$ د تابع محدبیت او مقعریت وټاکئ.
2. د $f(x)=-2x^2-1$ د تابع د انعطاف نقطه وټاکئ.

ketabton.com - The Digital Library

## د منحني ګانو رسمول

## د دويمې درجې تابع ګانو ګراف

د مخامخ شکل په اړه خپل نظر بیان کړئ.



فعالیت

- د $f(x)=x+1$ د تابع ګراف د $f(x)=-x+1$ د تابع له ګراف سره پرتله کړئ.
- د $y=ax^2+bx+c$ د تابع د تعریف ساحه و ټاکئ آیا دا تابع متمادي ده؟
- د نوموړی تابع لومړی مشتق پیدا او د Maximum او Minimum ټکي او د تناظر محور یې وټاکئ.
- د تابع لیمیټ په هغه صورت کې پیدا کړئ چې $x \to \pm\infty$ وکړي.
- له محورونو سره د تقاطع ټکي و ټاکئ.
- د تحولاتو جدول ترتیب او نوموړی منحني رسم کړئ.

د پورته فعالیت پایله داسې بیانوو:

1- د تابع د تعریف ساحه: لیدل کېږي چې تابع د متحول د ټولو قیمتونو لپاره تعریف شوی ده، یعنې:

$$D_f \to (-\infty, +\infty)$$

نو تابع د خپل تعریف په ساحه کې متمادي ده.

2- د تابع د بحراني ټکو او د تناظر محور ټاکل:

$$f'(x)=2ax+b=0$$
$$f'(x)=0$$
$$2ax+b=0$$
$$2ax=-b$$
$$x=\frac{-b}{2a}$$

ketabton.com - The Digital Library

د $x=\frac{-b}{2a}$ قیمت په اصل تابع کې وضع کوو:

$$y=a(-\frac{b}{2a})^2+b(-\frac{b}{2a})+c \Rightarrow a\cdot\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{2a}+c=0$$

$$y=\frac{b^2-2b^2+4ac}{4a}=\frac{-b^2+4ac}{4a} \Rightarrow \frac{4ac-b^2}{4a}$$

د $(-\frac{b}{2a}\ ,\ \frac{4ac-b^2}{4a})$ ټکی بحراني یعنې اعظمي یا اصغري دی.

الف: که $a>0$ وي، نو: $a>0 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

تابع په $(\frac{-b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a})$ ټکي کې $Min$ لري.

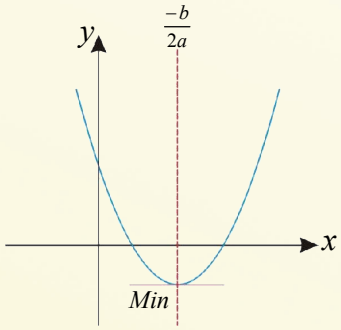
ب: که $a<0$ وي، نو: $a<0 \Rightarrow \lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

تابع په $(\frac{-b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a})$ ټکي کې $Max$ لري.

3- د ګراف د رسمولو لپاره جدول ترتیب او ګراف یې رسموو:

$a>0$

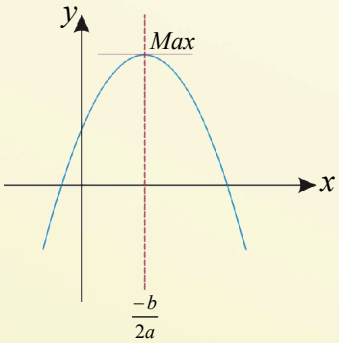
| $x$ | $-\infty$ | | $\frac{-b}{2a}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $-$ | | $+$ | |
| $y$ | $+\infty$ | ↘ | $\frac{4ac-b^2}{4a}$ | ↗ | $+\infty$ |




څرنګه چې $a>0$ د منحني خوله(جهت) پورته خواته او د $(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4})$ اصغري نقطه ده.

$a<0$

| $x$ | $-\infty$ | | $\frac{-b}{2a}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $+$ | | $-$ | |
| $y$ | $-\infty$ | ↗ | $\frac{4ac-b^2}{4a}$ | ↘ | $-\infty$ |




څرنګه چې $a<0$ د منحني خوله(جهت) ښکته خواته او د $(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4})$ اعظمي نقطه ده.

ketabton.com - The Digital Library

**لومړی مثال**: د $f(x)=x^2-4x+3$ د تابع تحولات مطالعه او ګراف يې رسم کړئ.

**حل**:

1- د تابع د تعريف ساحه $(-\infty,+\infty)$ تابع د ټولو حقيقي قيمتونو لپاره تعريف شوي ده، نو تابع په دې انتروال کې متمادي ده.

2- د تابع د منحني تقاطع د $x$ له محور سره:

$$\left.\begin{array}{l} y=0 \\ x^2-4x+3=0 \\ (x-1)(x-3)=0 \\ x-1=0 \Rightarrow x=1 \\ x-3=0 \Rightarrow x=3 \end{array}\right\} \quad (1,0) \quad , \quad (3,0)$$

3- د تابع د منحني تقاطع د $y$ له محور سره:

$$\left.\begin{array}{l} x=0 \\ y=0-4\cdot 0+3 \\ y=3 \end{array}\right\} \quad (0,3)$$

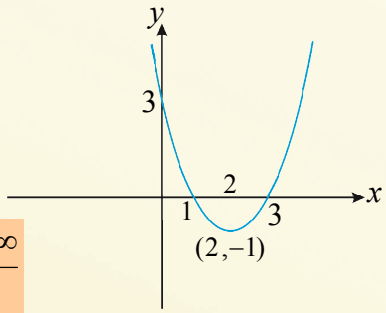
4- د تابع د extreme ټکو د پيدا کولو لپاره د لومړي مشتق صفري ټکي پيدا او جدول يې ترتيبوو:

$$f'(x)=2x-4=0 \Rightarrow 2x=4 \Rightarrow x=2$$

$$\left.\begin{array}{l} f(2)=2^2-4\cdot 2+3=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow V(2,-1)\min$$

$$x\to\pm\infty \Rightarrow f(x)\to\pm\infty$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\left[x^2-4x+3\right]=+\infty$$




| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $1$ | | $2$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $-$ | | $-$ | | $-$ | | $+$ | | $+$ | |
| $y$ | $-\infty$ | $\searrow$ | $3$ | $\searrow$ | $0$ | $\searrow$ | $-1$ | $\nearrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |
| | | | | | | | *Min* | | | | |

**دويم مثال**: د $f(x)=-x^2+2x$ د تابع تحولات مطالعه او ګراف يې رسم کړئ.

**حل**: ليدل کېږي چې تابع د ټولو قيمتونو لپاره تعريف شوې ده، نو:

1- د تابع د تعريف ساحه عبارت ده له: $(-\infty,+\infty)$ چې په دې ساحه کې تابع متمادي ده.

ketabton.com - The Digital Library

2- د تابع د منحني د تقاطع ټکی د $x$ له محور سره:

$$f(x)=0$$
$$-x^2+2x=0$$
$$x(-x+2)=0$$

د تقاطع ټکی

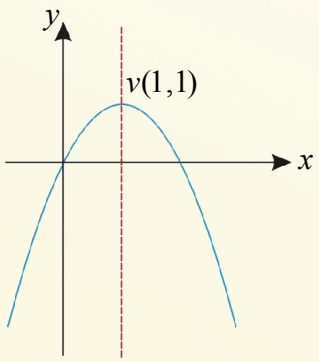
$$x_1=0 \qquad (0,0)$$
$$-x+2=0$$
$$x_2=2 \qquad (2,0)$$

3- د تابع د منحني تقاطع د $y$ له محور سره:

$$x=0$$
$$f(x)=-x^2+2x$$
$$f(x)=0+2\cdot 0$$
$$f(x)=0 \qquad (0,0)$$

4- د تابع د extreme نقطو د پیدا کولو لپاره د تابع لومړی مشتق پیدا کوو او جدول یې ترتیب او ګراف یې رسموو:

$$D_f \to (-\infty,+\infty)$$
$$f(x)=-x^2+2x$$
$$f'(x)=-2x+2=0$$
$$-2x+2=0$$
$$-2x=-2$$
$$\left.\begin{matrix}x=1\\ f(1)=1\end{matrix}\right\} \Rightarrow V(1,1)Max$$




| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $1$ | | $2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | | $+$ | | $-$ | | $-$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $0$ | ↗ | $1$ | ↘ | $0$ | ↘ $-\infty$ |
| | | | | | $Max$ | | | |

په جدول کې لیدل کېږي چې د مشتق علامه د مثبت څخه منفي ته او یا د تزاید حالت څخه تناقص ته شکل بدلوي، نو تابع د $(1,1)$ په ټکي کې اعظمي ده.

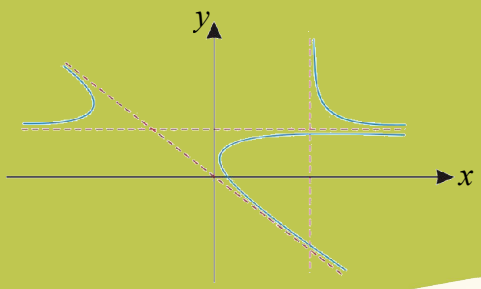
## پوښتنې

1. د $f(x)=2x^2-x-1$ د تابع ګراف رسم کړئ.
2. د $f(x)=x^2-x-2$ د تابع د ګراف بدلونونه وڅېړئ او ګراف یې رسم کړئ.

ketabton.com - The Digital Library

## د توابعو د ګرافونو مجانبونه

شکل ته پام وکړئ ټکی ټکی کرښې د څه په نامه یادېږي، نومونه يې واخلئ.





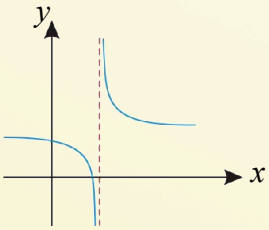


- مجانبونه څه ډول کرښې دي؟
- مجانبونه، منحنيګانې په کومو ټکو کې قطع کوي؟

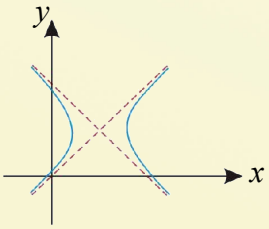
د پورتني فعالیت پایله داسې بیانوو:

**مجانبونه**: هغه مستقیمې کرښې دي چې د منحني د ګراف لپاره د لارښود حیثیت لري او د منحني کرښه قطع کړي، هغه تابع ګانې چې د متحول د ځینو قیمتونو لپاره غیر متمادي وي، مجانبونه لري او په درې ډوله دي.

1- **عمودي مجانب**: د $y = f(x)$ تابع عمودي مجانب لري چې $x \to a$ او $y \to \infty$ وکړي، یعنې $\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$ شي یا په بل عبارت په کسري تابع ګانو کې چې ډېرې د کسر مخرج مساوي په صفر شي، نوموړې تابع بې‌نهایت خوا ته تقرب کوي، نو ددې ډول مجانب د پیدا کولو لپاره د کسر مخرج له صفر سره مساوي وضع کوو.

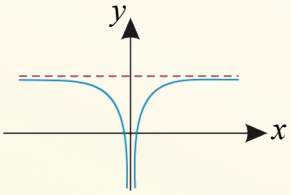



2- **مایل مجانب**: د $y = f(x)$ کسري تابع کله چې د صورت او مخرج د تقسیم حاصل د یوه مستقیم خط په شکل ($y = ax + b$) لاسته راشي داسې چې $a \neq 0$ وي په لاس راځي او دا هغه وخت امکان لري چې تابع د مایل مجانب لرونکی وي، یعنې د متحول د صورت درجه د متحول د مخرج له درجې څخه د یو واحد په اندازه لوړه وي.



ketabton.com - The Digital Library

په یاد ولرئ چې که یوه تابع د افقي مجانب لرونکي وي، مایل مجانب نه لري او بر عکس که چېرې مایل مجانب ولري افقي مجانب نه لري.




3- **افقي مجانب**: یوه تابع هغه وخت د افقي مجانب لرونکې ده چې که $x \to \pm\infty$ وکړي د تابع قیمت یو ثابت مقدار شي او یا په بل عبارت یوه تابع هغه وخت د افقي مجانب لرونکې ده چې که $x \to \pm\infty$ وکړي، نو $y \to c$ ته تقرب کوي، یعنې $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = c$ شي.

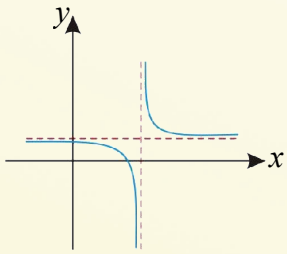
**لومړی مثال**: د $f(x) = \dfrac{x+1}{2x-4}$ تابع عمودي او افقي مجانب پیدا کړئ.

**حل**: د عمودي مجانب د پیدا کولو لپاره د کسر مخرج مساوي په صفر وضع کوو، لرو چې:

$2x-4=0 \Rightarrow 2x=4 \Rightarrow x=2$ نو $x=2$ د تابع عمودي مجانب دی.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} (\dfrac{x+1}{2x-4}) = \dfrac{1}{2}$ افقي مجانب عبارت دی له: $y=\dfrac{1}{2}$

| $x$ | $-1$ | $0$ | $+1$ |
|---|---|---|---|
| $y$ | $0$ | $-\frac{1}{4}$ | $-1$ |




**دویم مثال**: د $y = \dfrac{x^2+2x-1}{x}$ تابع د منحني مجانبونه وټاکئ.

**حل**:

1- مایل مجانب: ددې مجانب د پیدا کولو لپاره د تابع صورت د تابع پر مخرج وېشو:

$$y = \frac{x^2+2x-1}{x} = x+2-\frac{1}{x} \Rightarrow y = x+2$$

2- عمودي مجانب: د دې مجانب د پیدا کولو لپاره د تابع مخرج مساوي په صفر وضع کوو:

$$y = \frac{x^2+2x-1}{x} \Rightarrow x=0$$

3- افقي مجانب: څرنګه چې تابع مایل مجانب لري، نو افقي مجانب نه لري.

ketabton.com - The Digital Library

**دريم مثال**: د $f(x)=\dfrac{(x-3)(x+2)}{(x+1)(x-2)}$ تابع مجانبونه وټاکئ.

**حل**:

1- عمودي مجانب: د تابع مخرج مساوي په صفر وضع کوو:

$$(x+1)(x-2)=0$$

$$\left.\begin{array}{l} x+1=0 \\ x_1=-1 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x-2=0 \\ x_2=2 \end{array}\right\}$$

نو $x=2$ او $x=-1$ د تابع عمودي مجانبونه دي.

2- افقي مجانب: د افقي مجانب د پيدا کولو لپاره د تابع لېميټ په لاس راوړو:

$$y=\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{(x-3)(x+2)}{(x+1)(x-2)}=1$$

نو $y=1$ د تابع افقي مجانب دی.

3- څرنګه چې تابع افقي مجانب لري، نو مايل مجانب نه لري.

**د مجانبونو د ټاکلو عمومي طريقه**:

که چېرې د $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ په ناطقه تابع کې $m$ او $n$ په ترتيب سره د صورت او مخرج درجې وي، نو:

**الف**: که $m<n$ وي، نو د $x$ محور افقي مجانب دی.

**ب**: که $m=n$ وي، نو $y=b$ افقي مجانب دی، داسې چې $b$ د $m$ او $n$ د درجو د حدودو د ضريبونو نسبت دی.

**ج**: که چېرې $m>n$ وي، نو افقي مجانب نه لري، ولې د مايل مجانب احتمال يې شته.

**د**: که چېرې $m=n+1$ وي(که د صورت درجه د يوه واحد په اندازه له مخرج څخه لويه وي) تابع هرو مرو مايل مجانب لري، په دې حالت کې افقي مجانب نه لري.



ketabton.com - The Digital Library

## پوښتنې

د لاندې توابعو مجانبونه وټاکئ.

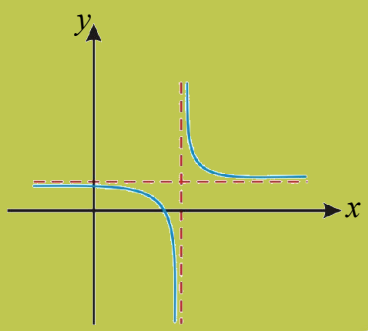
1) $f(x)=\dfrac{3x-6}{x^2-x-2}$

2) $f(x)=\dfrac{-2x^2}{x^2+1}$

3) $f(x)=\dfrac{8}{x^2-4}$

ketabton.com - The Digital Library

## د هوموګرافیک تابع ګانو ګراف




شکل ته پاملرنه وکړئ دا شکل د څه ډول تابع ګراف دی؟ افقي او عمودي مجانبونه يې وښيئ.




- هوموګرافیک تابع څه ډول تابع ده، په یوه مثال کې يې واضح کړئ.
- د $y=\frac{1}{x}$ د تابع ګراف رسم کړئ.
- د نومورې تابع مجانبونه لومړی پیدا او بیا يې رسم کړئ.
- د تابع د ګراف تقاطع د $x$ او $y$ له محورونو سره پیدا کړئ.

د پورتني فعالیت پایله داسې بیانوو:

هغه تابعګانې چې د $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ شکل ولري، هوموګرافیک تابع ګانې بلل کېږي، داسې چې $c\neq 0$ وي. دا ډول توابع دوه مجانبونه لري چې:

1- افقي مجانب يې:

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{ax}{x}+\frac{b}{x}}{\frac{cx}{x}+\frac{d}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{a+\frac{b}{x}}{c+\frac{d}{x}} \Rightarrow y=\frac{a}{c}$$

2- عمودي(قایم) مجانب يې:

$$cx+d=0 \Rightarrow cx=-d \Rightarrow x=-\frac{d}{c}$$

**لومړی مثال**: د $f(x)=\frac{2x-1}{x-3}$ د تابع بدلونونه وخېړئ او ګراف يې رسم کړئ.

**حل**:

$$x-3=0$$
$$x=3$$

1. څرنګه چې د تابع مخرج د $x=3$ په قیمت کې صفر کېږي، نو تابع پرته له $x=3$ څخه د متحول په ټولو قیمتونو کې معینه ده، یعنې د تابع د تعریف ساحه ټاکو: $Domain=IR\setminus\{3\}$

ketabton.com - The Digital Library

2. د تابع د منحني تقاطع د $x$ له محور سره:

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=0 \\ 2x-1=0 \\ 2x=1 \;\Rightarrow\; x=\dfrac{1}{2} \end{array}\right\} \;(\frac{1}{2},0)$$

3. د تابع د منحني تقاطع د $y$ له محور سره:

$$x=0 \;\Rightarrow\; f(0)=\frac{2\cdot 0-1}{0-3}=\frac{1}{3} \qquad \Big\} \;(0,\frac{1}{3})$$

4. د مجانبونو ټاکل:

**الف**- افقي مجانب: $y=2$ , $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2x-1}{x-3}=2$ يا $f(x)=\dfrac{a}{c}=\dfrac{2}{1}=2$

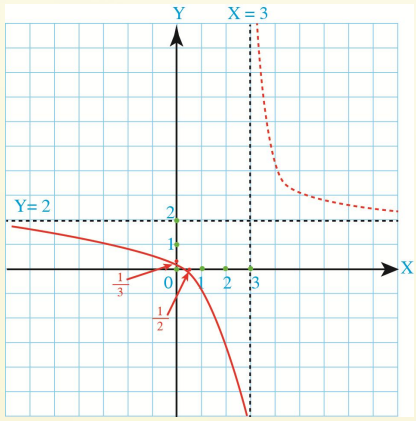
**ب**- عمودي مجانب: $x=3 \;\Rightarrow\; x-3=0$ يا $x=-\dfrac{d}{c}=-\dfrac{-3}{1}=3$

5. د تابع د extreme ټکي پيدا کوو او جدول يې ترتيب او ګراف يې رسمو:

$$f'(x)=\frac{2(x-3)-(2x-1)}{(x-3)^2}=\frac{-5}{(x-3)^2}<0$$

$$f''(x)=\frac{0\cdot(x-3)^2-(-5)\cdot 2(x-3)}{(x-3)^4}=\frac{10(x-3)}{(x-3)^4}=\frac{10}{(x-3)^3}$$

| $x$ | $-\infty$ | 3 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | | $-$ |
| $f''(x)$ | $-$ | | $+$ |
| $f(x)$ | $2 \searrow -\infty$ | نه دی تعریف شوی | $+\infty \searrow 2$ |




**دويم مثال**: د $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$ د تابع دګراف بدلونونه و څېړئ او ګراف يې رسم کړئ.

**حل**: $x+1=0 \;\Rightarrow\; x=-1$

1- د تابع د تعريف ساحه $D_f \to IR\setminus\{-1\}$ يعني تابع په $x=-1$ ټکي کې تعريف شوې نه ده.

ketabton.com - The Digital Library

2- د تابع د منحني تقاطع د $x$ له محور سره:

$$y=0 \Rightarrow x-1=0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow (1,0)$$

3- د تابع د منحني تقاطع د $y$ له محور سره:

$$x=0 \Rightarrow y=\frac{0-1}{0+1}=-1 \Rightarrow y=-1 \Rightarrow (0,-1)$$

4- د مجانبونو پاکل:

**الف**- عمودي مجانب:

$$x+1=0 \Rightarrow x=-1$$

**ب**- افقي مجانب:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x-1}{x+1} \Rightarrow f(x)=y=1$$

5- د تابع extreme نقطې پيدا کوو، جدول يې ترتيب او گراف يې رسموو:

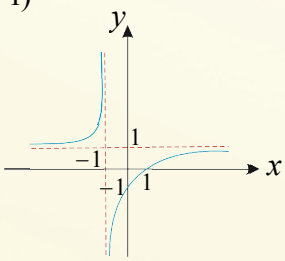
$$f(x)=\frac{x-1}{x+1}$$

$$f'(x)=\frac{1\cdot(x+1)-1\cdot(x-1)}{(x+1)^2}=\frac{x+1-x+1}{(x+1)^2}=\frac{2}{(x+1)^2}>0$$

$$f''(x)=\frac{0\cdot(x+1)^2-2\cdot2(x+1)}{(x+1)^4}=\frac{-4(x+1)}{(x+1)^4}=\frac{-4}{(x+1)^3}$$

| $x$ | $-\infty$ | |
|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | + |
| $f''(x)$ | + | − |
| $f(x)$ | 1 ↗ $+\infty$ | $-\infty$ ↗ 1 |

له ځې تعريف شوی




**دريم مثال**: غواړو د $f(x)=\frac{2x-5}{x}$ تابع گراف رسم کړو.

**حل**:

1- د تابع د تعريف ساحه تر څېړنې لاندې نيسو ليدل کېږي چې تابع پرته له $x=0$ څخه نور د متحول د ټولو قيمتونو لپاره معينه ده، يعنې: $D_f \to IR\setminus\{0\}$

2- د محوراتو سره د تقاطع ټکي

**الف**- د $x$ له محور سره تقاطع:

$$f(x)=0 \Rightarrow \frac{2x-5}{x}=0$$

$$\left.\begin{array}{l} 2x-5=0 \\ 2x=5 \Rightarrow x=\frac{5}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow (2.5,0)$$

ketabton.com - The Digital Library

**ب**- د $y$ له محور سره تقاطع: د $x=0$ لپاره د $f(x)$ تابع تعریف شوې نه ده، نو له $y$ محور سره تقاطع نه لري.

3- **مجانبونه**:

**الف**- عمودي مجانب: څرنګه چې په مخرج کې یوازې $x$ موجود دی، نو $x=0$ یې عمودي مجانب دی چې د $y$ محور کېږي.

**ب**- افقي مجانب: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[\dfrac{2x-5}{x}\right]=2$ نو $y=2$ د تابع افقي مجانب دی.

4- د بحراني ټکو پیدا کول: د بحراني ټکو د پیدا کولو لپاره د تابع لومړی مشتق پیدا کوو

$$f(x)=\frac{2x-5}{x}$$

$$f'(x)=\frac{2\cdot x-(2x-5)}{x^2}=\frac{2x-2x+5}{x^2}$$

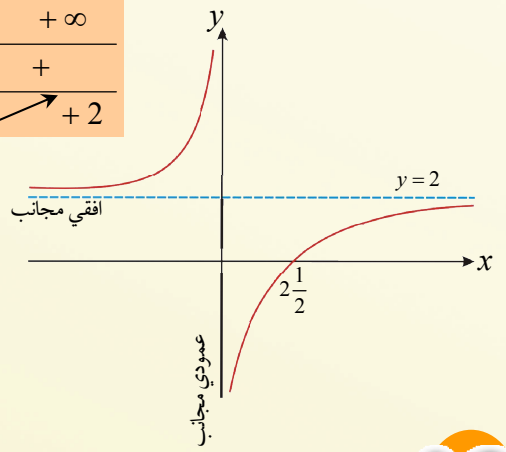
$$f'(x)=\frac{5}{x^2}>0$$

څرنګه چې $f'(x)>0$ دی، نو تابع متزایده ده.

د ګراف د رسمولو لپاره د تابع تحولات په جدول کې ترتیبوو:

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $2.5$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | | $+$ | | $+$ |
| $f(x)$ | $2$ | ↗ | $+\infty$ \| $-\infty$ | ↗ | $0$ | ↗ $+2$ |

نه دی تعریف شوی



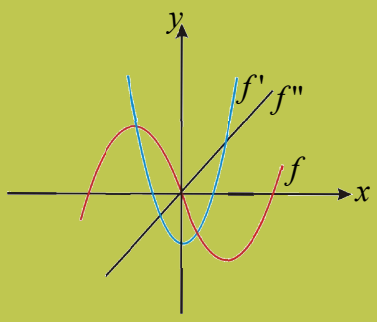

## پوښتنې

1. د $f(x)=\dfrac{x-1}{x+3}$ تابع بدلونونه وخېړئ او رسم یې کړئ.
2. د $f(x)=\dfrac{x}{x-4}$ تابع بدلونونه وخېړئ او رسم یې کړئ.

ketabton.com - The Digital Library

## د دريمې درجې يو مجهوله تابع ګراف $y = ax^3 + bx^2 + cx + d \ ، \ a \neq 0$

مخامخ شکل د ځينو توابعو ګرافونه راښيي تاسې د هرې تابع د ګراف په هکله خپل نظر بيان کړئ.







- د $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ تابع په اړه فکر وکړئ او ووايئ چې تابع څومه درجه تابع ده؟
- د نوموړي تابع ضريبونه او ثابت حد وليکئ.
- د نوموړي تابع دويم مشتق پيدا کړئ.

د پورته فعاليت پايله داسې بيانوو:

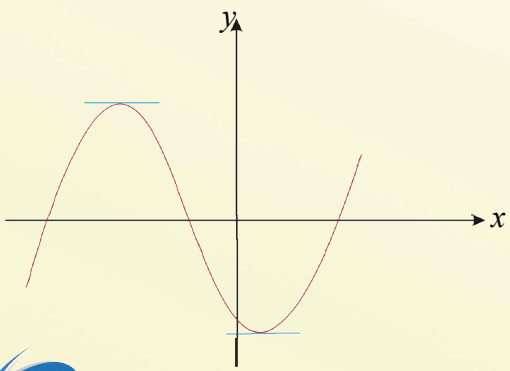
1. د $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ، په دريمه درجه تابع کې چې $a > 0$ وي داسې په پام کې نيسو. کـه چېرې د تابع لومړی مشتق پيدا کړو دويمه درجه تابع په لاس راځي، نـو د $f'(x) = 0$ لپـاره د دويمې درجې د معادلې حل په پام کې نيسو او $\Delta$ يې مطالعه کـوو کـه چېرې د معـادلې $\Delta$ لـه صـفر څخـه لوی $(\Delta f' > 0)$ وي، نو معادله(د تابع مـشتق) دوه حلـه لـري، کـه چېـرې $a > 0$ وي منحنـي لـه کـين لوري څخه ښې لوري ته يوه نسبي اعظمي نقطه (Local Maximum) او يوه نسبي اصغـــــري (Local Minimum) لري.

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$a > 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta f' > 0$

| $x$ | $-\infty$ | $x_1$ | | $x_2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | $-\infty$ ↗ | | ↘ | | ↗ $+\infty$ |

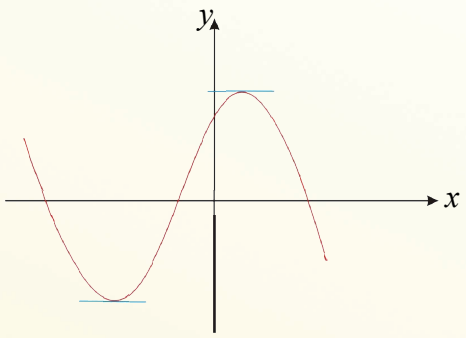


ketabton.com - The Digital Library

2. د $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ ، په تابع کې که $a<0$ ، $f'(x)=0$ او $\Delta f'(x)>0$ معادله دوه جذرونه لري، که چېرې $\Delta f'>0$ نو منحني له کېنې لوري څخه ښی لوري ته یوه نسبي اصغری(Local Minimum) او یوه نسبي اعظمي(Local Minimum) نقطه لري.

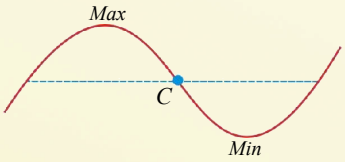
$$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$$
$$f'(x)=3ax^2+2bx+c$$
$$a<0 \quad \Rightarrow \quad \Delta f'>0$$

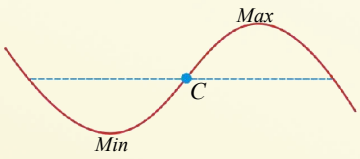
| $x$ | | $x_1$ | | $x_2$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $f(x)$ | $+\infty$ ↘ | | ↗ | | ↘ $-\infty$ |




3. که د دریمې درجې تابع منحني نسبي بحراني Extreme ولري، د Extreme دټکو د منځني ټکي یا د انعطاف د نقطې مختصات یې:

$$I(x_c,y_c)=\left(\frac{x_{\max}+x_{\min}}{2},\frac{y_{\max}+y_{\min}}{2}\right)$$




4. د دریمې درجې تابع د تناظر ټکی د تابع د انعطاف ټکی:

$$f'(x)=0$$
$$3ax^2+2bx+c=0$$

چې د تناظر ټکي یې وروسته د نوموړي معادلې له حل څخه د تناظر مرکز $x=-\frac{b}{3a}$ په لاس راځي.

ketabton.com - The Digital Library

5. د $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ په تابع کې که $a<0$ وي او له $f'(x)=0$ سره وضع شي او $\Delta f'(x)=0$ نو معادله یو یا دوه مساوي جذرونه لري په هغه صورت کې چې $f'(x)\le 0$ وي، نو په دې صورت تابع، متناقصه ده او که چېرې $f'(x)\ge 0$ وي، نو په دې صورت کې تابع متزایده ده.



(1)



(2)

**لومړی مثال**: د $f(x)=(x-1)(x+2)^2$ تابع تحولات وڅېړئ او ګراف یې رسم کړئ.

**حل**: لومړی د تابع Extreme ټکو مختصات په لاس راوړو، وروسته د لومړي مشتق په مرسته ګورو چې تابع په کومه برخه کې متزایده او په کومه برخه کې متناقصه ده. له محورونو سره د تقاطع ټکي پیدا کوو او د اعظمي او اصغري نقطو د تشخیص او د انعطاف نقطو د پیدا کولو لپاره د تابع دویم مشتق په کار وړو د تحولاتو جدول یې ترتیبوو او بیا یې ګراف رسموو: $f(x)=x^3+3x^2-4$

$$f'(x)=3x^2+6x$$
$$3x^2+6x=0$$
$$x(3x+6)=0$$
$$x_1=0 \quad , \quad 3x+6=0 \Rightarrow x_2=-2$$
$$f'(x)=0 \Rightarrow x_1=0 \quad , \quad x_2=-2$$
$$f(0)=0^3+3\cdot 0^2-4=-4$$
$$f(-2)=(-2)^3+3(-2)^2-4$$
$$=-8+12-4=0$$
$$f''(x)=0 \Rightarrow 6x+6=0$$
$$6x=-6$$
$$x=-1$$

د انعطاف د نقطې د لاسته راوړلو لپاره $x=-1$ په اصلي تابع کې وضع کوو چې د $f(x)$ قیمت لاسته راځي:

$$f(-1)=(-1-1)(-1+2)^2=-2$$

ketabton.com - The Digital Library

د انعطاف ټکی: $I(-1,-2)$

له محورونو سره تقاطع:

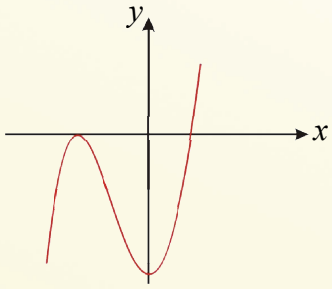
الف- د $x$ له محور سره تقاطع:

$$y=0$$
$$(x-1)(x+2)^2=0$$
$$\left.\begin{array}{l} x-1=0 \\ x=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} (x+2)^2=0 \\ x+2=0 \\ x_2=-2 \end{array}\right\} \Rightarrow (1,0)\ ,\ (-2,0)$$

ب- د $y$ له محور سره تقاطع:

$$x=0$$
$$y=0^3+3\cdot 0^2-4=-4 \Rightarrow (0,-4)$$

| $x$ | $-\infty$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | − | − | + | |
| $f''(x)$ | − | − | + | + | |
| $f(x)$ | $-\infty$ ↗ | 0 ↘ | $-2$ ↘ | $-4$ ↗ | $+\infty$ |
| | | max | | min | |




**دویم مثال**: د $f(x)=-x^3+3x^2$ د تابع تحولات وخېړئ او ګراف يې رسم کړئ.

**حل**: د تابع لومړی مشتق پیدا کوو او وروسته يې صفري نقطې ټاکو او د تابع اعظمي او اصغري نقطې په لاس راوړو.

-1

$$f(x)=-x^3+3x^2$$
$$f'(x)=-3x^2+6x$$
$$f'(x)=0 \Rightarrow -3x^2+6x=0 \Rightarrow x(-3x+6)=0$$
$$x_1=0\ ,\ -3x+6=0 \Rightarrow -3x=-6 \Rightarrow x_2=2$$

ketabton.com - The Digital Library

اعظمي او اصغري ټکي عبارت دي له:

$$\left.\begin{aligned} f(0) &= -0^3 + 3\cdot 0^2 = 0 \\ f(2) &= -2^3 + 3\cdot 2^2 = 4 \end{aligned}\right\} \Rightarrow (0,0)\ ,\ (2,4)$$

2- محورونو سره تقاطع:

الف- د $x$ له محور سره تقاطع:

$$\left.\begin{aligned} &y = 0 \\ &-x^3 + 3x^2 = 0 \\ &x^2(-x+3) = 0 \\ &x_1 = 0\ ,\quad -x+3=0 \\ &\qquad\qquad x_2 = 3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow (0,0)\quad ,\quad (3,0)$$

ب- د $y$ له محور سره تقاطع:

$$\left.\begin{aligned} x &= 0 \\ f(x) &= -0^3 + 3\cdot 0^2 = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow (0,0)$$

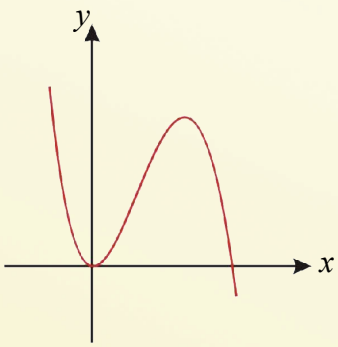
3- د انعطاف د نقطې د پیداکولو لپاره $f''(x)$ مطالعه کوو:

$$f''(x) = -6x + 6 = 0$$
$$x = 1$$
$$f(x) = -x^3 + 3x^2$$
$$f(1) = 2 \Rightarrow I(1,\ 2)$$

4- اوس یې جدول ترتیبوو او ګراف یې رسموو:

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | | $1$ | | $2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | | $-$ |
| $f''(x)$ | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | | $-$ |
| $f(x)$ | $+\infty$ ↘ | $0$ | ↗ | | ↗ | $4$ | ↘ $-\infty$ |
| $f(x)$ | ∪ | | ∪ | | ∩ | | ∩ |

نسبي Min  نسبي Max



ketabton.com - The Digital Library

**دریم مثال**: د $f(x)=x^3-3x^2+x+1$ د تابع د تناظر د مرکز مختصات پیدا کړئ.

**حل**: پوهیږو چې د تناظر مرکز د $x=\dfrac{-b}{3a}$ له رابطې څخه لاسته راځي، نو:

$$x=\frac{-b}{3a}=\frac{-(-3)}{3\cdot 1}=1 \quad \Rightarrow \quad f(1)=1^3-3(1)^2+1+1=0$$

$C(1,0)$ د تناظر د مرکز مختصات

## پوښتنې

1. د لاندې تابع ګانو د تحولاتو جدول ترتیب او ګرافونه یې رسم کړئ.

$$a)\ f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+x+1 \qquad , \qquad b)\ f(x)=-(x-1)^3$$

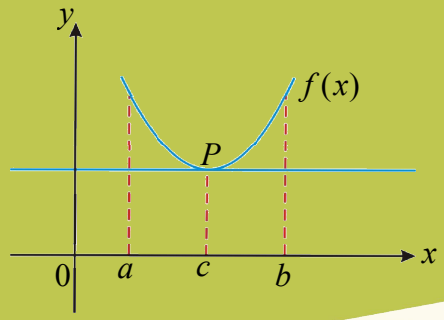
2- د $f(x)=-2x^2+6x-3$ د تناظر د مرکز مختصات پیدا کړئ.

ketabton.com - The Digital Library

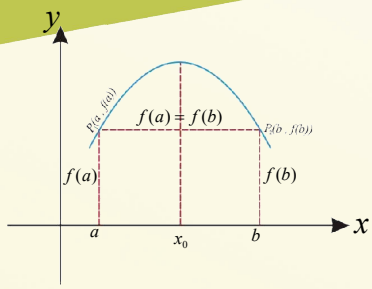
## د رول قضيه

### *Rolle Theorem*

په مخامخ شکل کې د $f(x)$ تابع او د $\Delta$ مستقيم خط يو له بل سره څه اړيکې لري او $f'(c)$ له څه سره مساوي دی.

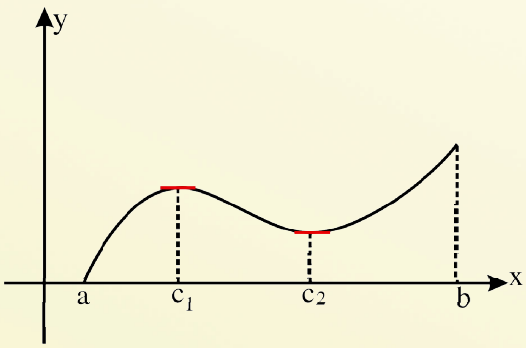



فعاليت




- په مخامخ شکل کې د $(a,b)$ په انټروال کې د $f(x)$ په منحني باندې داسې ټکئ يا ټکي شته چې له هغو څخه په منحني داسې مماس رسم شي چې د $x$ له محور سره موازي وي.
- د $f(x)$ تابع په کوم انټروال کې متمادي او په کومه فاصله کې د مشتق وړده.
- که چېرې $f(a)=f(b)$ وي، نو د $x_0$ ټکي په $(a,b)$ انټروال کې وخېړئ.

له پورتني فعاليت څخه لاندې قضيه بيانولای شو:




**قضيه**: که چېرې د $f(x)$ تابع د $a \le x \le b$ په انټروال کې متمادي او د $a < x < b$ په انټروال کې د مشتق وړ وي او $f(a)=f(b)$ وي، نو لږ تر لږه د $x_0$ يو ټکی په $a < x_0 < b$ انټروال کې شته چې د $f'(x_0)=0$ شي.

ketabton.com - The Digital Library

**ثبوت**: څرنګه چې د $f(x)$ تابع په ورکړل شوی انټروال کې متمادي او د مشتق وړ ده، نو بحراني Extreme ټکی لري.

1- که $f(x)=c$ ثابته تابع وي، نو واضح ده چې $f'(x)=0$ ده.

2- که د $f(x)$ تابع ثابته نه وي، او $x_1, x_2 \in (a,b)$ او $f(x_1)>0$ وي، نو تابع په $x_0 \in [a,b]$ کې یو Maximum قیمت لري چې $f(x_0) \geq f(x_1) > 0$ شي او همدا راز که $f(x_2)<0$ وي، نو تابع یو اصغري Minimum قیمت لري.

څرنګه چې په Extreme نقطو کې د تابع مشتق صفر دی، نو $f'(x_0)=0$ کېږي.

**لومړی مثال**: د رول قضیه د $f(x)=\cos x$ د تابع لپاره په $[a,b]=[\pi,5\pi]$ فاصله کې تطبیق کړئ.

**حل**: څرنګه چې $f(\pi)=f(5\pi)=-1$ سره دی، نو د $f(x)$ تابع د هره $x$ لپاره د مشتق وړ ده، نو د $(\pi,5\pi)$ په انټروال کې متمادي او په $(\pi,5\pi)$ په انټروال کې مشتق منونکی ده چې د Rolle د قضیې مطابق په $(\pi,5\pi)$ کې لږ تر لږه یو $x_0$ موجود دی چې د هغه قیمت لپاره $(\cos x)'=0$ شي. څرنګه چې $(\cos x)'=-\sin x$ دی، نو باید $-\sin x=0$ معادلې لږ تر لږه یو حل په $(\pi,5\pi)$ کې موجود وي.

$-\sin x=0 \Rightarrow \sin x=0$ دا معادله په $(\pi,5\pi)$ کې درې ځله $4\pi,3\pi,2\pi$ قیمتونه اخیستلای شي.

**دویم مثال**: د رول قضیه د $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ تابع په $[a,b]=[-1,1]$ فاصله کې تطبیق کړئ.

**حل**: لیدل کېږي چې تابع د پیل او پای په ټکو کې د مشتق وړ نه ده، ولې د رول د قضیې د تطبیق وړ ده ځکه $f(-1)=f(1)=0$ دی $f(0)$ تابع په $[-1,1]$ کې متمادي ده او په $[-1,1]$ کې د $x_0$ یو عدد شته چې $f'(x_0)=0$ شي او هغه $x_0=0$ دی.

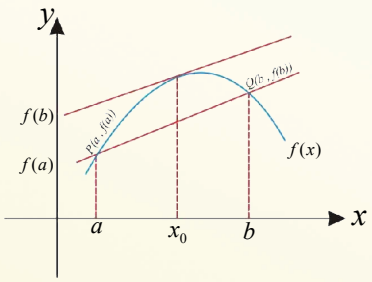
د $y'(x)=\dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u}}$ فورمول څخه په ګټه اخیستنې سره مشتق په لاس راوړو:

$$f'(x)=\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}=\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} \quad \Rightarrow \quad f'(0)=\frac{0}{\sqrt{1-0^2}}=0$$

ketabton.com - The Digital Library

## د متوسط قیمت قضیه(لاګرانژقضیه):

فعالیت




مخامخ شکل په پام کې و نیسئ:

- د یوې مستقیمې کرښې میل له کومې رابطې څخه په لاس راځي؟
- د $\overline{PQ}$ د مستقیمې کرښې میل پیدا کړئ.
- د $\overline{PQ}$ د کرښې میل د $f(x)$ د تابع له مشتق سره څه اړیکه لري؟

له پورتنۍ فعالیت څخه قضیه داسې بیانوو:

**قضیه**: که چېرې $f(x)$ د $[a,b]$ په فاصله کې متمادي او د $(a,b)$ په فاصله کې د مشتق وړ وي د $(a,b)$ له انټروال څخه د $c$ یو عدد شته دی داسې چې: $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$ یعنې: $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ دی.

**ثبوت**: یوه مرستندویه تابع په پام کې نیسو، لیدل کېږي چې:

$$g(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot x$$

$$g(a)=f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot a=\frac{f(a)b-f(b)a}{b-a} \quad \ldots\ldots \text{ I}$$

$$g(b)=f(b)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot b=\frac{f(a)b-f(b)a}{b-a} \quad \ldots\ldots \text{ II}$$

نو $g(a)=g(b)$ سره دی د رول د قضیې پر بنسټ سره د $c$ عدد د $(a,b)$ انټروال کې شته دی چې $g'(c)=0$ دی، نو:

$$g'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \Rightarrow g'(x)=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0 \Rightarrow f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$\Rightarrow f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$$

ketabton.com - The Digital Library

**مثال**: د $f(x)=2x^3-8x+1$ په تابع کې د متوسط قیمت قضیه په $[a,b]=[1,3]$ کې وخیړئ.

**حل**: لیدل کېږي چې د $f(x)$ تابع په $[1,3]$ کې متمادي او په $(1,3)$ کې د مشتق وړ ده، نو د متوسط قیمت له قضیې سره سم په $(1,3)$ کې یو $x_0$ شته داسې چې:

$$f'(x_0)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{f(3)-f(1)}{3-1}=\frac{36}{2}=18$$

د c د پیداکولو لپاره لرو: $f'(x_0)=6x^2-8=18\Rightarrow x_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{26}{6}}$

خرنګه چې $x=\sqrt{\frac{26}{6}}$ په $(1,3)$ کې ګډون لري، نو $x_0=\sqrt{\frac{13}{3}}$ دی.

او $x=-\sqrt{\frac{26}{6}}$ په $(1,3)$ فاصله کې واقع نه ده، نو د قبول وړ نه ده.

## پوښتنې

1- که چېرې د $f(x)=\sqrt{x(4-1)}$ تابع د $[0,4]$ په انټروال کې راکړل شوې وي د $x_0$ قیمت داسې پیدا کړئ چې د رول قضیه په پورتنۍ تابع کې صدق وکړي.

2- که د $f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x$ تابع راکړل شوې وي د $x_0$ قیمت د $[0,3]$ په فاصله کې داسې وټاکئ چې د رول قضیه په هغې کې صدق وکړي.

ketabton.com - The Digital Library

## 3- د هوپیتال قاعده (L' Hopitall)

مخامخ مساوات څه بیانوي؟

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$




- د $f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{x-1}$ د تابع لېمیټ په هغه صورت کې پیدا کړئ چې $x\to 1$ ته تقرب وکړي.
- د پورتني تابع د صورت او مخرج مشتق پیدا او د تابع له لېمیټ سره یې پرتله کړئ.
- د $f(x)=\dfrac{3x^4-3x^2-4x-1}{2x^2-4x^3+2x^4}$ د تابع لېمیټ په هغه صورت کې پیدا کړئ چې $x\to\infty$ تقرب وکړي.
- د پورتني تابع د صورت او مخرج مشتق پیدا او د تابع له لېمیټ سره یې پرتله کړئ.

له پورتني فعالیت څخه دا قاعده بیانوو:

### د هوپیتال قاعده:

که د $f(x)$ او $g(x)$ تابع ګانې د $(a,b)$ په انټروال کې تعریف او د مشتق وړ وي.

که چېرې $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ د لېمیټ نسبت $x\to a$ قیمت کې د $\dfrac{0}{0}$ مبهم شکل او په $x\to\infty$ کې د $\dfrac{\infty}{\infty}$ شکل ونیسي. په دې حالت کې د تابع د لېمیټ د پیدا کولو لپاره د $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ مشتق پیدا کوو او په هغه کې قیمتونه وضع کوو که بیاهم د تابع شکل مبهم وي، مشتق نیولو ته ادامه ورکوو تر څو د ابهام شکل ختم شي د مثال په ډول:

$$\lim_{x\to 2}\frac{2x^2+x-10}{x^2-4}=\frac{2\cdot 2^2+2-10}{2^2-4}=\frac{0}{0}$$

$$\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{4x+1}{2x}=\frac{4\cdot 2+1}{2\cdot 2}=\frac{9}{4}$$

یا

$$\lim_{x\to 2}\frac{(2x+5)(x-2)}{(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{2x+5}{x+2}=\frac{2\cdot 2+5}{2+2}=\frac{9}{4}$$

ketabton.com - The Digital Library

**مثال**: د لوپیټال له قاعدې څخه په ګټه اخیستنې سره د لاندې توابعو لېمیټونه پیدا کړئ.

1) $\lim_{x\to 0}\frac{x+\sin 2x}{x-\sin 2x}$ 2) $\lim_{x\to 3}\frac{x^4-81}{x-3}$ 3) $\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-4x+6}{7x^2-2x+1}$

**لومړی ځواب**:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x+\sin 2x}{x-\sin 2x}=\frac{0+\sin 2\cdot 0}{0-\sin 2\cdot 0}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x+\sin 2x)'}{(x-\sin 2x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{1+2\cos 2x}{1-2\cos 2x}=\frac{1+2}{1-2}=-3$$

**دویم ځواب**:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^4-81}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{3^4-81}{3-3}=\frac{81-81}{3-3}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{(x^4-81)'}{(x-3)'}=\lim_{x\to 3}\frac{4x^3}{1}=\frac{4\cdot 3^3}{1}=108$$

**دریم ځواب**:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-4x+6}{7x^2-2x+1}=\frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(3x^2-4x+6)'}{(7x^2-2x+1)'}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{6x-4}{14x-2}=\frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(6x-4)'}{(14x-2)'}=\frac{6}{14}=\frac{3}{7}$$

**پوښتنې**

د لوپیټال له قاعدې څخه په ګټه اخیستنې سره لاندې لېمیټونه پیدا کړئ.

*a*) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ ,

*b*) $\lim_{x\to 1}\frac{x^5-1}{x^3-1}$

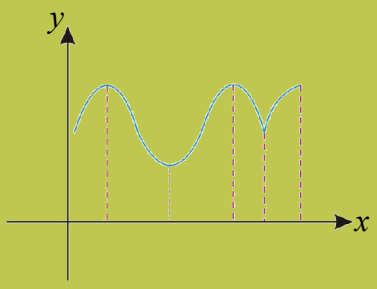
*c*) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x^3}$ ,

*d*) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^5}{3x^3}$

ketabton.com - The Digital Library

## د بحراني ټکو تطبيق

په مخامخ شکل کې تر ټولو لوړ ټکی او تر ټولو ټیټ ټکی وښیئ او دا ټکی د څه په نامه یادېږي.




مثالونه:

1مثال- دوه عددونه پیدا کړئ چې مجموعه یې 20 او د ضرب حاصل یې لوی ممکن قیمت ولري.

**حل**: که لومړی عدد ته $x$ وویل شي، نو دویم عدد $20-x$ دی او د ضرب حاصل یې د تابع په شکل داسې: $f(x)=x(20-x)$ لیکو، څرنګه چې د $x$ عدد په $[0,20]$ انتروال کې تحول کوي، نو د تابع مطلق اعظمي قیمت په $[0,20]$ کې لټوو:

$$f(x)=20x-x^2$$
$$f'(x)=0$$
$$20-2x=0$$
$$-2x=-20$$
$$x=10$$
$$f(10)=20\cdot 10-10^2=200-100=100$$
$$f(0)=20\cdot 0-0^2=0$$
$$f(20)=20\cdot 20-20^2=400-400=0$$

لیدل کېږي چې $(10\ ،\ 100)$ د تابع اعظمي نقطه ده، نو مطلوب عددونه $x_1=10$ او $x_2=10$ چې د ضرب حاصل یې 100 دی.

2 مثال- د یوه خوځنده جسم د حرکت معادله د $x=(t-2)(t-3)$ په بڼه راکړل شوې ده، د جسم متوسط سرعت د $t_1=3$ او $t_2=4$ د وخت په واټنو کې پیدا کړئ.

**حل**: د منځني سرعت د تعریف په مرسته لیکلای شو چې:

$$\text{منځنی سرعت}=\frac{x_{(t_2)}-x_{(t_1)}}{t_2-t_1}=\frac{x_{(4)}-x_{(3)}}{4-3}=\frac{2-0}{4-3}=2$$

ketabton.com - The Digital Library

3مثال- دکرې د حجم او سطحې د مشتقونو تر منځ منځنی نسبت پیدا کړئ.

**حل**:

$$\text{دکرې حجم} = v_{(x)} = \frac{4}{3}\pi x^3 \Rightarrow \frac{dv}{dx} = \frac{4}{3}\pi \cdot 3x^2 = 4\pi x^2$$

$$\text{دکرې مساحت} = S_{(x)} = 4\pi x^2 \Rightarrow \frac{ds}{dx} = 4\pi \cdot 2x = 8\pi x$$

$$\frac{dv}{ds} = \frac{4\pi x^2}{8\pi x} \Rightarrow \frac{dv}{ds} = \frac{1}{2}x$$

4مثال- د سانتي ګراد(C) او فارنهایت (F) د حرارت تر منځ $C = \frac{5}{9}(F-32)$ اړیکه شته، تاسې د (C) او (F) تر منځ منځنی نسبت وټاکئ.

**حل**: د منځنی سرعت د تعریف $(V_m = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x})$ په مرسته لیکلای شو:

$$\frac{\Delta C}{\Delta F} = \frac{C(F+\Delta F)-C(F)}{\Delta F} = \frac{\frac{5}{9}(F+\Delta F-32)-\frac{5}{9}(F-32)}{\Delta F} = \frac{5}{9}$$

5مثال- یوه څمکه چې مستطیلي شکل لري، محیط یې $200m$ دی، کېدای شي اعظمي Maximum مساحت یې پیدا کړئ.

**حل**: په ورکړل شوي محیط سره کولای شو، ډېر مستطیلونه رسم کړو، ولې شرط دا دی چې هغه مستطیل زمونږ مطلوب دی چې مساحت یې تر ټولو زیات وي، نو که د مستطیل اوږدوالی په $x$ او سور یې په $y$ وښیو، نو لیکلای شو:

$$\text{محیط} = 2x + 2y = 200$$

$$\text{محیط} = x + y = 100 \Rightarrow y = 100 - x$$

$$\text{مساحت} = x \cdot y$$

$$S = x(100-x) = 100x - x^2 \quad , \quad D_s = IR$$

$$x > 0 \quad , \quad y > 0 \Rightarrow 100 - x > 0 \Rightarrow x < 100$$

اوس د $S = 100x - x^2$ په تابع کې $0 < x < 100$ انټروال کې د تابع اعظمي مساحت داسې پیدا کوو:

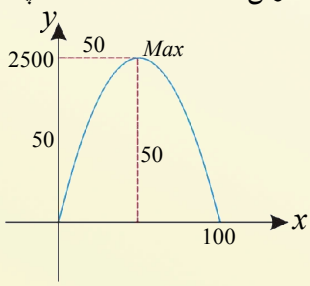
$$S' = 100 - 2x$$

$$S' = 0 \Rightarrow 100 - 2x = 0 \Rightarrow x = 50 \Rightarrow S_{(50)} = 2500$$

$$\lim_{x \to 0^+} S(x) = 0$$

$$\lim_{x \to 0^-} S(x) = 0$$

| $x$ | 0 | | 50 | | 100 |
|---|---|---|---|---|---|
| $S'$ | | + | 0 | − | |
| $S$ | 0 | ↗ | 2500 | ↘ | 0 |



ketabton.com - The Digital Library

په پایله کې له شکل څخه هم لیدل کېږي چې تر ټولو لوی مساحت هغه وخت لاسته راځي چې د مستطیل طول 50 واحده وي، نو مساحت 2500 واحد مربع کېږي.

6مثال- که د دوو عددونو مجموعه 200 وي، هغه عددونه داسې وټاکئ چې د مربعاتو مجموعه يې اصغري شي.

**حل**: که چېرې دا عددونه x او y وي، نو $x+y=200$ او که $x$ ، $x^2+y^2=T_{(x)}$ فرض کړو، نو:

$$T_{(x)}=x^2+y^2$$
$$=x^2+(200-x)^2$$
$$=x^2+x^2-400x+(200)^2$$
$$=2x^2-400x+40000$$
$$T'_{(x)}=4x-400$$
$$T'_{(x)}=0$$
$$4x-400=0$$
$$x=100$$

په پایله کې ویلای شو چې د مربعاتو تر ټولو کوچنۍ مجموعه عبارت ده له: $T_{(100)}=20000$

7مثال- د A ټکی د $y=\frac{2}{x}$ د منحني له پاسه حرکت کوي، تر ټولو کوچنی انتروال د A د نقطې او د مختصاتو د مبدې ترمنځ لاسته راوړو.

**حل**: د $y=\frac{2}{x}$ د تابع منحني پر مخ د A د نقطې مختصات $A(x,\frac{2}{x})$ دي، نو:

$$\overline{OA}=\sqrt{x^2_{(A)}+y^2_{(A)}}=\sqrt{x^2+\frac{4}{x^2}}$$

$$\overline{OA}^2=x^2+\frac{4}{x^2}=d^2 \Rightarrow d'_{(x)}=(x^2)'+(\frac{4}{x^2})'=2x-\frac{8x}{x^4}=2x-\frac{8}{x^3}$$

$$d'_{(x)}=\frac{2x^4-8}{x^3}$$
$$d'_{(x)}=0$$
$$2x^4=8$$
$$x_1=\sqrt{2} \quad , \quad x_2=-\sqrt{2}$$
$$d_{\sqrt{2}}=(\sqrt{2})^2+\frac{4}{(\sqrt{2})^2}=2+\frac{4}{2}=\frac{8}{2}=4$$
$$d_{-\sqrt{2}}=4$$

په پایله کې تر ټولو کوچنی فاصله له مبدا څخه 2 واحده ده.

ketabton.com - The Digital Library

8مثال- يو مکعب مستطيل چې قاعده يې مربع ده، په پام کې نيسو، که د دريو واړو بعدونو مجموعه 24 وي، د مکعب تر ټولو لوی حجم پيدا کړئ.

**حل**: که د مکعب مستطيل د قاعدې ضلعې ته x او جګوالي ته يې $y$ وويل شي، نو:

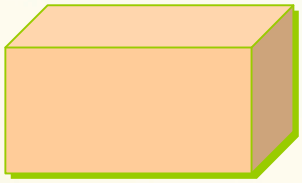
$$x+x+y=24 \Rightarrow y=24-2x$$

خرنګه چې $y \geq 0$ دی، نو $0 \leq x \leq 12$ کېږي او د مکعب مستطيل حجم عبارت دي له:

$$V=x^2 \cdot y \Rightarrow V=x^2(24-2x)=24x^2-2x^3$$

$$V=24x^2-2x^3$$
$$V'(x)=48x-6x^2$$
$$V'(x)=0$$
$$48x-6x^2=0$$
$$x(48-6x)=0$$
$$x_1=0$$
$$48-6x=0$$
$$-6x=-48$$
$$x=8$$

$$V(0)=24\cdot 0^2-2\cdot 0^3$$
$$=0-0=0$$
$$V'(0)=0$$
$$V(8)=24\cdot(8)^2-2\cdot(8)^3$$
$$=1536-1024=512$$
$$V(8)=512$$
$$V(12)=24\cdot(12)^2-2\cdot(12)^3=3456-3456=0$$
$$V(12)=0$$



نو د مکعب مستطيل تر ټولو لوی حجم $512cm^3$ دی.

## پوښتنې

1- د $y=x^3+x^2+x+1$ د تابع تحولات پيدا او منحني يې رسم کړئ.

2- که د اوسپنې له يوې تختې څخه چې هره ضلع يې $1m$ طول لري يو سر خلاص بکس جوړېږي. د هغه له څلورو کنجونو څخه څلور مساوي مربع ګانې پرې کړئ او بيا هغه قات کړئ کوچنی مربع ګانې په کومه اندازه پرې شي چې نوموړی بکس ممکن اعظمي حجم ولري.

3- د $y=x^2$ ګراف ته ډېره نژدی نقطه له $A(3,0)$ نقطې سره پيدا کړئ.

ketabton.com - The Digital Library

## د څېرکي مهم ټکي

- د $f(x)$ یوه تابع هغه وخت متزایده بلل کېږي چې د $[a,b]$ په انټروال کې متمادی او په $(a,b)$ خلاص انټروال کې د مشتق وړ او $f'(x) > 0$ .
- د $f(x)$ یوه تابع هغه وخت متناقصه بلل کېږي چې د $[a,b]$ په انټروال کې متمادي او په $(a,b)$ خلاص انټروال کې د مشتق وړ او $f'(x) < 0$ .
- د تابع له تزاید څخه مطلب دا دی چې د $x$ د متحول په زیاتېدو سره د تابع قیمت زیات او د تابع له تناقص څخه مطلب دا دی چې د $x$ متحول په زیاتېدو سره د تابع قیمت کم شي.
- په یوه تابع کې تر ټولو لوړې نقطې ته مطلق اعظمي(Absolute Maximum) او تر ټولو ټیټې نقطې ته مطلق اصغري(Absolute Minimum) وایي، د $x$ هغه قیمتونه چې د هغوی لپاره تابع یا اعظمي او یا اصغري قیمتونه اخلي د Extreme په نامه یادېږي.
- مطلق Maximum: د $(x_0, f(x_0))$ نقطه مطلقه اعظمي بلل کېږي، کـه چېرې د $f(x)$ د تعریف په ساحه کې د هر $x$ لپاره $f(x) \le f(x_0)$ وي، نو $f(x_0)$ ته مطلقه اعظمي وایي.
- مطلق Minimum:د $(x_0, f(x_0))$ نقطه مطلقه اصغري بلل کېږي، کـه چېرې $f(x)$ د تعریف په ساحه کې د هر $x$ لپاره $f(x) \ge f(x_0)$ وي، نو $f(x_0)$ ته مطلقه اصغري وایي.
- د $y = f(x)$ د تابع منحني په یوه انټروال کې محدب بلل کېږي، کـه چېرې په دې انټروال کې په منحني مماس رسم شي، نو مماس د منحني پورته خواته پروت وي او د تابع دویم مشتق منفي په لاس راځي.
- د $y = f(x)$ د تابع منحني په یوه انټروال کې مقعر بلل کېږي، که چېرې په نوموړي انټروال کې په منحني مماس رسم شي، نو مماس د منحني ښکته خوا پروت وي، او د تابع دویم مشتق مثبت په لاس راځي.
- هغه ټکی چې د تابع له مقعریت څخه محدبیت ته او یا برعکس خپل لوری بدلوي، د انعطاف(Inflection) ټکی بلل کېږي.
- هغه تابع ګانې چې د $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ بڼه ولري، د هوموګرافیک تابع ګانو په نامه یادېږي، په دې شرط چې $c \neq 0$ وي.

ketabton.com - The Digital Library

- که چېرې د $f(x)$ تابع د $a \le x \le b$ په انټروال کې متمادي او د $a < x < b$ په انټروال کې د مشتق وړ او $f(a) = f(b)$ وي، نو لږ تر لږه د $x_0$ یو ټکی په $a < x0 < b$ په انټروال کې شته چې $f'(x_0) = 0$ دی، دا قضیه د رول د قضیې په نامه یادېږي.
- که چېرې $f(x)$ په $[a,b]$ فاصله کې متمادي او د $(a,b)$ په خلاصه فاصله کې د مشتق وړ وي د $x_0$ یو عدد د $a$ او $b$ ترمنځ شته چې $f'(x_0) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ دی دا د متوسط قیمت قضیه بلل کېږي.

**د هوپیتال قاعده:**

که د $f(x)$ او $g(x)$ تابع ګانې د $(a,b)$ په انټروال کې تعریف او د مشتق وړ وي.

که چېرې $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ د لېمیټ نسبت کله چې $x \to a$ د $\dfrac{0}{0}$ مبهم شکل او په هغه صورت کې چې $x \to \infty$ کې د $\dfrac{\infty}{\infty}$ شکل ونیسي په دې حالت کې د تابع د لېمیټ د پیدا کولو لپاره د $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ لېمیت پیدا کوو او په هغه کې قیمتونه وضع کوو که بیاهم د تابع شکل مبهم وي، مشتق نیولو ته دوام ورکوو ... تر څو د ابهام شکل ختم شي.

ketabton.com - The Digital Library

## د دريم څپرکي پوښتنې

لاندې پوښتنو ته څلور ځوابونه ورکړل شوي دي، سم ځواب په نښه کړئ:

1 – که يوه تابع په $[a,b]$ انټروال کې متمادی او د مشتق وړ وي، نو هغه وخت متزايد ده چې :

$a)\ f'(x)=0$ $b)\ f'(x)<0$ $c)\ f'(x)>0$ $d)\ f'(x)\geq 0$

2- په يوه تابع کې تر ټولو لوړې نقطې ته:

$a)$ وايي Absolute Minimum $b)$ وايي Infliction $c)$ وايي Absolute Maximum $d)$ هيڅ يو

3- د $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+2x}$ په تابع کې د Extreme ټکی عبارت دی له:

$a)$ دوه ټکي $b)$ يو ټکی $c)$ درې ټکي $d)$ نه لري

4 – هغه ټکی چې تابع له مقعريت څخه محدبيت ته بدلوي:

$a)$ د اعظمی ټکی دی $b)$ دانعطاف ټکی دی $c)$ اصغري ټکی دی $d)$ هيڅ يو

5- د $f(x)=ax^2+bx+c$ د تابع د تعريف ساحه عبارت له :

$a)\ (-\infty\ ,\ +\infty)$ $b)\ (-\infty\ ,\ 0)$ $c)\ (\ 0,-\infty)$ $d)$ هيڅ يو

6- د $f(x)=\dfrac{2x-1}{x+2}$ تابع عمودي مجانب عبارت دی له:

$a)\ x=1$ $b)\ x=2$ $c)\ x=-1$ $d)\ x=-2$

7- د هوموګرافيک تابع عمودي مجانب عبارت دی له:

$a)\ y=\dfrac{a}{c}$ $b)\ x=-\dfrac{d}{c}$ $c)\ y=\dfrac{c}{a}$ $d)\ y=-\dfrac{c}{d}$

8- د $g(x)=\dfrac{4x^2-6x}{x^2-4}$ تابع افقي مجانب عبارت دی له:

$a)\ 4$ $b)\ 6$ $c)\ -6$ $d)\ -4$

9- لاندې کومه الجبري اړيکه حقيقت لري:

$a)\ \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ $b)\ \lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f'(x)$ $c)\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ $d)$ هيڅ يو

ketabton.com - The Digital Library

لاندې پوښتنې ځواب کړئ:

1. د $f(x)=x^2-x$ د تابع د منحني میل د $P(3,0)$ په ټکي کې پیدا کړئ.
2. د $f(x)=-x^2$ په تابع کې د $[3,4]$ په انټروال کې د منحني د بدلون ټکي پیدا کړئ.
3. د نیوټن د خارج قسمت په مرسته د لاندنیو تابع ګانو مشتق پیدا کړئ.

1) $f(x)=2x$ 2) $f(x)=3x^2-1$ 3) $f(x)=\sqrt{2}x$

4. د لاندنیو تابع ګانو په ورکړل شوو نقطو کې مشتق پیدا کړئ.

1) $f(x)=2x-1$ , $x_0=-1$ 2) $f(x)=x^2$ , $x_0=2$

5. د لاندې تابع ګانو مشتق پیدا کړئ.

1) $f(x)=2x-4x^2$ 2) $f(x)=3x^3-1$

6. په ورکړل شوو ټکو کې د تابع ګانو مشتق محاسبه کړئ.

1) $f(x)=7x^2-3x$ , $x_0=-1$

2) $f(x)=6x^2-2x-1$ , $x_0=\frac{1}{2}$

7. د $f(x)=3x^5-4x^2-3x$ د تابع څلور ځلې مشتق ونیسئ او د هغې ګراف رسم کړئ.
8. د لاندې تابع ګانو مشتق پیدا کړئ.

1) $f(x)=x^3\sec x$ 2) $f(x)=\sin(3x-1)$ 3) $f(x)=\cos^2 2x$

9. کوم مثبت عدد دی چې د خپل معکوس سره جمع شي د جمعې حاصل یې تر ټولو کوچنی شي؟
10. د $f(x)=\frac{x^2+1}{x}$ تابع ګراف رسم کړئ.
11. د $f(x)=\frac{4x^2}{x^2+1}$ تابع ګراف رسم کړئ.
12. د $f(x)=\sin x$ مثلثاتي تابع ګراف رسم کړئ.
13. د $f(x)=\tan x$ مثلثاتي تابع ګراف رسم کړئ.

ketabton.com - The Digital Library

# څلورم څپرکی

# انتیګرال

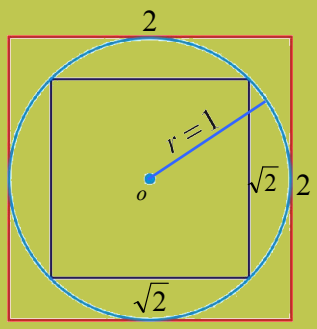


ketabton.com - The Digital Library

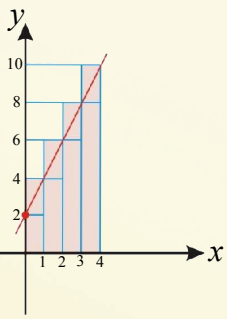
ketabton.com - The Digital Library

## د ریمان مجموعه

## *Riemann's Sum*




په مخامخ شکل کې که د دایرې شعاع یو واحد ده، د دایرې د محیطي او محاطي څلور ضلعي ګانو مساحت حساب کړئ او وواياست چې ددې دایرې مساحت له مخامخ څلور ضلعي ګانو له مساحت سره څه اړیکه لري؟







- هغه مساحت چې د $x$ د محور او $f(x)=2x+2$ د تابع د ګراف په منځ کې د $[0,4]$ په انټروال کې محصور شوی دی، خط خط کړئ.
- د $y=2x+2$ تابع په ګراف کې د څلورو لاندېنیو او پورتنیو مستطیلونو مساحتونه چې په شکل کې ښودل شوی دی، پیدا کړئ.

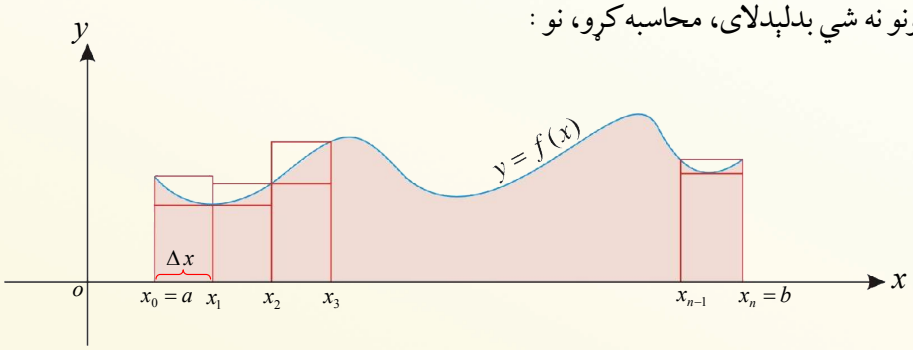
- د پورتنیو مستطیلونو د مساحت مجموعه او د لاندېنیو مستطیلونو د مساحت مجموعه د تابع د ګراف د لاندېني مساحت سره په ورکړ شوي واټن کې څه اړیکه لري؟
- د پورته په څېر فعالیت د اتو مساوي لاندېنیو مستطیلونو او د اتو مساوي پورتنیو مستطیلونو لپاره تکرار کړئ او پایله یې د ګراف د لاندې مساحت سره په نوموړي واټن کې پرتله کړئ.
- که چېرې د پورتنیو مستطیلونو د مساحتونو مجموعه او لاندېنیو مستطیلونو[1] د جوړولو لپاره د تابع په ګراف کې د فاصلې وېش زیات کړو د پورتنیو او لاندېنیو مستطیلونو د مساحتونو مجموعه کوم قیمت ته نژدې کېږي.

[1] - که چېرې د $x$ په محور د فاصلو تقسیمات زیات کړو او یا که چېرې په یوه فاصله کې د مستطیلونو شمېر زیات شي، په هم هغه اندازه د ګراف لاندې مساحت د قیق په لاس راځي.

ketabton.com - The Digital Library

له پورتني فعاليت څخه لاندې تعريف لاسته راځي:

**تعريف**: فرضوو چې د $y=f(x)$ تابع د $[a,b]$ په تړلی انتروال کې متمادي او تعريف شوي وي که چېرې د ناحيې مساحت چې د $x$ د محور او $y=f(x)$ د تابع د ګراف ترمنځ واقع دی چې په هندسي شکلونو نه شي بدلېدلای، محاسبه کړو، نو :




د $[a,b]$ تړلي انتروال په $n$ مستطيلو نو وېشو، څرنګه چې د هر مستطيل عرض د $(\Delta x=\frac{b-a}{n})$ رابطې څخه په لاس راځي او د مستطيلونو طول عبارت دی تابع قيمت په هماغه نقطه کې دی.

او د مستطيلونو د هر انټروال اوږدوالی د $i=1,2,3,\ \dots\ ,n$ لپاره په لاندې ډول دی:

$$x_0=a, x_1=a+\Delta x, x_2=a+2\Delta x\dots, x_i=a+i\Delta x,\ \dots\ , x_n=b$$

$$[x_0,x_1]\ ,\ [x_1,x_2]\ ,\ [x_2,x_3],\ \dots\ ,[x_{i-1},x_i],\ \dots\ ,[x_{n-1},x_n]$$

کـه پـه شـکل کـې د لانـدېنيو مـستطيلونو مـساحت پـه $f(x_{i-1})\Delta x$ او د پورتنيـو مـستطيلونو مـساحت په $f(x_i)\Delta x$ وښودل شي، نو لرو چې:

$$\text{د لاندينيو مستطيلونو د مساحتونو مجموعه} = f(x_0)\Delta x+f(x_1)\Delta x+\ \dots\ +f(x_{n-1})\Delta x=\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x$$

$$\text{د پورتنيو مستطيلونو د مساحتونو مجموعه} = f(x_1)\Delta x+f(x_2)\Delta x+\ \dots\ +f(x_n)\Delta x=\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

که چېرې محصور شوی مساحت په $A$ وښيو، نو : $\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x < A < \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$

که چېرې د رابطې له اطراف څخه لېميټ ونيسو، نو لرو چې:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\,\Delta x \le \lim_{n\to\infty} A \le \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$$

ketabton.com - The Digital Library

د ساندویچ د قضیې پر بنسټ لیکلای شو چې: $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x = A = \lim_{n\to\infty} 2\sum_{121}^{n} f(xi-1)\Delta x$

نو $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$ ته د ریمان مجموع او ددې مجموعې لېمیټ یعنې $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$ ته د ریمان د مجموعې لېمیټ وایي.

**لومړی مثال**: د $[0,2]$ انټروال په څلور مساوي برخو ووېشئ، د $y=x^2+1$ منحني او $x$ محور تر منځ مساحت پیدا کړئ.

**حل**: که چېرې $[0,2]$ انټروال په څلورو مساوي برخو ووېشو، نو د مستطیلونو عرض داسې په لاس راځي: $\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{2-0}{4} = \frac{1}{2}$

ددې مستطیلونو دهر انټروال اوږدوالی عبارت دي له:

$$x_0 = a = 0 \quad , \quad x_1 = a + \Delta x = \frac{1}{2}$$

$$x_2 = a + 2\Delta x = 1 \quad , \quad x_3 = a + 3\Delta x = \frac{3}{2}$$

$$x_4 = 2$$

$$[x_0, x_1] \ , \ [x_1, x_2] \ , \ [x_2, x_3] \ , [x_3, x_4]$$

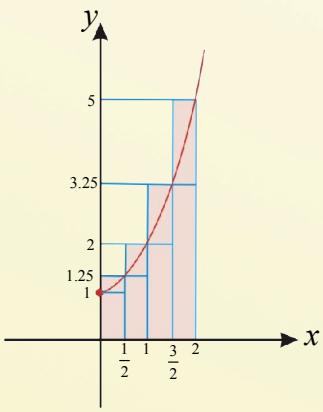
$$[0, \frac{1}{2}] \quad , \ [\frac{1}{2}, 1] \quad , \ [1, \frac{3}{2}] \quad , \ [\frac{3}{2}, 2]$$

په لاس راغلي قیمتونه د x په ځای په تابع کې وضع کوو.

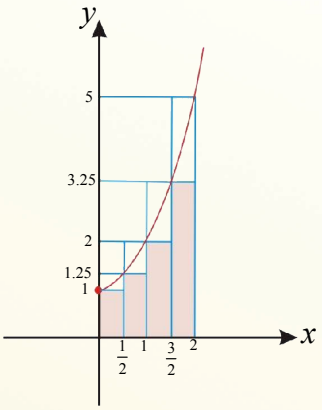
$$f(x) = x^2 + 1 \ , f(0) = 1$$

$$f(\frac{1}{2}) = 1.25 \ , \ f(1) = 2$$

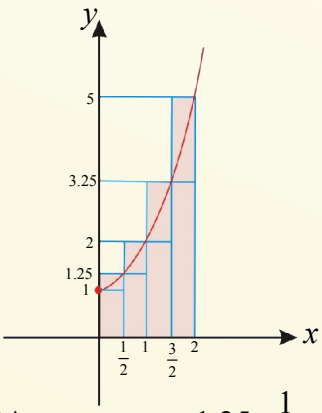
$$f(\frac{3}{2}) = 3.25 \ , \ f(2) = 5$$



ketabton.com - The Digital Library




د لاندېنيو مستطيلونو د مساحتونو مجموعه $= 1\times\frac{1}{2}+1.25\times\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{2}+3.25\times\frac{1}{2}=3.75$




د پورتنيو مستطيلونو د مساحتونو مجموعه $=1.25\times\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{2}+3.25\times\frac{1}{2}+5\times\frac{1}{2}=5.75$

$$3.75 \quad < \quad A < \quad 5.75$$

**دويم مثال**: د $f(x)=1+x$ تابع د ريمان د مجموعې لېميټ په $[1, 10]$ انټروال کې پيدا کړئ.

**حل**:

ketabton.com - The Digital Library

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{10-1}{n} = \frac{9}{n}$$

$$x_i = a + \Delta x i \ = 1 + [\frac{9}{n}]\, i \quad , \quad i = 0,1,2, \ \ldots$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \lim_{n\to\infty}[\sum_{i=1}^{n}(1+x_i)\Delta x]$$

$$= \lim_{n\to\infty}[\Delta x \sum_{i=1}^{n}(1+x_i)]$$

$$= \lim_{n\to\infty}[\Delta x \sum_{i=1}^{n} 1 + \Delta x \sum_{i=1}^{n} x_i]$$

$$= \lim_{n\to\infty}[\frac{9}{n}\sum_{i=1}^{n} 1 + \Delta x \sum_{i=1}^{n}(a+\Delta x i)]$$

$$= \lim_{n\to\infty}[\frac{9}{n}\sum_{i=1}^{n} 1 + \frac{9}{n}\sum_{i=1}^{n}(1+\frac{9}{n}i)]$$

$$= \lim_{n\to\infty}[\frac{9}{n}\sum_{i=1}^{n} 1 + \frac{9}{n}(\sum_{i=1}^{n} 1 + \frac{9}{n}\sum_{i=1}^{n} i)]$$

$$= \lim_{n\to\infty}[\frac{9}{n}\cdot n + \frac{9}{n}(n + \frac{9}{n}\cdot\frac{n(n+1)}{2})]$$

$$= \lim_{n\to\infty}[9 + \frac{9}{n}(n + \frac{9n^2+9n}{2n})]$$

$$= \lim_{n\to\infty}[9 + \frac{9}{n}(\frac{2n^2+9n^2+9n}{2n})]$$

$$= \lim_{n\to\infty}[9 + \frac{9}{n}(\frac{11n^2+9n}{2n})]$$

$$= \lim_{n\to\infty}[9 + \frac{99n^2+81n}{2n^2}]$$

$$= \lim_{n\to\infty}[9 + \frac{99n^2}{2n^2} + \frac{81n}{2n^2}]$$

$$= \lim_{n\to\infty}[9 + \frac{99}{2} + \frac{81}{2n}]$$

$$= 9 + \frac{99}{2} = 58.5$$

**باید په یاد ولرو:**

$$\sum_{i=1}^{n} c = cn$$

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

ketabton.com - The Digital Library

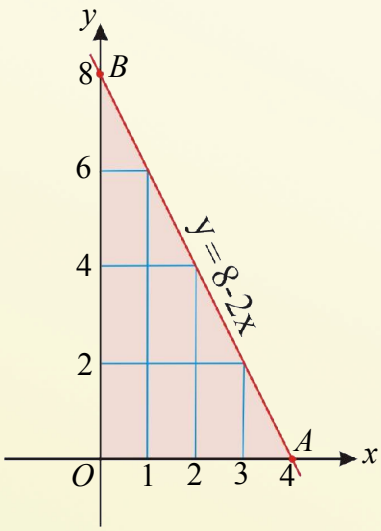
## پوښتنې

1. د $[0,3]$ انټروال په بشپړو مساوي برخو له وېشلو څخه وروسته د $y = 3x$ مستقیم خط او د $x$ د محور تر منځ مساحت محاسبه کړئ.

2. د $\Delta x = 0.5$ قیمت لپاره او د لاندې جدول د قیمتونو په پام کې نیولو سره ګراف رسم، د لاندېنیو مستطیلونو د مساحتونو مجموعه اود پورتنیو مستطیلونو د مساحتونو مجموعه پیدا کړئ.

| x | 0 | 0.5 | 1 | 1.5 | 2 | 2.5 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y | 14 | 20 | 26 | 32 | 38 | 44 | 50 |

3. د $y = 8 - 2x$ تابع ګراف د لاندې $OAB$ مثلث مساحت د $[0,4]$ په انټروال کې د ریمان د مجموعې د لیمیټ څخه په ګټه اخیستنې سره پیدا کړئ.



ketabton.com - The Digital Library

## د انتیګرال مفهوم

## *Concept of Integral*



څرنګه چې پوهېږئ د شکلونو لاندېني او پورتني مساحتونه د انتیګرال په واسطه محاسبه کېږي.
آیا کولای شو چې د مخامخ شکل پورتنی مساحت په لاس راوړو.

د هغې تابع انتیګرال چې مشتق یې معین وي او یا په بل عبارت د ریمان مجموعي لېمیټ ته انتیګرال وایي دا( $\int$ ) د انتیګرال علامه ده، د $sum$ دکلیمي یا د ریمان د مجموعې د $S$ توري غزیدلی حالت دی، لکه: $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \int f(x)dx$ چې دلته $f(x)$ تابع او $dx$ د $f(x)$ تابع د انتیګرال متحول نظر $x$ ته دی.

انتیګرالونه عموماً په دوه ډوله دي. معین او غیر معین انتیګرالونه، هغه انتیګرالونه چې په ترتیب سره یې تر څېړنې لاندې نیسو:

### I- غیرمعین انتیګرال *Indefinite Integral*




- که د $F(x) = 2x^2 - 1$ تابع وي له دې تابع څخه مشتق ونیسئ.
- ددې تابع له مشتق څخه انتیګرال ونیسئ.
- په لاس راغلی انتیګرال له لومړنۍ تابع سره پرتله کړئ او ووایئ چې( $-1$ ) په نوموړي تابع کې د څه په نامه یادېږي.
- که په پورتني تابع کې ( $-1$ ) په $C$ ونوموو د $f(x)$ تابع له څه سره مساوي ده؟
- پورتنی فعالیت د $F(x) = x^6 + 1$ تابع لپاره تکرار کړئ او ووایئ چې $f(x)$ له څه سره مساوي ده.

له پورتني فعالیت څخه لاندې تعریف په لاس راځي:

**تعریف**: که چېرې د $f(x)$ تابع د $[a,b]$ په تړلي انټروال کې تعریف او $F(x)$ د $f(x)$ یوه لومړنۍ تابع وي. د $F(x)+C$ تابع ګانو سټ په داسې حال کې چې $C$ یو ثابت عدد وي د $f(x)$ تابع غیرمعین انتیګرال په نامه یادېږي او داسې لیکل کېږي: $\int f(x)dx = F(x)+C$

ketabton.com - The Digital Library

**لومړی مثال:** $\int x\,dx$ پیدا کړئ.

**حل:** $\int x\ dx = \frac{x^{1+1}}{1+1} + C = \frac{x^2}{2} + C$

**دویم مثال:** $\int \frac{1}{\sqrt[7]{x^3}}\ dx$ حساب کړئ.

**حل:** $\int \frac{1}{\sqrt[7]{x^3}}\ dx = \int x^{-\frac{3}{7}}\ dx = \frac{x^{-\frac{3}{7}+1}}{-\frac{3}{7}+1} + C = \frac{x^{\frac{4}{7}}}{\frac{4}{7}} + C = \frac{7}{4}\sqrt[7]{x^4} + C$

**دریم مثال:** $\int x^{\frac{3}{2}}\ dx$ پیدا کړئ.

**حل:** $\int x^{\frac{3}{2}}\ dx = \frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} + C = \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + C = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + C = \frac{2}{5}\sqrt{x^5} + C$

## پوښتنې

لاندې انتیګرالونه محاسبه کړئ:

a) $\int \sqrt[5]{x^3}\ dx$

b) $\int \frac{1}{x^4}\ dx$

c) $\int \frac{1}{\sqrt{x}}\ dx$

d) $\int \frac{x^2\ dx}{\sqrt[4]{x^2}}$

e) $\int \sqrt[8]{x^4} \cdot x\ dx$

ketabton.com - The Digital Library

## د غیرمعین انتیګرال خواص

### *Properties of indefinite integral*

تاسې د لېمیټ او مشتق خواص مخکې مطالعه کړي؟ آیا کیدای شي چې ورته خواص په غیر معین انتیګرال کې هم وي؟

$$\left.\begin{array}{l} \int k\ dx \\ \int [f(x) \pm g(x)]\ dx \\ \int [f(x) \cdot g(x)]\ dx \\ \int \dfrac{f(x)}{g(x)} dx \quad , g(x) \neq 0 \end{array}\right\} = ?$$




د مشتقاتو له خواصو څخه په کار اخیستنې د لاندې تابع ګانو مشتق پیدا کړئ.

$$f(x) = 3x^4$$

$$f(x) = 2x^3 - \frac{1}{x^2}$$

$$f(x) = \sin x + \cos x$$

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

له پورتنې فعالیت څخه لاندې پایلې په لاس راوړو:

څرنګه چې د تابع ګانو د مشتق د پیدا کولو لپاره له ځانګړو قوانینو څخه ګټه اخیستل کېږي، غیرمعین انتیګرالونه هم د داسې خواصو لرونکي دي چې هغه پرته له ثبوت څخه قبلوو:

1- که $k$ یو ثابت عدد وي، نو لرو چې: $\int kdx = k\int dx = kx + C$

**مثال:** د $\int 5dx$ انتګرال پیدا کړئ.

**حل:** $\int 5dx = 5\int dx = 5x + C$

2- که چېرې $n \neq -1$ وي، نو: $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$

ketabton.com - The Digital Library

**مثال**: د $\int x^4 dx$ **انتیګرال** پیدا کړئ.

**حل**: $\int x^4 dx = \frac{x^{4+1}}{4+1} + C = \frac{1}{5}x^5 + C$

3- که چېرې $a$ یو ثابت عدد او $f(x)$ تابع وي، **نو:**

$$\int a\, f(x)\, dx = a \int f(x)\, dx$$

**مثال**: د $\int 2x^2\, dx$ **انتیګرال** محاسبه کړئ.

**حل**: $\int 2x^2 dx = 2\int x^2 dx = 2\frac{x^3}{3} + C = \frac{2}{3}x^3 + C$

4- که چېرې $f(x)$ او $g(x)$ دوې تابع ګانې وي په دې صورت کې د تابع ګانو د جمع او تفریق د حاصل انتیګرال مساوي دی په:

$$\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

**مثالونه**:

$$a)\quad \int (2x^2 + 3)dx = \int 2x^2 dx + \int 3dx = \frac{2x^3}{3} + 3x + C$$

$$b)\quad \int (8 - 2x)dx = 8\int dx - 2\int x dx = 8x - x^2 + C$$

5- که چېرې د تابع ګانو ترادف تر انتیګرال لاندې وي، په دی صورت کې د دوی انتیګرال مساوي دی په:

$$\int [f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x)]dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx + \ldots + \int f_n(x)dx$$

**مثال**:

$$\int [x^3 - 6x^2 + 9x + 1]dx = \int x^3 dx - \int 6x^2 dx + \int 9x dx + \int dx$$

$$= \frac{x^4}{4} - \frac{6x^3}{3} + \frac{9x^2}{2} + x + C$$

ketabton.com - The Digital Library

6- که $f(x)$ او $g(x)$ دوې تابع ګانې وي، په دې حالت کې د تابع ګانو د ضرب د حاصل انتیګرال، مساوي نه دی د انتیګرالونو د ضرب له حاصل سره په جلا توګه، یعنې:

$$\int[f(x)\cdot g(x)]dx \neq \int f(x)dx\cdot\int g(x)dx$$

**مثال**: که چېرې $f(x)=x+1$ او $g(x)=x-2$ وي، نو:

**حل الف**: لومړی په تابع ګانو د ضرب عملیه تطبیق کوو او وروسته یې انتیګرال په لاس راوړو:

$$\int[f(x)\cdot g(x)]\,dx=\int[(x+1)(x-2)]dx=\int(x^2-2x+x-2)\,dx$$
$$=\int(x^2-x-2)\,dx$$
$$=\int x^2dx-\int x\,dx-\int 2\,dx$$
$$=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-2x+C$$

**حل ب**:اوس د هرې تابع انتیګرال بېلا بېل محاسبه کوو او وروسته یې سره ضربوو په لاس راغلې قیمتونه سره پرتله کوو.

$$\int f(x)\,dx\cdot\int g(x)\,dx=\int(x+1)\,dx\cdot\int(x-2)\,dx=(\int x\,dx+\int dx)(=\int x\,dx-\int 2\,dx)$$
$$=(\frac{x^2}{2}+x+C)(\frac{x^2}{2}-2x+C)=(\frac{x^2}{2}+x)(\frac{x^2}{2}-2x)+C$$
$$\Rightarrow\ \frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-2x+C\neq(\frac{x^2}{2}+x)(\frac{x^2}{2}-2x)+C$$

په پایله کې ځرګنده شوه چې نومورې مساوات حقیقت نه لري.

7- که چېرې $f(x)$ او $g(x)$ دوه تابع ګانې وي په دې صورت کې د توابعو د تقسیم د حاصل انتیګرال مساوي نه دی. د هرې تابع د انتیګرال له حاصل تقسیم سره، یعنې: $\int\frac{f(x)}{g(x)}dx\neq\frac{\int f(x)dx}{\int g(x)dx}$

**مثال**: که چېرې $f(x)=x^2+2x$ او $g(x)=x$ وي، نو لرو:

**د الف جزء حل**: لومړی د تابع ګانو د تقسیم د حاصل انتیګرال په لاس راوړو.

$$\int\frac{f(x)}{g(x)}dx=\int\frac{x^2+2x}{x}dx=\int(\frac{x^2}{x}+\frac{2x}{x})dx=\int(x+2)dx=\int xdx+\int 2dx=\frac{1}{2}x^2+2x+C$$

ketabton.com - The Digital Library

**د ب جزء حل**: اوس د صورت او مخرج د تابع ګانو انتیګرالونه بېلا بېل په لاس راوړو او وروسته يې سره پرتله کوو.

$$\frac{\int f(x)dx}{\int g(x)dx}=\frac{\int (x^2+2x)dx}{\int xdx}=\frac{\int x^2dx+\int 2xdx}{\int xdx}$$

$$=\frac{\frac{1}{3}x^3+x^2}{\frac{1}{2}x^2}+C=\frac{\frac{1}{3}x^3}{\frac{1}{2}x^2}+\frac{x^2}{\frac{1}{2}x^2}+C$$

په پایله کې څرګنده شوه چې

$$\int \frac{f(x)}{g(x)}dx\neq\frac{\int f(x)dx}{\int g(x)dx}$$

## پوښتنې

د انتیګرال له خاصیتونو څخه په ګټه اخیستنې سره لاندې انتیګرالونه محاسبه کړئ:

*a)* $\int -17dx=?$

*b)* $\int \frac{(1+x)^2}{1+x}dx=?$

*c)* $\int 2x^4dx=?$

*d)* $\int \frac{1}{x^5}dx=?$

*e)* $\int (2x^2+4x^3-5x+9)dx=?$

*f)* $\int (2x+3)^6dx=?$

*g)* $\int \frac{x^3+2x^2}{x^2}dx=?$

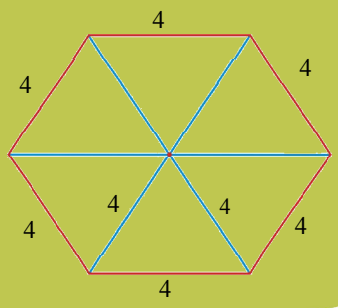
*h)* $\int (2+x)dx=?$

ketabton.com - The Digital Library

# معین انتیګرال

## *Definite Integral*

د شپږ ضلعي دننه مثلثونو د مساحتونو مجموعه پیدا او د شپږ ضلعي له مساحت سره یې پرتله کړئ.







- د $f(x)=2x$ **د تابع ګراف د** $[2,5]$ **په انټروال کې د** $n=5$ **لپاره رسم کړئ او د ګراف لاندې مساحت پیدا کړئ**
- په شکل کې د ګراف لاندې مساحت د کومو دوو عددونو ترمنځ پروت دی.

د پورتنۍ فعالیت پایله داسې بیانوو:

**تعریف**: که چېرې د $f(x)$ تابع په $[a,b]$ انټروال کې متمادي وی، نو د $f(x)$ تابع د ریمان مجموعې لېمیټ ته کله چې $n$ بې‌نهایت ته نژدې شی او د فرعي انټروالونو $(\Delta x)$ لوی اوږدوالی صفر ته نژدې شي، د $f(x)$ تابع له $x=a$ څخه تر $x=b$ پورې د معین انتیګرال په نوم یادېږي، یعنې:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x=\int_a^b f(x)dx=\left[F(x)\right]_a^b=F(b)-F(a)$$

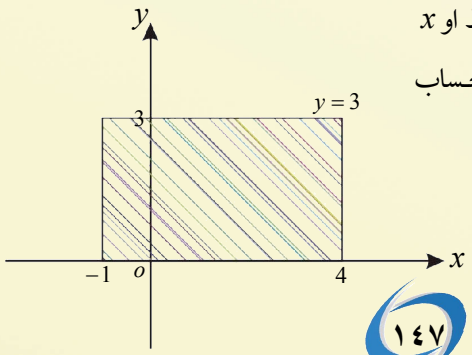
چې $a$ ته د انتیګرال لاندې سرحد او $b$ ته د انتیګرال پورتنۍ سرحد وایي.

**لومړی مثال**: د $\int_1^3 x^2\,dx$ انتیګرال قیمت پیدا کړئ.

**حل**: لومړي د $F(x)$ لومړنۍ تابع پیدا کوو او بیا د مطلوب انتیګرال قیمت ټاکو:

$$\int_1^3 x^2dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^3=\frac{3^3}{3}-\frac{1^3}{3}=\frac{27-1}{3}=\frac{26}{3}$$

**دویم مثال**: هغه مساحت چې د $y=3$ خط او $x$ محور ترمنځ په $[-1,4]$ انټروال کې محصور دی حساب کړئ.



ketabton.com - The Digital Library

**حل**: د $\int_{-1}^{4} 3\,dx$ معین انتیګرال د یوه مستطیل مساحت راښیي چې په تېر شکل کې لیدل کېږي.

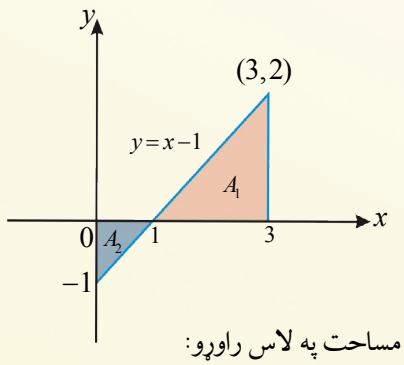
ددې مستطیل مساحت د مستطیل د عرض او طول د ضرب له حاصل سره مساوي دی.

د مستطیل مساحت $= 3[4-(-1)] = 3 \cdot 5 = 15$

له انتیګرال څخه په ګټه اخیستنې سره د مستطیل مساحت په لاندې ډول محاسبه کوو.

$$\int_{-1}^{4} 3\,dx = [3x]_{-1}^{4} = 3[4-(-1)] = 15$$

**دریم مثال**: هغه مساحت چې د $y = x-1$ مستقیم خط او $x$ محور ترمنځ په $[0,3]$ انټروال کې محصور دی په لاس راوړی.




**حل**:

له شکل څخه په ګټه اخیستنې سره لومړی د ښي خوا د لوی مثلث مساحت په لاس راوړو:

$$A_1 = \frac{1}{2}(2 \cdot 2) = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2$$

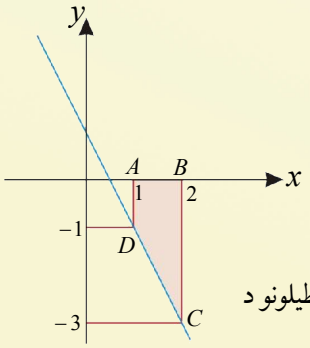
د کوچني مثلث مساحت عبارت دی له: $A_2 = \frac{1}{2}[1(-1)] = \frac{1}{2}(-1) = -\frac{1}{2}$

د $A_1$ او $A_2$ د مساحتونو مجموعه عبارت ده له: $A_1 + A_2 = 2 - \frac{1}{2} = 1.5$

په پایله کې د نوموړي انتیګرال قیمت عبارت دی له: $\int_{0}^{3}(x-1)\,dx = [\frac{x^2}{2} - x]_{0}^{3} = [\frac{3^2}{2} - 3] - 0 = \frac{9}{2} - 3 = 1.5$

## پوښتنې

1. د مخامخ شکل څخه په کار اخیستنې سره هغه مساحت چې د $y = -2x+1$ د مستقیم خط او د $x$ د محور ترمنځ په $[1,2]$ انټروال کې محصور دی په لاس راوړئ.




2. د $f(x) = x^2$ تابع د لاندینیو مستطیلونو د مساحت مجموعه او پورتنیو مستطیلونو د مساحت مجموعه په $[0,1]$ انټروال کې د $n = 4$ لپاره په لاس راوړئ.

ketabton.com - The Digital Library

## د معین انتیګرال خواص

## *Properties of definite integral*

$$\left.\begin{array}{l}\int_a^b c\,dx \\ \int_a^b [f(x)\pm g(x)]\,dx \\ \int_a^a f(x)\,dx\end{array}\right\} = ?$$

آیا کولای شو چې د غیرمعین انتیګرال د ځانګړونو څخه په ګټه اخیستنې سره مخامخ اړیکې پوره کړو.




- د $\sum_{k=1}^{4} 3k^2$ مجموعه حساب کړئ.
- د $\int_a^b x\,dx$ د انتیګرال قیمت د $[-1,1]$ په انټروال کې پیدا کړئ.
- د $\int_0^2 (1+3x)\,dx$ انتیګرال محاسبه کړئ.

د پورتنۍ فعالیت پایله داسې بیانوو:

د ځینو انتیګرالونو محاسبه د قیمت په وضع کولو سره امکان لري او ځینې یې امکان نه لري، دې ته اړتیا پیدا کېږي، ترڅو معین انتیګرال ثبوت کړو.

1. د ثابتې تابع انتیګرال د $[a,b]$ په انټروال کې یعنې $\int_a^b C\,dx$ عبارت دی، له:

$$\int_a^b C\,dx = C\int_a^b dx = C[x]_a^b = C(b-a)$$

**ثبوت**: د $[a,b]$ انټروال په $n$ مساوي برخو، یعنې $\Delta x_i = \frac{b-a}{n}$ وېشو او د هر $x_i$ لپاره د $i$ - ام انټروال څخه لرو: $i = 0,1,2,\ldots,n$ $\qquad f(x_i) = C$

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} C\,\Delta x_i = C(\Delta x_1 + \Delta x_2 + \ldots + \Delta x_n) = C(\frac{b-a}{n} + \frac{b-a}{n} + \ldots + \frac{b-a}{n})$$

$$= C(b-a)(\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n}) = C(b-a)\frac{n}{n} = C(b-a) \Rightarrow \int_a^b C dx = C(b-a)$$

ketabton.com - The Digital Library

**مثال**: $\int_3^4 dx$ معین انتیګرال حساب کړئ.

**حل**: $\int_3^4 dx = [x]_3^4 = 4-3 = 1$

2. که د $f(x)$ تابع د $[a,b]$ په انټروال کې انتیګرال منونکی وي او $k$ یو ثابت حقیقي عدد وي، نو لرو چې:

$$\int_a^b k\, f(x)dx = k \int_a^b f(x)dx$$

**ثبوت**: که چېرې د $[a,b]$ انټروال د $x_i$ ، $i = 1,2,...,n$ په $n$ مساوي برخو ووېشو، نو د ریمان د مجموعې او انتیګرال د تعریف له مخې لیکلای شو:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} k\, f(x_i)\Delta x = \lim_{n\to\infty} k \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

$$= k \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = k \int_a^b f(x)\, dx$$

$$\Rightarrow \int_a^b k\, f(x)dx = k \int_a^b f(x)dx$$

**مثال**: د $\int_{-2}^{2} 4\, dx$ ټاکلی انتیګرال محاسبه کړئ.

**حل**: $\int_{-2}^{2} 4dx = 4\int_{-2}^{2} dx = 4[x]_{-2}^{2} = 4(2-(-2)) = 4\cdot 4 = 16$

3. که د $F(x)$ تابع یوه لومړنۍ تابع د $f(x)$ او په $[a,b]$ انټروال کې متمادي وي، نو:

$$\int_a^b f(x)\, dx = -\int_b^a f(x)\, dx$$

**ثبوت**:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a) = -(-F(b) + F(a))$$

$$= -(F(a) - F(b)) = -\int_b^a f(x)\, dx \quad \Rightarrow \int_a^b f(x)\, dx = -\int_b^a f(x)\, dx$$

**مثال**: د $\int_2^3 2x\, dx = -\int_3^2 2x\, dx$ انتیګرال مساوات پیدا کړئ.

ketabton.com - The Digital Library

**حل**: لومړی د کټې لوری انټیګرال او وروسته د ښیې خوا انټیګرال محاسبه کوو:

$$\int_2^3 2x\,dx = [\frac{2x^2}{2}]_2^3 = \frac{2(3)^2}{2} - \frac{2(2)^2}{2} = \frac{2(9)}{2} - \frac{2(4)}{2} = \frac{18}{2} - \frac{8}{2} = \frac{18-8}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

$$\int_3^2 2x\,dx = [\frac{2x^2}{2}]_3^2 = \frac{2(2)^2}{2} - \frac{2(3)^2}{2} = \frac{2(4)}{2} - \frac{2(9)}{2} = \frac{8}{2} - \frac{18}{2} = \frac{8-18}{2} = -\frac{10}{2} = -5$$

د لاسته راغلو قیمتونو په پام کې نیولو سره پایله په لاس راځي:

$$\int_2^3 2x\,dx = -\int_3^2 2x\,dx$$

**4-** که د $f(x)$ تابع په $[a,b]$ انټروال کې متمادي وي په هغه صورت کې لرو چې: $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

**ثبوت**: څرنګه چې $\Delta x = 0$ دی، نو:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \int_a^a f(x)\,dx = F(a) - F(a) = 0$$

$$\Rightarrow \int_a^a f(x)\,dx = 0$$

**مثال**: د $\int_3^3 3x^2\,dx$ انټیګرال محاسبه کړئ.

**حل**: $\int_3^3 3x^2 dx = [\frac{3x^3}{3}]_3^3 = [x^3]_3^3 = [3^3 - 3^3] = 27 - 27 = 0$

5- که $f(x)$ او $g(x)$ تابع ګانې په $[a\ ,b]$ انټروال کې انټیګرال منونکي وي، نو:

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\ dx$$

**ثبوت**:

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}[f(x_i) \pm g(x_i)]\ \Delta x$$

$$= \lim_{n\to\infty}[\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x \pm \sum_{i=1}^{n} g(x_i)\Delta x]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x \pm \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} g(x_i)\Delta x = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$$

ketabton.com - The Digital Library

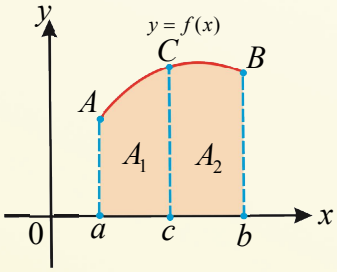
**مثالونه:**

**حل:**

$$a)\quad \int_0^1 (4+3x^2)\,dx = \int_0^1 4\,dx + \int_0^1 3x^2\,dx = 4\int_0^1 dx + 3\int_0^1 x^2\,dx = 4[x]_0^1 + 3\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = 4+1=5$$

$$b)\quad \int_0^3 (x^2-1)\,dx = \int_0^3 x^2dx - \int_0^3 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^3 - [x]_0^3 = \frac{27}{3} - 3 = \frac{27-9}{3} = \frac{18}{3} = 6$$

6. که چېرې د $f(x)$ تابع د $(a,b)$ په یوه ترڅ انټروال کې څرنګه چې $a<c<b$ دی د $a, b$ او $c$ ټکی پکې شامل دي انټیګرال منونکي وي، نو: $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$




**ثبوت:** دلته د $[a,b]$ انټروال په دوو انټروالونو د $[a,c]$ او $[c,b]$ تقسیموو، وروسته د $f(x)$ تابع انټیګرال په نومورو انټروالونو کې په پام کې نیسو.

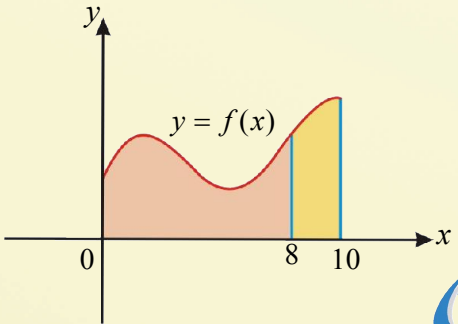
د انټیګرال اصلي مفهوم ته په پام $A = \int_a^b f(x)dx$ په حقیقت کې د هغې سطحې مساحت دی چې د $f(x)$ د تابع دګراف او $x$ د محور ترمنځ د $[a,b]$ په انټروال کې محصوره ده. په داسې حال کې چې د هغې سطحې مساحتونه چې د $f(x)$ ګراف او د $x$ د محور ترمنځ د $[a,c]$ او $[c,b]$ په انټروالونو کې محصوره ده او په شکل کې واضح لیدل کېږي عبارت ده له:

$$A_1 = \int_a^c f(x)\,dx \;،\; A_2 = \int_c^b f(x)\,dx$$

په پایله کې ویلای شو چې: $A = A_1 + A_2 \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

**مثال:** که چېرې $\int_0^{10} f(x)dx = 17$ او $\int_0^8 f(x)dx = 12$ وي، نو د $\int_8^{10} f(x)dx$ انټیګرال قیمت محاسبه کړئ.

**حل:**




$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

$$\int_0^{10} f(x)\,dx = \int_0^8 f(x)\,dx + \int_8^{10} f(x)\,dx$$

ketabton.com - The Digital Library

اوس د $\int_8^{10} f(x)\,dx$ انتیګرال قیمت په لاس راوړو:

$$\int_8^{10} f(x)\,dx = \int_0^{10} f(x)\,dx - \int_0^{8} f(x)\,dx = 17 - 12 = 5$$

7. که چېرې د $f(x) \le g(x)$ تابع ګانې په $[a,b]$ انټروال کې انتیګرال منومنکي وي، نو لرو:

$$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$$

**ثبوت:**

$$\int_a^b g(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b [g(x) - f(x)]dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}[g(x) - f(x)]\,\Delta x$$

نو څرنګه $g(x) - f(x) \ge 0$ او $\Delta x \ge 0$ دی، نو د سلسلې هر حد مثبت دی، نو د هغې لېمیټ هم منفي نه دی یعنې:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}[g(x_i) - f(x_i)]\,\Delta x \ge 0 \Rightarrow \int_a^b [g(x) - f(x)]dx \ge 0$$

$$\int_a^b g(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx \ge 0 \Rightarrow \int_a^b g(x)\,dx \ge \int_a^b f(x)\,dx$$

**مثال**: که چېرې $f(x) = 1 - \frac{x^2}{4}$ او $g(x) = 1 + \frac{x^2}{2}$ وي، نو د $x > 1$ لپاره وښیاست چې $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$ دی.

**حل:**

$$\int_a^b (1 - \frac{x^2}{4})\,dx \le \int_a^b (1 + \frac{x^2}{2})dx$$

$$\int_a^b 1\,dx - \int_a^b \frac{x^2}{4}dx \le \int_a^b 1\,dx + \int_a^b \frac{x^2}{2}dx$$

$$[x]_a^b - \frac{1}{12}[x^3]_a^b \le [x]_a^b + \frac{1}{6}[x^3]_a^b$$

ketabton.com - The Digital Library

پوهېږو چې $(b-a)>0$ دی، نو:

$$(b-a)-\frac{1}{12}(b^3-a^3)\le(b-a)+\frac{1}{6}(b^3-a^3) \qquad /\div(b-a)$$

$$1-\frac{1}{12}(a^2+ab+b^2)\le 1+\frac{1}{6}(a^2+ab+b^2)$$

$$-\frac{1}{12}\le+\frac{1^3}{6} \qquad /\div(a^2+ab+b^2)$$

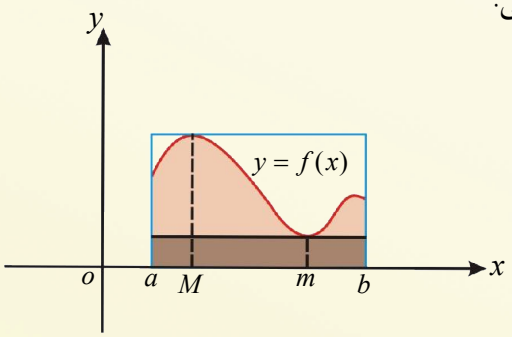
$$-\frac{1}{12}<\frac{1}{6}$$

8. که د $f(x)$ تابع په $[a,b]$ انټروال کې متمادي او $m,M$ قیمتونه په ترتیب سره د تابع مطلق اعظمي او مطلق اصغري قیمتونه په نوموړې انټروال کې وي، نو $m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M(b-a)$

**ثبوت**: څرنګه چې $m\le f(x)\le M$ دی، نو لرو چې:

$$\int_a^b m\,dx\le\int_a^b f(x)\,dx\le\int_a^b M\,dx$$

$$m(b-a)\le\int_a^b f(x)\,dx\le M(b-a)$$




چې دا وروستنی اړیکه د انتیګرال د تخمیني قضیې په نامه یادېږي.

**مثال**: $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$ انتیګرال په تخمیني توګه حساب کړئ.

**حل**: څرنګه چې د $f(x)=e^{-x^2}$ تابع په $[0,1]$ انټروال کې متمادي ده او $M=f(0)=e^0=1$ مطلق اعظمي او $m=f(1)=e^{-1}$ مطلق اصغري دی، نو لرو چې:

$$m(b-a)\le\int_a^b f(x)\,dx\le M(b-a)$$

$$e^{-1}(1-0)\le\int_0^1 e^{-x^2}dx\le 1(1-0)$$

$$e^{-1}\le\int_0^1 e^{-x^2}dx\le 1$$

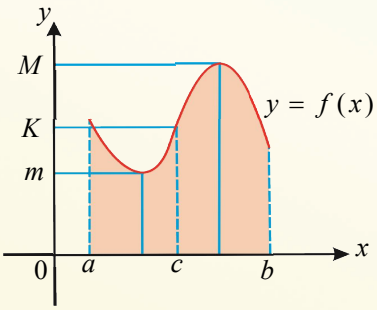
$$e^{-1}=\frac{1}{e}\approx 0{,}3679\Rightarrow 0.3679\le\int_0^1 e^{-x^2}dx\le 1$$

ketabton.com - The Digital Library

په پایله کې د انټیګرال تخميني قيمت د 1 او 0.3679 قيمتونو ترمنځ قرار لري.

9. که د $f(x)$ تابع په $[a,b]$ انټروال کې متمادي وي، نو د $c$ يو حقيقي عدد شته چې: $a \le c \le b$ دی، نو:

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$$




**ثبوت:** د $a < b$ لپاره $m$ او $M$ قيمتونه په ترتيب د تابع مطلق اصغري او اعظمي قيمتونه د $[a,b]$ په انټروال کې وي، لکه: مخامخ شکل د انټيګرال د تخميني قضيې څخه په کار اخيستنې د $c \in [a,b]$ لپاره لرو چې:

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a) \;\Rightarrow\; m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \le M$$

فرضوو $K = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$ وي، نو $m \le K \le M$ دی او د هر $c$ حقيقي عدد لپاره، $a \le c \le b$ لرو چې: $K = f(c)$ نو:

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$$

چې دا وروستی اړیکه د متوسط قيمت د قضيې په نامه يادېږي څرنګه چې $f(c)$ د تابع متوسط قيمت په $[a,b]$ انټروال کې دی.

**مثال:** د $f(x) = x^2$ تابع په $[1,4]$ انټروال کې په پام کې ونيسئ آيا کولای شئ $\int_1^4 x^2\,dx = [\frac{x^3}{3}]_1^4 = [\frac{64}{3} - \frac{1}{3}] = [\frac{64-1}{3}] = \frac{63}{3} = 21$ دی.

**حل:** څرنګه چې $f(x) = x^2$ تابع ده، اوس که د $x$ په ځای د $c$ قيمت په تابع کې وضع کړو نو: $f(c) = c^2$ سره کېږي چې دلته د متوسط قيمت د قضيې د فورمول څخه د $c$ قيمت داسې په لاس راځي: $\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$

ketabton.com - The Digital Library

اوس په پورتنۍ رابطه کې يې قيمت اړدو، لرو چې:

$$\int_1^4 x^2\,dx = c^2(4-1)$$

$$21 = 3c^2 \Rightarrow c^2 = \frac{21}{3} \Rightarrow c^2 = 7 \Rightarrow c = \sqrt{7}$$

$$k = f(c) \quad , \quad f(c) = c^2 = (\sqrt{7})^2 = 7 \Rightarrow f(c) = 7 \quad , \quad k = 7$$

ښکاره شوه چې د تابع يو قيمت مساوي په $k$ او $1 < \sqrt{7} < 4$ دی.

له مخکې څخه پوهېږو چې د مستطيل مساحت د سور او اوږدوالي له ضرب سره برابر دی، نو د متوسط قيمت په فورمول کې $f(c)$ اوږدوالي او $b-a$ سور دی، نو د منحني لاندې مساحت په $[1,4]$ انټروال کې مساوي له هغه مستطيل سره دی چې اضلاع يې 7 او 3 دی.

## پوښتنې

1. لاندې معين انتيګرالونه محاسبه کړئ.

$a) \int_{-1}^{1} (x^3+2)\,dx = ?$

$b) \int_{2}^{5} 7x\,dx = ?$

$c) \int_{-2}^{4} (-x)\,dx = ?$

$d) \int_{-1}^{3} (2|x|-3x)\,dx = ?$

$e) \int_{-2}^{3} 3x\,dx$

$f) \int_{-1}^{2} (x^3 - \frac{1}{2}x^4)\,dx = ?$

$g) \int_{-4}^{4} (2x^2 - \frac{1}{8}x^4)\,dx = ?$

$h) \int_{1}^{3} \sqrt{x}\,dx$

2. د $\int_{-1}^{4} f(x)\,dx$ انتيګرال قيمت د $[-1,4]$ په انټروال کې داسې پيدا کړئ چې $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 5$ او $\int_{1}^{4} f(x)dx = -2$ وي.

3. د $f(x) = x$ تابع په $[0,2]$ انټروال کې په نظر کې ونيسئ او د $c$ قيمت په لاس راوړئ.

ketabton.com - The Digital Library

## 10- د انتیګرال او مشتق اساسي قضیې

یو موټر په $72\frac{m}{\sec}$ چټکتیا سره په حرکت کې دی، دریور برک ته فشار ورکوي او موټر له 6 ثانیو وروسته ودرېږي په دې وخت کې وهل شوي فاصله پیدا کړئ.

$$S(t) = v_0 \cdot t$$




- له مشتق د تعریف څخه په ګټې اخیستنې سره د $f(x) = x^2$ د تابع مشتق د $h = 0$ په ټکي کې پیدا کړئ.
- د په لاس راغلی تابع انتیګرال په $[0,1]$ انټروال کې محاسبه کړئ.
- د په لاس راغلو دواړو حالتونو قیمتونه سره پرتله کړئ.

له پورتني فعالیت څخه په لاس راځي چې:

د انتیګرال او مشتق تر منځ یوه منطقي اړیکه شته چې له دې اړیکې څخه په کار اخیستنې سره کولای شو، د انتیګرال اصلي او اساسي قضیې په لاندې ډول ثبوت کړو:

### 1- د انتیګرال او مشتق لومړی اساسي قضیه:

که چېرې د $f(x)$ تابع د $[a,b]$ په انټروال کې متمادي وي او $x$ په دې انټروال کې شامل وي، لرو چې:

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

ځرنګه چې د $f(x)$ تابع په $[a,b]$ انټروال کې مشتق منونکې ده، نو د هر $x \in [a,b]$ لپاره $F'(x) = f(x)$ دی.

**ثبوت**: ځرنګه چې د $f(x)$ تابع په $[a,b]$ انټروال کې متمادي ده، نو د هر $x \in [a,b]$ لپاره د $f(x)$ تابع په $[a,x]$ انټروال کې متمادي ده په پایله کې د $f(x)$ تابع په دې انټروال کې انتیګرال منونکې هم ده.

اوس د $F(x)$ تابع مشتق د تعریف مطابق لیکو او بیا د $x$ متحول ته د $h$ په اندازه تزاید ورکوو، لکه په لاندې ډول:

$$F'(x) = f(x)$$

$$F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(a) + F(a) - F(x)}{h}$$

$$F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(a) - (F(x) - F(a))}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{F(x)\Big|_a^{x+h} - F(x)\Big|_a^x}{h}$$

ketabton.com - The Digital Library

اوس د $f(x)$ تابع په $f(t)$ عوض کوو:

$$F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{F(t)\Big|_a^{x+h}-F(t)\Big|_a^{x}}{h}$$

$$F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\int_a^{x+h} f(t)\,dt-\int_a^{x} f(t)\,dt}{h}$$

نظر دریم خاصیت ته لرو چې: $\int_a^b f(t)\,dt=-\int_b^a f(t)\,dt$

$$F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\int_a^{x+h} f(t)\,dt-\int_a^{x} f(t)\,dt}{h}$$

$$F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\int_x^{a} f(t)\,dt+\int_a^{x+h} f(t)\,dt}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\int_x^{x+h} f(t)\,dt}{h}$$

د متوسط قیمت د قضیې څخه چې $f(c)=\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt$ د $c$ او $x$ تر منځ واقع دی، نو کله چې $h$ صفر ته تقرب وکړي $c$ ، $x$ ته تقرب کوي، همدارنګه د $f$ تابع له متمادیت څخه لرو:

$$F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt=\lim_{c\to x} f(c)=f(x)$$

په پایله کې: $F'(x)=f(x)$

**مثال:** د $f(x)=\int_2^{x^2+1}\frac{1}{t^2+1}$ مشتق پیدا کړئ.

**حل:**

$$F(x)=\int_a^{x} f(t)\,dt \text{ یا } F(x)=\int_a^{g(x)} f(t)\,dt$$

$$u=g(x)=x^2+1$$

$$f(t)=\frac{1}{t^2+1}$$

د زنځیري قاعدې له مخې لرو: $F'(x)=f(g(x))\cdot g'(x)$

$$F'(x)=\frac{1}{(x^2+1)^2+1}\cdot(x^2+1)'=\frac{1}{(x^2+1)^2+1}\cdot 2x$$

$$F'(x)=\frac{2x}{(x^2+1)^2+1}$$

ketabton.com - The Digital Library

## 2- د انتیګرال او مشتق دویمه اساسي قضیه:

که چېرې $F(x)$ د $f(x)$ تابع لومړنی تابع په $[a,b]$ انټروال کې متمادي وي، په دې صورت کې لرو چې:

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$$

**ثبـــوت**: لـــه مخکـــې قـــضیې څخـــه پـــوهېږو چـــې کـــه $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ دی لـــه دې څایـــه د هر $x \in [a,b]$ لپاره $F'(x) = f(x)$ نو د دې دوو مقدارونو خلاف یو ثابت مقدار شته چې:

$$f(x) - F(x) = k \Rightarrow f(x) = F(x) + k$$

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

$$F'(x) = f(x)$$

$$\int_a^x f(t)dt = f(x) = F(x) + k$$

$$\int_a^x f(t)\ dt - F(x) = k$$

که د $x$ په ځای په پورتنۍ رابطه کې $a$ وضع کړو، نو:

$$\int_a^a f(t)\ dt - F(a) = k \quad , \quad 0 - F(a) = k \ \Rightarrow\ k = -F(a)$$

که د $k$ قیمت په لومړۍ رابطه کې وضع کړو، نو: $\int_a^x f(t)dt - F(x) = -F(a)$

که د $x$ په ځای په دې رابطه کې $b$ وضع شي، نو: $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$

چې اخیري رابطـه پـه $\int_a^b f(t)\,dt = [F(x)]_a^b$ پـه شـکل ښـودل کېـږي دغـه وروسـتۍ اړیکـه د لـومړنۍ تـابع او $\int_a^b f(t)\,dt$ انتیګـــرال تـــرمنځ اړیکـــه ښـــيي چـــې د نیوټن "لایبنز" رابطې په نوم هم یادېږي.

**یادونه:**

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + c$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + c$$

$$\int \sec^2 x\,dx = \tan x + c$$

$$\int \cos ec^2 x\,dx = -\cot x + c$$

ketabton.com - The Digital Library

**مثال**: د $\int_0^1 x^2 dx$ انتیګرال حاصل پیدا کړئ.

**حل:**
$$\int_0^1 x^2 dx = F(1) - F(0) = [\frac{x^3}{3}]_0^1 = \frac{1}{3}\cdot 1^3 - \frac{1}{3}\cdot 0^3 = \frac{1}{3}$$

## پوښتنې

1. **لاندې مشتقات پیدا کړئ.**

a) $F(t) = \int_{\sin t}^{\cos t} \frac{1}{4-x^2} dx$

b) $F(t) = \int_0^{\cos t} \frac{1}{4-x^2} dx$

c) $F(t) = \int_{-\pi}^{t} \frac{\cos y}{1+y^2} dy$

d) $F(x) = \int_1^x \frac{\sin t}{t} dt$

2. که په $f(t) = t$ تابع کې $F(0) = 2$ وي، د $F(b)$ مقدار په $0, 0.2, 0.4, \ldots, 1$ ټکو کې پیدا کړئ.

3. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx$ پیدا کړئ.

ketabton.com - The Digital Library

## 11- په تعويضي طريقې سره انتيګرال نيونه

$$\int 2x\sqrt{1+x^2}\,dx$$

ـ آيا کولای شئ چې مخامخ انتيګرال د نامعين انتيګرال له خواصو څخه په کار اخېستنې سره حل کړئ.

ـ که نه شی کولای، نو د جذر لاندې افاده په يوه متحول سره عوض کړئ او بيا هغه حساب کړئ او ووايئ چې په انتيګرال کې د وضع کولو دا طريقه په څه نوم يادېږي.




- د $\int_0^4 \sqrt{2x+1}\,dx$ انتيګرال کې د جذر لاندې افاده په $u$ سره عوض کړئ.
- د $u$ مشتق ونيسي او د $dx$ قيمت پيدا کړئ.
- څرنګه چې نوموړی انتيګرال يو معين انتيګرال دی، نو د $u=2x+1$ په معادله کې د $x=0$ او $x=4$ قيمتونه وضع او د انتيګرال حددونه د $u$ له جنسه په لاس راوړی، وروسته د انتيګرال قيمت محاسبه کړئ.

له پورتنې فعاليت څخه لاندې پايلې ته رسېږو:

که د $f(x)$ تابع په $[a,b]$ انټروال کې مشتق منونکی وي، $u=g(x)$ او $F'(x)=f(x)$ سره تعويض شي، څرنګه چې $du=g'(x)dx$ دی، له زنځيري قاعدې څخه ليکلای شو:

$$\int_a^b f(g(x))\,g'(x)\,dx=\int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du$$

**لومړی مثال:** د $\int_1^2 \frac{dx}{(3-5x)^2}$ انتيګرال قيمت پيدا کړئ.

ketabton.com - The Digital Library

**حل**: د قوس دننه افاده په $u$ عوض کوو:

$$u=3-5x \ , \quad du=-5\,dx \qquad\qquad dx=-\frac{du}{5}$$

$$\begin{cases} x=1 \\ u=3-5x \end{cases} \Rightarrow u=3-5\cdot 1=-2 \Rightarrow u=-2$$

$$\begin{cases} x=2 \\ u=3-5x \end{cases} \Rightarrow u=3-5\cdot 2=3-10 \Rightarrow u=-7$$

$$\int_1^2 \frac{dx}{(3-5x)^2}=\int_{-2}^{-7}\frac{1}{u^2}(-\frac{1}{5})\,du=-\frac{1}{5}\int_{-2}^{-7}\frac{du}{u^2}=-\frac{1}{5}\left[-\frac{1}{u}\right]_{-2}^{-7}=\left[\frac{1}{5u}\right]_{-2}^{-7}=\frac{1}{5}\left[-\frac{1}{7}+\frac{1}{2}\right]=\frac{1}{14}$$

**دویم مثال**: د $\int_0^1 x^2(1+2x^3)^5\,dx$ انتیګرال حساب کړئ.

**حل**: د قوس دننه افاده په $u$ عوض کوو.

$$u=1+2x^3 \ , \quad du=6x^2\,dx \Rightarrow x^2dx=\frac{1}{6}du$$

$$\begin{cases} x=0 \\ u=1+2x^3 \end{cases} \Rightarrow u=1+2\cdot 0=1 \Rightarrow u=1$$

$$\begin{cases} x=1 \\ u=1+2x^3 \end{cases} \Rightarrow u=1+2\cdot 1=3 \Rightarrow u=3$$

$$\int_0^1 x^2(1+2x^3)^5\,dx=\int_1^3 u^5\,\frac{1}{6}\cdot du=\frac{1}{6}\int_1^3 u^5du=\frac{1}{6}[\frac{u^6}{6}]_1^3=\frac{1}{6}[\frac{3^6}{6}-\frac{1}{6}]$$

$$=\frac{1}{6}[\frac{729}{6}-\frac{1}{6}]=\frac{1}{6}[\frac{728}{6}]$$

$$=\frac{728}{36}=\frac{182}{9}=20.\bar{2}$$




- د $\int x^2\sqrt{x^3+1}\,dx$ انتیګرال کې د جذر لاندې افاده د $u$ په متحول سره تعویض کړئ.
- له $u$ څخه مشتق ونیسئ او په لاس راغلی قیمت په لومړنی انتیګرال کې وضع او هغه حساب کړئ.

ketabton.com - The Digital Library

- له پورته څخه د $F(x)+C$ په لاس راغلي تابع څخه مشتق ونيسئ او له هغې څخه لومړنی تابع په لاس راوړئ.

له پورتني فعاليت څخه لاندې پايله په لاس راځي:

که د $F(u)$ تابع د $f(u)$ لومړنی تابع وي، د $u=g(x)$ د متحول په تعويض سره يوه بله تابع چې مستقل متحول يې $x$ او متمادي مشتق ولري له زنځيري قاعدې څخه په کاراخيستنې سره لرو:

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx=\int f(u)\,du$$

**لومړی مثال:** $\int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}dx$ انتيګرال حساب کړئ.

**حل:** د جذر لاندې افاده په $u$ سره عوض کوو.

$$u=1-4x^2\ ,\ du=-8x\,dx$$

$$xdx=-\frac{1}{8}du$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx=\int \frac{1}{\sqrt{u}}(-\frac{1}{8})\,du=-\frac{1}{8}\int \frac{1}{\sqrt{u}}\,du=-\frac{1}{8}\int u^{-\frac{1}{2}}\,du=-\frac{1}{8}\,(\frac{u^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1})+C$$

$$=-\frac{1}{8}(\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}})+C=-\frac{1}{8}(\frac{\sqrt{u}}{\frac{1}{2}})+C=-\frac{1}{8}(2\sqrt{u})+C=-\frac{1}{4}\sqrt{1-4x^2}+C$$

**دويم مثال:** $\int x^3\cos(x^4+2)dx$ حساب کړئ.

**حل:** که چېرې $u=x^4+2$ وضع کړو په لاس راځي:

$$u=x^4+2\ ,\ du=4x^3dx\ ,\ x^3dx=\frac{1}{4}du$$

$$\int x^3\cos(x^4+2)\,dx=\int \cos u\cdot\frac{1}{4}\,du$$

$$=\frac{1}{4}\int \cos u\,du$$

$$=\frac{1}{4}\sin u+C$$

$$=\frac{1}{4}\sin(x^4+2)+C$$

ketabton.com - The Digital Library

## پوښتنې

لاندې انټيګرالونه د تعويض له لارې محاسبه کړئ.

a) $\int \cos 3x\, dx = ?$

b) $\int_1^2 x\sqrt{x-1}\ dx = ?$

c) $\int_0^7 \sqrt{4+3x}\ dx = ?$

d) $\int 2\sqrt[5]{(1-4x)^2}\, dx = ?$

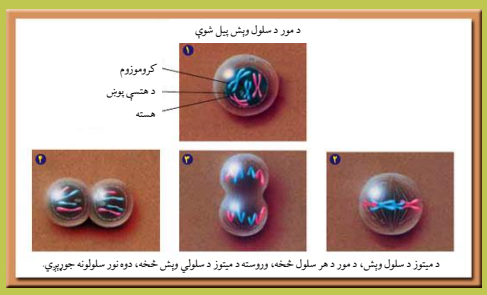
e) $\int 2x(x^2+3)^4\, dx = ?$

f) $\int_0^5 \frac{x\, dx}{x^2+10} = ?$

g) $\int \sqrt{\cos x}\ \sin x\ dx = ?$

ketabton.com - The Digital Library

## 12- په قسمي طريقې سره انتيګرال نيونه Integration by Parts




د حجروي وېش په وخت کې يوه حجره په دوو يا څو حجرو وېشل کېږي. آيا کولای شئ دا لاره(روش) په نورو شيانو کې، لکه: تېږه، شګه او نورو کې وويني که ځواب هو وي، نو دا لاره د څه په نامه يادېږي.

### فعاليت

- د $\int \frac{xdx}{x^2+1}$ انتيګرال په تعويضي طريقه حل کړئ.
- د $\int_{-1}^{1} 3x^2\sqrt{x^3+1}dx$ انتيګرال قيمت په تعويضي طريقه پيدا کړئ.
- آيا کولای شئ چې د $\int x^2 \sin x dx$ انتيګرال په تعويضي طريقه حل کړئ.

له پورتني فعاليت څخه دې پايلې ته رسېږو:

د $\int f(x)g(x)\,dx$ په انتيګرال کې $f(x)$ او $g(x)$ دوې مشتق منونکی تابع ګانې دي چې يوه له بلې سره د ضرب وړ وي يا نه وي، خو د انتيګرال محاسبه يې اسانه کار نه دی، که چېرې $f(x)=u$ او $g(x)=v$ وضع کړو، د ضرب حاصل مشتق يې مساوي په: $(u\cdot v)'=u'\cdot v+v'\cdot u$ دی.

له پورتنۍ رابطې څخه $v'\cdot u$ په لاس راوړو اوله اطراف څخه انتيګرال نيسو:

$$v'\cdot u=(u\cdot v)'-u'\cdot v$$

$$\int v'\cdot u\ dx=u\cdot v-\int u'\cdot v\ dx \quad \text{يا} \quad \int udv=u\cdot v-\int vdu$$

چې پورتنۍ رابطې ته د غيرمعين انتيګرال فورمول په قسمي طريقه وايي.

که د $u$ او $v$ تابع ګانې په $[a,b]$ انټروال کې تعريف شوی وي، لاندې فورمول د معين انتيګرال فورمول په قسمي لاره(طريقه) بلل کېږي.

$$\int_a^b v'u\,dx=u\cdot v\Big|_a^b-\int_a^b vu'\,dx \quad \text{يا} \quad \int_a^b udv=u\cdot v\Big|_a^b-\int_a^b vdu$$

ketabton.com - The Digital Library

**لومړی مثال:** د $\int x\sin x\,dx$ انتیګرال پیدا کړئ.

**حل:**

$$u = x \quad , \quad du = dx$$
$$dv = \sin x\,dx \quad , \quad v = -\cos x$$
$$\int udv = u\cdot v - \int vdu$$
$$\int x\sin x\,dx = x(-\cos x) - \int -\cos x\ dx$$
$$= -x\cos x + \sin x + C$$

**دویم مثال:** د $\int_0^1 -x\,e^x\,dx$ انتیګرال حساب کړئ.

**حل:**

$$u = -x \quad , \quad du = -dx \quad , \quad -du = dx$$
$$dv = e^x dx \quad , \quad v = e^x$$
$$\int_a^b v'\cdot u\,dx = u\cdot v\,\Big|_a^b - \int_a^b v\cdot u'\,dx$$
$$\int_0^1 -xe^x\,dx = [-xe^x]_0^1 + \int_0^1 e^x dx$$
$$= -e^1 + 0\cdot e^0 + [e^x]_0^1$$
$$= -e^1 + e^1 - e^0 \ = -e^0$$
$$= -1$$

**یادونه:**

$$\int e^x\,dx = e^x + c$$



**پوښتنې**

لاندې انتیګرالونه حساب کړئ.

$a)\ \int \theta\cos\theta\ d\theta = ?$

$b)\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos 2x\,dx = ?$

$c)\ \int x^5\cos(x^3)\,dx = ?$

$d)\ \int_0^1 x\,e^x\,dx = ?$

ketabton.com - The Digital Library



**د ریمان مجموعه**: فرضوو د $y=f(x)$ تابع په $[a,b]$ انټروال کې متمادي او تعریف شوی وي او د هغې ناحیې مساحت چې د $x$ محور او د $y=f(x)$ منحني ترمنځ واقع دی چې په هندسي شکلونو نه شي بدلېدلای، محاسبه کړو.

د $[a,b]$ انټروال په n مستطیلو نو تقسیموو څرنګه چې د هر مستطیل عرض د $(\Delta x=\frac{b-a}{n})$ رابطې څخه په لاس راځي او د مستطیلونو طول عبارت دی د تابع قیمت په هم هغه ټکي کې، دا فاصلې په لاندې ډول دي:

او د مستطیلونو انټروالونه د $n$ , ..... , $i=1,2,3,$ لپاره په لاندې ډول دي:

$$x_0=a \quad , \quad x_1=a+\Delta x \quad , \quad x_2=a+2\Delta x, \ \dots \ , x_i=a+i\Delta x, \ \dots \ , x_n=b$$

$$[x_0,x_1] \ , \ [x_1,x_2] \ , \ [x_2,x_3], \ \dots \ ,[x_{i-1},x_i], \ \dots \ ,[x_{n-1},x_n]$$

که د لاندېنیو مستطیلونو مساحت په $f(x_{i-1})\Delta x$ او د پورتنیو مستطیلونو مساحت په $f(x_i)\Delta x$ وښودل شي او د محصور شوي سطحې مساحت په $A$ وښیو، نو لرو چې:

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x < A < \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

**نامعین انتیګرالونه**:که چېرې د $f(x)$ تابع په $[a,b]$ انټروال کې تعریف او $F(x)$ د $f(x)$ یوه لومړنۍ تابع وي. د $F(x)+C$ توابعو ستې چې $c$ یو ثابت عدد وي د غیرمعین انتګرال په نامه یادېږي او داسې لیکل کېږي: $\int f(x)dx=F(x)+C$

**د نامعین انتیګرالونو خواص(ځانګړتیاوې):**

$$\int kdx=k\int dx=kx+C$$

$$\int a\,f(x)\,dx=a\int f(x)\,dx$$

$$\int[f(x)\pm g(x)]dx=\int f(x)\,dx\pm\int g(x)\,dx$$

$$\int[f_1(x)+f_2(x)+\dots+f_n(x)]dx=\int f_1(x)dx+\int f_2(x)dx+\dots+\int f_n(x)dx$$

$$\int[f(x)\cdot g(x)]\,dx\neq\int f(x)\,dx\cdot\int g(x)\,dx$$

$$\int\frac{f(x)}{g(x)}dx\neq\frac{\int f(x)dx}{\int g(x)dx} \quad , \quad g(x)\neq 0$$

ketabton.com - The Digital Library

**معین انتیګرال**: د $f(x)$ تابع د ریمان مجموعې لېمیټ ته په $[a,b]$ انټروال کې کله چې $n$ بې‌نهایت ته نژدې شي د $\Delta x$ فرعي انټروالونو اوږدوالی صفر ته نژدې کېږي چې د $f(x)$ تابع معین انتیګرال د $x=a$ څخه تر $x=b$ پورې په نوم یادېږي.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x = \int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b)-F(a)$$

$a$ ته د انتیګرال لاندېنی سرحد او $b$ ته د انتیګرال پورتنی سرحد وایي.

**د معین انتیګرال خواص(ځانګړتیاوې)**:

$$\int_a^b C\,dx = C(b-a)$$

$$\int_a^b k\,f(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

$$\int_a^b [f(x)\pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

$$f(x)\le g(x) \;\Rightarrow\; \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$$

$$m(b-a)\le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a)$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a) \;\Rightarrow\; f(c)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

ketabton.com - The Digital Library

**د انتیګرال او مشتق لومړی اساسي قضیه:**

که چېرې د $f(x)$ تابع په $[a,b]$ انټروال کې متمادي وي او $x$ په دې انټروال کې شامل وي، لرو چې:

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt$$

ځرنګه چې د $f(x)$ تابع په $[a,b]$ انټروال کې د مشتق وړ ده، نو د هر $x\in[a,b]$ لپاره $F'(x)=f(x)$ دی.

**د انتیګرال او مشتق دویمه اساسي قضیه:**

- که چېرې $F(x)$ تابع د $f(x)$ لومړنی تابع په $[a,b]$ انټروال کې متمادي وي، په دې صورت کې لرو چې:

$$\int_a^b f(t)\,dt=F(b)-F(a)$$

- که $F(u)$ د $f(u)$ لومړنی تابع وي او له $u=g(x)$ متحول سره تعویض شي چې مستقل متحول یې $x$ او متمادي مشتق ولري. له زنځیري قاعدې څخه په کار اخیستنې سره لرو:

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx=\int f(u)\,du$$

- که $F(x)$ تابع په $[a,b]$ انټروال کې مشتق منونکي وي او $u=g(x)$ همدارنګه له $F'(x)=f(x)$ سره تعویض شي، ځرنګه چې $du=g'(x)dx$ دی، له زنځیري قاعدې څخه لیکلای شو:

$$\int_a^b f(g(x))\;g'(x)\;dx=\int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du$$

- د $\int f(x)g(x)dx$ انتیګرال کې $f(x)$ او $g(x)$ دوې مشتق منونکي تابع ګانې وي چې په خپل منځ کې قابل د ضرب وي او یا نه وي، خو د انتیګرال محاسبه یې آسانه کار نه دی، که چېرې $f(x)=u$ او $g(x)=v$ سره عوض شي، د هغوی د حاصل ضرب مشتق عبارت دی له:

$$(u\cdot v)'=u'\cdot v+v'\cdot u$$

ketabton.com - The Digital Library

له پورتني اړيکې څخه $v'\cdot u$ په لاس راوړو او له دواړو خواوو څخه انتيګرال نيسو:

$$\int v'\cdot u\ dx = u\cdot v - \int u'\cdot v\ dx \quad \text{يا} \quad \int udv = u\cdot v - \int vdu$$

چې اخيری اړيکې ته د غير معين انتيګرال فورمول په قسمي طريقه وايي.

- که د $u$ او $v$ تابع ګانې په $[a,b]$ انټروال کې تعريف شوی وي لانـدې فورمـول، د معـين انتيګـرال فورمول په قسمي لاره(طريقه) بلل کېږي:

$$\int_a^b v'u\,dx = u\cdot v\Big|_a^b - \int_a^b vu'\,dx \quad \text{يا} \quad \int_a^b udv = u\cdot v\Big|_a^b - \int_a^b vdu$$

ketabton.com - The Digital Library

## د څپرکي پوښتنې

1- د لاندې معینو انتیګرالونو قیمت پیدا کړئ.

$a)\ \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+x^2}\,dx$ $\quad b)\ \int_{-4}^{4}[2x^2-\frac{1}{8}x^4]dx$ $\quad c)\ \int_2^4 \frac{1}{x^2}\,dx$

$d)\ \int_0^3 4dx$ $\quad e)\ \int_1^3 \sqrt{x}\ dx$ $\quad f)\ \int_1^2 (x^2-x^5)\,dx$

$g)\ \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos^2 x}\,dx$ $\quad h)\ \int_{-2}^{0}[\frac{x^3}{4}+\frac{x^2}{3}]dx$ $\quad i)\ \int_2^3 (x^3+x^2)dx$

$j)\ \int_{-2}^{2}[x^3-\frac{1}{2}x^2+3x-4]dx$ $\quad k)\ \int_0^{\pi} \sin x dx$ $\quad l)\ \int_1^2 x^2\,dx$

2- لاندې غیر معین انتګرالونه په لاس راوړئ.

$a)\ \int[\sin x+8x^3]dx$ $\quad b)\ \int[x^5+\frac{4}{x^4}+x^3+\frac{2}{x^2}+x]dx$

$c)\ \int x(1-2x^2)\,dx$ $\quad d)\ \int \sin x\,dx$

$e)\ \int \frac{\sin 2x}{2\sin x}dx$ $\quad f)\ \int \frac{(1-x)^2}{1-x}dx$

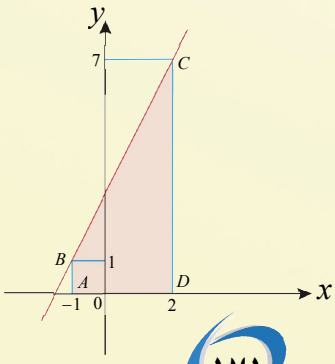
$g)\ \int \sqrt[5]{x^3}\,dx$ $\quad h)\ \int \frac{3x^2+8x}{x}dx$

$i)\ \int \left(2x^2+3\right)dx$ $\quad j)\ \int \frac{x^2}{\sqrt{x^3+2}}dx$

$k)\ \int \frac{(1+x)(1-x)}{x-x^3}dx$ $\quad l)\int (3x^2+4x-1)\ dx$

3- د لاندې محصور رنګ شوې سطحې مساحت د شکل له مخې پیدا کړئ.

$\int_{-1}^{2}(2x+3)\,dx$



ketabton.com - The Digital Library

4- لاندې انتیګرالونه د تعویضي طریقې په مرسته پیدا کړئ.

$a)\ \int 3\cos(2x+1)\,dx$

$b)\ \int \sqrt{3x+5}\,dx$

$c)\ \int \frac{2\,dx}{x+2}$

$d)\int (3x+6)^3\,dx$

$e)\int x^3\sqrt{x^4+2}\,dx$

$f)\int (x^3+2)^2 3x^2 dx$

$g)\int_0^2 \frac{dt}{(3-2t)^2}$

$h)\int_0^2 x^2\cdot\sqrt{9-x^3}\,dx$

$i)\int \frac{1}{(x-10)^7}dx$

$j)\int_0^1 (1-x^2)^3 x dx$

$k)\int (4-3x)^7\,dx$

$l)\int \frac{x^2 dx}{\sqrt[4]{x^3+2}}$

5- لاندې انتیګرالونه د قسمي طریقې په مرسته پیدا کړئ.

$a)\ \int x\cos x\,dx$

$b)\int_0^{\pi} \sin x\cos x\,dx$

$c)\ \int e^x\cdot\cos x\,dx$

$d)\int_0^{2\pi} x\cos 3x\,dx$

$e)\ \int xe^{-x}dx$

$f)\int x\sqrt{1+x}\,dx$

$g)\ \int x^2\cdot e^{2x}dx$

$h)\ \int e^{2x}\sin 3x\,dx$

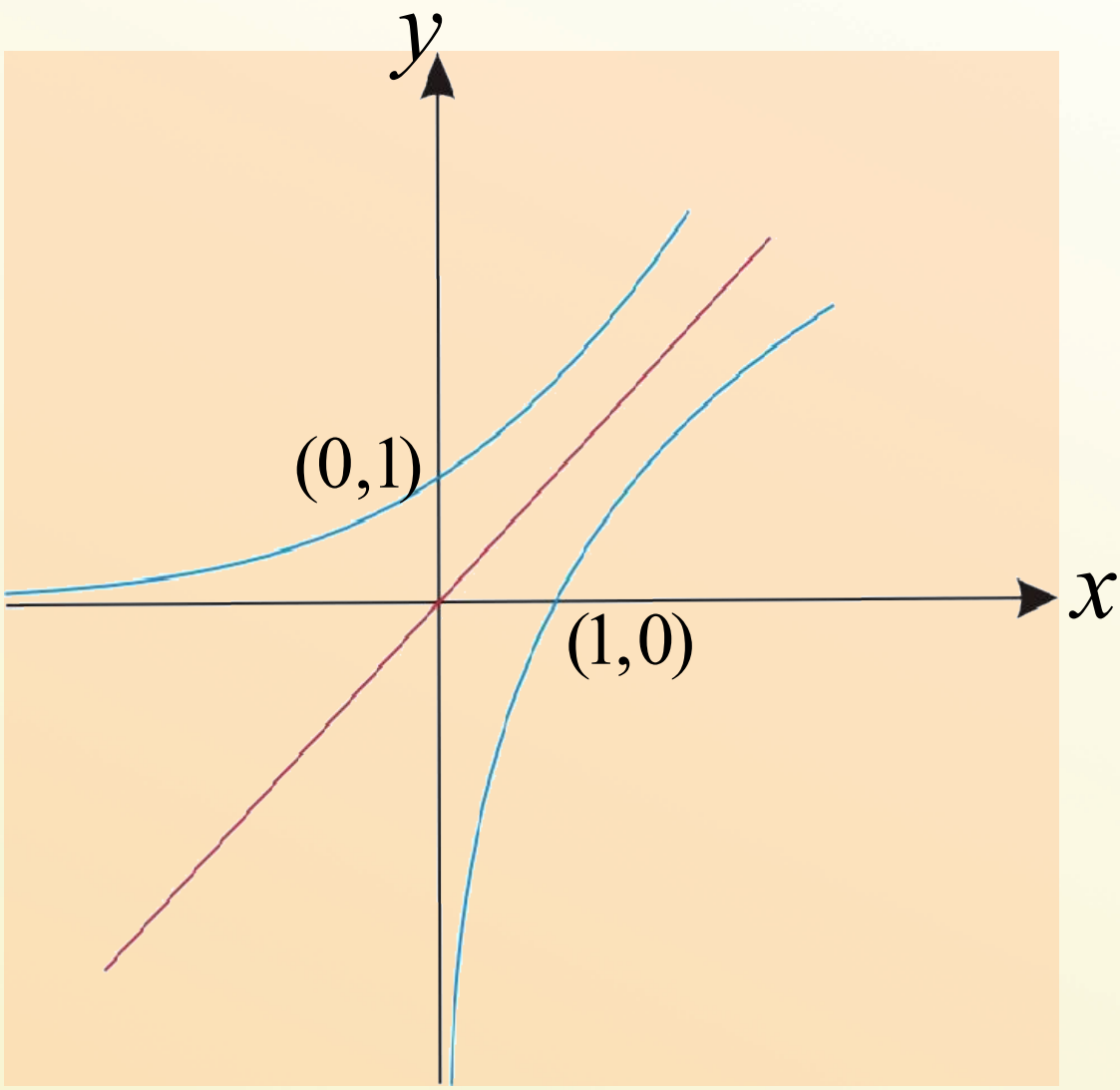
$i)\ \int x^2\cdot e^{-x}\,dx$

ketabton.com - The Digital Library

# پنځم څپرکی

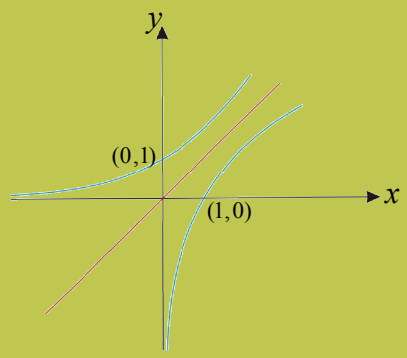
## د لوګاریتمي او اکسپوننشیل تابع ګانو مشتق او انتیګرال

ketabton.com - The Digital Library



ketabton.com - The Digital Library

## د لوګاريتمي او اکسپوننشيل تابع ګانو مشتق




مخامخ شکل د خه ډول تابع ګانو ګراف راښيي، نومونه يې واخلئ.




- لوګاريتم تعريف او خواص يې وليکئ.
- لوګاريتمي او اکسپوننشيل تابع ګانې يوه له بلې سره څه اړيکې لري.
- که $\log_b x$ يوه متصله تابع وي، نو $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$ له کوم عدد سره مساوي ده.
- د $y=f(x)$ د تابع له دواړو خواوو څخه طبيعي لوګاريتم ونيسئ، اړيکه يې وليکئ.

د پورتني فعاليت پايله داسې بيانوو:

په عمومي ډول که $f(x)=\ln x$ او $g(x)=a^x$ وي؛ نو $g'(x)=a^x\ln a$ او $f'(x)=\frac{1}{x}$ دی.

**ثبوت**:

-1

$$y=g(x)=a^x$$

$$\ln y=\ln a^x=x\ln a$$

د مساوات له دواړو خواوو څخه نظر $x$ ته مشتق نيسو:

$$\frac{y'}{y}=x'\ln a+x(\ln a)'$$

$$\frac{y'}{y}=\ln a+0$$

$$\frac{1}{y}y'=\ln a$$

$$y'=y\ln a \quad\Rightarrow\quad g'(x)=a^x\ln a$$

ketabton.com - The Digital Library

-2

$$f(x)=\ln x$$

$$(\ln x)'=\lim_{h\to 0}\frac{\ln(x+h)-\ln x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\ln\frac{x+h}{x}}{h}$$

$$(\ln x)'=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\ln(\frac{x+h}{x})=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\ln(1+\frac{h}{x})\ =\frac{1}{x}\lim_{h\to 0}\frac{x}{h}\ln(1+\frac{h}{x})$$

$$=\frac{1}{x}\lim_{h\to 0}\ln(1+\frac{h}{x})^{\frac{x}{h}}$$

که $u=\frac{x}{h}$ وضع شي نو $\frac{h}{x}=\frac{1}{u}$ دی څرنګه چې $h\to 0$ تقرب وکړي، نو $u\to\infty$ ته نژدې کېږي، لیکلای شو چې:

$$(\ln x)'=\frac{1}{x}\lim_{u\to\infty}\ln(1+\frac{1}{u})^{u}\ =\frac{1}{x}\ln\lim_{u\to\infty}(1+\frac{1}{u})^{u}$$

پوهېږو چې $\lim_{u\to\infty}(1+\frac{1}{u})^{u}=e$ دی، نو: $(\ln x)'=\frac{1}{x}\ln e=\frac{1}{x}$

## قضیه

1. که د $f(x)=\log_a x$ تابع مشتق منوونکی وي، نو مشتق یې $f'(x)=\frac{1}{x}\log_a e$

2. که $f(x)=\log_a g(x)$ او $g(x)$ مشتق منوونکی وي، نو $(\log_a g(x))'=\frac{g'(x)}{g(x)}\log_a e$

**ثبوت**:

-1

$$f(x)=\log_a x\ \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{x}\log_a e$$

$$f'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(x+h)-\log_a x}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\log_a\frac{x+h}{x}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\log_a(1+\frac{h}{x})=\lim_{h\to 0}\frac{1}{x}\cdot\frac{x}{h}\log_a(1+\frac{h}{x})=\frac{1}{x}\lim_{h\to 0}\log_a(1+\frac{h}{x})^{\frac{x}{h}}$$

$$(\log_a x)'=\frac{1}{x}\log_a\lim_{h\to 0}(1+\frac{h}{x})^{\frac{x}{h}}$$

اوس که $\frac{x}{h}=u$ وضع شي، نو $\frac{h}{x}=\frac{1}{u}$ کېږي، که $h\to 0$ صفر ته تقرب وکړي، نو $u\to\infty$ کوي، یعنې:

$$(\log_a x)'=\frac{1}{x}\log_a\lim_{u\to\infty}(1+\frac{1}{u})^{u}=\frac{1}{x}\log_a e$$

ketabton.com - The Digital Library

2- غواړو ثبوت کړو چې: $(\log_a g(x))' = \frac{g'(x)}{g(x)} \log_a e$

د زنځيري قاعدې له مخې:

$$f'(x) = (\log_a g(x))' = (\log_a g(x))' \cdot g'(x) = \frac{1}{g(x)} \log_a e \cdot g'(x)$$

$$= \frac{g'(x)}{g(x)} \log_a e$$

که $a = e$ وضع شي، نو لرو:

$$(\log_a g(x))' = (\ln g(x))' = \frac{g'(x)}{g(x)}$$

**پايله**:

1- د Exponential تابع ګانو مشتق د لوګاريتم په مرسته کولای شو په اسانۍ سره په لاس راوړو.

که $y = e^x$ وي ددې تابع مشتق $y' = e^x$ دی، ځکه چې د $y = e^x$ رابطې څخه طبيعي لوګاريتم ونيسو، په لاس راځي:

$$y = e^x \Rightarrow \ln y = x \ln e = x$$

$$(\ln y)' = (x)' \Rightarrow \frac{y'}{y} = 1 \Rightarrow y' = y \cdot 1 = e^x$$

2- که $y = e^u$ او $u$ تابع د $x$ وي، نو: $y' = u' e^u$

3- که $y = a^u$ کله چې $a > 0$ او $a \neq 1$ وي، نو: $y' = u' a^u \ln a$

4- د لوګاريتمي تابع ګانو د مشتق پيدا کولو لپاره په ښلابښلو قاعدو سره له دې اړيکې څخه ګټه اخلو:

$$y = \log_a u \Rightarrow y' = (\log_a u)' = \frac{u'}{u} \log_a e$$

$$y' = \frac{u'}{u} \log_a e = \frac{u'}{u} \cdot \frac{1}{\log_e a} \Rightarrow y' = \frac{u'}{u \ln a}$$

**لومړی مثال**: د $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ تابع مشتق پيدا کړئ.

**حل**: که $g(x) = x^2 + 1$ وضع کړو، نو لرو:

$$g(x) = x^2 + 1$$

$$g'(x) = 2x$$

$$(\ln g(x))' = \frac{g'(x)}{g(x)}$$

$$(\ln(x^2 + 1))' = \frac{(x^2 + 1)'}{x^2 + 1} = \frac{1}{x^2 + 1} \cdot 2x \Rightarrow f'(x) = (\ln(x^2 + 1))' = \frac{2x}{x^2 + 1}$$

ketabton.com - The Digital Library

**دویم مثال**: د $f(x)=\ln(x^2-5x+4)$ تابع مشتق پیدا کړئ.

**حل**:

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=\ln(x^2-5x+4) \\ g(x)=x^2-5x+4 \Rightarrow g'(x)=2x-5 \end{array}\right\} \begin{array}{l} (\ln g(x))'=\dfrac{g'(x)}{g(x)} \\ (\ln(x^2-5x+4))'=\dfrac{g'(x)}{g(x)}=\dfrac{2x-5}{x^2-5x+4} \end{array}$$

**دریم مثال**: د $f(x)=\log_a\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x^2-1}}$ او $f(x)=\ln\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x^2-1}}$ تابع ګانو مشتق پیدا کړئ.

**حل**: پوهېږو چې $\log_a\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x^2-1}}=\log_a(\dfrac{x^2+1}{x^2-1})^{\frac{1}{2}}$ دی، نو لیکلای شو چې:

$$\log_a\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}}=\log_a(\frac{x^2+1}{x^2-1})^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\log_a\frac{x^2+1}{x^2-1}=\frac{1}{2}(\log_a(x^2+1)-\log_a(x^2-1))$$

$$(\log_a\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}})'=\frac{1}{2}(\log_a(x^2+1)-\log_a(x^2-1))'$$

$$=\frac{1}{2}[\frac{(x^2+1)'}{(x^2+1)}\log_a e-\frac{(x^2-1)'}{(x^2-1)}\log_a e]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{2x}{x^2+1}\log_a e-\frac{2x}{x^2-1}\log_a e\right]=\frac{1}{2}\cdot 2x\log_a e\left[\frac{1}{x^2+1}-\frac{1}{x^2-1}\right]$$

$$=\frac{-2x}{x^4-1}\log_a e$$

**حل**: پوهېږو چې $\ln\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x^2-1}}=\ln(\dfrac{x^2+1}{x^2-1})^{\frac{1}{2}}$ دی، نو لیکلای شو چې:

$$\ln\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}}=\ln(\frac{x^2+1}{x^2-1})^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}(\ln(x^2+1)-\ln(x^2-1))$$

$$(\ln\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}})'=\frac{1}{2}[\ln(x^2+1)-\ln(x^2-1)]'=\frac{1}{2}[(\ln(x^2+1))'-(\ln(x^2-1))']$$

$$=\frac{1}{2}(\frac{2x}{x^2+1}-\frac{2x}{x^2-1})=\frac{-2x}{x^4-1}$$

ketabton.com - The Digital Library

**څلورم مثال**: د $y = e^{(x^2+1)}$ تابع مشتق پیدا کړئ.

**حل**: پوهېږو چې که $y = e^u$ وي نو $y' = u' e^u$

$$y = e^{(x^2+1)} \Rightarrow y' = (x^2+1)' \cdot e^{x^2+1} = 2x \cdot e^{x^2+1}$$

**پنځم مثال**: د $y = \sqrt[x]{2}$ تابع مشتق په لاس راوړئ.

**حل**: پوهېږو چې که چېرې $y = a^u$ وي، نو $y' = u' a^u \ln a$ سره دی، نو:

$$y = \sqrt[x]{2} = (2)^{\frac{1}{x}} \Rightarrow y' = (\frac{1}{x})' \cdot 2^{\frac{1}{x}} \ln 2 = \frac{-1}{x^2} \cdot 2^{\frac{1}{x}} \cdot \ln 2$$

**شپږم مثال**: د $y = x^{2x}$ تابع مشتق پیدا کړئ.

**حل**: که د معادلې له دواړو خواوو څخه طبیعي لوګاریتم ونیسو، په لاس راځي چې:

$$y = x^{2x}$$

$$\ln y = \ln x^{2x}$$

$$\ln y = 2x \ln x$$

$$(\ln y)' = (2x \ln x)' \Rightarrow \frac{y'}{y} = 2\ln x + 2x \cdot \frac{1}{x}$$

$$y' = 2(\ln x + 1) \cdot y \Rightarrow y' = 2(\ln x + 1) \cdot x^{2x}$$

**اووم مثال**: د $y = 10^x$ تابع مشتق حساب کړئ.

**حل**: پوهېږو چې $y = a^x \Rightarrow y' = a^x \ln a$ دی، نو:

$$y = 10^x$$

$$y' = 10^x \cdot \ln 10$$

**اتم مثال**: د $y = e^{3x}$ تابع مشتق پیدا کړئ.

**حل**: که $u = 3x$ وضع شي، نو: $u'(x) = 3$

$$y = e^u$$

$$y' = e^u \cdot u' = e^{3x} \cdot 3$$

$$y' = 3e^{3x}$$

**نهم مثال**: د لاندې تابع ګانو مشتق پیدا کړئ.

1) $y = \log(x^4 + 1)$ 2) $y = \log_3(\log_2 x)$ 3) $y = \log_{x^2-1} x^2 + 1$

ketabton.com - The Digital Library

**حل**: پوهېږو چې د لوګارتمي توابعو مشتق په مختلفو قاعدو سره د لاندې قضیې څخه په ګټه اخېستنې سره په لاس راوړو:

$$y = \log_a u$$

$$y' = (\log_a u)' = \frac{u'}{u}\log_a e = \frac{u'}{u\log_e a} = \frac{u'}{u\ln a}$$

1) $y = \log(x^4+1) \Rightarrow y' = \frac{4x^3}{(x^4+1)\ln 10}$

2) $y = \log_3(\log_2 x) \Rightarrow y' = \frac{(\log_2 x)'}{\ln 3 \log_2 x} = \frac{\frac{1}{x\ln 2}}{\ln 3\log_2 x} = \frac{1}{(\ln 2)(\ln 3)x\log_2 x}$

$$= \frac{1}{\ln 2\cdot\ln 3\cdot x\cdot\frac{\log_e x}{\log_e 2}} = \frac{1}{\ln 2\cdot\ln 3\cdot x\cdot\frac{\ln x}{\ln 2}} = \frac{1}{\ln 3\, x\ln x}$$

3) $y = \log_{x^2-1} x^2+1 = \frac{\log_e(x^2+1)}{\log_e(x^2-1)} = \frac{\ln(x^2+1)}{\ln(x^2-1)}$

**پوهېږو چې** $y = \frac{u}{v} \Rightarrow y' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$ **دی؛ نو لرو:**

$$y' = \frac{\frac{2x}{x^2+1}\cdot\ln(x^2-1) - \frac{2x}{x^2-1}\ln(x^2+1)}{\left[\ln(x^2-1)\right]^2}$$

## پوښتنې

د لاندې توابعو مشتق پیدا کړئ:

a) $f(x) = \ln\sin 3x$

b) $f(x) = \ln\sqrt{3x^2+7}$

c) $f(x) = \ln(5x^2 - 6x + 5)$

d) $f(x) = \log_{10} 3x^2$

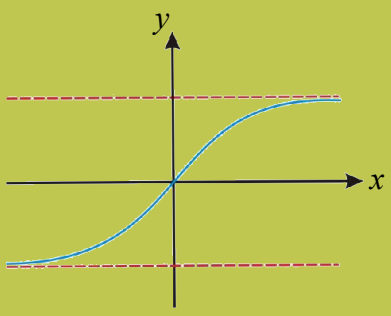
e) $f(x) = y = x^x$

f) $y = \frac{(x+1)^2(\sqrt{x-1})}{(x+4)^3 e^x}$

ketabton.com - The Digital Library

## د معکوسو تابع ګانو مشتق

مخامخ شکل د څه ډول تابع ګراف راښيي؟




کـه چېـرې $f$ او $g$ يـوه د بلـې دوې معکوسـې تـابع ګـانې وي، يعنـې $y=f(x)\Leftrightarrow x=g(y)$ وي، نـو:

$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}$ يا $y'_x=\frac{1}{x'_y}$ دی، ځکه چې د تابع او ضمني تابع ګانو له مشتق څخه ليکلای شو:

$$\left.\begin{matrix} y=f(x) \\ x=g(y) \end{matrix}\right\} \Rightarrow y'_x\cdot x'_y=y'_y \Rightarrow y'_x\cdot x'_y=1 \Rightarrow y'_x=\frac{1}{x'_y}$$

**مثال**: د $y=a^x$ تابع مشتق د هغې د معکوسې تابع په مرسته پيدا کړئ.

**حل**:

$$y=a^x \Rightarrow x=\log_a y$$

$$\Rightarrow y'_x=\frac{1}{x'_y}=\frac{1}{(\log_a y)'}=\frac{1}{\frac{1}{y}\log_a e}=\frac{1}{\frac{1}{y}}\log_e a=y\log_e a$$

$$y'=a^x\ln a$$

## د مثلثاتي معکوسو تابع ګانو مشتق

د مثلثاتي معکوسو تابع ګانو مشتق د لاندې اړيکو په مرسته لاسته راوړو:

1) $(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

2) $(\arccos x)'=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

3) $(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}$

4) $(arc\cot x)'=\frac{-1}{1+x^2}$

ketabton.com - The Digital Library

**ثبوت:**

1) $y = arc\sin x \quad \Leftrightarrow \quad x = \sin y$

$(arc\sin x)' = ?$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}$$

$$\Rightarrow (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

2) $y = arc\cos x \quad \Leftrightarrow \quad x = \cos y$

$(arc\cos x)' = ?$

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\cos y)'} = \frac{1}{-\sin y} = \frac{-1}{\sqrt{1-\cos^2 y}}$$

$$\Rightarrow (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

3) $y = arc\tan x \Leftrightarrow x = \tan y$

$$\Rightarrow (arc\tan x)' = y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\tan y)'} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \cos^2 y$$

$$= \frac{\cos^2 y}{1} = \frac{\cos^2 y}{\sin^2 y + \cos^2 y}$$

دکسر صورت او مخرج په $\cos^2 y$ ویشو:

$$(arc\tan x)' = \frac{\cos^2 y}{\sin^2 y + \cos^2 y} = \frac{1}{\tan^2 y + 1} = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\Rightarrow (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

ketabton.com - The Digital Library

4) $y = arc\cot x \Leftrightarrow x = \cot y$

$(arc\cot x)' = ?$

$$(arc\cot x)' = y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\cot y)'} = \frac{1}{\frac{-1}{\sin^2 y}}$$

$$= -\sin^2 y = \frac{-\sin^2 y}{1} = \frac{-\sin^2 y}{\sin^2 y + \cos^2 y}$$

د کسر صورت او مخرج په $\sin^2 y$ وېشو:

$$= -\frac{\sin^2 y}{\sin^2 y + \cos^2 y} = \frac{-1}{1+\cot^2 y} = -\frac{1}{1+x^2}$$

**لومړی مثال**: د $y = (\arctan x)^5$ تابع مشتق پیدا کړئ.

$$y' = 5(\arctan x)^4 (\arctan x)' = 5(\arctan x)^4 \frac{1}{1+x^2}$$

**دویم مثال**: د $y = \log_5(\arctan x)$ تابع مشتق پیدا کړئ.

$$y' = \left[\log_5(\arctan x)\right]' = (\log_5 u)' = \frac{u'}{u \log_5 e}$$

$$= \frac{\frac{1}{1+x^2}}{\arctan x \log_5 e} = \frac{1}{(1+x^2)(\arctan x \ln 5)}$$

**دریم مثال**: د $y = arc\tan e^x$ تابع د مشتق مقدار د $x = 0$ ټکي کې پیدا کړئ.

$$y' = \left[arc\ \tan e^x\right]' = (arc\tan u)' = \frac{u'}{1+u^2} = \frac{e^x}{1+e^{2x}}$$

$$y'(0) = \frac{e^0}{1+e^0} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

ketabton.com - The Digital Library

## پوښتنې

1. د لاندې تابع ګانو مشتق پیدا کړئ.

1) $y = (arc\sin x)^3$

2) $y = \log_2 (arc\cos x)$

ketabton.com - The Digital Library

## قسمي کسرونه

### د يو کسر تجزيه کول په قسمي کسرونو:

پـوهېږو چـې د $\frac{2}{x+1}$ او $\frac{1}{x^2-1}$ د جمعـې حاصـل $\frac{2x-1}{x^2-1}$ دی، آيا کولای شئ چې لـه دې کسر څخـه د $\frac{2}{x+1}$ او $\frac{1}{x^2-1}$ کسرونه لاسته راوړئ.

$$\frac{2}{x+1}+\frac{1}{x^2-1}=\frac{2x-1}{x^2-1}$$




- د $\frac{7}{x+1}$ ، $\frac{5}{x-2}$ او $\frac{2}{x-5}$ کسرونه سره جمع کړئ.
- د پورته کسرونود جمعې حاصل، بېرته په لومړنيو کسرونو واړوئ.
- واقعي کسرونه څه ډول کسرونه دي، تعريف يې کړئ.

د پورتنۍ فعاليت پايله داسې بيانوو:

**تعريف**: د يوه واقعي کسر هغه کوچنی کسرونه چې د جمعې د عواملو په شکل ليکل شوي وي، که چېرې هغوی سره جمع کړو، راکړل شوی واقعي کسر به په لاس راشي، نو دا جمع شوي لومړني کسرونه د قسمي کسرونو په نامه يادېږي.

د يوه واقعي کسر د تجزيه کولو لپاره لاندې حالتونه په پام کې نيسو:

### لومړی حالت:

که چېرې د $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$ ناطق کسر مخرج ($P_n(x)$) له خطي بېلابېلو ضربي عواملو څخه جوړ شوي وي او تکرار نه وي په لاندې بڼه بدلېدلای شي:

$$\frac{P_m(x)}{P_n(x)}=\frac{A}{x-x_1}+\frac{B}{x-x_2}+\frac{C}{x-x_3}+\cdots+\frac{N}{x-x_n}$$

($A, B, C, \ldots$ حقيقي عددونه دي)

**لومړی مثال**: د $\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}$ کسر په قسمي کسرونو تجزيه کړئ.

**حل**: د مخرج پولينوم په لومړنيو ضربي عواملو تجزيه کوو، نو په لاس راځي:

ketabton.com - The Digital Library

$$x^3-4x^2-7x+10=(x-5)(x-1)(x+2)$$

لیدل کېږي چې نومورې کسر له درو قسمي کسرونو څخه جوړ شوی دی، صورتونه یې $A, B, C$ ټاکو:

$$\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}=\frac{A}{x-5}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+2}$$

$$\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}=\frac{A(x-1)(x+2)+B(x-5)(x+2)+C(x-1)(x-5)}{(x-5)(x-1)(x+2)}$$

$$\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}=\frac{Ax^2+Ax-2A+Bx^2-3Bx-10B+Cx^2-6Cx+5C}{(x-5)(x-1)(x+2)}$$

$$\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}=\frac{(A+B+C)x^2+(A-3B-6C)x+(-2A-10B+5C)}{(x-5)(x-1)(x+2)}$$

لیدل کېږي چې د دواړو خواوو د کسرونو مخرجونه سره برابر دي، نو باید صورتونه هم سره برابر وي، نو د مطابقت د خواصو(د ورته حدونو ضریبونه سره مساوي وي) څخه په ګټه اخستنې سره لیکو:

$$\begin{cases} A+B+C=4 \\ A-3B-6C=-1 \\ -2A-10B+5C=-39 \end{cases}$$

د پورته سیستم له حل څخه وروسته $A=2, B=3$ او $C=-1$ په لاس راځي، نو:

$$\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}=\frac{2}{x-5}+\frac{3}{x-1}-\frac{1}{x+2}$$

**دویم مثال**: د $\frac{3x^3-6x^2-20x-1}{x^2-2x-8}$ کسر په قسمي کسرونو تجزیه کړئ.

**حل**: لومړی نومورې کسر په واقعي کسر بدلوو او بیا پورتنۍ طریقه پرې تطبیقوو:

$$\frac{3x^3-6x^2-20x-1}{x^2-2x-8}=3x+\frac{4x-1}{x^2-2x-8} \Rightarrow \frac{4x-1}{x^2-2x-8}=\frac{A}{x-4}+\frac{B}{x+2}$$

$$=\frac{A(x+2)+B(x-4)}{(x-4)(x+2)}=\frac{(A+B)x+(2A-4B)}{x^2-2x-8}$$

$$\left.\begin{matrix} A+B=4 \\ 2A-4B=-1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow A=\frac{5}{2} \quad , \quad B=\frac{3}{2}$$

$$\frac{3x^2-6x^2-20x-1}{x^2-2x-8}=3x+\frac{5}{2(x-4)}+\frac{3}{2(x+2)}$$

ketabton.com - The Digital Library

**دویم حالت**:

که د کسر د مخرج ضربي عوامل لومړی درجه پولینوم وي چې ځینې یې تکرار راغلی وي، یعنې کـه د $x-x_0$ عامل $n$ ځلې په مخرج کې تکرار شوی وي، نو لیکلای شو چې:

$$\frac{P_m(x)}{P_n(x)}=\frac{A}{x-x_0}+\frac{B}{(x-x_0)^2}+\cdots+\frac{N}{(x-x_0)^n}$$

**لومړی مثال**: د $\frac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2}$ واقعي کسر په قسمي کسرونو تجزیه کړئ:

**حل**: د مخرج د پولینوم ضربي عوامل په لاس راوړو:

$$x^3-4x^2+5x-2=(x-1)(x-2)(x-1)$$

$$\frac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2}=\frac{3x^2-6x+2}{(x-2)(x-1)^2}=\frac{A}{(x-2)}+\frac{B}{(x-1)}+\frac{C}{(x-1)^2}$$

$$=\frac{A(x-1)^2+B(x-2)(x-1)+C(x-2)}{(x-2)(x-1)^2}$$

$$=\frac{(A+B)x^2+(-2A-3B+C)x+(A+2B-2C)}{(x-2)(x-1)^2}$$

$$\left.\begin{array}{l}A+B=3\\-2A-3B+C=-6\\A+2B-2C=2\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{array}{l}A=2\\B=1\\C=1\end{array}$$

$$\Rightarrow\frac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2}=\frac{2}{x-2}+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}$$

**دریم حالت**:

که د مخرج ضربي عوامل دویمه درجه پولینوم چې د تجزیې وړ نه وي او تکـرار هـم نـه وي راغلی، نـو د $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$ واقعي پولینوم د یو قسمي کسر $\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$ بڼه لري.

**لومړی مثال**: د $\frac{5x^2+8x+9}{x^3+3x^2+6x+4}$ کسر په قسمي کسرونو تجزیه کړئ.

ketabton.com - The Digital Library

**حل**: د مخرج پولینوم ضربي عوامل عبارت دی له:

$$x^3+3x^2+6x+4=(x+1)(x^2+2x+4)$$

څرنګه چې د $x^2+2x+4$ دري جملهيي د حقيقي عددونو په سټ کې حل نه لري، نو په دې ساحه کې د تجزيې وړ نه ده. له دې امله ليکو:

$$\frac{5x^2+8x+9}{x^3+3x^2+6x+4}=\frac{Ax+B}{x^2+2x+4}+\frac{C}{x+1}=\frac{(Ax+B)(x+1)+C(x^2+2x+4)}{(x^2+2x+4)(x+1)}$$

$$=\frac{(A+C)x^2+(A+B+2C)x+(B+4C)}{(x^2+2x+4)(x+1)}$$

$$\left.\begin{array}{l}A+C=5\\A+B+2C=8\\B+4C=9\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{array}{l}A=3\\B=1\\C=2\end{array}\Rightarrow\frac{5x^2+8x+9}{x^3+3x^2+6x+4}=\frac{3x+1}{x^2+2x+4}+\frac{2}{x+1}$$

## پوښتنې

لاندې کسرونه په قسمي کسرونو تجزيه کړئ.

-1

$a)\ \dfrac{-x^2+2x-12}{x^3+2x^2+6x+5}$ $b)\ \dfrac{4x^2-3x+8}{x^3-2x+4}$ $c)\ \dfrac{2x^4-8x^3+7x^2-3x+4}{x^2-9x+3}$

-2

$a)\ \dfrac{1}{x^4(x+1)}$ $b)\ \dfrac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2}$ $c)\ \dfrac{x^4+1}{x^2(x-1)}$

$d)\ \dfrac{3x^2+5x+10}{x^3+2x^2-4x-8}$ $e)\ \dfrac{3x^2-18x+36}{x^3-6x^2+9x}$

-3

$a)\ \dfrac{3x+7}{(x^2+x+1)(x^2-4)}$ $b)\ \dfrac{x^2+3x+4}{x^4-2x^2+1}$

$c)\ \dfrac{x^2+13x+10}{x^3-5x^2}$ $d)\ \dfrac{x^5}{x^4-1}$

ketabton.com - The Digital Library

## د اکسپوننشل تابع ګانو انتیګرالونه

مخامخ اړیکې سره پرتله کړئ.

$$\log_a b = x$$

$$a^x = b$$




- د $f(x) = a^x$ تابع څه ډول تابع ده، نوم یې واخلئ.
- د لوګاریتمي تابع یوه بېلګه ولیکئ.
- د $\log_a x = C$ اړیکه په اکسپوننشیل ډول ولیکئ.

له پورتني فعالیت څخه لیکلای شو چې:

د $f(x) = e^x$ طبیعي اکسپوننشیل تابع لپاره لرو $\int e^x dx = e^x + C$ نو په عمومي ډول

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} \quad , \quad a \neq 1 \quad , \quad a \in IR^+$$

**ثبوت**: له تعویضې طریقې څخه په کار اخیستنې سره لرو:

$$u = a^x$$

$$du = \ln a \cdot a^x dx$$

$$dx = \frac{du}{\ln a \cdot a^x} = \frac{du}{u \ln a}$$

$$\int a^x dx = \int u \frac{du}{u \ln a} = \frac{1}{\ln a} \int dx$$

$$\frac{1}{\ln a} u = \frac{1}{\ln a} a^x = \frac{a^x}{\ln a} \Rightarrow \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$$

ketabton.com - The Digital Library

**لومړی مثال**: د $f(x)=2^{x-3}$ اکسپوننشیل تابع انتیګرال غواړو پیدا کړو:

د توان له قانون څخه لرو:

$$2^{x-3}=\frac{2^x}{2^3}=\frac{1}{8}2^x$$

$$\int 2^{x-3}dx=\int\frac{1}{8}2^x dx=\frac{1}{8}\int 2^x dx$$

$$\frac{1}{8}\int 2^x dx=\frac{1}{8}\cdot\frac{2^x}{\ln 2}+C$$

**دویم مثال**: دلاندې اکسپوننشیل تابع ګانو انتیګرالونه پیدا کړئ.

1) $\int 3^{x+1}dx=?$ 2) $\int 6^{x-1}dx=?$

**حل**:

1) $\int 3^{x+1}dx=?$

$$3^{x+1}=3^x\cdot 3$$

$$\int 3^x\cdot 3\,dx=3\int 3^x dx=3\cdot\frac{3^x}{\ln 3}+C$$

2) $\int 6^{x-1}dx=?$

$$6^{x-1}=\frac{6^x}{6}=\frac{1}{6}\cdot 6^x$$

$$\int\frac{1}{6}6^x dx=\frac{1}{6}\int 6^x dx=\frac{1}{6}\cdot\frac{6^x}{\ln 6}+C$$

## پوښتنې

د لاندې اکسپوننشیل تابع ګانو انتیګرالونه محاسبه کړئ.

a) $\int 3^{x-1}dx$ b) $\int 2^{-x}dx$ c) $\int a^{x+b}dx$

d) $\int\frac{1}{a^x}dx$ e) $\int 2^x\cdot 3^x dx$ f) $\int\frac{2^x}{3^x}dx$

g) $\int\frac{4^{x+3}}{2^x}dx$ h) $\int\frac{5^x+3^x}{2^x}dx$ i) $\int(1+2^x)dx$

ketabton.com - The Digital Library

## د لوګاريتمي تابع ګانو انتيګرال

وښيئ چې د تابع په کوم حالت کې نزولي او په کوم حالت کې صعودي ده.

$$y = a^x$$

$$\int a^x dx = ?$$




- لوګاريتم په څو ډوله دی، د هر ډول عمومي رابطه وليکئ.
- د $x = a^y$ او $y = \log_a x$ معادلې يو له بل سره څه اړيکه لري.
- د $x = b^y$ او $y = \log_b x$ تابع ګانو ګراف رسم کړئ.
- آيا کولای شو چې د لوګاريتمي تابع ګانو انتيګرال ونيسو؟

له پورتني فعاليت څخه پايله داسې بيانوو:

که $(x \in IR^+)$ وي د طبيعي لوګاريتم د تابع لپاره ليکلای شو: $\int \ln dx = x \cdot \ln x - x + C$

که $(x, a \in IR^+, a \neq 1)$ وي د معمولي لوګاريتم تابع لپاره ليکلای شو: $f(x) = \log_a x$

$$\int \log_a x\, dx = x \log_a \frac{x}{e}$$

**ثبوت:**

1- که $a = e$ وضع شی، نو:

$$\int \log_a x\, dx = x \log_a \frac{x}{e} + C$$

$$\int \log_e x\, dx = \int \ln x dx = x \log_e \frac{x}{e} = x(\log_e x - \log_e e)$$

$$\int \ln x\, dx = x \ln x - x + C = x(\ln x - 1) + C$$

ketabton.com - The Digital Library



$$\int \log_a x\,dx = x\log_a \frac{x}{e} + C$$

$$u = \log_a x \ , \quad du = \frac{1}{x}\log_a e\,dx$$

$$dv = dx \ , \quad v = x$$

$$\int \log_a x\,dx = x\log_a x - \int x\frac{1}{x}\log_a e\,dx$$

$$= x\log_a x - \log_a e\int dx$$

$$= x\log_a x - x\log_a e = x(\log_a x - \log_a e) = x\log_a \frac{x}{e} + C$$

$$\int \log_a x\,dx = x\ \log_a \frac{x}{e} + C$$

**مثال**: د $\int \ln 3x dx$ غیرمعین انتیګرال غواړو پیدا کړو:

**حل**:

$$\int \ln 3x dx = \int (\ln 3 + \ln x)dx = \int \ln 3\,dx + \int \ln x\,dx$$

$$= x\ln 3 + x\ln x - x$$

$$= x(\ln 3 + \ln x) - x = x(\ln 3x - 1)$$

**یادونه**:

$(I)$ د تعویض Substitution له لارې کولای شو د غیرمعین انتیګرال حل پیدا کړو.

**لومړی مثال**:لاندې انتیګرالونه پیدا کړئ.

**حل**:

$$a)\quad I = \int \frac{1}{2}e^{-2x-3}dx$$

$$-2x-3 = u, \qquad -2 = \frac{du}{dx} \quad , \quad dx = -\frac{1}{2}du$$

$$I = \int \frac{1}{2}e^{u}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)du = -\frac{1}{4}\int e^{u}du = -\frac{1}{4}e^{u} + C = -\frac{1}{4}e^{-2x-3} + C$$

$$b)\quad I = \int \frac{2dx}{x+2}$$

$$x+2 = u, \qquad 1 = \frac{du}{dx} \qquad dx = du$$

$$I = \int \frac{2du}{u} = 2\int \frac{du}{u} = 2\ln|u| + C = 2\ln|x+2| + C$$

ketabton.com - The Digital Library

**دویم مثال**: د $f(x)=e^{2x}$ تابع انتیګرال ونیسئ:

**حل**:

$$f(x)=e^{2x} \Rightarrow \int f(x)dx=\int e^{2x}dx=?$$

$$u=2x \Rightarrow du=2dx$$

$$dx=\frac{du}{2}$$

$$f(x)=e^{2x} \Rightarrow \int f(x)dx=\int e^{u}\cdot\frac{du}{2}=\frac{1}{2}\int e^{u}\,du$$

$$\int e^{2x}dx=\frac{e^{u}}{2}+C=\frac{e^{2x}}{2}+C=\frac{1}{2}e^{2x}+C$$

آزمایښت: $F(x)=\frac{1}{2}e^{2x}+C \Rightarrow F'(x)=\frac{1}{2}e^{2x}\cdot 2=e^{2x}=f(x)$

**دریم مثال**: د $f(x)=x\cdot\ln x^{2}$ انتیګرال حساب کړئ.

**حل**:

$$f(x)=x\cdot\ln x^{2} \Rightarrow \int f(x)dx=\int (x\cdot\ln x^{2})dx=?$$

$$u=x^{2}$$

$$du=2x\,dx \Rightarrow dx=\frac{1}{2}du$$

$$\int f(x)\,dx=\int x\cdot\ln u\cdot\frac{1}{2x}du=\frac{1}{2}\int \ln u\,du=\frac{1}{2}[u\cdot\ln u-u+C]=\frac{1}{2}u\cdot\ln u-\frac{1}{2}u+C$$

$$=\frac{1}{2}x^{2}\cdot\ln x^{2}-\frac{1}{2}x^{2}+C$$

$(II)$ معین انتیګرالونه هم د بدلون(تعویض) له لارې حل کېږي.

**لومړی مثال**: د $\int_{-1}^{1} e^{2x}\,dx$ انتیګرال پیدا کړئ.

$$f(x)=e^{2x} \Rightarrow \int_{-1}^{1} e^{2x}\,dx$$

$$u=2x \Rightarrow du=2\,dx \Rightarrow dx=\frac{1}{2}du$$

$$\left.\begin{array}{l} x=-1,\ u=2x \Rightarrow u=2(-1)=-2 \\ x=1,\ u=2x \Rightarrow u=2(1)=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \int_{-1}^{1} e^{2x}\,dx=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2} e^{u}\,du=\frac{1}{2}\left[e^{u}\right]_{-2}^{2}=3.627$$

ketabton.com - The Digital Library

**دویم مثال**: د $f(x)=\int_1^2 2x\cdot\ln x^2 dx$ انتیګرال قیمت پیدا کړئ.

$$u=x^2$$

$$du=2x\,dx \Rightarrow dx=\frac{1}{2x}du$$

$$\left.\begin{array}{l} x=1\ ,\ u=x^2=1 \\ x=2\ ,\ u=x^2=4 \end{array}\right\} \Rightarrow \int_1^2 2x\cdot\ln x^2 dx=\int_1^4 2x\cdot\ln u\cdot\frac{1}{2x}du=\int_1^4 \ln u du$$

$$=[u\cdot\ln u-u]_1^4=[4\cdot\ln 4-4]-[1\cdot\ln 1-1]\approx 2.545$$

## پوښتنې

لاندې انتیګرالونه حل کړئ.

a) $\int \ln 2x^3 dx$

b) $\int \ln\sqrt{x}dx$

c) $\int \log\frac{x}{2}dx$

d) $\int 3\log\frac{1}{x}dx$

e) $\int_1^2 \frac{4}{e^{2x-4}}dx$

ketabton.com - The Digital Library

## د قسمي کسرونو په مرسته د انتیګرال محاسبه

د مخامخ کسر قسمي کسرونه پیدا کړئ.

$$\frac{5}{x^2-3x+2}=\frac{?}{(x-2)}+\frac{?}{(x-1)}$$

مخکې مو د قسمي کسرونو تجزیه مطالعه کړه اوس غواړو چې د هغو تابع ګانو انتیګرالونه د قسمي کسرونو په واسطه تر څېړنې لاندې ونیسو.

**لومړی مثال**: $\int \frac{7x-12}{x^2-6x+8}dx$ محاسبه کړئ.

**حل**: د قسمي کسرونو د تجزیې په مرسته لیکلای شو:

$$\frac{7x-12}{x^2-6x+8}dx=\frac{A}{(x-2)}+\frac{B}{(x-4)}$$

$$\frac{A(x-4)+B(x-2)}{(x-2)(x-4)}=\frac{Ax-4A+Bx-2B}{(x-2)(x-4)}=\frac{(A+B)x-4A-2B}{(x-2)(x-4)}$$

$$A+B=7$$

$$-4A-2B=-12$$

$$A=7-B$$

$$-4(7-B)-2B=-12$$

$$-28+4B-2B=-12$$

$$-28+2B=-12$$

$$2B=16 \Rightarrow B=8$$

$$A=7-8=-1$$

$$\frac{7x-12}{x^2-6x+8}=-\frac{1}{x-2}+\frac{8}{x-4}$$

نو لیکلای شو چې:

$$\int\frac{7x-12}{x^2-6x+8}dx=\int\frac{-1}{x-2}dx+\int\frac{8}{x-4}dx$$

$$\int\frac{7x-12}{x^2-6x+8}dx=-\int\frac{1}{x-2}dx+8\int\frac{1}{x-4}dx$$

$$=-\ln|x-2|+8\ln|x-4|+C=\ln(x-2)^{-1}+\ln(x-4)^8+C$$

$$=\ln\left[(x-2)^{-1}\cdot(x-4)^8\right]=\ln\left[\frac{(x-4)^8}{x-2}\right]+C$$

ketabton.com - The Digital Library

**دویم مثال**: د $\int \frac{-5x+9}{x^2+x-6}dx$ انتیګرال محاسبه کړئ.

**حل**: مخرج په فکټورونو تجزیه کوو: $x^2+x-6=(x-2)(x+3)$

نو:

$$\frac{-5x+9}{x^2+x-6}=\frac{-5x+9}{(x-2)(x+3)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+3}$$

$$\frac{A(x+3)+B(x-2)}{(x-2)(x+3)}=\frac{Ax+3A+Bx-2B}{(x-2)(x+3)}=\frac{(A+B)x+3A-2B}{(x-2)(x+3)}$$

$$(A+B)x+3A-2B=-5x+9$$

$$A+B=-5\Rightarrow A=-5-B$$

$$3A-2B=-5x+9$$

د $A$ او $B$ عددي قیمتونه عبارت دي له:

$$3(-5-B)-2B=9$$

$$-15-5B=9$$

$$-5B=24$$

$$B=-\frac{24}{5}$$

$$A=-5+\frac{24}{5}=\frac{-25+24}{5}=-\frac{1}{5}$$

$$\frac{-5x+9}{x^2+x-6}=\frac{-\frac{1}{5}}{x-2}-\frac{\frac{24}{5}}{x+3}$$

$$\int\frac{-5x+9}{x^2+x-6}=\int\frac{-\frac{1}{5}}{x-2}dx-\int\frac{\frac{24}{5}}{x+3}dx=-\frac{1}{5}\int\frac{1}{x-2}dx-\frac{24}{5}\int\frac{1}{x+3}dx$$

$$=-\frac{1}{5}\ln(x-2)-\frac{24}{5}\ln(x+3)$$

$$=\ln(x-2)^{-\frac{1}{5}}+\ln(x+3)^{-\frac{24}{5}}=\ln\left[(x-2)^{-\frac{1}{5}}\cdot(x+3)^{-\frac{24}{5}}\right]+C$$

## پوښتنې

لاندې انتیګرالونه د قسمی کسرونو په طریقه حل کړئ.

a) $\int\frac{x+2}{x^3-3x^2-x+3}dx$ b) $\int\frac{x-2}{x^2-6x+5}dx$ c) $\int\frac{x^6}{x^4+3x^2+2}dx$

ketabton.com - The Digital Library



- که $f(x)=e^x$ وي، نو ددې تابع مشتق عبارت له $f'(x)=e^x$ دی.
- که $f(x)=a^x$ وي، د دې تابع مشتق $f'(x)=a^x\cdot\ln a$ دی.
- که $f(x)=\log_a x$ وي، نو د تابع مشتق $f'(x)=\frac{1}{x}\log_a e=\frac{1}{x\ln a}$ دی.
- $f(x)=\log_a g(x)$ وي، نو د تابع مشتق $(\log_a g(x))'=\frac{g'(x)}{g(x)}\log_a e$ دی.
- **قسمي کسرونه**: د یوه واقعي کسر هغه کوچنی کسرونه چې د جمعې د عواملو په شکل لیکل شوي دي که هغوی جمع کړو، راکړل شوي واقعي کسر په لاس راځي، قسمي کسرونه بلل کېږي.
- که چېرې د $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$ د کسري پولینوم مخرج ($P_n(x)$) د خطي بېلابېلو ضربي عواملو څخه جوړوي چې تکرار نه وي راغلی په لاندې بڼه بدلیدلای شي:

$$\frac{P_m(x)}{P_n(x)}=\frac{A}{x-x_1}+\frac{B}{x-x_2}+\frac{C}{x-x_3}+\cdots+\frac{N}{x-x_n}$$

- که د لومړی درجه پولینوم مخرج ضربي عوامل چې ځینې یې تکرار راغلي وي، یعنې که د $x-x_0$ عامل $n$ ځلې تکرار شوی وي، نو لیکلای شو چې:

$$\frac{P_m(x)}{P_n(x)}=\frac{A}{x-x_0}+\frac{B}{(x-x_0)^2}+\cdots+\frac{N}{(x-x_0)^n}$$

- که د مخرج ضربي عوامل دویمه درجه پولینوم د تجزیې وړ نه وي او تکرار هم نه وي راغلی، نو د $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$ واقعي پولینوم یو ټوټه کسر $\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$ بڼه لري.
- د اکسپوننشیل تابع ګانو انتیګرال لپاره لیکلای شو:

$$\int e^x dx=e^x+C \quad , \quad \int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+C \quad , \quad (a\in IR^+\ ,\ a\neq 1)$$

- د لوګارتمي توابعو د انتیګرال لپاره لیکلای شو:

$$\int \ln x\,dx=x\ln x-x+C \quad , \quad \int \log_a x\,dx=x\log_a\frac{x}{e}+C$$

- ځینې تابع ګانې چې پرته د بدلون له لارې حل کېږي، لیکو:

$$f(x)=e^x \quad \Rightarrow \quad \int f(x)\,dx=\int e^x\,dx=e^x+C$$

ketabton.com - The Digital Library

## د پنځم څپرکي پوښتنې

لاندې پوښتنې حل کړئ.

1. د $f(x)=\ln(\frac{x-2}{x+2})$ د تابع مشتق پیدا کړئ.
2. د $f(x)=\ln\sqrt{x-1}$ تابع مشتق پیدا کړئ.
3. د $y=2x^{2x}$ تابع مشتق پیدا کړئ.
4. د $f(x)=\log\sqrt{x^3}$ تابع مشتق پیدا کړئ.
5. لاندې کسرونه په قسمي کسرونو تجزیه کړئ.

1) $\frac{x+1}{x^2-x-6}$ 2) $\frac{x^2-x+1}{x^3+2x^2+x}$ 3) $\frac{2x^2+3}{(x^2+1)^2}$

6. لاندې انتیګرالونه پیدا کړئ.

1) $\int 5t^7dt$ 2) $\int \frac{x^3-3}{x^2}dx$

3) $\int (2\cos x-5\sin x+e^x)dx$ 4) $\int \sqrt{\cos x}\sin x dx$

5) $\int xe^{-x}dx$ 6) $\int (\frac{5}{(2x+1)(x-2)})dx$

7) $\int_{-1}^{1}3x^2\sqrt{x^3+1}dx$

7 – د لاندې تابع ګانو مشتق پیدا کړئ.

*a*) $y=\ln(x^2+x+1)$ *b*) $y=\ln(\sin x)$

*c*) $y=e^{x^2+1}$ *d*) $y=\sqrt[x]{2}$

ketabton.com - The Digital Library

# شپږم څپرکی

## د انتیګرال تطبیقات

ketabton.com - The Digital Library



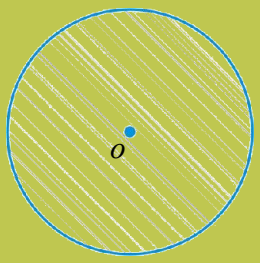


ketabton.com - The Digital Library

## د منحني ګانو پواسطه د محصور شوي سطحي د مساحت محاسبه

## *Accounting of area bounded by one curve*

**د مخامخ شکل مساحت چې یوه سطحه د یوې منحني په واسطه ترڅو شوې دایره ده. د مساحت فورمول یې وویاست.**







د $y = 1 - x^2$ تابع په پام کې ونیسئ.

- د تابع بحراني (*Critical Point*) ټکي او د $x$ محور سره د تقاطع ټکي پیدا او ګراف یې رسم کړئ.
- د $y = 1 - x^2$ تابع او $x$ محور تر منځ د سطحې د مساحت قیمت د انټیګرال په مرسته پیدا کړئ.
- پورتنۍ فعالیت د $y = -x^2 + 2x$ تابع لپاره تکرار کړئ او د منحني او د $x$ د محور تر منځ محصور شوی مساحت محاسبه کړئ.

له پورتني فعالیت څخه لاندې پایلې لاسته راځي:

_ $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ انټیګرال د یوې سطحې د مساحت قیمت راښیي چې د $y = f(x)$ منحني او د $x$ محور او د $x = a$ , $x = b$ د کرښو له خوا رابند (محصور) دی.

_ که د $f(x)$ تابع په $[a,b]$ ترڅ کې انټروال کې مثبت او متمادي وي، یعنې $y = f(x) \geq 0$ په دې صورت کې $f(x)$ تابع ګراف تل د $x$ محور پورته خواته او که $y = f(x) \leq 0$ وي، په دې حالت کې $f(x)$ تابع ګراف د $x$ محور لاندې خواته واقع ده او منفي دی.

**لومړی مثال**: د $x = 4 - y^2$ تابع د منحني او د $y$ د محور تر منځ محصور شوی مساحت پیدا کړئ.

ketabton.com - The Digital Library

**حل**: لومړی د تابع بحراني ټکي او د $y$ محور سره د تقاطع ټکي پیدا کوو، وروسته یې شکل رسموو، د بحراني ټکي د پیدا کولو لپاره لومړی د تابع مشتق نیسو او له صفر سره یې مساوي کوو او له محورونو سره د تقاطع ټکو د په لاس راوړلو لپاره تابع له صفر سره برابروو.

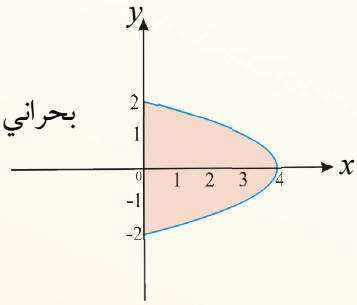
$$x = 4 - y^2 \Rightarrow x' = -2y = 0$$

$$x' = 0 \Rightarrow y = 0$$

$y = 0$ , $x = 4 - y^2 \Rightarrow x = 4 - 0 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow (4,0)$ بحراني ټکی

$x = 0$ , $4 - y^2 = 0 \Rightarrow y^2 = 4$

$y = \pm 2 \Rightarrow (0,2)$ , $(0,-2)$ د محورونو سره د تقاطع ټکي




څرنګه چې د $x = 4 - y^2$ معادله په $[-2,2]$ انټروال کې نظر $x$ محور ته دواړه ټکي متناظر دي، نو د نمایي مساحت په پام کې نیولو سره، د انټیګرال د مساحت سرحدات په لاندې ډول په لاس راوړو:

$$A = \int_{-2}^{2} (4 - y^2)\, dy = 2 \int_{0}^{2} (4 - y^2) dy = 2[4y - \frac{y^3}{3}]_0^2$$

$$A = 2\,[(4 \cdot 2 - \frac{2^3}{3}) - 0] = 2\,(8 - \frac{8}{3}) = 2\,(\frac{24-8}{3}) = 2\,(\frac{16}{3}) = \frac{32}{3}$$

**دویم مثال**: د $x$ محور او د $y = 1 - \frac{1}{2}x^2$ تابع منحني د محصور شوې سطحې مساحت محاسبه کړئ.

**حل**: د محصور شوې سطحې د مساحت ټاکلو لپاره لومړی بحراني ټکي او د $x$ له محور سره د تقاطع ټکي په لاس راوړو.

$$y = 1 - \frac{1}{2}x^2 \ , \ y' = -x$$

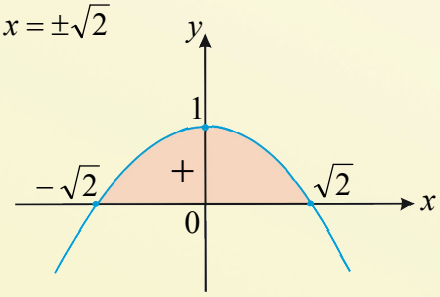
$$y' = 0 \Rightarrow x = 0$$

$x = 0,\ y = 1 - \frac{1}{2}x^2 = 1 \Rightarrow y = 1 - \frac{1}{2}0^2 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow (0,1)$ بحراني ټکي

$y = 0, 1 - \frac{1}{2}x^2 = 0 \Rightarrow -\frac{1}{2}x^2 = -1 \Rightarrow x^2 = 2,\ x = \pm\sqrt{2}$

$x_1 = \sqrt{2}$ , $x_2 = -\sqrt{2}$

$(\sqrt{2},0)$ , $(-\sqrt{2},0)$ له محورونو سره د تقاطع ټکي



ketabton.com - The Digital Library

$$A=\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}(1-\frac{1}{2}x^2)\,dx=2\int_{0}^{\sqrt{2}}(1-\frac{1}{2}x^2)\,dx=2([x-\frac{1}{6}x^3]_0^{\sqrt{2}})$$

$$A=2(\sqrt{2}-\frac{(\sqrt{2})^3}{6}-0)=2(\frac{6\sqrt{2}-(\sqrt{2})^3}{6})=2(\frac{6\sqrt{2}-\sqrt{8}}{6})$$

$$=(\frac{6\sqrt{2}-2\sqrt{2}}{3})=\frac{4\sqrt{2}}{3}$$

$$A=1.8853$$

**دریم مثال**: د $y=x^2-3$ تابع ګراف د $x$ له محور سره یوه سطحه رابند وي، د دې سطحې مساحت پیدا کړئ.

**حل**: لومړی د سطحې د ټاکلو لپاره د تابع ګراف رسموو او د تابع بحراني ټکي او د تقاطع ټکي په لاس راوړو:

$$y=x^2-3\Rightarrow y'=2x$$

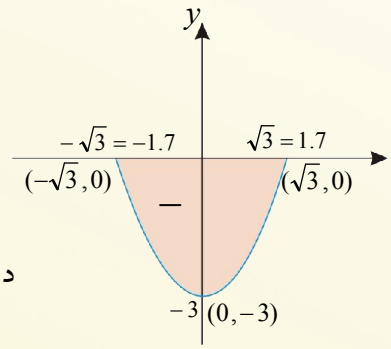
$$y'=0\Rightarrow x=0$$

$$x=0\ ,\ y=x^2-3\Rightarrow y=0^2-3$$

$$\Rightarrow y=-3\Rightarrow (0,-3)$$ بحراني ټکي

$$y=0\ ,\ x^2-3=0\Rightarrow x^2=3$$

$$x=\pm\sqrt{3}\Rightarrow(\sqrt{3},0)\ ,\ (-\sqrt{3},0)$$ د محورونو سره د تقاطع ټکي




څرنګه چې د $y=x^2-3$ تابع په $[\sqrt{3},-\sqrt{3}]$ انټروال کې د محور سره د تقاطع ټکي متناظر قیمتونه لري، نو ګراف یې د $x$ له محور څخه لاندې دی او انټیګرال یې منفي دی، نو له ټول مساحت څخه د انټیګرال د سرحدونو نیمایي مساحت پیدا کوو اوبه $2$ کې یې ضربوو:

$$A_1=\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}(x^2-3)\,dx=-2\int_{0}^{\sqrt{3}}(x^2-3)\,dx=-2(\int_{0}^{\sqrt{3}}x^2\,dx-3\int_{0}^{\sqrt{3}}dx)=-2([\frac{1}{3}x^3]_0^{\sqrt{3}}-[3x]_0^{\sqrt{3}})$$

$$=-2(\frac{1}{3}[(\sqrt{3})^3-0]-3[\sqrt{3}-0])=-2(\frac{1}{3}(\sqrt{3})^3-3\sqrt{3})$$

$$=-\frac{2}{3}(\sqrt{3})^3+6\sqrt{3}=-\frac{2}{3}(1.7)^3+6(1.7)=-\frac{2}{3}(4.913)+10.2=-\frac{9.826}{3}+10.2$$

$$=-3.2753+10.2=6.9247$$

ketabton.com - The Digital Library

**څلورم مثال**: د $y = x^2 - 3x$ تابع ګراف رسم د منحني او $x$ محور تر منځ د سطحي مساحت په $[-1,4]$ انټروال کې وټاکئ.

**حل**: لومړی د منحني بحراني ټکی او له له محورونو سره د تقاطع ټکي پیدا کوو:

$$y = x^2 - 3x$$

$$y' = 2x - 3 = 0 \Rightarrow 2x = 3 \ , \ x = \frac{3}{2}$$

$$x = \frac{3}{2} \ , \ \ y = x^2 - 3x \Rightarrow y = (\frac{3}{2})^2 - 3(\frac{3}{2})$$

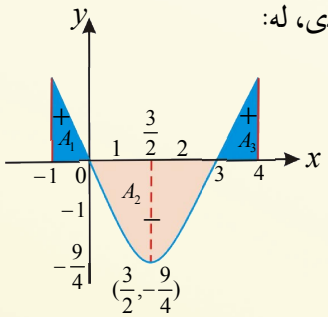
$$y = \frac{9}{4} - \frac{9}{2} = -\frac{9}{4} \ , \ \ (x,y) = (\frac{3}{2}, -\frac{9}{4})$$ بحراني ټکی

څرنګه چې $y'' = 2 > 0$ دی، نو د $(\frac{3}{2}, -\frac{9}{4})$ ټکي د تابع مطلق اصغري ټکي دي او د تقاطع ټکي یې د $x$ له محور سره عبارت دی، له:

$$y = 0 \Rightarrow x^2 - 3x = 0$$

$$\Rightarrow x(x-3) = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = 0 \quad , \quad x_2 = 3$$




$$A = A_1 - A_2 + A_3 = \int_{-1}^{0} (x^2 - 3x)\,dx - \int_{0}^{3} (x^2 - 3x)\,dx + \int_{3}^{4} (x^2 - 3x)\,dx$$

$$A = [\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2]_{-1}^{0} - [\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2]_{0}^{3} + [\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2]_{3}^{4}$$

$$A = [(\frac{1}{3}\cdot 0 - \frac{3}{2}\cdot 0) - (\frac{1}{3}\cdot(-1)^3 - \frac{3}{2}\cdot(-1)^2)] - [(\frac{1}{3}\cdot 3^3 - \frac{3}{2}\cdot 3^2) - (\frac{1}{3}\cdot 0 - \frac{3}{2}\cdot 0)] +$$

$$[(\frac{1}{3}\cdot(4)^3 - \frac{3}{2}\cdot(4)^2) - (\frac{1}{3}\cdot(3)^3 - \frac{3}{2}\cdot(3)^2)]$$

$$= -(-\frac{1}{3} - \frac{3}{2}) - (\frac{1}{3}\cdot 27 - \frac{3}{2}\cdot 9) + (\frac{1}{3}\cdot 64 - \frac{3}{2}\cdot 16) - (\frac{1}{3}\cdot 27 - \frac{3}{2}\cdot 9)$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{3}{2} - \frac{27}{3} + \frac{27}{2} + \frac{64}{3} - \frac{48}{2} - \frac{27}{3} + \frac{27}{2}$$

$$= \frac{1 - 27 + 64 - 27}{3} + \frac{3 + 27 - 48 + 27}{2} = \frac{65 - 54}{3} + \frac{57 - 48}{2} = \frac{11}{3} + \frac{9}{2} = \frac{22 + 27}{6} = \frac{49}{6}$$

ketabton.com - The Digital Library

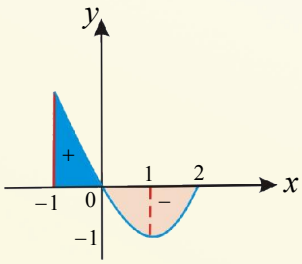
**پنځم مثال**: د $y = x^2 - 2x$ منحني او x محور ترمنځ مساحت د $[-1,2]$ په انټروال کې پیدا کړئ.

**حل**: لومړی بحراني ټکي وروسته د $x$ له محور سره د تقاطع ټکي په لاس راوړو:

$$y = x^2 - 2x \Rightarrow y' = 2x - 2 = 0$$
$$2x = 2 \Rightarrow x = 1$$
$$x = 1 \ , \quad y = x^2 - 2x = 1^2 - 2(1) = -1 \Rightarrow (1,-1)$$ بحراني ټکي

څرنګه چې $y'' = 2 > 0$ دی، نو تابع د $(1,-1)$ په ټکي کې مطلق اصغري لري او د $x$ له محور سره یې تقاطع په لاندې ډول ده.

$$y = 0 \quad , \quad x^2 - 2x = 0$$
$$x(x-2) = 0$$
$$x_1 = 0 \ , \ x_2 = 2$$




څرنګه چې منحني د $[-1,2]$ په انټروال کې له مبدأ څخه تیریږي او د منحني یوه برخه د $[-1,0]$ په انټروال کې د $x$ محور پورته خواته او بله برخه یې د $[0,2]$ په فاصلې کې د $x$ محور شکته خواته پرته ده انتیګرال یې منفي دی:

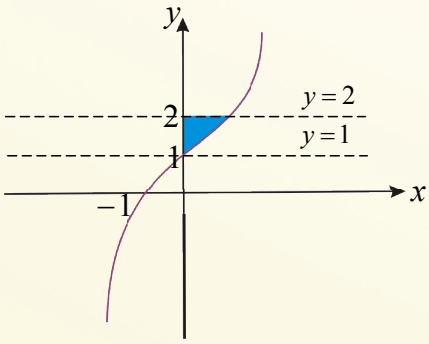
$$A = \int_{-1}^{0} (x^2 - 2x)dx - \int_{0}^{2} (x^2 - 2x)\,dx = [\frac{1}{3}x^3 - x^2]_{-1}^{0} - [\frac{1}{3}x^3 - x^2]_{0}^{2}$$
$$= (0 - (-\frac{1}{3} - 1)) - ((\frac{8}{3} - 4) - 0) = -(-\frac{1}{3} - 1) - (\frac{8}{3} - 4) = -(\frac{-1-3}{3}) - (\frac{8-12}{3})$$
$$= -(\frac{-4}{3}) - (\frac{-4}{3}) = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$$

ketabton.com - The Digital Library

## پوښتنې

1- د $f(x)=\sin x$ منحني او د $x$ محور تر منځ مساحت په $[-2\pi, 2\pi]$ انټروال کې حساب کړئ.

2- د $y=x^3+1$ تـــابع منحنـــي او $y=1$ ، $y=2$ کرښو تر منځ مساحت وټاکئ.



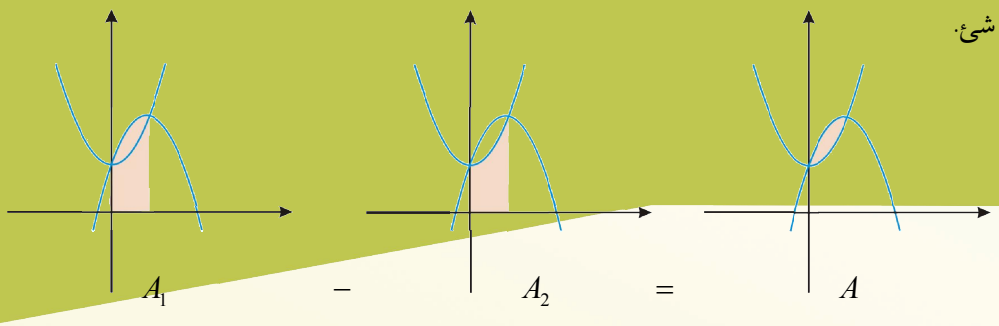

3- د $y=\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+1}+x}$ منحني او د $x=0$ او $x=1$ کرښو تر منځ مساحت حساب کړئ.

ketabton.com - The Digital Library

## د دوو محصور شويو منحني ګانو تر منځ د مساحت محاسبه

## *Accounting of area bounded by tow curves*

لانـــدې شـــکلونه پـــه پـــام کـــې ونيـــسئ د $A = A_1 - A_2$ اړيکـــې د ســـموالي پـــه اړه خـــه و يلای شئ.




فعاليت

که د $y_1 = 1 - x^2$ او $y_2 = x^2 - 1$ تابع ګاني راکړل شوی وي.

- د $y_1 = y_2$ رابطې څخه د $x$ قيمت په لاس راوړئ.
- د لاس ته راغلو قيمتونو په پام کې نيولو سره د هغوی ګراف رسم کړئ.
- څرنګه چې د $y_1$ تابع ګراف د $y_2$ تابع د ګراف څخه لوړ دی، نو د تابع ګانو د انتيګرال د تفريق حاصل $(y_1 - y_2)$ د $x$ په تړاکل شوی انټروال کې حساب کړئ.
- نوموړی فعاليت د $y = x^2$ تابع د منحني او $y = x + 2$ د کرښې لپاره تکرار کړئ او د محصورې شوي سطحې مساحت حساب کړئ.

د پورتنی فعاليت څخه لاندې پايلې لاسته راځي:

ـ که چېرې د $y_1 = f(x)$ او $y_2 = g(x)$ دوو منحنيګانو د محصور شوي سطحې د محاسبې لپاره په هغه صورت کې چې $f(x) > g(x)$ وي، يعنې د $f(x)$ تابع ګراف د $g(x)$ تابع دپاسه واقع وي، نو لومړی د دواړو منحني ګانو د تقاطع ټکي پيدا کوو وروسته د پاسني او لاندېنې منحني د $x$ د محور سره مساحت په $[a,b]$ انټروال کې محاسبه کوو:

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$$

ketabton.com - The Digital Library

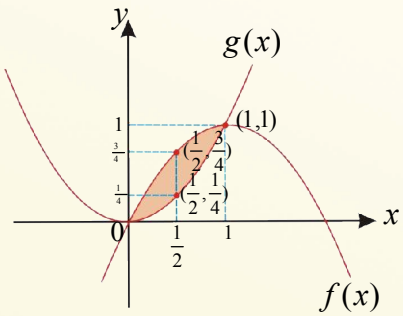
ـ که چېرې د $g(x)$ تابع ګراف د $f(x)$ تابع د ګراف دپاسه واقع وي، نو لرو چې:

$$A=\int_a^b [g(x)-f(x)]\,dx=\int_a^b g(x)\,dx-\int_a^b f(x)\,dx$$

**لومړی مثال**: د $f(x)=2x-x^2$ او $g(x)=x^2$ منحني ګانو د ګرافونو ترمنځ د پرتې سطحې مساحت حساب کړئ.

**حل**: لومړی د دواړو منحني ګانو د تقاطع ټکی پیدا کوو:

$$f(x)=2x-x^2\ ,\ g(x)=x^2$$
$$f(x)=g(x)\Rightarrow 2x-x^2=x^2$$
$$2x-x^2-x^2=0$$
$$2x-2x^2=0$$
$$2x(1-x)=0$$
$$2x=0 \quad \Rightarrow \quad x_1=0$$
$$1-x=0 \quad \Rightarrow \quad x_2=1$$



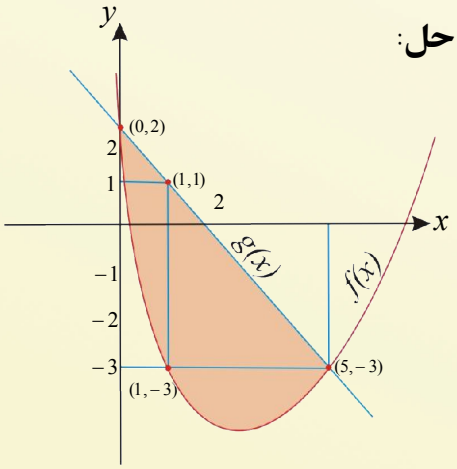

لیدل کېږي چې ددواړو منحني ګانو تقاطع $(1،1)$ او $(0،0)$ ده اوس د محصور شوي سطحې مساحت پیدا کوو.

$$A=\int_a^b [f(x)-g(x)]=\int_0^1 [2x-x^2-x^2]\,dx=\int_0^1 [2x-2x^2]=[\frac{2x^2}{2}-\frac{2x^3}{3}]_0^1$$
$$=[x^2-\frac{2}{3}x^3]_0^1=(1-\frac{2}{3})-0=\frac{3-2}{3}=\frac{1}{3}$$

**دویم مثال**: د $f(x)=x^2-6x+2$ تابع او $g(x)=2-x$ کرښې د ګرافونو تر منځ د پرتې سطحې مساحت حساب کړئ.

**حل**:

$$\left.\begin{matrix} f(x)=x^2-6x+2 \\ g(x)=2-x \end{matrix}\right\} \Rightarrow f(x)=g(x)$$
$$x^2-6x+2=2-x \Rightarrow x^2-6x+2-2+x=0$$
$$x^2-5x=0 \Rightarrow x(x-5)=0$$
$$x_1=0\ ,\ x_2=5$$
$$\Rightarrow (0,2)\ ,\ (5,-3)$$ د کرښې او منحني د تقاطع ټکي



ketabton.com - The Digital Library

له شکل څخه ښکاري چې د $g(x)$ کربنې ګراف د $f(x)$ ګراف پورته خوا ته واقع دی، په دې معنا چې

$$g(x) > f(x)$$

$$A = \int_a^b [g(x) - f(x)]\,dx = \int_0^5 (2 - x - x^2 + 6x - 2)\,dx$$

$$= \int_0^5 (-x - x^2 + 6x)\,dx = \int_0^5 (-x^2 + 5x)\,dx$$

$$= [-\frac{x^3}{3} + 5\frac{x^2}{2}]_0^5 = (-\frac{125}{3} + 5\cdot\frac{25}{2}) - 0 = -\frac{125}{3} + \frac{125}{2}$$

$$= \frac{-250 + 375}{6} = \frac{125}{6}$$

**دریم مثال**: د $f(x) = -x^2 + 4x + 2$ او $g(x) = x^2 - 2x + 2$ تابع ګانو د ګرافونو تر منځ د پرتې سطحې مساحت پیدا کړئ.

**حل**: څرنګه چې د دواړو ګرافونو د تقاطع ټکي د انتیګرال حدونه جوړوي، نو د دې ټکو د پیدا کولو لپاره $f(x) = g(x)$ وضع کوو:

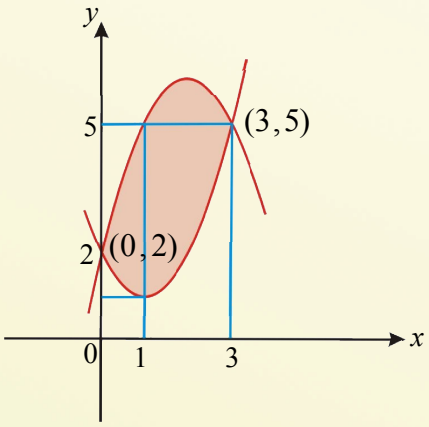
$$\left.\begin{aligned} f(x) &= -x^2 + 4x + 2 \\ g(x) &= x^2 - 2x + 2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow f(x) = g(x)$$

$$-x^2 + 4x + 2 = x^2 - 2x + 2$$

$$\Rightarrow -x^2 + 4x + 2 - x^2 + 2x - 2 = 0$$

$$-2x^2 + 6x = 0 \Rightarrow x(-2x + 6) = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = 0 \quad , \quad -2x = -6 \Rightarrow x_2 = 3$$




**د دواړو منحني ګانو د تقاطع ټکي** $(0,2)$ , $(3,5)$

د $x$ له محور سره د تقاطع ټکی عبارت له $(5،3)$، $(2،0)$ دی اوله شکل څخه لیدل کیږي چې د $f(x)$ ګراف د $g(x)$ له ګراف څخه پورته واقع دی، نو لرو:

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_0^3 (-x^2 + 4x + 2)dx - \int_0^3 (x^2 - 2x + 2)dx$$

$$= [-\frac{x^3}{3} + \frac{4x^2}{2} + 2x]_0^3 - [\frac{x^3}{3} - \frac{2x^2}{2} + 2x]_0^3$$

$$= -\frac{1}{3}\cdot 27 + 2\cdot 9 + 6 - 0 - \frac{1}{3}\cdot 27 + 9 - 6 + 0$$

$$= -9 + 18 - 9 + 9 = 9$$

ketabton.com - The Digital Library

## پوښتنې

1- د $y = x^2$ او $y = -x^2 + 4x$ منحني ګانو د ګرافونو تر منځ د پرتې سطحې مساحت پیدا کړئ.

2- د $y^2 = 2x - 2$ پارابول او $y = x - 5$ کرښې د ګرافونو تر منځ د سطحې مساحت حساب کړئ.

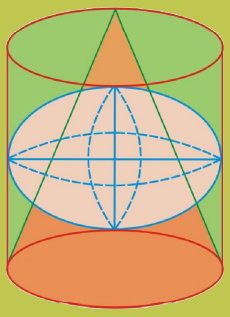
3- د $y^2 = 2x + 6$ منحني او $y = x - 1$ کرښې د ګرافونو تر منځ د سطحې مساحت محاسبه کړئ.

ketabton.com - The Digital Library

# دګراف له دوران څخه د په لاس راغلې جسم حجم

## *Accounting of rounding things Volume*

د مخامخ شکل د جسمونو د حجمونو **تر منځ نسبت پیدا کړئ.**



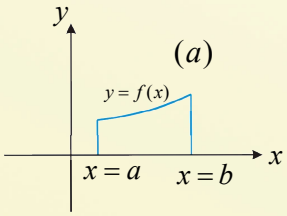
په مخکنیو ټولګیو کې مو د جسمونو حجم پیدا کړی وو. پرته له دې چې د هغوی فورمولونـه ثبـوت شـي منلـي مـو وو، خو اوس د جسمونو د حجم فورمولونه د معین انتیګرال څخه په ګټه اخیستنې سره ثبوتوو.



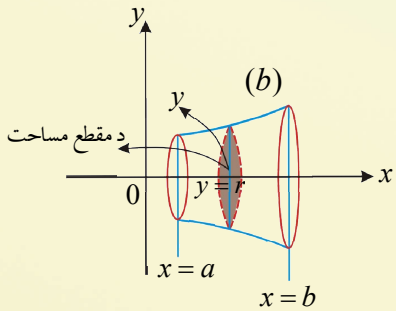

- یو ټکی او یوه کرښه په فضا کې داسې په پام کې ونیسئ چې ټکی د کرښې په منځ کې واقع وي.
- هغه جسم چې د یوې مستقیمې کرښې له دوران څخه د یوه ټکي په شـاوخوا لـه څرخـېدو وروسـته جـوړېږي، نوم یې واخلئ.
- د نوموړی جسم د حجم فورمول ولیکئ او ووایئ چې هغه څنګه ثبوتوو.

د پورتني فعالیت پایله داسې بیانوو:

- که چېرې د $y = f(x)$ متمادي تابع د منحني مـساحت نظر $(a)$ شکل ته




د $x = a$ او $x = b$ کرښـو او منحنـي پـه واسـطه محـصور شوی وي، نو د هغه جسم حجم چې د پورتني تابع د منحني له دوارن څخه د $x$ محور په شاوخوا لاسته راځي تقریباً اسـتوانه یې شکل لري، لکه د $(b)$ شکل.

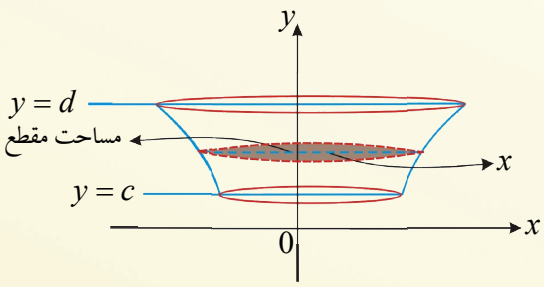


ketabton.com - The Digital Library

چې ارتفاع يې $\Delta x = b - a$ ده او د دې استوانې سطح د دايروي شکل په واسطه محصوره شوې ده چې دې سطحو ته مقطع وايي او پوهېږو چې د دايرې مساحت نظر $x$ محور ته $A(x) = \pi r^2$ دی او ددې مقطع شعاع شکل ته په کتو سره د $y$ محور سره موازي ده، نو $y = r$ کېږي او د حجم فورمول يې نظر ريمان مجموع ته په لاندې ډول دی:

$$v = \lim_{n\to\infty} V_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} A(x)\Delta x = \int_a^b \pi r^2\, dx = \int_a^b \pi y^2\, dx = \int_a^b \pi [f(x)]^2\, dx$$

- که د $x = f(y)$ تابع د منحني مساحت $y = c$ او $y = d$ کرښو ترمنځ محصور شوی وي ددې استوانې د مقطع مساحت نظر $y$ محور ته $A(y) = \pi r^2$ دی چې ارتفاع يې $\Delta y = d - c$ او شعاع يې $x = r$ سره ده هغه حجم چې له دې دوران څخه په لاس راځي په لاندې ډول دی:




$$v = \lim_{n\to\infty} V_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} A(y)\Delta y = \int_a^b \pi r^2\, dy = \int_a^b \pi x^2\, dy = \int_a^b \pi [f(y)]^2\, dy$$

د دوراني جسمونو حجم د انتيګرال په مرسته په لاس راځي، لکه:

1- د انتيګرال په مرسته د کرې حجم پيدا کړئ.

**ثبوت**: پوهېږو چې که چېرې نيمه دايره د خپل قطر په شاوخوا وخرخي کره لاس ته راځي او د دايرې معادله $x^2 + y^2 = r^2$ ده، اوس د نيمې دايرې حجم له خرخېدو وروسته په لاس راوړو او هغه دوه برابره کوو چې د دايرې بشپړ حجم په لاس راشي

$$x^2 + y^2 = r^2$$
$$y^2 = r^2 - x^2$$

ketabton.com - The Digital Library

$$V = \int_{-r}^{r} \pi y^2 dx = \pi \int_{-r}^{r} (r^2 - x^2)\, dx$$

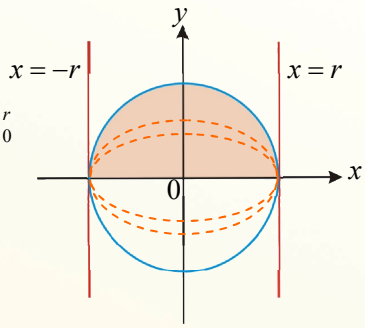
$$= 2\pi \int_{0}^{r} (r^2 - x^2)\, dx = 2\pi [r^2 x - \frac{x^3}{3}]_0^r$$

$$= 2\pi [(r^3 - \frac{r^3}{3}) - 0]$$

$$= 2\pi (\frac{3r^3 - r^3}{3})$$

$$= 2\pi (\frac{2r^3}{3})$$

$$V\ (\text{د کرې حجم}) = \frac{4}{3}\pi r^3$$




2- د انتیګرال په مرسته د مخروط حجم پیدا کړئ.

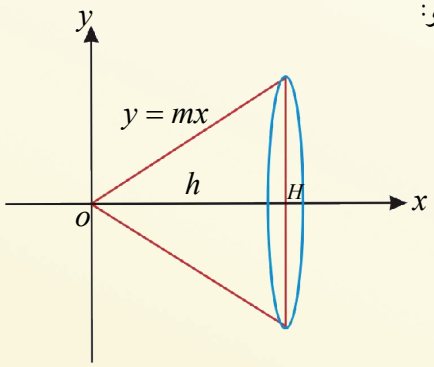
**ثبوت**: څرنګه چې مخروطي سطح د $y = mx$ کرښې له دوران څخه د $x$ د محور په چاپېریال په لاس راځي نو:

$$V = \int_0^h \pi\, y^2 dx$$

$$= \int_0^h \pi\, m^2 x^2 dx = \pi\, m^2 \int_0^h x^2 dx$$

$$= \pi\, m^2 [\frac{x^3}{3}]_0^h = \pi\, m^2 (\frac{h^3}{3})$$

$$= \frac{\pi\, h}{3} (mh)^2$$




له پورته شکل څخه لیدل کېږي چې د مخروط قاعده دایروي بڼه لري اوشعاع یې د $h$ محور سره موازي ده، یعنې $y // r$ او همدا رنګه د مخروط ارتفاع $(h)$ د $x$ په محور باندې منطبق ده، $(x = h)$ نو د $y = mx$ په اړیکه کې یې قیمت وضع کوو:

$$y = mx \quad \Rightarrow \quad r = mh$$

$$= \frac{\pi h}{3}\ r^2$$

$$V = \pi r^2 \times \frac{h}{3}$$

ketabton.com - The Digital Library

څرنګه چې د مخروط قاعده دايروي ده، د دايرې مساحت $\pi r^2$ دی، لرو چې:

$$V = \pi r^2 \cdot \frac{h}{3}$$

$$V(\text{د مخروط حجم}) = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

3- د الپس حجم چې د $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ د منحني او $x$ محور په چاپير د لوی قطر په شاوخوا له دوران وروسته جوړېږي، په لاس راوړئ.

**ثبوت**: د الپس د نيمايي حجم د لوی قطر په شاوخوا په لاس راوړو او هغه دوه چنده کوو چې د بشپړ الپس حجم په لاس راشي.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

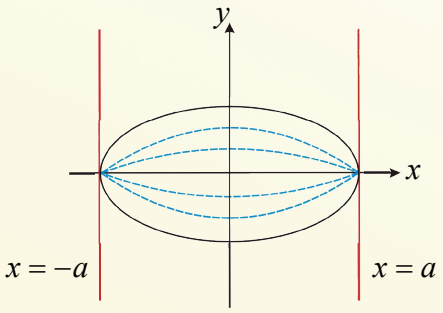
$$\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{x^2}{a^2} \Rightarrow y^2 = b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2$$

$$V = \int_{-a}^{a} \pi y^2\,dx = \pi \int_{-a}^{a} [b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2]dx$$

$$= 2\pi \int_{0}^{a} [b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2]dx = 2\pi[b^2 x - \frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x^3}{3}]_0^a$$

$$= 2\pi[(b^2 a - \frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{a^3}{3}) - 0] = 2\pi[b^2 a - \frac{b^2 a}{3}]$$

$$= 2\pi[\frac{3b^2 a - b^2 a}{3}] = 2\pi[\frac{2b^2 a}{3}]$$




$$\text{V} = \frac{4}{3}\pi b^2 a \Rightarrow \text{د الپس دوران د لوی قطر په شاوخوا حجم} = \frac{4}{3}\pi b^2 a$$

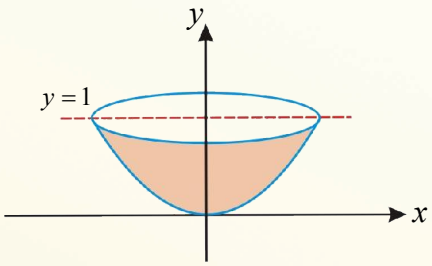
که چېرې د الپس محراقونه د $y$ په محور پراته وي او د هغه انتګرال حساب کړو د الپس د کوچني قطر په شاوخوا حجم په لاندې ډول په لاس راځي:

$$\text{د الپس دوران د کوچني قطر په شاوخوا حجم} = \frac{4}{3}\pi a^2 b$$

ketabton.com - The Digital Library

**لومړی مثال**: د هغه جسم حجم چې د $y=x^2$ او $y=1$ کربنې تر منځ پرتې مستوي مساحت د دوران څخه د $y$ په محور په لاس راځي، پیدا کړئ.

**حل**: لومړی شکل رسمو وروسته یې مساحت حسابوو:

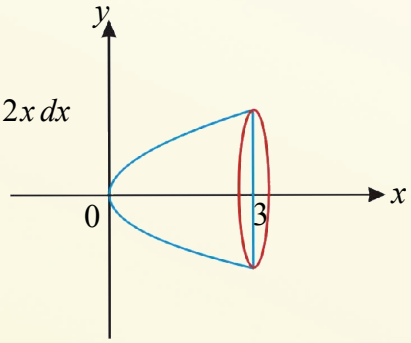



$$V=\int_a^b \pi x^2 dy=\pi\int_0^1 y\,dy=\frac{1}{2}\pi y^2\,|_0^1=\frac{1}{2}\pi$$

$$\Rightarrow V=\frac{\pi}{2}$$

**دویم مثال**: د $y=\sqrt{2x}$ تابع او $y=3$ کربنې ترمنځ د څرخیدلی جسم مساحت پیدا کړئ.

**حل:**




$$V=\int_a^b \pi\, y^2 dx=\int_0^3 \pi[\sqrt{2x}\,]^2 dx=\pi\int_0^3 [\sqrt{2x}\,]^2 dx=\pi\int_0^3 2x\,dx$$

$$V=2\pi\int_0^3 x\,dx=2\pi[\frac{x^2}{2}]_0^3$$

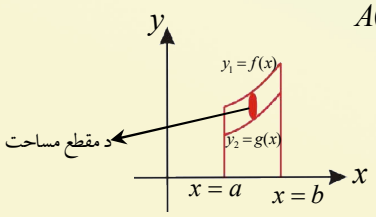
$$V=9\pi$$

**یادونه**: که د $y_1=f(x)$ او $y_2=g(x)$ تابع ګانې په $[a,b]$ انټروال کې متمادي وی د هغه دورانې جسم حجم د $f(x)$ او $g(x)$ منحني ګانو او د $x=a$ ، $x=b$ کربنو تر منځ جوړېږي له لاندې رابطې څخه لاسته راځي:

$\Delta x=$ د استوانې ارتفاع

$A(x)=$ (د استوانې د مقطع مساحت) $=\pi y_1-\pi y_2=\pi(y_1-y_2)$

د هغې استوانې د حجم فورمول چې د $f(x)$ تابع ګراف د $g(x)$ تابع ګراف څخه پورته قرار لري.




$$V=\int_a^b \pi(y_1^2-y_2^2)\,dx=\pi\int_a^b (y_1^2-y_2^2)\,dx$$

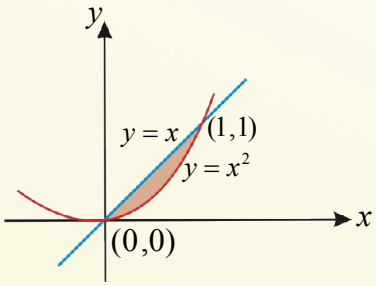
ketabton.com - The Digital Library

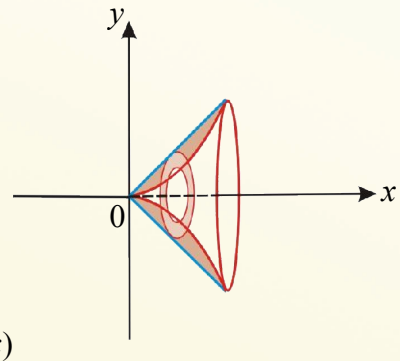
د هغې استوانې د حجم فورمول چې د $g(x)$ تابع ګراف ، د $f(x)$ ګراف څخه پورته واقع وي.

$$V=\int_a^b \pi(y_2^2-y_1^2)\,dx=\pi\int_a^b (y_2^2-y_1^2)\,dx$$

**مثال**: د هغه جسم حجم پیدا کړئ چې د $y=x^2$ منحني او $y=x$ کربنې تر منځ د پرتې سطحې مساحت له دوران څخه د $x$ محور په شاوخوا په لاس راځي، محاسبه کړئ.

**حل**:




$$\left.\begin{aligned} y_1 &= x^2 = f(x)\\ y_2 &= x = g(x)\end{aligned}\right\} \Rightarrow y_2 > y_1\ ,\ g(x) > f(x)$$

$$=\int_a^b \pi(y_2^2-y_1^2)\,dx=\int_0^1 \pi(x^2-(x^2)^2)dx$$

$$=\pi\int_0^1 (x^2-x^4)\,dx=\pi[\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5}]_0^1$$

$$=\pi[(\frac{1}{3}-0)-(\frac{1}{5}-0)]=\pi[\frac{1}{3}-\frac{1}{5}]$$

$$V=\pi[\frac{5-3}{15}]=\pi[\frac{2}{15}]=\frac{2\pi}{15}$$

## پوښتنې

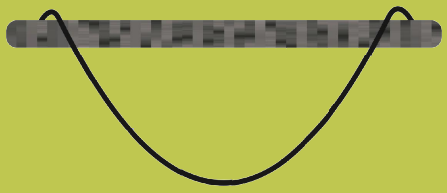
1. د هغه جسم حجم چې د $y=\sin x$ تابع او د $x=0$ او $x=\pi$ دوو کربنو تر منځ محصور شوی مساحت له دوران څخه د $x$ د محور په چاپېر جوړېږي پیدا کړئ.
2. د هغه جسم حجم پیدا کړئ چې د $y=x^3$ منحني او $y=8$ ، $x=0$ کربنو تر منځ محصور شوي مساحت له دوران څخه د $y$ د محور په چاپېر جوړېږي، حساب کړئ؟

ketabton.com - The Digital Library

## د قوس د اوږوالی محاسبه

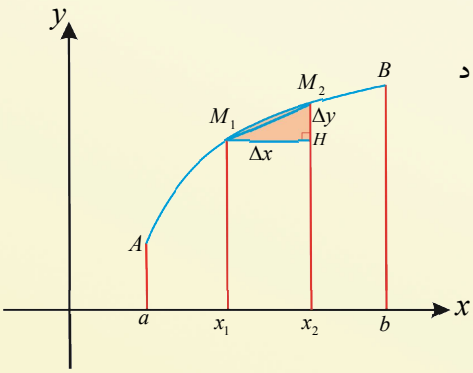
## *Accounting the Length of Arc*

څرنګه کولای شو چې د مخامخ پرې اوږدوالی پیدا کړو؟



فعالیت

- د قایمو مختصاتو په سیستم کې د $y = f(x)$ تابع په $[a,b]$ انټروال کې په پام کې ونیسئ او هغې ته $\overset{\frown}{AB}$ ووایې، داسې چې تابع په نوموړی فاصله کې متمادي او د مشتق وړ وي.
- د $[a,b]$ انټروال په درېو مساوي برخو ویشو او د $x_1$ او $x_2$ د قوس اوږدوالی په $M_1$ او $M_2$ ښیو.
- د $M_1$ له ټکي څخه یوه ټوټه کرښه د $M_2$ په ټکي او یوه بله کرښه، د هغې په مخامخ کرښه رسموو او د دواړو ټوټه کرښو، د تقاطع ټکی $H$ ونومئ.
- د $M_1H$ د کرښې فاصلې ته $\Delta x$ او $M_2H$ ته $\Delta y$ وایي او د $M_1HM_2$ د قایم الزاویه مثلث د مخامخ قوس اوږوالی د فیثاغورث د قضیې په مرسته حساب کړئ.




له پورتني فعالیت څخه کولای شو چې د $M_1HM_2$ مثلث د مخامخ قوس اوږدوالی داسې ثبوت کړو.

**ثبوت:**

له قایم‌الزاویه $M_1HM_2$ مثلث څخه په ګټې اخیستنې سره لرو چې:

$$(M_1M_2)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$$

$$M_1M_2 = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

ketabton.com - The Digital Library

د مشتق له تعریف څخه پوهېږو:

$$f'(t)=\frac{\Delta x}{\Delta t} \quad , \quad g'(t)=\frac{\Delta y}{\Delta t}$$

$$\Delta x = f'(t)\cdot\Delta t \quad , \quad \Delta y = g'(t)\cdot\Delta t$$

$$M_1M_2=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}=\sqrt{[f'(t)\cdot\Delta t]^2+[g'(t)\cdot\Delta t]^2}$$

$$M_1M_2=\sqrt{[f'(t)]^2+[g'(t)]^2}\cdot\Delta t$$

نو د ریمان له مجموعې څخه لرو:

$$L=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{[f'(t)]^2+[g'(t)]^2}\cdot\Delta t$$

$$L=\int_a^b\sqrt{[f'(t)]^2+[g'(t)]^2}\,dt$$

**لومړی مثال**: د $x^2+y^2=r^2$ د دایرې محیط محاسبه کړئ:

**حل**: څرنګه چې د دایرې پارامتري معادله په دې ډول $\begin{cases}x=r\cos t\\ y=r\sin t\end{cases}$ ده.

که چېرې $0\le t\le\pi$ وي، نو د دایرې نمایي محیط پیدا کړئ.

$$P=\int_0^{\pi}\sqrt{x'^2+y'^2}\,dt$$

$$x'=-r\sin t \quad , \quad y'=r\cos t$$

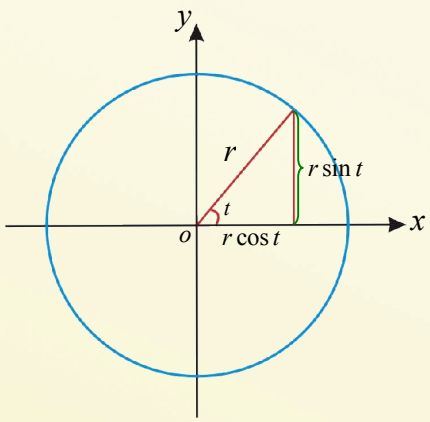
$$P=\int_0^{\pi}\sqrt{(-r\sin t)^2+(r\cos t)^2}\,dt$$

$$P=\int_0^{\pi}\sqrt{r^2\sin^2 t+r^2\cos^2 t}\,dt$$

$$P=\int_0^{\pi}\sqrt{r^2(\sin^2 t+\cos^2 t)}\,dt=\int_0^{\pi}\sqrt{r^2}\,dt$$

$$P=[r\,t]_0^{\pi}=(r\cdot\pi-r\cdot 0)=\pi r$$ د دایرې نیمایي محیط

$=2\pi r$ د دایرې مکمل محیط



ketabton.com - The Digital Library

**یادونه**:

1- د $y=f(x)$ منحني معادله په $a\le x\le b$ انټروال کې راکړل شوې ده، د $x$ د پارامتر په پام کې نیولو سره د منحنی د قوس اوږدوالی داسې محاسبه کوو:

$$L=\int_a^b \sqrt{1+f'^{\,2}(x)}\;dx$$

**مثال**: د $y=f(x)=x^{\frac{3}{2}}$ منحني د قوس اوږدوالي په $0\le x\le 4$ فاصله کې حساب کړئ.

**حل**: $f(x)=x^{\frac{3}{2}} \;\Rightarrow\; f'(x)=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$

$$L=\int_a^b \sqrt{1+f'^{2}(x)}\;dx=\int_0^4 \sqrt{1+(\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}})^2}\cdot dx$$

$$=\int_0^4 \sqrt{1+\frac{9}{4}x}\;\;dx=\int_0^4 \sqrt{u}\cdot\frac{4}{9}du=\frac{4}{9}\int_0^4 u^{\frac{1}{2}}\,du$$

$$=\frac{4}{9}[\frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}]_0^4=\frac{4}{9}\cdot\frac{2}{3}[u^{\frac{3}{2}}]_0^4=\frac{8}{27}[\sqrt{u^3}]_0^4$$

$$=\frac{8}{27}[\sqrt{(1+\frac{9}{4}x)^3}]_0^4=\frac{8}{27}[\sqrt{(1+\frac{9}{4}\cdot 4)^3-1}]=\frac{8}{27}(\sqrt{10^3}-1)$$

$$L=\frac{8}{27}(10\sqrt{10}-1)$$

$$u=1+\frac{9}{4}x$$

$$du=\frac{9}{4}dx$$

$$dx=\frac{4}{9}du$$

2- د $x=f(y)$ منحني په $a\le y\le b$ انټروال کې راکړل شوې ده، د $y$ د پارامتر د په پام کې نیولو سره لرو چې:

$$L=\int_a^b \sqrt{f'^{2}(y)+1}\;\;dy$$

**مثال**: د $x=f(y)=y^{\frac{3}{2}}$ منحني د قوس اوږدوالی په $1\le y\le 4$ انټروال کې حساب کړئ.

ketabton.com - The Digital Library

**حل:**

$$f(y)=y^{\frac{3}{2}} \quad , \quad f'(y)=\frac{3}{2}\cdot y^{\frac{1}{2}}$$

$$L=\int_a^b \sqrt{f'^2(y)+1}\,dy=\int_1^4 \sqrt{(\frac{3}{2}\cdot y^{\frac{1}{2}})^2+1}\,dy$$

$$=\int_1^4 \sqrt{\frac{9}{4}y+1}\,dy=\int_1^4 \sqrt{u}\cdot\frac{4}{9}du \qquad u=\frac{9}{4}y+1$$

$$=\frac{4}{9}\cdot\frac{2}{3}[u^{\frac{3}{2}}]_1^4=\frac{8}{27}[\sqrt{(\frac{9}{4}y+1)^3}]_1^4 \qquad du=\frac{9}{4}dy$$

$$=\frac{8}{27}[\sqrt{(10)^3}-\sqrt{(\frac{9}{4}+1)^3}] \qquad dy=\frac{4}{9}du$$

$$=\frac{8}{27}[\sqrt{1000}-\sqrt{(\frac{13}{4})^3}]=\frac{8}{27}[10\sqrt{10}-\sqrt{\frac{2197}{64}}]$$



**پوښتنې**

1. د $x=t^2$ او $y=t^3$ د منحنيګانو د قوس اوږدوالی د $1\le x\le 2$ د فاصلې تر منځ پیدا کړئ.
2. د $f(x)=\frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}}$ د منحنې د قوس اوږدوالی په $0\le x\le 1$ انتروال کې پیدا کړئ.

ketabton.com - The Digital Library



- د $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$ انټيګرال د يوې سطحې د مساحت اندازه يا پراخوالی راښيي چې د $y = f(x)$ منحني او د $x$ د محور او د $x = a$ او $x = b$ کرښو له خوا رابند دی.
- که د $f(x)$ تابع په $[a,b]$ انټروال کې مثبت او متمادي وي، يعنې $y = f(x) \geq 0$ په دې صورت کې د $f(x)$ تابع تل د $x$ د محور پورته خواته او که $y = f(x) \leq 0$ وي، په دې حالت کې د $f(x)$ د $x$ د محور لاندې خواته واقع او انټيګرال يې منفي دی.

**د دوو منحنيګانو په واسطه د محصور شوی سطې د مساحت محاسبه:**

- که چېرې د $f(x)$ تابع د $g(x)$ تابع دګراف په پورتنی برخه کې واقع وي، نو لرو:

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$$

- که چېرې د $g(x)$ تابع ګراف د $f(x)$ تابع په پاسنی برخه کې واقع وی؛ لرو چې:

$$A = \int_a^b [g(x) - f(x)]\,dx = \int_a^b g(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx$$

**دګراف له دوران څخه د په لاس راغلي جسم حجم**

- که چېرې د $y = f(x)$ متمادي تابع مساحت د $x = a$ او $x = b$ کرښو په واسطه محصور شوی وي، نو د هغه جسم حجم چې د پورتني تابع د منحني له دوارن څخه د $x$ محور په شاوخوا لاسته راځي تقريباً استوانهيي شکل لري .

چې ارتفاع يې $\Delta x = b - a$ ده او د دې استوانې سطح د دايروي سطحو په واسطه محصوره شوې ده چې دې سطحو ته مقطع وايي او پوهېږو چې د دايرې مساحت نظر د $x$ محور ته $A(x) = \pi r^2$ دی او ددې مقطع شعاع نظر شکل ته د $y$ له محور سره موازي دی؛ نو $y = r$ کېږي او د حجم فورمول يې نظر د ريمان مجموعې ته په لاندې ډول دی: $v = \lim_{n\to\infty} V_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} A(x)\Delta x = \int_a^b \pi r^2\,dx = \int_a^b \pi y^2\,dx = \pi \int_a^b [f(x)]^2\,dx$

- که د $x = f(y)$ تابع مساحت د $y = c$ ، $y = d$ کرښو ترمنځ محصور شوی وي دداسې استوانې مقطع نظر y محور ته $A(y) = \pi r^2$ چې ارتفاع يې $\Delta x = d - c$ او شعاع يې $x = r$ سره ده هغه حجم چې ددې دوران له مساحت څخه په لاس راځي په لاندې ډول دی:

$$v = \lim_{n\to\infty} V_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} A(y)\Delta y = \int_a^b \pi r^2\,dy = \int_a^b \pi x^2\,dy = \pi \int_a^b [f(y)]^2\,dy$$

**د قوس د اوږدوالي محاسبه:**

ketabton.com - The Digital Library

د قوس د اوږدوالي د محاسبې فورمول: $L=\int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2+[g'(t)]^2}\,dt$

$$L=\int_a^b \sqrt{1+f'^2(x)}\,dx \qquad (1$$

$$L=\int_a^b \sqrt{1+f'^2(y)}\,dy \qquad (2$$

## د شپږم څپرکي پوښتنې

1. د $y^2-x-5=0$ منحني او د $y$ د محور تر منځ د پرتې سطحې مساحت محاسبه کړئ.
2. د هغې سطحې مساحت چې د $y=\sin x$ منحني په $[0,2\pi]$ انټروال کې او د $x$ د محور تر منځ پرته ده، پیدا کړئ.
3. د $y=x^2-2x$ او $y=6x-x^2$ منحني ګانو تر منځ د پرتې سطحې مساحت حساب کړئ.
4. د $y=-x^2+4x-3$ منحني او $x$ محور تر منځ د پرتې سطحې مساحت پیدا کړئ.
5. د $y=x^3-6x^2+8x$ او $y=x^2-4x$ منحني ګانو تر منځ د پرتې سطحې مساحت پیدا کړئ.
6. د هغه جسم حجم وټاکئ چې د $y=\sin x-\cos x$ منحني او $x=0$ , $x=\frac{\pi}{2}$ کرښو د $x$ محور په شاوخوا له دوران څخه په لاس راځي، حساب کړئ.
7. د هغې سطحې حجم چې د $y=\frac{1}{4}x^2+2$ منحني له دوران څخه د $x$ د محور پرشاوخوا په $[0,4]$ انټروال کې جوړ شوي وي.
8. د هغې رابندې شوې سطحې د جسم حجم چې د $y=x^2$ منحني او د $x^2+y^2=2$ دایرې له دوران څخه د $x$ محور په شاوخوا جوړ شوې وي، پیدا کړئ.
9. د هغه جسم حجم چې د $y=\frac{1}{2}x+1$ کرښې دوران او د $x$ محور په $[2,6]$ انټروال کې جوړېږي، په لاس راوړئ.
10. د $y=-x+4$ منحني د قوس اوږدوالی په $-2\le x\le 2$ انټروال کې حساب کړئ.
11. د $y=\frac{4}{3}x+\frac{4}{3}$ تابع د منحني د قوس اوږوالی په $2\le x\le 5$ انټروال کې پیدا کړئ.

ketabton.com - The Digital Library

# اووم څپرکی

# احصائیه

ketabton.com - The Digital Library

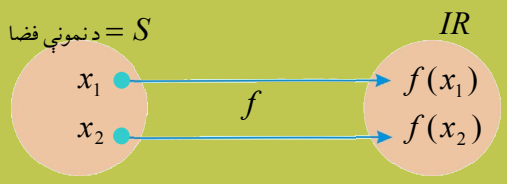
# موږ ټول افغانان یو.



ketabton.com - The Digital Library

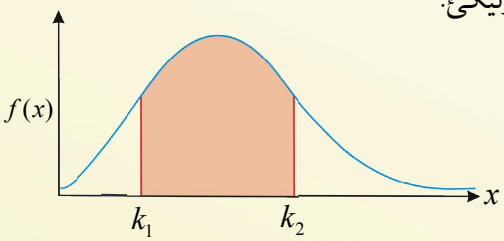
## د احتمال د تابع توزیع

د تصادفي ازمايښت، نمونه‌يي فضا او د ناڅاپه متحول کلمې ستاسو په ذهن کې څه څه را ژوندي کوي.




فعالیت

- هغه تصادفي متحول چې په احصائیه او احتمالاتو کې ترې ګټه اخلي، له هغه متحول سره چې په الجبر کې مو لوستي دی، څه توپیر لري؟
- که $x_1, x_2, \ldots x_n$ د یوه سټ عناصر او $P(x = x_i) = f(x_i)$ تابع ولرو، هغه مرتبې جوړې چې د نوموړې تابع څخه په لاس راځي، جوړې او بیا یې ولیکئ.




- مخامخ شکل ته په کتنې سره د $k_1$ او $k_2$ مقدارونو ترمنځ او $f(x)$ د منحني لاندې محدود شوی مساحت د انتیګرال په شکل وښیئ.

- د لاندې جدول په پام کې نیولو سره د $[E(x = x_i)] = \sum_{i=1}^{2} x_i f(x_i)$ , $[x_i - E(x_i)]^2$ او $[x_i - E(x_i)]^2 f(x_i)$ مجموعه په لاس راوړئ.

| $x_i$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $f(x_i)$ | 0.5 | 0.5 |

ketabton.com - The Digital Library

د پورتني فعالیت پایله داسې بیانوو:

ـ هغه تصادفي متحول چې په احصائیه او احتمالاتو کې تر څېړنې لاندې نیول کېږي عبارت له هغې تابع څخه دی چې د تعریف ناحیه یې نمونه‌یي فضا او د قیمتونو ناحیه یې حقیقي اعداد دي.

ـ که $P(x=x_i)=f(x_i)$ ولرو، نو د $[x_1\ ,\ f(x_1)]\ ,\ [x_2\ ,f(x_2)],\ ...\ ,[x_n\ ,f(x_n)]$ مرتبو جوړو ته د مجزا(غیر متمادي) احتمال تابع وایي.

- د تجمعي او متمادی احتمال تابع کولای شو، په دې بڼه $F(x)=P(X\le x)$ وښیو.
- که چېرې $f(x)$ د احتمال تابع او $x$ تصادفي متحول وي، په دې صورت کې د دې احتمال چې $x$ د $k_1$ او $k_2$ په منځ کې وي برابر دی له:

$$P(k_1\le x\le k_2)=\int_{k_1}^{k_2} f(x)\,dx$$

- که چېرې $x$ پیوسته ناڅاپه (تصادفي) متحول او $k_1<k_2$ څخه وي، په دې صورت کې:

$$P(k_1\le x\le k_2)=F(k_2)-F(k_1)$$

- که چېرې $x$ ناڅاپه مجزا متحول وي، په دې حالت کې اوسط (*Expected Value*) د $x$ تصادفي مجزا متحول چې د $E(x)$ په بڼه ښودل کېږي، برابر دی له:

$$E(x)=x_1f(x_1)+x_2f(x_2)+.....+x_nf(x_n)=\sum_{i=1}^{n}x_if(x_i)$$

$E(x)$ د $x$ اوسط هم بلل کېږي چې هغه په $\bar{x}$ ښیي همدارنګه که چېرې $x$ غیر متمادي تصادفي متحول وي، په دې صورت کې د $x$ وریانس چې په $S^2$ ښودل کېږي برابر دی له:

$$S^2=\sum_{i=1}^{n}\left[x_i-E(x_i)\right]^2 f(x_i)$$

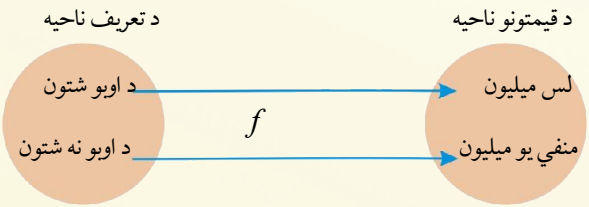
ketabton.com - The Digital Library

**مثال**: یو شخصي شرکت غواړي د یوې غونډې پر سر د اوبو یوه څاه وکني، د اوبو څاه په یو میلیون افغانی تمامېږي که نوموړی څاه اوبه ورکړي د شرکت مالک لس میلیونه افغانی اجوره اخلي، پرته له هغې به د څاه د کېندلو یو میلیون افغانی مصرف په زیان ورکړي.

الف_ دا موضوع د یوې تابع په بڼه وښیئ.

ب_ که د دې احتمال چې کیندل شوي څاه اوبه ورکړي 0.2 او د نه ورکولو احتمال یې 0.8 وي، په دې صورت کې د احتمال تابع، اوسط (*Expected Value*)، وریانس او د $x$ تصادفي متحول معیاري انحراف پیدا کړي.

**د الف حل**:




**د ب حل**:د تصادفي متحول د احتمال تابع اوسط، وریانس او معیاري انحراف په لاندې جدول کې ښودل شوی دی:

| تصادفی متحول | د احتمال تابع | اوسط | د تصادفي متحول د مربعاتو انحراف د تصادفي متحول له اوسط څخه | واریانس | انحراف معیاری |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | $f(x_i)$ | $E(x)=\sum x_i f(x_i)$ | $[x_i-E(x)]^2$ | $S^2=[x_i-E(x)]^2 f(x_i)$ | $S$ |
| $-1$ | 0.8 | $-1\cdot 0.8=-0.8$ | $(-1-1.2)^2=4.84$ | $4.84\cdot 0.8=3.872$ | 4.4 |
| 10 | 0.2 | $10\cdot 0.2=2$ | $(10-1.2)^2=77.44$ | $77.44\cdot 0.2=15.488$ | |
| | 0.1 | 1.2 | | $\sum S^2=19.360$ | |

ketabton.com - The Digital Library

## پوښتنې

فرض کوو چې د یوه موټر پلورنځي د 100 ورځو خرڅلاو په لاندې ډول دی:

| د ورځو شمېر | 60 | 30 | 8 | 2 |
|---|---|---|---|---|
| د پېرودل شوو موټرو شمېر | 0 | 1 | 2 | 3 |

د $x$ تصادفي متحول د احتمال تابع او د تجمعي احتمال تابع پیدا کړئ.

د تجمعي احتمال له تابع څخه په ګټه اخېستنې سره ووایئ چې په یوه ورځ کې حداکثر احتمال د (2) موټرونو او حداقل احتمال د دوو موټرونو په کومه کچه ده؟

ketabton.com - The Digital Library

## د دوه جملهيي توزيع او د برنولي ازمويښت



يو ګډون کوونکي د پوهنتون د کانکور په آزموينه کې له 160 سؤالونو څخه 100 سوالونه حل کړل. تاسې څه سوچ کوئ چې دا ګډون‌کوونکی په آزموينه کې بريالی کېږي او يا بې نتيجه پاتې کېږي؟

د احتمال دوه جملهيي توزيع يوه غيرمتمادي توزيع ده چې د مختلفو پېښو د توصيف لپاره په کار وړل کېږي اکثراً پېښې چې په نړۍ کې منځ ته راځي دوه حالتونه لري.

### فعاليت

د لاندې آزمويښتي پېښو له شرطونو څخه څه ډول پايلې په لاس راوړلای شئ.

- څو ځلې دوه سکې واچول شي چې سمدلاسه دواړه شېر راشي.
- څو ځلې دوه تاسه واچول شي چې د شمېرو مجموعه يې له 7 څخه کوچنی شي.
- له يوې جعبې څخه څو ځلې د يوې مرۍ(مهره) اخېستل چې د تورو او سپينو مرۍ لرونکي ده.
- له يوې جعبې څخه چې د تورو او سپينو مريو لرونکې ده څو ځلې يوه مرۍ واخېستل شي چې اخېستل شوی مرۍ سپينه وي(چې اخېستل شوي مرۍ بيا په جعبه کې واچول شي)
- که چېرې $m$ بريالیتوب له $n$ آزمايښت څخه( $m < n$ ) چې ترتيب په کې مهم نه دی دا ټاکنه د څه په نامه يادېږي او فورمول يې وليکئ.
- که د $m$ شکلونو د بريالیتوب احتمال د $n$ ازمايښت څخه په $P$ او $n-m$ شکلونو د ناکامې احتمال د $n$ له آزمايښت څخه په $q$ وښودل شي، نو د $m$ له کاميابي احتمال د آزمايښت د $n$ له شکلونو څخه به څو وي؟
- زده‌کوونکي له پنځو څلور ځوابه آزموينې له پوښتنو سره مخامخ کېږي. هغوی په ناڅاپه ډول پوښتنو ته ځوابونه ورکوي، فرض کړئ که د (سم ځواب) بريالیتوب په $T$ او (ناسم ځواب) نه بريالیتوب د $F$ په توری وښودل شي په دې صورت کې د هر يوه سم او ناسم ځواب احتمال به څومره وي؟

له پورتني فعاليت څخه څرګندېږي چې د برنولي آزمايښت يو ناڅاپه ازمايښت دی چې کولای شو پايله يې په دوو حالتونو بريالیتوب او نابريالیتوب دسته بندي کړو.

ketabton.com - The Digital Library

د برنولي توزيع کولای شو چې په $P(x=m)=P^m(1-P)^{1-m}=P^m\cdot q^{1-m}$ په بڼه وښيو په داسې حال کې چې $P$ د بريالیتوب احتمال او $q=1-p$ د نابريالیتوب احتمال دی.

که چېرې یو ازمایښت $n$ ځلې تکرار کړو، یو ترادف په لاس راځي، داسې چې که د هر آزمایښت د بریالیتوب احتمال $P$ او نابریالیتوب احتمال $q$ وي، په دې صورت کې د $n$ ځلې آزمایښت څخه د $m$ ځلې بریالیتوب احتمال عبارت دی له: $0\le m\le n$ $P(X\le m)=\binom{n}{m}P^m q^{n-m}$

پورتني اړیکه کولای شو چې په دې ډول $B(m,n,p)$ هم وښيو.

د پورتني فورمول په پام کې نیولو سره کولای شو، د دوه جملهیي د توزیع اوسط په $\bar{x}=np$ او د دوی د توزیع معیاري انحراف د $S=\sqrt{npq}$ په بڼه وښيو.

**مثال**: د یوه ناروغ د بڼه کېدو احتمال د شکرې له ناروغی څخه $0.4$ دی، که چېرې $15$ تنه په دې ناروغی اخته وي، ددې څومره احتمال شته چې پنځه تنه بڼه شي او همدا شان پیدا کړئ چې له $3$ څخه تر $4$ تنو پورې جوړ شي.

**حل**: څرنګه چې $n=15$ , $m=5$ , $q=0.6$ , $P=0.4$ دی نو:

$$P(m=5)=\binom{n}{m}P^m\cdot q^{n-m}=\binom{15}{5}(0.4)^5(0.6)^{10}$$

$$=\frac{15!}{5!(15-5)!}\cdot 0.01024\cdot 0.00604661760=\frac{360360}{120}\cdot 0.00006191$$

$$=\frac{22.3098876}{120}=0.1859$$

$$P(3\le m\le 4)=\sum_{i=3}^{4}\binom{15}{i}(0.4)^i(0.6)^{15-i}=(3^{15})(0.4)^3(0.6)^{15-3}+(4^{15})(0.4)^4(0.6)^{15-4}$$

$$=\frac{15!}{3!(15-3)!}(0.064)(0.6)^{12}+\frac{15!}{4!(15-4)!}(0.0256)(0.6)^{11}$$

$$=\frac{2730}{6}(0.000139264)+\frac{3270}{24}(0.0000928512)$$

$$=\frac{0.38019072}{6}+\frac{0.3036}{24}=0.063365+0.012650$$

$$P(3\le m\le 4)=0.076015$$

## پوښتنې

په یوه کلي کې $200$ کورنی اوسېږي که هره کورنی $4$ ماشومان ولري ددې احتمال پیدا کړئ چې هره کورنی

- حد اقل یو زوی لري.
- یوازې دوه زامن لري.
- یوه یا دوې لونې ولري.

ketabton.com - The Digital Library

## د پواسن د احتمال توزيع

1) $b(x,n,p)=\binom{x}{n}p^x q^{n-x}$

2) $\lim_{n\to\infty} b(x,n,p)=\dfrac{\lambda^x\cdot e^{-\lambda}}{x!}$

3) $P(x,\lambda)=\dfrac{\lambda^x\cdot e^{-\lambda}}{x!}$

که چېرې د برنولي دوه جملهيي توزيع فورمول په پام کې ونيسو، ايا ويلاي شئ که چېرې د برنولي په دوه جملهيي توزيع کې د $P$ قيمت صفر ته تقرب وکړي او د $n$ قيمت لايتناهي ته تقرب وکړي، نو د برنولي دوه جملهيي توزيع څه سره مساوي کېږي.




کـــه $p=0.1, n=5$ او $m=2$ وي د $P(x=m)=\dfrac{e^{-\lambda}\lambda^m}{m!}$ قيمتونـــه پـــه داســـې حـــال کـــې چـــې $P(X=m)=\binom{n}{m}P^m q^{n-m}$ او $\lambda=np$ وي محاسبه کړئ او د پاسنيو توابعو لـه قيمتونـو سـره يـې پرتلـه کړئ، ويلای شئ چې د کوم فورمول په کار وړل، ساده دی؟

د پواسن فورمول کولای شي چې د $m$ شکلونو د کاميابئ احتمال د $n$ آزمايښتونو څخه کله چې $n$ لـوی او د کاميابي احتمال $P$ کوچنی وي، د تقريبي محاسبې لپاره کارول کېږي.

دا فورمول عبارت دی له: $P(X=m)=\dfrac{e^{-x}\lambda^m}{m!}$

چې $\lambda=np$ او $e=2.71828$ دی.

په ياد ولرئ چې د پواسن په توزيع کې اوسط او هم وريانس له $\lambda$ سره برابر دی.

ketabton.com - The Digital Library

**مثال**: 200 تنو مسافرينو د يوې الوتکې ټکټ اخېستلی دی د مخکنيو تجاربو په اساس که د هغه مسافرينو چې ټکټ يې رانيولی دی د نه راتګ احتمال 0.01 وي. ددې احتمال چې 3 تنه مسافرين بېرته را نه شي څومره دی.

**حل**: په دې مسئله کې د(نه راتلل) کاميابي ده او همدارنګه ليدل کېږي چې $n = 200$ ډېر لوی او $P = 0.01$ يعنې د کاميابی احتمال کوچنی دی، نو لرو:

$$P(X = m) = \frac{e^{-\lambda}\,\lambda^{m}}{m!} \qquad \lambda = n\,p = 200 \cdot 0.01 = 2$$

$$P(3) = \frac{(2.71828)^{-2} \cdot 2^{3}}{3!} = \frac{\frac{1}{(2.71828)^{2}} \cdot 8}{6} = \frac{\frac{1}{7.3890461584} \cdot 8}{6}$$

$$= \frac{0.13533 \cdot 8}{6} = \frac{1.08268}{6} = 0.1804$$

اوس که چېرې دا احتمال د دو جملهيي په فورمول محاسبه کړو،لرو چې:

$$P(X = m) = \binom{n}{m} P^{m}\ q^{n-m}$$

$$\left.\begin{matrix} n = 200 \\ p = 0.01 \end{matrix}\right\} \Rightarrow q = 0.99$$

$$P(3) = P(X = 3) = \binom{200}{3} (0.01)^{3} (0.099)^{200-3}$$

$$= \frac{200!}{3! \cdot 197!} (0.01)^{3} (0.099)^{197} = 0.1814$$

څرنګه چې ليدل کېږي دواړه ځوابونه سره معادل دي، نو واضح ده چې د پواسن د فورمول له لارې احتمال محاسبه ساده ده.

ketabton.com - The Digital Library

**یادونه**:

د پواسن د فورمول په واسطه کولای شو چې په یوه ټاکلي وخت کې د ورتللو د شمېر احتمال په لاندې ډول وښیو:

$$P(X=m)=\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^m}{m!}$$

په پورتني فورمول کې $t$ د ښودل شوی وخت نسبت پر ټول وخت چې اوسط هغې ته ورکړل شـوی وي $m$ د ورتللو شمېر د $t$ په واحد وخت کې د $\lambda$ د ورتګ شمېر اوسط په واحد د وخت کې دی.

**مثال**: که په یوه ساعت کې د یوه بانک د مراجعینو شمېر په متوسـط ډول 60 تنـه وي، ددې احتمـال چې خلور تنه په لومړیو دریو دقیقو کې راغلی وي، څومره دی.

**حل**:

$$\lambda=60 \quad , \quad t=\frac{3}{60}=\frac{1}{20}$$

$$m=4 \quad , \quad \lambda t=60\cdot\frac{1}{20}=3$$

$$P(m=4)=\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^m}{m!}=\frac{e^{-3}(3)^4}{4!}=\frac{(2.71828)^{-3}(3)^4}{4!}=\frac{\frac{1}{(2.71828)^3}\cdot 81}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}$$

$$=\frac{\frac{1}{20.0854}\cdot 81}{24}=\frac{4.03278}{24}=0.168032$$

ketabton.com - The Digital Library

## پوښتنې

د چاپ د يوه ماشين د جوړولو لپاره په يوه کال کې په متوسط ډول ورتګ دوه ځلې ده، فرض کوو چې د پواسن توزيع په دې اړه صدق کوي.

**الف**: د ماشين د جوړولو لپاره د ورتګ د احتمال توزيع په يوه کال کې حساب کړئ.

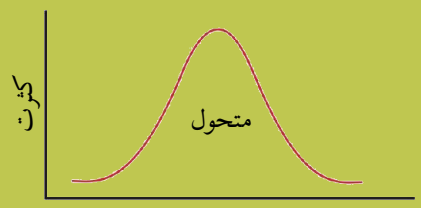
**ب**: د توزيع اوسط او معياري انحراف څومره دی؟

**ج**: فرض کړئ که د هر ورتګ مصرف 100 افغانۍ وي، د هر ماشين د جوړولو مصرف پيدا کړئ؟

**د**: ددې احتمال چې په هر کال کې ديوه ماشين د جوړولو مصرف له 300 افغانيو څخه زيات وي، څومره دی؟

ketabton.com - The Digital Library

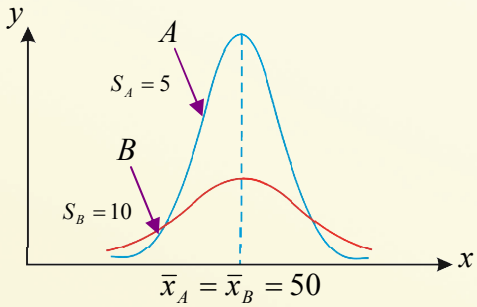
## د نورمال توزیع



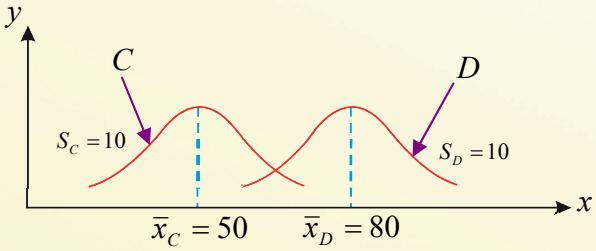

پـوهېږو چې د نورمـالي منحنـي شـکل مـشابه او متنـاظر لـه زانګولی سره ده، په نورماله منحني کې د پراګنده‌ګـی مرکـزي شاخـــصونه(معيـــاري انحـــراف او اوســـط) څـــه ډول ځایونه(موقعیتونه) نیولی شي.



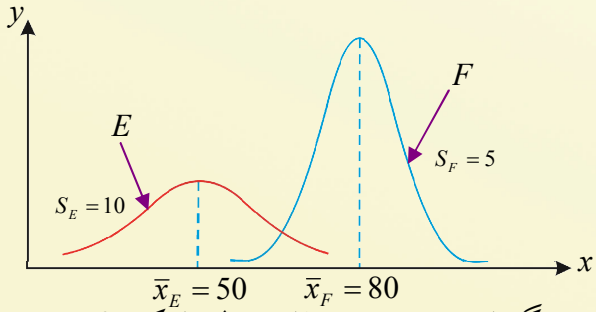

څو نورمالي توزیع ګانې له بېلابېلو سطحو او معیاري انحرافونو سره په لاندې شکلونو کې ورکړل شوي دي.




الف شکل




ب شکل




ج شکل

لاندینی فعالیت له پورتنیو شکلونو څخه په ګټه اخېستنې سره په شفاهي ډول بیان کړئ؟

ketabton.com - The Digital Library

- د الف په شکل کې د $A$ او $B$ د تصادفي متحول توزيع د خه ډول معياري انحراف او اوسط لرونکې ده؟
- د ب په شکل کې $C$ او $D$ توزيع د خه ډول معياري انحراف او اوسط لرونکی دی؟
- د ج په شکل کې د $E$ او $F$ توزيع د خه ډول معياري انحراف اوسط لرونکی دی؟
- د نورمال منحني شکل دواړو خواوو ته ترکوم ځايه غزيدلی دی؟

د پورتني فعاليت له سرته رسولو څخه داسې پايله په لاس راځي چې:

د نورمال منحني توزيع کېدای شي چې په څلورو طريقو يو له بل سره توپير ولري. د نورمال توزيع رياضيکي معادله چې د $f(x)$ احتمال توزيع تابع ښودونکی ده، په لاندې ډول ښوول کېږي.

$$f(x)=\frac{1}{s\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\bar{x}}{s})^2}$$

او يا

$$f(x)=N(x,\bar{x},s)$$

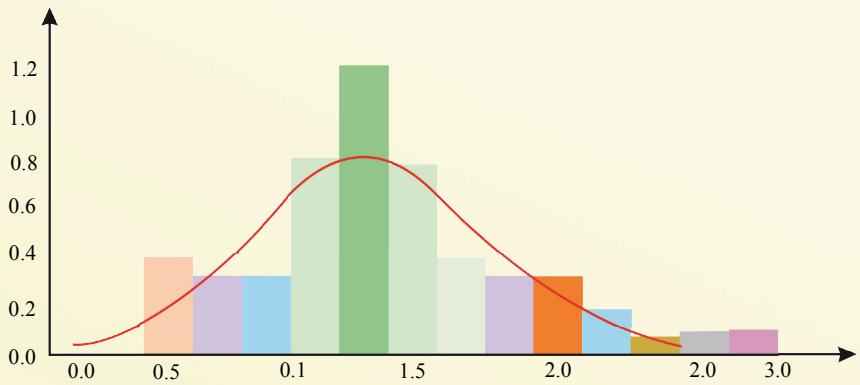
په داسې حال کې چې $e=2.71828$ او $\pi$ هم ثابت عدد 3.14189 دی $\bar{x}$ اوسط، $s$ معياري انحراف ، $x$ متمادی تصادفي مقدار او $f(x)$ د منحني جګوالی راښيي.

د نورمالې توزيع له متمادی توزيعګانو څخه ده. د نورمالي توزيع په واسطه کولای شو، د اندازه کولو توپير په ښه توګه سره نژدې کړو.

ketabton.com - The Digital Library

**مثال**: د موټرونو ماشین د تیلو سوزولو په وخت کې یوه اندازه مضر لوګی تولیدوي، د هغه مضر لوګي مقدار چې له 46 موټرونو تولیدېږي، د یوه تن په واسطه چې لورنزن نومېده په 1980 کال کې وڅېړل شو.یوه اندازه لوګی د نایتروجن اوکسایدونه لري. لاندې مستطیلي ګراف د نایتروجن اوکساید میزان د $(\frac{gr}{mil})$ د 46 موټرونو د نورمال احتمال توزیع اوسط او وریانس چې د نمونې کس له خوا تر څېړنې لاندې نیول شوی. ددې مستطیلي ګراف د ستونونو مساحت متناسب دی له هغو 46 نمونهیي شمېر له اندازهګیري سره چې ددې ستون د افقي ټکو تر منځ قرار لري.

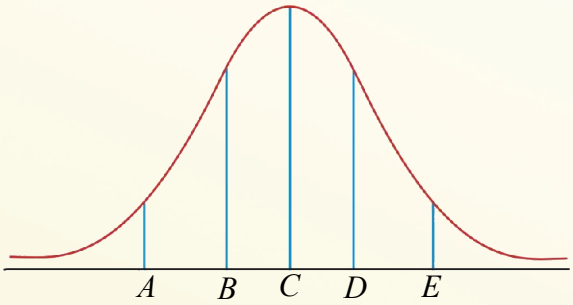
د مثال په ډول په څلورم ستون کې(چې له 1 څخه تر 1.2 پورې په افقي محور قرار لري) د $0.870 \cdot 0.2 = 0.174$ مساحت لرونکی دی چې د $\frac{4}{46}$ سره برابر دی، ځکه 8 دیتا له 1 څخه تر 1.2 پورې پراته دي.



ketabton.com - The Digital Library

## پوښتنه

لاندېنی شکل په پام کې ونیسئ د $A, B, C, D$ او $E$ ټکو موقعیت د معیاري انحراف د اوسط له جنسه پیدا کړئ.

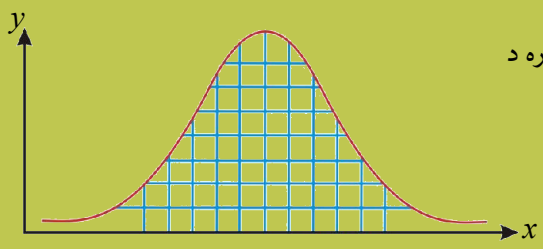


ketabton.com - The Digital Library

## د نورمال توزيع منحني لاندې مساحت او د هغې ستندرډ کول

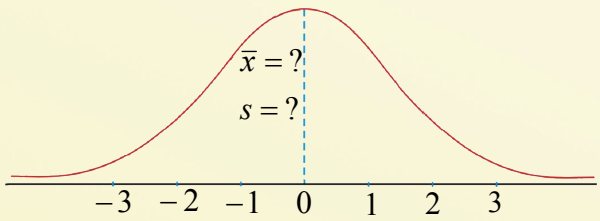
مخامخ شکل په پام کې ونیسئ:

د $y = f(x)$ د منحني لاندې مساحت د محاسبې لپاره د څه ډول لارو وړاندیز کوئ.



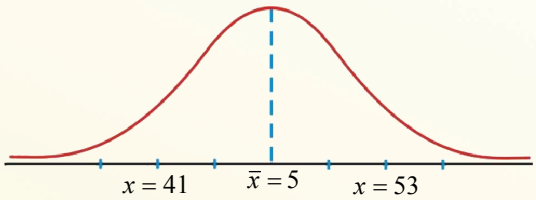

### فعالیت

- که چېرې د $x$ تصادفي متمادي متحول د احتمال نورمال توزیع چې اوسط یې $\bar{x}$ او معیاري انحراف یې $s$ وي، ددې احتمال چې دا تصادفي متحول د $x_1$ او $x_2$ تر منځ کمیت غوره کړي د انتیګرال په بڼه یې ولیکئ.
- سوچ کولای شئ چې د احتمال نورمال توزیع د ریاضي شکل انتیګرال محاسبه به ساده کار وي.
- که چېرې د نورمال تصادفي متحول په $z = \frac{x - \bar{x}}{s}$ ډول ولیکو، د $f(x)$ د احتمال توزیع تابع له څه سره برابره ده؟
- ویلای شئ چې اوسط او معیاري انحراف په لاندې شکل کې له کومو عددونو سره برابر دی؟



ketabton.com - The Digital Library

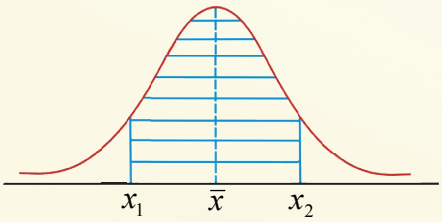
- کـه پـه لانـدې شـکل کـې چـې د $x=41$ او $x=53$ قیمتونـه پـه نورمـال ډول د $\bar{x}=50$ اوسـط او $S=5$ معیار انحراف ښودل شوی دی، نو د $z=\frac{x-\bar{x}}{s}$ مقدار په لاس راوړئ.




له پورتني فعالیت څخه دا پایله په لاس راځي چې د احتمال د محاسبې لپاره داسې چې د $x$ پیوسته تصادفي متحول د $x_1$ او $x_2$ تر منځ یو کمیت ونیسئ، نو باید د $x$ د احتمال د توزیع له تابع څخه انتګرال ونیسو او د منحني لاندې سطحه د $x_1$ او $x_2$ فاصلو ترمنځ په لاندې ډول محاسبه کړو:

$$f(x_1<x<x_2)=\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx=\int_{x_1}^{x_2}\frac{1}{s\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\bar{x}}{s})^2}$$

$$=\int_{x_1}^{x_2} N(x,\bar{x},s)dx$$




د نورمال توزیع احتمال محاسبه ساده کار نـه دی، د نورمـال توزیـع ګـانو د منحنـي لانـدې مـساحت محاسـبه اوږدو جدولونو ته اړتیـا لـري چـې عمـلاً داکـار ګـران دی، کـولای شـو چـې د جـدول د جوړولـو شـکل د احصائیوي data د سټنډرډ کولو په واسطه حل کړو.

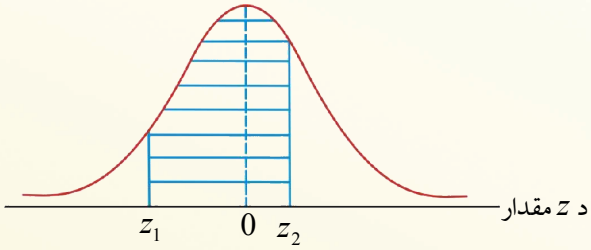
په دې معنا چې کولای شو په $x$ پورې اړوند تصادفي متحول چـې د نورمـال توزیـع لرونکـی دی، د لانـدې اړیکې په واسطه سټنډرډ کړو. $z=\frac{x-\bar{x}}{s}$

دلته $z$ د سټنډرډ نورمال متحول په نامه او منحني ته د سټنډرډ نورمال منحني پـه نامـه یـا د نورمـال احتمـال منحني نومول کېږي، په یاد ولرئ چې د $z$ سټنډرډ وي، متحـول تـل د صـفر اوسـط لرونکـی او یـو معیـار انحراف یې دی، همدرانګه د نورمال منحني او افقي محور ترمنځ مساحت له ټاکل شوي واحد سره برابـر وي.

ketabton.com - The Digital Library

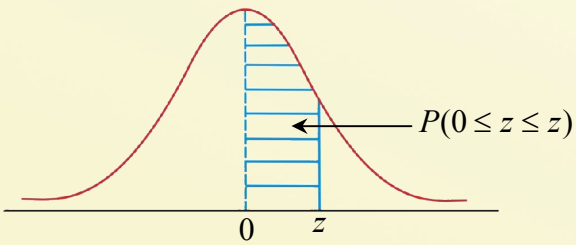
لاندې مساحت د یوه منحني یوه برخه د نورمال احتمال چې له احتمال سره مستقیم تناسب لري او کولای شو چې د $z = \frac{x - \bar{x}}{s}$ بدلولو سره یې په لاندې ډول وښیو.

$$f(z_1 < z < z_2) = \int_{z_1}^{z_2} \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-z^2}{2}} dz = \int_{z_1}^{z_2} N(z, 0, 1)\, dz$$

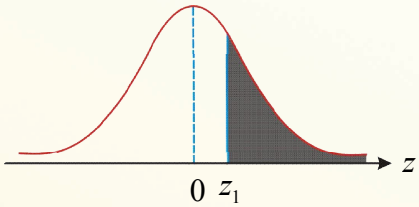



د $x$ متحول منحني لاندې مساحت چې د $x = x_1$ او $x = x_2$ ترمنځ واقع دی، د $z$ متحول له منحني مساحت سره چې د $z = z_1$ او $z = z_2$ ترمنځ پراته مساوي دي. په پایله کې کولای شو چې د نورمال د توزیع ستنډرډ د جدول په لرلو سره د نورمال توزیع احتمال د ناڅاپه متحول د هر ممکنه قیمت لپاره په لاس راوړای شو.

د ستنډرډ نورمال د توزیع احتمال د جدول د استعمال له لارې کولای شو، په لنډ ډول توضیح کړو. هغه جدول چې ددې لوست په پای کې راغلی دی، د ستنډرډ نورمال توزیع اړوند په احتمالاتو کې ګډون لري. لاندې جدول ددې لوست یوه برخه د جدول پای راښیي، هغه ارقام چې د جدول دپاسه لیکل شوی دی، راښیي چې $z$ د مثبتو مقدارونو لپاره تنظیم شوی دی چې د منحني لاندې مساحت له صفر ټکي څخه تر $z$ پورې راښیي.



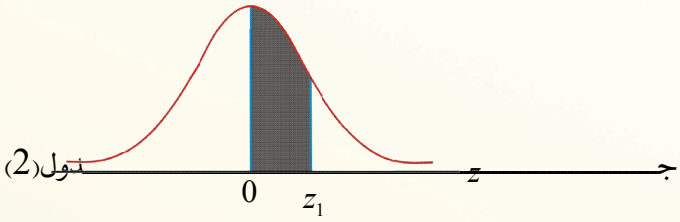
ketabton.com - The Digital Library




جدول(1)

| z | 0.00 | 0.01 | 0.02 | 0.03 | 0.04 | 0.05 | 0.06 | 0.07 | 0.08 | 0.09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.0 | 0.5000 | 0.5040 | 0.5080 | 0.5120 | 0.5160 | 0.5199 | 0.5239 | 0.5279 | 0.5319 | 0.5359 |
| 0.1 | 0.5398 | 0.5438 | 0.5478 | 0.5517 | 0.5557 | 0.5596 | 0.5636 | 0.5675 | 0.5714 | 0.5753 |
| 0.2 | 0.5793 | 0.5832 | 0.5871 | 0.5910 | 0.5948 | 0.5987 | 0.6026 | 0.6064 | 0.6103 | 0.6141 |
| 0.3 | 0.6179 | 0.6217 | 0.6255 | 0.6293 | 0.6331 | 0.6368 | 0.6406 | 0.6443 | 0.6480 | 0.6517 |
| 0.4 | 0.6554 | 0.6591 | 0.6628 | 0.6664 | 0.6700 | 0.6736 | 0.6772 | 0.6808 | 0.6844 | 0.6879 |
| 0.5 | 0.6915 | 0.6950 | 0.6985 | 0.7019 | 0.7054 | 0.7088 | 0.7123 | 0.7157 | 0.7190 | 0.7224 |
| 0.6 | 0.7257 | 0.7291 | 0.7324 | 0.7357 | 0.7389 | 0.7422 | 0.7454 | 0.7486 | 0.7517 | 0.7549 |
| 0.7 | 0.7580 | 0.7611 | 0.7642 | 0.7673 | 0.7704 | 0.7734 | 0.7764 | 0.7794 | 0.7823 | 0.7852 |
| 0.8 | 0.7881 | 0.7910 | 0.7939 | 0.7967 | 0.7995 | 0.8023 | 0.8051 | 0.8078 | 0.8106 | 0.8133 |
| 0.9 | 0.8159 | 0.8186 | 0.8212 | 0.8238 | 0.8264 | 0.8289 | 0.8315 | 0.8340 | 0.8365 | 0.8389 |
| 1.0 | 0.8413 | 0.8438 | 0.8461 | 0.8485 | 0.8508 | 0.8531 | 0.8554 | 0.8577 | 0.8599 | 0.8621 |
| 1.1 | 0.8643 | 0.8665 | 0.8686 | 0.8708 | 0.8729 | 0.8749 | 0.8770 | 0.8790 | 0.8810 | 0.8830 |
| 1.2 | 0.8849 | 0.8869 | 0.8888 | 0.8907 | 0.8925 | 0.8944 | 0.8962 | 0.8980 | 0.8997 | 0.9015 |
| 1.3 | 0.9032 | 0.9049 | 0.9066 | 0.9082 | 0.9099 | 0.9115 | 0.9131 | 0.9147 | 0.9162 | 0.9177 |
| 1.4 | 0.9192 | 0.9207 | 0.9222 | 0.9236 | 0.9251 | 0.9265 | 0.9278 | 0.9292 | 0.9306 | 0.9319 |
| 1.5 | 0.9332 | 0.9345 | 0.9357 | 0.9370 | 0.9382 | 0.9394 | 0.9406 | 0.9418 | 0.9429 | 0.9441 |
| 1.6 | 0.9452 | 0.9463 | 0.9474 | 0.9484 | 0.9495 | 0.9505 | 0.9515 | 0.9525 | 0.9535 | 0.9545 |
| 1.7 | 0.9554 | 0.9564 | 0.9573 | 0.9582 | 0.9591 | 0.9599 | 0.9608 | 0.9616 | 0.9625 | 0.9633 |
| 1.8 | 0.9641 | 0.9649 | 0.9656 | 0.9664 | 0.9671 | 0.9678 | 0.9686 | 0.9693 | 0.9699 | 0.9706 |
| 1.9 | 0.9713 | 0.9719 | 0.9726 | 0.9732 | 0.9738 | 0.9744 | 0.9750 | 0.9756 | 0.9761 | 0.9767 |
| 2.0 | 0.9772 | 0.9778 | 0.9783 | 0.9788 | 0.9793 | 0.9798 | 0.9803 | 0.9808 | 0.9812 | 0.9817 |
| 2.1 | 0.9821 | 0.9826 | 0.9830 | 0.9834 | 0.9838 | 0.9842 | 0.9846 | 0.9850 | 0.9854 | 0.9857 |
| 2.2 | 0.9861 | 0.9864 | 0.9268 | 0.9871 | 0.9875 | 0.9878 | 0.9881 | 0.9884 | 0.9887 | 0.9890 |
| 2.3 | 0.9893 | 0.9896 | 0.9898 | 0.9901 | 0.9904 | 0.9906 | 0.9909 | 0.9911 | 0.9913 | 0.9916 |
| 2.4 | 0.9918 | 0.9920 | 0.9922 | 0.9925 | 0.9927 | 0.9929 | 0.9931 | 0.9932 | 0.9934 | 0.9936 |
| 2.5 | 0.9938 | 0.9940 | 0.9941 | 0.9943 | 0.9945 | 0.9946 | 0.9948 | 0.9949 | 0.9951 | 0.9952 |
| 2.6 | 0.9953 | 0.9955 | 0.9956 | 0.9957 | 0.9959 | 0.9960 | 0.9961 | 0.9962 | 0.9963 | 0.9964 |
| 2.7 | 0.9965 | 0.9966 | 0.9967 | 0.9968 | 0.9969 | 0.9970 | 0.9971 | 0.9972 | 0.9973 | 0.9974 |
| 2.8 | 0.9974 | 0.9975 | 0.9976 | 0.9977 | 0.9977 | 0.9978 | 0.9979 | 0.9979 | 0.9980 | 0.9981 |
| 2.9 | 0.9981 | 0.9982 | 0.9982 | 0.9983 | 0.9984 | 0.9984 | 0.9985 | 0.9985 | 0.9986 | 0.9986 |
| 3.0 | 0.9987 | 0.9987 | 0.9987 | 0.9988 | 0.9988 | 0.9989 | 0.9989 | 0.9989 | 0.9990 | 0.9990 |
| 3.1 | 0.9990 | 0.9991 | 0.9991 | 0.9991 | 0.9992 | 0.9992 | 0.9992 | 0.9992 | 0.9993 | 0.9993 |
| 3.2 | 0.9993 | 0.9993 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9995 | 0.9995 | 0.9995 |
| 3.3 | 0.9995 | 0.9995 | 0.9995 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9997 |

ketabton.com - The Digital Library




| Z | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.0 | 0.0000 | 0.0040 | 0.0080 | 0.0120 | 0.0160 | 0.0199 | 00239 | 0.0279 | 00311 | 0.0359 |
| 0.1 | 0.0398 | 0.0438 | 0.0478 | 0.0517 | 0.0557 | 0.0596 | 0.0636 | 0.0675 | 0.0714 | 0.0754 |
| 0.2 | 0.0793 | 0.0832 | 0.0871 | 0.0910 | 0.0948 | 0.0978 | 0.1026 | 0.1064 | 0.1103 | 0.1141 |
| 0.3 | 0.1179 | 0.1217 | 0.1255 | 0.1293 | 0.1331 | 0.1368 | 0.1406 | 0.1443 | 0.1480 | 0.1517 |
| 0.4 | 0.1554 | 0.1591 | 0.1628 | 0.1664 | 0.1700 | 0.1736 | 0.1772 | 0.1808 | 0.1844 | 0.1879 |
| 0.5 | 0.1915 | 0.1950 | 0.1985 | 0.2019 | 0.2054 | 0.2088 | 0.2123 | 0.2157 | 0.2190 | 0.2226 |
| 0.6 | 0.2258 | 0.2291 | 0.2324 | 0.2357 | 0.2389 | 0.2422 | 0.2454 | 0.2454 | 0.2486 | 0.2549 |
| 0.7 | 0.2580 | 0.2612 | 0.2642 | 0.2673 | 0.2704 | 0.2734 | 0.2764 | 0.2794 | 0.2823 | 0.2852 |
| 0.8 | 0.2881 | 0.2910 | 0.2939 | 0.2967 | 0.2996 | 0.3023 | 0.3051 | 0.3078 | 0.3106 | 0.3133 |
| 0.9 | 0.3159 | 0.3186 | 0.3212 | 0.3238 | 0.3264 | 0.3289 | 0.3315 | 0.3340 | 0.3365 | 0.3389 |
| 1.0 | 0.3413 | 0.3438 | 0.3461 | 0.3485 | 0.3508 | 0.3531 | 0.3554 | 0.3577 | 0.3599 | 0.3621 |
| 1.1 | 0.3643 | 0.3665 | 0.3686 | 0.3708 | 0.3729 | 0.3749 | 0.3770 | 0.3790 | 0.3810 | 0.3830 |
| 1.2 | 0.3849 | 0.3869 | 0.3888 | 0.3907 | 0.3925 | 0.3944 | 0.3962 | 0.3980 | 0.3997 | 0.4015 |
| 1.3 | 0.4032 | 0.4049 | 0.4066 | 0.4082 | 0.4099 | 0.4115 | 0.4131 | 0.4147 | 0.4162 | 0.4177 |
| 1.4 | 0.4192 | 0.4207 | 0.4222 | 0.4236 | 0.4251 | 0.4265 | 0.4279 | 0.4292 | 0.4306 | 0.4319 |
| 1.5 | 0.4332 | 0.4345 | 0.4357 | 0.4370 | 0.4382 | 0.4394 | 0.4409 | 0.4418 | 0.4429 | 0.4441 |
| 1.6 | 0.4452 | 0.4463 | 0.4474 | 0.4484 | 0.4495 | 0.4505 | 0.4515 | 0.4525 | 0.4535 | 0.4545 |
| 1.7 | 0.4554 | 0.4564 | 0.4573 | 0.4582 | 0.4591 | 0.4599 | 0.4608 | 0.4616 | 0.4625 | 0.4633 |
| 1.8 | 0.4641 | 0.4649 | 0.4656 | 0.4664 | 0.4671 | 0.4678 | 0.4686 | 0.4693 | 0.4699 | 0.4706 |
| 1.9 | 0.4713 | 0.4719 | 0.4727 | 0.4732 | 0.4738 | 0.4744 | 0.4750 | 0.4756 | 0.4761 | 0.4767 |
| 2.0 | 0.4772 | 0.4778 | 0.4783 | 0.4788 | 0.4793 | 0.4798 | 0.4803 | 0.4808 | 0.4812 | 0.4817 |
| 2.1 | 0.4821 | 0.4826 | 0.4830 | 0.4834 | 0.4838 | 0.4842 | 0.4846 | 0.4850 | 0.4854 | 0.4857 |
| 2.2 | 0.4861 | 0.4864 | 0.4868 | 0.4871 | 0.4875 | 0.4878 | 0.4881 | 0.4884 | 0.4887 | 0.4890 |
| 2.3 | 0.4893 | 0.4896 | 0.4898 | 0.4901 | 0.4904 | 0.4906 | 0.4909 | 0.4911 | 0.4913 | 0.4916 |
| 2.4 | 0.4918 | 0.4920 | 0.4922 | 0.4925 | 0.4927 | 0.4929 | 0.4931 | 0.4932 | 0.4934 | 0.4936 |
| 2.5 | 0.4938 | 0.4940 | 0.4941 | 0.4943 | 0.4945 | 0.4946 | 0.4948 | 0.4949 | 0.4951 | 0.4952 |
| 2.6 | 0.4953 | 0.4955 | 0/4956 | 0.4957 | 0.4959 | 0.4960 | 0.4961 | 0.4962 | 0.4963 | 0.4964 |
| 2.7 | 0.4965 | 0.4966 | 0.4967 | 0.4968 | 0.4969 | 0.4970 | 0.4971 | 0.4972 | 0.4973 | 0.4974 |
| 2.8 | 0.4974 | 0.4975 | 0.4976 | 0.4977 | 0.4977 | 0.4978 | 0.4979 | 0.4979 | 0.4980 | 0.4981 |
| 2.9 | 0.4981 | 0.4982 | 0.4982 | 0.4983 | 0.4984 | 0.4984 | 0.4985 | 0.4985 | 0.4986 | 0.4966 |
| 3.0 | 0.4987 | 04987 | 0.4987 | 0.4988 | 0.4988 | 0.4989 | 0.4989 | 0.4989 | 0.4990 | 0.4990 |
| 3.1 | 0.4990 | 0.4991 | 0.4991 | 0.4991 | 0.4992 | 0.4992 | 0.4992 | 0.4992 | 0.4993 | 0.4993 |
| 3.2 | 0.4993 | 0.4993 | 0.4994 | 0.4994 | 0.4994 | 0.4994 | 0.4994 | 0.4995 | 0.4995 | 0.4995 |
| 3.3 | 0.4995 | 0.4995 | 0.4995 | 0.4996 | 0.4996 | 0.4996 | 0.4996 | 0.4996 | 0.4996 | 0.4997 |
| 3.4 | 0.4997 | 0.4997 | 0.4997 | 0.4997 | 0.4997 | 0.4997 | 0.4997 | 0.4997 | 0.4997 | 0.4998 |
| 3.5 | 0.4998 | 0.4998 | 0.4998 | 0.4998 | 0.4998 | 0.4998 | 0.4998 | 0.4998 | 0.4998 | 0.4998 |
| 3.6 | 0.4998 | 0.4998 | 0.4999 | 0.4999 | 0.4999 | 0.4999 | 0.4999 | 0.4999 | 0.4999 | 0.4999 |
| 3.7 | 0.4999 | 0.4999 | 0.4999 | 0.4999 | 0.4999 | 0.4999 | 0.4999 | 0.4999 | 0.4999 | 0.4999 |
| 3.8 | 0.4999 | 0.4999 | 0.4999 | 0.4999 | 0.4999 | 0.4999 | 0.4999 | 0.4999 | 0.4999 | 0.4999 |
| 3.9 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 | 0.5000 |

ketabton.com - The Digital Library

د مثال په ډول که چېرې $z = 1.56$ وي لومړی هغه سطر پیدا کړئ چې په هغه کې $z$ د 1.5 معادل دی، که چېرې ددې کرښې په اوږدوالي پرمخ لاړ شو، تر څو هغه ستون ته ورسېږي چې له پاسه 0.06 لیکل شوی دی له 0.9406 عدد سره مخامخ کېږو چې د منحني د لاندې اړوندې سطحې له $z = 0$ څخه تر $z = 1.56$ پورې دی، نو لیکلای شو چې: $P(0 \le Z \le 1.56) = 0.9406$

**لومړی مثال**: د څښلو(نوشابې) د بوتلونو د ډکولو دستګاه داسې تنظیم شوې ده، که 952 ملي‌لیټر نوشابه په بوتل کې واچوي ددې نوشابې میزان چې د نورمال توزیع اوسط یې 952 ملي‌لیټره او معیاري انحراف یې 4 ملي‌لیټره دی. ددې احتمال چې بوتل د 952 او 956 ملي‌لیټرو ترمنځ نوشابه ولري، څومره دی.

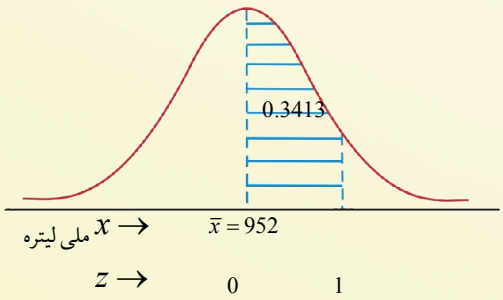
**حل**: لومړی $z$ د $x$ له جنسه پیدا کوو:

$$z_1 = \frac{x - \bar{x}}{s} = \frac{952 - 952}{4} = \frac{0}{4} = 0$$

$$z_2 = \frac{956 - 952}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

نو پر دې اساس د $x$ د تعریف ناحیه له 952 څخه تر 956 د $z$ تعریف د ناحیې له صفر څخه تر 1 بدلېږي.

د لوست د پېل له جدول(2) څخه په ګټه اخېستنې سره لرو $P(0 \le z \le 1) = 0.3413$ احتمال داسې دی چې هغه بوتل چې له 952 څخه تر 956 ملي‌لیټرو نوشابه ولري، یا په بل عبارت 34.13 فیصده ډک شوي بوتلونه له 952 څخه تر 956 ملي‌لیټره نوشابه لري؛ یعنې:




$$\begin{aligned} P(0 \le z \le 1) &= P(z_2) - P(z_1) \\ &= P(1) - P(0) \\ &= 0.3413 - 0 \\ &= 0.3413 \end{aligned}$$

**دویم مثال**: په یوه خاص مضمون کې د زده‌کوونکو د نمبرو د نورمال توزیع اوسط 70 او معیاري انحراف یې 8 دی له نورمال ستنډرډ جدول څخه په ګټه اخېستنې سره له 54 څخه تر 84 نمبرو ترمنځ فیصدي پیدا کړئ.

ketabton.com - The Digital Library

**حل**: د مسألې حل په لاندې ډول په ترسیمي بڼه ښودل شوی دی.

د $x = 54$ لپاره لرو: $z_1 = \dfrac{54 - 70}{8} = -2$

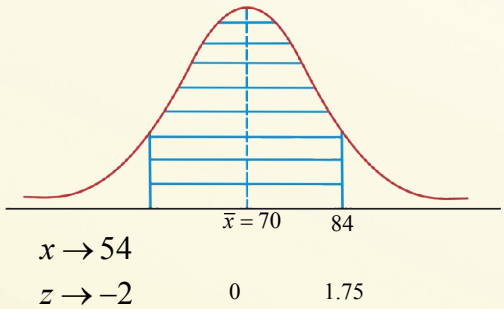
د $x = 84$ لپاره لرو: $z_2 = \dfrac{84 - 70}{8} = 1.75$

خرنګه چې د سټنډرډ نورمال منحني لاندې مساحت په یو محدود انټروال کې په پام کې نیول شوی دی، نو له نورمال سټنډرډ جدول(2) څخه لرو:

$$P(-2 \le z \le 0) = P(0 \le z \le 2) = 0.9772$$
$$P(0 \le z \le 1.75) = 0.9599$$

د ټاکل شوي مساحت د پام وړ احتمال دی.

$$P(-2 \le z \le 0) + P(0 \le z \le 1.75) = 0.4772 + 0.4599$$
$$= 0.9371$$



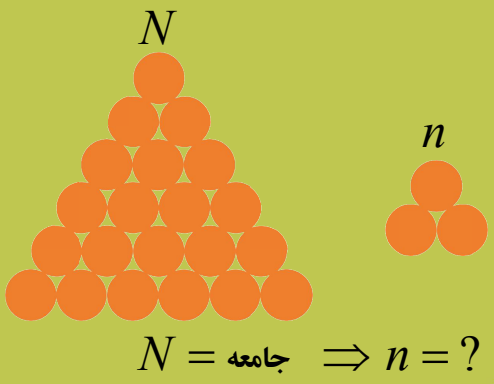

## پوښتنې

د لومړۍ مثال په پام کې نیولو سره محاسبه کړئ چې د بوتلونو څو فیصده له 948 څخه تر 956 ملي‌لیټرو پورې نوشابه لري.

ketabton.com - The Digital Library

## نمونه اخېستل

په دې متل کې((موتی د خروارو نمونه ده)) څرنګه تحلیلوئ.







- که چېرې وغواړئ چې د افغانستان د 12 ټولګي د زده‌کوونکو وزن(قد) اندازه کړئ ددې کار لپاره څه ډول لارې وړاندیز کوئ.
- نمونه په دوو ډولونو وېشل کېږي، ساده نمونه او ناڅاپه نمونه، تاسې ددې نمونو کومې یوې ته غوره‌والی ورکوي؟ ولې؟
- د نمونه ګیرۍ لپاره ښکاره خپل دلایل شته آیا کولای شئ یو یا دوه دلیلونه یې ووایئ.
- سوچ کولای شي چې د اوسط او معیاري انحراف عددي ځانګړنې چې د ټولنې د توزیع او د نمونې د توزیع لپاره ورځخه ګټه اخېستل کېږي، یو شان وي.
- آیا د نمونه‌ګیري او لیدل شویو ناڅاپه متحولینو د مقدارونو ترمنځ توپیر شته؟

له پورتني فعالیت څخه پوهېږو چې د نمونه اخېستنې بېلې بېلې لارې شته دی.

_ ناڅاپه نمونه اخېستنه: د ټولنې ټول عناصر په تاکل کېدو کې هم چانس دی.

_ سیستماټیک نمونه اخېستنه: د ټولنې عناصر په منظم ډول کود وهل شوی دی.

_ طبقه‌یي نمونه اخېستنه: ټولنه په بېلابېلو متجانسو ډلو وېشل شوی وي.

_ خوشه‌یي نمونه اخېستنه: که ټولنه ډېره لویه وي، هغه په بېلابېلو ځانګو وېشو او له هرې ځانګې څخه یوه نمونه تاکو.

_ د هرې ټولنې عددي ځانګړنې(اوسط، معیاري انحراف) ته د ټولنې پارامتر وایي.

_ د هرې ټولنې د عددي نمونه‌ګیري ځانګړنې(اوسط، معیار انحراف) ته آماره وایي.

_ د نمونې پایلې د مشاهدې د مقدارونو په عنوان د ناڅاپه متحولینو په بڼه په پام کې نیسو.

_ د $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ناڅاپه متحولونو یوه ناڅاپه نمونه د $x$ تصادفي متحول ویل کېږي.

ketabton.com - The Digital Library

که چېرې تابع يې په دې ډول تعريف شوی وي.

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_1) \cdot f(x_2) \ldots f(x_n)$$

**مثال**: فرض کوو چې په يوه قطی کې 5 سپينې او 7 تورې ګلولې وي، د قطی له منځ څخه 5 ګلولې يوه يوه ځای په ځای کول(د يوه عنصر دويم ځل ټاکل مجاز) ټاکو.

د ټاکل شوی ناڅاپه نمونې تصادفي متحولين په ژبه بيان کړئ او اړونده توزيع يې پيدا کړئ.

**حل**: د $x_1, x_2$ او $x_3$ ناڅاپه متحولونه په پام کې ونيسئ په لومړی پراو کې د $x_1$ ناڅاپه متحول لپاره د صفر عدد د تورې ګلولې لپاره او د (1) عدد د سپينې ګلولې د ټاکلو په لومړی پراو کې ځانته غوره کړئ او د $x_2$ متحول هم د صفر عدد د تورې ګلولې لپاره او د (1) عدد د سپينې ګلولې د ټاکلو لپاره په دويم پراو کې ځانته غوره کړي په همدې بڼه د $x_3$ ناڅاپه متحول په دويم پراو کې هم د صفر عدد د تورې ګلولې لپاره ټاکو چې په دې پراو کې (1) عدد سپينه ګلوله ځانته غوره کوي، په دې حالت کې د $x_1, x_2$ او $x_3$ ناڅاپي متحولونه د برنولي ناڅاپه متحولين دي. د $p = \frac{5}{12}$ له پارامتر او د $i = 1,2,3$ مقدارونو څخه لرو:

$$f(x_i) = (\frac{5}{12})^{x_i} (1 - \frac{5}{12})^{1-x_i}$$

څرنګه چې نمونه اخېستن ناڅاپه ده، نو د $x_1, x_2$ او $x_3$ ناڅاپه متحولين يو له بل څخه بېل دي، نو تابع يې عبارت دی له:

$$f(x_1, x_2, x_3) = P(x_1 = x_1 \ , \ x_2 = x_2 \ , \ x_3 = x_3)$$

په ياد ولرئ چې د عناصرو هره ناڅاپه نمونې له مجهول پارامترونو سره تړلي نه دي، هغې ته آماره وايي.

## پوښتنې

1. که $N = 25$ د يوې ټولنې حجم وي که وغواړو چې پنځه ګونه ناڅاپه نمونه يې پيدا کړو، د هغو نمونو شمېر چې په لاس راځي څومره ده؟
2. ساده او ناڅاپه نمونې سره له مثاله بيان کړئ؟
3. فرض کوو چې له يوې ټولنې څخه مو ناڅاپه نمونه رانيولې ده څه فکر کوئ چې له ددې نمونې سره به څه وکړو؟

ketabton.com - The Digital Library

## د نمونې د اوسط توزیع

دولـت غـواړي وپـوهېږي چـې د يـوه ښـار د وګـړو متوسـطه ګټه(سپما) څومره ده؟

ددې کار لپاره ناڅاپه نمونه ټاکي او د نمونې اوسط محاسبه کوي.

اوس بايد ددې محاسبه شوې مقدار څخه کوم کميت تخمين کړئ؟

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = ?$$




- د لاندې data د دريو زده‌کوونکو د ورزشي لوبو د نمبرو پايله راښيي:

| نوم | داود | سليمان | پژواک |
|---|---|---|---|
| نمبرې | 2 | 3 | 4 |

- د نمبرو د احتمال توزيع پې وليکئ.
- د زده‌کوونکو د نمبرو اوسط او معياري انحراف حساب کړئ.
- راکړل شوی نمبرې د مرتبو جوړو په مرسته(ممکنې دوه ګونې نمونې د ځای په نيولو) ارايه او د هرې نمونې اوسط د جدول په بڼه وښيئ.
- د نمونو د اوسط د احتمال توزيع جدول(د $\bar{x}$ د کثرت د تو زيع جدول) وليکئ.
- د $\bar{x}$ د کثرت توزيع جدول مستطيلي ګراف رسم کړئ.
- د اوسط د $\bar{x}$ متحول د زده‌کوونکو د نمبرو له اوسط سره پرتله کړئ.

ketabton.com - The Digital Library

له پورتني فعاليت څخه دا پايله په لاس راځي:

که $x_1, x_2, ...., x_n$ د يوې ټولنې د $f(x)$ احتمال تابع ناڅاپه نمونه وي، په دې صورت کې د ناڅاپه نمونې احتمال توزيع عبارت دی له:

| $x$ | $x_1$ | $x_2$ | ... | $x_n$ |
|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $\frac{1}{n}$ | $\frac{1}{n}$ | ... | |

د $\bar{x}_n$ متحول اوسط، $E(\bar{x}_n) = \mu$

د $\bar{x}_n$ متحول وريانس، $U(\bar{x}_n) = \frac{1}{n}\,\delta$

د نمونې وريانس $S_n^{\,2} = S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$

د نمونهيي وريانس اوسط، $E(S^2) = \delta^2$

په داسې حال کې چې $\bar{x}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ نمونـهيـي اوسـط، $\mu$ د ټولنې اوسـط $\delta^2$ د ټولنې وريـانس $S^2$ د نمونې وريانس دی.

**مثال**: د لاندې ټولنې، ټولې دوه ګونې ممکنه ناڅاپه نمونې د ځای په ځای کولو سره ټاکو:

$$f(x) = \frac{1}{3} \quad , \quad x = 1,2,3$$

**الف**: د $x$ د احتمال توزيع وليکئ.

**ب**: د ټولنې اوسط او وريانس حساب کړئ.

**ج**: د $\bar{x}$ د توزيع جدول تشکيل او مستطيلي ګراف يې رسم کړي.

**د**: $E(\bar{x})$ او $V(\bar{x})$ حساب کړئ.

**حل**:

**الف**:

| $x$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}$ |

ketabton.com - The Digital Library

**ب:**

$$\mu = E(x) = \sum_{x=1}^{3} x f(x) = \frac{1}{3}(1+2+3) = 2$$

$$E(x^2) = \sum_{x=1}^{3} x^2 f(x) = \frac{1}{3}(1^2 + 2^2 + 3^3) = \frac{14}{3}$$

$$\delta_x^2 = E(x^2) - (E(x))^2 = \frac{14}{3} - 2^2 = \frac{2}{3}$$

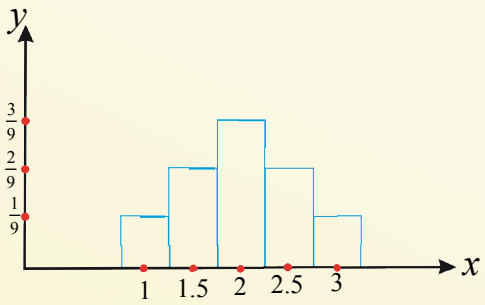
**ج:** د لاندې جدول ټولې دوه‌ګونې ممکنو نمونو د ځای نیول، د هر یوه اوسط راښیي:

| نمونه | (1,1) | (1,2) | (1,3) | (2,1) | (2,2) | (2,3) | (3,1) | (3,2) | (3,3) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\bar{x}$ | 1 | 1.5 | 2 | 1.5 | 2 | 2.5 | 2 | 2.5 | 3 |

د $\bar{x}$ د توزیع د کثرت جدول په لاندې ډول ښودل کېږي:

| $\bar{x}$ | 1 | 1.5 | 2 | 2.5 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(\bar{x})$ | $\frac{1}{9}$ | $\frac{2}{9}$ | $\frac{3}{9}$ | $\frac{2}{9}$ | $\frac{1}{9}$ |

د $\bar{x}$ مستطیلي ګراف په لاندې ډول رسمېږي:




**د:**

$$\mu_{\bar{x}} = E(\bar{x}) = \sum \bar{x} f(\bar{x}) = 1 \cdot \frac{1}{9} + 1.5 \cdot \frac{2}{9} + 2 \cdot \frac{3}{9} + 2.5 \cdot \frac{2}{9} + 3 \cdot \frac{1}{9} = \frac{18}{9} = 2$$

$$E(\bar{x}^2) = \sum \bar{x}^2 f(\bar{x}) = 1^2 \cdot \frac{1}{9} + (1.5)^2 \cdot \frac{2}{9} + 2^2 \cdot \frac{3}{9} + (2.5)^2 \cdot \frac{2}{9} + 3^2 \cdot \frac{1}{9} = \frac{13}{3}$$

$$\delta_{\bar{x}}^2 = V(\bar{x}) = E(\bar{x}^2) - (E(\bar{x}))^2 = \frac{13}{3} - 4 = \frac{1}{3}$$

$$E(x) = E(\bar{x}) = 2$$

ketabton.com - The Digital Library

نو لیدل کېږي چې:

$$V(\bar{x}) = \frac{\delta_x^{\,2}}{n} = \frac{\frac{2}{3}}{2} = \frac{1}{3}$$

## پوښتنه

1. فرض کوو چې یوه ټولنه د $6,4,2$ او $8$ څلورو عددونو څخه جوړه شوې وي، په دې صورت کې توزیع، اوسط او وریانس ددې ټولنې محاسبه او وروسته له دې ټولنې څخه دوه ګونې ناڅاپه نمونه د ځای په نیولو سره وټاکئ او د نمونې توزیع اوسط یعنې $\bar{x}$ په لاس راوړئ. دکثرت څو ضلعي ګراف یې رسم کړئ، د $\bar{x}$ اوسط او وریانس حساب کړي.

ketabton.com - The Digital Library

## د مرکزي لېمیټ قضیه

پوهېږو چې د ټولنې کمیت ته د ټولنې پارامتر او د نمونې کمیت ته نمونه یې اوسط ویل کېږي د $S_{\bar{x}}$ او $\bar{x}$ د نمونو احصائیه د کوم پارامتر په اړه اطلاعات زمونږ په اختیار کې ږدي.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}} = ?$$




- که د لوېې ټولنې حجم $\frac{S}{\sqrt{n}}$ وي، د کوچنۍ ټولنې حجم په $\frac{S}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$ کې چې $N$ د ټولنې د عناصرو شمېر، $n$ د نمونه عناصرو شمېر او $S$ معیاري انحراف دی) وښیو څه وخت کېدای شي چې د لوېې ټولنې حجم له کوچنۍ ټولنې سره برابر شي؟
- که د $x_1, x_2, \ldots, x_n$ نورمال توزیع یو له بل څخه بیل وي آیا د هغوی د جمع حاصل د نورمال توزیع لرونکی دی؟
- که $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ناڅاپه ځانګړي متحولونه په یو شان توزیع شوي وي او د $\mu$ اوسط لرونکی وي او $\varsigma^2$ وریانس وي ویلای شو چې د $S_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ د توزیع وریانس او اوسط څو دی؟

له پورتنۍ فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راځي:

که چېرې $N$ د یوې لوېې ټولنې اوسط $\mu$ متناهي اوسط او $\delta^2$ متناهي وریانس لرونکی یوه ناڅاپه $n$ ګونه نمونه وټاکو، په دې صورت کې د نمونې اوسط یعنې $\bar{x}$ د تقریبي نورمال توزیع د $\mu_{\bar{x}} = \mu$ اوسط او $\delta_{\bar{x}}^2 = \frac{\delta^2}{n}$ وریانس دی او $Z = \frac{\bar{x} - M}{\frac{\delta}{\sqrt{n}}}$ ناڅاپه متحول د نورمال سټنډرډ توزیع دی. په داسې حال کې چې $\frac{N-n}{N-1}$ ضریب د $N$ لوېو قیمتونو لپاره (1) ته نژدې کېږي. په حقیقت کې یې لېمیټ هغه وخت چې $n \to \infty$ وکړي، برابر له (1) سره دی.

ketabton.com - The Digital Library

**مثال**: له یوه لوی ټولګي څخه چې د زده‌کوونکو د ریاضي مضمون نمبرو نورماله توزیع د 71 اوسط او معیاري انحراف یې 9 دی. یوه 9 تایې نمونه ټاکو، ددې احتمال چې ددې نمونې د نمبرو اوسط له 80 څخه زیات وي حساب کړئ. همدارنګه که چېرې په تصادفي ډول یو زده‌کوونکی وټاکو، په دې صورت کې احتمال ددې چې نمبرې یې له 80 څخه زیاتې وي، محاسبه کړئ.

**حل**: څرنګه چې $\bar{x}$ د نورمال توزیع د $\mu$ په اوسط او معیاري انحراف لرونکی دی، نولرو:

$$P(z>80)=P(z=\frac{\bar{x}-\mu}{\frac{\delta}{\sqrt{n}}}>\frac{80-71}{\frac{9}{\sqrt{n}}}=P(z>3)$$
$$=1-P(z)\le 3=1-0.9987=0.0013$$

همدارنګه د $n=1$ لپاره لرو:

$$P(z>80)=P(z=\frac{\bar{x}-\mu}{\delta}>\frac{80-71}{9}=P(z>1)$$
$$=1-P(z)\le 1=1-0.8413=0.1587$$

**پاملرنه**:

د $P(z)$ قیمت له (2) جدول څخه په لاس راوړو.

ketabton.com - The Digital Library

## پوښتنه

1- د هغو جعبو وزن چې د یوه ماشین په واسطه ترل کېږي، د نورمال توزیع اوسط یې $\mu = 250gr$ او معیاري انحراف یې $\delta = 20gr$ وي مطلوب دی، د هغه احتمال محاسبه چې د ناڅاپه نمونې د اوسط وزن $n = 16$ تایي د جعبو کوچنی له $240gr$ وي.

ketabton.com - The Digital Library

## د نمونه‌يي توزيع نسبت



د $A$ په يوه ښار کې $n$ کسان غواړي د $B$ يو کس د ښاروال په صفت وټاکي، که دا کسان تر پوښتنې لاندې راشي او $x$ د موافقو کسانو شمېر وښيئ ، ددې کسانو نسبي کثرت مساوي په څه دي.




- که چېرې $x$ د دوو جملو توزيع لرونکی وي، کولای شو وليکو چې:

$$f(x)=\binom{n}{x}P^{x}(1-p)^{n-x} \qquad x=0,1,2,\ .....$$

که چېرې $\hat{P}=\frac{x}{n} \Rightarrow x=n\hat{P}$ وي د $x$ قيمت په تعويض سره په پورتنی فورمول کې $f(\hat{P})$ وليکئ.

- د $\hat{P}=\frac{x}{n}$ په فورمول کې چې د $x$ تصادفي متحول د $n$ ناڅاپه متحولينو د $x_1, x_2, ..., x_n$ له مجموع څخه تشکيل شوی وي، $\hat{P}$ د نمونې اوسط سره څه اړيکه لري؟

که چېرې $x$ ناڅاپه متحول، $n$ د برنولي د آزمايښتونو مجموعه، $P$ د هر آزمايښت بريالیتوب احتمال وي، په دې صورت کې $\hat{P}$ د نمونې د نسبت آماره اوسط $E(x)=np$ او $V(x)=npq$ د $x$ ناڅاپه متحول وريانس وي. د دوه جمله‌يي د توزيع په پاملرنې سره د $\hat{P}$ توزيع په دې فورمول سره کولای شو.

$$f(n\hat{P})=\binom{n}{n\hat{P}}p^{n\hat{p}}(1-p)^{n(1-\hat{p})} \qquad \hat{P}=0,\frac{1}{n},\frac{2}{n},.....,1$$

د $\hat{P}$ ناڅاپه متحولينو اوسط $(Expected\ Value)$ او وريانس په لاندې صورت ليکلای شو:

$$\mu_p=E(\hat{P})=P$$

$$\delta^2\hat{P}=V(\hat{P})=\frac{pq}{n}=\frac{p(1-p)}{n}$$

د نورمال ستنډرډ توزيع يې عبارت دی له:

$$z=\frac{x-np}{\sqrt{npq}}=\frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}$$

ketabton.com - The Digital Library

**مثال**: د کالیو د ښه والي احتمال $P=0.3$ دی، یوه ساده ناڅاپه نمونه $n=6$ګونه ټاکو. که چېرې $x$ د ناقصو کالیو شمېرونکی وي، د $x$ او $\hat{P}$ احتمال توزیع ولیکئ.

**حل**: د $x$ ناڅاپه متحول د دوه جملهیي توزیع د $P=0.3$ او $n=6$ پارامترونه وي.

$$f(x)=P(X=x)=B(x,6,0.3) \qquad x=0,1,...,6$$

د دوه جملهیي توزیع جدول څخه په ګټه اخېستنې سره لاندې احتمالونه محاسبه او د توزیع د جدول احتمال یې لیکو:

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 0.1176 | 0.3025 | 0.3241 | 0.1852 | 0.0595 | 0.0102 | 0.0007 |

د $\hat{P}$ ناڅاپه متحول د $0,\frac{1}{6},\frac{2}{6},\frac{3}{6},\frac{4}{6},\frac{5}{6}$ او 1 قیمتونه نیسي:

$$P(\hat{P}=0)=P(X=0)=0.1176$$

$$P(\hat{P}=\frac{1}{6})=P(X=1)=0.3025$$

او پاتې نور په مشابه ډول محاسبه کېږي، پام وکړئ چې:

$$P(\hat{P}=\frac{x}{n})=P(X=x)$$

او د $\hat{P}$ د احتمال توزیع عبارت دی:

| $\hat{P}$ | 0 | 1.6 | 2.6 | 3.6 | 5.6 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(\hat{P})$ | 0.1176 | 0.3025 | 0.3241 | 0.0595 | 0.0102 | 0.0007 |

په پورتني مثال کې: $P(\hat{P}\le 0.6)=P(x\le 3.6)=P(x\le 3)=\sum_{x=0}^{3}B(x,6,0,3)=0.9294$

اویا: $P(\hat{P}\le 0.27)=P(x\le 1.62)=P(x\le 3)=0.1176+0.3025=0.4201$

## پوښتنې

1. ددې احتمال چې د یوه تن د غوښتنلیک فرم په پوره ډول پرته له غلطی(تېروتنې) څخه ډک کړي $P=0.7$ وي، یوه نمونه د $n=200$ګونه د استخدام ډک شوي فارمونه مو ټاکلی وي.

_ ددې احتمال محاسبه کړئ چې $\hat{P}$ د $\pm 00.05$ داخلي فاصله کې د ټولنې له بنسټ څخه ولوېږي.

_ ددې احتمال محاسبه کړي چې $\hat{P}$ د 0.6 څخه زیات وي.

ketabton.com - The Digital Library

## د څپرکي مهم ټکي

- ناڅاپه متحول هغه اصطلاح ده چې د يوې تابع په عنوان په احصائيه او احتمالاتو کې ترې ګټه اخيستل کېږي.
- د يوه غير متمادی ناڅاپه متحول د احتمال تابع هغه تابع ده چې د تعريف ناحيه يې هغه عددونه دي چې ناڅاپه متحول کولای شي هغه غوره کړي او د قيمتونو له ناحيې سره د تعريف د ناحيې د عناصرو اړونده احتمالونه ګډون لري.
- د تجمعي احتمال تابع هغه تابع ده چې د تعريف ناحيه کې يې هغه عددونه ګډون ولري چې د $x$ ناڅاپه متحول يې ځانته غوره کوي او د قيمتونو ناحيه يې د $f(x)$ ټول تصويرونه موجود دي.
- د يوه متمادي متحول د احتمال تابع هغه تابع ده چې د تعريف ناحيه يې د $x$ ټول متمادي مقدارونه غوره کړي او دقيمتونو ناحيه يې $F(x)$ ټول تصويرونه وي.
- د $x$ غير متمادي ناڅاپه متحول اوسط Expected value او وريانس په وار سره عبارت دي له:

$$E(x)=\sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i)=\bar{x}$$

$$V(x)=S^2=\sum_{i=1}^{n}(x_i-E(x_i))^2 f(x_i)$$

- د برنولي توزيع، $P(X=m)=P^m(1-P)^{1-m}$
- د دوه جملهيي توزيع، $P(X=m)=\binom{n}{m}P^m\ q^{n-m}$
- د دوه جملهيي توزيع اوسط او معياري انحراف عبارت له: $S=\sqrt{n\,p\,q}$ , $\bar{x}=n\,p$
- د پواسن د احتمال توزيع يوه غيرمتمادي احتمال توزيع ده چې فورمول يې عبارت دی له:

$$P(x=m)=\frac{e^{-\lambda}\ \lambda^m}{m!}$$

- که $N$ له يوې نورمالې جامعې څخه د $n$ ځلې(تايي) ناڅاپه نمونه وټاکو د $\bar{x}$ د نمونهيي اوسط آماره د نورمال توزيع لرونکی له $\mu_{(\bar{x})}=\mu$ اوسط سره او $\delta^2_{\bar{x}}=\frac{\delta^2}{n}$ او $z=\frac{\bar{x}-\mu}{\frac{\delta}{\sqrt{n}}}$ د ستندرډ نورمال توزيع سره ده.
- نورماله توزيع: د نورمال توزيع شکل له زنګولی سره مشابه او متناظر دی، په نورمال توزيع کې مرکزي شاخصونه يو له بل سره برابر دي او د پيوسته ناڅاپه متحولونو د ناحيې تعريف محدود دی چې د احتمال توزيع يې عبارت ده له:

$$f(x)=\frac{1}{\delta\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\bar{x}}{\delta})^2}$$

ketabton.com - The Digital Library

چې $\mu$ د ټولنې اوسط او $\delta$ د ټولنې معياري انحراف دی.

- د $f(x)$ تابع د منحني لاندې مساحت د محاسبې لپاره د $a$ او $b$ په فاصلو کې کولای شو له دې انتیګرال څخه ګټه واخلو:

$$P(a \le x \le b) = \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \frac{1}{\delta\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\delta})^2}$$

- که چېرې $x$ د دوه جملهيي توزيع د $n$ شمېرد برنولي پر له پسې ازمايښتونه، $P$ د کاميابۍ احتمال او $q = 1 - p$ د هر ازمايښت د نابرياليتوب احتمال وي، په دې صورت کې د احصائيې د اوسط نمونه او د $x$ ناڅاپه متحول وريانس په ترتيب سره عبارت دی له: $\hat{P} = \frac{x}{n}$ , $E(x) = n\,p$ او $V(x) = n\,p\,q$

همدارنګه د دوه جملهيي توزيع، اوسط، وريانس او د سټنډرډ توزيع او $\hat{P}$ ناڅاپه متحول په ترتيب سره عبارت دی له:

$$E(\hat{P}) = P \quad , \quad f(\hat{P}) = \binom{n}{n\hat{P}} P^{n\hat{P}}\, q^{(1-P)}$$

$$z = \frac{\hat{P} - P}{\sqrt{\frac{p\,q}{n}}} \quad , \quad V(\hat{P}) = \frac{p\,q}{n}$$

- ددې $z = \frac{x-\mu}{\delta}$ اړيکې په واسطه کولای شو چې هره احصائيوي مجموعه د نورمال توزيع لرونکی وي هغه په سټنډرډ نورمال بدل کړو.
- نمونه په دوو برخو وېشل کېږي، ساده نمونه او ناڅاپه نمونه.
- د نمونه ګيری طريقې په عمومي ډول عبارت دي له: ناڅاپه نمونه‌ګيري، منظمه نمونه‌ګيري، ګروپي نمونه‌ګيري، خوشه‌يي نمونه ګيري.
- د $x$ نمونې ناڅاپه متحولينو اړوند تابع په دې صورت تعريفېږي.

$$f(x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_n) = f(x_1), f(x_2), \ldots\ldots, f(x_n)$$

- که چېرې $x$ د ټولنې يوه ناڅاپه نمونه د $f(x)$ د احتمال تابع په لرلو سره وي $E(\bar{x}_n) = \mu$ اوسط، $V(\bar{x}_n) = \frac{1}{n}\delta$ د اوسط وريانس، $\delta^2$ د ټولنې وريانس او $S^2$ ته د نمونو وريانس وايي.

ketabton.com - The Digital Library

## د څپرکي پوښتنې

1. دوه سکې څلور ځلې پورته واچوئ او د خط راتللو شمېر په پام کې ونیسئ:
   - ناڅاپه متحولونه د تابع په بڼه وښیئ.
   - د هر ځل د پورته اچونې احتمال نمونه‌یي فضا سره نسبت ورکړئ.
   - د تابع د تجمعي او مجزا احتمال ولیکئ.
2. که چېرې د یوې جوړې بوټونو د نقیصي احتمال $P = 0.1$ وي، د ناقصو بوټونو اوسط او معیاري انحراف په یوه نمونه کې $n = 400$ جوړو بوټونو پیدا کړئ.
3. د یوه شرکت په ګدام کې 500 پایې کمپیوټرونه شته چې د هغې له جملې څخه یې 50 پایې نقص لري، یو اخېستونکی له هغې څخه 10 پایې کمپیوټرونه اخلي، ددې احتمال څومره دی چې هغه 8 پایې جوړ اخېستی وي؟
4. لاندې اطلاعات چې اوسط او معیاري انحراف د دوو پارامترونو په اړوند دی د نورمال توزیع د رسمولو لپاره ترې ګټه واخلئ. لومړی یو افقي محور رسم کړئ او د $\bar{x}$ ، $\bar{x}+s$ ، $\bar{x}-s$ ، $\bar{x}+2s$ او $\bar{x}-2s$ ټکي پرې وټاکئ وروسته یو ټکی د $h$ اختیاري جګوالي په اندازه د $\bar{x}$ له پاسه په پام کې ونیسئ او $\bar{x}+s$ له پاسه یو ټکی د $0.6h$ په جګوالي وټاکئ، یعنې یو ټکی چې مختصات یې $(\bar{x}+s, 0.6h)$ وي، څرنګه چې د نورمال منحني متناظر دی، همدا عمل په ځانګړې توګه په $\bar{x}-s$ هم سرته ورسوئ. اوس د $\bar{x}+2s$ ، $\bar{x}-2s$ د پاسه دوه ټکي د $h$ او $0.15h$ په جګوالي په پام کې ونیسئ، پام وکړئ چې د نورمال منحني د دقیق رسمولو لپاره د $0.6067h$ او $0.1354h$ په ځای له $0.6h$ او $0.15h$ څخه ګټه واخلئ. په پایله کې دا ټکي د یوه منحني په واسطه وصل او ووایئ چې دا منحني په کومو فاصلو کې محدب او په کومو فاصلو کې مقعره ده.
5. په یوه روغتون یوه څېړنه رابنیي چې د مراجعینو شمېر د شنبې په ورځ وروسته له وخت څخه د 6 او 8 ترمنځ 25 تنه دی. فرض کړئ چې د پواسن د احتمال توزیع په دې حالت کې صدق وکړي.
   - د روغتون د مراجعینو د احتمال توزیع د دوشنبې له ورځې، وروسته له وخت څخه د 6 او 8 ساعتونو تر منځ پیدا او ګراف یې رسم کړئ؟ آیا دا توزیع خمېده ده؟
   - ددې توزیع د اوسط او معیاري انحراف مقدار په لاس راوړئ.
   - آیا دا ممکنه ده چې د دوشنبې په ورځ وروسته له وخت څخه د 6 او 8 ساعتونو ترمنځ به له 7 تنو څخه زیات روغتون ته مراجعه کړي وي؟ ولې؟
6. فرض کوو چې د یوه کتاب د یوه مخ د تېروتنو شمېر د پواسن د توزیع یا $\lambda = \frac{1}{2}$ پارامتر لرونکی دی د محاسبې احتمال یې مطلوب دی داسې چې:

ketabton.com - The Digital Library

- حد اقل یوه ټاپیي تېروتنه په هغه مخ کې وي.
- دقیقاً 5 ټاپیي تېروتنې په هغه مخ کې دي.
- د 3 او 6 ترمنځ ټاپیي تیروتنې په هغه کې وي.

7. فرض کوو چې د هغه پستون قطر چې د یوه اتوماتیکي ماشین په واسطه جوړېږي په نورمال یا اوسط ډول 25 ملي متر او معیاري انحراف یې 0.5 ملي متره توزیع شوی وي.
   - کله چې د پستون قطر د 25.2 او 25.9 ترمنځ وي احتمال یې څومره دی.
   - د پستونونو کوم نسبت د 25 ملي قطر لرونکی او له هغې څخه کم دی.
   - که چېرې 1000 پستونه جوړ شي، له هغوی څخه څو دانې ددې وړ دی چې 24.07 ملي مترو څخه کم قطر ولري.
   - د تولید شویو پستونونو څو فیصده د 24.56 ملي متره معادل قطر یا له هغه څخه زیات لري.

8. که چېرې $x_1, x_2, \ldots, x_n$ د $x$ ناڅاپه متحول یوه تصادفي نمونه وي ایا د $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$ ، $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$ ، $\frac{x_1+x_2}{x_4}$ او $x_1+3x_2-x_3$ تابع آماره دی.

9. که چېرې $x$ یو ناڅاپه متحول او د $\mu$ او $\delta^2$ پارامترونه وي آیا د $\frac{3x_1-2x_3-\delta}{8\mu+x_2}$ ، $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)$ او $x_1+x_3-\mu$ توابع $\mu$ او $\delta^2$ مجهول وي آیا پورتنیو تابعګانو ته احصائیه ویلی شو؟

10. ټولنه د برق په څلورو ډلو کې ګډون لري، کـه د عمرونـو اوږدوالـی یـې د ساعتونو پـه حـساب سـره عبـارت لـه 108 104 112 103 دي یوه ډله ناڅاپه ټاکو، فرض کوو چې د $x$ ناڅاپه متحول ټاکل شوی د ډلو د عمر اوږدوالی راوښیئ:
    - د $x$ د احتمال توزیع ولیکئ.
    - $E(x)$ او $V(x)$ محاسبه کړئ.

11. د یـوه ښـار د وګړو د ګډې انـدازه چـې د غیرنورمـال توزیـع $\mu = 90$ افغـانۍ اوسـط او د 25 افغـانۍ معیـاري انحراف سره دی که چېرې د 225 کسیز د وګړو د یوې نمونې د ګټې مجموعه له 2100 افغانیو څخـه زیاتـه وي، احتمال یې څومره دی؟

12. پوهېږو چې 56% وګړي د $A$ نوماند طرف دار دی، څومره ددې احتمال شـته چـې $n = 50$ دوه‌ګونې یـوه نمونه کې حداقل 60% وګړي د $A$ نوماند طرفدار وي.

13. پـه 12 مثـال کـې کـه چېـرې $P = 0.4$ وي، یعنـي ددې احتمـال چـې یـو وګړی د $A$ کاندیـد طرفـدار وي 0.4 دی، یوه $n = 200$ ګونه نمونه وټاکو، نو څومره ددې احتمال شته چې لااقل 100 وګړي د $A$ کاندیـد طرفدار وي.

ketabton.com - The Digital Library

# اتم څپرکی

# احتمالات



ketabton.com - The Digital Library

ketabton.com - The Digital Library

## ببلې شوې(غيرمتمادي) او نښتې(متمادي) فضاګانې

په مخامخ شکلونو کې د لومړي او دويـم نـل څخـه پـه وار سره اوبه په ځمکه تويېږي ويـلای شـئ چې لـه دې نلونـو څخه په ځمکه د اوبو د څاڅکو د تويېدو توپير په څه کې دی؟






- د يو رمل په اچولو سره ويلای شي چې د نمونه يي فضا ټولې ممکنې پايلې کومي دي؟
- آيا له ونې څخه د يوې پڅې منې د لويدلو د وخت وړاندوينه کولای شئ چې وروسته له څو ثانيو، دقيقـو او يـا ساعتونو څخه پر ځمکه ولوېږي؟
- نظر وخت ته د منې د لويدلو نمونه يې فضا وليکي.
- د رمل دانې د اچولو تجربې نمونه يې فضا د عناصرو شمېر او له ونې څخه د منې د لوېدلو وخت څنګـه پرتلـه کولای شي.

د پورتني فعاليت له سرته رسولو څخه لاندې پايله په لاس راځي:

د يوې ناڅاپه تجربې نمونه يې فـضا عبـارت لـه هغـه ټاکلي او يـا نـا ټاکلي سـټ يـا مجمـوعې څخـه ده چـې ځينـې عناصريې د شمېر وړ او ځينې يې د شمېر وړ نه وي.

هغه نمونه يې فضاګاني چې عناصر يې د شمېر(countable) او تشخيص وړ وي د غيرمتمادي نمونه يـې فـضا پـه نامه يادېږي او هغه نمونه يي فضاګانې چې عناصر يې د شمېر وړ نه وي د نښتې(متصلې) يا متمادي نمونه يې فضا په نامه يادېږي.

**لومړی مثال**: له لاندې نمونه يې فضاګانو څخه کومه يوه نښتی(متمادی) او کومه يوه غيرمتمادی ده.

**الف**: د دوو رمل دانو اچول

**ب**: د 8 او 12 ترمنځ د يوه حقيقي عدد ټاکل.

**ج**: له 30 زده کوونکو څخه د 3 تنو ټاکل

ketabton.com - The Digital Library

د: د یوې کُرې د حرارت د یوې درجې لوړېدل د 100 درجو د سانتي ګرېډ څخه تر 1000 درجو سانتي ګرېډ پورې.

**هـ**: د $30^\circ$ او $45^\circ$ زاویو ترمنځ یوه زاویه ټاکل.

**حل**: څرنګه چې (الف او ج) نمونه‌یي فضاګانې د محدودو غړو له شمېر څخه جوړې شوې، نو غیرمتمادي فضا ولې (ب، د او هـ) له نامحدود حقیقي عددونو څخه تشکیل(جوړ) چې د شمېر وړ نه دي، نو نښتی یا متمادی فضاګانې دي.

**دویم مثال**: خیبر دکور دګلانو د اوبولو لپاره یو واټرپمپ اخیستی دی.

که چېرې د واټرپمپ عمرد ساعت له مخې په پام کې ونیسو، په دې حالت کې د واټرپمپ د عمر د اوږدوالی نمونه-یي فضا چې کېدای شي هر مثبت حقیقي عدد د واټرپمپ د ورانېدو په صورت کې دکار د مودې قیمت شي، په دې ډول د داسې ناڅاپه حادثې پېښېدل هر حقیقي عددکېدای شي چې دا نمونه‌یي فضا یوه غیر متمادي، یا نښتی نمونه یي فضا د، یعنې $S = \{t \in IR : t \geq 0$ د واټرپمپ د ورانېدو وخت، t } چې په پورتنۍ نمونه یې فضا کې t د واټرپمپ د عمر اوږدوالي راښي.

**یادونه**:

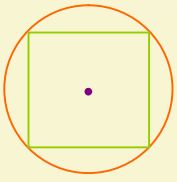
1- د لومړۍ مثال الف او ج جزونو کې محدودې نمونه‌یي فضاګانو څخه بحث شوی چې عناصر یې د شمېر وړ دي، د ب او د جزونو کې نامحدودې نمونه‌یي فضاګانې ذکر شوي چې عناصر یې د شمېر وړ نه دي، نو ځکه ټول مثبت حقیقي عددونه اخېستلای شي.

2- په دویم مثال کې نمونه‌یي فضا متصله یا غیر محدوده ده چې د حقیقي عددونو د انټروال په توګه ښودل کېږي.

## پوښتنې

1- یو غشي وېشتونکی د یوه دایروي د سک په دننه چې وړانګه یې r ده، په پام کې ونیسي. د غشي د لګېدو ځای د دایرې په دننه کې چې مرکز ته نژدې ولګېږي، د هغې نمونه یې فضا ارایه کړي. ووایاست چې دا څنګه یوه نمونه یې فضا ده.

2- په مخامخ شکل کې په ناڅاپي یا تصادفي ډول د دایرې په دننه کې یو ټکي و ټاکئ، احتمال ددې شته چې مطلوب ټکي د مربع په دننه کې وي.



3- یو طبیعي دوه رقمی عدد و ټاکئ، هغه احتمال پیدا کړئ چې عدد د 4 مضرب وي.

ketabton.com - The Digital Library

## هم چانسه پېښې

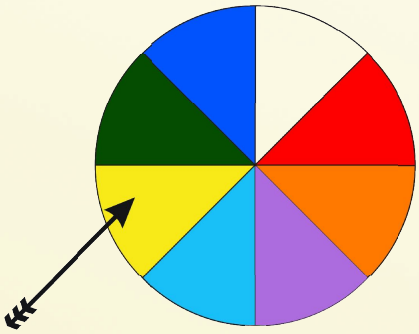


د يـوې نورمـال رمـل دانې پـه اچولـو کـې د (1) او يـا (5) شمېرې مخ ته راتللو لپاره شرط څه دی؟

د 2 او 5 شمېرې د راتللو چانس يو له بل سره څـه اړيکـه لري؟

### فعالیت

د مخامخ شکل په څېر يوه دايره په پام کې ونيسئ، که چېرې په راکړې شوې دايره کې يو ښکاري غشي وولي لاندې پوښتنو ته ځواب ورکړئ.



- په سور رنګه ناحيه او شين رنګه ناحيـه کـې د غـشې لګېدل يو له بل سره څه اړيکه لري؟
- د غشې د لګېدو چانس د کچې پـه اړه د نـارنجي او سپينو رنګونو سره په پرتله باندې څه ويلای شي؟
- په تور رنګ د غشې د لګېدو چانس څومره ده؟
- د تجربې، نمونهيې فضا وليکئ.
- لومړنې ناڅاپه پېښې لست کړي او د هر يوه احتمـال پيدا کړئ ؟
- د لومړنيو پېښو د احتمـالونو د مجموع په برخه کې څه ويلای شي؟

د پورتنۍ فعاليت له اجرا کولو څخه لاندې پايله په لاس راوړو:

هغه لومړنی ساده پېښې چې د هغوی د پېښېدلو چانس د يوې تجربې په اجرا کولو کې سره برابـر وي، د هـم چانـسه پېښو په نامه يادېږي، لکه:

که چېرې $S=\{e_1,e_2,...e_n\}$ يوه نمونه يې فضا وي، نو $\{e_i\}$ د هر $i=1,2...n$ لپاره يوه ناڅاپـه لـومړنې پېـښه ده که $0\le P(\{e_i\})\le 1$ , $i=1,2,...n$ دي.

سربېره پر دې د لومړنيو پېښو د احتمالونو مجموع مساوي له يوه سره ده.

$$P(\{e_1\})+P(\{e_2\})+...+P(\{e_n\})=\sum_{i=1}^{n}P(e_i)=1$$

ketabton.com - The Digital Library

**مثال**: خلور تنه په یوه لوبه کې ګډون کوي. تاسې د هر یوه د ګټلو احتمال پیدا کړئ په داسې حال کې چې نمونه‌یې فضا هم چانسه وي.

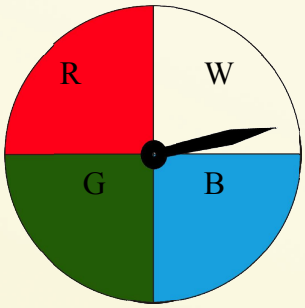
**حل**: که چېرې $S = \{a, b, c, d\}$ نمونه یې فضا وي، نو د هرې ناڅاپه لومړنۍ پېښې احتمال $\frac{1}{4}$ دي.

لرو چې: $$P(a) = P(b) = P(c) = P(d) = \frac{1}{4}$$

پاسنۍ لومړنۍ پېښې سره هم چانسه دي.

## پوښتنې

1- مخامخ شکل په پام کې ونیسي ، که چېرې د عقربې(ستنې) د درېدلو احتمال په آسماني او سپین رنګ 0.30 او د سره رنګ پرمخ 0.26 وي، د شنه رنګ پرمخ د درېدلو احتمال به څومره وي؟

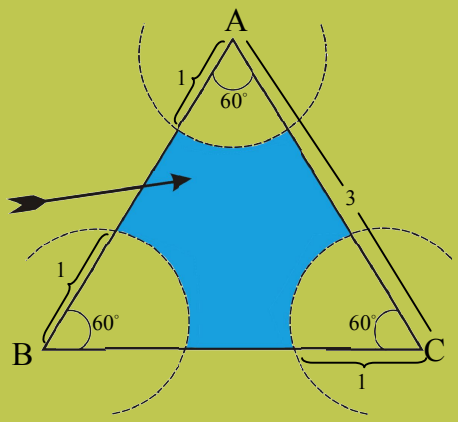



2- لاندې د کثرت جدول د رمل یوې دانې د اچولو لپاره په پام کې ونیسي. هغه احتمال پیدا کړی چې د رمل دانه (5) شمېره راشي.

| د رمل شمېره | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| کثرت | 7 | 9 | 8 | 7 | 3 | 10 |

3- د رمل یوه دانه داسې ډکه شوی چې د جفت شمېرو د راتللو احتمال د طاق شمېرو دوه برابره وي، که یو چا په شرط وهلو کې(5) شمېره ټاکلي وي، د هغې احتمال پیدا کړئ.

ketabton.com - The Digital Library

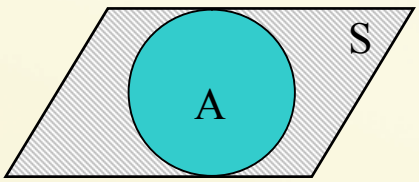



## د نښتې یا پیوسته(متمادي) فضاګانو احتمـال

د یوه متساوي الاضلاع مثلث دننه چې هره ضلعه یې 3 واحده ده، یو غشي ولو، ددې احتمـال چې د غشي د لګېدلو ټکې د مثلث د هر رأس نه د یو واحد په انـدازه لوی وي، څو دی؟




- آیا ویلای شي چې د یوې ټوټه کرښې، د یوې مستوي د یوې برخې او یا د فضا د حجـم څو ټکې یو پر بل پسې موجود دی؟
- د هغو ټکو د پېښېدلو احتمـال چې د A په برخـه کې چـې د S د لـوېې برخـې فرعـي مـساحت دی، لکـه څرنګـه چـې پـه شـکل کـې لیـدل کېږي د A او S د ساحو د مساحتونو له نسبت سره څه اړیکه لري؟




- آیا کولای شئ دا مسئله په فضاکې د یـوه جـسم حجـم د یـوې برخـې د احتمـال د محاسبې لپـاره عمومیـت ورکړئ؟

د پورتني فعالیت له سرته رسولو څخه لاندې پایله لاسته راځي.

پیوسته(متمادي) نمونهیي فضا د نامعینو ټکو مجموعه ده چې شکل یې د عددونو په محـور ، پـه مـستوي کې لکـه سطح او یا په فضاکې لکه حجمونه دی، څرنګه چې ددې ټکو ښـوونه ممکـن نـه ده، نـو د احتمـال د نـسبت پیـدا کولو لپاره د ټوټه کرښو د اوږدوالي، د اشکالو سطحو او یا د جسمونو له حجم څخه استفاده کوو.

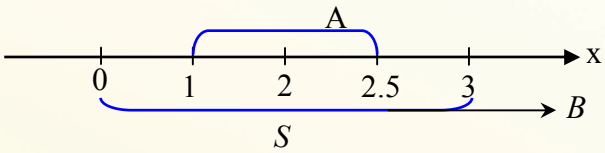
معمولاً د عددونو له محور څخه په ګټه اخیستنې سره د $x$ یو متحول، د یـوه مـساحت د یـوې برخـې لپـاره د دوو متحولینـو لکه x او y او په همدې ترتیب د حجمونو لپاره له دریو متحولونو ، لکه: $x, y$ او $z$ څخه ګټه اخلو.

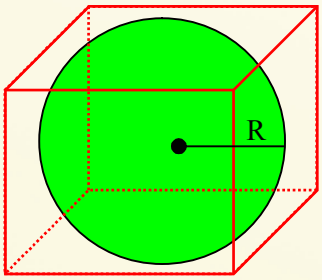
**لومړی مثال**: د عددونو په محـور د $(0,3)$ په انټـروال کې د $x$ یـو ټکـی پـه ناڅـاپي یـا اتفـاقي ډول ټاکو ددې احتمـال پیدا کړئ چې $1 < x < 2.5$ وي؟

ketabton.com - The Digital Library

**حل**: د حقیقي عددونو محور رسم کړئ د S او A فاصلې د هغه پر مخ ټاکو، د شکل په پام کې نیولو سره د A پېښې د پېښېدو احتمال څخه لرو:

$$P(A)=\frac{\text{د A ټوټه کرښې اوږدوالي}}{\text{د B ټوټه کرښې اوږدوالي}}=\frac{2.5-1}{3-0}=\frac{1.5}{3}=\frac{1}{2}$$




**دویم مثال**: په ناڅاپه ډول یو ټکی د یوه مکعب په دننه کې چې ضلعه یې 2 واحده وي ټاکو ددې احتمال پیدا کړئ چې نوموړي ټکې د مکعب د محاطي کُرې په دننه کې وي.

**حل**: که چېرې کره د هغه مکعب په دننه کې چې ضلعه یې a واحده ده، محاطه وي، نو د کرې شعاع $r=\frac{a}{2}$ کېدای شي:

A ناڅاپه پېښه د کرې د حجم او S نمونه یي فضا سره مساوي چې د مکعب حجم دی، نو لرو:

$$r=\frac{a}{2}=\frac{2}{2}=1$$

$$P(A)=\frac{\text{د کرې حجم}}{\text{د مکعب حجم}}=\frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{a^3}=\frac{\frac{4}{3}\pi(1)^3}{2^3}=\frac{\pi}{6}$$

## پوښتنې

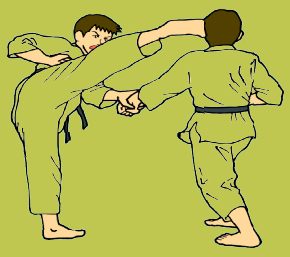
1- د حقیقي عددونو په محور د A او B دوه ټکي په ناڅاپي یا تصادفي ډول داسې ټاکو چې $-2\le B\le 0$ او $0\le A\le 3$ وي، ددې احتمال پیدا کړئ چې د d واټن د A او B ترمنځ وي او له 3 واحدو څخه لوی وي.

2- که چېرې یو ټکی په ناڅاپي یا تصادفي ډول د دایرې د سطحې پرمخ وټاکو، ددې احتمال پیدا کړي چې نوموړي ټکي نظر د دایرې محیط ته د دایرې مرکز ته نژدې وی.

ketabton.com - The Digital Library

## مشروط احتمـال





له یوه ولایت څخه (20) تنـه نارینـه او ښځینه زده کـوونکی د کانکور په آزموینـه کـې د طـب پـوهنځي تـه بریـالي شـوي دي، د هغوي له جملې څخه یې 5 تنه ښه کاراته بازان دي: که په 15 تنو بریالیو نارینه وو کې 4 تنه یې ښه کارته بـازان وي. د نومورو محصلینو له مینځ څخه پـه اتفـاقي ډول یـو تن ټاکو احتمـال د دې پیدا کړئ چې:

- ټاکل شوی محصل یوه کارټه بازه نجلی وي؟
- په پورتني سوال کې هغه نجلی په کوم شرط سره د طـب پوهنځي ته بریالی شوي ده؟




له 2500 زده‌کوونکو څخه 1600 تنه یې په مطالعه کولو عادت لري.

چې لـه 80% زده‌کوونکـو څخـه یـې 70% نارینـه زده‌کـوونکي وي او پـه مطالعـه کولـو عـادت ولـري، کـه د ټولـو زده‌کوونکو لپاره احتمـال یو شان وي، د لاندې پېښو په پام کې نیولو سره د یوه تن زده‌کـوونکی ټاکـل د ښـوونځی لـه زده‌کوونکو څخه:

R: له مطالعې سره عادت لري.

$M$ : نارینه زده‌کوونکي دی.

F: یوه ښځینه زده‌کوونکې ده.

د لاندې پوښتنو په حل فکر وکړئ:

- ددې احتمال پیدا کړئ چې د مطالعه کوونکو له منځ څخه ټاکل شوي زده‌کوونکی نارینه وي؟
- ددې احتمال پیدا کړئ چې د مطالعه کوونکو له منځ څخه ټاکل شوی تن یوه ښځینه وي؟
- ددې احتمـال پیدا کړئ چې ټاکل شوي زده‌کوونکي یو نارینه وي په دې شرط چې په مطالعه عادت وي.

د پورته فعالیت د سرته رسولو څخه لاندې پایله په لاس راوړو:

په حقیقت کې د هغه نارینه زده‌کوونکي د ټاکلو احتمـال په دې شرط چې په مطالعه عادت ولري.

ketabton.com - The Digital Library

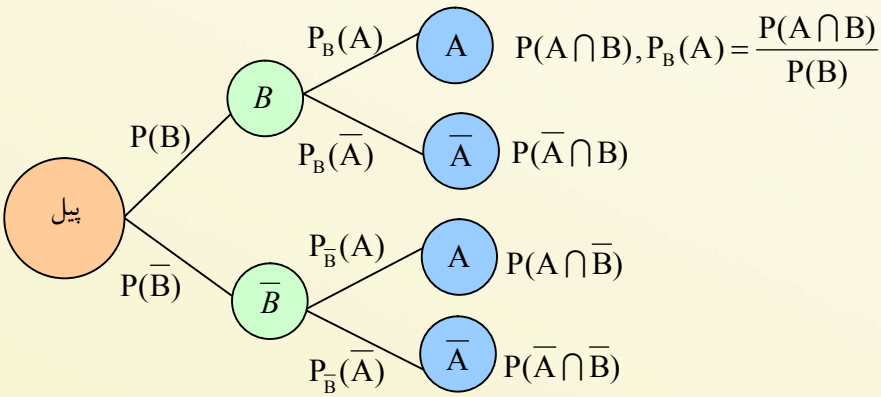
د لاندې احتمالات وښې له حاصل څخه عبارت دی که چېرې $\Omega$ ټوله نمونه‌يي فضا او $|\Omega|$ نمونه‌يي فضا د عناصرو شمير وي، نو لرو:

$$P_R(M)=\frac{P(M\cap R)}{P(R)}=\frac{\frac{|M\cap R|}{|\Omega|}}{\frac{|R|}{|\Omega|}}=\frac{|M\cap R|}{|R|}=$$ د هغه نارينه زده‌کوونکو د ټاکلو احتمال چې په مطالعه عادت وي.

$P_R(M)$ د هغې پېښې له احتمال څخه عبارت دی چې ټاکلي زده‌کوونکي نارينه وي، په دې شرط چې هغه په مطالعه عادت وي.

**تعريف**: که چېرې S نمونه‌يي فضا A او B د نمونه‌يي فضا دوې ناڅاپې پېښې وي، په داسې حال کې چې $P(B)\neq 0$ وي. په دې حالت کې نوموړی احتمال يعنې $P_B(A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$ چې د A ناڅاپې پېښې احتمال نظر د B ناڅاپې پېښې ته مشروط احتمال بلل کېږي.

د پورته تعريف په پام کې نيولو سره نظر د مسير لومړي قاعدې ته د ونه‌ييز دياګرام په مرسته هم په لاس راوړای شو.




د مشروط احتمال له فورمول څخه لاندې مهمې پايلې په لاس راځي:

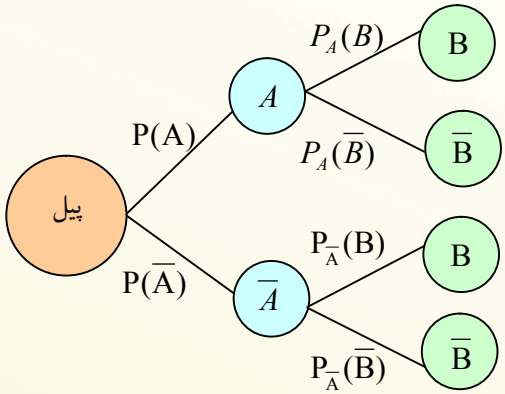
1- د مسير له لومړی قاعدې څخه لرو: $P(A\cap B)=P(B)\cdot P_B(A)$

د مسير له دويمې قاعدې څخه په ګټه اخيستنې سره لرو: $P(A\cap \overline{B})=P(\overline{B})\cdot P_{\overline{B}}(A)$

$$P(A)=P(B)\cdot P_B(A)+P(\overline{B})\cdot P_{\overline{B}}(A)$$

2- ونه‌ييزه(درختي) دياګرام له مخې $P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$

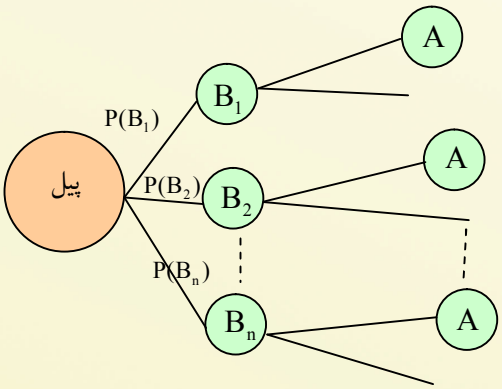
ketabton.com - The Digital Library




له لومړي پايلې څخه په لاس راځي چې: $P_A(B)=\frac{P_B(A)\cdot P(B)}{P(B)\cdot P_B(A)+P(\bar{B})\cdot P_{\bar{B}}(A)}$

3- که چېرې نمونوړی حالت د $\Omega$ نمونه يي فضا ناڅاپي پېښو د $B_1, B_2, ...., B_n$ اختياري وېش لپاره عمومیت ورکړو. د ونې په ډول د ډیاګرام په پام کې نیولو سره کولای شو، لاندې فورمول په لاس راوړو.

$$P_A(B_i)=\frac{P_{B_i}(A)\cdot P(B_i)}{P(B_1)\cdot P_{B_1}(A)+...+P(B_n)\cdot P_{B_n}(A)}=\frac{P(A\cap B_i)}{\sum_{k=1}^{n}P(B_k)\cdot P_{B_k}(A)} \qquad i=1,2,...,\ n$$




**لومړی مثال**: يو زده کوونکی ښوونځي ته د تللو لپاره 50% هره ورځ د موټر څخه ګټه اخلي چې 70% په ټاکلي وخت ښوونځي ته رسېږي. په منځني ډول نوموړي 60% په ټاکلي وخت ښوونځي ته حاضرېږي که چېرې پېښې:

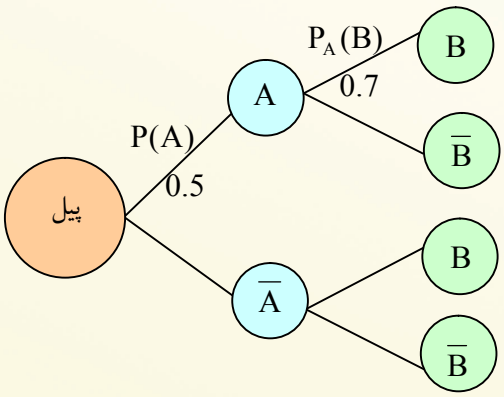
A: د موټر په واسطه راتلل B: په ټاکلي وخت رسېدل

وي په دي صورت کې د A مشروط احتمال نظر B ته يعنې $P_B(A)$ مطلوب دی؟

ketabton.com - The Digital Library

**حل**: د نوموړي احتمال د پیدا کولو لپاره د ونه‌ییز یا درختي دیاګرام په پام کې نیولو سره نظر فورمول ته په لاندې ډول په لاس راځي:

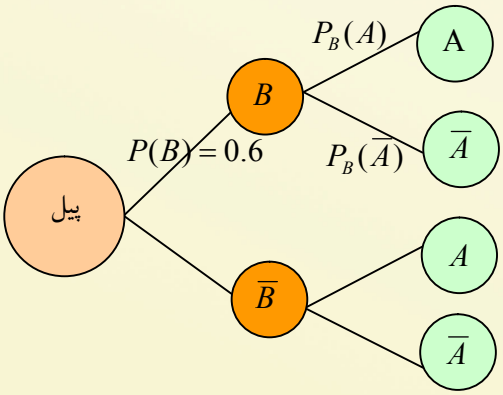
$$P_B(A)=\frac{P(A)\cdot P_A(B)}{P(B)}=\frac{0.5\cdot 0.7}{0.6}=0.5833=58.33\%$$




نو په دې اساس د موټر په واسطه د رسېدلو احتمال په دې شرط چې په ټاکلي وخت په ښوونځي کې وي 58.33% سلنې سره برابر دی.

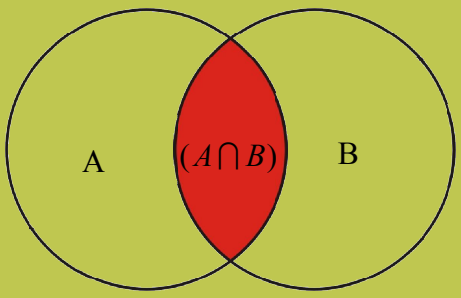
## پوښتنې

له لاندې دیاګرام څخه په ګټه اخیستنې سره د مشروط احتمال په ټاکلي وخت رسېدل ښوونځي ته په دې شرط چې د موټر په واسطه سرته رسیدلي وي، یعنې $P_A(B)$ د ناڅاپه پیښې احتمال ښوونځي ته په ټاکلي وخت رسیدل، په دې شرط چې د موټر په واسطه نه وي راغلي یعنې $P_A(B)$ مطلوب دي.



ketabton.com - The Digital Library

## د حاصل ضرب اصل




د A ناڅاپه پيښې مشروط احتمال په B ، د A او B ناڅاپه پيښې احتمال يو له بل سره څه اړيکه لري؟

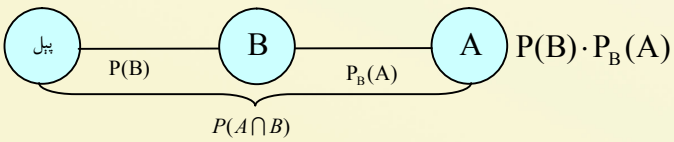



- که چېرې A او B دوې ناڅاپه پيښې د S په نمونه يي فضا کې وي.
- د A ناڅاپه پيښې مشروط احتمال B ته وليکئ.
- د ونه‌ييز دياګرام څخه په ګټه اخېستنې سره د $P(B)\cdot P_B(A)$ قيمت په لاس راوړئ.
- د $(A \cap B)$ ناڅاپه پيښو احتمال د A او B ناڅاپه پيښو څخه او يا د A مشروط له B څخه په ګټه اخيستنې سره وليکئ.
- د فعاليت د دوو پورتنيو بندونو د محاسبې پايلې يو له بل سره پرتله کړئ.
- آيا کولای شو چې موضوع د ډېرو ناڅاپه پيښو لپاره عمومیت ورکړو.

د پورتنۍ فعاليت له سرته رسولو څخه لاندې پايله په لاس راوړو.

د S په يوه نمونه يي فضا کې د A او B د دوو ناڅاپه پيښو لپاره د مشروط احتمال د تعريف په پام کې نيولو سره لرو: $P(A \cap B) = P(B)\cdot P_B(A)$

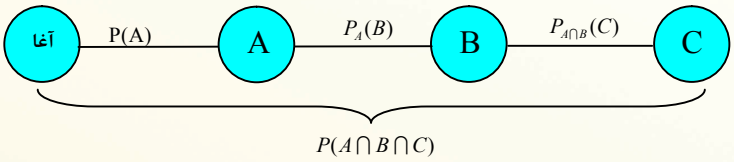
دا مسئله کولای شو چې د ونه‌ييز دياګرام په مرسته هم په لاس راوړو:




$$\Rightarrow P(A \cap B) = P(B)\cdot P_B(A)$$

ketabton.com - The Digital Library

دا مطلب د دريو A، B او C پيښو لپاره په لاندې ډول پراخوو.




$$\Rightarrow P(A\cap B\cap C)=P(A)\cdot P_A(B)\cdot P_{A\cap B}(C)$$

پورتنۍ قاعده د حاصل ضرب په نامه يادېږي او کولای شو، هغه د يو شمېر اختياري ناڅاپي پيښو لپاره هم په لاس راوړو.

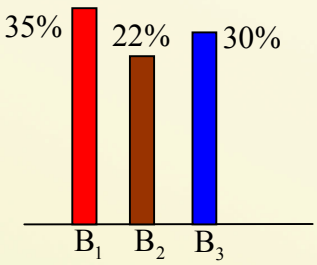
**مثال**: د $B_1, B_2$ او $B_3$ دريو ولايتونو په پارلماني ټاکنو کې چې د هر يوه لپاره د ټاکنو د ګډون کوونکو فيصدي او د جمهوري ګوند برخه فيصدي ورکړل شوې ده؟

په کوم احتمال د ټاکنو ګډون کوونکي او يا رايې اچوونکي جمهوري ګوند ټاکلي وي.

**حل**: په لاندې ډول ناڅاپي پيښې تعريف او نومووو:

V : هغه رايې ورکوونکي چې جمهوري ګوند يې ټاکلی دی.

$B_i$ : د ولايت رايې ورکوونکي $B_i$ – (i-ام) ... i=1,2,3 لاندې ارقام ورکړل شوي وي.




| ولايت | د راي ورکوونکو فيصدي | جمهوري ګوند ته رايې ورکوونکي |
|---|---|---|
| $B_1$ | 33.2% | 35 |
| $B_2$ | 46.5% | 22 |
| $B_3$ | 20.3% | 30 |

د $B_i\ (i=1,2,3)$ ناڅاپه پيښې په حقيقت کې يې د S نمونه يي فضا يو وېش جوړ کړی چې د هغوی لپاره صورت نيسي.

1- $B_i$ يو له بل سره دوه په دوه مستقل او ګډ عناصر نه لري.

2- د S نمونه يي فضا لپاره $S=B_1\cup B_2\cup B_3=\bigcup_{i=1}^{3}B_i$ دی، نو $B_i\cap V\ \ (i=1,2,3)$ پيښه يو له بل سره يو په يو مستقل د هغوی لپاره صورت نيسي. $V=\bigcup_{i=1}^{3}(B_i\cap V)$

ketabton.com - The Digital Library

له دې اړیکې څخه کولای شو، د دواړو خواوو د احتمال لپاره ولیکو:

$$P(V)=P\left(\bigcup_{i=1}^{3}(B_i\cap V)\right)=\sum_{i=1}^{3}P(B_i\cap V)=\sum_{i=1}^{3}P(B_i)\cdot P_{B_i}(V)$$
$$=P(B_1)\cdot P_{B_1}(V)+P(B_2)\cdot P_{B_2}(V)+P(B_3)\cdot P_{B_3}(V)$$
$$=0.332\cdot 0.35+0.465\cdot 0.22+0.203\cdot 0.3=0.1162+0.1023+0.0609$$
$$=0.2794=27.94\%$$

**تعریف**: که چېرې د $B_1, B_2, ....., B_n$ څرنګه چې $P(B_i)\neq 0$ وی $i=1,...n$ پیښو عمومي حالت د S په نمونه‌یي فضا کې یوه پیښه وي، نو $P(A)$ د کامل احتمال په نامه یاد او د A اختیاري ناڅاپي پیښې لپاره لرو:

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)\cdot P_{B_i}(A)$$

د مشروط احتمال د تعریف، د اصل حاصل ضرب له قضیې څخه د کامل احتمال د مسئلې په پام کې نیولو څخه لاندې فورمول چې د بائیز(Baye's) د فورمول په نامه یادېږي، په آسانۍ سره په لاس راځي، داسې چې $B_i$ چې $i=1,...n$ د S نمونه یي فضا یوی پیښې لپاره چې $P(B_i)\neq 0$ ، $i=1,...n$ د A د ناڅاپه پیښې احتمال چې $P(A)\neq 0$ سره وي، لرو:

د بائیز (Bayes)فورمول:

$$P_A(B_i)=\frac{P(A\cap B_i)}{P(A)}=\frac{P(B_i)\cdot P_{B_i}(A)}{\sum_{k=1}^{n}P(B_k)\cdot P_{B_k}(A)}$$

د بائیز فورمول ډېر استعمال لري لکه د $n=2$ لپاره $B_2=\overline{B}, B_1=\overline{B}$ په پام کې ونیسو، په حقیقت کې $B_1$ او $B_2$ د $S$ نمونه یي فضا پیښې وي لرو:

$$P_A(B)=\frac{P(B)\cdot P_B(A)}{P(B)\cdot P_B(A)+P(\overline{B})\cdot P_{\overline{B}}(A)}$$

پورتنۍ فورمول د $n=2$ د بائیز له فورمول څخه عبارت دي.

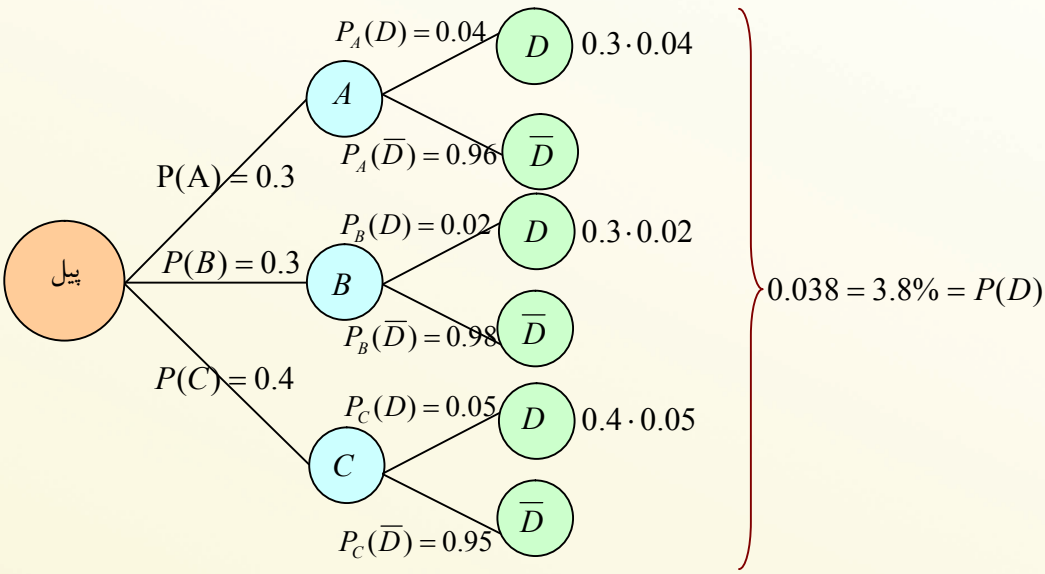
**مثال**: په یوه فابریکه کې د A، B او C درې ماشینونه په ترتیب سره 30% ، 30% او 40% برخه د برق ګروپونه تولیدوي. که چېرې په ماشینونو کې د ګروپونو د خرابېدو کچه په ترتیب سره 4%، 2% او 5% وي او نوموړې ګروپونه په ګډه سره خرڅ شي، مطلوب دي:

a) ددې احتمال چې یو اخېستل شوی ګروپ ورانه یا خراب وي.

ketabton.com - The Digital Library

b) په کوم احتمال خراب خرڅ شوی ګروپ د $C$ ماشین پورې اړه لري.

c) یو نوی تولید شوی ګروپ لرو، په کوم احتمال سره به د B په ماشین پورې مربوط وي.




**د b جز:**

$$P_D(C) = \frac{P(D \cap C)}{P(D)} = \frac{P(C) \cdot P_C(D)}{P(D)} = \frac{0.4 \cdot 0.05}{0.038} = \frac{0.02}{0.038} = 0.526 = 52.6\%$$

**د c جز:**

$$P_{\overline{D}}(B) = \frac{P(\overline{D} \cap B)}{P(\overline{D})} = \frac{P(B) \cdot P_B(\overline{D})}{P(\overline{D})} = \frac{0.3 \cdot 0.98}{0.3 \cdot 0.96 + 0.3 \cdot 0.98 + 0.4 \cdot 0.95}$$

$$= \frac{0.294}{0.288 + 0.294 + 0.38} = \frac{0.294}{0.962} = 0.3056 = 30.56\%$$

## پوښتنې

1- د 1000 دانو رملونو په منځ کې د یوې دانې په شپږ واړه مخونه یوازې د 6 شمېره وهل شوې ده. د هغوې له منځ څخه یوه ناڅاپه د رمل دانه ټاکل شوې او درې ځلې اچول شوې ده. درې ځلې 6 راغلي. پیدا کړئ، هغه احتمال چې په ټاکل شوې دانه په سم ډول شمېرې وهل شوې وي؟

ketabton.com - The Digital Library

## د ناخاپه پېښو استقلالیت

لـه مـشروط احتمـال څخـه پـوهيږو چـې د A او B دوو ناخاپو پېښو يـا حـادثو د B د پيـښې پېښدل د A پـه پېښه تـاثير اچـوي پـه دې سـبب لازمـه ده چـې د احتمـال د محاسبې په وخت کې د A او B پېښه په پام کې ونيسو.

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$$

د هغه حالت لپاره چې د A ناخاپه پېښې پېښدل پر B ناخاپه پېښې اغېزه ونه لري او بر عکس.

د A او B د ضرب د حاصل احتمـال د $A\cap B$ پېښې له احتمـال سره څه اړيکه لري.

**تعريف**: د A او B دوې ناخاپه پېښې چې يوه پر بله اغيزه لرونکي نه وي د ناخاپه مستقلو پېښو په نامه يادېږي.

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$$




- د S نمونې يې فضا او د A او B دوې يوه له بلې څخه مستقلې پېښې چې د S نمونې يې فضا کې شامل وي، په پام کې ونيسئ.
- د مشروط احتمـال فورمول څخه په هغه صورت کې چې A او B يوه له بلې څخه مستقلې دوې پېښې وي د $P_B(A)$ او $P(A)$ احتمـالونه يو له بل څخه څه توپير لري؟
- د $P(A\cap B)$ ناخاپه پېښې احتمـال له څه سره مساوي دي؟
- د $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$ د پېښو د احتمـال له فورمول څخه پـه هغـه صـورت کې چې A او B گډ ټکی ونه لري، څه پايله اخلي؟

د پورتنې فعاليت له سرته رسولو څخه لاندې پايله په لاس راځي:

1: د A او B دوې پېښې مستقلې بلل کېږي، که چېرې:

$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$ (د ضرب د حاصل اصل)

2: که چېرې A او B پېښې د گډو ټکو لرونکي نه وي، نو

$$A\cap B=\emptyset \Rightarrow P(A\cap B)=0$$
$$\Rightarrow P(A\cup B)=P(A)+P(B)$$ (د جمع د حاصل اصل)

**لومړی مثال**: که چېرې د يوه ښوونځي د زده کوونکو د سترګو رنګ او ډکاوت يـو پـر بـل پرتـه لـه اغېـزې فـرض شوي وي. د لاندې پېښو په پام کې نيولو سره په ناخاپه ډول د يوه زده کوونکي ټاکلو لپاره:

H: ټاکل شوي تن يو هوښيار ډکي زده کوونکي وي.

B: ټاکل شوي زده کوونکی تورې سترګې ولري.

هغه احتمـال پيدا کړئ چې ټاکل شوي زده کوونکی په ناخاپه توګه هوښيار ډکي او توري سترګې ولري.

**حل**: ددې لپاره چې ټاکل شوي زده کوونکی هوښيار او تورې سترګې ولري ليکلای شو:

ketabton.com - The Digital Library

څرنګه چې $P_B(H)=P(H)$ سربېره پردې $P_B(H)=\frac{P(B\cap H)}{P(B)}$ نو:

$$P(B\cap H)=P(H)\cdot P(B)$$

**عمومي حالت**: د $A_1$ , $A_2$ , ..... $A_n$ $(n\geq 2)$ ناڅاپه پېښې احتمالاً يو له بلې څخه مستقلې بلل کېږي که چېرې د هرو دوو يا څو پېښو په ترکيب کې د ضرب د حاصل قاعده صدق وکړي پرته له هغې پېښې احتمالاً يوه له بلې سره تړلي نومول کېږي.

**پايله**:

**1**: پاملرنه بايد وشي چې د ضرب د حاصل له قاعدې څخه په ګټه اخيستنې سره په لاندې متقاطع جدول کې هم کولای شو چې $A\cap B$ , $A\cap\overline{B}$ , $\overline{A}\cap B$ او $\overline{A}\cap\overline{B}$ ناڅاپه پېښو احتمالي پايلې د A اوB پېښو لپاره چې احتمالونه يې a او b وي، په آسانۍ په لاس راوړو. د A او B د مستقل والي څخه پوهېږو چې د A او $\overline{B}$ ، $\overline{A}$ اوB په پای کې $\overline{A}$ او $\overline{B}$ هم يوه له بلې څخه مستقلې دي، نو لرو:

| | $B$ | $\overline{B}$ | |
|---|---|---|---|
| $A$ | $P(A\cap B)=a\cdot b$ | $P(A\cap\overline{B})=a(1-b)$ | $a$ |
| $\overline{A}$ | $P(\overline{A}\cap B)=b(1-a)$ | $P(\overline{A}\cap\overline{B})=(1-a)(1-b)$ | $1-a$ |
| | $b$ | $1-b$ | $1$ |

**2**: د A ، B او C درې ناڅاپه پېښې چې يوه له بلې څخه مستقلې دي، لرو:

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$$
$$P(A\cap C)=P(A)\cdot P(C)$$
$$P(B\cap C)=P(B)\cdot P(C)$$
$$P(A\cap B\cap C)=P(A)\cdot P(B)\cdot P(C)$$

**دويم مثال**: په يوه کڅوړه کې دوې سپينې او دوې تورې مرۍ پرتې دي. دوې مرۍ يوه په بلې پسې له کڅوړې څخه پورته کوو، په داسې حال کې چې:

a- د لومړۍ مرۍ د پورته کولو نه وروسته هغه بېرته په کڅوړه کې ږدو.

b- پرته له دې چې مرۍ واپس کېښودل شي.

د A پېښه: په لومړۍ ځل سپينه مرۍ راووزي. B: دويم ځل مرۍ سپينه وي.

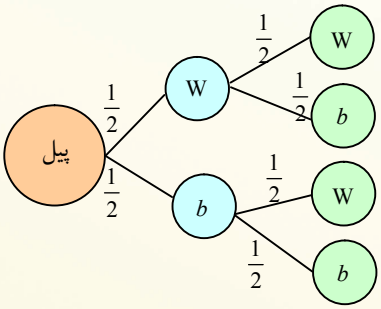
له يوې بلې څخه مستقلې يا تړلي (وابسته) دي.

**حل**:

a) څرنګه چې $P(A)=\frac{1}{2}$ او $P(B)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ وي او

$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)=\frac{1}{4}$ دي، نو A او B يوه له بلې څخه مستقلې دي.

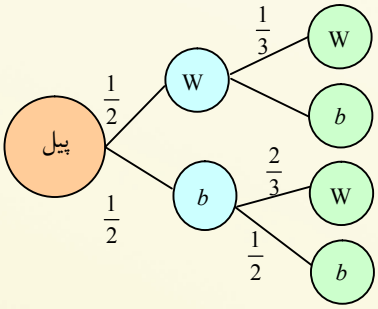
ketabton.com - The Digital Library




b) څرنګه چې:

$$P(B)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{2},\ P(A)=\frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow P(A\cap B)\neq P(A)\cdot P(B)$$

نو A او B یوه له بلې څخه تړلی یا وابسته دي.




**دریم مثال**: د لاندې متقاطع جدول خالي ځایونه چې په نښه شوي دي، ډک یې کړئ:

| | $B$ | $\overline{B}$ | |
|---|---|---|---|
| $A$ | 0.12 | $P(A\cap\overline{B})=?$ | ? |
| $\overline{A}$ | $P(\overline{A}\cap B)=?$ | $P(\overline{A}\cap\overline{B})=?$ | ? |
| | ? | 0.6 | |

**حل**: څرنګه چې $P(\overline{B})=0.6$ دي، نو لرو:

$$P(B)=1-P(\overline{B})=1-0.6=0.4$$
$$P(A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{0.12}{0.4}=0.30$$
$$\Rightarrow P(\overline{A})=1-P(A)=1-0.3=0.70$$

او د پېښو د تقاطع څخه لرو چې:

$$P(A\cap\overline{B})=P(A)\cdot P(\overline{B})=0.3\cdot 0.6=0.18$$
$$P(\overline{A}\cap B)=P(\overline{A})\cdot P(B)=0.7\cdot 0.4=0.28$$
$$P(\overline{A}\cap\overline{B})=P(\overline{A})\cdot P(\overline{B})=0.7\cdot 0.6=0.42$$

په همدې ترتیب په جدول کې د قیمتونو په وضع کولو سره مسئله تکمیلېږي.

ketabton.com - The Digital Library

## پوښتنې

یو ست چې عناصر یې 5,3,2 او 30 دی د یوه رقم د انتخاب احتمال یې 0.25 دی په ناڅاپي ډول له نومورې ست څخه یو رقم انتخابوو، که چېرې $A_k$ ناڅاپه پېښه د هغه رقم چې انتخاب شوی او د تقسیم قابلیت په $k$ ولري، آیا $A_2$ , $A_3$ او $A_5$ ناڅاپي پېښې دوه په دوه مستقل دي او که نه؟

## د څېړکي مهم ټکي

**بېلې شوې(غیرمتمادي) نمونه يي فضا:**

هغه نمونه يي فضا چې عناصر يې د شمېر او تشخیص وړ وي، د غیرمتمادی نمونهيي فضا په نامه یادېږي، لکه د رمل یا د سکې اچولو تجربي نمونهيي فضا.

**نښتي(متمادي) نمونه يي فضا:**

هغه نمونه يي فضا چې عناصر يې د شمېر وړ نه وي د پیوسته یا متمادي نمونهيې فضا په نامه یادېږي چې د حقیقي عددونو پر محور د فاصلې په بڼه او یا په فضاکې د هندسي شکلونو یا حجمونو په ډول څرګندېږي.

**هم چانس پېښې:**

د یوې نمونه يي فضا لومړني پېښې چې د هغوی پېښې د تجربې په پای کې په برابر احتمال پېښېږي، هم چانسه پېښې بلل کېږي. د هم چانس پېښو د احتمال مجموع له یوه سره مساوي ده.

**د نښتی(پیوسته) فضا احتمال:**

د ټوټه کرښو، سطحو او حجمونو مساعد حالتونه د یوې پام وړ ناڅاپي پېښې لپاره په یوه تجربي نمونهيي فضاکې شامل ټوټه کرښو، سطحو او حجمونه عبارت دي د متصلې فضا له احتمال څخه.

**مشروط احتمال:**

که چېرې A او B د S، د نمونهيي فضا دوې ناڅاپه پېښې چې $P(B) \neq 0$ وي په دي حالت کې $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ ته د A ناڅاپه پېښې د مشروط احتمال په نامه یادېږي په دي شرط چې د B پېښه له مخکې پېښه شوي وي.

**یوه له بلې څخه مستقلې پېښې:**

د A او B دوه ناڅاپه پېښې یوه له بلې څخه مستقلې بلل کېږي که چېرې:

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ (د ضرب د حاصل اصل)

ketabton.com - The Digital Library

## د څپرکي پوښتنې

1. د لاندې نمونه يي فضاګانو څخه کومه يوه سره نښتی يا پيوسته او کومه يوه غيرمتمادي ده؟

الف: د يوې رمل دانې اچولو تجربه

ب: د يوې سکې د اچولو تجربه

ج: د يو غشي لګېدل په يوه دايره

د: د يوې فلزي ميلي د اوږدوالي زياتېدلو تجربه نظر حرارت ته

2. د يو چارتراش چې اوږدوالی يې $L$ دی په ناڅاپه ډول په سور اره کوو، تر څو دوه برخې شي څومره احتمال شته چې د کين اړخ اره شوې برخه د ښي اړخ له درې برابره څخه کوچنی وي.

3. د يوه خصوصي شرکت يو کارګر هره ورځ د 8 او 8:50 ساعتونو په منځ کې کورته نژدې تم ځای کې چې د مامورينو په موټر کې کارته د تګ لپاره ګډون وکړي او په 8:15 ، 8:30 او 8:45 وختونو تم ځای ته رسېږي څومره احتمال ددې شته چې نوموړې تن له 5 دقيقو څخه لږ منتظر پاتې شي.

4. د $[0.3]$ ترلې فاصلې څخه په ناڅاپه ډول دوه عددونه ټاکو، ددې احتمال پيدا کړئ چې د عددونو مجموعه د 5 څخه کوچنی او له 2 څخه لويه وي.

5. په ناڅاپه ډول يو ټکی د مخروط دننه چې د قاعدې شعاع يې $R$ او جګوالی $R\sqrt{3}$ دی ټاکو، پيدا کړئ ددې احتمال چې ټکی د محاطي کري دننه په دي مخروط کې قرار لري.

6. د يو خودکار قلم خرابېدل دوه دليلونه لري:

1- د ميخانيکيت خرابېدل

2- د خودکار د نيچې خرابېدل

که چېرې د يو خودکار قلم د خرابېدو احتمال 0.088 او ددې احتمال چې د خرابېدو دليل (1) ، شمېره وي مساوي په 0.05 او د دويم نقص احتمال مساوي په 0.002 وي وڅېړئ: چې دوه پورتني دلايل مستقلې او يا غير مستقلې پېښې دي؟

7. خيبر غواړي هغه څلور کلي‌ګانې چې په جيب کې يې لري او سره يو شان دي د کورد دروازې قلف خلاص کړي په کوم احتمال سره وروسته د دريمې کلي له آزمويلو سره چې له جيب څخه يې را باسي د قلف اړوند کلي وي، په هغه صورت کې چې:

a) هره آزمويل شوي کلي په هغه صورت کې چې اصلي کلي نه وي دوباره په همغه جيب کې اچوي.

b) هره آزمويل شوي کلي په هغه صورت کې چې اصلي کلي نه وي په بل جيب کې اچوي.

## Thank you for reading

Find more e-books and articles on Ketabton - your multilingual digital library.

**www.ketabton.com**

*Ketabton - Pashto, Farsi, Arabic & English*